

Υπολογισμός της ανώμαλης μαγνητικής διπολικής ροπής του μιονίου



Αναστάσης Ιωάννου
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μαρτιος 2014

Υπολογισμός της ανώμαλης μαγνητικής διπολικής ροπής του μιονίου



Αναστάσης Ιωάννου
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μαρτιος 2014

Υπολογισμός της ανώμαλης μαγνητικής διπολικής ροπής του μιονίου



Αναστάσης Ιωάννου
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 5 Μαρτίου 2014

.....

Αθανάσιος Λαχανάς
Καθηγητής ΕΚΠΑ

.....

Γεώργιος Κουτσούμπας
Αν.Καθηγητής ΕΜΠ

.....

Νίκος Τράκας
Καθηγητής ΕΜΠ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μαρτιος 2014

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	abstract	2
3	Η σημασία της μέτρησης του $g-2$	3
4	Επανακανονικοποίηση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED) και έννοιες	6
5	electron self energy	8
5.1	fermion propagator	8
5.2	Υπολογισμός του διαγράμματος	9
5.3	Renormalization constants	11
6	photon self energy	14
6.1	photon propagator	14
6.2	Υπολογισμός του διαγράμματος	16
7	συνεισφορά των radiative corrections στο $g-2$	19
7.1	Vertex	19
7.2	Απλοποίηση του $\delta\Gamma^\mu$	20
8	$g-2$	24
8.1	υπολογισμος του $g-2$	24
8.2	charge renormalization	26
9	Ενδείξεις για νέα φυσική	28
A'	πράξεις	32
A'.1	πράξεις για το κεφάλαιο 4	32
A'.1.1	παράρτημα 4a	32
A'.1.2	παράρτημα 4b	33

A'.1.3 παράρτημα 4c	34
A'.2 πράξεις για το κεφάλαιο 5	35
A'.2.1 παράρτημα 5a	35
A'.2.2 παράρτημα 5b	36
A'.3 πράξεις για το κεφάλαιο 8	36
A'.3.1 παράρτημα 8a	36
A'.3.2 παράρτημα 8b	38

B' Βιβλιογραφία	42
------------------------	-----------

Copyright © Αναστάσης Ιωάννου, 2014 Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην εργασία μελετούμε την ανώμαλη μαγνητική διπολική ροπή του μιονίου. Ο υπολογισμός γίνεται σε επίπεδο κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, δηλαδή το κομμάτι της θεωρίας του καθιερωμένου προτύπου που δίνει τη μεγαλύτερη συνεισφορά σε αυτήν τη σταθερά. Παράλληλα ασχολούμαστε με όλα τα radiative corrections που προκύπτουν σε πρώτη τάξη ώστε να δούμε έναν πρώτο χειρισμό της επανακανονικοποίησης, μιας μεθόδου που ταλαιπώρησε για κάποια χρόνια τους θεωρητικούς φυσικούς. Παρ' ότι ο θεωρητικός υπολογισμός είναι από τους καλύτερους στην κβαντική θεωρία πεδίου, τα πειράματα είναι τόσο ακριβή που ελέγχοντας την εγκυρότητα της θεωρίας, αφήνουν και το περιθώριο για την ύπαρξη Νέας Φυσικής.

Κεφάλαιο 2

abstract

In the essay we study the anomalous magnetic moment of the muon. It 's calculation is on a level of Quantum Electrodynamics, which is the part of the Standard Model theory with the largest contribution in this constant. On the same time we explore all the radiative correction diagrams that come out in first order so as to see the basics of renormalization, a method that discomfoted theoretical physicists for some years. Although this theoretical calculation is one of the most accurate in Quantum Field Theory, experiments are so precise that the theory is actually tested but also leave a margin for possible New Physics.

Κεφάλαιο 3

Η σημασία της μέτρησης του g-2

Η μέτρηση της ανώμαλης μαγνητικής διπολικής ροπής του μιονίου είναι μια από τις ακριβέστερες στην κβαντική θεωρία πεδίου. Έχει επιτευχθεί από το Newhaven National Laboratory (BNL) της Αμερικής και αγγίζει τα 0,54 ppm (parts per million). Για να καταλάβουμε τι είναι το τόσο ξεχωριστό στη μέτρηση αυτού του λεπτονίου θα πρέπει να εξετάσουμε και τα υπόλοιπα, δηλαδή το ηλεκτρόνιο και το τάυ. Αυτά είναι τα στοιχειώδη λεπτόνια με σπιν $\frac{1}{2}$ και ηλεκτρικό φορτίο (-1).

Ως γνωστών τα λεπτόνια δεν είναι ελεύθερα σωματίδια αλλά αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά με φωτόνια καθώς και βαρύτερα μποζόνια. Αυτές οι "καταστάσεις" διασπώνται σε ελαφρύτερες και κινητική ενέργεια. Σαν τέτοιες ενδιάμεσες καταστάσεις συναντούμε και τα λεπτόνια, που λόγω των διαφορετικών μαζών τους έχουν και διαφορετικό χρόνο ζωής. Ο χρόνος ζωής του τάυ είναι $\tau_\tau = 2,906 \times 10^{-13}s$, ο οποίος είναι απαγορευτικός για μετρήσεις με την υπάρχουσα τεχνολογία. Του μιονίου είναι $\tau_\mu = 2,197 \times 10^{-6}s$ ενώ το ηλεκτρόνιο είναι σταθερό. Παρ' ότι το ηλεκτρόνιο είναι το πιο καλά μελετημένο λεπτόνιο και δεν δημιουργεί το πρόβλημα του χρόνου ζωής εμείς επιλέγουμε το μόνιο για μελέτη επειδή φαίνεται να είναι πιο ευαίσθητο σε μετρήσεις που αφορούν Νέα Φυσική, δηλαδή φυσική πέραν του καθιερωμένου προτύπου.

Εκτός από το σπιν, το φορτίο και το χρόνο ζωής τα λεπτόνια έχουν και άλλες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες όπως η ηλεκτρική και μαγνητική διπολική ροπή. Σε κλασικό επίπεδο οι διπολικές ροπές οφείλονται σε φορτία ή ρεύματα. Για παράδειγμα η ηλεκτρική διπολική ροπή προκαλείται από σχετικές μετατοπίσεις των κατανομών θετικού και αρνητικού φορτίου. Μαγνητική διπολική ροπή μπορούμε να έχουμε από την τροχιά ενός σωματιδίου με ηλεκτρικό φορτίο e και μάζα m , το οποίο εμφανίζει $\vec{\mu}_L = \frac{e}{2c} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{e}{2mc} \vec{L}$, $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ όπου \vec{L} η τροχιακή στροφορμή.

Όποια κι αν είναι η ρίζα των ηλεκτρικών και μαγνητικών διπολικών ροπών, συνεισφέρουν στην ηλεκτρομαγνητική χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης (ενέργεια αλληλεπίδρασης)

ενός σωματιδίου με ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο E και B αντίστοιχα με τρόπο

$$\mathcal{H} = -\vec{\mu}_m \vec{B} - \vec{d}_c \vec{E} \quad (3.1)$$

όπου $\vec{\mu}_m$ και \vec{d}_c οι τελεστές μαγνητικής και ηλεκτρικής διπολικής ροπής αντίστοιχα. Συνήθως μετρούμε διπολικές ροπές σε μονάδες μαγνητόνης Bohr, $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$. Επίσης ο τελεστής του σπιν $\vec{S} = \hbar \frac{\vec{\sigma}}{2}$ αντικαθιστά τη στροφορμή. Έτσι γενικεύοντας την κλασική έκφραση για τη μαγνητική διπολική ροπή σε κβαντικό επίπεδο μπορούμε να γράψουμε ότι $\vec{\mu}_m = gQ\mu_0 \frac{\vec{\sigma}}{2}$ και $\vec{d}_c = \eta Q\mu_0 \frac{\vec{\sigma}}{2}$ όπου $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ οι πίνακες Pauli, Q το ηλεκτρικό φορτίο σε μονάδες e το οποίο είναι Q=-1 για τα λεπτόνια. Οι εξισώσεις ορίζουν το γυρομαγνητικό λόγο g-factor μια ποσότητα που περιέχει σημαντικές πληροφορίες για τα λεπτόνια.

Ο μαγνητικός όρος αλληλεπίδρασης δημιουργεί το γνωστό φαινόμενο Zeeman όπου γίνεται διαχωρισμός του ενεργειακού φάσματος.

$$\Delta E = \frac{e}{2mc} (\vec{L} + g\vec{S}) \vec{B} = g_J \mu_0 m_J B \quad (3.2)$$

Στη δεύτερη μορφή παίρνουμε το αποτέλεσμα εκφρασμένο ως προς τους σχετικούς κβαντικούς αριθμούς. Το m_J ο τρίτος συντελεστής της τροχιακής στροφορμής ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) και παίρνει τις τιμές $m_J = -j, -j+1, \dots, j$ με $j = l + \frac{1}{2}$. Το g_J είναι ο Lande g-factor. Αν συνεισφέρει και το σπιν τότε το φαινόμενο ονομάζεται ανώμαλο φαινόμενο Zeeman.

Η ανώμαλη μαγνητική ροπή είναι μια μετρήσιμη ποσότητα που μπορεί να μελετηθεί πειραματικά σχετικά εύκολα από την κίνηση του λεπτονίου σε ένα μαγνητικό πεδίο. Η ιστορία ξεκινάει το 1925 λίγο αφού οι Goudsmit και Uhlenbeck απαίτησαν το ηλεκτρόνιο να έχει εσωτερική στροφορμή $\frac{1}{2}\hbar$ και ότι σχετιζόμενη με αυτή τη σπινροιακή στροφορμή υπάρχει μαγνητική διπολική ροπή ίση με $\frac{e\hbar}{2mc}$ το οποίο είναι ίσο με τη μαγνητόνη του Bohr μ_0 . Αυτό είχε σαν συνέπεια ενδείξεις ότι το g ισούται με 1 μετά από μεγάλη πειραματική μελέτη του φαινομένου Zeeman. Στην πραγματικότητα όμως το g δεν προσδιορίστηκε επακριβώς καθώς η ανάλυση δεν ολοκληρώθηκε.

Στη συνέχεια η θεωρία του Dirac που προέβλεπε το αναπάντεχο $g=2$ ήταν αυτή που επικράτησε στα πρώτα πειράματα ενώ χρειάστηκαν 20 χρόνια προσπάθειας για να γίνει αντιληπτό ότι το g ξεπερνάει το 2 κατά 0,12 τοις εκατό, μια πρώτη ένδειξη ανώμαλης συνεισφοράς.

$$a_l = \frac{g_l - 2}{2} \quad (3.3)$$

το οποίο ισχύει για όλα τα λεπτόνια. Στα τέλη του 1940 η πρωτοπορία στην κατανόηση και τον χειρισμό της επανακανονικοποίησης της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (Tomonaga, Swinger, Feynman, ...) κατέστη εφικτό να γίνουν προβλέψεις για φαινόμενα υψηλότερης

και συγκεκριμένα το σχετικό one loop διάγραμμα για τη συνεισφορά στην ανώμαλη μαγνητική διπολική ροπή

$$a_l = \frac{a}{2\pi} \quad (3.4)$$

από τον Swinger το 1948. Αυτή ή συνεισφορά εξαιτίας κβαντικών διακυμάνσεων μέσω ηλεκτρονιοφωτονικών αλληλεπιδράσεων είναι ίδια για όλα τα λεπτόνια. Αυτές οι κβαντικές διακυμάνσεις έχουν το γνωστό όνομα radiative corrections και προβλέπονται από σχετικιστικές κβαντικές θεωρίες πεδίου. Οι υπολογισμοί αυτών των ανθρώπων είχαν δραματικό ρόλο στην καθιέρωση της κβαντικής θεωρίας πεδίου ως βάση στην κατανόηση των στοιχειωδών αλληλεπιδράσεων.

Βασική προϋπόθεση για να ελεγχθεί μια θεωρία αποτελεί η προβλεψιμότητά της. Η προβλεψιμότητα μιας θεωρίας επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από το γεγονός ότι πρέπει να είναι τοπική σχετικιστική κβαντική θεωρία και απ' τ' ότι πρέπει να είναι επανακανονικοποιήσιμη.

Σαν συνέπεια το $g-2$ εξαφανίζεται σε tree level. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να είναι μια ανεξάρτητα ρυθμιζόμενη παράμετρος σε μια κβαντική θεωρία πεδίου, το οποίο υπονοεί ότι το $g-2$ είναι μια μετρήσιμη ποσότητα και η προβλεπόμενη από τη θεωρία τιμή μπορεί να επιβεβαιωθεί πειραματικά. Στην πραγματικότητα το $g-2$ μπορεί να μετρηθεί πειραματικά με μεγάλη ακρίβεια. Έχοντας ακριβής θεωρητικές προβλέψεις με καλά μετρημένα πειραματικά δεδομένα μπορούμε να υποβάλλουμε τη θεωρία μας σε αυστηρούς ελέγχους αλλά και να βρούμε τα όριά της. Στην εργασία αυτή βλέπουμε τον έλεγχο του Καθιερωμένου Προτύπου των στοιχειωδών σωματιδίων καθώς και τα όριά του που φαίνεται να δίνουν Νέα Φυσική, καθώς με την βοήθεια της υπερσυμμετρίας για τη συνεισφορά της οποίας θα μιλήσουμε στην συνέχεια επιτυγχάνεται φαίνεται να εξαφανίζεται η μικρή και μέχρι πρότινος μη ανιχνεύσιμη απόκλιση από το καθιερωμένο πρότυπο.

Κεφάλαιο 4

Επανακανονικοποίηση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED) και έννοιες

Η Λαγκρατζιανή της **QED** είναι:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\Psi_0 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)2} - e_0\bar{\Psi}_0\gamma^\mu\Psi_0 A_\mu^{(0)} \quad (4.1)$$

όπου με τον δείκτη 0 συμβολίζουμε τις **bare** ποσότητες των μεγεθών Ψ, m, e, A_μ , δηλαδή αυτών που δεν είναι επανακανονικοποιήσιμων και επομένως φυσικά μη μετρήσιμων. Στόχος είναι να περάσουμε σε **dressed** ποσότητες που είναι επανακανονικοποιήσιμες και **counterterms**, δηλαδή όρους που απορροφούν τον απειρισμό.

Δουλεύοντας κάθε όρο ξεχωριστά με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις έχουμε

1st – term

Αντικαθιστώντας $\Psi_0 = \sqrt{\mathcal{Z}_2}\Psi$ και $m_0 = m_{ph} + \frac{\delta m}{\mathcal{Z}_2}$

$$\begin{aligned} &= \bar{\Psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\Psi_0 \\ &= \mathcal{Z}_2\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph} - \frac{\delta m}{\mathcal{Z}_2})\Psi \\ &= \mathcal{Z}_2\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph})\Psi - \bar{\Psi}\Psi\delta m \\ &= (\mathcal{Z}_2 + 1 - 1)\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph})\Psi - \bar{\Psi}\Psi\delta m \\ &= (\mathcal{Z}_2 - 1)\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph})\Psi - \bar{\Psi}\Psi\delta m + \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph})\Psi \end{aligned} \quad (4.2)$$

2nd – term

Αντικαθιστώντας $A_\mu^{(0)} = \sqrt{\mathcal{Z}_3} A_\mu$

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)2} = -\frac{\mathcal{Z}_3}{4}F_{\mu\nu}^2 = -\frac{\mathcal{Z}_3 + 1 - 1}{4}F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (1 - \mathcal{Z}_3)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \quad (4.3)$$

3rd – term

Αντικαθιστώντας $e_0 = e\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}\sqrt{\mathcal{Z}_3}$

$$\begin{aligned} &= -e_0\bar{\Psi}_0\gamma^\mu\Psi_0A_\mu^{(0)} \\ &= -e\frac{\mathcal{Z}_1}{\cancel{\mathcal{Z}_2}\sqrt{\mathcal{Z}_3}}\cancel{\mathcal{Z}_2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\sqrt{\mathcal{Z}_3}A_\mu \\ &= -e\mathcal{Z}_1\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \\ &= -e(\mathcal{Z}_1 + 1 - 1)\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \\ &= -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu + (1 - \mathcal{Z}_1)\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \end{aligned} \quad (4.4)$$

Άρα $\mathcal{L}_0 = [\mathcal{L}] + [\Delta\mathcal{L}]$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = [\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph})\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu] + [(\mathcal{Z}_2 - 1)\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_{ph})\Psi - \bar{\Psi}\Psi\delta m \\ + (1 - \mathcal{Z}_3)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (1 - \mathcal{Z}_1)\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Κεφάλαιο 5

electron self energy

5.1 fermion propagator

Πριν ξεκινήσω τον υπολογισμό του διαγράμματος, που περιγράφει την εκπομπή και εν συνεχεία απορρόφηση ενός φωτονίου σε έναν φερμιονικό διαδότη, θα δείξω την μορφή που παίρνει (ο διαδότης) σε πρώτη τάξη συμπεριλαμβανομένων και των σταθερών επανακανονικοποίησης.



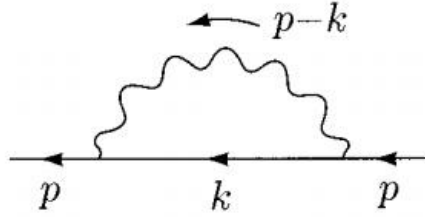
Σχήμα 5.1: fermion propagator

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Sigma_2(p)] \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [-i(\mathcal{Z}_2 - 1)(\not{p} - m) + i\delta m] \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \\
&= \frac{i}{\not{p} - m} [1 + (\Sigma_2(p) + (\mathcal{Z}_2 - 1)(\not{p} - m) - \delta m) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots] \\
&= \frac{i}{\not{p} - m} [1 + \frac{\Sigma_{all}(p)}{\not{p} - m} + \dots] \\
&= \frac{i}{\not{p} - m} [\frac{1}{1 - \frac{\Sigma_{all}(p)}{\not{p} - m}}] \\
&\simeq \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma_{all}(p)}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Θεωρώντας γεωμετρική πρόοδο της μεταβλητής $\frac{\Sigma_{all}(p)}{\not{p} - m}$, και ότι όπου

$$\Sigma_{all}(p) = \Sigma_2(p) + (\mathcal{Z}_2 - 1)(\not{p} - m) - \delta m \tag{5.2}$$

5.2 Υπολογισμός του διαγράμματος



Σχήμα 5.2: fermion propagator

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες Feynman για την Κβαντική ηλεκτροδυναμική το διάγραμμα μεταφράζεται στο παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Diagram = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} [-i\Sigma_2(p)] \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_2(p) &= -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \\
&= -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu + m\gamma^\mu \gamma_\mu}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon)} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας παραμέτρους Feynman (παράρτημα 3a) το ολοκλήρωμα θα πάρει τη μορφή

$$-i\Sigma_2(p) = -(ie)^2 \int_0^1 dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu + m\gamma^\mu \gamma_\mu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (5.5)$$

Όπου $l = k - yp$ και $\Delta = y(1-y)p^2 + (1-y)m^2 + y\lambda^2$

Σε αυτό το σημείο προκύπτει η αναγκαιότητα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο **Dimentional – Regularization** για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, διότι έχουμε τέταρτη δύναμη στο διαφορικό όπως και στον παρονομαστή με αποτέλεσμα τον απειρισμό του

Στέλνοντας το διαφορικό στις d διαστάσεις και κατ επέκταση δουλεύοντας την άλγεβρα Dirac στις d διαστάσεις, για τον αριθμητή

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu &= k\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = k(2g_{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = k(2\gamma^\nu - \gamma^\nu d) = (2-d)\not{k} \\
m\gamma^\mu \gamma_\mu &= md
\end{aligned}$$

κ έτσι παίρνουμε τη μορφή

$$-i\Sigma_2(p) = -(\mu)^{4-d}(ie)^2 \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)\not{k} + md}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (5.6)$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή ολοκλήρωσης από k σε l , δηλαδή

$$l = k - yp \Rightarrow \not{k} = \not{l} + yp$$

και αγνοώντας τους γραμμικούς όρους ως προς l

$$-i\Sigma_2(p) = -(\mu)^{4-d}(e)^2 \int_0^1 dy [dm + (2-d)yp] \int \frac{d^d l}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (5.7)$$

Wick Rotating

$$-i\Sigma_2(p) = -i(\mu)^{4-d}(e)^2 \int_0^1 dy [dm + (2-d)yp] \int \frac{d^d l_\epsilon}{[l_\epsilon^2 + \Delta]^2} \quad (5.8)$$

Χρησιμοποιώντας έτοιμο το ολοκλήρωμα στα δεξιά και αντικαθιστώντας $d=4-\epsilon$

$$\Sigma_2(p) = (\mu)^\epsilon (e)^2 \int_0^1 dy [(4-\epsilon)m + (2-\epsilon)y\not{p}] \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \quad (5.9)$$

Έτσι για $\epsilon \mapsto 0$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ (παράρτημα 3b)

$$\Sigma_2(p) = A(p^2) + \not{p}B(p^2)$$

$$A(p^2) = \frac{\alpha m}{4\pi} \int_0^1 dy [\Delta_\epsilon - \frac{1}{2} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2}]$$

$$B(p^2) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dy [\Delta_\epsilon - 1 - \ln \frac{\Delta}{\mu^2}]$$

$$\Delta = y(1-y)p^2 + (1-y)m^2 + y\lambda^2$$

$$\Delta_\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_\epsilon + \ln 4\pi \quad (5.10)$$

5.3 Renormalization constants

Έχοντας βρεί την έκφραση για το $\Sigma_2(p)$ κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις για να εξάγουμε τα renormalization constants για το φερμιονικό διαδότη υποθέτοντας «on shell» renormalization.

$$\mathcal{S} = \frac{i}{\not{p} - m_{ph} - \Sigma_{all}}$$

$$\Sigma_{all} = \Sigma_2(p) + (\mathcal{Z}_2 - 1)(\not{p} - m_{ph}) - \delta m$$

$$= A(p^2) + \not{p}B(p^2) + (\mathcal{Z}_2 - 1)(\not{p} - m_{ph}) - \delta m$$

$$= A(p^2) - (\mathcal{Z}_2 - 1)m_{ph} - \delta m + \not{p}(B(p^2) + \mathcal{Z}_2 - 1)$$

$$= a(p^2) + \not{p}b(p^2)$$

(5.11)

$$a(p^2) = A(p^2) - (\mathcal{Z}_2 - 1)m_{ph} - \delta m \quad (5.12)$$

$$b(p^2) = B(p^2) + \mathcal{Z}_2 - 1 \quad (5.13)$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{i}{\not{p} - m_{ph} - a(p^2) - \not{p}b(p^2)} \\ &= \frac{i}{\not{p}(1 - b(p^2)) - (a(p^2) + m_{ph})} \\ &= \frac{i}{1 - b} \frac{1}{\not{p} - \frac{a+m_{ph}}{(1-b)}} \\ &= \frac{i}{1 - b} \frac{\not{p} + \frac{a+m_{ph}}{(1-b)}}{p^2 - \left(\frac{a+m_{ph}}{(1-b)}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Η απαίτηση να έχουμε πόλο στο \mathbf{m}_{ph} είναι

$$\left(\frac{a(m_{ph}) + m_{ph}}{(1 - b(m_{ph}))}\right)^2 = m_{ph}^2 \quad (5.15)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα $(1 + a)^n \cong 1 + na$

$$\begin{aligned} \frac{(m_{ph})^2 \left(\frac{a}{m_{ph}} + 1\right)^2 + m_{ph}}{(1 - b)^2} &\cong \frac{\cancel{(m_{ph})^2} \left(1 + \frac{2a}{m_{ph}}\right)}{1 - 2b} = \cancel{(m_{ph})^2} \Rightarrow \\ 1 + \frac{2a}{m_{ph}} &= 1 - 2b \Rightarrow \frac{a(m_{ph})}{m_{ph}} + b(m_{ph}) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Αντικαθιστώντας τα a και b

$$\begin{aligned} \frac{A(m_{ph}) - (\mathcal{Z}_2 - 1)m_{ph} - \delta m}{m_{ph}} + B(m_{ph}) + \mathcal{Z}_2 - 1 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{A(m_{ph})}{m_{ph}} + B(m_{ph}) &= \frac{\delta m}{m_{ph}} \Rightarrow \\ \delta m &= A(m_{ph}) + m_{ph}B(m_{ph}) \\ \delta m &= \Sigma_2(m_{ph}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Παίρνουμε το Renormalization Condition για το δm ενώ για το \mathcal{Z}_2

$$\mathcal{S} = \frac{i}{\not{p} - m_{ph} - \Sigma_{all}(p)} \quad (5.18)$$

Αναπτύσσοντας το Σ_{all} γύρω από το m_{ph}

$$\Sigma_{all}(p) \cong \Sigma_{all}(m_{ph}) + (p - m_{ph}) \frac{\partial \Sigma_{all}(m_{ph})}{\partial \not{p}} \quad (5.19)$$

Οπότε

$$\mathcal{S} = \frac{i}{\not{p} - m_{ph} - \Sigma_{all}(m_{ph}) + (p - m_{ph}) \frac{\partial \Sigma_{all}(p)}{\partial \not{p}}} \quad (5.20)$$

Ξεχωριστά

$$\Sigma_{all}(m_{ph}) = \Sigma_2(m_{ph}) - (m_{ph} - m_{ph})(\mathcal{Z}_2 - 1) - \delta m = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \Sigma_{all}(p)}{\partial \not{p}} = \frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial \not{p}} - (\mathcal{Z}_2 - 1) \quad (5.22)$$

Άρα

$$\mathcal{S} = \frac{i}{(\not{p} - m) \left[1 - \frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial \not{p}} - (\mathcal{Z}_2 - 1) \right]} \quad (5.23)$$

και για να είναι όπως ο tree field propagator θα πρέπει

$$1 - \frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial \not{p}} - (\mathcal{Z}_2 - 1) \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial \not{p}} = (1 - \mathcal{Z}_2) \quad (5.25)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του $\Sigma_2(p)$ στα renormalization conditions καταλήγουμε στις τελικές εκφράσεις για τα renormalization constants: (παράρτημα 3c)

$$\delta m = \frac{3am_{ph}}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \quad (5.26)$$

και

$$\mathcal{Z}_2 = 1 + \frac{a}{2\pi\epsilon} \quad (5.27)$$

Κεφάλαιο 6

photon self energy

6.1 photon propagator

Η γενική μορφή του photon propagator είναι

$$D^{\mu\nu} = \frac{i}{(2\pi)^d} \left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) a(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} b(q^2) \right] \quad (6.1)$$

Ορίζουμε

$$T^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right), \text{ (transverse - projector)} \quad (6.2)$$

και

$$L^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}, \text{ (logitudinal - projector)} \quad (6.3)$$

Η άλγεβρα που διέπει αυτούς τους τελεστές είναι

$$T_\mu^\nu + L_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (6.4)$$

$$T_\rho^\mu T_\nu^\rho = T_\mu^\nu \quad (6.5)$$

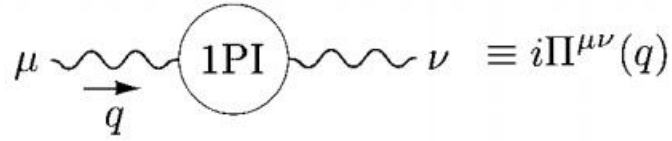
$$L_\rho^\mu L_\nu^\rho = L_\mu^\nu \quad (6.6)$$

$$T_\rho^\mu L_\nu^\rho = L_\rho^\mu T_\nu^\rho = 0 \quad (6.7)$$

Για $a(q^2) = b(q^2) = 1$ έχουμε τον tree level photon propagator

$$D_0^{\mu\nu} = \frac{i}{(2\pi)^d} g^{\mu\nu} \quad (6.8)$$

Amputated

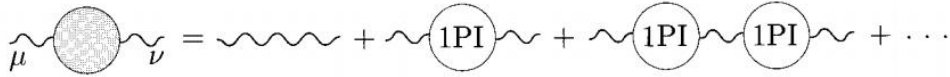


Σχήμα 6.1: particle irreducible diagram

$$\Pi^{\mu\nu} = -i(2\pi)^d [T_\mu^\nu \Pi(q^2) + L_\mu^\nu L(q^2)] \quad (6.9)$$

$$\Pi^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \Pi(q^2) + L^{\mu\nu} L(q^2) = g_{\mu\nu} \Pi_1 + q^\mu q^\nu \Pi_2 \quad (6.10)$$

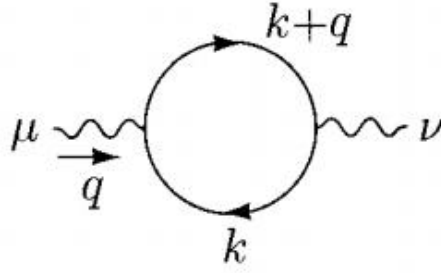
$$\Pi^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Pi(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (L(q^2) - \Pi(q^2)) \quad (6.11)$$



Σχήμα 6.2: όλος ο φωτονικός διαδότης

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu} &= \frac{i}{(2\pi)^d} \left[\frac{-T^{\mu\nu} - L^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-T^{\mu\rho} - L^{\mu\rho}}{q^2} [T_{\rho\lambda}\Pi(q^2) + L_{\rho\lambda}L(q^2)] \frac{-T^{\lambda\nu} - L^{\lambda\nu}}{q^2} \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^d} \left[-\frac{T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{T^{\mu\nu}\Pi(q^2) + L^{\mu\nu}}{q^2} L(q^2) - \dots \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^d} \left[-\frac{T^{\mu\nu}}{q^2} \left(1 - \frac{\Pi(q^2)}{q^2} + \dots\right) - \frac{L^{\mu\nu}}{q^2} \left(1 - \frac{L^{\mu\nu}}{q^2} + \dots\right) \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^d} \left[-\frac{T^{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 + \frac{\Pi(q^2)}{q^2}} - \frac{L^{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 + \frac{L(q^2)}{q^2}} \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^d} \left[\frac{(-T^{\mu\nu})}{q^2 + \Pi(q^2)} + \frac{(-L^{\mu\nu})}{q^2 + L(q^2)} \right] \tag{6.12}
\end{aligned}$$

6.2 Υπολογισμός του διαγράμματος



Σχήμα 6.3: photon self energy

$$\begin{aligned}
i\Pi_2^{\mu\nu}(q^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{tr} \left[(-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{k} - m} (ie\gamma_\nu) \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \\
&= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \\
&= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{k} + \not{q} + m}{(k+q)^2 - m^2} \right] \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας παραμέτρους Feynman (παράρτημα 4a)

$$\text{Denominator} = \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}, l = k + xq, \Delta = m^2 - x(1-x)q^2 \tag{6.14}$$

ενώ για τον αριθμητή μια σελίδα άλγεβρας Dirac (παράρτημα 4b) αρκεί για να διαπιστώσουμε ότι

$$\text{Numerator} = \text{tr}[\gamma^\mu(\not{K} + m)\gamma^\nu(\not{K} + \not{q} + m)] \quad (6.15)$$

$$4[2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)] \quad (6.16)$$

Τοποθετώντας ότι βρήκαμε στο ολοκλήρωμα

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q^2) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4[2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)]}{(l^2 - \Delta)^2} \quad (6.17)$$

Dimentional – Regularization

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q^2) = -4\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{4[2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)]}{(l^2 - \Delta)^2} \quad (6.18)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{d}l^2 g^{\mu\nu}$ και πραγματοποιώντας Wick Rotation

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q^2) = -4i\mu^\epsilon e^2 \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(\frac{2}{d} - 1)l_\epsilon^2 g^{\mu\nu}}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^2} - \right. \quad (6.19)$$

$$\left. \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^2} \right] \quad (6.20)$$

Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}} \quad (6.21)$$

$$\int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^d} \frac{l_\epsilon}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}} \frac{d}{2} \Delta \quad (6.22)$$

και επειδή

$$\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = (1 - \frac{d}{2})\Gamma(1 - \frac{d}{2}) \Rightarrow \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{1-\frac{d}{2}}$$

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q^2) = -4i\mu^\epsilon e^2 \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx [g^{\mu\nu}(-m^2 + x(1-x)q^2) \quad (6.23)$$

$$+ g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu]$$

$$\Rightarrow = -4i\mu^\epsilon e^2 \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx 2x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$$

$$\Rightarrow = -8i\mu^\epsilon e^2 q^2 (g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}}$$

$$\Rightarrow = -8i\mu^\epsilon e^2 q^2 (T^{\mu\nu}) \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}} \quad (6.24)$$

Δηλαδή αναλυτικά αποδείξαμε ότι δεν έχουμε logitudinal contribution άρα $L=0$
Επομένως

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q^2) = T^{\mu\nu}\Pi(q^2) \quad (6.25)$$

$$\Pi(q^2) = -8i\mu^\epsilon e^2 q^2 \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}} + \quad (6.26)$$

ορίζουμε $\Pi(q^2) = q^2 \Sigma(q^2)$

Όπου συμπεριλαμβάνοντας και τα counterterms

$$\Sigma(q^2) = -8i\mu^\epsilon e^2 \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{(2-\frac{d}{2})}} + \mathcal{Z}_3 - 1 \quad (6.27)$$

Γενικά

$$D^{\mu\nu} = \frac{i}{(2\pi)^d} \left[\frac{(-T^{\mu\nu})}{q^2 + \Pi(q^2)} + \frac{(-L^{\mu\nu})}{q^2 + L(q^2)} \right] \quad (6.28)$$

και αντικαθιστώντας αυτά που βρήκαμε

$$D^{\mu\nu} = \frac{i}{(2\pi)^d} \left[\frac{(-T^{\mu\nu})}{q^2(1 + \Sigma(q^2))} + \frac{(-L^{\mu\nu})}{(q^2)} \right] \quad (6.29)$$

Στο όριο όπου $q \mapsto 0$ θα πρέπει $D^{\mu\nu} \mapsto D^0$

Δηλαδή $\Sigma(q^2) = 0$

εκφράζοντας τα ως προς ϵ , $\epsilon = 4 - d$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_3 &= 1 + 8\mu^\epsilon e^2 \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Delta^{\frac{\epsilon}{2}}} \\ &= 1 + 8\mu^\epsilon e^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta)) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις από το παράρτημα και ότι $\mu^\epsilon \simeq 1 + \epsilon \ln \mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_3 &= 1 + \frac{2a}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) [(\Delta_\epsilon - \ln(\Delta)) + \cancel{\epsilon \ln \mu (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta))}] \\ &= 1 + \frac{2a}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{2}{\epsilon} + finite \\ &= 1 + \frac{2a}{\pi} \frac{1}{6} \frac{2}{\epsilon} + finite \\ &= 1 + \frac{2a}{3\pi\epsilon} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Κεφάλαιο 7

συνεισφορά των radiative corrections στο g-2

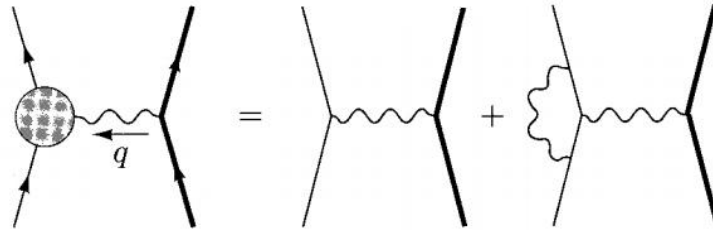
7.1 Vertex

Για ηλεκτρόνιο που σκεδάζεται από εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

$$iM = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{A}_\mu(p' - p) \quad (7.1)$$

υποθέτοντας $A_\mu = (0, \vec{A})$ στατικό πεδίο

Λαμβάνοντας υπ όψιν τα radiative corrections που επηρεάζουν το Vertex θα έχω



Σχήμα 7.1: 1st order correction

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu + \dots \quad (7.2)$$

και επομένως το amplitude θα πάρει τη μορφή

$$iM = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)\bar{A}_\mu(p' - p) \quad (7.3)$$

Στόχος είναι κατ αρχήν η απλοποίηση του Γ^μ ώστε να τοποθετηθεί στην από πάνω σχέση και να εξάγουμε συμπεράσματα για το $\langle\mu\rangle$ και στη συνέχεια να κάνουμε one-loop λογαριασμό για το $\delta\Gamma^\mu$ με σκοπό τον υπολογισμό του "g-2" contribution και της renormalization constant Z_1

7.2 Απλοποίηση του $\delta\Gamma^\mu$

Τα στοιχεία που μπορεί να περιέχει το Γ^μ είναι τα $\gamma^\mu, p^\mu, p'^\mu$ και σταθερές. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι η γενικότερη μορφή για το $\delta\Gamma^\mu$ θα είναι η

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu A(p, p') + (p^\mu + p'^\mu)B(p, p') + (p^\mu - p'^\mu)C(p, p') \quad (7.4)$$

Εφαρμόζοντας την Ward-Takahashi identity στην περίπτωση μας αντλούμε την πληροφορία ότι $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ Επομένως

$$\Rightarrow qA(p, p') + q(p^\mu + p'^\mu)B(p, p') + q(p^\mu - p'^\mu)C(p, p') = 0 \quad (7.5)$$

Για κάθε όρο ξεχωριστά, έχοντας κατά νου τις εξισώσεις Dirac

$$\bar{u}(p')q u(p') = \bar{u}(p')(p' - p)u(p') = \bar{u}(p')(m - m)u(p') = 0 \quad (7.6)$$

$$\bar{u}(p')q(p' + p)u(p') = \bar{u}(p' - p)(p' + p)u(p') = \bar{u}(p')(m^2 - m^2)u(p') = 0 \quad (7.7)$$

$$\bar{u}(p')q(p' - p)u(p') = -q^2 \neq 0 \quad (7.8)$$

και είμαστε βέβαιοι ότι δεν μηδενίζεται επειδή

$$p + q = p' \Rightarrow p^2 + q^2 + 2pq = p'^2 \Rightarrow q^2 + 2pq \Rightarrow q < 0 \quad (7.9)$$

Άρα για να διατηρηθεί η Ward-Takahashi identity θα πρέπει $C=0$, Δηλαδή

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu A(p, p') + (p^\mu + p'^\mu)B(p, p') \quad (7.10)$$

Σύμφωνα με την Gordon-identity που μας λέει ότι

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{(p^\mu + p'^\mu)}{2m} + \frac{i\Sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p), \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (7.11)$$

και συνδυάζοντας τις(5.10)(5.11)με προφανή τρόπο

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\Sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \quad (7.12)$$

όπου F_1, F_2 κάποιες συναρτήσεις του q^2 που ονομάζονται form factors τις οποίες καλούμαστε να τις υπολογίσουμε αναλυτικά. Η Gordon-identity χρησιμοποιήθηκε αυθαίρετα αλλά αποδεικνύεται (για περισσότερα στο παράρτημα 5.a).

Αντικαθιστώντας τη σχέση(5.12) στην (5.3)

$$iM = -ie\bar{u}(p')\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\Sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2)\right]u(p)\bar{A}_\mu(q) \quad (7.13)$$

Θα υπολογίσουμε το M στο όριο όπου $q \mapsto 0$ και p μη σχετικιστικό.

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\xi_1 \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m(E+m)}\xi_2 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

όπου ξ_1, ξ_2 η ορθοκανονική βάση του \mathcal{R}^2

Σε αυτό το σημείο επιλέγουμε για τους γάμμα πίνακες της άλγεβρας Dirac την αναπαράσταση

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0 \quad (7.15)$$

Έτσι για τον πρώτο όρο της (5.13) θα έχουμε

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = u^+(p')\gamma^0\gamma^i u(p) \Rightarrow \quad (7.16)$$

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = \left(\xi^+ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \quad \xi^+ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m(E'+m)} \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\xi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m(E'+m)}\xi \end{pmatrix} \Rightarrow, E \simeq E' \quad (7.17)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\sqrt{\frac{E'+m}{E+m}} \xi^+ \vec{\sigma}\vec{p}'\sigma^i \xi + \sqrt{\frac{E'+m}{E+m}} \xi^+ \sigma^i \vec{\sigma}\vec{p}\xi \right) \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2m} (\xi^+ \vec{\sigma}\vec{p}'\sigma^i \xi + \xi^+ \sigma^i \vec{\sigma}\vec{p}\xi) \Rightarrow, \sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$= \frac{1}{2m} \xi^+ (\sigma^j \sigma^i p'^j + \sigma^i \sigma^j p^j) \xi \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2m} \xi^+ [(p' + p)^i + i\epsilon^{ijk} \sigma^k (p' - p)] \xi \Rightarrow$$

$$= \xi^+ \left(\frac{i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi + \dots \quad (7.18)$$

ενώ για τον δεύτερο όρο

Κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις στην αναπαράσταση που επιλέξαμε

$$\begin{aligned} \frac{i}{2m} \bar{u}(p') \Sigma^{ij} q_j u(p) &= \frac{i}{2m} \xi^+ \left[\frac{\sqrt{(E'+m)(E+m)}}{2m} \sigma^k \right] \xi \epsilon^{ijk} (-q^j) \\ &= -\frac{i}{2m} \xi^+ \sigma^k \xi \epsilon^{ijk} q^j \end{aligned} \quad (7.19)$$

Βάζοντας και τους 2 όρους μαζί

$$\begin{aligned} iM &= -ie(2m) \xi^+ \left[-\frac{i}{2m} \sigma^k (F_1(0) + F_2(0)) \right] \xi (i\epsilon^{ijk} q^j \bar{A}_\mu(q)) \\ &= -ie(2m) \xi^+ \left[-\frac{i}{2m} \sigma^k (F_1(0) + F_2(0)) \right] \xi B^k(\vec{q}) \end{aligned} \quad (7.20)$$

το οποίο ανάγεται στο

$$V(x) = -\langle \vec{\mu} \rangle \vec{B}(x) \quad (7.21)$$

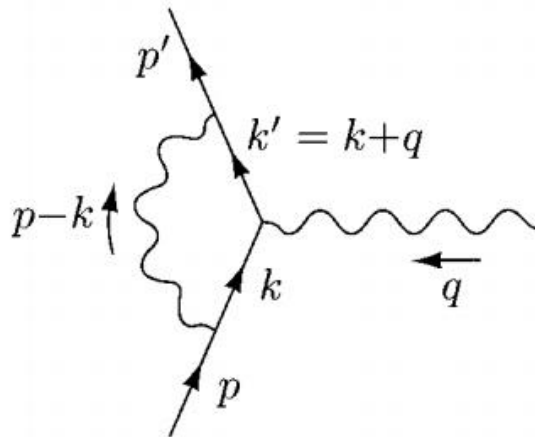
$$\begin{aligned} \langle \vec{\mu} \rangle &= \frac{e}{2m} 2[F_1(0) + F_2(0)] \xi^+ \left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \xi \\ &= \frac{e}{2m} 2[F_1(0) + F_2(0)] \langle \vec{S} \rangle \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{2m} g \langle \vec{S} \rangle \Rightarrow g = 2[F_1(0) + F_2(0)] \Rightarrow g = 2[1 + F_2(0)] \Rightarrow g = 2 + 2F_2(0) \quad (7.23)$$

Κεφάλαιο 8

g-2

8.1 υπολογισμος του g-2



Σχήμα 8.1: vertex

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p')(ie)\gamma^\nu \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\rho)u(p) \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \\
 &= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu]u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας παραμέτρους Feynman (παράρτημα 6α)

$$D = Denominator = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{(l^2 - \Delta)^3} \quad (8.2)$$

$$l = k + yq - zp \quad (8.3)$$

$$\Delta = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 \quad (8.4)$$

Ενώ για τον αριθμητή κάποιες σελίδες άλγεβρας Dirac (παράρτημα 6b) οδηγούν

$$\begin{aligned} N = Numerator &= \bar{u}(p') [\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu] u(p) = \dots = \\ &= \bar{u}(p') [\gamma^\mu (-\frac{1}{2} l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2) + \frac{i \Sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} 2m^2 z(1-z)] u(p) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Όλα μαζί

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p) &= 2ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{(l^2 - \Delta)^3} \bar{u}(p') [\gamma^\mu (-\frac{1}{2} l^2 \\ &+ (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2) + \frac{i \Sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} 2m^2 z(1-z)] u(p) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Όπου τα Form Factors $F_1(q^2), F_2(q^2)$ θα είναι

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= 4ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} (-\frac{1}{2} l^2 \\ &+ (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2) \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$F_2(q^2) = 4ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} (2m^2 z(1-z)) \quad (8.8)$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \quad (8.9)$$

το οποίο για $m=3$ μας δίνει:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \quad (8.10)$$

και αντικαθιστώντας το στο $F_2(q^2)$

$$\begin{aligned}
F_2(q^2) &= \frac{a}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - xyq^2} \\
F_2(q^2 = 0) &= \frac{a}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{2z}{1-z} \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_0^1 dz 2z \\
&= \frac{a}{2\pi} \simeq 0,001164
\end{aligned} \tag{8.11}$$

8.2 charge renormalization

Όπως ειδαμε κατά τον υπολογισμό του g-2 δεν είχαμε απειρισμό του 2ου Form Factor, επομένως το renormalization constant για το vertex θα προέρχεται μόνο από τον πρώτο $F_1(q^2)$.

Περνώντας στις d διαστάσεις και πραγματοποιώντας Wick Rotation όπως στα προηγούμενα κεφάλαια, με τη μονη διαφορά οτι τα ολοκληρώματα είναι λίγο πιο σύνθετα λόγω τριών παραγόντων στον παρονομαστή, έχουμε

$$\begin{aligned}
F_1(q^2) &= 4ie^2 \int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^3} \left(\left(\frac{2}{d} - 1 \right) l_\epsilon^2 \right. \\
&\quad \left. + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right)
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$I = \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^4} \frac{l_\epsilon^2}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^3} + ((1-4z+z^2)m^2) \int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^3} \tag{8.13}$$

$$\int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^4} \frac{l_\epsilon^2}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \frac{1}{\Delta} 1^{3-\frac{d}{2}} \tag{8.14}$$

$$\int \frac{d^d l_\epsilon}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_\epsilon^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \frac{1}{\Delta} 1^{2-\frac{d}{2}} \tag{8.15}$$

Δηλαδή

$$I = \left(\frac{2}{d} - 1\right) \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \frac{1}{\Delta} 1^{3 - \frac{d}{2}} + ((1 - 4z + z^2)m^2) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{2\Gamma(3)} \frac{1}{\Delta} 1^{2 - \frac{d}{2}} \quad (8.16)$$

και χρησιμοποιώντας οτι

$$\Gamma(3 - \frac{d}{2}) = (2 - \frac{d}{2})\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \quad (8.17)$$

$$\frac{1}{\Delta} 1^{3 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{\Delta} 1^{2 - \frac{d}{2}} \frac{1}{\Delta} \quad (8.18)$$

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \frac{1}{\Delta} 1^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta)) \quad (8.19)$$

Έτσι όλα μαζί μας οδηγούν στο αποτέλεσμα

$$I = \left[(1 - \frac{d}{2}) \frac{1}{2} (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta)) + (2 - \frac{d}{2}) (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta))\right] \frac{1}{\Delta} (1 - 4z + z^2)m^2 \quad (8.20)$$

και θέτοντας $d = 4 - \epsilon$

$$I = \left[\left(\frac{\epsilon - 2}{4}\right) \frac{1}{2} (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta)) + \left(\frac{\epsilon}{2}\right) (\Delta_\epsilon - \ln(\Delta))\right] \frac{1}{\Delta} (1 - 4z + z^2)m^2 \quad (8.21)$$

εύκολα βλέπουμε οτι μόνο από τον όρο που δεν είναι ανάλογος του ϵ παράγεται ο απειρισμός, δηλαδή

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{4\epsilon} + finite \\ &= \frac{1}{\epsilon} + finite \end{aligned} \quad (8.22)$$

επομένως

$$F_1(q^2) = \frac{a}{2\pi\epsilon} \quad (8.23)$$

Συμπεριλαμβάνοντας και τα counterterms

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu + (1 - \mathcal{Z}_1) \quad (8.24)$$

για $q \mapsto 0$ θέλω $\Gamma^\mu \mapsto \gamma^\mu$

$$\Rightarrow \delta\Gamma^\mu (1 - \mathcal{Z}_1) = 0 \quad (8.25)$$

$$\mathcal{Z}_1 = 1 + \delta\Gamma^\mu$$

$$= 1 + \frac{a}{2\pi\epsilon} \quad (8.26)$$

Παρατηρούμε οτι $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$

Κεφάλαιο 9

Ενδείξεις για νέα φυσική

Στα προηγούμενα κεφάλαια μιλήσαμε για τη μεγάλη ακρίβεια της μέτρησης του $g-2$, αλλά δεν δώσαμε την ακριβή τιμή του που είναι

$$a_{\mu}^{exp} = 11695208(6, 3) \times 10^{-10} \quad (9.1)$$

Αυτή είναι η πρώτη μέτρηση ευαίσθητη σε επίπεδο ηλεκτρασθενούς κλίμακας και έτσι έχει τη δυνατότητα να ξεετάζει θεωρητικά μοντέλα πέραν του καθιερωμένου προτύπου.

Η πρόβλεψη του καθιερωμένου προτύπου μπορεί να αναλυθεί σε τριών ειδών συνεισφορές, της QED, τις αδρονικές και τις ηλεκτρασθενής. Οι συνεισφορές της QED είναι οι μεγαλύτερες και μάλιστα με μικρή θεωρητική αβεβαιότητα. Οι ασθενείς είναι οι μικρότερες ενώ λίγο μεγαλύτερου μεγέθους είναι οι αδρονικές οι οποίες περιέχουν τη μεγαλύτερη δυσκολία στον θεωρητικό τους χειρισμό.

Το αποτέλεσμα του (BNL) συγκρητικά με τη θεωρία μας λέει

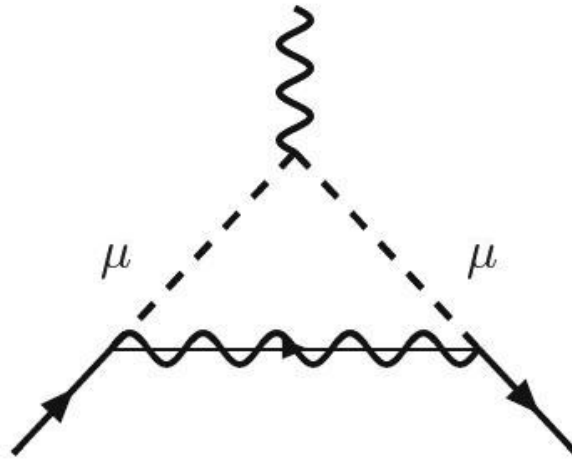
$$\Delta a_{\mu}([exp] - [SM_{noweak}]) = 39, 3(9, 9) \times 10^{-10} a_{\mu}^{weak} = 15, 4(0, 2) \times 10^{-10} \quad (9.2)$$

δηλαδή αν δεν λάβουμε υπόψιν την ασθενή συνεισφορά η απόκλιση από τη θεωρία αγγίζει τις 4σ ενώ συμπεριλαμβάνοντας τις 2,4σ.

Αυτές οι πληροφορίες δεν είναι επαρκής για να αποδείξουμε την ύπαρξη νεας φυσικής. Η απόκλιση θα μπορούσε να οφείλεται για παράδειγμα σε στατιστικές διακυμάνσεις των πειραματικών αποτελεσμάτων του a_{μ} ή προβλημάτων των αδρονικών συνεισφορών οι οποίες δεν είναι πλήρως κατανοητές.

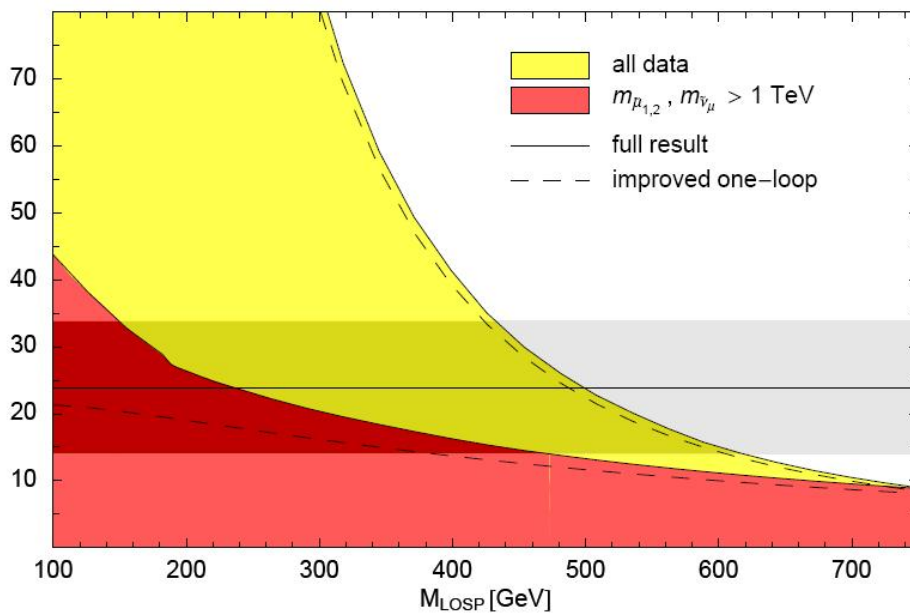
Παρ' όλα αυτά τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά για την ύπαρξη Νέας Φυσικής στα πλαίσια των ασθενών αλληλεπιδράσεων καθώς υποψίες για τέτοιου είδους αποκλίσεις υπήρχαν πολύ πριν το προσδιορισμό του $g-2$. Οι λόγοι αυτής της υποψίας έχουν να κάνουν με άλλους τομείς της θεωρητικής φυσικής όπως η σκοτεινή ύλη.

Ένα είδος νέας φυσικής που λέγεται υπερσυμμετρία δίνει νέου είδους συνεισφορές στο a_μ , της μορφής του σχήματος (8.1).



Σχήμα 9.1: SUSYcontribution

Κάνοντας μια συνοπτική ποιοτική παρουσίαση για τις συνεισφορές αυτές βλέπουμε ότι το a_μ είναι κυρίως ανάλογο του $\tan(\beta)\text{sign}(\mu)/M_{SUSY}^2$. Επομένως για $M \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta(g-2) \rightarrow \infty$ ακόμα και μεγαλύτερες του καθιερωμένου προτύπου συνεισφορές ενώ $M \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta(g-2) \rightarrow 0$

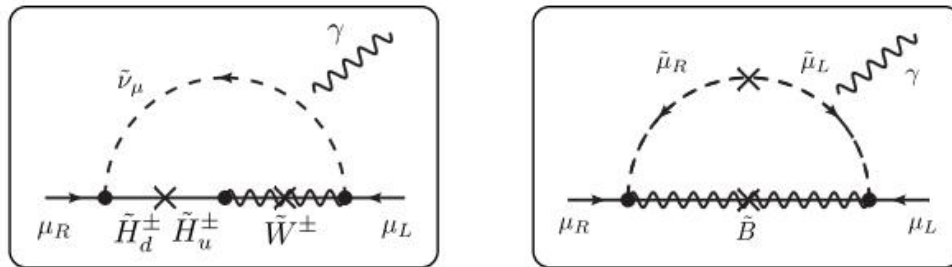


Σχήμα 9.2: οι επιτρεπόμενες τιμές της συνεισφοράς στο $g-2$ σαν συνάρτηση του ελαφρύτερου υπερσυμμετρικού σωματιδίου.

Στο διάγραμμα μπορούμε να δούμε ότι οι μέγιστες τιμές του a_μ^{SUSY} που είναι συνεπής με το φραγμό των υπερσυμμετρικών παραμέτρων σε εύρος μιας τυπικής απόκλισης είναι περίπου από 150GeV μέχρι 600 GeV διαβάζοντας το κάτω όριο από 600 GeV μέχρι 440 GeV, το πάνω από 150 GeV μέχρι 470 GeV.

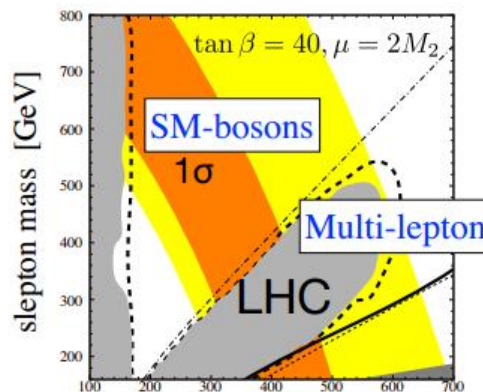
Ο σκοπός της υπερσυμμετρίας όπως είπαμε παραπάνω είναι να γεφυρώσει το κενό των τριών τυπικών αποκλίσεων μεταξύ θεωρίας και πειράματος για το g. Η υπερσυμμετρία είναι η μοναδική θεωρία που συνδέει μποζόνια με λεπτόνια. Δίνει τη δυνατότητα ύπαρξης πολλών ακόμα σωματιδίων κανένα από τα οποία δεν έχει ανιχνευτεί πειραματικά.

Εχουμε δυο ειδών συνεισφορές από την υπερσυμμετρία που παρουσιάζονται στην παρακάτω εικόνα



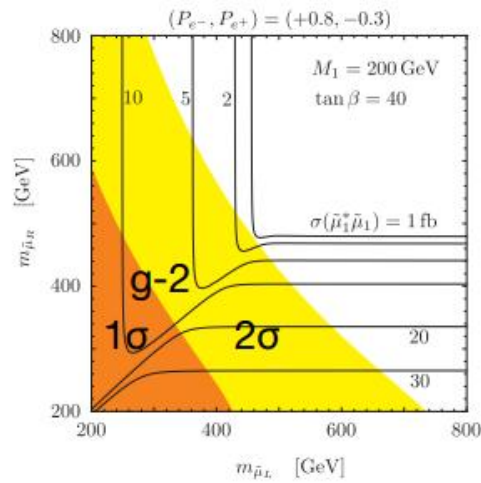
Σχήμα 9.3: chargino-muon sneutrino και neutralino muon αντίστοιχα στα οποία φαίνονται τα μποζόνια Wino και Higgsino στα αριστερά και Bino στα δεξιά

Μπορούμε να εξετάσουμε τις Chargino type συνεισφορές στον LHC με αποτελέσματα που φαίνονται στο διάγραμμα για τη μάζα των winos και higgsinos μεταξύ 240-400 GeV στα 14TeV



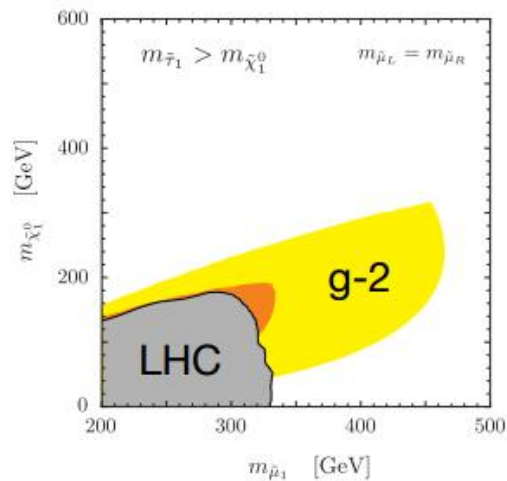
Σχήμα 9.4:

ενώ για τα neutralinos σύμφωνα με το ILC έχουν τη δυνατότητα να όχι να εξεταστούν αλλά να επανακατασκευαστούν



Σχήμα 9.5:

επιλέον το smuon προβλέπεται να έχει μάζα 330-460 GeV όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα



Σχήμα 9.6:

Παράρτημα Α΄

πράξεις

Α΄.1 πράξεις για το κεφάλαιο 4

Α΄.1.1 παράρτημα 4a

(παράμετροι Feynman), δουλεύοντας τον παρονομαστή

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 i - \lambda^2 + i\epsilon)} \\ = \int dx dy \delta(x + y + -1) & \frac{1}{x(k^2 - m^2 + i\epsilon) + y((p - k)^2 i - \lambda^2 + i\epsilon)} \\ & = \int dx dy \delta(x + y + -1) \frac{1}{D} \end{aligned} \quad (\text{A'}.1)$$

$$\begin{aligned}
D &= x(k^2 - m^2 + i\epsilon) + y((p - k)^2)i - \lambda^2 + i\epsilon \\
&= xk^2 + xm^2 + xi\epsilon + yp^2 - 2ypk + yk^2 - \lambda^2 y + yi\epsilon \\
&= (x + y)k^2 + \dots + (x + y)i\epsilon, x + y = 1 \\
&= k^2 - xm^2 + yp^2 - xm^2 - y\lambda^2 + i\epsilon \\
&= k(k - 2yp) + yp^2 - 2ypk - y\lambda^2 + i\epsilon \\
&= (l + yp)(l - yp) + yp^2 - xm^2 - y\lambda^2 + i\epsilon, l = k - yp \\
&= l^2 - y(1 - y)p^2 - (1 - y)m^2 - y\lambda^2 + i\epsilon \\
&= l^2 - \Delta + i\epsilon
\end{aligned} \tag{A'.2}$$

$$\Delta = y(1 - y)p^2 + (1 - y)m^2 + y\lambda^2 \tag{A'.3}$$

A'.1.2 παράρτημα 4b

Σε αυτό το σημείο θα δούμε πως ξεκινώντας από αυτό το ολοκλήρωμα για μικρές τιμές του ϵ καταλήγουμε στην τελική έκφραση για το $\Sigma_2(p)$

$$\Sigma_2(p) = (\mu)^\epsilon (e)^2 \int_0^1 dy [(4 - \epsilon)m + (2 - \epsilon)yp] \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \tag{A'.4}$$

κατ αρχήν

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\frac{\epsilon}{2} &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_\epsilon + \ln(4\pi) - \ln(\Delta) + O(\epsilon) \\
&= \Delta_\epsilon - \ln(\Delta) + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{A'.5}$$

Για μικρά ϵ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$a^\epsilon(\beta - \epsilon) = \beta[1 + \epsilon(\ln(a) - \frac{1}{\beta}) + O(\epsilon)] \tag{A'.6}$$

Το οποίο για $a = \mu, b = 2, 4$ πολλαπλασιασμένο με Δ_ϵ έχουμε

$$\mu^\epsilon(4 - \epsilon) = 4\left[1 + \epsilon\left(\ln(\mu) - \frac{1}{4}\right) + O(\epsilon)\right] \quad (\text{A'.7})$$

$$\mu^\epsilon(2 - \epsilon) = 2\left[1 + \epsilon\left(\ln(\mu) - \frac{1}{2}\right) + O(\epsilon)\right] \quad (\text{A'.8})$$

Θεωρώντας ότι επιβιώνουν μόνο οι όροι που είναι $\frac{2}{\epsilon}$, δηλαδή δεν είναι ανάλογοι του ϵ

Με αντικατάσταση όλων αυτών στο παραπάνω ολοκλήρωμα παίρνουμε τις σχέσεις (3.10)

A'.1.3 παράρτημα 4c

$$\delta m = \Sigma_2(m_{ph})$$

Κρατώντας μόνο τους όρους που δημιουργούν απειρισμό

$$\begin{aligned} \delta m &= \frac{am_{ph}}{\pi} \int_0^1 dy \Delta_\epsilon - \frac{am_{ph}}{2\pi} \int_0^1 dy y \Delta_\epsilon + finite \\ &= \frac{am_{ph}}{\pi} \frac{2}{\epsilon} - \frac{am_{ph}}{\pi} \frac{1}{2} \frac{2}{\epsilon} \\ &= \frac{am_{ph}}{\pi} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{2}{\epsilon} \\ &= \frac{3am_{ph}}{2\pi} \frac{2}{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{A'.9})$$

ενώ

$$\frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial p} = (1 - \mathcal{Z}_2) \quad (\text{A'.10})$$

$$\Sigma_2(p) = A(p^2) + pB(p^2) \quad (\text{A'.11})$$

$$1 - \mathcal{Z}_2 = B(m_{ph}) = -\frac{am_{ph}}{2\pi} \int_0^1 dy y \Delta_\epsilon + finite \Rightarrow \quad (\text{A'.12})$$

$$\mathcal{Z}_2 = 1 + \frac{am_{ph}}{2\pi\epsilon} \quad (\text{A'.13})$$

Α'.2 πράξεις για το κεφάλαιο 5

Α'.2.1 παράρτημα 5a

παράμετροι Feynman, δουλεύοντας τον παρονομαστή

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(k^2 - m^2)((k + q)^2 - m^2)} \\
 = \int dx dy \delta(x + y + -1) & \frac{1}{x(k^2 - m^2) + (1 - x)((k + q)^2 - m^2)} \\
 & = \int dx dy \delta(x + y + -1) \frac{1}{D} \quad (\text{A'.14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= x(k^2 - m^2) + (1 - x)((k + q)^2 - m^2) \\
 &= xk^2 - \cancel{m^2x} + (k + q)^2 - m^2 - x(k + q)^2 + \cancel{m^2x} \\
 &= \cancel{xk^2} + k^2 + 2kq + q^2 - m^2 - \cancel{xk^2} - 2xkq - xq^2 \\
 &= k^2 + 2(1 - x)kq + (1 - x)q^2 - m^2 \\
 &= k^2 + 2ykq + yq^2 - m^2 \\
 &= k(k + 2yq) + yq^2 - m^2, l = k + yq \\
 &= (l - yq)(l + yq) + yq^2 - m^2 \\
 &= l^2 - y^2q^2 + yq^2 - m^2 \\
 &= l^2 - \Delta \quad (\text{A'.15})
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\Delta = m^2 - y(1 - y)q^2 \equiv m^2 - x(1 - x)q^2 \quad (\text{A'.16})$$

A'.2.2 παράρτημα 5b

Δουλεύοντας τον αριθμητή

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \text{tr}[\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu(\not{k} + \not{q} + m)] \\ &= \text{tr}[\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu(\not{k} + \not{q}) + \cancel{m\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu} + \cancel{m\gamma^\mu\gamma^\nu(\not{k} + \not{q})} + \gamma^\mu\gamma^\nu m^2] \\ &= \text{tr}[\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu(\not{k} + \not{q})] + m^2\text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu], \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \\ &= k_\alpha(k + q)_\beta \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] + 4m^2g^{\mu\nu} \\ &= k_\alpha(k + q)_\beta 4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}) + 4m^2g^{\mu\nu} \\ &= 4[k^\mu(k + q)^\nu + k^\nu(k + q)^\mu - g^{\mu\nu}(k(k + q) - m^2)], k = l - xq \\ &= 4[(l^\mu - xq^\mu)(l - xq + q)^\nu + (l^\nu - xq^\nu)(l - xq + q)^\mu - g^{\mu\nu}(l^2 - x(1 - x)q^2)] \\ &= 4[l^\mu l^\nu - x(1 - x)q^\mu q^\nu + l^\nu l^\mu - x(1 - x)q^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}l^2 + g^{\mu\nu}x(1 - x)q^2 + m^2] \\ &= 4[2l^\mu l^\nu - 2x(1 - x)q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}l^2 + g^{\mu\nu}x(1 - x)q^2] + m^2\end{aligned}\tag{A'.17}$$

A'.3 πράξεις για το κεφάλαιο 8

A'.3.1 παράρτημα 8a

παράμετροι Feynman, δουλεύοντας τον παρονομαστή

$$\frac{1}{((k - p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{D^3}\tag{A'.18}$$

$$\begin{aligned}
D &= x(k^2 - m^2 + i\epsilon) + y(k'^2 - m^2 + i\epsilon) + z((k - p)^2 + i\epsilon) \\
&= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2ykq + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2zkp + zp^2 + (+x + y + z)i\epsilon \\
&= k^2 + (2yq - 2zp)k - (x + y)m^2 + yq^2 + zp^2 + i\epsilon \\
&= \underline{k^2 + 2k(yq - zp)} + yq^2 + zp^2 - (1 - z)m^2 + i\epsilon \\
&= k(k + 2(yq - zp)) + \dots(k = l - (yq - zp)) \\
&= (l - (yq - zp))(l + (yq - zp)) + \dots \\
&= l^2 - (yq - zp)^2 \\
&= l^2 - y^2q^2 - z^2p^2 + 2yzqp + yq^2 + zp^2 - (1 - z)m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 + y(1 - y)q^2 + \underline{z(1 - z)p^2} + \underline{2yzqp - (1 - z)m^2} \\
&= [z(1 - z) - (1 - z)]m^2 + \dots \\
&= [(z - 1)(1 - z)]m^2 + \dots \\
&= -(1 - z)^2m^2 + \dots \\
&= l^2 - (1 - z)^2m^2 + y(1 - y)q^2 + 2yzqp + i\epsilon, q = p' - p
\end{aligned}$$

(A'.19)

$$\begin{aligned}
&= l^2 - (1-z)^2 m^2 + y(1-y)q^2 + 2yz(p'-p)p + i\epsilon \\
&= l^2 - (1-z)^2 m^2 + y(1-y)q^2 + 2yzp'p - 2yzm^2 + i\epsilon, [p'p = \frac{p^2 + p'^2 - (p-p')^2}{2}] \\
&= l^2 - (1-z)^2 m^2 + y(1-y)q^2 + yz(\cancel{p'^2} + \cancel{p'^2} - (p'-p)^2 - \cancel{2m^2}) + i\epsilon \\
&= l^2 - (1-z)^2 m^2 + y(x+z) - yzq^2 + i\epsilon \\
&= l^2 - (1-z)^2 m^2 + xyq^2 + i\epsilon \\
&= l^2 - \Delta + i\epsilon, l = k + (yq - zp), \Delta = (1-z)^2 m^2 - xyq^2 \tag{A'.20}
\end{aligned}$$

A'.3.2 παράρτημα 8b

Δουλεύοντας τον αριθμητή
Θα δείξω ότι

$$\begin{aligned}
N = \text{Numerator} &= \bar{u}(p')[\cancel{\mathcal{K}}\gamma^\mu\cancel{\mathcal{K}} + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu]u(p) = \dots = \\
&= \bar{u}(p')[\gamma^\mu(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2) + \frac{i\Sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}2m^2z(1-z)]u(p) \tag{A'.21}
\end{aligned}$$

$$k' = k + q, l = k + yq - zp$$

$$\begin{aligned}
N &= \bar{u}(p')[(l - yq + zp)\gamma^\mu(l + q - yq + zp) + m^2\gamma^\mu - 2mq^\mu - 4m(l - yq + zp)]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[\underline{l\gamma^\mu l} + \underline{(-yq + zp)\gamma^\mu((1-y)q + zp)} + \underline{m^2\gamma^\mu - 2m(q^\mu - 2yq^\mu + 2zp^\mu)}]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[A + B + C]u(p) \tag{A'.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= l\gamma^\mu l = l_a l_b \gamma^a \gamma^\mu \gamma^b = l_a l_b (\gamma^a 2g^{\mu b} - \gamma^a \gamma^b \gamma^\mu) = \\
&= 2l_a l^\mu l^a - l^2 \gamma^\mu = 2\frac{1}{4}\delta_a^\mu \gamma^a l^2 - l^2 \gamma^\mu = \frac{1}{2}l^2 \gamma^\mu \tag{A'.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (-y\underline{q} + z\underline{p})\gamma^\mu((1-y)\underline{q} + z\underline{p}) \\
&= (-y\underline{q} + zm - z\underline{q})\gamma^\mu((1-y)\underline{q} + mz) \\
&= (-(y+z)\underline{q} + zm)\gamma^\mu((1-y)\underline{q} + mz) \\
&= ((x-1)\underline{q} + zm)\gamma^\mu((1-y)\underline{q} + mz) \\
&= [(x-1)(1-y)\underline{q}\underline{q}^\mu + mz(x-1)\underline{q}\underline{q}^\mu + mz(1-y)\underline{q}^\mu\underline{q} + m^2z^2\gamma^\mu] \quad (\text{A'.24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{q}\gamma^\mu\underline{q} &= 2q^\mu\underline{q} - \gamma^\mu q^2, \bar{u}(p')\underline{q}u(p) = 0 \\
&= -\gamma^\mu q^2 \quad (\text{A'.25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')[\underline{q}\gamma^\mu]u(p) &= \bar{u}(p')[(\not{q}' - \not{p})\gamma^\mu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[m\gamma^\mu - \not{p}\gamma^\mu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[m\gamma^\mu - 2p^\mu + \gamma^\mu\not{p}]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - 2p^\mu]u(p) \\
&\Rightarrow \underline{q}\gamma^\mu = 2(m\gamma^\mu - p^\mu) \\
&\Rightarrow \gamma^\mu\underline{q} = 2(p'^\mu\gamma^\mu) \quad (\text{A'.26})
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις 2 προηγούμενες σχέσεις

$$\begin{aligned}
&= mz(x-1)\underline{q}\gamma^\mu + mz(1-y)\gamma^\mu\underline{q} \\
&= mz(x-1)2(m\gamma^\mu - p^\mu) + mz2(p'^\mu\gamma^\mu) \\
&= [mz(x-1) - 2m^2z(1-y)]\gamma^\mu + [-2mz(x-1)p^\mu + 2mz(1-y)p'^\mu] \\
&= 2m^2z(x+y-2)\gamma^\mu + 2mz(p^\mu + q^\mu - yp^\mu - yq^\mu - xp^\mu + p^\mu) \\
&= -2m^2z(z+1)\gamma^\mu + 2mz(1+z)p^\mu + 2mz(1-y)q^\mu \quad (\text{A'.27})
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
B &= \gamma^\mu [(1-x)(1-y)q^2 + m^2 z^2 - 2m^2 z(1+z)] + 2mz(z+1)p^\mu + 2mz(1-y)q^\mu \\
&= \gamma^\mu [(1-x)(1-y)q^2 + (-z^2 - 2z)m^2] + 2mz(z+1)p^\mu + 2mz(1-y)q^\mu \quad (\text{A'.28})
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
N &= \bar{u}(p') [\gamma^\mu (-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2) + \\
&\quad \underline{2m((1-y)z - (1-2y))q^\mu + 2m(z^2 - z)p^\mu}] u(p) \quad (\text{A'.29})
\end{aligned}$$

Δουλεύοντας τον υπογραμμισμένο όρο

$$\begin{aligned}
&= 2m((1-y)z - (1-2y))q^\mu + 2m(z^2 - z)p^\mu \\
&= 2m(-yz - x + y)q^\mu + 2m(z^2 - z)p^\mu, q^\mu = p'^\mu - p^\mu \\
&= [2m(-yz - x + y) - m(z^2 - z)]p'^\mu - [2m(-yz - x + y) - m(z^2 - z)]p^\mu + m(z^2 - z)(p^\mu + p'^\mu) \\
&= [2m(-yz - x + y) - m(z^2 - z)]q^\mu + m(z^2 - z)(p^\mu + p'^\mu) \\
&= m[\underline{-2yz - 2x + 2y - z^2 - z}]q^\mu + m(z^2 - z)(p^\mu + p'^\mu) \quad (\text{A'.30})
\end{aligned}$$

$$= -2yz - 2x + 2y - z^2 - z$$

$$= -2yz - z(z+1) - 2x + 2y$$

$$= -2yz - z(-x-y) - 2(x-y)$$

$$= -2yz + zx + zy - 2(x-y)$$

$$= z(x-y - 2(x-y))$$

$$= (z-2)(x-y) \quad (\text{A'.31})$$

Έτσι ο αριθμητής παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
N &= \bar{u}(p') [\gamma^\mu (-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2) + \\
&\quad \underline{m((z-2)(x-y))q^\mu + m(z^2 - z)(p^\mu + p'^\mu)}] u(p) \quad (\text{A'.32})
\end{aligned}$$

Ουπογραμμισμένος όρος μηδενίζεται σύμφωνα με την Ward-Identity, αλλά μπορούμε να δούμε και αναλυτικά ότι προκύπτει από τις πράξεις αφού ο όρος αυτός είναι περιττός ως προς την ανταλλαγή των x και y σε αντίθεση με τον παρονομαστή που είναι άρτιος και επομένως μπαίνοντας στο ολοκλήρωμα μηδενίζει.

Έτσι ο αριθμητής γίνεται

$$N = \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) + m(z^2 - z)(p^\mu + p'^\mu) \right] u(p) \quad (\text{A'.33})$$

και χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά την ταυτότητα του Gordon που αποδείξαμε προηγουμένως ο αριθμητής παίρνει την τελική του μορφή

$$\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) + \frac{i \Sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} 2m^2 z(1-z) \right] u(p) \quad (\text{A'.34})$$

Παράρτημα Β΄

Βιβλιογραφία

- 1) (Peskin and Shroeter) An Introduction to Quantum Field Theory, book
- 2) (Ashok Das) Quantum Field Theory, book
- 3) (Friedrich Jegerlehner) The Anomalous Magnetic Moment of the Muon 2008, book
- 4) (Dominik Stockinger) The Muon Magnetic Moment and Supersymmetry, article
- 5) (Takeo Moroi) The Muon Anomalous Magnetic Dipole Moment in the Minimal Supersymmetric Standard Model, article
- 6) (M. Passera) The Standard Model Prediction of the Muon Anomalous Magnetic Moment, article
- 7) (Simon Eidelman) Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, presentation
- 8) (A. Hoecker (CERN), and W.J. Marciano (BNL).) THE MUON ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT, article
- 9) (Michel Davier and William J. Marciano), article
- 10) (B.H. Bransden and C.J. Joachain) Physics of Atoms and Molecules, book
- 11) (chaoshengzhe) Lectures on the Internet
- 12) (nptelhrd) Lectures on the Internet