



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**Παραμετρικά και Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου  
στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασίας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

**Αγγελικής Κ. Λάππα**

A.M.:09105086

**Επιβλέπων:** Κουκουβίνος Χρήστος,  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2014





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**Παραμετρικά και Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου  
στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασίας**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

της

**Αγγελικής Κ. Λάππα**

A.M.:09105086

**Επιβλέπων:** Κουκουβίνος Χρήστος,  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....

.....

.....

Αθήνα, 2014

.....  
ΑΓΓΕΛΙΚΗ Κ. ΛΑΠΠΑ

Copyright © Αγγελική Κ. Λάππα 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, αφενός μεν για την διδασκαλία του μαθήματος και αφετέρου για την καθοδήγηση του προς την επιλογή του θέματος και τελικώς την περαίωση της εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω και στον υποψήφιο διδάκτορα Ανδρουλάκη Μάνο για τον χρόνο και την διάθεση που κατέβαλε για την επιτυχή εκπόνηση της παρούσας εργασίας.



## Περίληψη

Τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου έχουν αποδειχθεί ότι αποδίδουν ικανοποιητικά σε πολλές καταστάσεις. Ωστόσο, συχνά κατασκευάζονται βάσει της υπόθεσης της κανονικότητας της διεργασίας. Η απόδοση των παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου επηρεάζεται σημαντικά, αν παραβιάζεται η υπόθεση της κανονικότητας, παρά την επίδραση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, δεν εξαρτώνται από την κανονική υπόθεση, και μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν η κατανομή δεν είναι γνωστή.

Ο κύριος σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση των σημαντικότερων μονομεταβλητών μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, που έχουν προταθεί στην πρόσφατη διεθνή βιβλιογραφία, και των ιδιοτήτων τους διεξοδικά και με σαφήνεια προς τους αναγνώστες της. Επειδή η πλειοψηφία των μη παραμετρικών διαδικασιών, απαιτούν ένα συνεχές πληθυσμό, μελετώνται μόνο τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών. Επίσης εξετάζονται μόνο τα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας, δεδομένου ότι πολύ λίγα μη παραμετρικά διαγράμματα είναι διαθέσιμα για την παρακολούθηση της διασποράς.

Στη παρούσα εργασία περιλαμβάνονται τα ακόλουθα κεφάλαια: στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, στο Κεφάλαιο 2 δίνεται η έννοια των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* και στο Κεφάλαιο 6 δίνονται κάποιες συμπερασματικές παρατηρήσεις μαζί με κάποιες ιδέες για μελλοντική έρευνα.

Λέξεις – κλειδιά: ARL, Shewhart, CUSUM, EWMA, ΣΕΔ, παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου, μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου, FAR, FAP





## **Abstract**

The parametric control charts have been proven to perform satisfactory in many situations. However, they are often constructed based on the normality assumption of the process. The performance of parametric control charts is seriously affected if the normality assumption is violated, despite the effect of central limit theorem. The nonparametric control charts do not rely on normal assumption, and they can be used when the underlying process distribution is not known.

The main purpose of this thesis is the presentation of the main univariate control charts, that have been proposed in the recent international literature, and their properties in depth with clarity to readers. Since the majority of non-parametric procedures require a continuous population only variable control charts are considered. Furthermore, only control charts for monitoring the location of the process are considered, since very few nonparametric charts are available for monitoring the variability of the process.

In this paper includes the following chapters: in Chapter 1 parametric control charts are presented, in Chapter 2 an introduction to nonparametric control charts is given, in Chapter 3 Shewhart type control charts are presented, in Chapter 4 CUSUM type control charts are presented, in Chapter 3 EWMA type control charts are presented and in Chapter 6 we have some concluding remarks along with some ideas for future research.

Key-words: ARL, Shewhart, CUSUM, EWMA, SPC, parametric control chart, nonparametric control chart, FAR, FAP



# Περιεχόμενα

Ευχαριστίες .....	v
Περίληψη .....	vii
Abstract .....	ix
Περιεχόμενα .....	xi
Κατάλογος Συνοτομογραφιών .....	xv
Λίστα Πινάκων .....	xvii
Λίστα Σχημάτων .....	xix
1 Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου .....	21
1.1 Εισαγωγή .....	21
1.1.1 Η ποιότητα και οι διαστάσεις της .....	21
1.1.2 Συνιστώσες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας .....	22
1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας (ΣΕΔ) .....	22
1.3 Διάγραμμα ελέγχου .....	24
1.3.1 Εισαγωγή .....	24
1.3.2 Βασικές αρχές των Διαγραμμάτων Ελέγχου .....	25
1.3.3 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου .....	26
1.3.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου .....	27
1.3.5 Αναγνώριση μοτίβων .....	28
1.3.6 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου .....	29
1.3.7 Φάσεις I και II .....	30
1.4 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών .....	31
1.4.1 Εισαγωγή .....	31
1.4.2 $\bar{X}$ και $R$ Διαγράμματα Ελέγχου .....	31
1.4.3 Τα $\bar{X}$ και $S$ Διαγράμματα Ελέγχου .....	33
1.4.4 Το $S^2$ Διάγραμμα Ελέγχου .....	34
1.4.5 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις .....	34
1.5 Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων .....	36
1.5.1 Εισαγωγή .....	36
1.5.2 Διαγράμματα Ελέγχου για το Ποσοστό και τον Αριθμό των Ελαττωματικών προϊόντων .....	36
1.5.3 Διαγράμματα Ελέγχου για τον Αριθμό των ελαττωμάτων .....	38
1.5.4 Διαγράμματα Έλεγχου για το Μέσο Αριθμό των Ελαττωμάτων .....	39

1.6	Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου ( <i>cumulative sum control charts</i> ή <i>CUSUM</i> ).....	41
1.6.1	Εισαγωγή.....	41
1.6.2	Διάγραμμα <i>Tabular CUSUM</i> .....	41
1.6.3	Τυποποιημένο διάγραμμα <i>CUSUM</i> ( <i>Standardized Cusum chart</i> ).....	42
1.6.4	Διαγράμματα <i>Scale CUSUM</i> .....	43
1.7	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη ( <i>Exponentially Weighted Moving Average Control charts, EWMA</i> ).....	43
1.8	Συνδυασμένο <i>Shewhart – EWMA</i> διάγραμμα ελέγχου ( <i>Combined Shewhart – EWMA control chart, CSEWMA</i> ).....	45
1.8.1	Εισαγωγή.....	45
1.8.2	Το <i>CSEWMA</i> διάγραμμα ελέγχου.....	45
1.8.3	Μέτρηση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου.....	48
1.8.4	Συγκρίσεις απόδοσης.....	48
2	Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου.....	51
2.1	Μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομής.....	51
2.2	Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου.....	52
2.3	Ορολογία και Προβλήματα.....	53
2.4	Κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου.....	55
2.4.1	Διαγράμματα τύπου <i>Shewhart</i> ( <i>Shewhart-type charts</i> ).....	55
2.4.2	Διαγράμματα τύπου <i>CUSUM</i> ( <i>CUSUM-type charts</i> ).....	56
2.4.3	Διαγράμματα τύπου <i>EWMA</i> ( <i>EWMA-type charts</i> ).....	56
3	Μη παραμετρικά Διαγράμματα τύπου <i>Shewhart</i> .....	57
3.1	Διάγραμμα ελέγχου βάσει του <i>Hodges-Lehmann</i> εκτιμητή.....	57
3.2	Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στην προσημική στατιστική συνάρτηση.....	60
3.3	Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη <i>Mann - Whitney</i> στατιστική συνάρτηση.....	64
3.3.1	Το <i>MW</i> διάγραμμα ελέγχου.....	65
3.3.2	Υπολογισμός του <i>ARL</i> .....	66
3.3.3	Γρήγορος υπολογισμός της πιθανότητας σήματος.....	68
3.4	Συγκρίσεις απόδοσης των <i>HL, sign</i> και <i>MW</i> διαγραμμάτων.....	70
3.5	Διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιώντας την εμπειρική κατανομή αναφοράς.....	74
3.6	Διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο της διαμέσου.....	75

3.7	Διαγράμματα προτεραιότητας .....	77
3.7.1	Βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας.....	77
3.7.2	Διαγράμματα προτεραιότητας με κανόνες σηματοδότησης .....	79
3.7.3	Συγκρίσεις απόδοσης των 1-of-1, 2-of-2 DR και 2-of-2 KL διαγραμμάτων.....	88
3.8	Διαγράμματα ελέγχου χρήσει συναρτήσεων ροών και αθροιστικών βαθμολογικών συναρτήσεων .....	92
3.8.1	Βασικές Αρχές .....	92
3.8.2	Αριθμητικά αποτελέσματα.....	98
3.9	Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>Shewhart</i> .....	104
4	Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>CUSUM</i> .....	107
4.1	Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις.....	107
4.2	Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν διαδοχικούς βαθμούς.....	110
4.3	Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές στατιστικές συναρτήσεις.....	111
4.4	Διάγραμμα ελέγχου για την προκαταρκτική ανάλυση μεμονωμένων παρατηρήσεων .....	114
4.4.1	Σύγκριση απόδοσης .....	117
4.5	Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>CUSUM</i> .....	121
5	Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>EWMA</i> .....	123
5.1	Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν τους τυποποιημένους βαθμούς μεμονωμένων παρατηρήσεων .....	123
5.1.1	Μελέτη προσομοίωσης και αποτελέσματα.....	125
5.2	Διαγράμματα έλεγχου που χρησιμοποιούν προσημικές–βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις.....	128
5.3	Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στο μοντέλο σημείου αλλαγής.....	130
5.3.1	Το μοντέλο σημείου αλλαγής για ένα καθορισμένο δείγμα .....	130
5.3.2	Το <i>EWMA-MW</i> και ο σχεδιασμός του .....	131
5.3.3	Διαγνωστικοί έλεγχοι.....	136
5.3.4	Συγκρίσεις απόδοσης .....	137

5.4	Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου <i>EWMA</i> .....	141
6	Σύνοψη .....	143
	Παραρτήματα .....	147
	Βιβλιογραφία .....	157

## Κατάλογος Συντομογραφιών

π.χ.	Παραδείγματος χάριν
κ.ο.κ.	Και ούτω καθεξής
$\sigma$	Σίγμα
ΣΕΔ (SPC)	Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών Statistical Process Control
ΜΣΕΔ(NSPC)	Μη Παραμετρικός Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών Nonparametric Statistical Process Control
τ.μ.	Τυχαία μεταβλητή ή τυχαίες μεταβλητές
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
α.σ.κ.	Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
π.σ.	Πιθανογεννήτρια συνάρτηση
AR	Ποσοστό συναγερμού Alarm Rate
ARL	Μέσο Μήκος Ροής Average Run Length
$ARL_0$	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής In - control average run length
$ARL_1$	Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής Out-of-control average run length
SDRL	Τυπική απόκλιση του μήκους ροής Standard deviation of the run length
MRL	Διάμεσο μήκος ροής Median run length
UCL	Άνω όριο ελέγχου στο διάγραμμα ελέγχου Upper control limit
CL	Κεντρική γραμμή στο διάγραμμα ελέγχου Center line
LCL	Κάτω όριο ελέγχου στο διάγραμμα ελέγχου Lower control limit
LSL	Κάτω όριο προδιαγραφών στο διάγραμμα ελέγχου Upper specification limit
USL	Άνω όριο προδιαγραφών στο διάγραμμα ελέγχου Lower specification limit
CUSUM	Σωρευτικό άθροισμα Cumulative sum
EWMA	Εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος Exponentially weighted moving average
CSEWMA	Συνδυασμένο Shewhart – EWMA Combined Shewhart-EWMA
FAR	Ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού

	False alarm rate
<i>FAP</i>	Πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού
	False alarm probability
<i>ATS</i>	Μέσος χρόνος σήματος
	Average time to signal
<i>TSP</i>	Πραγματική Πιθανότητα Σήματος
	True signal probability
<i>HL</i>	Hodges-Lehmann
<i>NA</i>	Μη Διαθέσιμο
	Not Applicable
<i>MW</i>	Mann-Whitney
<i>WSR statistic</i>	προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του Wilcoxon Wilcoxon signed – rank statistic
<i>GSR statistic</i>	Ομαδοποιημένη προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση
	Grouped signed- rank statistic
<i>FIR</i>	Γρήγορη Αρχική Απόκριση
	Fast Initial Response
<i>GSR-CUSUM</i>	GSR-CUSUM διάγραμμα βασισμένο στην ομαδοποιημένη Προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση
	GSR-CUSUM chart based on grouped signed- rank statistic
<i>GSR-EWMA</i>	GSR-EWMA διάγραμμα βασισμένο στην ομαδοποιημένη προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση
	GSR-EWMA chart based on grouped signed- rank statistic
<i>MR</i>	Κινούμενο εύρος
	Moving Range



## Λίστα Πινάκων

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 Οι Διαστάσεις της ποιότητας.....	22
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2 $ARL$ των <i>Shewhart</i> , <i>EWMA</i> και <i>CSEWMA</i> διαγραμμάτων ελέγχου με γνωστές παραμέτρους.....	46
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Τιμές του $L^+(\mu_0)$ για <i>Shewhart</i> διαγράμματα χρησιμοποιώντας.....	62
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 Τιμές του $L^+(\mu_0)$ σαν συνάρτηση του $p$ για <i>Shewhart</i> διαγράμματα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν $n=10$ .....	63
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 Ποσοστό σωστής ταξινόμησης για την ανίχνευση $a+ve$ μετατόπισης στη θέση για διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου για διαφορετικά μεγέθη δείγματος και συμμετρικές κατανομές.....	71
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4 Ποσοστό σωστής ταξινόμησης στην ανίχνευση $a+ve$ μετατόπιση στη θέση για διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου για διάφορα μεγέθη δείγματος και ασύμμετρες κατανομές.....	72
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5 Ποσοστό σωστής ταξινόμησης στην ανίχνευση $a-ve$ μετατόπισης στη θέση για διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου για διάφορα μεγέθη δείγματος και ασύμμετρες κατανομές.....	73
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6 $ARL_0$ , $FAR$ και σταθερές $(a,b)$ για το 2-of-2 <i>DR</i> διάγραμμα.....	87
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7 $ARL_0$ , $FAR$ και σταθερές $(a,b)$ για το 2-of-2 <i>KL</i> διάγραμμα.....	87
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.8 $ARL$ και $SDRL$ για τα 2-of-2 <i>DR</i> , 2-of-2 <i>KL</i> , και το βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας και το <i>Shewhart</i> διάγραμμα για την κανονική κατανομή όταν $m=500$ , $j=3$ , $n=5$ .....	89
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.9 $ARL$ και $SDRL$ για το 2-of-2 <i>DR</i> , 2-of-2 <i>KL</i> , και το βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας για την $t(4)$ κατανομή όταν $m=500$ , $j=3$ , $n=5$ .....	89
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.10 $ARL$ και $SDRL$ για το 2-of-2 <i>DR</i> , 2-of-2 <i>KL</i> , και το βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας για την $Gamma(1,1)$ κατανομή όταν $m=500$ , $j=3$ , $n=5$ .....	89
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.11 Σύγκριση των $AR$ των τριών διαγραμμάτων ελέγχου με $FAR=0.05$ και $\gamma=1/2,1/4,1/8$ .....	99
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.12 $FAR$ για ένα δοθέντα σχεδιασμό.....	100
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.13 $AR$ για ένα δοθέν σχεδιασμό.....	102
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.14 Σύγκριση των $AR$ των διαγραμμάτων ελέγχου με το ίδιο $FAR$ ( $\gamma=0.4$ και $\gamma=0.2$ ).....	103
ΠΙΝΑΚΑΣ 3.15 Σύγκριση των $ARL_1$ των διαγραμμάτων ελέγχου με κοινό $ARL_0$	104

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1 Κατά προσέγγιση βέλτιστες τιμές της $k$ για το <i>CUSUM</i> διάγραμμα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν $n=10$ και $\sigma=1$ ....	113
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2 Τιμές της $L^+(\mu_0)$ για το <i>CUSUM</i> διάγραμμα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν $n=10$ .....	113
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3 Προσομοιωμένα $h_{\alpha,n}$ του <i>CUSUM</i> – <i>MW</i> .....	116
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 Τα <i>ARL</i> του <i>EWMA</i> διαγράμματος βασισμένο στους βαθμούς $m$ με και χωρίς <i>headstarts</i> . .....	126
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2 Ποσοστά μείωσης στα εκτός ελέγχου ( $\delta > 0$ ) και τα εντός ελέγχου ( $\delta = 0$ ) <i>ARL</i> του ΠΙΝΑΚΑ 5.1.....	127
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3 Τα $h_{m,n}(\alpha)$ για το <i>EWMA-MW</i> διάγραμμα για $m = 10$ και $50$ και $\alpha = 0.01, 0.005, 0.0027$ και $0.002$ .....	135
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.4 Οι συγκρίσεις του <i>ARL</i> μεταξύ των <i>EWMA-MW</i> και <i>HQK</i> διαγραμμάτων για δεδομένα της $N(0, 1)$ και $m = 10, \alpha = 0.05$ .....	138
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.5 Οι συγκρίσεις του <i>ARL</i> μεταξύ των <i>EWMA-MW</i> και <i>HQK</i> διαγραμμάτων για δεδομένα της $\chi^2(4)$ και $m=10, \alpha = 0.005$ .....	139
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.6 Οι συγκρίσεις του <i>ARL</i> μεταξύ των <i>EWMA-MW</i> και <i>HQK</i> διαγραμμάτων για δεδομένα της $t(4)$ και $m=10, \alpha = 0.005$ .....	139
ΠΙΝΑΚΑΣ 5.7 Οι συγκρίσεις του <i>ARL</i> μεταξύ των <i>EWMA-MW</i> και <i>HQK</i> διαγραμμάτων για δεδομένα της $lognormal(0,1)$ και $m = 10, \alpha = 0.005$ . .....	139

## Λίστα Σχημάτων

ΣΧΗΜΑ 1.1	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου <i>Shewhart</i> .....	25
ΣΧΗΜΑ 1.2	Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου.....	27
ΣΧΗΜΑ 1.3	Παραδείγματα διάφορων τύπων αφύσικων μοτίβων και το φυσικό μοτίβο.....	29
ΣΧΗΜΑ 4.1	Οι <i>ATSP</i> για ένα μοναδικό βήμα μετατόπιση όταν τα δεδομένα προέρχονται από την $N(0,1)$ .....	118
ΣΧΗΜΑ 4.2	Οι <i>ATSP</i> για μοναδικό βήμα μετατόπισης όταν τα δεδομένα προέρχονται από την $\chi^2(2)$ , $t(2)$ , <i>weibull</i> (1,1) και <i>lognormal</i> (0,1) .....	119



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

### 1.1 Εισαγωγή

Καθημερινά ο καταναλωτής επιλέγει να αγοράσει ένα προϊόν (ή υπηρεσία) ανάμεσα σε ομοειδή προϊόντα (ή υπηρεσίες) που ικανοποιούν την ίδια ανάγκη. Η επιλογή του προϊόντος καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες, την ποιότητά του και την τιμή του. Οι παραπάνω παράγοντες οδήγησαν στην αναζήτηση επιχειρησιακών τακτικών για την επίτευξη της βέλτιστης δυνατής ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η στρατηγική / φιλοσοφία που επιζητεί τη συνεχή βελτίωση στην ποιότητα εκτέλεσης όλων των διεργασιών, προϊόντων και υπηρεσιών, σε μια επιχείρηση ονομάζεται Διοίκηση Ολικής Ποιότητας (*Total Quality Management*).

Σημαντικό ρόλο κατέχει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*) [46], ο οποίος αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Οι κύριοι στόχοι του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων, η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων.

#### 1.1.1 Η ποιότητα και οι διαστάσεις της

Οι διαστάσεις της ποιότητας, βάσει των οποίων ο καταναλωτής αξιολογεί τα προϊόντα, καθορίζουν την τελική ποιότητα ενός προϊόντος και σχετίζονται με την ποιότητα του σχεδιασμού και τη διαδικασία παραγωγής του προϊόντος. Οι διαστάσεις της ποιότητας παρατίθενται στον ΠΙΝΑΚΑ 1.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 Οι Διαστάσεις της ποιότητας<sup>1</sup>.

Απόδοση	Το προϊόν κάνει την δουλειά για την οποία προορίζεται; Κάνει τη δουλειά καλύτερα από άλλα ομοειδή προϊόντα;
Αξιοπιστία	Το προϊόν χρειάζεται συχνή επισκευή;
Διάρκεια	Η διάρκεια ζωής του προϊόντος είναι μεγάλη;
Επισκευή	Πόσο γρήγορη και οικονομική είναι η επισκευή του προϊόντος στην περίπτωση που εμφανιστεί βλάβη;
Αισθητική	Πόσο ικανοποιητικό είναι από άποψη εμφάνισης (χρώμα, σχήμα, περιτύλιγμα, κτλ.) το προϊόν;
Δυνατότητες	Ποιες είναι οι επιπρόσθετες δυνατότητες του προϊόντος;
Φήμη Επιχείρησης	Ποια είναι η φήμη της εταιρείας, καλή ή κακή;
Συμμόρφωση με τις Προδιαγραφές	Το προϊόν κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έθεσε ο σχεδιαστής του;

Έτσι, η ποιότητα είναι η προσαρμογή των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος (ή υπηρεσίας) στις απαιτήσεις του καταναλωτή. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ποιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών της παραγωγικής διαδικασίας που προσδιορίζουν την ποιότητα του προϊόντος [1].

### 1.1.2 Συνιστώσες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων, το οποίο χωρίζεται σε τρία βασικά υποσύνολα, τα οποία είναι:

- Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (*Design of Experiments*).
- Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*).
- Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (*Statistical Process Control*) [46].

## 1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας (ΣΕΔ)

Ο ΣΕΔ είναι μια συλλογή από εργαλεία επίλυσης προβλημάτων χρήσιμα για την επίτευξη της σταθερότητας της διεργασίας και βελτίωσης της ικανότητας (*capability*) μέσω της μείωσης της μεταβλητότητας [2]. Ο ΣΕΔ μπορεί να

<sup>1</sup> Ατζουλάκος (2008)

εφαρμοστεί σε κάθε διεργασία. Τα επτά κυριότερα εργαλεία που χρησιμοποιεί είναι τα ακόλουθα:

- Το Ιστόγραμμα ή το Διάγραμμα Μίσχου - Φύλλων (*Histogram or Stem-and-Leaf Plot*).
- Το Φύλλο Ελέγχου (*Check Sheet*).
- Το Διάγραμμα Pareto (*Pareto Chart*).
- Το Διάγραμμα Αιτίας - Αποτελέσματος (*Cause-and-Effect Diagram*).
- Το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect Concentration Diagram*).
- Το Διάγραμμα Διασποράς ή Διασκόρπισης (*Scatter Plot*).
- Το Διάγραμμα Ελέγχου (*Control Chart*).

Τα παραπάνω στατιστικά εργαλεία αναφέρονται και ως “*the magnificent seven*”. Από τα παραπάνω εργαλεία, το διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ίσως το βασικότερο εργαλείο στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διεργασίας [46].

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά είναι σχεδιασμένη και το πόσο καλά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών (δεν μπορούν να αποδοθούν σε ελέγξιμους παράγοντες), που καλούνται συνήθεις ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (*common or chance causes of variation*). Μια διεργασία, η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέγεται εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία (*in (statistical) process control*), ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (*stable state*) [46].

Εντούτοις, σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας. Αυτές οφείλονται στη συστηματική αλλαγή του επιπέδου κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Η μεταβλητότητα αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη (σε μέγεθος) από τη φυσική μεταβλητότητα και η παρουσία της οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Η προαναφερθείσα μεταβλητότητα καλείται ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή ονομάζονται ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας (*special or assignable causes of*

*variation*). Μια διεργασία η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέγεται εκτός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία (*out of (statistical) control process*) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (*unstable state*) [46].

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών (*specification limits*) του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού. Αυτά είναι τα άνω και κάτω όρια προδιαγραφών (*upper and lower specification limits, USL και LSL*) και εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού (*quality characteristic*) για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτό. Επίσης, στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζεται μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που ονομάζεται τιμή στόχος (*target value*) που είναι συνήθως το μέσο του διαστήματος [*LSL, USL*]. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών, ενώ υπό συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο [2].

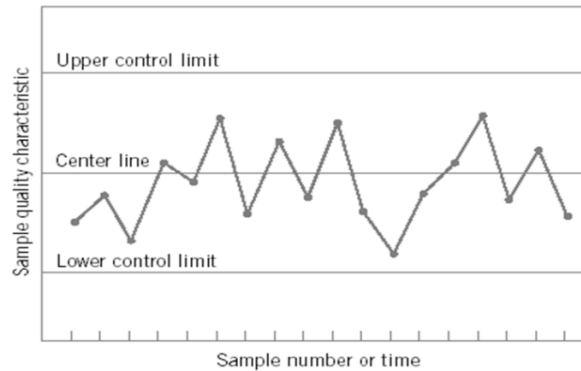
## 1.3 Διάγραμμα ελέγχου

### 1.3.1 Εισαγωγή

Το διάγραμμα ελέγχου είναι μια τεχνική του ΣΕΔ που χρησιμοποιείται ευρέως για την ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία (*on-line monitoring*) [1], [2]. Εφευρέθηκε από τον *Walter A. Shewhart* ενώ εργαζόταν στα *Bell Labs* τη δεκαετία του 1920. Οι μηχανικοί της εταιρείας είχαν στόχο τη βελτίωση της αξιοπιστίας των συστημάτων μετάδοσης της τηλεφωνίας. Το διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζει μια γραφική παράσταση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στη σταθερότητα ή την αστάθεια της διεργασίας σε συνάρτηση με το χρόνο [46]. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι δημοφιλή κυρίως διότι: είναι μια αποδεδειγμένη τεχνική για την βελτίωση της παραγωγικότητας, είναι αποτελεσματικά στην πρόβλεψη ελαττωμάτων, αποτρέπουν άσκοπη διαδικασία προσαρμογής, παρέχουν διαγνωστικές πληροφορίες και πληροφορίες σχετικά με την ικανότητα της διεργασίας [46].



### 1.3.2 Βασικές αρχές των Διαγραμμάτων Ελέγχου



ΣΧΗΜΑ 1.1 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*<sup>2</sup>.

Το διάγραμμα ελέγχου περιέχει μια κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας που παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*average value*) του ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου κατάσταση. Επίσης διακρίνονται δύο άλλες οριζόντιες γραμμές, τα άνω και κάτω όρια ελέγχου (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Τα όρια ελέγχου επιλέγονται έτσι ώστε αν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, τότε σχεδόν όλα τα σημεία του δείγματος να βρίσκονται μεταξύ αυτών των δύο γραμμών. Όσο τα σημεία κατανέμονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι «τυχαία», η διαδικασία είναι εντός έλεγχου οπότε και δεν απαιτείται καμία διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός ορίων ελέγχου τότε η διαδικασία καθίσταται εκτός ελέγχου και παράγεται ένας συναγερμός (*alarm*) και απαιτούνται ενέργειες για να βρεθούν οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που προκαλούν το πρόβλημα. Συνήθως, τα σημεία του δείγματος συνδέονται με μια τεθλασμένη γραμμή για να απεικονίζεται ευκολότερη η εξέλιξη της ακολουθίας στο χρόνο. Ακόμη και αν όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου [46].

Παρακάτω δίνεται ένα γενικό μοντέλο για το διάγραμμα ελέγχου:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_w + L\sigma_w \\
 CL &= \mu_w \\
 LCL &= \mu_w - L\sigma_w
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

<sup>2</sup> Montgomery (2005)

όπου  $\mu_w$  είναι η μέση τιμή και  $\sigma_w$  η τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης  $W$  που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία μετρά κάποιο ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει, και  $L$  είναι η «απόσταση» των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή, εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως  $L=3$  και στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στην κατασκευή διαγράμματος ελέγχου  $3\sigma$  [2], [46].

Το μοντέλο ορίων σίγμα ( $\sigma$ ) για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου προτάθηκε από τον *Shewhart* (1931) και καλείται διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*. Αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου λόγω της απλότητας στην κατασκευή και στην ερμηνεία του [46]. Επιπρόσθετα, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*). Για κανονική, ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $W$  η κεντρική τιμή και τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το μοντέλο ορίων πιθανότητας  $\alpha$  της στατιστικής συνάρτησης  $W$  είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + z_{\alpha/2}\sigma_w = w_{\alpha/2} \\ CL &= \mu_w \\ LCL &= \mu_w - z_{\alpha/2}\sigma_w = w_{1-(\alpha/2)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

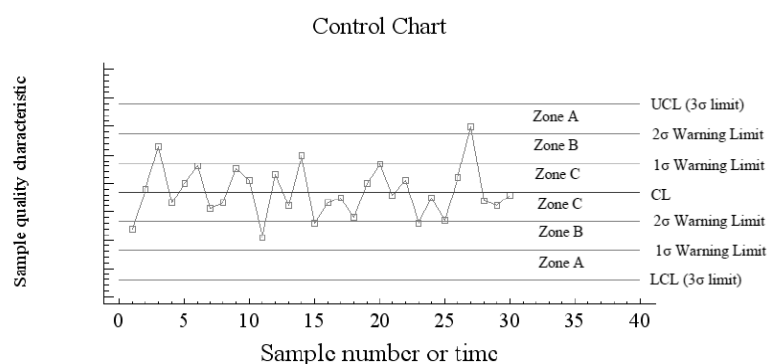
όπου  $w_\alpha$  το άνω  $\alpha$  ποσοστιαίο σημείο της  $W$  [1]. Για εντός ελέγχου διεργασίες (με κανονική κατανομή για την  $W$ ) ισχύει ότι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε κάθε πλευρά των ορίων ελέγχου ισούται με  $\alpha/2$  ( $\alpha$  είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού). Για  $\alpha/2 = 0.001$  (δηλαδή μοντέλο με όρια πιθανότητας 0.002), ισχύει ότι  $z_{\alpha/2} = 3.09024$ . Στην περίπτωση που η κατανομή της  $W$  δεν είναι κανονική (ή δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής  $W$ , αντί των ποσοστιαίων σημείων της τυπικής κανονικής κατανομής [1].

### 1.3.3 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα ελέγχου με σκοπό την πιο έγκαιρη ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία.

Τα εξωτερικά προειδοποιητικά όρια (*outer warning limits*) σχεδιάζονται σε απόσταση  $2\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (ΣΧΗΜΑ 1.2). Αν ένα ή περισσότερα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται μεταξύ των εξωτερικών προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου (προς τη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής) τότε υπάρχουν ενδείξεις ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Τα εσωτερικά προειδοποιητικά όρια (*inner warning limits*) σχεδιάζονται σε απόσταση  $1\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (ΣΧΗΜΑ 1.2). Τα όρια ελέγχου μαζί με τα προειδοποιητικά όρια (εσωτερικά και εξωτερικά) χωρίζουν το διάγραμμα σε τρεις ζώνες. Η χρήση των προειδοποιητικών ορίων αυξάνει και κατ' επέκταση βελτιώνει την ευαισθησία (*sensitivity*) του διαγράμματος ελέγχου, διότι εντοπίζονται γρηγορότερα πιθανές μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας, αλλά οδηγεί επίσης σε αυξημένο κίνδυνο εσφαλμένων συναγερμών/σημάτων [46].



ΣΧΗΜΑ 1.2 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου<sup>3</sup>.

#### 1.3.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται συνήθως μαζί με τους κανόνες ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*), οι οποίοι περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας τότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου χωρίς την ύπαρξη κάποιου σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου [1]. Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθοι (ΣΧΗΜΑ 1.2):

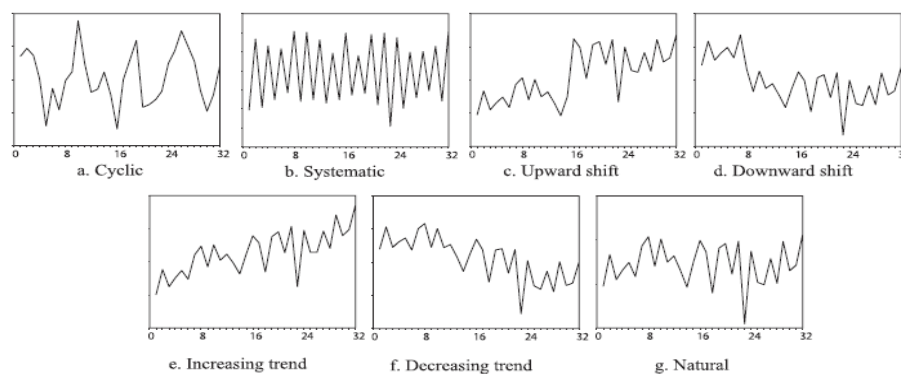
<sup>3</sup> Ατζουλάκος (2008)

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
  2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A).
  3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές).
  4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
  5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
  6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C.
  7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω- κάτω”.
  8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
  9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
  10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.
- Οι κανόνες 1 - 4 είναι γνωστοί ως *Western Electric Rules* [46].

### 1.3.5 Αναγνώριση μοτίβων

Αν τα προκαταρκτικά δείγματα συλλέγονται από μια σταθερή διεργασία η σειρά των σημείων στο διάγραμμα ελέγχου θα παρουσιάζει ένα φυσικό μοτίβο (ΣΧΗΜΑ 1.3 g), το οποίο χαρακτηρίζεται από μια διακύμανση των σημείων γύρω από την μέση τιμή έχοντας τα περισσότερα σημεία πλησιέστερα στην κεντρική γραμμή, μερικά σημεία απλωμένα και να προσεγγίζουν τα όρια ελέγχου και κανένα από τα σημεία (ή τουλάχιστον ένα πολύ σπάνιο σημείο) που υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου. Από την άλλη πλευρά, εάν τα προκαταρκτικά δείγματα λαμβάνονται από μια ασταθή διεργασία, η σειρά των σημείων του διαγράμματος θα εκθέτουν σχεδόν πάντα ένα αφύσικο μοτίβο. Το *Statistical Quality Control Handbook* της *Western Electric* επισημαίνει διάφορους τύπους αφύσικων μοτίβων που μπορεί να εμφανιστούν σε μια ασταθή διεργασία. Μεταξύ αυτών, υπάρχουν έξι αφύσικα μοτίβα, τα οποία συνήθως παρατηρούνται στα διαγράμματα ελέγχου. Αυτά είναι: (a) τα κυκλικά μοτίβα (*cyclic*), (b) τα συστηματικά μοτίβα (*systematic*), (c) τα μοτίβα ανοδικής μεταβολής (*upward shift*), (d) τα μοτίβα καθοδικής μεταβολής (*downward shift*), (e) τα μοτίβα αυξανόμενης τάσης (*increasing trend*), και (f) τα μοτίβα μειούμενης τάσης (*decreasing trend*) (ΣΧΗΜΑ 1.3 a-f). Ένα κυκλικό μοτίβο αντιπροσωπεύεται από μια ημιτονοειδή μορφή, με τις σύντομες ανοδικές και καθοδικές τάσεις στα δεδομένα που εμφανίζονται επανειλημμένα. Εάν μια σειρά σημείων στο

διάγραμμα ελέγχου δεν παρουσιάζει οποιοδήποτε κυκλικό μοτίβο, αλλά ακόμα εμφανίζεται να είναι προβλέψιμη σε ένα συστηματικό (περίπου) τρόπο, τότε αυτός ο τύπος μοτίβου καλείται συστηματικό μοτίβο. Ένα μοτίβο ανοδικής μεταβολής έχει μια σειρά σημείων που παρουσιάζει απότομη αλλαγή από ένα χαμηλότερο επίπεδο σε ένα υψηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά. Ένα μοτίβο καθοδικής μεταβολής αποτελείται από μια σειρά σημείων που έχει μια απότομη αλλαγή από ένα υψηλότερο επίπεδο σε ένα χαμηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά. Ένα μοτίβο αυξανόμενης τάσης έχει μια σειρά σημείων που δείχνουν μια βαθμιαία ανοδική μεταβολή στο μέσο όρο, ενώ ένα μοτίβο μειούμενης τάσης περιέχει μια σειρά σημείων που αντιπροσωπεύουν μια βαθμιαία καθοδική μεταβολή στο μέσο όρο. Άλλα αφύσικα μοτίβα είναι ειδικές ή μικτές μορφές δύο ή περισσότερων αυτών των έξι κύριων τύπων αφύσικων μοτίβων [29].



ΣΧΗΜΑ 1.3 Παραδείγματα διάφορων τύπων αφύσικων μοτίβων και το φυσικό μοτίβο<sup>4</sup>.

### 1.3.6 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου

Η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται από το μέσο μήκος ροής (*average run length, ARL*) του διαγράμματος. Το *ARL* είναι ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Αν οι παρατηρήσεις της διεργασίας είναι ασυσχέτιστες, τότε για οποιοδήποτε *Shewhart* διάγραμμα ελέγχου, το *ARL* ορίζεται ως εξής:

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (1.3)$$

όπου  $p$  είναι η πιθανότητα ότι ένα σημείο υπερβαίνει τα όρια ελέγχου [1].

<sup>4</sup> Gauri, Susanta Kumar (2009)

Αξίζει επίσης να αναφερθούν τα ακόλουθα:

- Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_0$  (*in-control average run length*) [46]:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (1.4)$$

όπου  $\alpha$  είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ενώ η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου και το χαρακτηριστικό  $X$  του προϊόντος ακολουθεί κανονική κατανομή με εντός ελέγχου, μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ .

- Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_1$  (*out-of-control average run length*) [46]:

$$ARL_1 = \frac{1}{(1-\beta)} \quad (1.5)$$

αφού η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίσο με  $\beta$ , οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα  $1-\beta$ .

- Μέσος χρόνος σήματος (*average time to signal, ATS*) [46]:

$$ATS = ARL \cdot h \quad (1.6)$$

όπου  $h$  είναι καθορισμένα χρονικά διαστήματα των ωρών.

### 1.3.7 Φάσεις I και II

Στη Φάση I (*Phase I*), συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία που αναλύονται όλα μαζί ταυτοχρόνως, για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να «φέρει» τη διεργασία εντός ελέγχου με τη χρήση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου (*trial control limits*). Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) που προκύπτουν είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (*retrospective*) [1].

Στη Φάση II (ή φάση παρακολούθησης, *Phase II*), τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχεται συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει έγκαιρα μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που

καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Επίσης ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό. Το *ARL* συμβάλει στην αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου στη Φάση II [1].

## 1.4 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών

### 1.4.1 Εισαγωγή

Πολλά ποιοτικά χαρακτηριστικά μπορούν να εκφραστούν υπό τους όρους μιας αριθμητικής μέτρησης. Ένα απλό μετρήσιμο ποιοτικό χαρακτηριστικό όπως η διάσταση, το βάρος, ή ο όγκος καλείται μεταβλητή (*variable*) [46]. Τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών αναπτύχθηκαν το 1930 και χρησιμοποιούνται τόσο στη βιομηχανία όσο και σε πολλές επιστημονικές περιοχές. Ο έλεγχος του δειγματικού μέσου γίνεται συνήθως με τα διαγράμματα ελέγχου για τους μέσους, ήτοι το  $\bar{X}$  διάγραμμα. Ο έλεγχος της διασποράς της διεργασίας μπορεί να ελεγχθεί είτε με ένα διάγραμμα ελέγχου για την τυπική απόκλιση, δηλαδή το  $S$  διάγραμμα, ή ένα διάγραμμα ελέγχου για το εύρος, ήτοι το  $R$  διάγραμμα [2].

### 1.4.2 $\bar{X}$ και $R$ Διαγράμματα Ελέγχου

Έστω το χαρακτηριστικό  $X$  των προϊόντων που παράγονται, ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$ , με  $\mu$  και  $\sigma$  γνωστά. Αν  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$ ,  $i \geq 1$  είναι τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, τότε ο δειγματικός μέσος (*sample average*):

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n}(X_{i1} + \dots + X_{in}) \quad (1.7)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/n)$  και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής  $\mu$  του χαρακτηριστικού  $X$ . Ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}_i$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[\mu - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_i}, \mu + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_i}]$ ,  $\sigma_{\bar{X}_i} = \sigma/\sqrt{n}$  με πιθανότητα  $1 - \alpha$  [2].

**Όρια ελέγχου στο διάγραμμα για το δειγματικό μέσο:**

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + 3\sigma_{\bar{X}_i} \\ CL &= \mu \\ LCL &= \mu - 3\sigma_{\bar{X}_i} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Οι τιμές των  $\mu$  και  $\sigma$  είναι άγνωστες, και πρέπει να εκτιμηθούν. Για να επιτευχθεί αυτό, επιλέγονται  $m = 20$  έως  $25$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n = 4$  έως  $6$  το καθένα, υποθέτοντας ότι η επιλογή των δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου [2].

- Εκτίμηση του  $\mu$  :

Έστω  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$  οι δειγματικοί μέσοι των  $m$  δειγμάτων.

Θέτουμε: 
$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i = \frac{1}{mm} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad (1.9)$$

Τότε ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού, από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ισχύει  $E(\bar{\bar{X}}) = \mu$  και  $Var(\bar{\bar{X}}) = \sigma^2/nm$ . Η ποσότητα  $\bar{\bar{X}}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/nm)$  και ισχύει ότι  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  [2].

- Εκτίμηση του  $\sigma$  :

- Μέθοδος  $R$  :

Έστω  $R_1, R_2, \dots, R_m$  τα εύρη των  $m$  δειγμάτων

$$R_i = \max\{X_{i1}, \dots, X_{in}\} - \min\{X_{i1}, \dots, X_{in}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.10)$$

με  $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2$  και  $\sigma_{R_i} = \sqrt{Var(R_i)} = \sigma d_3$ . Θέτοντας  $\bar{R} = \frac{1}{m}(R_1 + R_2 + \dots + R_m)$

προκύπτει  $E(\bar{R}) = \sigma d_2$ . Δηλαδή  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$  [2].

- Μέθοδος  $S$  :

Έστω 
$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \quad (1.11)$$

με  $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$  και  $\sigma_{S_i} = \sqrt{Var(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$ , όπου  $c_4$  σταθερά εξαρτάται από το μέγεθος  $n$  των δειγμάτων. Θέτουμε  $\bar{S} = \frac{1}{m}(S_1 + S_2 + \dots + S_m)$  οπότε  $E(\bar{S}) = \sigma c_4$ .

Δηλαδή  $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$  [2].



**Όρια ελέγχου  $\bar{X}$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ LCL &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Όρια ελέγχου  $R$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= D_4 \bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ LCL &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (1.13)$$

όπου  $A_2 = A_2(n) = 3/(d_2 \sqrt{n})$ ,  $D_3 = D_3(n) = 1 - 3(d_3/d_2)$  και  $D_4 = D_4(n) = 1 + 3(d_3/d_2)$  σταθερές [1]. Διάφορες τιμές των σταθερών  $A_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $c_4$ ,  $d_2$  και  $d_3$  δίνονται μαζί με άλλες σταθερές στο Παράρτημα I.

#### 1.4.3 Τα $\bar{X}$ και $S$ Διαγράμματα Ελέγχου

Τα  $\bar{X}$  και  $S$  διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται κυρίως όταν το μέγεθος του δείγματος είναι σχετικά μεγάλο ( $n > 10$  ή  $12$ ) ή είναι μεταβλητό. Για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$  με  $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$  και  $\sigma_{S_i} = \sqrt{\text{Var}(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$ , όπου  $c_4$  σταθερά εξαρτάται από το μέγεθος  $n$  των δειγμάτων.

**Όρια ελέγχου  $S$  διαγράμματος (Φάση II):**

$$\begin{aligned} UCL &= B_6 \sigma \\ CL &= c_4 \sigma \\ LCL &= B_5 \sigma \end{aligned} \quad (1.14)$$

όπου  $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$  και  $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$ . Διάφορες τιμές των  $B_5$  και  $B_6$  δίνονται στο Παράρτημα I.

Όμως, η ποσότητα  $\sigma$  είναι άγνωστη, αλλά η εκτίμηση της είναι:  $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$ .

**Όρια ελέγχου  $\bar{X}$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ LCL &= \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S} \end{aligned} \quad (1.15)$$

**Όρια ελέγχου  $S$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= B_4 \bar{S} \\ CL &= \bar{S} \\ LCL &= B_3 \bar{S} \end{aligned} \quad (1.16)$$

όπου  $B_3 = 1 - (3/c_4)\sqrt{1-c_4^2}$ ,  $B_4 = 1 + (3/c_4)\sqrt{1-c_4^2}$  (ισχύει  $B_4 = B_6/c_4$  και  $B_3 = B_5/c_4$ ) και  $A_3 = 3/(c_4\sqrt{n})$  [2]. Διάφορες τιμές για τις σταθερές  $B_4$ ,  $B_5$ ,  $B_6$  και  $A_3$  δίνονται στο Παράρτημα I.

#### 1.4.4 Το $S^2$ Διάγραμμα Ελέγχου

**Όρια ελέγχου  $S^2$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\bar{s}^2}{n-1} \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \\ CL &= \bar{s}^2 \\ LCL &= \frac{\bar{s}^2}{n-1} \chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Μια τυπική τιμή  $\sigma^2$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της  $\bar{s}^2$  στις παραπάνω παραμέτρους αν η τελευταία δεν είναι γνωστή [46].

#### 1.4.5 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Στις περιπτώσεις που το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις (*individual observations*). Έστω το χαρακτηριστικό  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  και  $\sigma$  γνωστά. Καλείται  $X$  ή  $I$  διάγραμμα ελέγχου [2].

**Όρια ελέγχου  $X$  διαγράμματος, για  $n = 1$  (Φάση II):**

$$\begin{aligned} UCL_X &= \bar{X} + 3\sigma \\ CL_X &= \bar{X} \\ LCL_X &= \bar{X} - 3\sigma \end{aligned} \quad (1.18)$$

Οι παρατηρήσεις που απεικονίζονται στο διάγραμμα είναι οι μεμονωμένες [2].

Επειδή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το  $R$  διάγραμμα ελέγχου για  $n=1$ , χρησιμοποιείται το κινούμενο εύρος (*moving range, MR*) [1] των μεμονωμένων παρατηρήσεων που ορίζεται από τη σχέση

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| = \max\{X_{i-1}, X_i\} - \min\{X_{i-1}, X_i\}, \quad i \geq 2 \quad (1.19)$$

και ισχύει ότι  $\mu_{MR_i} = E(MR_i) = \sigma d_2$  και  $\sigma_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = \sigma d_3$  όπου οι σταθερές  $d_2, d_3$  υπολογίζονται για  $n=2$ .

### Όρια ελέγχου $MR$ διαγράμματος (Φάση II):

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= D_2 \sigma \\ CL_{MR} &= d_2 \sigma \\ LCL_{MR} &= D_1 \sigma \end{aligned} \quad (1.20)$$

όπου οι σταθερές  $d_2, d_3$  υπολογίζονται για  $n=2$  [2].

Αν  $\mu$  και  $\sigma$  άγνωστα, πρέπει να εκτιμηθούν. Έστω ότι διαθέτουμε  $m$  ανεξάρτητες παρατηρήσεις  $X_1, \dots, X_m$  από το χαρακτηριστικό  $X$ . Τότε  $\hat{\mu} = \bar{X} = (\sum_{i=1}^m X_i)/m$  και αν  $\overline{MR} = (MR_1 + \dots + MR_{i-1})/(m-1)$ , προκύπτει ότι  $E(\overline{MR}) = \sigma d_2$  και  $\hat{\sigma} = \overline{MR}/d_2$  [2].

### Όρια ελέγχου $X$ διαγράμματος (Φάση I):

$$\begin{aligned} UCL_X &= \bar{X} + 3(\overline{MR}/d_2) \\ CL_X &= \bar{X} \\ LCL_X &= \bar{X} - 3(\overline{MR}/d_2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

### Όρια ελέγχου $MR$ διαγράμματος (Φάση I):

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= D_4 \overline{MR} \\ CL_{MR} &= \overline{MR} \\ LCL_{MR} &= D_3 \overline{MR} \end{aligned} \quad (1.22)$$

όπου  $D_3 = 1 - 3(d_3/d_2)$  και  $D_4 = 1 + 3(d_3/d_2)$  υπολογίζονται για  $n=2$  [2]. Η αποτελεσματικότερη εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  προκύπτει από τη σχέση  $\hat{\sigma} = S/c_4$ , όπου η σταθερά  $c_4$  υπολογίζεται για  $n=m$  και όπου

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2} \quad [2].$$

## 1.5 Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων

### 1.5.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου Ιδιοτήτων (*attribute control charts*) χρησιμοποιούνται όταν τα δεδομένα αφορούν ποσότητες με δύο πιθανά αποτελέσματα της μορφής ναι / όχι. Το χαρακτηριστικό της ποιότητας είναι είτε οι ελαττωματικές μονάδες είτε τα ελαττώματα μιας μονάδας. Το μέγεθος του δείγματος μπορεί να είναι σταθερό ή να μεταβάλλεται από δείγμα σε δείγμα. Ένα προϊόν ταξινομείται σαν ελαττωματικό ή μη συμμορφωμένο (*defective or nonconforming*) αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή εκτός των ορίων προδιαγραφών. Τότε το προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια (*defect or nonconformity*). Μια μονάδα μπορεί να παρουσιάσει πολλά ελαττώματα, όχι απαραίτητα του ίδιου τύπου, για να ταξινομηθεί σαν ελαττωματική. Ο όρος μονάδα επιθεώρησης (*inspection unit*) αναφέρεται στο ίδιο προϊόν ή σε ένα σύνολο προϊόντων [2].

### 1.5.2 Διαγράμματα Ελέγχου για το Ποσοστό και τον Αριθμό των Ελαττωματικών προϊόντων

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό προς εξέταση στα  $p$  και  $np$  διαγράμματα ελέγχου είναι αντίστοιχα το ποσοστό και ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων. Το ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων δια του συνολικού αριθμού των παραγόμενων προϊόντων. Για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων αρχικά επιλέγονται  $m$  προκαταρκτικά δείγματα ισομεγέθη ή μη [46]. Τα δείγματα αυτά δεν έχουν όλα το ίδιο μέγεθος. Αρχικά υποθέτουμε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας είναι γνωστό και ίσο με  $p$  και ότι από την παραγωγή επιλέγουμε  $m$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα με μεγέθη  $n_1, \dots, n_m$  αντίστοιχα [2]. Έστω  $X_{ij}$ ,  $i \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq n_i$  η τ.μ. με τιμές 1 και 0 ανάλογα με αν το  $j$  προϊόν του  $i$  δείγματος είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τ.μ.  $X_{ij}$  ισχύει:  $X_{ij} \sim B(1, p)$ . Για τη μεταβλητή:

$$X_i = X_{i1} + \dots + X_{in_i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.23)$$

που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα ισχύει  $X_i \sim B(n_i, p)$ , ( $\mu_{X_i} = n_i p$ ,  $\sigma_{X_i}^2 = n_i p(1-p)$ ) [2]. Τότε για την τ.μ.:

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n_i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.24)$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα ισχύει:  $\mu_{W_i} = E(W_i) = p$  και  $\sigma_{W_i}^2 = Var(W_i) = p(1-p)/n_i$ ,  $i \geq 1$ . Για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων στο διάγραμμα ελέγχου θα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση  $W_i = p_i = X_i/n_i$  [2].

### Όρια ελέγχου $p$ διαγράμματος (Φάση II):

$$\begin{aligned} UCL_p &= p + 3\sqrt{p(1-p)/\bar{n}} \\ CL_p &= p \\ LCL_p &= p - 3\sqrt{p(1-p)/\bar{n}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

όπου  $\bar{n} = (n_1 + \dots + n_m)/m$  ο μέσος όρος όλων των μεγεθών των  $m$  δειγμάτων (για ισομεγέθη δείγματα,  $\bar{n} = n$ ) [2]. Στην περίπτωση που τα δείγματα είναι ισομεγέθη, η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων επιταχύνεται με τη βοήθεια της τ.μ.  $X_i$ . Στο διάγραμμα ελέγχου θα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση  $X_i$  ( $\mu_{X_i} = np$  και  $\sigma_{X_i}^2 = np(1-p)$   $1 \leq i \leq m$ ) [2].

### Όρια ελέγχου $np$ διαγράμματος (Φάση II):

$$\begin{aligned} UCL_{np} &= np + 3\sqrt{np(1-p)} \\ CL_{np} &= np \\ LCL_{np} &= np - 3\sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Όταν το ποσοστό  $p$  των ελαττωματικών προϊόντων είναι άγνωστο πρέπει να εκτιμηθεί [2]. Έστω  $m$  ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα, με μεγέθη  $n_1, \dots, n_m$  αντίστοιχα, έστω  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in_i})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $X_i \sim B(n_i, p)$  ( $\mu_{X_i} = n_i p$ ,  $\sigma_{X_i}^2 = n_i p(1-p)$ ). Θέτουμε  $W_i = p_i = X_i/n_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  και προκύπτει  $p = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n_1 + \dots + n_m}$  με  $E(\bar{p}) = p$ , ήτοι  $\hat{p} = p$  [2].

**Όρια ελέγχου  $p$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/\bar{n}} \\ CL &= \bar{p} \\ LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/\bar{n}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

**Όρια ελέγχου  $np$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ CL &= n\bar{p} \\ LCL &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Αν το  $LCL$  είναι αρνητικό τότε θεωρείται μηδέν[2].

### 1.5.3 Διαγράμματα Ελέγχου για τον Αριθμό των ελαττωμάτων

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό με το οποίο ασχολείται το  $c$  διάγραμμα είναι ο συνολικός αριθμός ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης. Έστω ότι ο συνολικός αριθμός ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την *Poisson* κατανομή και η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο μιας μονάδας θα πρέπει να είναι πολύ μικρή.

Έτσι ο αριθμός  $X$  των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί *Poisson* κατανομή με παράμετρο  $c$ . Δηλαδή  $X \sim P(c)$  ( $\mu_{X_i} = \sigma_{X_i}^2 = c$ ). Στο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων θα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση  $W_i = X_i$ ,  $i \geq 1$  όπου  $X_i$  είναι ο αριθμός των ελαττωμάτων στην  $i$  μονάδα επιθεώρησης.

**Όρια ελέγχου  $c$  διαγράμματος (Φάση II):**

$$\begin{aligned} UCL_c &= c + 3\sqrt{c} \\ CL_c &= c \\ LCL_c &= c - 3\sqrt{c} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Όταν η παράμετρος  $c$  της κατανομής *Poisson* είναι άγνωστη, πρέπει να εκτιμηθεί [2]. Έστω  $X_i$  ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων στην  $i$  μονάδα επιθεώρησης,  $1 \leq i \leq m$ . Θέτουμε

$$\bar{c} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.30)$$

και προκύπτει  $\hat{c} = \bar{c}$ .

**Όρια ελέγχου  $c$  διαγράμματος (Φάση I):**

$$\begin{aligned} UCL_c &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ CL_c &= \bar{c} \\ LCL_c &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Αν το  $LCL$  είναι αρνητικό τότε θεωρείται μηδέν [2].

Το σφάλμα τύπου I σε ένα  $c$  διάγραμμα είναι:

$$\alpha = P(X < LCL_c \text{ ή } X > UCL_c \mid X \sim P(c)) \quad (1.32)$$

όπου  $c$  είναι η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson*.

Το σφάλμα τύπου II σε ένα  $c$  διάγραμμα είναι

$$\beta = P(LCL_c \leq X \leq UCL_c \mid X \sim P(c)) \quad (1.33)$$

όπου  $c$  είναι η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson* [2].

#### 1.5.4 Διαγράμματα Έλεγχου για το Μέσο Αριθμό των Ελαττωμάτων

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό με το οποίο ασχολείται το  $u$  διάγραμμα είναι η αναλογία των ελαττωμάτων ανά δείγμα, ή αλλιώς ο μέσος αριθμός των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης σε κάθε δείγμα. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός  $X$  των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο  $c$ . Η κύρια διαφορά με το  $c$  διάγραμμα ελέγχου είναι ότι στην προκειμένη περίπτωση τα δείγματα έχουν μέγεθος μεγαλύτερο της 1 μονάδας επιθεώρησης και είναι διαφορετικά μεταξύ τους [2].

Έστω ότι επιλέγουμε, από την παραγωγή  $m$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα με μεγέθη  $n_1, n_2, \dots, n_m$  μονάδες επιθεώρησης αντίστοιχα. Έστω  $X_{ij}$ ,  $i \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq n_i$  η τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων της  $j$  μονάδας επιθεώρησης στο  $i$  δείγμα. Για την τ.μ.  $X_{ij}$  ισχύει ότι  $X_{ij} \sim P(c)$  ( $\mu_{X_{ij}} = \sigma_{X_{ij}}^2 = c$ ), ενώ για τη τ.μ.  $X_i = X_{i1} + \dots + X_{in}$ , που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο  $i$  δείγμα έχουμε ότι  $X_i \sim P(n_i c)$  ( $\mu_{X_i} = \sigma_{X_i}^2 = n_i c$ ) [1]. Τότε για την τ.μ.

$$u_i = \frac{X_i}{n_i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.34)$$

που δηλώνει την αναλογία των ελαττωμάτων στο  $i$  δείγμα ισχύει  $\mu_{u_i} = c$  και  $\sigma_{u_i}^2 = c/n_i$ ,  $i \geq 1$ . Στο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης θα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση  $u_i = X_i/n_i$ ,  $i \geq 1$ .

### Όρια ελέγχου $u$ διαγράμματος (Φάση II):

$$\begin{aligned} UCL_u &= c + 3\sqrt{c/\bar{n}} \\ CL_u &= c \\ LCL_u &= c - 3\sqrt{c/\bar{n}} \end{aligned} \quad (1.35)$$

όπου  $\bar{n} = \frac{n_1 + \dots + n_m}{m}$  ο μέσος όρος όλων των μεγεθών των  $m$  δειγμάτων (για ισομεγέθη ισχύει  $\bar{n} = n$ ) [2].

Όταν η παράμετρος  $c$  της κατανομής *Poisson* είναι άγνωστη πρέπει να εκτιμηθεί. Έστω ότι  $X_i$  ο αριθμός των ελαττωμάτων στην  $i$  μονάδα επιθεώρησης,  $1 \leq i \leq m$ .

Θέτοντας  $u_i = X_i/n_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , προκύπτει ότι  $\bar{u} = \sum_{i=1}^m X_i / \sum_{i=1}^m n_i$  και  $E(\bar{u}) = c$ .

Ήτοι  $\hat{c} = \bar{u}$  [2].

### Όρια ελέγχου $u$ διαγράμματος (Φάση I):

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/\bar{n}} \\ CL &= \bar{u} \\ LCL &= \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/\bar{n}} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Αν το  $LCL$  είναι αρνητικό τότε θεωρείται μηδέν[2].

Το σφάλμα τύπου I σε ένα  $c$  διάγραμμα είναι:

$$\alpha = P(X_i/n_i < LCL_u \text{ ή } X_i/n_i > UCL_c \mid X_i \sim P(n_i c)) \quad (1.37)$$

όπου  $c$  είναι η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson*.

Το σφάλμα τύπου II σε ένα  $c$  διάγραμμα είναι:

$$\beta = P(LCL_u \leq X_i/n_i \leq UCL_u \mid X_i \sim P(n_i c)) \quad (1.38)$$

όπου  $c$  είναι η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson*.



## 1.6 Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου (*cumulative sum control charts* ή *CUSUM*)

### 1.6.1 Εισαγωγή

Τα αθροιστικά διάγραμμα ελέγχου εισήχθησαν από τον Page [47]. Το βασικό πλεονέκτημα είναι ότι είναι ευαίσθητα στον εντοπισμό μικρών εκτροπών και για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται στην ανίχνευση μικρών συστηματικών σφαλμάτων. Το χαρακτηριστικό  $X$  που μας ενδιαφέρει ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma^2)$ . Επιλέγοντας τυχαία δείγματα  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$ ,  $1 \leq i \leq m$ , μεγέθους  $n \geq 1$  το καθένα, ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ . Τα *CUSUM* διαγράμματα είναι αποδοτικά στις περιπτώσεις μεμονωμένων παρατηρήσεων και ενσωματώνουν άμεσα όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των παρατηρήσεων, γιατί παριστάνουν τα συσσωρευμένα αθροίσματα  $C_i$  των διαφόρων δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο  $\mu_0$ .

### 1.6.2 Διάγραμμα Tabular *CUSUM*

Στο *Tabular CUSUM* διάγραμμα είναι απαραίτητος ο υπολογισμός δύο συσσωρευμένων αθροισμάτων για κάθε τιμή ελέγχου. Οι θετικές αποκλίσεις από τον στόχο συναθροίζονται με το άνω συσσωρευμένο άθροισμα  $C_i^+$  (*one sided upper cusum*), ενώ οι αρνητικές αποκλίσεις από τον στόχο συναθροίζονται με το κάτω συσσωρευμένο άθροισμα  $C_i^-$  (*one sided lower cusum*), σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max \left[ 0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+ \right] \\ C_i^- &= \max \left[ 0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^- \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

με  $1 \leq i \leq m$  και αρχικές τιμές  $C_0^+ = C_0^- = 0$  [46].

Τα αθροίσματα  $C_i^+$ ,  $C_i^-$  υπολογίζονται από τις διάφορες τιμές των τιμών  $X_i$  από την μέση τιμή  $\mu_0$ , εφόσον αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή αναφοράς  $K (\geq 0)$  (*reference* ή *allowance value*). Κάθε φορά που οι διαφορές γίνονται αρνητικές, το

άθροισμα ( $C_i^+$  ή  $C_i^-$ ) μηδενίζεται για να ξαναρχίσει να αυξάνεται όταν οι διαφορές γίνουν ξανά μεγαλύτερες του μηδενός. Στο *Tabular Cusum* διάγραμμα τα αθροίσματα  $C_i^+$ ,  $C_i^-$  σχεδιάζονται ως διαφορετικές στήλες πάνω και κάτω από τη μέση τιμή. Η τιμή αναφοράς  $K$  δεν σχεδιάζεται στο *Tabular Cusum*. Το όριο ελέγχου που σχεδιάζεται στο διάγραμμα είναι το διάστημα απόφασης  $H$  (*decision interval*). Το ανώτερο  $H^+$  και το κατώτερο  $H^-$  σχεδιάζονται με δύο ευθείες γραμμές παράλληλες προς το μέσο  $\mu_0$ . Η τιμή του διαστήματος απόφασης υποδεικνύει τα ανώτερα επιτρεπτά όρια των αθροισμάτων  $C_i^+$ ,  $C_i^-$  και επιλέγεται να είναι  $H = 5\sigma$ . Θέτουμε  $H = h\sigma$ ,  $K = k\sigma = \frac{\delta}{2}\sigma$ ,  $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$ , όπου  $k$  είναι το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί,  $\mu_0$  η τιμή στόχος (μέση τιμή),  $\mu_1$  η εκτός ελέγχου τιμή του μέσου (η ανώτατη επιτρεπτή τιμή των δειγμάτων ελέγχου). Η επιλογή της παραμέτρου  $k$  εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί [46].

### 1.6.3 Τυποποιημένο διάγραμμα **CUSUM** (*Standardized Cusum chart*)

Σε μερικές περιπτώσεις είναι προτιμότερο να τυποποιείται η μεταβλητή  $X_i$  πριν τον υπολογισμό των συσσωρευμένων αθροισμάτων. Ορίζεται η μεταβλητή

$$Y_i = \frac{(X_i - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1) \quad (1.40)$$

η οποία αποτελεί την τυποποιημένη τιμή της  $X_i$ . Τα άνω και κάτω συσσωρευμένα αθροίσματα μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max[0, Y_i - k + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= \max[0, -k - Y_i + C_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (1.41)$$

με  $1 \leq i \leq m$  και αρχικές τιμές  $C_0^+ = C_0^- = 0$  [46].

Τα τυποποιημένα διαγράμματα *CUSUM* έχουν δύο πλεονεκτήματα:

1. Πολλά διαγράμματα *CUSUM* με τις ίδιες τιμές των  $h$  και  $k$ .
2. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της μεταβλητότητας της διεργασίας [46].

#### 1.6.4 Διαγράμματα *Scale CUSUM*

Τα *Scale CUSUM* διαγράμματα χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας που ενέχει μια διαδικασία. Έστω όπως παραπάνω, η  $X_i$  με μέση τιμή  $\mu_0$  (τιμή στόχο) και τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Η τυποποιημένη τιμή της  $X_i$  είναι  $Y_i = (X_i - \mu_0) / \sigma$ . Η νέα μεταβλητή  $v_i$  (Hawkins(1993)) ορίζεται ως εξής [35]

$$v_i = \frac{\sqrt{|Y_i|} - 0.822}{0.349}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.42)$$

Οι ποσότητες  $v_i$  είναι ευαίσθητες στις αλλαγές του μέσου και της διασποράς και ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή  $N(0,1)$ . Τα δύο μονόπλευρα *Scale CUSUM* είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \max[0, v_i - k + S_{i-1}^+] \\ S_i^- &= \max[0, -k - v_i + S_{i-1}^-] \end{aligned}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.43)$$

και αρχικές τιμές  $S_0^+ = S_0^- = 0$  [46].

Αν η τυπική απόκλιση της διεργασίας αυξάνεται, τότε θα αυξάνονται οι τιμές των αθροισμάτων  $S_i^+$  ξεπερνώντας κάποια στιγμή το διάστημα απόφασης  $H$ , ενώ αν η τυπική απόκλιση μειώνεται, θα μειώνονται και οι τιμές των  $S_i^-$  μέχρι τελικά να ξεπεράσουν την τιμή  $H$ . Οι τιμές των παραμέτρων  $k$  και  $h$  επιλέγονται όπως στα διαγράμματα του μέσου. Αν υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου στο *Scale CUSUM* διάγραμμα τότε υπάρχει υποψία αλλαγής στη διασπορά της διαδικασίας, ενώ αν υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου και στα δύο διαγράμματα (διαγράμματα μέσου και μεταβλητότητας) τότε υπάρχει υποψία μετατόπισης στο μέσο [46].

#### 1.7 Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη (*Exponentially Weighted Moving Average Control charts, EWMA*)

Το *EWMA* διάγραμμα είναι ένα εναλλακτικό διάγραμμα των *Shewhart* διαγραμμάτων και παρουσιάστηκε από τον Roberts [53]. Η χρήση του συνίσταται

κυρίως στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μεταβολές στο μέσο μιας διαδικασίας και χρησιμοποιείται επίσης για μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Ο εκθετικά κατανεμημένος κινούμενος μέσος (*exponentially weighted moving average, EWMA*) ορίζεται από τη σχέση:

$$z_i = \lambda x_i + (1-\lambda)z_{i-1} \quad (1.44)$$

όπου  $x_i$  είναι οι παρατηρήσεις,  $\lambda \in (0,1]$  είναι μια σταθερά, η οποία καλείται συντελεστής βαρύτητας (*weighting factor*) και η τιμή εκκίνησης  $z_0$  είναι η μέση τιμή (τιμή στόχος)  $z_0 = \mu_0$  [46]. Η κατασκευή του *EWMA* διαγράμματος απαιτεί τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της  $z_i$ . Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις  $x_i$  είναι ανεξάρτητες τ. μ. με διασπορά  $\sigma^2$  τότε η διασπορά των  $z_i$  [46] είναι:

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left[ \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \right] (1 - (1-\lambda)^{2i}) \quad (1.45)$$

Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του *EWMA* διαγράμματος [46] είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left[ \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \right] (1 - (1-\lambda)^{2i})} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left[ \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \right] (1 - (1-\lambda)^{2i})} \end{aligned} \quad (1.46)$$

όπου  $L$  το εύρος των ορίων και  $\mu_0$  η τιμή στόχος. Παρατηρείται ότι  $\left[ 1 - (1-\lambda)^{2i} \right] \xrightarrow{i \uparrow} 1$ . Αυτό σημαίνει ότι από ένα σημείο και πέρα, τα όρια ελέγχου εξομαλύνονται και οι προηγούμενες σχέσεις [46] μετατρέπονται ως εξής:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left[ \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \right]} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left[ \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \right]} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Τα άνω και κάτω όρια αποκτούν μια σταθερή τιμή και στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται ως δυο ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους. Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι μεμονωμένες. Για την κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου *EWMA* απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων  $\lambda$  και  $L$ . Όσον αφορά την επιλογή του  $\lambda$  συνίσταται χρήση μικρών τιμών για την ανίχνευση μικρών αλλαγών στη διαδικασία, ήτοι  $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$ , ενώ για το  $L$  χρησιμοποιείται συνήθως η τιμή  $L = 3$  [46].

## 1.8 Συνδυασμένο *Shewhart* – *EWMA* διάγραμμα ελέγχου (*Combined Shewhart – EWMA control chart, CSEWMA*)

### 1.8.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* είναι αποτελεσματικά στην ανίχνευση σχετικά μεγάλων μεταβολών στο μέσο της διεργασίας ενώ, τα *EWMA* διαγράμματα συνίσταται για την ανίχνευση μικρών και μετρίου μεγέθους μεταβολών. Οι Lucas και Saccucci [44] παρουσίασαν το *CSEWMA* το οποίο έχει την ικανότητα του *Shewhart* διαγράμματος να ανιχνεύει μεγάλες μεταβολές του μέσου και την ικανότητα του *EWMA* διαγράμματος να ανιχνεύει μικρές\μέτριες μεταβολές. Το προκύπτον διάγραμμα επιτρέπει την αποτελεσματική ανίχνευση μεταβολών διαφόρων μεγεθών.

### 1.8.2 Το *CSEWMA* διάγραμμα ελέγχου

Έστω  $x_1, \dots, x_m$  είναι ένα δείγμα ανεξάρτητων, ισόνομων και κανονικά κατανομημένων παρατηρήσεων του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$ . Υποθέτουμε ότι στην εντός ελέγχου κατάσταση  $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$  και στην εκτός ελέγχου κατάσταση  $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ . Έστω  $\bar{x}_t$  είναι ο μέσος το  $t$ -οστού δείγματος και

$$D_t = \frac{\bar{x}_t - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (1.48)$$

είναι ο αντίστοιχος τυποποιημένος μέσος με  $\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0) / \sigma$  να είναι η μέση μεταβολή η οποία μετράται σε μονάδες τυπικού σφάλματος του δειγματικού μέσου. Στην εντός ελέγχου κατάσταση ισχύει ότι  $\delta = 0$  [15].

Το *CSEWMA* διάγραμμα ελέγχου [15] παράγει ένα σήμα όταν

$$\text{είτε } |D_t| > k \text{ είτε } |z_t| > h\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \quad (1.49)$$

όπου  $z_t = (1-\lambda)z_{t-1} + \lambda D_t$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\lambda \in (0,1]$  είναι το *EWMA* στατιστικό ελέγχου. Το μήκος ροής, το οποίο είναι ο αριθμός των υποομάδων μέχρι το *CSEWMA* διάγραμμα να παράγει ένα σήμα, είναι  $RL_{CS} = \min(RL_{SH}, RL_{EW})$  όπου  $R_{SH}$  και

$RL_{EW}$  ορίζονται ως το πρώτο  $t$  για το οποίο τα στατιστικά ελέγχου  $|D_t|$  και  $|z_t|$  περνάν τα αντίστοιχα όριά τους, ήτοι

$$RL_{SH} = \inf \{t : |D_t| > k\} \quad \text{και} \quad RL_{EW} = \inf \{t : |z_t| > h\sqrt{\lambda/(1-\lambda)}\} \quad (1.50)$$

Παρατηρείται ότι τα *Shewhart* και τα *EWMA* διαγράμματα είναι ειδική περίπτωση των *CSEWMA* διαγραμμάτων [15]. Συγκεκριμένα,

- αν  $h = \infty$ , τότε τα όρια του *EWMA* δεν είναι αποτελεσματικά και το διάγραμμα ελέγχου (1.49) συμπίπτει με το *Shewhart* διάγραμμα, και ανάλογα
- αν  $k = \infty$ , τότε το *CSEWMA* συμπίπτει με ένα *EWMA* διάγραμμα.

Το *ARL* υπολογίζεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση *Clenshaw-Curtis* [15]. Για διάφορες τιμές του  $\lambda$ , τα κατώτατα όρια  $h$  και  $k$  λαμβάνονται ως λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων:

$$E_0[RL_{CS}] = ARL_0 \quad \text{και} \quad E_0[RL_{SH}] = RE_0[RL_{EW}] \quad (1.51)$$

όπου  $E_0[\cdot]$  είναι η αναμενόμενη τιμή του φορέα υπό την υπόθεση της μηδενικής μεταβολής,  $ARL_0$  είναι μια δοθείσα τιμή του εντός ελέγχου *ARL* και  $R > 0$  είναι μια κατάλληλη σταθερά [15].

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2 *ARL* των *Shewhart*, *EWMA* και *CSEWMA* διαγραμμάτων ελέγχου με γνωστές παραμέτρους<sup>5</sup>.

	Design parameters				Standardized shifts ( $\delta$ )						
	$\lambda$	$R$	$h$	$k$	0	0.5	1	2	3	4	5
a				3.00	370.40	Shewhart 155.22	43.89	6.30	2.00	1.19	1.02
b	0.05		2.49		370.40	EWMA 26.46	10.74	4.98	3.35	2.57	2.10
c	0.10		2.70		370.40	28.23	9.74	4.18	2.76	2.14	1.89
d	0.20		2.86		370.40	36.17	9.80	3.59	2.31	1.81	1.41
e	0.40		2.96		370.40	58.46	12.71	3.35	1.95	1.39	1.10
f	0.05	0.50	2.91	3.11	370.40	CSEWMA 32.90	12.12	4.54	2.08	1.23	1.03
g	0.10	0.50	3.08	3.11	370.40	37.51	11.23	4.03	1.99	1.22	1.03
h	0.20	0.50	3.20	3.10	370.40	52.84	11.95	3.65	1.89	1.22	1.03
i	0.40	0.50	3.25	3.08	370.40	87.84	17.31	3.60	1.78	1.19	1.03
j	0.05	1.00	2.75	3.19	370.40	30.30	11.55	4.53	2.16	1.26	1.04
k	0.10	1.00	2.94	3.19	370.40	33.58	10.61	3.98	2.04	1.25	1.04
l	0.20	1.00	3.07	3.18	370.40	45.51	11.03	3.57	1.91	1.24	1.04
m	0.40	1.00	3.13	3.16	370.40	74.49	15.12	3.45	1.78	1.21	1.03
n	0.05	2.00	2.64	3.31	370.40	28.58	11.16	4.58	2.29	1.32	1.05
o	0.10	2.00	2.84	3.31	370.40	31.12	10.20	3.99	2.13	1.30	1.05
p	0.20	2.00	2.97	3.30	370.40	41.05	10.44	3.54	1.95	1.27	1.05
q	0.40	2.00	3.04	3.28	370.40	66.25	13.86	3.38	1.81	1.25	1.04

Για μέτριες τιμές του  $\delta$  το *CSEWMA* είναι πιο αποτελεσματικό από το *EWMA* και σχεδόν τόσο αποτελεσματικό όσο το *Shewhart* διάγραμμα. Επίσης, για  $\delta \leq 1$  η

<sup>5</sup> Capizzi and Masarotto (2009)

αποτελεσματικότητα του CSEWMA αυξάνει όσο μεγαλώνει το  $R$  ήτοι οποτεδήποτε το  $ARL_0$  του Shewhart διαγράμματος επιλέγεται μεγαλύτερο από εκείνο του EWMA διαγράμματος. Από την άλλη πλευρά, συνίσταται για αποφυγή μεγάλων μεταβολών η επιλογή μικρών τιμών του  $R$ . Εν πάση περιπτώσει, το αντίκτυπο του  $R$  είναι ασήμαντο σε σύγκριση με τα συνολικά πλεονεκτήματα της συνδυασμένης χρήσης των EWMA και Shewhart διαγραμμάτων [15].

Στην πράξη, οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστες και εκτιμώνται χρησιμοποιώντας δεδομένα από την εντός ελέγχου διεργασία. Έστω  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$  και  $s_1^2, \dots, s_r^2$  οι δειγματικοί μέσοι και οι δειγματικές διασπορές από  $r$  δείγματα Φάσης I  $n$  παρατηρήσεων το καθένα. Η εκτιμήτρια του μέσου της διεργασίας είναι:

$$\hat{\mu}_0 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \bar{x}_j \quad (1.52)$$

με  $\hat{\mu}_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2/(rn))$ . Η εκτιμήτρια της εντός ελέγχου τυπικής απόκλισης βασίζεται στην συνολική τυπική απόκλιση, στο μέσο εύρος δείγματος ή στη μέση τυπική απόκλιση [15]. Η εκτιμήτρια της εντός ελέγχου τυπικής απόκλισης  $\hat{\sigma}_0$  υπολογίζεται από τον αμερόληπτο εκτιμητή

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{c_4(r, n)} \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r s_j^2} \quad (1.53)$$

$$\text{όπου } c_4(r, n) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(r(n-1)+1/2)}{\sqrt{r(n-1)\Gamma(r(n-1)/2)}}.$$

Το εκτιμώμενο CSEWMA διάγραμμα βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση

$$\hat{D}_t = \frac{\bar{x}_t - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}} \quad (1.54)$$

το οποίο δεν είναι ούτε ανεξάρτητο ούτε κανονικά κατανομημένο [15]. Ωστόσο, έστω

$$U = (\hat{\mu}_0 - \mu_0)/(\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}) \text{ και } V = \hat{\sigma}_0/\sigma_0 \quad (1.55)$$

Έτσι, εύκολα δείχνεται ότι:

1. Τα  $U, V$  είναι ανεξάρτητες καίριες ποσότητες έτσι ώστε

$$U \sim N(0,1) \text{ και } c_{4,r(n-1)}^2 r(n-1)V^2 \sim X_{r(n-1)}^2 \quad (1.56)$$

2. Υπό όρους των  $U, V$  οι στατιστικές συναρτήσεις  $\hat{D}_t$  του δείγματος είναι ανεξάρτητες και  $\hat{D}_t \sim N(V^{-1}(\delta - U/\sqrt{r}), V^{-2})$  [15].

### 1.8.3 Μέτρηση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου

Έστω  $ARL(\eta, \gamma)$ , το  $ARL$  του  $CSEWMA$  διαγράμματος (1.49) όπου  $D_t \sim N(\eta, \gamma^2)$ . Όταν οι άγνωστοι παράμετροι εκτιμώνται με αμερόληπτες εκτιμήτριες από τα δείγματα Φάσης I, το προκύπτων  $ARL$  του  $CSEWMA$  διαγράμματος είναι

$$M(U, V) = ARL[V^{-1}(\delta - U/\sqrt{r}), V^{-1}] \quad (1.57)$$

Εξαιτίας της ανεξαρτησίας των  $U$  και  $V$  το  $ARL$  είναι μια τ.μ.. Η κατανομή πιθανότητας της  $M(U, V)$  [15] είναι

$$\begin{aligned} F(m) &= P_{U,V}[M(U, V) \leq m] \\ &= \int_0^\infty \left\{ 1 + \phi\left[\sqrt{r}(\delta - v\eta_{m,v})\right] - \phi\left[\sqrt{r}(\delta + v\eta_{m,v})\right] \right\} p_V(v) dv \end{aligned} \quad (1.58)$$

όπου  $\phi(\cdot)$  είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής τ.μ., ήτοι της  $U$ ,  $p_V(\cdot)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας της  $V$  και  $\eta_{m,v}$  είναι είτε μια θετική λύση της  $ARL(\eta_{m,v}, v^{-1}) = m$  ή μηδέν αν  $ARL(0, v^{-1}) \leq m$ .

### 1.8.4 Συγκρίσεις απόδοσης

Οι Capizzi και Masarotto [15] σύγκριναν τα  $ARL$  των *Shewhart*, *EWMA* και *CSEWMA* διαγραμμάτων χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις που υπολογίστηκαν από το εντός ελέγχου δείγμα Φάσης I των  $r=20$  υποομάδων μεγέθους  $n=5$ . Τα όρια ελέγχου έχουν προσδιοριστεί ώστε να δώσουν ένα  $ARL_0 = 370.4$ , όταν είναι γνωστές οι παράμετροι της διαδικασίας.

Για  $\delta = 0, 1, 3$ , δημιούργησαν γραφήματα ισοϋψών καμπυλών των  $ARL$  συναρτήσεων των τυποποιημένων σφαλμάτων  $U$  και  $V$  που κυμαίνονται, σύμφωνα με τις κατανομές που δίνονται στην (1.56), από -2 έως 2 και από 0.85 έως 1.15, αντίστοιχα. Η πιθανότητα λήψης μιας τιμής του  $(U, V)$ , μέσα σε αυτά τα εύρη είναι περίπου  $0.95^2$ . Οι σταθερές  $h$  και  $k$  για το  $CSEWMA$  διάγραμμα υπολογίστηκαν από την (1.51) θέτοντας  $R=1$ . Επίσης, παρήγαγαν *box plots* με εκτεταμένα ινίδια (*whiskers*) από το  $5^\circ$  έως το  $95^\circ$  εκατοστημόριο, τα οποία αντιπροσωπεύουν τη κατανομή της  $M(U, V)$  για τα  $a-g$  διαγράμματα ελέγχου, που δίνονται στον ΠΙΝΑΚΑ 1.2. Σε αμφότερες τις εντός και εκτός ελέγχου καταστάσεις, η απόδοση



των τριών διαγραμμάτων φαίνεται να μαστίζεται από την εκτίμηση των παραμέτρων. Οι Carizzi και Masarotto [15] παρατήρησαν ότι:

1. Οι πραγματικές τιμές  $ARL$  μπορεί να είναι αρκετά διαφορετικές από την ονομαστική τιμή που υπολογίζεται υποθέτοντας ότι ο μέσος και η διακύμανση της διεργασίας είναι γνωστά.
2. Η κατεύθυνση των διαφορών μεταξύ των εκτιμώμενων και ονομαστικών  $ARL$  είναι διαισθητικά προβλέψιμη καθώς όταν η διακύμανση της διεργασίας υπερεκτιμάται (υποτιμάται) τα προκύπτοντα διαγράμματα εμφανίζουν μεγαλύτερα (μικρότερα)  $ARL$  στις εντός και εκτός ελέγχου καταστάσεις.
3. Στην εντός ελέγχου κατάσταση, οι κατανομές του  $ARL$  μετατοπίζονται προς μικρότερες τιμές των  $ARL$ . Ωστόσο, λόγω της υλοποίησης ενός μικρού αριθμού πολύ μεγάλων  $ARL$ , οι κατανομές παρουσίαζαν επίσης μια μακριά δεξιά ουρά. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται να είναι πιο έντονη για το *Shewhart* διάγραμμα ελέγχου που παρουσίαζε επίσης μια σχετικά υψηλότερη μεταβλητότητα.
4. Στην εκτός ελέγχου κατάσταση, οι διαφορές μεταξύ των  $ARL$  διαγραμμάτων με εκτιμώμενες παραμέτρους και με ονομαστικές τιμές, τουλάχιστον για τα *EWMA* και *CSEWMA* συστήματα, είναι μικρότερες από εκείνες στην εκτός ελέγχου περίπτωση. Ωστόσο, δεδομένου ότι οι κατανομές του  $ARL$  δείχνουν ισχυρή ασυμμετρία ακόμη και στην εκτός ελέγχου κατάσταση, η ευαισθησία των διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να μειωθεί σε μεγάλο βαθμό λόγω της υλοποίησης πολύ μεγάλων  $ARL$ .
5. Όταν σχεδιάζεται ένα *CSEWMA* διάγραμμα ελέγχου με εκτιμώμενες παραμέτρους, οι μικρότερες τιμές της  $R$  φαίνεται να δίνουν μεγαλύτερη προστασία ενάντια της αύξησης της συχνότητας των εσφαλμένων συναγερμών. Όσο για το *EWMA* διάγραμμα, το αποτέλεσμα της εκτίμησης των παραμέτρων για το  $ARL_0$  του *CSEWMA* διαγράμματος μειώνεται όταν χρησιμοποιείται μία μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς  $\lambda$ .
6. Σε σύγκριση με *CSEWMA*, η εντός ελέγχου απόδοση του *Shewhart* διαγράμματος φαίνεται να επηρεάζεται λιγότερο από τα σφάλματα εκτίμησης, ιδίως με εκείνα στην εκτίμηση του μέσου της διεργασίας. Σε αντιστάθμισμα, η επίδραση της αβεβαιότητας σχετικά με τις παραμέτρους φαίνεται να είναι μεγαλύτερη από την απόδοση του εκτός ελέγχου *Shewhart* διαγράμματος.

7. Γενικά, η απόδοση του *CSEWMA* φαίνεται να είναι, αν και παρόμοια, ελαφρώς καλύτερη από εκείνη του *EWMA* χωρίς τα *Shewhart* όρια ελέγχου. Ειδικότερα, το *CSEWMA* διάγραμμα δείχνει μια χαμηλότερη τάση προς τους συχνότερους εσφαλμένους συναγερμούς όταν συγκρίνεται με ένα τυπικό *EWMA* με την ίδια τιμή της  $\lambda$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

#### 2.1 Μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομή

Ο όρος «μη παραμετρικό» δεν έχει σκοπό να υπονοεί ότι δεν υπάρχουν παράμετροι που εμπλέκονται, στην πραγματικότητα μάλιστα, ισχύει το αντίθετο. Ενώ ο όρος «ελεύθερο κατανομή» φαίνεται να είναι μια καλύτερη περιγραφή του τι αναμένουμε από αυτά τα διαγράμματα, δηλαδή, εξακολουθούν να ισχύουν για μια μεγάλη κατηγορία κατανομών, «μη παραμετρικό» είναι ίσως ο όρος που χρησιμοποιείται πιο συχνά. Στη βιβλιογραφία στατιστικών υπάρχει τώρα μια μάλλον τεράστια συλλογή μη παραμετρικών ελέγχων και διαστημάτων εμπιστοσύνης και αυτές οι μέθοδοι έχουν αποδειχθεί ότι αποδίδουν καλά σε σύγκριση με τα ομόλογα της κανονικής θεωρίας τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμη όταν η κατανομή είναι κανονική, η αποτελεσματικότητα μερικών μη παραμετρικών μεθόδων σε σχέση με τις αντίστοιχες (βέλτιστες) μεθόδους κανονικής θεωρίας μπορεί να είναι τόσο υψηλή όσο 0.955 [32]. Στην πραγματικότητα, για ορισμένες κατανομές με βαριά ουρά όπως η διπλή εκθετική, οι μη παραμετρικοί έλεγχοι μπορεί να είναι αποτελεσματικότεροι. Μπορεί να υποστηριχθεί ότι, οι μη παραμετρικοί μέθοδοι θα είναι "λιγότερο αποδοτικές" από παραμετρικές ομολόγους τους, όταν κάποιος έχει πλήρη γνώση της κατανομής της διεργασίας για την οποία η παραμετρική μέθοδος ήταν ειδικά σχεδιασμένη. Ωστόσο, η πραγματικότητα είναι ότι οι πληροφορίες αυτές είναι σπάνιες, αν όχι ποτέ, διαθέσιμες στην πράξη. Έτσι, φαίνεται φυσικό να αναπτυχθούν και να χρησιμοποιηθούν μη παραμετρικές μέθοδοι στον ΣΕΔ και οι επαγγελματίες της ποιότητας θα ήταν συνετό να έχουν αυτές τις τεχνικές στις εργαλειοθήκες τους.

Στις παρακάτω ενότητες θα δοθεί σημασία στα μονομεταβλητά (*univariate*) μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου και δε θα δοθεί έμφαση στα λεγόμενα

πολυμεταβλητά (*multivariate*) μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Για τα πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, αξίζει να σημειωθεί [51] ότι χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση μιας διεργασίας, η οποία περιλαμβάνει περισσότερα του ενός μετρήσιμα χαρακτηριστικά ή ένα διάνυσμα συγκεκριμένου πλήθους μετρήσιμων χαρακτηριστικών, δεν υποθέτουν συγκεκριμένη πολυδιάστατη κατανομή για τα δεδομένα και χρησιμοποιούν ειδικές τεχνικές του κλάδου της Μη παραμετρικής Στατιστικής, αλλά τις εφαρμόζουν σε πολυδιάστατα δεδομένα. Ο κύριος σκοπός των πολυμεταβλητών διαγραμμάτων ελέγχου είναι, να ελέγξουν έγκαιρα, αν κάποια στατιστική παράμετρος (δηλαδή κάποιο διάνυσμα παραμέτρων) της πολυδιάστατης κατανομής των δεδομένων παρέμεινε ίδια ή μεταβλήθηκε. Δηλαδή, τα πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, είναι τα αντίστοιχα των μονομεταβλητών μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, για την περίπτωση κατά την οποία οι παρατηρήσεις που συλλέγονται είναι πολυδιάστατες.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τα σημαντικότερα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που έχουν προταθεί και αναλυθεί στη διεθνή βιβλιογραφία τις τελευταίες δεκαετίες. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*, τύπου *CUSUM* και τύπου *EWMA*. Τα περισσότερα από αυτά τα διαγράμματα ελέγχου θα παρουσιαστούν αναλυτικά, μαζί με όλες τις γραφικές, στατιστικές και πιθανοθεωρητικές ιδιότητές τους.

## 2.2 Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

Οι Chakraborti, Van der Laan και Bakir [19] παρείχαν ένα συστηματικό και λεπτομερές απολογισμό της βιβλιογραφίας των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου ορίζεται από την άποψη της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής του. Εάν η κατανομή του εντός ελέγχου μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η ίδια για κάθε συνεχή κατανομή, το διάγραμμα καλείται μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομής.

Οι Chakraborti, Van der Laan και Bakir [19] συνόψισαν τα πλεονεκτήματα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου ως εξής: 1) απλότητα, 2) καμία ανάγκη υπόθεσης μιας συγκεκριμένης παραμετρικής κατανομής για την υποκείμενη διεργασία, 3) η κατανομή του  $ARL_0$  είναι ίδια για όλες τις συνεχείς κατανομές, 4) μεγαλύτερη ανθεκτικότητα και ανοχή στις έκτροπες τιμές (*outliers*), 5) μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην ανίχνευση αλλαγών όταν η πραγματική κατανομή είναι αισθητά μη κανονική, ιδιαίτερα με βαρύτερες ουρές, και 6) καμία ανάγκη εκτίμησης της διακύμανσης για το καθορισμό των διαγραμμάτων για την παράμετρο θέσης. Αξίζει να τονιστεί ότι από τεχνικής απόψεως οι περισσότερες μη παραμετρικές διαδικασίες απαιτούν ο πληθυσμός να είναι συνεχής ώστε να είναι ελεύθερες κατανομής και έτσι στο πλαίσιο του ΣΕΔ θεωρούμε τα λεγόμενα «διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών».

Ορισμένα μειονεκτήματα [19] των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι τα ακόλουθα: 1) θα είναι «λιγότερο αποτελεσματικά» από τα παραμετρικά ομόλογα τους όταν κάποιος έχει μια πλήρη γνώση της κατανομής της διεργασίας για την οποία η παραμετρική μέθοδος έχει ειδικά σχεδιαστεί, 2) συνήθως απαιτούνται ειδικοί πίνακες όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μικρά, και 3) οι μη παραμετρικές μέθοδοι δεν είναι πολύ γνωστές ανάμεσα σε όλους τους ερευνητές και τους επαγγελματίες της ποιότητας.

### 2.3 Ορολογία και Προβλήματα

Ένα σημαντικό πρόβλημα στο συνήθη ΣΕΔ είναι η ανίχνευση του μέσου της διεργασίας. Στην μη παραμετρική σύνθεση, γενικότερα, εξετάζουμε την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης (ή μετατόπισης) και/ή της παραμέτρου κλίμακας της διεργασίας. Η παράμετρος θέσης είναι π.χ. ο μέσος όρος ή η διάμεσος ή κάποιο ποσοστημόριο της κατανομής, τα τελευταία είναι ιδιαίτερα ελκυστικά, όταν η κατανομή αναμένεται να είναι ασύμμετρη. Επίσης πολλές διεργασίες έμμεσα υποτίθεται ότι ακολουθούν 1) ένα μοντέλο θέσης, με μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)  $F(x-\theta)$ , όπου  $\theta$  είναι μια άγνωστη παράμετρος θέσης ή 2) ένα μοντέλο κλίμακας, με α.σ.κ.  $F(x/\tau)$ , όπου  $\tau(>0)$  είναι

η άγνωστη παράμετρος κλίμακας. Ακόμη πιο γενικά, μπορεί να θεωρηθεί 3) το μοντέλο θέσης-κλίμακας με α.σ.κ.  $F((x-\theta)/\tau)$  όπου  $\theta$  και  $\tau$  είναι οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις μοντέλων, το πρόβλημα είναι ο εντοπισμός των  $\theta$  και  $\tau$  (ή και των δύο), βάσει τυχαίων δειγμάτων που συλλέγονται (συνήθως) σε ισαπέχοντα χρονικά σημεία. Στους συνήθεις υπολογισμούς της κατανομής του μήκους ροής η  $F$  υποτίθεται ότι είναι η α.σ.κ.  $\Phi$  της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην μη παραμετρική σύνθεση, για τις μεταβλητές, η  $F$  υποτίθεται ότι είναι μια αυθαίρετη συνεχής α.σ.κ.. Μολονότι το μοντέλο θέσης - κλίμακας φαίνεται να είναι ένα φυσικό μοντέλο για εξέταση παραλληλίζοντας τη κανονική περίπτωση με αμφότερα το μέσο και τη διακύμανση άγνωστα, τα περισσότερα από ότι είναι σήμερα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία του Μη Παραμετρικού Στατιστικού Έλεγχου Διεργασίας (ΜΣΕΔ) (*Nonparametric Statistical Process Control, NSPC*) ασχολούνται μόνο είτε με το μοντέλο θέσης είτε με το μοντέλο κλίμακας. Στην πραγματικότητα η πλειονότητα των διαθέσιμων εργασιών ασχολείται με το μοντέλο θέσης [19], και για αυτό το λόγο η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στο σε αυτό.

Κατά την κατασκευή μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, φαίνεται τότε φυσική η εξέταση της αντικατάστασης των παραμετρικών στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου (εκτιμήτριες σημείου) με εύλογες στατιστικές συναρτήσεις που είναι ελεύθερες κατανομής και η μελέτη των ανάλογων παραμετρικών μεθόδων ανάλυσης βάσει διαγραμμάτων. Έτσι θα επιτραπεί ο υπολογισμός των ιδιοτήτων του μήκους ροής που ισχύουν για μια ολόκληρη κλάση κατανομών. Αποδεικνύεται, ωστόσο, ότι οι περισσότερες από τις γνωστές εκτιμήτριες σημείου συχνά δεν είναι ελεύθερες κατανομής για πεπερασμένα μεγέθη δείγματος. Αναλόγως, κάποιος καταφεύγει στους μη παραμετρικούς ελέγχους (συχνά υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των ελέγχων και των εκτιμητριών) και προσαρμόζει αυτούς για τα προβλήματα ανάλυσης βάσει διαγραμμάτων [19].

Μια ολοκληρωμένη μελέτη της βιβλιογραφίας μέχρι περίπου το 2000 μπορεί να βρεθεί στους Chakraborti, Van der Laan και Bakir [19]. Αξίζει να σημειωθεί ότι η βιβλιογραφία για τις μη παραμετρικές μεθόδους αυξάνεται ταχύτατα. Ωστόσο, τα

περισσότερα μη παραμετρικά διαγράμματα, έχουν αναπτυχθεί για τις εφαρμογές της Φάσης II.

Όπως προαναφέρθηκε υπάρχουν δύο φάσεις στον ΣΕΔ, ήτοι η Φάση I και η Φάση II. Μια κύρια διαφορά μεταξύ των δύο φάσεων είναι ότι το ποσοστό εσφαλμένων συναγερμών (*false alarm rate, FAR*) (ή  $ARL_0$ ) χρησιμοποιείται συνήθως στην κατασκευή και αξιολόγηση των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης II, ενώ η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού (*false alarm probability, FAP*), χρησιμοποιείται στην κατασκευή και την αξιολόγηση των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I. Η *FAP* είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ενός εσφαλμένου συναγερμού από πολλές συγκρίσεις, ενώ το *FAR* είναι η πιθανότητα ενός μοναδικού εσφαλμένου συναγερμού που αφορά μόνο μία μόνο σύγκριση. Πολλοί συγγραφείς έχουν μελετήσει τα προβλήματα Φάσης I, όπως για παράδειγμα οι Sullivan και Woodall [54] και Koning και Does [42]. Δεδομένου ότι ένα μεγάλο μέρος δεν είναι γνωστό, και δεν μπορούν να υποθεθούν πολλά για την κατανομή της διεργασίας στη ρύθμιση της Φάσης I, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης I είναι πολύ χρήσιμα.

## 2.4 Κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου

Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου: 1) το Shewhart διάγραμμα, 2) το *CUSUM* διάγραμμα και 3) το *EWMA* διάγραμμα και οι βελτιώσεις τους. Ανάλογα αυτών των διαγραμμάτων έχουν θεωρηθεί στην Μη παραμετρική σύνθεση, τα οποία διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

### 2.4.1 Διαγράμματα τύπου *Shewhart* (*Shewhart-type charts*)

Στην πράξη, τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* είναι τα πιο δημοφιλή διαγράμματα, εξαιτίας της απλότητας τους, της ευκολίας εφαρμογής τους, και του γεγονότος ότι αυτά τα ευέλικτα διαγράμματα είναι αρκετά αποτελεσματικά στην ανίχνευση μέτριων έως μεγάλων μετατοπίσεων. Θεωρούμε αμφότερα τα μονόπλευρα και τα αμφίπλευρα διαγράμματα. Τα μονόπλευρα διαγράμματα θεωρούνται χρησιμότερα όταν ενδιαφερόμαστε για μια μόνο κατευθυντική μετατόπιση (υψηλότερη ή

χαμηλότερη) στη διάμεσο. Από την άλλα πλευρά, τα αμφίπλευρα διαγράμματα, τυπικά χρησιμοποιούνται στην ανίχνευση μιας μετατόπισης ή μιας αλλαγής στη διάμεσο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση.

#### **2.4.2 Διαγράμματα τύπου *CUSUM* (*CUSUM-type charts*)**

Ενώ τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* είναι ευρέως γνωστά και πιο συχνά χρησιμοποιούνται στην πράξη εξαιτίας της απλότητάς τους και της καθολικής απόδοσης τους, άλλες κατηγορίες διαγραμμάτων, όπως τα *CUSUM* διαγράμματα είναι χρήσιμα και μερικές φορές περισσότερο φυσικά κατάλληλα στο περιβάλλον του ελέγχου διεργασίας λόγω της διαδοχικής φύσης της συλλογής δεδομένων. Αυτά τα διαγράμματα, που συνήθως βασίζονται στα σωρευτικά σύνολα μιας στατιστικής συνάρτησης σχεδιασμού, που λαμβάνονται καθώς τα δεδομένα συσσωρεύονται, είναι γνωστό ότι είναι πιο αποτελεσματικά για την ανίχνευση ορισμένων τύπων των μετατοπίσεων στη διεργασία. Το *CUSUM* διάγραμμα της κανονικής θεωρίας για το μέσο συνήθως βασίζεται στο σωρευτικό άθροισμα των αποκλίσεων των μεμονωμένων παρατηρήσεων (ή τα μέσων των υποομάδων) από την καθορισμένη τιμή στόχο. Φαίνεται φυσικό να εξετάσουμε τα ανάλογα αυτών των διαγραμμάτων χρησιμοποιώντας μη παραμετρικές στατιστικές συναρτήσεις σχεδιασμού.

#### **2.4.3 Διαγράμματα τύπου *EWMA* (*EWMA-type charts*)**

Εκτός από τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* και *CUSUM*, στη πρόσφατη βιβλιογραφία έχουν προταθεί ορισμένα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA*. Τα προαναφερθέντα διαγράμματα είναι τα αντίστοιχα των γνωστών παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *EWMA*, είναι αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων, και είναι ευκολότερα στην ερμηνεία από τα *CUSUM* διαγράμματα.

Παρακάτω περιγράφονται μερικά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που αντιστοιχούν σε αυτές τις τρεις κατηγορίες.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Μη παραμετρικά Διαγράμματα τύπου *Shewhart*

### 3.1 Διάγραμμα ελέγχου βάσει του *Hodges-Lehmann* εκτιμητή

Οι Alloway και Raghavachari [6] εξέτασαν ένα διάγραμμα τύπου *Shewhart* για το σημείο συμμετρίας  $\theta$  ενός συνεχούς, συμμετρικού πληθυσμού βασισμένο σε διάστημα εμπιστοσύνης ελεύθερο κατανομής για το  $\theta$ , υπολογισμένο χρησιμοποιώντας τον *Hodges-Lehmann* εκτιμητή. Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ένα τυχαίο δείγμα.

Οι  $M = n(n+1)/2$  *Walsh* μέσοι (*Walsh averages*) [24] ορίζονται από τη σχέση

$$W_{ir} = (X_i + X_j)/2, \quad r = 1, \dots, M \quad \begin{array}{l} i \leq j \\ i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.1)$$

Ο *Hodges-Lehmann* εκτιμητής του  $\hat{\theta}$  ορίζεται ως η διάμεσος των *Walsh* μέσων για το δείγμα. Ήτοι, αν  $W_{(r)}$  για  $r = 1, \dots, M$  είναι οι διατεταγμένοι *Walsh* μέσοι, τότε

$$\hat{\theta} = \begin{cases} W_{(k+1)} & \text{αν ο } M \text{ είναι περιττός} \\ (W_{(k)} + W_{(k+1)})/2 & \text{αν ο } M \text{ είναι άρτιος} \end{cases} \quad (3.2)$$

όπου

$$k = \begin{cases} M/2 & \text{αν ο } M \text{ είναι άρτιος} \\ (M-1)/2 & \text{αν ο } M \text{ είναι περιττός} \end{cases} \quad (3.3)$$

Οι ασυμπτωτικές ιδιότητες είναι εντυπωσιακές, αλλά το σημαντικότερο στο πλαίσιο των διαγραμμάτων ελέγχου είναι η αποδοτικότητα των μικρών δειγμάτων. Αν  $W^+$  είναι η προσημοποιημένη βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του *Wilcoxon* (*Wilcoxon signed rank statistic, WSR*) για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης,

που η κατανομή των μεμονωμένων παρατηρήσεων είναι συμμετρική περίπου  $\theta_0$ , τότε η  $W^+$  είναι ο αριθμός των *Walsh* μέσων μεγαλύτερος από  $\theta_0$  [24].

Το διάγραμμα ελέγχου βασίζεται στον *Hodges-Lehmann* εκτιμητή και το σχετικό διάστημα εμπιστοσύνης. Καλείται *HL* διάγραμμα (*HL chart*). Αυτή η προσέγγιση διαφέρει από το *Shewhart* διάγραμμα ελέγχου στο ότι τα όρια ελέγχου βασίζονται στις διατεταγμένες παρατηρήσεις αντί των παραδοσιακών μέτρων του μέσου και της διασποράς. Έστω  $w^+(\alpha/2, n)$  είναι το άνω  $100(1-\alpha)$ -οστό ποσοστιαίο σημείο της μηδενικής κατανομής, δηλαδή όταν  $\theta=0$  της *WSR* στατιστικής συνάρτησης για ένα δείγμα μεγέθους  $n$ . Λόγω του Lehmann [43], είναι γνωστό ότι το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για  $\theta$  δίνεται από τις ακόλουθες διατεταγμένες παρατηρήσεις των *Walsh* μέσων

$$\left( W_{(M+1-w^+(\alpha/2, n))}, W_{(w^+(\alpha/2, n))} \right) \quad (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση με τη *WSR* στατιστική συνάρτηση, κατασκευάστηκαν πίνακες δεδομένων των θέσεων των δύο διατεταγμένων *Walsh* μέσων που χρησιμοποιήθηκαν για τον καθορισμό των τιμών των ορίων ελέγχου των υποομάδων. Τα βήματα για τον υπολογισμό του προτεινόμενου διαγράμματος ελέγχου είναι τα ακόλουθα:

Για κάθε υποομάδα:

1. Συλλέγουμε μια υποομάδα  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , μεγέθους  $n$ . Απαιτείται ένα ελάχιστο μέγεθος ίσο με 10 για την επίτευξη ενός επιπέδου σημαντικότητας ίσου με  $3\sigma$  όρια που συνήθως χρησιμοποιείται.
2. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα θέσεων των δύο διατεταγμένων *Walsh* μέσων για τον καθορισμό των τιμών των ορίων ελέγχου της υποομάδας, λαμβάνουμε τις άνω και κάτω τιμές ελέγχου των *Walsh* μέσων.
3. Υπολογίζουμε του *Hodges-Lehmann* εκτιμητή.

Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του *HL* διαγράμματος [24] είναι:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \text{η διάμεσος των άνω τιμών ελέγχου από το } 2^\circ \\
 &\quad \text{βήμα για όλες τις υποομάδες} \\
 CL &= \text{ο μέσος των } Hodges - Lehmann \text{ εκτιμητριών} \\
 &\quad \text{από κάθε υποομάδα από το } 3^\circ \text{ βήμα} \\
 LCL &= \text{η διάμεσος των κάτω τιμών ελέγχου από το } 2^\circ \\
 &\quad \text{βήμα για όλες τις υποομάδες}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου  $\hat{\theta}_i$  σχεδιάζεται έναντι των  $i=1,2,\dots$  και συγκρίνεται έναντι των ορίων ελέγχου. Όπως προαναφέρθηκε το μέγεθος του δείγματος  $n$  συστήνεται να είναι τουλάχιστον 10 έτσι ώστε το *FAR* να είναι συγκρίσιμο με ένα  $3\sigma$  *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα. Οι Alloway και Raghavachari [6] σύγκριναν την απόδοση του διαγράμματος σε μια μελέτη προσομοίωσης. Όπως αναμενόταν, αυτή η προσέγγιση συγκρίνεται ευνοϊκά με το *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα για την κανονική κατανομή και είναι καλύτερη στην περίπτωση συμμετρικών κατανομών με βαριά ουρά.

Ωστόσο, ο σχεδιασμός των *HL* διαγραμμάτων φαίνεται να είναι εσφαλμένος από πρακτικής απόψεως, αφού το *FAR* και το  $ARL_0$  για αυτό το διάγραμμα είναι άγνωστα. Το πρόβλημα φαίνεται να είναι ότι τα όρια ελέγχου για αυτό το διάγραμμα δεν φαίνεται να είναι άμεσα βασισμένα στην εντός ελέγχου κατανομή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου  $\hat{\theta}_i$ . Επίσης, δεν είναι σαφές αν το διάγραμμα πρέπει να χρησιμοποιείται αναδρομικά ή μελλοντικά [19].

Οι Pappanastos και Adams [49] επισήμαναν ότι, ένα πρόβλημα με τα *HL* διαγράμματα είναι η αδυναμία τους να διατηρούν το  $ARL_0$  σε οποιαδήποτε πρακτικά εύλογη τιμή. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις με  $n=10$ ,  $m=30$  και υποθέτοντας κανονικότητα, βρήκαν ότι το  $ARL_0$  του *HL* διαγράμματος είναι 20,820.89 όταν το αναμενόμενο  $ARL_0=500$ . Επίσης, όταν διάφορες κατανομές, όπως η ομοιόμορφη ή η διπλή εκθετική, χρησιμοποιούνται στις προσομοιώσεις, οι τιμές του  $ARL_0$  του διαγράμματος ποικίλουν ευρέως. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό ότι αυτά τα διαγράμματα είναι ελεύθερα

κατανομής. Έτσι, οι Pappanastos και Adams [49] συμπέραναν ότι «αν το *Hodges-Lehmann* διάγραμμα ελέγχου είναι όντως μη παραμετρικό, θα περίμενε κανείς τα ίδια  $ARL_0$  για διαφορετικές κατανομές». Συνέχισαν λέγοντας ότι «η διαφορά στα πραγματικά και στα αναμενόμενά μέσα μήκη ροής οφείλεται στο γεγονός ότι τα όρια ελέγχου για το *HL* διάγραμμα ελέγχου δεν βασίζονται στην κατανομή της σχεδιασμένης στατιστικής συνάρτησης (ήτοι, του *Hodges - Lehmann* εκτιμητή)». Εν όψει αυτών των παρατηρήσεων, φαίνεται αναγκαία η περαιτέρω εξέταση της *Alloway - Raghavahari* διαδικασίας και των ιδιοτήτων της.

### 3.2 Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στην προσημική στατιστική συνάρτηση

Οι Amin, Reynolds, και Bakir [4] παρουσίασαν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου για τη διάμεσο (ή τον μέσο) της διεργασίας. Το προσημικό διάγραμμα ελέγχου (*sign control chart*) βασίζεται στην προσημική στατιστική συνάρτηση που απαιτεί ότι κάθε παρατήρηση να συγκρίνεται με την τιμή στόχο  $\mu_0$  και το πλήθος των παρατηρήσεων πάνω και κάτω της  $\mu_0$  να καταγράφεται για κάθε δείγμα. Για κατανομές, που δεν είναι συμμετρικές ο προσημικός έλεγχος είναι στην πραγματικότητα ένας έλεγχος για μια αλλαγή στη διάμεσο των παρατηρήσεων όπου η  $\mu_0$  λαμβάνεται να είναι η διάμεσος. Έστω  $X_{ij}$  είναι η τιμή που αντιστοιχεί στην  $j$ -οστή παρατήρηση του  $i$ -οστού δείγματος,  $j=1,2,\dots,n$ ,  $i=1,2,\dots$ . Η στατιστική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \mu_0), \quad i=1,2,\dots \quad (3.6)$$

όπου  $\text{sign}()$  είναι η συνάρτηση πρόσημου που παίρνει την τιμή +1 αν  $(X_{ij} - \mu_0) > 0$ , την τιμή -1 αν  $(X_{ij} - \mu_0) < 0$  και την τιμή 0 αν  $(X_{ij} - \mu_0) = 0$ .

Έτσι, η  $SN_i$  είναι απλά η διαφορά μεταξύ του πλήθους των παρατηρήσεων πάνω από τη  $\mu_0$  και του πλήθους των παρατηρήσεων κάτω από τη  $\mu_0$  στο  $i$ -οστό δείγμα. Η τ.μ.  $T_i = (SN_i + n)/2$  δίνει το πλήθος των θετικών πρόσημων σε ένα δείγμα, και έχει μια δυνωμική κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $p = P(X_{ij} > \mu_0)$ .

Όσο η διάμεσος παραμένει στη  $\mu_0$ ,  $p = 1/2$  και η αναμενομένη τιμή της  $SN_i$  είναι μηδέν και η διαδικασία παράγει ένα σήμα ότι η μετατόπιση έχει συμβεί αν  $|SN_i| \geq a_2$  όπου  $a_2 > 0$  είναι μια σταθερά. Ισοδύναμα, είναι πιθανόν να δοθούν κανόνες απόφασης βασισμένοι στη στατιστική συνάρτηση  $T_i$ . Η χρήση της  $SN_i$  έχει το πλεονέκτημα διατήρησης των ορίων ελέγχου συμμετρικά γύρω από το μηδέν, ενώ η  $T_i$  έχει το πλεονέκτημα ότι είναι μια τυπική δυνωυμική μεταβλητή. Το  $ARL$  για την αμφίπλευρη περίπτωση είναι  $L(\mu) = 1/P(SN_i \geq a_2)$ . Το  $ARL_0$  θα είναι το ίδιο για όλες τις κατανομές με μέσο  $\mu_0$  [4].

Αφού η κατανομή των παρατηρήσεων υποτίθεται ότι είναι συνεχής,  $P((X_{ij} - \mu_0) = 0)$  και η περίπτωση όπου  $sign(X_{ij} - \mu_0) = 0$  («μηδενικά») θα πρέπει, θεωρητικά, να μην συμβεί ποτέ. Στην πραγματικότητα βέβαια, οι παρατηρήσεις μπορεί να στρογγυλοποιηθούν, και περιστασιακά κάποια μηδενικά ίσως να εμφανιστούν. Όσο τα μηδενικά δεν εμφανίζονται πολύ συχνά, είναι ασφαλές να υπολογιστεί η  $SN_i$  όπως έχει οριστεί. Ο προσημικός έλεγχος είναι εύκολος στην εφαρμογή αφού οι αριθμητικές τιμές των παρατηρήσεων δε χρειάζεται να οριστούν επ' ακριβώς παρά μόνο όταν αυτές βρίσκονται πάνω και κάτω από το  $\mu_0$ . Ο έλεγχος πρέπει να είναι ιδιαίτερα χρήσιμος όταν τα δεδομένα για την κατανομή των παρατηρήσεων είναι λίγα, ή όταν είναι γνωστό ότι η κατανομή δεν είναι κανονική. Αφού τα μεγέθη των παρατηρήσεων δεν χρησιμοποιούνται, η  $SN_i$  θα είναι σχετικά αναποτελεσματική συγκριτικά με τη  $\bar{X}_i$  όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι κανονικές. Από την άλλη πλευρά, το πλεονέκτημα της αποτελεσματικότητας μπορεί να αντιστραφεί για κατανομές με πολύ βαριές ουρές [4].

Οι μεγαλύτερες πιθανές εντός ελέγχου τιμές για το  $ARL$  σε ένα συμμετρικό μονόπλευρο και αμφίπλευρο έλεγχο είναι  $2^n$  και  $2^{n-1}$  αντίστοιχα, όταν  $p = 1/2$ . Αν το δείγμα  $n$  είναι μετρίου μεγέθους μπορεί να είναι δύσκολο να προσδιοριστεί, έστω και προσεγγιστικά, μια τιμή για το  $L^+(\mu_0)$ . Στην πραγματικότητα, η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το  $L^+(\mu_0)$  είναι 1024, όταν το  $n = 10$  και  $a_2 = 10$  [4].

Όταν η  $SN_i$  χρησιμοποιείται στα *Shewhart* διαγράμματα, τα όρια προειδοποίησης είναι ακέραιοι  $\pm w_2$  όπου  $0 \leq w_2 < a_2$ . Ένα σήμα παράγεται αν υπάρχουν  $r$  συνεχόμενα σημεία που ικανοποιούν την ανίσωση  $w_2 \leq SN_i < a_2$  ή την ανίσωση  $-a_2 < SN_i \leq -w_2$ , ή όταν οποιοδήποτε σημείο βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου που ορίζεται από το  $a_2$ . Το *ARL* ενός μονόπλευρου διαγράμματος με όρια ελέγχου και προειδοποίησης προς τη θετική κατεύθυνση [48] δίνονται από την παρακάτω σχέση

$$L^+(\mu) = \frac{1 - p_1^r}{1 - p_1 - p_0(1 - p_1^r)} \quad (3.7)$$

όπου  $p_0 = P\{SN_i < w_2 \mid \mu\}$  και  $p_1 = P\{w_2 \leq SN_i < a_2 \mid \mu\}$ . Το *ARL* του αμφίπλευρου διαγράμματος είναι

$$L(\mu) = \frac{L^-(\mu)L^+(\mu)}{L^-(\mu) + L^+(\mu)} \quad (3.8)$$

όπου  $L^-(\mu)$  είναι το *ARL* του διαγράμματος με τα όρια ελέγχου και τα προειδοποιητικά όρια να βρίσκονται στην αρνητική κατεύθυνση μόνο. Η  $L^-(\mu)$  μπορεί να υπολογιστεί από την (3.7) με  $p_0 = P\{SN_i > -w_2 \mid \mu\}$  και  $p_1 = P\{-a_2 \leq SN_i < -w_2 \mid \mu\}$  [4].

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Τιμές του  $L^+(\mu_0)$  για *Shewhart* διαγράμματα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν  $n = 10$ <sup>6</sup>.

$w_2$	$a_2 = 8$				$a_2 = 10$			
	0	2	4	6	2	4	6	8
2	4.1	9.2	30.2	79.4	9.6	38.6	269.2	933.7
3	7.9	23.0	70.1	92.4	27.8	194.7	890.3	1023.0
4	13.5	44.7	88.4	93.1	73.0	593.7	1015.8	1023.0
5	21.2	66.9	92.3	93.1	175.4	911.7	1023.6	1024.0
6	31.0	81.5	93.0	93.1	364.4	1002.0	1024.0	1024.0
7	42.3	88.5	93.1	93.1	609.8	1020.3	1024.0	1024.0

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 δίνει τις τιμές του  $L^+(\mu_0)$  για διάφορες τιμές των  $a_2$ ,  $w_2$  και  $r$ . Στα προσημικά διαγράμματα για τον έλεγχο του μέσου η λήφθηκε  $n = 10$ . Οι τιμές του *ARL* για άλλες τιμές του  $n$  μπορούν να κατασκευαστούν με τις μεθόδους που

<sup>6</sup> Amin, Reynolds and Bakir (1995)

παρουσιάστηκαν. Επειδή το  $L^+(\mu_0)$ , για τα *Shewhart* διαγράμματα, που χρησιμοποιούν την  $SN_i$  εξαρτάται από την κατανομή των παρατηρήσεων, μόνο μέσω του  $p$ , οι τιμές του  $L^+(\mu_0)$  είναι ίδιες για κάθε κατανομή με  $p=1/2$ . Αν η  $w_2$  είναι κοντά στην  $a_2$  και το  $r$  είναι σχετικά μεγάλο, η εισαγωγή των ορίων προειδοποίησης θα έχει μικρές επιπτώσεις στο  $L^+(\mu_0)$  αλλά θα μπορούσε να μειώσει σημαντικά το  $L^+(\mu)$  για μικρές μεταβολές στο  $\mu$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 Τιμές του  $L^+(\mu_0)$  σαν συνάρτηση του  $p$  για *Shewhart* διαγράμματα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν  $n=10^7$ .

$p$	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
$a_2 = 10$	1024.0	165.4	35.4	9.3	2.9	1.7
$a_2 = 10, w_2 = 4, r = 6$	1002.8	127.8	19.5	5.9	2.7	1.7
$a_2 = 10, w_2 = 6, r = 4$	1015.8	151.1	25.9	6.3	2.5	1.6

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 συγκρίνει τρεις διεργασίες, μια χωρίς προειδοποιητικά όρια, και δύο με προειδοποιητικά όρια. Το *ARL* εκφράζεται συναρτήσει της  $p$ . Η τιμή του  $\mu$ , που δίνει συγκεκριμένη τιμή στο  $p$  εξαρτάται από την μορφή της κατανομής των παρατηρήσεων. Η παρουσία των μηδενικών αλλάζει την κατανομή των  $SN_i$ , αλλά η επίπτωση δε θα πρέπει να είναι μεγάλη εφόσον η πιθανότητα εμφάνισης του μηδενός είναι μικρή. Έτσι, στη προκειμένη περίπτωση, τα ίδια όρια ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να επηρεάζουν σημαντικά τις ιδιότητες της διεργασίας. Στην περίπτωση εμφάνισης αρκετών μηδενικών, το ένα μηδενικό μπορεί να μετρηθεί ως μείον (-) και το άλλο ως μηδενικό ως συν (+).

Αξίζει να σημειωθούν ορισμένες παρατηρήσεις που συνδέονται με το καθορισμένο μέσο. Αν το πλήθος των δεσμών είναι μικρό (σε σχέση με το  $n$ ), τότε απλώς απορρίπτει τις συνδεδεμένες περιπτώσεις και μειώνει το  $n$  αναλόγως. Από την άλλη πλευρά, εάν το πλήθος των δεσμών είναι μεγάλο, τότε πιο σύνθετη ανάλυση μπορεί να είναι αναγκαία.

<sup>7</sup> Amin, Reynolds and Bakir (1995)

Επιπρόσθετα οι Amin, Reynolds, και Bakir [4] εξέτασαν, ένα μη παραμετρικό διάγραμμα για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας προσαρμόζοντας τον έλεγχο ενδοτεταρτομοριακής κύμανσης δύο δειγμάτων (*two-sample interquartile range test*). Τα μη παραμετρικά διαγράμματα για τη μεταβλητότητα είναι σπάνια και πρέπει να γίνει περισσότερη εργασία για το θέμα αυτό. Οι Amin, Reynolds, και Bakir [4] έδειξαν ότι η κολοβή δειγματοληψία (*curtailed sampling*) μπορεί να χρησιμοποιηθεί με το προσημικό διάγραμμα, το οποίο είναι πολύ χρήσιμο όταν η δειγματοληψία είναι δαπανηρή. Η κολοβή δειγματοληψία ορίζεται ως η ικανότητα παύσης της δειγματοληψίας στο  $i$ -οστό δείγμα (δηλαδή πριν από την παρατήρηση όλων των μονάδων της δειγματοληψίας του τρέχοντος δείγματος) και η δυνατότητα λήψης μιας απόφασης σχετικά με το αν πρέπει ή όχι να δοθεί δώσει ένα εκτός ελέγχου σήμα ελέγχου.

Το *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα και το *Shewhart* προσημικό διάγραμμα (με και χωρίς προειδοποιητικά όρια) συγκρίνονται βάσει του *ARL* (αμφότερα μονόπλευρο και αμφίπλευρο) [18] για διάφορα μεγέθη μετατοπίσεων και κατανομών όπως η κανονική, η διπλή-εκθετική, και η γάμμα (*Gamma*). Το  $ARL_0$  των διαγραμμάτων διατηρείται σε κάποια σταθερή τιμή. Είναι φανερό ότι, σε γενικές γραμμές, όταν η κατανομή είναι είτε συμμετρική ή ασύμμετρη με βαριές ουρές τα μη παραμετρικά (βάσει της προσημικής συνάρτησης) διαγράμματα είναι πιο αποτελεσματικά, ενώ το αντίθετο ισχύει για τις κανονικές και τις τύπου κανονικές κατανομές με ελαφριές ουρές.

### 3.3 Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη *Mann - Whitney* στατιστική συνάρτηση

Οι Chakraborti και van de Wiel [23] χρησιμοποίησαν την *Mann-Whitney* συνάρτηση (*Mann-Whitney (MW) statistic*) ως στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού διαγραμμάτων ελέγχου για τον έλεγχο μετατοπίσεων θέσης. Πρότειναν ένα διάγραμμα βασισμένο στο δημοφιλές *Mann-Whitney (MW)* έλεγχο, ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο άθροισης βαθμών του *Wilcoxon (Wilcoxon rank-sum test)*. Το διάγραμμα καλείται *Mann-Whitney (MW)* διάγραμμα.



### 3.3.1 Το *MW* διάγραμμα ελέγχου

Έστω ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα αναφοράς  $X = (X_1, \dots, X_m)$  μεγέθους  $m$ , από μια εντός ελέγχου διεργασία και ένα αυθαίρετο δείγμα ελέγχου  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  μεγέθους  $n$ . Ο εκθέτης  $h$  χρησιμοποιείται για το συμβολισμό του  $h$ -οστού δείγματος ελέγχου,  $Y^h = (Y_1^h, \dots, Y_n^h)$ ,  $h = 1, 2, \dots$ , όταν είναι απαραίτητη περαιτέρω σαφήνεια, διαφορετικά καταστέλλεται. Έστω ότι τα δείγματα ελέγχου είναι τα ίδια ανεξάρτητα και ακόμη είναι ανεξάρτητα του δείγματος αναφοράς. Ο *MW* έλεγχος βασίζεται στο συνολικό πλήθος των  $(X, Y)$  ζευγών όταν η  $Y$  παρατήρηση είναι μεγαλύτερη από την  $X$ . Η στατιστική συνάρτηση [23] δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M_{XY} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(X_i < Y_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \{I(Y_j > X_1) + \dots + I(Y_j > X_m)\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου  $I(X_i < Y_j)$  είναι η δείκτρια συνάρτηση για το συμβάν  $\{X_i < Y_j\}$ . Η  $M_{XY}$  βρίσκεται μεταξύ του 0 και του  $mn$  και οι μεγάλες τιμές της  $M_{XY}$  δείχνουν μια θετική μετατόπιση, ενώ οι μικρές τιμές δείχνουν μια αρνητική μετατόπιση.

Το αμφίπλευρο *MW* διάγραμμα [23] χρησιμοποιεί την  $M_{XY}^h$  ως στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού και παράγει ένα σήμα στο  $h$ -οστό δείγμα ελέγχου αν

$$M_{XY}^h < L_{mn} \quad \text{ή} \quad M_{XY}^h > U_{mn} \quad (3.10)$$

όπου  $L_{mn}$  και  $U_{mn}$  είναι το κάτω (*LCL*) και το άνω (*UCL*) όριο ελέγχου, αντίστοιχα. Η κατανομή της  $M_{XY}$  είναι συμμετρική περίπου  $mn/2$  όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, έτσι είναι εύλογο να λάβουμε  $L_{mn} = mn - U_{mn}$ . Έτσι η προτεινόμενη διαδικασία σχεδιασμού είναι αρκετά απλή: σε κάθε δείγμα ελέγχου υπολογίζουμε τη στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού  $M_{XY}$  μεταξύ του δείγματος ελέγχου και του δείγματος αναφοράς και την συγκρίνουμε με τα όρια ελέγχου  $U_{mn}$  και  $mn - U_{mn}$ . Η διεργασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου αν η  $M_{XY}$  βρίσκεται πάνω από το  $U_{mn}$  ή κάτω από το  $L_{mn}$ . Τα μονόπλευρα διαγράμματα αναπτύσσονται ανάλογα.

### 3.3.2 Υπολογισμός του $ARL$

Έστω ότι οι  $F$  και  $G$  αντιπροσωπεύουν τις α.σ.κ. των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, και έστω ότι οι  $F$  και  $G$  είναι συνεχείς, έτσι ώστε οι «δεσμοί» μεταξύ των  $X$  και  $Y$ , καθώς και εντός των  $X$  και  $Y$  να μπορούν να αγνοηθούν θεωρητικά. Είναι βολική η εξαγωγή του  $ARL$  μέσω της δέσμευσης στο δείγμα αναφοράς, δηλ. χρησιμοποιώντας τη λεγόμενη μέθοδο δέσμευσης. Για το σκοπό αυτό, η πιθανότητα σήματος [23] για κάθε δείγμα για δοθέν δείγμα αναφοράς  $X = x$ , δίνεται από τη σχέση

$$p_G(x) = P_G(M_{xY} < mn - U_{mn}) + P_G(M_{xY} > U_{mn}) \quad (3.11)$$

Έστω ότι  $N$  είναι η τ.μ. του μήκους ροής για το διάγραμμα. Δοθέντος του δείγματος αναφοράς  $X = x$ , και ότι τα δύο δείγματα αναφοράς  $Y^h$  και  $Y^l$ , ( $h \neq l$ ) είναι ανεξάρτητα, το οποίο συνεπάγεται την ανεξαρτησία των  $M_{xY}^h$  και  $M_{xY}^l$ . Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} ARL &= E(N) = E_F[E_G(N | X = x)] = E_F(1/p_G(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (1/p_G(x)) dF(x_1) \dots dF(x_m) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} v(G(x_1), \dots, G(x_m)) dF(x_1) \dots dF(x_m) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Η δεύτερη ισότητα στην (3.12) προκύπτει από την ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής. Η τρίτη ισότητα ακολουθεί καθώς δοθέντος του  $X = x$ , η  $N$  είναι γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο  $p_G(x)$ . Η τέταρτη ισότητα λαμβάνεται γράφοντας το πηλίκο  $1/p_G(x)$  ως μία συνάρτηση της  $G$  και των  $x_1, \dots, x_m$ , έστω,  $v(G(x_1), \dots, G(x_m)) = v(P_G(Y_j < x_1), \dots, P_G(Y_j < x_m))$ , όπου  $v$  είναι κάποια συνάρτηση. Αυτό μπορεί να γίνει αφού η  $p_G(x)$  είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων, όπως η  $P_G(M_{xY} = u)$ , η οποία με τη σειρά της είναι ένα άθροισμα των πιθανοτήτων για όλους τους σχηματισμούς των  $X$  και  $Y$  για τα οποία η  $M_{xY}$  ισούται με  $u$ . Η πιθανότητα ενός τέτοιου σχηματισμού εξαρτάται μόνον από τις  $G(x_1), \dots, G(x_m)$ .

Το (αδέσμευτο)  $ARL$  του διαγράμματος είναι ο μέσος (η αναμενόμενη τιμή) της κατανομής της τ.μ.  $E_G(N | X)$ , η οποία είναι το δεσμευμένο μέσο μήκος ροής, δοθέντος του τυχαίου δείγματος αναφοράς. Τα εκατοστημόρια της κατανομής της

$E_G(N|X)$  (και όχι μόνο του μέσου) είναι χρήσιμα για τη μελέτη και το χαρακτηρισμό της απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου όταν οι παράμετροι εκτιμώνται, και την ανάπτυξη αποτελεσματικών αλγορίθμων για τον υπολογισμό αυτών. Πρώτα ωστόσο, επικεντρώθηκαν [23] στο μέσο της δεσμευμένης κατανομής, δηλαδή το αδέσμευτο  $ARL$  που δίνεται στη (3.12), όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Στην εντός ελέγχου κατάσταση τα στοιχεία των  $X$  και  $Y$  προέρχονται από την ίδια κατανομή  $F=G$ . Ως εκ τούτου, είναι δυνατή η υπόθεση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $F=U[0,1]$ :

$$\begin{aligned} ARL_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} v(F(x_1), \dots, F(x_m)) dF(x_1) \dots dF(x_m) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 v(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (1/p_U(u)) du_1 \dots du_m \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου  $p_U(u) = P_U(M_{uY} < mn - U_{mn}) + P_U(M_{uY} > U_{mn})$  είναι η δεσμευμένη πιθανότητα σήματος σε οποιοδήποτε δείγμα ελέγχου, δοθέντος του δείγματος αναφοράς  $u$ , όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Ο δείκτης  $U$  χρησιμοποιείται για να δείξει ότι στην εντός ελέγχου περίπτωση το δείγμα ελέγχου και το δείγμα αναφοράς προέρχονται από την ίδια κατανομή, την ομοιόμορφη  $U[0,1]$  κατανομή, η οποία δείχνει ότι το  $ARL_0$  του προτεινόμενου διαγράμματος είναι ελεύθερο κατανομής. Αξίζει να σημειωθεί ότι για την εντός ελέγχου περίπτωση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, η συνήθης κατανομή ( $F=G$ ) μπορεί να υποθεθεί ότι είναι η  $U[0,1]$  κατανομή. Αυτό απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς.

Πρέπει να υπολογιστεί η (3.13) για την εφαρμογή του διαγράμματος και η (3.12) για την αξιολόγηση της απόδοσης του διαγράμματος. Για τους δύο αυτούς στόχους, υπάρχουν δύο προβλήματα: 1) ο ακριβής τύπος για τη  $p_G(x)$  (ή  $p_U(u)$ ), δεν είναι γνωστός, που αποτρέπει ένα άμεσο υπολογισμό και 2) υπάρχει μια  $m$ -διάστατη ολοκλήρωση σε αμφότερες τις (3.12) και (3.13). Η παρούσα προσέγγιση είναι ο υπολογισμός της  $p_G(x)$  (ή  $p_U(u)$ ) (ακριβώς ή προσεγγιστικά) χρησιμοποιώντας ένα γρήγορο αλγόριθμο, και έπειτα η χρήση του για την

προσέγγιση του ολοκληρώματος στις (3.12) και (3.13) με μια *Monte Carlo* εκτίμηση για τη λήψη των εκτιμήσεων

$$\hat{ARL}_G \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{p_G(x_i)} \quad (3.14)$$

και

$$\hat{ARL}_0 \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{p_U(u_i)} \quad (3.15)$$

όπου  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$  είναι το  $i$ -οστό *Monte Carlo* δείγμα,  $i = 1, \dots, K$ , του οποίου κάθε συνιστώσα συλλέγεται από κάποια καθορισμένη  $F$  για το  $\hat{ARL}_G$ , και  $K$  είναι το πλήθος των *Monte Carlo* δειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν. Ομοίως, για την εντός ελέγχου κατάσταση, το  $u_i$  είναι ένα *Monte Carlo* δείγμα από την  $U[0,1]$ . Για μια ακριβή προσέγγιση, το  $K$  πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο και ως εκ τούτου μια γρήγορη μέθοδος για τον υπολογισμό της πιθανότητας σήματος  $p_G(x)$  (ή  $p_U(u)$ ) για ένα αυθαίρετο δείγμα αναφοράς  $x$ , είναι απαραίτητα για την πρακτική χρήση της προσέγγισης [23].

### 3.3.3 Γρήγορος υπολογισμός της πιθανότητας σήματος

Από την (3.9) φαίνεται ότι η *MW* στατιστική συνάρτηση είναι το άθροισμα  $\sum_{j=1}^n C_j$ , όπου  $C_j$  είναι το πλήθος των στοιχείων της  $X$  που είναι λιγότερα από μια  $Y_j$ . Από τη (3.11) προκύπτει ότι ο υπολογισμός της  $p_G(x)$  ουσιαστικά απαιτεί τον υπολογισμό της *upper-tail* πιθανότητας  $P_G(M_{xy} > U_{mm})$ , και αυτό με τη σειρά του απαιτεί 1) αποτελεσματική απαρίθμηση όλων των  $n$ -άδων  $\{C_1, \dots, C_n\}$  για τα οποία το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από  $U_{mm}$  και 2) άθροισμα των πιθανοτήτων για τέτοιες πλειάδες [23].

Να σημειωθεί ότι η  $P(C_j = l)$  ισούται με  $P(X_{(l)} < Y_j < X_{(l+1)})$ , όπου η  $X_{(l)}$  είναι η  $l$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση στο δείγμα αναφοράς για  $l = 1, \dots, m$  με  $X_{(0)} = -\infty$  και  $X_{(m+1)} = \infty$ . Δοθέντος του δείγματος αναφοράς, η τελευταία πιθανότητα είναι  $P(x_{(l)} < Y_j < x_{(l+1)})$ , η οποία συμβολίζεται με  $a_l$ ,  $l = 0, \dots, m$ . Επίσης, δοθέντος του δείγματος αναφοράς, να σημειωθεί οι τ.μ.  $C_j$  είναι ανεξάρτητες και

πανομοιότυπα κατανεμημένες. Ως εκ τούτου, η δεσμευμένη πιθανογεννήτρια συνάρτηση (π.σ.) της  $C_j$  [23] είναι

$$H_1(z) = \sum_{l=0}^m P(C_j = l)z^l = \sum_{l=0}^m a_l z^l \quad (3.16)$$

Και πάλι, δεδομένου του δείγματος αναφοράς οι  $C_j$  είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες, η δεσμευμένη π.σ. της  $M_{xy}$  (το άθροισμα των  $C_j$ ), είναι το γινόμενο της π.σ. στη (3.16)

$$H_2(z) = \sum_{j=0}^{mn} P(M_{xy} = j)z^j = \left( \sum_{j=0}^m a_j z^j \right)^n \quad (3.17)$$

Κατ' αρχήν, η  $P_G(M_{xy} > U_{mn})$  μπορεί να υπολογιστεί με την επέκταση της ισχύος στην (3.17) και τη συλλογή των συντελεστών όλων των όρων με βαθμό μεγαλύτερο από το  $U_{mn}$ . Ωστόσο, για μέτρια ως μεγάλα  $m$  (έστω  $m \geq 100$ ) και  $n$  όχι πολύ μικρά (έστω  $n \geq 5$ ) αυτό παίρνει ένα σημαντικό ποσό του χρόνου υπολογισμού, ιδιαίτερα καθώς η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται  $K$  (μεγάλος αριθμός) φορές, μία φορά για κάθε *Monte Carlo* δείγμα. Ο τύπος *Lugannani-Rice* (τύπος – LR [38]), είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την *upper-tail* πιθανότητα για το μέσο των ανεξάρτητων και πανομοιότυπα κατανεμημένων τ.μ. (η οποία είναι ένας τύπος προσέγγισης “*saddlepoint*”). Αυτός ο τύπος είναι ακριβέστερος από την κανονική προσέγγιση στις ουρές της κατανομής και βασίζεται στη γεννήτρια συνάρτηση αθροιστικών (*cumulant generating function*) της  $C_j$ , η οποία λαμβάνεται από τη π.σ. στη (3.16):  $k(t) = \log[H_1(e^t)]$ . Έστω  $m(t)$  και  $\sigma^2(t)$  είναι η πρώτη και η δεύτερο παράγωγος της  $k(t)$ , αντιστοίχως. Επιπλέον, έστω  $u = (U_{mn} + 1)/n$  και  $\bar{M}_{xy} = M_{xy}/n$ . Το *saddlepoint*  $\gamma$  είναι η λύση της εξίσωσης  $m(t) = u$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.3.17), στον Jensen [38] λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} P_G(M_{xy} > U_{mn}) &= P_G(\bar{M}_{xy} > U_{mn}/n) = P_G(\bar{M}_{xy} \geq u) \\ &\approx 1 - \Phi(r) + \Phi(r) \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπου

$$\lambda = n^{1/2} (1 - e^\gamma) \sigma(\gamma), \quad r = (\text{sgn } \gamma) \{2n(\gamma u - k(\gamma))\}^{1/2} \quad (3.19)$$

όπου  $\Phi(\cdot)$  και  $\phi(\cdot)$  είναι η α.σ.κ. και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τυπικής κανονικής κατανομής αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τη (3.18),

μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα σήματος  $p_G(x)$ , που δίνεται στη (3.11). Παρόμοια υπολογίζεται και η πιθανότητα σήματος  $p_U(u)$  [23].

### 3.4 Συγκρίσεις απόδοσης των *HL*, *sign* και *MW* διαγραμμάτων

Ο κύριος σκοπός ενός διαγράμματος ελέγχου είναι να ανιχνεύσει την αλλαγή στη διεργασία όσο το δυνατόν ταχύτερα και να παράγει ένα εκτός ελέγχου σήμα. Σαφώς όσο ταχύτερη είναι η ανίχνευση και το σήμα, τόσο αποτελεσματικότερο είναι το διάγραμμα. Το ποσοστό σωστής ταξινόμησης για τον εντοπισμό διαφορετικών μετατοπίσεων στη θέση μπορεί να εξυπηρετεί τον παραπάνω σκοπό. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της % σωστής ταξινόμησης για μια συγκεκριμένη μετατόπιση τόσο μεγαλύτερη είναι η απόδοση του διαγράμματος στην ανίχνευση της μετατόπισης. Αυτό το μέτρο σχετίζεται με τη πιθανότητα του σφάλματος τύπου II ( $\beta$ ) ή την ισχύ ενός ελέγχου ( $1 - \beta$ ).

Ο Das [24] σύγκρινε τα *HL*, *Sign* και *MW* διαγράμματα εξετάζοντας το ποσοστό της σωστής ταξινόμησης για τον εντοπισμό διαφορετικών μετατοπίσεων στη θέση ή στην ισχύ για την ανίχνευση της μετατόπισης θεωρώντας την ίδια εντός ελέγχου κατάσταση για τα τρία διαγράμματα. Τα τρία διαγράμματα ελέγχου σχεδιάστηκαν λαμβάνοντας την πιθανότητα του σφάλματος τύπου I ίση με 0.001. Στη συνέχεια, τα προγράμματα γράφτηκαν στο *MATLAB* 7.0.1 για να αξιολογηθεί η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου ταξινόμησης για την ανίχνευση διαφορετικών μετατοπίσεων στη θέση υπό διαφορετικές κατανομές.

Εξετάστηκαν δύο είδη συμμετρικών και ασύμμετρων (λοξών) κατανομών. Υπό την συμμετρική κατανομή εξετάστηκαν τρεις τύποι κατανομών, ήτοι *platykurtic* (*flat-topped curve*), *leptokurtic* (*high peak*) και *mesokurtic* (*normal type*). Ως εκ τούτου, μεταξύ των συμμετρικών κατανομών η κανονική (*Normal*) (*mesokurtic* κατανομή), η ομοιόμορφη (*Uniform*) (*platykurtic* κατανομή) και η *Laplace* (*leptokurtic* κατανομή) εξετάστηκαν, δεδομένου ότι είναι διαφορετικές στη *peakedness* ή στη κύρτωση (*kurtosis*). Από τις ασύμμετρες κατανομές εξετάστηκε η *Gamma* κατανομή με διαφορετική λοξότητα. Η *Gamma* κατανομή έχει δύο παραμέτρους  $\alpha$

και  $p$ , όπου η τιμή ασυμμετρίας είναι αντιστρόφως ανάλογη της  $p$ . Εδώ ισχύει ότι  $\alpha = 1$ . Η μελέτη προσομοίωσης έγινε λαμβάνοντας 10000 εκτελέσεις για μέγεθος δείγματος (*sample size*)  $n = 10, 12, 15$ .

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 δίνει τη ποσοστιαία εικόνα (*percentage figure*) από την οποία μια συγκεκριμένη μέθοδος είναι σε θέση να ανιχνεύσει το ποσό της μετατόπισης (θετική) στην παράμετρο θέσης που παρέχεται στη 2<sup>η</sup> στήλη, όταν το δείγμα μεγέθους 10, 12 και 15 προέρχεται από διάφορες συμμετρικές κατανομές δηλαδή κανονική, ομοιόμορφη και *Laplace*.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 Ποσοστό σωστής ταξινόμησης για την ανίχνευση  $a + ve$  μετατόπισης στη θέση για διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου για διαφορετικά μεγέθη δείγματος και συμμετρικές κατανομές<sup>8</sup>.

Sample size	positive shift in location	Normal			Uniform			Laplace		
		Sign	HL	MW	Sign	HL	MW	Sign	HL	MW
10	0.25	0.2	2.2	1.3	3.9	1.1	13.8	0	1.1	0
	0.5	1.5	2.6	5.5	100	3.7	67.2	1.2	1.9	0.6
	1	11	27.2	22.3	100	36.6	100	9	17.8	9.2
	1.5	49	88.8	57.2	100	86.7	100	24.9	60.4	38.7
	2	75.9	99.9	89.6	100	99.8	100	42.6	79.8	68.9
	2.5	93.9	100	98.6	100	100	100	58.5	89.4	87.2
12	3	98.8	100	99.8	100	100	100	71.6	91.6	95.5
	0.25	0.7	2.8	0.9	4.5	1.4	17.4	0.5	1.3	0
	0.5	2.1	6.7	5.8	100	3.9	83.3	2.9	2.4	0.3
	1	20.3	57.4	32.6	100	47.6	100	12	28	13.3
	1.5	51	97.7	75	100	95.6	100	27.5	72.5	50.7
	2	79	100	96.3	100	99.9	100	49.8	88.9	83.8
15	2.5	93.2	100	99.6	100	100	100	64.8	94.2	96
	3	97.8	100	100	100	100	100	78.6	96.7	99.8
	0.25	0.3	3.9	2.5	8.6	1.6	27.5	0.1	1.8	0
	0.5	2.9	7.4	7.1	100	6.3	92	2.5	4.4	0.1
	1	12.3	64.9	44.5	100	51.2	100	21.3	41	24.5
	1.5	74.7	98.2	85.7	100	95.8	100	48.2	84.4	78.3
	2	94.7	100	99.3	100	100	100	72.2	94.3	97.5
	2.5	99.5	100	100	100	100	100	86.2	97.5	99.8
	3	100	100	100	100	100	100	94	98.9	100

Επομένως:

- Για μια κανονική κατανομή που είναι συμμετρική και *mesokurtic* κατανομή, η *HL* μέθοδος είναι ομοιόμορφα καλύτερη από τις άλλες δύο μεθόδους. Όσον για τις άλλες δύο μεθόδους, η *MW* είναι καλύτερη από τον προσημικό έλεγχο.
- Για μια ομοιόμορφη κατανομή η οποία είναι συμμετρική και *platykurtic* κατανομή οι τρεις μέθοδοι είναι εξίσου καλές στην ανίχνευση υψηλότερης μετατόπισης (>2) στην παράμετρο θέσης. Όσον για την εξέταση μικρότερων μετατοπίσεων ο προσημικός έλεγχος έχει καλύτερη απόδοση, η *MW* έχει

<sup>8</sup> Das (2009)

δεύτερη καλύτερη απόδοση και η *HL* βρέθηκε να έχει την χειρότερη απόδοση στην ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων (<2).

- Για τη κατανομή *Laplace* η οποία είναι μια συμμετρική και *leptokurtic* κατανομή καμία μέθοδος δεν είναι σε θέση να ανιχνεύσει τη μικρή μετατόπιση (<1.5). Η *HL* μέθοδος φαίνεται να είναι η καλύτερη μέθοδος για την ανίχνευση της μετατόπισης μεγαλύτερη από 1.5.
- Δεδομένου ότι αυτές οι κατανομές είναι συμμετρικές, οι *-ve* μετατοπίσεις δεν εξετάστηκαν στην παρούσα μελέτη.
- Η απόδοση για την ανίχνευση της μετατόπισης για κάθε μέθοδο αυξάνει με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος.

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4 δίνει τη ποσοστιαία εικόνα με την οποία μια συγκεκριμένη μέθοδος είναι σε θέση να ανιχνεύσει το ποσό της μετατόπισης (θετική) στην παράμετρο θέσης που παρέχεται στη 2<sup>η</sup> στήλη, όταν το δείγμα μεγέθους 10, 12 και 15 προέρχεται από διαφορετικές ασύμμετρες κατανομές ήτοι, *Gamma* με παράμετρο σχήματος  $p=1$ ,  $p=3.5$ ,  $p=6$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4 Ποσοστό σωστής ταξινόμησης στην ανίχνευση *a+ve* μετατόπιση στη θέση για διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου για διάφορα μεγέθη δείγματος και ασύμμετρες κατανομές<sup>9</sup>.

sample size	positive shift in location	Gamma ( $p=1$ )		Gamma( $p=3.5$ )		Gamma( $p=6$ )	
		Sign	MW	Sign	MW	Sign	MW
10	0.25	0.9	1.8	0.1	0.8	0.2	0.7
	0.5	29.7	9	2	2.2	2.5	1.9
	1	97.4	36.8	43.1	7.6	17	2.5
	1.5	100	68	87.2	19.1	59.7	7.3
	2	100	89.3	99.1	32.6	90.3	16
	2.5	100	95.4	99.9	52.1	98.7	25.3
12	3	100	98.5	100	69.3	100	41.2
	0.25	2.9	2.8	0.6	0.8	0.5	0.8
	0.5	35.7	10.4	4.6	2.8	2	1.9
	1	98	44.9	46.7	8.4	22.8	3.7
	1.5	100	78.5	88.9	21.9	65.1	10
	2	100	94.1	100	42.7	92	21.3
15	2.5	100	98.9	100	63.1	99.1	34.2
	3	100	100	100	81.	100	53.4
	0.25	3.1	4	0.2	1.3	0.4	0.7
	0.5	53.9	12.2	6.4	4.2	3.1	1.8
	1	99.9	52.1	70.8	14.8	40.2	6
	1.5	100	81.2	99.2	34	87.3	18.5
	2	100	99.9	100	59.7	99.5	35
	2.5	100	100	100	81.8	100	52.3
	3	100	100	100	91.4	100	66.6

<sup>9</sup> Das (2009)



Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5 δίνει τη ποσοστιαία εικόνα με την οποία μια συγκεκριμένη μέθοδος είναι σε θέση να ανιχνεύσει το ποσό της μετατόπισης (αρνητική) στην παράμετρο θέσης που παρέχεται στη 2<sup>η</sup> στήλη όταν το δείγμα μεγέθους 10, 12 και 15 προέρχεται από διαφορετικές ασύμμετρες κατανομές ήτοι, *Gamma* με παράμετρο σχήματος  $p=1$ ,  $p=3.5$ ,  $p=6$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5 Ποσοστό σωστής ταξινόμησης στην ανίχνευση *a-ve* μετατόπισης στη θέση για διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου για διάφορα μεγέθη δείγματος και ασύμμετρες κατανομές<sup>10</sup>.

sample size	negative shift in location	Gamma ( $p=1$ )		Gamma( $p=3.5$ )		Gamma( $p=6$ )	
		Sign	MW	Sign	MW	Sign	MW
10	0.25	22.9	3.3	1.3	1.5	1	0.4
	0.5	81.7	25.7	13	1.9	4.9	1.1
	1	NA	NA	68.3	7.4	36.3	3.6
	1.5	NA	100	97.3	21.4	76.8	9.2
	2	NA	100	99.6	48.1	95	19.3
	2.5	NA	100	100	72.9	99.2	33.6
12	3	NA	100	100	93.4	100	46.9
	0.25	27.6	2.2	3.5	0.6	2.4	0.8
	0.5	84.6	30.1	17.7	2.5	7	1.4
	1	NA	NA	72.3	8.9	44	4.9
	1.5	NA	100	96.5	30.9	80.5	12.7
	2	NA	100	100	60.7	96.7	22.5
15	2.5	NA	100	100	85.6	99.4	39
	3	NA	100	100	97.7	100	62.1
	0.25	48.7	7.3	5.3	1.4	2.2	1.4
	0.5	97	47.1	32.6	3.3	12	2.5
	1	NA	NA	92	16.7	62.7	7.5
	1.5	NA	100	100	43.4	95.8	19.5
15	2	NA	100	100	76.9	100	38.1
	2.5	NA	100	100	93.9	100	61.4
	3	NA	100	100	99.5	100	79.3

Επομένως:

- Για μία *Gamma* κατανομή (ασύμμετρη), ο προσημικός έλεγχος δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τη *MW* μέθοδο για την ανίχνευση αμφοτέρων των *+ve* και *-ve* μετατοπίσεων.
- Αμφότερες οι μέθοδοι παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση για την ανίχνευση *-ve* μετατοπίσεων από τις *+ve* μετατοπίσεις.
- Η απόδοση για την ανίχνευση της μετατόπισης για κάθε μέθοδο αυξάνεται με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος.

<sup>10</sup> Das (2009)

### 3.5 Διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιώντας την εμπειρική κατανομή αναφοράς

Οι Willemain και Runger [57] εξέτασαν το σχεδιασμό των διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας τη λεγόμενη «εμπειρική κατανομή αναφοράς» (*empirical reference distribution*). Υπέθεσαν ότι ένα μεγάλο δείγμα αναφοράς είναι διαθέσιμο και υποστήριξαν ότι «με επαρκή ιστορικά δεδομένα, ανεξάρτητα από την κατανομή, τα όρια ελέγχου μπορούν να επιλεγούν ως συγκεκριμένες διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις της παρατηρούμενης κατανομής των μεταβλητών που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα.» Συνέχισαν [57] λέγοντας, «σε γενικές γραμμές, ευνοούμε την προσέγγιση της ανάπτυξης των ορίων ελέγχου από μια εμπειρική κατανομή αναφοράς με βάση τα δεδομένα της διεργασίας που αποκτήθηκαν κατά τη διάρκεια κανονικών συνθηκών λειτουργίας, αντί της αυστηρής προσήλωσής σε μια υπόθεση της κανονικότητας».

Τα προτεινόμενα όρια ελέγχου τύπου *Shewhart* δίνονται από δύο διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις ενός δείγματος αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_m$  μεγέθους  $m$ , το  $k$ -οστό μικρότερο και το  $(b+k)$ -οστό μικρότερο, όπου  $0 \leq k \leq m$  και  $1 \leq b \leq m-k+1$ . Έπειτα συλλέγονται οι παρατηρήσεις, μία κάθε φορά, και συγκρίνονται με αυτά τα όρια. Δείχνεται ότι η δεσμευμένη πιθανότητα  $P$  (δοθέντων δύο διατεταγμένων στατιστικών συναρτήσεων του δείγματος αναφοράς) ότι μια μελλοντική ανεξάρτητη παρατήρηση θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων ελέγχου, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου είναι μια βήτα τ.μ. με παραμέτρους  $b$  και  $m-b+1$ . Από αυτό, η (αδέσμευτη) κατανομή του εντός ελέγχου μήκους ροής παράγεται αναλυτικά, το οποίο σχετίζεται με μία υπεργεωμετρική κατανομή με τη δεξιά ουρά μεγαλύτερη από εκείνη της γεωμετρικής. Αυτό παρέχει, για παράδειγμα, το μέσο (ήτοι,  $ARL_0 = m/(m-b)$ ) και τη διακύμανση της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής.

Για πρακτική εφαρμογή, ωστόσο, δεν είναι πλήρως σαφές πως θα καθοριστούν οι παράμετροι  $k$  και  $b$  του διαγράμματος. Για παράδειγμα, το  $ARL_0$  χρησιμοποιείται για την επιλογή της σταθεράς ως ακολούθως. Λαμβάνοντας  $m=1000$ , ούτως ώστε

$ARL_0 = 370$ , έπεται ότι  $1000/(1000-b) = 370$  και λύνοντας ως προς  $b$ , προκύπτει ότι  $b = 997$ . Ωστόσο, η σταθερά  $k$  χρειάζεται ακόμη να βρεθεί, η οποία πρέπει να είναι 1, 2 ή 3. Οι Willemain και Runger [57] πρότειναν τη χρήση ενός συμμετρικού αμφίπλευρου διαγράμματος, το οποίο σημαίνει ότι  $k = 2$ .

Επίσης οι Willemain και Runger [57] μελέτησαν το "εκτός στόχου"  $ARL$  των διαγραμμάτων τους και παρείχαν ένα πίνακα για συγκρίσεις με το μονόπλευρο *Shewhart* διάγραμμα της κανονικής θεωρίας. Για αμφίπλευρα διαγράμματα, χρησιμοποιήθηκαν προσομοιώσεις για την εκτίμηση του  $ARL$ , και παρήχθη ένας πίνακας για τη σύγκριση των ακριβών και εμπειρικών εκτιμήσεων του εκτός στόχου  $ARL$  με  $m = 1000$  παρατηρήσεις από μια τυπική κανονική κατανομή. Εν κατακλείδι, ανέφεραν [57] ότι «τα αποτελέσματα είναι καλά, αν και περαιτέρω έρευνα μπορεί να είναι σε θέση να βελτιώσει τους απλούς εκτιμητές».

### 3.6 Διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο της διαμέσου

Η χρήση της δειγματικής διαμέσου χρησιμοποιείται αρκετά σε εφαρμογές του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας για την παρακολούθηση της παραγωγικής διεργασίας. Οι Janacek και Meikle [37] πρότειναν τη χρήση ενός δείγματος αναφοράς για τη δημιουργία ορίων ελέγχου. Πρότειναν την κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* που απεικονίζει τη δειγματική διάμεσο που εξετάζεται από την διεργασία.

Να σημειωθεί ότι το διάγραμμα ελέγχου είναι για μια συγκεκριμένη διατεταγμένη στατιστική συνάρτηση από ένα μελλοντικό δείγμα (και όχι για το πληθυσμιακό μέσο ή την πληθυσμιακή διάμεσο). Έστω ότι είναι διαθέσιμο, ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m$ ,  $X_{1:m}, X_{2:m}, \dots, X_{m:m}$  όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου με μια α.σ.κ.  $F_0$ . Αν ή όχι η μέθοδος είναι εντός ελέγχου, κρίνεται λαμβάνοντας μια ακολουθία δειγμάτων ελέγχου μεγέθους  $n$  και συγκρίνοντας κάθε δείγμα ελέγχου με το δείγμα αναφοράς. Στην ιδανική περίπτωση, ο στόχος είναι η ανίχνευση μιας

αλλαγής στην κατανομή, έστω από  $F_0$  σε  $F_1$ , αλλά, στην πράξη, η ανίχνευση μιας μετατόπισης στη θέση της  $F_0$  είναι ενδιαφέρουσα [19].

Η διαδικασία είναι η σύγκριση των διαμέσων  $M_i$  του δείγματος ελέγχου με τα όρια που δίνονται από δύο διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις του δείγματος αναφοράς,

$$UCL = X_{m-j+1:m} \quad \text{και} \quad LCL = X_{j:m} \quad (3.20)$$

όπου η σταθερά  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) καθορίζεται έτσι ώστε η πιθανότητα

$$P(X_{j:m} < M_i < X_{m-j+1:m} | F_1 = F_0) \geq 1 - \alpha \quad (3.21)$$

για όλα τα  $i=1,2,\dots$ , όπου  $\alpha$  είναι ο καθορισμένος  $FAR$ . Οι Janacek και Meikle [37] έθεσαν σε πίνακες αυτή την πιθανότητα για  $j=1(1)10$  όταν  $m=25(5)80$  και  $n=5(2)9$ , και όταν  $m=55(5)80$  και  $n=12(2)15$ . Για παράδειγμα, για  $m=70$  και  $n=5$ , έπεται  $P(X_{3:70} < M_i < X_{68:70} | F_1 = F_0) = 0.99716$  (έτσι ώστε ο πραγματικός  $FAR = 0.00284$ ). Έτσι, η λήψη των  $LCL = X_{3:70}$  και  $UCL = X_{68:70}$  είναι περίπου συγκρίσιμη με ένα παραδοσιακό  $3\sigma$  *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα σε αυτή την κατάσταση.

Εν ολίγοις, όταν ένα δείγμα αναφοράς είναι διαθέσιμο από μια εντός ελέγχου διεργασία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μελλοντικά, να ελέγξει εάν ή όχι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Αυτό γίνεται 1) με εκτίμηση (πρόβλεψη) κάποιας ιδιότητας ενός μελλοντικού δείγματος (για παράδειγμα το  $90^\circ$  ποσοστημόριο, ή το ενδοτεταρτημοριακό εύρος), ή 2) με εκτίμηση κάποιας ιδιότητας μιας μελλοντικής κατανομής (για παράδειγμα, ο μέσος ή η διάμεσος) [19].

Προς την κατεύθυνση της 1), οι Chakraborti, Van der Laan, και Van de Wiel [18] εξέτασαν την εκτίμηση της  $j$ -οστής διατεταγμένης στατιστικής συνάρτησης (δηλαδή, το  $100*(j/n)$ -οστό εκατοστημόριο του δείγματος) σε ένα μελλοντικό δείγμα, βάσει μιας κατηγορίας μη παραμετρικών στατιστικών συναρτήσεων δύο δειγμάτων που ονομάζονται στατιστικές συναρτήσεις προτεραιότητας (*precedence statistics*). Επίσης εξέτασαν την απόδοση των διαγραμμάτων όσον αφορά το  $ARL$ . Επίσης δόθηκαν οι υπολογιστικές πτυχές και συστάσεις για την εφαρμογή. Είναι

προφανές ότι χρειάζεται να γίνει περισσότερη εργασία σε αυτό το πλαίσιο, χρησιμοποιώντας ιδιαιτέρως άλλες μη παραμετρικές στατιστικές συναρτήσεις δύο δειγμάτων, οι οποίες είναι γνωστές ότι κατέχουν «βέλτιστες» ιδιότητες ισχύος.

### 3.7 Διαγράμματα προτεραιότητας

Οι Chakraborti , Van der Laan και Van de Wiel [20] εξέτασαν μια κατηγορία μη παραμετρικών διαγραμμάτων τύπου *Shewhart* Φάσης II που βασίζονται σε δύο διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις από το δείγμα αναφοράς. Καλείται (βασικό) 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας ((*basic*)1-of-1 *precedence chart*) ή απλά διάγραμμα προτεραιότητας.

Οι Chakraborti, Eryilmaz και Human [22] εξέτασαν τα μη παραμετρικά διαγράμματα προτεραιότητας τύπου *Shewhart* Φάσης II χρησιμοποιώντας κανόνες σηματοδότησης τύπου ροών για την παρακολούθηση της άγνωστης εντός ελέγχου διαμέσου της διεργασίας. Ήτοι, εξέτασαν τη γενίκευση των 1-of-1 διαγραμμάτων προτεραιότητας εντάσσοντας κανόνες σηματοδότησης συμπεριλαμβανομένων των ροών της στατιστικής συνάρτησης σχεδιασμού πάνω και/ή κάτω των ορίων ελέγχου. Έτσι, τα προτεινόμενα διαγράμματα μπορούν να θεωρηθούν ως μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης II «ενισχυμένα με κανόνες ροών». Να σημειωθεί ότι παρουσιάζονται μόνο τα αμφίπλευρα διαγράμματα, τα μονόπλευρα διαγράμματα μπορούν να αναπτυχθούν παρόμοια.

#### 3.7.1 Βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας

Έστω ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m$  από μια εντός ελέγχου διεργασία με μια άγνωστη συνεχή συνάρτηση κατανομής  $F$ . Το δείγμα αναφοράς τυπικά λαμβάνεται μετά από μια κατάλληλη ανάλυση της Φάσης I. Έστω  $X_{1:m} < X_{2:m} < \dots < X_{m:m}$  είναι οι διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς. Τα όρια ελέγχου για το 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας είναι:

$$\begin{aligned} LCL &= X_{a:m} \\ UCL &= X_{b:m} \end{aligned} \quad 1 \leq a < b \leq m \quad (3.22)$$

Στη Φάση II, παρακολουθούνται τα δείγματα ελέγχου, μεγέθους  $n$  το καθένα, που συλλέγονται διαδοχικά και ανεξάρτητα το ένα του άλλου, καθώς και του δείγματος αναφοράς. Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού για το  $h$ -οστό δείγμα ελέγχου, γενικά, μπορεί να είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη στατιστική συνάρτηση  $Y_{j:n}^h$ , ωστόσο, η διάμεσος είναι μια δημοφιλής επιλογή, διότι είναι εύκολα ερμηνεύσιμη και ανθεκτική. Έτσι, για παράδειγμα, όταν το μέγεθος της υποομάδας  $n=5$ , το οποίο είναι σύνηθες σε εφαρμογές του ΣΕΔ, η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού είναι η 3<sup>η</sup> διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος ελέγχου. Η διαδικασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου, όταν, για πρώτη φορά, η διάμεσος του δείγματος ελέγχου εμπίπτει πάνω ή εκτός ενός από τα όρια ελέγχου. Να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα προτεραιότητας μπορούν να εφαρμοστούν μόλις οι απαραίτητες διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις είναι διαθέσιμες και αυτό μπορεί να είναι ένα πρακτικό πλεονέκτημα σε ορισμένες εφαρμογές.

Η δείτρια τ.μ. για το  $h$ -οστό δείγμα ελέγχου ορίζεται από τη σχέση:

$$Z_h = \begin{cases} 1, & Y_{j:n}^h \notin (LCL, UCL) \\ 0, & Y_{j:n}^h \in (LCL, UCL) \end{cases}, \quad h=1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

Έτσι, οι  $Z$  είναι δείκτες σηματοδότησης: αν  $Z_h=1$ , τότε παράγεται ένα σήμα και η διεργασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου στο  $h$ -οστό δείγμα ελέγχου, ενώ το αντίθετο ισχύει αν  $Z_h=0$ . Το γεγονός όταν  $Z_h=1$ , που συμβαίνει όταν  $Y_{j:n}^h \notin (LCL, UCL)$ , καλείται συμβάν σηματοδότησης (*signaling event*) και η πιθανότητα,  $P(Z_h=1)=p$ , καλείται (αδέσμευτη) πιθανότητα σηματοδότησης (*(unconditional) signaling probability*). Υποτίθεται ότι όλα τα δείγματα ελέγχου προέρχονται από μια συνεχή κατανομή με α.σ.κ.  $G$  και επομένως ο εκθέτης  $h$  στην  $Y_{j:n}^h$  καταστέλλεται εφεξής έως ότου να είναι απαραίτητος για να αποφευχθεί τυχόν σύγχυση.

Επειδή τα όρια ελέγχου είναι διατεταγμένες παρατηρήσεις από το ίδιο δείγμα αναφοράς, τα γεγονότα σηματοδότησης και συνεπώς οι δείκτες σηματοδότησης  $Z_1, Z_2, \dots$  είναι εξαρτημένες δυαδικές τ.μ.. Έτσι, η εφαρμογή, η ανάλυση και η ερμηνεία των διαγραμμάτων ελέγχου πρέπει να λάβουν υπόψη αυτή την εξάρτηση. Δοθέντων των  $X_{a:m} = x_1$  και  $X_{b:m} = x_2$ , η πιθανότητα μη σήματος είναι

$$P(x_1 < Y_{j:n} < x_2 \mid X_{a:m} = x_1, X_{b:m} = x_2) = G_j(x_2) - G_j(x_1) = 1 - p(x_1, x_2, j, G) \quad (3.24)$$

όπου  $G_j$  είναι η α.σ.κ. της  $j$ -οστής διατεταγμένης παρατήρησης σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  από μια κατανομή με α.σ.κ.  $G$ . Αφού  $G_j(x) = I_{G(x)}(j, n-j+1)$ , όπου  $I_a(b, c)$  είναι η μη πλήρης συνάρτηση βήτα, η πιθανότητα στην (3.24) μπορεί να εκφραστεί ως  $I_{G(x_2)}(j, n-j+1) - I_{G(x_1)}(j, n-j+1)$ . Η αδέσμευτη πιθανότητα μη σήματος, που συμβολίζεται με  $1-p$ , μπορεί να βρεθεί από το μέσο όρο της στην από κοινού κατανομή των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ . Έτσι, μετασχηματίζοντας τα αποτελέσματα στο  $(0, 1)$ , προκύπτει ότι

$$1-p = P(Z_h = 0) = \int_0^1 \int_0^y [I_{GF^{-1}(y)}(j, n-j+1) - I_{GF^{-1}(x)}(j, n-j+1)] f_{a,b}(x, y) dx dy \quad (3.25)$$

όπου η  $f_{a,b}(x, y)$  είναι η από κοινού σ.π.π. της  $a$ -οστής και της  $b$ -οστής διατεταγμένης στατιστικής συνάρτησης σε ένα δείγμα μεγέθους  $m$  από μια ομοιόμορφη  $(0, 1)$  κατανομή [32]. Η αδέσμευτη πιθανότητα παραγωγής ενός σήματος,  $p$ , μπορεί να ληφθεί από την (3.25).

Να σημειωθεί ότι δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις υποτίθεται ότι είναι συνεχείς, η πιθανότητα μια στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού να εμπίπτει πάνω στο όριο ελέγχου ισούται με 0, θεωρητικά, αλλά αυτό μπορεί να συμβεί στην πράξη και, επομένως, ως σύμβαση αυτό το ενδεχόμενο περιλαμβάνεται στον ορισμό του σήματος χωρίς να μεταβληθεί η πιθανότητα.

Αποδείχθηκε, ότι σε σύγκριση με το κλασικό *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα, το διάγραμμα προτεραιότητας ήταν εντός ελέγχου ανθεκτικό και ήταν εξίσου ή περισσότερο αποτελεσματικό στην ανίχνευση μετατοπίσεων θέσης. Ωστόσο, η κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου με καλύτερες ικανότητες ανίχνευσης μετατόπισης παραμένει ένα ενδιαφέρον ενδεχόμενο.

### 3.7.2 Διαγράμματα προτεραιότητας με κανόνες σηματοδότησης

Οι τρεις κανόνες σηματοδότησης: (1), (2), και (3), θεωρούνται ότι οδηγούν σε διαγράμματα ελέγχου. Σύμφωνα με αυτούς, η διεργασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου [22] όταν

- (1) ένα μοναδικό σημείο (στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού: διάμεσος) εμπίπτει πάνω ή εκτός των ορίων ελέγχου (το 1-*of*-1 διάγραμμα ή διάγραμμα προτεραιότητας)
- (2) δύο διαδοχικά σημεία (στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού: διάμεσοι των διαδοχικών δειγμάτων ελέγχου) (i) αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο *UCL* ή πάνω από το *UCL*, ή (ii) αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο *LCL* ή κάτω από το *LCL* ή, (iii) το ένα πέφτει πάνω στο *UCL* ή πάνω από το *UCL* και το επόμενο εμπίπτει πάνω στο *LCL* ή κάτω από το *LCL*, ή (iv) το ένα εμπίπτει πάνω στο *LCL* ή κάτω από το *LCL* και το επόμενο εμπίπτει πάνω στο *UCL* ή πάνω από το *UCL* [26], καλείται 2-*of*-2 *DR* διάγραμμα).
- (3) δύο διαδοχικά σημεία (διάμεσοι των διαδοχικών δειγμάτων ελέγχου) αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο *UCL* ή πάνω από το *UCL* ή αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο *LCL* ή κάτω από το *LCL* [41], καλείται 2-*of*-2 *KL* διάγραμμα).

Ο κανόνας (1) είναι ο απλούστερος και πιο συχνά χρησιμοποιούμενος στη βιβλιογραφία διαγραμμάτων ελέγχου. Αντιστοιχεί με το 1-*of*-1 διάγραμμα προτεραιότητας [20]. Είναι σαφές ότι ο κανόνας (1) είναι μια ειδική περίπτωση των κανόνων (2) και (3).

Η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης II εκτιμάται με βάση την κατανομή του μήκους ροής της. Να σημειωθεί επίσης ότι το μήκος ροής θεωρείται ως ο χρόνος αναμονής μέχρι να παραχθεί το πρώτο σήμα. Οι παρόντες χρόνοι αναμονής, οι οποίοι είναι θετικές ακέραιες τ.μ., ορίζονται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Ο χρόνος αναμονής για το 1-*of*-1 διάγραμμα είναι

$$T_1 = \min\{t : Z_t = 1\} \quad (3.26)$$

2. Ο χρόνος αναμονής για το 2-*of*-2 *DR* διάγραμμα είναι

$$T_2 = \min\{t : Z_{t-1} = 1, Z_t = 1\} \quad (3.27)$$

όπου οι δείκτριες τ.μ., οι  $Z$ , δίνονται από την (3.23) και η,

3. Ο χρόνος αναμονής για το 2-*of*-2 *KL* διάγραμμα είναι

$$T'_2 = \min\{T_2^{(1)}, T_2^{(2)}\} \quad (3.28)$$

όπου

$$T_2^{(1)} = \min\{t : Z'_{t-1} = Z'_t = 1\}, \quad T_2^{(2)} = \min\{t : Z'_{t-1} = Z'_t = 2\} \quad (3.29)$$

και



$$Z'_h = \begin{cases} 0 & \text{αν } Y_{j:n} \in (X_{a:m}, X_{b:m}) \\ 1 & \text{αν } Y_{j:n} \geq X_{b:m} \\ 2 & \text{αν } Y_{j:n} \leq X_{a:m} \end{cases} \quad (3.30)$$

Να σημειωθεί ότι αν το 2-of-2 *KL* διάγραμμα παράγει ένα σήμα το ίδιο κάνει και το 2-of-2 *DR*, αλλά το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές. Επίσης, το 2-of-2 *KL* διάγραμμα φαίνεται καταλληλότερο κατά την ανίχνευση μιας μετατόπισης στη θέση της διεργασίας είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, ενώ ο 2-of-2 *DR* κανόνας μπορεί να ανιχνεύσει μια πιθανή εξέλιξη [22].

### 3.7.2.1 Οι κατανομές (μήκους ροής) του χρόνου αναμονής

- Η κατανομή του  $T_2$ : Κατανομή του μήκους ροής για το 2-of-2 *DR* διάγραμμα: Οι Chakraborti, Eryilmaz, και Human [22] βρήκαν την κατανομή της  $T_2$  δεσμεύοντας πρώτα το συνολικό πλήθος των επιτυχιών  $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$  στην ακολουθία των τ.μ.  $Z_1, Z_2, \dots$ . Για το σκοπό αυτό, να σημειωθεί ότι οι  $Z_1, Z_2, \dots$  είναι μια ακολουθία εξαρτημένων δυαδικών τ.μ., και στην πραγματικότητα μπορεί να διαπιστωθεί ότι είναι ανταλλάξιμες ή συμμετρικά εξαρτημένες (ήτοι, οποιαδήποτε μετάθεση οποιουδήποτε υποσυνόλου αυτών των τ.μ. έχει την ίδια κατανομή). Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, προκύπτει η ακριβής έκφραση για την κατανομή πιθανότητας της  $T_2$ .

Οι George και Bowman [30] παρήγαγαν την κατανομή του συνολικού πλήθους των επιτυχιών σε μια ακολουθία από  $n$  ανταλλάξιμες δυαδικές δοκιμές. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα τους

$$P(S_n = s) = \binom{n}{s} \sum_{i=0}^{n-s} (-1)^i \binom{n-s}{i} \lambda_{s+i} \quad (3.31)$$

όπου  $\lambda_t = P(Z_1 = 1, \dots, Z_t = 1)$  για  $t = 1, 2, \dots, n$ . Επίσης οι Chakraborti, Eryilmaz και Human [22] χρησιμοποίησαν αυτό το αποτέλεσμα κατά τον υπολογισμό της αδέσμευτης κατανομής του μήκους ροής του 2-of-2 *DR*, που δίνεται ακολούθως. Να σημειωθεί ότι αφού δεσμευμένα η  $\lambda_t = [p(x_1, x_2, j, G)]^t$ , και αδέσμευτα

$$\lambda_t = P(Z_1 = 1, \dots, Z_t = 1) = \int_0^1 \int_0^y [1 - \{I_{GF^{-1}(y)}(j, n-j+1) - I_{GF^{-1}(x)}(j, n-j+1)\}]^t \times f_{a,b}(x, y) dx dy \quad (3.32)$$

Η αδέσμευτη κατανομή της  $T_2$  δίνεται από τις σχέσεις [22]:

$$P(T_2 = x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x < 2 \\ \lambda_2 & \text{αν } x = 2 \end{cases} \quad (3.33)$$

Και για  $x \geq 3$

$$P(T_2 = x) = \sum_{y=1}^{x-2} \sum_{j=0}^{\min(y, \lfloor (x-y-2)/2 \rfloor)} \sum_{i=0}^y (-1)^j (-1)^i \binom{y}{j} \binom{y}{i} \binom{x-2(j+1)-1}{y-1} \lambda_{x-y+i} \quad (3.34)$$

Να σημειωθεί ότι η κατανομή ( $F = G$ ) του  $ARL_0$  του 2-of-2 DR διαγράμματος δίνεται είτε από τη (3.33) ή τη (3.34), όπου

$$\lambda_t = \int_0^1 \int_0^y [1 - (I_y(j, n-j+1) - I_x(j, n-j+1))]^t f_{a,b}(x, y) dx dy \quad (3.35)$$

Έτσι, η κατανομή του  $ARL_0$  είναι ελεύθερη από την  $F$  ή τη  $G$  και το διάγραμμα είναι ελεύθερο κατανομής.

- Η κατανομή της  $T_2'$ : η κατανομή του μήκους ροής για το 2-of-2 KL διάγραμμα: Παρατηρείται ότι δοθέντων των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ , οι τ.μ.  $Z'_1, Z'_2, \dots$  είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες με

$$p_L = P(Y_{j:n} \leq X_{a:m} | X_{a:m} = x_1) = I_{G(x_1)}(j, n-j+1) \quad (3.36)$$

και

$$p_U = P(Y_{j:n} \geq X_{b:m} | X_{b:m} = x_2) = 1 - I_{G(x_2)}(j, n-j+1) \quad (3.37)$$

Οι Chakraborti, Eryilmaz και Human [22] έλαβαν την κατανομή της  $T_2'$  εφαρμόζοντας μερικά αποτελέσματα στους Fu και Lou [28]. Δοθέντων των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ , έστω ότι  $T_2^*$  είναι ο χρόνος αναμονής για δυο διαδοχικά 1 ή δύο διαδοχικά 2 στην ακολουθία των ανεξάρτητων και πανομοιότυπα κατανεμημένων δοκιμών  $Z'_1, Z'_2, \dots$ . Αυτό καλείται ένα μοτίβο ένωσης  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , όπου  $\Lambda_1 = \{11\}$  και  $\Lambda_2 = \{22\}$ . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.2 των Fu και Lou [28], λαμβάνεται η κατανομή της  $T_2^*$  ως εξής

$$P\{T_2^* = x | X_{a:m}, X_{b:m}\} = \underline{\xi} N^{x-1} (1-N) \underline{1}', \quad x \geq 2 \quad (3.38)$$

όπου

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1-p_L-p_U & p_L & p_U \\ 0 & 1-p_L-p_U & p_L & p_U \\ 0 & 1-p_L-p_U & 0 & p_U \\ 0 & 1-p_L-p_U & p_L & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\xi} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \underline{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (3.39)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει από γενικότερα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή του χρόνου αναμονής για την πρώτη εμφάνιση ενός μοτίβου ένωσης σε μια ακολουθία ανεξάρτητων και πανομοιότυπα κατανεμημένων ή ομοιογενών Μαρκοβιανών εξαρτημένων  $m$ -διάστατων δοκιμών που παράγονται από τους Fu και Lou [28]. Στην παρούσα περίπτωση 3.,  $m=3$  και η απαραίτητη ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα ορίζεται στο χώρο καταστάσεων  $\{\phi, 0, 1, 2, \alpha_1, \alpha_2\}$ , όπου  $\alpha_1 = \{11\}$  και  $\alpha_2 = \{22\}$  είναι δύο απορροφητικές καταστάσεις (όταν η διαδικασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου). Η σχετικός πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης (*transition probability matrix*)  $M_{6 \times 6}$  μπορεί να γραφεί ως  $M = \begin{bmatrix} N & C \\ 0 & I \end{bmatrix}$  όπου  $N_{4 \times 4}$  ορίζεται παραπάνω,

$$C_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_U & 0 \\ 0 & p_L \end{bmatrix}, \quad O_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

και οι πιθανότητες  $p_L$  και  $p_U$  ορίζονται στις (3.36) και (3.37), αντιστοίχως.

Η αδέσμευτη κατανομή της  $T_2'$  τελικά λαμβάνεται από τη δεσμευμένη κατανομή της  $T_2^*$  με το μέσο όρο στην από κοινού κατανομή των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ , η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$P\{T_2' = x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_2} P\{T_2^* = x | X_{a:m} = x_1, X_{b:m} = x_2\} h_{a,b}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \text{για } x \geq 2 \quad (3.41)$$

όπου η  $P\{T_2^* = x | X_{a:m} = x_1, X_{b:m} = x_2\}$  δίνεται από την (3.38) και η  $h_{a,b}(x_1, x_2)$  είναι η από κοινού σ.π.π. των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$  από μία συνεχή α.σ.κ.  $F$ .

Να σημειωθεί ότι η κατανομή ( $F = G$ ) του εντός ελέγχου μήκους ροής του 2-of-2 KL διαγράμματος δίνεται από τη σχέση

$$P(T_2' = x) = \int_0^1 \int_0^v \underline{\xi} N_0^{x-1} \underline{1}' f_{a,b}(u, v) du dv \quad (3.42)$$

όπου

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 - I_v(j, n - j + 1) - I_u(j, n - j + 1) & 1 - I_v(j, n - j + 1) & I_u(j, n - j + 1) \\ 0 & 1 - I_v(j, n - j + 1) - I_u(j, n - j + 1) & 1 - I_v(j, n - j + 1) & I_u(j, n - j + 1) \\ 0 & 1 - I_v(j, n - j + 1) - I_u(j, n - j + 1) & 0 & I_u(j, n - j + 1) \\ 0 & 1 - I_v(j, n - j + 1) - I_u(j, n - j + 1) & 1 - I_v(j, n - j + 1) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Η κατανομή του εντός ελέγχου μήκους ροής φαίνεται να είναι ελεύθερη από την  $F$  ή τη  $G$ , ώστε το διάγραμμα είναι ελεύθερο κατανομής.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τα  $ARL$ ,  $VAR$  και  $FAR$  των 2-of-2 DR και 2-of-2 KL διαγραμάτων ελέγχου.

- $ARL$ ,  $VAR$  και  $FAR$  του 2-of-2 DR διαγράμματος:

Οι ζητούμενες ποσότητες εξάγονται ευκολότερα με δέσμευση, σημειώνοντας ότι δοθέντων των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ , η τ.μ.  $T_2$  έχει μια γεωμετρική κατανομή τάξης 2 [11].

Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της  $T_2$  είναι

$$\begin{aligned} E(T_2 | X_{a:m} = x_1, X_{b:m} = x_2) &= \frac{1+p}{p^2} \quad \text{και} \\ VAR(T_2 | X_{a:m} = x_1, X_{b:m} = x_2) &= \frac{1-5(1-p)p^2 - p^5}{(1-p)^2 p^4} \end{aligned} \quad (3.44)$$

όπου  $p = p(x_1, x_2, j, G) = 1 - [G_j(x_2) - G_j(x_1)] = 1 - [I_{G(x_2)}(j, n-j+1) - I_{G(x_1)}(j, n-j+1)]$ .

Έτσι, το αδέσμευτο  $ARL$  για το 2-of-2 DR διάγραμμα δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} ARL_{DR} &= E_{X_{a:m}, X_{b:m}} E(T_2 | X_{a:m}, X_{b:m}) \\ &= \int_0^1 \int_0^y \left[ \frac{2 - \{G_j(F^{-1}(y)) - G_j(F^{-1}(x))\}}{[1 - \{G_j(F^{-1}(y)) - G_j(F^{-1}(x))\}]^2} \right] f_{a,b}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^y \left[ \frac{2 - \{I_{GF^{-1}(y)}(j, n-j+1) - I_{GF^{-1}(x)}(j, n-j+1)\}}{[1 - \{I_{GF^{-1}(y)}(j, n-j+1) - I_{GF^{-1}(x)}(j, n-j+1)\}]^2} \right] f_{a,b}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (3.45)$$

Το  $ARL_0$  λαμβάνεται με αντικατάσταση της  $F = G$  στην (3.45).

Η αδέσμευτη διακύμανση της κατανομής του μήκους ροής για το 2-of-2 DR διάγραμμα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$VAR_{DR} = E_{X_{a:m}, X_{b:m}} VAR(T_2 | X_{a:m}, X_{b:m}) + VAR_{X_{a:m}, X_{b:m}} (E(T_2 | X_{a:m}, X_{b:m})) \quad (3.46)$$

όπου οι τύποι της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής και της διακύμανσης δίνονται στη (3.44). Ο τύπος για την εντός ελέγχου αδέσμευτη διακύμανση μπορεί να ληφθεί με αντικατάσταση της  $F = G$  στην προκύπτουσα έκφραση. Οι τελικές εκφράσεις είναι πολύ περίπλοκες για να παρουσιαστούν εδώ.

Ο  $FAR$  του 2-of-2 DR διαγράμματος μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

$$\begin{aligned}
 FAR_{DR} &= P\{Y_{j:n}^{h-1} \leq X_{a:m}, Y_{j:n}^h \leq X_{a:m} \mid F = G\} + P\{Y_{j:n}^{h-1} \geq X_{b:m}, Y_{j:n}^h \geq X_{b:m} \mid F = G\} \\
 &+ P\{Y_{j:n}^{h-1} \geq X_{b:m}, Y_{j:n}^h \leq X_{a:m} \mid F = G\} + P\{Y_{j:n}^{h-1} \leq X_{a:m}, Y_{j:n}^h \geq X_{b:m} \mid F = G\} \\
 &= \int_0^1 [1 - I_y(j, n - j + 1)]^2 f_b(y) dy + \int_0^1 [I_x(j, n - j + 1)]^2 f_a(x) dx \\
 &+ 2 \int_0^1 \int_0^y (1 - I_y(j, n - j + 1)) I_x(j, n - j + 1) f_{a,b}(x, y) dx dy
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

όπου  $f_a(x)$  και  $f_b(x)$  είναι οι σ.π.π. των  $beta(a, m - a + 1)$  και  $beta(b, m - b + 1)$  κατανομών, αντίστοιχα.

- $ARL$ ,  $VAR$  και  $FAR$  του 2-of-2  $KL$  διαγράμματος:

Δοθέντων των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ , η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της  $T'_2$  είναι

$$E(T'_2 \mid X_{a:m}, X_{b:m}) = \frac{1}{p - \frac{p_U}{1+p_U} - \frac{p_L}{1+p_L}} = \frac{1}{\frac{p_U^2}{1+p_U} - \frac{p_L^2}{1+p_L}} \tag{3.48}$$

όπου οι  $p_L$  και  $p_U$  ορίζονται στις (3.36) και (3.37), αντίστοιχα, και η  $p = p_L + p_U$  (να σημειωθεί η ελάχιστη διαφορά στον συμβολισμό του Klein [41], αυτός ορίζει την  $p$  να είναι η πιθανότητα μη σήματος, ενώ οι Chakraborti, Eryilmaz και Human [22] όρισαν την  $p$  να είναι η πιθανότητα σήματος).

Στη συνέχεια, βρίσκοντας τον μέσο όρο στην κατανομή των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$ , το  $ARL$  του 2-of-2  $KL$  διαγράμματος λαμβάνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 ARL_{KL} &= \int_0^1 \int_0^y \left[ \frac{(1 + (1 - G_j(F^{-1}(y)) - G_j(F^{-1}(x))))}{(G_j(F^{-1}(x)))^2 (1 + (1 - G_j(F^{-1}(y)))) + (1 - G_j(F^{-1}(y)))^2 (1 + G_j(F^{-1}(x)))} \right] \\
 &\times f_{a,b}(x, y) dx dy
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Σημειώνοντας ότι  $G_j(F^{-1}(x)) = I_{GF^{-1}(x)}(j, n - j + 1)$ , το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής μπορεί να ληφθεί αντικαθιστώντας  $F = G$  στην (3.49).

Προκειμένου να υπολογιστεί η διακύμανση της κατανομής του μήκους ροής, να σημειωθεί ότι αν οι  $Z$  είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανομημένες, η μη κεντρική ροπή 2<sup>ης</sup> τάξης της  $T'_2$  δίνεται από την  $\underline{\xi}(I + N)(I - N)^{-2} \underline{1}'$  [27].

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα δοθέντων των  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$  και το τύπο για την αδέσμευτη διακύμανση από τους τύπους της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής και της διακύμανσης που έχουν δειχθεί νωρίτερα, μπορεί να υπολογιστεί η αδέσμευτη διακύμανση και η κατανομή του μέσου όρου του 2-of-2  $KL$

διαγράμματος. Από αυτό, η αδέσμευτη διακύμανση της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής μπορεί να βρεθεί αντικαθιστώντας  $F=G$ . Όπως στην περίπτωση του  $DR$  διαγράμματος, η έκφραση για την αδέσμευτη διακύμανση είναι περίπλοκη και δεν παρουσιάζεται εδώ.

Το  $FAR$  για το  $KL$  διάγραμμα δίνεται από τη σχέση

$$FAR_{KL} = P\{Y_{jn}^{h-1} \geq X_{b,m}, Y_{jn}^h \geq X_{b,m} | F=G\} + P\{Y_{jn}^{h-1} \leq X_{a,m}, Y_{jn}^h \leq X_{a,m} | F=G\} \quad (3.50)$$

$$= \int_0^1 [1 - I_y(j, n-j+1)]^2 f_b(y) dy + \int_0^1 [I_x(j, n-j+1)]^2 f_a(x) dx$$

Για την πρακτική εφαρμογή των προτεινόμενων διαγραμμάτων είναι απαραίτητα τα όρια ελέγχου, που σημαίνει ότι θα πρέπει να βρεθούν οι δείκτες  $a$  και  $b$ , ( $1 \leq a < b \leq n$ ), αντίστοιχα, των διατεταγμένων στατιστικών παρατηρήσεων του δείγματος αναφοράς. Αφού  $ARL_0 = 370$  είναι μια τυπική τιμή που χρησιμοποιείται στην βιομηχανία, θα πρέπει να λυθεί, για παράδειγμα,  $ARL_{0,DR} = 370$  για το 2-of-2  $DR$  διάγραμμα (και  $ARL_{0,KL} = 370$  για το 2-of-2  $KL$  διάγραμμα) για  $a$  και  $b$ . Οι εκφράσεις του  $ARL_0$  λαμβάνονται από τις (3.45) και (3.49), αντίστοιχα, αντικαθιστώντας  $F=G$ . Αφού η διάμεσος του δείγματος ελέγχου Φάσης II χρησιμοποιείται ως στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού και το μέγεθος του δείγματος θεωρείται περιττός αριθμός, φαίνεται λογικό να χρησιμοποιηθούν συμμετρικά όρια [20] και λαμβάνεται  $b = m - a + 1$ , έτσι ώστε μόνο μία σταθερά  $a$  να πρέπει να καθορισθεί. Οι λύσεις στις εξισώσεις λαμβάνονται χρησιμοποιώντας το πακέτο λογισμικού *Mathcad*.

Στους ΠΙΝΑΚΕΣ 3.6 και 3.7 εμφανίζονται οι διάφορες επιλογές των σταθερών  $a$  και  $b$  για το 2-of-2  $DR$  και το 2-of-2  $KL$  διάγραμμα, για δοθέν  $ARL_0$  στην περιοχή των 300 και 500, όταν τα δείγματα αναφοράς μεγέθους  $m=50, 100, 200$  και 500 χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των ορίων ελέγχου Φάσης I και τα όρια αυτά χρησιμοποιούνται στη παρακολούθηση της Φάσης II με τη χρήση της διαμέσου των δειγμάτων (ελέγχου) μεγέθους  $n=5, 7$  ή  $9$ , αντίστοιχα. Έτσι  $j$  είναι ίσο με 3, 4 και 5, αντίστοιχα. Για κάθε συνδυασμό των τιμών των  $n, j$  και  $m$  οι πίνακες απεικονίζουν (σε κάθε κελί) ένα συνδυασμό των επιτευχθέντων τιμών του  $ARL_0$ , των επιτευχθέντων τιμών του  $FAR$  και των τιμών του  $(a,b)$ , όπου οι τιμές του  $ARL_0$

είναι κοντά στις καθορισμένες τιμές 300 και 500. Να σημειωθεί ότι, οι τιμές αυτές (στην περιοχή του 300 και του 500, οι οποίες μπορεί να θεωρηθούν λογικά μεγάλες), παρέχονται επειδή είναι σπάνιο να είναι σε θέση να επιτύχει ένα  $ARL_0$  (ή  $FAR$ ) ακριβώς όπως καθορίζεται με τα μη παραμετρικά διαγράμματα καθώς η εντός ελέγχου κατανομή της στατιστικής συνάρτησης σχεδιασμού είναι διακριτή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6  $ARL_0$ ,  $FAR$  και σταθερές  $(a, b)$  για το 2-of-2 DR διάγραμμα<sup>11</sup>.

$j = 3, n = 5$				$j = 4, n = 7$				$j = 5, n = 9$			
$m = 50$	100	200	500	$m = 50$	100	200	500	$m = 50$	100	200	500
605.44	548.99	537.62	536.72	597.80	509.54	597.72	526.08	976.53	739.47	558.51	528.95
0.0072	0.0040	0.0029	0.0023	0.0090	0.0048	0.0027	0.0024	0.0084	0.0040	0.0031	0.0024
(8, 43)	(15, 86)	(29, 172)	(71, 430)	(10, 41)	(19, 82)	(36, 165)	(90, 411)	(11, 40)	(21, 80)	(42, 159)	(104, 397)
275.30	373.31	443.56	496.90	264.91	345.93	490.44	487.01	383.92	481.18	456.18	488.41
0.0121	0.0055	0.0034	0.0025	0.0150	0.0065	0.0033	0.0026	0.0144	0.0056	0.0037	0.0026
(9, 42)	(16, 85)	(30, 171)	(72, 429)	(11, 40)	(20, 81)	(37, 164)	(91, 410)	(12, 39)	(22, 79)	(43, 158)	(105, 396)
	261.69	368.80	460.60	241.21	405.20	451.33	172.47	322.26	375.04	451.43	
	0.0074	0.0040	0.0026	0.0088	0.0039	0.0028	0.0236	0.0077	0.0044	0.0028	
	(17, 84)	(31, 170)	(73, 428)	(21, 80)	(38, 163)	(92, 409)	(13, 38)	(23, 78)	(44, 157)	(106, 395)	
		308.82	427.48			336.97	418.70		221.57	310.28	417.68
		0.0047	0.0028			0.0046	0.0030		0.0104	0.0053	0.0030
		(32, 169)	(74, 427)			(39, 162)	(93, 408)		(24, 77)	(45, 156)	(107, 394)
		260.37	397.20			281.98	388.83		258.24	386.83	
		0.0056	0.0031			0.0054	0.0032		0.0062	0.0033	
		(33, 168)	(75, 426)			(40, 161)	(94, 407)		(46, 155)	(108, 393)	
		369.50				361.45				358.60	
		0.0033				0.0034				0.0035	
		(76, 425)				(95, 406)				(109, 392)	
		344.12				336.33				332.75	
		0.0035				0.0037				0.0038	
		(77, 424)				(96, 405)				(110, 391)	
		320.83					313.25			309.06	
		0.0037					0.0039			0.0041	
		(78, 423)					(97, 404)			(111, 390)	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7  $ARL_0$ ,  $FAR$  και σταθερές  $(a, b)$  για το 2-of-2 KL διάγραμμα<sup>12</sup>.

$j = 3, n = 5$				$j = 4, n = 7$				$j = 5, n = 9$			
$m = 50$	100	200	500	$m = 50$	100	200	500	$m = 50$	100	200	500
1010.37	650.75	559.01	524.39	985.39	594.56	504.01	506.61	1591.68	547.12	548.41	530.19
0.0048	0.0033	0.0026	0.0023	0.0063	0.0041	0.0031	0.0024	0.0062	0.0049	0.0031	0.0023
(8, 43)	(16, 85)	(32, 169)	(80, 421)	(10, 41)	(20, 81)	(40, 161)	(99, 402)	(11, 40)	(23, 78)	(45, 156)	(112, 389)
460.89	456.52	471.18	490.21	437.32	414.67	424.10	472.95	626.67	376.11	456.29	493.12
0.0079	0.0044	0.0031	0.0024	0.0102	0.0054	0.0036	0.0026	0.0103	0.0066	0.0036	0.0025
(9, 42)	(17, 84)	(33, 168)	(81, 420)	(11, 40)	(21, 80)	(41, 160)	(100, 401)	(12, 39)	(24, 77)	(46, 155)	(113, 388)
237.00	328.69	399.60	458.70	217.33	296.08	358.81	441.90	281.29	264.69	381.78	459.05
0.0123	0.0057	0.0036	0.0026	0.0160	0.0070	0.0042	0.0027	0.0165	0.0086	0.0042	0.0027
(10, 41)	(18, 83)	(34, 167)	(82, 419)	(12, 39)	(22, 79)	(42, 159)	(101, 400)	(13, 38)	(25, 76)	(47, 154)	(114, 387)
	242.15	340.87	429.62			305.16	413.24			321.15	427.69
	0.0074	0.0041	0.0027			0.0048	0.0029			0.0049	0.0029
	(19, 82)	(35, 166)	(83, 418)			(43, 158)	(102, 399)			(48, 153)	(115, 386)
		292.37	402.76			260.82	386.77			271.54	398.81
		0.0047	0.0029			0.0056	0.0031			0.0057	0.0031
		(36, 165)	(84, 417)			(44, 157)	(103, 398)			(49, 152)	(116, 385)
		377.91				362.28				372.18	
		0.0031				0.0033				0.0033	
		(85, 416)				(104, 397)				(117, 384)	
		354.91				339.62				347.61	
		0.0033				0.0035				0.0035	
		(86, 415)				(105, 396)				(118, 383)	
		333.60				318.62				324.92	
		0.0035				0.0037				0.0038	
		(87, 414)				(106, 395)				(119, 382)	
		313.83				299.16				303.95	
		0.0037				0.0040				0.0040	
		(88, 413)				(107, 394)				(120, 381)	

<sup>11</sup> Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009).

<sup>12</sup> Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009)

Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται στην περίπτωση του 2-of-2 *KL* διαγράμματος όπως μπορεί να φανεί από τις καταχωρήσεις στον ΠΙΝΑΚΑ 3.7. Αξίζει να σημειωθεί ότι, όταν κάποια στατιστική συνάρτηση διαφορετική της διάμεσου χρησιμοποιείται ως στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού Φάσης II, ο προσδιορισμός των σταθερών  $a$  και  $b$  είναι ένα πιο εμπλεκόμενο πρόβλημα, αφού στην περίπτωση αυτή θέτοντας  $b = m - a + 1$  καθίσταται αμφισβητήσιμο λόγω της έλλειψης συμμετρίας της εντός ελέγχου κατανομής [22].

### 3.7.3 Συγκρίσεις απόδοσης των 1-of-1, 2-of-2 *DR* και 2-of-2 *KL* διαγραμμάτων

Δεδομένου ότι τα 2-of-2 *DR* και 2-of-2 *KL* διαγράμματα είναι μη παραμετρικά διαγράμματα τύπου *Shewhart*, ο κύριος ανταγωνιστής τους είναι το βασικό 1-of-1 διάγραμμα ελέγχου προτεραιότητας. Οι κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν στις συγκρίσεις αποδόσεων είναι: η κανονική, η  $t$  και η *Gamma*. Η  $t$  κατανομή χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των επιδράσεων των βαρύτερων ουρών και η *Gamma* κατανομή χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη της επίδρασης της ασυμμετρίας. Για να είναι τα αποτελέσματα συγκρίσιμα, οι κατανομές ιεραρχήθηκαν έτσι ώστε κάθε μία να έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, ως εκ τούτου, χρησιμοποιήθηκαν οι κατανομές  $N(0,1)$ ,  $t(4)$  και  $Gamma(1,1)$ . Το παραμετρικό *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα περιλήφθηκε στην σύγκριση για την κανονική κατανομή, αλλά δεν περιλήφθηκε στην σύγκριση για την  $t$  και την *Gamma* κατανομή αφού το  $\bar{X}$  διάγραμμα δεν είναι ανθεκτικό στην μη κανονικότητα.

Οι ΠΙΝΑΚΕΣ 3.8 – 3.10 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα όταν ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 500$  χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των ορίων ελέγχου και για την παρακολούθηση της θέσης με δείγματα Φάσης II μεγέθους  $n = 5$ , χρησιμοποιώντας τη  $Y_{3,5}$ , τη διάμεσος τους, ως στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού. Τα διαγράμματα σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να επιτευχθεί ένα  $ARL_0$  κοντά στο 500. Δύο συνδυασμοί των σταθερών του διαγράμματος χρησιμοποιήθηκαν για κάθε μη παραμετρικό διάγραμμα για το οποίο το  $ARL_0$  ήταν ελαφρώς κάτω και ελαφρώς πάνω από την τιμή στόχο, 500.



ΠΙΝΑΚΑΣ 3.8  $ARL$  και  $SDRL$  για τα 2-of-2 DR, 2-of-2 KL, και το βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας και το Shewhart διάγραμμα για την κανονική κατανομή όταν  $m = 500$ ,  $j = 3$ ,  $n = 5$ <sup>13</sup>.

Shift	2-of-2 DR				2-of-2 KL				Basic precedence (1-of-1)				Shewhart X-bar	
	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL
0.00	496.90	573.05	536.72	621.20	490.21	554.18	524.39	594.55	460.22	538.61	520.27	613.67	500.00	571.14
0.25	233.82	278.56	250.23	299.59	170.07	203.00	180.06	215.88	233.27	290.26	261.60	329.17	184.12	216.66
0.50	58.22	66.10	61.33	69.99	39.37	43.17	41.11	45.28	70.42	85.43	77.73	95.38	43.38	48.51
0.75	17.55	17.85	18.23	18.64	12.99	12.60	13.39	13.06	23.74	27.01	25.79	29.64	13.12	13.71
1.00	7.36	6.41	7.56	6.63	5.99	4.90	6.12	5.04	9.58	10.11	10.26	10.93	5.19	4.93
1.50	2.88	1.52	2.91	1.55	2.67	1.26	2.69	1.29	2.66	2.21	2.76	2.34	1.67	1.08
2.00	2.13	0.49	2.14	0.50	2.10	0.41	2.10	0.42	1.36	0.72	1.39	0.75	1.09	0.32
2.50	2.01	0.14	2.01	0.15	2.01	0.12	2.01	0.12	1.06	0.26	1.07	0.27	1.01	0.08
3.00	2.00	0.03	2.00	0.03	2.00	0.02	2.00	0.02	1.01	0.08	1.01	0.09	1.00	0.01
Chart constants	(a = 72, b = 429)		(a = 71, b = 430)		(a = 81, b = 420)		(a = 80, b = 421)		(a = 25, b = 476)		(a = 24, b = 477)		3.0845	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.9  $ARL$  και  $SDRL$  για το 2-of-2 DR, 2-of-2 KL, και το βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας για την  $t(4)$  κατανομή όταν  $m = 500$ ,  $j = 3$ ,  $n = 5$ <sup>14</sup>.

Shift	2-of-2 DR				2-of-2 KL				Basic precedence (1-of-1)			
	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL
0.00	496.90	573.05	536.72	621.20	490.21	554.18	524.39	594.55	460.22	538.61	520.27	613.67
0.25	200.92	248.00	215.95	268.18	138.19	170.25	146.90	182.03	288.43	370.47	328.18	426.13
0.50	38.68	45.31	40.98	48.41	25.09	27.66	26.28	29.19	102.82	143.88	117.63	167.75
0.75	10.01	9.77	10.41	10.26	7.43	6.66	7.65	6.92	32.84	45.71	37.43	53.44
1.00	4.26	3.11	4.35	3.22	3.61	2.36	3.67	2.43	11.19	14.51	12.58	16.84
1.50	2.23	0.67	2.24	0.68	2.17	0.55	2.17	0.56	2.25	1.97	2.40	2.20
2.00	2.02	0.19	2.02	0.20	2.02	0.16	2.02	0.16	1.16	0.46	1.18	0.49
2.50	2.00	0.06	2.00	0.06	2.00	0.05	2.00	0.05	1.02	0.13	1.02	0.14
3.00	2.00	0.02	2.00	0.02	2.00	0.02	2.00	0.02	1.00	0.04	1.00	0.04
Chart constants	(a = 72, b = 429)		(a = 71, b = 430)		(a = 81, b = 420)		(a = 80, b = 421)		(a = 25, b = 476)		(a = 24, b = 477)	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.10  $ARL$  και  $SDRL$  για το 2-of-2 DR, 2-of-2 KL, και το βασικό (1-of-1) διάγραμμα προτεραιότητας για την  $Gamma(1,1)$  κατανομή όταν  $m = 500$ ,  $j = 3$ ,  $n = 5$ <sup>15</sup>.

Shift	2-of-2 DR				2-of-2 KL				Basic precedence (1-of-1)			
	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL	ARL	SDRL
0.00	496.90	573.05	536.72	621.20	490.21	554.18	524.39	594.55	460.22	538.61	520.27	613.67
0.25	233.82	815.92	250.23	887.98	310.12	405.49	331.64	436.02	527.27	730.48	600.16	844.59
0.50	58.22	216.59	61.33	234.84	88.52	111.41	94.24	119.33	255.49	351.96	290.46	406.50
0.75	17.55	61.43	18.23	66.27	28.03	33.05	29.65	35.23	124.76	170.53	141.61	196.68
1.00	7.36	18.96	7.56	20.33	10.26	10.74	10.75	11.39	61.56	83.20	69.72	95.80
1.50	2.88	2.30	2.91	2.45	2.61	1.34	2.66	1.42	15.70	20.35	17.67	23.33
2.00	2.13	0.13	2.14	0.15	2.00	0.03	2.00	0.04	4.47	5.19	4.96	5.92
2.50	2.01	0.00	2.01	0.00	2.00	0.00	2.00	0.00	1.63	1.32	1.75	1.52
3.00	2.00	0.00	2.00	0.00	2.00	0.00	2.00	0.00	1.03	0.23	1.05	0.29
Chart constants	(a = 72, b = 429)		(a = 71, b = 430)		(a = 81, b = 420)		(a = 80, b = 421)		(a = 25, b = 476)		(a = 24, b = 477)	

Οι ΠΙΝΑΚΕΣ 3.8 - 3.10 δείχνουν αμφότερα το  $ARL$  και την  $SDRL$  (η μετατόπιση αναφέρεται σε μια μετατόπιση στο μέσο). Από τον ΠΙΝΑΚΑ 3.8 φαίνεται ότι ακόμη υπό την κανονική κατανομή, τα μη παραμετρικά διαγράμματα μπορεί να είναι αρκετά αποτελεσματικά. Το 2-of-2 KL διάγραμμα είναι σχεδόν εξίσου αποτελεσματικό όσο το  $\bar{X}$  διάγραμμα, με ένα χαμηλότερο  $ARL$  αλλά μια ελαφρώς

<sup>13</sup> Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009)

<sup>14</sup> Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009)

<sup>15</sup> Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009)

υψηλότερη  $SDRL$ , ιδίως για μικρές μετατοπίσεις. Όταν η κατανομή είναι  $t(4)$ , που είναι συμμετρική αλλά με βαρύτερες ουρές από την κανονική, ο ΠΙΝΑΚΑΣ 3.9 δείχνει ότι αμφότερα τα 2-of-2  $DR$  και 2-of-2  $KL$  διαγράμματα αποδίδουν καλύτερα από το βασικό 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, με το 2-of-2  $KL$  διάγραμμα να είναι το καλύτερο. Έτσι, τα δύο νέα μη παραμετρικά διαγράμματα τύπου *Shewhart* με κανόνες σηματοδότησης παρέχουν καλύτερες εναλλακτικές λύσεις, ειδικά για τις μικρότερες μετατοπίσεις. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και στην περίπτωση μιας δεξιάς ασύμμετρης κατανομής όπως η  $Gamma(1,1)$ , που δείχνεται στον ΠΙΝΑΚΑ 3.10.

Ως εκ τούτου, οι κανόνες σηματοδότησης τύπου ροών ενισχύουν την ευαισθησία του διαγράμματος σε μια μετατόπιση της θέσης. Το κέρδος στην αποτελεσματικότητα μπορεί να είναι σημαντικό. Για παράδειγμα, για την  $t(4)$  κατανομή για μία μετατόπιση του 0.5, οι τιμές του  $ARL$  των 1-of-1, 2-of-2  $DR$  και 2-of-2  $KL$  διαγραμμάτων είναι 117.63, 40.98 και 26.28, αντίστοιχα, όταν οι αντίστοιχες τιμές του  $ARL_0$  είναι πολύ συγκρίσιμες, 520.27, 536.72 και 524.39, αντίστοιχα. Να σημειωθεί ότι στον ΠΙΝΑΚΑ 3.10 για τη  $Gamma(1,1)$  κατανομή, το 2-of-2  $DR$  και το 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας εμφανίζουν ελαφρώς μια παράξενη συμπεριφορά στο ότι αμφότερες οι τιμές των  $ARL$  και  $SDRL$  πρώτα αυξάνουν από τις αντίστοιχες τιμές για την εντός ελέγχου περίπτωση για μία μετατόπιση του 0.25, στη συνέχεια οι τιμές των  $ARL$  και  $SDRL$  μειώνονται για αυξημένες μετατοπίσεις όπως θα ήταν αναμενόμενο.

Επειδή η κατανομή του μήκους ροής είναι ιδιαίτερα δεξιά ασύμμετρη, τα εκατοστημόρια, μαζί με τις τιμές των  $ARL$  και  $SDRL$ , θα πρέπει να εξεταστούν [17]. Για το σκοπό αυτό, ένα πλήθος των εκατοστημόριων της αδέσμευτης κατανομής του μήκους ροής υπολογίστηκαν, συμπεριλαμβανομένων των τριών τεταρτημόριων για καθεμία από τις τρεις κατανομές, αντίστοιχα, για τις εντός ελέγχου και τις εκτός ελέγχου περιπτώσεις.

Τα αποτελέσματα (δεν φαίνονται εδώ) οδηγούν στην ίδια γενική παρατήρηση ότι τα μη παραμετρικά διαγράμματα είναι πιο αποτελεσματικά από ότι το βασικό διάγραμμα προτεραιότητας, με το 2-of-2  $KL$  διάγραμμα να έχει ένα μικρό προβάδισμα. Για παράδειγμα, στην εκτός ελέγχου περίπτωση για μια μετατόπιση

του 0.5 στο μέσο της κανονικής κατανομής, τα τεταρτημόρια για το 2-of-2 *KL* διάγραμμα (με  $a=81$  και  $b=420$ ) είναι όλα μικρότερα: 7, 16 και 33, αντίστοιχα, σε σύγκριση με εκείνα του 2-of-2 *DR* διαγράμματος (με  $a=72$  και  $b=429$ ): 11, 24, και 50 και του 1-of-1 διαγράμματος προτεραιότητας (με  $a=25$  και  $b=476$ ): 23, 57, και 127. Αυτό δείχνει ότι το 2-of-2 *KL* διάγραμμα είναι κατά πολύ ανώτερο, δεδομένου ότι μικρότερα εκατοστημόρια στην εκτός ελέγχου περίπτωση σημαίνει ταχύτερα σήματα, στο 1-of-1 διάγραμμα και είναι μάλλον ανώτερο από το 2-of-2 *DR* διάγραμμα [22].

Εν κατακλείδι, τα 2-of-2 *DR* και 2-of-2 *KL* μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* βελτιώνουν την απόδοση του 1-of-1 διαγράμματος ελέγχου προτεραιότητας. Επειδή αυτά τα διαγράμματα βασίζονται σε διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις, μπορούν να εφαρμοστούν μόλις οι απαιτούμενες διατεταγμένες στατιστικές παρατηρήσεις παρατηρούνται και αυτό μπορεί να αποτελέσει πλεονέκτημα σε ορισμένες εφαρμογές. Οι σταθερές σχεδιασμού παρέχονται για τα όρια ελέγχου μαζί με τις επιτευχθείσες τιμές των  $ARL_0$  και  $FAR$ . Αυτές θα βοηθήσουν στην πράξη. Η απόδοση των 2-of-2 *DR* και 2-of-2 *KL* διαγραμμάτων φαίνεται να είναι καλύτερη από το *Shewhart*  $\bar{X}$  διάγραμμα και το 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας. Τα 2-of-2 *DR* και 2-of-2 *KL* διαγράμματα μπορούν έτσι να είναι χρήσιμα και συνιστάται στην πράξη. Η επιλογή μεταξύ των αυτών των διαγραμμάτων θα εξαρτάται από το είδος της αλλαγής της διεργασίας που αναμένει κανείς να ανιχνεύσει. Το 2-of-2 *KL* διάγραμμα είναι καταλληλότερο όταν η διαδικασία μετατοπίζεται είτε προς τα πάνω ή προς τα κάτω (μετατόπιση προς μία κατεύθυνση), ενώ το 2-of-2 *DR* διάγραμμα είναι ικανοποιητικό, εάν η διεργασία ταλαντεύεται από ένα χρονικό σημείο στο άλλο. Έτσι, γενικά, το διάγραμμα που ταιριάζει καλύτερα με το υποτιθέμενο ή αναμενόμενο μοτίβο μετατόπισης πρέπει να επιλέγεται στην πράξη.

Τέλος, μπορούν γίνουν περαιτέρω βελτιώσεις του διαγράμματος προτεραιότητας χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα  $k$ -of- $k$  κανόνες,  $k \geq 3$ . Η τ.μ. του μήκους ροής σχετίζεται με τους  $k$ -of- $k$  διαγράμματα ορίζεται ως  $T_k = \min\{t: Z_{t-k+1} = 1, \dots, Z_t = 1\}$ . Παρόμοια, οι  $k$ -of- $m$ ,  $k \leq m$  κανόνες είναι επίσης πιθανοί. Παρά το γεγονός ότι, οι κανόνες αυτοί μπορεί να βελτιώσουν την ευαισθησία των διαγραμμάτων, τα

2-of-2 διαγράμματα που μελετήθηκαν εδώ φαίνεται περισσότερο ελκυστικά από πρακτικής απόψεως.

### 3.8 Διαγράμματα ελέγχου χρήσει συναρτήσεων ροών και αθροιστικών βαθμολογικών συναρτήσεων

#### 3.8.1 Βασικές Αρχές

Οι Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutras [14] εισήγαγαν τρία νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που χρησιμοποιούν συναρτήσεις ροών (*runs*) και αθροιστικές βαθμολογικές συναρτήσεις τύπου *Wilcoxon* (*Wilcoxon-type rank-sum statistics*). Το πρώτο διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιεί το μέγιστο μήκος ροής των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου στο από κοινού δείγμα, ενώ το δεύτερο διάγραμμα λαμβάνει υπόψη το πλήθος των ροών των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου, των οποίων το μήκος υπερβαίνει μια προκαθορισμένη τιμή. Τέλος, το τρίτο διάγραμμα στηρίζεται στο άθροισμα των βαθμών των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου, που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου.

Τα όρια ελέγχου των νέων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου καθορίζονται από ένα δείγμα αναφοράς που προέρχεται από μια διεργασία η οποία είναι εντός ελέγχου. Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_m$  είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους  $m$  από μια εντός ελέγχου (αθροιστική) κατανομή  $F_X(x) = F(x)$  και υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούνται ως όρια ελέγχου δύο καθορισμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις, έστω  $X_{a:m}, X_{b:m}$ , δηλαδή,

$$\begin{aligned} LCL &= X_{a:m} \\ UCL &= X_{b:m} \end{aligned} \quad 1 \leq a < b \leq m \quad (3.51)$$

Οι παράμετροι  $a, b$  είναι παράμετροι σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων και ο προσδιορισμός τους επιτυγχάνεται μέσω δύο προσεγγίσεων. Η πρώτη απαιτεί να επιτευχθεί ένα καθορισμένο  $FAR$  ενώ η δεύτερη στηρίζεται σε μια προκαθορισμένη τιμή του  $ARL_0$ , όπως 370 ή 500. Αξίζει να σημειωθεί ότι το

$ARL_0$  των τριών μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι το ίδιο για όλες τις (εντός ελέγχου) συνεχείς κατανομές.

Έστω ότι συλλέγονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη διεργασία (και επίσης ανεξάρτητα του δείγματος αναφοράς). Αν  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι το δείγμα ελέγχου μεγέθους  $n$  και  $F_Y(x) = G(x)$  είναι η α.σ.κ., ο στόχος είναι η ανίχνευση μιας πιθανής μετατόπισης της εντός ελέγχου κατανομής από την  $F(x)$  στη  $G(x)$ , ήτοι, ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης  $H_0 : F(x) = G(x)$  έναντι της αμφίπλευρης εναλλακτικής  $H_1 : F(x) \neq G(x)$ .

Η μεθοδολογία [14] για τα τρία μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου μπορεί να συνοψιστεί ως εξής. Υπό την μηδενική υπόθεση  $H_0 : F = G$  (δηλαδή, αν αμφότερα το δείγμα αναφοράς και το δείγμα ελέγχου προέρχονται από την ίδια κατανομή), το πλήθος των  $Y_j$  παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου που βρίσκονται μεταξύ διαδοχικών  $X$  – παρατηρήσεων δεν θα πρέπει να επιτυγχάνουν «ακραίες τιμές», με τις ακραίες τιμές να καθορίζονται βάσει της αναλογίας  $n/m$ . Συνεπώς, δύο εύλογες στατιστικές συναρτήσεις που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να καθοριστεί αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου ή όχι είναι οι εξής:

- Το μέγιστο μήκος ροής των  $Y$  – παρατηρήσεων που εμφανίζονται μεταξύ των ορίων ελέγχου.
- Το πλήθος των ροών των  $Y$  – παρατηρήσεων (μεταξύ των ορίων ελέγχου) των οποίων το μήκος υπερβαίνει το προκαθορισμένο επίπεδο  $k$ .

Μια τρίτη επιλογή, διαφορετικής φύσης από τις δύο προαναφερθείσες είναι:

- Το άθροισμα των βαθμών (στο από κοινού δείγμα των  $X$  και  $Y$  παρατηρήσεων) των  $Y$  – παρατηρήσεων που βρίσκονται ανάμεσα στα όρια ελέγχου (ως εκ τούτου αντιστοιχεί στη γνωστή αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon*).

Οι τρεις στατιστικές συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν από τις στατιστικές συναρτήσεις υπέρβασης (*exceedance statistics*) [14]. Πιο συγκεκριμένα, έστω  $M_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  είναι το πλήθος των  $Y_j$  παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου που

βρίσκονται μεταξύ της  $(i-1)$ -οστής και  $i$ -οστής διατεταγμένης παρατήρησης του  $X$ -δείγματος (σύμβαση:  $X_{(0)} = -\infty$ ). Προφανώς, οι  $M_i$  είναι τα μήκη των ρών των  $Y$ -παρατηρήσεων μεταξύ διαδοχικών  $X$ -παρατηρήσεων. Οι τρεις στατιστικές συναρτήσεις δίνονται από τις σχέσεις [13]:

$$R = \max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b) \quad (3.52)$$

$$N_k = |\{M_i : a+1 \leq i \leq b \text{ και } M_i \geq k\}| \quad (3.53)$$

$$W = \sum_{i=a+1}^b W_i \quad (3.54)$$

όπου  $k$  είναι μια πρόσθετη παράμετρος σχεδιασμού που λαμβάνει ακέραιες τιμές και  $W_i$  είναι το άθροισμα των βαθμών των  $Y$ -παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ των  $X_{(i-1)}$  και  $X_{(i)}$ . Η αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon* με τη βοήθεια των  $M_i$ , δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=a+1}^b M_i \right)^2 + \sum_{i=a+1}^b i M_i + (M_0 + a - \frac{3}{2}) \sum_{i=a+1}^b M_i \quad (3.55)$$

όπου η  $M_0 = \sum_{i=1}^a M_i$  είναι το πλήθος των παρατηρήσεων του  $Y$ -δείγματος πριν το *LCL*.

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $R$ , η διεργασία θα κηρύσσεται εντός ελέγχου, αν ισχύουν οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

$$R \leq r \quad \text{και} \quad M_0 \leq r_0 \quad (3.56)$$

όπου  $r, r_1$  είναι οι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος.

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $N_k$ , η διεργασία θα κηρύσσεται εντός ελέγχου, αν ισχύουν οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

$$N_k \leq r_1 \quad \text{και} \quad M_0 \leq r_0 \quad (3.57)$$

όπου  $r_1, r_0$  είναι οι παράμετροι σχεδιασμού.

- Τέλος, αν χρησιμοποιείται η βαθμολογική συνάρτηση τύπου *Wilcoxon*  $W$  για την παρακολούθηση της διεργασίας, η διεργασία κηρύσσεται εντός ελέγχου αν ισχύουν οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

$$W \leq w \quad \text{και} \quad M_0 \leq r_0 \quad (3.58)$$

όπου  $w, r_0$  είναι οι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος.

Όσον αφορά το  $W$  – διάγραμμα, αξίζει να αναφερθεί ότι, η μέγιστη δυνατή τιμή της  $W$  προκύπτει όταν όλες οι  $Y$  – παρατηρήσεις εμπίπτουν στο διάστημα  $(X_{b-1:m}, X_{b:m})$ . Σε αυτή τη περίπτωση, οι βαθμοί τους είναι  $(b-1) + j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , με την αντίστοιχη αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση να γίνεται

$$n(b-1) + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+2b-1)}{2} \quad (3.59)$$

Προφανώς, η μικρότερη δυνατή τιμή της  $W$  ισούται με 0, η οποία επιτυγχάνεται όταν καμία  $Y$  – παρατήρηση δεν εμπίπτει μεταξύ των  $LCL$  και  $UCL$ , και συνεπώς η υποστήριξη της κατανομής της  $W$  [13] είναι

$$R_W = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{n(n+2b-1)}{2} \right\} \quad (3.60)$$

Στην συνέχεια παραθέτουμε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού των νέων διαγραμμάτων ελέγχου. Θα μελετήσουμε την εντός ελέγχου κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων που απεικονίζονται στα τρία διαγράμματα ελέγχου. Έστω ότι το δείγμα αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_m$  μεγέθους  $m$  προήλθε από την εντός ελέγχου κατανομή  $F_X(x) = F(x)$  και ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα ελέγχου  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  από την κατανομή  $F_Y(x) = G(x)$ . Η ακριβής κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων  $R$  και  $N_k$  μπορεί να προκύψει από την από κοινού κατανομή των  $(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ , ενώ η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $W$  μπορεί να προκύψει από την από κοινού κατανομή των  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$ . Οι Balakrishnan και Frattina [10] και οι Balakrishnan και Ng [12], πρότειναν, για την εφαρμογή ενός ελέγχου προτεραιότητας τη σύγκριση δύο κατανομών  $F_X$ ,  $F_Y$ , το μέγιστο στατιστικό έλεγχο προτεραιότητας (*maximal precedence test*). Η στατιστική συνάρτηση  $M$  που χρησιμοποιείται στον παραπάνω έλεγχο, ορίζεται ως το μέγιστο πλήθος των  $Y$  – παρατηρήσεων που συμβαίνουν πριν την πρώτη, μεταξύ πρώτης και δεύτερης, ..., μεταξύ της  $(r-1)$ -οστής και  $r$ -οστής διατεταγμένης παρατήρησης του  $X$  – δείγματος. Επομένως, ισχύει ότι  $M = \max(M_1, M_2, \dots, M_r)$  και η κατανομής της, υπό τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X = F_Y$ , μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια της από κοινού κατανομής των

$(M_1, M_2, \dots, M_r)$ . Έτσι καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις για το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού.

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $R$  τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού είναι:

$$FAR = 1 - P(R \leq r \text{ και } M_0 \leq r_0) \quad (3.61)$$

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $N_k$  τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού είναι:

$$FAR = 1 - P(N_k \leq r_1 \text{ και } M_0 \leq r_0) \quad (3.62)$$

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $W$  τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού είναι:

$$FAR = 1 - P(W \leq w \text{ και } M_0 \leq r_0) \quad (3.63)$$

Αξίζει να αναφερθεί η μελέτη των εκτός ελέγχου κατανομών των τριών στατιστικών συναρτήσεων που ορίστηκαν προηγουμένως. Έστω ότι οι παρατηρήσεις  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  του τυχαίου δείγματος προέρχονται από μια συνεχή κατανομή  $G(x)$ . Για τη γενική μορφή των παραπάνω τύπων, η πιθανότητα ότι ο κανόνας δεν παράγει ένα σήμα [14] είναι

$$p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F, G) = \sum_{(m_0, m_{a+1}, \dots, m_b) \in A} P(M_0 = m_0 \text{ και } M_j = m_j \text{ για } a+1 \leq j \leq b) \quad (3.64)$$

όπου  $\mathbf{c}$  είναι ένα διάνυσμα σταθερών που πρέπει να καθοριστούν έτσι ώστε ο κανόνας να ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις (π.χ. προκαθορισμένο  $FAR$  ή  $ARL_0$ ) και  $A$  είναι ένα διάστημα όπου οι τιμές του τυχαίου διανύσματος  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$  θα πρέπει να είναι σε διάταξη για το διάγραμμα για να μην παράγει ένα σήμα. Είναι σαφές ότι, το  $FAR$  είναι το συμπλήρωμα της  $p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F, G)$  για την ειδική περίπτωση όταν  $F = G$ , ήτοι

$$FAR = 1 - p(m, n, a, b; \mathbf{c}; F, F) \quad (3.65)$$

Οι Balakrishnan, Triantafyllou και Koutras [14] εξέτασαν την γενική περίπτωση, όταν οι  $X$  – και  $Y$  – παρατηρήσεις δεν ακολουθούν την ίδια κατανομή. Έστω  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  ένα τυχαίο διάνυσμα, με  $\mathbf{X}_{a:b} = (X_{a:m}, X_{a+1:m}, \dots, X_{b:m})$  ένα διατεταγμένο  $X$  – δείγμα που περιλαμβάνει τις  $X$  – παρατηρήσεις από την



$a$ -οστή έως την  $b$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση. Τότε οι ποσότητες  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$  είναι συναρτήσεις των  $\mathbf{Y}$  και  $\mathbf{X}_{ab}$  και επομένως έχουμε:

$$P_m = P(M_0(\mathbf{Y}; \mathbf{X}_{ab}) = m_0 \text{ και } M_j(\mathbf{Y}; \mathbf{X}_{ab}) = m_j \text{ για } a+1 \leq j \leq b) \quad (3.66)$$

Επίσης αν η διεργασία μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση, η πιθανότητα ότι το διάγραμμα δεν παράγει ένα σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση εξαρτάται από αμφότερες την εντός και εκτός ελέγχου κατανομή  $F(x)$  και  $G(x)$  αντίστοιχα. Εφόσον το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από τις  $F$  και  $G$ , μόνο μέσω της σύνθετης συνάρτησης  $G \circ F^{-1}$ , είναι δυνατή η λήψη των ακριβών εκφράσεων για το εκτός ελέγχου ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού στην περίπτωση που έχουμε εναλλακτικές τύπου *Lehmann*. Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας των  $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$  υπό την εναλλακτική τύπου *Lehmann*  $G(x) = (F(x))^\gamma$  δίνεται στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} p_m &= P(M_0 = m_0 \text{ και } M_j = m_j \text{ για } a+1 \leq j \leq b) = c_1 c_2 \gamma^{-(b-a+1)} \\ &\times \prod_{j=a}^{b-1} B\left(\frac{j+m_0+\sum_{i=a+1}^j m_i, m_{j+1}+1}{\gamma}\right) \\ &\times \sum_{l=0}^{m-b} (-1)^l \binom{m-b}{j} B\left(\frac{b+l+m_0+\sum_{i=a+1}^b m_i, n-m_0-\sum_{i=a+1}^b m_i+1}{\gamma}\right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

όπου

$$c_1 = \frac{m!}{(a-1)!(m-b)!}, \quad c_2 = \frac{n!}{m_0!(\prod_{j=a+1}^b m_j!)(n-m_0-\sum_{j=a+1}^b m_j!)} \quad (3.68)$$

και  $B(a, b)$  είναι η πλήρης συνάρτηση Βήτα[13].

Στα τρία μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που μελετώνται η κατανομή του μήκους ροής τους δεν είναι γεωμετρική, διότι τα συμβάντα παραγωγής σήματος για εκτός ελέγχου μετατόπιση της διεργασίας, δεν είναι ανεξάρτητα. Ωστόσο, κάνοντας χρήση της τεχνικής δέσμευσης του *Chakraborti* [16], μπορούμε να καταλήξουμε σε μια ακριβή σχέση της κατανομής του μήκους ροής. Η εντός ελέγχου κατανομή και το αντίστοιχο μέσο μήκος ροής  $ARL_0$  προκύπτουν [14] θέτοντας  $F = G$  και δίνεται από τη σχέση

$$ARL_0 = \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} \frac{1}{1-Q(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b)} f_{a,b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b \quad (3.69)$$

Η τελευταία ποσότητα μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά για κάθε επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού (δηλαδή των  $m, n, a, b$  και των παραμέτρων που προσδιορίζουν το σύνολο  $A \subseteq \{0,1,2,\dots\}^{b-a}$ . Το ίδιο επαληθεύεται για το εκτός έλεγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_1$ , υπό την προϋπόθεση ότι έχουν επιλεγεί συγκεκριμένες εντός και εκτός ελέγχου κατανομές  $F$  και  $G$ , αντίστοιχα. Όταν η εκτός ελέγχου κατανομή είναι μια εναλλακτική τύπου *Lehmann* της εντός ελέγχου κατανομής  $F$  της μορφής  $G(x) = (F(x))^\gamma$ , δεν χρειαζόμαστε τη συναρτησιακή μορφή της  $F(x)$ , καθώς σε αυτή την περίπτωση  $(GF(x)) = x^\gamma$  και συνεπώς

$$ARL_1 = \iint \dots \int_{0 \leq u_a \leq u_{a+1} \leq \dots \leq u_b \leq 1} \frac{1}{1 - Q(u_a^\gamma, u_{a+1}^\gamma, \dots, u_b^\gamma)} f_{a:b}(u_a, u_{a+1}, \dots, u_b) du_a du_{a+1} \dots du_b \quad (3.70)$$

### 3.8.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Η απόδοση ενός διαγράμματος συνήθως κρίνεται με τη βοήθεια της κατανομής του μήκους ροής και την ικανότητα παραγωγής ενός σήματος σε αμφότερες εντός και εκτός ελέγχου διεργασίες. Σε αυτή τη παράγραφο υλοποιούνται εκτεταμένοι αριθμητικοί υπολογισμοί για τα τρία διαγράμματα που αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και την αντοχή τους, τόσο σε εντός όσο και σε εκτός ελέγχου καταστάσεις. Στον ΠΙΝΑΚΑ 3.11, παρουσιάζονται τα ποσοστά συναγερμού (*alarm rates, AR*) των τριών διαγραμμάτων ελέγχου για διάφορες επιλογές των  $m, n$ . Οι παράμετροι σχεδιασμού  $a, b, r_0, r, k, w$  καθορίστηκαν κατάλληλα ώστε οι κανόνες να επιτυγχάνουν ένα τυπικό ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού  $FAR$  του 5% ( $FAR = 0.05$ ). Στη συνέχεια υπολογίζονται οι τιμές των  $AR$  για  $\gamma = 1/2, 1/4, 1/8$ .

Από τον ΠΙΝΑΚΑ 3.11, φαίνεται ότι τα τρία μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που μελετώνται, παρουσιάζουν παρόμοια απόδοση, αφού, για την ίδια σχεδόν τιμή  $FAR$ , πετυχαίνουν σχεδόν ίσες  $AR$  τιμές. Για το λόγο αυτό, οι υπολογισμοί που ακολουθούν, γίνονται μόνο σε ένα από αυτά τα διαγράμματα και συγκεκριμένα στο  $W$  – διάγραμμα, μιας και υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι τα άλλα δύο διαγράμματα, με κατάλληλες επιλογές των παραμέτρων σχεδιασμού, δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.11 Σύγκριση των  $AR$  των τριών διαγραμμάτων ελέγχου  
με  $FAR = 0.005$  και  $\gamma = 1/2, 1/4, 1/8$ <sup>16</sup>

$m$	$n$	$R$ -διάγραμμα				$N_2$ -διάγραμμα				$W$ -διάγραμμα						
		(LCL,UCL)	$r_o$	$r$	Ακριβές FAR	AR	(LCL,UCL)	$r_o$	$N_2$	Ακριβές FAR	AR	(LCL,UCL)	$w$	$r_o$	Ακριβές FAR	AR
100	5	(7,10)	2	2	0.0043	0.1201 0.5130 0.8486	(7,10)	2	1	0.0041	0.1193 0.5123 0.8483	(7,10)	70	2	0.0041	0.1196 0.5123 0.8483
	11	(10,13)	4	3	0.0049	0.24661 0.8279 0.9901	(10,13)	4	1	0.0047	0.2457 0.8277 0.9901	(10,13)	95	4	0.0048	0.2475 0.8288 0.9902
	25	(9,12)	7	4	0.0045	0.4668 0.9872 0.9901	(9,12)	7	1	0.0050	0.4680 0.9872 0.9999	(9,12)	123	7	0.0049	0.4753 0.9879 0.9999
200	5	(16,19)	2	2	0.0050	0.1409 0.5526 0.8689	(16,19)	2	1	0.0050	0.1408 0.5526 0.8689	(16,19)	65	2	0.0046	0.1326 0.5399 0.8631
	11	(21,24)	4	3	0.0045	0.2647 0.8488 0.99222	(21,24)	4	2	0.0044	0.2646 0.8488 0.9922	(21,24)	135	4	0.0048	0.2669 0.8497 0.9923
	25	(16,19)	6	5	0.0049	0.5678 0.9952 0.9999	(16,19)	6	2	0.0049	0.5677 0.9952 0.9999	(16,19)	190	6	0.0050	0.5688 0.9953 0.9999
500	5	(39,42)	2	1	0.0047	0.1374 0.5510 0.8690	(39,42)	2	2	0.0044	0.1367 0.5504 0.8689	(39,42)	100	2	0.0049	0.1381 0.5515 0.8692
	11	(33,36)	3	2	0.0048	0.3042 0.8911 0.9965	(33,36)	3	2	0.0048	0.3041 0.8911 0.9965	(33,36)	3	2	0.0049	0.3045 0.8912 0.9965
	25	(21,24)	4	4	0.0045	0.5907 0.9971 0.9999	(21,24)	4	2	0.0045	0.5907 0.9971 0.9999	(21,24)	150	4	0.0046	0.5915 0.9971 0.9999

Στον ΠΙΝΑΚΑ 3.12 παρουσιάζονται τα  $FAR$  του  $W$  – διαγράμματος για διάφορους σχεδιασμούς και επιλογές των παραμέτρων  $m$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $r_o$ ,  $w$ . Παρατηρώντας τις τιμές του ΠΙΝΑΚΑ 3.12 μπορούμε να κατασκευάσουμε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που πετυχαίνουν ένα προκαθορισμένο ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού, έστω  $f$ . Η χρήση έξι παραμέτρων  $m$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $r_o$ ,  $w$  στο διάγραμμα προσφέρει την ευελιξία να σταθεροποιήσουμε ορισμένες από αυτές και στη συνέχεια να αναζητήσουμε τη βέλτιστη επιλογή για τις άλλες, ή εναλλακτικά για έναν αποδεκτό συνδυασμό τους που ικανοποιεί ορισμένες απαιτήσεις.

<sup>16</sup> Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutras (2009).

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.12 FAR για ένα δοθέντα σχεδιασμό<sup>17</sup>.

n	r <sub>0</sub>	Δείγμα αναφοράς μεγέθους m												
		40			60			100			200			
		(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	(a,b)	w	FAR	
5	2	(7,11)	200	0.0471	(10,13)	45	0.0466	(15,19)	150	0.0292	(20,24)	80	0.0140	
			40	0.0597		30	0.0669		50	0.0464		42	0.0453	
			33	0.0900		23	0.0747		33	0.0696		40	0.0890	
	3	(13,17)	90	0.0499	(20,23)	150	0.0492	(15,19)	50	0.0201	(20,24)	43	0.0143	
			63	0.0601		80	0.0761		33	0.0451		42	0.0369	
			58	0.0923		44	0.0832		32	0.0857		27	0.0953	
	4	(16,20)	100	0.0249	(25,28)	55	0.0439	(25,29)	60	0.0185	(30,34)	63	0.0185	
			72	0.0430		54	0.0581		54	0.0323		62	0.0410	
			65	0.0987		53	0.0943		53	0.0604		27	0.0948	
	11	4	(7,12)	170	0.0443	(11,15)	140	0.0469	(15,19)	78	0.0331	(20,24)	85	0.0164
				100	0.0506		90	0.0556		68	0.0499		44	0.0416
				66	0.0978		55	0.0987		53	0.0960		43	0.0693
6		(10,15)	170	0.0152	(11,15)	100	0.0104	(18,22)	90	0.0143	(25,29)	55	0.0301	
			1022	0.0471		58	0.0486		79	0.0427		54	0.0458	
			79	0.0929		52	0.0913		42	0.0873		53	0.0770	
8		(15,20)	143	0.0472	(17,21)	130	0.0101	(21,25)	100	0.0130	(26,30)	70	0.0227	
			115	0.0749		84	0.0477		91	0.0457		56	0.0471	
			111	0.0961		78	0.0906		48	0.0916		55	0.0789	
25		8	(5,8)	85	0.0496	(10,13)	250	0.0337	(15,18)	155	0.0166	(19,22)	120	0.0104
				70	0.0834		130	0.0481		105	0.0471		81	0.0464
				66	0.0966		85	0.0998		73	0.0960		43	0.0877
	14	(8,12)	150	0.0428	(15,18)	200	0.0115	(28,31)	240	0.0155	(30,33)	130	0.0330	
			140	0.0567		146	0.0486		187	0.0431		127	0.0470	
			120	0.0972		114	0.0963		130	0.0946		67	0.0821	
	16	(12,16)	210	0.0444	(19,22)	210	0.0234	(32,35)	240	0.0155	(33,36)	160	0.0105	
			190	0.0665		185	0.0469		215	0.0431		140	0.0468	
			170	0.0998		143	0.0961		148	0.0946		73	0.0902	

Π.χ., αν έχουμε συλλέξει δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m=200$  και επιθυμούμε να εξετάσουμε τυχαία δείγματα μεγέθους  $n=25$  που εξάγονται από τη διεργασία, τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού σχεδόν ίσο με  $f=0.05$  μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας

- την 19<sup>η</sup> και 22<sup>η</sup> μικρότερη παρατήρηση στο δείγμα ελέγχου ( $a=19$ ,  $b=22$ ),  $w=81$  και  $r_0=8$  (με αντίστοιχο  $FAR=0.0464$ ).
- την 30<sup>η</sup> και 33<sup>η</sup> μικρότερη παρατήρηση στο δείγμα ελέγχου ( $a=30$ ,  $b=33$ ),  $w=127$  και  $r_0=14$  (με αντίστοιχο  $FAR=0.0470$ ).
- την 33<sup>η</sup> και 36<sup>η</sup> μικρότερη παρατήρηση στο δείγμα ελέγχου ( $a=33$ ,  $b=36$ ),  $w=140$  και  $r_0=16$  (με αντίστοιχο  $FAR=0.0468$ )

<sup>17</sup> Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutras (2009).

Εν συνεχεία, από τον ΠΙΝΑΚΑ 3.13 είναι δυνατό να εξάγουμε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις σχετικά με την απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος για την περίπτωση των εναλλακτικών τύπου *Lehmann*. Στο συγκεκριμένο πίνακα, υπολογίζονται τα ποσοστά συναγερμού για διάφορες επιλογές των παραμέτρων σχεδιασμού  $m, n, a, b, r_0, w$  και της παραμέτρου μετατόπισης  $\gamma > 0$ . Στην πραγματικότητα, οι σχεδιασμοί που παρουσιάζονται στον πίνακα ελέγχονται για την ικανότητα τους να ανιχνεύουν μετατοπίσεις από την εντός ελέγχου κατανομή. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, για την περίπτωση  $m=200, n=25$  που περιγράφηκε νωρίτερα, ο σχεδιασμός που αντιστοιχεί στις  $a=19, b=22, w=81, r_0=8$  παρουσιάζει το μεγαλύτερο ποσοστό σφάλματος για την ανίχνευση μιας μετατόπισης σε εναλλακτικές τύπου *Lehmann* με  $\gamma=1/3$  ( $AR=0.8868$ ) και  $\gamma=1/5$  ( $AR=0.9977$ ).

Στον ΠΙΝΑΚΑ 3.14 συγκρίνεται η απόδοση του  $W$  – διαγράμματος και του  $B-T-K$  [13] διαγράμματος χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά επίπεδα του  $FAR$  και διάφορες τιμές για τις παραμέτρους  $m, n$ . Παρατηρείται ότι, χρησιμοποιώντας το ίδιο  $FAR$ , το νέο διάγραμμα ελέγχου αποδίδει καλύτερα από το  $B-T-K$  διάγραμμα, όσον αφορά τις  $AR$  τιμές για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m=500$ , δείγματα ελέγχου μεγέθους  $n=5$  και για ένα προκαθορισμένο  $FAR=0.0027$ , το  $B-T-K$  διάγραμμα πετυχαίνει ποσοστά συναγερμού ίσα με 0.1197 (0.5116) για  $\gamma=0.4$  ( $\gamma=0.2$ ), ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά συναγερμού για το  $W$  – διάγραμμα είναι 0.2089 (0.6395), αντίστοιχα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.13 AR για ένα δοθέν σχεδιασμό<sup>18</sup>.

$n$	$r_0$	δείγμα αναφοράς μεγέθους $m$												
		40			60			100			200			
		(a,b)	w	AR	(a,b)	w	AR	(a,b)	w	AR	(a,b)	w	AR	
5	2	(7,11)	200	0.5858 0.8251	(10,13)	45	0.5910 0.8296	(15,19)	150	0.5484 0.8067	(20,24)	80	0.4367 0.7333	
			40	0.5967 0.8300		30	0.6011 0.8333		30	0.5661 0.8152		42	0.4907 0.7643	
			33	0.6340 0.8491		23	0.6228 0.8452		33	0.6054 0.8354		40	0.5259 0.7804	
		3	(13,17)	90	0.4886 0.7189	(20,23)	150	0.5037 0.7320	(15,19)	50	0.2474 0.5012	(20,24)	43	0.2071 0.4433
				63	0.4937 0.7217		80	0.5168 0.7386		33	0.3253 0.5641		42	0.2373 0.4658
				58	0.5211 0.7373		44	0.5352 0.7515		32	0.3660 0.5921		27	0.2752 0.4824
	4	(16,20)	100	0.2156 0.3912	(25,28)	55	0.2529 0.4295	(25,29)	60	0.1108 0.2537	(30,34)	63	0.1028 0.2079	
			72	0.2319 0.4007		54	0.2837 0.4552		54	0.1643 0.3062		62	0.1262 0.2236	
			65	0.2468 0.4067		53	0.3233 0.4844		53	0.1981 0.3323		27	0.1503 0.2331	
	11	4	(7,12)	170	0.8018 0.9690	(11,15)	140	0.8309 0.9764	(15,19)	78	0.7820 0.9670	(20,24)	85	0.6539 0.9341
				100	0.8088 0.9606		90	0.8351 0.9771		68	0.8059 0.9716		44	0.7107 0.9477
				66	0.8301 0.9745		55	0.8616 0.9818		53	0.8107 0.9721		43	0.7362 0.9532
6			(10,15)	170	0.5838 0.8739	(11,15)	100	0.4374 0.7967	(18,22)	90	0.4394 0.8021	(25,29)	55	0.4097 0.7605
				102	0.6049 0.8803		58	0.4998 0.8260		79	0.4864 0.8198		54	0.4403 0.7698
				79	0.6477 0.8955		52	0.5514 0.8416		42	0.5717 0.8584		53	0.4589 0.7732
8		(15,20)	143	0.3686 0.6687	(17,21)	130	0.2187 0.5307	(21,25)	100	0.1411 0.4167	(26,30)	70	0.0715 0.2504	
			115	0.3959 0.6830		84	0.2712 0.5660		91	0.1762 0.4291		56	0.2419 0.3954	
			111	0.4057 0.6855		78	0.3109 0.5789		48	0.3433 0.5689		55	0.2595 0.3985	
25		8	(5,8)	85	0.9181 0.9978	(10,13)	250	0.9636 0.9995	(15,18)	155	0.9602 0.9995	(19,22)	120	0.8681 0.9972
				70	0.9336 0.9984		130	0.9672 0.9996		105	0.9649 0.9996		81	0.8868 0.9977
				66	0.9347 0.9984		85	0.9756 0.9997		73	0.9730 0.9997		43	0.9301 0.9987
	14		(8,12)	150	0.5543 0.9212	(15,18)	200	0.6696 0.9630	(28,31)	240	0.7627 0.9810	(30,33)	130	0.3777 0.8703
				140	0.5636 0.9219		146	0.6848 0.9650		187	0.7736 0.9820		127	0.3777 0.8703
				120	0.6135 0.9347		114	0.7200 0.9693		130	0.8066 0.9848		67	0.5636 0.9110
	16	(12,16)	210	0.3975 0.8187	(19,22)	210	0.5866 0.9283	(32,35)	240	0.6028 0.9385	(33,36)	160	0.1742 0.6775	
			190	0.4130 0.8210		185	0.5890 0.9284		215	0.6090 0.9390		140	0.2026 0.6803	
			170	0.4326 0.8311		143	0.6240 0.9348		148	0.6562 0.9466		73	0.4241 0.7692	

<sup>18</sup> Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutras (2009)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.14 Σύγκριση των  $AR$  των διαγραμμάτων ελέγχουμε το ίδιο  $FAR$  ( $\gamma=0.4$  και  $\gamma=0.2$ )<sup>19</sup>

$FAR$	$m$	$n$	$W$ -διάγραμμα					$B-T-K$				
			$(LCL,UCL)$	$w$	$r_o$	Ακριβές $FAR$	$AR$	$(LCL,UCL)$	$r$	Ακριβές $FAR$	$AR$	
0.01	50	5	(4,7)	31	2	0.0085	0.2538	(3,48)	1	0.0072	0.1888	
							0.6660				0.5956	
		11		41	4	0.0097	0.3848	(7,44)	1	0.0093	0.3651	
							0.8853				0.8638	
		25		90	7	0.0096	0.7018	(6,45)	13	0.0097	0.3886	
							0.9974				0.9388	
	100	5	(10,13)	65	2	0.0100	0.3089	(7,94)	1	0.0086	0.2230	
							0.9957				0.6455	
		11		66	4	0.0095	0.4620	(6,95)	7	0.0091	0.3179	
							0.9249				0.8539	
		25		115	7	0.0096	0.8113	(8,93)	16	0.0082	0.5294	
							0.9990				0.9848	
	500	5	(50,53)	120	2	0.0094	0.3139	(38,43)	2	0.0091	0.2472	
							0.7327				0.6760	
		11		104	4	0.0073	0.4847	(33,68)	7	0.0099	0.3663	
							0.9398				0.8894	
		25		207	7	0.0091	0.8401	(120,81)	7	0.0095	0.7421	
							0.9995				0.9965	
	1000	5	(100,101)	203	2	0.0091	0.3164	(79,92)	2	0.0099	0.2568	
							0.7354				0.6856	
		11		203	4	0.0072	0.4828	(96,95)	6	0.0098	0.3188	
							0.9369				0.8423	
		25		206	7	0.0086	0.8542	(243,78)	7	0.0099	0.7545	
							0.9996				0.9969	
0.005	50	5	(3,6)	45	2	0.0036	0.1885	(2,49)	1	0.0030	0.1273	
							0.5956				0.5053	
		11		39	4	0.0036	0.2878	(5,46)	2	0.0025	0.2377	
							0.8287				0.7804	
		25		80	7	0.0049	0.5868	(7,44)	11	0.0048	0.3547	
							0.9896				0.9410	
	100	5	(7,10)	40	2	0.0046	0.2254	(5,96)	1	0.0035	0.1618	
							0.6471				0.5730	
		11		49	4	0.0048	0.3348	(5,96)	7	0.0046	0.2538	
							0.8729				0.8141	
		25		83	7	0.0049	0.6661	(15,86)	11	0.0045	0.4112	
							0.9962				0.9650	
	500	5	(40,43)	165	2	0.0048	0.2569	(20,481)	3	0.0048	0.1197	
							0.6861				0.5581	
		11		84	4	0.0046	0.3973	(56,454)	5	0.0049	0.3044	
							0.9100				0.8465	
		25		168	7	0.0048	0.7460	(90,411)	10	0.0050	0.5391	
							0.9988				0.9865	
	1000	5	(82,85)	350	2	0.0050	0.2627	(62,99)	2	0.0049	0.2043	
							0.6922				0.6347	
		11		167	4	0.0044	0.4040	(136,865)	4	0.0049	0.3715	
							0.9131				0.8839	
		25		171	7	0.0044	0.7665	(129,872)	13	0.0050	0.4760	
							0.9990				0.9766	
0.0027	50	5	(2,5)	19	2	0.0026	0.1404	(1,50)	1	0.0008	0.0634	
							0.5207				0.3617	
		11	(3,6)	43	4	0.0027	0.2788	(5,46)	2	0.0025	0.2377	
							0.8264				0.7804	
		25		100	7	0.0025	0.5514	(7,44)	10	0.0021	0.3309	
							0.9873				0.9381	
	100	5	(5,8)	26	2	0.0026	0.1730	(4,97)	2	0.0021	0.1304	
							0.5854				0.5262	
		11		39	3	0.0027	0.2437	(9,92)	5	0.0023	0.2185	
							0.8134				0.7756	
		25		73	6	0.0026	0.6461	(12,89)	12	0.0019	0.3028	
							0.9960				0.9364	
	500	5	(32,35)	134	2	0.0026	0.2089	(16,485)	3	0.0026	0.1197	
							0.6396				0.5116	
		11	(38,41)	155	4	0.0025	0.3534	(64,437)	2	0.0026	0.3386	
							0.8952				0.8693	
		25		162	7	0.0026	0.7216	(101,400)	8	0.0026	0.6078	
							0.9985				0.9915	
	1000	5	(66,69)	330	2	0.0027	0.2151	(49,952)	2	0.0025	0.1626	
							0.6470				0.5862	
		11	(64,67)	131	4	0.0027	0.3186	(49,952)	7	0.0027	0.2536	
							0.8778				0.8355	
		25	(66,69)	268	7	0.0026	0.6456	(189,812)	9	0.0027	0.5626	
							0.9975				0.9891	

<sup>19</sup> Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutras (2009)

Εν τέλει, στον ΠΙΝΑΚΑ 3.15 παρουσιάζονται οι  $ARL_1$  τιμές των δύο διαγραμμάτων για  $ARL_0 = 370,500$ ,  $m = 100,500$  και  $n = 5,11$ . Οι παράμετροι σχεδιασμού  $LCL = X_{\alpha,m}$ ,  $UCL = X_{\beta,m}$ ,  $w$ ,  $r_0$  προσδιορίζονται έτσι ώστε τα  $ARL_0$  να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στην τιμή στόχο που έχουμε επιλέξει σε κάθε περίπτωση. Οι  $ARL_1$  τιμές του ΠΙΝΑΚΑ 3.15 αποδεικνύουν σαφώς την υπεροχή του  $W$ -διαγράμματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.15 Σύγκριση των  $ARL_1$  των διαγραμμάτων ελέγχου με κοινό  $ARL_0$ <sup>20</sup>

$ARL_0$	$m$	$n$	$W$ -διάγραμμα				$B-T-K$				
			$(LCL, UCL)$	$w$	$r_0$	Ακριβές $ARL_0$	$ARL_1$	$(LCL, UCL)$	$r$	Ακριβές $ARL_0$	$ARL_1$
370	100	5	(15,17)	55	2	354.9	138.5	(6,95)	2	341.4	230.2
		11	(11,13)	125	2	376.6	127.2	(22,179)	5	367.8	136.6
	500	5	(204,206)	20	2	370.4	305.8	(18,483)	3	350.4	407.1
		11	(140,142)	140	2	374.7	359.8	(39,462)	6	373.8	442.7
500	100	5	(18,20)	78	2	512.4	155.5	(4,94)	3	499.9	1390.6
		11	(10,12)	120	2	507.0	145.3	(21,180)	5	496.8	179.9
	500	5	(145,147)	25	2	502.9	386.6	(16,485)	3	503.8	600.3
		11	(75,77)	151	2	498.8	434.8	(37,464)	6	500.7	602.5

Κατανομές: Εκθετική με μέσο ίσο με 2 (εντός ελέγχου) και 1 (εκτός ελέγχου), αντίστοιχα

### 3.9 Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*

Δε θα ήταν λανθασμένος ο ισχυρισμός ότι, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* αποτελούν ένα σχετικά πρόσφατο αποτέλεσμα εκτεταμένων και αναλυτικών επιστημονικών ερευνών πάνω στον ΣΕΔ. Ωστόσο, γενικά, θεωρείται ότι υπάρχουν ακόμη πολλές προοπτικές μελλοντικής αναλυτικής έρευνας για αυτά τα διαγράμματα. Σε γενικές γραμμές, τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου, παρουσιάζουν όλα τα πλεονεκτήματα και όλα τα μειονεκτήματα που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Οι πιο σημαντικές και χρήσιμες στατιστικές τους ιδιότητες είναι ότι, δεν υποθέτουν συγκεκριμένη κατανομή για τις παρατηρήσεις που συλλέγονται, τα στατιστικά χαρακτηριστικά τους δεν εξαρτώνται και δεν επηρεάζονται από την κατανομή που ακολουθούν τα

<sup>20</sup> Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutras (2009)



δεδομένα και επίσης δεν επηρεάζονται σχεδόν καθόλου από τυχόν έκτροπες παρατηρήσεις [19]. Εντούτοις, αυτά τα διαγράμματα ελέγχου, εμφανίζουν ένα ακόμη (στατιστικό) μειονέκτημα: αυτό, είναι ότι δε μπορούν να εντοπίσουν αρκετά εύκολα και έγκαιρα μικρές ή πολύ μικρές μεταβολές της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις που συλλέγονται, στην περίπτωση που η κατανομή των δεδομένων είναι άγνωστη. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα αυτά, δε δίνουν εύκολα γραφική ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου, στην περίπτωση που υπάρχει σχετικά μικρή μετατόπιση της μέσης τιμής ή της διαμέσου ή κάποιου άλλου στατιστικού χαρακτηριστικού της κατανομής των δεδομένων[19].



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*

#### 4.1 Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις

Οι Bakir και Reynolds [9] πρότειναν ένα διάγραμμα τύπου *CUSUM* βασισμένο στη *WSR* στατιστική συνάρτηση για την ανίχνευση μιας μετατόπισης του  $\theta$  (μια παράμετρος θέσης) από μια εντός ελέγχου τιμή του  $\theta_0$  (υποτίθεται ότι ισούται με 0, χωρίς βλάβη της γενικότητας).

Ο προσημικός βαθμολογικός έλεγχος του *Wilcoxon* [31] είναι ένας πολύ γνωστός μη παραμετρικός έλεγχος, και ένας ανταγωνιστής του κλασικού *t*-ΤΕΣΤ ενός δείγματος, για τον έλεγχο υποθέσεων ή τον ορισμό των διαστημάτων εμπιστοσύνης σχετικά με τη παράμετρο θέσης  $\theta$  μιας συνεχούς συμμετρικής κατανομής περίπου  $\theta$  [19]. Για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων, τυπικά λαμβάνονται από τη διεργασία  $m = 20$  έως 25 τυχαία δείγματα (υποομάδες), κάθε ένα μεγέθους  $g = 4$  έως 5 παρατηρήσεις [19]. Έστω  $(X_{i1}, \dots, X_{ig})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  είναι το  $i$ -οστό τυχαίο δείγμα. Η στατιστική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση [9]

$$SR_i = \sum_{j=1}^g \text{sign}(X_{ij} - \theta_0) R_{ij} \quad (4.1)$$

όπου  $\theta_0$  είναι η γνωστή εντός ελέγχου παράμετρος θέσης (τιμής στόχος),  $R_{ij}$  είναι ο βαθμός (*rank*) αντιστοιχεί στην παρατήρηση  $|X_{ij} - \theta_0|$  για  $i = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, g$  (ήτοι ο βαθμός που αντιστοιχεί για το  $i$ -οστό τυχαίο δείγμα στην απόλυτη τιμή της απόκλισης της  $X_{ij}$  από την εντός ελέγχου παράμετρο  $\theta_0$ ) και  $\text{sign}()$  είναι η συνάρτηση πρόσημου που παίρνει την τιμή +1 αν  $X_{ij} - \theta_0 > 0$ , την τιμή -1 αν  $X_{ij} - \theta_0 < 0$  και την τιμή 0 αν  $X_{ij} - \theta_0 = 0$ .

Η στατιστική συνάρτηση  $SR_i$  σχετίζεται γραμμικά με τη γνωστή  $WSR$  στατιστική συνάρτηση  $V_g$ , δηλαδή το άθροισμα των βαθμών των θετικών παρατηρήσεων, μέσω της σχέσης

$$SR_i = 2V_g - \frac{g(g+1)}{2} \quad (4.2)$$

Έτσι, η εντός ελέγχου κατανομή πιθανότητας (συνάρτηση μάζας) της  $SR_i$  λαμβάνεται από τη «μηδενική» κατανομή της  $V_g$  (υποθέτοντας ότι καμία από τις  $X_{ij}$  δεν ισούται με μηδέν, ένα γεγονός με μηδενική πιθανότητα υπό την υπόθεση της συνέχειας). Η μηδενική κατανομή της  $V_g$  παρουσιάζεται σε πίνακες [9] από διάφορους συγγραφείς, ο πίνακας από τους *Wilcoxon*, *Katti*, και *Wilcox* [56] είναι ένας από τους πιο αναλυτικούς. Η ομαδοποιημένη προσημική βαθμολογική (*grouped signed – rank, GSR*) διαδικασία των *Bakir-Reynolds* χρησιμοποιεί τις  $WSR$  στατιστικές συναρτήσεις με ένα κανόνα διακοπής τύπου *CUSUM*. Σαφώς, η διαδικασία είναι ελεύθερη κατανομής, αφού η εντός ελέγχου ( $\theta_0 = 0$ ) κατανομή της  $V_g$  και ως εκ τούτου, εκείνων των στατιστικών συναρτήσεων  $SR_i$  δεν εξαρτάται από την κατανομή για όλες τις συνεχείς συμμετρικές κατανομές.

Η μονόπλευρη διαδικασία για την ανίχνευση μιας θετικής απόκλισης στη  $\theta$ , από μια εντός ελέγχου τιμή  $\theta_0 = 0$  παράγει ένα σήμα στο πρώτο  $n$  για το οποίο

$$\sum_{i=1}^n (SR_i - k) - \min_{0 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m (SR_i - k) \geq h \quad (4.3)$$

Η αντίστοιχη διαδικασία για την ανίχνευση μιας αρνητικής μετατόπισης στην παράμετρο θέσης παράγει ένα σήμα στο πρώτο  $n$  για το οποίο

$$\max_{0 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m (SR_i + k) - \sum_{i=1}^n (SR_i + k) \geq h \quad (4.4)$$

Μια αμφίπλευρη συμμετρική διαδικασία παράγει ένα σήμα στο πρώτο  $n$  για το οποίο οποιαδήποτε από τις δύο ανισότητες ικανοποιείται.

Οι δύο παράμετροι του *CUSUM* διαγράμματος είναι η τιμή αναφοράς  $k$  και η τιμή απόφασης  $h$ . Ένα κριτήριο για την βέλτιστη επιλογή του ζεύγους  $(k, h)$  είναι ότι ο συνδυασμός ελαχιστοποιεί το *ARL* της διαδικασίας όταν ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί, υπό την προϋπόθεση ότι το  $ARL_0$  είναι μια καθορισμένη τιμή. Έχει αποδειχθεί ότι για μεγάλες τιμές του  $n$  η συμπεριφορά της διεργασίας του

σωρευτικού αθροίσματος προσεγγίζεται από μια διεργασία κίνησης Μπράουν. Ως εκ τούτου, όπως στον *Reynolds* [52], η βέλτιστη τιμή του  $k$  ισούται προσεγγιστικά με  $|\theta|/2$ , όπου  $n\theta(\Delta)$  είναι ο μέσος όρος του σωρευτικού αθροίσματος  $\sum_{i=1}^n SR_i$ , που αντιστοιχεί στη μετατόπιση  $\Delta$ . Η έκφραση για  $\theta(\Delta)$  λαμβάνεται από το μέσο όρο της *WSR* στατιστικής συνάρτησης που βασίζεται στις  $g$  παρατηρήσεις. Δίνονται οι πίνακες [9] για τις βέλτιστες τιμές του  $k$  που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μετατοπίσεις στη θέση όταν η μητρική κατανομή είναι ομοιόμορφη, κανονική, διπλή εκθετική και *Cauchy*, αντίστοιχα. Αυτές είναι περίπου κανονικές κατανομές με διαφορετικές ιδιότητες ουρών. Συνίσταται στην πράξη, να χρησιμοποιούνται οι βέλτιστες τιμές  $k$  που λαμβάνονται για την κανονική κατανομή, εκτός αν εμφανίζονται βαριές ουρές. Χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή του  $k$ , τότε η τιμή του  $h$  επιλέγεται για να επιτευχθεί η επιθυμητή τιμή του μονόπλευρου  $ARL_0$ . Δίνονται οι πίνακες για τις τιμές του μονόπλευρου  $ARL_0$  για διάφορους συνδυασμούς των  $h$ ,  $k$  και  $g$ . Για παράδειγμα, όταν οι παρατηρήσεις συλλέγονται σε ομάδες μεγέθους 6, χρησιμοποιώντας  $h=10$  και  $k=11$  το διάγραμμα αποδίδει ένα  $ARL_0=301.01$ .

Στη βάση του «ακριβούς» μονόπλευρου  $ARL$ , σύγκριναν [9] το *GSR-CUSUM* διάγραμμα με το *Shewhart* διάγραμμα και το σύνηθες *CUSUM* διάγραμμα υπό διάφορες θετικές μετατοπίσεις όταν η διεργασία είναι κανονικά κατανομημένη. Για μη κανονικές κατανομές, όπως η ομοιόμορφη, η διπλή εκθετική, και η *Cauchy* έγιναν συγκρίσεις στη βάση των προσομοιωμένων τιμών του μονόπλευρου  $ARL_0$  για διάφορες θετικές μετατοπίσεις. Το γενικό συμπέρασμα [19] είναι ότι όταν οι παρατηρήσεις συλλέγονται φυσικά σε ομάδες, το *GSR-CUSUM* διάγραμμα είναι ελαφρώς λιγότερο αποτελεσματικό από το σύνηθες *CUSUM* διάγραμμα βάσει του δειγματικού μέσου όταν η διεργασία είναι κανονικά κατανομημένη, ενώ για τις μη κανονικές κατανομές το *GSR-CUSUM* διάγραμμα είναι σημαντικά πιο αποτελεσματικό. Ένα κατάλληλο μέγεθος υποομάδας για αυτή την μη παραμετρική διαδικασία προτείνεται να είναι μεταξύ  $n=5$  έως 10, ανάλογα με το μέγεθος της μετατόπισης και το επιθυμητό  $ARL_0$ . Αυτή η σύσταση είναι σχεδόν ίδια με το μέγεθος της υποομάδας που προτείνεται για τις διαδικασίες που βασίζονται στη κανονική θεωρία [19].

## 4.2 Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν διαδοχικούς βαθμούς

Εκτός από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* που χρησιμοποιούν την *WSR* στατιστική συνάρτηση, έχουν προταθεί στην πρόσφατη βιβλιογραφία και κάποια άλλα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*, τα οποία χρησιμοποιούν διαδοχικούς βαθμούς (*sequential ranks*). Τα διαγράμματα αυτά, προτάθηκαν από τον McDonald [45] και έχουν το χαρακτηριστικό ότι δε χρησιμοποιούν κάποιο αρχικό δείγμα, αλλά μόνο ένα τελικό. Σε αυτό το (τελικό) τυχαίο δείγμα, για κάθε παρατήρηση  $X_i$  που συλλέγεται, αντιστοιχεί ένας διαδοχικός βαθμός  $R_i$ . Ο διαδοχικός βαθμός  $R_i$ , που είναι η στατιστική συνάρτηση ελέγχου σε αυτό το διάγραμμα, της παρατήρησης  $X_i$ , ορίζεται από τη σχέση

$$R_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} I(X_j < X_i) \quad (4.5)$$

όπου  $I(\cdot)$  είναι η συνήθης δείκτρια συνάρτηση, και το *CUSUM* διάγραμμα βασίζεται στη

$$U_i = \frac{R_i}{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Όταν η διεργασία βρίσκεται είναι εντός ελέγχου, έχει βρεθεί [45] ότι οι ποσότητες  $U_i$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{i+1}, \frac{2}{i+1}, \dots, \frac{i}{i+1} \right\} \quad (4.7)$$

Έτσι, για ένα μονόπλευρο διάγραμμα, οι σταθερές  $k(>0)$  (τιμή αναφοράς) και  $h(>0)$  (επίπεδο σήματος) καθορίζονται, και στη συνέχεια, στο διάγραμμα απεικονίζονται οι ποσότητες

$$T_i = \max\{T_{i-1} + U_i - k, 0\} \text{ για } i = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

όπου  $T_0 = 0$  και  $k$  μια θετική σταθερά.

Ένα εκτός ελέγχου σήμα παράγεται στο πρώτο  $i$ , όπου  $T_i \geq h$ . Αν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου, το *ARL* του συστήματος εξαρτάται μόνο από τα  $h$  και  $k$  και δεν εξαρτάται από την α.σ.κ.  $F$ , και επομένως το διάγραμμα ελέγχου είναι μη παραμετρικό. Να σημειωθεί ότι, ο τύπος της στατιστικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται, δε λαμβάνει υπ'όψιν την ακριβή αριθμητική τιμή

των παρατηρήσεων, αλλά χρησιμοποιεί μόνο τους διαδοχικούς βαθμούς των παρατηρήσεων. Αυτό, έχει ως συνέπεια στο συγκεκριμένο διάγραμμα ελέγχου, να χάνεται σημαντική στατιστική πληροφορία από το τελικό τυχαίο δείγμα που συλλέγεται. Η προσέγγιση που λαμβάνεται είναι για να καθοριστεί αριθμητικά, για μια δοθείσα τιμή αναφοράς  $k$ , το κατάλληλο επίπεδο σήματος  $h$  που αντιστοιχεί στο μέσο μήκος ροής. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η διεργασία ανιχνεύει την πραγματική ακολουθία των τ.μ.  $X_i, i=1,2,\dots$ , μέσω των αθροιστικών διαδοχικών βαθμών.

Ο *Yashchin* [58] πρότεινε ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* στην περίπτωση που η κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα είναι άγνωστη. Συγκεκριμένα, σε αυτό το διάγραμμα ελέγχου, ο *Yashchin* [58] πρότεινε μια μη παραμετρική ανάλυση του μήκους ροής και ορισμένων άλλων σχετικών χαρακτηριστικών απλά, αντικαθιστώντας την πραγματική υποκείμενη κατανομή με την εμπειρική συνάρτηση κατανομής (*empirical distribution function*) του δείγματος αναφοράς. Τέλος, εξετάστηκαν [58] οι ιδιότητες των προκυπτουσών εκτιμητριών και παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

### 4.3 Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές στατιστικές συναρτήσεις

Οι Amin, Reynolds και Bakir [4] πρότειναν ορισμένα άλλα μη παραμετρικά *CUSUM* διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση κάποιας στατιστικής παραμέτρου της κατανομής που ακολουθούν τα δεδομένα, τα οποία βασίζονται στις προσημικές στατιστικές συναρτήσεις. Σε αυτά τα διαγράμματα χρησιμοποιείται η προσημική στατιστική συνάρτηση [4]

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0) \quad (4.9)$$

όπου  $n$  είναι το μέγεθος των τυχαίων δειγμάτων που συλλέγονται,  $\theta_0$  είναι η εντός ελέγχου τιμή στόχος και  $\text{sign}()$  είναι η συνάρτηση πρόσημου που παίρνει την τιμή +1 αν  $X_{ij} - \theta_0 > 0$ , την τιμή -1 αν  $X_{ij} - \theta_0 < 0$  και την τιμή 0 αν  $X_{ij} - \theta_0 = 0$ .

Το προτεινόμενο *CUSUM* διάγραμμα [4] απεικονίζει τα σωρευτικά αθροίσματα των τ.μ.  $SN_i$  που προκύπτουν από κάθε ένα τυχαίο δείγμα που συλλέγεται. Ένα μονόπλευρο διάγραμμα για την ανίχνευση θετικών αποκλίσεων από την εντός ελέγχου τιμή της διάμεσου παράγει ένα σήμα στο πρώτο  $t$  για το οποίο

$$\sum_{i=1}^t (SN_i - k) - \min_{0 \leq u \leq t} \sum_{i=1}^u (SN_i - k) \geq h \quad (4.10)$$

όπου  $h > 0$  και  $k > 0$  είναι παράμετροι της διαδικασίας [4]. Ένα μονόπλευρο διάγραμμα για την ανίχνευση αρνητικών μετατοπίσεων παράγει ένα σήμα στο πρώτο  $t$  για το οποίο

$$\max_{0 \leq u \leq t} \sum_{i=1}^u (SN_i + k) - \sum_{i=1}^t (SN_i + k) \geq h \quad (4.11)$$

Το αντίστοιχο αμφίπλευρο διάγραμμα παράγει ένα σήμα στο πρώτο  $t$  για το οποίο ένα οποιοδήποτε από τα μονόπλευρα διαγράμματα παράγει ένα σήμα [4].

Η τιμή του *ARL* για το *CUSUM* διάγραμμα χρησιμοποιώντας την  $SN_i$  εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων  $h$  και  $k$  [4]. Μια προσέγγιση στην επιλογή των  $h$  και  $k$  είναι η επιλογή των τιμών των παραμέτρων που ελαχιστοποιούν το  $L^+(\mu_1)$  (βλέπε ενότητα 3.2) για τη διατήρηση μια συγκεκριμένης τιμής του  $L^+(\mu_0)$  (βλέπε ενότητα 3.2), όπου  $\mu_1$  είναι μια τιμή της  $\mu$  που θεωρείται ως μια σημαντική μετατόπιση. Η βέλτιστη τιμή για την  $k$  είναι τότε προσεγγιστικά  $k = (1/2)E[SN_i | \mu_1]$  [52]. Με τη χρήση αυτής της τιμής της  $k$ , επιλέγεται η τιμή της  $h$  για την επίτευξη μιας επιθυμητής τιμής του  $L^+(\mu_0)$ .

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1 δίνει τις βέλτιστες τιμές της  $k$  για διάφορες τιμές της  $\mu_1 - \mu_0$ , όταν  $n = 10$  για τις κατανομές: ομοιόμορφη, κανονική, διπλή εκθετική, *Cauchy*, και *Gamma*. Οι τιμές της  $\mu_1 - \mu_0$  μπορούν να θεωρηθούν σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Εκτός από την *Cauchy* κατανομή, οι τιμές της  $k$  δεν διαφέρουν πάρα πολύ για τις διάφορες κατανομές. Στην πράξη, ο προσδιορισμός της  $\mu_1$  συνήθως δεν είναι τόσο ακριβής, έτσι χρησιμοποιώντας τις  $k$ -τιμές για την κανονική κατανομή δεν θα οδηγήσει σε μεγάλα σφάλματα. Οι κανονικές  $k$ -τιμές που στρογγυλοποιούνται στο πλησιέστερο ακέραιο δίνονται στη τελευταία στήλη του ΠΙΝΑΚΑ 4.1.



ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1 Κατά προσέγγιση βέλτιστες τιμές της  $k$  για το *CUSUM* διάγραμμα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν  $n = 10$  και  $\sigma = 1$ <sup>21</sup>.

Μετατόπιση ( $\mu_1 - \mu_0$ )	Κατανομή					Στρ/νες Κανονικές Τιμές
	Uniform	Normal	Double Exponential	Cauchy*	Gamma	
.25	0.72	0.99	1.49	1.22	1.09	1
.50	1.44	1.91	2.53	1.74	2.20	2
1.00	2.88	3.41	3.78	2.09	4.11	3
2.00	5.00	4.77	4.70	2.29	5.00	5
3.00	5.00	4.98	4.93	2.36	5.00	5

\*  $\sigma$  ορίζεται για την κατανομή Cauchy

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2 Τιμές της  $L^+(\mu_0)$  για το *CUSUM* διάγραμμα χρησιμοποιώντας την προσημική στατιστική συνάρτηση όταν  $n = 10$ <sup>22</sup>.

$h$	$k$	1	2	3	4	5	6	7
3		5.6	14.4	17.8	78.0	92.4	930.0	1023.0
4		9.1	14.4	44.6	78.0	521.5	930.0	50083.8
5		11.8	36.8	67.0	464.9	875.6	45525.1	
6		16.9	36.8	148.0	464.9	4756.3	45525.1	
7		22.8	91.6	282.5	3166.5	23143.0		
8		30.1	91.6	519.0	3166.5	41364.0		
9		39.9	216.3	1074.2	17931.9			
10		51.1	216.3	1886.4	17931.9			
11		65.9	499.5	3663.9				
12		83.7	499.5	6968.4				
13		105.8	1147.8	13030.2				
14		133.3	1147.8	25236.3				
15		166.8	2623.3	47128.0				
16		208.3	2623.3	89762.1				

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2 δίνει τις τιμές του  $L^+(\mu_0)$  για διάφορες τιμές των  $h$  και  $k$  όταν  $n=10$ . Να σημειωθεί ότι όταν η  $k$  είναι ένας ζυγός ακέραιος, ο χώρος καταστάσεων αποτελείται από ζυγούς ακέραιους, και το *ARL* για μονές τιμές της  $h$  θα είναι το ίδιο όπως το *ARL* για τον επόμενο ζυγό ακέραιο. Υπενθυμίζεται ότι για τα *Shewhart* διαγράμματα που χρησιμοποίησαν την  $SN_i$  ήταν απαραίτητο να έχουν  $n$  μετρίου μεγέθους για να έχουν λογικά μεγάλες τιμές της  $L^+(\mu_0)$ . Ωστόσο για το *CUSUM* διάγραμμα η τιμή του  $n$  μπορεί να είναι μικρότερη, αφού η διαδικασία βασίζεται σε ένα σωρευτικό άθροισμα των στατιστικών συναρτήσεων από μεμονωμένα δείγματα και η  $h$  μπορεί να επιλεγεί αρκετά μεγάλη ώστε να δώσει αυθαίρετα μεγάλες τιμές της  $L^+(\mu_0)$ . Το μειονέκτημα των μικρών δειγμάτων

<sup>21</sup> Amin, Reynolds και Bakir (1995)

<sup>22</sup> Amin, Reynolds και Bakir (1995)

για το *CUSUM* διάγραμμα που χρησιμοποιεί την  $SN_i$  είναι ότι αδύνατο για τη διαδικασία να παράγει ένα σήμα μετά από ένα μόνο δείγμα, εάν  $n < h+k$ .

#### 4.4 Διάγραμμα ελέγχου για την προκαταρκτική ανάλυση μεμονωμένων παρατηρήσεων

Οι Zhou, Zou και Wang [59] πρότειναν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου για την προκαταρκτική ανάλυση μεμονωμένων παρατηρήσεων για την ανίχνευση μετατόπισης του μέσου βασισμένο στο *Mann-Whitney* έλεγχο δύο δειγμάτων (*Mann-Whitney (MW) two-sample test*).

Έστω ότι υπάρχουν  $n$  ανεξάρτητες ιστορικές παρατηρήσεις  $\{x_1, \dots, x_n\}$  και η  $x_i$  προέρχεται από μια συνεχή κατανομή  $F(x, \mu_i)$ , όπου  $\mu_i$  είναι η παράμετρος θέσης. Για λόγους απλότητας, θέτουμε  $\mu_i$  το πληθυσμιακό μέσο. Η διεργασία θεωρείται ότι έχει μια μόνο αλλαγή στο μέσο στη  $n_1$ -οστή παρατήρηση, εάν οι πρώτες  $n_1$  παρατηρήσεις έχουν την ίδια κατανομή  $F(x, \mu_a)$ , και οι υπόλοιπες έχουν μια κοινή κατανομή  $F(x, \mu_b)$ . Αν  $\mu_a = \mu_b$ , η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου. Ένας απλός μη παραμετρικός έλεγχος για την ανίχνευση μιας αλλαγής του μέσου θα ήταν η χρήση του *MW* τεστ δύο δειγμάτων. Για οποιοδήποτε  $1 \leq t < n$ , η *MW* στατιστική συνάρτηση για τον έλεγχο, ότι δύο δείγματα  $x_1, \dots, x_t$  και  $x_{t+1}, \dots, x_n$  προέρχονται από την ίδια κατανομή, ορίζεται από τη σχέση

$$MW_t = \sum_{i=1}^t \sum_{j=t+1}^n I(x_j < x_i) \quad (4.12)$$

όπου  $I(x_j < x_i) = 1$  αν  $x_i > x_j$  και  $I(x_j < x_i) = 0$  αν  $x_i \leq x_j$ .

Να σημειωθεί ότι ο *MW* έλεγχος είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο άθροισης βαθμών του *Wilcoxon* μέσω της σχέσης

$$MW_t = W_t - \frac{t(t+1)}{2} \quad (4.13)$$

όπου  $W_t = \sum_{i=1}^t R_i$  και  $R_1, \dots, R_t$  είναι οι βαθμοί των  $t$  παρατηρήσεων  $x_1, \dots, x_t$  σε ολόκληρο το δείγμα των  $n$  παρατηρήσεων.

Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της  $MW_t$  [59] δίνονται από τις σχέσεις

$$E(MW_t) = \frac{t(n-t)}{2}, \quad Var(MW_t) = \frac{t(n-t)(n+1)}{12} \quad (4.14)$$

Να σημειωθεί ότι αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η κατανομή της  $MW_t$  είναι συμμετρική περίπου  $\frac{t(n-t)}{2}$  για κάθε  $t$ , και μεγάλες τιμές της  $MW_t$  δείχνουν μια αρνητική μετατόπιση, ενώ μικρές τιμές δείχνουν μια θετική μετατόπιση.

Στην ιδανική περίπτωση, δεν θα έπρεπε να εμφανίζονται δεσμοί λόγω της υπόθεσης των συνεχών πληθυσμών. Στην πράξη, όταν υπάρχουν δεσμοί στα δεδομένα, τότε η συνήθης διόρθωση στη διακύμανση της  $MW_t$  μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζονται τον παράγοντα  $1 - \sum_{i=1}^r g_i (g_i^2 - 1) n^{-1} (n^2 - 1)^{-1}$ , όπου  $r$  είναι το διακριτό πλήθος των τιμών στις  $n$  παρατηρήσεις και η  $i$ -οστή τιμή προκύπτει με συχνότητα  $g_i$  ( $\sum_{i=1}^r g_i = n$ ). Σε αυτή την κατάσταση, η διακύμανση της  $MW_t$  είναι

$$Var(MW_t) = \frac{t(n-t)(n+1)}{12} \left( 1 - \sum_{i=1}^r g_i (g_i^2 - 1) n^{-1} (n^2 - 1)^{-1} \right) \quad (4.15)$$

Η τυποποιημένη  $MW$  στατιστική συνάρτηση  $MW_t$  ορίζεται από τη σχέση

$$SMW_t = \frac{MW_t - E(MW)}{\sqrt{Var(MW_t)}} \quad (4.16)$$

Είναι γνωστό ότι, αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου και η  $t/(n-t)$  συγκλίνει σε μια σταθερά,  $SMW_t \xrightarrow{D} N(0,1)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ ,  $n-t \rightarrow \infty$ .

Το προτεινόμενο διάγραμμα τύπου *CUSUM* βασισμένο στη  $MW$  στατιστική συνάρτηση (*CUSUM-MW*) είναι

$$S_i^- = \max \{ 0, S_{i-1}^- - SMW_i - k \} \quad (4.17)$$

$$S_i^+ = \max \{ 0, S_{i-1}^+ + SMW_i - k \} \quad (4.18)$$

όπου η αρχική τιμή  $S_0^+ = S_0^- = 0$  και  $k$  είναι η τιμή αναφοράς. Το προτεινόμενο *CUSUM* διάγραμμα κατασκευάζεται σχεδιάζοντας τις στατιστικές συναρτήσεις  $S_i^-$  και  $S_i^+$  έναντι του  $i$ . Αν η  $S_i^-$  υπερβαίνει το δοθέν διάστημα απόφασης  $h_{a,n^-}$  ή αν η

$S_i^+$  υπερβαίνει το δοθέν διάστημα απόφασης  $h_{\alpha,n^+}$ , τότε παράγεται ένα εκτός ελέγχου σήμα. Η τιμή  $S_i^-$  χρησιμοποιείται για την ανίχνευση των μειώσεων ή αρνητικών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας, ενώ η  $S_i^+$  χρησιμοποιείται για την ανίχνευση των αυξήσεων ή θετικών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας. Οι Zhou, Zou και Wang [59] έθεσαν την τιμή αναφοράς  $k = 2.0$ , όπου είναι βασισμένα τα αποτελέσματα προσομοίωσης τους, τα οποία δείχνουν ότι το διάγραμμα ελέγχου με  $k = 2.0$  έχει καλή απόδοση. Να σημειωθεί ότι, μικρότερες τιμές της  $k$  οδηγούν σε ταχύτερη ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων.

Για δοθείσα  $FAP \alpha$ , όπως και στις περισσότερες εφαρμογές, οι Zhou, Zou και Wang [59] επέλεξαν  $h_{\alpha,n} = h_{\alpha,n^-} = h_{\alpha,n^+}$  ως το διάστημα απόφασης του  $CUSUM-MW$  διαγράμματος. Για οποιοδήποτε μέγεθος δείγματος  $n$ , η εύρεση του κατάλληλου διαστήματος αναφοράς  $h_{\alpha,n}$  με καθορισμένη  $FAP \alpha$  δεν είναι ένα επουσιώδες έργο. Στη μη παραμετρική σύνθεση, απέχει πολύ από τη παροχή μιας τέτοιας ακολουθίας  $h_{\alpha,n}$  από τη θεωρία κατανομών, έτσι εξέτασαν αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας προσομοίωση. Για δοθέντες διάφορους συνδυασμούς των  $\alpha$  και  $n$ , το προσομοιωμένο  $h_{\alpha,n}$  του  $CUSUM-MW$  διαγράμματος δείχνονται στον ΠΙΝΑΚΑ 4.3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3 Προσομοιωμένα  $h_{\alpha,n}$  του  $CUSUM - MW$ <sup>23</sup>.

$n$	$h_{0.07}$	$h_{0.06}$	$h_{0.05}$	$h_{0.04}$	$h_{0.03}$	$h_{0.02}$	$h_{0.01}$	$h_{0.0075}$
20	0.753	0.885	1.053	1.306	1.656	2.194	3.247	3.671
30	1.267	1.490	1.788	2.187	2.719	3.615	5.531	6.371
40	1.774	2.111	2.525	3.081	3.882	5.258	76.115	9.134
50	2.362	2.779	3.329	4.102	5.194	6.988	10.236	11.993
60	2.940	3.454	4.124	4.989	6.328	8.401	12.480	14.147

Όπως επισημαίνεται στους Sullivan και Woodall [54], δεν είναι σημαντικό για την προκαταρκτική εφαρμογή η εύρεση των ακριβών ορίων ελέγχου που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη  $FAP$ . Για απλότητα, μέσω της προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων, η γραμμή για την προσέγγιση του διαστήματος απόφασης  $h_{\alpha}$  του προτεινόμενου  $CUSUM$  διαγράμματος είναι

<sup>23</sup> Zhou, Zou και Wang(2007)

$$h_{\alpha,n} = (-0.0905n + 0.5221) \log \alpha - 0.1923n + 1.0248 \quad (4.19)$$

Τα προσομοιωμένα αποτελέσματα δείχνουν ότι το προσεγγιστικό διάστημα απόφασης στην Εξίσωση (4.19) αποδίδει πολύ καλά, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρακτική εφαρμογή της προκαταρκτικής ανάλυσης.

Στην προκαταρκτική ανάλυση, είναι απαραίτητο να δοθεί μια εκτίμηση για τη θέση της μετατόπισης αν οι παράμετροι της διεργασίας έχουν μετατοπιστεί. Για το προτεινόμενο *CUSUM-MW* διάγραμμα, η εκτίμηση της θέσης της μετατόπισης δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\tau} = \arg \left\{ \{SMW_t\}_{1 < t < n} \right\} \quad (4.20)$$

η οποία είναι συνεπής με τον Pettitt [50].

#### 4.4.1 Σύγκριση απόδοσης

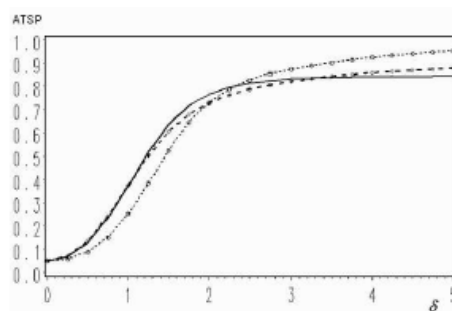
Όπως επεσήμαναν οι Sullivan και Woodall [54], κατά την προκαταρκτική ανάλυση το *ARL* δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως το κριτήριο της απόδοσης. Επομένως, παρόμοια με τους Sullivan και Woodall [54], η *FAP* και η πιθανότητα πραγματικού σήματος (*true signal probability, TSP*) χρησιμοποιούνται για τη σύγκριση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου για την προκαταρκτική ανάλυση. Ένα διάγραμμα ελέγχου θεωρείται ότι είναι καλύτερο από οποιοδήποτε άλλο, εάν η *TSP* του είναι μεγαλύτερη από του άλλου, και έχουν την ίδια *FAP*.

Είναι γνωστό ότι οι θέσεις των μετατοπίσεων επηρεάζουν την απόδοση των διαγραμμάτων. Οι Sullivan και Woodall [54] σύγκριναν την απόδοση των διαγραμμάτων υποθέτοντας ότι τα στάδια μετατοπίσεων συμβαίνουν μετά από 5, 15 ή 25 των 30 παρατηρήσεων. Γενικά, δεν είναι γνωστή που θα συμβεί η μετατόπιση. Οι Zhou, Zou και Wang [59] υπέθεσαν ότι η θέση των μετατοπίσεων κατανέμεται ως  $F(k)$ ,  $k=1,2,\dots,n-1$ . Έτσι η μέση *TSP* (*average TSP, ATSP*) είναι:  $ATSP = \sum_{k=1}^{n-1} F(k)TSP_k$ . Η *ATSP* χρησιμοποιείται ως κριτήριο για τη σύγκριση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου, όπου  $TSP_k$  είναι η *TSP* του διαγράμματος ελέγχου όταν η μετατόπιση συμβαίνει μετά την  $k$ -οστή παρατήρηση. Οι Zhou, Zou και Wang [59] υπέθεσαν ότι η θέση της μετατόπισης

είναι ομοιόμορφα κατανομημένα και τα διάφορα διαγράμματα συγκρίνονται υπό αυτό το κριτήριο.

Οι Zhou, Zou και Wang [59] σύγκριναν το *CUSUM-MW* διάγραμμα, το *LRT* διάγραμμα των Sullivan και Woodall [54] και το *CUSUM-LT* διάγραμμα των Koning και Does (2000) [42] στην ανίχνευση ενός βήματος μετατόπισης (*step shift*) του μέσου όταν τα δεδομένα διεργασία προέρχονται από τις κανονική, *Chisquare*, *Student-t*, *Weibull* και *Lognormal* κατανομές. Οι τέσσερις τελευταίες κατανομές επιλέχθηκαν επειδή μπορούν να αντιπροσωπεύσουν μια μεγάλη ποικιλία σχημάτων όπως οι συμμετρικές, οι ασύμμετρες και οι με βαριά ουρά κατανομές.

Όσον αφορά την κανονική κατανομή οι Zhou, Zou και Wang [59] μελέτησαν την περίπτωση των 30 παρατηρήσεων. Τα αποτελέσματα αξιολογήθηκαν από 10000 προσομοιώσεις. Από τα ΣΧΗΜΑΤΑ 4.1 και 4.2 παρατηρείται ότι:

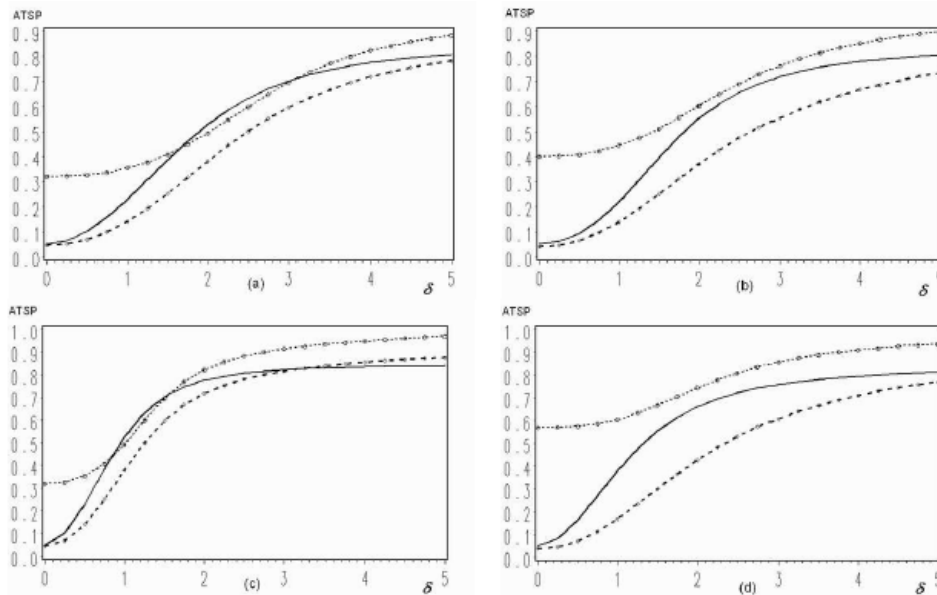


ΣΧΗΜΑ 4.1 Οι *ATSP* για ένα μοναδικό βήμα μετατόπιση όταν τα δεδομένα προέρχονται από την  $N(0,1)$  <sup>24</sup>

- Όσον αφορά την *ATSP*, το προτεινόμενο *CUSUM-MW* διάγραμμα και το *CUSUM-LT* διάγραμμα έχουν συγκρίσιμη απόδοση στην ανίχνευση βημάτων μετατοπίσεων. Για τη γραμμική τάση μετατόπισης [59], το *CUSUM-LT* διάγραμμα έχει ένα πολύ μικρό πλεονέκτημα σε σύγκριση με το *CUSUM-MW* διάγραμμα.
- Το *CUSUM-MW* διάγραμμα έχει ένα μικρό μειονέκτημα στην ανίχνευση μιας πολύ μεγάλης μετατόπισης. Οι Zhou, Zou και Wang [59] θεώρησαν ότι οι λόγοι μπορεί να προήλθαν από το γεγονός ότι η αλλαγή στην *MW* στατιστική συνάρτηση στην (4.12) δεν είναι ευαίσθητη στις πολύ μεγάλες μετατοπίσεις, ή με άλλα λόγια ότι η τιμή της *MW* στατιστικής συνάρτησης θα λάβει ένα σταθερό σημείο με την αύξηση των μεγεθών των μετατοπίσεων. Μετά από

<sup>24</sup> Zhou, Zou και Wang(2007)

αυτό το σταθερό σημείο, η τιμή της  $MW$  στατιστικής συνάρτησης θα είναι σταθερή δεν υπάρχει θέμα ποσότητας των μετατοπίσεων.



ΣΧΗΜΑ 4.2 Οι  $ATSP$  για μοναδικό βήμα μετατόπισης όταν τα δεδομένα προέρχονται από την  $\chi^2(2)$ ,  $t(2)$ ,  $weibull(1,1)$  και  $lognormal(0,1)$ <sup>25</sup>

Όσον αφορά τις υπόλοιπες κατανομές τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για  $n=30$  συνοψίζονται στο ΣΧΗΜΑ 4.2 (a-d). Στο ΣΧΗΜΑ 4.2 χρησιμοποιούνται: στο ΣΧΗΜΑ 4.2(a) η *Student-t* κατανομή με βαθμό ελευθερίας 2, στο ΣΧΗΜΑ 4.2(b) η  $\chi^2(2)$  κατανομή, στο ΣΧΗΜΑ 4.2(c) χρησιμοποιείται η Weibull κατανομή με τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας ίσες με ένα και στο ΣΧΗΜΑ 4.2(d), η *Lognormal* κατανομή με παραμέτρους θέσης και κλίμακας ίσες με μηδέν και ένα αντίστοιχα.

Από τα ΣΧΗΜΑΤΑ 4.2 (a-d) παρατηρείται ότι [59]:

- Για όλες τις κατανομές, το *LRT* διάγραμμα βασισμένο στην κανονική κατανομή δεν μπορεί να λάβει μια συγκεκριμένη *FAP*  $\alpha$ . Το *LRT* διάγραμμα μπορεί επίσης να σχεδιασθεί για άλλες κατανομές αν η κατανομή της διεργασίας είναι γνωστή, αλλά τέτοιες πληροφορίες κατανομής μπορεί να μην είναι διαθέσιμες στη ρύθμιση της προκαταρκτικής ανάλυσης.

<sup>25</sup> Zhou, Zou και Wang(2007)

- Το *CUSUM-MW* διάγραμμα έχει μια καλή απόδοση σε σύγκριση με το *CUSUM-LT* διάγραμμα για όλες τις κατανομές και τα μεγέθη μετατοπίσεων εκτός από την *Weibull* κατανομή με μια πολύ μεγάλη μετατόπιση. Από αυτό, το πλεονέκτημα του προτεινόμενου μη παραμετρικού συστήματος στη μη κανονική ρύθμιση είναι πολύ εμφανής.
- Το *CUSUM-LT* διάγραμμα μπορεί προσεγγιστικά να ελέγξει την πιθανότητα του σφάλματος τύπου I σε μια τέτοια μη-κανονική ρύθμιση, παρόλο που το διάγραμμα σχεδιάστηκε υπό την υπόθεση της κανονικότητας.

Παρόμοια αποτελέσματα θα μπορούσαν να ληφθούν, όταν το ποιοτικό χαρακτηριστικό προέρχεται από μια άλλη ασύμμετρη, και με βαριά ουρά κατανομή. Τότε συνεπάγεται ότι το *CUSUM-MW* διάγραμμα αποδίδει πιο ανθεκτικά από αρκετούς από τους ανταγωνιστές του για τις μη κανονικές κατανομές και θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί στη ρύθμιση της προκαταρκτικής ανάλυσης όπου δεν υπάρχουν περισσότερες πληροφορίες κατανομής.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι το *LRT* διάγραμμα [54] που εξετάστηκε σε αυτή την ενότητα σχεδιάστηκε υπό τη συνθήκη ότι η διακύμανση της διεργασίας είναι σταθερή. Έτσι, το *LRT* διάγραμμα είναι ισοδύναμο με το γνωστό *t*-ΤΕΣΤ δύο δειγμάτων (*two-sample t-test*) μεταξύ του αριστερού και δεξιού μέρους της ακολουθίας, μεγιστοποιείται σε όλα τα πιθανά σημεία αλλαγής [36]. Το *t*-ΤΕΣΤ δύο δειγμάτων είναι άμεσος ανταγωνιστής του *MW* ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ακόμα και όταν οι υποκείμενες κατανομές είναι κανονικές, ο *MW* έλεγχος είναι περίπου 0.96 τόσο αποτελεσματικό [32] όσο το *t*-ΤΕΣΤ δύο δειγμάτων για μετρίως μεγάλα μεγέθη δείγματος, και όμως, σε αντίθεση με το *t*-ΤΕΣΤ δύο δειγμάτων, δεν απαιτεί να ισχύει η κανονικότητα. Επιπλέον, για κάποιες ασύμμετρες ή με βαριά ουρά-ουρά κατανομές, ο *MW* έλεγχος είναι γνωστό ότι είναι πιο αποτελεσματικός από ότι το *t*-ΤΕΣΤ δύο δειγμάτων.



#### 4.5 Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*, κρίνονται αρκετά σημαντικά στον ΣΕΔ, αφού μπορούν να ανιχνεύσουν αρκετά εύκολα και έγκαιρα μικρές ή πολύ μικρές μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν τα δεδομένα. Αυτό, είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημά τους, όσον αφορά τις σύγχρονες εφαρμογές του ΣΕΔ. Τα διαγράμματα αυτά, είναι μη παραμετρικά, δηλαδή δεν προϋποθέτουν κάποια συγκεκριμένη κατανομή για τις παρατηρήσεις που συλλέγονται, παρουσιάζουν το ίδιο *FAR* και το ίδιο *ARL<sub>0</sub>* για όλες τις πιθανές κατανομές που μπορεί να ακολουθούν τα δεδομένα, είναι αρκετά ανθεκτικά σε τυχόν έκτροπες παρατηρήσεις και ακόμη είναι σχετικά απλά και εύκολα στην κατασκευή τους, αφού δεν περιλαμβάνουν ιδιαίτερα δύσκολες και πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις.

Από την άλλη πλευρά, τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου μειονεκτούν στο ότι, οι στατιστικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται, δε λαμβάνουν υπ' όψιν τις ακριβείς αριθμητικές τιμές των παρατηρήσεων, αλλά μόνο τους βαθμούς και τα πρόσημα των παρατηρήσεων και κατά συνέπεια χάνεται σημαντική στατιστική πληροφορία από τα τυχαία δείγματα που συλλέγονται. Ακόμη, τα διαγράμματα αυτά, συνήθως δεν καταφέρνουν να ανιχνεύσουν εύκολα και έγκαιρα πιθανές μεγάλες μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων, όπως μπορούν να κάνουν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες. Επίσης, τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου, συνήθως απαιτούν την αρχική εκτίμηση των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Αυτό ίσως να μην είναι αρκετά εύκολο ή εφικτό, ανάλογα με τη στατιστική μορφή που έχουν τα τυχαία δείγματα που συλλέγονται (στην περίπτωση που έχουμε ελλιπή, μετατοπισμένα δεδομένα). Εκτός από αυτό όμως, η αρχική εκτίμηση των πληθυσμιακών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων, ίσως να μην είναι πολύ ακριβής και αξιόπιστη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που το μέγεθος του αρχικού τυχαίου δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να ισχύουν τα γνωστά ασυμπτωτικά στατιστικά αποτελέσματα.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA*

#### 5.1 Διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν τους τυποποιημένους βαθμούς μεμονωμένων παρατηρήσεων

Οι Hackl και Ledolter [33] πρότειναν μη παραμετρικές διαδικασίες *EWMA* του διαγράμματος ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις. Έστω  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. από συνεχή κατανομή πιθανότητας  $F(x)$ . Η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου, αν  $F(x) = F_0(x)$ . Ο τυποποιημένος βαθμός (*standardized rank*)  $R_i$  μιας μεμονωμένης παρατήρησης  $X_i$ , ορίζεται ως εξής:

$$R_i = 2 \left[ F_0(X_i) - \frac{1}{2} \right] \quad (5.1)$$

Σημειώνεται στους Hackl και Ledolter [33] ότι η  $R_i$  είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των  $-1$  και  $1$  με μέσο  $0$  και διακύμανση  $1/3$ , και αυτοί οι τυποποιημένοι βαθμοί είναι ανεξάρτητοι.

Αν η εντός ελέγχου κατανομή είναι άγνωστη, ένα τυχαίο δείγμα (ιστορικό ή αναφοράς) μεγέθους  $g-1$ , δηλαδή  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{g-1}\}$ , που λαμβάνεται από μια εντός ελέγχου διεργασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του τυποποιημένου βαθμού της  $X_i$  χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο:

$$R_i = \frac{2}{g} \left( R_i^* - \frac{g+1}{2} \right) \quad (5.2)$$

όπου η  $R_i^*$  είναι ο βαθμός της  $X_i$ , όσον αφορά το  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{g-1}\}$ , δηλαδή

$$R_i^* = 1 + \sum_{j=1}^{g-1} I(X_i > Y_j) \quad (5.3)$$

όπου  $I(X_i > Y_j) = 1$  αν  $X_i > Y_j$ , και  $0$  διαφορετικά. Οι βαθμοί στην (5.2) ακολουθούν μια διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στα  $g$  σημεία  $\left\{ \frac{1}{g} - 1, \frac{3}{g} - 1, \dots, 1 - \frac{1}{g} \right\}$  με

μέσο 0 και διακύμανση  $\frac{g^2-1}{3g^2}$  [33]. Το προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται σε ένα *EWMA* των βαθμών  $R_i$  (ή  $R_i^*$ ), δίνεται από τη σχέση

$$Z_i = (1-\lambda)Z_{i-1} + \lambda R_i \quad i=1,2,\dots \quad (5.4)$$

Η τιμή εκκίνησης,  $R_0$  ορίζεται ίση με 0. Οι  $R_i^*$  είναι οι τυποποιημένοι βαθμοί που αναφέρθηκαν παραπάνω,  $Z_0=0$  και η σταθερά  $\lambda$  είναι μία τιμή μεταξύ των τιμών 0 και 1 (συνήθως προτείνεται να είναι μεταξύ των 0.1 και 0.3). Μία μικρή τιμή του  $\lambda$  επιτρέπει ταχύτερη ανίχνευση μιας μικρής μετατόπισης, σε αντίθεση με μια μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$ . Από τον παραπάνω τύπο, είναι μάλλον φανερό ότι η στατιστική συνάρτηση ελέγχου για το  $i$  τυχαίο δείγμα, δε χρησιμοποιεί στατιστική πληροφορία μόνο από αυτό το δείγμα, αλλά χρησιμοποιεί πληροφορία και από το προηγούμενο  $i-1$  τυχαίο δείγμα. Επομένως, εδώ προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι στατιστικές συναρτήσεις ελέγχου σε αυτό το διάγραμμα, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά συσχετίζονται. Ένα εκτός ελέγχου σήμα παράγεται αν  $|Z_i| > h$  για ένα αμφίπλευρο διάγραμμα, όπου  $h$  είναι ένα κατάλληλα επιλεγμένο όριο ελέγχου που βασίζεται σε ένα επιθυμητό  $ARL_0$  [33]. Έχει διαπιστωθεί [33] ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $Z_i$ , επομένως και η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, δεν εξαρτώνται από την κατανομή που ακολουθούν οι μεμονωμένες παρατηρήσεις  $X_i$ . Επομένως αυτό το διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* είναι μη παραμετρικό, ή αλλιώς, ελεύθερο κατανομής.

Έτσι ο στόχος είναι ο ορισμός των βαθμών των συσσωρευμένων παρατηρήσεων σε ένα κατάλληλο τρόπο και η εφαρμογή της συνήθους *EWMA* μεθόδου στους βαθμούς. Σε μελέτες προσομοίωσης [33], παρατηρείται ότι η προτεινόμενη μέθοδος είναι ανθεκτική στις ακραίες τιμές και αποδίδει καλά όσον αφορά τις ξαφνικές μετατοπίσεις στο μέσο.

Το χαρακτηριστικό Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (*Fast Initial Response, FIR*) μελετήθηκε από τους Khoο και Teoh [40]. Θεωρείται ότι επιτρέπει μια ταχύτερη απόκριση σε μια αρχική εκτός ελέγχου κατάσταση από ότι κάνει ένα τυπικό *EWMA*

διάγραμμα βασισμένο στους βαθμούς. Το χαρακτηριστικό *FIR* είναι χρήσιμο κατά την εκκίνηση ή αφού το διάγραμμα έχει δώσει ένα εκτός ελέγχου σήμα. Η χρήση του χαρακτηριστικού *FIR* είναι εύκολη. Η προσέγγιση αυτή θέτει την αρχική τιμή της στατιστικής συνάρτησης του *EWMA*,  $Z_0$ , στην (5.4) σε μια μη μηδενική τιμή κατά την εκκίνηση ή αφού έχει συμβεί ένα εκτός ελέγχου σήμα, αντί της συνήθους τιμής μηδέν. Έτσι, αυτό το χαρακτηριστικό δίνει ένα *headstart* στο *EWMA* διάγραμμα βασισμένο στους βαθμούς [40]. Οι συνιστώμενες *headstarts* είναι 25%, 50% ή 75% της τιμής του ορίου,  $h$ , δηλαδή,  $Z_0 = 0.25h, 0.5h$  ή  $0.7h$  αντίστοιχα. Θα δειχθεί ότι το χαρακτηριστικό *FIR* έχει μικρή επίδραση σε μια εντός ελέγχου διεργασία. Ωστόσο, εάν ο μέσος της διεργασίας είναι σε ένα ανεπιθύμητο επίπεδο, ένα εκτός ελέγχου σήμα θα παραχθεί γρηγορότερα όταν το χαρακτηριστικό *FIR* χρησιμοποιείται.

### 5.1.1 Μελέτη προσομοίωσης και αποτελέσματα

Οι Khou και Teoh [40] διεξήγαγαν μια *Monte-Carlo* προσομοίωση με τη χρήση του *SAS version 8* για τον υπολογισμό των *ARL* προφίλ των *EWMA* συστημάτων ελέγχου με και χωρίς το χαρακτηριστικό *FIR*. Οι παρατηρήσεις,  $X_i, i=1,2,\dots$ , παρήχθησαν, για μία εντός ελέγχου διεργασία από την  $N(0,1)$  κατανομή, και οι οποίες υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανομημένες. Η εκτός ελέγχου διεργασία αποτελείται από παρατηρήσεις που παράγονται από μία  $N(\delta,1)$  κατανομή, όπου η  $\delta \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2\}$  αντιπροσωπεύει το μέγεθος της μετατόπισης στο μέσο, το οποίο μετράται σε αριθμό μονάδων τυπικής απόκλισης. Ο εκτός ελέγχου μέσος είναι  $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ , όπου η  $\sigma = 1$  αντιπροσωπεύει την τυπική απόκλιση της διεργασίας. Η τιμή ορίζεται ίση με 250, ενώ οι τιμές των χρησιμοποιούμενων σταθερών είναι  $\lambda \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ . Εδώ, η  $\delta = 0$  αντιπροσωπεύει την εντός ελέγχου περίπτωση. Τα *headstarts* θεωρούνται ότι είναι  $Z_0 = 0.25h, 0.5h$  και  $0.75h$ . Εξέτασαν [40] ένα αμφίπλευρο *EWMA* διάγραμμα βασισμένο στους βαθμούς και υπολόγισαν τις στατιστικές συναρτήσεις του χρησιμοποιώντας τις (5.1) και (5.4). Ένα εκτός ελέγχου σήμα παράγεται αν  $|Z_i| > h$

, όπου  $h = 0.495, 0.6070, 0.6960$  και  $0.7683$  και για  $\lambda = 0.2, 0.3, 0.4$  και  $0.5$  αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για τα  $ARL$  προφίλ παρουσιάζονται [40] στον ΠΙΝΑΚΑ 5.1, ενώ ο ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2 συνοψίζει τα αποτελέσματα του ΠΙΝΑΚΑ 5.1 σε όρους των ποσοστών μείωσης στα εκτός ελέγχου ( $\delta > 0$ )  $ARL$ , η οποία είναι μια επιθυμητή κατάσταση, και τα ποσοστά μείωσης στα εντός ελέγχου ( $\delta = 0$ )  $ARL$ , δηλαδή, μια ανεπιθύμητη κατάσταση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 Τα  $ARL$  του  $EWMA$  διαγράμματος βασισμένο στους βαθμούς με και χωρίς  $headstarts$ <sup>26</sup>.

$\lambda$	Headstart	$\delta$						
		0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2
0.2	0	250.0	88.6	29.6	14.7	9.4	5.8	4.6
	0.25h	245.3	85.8	17.6	13.4	8.3	4.9	3.7
	0.5h	235.5	80.3	24.7	11.5	6.9	3.8	2.8
	0.75h	204.9	68.0	19.8	8.5	5.0	2.6	1.9
0.3	0	250.0	99.3	33.9	16.1	9.6	5.4	4.0
	0.25h	247.1	97.6	32.5	15.0	8.8	4.8	3.6
	0.5h	240.4	93.3	30.1	13.5	7.6	3.9	2.7
	0.75h	215.9	82.0	25.3	10.7	5.8	2.7	1.8
0.4	0	250.0	111.7	38.8	17.7	10.2	5.3	3.8
	0.25h	248.6	110.4	38.1	17.0	9.6	4.9	3.5
	0.5h	242.7	107.3	35.9	15.6	8.5	4.1	2.8
	0.75h	223.9	97.4	31.3	12.9	6.8	2.9	1.9
0.5	0	250.0	123.7	44.8	19.7	11.1	5.4	3.8
	0.25h	248.7	122.6	43.7	19.0	10.4	4.9	3.3
	0.5h	245.2	119.1	42.0	18.0	9.6	4.3	2.8
	0.75h	230.4	112.1	37.9	15.5	8.0	3.2	2.0

Παρατηρούνται μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα [40] όπως:

1. Για την εντός ελέγχου διεργασία ( $\delta = 0$ ) στον ΠΙΝΑΚΑ 5.1 βασισμένο σε οποιαδήποτε καθορισμένη τιμή του  $\lambda$ , το  $ARL_0$  μειώνεται καθώς το ποσοστό του  $headstart$  αυξάνεται. Έτσι, ο ρυθμός του σφάλματος Τύπου I αυξάνεται με το επίπεδο του  $headstart$ . Αυτή είναι μια ανεπιθύμητη κατάσταση επειδή η απόδοση του  $ARL_0$  του διαγράμματος επιδεινώνεται με το επίπεδο του  $headstart$ .
2. Για την εκτός ελέγχου διεργασία ( $\delta > 0$ ) στον ΠΙΝΑΚΑ 5.1 βασισμένο σε οποιαδήποτε καθορισμένη τιμή των  $\lambda$  και  $\delta$ , το  $ARL_1$  επιδεινώνεται καθώς το ποσοστό του  $headstart$  αυξάνεται. Έτσι, ο ρυθμός του σφάλματος τύπου II μειώνεται με το επίπεδο του  $headstart$ . Αυτή είναι μια επιθυμητή κατάσταση

<sup>26</sup> Khoo και Teoh (2006)

επειδή η απόδοση του  $ARL_1$  του διαγράμματος βελτιώνεται με το επίπεδο του *headstart*.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2 Ποσοστά μείωσης στα εκτός ελέγχου ( $\delta > 0$ ) και τα εντός ελέγχου ( $\delta = 0$ )  $ARL$  του ΠΙΝΑΚΑ 5.1<sup>27</sup>.

$\lambda$	Headstart	$\delta$						
		0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2
0.2	0.25h	<b>1.88</b>	3.16	6.76	8.84	11.70	15.52	19.57
	0.5h	<b>5.80</b>	9.37	16.55	21.77	26.60	34.48	39.13
	0.75h	<b>18.04</b>	23.3	33.11	42.18	46.81	55.17	58.70
0.3	0.25h	<b>1.16</b>	1.71	4.13	6.83	8.33	11.11	10.00
	0.5h	<b>3.84</b>	6.04	11.21	16.15	20.83	27.78	32.50
	0.75h	<b>13.64</b>	17.42	25.37	33.54	39.58	50.00	55.00
0.4	0.25h	<b>0.56</b>	1.16	1.80	3.95	5.88	7.55	7.89
	0.5h	<b>2.92</b>	3.94	7.47	11.86	16.67	22.64	26.32
	0.75h	<b>10.44</b>	12.80	19.33	27.12	33.33	45.28	50.00
0.5	0.25h	<b>0.52</b>	0.89	2.46	3.55	6.31	9.26	13.16
	0.5h	<b>1.92</b>	3.72	6.25	8.63	13.51	20.37	26.32
	0.75h	<b>7.84</b>	9.38	15.4	21.32	27.93	40.74	47.37

3. Οι 1. και 2. στη δικαιολόγηση της χρήσης του χαρακτηριστικού *FIR* είναι αντιφατική. Ωστόσο, τα αποτελέσματα στον ΠΙΝΑΚΑ 5.2 δικαιολογούν τη χρήση του χαρακτηριστικού αυτού. Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2 δείχνει σαφώς ότι για κάθε επίπεδο *headstart* και την τιμή του  $\lambda$ , το ποσοστό μείωσης στα εκτός ελέγχου  $ARL$  είναι υψηλότερο από εκείνο της αντίστοιχης (βλέπε τις τιμές με έντονη γραφή). Για παράδειγμα [40], όταν  $\lambda = 0.2$  με ένα *headstart* ίσο με  $0.5h$ , η τιμή του  $ARL_0$  μειώνεται κατά 5.8%, με αποτέλεσμα μια ανεπιθύμητη κατάσταση. Για την περίπτωση αυτή, τα  $ARL_1$  μειώνονται κατά 9.37%, 16.55%, ..., 39.13% για  $\delta = 0.25, 0.5, \dots, 2$  αντίστοιχα, η οποία δίνει μια επιθυμητή κατάσταση. Εδώ, το ποσοστό βελτίωσης της απόδοσης του  $ARL_1$  υπερτερεί του ποσοστού επιδείνωσης των αποδόσεων του  $ARL_0$ . Το κέρδος που λαμβάνεται με το διάγραμμα υπερτερεί την απώλεια του, εξ ου και δικαιολογεί τη χρήση του χαρακτηριστικού *FIR*.

Η χρήση του χαρακτηριστικού *FIR* σε ένα *EWMA* διάγραμμα βασισμένο στους βαθμούς συνιστάται λόγω των ευνοϊκών αποτελεσμάτων αναλύθηκαν παραπάνω. Το χαρακτηριστικό *FIR* επιτρέπει την ταχύτερη ανίχνευση μιας εκτός στόχου διαδικασίας κατά την εκκίνηση, μειώνοντας έτσι κόστη αναδιατύπωσης και διάλυσης. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι χρήσιμο για μια διαδικασία η οποία

<sup>27</sup> Khoo και Teoh (2006)

συνήθως ξεκινά σε ένα ανεπιθύμητο επίπεδο ή μια νέα διεργασία, όπου εκ των προτέρων ενημέρωση σχετικά με τη σταθερότητα της δεν είναι διαθέσιμη στους χρήστες.

Στο ίδιο πνεύμα οι Hackl and Ledolter [34] μελέτησαν ένα διάγραμμα βασισμένο στον διαδοχικό βαθμό μιας παρατήρησης. Σε αντίθεση με τους Bakir και Reynolds [9], ωστόσο, ο διαδοχικός βαθμός μιας παρατήρησης ορίζεται ως ο βαθμός της μεταξύ της πιο πρόσφατης ομάδας των  $g$  παρατηρήσεων. Η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι μια *EWMA* των διαδοχικών βαθμών. Από τα αποτελέσματα προσομοίωσης, οι Hackl και Ledolter [34] πρότειναν ότι αυτό το διάγραμμα είναι ανθεκτικό στις ακραίες τιμές και αποδίδει καλά αν υπάρχει ανησυχία για βραδέως πτωτικά επίπεδα διεργασίας, ωστόσο, το διάγραμμα αποδίδει φτωχά κάτω από βήματα μετατόπισης στα επίπεδα διεργασίας.

## 5.2 Διαγράμματα έλεγχου που χρησιμοποιούν προσημικές-βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις

Επιπρόσθετα, έχουν προταθεί στην πρόσφατη βιβλιογραφία ορισμένα άλλα διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA*, τα οποία χρησιμοποιούν τη γνωστή από την Μη παραμετρική Στατιστική προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση.

Οι Amin και Searcy [5] πρότειναν ένα μη παραμετρικό *EWMA* διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη ομαδοποιημένη προσημική βαθμολογική (*grouped signed-rank, GSR*) στατιστική συνάρτηση [9]. Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούν για κάθε  $i$  τυχαίο δείγμα που συλλέγεται τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου [9]:

$$SR_i = \sum_{j=1}^g \text{sign}(X_{ij} - \theta_0) R_{ij} \quad (5.5)$$

όπου  $g$  είναι το μέγεθος του καθενός τυχαίου δείγματος,  $\theta_0$  είναι η εντός ελέγχου παράμετρος θέσης (τιμής στόχος),  $R_{ij}$  είναι ο βαθμός αντιστοιχεί στην παρατήρηση  $|X_{ij} - \theta_0|$  για  $i=1,2,\dots, j=1,2,\dots, g$  για το  $i$ -οστό τυχαίο δείγμα και  $\text{sign}()$  είναι η συνάρτηση πρόσημου που παίρνει την τιμή +1 αν  $X_{ij} - \theta_0 > 0$ , την τιμή -1 αν  $X_{ij} - \theta_0 < 0$  και την τιμή 0 αν  $X_{ij} - \theta_0 = 0$ .



Το μη παραμετρικό *EWMA* διάγραμμα ελέγχου (*GSR-EWMA*) βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση ελέγχου [5]:

$$Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} \text{ για } i = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

όπου  $Y_i = SR_i$  είναι η *GSR* στατιστική συνάρτηση που αναφέρθηκε παραπάνω,  $Z_0$  είναι η τιμή στόχος της διεργασίας και  $\lambda$  είναι μία θετική παράμετρος που παίρνει τιμές στο διάστημα  $(0,1]$  (και συνήθως προτείνεται να παίρνει τιμές μεταξύ των αριθμών 0.1 και 0.3). Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για το *GSR-EWMA* είναι:

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_0 - L \\ CL &= \mu_0 \\ UCL &= \mu_0 + L \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου  $\mu_0$  είναι μία άγνωστη παράμετρος και  $L$  είναι μία άγνωστη θετική παράμετρος που δηλώνει την απόσταση των δύο ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου. Οι δύο αυτές άγνωστες παράμετροι  $\mu_0$  και  $L$ , εκτιμώνται από τα δεδομένα που συλλέγονται. Η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου οποτεδήποτε κάποια από τις  $Z_i$  λάβει τιμή έξω από τα δύο όρια ελέγχου, δηλαδή αν  $Z_i > UCL$  ή  $Z_i < LCL$  [5].

Οι ιδιότητες του *GSR-EWMA* εξετάζονται και συγκρίνονται στη βάση του *ARL* με προσομοίωση. Οι Amin και Searcy [5] χρησιμοποίησαν τις κατανομές: κανονική, διπλή εκθετική, *Gamma* και *Cauchy*. Έλαβαν τα όρια ελέγχου λαμβάνονται για το σύνηθες *EWMA* και το *GSR-EWMA* έτσι ώστε η «συχνότητα των σημείων που βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου είναι προσεγγιστικά ίση και για τις δύο διαδικασίες όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου».

Οι Amin και Searcy [5] πρότειναν επίσης, μαζί με τη *GSR-EWMA* διαδικασία, να χρησιμοποιείται και ένα άλλο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Οι Amin και Searcy [5] επίσης μελέτησαν την επίδραση της αυτοσυσχέτισης. Η απόδοση του *GSR-EWMA* σε σχέση με το *EWMA* φαίνεται ότι είναι παρόμοια με εκείνη του *GSR-CUSUM* [9] σε σχέση με το *CUSUM*. Φαίνεται ότι οι ιδιότητες [5] του *ARL* του *GSR-EWMA* δεν είναι ευαίσθητο στην επιλογή των τιμών της  $\lambda$ . Ενισχύσεις όπως η προσθήκη των προειδοποιητικών ορίων βελτιώνουν την απόδοση του

διαγράμματος. Η αυτοσυσχέτιση δεν φαίνεται να επηρεάζει το  $ARL$  τόσο όσο επηρεάζει το  $ARL$  του  $EWMA$  διαγράμματος. Εν τέλει, το  $GSR-EWMA$  αποτελεί ένα εναλλακτικό μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου.

### 5.3 Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στο μοντέλο σημείου αλλαγής

#### 5.3.1 Το μοντέλο σημείου αλλαγής για ένα καθορισμένο δείγμα

Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] εισήγαγαν ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου  $EWMA$  βασισμένο στη  $MW$  στατιστική συνάρτηση για μια αλλαγή στο μέσο ( $EWMA-MW$ ). Έστω ότι υπάρχουν  $n$  ανεξάρτητες παρατηρήσεις  $\{x_1, \dots, x_n\}$  και η  $x_i$  προέρχεται από μια συνεχή κατανομή  $F(x, \mu_i)$ , όπου  $\mu_i$ , είναι μια παράμετρος θέσης. Για λόγους απλότητας, η  $\mu_i$  είναι ο πληθυσμιακός μέσος. Η διεργασία θεωρείται ότι έχει μια μόνο αλλαγή στο μέσο μετά την  $\tau$ -οστή παρατήρηση, αν οι πρώτες  $\tau$  παρατηρήσεις έχουν την ίδια κατανομή  $F(x, \mu_1)$ , και οι υπόλοιπες μια κοινή κατανομή  $F(x, \mu_2)$ . Αν  $\mu_1 = \mu_2$ , η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου. Για να γίνει αυτό το μοντέλο πιο συγκεκριμένο, έστω [60] ότι οι αναγνώσεις της διεργασίας μπορούν να μοντελοποιηθούν από το μοντέλο σημείου αλλαγής, το οποίο είναι

$$\begin{cases} x_i \sim F(x, \mu_1), & \text{για } i = 1, 2, \dots, \tau \\ x_i \sim F(x, \mu_2), & \text{για } i = \tau + 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.8)$$

Για την ανίχνευση μιας αλλαγής του μέσου (ή σημείου αλλαγής) χρησιμοποιείται ένας μη παραμετρικό έλεγχος, ο  $MW$  έλεγχος δύο δειγμάτων. Για οποιοδήποτε  $1 \leq t \leq n$ , η  $MW$  στατιστική συνάρτηση ορίζεται από τη σχέση:

$$MW_{t,n} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=t+1}^n I(x_j < x_i) \quad (5.9)$$

όπου  $I(x_j < x_i) = 1$  αν  $x_i > x_j$  και  $I(x_j < x_i) = 0$  αν  $x_i \leq x_j$ .

Η εντός ελέγχου αναμενόμενη τιμή και η εντός ελέγχου διακύμανση είναι

$$E_0(MW_{t,n}) = t(n-t)/2 \quad \text{και} \quad Var_0(MW_{t,n}) = [t(n-t)(n+1)]/12 \quad (5.10)$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η κατανομή της  $MW_{t,n}$  είναι συμμετρική περίπου  $[t(n-t)]/2$  για κάθε  $t$ , και μεγάλες τιμές της

$MW_{t,n}$  δείχνουν μια αρνητική μετατόπιση, ενώ μικρές τιμές δείχνουν μια θετική μετατόπιση.

Στην ιδανική περίπτωση, δεν θα πρέπει να συμβαίνουν δεσμοί λόγω της υπόθεσης του συνεχούς πληθυσμού. Στην πράξη, όταν υπάρχουν δεσμοί στα δεδομένα, η συνήθης διόρθωση στη διακύμανση της  $MW_{t,n}$  μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα  $1 - \sum_{i=1}^r g_i (g_i^2 - 1) n^{-1} (n^2 - 1)^{-1}$ , όπου  $r$  είναι το διακριτό πλήθος των τιμών στις  $n$  παρατηρήσεις και η  $i$ -οστή τιμή προκύπτει με συχνότητα  $g_i$  ( $\sum_{i=1}^r g_i = n$ ). Σε αυτήν την κατάσταση, η εντός ελέγχου διακύμανση της  $MW_{t,n}$  είναι

$$Var_0(MW_{t,n}) = \frac{t(n-t)(n+1)}{12} (1 - \sum_{i=1}^r g_i (g_i^2 - 1) n^{-1} (n^2 - 1)^{-1}) \quad (5.11)$$

Η τυποποιημένη  $MW$  στατιστική συνάρτηση  $MW_{t,n}$  ορίζεται από τη σχέση

$$SMW_{t,n} = \frac{MW_{t,n} - E_0(MW_{t,n})}{\sqrt{Var_0(MW_{t,n})}} \quad (5.12)$$

Παρόμοια με τον Pettitt [50], η στατιστική συνάρτηση ελέγχου για την υπόθεση  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  μπορεί να οριστεί από τη σχέση  $T_n = \max_{1 \leq t \leq n-1} |SMW_{t,n}|$ . Αν η  $T_n$  υπερβαίνει κάποια κρίσιμη τιμή  $h_n$ , τότε οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] συμπέραναν ότι υπάρχει μια μετατόπιση στο μέσο, διαφορετικά δεν υπάρχουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία της μετατόπισης. Για να βρεθούν οι κατάλληλες κρίσιμες τιμές της  $h_n$ , χρησιμοποίησαν την οριακή κατανομή της  $T_n$  που δίνεται από τον Pettitt [50].

### 5.3.2 Το EWMA-MW και ο σχεδιασμός του

Μέχρι στιγμής, το μέγεθος του δείγματος  $n$  υποτίθεται ότι είναι καθορισμένο. Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] μελέτησαν τις απευθείας εφαρμογές του ΣΕΔ. Έστω ότι υπάρχουν συνολικά  $m$  ( $m \geq 1$ ) εντός ελέγχου ιστορικές μεμονωμένες παρατηρήσεις  $\{x_i, i = 1, 2, \dots, m\}$  και  $n$  μελλοντικές παρατηρήσεις. Η μέγιστη τυποποιημένη  $MW$  στατιστική συνάρτηση για τις  $k = m + n$  παρατηρήσεις ορίζεται από τη σχέση

$$T_{m,n} = \max_{m \leq t < k} |SMW_{t,(m+n)}| \quad (5.13)$$

Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] κατασκεύασαν το διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία των Hawkins, Qiu και Hank [36]. Επομένως, κατασκεύασαν το διάγραμμα ελέγχου βάσει της στατιστικής συνάρτησης  $T_{m,n}$ . Δηλαδή, εάν  $T_{m,n} > h_{m,n}$ , τότε παράγεται ένα εκτός ελέγχου σήμα, όπου  $h_{m,n}$  επιλέγεται για τη λήψη του δοθέντος καθορισμένου  $ARL$ . Ωστόσο, εάν  $T_{m,n} \leq h_{m,n}$ , η παρακολούθηση συνεχίζεται και η  $(m+n)$ -οστή μελλοντική παρατήρηση θα ληφθεί. Η διαδικασία θα επαναλαμβάνεται. Αυτό το διάγραμμα καλείται  $SMW$  διάγραμμα.

Να σημειωθεί ότι υπάρχει μια μικρή διαφορά από τους Hawkins, Qiu και Hank [36]: η  $T_{m,n}$  δεν είναι η μέγιστη της  $SMW_{t,(m+n)}$  για όλα τα  $t$ , αλλά για  $m \leq t < (m+n)$ . Από την άποψη του σημείου αλλαγής, λόγω του ότι οι  $m$  ιστορικές παρατηρήσεις είναι εντός ελέγχου, η μετατόπιση δεν θα συμβεί σε αυτά τα δείγματα, ήτοι, η μέγιστη τιμή της  $SMW_{t,(m+n)}$  αναμένεται να είναι μια τιμή της  $\{SMW_{t,(m+n)}, t = m, m+1, \dots, m+n-1\}$ . Αυτή η ρύθμιση θα μειώσει τον εσφαλμένο συναγερμό και θα οδηγήσει αποτελεσματικότερα στην ανίχνευση των αλλαγών. Επίσης οι Hawkins, Qiu και Hank [36] συνέστησαν την έναρξη της παρακολούθησης μετά τη συλλογή μερικών εντός ελέγχου παρατηρήσεων (π.χ. έναρξη από τις  $10^{\epsilon_S}$  παρατηρήσεις). Στην πραγματικότητα, στην πρακτική εφαρμογή, συνήθως υπάρχουν μερικές ιστορικές εντός ελέγχου παρατηρήσεις. Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] θα ήθελαν να χρησιμοποιήσουν όσο το δυνατόν καλύτερα τις πληροφορίες αυτών των ιστορικών παρατηρήσεων για την ταχύτερη ανίχνευση των αλλαγών. Σε αυτή την περίπτωση, μολονότι μπορούσαν επίσης να λάβουν τα όρια ελέγχου που αντιστοιχούν στην αυθαίρετα δοσμένη  $m$ , η μεθοδολογία των Hawkins, Qiu και Hank [36] δεν είναι κατάλληλη εξαιτίας της πολυπλοκότητας της. Λόγω της παραπάνω μικρής τροποποίησης, ο σχεδιασμός του προτεινόμενου διαγράμματος ελέγχου θα είναι πολύ πιο απλοποιημένος για διαφορετικές τιμές του  $m$ , ο οποίος παρουσιάζεται παρακάτω.

Αλλά χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση  $T_{m,n}$  στην (5.13), προκύπτει ότι οι πιθανές τιμές της  $T_{m,n}$  είναι πολύ περιορισμένες, όταν το  $n$  είναι μικρό έτσι ώστε

είναι αδύνατον να επιτευχθούν επαρκή ακριβή όρια ελέγχου  $h_{m,n}$ . Ο λόγος είναι η κατανομή της  $T_{m,n}$  είναι διακριτή. Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] μελέτησαν σύστημα εξισορρόπησης που εξισορροπεί τις δύο ρυθμίσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η μέγιστη τυποποιημένη  $MW$  στατιστική συνάρτηση για τις  $k = m + n$  παρατηρήσεις επαναπροσδιορίζεται ως ακολούθως

$$T_{m,n} = \max_{m-m_0 \leq t < k} |SMW_{t,(m+n)}| \quad (5.14)$$

όπου  $m_0$  είναι μια επιλεγμένη ακέραια σταθερά. Ωστόσο, για μικρά  $m$ , όπως  $m=10$  ή  $20$ , είναι επίσης δύσκολο να ληφθούν αρκετά ακριβή όρια ελέγχου οποιοδήποτε είναι το  $m_0$ . Έτσι, εισάγεται το  $EWMA-MW$  διάγραμμα ελέγχου.

Όπως είναι γνωστό, λόγω της εμφάνισης του σημείου αλλαγής, π.χ. μιας αρνητικής μετατόπισης, όχι μόνο η αναμενόμενη τιμή της  $MW$  στατιστικής συνάρτησης στο σημείο αλλαγής αλλά και εκείνες στις δύο πλευρές (τουλάχιστον κοντά) του σημείου αλλαγής έχουν γίνει μεγάλες.

Σύμφωνα παραπάνω, η  $EWMA$  μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την άθροιση των μικρών προσαυξήσεων και για την ταχύτερη παραγωγή του σήματος του διαγράμματος ελέγχου. Έτσι, με βάση την στατιστική συνάρτηση  $SMW_{t,(m+n)}$  που δίνεται από την (5.12), οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] πρότειναν ένα άλλο διάγραμμα τύπου  $EWMA$ . Ορίζεται η ακόλουθη σχέση

$$Y_j(m, n) = \lambda SMW_{j,(m+n)} + (1 - \lambda) Y_{j-1}(m, n) \quad (5.15)$$

όπου  $j = m - m_0, m - m_0 + 1, \dots, m + n - 1$ ,  $Y_{m-m_0-1}(m, n) = 0$  και  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) είναι μία σταθερά. Έστω  $Y_{\max}(m, n) = \max_{m-m_0 \leq j < m+n} |Y_j(m, n)|$ , το  $EWMA-MW$  διάγραμμα δίνεται παρακάτω:

- Μετά τη παρακολούθηση του  $n$ -οστού μελλοντικού δείγματος, υπολογίζεται η  $Y_{\max}(m, n)$ .

- Αν  $Y_{\max}(m, n) \leq h_{m,n}$  (η  $h_{m,n}$  επιλέγεται για τη λήψη του δοθέντος καθορισμένου  $ARL_0$ ), τότε προκύπτει ότι δεν υπάρχει ένδειξη μιας μετατόπισης και συνεχίζεται η παρακολούθηση του  $(n+1)$ -οστού μελλοντικού δείγματος.
- Αν  $Y_{\max}(m, n) > h_{m,n}$ , τότε παράγεται ένα εκτός ελέγχου σήμα.

Η διαφορά μεταξύ του  $SMW$  διαγράμματος βασισμένο την (5.14) και του  $EWMA-MW$  διαγράμματος βασισμένο στην (5.15), είναι ότι μετά την παρακολούθηση του  $(m+n)$ -οστού δείγματος, το  $SMW$  διάγραμμα είναι να υπολογίσει τις μέγιστες τιμές της  $SMW_{t,(m+n)}$  για  $m - m_0 \leq t < (m+n)$ , αλλά το  $EWMA-MW$  διάγραμμα είναι για τον υπολογισμό των μέγιστων των εκθετικά σταθμισμένων κινητών μέσων της  $SMW_{t,(m+n)}$ . Η σταθερά  $\lambda$ , στην (5.15), ορίστηκε ίση με 0.2 [60]. Σε γενικές γραμμές, οι μικρότερες τιμές στη σταθερά οδηγούν σε ταχύτερη ανίχνευση των μικρότερων μετατοπίσεων [44]. Στην πραγματικότητα, όταν  $\lambda = 1.0$ , η απόδοση του  $EWMA-MW$  διαγράμματος είναι η ίδια με εκείνη του  $SMW$  διαγράμματος.

Για το λόγο ότι η εισαγωγή του βάρους, οι πιθανές τιμές της  $Y_{\max}(m, n)$  που μπορούν να επιτευχθούν είναι πολύ περισσότερες από εκείνες της  $T_{m,n}$ , οπότε, ο ακριβής υπολογισμός των ορίων ελέγχου καθίσταται δυνατός. Οι προσομοιώσεις [60] έδειξαν ότι η κατάλληλη τιμή της  $m_0$  μπορεί να επιλεγεί στο εύρος [4,10] για  $m \geq 10$ . Έστω  $m_0 = 4$  στην προκειμένη περίπτωση [60]. Για δοθείσα  $FAP \alpha$ , το όριο ελέγχου του  $EWMA-MW$  διαγράμματος,  $h_{m,n}(\alpha)$  μπορεί να ληφθεί από την επίλυση των ακόλουθων εξισώσεων:

$$\begin{aligned} P(Y_{\max}(m, n) > h_{m,n}(\alpha) | Y_{\max}(m, i) \leq h_{m,i}(\alpha), 1 \leq i < n) &= \alpha, \quad \text{για } n > 1 \\ P(Y_{\max}(m, 1) > h_{m,1}(\alpha)) &= \alpha \end{aligned} \quad (5.16)$$

Λόγω της πολυπλοκότητας αυτής της δεσμευμένης πιθανότητας, φαίνεται να είναι αδύνατη η αναλυτική επίλυση του. Έτσι, παρόμοια με την μέθοδο των Hawkins, Qiu και Hank [36], οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] χρησιμοποίησαν ένα εκατομμύριο ακολουθίες μήκους 500 οι οποίες προέρχονται από την τυπική κανονική κατανομή για την εκτίμησή τους. Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] πρότειναν την έναρξη της παρακολούθησης μετά τη λήψη κάποιων προκαταρκτικών ή ιστορικών δεδομένων. Έτσι, δεν εξέτασαν την περίπτωση με πολύ μικρούς αριθμούς εντός ελέγχου δειγμάτων όπως  $m < 10$ .

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3 δείχνει τα όρια ελέγχου του *EWMA-MW* διαγράμματος για  $\alpha = 0.01, 0.005, 0.0027$  και  $0.002$ , που αντιστοιχούν στα  $ARL_0 = 100, 200, 370, 500$ , για  $m=10$  και  $50$ ,  $m_0=4$  και  $n \in [1-490]$ . Όπως φαίνεται, η  $h_{m,n}(\alpha)$  αυξάνει αρχικά, αλλά στη συνέχεια σταθεροποιείται. Οι ελλειπείς τιμές του πίνακα μπορούν να προσεγγιστούν από τις τελευταίες εισόδους στην ίδια στήλη. Πολλές προσομοιώσεις από την παραγωγή ανεξάρτητων ακολουθιών των παρατηρήσεων δείχνουν ότι τα όρια ελέγχου αποδίδουν αρκετά καλά. Αξίζει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα ελέγχου είναι ελεύθερο κατανομής, δηλαδή, τα  $ARL$  για διαφορετικές κατανομές είναι ίδια.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3 Τα  $h_{m,n}(\alpha)$  για το *EWMA-MW* διάγραμμα για  $m = 10$  και  $50$  και  $\alpha = 0.01, 0.005, 0.0027$  και  $0.002$ <sup>28</sup>

n	m=10				m=50			
	FAP $\alpha$							
	0.01	0.005	0.0027	0.002	0.01	0.005	0.0027	0.002
1	1.250	1.305	1.340	1.354	1.310	1.376	1.425	1.444
2	1.355	1.430	1.481	1.501	1.420	1.508	1.576	1.605
3	1.453	1.539	1.604	1.633	1.518	1.625	1.708	1.752
4	1.535	1.641	1.721	1.750	1.605	1.732	1.820	1.869
5	1.602	1.719	1.818	1.853	1.684	1.820	1.918	1.967
6	1.660	1.789	1.896	1.936	1.742	1.889	2.006	2.055
7	1.711	1.852	1.965	2.014	1.796	1.947	2.074	2.133
8	1.754	1.906	2.019	2.072	1.840	2.006	2.133	2.191
9	1.789	1.945	2.072	2.121	1.874	2.045	2.182	2.250
10	1.820	1.992	2.116	2.170	1.903	2.084	2.221	2.289
11	1.844	2.016	2.150	2.219	1.933	2.123	2.260	2.338
12	1.875	2.047	2.180	2.248	1.957	2.152	2.299	2.377
13	1.891	2.078	2.219	2.277	1.977	2.172	2.328	2.406
14	1.914	2.102	2.248	2.316	1.996	2.191	2.357	2.436
15	1.926	2.117	2.268	2.336	2.006	2.211	2.387	2.465
16	1.941	2.133	2.287	2.355	2.021	2.230	2.406	2.484
17	1.953	2.156	2.307	2.375	2.030	2.240	2.416	2.504
18	1.965	2.168	2.326	2.404	2.045	2.250	2.426	2.523
19	1.977	2.180	2.341	2.414	2.050	2.260	2.440	2.533
20	1.988	2.195	2.355	2.434	2.060	2.270	2.455	2.543
22	2.004	2.219	2.385	2.473	2.069	2.289	2.484	2.562
24	2.016	2.234	2.414	2.492	2.079	2.309	2.494	2.582
26	2.031	2.250	2.429	2.512	2.089	2.318	2.504	2.602
28	2.039	2.266	2.448	2.531	2.099	2.328	2.514	2.611
30	2.055	2.281	2.463	2.551	2.108	3.338	2.523	2.621
35	2.070	2.297	2.482	2.570	2.133	2.357	2.543	2.641
40	2.086	2.328	2.512	2.609	2.123	2.367	2.562	2.660
50	2.109	2.352	2.556	2.648	2.138	2.387	2.582	2.680
60	2.121	2.367	2.580	2.678	2.147	2.396	2.602	2.699
70	2.133	2.383	2.596	2.688	2.157	2.406	2.621	2.719
80	2.141	2.391	2.609	2.707	2.162	2.416	2.641	2.738
90	2.145	2.406	2.619	2.717	2.167	2.426	2.650	2.748
115	2.156	2.422	2.639	2.736	2.172	2.436	2.655	2.758
140	2.168	2.430	2.650	2.746	2.177	2.440	2.660	2.768
165	2.172	2.438	2.658	2.756	2.179	2.445	2.665	2.777
190	2.176	2.445	2.668	2.766	2.182	2.455	2.670	2.782
240	2.184	2.453	2.673	2.775	2.187	2.460	2.675	2.787
290		2.461	2.683	2.785		2.465	2.680	2.792
390			2.688	2.790			2.689	2.797
490				2.795				2.800

<sup>28</sup> Zhou, Zou, Zhang και Wang (2009)

Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] έδωσαν μια απλή προσέγγιση κλειστής μορφής βασισμένη στην προσαρμογή παλινδρόμησης [36]. Ωστόσο, βρήκαν ότι οι απλές εκφράσεις δεν προσαρμόζονταν καλά στον πίνακα. Έτσι, ο προσαρμοσμένος τύπος δεν αναφέρεται εδώ. Αν και οι τιμές του πίνακα δεν είναι πολύ βολικές για τους μηχανικούς ιδιοχείρως, μπορεί εύκολα να αξιολογηθούν από προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών, ακόμη και κάποιο λογισμικό στο οποίο η αποθήκευση για αυτά τα δεδομένα είναι ένα τετριμμένο έργο.

Υπάρχει ένα σημαντικό ζήτημα που απομένει να εξεταστεί, το οποίο είναι η επιλογή της  $h_{m,n}(\alpha)$  για διαφορετικά  $m$ . Από τον ΠΙΝΑΚΑ 5.3 παρατηρείται ότι η διαφορά των ορίων ελέγχου για  $m=10$  και  $m=50$  είναι πολύ μικρή. Ο λόγος είναι η κατανομή της  $Y_j(m_1, n)$  είναι προσεγγιστικά η ίδια με εκείνη της  $Y_j(m_2, n)$ , όπου  $m_1, m_2$  είναι αρκετά μεγάλα. Έτσι αναμένεται ότι τα όρια ελέγχου του *EWMA-MW* διαγράμματος για διαφορετικά  $m$  είναι πολύ κοντά. Εκτενείς προσομοιώσεις έχουν γίνει για να εξακριβωθεί αυτό, αλλά παρουσιάζονται μόνο μερικά για να τονίσει. Έχουν γίνει εκτενείς προσομοιώσεις για να ελεγχτεί αυτό, αλλά εδώ παρουσιάζονται μόνο μερικά για να περιγραφούν.

### 5.3.3 Διαγνωστικοί έλεγχοι

Ένας εκτιμητής βασισμένος στην *MW* στατιστική συνάρτηση του σημείου αλλαγής χρησιμοποιείται για να βοηθήσει το *EWMA-MW* διάγραμμα. Οι Zhou, Zou, Zhang και Wang [60] υπέθεσαν ότι ένα εκτός ελέγχου σήμα δίνεται στην παρατήρηση  $m+n$  από το *EWMA-MW* διάγραμμα, δηλαδή υπάρχουν  $m$  εντός ελέγχου ιστορικές και  $n$  μελλοντικές παρατηρήσεις, και έχει συμβεί μία μετατόπιση μετά το  $\tau$ -οστό μελλοντικό δείγμα ( $m \leq \tau < m+n$ ). Ο προτεινόμενος εκτιμητής [60] του σημείου αλλαγής  $\tau$  ενός βήματος μετατόπισης δίνεται από την

$$\hat{\tau} = \arg \max_{m \leq t < m+n} |SMW_{t,m+n}| \quad (5.17)$$

Για ευκολία υπολογισμού, είναι δυνατή η χρήση του έλεγχου άθροισης βαθμών του *Wilcoxon*, που είναι ισοδύναμος με το *MW* τεστ, από τη σχέση



$$MW_{t,n} = W_{t,n} - \frac{t(t+1)}{2} \quad (5.18)$$

όπου  $W_{t,n} = \sum_{i=1}^t SR_i$ ,  $R_i$  είναι ο βαθμός της  $i$ -οστής παρατήρησης στο πλήρες δείγμα των  $n$  παρατηρήσεων. Όταν η  $(n+1)$ -οστή παρατήρηση παρακολουθείται, χρειάζεται η σύγκριση της  $x_{i+1}$  με τη  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , και η λήψη μιας ακολουθίας βαθμών  $R_1,\dots,R_{n+1}$ . Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, η  $MW_{t,n}$  είναι εύκολη να υπολογιστεί επαναληπτικά, έτσι ώστε ο υπολογισμός των στατιστικών συναρτήσεων του  $EWMA-MW$  που βασίζεται στην  $SMW_{t,n}$  είναι τετριμμένος. Ωστόσο, πιστεύεται ότι δεν είναι εύκολη η εφαρμογή των προτεινόμενων διαγραμμάτων, γιατί θα πρέπει για άλλη μια φορά να υπολογιστούν πολλές τιμές της  $SMW$  και να αποκτήσουν τη στατιστική συνάρτηση  $Y_{\max}(m,n)$  όταν μια νέα παρατήρηση λαμβάνεται. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η χρήση υπολογιστή.

#### 5.3.4 Συγκρίσεις απόδοσης

Το μη παραμετρικό  $EWMA-MW$  διάγραμμα συγκρίνεται με το διάγραμμα ( $HQK$ ) που προτείνεται από τους Hawkins, Qiu και Kang [36] υπό την κανονική υπόθεση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η εντός ελέγχου κατανομή υποτίθεται ότι είναι η τυπική κανονική κατανομή. Οι αποδόσεις των  $EWMA-MW$  και  $HQK$  με  $m=10$ ,  $\alpha=0.005$  και διαφορετικές τιμές της  $\tau$  δίνονται στον ΠΙΝΑΚΑ 5.4 (100000 προσομοιώσεις). Οι τιμές της  $\tau$  επιλέγονται να είναι 10, 50, 100 και 250 για μια αντιπροσωπευτική παρουσίαση. Οποιαδήποτε σειρά για την οποία ένα σήμα συμβαίνει πριν το χρόνο  $\tau$  απορρίπτεται. Από τον ΠΙΝΑΚΑ 5.4, παρατηρήθηκε ότι:

- Καθώς συλλέγονται περισσότερες μελλοντικές εντός ελέγχου παρατηρήσεις, και τα δύο διαγράμματα θα είναι ευαίσθητα στις μετατοπίσεις, που οφείλονται στην ενημέρωση των πληροφοριών με νέες παρατηρήσεις.
- Το  $HQK$  διάγραμμα είναι πιο αποτελεσματικό από το  $EWMA-MW$  διάγραμμα όταν οι μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας είναι μέτριες και μεγάλες. Η ανωτερότητα του  $HQK$  διαγράμματος γίνεται σημαντική καθώς το  $\tau$  γίνεται μεγαλύτερο. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη καθώς το  $EWMA-MW$  διάγραμμα

βασισμένο στο *MW* τεστ χρησιμοποιεί μόνο τις πληροφορίες βαθμών των παρατηρήσεων. Αυτό σημαίνει ότι το *EWMA-MW* διάγραμμα δεν θα είναι σε θέση να ανιχνεύσει γρήγορα μεγάλες μετατοπίσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.4 Οι συγκρίσεις του *ARL* μεταξύ των *EWMA-MW* και *HQK* διαγραμμάτων για δεδομένα της  $N(0, 1)$  και  $m = 10$ ,  $\alpha = 0.05$ <sup>29</sup>

$\delta$	$\tau=10$		$\tau=50$		$\tau=100$		$\tau=250$	
	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>
0.00	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0
0.25	179.7	187.5	129.7	155.5	101.9	130.7	76.3	100.3
0.50	140.2	159.8	44.9	66.4	30.3	41.1	25.4	31.1
0.75	95.3	113.5	17.5	22.8	14.9	17.0	13.9	15.1
1.00	55.3	65.5	10.5	11.6	9.8	9.9	9.5	9.2
1.25	29.1	30.6	7.8	7.5	7.5	6.7	7.3	6.4
1.50	15.4	15.0	6.3	5.4	6.2	5.0	6.1	4.8
1.75	9.1	8.8	5.5	4.2	5.4	3.9	5.3	3.7
2.00	6.3	6.3	4.9	3.44	4.9	3.2	4.8	3.0
2.25	5.2	5.0	4.6	2.8	4.5	2.6	4.5	2.6
2.50	4.6	4.2	4.3	2.4	4.3	2.3	4.3	2.2
2.75	4.2	3.6	4.2	2.1	4.1	2.0	4.1	1.9
3.00	4.0	3.1	4.1	1.8	4.0	1.8	4.0	1.7

- Για μικρές μετατοπίσεις, το *EWMA-MW* διάγραμμα προσφέρει πολύ πιο γρήγορη ανίχνευση από το διάγραμμα *HQK*. Π.χ. όταν  $\delta=0.5$  και  $\tau=50$  το *EWMA-MW* διάγραμμα έχει  $ARL=44.9$  που είναι μόνο το 67% του  $ARL$  του *HQK* διαγράμματος. Με την πρώτη ματιά, αυτό φαίνεται ανεξήγητο γιατί η παραμετρική πιθανοφάνεια θα πρέπει να είναι πιο αποτελεσματική από ότι η μη παραμετρική μέθοδος βαθμού, όταν δίνεται η κατανομή. Στην πραγματικότητα, για καθορισμένα δείγματα, το *MW* τεστ είναι περίπου 0.96 φορές τόσο αποτελεσματικό όσο το *t-test* δύο δειγμάτων για αρκετά μεγάλα μεγέθη δείγματος [32]. Ωστόσο, ακόμη και όταν οι κατανομές είναι κανονικές, για μέτρια δείγματα, η ισχύς του *MW* τεστ είναι μεγαλύτερη από εκείνη του *t-test* δύο δειγμάτων, επειδή το *t-test* πρέπει να εκτιμήσει τη διακύμανση της διεργασίας αλλά το *MW* τεστ δεν το κάνει. Επίσης, το *EWMA* διάγραμμα αναμένεται να είναι πιο ευαίσθητο στις μικρές μετατοπίσεις.

Η αξιολόγηση της απόδοσης του *EWMA-MW* διαγράμματος ελέγχου [60] στην ανίχνευση της μετατόπισης του μέσου δίνεται όταν τα δεδομένα της διεργασίας προέρχονται από τη *Chi-square* με βαθμό ελευθερίας 4, τη *Student-t* με βαθμό ελευθερίας 4 και τη *lognormal* κατανομή με παράμετρο θέσης μηδέν και παράμετρο κλίμακας ένα. Αυτές οι τρεις κατανομές επιλέγονται, επειδή

<sup>29</sup> Zhou, Zou, Zhang και Wang (2009)

αντιπροσωπεύουν μια ευρεία ποικιλία σχημάτων όπως συμμετρική, η ασύμμετρη, και με βαριά ουρά κατανομή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.5 Οι συγκρίσεις του *ARL* μεταξύ των *EWMA-MW* και *HQK* διαγραμμάτων για δεδομένα της  $\chi^2(4)$  και  $m = 10$ ,  $\alpha = 0.005$ <sup>30</sup>.

$\delta$	$\tau=10$		$\tau=50$		$\tau=100$		$\tau=250$	
	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>
0.00	200.0	59.5	200.0	59.5	200.0	59.5	200.0	59.1
0.25	199.5	56.2	139.2	155.5	99.7	46.1	64.3	43.9
0.50	170.3	51.6	41.9	66.4	24.8	29.2	20.2	25.3
0.75	124.0	44.2	15.5	22.8	12.5	16.5	11.5	14.5
1.00	81.1	34.2	9.5	11.6	8.6	10.2	8.2	9.3
1.25	49.0	23.7	7.2	7.5	6.8	7.0	6.6	6.6
1.50	29.1	15.4	6.1	5.4	5.8	5.2	5.7	4.9
1.75	17.7	10.2	5.4	4.2	5.2	4.0	5.1	3.9
2.00	11.6	7.3	4.9	3.44	4.8	3.2	4.9	3.1
2.25	8.1	5.6	4.6	2.8	4.5	2.7	4.5	2.6
2.50	6.5	4.5	4.4	2.4	4.3	2.3	4.3	2.2
2.75	5.5	3.8	4.3	2.1	4.2	2.0	4.2	1.9
3.00	5.0	3.3	4.2	1.8	4.1	1.8	4.1	1.7

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.6 Οι συγκρίσεις του *ARL* μεταξύ των *EWMA-MW* και *HQK* διαγραμμάτων για δεδομένα της  $t(4)$  και  $m = 10$ ,  $\alpha = 0.005$ <sup>31</sup>.

$\delta$	$\tau=10$		$\tau=50$		$\tau=100$		$\tau=250$	
	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>
0.00	200.0	61.4	200.0	59.0	200.0	58.4	200.0	58.4
0.25	177.4	59.6	113.9	52.2	81.2	48.2	57.7	45.3
0.50	132.3	53.2	31.1	34.3	22.0	27.2	19.0	23.5
0.75	81.6	41.9	13.1	18.3	11.6	14.4	10.9	12.9
1.00	44.3	28.7	8.6	10.6	8.1	8.9	7.8	8.2
1.25	23.5	18.2	6.7	7.0	6.4	6.1	6.3	5.7
1.50	13.2	11.8	5.7	5.1	5.5	4.5	5.4	4.3
1.75	8.6	8.2	5.1	3.9	5.0	3.6	4.9	3.4
2.00	6.5	6.1	4.7	3.2	4.6	2.9	4.6	2.8
2.25	5.4	4.9	4.5	2.6	4.4	2.4	4.4	2.3
2.50	4.9	4.1	4.3	2.3	4.3	2.1	4.2	2.0
2.75	4.5	3.5	4.2	2.0	4.1	1.8	4.1	1.7
3.00	4.3	3.0	4.1	1.7	4.1	1.6	4.4	1.5

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.7 Οι συγκρίσεις του *ARL* μεταξύ των *EWMA-MW* και *HQK* διαγραμμάτων για δεδομένα της  $\lognormal(0,1)$  και  $m = 10$ ,  $\alpha = 0.005$ <sup>32</sup>.

$\delta$	$\tau=10$		$\tau=50$		$\tau=100$		$\tau=250$	
	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>	<i>EWMA-MW</i>	<i>HQK</i>
0.00	200.0	28.7	200.0	30.9	200.0	31.9	200.0	35.3
0.25	193.8	28.2	142.3	30.4	105.6	31.7	71.7	36.4
0.50	161.1	27.7	49.6	29.4	29.1	30.9	22.8	36.8
0.75	127.1	26.9	20.1	28.0	14.8	29.2	13.5	34.1
1.00	97.2	25.6	12.0	25.8	10.4	26.2	9.9	26.4
1.25	74.3	24.0	9.1	22.7	8.4	22.0	8.1	20.4
1.50	56.4	22.1	7.6	19.3	7.2	17.8	7.0	16.9
1.75	43.8	19.8	6.7	15.9	6.4	14.3	6.3	13.4
2.00	34.0	17.5	6.1	13.0	5.9	11.5	5.8	11.0
2.25	27.3	15.3	5.7	10.7	5.5	9.4	5.5	9.6
2.50	22.0	13.4	5.4	8.8	5.2	7.9	5.2	7.4
2.75	18.2	11.7	5.1	7.4	5.0	6.6	5.0	6.2
3.00	15.4	10.3	5.0	6.3	4.9	5.7	4.8	5.3

<sup>30</sup> Zhou, Zou, Zhang και Wang (2009)

<sup>31</sup> Zhou, Zou, Zhang και Wang (2009)

<sup>32</sup> Zhou, Zou, Zhang και Wang (2009)

Οι ΠΙΝΑΚΕΣ 5.5 - 5.7 έδειξαν ότι:

- Για όλες τις κατανομές, το *HQK* διάγραμμα με βάση την κανονική κατανομή δεν μπορεί λάβει το συγκεκριμένο  $ARL_0$ , αλλά το *EWMA-MW* διάγραμμα είναι πιο ισχυρό σε αυτές τις κατανομές. Όπως επισημάνθηκε ανωτέρω, το *HQK* διάγραμμα μπορεί επίσης να σχεδιαστεί για άλλες κατανομές αν η κατανομή της διεργασίας είναι γνωστή, αλλά τέτοιες πληροφορίες κατανομών δεν είναι διαθέσιμες στα στάδια εκκίνησης.
- Το *EWMA-MW* διάγραμμα έχει μια καλή απόδοση σε σύγκριση με το *HQK* διάγραμμα για όλες τις κατανομές για μέτρια ή μικρή μετατόπιση. Καθώς οι μελλοντικές εντός ελέγχου παρατηρήσεις συσσωρεύονται, το *EWMA-MW* διάγραμμα είναι πιο ευαίσθητο στις μικρές μετατοπίσεις.
- Για την ανίχνευση των μεγάλων μετατοπίσεων, οι αποδόσεις του *EWMA-MW* διαγράμματος υπό αυτές τις κατανομές είναι παρόμοιες με την κανονική περίπτωση. Συνήθως χρειάζεται να ληφθούν μερικές παρατηρήσεις στην ανίχνευση μιας μετατόπισης, χωρίς να έχει σημασία πόσο μεγάλη είναι η μετατόπιση. Για παράδειγμα, είναι αδύνατον να δοθεί ένα σήμα σε λιγότερες από τέσσερις παρατηρήσεις για  $\delta = 3.0$ .

Παρόμοια αποτελέσματα θα μπορούσαν να επιτευχθούν, όταν το ποιοτικό χαρακτηριστικό προέρχεται από άλλες ασύμμετρες ή με βαριά ουρά κατανομές. Εν κατακλείδι, το *EWMA-MW* διάγραμμα ελέγχου εισάγεται βασισμένο στον κλασικό μη παραμετρικό τύπο βαθμού αλλαγής σημείου, για την ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο της διαδικασίας. Αυτό το διάγραμμα μπορεί να σχεδιαστεί εύκολα και αποδίδει καλά στην περίπτωση που οι παράμετροι διεργασίας είναι άγνωστες, ενώ κάποια ιστορικά δείγματα είναι διαθέσιμα. Επιπλέον, αυτό το διάγραμμα είναι ελεύθερο κατανομής. Από τις προσομοιώσεις, φαίνεται [60] ότι το *EWMA-MW* διάγραμμα έχει καλή απόδοση για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ανεξαρτήτως κατανομής. Ωστόσο, υπάρχουν επίσης μειονεκτήματα σε αυτό το *EWMA-MW* διάγραμμα. Αυτό το διάγραμμα μειώνει την ευαισθησία στις ακραίες τιμές και είναι λιγότερο αποτελεσματικό από την παραμετρική μέθοδο για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Πιστεύεται ότι το *EWMA-MW* διάγραμμα αποδίδει αρκετά ανθεκτικά για τις μη κανονικές κατανομές και επίσης αποφεύγει μια μακρά ανάλυση Φάσης I.

## 5.4 Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA*

Όπως τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*, έτσι και τα αντίστοιχα διαγράμματα τύπου *EWMA* αποτελούν μία αρκετά καλή και χρήσιμη εναλλακτική επιλογή για όσους ασχολούνται συστηματικά με το ΣΕΔ, αν φυσικά ικανοποιούνται όλες οι βασικές υποθέσεις για την εφαρμογή και τη χρήση τους. Το βασικότερο πλεονέκτημα που παρουσιάζουν είναι ότι, μπορούν να εντοπίσουν εύκολα και έγκαιρα μικρές ή πολύ μικρές μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν τα δεδομένα.

Επίσης, το γεγονός ότι αυτά τα διαγράμματα είναι μη παραμετρικά, τα καθιστά ανεξάρτητα από οποιαδήποτε κατανομή και αν ακολουθούν τα δεδομένα. Από την άλλη πλευρά, το πιο σημαντικό μειονέκτημα για τα συγκεκριμένα διαγράμματα, είναι ότι συνήθως δεν καταφέρνουν να ανιχνεύσουν εύκολα μεγάλες μετατοπίσεις των στατιστικών παραμέτρων της κατανομής των δεδομένων, όπως μπορούν να κάνουν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες. Εκτός από αυτό, ορισμένα από αυτά τα διαγράμματα ελέγχου, απαιτούν τη συλλογή μεμονωμένων παρατηρήσεων και όχι δειγμάτων, κάτι που ίσως να είναι πρακτικά δύσκολο ή και ανέφικτο. Ακόμη, η συλλογή ενός αρχικού τυχαίου δείγματος, συνήθως προκαλεί αυξημένο οικονομικό κόστος, ιδιαίτερα στην περίπτωση που το μέγεθός του είναι σχετικά μεγάλο.

Σε κάθε περίπτωση πάντως, θεωρείται γενικά ότι, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* παίζουν σημαντικό ρόλο στον ΣΕΔ και ότι [19] υπάρχουν ακόμη πολλές δυνατότητες εκτεταμένης μελλοντικής επιστημονικής έρευνας πάνω στα συγκεκριμένα διαγράμματα. Η στατιστική και πρακτική σπουδαιότητα αυτών των διαγραμμάτων, εντοπίζεται στην έγκαιρη ανίχνευση μικρών ή πολύ μικρών μετατοπίσεων των στατιστικών (πληθυσμιακών) παραμέτρων της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις που συλλέγονται.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## Σύνοψη

Στην παρούσα εργασία, αναφέραμε ορισμένες από τις κύριες συνεισφορές και ιδέες και μερικές από τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα των μονομεταβλητών παραμετρικών και μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου.

Στο Κεφάλαιο 1 περιγράψαμε τα κύρια χαρακτηριστικά του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας και των διαγραμμάτων ελέγχου. Επίσης παρουσιάσαμε συνοπτικά τις τρεις κατηγορίες παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου: τα *Shewhart*, τα *CUSUM* και τα *EWMA* διαγράμματα καθώς και τον συνδυασμό των *Shewhart* και *EWMA* διαγραμμάτων.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε την έννοια «μη παραμετρικό» και διακρίναμε τις τρεις κύριες κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου που αντιστοιχούν στις παραμετρικές ομολόγους τους: τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*, τύπου *CUSUM* και τύπου *EWMA*.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράψαμε τα κύρια μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*. Ήτοι τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν: το *Hodges-Lehmann* εκτιμητή, τη προσημική συνάρτηση, τη *Mann-Whitney* - *Wilcoxon* συνάρτηση, την εμπειρική κατανομή αναφοράς, τις συναρτήσεις ροών και τις αθροιστικές βαθμολογικές συναρτήσεις τύπου *Wilcoxon*. Επίσης παρουσιάσαμε διαγράμματα για τον έλεγχο της διαμέσου, το βασικό διάγραμμα προτεραιότητας και τα διαγράμματα προτεραιότητας με κανόνες σηματοδότησης.

Στο Κεφάλαιο 4 περιγράψαμε τα κύρια μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*. Δηλαδή τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν τις προσημικές-βαθμολογικές συναρτήσεις, τους διαδοχικούς βαθμούς, τις προσημικές συναρτήσεις και τη *Mann-Whitney* - *Wilcoxon* συνάρτηση.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 περιγράψαμε τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* που χρησιμοποιούν τυποποιημένους βαθμούς μεμονωμένων παρατηρήσεων, προσημικές-βαθμολογικές συναρτήσεις και τη *Mann-Whitney - Wilcoxon* συνάρτηση. Προφανώς, υπάρχουν αρκετές δυνατότητες για μελλοντική έρευνα και στις τρεις κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου.

Μελετήσαμε προβλήματα απόφασης στο πλαίσιο των Φάσεων I και II. Σε όλες τις ενότητες εξετάσαμε την παρακολούθηση της διεργασίας Φάσης II εκτός από την ενότητα 4.4 που προτάθηκε ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* για την προκαταρκτική ανάλυση Φάσης I μεμονωμένων παρατηρήσεων. Παρά το γεγονός ότι το πεδίο της προκαταρκτικής ανάλυσης Φάσης I είναι ενδιαφέρον και η βιβλιογραφία των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I αυξάνεται, είναι αναγκαία περαιτέρω έρευνα για τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης I γενικώς.

Μελετήσαμε μόνο τα μονομεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που έχουν σχεδιαστεί για της παρακολούθηση της θέσης μιας συνεχούς διαδικασίας, καθώς πολύ λίγα διαγράμματα είναι διαθέσιμα για την παρακολούθηση της κλίμακας. Ως εκ τούτου, πρέπει να γίνει μελλοντική έρευνα στην παρακολούθηση της κλίμακας και ταυτόχρονα στην παρακολούθηση της θέσης και της κλίμακας της διεργασίας.

Επιπρόσθετα, είναι δυνατή η διερεύνηση του ζητήματος της «βέλτιστης» δημιουργίας μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα «βέλτιστους» μη παραμετρικούς ελέγχους. Φυσικά, χρειάζεται να οριστεί η σημασία του βέλτιστου διαγράμματος ελέγχου. Στο ίδιο πνεύμα, χρειάζεται να οριστεί η σημασία της «αποτελεσματικότητας» του παραμετρικού διαγράμματος σε σχέση με το παραμετρικό (δηλαδή την κλασική κανονική θεωρία) διάγραμμα και η μελέτη των πλεονεκτημάτων του ενός διαγράμματος σε σχέση με το άλλο. Για το σκοπό αυτό, μπορούν να εξεταστούν «τοπικές» ιδιότητες του *ARL* ενός διαγράμματος, στο πλαίσιο, για παράδειγμα, εναλλακτικών "συνεχόμενης" μετατόπισης. Ορισμένες από αυτές τις αναλύσεις συνεπάγονται υπολογισμούς, όπου το μέγεθος του δείγματος  $n$  και ο αριθμός των δειγμάτων μπορεί να είναι μεγάλο.



Δεδομένου ότι η επιλογή ενός διαγράμματος ελέγχου εξαρτάται από το είδος της υποκείμενης κατανομής της διεργασίας, φαίνεται χρήσιμη η διερεύνηση του τι θα μπορούσε να ονομαστεί «προσαρμοστικά διαγράμματα ελέγχου», ο όρος προσαρμοστικά χρησιμοποιείται εδώ με την αίσθηση του Hogg(1974). Για παράδειγμα, είναι δυνατή η χρήση ενός προκαταρτικού δείγματος αναφοράς για τη μέτρηση, ας πούμε, της ασυμμετρίας και της κύρτωσης του πληθυσμού, και με βάση αυτών των εκτιμήσεων είναι δυνατή η επιλογή μιας «βέλτιστης» μεθόδου κατασκευής μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου.



## Παραρτήματα

- I. Σταθερές για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου για μεταβλητές.
- II.  $B(n, p)$ : Συνάρτηση κατανομής.
- III.  $P(np)$ : Συνάρτηση κατανομής.

Παράρτημα Ι Σταθερές για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου για μεταβλητές

n	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>
2	2.1213	1.88	2.6587	1.1284	0.8525	0.7979	0.	3.6859	0.	3.2665	0.	3.2665	0.	2.6063
3	1.7321	1.0233	1.9544	1.6926	0.8884	0.8862	0.	4.3577	0.	2.5746	0.	2.5682	0.	2.276
4	1.5	0.7286	1.6281	2.0588	0.8798	0.9213	0.	4.6982	0.	2.2821	0.	2.266	0.	2.0877
5	1.3416	0.5768	1.4273	2.3259	0.8641	0.94	0.	4.9182	0.	2.1145	0.	2.089	0.	1.9636
6	1.2247	0.4832	1.2871	2.5344	0.848	0.9515	0.	5.0785	0.	2.0038	0.0304	1.9696	0.0289	1.8742
7	1.1339	0.4193	1.1819	2.7044	0.8332	0.9594	0.2047	5.204	0.0757	1.9243	0.1177	1.8823	0.1129	1.8058
8	1.0607	0.3725	1.0991	2.8472	0.8198	0.965	0.3877	5.3067	0.1362	1.8638	0.1851	1.8149	0.1786	1.7514
9	1.	0.3367	1.0317	2.97	0.8078	0.9693	0.5465	5.3935	0.184	1.816	0.2391	1.7609	0.2318	1.7068
10	0.9487	0.3083	0.9754	3.0775	0.7971	0.9727	0.6864	5.4687	0.223	1.777	0.2837	1.7163	0.2759	1.6694
11	0.9045	0.2851	0.9274	3.1729	0.7873	0.9754	0.8109	5.5348	0.2556	1.7444	0.3213	1.6787	0.3134	1.6373
12	0.866	0.2658	0.8859	3.2585	0.7785	0.9776	0.923	5.5939	0.2833	1.7167	0.3535	1.6465	0.3456	1.6095
13	0.8321	0.2494	0.8495	3.336	0.7704	0.9794	1.0247	5.6472	0.3072	1.6928	0.3816	1.6184	0.3737	1.5851
14	0.8018	0.2354	0.8173	3.4068	0.763	0.981	1.1177	5.6958	0.3281	1.6719	0.4062	1.5938	0.3985	1.5634
15	0.7746	0.2231	0.7885	3.4718	0.7562	0.9823	1.2031	5.7404	0.3465	1.6535	0.4282	1.5718	0.4206	1.544
16	0.75	0.2123	0.7626	3.532	0.7499	0.9835	1.2823	5.7817	0.363	1.637	0.4479	1.5521	0.4405	1.5265
17	0.7276	0.2028	0.7391	3.5879	0.7441	0.9845	1.3557	5.82	0.3779	1.6221	0.4657	1.5343	0.4585	1.5106
18	0.7071	0.1943	0.7176	3.6401	0.7386	0.9854	1.4243	5.8558	0.3913	1.6087	0.4818	1.5182	0.4748	1.496
19	0.6882	0.1866	0.6979	3.689	0.7335	0.9862	1.4885	5.8894	0.4035	1.5965	0.4966	1.5034	0.4898	1.4826
20	0.6708	0.1796	0.6797	3.7349	0.7287	0.9869	1.5489	5.921	0.4147	1.5853	0.5102	1.4898	0.5036	1.4703
21	0.6547	0.1733	0.6629	3.7783	0.7242	0.9876	1.6058	5.9509	0.425	1.575	0.5228	1.4772	0.5163	1.4589
22	0.6396	0.1675	0.6473	3.8194	0.7199	0.9882	1.6596	5.9791	0.4345	1.5655	0.5344	1.4656	0.5281	1.4483
23	0.6255	0.1621	0.6327	3.8583	0.7159	0.9887	1.7107	6.006	0.4434	1.5566	0.5452	1.4548	0.5391	1.4383
24	0.6124	0.1572	0.6191	3.8953	0.7121	0.9892	1.7591	6.0316	0.4516	1.5484	0.5553	1.4447	0.5493	1.4291
25	0.6	0.1526	0.6063	3.9306	0.7084	0.9896	1.8053	6.056	0.4593	1.5407	0.5648	1.4352	0.5589	1.4203
26	0.5883	0.1484	0.5943	3.9643	0.705	0.9901	1.8494	6.0793	0.4665	1.5335	0.5737	1.4263	0.568	1.4121
27	0.5774	0.1445	0.5829	3.9965	0.7017	0.9904	1.8914	6.1016	0.4733	1.5267	0.582	1.418	0.5765	1.4044
28	0.5669	0.1408	0.5722	4.0274	0.6986	0.9908	1.9318	6.1231	0.4797	1.5203	0.5899	1.4101	0.5845	1.3971
29	0.5571	0.1373	0.5621	4.057	0.6955	0.9911	1.9704	6.1437	0.4857	1.5143	0.5974	1.4026	0.592	1.3902
30	0.5477	0.1341	0.5525	4.0855	0.6927	0.9914	2.0075	6.1635	0.4914	1.5086	0.6044	1.3956	0.5992	1.3836

Για  $n > 30$

$$A_1 = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3} \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Παράρτημα II  $B(n, p)$ : Συνάρτηση κατανομής

$$L(p | n; c) = \sum_{d=0}^c \binom{n}{p} p^d (1-p)^{n-d}$$

n	c	p									
		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
2	0	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.9044	0.8171	0.7374	0.6648	0.5987	0.5386	0.4840	0.4344	0.3894	0.3487
	1	0.9957	0.9838	0.9655	0.9418	0.9139	0.8824	0.8483	0.8121	0.7746	0.7361
	2	0.9999	0.9991	0.9972	0.9938	0.9885	0.9812	0.9717	0.9599	0.9460	0.9298
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980	0.9964	0.9942	0.9912	0.9872
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.8601	0.7386	0.6333	0.5421	0.4633	0.3953	0.3367	0.2863	0.2430	0.2059
	1	0.9904	0.9647	0.9270	0.8809	0.8290	0.7738	0.7168	0.6597	0.6035	0.5490
	2	0.9996	0.9970	0.9906	0.9797	0.9638	0.9429	0.9171	0.8870	0.8531	0.8159
	3	1.0000	0.9998	0.9992	0.9976	0.9945	0.9896	0.9825	0.9727	0.9601	0.9444
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9972	0.9950	0.9918	0.9873
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9978
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

<i>n</i>	<i>c</i>	<i>P</i>									
		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
20	0	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516	0.1216
	1	0.9831	0.9401	0.8802	0.8103	0.7358	0.6605	0.5869	0.5169	0.4516	0.3917
	2	0.9990	0.9929	0.9790	0.9561	0.9245	0.8850	0.8390	0.7879	0.7334	0.6769
	3	1.0000	0.9994	0.9973	0.9926	0.9841	0.9710	0.9529	0.9294	0.9007	0.8670
	4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9974	0.9944	0.9893	0.9817	0.9710	0.9568
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9981	0.9962	0.9932	0.9887
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
25	0	0.7778	0.6035	0.4670	0.3604	0.2774	0.2129	0.1630	0.1244	0.0946	0.0718
	1	0.9742	0.9114	0.8280	0.7358	0.6424	0.5527	0.4696	0.3947	0.3286	0.2712
	2	0.9980	0.9868	0.9620	0.9235	0.8729	0.8129	0.7466	0.6768	0.6063	0.5371
	3	0.9999	0.9986	0.9938	0.9835	0.9659	0.9402	0.9064	0.8649	0.8169	0.7636
	4	1.0000	0.9999	0.9992	0.9972	0.9928	0.9850	0.9726	0.9549	0.9314	0.9020
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9969	0.9935	0.9877	0.9790	0.9666
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9987	0.9972	0.9946	0.9905
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9977
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
30	0	0.7397	0.5455	0.4010	0.2939	0.2146	0.1563	0.1134	0.0820	0.0591	0.0424
	1	0.9639	0.8795	0.7731	0.6612	0.5535	0.4555	0.3694	0.2958	0.2343	0.1837
	2	0.9967	0.9783	0.9399	0.8831	0.8122	0.7324	0.6487	0.5654	0.4855	0.4114
	3	0.9998	0.9971	0.9881	0.9694	0.9392	0.8974	0.8450	0.7842	0.7175	0.6474
	4	1.0000	0.9997	0.9982	0.9937	0.9844	0.9685	0.9447	0.9126	0.8723	0.8245
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9967	0.9921	0.9838	0.9707	0.9519	0.9268
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983	0.9960	0.9918	0.9848	0.9742
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9959	0.9922
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

<i>n</i>	<i>c</i>	<i>p</i>									
		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
40	0	0.6690	0.4457	0.2957	0.1954	0.1285	0.0842	0.0549	0.0356	0.0230	0.0148
	1	0.9393	0.8095	0.6615	0.5210	0.3991	0.2990	0.2201	0.1594	0.1140	0.0805
	2	0.9925	0.9543	0.8822	0.7855	0.6767	0.5665	0.4625	0.3694	0.2894	0.2228
	3	0.9993	0.9918	0.9686	0.9252	0.8619	0.7827	0.6937	0.6007	0.5092	0.4231
	4	1.0000	0.9988	0.9933	0.9790	0.9520	0.9104	0.8546	0.7868	0.7103	0.6290
	5	1.0000	0.9999	0.9988	0.9951	0.9861	0.9691	0.9419	0.9033	0.8535	0.7937
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9966	0.9909	0.9801	0.9624	0.9361	0.9005
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9942	0.9873	0.9758	0.9581
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9985	0.9963	0.9919	0.9845
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9949
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
50	0	0.6050	0.3642	0.2181	0.1299	0.0769	0.0453	0.0266	0.0155	0.0090	0.0052
	1	0.9106	0.7358	0.5553	0.4005	0.2794	0.1900	0.1265	0.0827	0.0532	0.0338
	2	0.9862	0.9216	0.8108	0.6767	0.5405	0.4162	0.3108	0.2260	0.1605	0.1117
	3	0.9984	0.9822	0.9372	0.8609	0.7604	0.6473	0.5327	0.4253	0.3303	0.2503
	4	0.9999	0.9968	0.9832	0.9510	0.8964	0.8206	0.7290	0.6290	0.5277	0.4312
	5	1.0000	0.9995	0.9963	0.9856	0.9622	0.9224	0.8650	0.7919	0.7072	0.6161
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964	0.9882	0.9711	0.9417	0.8981	0.8404	0.7702
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9968	0.9906	0.9780	0.9562	0.9232	0.8779
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9973	0.9927	0.9833	0.9672	0.9421
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9944	0.9875	0.9755
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9994	0.9983	0.9957	0.9906
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9968
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	



$n$	$c$	$p$							
		0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



Παράρτημα III  $P(np)$ : Συνάρτηση Κατανομής

$$L^*(p|n;c) = \sum_{d=0}^c e^{-np} \frac{(np)^d}{d!}$$

c	np									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

c	np									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

c	np									
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

c	np									
	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4532	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

c	np									
	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3594	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6684	0.6510	0.6335	0.6160
6	0.8786	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9049	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

c	np									
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0073	0.0030	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0296	0.0138	0.0062	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.0818	0.0424	0.0212	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.1730	0.0996	0.0550	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3007	0.1912	0.1157	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.4497	0.3134	0.2068	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.5987	0.4530	0.3239	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7291	0.5925	0.4557	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8305	0.7166	0.5874	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9015	0.8159	0.7060	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9467	0.8881	0.8030	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9730	0.9362	0.8758	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9872	0.9658	0.9261	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9943	0.9827	0.9585	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9976	0.9918	0.9780	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9990	0.9963	0.9889	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9996	0.9984	0.9947	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9993	0.9976	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

- [1] Ατζουλάκος, Δ. (2008 - Β' Έκδοση). "Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας". Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- [2] Κουκουβίνος, Χ. (2008). "Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας". ΕΜΠ
- [3] Κούτρας Μ. Β., Τριανταφύλλου Ι. Σ., Balakrishnan N.. "Ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση διατεταγμένων δειγμάτων." Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο Πρακτικά 20<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής (2007), σελ 225-232

## Ξένη

- [4] AMIN, R. W., REYNOLDS, M. R. JR. and BAKIR, S. T. (1995). "Nonparametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic". *Communications in Statistics Theory and Methods* 24, pp. 1597-1623.
- [5] AMIN, R. and SEARCY, A. J. (1991). "A Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme". *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 20, pp. 1049--1072.
- [6] Alloway, J. A., Raghavachari, M. (1991). "Control chart based on Hodges–Lehmann estimator". *Journal of Quality Technology* 23: 336–347
- [7] BAKIR, S. T. (2004). "A distribution-free Shewhart quality control chart based on signed-ranks". *Quality Engineering* 16, 613-623.
- [8] BAKIR, S. T. (2006). "Distribution-Free Quality Control Charts Based on Signed-Rank-Like Statistics". *Comm. Statist. Theory Methods* 35, 743–757.
- [9] BAKIR, S. T. and REYNOLDS, M. R., JR. (1979). "A Nonparametric Procedure for Process Control Based on Within-Group Ranking". *Technometrics* 21, pp. 175-183.
- [10] Balakrishnan, N., Frattina, R. (2000). "Precedence test and maximal precedence test". In: Limnios N., Nikulin M. (Eds.), "Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice and Inference". Birkhauser, Boston, pp.355–378.
- [11] Balakrishnan, N., Koutras, M. V. (2002). "Runs and Scans with Applications". *John Wiley*, New York.

- [12] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T., (2001). "A general maximal precedence test". In: Hayakawa Y., Irony T., Xie M. (Eds.), *System and Bayesian Reliability –Essays in Honor of Prof. Richard E. Barlow for his 70th Birthday*. World Scientific Publishing, Singapore, pp.105–122.
- [13] N. Balakrishnan , I. S. Triantafyllou & M. V. Koutras (2010). "A Distribution-Free Control Chart Based on Order Statistics, *Communications in Statistics - Theory and Methods*". 39:20, 3652 - 3677, DOI: 10.1080/03610920903324858
- [14] Balakrishnan, N., Triantafyllou, I.S., Koutras, M.V.(2009). "Nonparametric control charts based on runs and Wilcoxon-type rank-sum statistics". *Journal of Statistical Planning and Inference* 1393177-3192
- [15] Capizzi, Giovanna and Masarotto, Guido (2009). "Combined Shewhart-EWMA control charts with estimated parameters". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 00, No. 0, Month 2009, 1–15
- [16] Chakraborti, S. (2000). "Run length, average run length and false alarm rate of Shewhart X-bar chart: exact derivations by conditioning". *Comm. Statist .Simulation Comput.* 29,61–81.
- [17] Chakraborti, S. (2007). "Run length distribution and percentiles: The Shewhart X-bar chart with unknown parameters". *Quality Engineering* 19, 119-127.
- [18] CHAKRABORFTI, S. VAN DER LAAN, P.; and VAN DE WIEL. M. A. (2000). "A Class of Distribution-Free Control Charts". *SPOR-Report 2000-II, Department of Mathematics and Computing Science*, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands.
- [19] Chakraborti, S., Van Der Laan, P. and Bakir, S.T. (2001). "Nonparametric control charts: An overview and some Results". *Journal of Quality Technology*, 33, 304- 315.
- [20] Chakraborti, S., Van der Laan, P., Van de Wiel, M.A., 2004. "A class of distribution-free control charts". *Journal of the Royal Statistical Society, Series C* 53,443-462.
- [21] Chakraborti, S., Eryilmaz, S., (2007). "A nonparametric Shewhart-type signed-rank control chart based on runs". *Communications in Statistics: Simulation and Computation* 36, 335-356.

- [22] Chakraborti, S., Eryilmaz, S., Human, S.W. (2009). "A phase II nonparametric control chart based on precedence statistics with runs-type signaling rules". *Computational Statistics and Data Analysis* 53 1054-1065
- [23] Chakraborti, S., Van de Wiel, M.A. "A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney statistic". *IMS Collections Beyond Parametrics in Interdisciplinary Research: Festschrift in Honor of Professor Pranab K. Sen Vol. 1* (2008) 156–172 © Institute of Mathematical Statistics, 2008 DOI: 10.1214/193940307000000112
- [24] Das, N. (2009). "A comparison study of three non-parametric control charts to detect shift in location parameters". *Int J Adv Manuf Technol* 41:799–807. DOI 10.1007/s00170-008-1524-3
- [25] David, H.A., Nagaraja, H.N., 2003. "Order Statistics". Third ed. Wiley, Hoboken, New Jersey.
- [26] Derman, C., Ross, S.M. (1997). "Statistical Aspects of Quality Control". Academic Press, San Diego.
- [27] Fu, J.C., Spiring, F.A., Xie, H., 2002. "On the average run lengths of quality control schemes using a Markov chain approach". *Statistics and Probability Letters* 56, 369\_380.
- [28] Fu, J.C., Lou, W.Y.W., 2003. "Distribution Theory of Runs and Patterns and Its Applications: A Finite Markov Chain Imbedding Approach". World Scientific Publishing, Singapore.
- [29] Gauri, Susanta Kumar.(2009). "A test for suitability of the preliminary samples for constructing control limits of chart". *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Vol. 00, No. 0, Month 2009, 1–17
- [30] George, E.O., Bowman, D. (1995). "A full likelihood procedure for analyzing exchangeable binary data". *Biometrics* 51, 512-523.
- [31] GIBBONS, J. D. and CHAKRABORTI, S. (1992). *Nonparametric Statistical Inference*, 3rd ed. Marcel Dekker, New York, NY.
- [32] Gibbons, J.D., Chakraborti, S. (2003). *Nonparametric Statistical Inference*, fourth ed. Marcel Dekker, *New York. Economic Quality Control*
- [33] HACKL, P. and LEDOLTER, J. (1991). "A Control Chart Based on Ranks". *Journal of Quality Technology* 23, pp. 117-124.

- [34] IHACKL. P. and LEDOLTER, J. (1992). "A New Nonparametric Quality Control Technique". *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 21, pp. 423- 443.
- [35] Hawkins, D. M. (1993). "Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool". *Quality Engineering*, 5, 463-467
- [36] Hawkins, D. M., Qiu, P. and Kang, C. W. (2003). "The Change point Model for Statistical Process Control". *Journal of Quality Technology*, 35, 355-366.
- [37] JANACEK, C. J. and MEIKLE, S. E. (1997). "Control Charts Based on Medians". *The Statistician* 46, pp. 19-31.
- [38] Jensen, J. L. (1995). "Saddlepoint Approximations". *Oxford Univ. Press*, New York.
- [39] Kemp, K.W., "The Use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes". *Applied Statistics*, 11, 16- 31, 1962.
- [40] Khoo και Teoh (2006), "Increasing The Sensitivity Of An EWMA Control Chart Based On Ranks". Proceedings of 2nd IMT-GT Regional Conference on Mathematics, *Statistics and Applications* Universiti Sains Malaysia, Penang, June 13-15,2006
- [41] Klein, M. (2000). Two alternatives to the Shewhart  $\bar{X}$  control chart". *Journal of Quality Technology* 32, 427-431.
- [42] Koning A. J., Does R. J. M. M.(2000). "CUSUM control charts for preliminary analysis of individual observations". *J Quality Technol*, 32: 122–132
- [43] Lehmann, E.L. (1963). "Non-parametric confidence intervals for shift parameter". *The Ann Math Stat* 34: 1507–1512 DOI: 10.1214/aoms/1177703882
- [44] Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. (1990). "Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements quality". *Technometrics* 32, pp. 1–29.
- [45] McDonald, D.(1990). "A CUSUM Procedure Based on Sequential Ranks". *Naval Research Logistics* 37, pp. 627-646.
- [46] Montgomery, D. C.(2005). "Introduction to Statistical Quality Control". *John Wiley and Sons*, New York.
- [47] Page, E.S.(1954). "Continuous Inspection schemes". *Biometrics*. Vol. 41(1), pp. 100-115



- [48] Page, E. S., "A Modified Control Chart with Warning Lines". *Biometrics*, Vol. 49, 1962, pp. 171-176.
- [49] PAPPANASTOS, E. A. and ADAMS, B. M. (1996). "Alternative Designs of the Hodges-Lehmann Control Chart". *Journal of Quality Technology* 28. pp. 213-223.
- [50] Pettitt, A. N. (1979). "A Non-parametric Approach to the Change-Point Problem". *Applied Statistics*, 28, 126-135.
- [51] Qiu, P., Hawkins, D.M. (2003). "A non-parametric multivariate CUSUM procedure for detecting shifts in all directions". *Statistician* 52, 151-164.
- [52] REYNOLDS, M. R., JR. (1975). "A Sequential Signed-Rank Test for Symmetry". *Annals of Statistics* 3, pp. 382-400.
- [53] Roberts, S.W. (1959). "Control chart Tests Based on Geometric Moving Averages". *Technometrics*. Vol 42 (1), pp. 97-102.
- [54] Sullivan, J H, Woodall, W H. (1996) "A control chart for preliminary analysis of individual observations". *J Quality Technol*, **28**: 265–278
- [55] Wilcoxon, F. (1945). "Individual comparisons by ranking methods". *Biometrics* 1 80–83.
- [56] WILCOXON, F., KATTI S. K., and WILCOX. R. A. (1972). "Critical Values and Probability Levels for the Wilcoxon Rank Sum Test and the Wilcoxon Signed Rank Test". *Selected Tables in Mathematical Statistics*, Vol. 1. American Mathematical Society, Providence, R. I.
- [57] WILLEMAIN, T.R. and RUNGER, G.C. (1996). "Designing Control Charts Using an Empirical Reference Distribution". *Journal of Quality Technology* 28, pp. 31 38.
- [58] YASIIICHIN, E. (1992). "Analysis of Cusum and Other Markov- Type Control Schemes by Using Empirical Distributions". *Technometrics* 34, pp. 54-63.
- [59] Chunguang Zhou, Changliang Zou and Zhaojun Wang. "Nonparametric Control Chart for Preliminary Analysis of individual observations". Preprint. <http://202.113.29.3/keyan/pre/preprint06/06-17.pdf>, December 2007
- [60] Chunguang Zhou, Changliang Zou, Yujuan Zhang, Zhaojun Wang(2009), "Nonparametric Control Chart Based on Change-Point Model". *Journal: Statistical Papers* Volume 50, Issue 1 , pp 13-28. DOI: [10.1007/s00362-007-0054-7](https://doi.org/10.1007/s00362-007-0054-7)

## Διαδικτυακές Αναφορές

[61] [http://en.wikipedia.org/wiki/Control\\_chart](http://en.wikipedia.org/wiki/Control_chart)

[62] <http://lorien.ncl.ac.uk/ming/spc/spc8.htm>

