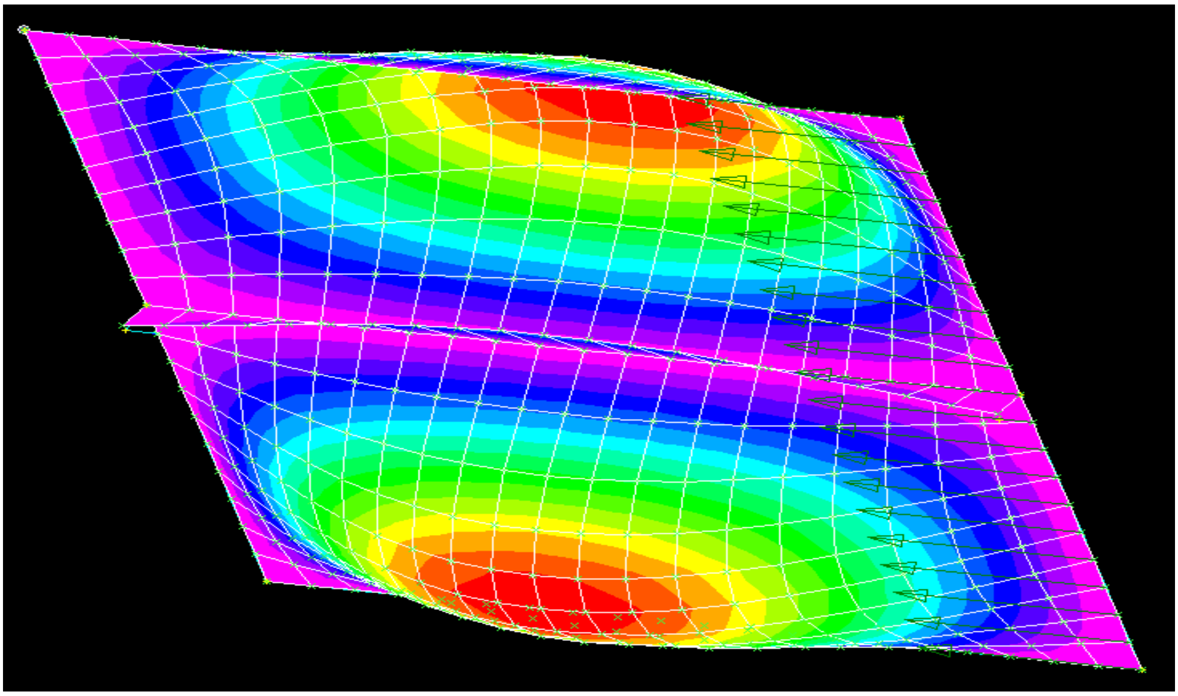
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Τοπικός λυγισμός ελασμάτων από σύνθετα υλικά με και χωρίς ενίσχυση



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σπυρίδων Γ. Διαμαντόπουλος

Επιβλέπων: Ιωάννης Ραυτογιάννης

Αθήνα 2013

ΕΜΚ ΔΕ 2013/78

Διαμαντόπουλος Σ. Γ. (2013).
Τοπικός λυγισμός ελασμάτων από σύνθετα υλικά με και χωρίς ενίσχυση
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2013/78
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Diamantopoulos S. G. (2013).
Local buckling of plates from composites with and without stiffener
Diploma Thesis EMK ΔΕ 2013/78
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη 3

Abstract 5

Ευχαριστίες 7

1 Σύνθετα υλικά 9
1.1 Γενικά χαρακτηριστικά 9
1.2 Πολύστρωτα σύνθετα υλικά 10
1.2.1 Γενικά περί ινώδων σύνθετων υλικών 10
1.2.2 Πολύστρωτα ινώδη σύνθετα υλικά 10
1.2.3 Μηχανικές ιδιότητες πολύστρωτων 11
1.2.4 Μορφές αστοχίας πολύστρωτων σύνθετων υλικών 13

2 Ελαστική κύρτωση λεπτών πλακών 16
2.1 Τοπικός λυγισμός πλακών από ισότροπο υλικό 16
2.2 Τοπικός λυγισμός πλακών από ορθότροπο υλικό 20

3 Προσομοίωση και ανάλυση των φορέων της μελέτης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων 22
3.1 Γενικά 22
3.2 Περιγραφή προσομοίωσης με το MSC Nastran 23
3.2.1 Πλάκες από σύνθετα υλικά χωρίς ενισχύσεις 23
3.2.2 Πλάκες από χάλυβα χωρίς ενισχύσεις 40
3.2.3 Πλάκες από σύνθετα υλικά με ενισχύσεις επίσης από σύνθετα υλικά 43
3.2.4 Πλάκες από χάλυβα με ενισχύσεις επίσης από χάλυβα 51

4 Ανάλυση των φορέων της μελέτης με χρήση του προγράμματος Mathematica 5.1 52
4.1 Γενικά 52
4.2 Περιγραφή προσομοίωσης με το Mathematica 5.1 53
4.2.1 Πλάκες από σύνθετα υλικά χωρίς ενισχύσεις 53
4.2.2 Πλάκες από χάλυβα χωρίς ενισχύσεις 64
4.2.3 Πλάκες από σύνθετα υλικά με ενισχύσεις επίσης από σύνθετα υλικά 64
4.2.4 Πλάκες από χάλυβα με ενισχύσεις επίσης από χάλυβα 65
4.2.5 Διαφοροποιήσεις στην περίπτωση ενός άκρου ελεύθερου 65

5 Επεξεργασία και ανάλυση των αποτελεσμάτων 66
5.1 Γενικά 66
5.2 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων χωρίς ενισχύσεις 66
5.2.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran 66
5.2.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1 74
5.2.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων 75
5.2.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα μέσω διαγραμμάτων 77
5.3 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων με ενισχύσεις 81
5.3.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran 81
5.3.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1 89
5.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων 90
5.3.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών ενισχυμένων από σύνθετα υλικά και χάλυβα μέσω διαγραμμάτων 92
5.4 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων χωρίς ενισχύσεις που έχουν ένα άκρο ελεύθερο 98
5.4.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran 98

5.4.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1 101
5.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων.. 102
5.4.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο από σύνθετα υλικά και χάλυβα με τις αντίστοιχες στηριζόμενες και στα 4 άκρα μέσω διαγραμμάτων 104
5.5 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων με ενισχύσεις που έχουν ένα άκρο ελεύθερο.. 107
5.5.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran 107
5.5.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1 109
5.5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων.. 110
5.5.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ ενισχυμένων πλακών με ένα ελεύθερο άκρο από σύνθετα υλικά και χάλυβα με τις αντίστοιχες στηριζόμενες και στα 4 άκρα μέσω διαγραμμάτων... 111

6 Συμπεράσματα... 113

7 Βιβλιογραφία 115

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΜΚ ΔΕ 2013/78

Τοπικός λυγισμός ελασμάτων από σύνθετα υλικά με και χωρίς ενίσχυση

Διαμαντόπουλος Σ. Γ. (Επιβλέπων: Ραυτογιάννης Ι.)

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς πλακών από σύνθετα υλικά σε συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης (θλίψη). Ουσιαστικά, έγινε διερεύνηση έναντι τοπικού λυγισμού πολύστρωτων, ορθότροπων πλακών από σύνθετα υλικά και σύγκριση των αποτελεσμάτων της διερεύνησης αυτής με το πιο κοινό ισότροπο υλικό, τον χάλυβα. Τα υλικά των διαστρωματώσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν Graphite/Epoxy και E-glass/Epoxy με διάφορους κώδικες. Στη προσπάθεια ανάλυσης του φαινομένου του τοπικού λυγισμού έγινε χρήση των προγραμμάτων MSC Nastran for Windows Version 4.5 (πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων) και του προγράμματος Mathematica 5.1 (γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού).

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα ινώδη, πολύστρωτα σύνθετα υλικά, τις ιδιότητες τους και τον τρόπο που μπορούν να αστοχήσουν.

Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελεί μια εκτεταμένη αναφορά στον τοπικό λυγισμό ελασμάτων, φαινόμενο που εμφανίζεται σε στοιχεία που φορτίζονται με θλιπτικό φορτίο . Το θλιπτικό φορτίο οδηγεί σε παραμορφώσεις που ακολουθούν το επίπεδό του. Όταν το φορτίο ξεπεράσει μια τιμή τότε αρχίζουν να λαμβάνουν χώρα παραμορφώσεις εκτός επιπέδου. Η τιμή αυτή του φορτίου είναι η κρίσιμη η οποία και αναζητείται.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διερεύνηση της ελαστικής κύρτωσης απλά εδραζόμενων (τετραέρειστων) πλακών από σύνθετα υλικά χωρίς ενισχύσεις, αλλά και με ύπαρξη ενισχύσεων και σύγκριση αυτών με ιδίων διαστάσεων πλάκες από ισότροπο υλικό και συγκεκριμένα τον χάλυβα με χρήση του προγράμματος Nastran.

Το τέταρτο κεφάλαιο είναι επέκταση της διερεύνησης της ελαστικής κύρτωσης απλά εδραζόμενων πλακών από σύνθετα υλικά χωρίς ενισχύσεις, αλλά και με ύπαρξη ενισχύσεων και σύγκριση αυτών με ιδίων διαστάσεων πλάκες από ισότροπο υλικό με χρήση του προγράμματος Mathematica 5.1 ενώ επισημαίνεται και η διαφοροποίηση στην περίπτωση που η πλάκα έχει ένα ελεύθερο άκρο (τριέρειστη).

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της διερεύνησης για πλάκες διαφορετικών διαστάσεων, διαφορετικών διαστρωματώσεων, διαφορετικού προσανατολισμού των ινών, πλάκες με μία ή δύο ενισχύσεις και τέλος πλάκες με ένα ελεύθερο άκρο συγκρινόμενες με χαλύβδινες πλάκες ιδίων διαστάσεων και στηρίξεων.

Στο έκτο κεφάλαιο εκτίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από όλες αυτές τις αναλύσεις και πρόταση για περαιτέρω έρευνα πάνω στο θέμα αυτό.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS
EMK ΔE 2013/78

Local buckling of plates from composites with and without stiffener

Diamantopoulos S. G. (supervised by Raftoyiannis I.)

Abstract

The purpose of this diploma thesis is the behavior analysis of thin plates made of composite materials under compression. Essentially buckling analysis took place in laminated, orthotropic composites and the results have been compared with the most common isotropic material, i.e. steel. Graphite/Epoxy and E-glass Epoxy were used in layers with various codes. In order to analyze the phenomenon of buckling, assistance was taken from MSC Nastran for Windows Version 4.5 (finite element analysis program) and the program Mathematica 5.1 (symbolic programming language).

The first chapter is an introduction to the fibroid, laminated composites, their properties and their failure modes.

The second chapter is an extensive reference to local buckling, a phenomenon that occurs on components loaded by a compressive load. The compressive load results to deformation following its plane. When the load exceeds a value then out of plane deformations begin to take place. This value of consignment is the critical load which we seek in this study.

In the third chapter, the investigation of elastic buckling is considered in simply supported along four edges plates, from composites with or without stiffeners and a comparison between these and plates with the same dimensions of isotropic material (namely steel) using the program Nastran.

The fourth section continues with the investigation of the elastic buckling of plates simply supported along all four edges, from composites with or without stiffeners and a comparison between plates with the same dimensions of isotropic material using the program Mathematica 5.1. The differences in the case of plates with a free edge are also tested.

The fifth chapter is a detailed summary of the results of the investigation for plates with different dimensions, different layering, different orientation of layers, plates with one or two stiffeners and plates with a free edge. All results are being compared with steel plates of the same dimensions and supports.

In the sixth section, the conclusions which arose from all the above analyses are being presented and suggestions for further research on this subject are being proposed.

Ευχαριστίες

You never fail until you stop trying –Albert Einstein.

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας μου υποδείχθηκε από τον καθηγητή μου Ιωάννη Ραυτογιάννη. Στο σημείο αυτό θέλω να αποδώσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου για την καθοδήγηση του, το χρόνο που αφιέρωσε στη συνεργασία μας και τη συνεχή βοήθεια του.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου, τους φίλους μου και όλους όσους συμμερίζονται τις αγωνίες μου, τους κόπους μου και με στηρίζουν συνεχώς. Χωρίς αυτούς δεν θα είχα καταφέρει να φθάσω ως εδώ.

Διαμαντόπουλος Γ. Σπυρίδων

1 Σύνθετα υλικά

1.1 Γενικά χαρακτηριστικά

Ο όρος σύνθετα υλικά σημαίνει συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων υλικών, με σημαντικές διαφορές στις φυσικές και στις μηχανικές ιδιότητες, υπό διακριτή μορφή τα οποία συνεργάζονται και δημιουργούν ένα νέο υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Τα τελευταία χρόνια τα υλικά αυτά έχουν αναδειχθεί πολύ και τείνουν να επικρατήσουν σε καθημερινές εφαρμογές. Ο όγκος και ο αριθμός των εφαρμογών των σύνθετων υλικών έχουν σταθερή ανάπτυξη και πρόσφατα έχουν κατακτήσει τις νέες αγορές. Τα πλέον συνήθη σύνθετα υλικά είναι αυτά που γίνονται με ισχυρές ίνες που ενώνονται και συγκρατούνται με ένα συνδετικό υλικό (ρητίνη). Οι πλέον διαδεδομένες ίνες που χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά είναι από γυαλί, άνθρακα, οργανικές (Kevlar), βόριο και αλουμίνιο. Μόρια ή νιφάδες (particles ή flakes) χρησιμοποιούνται επίσης ως ενισχύσεις, αλλά δεν είναι τόσο αποτελεσματικές όσο οι ίνες.

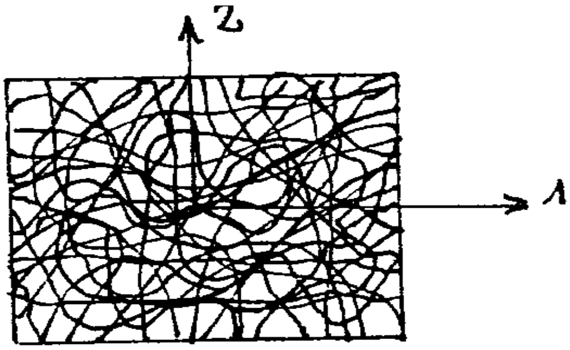
Λόγω της μορφής τους οι φυσικές ιδιότητες και η μηχανική τους συμπεριφορά διαφέρει από εκείνες των "παραδοσιακών" υλικών που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές όπως ο χάλυβας ή το αλουμίνιο. Πλήθος ιδιοτήτων όπως η μεγάλη αντοχή και δυσκαμψία σε σχέση με το βάρος τους, η αντοχή σε διάβρωση, κόπωση και θραύση καθώς και οι αντιπυρικές ιδιότητες σε συνεργασία με την ευκολία στην διαμόρφωση τους τα καθιστούν χρησιμότατα. Χρήσιμα, λοιπόν, αναδεικνύονται και στην κατασκευή πλακών όπου αναλόγως με τη φόρτιση στην οποία υποβάλλονται διαφέρει και ο προσανατολισμός των ινών για την βέλτιστη απόδοση τους.

Τα σύνθετα υλικά είναι ανισοτροπικά, δηλαδή οι μηχανικές ιδιότητές τους δεν είναι ίδιες σε όλες τις κατευθύνσεις. Έτσι, ενώ παρουσιάζουν πολύ καλή συμπεριφορά σε εφελκυσμό, όταν υποβάλλονται σε θλιπτικά φορτία "υποφέρουν". Το φαινόμενο που εμφανίζεται σε κατασκευαστικά στοιχεία που δέχονται θλιπτική φόρτιση ονομάζεται λυγισμός. Αρχικά, οι παραμορφώσεις ακολουθούν το επίπεδο του θλιπτικού φορτίου. Όταν, όμως, το φορτίο ξεπεράσει μια τιμή, που ονομάζεται κρίσιμη, τότε λαμβάνουν χώρα παραμορφώσεις εκτός επιπέδου. Το κρίσιμο φορτίο και οι παραμορφώσεις που συμβαίνουν σε ένα σύνθετο υλικό επηρεάζονται από τις διαστάσεις του στοιχείου (μήκος-πλάτος- πάχος), από το υλικό της διαστρωμάτωσης, τον προσανατολισμό των ινών και τις συνθήκες στήριξης. Συγκεκριμένα, στην διπλωματική εργασία αυτή εξετάστηκε και η διαφοροποίηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού στην περίπτωση που τα παραπάνω δεν αλλάζουν αλλά στο στοιχείο (πλάκα) προστέθηκαν διαμήκεις ενισχύσεις παράλληλες με τη διεύθυνση του φορτίου.

1.2 Πολύστρωτα σύνθετα υλικά

1.2.1 Γενικά περί ινώδων σύνθετων υλικών

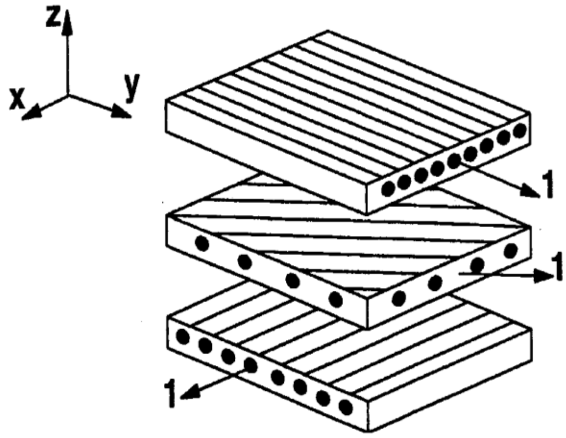
Αποτελούν υποκατηγορία των σύνθετων υλικών, καθώς τα μέρη που τα συνιστούν έχουν διαφορετικές φυσικές και μηχανικές ιδιότητες μεταξύ τους. Όπως προκύπτει και από την ονομασία τους αποτελούνται από ένα υλικό, τη μήτρα, μέσα στην οποία βρίσκονται ίνες ενός άλλου υλικού, κατανεμημένες με διάφορους τρόπους και προσανατολισμούς (Σχήμα 1.1). Οι ιδιότητες του σύνθετου υλικού καθορίζονται, εν πολλοίς, από τις ίνες καθώς έχουν μεγαλύτερη αντοχή και δυσκαμψία από το ίδιο το υλικό τους σε άλλη μορφή. Αντίθετα, η μήτρα λειτουργεί ως μέσο σταθεροποίησης των ινών, το οποίο παράλληλα τις προστατεύει. Ως μήτρα χρησιμοποιούνται ρητίνες με χαμηλές μηχανικές ιδιότητες, ωστόσο, παρουσιάζουν εξαιρετική αντοχή σε διαβρωτικά περιβάλλοντα και υψηλές θερμοκρασίες. Ταυτόχρονα, μεταφέρουν τα φορτία μεταξύ των ινών κατανέμοντάς τα μέσω διατμητικών τάσεων.



Σχήμα 1.1: Ίνες με τυχαίο προσανατολισμό

1.2.2 Πολύστρωτα ινώδη σύνθετα υλικά

Στην παρούσα εργασία ενδιαφέρουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Η κάθε στρώση αποτελείται από νήματα ινών, τα οποία πλέκονται ή κολλώνται μεταξύ τους δημιουργώντας την εντύπωση ενός “υφάσματος”. Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά κατασκευάζονται τοποθετώντας ένα “ύφασμα” ινών, βρέχοντάς το με ρητίνη και στη συνέχεια τοποθετώντας το επόμενο φύλλο από πάνω, κ.ο.κ. Η διαφορετικότητα των στρώσεων συνίσταται στους διαφορετικούς τρόπους ενισχύσεων (τύπος διάταξης των ινών, προσανατολισμός) παρά σε διαφορετικά υλικά (ινών ή συνδετικού υλικού). Στην πράξη συνηθίζεται η κατασκευή πολύστρωτων υλικών από στρώσεις ιδίων ιδιοτήτων και παχών (κανονικά πολύστρωτα), αλλά διαφορετικών προσανατολισμών των ινών τόσο μεταξύ των στρώσεων όσο και σε σχέση με τους γεωμετρικούς άξονες του πολύστρωτου (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Επαλληλία τριών στρώσεων για τη δημιουργία διαστρωμάτωσης

1.2.3 Μηχανικές ιδιότητες πολύστρωτων

Οι μηχανικές ιδιότητες ενός κατασκευαστικού υλικού χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του υπό συγκεκριμένες φορτίσεις. Ορίζεται, λοιπόν, το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young {E} σχετίζοντας την παραμόρφωση που λαμβάνει ένα υλικό σε σχέση με την κατακόρυφη τάση που δέχεται. Ακολούθως, το μέτρο διάτμησης {G} σχετίζει τις παραμορφώσεις με τη διατμητική τάση, ενώ ο λόγος Poisson {v} ορίζεται ως ο λόγος των παραμορφώσεων σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Στα ισοτροπικά υλικά, όπως ο χάλυβας, η συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί από το μέτρο ελαστικότητας {E} και το λόγο Poisson {v} καθώς το μέτρο διάτμησης εξαρτάται από τα άλλα δύο μεγέθη. Αυτό συμβαίνει καθώς οι μηχανικές τους ιδιότητες είναι ίδιες ανεξαρτήτως της διεύθυνσης επιβολής του φορτίου. Αντίθετα με τα ισοτροπικά, όμως, στα πολύστρωτα σύνθετα που είναι συνήθως ορθοτροπικά, εφαρμόζοντας μία δύναμη και κατά συνέπεια τάση, παρατηρείται διαφορετική παραμόρφωση στη διεύθυνση αυτής απ' ότι στην κάθετη διεύθυνση. Ταυτόχρονα, το μέτρο διάτμησης είναι ανεξάρτητο των μεγεθών E και v. Για να περιγράψουμε πλήρως ένα ορθότροπο υλικό χρειάζονται 9 μεγέθη, 3 σε κάθε κατεύθυνση: $E_{xy}, E_{yz}, E_{xz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}, v_{xy}, v_{yz}, v_{xz}$.

Στα ομογενή ισότροπα υλικά, όπως ο χάλυβας, ο νόμος του Hooke ορίζει ότι η σχέση μεταξύ μιας επιβαλλόμενης τάσης σ και της παραμόρφωσης ε που αυτή προκαλεί ειναι:

$$\{\sigma\} = \mathrm{E} * \{\varepsilon\} \tag{1.1}$$

Στα ορθοτροπικά σύνθετα υλικά, που είναι και αυτά που εξετάζουμε στην παρούσα διπλωματική, οι σχέσεις μεταξύ των 3 ορθών και 3 διατμητικών τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων σε κάθε επίπεδο ορίζονται από το νόμο ελαστικότητας του Hooke μετασχηματισμένο και περιέχοντας 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

Το αντίστροφο του νόμου ελαστικότητας συναρτήσει των μηχανικών σταθερών είναι το ακόλουθο:

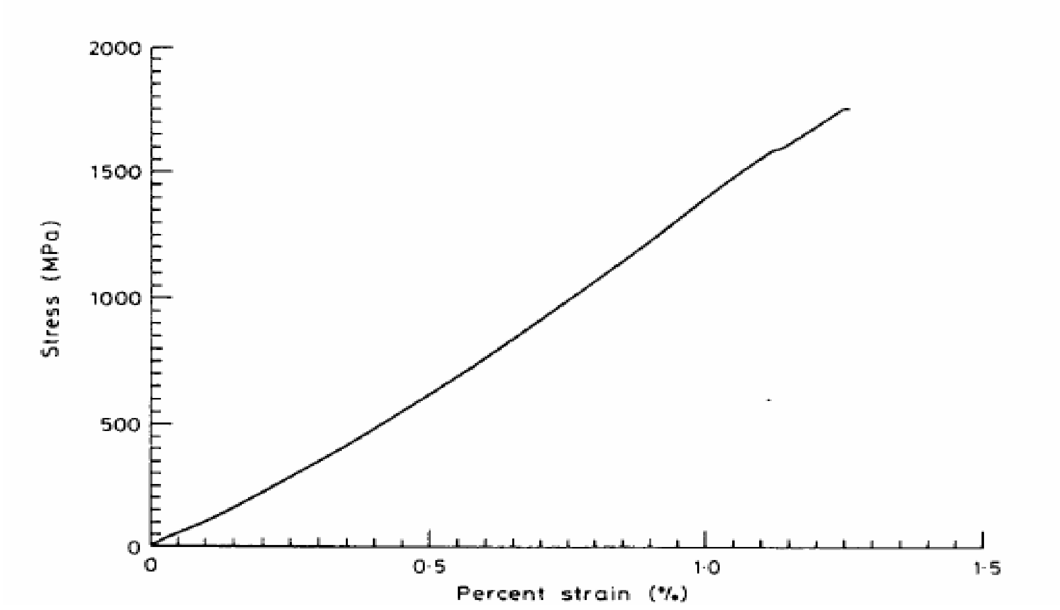
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{V_{21}}{E_2} & -\frac{V_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{V_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{V_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{V_{13}}{E_1} & -\frac{V_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

Οι λόγοι Poisson ορίζονται ως εξής: $\nu_{ij}= -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, όπου i,j=1,2,3.

Επειδή το μέτρο ελαστικότητας είναι συμμετρικό, θα ισχύει:

$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$ με i,j=1,2,3.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σύνθετα υλικά παρουσιάζουν μόνο γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Αυτό σημαίνει ότι φορτίζοντας, έχουν ανάλογη με την αύξηση των τάσεων, αύξηση των παραμορφώσεων. Ο ρυθμός αύξησης είναι σταθερός μέχρις ότου επέλθει αιφνίδια η θραύση. Έχοντας την ιδιότητα αυτή τα σύνθετα υλικά κατατάσσονται ως ψαθυρά. Η γραμμική ελαστική συμπεριφορά απεικονίζεται παρακάτω σε μια τυπική καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων σύνθετου υλικού (Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Τυπική καμπύλη τάσεων –παραμορφώσεων σύνθετου υλικού

1.2.4 Μορφές αστοχίας πολύστρωτων σύνθετων υλικών

Ένα σύνθετο υλικό φθάνει σε όρια αστοχίας είτε όταν κάποια τάση υπερβεί την φέρουσα ικανότητα του πολύστρωτου είτε όταν κάποια παραμόρφωση ξεπεράσει τα ανώτατα επιτρεπόμενα όρια. Η εκτίμηση των αντοχών σε ένα πολύστρωτο σύνθετο υλικό είναι, σε κάθε περίπτωση, αρκετά πιο πολύπλοκη σε σχέση με ένα αντίστοιχο ισότροπο υλικό, όπως ο χάλυβας. Η πολυπλοκότητα, αυτή, οφείλεται τόσο στο γεγονός ότι το σύνθετο δεν είναι ενιαίο, όσο και στο ότι εμφανίζει διαφορετικές ιδιότητες ανά διεύθυνση.

Στα ινώδη υλικά οι ίνες λειτουργούν σαν δοκοί και εδράζονται ελαστικά στη ρητίνη που τις περιβάλλει. Υπό τη δράση θλιπτικών φορτίων αυξάνονται τόσο οι τάσεις όσο και οι παραμορφώσεις. Τυχόν ατέλειες, όπως, τα κενά μεταξύ ινών -ρητίνης ή μη σωστή ευθυγράμμιση των ινών οδηγεί σε αστοχία. Ένας συνήθης τρόπος αστοχίας ενός πολύστρωτου σύνθετου υλικού είναι είναι ο αποχωρισμός των στρώσεων πράγμα που επηρεάζει τη συνολική απόκριση και συμπεριφορά μίας κατασκευής, ειδικά, πλακοειδών στοιχείων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στην παρούσα διερεύνηση.

Εκτός από την αστοχία σε θλίψη ένα σύνθετο υλικό εμφανίζει αστοχία και όταν εφαρμόζεται εφελκυστικό φορτίο παράλληλο στη διεύθυνση των ινών. Στα συνήθη υλικά από ίνες γυαλιού επειδή η μέγιστη παραμόρφωση των ινών είναι μεγαλύτερη από της ρητίνης, που είναι συνήθως πολυεστερική, επέρχεται πρώτα αστοχία της ρητίνης ενώ δεν επηρεάζεται σημαντικά η αντοχή της στρώσης. Η αστοχία μιας μονοαξονικής στρώσης σε εφελκυστικό φορτίο κάθετα στη διεύθυνση των ινών εμφανίζεται συνήθως με ρηγμάτωση της ρητίνης και αποχωρισμό των δεσμών ίνας -ρητίνης.

Για τον έλεγχο της αντοχής ενός πολύστρωτου ινώδους σύνθετου υλικού αναπτύχθηκαν, κατά καιρούς, διάφορα κριτήρια. Κάποια εφαρμόζονται σε όλα τα ορθότροπα υλικά, άλλα εφαρμόζονται μόνο σε συγκεκριμένα σύνθετα υλικά ενώ άλλα προέκυψαν από κριτήρια αστοχίας ισότροπων υλικών.

Τα πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενα κριτήρια αστοχίας σύνθετων υλικών είναι τα ακόλουθα:

1) Κριτήριο μέγιστης τάσης,

2) Κριτήριο μέγιστης παρμόρφωσης,

3) Κριτήριο Tsai-Hill και

4) Κριτήριο Tsai-Wu

Ορίζονται οι ακόλουθες κρίσιμες τάσεις αστοχίας:

X τάση αστοχίας σε μονοαξονικό εφελκυσμό κατά x

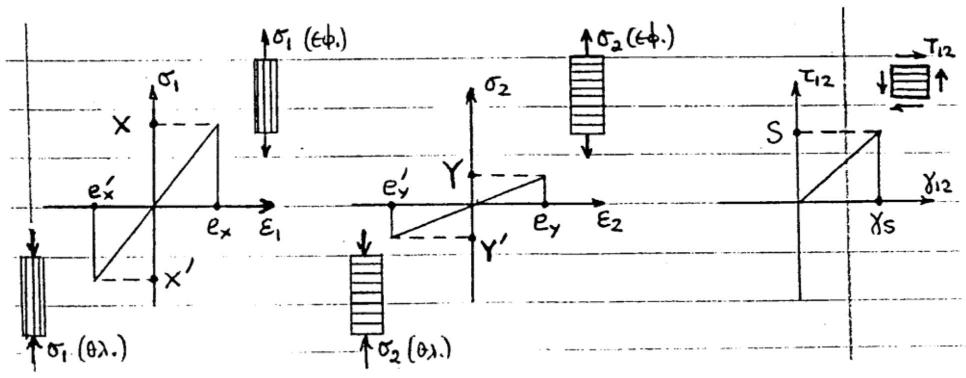
X' τάση αστοχίας σε μονοαξονική θλίψη κατά x

Y τάση αστοχίας σε μονοαξονικό εφελκυσμό κατά y

Y' τάση αστοχίας σε μονοαξονική θλίψη κατά y

S τάση αστοχίας σε καθαρή διάτμηση

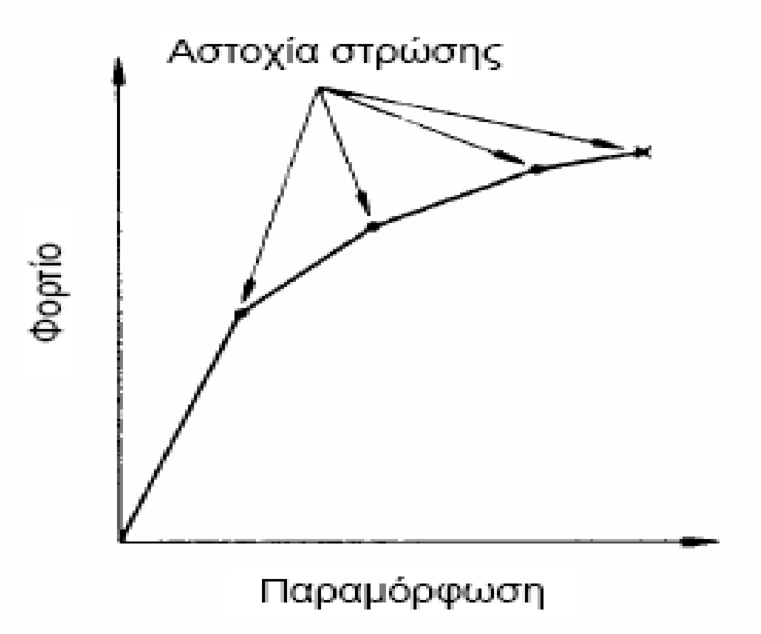
Οι κρίσιμες τάσεις X, X', Y, Y', S προσδιορίζονται μόνο πειραματικά όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 1.4:



Σχήμα 1.4: Πειραματική προσέγγιση τάσεων

όπου e_x, e_x', e_y, e_y' και γ_s είναι οι αντίστοιχες κρίσιμες παραμορφώσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόσημο της διατμητικής τάσης δεν παίζει ρόλο και είναι:

Τα παραπάνω κριτήρια αναφέρονται σε μία μόνο στρώση και όχι στο πώς λειτουργεί το πολύστρωτο σαν ενιαίο σύνθετο υλικό. Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να ελέγξουμε αν κάποια από τις στρώσεις θα αστοχήσει πρώτα υπό συγκεκριμένο φορτίο. Αστοχώντας μια στρώση δεν σημαίνει, αυτόματα, και αστοχία της διαστρωμάτωσης. Πολλές φορές η πρώτη αστοχία δεν είναι, καν, εμφανής στη μακροσκοπική συμπεριφορά του πολύστρωτου. Οι στρώσεις που είναι αρκετά πιο ευαίσθητες και αστοχούν πρώτες είναι αυτές με τις ίνες κάθετα διατεταγμένες στη διεύθυνση του φορτίου. Η αστοχία των στρώσεων οδηγεί σε μείωση της δυσκαμψίας και η απόκριση του πολύστρωτου αποκλίνει από την αρχική συμπεριφορά. Τα φορτία που δρουν αφού έχει αρχίσει η αστοχία κάποιων στρώσεων προκαλούν μεγαλύτερες παραμορφώσεις. Παρ' όλα αυτά το πολύστρωτο έχει ακόμα φέρουσα ικανότητα. Μια τυπική καμπύλη φορτίου- παραμορφώσεων φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Παρατηρούμε ότι καθώς αστοχεί μια στρώση δημιουργείται “σκαλοπάτι” στο διάγραμμα ενώ ανάμεσα στην αστοχία δύο στρώσεων το υλικό διατηρεί την ελαστική του συμπεριφορά.

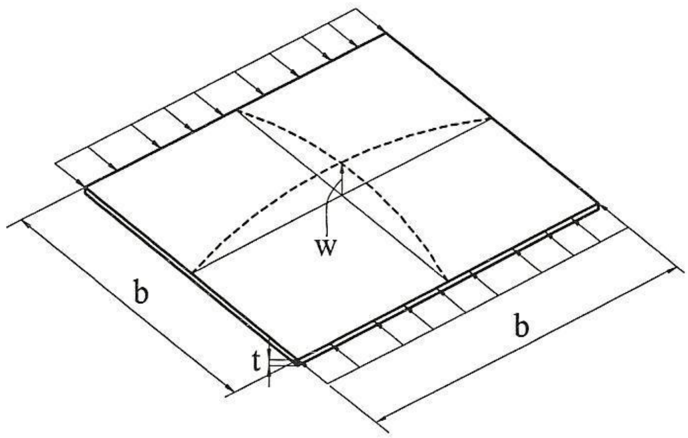


Σχήμα 1.5: Καμπύλη φορτίου –παραμόρφωσης πολύστρωτου σύνθετου υλικού

2 Ελαστική κύρτωση λεπτών πλακών

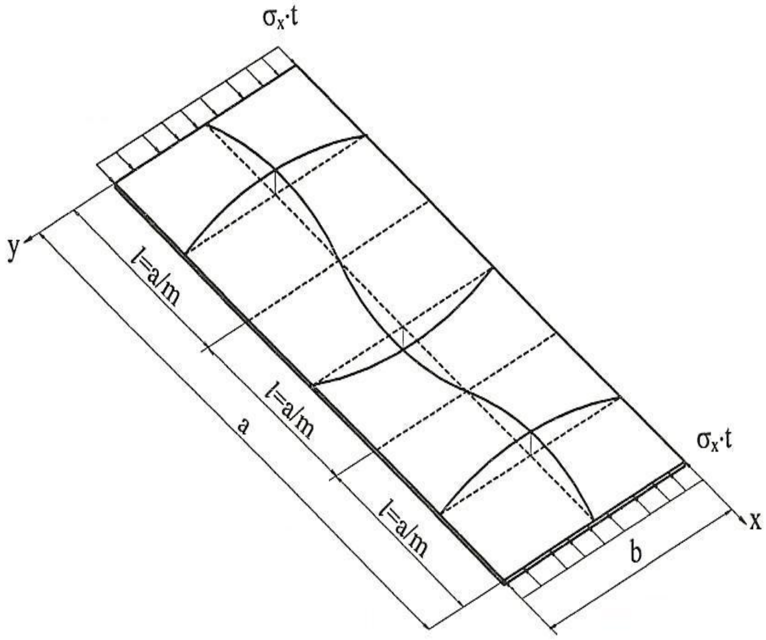
2.1 Τοπικός λυγισμός πλακών από ισότροπο υλικό

Ο τοπικός λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας έντονη σε λεπτές πλάκες και αντιμετωπίζεται ως πρόβλημα κύρτωσης των πλακών. Συμβαίνει, όταν ανάλογα με τον τρόπο στήριξης, η μία ή και οι δύο διαμήκεις πλευρές του στοιχείου παραμένουν ευθύγραμμες. Στο κεφάλαιο αυτό της διπλωματικής θα παρουσιαστεί αναλυτικά ο τρόπος προσδιορισμού της κρίσιμης τάσης κύρτωσης, και κατά συνέπεια του κρίσιμου φορτίου, πλακών που θλίβονται αξονικά. Κάνοντας μία εισαγωγή, λοιπόν, εξετάζεται μια τετραέρειστη αρθρωτή τετραγωνική πλάκα (οριακές συνθήκες Navier) υπό ομοιόμορφη αξονική θλίψη. Παρατηρείται κύρτωση σε μια καμπύλη επιφάνεια ως προς τις δύο διευθύνσεις (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Τετραγωνική πλάκα εδραζόμενη αρθρωτά περιμετρικά υπό αξονική θλίψη

Όπως αποδεικνύεται και από το Σχήμα 2.1 το μήκος ενός τοιχώματος της διατομής είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος. Η μορφή αυτή λυγισμού ονομάζεται “τοπικός” λυγισμός, καθώς τα μήκη των κυρτώσεων έχουν την ίδια τάξη μεγέθους με τις διαστάσεις της διατομής. Αντίστοιχα, και στις ορθογωνικές πλάκες συμβαίνει το ίδιο (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Ορθογωνική πλάκα εδραζόμενη αρθρωτά περιμετρικά υπό αξονική θλίψη

Οι εξισώσεις ισορροπίας για λεπτές ελαστικές πλάκες υπό ομοιόμορφη θλίψη όπως αυτή του Σχήματος 2.2 διατυπώθηκαν από τον Saint- Venant και γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma_x t}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1}$$

όπου D η καμπτική δυσκαμψία της πλάκας,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.2}$$

και

E =μέτρο ελαστικότητας , t =πάχος της πλάκας, ν =σταθερά Poisson, w =βέλος κάθετα στην επιφάνεια και σ_x =αξονική θλιπτική τάση.

Αν m και n είναι ο αριθμός των ημιτονοειδών κυμάτων στις διευθύνσεις x και y, τα βέλη του Σχήματος 2.2 μπορούν να εκφραστούν με διπλές σειρές Fourier:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.3}$$

Η ανωτέρω σχέση ικανοποιεί επίσης τις οριακές συνθήκες, επειδή για x=0 και a, και y=0 και b (a και b μήκος και πλάτος της πλάκας) τα υπολογιζόμενα βέλη ειναι ίσα με 0. Η εξίσωση αυτή επίσης ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες σε ότι αφορά τις ακραίες ροπές, καθώς κατά μήκος των πλευρών $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0$ και $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$. Οι ακραίες ροπές κάμψης υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{2.4}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.5}$$

Από τη λύση της εξίσωσης (2.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left[\pi^4\left(\frac{m^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{n^2}{\mathrm{b}^2}\right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D}\frac{m^2\pi^2}{\mathrm{a}^2}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = 0 \tag{2.6}$$

Η λύση της ανωτέρω εξίσωσης προκύπτει με εξίσωση της έκφρασης της αγκύλης με το 0 αλλιώς παρουσιάζεται η τετριμμένη λύση, που σημαίνει ότι δεν λαμβάνει χώρα κύρτωση. Η δεύτερη συνθήκη γράφεται:

$$\pi^4\left(\frac{m^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{n^2}{\mathrm{b}^2}\right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D}\frac{m^2\pi^2}{\mathrm{a}^2} = 0 \tag{2.7}$$

Για n=1, δηλαδή, ένα ημικύμα στη διεύθυνση y προκύπτει η ελάχιστη τάση κύρτωσης. Η τάση αυτή ονομάζεται κρίσιμη και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_\sigma\, D\, \pi^2}{t\, b^2} \tag{2.8}$$

όπου είναι k_σ ο συντελεστής κύρτωσης της πλάκας που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$k_\sigma = \left[m\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{m}\left(\frac{a}{b}\right)\right]^2 \tag{2.9}$$

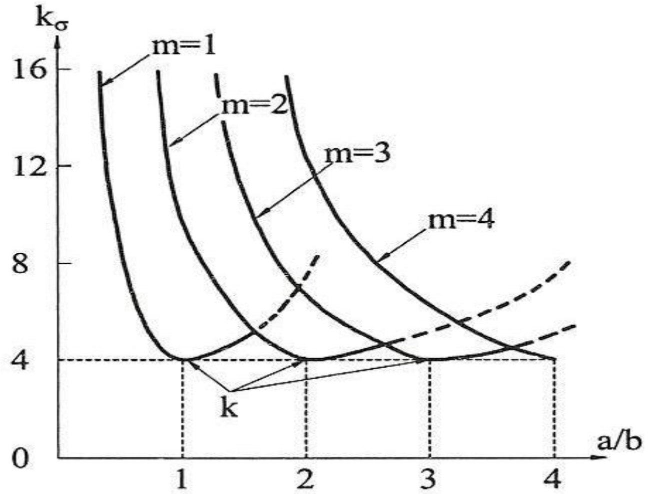
Αντικαθιστώντας την τιμή της D στην εξίσωση (2.8), προκύπτει η γενική εξίσωση της κρίσιμης τάσης κύρτωσης αξονικά θλιβόμενων ορθογωνικών πλακών:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_\sigma\ \pi^2\ E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} \tag{2.10}$$

Οι καμπύλες του συντελεστή κύρτωσης k_σ της εξίσωσης (2.9), που έχουν τη μορφή γιρλάντας, δίνονται στο Σχήμα 2.3 ως συνάρτηση του λόγου των πλευρών της πλάκας a/b.

Τόσο από το Σχήμα 2.3 όσο και από την εξίσωση (2.8) προκύπτει ότι η μετάβαση από τον αριθμό ημικυμάτων m στον αριθμό m+1 προσδιορίζεται από την εξίσωση των συντελεστών κύρτωσης:

$$m\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{m}\left(\frac{a}{b}\right) = (m+1)\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{m+1}\left(\frac{a}{b}\right) \tag{2.11}$$



Σχήμα 2.3: Συντελεστής κύρτωσης αξονικά θλιβόμενων κατά Navier εδραζόμενων ορθογωνικών πλακών

2.2 Τοπικός λυγισμός πλακών από ορθότροπο υλικό

Το πρόβλημα της κύρτωσης λεπτών πλακών μπορεί να αντιμετωπιστεί με ενεργειακές μεθόδους, πράγμα που απαιτεί γνώση της ενέργειας παραμόρφωσης του στοιχείου, του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων και κατά συνέπεια της ολικής ενέργειας. Στην εξίσωση (2.12) δίνεται η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου:

$$U = \frac{1}{2}\iiint (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{xy}\tau_{xy})dV \tag{2.12}$$

Το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται αντίστοιχα από τη σχέση:

$$\Omega = -\iiint (f_x u + f_y v + f_z w)dV - \iint \left(p_x u + p_y v + p_z w\right) dA \tag{2.13}$$

ενώ η συνολική ενέργεια ορίζεται σαν άθροισμα:

$$\pi_p = U + \Omega \tag{2.14}$$

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εξετάστηκαν πλάκες περιμετρικά εδραζόμενες κατά Navier και πλάκες με ένα άκρο ελεύθερο. Οι εξισώσεις που δίνουν τα αντίστοιχα βέλη είναι οι (2.15) και (2.16) :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.15}$$

$$w = A_m y \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.16}$$

Για ειδικώς ορθότροπες πλάκες ισχύει: $B_{ij} = 0$ και $D_{16} = D_{26} = 0$.

Οι παραμορφώσεις και καμπυλότητες της πλάκας εκφράζονται από τις σχέσεις:

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad$ $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\qquad$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\qquad$ $k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ $\qquad$ $k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}$

Σύμφωνα και με τις τελευταίες σχέσεις η ενέργεια παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]d_y d_x \tag{2.17}$$

ενώ το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων από τη σχέση:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right]d_y d_x \tag{2.18}$$

Η εξίσωση λυγισμού εκφρασμένη ως προς τις μεμβρανικές δυνάμεις και ροπές χρησιμοποιώντας θεωρία 2ας τάξεως είναι:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y} = 0 \tag{2.19}$$

Στη διπλαωματική εφαρμόστηκε φορτίο μόνο στη διεύθυνση x δηλαδή στην παραπάνω εξίσωση $N_y = N_{xy} = 0$. Άρα η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση των λεπτών πλακών από σύνθετα υλικά είναι:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N_x\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.20}$$

3 Προσομοίωση και ανάλυση των φορέων της μελέτης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων

3.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας θα αναλυθούν πλάκες από πολύστρωτα σύνθετα υλικά καθώς και χάλυβα ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση τους. Τα ελάσματα που έχουν επιλεγεί έχουν πάχος t=10mm, t=5mm, t=2mm και t=6mm ενώ οι διαστάσεις τους είναι 1000×1000mm, 1000×500mm, 500×1000mm, 400×700mm, 700×400mm. Η ποιότητα χάλυβα που χρησιμοποιήθηκε είναι S355 ενώ ως υλικό διαστρωμάτωσης στην περίπτωση των σύνθετων υλικών αποφασίστηκε να ληφθεί Graphite/Epoxy και E-glass/Epoxy. Η προσομοίωση και ανάλυση γίνεται με τη χρήση του προγράμματος MSC Nastran έκδοσης 4.5 για Windows. Το MSC Nastran για Windows είναι ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων που επιτρέπει στο μηχανικό την προσομοίωση της συμπεριφοράς μιας κατασκευής, ανεξάρτητα από το είδος και την πολυπλοκότητα της. Στην ανάλυση των φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ο φορέας διακριτοποιείται -υποδιαιρείται σε έναν αριθμό στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους με κόμβους. Το Nastran είναι ένα εύχρηστο πρόγραμμα τόσο στη δημιουργία δικτύου στοιχείων όσο και στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, πράγμα πολύ αξιόλογο για έναν μηχανικό.

Η διαδικασία μόρφωσης και ανάλυσης των φορέων που ακολουθείται περιγράφεται εν συντομία εδώ και αναλυτικότερα παραθίτεται στα παρακάτω υποκεφάλαια του κεφαλαίου αυτού.

Συνοπτικά λοιπόν:

Βήμα 1^o: Δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα

Βήμα 2^o: Καθορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Βήμα 3^o : Καθορισμός των ιδιοτήτων του φορέα (πάχος για χάλυβα, αριθμός στρώσεων και πάχος στρώσης για σύνθετο, υλικό)

Βήμα 4^o: Δημιουργία δικτύου πεπερασμένων στοιχείων από κόμβους και στοιχεία

Βήμα 5^o: Επιβολή συνοριακών συνθηκών (στηρίξεις)

Βήμα 6^o: Επιβολή φορτίσεων

Βήμα 7^o: Ανάλυση του φορέα

3.2 Περιγραφή προσομοίωσης με το MSC Nastran

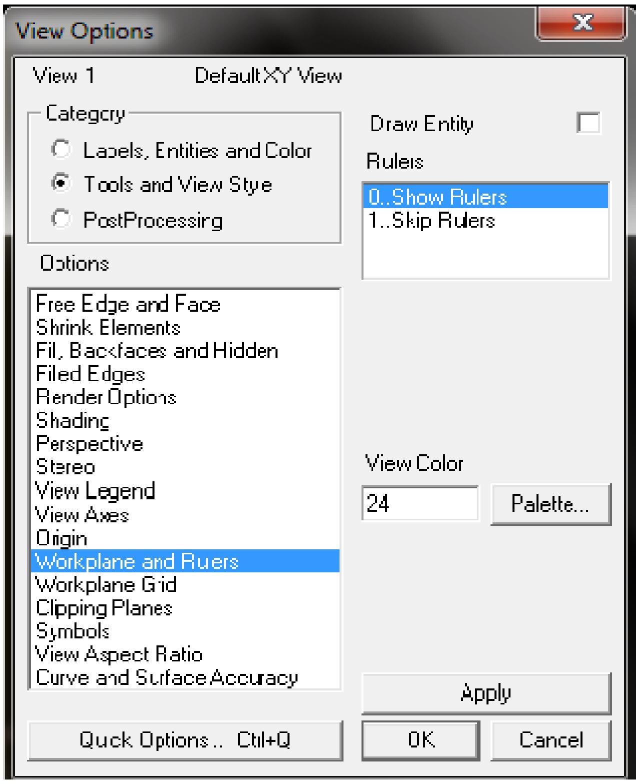
3.2.1 Πλάκες από σύνθετα υλικά χωρίς ενισχύσεις

Στην υποενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία μόρφωσης και ανάλυσης μέσω του προγράμματος Nastran μιας τετραγωνικής πλάκας 1000×1000mm και πάχους t=10mm. Χρησιμοποιήθηκε υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy. Κάθε στρώση έχει πάχος t=1mm, δηλαδή, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: E_1=148GPa, E_2=9.65GPa , G_{12}=4.55GPa και ν_{12}=0.30. Το πρόγραμμα θεωρεί οριζόντιο άξονα τον X, κατακόρυφο άξονα τον Y και άξονα κάθετο στο επίπεδο των X και Y, τον άξονα Z. Στο έλασμα χρησιμοποιήθηκαν τέτοιες συνοριακές συνθήκες ώστε οι κόμβοι δεξιά και κάτω να δεσμεύονται κατά Z, οι κόμβοι πάνω να δεσμεύονται κατά Y και Z και οι κόμβοι αριστερά κατά X και Z. Οι υπόλοιποι κόμβοι είναι ελεύθεροι τόσο να μετακινηθούν όσο και να στραφούν. Το φορτίο που φέρει η πλάκα είναι κατανεμημένο και ίσο με 1kN/m. Στο πρόγραμμα αυτό το φορτίο εντάσσεται σαν συγκεντρωμένο πάνω στους κόμβους της δεξιά πλευράς. Συγκεκριμένα, επειδή ο φορέας έχει διακριτοποιηθεί σε τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία πλευράς 50mm το φορτίο ανιστοιχεί σε 0.05kN στους ενδιάμεσους κόμβους και 0.025kN στους δύο ακραίους.

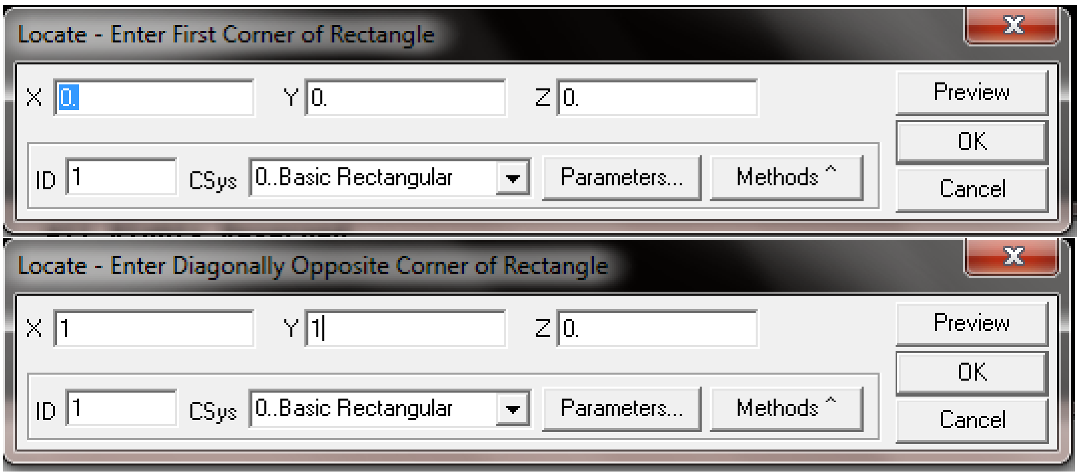
Ξεκινάμε το MSC Nastran και στο παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται επιλέγουμε την εντολή *New Model*. Ας σημειωθεί εδώ ότι παρόλο που το παράθυρο του προγράμματος ονομάζεται Untitled-MSC.Nastran for Windows εργαζόμαστε στο πρόγραμμα FEMAP, όπως άλλωστε μας πληροφορεί και η γραμμή κατάστασης στο κάτω μέρος του παραθύρου. Για να απενεργοποιηθεί ο χάρακας που εμφανίζεται στη μέση του χώρου εργασίας και για λόγους διευκόλυνσης του χρήστη επιλέγουμε *View -Options* (ή F6) και εμφανίζεται το παράθυρο *View -Options* (Σχήμα 3.1). Στο μενού *Category* επιλέγουμε *Tools and View Style* και στο μενού *Options* επιλέγουμε *Workplane and Rulers*. Τέλος, σβήνουμε το (ν) από το *Draw Entity* και πατάμε *OK*.

Βήμα 1^o: Δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα

Επιλέγουμε *Geometry -Curve Line -Rectangl*e. Στο παράθυρο που εμφανίζεται δίνουμε τις συντεταγμένες της πρώτης από τις δύο γωνίες της επιφάνειας που θέλουμε να δημιουργήσουμε (Σχήμα 3.2). Αφού συμπληρώσουμε τις συντεταγμένες για την πρώτη γωνία πατάμε *OK* και το παράθυρο εμφανίζεται εκ νέου για τη συμπλήρωση των συντεταγμένων και της αντιδιαμετρικής γωνίας του τετραπλεύρου. Αφού δημιουργηθεί το ορθογώνιο πατάμε το πλήκτρο *Cancel* και Ctrl+A για να “κεντράρουμε” το σχέδιο.



Σχήμα 3.1: Παράθυρο ρύθμισης παραμέτρων που αναγράφονται στο σχέδιο –Αφαίρεση χάρακα



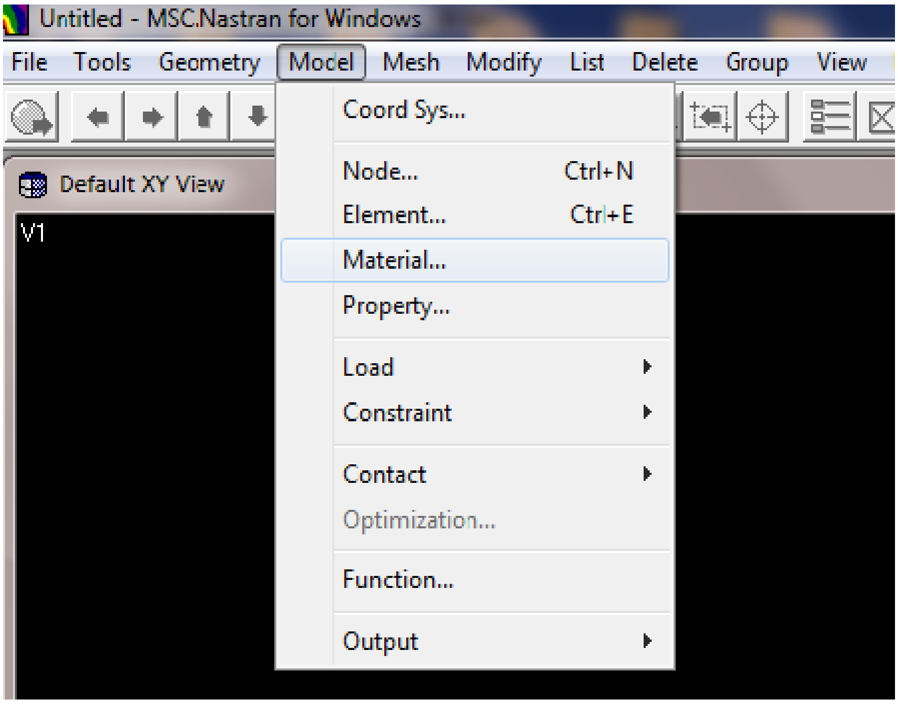
Σχήμα 3.2: Παράθυρο εισαγωγής συντεταγμένων επιφάνειας

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι το πρόγραμμα Nastran δεν διαθέτει σύστημα μονάδων αλλά τα δεδομένα που λαμβάνει είναι καθαροί αριθμοί. Αυτό πρέπει ο μελετητής να το έχει στο μυαλό του καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης του μοντέλου ώστε να μην δημιουργηθούν τυχόν λάθη και αντιφάσεις. Επομένως, είναι στην ευχέρεια του κάθε μελετητή τι μονάδες θα χρησιμοποιήσει. Τα αποτελέσματα είναι και αυτά καθαροί αριθμοί. Για να είναι σωστά πρέπει να υπάρχει και συμβατότητα με τα δεδομένα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιήθηκαν ως μονάδες μήκους τα m ενώ σαν μονάδες φορτίου τα kN. Κατά συνέπεια τα αποτελέσματα ως φορτία θα εξάγονται σε kN ενώ ως τάσεις σε kPa.

Επειδή κάποια προβλήματα είναι σύνθετα, οι εντολές πολύπλοκες και η πιθανότητα λάθους μεγάλη συνίσταται να γίνεται αποθήκευση της εργασίας μετά την ολοκλήρωση κάθε βήματος ώστε να μην χρειαστεί επανέναρξη της προσομοίωσης μετά από κάποια ατυχία. Αυτό γίνεται από το μενού *File* επιλέγοντας την εντολή *Save*.

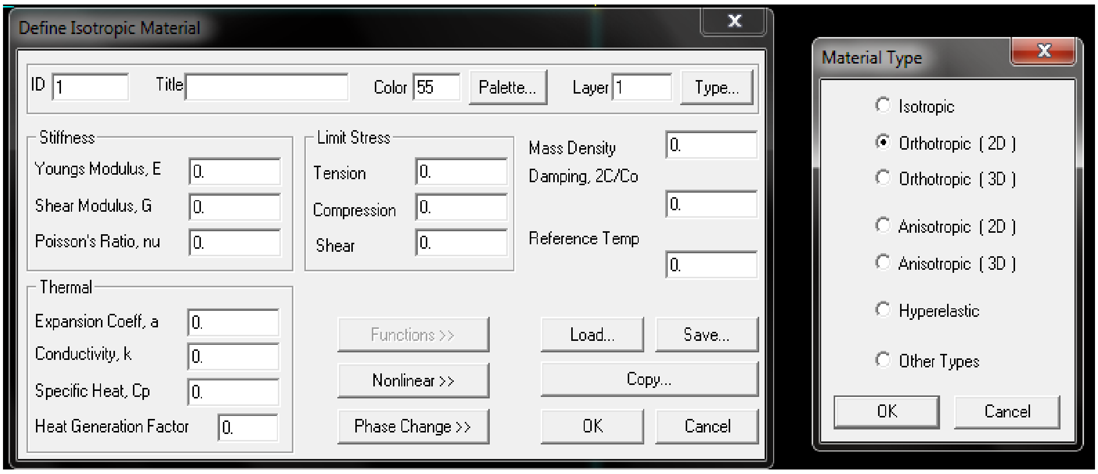
Βήμα 2^o: Καθορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Το επόμενο βήμα είναι ο ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού. Από το μενού *Model* επιλέγεται η εντολή *Material*.



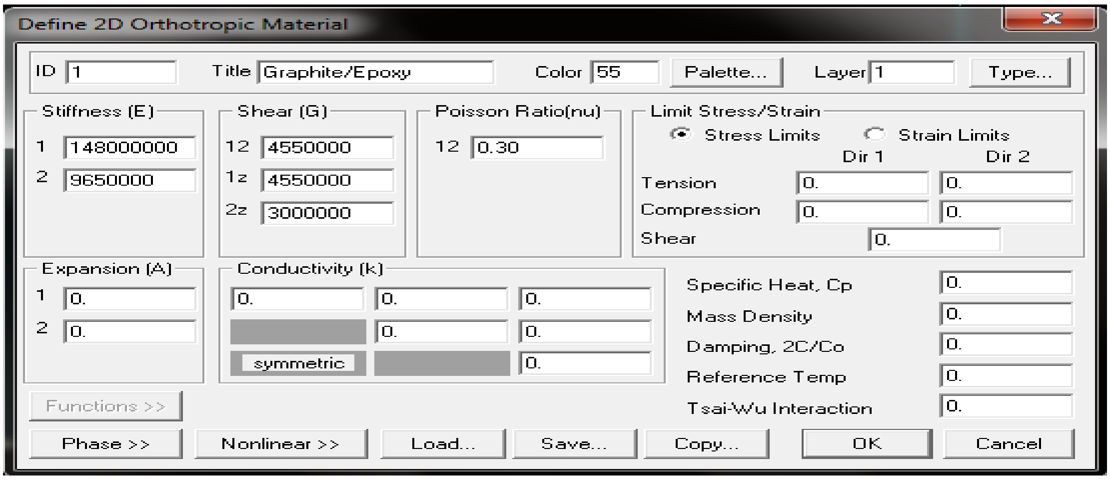
Σχήμα 3.3: Παράθυρο εισαγωγής υλικού

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου με τίτλο *Define Isotropic Material* (Σχήμα 3.4), διότι ο προεπιλεγμένος τύπος υλικού είναι το ισότροπο με ίδιες ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις. Στην περίπτωση του σύνθετου υλικού, που αυτό χρησιμοποιούμε στην παρούσα φάση, από την εντολή *Type* ανοίγει νέο παράθυρο στο οποίο επιλέγουμε *Orthotropic (2D)* (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων υλικού στοιχείου

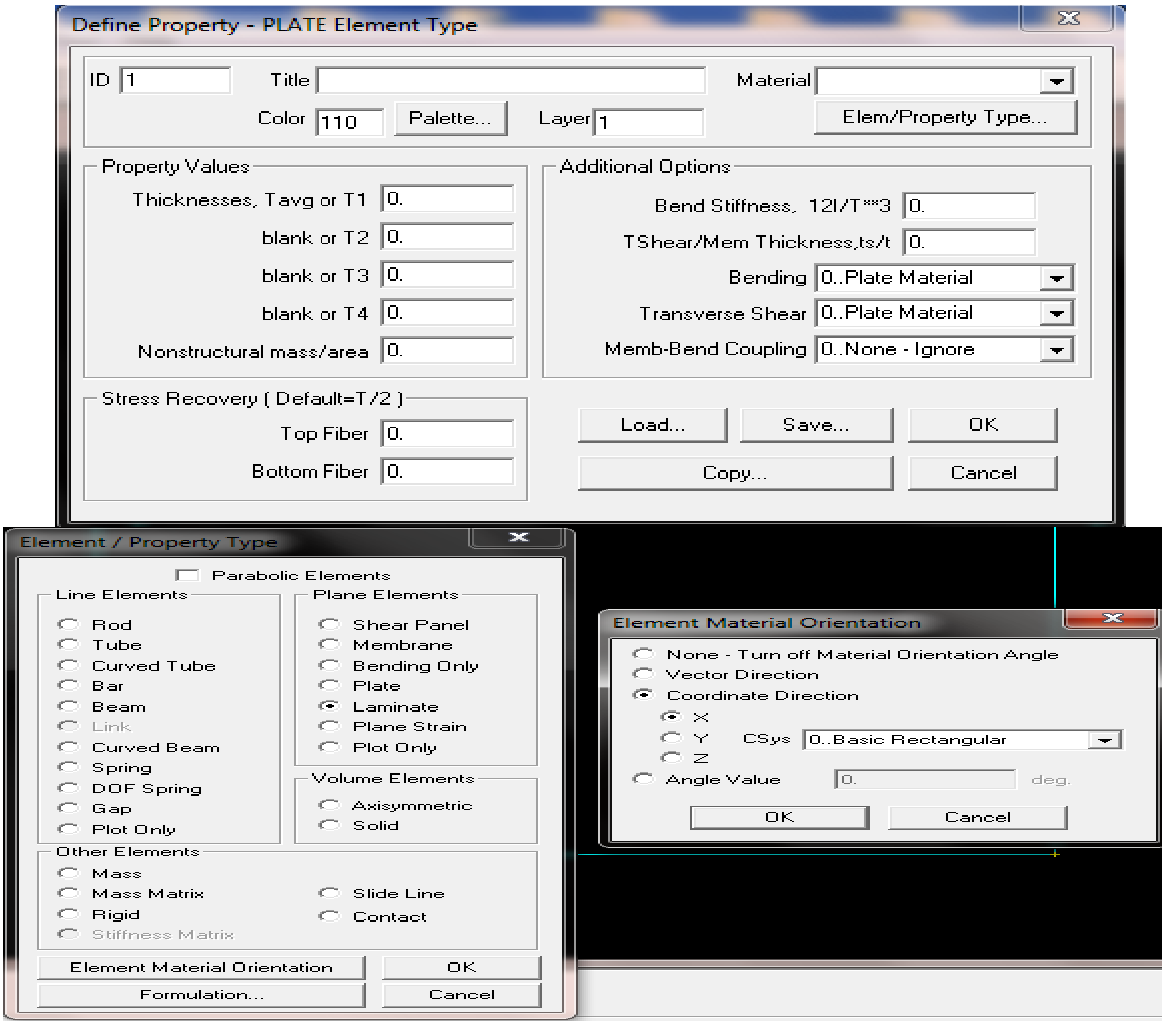
Πατώντας *Orthotropic (2D) και OK* εμφανίζεται το παράθυρο του Σχήματος 3.5. Με το πλήκτρο *Load* μπορούμε να επιλέξουμε ένα υλικό από τα ήδη υπάρχοντα στη βιβλιοθήκη του προγράμματος. Στην περίπτωση που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε υλικό που δεν υπάρχει στη βιβλιοθήκη, όπως στην παρούσα περίπτωση, συμπληρώνουμε τα αντίστοιχα μεγέθη χειροκίνητα. Τα κελιά που δεν συμπληρώσαμε δεν παίζουν κανένα ρόλο στην περίπτωση του γραμμικού λυγισμού που θα πραγματοποιηθεί. Με το πλήκτρο *Save* αποθηκεύουμε το υλικό έτσι ώστε να υπάρχει στη βιβλιοθήκη για μελλοντική χρήση. Τέλος, πατάμε *Cancel* και η διαδικασία καθορισμού των ιδιοτήτων του υλικού έχει ολοκληρωθεί.



Σχήμα 3.5: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων σύνθετου υλικού

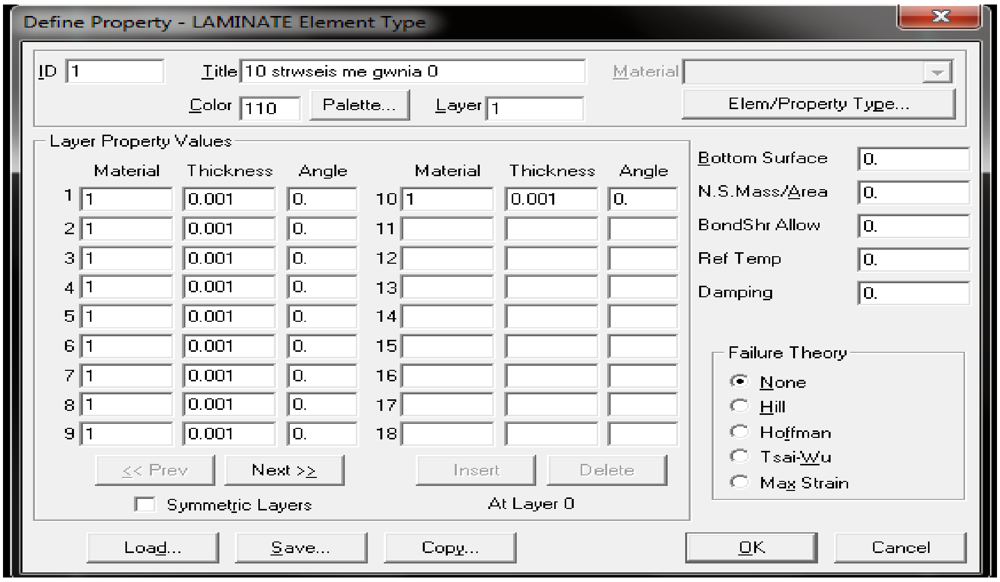
Βήμα 3^{o}: Καθορισμός των ιδιοτήτων του φορέα (πάχος για χάλυβα, αριθμός στρώσεων και πάχος στρώσης για σύνθετο, υλικό)

Στο βήμα αυτό καθορίζονται οι ιδιότητες του φορέα και το είδος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση. Ξεκινώντας από το μενού *Model* επιλέγω την εντολή *Property* και εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου *Define Property-PLATE Element Type* (Σχήμα 3.6). Πατώντας το πλήκτρο *Element/Property Type* εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο όπου ο τύπος πεπερασμένου στοιχείου που θα χρησιμοποιηθεί επιλέγεται ως *Laminate* από την κατηγορία *Plane Elements.* Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στο σημείο αυτό διότι το πρόγραμμα μπορεί να λάβει διαφορετικό προσανατολισμό για το κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Για να ταυτίζονται οι κύριοι άξονες με αυτούς του πεπερασμένου στοιχείου από το πλήκτρο *Element Material Orientation* ενεργοποιείται *Coordinate Direction X.*



Σχήμα 3.6: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων φορέα

Πατώντας *OK* σε όλα τα παράθυρα αφού οριστεί ο τύπος πεπερασμένου και ο προσανατολισμός του στοιχειώδους τμήματος (πεπερασμένου) το επόμενο βήμα είναι να οριστεί το πάχος της κάθε στρώσης και κατά συνέπεια το συνολικό πάχος της διαστρωμάτωσης.

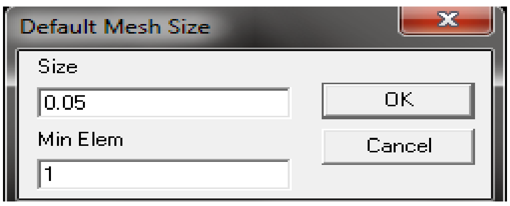


Σχήμα 3.7: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων φορέα

Στη θέση *Material* τοποθετείται η τιμή 1 καθώς έτσι αποθηκεύτηκε το υλικό. *Thickness* είναι το πάχος της κάθε στρώσης ενώ με *Angle* τοποθετούμε τη γωνία των ινών. Πατάμε *OK* και μετά *Cancel* και όλα τα χαρακτηριστικά του φορέα έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη του προγράμματος. Έχει ολοκληρωθεί, έτσι, και το βήμα αυτό.

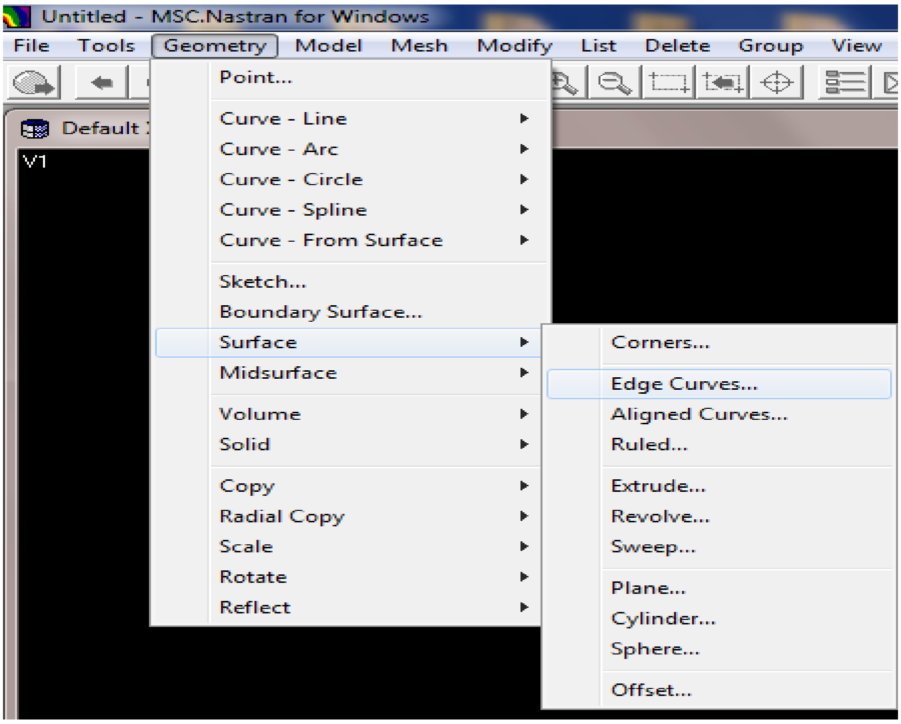
Βήμα 4^o: Δημιουργία δικτύου πεπερασμένων στοιχείων από κόμβους και στοιχεία

Στο βήμα αυτό θα δημιουργηθεί το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων. Από το μενού *Mesh -Mesh Control* και την εντολή *Default Size* εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου *Default Mesh Size* όπου όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.8 θέτω την τιμή 0.05 και θυμάμαι ότι αυτό αφορά m.

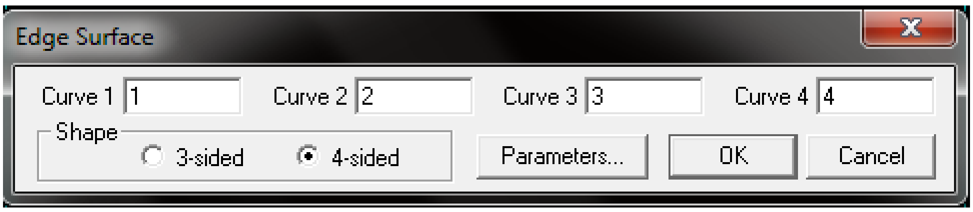


Σχήμα 3.8: Παράθυρο ορισμού μεγέθους πεπερασμένων στοιχείων

Στη συνέχεια από το μενού *Geometry* επιλέγουμε την εντολή *Surface* και *Edge Curves* (Σχήμα 3.9) και στο παράθυρο που ανοίγει με τίτλο *Edge Surface* δίνουμε τις 4 πλευρές ως όρια της επιφάνειας. Πατάμε *OK* και μετά *Cancel* (Σχήμα 3.10).



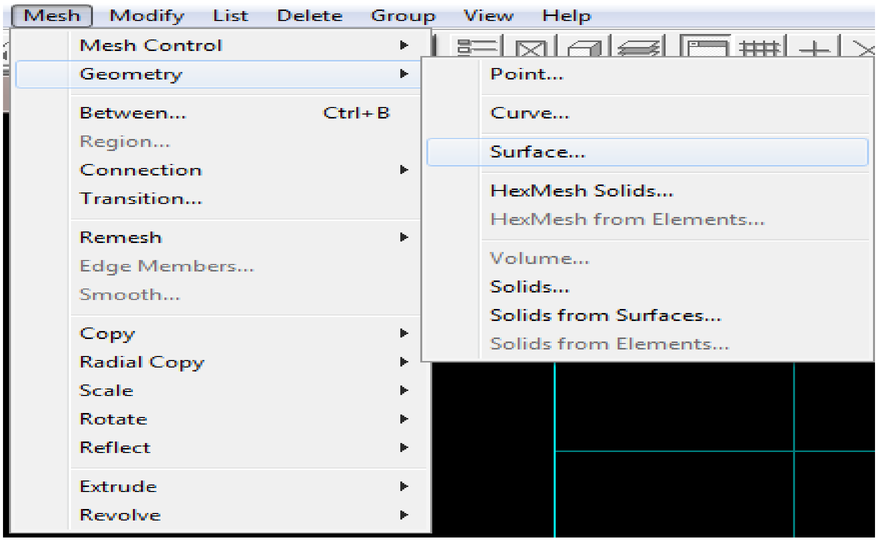
Σχήμα 3.9: Εισαγωγή ορίων επιφάνειας δικτύου



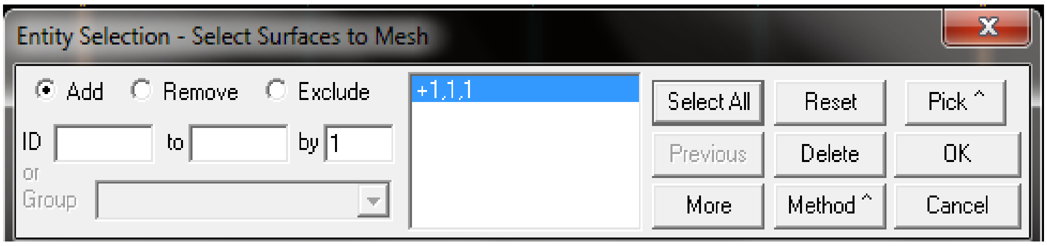
Σχήμα 3.10: Παράθυρο εισαγωγής ορίων επιφάνειας δικτύου

Τα όρια του δικτύου έχουν δημιουργηθεί και μάλιστα παρατηρούμε ότι έχουν και πιο έντονο χρώμα. Συνεχίζοντας από το μενού *Mesh* και πατώντας *Geometry* (Σχήμα 3.11) εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο με τίτλο *Entity Selection -Select Surfaces to Mesh* (Σχήμα 3.12) στο οποίο πατάμε *Select All* και μετά OK και εμφανίζεται το παράθυρο με τίτλο *Automesh Surfaces* (Σχήμα 3.13). Στο πεδίο *Property* επιλέγουμε την τιμή *1..10 strwseis me gwnia 0* που αντιστοιχεί στη διαστρωμάτωση που επιλέξαμε για το φορέα.

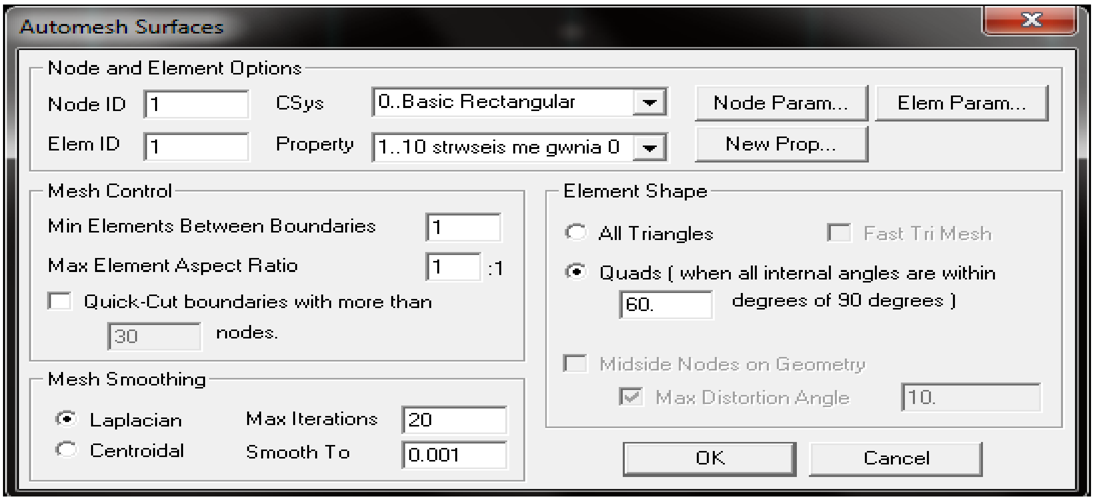
Αντικαθιστώ στο πεδίο *Max Element Aspect Ratio* το 2 με 1.:1 και αφαιρώ το (v) από το *Quick -Out Boundaries with more than.*



Σχήμα 3.11: Επιλογή επιφάνειας δικτύου



Σχήμα 3.12: Παράθυρο επιλογής επιφάνειας δικτύου

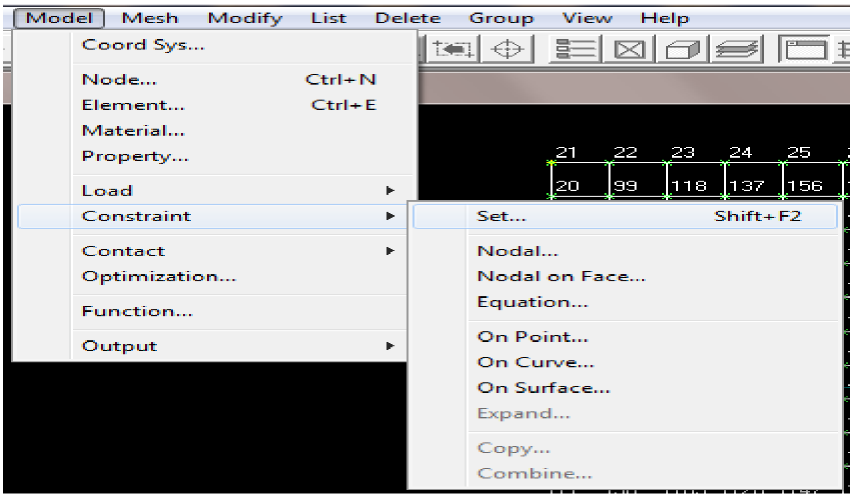


Σχήμα 3.13: Παράθυρο εισαγωγής παραμέτρων δικτύου

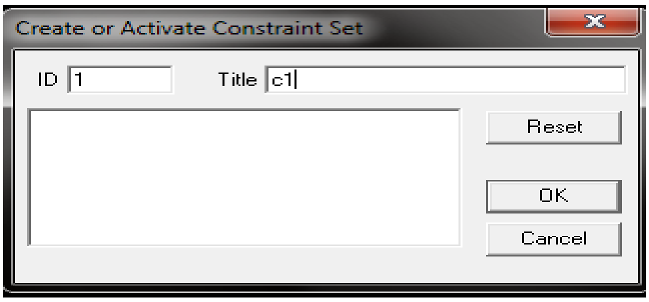
Πατώντας *OK* σχηματίζεται το δίκτυο τετραγωνικών πεπερασμένων στοιχείων. Αν θέλουμε να δούμε την αρίθμηση των κόμβων πατάμε το πλήκτρο *F6* και στο παράθυρο διαλόγου *View Options* επιλέγουμε *Labels Entities and color*. Στην ομάδα *Options* επιλέγουμε *Node* και στην *Label Mode* επιλέγουμε *1.ID*. Με *OK* μπορούμε να δούμε την αρίθμηση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα πρόκειται για 441 κόμβους.

Βήμα5^{o}: Επιβολή συνοριακών συνθηκών (στηρίξεις)

Επιβάλλοντας συνοριακές συνθήκες δεσμεύουμε τους βαθμούς ελευθερίας κάποιων κόμβων. Αν σε ένα κόμβο δεν επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες από το πρόγραμμα λαμβάνεται ότι αυτός είναι ελεύθερος να μετακινηθεί και να στραφεί. Ξεκινάμε από το μενού *Model* και την εντολή *Constraint* (Σχήμα 3.14) και επιλέγοντας *Set* εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο με τίτλο *Create or Activate Constraint Set* (Σχήμα 3.15) όπου δίνουμε μία ονομασία στις στηρίξεις στο πεδίο *Title* και εν συνεχεία το πλήκτρο *OK*.

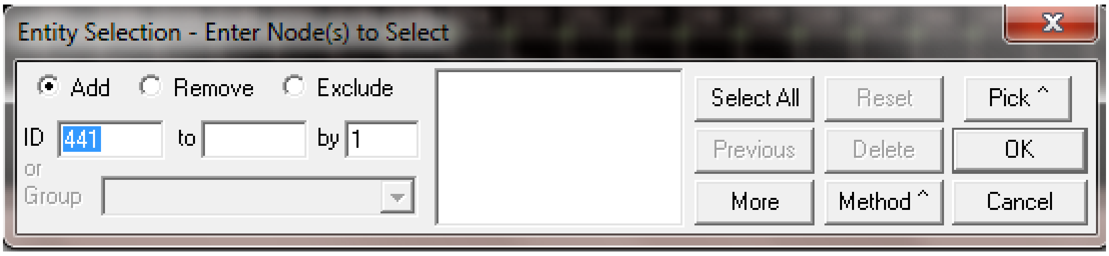


Σχήμα 3.14: Επιλογή ονομασίας συνόλου των δεσμεύσεων του φορέα

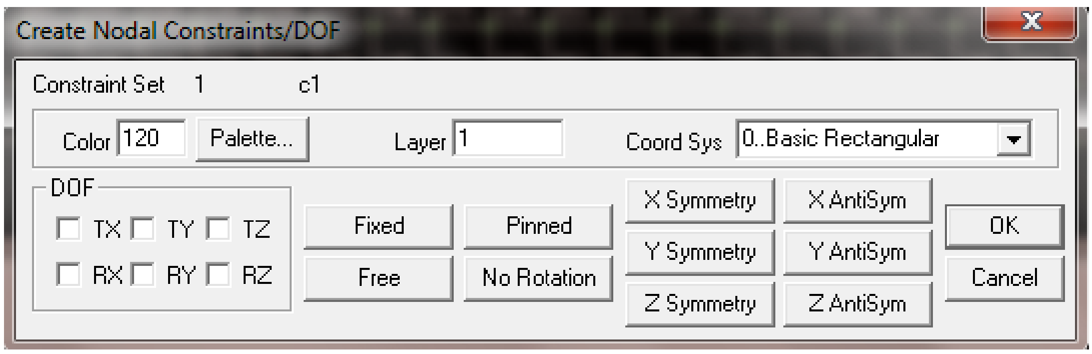


Σχήμα 3.15: Παράθυρο επιλογής ονομασίας για το σύνολο των δεσμεύσεων

Με τον τρόπο αυτό ορίστηκε μόνο το όνομα του συνόλου των δεσμεύσεων χωρίς να ορίσουμε ακριβώς τις δεσμεύσεις κάθε κόμβου. Αυτό για να επιτευχθεί από το μενού *Model* και την εντολή *Constraint* επιλέγουμε *Nodal*. Η εντολή αυτή επιτρέπει τον ορισμό των δεσμεύσεων κάθε κόμβου ή ομαδας κόμβων ξεχωριστά. Εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο όπου με διαφορετικούς τρόπους (*Normal* , *Box* κτλ) γίνεται επιλογή του εκάστοτε κόμβου (Σχήμα 3.16). Πατώντας *OK* εμφανίζεται το παράθυρο με τίτλο *Create Nodal Constraints/DOF* του Σχήματος 3.17.

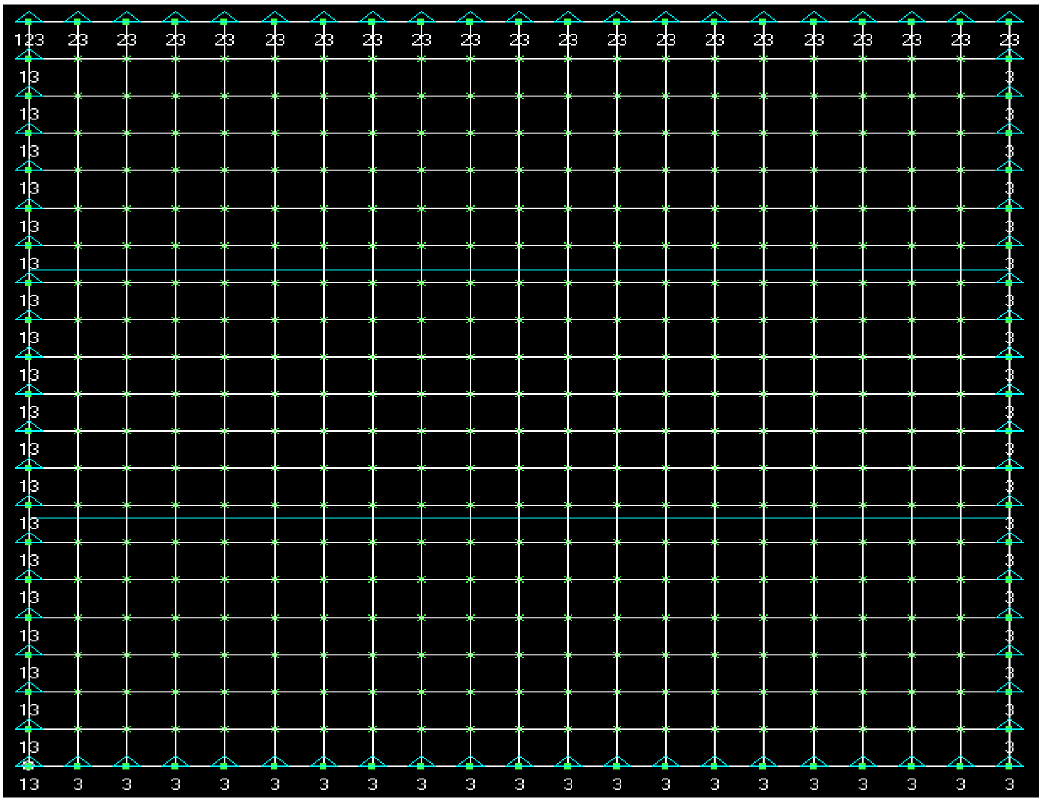


Σχήμα 3.16: Παράθυρο επιλογής κόμβων προς δέσμευση



Σχήμα 3.17: Παράθυρο επιλογής δέσμευσης των κόμβων που έχουν επιλεγεί

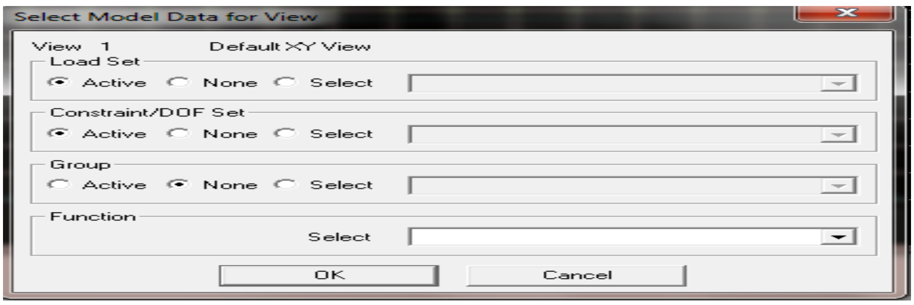
Κάτω αριστερά υπάρχουν έξι χωρία στο υποπλαίσιο *DOF (Degrees Of Freedom)*. Αφού έχουμε επιλέξει ποιους κόμβους θέλουμε να δεσμεύσουμε ορίζουμε και την αντίστοιχη δέσμευση π.χ. TZ για τους κόμβους της δεξιά και κάτω πλευράς. Πατώντας *OK* εμφανίζεται εκ νέου το παράθυρο του Σχήματος 3.16. Ορίζουμε ποιους κόμβους θέλουμε να δεσμεύσουμε στο δεύτερο βήμα και πατώντας *OK* έχω το παράθυρο του Σχήματος 3.17. Επιλέγω στο *DOF* TY και TZ για την πάνω πλευρά και TX και TZ για την αριστερή πλευρά της πλάκας. Έχουν οριστεί πλήρως και οι δεσμεύσεις όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.18.



Σχήμα 3.18: Δεσμευμένοι κόμβοι του φορέα

Οι δεσμεύσεις φαίνονται στην οθόνη του προγράμματος ως τρίγωνα (Σχήμα 3.18). Δίπλα σε κάθε τρίγωνο αναγράφονται αριθμοί που αντιστοιχούν στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας του συγκεκριμένου κόμβου. Τα νούμερα 1, 2, 3 αντιστοιχούν στις μετατοπίσεις κατά X, Y, Z αντίστοιχα.

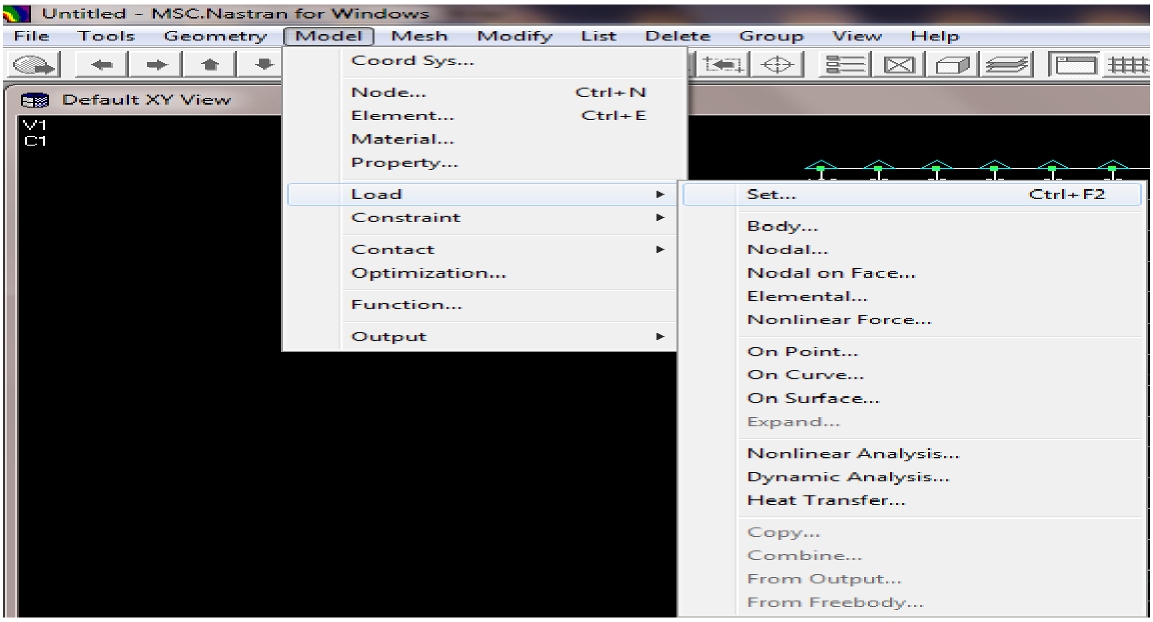
Εάν δεν εμφανίζονται τα τρίγωνα των στηρίξεων στην οθόνη του προγράμματος, με το ποντίκι τοποθετημένο σε ένα τυχαίο σημείο στην οθόνη σχεδίασης πατάμε το δεξί πλήκτρο. Στο μενού που εμφανίζεται επιλέγουμε την εντολή *Model Data* και ένα νέο παράθυρο με τίτλο *Select Model Data for View* ανοίγει. Στο υποπλαίσιο *Constraint/ DOF Set* επιλέγουμε την εντολή *Active* και τέλος *OK* (Σχήμα 3.19).



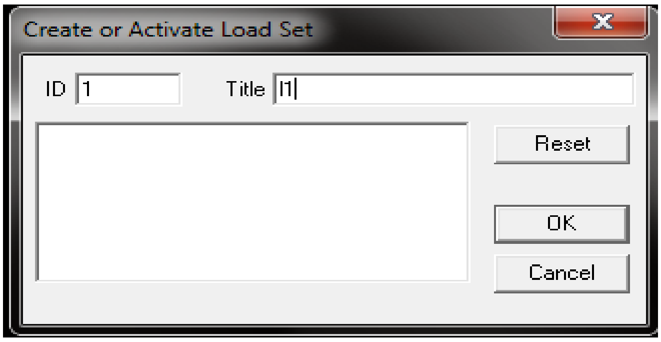
Σχήμα 3.19: Εμφάνιση τριγώνων στις στηρίξεις

Βήμα 6^{o}: Επιβολή φορτίσεων

Από το μενού *Model* επιλέγουμε την εντολή *Load* και στη συνέχεια την εντολή *Set* (Σχήμα 3.20). Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί με τίτλο *Create or Activate Load Set* ορίζουμε την ονομασία της φόρτισης που θα επιβάλλουμε στο φορέα.(Σχήμα 3.21).



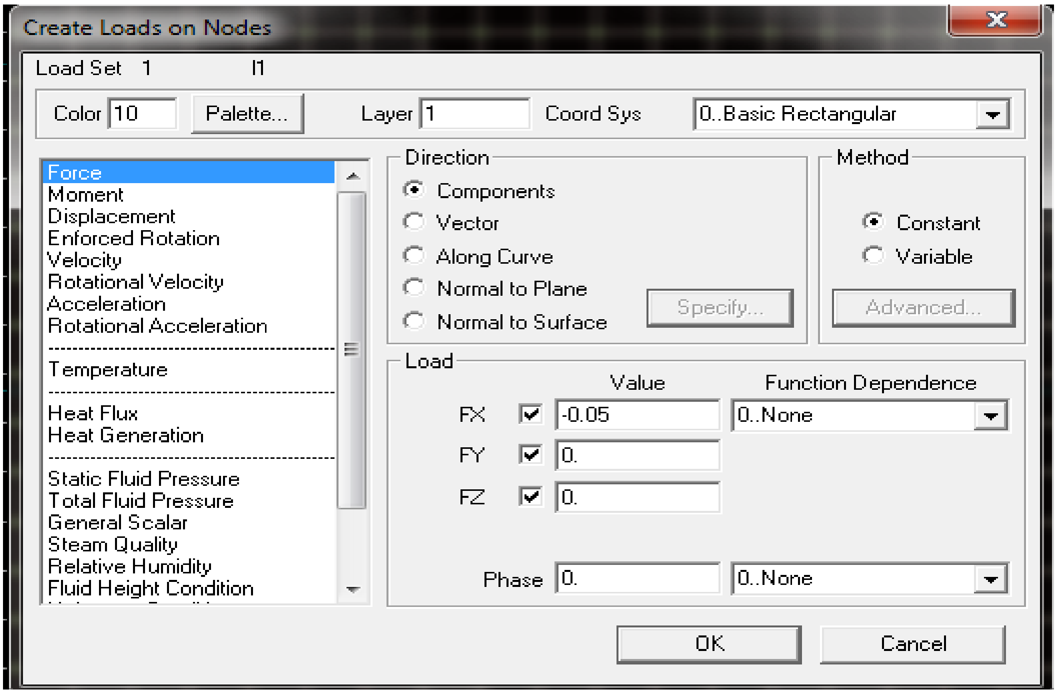
Σχήμα 3.20: Επιλογή ονομασίας φόρτισης



Σχήμα 3.21: Παράθυρο ονομασίας φόρτισης του φορέα

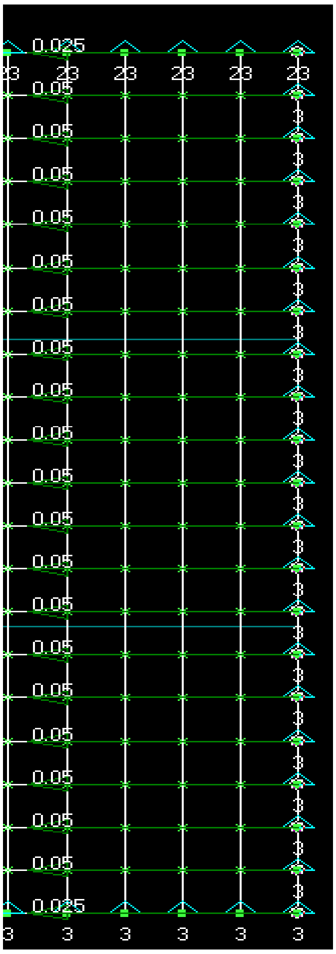
Στη συνέχεια, για τον ορισμό των επικόμβιων φορτίων στο μενού *Model* επιλέγουμε την εντολή Load και εμφανίζεται το παράθυρο με τίτλο *Entity Selection -Enter Node(s) to Select* (Σχήμα 3.16). Εισάγουμε τον αριθμό των κόμβων που θα φορτιστούν (εδώ συγκεκριμένα όλους τους ενδιάμεσους κόμβους της δεξιά πλευράς) και πατάμε *OK*.

Ανοίγει το παράθυρο του Σχήματος 3.22 με τίτλο *Create Loads on Nodes* όπου από τη λίστα φορτίσεων φροντίζουμε να είναι επιλεγμένη η εντολή *Force* ενώ στο πεδίο FX ορίζουμε την δύναμη με αρνητικό πρόσημο για να ακολουθεί τα αρνητικά του άξονα X ως θλιπτική με τιμή -0.05. Τέλος πατάμε *OK*.



Σχήμα 3.22: Παράθυρο ορισμού επικόμβιων δράσεων

Το νέο παράθυρο του Σχήματος 3.16 εμφανίζεται εκ νέου. Με το ποντίκι επιλέγουμε τους δύο ακραίους κόμβους της δεξιά πλευράς πατώντας πάνω τους και μετά *OK*, οπότε και εμφανίζεται το παράθυρο του Σχήματος 3.22. Στο πεδίο FX σε αυτή την περίπτωση εισάγουμε την τιμή -0.025, πατάμε *OK* και *Cancel* τέλος. Έχει, λοιπόν, στο σημείο αυτό ολοκληρωθεί η διαδικασία ορισμού των φορτίσεων του φορέα. Τα φορτία απεικονίζονται στο πρόγραμμα ως βέλη όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.23.

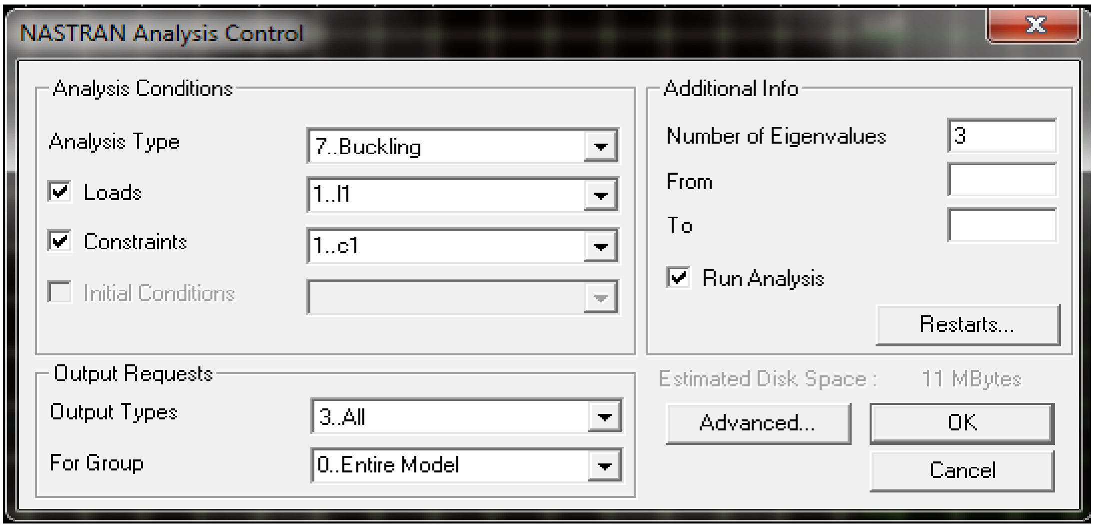


Σχήμα 3.23: Επικόμβιες φορτίσεις του φορέα

Βήμα 7^{o}: Ανάλυση του φορέα

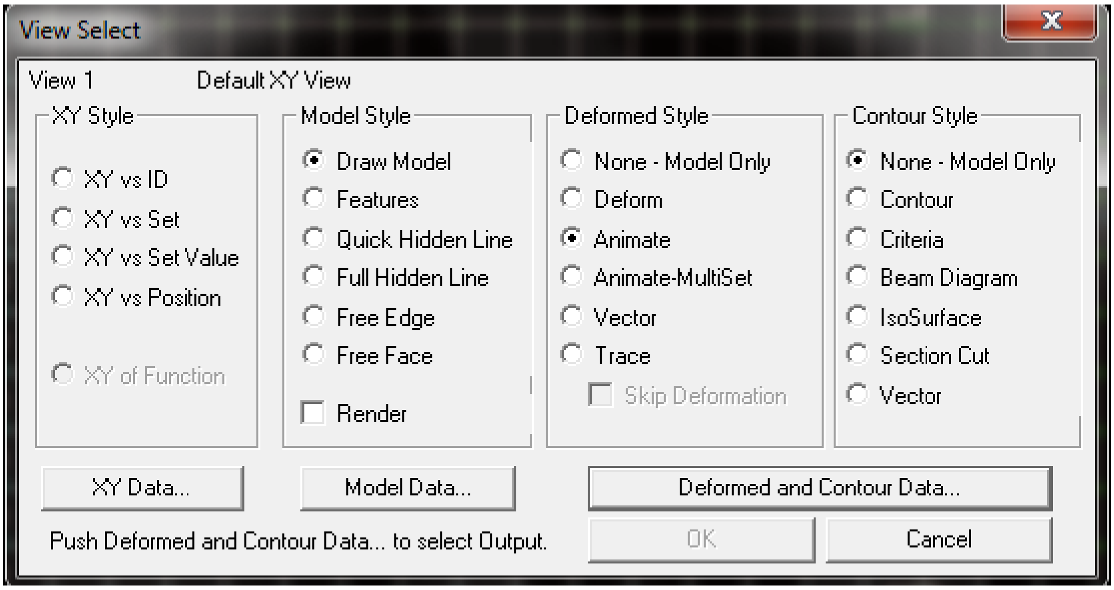
Αυτό είναι και το τελευταίο βήμα της όλης προσομοίωσης του φορέα με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων. Από το μενού *File* επιλέγεται η εντολή *Save* ώστε να αποθηκευτεί το αρχείο, καθώς το μοντέλο έχει κατασκευαστεί πλήρως και είναι έτοιμο να αναλυθεί. Προσοχή χρειάζεται στο γεγονός ότι η τοποθεσία που θα μεταβεί το αρχείο πρέπει υποχρεωτικά να έχει ονομασία με αγγλικούς χαρακτήρες καθώς το πρόγραμμα δεν αναγνωρίζει ελληνικά. Αφού αποθηκεύσουμε το αρχείο από το μενού *File* πάλι επιλέγουμε την εντολή *Analyze*, οπότε και εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου με τίτλο *NASTRAN Analysis Control* (Σχήμα 3.24).

Για να πραγματοποιηθεί γραμμική ανάλυση λυγισμού, όπως επιθυμείται, στο πεδίο *Analysis Type* επιλέγεται *7..Buckling*, στο πεδίο *Loads* τοποθετούνται οι φορτίσεις που ορίστηκαν σε προηγούμενο βήμα και στο πεδίο *Constraints* επιλέγεται η ονομασία συνοριακών συνθηκών, επίσης, από προηγούμενο βήμα. Στο υποπλαίσιο *Output Requests* ορίζεται στο πεδίο *Output Types* η επιλογή *All*. Στο πεδίο *Number of Eigen Values* τοποθετείται ο αριθμός 3 ώστε το πρόγραμμα να υπολογίζει τις 3 πρώτες ιδιομορφές λυγισμού του φορέα. Πατώντας *OK* ξεκινάει η ανάλυση.



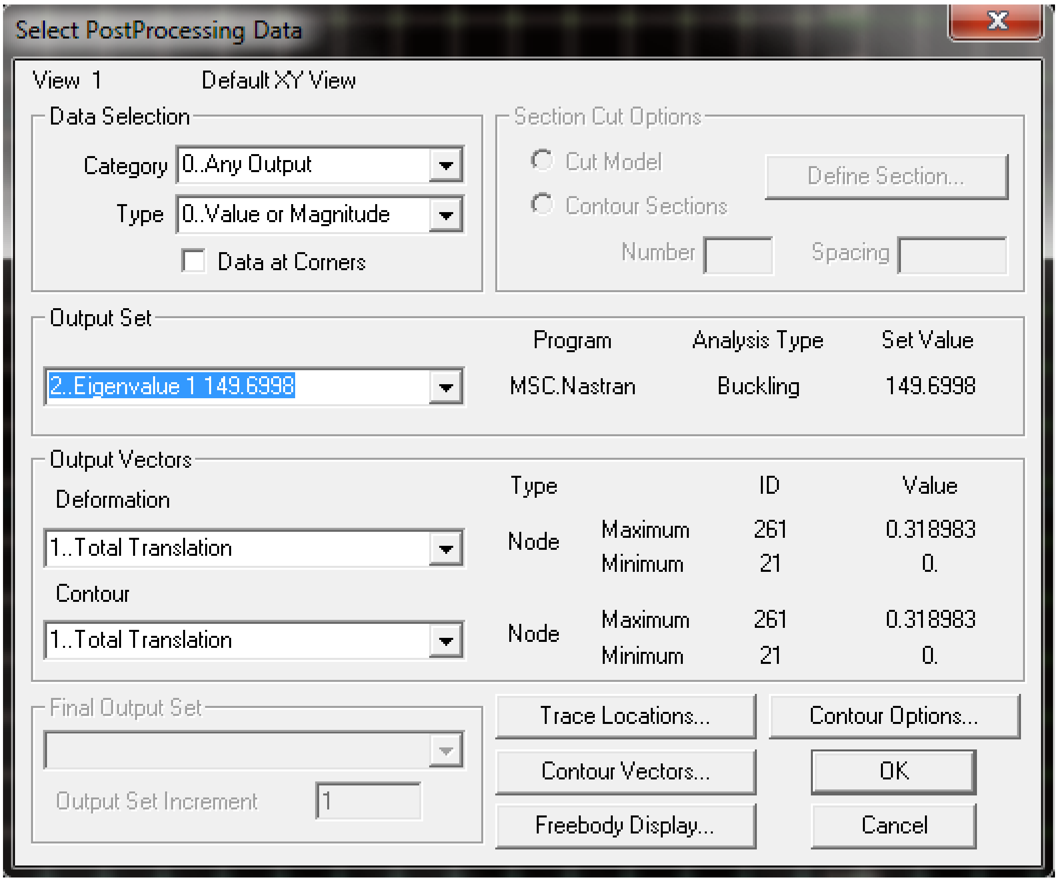
Σχήμα 3.24: Παράθυρο επιλογής παραμέτρων ανάλυσης

Όταν ολοκληρωθεί η ανάλυση του φορέα είναι δυνατόν να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα στην οθόνη του προγράμματος. Πατώντας το πλήκτρο *F5* εμφανίζεται παράθυρου διαλόγου με τίτλο *View Select* (Σχήμα 3.25).



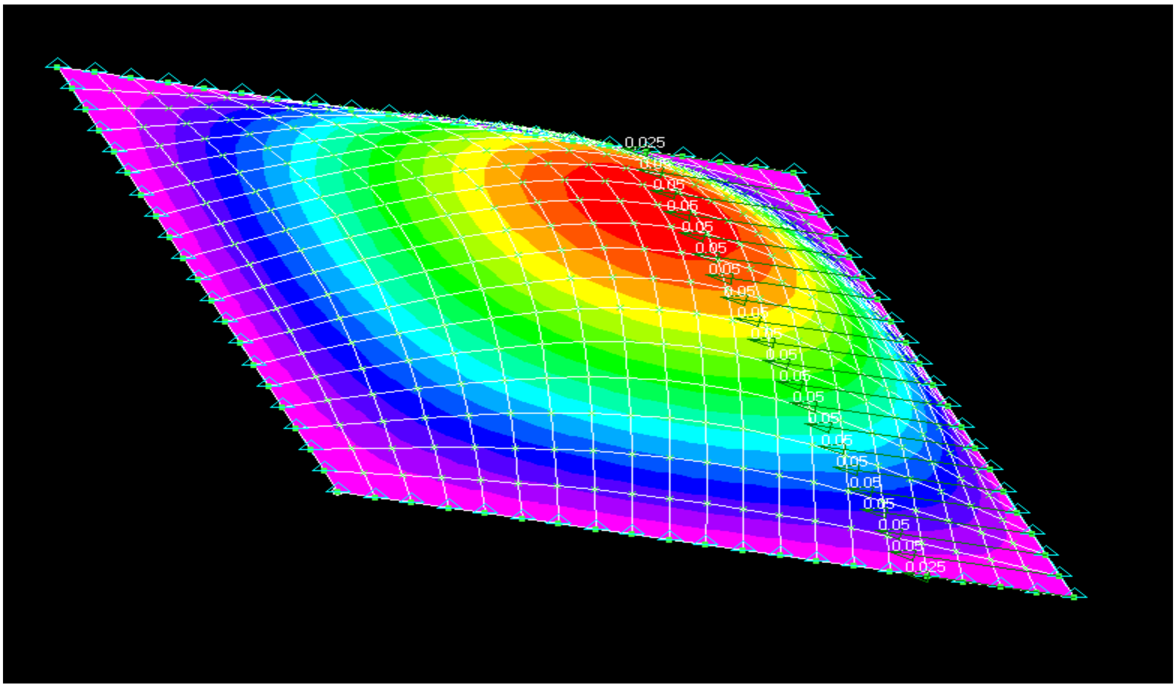
Σχήμα 3.25: Παράθυρο επιλογής τρόπου παρουσίασης των αποτελεσμάτων

Στο πλαίσιο *Deformed Style* επιλέγεται *Deform* ώστε να φανούν σχηματικά οι παραμορφώσεις που υφίσταται ο φορέας, άσχετα, αν το πρόγραμμα προεπιλέγει το *Animate* όπου φαίνεται η κίνηση του φορέα. Στο πλαίσιο *Contour Style* επιλέγεται *Contour* ώστε να παρουσιαστούν οι διαφορετικές παραμορφώσεις και με διαφορετικό χρώμα. Ακολούθως, επιλέγεται *Deformed and Contour Data* και εμφανίζεται παράθυρο διαλόγου με τίτλο *PostProcessing Data* όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 3.26).



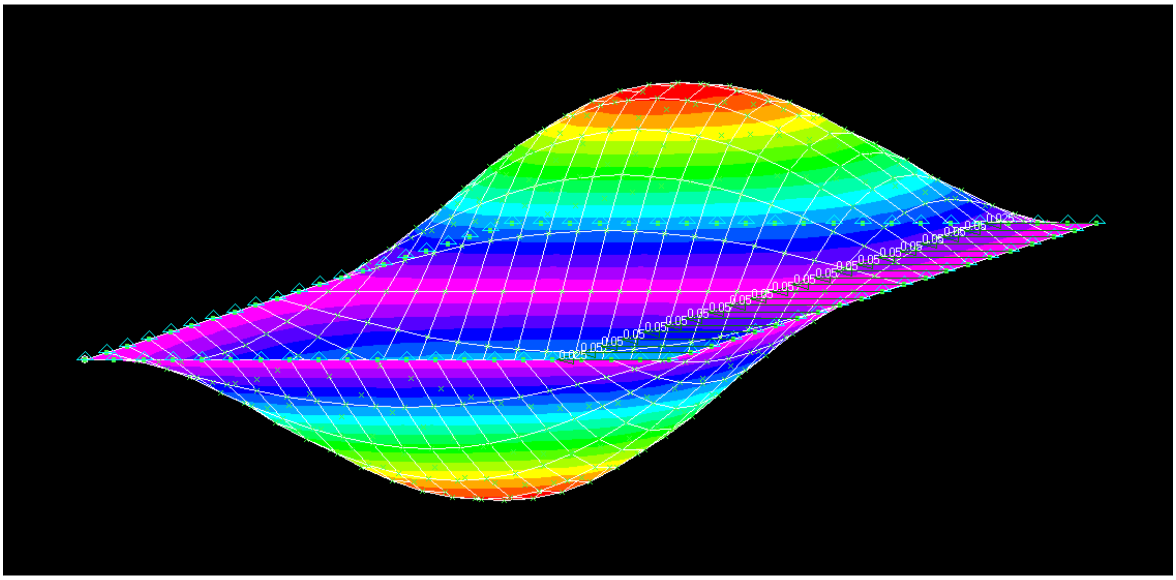
Σχήμα 3.26: Παράθυρο επιλογής αποτελεσμάτων προς παρουσίαση

Στο πεδίο *Output Set* επιλέγουμε την πρώτη ιδιομορφή με τη μικρότερη τιμή φορτίου και στα πεδία *Deformation και Contour* την τιμή 1..*Total Translation*. Πατώντας *OK* και ύστερα πάλι *OK* εμφανίζεται στην οθόνη η πρώτη ιδιομορφή (Σχήμα 3.27). Αυτό που μας απασχολεί περισσότερο είναι το φορτίο λυγισμού της πρώτης ιδιομορφής που στη συγκεκριμένη περίπτωση αναγράφεται ως 149.6998 kN. Οι μονάδες είναι kN διότι έτσι είχαν οριστεί εξ’ αρχής.



Σχήμα 3.27: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού του φορέα

Για πληρότητα, μιας και το πρόγραμμα το εμφανίζει, παρουσιάζεται παρακάτω και η δεύτερη ιδιομορφή λυγισμού της πλάκας με φορτίο μεγαλύτερο και ίσο με 329.2728kN. Στην παρούσα εργασία μας αφορά μόνο το μικρότερο φορτίο, το οποίο είναι και το κρίσιμο. Αξίζει μονο να προσέξουμε ότι η πλάκα εμφανίζει δύο ημικύματα στην κάθετη διεύθυνση αυτής που δρα το φορτίο.



Σχήμα 3.28: Δεύτερη ιδιομορφή λυγισμού του φορέα

3.2.2 Πλάκες από χάλυβα χωρίς ενισχύσεις

Παραπάνω παρουσιάστηκε η διαδικασία προσομοίωσης ενός ελάσματος διαστάσεων 1000×1000mm και πάχους t=10mm από σύνθετα υλικά και συγκεκριμένα Graphite/Epoxy ως υλικό της διαστρωμάτωσης. Στην περίπτωση που επιθυμούμε την προσομοίωση ελάσματος ιδίων διαστάσεων αλλά από χάλυβα τότε τα πράγματα αλλάζουν καθώς πρόκειται για ένα ισότροπο υλικό με ίδιες ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις, σε αντίθεση με το πολύστρωτο σύνθετο.

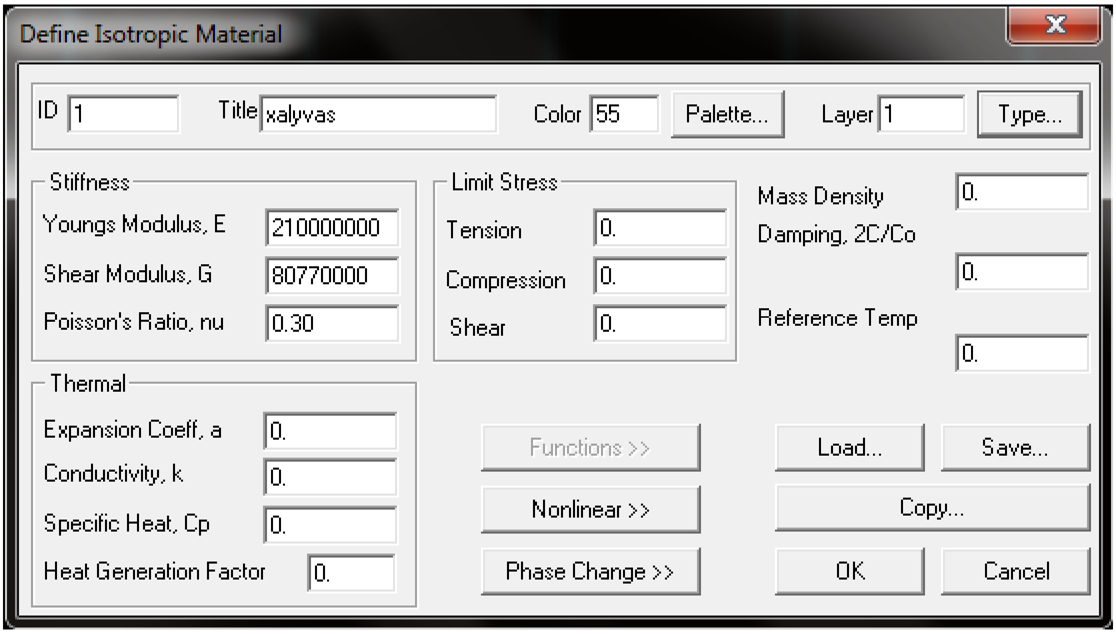
Βήμα 1^o: Δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα

Στο βήμα αυτό δεν αλλάζει τίποτα καθώς η γεωμετρία του φορέα είναι ακριβώς η ίδια. Ακολουθούμε την ίδια πορεία που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Βήμα 2^o: Καθορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Για τον καθορισμό των ιδιοτήτων του υλικού ακολουθούμε αρχικά την ίδια διαδικασία όπως πριν. Από το μενού *Model* επιλέγεται η εντολή *Material* όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.3 της προηγούμενης ενότητας. Ανοίγει, τότε, ένα νέο παράθυρο με τίτλο *Define Isotropic Material*. Είναι προεπιλεγμένος από το πρόγραμμα αυτός ο τύπος υλικού και αφορά σε ισότροπο, όπως, στην περίπτωση του χάλυβα. Ορίζουμε στο πρόγραμμα το χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας E=210GPa, μέτρο διάτμησης G=80.77GPa και λόγο Poisson ν=0.30 (Σχήμα 3.29). Το μέτρο διάτμησης μπορεί και να μην οριστεί καθώς το πρόγραμμα έχει τη δυνατότητα να το υπολογίζει αυτόματα σύμφωνα με τη σχέση: $G = \frac{E}{2(\nu+1)}$.

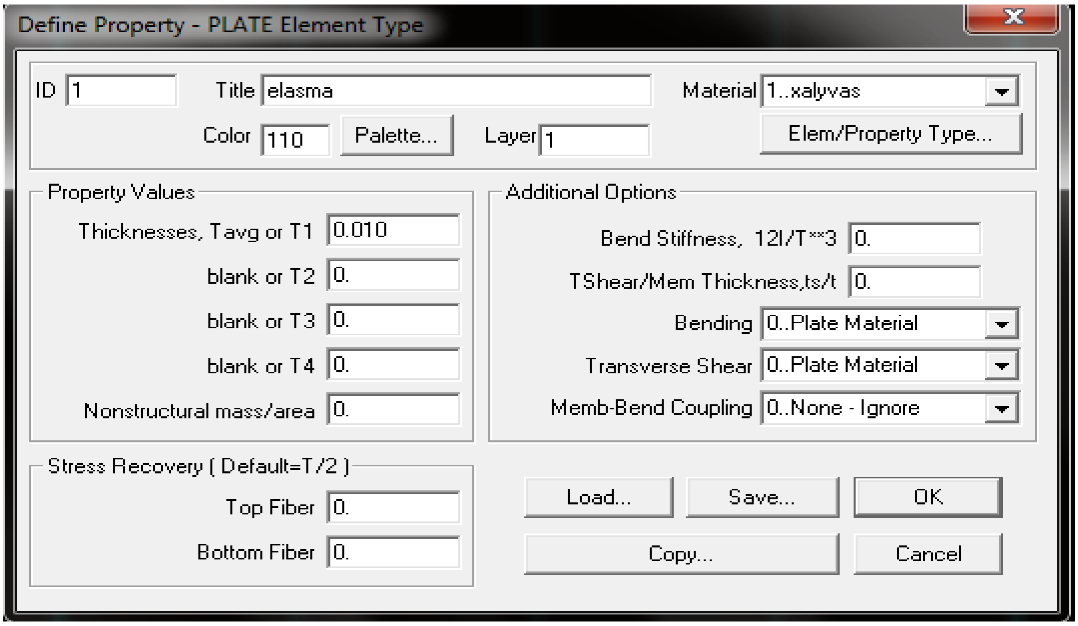
Αφήνουμε τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά καθώς δεν παίζουν κανένα ρόλο στην ανάλυση γραμμικού λυγισμού που θα πραγματοποιηθεί. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι δεν συμπληρώνουμε ούτε τις οριακές τάσεις αντοχής του χάλυβα (*Tension, Compression και Shear*). Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δεν εξαρτάται από την ποιότητα του χάλυβα. Στη θέση *Title* εισάγουμε την ονομασία του υλικού. Εδώ δόθηκε η ονομασία *1.xalyvas*. Επιλέγουμε *Save* προκειμένου να είναι δυνατή η μελλοντική χρήση του υλικού ανατρέχοντας στη βιβλιοθήκη. Πατώντας *OK* και τέλος *Cancel,* η διαδικασία για τον καθορισμό των ιδιοτήτων του υλικού έχει ολοκληρωθεί.



Σχήμα 3.29: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων υλικού στοιχείου

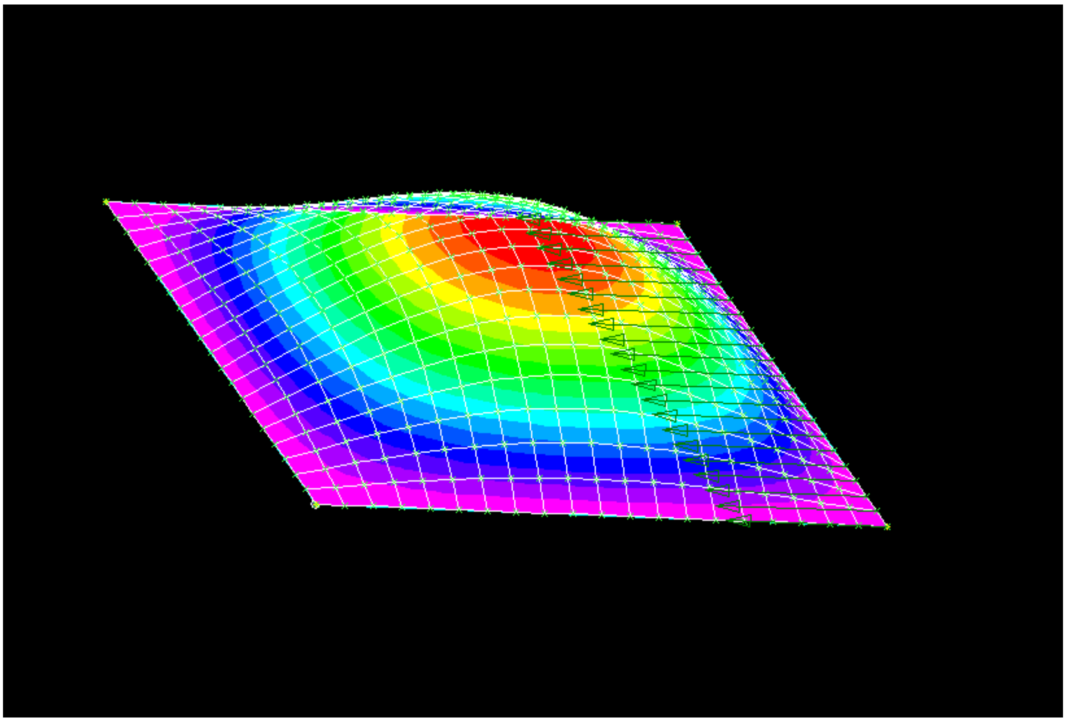
Βήμα 3^{o}: Καθορισμός των ιδιοτήτων του φορέα (πάχος για χάλυβα, αριθμός στρώσεων και πάχος στρώσης για σύνθετο, υλικό)

Από το μενού *Model* επιλέγοντας την εντολή *Property* εμφανίζεται παράθυρο με τίτλο *Define Property -PLATE Element Type* (Σχήμα 3.30). Πατάμε το βελάκι στη θέση Material και επιλέγουμε το υλικό με το όνομα που ορίστηκε στο προηγούμενο βήμα. Ο τύπος πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτή την περίπτωση δεν είναι ίδιος με αυτόν στο σύνθετο υλικό. Εδώ πρόκειται για στοιχείο πλάκας (*plate*) που θα το δούμε ήδη προεπιλεγμένο ενεργοποιώντας την εντολή *Elem/Property Type*. Για να ορίσουμε το πάχος του στοιχείου μας, που πλέον δεν έχει στρώσεις, αλλά είναι ομοιογενές εισάγουμε την τιμή 0.010 (η οποία αντιστοιχεί σε πάχος 10mm) στη θέση *Thicknesses, Tavg or T1*. Τέλος εισάγουμε τον τίτλο “elasma” και πατάμε *OK* και ύστερα *Cancel*. Όλα τα χαρακτηριστικά, όπως ορίστηκαν, αποτυπώνονται στη μνήμη του υπολογιστή και το βήμα αυτό έχει, πλέον, ολοκληρωθεί με επιτυχία. Προσοχή, δεν ξεχνάμε μετά το τέλος κάθε βήματος να αποθηκεύουμε το μοντέλο για να μην βρεθουμε μπροστά σε δυσάρεστα αποτελέσματα σε περίπτωση ατυχιών (π.χ. διακοπή ρεύματος).



Σχήμα 3.30: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων φορέα από χάλυβα

Στα επόμενα βήματα 4^o, 5^o, 6^o, 7^o δεν διαφοροποιείται κάτι. Αξίζει μόνο να παρουσιαστεί και εδώ η πρώτη ιδιομορφή λυγισμού που έχει την ίδια μορφή με αυτή του σύνθετου υλικού αλλά αρκετά μεγάλη διαφορά στο κρίσιμο φορτίο (εδώ είναι 753.9216kN σε αντίθεση με το σύνθετο όπου είναι 149.6998kN).



Σχήμα 3.31: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού σε χαλύβδινη πλάκα

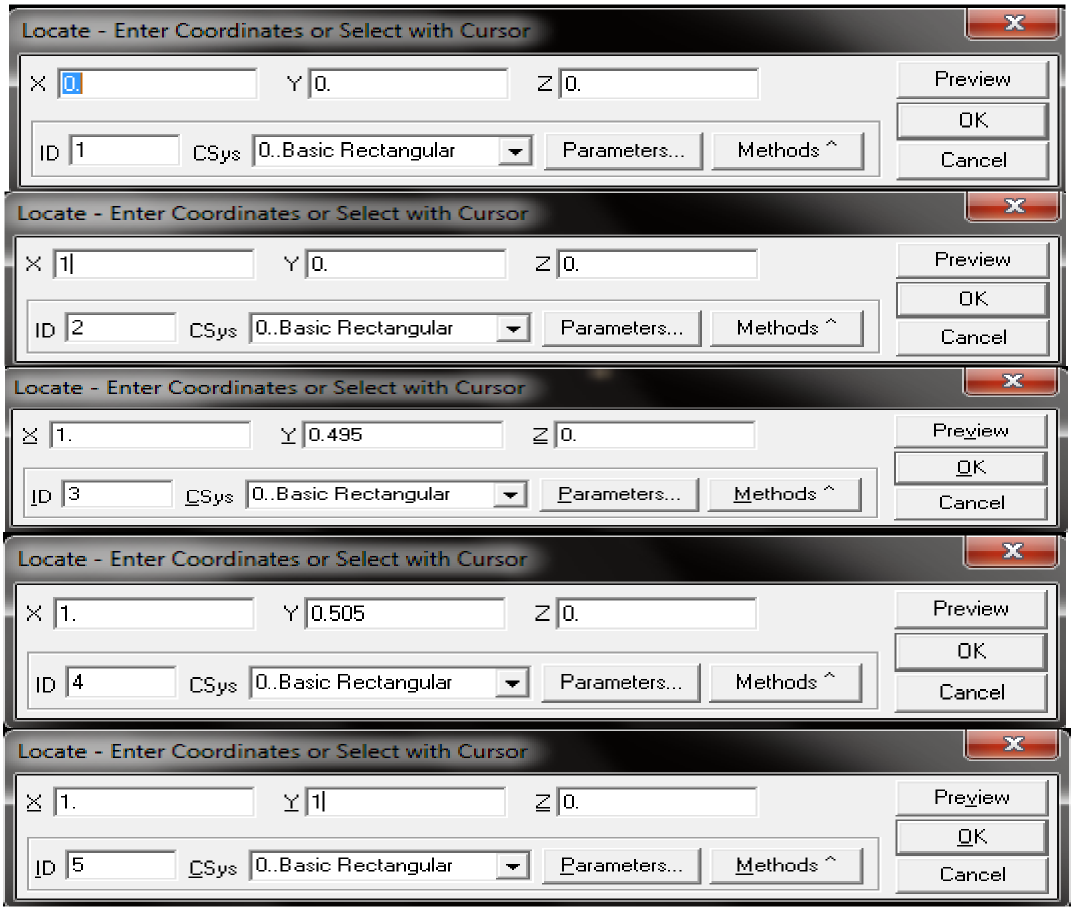
3.2.3 Πλάκες από σύνθετα υλικά με ενισχύσεις επίσης από σύνθετα υλικά

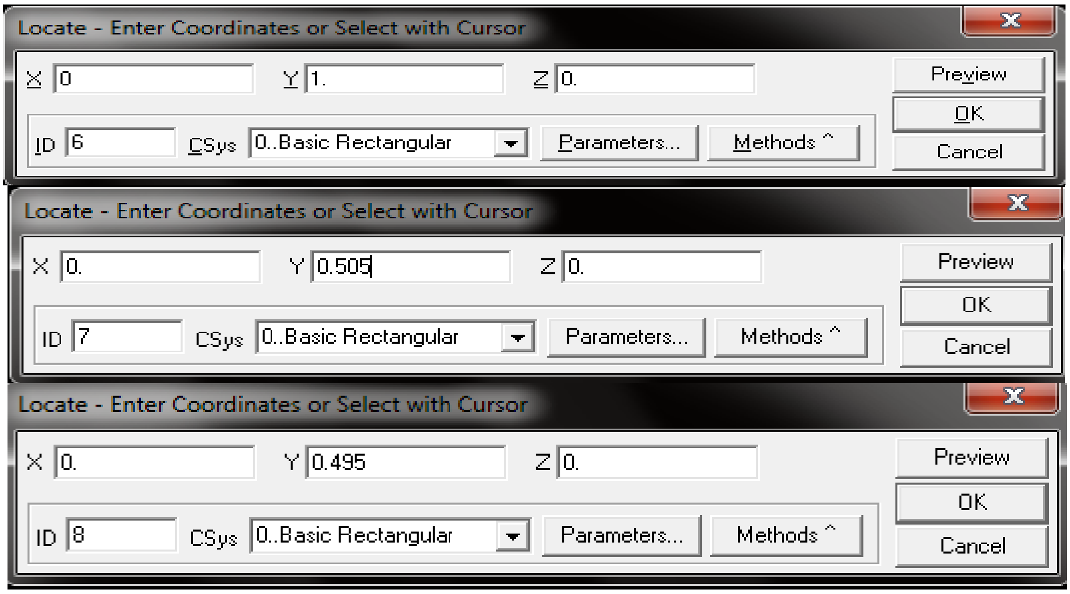
$1^{ος}$ τρόπος προσομοίωσης

Στην υποενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία μόρφωσης μέσω του προγράμματος NASTRAN μιας τετραγωνικής πλάκας 1000×1000mm και πάχους t=10mm με μία ενδιάμεση ενίσχυση διαστάσεων 10×50mm. Χρησιμοποιήθηκε υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy. Κάθε στρώση έχει πάχος t=1mm, δηλαδή, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: E_1=148GPa, E_2=9.65GPa , G_{12}=4.55GPa και ν_{12}=0.30. Για την ενίσχυση, επίσης, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις του ίδιου υλικού με πάχος t=5mm η καθεμία.

Βήμα 1^{o} : Δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα

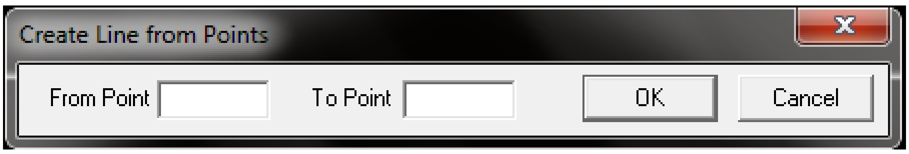
Στο βήμα αυτό εργαζόμαστε λίγο διαφορετικά από το αντίστοιχο βήμα της υποενότητας 3.2.1. Επιλέγουμε *Geometry* και μετά την εντολή Point και ανοίγει ένα παράθυρο με τίτλο *Locate -Enter Coordinates or Select with Cursor*. Στο παράθυρο αυτό συμπληρώνονται οι συντεταγμένες 8 σημείων (Σχήμα 3.32).





Σχήμα 3.32: Ορισμός 8 σημείων για τη δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα

Για να δημιουργηθεί το τετράπλευρο με την ενδιάμεση ενίσχυση από το μενού *Geometry* και την εντολή *Curve Line* επιλέγω *Points* εμφανίζεται το παράθυρο του Σχήματος 3.33.



Σχήμα 3.33: Δημιουργία γεωμετρίας φορέα

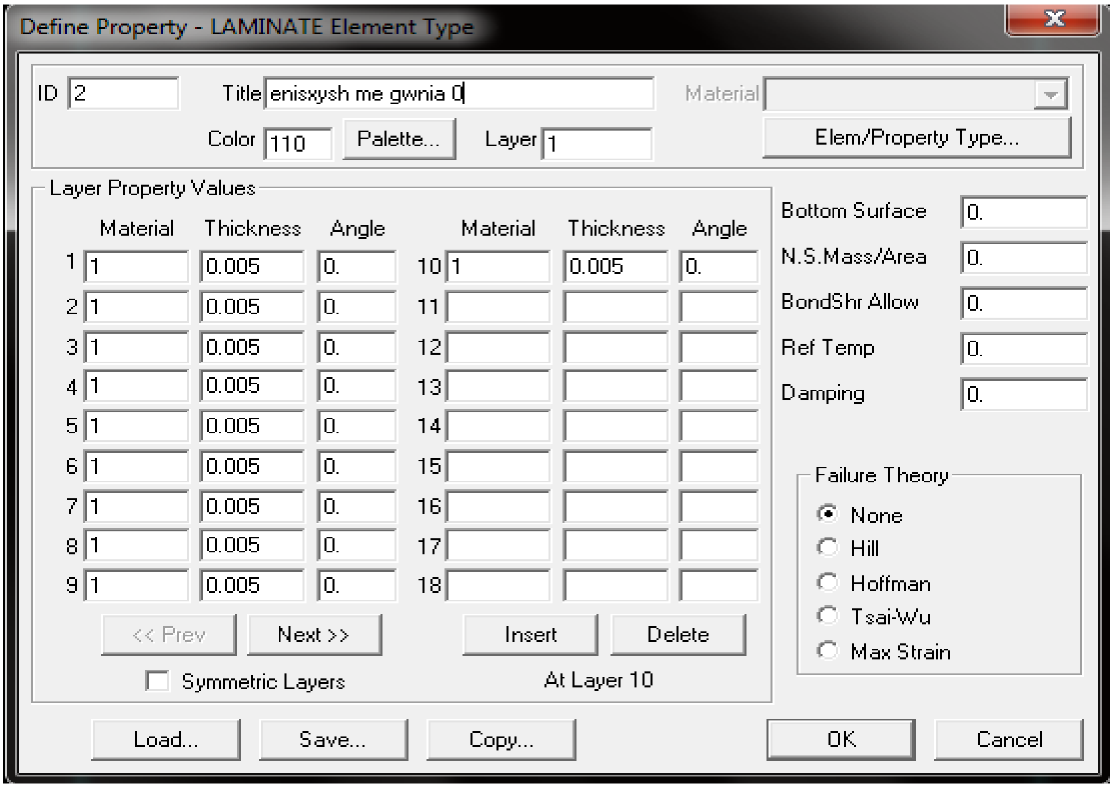
Στο παράθυρο αυτό συμπληρώνονται τα δύο σημεία που ορίζουν την ευθεία που θέλουμε να δημιουργήσουμε. Ενώνουμε, λοιπόν, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1, 3-8 και 4-7. Αφού ενωθούν τα δύο πρώτα σημεία και δημιουργηθεί η πρώτη γραμμή πατάμε *OK* για να μεταφερθούμε στην επόμενη, ενώ μετά το τέλος της ενέργειας αυτής πατάμε *Cancel*. Το βήμα αυτό έχει ολοκληρωθεί. Κεντράρουμε το σχέδιο πατώντας Ctrl+A και ακολουθεί το βήμα 2^o.

Βήμα 2^o: Καθορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Ορίζουμε στο βήμα αυτό τις ιδιότητες του υλικού. Από το μενού *Model* και την εντολή *Material* καθορίζουμε το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί όπως περιγράφεται και στην υποενότητα 3.2.1. Αξίζει να σημειωθεί ότι ορίζεται μόνο ένα υλικό καθώς και η ενίσχυση που θα χρησιμοποιηθεί έχει σαν υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy. Ο ορισμός του υλικού φαίνεται και στο Σχήμα 3.5. Το βήμα αυτό έχει ολοκληρωθεί.

Βήμα 3^o: Καθορισμός των ιδιοτήτων του φορέα (πάχος για χάλυβα, αριθμός στρώσεων και πάχος στρώσης για σύνθετο, υλικό)

Η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που περιγράφεται στο Βήμα 3^o της 3.2.1 υποενότητας. Ως τύπος πεπερασμένου στοιχείου από την κατηγορία *Plane Elements* επιλέγεται *Laminate*. Δεν ξεχνάμε, όπως και στην περίπτωση του σύνθετου υλικού χωρίς ενίσχυση, να ταυτίσουμε τους άξονες του προγράμματος με αυτούς του πεπερασμένου στοιχείου από το πλήκτρο Element Material Orientation ενεργοποιώντας Coordinate Direction X. Στο Σχήμα 3.7 φαίνεται το παράθυρο εισαγωγής των ιδιοτήτων του φορέα με ID 1. Πατώντας *OK* αλλάζει σε ID 2. Ορίζουμε τις νέες ιδιότητες που αφορούν την ενίσχυση και τη διαστρωμάτωση αυτής (Σχήμα 3.34). Έχει οριστεί ίδιος αριθμός στρώσεων με την επιφάνεια και ίδιος προσανατολισμός στις ίνες. Αυτό που διαφοροποιείται είναι το πάχος κάθε στρώσης, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι 5mm.

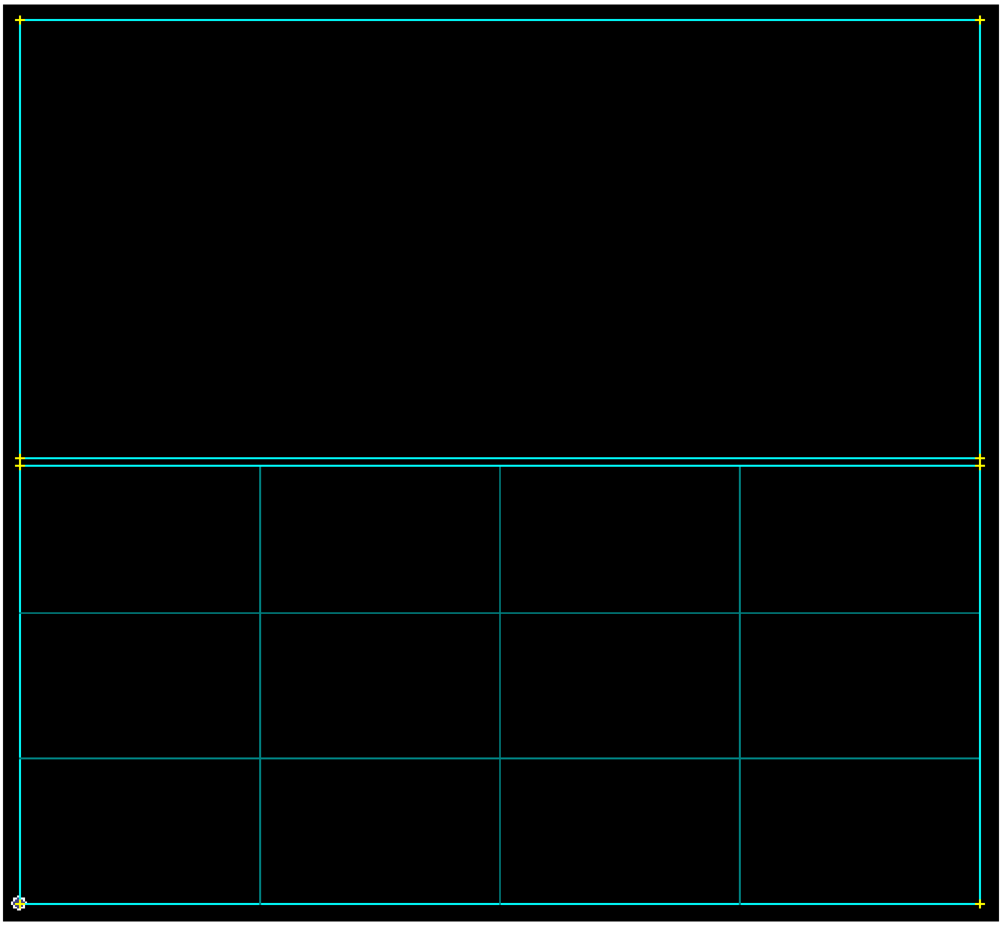


Σχήμα 3.34: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων ενίσχυσης

Βήμα 4^o: Δημιουργία δικτύου πεπερασμένων στοιχείων από κόμβους και στοιχεία

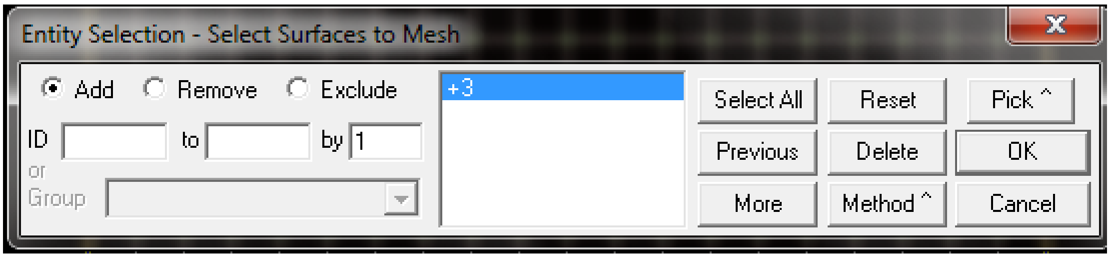
Στο βήμα αυτό θα δημιουργηθεί το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων. Από το μενού *Mesh -Mesh Control* και την εντολή *Default Size* εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου *Default Mesh Size* όπου όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.8 θέτω την τιμή 0.05 και θυμάμαι ότι αυτό αφορά m. Στη συνέχεια από το μενού *Geometry* επιλέγουμε την εντολή *Surface* και *Edge Curves* (Σχήμα 3.9) και στο παράθυρο που ανοίγει με τίτλο *Edge Surface* (Σχήμα 3.10) πρέπει να δωθούν τέσσερις πλευρές που ορίζουν μία επιφάνεια. Εδώ που υπάρχουν ενισχύσεις συνολικά ορίζονται τρεις διαφορετικές επιφάνειες. Πατώντας

OK αφού οριστεί η πρώτη, δίνω πάλι τέσσερις πλευρές για τη δεύτερη επιφάνεια και όμοια για την τρίτη, που εδώ ως τρίτη επιφάνεια είναι η ενίσχυση. Τέλος με *Cancel* βγαίνουμε από το μενού αυτό και οι επιφάνειες έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη του προγράμματος. Στο Σχήμα 3.35 φαίνεται ο ορισμός της πρώτης επιφάνειας.



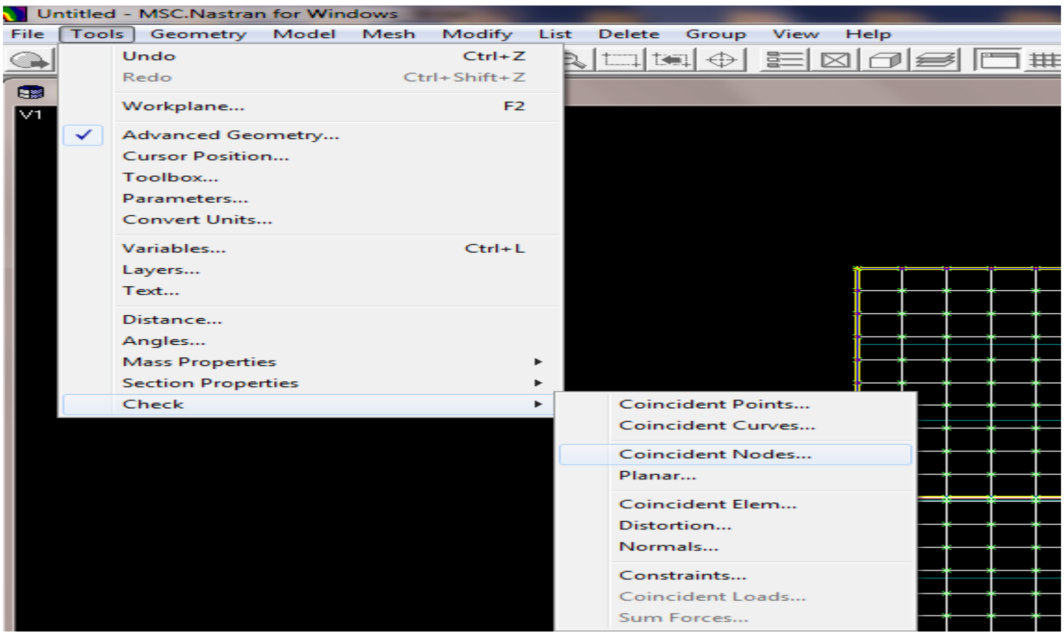
Σχήμα 3.35: Ορισμός της πρώτης επιφάνειας του δικτύου

Τα όρια του δικτύου δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο και μάλιστα παρατηρούμε ότι έχουν και πιο έντονο χρώμα. Συνεχίζοντας από το μενού *Mesh* και πατώντας *Geometry* (Σχήμα 3.11) εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο με τίτλο *Entity Selection -Select Surfaces to Mesh* (Σχήμα 3.12) στο οποίο επιλέγουμε την επιφάνεια 1 και 2 και μετά *OK* και εμφανίζεται το παράθυρο με τίτλο *Automesh Surfaces (*Σχήμα 3.13). Με όμοιο τρόπο επιλέγουμε την επιφάνεια 3 (Σχήμα 3.36). Στο πεδίο *Property* επιλέγουμε την τιμή *1..10 strwseis me gwnia 0* που αντιστοιχεί στη διαστρωμάτωση που επιλέξαμε για τις δύο αυτές επιφάνειες του φορέα ενώ για την τρίτη επιλέγουμε 2..enisxysh me gwnia 0. Αντικαθιστώ στο πεδίο *Max Element Aspect Ratio* το 2 με 1.:1 και αφαιρώ το (v) από το *Quick -Out Boundaries with more than*. Πατώντας *OK* έχει δημιουργηθεί το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων.



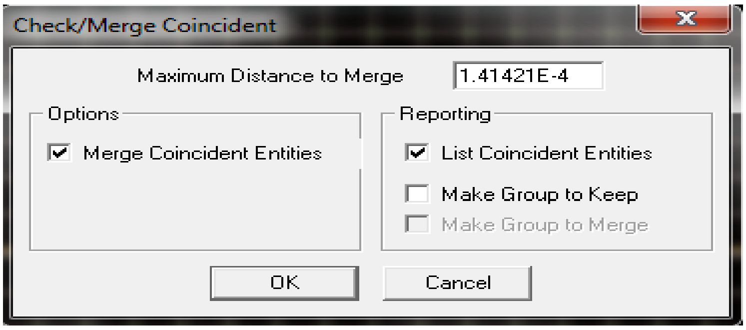
Σχήμα 3.36: Παράθυρο επιλογής επιφάνειας ενίσχυσης

Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι ορίζοντας διαφορετικές επιφάνειες για τη δημιουργία των πεπερασμένων στοιχείων υπάρχουν κόμβοι που το πρόγραμμα θα λάβει υπόψη του δύο φορές στην ανάλυση, με αποτέλεσμα λανθασμένη ανάλυση σε επόμενο βήμα. Για το λόγο αυτό πριν προβούμε σε επόμενα βήματα της μοντελοποίησης κάνουμε "συνένωση" των κόμβων από το μενού *Tools*, την εντολή *Check* και έπειτα την εντολή *Coincident Nodes* (Σχήμα 3.37).



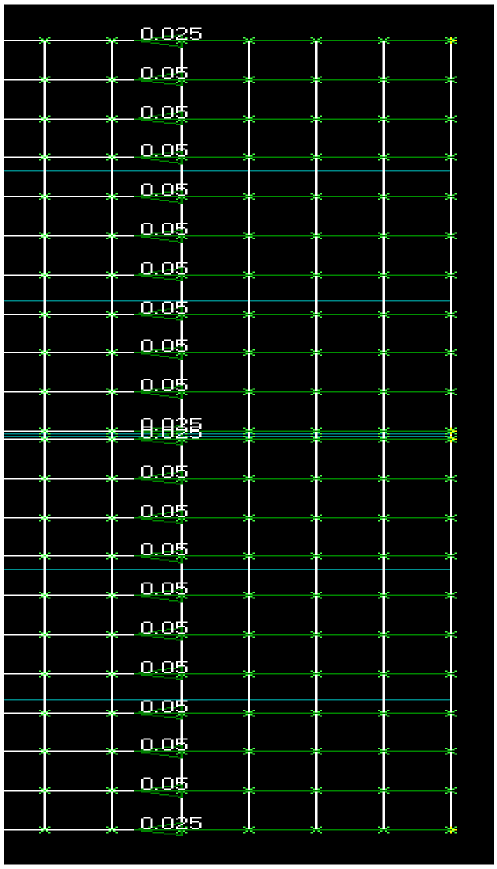
Σχήμα 3.37: Παράθυρο επιλογής κόμβων προς συνένωση

Στο παράθυρο που ανοίγει επιλέγουμε *Select All* και εμφανίζεται έπειτα το νέο παράθυρο του Σχήματος 3.38 με τίτλο *Check/Merge Coincident*. Στο παράθυρο αυτό ενεργοποιείται, από το *Options*, το *Merge Coincident Entities*.



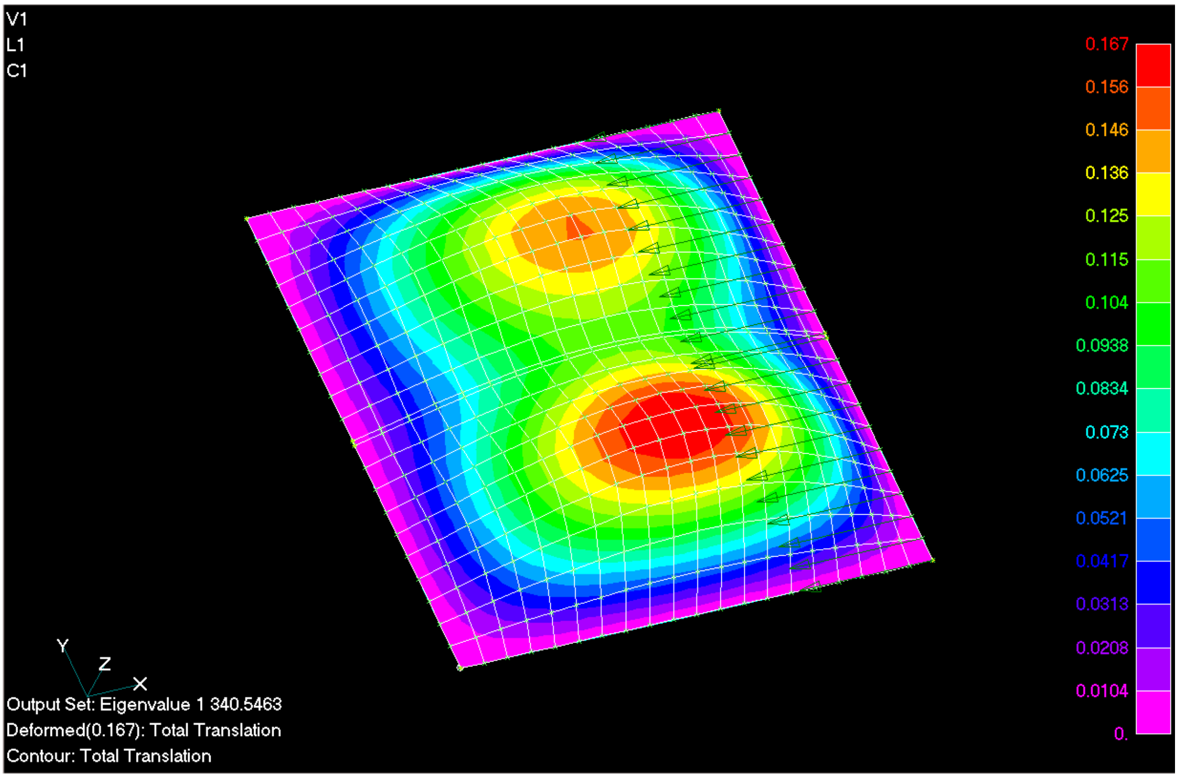
Σχήμα 3.38: Παράθυρο ενεργοποίησης συνένωσης κόμβων

Όσον αφορά τα επόμενα βήματα όλα γίνονται με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην υποενότητα 3.2.1. Το μόνο που αξίζει να σημειωθεί είναι στο βήμα με την επιβολή των φορτίσεων κοντά στους κόμβους της στήριξης όπου διαφοροποιείται το φορτίο. Αυτό που πραγματοποιείται είναι αυτό που φαίνεται και στο Σχήμα 3.39. Το κατανεμημένο φορτίο που είναι 1kN/m χωρίζεται σε όλους τους ενδιάμεσους κόμβους σαν συγκεντρωμένο με τιμή -0.05 ενώ στους κόμβους τους ακραίους και αυτούς εκατέρωθεν της ενίσχυσης με τιμή -0.025.



Σχήμα 3.39: Επικόμβιες φορτίσεις φορέα με ενίσχυση

Παρακάτω φαίνεται η πρώτη ιδιομορφή λυγισμού του φορέα:



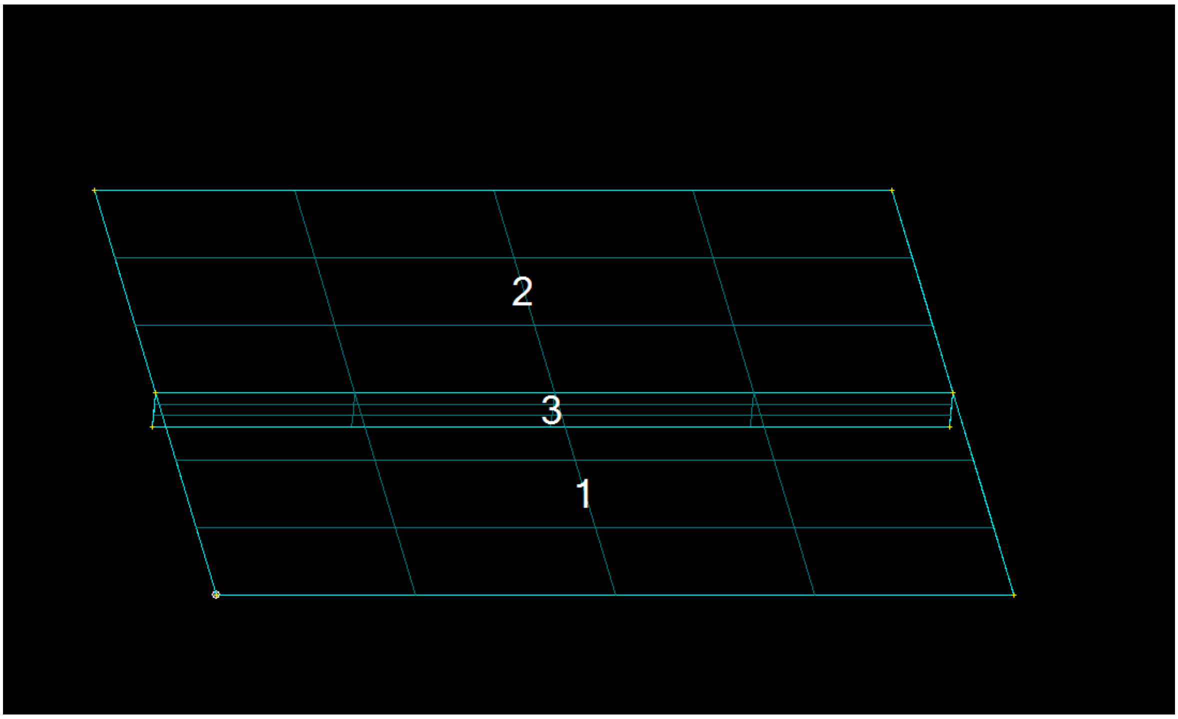
Σχήμα 3.40: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού του φορέα

Χρησιμοποιώντας τον τρόπο αυτό προσομοίωσης μένει σταθερό το πάχος της ενίσχυσης και στην προσομοίωση μπορεί να μεταβληθεί το ύψος. Η ενίσχυση τοποθετείται στο κέντρο βάρους του ελάσματος. Προκειμένου να έχουμε πιο ρεαλιστικές αναλύσεις αφού πραγματοποιήθηκαν όλες οι αναλύσεις με τον τρόπο αυτό ξαναέγιναν με τον τρόπο που ακολουθεί. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο πέμπτο κεφάλαιο προκύπτουν από τον 2^{o} τρόπο προσομοίωσης.

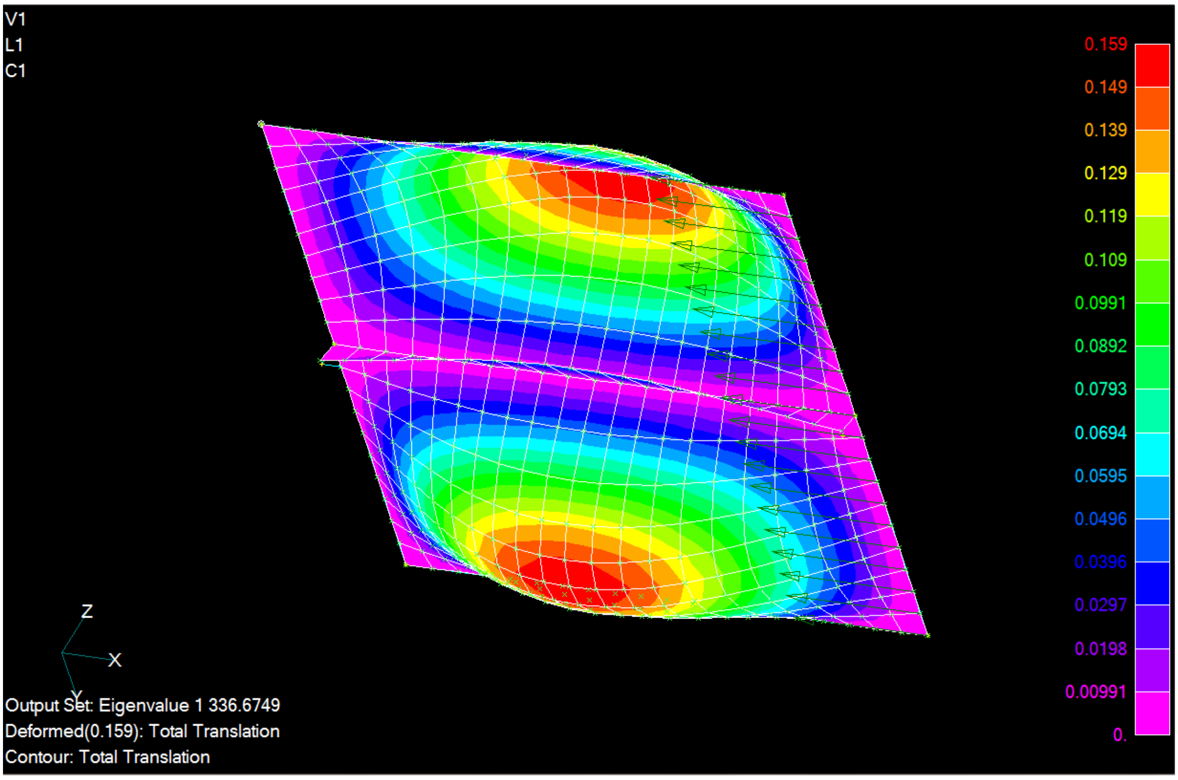
$2^{ος}$ τρόπος προσομοίωσης

Στην υποενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία μόρφωσης μέσω του προγράμματος NASTRAN μιας τετραγωνικής πλάκας 1000×1000mm και πάχους t=10mm με μία ενδιάμεση ενίσχυση διαστάσεων 10×50mm. Χρησιμοποιήθηκε υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy. Κάθε στρώση έχει πάχος t=1mm, δηλαδή, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: E_1=148GPa, E_2=9.65GPa , G_{12}=4.55GPa και ν_{12}=0.30. Για την ενίσχυση, επίσης, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις του ίδιου υλικού με πάχος t=1mm η καθεμία.

Η δημιουργία του φορέα από σημεία, ο καθορισμός των ιδιοτήτων τόσο του υλικού όσο και του φορέα καθώς και η δημιουργία του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων έχει περιγραφεί στον προηγούμενο τρόπο προσομοίωσης. Θα παρουσιαστεί εδώ μόνο το νέο μοντέλο ανάλυσης όπου σταθερή είναι η διάσταση του ύψους ενώ μεταβάλλεται μόνο το πάχος της διαστρωμάτωσης. Παρακάτω φαίνονται οι τρεις ορισθείσες επιφάνειες καθώς και η αντίστοιχη πρώτη ιδιομορφή του μοντέλου.



Σχήμα 3.41: Ορισθείσες επιφάνειες στον 2^o τρόπο προσομοίωσης



Σχήμα 3.42: Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού του φορέα

3.2.4 Πλάκες από χάλυβα με ενισχύσεις επίσης από χάλυβα

Στην υποενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία μόρφωσης μέσω του προγράμματος NASTRAN μιας τετραγωνικής πλάκας 1000×1000mm και πάχους t=10mm με μία ενδιάμεση ενίσχυση διαστάσεων 10×50mm. Η πλάκα είναι από ισότροπο υλικό.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τη μόρφωση μίας τέτοιας πλάκας η διαδικασία είναι συνδυασμός όσων έχουν αναφερθεί παραπάνω.

Βήμα 1^{o}: Δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα

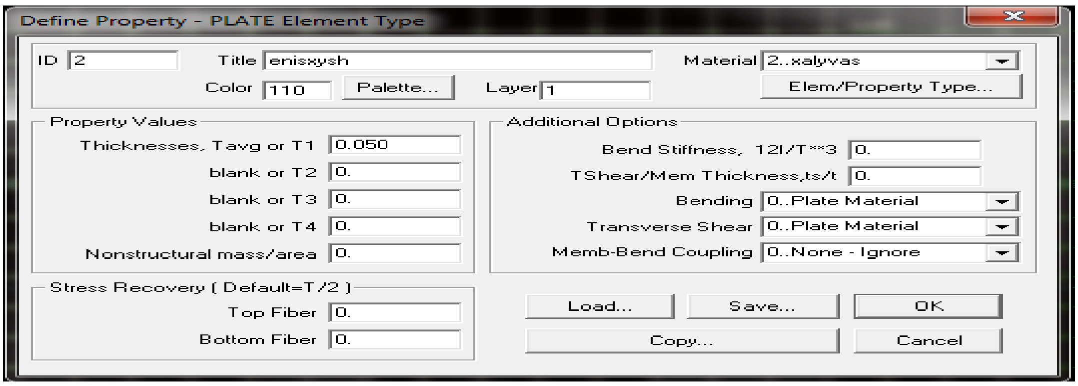
Η διαδικασία περιγράφεται στην υποενότητα 3.2.3.

Βήμα 2^{0}: Καθορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Η διαδικασία περιγράφεται στην υποενότητα 3.2.2.

Βήμα 3^{o}: Καθορισμός των ιδιοτήτων του φορέα (πάχος για χάλυβα, αριθμός στρώσεων και πάχος στρώσης για σύνθετο, υλικό)

Η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που περιγράφεται στο Βήμα 3^{o} της 3.2.2 υποενότητας. Από το μενού *Model* επιλέγοντας την εντολή *Property* εμφανίζεται παράθυρο με τίτλο *Define Property -PLATE Element Type* (Σχήμα 3.30). Πατάμε το βελάκι στη θέση Material και επιλέγουμε το υλικό με το όνομα που ορίστηκε στο προηγούμενο βήμα. Ο τύπος πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτή την περίπτωση δεν είναι ίδιος με αυτόν στο σύνθετο υλικό. Εδώ πρόκειται για στοιχείο πλάκας (plate) που θα το δούμε ήδη προεπιλεγμένο ενεργοποιώντας την εντολή *Elem/Property Type*. Για να οριστεί το πάχος της ενίσχυσης που πλέον δεν έχει στρώσεις, αλλά είναι ομοιογενής εισάγουμε την τιμή 0.050 (η οποία αντιστοιχεί σε πάχος 50mm) στη θέση *Thicknesses, Tavg or T1* ή την τιμή 0.010 για τον 2^{o} τρόπο προσομοίωσης (είναι και αυτός που επιλέχθηκε στα αποτελέσματα) . Τέλος εισάγουμε τον τίτλο "enisxysh" και πατάμε *OK* και ύστερα *Cancel*. Ο ορισμός του πάχους των άλλων δύο επιφανειών έχει περιγραφεί στην 3.2.2. Εδώ, ορίζουμε τα χαρακτηριστικά με ID..2, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.43. Τα βήματα 4^{o}, 5^{o}, 6^{o}, 7^{o} δεν αλλάζουν. Η πορεία που ακολουθείται έχει περιγραφεί πλήρως.



Σχήμα 3.43: Παράθυρο εισαγωγής ιδιοτήτων ενίσχυσης

4 Ανάλυση των φορέων της μελέτης με χρήση του προγράμματος Mathematica 5.1

4.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο, επίσης, θα αναλυθούν πλάκες από πολύστρωτα σύνθετα υλικά καθώς και χάλυβα ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ των δύο υλικών αλλά και να επιβεβαιώσουμε την σύγκλιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων (σύγκριση με πεπερασμένα στοιχεία). Τα ελάσματα που έχουν επιλεγεί έχουν πάχος t=10mm, t=5mm, t=2mm και t=6mm ενώ οι διαστάσεις τους είναι 1000×1000mm, 1000×500mm, 500×1000mm, 400×700mm, 700×400mm. Η ποιότητα χάλυβα είναι S355 ενώ ως υλικό διαστρωμάτωσης στην περίπτωση των σύνθετων υλικών αποφασίστηκε να ληφθεί Graphite/Epoxy και E-glass/Epoxy. Η ανάλυση γίνεται μέσω του προγράμματος Mathematica 5.1. Η Mathematica είναι μία γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού που έχει αναπτυχθεί από τον θεωρητικό φυσικό Stephen Wolfram και είναι ιδιαιτέρως διαδεδομένη στους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής. Το πλεονέκτημα της γλώσσας αυτής είναι ότι είναι συμβολική και με αυτό τον τρόπο δίνει λύσεις και σε προβλήματα πολιτικών μηχανικών που στηρίζονται στα μαθηματικά και τη φυσική. Υπάρχουν προβλήματα τέτοια εξαιρετικά δύσκολα, έως, και αδύνατον να λυθούν με το χέρι. Σε αυτές τις περιπτώσεις το πρόγραμμα αυτό είναι χρήσιμο σαν εργαλείο. Προγραμματίζεται το πρόβλημα και δίνοντας του την εντολή για επίλυση σε λίγα δευτερόλεπτα εμφανίζεται η λύση. Αποφασίστηκε, λοιπόν, το πρόβλημα του γραμμικού λυγισμού των πλακών να επιλυθεί μέσω αυτού του προγράμματος. Πλεονέκτημα βασικότατο του Mathematica, σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία, είναι ότι αλλάζοντας τα δεδομένα έχοντας ήδη προγραμματίσει μια φορά ένα πρόβλημα αλλάζουν σε σύντομο χρονικό διάστημα και τα αποτελέσματα. Αντίστοιχα, στο NASTRAN πρέπει να προβείς στη δημιουργία ενός νέου μοντέλου από την αρχή. Αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούν να συγκριθούν τα δύο προγράμματα καθώς το καθένα έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Μειονέκτημα του Mathematica είναι ο λανθασμένος προγραμματισμός (π.χ. μία παρένθενση λιγότερη), οπότε και τα αποτελέσματα είναι εκτός κάθε λογικής.

Στο κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, θα περιγραφεί αναλυτικά ο τρόπος που προγραμματίστηκε το πρόβλημα του γραμμικού λυγισμού στην περίπτωση πλακών από σύνθετα υλικά με και χωρίς ενισχύσεις αλλά και χάλυβα, επίσης, με και χωρίς ενισχύσεις με τη βοήθεια των εξισώσεων λυγισμού.

4.2 Περιγραφή προσομοίωσης με το Mathematica 5.1

4.2.1 Πλάκες από σύνθετα υλικά χωρίς ενισχύσεις

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία μόρφωσης και ανάλυσης μέσω του προγράμματος Mathematica μιας τετραγωνικής πλάκας 1000×1000mm και πάχους t=10mm. Χρησιμοποιήθηκε υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy. Κάθε στρώση έχει πάχος t=1mm, δηλαδή, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: E_1=148GPa, E_2=9.65GPa , G_{12}=4.55GPa και ν_{12}=0.30.

Αρχίζοντας, από το μενού File δίνουμε την εντολή New και έτσι ξεκινάει η εργασία σε ένα νέο αρχείο. Προτού ξεκινήσουμε την οποιαδήποτε ενέργεια καθαρίζουμε τη μνήμη του πυρήνα του προγράμματος χρησιμοποιώντας την εντολή Clear [“a”] από τις έως τώρα μεταβλητές που έχουν οριστεί, ώστε να μην χρησιμοποιηθεί στο νέο αρχείο δεδομένο από άλλο, υπάρχον, αρχείο.

Το πρώτο πράγμα που ορίζουμε στο πρόγραμμα είναι οι διαστάσεις του στοιχείου. Ως a ορίζεται η διάσταση η παράλληλη με τον άξονα X και b η παράλληλη με τον, κάθετο στον X στο επίπεδο, άξονα Y. Στην περίπτωση που εξετάζουμε επειδή, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, τα μητρώα των μεμβρανικών και καμπτικών δυσκαμψιών [A] και [D] ταυτίζονται με τα αντίστοιχα στο τοπικό σύστημα ορίζουμε επίσης στο πρόγραμμα το συνολικό πάχος της διαστρωμάτωσης t=10mm. Ακολούθως, δίνονται σαν δεδομένα οι ιδιότητες του υλικού E_1=148GPa, E_2=9.65GPa , G_{12}=4.55GPa και ν_{12}=0.30. Τα παραπάνω είναι και τα μοναδικά δεδομένα που δίνονται με τις αριθμητικές τους τιμές.

4.2.1.1 Μητρώα μεμβρανικής και καμπτικής δυσκαμψίας

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα αξίζει να γίνει μία αναφορά στη δημιουργία των μητρώων μεμβρανικής και καμπτικής δυσκαμψίας.

Έχοντας γνωστές τις ιδιότητες του υλικού που θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά προβαίνουμε στον υπολογισμό των ιδιοτήτων [Q] στο σύτημα 1-2 του υλικού σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \tag{4.1}$$

Άρα η σχέση τάσεων -παραμορφωσέων στο σύστημα υλικού είναι:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Στη συνέχεια, γίνεται μετασχηματισμός της σχέσης τάσεων -παραμορφώσεων και προδιορίζεται χωριστά για κάθε προσανατολισμό της διαστρωμάτωσης σύμφωνα με τη σχέση 4.3:

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q_{11}} \\ \overline{Q_{22}} \\ \overline{Q_{12}} \\ \overline{Q_{66}} \\ \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{26}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 \\ s^4 & c^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4+s^4 & -4s^2c^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3-c^3s & 2(cs^3-c^3s) \\ s^3c & -sc^3 & c^3s-cs^3 & 2(c^3s-cs^3) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{Bmatrix}$$

(4.3)

όπου c=cosθ και s=sinθ.

Αφού μορφωθούν τα παραπάνω μητρώα, το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας [A] προκύπτει με βάση τη γενική σχέση $A_{ij} = \sum_{k=1}^{N}(\overline{Q_{ij}})_k\, t_k$ και έχει την εξής μορφή:

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

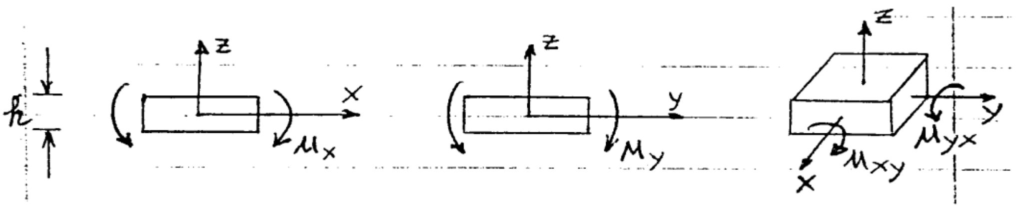
Οι όροι A_{ij} λέγονται μεμβρανικές ακαμψίες της διαστρωμάτωσης και έχουν μονάδες κατανεμημένης δύναμης.

Στην περίπτωση που όλες οι στρώσεις έχουν μηδενικό προσανατολισμό, όπως το παράδειγμα που αναλύουμε, και συνολικό πάχος t=10mm τότε προκύπτει ότι:

$$A_{11} = \frac{E_1 t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \qquad A_{22} = \frac{E_2 t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \qquad A_{12} = \frac{\nu_{12}E_2 t}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \qquad A_{66} = G_{12}\mathrm{t} \quad (4.5)$$

όπου $\nu_{21}=E_2\frac{\nu_{12}}{E_1}$

Αν σε μία διαστρωμάτωση δρουν εγκάρσια φορτία, ο φορέας αυτός λειτουργεί σαν μία σύνθετη πλάκα η οποία υποβάλλεται σε καμπτική καταπόνηση. Οι ροπές M_x , M_y και M_{xy} είναι κατανεμημένες και έχουν μονάδες kNm/m δηλαδή kN. Ορίζουμε ως θετικές φορές αυτές που φαίνονται στο ακόλουθο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Προσήμανση θετικών ροπών πλάκας

Προκειμένου να οριστεί η σχέση μεταξύ ροπών καμπυλοτήτων είναι αναγκαία η δημιουργία του μητρώου καμπτικής ακαμψίας [D]. Το μητρώο αυτό προκύπτει με βάση τη γενική σχέση $D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{ij}}\ z^2 dz = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q_{ij}})_k \left(t_k \overline{z_k}^2 + \frac{t_k{}^3}{12} \right)$ και έχεις την εξής μορφή:

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11}\, D_{12} & 0 \\ D_{21}\, D_{22} & 0 \\ 0 \quad 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Στην περίπτωση που όλες οι στρώσεις έχουν μηδενικό προσανατολισμό, όπως το παράδειγμα που αναλύουμε, και συνολικό πάχος t=10mm τότε έχω ότι:

$$D_{11} = \frac{E_1\, t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \qquad D_{22} = \frac{E_2 t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \qquad D_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \qquad D_{66} = \frac{G_{12}\, t^3}{12} \tag{4.7}$$

4.2.1.2 Μετατοπίσεις πλάκας

Ορίζουμε γενικό σύστημα x-y-z και αντιστοιχούμε τις μετατοπίσεις u, v, w θεωρώντας ότι u είναι η μετατόπιση κατά x, v η μετατόπιση κατά y και w η μετατόπιση κατά τον άξονα z. Στην περίπτωση του γραμμικού λυγισμού μίας πλάκας από πολύστρωτο σύνθετο υλικό απλά εδραζόμενης περιμετρικά και με φόρτιση στον άξονα x, η μετατόπιση κατά y, v=0. Ορίζουμε μόνο u, w. Έτσι έχω τις δύο παρακάτω σχέσεις που δίνουν τις αντίστοιχες μετατοπίσεις. Η μετατόπιση κατά τον άξονα που ασκείται το φορτίο είναι γραμμική ενώ εξαρτάται και από τη γεωμετρία του φορέα και συγκεκριμένα την πλευρά a.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad \text{και} \quad u = \frac{u_0 x}{a} \tag{4.8}$$

4.2.1.3 Μητρώα μεμβρανικών και καμπτικών δράσεων

Οι κινηματικές σχέσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.9}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι επειδή $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ και v=0 συνεπάγεται πως $\varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$. Στην καμπτική καταπόνηση όμως εμφανίζονται και στροφές οι οποίες πρέπει να συσχετισθούν με τις μετατοπίσεις. Για αυτό, τελικά, έχω παραμόρφωση κατά x η οποία δίνεται από τη σχέση (4.10):

(4.10)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{4.10}$$

Στο επόμενο βήμα θα οριστούν οι καμπυλότητες k_x, k_y, k_{xy} ως εξής:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.11}$$

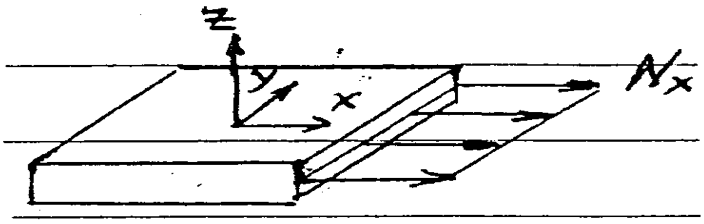
Προκειμένου να συνεχίσουμε με τον ορισμό των μεμβρανικών δράσεων ορίζουμε βοηθητικά την μέση τάση οπότε έχουμε:

$$\overline{\sigma_x} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\overline{Q_{11}}\,\varepsilon_x + \overline{Q_{12}}\varepsilon_y + \overline{Q_{16}}\gamma_{xy})dz = \frac{1}{h}[A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{16}\gamma_{xy}] \tag{4.12}$$

Μεταθέτοντας στο αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσεως το πάχος h και ορίζοντας την μεμβρανική δύναμη N_x ως το γινόμενο $\overline{\sigma_x}$h έχουμε την έκφραση :

$$N_x = \overline{\sigma_x}h = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{16}\gamma_{xy} \tag{4.13}$$

Η μεμβρανική δράση N_x είναι αξονική δύναμη εκφρασμένη ανά μονάδα μήκους που εφαρμόζεται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης και ουσιαστικά αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτουν οι μεμβρανικές δυνάμεις N_y και N_{xy}.



Σχήμα 4.2: Μεμβρανική δύναμη σε μία διαστρωμάτωση

Σημειώνεται, στο σημείο αυτό, ότι δεχόμαστε σταθερή παραμόρφωση κατά πάχος της διαστρωμάτωσης, δηλαδή είναι :

$$\varepsilon_x(z) = \varepsilon_x(0) = \varepsilon_x{}^o$$

$$\varepsilon_y(z) = \varepsilon_y(0) = \varepsilon_y{}^o$$

$$\gamma_{xy}(z) = \gamma_{xy}(0) = \gamma_{xy}{}^o \tag{4.14}$$

και συνεπώς αφού έχει προσδιοριστεί και το μητρώο [A], όπως περιγράφηκε παραπάνω, η σχέση τάσεων -παραμορφώσεων μετασχηματίζεται και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

Αν αντιστρέψουμε την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

όπου οι όροι α_{ij} είναι οι μεμβρανικοί όροι ευκαμψίας της διαστρωμάτωσης.

Στην περίπτωση τοπικού λυγισμού που εξετάζεται επειδή απαγορεύουμε την μετακίνηση της πλάκας κατά την διεύθυνση y και συμπεριλαμβανομένου του γεγονότος ότι τα υλικά που χρησιμοποιούμε στην συγκεκριμένη διπλωματική είναι πλήρως συμμετρικά ο μόνος όρος που απομένει από την σχέση τάσεων παραμορφώσεων (4.15) είναι:

$$N_x = A_{11} * \varepsilon_x \tag{4.17}$$

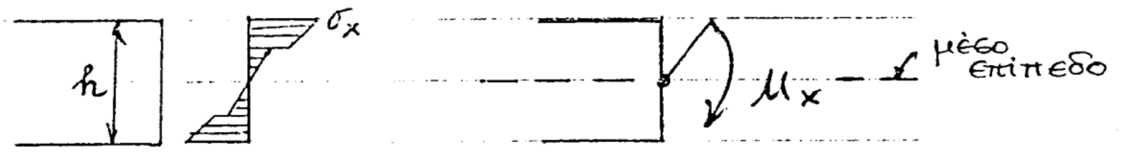
Τέλος, αφού έχουν οριστεί οι μεμβρανικές δράσεις N_x, N_y, N_{xy} επειδή ο φορέας καταπονείται και καμπτικά πρέπει να ορίσουμε και τις ροπές. Οι ροπές υπολογίζονται με ολοκλήρωση των τάσεων κατά την έννοια του πάχους της διαστρωμάτωσης ως εξής:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, zdz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, zdz \tag{4.18}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, zdz$$

Οι ανωτέρω σχέσεις (4.18) συνδέουν τις ορθές και διατμητικές τάσεις με τις ροπές. Οι ροπές εφαρμόζονται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Ισορροπία ορθών τάσεων και ροπών σε μία πλάκα πάχους h

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εκ των (4.18) στη σχέση {σ}=[Q]{ε} προκύπτει:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, zdz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\overline{Q_{11}} \, \varepsilon_x + \overline{Q_{12}} \varepsilon_y + \overline{Q_{16}} \gamma_{xy}) zdz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\overline{Q_{11}} \, k_x + \overline{Q_{12}} k_y + \overline{Q_{16}} k_{xy}) z^2 \, dz = \left[\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{11}} \, z^2 dz \right) k_x + \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} \, z^2 dz \right) k_y + \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{16}} \, z^2 dz \right) k_{xy} \right] = \left(D_{11} k_x + D_{12} k_y + D_{16} k_{xy} \right) \tag{4.19}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτουν και οι ροπές M_y και M_{xy}. Τελικώς, αφού έχουμε προσδιορίσει και το μητρώο [D], όπως περιγράφηκε παραπάνω η σχέση ροπών - καμπυλοτήτων γράφεται υπό την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

Αν αντιστρέψουμε την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

όπου οι όροι d_{ij} είναι οι όροι καμπτικής ευκαμψίας της διαστρωμάτωσης.

Στην περίπτωση τοπικού λυγισμού που εξετάζεται επειδή τα υλικά που χρησιμοποιούμε στην συγκεκριμένη διπλωματική είναι πλήρως συμμετρικά οι όροι που απομένουν από την σχέση ροπών -καμπυλοτήτων (Σχέση (4.21)) είναι οι ακόλουθοι:

$$M_x = D_{11}k_x + D_{12}k_y$$

$$M_y = D_{21}k_x + D_{22}k_y \tag{4.22}$$

$$M_{xy} = D_{66}k_{xy}$$

4.2.1.4 Ενέργεια συστήματος

Ορίζουμε γενικό σύστημα x-y-z και αντιστοιχούμε τις μετατοπίσεις u, v, w αντίστοιχα.

Στο κεφάλαιο 2 έχουν δοθεί οι δύο παρακάτω σχέσεις για την ενέργεια παραμόρφωσης του σύστηματος και το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων. Αθροίζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε το σύνολο της ενέργειας V:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]d_y d_x \tag{4.23}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right]d_y d_x \tag{4.24}$$

$$V = U + \Omega =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]d_y d_x +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right]d_y d_x \tag{4.25}$$

Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε επειδή $N_y = N_{xy} = 0$ η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

V= U + Ω=
$$\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]d_y d_x +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]d_y d_x \tag{4.26}$$

Εισάγοντας την έννοια του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, που είναι το αντικείμενο μελέτης και αναζήτησης της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η δύναμη που φορτίζεται κάθε πλάκα έχει τη διεύθυνση του άξονα x σε όλες τις περιπτώσεις τότε στην παραπάνω εξίσωση εισάγεται ένας ακόμη όρος με αρνητικό πρόσημο διότι η δύναμη είναι θλιπτική. Συνεπώς καταλήγω στην εξής εξίσωση:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]d_y d_x +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]d_y d_x - N_{cr} b u_0 \tag{4.27}$$

Ο όρος αυτός προέκυψε από το γεγονός ότι η παραμόρφωση στην διεύθυνση της φόρτισης δίνεται από την εξίσωση: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$.

Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0}{a} \ \ \kappa\alpha\iota \ \int_0^{L_y}\int_0^{L_y} N_x \frac{\partial u}{\partial x} = N_{cr} * b * u_0 \qquad (4.28)$$

Αν στην Σχέση (4.8) θέσουμε m=n=1 τότε αυτόματα η εξίσωση που δίνει το βέλος w έχει έναν άγνωστο, τον όρο $A_{11} = w_{11}$, η εξίσωση που δίνει το βελος u έχει ως άγνωστο το u_0 , ενώ στη Σχέση (4.27) άγνωστο μέγεθος είναι η N_{cr}. Προκειμένου να προσδιοριστούν οι 3 άγνωστοι του προβλήματος γραμμικού λυγισμού χρειάζονται αντίστοιχα τρεις εξισώσεις:

1^{η} εξίσωση: $\frac{\partial V}{\partial u_o} = 0$

2^{η} εξίσωση: $\frac{\partial V}{\partial w_{11}} = 0$

3^{η} εξίσωση: $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial {u_O}^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u_o \, \partial w_{11}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial u_o \, \partial w_{11}} & \frac{\partial^2 V}{\partial {w_{11}}^2} \end{vmatrix} = 0$

Επιλύοντας το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους αντίστοιχα, προκύπτουν οι τιμές που αναζητούμε και συγκεκριμένα η τιμή του κρίσιμου φορτίου γραμμικού λυγισμού που μας απασχολεί σ’ αυτή τη φάση.

Όσα περιγράφηκαν παραπάνω χρησιμοποιούνται σαν δεδομένα στο πρόγραμμα Mathematica 5.1 (Σχήμα 4.4). Προκειμένου να γίνει επίλυση, αφού προγραμματίσουμε στο πρόγραμμα αυτό όλα τα δεδομένα και τις εξισώσεις, χρησιμοποιούμε την εντολή *Nsolve* και δίνουμε το σύστημα τριών αγνώστων με τρεις εξισώσεις. Με *Shift+ Enter* το πρόγραμμα επιλύει το πρόβλημα και δίνει τα αποτελέσματα. Μπροστά από κάθε δεδομένο χρησιμοποιεί το σύμβολο In[1]:= ενώ το αποτέλεσμα προκύπτει σε ένα κελί εξόδου με το χαρακτηριστικό Out[1]:=. Αφού ολοκληρωθεί η επίλυση από το πρόγραμμα αποθηκεύουμε το αρχείο. Από το μενού *File* και την εντολή *Save As* αντκαθιστούμε το όνομα Untitled-1 που ορίζει το πρόγραμμα και δίνουμε το όνομα που επιθυμούμε και την τοποθεσία όπου θα αποθηκευτεί. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει δοθεί το όνομα 1)1000-1000-10.nb*.

1)1000-1000-10.nb

```
ClearAll[a, b, t, E1, E2, G12, v12, A11, A22, A12,
 A66, D11, D22, D12, D66, ex, kx, ky, kxy, Nx, Mx,
 My, Mxy, Vb, V, Ncr, V1, V2, V12, V22, ORIZ, eq1,
 eq2, eq3, uo, w11]
a = 1000
b = 1000
t = 10
w[x, y] = w11 * Sin[Pi * x / a] * Sin[Pi * y / b]
u[x, y] = uo * x / a
E1 = 148 * (10 ^ 3)
E2 = 9.65 * (10 ^ 3)
G12 = 4.55 * (10 ^ 3)
v12 = 0.3
A11 = (E1 * t) / (1 - (v12^2 * E2 / E1))
A22 = (E2 * t) / (1 - (v12^2 * E2 / E1))
A12 = v12 * A22
A66 = G12 * t
D11 = (E1 * t^3) / (12 * (1 - (v12^2 * E2 / E1)))
D22 = (E2 * t^3) / (12 * (1 - (v12^2 * E2 / E1)))
D12 = v12 * D22
D66 = (G12 * t^3) / 12
ex = ∂x u[x, y] + (1 / 2) * (∂x w[x, y]) ^2
kx = -∂x,x w[x, y]
ky = -∂y,y w[x, y]
kxy = -2 ∂x,y w[x, y]
Nx = A11 * ex
Mx = D11 * kx + D12 * ky
My = D12 * kx + D22 * ky
Mxy = D66 * kxy
Vb = Nx * ex + Mx * kx + My * ky + Mxy * kxy
V = (1 / 2) * ∫_0^a ∫_0^b Vb dy dx - Ncr * b * uo
V1 = Expand[∂uo V]
V2 = Expand[∂w11 V]
V11 = Expand[∂uo V1]
V12 = Expand[∂w11 V1]
V22 = Expand[∂w11 V2]
ORIZ = Expand[V11 * V22 - V12 ^2]
eq1 = V1 == 0
eq2 = V2 == 0
eq3 = ORIZ == 0
NSolve[{eq1, eq2, eq3}, {Ncr, uo, w11}]
```

100%

Σχήμα 4.4: Δεδομένα που δίνονται στο πρόγραμμα Mathematica 5.1

1)1000-1000-10.nb *

Out[2]= 1000

Out[3]= 1000

Out[4]= 10

Out[5]= $\text{w11}\sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right)$

Out[6]= $\frac{\text{uo}\, x}{1000}$

Out[7]= 148000

Out[8]= $9650.$

Out[9]= $4550.$

Out[10]= 0.3

Out[11]= 1.48874×10^{6}

Out[12]= 97069.6

Out[13]= 29120.9

Out[14]= $45500.$

Out[15]= 1.24061×10^{7}

Out[16]= $808914.$

Out[17]= $242674.$

Out[18]= $379167.$

Out[19]= $\frac{\pi^2\,\text{w11}^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{1000}\right)}{2000000}+\frac{\text{uo}}{1000}$

Out[20]= $\frac{\pi^2\,\text{w11}\sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right)}{1000000}$

Out[21]= $\frac{\pi^2\,\text{w11}\sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right)}{1000000}$

Out[22]= $-\frac{\pi^2\,\text{w11}\cos\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{1000}\right)}{500000}$

Out[23]= $1.48874\times10^{6}\left(\frac{\pi^2\,\text{w11}^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{1000}\right)}{2000000}+\frac{\text{uo}}{1000}\right)$

Out[24]= $124.839\,\text{w11}\sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right)$

Out[25]= $10.3788\,\text{w11}\sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right)$

Out[26]= $-7.48445\,\text{w11}\cos\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{1000}\right)$

Out[27]=
$$0.000147737\,\text{w11}^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{1000}\right)+0.00133454\,\text{w11}^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{1000}\right)+1.48874\times10^{6}\left(\frac{\pi^2\,\text{w11}^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{1000}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{1000}\right)}{2000000}+\frac{\text{uo}}{1000}\right)^2$$

Out[28]=
$$\frac{1}{2}\left(1.48874\times10^{6}\,\text{uo}^2+3673.31\,\text{w11}^2\,\text{uo}+5.09823\,\text{w11}^2\left(\text{w11}^2+72.686\right)\right)-1000\,\text{Ncr}\,\text{uo}$$

Out[29]= $1836.65\,\text{w11}^2-1000\,\text{Ncr}+1.48874\times10^{6}\,\text{uo}$

Out[30]= $10.1965\,\text{w11}^3+3673.31\,\text{uo}\,\text{w11}+370.57\,\text{w11}$

Out[31]= 1.48874×10^{6}

Out[32]= $3673.31\,\text{w11}$

Out[33]= $30.5894\,\text{w11}^2+3673.31\,\text{uo}+370.57$

Out[34]= $3.20464\times10^{7}\,\text{w11}^2+5.46859\times10^{9}\,\text{uo}+5.51681\times10^{8}$

Out[35]= $1836.65\,\text{w11}^2-1000\,\text{Ncr}+1.48874\times10^{6}\,\text{uo}=0$

Out[36]= $10.1965\,\text{w11}^3+3673.31\,\text{uo}\,\text{w11}+370.57\,\text{w11}=0$

Out[37]= $3.20464\times10^{7}\,\text{w11}^2+5.46859\times10^{9}\,\text{uo}+5.51681\times10^{8}=0$

Out[38]= $\{\{\text{Ncr}\to-150.186,\ \text{uo}\to-0.100882,\ \text{w11}\to0.\},$
$\{\text{Ncr}\to-150.186,\ \text{uo}\to-0.100882,\ \text{w11}\to0.\},$
$\{\text{Ncr}\to-150.186,\ \text{uo}\to-0.100882,\ \text{w11}\to0.\}\}$

Σχήμα 4.5: Αποτελέσματα επίλυσης με το πρόγραμμα Mathematica 5.1

4.2.2 Πλάκες από χάλυβα χωρίς ενισχύσεις

Το μόνο πράγμα που διαφοροποιείται στην περίπτωση του προβλήματος γραμμικού λυγισμού σε πλάκες από χάλυβα είναι το γεγονός ότι ο χάλυβας είναι ένα ισότροπο υλικό με ίδιες ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις σε αντίθεση με τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά όπου οι ιδιότητες κάθε στρώσης είναι διαφορετικές σε διαφορετικές διευθύνσεις. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, το ίδιο αρχείο με πριν, καθώς οι εξισώσεις περιγραφής του φαινομένου δεν αλλάζουν, και δίνοντας τις ιδιότητες της χαλύβδινης πλάκας $E_1 = E_2 = 210GPa$, $G_{12} = 80.77GPa$ και $\nu_{12} = 0.30$ προκύπτει το κρίσιμο φορτίο της αντίστοιχης πλάκας με διαστάσεις 1000×1000mm και πάχος t=10mm, $N_{cr} = 759.2kN/m$.

4.2.3 Πλάκες από σύνθετα υλικά με ενισχύσεις επίσης από σύνθετα υλικά

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία μόρφωσης και ανάλυσης μέσω του προγράμματος Mathematica μιας τετραγωνικής πλάκας 1000×1000mm και πάχους t=10mm που φέρει μία ενδιάμεση ενίσχυση διαστάσεων 10×50mm. Χρησιμοποιήθηκε υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy και για την πλάκα και για την ενίσχυση. Κάθε στρώση της πλακας έχει πάχος t=1mm, δηλαδή, χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: $E_1 = 148GPa$, $E_2 = 9.65GPa$, $G_{12} = 4.55GPa$ και $\nu_{12} = 0.30$ ενώ όσον αφορά την ενίσχυση και αυτή έχει 10 στρώσεις του ίδιου υλικού με πάχος t=5mm η καθεμία για την πρώτη περίπτωση προσομοίωσης με το Nastran ή t=1mm για τον δεύτερο τρόπο που αυτού τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Αρχίζοντας, από το μενού File δίνουμε την εντολή New και έτσι ξεκινάει η εργασία σε ένα νέο αρχείο. Προτού ξεκινήσουμε την οποιαδήποτε ενέργεια καθαρίζουμε τη μνήμη του πυρήνα του προγράμματος χρησιμοποιώντας την εντολή Clear [“a”] από τις έως τώρα μεταβλητές που έχουν οριστεί, ώστε να μην χρησιμοποιηθεί στο νέο αρχείο δεδομένο από άλλο, υπάρχον, αρχείο.

Στην περίπτωση αυτή που εξετάζουμε, εκτός από τις διαστάσεις του στοιχείου (πλάκας) ορίζονται και οι διαστάσεις τις ενίσχυσης ως a_1 και b_1, όπου a_1 είναι το πάχος της ενίσχυσης και b_1 είναι το ύψος της. Από τη σχέση $I = \frac{a_1 {b_1}^3}{12}$ ή $I = \frac{a_1 {b_1}^3}{3}$ προσδιορίζεται η ροπή αδράνειας της ενίσχυσης ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα ή άξονα που διέρχεται από την άνω πλευρά. Προκειμένου να προσδιοριστεί η ακαμψία που προσφέρει η ενίσχυση στην κατασκευή αυτή (πλάκα με ενίσχυση) είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των ενεργών μέτρων ελαστικότητας. Μία διαστρωμάτωση συμπεριφέρεται σαν ένα νέο υλικό με καινούριες ιδιότητες και τα ενεργά μέτρα ελαστικότητας προσδιορίζονται ως ακολούθως:

$$ {E_1}^a = \frac{1}{a_{11} h} \qquad {E_2}^a = \frac{1}{a_{22} h} \qquad {G_{12}}^a = \frac{1}{a_{66} h} \tag{4.29} $$

Η έννοια του ενεργού μέτρου ελαστικότητας εμπεριέχει όλες τις πληροφορίες για το σύνθετο υλικό, όπως τις ιδιότητες των επιμέρους υλικών, τους λόγους συμμετοχής τους, καθώς και τον προσανατολισμό και τα πάχη κάθε στρώσεως.

Στην περίπτωση ύπαρξης της ενίσχυσης στο φορέα είναι αναγκαίο να οριστεί και ένα νέο μέγεθος, που θα χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλήματος του γραμμικού λυγισμού και αυτό είναι η καμπυλότητα της ενίσχυσης που δίνεται από τη σχέση:

$$k_{ενίσχυσης} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.30}$$

Το δυναμικό της ενίσχυσης δίνεται από τη σχέση:

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_0^a M\, k_{ενίσχυσης} dx = \frac{1}{2}\int_0^a (EI)_{ισοδύναμο}\, {k_{ενίσχυσης}}^2 dx \tag{4.31}$$

και συνεπώς στη σχέση (4.27) προστίθεται και ο όρος αυτός και συνολικά η ενέργεια του συστήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y}\right)^2 + 2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] d_y d_x + \frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] d_y d_x - N_{cr} b u_0 + \frac{1}{2}\int_0^a (EI)_{ισοδύναμο}\, {k_{ενίσχυσης}}^2 dx \tag{4.32}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να ειπωθεί ότι η καμπυλότητα της ενίσχυσης υπολογίζεται σε συγκεκριμένη θέση και μάλιστα στη θέση y=c, όπου ως c έχει οριστεί η απόσταση της ενίσχυσης από τον άξονα x (στην περίπτωση που η πλάκα που εξετάζουμε είναι 1000×1000mm και έχει μία ενδιάμεση ενίσχυση, τότε c=500mm). Για το λόγο αυτό, μιας και η θέση στη διεύθυνση y είναι συγκεκριμένη ο όρος που προστίθεται στην ενέργεια είναι ένα μονό ολοκλήρωμα πάνω στην πλευρά x (από 0 έως a).

4.2.4 Πλάκες από χάλυβα με ενισχύσεις επίσης από χάλυβα

Όπως και στην περίπτωση χάλυβα χωρίς ενισχύσεις η διαφοροποίηση από το σύνθετο υλικό έγκειται μόνο στο γεγονός ότι ο χάλυβας έχει ίδιες ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις. Διαφοροποιούνται, λοιπόν, οι ιδιότητες του υλικού $E_1 = E_2 = 210GPa$, $G_{12} = 80.77GPa$ και $\nu_{12} = 0.30$ ενώ δεν χρειάζεται ο υπολογισμός του όρου $(EI)_{ισοδύναμο}$ καθώς $(EI)_{ισοδύναμο} = EI$. Η υπόλοιπη διαδικασία προγραμματισμού με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica 5.1 είναι η ίδια με αυτή που περιγράφηκε παραπάνω.

4.2.5 Διαφοροποιήσεις στην περίπτωση ενός άκρου ελεύθερου

Στην περίπτωση που η πλάκα που εξετάζουμε δεν είναι απλά εδραζόμενη αλλά είναι τριέρειστη (η μία πλευρά είναι ελεύθερη) η μόνη τροποποίηση που πραγματοποιούμε στο Mathematica 5.1 είναι η αλλαγή της εξίσωσης που δίνει τη μετατόπιση κατά τον άξονα z, w. Στην περίπτωση μίας πλάκας με το ένα άκρο ελεύθερο, στην διεύθυνση x αυτή κυρτώνεται δημιουργώντας κύματα ημιτονοειδούς μορφής ενώ η κύρτωση στη διεύθυνση y είναι γραμμική. Η σχέση, λοιπόν, που περιγράφει την μετατόπιση αυτή είναι η ακόλουθη:

$$w = A_m y \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{4.33}$$

5 Επεξεργασία και ανάλυση των αποτελεσμάτων

5.1 Γενικά

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στόχος της μελέτης που έγινε στη διπλωματική αυτή εργασία είναι μέσω των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν για πλάκες από σύνθετα υλικά και από χάλυβα με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και πεπερασμένων στοιχείων να γίνει δυνατή αφενός η σύγκριση του κρίσιμου φορτίου μεταξύ ενός ισότροπου και ενός ορθότροπου υλικού και αφετέρου μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων ώστε να προσδιοριστεί ο βαθμός σύγκλισης τους.

Τα αποτελέσματα των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν διαφοροποιούνται ως προς τις διαστάσεις των φορέων (μήκος -πλάτος -πάχος) ενώ στην περίπτωση των σύνθετων υλικών και ως προς το υλικό της διαστρωμάτωσης, το πάχος κάθε στρώσης και τον προσανατολισμό των ινών. Επίσης, τη σύγκριση απλά εδραζόμενων πλακών χωρίς ενισχύσεις διαδέχεται η σύγκριση πλακών με ενισχύσεις (είτε μία είτε δύο) διαφορετικών διαστάσεων καθώς και πλακών με ένα άκρο ελεύθερο όπου είτε υπάρχουν είτε όχι ενισχύσεις. Το κρίσιμο φορτίο υπολογίστηκε με πεπερασμένα στοιχεία αλλά και αναλυτικά με τους τύπους που περιγράφουν το φαινόμενο του γραμμικού λυγισμού, ώστε να εξακριβωθεί η σωστή προσομοίωση των μοντέλων με πεπερασμένα στοιχεία.

5.2 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων χωρίς ενισχύσεις

5.2.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran

Από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού που πραγματοποιήθηκε με το Nastran προκύπτουν οι ιδιοτιμές του φορέα . Οι ιδιοτιμές είναι ουσιαστικά συντελεστές, οι οποίοι πολλαπλασιαζόμενοι με το φορτίο δίνουν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του φορέα όπως προκύπτει και από την ακόλουθη σχέση:

$$N_{cr,i} = \lambda_i \, P_{ολικό}$$

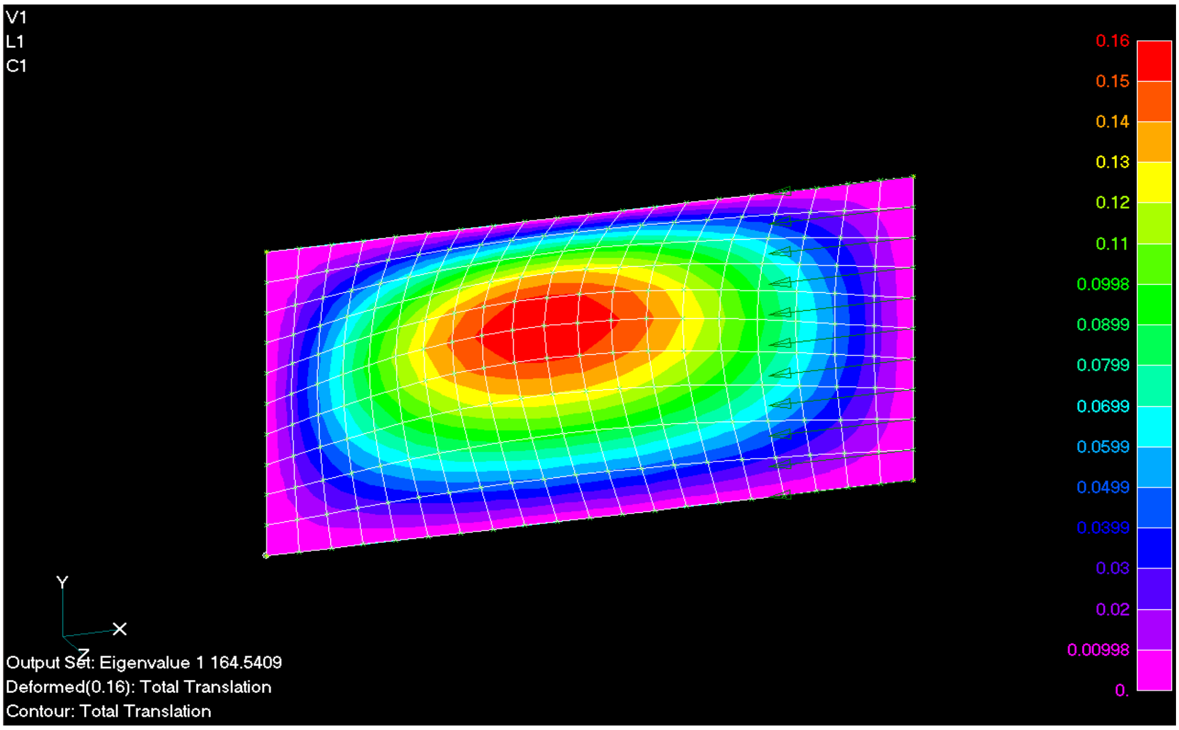
Συνήθως, ο μελετητής ενδιαφέρεται μόνο για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αφού ο φορέας θα αστοχήσει προτού φθάσει στη στάθμη των μεγαλύτερων φορτίων λυγισμού. Παρόλα αυτά στις αναλύσεις που έγιναν ζητήθηκε από το Nastran ο υπολογισμός των τριών πρώτων ιδιοτιμών κάθε φορά και από αυτές η μικρότερη αποτελούσε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού N_{cr}.

Στο υποκεφάλαιο αυτό εξετάζονται φορείς από σύνθετα υλικά διαστάσεων 1000×1000mm, 1000×500mm, 500×1000mm 700×400mm και 400×700mm. Το πάχος των φορέων είναι t=10mm, t=6mm, t=5mm και t=2mm. Ο χάλυβας που χρησιμοποιείται είναι S355 αλλά η ποιότητα του δεν επηρεάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού παρά μόνο οι ιδιότητες του. Ως σύνθετα υλικά χρησιμοποιήθηκαν Graphite/Epoxy με ιδιότητες E_1=148GPa, E_2=9.65GPa , G_{12}=4.55GPa και ν_{12}=0.30 και E-glass/ Epoxy με ιδιότητες E_1=50GPa, E_2=12GPa , G_{12}=7GPa και ν_{12}=0.25. Όσον αφορά στη διαστρωμάτωση έγιναν πολύ περισσότερα παραδείγματα με όλες τις στρώσεις υπό γωνία 0 ως προς τον άξονα x (άξονας φόρτισης). Γενικά, όμως, σαν κώδικες διαστρωματώσεων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι: $[0_{10}]$, $[\pm 45_2\,/0_{12}\,/\pm 45_2\,]$, $[\pm 45_5\,/0_{10}]$ και $[(0_2\,/90)_2]_s$. Στην περίπτωση του κώδικα $[0_{10}]$ επειδή το πάχος ήταν t=10mm, t=5mm και t=2mm χρησιμοποιήθηκαν 10 στρώσεις σε όλες τις περιπτώσεις με αντίστοιχα πάχη στρώσεων t=1mm, t=0.5mm και t=0.2mm. Χρησιμοποιώντας ως κώδικα διαστρωμάτωσης $[\pm 45_2\,/\,0_{12}\,/\pm 45_2\,]$ και $[\pm 45_5\,/0_{10}]$ στρώσεις με προσανατολισμό ινών ±45 είχαν πάχος t=0.2mm ενώ στρώσεις με ίνες οριζόντιες t=0.1mm. Και στις δύο περιπτώσεις το συνολικό πάχος της διαστρωμάτωσης ήταν t=2mm. Τέλος, στη διαστρωμάτωση με κώδικα $[(0_2\,/\,90)_2]_s$ όλες οι στρώσεις είχαν το ίδιο πάχος t=0.5mm ενώ το συνολικό πάχος ήταν t=6mm.

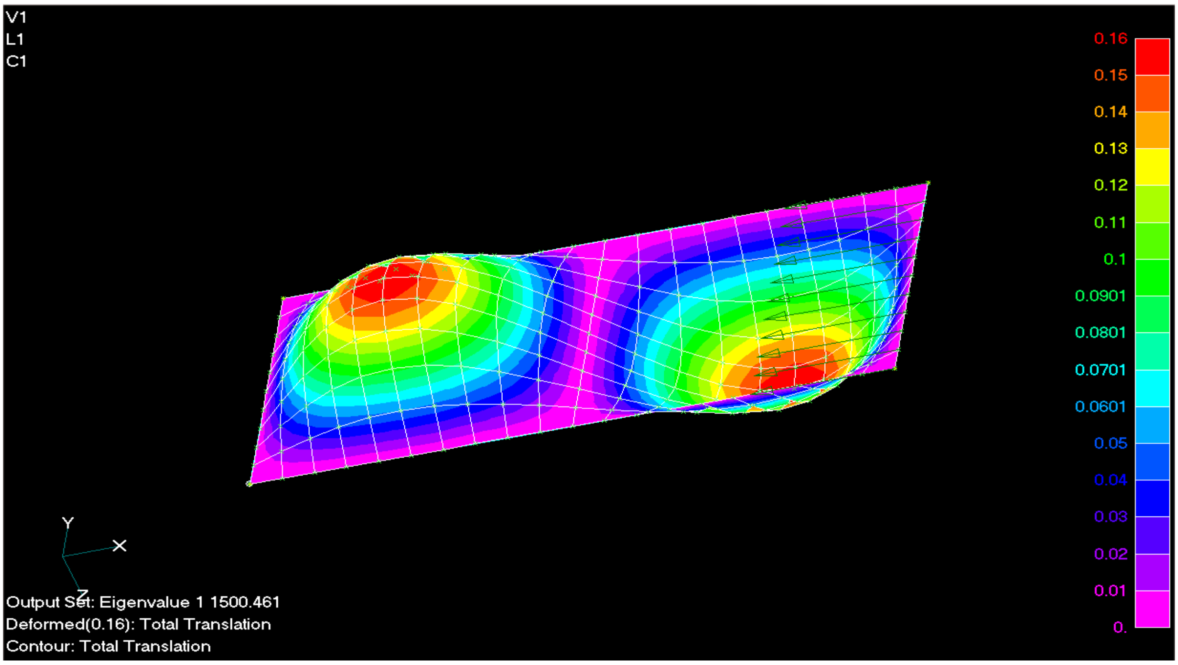
Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι όλοι οι φορείς έχουν φορτιστεί με μοναδιαίο φορτίο 1kN συγεντρωμένο στους κόμβους. Στην περίπτωση που η πλευρά b=1000mm αυτό ισοδυναμεί με κατανεμημένο φορτίο 1kN/m. Όταν όμως η πλευρά b έχει διαφορετική διάσταση προκειμένου να υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο διαιρούμε το φορτίο που προκύπτει από την επίλυση με το πρόγραμμα Nastran με το μέγεθος b.

Στη συνέχεια παρατίθενται μερικά παραδείγματα φορέων που αναλύθηκαν. Συγκεκριμένα, παρατίθενται οι φορείς με σύνθετα υλικά σε αντιπαράθεση με φορείς από χάλυβα ενώ συγκεντρωτικά έχουμε όλα τα αποτελέσματα των αναλύσεων στο τέλος του υποκεφαλαίου αυτού υπό μορφή πινάκων και διαγραμμάτων.

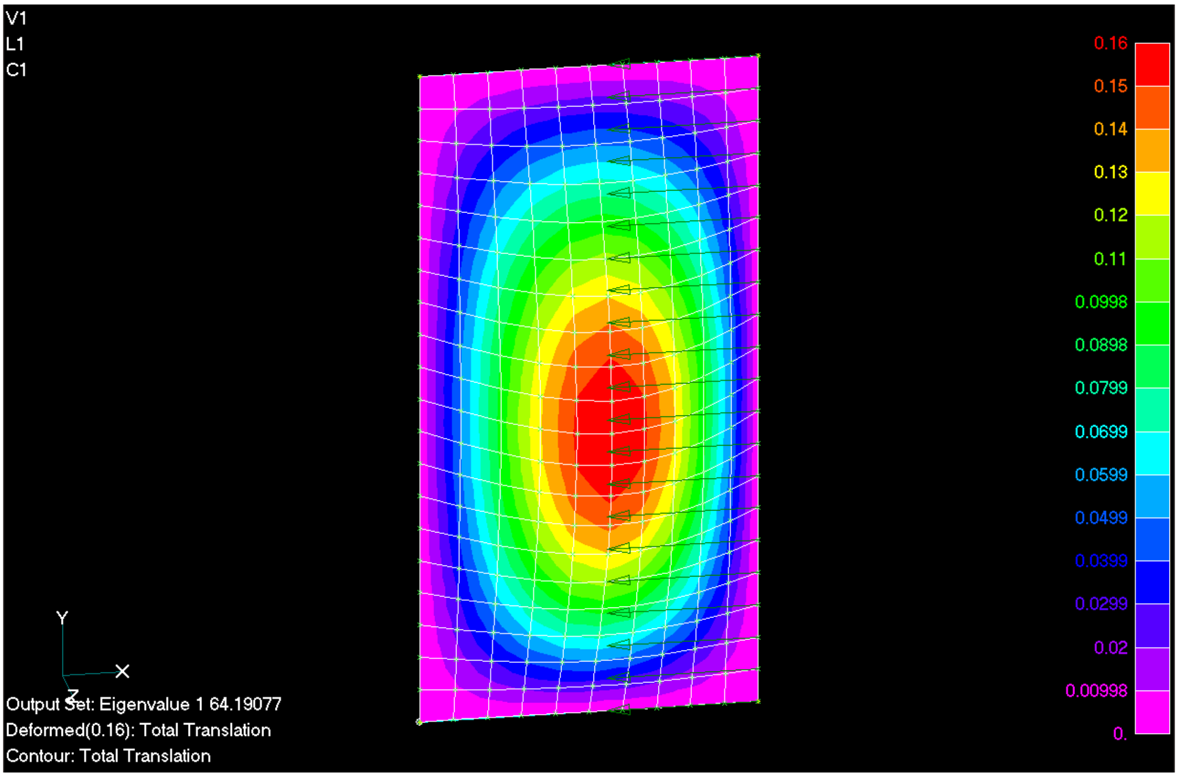
5.2.1.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ -Χάλυβας



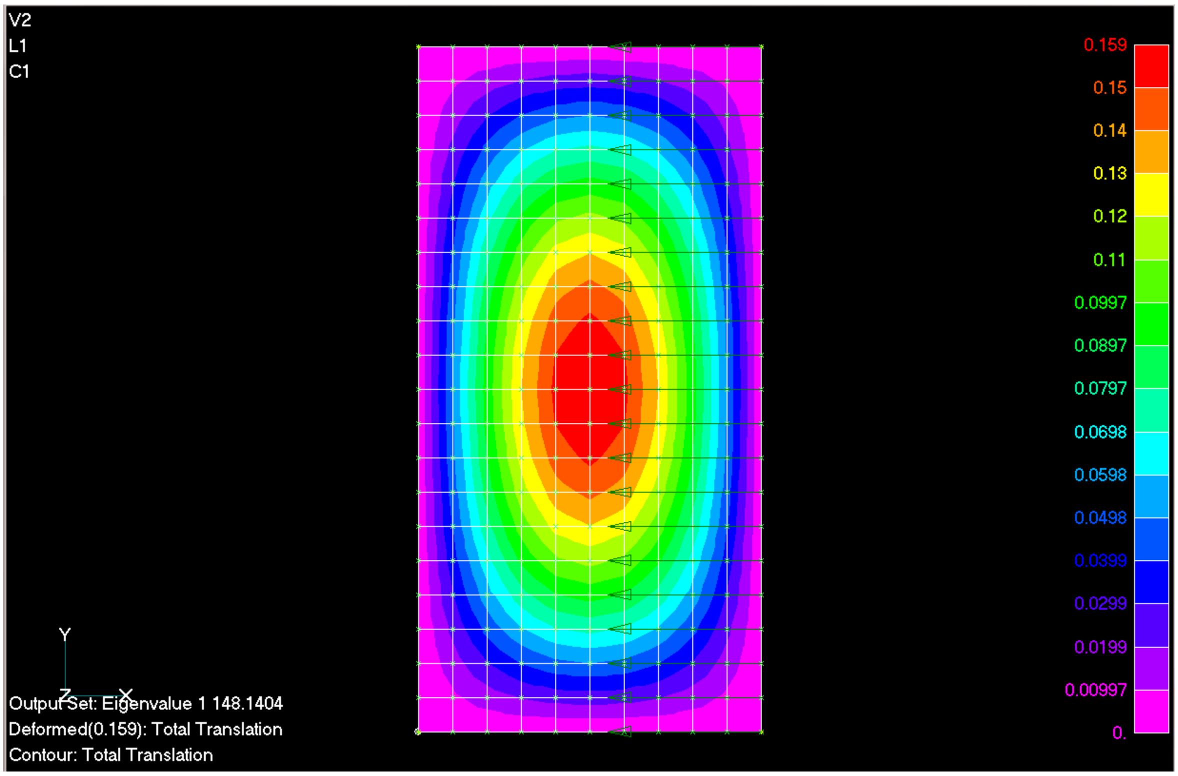
Σχήμα 5.1: Πλάκα 1000×500×10mm από σύνθετο υλικό με κρίσιμο φορτίο 164.54/0.5=329.08kN/m



Σχήμα 5.2: Πλάκα 1000×500×10mm από χάλυβα με κρίσιμο φορτίο 1500.46/0.5=3000.92kN/m

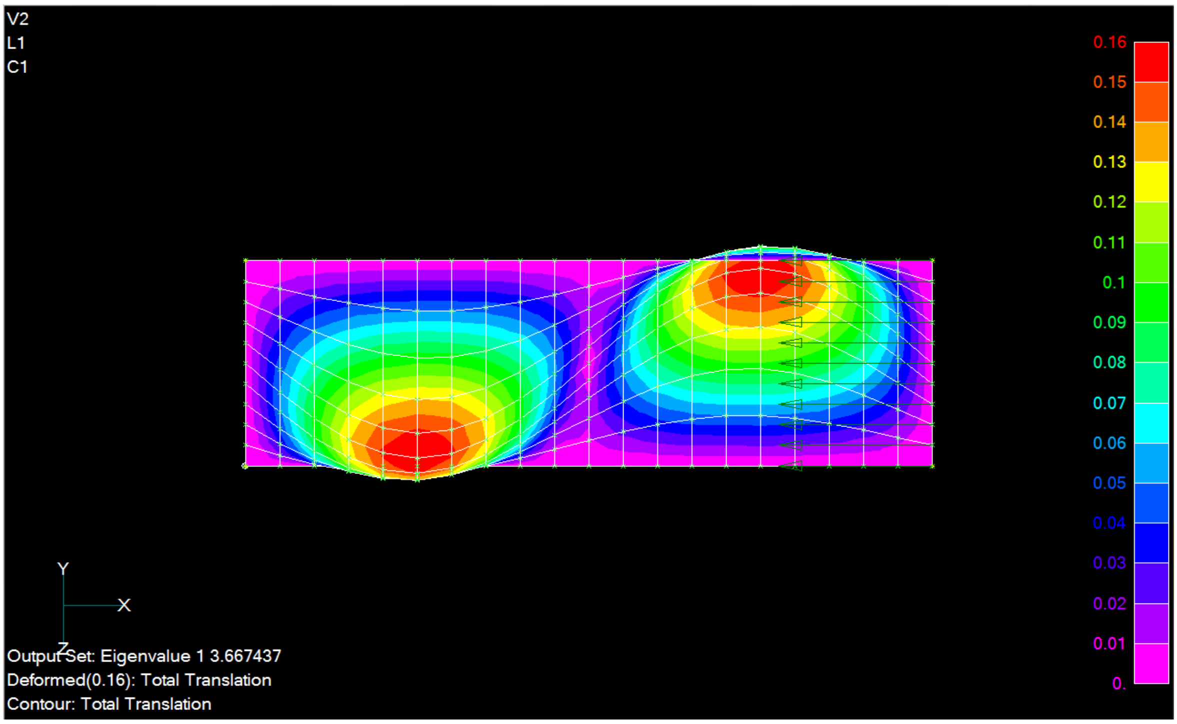


Σχήμα 5.3: Πλάκα 500×1000×5mm από σύνθετο υλικό με κρίσιμο φορτίο 64.19kN/m

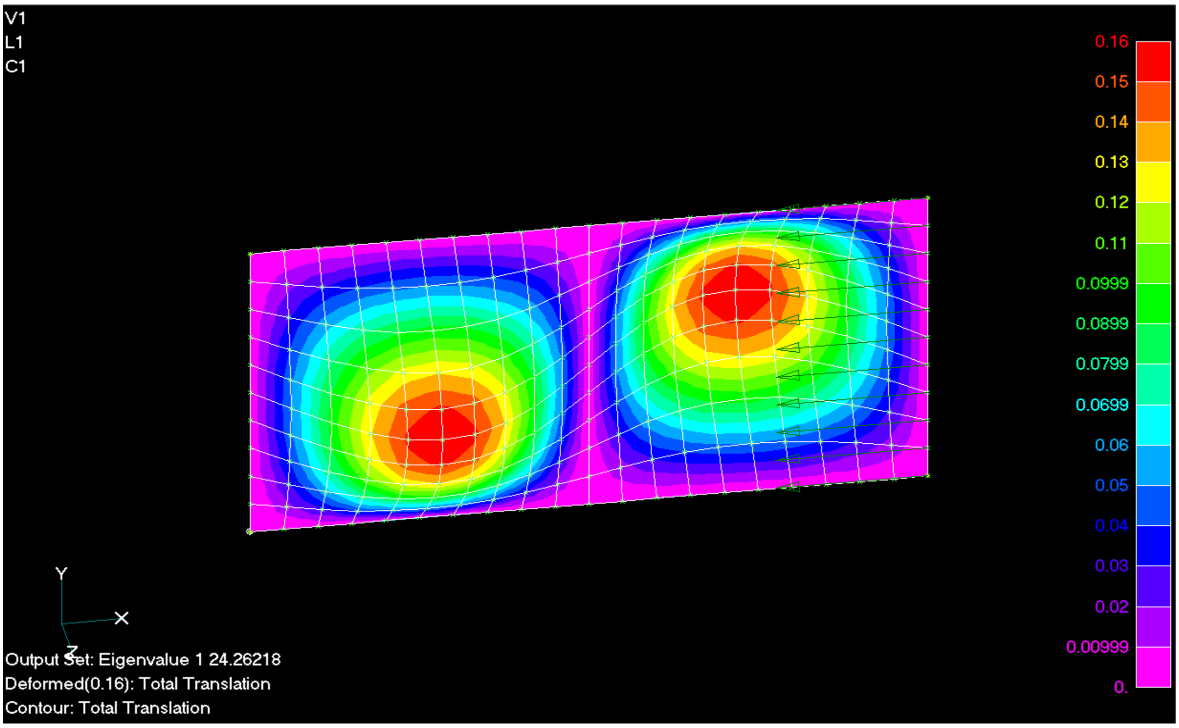


Σχήμα 5.4: Πλάκα 500×1000×5mm από χάλυβα με κρίσιμο φορτίο 148.14kN/m

5.2.1.2 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_2 / 0_{12} / \pm 45_2]$ - Χάλυβας

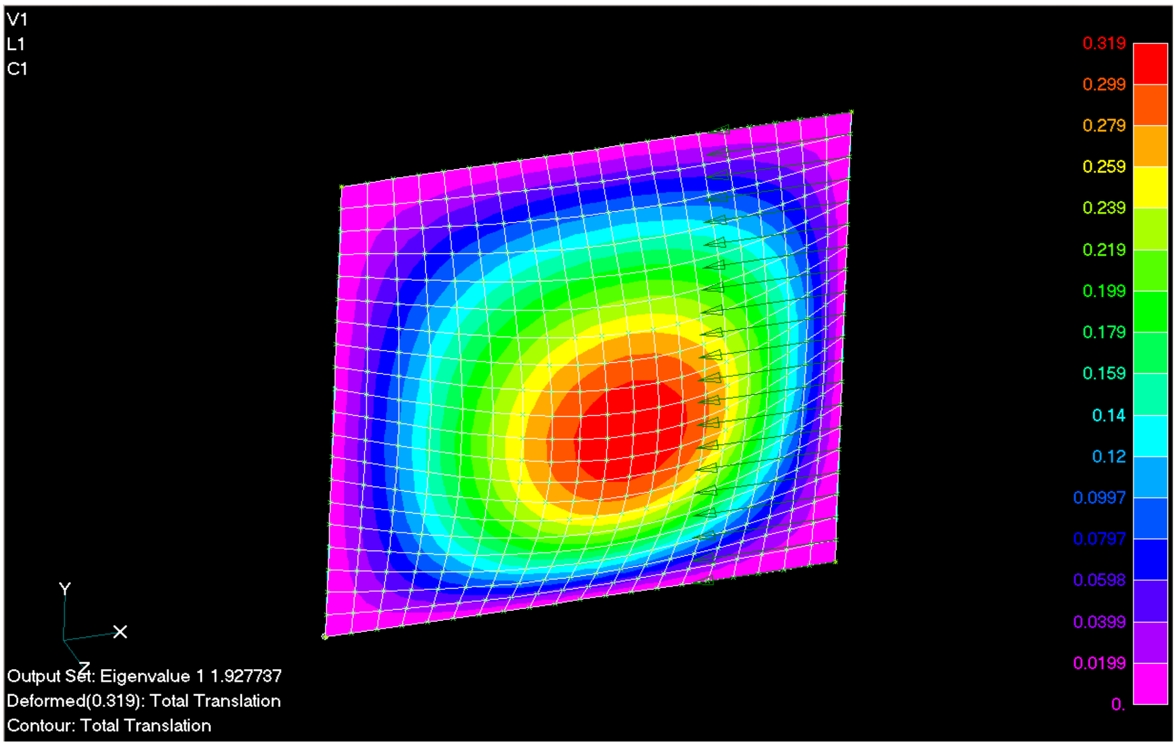


Σχήμα 5.5: Πλάκα 1000×500×2mm από σύνθετο υλικό με κρίσιμο φορτίο 3.667/0.5=7.34 kN/m

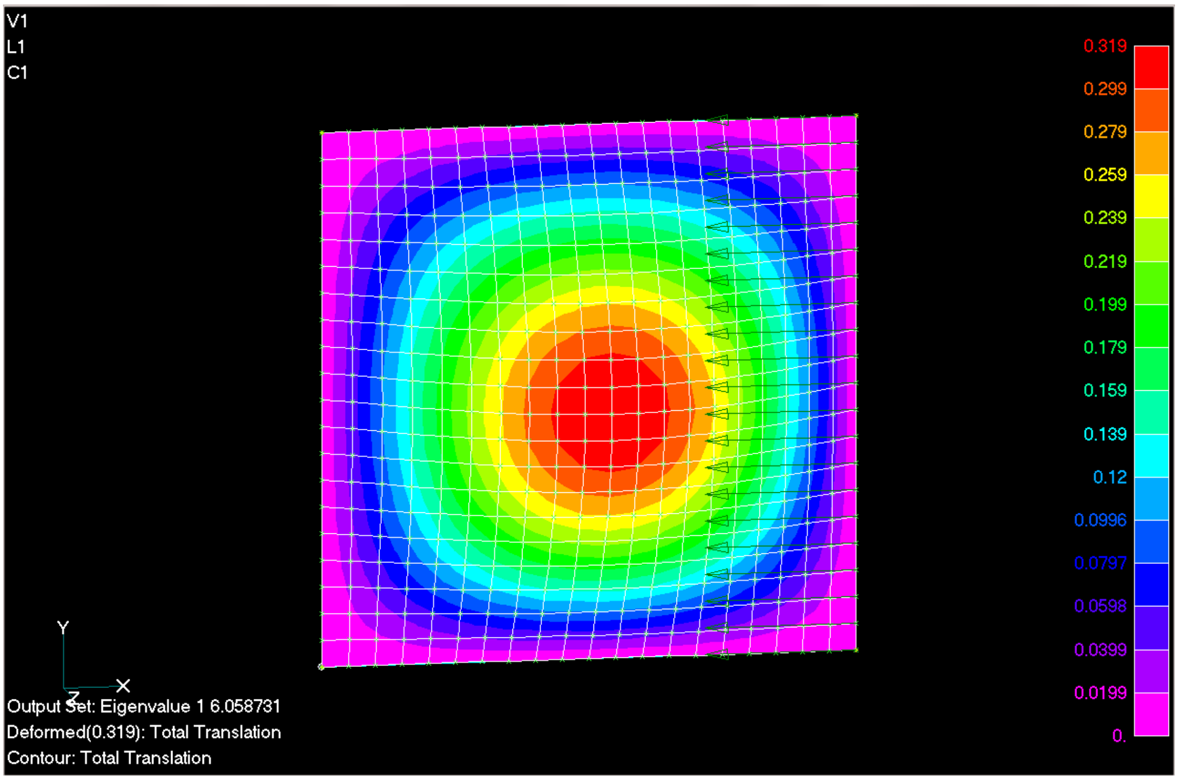


Σχήμα 5.6: Πλάκα 1000×500×2mm από χάλυβα με κρίσιμο φορτίο 24.26/0.5=48.52 kN/m

5.2.1.3 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_5\ /0_{10}]$ -Χάλυβας

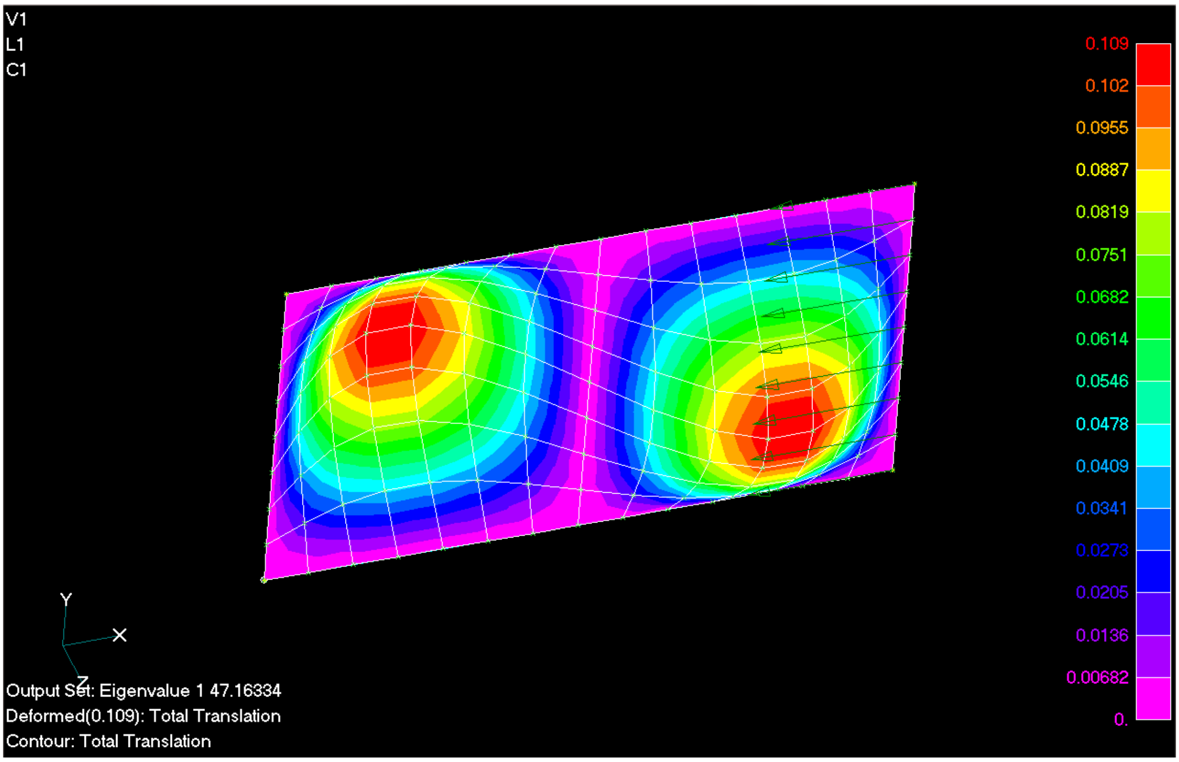


Σχήμα 5.7: Πλάκα 1000×1000×2mm από σύνθετο υλικό με κρίσιμο φορτίο 1.927/1=1.927 kN/m

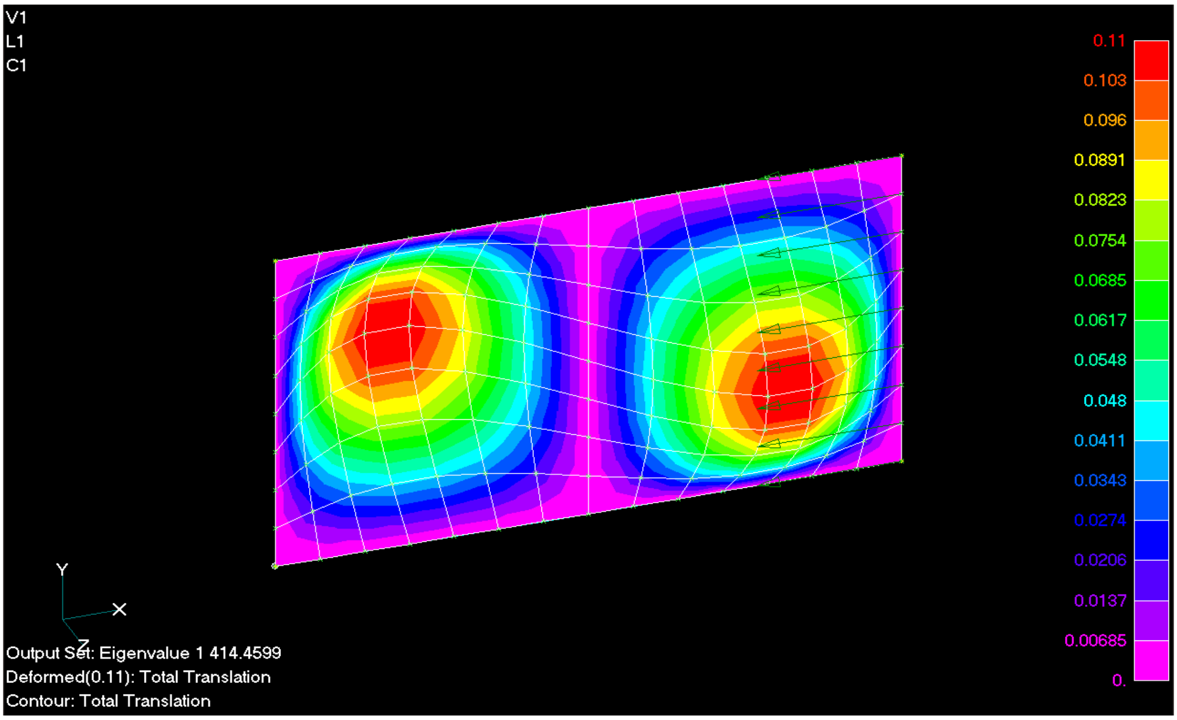


Σχήμα 5.8: Πλάκα 1000×1000×2mm από χάλυβα με κρίσιμο φορτίο 6.07/1=6.07 kN/m

5.2.1.4 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.9: Πλάκα 700×400×6mm από σύνθετο υλικό με κρίσιμο φορτίο 47.16/0.4=117.90 kN/m



Σχήμα 5.10: Πλάκα 700×400×6mm από χάλυβα με κρίσιμο φορτίο 414.46/0.4=1036.15 kN/m

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και πλακών από χάλυβα (Πίνακας 5.1).

Πίνακας 5.1: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Nastran

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1000	1000	10	149.70	753.92
		1000	500	10	329.08	3000.92
		500	1000	10	508.36	1180.39
		1000	1000	5	18.77	94.53
		1000	500	5	41.30	377.78
		500	1000	5	64.19	148.14
		700	400	2	4.25	39.35
		400	700	2	6.56	16.71
	$[\pm 45_2 / 0_{12} / \pm 45_2]$	1000	1000	2	1.85	6.05
		1000	500	2	7.34	48.52
		500	1000	2	3.00	9.50
		700	400	2	11.93	39.35
		400	700	2	5.30	16.71
	$[\pm 45_5/0_{10}]$	1000	1000	2	1.63	6.05
		1000	500	2	7.04	48.52
		500	1000	2	3.27	9.50
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1000	1000	6	17.20	163.26
		500	1000	6	38.95	255.80
		700	400	6	117.9	1036.15

5.2.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1

Ο τρόπος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου πλακών με το πρόγραμμα Mathematica έχει περιγραφεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4. Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων αντιπαραθέτοντας και εδώ τις τιμές του κρίσιμου φορτίου ανάμεσα σε χάλυβα και σύνθετο υλικό.

Πίνακας 5.2: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Mathematica

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1000	1000	10	150.19	759.20
		1000	500	10	329.20	3036.81
		500	1000	10	511.50	1186.25
		1000	1000	5	18.77	94.90
		1000	500	5	41.15	379.60
		500	1000	5	63.94	148.30
		700	400	2	4.21	38.64
		400	700	2	6.48	16.70
	$[\pm 45_2/0_{12}/\pm 45_2]$	1000	1000	2	1.90	6.07
		1000	500	2	7.58	48.52
		500	1000	2	3.05	9.49
		700	400	2	12.34	38.64
		400	700	2	5.41	16.71
	$[\pm 45_5/0_{10}]$	1000	1000	2	1.64	6.07
		1000	500	2	6.58	48.52
		500	1000	2	3.43	9.49
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1000	1000	6	17.24	163.99
		500	1000	6	38.15	256.23
		700	400	6	117.75	1043.31

5.2.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων

Προκειμένου να είναι ευκολότερη η γενική εποπτεία των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων ανάλυσης του προβλήματος κύρτωσης πλακών, παρατίθενται σε κοινούς πίνακες για χάλυβα (Πίνακας 5.3) και σύνθετα υλικά (Πίνακας 5.4) οι υπολογισμοί του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Πίνακας 5.3: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου σε πλάκες από σύνθετα υλικά ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

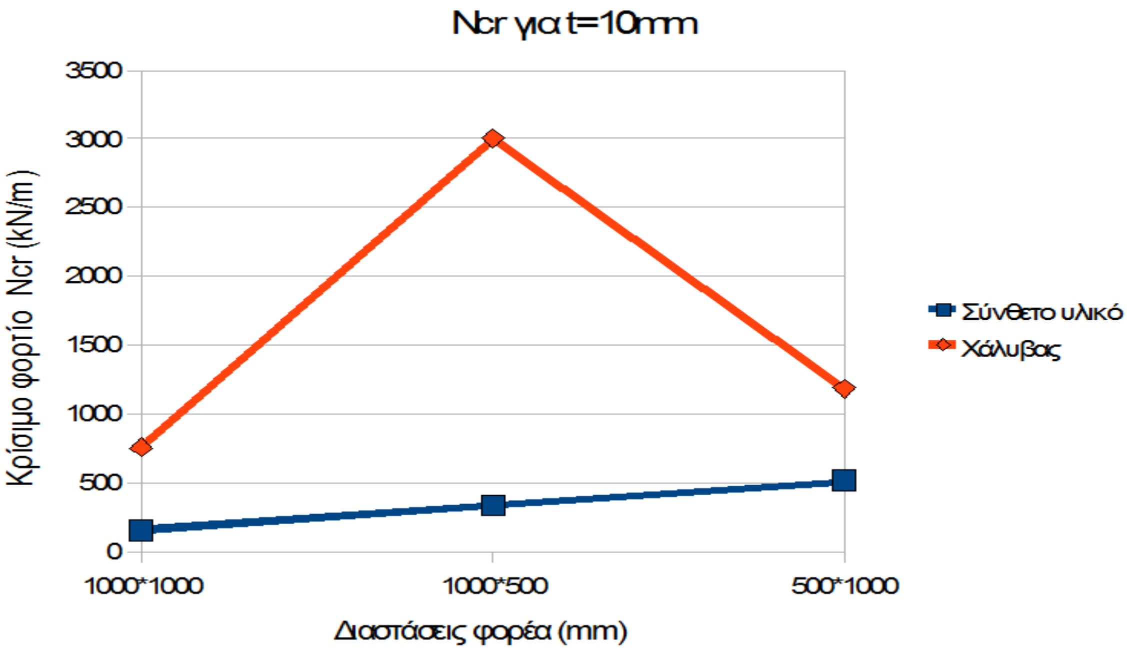
Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} σύνθετου (kN/m)	Mathematica N_{cr} σύνθετου (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1000	1000	10	149.70	150.19
		1000	500	10	329.08	329.20
		500	1000	10	508.36	511.50
		1000	1000	5	18.77	18.77
		1000	500	5	41.30	41.15
		500	1000	5	64.19	63.94
		700	400	2	4.25	4.21
		400	700	2	6.56	6.48
	$[\pm45_2 /0_{12} / \pm45_2]$	1000	1000	2	1.85	1.90
		1000	500	2	7.34	7.58
		500	1000	2	3.00	3.05
		700	400	2	11.93	12.34
		400	700	2	5.30	5.41
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1000	1000	2	1.63	1.64
		1000	500	2	7.04	6.58
		500	1000	2	3.27	3.43
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1000	1000	6	17.20	17.24
		500	1000	6	38.95	38.15
		700	400	6	117.9	117.75

Πίνακας 5.4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου σε πλάκες από χάλυβα ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

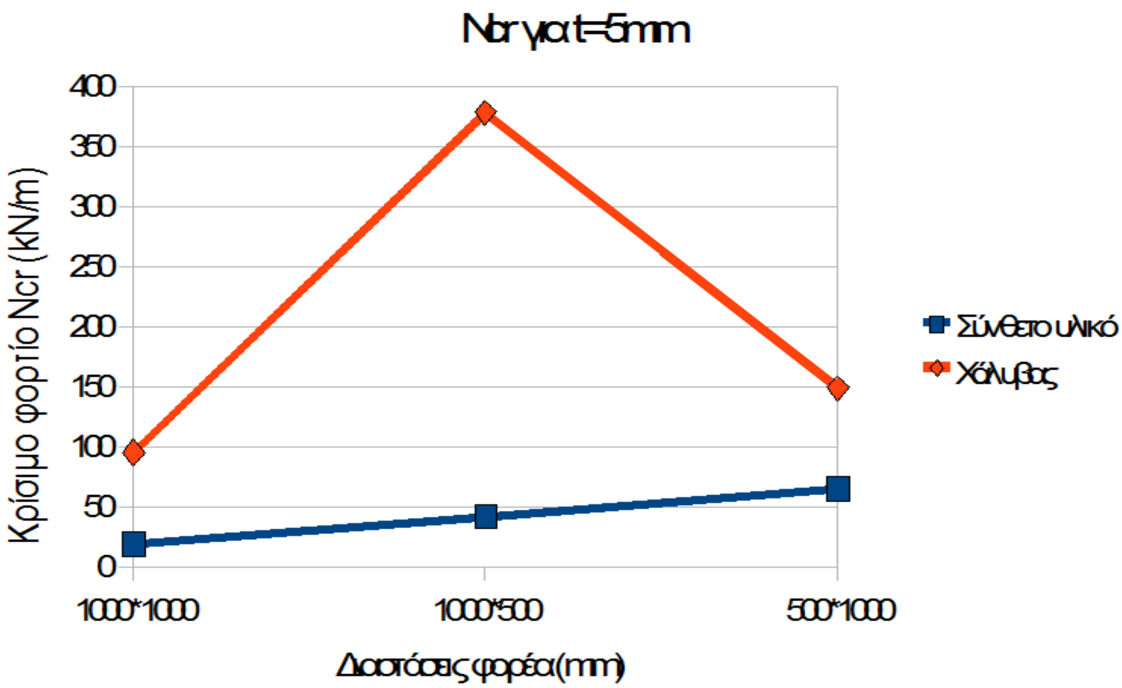
Υλικό	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} χάλυβα (kN/m)	Mathematica N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Χάλυβας	1000	1000	10	753.92	759.20
	1000	500	10	3000.92	3036.81
	500	1000	10	1180.39	1186.25
	1000	1000	5	94.53	94.90
	1000	500	5	377.78	379.60
	500	1000	5	148.14	148.30
	700	400	2	39.35	38.64
	400	700	2	16.71	16.70
	1000	1000	2	6.05	6.07
	1000	500	2	48.52	48.52
	500	1000	2	9.50	9.49
	700	400	2	39.35	38.64
	400	700	2	16.71	16.71
	1000	1000	2	6.05	6.07
	1000	500	2	48.52	48.52
	500	1000	2	9.50	9.49
	1000	1000	6	163.26	163.99
	500	1000	6	255.80	256.23
	700	400	6	1036.15	1043.31

5.2.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα μέσω διαγραμμάτων

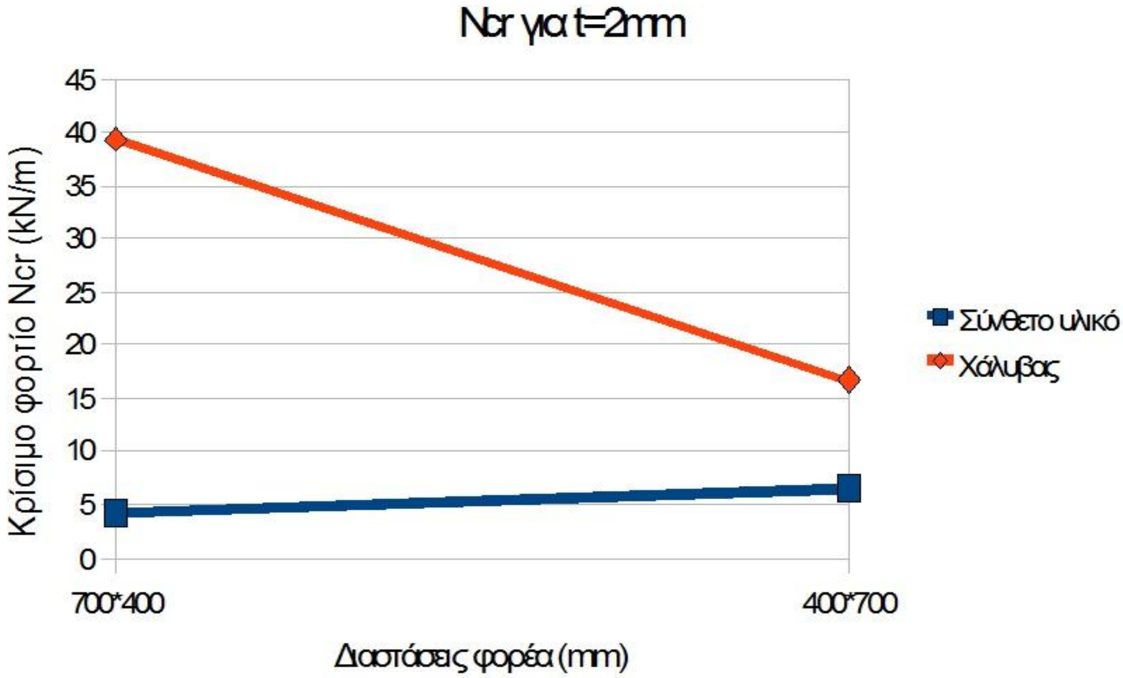
5.2.4.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ –Χάλυβας



Σχήμα 5.11: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=10mm

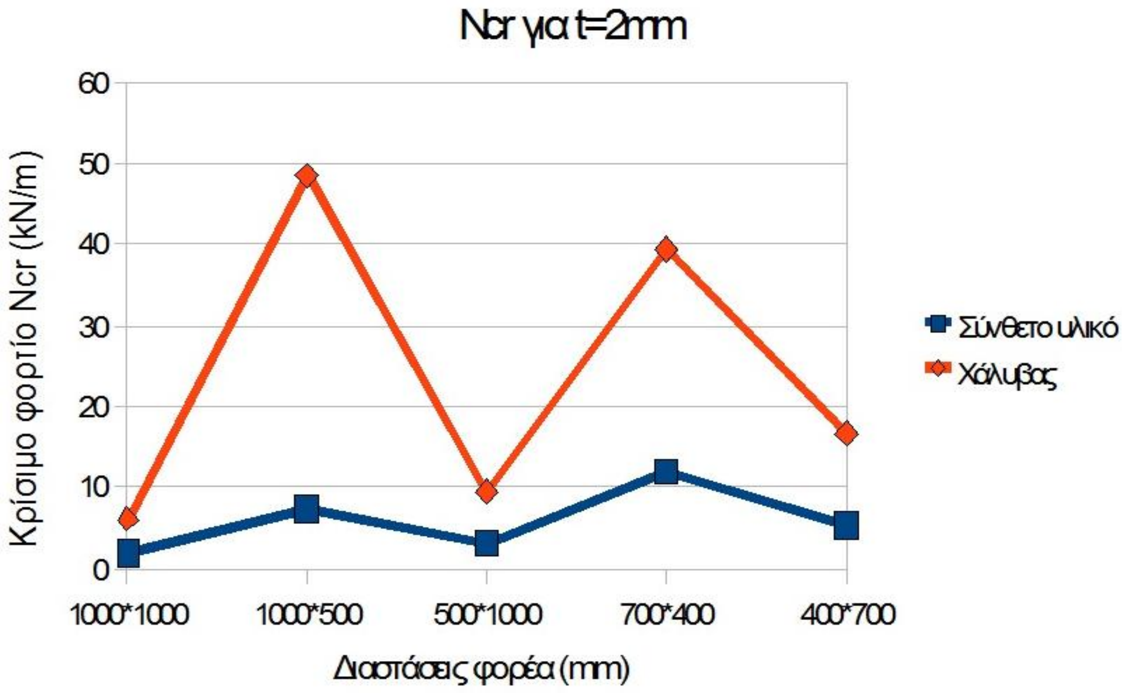


Σχήμα 5.12: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=5mm



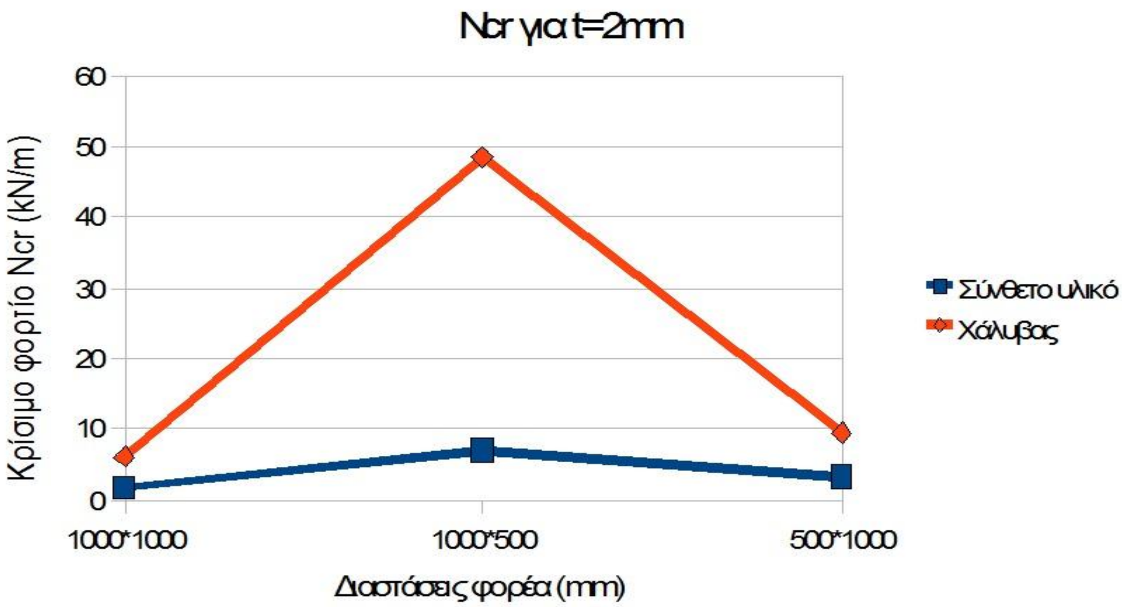
Σχήμα 5.13: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.2.4.2 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_2\ /0_{12}\ /\ \pm 45_2\ ]$ - Χάλυβας



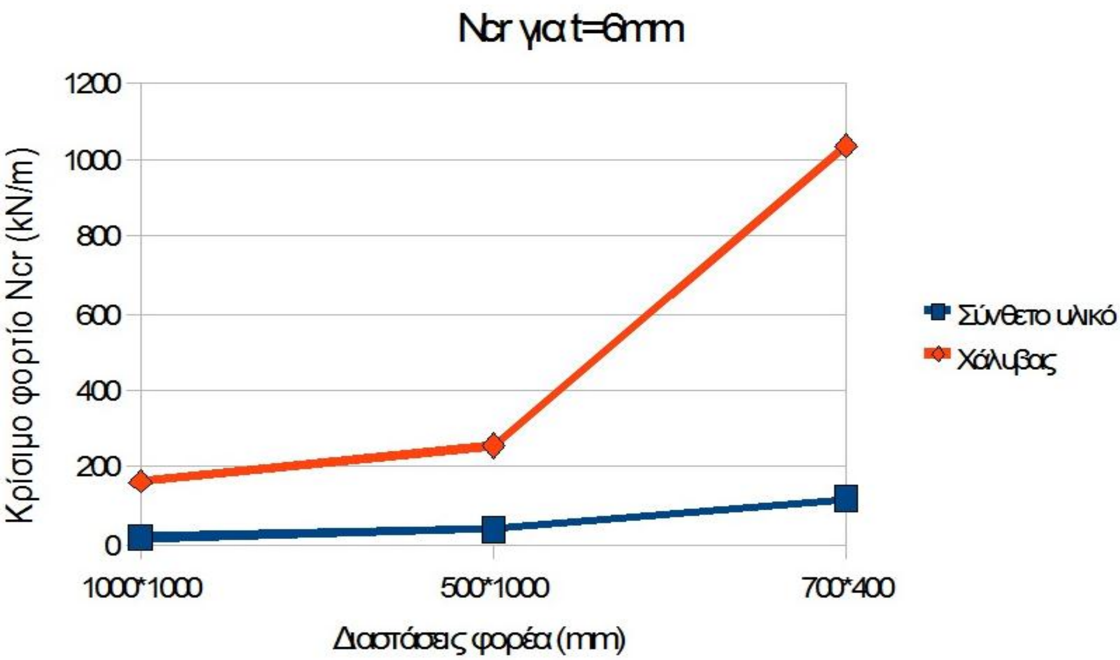
Σχήμα 5.14: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.2.4.3 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm45_5 \,/0_{10}\ ]$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.15: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.2.4.4 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα $[(0_2\,/90)_2]_{\,s}$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.16: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=6mm

Από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να εξάγουμε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα:

1. Παρατηρείται ότι για έναν αριθμό πλακών, που έχει αναλυθεί, τα αποτελέματα μεταξύ των δύο προγραμμάτων παρουσιάζουν σύγκλιση. Πιο συγκεκριμένα, η απόκλιση δεν είναι σε καμία περίπτωση πάνω από 4% σε πλάκες από σύνθετα υλικά και πάνω από 1% σε πλάκες από χάλυβα.
2. Το κρίσμο φορτίο στην περίπτωση των πολύστρωτων σύνθετων υλικών εξαρτάται όχι μόνο από τις διαστάσεις του στοιχείου αλλά και σε πολύ μεγάλο βαθμό από τον προσανατολισμό των ινών όπως και αποδεικνύεται από τις παραπάνω αναλύσεις. Πλάκες με ίδιες διαστάσεις και διαφορετικό προσανατολισμό των στρώσεων παρουσίασαν έως και 2 φορές μεγαλύτερο φορτίο. Γι΄αυτό ο εκάστοτε μελετητής οφειλεί με βάση τις διαστάσεις του στοιχείου να μεριμνήσει και για τον προσανατολισμό των ινών ώστε να έχει την καλύτερη δυνατή τιμή του κρίσιμου φορτίου κύρτωσης.
3. Συγκρίνοντας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετα υλικά για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι οι χαλύβδινες απλά εδραζόμενες πλάκες έχουν πολύ μεγαλύτερο φορτίο από τις ιδίων διαστάσεων από σύνθετα υλικά. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι οι χαλύβδινες πλάκες παρουσιάζουν από 2 φορές μεγαλύτερο έως ακόμα και 10 φορές μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο από τις ιδίων διαστάσεων αλλά από σύνθετα υλικά ανάλογα με τις διαστάσεις (μήκος –πλάτος –πάχος). Ιδιαίτερο ρόλο παίζει ο λόγος των πλευρών όπως αποδεικνύεται και από τα παραπάνω διαγράμμτα.
4. Στις πιο συνήθεις περιπτώσεις πλάκες από χάλυβα και σύνθετα υλικά παραμορφώνονταν εμφανίζοντας ίδια μορφή στην πρώτη ιδιομορφή. Υπήρξαν, όμως, παραδείγματα στη μελέτη που έγινε, που ενώ οι πλάκες είχαν ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις, η πρώτη ιδιομορφή τους εμφάνιζε διαφορετικό αριθμό ημικυμάτων σε κάποια διεύθυνση. Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές ιδιότητες που έχουν τα υλικά στις δύο διευθύνσεις στο επίπεδο.

5.3 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων με ενισχύσεις

5.3.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran

Όπως αναφέρθηκε και στο υποκεφάλαιο 5.2.1, από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού που πραγματοποιήθηκε με το Nastran προκύπτουν οι ιδιοτιμές του φορέα . Οι ιδιοτιμές είναι ουσιαστικά συντελεστές, οι οποίοι πολλαπλασιαζόμενοι με το φορτίο δίνουν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του φορέα όπως προκύπτει και από την ακόλουθη σχέση:

$$N_{cr,i} = \lambda_i \, P_{ολικό}$$

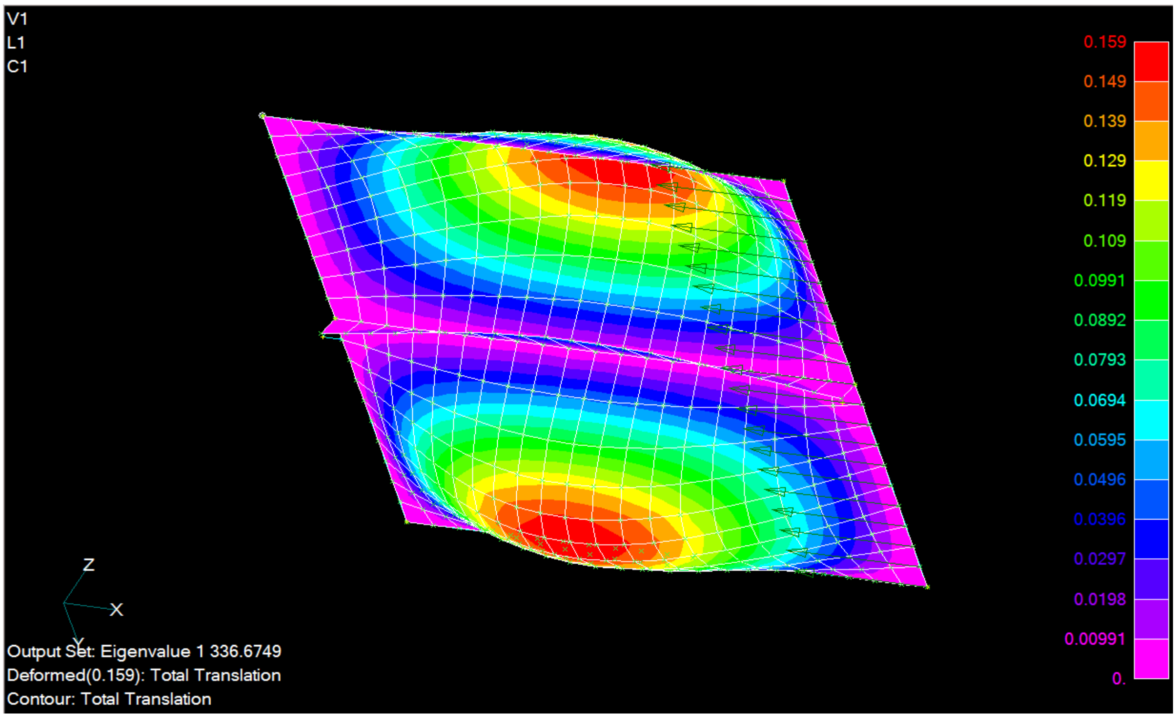
Συνήθως, ο μελετητής ενδιαφέρεται μόνο για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αφού ο φορέας θα αστοχήσει προτού φθάσει στη στάθμη των μεγαλύτερων φορτίων λυγισμού. Παρόλα αυτά στις αναλύσεις που έγιναν ζητήθηκε από το Nastran ο υπολογισμός των τριών πρώτων ιδιοτιμών κάθε φορά και από αυτές η μικρότερη αποτελόυσε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού N_{cr}.

Στο υποκεφάλαιο αυτό εξετάζονται φορείς από σύνθετα υλικά διαστάσεων 1000×1000mm, 1000×500mm, 500×1000mm 700×400mm και 400×700mm που όμως φέρουν ενδιάμεσες ενισχύσεις. Το πάχος των φορέων είναι t=10mm, t=6mm, t=5mm και t=2mm. Χρησιμοποιήθηκαν ενισχύσεις διαστάσεων 5×25mm και 10×50mm. Ο χάλυβας που χρησιμοποιείται είναι S355 αλλά η ποιότητα του δεν επηρεάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού παρά μόνο οι ιδιότητες του. Ως σύνθετα υλικά χρησιμοποιήθηκαν Graphite/Epoxy και E-glass/ Epoxy. Όσον αφορά στη διαστρωμάτωση έγιναν πολύ περισσότερα παραδείγματα με όλες τις στρώσεις υπό γωνία 0 ως προς τον άξονα x (άξονας φόρτισης). Γενικά, όμως, σαν κώδικες διαστρωματώσεων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι: $[0_{10}]$, $[\pm 45_2 \,/ 0_{10} \,/ \pm 45_2\,]$, $[\pm 45_5 \,/ 0_{10}]$ και $[(0_2 \,/ 90)_2]_{\,s}$. Τονίζεται ότι στην περίπτωση ενισχύσεων σε σύνθετα υλικά η διαστρωμάτωση των ενισχύσεων ακολουθεί τον ίδιο κώδικα με την υπόλοιπη επιφάνεια.

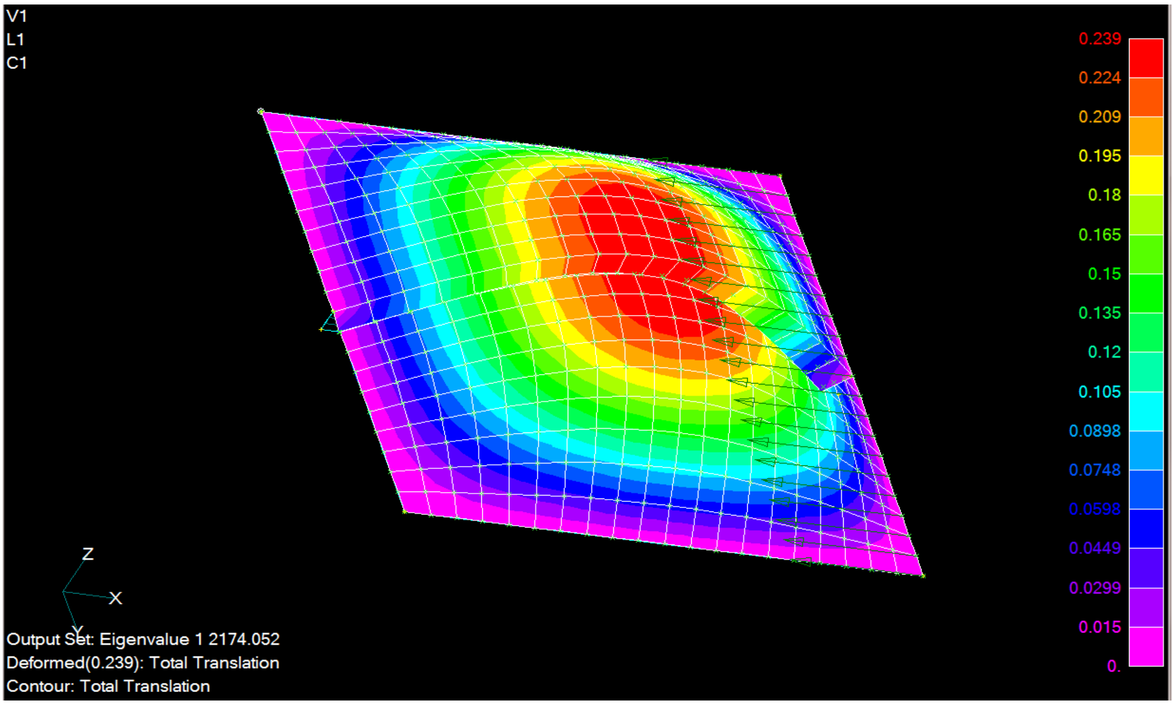
Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι και στην περίπτωση ύπαρξης ενισχύσεων όλοι οι φορείς έχουν φορτιστεί με μοναδιαίο φορτίο 1kN συγεντρωμένο στους κόμβους. Στην περίπτωση που η πλευρά b=1000mm αυτό ισοδυναμεί με κατανεμημένο φορτίο 1kN/m. Όταν όμως η πλευρά b έχει διαφορετική διάσταση προκειμένου να υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο διαιρούμε το φορτίο που προκύπτει από την επίλυση με το πρόγραμμα Nastran με το μέγεθος b.

Στη συνέχεια παρατίθενται μερικά παραδείγματα φορέων που αναλύθηκαν. Συγκεκριμένα παρατίθενται οι φορείς με σύνθετα υλικά με ενίσχυση σε αντιπαράθεση με τους αντίστοιχους φορείς από χάλυβα ενώ συγκεντρωτικά έχουμε όλα τα αποτελέσματα των αναλύσεων στο τέλος του υποκεφαλαίου αυτού σε μορφή πινάκων καθώς και διαγραμμάτων όπου συγκρίνονται μεταξύ τους τα δύο υλικά.

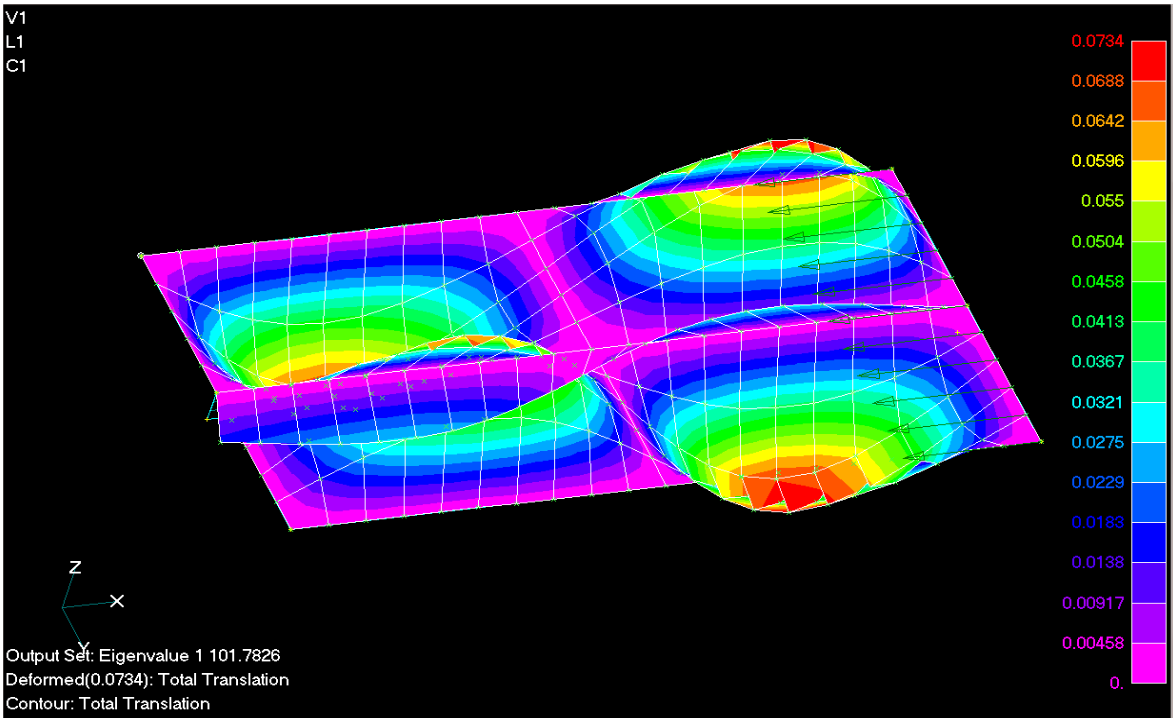
5.3.1.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ -Χάλυβας



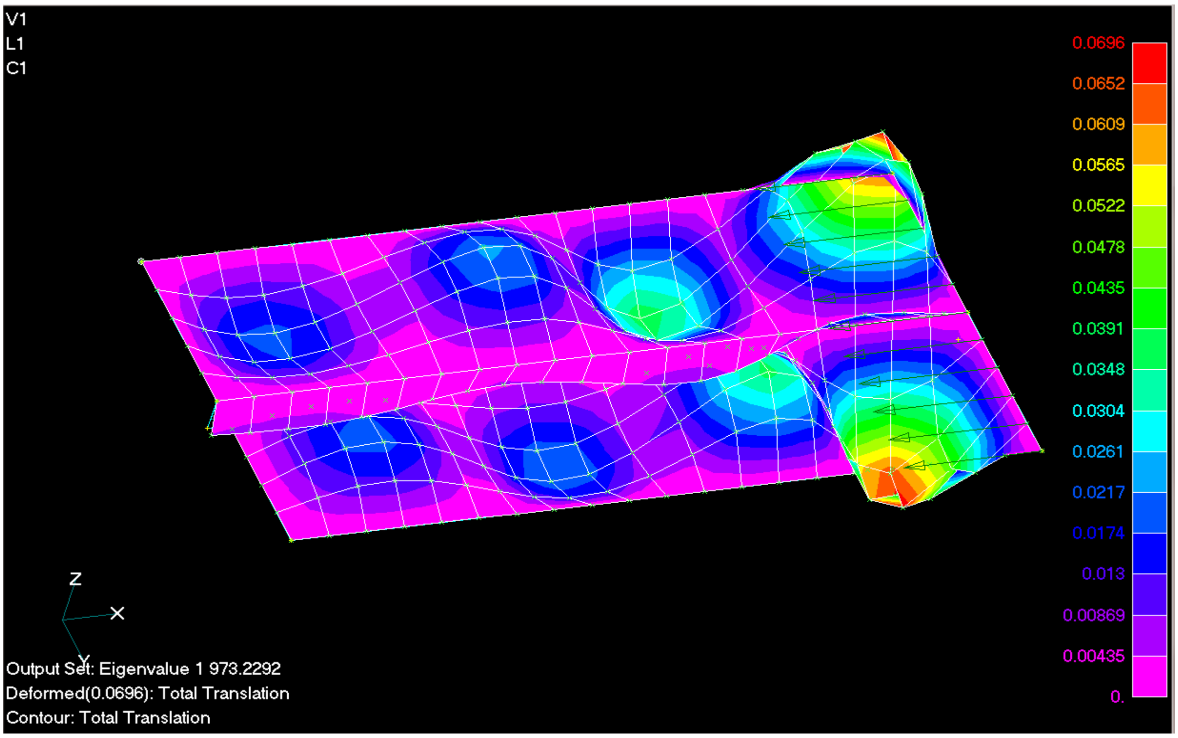
Σχήμα 5.17: Πλάκα 1000×1000×10mm από σύνθετο υλικό με ενδιάμεση ενίσχυση 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 336.67 kN/m



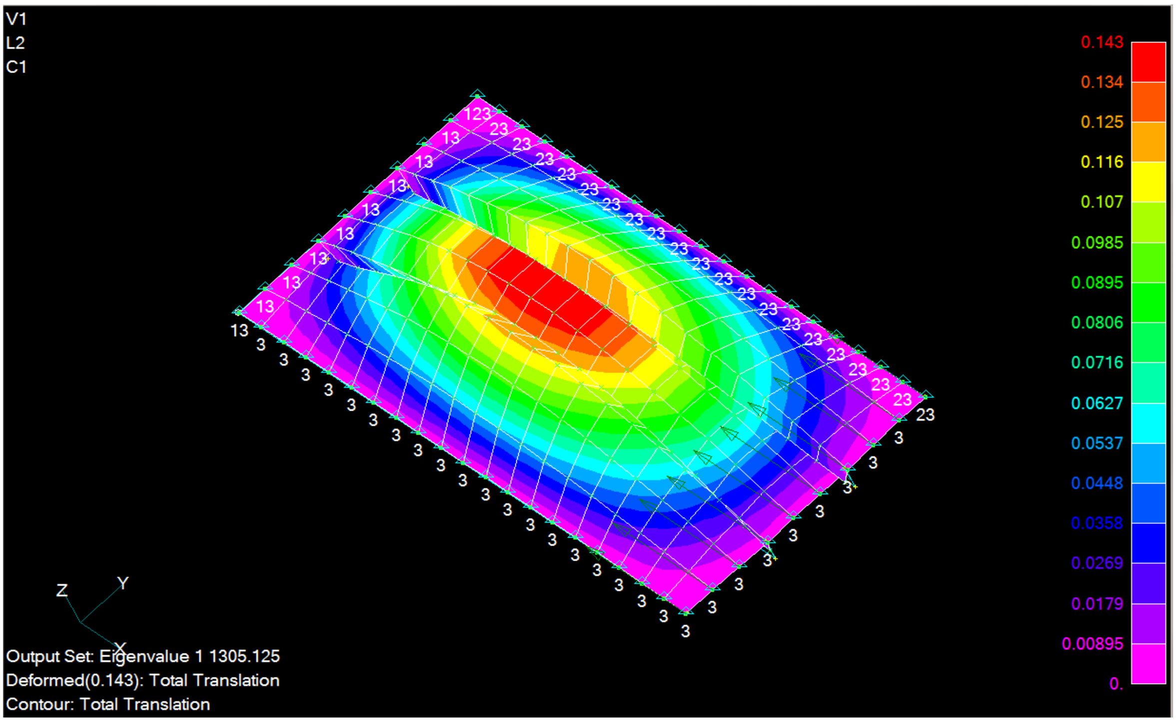
Σχήμα 5.18: Πλάκα 1000×1000×10mm από χάλυβα με ενδιάμεση ενίσχυση 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 2174.05kN/m



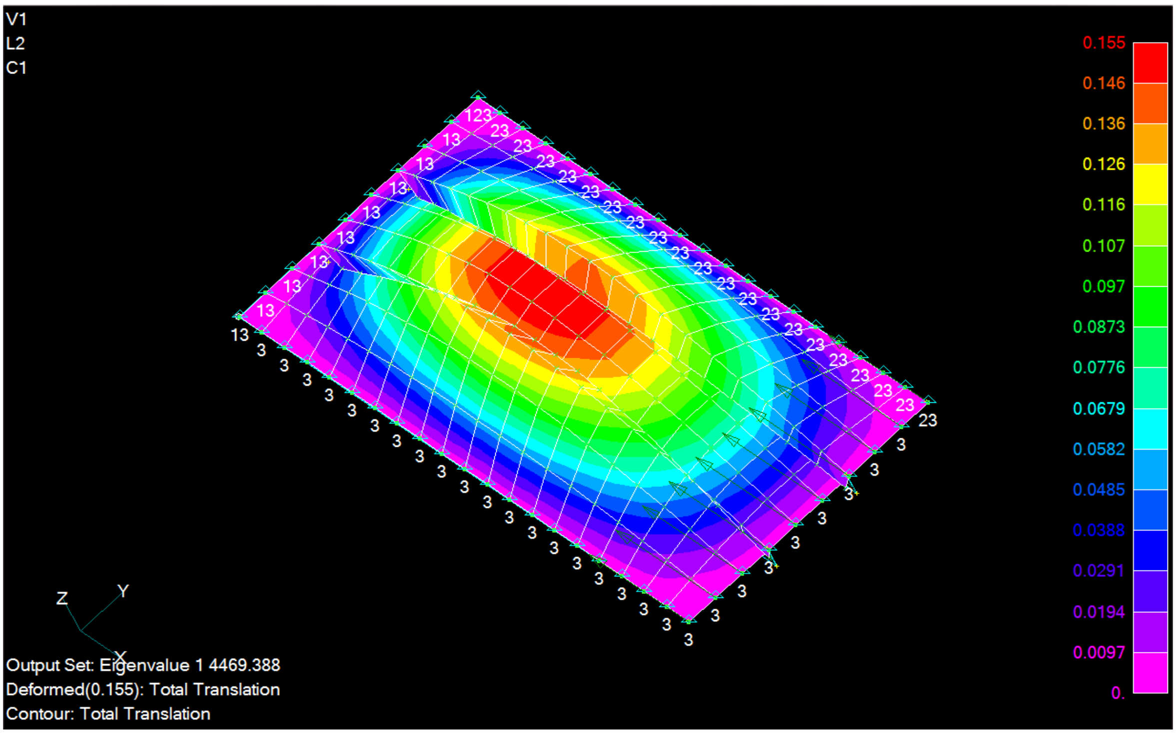
Σχήμα 5.19: Πλάκα 1000×500×5mm από σύνθετο υλικό με ενδιάμεση ενίσχυση 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 101.78/0.5=203.56kN/m



Σχήμα 5.20: Πλάκα 1000×500×5mm από χάλυβα με ενδιάμεση ενίσχυση 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 973.23/0.5=1946.46kN/m

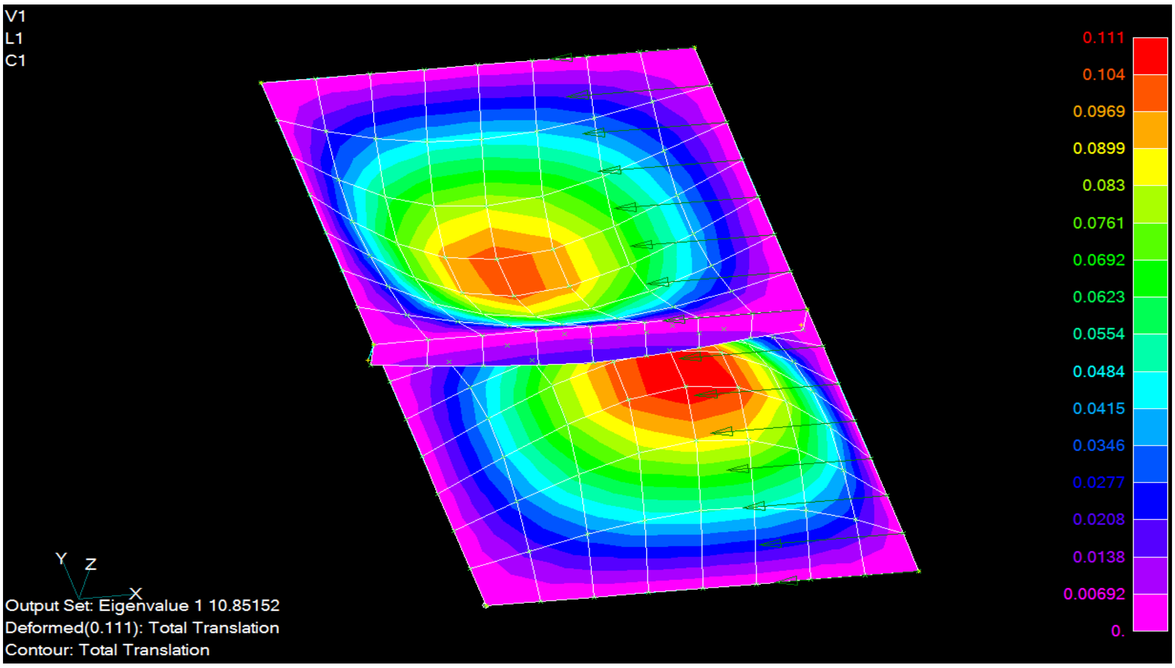


Σχήμα 5.21: Πλάκα 1000×500×10mm από σύνθετο υλικό με 2 ενδιάμεσες ενίσχυσεις 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 1305.13/0.5=2610.26kN/m

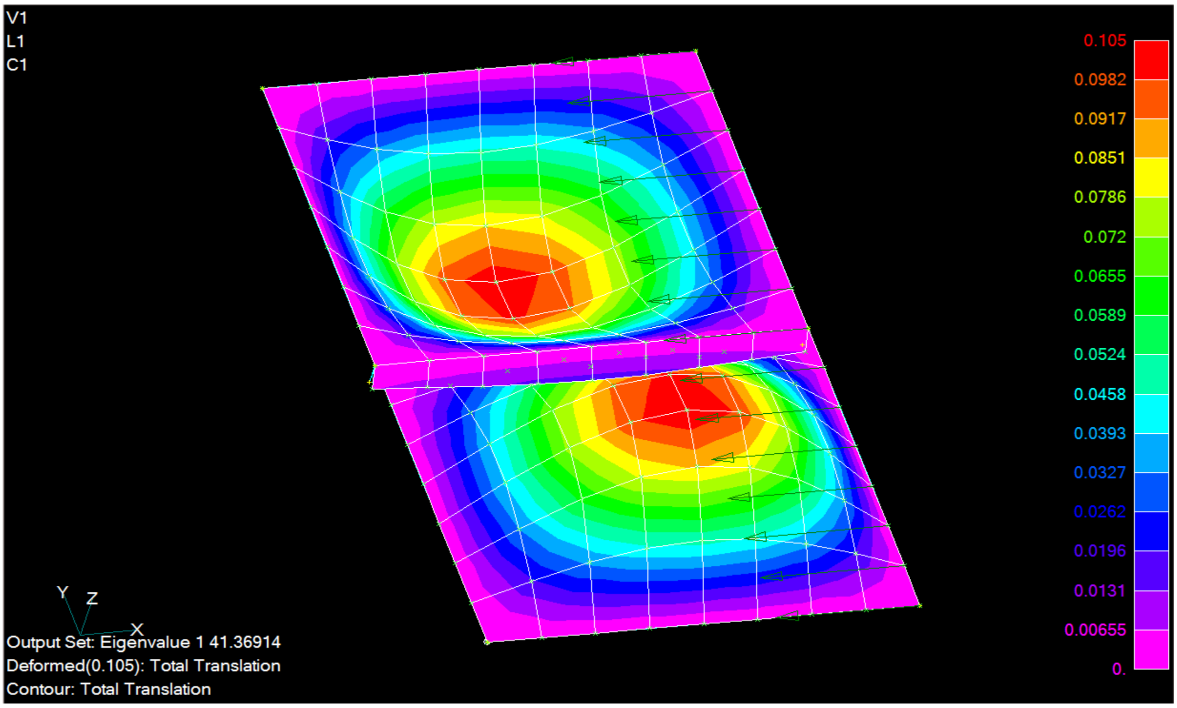


Σχήμα 5.22: Πλάκα 1000×500×10mm από χάλυβα με 2 ενδιάμεσες ενίσχυσεις 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 4469.39/0.5=8938.78kN/m

5.3.1.2 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm45_2\,/0_{12}\,/\pm45_2\,]$ - Χάλυβας

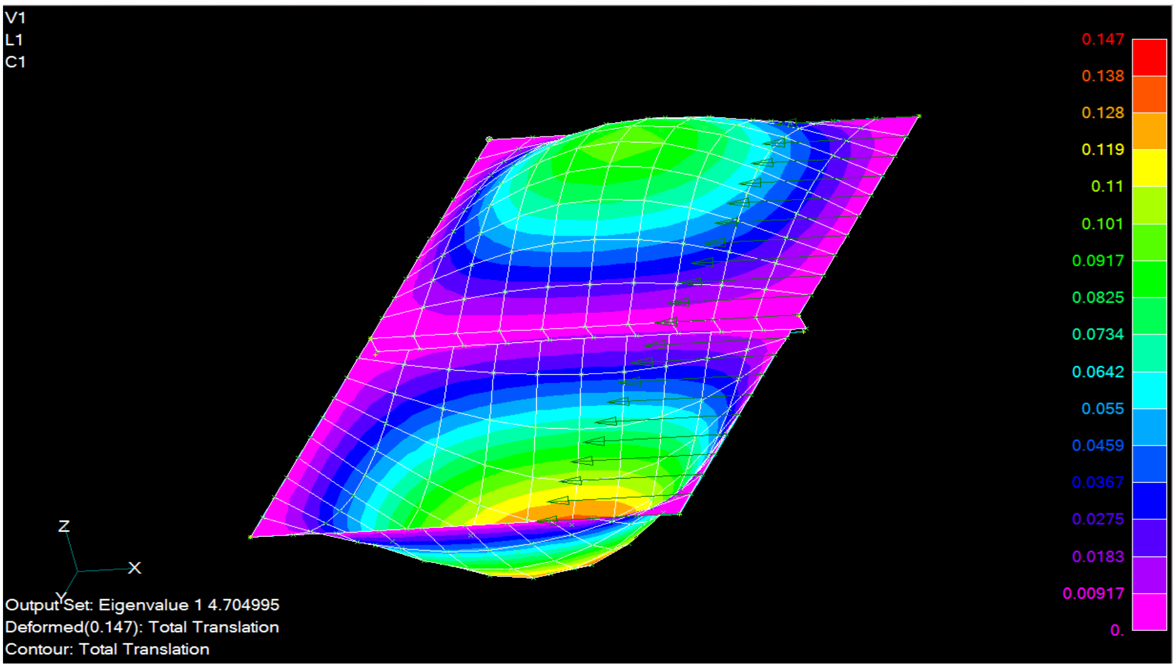


Σχήμα 5.23: Πλάκα 400×700×2mm από σύνθετο υλικό με ενδιάμεση ενίσχυση 5×25mm με κρίσιμο φορτίο 10.85/0.7=15.50kN/m

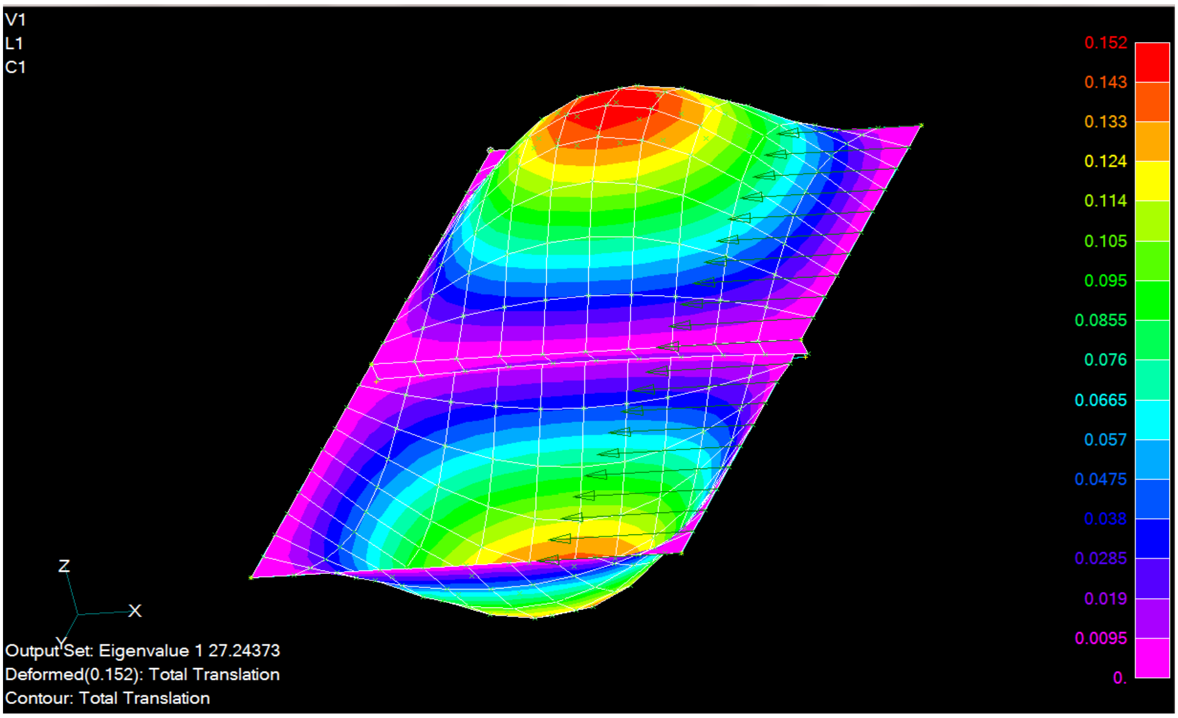


Σχήμα 5.24: Πλάκα 400×700×2mm από χάλυβα με ενδιάμεση ενίσχυση 5×25mm με κρίσιμο φορτίο 41.37/0.7=59.09kN/m

5.3.1.3 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm45_5\ /0_{10}]$ -Χάλυβας

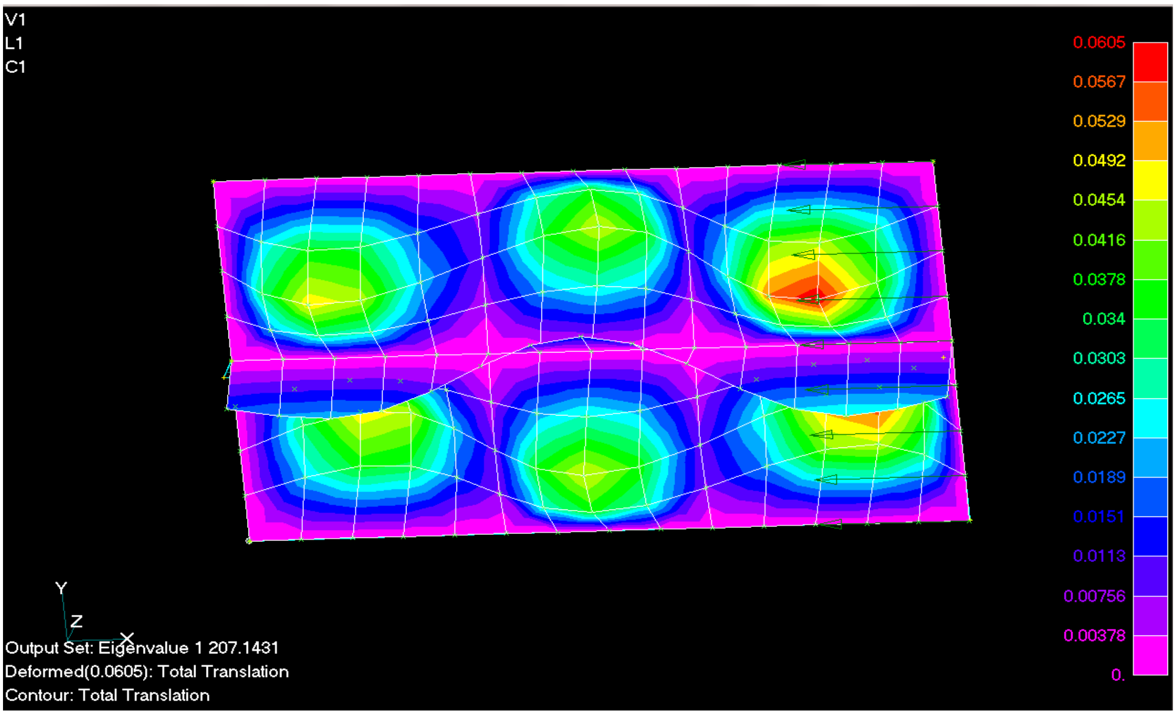


Σχήμα 5.25: Πλάκα 500×1000×2mm από σύνθετο υλικό με ενδιάμεση ενίσχυση 5×25mm με κρίσιμο φορτίο 4.70kN/m

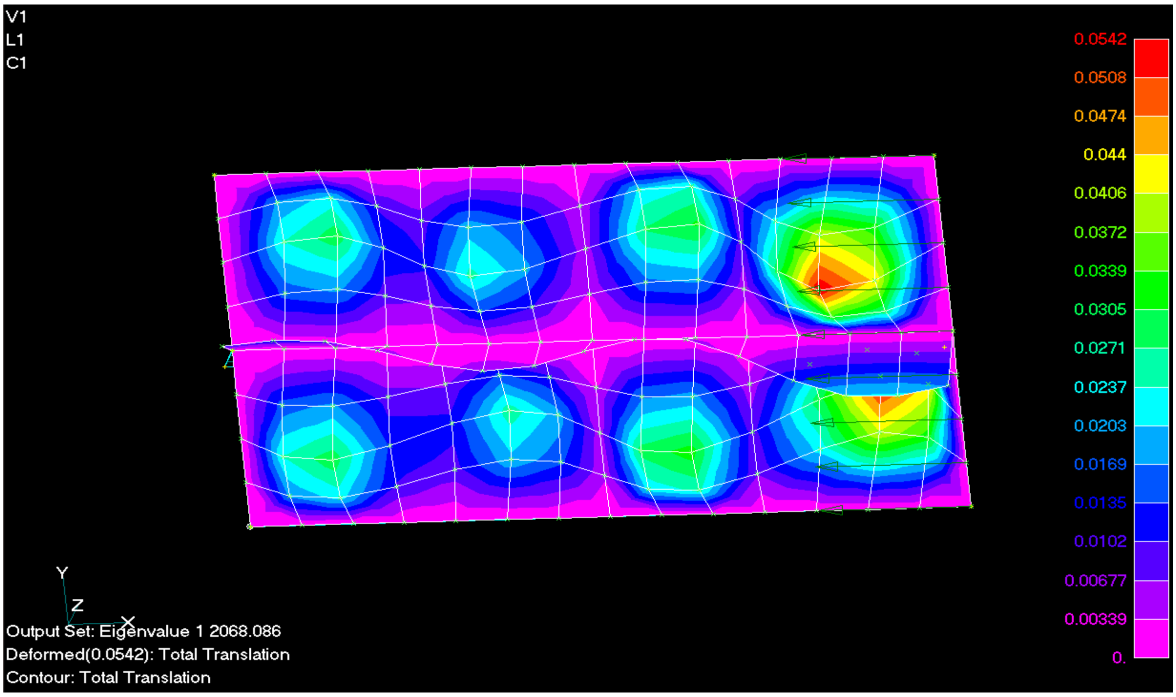


Σχήμα 5.26: Πλάκα 500×1000×2mm από χάλυβα με ενδιάμεση ενίσχυση 5×25mm με κρίσιμο φορτίο 27.24kN/m

5.3.1.4 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα και $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.27: Πλάκα 700×400×6mm από σύνθετο υλικό με ενδιάμεση ενίσχυση 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 207.14/0.4=517.85kN/m



Σχήμα 5.28: Πλάκα 700×400×6mm από χάλυβα με ενδιάμεση ενίσχυση 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 2068.09/0.4=5170.20kN/m

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και πλακών από χάλυβα (Πίνακας 5.5).

Πίνακας 5.5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα ενισχυμένων με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Nastran

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	10	336.67	2174.05
		1000	500	10	1404.32	7487.82
		500	1000	10	601.27	3103.54
		1000	1000	5	45.39	439.46
		1000	500	5	203.56	1946.44
		500	1000	5	78.10	460.60
		1 ενίσχυση 5×25mm				
		700	400	2	25.13	168.79
		400	700	2	8.76	64.82
		2 ενισχύσεις 5×25mm				
		1000	1000	10	256.95	866.39
		1000	500	10	530.14	4200.10
		500	1000	10	760.79	1796.85
		1000	1000	5	94.22	237.02
		1000	500	5	229.28	885.24
		500	1000	5	111.17	661.74
		2 ενισχύσεις 10×50mm				
		1000	1000	10	822.07	2886.89
		1000	500	10	2610.26	8938.78
		500	1000	10	850.24	7502.20
	$[\pm45_2/0_{12}/\pm45_2]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	7.60	27.90
		1000	500	2	34.36	126.96
		500	1000	2	13.30	27.24
		700	400	2	55.95	243.85
		400	700	2	15.50	59.09
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	4.70	27.90
		1000	500	2	19.98	126.96
		500	1000	2	4.70	27.24
E-glass/Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	6	75.62	729.74
		500	1000	6	74.67	711.84
		700	400	6	517.85	5170.20

5.3.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1

Ο τρόπος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου πλακών με το πρόγραμμα Mathematica έχει περιγραφεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4. Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων αντιπαραθέτοντας και εδώ τις τιμές του κρίσιμου φορτίου ανάμεσα σε ενισχυμένες πλάκες από χάλυβα και σύνθετο υλικό.

Πίνακας 5.6: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα ενισχυμένων με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Mathematica

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	10	329.92	2486.00
		1000	500	10	1316.87	8199.00
		500	1000	10	600.74	3036.81
		1000	1000	5	41.15	445.50
		1000	500	5	164.61	1647.58
		500	1000	5	75.09	487.55
		1 ενίσχυση 5×25mm				
		700	400	2	19.84	200.39
		400	700	2	8.10	50.47
		2 ενισχύσεις 5×25mm				
		1000	1000	10	264.30	921.12
		1000	500	10	559.81	4332.20
		500	1000	10	829.27	1834.02
		1000	1000	5	132.89	256.82
		1000	500	5	269.38	916.97
		500	1000	5	103.66	795.97
		2 ενισχύσεις 10×50mm				
		1000	1000	10	829.27	3349.99
		1000	500	10	2980.80	9926.54
		500	1000	10	829.27	8019.08
	$[\pm 45_2/0_{12}/\pm 45_2]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	7.58	24.29
		1000	500	2	30.33	97.17
		500	1000	2	7.58	24.29
		700	400	2	46.67	200.39
		400	700	2	15.24	50.47
	$[\pm 45_5/0_{10}]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	6.57	24.29
		1000	500	2	26.30	97.17
		500	1000	2	6.57	24.29
E-glass/Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	6	68.95	655.95
		500	1000	6	68.95	655.95
		700	400	6	520.94	4973.23

5.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων

Προκειμένου να είναι ευκολότερη η γενική εποπτεία των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων ανάλυσης του προβλήματος κύρτωσης πλακών, παρατίθενται σε κοινούς πίνακες για ενισχυμένες πλάκες από χάλυβα (Πίνακας 5.7) και σύνθετα υλικά (Πίνακας 5.8) οι υπολογισμοί του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Πίνακας 5.7: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου σε πλάκες από σύνθετα υλικά ενισχυμένες ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

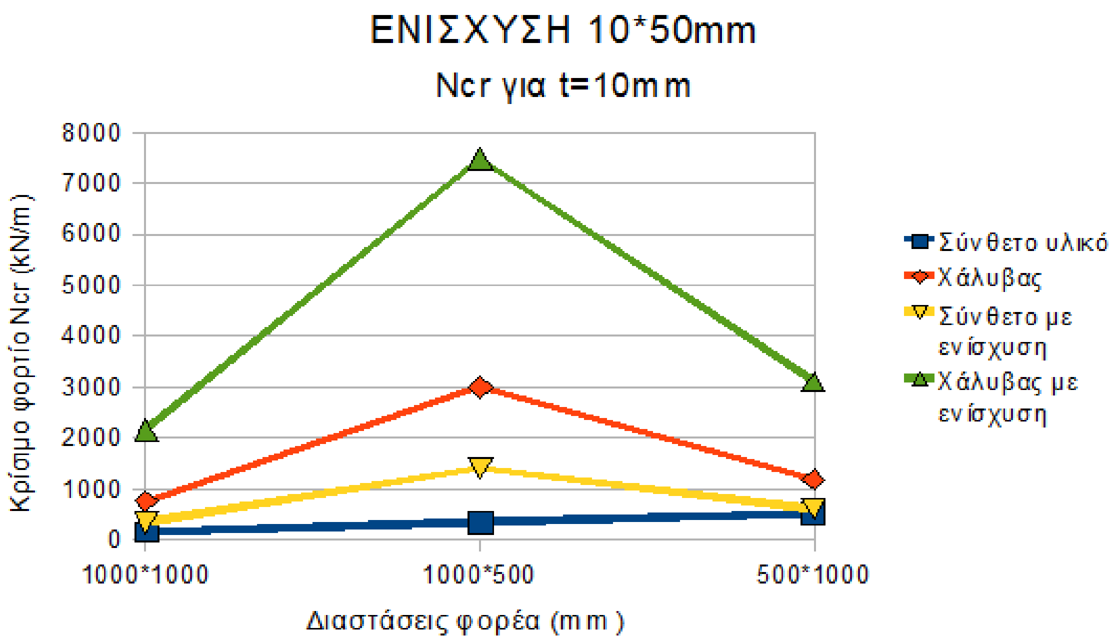
Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} σύνθετου (kN/m)	Mathematica N_{cr} σύνθετου (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	10	336.67	329.92
		1000	500	10	1404.32	1316.87
		500	1000	10	601.27	600.74
		1000	1000	5	45.39	41.15
		1000	500	5	203.56	164.61
		500	1000	5	78.10	75.09
		1 ενίσχυση 5×25mm				
		700	400	2	25.13	19.84
		400	700	2	8.76	8.10
		2 ενισχύσεις 5×25mm				
		1000	1000	10	256.95	264.30
		1000	500	10	530.14	559.81
		500	1000	10	760.79	829.27
		1000	1000	5	94.22	132.89
		1000	500	5	229.28	269.38
		500	1000	5	111.17	103.66
		2 ενισχύσεις 10×50mm				
		1000	1000	10	829.27	829.27
		1000	500	10	2980.80	2980.80
		500	1000	10	829.27	829.27
	$[\pm 45_2 /0_{12} / \pm 45_2]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	7.60	7.58
		1000	500	2	34.36	30.33
		500	1000	2	13.30	7.58
		700	400	2	55.95	46.67
		400	700	2	15.50	15.24
	$[\pm 45_5/ 0_{10}]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	4.70	6.57
		1000	500	2	19.98	26.30
		500	1000	2	4.70	6.57
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	6	75.62	68.95
		500	1000	6	74.67	68.95
		700	400	6	517.85	520.94

Πίνακας 5.8: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου σε πλάκες από χάλυβα ενισχυμένες ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

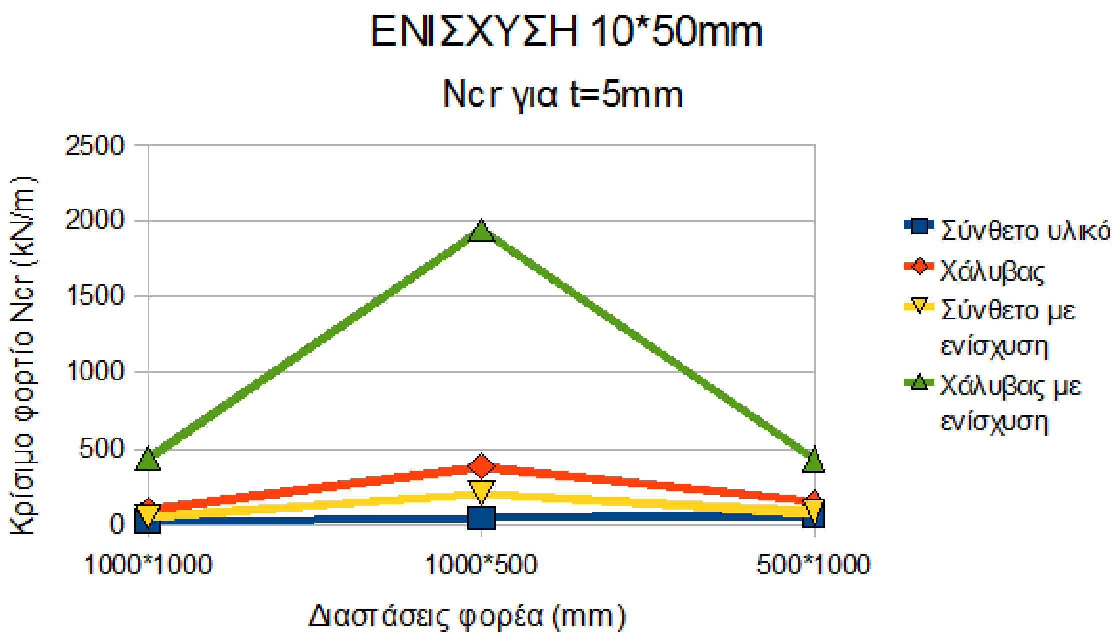
Υλικό	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} σύνθετου (kN/m)	Mathematica N_{cr} σύνθετου (kN/m)
Χάλυβας	1 ενίσχυση 10×50mm				
	1000	1000	10	2174.05	2486.00
	1000	500	10	7487.82	8199.00
	500	1000	10	3103.54	3036.81
	1000	1000	5	439.46	445.50
	1000	500	5	1946.44	1647.58
	500	1000	5	460.60	487.55
	1 ενίσχυση 5×25mm				
	700	400	2	168.79	200.39
	400	700	2	64.82	50.47
	2 ενισχύσεις 5×25mm				
	1000	1000	10	866.39	921.12
	1000	500	10	4200.10	4332.20
	500	1000	10	1796.85	1834.02
	1000	1000	5	237.02	256.82
	1000	500	5	885.24	916.97
	500	1000	5	661.74	795.97
	2 ενισχύσεις 10×50mm				
	1000	1000	10	2886.89	3349.99
	1000	500	10	8938.78	9926.54
	500	1000	10	7502.20	8019.08
	1 ενίσχυση 5×25mm				
	1000	1000	2	27.90	24.29
	1000	500	2	126.96	97.17
	500	1000	2	27.24	24.29
	700	400	2	243.85	200.39
	400	700	2	59.09	50.47
	1 ενίσχυση 5×25mm				
	1000	1000	2	27.90	24.29
	1000	500	2	126.96	97.17
	500	1000	2	27.24	24.29
	1 ενίσχυση 10×50mm				
	1000	1000	6	729.74	655.95
	500	1000	6	711.84	655.95
	700	400	6	5170.20	4973.23

5.3.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών ενισχυμένων από σύνθετα υλικά και χάλυβα μέσω διαγραμμάτων

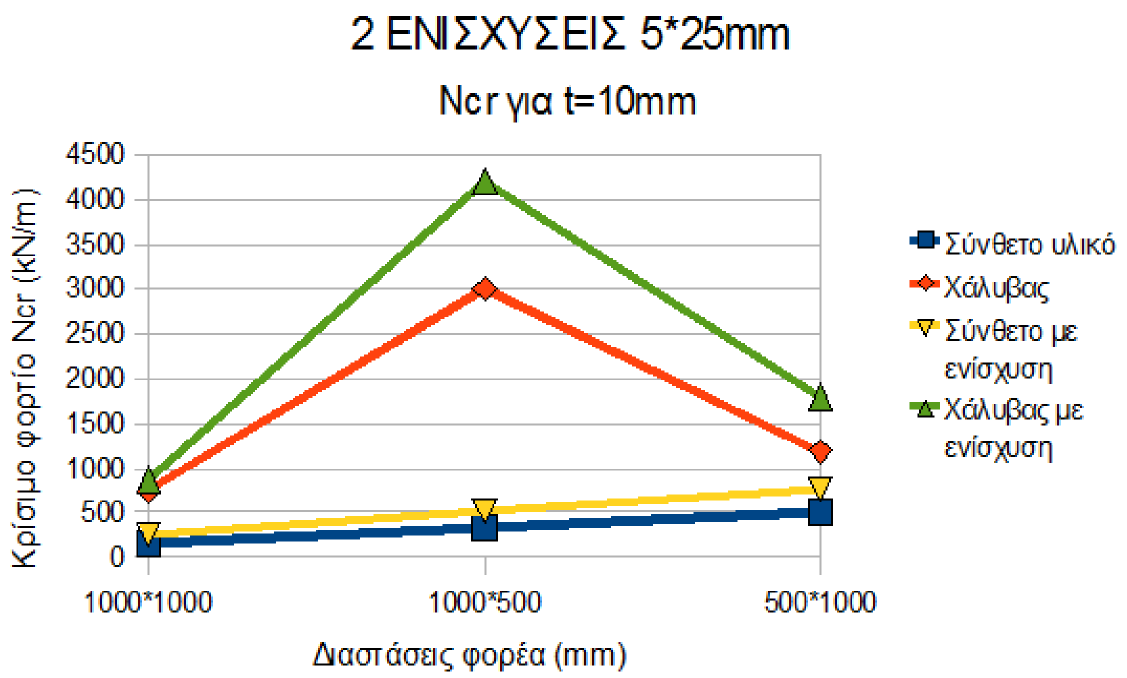
5.3.4.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ –Χάλυβας



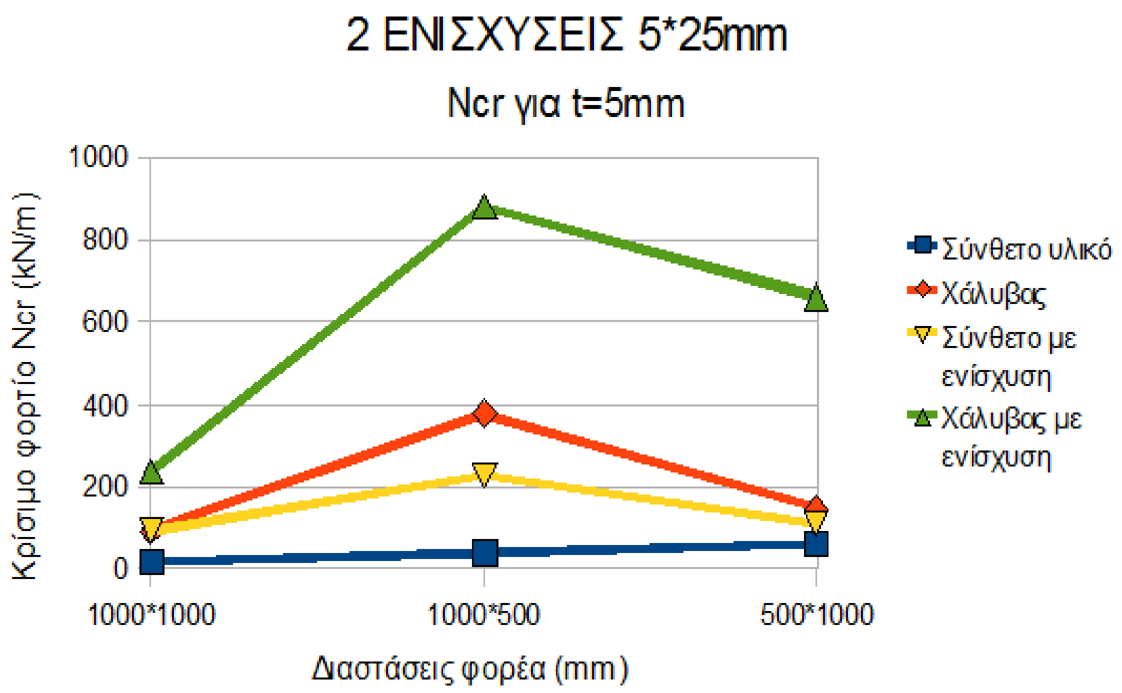
Σχήμα 5.29: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=10mm



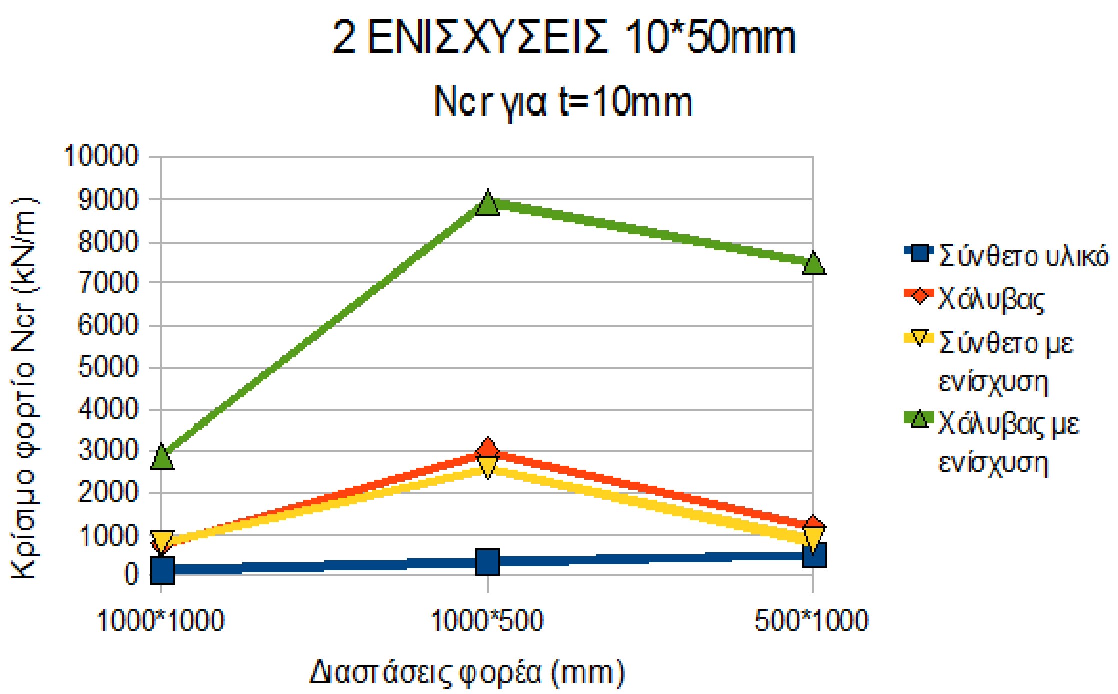
Σχήμα 5.30: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=5mm



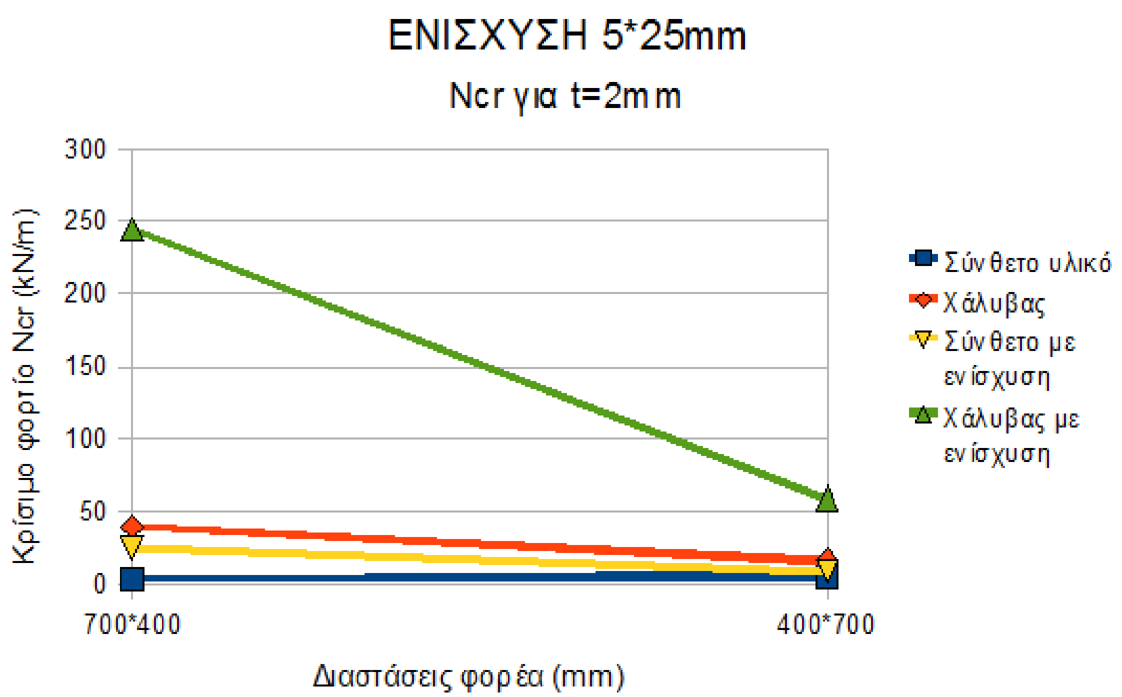
Σχήμα 5.31: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=10mm



Σχήμα 5.32: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=5mm

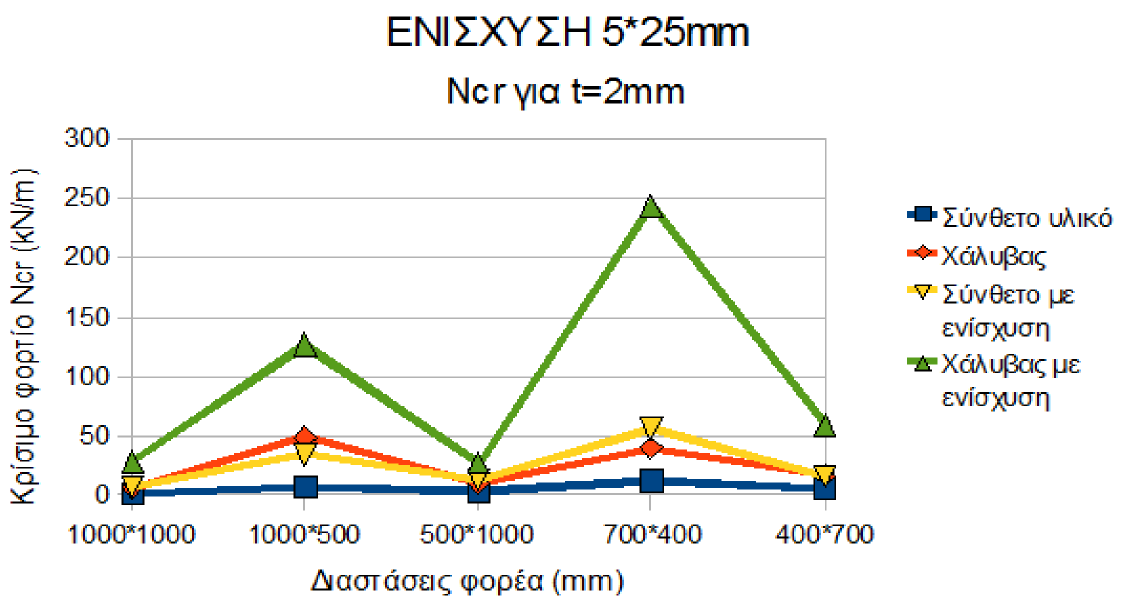


Σχήμα 5.33: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=10mm



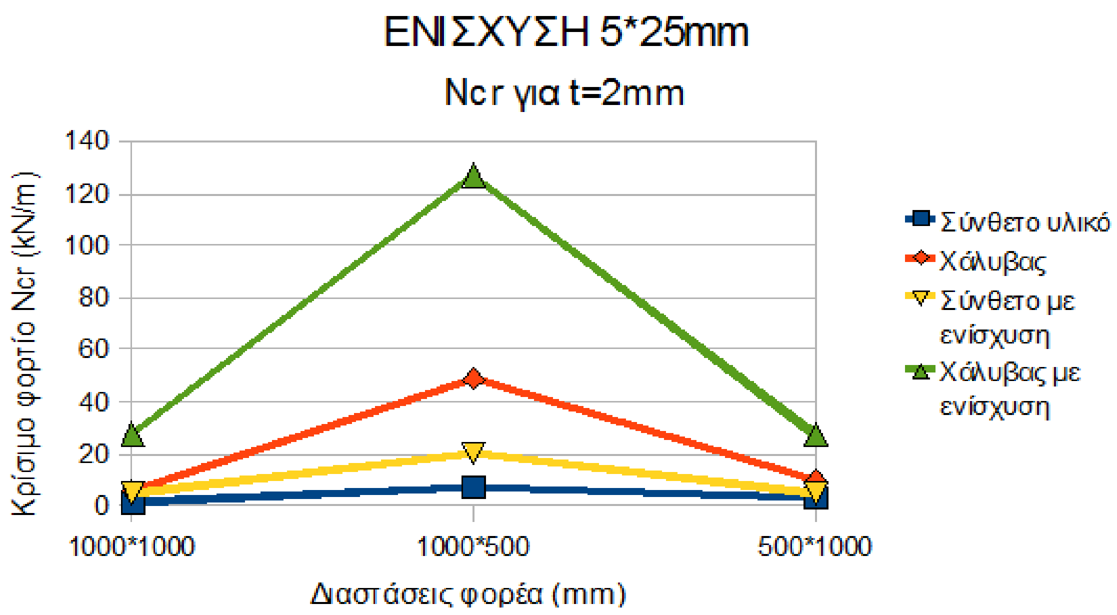
Σχήμα 5.34: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.3.4.2 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_2 / 0_{12} / \pm 45_2]$ - Χάλυβας



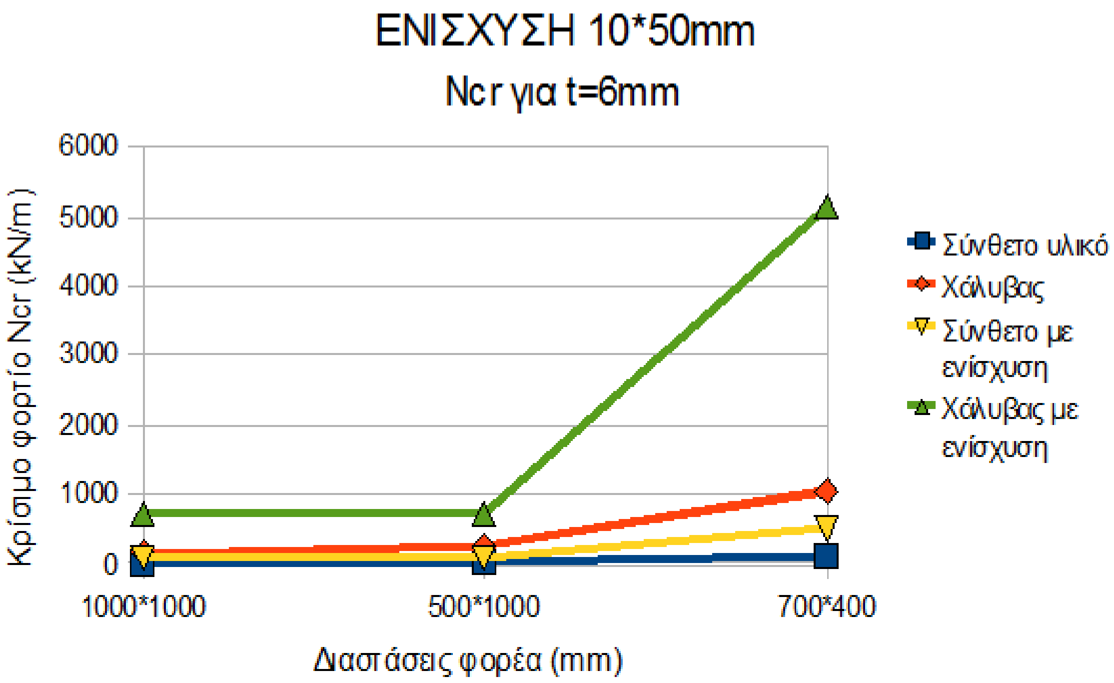
Σχήμα 5.35: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.3.4.3 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_5 / 0_{10}]$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.36: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.3.4.4 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα και $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.37: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=6mm

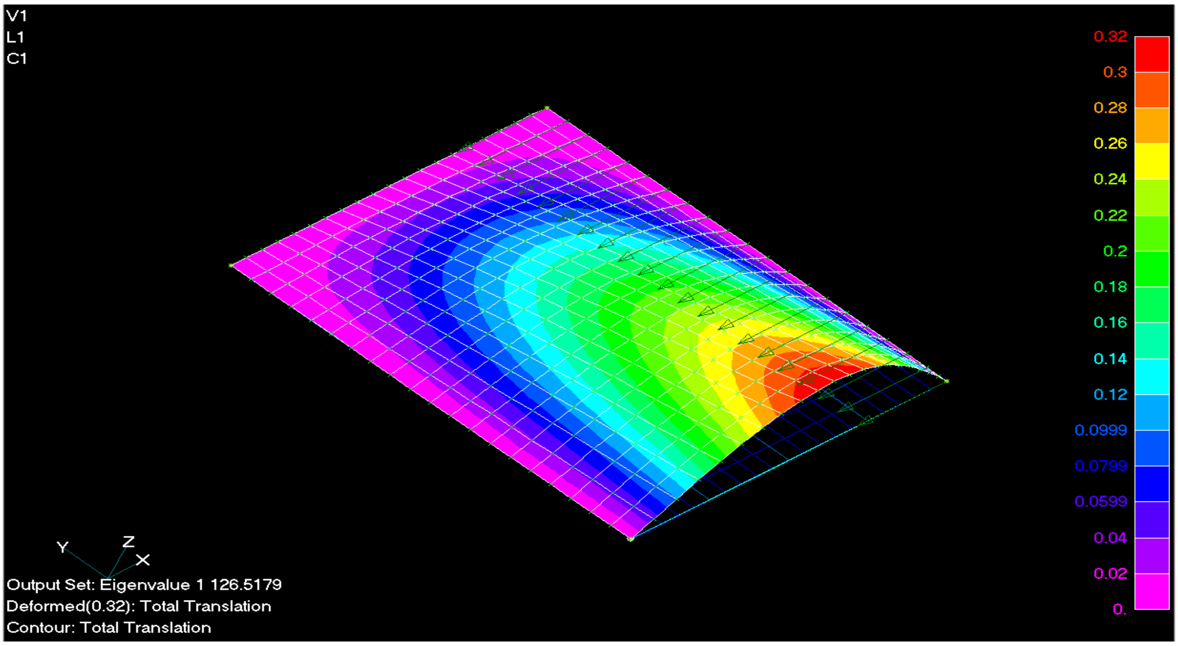
Από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να εξάγουμε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα:

1. Παρατηρείται ότι για έναν αριθμό πλακών, που έχει αναλυθεί, τα αποτελέματα μεταξύ των δύο προγραμμάτων είναι αρκετά κοντά. Στην περίπτωση, όμως, της ύπαρξης των ενισχύσεων η απόκλιση κυμαίνεται σε μεγαλύτερα ποσοστά από πλάκες χωρίς ενισχύσεις. Στην πλειοψηφία των αναλύσεων τα ποσοστά απόκλισης ήταν κάτω από 10% ενώ υπήρξαν και εξαιρέσεις με τα ποσοστά απόκλισης να φθάνουν το 26%. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον διαφορετικό τρόπο προσέγγισης του προβλήματος από τα δύο προγράμματα.
2. Το κρίσιμο φορτίο στην περίπτωση των πολύστρωτων σύνθετων υλικών εξαρτάται όχι μόνο από τις διαστάσεις του στοιχείου και της ενίσχυσης αλλά και σε πολύ μεγάλο βαθμό από τον προσανατολισμό των ινών τόσο της επιφάνειας της πλάκας όσο και της ενίσχυσης όπως και αποδεικνύεται από τις παραπάνω αναλύσεις. Πλάκες με ίδιες διαστάσεις, ίδιες διαστάσεις ενισχύσεων και διαφορετικό προσανατολισμό των ινών τόσο στην επιφάνεια όσο και στην ενίσχυση παρουσίασαν έως και 2 φορές μεγαλύτερο φορτίο. Γι΄αυτό ο εκάστοτε μελετητής οφειλεί με βάση τις διαστάσεις του στοιχείου να μεριμνήσει και σ΄αυτή την περίπτωση και για τον προσανατολισμό των ινών ώστε να έχει την καλύτερη δυνατή τιμή του κρίσιμου φορτίου κύρτωσης.
3. Συγκρίνοντας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μεταξύ ενισχυμένων πλακών από χάλυβα και σύνθετα υλικά για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι οι χαλύβδινες απλά εδραζόμενες πλάκες έχουν πολύ μεγαλύτερο φορτίο από τις ιδίων διαστάσεων και ιδίων ενισχύσεων από σύνθετα υλικά. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι οι χαλύβδινες πλάκες παρουσιάζουν από 2 φορές μεγαλύτερο έως ακόμα και 10 φορές μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο από τις αντίστοιχες πλάκες αλλά από σύνθετα υλικά ανάλογα με τις διαστάσεις (μήκος – πλάτος –πάχος). Ιδιαίτερο ρόλο παίζει ο λόγος των πλευρών όπως αποδεικνύεται και από τα παραπάνω διαγράμμτα.
4. Η προσθήκη ενισχύσεων οδήγησε σε αύξηση του κρίσιμου φορτίου, όπως ήταν αναμενόμενο. Χρησιμοποιήθηκαν μόνο δύο διαφορετικές ενισχύσεις (10×50mm και 5×25mm) και προέκυψε ότι μία ενδιάμεση ενίσχυση μπορεί να οδηγήσει ακόμα και σε πενταπλάσιο κρίσιμο φορτίο τόσο σε πλάκες από χάλυβα όσο και από σύνθετο υλικό. Τα παραπάνω διαγράμματα δείχνουν και πιο άμεσα τη διαφορά αυτή συγκρίνοντας και τη διαφορά που προκαλεί μία ενδιάμεση ενίσχυση αλλά και τη διαφορά μεταξύ ενισχυμένων πλακών από δύο διαφορετικά υλικά.
5. Παρατηρήθηκε, τέλος, ότι μία ενίσχυση μπορεί να λειτουργήσει σαν ενδιάμεση στήριξη στην πλάκα δημιουργώντας τις ιδιομορφές που παρουσιάζονται στα παραπάνω σχήματα είτε ακόμα να κυρτωθεί μαζί με ολόκληρο το φορέα. Οι διαφορετικές αυτές ιδιομορφές οφείλονται τόσο στις διαστάσεις της ενίσχυσης όσο και στις διασάσεις της πλάκας (“λεπτή πλάκα” με “χοντρή” ενίσχυση παρουσιάζει μία ιδιομορφή μορφής όπως του Σχήματος 5.2).

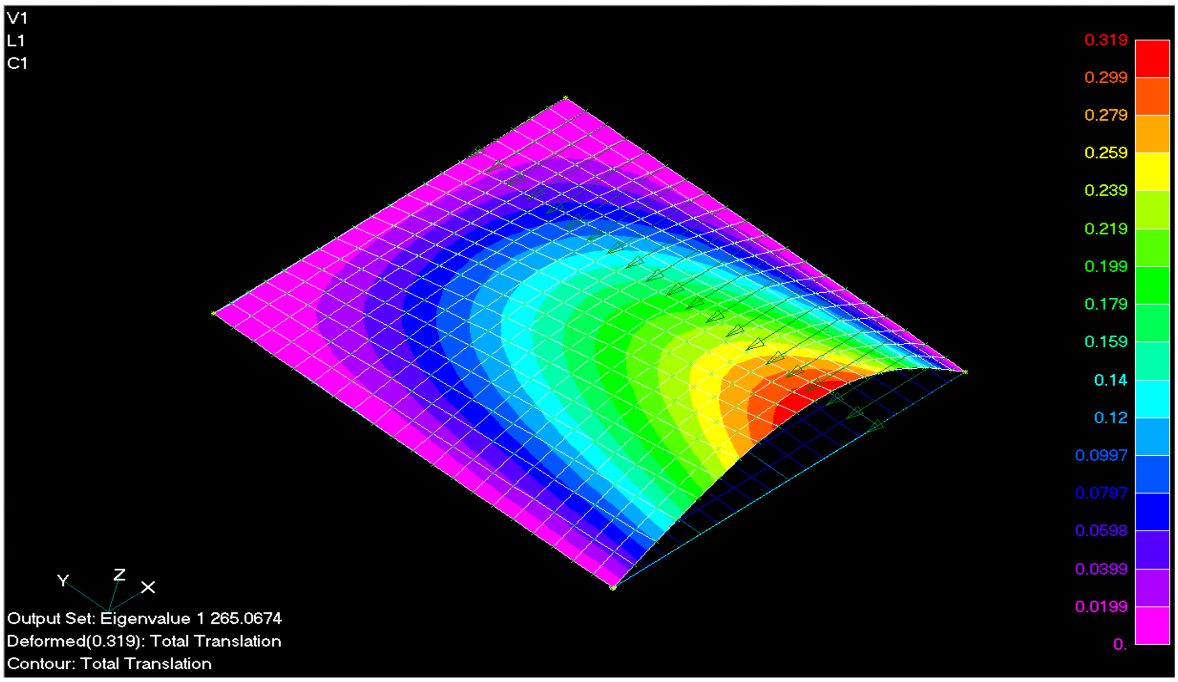
5.4 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων χωρίς ενισχύσεις που έχουν ένα άκρο ελεύθερο

5.4.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran

5.4.1.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ -Χάλυβας

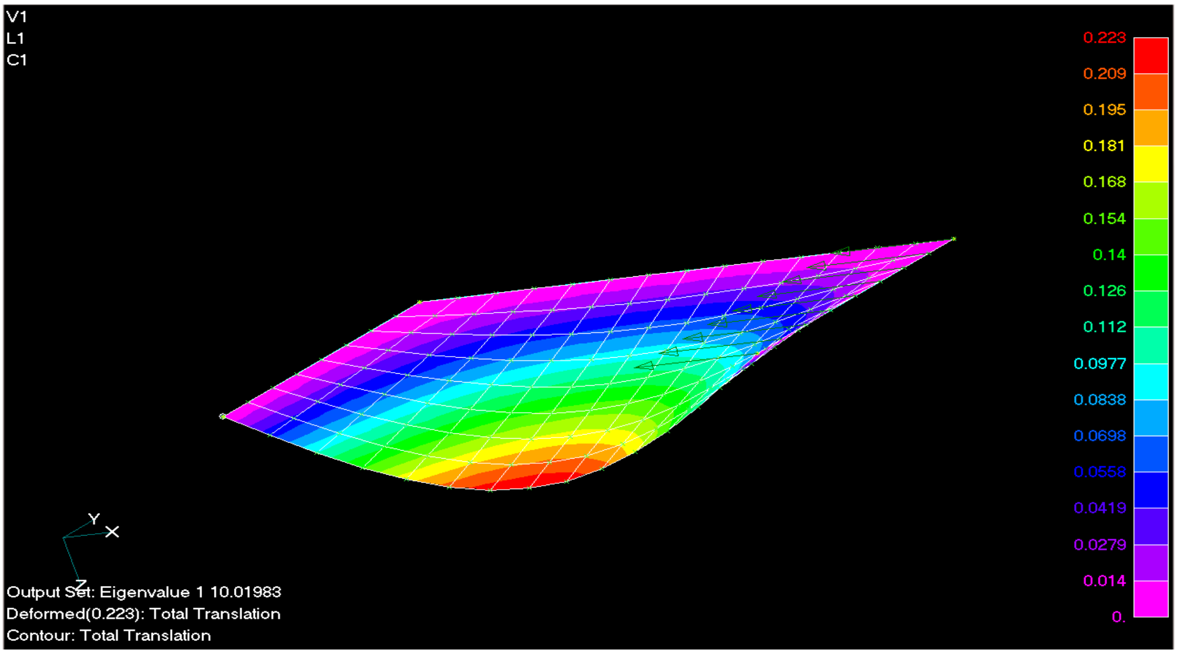


Σχήμα 5.38: Πλάκα 1000×1000×10mm από σύνθετο υλικό με ένα άκρο ελεύθερο με κρίσιμο φορτίο 126.52kN/m

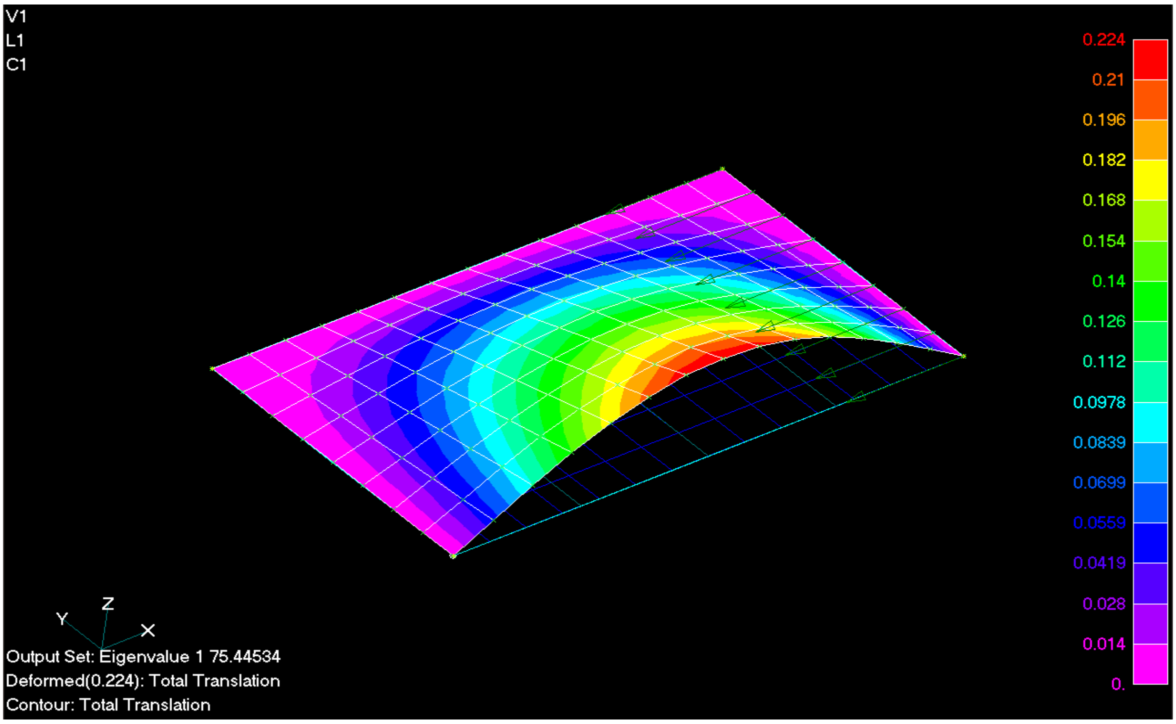


Σχήμα 5.39: Πλάκα 1000×1000×10mm από χάλυβα με ένα άκρο ελεύθερο με κρίσιμο φορτίο 265.07kN/m

5.4.1.2 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα και $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.40: Πλάκα 700×400×6mm από σύνθετο υλικό με ένα άκρο ελεύθερο με κρίσιμο φορτίο 10.02/0.4=25.05kN/m



Σχήμα 5.41: Πλάκα 700×400×6mm από χάλυβα με ένα άκρο ελεύθερο με κρίσιμο φορτίο 75.45/0.4=188.63kN/m

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran για πλάκες με ένα άκρο ελεύθερο. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και πλακών από χάλυβα (Πίνακας 5.9).

Πίνακας 5.9: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Nastran

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1000	1000	10	126.52	265.07
		1000	500	10	139.74	501.31
		500	1000	10	491.24	829.38
		1000	1000	5	15.86	33.20
		1000	500	5	17.52	62.98
		500	1000	5	62.01	103.89
		700	400	2	2.23	7.03
		400	700	2	6.26	10.73
	$[\pm45_2 /0_{12} / \pm45_2]$	1000	1000	2	0.65	2.13
		1000	500	2	1.35	4.01
		500	1000	2	1.94	6.65
		700	400	2	2.30	7.03
		400	700	2	3.14	10.73
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1000	1000	2	0.71	2.13
		1000	500	2	1.36	4.01
		500	1000	2	2.83	6.65
E-glass/Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1000	1000	6	9.25	57.34
		500	1000	6	32.81	179.45
		700	400	6	25.05	188.6

5.4.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1

Ο τρόπος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου πλακών με το πρόγραμμα Mathematica έχει περιγραφεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4 και για την περίπτωση που υπάρχει ένα ελεύθερο άκρο στην πλάκα. Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων αντιπαραθέτοντας και εδώ τις τιμές του κρίσιμου φορτίου ανάμεσα σε πλάκες από χάλυβα και σύνθετο υλικό.

Πίνακας 5.10: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Mathematica

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1000	1000	10	126.99	270.57
		1000	500	10	140.64	512.88
		500	1000	10	494.33	839.97
		1000	1000	5	15.87	33.82
		1000	500	5	17.58	64.11
		500	1000	5	61.79	104.99
		700	400	2	2.27	7.13
		400	700	2	6.19	10.80
	$[\pm45_2\ /0_{12}\ /\ \pm45_2]$	1000	1000	2	0.69	2.16
		1000	500	2	1.44	4.10
		500	1000	2	2.04	6.72
		700	400	2	2.46	7.13
		400	700	2	3.30	10.80
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1000	1000	2	0.81	2.16
		1000	500	2	1.32	4.10
		500	1000	2	2.73	6.72
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1000	1000	6	9.32	58.44
		500	1000	6	32.76	181.43
		700	400	6	25.39	192.71

5.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων

Προκειμένου να είναι ευκολότερη η γενική εποπτεία των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων ανάλυσης του προβλήματος κύρτωσης πλακών, παρατίθενται σε κοινούς πίνακες για ενισχυμένες πλάκες από χάλυβα (Πίνακας 5.11) και σύνθετα υλικά (Πίνακας 5.12) οι υπολογισμοί του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Πίνακας 5.11: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου πλακών από σύνθετα υλικά ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

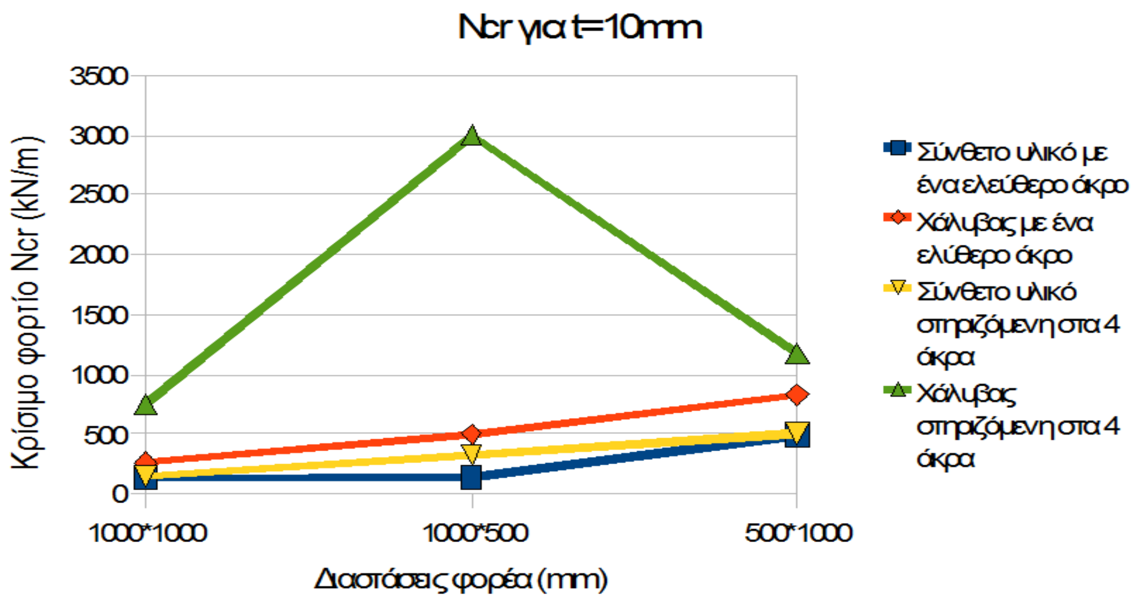
Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} σύνθετου (kN/m)	Mathematica N_{cr} σύνθετου (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1000	1000	10	126.52	126.99
		1000	500	10	139.74	140.64
		500	1000	10	491.24	494.33
		1000	1000	5	15.86	15.87
		1000	500	5	17.52	17.58
		500	1000	5	62.01	61.79
		700	400	2	2.23	2.27
		400	700	2	6.26	6.19
	$[\pm45_2 /0_{12} / \pm45_2]$	1000	1000	2	0.65	0.69
		1000	500	2	1.35	1.44
		500	1000	2	1.94	2.04
		700	400	2	2.30	2.46
		400	700	2	3.14	3.30
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1000	1000	2	0.71	0.81
		1000	500	2	1.36	1.32
		500	1000	2	2.83	2.73
E-glass/ Epoxy	$[(0_2 /90)_2]_s$	1000	1000	6	9.25	9.32
		500	1000	6	32.81	32.76
		700	400	6	25.05	25.39

Πίνακας 5.12: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου πλακών από χάλυβα ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

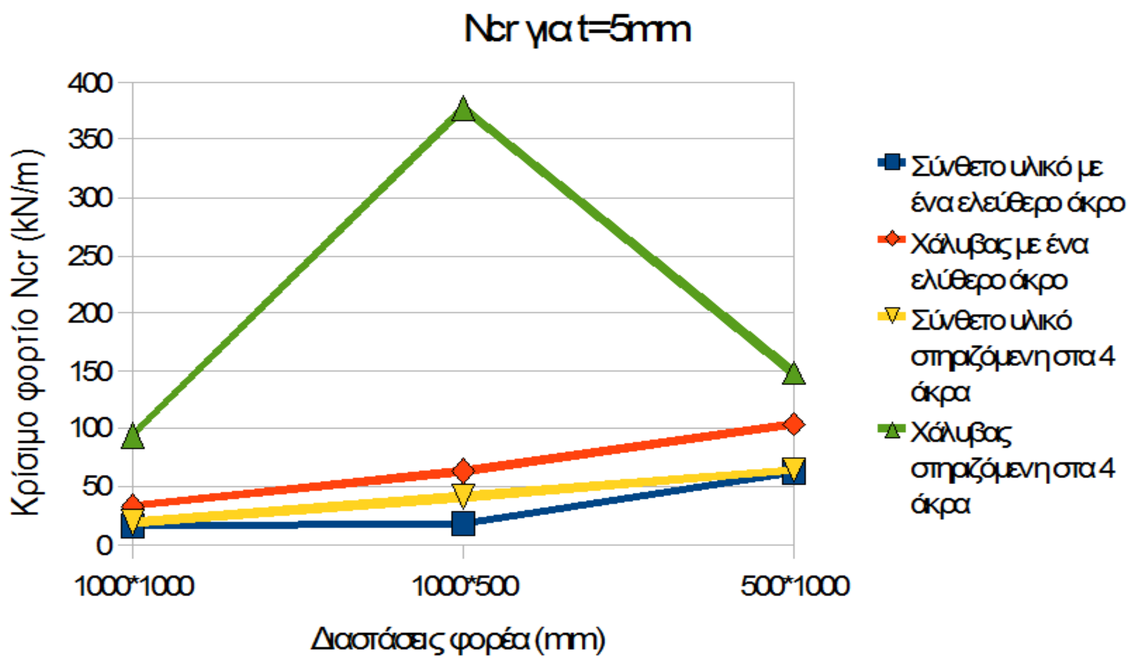
Υλικό	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} χάλυβα (kN/m)	Mathematica N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Χάλυβας	1000	1000	10	265.07	270.57
	1000	500	10	501.31	512.88
	500	1000	10	829.38	839.97
	1000	1000	5	33.20	33.82
	1000	500	5	62.98	64.11
	500	1000	5	103.89	104.99
	700	400	2	7.03	7.13
	400	700	2	10.73	10.80
	1000	1000	2	2.13	2.16
	1000	500	2	4.01	4.10
	500	1000	2	6.65	6.72
	700	400	2	7.03	7.13
	400	700	2	10.73	10.80
	1000	1000	2	2.13	2.16
	1000	500	2	4.01	4.10
	500	1000	2	6.65	6.72
	1000	1000	6	57.34	58.44
	500	1000	6	179.45	181.43
	700	400	6	188.6	192.71

5.4.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο από σύνθετα υλικά και χάλυβα με τις αντίστοιχες στηριζόμενες και στα 4 άκρα μέσω διαγραμμάτων

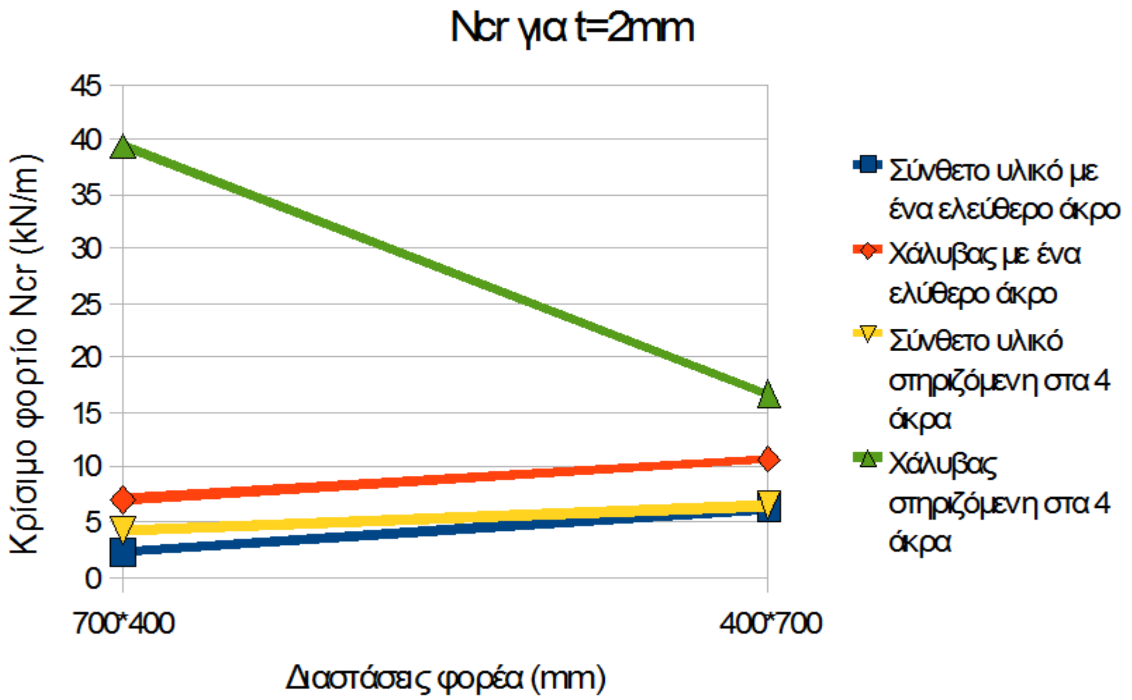
5.4.4.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ –Χάλυβας



Σχήμα 5.42: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=10mm

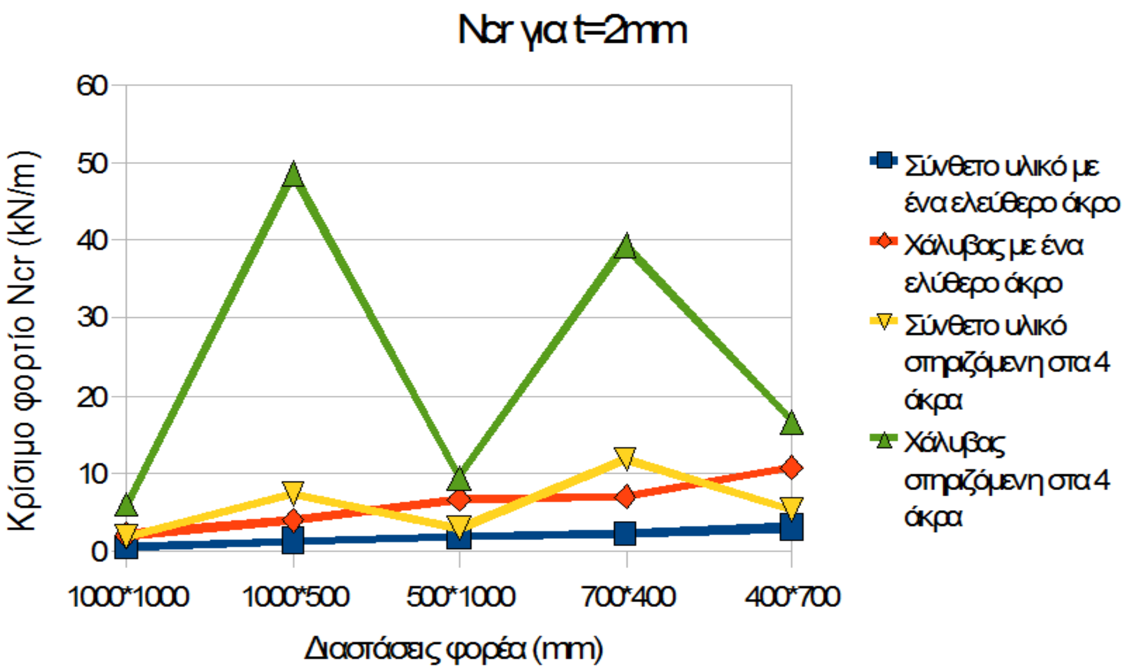


Σχήμα 5.43: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=5mm



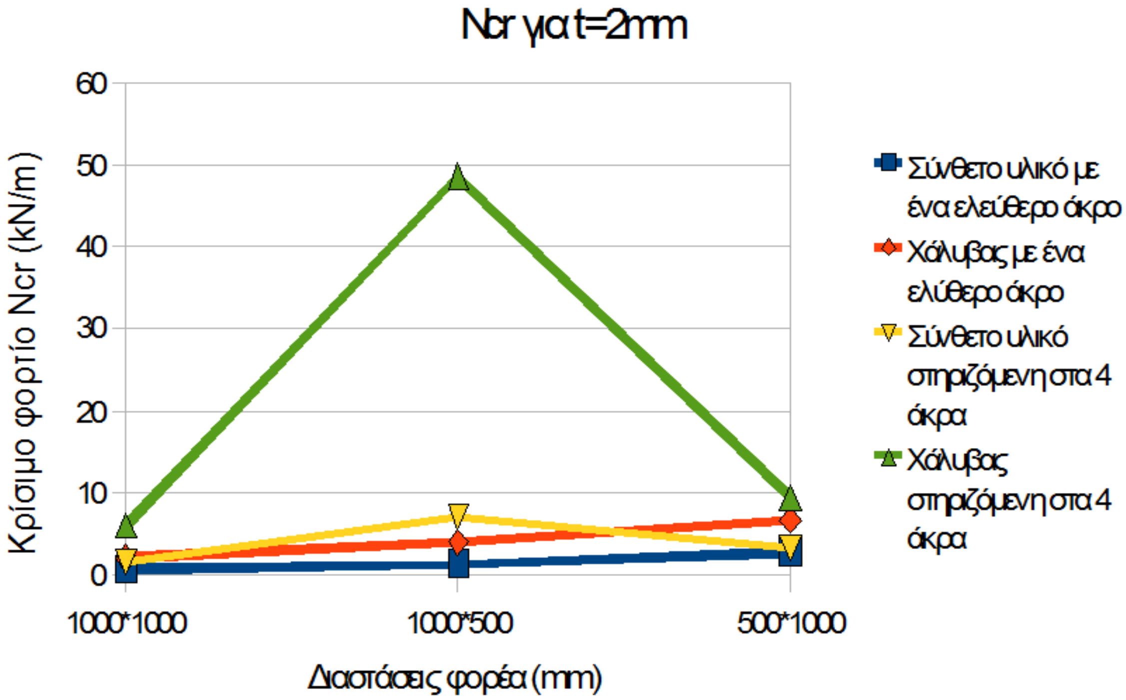
Σχήμα 5.44: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.4.4.2 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_2 / 0_{12} / \pm 45_2]$ - Χάλυβας



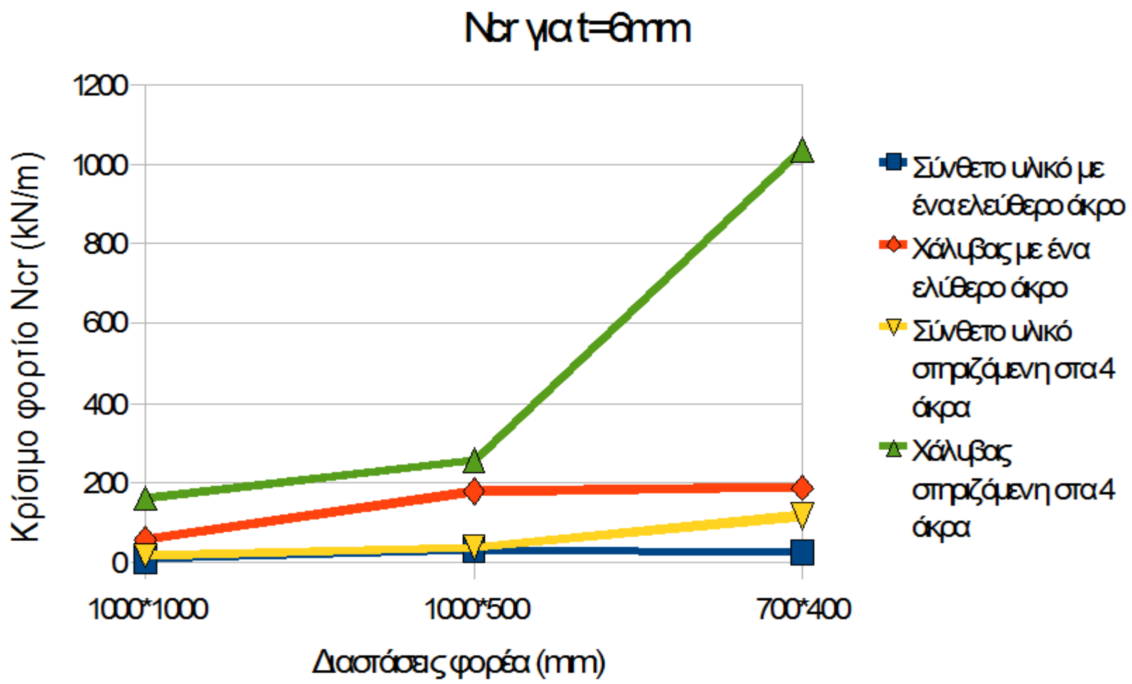
Σχήμα 5.45: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.4.4.3 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm 45_5\ /0_{10}]$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.46: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.4.4.4 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας

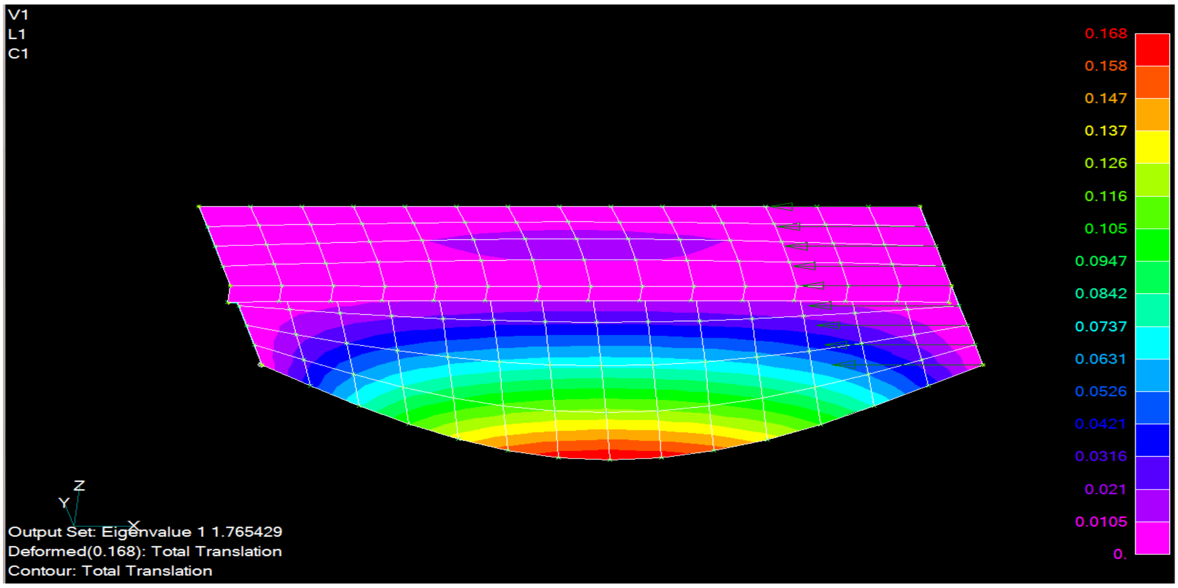


Σχήμα 5.47: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=6mm

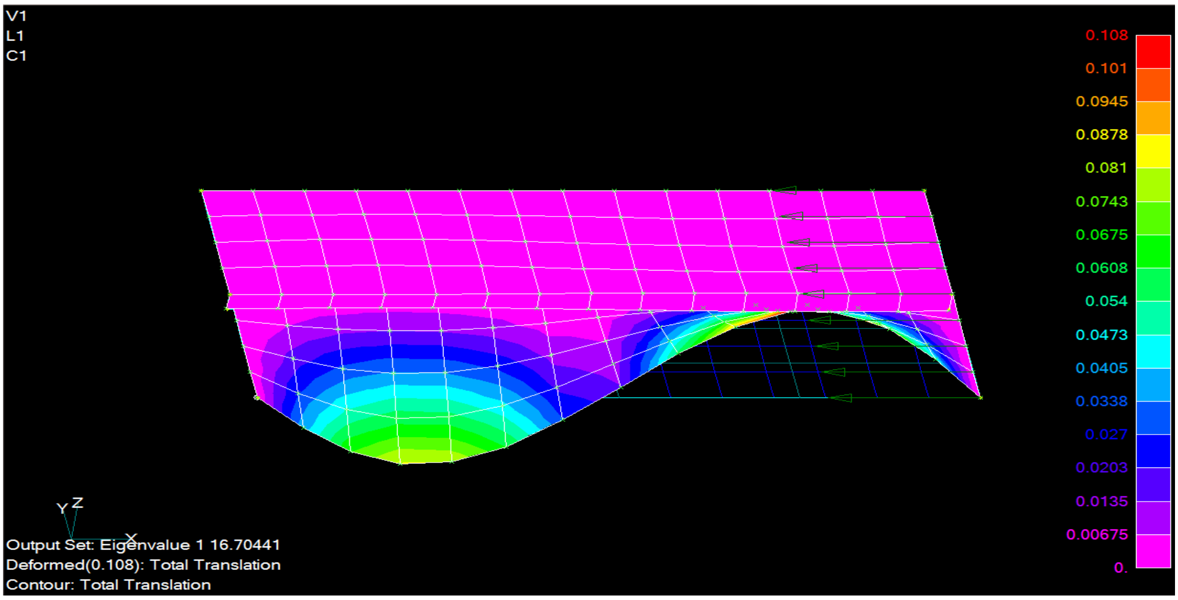
5.5 Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου κύρτωσης φορέων με ενισχύσεις που έχουν ένα άκρο ελεύθερο

5.5.1 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Nastran

5.5.1.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ -Χάλυβας

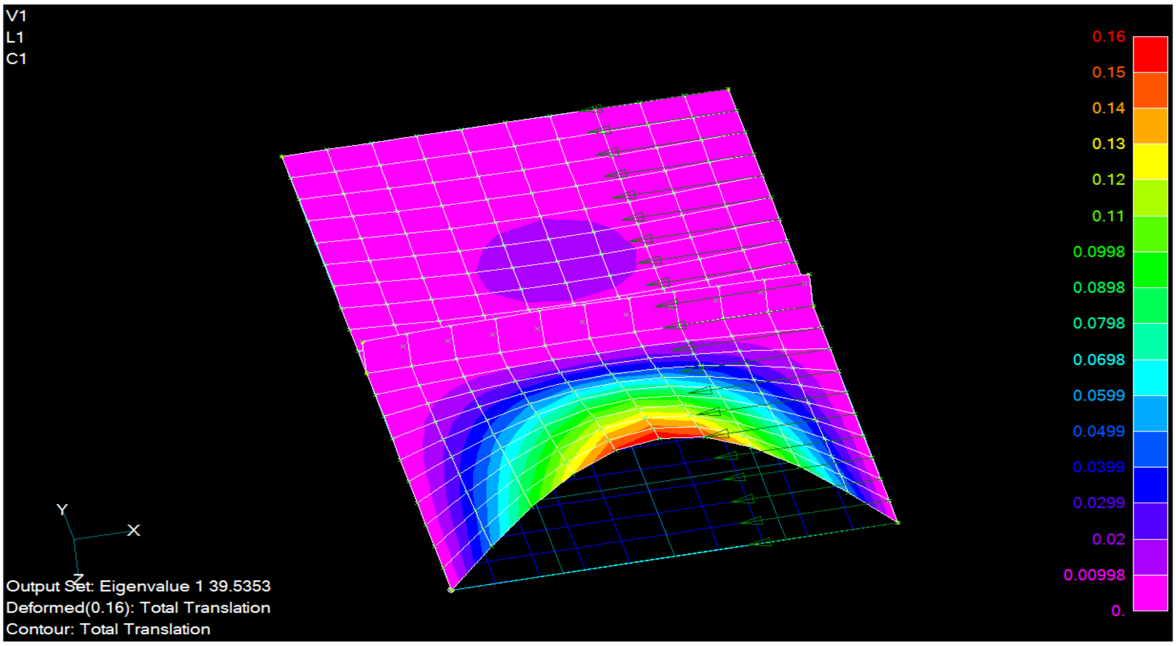


Σχήμα 5.48: Πλάκα 700×400×2mm από σύνθετο υλικό με ένα άκρο ελεύθερο και ενδιάμεση στήριξη 5×25mm με κρίσιμο φορτίο 1.77/0.4=4.41kN/m

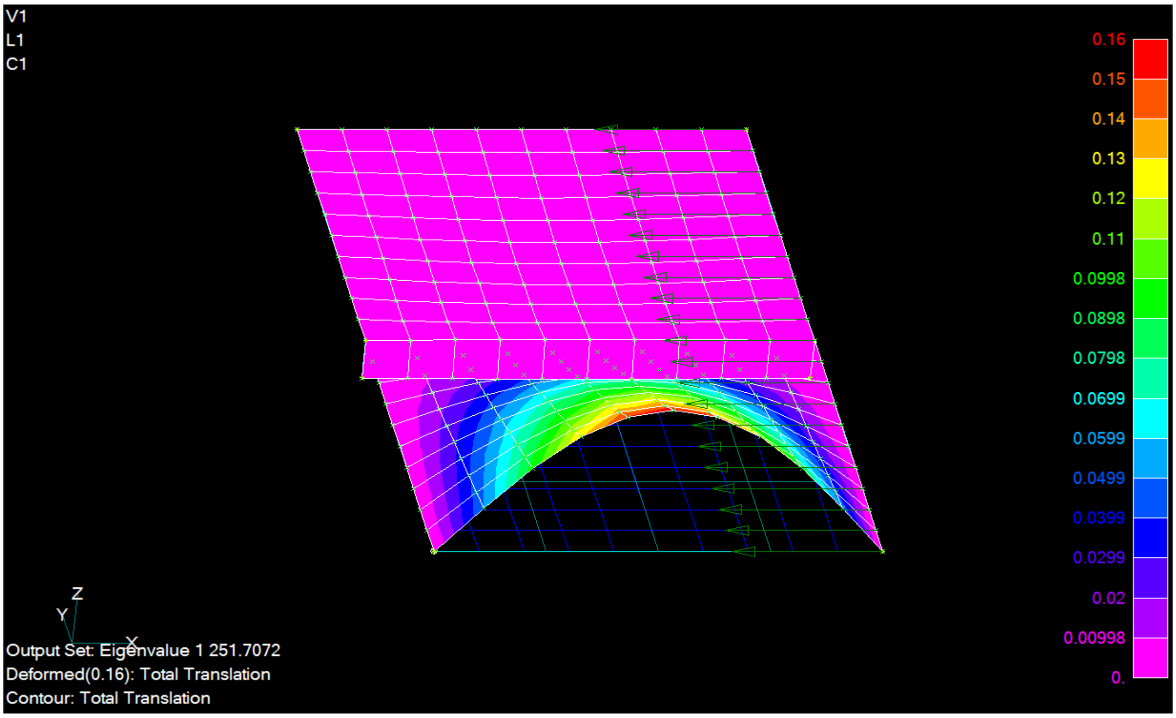


Σχήμα 5.49: Πλάκα 700×400×2mm από χάλυβα με ένα άκρο ελεύθερο και ενδιάμεση στήριξη 5×25mm με κρίσιμο φορτίο 16.70/0.4=41.75kN/m

5.5.1.2 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα και $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.50: Πλάκα 500×1000×6mm από σύνθετο υλικό με ένα άκρο ελεύθερο και ενδιάμεση στήριξη 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 39.54kN/m



Σχήμα 5.51: Πλάκα 500×1000×6mm χάλυβα με ένα άκρο ελεύθερο και ενδιάμεση στήριξη 10×50mm με κρίσιμο φορτίο 251.70kN/m

Πίνακας 5.13: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα ενισχυμένων με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Nastran

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	10	149.37	568.24
		1000	500	10	291.26	1540.86
		1000	500	5	42.46	402.44
		1 ενίσχυση 5×25mm				
		700	400	2	4.41	41.75
	$[\pm45_2\ /0_{12}\ /\ \pm45_2]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	500	2	7.26	25.82
		500	1000	2	2.75	9.75
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	0.99	5.99
		1000	500	2	4.28	25.82
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		500	1000	6	39.53	251.70
		700	400	6	115.40	1076.23

5.5.2 Αποτελέσματα με βάση την ανάλυση με το Mathematica 5.1

Πίνακας 5.14: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ πλακών από σύνθετα υλικά και χάλυβα ενισχυμένων με βάση τα αποτελέσματα από την επίλυση με το πρόγραμμα Mathematica

Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	N_{cr} σύνθετου (kN/m)	N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	10	148.17	432.49
		1000	500	10	247.16	1406.13
		1000	500	5	43.49	459.13
		1 ενίσχυση 5×25mm				
		700	400	2	3.67	48.77
	$[\pm45_2\ /0_{12}\ /\ \pm45_2]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	500	2	5.28	24.34
		500	1000	2	2.76	9.25
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	1.09	5.60
		1000	500	2	5.07	24.34
E-glass/ Epoxy	$[(0_2/90)_2]_S$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		500	1000	6	43.46	221.91
		700	400	6	121.60	862.04

5.5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο προσεγγίσεων

Προκειμένου να είναι ευκολότερη η γενική εποπτεία των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων ανάλυσης του προβλήματος κύρτωσης πλακών, παρατίθενται σε κοινούς πίνακες για ενισχυμένες πλάκες από χάλυβα (Πίνακας 5.15) και σύνθετα υλικά (Πίνακας 5.16) οι υπολογισμοί του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Πίνακας 5.15: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου σε πλάκες από σύνθετα υλικά ενισχυμένες ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

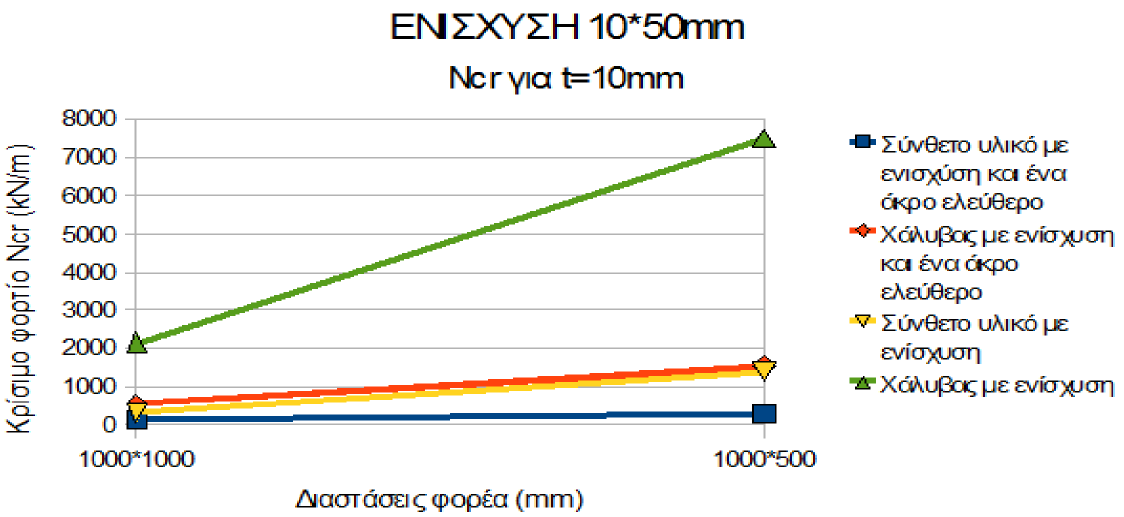
Υλικό	Διαστρωμάτωση	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} σύνθετου (kN/m)	Mathematica N_{cr} σύνθετου (kN/m)
Graphite/Epoxy	$[0_{10}]$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		1000	1000	10	149.37	148.17
		1000	500	10	291.26	247.16
		1000	500	5	42.46	43.49
		1 ενίσχυση 5×25mm				
		700	400	2	4.41	3.67
	$[\pm45_2/0_{12}/\pm45_2]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	500	2	7.26	5.28
		500	1000	2	2.75	2.76
	$[\pm45_5/0_{10}]$	1 ενίσχυση 5×25mm				
		1000	1000	2	0.99	1.09
		1000	500	2	4.28	5.07
E-glass/Epoxy	$[(0_2/90)_2]_s$	1 ενίσχυση 10×50mm				
		500	1000	6	39.53	43.46
		700	400	6	115.40	121.60

Πίνακας 5.16: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου σε πλάκες από χάλυβα ενισχυμένες ανάμεσα σε Nastran και Mathematica

Υλικό	Μήκος (mm)	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Nastran N_{cr} χάλυβα (kN/m)	Mathematica N_{cr} χάλυβα (kN/m)
Χάλυβας	1 ενίσχυση 10×50mm				
	1000	1000	10	568.24	432.49
	1000	500	10	1540.86	1406.13
	1000	500	5	402.44	459.13
	1 ενίσχυση 5×25mm				
	700	400	2	41.75	48.77
	1 ενίσχυση 5×25mm				
	1000	500	2	25.82	24.34
	500	1000	2	9.75	9.25
	1 ενίσχυση 5×25mm				
	1000	1000	2	5.99	5.60
	1000	500	2	25.82	24.34
	1 ενίσχυση 10×50mm				
	500	1000	6	251.70	221.91
	700	400	6	1076.23	862.04

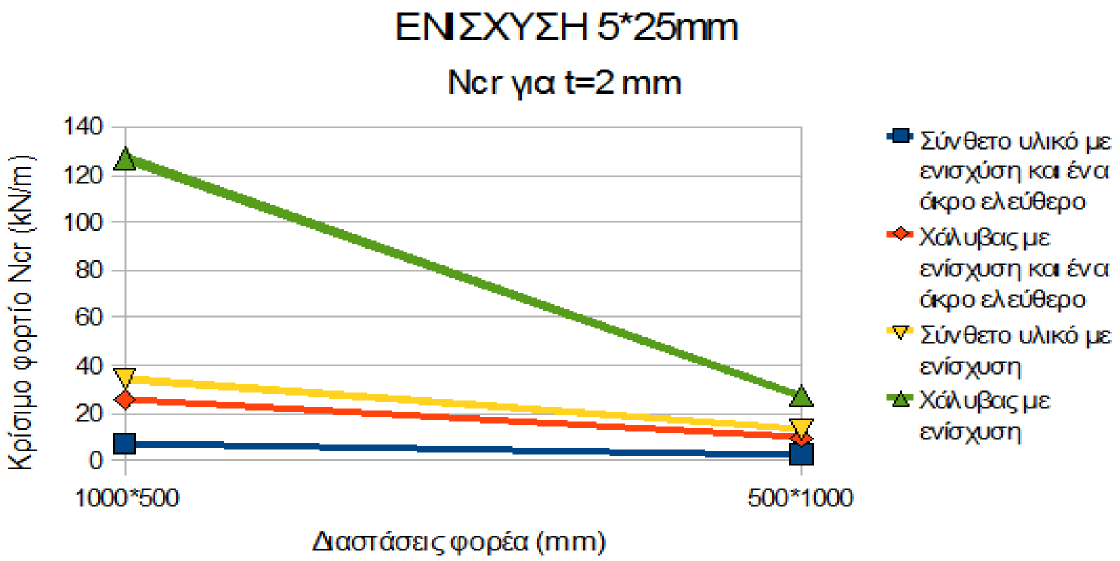
5.5.4 Σύγκριση κρίσιμου φορτίου μεταξύ ενισχυμένων πλακών με ένα ελεύθερο άκρο από σύνθετα υλικά και χάλυβα με τις αντίστοιχες στηριζόμενες και στα 4 άκρα μέσω διαγραμμάτων

5.5.4.1 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[0_{10}]$ –Χάλυβας



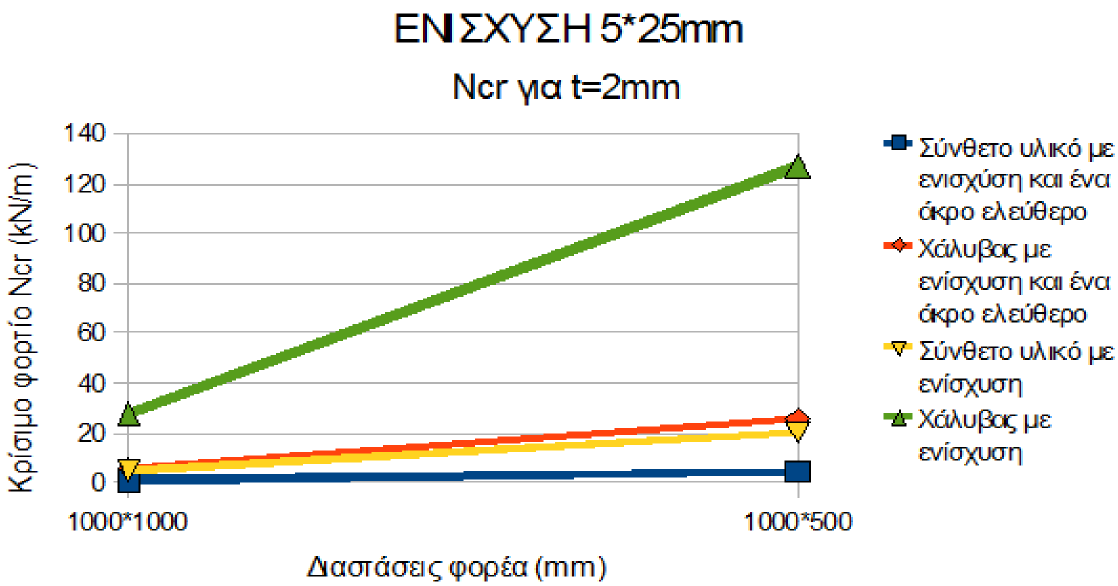
Σχήμα 5.52: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ ενισχυμένων πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=10mm

5.5.4.2 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm45_2\,/0_{12}\,/\pm45_2\,]$ - Χάλυβας



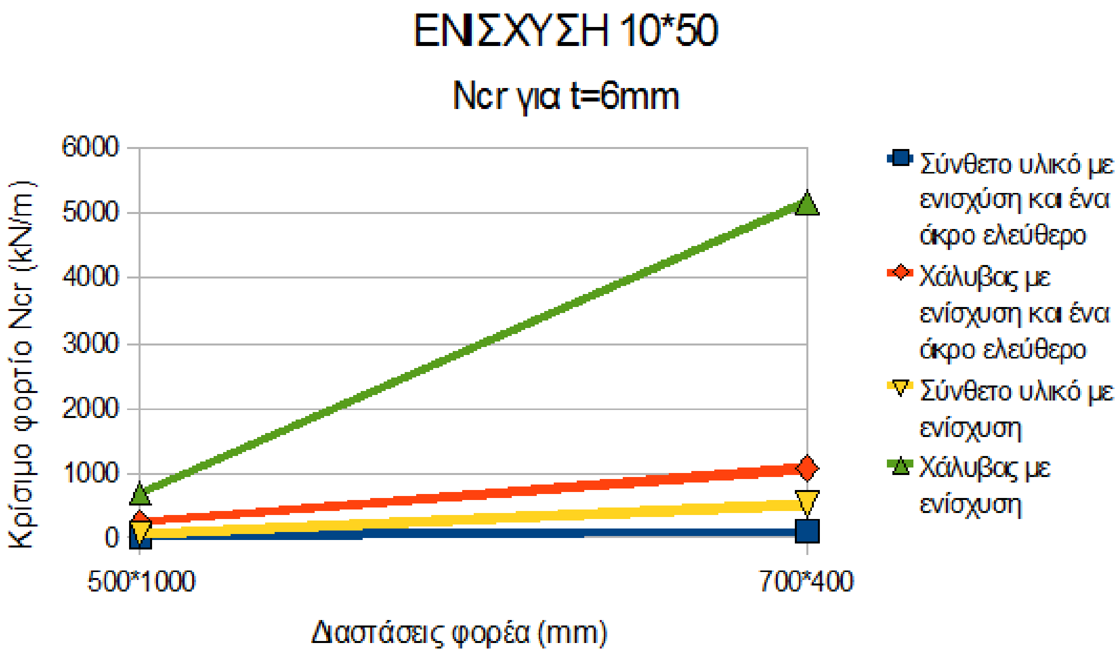
Σχήμα 5.53: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ ενισχυμένων πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.5.4.3 Υλικό διαστρωμάτωσης Graphite/Epoxy με κώδικα $[\pm45_5\ /0_{10}]$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.54: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ ενισχυμένων πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=2mm

5.5.4.4 Υλικό διαστρωμάτωσης E-glass/Epoxy με κώδικα $[(0_2\ /90)_2]_s$ -Χάλυβας



Σχήμα 5.55: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ ενισχυμένων πλακών με ένα ελεύθερο άκρο και στηριζομένων και στα 4 άκρα από χάλυβα και σύνθετο υλικό με t=6mm

6 Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η κατανόηση της συμπεριφοράς έναντι τοπικού λυγισμού ορθότροπων πλακών από σύνθετα υλικά. Χαρακτηριστικό μέγεθος που καθορίζει την αντοχή των πλακών σε λυγισμό είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που αναζητήθηκε στην παρούσα διερεύνηση. Εξετάστηκαν πλάκες από σύνθετα υλικά, απλά εδραζόμενες χωρίς ενισχύσεις αλλά και με μία ή δύο ενδιάμεσες ενισχύσεις καθώς και πλάκες με ένα άκρο ελεύθερο που είτε διαθέτουν είτε όχι ενισχύσεις. Προκειμένου να ελεγχεί η συμπεριφορά αυτή συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα με ιδίων διαστάσεων πλάκες από το πιο διαδεδομένο ισότροπο υλικό, τον χάλυβα, και προέκυψαν αρκετά συμπεράσματα.

Αρχικά, επειδή η ανάλυση έγινε με δύο προγράμματα (MSC Nastran for Windows και Mathematica 5.1) αξίζει να σημειωθεί ότι προέκυψαν εξαιρετικές συγκλίσεις. Συγκεκριμένα, στις αναλύσεις πλακών από χάλυβα χωρίς ενισχύσεις είτε απλά εδραζόμενων και στις 4 πλευρές είτε με ένα άκρο ελεύθερο η μέγιστη απόκλιση ήταν 2.25% ενώ η αντίστοιχη απόκλιση σε πλάκες από σύνθετα υλικά δεν ξεπέρασε σε καμία περίπτωση το 6%. Στην περίπτωση ύπαρξης ενισχύσεων σε χαλύβδινες πλάκες παρουσιάστηκε απόκλιση έως 18% αλλά στην πλειοψηφία των αναλύσεων η απόκλιση δεν ξεπερνούσε το 10%. Τέλος, σε πλάκες από σύνθετα υλικά με ενδιάμεσες ενισχύσεις η απόκλιση στην πλειοψηφία δεν ξεπέρασε το 10% με ελάχιστες εξαιρέσεις όπου έφθασε και το 26%, αποκλίσεις που όμως κρίθηκαν λογικές.

Επειδή σκοπός της εργασίας δεν ήταν η σύγκριση των δύο προγραμμάτων αλλά η σύγκριση της συμπεριφοράς σε λυγισμό μίας ισότροπης πλάκας με ιδίων διαστάσεων ορθότροπη πλάκα προέκυψε πως πλάκες από χάλυβα παρουσίασαν από 2 έως και 10 φορές μεγαλύτερο κρίσιμο φορίο λυγισμού. Καθοριστικό ρόλο στο μεγάλο αυτό εύρος παίζουν οι διαστάσεις των πλακών αλλά και ο προσανατολισμός των ινών στα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα ελάσματα από ορθότροπο υλικό παρουσίασαν μικρότερο κρίσιμο φορτίο που αιτιολογείται στα μικρότερα μέτρα ελαστικότητας ειδικά στην ασθενή τους διεύθυνση.

Στην περίπτωση προσθήκης ενισχύσεων σε απλά εδραζόμενες πλάκες παρατηρήθηκε προφανώς αύξηση του κρίσιμου φορτίου κύρτωσης αλλά αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι οι διαστάσεις της ενίσχυσης όπως και ο αριθμός των ενισχύσεων. Στην περίπτωση προσθήκης μίας ενίσχυσης παρατηρήθηκε έως και 5 φορές μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού από αντιστοίχων διαστάσεων πλάκες χωρίς ενίσχυση ενώ στην περίπτωση προσθήκης δύο ενισχύσεων παρατηρήθηκε μέχρι και 8 φορές μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο. Μεταξύ πλακών από χάλυβα με ενισχύσεις και των αντίστοιχων από σύνθετα υλικά το φορτίο στις ισότροπες πλάκες, και εδώ, ήταν από 2 έως 10 φορές μεγαλύτερο.

Όπως ήταν αναμενόμενο αν η πλάκα δεν στηρίζεται και στις 4 πλευρές αλλά έχει ένα άκρο ελεύθερο τότε παρουσιάζει μικρότερο φορτίο λυγισμού. Ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση αυτή έχει το γεγονός ότι αν το ελεύθερο άκρο έχει διάσταση περίπου το ½ της φορτιζόμενης επιφάνειας τότε οι μεταβολές στο κρίσιμο φορτίο είναι “μικρές” (της τάξης

1.2 έως 2 φορές μικρότερο) ενώ σε διαφορετική περίπτωση μπορεί να φθάσει έως και τις 6 φορές μικρότερο από πλάκες που στηρίζονται και στις 4 πλευρές. Συγκρίνοντας μεταξύ τους χαλύβδινες πλάκες και πλάκες από σύνθετα υλικά παρατηρήθηκε και εδώ μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο στις ισότροπες πλάκες από 1.5 έως 9 φορές τόσο χωρίς ενισχύσεις όσο και με ενισχύσεις.

Τα παραπάνω συμπεράσματα μαζί με τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 5 που για καλύτερη εποπτεία παρουσιάζονται μέσω διαγραμμάτων οδηγούν στην καλύτερη κατανόηση του φαινομένου του τοπικού λυγισμού πλακών και στις διαφορές που παρουσιάζει το φαινόμενο ανάμεσα σε ένα ορθότροπο και ένα ισότροπο υλικό.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν μέσα από τη διερεύνηση που έγινε στην παρούσα διπλωματική εργασία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν δεδομένα στη μελέτη πλακών σε οποιαδήποτε κατασκευή ή σαν μέτρο σύγκρισης σε μελέτες έναντι λυγισμού πλακοειδών στοιχείων. Προτείνεται να γίνει επέκταση της συγκεκριμένης έρευνας μελλοντικά χρησιμοποιώντας και άλλα σύνθετα υλικά καθώς και διερεύνηση πάνω στο γεγονός της ευκολίας κατάταξης των αποτελεσμάτων σε κατηγορίες ώστε να μπορούν να χρησιμοποιούνται έτοιμα. Ακολούθως, προτάσσσεται σύγκριση του κρίσιμου φορτίου με το βάρος των υλικών για την επίτευξη βέλτιστου σχεδιασμού τέτοιου είδους κατασκευών. Τέλος, συνίσταται ως θέμα μελλοντικής έρευνας η προσθήκη ενισχύσεων διαφορετικού υλικού από το έλασμα και οι διαφοροποιήσεις στην τιμή του κρίσιμου φορτίου σε σχέση με την προσθήκη ίδιου υλικού ενισχύσεων.

7 Βιβλιογραφία

1. Βάγιας Ι., Dab Dubina, "Σιδηρές Κατασκευές από λεπτότοιχες διατομές ψυχρής διαμόρφωσης", εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2004.
2. EN 1993-1-5, Ευρωκώδικας 3: "Σχεδιασμός κατασκευών από χάλυβα. Μέρος 1-5: Μέλη από επίπεδα ελάσματα".
3. EN 1993-1-3, Ευρωκώδικας 3: " Σχεδιασμός κατασκευών από χάλυβα. Μέρος 1-3: Γενικοί κανόνες. Πρόσθετοι κανόνες για μέλη και φύλλα ψυχρής έλασης".
4. Ραυτογιάννης Ι., "Σύνθετα Υλικά", Αθήνα 2009.
5. Ραυτογιάννης Ι., "Κατασκευές από Σύνθετα Υλικά", Αθήνα 2007.
6. Laszlo P. Kollar, George S. Springer, "Mechanics of Composite Structures", Cambringe 2003.
7. Παπαδρακάκης Μ., Γκισάκης Α., "Επίτομο Εγχειρίδιο MSC Nastran for Windows v4.5", Αθήνα 2004.
8. Παπαγεωργίου Γ., Τσίτουρας Χ., Φαμέλης Ι., "Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό MATLAB –MATHEMATICA, Εισαγωγή και Εφαρμογές", Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004.
9. Θεοδώρου Γ., Θεοδώρου Χ., "Πρακτικός Οδηγός για τη Mathematica", Θεσσαλονίκη 2004.
10. Κορωναίος Θ., "Ενεργό Πλάτος Εσωτερικών Καμπύλων Χαλύβδινων Στοιχείων", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Αθήνα 2013.
11. Δούκα Χριστίνα –Σωτηρία, "Αριθμητική και Πειραματική Ανάλυση Λυγισμού Πλακών από Σύνθετα Υλικά με Γεωμετρικές Ατέλειες", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Ναυπηγικής Τεχνολογίας, Αθήνα 2009.
12. Γαργανίδης Γ., "Η Επίδραση του Αποχωρισμού των Στρώσεων στο Λυγισμό Πλακών από Σύνθετα Υλικά", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Θαλάσσιων Κατασκευών, Αθήνα 2009.
13. Γαντές Χ., "Μη γραμμική Συμπεριφορά Επιφανειακών Στοιχείων –Τοπικός Λυγισμός –Πλευρικός Λυγισμός", Διάλεξη 9 στο μάθημα "Μη Γραμμική Συμπεριφορά Μεταλλικών Κατασκευών", Αθήνα 2009.