



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μηχανικής

**Η Ιξωδοελαστικότητα του Ξύλου και η  
επίδραση της υγρασίας στις μηχανικές του  
ιδιότητες**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Καρατζάς Παντελής**

A.M.: 09104193

**Επιβλέπων καθηγητής Ε.Μ.Π.: Σπαθής Γεράσιμος**

Αθήνα

Ακαδημαϊκό έτος 2013 - 2014



# **Πρόλογος**

Το αυξανόμενο ενδιαφέρον της μηχανικής των τελευταίων ετών για υλικά που δεν συμπεριφέρονται ελαστικά, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά μεταλλικά υλικά, έχει οδηγήσει στην απαίτηση γνώσης των ιξωδοελαστικών στερεών σωμάτων. Τέτοιου τύπου υλικά είναι τα πολυμερή, τα συνθετικά ελαστομερή, τα σύνθετα υλικά, μεταλλικά υλικά που υπόκεινται σε υψηλές θερμοκρασίες, βιοϋλικά κλπ.

Υλικά και προϊόντα τα οποία συμπεριφέρονται ιξωδοελαστικά είναι και αυτά που παράγονται, είτε αποτελούνται ολοκληρωτικά από ξυλεία (βλέπε μελαμίνες, *mdf*, *κόντρα πλακέ*, *μασίφ ξυλεία* κ.ά.). Υλικά από τα οποία αποτελούνται προϊόντα με τα οποία ερχόμαστε καθημερινά σε επαφή, όπως έπιπλα και μουσικά όργανα, βρίσκουν παράλληλα εφαρμογές σε τομείς όπως η ναυπηγική. Η έκθεση κατασκευών ή τμημάτων των κατασκευών σε υψηλές θερμοκρασίες, υγρασία και ταχέως μεταβαλλόμενα φορτία καθιστά τη μελέτη της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του ξύλου εξαιρετικά σημαντική.

Κύριος στόχος αυτής της διπλωματικής είναι να παρουσιάσει τις μηχανικές ιδιότητες του ξύλου, να εξετάσει την ιξωδοελαστικότητα του συγκεκριμένου υλικού, καθώς και την επίδραση ενός κυμαινόμενου περιβαλλοντικού παράγοντα, την υγρασία. Αρχικά, στην εισαγωγή της παρούσας εργασίας, παρουσιάζεται η θεωρία της ιξωδοελαστικότητας, καθώς κρίνεται απαραίτητη ώστε να γίνουν κατανοητοί οι νόμοι που περιγράφουν την ιδιαίτερη ελαστική συμπεριφορά του ξύλου. Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες από τις μηχανικές ιδιότητες του ξύλου και διερευνάται η αλληλεπίδραση του συγκεκριμένου υλικού με την υγρασία του περιβάλλοντος.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα μέρη. Στο πρώτο γίνεται μια εισαγωγή στην βασική θεωρία της ιξωδοελαστικότητας για να εξηγήσει την διαμόρφωση των μοντέλων που θα χρησιμοποιηθούν για να εξηγήσουν την ιξωδοελαστικότητα του ξύλου που γίνεται στο δεύτερο μέρος της διπλωματικής. Έπειτα γίνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων πειραματικών δεδομένων με τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν την μηχανική ιδιότητα της ιξωδοελαστικότητας του ξύλου. Στο τέταρτο κομμάτι παρατίθενται τα συμπεράσματα μετά την επίλυση των μοντέλων.

Το ενδιαφέρον μου για το συγκεκριμένο θέμα προήλθε από τη δική μου καθημερινή επαφή με τα μουσικά όργανα ως μουσικός, αλλά και ως κατασκευαστής. Κιθάρες, μπουζούκια, βιολιά και άλλα παραδοσιακά όργανα κατασκευάζονται από ξύλο, ενώ παρατηρείται ότι και οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού είναι ιδιαίτερα κομβικές και καθορίζουν την ανταπόκριση των ίδιων των οργάνων στις περιβαλλοντικές αλλαγές, αλλάζοντας κάθε φορά την αντοχή τους, τον ήχο που παράγουν και την αίσθηση κάθε μουσικού.

# Contents

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή Στην Θεωρία Ιξωδοελαστικότητας</b>	<b>7</b>
1.1	Εισαγωγή	7
1.2	Μηχανικά μοντέλα	9
1.2.1	Ελατήριο	10
1.2.2	Αποσβεστήρας	10
1.3	Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα	11
1.3.1	Απλά ιξωδοελαστικά πρότυπα σε μία διάσταση	12
1.3.2	Στοιχείο Maxwell	13
1.3.3	Στοιχείο Kelvin	14
1.3.4	Πείραμα ερπυσμού	15
1.3.5	Πείραμα χαλάρωσης	16
1.3.6	Μέτρο ένδοσης και μέτρο χαλάρωσης	17
1.3.7	Σύνθετα μονοδιάστατα ιξωδοελαστικά πρότυπα	20
1.3.8	Φτιάχνοντας πιο σύνθετα μοντέλα	22
1.4	Μη-γραμμική ιξωδοελαστικότητα	23
1.4.1	Μη-γραμμικά φαινόμενα	24
1.4.2	Θεωρίες μη-γραμμικής συμπεριφοράς	24
1.4.3	Πεπερασμένα μέτρα παραμόρφωσης	25
1.4.4	Οι τανυστές Cauchy και Finger	26
1.4.5	Αναλλοίωτες του τανυστή Finger	27
1.4.6	Το ελαστικό υγρό	27
1.4.7	Μερικά ακόμα μοντέλα μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας	29
<b>2</b>	<b>Το Ξύλο Και Ιξωδοελαστικά Μοντέλα</b>	<b>30</b>
2.1	Σχέσεις Ξύλου / Υγρασίας	30
2.1.1	Υγρασία ισορροπίας	31
2.1.2	Διαστάσεις ξύλου και υγρασία	33
2.2	Ιξωδοελαστικά μοντέλα	34
2.2.1	Γενίκευση μοντέλου Kelvin-Voight	34
2.2.2	Καταστατικοί νόμοι περιγραφής του φαινομένου γήρανσης	35
2.2.3	Θερμοδυναμικοί περιορισμοί	36
2.3	Ιξωδοελαστική συμπεριφορά υλικού υπό γήρανση	37
2.3.1	Καταστατικός νόμος απαλυνόμενο ιξωδοελαστικού υλικού	37
2.3.2	Καταστατικός νόμος σκληρυνόμενο ιξωδοελαστικού υλικού	38
2.3.3	Μεταβολές όγκου προκαλούμενες από υγρασία	39
2.3.4	Ολοκληρωτική διατύπωση συνολικής παραμόρφωσης	40
2.4	Διαμόρφωση κατά στοιχείο	40
2.4.1	Στοιχειώδη διαμόρφωση ιξωδοελαστικού νόμου υπό χαλάρωση	41
2.4.2	Στοιχειώδη διαμόρφωση ιξωδοελαστικού νόμου για υλικό υπό σκλήρυνση	42
2.4.3	Στοιχειώδη διαμόρφωση αλλαγής όγκου	44
2.4.4	Ολοκληρωτική εξίσωση συνολικής παραμόρφωσης	45
2.5	Συμπεριφορά υλικού υπό καθεστώς μη μονότονων αλλαγών περιεκτικότητας υγρασίας	46
2.5.1	Ελαστική συμπεριφορά	46
2.5.2	Ιξωδοελαστική συμπεριφορά	48

2.6	Μη γραμμικό μοντέλο ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Εφαρμογή σε Πειραματικά Αποτελέσματα</b>	<b>52</b>
3.1	Εύλο υπό σταθερή περιεκτικότητα υγρασίας . . . . .	52
3.1.1	Το Τριπαραμετρικό μοντέλο . . . . .	52
3.1.2	Σύγκριση τριπαραμετρικού μοντέλου και αποτελεσμάτων . . . . .	53
3.1.3	Σύγκριση τετραπαραμετρικού μοντέλου και αποτελεσμάτων . . . . .	59
3.1.4	Σύγκριση μη-γραμμικού μοντέλου και αποτελεσμάτων . . . . .	64
3.1.5	Επίλυση του μοντέλου Kelvin-Voight με εισαγωγή της επίδρασης ης υγρασίας υπό θερμοδυναμικούς περιορισμούς . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Συναρτήσεις</b>	<b>77</b>
A.1	Η Συνάρτηση Βήματος . . . . .	77
A.2	Η Συνάρτηση Δέλτα . . . . .	77
<b>B</b>	<b>ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΤΟ MATHEMATICA</b>	<b>81</b>
B.1	Κώδικας επίλυσης διαφορικών με mathematica . . . . .	81
B.1.1	Λύση για υλικό υπό άποσκλήρυνση . . . . .	81
B.1.2	Λύση για υλικό υπό σκλήρυνση . . . . .	81
B.1.3	Λύση για υλικό υπό σκλήρυνση και αλλαγή της περιεκτικότητας σε υγρασία κατά το πείραμα . . . . .	82

## Chapter 1

# Εισαγωγή Στην Θεωρία Ιξωδοελαστικότητας

### 1.1 Εισαγωγή

Το απλό πείραμα του εφελκυσμού αποτελεί τον βασικό τρόπο ελέγχου της σχέσης τάσεων-παραμορφώσεων για όλα τα υλικά. Η μεγάλη ποικιλία της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών, λόγω διαφορών στην μικροδομή και λόγω της επίδρασης παραγόντων όπως θερμοκρασία, χρόνος, ρυθμός φόρτισης, καθώς και οι ανάγκες του σχεδιασμού των κατασκευών από διαφόρους τύπους υλικών, σε συνδυασμό με την αδυναμία περιγραφής όλων με ενιαίο καταστατικό νόμο, οδηγεί στην ανάγκη δημιουργίας προτύπων, που προσεγγίζουν κατά το δυνατό την πραγματική συμπεριφορά των υλικών. Τα πρότυπα αυτά αντιστοιχούν σε μονοαξονικό πείραμα εφελκυσμού, "μικρού" ρυθμού φόρτισης και σε μέτρια θερμοκρασία. Τα επόμενα σχήματα παρουσιάζουν διαδοχικά τα εξιδανικευμένα διαγράμματα *τάσεων-παραμορφώσεων*.



Figure 1.1: Τέλειο στερεό

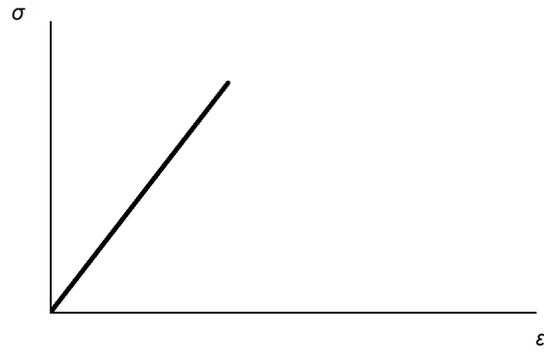


Figure 1.2: Γραμμικό ελαστικό

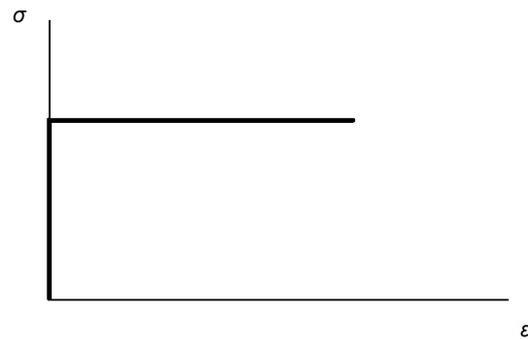


Figure 1.3: Στερό, τέλειο πλαστικό

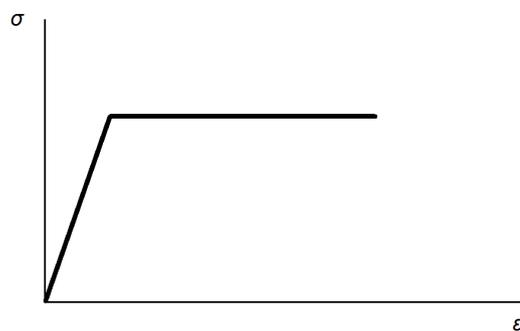


Figure 1.4: Γραμμικό-ελαστικό, τέλειο πλαστικό

Δε χαρακτηρίζονται όμως όλα τα υλικά από αυτό το γραμμικό τμήμα της καμπύλης *τάσεων-παραμορφώσεων*. Τυπικό παράδειγμα αποτελούν τα ελαστομερή, των οποίων αντίστοιχο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 1.5. Όταν το ελαστομερές αποφορτίζεται, επιστρέφει στην αρχική του γεωμετρία, ακολουθώντας την αρχική καμπύλη φόρτισης. Στην περίπτωση αυτή τα υλικά συμπεριφέρονται ως **τέλεια ελαστικά**. Εάν ένα υλικό στην αποφόρτιση επιστρέφει στην αρχική του γεωμετρία ακολουθώντας διαφορετική πορεία (βλέπε σχ. 1.6) λέγεται **ανελαστικό**. Στις περιπτώσεις κατά τις οποίες εάν αποφορτίσουμε με μηδενισμό της τάσης υπάρχει παραμένουσα παραμόρφωση, το υλικό συμπεριφέρεται **πλαστικά**.

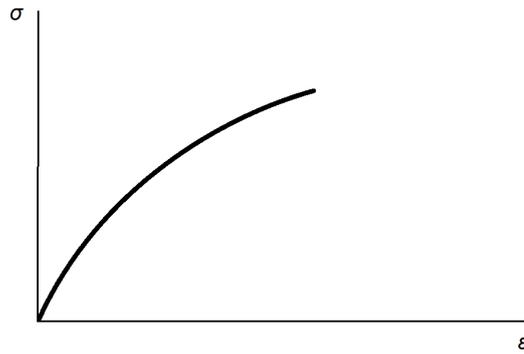


Figure 1.5: Ελαστομερή

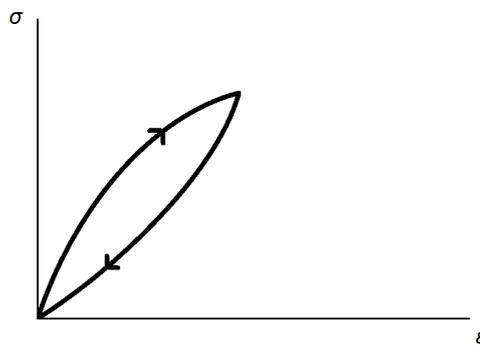


Figure 1.6: Ανελαστική συμπεριφορά

### Φαινομενική ταξινόμηση της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών

Στη συνέχεια θα συμπεριληφθούν πιο σύνθετες μορφές μηχανικής συμπεριφοράς πέρα από αυτή της ιδανικής του τέλειου ελαστικού και του τέλειου πλαστικού. Για το λόγο αυτό θα εισάγουμε μηχανικά πρότυπα (μοντέλα), προκειμένου να ταξινομήσουμε τα υλικά με συστηματικό τρόπο. Οι προϋποθέσεις για την ταξινόμηση είναι:

- η απλή μονοδιάστατη φόρτιση με εφελκυστικό φορτίο στον άξονα  $z$  ( $\sigma_{zz} > 0, \varepsilon_{zz} > 0$ ).
- η φόρτιση δεν είναι κατ'ανάγκη στατική, αλλά μπορεί να μεταβάλεται χρονικά
- η θερμοκρασία επηρεάζει τις μηχανικές αποκρίσεις
- ο χρόνος αποτελεί οργανικό παράγοντα της συμπεριφοράς τους

## 1.2 Μηχανικά μοντέλα

Η θεωρητική προσέγγιση της συμπεριφοράς των υλικών απαιτεί να διατυπωθούν οι καταστατικές εξισώσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις, ώστε να συνυπολογιστεί και η εξάρτηση

της συμπεριφοράς τους από το χρόνο. Παρά την ποικιλία της συμπεριφοράς, τα μοντέλα κατασκευάζονται με τον συνδυασμό δύο απλούστερων μοντέλων που χαρακτηρίζονται ως δομικά, του ελατηρίου και του αποσβεστήρα, τα οποία και θα παρουσιαστούν αναλυτικά και θα προχωρήσουμε στα παράγωγά τους.

### 1.2.1 Ελατήριο

Το μοντέλο του ελατηρίου (βλέπε σχ.1.7.A) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την **ελαστική συμπεριφορά** των υλικών. Υλικά που όπως έχει αναφερθεί μετά την αποφόρτιση τους επανέρχονται στην αρχική τους γεωμετρία ακολουθώντας την ίδια καμπύλη. Μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση του νόμου του **Hooke**:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας.

Εάν από το απλό πείραμα του εφελκυσμού προκύψει ότι το υλικό διέπεται από το νόμο του Hooke:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , τότε το υλικό είναι **γραμμικό ελαστικό**, ενώ στην περίπτωση που  $\sigma \neq E \cdot \varepsilon$ , καλείται **μη-γραμμικό ελαστικό** (βλέπε σχ.1.7.B).

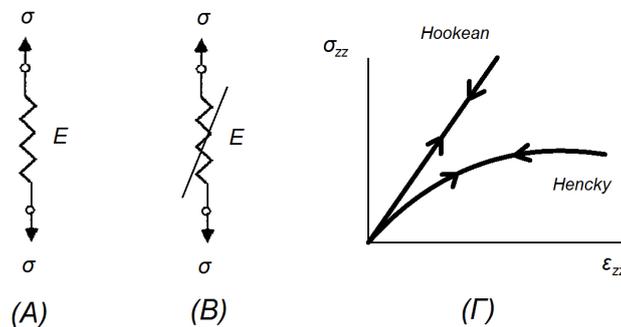


Figure 1.7: Ελαστικά μοντέλα : A) γραμμικό ελαστικό Hookean B) μη-γραμμικό ελαστικό hencky Γ) διαγράμματα

### 1.2.2 Αποσβεστήρας

Όταν κατά την μονοαξονική φόρτιση εμφανίζεται εξάρτηση του ρυθμού της παραμόρφωσης από την επιβαλλόμενη τάση σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

το υλικό ονομάζεται ιξώδες και έχει ανάλογη συμπεριφορά με τα υγρά και γραφικό μοντέλο του φαίνεται στο σχήμα 1.8.A

Η παραμόρφωση στην περίπτωση αυτή δεν απομακρύνεται ταυτόχρονα με την αφαίρεση του φορτίου, εφόσον είναι συνάρτηση του χρόνου. Σε ιδανικό υλικό όπου ισχύει  $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$  όπου  $\eta$  είναι ο συντελεστής εφελκυστικού ιξώδους, έχουμε **Νευτώνεια** ή **γραμμική ιξώδη** συμπεριφορά. Αντίστοχα εάν  $\dot{\varepsilon} \neq \frac{\sigma}{\eta}$ , έχουμε **μη-Νευτώνεια** ή **μη-γραμμική ιξώδη** συμπεριφορά (υλικό Stokes) (Βλέπε σχ.1.8.B).

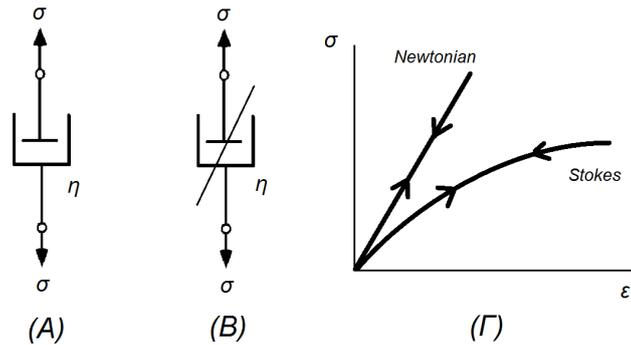


Figure 1.8: Ιξώδη μοντέλα : A) ιξώδες Newtonian B) μη-γραμμικό ιξώδες Stokes Γ) διαγράμματα

### 1.3 Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα

#### Ερπυσμός

Για την εισαγωγή στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα εξετάζεται το απλό πείραμα του ερπυσμού, δηλαδή η μεταβολή της παραμόρφωσης λόγω ερπυσμού, σε συνάρτηση με το χρόνο όπου παρατηρούνται οι χαρακτηριστικές περιοχές του παρακάτω διαγράμματος:

1. *Αρχική ελαστική απόκριση.* Με την ακαριαία επιβολή φορτίου προκαλείται ακαριαία ελαστική παραμόρφωση  $\varepsilon_e$
  2. *Πρωτογενής ερπυσμός.* Είναι η περιοχή που παρατηρείται μία συνεχή μείωση της ταχύτητας παραμόρφωσης
  3. *Δευτερογενής ερπυσμός.* Η ταχύτητα ερπυσμού είναι σχεδόν σταθερή. Η περιοχή αυτή είναι καθοριστικής σημασίας για τη συνολική καμπύλη ερπυσμού
  4. *Τριτογενής ερπυσμός.* Στην περιοχή αυτή η ταχύτητα αυξάνεται μέχρι την ασχτοχία του υλικού λόγω ερπυσμού
- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνολική παραμόρφωση είναι :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_c(t)$$

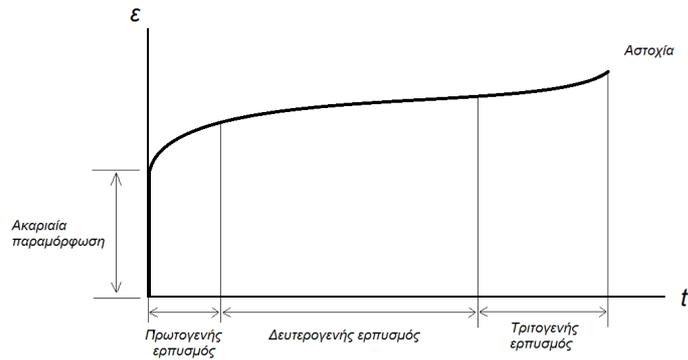


Figure 1.9: Καμπύλη ερπυσμού

με  $\varepsilon_p$  μέρος της ακαριαίας παραμόρφωσης και εκφράζει την πλαστική παραμόρφωση όταν η επιβαλλόμενη τάση υπερβαίνει την τάση διαρροής του υλικού και  $\varepsilon_c(t)$  τη συνολική παραμόρφωση λόγω ερπυσμού σε χρόνο  $t$ .

### 1.3.1 Απλά ιξωδοελαστικά πρότυπα σε μία διάσταση

Προηγουμένως έγινε αναφορά στα βασικά μηχανικά μοντέλα του ελατηρίου και του αποσβεστήρα. Για να γίνουν κατανοητά τα ιξωδοελαστικά πρότυπα θα πρέπει να συγκρατήσουμε τις καταστατικές εξισώσεις του ελατηρίου και του αποσβεστήρα.

Για το ελατήριο το νόμο του *Hooke* :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Για τον αποσβεστήρα:

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Για την προτυποποίηση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς και την διατύπωση των σχέσεων μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων, χρησιμοποιούνται συνδιασμοί των παραπάνω προτύπων, που οδηγούν σε συγκεκριμένη ιξωδοελαστική απόκριση.

### 1.3.2 Στοιχείο Maxwell

Το (γραμμικό) στοιχείο Maxwell αποτελείται από τη, σε σειρά, σύνδεση ενός γραμμικού ελατηρίου και ενός ξώδους απορροφητήρα (Νευτώνειου στοιχείου). Το μηχανικό του μοντέλο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.10.

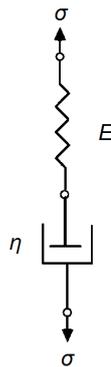


Figure 1.10: Στοιχείο Maxwell

Η εν σειρά σύνδεση προϋποθέτει ότι:

$$\sigma = \sigma_D = \sigma_s \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_D \quad (1.2)$$

Με τους δείκτες s και D να σημαίνουν ελατήριο και dashpot αντίστοιχα για τα οποία ισχύει:

$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E \quad (1.3)$$

Για το ελατήριο και

$$\varepsilon_D = \frac{\sigma_D}{\eta} \quad (1.4)$$

Για τον απορροφητήρα

Παραγωγίζοντας την (1.2) ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_D \quad (1.5)$$

Όπου και αντικαθιστώντας στην (1.5) την (1.6) προκύπτει η ακαταστατική εξίσωση για το στοιχείο Maxwell:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_s}{E} + \frac{\sigma_D}{\eta} \quad (1.6)$$

Το διάγραμμα ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell δίνεται στο σχημα 1.11

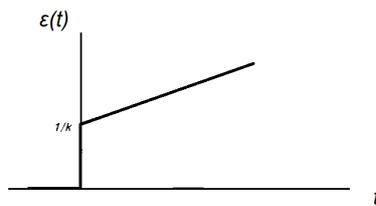


Figure 1.11: Καμπύλη ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell

### 1.3.3 Στοιχείο Kelvin

Το στοιχείο Kelvin αποτελείται από ένα ελατήριο και απο έναν ιξώδη απορροφητήρα παράλληλα μεταξύ τους συνδεδεμένα. Το μηχανικό του μοντέλο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.11.

Στο μοντέλο του Kelvin η παράλληλη σύνδεση των στοιχείων μας δίνει:

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_D \quad (1.7)$$

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D \quad (1.8)$$

Και από τις εξισώσεις (1.3),(1.4) προκύπτει:

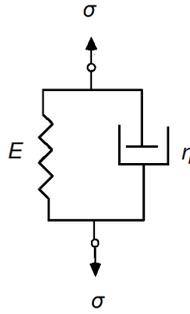


Figure 1.12: στοιχείο Kelvin

$$\sigma = \varepsilon_s E + \eta \dot{\varepsilon}_D \quad (1.9)$$

απ' όπου προκύπτει και η καταστατική εξίσωση για το στοιχείο Kelvin:

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \dot{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = \varepsilon E + \eta \left( \frac{\dot{\sigma}_s}{E} + \frac{\sigma_D}{\eta} \right) \quad (1.10)$$

Η καμπύλη ερπυσμού του στοιχείου Kelvin δίνεται στο επόμενο διάγραμμα:

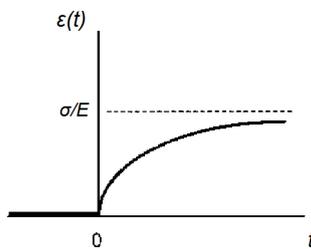


Figure 1.13: Καμπύλη ερπυσμού στοιχείου Kelvin

### 1.3.4 Πείραμα ερπυσμού

Αποτελεί την πλέον διαδεδομένη διαδικασία εφελκυστικής φόρτισης. Περιλαμβάνει την ακαριαία επιβολή τάσης  $\sigma_0$  την χρονική στιγμή  $t=0$  η οποία μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του χρόνου

με τη βοήθεια της συνάρτησης βήματος  $u(t)$  :

$$\sigma(t) = \sigma_0 u(t) \quad (1.11)$$

Για το στοιχείο Maxwell, αντικαθιστούμε τη σχέση (1.11) στη σχέση (1.5) και γίνεται:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \frac{d}{dt} u(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} u(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \delta(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} u(t) \quad (1.12)$$

όπου  $\delta(t)$  η συνάρτηση δέλτα.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.12) με όρια  $t = 0^-$  και  $\varepsilon(0^-) = 0$  έχουμε:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) u(t) \quad (1.13)$$

Από το σχήμα της καμπύλης ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell φαίνεται ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το στοιχείο συμπεριφέρεται σαν ελαστικό στερεό με παραμόρφωση ίση με  $\sigma_0/E$  και προσεγγίζει την συμπεριφορά ιξώδους υγρού καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Εφαρμόζοντας το πείραμα του ερπυσμού σε ένα στοιχείο Kelvin προκύπτει μια διαφορική, μη-ομογενής γραμμική εξίσωση ( $\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} u(t)$ ) η οποία λύνεται εύκολα εάν γραφεί ως εξής:

$$e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \frac{d}{dt} (\varepsilon e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}) = \frac{\sigma_0}{\eta} u(t) \quad \Rightarrow \quad d(\varepsilon e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}) = \frac{\sigma_0}{\eta} e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t} u(t) dt \quad (1.14)$$

αντίστοιχα ολοκληρώνοντας προκύπτει :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}) u(t) \quad (1.15)$$

Στο διάγραμμα καμπύλης-ερπυσμού για το στοιχείο Kelvin φαίνεται η σχέση (1.15) για την οποία ισχύει επίσης  $\varepsilon(0) = 0$ . Επίσης, καθώς  $t \rightarrow \infty$  η συμπεριφορά του υλικού τείνει να προσομοιάσει τη συμπεριφορά ενός γραμμικού ελαστικού στερεού. Ο λόγος  $\frac{\eta}{E}$  της εξίσωσης έχει διαστάσεις χρόνου. Η ποσότητα αυτή θεωρείται σταθερά του υλικού και λέγεται χρόνος καθυστέρησης και θα συμβολίζεται ως  $t_\varepsilon$

### 1.3.5 Πείραμα χαλάρωσης

Στη διαδικασία της χαλάρωσης επιβάλλεται ακαριαία μία παραμόρφωση  $\varepsilon_0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η οποία παραμένει σταθερή και μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του χρόνου ως εξής:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t) \quad (1.16)$$

Εφαρμόζοντας στο στοιχείο Maxwell και στην καταστατική του εξίσωση (1.6) έχουμε:

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt} u(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{\eta} \sigma = \varepsilon_0 E \delta(t) \quad \Rightarrow$$

$$(1.17)$$

$$d(\sigma e^{(\frac{E}{\eta})t}) = \varepsilon_0 E e^{(\frac{E}{\eta})t} \delta(t) dt \quad \Rightarrow \int \quad \sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-(\frac{E}{\eta})t} u(t)$$

Η εξίσωση (1.17) απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα (1.14) όπου προκύπτει ότι καθώς  $t \rightarrow \infty$  η τάση από αρχική τιμή  $\varepsilon_0 E$  τείνει στο μηδέν. Ο λόγος  $\eta/E$  λέγεται χρόνος χαλάρωσης και αποτελεί σταθερά του υλικού.

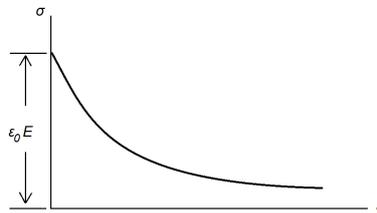


Figure 1.14: Καμπύλη χαλάρωσης στοιχείου Maxwell

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα για το στοιχείο Kelvin προκύπτει:

$$\sigma = \varepsilon_0 [\eta \delta(t) + E u(t)] \quad (1.18)$$

Η αύξηση της παραμόρφωσης κατά ένα βήμα  $\varepsilon_0$  οδηγεί σε μία ακαριαία αύξηση της τάσης που περιγράφεται με μία συνάρτηση δέλτα και στη συνέχεια ακολουθείται από μία σταθερή τιμή τάσης. Η ανορθόδοξη συμπεριφορά του στοιχείου Kelvin στο πείραμα χαλάρωσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα πρότυπα αυτά αποτελούν εξιδανικεύσεις μίας πολύπλοκης συμπεριφοράς και δεν είναι δυνατόν να περιγράψουν την μακροσκοπική συμπεριφορά των πραγματικών υλικών. Για το λόγο αυτό απαιτείται η χρήση πιο συνθετών μοντέλων.

### 1.3.6 Μέτρο ένδοσης και μέτρο χαλάρωσης

Από τις εξισώσεις (1.13) και (1.15) που αποτελούν λύσεις για το πείραμα του ερπυσμού στα πρότυπα Maxwell και Kelvin παρατηρούμε ότι η εξάρτηση της παραμόρφωσης από το χρόνο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t) \quad (1.19)$$

όπου  $J(t)$  είναι μια χαρακτηριστική συνάρτηση του υλικού και λέγεται συνάρτηση του μέτρου ένδοσης.

Το μέτρο ένδοσης για τα μοντέλα Maxwell και Kelvin αντίστοιχα είναι:

$$J(t) = \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (1.20)$$

$$J(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \quad (1.21)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε για το πείραμα χαλάρωσης να γράψουμε για τη μεταβολή της τάσης ως προς το χρόνο:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) u(t) \quad (1.22)$$

όπου  $Y(t)$  ονομάζεται συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης και έχει διαστάσεις μέτρου.

Έτσι από την σχέση (1.17) προκύπτει ότι το μέτρο ένδοσης για το στοιχείο Maxwell είναι:

$$Y(t) = E e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (1.23)$$

Για γραμμικό ελαστικό υλικό όπου η επίδραση του χρόνου είναι μηδενική ισχύουν οι κάτωθι αναλογίες:

$$J(t) \rightarrow \frac{1}{E} \quad Y(t) \rightarrow E \quad (1.24)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας.

Οι συναρτήσεις μέτρου ένδοσης και χαλάρωσης μπορούν να υπολογιστούν και για πιο σύνθετα μοντέλα από αυτά του Maxwell και Kelvin που προκύπτουν από το συνδυασμό αυτών των δύο στοιχείων, με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε παραπάνω. Εάν θεωρήσουμε ότι εφαρμόζεται σε ένα υλικό μια τυχαία συνάρτηση τάσης  $\sigma(t)$  μπορούμε να κάνουμε χρήση της συνάρτησης ένδοσης, κάνοντας την υπόθεση ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι μία διαδοχή από απειροστά βήματα  $d\sigma(t')$ .

Τη χρονική στιγμή  $t'$  ένα τέτοιο βήμα  $d\sigma(t')$  προκαλεί παραμόρφωση  $d\varepsilon(t)$  λόγω ερπυσμού, η οποία υπολογίζεται μέσω της τιμής της συνάρτησης μέτρου ένδοσης το επόμενο χρονικό διάστημα  $(t - t')$  από την σχέση :

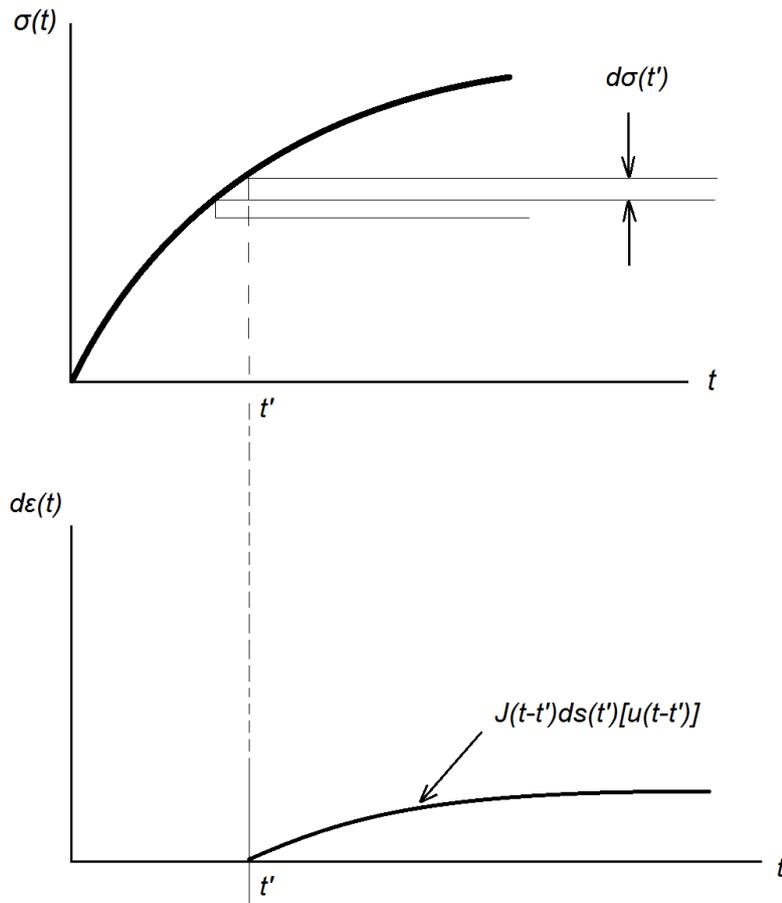


Figure 1.15: Υπολογισμός παραμόρφωσης σε αντιστοιχία με το πρόγραμμα φόρτισης

$$d\varepsilon(t) = J(t - t')d\sigma(t')u(t - t') \quad (1.25)$$

Και άρα η συνολική παραμόρφωση δίνεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - t') \left[ \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} \right] dt' \quad (1.26)$$

όπου η συνάρτηση βήματος έχει αντικατασταθεί από την μονάδα  $t > t'$  για κάθε βήμα ολοκλήρωσης. Με ανάλογο τρόπο υπολογίζεται η τάση σε σχέση με το χρόνο σε μια διαδικασία τυχαίας επιβολής παραμόρφωσης:

$$\sigma(t) = \int_0^t Y(t - t') \left[ \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} \right] dt' \quad (1.27)$$

Οι παραπάνω ολοκληρωτικές σχέσεις είναι γνωστές και ως ολοκληρώματα μνήμης ή υπερθέσης Boltzmann. Οι σχέσεις αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις  $Y(t)$  και  $J(t)$  παραμένουν αναλλοίωτες ως προς το χρόνο, δηλ. η απόκριση του υλικού στην επιβολή

μιας τάσης ( ή παραμόρφωσης ) τη χρονική στιγμή  $t - t'$  είναι ίδια με την απόκριση τη χρονική στιγμή  $t = 0$  . Τα υλικά που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη δεν υφίστανται φυσική γήρανση, δηλ. οι ιξωδοελαστικές τους σταθερές παραμένουν αναλλοίωτες ως προς το χρόνο και οι παραπάνω σχέσεις αφορούν ακριβώς τέτοιου τύπου γραμμικά ιξωδοελαστικά υλικά.

### 1.3.7 Σύνθετα μονοδιάστατα ιξωδοελαστικά πρότυπα

Όπως έχει αναφερθεί σύνθετα ιξωδοελαστικά πρότυπα διαμορφώνονται με το συνδυασμό των δύο βασικών μοντέλων, αυτών του Maxwell και του Kelvin. Στο σχήμα παρουσιάζονται μερικά από τα πλέον διαδεδομένα ιξωδοελαστικά μοντέλα, όπου τα  $E$  και  $\eta$  αντιστοιχούν στους ελαστικούς και ιξώδεις συντελεστές σε εφελκυσμό.

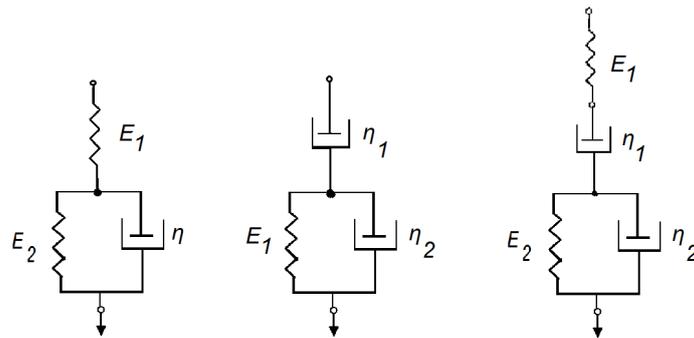


Figure 1.16: Σύνθετα μονοδιάστατα πρότυπα Α) Τριπαραμετρικό στερεό Β) Τριπαραμετρικό υγρό Γ) Μοντέλο 4 παραμέτρων (Burgers)

Για να εξάγουμε τις γενικές καταστατικές εξισώσεις των ιξωδοελαστικών μοντέλων, επιλέγουμε το μοντέλο τεσσάρων παραμέτρων. Παρατηρούμε ότι το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει ένα στοιχείο Maxwell και ένα στοιχείο Kelvin συνδεδεμένα σε σειρά. Στη διαδικασία που θα ακολουθήσει γίνεται χρήση του συντελεστή  $D$  στη θέση της παραγώγου  $\partial/\partial t$ . Οι δείκτες  $M$  και  $K$  αντιστοιχούν στα στοιχεία Maxwell και Kelvin αντίστοιχα. Με βάση το στοιχείο Burgers μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma = \sigma_M = \sigma_K \quad (a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_K \quad (b)$$

Με τη χρήση του τελεστή  $D$  η καταστατική εξίσωση του μοντέλου Maxwell γράφεται ως:

$$D\varepsilon_M = \frac{D\sigma_M}{E_1} + \frac{\sigma_M}{\eta_1} \quad (1.28)$$

όπου ο δείκτης 1 δείχνει τις σταθερές του μοντέλου Maxwell. Η εξίσωση απλουστευμένα μπορεί να γραφεί ως:

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma_M}{E_1} + \frac{\sigma_M}{\eta_1 D_1} \quad (1.29)$$

Αντίστοιχα για το μοντέλο Kelvin είναι:

$$\varepsilon_K = \frac{\sigma_K}{E_2 + \eta_2 D} \quad (1.30)$$

Όπου ο δείκτης 2 δείχνει τις σταθερές του μοντέλου Kelvin. Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις με τις (a) και (b) έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta_1 D_1} + \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2 + \eta_2 D} \quad (1.31)$$

Απ'όπου και με απαλοιφή παρανομαστών έχουμε :

$$[(\eta_1 D)(E_1)(E_2 + \eta_2 D)]\varepsilon = [(E_1)(E_2 + \eta_2 D)]\sigma + [(\eta_1 D)(E_2 + \eta_2 D)]\sigma + (\eta_1 D)(E_1)\sigma \quad (1.32)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η εμφάνιση του  $D^2$  στη σχέση αυτή αντιστοιχεί στη δεύτερη παράγωγο ως προς το χρόνο της ποσότητας στην οποία επιδρά. Η σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$E_1 \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} + E_1 E_2 \eta_1 \dot{\varepsilon} = \eta_1 \eta_2 \ddot{\sigma} + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1 + E_1 \eta_1) \dot{\sigma} + E_1 E_2 \sigma$$

ή

$$\sigma + \left( \frac{\eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\varepsilon} \quad (1.33)$$

Από αυτή τη σχέση φαίνεται ότι η καταστατική εξίσωση για ένα "υγρό" Burgers είναι μια διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού, η οποία μπορεί να γραφεί και με συνοπτικό τρόπο ως:

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (1.34)$$

όπου P και Q είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές και μπορούν να εκφραστούν στη γενική μορφή:

$$P = \sum_{j=0}^m p_j \frac{\delta^j}{\delta t^j} = \sum_{j=0}^m p_j D^j \quad (1.35)$$

$$Q = \sum_{j=0}^n p_j \frac{\delta^j}{\delta t^j} = \sum_{j=0}^m p_j D^j \quad (1.36)$$

Όπου  $D^0$  σημαίνει παραγωγή μηδενικής τάξης και τα  $p$  και  $q$  θεωρούνται καταρχήν σταθερές. Συνήθως θέτουμε  $p_0 = 1$  στη σχέση (1.35) κανονικοποιώντας τη διαφορική εξίσωση διαιρώντας τα μέλη της με το συντελεστή της μηδενικής παραγωγού της τάσης. Η διαδικασία αυτή είναι πάντα εφικτή, καθώς στα χρησιμοποιούμενα μοντέλα ο συντελεστής αυτός είναι διάφορος του μηδενός. Έτσι η εξίσωση (1.33) του τετραπαραμετρικού μοντέλου μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} \quad (1.37)$$

όπου  $q_0 = 0$  και :

$$p_1 = \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_2} \quad q_1 = \eta_1 \quad (1.38)$$

$$p_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \quad (1.39)$$

Καθώς οι σταθερές  $E$  και  $\eta$  είναι θετικές πρέπει και οι συντελεστές  $p$  και  $q$  να είναι θετικοί. Εάν από τις σχέσεις αυτές επιλύσουμε ως προς τις σταθερές του προτύπου π.χ.  $\frac{1}{E_2} = \frac{p_1}{q_1} - \frac{q_2}{q_1} - \frac{p_2}{q_1} > 0$ . Από την παρατήρηση αυτή προκύπτει ότι τα μεγέθη  $p$  και  $q$  δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, παρά το γεγονός ότι τα  $E$  και  $\eta$  είναι.

### 1.3.8 Φτιάχνοντας πιο σύνθετα μοντέλα

Υπάρχουν δύο τρόποι συστηματικής μόρφωσης πιο πολύπλοκων μοντέλων. Με βάση τον πρώτο (βλέπε σχ.1.17.A) ένας ακέραιος αριθμός στερεών Kelvin διαφορετικών παραμέτρων είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Το μοντέλο μπορεί να περιέχει επίσης και ένα ελατήριο, η παρουσία του οποίου σημαίνει άμεση απόκριση (ελαστική συμπεριφορά για  $t = 0$ ) και δίνει το χαρακτήρα στερεού, ενώ η ύπαρξη μεμονωμένου αποσβεστήρα οδηγεί υποχρεωτικά σε συμπεριφορά ρευστού. Δηλαδή κρίσιμη για το χαρακτηρισμό του είναι η παρουσία αποσβεστήρα.

Σύμφωνα με το δεύτερο σχήμα (σχ. 1.17.B) ένας ακέραιος αριθμός ρευστών Maxwell διαφορετικών παραμέτρων είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Μπορεί επίσης να περιέχει και μεμονωμένο αποσβεστήρα ή και ελατήριο συνδεδεμένα επίσης στην ίδια παράλληλη διάταξη. Η παρουσία

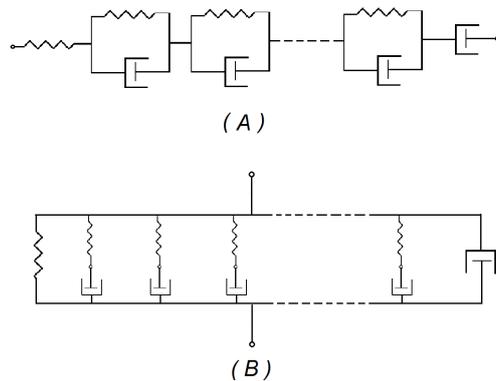


Figure 1.17: Σύνθετα μοντέλα: A) διάταξη Kelvin B) διάταξη Maxwell

του ελατηρίου σημαίνει άμεση απόκριση και δείνει τον χαρακτήρα του στερεού, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση το μοντέλο λειτουργεί σαν ρευστό. Δηλαδή κρίσιμη εδώ είναι η παρουσία του μεμονωμένου ελατηρίου. Από το σύνολο των μοντέλων που είδαμε αυτά διακρίνονται σε μοντέλα τύπου Kelvin και μοντέλα τύπου Maxwell.

Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχουν μοντέλα που δεν εντάσσονται σε καμία από τις δύο αυτές κατηγορίες αλλά έχουν πιο πολύπλοκη διάταξη. Για παράδειγμα το πιο απλό από αυτά έχει τέσσερεις παραμέτρους και προκύπτει από την παράλληλη σύνδεση δύο στερεών Kelvin. Τέτοιας μορφής μοντέλα έχουν μάλλον μόνο μαθηματικό ενδιαφέρον αφού για τη μελέτη της πραγματικής συμπεριφοράς των υλικών μας αρκούν οι δύο βασικές κατηγορίες μοντέλων.

## 1.4 Μη-γραμμική ιξωδοελαστικότητα

Η βάση της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας είναι η αρχή της επαλληλίας του Boltzmann όπως αυτή αναφέρθηκε προηγουμένως. Όταν το μέτρο χαλάρωσης προσδιοριστεί με ένα πείραμα, η ανταπόκριση του υλικού σε οποιαδήποτε άλλη παραμόρφωση μπορεί να προβλεφθεί επακριβώς. Αυτή η θεωρία ισχύει μόνο όταν η παραμόρφωση είναι είτε πολύ μικρή ή αργή. Για μεγαλύτερες ή πιο γρήγορες παραμορφώσεις, η γραμμική θεωρία δεν ισχύει και η ανταπόκριση του υλικού σε μία επιβαλλόμενη παραμόρφωση εξαρτάται από:

- i. Το μέγεθος της παραμόρφωσης.
- ii. Το ρυθμό της παραμόρφωσης.
- iii. Την κινηματική της παραμόρφωσης π.χ. διάτμηση ή εφελκυσμός ή μικτές συνθήκες.

Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε την συμπεριφορά του υλικού σε ένα τύπο παραμόρφωσης και να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για να προβλέψουμε την συμπεριφορά του σε άλλους τύπους παραμόρφωσης. Επιπλέον, επειδή η συμπεριφορά εξαρτάται από την κινηματική της παραμόρφωσης, δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε την συμπεριφορά του υλικού σε εφελκυσμό στην βάση ρεολογικών μετρήσεων σε διάτμηση.

Η θεωρία της μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας είναι υπό ανάπτυξη (πεδίο έρευνας), ενώ πολλές θεωρητικές έννοιες έχουν βρεθεί να είναι πολύ χρήσιμες στην ερμηνεία πειραματικών δεδομένων. Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει κάποιες από αυτές τις έννοιες ώστε να χρησιμοποιηθούν για την κατανόηση του υλικού που θα εξετασθεί στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.4.1 Μη-γραμμικά φαινόμενα

Κάποια ρεολογικά φαινόμενα πρακτικής σημασίας που δεν μπορούν να προβλεφθούν με τη θεωρία της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας είναι:

- η εξάρτηση του ιξώδους από το ρυθμό διάτμησης.
- η εμφάνιση μη μηδενικής πρώτης διαφοράς κάθετων τάσεων. Αυτό σχετίζεται με το "Weissenberg effect," το οποίο είναι η τάση που έχουν τα ελαστικά ρευστά να αναρριχώνται σε περιστρεφόμενους άξονες οι οποίοι είναι μερικώς βυθισμένοι μέσα σε αυτά.
- η εξάρτηση του μέτρου χαλάρωσης από το μέγεθος της παραμόρφωσης.
- η εξάρτηση των συντελεστών  $\eta^+(t)$  και  $\eta^-(t)$  από το ρυθμό διάτμησης.
- η εξάρτηση του συντελεστή  $\eta_E^+(t)$  από το ρυθμό διάτμησης.

### 1.4.2 Θεωρίες μη-γραμμικής συμπεριφοράς

Η αρχή της επαλληλίας του Boltzmann είναι η βάση για την περιγραφή των φαινομένων γραμμικών ιξωδοελαστικών φαινομένων. Από μια απλή αλλαγή μπορεί να προκύψει μία εξίσωση χρήσιμη στην πρόβλεψη μη-γραμμικών φαινομένων.

Η εξίσωση Boltzmann όπως δόθηκε :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-t') \left[ \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} \right] dt' \quad (1.40)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t Y(t-t') \left[ \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} \right] dt' \quad (1.41)$$

Υπάρχουν τρία κύρια χαρακτηριστικά της θεωρητικής συμπεριφοράς που περιγράφονται από αυτές την εξισώσεις.

- Η χρήση του τανυστή παραμόρφωσης  $\sigma$ . Αυτό το μέτρο δεν ισχύει για μεγάλες παραμορφώσεις.

- Το μέτρο διατμητικής χαλάρωσης  $Y(t)$ , είναι ανεξάρτητο από το μέτρο παραμόρφωσης, έτσι ώστε η συμπεριφορά σε οποιαδήποτε ιστορία παραμόρφωσης υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη ιστορία παραμόρφωσης.

- Τελικά, η επίδραση της ιστορίας παραμόρφωσης περιγράφεται από ένα απλό ολοκλήρωμα και δεν υπάρχει λόγος να πιστέψουμε ότι μία τέτοια απλή διαδικασία μπορεί να περιγράψει την συμπεριφορά του υλικού σε μεγάλες και γρήγορες παραμορφώσεις. Πολλαπλά, διπλά και τριπλά, ολοκληρώματα έχουν προταθεί για να περιγράψουν πολύπλοκες ιξωδοελαστικές συμπεριφορές.

Δυστυχώς, δεν υπάρχει γενική μη-γραμμική θεωρία που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του υλικού στην εφαρμογή εξωτερικών δυνάμεων.

Τα διάφορα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί μπορούν να ταξινομηθούν σε:

- Συνεχή μοντέλα (continuum models), όπου στις πιο πολλές περιπτώσεις οι εξισώσεις είναι εμπειρικές. Σ' αυτά τα μοντέλα, αφού η γενική μορφή της εξίσωσης παγιωθεί, η εκλογή επιμέρους μοντέλων καθοδηγείται από τα πειραματικά αποτελέσματα (φαινομενολογικά μοντέλα).

- Μία άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα είναι να αρχίσουμε από ένα μοριακό μοντέλο (model for molecular behavior) και να χρησιμοποιήσουμε στατιστική μηχανική για την παραγωγή ρεολογικών μοντέλων [Doi and Edwards, 1986; Bird et al, 1987].

- Προσομοιώσεις μοριακής δυναμικής (molecular dynamics simulations). Αυτή η προσέγγιση απαιτεί τη χρήση ενός supercomputer για τον υπολογισμό μακροσκοπικής συμπεριφοράς από ένα μοντέλο μοριακής συμπεριφοράς χωρίς την χρήση ρεολογικής καταστατικής εξίσωσης (προσομοίωση της κίνησης πολλών μακρομορίων μαζί).

### 1.4.3 Πεπερασμένα μέτρα παραμόρφωσης

Όπως προαναφέραμε, το μέτρο παραμόρφωσης χρησιμοποιώντας τον απειροελάχιστο τανυστή παραμόρφωσης στην αρχή επαλληλίας του Boltzmann, δεν ισχύει σε μεγάλες παραμορφώσεις. Αυτό μπορεί να αντικατασταθεί από τον πεπερασμένο τανυστή παραμόρφωσης. Αυτή η αντικατάσταση παράγει ένα μοντέλο γνωστό σαν πεπερασμένη γραμμική ιξωδοελαστικότητα ("finite linear viscoelasticity") ή ψευτο-γραμμικό ιξωδοελαστικό μοντέλο ("quasi-linear" viscoelastic model).

#### 1.4.4 Οι τανυστές Cauchy και Finger

Η αρχή ισοπροτίμησης υλικού (principle of material indifference) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετάσουμε εάν τα πεπερασμένα μέτρα παραμόρφωσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάπτυξη θεωρίας πεπερασμένης γραμμικής ιξωδοελαστικότητας (finite linear viscoelasticity). Δύο μέτρα παραμόρφωσης που ικανοποιούν αυτό το κριτήριο και έχουν βρεθεί χρήσιμα στην ρεολογία πολυμερών είναι οι τανυστές Cauchy,  $C_{ij}(t_1, t_2)$  και Finger,  $B_{ij}(t_1, t_2)$  (βλέπε παράρτημα). Εδώ  $t_1$  είναι ο χρόνος στον οποίο το υλικό είναι στην κατάσταση αναφοράς του και  $t_2$  είναι ο χρόνος στον οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την παραμόρφωση σε σχέση με την κατάσταση του υλικού στο χρόνο αναφοράς  $t_1$ .

Τα στοιχεία των τανυστών Cauchy και Finger γράφονται:

$$C_{ij}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} 1 & [\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)] & 0 \\ [\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)] & 1 + [\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

και αντίστοιχα:

$$B_{ij}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} 1 + [\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)]^2 & [\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)] & 0 \\ [\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Τα στοιχεία των τανυστών δεν είναι μηδέν όταν το υλικό είναι στην κατάσταση ισορροπίας, αλλά και οι δύο τανυστές γίνονται ίσοι με τον μοναδιαίο τανυστή. Για το λόγο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε τον τανυστή παραμόρφωσης των Cauchy και Finger, που ορίζονται ως :

$$\text{Cauchy strain tensor} \equiv C_{ij} - \delta_{ij} \quad (1.44)$$

$$\text{Finger strain tensor} \equiv B_{ij} - \delta_{ij} \quad (1.45)$$

όπου  $\delta_{ij}$  το δέλτα του "Kronecker" ( που είναι ίσος με μηδέν για  $i \neq j$  και ίσος με μονάδα όταν  $i = j$  ). Οι τανυστές παραμόρφωσης του Finger και Cauchy ισχύουν και για πολύ μικρές παραμορφώσεις όπου η γραμμική ιξωδοελαστικότητα υφίσταται:

$$e^{2\varepsilon} = 1 + 2\varepsilon \quad (1.46)$$

$$e^{-2\varepsilon} = 1 - \varepsilon \quad (1.47)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 5-8 και 5-9, μπορούμε να δούμε ότι τα στοιχεία του απειροελάχιστου τανυστή παραμόρφωσης που ορίστηκε στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα είναι τα ίδια με αυτά των τανυστών παραμόρφωσης των Cauchy και Finger σε μικρές παραμορφώσεις.

Με την εισαγωγή των τανυστών σχετικής παραμόρφωσης, σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε τη θεωρία γραμμικής παραμόρφωσης κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να περιγράψει τη συμπεριφορά πολυμερικών τμημάτων σε μεγάλες και γρήγορες παραμορφώσεις.

#### 1.4.5 Αναλλοίωτες του τανυστή Finger

Οι τρεις αναλλοίωτες του τανυστή Finger ορίζονται ως:

$$I_1(B_{ij}) = B_{11} + B_{22} + B_{33} \quad (1.48)$$

$$I_2(B_{ij}) = C_{11} + C_{22} + C_{33} \quad (1.49)$$

$$I_3(B_{ij}) = 1 \quad (1.50)$$

#### 1.4.6 Το ελαστικό υγρό

Είτε ο τανυστής Cauchy ή ο τανυστής Finger ή ένας συνδιασμός και των δύο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπτύξουμε μία θεωρία πεπερασμένης ιξωδοελαστικότητας. Πειραματικά δεδομένα όμως έχουν δείξει ότι μόνο όταν χρησιμοποιηθεί ο τανυστής Finger μπορεί να πάρουμε κάποια ικανοποιητικά αποτελέσματα..

##### Μια θεωρία πεπερασμένης ιξωδοελαστικότητας

Χρησιμοποιώντας τον τανυστή Finger μπορούμε να γενικεύσουμε την αρχή της επαλληλίας του Boltzmann και έτσι σχηματίζουμε μια θεωρία μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας. Η εξίσωση περιγραφής αυτής μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t m(t-t')B_{ij}(t,t')dt' \quad (1.51)$$

όπου  $m(t-t')$  είναι η συνάρτηση μνήμης. Ο Lodge ονόμασε αυτή την εξίσωση μοντέλο ελαστικού ή ελαστομερικού υγρού. Αυτό το μοντέλο έχει το ίδιο μέτρο χαλάρωσης με την αρχή επαλληλίας του Boltzmann. Το μέτρο χαλάρωσης  $G(t)$  σχετίζεται με την συνάρτηση μνήμης ως:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{E} = \int_{-\infty}^0 m(t-t')dt' \quad (1.52)$$

και άρα η συνάρτηση μνήμης είναι μία γραμμική ιξωδοελαστική ιδιότητα.

## Η θεωρία δικτύου του Lodge και το μεταφερόμενο μοντέλο Maxwell

Χρησιμοποιώντας υποθέσεις και μαθηματικές τεχνικές χρήσιμες στη θεωρία της ελαστικότητας ο Lodge παρήγαγε μια καταστατική εξίσωση που είναι μία ειδική περίπτωση της προηγούμενης. Η συνάρτηση μνήμης μπορεί να γραφεί ως:

$$m(t - t') = \sum_{i=1}^N \frac{G_i}{\lambda_i} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda_i}} \quad (1.53)$$

Η εξίσωση που προκύπτει από τη θεωρία δικτύου του Lodge είναι:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N \frac{G_i}{\lambda_i} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda_i}} B_{ij}(t - t') dt' \quad (1.54)$$

Η θεωρία αυτή βλέπει το τήγμα σαν μία συλλογή από τμήματα ενός δικτύου και όχι σαν συλλογή από μακρομόρια. Η ιδιοσυγκρασία των μακρομορίων χάνεται με την ύπαρξη των περιελίξεων που σχηματίζουν τα κομμάτια δικτύου. Ως εκ τούτου μοριακές μεταβλητές όπως μήκος αλυσίδας και συντελεστής τριβής δεν εμφανίζονται και η θεωρία δεν προβλέπει φάσμα χρόνων χαλάρωσης. Επίσης η θεωρία αυτή δεν μπορεί να προβλέψει την επιδραση της μοριακής δομής στις ρεολογικές ιδιότητες.

Το μοντέλο ελαστικού υγρού δεν παρέχει μια ποσοτική περιγραφή της συμπεριφοράς πολυμερικών τμημάτων που υπόκεινται σε μεγάλες και γρήγορες παραμορφώσεις. Ειδικά, επισημαίνονται τα ακόλουθα ως ανεπάρκειες του μοντέλου:

1. Το ιζώδες είναι ανεξάρτητο του ρυθμού διάτμησης.
2. Ο πρωτεύων συντελεστής διαφοράς κάθετων τάσεων είναι ανεξάρτητος του ρυθμού διάτμησης.
3. Ο δευτερεύων συντελεστής διαφοράς κάθετων τάσεων είναι μηδέν σε όλες τις διατμητικές τάσεις.
4. Η συνάρτηση ανάπτυξης εφελκυστικής τάσης αυξάνει χωρίς όριο για ορισμένες τιμές του ρυθμού παραμόρφωσης.
5. Η συνάρτηση ανάπτυξης εφελκυστικής τάσης είναι πάντα πιο πάνω από το όριο της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας για μη μηδενικές τιμές του ρυθμού παραμόρφωσης

Αυτές οι προβλέψεις δεν είναι σύμφωνες με πειραματικές μετρήσεις. Όμως το μοντέλο ελαστικού ή ελαστομερικού υγρού είναι σημαντικό για τους εξής λόγους:

- Δίνεται από μία απλή εξίσωση.
- Δίνει σωστή προσεγγιστική εξάρτηση της πρώτης διαφοράς κάθετων τάσεων σε μικρούς ρυθμούς παραμόρφωσης και έτσι παρέχει πολλές χρήσιμες σχέσεις.
- Τελικά παρέχει τη βάση σύγκρισης για την περιγραφή της μη-γραμμικής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς πραγματικών υλικών. Ειδικά, η πραγματική συμπεριφορά μπορεί να συγκριθεί με τις προβλέψεις του μοντέλου και οι αποκλίσεις μπορούν να θεωρηθούν σαν μη-γραμμικές συναρτήσεις για το χαρακτηρισμό του υλικού.

## 1.4.7 Μερικά ακόμα μοντέλα μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας

### Η εξίσωση K-BKZ

Το μοντέλο K-BKZ είναι ένα συνεχές μοντέλο (continuum model) που προτάθηκε από τους Bernstein, Kearsley και Zapas [1964]. Το μοντέλο πηγάζει από ιδέες στην ιξωδοελαστικότητα ελαστομερών και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \left[ 2 \frac{du}{dI_1} C_{ij}(t, t') - 2 \frac{du}{dI_1} B_{ij}(t, t') \right] dt' \quad (1.55)$$

όπου  $u$  είναι μία χρονικά εξαρτώμενη συνάρτηση ελαστικής ενέργειας που εξαρτάται από τις αναλοιώτες  $I_1$ ,  $I_2$  και  $t$ .

### Συνάρτηση μνήμης εξαρτώμενης από την παραμόρφωση

Ο Wagner (1976) ανέπτυξε μία καταστατική εξίσωση που είναι μία ειδική περίπτωση του μοντέλου K-BKZ. Αυτή η καταστατική εξίσωση έχει τη μορφή :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t m(t-t') h(I_1, I_2) B_{ij}(t, t') dt' \quad (1.56)$$

όπου  $h(I_1, I_2)$  είναι η συνάρτηση απόσβεσης.

Συγκρίνοντας με την εξίσωση K-BKZ βλέπουμε ότι ο όρος που περιλαμβάνει τον τανυστή Cauchy έχει απαλειφθεί. Αυτό απλοποιεί σημαντικά το μοντέλο K-BKZ, καθώς όμως η συνάρτηση μνήμης δεν μπορεί να εξαχθεί από μία συνάρτηση ενέργειας δυναμικού, η θερμοδυναμική συνέπεια του μοντέλου K-BKZ equation έχει χαθεί. Η εξίσωση του Wagner δεν είναι πλήρης καταστατική εξίσωση, επειδή περιέχει την άγνωστη συνάρτηση απόσβεσης  $h(I_1, I_2)$  η οποία πρέπει να καθορισθεί πειραματικά για το κάθε πολυμερές.

**Άλλα ενδιαφέροντα θέματα/αντικείμενα είναι:**

- Το μοντέλο K-BKZ – Papanastasiou model
- Μοριακά μοντέλα (ROUSE MODEL)
- Η θεωρία Doi-Edwards
- Το μοντέλο POM-POM
- Νόμοι μίξης (κανόνας μίξης του Tsenolou, κανόνας μίξης του de Cloisseau)

## Chapter 2

# Το Ξύλο Και Ιξωδοελαστικά Μοντέλα

Το ξύλο ως υλικό αποτελείται βασικά απο μια σειρά απο επιμήκεις ίνες. Κάθε τοίχωμα της ίνας αποτελείται από διάφορες ποσότητες τριών πολυμερών : κυτταρίνης, ημικυτταρίνης και λιγνίνης. Η κυτταρίνη είναι το ισχυρότερο πολυμερές του ξύλου και κατά συνέπεια καθοριστική για την αντοχή των ινών του ξύλου, λόγω του υψηλού βαθμού πολυμερισμού και του γραμμικού προσανατολισμού της. Η ημικυτταρίνη αποτελεί πρόδρομο μόριο κατα τον σχηματισμό της κυτταρίνης, ώστε να αυξηθεί η πυκνότητα του κυτταρικού τοιχώματος. Η λιγνίνη αποτελεί φαινολική ένωση η οποία συγκρατεί τις ίνες του ξύλου μαζί, ενώ παράλληλα αποτελεί παράγοντα ενίσχυσης του κυτταρικού τοιχώματος των ξυλωδών ινών. Τα συγκεκριμένα συστατικά συμβάλλουν σε διαφορετικούς βαθμούς στη μηχανική αντοχή του ξύλου (Winandy and Rowell ,2005).

Το ξύλο, όπως πολλά φυσικά υλικά είναι υγροσκοπικό, δηλαδή η περιεκτικότητα της υγρασίας σε αυτό εξαρτάται απο την υγρασία του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται. Η ανταλλαγή της υγρασίας ανάμεσα στο ξύλο και στον αέρα εξαρτάται από την σχετική υγρασία και την θερμοκρασία του αέρα και το υπάρχων ποσό του νερού στο ξύλο. Αυτή η σχέση υγρασίας επηρεάζει τις ιδιότητες και την μηχανική συμπεριφορά του ξύλου. Πολλές προκλήσεις της χρήσης του ξύλου ως υλικό προέρχονται από τις αλλαγές της περιεκτικότητας της υγρασίας σε αυτό.

Το κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά του ξύλου και την επίδραση της υγρασίας σε αυτή, με την πρόταση του κατάλληλου μοντέλου περιγραφής αυτής.

### 2.1 Σχέσεις Ξύλου / Υγρασίας

Πολλές από τις ιδιότητες του ξύλου εξαρτώνται από την περιεκτικότητα σε υγρασία του ξύλου. Η περιεκτικότητα υγρασίας ( Θα συμβολίζεται ως  $MC$  από τα αρχικά των "Moisture content" ) εκφράζεται επί τις 100 και μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$MC = \frac{m_{water}}{m_{wood}}(100\%) \quad (2.1)$$

όπου  $m_{water}$  είναι η μάζα του νερού που περιέχεται στο ξύλο και  $m_{wood}$  είναι η μάζα της αποξηραμένης ξυλείας. Μια ακόμα σχέση υπολογισμού της υγρασίας σε ένα κομμάτι ξύλου είναι :

$$MC = \frac{m_{wet} - m_{dry}}{m_{dry}}(100\%) \quad (2.2)$$

όπου  $m_{wet}$  και  $m_{dry}$  είναι η μάζα υπό συγκεκριμένη περιεκτικότητα υγρασίας και αποξηραμένου αντίστοιχα ξύλου.

Η περιεκτικότητα σε υγρασία ενός πρόσφατα υλοτομημένου ξύλου μπορεί να είναι από 30% έως και 200%. Το ποσοστό αυτό αναφέρεται είτε σε ελεύθερο, είτε σε περιορισμένο απο τα τοιχώματα των κυττάρων, νερό.

Όταν το ξύλο προστατεύεται απο άμεση επαφή με το νερό και βρίσκεται υπό σκιά, η περιεκτικότητα της υγρασίας είναι σε συνάρτηση με τη σχετική υγρασία και της θερμοκρασίας του αέρα στο περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται. Η επίδραση του περιβάλλοντος είναι και μακροπρόθεσμη και βραχυπρόθεσμη (καθημερινές αλλαγές υγρασίας / θερμοκρασίας) οι οποίες επάγουν αλλαγές στην περιεκτικότητα. Οι αλλαγές αυτές είναι συνήθως σταδιακές και οι βραχυπρόθεσμες διακυμάνσεις συνήθως επηρεάζουν την επιφάνεια και μόνο του ξύλου. Αλλαγές της περιεκτικότητας μπορούν να επιβραδυνθούν αλλά όχι να αποφευχθούν εάν προσταστατευθούν με διάφορους τύπους βερνικίων.

### 2.1.1 Υγρασία ισορροπίας

Η υγρασία ισορροπίας [*"Equilibrium Moisture Content"* (EMC)] καθορίζεται ως το σημείο εκείνο στο οποίο η περιεκτικότητα σε υγρασία ούτε αυξάνεται, ούτε μειώνεται, αλλά παραμένει σταθερή στο ξύλο. Η σχέση μεταξύ της υγρασίας ισορροπίας, της υγρασίας περιβάλλοντος και της θερμοκρασίας δίνεται στον πίνακα (2.1) και οι τιμές αυτού χρησιμοποιούνται για κάθε είδος ξύλου. Οι τιμές αυτού υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$EMC(\%) = \frac{1800}{W} \left[ \frac{Kh}{1 - Kh} + \frac{K_1Kh + 2K_1K_2K^2h^2}{1 + K_1Kh + K_1K_2K^2h^2} \right] \quad (2.3)$$

όπου  $h$  είναι η υγρασία περιβάλλοντος και οι παράμετροι  $W$ ,  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  εξαρτώνται απο την θερμοκρασία.

Για θερμοκρασία σε βαθμούς κελσίου:

$$\begin{aligned} W &= 349 + 1.29T + 0.0135T^2 \\ K &= 0.805 + 0.000736T - 0.00000273T^2 \\ K_1 &= 6.27 - 0.00938T - 0.000303T^2 \\ K_2 &= 1.91 + 0.0407T - 0.000293T^2 \end{aligned}$$

(Simson, 1973)

Table 2.1: Περικεκτικότητα υγρασίας του ξύλου σε δεδομένη υγρασία και συμπεριφορά.

Θερμοκρασία (°C)	Περικεκτικότητα υγρασίας (%) σε διάφορα περιβάλλοντα																		
	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%
-1.1 (30)	1.4	2.6	3.7	4.6	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5	10.4	11.3	12.4	13.5	14.9	16.5	18.5	21.0	24.3
4.4 (40)	1.4	2.6	3.7	4.6	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5	10.4	11.3	12.3	13.5	14.9	16.5	18.5	21.0	24.3
10.0 (50)	1.4	2.6	3.6	4.6	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5	10.3	11.2	12.3	13.4	14.8	16.4	18.4	20.9	24.3
15.6 (60)	1.3	2.5	3.6	4.6	5.4	6.2	7.0	7.8	8.6	9.4	10.2	11.1	12.1	13.3	14.6	16.2	18.2	20.7	24.1
21.1 (70)	1.3	2.5	3.5	4.5	5.4	6.2	6.9	7.7	8.5	9.2	10.1	11.0	12.0	13.1	14.4	16.0	17.9	20.5	23.9
26.7 (80)	1.3	2.4	3.5	4.4	5.3	6.1	6.8	7.6	8.3	9.1	9.9	10.8	11.7	12.9	14.2	15.7	17.7	20.2	23.6
32.2 (90)	1.2	2.3	3.4	4.3	5.1	5.9	6.7	7.4	8.1	8.9	9.7	10.5	11.5	12.6	13.9	15.4	17.3	19.8	23.3
37.8 (100)	1.2	2.3	3.3	4.2	5.0	5.8	6.5	7.2	7.9	8.7	9.5	10.3	11.2	12.3	13.6	15.1	17.0	19.5	22.9
43.3 (110)	1.1	2.2	3.2	4.0	4.9	5.6	6.3	7.0	7.7	8.4	9.2	10.0	11.0	12.0	13.2	14.7	16.6	19.1	22.4
48.9 (120)	1.1	2.1	3.0	3.9	4.7	5.4	6.1	6.8	7.5	8.2	8.9	9.7	10.6	11.7	12.9	14.4	16.2	18.6	22.0
54.4 (130)	1.0	2.0	2.9	3.7	4.5	5.2	5.9	6.6	7.2	7.9	8.7	9.4	10.3	11.3	12.5	14.0	15.8	18.2	21.5
60.0 (140)	0.9	1.9	2.8	3.6	4.3	5.0	5.7	6.3	7.0	7.7	8.4	9.1	10.0	11.0	12.1	13.6	15.3	17.7	21.0
65.6 (150)	0.9	1.8	2.6	3.4	4.1	4.8	5.5	6.1	6.7	7.4	8.1	8.8	9.7	10.6	11.8	13.1	14.9	17.2	20.4
71.1 (160)	0.8	1.6	2.4	3.2	3.9	4.6	5.2	5.8	6.4	7.1	7.8	8.5	9.3	10.3	11.4	12.7	14.4	16.7	19.9
76.7 (170)	0.7	1.5	2.3	3.0	3.7	4.3	4.9	5.6	6.2	6.8	7.4	8.2	9.0	9.9	11.0	12.3	14.0	16.2	19.3
82.2 (180)	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.1	4.7	5.3	5.9	6.5	7.1	7.8	8.6	9.5	10.5	11.8	13.5	15.7	18.7
87.8 (190)	0.6	1.3	1.9	2.6	3.2	3.8	4.4	5.0	5.5	6.1	6.8	7.5	8.2	9.1	10.1	11.4	13.0	15.1	18.1
93.3 (200)	0.5	1.1	1.7	2.4	3.0	3.5	4.1	4.6	5.2	5.8	6.4	7.1	7.8	8.7	9.7	10.9	12.5	14.6	17.5
98.9 (210)	0.5	1.0	1.6	2.1	2.7	3.2	3.8	4.3	4.9	5.4	6.0	6.7	7.4	8.3	9.2	10.4	12.0	14.0	16.9
104.4 (220)	0.4	0.9	1.4	1.9	2.4	2.9	3.4	3.9	4.5	5.0	5.6	6.3	7.0	7.8	8.8	9.9			
110.0 (230)	0.3	0.8	1.2	1.6	2.1	2.6	3.1	3.6	4.2	4.7	5.3	6.0	6.7						
115.6 (240)	0.3	0.6	0.9	1.3	1.7	2.1	2.6	3.1	3.6	4.2	4.7	5.3	6.0						
121.1 (250)	0.2	0.4	0.7	1.0	1.3	1.7	2.1	2.6	3.1	3.5	4.1	4.6							
126.7 (260)	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.4	2.5	2.9										
132.2 (270)	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4													

### 2.1.2 Διαστάσεις ξύλου και υγρασία

Ξύλινες κατασκευές μπορεί να έρθουν σε επαφή με υγρό νερό σε αρκετές περιπτώσεις (ναυπηγική, ξύλινα τραπέζια κ.ά.). Η επαφή με νερό μπορεί να επιφέρει ραγδαίες αλλαγές του ποσοστού περιεκτικότητας υγρασίας του ξύλου, σε αντίθεση με τις πιο αργές μεταβολές από την περιεχόμενη υγρασία του ατμοσφαιρικού αέρα.

Το ξύλο διατηρεί σταθερές τις διαστάσεις του όταν η περιεκτικότητα υγρασίας είναι μεγαλύτερη από το σημείο κορεσμού των ιών του. Κάτω από το σημείο αυτό το ξύλο διογκώνεται, καθώς αυξάνεται το ποσοστό υγρασίας και αντίθετα συρρικνώνεται, καθώς χάνει υγρασία λόγω της αλλαγής του όγκου των κυττάρων του, ανάλογα με το υδατικό τους περιεχόμενο. Οι αλλαγές αυτές προκαλούν παραμορφώσεις στο ξύλο όπως: απλό στράβωμα, πιτσικάρισμα μέχρι και σπασίματα "ραγάδες" επιφανειακές ή και εσωτερικές που μπορεί να προκαλέσουν αστοχία του υλικού υπό συνθήκες. Ως εκ τούτου είναι σημαντικό να κατανοήσουμε και να συνυπολογίσουμε τις αλλαγές αυτές ανάλογα με τις εφαρμογές του υλικού στο περιβάλλον χρήσεως αυτού.

Σε σχέση με τις αλλαγές των διαστάσεων του ξύλου, αυτό χαρακτηρίζεται ως ανισότροπο υλικό. Συρρικνώνεται περισσότερο σύμφωνα με τη διάταξη των ετήσιων αυξητικών δακτυλίων (εφαπτομενικά), κατά το μήκος των δακτυλίων (ακτινικά) και ελάχιστα κατά το μήκος των "νερών" του (κατά μήκος). Αυτή η αλλαγή των διαστάσεων του αποτυπώνεται σχετικά στο παρακάτω σχήμα :

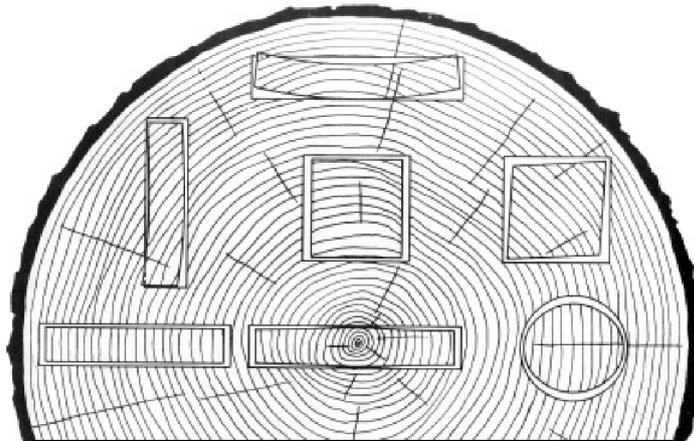


Figure 2.1: Χαρακτηριστική παραμόρφωση όπως προκύπτει από αλλαγές στην περιεκτικότητα υγρασίας

## 2.2 Ιξωδοελαστικά μοντέλα

### 2.2.1 Γενίκευση μοντέλου Kelvin-Voight

Για να εισάγουμε την επίδραση του περιβάλλοντος στην ιξωδοελαστική συμπεριφορά, προτείνεται μια ρεολογική προσέγγιση προσαρμοσμένη στην συμπεριφορά του ξύλου. Στο παλίσιο αυτό η επίδραση του περιβάλλοντος προσλαμβάνεται μέσω της γενίκευσης του μοντέλου Kelvin-Voight. Στην επιλογή του συγκεκριμένου μοντέλου οδήγησε μία σειρά απο παλαιότερα πειράματα ερπυσμού (Nielsen, 2005; Hering et al., 2012). Στο παρακάτω σχήμα αποτυπώνεται το γενικευμένο μοντέλο Kelvin-Voight.

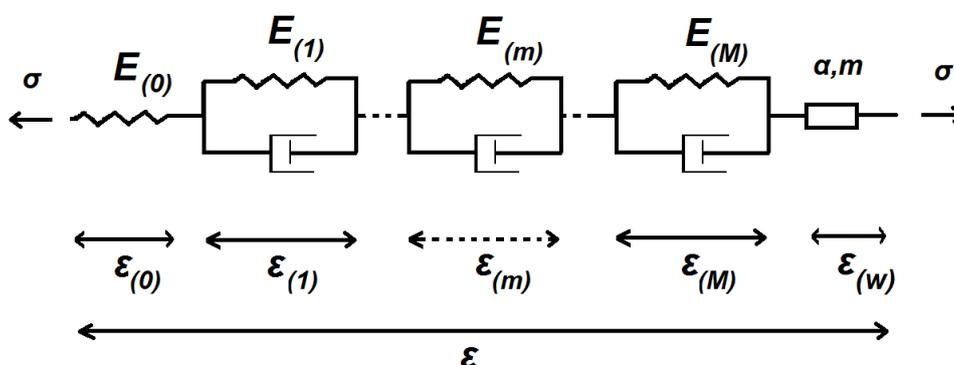


Figure 2.2: Γενικευμένο μοντέλο Kelvin-Voight

Προκειμένου να ληφθούν υπόψιν όλα τα φαινόμενα κατά τον ερπυσμό του ξύλου σε διάφορα περιβάλλοντα, το μοντέλο αποτελείται απο ένα απομονωμένο ελατήριο που εκπροσωπεί την ακαριαία παραμόρφωση ( $\varepsilon_0$ ), ενώ τα στοιχεία Kelvin-Voight ( $\varepsilon_m$ ) εκπροσωπούν τον πρωτογενή ερπυσμό και το τελευταίο στοιχείο ( $\varepsilon_w$ ) παρουσιάζει τις διογκώσεις / συρρικνώσεις που προκαλούνται από την υγρασία (Leicester, 1971; Ranta-Maunus, 1975; Hunt, 1988). Η συνολική παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^M \varepsilon_m(t) + \varepsilon_w(t) \quad (2.4)$$

Η ιξωδοελαστική παραμόρφωση  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^M \varepsilon_m(t)$  είναι η παραμόρφωση ενός γενικευμένου Kelvin-Voight μοντέλου και συνεπώς η συνολική παραμόρφωση γράφεται όπως έχει αναφερθεί παραπάνω :

$$\varepsilon_T = \int_0^t J(t-t') \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt \quad (2.5)$$

$$\text{Με } J(t - t') = \frac{1}{E_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon_m \frac{1}{E_m} (1 - e^{-\lambda_m(t-t')}), \quad \lambda_m = \frac{E_m}{\eta_m}$$

ο συντελεστής ελατηρίου  $E_p$  με  $p \in (1, \dots, m, \dots, M)$  και ο συντελεστής του αποσβεστήρα  $\eta_q$  με  $q \in (1, \dots, m, \dots, M)$ , πρέπει να παραμένουν σταθεροί και θετικοί.

Το φαινόμενο της γήρανσης μπορεί να παρουσιαστεί με μια σειρά από μηχανικές συμπεριφορές (ακαμψία, αλλαγή ιξώδους κ.ά.), όταν αυτό μελετηθεί σε μακροσκοπικό επίπεδο και για δεδομένο χρόνο. Η γήρανση του ξύλου οφείλεται στις κλιματικές αλλαγές. Τα χαρακτηριστικά του κάθε ρεολογικού στοιχείου εξαρτώνται από την υγρασία σε σταθερές θερμοκρασίες. Το μέτρο ελαστικότητας του ελατηρίου "γήρανσης"  $E_p(w)$  καθορίζεται από τον όρο  $b_p(w)$  και το μέτρο ελαστικότητας αναφοράς  $E_p^{ref}$  και αντιστοιχεί στην περιεκτικότητα υγρασίας αναφοράς  $w_{ref}$  μέσω των σχέσεων :

$$E_p(t) = b_p(t) E_p^{ref} \quad (2.6)$$

$$\text{Με } b_p(w(t)) = b_p(t), \quad b_p(w_{ref}) = 1, \quad E_p^{ref} > 0$$

Η ακαμψία του ξύλου αυξάνεται (σκλήρυνση,) καθώς η υγρασία αποβάλλεται από το υλικό και αντίστοιχα μειώνεται καθώς αυξάνεται η περιεκτικότητα του ξύλου σε υγρασία. Αντίστοιχα ο όρος  $\dot{b}_p(t)$  είναι θετικός κατά την ξήρανση του ξύλου και αρνητικός κατά την πρόσληψη υγρασίας. Με αντίστοιχο τρόπο υπάρχει εξάρτηση του αποσβεστήρα  $\eta_q(w)$  από την περιεκτικότητα υγρασίας με τον όρο  $\alpha_q(w)$  και η αναφορά ιξώδους  $\eta_q^{ref}$  εξαρτάται από την περιεκτικότητα υγρασίας αναφοράς  $w_{ref}$  μέσω των σχέσεων:

$$\eta_q(t) = \alpha_q(t) \eta_q^{ref} \quad (2.7)$$

$$\text{Με } \alpha_q(w(t)) = \alpha_q(t), \quad \alpha_q(w_{ref}) = 1, \quad \eta_q^{ref} > 0$$

## 2.2.2 Καταστατικοί νόμοι περιγραφής του φαινομένου γήρανσης

Όταν το υπό μελέτη υλικό, στην παρούσα εργασία το ξύλο, εμφανίζει το φαινόμενο της γήρανσης, τότε οι σταθερές των ελατήριων και των αποσβεστήρων που χρησιμοποιούνται για τη σύνθεση του ρεολογικού μοντέλου που θα περιγράφει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά, κρίνεται σκόπιμο να περιλαμβάνουν εξισώσεις που λαμβάνουν υπόψιν το συγκεκριμένο φαινόμενο. Ο Bazant (Bazant, 1985; Bazant et al.) κατέδειξε καταστατικούς νόμους που περιγράφουν τη συμπεριφορά του ελατηρίου ή του αποσβεστήρα κατά την σκλήρυνση ή αποσκλήρυνση ως εξής:

$$\sigma_p(t) = b_p E_p^{ref} \varepsilon_p(t), \quad \dot{b}_p(t) < 0 : \text{αποσκλήρυνση} \quad (2.8)$$

$$\dot{\sigma}_p(t) = b_p E_p^{ref} \dot{\varepsilon}_p(t), \quad \dot{b}_p(t) > 0 : \text{σκλήρυνση} \quad (2.9)$$

Ενώ για τον αποσβεστήρα:

$$\sigma_q(t) = \alpha_q \eta_q^{ref} \dot{\varepsilon}_q(t) \quad (2.10)$$

Οι ανισώσεις αυτές είναι αναγκαίες να τηρούνται κατα την επίλυση και διαμόρφωση του μοντέλου για την ικανοποίηση των θερμοδυναμικών περιορισμών όπως προκύπτουν από την ανισότητα Clausius–Duhem.

### 2.2.3 Θερμοδυναμικοί περιορισμοί

Το φαινόμενο της γήρανσης του ελατηρίου σαν συμπεριφορά σχετίζεται με την διακύμανση της σταθεράς του ελατηρίου κατα τον χρόνο. Κατα το φαινόμενο περιλαμβάνεται η διάχυση ενός μέρους της μηχανικής ενέργειας που παρέχεται από το ελατήριο. Στην διατύπωση της Helmholtz ελεύθερης ενέργειας (ως  $\psi$ ) παίρνουμε τον ταυιστή της ελαστικής παραμόρφωσης  $\varepsilon^e$  και την θερμοκρασία  $T$ , ως μεταβλητών καταστάσεως, και την παράμετρο γήρανσης  $b(t)$  σαν μία εσωτερική μεταβλητή, ως  $\psi = \psi(\varepsilon^e, T, b)$ . Για το ελατήριο υπό γήρανση η ελεύθερη ενέργεια  $\psi$  πάντα καθορίζεται από την σχέση:

$$\psi = \frac{1}{2\rho} b(t) E^{ref} (\varepsilon^e(t))^2 \quad (2.11)$$

Η εγγενής διάχυση συνάγεται από την Clausius - Duhem ανισότητα εξετάζοντας μόνο μία εσωτερική μεταβλητή  $b$  συνδέεται με την θερμοδυναμική δύναμη  $A$ , ως:

$$D_{tot} = \sigma : \dot{\varepsilon}^{an} - A \dot{b} - \vec{q} \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.12)$$

με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e}, \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad A = \rho \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad (2.13)$$

#### Ελατήριο υπό αποσκλήρυνση

Το ελατήριο υπό αποσκλήρυνση περιγράφεται από τον νόμο του Hooke :

$$\varepsilon^e(t) = \frac{\sigma}{b(t) E^{ref}} \quad \& \quad \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^{an}(t) \quad (2.14)$$

Το ελαστικό στέλεχος  $\varepsilon^e$  καθορίζεται πάντα από την σχέση :

$$\varepsilon^e(t) = \frac{\sigma}{b(t) E^{ref}} \quad \& \quad \dot{\varepsilon}^e(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{b(t) E^{ref}} - \frac{\dot{b}(t) \sigma(t)}{b^2(t) E^{ref}} \quad (2.15)$$

Το ανελαστικό στέλεχος  $\varepsilon^{an}$  καθορίζεται από τις (2.14) και (2.15) :

$$\varepsilon^{an}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon^e(t) = 0 \quad (2.16)$$

Για την έκφραση της ενέργειας (2.11) και από (2.13) η σχετιζόμενη με την  $b$  καθορίζεται από :

$$A = \frac{1}{2} E^{ref} (\varepsilon^e(t))^2 = \frac{\sigma^2(t)}{2b^2(t)E^{ref}} \quad (2.17)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.16) και (2.17) στην Clausius-Duhem και υποθέτοντας ομογεννή μεταβολή θερμοκρασίας ( $\vec{\nabla}T = 0$ ) ο συνολικός διασκεδαμός (2.12) απλοποιείται στην μορφή:

$$D_{k_s} = -\frac{\dot{b}(t)\sigma^2(t)}{2b^2(t)E^{ref}} \geq 0 \quad (2.18)$$

Απ'όπου προκύπτει :

$$\dot{b}(t) \leq 0 \quad (2.19)$$

Αντίστοιχα για την περίπτωση του αποσκληρυνόμενου ελατηρίου προκύπτει :

$$\dot{b}(t) \geq 0 \quad (2.20)$$

## 2.3 Ιξωδοελαστική συμπεριφορά υλικού υπό γήρανση

### 2.3.1 Καταστατικός νόμος απαλυνόμενο ιξωδοελαστικού υλικού

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται το ρεολογικό μοντέλο του οποίου η σκληρότητα μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (αύξηση της περιεκτικότητας της υγρασίας του ξύλου). Απαραίτητοι νόμοι για την περιγραφή του φαινομένου είναι οι (2.8), (2.10), για το στοιχείο του ελατηρίου και για τον αποσβεστήρα αντίστοιχα. Συνεπώς, η ακαριαία παραμόρφωση  $\varepsilon_0$  εκφράζεται με την ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1}{E_0^{ref} b_0(t)} \sigma(t) \quad (2.21)$$

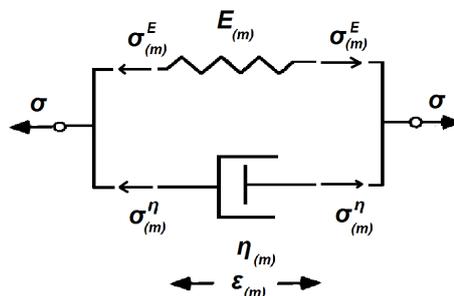


Figure 2.3: Αποσύνθεση τάσης

Η έκφραση της τάσης μπορεί να αποτυπωθεί ως :

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.22)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.12) στην εξίσωση (2.11) προκύπτει:

$$\varepsilon_0(t) = \int_0^t J_0^\alpha(t, t') \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad M\varepsilon \quad J_0^\alpha(t, t') = \frac{1}{b_0(t)E_0^{ref}} \quad (2.23)$$

Η έκφραση της ολικής τάσης για κάθε στοιχείο Kelvin-Voight υπό αλλαγή υγρασίας (βλέπε σχήμα (1.3) δίνεται από την σχέση :

$$\sigma(t) = \sigma_m^E(t) + \sigma_m^\eta(t) \quad (2.24)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.10) και (2.8) στην (2.14) δίνεται η διαφορική :

$$\dot{\varepsilon}_m + \left( \frac{b_m}{\alpha_m} \lambda_m^{ref} \right) \varepsilon_m = \frac{\sigma}{\alpha_m \eta_m^{ref}} \quad M\varepsilon : \quad \lambda_m^{ref} = \frac{E_m^{ref}}{\eta_m^{ref}} \quad (2.25)$$

Η οποία μας επιτρέπει να μετρήσουμε την παραμόρφωση για κάθε στοιχείο Kelvin του γενικευμένου μοντέλου:

$$\varepsilon_m(t) = \int_0^t J_m^\alpha(t, t') \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.26)$$

$$M\varepsilon : \quad J_m^\alpha(t, t') = \int_{t'}^t \frac{e^{-\lambda_m^{ref} \int_{t'}^{\theta} \frac{b_m(\mu)}{\alpha_m(\mu)} d\mu}}{\alpha_m(\theta) \eta_m^{ref}} d\theta$$

### 2.3.2 Καταστατικός νόμος σκληρυνόμενου ιξωδοελαστικού υλικού

Για να παρατηρήσουμε την επίδραση στο μέτρο της ελαστικότητας των ελατηρίων, το οποίο κατα τη μείωση της περιεκτικότητας της υγρασίας μειώνεται, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (2.4) και (2.14). Η ακαριαία ανταπόκριση εκφράζεται με την ενσωμάτωση της συμπεριφοράς κατά την σκλήρυνση στην καταστατική εξίσωση (2.9) και έχει μορφή:

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t'} = \frac{1}{b_0(t)E_0^{ref}} \frac{\partial \sigma}{\partial t'} \quad (2.27)$$

την οποία και ολοκληρώνοντας φέρνουμε στη μορφή:

$$\varepsilon_0(t) = \int_0^t J_0^r(t, t') \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad M\varepsilon : \quad J_0^r(t, t') = \frac{1}{b_0(t)E_0^{ref}} \quad (2.28)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.13) και (2.18) παρατηρούμε ότι οι νόμοι της σκλήρυνσης λαμβάνουν υπόψιν την 'ιστορία' σκλήρυνσης ή αποσκλήρυνσης του υλικού.

Ο υπολογισμός της παραμόρφωσης του κάθε στοιχείου Kelvin-Voight του μοντέλου γίνεται από τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τις (2.14), (2.9) και (2.10):

$$\ddot{\varepsilon}_m(t) + \left( \frac{b_m(t)}{\alpha_m(t)} \lambda_m^{ref} + \frac{\dot{\alpha}_m(t)}{\alpha_m(t)} \right) \dot{\varepsilon}_m(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\alpha_m(t) \eta_m^{ref}} \quad (2.29)$$

από την οποία, ολοκληρώνοντας δύο φορές προκύπτει:

$$\varepsilon_m(t) = \int_{\theta=0}^{\theta=t} \left( \int_{t'=0}^{t'=\theta} \frac{e^{-\lambda_m^{ref} \int_t^\theta \frac{b_m(\mu)}{\alpha_m(\mu)} d\mu}}{\alpha_m(\theta) \eta_m^{ref}} \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \right) d\theta \quad (2.30)$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης με  $\theta \in [t', t]$  και  $t' \in [0, \theta]$  είναι :

$$\varepsilon_m(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} \left( \int_{\theta=t'}^{\theta=t} \frac{e^{-\lambda_m^{ref} \int_t^\theta \frac{b_m(\mu)}{\alpha_m(\mu)} d\mu}}{\alpha_m(\theta) \eta_m^{ref}} d\theta \right) \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.31)$$

Η συναγόμενη  $J_m^r(t, t')$  της προηγούμενης εξίσωσης είναι ίση με:

$$J_m^r(t, t') = \int_{t'}^t \frac{e^{-\lambda_m^{ref} \int_t^\theta \frac{b_m(\mu)}{\alpha_m(\mu)} d\mu}}{\alpha_m(\theta) \eta_m^{ref}} d\theta \quad (2.32)$$

Οι εξισώσεις (2.22) και (2.16) δείχνουν τις διαφορές των τάσεων και των ιδιοτήτων του υλικού σε καταστάσεις είτε σκλήρυνσης είτε αποσκλήρυνσης. Η δυσκολία που επισημαίνεται αφορά στη σύζευξη των δύο αυτών συμπεριφορών σε καθεστώς μεταβλητής υγρασίας.

### 2.3.3 Μεταβολές όγκου προκαλούμενες από υγρασία

Σε υδροσκοπικό επίπεδο, οι αλλαγές της περιεκτικότητας της υγρασίας προκαλούν συρρίκνωση κατά τη μείωση και διόγκωση αντίστοιχα κατά την αύξηση. Φαινόμενο το οποίο παρατηρείται και χωρίς τη φόρτιση του ξύλου, ενώ παράλληλα τροποποιείται υπό μηχανικές φορτίσεις (Hunt, 1984, 1988). Προκειμένου να αποτυπωθεί η σύζευξη των μηχανικών καταστάσεων που μπορεί να βρίσκεται το ξύλο (υπό φορτίο) χρησιμοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\Delta \varepsilon_w^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} [\alpha(t-t') + m e_v \varepsilon^v(t')] \frac{\partial w}{\partial t'} dt' \quad (2.33)$$

$$\text{Με: } \alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^m \alpha_m (1 - e^{-\lambda_m^\alpha(t)})$$

$\alpha(t)$  είναι ο συντελεστής της ελεύθερης συρρίκνωσης / διόγκωσης και  $m$  ο συντελεστής που επιτρέπει τη σύζευξη της αλλαγής του όγκου και της βισκοελαστικής παραμόρφωσης  $\varepsilon^v$ . Ο συντελεστής  $m$  εισάγει και τη διαφορά διόγκωσης / συρρίκνωσης υπό τάση ανάλογα με την υγρασία (Ranta-Maunus, 1975) :

$m = m_H$  if  $\dot{w}(t) > 0$  : αύξηση υγρασίας

$m = m_S$  if  $\dot{w}(t) < 0$  : μείωση υγρασίας

### 2.3.4 Ολοκληρωτική διατύπωση συνολικής παραμόρφωσης

**Υλικό σε κατάσταση αποσκλήρυνσης**

Από τη σχέση ολικής παραμόρφωσης (2.4) και τις (2.11), (2.16) η ολοκληρωτική έκφραση της ολικής παραμόρφωσης προκύπτει ως:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left( J_0^\alpha(t, t') + \sum_{m=1}^M J_m^\alpha(t, t') \right) \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' + \int_0^{t'} \alpha(t-t') \frac{\partial w(t')}{\partial t'} dt' + \int_0^t m \varepsilon^v(t') \frac{\partial w(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.34)$$

**Υλικό σε κατάσταση σκλήρυνσης**

Κατά τον ίδιο τρόπο εκφράζεται και η ολοκληρωτική μορφή της ολικής παραμόρφωσης. Προκύπτει από τις εξισώσεις (2.4) και τις (2.18), (2.20) και έχει μορφή :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left( J_0^r(t, t') + \sum_{m=1}^M J_m^r(t, t') \right) \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' + \int_0^{t'} \alpha(t-t') \frac{\partial w(t')}{\partial t'} dt' + \int_0^t m \varepsilon^v(t') \frac{\partial w(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.35)$$

## 2.4 Διαμόρφωση κατά στοιχείο

Με βάση το ρεολογικό μοντέλο (2.4) οι υπολογισμοί μπορεί να γίνουν αρκετά δύσκολοι, καθώς η γνώση του "παρελθόντος" του υλικού απαιτεί συνεχή μελέτη, ενώ παράλληλα παρατηρείται και αδυναμία "αποθήκευσης" αυτού καθώς  $M \rightarrow \infty$ . Για να δοθεί απάντηση σε αυτό το πρόβλημα στην παρούσα παράγραφο γίνεται προσέγγιση του προβλήματος κατά βήμα. Εκφράζοντας το χρόνο κατά βήμα  $t_{n-1}, t_n$  μπορούμε να συνυπολογίσουμε την εξέλιξη των μηχανικών καταστάσεων και του "παρελθόντος" του υλικού. Η έκφραση της συνολικής παραμόρφωσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή :

$$\Delta \varepsilon_n = \Delta \varepsilon_T^n + \Delta \varepsilon_w^n \quad (2.36)$$

$$\text{Με : } \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0^n + \sum_{m=1}^M \Delta \varepsilon_m^n$$

Και :  $\Delta\varepsilon^n = \varepsilon(t_n) - \varepsilon(t_{n-1})$

#### 2.4.1 Στοιχειώδη διαμόρφωση ιξωδοελαστικού νόμου υπό χαλάρωση

Το στοιχείο της ακαριαίας παραμόρφωσης  $\Delta\varepsilon_0^n$  λαμβάνεται με την παραγώγιση της σχέσης (2.11) :

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{1}{E_0^{ref}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma(t)}{b_0(t)} \right) = \frac{1}{E_0^{ref}} \frac{d}{dt} (c_0(t)\sigma(t)) \quad (2.37)$$

Με:  $c_0(t) = \frac{1}{b_0(t)}$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.27) με όρια ολοκλήρωσης τους χρόνους  $t_{n-1}$  και  $t_n$  παίρνουμε την :

$$\Delta\varepsilon_0^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{d\varepsilon_0(t')}{dt'} dt' = \frac{1}{E_0^{ref}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial}{\partial t'} (c_0(t')\sigma(t')) dt' \quad (2.38)$$

Για να έχουμε ακριβέστερη ολοκλήρωση της σχέσης (2.28) θεωρούμε ότι οι  $\sigma$  και  $c_0$ , είναι γραμμικές ανάμεσα στους χρόνους  $t_{n-1}$  και  $t_n$  με μορφή:

$$c_0(t) = c_0(t_{n-1}) = \frac{\Delta c_0^n}{t_n - t_{n-1}} \quad \text{Και} \quad \sigma(t) = \sigma(t_{n-1}) + \frac{\Delta\sigma_n}{t_n - t_{n-1}} \quad (2.39)$$

Η (2.28) πλέον ορίζεται ως:

$$\Delta\varepsilon_0^n = M_0^\alpha \Delta\sigma_n + \tilde{\varepsilon}_0^\alpha \quad (2.40)$$

Με:  $M_0^\alpha = \frac{c_0(t_{n-1} + \Delta c_0^n)}{E_0^{ref}}$   
και :

$$\tilde{\varepsilon}_0^\alpha = \frac{\Delta c_0^n}{E_0^{ref}} \sigma(t_{n-1}) \quad (2.41)$$

Η ολοκληρωτική μορφή της παραμόρφωσης για κάθε στοιχείο Kelvin δίνεται εάν εισαχθεί στην εξίσωση (2.16) η ακόλουθη μεταβλητή:

$$\Phi = \int_0^t \frac{b_m(\zeta)}{\alpha_m(\zeta)} d\zeta \quad \text{και} \quad \Phi - \Phi' = \int_t^{t'} \frac{b_m(\zeta)}{\alpha_m(\zeta)} d\zeta \quad (2.42)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.16) την (2.32) προκύπτει:

$$\varepsilon_m(t_n) = \int_0^{\Phi_m^{n-1}} \frac{e^{-\lambda_m^{ref}(\Phi_m^n - \Phi')}}{n_m^{ref}} c_m(\Phi') \sigma(\Phi') d\Phi' + \int_{\Phi_m^{n-1}}^{\Phi_m^n} \frac{e^{-\lambda_m^{ref}(\Phi_m^n - \Phi')}}{n_m^{ref}} c_m(\Phi') \sigma(\Phi') d\Phi' \quad (2.43)$$

$$\text{Με: } c_m(t) = \frac{1}{b_m(t)}$$

Η σχέση (2.33) μετασχηματίζεται και μας δείχνει την παραμόρφωση υπολογισμένη στο χρόνο  $t_{n-1}$  :

$$\varepsilon_m(t_n) = e^{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} \varepsilon_m(t_{n-1}) + \int_{\Phi_m^{n-1}}^{\Phi_m^n} \frac{e^{-\lambda_m^{ref} (\Phi_m^n - \Phi')}}{n_m^{ref}} c_m(\Phi') \sigma(\Phi') d\Phi \quad (2.44)$$

Με την υπόθεση της γραμμικότητας των  $\sigma$  και  $c_m$  για το χρόνο  $[\Phi_{n-1}, \Phi_n]$  η αύξηση της παραμόρφωσης δίνεται από :

$$\Delta \varepsilon_m^n = M_m^\alpha \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_m^\alpha \quad (2.45)$$

Με :

$$M_m^\alpha = \frac{c_m(t_{n-1})}{E_m^{ref}} B_m + \frac{\Delta c_m^n}{E_m^{ref}} C_m \quad (2.46)$$

$$\text{και : } \tilde{\varepsilon}_m^\alpha = \sigma(t_{n-1}) \left( \frac{c_m(t_{n-1})}{E_m^{ref}} A_m + \frac{\Delta c_m^n}{E_m^{ref}} B_m \right) - \varepsilon_m(t_{n-1}) A_m$$

$$A_m = 1 - e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n}$$

$$B_m = 1 - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} (1 - e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n})$$

$$C_m = 1 - \frac{2}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} (1 - e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n}) \right)$$

$$\Delta \Phi_m^n = \Phi_m^n - \Phi_m^{n-1}$$

#### 2.4.2 Στοιχειώδη διαμόρφωση ιξωδοελαστικού νόμου για υλικό υπό σκλήρυνση

Η παράγωγος της ακαριαίας παραμόρφωσης  $\varepsilon_0(t)$  προκύπτει από τη σχέση (2.18) και εκφράζεται στη μορφή :

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{c_0(t)}{E_0^{ref}} \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{Με: } c_0(t) = \frac{1}{b_0(t)} \quad (2.47)$$

ενώ η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.37) δίνει την εξίσωση :

$$\Delta \varepsilon_0^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{d\varepsilon_0(t')}{dt'} dt' = \frac{1}{E_0^{ref}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_0(t') \frac{d\sigma_0(t')}{dt'} dt' \quad (2.48)$$

Με δεδομένη την ίδια γραμμική σχέση των  $\sigma$  και  $c_0$  στο χρόνο  $t_{n-1}$  και  $t_n$  η εξίσωση (2.38) γράφεται στη μορφή:

$$\Delta \varepsilon_0^n = M_0^r \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_0^r u \quad (2.49)$$

Με :

$$M_0^r = \frac{1}{E_0^{ref}} \left( c_0(t_{n-1}) + \frac{\Delta c_0^n}{2} \right) \quad \tilde{\varepsilon}_0^r = 0$$

Ο υπολογισμός της παραμόρφωσης για το  $m$  στοιχείο Kelvin-Voight γίνεται αναπτύσσοντας τη διαφορική εξίσωση (2.19) :

$$\Delta \varepsilon_m^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial \varepsilon_m(t')}{\partial t'} dt' = \int_{\Phi_m^{n-1}}^{\Phi_m^n} \frac{\partial \varepsilon_m(\Phi')}{\partial \Phi'} d\Phi' \quad (2.50)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2.32) στην (2.40) έχουμε :

$$\frac{\partial \varepsilon_m(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{c_m(\Phi)}{\eta_m^{ref}} \int_0^\Phi e^{-\lambda_m^{ref}(\Phi-\Phi')} \frac{\partial \sigma}{\partial \Phi'} d\Phi' \quad (2.51)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (2.41) και αντικαθιστώντας στην (2.40) η  $\Delta \varepsilon_m^n$  καθορίζεται ως:

$$\Delta \varepsilon_m^n = \int_{\Phi_m^{n-1}}^{\Phi_m^n} \frac{c_m(\Phi)}{\eta_m^{ref}} \sigma(\Phi) d\Phi - \frac{\lambda_m^{ref}}{\eta_m^{ref}} \int_{\Phi_m^{n-1}}^{\Phi_m^n} \left( c_m(\Phi) \int_0^\Phi e^{-\lambda_m^{ref}(\Phi-\Phi')} \sigma(\Phi') d\Phi' \right) d\Phi \quad (2.52)$$

Δεδομένης της γραμμικότητας των  $\sigma$  και  $c_0$  στο χρονικό διάστημα  $\Phi_{n-1}, \Phi_n$  έχουμε :

$$\Delta \varepsilon_m^n = M_m^r \Delta \sigma^n + \tilde{\varepsilon}_m^r \quad (2.53)$$

Με :

$$M_m^r = \frac{c_m(t_{n-1})}{E_m^{ref}} B_m + \frac{\Delta c_m^n}{2 E_m^{ref}} F_m \quad (2.54)$$

και :

$$\tilde{\varepsilon}_m^r = \sigma(t_{n-1}) \left( \frac{c_m(t_{n-1})}{E_m^{ref}} A_m + \frac{\Delta c_m^n}{E_m^{ref}} D_m \right) + \tilde{\varepsilon}_m(t_{n-1}) \left( -c_m(t_{n-1}) A_m + \Delta c_m^n D_m \right)$$

Οι  $A_m$ ,  $B_m$  και  $C_m$  καθορίζονται από τις εξισώσεις (2.36) και για  $D_m$ ,  $F_m$  είναι :

$$D_m = e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} \right) - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n}$$

$$F_m = 1 - \frac{2}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} D_m$$

Το  $\tilde{\varepsilon}_m$  είναι η ιξωδοελαστική παραμόρφωση του υλικού σε "μη γήρανση" σε υγρασία αναφοράς  $w^{ref}$  και εκφράζεται :

$$\tilde{\varepsilon}_m(t) = \int_0^t \frac{e^{-\lambda_m^{ref}(t-t')}}{\eta^{ref}} \sigma(t') dt' \quad (2.55)$$

Η αύξηση της παραμόρφωσης  $\Delta \tilde{\varepsilon}_m$  είναι όμοια με το  $\Delta \varepsilon_n^n$  με  $c_m(t_{n-1}) = 1$  και  $\Delta c_m^n = 0$  :

$$\Delta \tilde{\varepsilon}_m^n = M_m^{r\tilde{\varepsilon}} \Delta \sigma_n + \tilde{\varepsilon}_m^{t'\tilde{\varepsilon}} \quad (2.56)$$

Με :

$$M_m^{r\tilde{\varepsilon}} = \frac{B(m)}{E_m^{ref}}$$

$$\tilde{\varepsilon}_m^{t'\tilde{\varepsilon}} = \sigma(t_{n-1}) \frac{A_m}{E_m^{ref}} - \tilde{\varepsilon}(t_{n-1}) A_m$$

### 2.4.3 Στοιχειώδη διαμόρφωση αλλαγής όγκου

Το στοιχείο παραμόρφωσης  $\Delta \varepsilon_w^n$  της διόγκωσης / συρρίκνωσης υπό μηχανικό φορτίο, στους χρόνους  $[t_{n-1}, t_n]$  δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta \varepsilon_w^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha(t-t') \frac{\partial w(t')}{\partial t'} dt' + \int_{t_{n-1}}^{t_n} m \varepsilon_T(t') \frac{\partial w(t')}{\partial t'} dt' \quad (2.57)$$

Για να διευκολύνουμε την ένταξη της εξίσωσης (2.47), έχουμε θεωρήσει τις  $E_T$  και  $w$  γραμμικές στην πάροδο του χρονικού βήματος  $t_n$  και εξάγουμε από αυτήν την εξίσωση :

$$\Delta \varepsilon_w^n = \left[ M_w + m \left( \frac{\Delta \varepsilon_T}{2} + \varepsilon_T(t_{n-1}) \right) \right] \Delta w^n + \tilde{\varepsilon}_w \quad (2.58)$$

Με

$$M_w = \alpha_0 + \sum_{r=1}^R \alpha_r \left( 1 - \frac{1}{\lambda_r^\alpha} (1 - e^{-\lambda_r^\alpha \Delta t_n}) \right) \quad (2.59)$$

και

$$\tilde{\varepsilon}_w = \sum_{r=1}^R \alpha_r (1 - e^{-\lambda_r^\alpha \Delta t_n}) w(t_{n-1}) + \sum_{r=1}^R (e^{-\lambda_r^\alpha \Delta t_n} - 1) \varepsilon_w(t_{n-1}) \quad (2.60)$$

#### 2.4.4 Ολοκληρωτική εξίσωση συνολικής παραμόρφωσης

Το στοιχείο της συνολικής παραμόρφωσης είναι το άθροισμα της αύξησης της ιξωδοελαστικής παραμόρφωσης και της αλλαγής του όγκου λόγω της υγρασίας. Στην περίπτωση της χαλάρωσης η παραμόρφωση υπολογίζεται από τις εξισώσεις (2.47) και (2.30), (2.35). Σε συνθήκες υπό σκλήρυνση, η παραμόρφωση υπολογίζεται από τις (2.47) και (2.39), (2.43). Τελικά παίρνουμε :

$$\Delta\varepsilon_n = M\Delta\sigma_n + \tilde{\varepsilon} \quad (2.61)$$

Με :

$$M = M_\alpha, \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_\alpha : \text{αποσκλήρυνση} \quad (2.62)$$

$$M = M_r, \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} : \text{σκλήρυνση} \quad (2.63)$$

Όπου  $M$  είναι η ισοδύναμη ιξωδοελαστική σχέση που μας επιτρέπει να πάρουμε την επίδραση της γραμμικής μεταβολής της παραμόρφωσης κατά την αύξηση του χρόνου.

$$M_\alpha = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \left(M_0^\alpha + \sum_{m=1}^M M_m^\alpha\right) \quad (2.64)$$

$$M_r = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \left(M_0^\alpha + \sum_{m=1}^M M_m^\alpha\right) \quad (2.65)$$

Η επίδραση του περιβάλλοντος και η "αποθήκευση" των μεταβολών κατά την πάροδο του χρόνου λαμβάνονται υπόψιν ως αρχικός όρος  $\tilde{\varepsilon}$  :

$$\tilde{\varepsilon}^\alpha = (M_w + m\varepsilon_T(t_{n-1}))\Delta w_n + (1 + m) \left(\tilde{\varepsilon}_0^\alpha + \sum_{m=1}^M \tilde{\varepsilon}_m^\alpha\right) + \tilde{\varepsilon}_w \quad (2.66)$$

και

$$\tilde{\varepsilon}^r = (M_w + m\varepsilon_T(t_{n-1}))\Delta w_n + (1 + m) \left(\tilde{\varepsilon}_0^r + \sum_{m=1}^M \tilde{\varepsilon}_m^r\right) + \tilde{\varepsilon}_w \quad (2.67)$$

Στην (2.51) όλοι οι όροι δίνονται σύμφωνα με τον όρο  $\Delta\Phi_m^n$ . Θεωρώντας τον όρο  $\frac{b_m}{\alpha_m}$  γραμμικό σε κάθε χρονικό διάστημα  $[t_{n-1}, t_n]$  :

$$\Delta\Phi_m^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{b_m(\mu)}{\alpha_m(\mu)} d\mu = \frac{\Delta t_n}{2c_m(t_n)\alpha_m(t_n)} + \frac{\Delta t_n}{2c_m(t_{n-1})\alpha_m(t_{n-1})} \quad (2.68)$$

## 2.5 Συμπεριφορά υλικού υπό καθεστώς μη μονότονων αλλαγών περιεκτικότητας υγρασίας

Η εξίσωση (2.51) απεικονίζει με παρόμοιο τρόπο τη αποσκλήρυνση και τη σκλήρυνση του υλικού. Ωστόσο οι όροι  $\bar{\varepsilon}^a$  και  $\bar{\varepsilon}^r$  που παρουσιάζουν το "ιστορικό" του υλικού υπό διάφορες μηχανικές τάσεις, δεν ανανεώνονται με πανομοιότυπο τρόπο. Όταν το υλικό υπόκειται σε μονότονες συνθήκες υγρασίας (αύξηση ή μείωση), δηλαδή απλά αποσκλήρυνση ή απλά σκλήρυνση χωρίς ενάλλαγες αυτών, οι δύο μορφές χρησιμοποιούνται με τρόπο που δε συνδυάζονται, οπότε και απλοποιείται η μορφή της. Όταν όμως στο υλικό έχουμε αλλαγές της υγρασίας κατά μη μονότονο τρόπο, κρίνεται σκόπιμη η ανανέωση του "ιστορικού" του υλικού, ώστε να προσεγγίζονται οι διαφορετικές φάσεις κατά συμβατό τρόπο. Στο πλαίσιο αυτό, το τέλος της σκλήρυνσης θα πρέπει να συμπίπτει με την αρχή της αποσκλήρυνσης κατά τη μείωση της περιεκτικότητας υγρασίας και αντίστροφα κατά την αύξηση αυτής.

### 2.5.1 Ελαστική συμπεριφορά

Ας πάρουμε για παράδειγμα την ελαστική συμπεριφορά με πρότυπο ένα ελατήριο σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.30) και (2.39). Όταν το υλικό προσλαμβάνει υγρασία, χαλαρώνει και κατά την διάρκεια της αποβολής υγρασίας, σκληραίνει. Υπό μόνιμο φορτίο η διαδικασία της παραμόρφωσης ενεργοποιείται από τις αλλαγές της υγρασίας. Το υλικό κρατάει στη μνήμη τις αλλαγές της υγρασίας κατά το χρονικό διάστημα που βρίσκεται υπό φορτίο. Προκειμένου να προσομοιωθεί η συμπεριφορά το υλικού πρέπει να ανανεώνεται παράλληλα και το ιστορικό της υγρασίας. Για να γίνει αυτό λαμβάνουμε υπόψιν τις ακόλουθες περιπτώσεις :

#### Περίπτωση 1:

Το επίπεδο υγρασίας δεν είχε φτάσει σε καμιά προηγούμενη περίπτωση στο επίπεδο ( $w(t_n) \geq w_{max}$ ) και άρα το υλικό χαλαρώνει και η παραμόρφωση υπολογίζεται από :

$$\Delta \varepsilon_0^x = \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} \Delta \sigma_x + \frac{\Delta c_0^x}{E_0^0} \sigma(t_x) \quad (2.69)$$

με :  $t_x = t(w_{max})$ ,

$$\Delta \varepsilon_0^x = \varepsilon_0(t_n) - \varepsilon(t_x),$$

$$\Delta \sigma_0^x = \sigma_0(t_n) - \sigma(t_x),$$

$$\Delta c_0^x = c_0(t_n) - c(t_x)$$

Η αύξηση της ελαστικής παραμόρφωσης στην περίπτωση, στον χρόνο  $t_{n-1}$  και  $t_n$  δίνεται από:

$$\Delta \varepsilon_0^n = \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} \Delta \sigma_n + \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} (\sigma(t_{n-1}) - \sigma(t_x)) + \frac{\Delta c_0^x}{E_0^{ref}} \sigma(t_x) + \varepsilon_0(t_x) - \varepsilon_0(t_{n-1}) \quad (2.70)$$

### Περίπτωση 2:

Η υγρασία αυξάνεται σε σχέση με την προηγούμενη κατάσταση, αλλά δεν ξεπερνά τη μέγιστη περιεκτικότητα ( $w_{max} \geq w(t_n) \geq w_h$ ). Η παραμόρφωση αλλάζει ως:

$$\Delta \varepsilon_0^x = \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} \Delta \sigma_x \quad (2.71)$$

Το στοιχείο  $\Delta \varepsilon_0^n$  δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta \varepsilon_0^n = \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} \Delta \sigma_n + \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} (\sigma(t_{n-1}) - \sigma(t_x)) + \varepsilon_0(t_x) - \varepsilon_0(t_{n-1}) \quad (2.72)$$

### Περίπτωση 3:

Η περιεκτικότητα υγρασίας στο υλικό είναι μικρότερη από την περιεκτικότητα της υγρασίας στην προηγούμενη περίπτωση και άρα το υλικό προχωρά σε σκλήρυνση  $w_h \geq w(t_n)$ . Σε αυτή την περίπτωση η παραμόρφωση δίνεται ως:

$$\Delta \varepsilon_0^h = \frac{C_0(t_n)}{E_0^{ref}} \Delta \sigma_h \quad (2.73)$$

με:  $t_h = t(w_h)$ ,

$$\Delta c_0^h = c_0(t_n) - c(t_x),$$

$$\Delta \alpha_0^h = \sigma_0(t_n) - \sigma(t_h),$$

$$\Delta \varepsilon_0^h = \varepsilon_0(t_n) - \varepsilon(t_h)$$

Από τη σχέση (2.63) δίνεται το  $\Delta \varepsilon_n$  ως :

$$\Delta \varepsilon_0^n = \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} \Delta \sigma_n + \frac{c_0(t_n)}{E_0^{ref}} (\sigma_{n-1} - \sigma(t_h)) + \varepsilon_0(t_h) - \varepsilon_0(t_{n-1}) \quad (2.74)$$

## 2.5.2 Ιξωδοελαστική συμπεριφορά

Για την περιγραφή της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του υλικού χρησιμοποιείται ο ίδιος τρόπος "ανανέωσης" του ιστορικού που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω.

### Περίπτωση 1:

Το επίπεδο υγρασίας αυξάνεται, άρα το υλικό βρίσκεται υπό χαλάρωση και η ιξωδο-ελαστική παραμόρφωση στο χρόνο  $t_x, t_n$  ανανεώνεται ως :

$$\Delta \varepsilon_m^x = M_m^{\alpha x} \Delta \sigma_x + \tilde{\varepsilon}_m^{\alpha x} \quad (2.75)$$

$$\text{Με : } M_m^{\alpha x} = \frac{c_m(t_x)}{E_0^{ref}} B_m^x + \frac{\Delta c_m^x}{E_0^{ref}} C_m^x,$$

$$\tilde{\varepsilon}_m^{\alpha x} = \sigma(t_x) \left( \frac{c_m(t_x)}{E_0^{ref}} A_m^x + \frac{c_m(t_x)}{E_0^{ref}} B_m^x \right) - \varepsilon_m(t_x) A_m^x$$

$$A_m^x = 1 - e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n}$$

$$B_m^x = 1 - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} (1 - e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^x})$$

$$C_m^x = 1 - \frac{2}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} (1 - e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^x}) \right)$$

$$\Delta \Phi_m^x = \Phi_m^n + \Phi_m^x$$

### Περίπτωση 2:

Η ιξωδοελαστική παραμόρφωση στο χρόνο  $t_x, t_n$  ενημερώνεται ως :

$$\Delta \varepsilon_m^x = M_m^{rx} \Delta \sigma_x + \tilde{\varepsilon}_m^{rx} \quad (2.76)$$

$$\text{Με : } M_m^{rx} = \frac{c_m(t_x)}{E_0^{ref}} B_m^x + \frac{\Delta c_m^x}{2E_m^{ref}} \left( 1 + \frac{2}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^x} D_m^x \right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_m^{\alpha x} = \sigma(t_x) \left( \frac{c_m(t_x)}{E_0^{ref}} A_m^x + \frac{c_m(t_x)}{E_0^{ref}} B_m^x \right) + \varepsilon_m(t_x) (-c_m(t_x) A_m^x + \Delta c_m^x C_m^x)$$

$$A_m^x, B_m^x, C_m^x \text{ είναι αντίστοιχα με (2.65)}$$

και

$$D_m^x = e^{-\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^n} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^x} \right) - \frac{1}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^x}$$

### Περίπτωση 3:

Η ιξωδοελαστική παραμόρφωση στο χρόνο  $t_h$  ως:

$$\Delta \varepsilon_m^h = M_m^{rh} \Delta \sigma_h + \tilde{\varepsilon}_m^{rh} \quad (2.77)$$

$$\text{Με : } M_M^{rh} = \frac{c_m(t_h)}{E_0^{ref}} B_m^h + \frac{\Delta c_m^h}{2E_m^{ref}} \left( 1 + \frac{2}{\lambda_m^{ref} \Delta \Phi_m^h} D_m^h \right),$$

$$\tilde{\varepsilon}_m^{rh} = \sigma(t_h) \left( \frac{c_m(t_h)}{E_m^{ref}} A_m^h + \frac{c_m^x}{E_m^{ref}} B_m^h \right) + \varepsilon_m(t_h) \left( -c_m(t_h) A_m^h + \Delta c_m^h D_m^h \right)$$

Και αντίστοιχα οι εκφράσεις  $A_m^h$ ,  $B_m^h$ ,  $C_m^h$  και  $D_m^h$  είναι ίδιες με τις  $A_m^x$ ,  $B_m^x$ ,  $C_m^x$ ,  $D_m^x$  αντικαθιστώντας το  $\Delta \Phi_m^x$  με  $\Delta \Phi_m^h$ .

### Περιγραφή μοντέλου

Το παραπάνω μοντέλο μας δίνει την δυνατότητα να έχουμε μία περιγραφή της παραμόρφωσης ανα βήμα. Θεωρώντας γραμμική την επίδραση της αλλαγής της περιεκτικότητας της υγρασίας ((εξισώσεις (2.8), (2.9), (2.10)) δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού της παραμόρφωσης σε ερπυσμό ανα τον χρόνο και άρα υπολογίζοντας αυτήν κατα τις αλλαγές της περιεκτικότητας της υγρασίας κατά την διάρκεια του πειράματος.

Στο παρακάτω μέρος θα μελετηθεί η ιξωδοελαστική συμπεριφορά του ξύλου υπό τρεις διαφορετικές σταθερές περιεκτικότητας της υγρασίας και όχι υπό αλλαγή της περιεκτικότητας αυτής κατά το πείραμα.

## 2.6 Μη γραμμικό μοντέλο ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς

Για την ανάπτυξη του μη γραμμικού μοντέλου ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς χρησιμοποιείται το μοντέλο Standar Linear ή στερεό του Zener του οποίου η γραφική απεικόνιση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (2.4).

Ασκώντας σταθερή τάση  $\sigma$  στα άκρα του μηχανικού μοντέλου Zener και τα δύο ελατήρια επιμηκύνονται. Έστω η τάση στο ελατήριο  $E_1$  είναι  $\sigma_1$  και η τάση στο ελατήριο με μέτρο ελαστικότητας  $\eta$  και στον αποσβεστήρα με συντελεστή ιξώδους  $\eta$ , είναι  $\sigma_2$ . Η εφαρμοζόμενη τάση  $\sigma$  είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ .

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.78)$$

Οι τροπές στις δύο επιμέρους πλευρές του προτύπου είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με τη συνολική τροπή του προτύπου

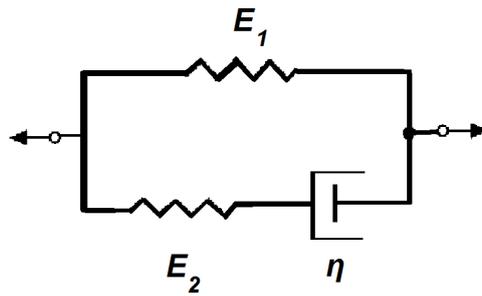


Figure 2.4: Στερεό του Zener

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (2.79)$$

όπου  $\varepsilon_1$  η παραμόρφωση στα άκρα του ελατηρίου με μέτρο ελαστικότητας  $E_1$ , και  $\varepsilon_2$  η τροπή του ελατηρίου  $E_2$  και στον αποσβεστήρα  $\eta$ .

Στα άκρα του ελατηρίου με μέτρο ελαστικότητας  $E_1$  εφαρμόζουμε το νόμο του Hooke και παίρνουμε :

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 = E_1 \varepsilon \quad (2.80)$$

Για να βρούμε τη μη γραμμική λύση του προβλήματος θεωρούμε ότι το στοιχείο του αποσβεστήρα δεν ακολουθεί την γραμμική εξίσωση αλλά τη μη γραμμική. Η γραφική απεικόνιση του μη γραμμικού μοντέλου Zener φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (2.5).

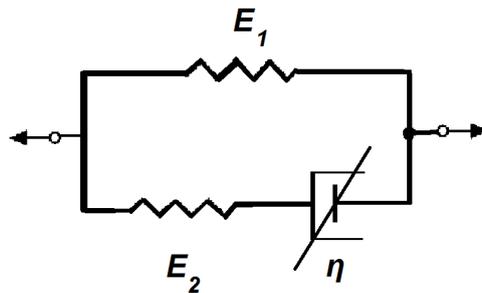


Figure 2.5: Στερεό του Zener με μη γραμμική απόκριση του αποσβεστήρα

και η εξίσωση που ακολουθεί δίνεται από τον τύπο:

$$\dot{\varepsilon}_\eta(t) = \alpha \sinh(b\sigma_2(t)) \quad (2.81)$$

Ο αποσβεστήρας βρίσκεται σε σειρά με ένα ελατήριο και άρα το κομμάτι αυτού του μοντέλου προσομοιάζει με το στοιχείο του Maxwell, οπότε εφαρμόζουμε την εξίσωση που προκύπτει από

το δεύτερο.

$$\dot{\varepsilon}_2(t) = \frac{\sigma_2(t)}{\eta} + \frac{1}{E_2} \dot{\sigma}_2(t) \quad (2.82)$$

Στη σχέση (2.72) αντικαθιστούμε το γραμμικό όρο  $\dot{\varepsilon}_\eta(t) = \frac{\sigma_2(t)}{\eta}$  και το μη γραμμικό της σχέσης (2.71) και προκύπτει η:

$$\dot{\varepsilon}_2(t) = \alpha \cdot \sinh(b\sigma_2(t)) + \frac{1}{E_2} \cdot \dot{\sigma}_2 \quad (2.83)$$

από την οποία συνεπάγεται λόγω της (2.69) :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \alpha \cdot \sinh(b\sigma_2(t)) + \frac{1}{E_2} \cdot \dot{\sigma}_2 \Leftrightarrow$$

$$\dot{\sigma}_2(t) = E_2 \cdot \dot{\varepsilon}(t) - E_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(b\sigma_2(t)) \quad (2.84)$$

Παραγωγίζοντας την (2.70)

$$\dot{\sigma}(t) = E_1 \cdot \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.85)$$

Παραγωγίζοντας την (2.68)

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}_1(t) + \dot{\sigma}_2(t) \quad (2.86)$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή τις (2.74) και (2.75) :

$$\dot{\sigma}(t) = E_1 \cdot \dot{\varepsilon}(t) + E_2 \cdot \dot{\varepsilon}(t) - E_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(b\sigma_2(t)) \Rightarrow$$

$$\dot{\sigma}(t) = E_1 \cdot \dot{\varepsilon}(t) + E_2 \cdot \dot{\varepsilon}(t) - E_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(b(\sigma(t) - \sigma_1(t))) \Rightarrow$$

$$\dot{\sigma}(t) = E_1 \cdot \dot{\varepsilon}(t) + E_2 \cdot \dot{\varepsilon}(t) - E_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(b(\sigma(t) - E_1 \cdot \varepsilon(t))) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = (E_1 + E_2) \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} - E_2 \cdot \alpha \cdot \sinh(b(\sigma(t) - E_1 \cdot \varepsilon(t))) \quad (2.87)$$

Η οποία είναι και η καταστατική εξίσωση για τη μη γραμμική επίλυση του στοιχείου Zener.

Η επίλυση της, λόγω της δυσκολίας της και του χρονοβόρου χαρακτήρα της, γίνεται με τη βοήθεια μαθηματικών λογισμικών. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα δωθεί η επίλυση της μέσω του μαθηματικού λογισμικού πακέτου Mathematica.

## Chapter 3

# Εφαρμογή σε Πειραματικά Αποτελέσματα

### 3.1 Ξύλο υπό σταθερή περιεκτικότητα υγρασίας

Το ξύλο ως υλικό έχει χαρακτηριστεί ως γραμμικά ιξωδοελαστικό υλικό σε πολλές από τις ήδη αναφερθείσες βιβλιογραφικές πηγές. Στη συγκεκριμένη παράγραφο της παρούσας εργασίας γίνεται προσπάθεια να αναπτυχθεί ένα μοντέλο που θα εξηγεί και θα αποτυπώνει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά του ξύλου όταν βρίσκεται σε περιβάλλον προστατευμένο από την υγρασία. Για παράδειγμα ένα ξύλο το οποίο έχει εμποτιστεί με τα αντίστοιχα βερνίκια / χημικά και άρα προφυλάσσεται από τις μεταβολές της υγρασίας.

#### 3.1.1 Το Τριπαραμετρικό μοντέλο

Για να αποτυπώσουμε την ιξωδοελαστική συμπεριφορά χρησιμοποιήθηκε το τριπαραμετρικό μοντέλο του σχήματος (3.1).

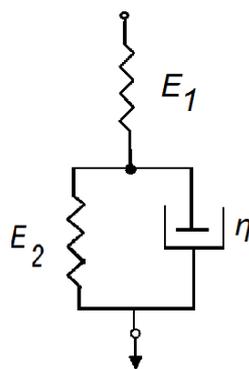


Figure 3.1: Τριπαραμετρικό Μοντέλο

Για την επίλυση του χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό *Mathematica* και τα βήματα διαμόρφωσης είναι τα:

Ορισμός της καταστατικής εξίσωσης του μοντέλου :

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (3.1)$$

Η επίλυση της ως προς  $\sigma_s$  και ο Λαπλασιανός μετασχηματισμός της :

$$\sigma_s \rightarrow \frac{-q_1 s \varepsilon_0 - q_0 \varepsilon_0}{s(p_1 s + 1)} \quad (3.2)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$\frac{e^{-\frac{t}{p_1}} (p_1 q_0 \varepsilon_0 - q_1 \varepsilon_0)}{p_1} - q_0 \varepsilon_0 \quad (3.3)$$

Ο ορισμός της  $y(t)$ :

$$q_0 \left( e^{-\frac{t}{p_1}} - 1 \right) - \frac{q_1 e^{-\frac{t}{p_1}}}{p_1} \quad (3.4)$$

Ο Λαπλασιανός μετασχηματισμός της :

$$-\frac{q_0}{\frac{1}{p_1} + s} + \frac{q_1}{p_1 \left( \frac{1}{p_1} + s \right)} + \frac{q_0}{s} \quad (3.5)$$

Και τελικά ο ορισμός της συνάρτησης  $J(t)$  :

$$\frac{(p_1 q_0 - q_1) e^{-\frac{q_0 t}{q_1}}}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Σύγκριση τριπαραμετρικού μοντέλου και αποτελεσμάτων

Για να γίνει η επιβεβαίωση ή μη του τριπαραμετρικού μοντέλου στην επίδραση της υγρασίας στις μηχανικές ιδιότητες του ξύλου χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των *Hering and Niemz (2012)*.

Κατά το πείραμα χρησιμοποιήθηκε κυβοειδές δείγμα ευρωπαϊκής οξιάς χωρίς ρόζους, ρογμές και διάφορες ατέλειες με διαστάσεις 250 mm x 20 mm x 5 mm . Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν για 3 διαφορετικές περιεκτικότητες σε υγρασία. Μετά την επίτευξη της υγρασίας ισορροπίας ((8.1%), (15.5%), (23.2%)) για κάθε δείγμα, αυτό εισέρχεται στο θάλαμο κάμψης υπό σταθερή υγρασία περιβάλλοντος.

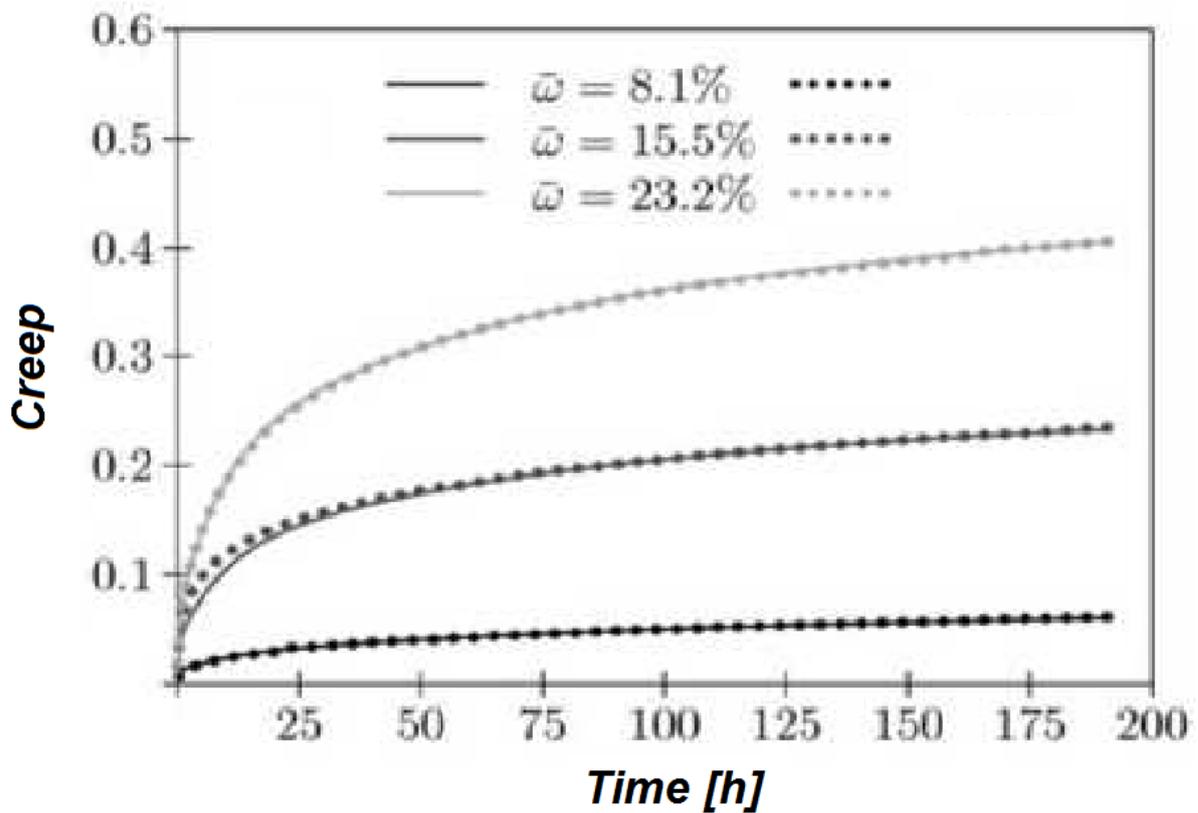


Figure 3.2: Ευρωπαϊκή οξιά

Τα αποτελέσματα του πειράματος για τις τρεις διαφορετικές περιεκτικότητες υγρασίας αποτυπώνονται στο επόμενο διαγράμμα.

Για υγρασία ισορροπίας (8.1) οι σταθερές μοντέλου είναι :

	Estimate	Standard Error		
$q_0$	16.1183	0.152789	$\eta$	1464.85
$p_1$	17.7013	1.07978	$E_1$	60.826
$q_1$	1076.69	33.8343	$E_2$	21.928

Για υγρασία ισορροπίας (15.5) οι σταθερές μοντέλου είναι :

	Estimate	Standard Error		
$q_0$	4.41272	0.0225493	$\eta$	288.968
$p_1$	14.3821	0.661567	$E_1$	13.550
$q_1$	194.88	5.16091	$E_2$	6.542

Για υγρασία ισορροπίας (23.2) οι σταθερές μοντέλου είναι :

	Estimate	Standard Error		
$q_0$	2.55983	0.0106414	$\eta$	127.22
$p_1$	9.28025	0.40526	$E_1$	10.302
$q_1$	95.613	2.06913	$E_2$	3.406

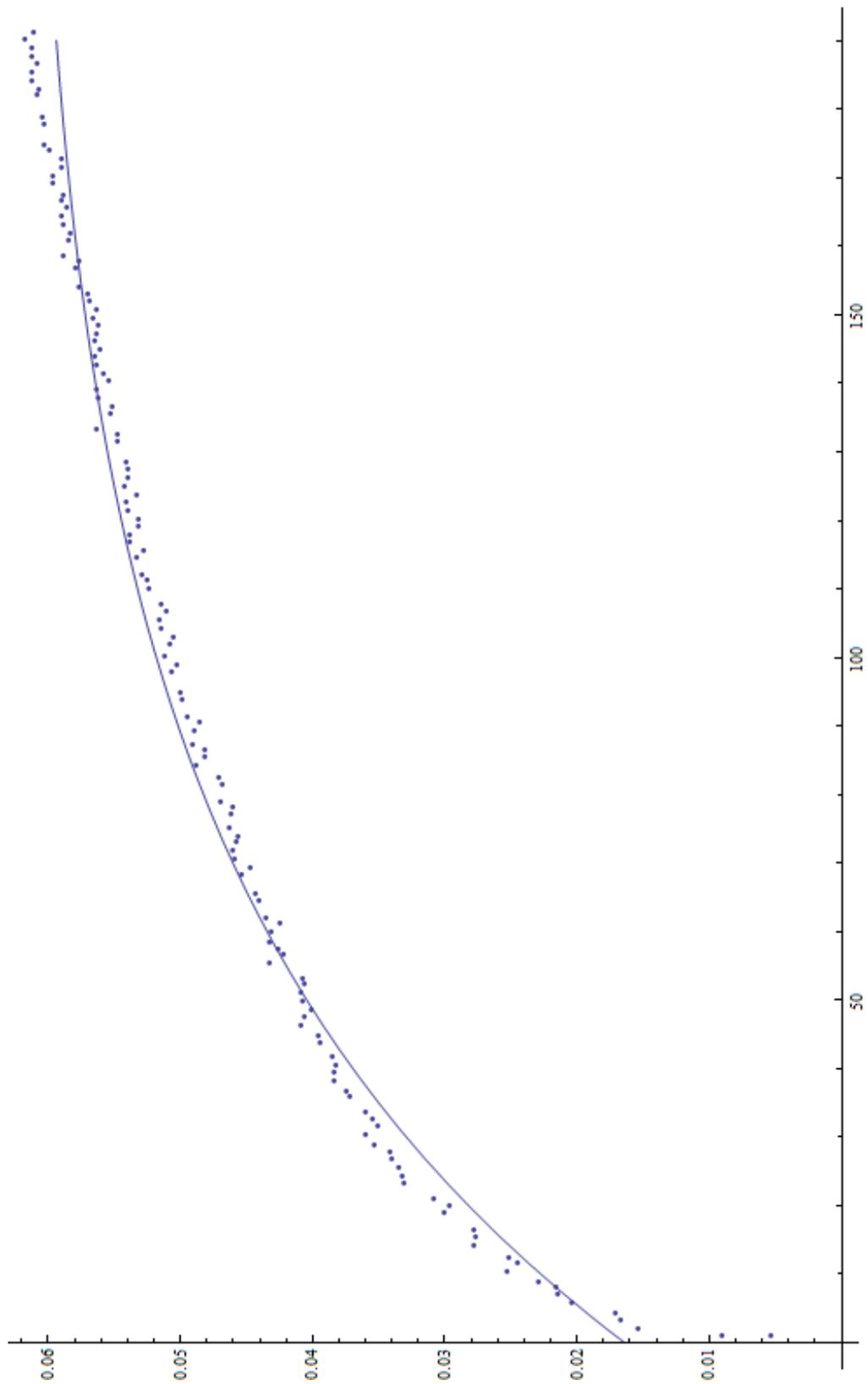


Figure 3.3: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 8,1%) / διάγραμμα τριπαραμετρικού μοντέλου

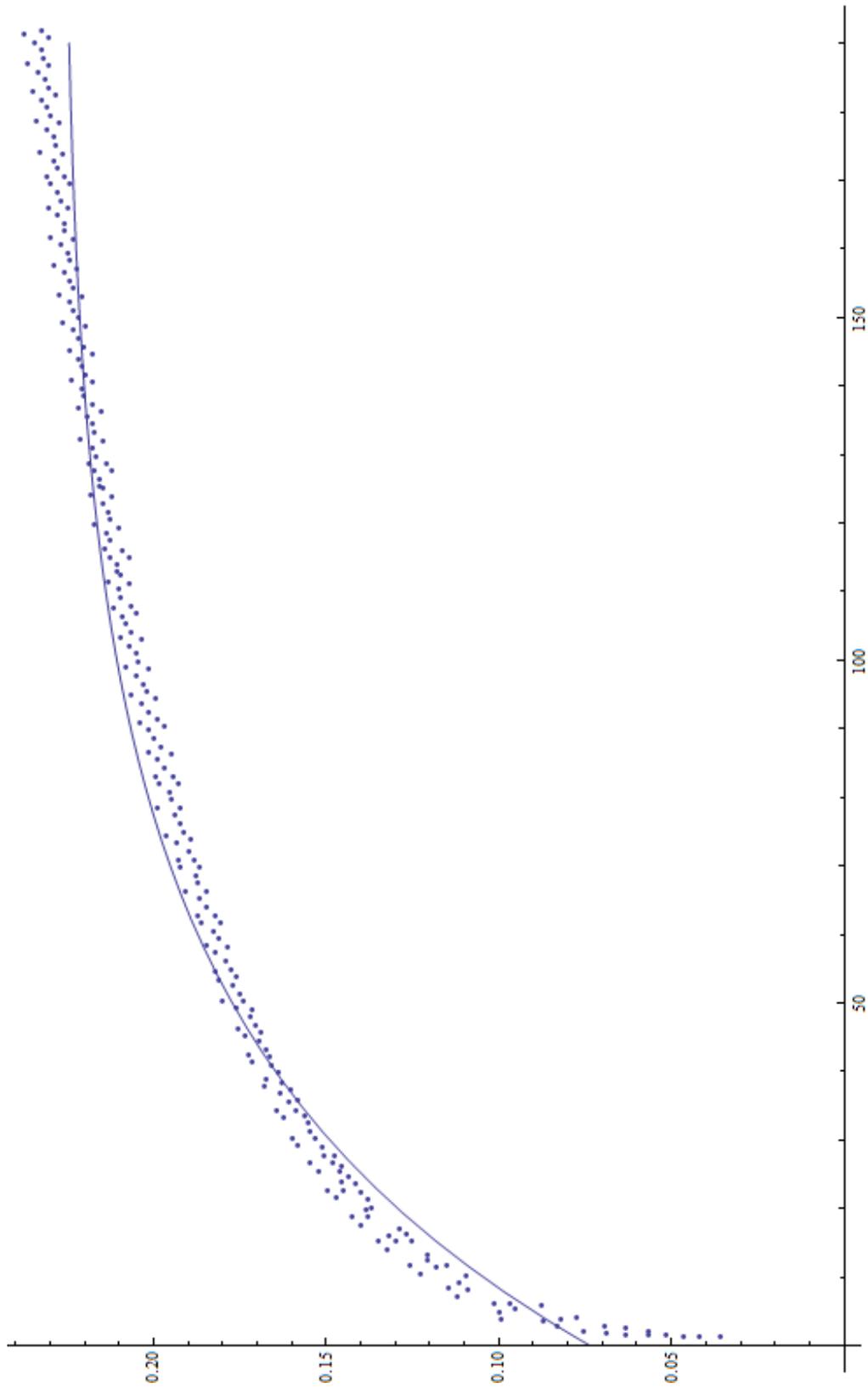


Figure 3.4: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 15.5%) / διάγραμμα τριπαραμετρικού μοντέλου

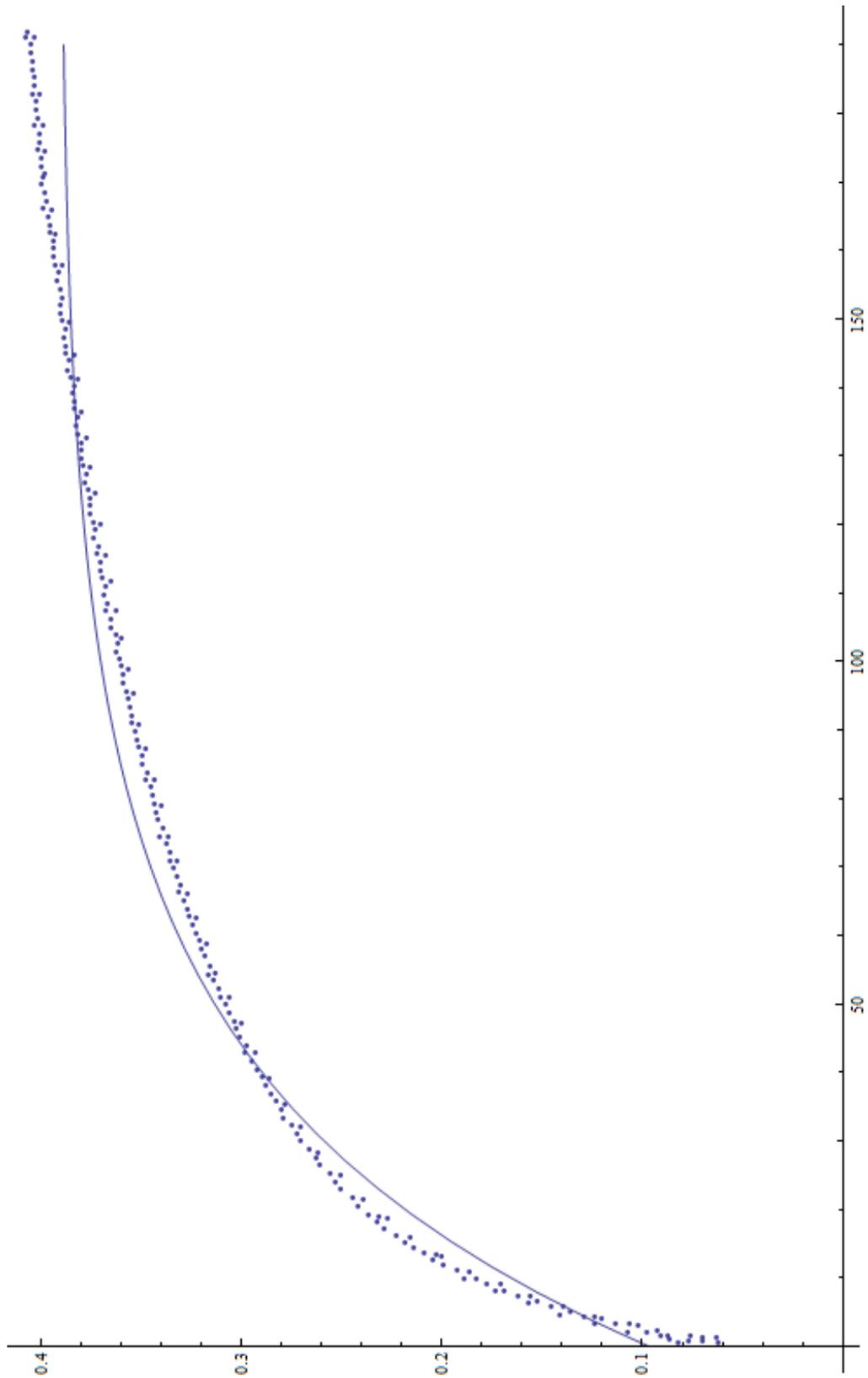


Figure 3.5: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 23.2%) / διάγραμμα τριπαραμετρικού μοντέλου

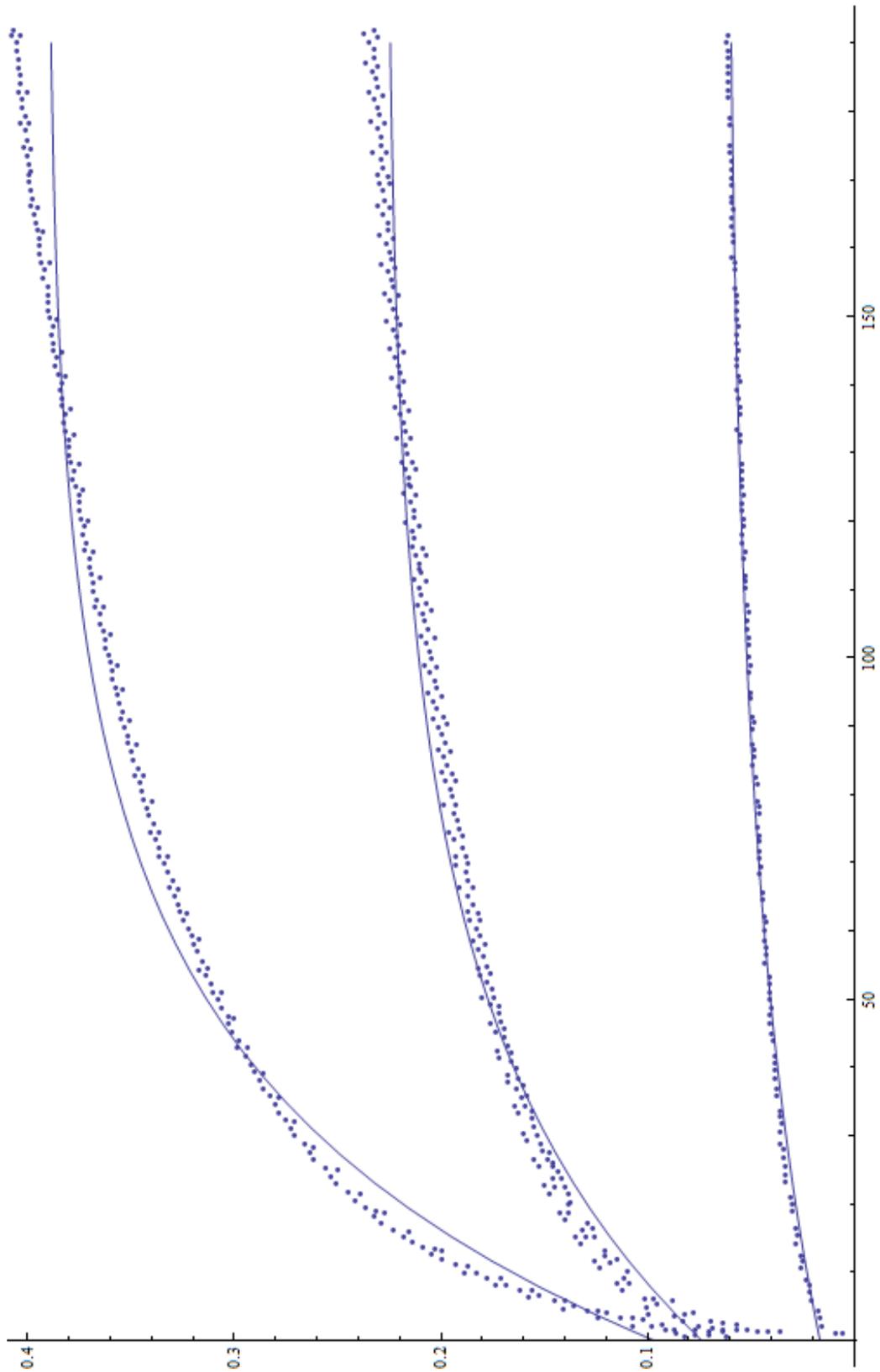


Figure 3.6: Συγκεντρωτικά διάγραμμα τριπαραμετρικού μοντέλου

### 3.1.3 Σύγκριση τετραπαραμετρικού μοντέλου και αποτελεσμάτων

Η δεύτερη προσπάθεια για την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται με τη χρήση ενός γενικευμένου τετραπαραμετρικού μοντέλου το οποίο αποτελείται από δύο στοιχεία Kelvin-Voight και είναι στα πρότυπα του μοντέλου που έχει περιγραφεί.

Η καταστατική εξίσωση του μοντέλου είναι η:

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon}$$

με σταθερές :  $p_1 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2}$ ,  $q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ ,  $q_1 = \frac{E_1 \eta_1 + E_2 \eta_2}{E_1 + E_2}$  και  $q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2}$

Στο διάγραμμα (3.8) φαίνεται το τετραπαραμετρικό μοντέλο.

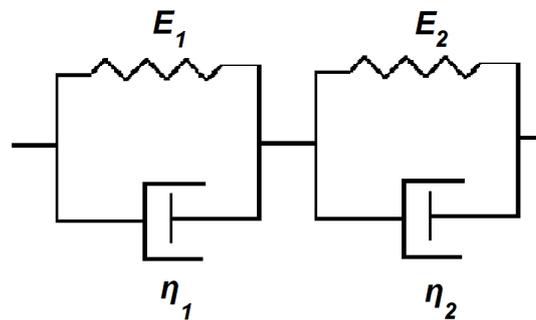


Figure 3.7: Τετραπαραμετρικό μοντέλο

Τα αποτελέσματα και η προσέγγιση αυτών φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.

Για υγρασία ισορροπίας (8,1%) οι σταθερές μοντέλου είναι :

	Estimate	Standard Error		
$q_0$	15.412	0.0186	$\eta_1$	230.277
$p_1$	24.28025	0.5126	$\eta_2$	1623.16
$q_1$	1240.145	32.06913	$E_1$	55.987
$q_2$	4840.28	69.98	$E_2$	21.2439

Για υγρασία ισορροπίας (15,5%) οι σταθερές μοντέλου είναι :

	Estimate	Standard Error		
$q_0$	4.25	0.0096	$\eta_1$	35.4983
$p_1$	24.28025	0.5126	$\eta_2$	384.786
$q_1$	240.545	6.06913	$E_1$	10.2599
$q_2$	780.48	19.98	$E_2$	7.2589

Για υγρασία ισορροπίας (23,2%) οι σταθερές μοντέλου είναι :

	Estimate	Standard Error		
$q_0$	2.45	0.0046	$\eta_1$	27.892
$p_1$	22.0008	0.5126	$\eta_2$	204.552
$q_1$	140	6.06913	$E_1$	6.7049
$q_2$	540	19.98	$E_2$	3.8607

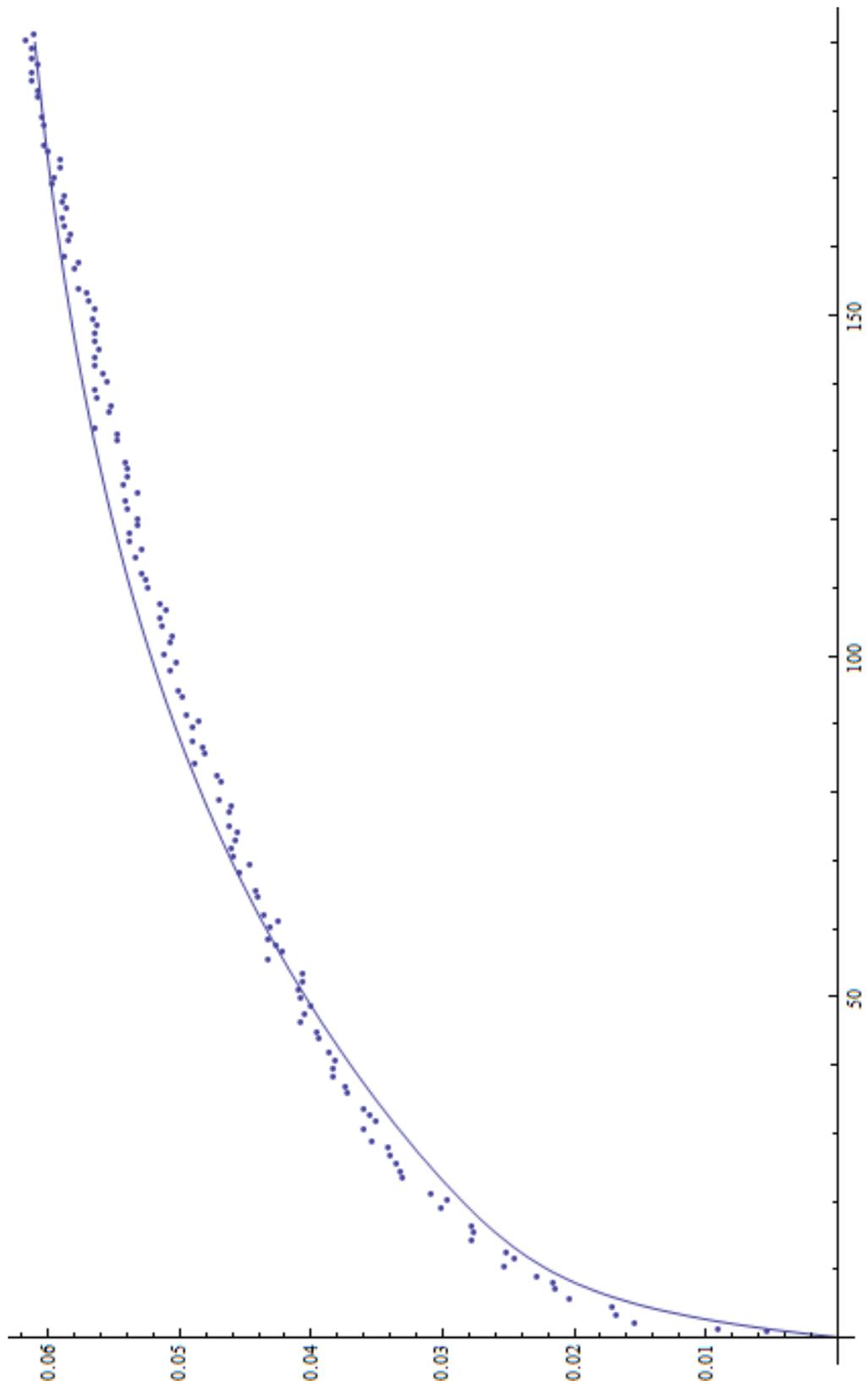


Figure 3.8: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 8.1%) / διάγραμμα τετραπαραμετρικού μοντέλου

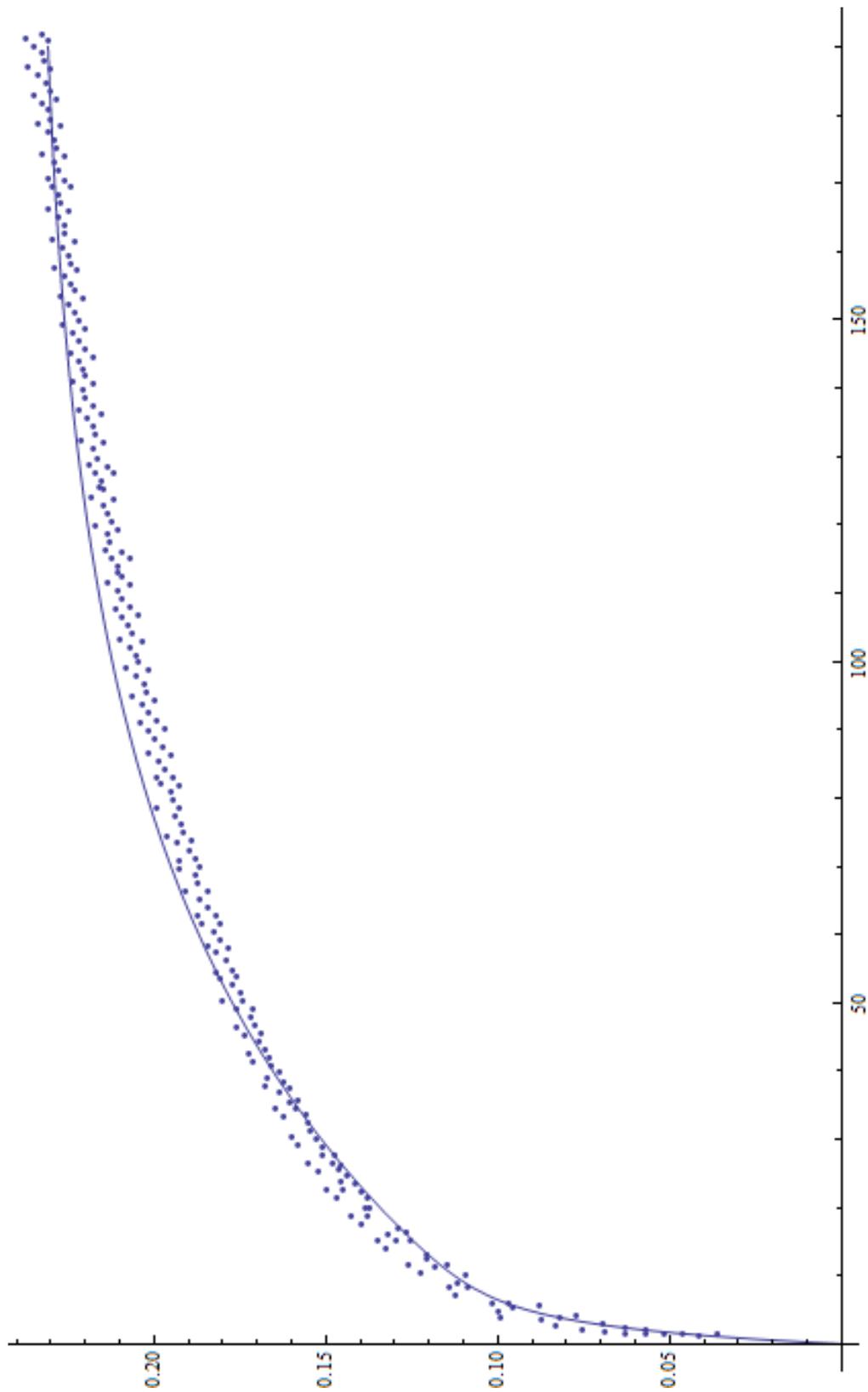


Figure 3.9: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 15.5%) / διάγραμμα τετραπαραμετρικού μοντέλου

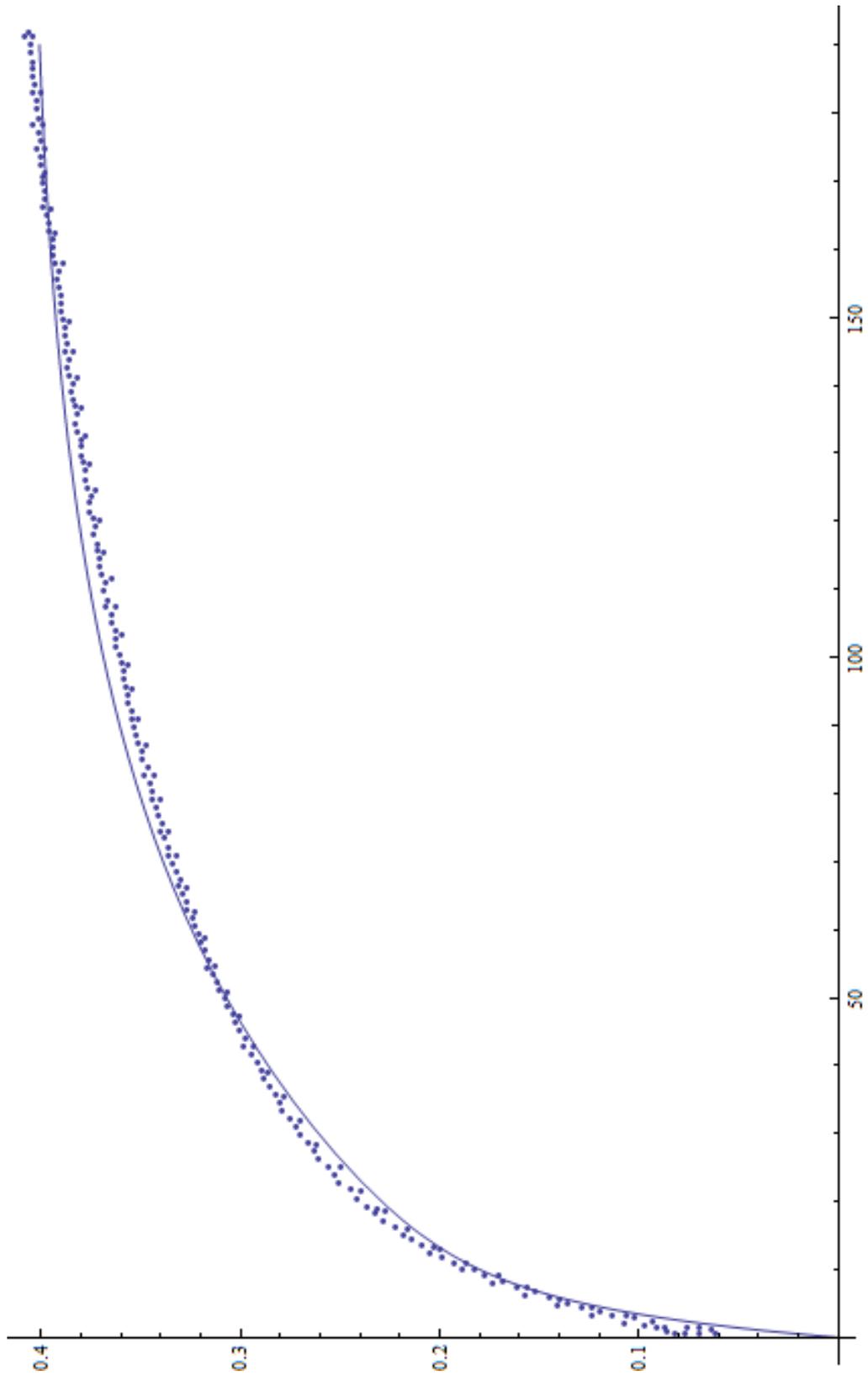


Figure 3.10: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 23,2%) / διάγραμμα τετραπαραμετρικού μοντέλου

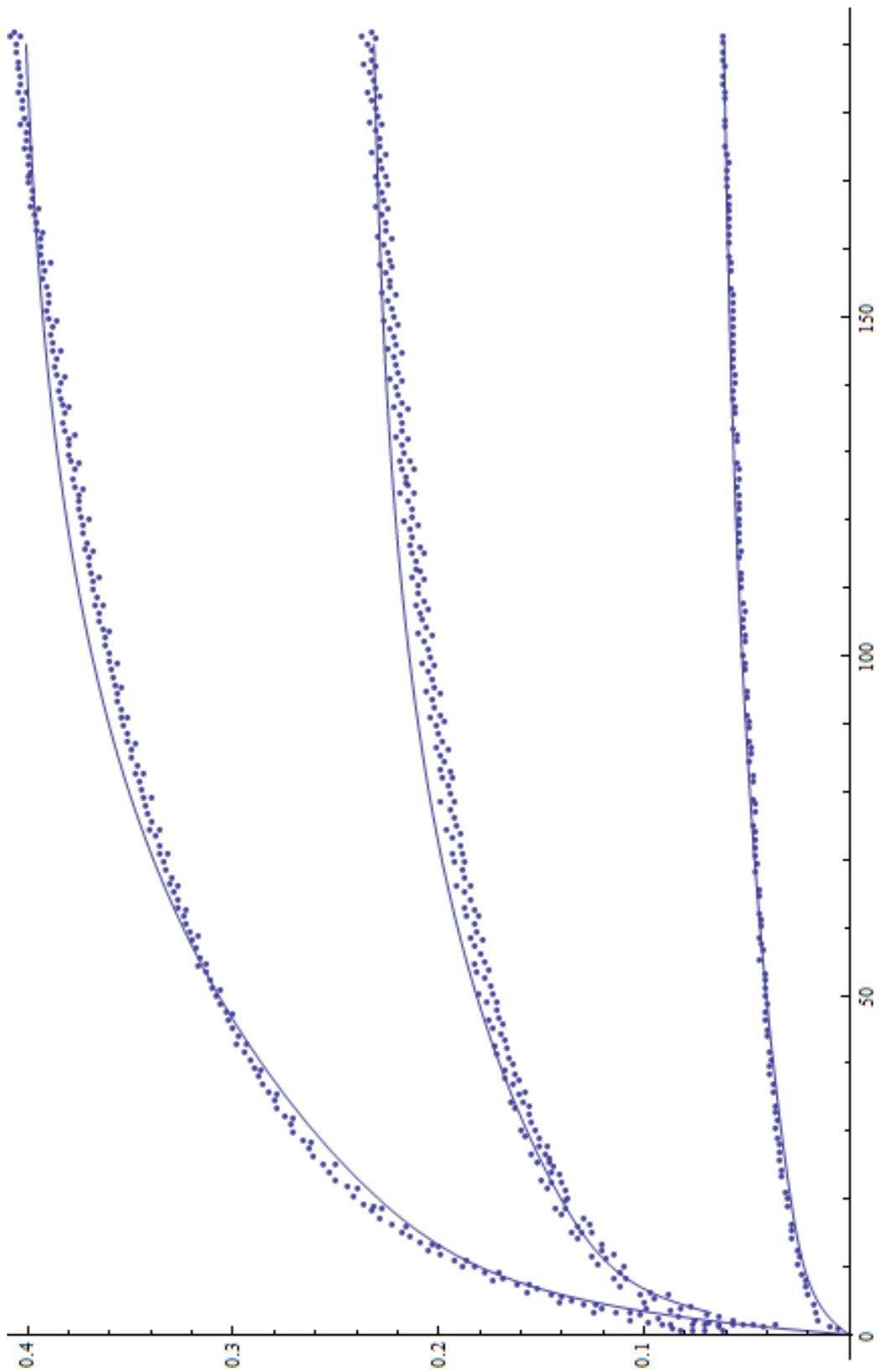


Figure 3.11: Συγκεντρωτικά διαγράμματα τετραπαραμετρικού μοντέλου

### 3.1.4 Σύγκριση μη-γραμμικού μοντέλου και αποτελεσμάτων

Η τρίτη προσπάθεια για την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται με τη χρήση του μη-γραμμικού μοντέλου που περιγράφηκε στην παράγραφο (2.6) του προηγούμενου κεφαλαίου.

Οι σταθερές του μοντέλου μετρήθηκαν για ασκούμενη σταθερή τάση  $\sigma = 46$  :

Για περιεκτικότητα υγρασίας 8,1% είναι :

$$E_1 = 212, E_2 = 2800, a = 10^{-7.05}, b = .236$$

Για περιεκτικότητα υγρασίας 15,5% είναι :

$$E_1 = 78, E_2 = 2040, a = 10^{-6.86}, b = .2925$$

Για περιεκτικότητα υγρασίας 23,2% είναι :

$$E_1 = 78, E_2 = 2040, a = 10^{-3.94}, b = .152$$

Όπου  $E_1, E_2$  οι σταθερές των ελατηρίων του μοντέλου.

Όπου  $a, b$  οι σταθερές του αποσβεστήρα του μοντέλου.

Τα αποτελέσματα και η προσέγγιση αυτών φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.

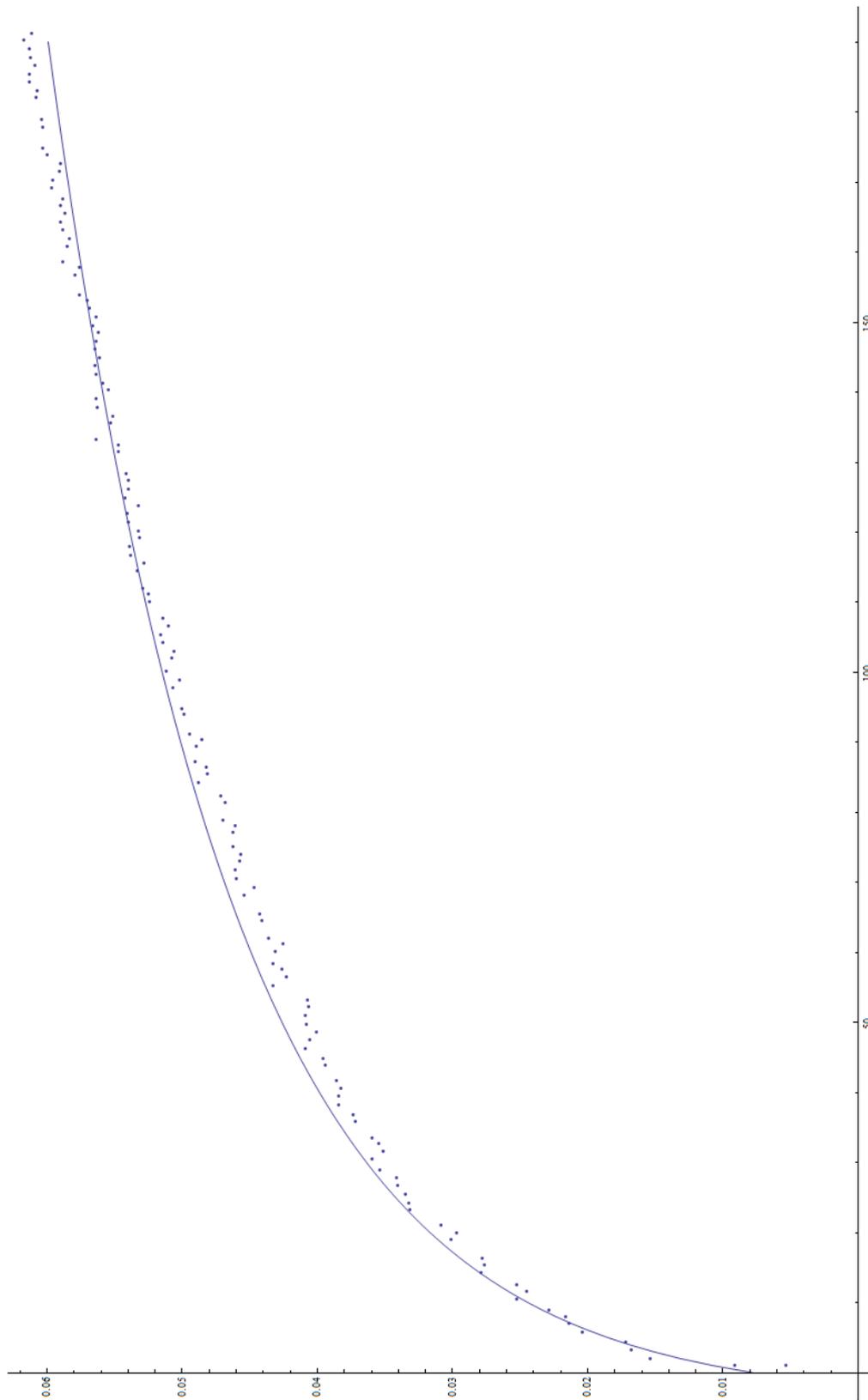


Figure 3.12: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 8.1%) / διάγραμμα μη-γραμμικού μοντέλου

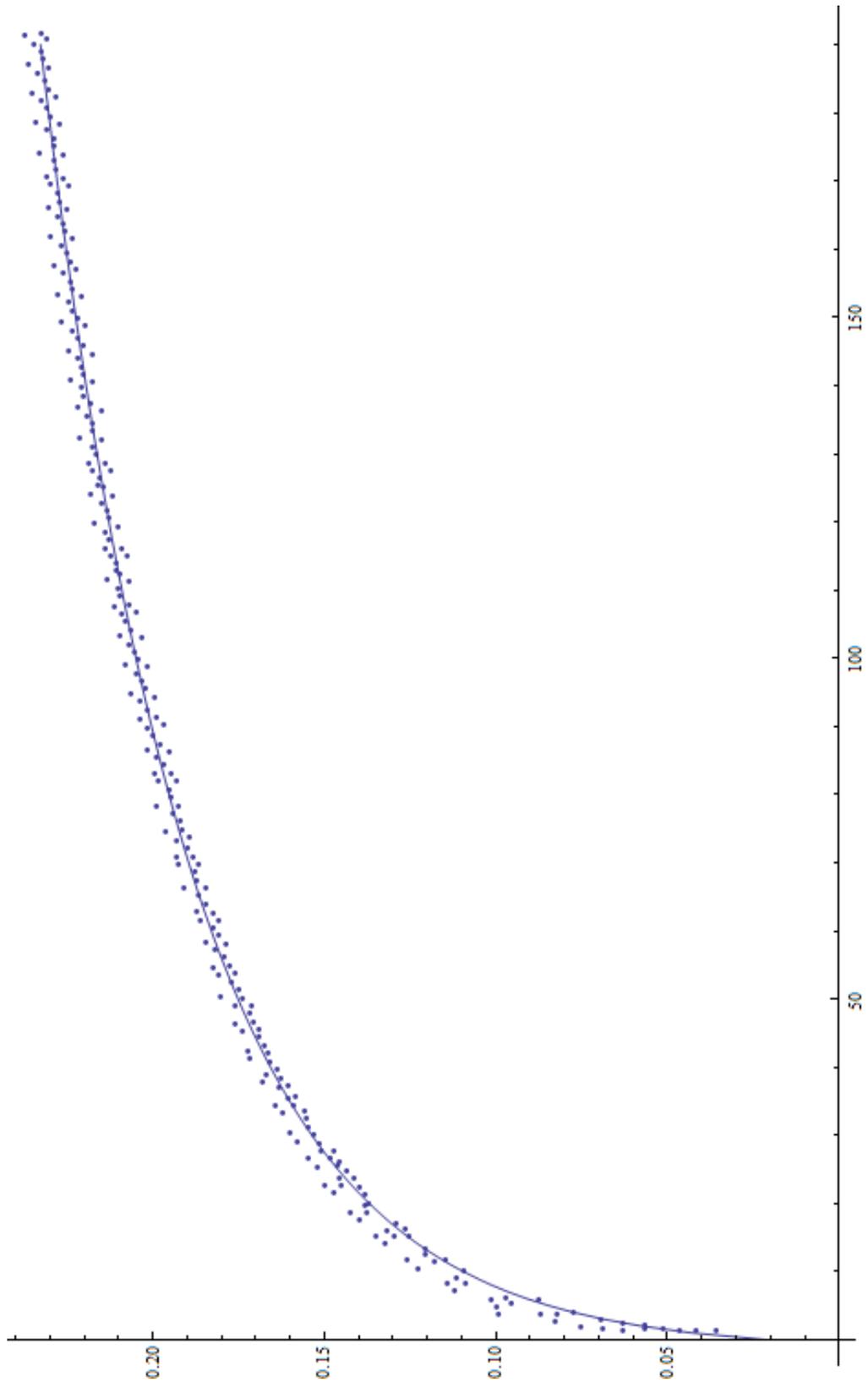


Figure 3.13: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 15.5%) / διάγραμμα μη-γραμμικού μοντέλου

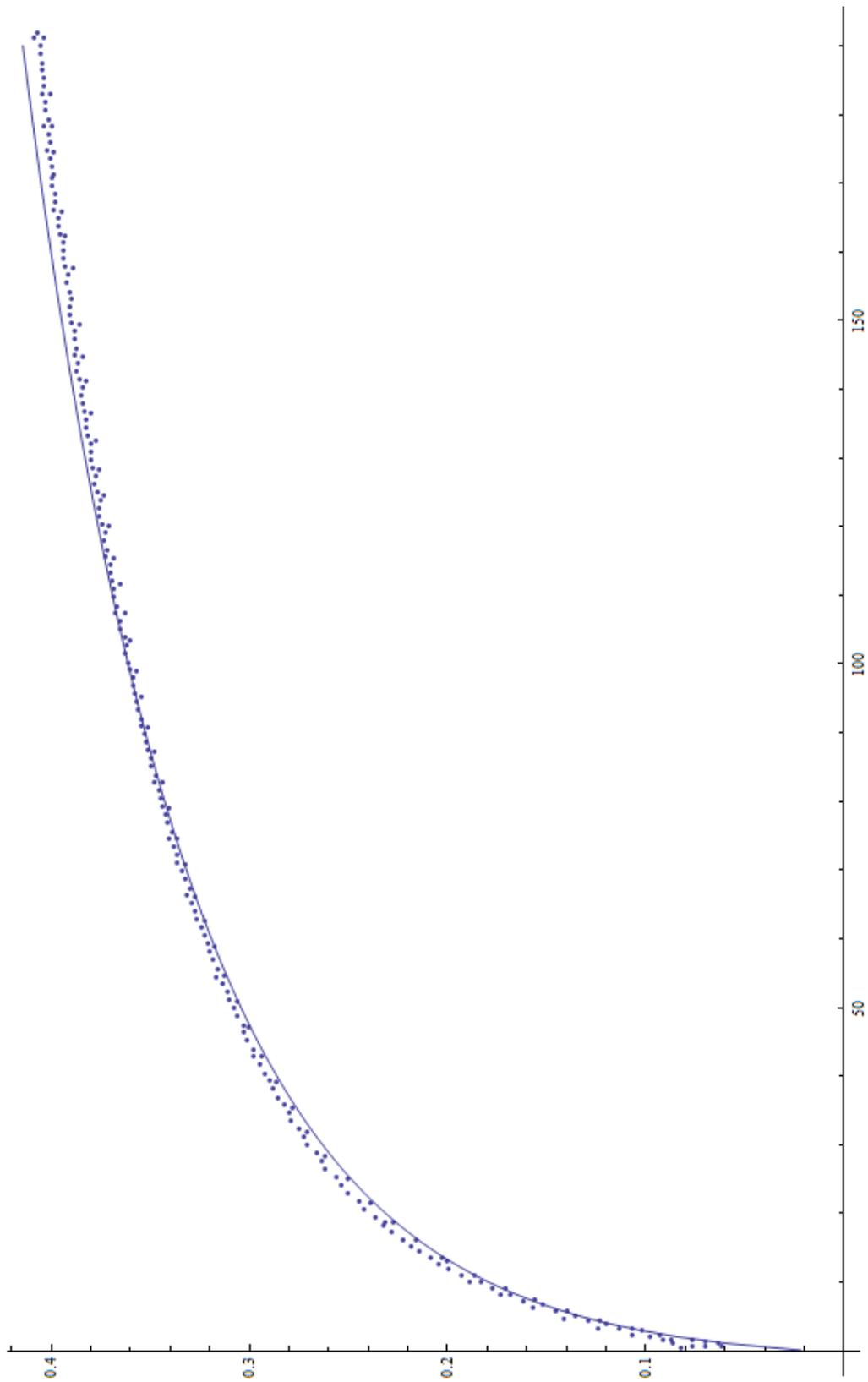


Figure 3.14: Ευρωπαϊκή οξιά (περιεκτικότητα υγρασίας 23,2%) / διάγραμμα μη-γραμμικού μοντέλου

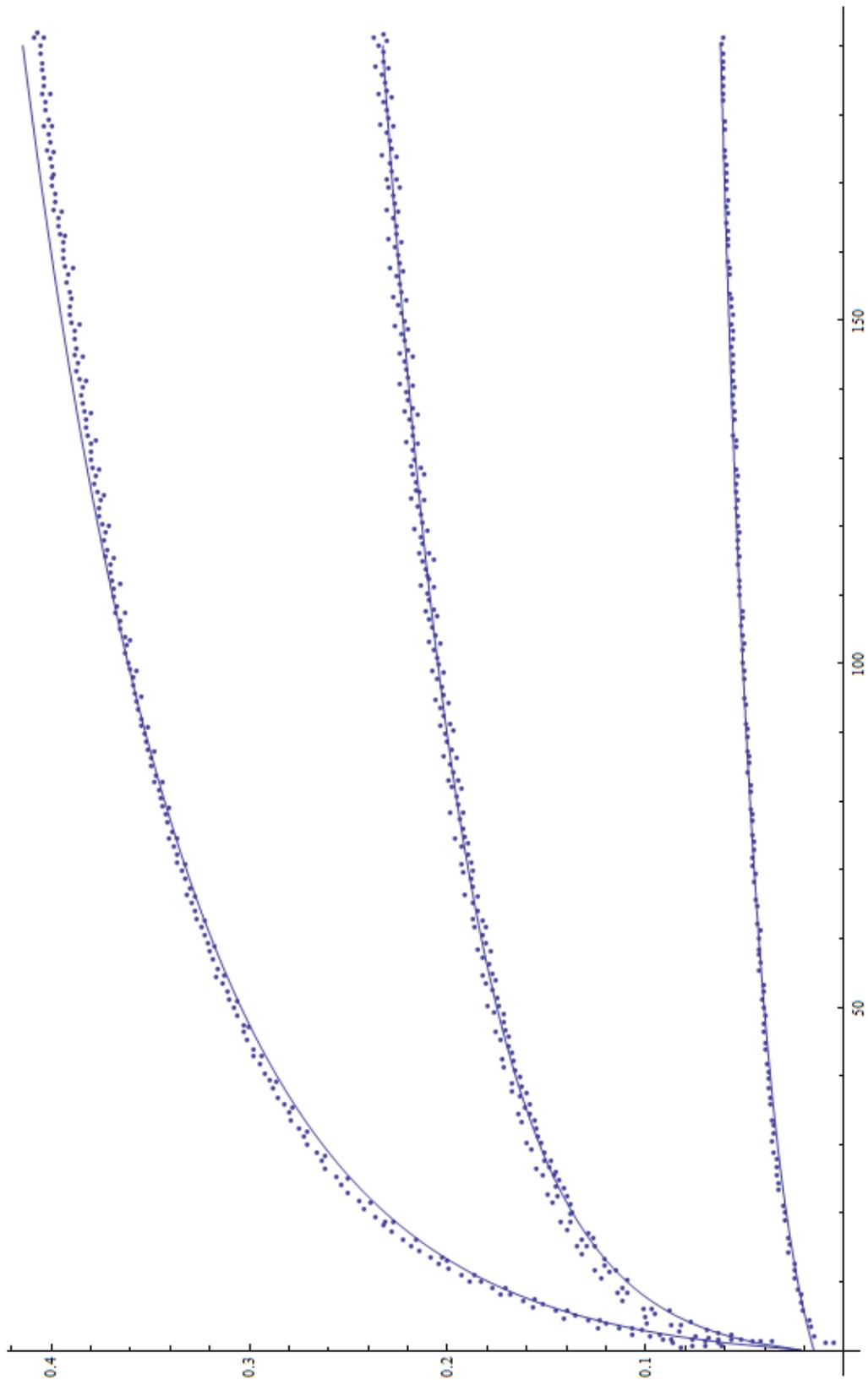


Figure 3.15: Συγκεντρωτικά διαγράμματα μη-γραμμικού μοντέλου

### 3.1.5 Επίλυση του μοντέλου Kelvin-Voight με εισαγωγή της επίδρασης της υγρασίας υπό θερμοδυναμικούς περιορισμούς

Απο τις δύο διαφορικές καταστατικές εξισώσεις, την (2.15) :

$$\dot{\varepsilon}_m + \left( \frac{b_m}{\alpha_m} \lambda_m^{ref} \right) \varepsilon_m = \frac{\sigma}{\alpha_m \eta_m^{ref}} \quad M\varepsilon : \quad \lambda_m^{ref} = \frac{E_m^{ref}}{\eta_m^{ref}}$$

και την (2.19) :

$$\ddot{\varepsilon}_m(t) + \left( \frac{b_m(t)}{\alpha_m(t)} \lambda_m^{ref} + \frac{\dot{\alpha}_m(t)}{\alpha_m(t)} \right) \dot{\varepsilon}_m(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\alpha_m(t) \eta_m^{ref}}$$

μία πρώτου βαθμού και μια δεύτερου βαθμού αντίστοιχα για την αποσκλήρυνση του υλικού και την σκλήρυνση ανάλογα της μεταβολής της υγρασίας υπό τους θερμοδυναμικούς περιορισμούς όπως προκύπτουν από την ανισότητα Clausius–Duhem (2.8), (2.9), (2.10) προκύπτουν ανάλογοι ερπυσμοί όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.

Στην πρώτη περίπτωση επιλύεται η διαφορική εξίσωση (2.15) όπως προκύπτει για την περίπτωση της αποσκλήρυνσης του υλικού με αύξηση της υγρασίας κατα το πέρας του χρόνου.

Οι σταθερές του μοντέλου για άσκηση σταθερής τάσης 25pa είναι οι :

$$E1 = 280, H = 42$$

$$a1 = 0.1, a2 = 69.0$$

$$b1 = 0.2, b2 = 0.001$$

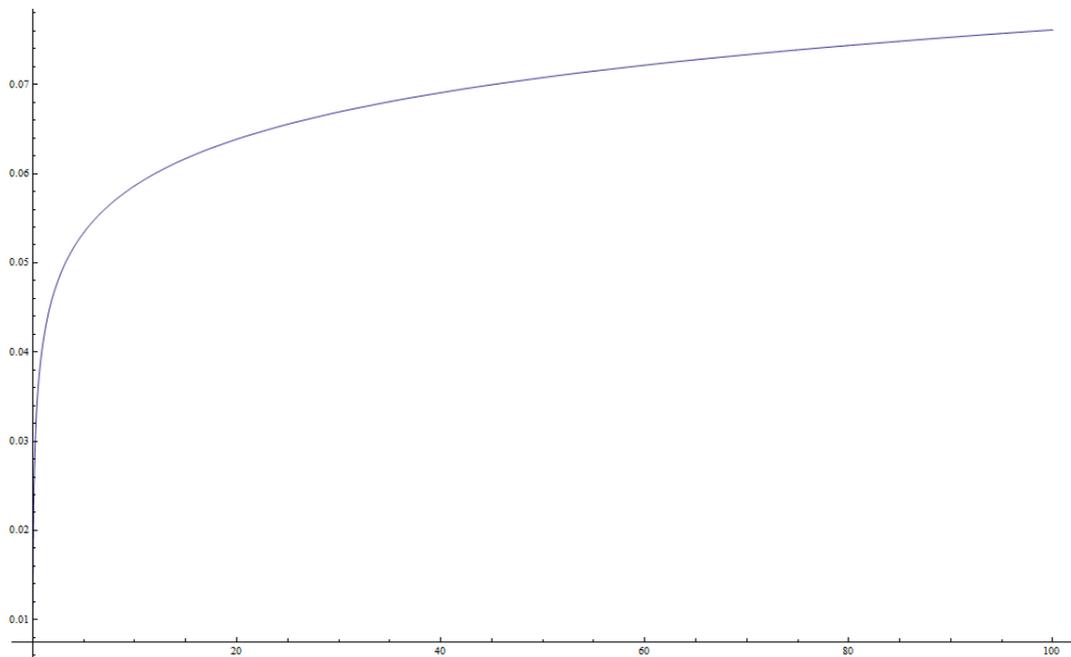


Figure 3.16: Ερπυσμός υπό αποσκλήρυνση

Στην δεύτερη περίπτωση της σκλήρυνσης του υλικού από την μείωση της περιεκτικότητας της υγρασίας προκύπτει μία δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση (2.19).

Επιλύοντας την διαφορική για σταθερή τάση χωρίς αλλαγές της περιεκτικότητας της υγρασίας κατά το πείραμα παίρνουμε τον ερπυσμό του παρακάτω διαγράμματος :

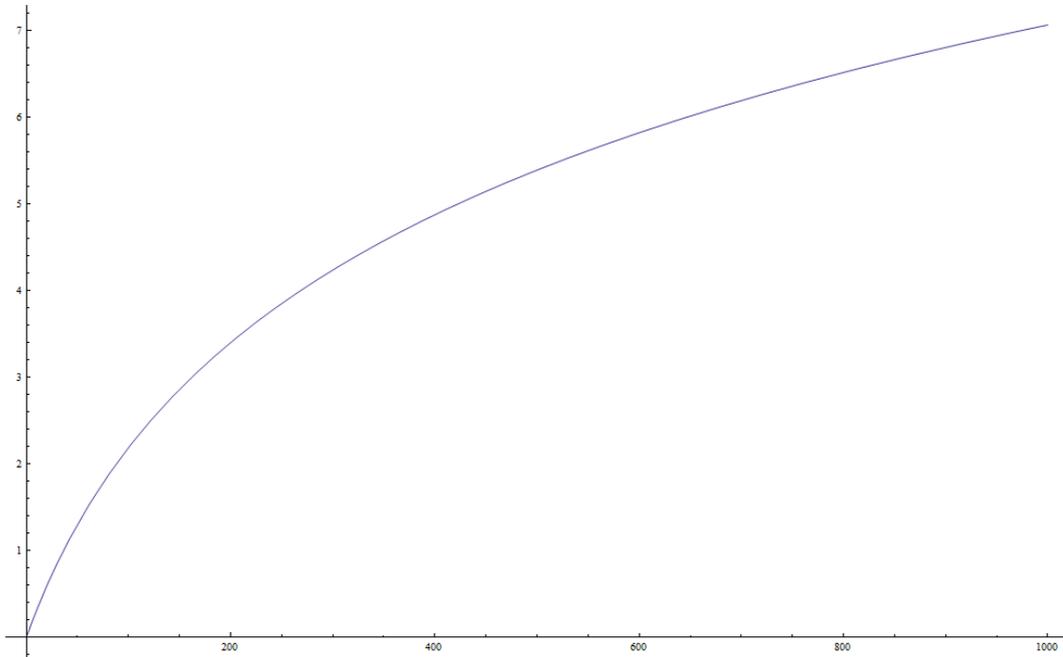


Figure 3.17: Ερπυσμός υπό σκλήρυνση

Οι σταθερές του προβλήματος είναι :

$$E1 = 280 , H = 42$$

$$a1 = 18 , a2 = 0$$

$$b1 = .0012 , b2 = 0$$

Οι σταθερές  $a2$  και  $b2$  παίρνουν την τιμή 0 καθότι η λύση είναι για όχι αλλαγή της περιεκτικότητας της υγρασίας κατά το πείραμα.

Στην δεύτερη περίπτωση το πρόβλημα επιλύεται για αλλαγή της περιεκτικότητας της υγρασίας κατά το πείραμα. Η μείωση της υγρασίας ξεκινά κατά την χρονική στιγμή  $t=100$  χωρίς να σταματά. Ο ερπυσμός που προκύπτει δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα:

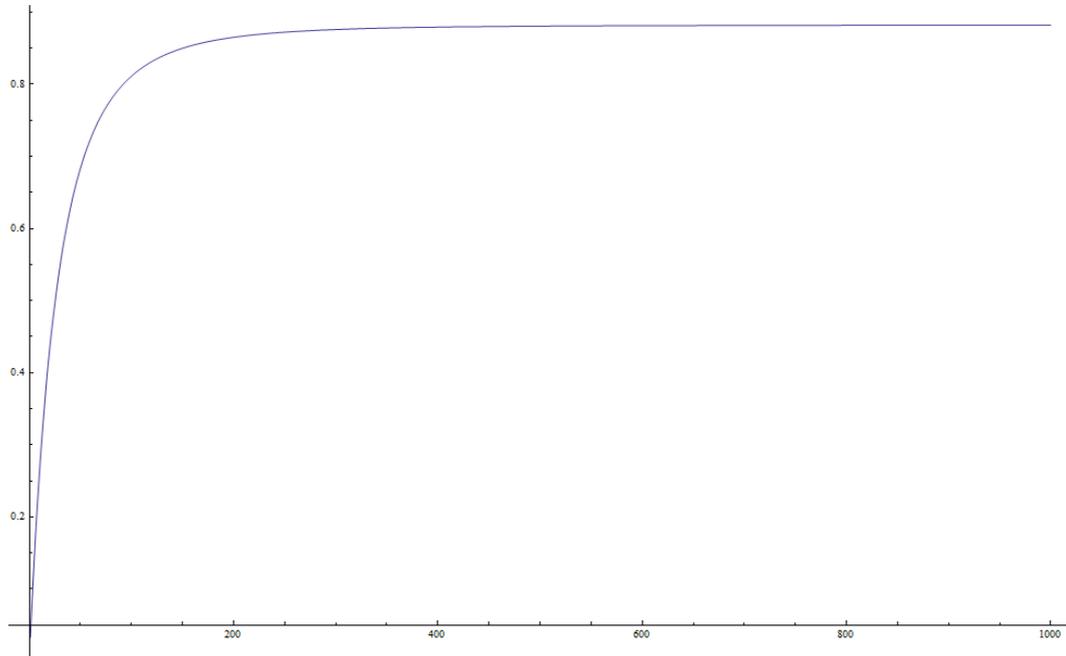


Figure 3.18: Ερπυσμός υπό σκλήρυνση κατά το πείραμα

με σταθερές του προβλήματος

$$E1 = 280, H = 42$$

$$a1 = 18, a2 = 0.2$$

$$b1 = .0012, b2 = .1$$

Η σύγκριση των δύο ερπυσμών δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα :

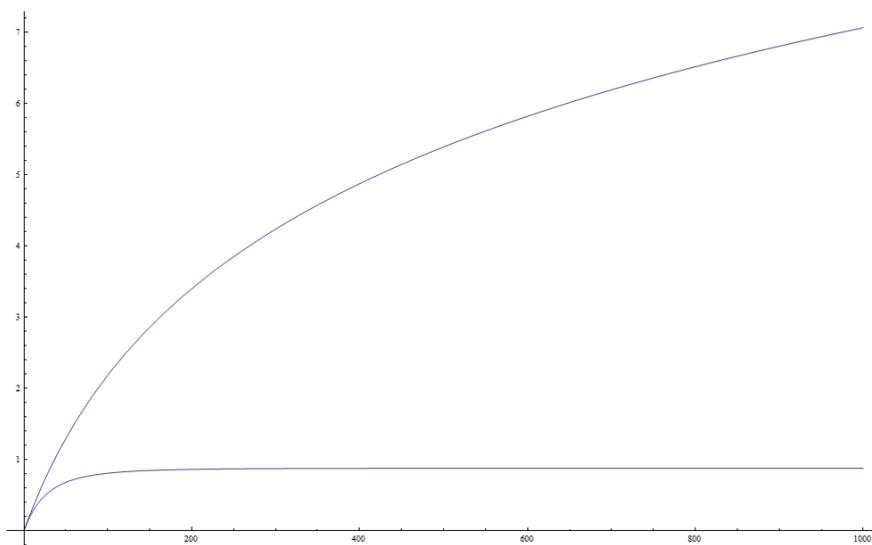


Figure 3.19:

Στις επόμενες 2 περιπτώσεις επιλύεται η ίδια διαφορική για την περίπτωση της αλλαγής της περιεκτικότητας της υγρασίας κατα την διάρκεια του πειράματος.

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται ο προηγούμενος ερπυσμός όπως κατα την διάρκεια του πειράματος την χρονική στιγμή  $t=100$  γίνεται μείωση της περιεκτικότητας της υγρασίας και άρα επέρχεται σκλήρυνση του υλικού κατα το πείραμα

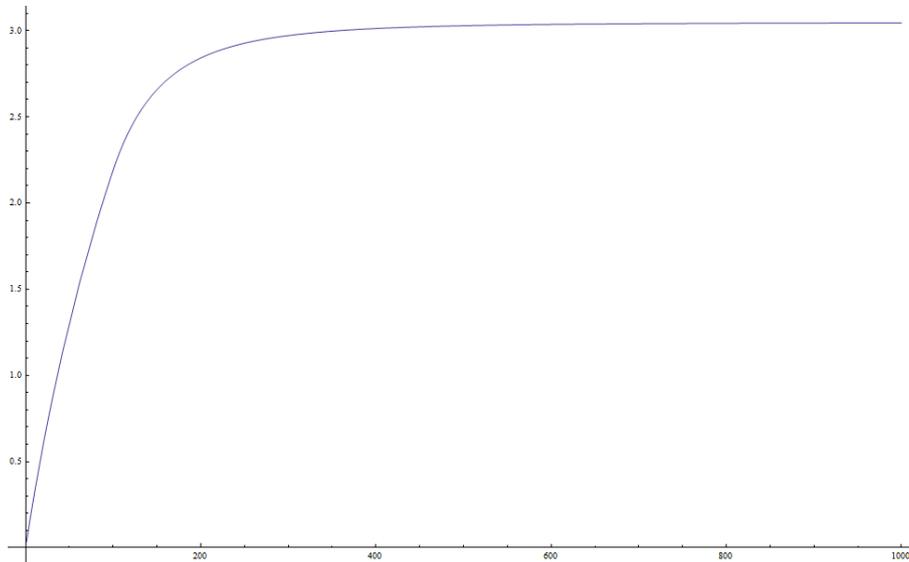


Figure 3.20: Μείωση της περιεκτικότητας της υγρασίας του υλικού κατα το πείραμα

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται ο ερπυσμός αν κατα την διάρκεια του πειράματος σε συνέχεια του προηγούμενου σταματήσει η μείωση της περιεκτικότητας κατα την χρονική στιγμή  $t=200$ .

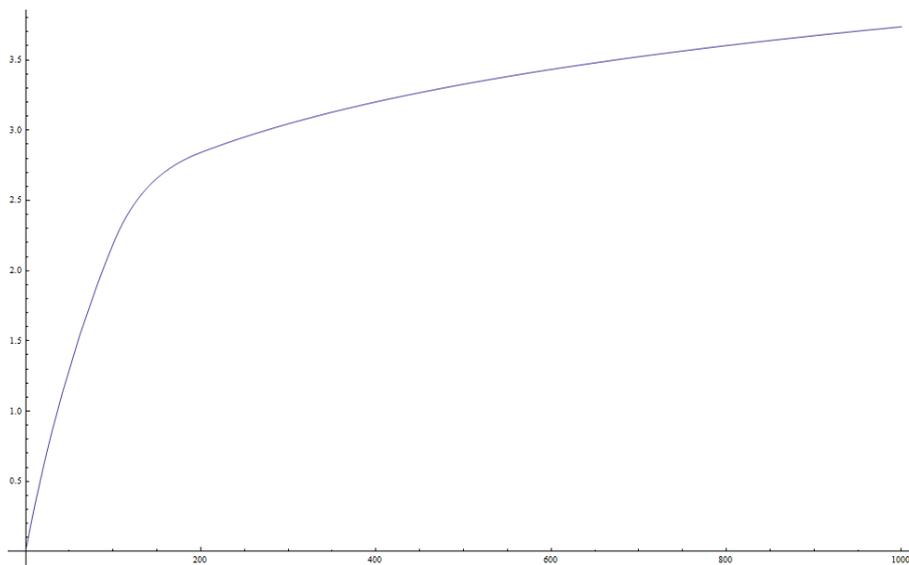


Figure 3.21: Σταμάτημα της μείωσης της περιεκτικότητας της υγρασίας του υλικού κατα το πείραμα

Στο επόμενο διάγραμμα γίνεται η σύγκριση του ερπυσμού στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις

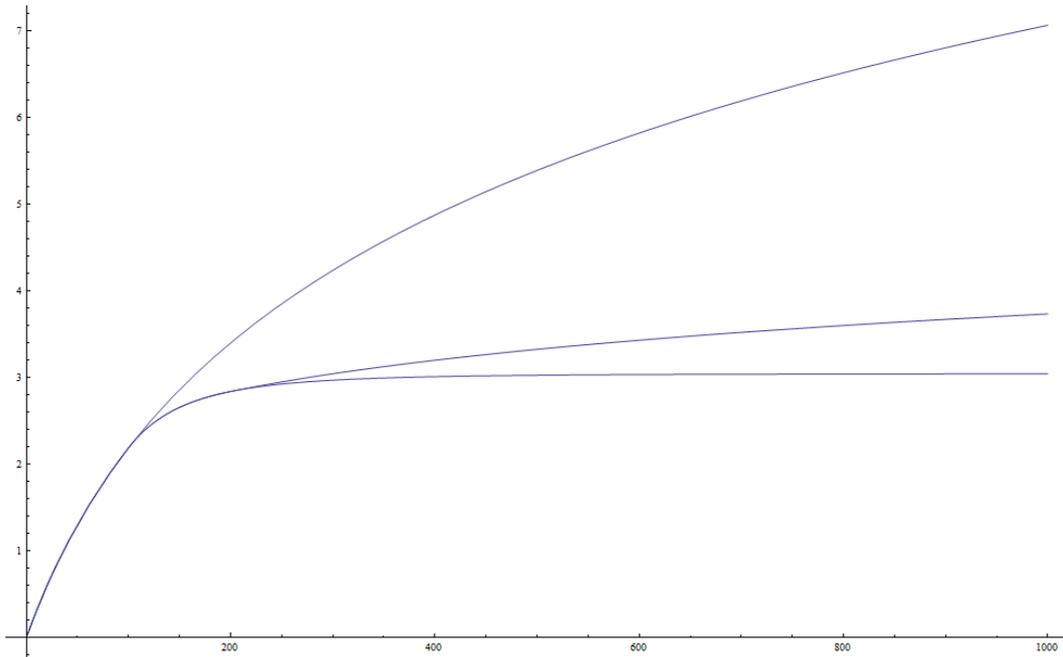


Figure 3.22: Σύγκριση τριών ερπυσμών

Η λύση έγινε με την χρήση του μαθηματικού λογισμικού MATHEMATICA και ο κώδικας που γράφηκε για αυτό βρίσκεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2.

## Chapter 4

# Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε την επίδραση της υγρασίας στην απόκριση του ξύλου σε σχέση με τις χρονικά μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες αυτού. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε την επίδραση της υγρασίας στην αλλαγή των ανηγμένων παραμορφώσεων (τροπών) υπό σταθερή τάση.

Το ξύλο έχει ιξωδοελαστική συμπεριφορά η οποία είναι εν γένει μη γραμμική. Το ξύλο είναι ένα ανισότροπο φυσικό υλικό. Η υγρασία επηρεάζει την πυκνότητα, τις μηχανικές ιδιότητες, την κατεργασία, την θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητα, την ανθεκτικότητα του ξύλου στις προσβολές από μύκητες, ενώ τέλος είναι και καθοριστικός παράγοντας για την ξήρανση του ξύλου, τον εμποτισμό αυτού, την παραγωγή επίπλων, ξύλινων κατοικιών και άλλων ξυλοκατασκευών.

Στην εργασία μελετήσαμε την ιξωδοελαστική συμπεριφορά στηριζόμενοι σε γραμμικά και μη-γραμμικά μοντέλα ξεκινώντας από την βιβλιογραφία, όπου η γραμμική συμπεριφορά περιγράφεται με στοιχεία Kelvin-Voight σε σειρά, ένα τριπαραμετρικό μοντέλο ενός στοιχείου Kelvin-Voight και ενός ελατηρίου σε σειρά, και τέλος ενός μη γραμμικού μοντέλου Zener.

Οι σταθερές του ιξωδοελαστικού γραμμικού ή μη γραμμικού μοντέλου είναι οι βασικοί παράμετροι οι οποίοι μεταβάλλονται με το ποσοστό υγρασίας που περιέχεται στο ξύλο. Στην βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα εξάρτησης αυτών από την υγρασία και εμφανίζονται δύο τύποι τέτοιου τύπου εξάρτησης. Στην μία περίπτωση η εξάρτηση από την υγρασία οδηγεί στο μαλάκωμα / αποσκλήρυνση του ξύλου και καταλήγει σε συγκεκριμένη καταστατική εξίσωση που για ικανοποίηση των θερμοδυναμικών περιορισμών απαιτείται η συνάρτηση της μεταβολής της υγρασίας να έχει αρνητική κλίση. Στην δεύτερη περίπτωση η συνάρτηση μεταβολής της υγρασίας με τον χρόνο έχει θετική κλίση κατα την σκλήρυνση.

Για να μελετηθεί η ιξωδοελαστική συμπεριφορά του ξύλου πείραμε από βιβλιογραφία πειραματικά δεδομένα *Hering and Niemz (2012)*. Κατά το πείραμα χρησιμοποιήθηκε κυβοειδές δείγμα ευρωπαϊκής οξιάς χωρίς ρόζους, ρογμές και διάφορες ατέλειες με διαστάσεις 250 mm x 20 mm x 5 mm . Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν για 3 διαφορετικές περιεκτικότητες σε υγρασία, μετά την επίτευξη της υγρασίας ισορροπίας ((8.1%), (15.5%), (23.2%)) για κάθε δείγμα, αυτό εισέρχεται στο θάλαμο κάμψης υπό σταθερή υγρασία περιβάλλοντος. Έπειτα επί αυτών λύθηκαν και υπολογίστικαν οι σταθερές για το τριπαραμετρικό, το kelvin-voight στοιχείο και για το μη-γραμμικό στοιχείο του Zener.

Την καλύτερη απόκριση μεταξύ των τριών μοντέλων και των πειραματικών δεδομένων φαίνεται να την έχει το μη-γραμμικό μοντέλο του Zener και την χειρότερη το τριπαραμετρικό μοντέλο. Το τετραπαραμετρικό που αποτελείται από δύο στοιχεία Kelvin-Voight σε σειρά δείχνει πως μπορεί να εξηγήσει την επίδραση της υγρασίας και επιβεβαιώνει την επιλογή του για την δημιουργία ενός γενικευμένου ρεολογικού μοντέλου από  $(m)$  στοιχεία Kelvin-Voight σε σειρά όπως και έχει επιλεγεί σε βιβλιογραφία.

Παρατηρώντας τις σταθερές που προκύπτουν από την επίλυση των δύο γραμμικών μοντέλων, του τριπαραμετρικού και του Kelvin-Voight, βλέπουμε πως οι θερμοδυναμικοί περιορισμοί επιβεβαιώνονται για την επίδραση της υγρασίας στις σταθερές των ελατηρίων και των αποσβεστήρων από τα οποία αποτελούνται τα μοντέλα. Κατα την σκλήρυνση (μείωση περιεκτικότητας σε υγρασία) οι σταθερές των μοντέλων αυξάνονται και αντίστοιχα μειώνονται κατά την αποσκλήρυνση (αύξηση περιεκτικότητας σε υγρασία). Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το μη-γραμμικό μοντέλο του Zener με το οποίο δίνεται η δυνατότητα να εκφραστεί η επίδραση της υγρασίας στο ξύλο μόνο μέσα από την αλλαγή της σταθεράς του ιξώδους του αποσβεστήρα του μοντέλου.

Στην συνέχεια επιλύοντας για υποθετικές σταθερές και μεταβολές της υγρασίας με τον χρόνο τις μη-γραμμικές εξισώσεις που προκύπτουν από το μοντέλο της βιβλιογραφίας, βλέπουμε την συμπεριφορά των υλικών που ακολουθούν το φαινόμενο της σκλήρυνσης και χαλάρωσης επιβεβαιώνοντας την εμπειρική γνώση γύρω από το ξύλο το οποίο όντως γίνεται πιο σκληρό κατά την αποβολή υγρασίας και αντίθετα πιο μαλακό κατά την αύξηση της περιεκτικότητας της υγρασίας.

# **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1**

# Appendix A

## Συναρτήσεις

### A.1 Η Συνάρτηση Βήματος

Η συνάρτηση βήματος με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$  ορίζεται ως εξής :

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ \frac{1}{2} & t = t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Σημαντική χρήση της συνάρτησης βήματος κατά τις ολοκληρώσεις διαφορών συναρτήσεων. Αν θεωρήσουμε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση του χρόνου  $f(t)$ , ισχύει:

$$\int_{-\infty}^t f(t')[u(t' - t_0)]dt' = [u(t' - t_0)] \int_0^t f(t')dt' \quad (\text{A.1})$$

Όταν  $f(t) = (t - t_0)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι:

$$\int_{-\infty}^t (t - t_0)^n [u(t' - t_0)]dt' = [u(t - t_0)] \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n + 1} \quad (\text{A.2})$$

Για  $n = 0$  το ολοκλήρωμα δίνει την επικλινή συνάρτηση :

$$[u(t - t_0)](t - t_0) \quad (\text{A.3})$$

Χρήση των συναρτήσεων βήματος και της επικλινούς μπορεί να γίνει και με ανεξάρτητη μεταβλητή τη χωρική συντεταγμένη  $x$ , δηλαδή η συνάρτηση παίρνει μορφή  $[u(x - x_0)]$ , εαν  $t_0$  ή  $x_0 = 0$  τότε οι αντίστοιχες εκφράσεις γίνονται  $[u(t)]$ ,  $[u(x)]$ . Σε κάθε χρήση των συναρτήσεων αυτές θεωρούνται αδιάστατα μεγέθη.

### A.2 Η Συνάρτηση Δέλτα

Κατά τον ορισμό της συνάρτησης βήματος υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  και της τιμής  $[u(t - t_0)]$ . Αντίθετα η αντιστοιχία αυτή δεν υπάρχει

στον ορισμό της δέλτα και ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιείται καταχρηστικά. Για να ορίσουμε τη δέλτα συνάρτηση εισάγουμε μια ολοκληρωτική σχέση που προκύπτει όταν αυτή δρα πάνω σε μία συνεχή συνάρτηση χρόνου  $f(t)$  :

$$\int_{-\infty}^t f(t')[\delta(t' - t_0)]dt' = f(t_0)[u(t - t_0)] \quad (\text{A.4})$$

και επειδή  $u(\infty) = 1$  έχουμε επίσης :

$$\int_{-\infty}^t f(t')[\delta(t' - t_0)]dt' = f(t_0) \quad (\text{A.5})$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση δέλτα περιγράφει μία ακαριαία επίδραση στην  $f(t)$  τη στιγμή  $t = t_0$ . Στην ειδική περίπτωση που  $f(t) = 1$ , η σχέση γίνεται :

$$\int_{-\infty}^t f(t')[\delta(t' - t_0)]dt' = [u(t - t_0)] \quad (\text{A.6})$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$[\delta(t - t_0)] = \frac{d}{dt}[u(t - t_0)] \quad (\text{A.7})$$

Η παράγωγος αυτή δεν είναι ορισμένη στη θέση  $t = t_0$ , λόγω της ασυνέχειας της συνάρτησης βήματος, έτσι η συνάρτηση δελτα λέμε ότι είναι μηδέν για κάθε  $t \neq t_0$  και αόριστη για  $t = t_0$ . Η συνάρτηση δέλτα για χωρική μεταβλητή  $x$ , ορίζεται με αντίστοιχο τρόπο και γράφεται  $\delta(x - x_0)$ . Κανείς παρατηρεί ότι η συνάρτηση πρέπει να έχει διαστάσεις αντίστροφου χρόνου  $[T^{-1}]$  και η  $\delta(x - x_0)$  αντίστροφου μήκους  $[L^{-1}]$

Για την κατανόηση της συνάρτησης δέλτα με το χρόνο ως μεταβλητή, μπορούμε να σκεφτούμε ότι αν αυτή πολλαπλασιαστεί με μέγεθος  $I_0$  που έχει διαστάσεις δύναμης, εκφράζει μία ξαφνική διέγερση  $p(t) = I_0[\delta(t - t_0)]$  η οποία επιβάλλεται τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  και της οποίας το ολοκλήρωμα οδηγεί στην σταθερή τιμή  $I_0$  για  $t \geq t_0$  δηλαδή :

$$\int_{-\infty}^t p(t')dt' = \int_{-\infty}^t I_0[\delta(t' - t_0)]dt' = I_0[u(t - t_0)] \quad (\text{A.8})$$

Με τον ίδιο τρόπο θεωρεί κανείς στην περίπτωση που μία συγκεντωμένη δύναμη  $P_0$  ασκείται κατα μήκος μίας δοκού στην θέση  $x = x_0$ , το μέγεθος  $P[\delta(x - x_0)]$  εκφράζει μία κατανεμημένη δύναμη  $q(x)$  της οποίας το ολοκλήρωμα θα οδηγεί στην τέμνουσα δύναμη που εμφανίζεται κατα μήκος της δοκού μετά την θέση  $x = x_0$

$$\int_{-\infty}^t q(x')dx' = \int_{-\infty}^t P_0[\delta(x' - x_0)]dx' = I_0[u(x - x_0)] \quad (\text{A.9})$$

Αν η  $V(x)$  εκφράζει την τέμνουσα δύναμη κατα μήκος μίας δοκού είναι γνωστό ότι :

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^x q(x') dx' = -V(x)$$

και από την εξίσωση ισοροπίας προκύπτει:

$$P_0[u(x - x_0)] = -V(x)$$

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2**

## Appendix B

# ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΤΟ MATHEMATICA

### B.1 Κώδικας επίλυσης διαφορικών με mathematica

#### B.1.1 Λύση για υλικό υπό άποσκλήρυνση

$E1 = 280; H = 42; dt = .01; a1 = 0.1; a2 = 69.0; b1 = 0.2; b2 = 0.001; strain = 0; str = 25;$

```
creepwood = Table[t = dt i,  
b = b1 - b2 t; a = a1 + a2 t;  
dstrain = str/(a H) - (b/a) (E1/H) strain; strain = strain + dstrain dt;  
strain, i, 1, 100000];
```

```
ListLinePlot[ Table[creepwood[[i, 1]], creepwood[[i, 2]], i, 1, 10000], PlotRange -> All]
```

#### B.1.2 Λύση για υλικό υπό σκλήρυνση

$stres[x_] = str HeavisideTheta[x];$

```
str = 25;  
a[x_] = a1 + a2x;  
b[x_] = b1 + b2x;  
E1 = 280; H = 42;  
a1 = 18; a2 = 0.2;  
b1 = .0042; b2 = .001;
```

```
woodsol = NDSolve[stran''[x] == (b[x]/a[x]) (E1/H) stran'[x] - (a'[x]/a[x]) stran'[x],  
stran[0] == 0, stran'[0] == str/(a1 H), stran, x, 1000]
```

```
Plot[Evaluate[stran[x] /. woodsol], x, 1, 1000, PlotStyle -> Automatic, PlotRange -> All]
```

### B.1.3 Λύση για υλικό υπό σκλήρυνση και αλλαγή της περιεκτικότητας σε υγρασία κατά το πείραμα

```
str = 25;
a1 = 18; a2 = 0.2;
b1 = .0012; b2 = .1;
a[x] = a1 + a2x;
b[x] = b1 + b2UnitStep[x - 100] - b2UnitStep[x - 200];
E1 = 280; H = 42;

woodsol = NDSolve[stran''[x] == - (b[x]/a[x]) (E1/H) stran'[x] - (a'[x]/a[x]) stran'[x],
stran[0] == 0 , stran'[0] == str/(a1 H), stran, x, 1000]

Plot[Evaluate[stran[x] /. woodsol], x, 1, 1000, PlotStyle -> Automatic, PlotRange -> All]
```

# Bibliography

- [1] Bernstein, B. , Kearsley, E. A., Zapas, L. J. (1964). *J. Res. Nat. Bur. Stds.* 68B:103
- [2] Doi, M., Edwards, S. F., (1986). *The Theory of Polymer Dynamics*, Oxford University Press, Oxford.
- [3] Dubois, F., Randriambololona, H. & Petit, C. (2005). *Creep in Wood Under Variable Climate Conditions: Numerical Modeling and Experimental Validation*. *Mechanics of Time-Dependent Materials* Volume 9, Issue 2-3 , pp 173-202.
- [4] Glass, S. V. & Zelinka, S. L. 2010. *Moisture relations and physical properties of wood. Wood handbook : wood as an engineering material: chapter 4*. General technical report FPL ; GTR-190. Madison, WI : U.S. Dept. of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 2010: p. 4.1-4.19.
- [5] Hering, S., & Niemz, P. (2012). *Moisture-dependent, viscoelastic creep of European beech wood in longitudinal direction*. *European Journal of Wood and Wood Products*, 70(5), 667-670.
- [6] Hunt, D. , (1984) . *Creep trajectories for beech during moisture changes under load*, *J. Mater. Sci.* 19,
- [7] Hunt, D. , (1988). *Longitudinal moisture-shrinkage coefficients of softwood at the mechanosorptive creep limit*, *Wood Sci. Technol.* 22, , 199–210.
- [8] Pittet, V., (1996) . *Etude expérimentale des couplages mécano-sorptifs dans le bois soumis a des variations hygrométriques contrôlées sous chargements de longue durée*, PhD Thesis, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne, Suisse, .
- [9] Simpson, W.T. (1973). *Predicting equilibrium moisture content of wood by mathematical models*. *Wood and Fiber*. 5(1): 41–49.
- [10] Wagner, M. H., (1976). *Rheol. Acta* 15:136.
- [11] Winandy, J.E. , Rowell, R.M. (2005). *Handbook of Wood Chemistry and Wood Composites*, CRC Press.
- [12] Γκούβρας, Γ. (2012). *Γραμμική και μη-γραμμική περιγραφή της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς PMMA σε ερπυσμό*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- [13] Κοντού, Ε. & Σπαθής, Γ. (2001). *Ανελαστική Συμπεριφορά των υλικών*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

[14] Σημειώσεις Ρεολογίας και Διεργασίες Επεξεργασίας Πολυμερών.  
Κεφάλαιο 5ο. Υποστηρικτικό υλικό σε ηλεκτρονική μορφή. Πηγή:  
<http://www.materials.uoc.gr/el/undergrad/courses/ETY454/> . ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ