ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λογισμός των Μεταβολών: Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΤΟΥΦΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Επιβλέπων: Τσινιάς Ιωάννης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Απρίλιος 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λογισμός των Μεταβολών: Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΤΟΥΦΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Επιβλέπων: Τσινιάς Ιωάννης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 4η Απριλίου 2014

…………………………	…………………………	…………………………
Τσινιάς Ιωάννης	Κοκκίνης Βασίλειος	Καραφύλλης Ιάσων
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Απρίλιος 2014

....
ΝΤΟΥΦΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε με σκοπό τη μελέτη ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ελαχιστοποίηση (μεγιστοποίηση) ενός συναρτησιακού. Αρχικά παρουσιάζονται βασικές έννοιες και θεωρήματα του Λογισμού των Μεταβολών ενώ παράλληλα δίνονται παραδείγματα εφαρμογής αυτών. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια του πεδίου ακρότατων και η διαδικασία που οδήγησε στην (ικανή) συνθήκη του Weierstrass. Η ενσωμάτωση ενός ακρότατου σε ένα πεδίο, μέσω των σημείων μηδενισμού της εξίσωσης Jacobi για το πρόβλημα, οδηγεί στη διατύπωση επιπλέον ικανών συνθηκών ελαχιστοποίησης.

Λέξεις Κλειδιά: πρώτη και δεύτερη μεταβολή, παράγωγος Gateaux/Frechet, ακρότατα, εξισώση Euler – Lagrange, πολλαπλασιαστές Lagrange, πεδίο ακρότατων, συνθήκη Weierstrass, εξίσωση Jacobi, συζυγή σημεία

ABSTRACT

The propose of this thesis is to study sufficient and necessary conditions for the existence of a minimum of a functional. Basic definitions and theorems of Calculus of Variations are presented and parallel examples are provided. The concept of a field of extremals it's defined and the corresponding approach that led to the Weierstrass condition. The embedability of an extremal in a field via the zeros of the Jacobi equations, implies more sufficient conditions for minimum.

Keywords: first and second variation, Gateaux/Frechet derivatives, extremals, Euler–Lagrange equation, Lagrange multipliers, field of extremals, Weierstrass condition, Jacobi equation, conjugated points

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Λογισμός των Μεταβολών και οι επεκτάσεις του είναι ένα ειδικό κεφάλαιο της θεωρίας συναρτησοειδών και στοχεύει στην εύρεση μιας βέλτιστης συνάρτησης που δίνει την καλύτερη τιμή για ένα μοντέλο, είτε φυσικό, είτε μηχανικό, είτε οτιδήποτε, υπό κάποιους περιορισμούς. Θεωρούμε συναρτησοειδή δοσμένα σ' ένα σύνολο συναρτήσεων και το πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση ακρότατων τιμών για τέτοια συναρτησοειδή. Ο ρόλος του Λογισμού των Μεταβολών καθίσταται ιδιαίτερα σημαντικός, λόγω αυτής του της σύνδεσής με πολλά προβλήματα της Φυσικής και της Μηχανικής.

Οι ποσοτικοί νόμοι της Μηχανικής και της Φυσικής γράφονται συχνά στη μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης και η ανάγκη εύρεσης μιας βέλτιστης συνάρτησης, παρά ενός βέλτιστου σημείου εμφανίζεται συχνά σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων. Πολλές εξισώσεις αυτού του τύπου, συναντώνται, επίσης ανάμεσα στις διαφορικές εξισώσεις του Λογισμού των Μεταβολών. Έτσι οι εξισώσεις των φυσικών προβλημάτων μπορούν να θεωρηθούν σαν ακρότατες συνθήκες για κατάλληλα συναρτησοειδή και οι νόμοι της Φυσικής μπορούν να διατυπωθούν στη μορφή της αναζήτησης μιας ακρότατης τιμής, για ορισμένες ποσότητες˙ και συνήθως στην εύρεση ενός ελαχίστου. Δόθηκε έτσι η δυνατότητα χρησιμοποίησης νέων μεθόδων επίλυσης των προβλημάτων και παράλληλα διάφοροι νόμοι διατυπώθηκαν με τη χρήση «ελαχιστικών αρχών». Κάτι που είχε σαν αποτέλεσμα την διατύπωση νέεων ιδεών σε διάφορους τομείς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

ΠΡΩΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ, ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ GATEAUX & FRECHET

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικοί ορισμοί, θεωρήματα και προτάσεις για τη μετέπειτα ανάλυση.

Έστω X,Y δύο χώροι με νόρμα και μια απεικόνιση

$$T : X \to Y \tag{1.1}$$

και έστω $x, h \in X$.

1.1 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ GATEAUX

Ορισμός 1.1.1: *Αν το όριο*

$$\delta T(x,h) := \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left[T(x+ah)-T(x)\right], \quad a\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

υπάρχει, καλείται παράγωγος Gateaux[1] της T στο x ως προς h. Αν το όριο υπάρχει για κάθε $h \in X$, τότε λέμε ότι η T είναι Gateaux παραγωγίσιμη στο x. Αν είναι Gateaux παραγωγίσιμη για κάθε x, τότε λέμε ότι η T είναι Gateaux παραγωγίσιμη.

1.1.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.1.1.1 Παράδειγμα 1

Στην περίπτωση που $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (μια πραγματική συνάρτηση) η παράγωγος Gateaux της *f* ταυτίζεται με την κατευθυνόμενη παράγωγο. Έχουμε δηλαδή για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$:

[1] René Eugène Gâteaux 1889-1914

$$\delta f(x,h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i = Df\big|_x h \tag{1.3}$$

1.1.1.2 Παράδειγμα 2

Έστω $X = \mathcal{C}^1[t_1, t_2]$, με $t_1 < t_2$ ο χώρος των απεικονίσεων $x : t \mapsto x(t)$ – με $t \in [t_1, t_2]$ και $x(t) \in \mathbb{R}$ – και συνεχή παράγωγο

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t)) \text{ ,}$$

$Y = \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια επαρκώς λεία απεικόνιση.

Θεωρούμε την απεικόνιση $T : X \to Y$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \tag{1.4}$$

Για το συναρτησιακό αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta T(x,h) &= \frac{d}{da} T(x + ah)\Big|_{a=0} = \frac{d}{da} \int_{t_1}^{t_2} f(t, x + ah, \dot{x} + a\dot{h}) dt \Big|_{a=0} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{h} \; dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} f_x(t, x + ah, \dot{x} + a\dot{h}) h(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f_{\dot{x}}(t, x + ah, \dot{x} + a\dot{h}) \dot{h}(t) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} f_x(t, x, \dot{x}) h(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \dot{h}(t) dt
\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.1.1.3 Παράδειγμα 3

Έστω D ένα ανοικτό, συνεκτικό και απλώς συνεκτικό φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}$ και $\mathcal{C}^1(\overline{D})$ ο γραμμικός χώρος των απεικονίσεων $x = x(s,t) : \overline{D} \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους x_s, x_t. Έστω επίσης μια επαρκώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό $T : X \to Y$ με $X = \mathcal{C}^1(D)$ και $Y = \mathbb{R}$:

$$T(x) = \iint_D f(s, t, x(s,t), \dot{x}(s,t)) ds dt \tag{1.6}$$

και προσδιορίζουμε την παράγωγο Gateaux του *T*. Οπότε για κάθε $h \in \mathcal{C}^1(D)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta T(x,h) &= \frac{d}{da}\iint_D f(s,t,x+ah,x_s+ah_s,x_t+ah_t)dsdt\Big|_{a=0} \\ &= \iint_D (f_x h + f_{x_s}h_s + f_{x_t}h_t)dsdt\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ FRÉCHET

Έστω τώρα ότι για κάθε $x,h \in X$ υπάρχει το διάνυσμα $\delta T(x,h) \in Y$ το οποίο είναι γραμμικό και συνεχές ως προς *h*.

Ορισμός 1.2.1: *Η απεικόνιση $T: X \to Y$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη και το αντίστοιχο διάνυσμα $\delta T(x,h)$ καλείται παράγωγος Fréchet της T στο x ως προς h αν*

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|T(x+h)-T(x)-\delta T(x,h)\|}{\|h\|}=0 \tag{1.8}$$

Ο συμβολισμός των δύο παραγώγων, είτε κατά Gateaux είτε κατά Fréchet, στα επόμενα, είναι ίδιος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για τα συναρτησιακά των προηγούμενων παραδειγμάτων, με τα οποία κυρίως θα ασχοληθούμε, οι παράγωγοί τους ως προς Gateaux και Fréchet ταυτίζονται, αλλά και λόγω της Πρότασης 1.2.1 που ακολουθεί. Συνήθως όταν η παράγωγος $\delta T(x,h)$ υπάρχει είτε κατά Gateaux είτε κατά Fréchet καλείται *πρώτη μεταβολή*.

Πρόταση 1.2.1: *Αν η Fréchet παράγωγος της απεικόνισης T υπάρχει στο x, τότε η Gateaux παράγωγος στο x υπάρχει κι αυτή και οι τιμές τους είναι ίδιες.*

Απόδειξη: Από τον Ορισμό 1.2.1 έχουμε ότι για κάθε $h = a\omega$ με $a \in \mathbb{R}$ και $\omega \in X$ με $\|\omega\| = 1$

$$\lim_{\|a\omega\|\to 0}\frac{\|T(x+a\omega)-T(x)-\delta T(x,a\omega)\|}{\|a\omega\|}=\lim_{a\to 0}\frac{1}{|a|}\|T(x+a\omega)-T(x)-\delta T(x,a\omega)\|=0$$

όπου χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η απεικόνιση $\omega \to \delta T(x,\omega)$ είναι γραμμική και συνεπώς $\delta T(x,a\omega) = a\delta T(x,\omega)$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}(T(x+a\omega)-T(x))-\delta T(x,\omega)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}(T(x+a\omega)-T(x))=\delta T(x,\omega)$$

δηλαδή, η παράγωγος Gateaux της *T* υπάρχει και συμπίπτει με την παράγωγο Fréchet.

■

Όπως στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο:

Πρόταση 1.2.2: (i) Αν η $T: X \to Y$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη, τότε η Fréchet παράγωγος είναι μονοσήμαντα ορισμένη

(ii) Αν η $T: X \to Y$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη (στο *x*), τότε η *T* είναι συνεχής απεικόνιση (στο *x*).

Δείχνεται ότι ισχύει ο κανόνας παραγώγισης σύνθετων απεικονίσεων και για την παράγωγο Fréchet.

Έστω $A: X \to Y$ και $B: Y \to Z$ δύο Fréchet παραγωγίσιμες απεικονίσεις και έστω $C = B \circ A$ η σύνθεσή τους

$$C: X \to Z$$
$$x \to z = C(x) := B(A(x))$$

Θα δείξουμε ότι η *C* είναι επίσης Frechet παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγος δίνεται από τη σχέση

$$\delta C(x,h) = \delta B(A(x), \delta A(x,h)) \tag{1.9}$$

Έχουμε

$$C(x+h)-C(x) = B\big(A(x+h)\big) - B\big(A(x)\big) = B(y+\omega) - B(y)$$

όπου $y := A(x)$ και $\omega = A(x+h) - A(x)$.

Παρατηρούμε ότι $\|\omega - \delta A(x,h)\| = o\big(\|h\|\big)$, όπου $\dfrac{o\big(\|h\|\big)}{\|h\|} \to 0$ καθώς $\|h\| \to 0$.

Επιπλέον $\|B(y+\omega) - B(y) - \delta B(y,\omega)\| = o\big(\|\omega\|\big)$.

Επομένως, έχουμε λόγω γραμμικότητας

$$\frac{1}{\|h\|}\left\|C(x+h)-C(x)-\delta B(A(x),\delta A(x,h))\right\| = \frac{1}{\|h\|}\left\| \begin{array}{r} \left(\delta B(A(x),\delta A(x,h))+o\left(\|h\|\right)\right) \\ -\delta B(A(x),\delta A(x,h)) \end{array} \right\|$$

$$= \frac{o\left(\|h\|\right)}{\|h\|} + \frac{o\left(\|\omega\|\right)}{\|h\|}$$

$$= \frac{o\left(\|h\|\right)}{\|h\|} + \frac{o\left(\|\omega\|\right)}{\|\omega\|}\frac{\|\omega\|}{\|h\|} \to 0$$

καθώς $\|h\| \to 0$, όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η $\omega = \omega(h)$ είναι συνεχής με $\omega(0) = 0$ και ότι:

$$\sup_{h\neq 0}\frac{\|\omega\|}{\|h\|} \le \sup_{h\neq 0}\frac{\|\omega-\delta A(x,h)\|}{\|h\|} + \sup_{h\neq 0}\left\|\delta A(x,\frac{h}{\|h\|}\right\| < \infty$$

για κάθε *h* σε μια γειτονιά του $0 \in X$.

1.2.1 Παραδειγμα 4

Δείχνουμε ότι η παράγωγος Fréchet της απεικόνισης (1.4) υπάρχει για κάθε $x \in \mathcal{C}^1(t_1,t_2)$ και συνεπώς βάσει της Πρότασης 1.2.1, θα υπάρχει και η παράγωγος Gateaux. Επιπλέον οι δύο παράγωγοι θα ταυτίζονται και η κοινή τιμή τους θα είναι η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού (1.4). Όπως έχει αναφερθεί, στην περίπτωση των τριών προηγούμενων παραδειγμάτων οι παράγωγοι Gateaux και Fréchet ταυτίζονται.

Θεωρούμε την ακόλουθη νόρμα στο χώρο $\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$:

$$\|x\| = \max_{t_1\le t\le t_2}(|x(t)|+|\dot{x}(t)|$$

και έστω $\delta T(x,h)$ όπως ορίστηκε από την (1.5). Υπολογίζουμε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής:

$$\frac{1}{\|h\|}(T(x+h)-T(x))-\delta T(x,h)=\frac{1}{\|h\|}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\Big(f(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})-f(t,x,\dot{x})\Big)dt-\delta T(x,h)\right\}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x+k_1h,\dot{x}+k_2\dot{h})\frac{h}{\|h\|}-f_{\dot{x}}(t,x+k_3,\dot{x}+k_4\dot{h})\frac{\dot{h}}{\|h\|}\right)dt-\delta T\left(x,\frac{h}{\|h\|}\right)$$

για κατάλληλες σταθερές $0\le k_i=k_i(h)\le 1,\quad i=1,2,3,4$.

Έπεται ότι

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{1}{\|h\|}(T(x+h)-T(x))-\delta T(x,h)\le \lim_{\|h\|\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\left|f_x(t,x+k_1h,\dot{x}+k_2\dot{h})-f_x(t,x,\dot{x})\right|\frac{|h|}{\|h\|}dt+$$

$$+\lim_{\|h\|\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\left|f_{\dot{x}}(t,x+k_3h,\dot{x}+k_4\dot{h})-f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right|\frac{|h|}{\|h\|}dt=0$$

Το παραπάνω προκύπτει άμεσα από την συνέχεια των f_x και $f_{\dot{x}}$ και το γεγονός ότι $h(t),\dot{h}(t)\le\|h\|$ για κάθε $t\in[t_1,t_2]$. Επομένως ισχύει η (1.8) με $\delta T(x,h)$ την παράγωγο Gateaux της T όπως ακριβώς υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 2. Απομένει να δειχθεί ότι η απεικόνιση $h\to\delta T(x,h)$ είναι γραμμική. Πράγματι, από την (1.5) προκύπτει ότι για κάθε $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ και για $h_1,h_2\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$

$$\begin{aligned}\delta T(x,a_1h_1+a_2h_2)&=\int_{t_1}^{t_2}f_x(t,x,\dot{x})(a_1h_1+a_2h_2)dt+\int_{t_1}^{t_2}f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(a_1\dot{h}_1+a_2\dot{h}_2)dt\\&=a_1\int_{t_1}^{t_2}(f_xh_1+f_{\dot{x}}\dot{h}_1)dt+a_2\int_{t_1}^{t_2}(f_xh_2+f_{\dot{x}}\dot{h}_2)dt\\&=a_1\delta T(x,h_1)+a_2\delta T(x,h_2)\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε τις έννοιες του ακρότατου και του στατικού σημείου. Μελετάμε δύο περιπτώσεις για την απεικόνιση $T : X \to Y$ και βλέπουμε ένα πρόβλημα εφαρμογής αυτών, το πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης.

Ορισμός 2.1: *Έστω $T : X \to Y$ ένα συναρτησιακό ορισμένο σε έναν χώρο X με νόρμα. Ένα σημείο $x_0 \in X$ λέγεται σημείο (τοπικού) ελαχίστου για το T αν ισχύει*

$$T(x) \geq T(x_0)$$

για κάθε x σε μια γειτονιά του x_0 $x \in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$.

Ορισμός 2.2: *Το x_0 ονομάζεται σημείο αυστηρού ελαχίστου αν*

$$T(x) > T(x_0)$$

για κάθε $x \neq x_0$ σε μια γειτονιά του x_0.

Ορισμός 2.3: *Ένα $x_0 \in X$ λέγεται ακρότατο σημείο για την απεικόνιση T, αν είναι σημείο ελαχίστου ή μεγίστου για την T.*

Όπως στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων ισχύει η ακόλουθη αναγκαία συνθήκη για ακρότατα:

Πρόταση 2.1: *Έστω μια απεικόνιση $T : X \to \mathbb{R}$ Gateaux παραγωγίσιμη και $x_0 \in X$ ένα σημείο τοπικού ακρότατου. Τότε το x_0 είναι στατικό σημείο, δηλαδή*

$$\delta T(x_0, h) = 0 \quad \forall h \in X$$

Απόδειξη: Για κάθε $h \in X$ θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση:

$$a \to \varphi(a) := T(x_0 + ah) - T(x_0)$$

Τότε το $0 \in \mathbb{R}$ είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την φ. Επομένως, $\varphi'(0)=0$ και ισοδύναμα

$$\delta T(x_0,h)=\varphi'(0)=0$$

■

Εστιάζουμε στο συναρτησιακό του Παραδείγματος 2 (σελ. 3)

$$T(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(t,x,\dot{x})dt \tag{2.1}$$

με $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κλάσεως $\mathcal{C}^1$.

2.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι: ΣΤΑΘΕΡΑ ΆΚΡΑ

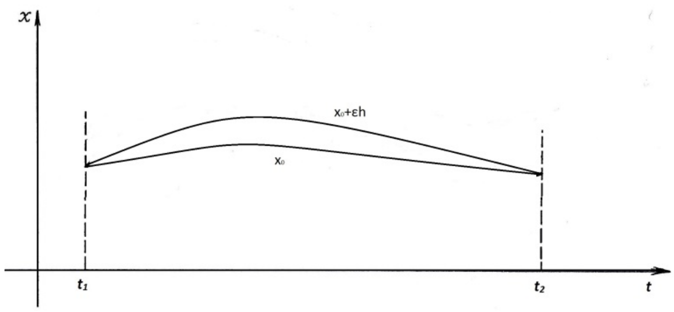
Επόμενο βήμα μετά τον ορισμό του ακρότατου σημείου είναι η ανάδειξη αναγκαίων συνθηκών ενός τέτοιου σημείου $x(t)\in[t_1,t_2]$ για το συναρτησιακό (2.1), με την προϋπόθεση (όπως φαίνεται και στον τίτλο της παραγράφου) ότι τα ακραία σημεία $x(t_1)$, $x(t_2)$ να είναι δοθέντα.

Έστω, ότι το $x=x_0(t)\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ καθιστά το συναρτησιακό *T(·)* ελάχιστο (μέγιστο). Τότε από την Πρόταση 2.1 και την εξίσωση (1.5) έχουμε

$$\delta T(x,h)=\int_{t_1}^{t_2} f_x(t,x,\dot{x})h\,dt+\int_{t_1}^{t_2} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\dot{h}\,dt \tag{2.2}$$

για κάθε $h\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ με

$$h(t_1)=h(t_2)=0 \tag{2.3}$$



Εικόνα 2.1

Από την (2.2) και με χρήση της (2.3) έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta T(x,h) &= \int_{t_1}^{t_2} f_x(t,x,\dot{x})h\,dt + f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})h(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})h(t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right)h(t)dt + f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})h(t)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right)h(t)dt\end{aligned} \qquad (2.4)$$

για κάθε $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ με $h(t_1)=h(t_2)=0$

Λήμμα 2.1.1: *Έστω $A:(t_1,t_2)\to\mathbb{R}^{m\times n}$, όπου $\mathbb{R}^{m\times n}$ πίνακας $m\times n$ διάστασης, του οποίου τα στοιχεία $a_{ij}(\cdot)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [t₁,t₂], και έστω*

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t)h(t)dt = 0 \qquad (2.5)$$

για κάθε συνεχή $h:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n$ με $h(t_1)=h(t_2)=0$. Τότε $A(t)=0$ για κάθε $t\in[t_1,t_2]$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $A \neq 0$. Άρα υπάρχει ένα στοιχείο $a_{ij}(t)$ του $A(t)$ και ένα διάστημα $\mathrm{I}=(k,l)\subset(t_1,t_2)$ έτσι ώστε $a_{ij}(t)' \neq 0,\ \forall t\in\mathrm{I}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $a_{ij}(t)>0,\ \forall t\in\mathrm{I}$. Ορίζουμε

$$r(t)=\begin{cases}(t-k)^2(t-l)^2, & t\in\mathrm{I}\\ 0 & t\notin\mathrm{I}\end{cases}$$

Τότε η απεικόνιση $h(t)=r(t)e_i$, όπου $e_i=(0,\ldots,\underset{i-\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta}{0,1,0},\ldots,0)'$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος και

$$
\begin{aligned}
e_j{}' \int_{t_1}^{t_2} A(t)h(t)dt &= e_j{}' \int_{t_1}^{t_2} A(t)e_i r(t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(t)r(t)dt > 0
\end{aligned}
$$

ενώ από την υπόθεση (2.5) έχουμε:

$$
e_j{}' \int_{t_1}^{t_2} A(t)h(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(t)r(t)dt = 0
$$

Άτοπο. Καταλήγουμε επομένως ότι $A(t)=0$ για κάθε $t \in [t_1, t_2]$.

■

Θεώρημα 2.1.1: *Αν το x είναι τοπικό ακρότατο για το συναρτησιακό (2.1), τότε πληρούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange:*

$$
f_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{2.6}
$$

για κάθε $t \in [t_1, t_2]$.

Απόδειξη: Το ζητούμενο προκύπτει από την (2.4) και το Λήμμα 2.1.1.

■

Αν η συνάρτηση *f(·)* είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής *t*, δηλαδή ισχύει

$$
f_t(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{2.7}
$$

και κάθε $(t, x, \dot{x}) \in [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ τότε οι εξισώσεις (2.6) απλοποιούνται ως εξής:

$$
\frac{d}{dt}\left(f(x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t)\, f_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{2.8}
$$

ισοδύναμα:

$$
f(x(t), \dot{x}(t)) - f_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\, \dot{x}(t) = \sigma\tau\alpha\theta., \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{2.9}
$$

Πράγματι, παίρνοντας υπ’ όψιν την (2.7), υπολογίζουμε

$$\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}}\dot{x}\right)=\left(\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right)\dot{x}+f_{\dot{x}}\ddot{x}$$
$$=f_x\dot{x}+f_{\dot{x}}\ddot{x}$$
$$=\frac{d}{dt}f$$

απ’ όπου προκύπτει η (2.8), ή ισοδύναμα η (2.9)

2.2 Περιπτωση ΙΙ: Μεταβλητα Άκρα

Εδώ εξετάζουμε την περίπτωση όπου δεν υφίστανται περιορισμοί για τα άκρα $x(t_1),\ x(t_2)$. Έστω $x\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ ένα σημείο ακρότατου για το συναρτησιακό (2.1). Όπως και προηγουμένως, για την πρώτη μεταβολή έχουμε:

$$\delta T(x,h)=\int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right)h(t)dt+f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})h(t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{2.10}$$

και επειδή το x είναι ακρότατο ισχύει ότι

$$\delta T(x,h)=0,\ \forall h\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2] \tag{2.11}$$

Έχουμε δει ότι η (2.10) με την (2.11) δίνουν

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right)h(t)dt=0 \tag{2.12}$$

για κάθε $h\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ με $h(t_1)=h(t_2)=0$, απ’ όπου και προκύπτουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

Οι (2.10), (2.11) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.6) δίνουν το ακόλουθο:

$$f_{\dot{x}}h\Big|_{t_1}^{t_2}=f_{\dot{x}}(t_2,x(t_2),\dot{x}(t_2))h(t_2)-f_{\dot{x}}(t_1,x(t_1),\dot{x}(t_1))h(t_1)=0 \tag{2.13}$$

για κάθε $h(t_1),\ h(t_2)$. Άμεση απόρροια αυτού είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.1: Αν το $x=x_0(t)\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ είναι σημείο ακρότατου για το συναρτησιακό (2.1) με ελεύθερες συνοριακές συνθήκες $x_0(t_1)$ και $x_0(t_2)$, τότε

α. πληρούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

β. Ισχύει επιπλέον:

$$f_{\dot{x}_0}(t_1, x_0(t_1), x_0(t_2)) = f_{\dot{x}_0}(t_2, x_0(t_2), \dot{x}_0(t_2)) = 0 \tag{2.14}$$

Αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει, αν ένα από τα άκρα είναι σταθερό και το άλλο ελεύθερο. Αν για παράδειγμα το $x_0(t_1)$ είναι δοθέν και το $x_0(t_2)$ ελεύθερο, τότε οι αναγκαίες συνθήκες περιλαμβάνουν τις εξισώσεις (2.6) και τη συνθήκη

$$f_{\dot{x}_0}(t_2, x_0(t_2), \dot{x}_0(t_2)) = 0$$

2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.3.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω το συναρτησιακό

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 t^3 dt \tag{2.15}$$

με $x(1) = 0$, $x(2) = 3$ και ζητάμε τα στατικά σημεία.

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τα υποψήφια στατικά σημεία $x(t),\ t \in [1,2]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \\ &= \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)t^3) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει $\dot{x}(t)t^3 = \sigma\tau\alpha\theta.$ άρα

$$x(t) = \frac{k}{t^2} + \ell, \quad \text{με} \quad k, \ell \text{ σταθερές} \tag{2.16}$$

Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν την μοναδική λύση

$$x_0(t) = 4 - \frac{4}{t^2}$$

2.3.2 Παραδειγμα 2

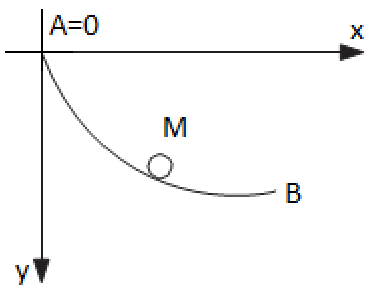
Για το προηγούμενο πρόβλημα με ελεύθερο το άκρο $x(t_2) = x(2)$, οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν την ίδια οικογένεια λύσεων (2.16). Επιπλέον με βάση το Θεώρημα 2.2.1 η συνθήκη $f_{\dot{x}}(2, x(2), \dot{x}(2)) = 0$ δίνει $\dot{x}(2) = 0$, όπου μαζί με την συνθήκη $x(1) = 0$ προκύπτουν οι σταθερές k, ℓ. Και πιο συγκεκριμένα $k = \ell = 0$ οπότε και $x_0(t) = 0$.

2.4 Βραχυστοχρονο Προβλημα

Μελετάμε τώρα ένα πρόβλημα που θεωρείται από πολλούς θεμελιώδες πρόβλημα του Λογισμού των Μεταβολών. Διατυπώθηκε από τον Johann Bernoulli (Ιούνιος 1696, στο περιοδικό Acta Eruditorim) ως πρόκληση για τους μαθηματικούς της εποχής του, έχοντας ο ίδιος λύσει το πρόβλημα με τη μέθοδο της διακριτοποίησης, χρησιμοποιώντας ένα φυσικό ανάλογο της αρχής ελαχίστου χρόνου του Fermat. Η λύση του προβλήματος είναι ένα τμήμα μιας κυκλοειδούς καμπύλης (Εικόνα 2.3, σελ.17) και βρέθηκε από τους: Leibnitz (όμοια με του Johann Bernoulli), Newton, Jacob Bernoulli (νεότερος αδερφός του Bernoulli, στηρίχτηκε στην αρχή του Huygens), Tschirinhaus και L’ Hospital. Να σημειώσουμε ότι ένα παρόμοιο πρόβλημα μελετήθηκε πρώτα από τον Γαλιλαίο το 1638 στην εργασία του *“Discourse on two new sciences”* προσπαθώντας να βρει την «ταχύτερη» ευθεία μεταξύ ενός σημείου Α και ενός άλλου σημείου Β πάνω σε ένα κάθετο επίπεδο.

Η διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

«Δοθέντων δύο σημείων *Α* και *Β* σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη που πρέπει να διαγράψει ένα σημείο *Μ* που κινείται στη διαδρομή *ΑΜΒ* υπό την επίδραση του βάρους του, έτσι ώστε ξεκινώντας από το *Α*, να φτάσει στο *Β* στον ελάχιστο χρόνο».



Εικόνα 2.2

Θέλουμε να εκφράσουμε τον χρόνο της καθόδου ως ολοκλήρωμα του $y(x)$. Ξεκινάμε από την ταχύτητα του σώματος κατά μήκος της τροχιά, που όπως ξέρουμε είναι $v=\dfrac{ds}{dt}$, όπου s το μήκος τόξου της διαδρομής. Το ds υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα και είναι

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= \sqrt{1+\dot{y}^2(x)}\,dx \end{aligned}$$

Ο χρόνος καθόδου δίνεται από τη σχέση

$$T = \int_{A=0}^{B} dt$$

και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις γίνεται

$$T = \int_0^B \frac{ds}{v} = \int_0^B \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}}{v}\,dx \qquad (2.17)$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας βρίσκουμε ότι η ταχύτητα ισούται με

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\,y(x) \Rightarrow v = \sqrt{2g\,y(x)}$$

και την αντικαθιστούμε στην (2.17), οπότε

$$T(y) = \int_0^B \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}}{\sqrt{2g\,y(x)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^B \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,dx$$

Κάνουμε την εξής αντικατάσταση, $t:=x$ και $x:=y$ για να κρατήσουμε τους ίδιους συμβολισμούς με τα προηγούμενα, και βλέπουμε ότι το πρόβλημα συνίσταται στην ελαχιστοποίηση του

$$T(x) = \int_0^b \left(\frac{1+\dot{x}^2}{x}\right)^{1/2} dt$$

Παρατηρούμε ότι η $f(t,x,\dot{x})=\left((1+\dot{x}^2)/x\right)^{1/2}$ είναι ανεξάρτητη του t οπότε από τις εξισώσεις (2.9) παίρνουμε:

$$\frac{(1+\dot{x}^2)^{1/2}}{x^{1/2}}-\frac{\dot{x}}{(x(1+\dot{x}^2))^{1/2}}\dot{x}=\sigma\tau\alpha\theta.$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x^{1/2}(1+\dot{x}^2)^{1/2}}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

δηλαδή

$$x(1+\dot{x}^2)=C \tag{2.18}$$

Λύνουμε την διαφορική αυτή εξίσωση κάνοντας την αντικατάσταση $\dot{x}=\tan\omega$. Η (2.18) γίνεται τότε:

$$x(1+\tan^2\omega)=C\Rightarrow x=\frac{C}{1+\dfrac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}}$$

$$\Rightarrow x=C\cos^2\omega$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\dot{x}=-2C\dot{\omega}\cos\omega\sin\omega\Rightarrow\tan\omega=-2C\dot{\omega}\cos\omega\sin\omega$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\cos\omega}=-2C\dot{\omega}\cos\omega$$
$$\Rightarrow 1=-2C\dot{\omega}\cos^2\omega$$
$$\Rightarrow 1=-C\dot{\omega}(1+\cos2\omega),\quad \text{αφού } \cos^2\omega=\frac{1}{2}(1+\cos2\omega)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε:

$$t+C_1=-C(\omega+\frac{1}{2}\sin2\omega)$$
$$\Rightarrow t=-C(\omega+\frac{1}{2}\sin2\omega)-C_1$$

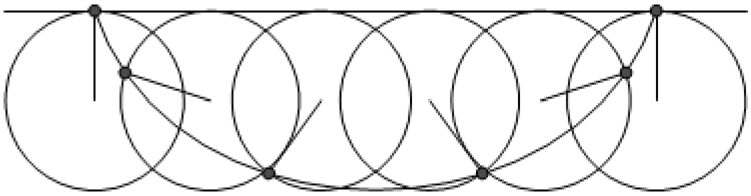
Έχουμε επομένως τις εξής παραμετρικές μορφές ως προς ω:

$$\begin{cases} x=k(1+\cos2\omega)\\ t=\ell-k(2\omega+\sin2\omega)\end{cases} \tag{2.19}$$

όπου οι σταθερές k, ℓ προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες

$$(t, x(t))\big|_{t=0} = A \ (=0)$$
$$(t, x(t))\big|_{t=b} = B$$

Η κυκλοειδής καμπύλη παριστάνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 2.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

ΣΤΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Βλέπουμε τώρα τις εξισώσεις Euler-Lagrange στην περίπτωση που το συναρτησιακό είναι διπλό ολοκλήρωμα σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και στη συνέχεια μια σκιαγράφηση του τι γίνεται στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε τη $\mathcal{C}^1$ απεικόνιση $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και το συναρτησιακό

$$T(x):=\iint_D f(s,t,x(s,t),x_s(s,t),x_t(s,t))dsdt \tag{3.1}$$

Υποθέτουμε ότι το D είναι ανοικτό, συνεκτικό και απλώς συνεκτικό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $D\subset\mathbb{R}^2$. Αν το $x\in\mathcal{C}^1(\bar{D})$ είναι ακρότατο σημείο, τότε με βάση την Πρόταση 2.1, είναι στατικό σημείο, δηλαδή

$$\delta T(x,h)=0,\quad \forall\ h\in\mathcal{C}^1(\bar{D}) \tag{3.2}$$

Έστω τώρα C το σύνορο του D. Έχουμε δει στο Παράδειγμα 3 (§1.1.1.3, σελ. 3) ότι

$$\delta T(x,h)=\iint_D f_x h+f_{x_s}h_s+f_{x_t}h_t\ dsdt$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\delta T(x,h)&=\iint_D (f_x-\frac{\partial}{\partial s}(f_{x_s})-\frac{\partial}{\partial s}(f_{x_t}))h\,dsdt\\&=\oint_C h(f_{x_s},-f_{x_t})\circ dr\end{aligned} \tag{3.3}$$

Με γενίκευση του Λήμματος 2.1.1 παίρνουμε από την (3.2) τη ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1: *Αν το $x=x(s,t)$ είναι στατικό σημείο για το συναρτησιακό (3.1) με τη συνοριακή συνθήκη*

$$x(s,t)=0,\quad \forall(s,t)\in C \tag{3.4}$$

τότε θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$f_x(s,t,x,x_s,x_t)-\frac{\partial}{\partial s}(f_{x_s}(s,t,x,x_s,x_t))-\frac{\partial}{\partial t}(f_{x_t}(s,t,x,x_s,x_t))=0 \qquad (3.5)$$

για κάθε $(s,t)\in D$. *Επιπλέον, αν δεν υπάρχουν περιορισμοί για τις συνοριακές τιμές του* $x(\cdot)$ *στο σύνορο C του D, θα πρέπει*

$$\left.\begin{aligned} f_{x_s}(s,t,x(s,t),x_s(s,t),x_t(s,t))=0 \\ f_{x_t}(s,t,x(s,t),x_s(s,t),x_t(s,t))=0 \end{aligned}\right\} \ \forall (s,t)\in C \qquad (3.6)$$

Πρέπει να επισημανθεί ότι γενίκευση της παραπάνω πρότασης είναι εφικτή με βάση το θεώρημα Stokes στον $\mathbb{R}^3$ για τη γενίκευσή του στον $\mathbb{R}^n$, *n>3*, στην περίπτωση του συναρτησιακού

$$T(x)=\int_{D\subset\mathbb{R}^n} f(t_1,t_2,\ldots,t_n,x(t_1,\ldots t_n),D_t x(t_1,\ldots t_n))dt_1\ldots dt_n$$

όπου $x(t)\in\mathbb{R}$, $D_t x(t_1,\ldots t_n)=\left(\frac{\partial x}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial x}{\partial t_n}\right)$ και $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\to\mathbb{R}$ επαρκώς παραγωγίσιμη. Αν το $x(\cdot)$ είναι στάσιμο σημείο ικανοποιούνται οι ανάλογες συνθήκες:

$$f_x(t_1,\ldots,t_n,x(\cdot),D_t x(\cdot))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{t_i}}f_{x_{t_i}}(t_1,\ldots,t_n,x(\cdot),D_t x(\cdot)) \qquad (3.7)$$

για κάθε $(t_1,\ldots t_n)\in D$ με την προϋπόθεση ότι η $x(\cdot)$ μηδενίζεται στο σύνορο του *D*. Αν πάλι δεν υπάρχουν περιορισμοί, τότε θα πρέπει επιπλέον να ικανοποιείται η σχέση

$$f_{x_{t_i}}(t_1,\ldots,t_n,x(\cdot),D_t x(\cdot))=0 \qquad (3.8)$$

για $i=1,2,\ldots,n$ και για κάθε $(t_1,\ldots,t_n)\in\partial D$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ, ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

4.1 ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΚΑΙ ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Εστιάζουμε στη μελέτη της δεύτερης μεταβολής των συναρτησιακών της μορφής

$$T(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(t,x,\dot{x})dt \tag{4.1}$$

όπου η απεικόνιση $f(t,x,\dot{x})$ είναι κλάσεως $\mathcal{C}^2\left[[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\right]$.

Ορισμός 4.1.1: *Έστω μια απεικόνιση $T:X\to Y$. Ορίζουμε παράγωγο Gateaux δεύτερης τάξης της T στο σημείο $x\in X$, ή αλλιώς δεύτερη μεταβολή της T στο x, ως προς $h\in X$, την απεικόνιση*

$$\delta^2 T(x,h):=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left[\delta T(x+ah,h)-\delta T(x,h)\right]$$

Στην περίπτωση του συναρτησιακού (4.1), η δεύτερη μεταβολή υπάρχει και συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta^2 T(x,h)&=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x+ah,\dot{x}+a\dot{h})h+f_{\dot{x}}(t,x+ah,\dot{x}+a\dot{h})\dot{h}\right)dt\right.\\&\qquad\left.-\int_{t_1}^{t_2}\left(f_x(t,x,\dot{x})h-f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\dot{h}\right)dt\right\}\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left(h'f_{xx}h+h'f_{x\dot{x}}\dot{h}+\dot{h}'f_{\dot{x}x}h+\dot{h}'f_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}\right)dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left(h',\dot{h}'\right)'\left.\left(\begin{array}{c|c}f_{xx}&f_{\dot{x}x}\\\hline f'_{x\dot{x}}&f_{\dot{x}\dot{x}}\end{array}\right)\right|_{(t,x(t),\dot{x}(t))}\begin{pmatrix}h\\\dot{h}\end{pmatrix}dt\end{aligned}\tag{4.2}$$

Σημειώνεται πως ισχύει ότι $f'_{x\dot{x}} = f_{\dot{x}x}$, ενώ οι πίνακες f_{xx} και $f_{\dot{x}\dot{x}}$ είναι από τον ορισμό τους συμμετρικοί. Αυτό συνεπάγεται ότι ο $2n \times 2n$ πίνακας των παραγώγων της *f* στην τελευταία ισότητα της (4.2) είναι συμμετρικός.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(\varepsilon) := T(x+\varepsilon h) - T(x), \quad \text{με } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

όπου βλέπουμε ότι $\varphi(0)=0$ και αναπτύσσουμε κατά Taylor γύρω από το $0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &= \varepsilon\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(\theta\varepsilon) \\ &= \varepsilon\delta T(x,h) + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 T(x+\varepsilon\theta,h)\end{aligned} \tag{4.3}$$

για κάποιο $\theta = \theta(\varepsilon)$ με $|\theta| \le 1$. Αν επιπλέον $f \in \mathcal{C}^3$ έχουμε

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &= \varepsilon\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(\theta\varepsilon) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon\delta T(x,h) + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 T(x+\varepsilon\theta,h) + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Αν το $x \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, έχουμε ισοδύναμα ότι $\varphi(\varepsilon) \ge \varphi(0) = 0$ για *ε* κοντά στο μηδέν. Άρα $\varphi'(0) = \delta T(x,h) = 0$ και από την (4.3) προκύπτει

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 T(x+\varepsilon\theta,h) \ge 0$$

για κάθε $\varepsilon \ge 0$ κοντά στο μηδέν.

Αντίστροφα, αν $\delta T(x,h)=0$ και $\delta^2 T(x,h) > 0, \ \forall h \ne 0$, τότε με την προϋπόθεση ότι $f \in \mathcal{C}^3$ από την (4.4) έχουμε:

$$\varphi(\varepsilon) > \varphi(0)$$

για *ε* κοντά στο μηδέν και για κάθε $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$. Δηλαδή το *x* είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για το συναρτησιακό *T*.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.1: *α) (Αναγκαία συνθήκη) Αν το* $x \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ *είναι σημείο ελαχίστου (μεγίστου) για το συναρτησιακό (4.1), τότε* $\delta T(x,h)=0$ *για κάθε* $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ *και επιπλέον αν* $f \in \mathcal{C}^3$*, ισχύει*

$$\delta^2 T(x,h) \geq 0 \ \ (\leq 0 \text{ αντίστοιχα}) \tag{4.5}$$

για κάθε $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$.

β) (Ικανή Συνθήκη) Αν το $x \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ *είναι στατικό σημείο , η f είναι κλάσεως* $\mathcal{C}^3$ *και*

$$\delta^2 T(x,h) > 0 \quad (<0, \text{αντίστοιχα}) \tag{4.6}$$

για κάθε $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$*, τότε το x(·) είναι σημείο αυστηρού ελαχίστου (μεγίστου).*

γ) Η εξίσωση (4.6) ικανοποιείται αν

$$\left.\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{\dot{x}x} \\ f'_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}\right|_{(t,x(t),\dot{x}(t))} \geq 0 \quad (\leq 0) \tag{4.7}$$

για κάθε $t \in (t_1,t_2)$*. Η αυστηρή ανισότητα ισχύει για ένα (μη κενό) ανοιχτό υποδιάστημα του* (t_1,t_2).

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει μια ικανή συνθήκη για ελάχιστο (μέγιστο):

Θεώρημα 4.1.2: *Έστω το συναρτησιακό (4.1) και υποθέτουμε ότι* $f \in \mathcal{C}^2([t_1,t_2],\times\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Επίσης υποθέτουμε ότι το* $x \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ *είναι στατικό σημείο του T και έστω*

$$\left.\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{\dot{x}x} \\ f'_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}\right|_{(t,x(t),\dot{x}(t))} \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall (t,x,\dot{x}) \in [t_1,t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{4.8}$$

Τότε το x(·) είναι σημείο ελαχίστου (μεγίστου). Αν στην (4.8) επιβάλλουμε > (<, αντίστοιχα), τότε το x(·) είναι σημείο αυστηρού ελαχίστου (μεγίστου).

Απόδειξη: Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $\delta T(x,h)=0$ και $\delta^2 T(x+\varepsilon\theta,h) \geq 0 \ (\leq 0)$ για κάθε $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ και $\varepsilon,\theta \in \mathbb{R}$. Επομένως από την (4.3)

$$\varphi(\varepsilon) \geq 0 \ (\leq 0), \text{ για } \varepsilon \text{ κοντά στο μηδέν}$$

Ισοδύναμα, $T(x+\varepsilon h) - T(x) \geq 0 \ \ (\leq 0)$ για κάθε ε κοντά στο μηδέν και για κάθε $h \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$.

■

Σημειώνεται ότι στην ειδική περίπτωση που $f:[t_1,t_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η (4.8) προκύπτει αν

$$\begin{cases} f_{xx}f_{\dot{x}\dot{x}}-(f_{x\dot{x}})^2\geq 0 \\ f_{\dot{x}\dot{x}}\geq 0 \end{cases} \qquad \forall (t,x,\dot{x})\in[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \qquad \text{περίπτωση ελαχίστου}$$

$$\begin{cases} f_{xx}f_{\dot{x}\dot{x}}-(f_{x\dot{x}})^2\geq 0 \\ f_{\dot{x}\dot{x}}\leq 0 \end{cases} \qquad \forall (t,x,\dot{x})\in[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \qquad \text{περίπτωση μεγίστου}$$

4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.2.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνονται δύο σημεία του $\mathbb{R}^3$, $a=(a_1,a_2,a_3)$ και $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ με $a_3\leq\beta_3$ και θέλουμε να βρούμε τον δρόμο που συνδέει τα a και β με το ελάχιστο δυνατό μήκος. Εκφράζουμε την οικογένεια των καμπυλών στον $\mathbb{R}^3$ που συνδέουν τα a και β με την παραμετρική έκφραση $x(t)=(x_1(t),x_2(t),t)$ με $t\in[a_3,\beta_3]$. Με βάση τώρα αυτή την παραμετρική μορφή, το μήκος κάθε δρόμου δίνεται από τη σχέση

$$T(x)=\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\|\dot{x}(t)\|dt=\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\sqrt{\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+1}\,dt$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler – Lagrange, εξισώσεις (2.6), παίρνουμε αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση του πιο πάνω συναρτησιακού. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση *f(x)* είναι ανεξάρτητη του *t*, οπότε εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.9).

Έχουμε

$$\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}=f_x \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+1}},\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+1}}\right)=0$$

Άρα

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= c_1\sqrt{\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+1}\\ \dot{x}_2 &= c_2\sqrt{\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}+1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2}=\text{σταθ.}$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= c_1\sqrt{1+\sigma\tau\alpha\theta.}=\sigma\tau\alpha\theta.\\ \dot{x}_2 &= c_2\sqrt{1+\sigma\tau\alpha\theta.}=\sigma\tau\alpha\theta.\end{aligned}$$

και συνεπώς η καμπύλη *x(t)* έχει τη μορφή

$$x(t)=(kt,\ell t,t)+(\xi_1,\xi_2,0)$$

όπου τα k,ℓ,ξ_1,ξ_2 είναι κατάλληλες σταθερές και επιλέγονται έτσι ώστε να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}(k\alpha_3,\ell\alpha_3,\alpha_3)&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\ (k\beta_3,\ell\beta_3,\beta_3)&=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\end{aligned}$$

Η παραπάνω καμπύλη είναι επομένως το μοναδικό στατικό σημείο του συναρτησιακού *T*. Επικαλούμαστε το Θεώρημα 4.1.2 για να δείξουμε ότι καθιστά το *T* ελάχιστο. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\begin{array}{c|c} f_{xx} & f_{\dot{x}x}\\ \hline f'_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}}\end{array}\right)\geq 0 \qquad \forall (t,x,\dot{x})\in[a_3,\beta_3]\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$$

Πράγματι, $f_{xx}=0$, $f_{x\dot{x}}=0$ και $f_{\dot{x}\dot{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{1+\dot{x}_1^{\,2}}{(1+\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2})^{3/2}} & \dfrac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{(1+\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2})^{3/2}}\\ \dfrac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{(1+\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2})^{3/2}} & \dfrac{1+\dot{x}_2^{\,2}}{(1+\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2})^{3/2}}\end{pmatrix}.$

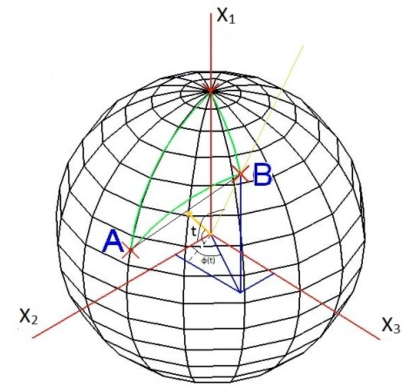
και επειδή $(1+\dot{x}_1^{\,2})(1+\dot{x}_2^{\,2})>\dot{x}_1^{\,2}\dot{x}_2^{\,2}$, $\forall \dot{x}_1,\dot{x}_2$, από το κριτήριο του Sylvester καταλήγουμε ότι ο προηγούμενος πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Άρα ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{c|c} f_{xx} & f_{\dot{x}x}\\ \hline f'_{x\dot{x}} & f_{\dot{x}\dot{x}}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\\ \hline 0 & f_{\dot{x}\dot{x}}\end{array}\right),\quad (t,x,\dot{x})\in[a_3,\beta_3]\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$$

είναι μη αρνητικά ορισμένος.

4.2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Ζητάμε να βρούμε το δρόμο με το ελάχιστο δυνατό μήκος, ο οποίος όμως βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην επιφάνεια της σφαίρας κέντρου $0 \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $r = 1$ και ο οποίος να συνδέει δύο δοθέντα σημεία *A* και *B* της σφαίρας.



Εικόνα 4.1

Κάθε καμπύλη που βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας και διέρχεται από τα *A* και *B* μπορεί να εκφρασθεί παραμετρικά ως εξής:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (\sin t, \cos t \cos \varphi(t), \cos t \sin \varphi(t)),\ 0 \le t \le a$$

Επιπλέον η συνάρτηση $\varphi = \varphi(t)$ είναι τέτοια ώστε $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$. Υπολογίζουμε ότι $\left\| \dot{x}(t) \right\|^2 = 1 + \cos^2 t \dot{\varphi}^2$ και άρα το μήκος της αντίστοιχης καμπύλης ισούται με

$$T(\varphi) = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \cos^2 t\, \dot{\varphi}^2}\, dt$$

όπου

$$f(t, \dot{\varphi}) = \sqrt{1 + cos^2 t\, \dot{\varphi}^2}$$

και βρίσκουμε $f_{\varphi} = 0$ και $f_{\varphi}(\cos^2 t\, \dot{\varphi}) / (1 + \cos^2 t\, \dot{\varphi}^2)^{1/2}$. Επομένως οι εξισώσεις Euler – Lagrange δίνουν

$$f_{\varphi} = \frac{d}{dt} f_{\dot{\varphi}} \Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left((\cos^2 t\, \dot{\varphi}) / (1 + \cos^2 t\, \dot{\varphi}^2)^{1/2} \right)$$
$$\Leftrightarrow (\cos^2 t\, \dot{\varphi}) / (1 + \cos^2 t\, \dot{\varphi}^2)^{1/2} = c$$

Ο παρονομαστής της παραπάνω σχέσης είναι θετικός για κάθε $t \in [0,a]$, ενώ γνωρίζουμε ότι $\varphi(0)=\varphi(a)=0$. Άρα υπάρχει το $t_0 = [0,a]$ έτσι ώστε $\varphi'(t_0)=0$. Αυτό σημαίνει ότι αναγκαστικά $c=0$ και ισοδύναμα $\dot{\varphi}\cos^2 t = 0$ για κάθε $t \in [0,a]$. Άρα $\dot{\varphi}(t)=0$ και χρησιμοποιώντας ξανά το γεγονός ότι $\varphi(0)=\varphi(a)=0$ καταλήγουμε ότι $\varphi(t)=0,\ \forall t \in [0,a]$.

Δηλαδή, η καμπύλη που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με το επίπεδο και διέρχεται από τα σημεία *A, B* και $0 \in \mathbb{R}^3$ είναι στατικό σημείο του συναρτησιακού *T(φ)*.

Τέλος, βρίσκουμε ότι

$$f_{\varphi\varphi}=0,\ f_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}}=0,\ f_{\varphi\dot{\varphi}}=0,\ f_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}}=\frac{\cos^2 t}{(1+\cos^2 t\ \dot{\varphi}^2)^{3/2}},\quad \forall t,\dot{\varphi}$$

και συνεπώς

$$\left(\begin{array}{c|c} f_{\varphi\varphi} & f_{\varphi\dot{\varphi}} \\ \hline f'_{\dot{\varphi}\varphi} & f_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} \end{array}\right) \geq 0$$

Άρα με βάση το Θεώρημα 4.1.2, η παραπάνω λύση καθιστά το *T(·)* ελάχιστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ – ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE

Δίνεται μια μικρή εισαγωγή στην εύρεση ακρότατου ενός παραγωγίσιμου συναρτησιακού $T : X \to Y$ με περιορισμούς της μορφής:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} = 0 \tag{5.1}$$

όπου οι συναρτήσεις $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,m$ είναι παραγωγίσιμες.

Θεώρημα 5.1: *Έστω ότι το $x_0 \in X$ είναι ακρότατο σημείο του T που συγχρόνως πληροί την εξίσωση (5.1), δηλαδή $g(x_0) = 0$. Υποθέτουμε ότι τα $\delta g(x_0,\cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή υπάρχει $y \in X$ έτσι ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_i g(x_0, y) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \tag{5.2}$$

Τότε ισχύει

$$\delta T(x_0, h) = 0 \tag{5.3}$$

για κάθε $h \in X$ με

$$\delta g(x_0, h) = 0 \tag{5.4}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε για απλότητα ότι *m=1* και η (5.2) εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $y \neq 0$, $y \in X$ με

$$\delta g(x_0, y) \neq 0 \tag{5.5}$$

Έστω $h \in X$ που πληροί την (5.4). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad a(\varepsilon, \varphi) = g(x_0 + \varepsilon h + \varphi y)$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της (5.1) έχουμε

$$a(0,0)=g(x_0)=0 \tag{5.6}$$

και λόγω της (5.5)

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right|_{(\varepsilon,\varphi)=0} &= \delta g(x_0+\varepsilon h+\varphi y,\, y)\big|_{(\varepsilon,\varphi)=0} \\ &= \delta g(x_0, y)\neq 0\end{aligned} \tag{5.7}$$

Από τις (5.6) και (5.7) και το θεώρημα των πεπλεγμένων απεικονίσεων υπάρχει μια παραγωγίσιμη απεικόνιση

$$\varepsilon \to \varphi(\varepsilon) \quad \text{με} \quad \varphi(0)=0 \tag{5.8}$$

που ικανοποιεί την εξίσωση $a(\varepsilon,\varphi(\varepsilon))=0$ για *ε* κοντά στο μηδέν, δηλαδή

$$g(x_0+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y)=0 \tag{5.9}$$

Προσεγγίζοντας κατά Taylor την *a(ε,φ)* σε μια γειτονιά του $0\in\mathbb{R}^3$, παίρνουμε χρησιμοποιώντας την (5.9) και λόγω των (5.1), (5.3), (5.8)

$$\begin{aligned} 0 &= g(x_0+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y) \\ &= g(x_0+\varepsilon\,\delta g(x_0,h)+\varphi(\varepsilon)\delta g(x_0,y))+O(\varepsilon)+O(\varphi(\varepsilon)) \\ &= \varphi(\varepsilon)\delta g(x_0,y)+O(\varepsilon)+\mathrm{O}(\varphi(\varepsilon))\end{aligned} \tag{5.10}$$

όπου $O(r)/r\to 0$ καθώς $r\to 0$. Από τις (5.10) και (5.8) παίρνουμε

$$0=\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\delta g(x_0,y)+\frac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon), \qquad \varepsilon\neq 0 \tag{5.11}$$

Παίρνοντας τα όρια, καθώς $\varepsilon\to 0$, και στα δύο μέλη της (5.11) και έχοντας υπ’ όψιν την (5.5) βρίσκουμε

$$0=\varphi'(0)\delta g(x_0,y)\Leftrightarrow \varphi'(0)=0 \tag{5.12}$$

Επικαλούμενοι την (5.9) έχουμε ότι για *ε* κοντά στο μηδέν

$$T(x_0)\leq T(x_0+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y)$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας τις (5.8) και (5.12)

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T(x_0+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y)-T(x_0)}{\varepsilon}\\
&= \delta T(x_0+\varepsilon h+\varphi(\varepsilon)y, h+\varphi'(\varepsilon)y)\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= \delta T(x_0,h)
\end{aligned}
$$

Η συνεπαγωγή (5.4)⟹(5.3) αποδείχθηκε.

■

Απόρροια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το Θεώρημα 5.2 που ακολουθεί. Πριν απ' αυτό αποδεικνύεται ένα λήμμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξή του θεωρήματος.

Λήμμα 5.1: *Έστω $W\subseteq\mathbb{R}^{m+1}$ με*

$$(1,0,...,0)\notin W \tag{5.13}$$

Τότε υπάρχει $\ell=(\ell_0,\ell_1,...,\ell_m)$ με $\ell_0\neq 0$ και $\ell\perp W$

Απόδειξη: Η (5.13) συνεπάγεται ότι $\dim W<m+1$ και ότι $\dim W^{\perp}>0$. Επειδή $W\oplus W^{\perp}=\mathbb{R}^{m+1}$ η (5.13) εξασφαλίζει πράγματι την ύπαρξη ενός διανύσματος $\ell=(\ell_0,\ell_1,...,\ell_m)$, $\ell_0\neq 0$ με $\ell\perp W$. Όντως στην αντίθετη περίπτωση

$$W^{\perp}\leq\left\{\ell\in\mathbb{R}^{m+1}:\ell_0=0\right\}$$

και άρα, λόγω της (5.13) έχουμε ότι $(1,0,...,0)\notin W\oplus W^{\perp}=\mathbb{R}^{m+1}$. Άτοπο.

■

Θεώρημα 5.2: *Έστω $x_0\in X$ ένα ακρότατο του συναρτησιακού $T:X\to Y$ που πληροί την (5.1) και έστω ότι τα δg(x_0,·) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ισχύει η (5.2), για $y\in X$. Τότε υπάρχουν σταθερές $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=1,...,m$ έτσι ώστε το x_0 είναι στατικό σημείο του*

$$\hat{T}:=T+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i \tag{5.14}$$

δηλαδή

$$\delta\hat{T}(x_0,h)=0,\quad \forall h\in X \tag{5.15}$$

Τα λ_i καλούνται πολλαπλασιαστές Lagrange.

Απόδειξη: Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\Phi: X \to \mathbb{R}^{m+1}$ με

$$\Phi(h) = \begin{pmatrix} \delta T(x_0, h) \\ \delta g_1(x_0, h) \\ \vdots \\ \delta g_m(x_0, h) \end{pmatrix}$$

Ισχύει ότι $\mathrm{Im}\Phi \subset \mathbb{R}^{m+1}$ και διαπιστώνουμε ότι το

$$(1,0,\dots,0) \notin \mathrm{Im}\Phi \tag{5.16}$$

Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε $h \in X$ με $\delta T(x_0, h) \neq 0$ και $\delta g_i(x_0, h) = 0,\ i = 1,\dots,m$. Τότε από το Θεώρημα 5.1 η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $\delta T(x_0, h) = 0$ που είναι άτοπο.

Από την (5.16) και το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι υπάρχει ένα διάνυσμα

$$\ell = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \ell_0 \neq 0$$

έτσι ώστε $\ell \perp \mathrm{Im}\Phi$, δηλαδή

$$\ell_0\, \delta T(x_0, h) + \sum_{i=1}^{m} \ell_i \delta g_i(x_0, h) = 0, \quad h \in X$$

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με ℓ_0 προκύπτει η (5.15).

■

Το Θεώρημα 5.2 έχει άμεση εφαρμογή στις περιπτώσεις των τριών παραδειγμάτων 1.1.1 (σελ. 2). Θεωρούμε την περίπτωση του συναρτησιακού $T: X \to Y$ με

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt \tag{5.17}$$

με τους περιορισμούς

$$g_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,m \tag{5.18}$$

όπου

$$g_i(x) := \int_{t_1}^{t_2} f_i(t,x,\dot{x}), \quad i=1,\ldots,m \tag{5.19}$$

με f_i κλάσεως $\mathcal{C}^1$. Υποθέτουμε ότι για το υποψήφιο ακρότατο σημείο x_0 του προβλήματος τα $\delta g_i(x_0,\cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό ισχύει αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι:

$$(f_i)_x(\cdot,x_0,\dot{x}_0) - \frac{d}{dt}(f_i)_{\dot{x}}(\cdot,x_0,\dot{x}_0), \quad t\in[t_1,t_2], \quad i=1,\ldots,m$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 5.3: *Αν το x_0 είναι ακρότατο για το πρόβλημα (5.17), (5.18) τότε με τις προηγούμενες υποθέσεις, υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το x_0 είναι στατικό σημείο του συναρτησιακού*

$$\begin{aligned}\hat{T}(x) &= T(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F(t,x,\dot{x})\, dt\end{aligned}$$

όπου $F := f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$. Επομένως, το x_0 θα ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(t,x_0,\dot{x}_0) = F_x(t,x_0,\dot{x}_0), \quad t\in[t_1,t_2]$$

Σημείωση: Ο παραπάνω ισχυρισμός του θεωρήματος ισχύει αν αντί των (5.18) υποθέσουμε ότι

$$g_i(x) = c_i \quad \text{(σταθερά)}, \quad i=1,\ldots,m$$

ή το ίδιο

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(f_i(t,x,\dot{x}) - \frac{c_i}{t_2 - t_1} \right) dt = 0$$

5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα: Έστω το συναρτησιακό $T : X \to Y$ με

$$T(x) = \int_0^1 \dot{x}^2(t)\, dt \tag{5.20}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{5.21}$$

$$g_1(x) = \int_0^1 x\, dt = 0, \qquad g_2(x) = \int_0^1 (xt - 1)\, dt = 0 \tag{5.22}$$

και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το *T(x)*.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3 υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα ζητούμενα ακρότατα είναι στατικά σημεία του

$$\begin{aligned} \hat{T}(x) &= T(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) \\ &= \int_0^1 \dot{x}^2 + \lambda_1 x + \lambda_2 (xt - 1)\, dt \end{aligned}$$

με $x(0) = x(1) = 0$

Έστω $F(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + \lambda_1 x + \lambda_2 (xt - 1)$ και από τις εξισώσεις Euler–Lagrange έχουμε

$$\begin{aligned} F_x = \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} &\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 t = 2\ddot{x} \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{1}{4}\lambda_1 t^2 + \frac{1}{6}\lambda_2 t^3 + At + B, \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

και επειδή $x(0) = x(1) = 0$ έχουμε

$$B = 0 \;\; \text{και} \;\; \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2 + A = 0 \tag{5.23}$$

Από τους περιορισμούς $g_1(x) = g_2(x)$, έχουμε

$$g_1(x) = \int_0^1 x(t)\, dt = \frac{1}{12}\lambda_1 + \frac{1}{24}\lambda_2 + \frac{1}{2}A = 0 \tag{5.24}$$

$$g_2(x) = \int_0^1 (xt - 1)\, dt = \frac{1}{16}\lambda_1 + \frac{1}{30}\lambda_2 + \frac{1}{3}A - 1 = 0 \tag{5.25}$$

Παίρνουμε λοιπόν από τις (5.23), (5.24), (5.25)

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 360 \text{ και } A = 30$$

και άρα το μοναδικό στατικό σημείο του $\hat{T}$ είναι το

$$x_0(t) = 90t^2 - 60t^3 + 30t, \quad t \in [0,1] \tag{5.26}$$

Δείχνουμε ότι το στατικό αυτό σημείο καθιστά το T ελάχιστο, ενώ συγχρόνως πληροί τις (5.21), (5.22).

Θεωρούμε πάλι το συναρτησιακό

$$\begin{aligned}\hat{T}(x) &= T(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)\big|_{\lambda_1=-\lambda_2=360} \\ &= \int_0^1 \dot{x}^2 + 360x - 360(xt-1)\, dt\end{aligned}$$

και παρατηρούμε πως για κάθε t η Hessian της $F := \dot{x}^2 + 360x - 360(xt-1)$ είναι θετικά ημιορισμένη:

$$D^2F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{x\dot{x}} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix} \geq 0$$

Επομένως με βάση το Θεώρημα 4.1.2 έχουμε ότι

$$\hat{T}(y) \geq \hat{T}(x_0), \quad \forall y \in [0,1] \tag{5.27}$$

Ειδικότερα, η (5.27) για *y* που ικανοποιούν τους ίδιους περιορισμούς με την *x(·)*, δίνει

$$T(y) + \lambda_1 g_1(y) + \lambda_2 g_2(y) \geq T(x_0) + \lambda_1 g_1(x_0) + \lambda_2 g_2(x_0)$$

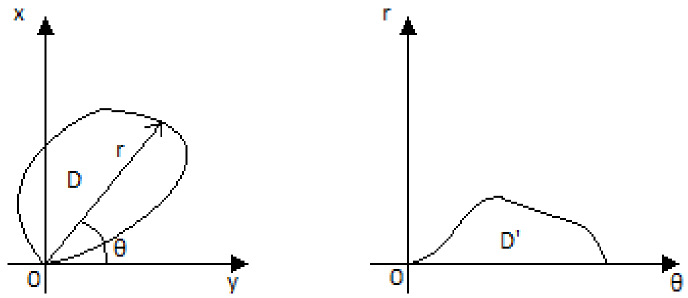
$$\Leftrightarrow \qquad T(y) \geq T(x_0)$$

5.2 Το Ισοπεριμετρικο Προβλημα

Πρόκειται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Συνδέεται με το μύθο της Διδούς, βασίλισσας της Καρχηδόνας, που τοποθετείται περίπου στον 9^o αιώνα π.Χ.

Ο ορισμός του προβλήματος έχει ως εξής: Από όλες τις ομαλές κλειστές καμπύλες στο επίπεδο με σταθερό μήκος L_0 προσδιορίζουμε εκείνη που το εσωτερικό της χωρίο D έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό.

Αναμένεται πως κάθε υποψήφια λύση για το παραπάνω πρόβλημα είναι τέτοια ώστε το D να είναι κυρτό. Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι όλες οι καμπύλες διέρχονται από το $0 \in \mathbb{R}^2$.



Εικόνα 5.1

Μπορούμε να εκφράσουμε τις καμπύλες με την παραμετρική μορφή

$$(x,y) = (r(\theta)\sin\theta, r(\theta)\cos\theta)$$

για κάποια λεία απεικόνιση $r:[0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $r(0) = r(\pi) = 0$. Αναζητούμε την $r(\cdot)$ έτσι ώστε το εμβαδόν S του D να γίνει μέγιστο. Υπολογίζουμε:

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \det\begin{pmatrix} x_\theta & x_r \\ y_\theta & y_r \end{pmatrix} d\theta dr = \iint_{D'} \det\begin{pmatrix} r\cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} d\theta dr$$

$$= \iint_{D'} (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\, d\theta dr = \int_0^\pi \left(\int_0^{r(\theta)} r\, dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2(\theta) d\theta$$

Και για το μήκος $L(C)$ της καμπύλης C:

$$L(C) = \int_0^\pi \left| \frac{d}{d\theta}(r(\theta)\sin\theta, r(\theta)\cos\theta) \right| d\theta = \int_0^\pi (\dot{r}^2(\theta) + r^2(\theta))^{1/2}\, d\theta$$

Ζητάμε τα ακρότατα του συναρτησιακού

$$T(r)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\theta)\,d\theta \tag{5.28}$$

με τον περιορισμό

$$g(r)=\int_0^{\pi}(\dot{r}^2(\theta)+r^2(\theta))^{1/2}\,d\theta-L_0=0 \tag{5.29}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3 και την πιο πάνω σημείωση υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε τα υποψήφια ακρότατα του προβλήματος να είναι στατικά σημεία του

$$\hat{T}=T+\lambda g=\int_0^{\pi}\left(\tfrac{1}{2}r^2+\lambda(\dot{r}^2+r^2)^{1/2}-\lambda\frac{L_0}{\pi}\right)d\theta$$

Άρα ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler – Lagrange, $\frac{d}{d\theta}F_{\dot{r}}=F_r$, και επειδή η F είναι ανεξάρτητη του ϑ έχουμε ισοδύναμα:

$$F-\dot{r}\frac{\partial F}{\partial\dot{r}}=\sigma\tau\alpha\theta.\Rightarrow\frac{1}{2}r^2+\lambda(\dot{r}^2+r^2)^{1/2}-\dot{r}\lambda\frac{\dot{r}}{(\dot{r}^2+r^2)^{1/2}}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}r^2+\lambda\frac{r^2}{(\dot{r}^2+r^2)^{1/2}}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

όπου λαμβάνοντας υπ’ όψιν πως θα πρέπει $r(0)=0$, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}r^2+\lambda\frac{r^2}{(\dot{r}^2+r^2)^{1/2}}=0$$

Έπεται:

$$\begin{aligned}((\dot{r}^2+r^2)^{1/2}+2\lambda)\,r^2=0&\Rightarrow\dot{r}^2+r^2=4\lambda^2\quad\text{και}\quad\lambda<0\\&\Rightarrow\dot{r}^2=4\lambda^2-r^2\\&\Rightarrow\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}=(4\lambda^2-r^2)^{1/2}\\&\Rightarrow\frac{d\theta}{dr}=(4\lambda^2-r^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

Συνεπώς $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{r}{-2\lambda}\right)$, και άρα

$$r(\theta)=-2\lambda\sin\theta \tag{5.30}$$

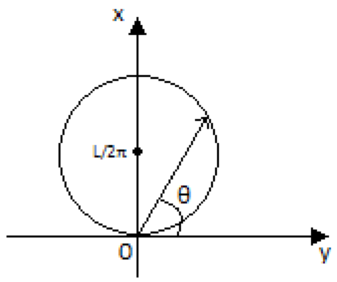
Από τον περιορισμό (5.29) και με αντικατάσταση όπου r την (5.30) προκύπτει

$$\int_0^{\pi} (\dot{r}^2 + r^2)^{1/2}\ d\theta = L_0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(4\lambda^2 \cos^2(\theta) + 4\lambda^2 \sin^2(\theta)\right)^{1/2}\ d\theta = L_0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} 2\lambda\ d\theta = L_0$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda\pi = L_0$$

και η τελευταία ισότητα δίνει $\lambda = -\frac{L_0}{2\pi}$. Άρα η συνάρτηση

$$r = r(\theta) = \frac{L}{\pi}\sin\theta, \quad \theta \in [o, \pi] \tag{5.31}$$

είναι στατικό σημείο για το $\hat{T}$ και πληροί τον περιορισμό (5.29). Μπορούμε να δούμε πως η λύση (5.31) περιγράφει γεωμετρικά μια περιφέρεια κύκλου ακτίνας *L/2π*.



Εικόνα 5.2

Η παραπάνω λύση είναι υποψήφια για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Στο Κεφάλαιο 6 βλέπουμε ότι πράγματι μεγιστοποιεί το εμβαδόν του χωρίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:

ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΩΝ – ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΙΣΧΥΡΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό ερευνούμε επιπλέον ικανές συνθήκες, ώστε να μπορεί να ειπωθεί ότι ένα ακραίο σημείο είναι ένα ασθενές ή ισχυρό ακρότατο. Αρχικά θα επικεντρωθούμε στον καθορισμό μια ικανής συνθήκης για ένα ισχυρό ελάχιστο (μέγιστο). Αυτή η διερεύνηση θα οδηγήσει σε μια ικανή συνθήκη για ασθενές ελάχιστο (μέγιστο) και σε μια επιπλέον αναγκαία συνθήκη ισχυρού ακρότατου.

Έστω το συναρτησιακό $T: X \to Y$ με

$$T(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x}) dt \tag{6.1}$$

όπου $x: [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ και $x \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2]$ και $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ κλάσεως $\mathcal{C}^1$.

Όπως είπαμε σκοπός είναι να βρούμε ικανές συνθήκες ώστε να ελαχιστοποιείται το συναρτησιακό, και πιο συγκεκριμένα ζητάμε ικανές συνθήκες για ισχυρό ελάχιστο. Όπως είδαμε στο Κεφαλαιο 2,

Ορισμός 6.1.1: *Ένα $x_0 \in X$ λέγεται σημείο (τοπικού) ελαχίστου για το T αν $T(x) \geq T(x_0)$ $\forall x \neq x_0$ σε μια γειτονιά του x_0 ($x \in N_w^\delta(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$). Ενώ λέγεται σημείο αυστηρού ελαχίστου αν $T(x) > T(x_0)$ $\forall x \neq x_0$ με $x \in N_w^\delta(x_0)$.*

Υποθέτουμε ότι $x_0 = x_0(t) \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2]$ είναι ένα πιθανό ελάχιστο για το T και θέλουμε ικανές συνθήκες ώστε

$$\Delta T = T(x) - T(x_0) \geq 0 \;\; \forall x \in N_w^\delta(x_0) \tag{6.2}$$

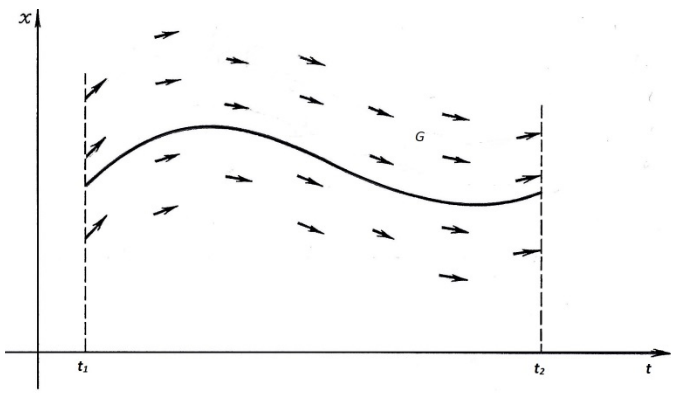
Αφού το x_0 είναι ελάχιστο, πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler–Lagrange. Δηλαδή

$$f_x(x,\dot{x},t)=\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)$$

Η ιδέα του Weierstrass[2], για την εξέταση του προβλήματος, ήταν να βρεθεί ένα «πεδίο ακρότατων», που να ενσωματώνεται εκεί μέσα το x_0 (το πιθανό ακρότατο), και έπειτα μετασχηματίζοντας το ΔT να ελέγχεται αν ελαχιστοποιείται. Μια προσέγγιση αυτής της ιδέας προτάθηκε και από τον Hilbert.

6.2 Πεδιο Ακροτατων

Θα πρέπει λοιπόν να ορίσουμε τι είναι το «πεδίο ακρότατων». Αρχικά θεωρούμε μια μονο-παραμετρική οικογένεια ακρότατων, λύσεων της εξίσωσης Euler – Lagrange όπου απαιτούμε δύο καμπύλες να μην περνούν από το ίδιο σημείο σε ένα χωρίο $M\subset\mathbb{R}^2$ και να μην υπάρχουν σημεία που να μην περνά καμπύλη. Επιπλέον οι καμπύλες, συσχετίζονται σε κάθε σημείο του *M*, με την κατεύθυνση της κλίσης του ακρότατου που περνάει απ' αυτό το σημείο. Όλες αυτές οι κατευθύνσεις ορίζουν το πεδίο ακρότατων. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι το πεδίο είναι η συλλογή των μοναδιαίων διανυσμάτων της κατεύθυνσης της κλίσης σε κάθε σημείο $(t,x(t))$.



Εικόνα 6.1

[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897

Ορισμός 6.2.1: *Έστω M ένα ανοικτό, φραγμένο και απλώς-συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^2$. *Μια οικογένεια επαρκώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων* $X:(t,a)\to X(t,a)$ *ορίζει ένα πεδίο ακρότατων* $G=\{(t,X(t,a)) : (t,a)\in M\}$ *αν ικανοποιούνται τα επόμενα:*

α) Το χωρίο $G=\{(t,X(t,a)) : (t,a)\in M\}$ *είναι ένα απλώς συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^2$.

β) Για κάθε α η συνάρτηση $x(\cdot)=X(\cdot,a)$ *είναι στατικό σημείο του Τ.*

γ) Υπάρχει μια επαρκώς παραγωγίσιμη απεικόνιση

$$A:(t,x)\to A(t,x), \qquad (t,x)\in[t_1,t_2]\times\mathbb{R}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} x_0 &= X(t_0,A(t_0,x_0)) \qquad &\forall (t_0,x_0)\in[t_1,t_2]\times\mathbb{R} \\ A(t_0,X(t_0,a_0)) &= a_0 \qquad &\forall (t_0,a_0)\in M \end{aligned}$$

Στην ουσία, ένα πεδίο ορίζει μια διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης, την $\dot{x}=X(t,a)$, η οποία ικανοποιείται από μια υπό-οικογένεια ακρότατων, τα οποία με τη σειρά τους είναι λύσεις της εξίσωσης Euler-Lagrange $2^{ης}$ τάξης.

Ορισμός 6.2.2: *Ένα ακρότατο* $x_0(t)\in C^1[t_1,t_2]$ *εμβαπτίζεται-ενσωματώνεται σε ένα πεδίο* $G=\{(t,X(t,a)) : (t,a)\in M\}$ *αν*

α. Το G ορίζεται σε ένα απλώς-συνεκτικό χωρίο του M που περιέχει μια γειτονιά του x_0.

β. Το x_0 *είναι λύση της* $\dot{x}=X(t,a)$

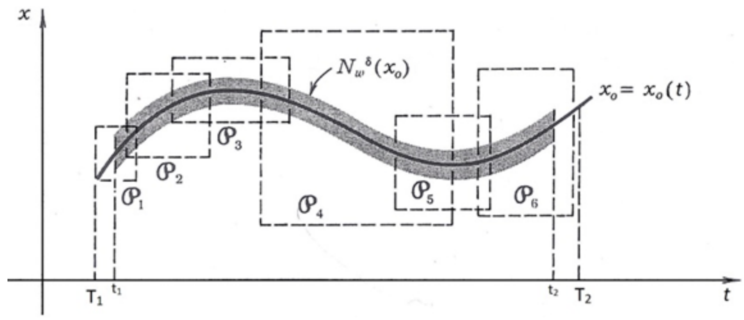
Το επόμενο λήμμα δίνει μια ικανή συνθήκη ενσωμάτωσης ενός ακρότατου σε ένα πεδίο.

Λήμμα 6.2.1: *Αν η X(t,a) είναι μια μονο-παραμετρική οικογένεια λύσεων της εξίσωσης Euler–Lagrange στο* $S=\{(t,a) \mid t_1<t<t_2 \ , a_1<a<a_2\}$ *τέτοια ώστε* $X(t,a_0)=x_0(t)$ *για κάποιο* $a_0\in(a_1,a_2)$ *και αν* $X, X_{tt}, X_a, X_{ta}\in\mathcal{C}(S)$ *και* $X_a(t,a_0)\neq 0 \ \forall t\in[t_1,t_2]$ *τότε το* $x_0(t)$ *ενσωματώνεται σε ένα πεδίο.*

Απόδειξη: Έστω $n_0 = x_0(t_0)$ με $t_0 \in [t_1, t_2]$ και έστω το σύνολο $S' = \{(t,x,a) : t_1 < t < t_2, -\infty < x < \infty, a_1 < a < a_2\}$. Τότε

$$\begin{aligned} &x - X(t,a) \in \mathcal{C}^1(S') \\ &n_0 - X(t_0,a_0) = x_0(t_0) - x_0(t_0) = 0 \\ &X_a(t_0,a_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα από το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, υπάρχει στο *S′* ένα ανοικτό παραλληλεπίπεδο $\mathcal{P} = \{(t,x,a) : |t-t_0| < \alpha_0, |x-\eta_0| < \beta_0, |a-a_0| < \gamma_0\}$ τέτοιο ώστε στο $\mathcal{P}_0 = \{(t,x) : |t-t_0| < a_0, |x-\eta_0| < \beta_0\}$ μπορούμε να λύσουμε την $x - X(t,a) = 0$ για μοναδικό $a = A(t,x)$ με $(t,a) \in \mathcal{P}_0$ και $|a-a_0| < \gamma_0$ για $(t,a) \in \mathcal{P}_0$, $A(t,x) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{P}_0)$. Τότε $A(t, X(t,a)) = a$.



Εικόνα 6.2

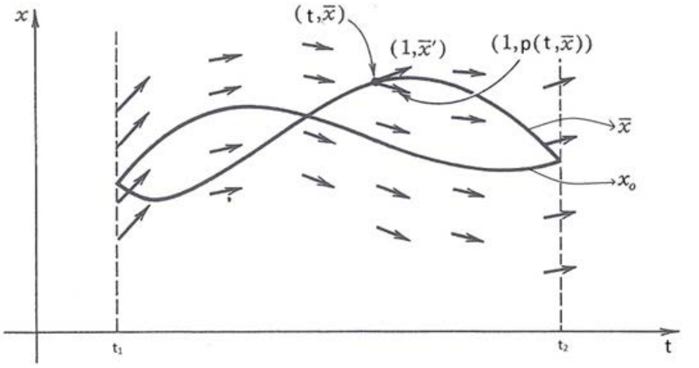
Επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα για κάθε *t* και παίρνουμε ένα ανοικτό κάλυμμα του $x = x_0(t)$ στο $[t_1, t_2]$ από ορθογώνια. Από το θεώρημα Heine-Borel υπάρχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη του $x_0(t)$ από ορθογώνια. Έστω $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \ldots, \mathcal{P}_n$ και έστω $\mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{P}_k$ η ένωσή τους. Τότε υπάρχει μια γειτονιά του x_0 υποσύνολο του $\mathcal{P}$ δηλαδή $N_w^\delta(x_0) \subset \mathcal{P}$. Η αρίθμηση των $\mathcal{P}_k$ είναι τέτοια ώστε ορθογώνια με διαδοχικούς δείκτες να επικαλύπτονται και αφού το $a = A(t,x)$ είναι μοναδικό σε κάθε $\mathcal{P}_k$, θα πρέπει και οι τιμές του $A(t,x)$ να συμπίπτουν στα επικαλυπτόμενα ορθογώνια. Οπότε $a = A(t,x) \in \mathcal{C}^1\left(N_w^\delta(x_0)\right)$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς μπορούμε να ορίσουμε την *κλίση*

$$p(t,x) := \left.\frac{\partial X(t,a)}{\partial t}\right|_{a=A(t,x)} \tag{6.3}$$

και να δείξουμε ότι ορίζει ένα πεδίο σε γειτονιά του x_0.

Αν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε τροχιά $\overline{x}$ μέσα στο πεδίο, για κάθε σημείο της $(t_0,\overline{x}(t_0))$ θα έχουμε δύο κλίσεις· μία η κλίση του πεδίου $p(t_0,\overline{x}(t_0)) := \left.\dfrac{\partial X(t_0,a)}{\partial t}\right|_{a=A(t_0,\overline{x})}$ και μία η κλίση του σημείου ως προς την τροχιά του $\dot{\overline{x}} = \dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial t}$.



Εικόνα 6.3

Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$p(t,x) = \left.\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\right|_{a=A(t,x)} \in \mathcal{C}\left(x \in N_w^{\delta}(x_0)\right)$$

$$p_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\right|_{a=A(t,x)}\right) + \frac{\partial}{\partial a}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\right|_{a=A(t,x)}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}A(t,x) \in \mathcal{C}\left(x \in N_w^{\delta}(x_0)\right)$$

$$p_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\right|_{a=A(t,x)}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}A(t,x) \in \mathcal{C}\left(x \in N_w^{\delta}(x_0)\right)$$

Επίσης $p(t,X(t,a)) = \left.\dfrac{\partial}{\partial t}X(t,a)\right|_{a=A(t,X(t,a))} = \dfrac{\partial}{\partial t}X(t,a)$ αφού $A(t,X(t,a)) \equiv a$.

Άρα, η μονο-παραμετρική οικογένεια ακρότατων $X(t,a)$ είναι λύση της $\dfrac{\partial}{\partial t}X(t,a) = p(t,x)$. Συνεπώς η $p(t,x)$ είναι σύμφωνη με τους προηγούμενους ορισμούς και άρα ορίζει ένα πεδίο ακρότατων.

6.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

6.3.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ)

Θεωρούμε το συναρτησιακό $T: X \to Y$ με $T(x) = \int_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\, dt$ και αρχικές συνθήκες $x(0)=0,\ x(1)=1$ και θέλουμε να το ελαχιστοποιήσουμε.

Τα στατικά σημεία δίνονται από την οικογένεια λύσεων $x(t) = kt + a,\ t[0,1]$, της εξίσωσης Euler–Lagrange

$$\frac{\ddot{x}(t)}{\left(1+\dot{x}^2(t)\right)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = 0$$

απ' όπου για *k=1* παίρνουμε την οικογένεια

$$X(t,a) = t + a,\quad (t,a) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

Το $x_0(t) = t$ είναι ένα ακρότατο που πληροί τις συνοριακές συνθήκες $x(0)=0$, $x(1)=1$ και για $a=0$ έχουμε $x_0(t) = X(t,0)$.

Ακόμη ορίζεται η $A(t,x) = x - t$ η οποία ικανοποιεί τα β, γ του Ορισμού 6.2.1.

Επίσης οι $X(t,a),\ \ddot{X}(t,a) = 0,\ X_a(t,a) = 1,\ \dot{X}_a(t,a) = 0$ είναι παντού συνεχείς και επιπλέον $X_a(t,a) = 1 \neq 0$. Άρα το $x_0(t) = t$ είναι εμβαπτίσιμο στο πεδίο που ορίζει η $X(t,a) = t + a$.

Η κλίση του πεδίου ισούται με:

$$p(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} X(t,a)\Big|_{a=A(t,x)} = 1 \text{ αφού } A(t,x) = x - t$$

Μια άλλη μονο-παραμετρική οικογένεια λύσεων είναι η $X(t,a) = at + a - 1$. Οι $X(t,a),\ \ddot{X}(t,a),\ X_a(t,a),\ \dot{X}_a(t,a)$ είναι συνεχείς και $X_a(t,a) = t + 1 \neq 0\ \forall t > -1$. Οπότε το ακρότατο $x_0(t) = t = X(t,1)$ είναι εμβαπτίσιμο στο πεδίο $X(t,a) = at + a - 1, t > -1$.

Η κλίση του πεδίου σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$p(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} X(t,a)\Big|_{a=A(t,x)} = a = \frac{x+1}{t+1} \text{ αφού } A(t,x) = \frac{x+1}{t+1}.$$

6.3.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω το συναρτησιακό $T(x)=\int_1^2 \dot{x}^2(t)t^3\,dt$.

Τα στατικά σημεία (§ 2.3.1) δίνονται από την οικογένεια συναρτήσεων

$$x(t)=\frac{k}{t^2}+\ell \text{ με } k,\ell\in\mathbb{R} \text{ και } t\in[1,2].$$

Αν θεωρήσουμε σταθερό το *ℓ*, έστω $\ell=\ell_0$, τότε ορίζεται η μονο-παραμετρική οικογένεια $X(t,a)=\frac{a}{t^2}+\ell_0$ με $(t,a)\in M:=[1,2]\times\mathbb{R}$ η οποία αποτελεί πεδίο ακρότατων με $A(t,x)=(x-\ell_0)\,t^2$ και κλίση

$$\begin{aligned} p(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\Big|_{a=A(t,x)} &= -\frac{2}{t^3}a\Big|_{a=A(t,x)} \\ = -\frac{2}{t^3}(x-\ell_0)t^2 &= -\frac{2}{t}(x-\ell_0) \end{aligned}$$

Αν όμως θεωρήσουμε σταθερό το *k*, έστω $k=k_0$, τότε έχουμε την οικογένεια $X(t,a)=\frac{k_0}{t^2}+a$, που επίσης ορίζει πεδίο ακρότατων με $A(t,x)=x-\frac{k_0}{t^2}$ και κλίση $p(t,x)=-\frac{2k_0}{t^3}$.

6.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ HILBERT

Έστω $x_0(t)$ ένα ακρότατο, που εμβαπτίζεται σε ένα πεδίο και έστω $\overline{x}(t)$ μια C^1 συνάρτηση με $\overline{x}(t)\in N_w^\delta(x_0)$ που βρίσκεται μέσα στο πεδίο. Έχουμε δει ότι για κάθε σημείο $(t,\overline{x}(t))$ διακρίνεται η κλίση του πεδίου $p(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\Big|_{a=A(t,x)}$ και η κλίση της καμπύλης $\overline{x}(t)$, $\dot{\overline{x}}(t)=\frac{\partial}{\partial t}\overline{x}(t)$. (*Εικόνα 6.3, σελ. 41*)

Θεωρούμε το παρακάτω ολοκλήρωμα *K(x)*, έτσι ώστε να ορίζεται για κάθε σημείο της καμπύλης $\overline{x}(t)$, αφού η $\overline{x}(t)$ μπορεί να περνάει από οποιοδήποτε σημείο *(t,x)* στη γειτονιά του x_0.

$$K(\overline{x}) := \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t,\overline{x}(t),p(t,\overline{x})) + (\dot{\overline{x}}(t) - p(t,\overline{x}))\, f_{\dot{x}}(t,\overline{x}(t),p(t,\overline{x})) \right] dt \tag{6.4}$$

Παρατηρούμε ότι για το ακρότατο $x_0(t)$ ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} K(x_0) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t,x_0(t),p(t,x_0)) + (\dot{x}(t) - p(t,x_0))\, f_{\dot{x}}(t,\dot{x}(t),p(t,x_0)) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(x_0,\dot{x}_0,t)\,dt \\ &= T(x_0) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Αφού η κλίση κάθε σημείου του ακρότατου $x_0(t)$ ισούται με την κλίση του πεδίου, δηλαδή $\dot{x}_0(t) = \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) = \frac{\partial}{\partial t} X(t,a)\Big|_{a=A(t,x_0)} = p(t,x_0)$.

Θεώρημα 6.4.1: *(Hilbert) Έστω $x_0(t)$ ένα ακρότατο, εμβαπτίσιμο σε ένα πεδίο. Τότε το ολοκλήρωμα $K(\overline{x})$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης (ίδιου προσανατολισμού) και εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\overline{x}(t_1)$, $\overline{x}(t_2)$.*

Απόδειξη: Το ολοκλήρωμα $K(\overline{x})$ μπορεί να γραφεί σαν επικαμπύλιο ως εξής

$$K(\overline{x}) = \int_c u(t,\overline{x}(t))\,dt + v(t,\overline{x}(t))\,dx$$

όπου *"c"* η καμπύλη $(t,\overline{x}(t))$

$$u(t,x) := f(t,x(t),p(t,x)) - p(t,x)\, f_{\dot{x}}(t,x(t),p(t,x))$$

και $\quad v(t,x) := f_{\dot{x}}(t,x(t),p(t,x))$

Αρκεί να δείξουμε ότι $u_x - v_t = 0$, οπότε από το θεώρημα Green θα προκύψει το ζητούμενο.

Έχουμε

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{df}{dx} - \frac{d\,pf_{\dot{x}}}{dx} \\ &= f_x + f_{\dot{x}}\,p_x - p_x f_{\dot{x}} - p(f_{\dot{x}x} + f_{\dot{x}\dot{x}} p_x) \\ \Rightarrow u_x &= f_x - p\,f_{\dot{x}x} - p\,p_x\,f_{\dot{x}\dot{x}} \end{aligned} \tag{6.6}$$

και
$$v_t = \frac{df_{\dot{x}}}{dt} = f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}\dot{x}} p_t$$

Οπότε

$$\begin{aligned} u_x - v_t &= f_x - p\,f_{\dot{x}x} - p\,p_x\,f_{\dot{x}\dot{x}} - f_{\dot{x}t} - f_{\dot{x}\dot{x}}\,p_t \\ &= f_x - f_{\dot{x}t} - p\,f_{\dot{x}x} - f_{\dot{x}\dot{x}}(pp_x + p_t) \\ &= f_x - f_{\dot{x}t} - X_t\,f_{\dot{x}\dot{x}} - f_{\dot{x}\dot{x}}(X_t\,X_{ta}\,A_x + X_{tt} + X_{ta}\,A_t) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Επειδή $p_t(t,x) = X_{tt} + X_{ta}\,A_t$ και $p_x(t,x) = X_{ta}\,A_x$ και

$$\begin{aligned} & A(t, X(t, a_0)) = a_0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} A(t, X(t, a_0)) = 0 \\ \Rightarrow & A_t + A_x\,X_t = 0 \\ \Rightarrow & A_t = -A_x\,X_t \end{aligned}$$

με αντικατάσταση στην (6.8) προκύπτει το ζητούμενο:

$$\begin{aligned} u_x - v_t &= f_x - f_{\dot{x}t} - X_t\,f_{\dot{x}x} - f_{\dot{x}\dot{x}}(X_t\,X_{ta}\,A_x + X_{tt} - X_{ta}\,A_x X_t) \\ &= f_x - \underbrace{f_{\dot{x}t} - X_t\,f_{\dot{x}x} - f_{\dot{x}\dot{x}}\,X_{tt}}_{\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}} \\ &= f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}, \text{ εξίσωση Euler - Lagrange} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση $W = W(t,x) \in \mathcal{C}^1(N_w^{\delta}(x_0))$ τέτοια ώστε $W_x = u(t,x)$ και $W_t = v(t,x)$.

Οπότε

$$\begin{aligned} K(\overline{x}) &= \int_c W_x dx + W_t dt \\ &= \int_c dW(t, \overline{x}(t)) \\ &= W(t_2, \overline{x}(t_2)) - W(t_1, \overline{x}(t_1)) \end{aligned}$$

■

6.5 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Είδαμε πιο πριν ότι το $K(\overline{x})$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, όσο το $\overline{x}$ βρίσκεται μέσα σε γειτονιά του x_0, $N_w^{\delta}\left(x_0\right)$, και ότι εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\overline{x}(t_1)$, $\overline{x}(t_2)$.

Οπότε

$$K(\overline{x})=K(x_0) \text{ με } \overline{x}(t_1)=x_0(t_1) \text{ και } \overline{x}(t_2)=x_0(t_2) \tag{6.9}$$

Επίσης έχουμε ότι $K(x_0)=T(x_0)$, από την εξίσωση (6.5), όπου $x_0(t)$ ακρότατο.

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την ολική μεταβολή ΔT ως εξής:

$$\begin{aligned}\Delta T &= T(\overline{x})-T(x_0)\\ &= T(\overline{x})-K(x_0)\\ &= T(\overline{x})-K(\overline{x})\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[f(t,\overline{x},\dot{\overline{x}})-f(t,\overline{x},p(t,\overline{x}))+(p(t,\overline{x})-\overline{x})f_{\dot{x}}(t,\overline{x},p)\right]dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{E}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}},p(t,\overline{x}))dt\end{aligned} \tag{6.10}$$

όπου

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},\dot{\overline{x}})=f(t,x,\dot{\overline{x}})-f(t,x,\dot{x})+(\dot{x}-\dot{\overline{x}})f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) \tag{6.11}$$

η $\mathcal{E}$-συνάρτηση του Weierstrass.

Θεώρημα 6.5.1: *Αν το ακρότατο $x_0=x_0(t)$ ενσωματώνεται σε ένα πεδίο ακρότατων, έστω G, το οποίο καλύπτει μια γειτονιά του x_0 και αν $\mathcal{E}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}},p(t,\overline{x}))\geq 0 \ (\leq 0) \quad \forall (t,\overline{x}(t))\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$ και $\forall \dot{\overline{x}}(t)\in(-\infty,\infty)$ τότε το $x_0(t)$ είναι ισχυρό ελάχιστο (μέγιστο) για το συναρτησιακό $T(x)$.*

Απόδειξη: Αφού $\mathcal{E}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}},p(t,\overline{x}))\geq 0 \quad \forall (t,\overline{x}(t))\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$ θα είναι και $\Delta T=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{E}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}},p(t,\overline{x}))dt\geq 0 \quad \forall (t,\overline{x}(t))\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.

■

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω συνθήκη προϋποθέτει τη γνώση της κλίσης του πεδίου. Σε επόμενη παράγραφό θα δούμε ότι είναι δυνατόν να καθορίσουμε αν ένα ακρότατο είναι εμβαπτίσιμο σε πεδίο χωρίς να γνωρίζουμε ακριβώς την κλίση.

Θεώρημα 6.5.2: *(Συνθήκη Weierstrass) Αν το ακρότατο $x = x_0(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ είναι εμβαπτίσιμο σε ένα πεδίο G, που καλύπτει μια γειτονιά του x_0 και αν $\mathcal{E}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dot{x}) \geq 0$ (≤ 0) $\forall (t, \bar{x}(t)) \in N_w^{\delta}(x_0)$* και *$\forall$ $(\dot{x}, \dot{\bar{x}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, τότε το $x_0 = x_0(t)$ είναι ισχυρό ελάχιστο (μέγιστο) για το συναρτησιακό T(x).*

Απόδειξη: Αφού $\mathcal{E}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dot{x}) \geq 0$ $\forall (t, \bar{x}(t)) \in N_w^{\delta}(x_0)$ και $\forall$ $(\dot{x}, \dot{\bar{x}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ τότε θα είναι και $\mathcal{E}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, p(t, \bar{x})) \geq 0$ (≤ 0) $\forall (t, \bar{x}(t)) \in N_w^{\delta}(x_0)$ και $\forall \dot{\bar{x}}(t) \in (-\infty, \infty)$. Οπότε από το προηγούμενο θεώρημα το $x_0(t)$ ελαχιστοποιεί (μεγιστοποιεί) το T.

■

Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των δύο θεωρημάτων είναι ότι το Θεώρημα 6.5.2 είναι πρακτικά πιο εφαρμόσιμο.

6.5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω το συναρτησιακό $T(x) = \int_1^2 \dot{x}^2 t^3 \, dt$, με $x(1) = 1$, $x(2) = 5/2$. Βρίσκουμε πως το $x(t) = \dfrac{1}{t^2} + 1$ είναι το μοναδικό στατικό σημείο του Τ με τους δοθέντες περιορισμούς το οποίο ενσωματώνεται σε πεδίο ακρότατων, όπως δείχθηκε στο παράδειγμα της παραγράφου 6.3.2 (σελ. 43). Επιπλέον υπολογίζουμε

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, p(t, x)) = \mathrm{t}^3 (\dot{x} - p)^2 \geq 0, \quad \forall t \in [1, 2]$$

Άρα το Θεώρημα 6.5.2 εξασφαλίζει πως η $x(\cdot)$ καθιστά το συναρτησιακό T (ισχυρό) ελάχιστο.

6.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΣΧΥΡΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε το παρακάτω συναρτησιακό *T(x)* για διάφορες περιπτώσεις του άνω άκρου.

Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$T(x)=\int_0^{t_2}(\dot{x}^2(t)-x^2(t))dt \tag{6.12}$$

με $x:\mathcal{C}^1[t_1,t_2]\to\mathbb{R}$ και $x(0)=0,\ \ x(t_2)=1$.

<u>*$1^η$ περίπτωση:*</u> Το άκρο t_2 είναι μικρότερο του π

Από την εξίσωση Euler-Lagrange

$$f_x=\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\Leftrightarrow \ddot{x}(t)+x(t)=0 \tag{6.13}$$

για το συναρτησιακό παίρνουμε τη γενική λύση

$$x=x(t,\alpha,\beta)\equiv\alpha\cos t+\beta\sin t \tag{6.14}$$

και σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\alpha=0,\quad \beta=\frac{1}{\sin t_2}\quad (\sin t_2\neq 0 \text{ αφού } \ 0<t_2<\pi)$$

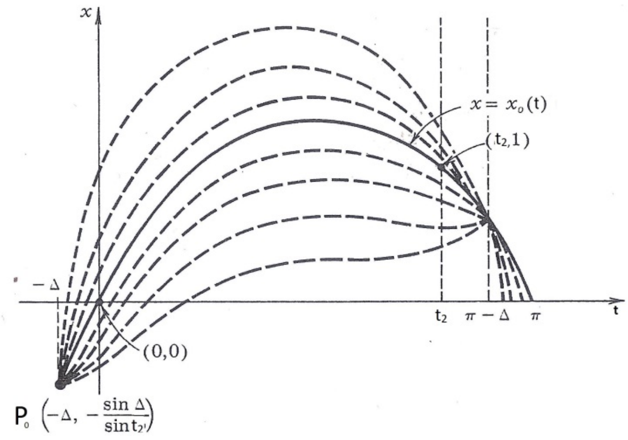
Άρα το

$$x_0=x_0(t)\equiv\frac{\sin t}{\sin t_2} \tag{6.15}$$

είναι ένα ακρότατο του συναρτησιακού.

Με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα πεδίο στο οποίο να ενσωματώνεται το x_0, κατασκευάζουμε μια μονο-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων *X(t,α)*, από την *x(t,α,β)*, η οποία περιέχει το ακρότατο ως μέλος και καλύπτει μια *δ*-γειτονιά του x_0.

Αφού $t_2<\pi$, υπάρχει ένα *Δ>0* τέτοιο ώστε $t_2<\pi-\Delta\Leftrightarrow\Delta<\pi-t_2$. Το ακρότατο $x_0=x_0(t)$ περνάει από το σημείο $P_0\left(-\Delta,-(\sin\Delta)/(\sin t_2)\right)$.



Εικόνα 6.4

Θεωρούμε όλα τα μέλη της που περνάνε από το σημείο P_0:

$$x(-\Delta,\alpha,\beta)=\alpha\cos\Delta-\beta\sin\Delta=-\frac{\sin\Delta}{\sin t_2}\quad\left(=x_0(-\Delta)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha\cot\Delta-\beta=-\frac{1}{\sin t_2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha=\left(\beta-\frac{1}{\sin t_2}\right)\tan\Delta$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην γενική λύση (6.14) προκύπτει

$$X(t,a)=\left(a-\frac{1}{\sin t_2}\right)\tan\Delta\,\cos t+a\sin t \tag{6.16}$$

Τότε η $x=X(t,a)$ περιέχει το ακρότατο $x_0=x_0(t)$ για $a_0=\dfrac{1}{\sin t_2}$.

Επιπλέον

$$X_a(t,a)=\tan\Delta\,\cos t+\sin t \tag{6.17}$$

και βλέπουμε ότι $X_a(t,a)=0$ αν και μόνο αν $\tan\Delta+\tan t=0$ δηλαδή, $t=-\Delta+k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Άρα, η $X_a(t,a)$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα *[0,t₂]*, και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Λήμματος 6.2.1.

Λύνοντας την $x=X(t,a)$ ως προς $a\equiv A(t,x)$

$$A(t,x)=\frac{x+\tan\Delta\dfrac{1}{\sin b}\cos t}{\tan\Delta\cos t+\sin t} \tag{6.18}$$

και αντικαθιστώντας στη $\dfrac{\partial}{\partial t}X(t,a)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)&=a\cos t-\left(a-\frac{1}{\sin b}\right)\tan\Delta\sin t\\ &=a(\cos t-\tan\Delta\sin t)+\frac{1}{\sin b}\tan\Delta\sin t\end{aligned} \tag{6.19}$$

έχουμε την κλίση του πεδίου:

$$\begin{aligned}p(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}X(t,a)\Big|_{a=A(t,x)}&=\frac{x+\tan\Delta\dfrac{1}{\sin t_2}\cos t}{\tan\Delta\cos t+\sin t}(\cos t-\tan\Delta\sin t)+\frac{\sin t}{\sin t_2}\tan\Delta\\ &=\frac{x\sin t_2+\tan\Delta\cos t}{\tan\Delta\cos t+\sin t}\left(\frac{\cos t-\tan\Delta\sin t}{\sin t_2}\right)+\frac{\sin t}{\sin t_2}\tan\Delta\end{aligned} \tag{6.20}$$

Υπολογίζουμε την $\mathcal{E}$-συνάρτηση ώστε να ελέγξουμε το πρόσημό της. Έχουμε $f=\dot{x}^2(t)-x^2(t)$ και $f_{\dot{x}}=2\dot{x}(t)$

Οπότε

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t,\overline{x},\dot{x},\dot{\overline{x}})&=\dot{\overline{x}}^2-\overline{x}^2-\dot{x}^2+\overline{x}^2+(\dot{x}-\dot{\overline{x}})(2\dot{x})\\ &=(\dot{x}-\dot{\overline{x}})^2\geq 0\end{aligned} \tag{6.21}$$

Άρα το $x_0=x_0(t)=(\sin t)/(\sin t_2)$ είναι ισχυρό ακρότατο για το συναρτησιακό (6.12). Επίσης προκύπτει ότι είναι απόλυτα ελάχιστο στο $\Sigma=\{x: x\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2],\ x(0)=0,\ x(t_2)=1,\ 0<t_2<\pi\}$ απ' το γεγονός ότι το πεδίο καθορίζεται για κάθε x και σε όλο το διάστημα $[t_1,t_2]$ και ότι $\mathcal{E}=0$ στο $[t_1,t_2]$ αν και μόνο αν $\dot{\overline{x}}(t)=\dot{x}_0(t)$ για κάθε $x\in[t_1,t_2]$.

<u>*$2^η$ περίπτωση:*</u> Θεωρούμε την περίπτωση όπου $t_2=\pi$

Αφού $x(t,\alpha,\beta)=-x(t+\pi,\alpha,\beta)$, βλέπουμε ότι είναι δυνατόν σ' αυτή την περίπτωση να συνδέσουμε ένα δοθέν αρχικό σημείο $P_{t_1}(0,x_{t_1})$ σε οποιοδήποτε τελικό σημείο $P_{t_2}(\pi,x_{t_2})$. Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να ικανοποιούνται τότε μόνο αν $x_{t_1}=-x_{t_2}$, και ειδικότερα, $x_{t_1}=0$ αν $x_{t_2}=0$. Εξετάζουμε την περίπτωση $x_{t_1}=x_{t_2}=0$. Από την (6.14) τότε έχουμε

$$x_0=x_0(t)=X(t,0,\beta)=\beta\sin t\,,$$

μια μονο-παραμετρική οικογένεια ακρότατων, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Επίσης έχουμε ότι

$$T(X(t,0,\beta))=\int_0^{\pi}(\beta^2\cos^2 t-\beta^2\sin^2 t)\,dt=\int_0^{\pi}\cos 2t\;dt=0$$

για κάθε *β*, δηλαδή, το *T(x)* έχει την τιμή μηδέν, για όλα τα ακρότατα *x=X(t,0,β)*.

Δεν αρκεί όμως αυτό για ισχυρό ελάχιστο (ή μέγιστο) και απαιτείται να ισχύει ότι *ℰ≥0* (ή ≤0) κατά μήκος του ακρότατου καθώς και η συνθήκη εμβαπτισιμότητας.

<u>*3η περίπτωση:*</u> $\pi<t_2<2\pi$

Θεωρούμε το ίδιο πρόβλημα με πριν, αλλά χωρίς τον περιορισμό *0<b≤π*.

Αφού η $x(t,\alpha,\beta)=\alpha\cos t+\beta\sin t$ μηδενίζεται με περίοδο *π* ανεξάρτητα από τα α, β, είναι γίνεται αντιληπτό ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί πεδίο με βάση το Λήμμα 6.2.1. Βλέπουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση κανένα ακρότατο δεν είναι πιθανό να είναι ελάχιστο για το συναρτησιακό.

Έστω $P_{t_1}(0,x_{t_1})$, $P_{t_2}(t_2,x_{t_2})$ το αρχικό και τελικό σημείο αντίστοιχα και υποθέτουμε ότι το ακρότατο x_0 είναι ελάχιστο για το *T(x)*. Αφού $\pi<t_2<2\pi$, υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι (α_0,β_0) τέτοιο ώστε το

$$x_0=x_0(t)\equiv\alpha_0\cos t+\beta_0\sin t$$

να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες ανεξάρτητα από το ποια είναι τα x_{t_1}, x_{t_1}.

Θεωρούμε την καμπύλη

$$x=\bar{x}(t)=\begin{cases}\alpha_0\cos t+(\beta_0+\gamma)\sin t & 0\le t\le\pi\\ \alpha_0\cos t+\beta_0 sint & \pi\le t\le b\end{cases} \qquad (6.22)$$

για *γ≠0*. Η $x=\bar{x}(t)$ είναι συνεχής στο $t=\pi$ και άρα συνεχής στο $0\le t\le t_2$, αλλά η $\dot{\bar{x}}$ δεν είναι συνεχή στο $t=\pi$, διότι

$$\dot{\bar{x}}(\pi^-)=-\beta_0-\gamma, \qquad \dot{\bar{x}}(\pi^+)=-\beta_0$$

Για να είναι το $x=\bar{x}(t)$ ελάχιστο για το συναρτησιακό *T(x)*, λόγω αναγκαιότητας, πρέπει να ικανοποιείται η γωνιακή συνθήκη Weierstrass-Erdmann (η $f_{\dot{x}}$ είναι συνεχής ακόμη και στις «γωνίες» της $x(\cdot)$) στο $t=\pi$.

Βλέπουμε ότι $(f_{\dot{x}})_{\pi^-}\neq(f_{\dot{x}})_{\pi^+}$ αφού

$$(f_{\dot{x}})_{\pi^-}=(2\dot{\bar{x}})_{\pi^-}=-2(\beta_0+\gamma), \qquad (f_{\dot{x}})_{\pi^+}=-2\beta_0,$$

δηλαδή δεν ικανοποιείται η συνθήκη Weierstrass-Erdmann. Ως εκ τούτου, αδιάφορα της τιμής του $T(\bar{x}(t))$, δεν μπορεί να είναι τιμή ελαχίστου.

Δείχνουμε ότι $T(\bar{x})=T(x_0)$:

Σημειώνουμε πρώτα ότι για οποιοδήποτε *A, B* και $x=A\cos t+b\sin t$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\pi[\dot{x}^2(t)-x^2(t)]\,dt&=\int_0^\pi[(-A\sin t+B\cos t)^2-(A\cos t+B\sin t)^2]\,dt\\ &=\int_0^\pi[(B^2-A^2)\cos 2t-2AB\sin 2t]\,dt\\ &=0\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}T(\bar{x})&=\int_0^\pi[((\beta_0+\gamma)\cos t-a_0\sin t)^2-(\alpha_0\cos t+(\beta_0+\gamma)\sin t)^2]\,dt+\int_\pi^b(\dot{x}_0{}^2(t)-x_0{}^2(t))dt\\ &=\int_\pi^b(\dot{x}_0{}^2(t)-x_0{}^2(t))dt\end{aligned}$$

και

$$T(x_0)=\int_0^{\pi}[(\beta_0\cos t-a_0\sin t)^2-(\alpha_0\cos t+\beta_0\sin t)^2]\,dt\ +\int_{\pi}^{b}(\dot{x}_0^{\,2}(t)-x_0^{\,2}(t))dt$$
$$=\int_{\pi}^{b}(\dot{x}_0^{\,2}(t)-x_0^{\,2}(t))dt$$

Άρα έχουμε $T(\overline{x})=T(x_0)$.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε για οποιοδήποτε *δ>0* ένα *γ* τόσο μικρό ώστε $\overline{x}\in N_w^{\delta/2}\left(x_0\right)$ και για τον ίδιο λόγο, $x_0\in N_w^{\delta/2}\left(\overline{x}\right)$. Αφού το $\overline{x}$ δεν είναι (σχετικό) ελάχιστο, υπάρχει μια $x=\eta(t)\in\mathcal{C}^1[0,t_2]$, $n\in N_w^{\delta/2}(\overline{x})$, τέτοια ώστε $T(\eta)<T(\overline{x})=T(x_0)$. Αλλά, αφού $n\in N^{\delta}(x_0)$ και $T(\eta)<T(x_0)$, βλέπουμε ότι το x_0 δεν είναι ασθενές ελάχιστο για το *T(x)*.

Εφόσον $n\in N^{\delta}(x_0)$ και $T(\eta)<T(x_0)$, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $x=x(t)\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$, $x\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$ τέτοια ώστε $T(x)<T(x_0)$, και βλέπουμε ότι το x_0 δεν δίνει ασθενές ελάχιστο για το *T(x)*.

6.7 Κατασκευη Πεδιου και Εξισωση Jacobi

Στο προηγούμενο παράδειγμα, κατασκευάστηκε ένα πεδίο, θεωρώντας μια μονο-παραμετρική οικογένεια ακρότατων που προήλθε από ένα σημείο (κοινό κέντρο) που βρίσκεται εκτός του πεδίου. Τέτοια πεδία καλούνται *κεντρικά πεδία*. Η κατασκευή ενός πεδίου ακρότατων συχνά εξαρτάται από τη φύση του δοθέντος ακρότατου. Γι’ αυτό χρειάζεται η έννοια ενός κεντρικού πεδίου. Ακολουθούν δύο ορισμοί που θα χρειαστούνε για τη συνέχεια.

Ορισμός 6.7.1: *Μια οικογένεια ομαλών ακρότατων που καλύπτει μια ανοικτή, απλώς-συνεκτική περιοχή Μ λέγεται κεντρικό πεδίο ακρότατων αν ακριβώς ένα ακρότατο της οικογένειας περνά από κάθε σημείο της περιοχής.*

Ορισμός 6.7.2: *Ένα ακρότατο x(t) όπου για κάθε σημείο του ισχύει* $f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\neq 0$ *ονομάζεται κανονικό ακρότατο. Τα σημεία ενός ακρότατου για τα οποία ισχύει η ίδια συνθήκη ονομάζονται κανονικά σημεία. Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης (μεγιστοποίησης) ενός συναρτησιακού, λέγεται κανονικό αν ισχύει* $f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\neq 0 \quad \forall\ (t,x(t),\dot{x}(t))$.

Έστω

$$X(t,a),\ \text{με}\quad a_1-\varepsilon<a<a_1+\varepsilon,\ \ t_1-\delta<t<t_2+\delta \tag{6.23}$$

μια μονο-παραμετρική οικογένεια ακρότατων, και έστω $x_0=x_0(t)$ ένα μέλος της για $a=a_0$. Δηλαδή $X(t,a_0)=x_0(t)$ και $a_0\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι $X(t,a),\ \dot{X}(t,a),\ X_a(t,a),\ \dot{X}_a(t,a),\ \ddot{X}(t,a)$ είναι συνεχείς για όλα τα $t\in(t_1-\delta,t_2-\delta),\ \ a\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$.

Επίσης υποθέτουμε ότι όλα τα ακρότατα της (6.23) περνάνε από το ίδιο σημείο $P_0(t_0,x_0)$ όπου $t_1-\delta<t_0<t_1$. Τότε

$$x_0=X(t_0,a)\ \text{για κάθε}\ a\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$$

και προκύπτει

$$X_a(t_0,a)=0 \tag{6.24}$$

Σκοπός είναι να βρούμε αν και πότε μηδενίζεται ξανά η $X_a(t,a)$. Έχουμε δει στο Λήμμα 6.2.1 ότι όταν $X_a(t,a)\neq 0$ μαζί με άλλες συνθήκες τότε το ακρότατο $x_0(t)$ ενσωματώνεται σε πεδίο.

Αφού οι $X(t,a)$ είναι λύσεις της εξίσωσης Euler–Lagrange για κάθε $a\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$, έχουμε ότι

$$f_x(t,X(t,a),\dot{X}(t,a))-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}(t,X(t,a),\dot{X}(t,a))=0\qquad \forall a\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$$

Οπότε

$$\frac{d}{da}\left[f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right]_{\substack{x=X(t,a)\\ \dot{x}=\dot{X}(t,a)}}=0 \tag{6.25}$$

Αν υποθέσουμε ότι η f έχει συνεχείς τρίτες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές, $f\in\mathcal{C}^3$, και ότι $X(t,a),\dot{X}(t,a),X_a(t,a),\dot{X}_a(t,a)$ είναι επίσης συνεχείς τότε και η $\ddot{X}_a(t,a)$ είναι συνεχής.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά παραγώγισης στην (6.25) και συνεχίζοντας τις πράξεις να προκύψει η εξίσωση Jacobi.

$$\frac{d}{da}f_x-\frac{d}{da}\left[\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{da}f_x-\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{da}f_{\dot{x}}\right]=0 \tag{6.26}$$

Υπολογίζοντας τα

$$\frac{d}{da}f_x(t,X(t,a),\dot{X}(t,a))=f_{xx}\,X_a(t,a)+f_{x\dot{x}}\,\dot{X}_a(t,a)$$

και

$$\frac{d}{da}f_{\dot{x}}(t,X(t,a),\dot{X}(t,a))=f_{\dot{x}x}\,X_a(t,a)+f_{\dot{x}\dot{x}}\,\dot{X}_a(t,a)$$

και με αντικατάσταση στην (6.26) έχουμε την:

$$f_{xx}\,X_a(t,a)+f_{x\dot{x}}\,\dot{X}_a(t,a)-\frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}x}\,X_a(t,a)+f_{\dot{x}\dot{x}}\,\dot{X}_a(t,a)\right]=0 \tag{6.27}$$

που είναι μια 2ης τάξης διαφορική εξίσωση για την $X_a(t,a)$. Για απλοποίηση της (6.27) κάνουμε την παρακάτω σύμβαση

$$X_a(t,a)\equiv\eta(t,a)\quad\text{και}\quad \mathrm{X}_a(t,a_0)\equiv\eta(t)$$

Ακόμη για $a=a_0$ έχουμε ότι $X(t,a_0)=x_0(t)$ και $\dot{X}(t,a_0)=\dot{x}_0(t)$.

Οπότε η (6.27) γίνεται

$$\begin{aligned}
&f_{xx}\,\eta(t)+f_{x\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)-\frac{d}{dt}\left[f_{\dot{x}x}\,\eta(t)+f_{\dot{x}\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)\right]=0\\
&\Leftrightarrow f_{xx}\,\eta(t)+f_{x\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)-\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}x}\,\eta(t)\right)-\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)\right)=0\\
&\Leftrightarrow f_{xx}\,\eta(t)+f_{x\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)-\eta(t)\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}x}\right)-f_{\dot{x}x}\dot{\eta}(t)-\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)\right)=0
\end{aligned} \tag{6.28}$$

αφού $\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}x}\,\eta(t)\right)=\eta(t)\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}x}\right)-f_{\dot{x}x}\eta(t)$

Οπότε καταλήγουμε στην

$$\left(f_{xx}-\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}x}\right)\right)\eta(t)-\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}\dot{x}}\,\dot{\eta}(t)\right)=0 \tag{6.29}$$

Θέτοντας

$$
\begin{aligned}
P &= P(t) = f_{xx}(t, x(t), \dot{x}(t)) \\
Q &= Q(t) = f_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \\
R &= R(t) = f_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))
\end{aligned}
$$

και αντικαθιστώντας στην (6.29) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&(P - \dot{Q})\eta(t) - \frac{d}{dt}(R\dot{\eta}(t)) = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{d}{dt}(R(t)\dot{\eta}(t)) + (\dot{Q}(t) - P(t))\eta(t) = 0
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Η εξίσωση (6.30) ονομάζεται *εξίσωση Jacobi* και είναι μια αυτοσυζυγής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς *η(t)*.

Γνωρίζουμε ότι $\eta(t_0) = X_a(t_0, a_0) = 0$ (από την εξίσωση (6.24)) και θέλουμε να βρούμε πότε η *η(t)* μηδενίζεται πάλι. Αυτό θα οδηγήσει σε ένα συγκεκριμένο διάστημα όπου $\eta(t) \neq 0$, και λόγω συνέχειας της *η(t,a),* όπου επίσης $\eta(t,a) \equiv x_a(t,a) \neq 0$ για $|a - a_0|$ ικανοποιητικά μικρό, θα προκύψει ικανή συνθήκη για την ύπαρξη πεδίου.

6.8 Σημεια Μηδενισμου των Λυσεων της Εξισωσης Jacobi – Συζυγη σημεια

6.8.1 Συζυγη Σημεια

Κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις: έστω $x_0 = x_0(t)$ ένα κανονικό ακρότατο στο (A,B) όπου $[t_1, t_2] \subset (A, B)$ και $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{R})$ όπου

$$
\mathcal{R} = \left\{ (t, x(t), \dot{x}(t)) \;\middle|\; A < t < B,\ \left|x - x_0(t)\right| < R_0,\ \leq \left|\dot{x} - \dot{x}_0(t)\right| < (P - \dot{Q})_0 \right\} \tag{6.31}
$$

Τότε $R(t) > 0$ $(\acute{\eta} < 0)$ στο (A, B) και $R, (P - \dot{Q}) \in \mathcal{C}(A, B)$

Θα δούμε ότι είναι δυνατόν να μελετηθούν οι λύσεις της εξίσωσης Jacobi χωρίς να λυθεί.

Λήμμα 6.8.1: *Έστω $\eta = \eta(t)$ μια λύση της εξίσωσης Jacobi (εξίσωση (6.30)) και έστω ότι για κάποιο $t_0 \in (A,B)$ ισχύει $\eta(t_0) = \dot{\eta}(t_0) = 0$. Τότε $\eta(t) = 0$ για κάθε $t \in (A,B)$. Δηλαδή, τα σημεία μηδενισμού μιας μη τετριμμένης λύσης της εξίσωσης Jacobi είναι απλά.*

Λήμμα 6.8.2: *Έστω $\eta = \eta(t)$ μια λύση της εξίσωσης Jacobi. Αν έχει δύο διαδοχικά σημεία μηδενισμού, έστω t_1 και t_1^*, τότε κάθε άλλη λύση $\eta = \overline{\eta}(t)$ η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη με την $\eta = \eta(t)$, θα μηδενίζεται σε ένα σημείο $\overline{t} \in (t_1, t_1^*)$. Δηλαδή, τα σημεία μηδενισμού μιας λύσης της εξίσωσης Jacobi διαχωρίζονται μεταξύ τους.*

Ορισμός 6.8.1: *Αν $t_1 < t_1^*$ δύο διαδοχικά σημεία μηδενισμού της εξίσωσης Jacobi, τότε το t_1^* ονομάζεται συζυγές του t_1 ή συζυγές σημείο του t_1.*

Να σημειωθεί ότι το t_1^* καθορίζεται από το t_1 ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη λύση $\eta = \eta(x)$ της εξίσωσης Jacobi για την οποία $\eta(t_1) = 0$· δύο μη τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης Jacobi που μηδενίζονται στο ίδιο σημείο *t_1*, διαφέρουν κατά μια πολλαπλασιαστική σταθερά.

Θεώρημα 6.8.1: *Αν t_1^* είναι ένα συζυγές σημείο του t_1, τότε το t_1^* είναι μια συνεχής, αύξουσα συνάρτηση του t_1.*

Απόδειξη: Έστω η_1, η_2 δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Jacobi. Τότε η

$$\eta = \lambda_1 \eta_1(t) + \lambda_2 \eta_2(t)$$

είναι η γενική λύση της εξίσωσης Jacobi. Θέλοντας να βρεθεί μια μη τετριμμένη λύση που να μηδενίζεται στο $t = t_1$ λύνουμε την εξίσωση

$$\lambda_1 \eta_1(t_1) + \lambda_2 \eta_2(t_1) = 0$$

για λ_1 και λ_2. Αφού $[\eta_1(t_1), \eta_2(t_1)] \neq [0, 0]$ λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\eta_1(t_1) \neq 0$ και λύνουμε ως προς λ_1 / λ_2:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\eta_2(t_1)}{\eta_1(t_1)}$$

Ως εκ τούτου

$$\lambda_1 = \lambda \eta_2(t_1), \qquad \lambda_2 = \lambda \eta_1(t_1)$$

για κάποιο λ, και

$$\eta = \lambda\left[\eta_2(t_1)\eta_1(t) - \eta_1(t_1)\eta_2(t)\right] = \lambda \begin{vmatrix} \eta_1(t) & \eta_2(t) \\ \eta_1(t_1) & \eta_2(t_1) \end{vmatrix}$$
$$= \lambda D(t,t_1)$$

οι λύσεις τις εξίσωσης Jacobi που μηδενίζονται στο t_1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ξανά, υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$.

Για να βρούμε που αλλού μηδενίζεται η $\eta = \eta(t)$ πρέπει να λυθεί η εξίσωση

$$D(t,t_1) = 0$$

για t. Από υπόθεση, υπάρχει ένα συζυγές σημείο του t_1. Οπότε $D(t_1^*, t_1) = 0$.

Δείχνουμε ότι η t_1^* είναι συνεχής και αύξουσα συνάρτηση του t_1.

α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\eta(t_1^*) = D(t_1^*, t_1) = 0$ και εφ' όσον θέλουμε η $\eta = \eta(t)$ να μην είναι τετριμμένη, από το Λήμμα 6.8.1 έχουμε ότι $\dot{\eta}(t) = \left.\frac{\partial D(t,t_1)}{\partial t}\right|_{t=t_1^*} \neq 0$.

Εφαρμόσουμε το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων. Αφού η $\eta \in \mathcal{C}^1(A,B)$, έχουμε ότι $D(t,t_1), \frac{\partial D(t,t_1)}{\partial t} \in \mathcal{C}(A,B)$ και όπως είδαμε $\dot{\eta}(t) = \left.\frac{\partial D(t,t_1)}{\partial t}\right|_{t=t_1^*} \neq 0$ οπότε μπορεί να λυθεί η $D(t,t_1) = 0$ για t σε μια γειτονιά του t_1^*. Καταλήγουμε σε μια λύση της μορφής $t_1^* = \varphi(t_1)$ όπου η $\varphi(t)$ είναι συνεχής σε γειτονιά του t_1. Επαναλαμβάνοντας τον ισχυρισμό καταλήγουμε ότι η $\varphi(t)$ είναι συνεχής όσο το t_1^* βρίσκεται στο (A,B).

β) Για να δειχθεί ότι η $t_1^* = \varphi(t)$ είναι αύξουσα αρκεί να δειχθεί ότι $t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Υποθέτουμε ότι $t_2^* \leq t_1^*$. Τότε έχουμε μια λύση $\eta = \overline{\eta}(t) = D(t,t_2)$, η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη με την $\eta = \eta(t)$, τέτοια ώστε $\overline{\eta}(t_2) = \overline{\eta}(t_2^*) = 0$, όπου $t_1 < t_2 < t_2^* < t_1^*$. Οπότε από το Λήμμα 6.8.2 υπάρχει μια $\overline{t}$, όπου $t_1 < t_2 < \overline{t} < t_2^* < t_1^*$, τέτοια ώστε $\eta(\overline{t}) = 0$. Αλλά αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το t_1^* είναι το αμέσως επόμενο σημείο μηδενισμού της $\eta = \eta(t)$ μετά το t_1, ότι δηλαδή είναι το συζυγές του t_1.

■

Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω ευρήματα για να μελετηθούν τα συζυγή σημεία των λύσεων της εξίσωσης Jacobi για δοθέν ακρότατο. Επανερχόμαστε στην εξίσωση (6.30) για δοθέν ακρότατο και υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες που αναφέρθηκαν στην αρχή της παραγράφου.

Έστω $\eta = \eta(t)$ μια μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης Jacobi για την οποία ισχύει $\eta(t_1) = 0$. Τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

α. Δεν υπάρχει συζυγές σημείο του t_1 στο $(t_1, t_2]$, δηλαδή είτε $t_1^* > t_2$ ή το t_1^* δεν υπάρχει.

β. Το διάστημα $[t_1, t_2]$ περιέχει τουλάχιστον ένα συζυγές σημείο του t_1.

Θεώρημα 6.8.2: *Αν το* διάστημα $[t_1, t_2]$ δεν *περιέχει ένα συζυγές σημείο του* t_1, *τότε υπάρχει ένα* $\Delta > 0$ *τέτοιο ώστε το* $(t_1 - \Delta, t_2]$ *δεν περιέχει συζυγές σημείο του* $t_1 - \Delta$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο *Δ*. Θεωρούμε την ακολουθία Δ_n. Τότε $(t_1 - \Delta)^* = \varphi(t_1 - \Delta_n) \le t_2$ για $\Delta_n \to 0$. Έχουμε δει η φ είναι συνεχής οπότε έχουμε $\lim \varphi(t_1 - \Delta_n) = \varphi(t_1) \le t_2$, το οποίο είναι άτοπο λόγω τις υπόθεσης ότι το t_1 δεν έχει συζυγές σημείο, δηλαδή $\varphi(t_1) > t_2$.

6.8.2 Παραδειγματα

6.8.2.1 Παράδειγμα 1

Έστω το συναρτησιακό $T(x) = \int_0^{t_2} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt$ με $x(0) = 0$ και $x(t_2) = 1$, $0 < t_2 < \pi$. Έχουμε $R = f_{\dot{x}\dot{x}} = 2,\ P = f_{xx} = -2,\ Q = f_{x\dot{x}} = 0$ οπότε προκύπτει η εξίσωση Jacobi του προβλήματος

$$\ddot{\eta}(t) + \eta(t) = 0$$

Μια μη τετριμμένη λύση της είναι η $\eta(t) = \sin t$ για την οποία ισχύει $\eta(0) = 0$. Βλέπουμε ότι συζυγές σημείο του *0* είναι το $0^* = \pi$, και ως εκ τούτου το $(0, \pi]$ δεν περιέχει το συζυγές σημείο του *0*, αφού ισχύει $0 < t_2 < \pi$. Ούτε το $(-\Delta, t_2]$ περιέχει συζυγές σημείο του $0 - \Delta = -\Delta$, υπό την προϋπόθεση ότι $0 < \Delta < \pi - t_2$.

6.8.2.2 Παράδειγμα 2

Έστω το συναρτησιακό $T(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt$ με $x(0) = 0$ και $x(1) = 1$. Όπως και πριν έχουμε $R = 1/(\sqrt[3]{1 + \dot{x}^2})$, $P = 0$, $Q = 0$ και αφού το $x_0(t) = t$ είναι ακρότατο η εξίσωση Jacobi γίνεται

$$\frac{d}{dt} R\Big|_{x=x_0} \dot{\eta}(t) + R\ddot{\eta}(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\eta}(t) = 0$$

Μια μη τετριμμένη λύση της είναι η $\eta(t) = at$, $(a \neq 0)$ που μηδενίζεται για $t = 0$. Και αφού $\eta(t) = at \neq 0 \;\; \forall t > 0$, δεν υπάρχει συζυγές σημείο για το *0*. Οπότε και για το σημείο $-\Delta \; (\Delta > 0)$ δεν υπάρχει συζυγές σημείο, ανεξαρτήτως της τιμής του *Δ*.

6.9 Συζυγή Σημεία και Ύπαρξη Πεδίου

Θεώρημα 6.9.1: *Έστω $x_0 = x_0(t) \in \mathcal{C}^1(A,B)$ είναι ένα κανονικό ακρότατο στο $(A,B) \supset [t_1, t_2]$ και έστω $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{R})$ όπου*

$$\mathcal{R} = \left\{ (t, x(t), \dot{x}(t)) \;\middle|\; A < t < B, \; \left| x - x_0(t) \right| < \alpha_1, \leq \left| \dot{x} - \dot{x}_0(t) \right| < \beta_1 \right\}.$$

Αν δεν υπάρχει συζυγές σημείο του t_1 στο $(t_1, t_2]$, τότε το $x_0 = x_0(t)$ με $t \in [t_1, t_2]$ είναι εμβαπτίσιμο σε ένα πεδίο G.

Απόδειξη: Έστω $u_0(t) = f_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$. Τότε από θεώρημα υπάρχει ένα χωρίο $\mathcal{D} = \left\{ (t, x, u) \;\middle|\; t_3 < t < t_4, \; \left| x - x_0(t) \right| < \delta_1, \leq \left| u - u_0(t) \right| < \delta \right\}$

όπου $A < t_3 < t_1 < t_2 < t_4 < B$, $\delta > 0$, και όπου η εξίσωση Euler-Lagrange μπορεί να αντικατασταθεί από τις

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \Phi(t,x,u) \\ \frac{dp}{dt} &= \Psi(t,x,u)\end{aligned} \tag{6.32}$$

όπου $\Phi,\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$.

Έστω $(t_0,\lambda,c)\in\mathcal{D}$. Τότε η (6.32) έχει μοναδική λύση $x = x(t,\lambda,c)$, $u = u(t,\lambda,c)$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned}x(t_0,\lambda,c) &= \lambda \\ u(t_0,\lambda,c) &= c\end{aligned}$$

και οι $\dot{x}$, $\dot{u}$, x_λ, x_c, u_λ, u_c είναι συνεχείς για όσο οι λύσεις παραμένουν μέσα στο χωρίο $\mathcal{D}$.

Αφού το $(t_1,t_2]$ δεν περιέχει συζυγές σημείο του t_1, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6.8.2 (σελ. 59), υπάρχει ένα *Δ*, με $0<\Delta<t_1-t_{1_1}$, τέτοιο ώστε το $t_1-\Delta$ να μην έχει συζυγές σημείο στο $(t_1,t_2]$.

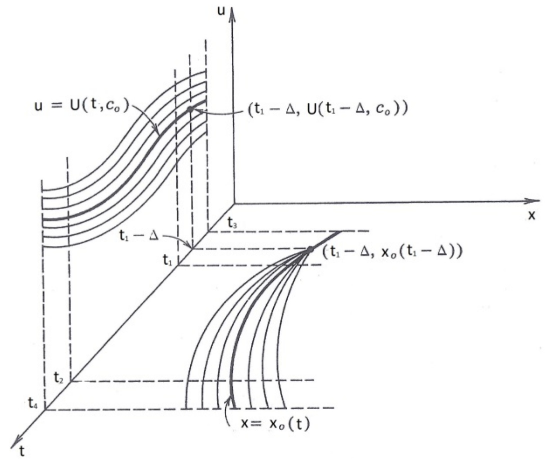
Προσδιορίζουμε τις λύσεις της (6.32) για τις οποίες

$$\begin{aligned}x(t_1-\Delta) &= x_0(t_1-\Delta) \\ u(t_1-\Delta) &= c\end{aligned}$$

με $(t_1-\Delta,\ x_0(t_1-\Delta),\ c)\in\mathcal{D}$, δηλαδή $\left|c-u_0(t_1-\Delta)\right|<\delta$. Συμβολίζουμε αυτές τις λύσεις με

$$\begin{aligned}x &= X(t,c) \\ u &= U(t,c)\end{aligned}$$

Έχουμε κατ’ αυτόν τον τρόπο καταλήξει σε μια μονο-παραμετρική οικογένεια λύσεων της εξίσωσης Euler-Lagrange που περνάει από το σημείο $(t_1-\Delta,\ x_0(t_1-\Delta))$ και περιέχει το ακρότατο $x=x_0(t)$ για $c_0=u_0(t_1-\Delta)$.



Εικόνα 6.5

Αφού

$$X(t_1-\Delta, c) = x_0(t_1-\Delta) \ \ \forall c$$

έχουμε ότι $X_c(t,c)\big|_{t=t_1-\Delta} = 0$ και πιο συγκεκριμένα ότι $X_c(t,c_0)\big|_{t=t_1-\Delta} = 0$.

Είδαμε ότι $n = n(t) = X_c(t,c)$ είναι μια λύση της εξίσωσης Jacobi και αφού από την υπόθεση $(t_1-\Delta)^* > t_2$, έχουμε

$$X_c(t,c_0) \neq 0 \qquad \forall t_1 - \Delta < t_2 \leq t_2 \tag{6.33}$$

και ειδικότερα για $t \in [t_1, t_2]$.

Δείχνουμε ότι η $x = X(t,c)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Λήμματος 6.2.1 για $t \in (\tau_1, \tau_2)$, με $[t_1,t_2] \subset (\tau_1,\tau_2)$ και $c_1 < c < c_2$, όπου τα τ_1, τ_2, c_1, c_2 θα καθοριστούν παρακάτω.

Οι $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ και οι λύσεις $x = X(t,c)$ και $u = U(t,c)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του c όσο μένουν μέσα στο χωρίο $\mathcal{D}$, και ειδικότερα

$$\left|X(t,c) - x_0(t)\right| + \left|U(t,c) - U(t,c_0)\right| \leq \left|c - c_0\right| e^{k(t-t_1+\Delta)}$$

όπου $x_0(t) = X(t,c_0)$. Έστω $0 < \Delta_1 < t_4 - t_2$ και έστω $\left|c - c_0\right| < \delta e^{-k(t_4-\Delta_1+\Delta-t_1)}$

Τότε $\left|X(t,c) - x_0(t)\right| < \delta$ για κάθε $t \in (t_1-\Delta, t_4-\Delta_1)$

Και $\left|U(t,c) - U(t,c_0)\right| < \delta$ επίσης για κάθε $t \in (t_1-\Delta, t_4-\Delta_1)$

Ως εκ' τούτου, αν πάρουμε $c_1 = c_0 - \delta e^{-k(t_4-\Delta_1+\Delta-t_1)}$, $c_2 = c_0 + \delta e^{-k(t_4-\Delta_1+\Delta-t_1)}$ τότε $x = X(t,c) \in \mathcal{D}$ και $u = U(t,c) \in \mathcal{D}$ για κάθε $t_1 - \Delta < t < t_4 - \Delta$ και $c_1 < c < c_2$.

Έστω $\alpha_0 = t_1 - \Delta$, $\beta_0 = t_4 - \Delta_1$ και $\mathcal{S} = \{(t,c) \mid \alpha_0 < t < \beta_0,\ c_1 < c < c_2\}$. Τότε $X, X_c, P, P_c \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= \frac{\partial}{\partial c}\left[\Phi(t, X(t,c), U(t,c))\right] = \Phi_x X_c + \Phi_p U_c \in \mathcal{C}(\mathcal{S}) \\ \ddot{X} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi(t, X(t,c), U(t,c))\right] = \Phi_t + \Phi_x \dot{X} + \Phi_p \dot{U} \\ &= \Phi_t + \Phi_x \Phi + \Phi_p \Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Συνεπώς $X, \ddot{X}, X_c, \dot{X}_c \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Από την (6.33) έχουμε ότι $X_c(t,c_0) \neq 0$ για κάθε $t \in [t_1,t_2]$ και άρα από το Λήμμα 6.2.1 το $x = x_0(t)$ είναι εμβαπτίσιμο σ' ένα πεδίο *G* στο $[t_1,t_2]$.

■

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα τα ακρότατα των παραδειγμάτων 1 και 2 της παραγράφου 6.8.2 ενσωματώνονται σε πεδίο. Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάσαμε και για το παράδειγμα της παραγράφου 6.6˙ κατασκευάζοντας το πεδίο που δημιουργήθηκε από την μονο-παραμετρική οικογένεια ακρότατων.

Θεώρημα 6.9.2*: Ένα ακρότατο* $x = x_0(t) \in \mathcal{C}^1(A,B)$, $[t_1,t_2] \subset (A,B)$ *είναι ένα ισχυρό ελάχιστο (μέγιστο) για το συναρτησιακό T[x] στο* $[t_1,t_2]$ *αν:*

α. Το $(t_1,t_2]$ *δεν περιέχει συζυγές σημείο του* t_1.

β. $\mathcal{E}(t,\bar{x},\dot{\bar{x}},\dot{x}) \geq 0 \ \ (\leq 0) \quad \forall (t,\bar{x}) \in N_w^{\delta}(x_0)$ και $\forall (\dot{x},\dot{\bar{x}}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

[Μαζί μ' αυτό υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{R})$, όπου $\mathcal{R}$ ένα κατάλληλα επιλεγμένο χωρίο στον $(t,x,\dot{x})$ χώρο.

6.10 Ικανη Συνθηκη για Ασθενες Ελαχιστο

Έχουμε δει (στη σελίδα 46) ότι η $\mathcal{E}$-συνάρτηση του Weierstrass ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{\overline{x}},p) = f(t,x,\dot{\overline{x}}) - f(t,x,p) + (p-\dot{\overline{x}})\,f_{\dot{x}}(t,x,p)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την $f(t,x,\dot{\overline{x}})$ παίρνει την παρακάτω μορφή

$$f(t,x,\dot{\overline{x}}) = f(t,x,\dot{x}) + f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(\dot{x}-p) + f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,p+\Theta(\dot{\overline{x}}-p))\cdot\frac{(\dot{\overline{x}}-p)^2}{2}$$

όπου $0 \le \Theta \le 1$. Τότε η $\mathcal{E}$ γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{E}(t,x,p,\dot{\overline{x}}) = f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,p+\Theta(\dot{\overline{x}}-p))\cdot\frac{(\dot{\overline{x}}-p)^2}{2} \tag{6.34}$$

Ο παρακάτω ορισμό απλοποιεί την ορολογία.

Ορισμός 6.10.1: *Ένα γραμμικό στοιχείο* $(t_0,x_0,\dot{x}_0)$ *λέγεται ισχυρά κανονικό (σημείο) αν* $\mathcal{E}(t_0,x_0,\dot{x}_0,\dot{\overline{x}}) > 0 \quad \forall \dot{\overline{x}} \ne \dot{x}_0$ *ενώ λέγεται ασθενώς κανονικό αν* $f_{\dot{x}\dot{x}}(t_0,x_0,\dot{x}_0) > 0$.

Υποθέτουμε ότι το κανονικό ακρότατο $x = x_0(t) \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ αποτελείται μόνο από ασθενώς κανονικά γραμμικά σημεία. Τότε

$$f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)) > 0 \qquad \forall t \in [t_1,t_2]\,.$$

Αν $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{R})$, όπου το $\mathcal{R}$ είναι ένα απλώς-συνεκτικό χωρίο που περιέχει όλα τα γραμμικά στοιχεία του $x = x_0(t)$, τότε για κάποιο $x = x(t) \in [t_1,t_2]$ έχουμε

$$f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)) > 0 \qquad \forall t \in [t_1,t_2]$$

εφ' όσον $\left|x(t)-x_0(t)\right| < \delta_1$ και $\left|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)\right| < \delta_2$ για κάποια $\delta_1,\delta_2 > 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το $x_0(t)$ είναι εμβαπτίσιμο σε κάποιο πεδίο $\mathcal{G}$. Τότε, έχοντας $\left|\Theta(t)\right| \le 1$, έχουμε

$$\mathcal{E}(t,\overline{x}(t),p(t,\overline{x}(t)),\dot{\overline{x}}(t)) = f_{\dot{x}\dot{x}}(t,\overline{x}(t),p(t,\overline{x}(t))+\Theta(t)(\dot{\overline{x}}(t)-p(t,\overline{x}(t))))\frac{(\dot{\overline{x}}(t)-p(t,\overline{x}(t)))^2}{2} \ge 0$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\left|\overline{x}(t)-x_0(t)\right| < \delta_1 \quad \text{και} \quad \left|p(t,\overline{x}(t))+\Theta(t)(\dot{\overline{x}}(t)-p(t,\overline{x}(t)))-\dot{x}_0(t)\right| < \delta_2$$

Έχουμε λοιπόν

$$\left|p(t,\overline{x}(t))+\Theta(t)(\dot{\overline{x}}(t)-p(t,\overline{x}(t)))-\dot{x}_0(t)\right| \leq \left|p(t,\overline{x}(t))-\dot{\overline{x}}_0(t)\right|+\left|\Theta(t)(\dot{\overline{x}}(t)-\dot{x}_0(t))\right| + \left|\Theta(t)(\dot{x}_0(t)-p(t,\overline{x}(t)))\right|$$

όπου $\dot{\overline{x}}(t)$ είναι η κλίση της καμπύλης $\dot{\overline{x}}(t)$, ενώ $p(t,\overline{x}(t))$ είναι η κλίση του μοναδικά καθορισμένου ακρότατου που περνάει από το σημείο $(t,\overline{x}(t))$.

Αφού

$$\left|\dot{x}_0(t)-p(t,\overline{x}(t))\right|=\left|p(t,x_0(t))-p(t,\overline{x}(t))\right|<\frac{\delta_2}{3},$$

υπό τον όρο ότι $\left|x_0(t)-\overline{x}(t)\right|<\delta_3$ για κάποιο $\delta_3>0$, και αν επίσης απαιτήσουμε ότι $\left|\dot{x}_0(t)-\dot{\overline{x}}(t)\right|<\delta_3/3$, τότε

$$\left|p(t,\overline{x}(t))+\Theta(t)(\dot{\overline{x}}(t)-p(t,\overline{x}(t)))-\dot{x}_0(t)<\delta_2\right|$$

οπότε προκύπτει

$$\mathcal{E}(t,\overline{x}(t),p(t,\overline{x}(t)),\dot{\overline{x}}(t))\geq 0 \quad \forall t\in[t_1,t_2]$$

και για κάθε $x=\overline{x}(t)\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$, όπου $\delta=\min(\delta_1,\delta_2/3,\delta_3)$.

Οπότε, για την ολική μεταβολή έχουμε

$$\Delta T=T(\overline{x})-T(x_0)=\int_a^b \mathcal{E}(t,\overline{x}(t),p(t,\overline{x}(t)),\dot{\overline{x}}(t))\,dt\geq 0 \tag{6.35}$$

για κάθε $x=\overline{x}(t)\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$ για κάποιο $\delta>0$.

Θεώρημα 6.10.1: *Ένα κανονικό ακρότατο $x_0(t)$ με $x_0(t)\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ είναι ένα ασθενές ελάχιστο (μέγιστο) για το συναρτησιακό T(x), αν είναι εμβαπτίσιμο σε πεδίο και αν αποτελείται μόνο από ασθενώς κανονικά γραμμικά σημεία, δηλαδή*

$$f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))>0\ (<0)\ \ \forall t\in[t_1,t_2]$$

Επαναδιατυπώνουμε το Θεώρημα 6.5.1 (σελ. 46) σύμφωνα με την ορολογία του Ορισμού 6.10.1.

Θεώρημα 6.10.2: *Αν το ακρότατο $x = x_0(t)$ ενσωματώνεται σε πεδίο και αν όλα τα γραμμικά στοιχεία του πεδίου είναι ισχυρά κανονικά, τότε το $x_0(t)$ είναι ένα ισχυρά σχετικό ελάχιστο για το συναρτησιακό T(x).*

Η χαρακτηριστική της f δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία των ασθενώς και ισχυρά κανονικών γραμμικών στοιχείων. Υποθέτουμε ότι $f_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0$ και θεωρούμε την χαρακτηριστική της *f* στο (t_0, x_0):

$$\eta = f(t_0, x_0, \xi).$$

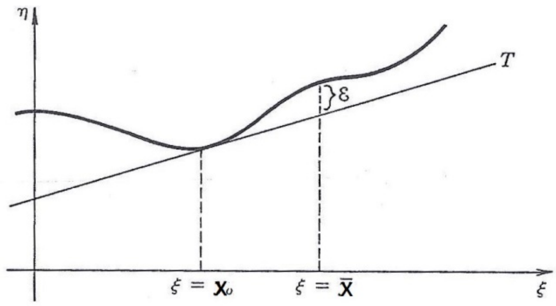
Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης *T* στο $\xi = \dot{x}_0$ δίνεται από την

$$\eta_T - f(t_0, x_0, \dot{x}_0) = f_{\dot{x}}(t_0, x_0, \dot{x}_0)(\xi - \dot{x}_0).$$

Ως εκ' τούτου στο $\xi = \dot{x}_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(t_0, x_0, \dot{\bar{x}}) - \eta_T(\dot{\bar{x}}) &= f(t_0, x_0, \dot{\bar{x}}) - f(t_0, x_0, \dot{x}_0) + (\dot{x}_0 - \dot{\bar{x}}) f_{\dot{x}}(t_0, x_0, \dot{x}_0) \\ &= \mathcal{E}(t_0, x_0, \dot{x}_0, \dot{\bar{x}}) \end{aligned}$$

Έτσι το $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ είναι ένα ισχυρά κανονικό γραμμικό στοιχείο αν το γράφημα της χαρακτηριστικής $\eta = f(t_0, x_0, \xi)$ παραμένει πάνω από την εφαπτομένη *T* για κάθε $\xi = \dot{\bar{x}} \neq \dot{x}_0$ (Εικόνα 6.6). Αν το γράφημα της χαρακτηριστικής «πέφτει» κάτω από την εφαπτομένη για κάποιο $\xi = \dot{\bar{x}} \neq \dot{x}_0$ ή ακουμπάει πάνω της, τότε μόνο το $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ είναι ασθενώς κανονικό.



Εικόνα 6.6

Αφού η εφαπτομένη της χαρακτηριστικής σε ένα σημείο που αντιστοιχεί σε ένα ισχυρά κανονικό γραμμικό στοιχείο δεν μπορεί να αγγίξει την χαρακτηριστική, έπεται ότι μια γωνία δεν είναι δυνατόν να προκύψει σε ένα σημείο ενός ακρότατου που σχετίζεται με ένα ισχυρά κανονικό γραμμικό στοιχείο.

6.11 ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΙΣΧΥΡΟ ΣΧΕΤΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Επανερχόμαστε στο απλό πρόβλημα μεταβολών

$$T(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(t,x,\dot{x})dt \to \text{ελαχιστοποίηση}$$

με $x(t_1)=x_1$ και $x(t_2)=x_2$, δοθέντα.

Υποθέτουμε ότι το $x=x_0(t)\in\mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ είναι ένα ισχυρό σχετικό ελάχιστο για το $T(x)$ στο $\Sigma_s=\left\{x\middle|\, x\in\mathcal{C}_s^1[t_1,t_2],\, x(t_1)=x_{t_1},\, x(t_2)=x_{t_2}\right\}$, και δείχνουμε τότε ότι, $\mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),\dot{\overline{x}})\ge 0$ για κάθε $t\in[t_1,t_2]$ και για κάθε $-\infty<\dot{\overline{x}}<\infty$.

Να σημειώσουμε ότι αν το $x=x_0(t)$ είναι ισχυρό σχετικό ελάχιστο για το *T(x)* στο Σ_s, τότε το τμήμα του $x_0(t)$ που βρίσκεται μέσα στο $[t_1,t_0]$, όπου το t_0 είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο $[t_1,t_2]$ με $t_1<t_0\le t_2$, θα είναι ισχυρό σχετικό ελάχιστο για το

$$T_1(x)=\int_{t_1}^{t_0} f(t,x,\dot{x})dt$$

στο $\Sigma_s'=\left\{x\middle|\, x\in\mathcal{C}_s^1[t_1,t_0],\, x(t_1)=x_{t_1},\, x(t_0)=x_0(t_0)\right\}$.

Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε θα υπήρχε, για οποιοδήποτε $\delta>0$, μια τμηματικά λεία συνάρτηση $x=x_1(t)\in\mathcal{C}_s^1[t_1,t_0]$ με $x_1(t_1)=x_{t_1}$, $x_1(t_0)=x_0(t_0)$, $x_1\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$, τέτοια ώστε

$$T_1(x_1)<T_1(x_0)$$

και ως εκ τούτου, για

$$x=\eta(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) & t_1\le t\le t_0 \\ x_0(t) & t_0\le t\le t_2 \end{Bmatrix}\in N_w^{\delta}\left(x_0\right)$$

προκύπτει ότι $\quad T(\eta)=T_1(x_1)+\int_{t_0}^{t_2} f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))dt$

$$<T_1(x_0)+\int_{t_0}^{t_2} f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))dt=T(x_0)$$

δηλαδή, $T(\eta)<T(x_0)$, οπότε το x_0 δεν είναι ισχυρό σχετικό ελάχιστο για το $T(x)$ στο Σ_s.

Δείξουμε ότι αν υπάρχει ένα $t_0\in(t_1,t_2]$ και μια συγκεκριμένη τιμή $\dot{\bar{x}}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),\dot{\bar{x}})<0 \tag{6.36}$$

τότε το $x=x_0(t)$ δεν μπορεί να είναι ισχυρό σχετικό ελάχιστο για το $T(x)$ με αρχικές συνθήκες τις $x(t_1)=x_{t_1}$, $x(t_0)=x_0(t_0)$. Οπότε δεν θα είναι ούτε ισχυρά σχετικό ελάχιστο για το $T(x)$ με αρχικές συνθήκες τις $x(t_1)=x_{t_1}$, $x(t_2)=x_{t_2}$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η $\mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),\dot{\bar{x}})\geq 0$ είναι ικανή συνθήκη αν το $x=x_0(t)$ είναι ισχυρά σχετικό ελάχιστο για το *T(x)*.

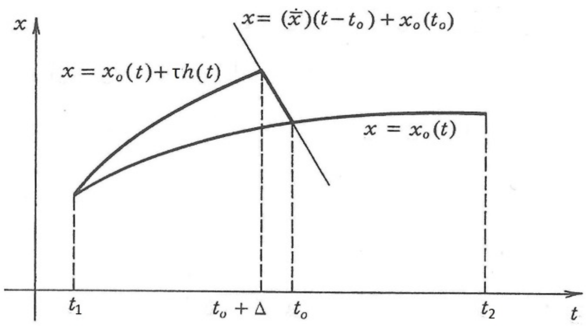
Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

$$\dot{\bar{x}}<0 \quad \text{και} \quad \dot{\bar{x}}<\dot{x}_0(t_0)$$

και κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $x=\eta(t)\in\mathcal{C}_s^1[t_1,t_0]$ ως εξής:

$$x=\eta_\tau(t)\equiv\begin{cases} x_0(t)+\tau h(t) & t_1\leq t\leq t_0+\Delta,\ \tau\geq 0 \\ (\dot{\bar{x}})(t-t_0)+x_0(t_0) & t_0+\Delta\leq t\leq t_0 \end{cases}$$

όπου επιλέγουμε *Δ<0* τέτοιο ώστε η $\eta=\eta_\tau(t)$ να είναι συνεχής και επιλέγουμε $h\in\mathcal{C}^1[t_1,t_0]$, $h(t)>0$ για $t>t_1$ και $h(t_1)=0$ (*Εικόνα 6.7*)



Εικόνα 6.7

Θεωρούμε ότι

$$\Delta = \Delta(\tau) \quad \text{και} \quad \Delta'(0) = \frac{h(t_0)}{\dot{\bar{x}} - \dot{x}_0(t_0)} \tag{6.37}$$

Δείχνουμε ότι είναι δυνατόν να επιλέξουμε ένα τ ικανοποιητικά μικρό ώστε $\eta_\tau \in N_w^\delta\left(x_0\right)$ και $T_1(\eta_\tau) < T_1(x_0)$. Έχουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned} T_1(\eta_\tau) - T_1(x_0) = \int_{t_1}^{t_0+\Delta} f(t, x_0 + \tau h, \dot{x}_0 + \tau\dot{h})dt + \int_{t_0+\Delta}^{t_0} f(t, (\dot{\bar{x}})(t - t_0) + x_0(t_0), \dot{\bar{x}})dt \\ -\int_{t_1}^{t_0} f(t, x_0, \dot{x}_0)dt \end{aligned} \tag{6.38}$$

Αποδεικνύεται ότι η παράγωγος του

$$\int_{t_1}^{t_0+\Delta} f(t, x_0 + \tau h, \dot{x}_0 + \tau\dot{h})dt$$

υπάρχει για $\tau = 0$ αν υποθέσουμε ότι $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R})$, όπου $\mathcal{R}$ είναι το χωρίο που περιέχει όλα τα γραμμικά στοιχεία του $x = x_0(t)$, και δίνεται από την

$$\int_{t_1}^{t_0} [f_x(t, x_0, \dot{x}_0)h + f_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}]dt + f(t_0, x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0))\Delta'(0)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_0+\Delta} f(t, x_0 + \tau h, \dot{x}_0 + \tau\dot{h})\, dt - \int_{t_1}^{t_0} f(t, x_0, \dot{x}_0)\, dt = \\ &= \tau \int_{t_1}^{t_0} [f_x(t, x_0, \dot{x}_0)h + f_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}]\, dt + \tau\, f(t_0, x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0))\Delta'(0) + \varepsilon[\tau h] \end{aligned} \tag{6.39}$$

όπου $(\varepsilon[\tau h] / \tau) \to 0$ καθώς $\tau \to 0$.

Να σημειώσουμε ότι το $\int_{t_0+\Delta}^{t_0} f(t, (\dot{\bar{x}})(t - t_0) + x_0(t_0), \dot{\bar{x}})\, dt$ στην (6.38) είναι συνάρτηση του τ, και είναι παραγωγίσιμο στο $\tau = 0$. Έχουμε:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{t_0+\Delta}^{t_0} f(t, (\dot{\bar{x}})(t - t_0) + x_0(t_0), \dot{\bar{x}})\, dt\Big|_{\tau=0} = -f(t_0, x_0(t_0), \dot{\bar{x}})\, \Delta'(0)$$

και άρα, αφού $\int_{t_0+\Delta}^{t_0} f\, dt\Big|_{\tau=0} = 0$,

$$\int_{t_0+\Delta}^{t_0} f(t,(\dot{\bar{x}})(t-t_0)+x_0(t_0),\dot{\bar{x}})\, dt = \tau f(t_0,x_0(t_0),\dot{X})\Delta'(0)+\beta(\tau) \tag{6.40}$$

όπου $(\beta(\tau)/\tau)\to 0$ καθώς $\tau\to 0$.

Η (6.38), βάσει των (6.39) και (6.40) γίνεται

$$T_1(\eta_\tau)-T_1(x_0)=\tau\int_{t_1}^{t_0}[f_x(t,x_0,\dot{x}_0)h+f_{\dot{x}}(t,x_0,\dot{x}_0)\dot{h}]\, dt +$$
$$+\tau[f(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0))-f(t_0,x_0,\dot{\bar{x}})]\Delta'(0)+\varepsilon[\tau h]+\beta(\tau)$$

όπου $\dfrac{\varepsilon[\tau h]+\beta(\tau)}{\tau}\equiv\dfrac{\gamma(\tau)}{\tau}\to 0$ καθώς $\tau\to 0$.

Έχοντας υποθέσει ότι το $x=x_0(t)$ είναι ισχυρά σχετικό ελάχιστο οπότε και μια λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange, και βάσει της (6.37) παίρνουμε

$$T_1(\eta_\tau)-T_1(x_0)=\tau h(t_0)\Bigg[f_{\dot{x}}(t,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0))+$$
$$+\Big(f(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0))-f(t_0,x_0(t_0),\dot{\bar{x}})\Big)\frac{1}{\dot{\bar{x}}-\dot{x}_0(t_0)}\Bigg]+\gamma(\tau)$$

όπου $h(t_0)>0$ και $\big(\gamma(\tau)/\tau\big)\to 0$ καθώς $\tau\to 0$.

Από την (6.11) (σελ. 46) έχουμε

$$\mathcal{E}(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0),\dot{\bar{x}})=f(t_0,x_0(t_0),\dot{\bar{x}})-f(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0))+(\dot{x}_0(t_0)-\dot{\bar{x}})f_{\dot{x}}(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0))$$

Οπότε,

$$T_1(\eta_\tau)-T_1(x_0)=-\left[\frac{h(t_0)}{\dot{\bar{x}}-\dot{x}_0(t_0)}\mathcal{E}(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0),\dot{\bar{x}})-\frac{\gamma(\tau)}{\tau}\right]\tau$$

Λόγω της (6.36), $\mathcal{E}(t_0,x_0(t_0),\dot{x}_0(t_0),\dot{\bar{x}})<0$, και λαμβάνοντας υπόψη τις υποθέσεις όσον αφορά τις $\dot{\bar{x}}$ και $\dot{x}_0(t_0)$, έχουμε ότι $\dot{\bar{x}}-\dot{x}_0(t_0)<0$. Επίσης $h_0(t_0)>0$.

Αφού $\big(\gamma(\tau)/\tau\big)\to 0$ καθώς $\tau\to 0$, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\tau>0$ τόσο μικρό ώστε

$$T_1(\eta_\tau)-T_1(x_0)<0$$

και $\eta_\tau \in N_w^\delta\left(x_0\right)$.

Οπότε αν ορίσουμε

$$x = \eta(t) = \begin{cases} \eta_\tau(t) & t_1 \le t \le t_0 \\ x_0(t) & t_0 \le t \le t_2 \end{cases}$$

έχουμε ότι

$$T(\eta) < T(x_0)$$

σύμφωνα με το οποίο $\eta \in N_w^\delta\left(x_0\right)$, και δείξαμε ότι το x_0 δεν είναι ισχυρά σχετικό ελάχιστο στο Σ_S.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.11.1: *Αν το ακρότατο* $x = x_0(t) \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2]$ *είναι ένα ισχυρά σχετικό ελάχιστο για το συναρτησιακό* $T(x)$ *στο* $\Sigma_s = \left\{x \middle| \, x \in \mathcal{C}_s^1[t_1,t_2],\, x(t_1) = x_{t_1},\, x(t_2) = x_{t_2}\right\}$ *ή στο* $\Sigma = \left\{x \middle| \, x \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2],\, x(t_1) = x_{t_1},\, x(t_2) = x_{t_2}\right\}$ *και υποθέτοντας ότι* $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R})$, *όπου το* $\mathscr{R}$ *συμβολίζει ένα χωρίο που περιέχει όλα τα γραμμικά στοιχεία του* $x = x_0(t)$, *τότε ισχύει ότι (αναγκαιότητα)*

$$\mathcal{E}(t, x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), \dot{\bar{x}}) \ge 0 \qquad \textit{(6.41)}$$

για κάθε $x \in [t_1, t_2]$ *και για κάθε* $-\infty < \dot{\bar{x}} < \infty$.

Για τον ίδιο λόγο, κάθε λείο τμήμα ενός «σπασμένου» ακρότατου $x = x_0(t) \in \mathcal{C}_s^1[t_1, t_2]$ πρέπει να ικανοποιεί την (6.41) αν το $x_0(t)$ είναι ισχυρά σχετικό ελάχιστο για το $T(x)$ στο Σ_s.

Ο καθορισμός του θεωρήματος αυτού βασίστηκε στην δυνατότητα κατασκευής της συνάρτησης $x = \eta(t)$. Η κατασκευή της είναι δυνατή μόνο αν $t_0 > t_1$. Ωστόσο, βλέπουμε ότι η (6.41) θα πρέπει να ισχύει στο $t = t_1$, δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες είναι συνεχείς.

Με παρόμοιο τρόπο και με τη βοήθεια της σχέσης μεταξύ $\mathcal{E}$ και $f_{\dot{x}\dot{x}}$, όπως εκφράζεται στην (6.34) (σελ. 64), προκύπτει η *συνθήκη του Legendre*

Θεώρημα 6.11.2: (συνθήκη Legendre) *Έστω ότι το ακρότατο* $x = x_0(t) \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2]$ *είναι ασθενές ελάχιστο (μέγιστο) για το* $T(x)$ *στο* $\Sigma_s = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathcal{C}_s^1[t_1, t_2],\ x(t_1) = x_{t_1},\ x(t_2) = x_{t_2} \right\}$*, όπου* $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R})$*, τότε ισχύει ότι*

$$f_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \geq 0 \qquad (\leq 0) \tag{6.42}$$

για κάθε $t \in [t_1, t_2]$.

6.12 Ισοπεριμετρικο Προβλημα (Συνεχεια)

Επιστρέφουμε στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα που είδαμε στην παράγραφο 5.2. Η λύση $r(\theta) = -2\lambda \sin\theta$ (εξίσωση (5.30)), με $\lambda = -{L_0}/{2\pi}$ και $\theta \in [0, \pi]$ αποτελεί ακρότατο για το συναρτησιακό (5.28) με τον περιορισμό (5.29).

Ορίζουμε το συναρτησιακό

$$\hat{T} = T + \lambda g \ \text{ με } \ \lambda = -\frac{L}{2\pi}$$

δηλαδή

$$\hat{T}(r) = \int_0^\pi F(\theta, r, \dot{r})\, d\theta$$

όπου $F(\theta, r, \dot{r}) := \lambda(\dot{r}^2 + r^2)^{1/2} + \frac{1}{2} r^2$.

Υπολογίζουμε

$$P = F_{rr} = \lambda \frac{\dot{r}^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}} + L$$

$$Q = F_{r\dot{r}} = -\lambda \frac{r\dot{r}}{(\dot{r}^2 + r)^{3/2}}$$

$$R = F_{\dot{r}\dot{r}} = \lambda \frac{r^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}$$

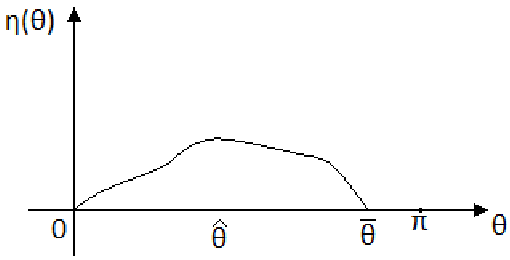
Παίρνοντας υπ’ όψη την (5.30) και το γεγονός ότι $\lambda = -{L_0}/{2\pi}$ προκύπτει:

$$P(\theta) = -\frac{1}{2}\cos^2\theta + 1$$
$$Q(\theta) = \frac{1}{4}\sin 2\theta$$
$$R(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

και άρα η εξίσωση Jacobi γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\,\dot{h}) + 3(\cos^2\theta - 1)h = 0 \tag{6.43}$$

Η τελευταία εξίσωση δεν πληροί την υπόθεση ότι υπάρχει συζυγές σημείο. Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε μια $\eta := [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $\eta(0) = 0$ και $\eta(\bar{\theta}) = 0$ για κάποιο $\bar{\theta} \in (0,\pi)$, ενώ $\eta(\theta) \neq 0$, για κάθε ϑ σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $(0,\hat{\theta})$:



Εικόνα 6.8

Αυτό θα σήμαινε $\frac{d}{d\theta}\eta(\hat{\theta}) = 0$ για κάποιο $\hat{\theta} \in (0,\bar{\theta})$, που είναι άτοπο γιατί η (6.43) δίνει στην περίπτωση αυτή:

$$0 = -\sin^2\hat{\theta}\,\dot{\eta}(\hat{\theta}) + \sin^2 0\,\dot{\eta}(0) = 3\int_0^{\hat{\theta}} \sin^2\theta\,\eta(\theta)\,dt > 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6.9.1 το ακρότατο $r(\theta)$ ενσωματώνεται σε πεδίο ακρότατων.

Υπολογίζουμε το $F_{\dot{r}\dot{r}}(\theta, r(\theta), \dot{r}(\theta))$

$$F_{\dot{r}\dot{r}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}}\right) = \lambda\frac{r^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}$$

και επειδή $\lambda = -{}^{L_0}\!/_{2\pi} < 0$ έπεται ότι

$$F_{\dot{r}\dot{r}} < 0, \quad \forall (r,\dot{r}) \in \mathbb{R}^2$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.10.1, το ακρότατο $r(\theta) = -2\lambda \sin\theta$ μεγιστοποιεί το συναρτησιακό (5.28).

Καταλήξαμε ότι για κάθε άλλη $\overline{r}$ που ικανοποιεί τον περιορισμό $g(\overline{r}) = L$ έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{T}(\overline{r}) \le \hat{T}(r) &\Leftrightarrow T(\overline{r}) + \lambda L \le T(r) + \lambda L \\ &\Leftrightarrow T(\overline{r}) \le T(r) \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι, πράγματι η $r(\theta) = -2\lambda \sin\theta$ πληροί αφ' ενός τον περιορισμό (5.29), αφετέρου μεγιστοποιεί το *T.*

6.13 Ικανη Συνθηκη για το Προβλημα με Ν Άγνωστες Συναρτησεις

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα μεταβολών:

$$T(\hat{x}) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))dt)$$

σε μια γενική περίπτωση όπου τα άκρα μπορούν να κινηθούν ελεύθερα στα *n*-διάστατα επίπεδα $t = t_1$ και $t = t_2$. Να σημειώσουμε ότι $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Αν το $\hat{x} = \hat{x}_0(t) \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2]^n$, είναι μια λύση του προβλήματος, τότε πρέπει να ικανοποιεί τις *n* εξισώσεις Euler-Lagrange

$$f_{xk} - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}k} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

και τις *2n* συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} &f_{\dot{x}k}(t_1, \hat{x}_0(t_1)\hat{x}_0'(t_1)) = 0 \\ &f_{\dot{x}k}(t_2, \hat{x}_0(t_2)\hat{x}_0'(t_2)) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{6.44}$$

Θέλοντας να κατασκευάσουμε ένα πεδίο ακρότατων $\hat{X}(t,a)$, με κλίση $p(t,\hat{x}) = \left.\dfrac{\partial \hat{X}(t,a)}{\partial t}\right|_{a=A(t,\hat{x})}$, για το πρόβλημα, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange, αλλά και οι συνοριακές συνθήκες. Αυτές οι συνθήκες όμως δεν αρκούν, για $n \geq 2$, ώστε να εξασφαλιστεί η ανεξαρτησία του αναλλοίωτου του ολοκληρώματος (όπως υιοθετήθηκε από το πρόβλημα).

Ορισμός 6.13.1: *Το* $G = \{(t,\hat{X}(t,a)) : (t,a) \in M\}$ *ορίζει ένα πεδίο Mayer σε ένα ανοικτό και απλώς συνεκτικό χωρίο M στον* $(t,x_1,x_2,...,x_n)$ *χώρο για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του* $T(x)$*, με τα άκρα να βρίσκονται πάνω στα κάθετα επίπεδα* $t = t_1$ και $t = t_2$*, αν*

$$\hat{x}, \hat{x}_t, \hat{x}_{xk} \in \mathcal{C}(M)$$

και αν:

1. *Οι λύσεις της* $\hat{X}(t,a)$ *είναι λύσεις των εξισώσεων Euler-Lagrange του προβληματος.*
2. $\left.\begin{array}{l} f_{\dot{x}k}(t_1,\hat{x}(t_1),\hat{p}(t_1,\hat{x}(t_1))) = 0 \\ f_{\dot{x}k}(t_2,\hat{x}(t_2),\hat{p}(t_2,\hat{x}(t_2))) = 0 \end{array}\right\} k = 1,2,...,n$
3. $(\partial / \partial x_i)\ f_{\dot{x}k}(t,\hat{x},\hat{p}(t,\hat{x})) = (\partial / \partial x_k)\ f_{\dot{x}_i}(t,\hat{x},\hat{p}(t,\hat{x}))$ *για κάθε* $i, k = 1,2,...,n$

Η συνθήκη 3 ικανοποιείται τετριμμένα για $n=1$, δηλαδή $(\partial / \partial x)\ f_{\dot{x}}(t,\hat{x},\hat{p}) = (\partial / \partial x)\ f_{\dot{x}}(t,\hat{x},\hat{p})$ και γι αυτό δεν αναφέρθηκε στα προηγούμενα.

Το ακρότατο $\hat{x} = \hat{x}_0(t)$, $t \in [t_1,t_2]$, είναι εμβαπτίσιμο στο πεδίο G αν $(t,\hat{x}_0(t)) \in M$ για κάθε $t \in [t_1,t_2]$ και αν είναι λύση της $\hat{x}' = \hat{p}(t,\hat{x})$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα πεδίο Mayer και αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.13.1: *Αν το* $\hat{\hat{x}}(t) \in \mathcal{C}^1[t_1,t_2]$ *βρίσκεται μέσα στο M, τότε το*

$$K(\hat{\hat{x}}) = \int [f(t,\hat{\hat{x}},\hat{p}(t,\hat{\hat{x}})) + (\hat{\hat{x}}' - \hat{p}(t,\hat{\hat{x}}))f_{\hat{x}'}{}^T(t,\hat{\hat{x}},\hat{p}(t,\hat{\hat{x}}))]\, dt$$

είναι:

1. *ανεξάρτητο του δρόμου* $\hat{x} = \hat{\hat{x}}(t)$.

2. *ανεξάρτητο των ακραίων συντεταγμένων του* $\hat{x} = \hat{\bar{x}}(t)$ *στο* $t = t_1$ και $t = t_2$.

όπου

$$f_{\hat{x}'} = (f_{\hat{x}_1}, f_{\hat{x}_2}, \ldots, f_{\hat{x}'_n})$$

και ως εκ τούτου

$$(\hat{\bar{x}}' - \hat{p}) f_{\hat{x}'}{}^{T} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\bar{x}}_i - p_i) f_{\dot{x}_i}$$

Απόδειξη:

α) Αποδεικνύουμε ότι το $K(\hat{\bar{x}})$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου $\hat{x} = \hat{\bar{x}}(t)$, υποθέτοντας ότι το αρχικό και τελικό σημείο είναι φιξαρισμένα. Γράψουμε το $K(\hat{\bar{x}})$ σε ανεπτυγμένη μορφή, εκφράζοντας τα γινόμενα του υπάρχουν σε αυτό:

$$K(\hat{\bar{x}}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t, \hat{\bar{x}}, \hat{p}(t, \hat{\bar{x}})) - \sum_{\iota=1}^{n} \left(\dot{\bar{x}}_i - p_i(t, \hat{\bar{x}}) \right) f_{\dot{x}_i}(t, \hat{\bar{x}}, \hat{p}(t, \hat{\bar{x}})) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left([f(t, \hat{\bar{x}}, \hat{p}(t, \hat{\bar{x}})) - \sum_{\iota=1}^{n} p_i(t, \hat{\bar{x}}) f_{\dot{x}_i}(t, \hat{\bar{x}}, \hat{p}(t, \hat{\bar{x}}))] dt + \sum_{i=1}^{n} f_{\dot{x}_i}(t, \hat{\bar{x}}, \hat{p}(t, \hat{\bar{x}})) d\overline{x}_i \right)$$

Το επικαμπύλιο αυτό ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης αν και μόνο αν

$$\frac{\partial (f - \hat{p} f_{\hat{x}'}{}^{T})}{\partial x_k} = \frac{\partial f_{\dot{x}_k}}{\partial t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{6.45}$$

$$\frac{\partial f_{\dot{x}_i}}{\partial x_k} = \frac{\partial f_{\dot{x}_k}}{\partial x_i}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{6.46}$$

Η (6.46), ικανοποιείται εφ' όσον η $\hat{p}(t, \hat{x}) = \dfrac{\partial \hat{x}(t, a)}{\partial t}$, ορίζει ένα πεδίο Mayer.

Μένει να ελεγχθεί η συνθήκη (6.45):

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\dot{x}_k}(t, \hat{x}, \hat{p}(t, \hat{x})) = f_{\dot{x}_k t} + \sum_{i=1}^{n} f_{\dot{x}_k \dot{x}_i} p_{it} \,.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[f(t,\hat{x},\hat{p}(t,\hat{x}))-\sum_{i=1}^{n}p_i(t,\hat{x})f_{\dot{x}_i}(t,\hat{x},\hat{p}(t,\hat{x}))]=f_{x_k}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_i}p_{ix_k}-\sum_{i=1}^{n}\left[p_{ix_k}f_{\dot{x}_k}+p_i\frac{\partial f_{\dot{x}_i}}{\partial x_k}\right] \tag{6.47}$$

Λόγω της (6.46),

$$\frac{\partial f_{\dot{x}_i}}{\partial x_k}=\frac{\partial f_{\dot{x}_k}}{\partial x_i}=f_{\dot{x}_k x_i}+\sum_{j=1}^{n}f_{\dot{x}_k x_j}p_{jx_i}$$

έχουμε ότι

$$\frac{\partial(f-\hat{p}f_{\hat{x}'}^{T})}{\partial x_k}=\frac{\partial f_{\dot{x}_k}}{\partial t}=f_{y_k}-\sum_{i=1}^{n}p_i[f_{\dot{x}_k x_i}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}p_{jx_i}] \tag{6.48}$$

Εξισώνοντας τις (6.47) και (6.48)

$$\begin{aligned} f_{x_k} &= f_{\dot{x}_k t}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}p_{it}+\sum_{i=1}^{n}p_i f_{\dot{x}_k x_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_i f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}p_{jx_i} \\ &= f_{\dot{x}_k t}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}p_{it}+\sum_{i=1}^{n}p_i f_{\dot{x}_k x_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_j f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}p_{ix_j} \\ &= f_{\dot{x}_k t}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}p_{it}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k x_i}(p_{it}+\sum_{j=1}^{n}p_j p_{ix_j}) \end{aligned}$$

Και αφού $\hat{x}'=\hat{p}(t,\hat{x})$ έχουμε $\ddot{x}_i=p_{it}+\sum_{j=1}^{n}p_{ix_j}\dot{x}_j=p_{it}+\sum_{j=1}^{n}p_{ix_j}p_j$.

Οπότε

$$f_{x_k}=f_{\dot{x}_k t}+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k\dot{x}_i}\dot{x}_i+\sum_{i=1}^{n}f_{\dot{x}_k x_i}\ddot{x}_i=\frac{d}{dt}f_{\dot{x}_k}$$

το οποίο είναι αληθές δεδομένου ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange ικανοποιούνται από όλες τις ολοκληρωτικές καμπύλες της $\hat{x}'=\hat{p}(t,\hat{x})$. Καταλήξαμε ότι το $K(\hat{\hat{x}})$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

β) Δείχνουμε ότι το $K(\hat{\hat{x}})$ είναι ανεξάρτητο των συντεταγμένων των αρχικών σημείων της $\hat{\hat{x}}(t)$.

Εν όψιν των (6.45), (6.46), υπάρχει μια συνάρτηση

$$W=W(t,x_1,x_2,...,x_n)$$

τέτοια ώστε

$$W_t = f - \hat{p} f_{\hat{x}'}^T \quad \kappa\alpha\iota \quad W_{\hat{x}} = f_{\hat{x}'}$$

και συνεπώς,

$$K(\hat{\hat{x}}) = W(t_2, \hat{\hat{x}}(t_2)) - W(t_1, \hat{\hat{x}}(t_1))$$

Αφού

$$W_{x_k}\Big|_{t=t_1} = f_{\dot{x}_k}(t_1, \hat{x}(t_1), \hat{p}(t_1, \hat{x}(t_1))) = 0$$
$$W_{x_k}\Big|_{t=t_2} = f_{\dot{x}_k}(t_2, \hat{x}(t_2), \hat{p}(t_2, \hat{x}(t_2))) = 0$$

επειδή όλες οι λύσεις ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες (6.44), έπεται ότι $W(t_1, \hat{\hat{x}}(t_1))$ και $W(t_2, \hat{\hat{x}}(t_2))$ είναι ανεξάρτητα του $\hat{x}$, και άρα

$$W(t_1, \hat{x}_1(t_1)) = W(t_1, \hat{x}(t_1)), \qquad W(t_2, \hat{x}_1(t_2)) = W(t_2, \hat{x}(t_2))$$

Οπότε, αν $\hat{x} = \hat{x}(t)$ έχει τις τεταγμένη $\hat{x}(t_1)$ και $\hat{x}(t_2)$, και κάθε άλλη καμπύλη $\hat{x} = \hat{x}_1(t)$ έχει τεταγμένες $\hat{x}(t_1)$ και $\hat{x}_1(t_2)$, τότε $K(\hat{x}) = K(\hat{x}_1)$.

■

Μετασχηματίσουμε την ολική μεταβολή (όπως στην απλή περίπτωση) ως εξής:

$$\begin{aligned} T(\hat{\hat{x}}_1) - T(\hat{x}_0) &= T(\hat{\hat{x}}_1) - K(\hat{x}_0) \\ &= T(\hat{\hat{x}}_1) - K(\hat{\hat{x}}_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [f(t, \hat{\hat{x}}, \hat{\hat{x}}') - f(t, \hat{\hat{x}}, \hat{p}(t, \hat{\hat{x}})) + (\hat{p}(t, \hat{\hat{x}}) - \hat{\hat{x}}') f_{\hat{x}'}^T(t, \hat{\hat{x}}, \hat{p}(t, \hat{\hat{x}}))] dt \end{aligned}$$

και να διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.13.2: *Αν το ακρότατο $\hat{x} = \hat{x}_0(t) \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2]$ ενσωματώνεται σε ένα πεδίο Meyer και αν*

$$\mathcal{E}(t, \hat{\hat{x}}, \hat{x}', \hat{\hat{x}}') = f(t, \hat{\hat{x}}, \hat{\hat{x}}') - f(t, \hat{\hat{x}}, \hat{x}') + (\hat{x}' - \hat{\hat{x}}') f_{\hat{x}'}^T(t, \hat{\hat{x}}, \hat{x}') \geq 0 \tag{6.49}$$

για κάθε $(t, \hat{\hat{x}}) \in N_w^\delta(x_0)$ και για όλα τα $-\infty < \dot{x}_k < \infty$, $-\infty < \dot{\bar{x}}_k < \infty$, $k = 1, 2, ..., n$ τότε το $\hat{x}_0(t)$ είναι ισχυρό ελάχιστο για το συναρτησιακό $T(\hat{x})$, με αρχικό και τελικό σημείο πάνω στα $t = t_1$ και $t = t_2$.

Έστω ότι το ακρότατο $\hat{x}=\hat{x}_0(t)$ είναι κανονικό στο αρχικό σημείο $t=t_1$. Τότε $\det\left|f_{\dot{x}_i\dot{x}_k}(t,\hat{x}_0(t_1),\hat{x}_0'(t_2))\right|>0$ (ή <0), οπότε λύνοντας την αρχική συνθήκη στο $t=t_1$,

$$f_{\dot{x}_k}(t_1,\hat{x}(t_1),\hat{x}'(t_1))=0\,,$$

για $\hat{x}'(t_1)$ σε μια γειτονιά του $\hat{x}_0(t_1)$ παίρνουμε:

$$\hat{x}'(t_1)=\hat{X}_{t_1}(t_1,\hat{x}(t_1))$$

Ομοίως, αν $\hat{x}=\hat{x}_0(t)$ είναι κανονικό ακρότατο στο τελικό σημείο $t=t_2$, λύνουμε την

$$f_{\dot{x}_k}(t_2,\hat{x}(t_2),\hat{x}'(t_2))=0$$

σε μια γειτονιά του $\hat{x}_0(t_2)$ για $\hat{x}'(t_2)$ και παίρνουμε:

$$\hat{x}'(t_2)=\hat{X}_{t_2}(t_2,\hat{x}(t_2))$$

Καταλήξαμε στο ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι συνεπείς με το συναρτησιακό $T(\hat{x})$ αν

$$\hat{p}(t_1,\hat{x})=\hat{X}_{t_1}(t_1,\hat{x}) \qquad \forall \hat{x}\in N_w^{\delta}(\hat{x}_0(t_1))$$

και $$\hat{p}(t_2,\hat{x})=\hat{X}_{t_2}(t_1,\hat{x}) \qquad \forall \hat{x}\in N_w^{\delta}(\hat{x}_0(t_2))$$

όπου οι λύσεις της $\hat{x}'=\hat{p}(t,\hat{x})$ είναι επίσης λύσεις τη εξίσωσης Euler – Lagrange για το συναρτησιακό $T(\hat{x})$.

Προκειμένου να βρεθεί ένα πεδίο για το πρόβλημα με *n* συναρτήσεις με τελικό έστω σημείο σταθερό και το άλλο να ποικίλει στο $t=t_1$ (ή $t=t_2$), μία από τις δύο εξισώσεις της συνθήκης 2 του Ορισμού 6.13.1 πρέπει να παραληφθεί, ενώ για το πρόβλημα με δύο σταθερά σημεία, και οι δύο εξισώσεις παραλείπονται.

Ορισμός 6.13.2: *Το $G=\left\{(t,\hat{X}(t,a)) : (t,a)\in M\right\}$ ορίζει ένα πεδίο Meyer σε ένα απλώς συνεκτικό χωρίο M για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $T(\hat{x})$, με σταθερά αρχικά και τελικά σημεία, αν*

$$\hat{p},\hat{p}_t,\hat{p}_{x_k}\in\mathcal{C}(M^n)$$

και αν:

1. *Οι λύσεις* $\hat{X}(t,\hat{a})$ *της* $\hat{x}' = \hat{p}(t,\hat{x})$ *είναι λύσεις των εξισώσεων Euler–Lagrange για το συναρτησιακό* $T(\hat{x})$.
2. $(\partial / \partial x_i)\ f_{\dot{x}k}(t,\hat{x},\hat{p}(t,\hat{x})) = (\partial / \partial x_k)\ f_{\dot{x}_i}(t,\hat{x},\hat{p}(t,\hat{x}))$ *για κάθε* $i,k = 1,2,...,n$

Στην περίπτωση του απλού προβλήματος με μία άγνωστη συνάρτηση, μπορούμε να έχουμε μια ικανή συνθήκη για ασθενές ελάχιστο, εξετάζοντας τη σχέση μεταξύ της $\mathcal{E}$-συνάρτησης και της $f_{\dot{x}_i\dot{x}_k}$ με $i,k = 1,2,...,n$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] A. Freire, “The Brachistochrone Problem”, lecture notes, University of Tennessee, (2008)

[2] C. Fraser, “Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange”, Historia Mathematica, Vol. 19, p. 4-23

[3] D. Carlson, G. Leitmann, “Fields of extremals and sufficient conditions for the simplest problem of the calculus of variations”, Journal of Global Optimization, Vol. 40, Issue 1-3, p. 41-50, (2008)

[4] D. Liberzon, “Calculus of Variations and Optimal Control Theory”, Princeton University Press, (2012)

[5] E. Coddington, N. Levinson, “Theory of Ordinary Differential Equations”, McGraw-Hill Book Company, (1955)

[6] F. Porter, “Calculus of Variations”, [course notes], California Institute of Technology

[7] F. Wan, “Introduction to the Calculus of Variations and its Applications”, The Mathematical Gazette, Vol. 81, No 491, pp. 339-340, (1997)

[8] G. Auchmuty, “Variational Methods”, [lecture notes], University of Houston, (2013)

[9] G. Bliss, “Jacobi’s condition for problems of the calculus of variations in parametric form”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 17, p. 195-206, (1916)

[10] G. Larew, “The Hilbert integral and Meyer fields for the problem of Mayer in the calculus of variations”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 1, p. 61-67, (1924)

[11] H. Lauwerier, “Calculus of variations in mathematical Physics”, Mathematisch Centrum Amsterdam, (1966)

[12] H. Sagan, “Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics, John Wiley & Sons Inc., (1966)

[13] H. Sagan, “Introduction to the Calculus of Variations”, Dover Publications, (1992)

[14] H. Weyl, "Geodesic Fields in the Calculus of Variation for Multiple Integrals", Annals of Mathematics, Vol. 36, No. 3, pp. 607-629

[15] J. Burns, "Introduction to the Calculus of Variations and Control with Modern Applications", Chapman and Hall/CRC, (2013)

[16] J. Hunter, "Lecture Notes on Applied Mathematics", [lecture notes], University of California, (2009)

[17] K. Long, "Gateaux differentials and Frechet derivatives", [course notes], Texas Tech University, (2009)

[18] M. Niethammer, "A Brief Introduction to Calculus of Variations", [course notes], University of North Carolina,

[19] R. Rupp, "The Weierstrass excess function", Pacific Journal of Mathematics, Vol. 41, No. 2, (1972)

[20] R. Tapia, "The Isoperimetric Problem Revisited: Extracting a short proof of Sufficiency from Euler's 1744 Approach to Necessity", (2013)

[21] R.M. Santilli, "Necessary and sufficient conditions for the existence of a Lagrangian in field theory. I. Variations approach to self-adjointness for tensorial field equations", Elsevier Inc., (1977)

[22] S. Gerber, "Functional Derivatives ", [course notes], Utah University, (2012)

[23] T. Apostol, "Mathematical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company Inc., (1957)

[24] V. Krylov, "Λογισμός Μεταβολών", Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 7, Αρ. Άρθου 6, σελ. 93-121

[25] W. F. Osgood, "Sufficient Conditions in the Calculus of Variations", Annals of Mathematics, (1901)

[26] Β. Κουμούσης, "Εισαγωγή στο Λογισμό των Μεταβλητών", [σημειώσεις], ΕΜΠ, 1998

[27] Γ. Παπαδημητρίου, "Λογισμός των Μεταβολών", [σημειώσεις]

[28] Ι. Τσινιάς, "Λογισμός των Μεταβολών", [σημειώσεις μαθήματος], Ε.Μ.Π.

[29] Ν. Καραμπετάκης, "Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων", Εκδ. Ζήτη, (2009)

Δικτυακές πηγές

http://www.wikipedia.org/

http://www.encyclopediaofmath.org/

http://mathworld.wolfram.com/

http://www.wolframalpha.com/

http://curvebank.calstatela.edu/