ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μοντέλο Τυχαίων Συντελεστών για την Αξιολόγηση της Διδασκαλίας

Φωτίου Διαμάντω

Τριμελής Επιτροπή

Δημήτρης Φουσκάκης (Επιβλέπων), Επ. Καθηγητής
Χρυσηΐς Καρώνη, Καθηγήτρια
Μιχαήλ Λουλάκης, Επ. Καθηγητής

Αθήνα, Απρίλιος 2014

Αφιερώνεται

Στη μητέρα, τη γιαγιά
και τον αδερφό μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου Δημήτριο Φουσκάκη για τις συστατικές επιστολές που μου έδωσε, τη συνεργασία και τη συμβολή του εντός και εκτός πλαισίων της παρούσας εργασίας στην κατανόηση εννοιών στον κλάδο της στατιστικής και κυρίως στο γνωστικό πεδίο που αφορά την ανάλυση δεδομένων και την εξαγωγή συμπερασμάτων, καθώς η γνώση και η εμπειρία του ήταν καθοριστικής σημασίας ώστε να ενισχύσει το ενδιαφέρον και τη συμπάθειά μου για το συγκεκριμένο αντικείμενο κατά τη διεξαγωγή των αντίστοιχων προπτυχιακών μαθημάτων.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Γιώργο Πετράκο για την αποδοχή μου στην εταιρεία Agilis στα πλαίσια εκπόνησης της πρακτικής μου άσκησης, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με θέματα στατιστικής και να έρθω σε επαφή με το αντικείμενο της έρευνας καθοδηγώντας με με πολύτιμες συμβουλές, τα υπόλοιπα μέλη της τριμελής μου επιτροπής καθώς και όλους τους καλούς καθηγητές που είχα εώς τώρα στο σχολείο και στο Πολυτεχνείο, που με την οργάνωση, τη μεταδοτικότητα και τον αγώνα τους μου καλλιέργησαν την ικανότητα να μαθαίνω με αποτελεσματικό τρόπο προκειμένου να χειρίζομαι διάφορα προβλήματα.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους ανθρώπους που με στηρίζουν, τις φίλες και τους φίλους μου για τα όμορφα φοιτητικά μας χρόνια και κυρίως τη μητέρα, τη γιαγιά και τον αδερφό μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους σε όλους τους τομείς της ζωής μου, ευχόμενη σε όλους και στον καθένα ξεχωριστά, η πίστη στις δυνατότητές τους να αποτελεί αρωγό σε κάθε στόχο και όνειρό τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1
Το πρόβλημα της αξιολόγησης

Κεφάλαιο 2
Μοντέλο τυχαίων συντελεστών της κατανομής Dirichlet για ποιοτικούς δείκτες

Κεφάλαιο 3
Αξιολόγηση της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου

Κεφάλαιο 4
Μπεϋζιανό ιεραρχικό γραμμικό μοντέλο για ποιοτικούς δείκτες

Κεφάλαιο 5

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πρόθεση της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση ενός μοντέλου παλινδρόμησης σε διαδικασίες αποτίμησης της ποιότητας διαφόρων παρεχόμενων υπηρεσιών, ούτως ώστε να δρομολογούνται ουσιαστικές αλλαγές με σκοπό την αναβάθμισή των υπηρεσιών ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες τους. Η χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου κατά τη διαδικασία αξιολόγησης ωφελεί στο να αναδειχτούν τα χαρακτηριστικά εκείνα που συνθέτουν τη συνολική ποιότητα της παρεχόμενης υπηρεσίας και ενδιαφέρουν περισσότερο την κοινωνική ομάδα που αφορά η αξιολόγηση, δηλαδή τα χαρακτηριστικά εκείνα στα οποία δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα και άρα η εξυγίανση των οποίων θα συμβάλλει στην ουσιαστική βελτίωση των αδυναμιών της υπηρεσίας.

Στο **Κεφάλαιο 1 γ**ίνεται η διατύπωση του κύριου προβλήματος που εμφανίζεται σε διαδικασίες αξιολόγησης και των αδυναμιών της υφιστάμενης μεθοδολογίας. Παρουσιάζονται οι κύριοι στόχοι της διπλωματικής εργασίας και δίνεται μια γενική περιγραφή της προτεινόμενης μεθοδολογίας με το εγχείρημα να επισημανθεί η σπουδαιότητά της.

Στο Κ**εφάλαιο 2** παρουσιάζεται θεωρητικά με χρήση κλασικής στατιστικής το προτεινόμενο γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης με τις υποθέσεις και τις επιμέρους μεθοδολογίες που το χτίζουν καθώς και τα βήματα της εκτιμητικής που αφορούν τους συντελεστές του, οι οποίοι ορίζονται ως βάρη και θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές προερχόμενες από την κατανομή Dirichlet. Επιπλέον δίνονται κάποια διαγνωστικά εργαλεία και τρόποι να γίνουν προβλέψεις για τα βάρη.

Στο Κ**εφάλαιο 3** παρουσιάζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία μέσω εφαρμογής της σε δεδομένα για την αξιολόγηση της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου, προσδιορίζοντας την κατανομή των συντελεστών βαρύτητας, δηλαδή εκτιμώντας τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής.

Στο Κ**εφάλαιο 4** παρουσιάζεται συνοπτικά ένας εναλλακτικός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος, με χρήση Μπεϋζιανής προσέγγισης.

Φωτίου Διαμάντω, Αθήνα, Απρίλιος 2014
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Κεφάλαιο 1

Το πρόβλημα της αξιολόγησης

1. Εισαγωγή

Είναι γεγονός ότι σε κάθε στάδιο της ζωής του ο άνθρωπος είναι αναγκασμένος να κάνει συνεχώς εκτιμήσεις, συγκρίσεις, μετρήσεις, επιλογές, κλπ., δηλαδή, να αξιολογεί. Αξιολόγηση είναι γενικά η προσπάθεια να προσδιορίσουμε την αξία κάποιου πράγματος, κάποιας διαδικασίας, κάποιου προσώπου κλπ. Η αξία όμως μπορεί να αναφέρεται σε πολλές πιο ειδικές και πιο συγκεκριμένες έννοιες, ανάλογα με τις εκάστοτε δραστηριότητες. Μπορεί να σημαίνει ποιότητα, χαρακτηριστικά, απόδοση, αποδοτικότητα, επίδοση, καταλληλότητα, κοκ. Συνεπώς, κάθε προσπάθεια ή διαδικασία για την εκτίμηση τέτοιων ειδικότερων χαρακτηριστικών είναι αξιολόγηση.

Σήμερα ο ρόλος της αξιολόγησης σε κάθε τομέα δραστηριότητας αναγνωρίζεται ως όλο και πιο σημαντικός και ως εκ τούτου έχει αναπτυχθεί ένα αρκετά στέρεο θεωρητικό αλλά και μεθοδολογικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται η πρακτική της αξιολόγησης διεθνώς.

Στην προσπάθειά μας να αξιολογήσουμε την ποιότητα ενός αντικειμένου, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα γραμμικό μοντέλο στο οποίο η ποιότητα αυτή δύναται να εκφραστεί ποσοτικά ως ένας γραμμικός συνδυασμός των βασικών χαρακτηριστικών που τη συνθέτουν. Με τη σειρά τους τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να εκφραστούν ως γραμικοί συνδυασμοί επιμέρους χαρακτηριστικών σε μια ιεραρχική διαδικασία που συνεχίζεται μέχρι τα επιμέρους χαρακτηριστικά να γίνουν στοιχειώδη και μετρήσιμα. Η επιλογή των χαρακτηριστικών σε όλα τα επίπεδα, γίνεται ικανοποιώντας ως βασικές αρχές την πλήρη κάλυψη του αντικειμένου, την οικονομία καθώς και την αποφυγή επικαλύψεων και συσχετίσεων, ενώ η συλλογή των δεδομένων για την εκτίμηση των συντελεστών του εν λόγω γραμμικού μοντέλου, γίνεται από μέλη της κοινωνικής ομάδας την οποία αφορά η αξιολόγηση.

Στο σημείο αυτό έχουμε τους ακόλουθους προβληματισμούς:

- Κατά πόσο τα εξειδικευμένα χαρακτηριστικά συνιστούν πράγματι τα βασικά χαρακτηριστικά του αντικειμένου της αξιολόγησης και ο συνδυασμός τους παρέχει έναν αξιόπιστο δείκτη της ποιότητάς του.

- Κατά πόσο παρέχεται στους ερωτώμενους η δυνατότητα να ιεραρχούν τα επιμέρους χαρακτηριστικά της αξιολόγησης. Κατά πόσο δηλαδή η ίδια κοινωνική ομάδα την οποία αφορά η αξιολόγηση μπορεί να σταθμίζει ανάλογα με τις προσδοκίες και απαιτήσεις της, τα χαρακτηριστικά αυτά με κάποιους συντελεστές βαρύτητας ούτως ώστε η αξιολόγηση να εγγυάται ότι συμβάλλει πράγματι στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας του υπό μελέτη αντικειμένου, χωρίς να δίνεται έμφαση στην εξυπηρέτηση στόχων (χαρακτηριστικά), τα οποία οι ενδιαφερόμενοι θεωρούν άνευ σημασίας.

1.1 Κύριοι στόχοι

Επί της παρούσας εργασίας και για τους προαναφερθείς προβληματισμούς, επιχειρούμε την εισαγωγή ενός συστήματος σύνθετων δεικτών, του οποίου οι συντελεστές βαρύτητας προκύπτουν ως εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων ενός ιεραρχικού γραμμικού μοντέλου που περιλαμβάνει τα βασικά χαρακτηριστικά της ποιότητας, όπως αυτή ορίζεται, αξιολογείται και μετριέται στο υπό μελέτη αντικείμενο.

Οι κύριοι στόχοι μας αποσκοπούν στην αντιμετώπιση του μειονεκτήματος των περισσότερων μεθοδολογιών κατά τις οποίες η στάθμιση των χαρακτηριστικών της αξιολόγησης επιχειρείται εκ των υστέρων από τους φορείς της αξιολόγησης με υποκειμενικά κριτήρια που καθορίζονται εξωγενώς και κατά συνέπεια όπως ήδη ειπώθηκε μπορεί να μην δίνεται έμφαση σε στόχους (χαρακτηριστικά) που είναι κρίσιμης σημασίας για τις ενδιαφερόμενες κοινωνικές ομάδες.

Η μεθοδολογία που θα προτείνουμε για τον βασικό μας σκοπό, θα εφαρμοστεί σε δεδομένα που συλλέχθησαν για την αξιολόγηση της διδασκαλίας στο **τμήμα Δημόσιας Διοίκησης στο Πάντειο Πανεπιστήμιο,** αφού πρώτα εν συντομία περιγραφούν σε ξεχωριστή ενότητα οι αδυναμίες της μέχρι τώρα υφιστάμενης μεθοδολογίας για την αξιολόγηση των ακαδημαικών μονάδων.

Αυτό προκειμένου να γίνει αντιληπτή η χρησιμότητα της προτεινόμενης μεθοδολογίας στην αξιολόγηση των ακαδημαϊκών μονάδων, της οποίας σαφώς η πρακτική αξία δεν περιορίζεται μόνο εκεί, αλλά εκτείνεται σε όλες τις περιπτώσεις κοινωνικής επιλογής κατά τις οποίες εφαρμόζεται ήδη ένα συγκεκριμένο πλαίσιο κριτηρίων και ο φορέας επιλογής θεωρεί ότι όλες οι εναλλακτικές προτάσεις δεν είναι ίσης κοινωνικής σημασίας και ότι η βαρύτητά τους δεν πρέπει να καθορίζεται εκ των προτέρων εξωγενώς αλλά από την ίδια την κοινωνική ομάδα στην οποία αναφέρονται.

Χρησιμότητα της Προτεινόμενης Μεθοδολογίας

Η σπουδαιότητα της προτεινόμενης μεθοδολογίας επισημαίνεται στο γεγονός ότι θα μπορούσε να φανεί ωφέλιμη σε πολλές περιπτώσεις αξιολόγησης, όπως την αξιολόγηση **Υπηρεσιών, Οργανισμών, Υπαλλήλων, Προγραμμάτων, Δομών** (επάρκεια υποδομών, αποτελεσματικότητα διοικητικών και τεχνικών υπηρεσιών, αποτελεσματικότητα στη διαχείρηση των οικονομικών πόρων και στη χρήση των υποδομών, κ.α.). Μάλιστα θα είχε ιδιαίτερη σημασία να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις της **τοπικής αυτοδιοίκησης**, όπως **κοινότητες, δήμοι, νομαρχίες,** εφόσον οι επιλογές της τοπικής κοινωνίας θα πρέπει να αποτελούν το βασικό κριτήριο λήψης αποφάσεων. Ιδιαίτερα σε αυτό το κομμάτι θα αναφερθούμε στην Ενότητα 1.4.

1.2 Κριτική της υφιστάμενης μεθοδολογίας στην αξιολόγηση των ακαδημαϊκών μονάδων

Το ζήτημα της αξιολόγησης των ακαδημαϊκών μονάδων έχει λάβει ιδιαίτερη έκταση στη χώρα μας κατά τα τελευταία χρόνια και αποτελεί το επίκεντρο ακαδημαϊκών αλλά και πολιτικών αντιπαραθέσεων, ενώ συχνά παρατηρείται σύγχυση ως προς το περιεχόμενο και τους σκοπούς της. Όταν η αξιολόγηση πραγματοποιείται από τις ίδιες τις μονάδες καλείται εσωτερική αξιολόγηση ή αυτοαξιολόγηση ενώ όταν πραγματοποιείται από κάποιο ανεξάρτητο φορέα καλείται εξωτερική.

Με την αυτοαξιολόγηση επιδιώκεται η ανάδειξη τόσο των επιτεύξεων όσο και των ενδογενών ή εξογενών αδυναμιών τους, ώστε οι ίδιες οι ακαδημαϊκές μονάδες να επιλέξουν διορθωτικές διαδικασίες προκειμένου να οδηγηθούν από μόνες τους στις αναγκαίες προσαρμογές για την αποτελεσματικότερη υλοποίηση του ερευνητικού, διδακτικού και διοικητικού τους έργου, με έμφαση στη θεσμική τους αυτονομία και στην αναγνώριση των διαφορών μεταξύ των επιμέρους γνωστικών πεδίων.

Επομένως η αυτοαξιολόγηση, εφόσον ικανοποιεί τις αναγκαίες προϋποθέσεις, συνιστά βασικό πυλώνα διασφάλισης της ποιότητας της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, κυρίως από την πλευρά των ακαδημαϊκών μονάδων, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ουσιώδες μέσο της στρατηγικής βελτίωσης της αποτελεσματικότητάς τους και ανάληψη διορθωτικής δράσης, αλλά και από την πλευρά της διαπίστωσης του βαθμού ανταπόκρισής τους στις σύγχρονες απαιτήσεις της κοινωνίας.

Η αυτοαξιολόγηση των ακαδημαϊκών μονάδων στηρίζεται συνήθως σε τέσσερις ομάδες κριτηρίων:

- του διδακτικού έργου,
- του ερευνητικού έργου,
- των προγραμμάτων προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών,
- των λοιπών υπηρεσιών (επάρκεια υποδομών, αποτελεσματικότητα διοικητικών και τεχνικών υπηρεσιών, αποτελεσματικότητα στη διαχείρηση των οικονομικών πόρων και στη χρήση των υποδομών, κ.α.).

Τα παραπάνω κριτήρια συνιστούν τους βασικούς άξονες της αυτοαξιολόγησης και αναφέρονται στην ποιότητα. Στην πράξη μπορεί να μην καλύπτει όλα τα παραπάνω και να περιορίζεται σε ορισμένα από αυτά όπως για παράδειγμα στα προγράμματα προπτυχιακών σπουδών.

Βασικό μέσο κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης των ακαδημαϊκων μονάδων, αποτελούν τα **ερωτηματολόγια** (που απευθύνονται προς τους φοιτητές, τους αποφοίτους, τους διδάσκοντες και τους εργοδότες) και έχουν ως αντικειμενικό σκοπό να επισημάνουν, να περιγράψουν και να ποσοτικοποιήσουν τα παραπάνω κριτήρια σε ομαδοποιημένο επίπεδο (π.χ. μάθημα/διδάσκων). Η έκθεση της αξιολόγησης στηρίζεται κατά κανόνα στις απαντήσεις των ερωτώμενων.

Βασικό Μειονέκτημα:

Η υφιστάμενη μεθοδολογία αξιολόγησης δεν παρέχει τη δυνατότητα στους ερωτώμενους να ιεραρχούν τις επιμέρους διαστάσεις ή τα χαρακτηριστικά της αξιολόγησης. Δεν παρέχεται η δυνατότητα στην ίδια την κοινωνική ομάδα την οποία αφορά η αξιολόγηση, να σταθμίσει με κάποιους συντελεστές βαρύτητας τα χαρακτηριστικά της αξιολόγησης καθώς η όποια στάθμιση όπως ήδη έχει αναφερθεί επιχειρείται εκ των υστέρων από τους φορείς της αξιολόγησης με υποκειμενικά κριτήρια που καθορίζονται εξωγενώς.

Έτσι κατ' αυτόν τον τρόπο δεν λαμβάνονται υπόψην οι προσδοκίες ή απαιτήσεις των κοινωνικών ομάδων στις οποιές αναφέρεται η αξιολόγηση και τίποτα δεν εγγυάται τη βελτίωση της αποτελεσματικής λειτουργίας των ακαδημαϊκών μονάδων, αφού είναι δυνατόν να δίνεται έμφαση σε στόχους (χαρακτηριστικά) άνευ σημασίας για τις ενδιαφερόμενες κοινωνικές ομάδες.

1.3 Παρουσίαση της προτεινόμενης μεθοδολογίας

Αρχικά υποθέτουμε ότι θέλουμε να αξιολογήσουμε για παράδειγμα την ποιότητα της διδασκαλίας σε κάποιο Πανεπιστήμιο. Μια σύνοψη της προτεινόμενης μεθοδολογίας, προβάλλεται ακολούθως ως εξής:

Έστω $\boldsymbol{X}_j,\ j=1,2,\dots,\kappa$ ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών που στο σύνολό τους συνθέτουν (με διαφορετικά βάρη) την ποιότητα της διδασκαλίας και w_j ο συντελεστής βαρύτητας που αντιστοιχεί στο $\boldsymbol{X}_j$ χαρακτηριστικό υπό τους περιορισμούς,

$$\sum_{j=1}^{\kappa} w_j = 1 \quad (1)$$

$$w_j \geq 0,\quad j=1,\,2,\,\dots,\,\kappa. \quad (2)$$

Αν Q είναι η συνολική ποιότητα της διδασκαλίας, όπως αυτή αντιλαμβάνονται οι φοιτητές, τότε αυτή μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των χαρακτηριστικών της, δηλαδή, $Q=\sum_{j=1}^{\kappa} w_j X_j$.

Ένα δείγμα από φοιτητές μεγέθους n καλείται να αξιολογήσει σε μια κλίμακα (π.χ. 0-10) τα χαρακτηριστικά X_j αλλά και τη συνολική ποιότητα Q στην ίδια κλίμακα. Έτσι λαμβάνουμε:

a) Τον πίνακα σχεδιασμού $\boldsymbol{X}=\{X_{ij}, i=1,2,\ldots,n \ \textit{και} \ j=1,2,\ldots,\kappa\}$, όπου n ο αριθμός των παρατηρήσεων και κ ο αριθμός των χαρακτηριστικών.
b) Το διάνυσμα των παρατηρήσεων της μεταβλητής απόκρισης,
$\boldsymbol{Y}=\{Y_i, i=1,2,\ldots,n\}$ όπου $Y_i=Q_i+\varepsilon_i$, με $Q_i=\sum_{j=1}^{\kappa} w_j X_{ij}$ και $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ το τυχαίο σφάλμα.

Γενική Ιδέα:

Η γενική ιδέα της μεθοδολογίας μας είναι να εφαρμόσουμε το γραμμικό μοντέλο $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{\varepsilon}$ ή ισοδύναμα σε αναλυτική μορφή,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} \ldots X_{1\kappa} \\ \ddots \\ X_{n1} \ldots X_{n\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_\kappa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_\kappa \end{bmatrix} \quad (1)$$

και να υπολογίσουμε την **εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων (OLS)** για το διάνυσμα των συντελεστών $\boldsymbol{w}$, υπό τους περιορισμούς $\boldsymbol{1}'\boldsymbol{w}=1$ και $\boldsymbol{I_\kappa}\boldsymbol{w}\geq\boldsymbol{0}$ ή ισοδύναμα,

$$[1\ldots1]\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_\kappa \end{bmatrix}=1. \quad (2)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα Μπεϋζιανό γραμμικό μοντέλο, θεωρώντας τους συντελεστές w_j να ακολουθούν Dirichlet κατανομή μιας και από τη φύση της εν λόγω κατανομής ικανοποιούνται αυτόματα οι περιορισμοί (2) (βλ. αντίστοιχη έρευνα Daniel Peña, 2006).

Κατόπιν το κάθε ένα από τα κ βασικά χαρακτηριστικά X_j της ποιότητας αναλύεται σε ένα δεύτερο επίπεδο σε μία ομάδα επιμέρους χαρακτηριστικών που με τη σειρά τους συνθέτουν το κάθε βασικό χαρακτηριστικό.

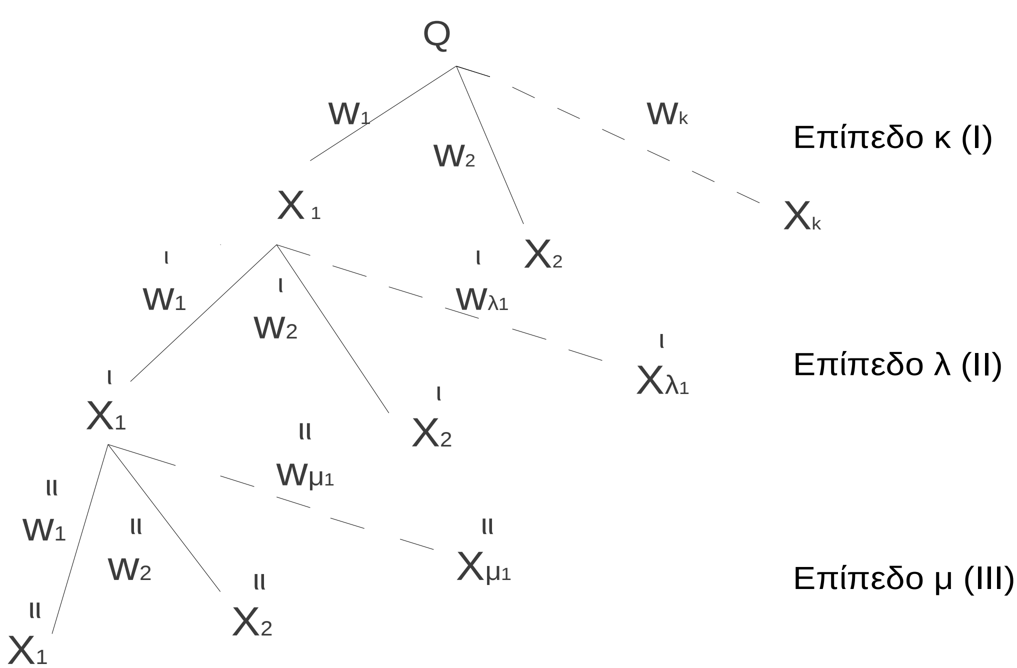
'Ετσι καταλήγουμε σε μια ομάδα κ νέων γραμμικών μοντέλων της μορφής:

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{j}} \,,$$

όπου

$$\begin{bmatrix} X_{j1} \\ \vdots \\ X_{jnj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}^{j} \dots X_{1\lambda j}^{j} \\ \ddots \\ X_{nj1}^{j} \dots X_{nj\lambda j}^{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1}^{j} \\ \vdots \\ w_{\lambda j}^{j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\lambda j} \end{bmatrix}$$

όπου $j = 1, 2, \ldots, \kappa$ ο δείκτης των βασικών χαρακτηριστικών, λ_j ο αριθμός των επιμέρους χαρακτηριστικών του δευτέρου επιπέδου για κάθε κύριο χαρακτηριστικό X_j και n_j το μέγεθος των αντίστοιχων δειγμάτων. Οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων αυτών των μοντέλων υπό τους συνήθεις περιορισμούς θα μας δώσουν τους συντελεστές βαρύτητας $w_1^j, w_2^j, \ldots, w_{\lambda j}^j$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία κατασκευάζουμε ένα δέντρο ιεραρχικών γραμμικών μοντέλων τριών ή και περισσοτέρων επιπέδων σταματώντας εκεί που τα χαρακτηριστικά γίνονται στοιχειώδη και άμεσα μετρήσιμα.



Διάγραμμα 1 : Δέντρο Ιεραρχικών Μοντέλων

Για να υλοποιήσουμε τις νέες εκτιμήτριες επιλέγουμε j δείγματα φοιτητών μεγέθους n_j τα οποία καλούνται να αξιολογήσουν σε μια κλίμακα (0-10) τα επιμέρους χαρακτηριστικά X_{jm} αλλά και τα βασικά χαρακτηριστικά X_j στην ίδια κλίμακα. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία ανάλογα με τα επίπεδα που θα επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε στο ιεραρχικό υπόδειγμα. Τα δείγματα θα επιλέγονται τυχαία, συνήθως στρωματοποιημένη δειγματοληψία από υποπληθυσμούς που έχουν άμεση σχέση με την ομάδα χαρακτηριστικών του κάθε υποδείγματος.

Στα επόμενα κεφάλαια, προκειμένου να καταδειχθούν οι δυνατότητες εμπειρικής εφαρμογής της προτεινόμενης μεθοδολογίας, θα την εφαρμόσουμε για την αξιολόγηση της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου. Συγκεκριμένα, αφού πρώτα αναφερθούν όλα τα απαραίτητα εργαλεία και οι έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση των βημάτων μας (Κεφάλαιο 2), η διαδικασία αξιολόγησης της ποιότητας της διδασκαλίας (Κεφάλαιο 3), που περιλαμβάνει μια στατιστική έρευνα και την αντίστοιχη στατιστική ανάλυση, θα πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας **κλασική στατιστική**, θεωρώντας τους συντελεστές του μοντέλου παλινδρόμησης τυχαίους από την κατανομή Dirichlet. Στο Κεφάλαιο 4 θα παρουσιαστεί ένας εναλλακτικός τρόπος ανάλυσης βασιζόμενος σε **Μπεϋζιανή στατιστική**.

Ειδικά για το σκοπό αυτό, η διδακαλία σε πρώτο επίπεδο χωρίστηκε σε δύο κατηγορίες ***ΜΑΘΗΜΑ - ΔΙΔΑΣΚΩΝ***, με την πρώτη κατηγορία να τριχοτομείται σε ***ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ – ΣΥΓΡΑΜΜΑΤΑ – ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ*** και τη δεύτερη να διχοτομείται σε ***ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ – ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ***. Κατόπιν κατασκευάστηκε ένας αριθμός ερωτήσεων για κάθε μία από τις πέντε ενότητες, έτσι ώστε κάθε μια να καλύπτεται με πληρότητα και οικονομία. Έτσι το τελικό ερωτηματολόγιο είχε 20 ερωτήσεις που αφορούσαν ειδικά θέματα διδασκαλίας, όπως ύλη μαθημάτων, διανεμόμενα συγγράμματα, μεταδοτικότητα, συνέπεια διδάσκοντος, κλπ. Καθώς επίσης και μία από τις οποίες ζητούσε συνολική αξιολόγηση της διδασκαλίας. Οι πρώτες 20 ερωτήσεις αντιστοιχούσαν στις επεξηγηματικές μεταβλητές X_1, X_2, ..., X_{20} ενώ η τελευταία στην μεταβλητή απόκρισης Y (βλ. Παράρτημα). Στην έρευνα συμμετείχαν 95 φοιτητές του τμήματος, οι οποίοι παρακολουθούσαν το μάθημα της Στατιστικής και βρίσκονταν στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο έτος σπουδών. Τα ερωτηματολόγια ήταν ανώνυμα, και συγκεντρώθηκαν χωρίς την παρουσία καθηγητή.

1.4 Εφαρμογές της προτεινόμενης μεθοδολογίας στις αποφάσεις της τοπικής αυτοδιοίκησης

Το προτεινόμενο μεθοδολογικό πλαίσιο θα μπορούσε να έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα στις περιπτώσεις της τοπικής αυτοδιοίκησης, εφόσον οι επιλογές των κατοίκων της περιφέρειας του κάθε μεμονωμένου οργανισμού τοπικής αυτοδιοίκησης επί συγκεκριμένων στόχων (χαρακτηριστικών), ιεραρχούνται αντικειμενικά, με συνέπεια την αύξηση της αποτελεσματικότητας των οργανισμών της τοπικής αυτοδιοίκησης και τη βελτιστοποίηση της ανταπόκρισής τους στα αιτήματα των τοπικών κοινωνιών.

Με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία θα μπορούν να ιεραρχηθούν και να αξιολογηθούν υπηρεσίες της τοπικής αυτοδιοίκησης προς τους πολίτες της με βάση τις δικές τους προτιμήσεις, γεγονός που θα μπορεί να συμβάλλει στη βέλτιστη χρήση των διαθέσιμων οικονομικών πόρων και στην άσκηση αποτελεσματικής πολιτικής, συνιστώντας ένα βασικό κριτήριο αξιολόγησης των επιδόσεων της τοπικής αυτοδιοίκησης από το εκλογικό σώμα, η οποία και σε τελευταία ανάλυση προσδιορίζει τις δυνατότητές της να παραμείνει στην εξουσία επανεκλεγόμενη. Οι βελτιώσεις που το προτεινόμενο μοντέλο επιφέρει στη συνάρτηση πολιτικής της τοπικής αυτοδιοίκησης επηρεάζουν και τη συνάρτηση αξιολόγησης της τοπικής αυτοδιοίκησης από τους ψηφοφόρους της.

Το προτεινόμενο μοντέλο κοινωνικής επιλογής αποσκοπεί στο να αντικατοπτρίζει τις επιλογές της πλειοψηφίας των μελών της κοινωνικής ομάδας στην οποιά αναφέρεται, το συγκεκριμένο ποσοστό της οποίας εκτιμάται από τα χαρακτηριστικά του ίδιου του μοντέλου. Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι για τα συγκεκριμένα δεδομένα, οποιοδήποτε άλλο γραμμικό μοντέλο ή σύνθετος δείκτης αξιολόγησης θα αντιπροσώπευε ένα μικρότερο ποσοστό των πολιτών.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλο τυχαίων συντελεστών της κατανομής Dirichlet για ποιοτικούς δείκτες

Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε στη γενική του μορφή ένα μοντέλο παλινδρόμησης με τυχαίους συντελεστές προερχόμενους από την κατανομή Dirichlet, στο οποίο θα βασιστούμε για την αξιολόγηση της ποιότητας της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου.

Στο μοντέλο αυτό η ποιότητα (μεταβλητή απόκρισης), σχετίζεται γραμμικά με κάποιες επεξηγηματικές μεταβλητές, των οποίων οι συντελεστές θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή Dirichlet. Από τη φύση της εν λόγω κατανομής, οι συντελεστές αυτοί μπορούν να ερμηνευθούν ως βάρη, επειδή είναι μη αρνητικοί και αθροίζουν στη μονάδα.

Η διαδικασία που θα προταθεί για την εκτίμηση των συντελεστών του μοντέλου, συνδυάζει τη μέθοδο των **επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (IRLS)** ή εναλλακτικά της μεθόδου των μη αρνητικών ελαχίστων τετραγώνων (**NNLS),** με τη μεγιστοποίηση μιας κατάλληλης συνάρτησης πιθανοφάνειας, όπως έχει συμβεί σε μια αντίστοιχη έρευνα για τη μέτρηση της ποιότητας του σιδηροδρομικού συστήματος στην Ισπανία **(βλ. Daniel Peña και Victor Yohai, 2004)**.

2. Εισαγωγή

Είναι γενικά αποδεκτό ότι η ποιότητα μιας υπηρεσίας είναι συνήθως μια συνάρτηση διαφόρων ποιοτικών παραγόντων ή χαρακτηριστικών και κατά συνέπεια ένα βήμα κλειδί για την αξιολόγησή της είναι να προσδιορίσουμε τη σχετική βαρύτητα που δίνει σε κάθε παράγοντα ή χαρακτηριστικό, η κοινωνική ομάδα που καλείται να αξιολογήσει. Οι μέθοδοι που προσανατολίζονται για το σκοπό βασίζονται συνήθως στην Ανάλυση Σύζευξης (Conjoint Analysis), (**βλ. Carrol και Green (1995)** για μια ανάλυση της συγκεκριμένης μεθοδολογίας και **Lynch et al. (1994), Wedel and DeSarbo (1994) και Ostrom και lacobucci (1995)** για μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της στην αξιολόγηση της ποιότητας μιας υπηρεσίας). Σε αυτή τη μεθοδολογία η κοινωνική ομάδα καλείται να αξιολογήσει την ποιότητα διαφόρων υποθετικών υπηρεσιών που ορίζονται από ορισμένα επίπεδα των ποιοτικών χαρακτηριστικών.

Μια εναλλακτική διαδικασία είναι να εφαρμοστούν ιεραρχικές Μπεϋζιανές μέθοδοι που χρησιμοποιούν τη μέθοδο ***Marcov Chain Monte Carlo (MCMC)***, (**βλ. Lenk et al. (1996), Allenby και Rossi (1999) και Rossi et al. (2001)**). Μια δεύτερη εναλλακτική διαδικασία είναι να συσχετιστεί η αξιολόγηση των χαρακτηριστικών με τη συνολική αξιολόγηση της ποιότητας της υπηρεσίας χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο παλινδρόμησης τυχαίων συντελεστών. Ο Peña σε μια έρευνα το 1997 πρότεινε ένα μοντέλο στο οποίο υπέθεσε ότι τα βάρη του κάθε ερωτώμενου ήταν τυχαίες μεταβλητές προερχόμενες από μια συνήθη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή και έδειξε πώς μπορούμε χρησιμοποιώντας γενικευμένα ελάχιστα τετράγωνα να υπολογίσουμε τα μέση βάρη στον πληθυσμό υπό τον περιορισμό να αθροίζουν στη μονάδα. Αυτό το μοντέλο σχεδιάστηκε για την εκτίμηση μιας μέσης τιμής για τα βάρη στον πληθυσμό και δεν υπολογίζει τα βάρη για το κάθε άτομο χωριστά όπως εύκολα διεξάγεται στην ιεραρχική Μπεϋζιανή προσέγγιση. Στο προτεινόμενο μοντέλο παλινδρόμησης τυχαίων συντελεστών της παρούσας εργασίας τα ατομικά βάρη μπορούν να εκτιμηθούν. Το εν λόγω μοντέλο περιλαμβάνει δύο στοιχεία για το χτίσιμο του δείκτη ποιότητας. Το πρώτο στοιχείο είναι ότι τα βάρη υπόκεινται στους περιορισμούς να είναι θετικά και να αθροίζουν στη μονάδα και το δεύτερο στοιχείο είναι αυτό που επιτρέπει κατά την αξιολόγηση της συνολικής ποιότητας της υπηρεσίας να λαμβάνονται υπόψην και χαρακτηριστικά τα οποία δεν έχουν παρατηρηθεί αλλά ενσωματώνονται επισήμως στο μοντέλο μας μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής, την οποία αποκαλούμε λανθάνουσα (καθώς αφορά τα άγνωστα χαρακτηριστικά), την κατανομή της οποίας μπορούμε να προσδιορίσουμε εκτιμώντας τις παραμέτρους της.

2.1 Ένα μοντέλο για γραμμικούς δείκτες ποιότητας

Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό (δηλ. σύνολο από στοιχεία που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε). Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε μονάδα από αυτόν τον πληθυσμό βαθμολογεί με Y, όπως αντιλαμβάνεται την ποιότητα μιας δεδομένης υπηρεσίας, η οποία σχετίζεται γραμμικά με διάφορα γνωστά χαρακτηριστικά (επεξηγηματικές μεταβλητές), $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ και ενδεχομένως από μία «λανθάνουσα» μεταβλητή Z η οποία εξαρτάται από άλλα άγνωστα χαρακτηριστικά.

Κάθε μονάδα αξιολογεί την ποιότητα, δίνοντας διαφορετική βαρύτητα σε καθένα από αυτά τα χαρακτηριστικά (π.χ. κατά την αξιολόγηση της διδασκαλίας κάποιος φοιτητής μπορεί να δίνει μεγαλύτερο βάρος στη μεταδοτικότητα του διδάσκοντα απ' ότι στα συγγράμματα) και επιπλέον η αξιολόγηση αυτή περιλαμβάνει κάποιο τυχαίο σφάλμα μέτρησης, το οποίο περικλείει το σφάλμα στρογγυλοποίησης και άλλα σφάλματα υπολογισμού που γίνονται από τη μονάδα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα δεδομένα για τις τυχαίες μεταβλητές $Y, X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ και Z δίνονται σε μία κλίμακα μεταξύ 0 -1, 1 για “άριστα” και 0 για “καθόλου καλά”. Υποθέτουμε ότι πήραμε τυχαίο δείγμα n μονάδων από τον πληθυσμό και θεωρούμε $(y_i, \boldsymbol{x_i})$ τις παρατηρήσεις μας, όπου θεωρούμε $\boldsymbol{x_i} = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\kappa})'$, να είναι οι απαντήσεις της i^{ης} μονάδας του δείγματος για τα διάφορα χαρακτηριστικά.

Τέλος θεωρούμε ότι

$$y_i = w_{i,1} x_{i,1} + w_{i,2} x_{i,2} + \ldots + w_{i,\kappa} x_{i,\kappa} + w_{i,\kappa+1} z_i + \varepsilon_i, \qquad 1 \le i \le n \quad (1)$$

όπου $\boldsymbol{w_i} = (w_{i,1}, \ldots, w_{i,\kappa+1})$ είναι το τυχαίο διάνυσμα για τα βάρη που δίνει η i^{η} μονάδα του δείγματος στα διαφορετικά χαρακτηριστικά $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa, Z$ και ε_i ένα σφάλμα μέτρησης (τυχαίο), που λαμβάνει υπόψην του τη διαφορά μεταξύ της θεωρητικής και της παρατηρούμενης συνολικής ποιότητας. Επιπλέον οι μεταβλητές $\boldsymbol{w_i}$, z_i και ε_i, είναι άγνωστες.

Υποθέσεις:

(a) Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, Z, \boldsymbol{w_i}$ και ε_i θεωρούνται ανεξάρτητες. Ο λόγος που οι X_i και $\boldsymbol{w_i}$ θεωρούνται ανεξάρτητες, οφείλεται στο ότι η αξιολόγηση ενός χαρακτηριστικού αντιπροσωπεύει κατά πόσο το επίπεδο της υπηρεσίας σε αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί να συγκριθεί με ένα ιδανικό πρότυπο επίδοσης, ενώ τα βάρη αντιπροσωπεύουν τις εκ των προτέρων πεποιθήσεις της i^{ης} μονάδας ως προς τη σημαντικότητα των χαρακτηριστικών. Επιπλέον υποθέτουμε για λόγους απλότητας, ανεξαρτησία ανάμεσα στις μεταβλητές X_i και Z για τα γνωστά και άγνωστα χαρακτηριστικά .

(b) Η κατανομή των $\boldsymbol{w_i}$ είναι Dirichlet με παραμέτρους $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\kappa+1})'$ και τη συμβολίζουμε με $D(\boldsymbol{\alpha})$, η κατανομή της Z είναι Βήτα με παραμέτρους $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)'$ και τη συμβολίζουμε με $B(\boldsymbol{p})$, ενώ η κατανομή των ε_i είναι η κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2, συμβολίζοντάς την ως $N(0,\sigma^2)$. Η επιλογή της Dirichlet κατανομής για τα βάρη γίνεται διότι οι υποθέσεις της κατανομής αυτής έρχονται σε συμφωνία με τους περιορισμούς που θέσαμε για αυτά στο μοντέλο μας, ότι δηλαδή

$$w_{ij} \geq 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \sum_{j=1}^{\kappa} w_{ij} = 1.$$

Η υπόθεση της κατανομής Βήτα για τη Z, έρχεται σε συμφωνία με τις τιμές της μεταβλητής αυτής στο διάστημα 0 – 1 ενώ η κανονική κατανομη για τα σφάλματα επιλέγεται για λόγους απλότητας.

Η αξιολόγηση της ποιότητας των υπηρεσιών με αυτόν τον τρόπο, έχει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- Η γνώση του βάρους για κάθε χαρακτηριστικό (επεξηγηματική μεταβλητή), επιτρέπει τη διάταξη των χαρακτηριστικών ανάλογα με τη σχετική σημασία τους για κάθε μονάδα και βοηθά στον εντοπισμό των χαρακτηριστικών εκείνων που συνδέονται άμεσα με το σκοπό για τον οποίο γίνεται η αξιολόγηση, δηλαδή των χαρακτηριστικών εκείνων των οποίων ο ανασχηματισμός θα συμβάλει στη συνολική βελτίωση της ποιότητας της υπηρεσίας.

- Η σύγκριση της μέσης τιμής των χαρακτηστικών στην υπηρεσία με τη μέση τιμή των ίδιων χαρακτηριστικών σε άλλες υπηρεσίες, θα αποκαλύψει τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες της.

Σκοπός:

Επιθυμούμε για τις άγνωστες τυχαίες μεταβλητές $\boldsymbol{w_i}$, να δώσουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μέτρα, όπως μια εκτίμηση για τη μέση τιμή και τη διασπορά τους.

Στο σημείο αυτό για την κατανόηση των συμβολισμών και της διαδικασίας εκτίμησης των βαρών που θα ακολουθήσουν, θα χρειαστεί να δώσουμε μία σύντομη περιγραφή της κατανομής Dirichlet των βαρών $\boldsymbol{w_i}$, στοιχεία της οποίας θα χρησιμοποιήσουμε και για την απόδειξη κάποιων τύπων που θα χρησιμοποιήσουμε και θα αναφέρουμε παρακάτω.

Βασικά στοιχεία της Dirichlet κατανομής:

Η κατανομή Dirichlet με παράμετρο $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\kappa)'$ που συχνά συμβολίζεται με $D(\boldsymbol{\alpha})$, με $\alpha_i>0$ και $\kappa\geq 2$, είναι μια οικογένεια από συνεχείς κατανομές πιθανότητας πολλών μεταβλητών που αποτελεί γενίκευση της κατανομής Βήτα και συχνά χρησιμοποιείται ως prior κατανομή στη Μπεϋζιανή στατιστική. Αν υποθέσουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_\kappa)\sim D(\boldsymbol{\alpha})$ τότε η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** δίνεται ως

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1};\,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\kappa)=\frac{1}{B(\alpha)}\prod_{i=1}^{\kappa}x_i^{a_i-1}$$

όπου $x_1,x_2,\ldots,x_{\kappa-1}>0$, $x_1+x_2+\ldots+x_{\kappa-1}<1$, $x_\kappa=1-x_1-\ldots-x_{\kappa-1}$

$$\text{και}\quad B(\alpha)=\frac{\prod_{i=1}^{\kappa}\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i)},\qquad \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\kappa).$$

Οι περιορισμοί για το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_\kappa)$ είναι οι συντεταγμένες του να ανήκουν στο διάστημα [0,1] και να αθροίζουν στη μονάδα.

Δηλαδή

$$X_i \in [0,1], \ i=1,2,\ldots,\kappa$$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} X_i = 1 .$$

Επιπλέον ο μέσος και η διασπορά για κάθε X_i, i=1, 2, …, κ δίνονται ως εξής:

$$\textbf{Μέση τιμή:} \ E(X_i) = \frac{a_i}{a_\tau}$$

και

$$\textbf{Διασπορά:} \ var(X_i) = \frac{\alpha_i(a_\tau - \alpha_i)}{a_\tau^2(\alpha_\tau + 1)}$$

όπου $\alpha_\tau = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i$ και για $i \neq j$ η **συνδυακύμανση** είναι $cov(X_i, X_j) = \frac{-a_i a_j}{a_\tau^2(\alpha_\tau + 1)}$.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους βασικούς τύπους που αναφέραμε για την κατανομή Dirichlet, προκειμένου να εκτιμήσουμε το τυχαίο διάνυσμα των βαρών στο μοντέλο μας. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να εισάγουμε κάποιους νέους συμβολισμούς.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα βάρη μας $\boldsymbol{w_i} = (w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,\kappa+1}) \sim D(\boldsymbol{\alpha})$, όπου $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\kappa+1})$ και χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$$\alpha_\tau = \sum_{i=1}^{\kappa+1} \alpha_i$$

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_\tau},\ \ j = 1, 2, \ldots, \kappa+1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\kappa+1})'$$

$$p_\tau = p_1 + p_2.$$

Έτσι βάση αυτών των συμβολισμών και χρησιμοποιώντας τους τύπους για τη **μέση τιμή**, τη **διασπορά** και τη **συνδυακύμανση** της Dirichlet κατανομής, παίρνουμε:

$$E(w_{i,j}) = \frac{\alpha_j}{\alpha_\tau} = \beta_j,\ \ var(w_{i,j}) = \beta_j \frac{(1-\beta_j)}{1+\alpha_\tau},\ \ i, j = 1, 2, \ldots, \kappa+1 \qquad \mathbf{(2)}$$

$$cov(w_{i,j}, w_{i,k}) = \frac{-\beta_j \beta_\kappa}{1+\alpha_\tau},\ \ j \neq k \qquad \mathbf{(3)}$$

$$E(z_i) = \frac{p_1}{p_2} = m,\ var(z_i) = \frac{m(1-m)}{1+p_\tau}. \qquad \mathbf{(4)}$$

~ Απόδειξη των (2), (3) και (4) ~

- Δεδομένου ότι τα βάρη $\boldsymbol{w_i} \sim D(\boldsymbol{\alpha})$ η απόδειξη του (2) για την μέση τιμή $E(w_{i,j}) = \beta_j$ είναι προφανής. Επιπλέον από τον τύπο της Dirichlet κατανομής για τη διασπορά έχουμε:

$$var(w_{i,j}) = \frac{\alpha_j(\alpha_\tau - \alpha_i)}{\alpha_\tau^2(\alpha_\tau+1)} = \frac{\beta_j(\alpha_\tau - \alpha_j)}{\alpha_\tau(\alpha_\tau+1)} = \frac{\beta_j \alpha_\tau}{\alpha_\tau(\alpha_\tau+1)} - \frac{\beta_j \alpha_j}{\alpha_\tau(\alpha_\tau+1)} = \frac{\beta_j - \beta_j^2}{\alpha_\tau+1} = \frac{\beta_j(1-\beta_j)}{\alpha_\tau+1}.$$

- Ομοίως η (3) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τον τύπο της Dirichlet για τη συνδυακύμανση ως εξής:

$$cov(w_{i,j}, w_{i,\kappa}) = \frac{-\alpha_j \alpha_\kappa}{\alpha_\tau^2(\alpha_\tau+1)} = \frac{-\beta_j \alpha_\kappa}{\alpha_\tau(\alpha_\tau+1)} = \frac{-\beta_j \beta_\kappa}{\alpha_\tau+1},$$

δεδομένου ότι $\frac{\alpha_j}{\alpha_\tau} = \beta_j$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_\tau} = \beta_\kappa$.

- Τέλος για την απόδειξη της (4) υπενθυμίζουμε ότι η μέση τιμή και η διασπορά για μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Βήτα κατανομή με παραμέτρους α, b δίνονται από τους τύπους:

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Βάση αυτών αφού $Z_i \sim B(p_1, p_2)$ και $p_\tau = p_1 + p_2$, έχουμε κατά προφανή τρόπο ότι $E(Z_i) = \frac{p_1}{p_2} = m$ και επιπλέον έχουμε ότι

$$var(Z_i) = \frac{p_1 p_2}{(p_1+p_2)^2(p_1+p_2+1)} = \frac{p_1 p_2}{p_\tau^2(p_\tau+1)} = \frac{m p_2}{p_\tau(p_\tau+1)} = \frac{m(p_\tau - p_1)}{p_\tau(p_\tau+1)} = \frac{m p_\tau}{p_\tau(p_\tau+1)} - \frac{m p_1}{p_\tau(p_\tau+1)}$$

$$= \frac{m}{p_\tau+1} - \frac{m^2}{p_\tau+1} = \frac{m(1-m)}{p_\tau+1}. \qquad \square$$

Παρατήρηση:

Εάν υπάρχουν πολλά χαρακτηριστικά (επεξηγηματικές μεταβλητές), είναι πολύ πιθανόν εκτός ίσως από κάποια εξαίρεση, όλα τα β_i να είναι μικρότερα από 0.5. Σε αυτήν την περίπτωση είναι εύκολο να δούμε ότι τα σημαντικά χαρακτηριστικά, δηλαδή αυτά που έχουν μεγάλη μέση τιμή βάρους, έχουν μεγαλύτερη διασπορά από τα ασήμαντα χαρακτηριστικά με μικρό μέσο βάρος. Επίσης η συσχέτιση ανάμεσα στα σημαντικά χαρακτηριστικά θα είναι μεγάλη ενώ τα ασήμαντα θα είναι σχεδόν ασυσχέτιστα. Όλα αυτά φαίνονται από τους τύπους (2) και (3) και λαμβάνοντας υπόψην ότι ένα μέτρο για το μέγεθος της συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών, έστω X και Y, είναι ο **συντελεστής συσχέτισης:**

$$\rho=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}.$$

Παρακάτω θα δούμε ότι για την **αναμενόμενη μέση τιμή** και **διασπορά** του Y_i για δοθέν X_i ισχύει:

$$E(Y_i|\boldsymbol{X_i=x_i})=\gamma+\sum_{j=1}^{\kappa}x_{i,j}\beta_j \quad (\mathbf{5})$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \ \gamma=m\beta_{\kappa+1} \quad (\mathbf{6})$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$var(Y_i|\boldsymbol{X_i=x_i})=\mu_2 s_i^2+\bar{x}_i\mu_1+\mu_0 \quad (\mathbf{7})$$

$$\mu\varepsilon \ \ s_i^2=\sum_{j=1}^{\kappa}\beta_j x_{i.j}^2-\bar{x}_i^2 \ \ \nu\alpha \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ \eta \ \psi\varepsilon\upsilon\delta o-\sigma\tau\alpha\theta\mu\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta \ \delta\iota\alpha\sigma\pi o\rho\acute{\alpha} \ (\sum_{j=1}^{\kappa}\beta_j\leq 1), \quad (\mathbf{8})$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \ \ \bar{x}_i=\sum_{j=1}^{\kappa}x_{i,j}\beta_j \ \ o \ \psi\varepsilon\upsilon\delta o-\sigma\tau\alpha\theta\mu\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma \ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma \quad (\mathbf{9})$$

$$\mu_0=var(w_{i,k+1})+\sigma^2, \quad (\mathbf{10})$$

$$\mu_1=\frac{-2\gamma}{1+\alpha_\tau}, \quad (\mathbf{11}) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \mu_2=\frac{1}{1+\alpha_\tau} \quad (\mathbf{12}).$$

~ Απόδειξη ~

- Για την αναμενόμενη μέση τιμή που παρουσιάστηκε στη σχέση (5), από την υπόθεση (α) και τις σχέσεις (1), (2) και (4) για δοθέν διάνυσμα **x**

$$E(Y_i|\boldsymbol{X_i}=\boldsymbol{x_i})=E(w_{i,1})x_{i,1}+\ldots+E(w_{i,\kappa})x_{i,\kappa}+E(w_{i,\kappa+1})E(z_i)+E(\varepsilon_i)$$

$$=\beta_1 x_{i,1}+\ldots+\beta_\kappa x_{i,k}+\beta_{\kappa+1}m+0 = \gamma+\sum_{j=1}^{\kappa} x_{i,j}, \text{ όπου } \gamma=\beta_{\kappa+1}m$$

$$\text{αφού } E(w_{i,j})=\beta_j, \; E(z_i)=\frac{p_1}{p_2}=m \text{ και } E(\varepsilon_i)=0.$$

- Για την απόδειξη της διασποράς που παρουσιάζεται στη σχέση (7), θα χρειαστεί να εισάγουμε κάποιους νέους συμβολισμούς. Έτσι θέτουμε

$$\boldsymbol{w_i}*=(w_{i,1},\ldots,w_{i,\kappa})' \text{ και } \boldsymbol{\beta}*=(\beta_1,\ldots,\beta_\kappa)'.$$

Με χρήση των νέων αυτών συμβολισμών, η σχέση (1) μπορεί να γραφεί ως

$$y_i=\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{w_i}*+w_{i,\kappa+1}z_i+\varepsilon_i.$$

Επομένως για δοθέν διάνυσμα $\boldsymbol{X}_i$ η διασπορά θα δίνεται από τη σχέση

$$var(Y_i|\boldsymbol{X_i}=\boldsymbol{x_i})=\boldsymbol{x_i}'\Omega\,\boldsymbol{x_i}+var(w_{i,\kappa+1}z)+2\,cov(\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{w_i}*,w_{i,\kappa+1}z)+\sigma^2 \quad \textbf{(*)},$$

όπου Ω είναι ο πίνακας διασποράς του $\boldsymbol{w_i}*$ για τον οποίο έχουμε ότι

$$\Omega=(diag(\boldsymbol{\beta}*)-\boldsymbol{\beta}*\boldsymbol{\beta}*')/(1+\alpha_\tau)$$

όπου $diag(\boldsymbol{\beta}*)$ είναι ένας $\kappa x \kappa$ διαγώνιος πίνακας με όρους τα στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\beta}*$.

Τότε για τον πρώτο όρο του αθροίσματος έχουμε

$$\boldsymbol{x_i}'\Omega\,\boldsymbol{x_i}=\frac{\sum_{j=1}^{\kappa}\beta_j x_{i,j}^2-\left(\sum_{j=1}^{\kappa}x_{i,j}\beta_j\right)^2}{1+\alpha_\tau}=\frac{\sum_{j=1}^{\kappa}\beta_j x_{i,j}^2-\bar{x}_i^{\,2}}{1+\alpha_\tau}=\frac{s_i^2}{1+\alpha_\tau}.$$

Τώρα για τον δεύτερο όρο του αθροίσματος έχουμε

$$var(w_{i,\kappa+1}Z)=var(w_{i,\kappa+1})var(Z)+E^2(w_{i,\kappa+1})var(Z)+var(w_{i,\kappa+1})E^2(Z)$$

το οποίο χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τη διασπορά και τη μέση τιμή των βαρών και της λανθάνουσας τ.μ $Z,$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$var(w_{i,\kappa+1}Z)=\frac{m(1-m)\beta_{\kappa+1}(1-\beta_{\kappa+1})}{(1+p_\tau)(1+\alpha_\tau)}\left(1+\frac{\beta_{\kappa+1}(1+\alpha_\tau)}{1-\beta_{\kappa+1}}+\frac{m(1+p_\tau)}{1-m}\right)$$

και επειδή $\gamma=m\beta_{\kappa+1}$ απορρέει ότι

$$var(w_{i,\kappa+1}Z)=\frac{\gamma(1-m)(m-\gamma)}{m(1+\alpha_\tau)(1+p_\tau)}\left(1+\frac{\gamma(1+a_\tau)}{m-\gamma}+\frac{m(1+p_\tau)}{1-m}\right)\quad \textbf{(13)},$$

όπου παρατηρούμε ότι αυτός ο όρος δεν εξαρτάται από τις παρατηρήσεις αλλά είναι μια συνεχή συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου.

Τέλος για τον τρίτο όρο του αθροίσματος έχουμε

$$cov\,\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{w_i}*,w_{i,\kappa+1}\,z=\boldsymbol{x_i}'E(\boldsymbol{w_i}*w_{i,\kappa+1})m-\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}*\beta_{\kappa+1}m=-\bar{x}_i\,\gamma\left(1+\frac{1}{1+a_\tau}\right)$$

$$=\boldsymbol{x_i}'cov(\boldsymbol{w_i}*,w_{i,\kappa+1})m+\boldsymbol{x_i}'E(\boldsymbol{w_i}*)E(w_{i,\kappa+1})m-\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}*\beta_{\kappa+1}m$$

$$-\frac{\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}*\beta_{\kappa+1}m}{1+a_\tau}+\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}*\beta_{\kappa+1}m-\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}*\beta_{\kappa+1}m=\frac{-\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}*\gamma}{1+a_\tau}=\frac{-\bar{x}_i\gamma}{1+a_\tau}$$

όπου $\bar{x}_i=\sum_{j=1}^{\kappa}\beta_j x_{ji}$.

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στη σχέση (*), μπορούμε να γράψουμε

$$var\left(y_i|\boldsymbol{x_i}\right)=\mu_2 s_1^2+\bar{x}_i\mu_1+\mu_0$$

όπου τα μ_0 , μ_1 και μ_2 είναι αυτά που ορίστηκαν στις σχέσεις (10), (11) και (12) αντιστοίχως. ◻

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος $var\left(w_{i,\kappa+1}z\right)$ όπως υπολογίστηκε στη σχέση **(13)** αποτελεί μία συνάρτηση των παραμέτρων $\alpha_\tau,\ p_\tau,\ \sigma^{2,}\ \boldsymbol{\beta},\ m$ και γ και επομένως μπορούμε να τον εκφράσουμε ως

$$var\left(w_{i,\kappa+1}z\right)=\chi\left(\alpha_\tau,p_\tau,\boldsymbol{\beta},m,\gamma\right). \quad \textbf{(13')}$$

Τέλος ορίζουμε ως **μέσο τετραγωνικό σφάλμα** την ποσότητα τ που δίνεται ως:

$$\tau=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left(y_i-\sum_{j=1}^{\kappa}\beta_j x_{i,j}\right)^2|\boldsymbol{x_i}\right)$$

Από τις σχέσεις (7) και (13') παίρνουμε ότι:

$$\tau=\varphi\left(\alpha_\tau,p_\tau,\sigma^{2,}\boldsymbol{\beta},m,\gamma\right)=\sigma^2+\chi\left(\alpha_\tau,p_\tau,\boldsymbol{\beta},m,\gamma\right)+\frac{1}{n\left(1+\alpha_\tau\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(s_i^2-2\gamma\bar{x}_i\right). \quad \textbf{(14)}$$

Αυτή η έκφραση θα φανεί χρήσιμη στην επόμενη ενότητα για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων των κατανομών που έχουμε υποθέσει για τις τυχαίες μεταβλητές του μοντέλου, μεγιστοποιώντας κατάλληλα την πιθανοφάνειά του.

2.2 Εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου

Όπως αναφέραμε σκοπός μας είναι να δώσουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μέτρα για τα βάρη, όπως μια εκτίμηση για τη μέση τιμή και τη διασπορά τους και να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής που ακολουθούν. Έτσι για το επιθυμητό αποτέλεσμα η μεθοδολογία μας θα βασιστεί σε 3 βήματα.

Τα βήματα αυτά έχουν ως εξής:

(1) Βρίσκουμε **συνεπείς εκτιμητές** $\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{m}, \hat{\gamma}, και\, \hat{\tau}$ των $\boldsymbol{\beta}, m, \gamma, και\, \tau$ που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας μία από τις μεθόδους που θα περιγραφούν στην αμέσως επόμενη ενότητα όπως είναι η μέθοδος των **επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (IRLS)** ή εναλλακτικά η μέθοδος των μη αρνητικών ελαχίστων τετραγώνων **(NNLS).**

(2) Αν $\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{m}, \hat{\gamma}, και\, \hat{\tau}$ είναι οι εκτιμήτριες που λάβαμε στο βήμα 1, στο βήμα 2 υπολογίζουμε αρχικές εκτιμήτριες για τις παραμέτρους $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}\, και\, \sigma^2$ οι οποίες λαμβάνονται κατά προσέγγιση μεγιστοποιώντας την πιθανοφάνεια του μοντέλου μας, θα δούμε αργότερα αναλυτικά με ποιό τρόπο, ικανοποιώντας 3 περιορισμούς.

Οι σχέσεις που εισάγουν τους περιορισμούς αυτούς περιγράφονται ως εξής:

Περιορισμοί	
1ος	$\boldsymbol{a} = a_\tau \hat{\boldsymbol{\beta}}$ **(15)**
2ος	$\boldsymbol{p} = p_\tau (\hat{m}, 1-\hat{m})'$ **(16)**
3ος	$\varphi(\alpha_\tau, p_\tau, \sigma^2, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{m}, \hat{\gamma}) = \hat{\tau}$ **(17)**

όπου η συνάρτηση φ ορίστηκε στη σχέση (14). Παρατηρούμε ότι σε αυτό το βήμα έχουμε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανοφάνεια ως προς $\alpha_\tau\, και\, p_\tau$. Οι άλλες παράμετροι λαμβάνονται από τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν και είναι αυτές που θα χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές στο επόμενο βήμα προκειμένου να προσεγγίζουμε αριθμητικά τη βέλτιστη τριάδα των παραμέτρων $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}, \sigma^2$ που μεγιστοποιούν την πιθανοφάνεια.

(3) Οι τελικές εκτιμήτριες των $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, και\, \sigma^2$ υπολογίζονται με αριθμητική προσέγγιστη του μεγίστου ακροτάτου της συνάρτησης πιθανοφάνειας έχοντας ως αρχικές τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους αυτές που λάβαμε στο βήμα 2. Παρατηρούμε ότι σε αυτό το βήμα έχουμε να μεγιστοποιήσουμε με χρήση κάποιας αριθμητικής μεθόδου την πιθανοφάνεια ως προς $\alpha_\tau, p_\tau, και\, \sigma^2$. Οι εκτιμήσεις για τις παραμέτρους $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{p}$ δίνονται στη συνέχεια από τους περιορισμούς (15) και (16).

Τα βήματα (2) και (3) θα περιγραφούμε με μεγαλύτερη σαφήνεια αργότερα και θα γίνουν κατανοητά μέσω της εφαρμογής τους στα δεδομένα αξιολόγησης της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου που θα ακολουθήσει στο κεφάλαιο 3. Πριν προχωρήσουμε όμως στην περιγραφή της μεθόδου των επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (IRLS) και της μεθόδου των μη αρνητικών ελαχίστων τετραγώνων (NNLS), είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των **ελαχίστων τετραγώνων** και της μεθόδου των **σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων** στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση. Οι δύο αυτοί μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή ενός πολλαπλού γραμμικού μοντέλου, την προσαρμογή της καλύτερης ευθείας, δηλαδή την καλύτερη δυνατή εκτίμηση των συντελεστών του μοντέλου η οποία γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις n ανεξάρτητες παρατηρήσεις (y_i, $\mathbf{x}_i$) και είναι εργαλεία τα οποία θα συνδυάσουμε στην τελική μας μεθοδολογία **IRLS** για την ικανοποίηση των περιορισμών που έχουμε θέσει στο μοντέλο.

2.2.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Για ένα πολλαπλό γραμμικό μοντέλο που δίνεται από τη σχέση

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + \dots + \beta_\kappa x_{i,k} + \varepsilon_\iota, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ή υπό μορφή πινάκων ως

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

όπου ο πίνακας **X** καλείται πίνακας σχεδιασμού και έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 \ x_{1,1} \ x_{1,2} \dots x_{1,\kappa} \\ 1 \ x_{2,1} \ x_{2,2} \dots x_{2,\kappa} \\ \vdots \\ 1 \ x_{n,1} \ x_{n,2} \dots x_{n,\kappa} \end{bmatrix}$$

με $\boldsymbol{\beta}$ να είναι το διάνυσμα των παραμέτρων του μοντέλου και $\varepsilon_i \ (i=1,2,\dots,n)$, τυχαία σφάλματα με μέση τιμή $E(\varepsilon_i) = 0$, η μέθοδος των **ελαχίστων τετραγώνων** για την εκτίμηση των παραμέτρων αυτών βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της παράστασης

$$S(\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{y}-E(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}))'(\boldsymbol{y}-E(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}))$$

$$=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Παραγωγίζοντας την S ως προς $\boldsymbol{\beta}$ προκύπτει ότι

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}=-2\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Έτσι, θέτοντας την παραπάνω σχέση ίση με το μηδέν καταλήγουμε στη σχέση

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Αν ο πίνακας **X'X** αντιστρέφεται, τότε η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων (OLS) του διανύσματος $\boldsymbol{\beta}$ δίνεται πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $(\mathbf{X'X})^{-1}$ από την οποία προκύπτει ότι

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}.$$

Φυσικά πρέπει να ελέγξουμε ότι η λύση αυτή αντιστοιχεί πράγματι σε ελάχιστο (δηλαδή ότι ο Εσσιανός πίνακας των δευτέρων παραγώγων τον οποίος ας συμβολίσουμε με H, είναι θετικά ορισμένος που σημαίνει ότι $x^T Hx > 0$ για κάθε $x\neq 0$).

Σημείωση: Υπενθυμίζουμε ότι για μια συνάρτηση n μεταβλητών f $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ο εσσιανός πίνακας έστω H είναι

$$H(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Τέλος το μοντέλο που εκτιμούμε με τη μέθοδο αυτή θα δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

2.2.2 Μέθοδος σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων

Στην πράξη μπορεί να υπάρχει επιπλέον πληροφορία για τις τιμές y_i για παράδειγμα ότι κάποιες παρατηρήσεις είναι λιγότερο αξιόπιστες από κάποιες άλλες. Στην περίπτωση αυτή ίσως χρειαστεί να σταθμίσουμε τους όρους στη συνάρτηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε και αντί για τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων η οποία βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$S_w = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - E(y_i))^2$$

όπου τα w_i αποτελούν βάρη. Θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι $w_i = [var(y_i)]^{-1}$. Στη γενικότερη περίπτωση τα y_i μπορεί να είναι συσχετισμένα. Αν V είναι ο πίνακας συνδυακύμανσης των y_i , τότε ο εκτιμητής που προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}$ που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση

$$S_w = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T V^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

καθώς $E(Y|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X\beta}$.

Τότε το διάνυσμα των παραγώγων της S_w ως προς $\boldsymbol{\beta}$ θα είναι

$$\frac{\partial S_w}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\,\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} V^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

από όπου θέτοντας το ίσο με μηδέν, ο εκτιμητής των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (που αποδεικνύεται ότι είναι τοπικό ελάχιστο) είναι η λύση της κανονικής εξίσωσης ως προς $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} V^{-1} \boldsymbol{X\beta} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} V^{-1} \boldsymbol{y}$.

2.2.3 Μέθοδος επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (IRLS) και μέθοδος μη αρνητικών ελαχίστων τετραγώνω (NNLS)

Μέθοδος IRLS

Από τις σχέσεις (5), (7), (11) και (12) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y_i = \gamma + \beta_1 x_{i,1} + \ldots + \beta_\kappa x_{i,\kappa} + u_i , \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \textbf{(18)}$$

όπου $E(u_i | \boldsymbol{x_i}) = 0$ **(19)**

και $var(u_i | \boldsymbol{x_i}) = \mu_2 t_i + \mu_0$, **(20)** με $t_i = s_i^2 - 2\gamma \bar{x}_i$. **(21)**

Η εκτίμηση με τη μέθοδο των επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (IRLS) γίνεται ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

Βασισμένοι στη σχέση (18) ξεκινάμε να εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων από την οποία λαμβάνουμε εκτιμήσεις για τους συντελεστές, έστω $\gamma^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}, \ldots, \hat{\beta}_\kappa^{(0)}$ και εκτιμήσεις για τα υπόλοιπα, έστω $\hat{u}_i^{(0)}, 1 \le i \le n.$ Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (20), μπορούμε να γράψουμε

$$u_i^2 = \mu_2 t_i + \mu_0 + u_i* , \quad \textbf{(22)}$$

όπου $E(u_i*) = 0$. Αντικαθιστώντας τα u_i^2 με $\hat{u}_i^{(0)2}$, παίρνουμε τις εκτιμήσεις $\hat{\mu}_0$ και $\hat{\mu}_2$ με εφαρμογή και πάλι της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων στη σχέση (22). Τα t_i υπολογίζονται από τις σχέσεις (8), (9) και (21) χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις $\gamma^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}, \ldots, \hat{\beta}_\kappa^{(0)}$ ως τιμές των παραμέτρων.

Έπειτα εκτιμούμε τη διασπορά $var(u_i | \boldsymbol{x_i})$ με $\hat{\upsilon}_i^2 = \hat{\mu}_2 t_i + \hat{\mu}_1$ και επιστρέφουμε στη σχέση (18) να επανεκτιμήσουμε τους συντελεστές εφαρμόζοντας γι' αυτή τη φορά τη μέθοδο των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων με βάρη $(\hat{\upsilon}_i^2)^{-1}$. Η διαδικασία αυτή είναι επαναληπτική μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση και να πάρουμε τους εκτιμητές $\hat{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\beta}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_\kappa)$. Επειδή τα $\beta_i \ge 0$, οι εκτιμήσεις $\hat{\beta}_i < 0$ αντικαθίστανται με 0.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι επειδή τα $\hat{\beta}_i$ είναι συνεπείς εκτιμητές, αν το μοντέλο είναι σωστό, για όλα τα i τέτοια ώστε $\beta_i > 0,$ ασυμπτωτικά και οι εκτιμήσεις $\hat{\beta}_i > 0$ και έτσι για μεγάλο n η αντικατάσταση αυτή δεν είναι απαραίτητη. Για μεγάλο n, τα μόνα $\hat{\beta}_i$ που ενδεχομένως χρειαστεί να αντικατασταθούν από την τιμή 0 αντιστοιχούν σε $\beta_i = 0.$ Εναλλακτικά προκειμένου να αποφευχθεί αυτή η διορθωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ελάχιστα τετράγωνα με τον περιορισμό όλα τα $\hat{\beta}_i \geq 0,$ (βλ. παρακάτω).

Μέθοδος NNLS

Πρόκειται για έναν αλγόριθμο για μη αρνητικά ελάχιστα τετράγωνα που προτάθηκε από τους Lawson και Hanson (1974). Ο αλγόριθμος αυτός γνωστός ως **NNLS (Non-Negative-Least-Square)** αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων, δηλαδή την ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{x} \|,$ όπου $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^\kappa$ και $\boldsymbol{x}$ *ενας n x m* πίνακας υπό τον περιορισμό $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}.$ Ο NNLS αλγόριθμος βασίζεται στην στρατηγική των Active Sets (Active Sets Strategy) που αν βρει μια αρνητική λύση β_i τη θέτει ίση με 0, αφαιρεί τη στήλη i από το σύνολο των εξισώσεων και επαναξιολογεί τις λύσεις, αν όλες οι λύσεις είναι μη αρνητικές σταματάει, αν όχι επαναλαμβάνει τη διαδικασία εξίσωσης των β_i με 0 και αφαίρεση της στήλης i. Πρόκειται για έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που ικανοποιεί τον περιορισμό της μη αρνητικότητας για τους συντελεστές. Ο αλγόριθμος αυτός είναι διαθέσιμος στο Matlab και στην R.

Θέλουμε και στις δύο περιπτώσεις που αναφέρθηκαν το άθροισμα των $\beta_i, i = 1, 2, ..., \kappa$ να είναι < 1. Αν όχι υπάρχουν διάφορα πακέτα συναρτήσεων και εντολών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά γι αυτό το σκοπό, για παράδειγμα στην R, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη βιβλιοθήκη “Limsolve” όπου είναι διαθέσιμη η συνάρτηση “lsei (least squares equalities inequalities)” για ελάχιστα τετράγωνα με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς.

Οι μέθοδοι IRLS και NNLS θα γίνουν περισσότερο κατανοητές στο Κεφάλαιο 3 όπου θα εφαρμοστούν κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης της διδασκαλίας.

Τέλος θέτουμε $\hat{\beta}_{\kappa+1} = 1 - \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i,$ εκτιμούμε το m με $\hat{m} = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}_{\kappa+1}},$ τα υπόλοιπα με

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{\gamma} - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \ldots - \hat{\beta}_\kappa x_{i,\kappa}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \textbf{(23)}$$

και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα με

$$\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum \hat{u}_i^2 . \quad \textbf{(24)}$$

2.2.4 Αριθμητική εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας του μοντέλου

Μεγιστοποιώντας κατάλληλα την πιθανοφάνεια του μοντέλου, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους των κατανομών που μας ενδιαφέρουν. Δηλαδή της Dirichlet, της Βήτα και της κανονικής κατανομής των βαρών, της λανθάνουσας μεταβλητής και των σφαλμάτων αντιστοίχως που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1. Υπενθυμίζουμε ότι κύριος στόχος μας είναι να δώσουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μέτρα για τα βάρη που είναι τυχαίες μεταβλητές, να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά τους καθώς και τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής από την οποία προέρχονται. Αυτό όπως ειπώθηκε επιτυγχάνεται συνδυάζοντας τη μέθοδο των επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων **(IRLS)** ή τη μέθοδο των μη αρνητικών ελαχίστων τετραγώνων **(NNLS)**, (βλ. Ενότητα 2.2.3), με τη μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας του μοντέλου. Η εφαρμογή της πρώτης μεθόδου θα μας δώσει την ζητούμενη εκτίμηση για τη μέση τιμή και η εφαρμογή της δεύτερης την εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής για τα βάρη από την οποία θα μπορέσουμε να εκτιμήσουμε και τη διασπορά τους.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το μοντέλο είναι

$$l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_i(y_i, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}, \sigma^2) \quad \textbf{(25)}$$

όπου

$$f_i(y_i, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}, \sigma^2) = \int f(y_i | \boldsymbol{w}*, z, \sigma^2) f_D(\boldsymbol{w}*, \boldsymbol{\alpha}) f_B(z, \boldsymbol{p}) d\boldsymbol{w}* dz$$

$$= \int \varphi((y_i - \boldsymbol{x_i}' \boldsymbol{w*} - z w_{\kappa+1})/\sigma) f_D(\boldsymbol{w}*, \boldsymbol{\alpha}) f_B(z, \boldsymbol{p}) d\boldsymbol{w}* dz \quad \textbf{(26)}$$

όπου φ, f_D, f_B οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής, της Dirichlet και Βήτα κατανομής αντιστοίχως και $\boldsymbol{w}*=(w_1,\ldots,w_\kappa)'$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$f_i^A(y_i, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}^2) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \varphi((y_i - \boldsymbol{x_i}' \boldsymbol{w_j}* - z_j w_{j,\kappa+1})/\sigma), \quad \textbf{(27)}$$

όπου $\boldsymbol{w_j} = (\boldsymbol{w_j}*', w_{j,\kappa+1})'$ και z_j, $j=1,\ldots,N$ είναι δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα της Dirichlet και της Βήτα κατανομής με παραμέτρους $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{p}$ αντίστοιχα. Τότε η πιθανοφάνεια στη σχέση (25) μπορεί να προσεγγιστεί με

$$l^A(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_i^A(y_i, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \sigma^2), \quad \textbf{(28)}$$

όπου το ολοκλήρωμα (26) αντικαθίσταται από το άθροισμα (27). Χρησιμοποιούμε αυτή την πιθανοφάνεια για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους α_τ, p_τ και σ^2 έχοντας ως καθορισμένες τιμές για τις παραμέτρους $\gamma, \boldsymbol{\beta},$ και m αυτές που αποκτήθηκαν στο βήμα 1 (βλ. Ενότητα 2.2).

Στο βήμα 2 (βλ. Ενότητα 2.2), δημιουργούμε ένα πλέγμα τιμών για τις παραμέτρους α_τ και p_τ και για κάθε επιλογή τιμών για τις δύο αυτές παραμέτρους, την αντίστοιχη τιμή για το σ^2 που αποκτάται από τον περιορισμό (17). Τότε βρίσκουμε το συνδυασμό των παραμέτρων στο πλέγμα που μεγιστοποιεί την (28) και προχωράμε στο βήμα 3 (βλ. Ενότητα 2.2), όπου κρατάμε σταθερές τις τιμές των $\gamma, \boldsymbol{\beta},$ και m που καθορίσαμε στο βήμα 1 και μεγιστοποιούμε την πιθανοφάνεια ως προς τις 3 παραμέτρους α_τ, p_τ και σ^2 χρησιμοποιώντας ως αρχικές τιμές εκείνες που αποκτήθηκαν στο βήμα 2 και εφαρμόζοντας κάποια αριθμητική μέθοδο βελτιστοποίησης μη γραμμικής συνάρτησης της οποίας οι παράμετροι υπόκεινται στους περιορισμούς που έχουν αναφερθεί. Στην περίπτωση μας θα εφαρμοστεί η μέθοδος Lagrange.

2.3 Διαγνωστικός έλεγχος καταλληλότητας

Η καταλληλότητα του μοντέλου μπορεί να ελεγχθεί από τη σύγκριση των παρατηρούμενων υπολοίπων μετά την προσαρμογή του μοντέλου, με προσομοιωμένα υπόλοιπα προερχόμενα από προσομοιωμένα δείγματα που δημιουργούμε χρησιμοποιώντας τις εκτιμώμενες παραμέτρους. Αν το μοντέλο είναι κατάλληλο που σημαίνει ότι προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα, τότε τα παρατηρούμενα υπόλοιπα θα πρέπει να έχουν μια παρόμοια κατανομή με τα προσομοιωμένα υπόλοιπα. Έτσι ξεκινάμε με την εκτίμηση των υπολοίπων u_i από τη σχέση (23), και την εκτίμηση της εμπειρικής κατανομής αυτών έστω F_n, η οποία ορίζεται ακολούθως.

Ορισμός (Εμπειρικής συνάρτησης κατανομής):

Αν υποθέσουμε ότι $(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες πραγματικές μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(t)$, τότε η εμπειρική συνάρτηση κατανομής ορίζεται να είναι

$$F_n(t) = \frac{\text{αριθμός στοιχείων του δείγματος} \leq t}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{[x_i \leq t]}}{n}$$

με $I_{[A]}$ δείκτρια συνάρτηση ίση με 1 αν ισχύει το ενδέχομενο A και ίση με 0 διαφορετικά. Στη συνέχεια δημιουργούμε N το πλήθος προσομοιωμένα δείγματα της μορφής $y_1*, \ldots, y_n*$, όπου τα y_i* παράγονται από τη σχέση (1) με τις παραμέτρους $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}$ και σ^2 να έχουν αντικατασταθεί από τις εκτιμήσεις τους. Αν υποθέσουμε ότι $F_{hn}*$, $(h = 1, \ldots, N)$ είναι η εμπειρική κατανομή του σφάλματος

$$u_i* = y_i* - \sum_{j=1}^{\kappa} \boldsymbol{x_{i,j}} \hat{\beta}_j - \hat{\gamma}, \ 1 \leq i \leq n$$

που αντιστοιχεί στο h προσομοιωμένο δείγμα, τότε ορίζουμε

$$F_n* = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} F_{hn}*,$$

και στη συνέχεια το διάγραμμα Q-Q μεταξύ των F_n και F_n* θα είναι ένα διαγνωστικό εργαλείο για την ανίχνευση διαφορών μεταξύ του μοντέλου και των δεδομένων.

Στην πράξη με το διάγραμμα Q-Q μπορεί να ανιχνεύσουμε ακραίες παρατηρήσεις που αντιστοιχούν σε ερωτηθέντες με ασυνήθιστες απόψεις, ή λάθη καταγραφής. Ωστόσο κάποιες ακραίες τιμές μπορεί να μην γίνουν ορατές λόγω της επίδρασης της λανθάνουσας μεταβλητής η οποία όμως δεν αναμένεται να είναι μεγάλη καθώς τα δεδομένα πρέπει να είναι μεταξύ του 0 και του 1. Το μοντέλο υποθέτει ότι η συνολική αξιολόγηση είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, ενώ στην πραγματικότητα σε πολλές εφαρμογές αυτή η μεταβλητή μετριέται σε μια διακριτή κλίμακα. Ας υποθέσουμε ότι η παρατηρούμενη αξιολόγηση γίνεται σε μια διακριτή κλίμακα, για παράδειγμα 0-10. Τότε η μεταβλητή απόκρισης στο μοντέλο δεν υπολογίζεται ακριβώς αλλά στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο. Προκειμένου να τσεκάρουμε το αποτέλεσμα της διακριτής κλίμακας μπορούμε να προσομοιώσουμε το μοντέλο και χρησιμοποιώντας τις εκτιμημένες τιμές των παραμέτρων, να δημιουργήσουμε δύο τύπους δειγμάτων, (1) δείγματα συνεχών y τιμών και (2) δείγματα διακριτών y τιμών οι οποίες αποκτήθηκαν από στρογγυλοποίηση των συνεχών τιμών . Στη συνέχεια μπορούμε να εκτιμήσουμε το μοντέλο και για τα δύο αυτά δείγματα και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Η μέση απόκλιση που θα βρεθεί σε πολλές επαναλήψεις αυτής της ανάλυσης, παρέχει έναν εκτιμητή της αναμενόμενης μεροληψίας στο αποτέλεσμα της διακριτής κλίμακας.

2.4 Πρόβλεψη των βαρών για κάθε παρατήρηση

Η πρόβλεψη των βαρών για κάθε έναν από τους ερωτηθέντες είναι σημαντική αν θέλουμε να συσχετίσουμε τα βάρη αυτά με τα προσωπικά χαρακτηριστικά των ερωτηθέντων (όπως είναι το φύλο, το εισόδημα, η εκπαίδευση κ.ο.κ). Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μια πιθανή προσέγγιση του προβλήματος. Ωστόσο, καθώς θέλουμε να εκτιμήσουμε το διάνυσμα των βαρών (κ+1 διάστασης), με την πληροφορία που παίρνουμε από την εξαρτώμενη μεταβλητή, θα έχουμε αναγκαστικά ένα μεγάλο σφάλμα εκτίμησης καθώς υπάρχει άπειρος αριθμός διανυσμάτων με βάρη που παράγουν την παρατηρούμενη τιμή της μεταβλητής απόκρισης δοθέντος των επεξηγηματικών μεταβλητών.

Γραμμική Πρόβλεψη

Υποθέτοντας ότι οι παράμετροι είναι γνωστοί, τα βάρη της κάθε μονάδας στο δείγμα μπορούν να εκτιμηθούν με τον υπολογισμό της καλύτερης γραμμικής πρόβλεψης των τυχαίων μεταβητών $w_{i,1},\ldots,w_{i,\kappa+1}$ δοθέντος της παρατήρησης y_i. Στην πράξη, επειδή οι παράμετροι είναι άγνωστοι, αυτή η πρόβλεψη υπολογίζεται χρησιμοποιώντας στη θέση τους την εκτίμησή τους. Το βέλτιστο διάνυσμα γραμμικής πρόβλεψης των βαρών, υπολογίζεται ελαχιστοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα και δίνεται ως εξής

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{var(y_i|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})}cov(\boldsymbol{w},y_i)\left(y_i-\sum_{j=1}^{\kappa}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}\beta_j-\gamma\right).$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$cov(\boldsymbol{w},y_i)=\Omega\,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}*,$$

όπου Ω είναι ο πίνακας συνδιασποράς του $\boldsymbol{w}$ που περιγράφτηκε στην ενότητα 2.1 και $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}*=(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}',m)'$. 'Ετσι έχουμε

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{\beta}+\frac{\Omega\,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}*\left(y_i-\sum_{j=1}^{\kappa}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}\beta_j-\gamma\right)}{var(y_i|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})}.$$

Από τις σχέσεις (7), (11) και (12), μπορούμε να εκτιμήσουμε τη διασπορά $var(y_i|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})$ με $\hat{\upsilon}_i^{\,2}=\hat{\mu}_2 t_i+\hat{\mu}_0$ και τότε αν τα $\hat{u}_i$ είναι όπως ορίστηκαν στη σχέση (23), τα βάρη μπορούν να εκτιμηθούν με

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{i}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}+\frac{\hat{u}_i}{\hat{\upsilon}_i}\hat{\Omega}\,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}*.$$

Το μειονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι μπορεί να προκύψουν αρνητικές προβλέψεις. Για το λόγο αυτό παρουσιάζουμε παρακάτω μια μη παραμετρική διαδικασία πρόβλεψης των βαρών η οποία θα μας εξασφαλίσει τη μη αρνητικότητα.

Μη παραμετρική πρόβλεψη

Το διάνυσμα των βαρών της i-οστής μονάδας του δείγματος $\boldsymbol{w_i}=(w_{i,1},\dots,w_{i,\kappa+1})$ μπορεί να προβλεφθεί εκτιμώντας τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(\boldsymbol{w_i}|y_i,\boldsymbol{x_i})$. Για το σκοπό αυτό, δημιουργούμε δείγματα $(\tilde{\boldsymbol{w}}_{i,1},\dots,\tilde{\boldsymbol{w}}_{i,N})$ και $(\tilde{y}_{i,1},\dots,\tilde{y}_{i,N})$ ως εξής: Δημιουργούμε τρία ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $(\tilde{z}_{i,1},\dots,\tilde{z}_{i,N})$, $(\tilde{\boldsymbol{w}}_{i,1},\dots,\tilde{\boldsymbol{w}}_{i,N})$ και $(\tilde{\varepsilon}_{i,1},\dots,\tilde{\varepsilon}_{i,N})$ όπου κάθε $\tilde{z}_{i,j}$ είναι της κατανομής $B(\hat{\boldsymbol{p}})$, ενώ το τυχαίο διάνυσμα $\tilde{\boldsymbol{w}}_{i,j}=(\tilde{\boldsymbol{w}}*_{i,j},\tilde{w}_{i,j,\kappa+1})$ είναι της $D(\hat{\boldsymbol{a}})$ και τα $\tilde{\varepsilon}_{i,j}$ ακολουθούν την κατανομή $N(0,\sigma^2)$. Ένα δείγμα της κατανομής των y_i δημιουργείται τότε ως εξής:

$$\tilde{y}_{i,j}=\boldsymbol{x_i}'\tilde{\boldsymbol{w}}*_{i,j}+\tilde{w}_{i,j,\kappa+1}\tilde{z}_j+\tilde{\varepsilon}_{i,j},\ 1\le j\le N.$$

Η αναμενόμενη τιμή του $w_{i,h}$ $(h=1,\dots,\kappa)$ δοθέντος του y_i μπορεί να υπολογιστεί με μη παραμετρική παλινδρόμηση μεταξύ $(y_{i,1},\dots,y_{i,N})$ και $(w_{i,1,h},\dots,w_{i,N,h})$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εκτιμήσουμε το $w_{i,h}$ με

$$\hat{w}_{i,h}=\frac{1}{n_h}\sum_{j\in A}\tilde{w}_{i,j,h}$$

όπου

$$A=\{\,j:|\tilde{y}_{i,j}-y_i|\le a\,\}$$

και $n_h=\#A$ (όπου $\#A$ είναι το πλήθος των στοιχείων του A), με χρήση βολικής τιμής μεγέθους για το παράθυρο α. Μια επισκόπηση της μη παραμετρικής παλινδρόμησης συμπεριλαμβάνοντας την επιλογή του μεγέθους του παραθύρου μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στο Härdle (1990).

Διαγνωστικοί Έλεγχοι

Τα προβλεπόμενα βάρη μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένα επιπρόσθετο διαγνωστικό εργαλείο για την καταλληλότητα του μοντέλου. Μπορούμε να συγκρίνουμε την κατανομή των προβλεπόμενων βαρών των παρατηρούμενων δεδομένων με εκείνη των προσομοιωμένων δειγμάτων που δημιουργούνται χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο μοντέλο με τις εκτιμούμενες παραμέτρους. Υποθέτοντας ότι N τέτοια δείγματα έχουν δημιουργηθεί και θεωρώντας $G*_{h,j}$ την εμπειρική συνάρτηση κατανομής των βαρών για το χαρακτηριστικό

j στο δείγμα h, θέτουμε

$$G*_j = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{N} G*_{h,j}.$$

Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα Q-Q διάγραμμα για να συγκρίνουμε την $G*_j$ με την εμπειρική κατανομή των προβλεπόμενων βαρών για το χαρακτηριστικό j χρησιμοποιώντας τα πραγματικά δεδομένα.

Κεφάλαιο 3

Αξιολόγηση της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου

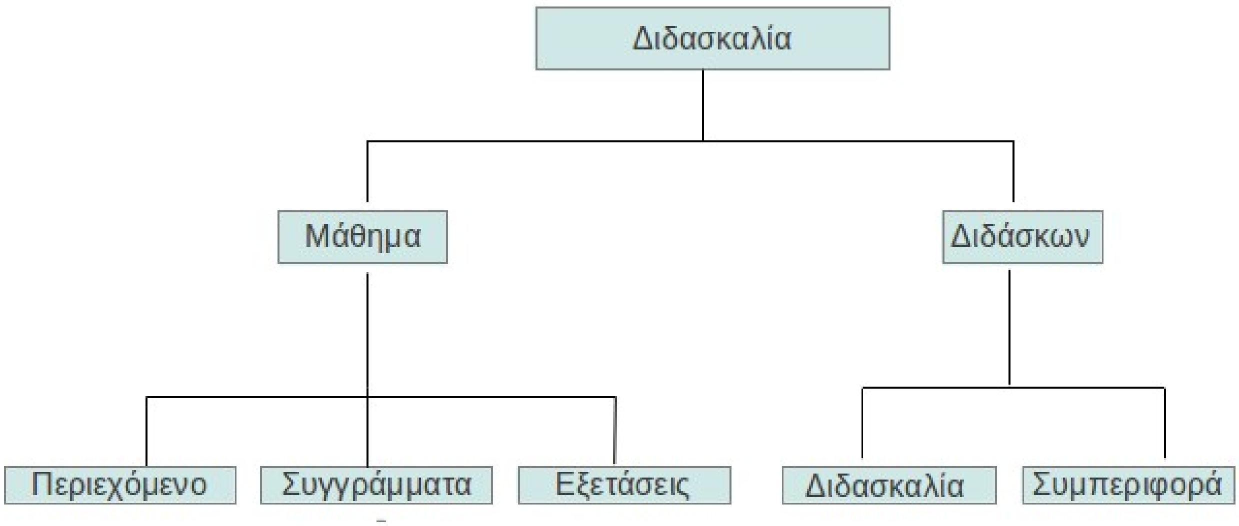
3. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας που αφορά την αξιολόγηση της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου. Συγκεκριμένα επιδιώκοντας το χτίσιμο ενός δείκτη ποιότητας για την αξιολόγηση της διδασκαλίας στο αναφερθέν τμήμα, η διαδικασία που ακολουθήθηκε περιελάμβανε τα ακόλουθα βήματα:

✔ Τον καθορισμό των ποιοτικών χαρακτηριστικών (επεξηγηματικών μεταβλητών).
✔ Τη λήψη ενός τυχαίου δείγματος από φοιτητές του τμήματος για την αξιολόγηση.
✔ Την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου και την πρόβλεψη των βαρών για κάθε φοιτητή.

Πιο ξεκάθαρα το 1^{ο} βήμα περιελάμβανε την κατασκευή ενός ερωτηματολογίου αποτελούμενο από 21 ερωτήσεις προσαρμοσμένες έτσι ώστε να αφορούν τα διάφορα επίπεδα στα οποία χωρίστηκε η διδασκαλία. Σε πρώτο επίπεδο διασπάστηκε σε 2 κατηγορίες *ΜΑΘΗΜΑ – ΔΙΔΑΣΚΩΝ*, με την πρώτη κατηγορία να τριχοτομείται σε *ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ – ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ* και τη δεύτερη να διχοτομείται σε *ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ – ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ*. Σε κάθε μία από αυτές τι πέντε ενότητες αντιστοιχήθηκαν από δύο εώς πέντε ερωτήσεις, έτσι ώστε κάθε μία από αυτές να καλύπτεται με πληρότητα και οικονομία. Το ερωτηματολόγιο κάλυπτε ειδικά θέματα διδασκαλίας, όπως ύλη μαθημάτων, διανεμόμενα συγγράμματα, μεταδοτικότητα, συνέπεια διδάσκοντος, κλπ. καθώς επίσης υπήρχε μία ερώτηση που ζητούσε συνολική αξιολόγηση της διδασκαλίας.

Οι 20 από αυτές τις ερωτήσεις αντιστοιχούν στις επεξηγηματικές μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ του γραμμικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε ενώ αυτή που αφορά τη συνολική αξιολόγηση αντιστοιχεί στη μεταβλητή απόκρισης Y.



Διάγραμμα 2 – Ενότητες Διδασκαλίας

Στο 2ο βήμα για την εκτίμηση των συντελεστών βαρύτητας στο δείκτη αξιολόγησης της διδασκαλίας, συλλέχθηκε τον Ιούνιο του 2009 δείγμα 95 φοιτητών του τμήματος οι οποίοι παρακολουθούσαν το μάθημα της στατιστικής στο τμήμα και οι οποίοι κλήθηκαν να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο σε κλίμακα από 0 - 10, με το 10 να εκφράζει “'αριστη” ποιότητα και το 0 “κακή” ποιότητα. Τα ερωτηματολόγια ήταν ανώνυμα, χωρίς κανένα προσωπικό ή δημογραφικό στοιχείο και συγκεντρώθηκαν με πρωτοβουλία των φοιτητών και χωρίς την παρουσία καθηγητή.

Το 3ο βήμα αφορά την ανάλυση σύμφωνα με τη μεθοδολογία που περιγράφτηκε στα προηγούμενα δύο κεφάλαια, τα βήματα της οποίας θα παρουσιαστούν αναλυτικά ακολούθως μαζί με τα αριθμητικά αποτελέσματα, αφού πρώτα δοθούν κάποια περιγραφικά μέτρα (μέτρα θέσης και μεταβλητότητας) που αφορούν το δεδομένα του δείγματος.

3.1 Περιγραφή δεδομένων

Στον Πίνακα 1 που θα ακολουθήσει θα δώσουμε μία συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων μας, τόσο των επεξηγηματικών μεταβλητών όσο και της μεταβλητής απόκρισης. Η παρουσίαση αυτή θα περιλαμβάνει κάποια μέτρα θέσης και μεταβλητότητας όπως το δειγματικό μέσο, τη δειγματική διάμεσο, τη τυπική απόκλιση, το 1ο και 3ο τεταρτημόριο τη μικρότερη και τη μέγιστη παρατήρηση για κάθε μεταβλητή. Σημειώνουμε ότι η στατιστική ανάλυση θα γίνει με χρήση του στατιστικού πακέτου R και αναφέρουμε ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα δεδομένα μας είτε ως ποσοτικά με τιμές από 0 – 10 είτε ως κατηγορικά με 10 κατηγορίες, όπου τιμές κάτω του 5 αντιστοιχούν σε “κακή” βαθμολόγηση, τιμές 5 - 6 αντιστοιχούν σε “καλή” βαθμολόγηση, τιμές 7 - 8 ερμηνεύονται ως “λίαν καλώς” και τιμές 9 -10 ως “άριστη” βαθμολόγηση.

Υπενθυμίζουμε ότι στη δική μας περίπτωση στο ρόλο των επεξηγηματικών μεταβλητών έχουμε τις 20 ερωτήσεις που αφορούν τις διάφορες ενότητες της διδασκαλίας και στο ρόλο της μεταβλητής απόκρισης την επιπλέον ερώτηση που αφορά τη συνολική αξιολόγηση της διδασκαλίας κατά την κρίση των φοιτητών.

Εισάγοντας τα δεδομένα στην R και με χρήση των εντολών **summary(x)** και **sd(x)**, όπου στη θέση του **x** μπαίνει η εκάστοτε μεταβλητή που μελετάμε, εξάγουμε όλα τα παραπάνω μέτρα τα οποία φαίνονται συγκεντρωμένα στον Πίνακα 1. Η 1η στήλη μας δίνει τη μικρότερη παρατήρηση για κάθε μεταβλητή στο δείγμα, η 2η την παρατήρηση που αντιστοιχεί στο 1ο τεταρτημόριο, η 3η στήλη τη δειγματική διάμεσο, η 4η το δειγματικό μέσο, η 5η στήλη την παρατήρηση που αντιστοιχεί στο 3ο τεταρτημόριο, η 6η στήλη τη μέγιστη παρατήρηση για κάθε μεταβλητή και η τελευταία την τυπική απόκλιση.

	Min.	**1st Qu.**	**Median**	**Mean**	**3rd Qu.**	**Max**	**St. Dev.**
Ερώτηση (X_1)	0.000	4.000	6.000	5.565	7.000	10.000	2.235106
Ερώτηση (X_2)	1.000	4.000	6.000	5.685	7.000	10.000	2.010573
Ερώτηση (X_3)	0.000	4.000	6.000	5.467	7.000	10.000	2.088435
Ερώτηση (X_4)	1.000	4.000	6.000	5.554	7.000	10.000	2.210684
Ερώτηση (X_5)	1.000	3.000	5.000	4.772	6.250	9.000	2.224258
Ερώτηση (X_6)	0.000	5.000	7.000	6.63	8.250	10.000	2.42114
Ερώτηση (X_7)	0.000	5.000	7.000	6.348	8.000	9.000	2.083081
Ερώτηση (X_8)	0.000	5.000	6.000	6.076	7.000	10.000	2.001284
Ερώτηση (X_9)	0.000	3.000	4.000	4.207	6.000	9.000	2.275228
Ερώτηση (X_{10})	0.000	1.000	3.000	3.283	5.000	9.000	2.378133
Ερώτηση (X_{11})	1.000	4.000	5.000	5.272	7.000	9.000	2.060104
Ερώτηση (X_{12})	1.000	4.000	6.500	5.837	7.000	10.000	2.200286
Ερώτηση (X_{13})	0.000	3.000	5.000	4.478	6.000	10.000	2.221168
Ερώτηση (X_{14})	1.000	3.000	4.500	4.511	6.000	9.000	2.135491
Ερώτηση (X_{15})	1.000	5.000	7.000	6.522	8.000	10.000	1.958236
Ερώτηση (X_{16})	1.00	3.00	5.000	5.133	7.000	10.000	2.551524
Ερώτηση (X_{17})	1.000	5.000	6.500	6.054	8.000	10.000	2.19071
Ερώτηση (X_{18})	0.000	4.000	6.000	5.533	7.000	10.000	2.369453
Ερώτηση (X_{19})	0.000	4.000	6.000	5.554	7.000	10.000	2.521835
Ερώτηση (X_{20})	1.000	3.000	5.000	5.185	7.250	10.000	2.601476
Ερώτηση (Y)	1.000	4.000	6.000	5.522	7.000	10.000	1.627229

Πίνακας 1 – Περιγραφικά μέτρα θέσης και μεταβλητότητας για τις μεταβλητές του ερωτηματολογίου

Παρατηρήσεις:

✔ Από τον Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι σε κάθε ερώτηση η μικρότερη παρατήρηση παίρνει τιμές 0 και 1 ενώ η μεγαλύτερη παρατήρηση τιμές 9 και 10 . Δηλαδή υπάρχουν φοιτητές που βαθμολογούν “κακώς” την ποιότητα των

αντίστοιχων χαρακτηριστικών και φοιτητές που τη βαθμολογούν με “άριστα”.
Κάθε απάντηση εξαρτάται από το προσωπικό ενδιαφέρον του κάθε φοιτητή, την προσωπική προσπάθεια που έχει καταβάλει και τη σχετική σημασία (βαρύτητα) που έχει δώσει σε κάθε ερώτημα που αφορά είτε το μάθημα είτε τον διδάσκων.

✔ Όσον αφορά το 1ο τεταρτημόριο που αφορά την παρατήρηση εκείνη που είναι μεγαλύτερη ή ίση απο το 25% ακριβώς των παρατηρήσεων, βλέπουμε ότι παίρνει τιμές κυρίως από 3 εώς 5 (χαμηλή βαθμολογία) ενώ το 3ο τεταρτημόριο που αφορά την παρατήρηση εκείνη που είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 75% των παρατηρήσεων παίρνει τιμές μεταξύ 6 και 8 (σχετικά υψηλή βαθμολογία). Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην 10η ερώτηση (**'Εχειτε απόλυτη εμπιστοσύνη στην ασφάλεια και ακεραιότητα των διαδικασιών αξιολόγησης – βαθμολογήσεις;**) έχουμε αρκετά χαμηλές τιμές για το 1ο και 3ο τεταρτημόριο τις 1 και 5 αντίστοιχα που δηλώνει ότι οι περισσότεροι φοιτητές απάντησαν αρνητικά στην εν λόγω ερώτηση.

✔ Η δειγματική διάμεσος (Median) κυμαίνεται από 3 εώς 7. Για τιμές από 3 εώς 4 οι φοιτητές χαρακτηρίζουν “κακή” την ποιότητα των αντίστοιχων χαρακτηριστικών, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην ερώτηση 10 με δειγματική διάμεσο ίση με 3, όπου οι φοιτητές δείχνουν να μην έχουν απόλυτη εμπιστοσύνη στην ασφάλεια και ακεραιότητα των διαδικασιών αξιολόγησης. Για τιμές από 5 εώς 6 οι φοιτητές θεωρούν “καλή” την ποιότητα των αντίστοιχων χαρακτηριστικών και αυτό ισχύει όπως βλέπουμε για τις περισσότερες ερωτήσεις, ενώ βαθμολογούν με “λίαν καλώς” την ποιότητα των χαρακτηριστικών εκείνων όπου η δειγματική διάμεσος παίρνει την τιμή 7. Βλέπουμε ότι η τιμή αυτή του δειγματικού μέσου αντιστοιχεί στις ερωτήσεις 6, 7 και 15, δηλαδή οι φοιτητές του τμήματος βαθμολογούν με “λίαν καλώς” τη χρησιμότητα της παρακολούθησης για την κατανόηση και επιτυχή ολοκλήρωση των μαθημάτων, τη συμβατότητα του αντικειμένου της εξέτασης με το περιεχόμενο και τη διδασκαλία των αντίστοιχων μαθημάτων και το ποσοστό των διδασκόντων που είχαν επαρκή και εις βάθος γνώση του αντικειμένου.

✔ Στον Πίνακα 1 παρατηρείται επίσης η δειγματική διάμεσος να είναι τις περισσότερες φορές λίγο μεγαλύτερη από τον δειγματικό μέσο (Mean) που σημαίνει ότι φαίνεται να μην υπάρχει καλή ισορροπία στις τιμές του δείγματος, δηλαδή φαίνεται να υπάρχουν ίσως κάποιες ακραίες παρατηρήσεις που επηρεάζουν την τιμή του δειγματικού μέσου ο οποίος κυμαίνεται περίπου από 3 εώς 6 που είναι αρκετά χαμηλή βαθμολογία.

✔ Το τυπικό σφάλμα που εκφράζει πόσο απέχουν κατά μέσο όρο οι παρατηρήσεις από το δειγματικό μέσο, είναι σε όλες τις περιπτώσεις περίπου 2.

✔ Συγκρίνοντας τον δειγματικό μέσο των επεξηγηματικών μεταβλητών με το δειγματικό μέσο της εξαρτημένης μεταβλητής Υ (=5.522) δεν βλέπουμε να υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση. Ο δειγματικός μέσος της εξαρτημένης μεταβλητής θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί έναν σταθμισμένο μέσο αυτών των χαρακτηριστικών που σημαίνει ότι η ύπαρξη των λανθανουσών μεταβλητών (άγνωστων χαρακτηριστικών) δεν επηρεάζει πολύ την συνολική αξιολόγηση της ποιότητας της διδασκαλίας.

Παρακάτω θα μελετήσουμε τυχών συσχετίσεις μεταξύ των επεξηγηματικών μας μεταβλητών υπολογίζοντας το συντελεστή συσχέτισης που εκφράζει το “βαθμό” στον οποίο μπορούμε να εκτιμήσουμε γραμμικά τη μία επεξηγηματική μεταβλητή όταν γνωρίζουμε την τιμή της άλλης. Ο συντελεστής αυτός παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1 οπου τιμές κοντά στο -1 εκφράζουν αρνητική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών και τιμές κοντά στο 1 θετική γραμμική συσχέτιση. Ο υπολογισμός του συντελεστή αυτού έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2 (Εν. 2.1) και στην R πραγματοποιείται με την εντολή cor (x_i, x_j) για τον έλεγχο της συσχέτισης μεταξύ των τ.μ X_i και X_j.

Ο παρακάτω Πίνακας 2 δίνει το βαθμό γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των επεξηματικών μας μεταβλητών.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
X_1	1	.7	.5	.4	.4	.5	.5	.4	.3	.5	.4	.5	.4	.5	.4	.3	.3	.3	.3	.3
X_2	.7	1	.6	.4	.4	.5	.5	.2	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.4	.4	.3	.3	.3	.3
X_3	.5	.6	1	.3	.4	.5	.5	.4	.3	.4	.5	.5	.3	.4	.5	.3	.3	.3	.4	.3
X_4	.4	.4	.3	1	.6	.4	.4	.3	.3	.2	.4	.4	.4	.5	.3	.2	.2	.2	.3	.3
X_5	.4	.4	.4	.6	1	.4	.4	.3	.5	.4	.4	.3	.4	.5	.4	.3	.4	.4	.4	.4
X_6	.5	.5	.5	.4	.4	1	.5	.3	.4	.3	.5	.5	.4	.5	.4	.3	.3	.3	.4	.5
X_7	.5	.5	.5	.4	.4	.5	1	.5	.5	.4	.4	.5	.3	.4	.6	.3	.3	.4	.4	.4
X_8	.4	.2	.4	.3	.3	.3	.5	1	.5	.5	.3	.4	.4	.2	.4	.2	.2	.4	.3	.3
X_9	.3	.4	.3	.3	.5	.4	.5	.5	1	.5	.5	.4	.4	.4	.4	.6	.4	.4	.5	.6
X_{10}	.5	.4	.4	.2	.4	.3	.4	.5	.5	1	.5	.5	.3	.4	.4	.4	.4	.5	.4	.4
X_{11}	.4	.4	.5	.4	.4	.5	.4	.3	.5	.5	1	.8	.7	.7	.5	.6	.5	.4	**.6**	**.7**
X_{12}	.5	.4	.5	.4	.3	.5	.5	.4	.4	.5	.8	1	.6	.7	.6	.6	.5	.5	**.7**	**.6**
X_{13}	.4	.4	.3	.4	.4	.4	.3	.4	.4	.3	.7	.6	1	.7	.5	.5	.4	.3	.5	.6
X_{14}	.5	.5	.4	.5	.5	.5	.4	.2	.4	.4	.7	.7	.7	1	.5	.6	.5	.4	.6	**.7**
X_{15}	.4	.4	.5	.3	.4	.4	.6	.4	.4	.4	.5	.6	.5	.5	1	.5	.4	.5	.5	.6
X_{16}	.3	.4	.3	.2	.3	.3	.3	.2	.6	.4	.6	.6	.5	.6	.5	1	.4	.4	.6	**.7**
X_{17}	.3	.3	.3	.2	.4	.3	.3	.2	.4	.4	.5	.5	.4	.5	.4	.4	1	.4	.5	.5
X_{18}	.3	.3	.3	.2	.4	.3	.4	.4	.4	.5	.4	.5	.3	.4	.5	.4	.4	1	.5	.5
X_{19}	.3	.3	.4	.3	.4	.4	.4	.3	.5	.4	.6	.7	.5	.6	.5	.6	.5	.5	1	**.7**
X_{20}	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.4	.3	.6	.4	.7	.6	.6	.7	.6	.7	.5	.5	.7	1

Πίνακας 2 – Συντελεστής συσχέτισης των επεξηγηματικών μεταβλητών

Παρατηρήσεις:

✔ Ο συντελεστής συσχέτισης σε κάθε ζέυγος επεξηγηματικών μεταβλητών κυμάνθηκε μεταξύ 0.2 και 0.6 με ελάχιστες εξαιρέσεις.

✔ Οι μεταβλητές X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{17} και X_{18} δεν φαίνεται να έχουν κάποια γραμμική σχέση με καμιά από τις υπόλοιπες μεταβλητές.

✔ Υψηλή γραμμική συσχέτιση μπορούμε να θεωρήσουμε μεταξύ των μεταβλητών εκείνων όπου ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει περίπου τις τιμές 0.6, 0.7 και 0.8. Για παράδειγμα βλέπουμε ότι οι μεταβλητές X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{16}, X_{19} και X_{20} παρουσιάζουν ανά δύο ισχυρή γραμμική συσχέτιση.

Παρακάτω για το χτίσιμο του σύνθετου δείκτη που μετρά την ποιότητα της διδασκαλίας στο τμήμα του Παντείου, θα εφαρμόσουμε τα τρία βασικά βήματα που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.2 (Εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου). Αρχικά θα εκτιμήσουμε τη μέση τιμή των βαρών με τη μέθοδο IRLS (επαναληπτικά επανασταθμισμένα ελάχιστα τετράγωνα), που περιγράφηκε αναλυτικά στην Ενότητα 2.2.3, αφαιρώντας από το μοντέλο μας τις μη στατιστικά σημαντικές μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν σε μηδενικό μέσο βάρος. Εν συνεχεία θα προσδιορίσουμε τόσο την κατανομή των βαρών, εκτιμώντας τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής όσο και την κατανομή της λανθάνουσας μεταβλητής εκτιμώντας τις παραμέτρους της κατανομής Βήτα που ακολουθεί, μεγιστοποιώντας και στις δύο περιπτώσεις την πιθανοφάνεια για το μοντέλο σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε στην Ενότητα 2.2.5 (Εκτίμηση με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας). Τέλος θα παρουσιάσουμε τις προβλέψεις των βαρών για κάθε άτομο, ο υπολογισμός των οποίων αναφέρθηκε στην Ενότητα 2.4 (Πρόβλεψη των βαρών για κάθε παρατήρηση).

3.2 Εφαρμογή των μεθόδων IRLS και NNLS στα δεδομένα του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου

Υλοποίηση βήματος 1 (Ενότητα 2.2.3)

Υπενθυμίζουμε ότι στο βήμα 1 που αναφέραμε στην Ενότητα 2.2, θέλουμε να βρούμε συνεπείς εκτιμητές $\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{m}, \hat{\gamma}$ και $\hat{\tau}$ των $\boldsymbol{\beta}, m, \gamma,$ και τ όπως αυτά ορίστηκαν σύμφωνα με τις σχέσεις (2), (4), (6) και (14) στην Ενότητα 2.1 ('Ενα μοντέλο για γραμμικούς δείκτες ποιότητας).

Σε πρώτο στάδιο θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους IRLS και NNLS στο μοντέλο,

$$y_i = \gamma + \beta_1 x_{i,1} + \ldots + \beta_\kappa x_\kappa + u_i, \;\; i = 1,2,\ldots,n$$

από όπου θα πάρουμε τις εκτιμήτριες $\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\gamma}$ και σε δεύτερο στάδιο θα υπολογίσουμε τις εκτιμήτριες $\hat{m}$ και $\hat{\tau}$ όπως αυτές καθορίστηκαν κατά την περιγραφή των δύο μεθόδων στην Ενότητα 2.2.3.

Στάδιο 1

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε στην R και υλοποιούν τις μεθόδους IRLS και NNLS, είναι οι **rlm()** και **nnls()** αντίστοιχα που είναι διαθέσιμες στις βιβλιοθήκες MASS και NNLS. Σημειώνουμε ότι για την εφαρμογή των δύο μεθόδων, τα δεδομένα διαιρούνται με 10 προκειμένου να λαμβάνουν τιμές από 0 εώς 1, όπως έχουμε αναφέρει κατά την περιγραφή του μοντέλου στην Ενότητα 2.1.

Ο κώδικας R που χρησιμοποιούμε σε αυτό το βήμα παρέχεται στο παράρτημα Α και οι εκτιμήσεις που λαμβάνουμε για τους συντελεστές του μοντέλου κατά την εφαρμογή των δύο μεθόδων, παρουσιάζονται στον Πίνακα 3 που ακολουθεί. 'Επειτα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της μεθόδου IRLS και υλοποιώντας τα βήματα 2 και 3 (βλ. Ενότητα 2.2), που αφορούν την μεγιστοποιήση της πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των παραμέτρων της Dirichlet και της Βήτα κατανομής, θα παρουσιάσουμε τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητριών της μεθόδου IRLS καθώς και την τιμή t του T - στατιστικού ελέγχου, για τον έλεγχο της υπόθεσης,

$$H_0: \beta_j = 0 \;\; \mu\varepsilon \;\; H_1: \beta_j \neq 0, \;\; \forall\, j.$$

Συντελεστές:		
	Μέθοδος IRLS	**Μέθοδος NNLS**
γ	0.0719	0.0639
β_1	0.0000	0.0000
β_2	0.0000	0.0000
β_3	0.0449	0.0068
β_4	0.0000	0.0000
β_5	0.0108	0.0385
β_6	0.0663	0.0882
β_7	0.0070	0.0186
β_8	0.0898	0.0821
β_9	0.0102	0.0000
β_{10}	0.0157	0.0102
β_{11}	0.1170	0.0940
β_{12}	0.0000	0.0000
β_{13}	0.0000	0.0000
β_{14}	0.2848	0.2224
β_{15}	0.1425	0.1708
β_{16}	0.0000	0.0000
β_{17}	0.0388	0.0224
β_{18}	0.0000	0.0000
β_{19}	0.0852	0.1049
β_{20}	0.0000	0.0177
β_{21}	0.0864	0.1228

Πίνακας 3 – Εκτιμητές IRLS και NNLS υπό τους περιορισμούς $\beta_i \geq 0$ **και** $\sum_{i=1}^{\kappa+1} \beta_i = 1.$

Παρατηρήσεις:

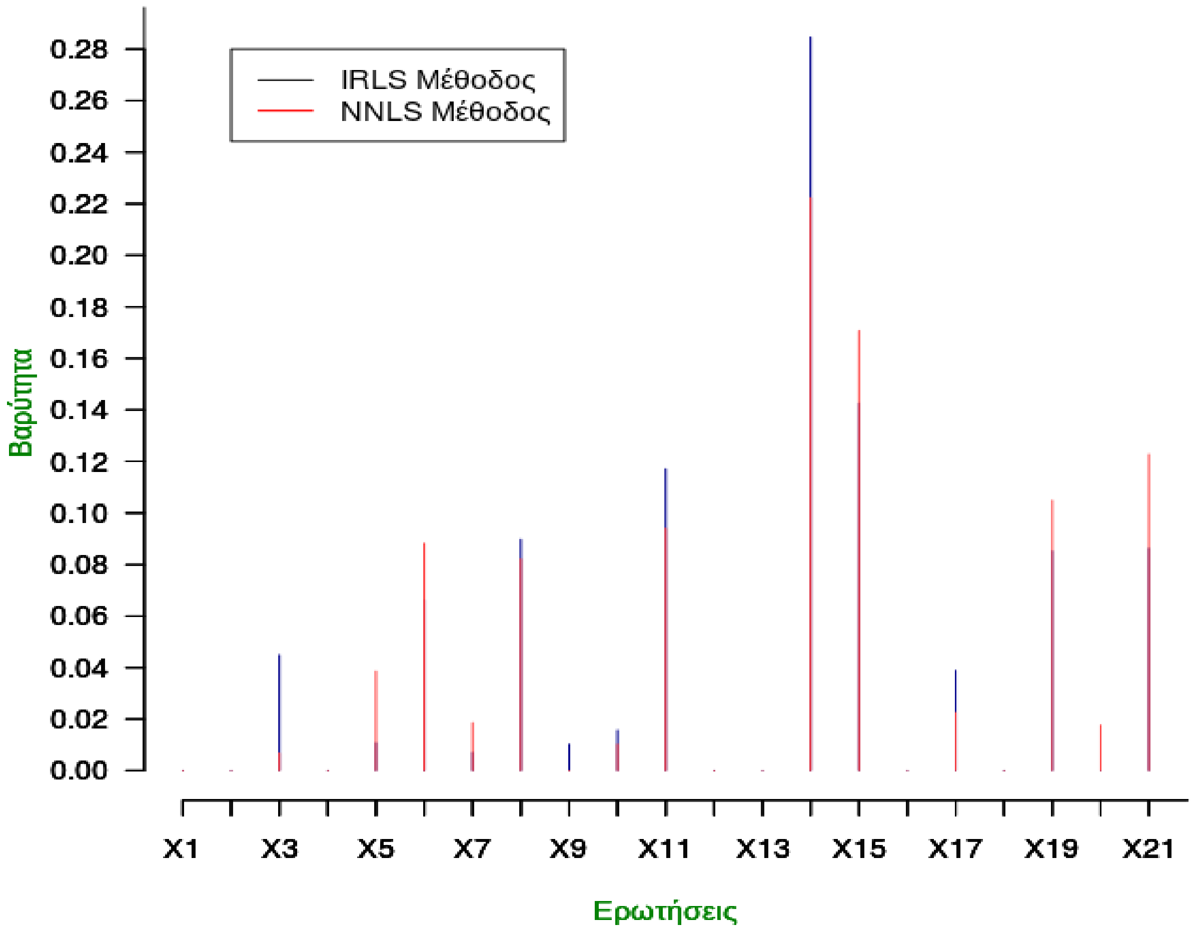
✔ Οι εκτιμήσεις για τους συντελεστές του μοντέλου δεν διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς τους δύο μεθόδους και από τη στιγμή που ικανοποιούν τους επιθυμητούς περιορισμούς εκφράζουν όπως έχουν οριστεί τη μέση τιμή των συντελεστών βαρύτητας που επιδιώκαμε να εκτιμήσουμε.

✔ Υπάρχει συμφωνία μεταξύ των δύο μεδόδων ως προς τις στατιστικά μη σημαντικές μεταβλητές που αφορούν τις ερωτήσεις 1, 2, 4, 12, 13, 16 και 18. Δηλαδή φαίνεται οι φοιτητές του τμήματος να μη δίνουν βαρύτητα στο πόσο σαφείς ήταν οι στόχοι των μαθημάτων, αν η διδαχθείσα ύλη ανταποκρινόταν στους στόχους αυτούς, αν το εκπαιδευτικό υλικό ήταν αξιόλογο και αν ο διδάσκων ήταν καλά προετοιμασμένος, έκανε το μάθημα ενδιαφέρον, είχε καλή επικοινωνία με αυτούς και δρούσε δίκαια απέναντί τους.

✔ Και οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν ως μεταβλητές υψηλότερης βαρύτητας τις ερωτήσεις 14, 15 και ακολούθως τις 11, 8 και 19. Κατά συνέπεια φαίνεται να είναι πολύ σημαντικό για τους φοιτητές, ο διδάσκων να έχει μεταδοτικότητα, επαρκή και εις βάθος γνώση του αντικειμένου, σεβασμό απέναντί τους και καλή οργάνωση ως προς το περιεχόμενο, τη διδασκαλία και την εξέταση. Η αντίστοιχη βαρύτητα φαίνεται στον Πίνακα 3.

✔ Η τιμή του εκτιμητή για το συντελεστή της λανθάνουσας μεταβλητής προκύπτει συγκριτικά με τη τιμή των εκτιμητών για τους υπόλοιπους συντελεστές αρκετά υψηλή και στις δύο μεθόδους, γεγονός που φανερώνει ότι οι φοιτητές του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου ως προς τη συνολική αξιολόγηση της ποιότητας της διδασκαλίας, δίνουν βαρύτητα και σε κάποιους άλλους παράγοντες που δεν έχουν ληφθεί υπόψη στο ερωτηματολόγιο.

✔ Στο Διάγραμμα 3 που ακολουθεί βλέπουμε τις ερωτήσεις στις οποίες δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα κατά την εφαρμογή της μεθόδου IRLS, συγκριτικά με τη μέθοδο NNLS και αντιστρόφως. Για παράδειγμα σύμφωνα με τη μέθοδο IRLS φαίνεται να δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στις ερωτήσεις 3, 8, 9, 10, 11, 14 και 17 από τη βαρύτητα που δίνεται στις ίδιες ερωτήσεις σύμφωνα με τη μέθοδο NNLS.



Διάγραμμα 3: Βαρύτητα ερωτήσεων για την αξιολόγηση της διδασκαλίας.

Στάδιο 2

Στο στάδιο αυτό καταλήγουμε στην αποπεράτωση του βήματος 1 της εκτιμητικής μας (Ενότητα 2.2), υπολογίζοντας τους εκτιμητές για το m και το τ όπως δηλώθηκαν κατά την περιγραφή των μεθόδων. Εφ' όσον δεν υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ τους, μπορούμε στο εξής να χειριστούμε τις τιμές των εκτιμητών που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου IRLS. 'Ετσι χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της 2ης στήλης του Πίνακα 3, λαμβάνουμε και τις τιμές των εκτιμητών για το m και το τ στον Πίνακα 4.

$\hat{m}=\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}_{\kappa+1}}$	$\hat{\tau}=\frac{1}{n}\sum \hat{u}_i^2.$
0.8322	0.0069

Πίνακας 4 – Εκτιμήτριες $\hat{\boldsymbol{m}}$, και $\hat{\boldsymbol{\tau}}$.

όπου $\hat{u}_i = y_i - \hat{\gamma} - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \ldots - \hat{\beta}_\kappa x_{i,\kappa},\ \ i=1,\ldots,n.$

3.3 Εκτίμηση του ακροτάτου μεγίστης πιθανοφάνειας

Υλοποίηση βήματος 2 (Ενότητα 2.2.3)

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμοστούν στα δεδομένα του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου τα βήματα 2 και 3 της εκτιμητικής που περιγράφτηκαν στην Ενότητα 2.2. Η προσέγγιση του ακροτάτου που μεγιστοποιεί την πιθανοφάνεια του μοντέλου, αντιστοιχεί στην προσέγγιση των παραμέτρων της κατανομής Dirichlet των βαρών και της Βήτα κατανομής της λανθάνουσας μεταβλητής και βασίζεται στην ιδέα να δημιουργήσουμε σε πρώτη φάση ένα πλέγμα τιμών για τις παραμέτρους α_τ και p_τ και σε κάθε ζεύγος τιμών αυτών να αντιστοιχήσουμε την τιμή του σ^2 που προκύπτει από τον 3ο περιορισμό που αναφέρθηκε στην Ενότητα 2.2 (βλ. Σχέση (17)). Σε δεύτερη φάση, χρησιμοποιώντας τον 1ο και 2ο περιορισμό (βλ. Σχέσεις (15), (16), Ενότητα 2.2), γίνεται εφικτή η εκτίμηση των παραμέτρων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{p}$ και κατά συνέπεια εφικτή η προσομοίωση τιμών για τη δημιουργία των δύο ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων μεγέθους N από την Dirichlet και την Βήτα κατανομή με τις συγκεκριμένες εκτιμώμενες παραμέτρους, ούτως ώστε να δύναται να υπολογιστεί η ποσότητα $f_i^A(y_i, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \sigma^2)$ (βλ. Σχέση (27)) και κατά συνέπεια η τιμή της πιθανοφάνειας που προκύπτει από τη Σχέση (28). 'Ετσι για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}$, και σ^2 στο πλέγμα, έχουμε την αντίστοιχη τιμή της πιθανοφάνειας του μοντέλου και επιλέγουμε εκείνο το συνδυασμό των παραμέτρων που μεγιστοποιεί την πιθανοφάνεια, έτσι ώστε θεωρώντας αυτόν ως διάνυσμα αρχικών τιμών για τις άγνωστες παραμέτρους να προχωρήσουμε στην υλοποίηση του βήματος 3, όπου χρησιμοποιώντας κάποια αριθμητική μέθοδο βελτιστοποίησης, να προσεγγίσουμε το ακρότατο μεγίστης πιθανοφάνειας που θα είναι και η τελική εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων μας. 'Εχοντας τις τελικές εκτιμήτριες για τις παραμέτρους $\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\sigma}^2$ είναι εύκολο στη συνέχεια να υπολογιστούν τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητριών των συντελεστών βαρύτητας που λάβαμε με τη μέθοδο IRLS, χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) για τη διασπορά (βλ. Ενότητα 2.1), καθώς στη συνέχεια και οι αντίστοιχες τιμές του T- στατιστικού. Ο κώδικας R για την ολοκλήρωση αυτού τη βήματος είναι διαθέσιμος στο παράρτημα Β. Σύμφωνα με αυτόν δημιουργούμε συνολικά 361 συνδυασμούς για τις παραμέτρους $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}$, και σ^2, χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς που έχουν αναφερθεί. 'Επειτα προσομοιώνουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους έστω $N=1000$, από την $D(\boldsymbol{a})$ και την $B(\boldsymbol{p})$ για κάθε τιμή των παραμέτρων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{p}$ στο πλέγμα και στη συνέχεια για κάθε τιμή y_i της μεταβλητής απόκρησης Y, υπολογίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα $f_i^A(y_i, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \sigma^2)$. Αφού υπολογιστούν όλα αυτά τα αθροίσματα, που στα δικά μας δεδομένα είναι συνολικά 92 (αγνοώντας τις απούσες τιμές), υπολογίζουμε την τιμή της πιθανοφάνειας που δίνεται από το γινόμενο των εν λόγω αθροισμάτων. Ο αλγόριθμος δηλαδή περιλαμβάνει 361 επαναλήψεις (εξωτερικός βρόχος), όπου σε κάθε μία από αυτές υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή της πιθανοφάνειας, αφού πρώτα τερματιστεί ο εσωτερικός βρόχος των 92 επαναλήψεων για τον υπολογισμό των αθροισμάτων $f_i^A(y_i, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \sigma^2)$. Τέλος έχοντας 361 τιμές για την πιθανοφάνεια βρίσκουμε τη μέγιστη τιμή αυτών και το συνδυασμό $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}$, και σ^2 στο πλέγμα που αντιστοιχεί στην τιμή αυτή.

Στα δεδομένα μας η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας του μοντέλου στο βήμα αυτό προκύπτει ίση με 4.146575e-67 και δίνεται στον 247$^{\text{ο}}$ συνδυασμό στο πλέγμα όπου οι παράμετροι της Dirichlet κατανομής για τα βάρη έχουν συνολικό άθροισμα $\alpha_\tau = 29.4$, οι παράμετροι της Βήτα κατανομής για τη λανθάνουσα μεταβλητή έχουν άθροισμα $p_\tau = 24.6$ και η τιμή της τυπικής απόκλισης είναι $\sigma = 0.076$. Τα αποτελέσματα αυτά θα χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές προκειμένου να προσεγγίσουμε αριθμητικά το ακρότατο που μεγιστοποιεί την πιθανοφάνεια ή ισοδύναμα ελαχιστοποιεί την αντίθετη πιθανοφάνεια.

Υλοποίηση βήματος 3 (Ενότητα 2.2.3)

Η επιδίωξή μας στο βήμα αυτό είναι να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής των βαρών και της Βήτα κατανομής της λανθάνουσας μεταβλητής του μοντέλου το οποίο επιτυγχάνεται βελτιστοποιώντας την πιθανοφάνεια του μοντέλου ως προς τις παραμέτρους $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}$ και σ^2, οι οποίες γνωρίζουμε ότι είναι θετικές και ικανοποιούν τους περιορισμούς ισότητας που έχουν αναφερθεί.

Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε από τη βιβλιοθήκη **“alabama”** της R, τη συνάρτηση **“auglag”**, η οποία χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Lagrange προκειμένου να ελαχιστοποιεί μη γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που υπόκεινται είτε σε γραμμικούς είτε σε μη γραμμικούς ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς. Η εν λόγω μέθοδος χρησιμοποιείται για να ανάγει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης $g(\boldsymbol{x})$, υπό τους περιορισμούς $h_j(\boldsymbol{x})=b_j$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ και $\boldsymbol{x}\geq 0$, σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίσης της λεγόμενης συνάρτησης Lagrange $L=g(\boldsymbol{x})-\sum_j \lambda_j[h_j(\boldsymbol{x})-b_j]$, η οποία βελτιστοποιείται με απλές μεθόδους διαφορικού λογισμού, με λ_j να είναι σταθερές παράμετροι που ικανοποιούν κάποια περιοριοριστική εξίσωση (γνωστοί ως πολλαπλασιαστές Lagrange).

Για να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **“auglag”** χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση που θα ελαχιστοποιήσουμε (η οποία στην περίπτωσή μας είναι η αντίθετη της πιθανοφάνειας του μοντέλου), τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των παραμέτρων μας και τον ισοτικό περιορισμό που συνδέει τις 3 παραμέτρους (βλ. Σχέση 17, Ενότητα 2.2). Ο κώδικας R που υλοποιεί αυτό το βήμα χρησιμοποιώντας ως αρχικές τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους αυτές που λάβαμε στο βήμα 2, είναι διαθέσιμος στο παράρτημα Γ.

Σημειώνουμε ότι τόσο κατά την υλοποίηση του βήματος 2 όσο και κατά την υλοποίηση του βήματος 3, έχουν αφαιρεθεί τα εκτιμώμενα $\hat{\beta}_i=0$ όπως και οι αντίστοιχες στήλες των επεξηγηματικών μεταβλητών από τον πίνακα σχεδιασμού, καθώς οι παράμετροι της Dirichlet κατανομής είναι γνήσια θετικοί. Οι αφαιρούμενες επεξηγηματικές μεταβλητές αντιστοιχούν στις ερωτήσεις 1, 2, 4, 9, 12, 13, 16 και 20.

Εφαρμόζοντας στα δεδομένα μας τη συνάρτηση που μόλις περιγράφηκε, λαμβάνουμε μία προσέγγιση του ακροτάτου που ελαχιστοποιεί την αντίθετη πιθανοφάνεια (ισοδύναμα μεγιστοποιεί την πιθανοφάνεια του μοντέλου), το οποίο ακρότατο αντιστοιχεί στις τιμές $\alpha_\tau = 40.832$, $p_\tau = 17.9889$ και $\sigma = 0.0814$. Επομένως χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς (15) και (16) (βλ. Ενότητα 2.2), έχουμε ότι

$$\boldsymbol{w} \sim D(1.83, 0.44, 2.70, 0.28, 3.66, 0.41, 0.64, 4.78, 11.62, 5.82, 1.58, 3.48, 3.52)$$

και $Z \sim B(14.97, 3.02)$.

'Εχοντας εκτιμήσει τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής, μπορούμε πλέον χρησιμοποιώντας το τύπο (2) για τη διασπορά (βλ. Ενότητα 2.1) να υπολογίσουμε τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητριών $\hat{\beta}_i$ που λάβαμε κατά την εφαρμογή της μεθόδου IRLS και την τιμή t του Τ – στατιστικού.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5, αφαιρώντας τους μηδενικούς συντελεστές.

	$\hat{E}(w_{i,j}) = \hat{\beta}_j$	$\sqrt{(\hat{var}(w_{i,j}))}$	$t-$ τιμή ελέγχου
β_3	0.0449	0.0320	1.4024
β_5	0.0108	0.0159	0.6760
β_6	0.0663	0.0384	1.7235
β_7	0.0070	0.0129	0.5454
β_8	0.0898	0.0442	2.0319
β_9	0.0102	0.0155	0.6589
β_{10}	0.0157	0.0192	0.8176
β_{11}	0.1170	0.0497	2.3553
β_{14}	0.2848	0.0697	4.0816
β_{15}	0.1425	0.0540	2.6371
β_{17}	0.0388	0.0298	1.3007
β_{19}	0.0852	0.0431	1.9750
β_{21}	0.0864	0.0434	1.9894

Πίνακας 5 – Τιμές εκτιμητών για τη μέση τιμή, τη τυπική απόκλιση και το t-στατιστικό ελέγχου για τα βάρη.

Παρατηρήσεις:

✔ Οι τιμές των εκτιμητών $\hat{\beta}_i$ ικανοποιούν τους περιορισμούς της μη αρνητικότητας και της άθροισής τους στη μονάδα.

✔ Οι ερωτήσεις 1, 2, 4, 12, 13, 16, 18 και 20 είναι μηδενικής βαρύτητας που σημαίνει όπως έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι φοιτητές του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου δεν δίνουν μεγάλη σημασία στο κατά πόσο οι στόχοι των μαθημάτων είναι σαφείς, αν η ύλη που καλύπτεται ανταποκρίνεται στους στόχους των μαθημάτων, αν το εκπαιδευτικό υλικό είναι αξιόλογο, αν ο διδάσκων είναι καλά προετοιμασμένος στο μάθημα, κάνει το μάθημα ενδιαφέρον, έχει καλή επικοινωνία με τους φοιτητές, δίκαιη και αντικειμενική συμπεριφορά απέναντί τους και αν δίνει προεκτάσεις συναφείς με σύγχρονες επιστημονικές εξελίξεις. Τη μεγαλύτερη βαρύτητα τη δίνουν στις ερωτήσεις 14, 15, 11, 8 και 19, που σημαίνει ότι είναι πολύ σημαντικό για αυτούς ο διδάσκων να έχει μεταδοτικότητα, επαρκή και εις βάθος γνώση του αντικειμένου και καλή οργάνωση του μαθήματος ως προς το περιεχόμενο, τη διδασκαλία και την εξέταση. Επίσης δίνουν μεγάλη σημασία στο κατά πόσο η δυσκολία της εξέτασης είναι συμβατή με τη δυσκολία του μαθήματος και στο αν ο διδάσκων τους σέβεται και τους αντιμετωπίζει ως μελλοντικούς συναδέλφους. Η αντίστοιχη βαρύτητα σε κάθε μια από αυτές τις ερωτήσεις φαίνεται στον Πίνακα 5.

✔ Στον Πίνακα 5 παρατηρούμε επίσης μεγάλα τυπικά σφάλματα όσον αφορά τις εκτιμήσεις της μέσης τιμής των βαρών που αντιστοιχούν στις ερωτήσεις 5, 7, 9 και 10 που σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη μεταβλητότητα τιμών στα ατομικά βάρη. Η τιμή των τυπικών σφαλμάτων σε αυτές τις περιπτώσεις βλέπουμε ότι ξεπερνά την τιμή της εκτιμήτριας της μέσης τιμής βάρους για τις αντίστοιχες ερωτήσεις.

✔ Οι τιμές t της ελεγχοσυνάρτησης T είναι μεγαλύτερες στα χαρακτηριστικά που αναδείχτηκαν υψηλότερης σημαντικότητας. Βλέπουμε ότι στο 14ο χαρακτηριστικό (μεταδοτικότητα του διδάσκοντα) έχουμε αρκετά μεγάλη τιμή για το στατιστικό ίση με 4.0816 που σημαίνει ότι η μεταβλητή αυτή είναι στατιστικά σημαντική. Ακολουθεί το 15ο χαρακτηριστικό (επαρκής και εις βάθος γνώση του αντικείμένου) με τιμή του στατιστικού ίση με 2.6371 (αρκετά υψηλή), έπειτα το 11ο χαρακτηριστικό (οργάνωση του μαθήματος ως προς το περιεχόμενο και την εξέταση) με τιμή t = 2.3553 (αρκετά υψηλή), ακολούθως το 8ο χαρακτηριστικό (συμβατότητα δυσκολίας της εξέτασης και του μαθήματος) με τιμή t = 2.0319 κ.ο.κ. Τα χαρακτηριστικά στα οποία παρατηρήσαμε μεγάλο τυπικό σφάλμα που αντιστοιχούν στις ερωτήσεις 5, 7, 9 και 10 έχουν πολύ μικρές τιμές για το T-στατιστικό όπως και μικρή βαρύτητα δηλαδή είναι στατιστικά μη σημαντικές (βλ. Παράρτημα – αντίστοιχες ερωτήσεις).

✔ Παρατηρούμε ότι η βαρύτητα που αντιστοιχεί στη λανθάνουσα μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλη (β_{21}=0.0864) που σημαίνει ότι υπάρχουν χαρακτηριστικά στα οποία οι φοιτητές του τμήματος δίνουν σημασία και δεν έχουν παρατηρηθεί.

Κεφάλαιο 4

Μπεϋζιανό ιεραρχικό γραμμικό μοντέλο για ποιοτικούς δείκτες

4. Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια προτείναμε ένα μοντέλο τυχαίων συντελεστών για την αξιολόγηση της συνολικής ποιότητας της διδασκαλίας και συγκεκριμένα θεωρώντας ότι η ποιότητα αυτή εκφράζεται ως ένας σταθμισμένος γραμμικός συνδυασμός διαφόρων γνωστών και άγνωστων χαρακτηριστικών, παρουσιάσαμε βασιζόμενοι σε θεωρία κλασικής στατιστικής, τη μεθοδολογία κατά την οποία μπορούμε να λάβουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μέτρα για τους συντελεστές βαρύτητας στο γραμμικό μοντέλο, υπό τους περιορισμούς και τις υποθέσεις που αναφέρθηκαν. Μετά το κλείσιμο του Κεφαλαίου 3 όπου έγιναν αντιληπτά τα βήματα της μεθοδολογίας μας εφαρμόζοντάς τη σε δεδομένα του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου για την αξιολόγηση της διδασκαλίας, εκπληρώνονται οι απαιτήσεις της παρούσας διπλωματικής εργασίας και είμαστε ενόψει του να παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης του ίδιου προβλήματος που στηρίζεται στα βασικά χαρακτηριστικά της Μπεϋζιανής προσέγγισης, χωρίς διεξοδική περιγραφή. (Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. A Bayesian Hierarchical Model for Quality Indicators, D. Fouskakis, G. Petrakos and I. Vavouras, 2014).

4.1 Το θεώρημα του Bayes

Για την εκτίμηση ενός άγνωστου τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{\theta}$, οι συνιστώσες του οποίου είναι άγνωστες τυχαίες παράμετροι, (στη περίπτωση του δικού μας μοντέλου οι συντελεστές βαρύτητας), τα βασικά χαρακτηριστικά της Μπεϋζιανής προσέγγισης είναι ο καθορισμός της εκ των προτέρων κατανομής για το $\boldsymbol{\theta}$ (η οποία αντιπροσωπεύει τις πεποιθήσεις μας σχετικα με το $\boldsymbol{\theta}$ πριν έχουμε οποιαδήποτε πληροφορία για τα δεδομένα μας), η χρήση του θεωρήματος τους **Bayes** για τον "εκσυγχρονισμό" των εκ των προτέρων πεποιθήσεών μας σε εκ των υστέρων πιθανότητες, και η εξαγωγή της κατάλληλης συμπερασματολογίας. 'Ολα αυτά συνδέονται στον τύπο του Bayes στον οποίο θεωρητικά βασίζεται η εναλλακτική μεθοδολογία που θα παρουσιάσουμε συνοπτικά.

Το θεώρημα του Bayes συνδυάζει τα 4 βήματα – κλειδιά της Μπεϋζιανής προσέγγισης που είναι:

1. Ο καθορισμός του μοντέλου πιθανοφάνειας $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$.

2. Ο καθορισμός της εκ των προτέρων κατανομής $f(\boldsymbol{\theta})$.

3. Ο υπολογισμός της εκ των υστέρων κατανομής $f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$.

4. Η εξαγωγή συμπερασμάτων από την εκ των υστέρων πληροφορία.

Η μορφή που λαμβάνει σε όρους τυχαίων μεταβλητών με πυκνότητες που συμβολίζονται γενικά με f, είναι η ακόλουθη:

$$f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})=\frac{f(\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \quad (1)$$

το οποίο μας λέει ότι η εκ των υστέρων κατανομή για το $\boldsymbol{\theta}$ είναι ανάλογη του γινομένου της εκ των προτέρων κατανομής του με τη συνάρτηση πιθανοφάνειας που συμβολικά γράφεται ως

$$f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})\infty f(\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}).$$

Στη σχέση (1) το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή είναι διάστασης ίσης με τη διάσταση του διανύσματος $\boldsymbol{\theta}$, και ολόκληρος ο παρονομαστής δεν είναι τίποτα άλλο από μια σταθερά που καλείται **σταθερά κανονικοποίησης** και εγγυάται ότι η εκ των υστέρων κατανομή για το $\boldsymbol{\theta}$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Στο Μπεϋζιανό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε, ως αντιπροσωπευτικό μέτρο για τη μέση τιμή των συντελεστών βαρύτητας των επεξηγηματικών μεταβλητών θα δώσουμε τον εκτιμώμενο εκ των υστέρων μέσο της $f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$, με το $\boldsymbol{\theta}$ να ταυτίζεται με το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων της Dirichlet κατανομής για τα βάρη.

Στην πράξη πολλές φορές, κυρίως στις περιπτώσεις οπου έχουμε πολλές άγνωστες παραμέτρους (πολυδιάστατα παραμετρικά προβλήματα), ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (1) είναι υπολογιστικά δύσκολος και κατά συνέπεια έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος όπως,

I. Αριθμητικές Μέθοδοι και ασυμπτωτικές προσεγγίσεις
II. Συζυγείς prior
III. MCMC

Οι συζυγείς prior είναι κατάλληλα επιλεγμένες εκ των προτέρων κατανομές για την άγνωστη ποσότητα $\boldsymbol{\theta}$ που καθορίζουν τη μορφή των εκ των υστέρων κατανομών έτσι ώστε αυτές να ανήκουν στην ίδια οικογένεια κατανομών με τις εκ των προτέρων κατανομές, βοηθώντας στο να παραλειφθεί ο υπολογισμός του ολοκληρώματος. Επειδή όμως η επιλογή των συζυγών εκ των προτέρων (συζυγών prior) κατανομών δεν είναι πάντοτε εφικτή, έχει αναπτυχθεί μια άλλη τεχνική αυτή των ***MCMC (Marcov Chain Monte Carlo)*** η οποία και είναι χρήσιμη στη παρούσα ενδεικτική λύση. Η τεχνική των MCMC βασίζεται στην κατασκευή μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας της οποίας στασιμη κατανομή είναι η εκ των υστέρων κατανομή που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε. Με την τεχνική αυτή μπορούμε να προσομοιώσουμε τιμές από την εκ των υστέρων κατανομή και να μιμηθούμε τη συμπεριφορά της, εξάγοντας χρήσιμες πληροφορίες για τις άγνωστες παραμέτρους μας, όπως μια πολύ καλή προσέγγιση για τους εκ των υστέρων μέσους αυτών, τα τυπικά τους σφάλματα και διαστήματα εμπιστοσύνης.

4.2 Μπεϋζιανό ιεραρχικό γραμμικό μοντέλο

Υποθέτουμε όπως και πριν ότι έχουμε συλλέξει ένα τυχαίο δείγμα φοιτητών μεγέθους n και συμβολίζουμε με $y_i, \ (i=1,\dots,n)$ τις παρατηρήσεις μας για τη μεταβλητή απόκρισης Y και με $\boldsymbol{x_{ij}}=(x_{i1},\dots,x_{i\kappa})', \ (i=1,\dots,n \text{ και } j=1,\dots,\kappa)$ τις παρατηρήσεις μας για το τυχαίο διάνυσμα των κ γνωστών χαρακτηριστικών. Επιπλέον δηλώνουμε $z_i, \ (i=1,\dots,n)$ να είναι οι μη παρατηρούμενες τιμές για τη λανθάνουσα τ.μ Z η οποία αφορά τα άγνωστα χαρακτηριστικά και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις μας παίρνουν τιμές στο διάστημα [0,1].

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα κεφάλαια, εδώ υποθέτουμε ότι η μεταβλητή απόκρισης ακολουθεί τη Βήτα κατανομή με μέσο ο οποίος μοντελοποιείται ως ένας σταθμισμένος γραμμικός συνδυασμός των παρατηρούμενων και των μη παρατηρούμενων χαρακτηριστικών και σταθερή διασπορά. 'Οπως και πριν οι συντελεστές του μοντέλου, ερμηνεύονται ως βάρη (με την έννοια ότι πρόκειται για θετικές τυχαίες μεταβλητές που αθροίζουν συνολικά στη μονάδα), δίνοντας ένα μέτρο της σχετικής σημαντικότητας που δίνει ο i^{os} φοιτητής σε καθένα από τα διαφορετικά χαρακτηριστικά και τη λανθάνουσα μεταβλητή.

Τα παρατηρούμενα δεδομένα εκφράζονται υπό μορφή ποσοστού και στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για το χειρισμό τέτοιων δεδομένων οι οποίες στηρίζονται σε διάφορους μετασχηματισμούς αυτών και εν συνεχεία στην εφαρμογή της συνήθη μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Τα πιο συνηθισμένα παραδείγματα τέτοιων μετασχηματισμών είναι το τόξο ημιτόνου τετραγωνικής ρίζας και ο λογιστικός μετασχηματισμός. Ωστόσο αν και τα μοντέλα αυτά είναι αρκετά δημοφιλή, αρκετά συχνά οι υποθέσεις τους δεν πληρούνται. Μια άλλη εναλλακτική προσέγγιση για το χειρισμό τέτοιων δεδομένων είναι αυτή που χρησιμοποιεί μοντέλο παλινδρόμησης βασισμένο στη διωνυμική κατανομή. Δυστυχώς όμως αρκετά συχνά, μοντέλα όπως αυτό παρουσιάζουν μεγαλύτερη διασπορά από την αναμενόμενη της διωνυμικής κατανομής. 'Ετσι για να ξεπεράσουμε αυτά τα προβλήματα και τους περιορισμούς υποθέτουμε Βήτα κατανομή για τη μεταβλητή απόκρισης, καθώς η συγκεκριμένη κατανομή έχει ένα εξαιρετικά ευέλικτο σχήμα και είναι κατάλληλη για δεδομένα εκπαιδευτικών επιδόσεων μετρημένα σε ποσοστιαία κλίμακα.

'Εχοντας βασίσει το μοντέλο παλινδρόμησης στη Βήτα κατανομή, η συμπερασματολογία μπορεί να στηριχτεί σε ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητριών μεγίστης πιθανοφάνειας, ωστόσο η συμπερασματολογία σύμφωνα με τη Μπεϋζιανή ανάλυση δεν βασίζεται σε προσεγγίσεις μεγάλου δείγματος και επιπλέον επιτρέπει αφενός την ενσωμάτωση της εκ των προτέρων πληροφορίας για τις άγνωστες ποσότητες, αν αυτή είναι διαθέσιμη, και αφετέρου έχει το πλεονέκτημα ότι όλα τα συμπεράσματα για αυτές τις ποσότητες εκφράζονται υπό μορφή πιθανοτήτων. Επομένως για τη Μπεϋζιανή Βήτα παλινδρόμηση που θα εφαρμοστεί, έχουμε τα ακόλουθα:

$$Y_i \sim Beta(a_i, b_i),\ \text{ανεξάρτητες}$$

$$a_i = \frac{(1-\mu_i)\mu_i^2 - \mu_i\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$b_i = \frac{(1-\mu_i)(\mu_i - \mu_i^2 - \sigma^2)}{\sigma^2}$$

$$\mu_i = w_1 x_{i1} + \ldots + w_\kappa x_{i\kappa} + w_{\kappa+1} z_i \quad (1)$$

όπου το μ_i αντιπροσωπεύει τον μέσο της τυχαίας μεταβλητής Y_i και το σ^2 τη διασπορά των Y_i. Επιπλέον συμβολίζουμε $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_\kappa, w_{\kappa+1})'$ το τυχαίο διάνυσμα των βαρών του οποίου οι συνιστώσες μετράνε τη σχετική σημαντικότητα που δίνεται στα διάφορα χαρακτηριστικά και στη λανθάνουσα μεταβλητή. Προφανώς έχουμε όπως και στα προηγούμε κεφάλαια ότι ισχύουν οι περιορισμοί $0 \le w_l \le 1$ και $\sum_{l=1}^{\kappa+1} w_l = 1,\ (l = 1, \ldots, \kappa+1)$ ενώ χρησιμοποιούμε την ταυτοτική συνάρτηση σύνδεσης (1) για ευκολότερη ερμηνεία. Χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη Dirichlet ως εκ των προτέρων κατανομή για τα βάρη, δηλαδή θεωρούμε ότι $\boldsymbol{w} \sim Dirichlet(1, \ldots, 1)$, η οποία είναι μη πληροφοριακή (προκειμένου να δηλώσουμε την αρχική μας άγνοια για τα βάρη), και επιπλέον προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι $\alpha_i, b_i \ge 0,$ υποθέτουμε εκ των προτέρων ότι $\sigma^2 \sim Unif(0, m)$, με $m = min\{(1-\mu_i)\mu_i\}$. Τέλος υποθέτουμε εκ των προτέρων για τη λανθάνουσα μεταβλητή, ότι προέρχεται από τη Βήτα κατανομή με τις δυο παραμέτρους ίσες με 0.5. Χρησιμοποιούμε το WinBugs για να προσομοιώσουμε το παραπάνω μοντέλο, σημειώνοντας ότι για τη μεταβλητή απόκρισης δεχόμαστε τις τιμές που είναι αυστηρά μεγαλύτερες του 0 και μικρότερες του 1, διαγράφοντας εκείνες τις παρατηρήσεις που δεν πληρούν αυτή την απαίτηση.

Βάρη	Δειγματικός μέσος	Τυπική απόκλιση	2.5% ποσοστημόριο	Δειγματική διάμεσος	97.5% ποσοστημόριο
w_1	0.0199	0.0176	0.0007	0.0150	0.0659
w_2	0.0368	0.0277	0.0014	0.0310	0.1039
w_3	0.0525	0.0342	0.0032	0.0483	0.1291
w_4	0.0263	0.0211	0.0009	0.0214	0.0799
w_5	0.0258	0.0205	0.0009	0.0210	0.0760
w_6	0.0282	0.0220	0.0010	0.0239	0.0819
w_7	0.0311	0.0253	0.0009	0.0256	0.0956
w_8	0.0417	0.0287	0.0023	0.0367	0.1068
w_9	0.0154	0.0139	0.0003	0.0117	0.0523
w_{10}	0.0163	0.0135	0.0004	0.0128	0.0489
w_{11}	0.0911	0.0481	0.0079	0.0895	0.1905
w_{12}	0.0248	0.0205	0.0006	0.0197	0.0767
w_{13}	0.0318	0.0250	0.0009	0.0266	0.0899
w_{14}	0.0650	0.0396	0.0045	0.0603	0.1526
w_{15}	0.1402	0.0451	0.0501	0.1418	0.2257
w_{16}	0.0172	0.0151	0.0005	0.0131	0.0566
w_{17}	0.0251	0.0203	0.0008	0.0208	0.0782
w_{18}	0.0120	0.0093	0.0004	0.0101	0.0346
w_{19}	0.0758	0.0344	0.0094	0.0753	0.1441
w_{20}	0.1296	0.0439	0.0423	0.1294	0.2131
w_{21}	0.0925	0.0309	0.0303	0.0924	0.1520

Πίνακας 6 -Εκ των υστέρων αποτελέσματα για τα βάρη.

Δηλώνοντας την πιθανοφάνεια, τις εκ των προτέρων πληροφορίες και φορτώνοντας τα δεδομένα του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου στο WinBugs, εφαρμόζεται η τεχνική των MCMC, για 3000 επαναλήψεις με τις πρώτες 1000 να είναι η burnin περίοδος, κατά τις οποίες δεν έχει επιτευχθεί ακόμη σύγκλιση της Μαρκοβιανής αλυσίδας που παράγει ο MCMC αλγόριθμος. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 6.

Παρατηρήσεις:

✔ Η 2η στήλη του Πίνακα 6 παρουσιάζει τους εκ των υστέρων μέσους για τα βάρη. Τα βάρη 3, 11, 14, 15, 19, 20 και 21 έχουν εκ των υστέρων μέσο πάνω από 5% δηλαδή οι φοιτητές δίνουν αρκετά υψηλή βαρύτητα στις ερωτήσεις που αφορούν την ύλη των μαθημάτων και αν αυτή είναι σχετική με το πρότυπο περιεχόμενό τους όπως αυτό προσδιορίζεται από την επιστημονική βιβλιογραφία και τα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών άλλων τμημάτων, την οργάνωση του διδάσκοντα ως προς το περιεχόμενο και την εξέταση, την μεταδοτικότητά του, την επαρκή και εις βάθος γνώση του αντικειμένου, το σεβασμό απέναντι στους φοιτητές του και την προσπάθειά του να δώσει μέσα από το μάθημα προεκτάσεις συναφείς με σύγχρονες επιστημονικές εξελίξεις. Το 21^{ο} βάρος αντιστοιχεί στη λανθάνουσα μεταβλητή και δείχνει ότι οι φοιτητές του τμήματος δίνουν αρκετά υψηλή σημαντικότητα σε χαρακτηριστικά που δεν έχουν παρατηρηθεί.

✔ Από τα αποτελέσματα επίσης φαίνεται ότι οι φοιτητές δίνουν την υψηλότερη σχετική σημαντικότητα στο 15^{ο} χαρακτηριστικό δηλαδή στην επαρκή και εις βάθος γνώση του αντικειμένου από το διάσκοντα, με εκ των υστέρων μέσο γύρω στο 14%. Ακολουθεί το 20^{ο} χαρακτηριστικό με εκ των υστέρων μέσο γύρω στο 13% που αφορά την προσπάθεια του διδάσκοντα να δώσει μέσα από το μάθημα προεκτάσεις συναφείς με σύγχρονες επιστημονικές εξελίξεις και το 11^{ο} χαρακτηριστικό με εκ των υστέρων μέσο γύρω στο 9% που αφορά την οργάνωση του διδάσκοντα ως προς το περιεχόμενο και την εξέταση του μαθήματος. Επίσης όπως έχει ήδη αναφερθεί αρκετά υψηλή είναι και η βαρύτητα της λανθάνουσας μεταβλητής (w_{21}), όπου φαίνεται ότι η σχετική βαρύτητα που δίνουν οι φοιτητές σε μη παρατηρούμενες τυχαίες μεταβλητές για τη συνολική αξιολόγηση της διδασκαλίας, είναι γύρω στο 9%.

✔ Η 3η στήλη μας δίνει τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματα για τους εκ των υστέρων μέσους όπου βλέπουμε ότι τα χαρακτηριστικά υψηλότερης σημαντικότητας που μόλις αναφέρθηκαν έχουν τις μεγαλύτερες τυπικές αποκλίσεις γύρω στο 4%, που όπως επισημάνθηκε σε παρατήρηση του Κεφαλαίου 2, αυτό συμβαίνει σε περιπτώσεις που έχουμε αρκετά χαρακτηριστικά στο μοντέλο.

✔ Η 5η στήλη μας δίνει τους αντίστοιχους δειγματικούς μέσους των χαρακτηριστικών κατατάσσοντας τα χαρακτηριστικά αυτά ως προς τη σημαντικότητά τους, με την ίδια σειρά που έγινε παρατηρώντας τους εκ των υστέρων μέσους της 2ης στήλης. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δεν διαφέρουν πολύ μεταξύ των δύο αυτών στηλών.

✔ Η 4η και 6η στήλη μας δίνουν τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης για τον έλεγχο της υπόθεσης που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2. Παρατηρούμε ότι σε αυτά δεν εμπεριέχεται η τιμή 0 και άρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

✔ Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 6 με τα αποτελέσματα του Πίνακα 5 παρατηρούμε επίσης τα ακόλουθα:

◆ Οι συντελεστές βαρύτητας που κατά την εφαρμογή της 1ης μεθοδολογίας με χρήση κλασικής στατιστικής έχουν εκτιμώμενη μέση τιμή ίση με μηδέν, κατά την εφαρμογή της 2ης μεθοδολογίας έχουν επίσης αρκετά μικρή εκτιμώμενη μέση τιμή (κάποιοι πολύ κοντά στο μηδέν). Οι συντελεστές αυτοί αντιστοιχούν στις ερωτήσεις 1, 2, 4, 12, 13, 16 και 18 που σχετίζονται με το αν οι στόχοι των μαθημάτων ήταν σαφείς, αν η ύλη που καλύφθηκε ανταποκρινόταν στους στόχους των μαθημάτων, αν το εκπαιδευτικό υλικό ήταν αξιόλογο, αν ο διδάσκων ήταν καλά προετοιμασμένος στις παραδόσεις του και έκανε το μάθημα ενδιαφέρον, αν είχε καλή επικοινωνία με τους φοιτητές και αν η συμπεριφορά του ήταν δίκαιη, ισότιμη και αντικειμενική απέναντί τους.

◆ Οι εκτιμώμενες μέσες τιμές για τους συντελεστές βαρύτητας που αφορούν το 20ο χαρακτηριστικό, δηλαδή την ερώτηση που αφορά την προσπάθεια του διδάσκοντα να δώσει μέσα από το μάθημα προεκτάσεις συναφείς με σύγχρονες επιστημονικές εξελίξεις διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς τις δύο μεθοδολογίες. Με την 1η μεθοδολογία η 20η ερώτηση κατατάσσεται στα μη σημαντικά χαρακτηριστικά καθώς της αποδίδεται μηδενική βαρύτητα, ενώ με την 2η μεθοδολογία στην ίδια ερώτηση αντιστοιχεί συντελεστής βαρύτητας με εκ των υστέρων μέσο γύρω στο 13% κατατάσσοντας έτσι την ερώτηση αυτή στα χαρακτηριστικά υψηλότερης σημαντικότητας. Διαφοροποίηση επισημαίνεται επίσης στον 7ο συντελεστή βαρύτητας (όχι πολύ σημαντική), όπου σύμφωνα με τη 2η μεθοδολογία δίνεται υψηλότερη βαρύτητα στην ερώτηση 7 (που εκτιμάται κατά μέσο όρο ίση με 0.0311) και αφορά τη συμβατότητα του αντικειμένου της εξέτασης και τον τρόπο που αυτή έλαβε χώρα με το περιεχόμενο και τη διδασκαλία των αντίστοιχων μαθημάτων συγκριτικά με την 1η μεθοδολογία (όπου η αντίστοιχη βαρύτητα εκτιμάται κατά μέσο όρο ίση με 0.0070). Ωστόσο παρατηρούμε σε αυτή την περίπτωση ότι με τη 1η μέθοδο έχουμε αρκετά μεγάλο τυπικό σφάλμα για τον εν λόγω εκτιμητή, ενώ σύμφωνα με τη 2η μέθοδο το τυπικό σφάλμα δεν είναι τόσο μεγάλο ώστε να υπερβαίνει την τιμή του συγκεκριμένου εκτιμητή όπως συμβαίνει κατά την εφαρμογή της 1ης μεθόδου.

◆ 'Οσον αφορά τα υπόλοιπα γνωστά χαρακτηριστικά - ερωτήσεις λαμβάνουμε μικρές διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματα των δύο μεθόδων. 'Ομοια οι εκτιμητές της μέσης βαρύτητας για τη λανθανουσα μεταβλητή λαμβάνουν περίπου ίδια τιμή και στις δύο περιπτώσεις.

◆ Οι δύο μέθοδοι συμφωνούν ως προς τις ερωτήσεις εκείνες που κατατάσσονται στα χαρακτηριστικά υψηλότερης σημαντικότητας. Παρατηρούμε ότι και οι δύο μεθοδολογίες (εκτός από τις διαφοροποιήσεις που μόλις αναφέρθηκαν), παρουσιάζουν τις ερωτήσεις 15, 14, 11 και 19 ως ερωτήσεις υψηλότερης βαρύτητας (βλ. Παράρτημα και αντίστοιχα αποτελέσματα στους Πίνακες 5 και 6).

◆ Ως προς τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητών φαίνεται να είναι λίγο καλύτερη η 2η μεθοδολογία καθώς με την 1η μεθοδολογία είδαμε περιπτώσεις με πολύ μεγάλο τυπικό σφάλμα. Εν γένει όμως πρόκειται για δύο διαφορετικές μεθοδολογίες και τα προτεινόμενα μοντέλα δεν είναι συγκρίσιμα.

Κεφάλαιο 5

5. Συμπεράσματα

Περιγράψαμε και αναλύσαμε το γενικό πρόβλημα που εμφανίζεται κατά την εφαρμογή διαφόρων υπαρκτών μεθοδολογιών σε διαδικασίες αξιολόγησης της ποιότητας μιας υπηρεσίας, κατά το οποίο όταν δεν δίνεται η δυνατότητα στην κοινωνική ομάδα την οποία αφορά η αξιολόγηση να σταθμίζει ανάλογα με τις προσδοκίες της τα χαρακτηριστικά της αξιολόγησης, δεν υπάρχει καμία εγγύηση για την αποτελεσματική βελτίωση της παρεχόμενης υπηρεσίας.

Προτείναμε βασιζόμενοι σε θεωρία κλασικής στατιστικής ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης στο οποίο η συνολική ποιότητα της υπηρεσίας μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός διαφόρων παρατηρούμενων και μη παρατηρούμενων ποιοτικών χαρακτηριστικών, με συντελεστές τυχαίους προερχόμενους από την κατανομή Dirichlet οι οποίοι ορίζονται ως βάρη δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους αξιολογητές να κατατάσσουν τα χαρακτηριστικά εκείνα ανάλογα με τη σχετική σημαντικότητα που τους δίνεται από την κοινωνική ομάδα για την οποία γίνεται η αξιολόγηση. Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι εκτιμήσεις των συντελεστών βαρύτητας που ικανοποιούν τους περιοριορισμούς της μη αρνητικότητας και της άθροισής τους στη μονάδα, προκύπτουν από συνδυασμό της μεθόδου των επαναληπτικών επανασταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (IRLS) ή εναλλακτικά του αλγορίθμου των μη αρνητικών ελαχίστων τετραγώνων (NNLS), με τη μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας του μοντέλου.

Περιγράψαμε και αναλύσαμε τις δύο μεδόθους και είδαμε πώς μεγιστοποιώντας κατάλληλα την πιθανοφάνεια του μοντέλου μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Dirichlet κατανομής των βαρών έτσι ώστε να μπορούμε να δώσουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μέτρα αυτών των τυχαίων μεταβλητών, όπως μια εκτίμηση για τη μέση τιμή και τη διασπορά τους.

Εστιάζοντας κυρίως στην περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθούμε προκειμένου να οδηγηθούμε στην ανάδειξη των χαρακτηριστικών υψηλής σημαντικότητας και τονίζοντας τη σπουδαιότητα της προτεινόμενης μεθοδολογίας, εφαρμόσαμε την προτεινόμενη μεθοδολογία σε δεδομένα που αφορούσαν την αξιολόγηση της διδασκαλίας στο τμήμα Δημόσιας Διοίκησης στο

Πάντειο Πανεπιστήμιο, προκειμένου να αναδειχτούν τα χαρακτηριστικά εκείνα που για τους φοιτητές του τμήματος θεωρούνται υψηλής σημαντικότητας που όπως είδαμε αντιστοιχούν σε ερωτήσεις που αφορούν κυρίως το διδάσκοντα, τη μεταδοτικότητά του, την επαρκή και εις βάθος γνώση που έχει για το αντικείμενο που διδάσκει, την οργάνωσή του ως προς το περιεχόμενο και την εξέταση του μαθήματος, το σεβασμό και την αντιμετώπιση των φοιτητών του ως μελλοντικούς συναδέλφους.

Τέλος παρουσιάσαμε συνοπτικά μια εναλλακτική μεθοδολογία για διαδικασίες αξιολόγησης, με χρήση Μπεϋζιανής στατιστικής και υποθέτοντας αυτή τη φορά ότι η μεταβλητή απόκρισης Υ ακολουθεί Βήτα κατανομή αντί για κανονική κατανομή που υποθέσαμε με χρήση κλασικής στατιστικής.

Εφαρμόζοντας τις δύο μεθοδολογίες στα δεδομένα του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου για την αξιολόγηση της συνολικής ποιότητας της διδασκαλίας, δεν παρατηρήσαμε σημαντικές διαφοροποιήσεις ως προς την εκτίμηση της μέσης βαρύτητας των χαρακτηριστικών που τη συνθέτουν εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις οι οποίες ήταν αναμενόμενο να εμφανιστούν απ τη στιγμή που έχουμε δύο διαφορετικά μοντέλα τα οποία εν γένει δεν είναι συγκρίσιμα.

Και οι δύο μεθοδολογίες είναι αρκετά σημαντικές και έχουν μεγάλη πρακτική αξία σε διαδικασίες αξιολόγησης της συνολικής ποιότητας μιας παρεχόμενης υπηρεσίας, καθώς επιχειρείται η στάθμιση των χαρακτηριστικών της αξιολόγησης να γίνεται από την κοινωνική ομάδα την οποία αφορά η αξιολόγηση προκειμένου να δρομολογούνται ουσιαστικές αλλαγές με σκοπό την αναβάθμιση της υπηρεσίας, ικανοποιώντας τις ανάγκες των ενδιαφερόμενων μελών. Η 2η μεθοδολογία φαίνεται να είναι λίγο καλύτερη ως προς τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητριών και ενδείκνυται κυρίως σε περιπτώσεις όπου είναι διαθέσιμη κάποια εκ των προτέρων πληροφόρηση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α) Κώδικας R για την υλοποίηση του βήματος 1 (Ενότητα 2.2)

```
# Διαβάζουμε τα δεδομένα, αγνοούμε τις απούσες τιμές, θέτουμε x1 να είναι ο
#πίνακας με τις  επεξηγηματικές μεταβλητές και y1 το διάνυσμα των
#παρατηρήσεων για τη μεταβλητή απόκρισης Y. 'Επειτα διαιρούμε με 10 για να
#είναι τα δεδομένα μας σε κλίμακα 0-1.
data<-read.csv("data.csv",sep=",",header=TRUE)
dataexc<-na.omit(data)
n<-dim(dataexc)[2]-2
x1<-dataexc[,2:(n+1)]
y1<-dataexc[,(n+2)]
x1<-x1/10
y1<-y1/10

# Με την εντολή lm εφαρμόζουμε σε πρώτη φάση ελάχιστα τετράγωνα στο
#μοντέλο (18) και κατόπιν παίρνουμε τις αρχικές τιμές για το σταθερό όρο γ το
#διάνυσμα των  x̄_i  των s_i^2 ,των t_i και των υ_i^2.
model<-lm(y1~x1)
γ<-model$coefficients[1]
xbar<-
apply(matrix(rep(model$coefficients[2:21],length(y1)),ncol=20,byrow=T)*x1,
1,sum)
s2<-
apply(matrix(rep(model$coefficients[2:21],length(y1)),ncol=20,byrow=T)*x1^2 ,
1,sum)-xbar^2
t<-s2-2*γ*xbar
u2<-residuals(model)^2

#Εφαρμόζουμε ελάχιστα τετράγωνα στο μοντέλο (22) και εκτιμούμε τα μ_0, μ_2 και
#τη διασπορά v^2.
intermodel<-lm(u2~t)
μ0<-intermodel$coefficients[1]
μ2<-intermodel$coefficients[2]
v2<-μ2*t+μ0
```

```
# Εφαρμόζουμε τη μέθοδο IRLS με την εντολή rlm δίνοντας αρχικά βάρη τα 1/v^2.
#Παίρνουμε τις εκτιμήσεις των β_ι υπολογίζουμε το συντελεστή β_z της
#λανθάνουσας μεταβλητής. Αντικαθιστούμε τους αρνητικούς συντελεστές ίσους
#με μηδέν και κανονικοποιούμε το διάνυσμα των συντελεστών των
#επεξηγηματικών μεταβλητών και της λανθάνουσας μεταβλητής, ώστε να
#αθροίζουν στη μονάδα.
rlmmodel<-rlm(y1~x1,w=v2^(-1))
beta<-rlmmodel$coefficients
bz<-1-sum(beta[2:21])
beta[beta<0]<-0
beta<-c(beta,bz)
γ<-beta[1]
beta<-beta[2:22]/sum(beta[2:22])

#Υπολογίζουμε την τιμή του m, τα υπόλοιπα και την τιμή του τ.
beta<-c(γ,beta)
m<-γ/(1-sum(beta[2:21]))
residuals<-y1-
apply(matrix(rep(beta[1:21],length(y1)),ncol=21,byrow=T)*cbind(rep(1,length(y1
)),x1),1,sum)
τ<-1/length(y1)*sum(residuals^2)

#Εμφανίζουμε τα αποτελέσματα που χρειαζόμαστε στο επόμενο βήμα.
m
τ
γ
beta

#Για την εφαρμογή της μεθόδου NNLS εγκαθιστούμε και φορτώνουμε το πακέτο
#NNLS, προσαρμόζουμε το μοντέλο με τη μέθοδο nnls και υπολογίζουμε το
#συντελεστή bz της λανθάνουσας μεταβλητής. Το m και το τ υπολογίζονται όπως
#και πριν. Σημειώνουμε ότι για να εμφανίσουμε το σταθερό όρο πρέπει στον
#πίνακα σχεδιασμού x1 να προσθέσουμε στην αρχή τη στήλη με τους άσσους.
Install.packages(“NNLS”)
library(NNLS)
model<-nnls(cbind(rep(1,length(x1)),x1), y1)
bz<-1- sum(coefficients(model)[2:21])
```

B) Κώδικας R για την υλοποίηση του βήματος 2 (Ενότητα 2.2)

#Εγκαθιστούμε και φορτώνουμε τη βιβλιοθήκη “gtools” που περιέχει τη #συνάρτηση rdirichlet που θα χρησιμοποιήσουμε για να προσομοιώσουμε τιμές #από την Dirichlet κατανομή.

```
install.packages("gtools")
library(gtools)
```

Αφαιρούμε από το διάνυσμα των εκτιμώμενων συντελεστών β_i τους μηδενικούς #συντελεστές καθώς και τις αντίστοιχες επεξηγηματικές μεταβλητές.
#Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\bar{x}$ και το διάνυσμα των των s_i^2 (s_w) σύμφωνα με τις #σχέσεις (9) και (8) αντίστοιχα.

```
bz<-beta[22]
beta<-beta[2:21]
beta<-beta[-c(1,2,4,12,13,16,18,20)]
x1<-x1[,-c(1,2,4,12,13,16,18,20)]
xbar<-apply(matrix(rep(beta[1:12],length(y1)),ncol=12, byrow=T)*x1,1,sum)
sw<-apply(matrix(rep(beta[1:12],length(y1)),ncol=12, byrow=T)*x1^2,1,sum)-
xbar^2
```

Ορίζουμε ένα πλέγμα τιμών των παραμέτρων α_τ και p_τ, παίρνουμε όλους τους #δυνατούς συνδυασμούς αυτών, υπολογίζουμε την αντίστοιχη τιμή του σ^2 #σύμφωνα με τη σχέση (14) και δημιουργούμε το τελικό πλέγμα που #περιλαμβάνει τους συνδυασμούς των τριών παραμέτρων.

```
at<-seq(from=15, to=30, by=0.8)
pt<-seq(from=15, to=30, by=0.8)
grid<-expand.grid(at,pt)
σ<-rep(NA,dim(grid)[1])
for(i in 1:dim(grid)[1]){
oros1<-(γ*(1-m)*(m-γ))/(m*(1+grid[i,1])*(1+grid[i,2]))
oros2<-(1+γ*(1+grid[i,1])/(m-γ)+m*(1+grid[i,2])/(1-m))
oros3<-oros1*oros2
oros4<-sum(sw-2*γ*xbar)/(length(y1)*(1+grid[i,1]))
σ[i]<-sqrt(τ-oros3-oros4)}
grid<-cbind(grid,σ)
```

```
#Δημιουργούμε τα διανύσματα f και likel για να κρατήσουμε τις τιμές των
#αθροισμάτων που δίνονται από τη σχέση (27) και τις τιμές της Πιθανοφάνειας
#που δίνονται από τη σχέση (28) αντίστοιχα.
f<-rep(0,length(y1))
likel<-rep(0,dim(grid)[1])

# Για επαναλήψεις ίσες με το μήκος του πλέγματος χρησιμοποιούμε τους
#περιορισμούς (15) και (16) για τον υπολογισμό των α και p, στη συνέχεια  με τις
#παραμέτρους αυτές προσομοιώνουμε δείγμα μεγέθους N=1000 από την Dirichlet
#κατανομή για τα βάρη, εκχωρούμε στον πίνακα wbeta τα προσομοιωμένα βάρη
#για τις κ επεξηγηματικές μεταβλητές και στο διάνυσμα wzeta τα προσομοιωμένα
#βάρη που αφορούν τη λανθάνουσα μεταβλητή καθώς  επίσης προσομοιώνουμε
# z δείγμα  μεγέθους N=1000 από τη Βήτα κατανομή. Στον εσωτερικό βρόχο για
#κάθε τιμή yi  της μεταβλητής απόκρισης Y υπολογίζουμε το άθροισμα που
#δίνεται από τη σχέση (27) και αφού τερματίσει ο εσωτερικός βρόχος,
#υπολογίζουμε την τιμή της Πιθανοφάνειας σύμφωνα με τη σχέση (28).
for (i in 1:dim(grid)[1]){
a<-grid[i,1]*c(beta,bz)
p<-grid[i,2]*c(m,1-m)
w<-rdirichlet(1000,a)
wbeta<-w[,1:12]
wzeta<-w[,13]
z<-rbeta(1000,p[1],p[2])
for(j in 1:length(y1)){
repy<-rep(y1[j],1000)
repx<-matrix(rep(x1[j,],1000),ncol=12)
ff<-dnorm((repy-apply(repx*wbeta,1,sum)-z*wzeta)/grid[i,3])
f[j]<-1/1000*sum(ff)
}
likel[i]<-prod(f)
}

#Εμφανίζουμε το συνδυασμό στο πλέγμα που μεγιστοποιεί την Πιθανοφάνεια και
#τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε ως διάνυσμα αρχικών τιμών για να
#βελτιστοποιήσουμε αριθμητικά την Πιθανοφάνεια στο επόμενο βήμα.
which.max(likel)
```

Γ) Κώδικας R για την υλοποίηση του βήματος 3 (Ενότητα 2.2)

```
#Εγκαθιστούμε και φορτώνουμε τη βιβλιοθήκη "alabama" από την οποία θα
#χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση "auglag".
Install.packages("alabama")
library(alabama)

#Ορίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση που θα ελαχιστοποιήσουμε, δηλαδή την
#αντίθετη συνάρτηση της Πιθανοφάνειας που δίνεται από τη σχέση (28). Η
#ελαχιστοποίηση γίνεται ως προς τις μεταβλητές x[1], x[2], x[3], που στην
#περίπτωσή μας θα είναι οι παράμετροι ατ, pτ και σ.
fn<-function(x){
w<-rdirichlet(1000, x[1]*c(beta,bz))
wbeta<-w[,1:12]
wzeta<-w[,13]
zeta<-rbeta(1000, x[2]*m, x[2]*(1-m))
f<-rep(0,length(y1))
for(j in 1:length(y1)){
repy<-rep(y1[j],1000)
repx<-matrix(rep(x1[j,],1000),ncol=12)
ff<-dnorm((repy-apply(repx*wbeta,1,sum)-zeta*wzeta)/x[3])
f[j]<-1/1000*sum(ff)
}
-prod(f)
}

#Ορίζουμε τη συνάρτηση των ανισοτικών περιορισμών ατ, pτ, σ >0.
hin<-function(x){
h<-rep(NA,3)
h[1]<-x[1]
h[2]<-x[2]
h[3]<-x[3]
h
}
```

```
#Ορίζουμε τη συνάρτηση του ισοτικού περιορισμού που συνδέει τις παραμέτρους
# σύμφωνα με τη σχέση (17).
heq<-function (x){
τ-x[3]^2-(γ*(1-m)*(m-γ))/(m*(1+x[1])*(1+x[2]))*(1+γ*(1+x[1])/(m-γ)
+m*(1+x[2])/(1-m))-sum(sw- 2*γ*xbar)/(length(y1)*(1+x[2]))}

#Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση “auglag”, με ορίσματα τις αρχικές τιμές για τις
#άγνωστες παραμέτρους που λάβαμε στο βήμα 2, την αντικειμενική συνάρτηση,
#τους ισοτικούς και τους ανισοτικούς περιορισμούς που ενσωματώνονται στις
#παραμέτρους heq και hin αντίστοιχα προσεγγίζουμε αριθμητικά το ακρότατο που
#ελαχιστοποιεί την αντίθετη συνάρτηση της Πιθανοφάνειας (ισοδύναμα
#μεγιστοποιεί την Πιθανοφάνεια).
optim<-auglag(par=c(grid[247,1],grid[247,2],grid[247,3]), fn=fn,hin=hin)
optim
```

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Στατιστική Θεωρία & Εφαρμογές, Γ. Κοκολάκης, Δ. Φουσκάκης.

[2] Στατιστικά Μοντέλα Παλινδρόμησης Π. Οικονόμου, Χ. Καρώνη.

[3] Στατιστική κατά Bayes, Πέτρος Δελλαπόρτας, Παναγιώτης Τσιαμυρτζής.

[4] A Dirichlet random coefficients regression model for quality indicators, Daniel Peña, Victor Yohai, July 2004.

[5] A Bayesian Hierarchical Model for Quality Indicators, D. Fouskakis, G. Petrakos and I. Vavouras, 2014.

[6] Estimating A Dirichlet distribution Thomas P. Minka, February 27, 2003.

[7] Bayesian Data Analysis, Andrew Gelman, John B. Carlin, Hal S. Stern and Donald B. Rubin.

[8] A First Course in Bayesian Statistical Methods, Peter D. Hoff, Springer.