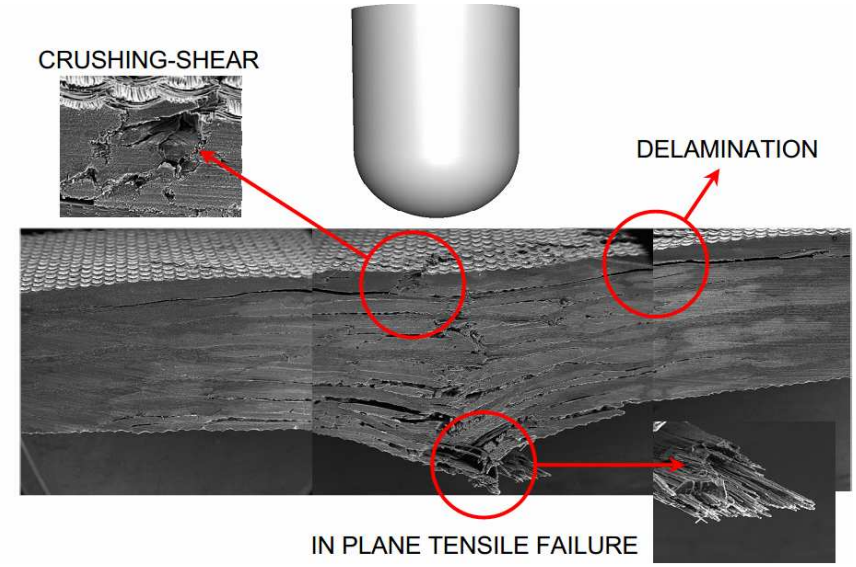
**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**
**ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**
**ΔΠΜΣ 'ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ'**

# ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## 'ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΖΗΜΙΑΣ ΛΟΓΩ ΚΡΟΥΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΣΕ ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ'




**Ονοματεπώνυμο: ΠΡΕΝΤΖΙΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ**
**(Υποψήφιος Διδάκτορας ΣΕΜΦΕ - Τομέας Μηχανικής)**
**Επιβλέπων: ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΑΙΜΙΛΙΟΣ – Λέκτορας**
**Ομότιμος καθηγητής: ΤΣΑΜΑΣΦΥΡΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**

**ΑΘΗΝΑ**
**ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2013**

**Ευχαριστίες**

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία υλοποιήθηκε στον τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Ε.Μ.Π. στα πλαίσια παρακολούθησης του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών 'Υπολογιστική Μηχανική' – ροή Στερεών.

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ομότιμο καθηγητή Ε.Μ.Π. κ.Τσαμασφύρο Γεώργιο και τον Λέκτορα Ε.Μ.Π. κ. Σιδερίδη Αιμίλιο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν, δίνοντάς μου τη δυνατότητα εκπόνησης μιας τόσο ενδιαφέρουσας εργασίας. Ακόμα τους ευχαριστώ για το ενδιαφέρον, την υπομονή και τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσαν για τη συνεργασία μας και την υλοποίηση της εργασίας αυτής. Η συμβολή και η καθοδήγησή τους ήταν καθοριστικής σημασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Καντεράκη Γεώργιο για την καθοδήγησή του σε τεχνικό αλλά και διαδικαστικό επίπεδο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Στεφανία, τους δικούς μου ανθρώπους και φίλους για την ενθάρρυνση και συμπαράσταση που μου έδειξαν όλο το διάστημα παρακολούθησης του μεταπτυχιακού.

**Περίληψη**

Η εφαρμογή των συνθέτων υλικών με πολυμερική μήτρα και ενίσχυση ινών άνθρακα στην αεροναυπηγική βιομηχανία έχει αυξηθεί σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες. Ο κύριος λόγος αυτού του γεγονότος είναι οι καλές ειδικές μηχανικές ιδιότητες, η αυξημένη ευελιξία σχεδιασμού και τελικά τα οφέλη σε κόστος και στην επίδραση στο περιβάλλον.

Όταν τα σύνθετα υλικά πρόκειται να χρησιμοποιηθούν ως δομικά τμήματα, γίνεται έναρξη ενός αναπτυξιακού προγράμματος σχεδιασμού, όπου συνδυάζονται τεχνικές δοκιμής και ανάλυσης. Η ανάπτυξη αξιόπιστων αναλυτικών εργαλείων που επιτρέπουν την κατανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς δομών, όπως επίσης και η δυνατότητα αντικατάστασης αρκετών πειραματικών δοκιμών, είναι αναμφισβήτητα υψίστης σημασίας.

Επιπλέον, η έλλειψη γνώσης σε βάθος των επιδράσεων ζημιάς λόγω κρούσης σε δομές στον τομέα της αεροναυπηγικής περιορίζει, σε κάποιες περιπτώσεις, τη χρήση των συνθέτων υλικών. Όμως, η ανάπτυξη μοντέλων εικονικής μηχανικής δοκιμής για ανάλυση της αντίστασης σε ζημιά λόγω κρούσης μιας κατασκευής και επιπλέον η εναπομένουσα αντοχή μετά την κρούση, είναι μεγάλου ενδιαφέροντος.

Ως αποτέλεσμα, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παρατηρήσεις, τα θέματα που καλύπτονται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αφορούν τα ακόλουθα:

- αναλυτική περιγραφή της κρούσης σε πλάκα από σύνθετο υλικό,
- περιγραφή τυποποιημένων δοκιμών κρούσης και θλίψης μετά την κρούση,
- σχηματισμός και εφαρμογή καταστατικών μοντέλων για περιγραφή της ζημιάς για σύνθετα υλικά υπό κρουστική φόρτιση (αποκόλληση στρώσεων και ζημιά μήτρας / ινών),
- χαμηλής ταχύτητας και μεγάλης μάζας κρούση σε μονολιθική, τετραγωνική πλάκα από σύνθετο υλικό.

## Abstract

The application of polymer – based composites reinforced by carbon fibers (FRP: Fiber Reinforced Plastics) in aerospace industry has been significantly increased over the last decades. The main reason of this fact is their good specific mechanical properties, their increased flexibility of design and finally their cost and environmental benefits.

When composites are intended to be used in structural components, a design development program is initiated, where a combination of testing and analysis techniques is typically performed. The development of reliable analysis tools that enable to understand the structure mechanical behavior, as well as to replace most, but not all, the real experimental tests, is of clear interest.

Moreover, lack of in depth knowledge of impact damage effects on structures in the aerospace field deteriorates, in some cases, the use of composite materials. Therefore, the development of virtual mechanical testing models to analyze the impact damage resistance of a structure and additionally the prediction of post – impact residual strength is of great interest.

As a result, bearing in mind the above mentioned important remarks, the topics which are covered in this master thesis are the following:

- analytical description of impact on a composite plate,
- description of impact and compression after impact standard tests,
- formulation and implementation of constitutive models for the description of damage for composite material under impact load (delamination and matrix / fiber damage),
- low – velocity and large mass impact event on a monolithic, flat, rectangular, polymer – based laminated composite plate.

## Περιεχόμενα

**Σχήματα**

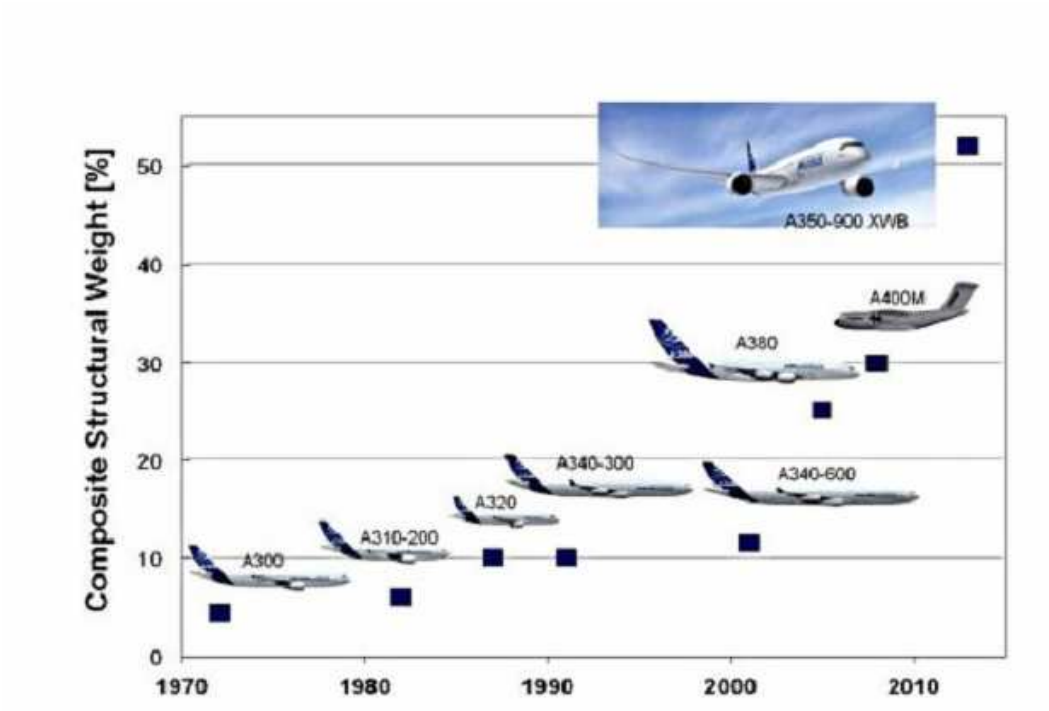
# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία τριάντα χρόνια η χρήση των σύνθετων υλικών στην αεροναυπηγική βιομηχανία σε τμήματα της δομής αεροσκαφών αυξάνεται συνεχώς εξαιτίας των δεδομένων πλεονεκτημάτων σε σύγκριση με τα παραδοσιακά μεταλλικά υλικά. Το πιο σημαντικό πλεονέκτημα είναι το χαμηλό βάρος των σύνθετων υλικών που βασίζεται στη χαμηλή τους πυκνότητα σε συνδυασμό με τον υψηλό ειδικό συντελεστή ελαστικότητας (δυσκαμψία) και την υψηλή ειδική αντοχή καθώς επίσης και η δυνατότητα προσαρμογής σε ειδικές εφαρμογές.

Η πρώτη εφαρμογή σε δομή εμπορικού αεροσκάφους πραγματοποιήθηκε από την Airbus το 1972 μόνο για δευτερεύοντα δομικά τμήματα τα οποία δεν δέχονται υψηλές φορτίσεις. Αφορούσαν τμήματα (fairings) του κάθετου ουραίου (vertical tail) τμήματος και του ρύγχους (radome) του αεροσκάφους A300B. Έπειτα από απόκτηση εμπειρίας και μέσω εκτεταμένης έρευνας, άλλα τμήματα όπως το πηδάλιο διεύθυνσης (rudder), οι φθορείς εδάφους (spoilers) και τα αερόφρενα (air brakes) αντικαταστάθηκαν από τμήματα σύνθετου υλικού. Η πρώτη κύρια δομή, κουτί στρέψης (torsion box) του κάθετου ουραίου τμήματος, αντικαταστάθηκε στο αεροσκάφος A310 το 1985.

Στα επόμενα χρόνια δημιουργήθηκε το κίνητρο για περαιτέρω ανάπτυξη εξαιτίας του ανταγωνισμού μεταξύ των εταιριών κατασκευαστής αεροσκαφών. Αυτός ο ανταγωνισμός βασίζεται κυρίως στη βελτίωση των δυνατοτήτων του αεροσκάφους, σχεδιάζοντας τα δομικά του στοιχεία με υλικά χαμηλού βάρους και υιοθετώντας προηγμένους κινητήρες. Η σημαντική μείωση στο βάρος του αεροσκάφους και άρα της μείωσης της κατανάλωσης καυσίμου με ταυτόχρονη μείωση των εκπομπών αερίων, είναι πολύ σημαντικοί παράγοντες σε σχέση με τα λειτουργικά κόστη των αεροπορικών εταιριών που λαμβάνονται υπόψη κατά τη διάρκεια αποφάσεων στρατηγικών επενδύσεων. Στο σχήμα 1 εικονίζεται το ποσοστό του βάρους της δομής των συνθέτων υλικών για αεροσκάφη τύπου Airbus με την πάροδο των χρόνων.




**Σχήμα 1:** Χρήση σύνθετων υλικών στην αεροναυπηγική

Όμως, ένα πολύ σημαντικό θέμα που αφορά τα σύνθετα υλικά και τη χρήση τους στην αεροναυπηγική είναι, εκτός των άλλων, **η συμπεριφορά των δομικών στοιχείων σε κρούση**. Ο λόγος της ιδιαίτερης αυτής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών είναι η απουσία, αν και μερικές φορές χρήσιμη, της πλαστικότητας και έτσι της χαοτικής ψαθυρής συμπεριφοράς τους, η οποία μεταξύ των άλλων απαιτεί τα εξής:

(i) Εκπλήρωση των απαιτήσεων των κατασκευαστών, οι οποίοι επιθυμούν τη διαβεβαίωση ότι η δομή μετά την κρούση αντέχει στις μηχανικές φορτίσεις μέχρι τον επόμενο έλεγχο,

(ii) Απάντηση των επιστημονικών ερωτημάτων για κατανόηση στην περίπτωση της κρούσης  της έναρξης των φυσικών φαινομένων που σχετίζονται με την αντίσταση ή την απώλεια της αντοχής των δομών από σύνθετα υλικά σε απότομη φόρτιση,

(iii) Δυνατότητα συσχέτισης της ντετερμινιστικής προσομοίωσης με την ασφάλεια του βιομηχανικού σχεδιασμού και την υπηρεσία συντήρησης.

Αν και στην παρούσα εργασία γίνεται μελέτη του φαινομένου της κρούσης χαμηλής ταχύτητας σε σύνθετα υλικά για αεροναυπηγικές εφαρμογές, μια πολύ γενική κατηγοριοποίηση της απόκρισης των υλικών σε κρούση είναι η εξής:

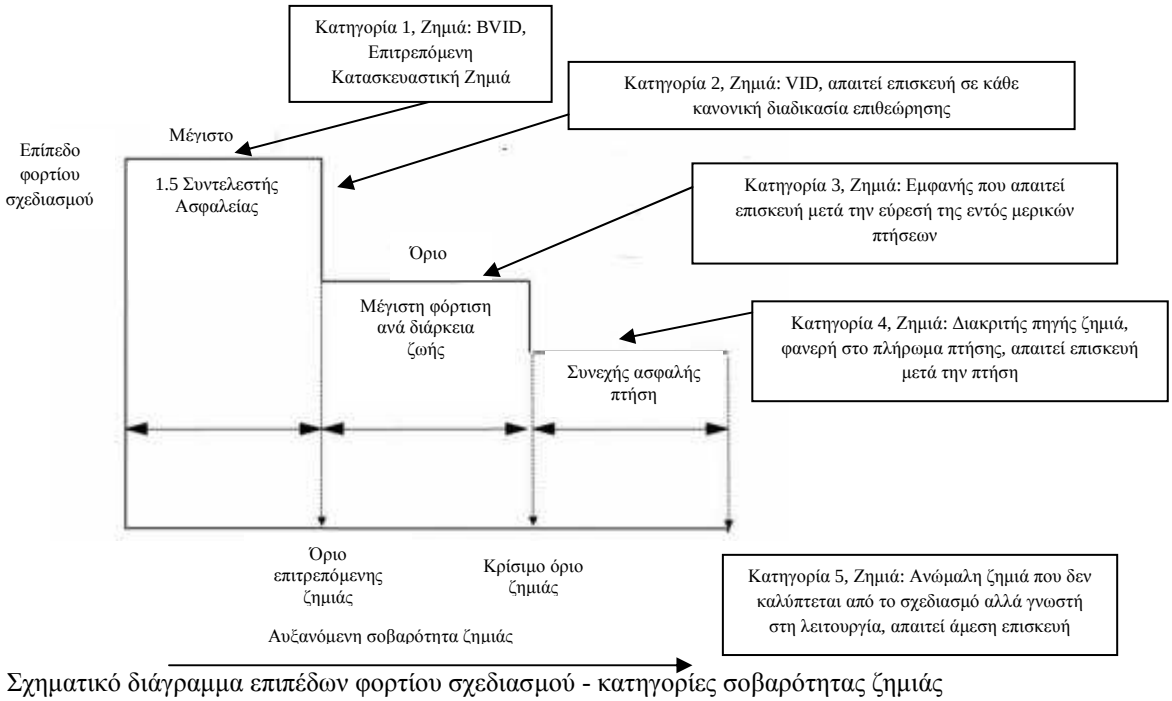
α) Κρούση μεγάλης μάζας, γνωστή ως **κρούση χαμηλής ταχύτητας** (low velocity impact), η οποία τυπικά λαμβάνει χώρα για ταχύτητες κάτω των 10 m/sec (π.χ. πτώση εργαλείων).

β) **Κρούση μέσης ταχύτητας** (intermediate velocity impact) για ταχύτητες μεταξύ των 10 m/sec έως 50 m/sec (π.χ. θραύσματα από τυφώνα, ξένα αντικείμενα στο δρόμο ή σε διάδρομο απογείωσης).

γ) **Κρούση υψηλής ταχύτητας ή βαλλιστική κρούση** (high velocity or ballistic impact) για ταχύτητες μεταξύ 50 m/sec έως 1000 m/sec (π.χ. εκρηκτικά ή σφαίρες).

δ) **Κρούση υπερ-υψηλής ταχύτητας** (hyper velocity impact) για ταχύτητες μεγαλύτερες από 2-5 km/sec για διαστημικές εφαρμογές (πτώση αντικειμένων μικρομετεωριτών σε περιπτώσεις χαμηλής τροχιάς γύρω από τη γη).

Κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού ενός αεροσκάφους, οι ζημιές λόγω κρούσης έχουν ληφθεί υπόψη από τη φιλοσοφία σχεδίασης ‘fail safe’, όπου εναλλακτικές διαδρομές φόρτισης λαμβάνονται υπόψη με σκοπό την επίτευξη ανθεκτικότητας στη ζημιά λόγω κρούσης μέτριας σοβαρότητας. Επίσης, ελαττώνονται οι τιμές των επιτρεπόμενων τιμών αντοχής κατά το σχεδιασμό μέχρι ένα βαθμό όπου η ελάχιστα ορατή ζημιά λόγω κρούσης (barely visible impact damage – BVID) μπορεί να διατηρηθεί ακόμα και στην υψηλότερη φόρτιση και για όλη την χρονική περίοδο χρήσης χωρίς καμία αποδόμηση της κατασκευής. Οποιαδήποτε ζημιά, η οποία υπερβαίνει το επίπεδο του μεγέθους της ελάχιστα ορατής ζημιάς λόγω κρούσης (π.χ. ορατή ζημιά) μπορεί να μειώσει την ενδιάμεση επίδοση της κατασκευής και θα πρέπει να επισκευαστεί αμέσως. Στα σχήματα 2 και 3 παρουσιάζεται η κατάταξη σε πέντε κατηγορίες των ζημιών λόγω κρούσης, από την πιο σοβαρή ζημιά μέχρι την λιγότερο ανιχνεύσιμη (**multilevel analysis:** προσομοίωση με χρήση διαφορετικής ανάλυσης – πυκνότητας πλέγματος υπολογιστικών μοντέλων), σύμφωνα με τον κανονισμό EASA AC 20-107B.




**Σχήμα 2:** Σχηματικό διάγραμμα επιπέδων φορτίου σχεδιασμού - κατηγορίες σοβαρότητας ζημιάς

| Κατηγορία ζημιάς | Μέθοδοι ανίχνευσης ζημιάς | Στρατηγικές σχεδιασμού διαχείρισης ασφάλειας |
|---|---|---|
| **Κατηγορία 1**: Ζημιά που μπορεί να είναι μη ανιχνεύσιμη από μεθόδους επιτόπου επιθεώρησης (η επιθεώρηση ενδεχομένως να μην απαιτείται). | BVID, γρατζουνιές, κοιλότητες και επιτρεπόμενα κατασκευαστικά ελαττώματα που διατηρούν το μέγιστο φορτίο για όλη τη διάρκεια ζωής. | Σχέδια (με συντελεστή ασφαλείας), έλεγχος ποιότητας παραγωγής, συντήρηση. |
| **Κατηγορία 2**: Ζημιά που ανιχνεύθηκε με επιτόπου επιθεώρηση (σενάριο επισκευής). | VID (από μικρό έως μεγάλο μέγεθος), βαθιές κοιλότητες, κατασκευαστικές αστοχίες, μέγιστη τοπική θερμότητα ή περιβαλλοντική αποδόμηση που διατηρεί το οριακό φορτίο μέχρι να ανιχνευτεί. | Σχεδιασμός για σπάνια ζημιά, ποιοτικός έλεγχος παραγωγής, ενέργεια συντήρησης. |
| **Κατηγορία 3:** Εμφανής ζημιά ανιχνεύσιμη εντός μερικών πτήσεων λειτουργίας (σενάριο επισκευής). | Ζημιά εμφανής σε λειτουργίες σε επιθεώρηση ή απώλεια της αρχής 'μορφή / καταλληλότητα / λειτουργία' που διατηρεί την αντοχή κοντά στο οριακό φορτίο μέχρι να ανιχνευτεί από το κέντρο ελέγχου. | Σχεδιασμός για σπάνια μεγάλη ζημιά, επιχειρησιακή ενέργεια, ενέργεια συντήρησης. |
| **Κατηγορία 4:** Διακριτή πηγή ζημιάς - ο πιλότος περιορίζει τους ελιγμούς (σενάριο επισκευής). | Ζημιά εν πτήση που είναι εμφανής για τον πιλότο (έκρηξη κινητήρα, χτύπημα πουλιού, αστραπή, χαλάζι). | Σχεδιασμός για σπάνια γνωστά γεγονότα, επιχειρησιακή άμεση δράση, δράση συντήρησης. |
| **Κατηγορία 5:** Σοβαρή ζημιά που δημιουργήθηκε από ανώμαλο έδαφος ή γεγονότα πτήσης (σενάριο επισκευής). | Ζημιά προκαλούμενη εξαιτίας σπάνιων γεγονότων λειτουργίας ή σε ένα βαθμό μεγαλύτερο από τη θεώρηση στο σχεδιασμό, η οποία πρέπει να αναφερθεί από το κέντρο ελέγχου για άμεση ενέργεια. | Απαιτείται ενημέρωση του κέντρου ελέγχου για λόγους ασφαλείας (άμεση αναφορά), συντήρηση και ενέργεια σχεδιασμού. |

**Σχήμα 3:** Κατηγορίες ζημιάς για βασικές δομές αεροσκάφους από σύνθετα υλικά

Όμως, ενδιαφέρον στη χρήση των συνθέτων υλικών προκύπτει κυρίως εξαιτίας των απαιτήσεων για υψηλό βαθμό αξιοπιστίας και ασφάλειας των αεροναυπηγικών κατασκευών εξαιτίας της πολυπλοκότητας της συμπεριφοράς τους και συνεπώς της δυσκολίας στη δημιουργία προβλεπτικών μοντέλων. Αυτό δημιουργεί μία υπερβολική εξάρτηση στις δοκιμές σε όλα τα στάδια όπως είναι ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη, το εργαστήριο και η πιστοποίηση, η επιθεώρηση σε λειτουργία και οι επισκευές. Τα κόστη δοκιμών είναι τεράστια και οδήγησαν αρχικά σε σκεπτικισμό σχετικά με τη χρήση των σύνθετων υλικών.

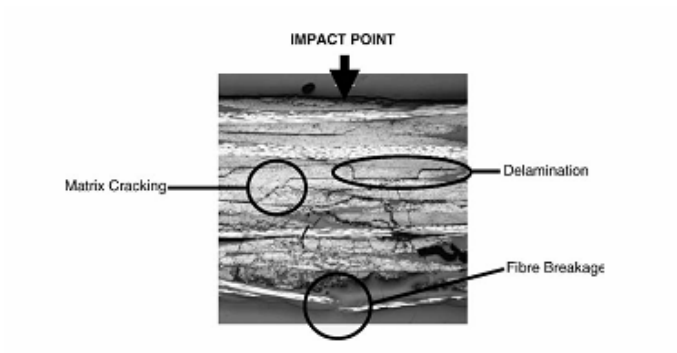
Εκτιμάται ότι με σκοπό τη διαβεβαίωση ενός ασφαλούς σχεδιασμού, οι αεροναυπηγικές βιομηχανίες ξοδεύουν περίπου 350 εκατομμύρια δολάρια κάθε χρόνο για την εκτέλεση δοκιμών. Στην περίπτωση δομών από σύνθετα υλικά δεν υπάρχουν αποδεδειγμένες αξιόπιστες αναλυτικές μέθοδοι για πρόβλεψη της κρούσης και της ανθεκτικότητας της ζημιάς όπως επίσης και των ζημιών λόγω κρούσης. Από τη στιγμή που η αποτίμηση του κόστους και του διαχειριστικού κινδύνου για νέα και μη δοκιμασμένα συστήματα είναι δύσκολο έργο, η μείωση του κινδύνου πραγματοποιείται λαμβάνοντας υπόψη πολλαπλούς συντηρητικούς συντελεστές ασφαλείας και σημαντικές απαιτήσεις επιθεώρησης, με στόχο την αποφυγή εκτέλεσης δαπανηρών δοκιμών πλήρους κλίμακας (full scale tests). Το μειονέκτημα, όμως αυτής της προσέγγισης είναι ότι οδηγεί σε υπερβολικά συντηρητικό σχεδιασμό και το πλήρες δυναμικό των σύνθετων υλικών δεν διερευνάται.

## 1.2 Κίνητρο

Η ευαισθησία στη ζημιά από συγκεντρωμένες δυνάμεις κρούσης εκτός του επιπέδου (out of plane) είναι μία από τις πιο σημαντικές σχεδιαστικές παραμέτρους για δομές από ενισχυμένα σύνθετα υλικά στην αεροναυπηγική βιομηχανία. Η ανάπτυξη μοντέλων εικονικών μηχανικών δοκιμών (virtual testing) για ανάλυση της αντίστασης στη ζημιά της δομής λόγω κρούσης είναι μεγάλου ενδιαφέροντος με στόχο τη μείωση του κόστους πιστοποίησης. Αλλά το πιο σημαντικό, είναι η πρόβλεψη της εναπομένουσας αντοχής (residual strength) της κατασκευής πράγμα το οποίο αποτελεί δύσκολο έργο.

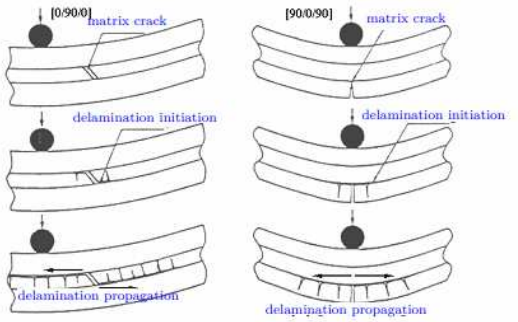
Όταν μία κατασκευή από σύνθετο υλικό υπόκειται σε κρούση, η περιγραφή του προβλήματος είναι αρκετά περίπλοκη. Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά είναι

ετερογενή υλικά εξαιτίας της παρουσίας τοπικών αστοχιών, όπως μικρά κενά αέρα, ζώνες πλούσιες σε ρητίνη, ασυνέχειες των ινών, απώλεια της ευθυγράμμισης των ινών, αλλαγές στην πυκνότητα των ινών, κλπ. Αντίστοιχα, οι κατασκευές από σύνθετο υλικό αποδομούνται με μεγάλη ποικιλία μηχανισμών αστοχίας (ρωγμή μήτρας, αποσύνδεση της διεπιφάνειας ίνας – μήτρας, αποκόλληση στρώσεων και θραύση ίνας), οι οποίες αλληλεπιδρούν με ένα περίπλοκο τρόπο, ιδιαίτερα όταν η δομή υπόκειται σε φόρτιση κρούσης (σχήμα 4).




**Σχήμα 4:** Διαφορετικοί τρόποι ζημιάς σύνθετου υλικού λόγω κρούσης

Επιπλέον, η έναρξη και η εξέλιξη αυτών των μηχανισμών αστοχίας (σχήμα 5) εξαρτάται από μία μεγάλη σειρά παραμέτρων κρούσης, όπως είναι οι φυσικές παράμετροι και οι ιδιότητες της διάταξης κρούσης, της διάταξης της κατασκευής και των περιβαλλοντικών συνθηκών.




**Σχήμα 5:** Έναρξη και διάδοση ζημιάς λόγω κρούσης χαμηλής ταχύτητας

Εξαιτίας αυτών των γεγονότων, η ανάπτυξη ενός αξιόπιστου εργαλείου για την πρόβλεψη της αντίστασης στη ζημιά λόγω κρούσης και της αντίστοιχης ανθεκτικότητας στην ζημιά είναι μία πολλά υποσχόμενη δραστηριότητα, η οποία προς το παρόν, δεν είναι διαθέσιμη.

Αναλυτικά μοντέλα κρούσης που αναπαριστούν το φυσικό σύστημα πρέπει να εξιδανικεύονται σημαντικά για να μπορούν να δώσουν μία πιθανή θεωρητική προσέγγιση. Ως αποτέλεσμα, οι λύσεις που επιτυγχάνονται είναι έγκυρες για ένα στενό φάσμα διατάξεων κρούσης, ή ακόμα δεν είναι κατάλληλες διότι οι προβλέψεις απέχουν πολύ από την πραγματικότητα.

Χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στις υπολογιστικές μεθόδους και τη θεμελιώδη αναπαράσταση των μηχανισμών αστοχίας των σύνθετων υλικών, η εικονική δοκιμή της κρούσης, με χρήση αριθμητικών προσομοιώσεων με κώδικες πεπερασμένων στοιχείων φαίνεται να είναι εφικτή. Η πρόταση για μοντελοποίηση της κρούσης με κώδικες πεπερασμένων στοιχείων είναι εν μέρει εφικτή εξαιτίας της ανάπτυξης των υπολογιστών που οδήγησε το χρόνο ανάλυσης σε αποδεκτά επίπεδα. Αυτό το γεγονός επετεύχθη κυρίως με την παράλληλη ανάλυση των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων σε πολλαπλούς επεξεργαστές, π.χ. χρησιμοποιώντας συστοιχία (cluster) υπολογιστών.

Σε αντίθεση με τα αναλυτικά μοντέλα, τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων είναι ικανά να μοντελοποιήσουν μεγάλο αριθμό διατάξεων κρούσης και αρκετών σχετικών φαινομένων, όπως μοντελοποίηση φαινομένου δυναμικής της κρούσης, ανάλυση επαφής, και σταδιακή αποδόμηση του υλικού. Η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να περιγραφεί με την εφαρμογή καταστατικών μοντέλων (constitutive models) που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της μηχανικής ζημιάς συνεχούς μέσου (continuum damage mechanics). Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά για την ρεαλιστική πρόβλεψη της εικονικής δοκιμής είναι ο κατάλληλος σχηματισμός των καταστατικών μοντέλων.

## 1.3 Σκοπός

Ο κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός εργαλείου πεπερασμένων στοιχείων για την προσομοίωση της τυποποιημένης δοκιμής κρούσης με πτώση βάρους (drop – weight impact) σε δοκίμια συνθέτων υλικών με πολυμερική μήτρα και ενισχυμένα με συνεχής ίνες άνθρακα. Μελλοντικά, θα μπορούσε να επιτευχθεί προσομοίωση της δοκιμής θλίψης μετά την κρούση (Compression After Impact) και της εναπομένουσας αντοχής του πολύστρωτου σύνθετου υλικού (residual strength). Η κρούση με πτώση βάρους κατηγοριοποιείται στη δοκιμή κρούσης χαμηλής ταχύτητας και στη δοκιμή μεγάλης μάζας. Υπό αυτή τη φόρτιση, η

αποκόλληση των στρώσεων είναι ο κύριος μηχανισμός ζημιάς καθώς μειώνει αισθητά τη θλιπτική αντοχή της κατασκευής.

Η αξιοπιστία των προβλέψεων εξαρτάται κυρίως από το καταστατικό μοντέλο για την περιγραφή της συμπεριφοράς του σύνθετου υλικού. Αυτό είναι η περιγραφή της έναρξης και ανάπτυξης των διαφορετικών μηχανισμών ζημιάς. Η στρατηγική που χρησιμοποιείται εδώ βασίζεται στη μοντελοποίηση της αστοχίας του σύνθετου υλικού, όπου ένα πολύστρωτο αποτελείται από ομογενής στρώσεις, η κάθε μία με ορθοτροπικές ιδιότητες που εξαρτώνται από τον προσανατολισμό της ίνας. Αντίστοιχα, δύο ξεχωριστά καταστατικά μοντέλα σχηματίζονται χρησιμοποιώντας ένα ακριβές θερμοδυναμικό πλαίσιο: ένα για την περιγραφή της αποσύνδεσης μεταξύ των στρώσεων του πολύστρωτου (π.χ αποκόλληση), και ένα άλλο για την περιγραφή των μηχανισμών ζημιάς που λαμβάνουν χώρα σε κάθε στρώση (π.χ. μηχανισμούς ζημιάς εντός της στρώσης: ρωγμή μήτρας, αποσύνδεση διεπιφάνειας ίνας – μήτρας, και θραύση ίνας). Ο σχηματισμός και η εφαρμογή και των δύο καταστατικών μοντέλων πραγματοποιούνται ξεχωριστά, αλλά η αλληλεπίδραση των μηχανισμών ζημιάς θα μπορούσε να διαβεβαιωθεί με χρήση και των δύο μοντέλων στο ίδιο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων. Το προτεινόμενο μοντέλο αποκόλλησης στρώσεων (interlaminar damage) βασίζεται σε προηγούμενες εργασίες και δημοσιεύσεις του Turon ενώ επίσης γίνεται και παρουσίαση των συνεκτικών στοιχείων (cohesive elements) μέσω του εμπορικού πακέτου Abaqus. Αντίστοιχα για την περίπτωση ζημιάς εντός της στρώσης του σύνθετου υλικού (intralaminar damage) γίνεται παρουσίαση του μοντέλου Miami (continuum damage model), ενώ γίνεται παρουσίαση των κριτηρίων Hashin 2D / 3D & Puck και χρήση τους μέσω υπορουτίνας VUMAT του εμπορικού πακέτου Abaqus γραμμένη σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran.

Άλλοι στόχοι της παρούσας εργασίας, σχετικοί με τις προβλέψεις των πεπερασμένων στοιχείων, είναι η αναλυτική περιγραφή της κρούσης και η καταγραφή των κρίσιμων τιμών ζημιάς για διάφορες περιπτώσεις. Μελλοντικά, θα μπορούσε να καθορισθεί ένα πειραματικό πλάνο δοκιμών με στόχο την αποτίμηση της εγκυρότητας των αριθμητικών προβλέψεων κατά την προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία.

Επίσης, εξαιτίας της απλότητας της θεωρούμενης κατασκευής (μονολιθικές, επίπεδες και τετράγωνες πλάκες από πολύστρωτο σύνθετο υλικό με συμβατικές αλληλουχίες στρώσεων), η αναλυτική περιγραφή περιλαμβάνει την πρόβλεψη της ελαστικής απόκρισης και τις προτάσεις για νέες οριακές τιμές στις οποίες ξεκινά σημαντική ζημιά. Η αναλυτική περιγραφή είναι κατάλληλη για ανάλυση πρωταρχικού σχεδιασμού (preliminary design), καθώς επιτρέπει τη γρήγορη αποτίμηση του ρόλου που παίζει κάθε παράμετρος στο φαινόμενο της κρούσης. Αντίστοιχα, η αναλυτική περιγραφή είναι χρήσιμη για τον προσδιορισμό πειραματικών πλάνων κρούσης. Αν και τα αναλυτικά εργαλεία που μελετώνται επικεντρώνονται σε εργαστηριακά δοκίμια, οι ιδέες που αποκτώνται συχνά μπορούν να εφαρμοστούν για πιο σύνθετες διατάξεις κρούσης.

## 1.4 Δομή εργασίας

Σύμφωνα με του αντικειμενικούς στόχους που περιγράφηκαν προηγουμένως, η εργασία αποτελείται από τα εξής βασικά μέρη:

Α. **Αναλυτική περιγραφή** κρούσης (κεφάλαιο 2),

Β. **Πειραματικές δοκιμές** (κεφάλαιο 3),

Γ. **Καταστατικά μοντέλα για υπολογιστική προσομοίωση** με χρήση πεπερασμένων στοιχείων (κεφάλαια 4 και 5),

Δ. **Προσομοίωση κρούσης** με χρήση υπολογιστή (κεφάλαιο 6).

Αναλυτικά, στο **κεφάλαιο 2** δίνεται μία λεπτομερής περιγραφή των αναλυτικών μοντέλων κρούσης που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία. Αυτή η περιγραφή περιλαμβάνει τα μοντέλα για την πρόβλεψη της ελαστικής απόκρισης της κρούσης, καθώς επίσης και την περιγραφή των διαθέσιμων και των νέων προτάσεων για κρίσιμες τιμές ζημιάς.

Παράλληλα, στο **κεφάλαιο 3** παρουσιάζονται οι τυποποιημένες δοκιμές και οι συσκευές κρούσης με πτώση βάρους και θλίψης μετά την κρούση.

Σχετικά με την ανάπτυξη προσομοιώσεων πεπερασμένων στοιχείων, ένα μοντέλο ζημιάς μεταξύ των στρώσεων για την προσομοίωση της έναρξης και ανάπτυξης αποκόλλησης στρώσεων υπό μεταβλητές συνθήκες μεικτού τύπου

αναπτύσσονται στο **κεφάλαιο 4**. Ο σχηματισμός και η εφαρμογή που παρουσιάζονται είναι μία τροποποιημένη πρόταση του μοντέλου που αρχικά αναπτύχθηκε από τον Turon. Επίσης γίνεται παρουσίαση των συνεκτικών στοιχείων (cohesive elements) μέσω του εμπορικού πακέτου Abaqus.

**Στο κεφάλαιο 5**, περιγράφεται ο σχηματισμός μοντέλου ζημιάς συνεχούς μέσου για την πρόβλεψη της έναρξης και συσσώρευσης των μηχανισμών ζημιάς εντός της στρώσης του σύνθετου υλικού στα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Το μοντέλο που περιγράφεται βασίζεται στην εργασία που αναπτύχθηκε από τον Miami το οποίο αποτελεί το καταστατικό μοντέλο ζημιάς που σχηματίσθηκε στα πλαίσια της μηχανικής ζημιάς συνεχούς μέσου (continuum damage mechanics), ενώ γίνεται χρήση των κριτηρίων Hashin 2D / 3D & Puck μέσω υπορουτίνας VUMAT γραμμένη σε Fortran μέσω του εμπορικού πακέτου Abaqus.

Στη συνέχεια, στο **κεφάλαιο 6**, πραγματοποιείται προσομοίωση κρούσης μεταλλικού σφαιριδίου σε πλάκα από σύνθετο υλικό με χρήση του πακέτου Abaqus μέσω της υπορουτίνας VUMAT που προαναφέρθηκε.

Τέλος, στο **κεφάλαιο 7** παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και καταγράφονται οι πιθανές μελλοντικές αναλύσεις και ερευνητικές δραστηριότητες.

# 2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ

## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πρόβλεψη της ζημιάς λόγω κρούσης σε δομές πολύστρωτων σύνθετων υλικών από εξωτερικά αντικείμενα είναι ένα αρκετά πολύπλοκο φαινόμενο καθώς είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ διαφορετικών μηχανισμών αστοχίας όπως είναι η θραύση μήτρας, η αποσύνδεση διεπιφάνειας ίνας – μήτρας, η αποκόλληση των στρώσεων και η θραύση της ίνας. Παράλληλα, εξαρτάται από τις παραμέτρους του φαινομένου της κρούσης δηλαδή τις φυσικές ιδιότητες της διάταξης κρούσης και της δομικής κατασκευής, τις περιβαλλοντικές συνθήκες κλπ.

Πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η ζημιά λόγω κρούσης σχετίζεται άμεσα με τη φύση της συμπεριφοράς σε κρούση, η οποία με τη σειρά της ελέγχεται από τις ισχύουσες παραμέτρους. Όμως, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την επίδραση κάθε ισχύουσας παραμέτρου στη συμπεριφορά σε κρούση, και έτσι να έχουμε μία ποσοτική αποτύπωση των πιθανών μηχανισμών ζημιάς που μπορούν να λάβουν χώρα π.χ. με σταθερή ενέργεια κρούσης, δημιουργείται κυρίως αποκόλληση στρώσεων λόγω ψευδοστατικής κρούσης, ενώ μόνιμη παραμόρφωση και θραύση ίνας δημιουργείται λόγω κρούσης με διαστολή κύματος. Η αρχική γνώση της συμπεριφοράς σε κρούση όχι μόνο βοηθά στην αποτίμηση του πιθανού τύπου ζημιάς που εισάγεται, αλλά είναι επίσης χρήσιμο για την ανάπτυξη αποτελεσματικών αριθμητικών μοντέλων, για προγραμματισμό πειραματικών δοκιμών, και για την επιλογή ενός κατάλληλου απλοποιημένου αναλυτικού μοντέλου για περιγραφή του φαινομένου της κρούσης.

Τα αναλυτικά μοντέλα είναι ένα κατάλληλο και δυνατό εργαλείο για γρήγορα προβλεπτικά αποτελέσματα για μία δεδομένη διάταξη κρούσης, τα οποία είναι κατάλληλα για σύγκριση διαφορετικών περιπτώσεων κρούσης με διαφορετικές τιμές παραμέτρων. Γενικά, τα αναλυτικά μοντέλα περιορίζονται σε απλές γεωμετρίες, βασίζονται σε βηματικής μορφής λύση μη γραμμικών διαφορικών ή ολοκληρωτικών εξισώσεων και περιγράφουν τη μεταβατική απόκριση του συστήματος μέχρι την έναρξη της ζημιάς, π.χ. στην ελαστική περιοχή.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το πλαίσιο και τα βασικά χαρακτηριστικά της δυναμικής της κρούσης σε ορθογώνιες, επίπεδες και μονολιθικές πλάκες από

σύνθετο υλικό, καθώς επίσης και μία βιβλιογραφική έρευνα των αναλυτικών μοντέλων κρούσης που υπάρχουν διαθέσιμα. Παράλληλα, πραγματοποιείται παρουσίαση των κύριων προσεγγίσεων που χρησιμοποιούνται για γρήγορο καθορισμό της φύσης της κρούσης. Τέλος, παρουσιάζεται μία ανασκόπηση των αναλυτικών ορίων ζημιάς που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, όπως η ανάπτυξη νέων προτάσεων για μερικούς μηχανισμούς ζημιάς.

## 2.2 ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΕ ΚΡΟΥΣΗ

Πειραματικές μετρήσεις δείχνουν ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της φύσης της συμπεριφοράς σε κρούση και της προκαλούμενης ζημιάς. Από τη στιγμή που η συμπεριφορά σε κρούση καθορίζεται από τις ισχύουσες παραμέτρους του φαινομένου της κρούσης, η ζημιά που προκαλείται εξαρτάται επίσης από αυτές τις παραμέτρους. Για κρούσεις σε ορθογώνιες, επίπεδες και μονολιθικές πλάκες από πολύστρωτο σύνθετο υλικό, οι παράμετροι κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες:

1. **παράμετροι πλάκας** (πάχος, επίπεδες διαστάσεις, διαστρωμάτωση, ελαστικές ιδιότητες - θραύσης, πυκνότητα και συνοριακές συνθήκες),
2. **παράμετροι διάταξης κρούσης** (impactor) (σχήμα, μέγεθος, ελαστικές ιδιότητες, μάζα, ταχύτητα, γωνία κρούσης) και
3. **περιβαλλοντικές συνθήκες**.

Η ελαστική συμπεριφορά μπορεί να προβλεφθεί εύκολα στην ελαστική περιοχή με χρήση προσεγγίσεων που βασίζονται σε αναλυτικά μοντέλα του φαινομένου της κρούσης και με τον τρόπο αυτό μπορούμε να μάθουμε την πιθανή προκαλούμενη ζημιά. Η ζημιά αρχίζει όταν μία κατάλληλη παράμετρος της ελαστικής απόκρισης, τυπικά η δύναμη κρούσης είναι μεγαλύτερη από τη σχετική κρίσιμη τιμή της ζημιάς.

Εκτός των μοντέλων για πρόβλεψη της απόκρισης λόγω κρούσης, είναι χρήσιμο να παρουσιαστούν οι διαφορετικοί τύποι απόκρισης σε κρούση για πλάκες (συμπεριφορά κρούσης) για να έχουμε ποιοτική αίσθηση της πιθανής ζημιάς που θα προκληθεί και για την επιλογή απλοποιημένου μοντέλου για την περιγραφή σε κρούση. Σύμφωνα με τον Olsson [6] δημιουργούνται κύματα τάσεων που διαδίδονται από το σημείο κρούσης, ενώ η επίδραση των κυμάτων σταδιακά

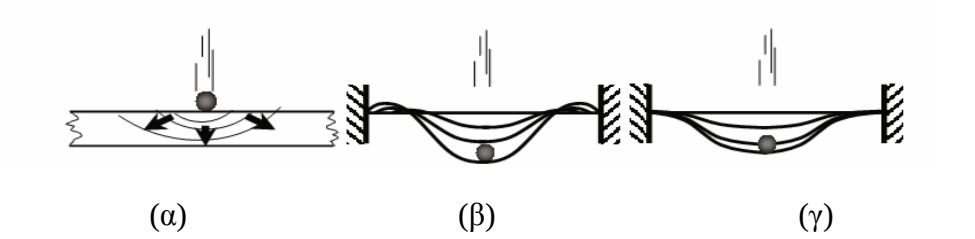
εξασθενεί εξαιτίας της απόσβεσης του υλικού και της διασποράς του κύματος. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις διάδοσης κυμάτων ανάλογα με το χρόνο κρούσης:

i) Για χρόνους κρούσης $t_i$ κοντά στο χρόνο που χρειάζονται τα κύματα για να διαδοθούν στη διεύθυνση κατά την έννοια του πάχους (π.χ $t_i \leq \frac{h}{c_z}$, όπου h το πάχος της πλάκας και $c_z$ η ταχύτητα του ήχου στη διεύθυνση του πάχους), η απόκριση περιλαμβάνει διάδοση κύματος σε τρεις διαστάσεις ή βαλλιστική κρούση (βλ. σχήμα 6α). Στην περίπτωση αυτή συνήθως προκαλείται τοπική και εύκολα ανιχνεύσιμη ζημιά.

ii) Για μεγαλύτερους χρόνους κρούσης, καμπτικά και διατμητικά κύματα διακατέχουν την απόκριση (σχήμα 6 – κρούση άπειρης πλάκας). Εάν η γενική απόκριση της πλάκας μπορεί να παραληφθεί (περίπτωση β), η συμπεριφορά σε κρούση ονομάζεται κρούση σε μισό – διάστημα (half – space impact).

iii) Για χρόνους πολύ μεγαλύτερους από το χρόνο που χρειάζονται αυτά τα κύματα για να φτάσουν στα όρια της πλάκας, επικρατεί χαμηλότερος τρόπος δόνησης του συστήματος διάταξης κρούσης – πλάκας (σχήμα 6γ). Τελικά, ο τρόπος παραμόρφωσης πλησιάζει την καθαρά στατική μορφή (ψευδοστατική κρούση).

Σχετικά με τις κρούσεις που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα αεροσκάφος, η απόκριση του σχήματος 6β είναι τυπική για εφαρμογές κρούσης από χαλάζι και χαλίκι στον διάδρομο απογείωσης, ενώ η απόκριση στο σχήμα 6γ είναι τυπική για πτώση σε βαριά αντικείμενα. Το μέγεθος της επίπεδης πλάκας και οι οριακές συνθήκες επηρεάζουν την απόκριση του σχήματος 6γ, αλλά όχι τις αποκρίσεις των σχημάτων 6α & β, διότι σε αυτές τις περιπτώσεις, το φαινόμενο της κρούσης λαμβάνει χώρα πολύ πριν τα κύματα των τάσεων φτάσουν στα άκρα της κατασκευής. Το φορτίο και η απομάκρυνση είναι εκτός φάσης κατά τη διάρκεια κρούσης μικρής μάζας ενώ είναι λίγο πολύ στην ίδια φάση κατά τη διάρκεια κρούσης μεγάλης μάζας. Επιπλέον, εξαιτίας πιο τοπικής απόκλισης, μικρής μάζας διατάξεις κρούσης προκαλούν υψηλότερα φορτία κρούσης και έναρξη ζημιάς νωρίτερα από διατάξεις κρούσεις μεγάλης μάζας με την ίδια κινητική ενέργεια.



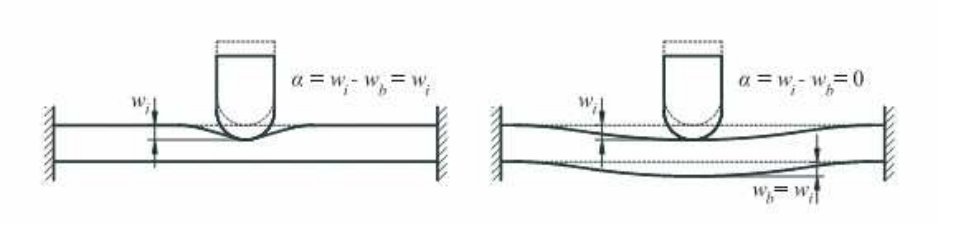
(α) (β) (γ)

**Σχήμα 6:** Αποκρίσεις κρούσης: (α) Επικράτηση διεύρυνσης κυμάτων, (β) επικράτηση καμπτικών και διατμητικών κυμάτων και (γ) ψευδο – στατική απόκριση (Olsson)

Η περίπτωση **καθαρά ορατής ζημιάς λόγω κρούσης (clear visible impact damage)** σχετίζεται με την απόκριση του σχήματος 6 α. Επιπλέον, ελάχιστα ορατή ζημιά λόγω κρούσης (barely visible impact damage – BVID) σχετίζεται με τους τύπους απόκρισης που φαίνονται στα σχήματα 6 β & γ, όπου η αποκόλληση των στρώσεων είναι ο κύριος μηχανισμός ζημιάς. Οι αποκολλήσεις είναι η κύρια απειλή διότι είναι κρυμμένες και μειώνουν σημαντικά την αντοχή σε θλίψη της κατασκευής.

## 2.3 ΤΟΠΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

Η κρούση σε μονολιθικές πλάκες περιλαμβάνει τοπικές και γενικές παραμορφώσεις. Όμως, η ζημιά σε κρούση μπορεί να προκληθεί εξαιτίας τοπικών τάσεων επαφής και / ή τάσεων που προέρχονται από δομική απόκριση. Το σχήμα 7 δείχνει δύο ακραίες αποκρίσεις σε πλάκα υπό κρουστική φόρτιση. Μόνο τοπική παραμόρφωση φαίνεται στο σχήμα 7 α, το οποίο μπορεί να προέλθει από κρούση μικρής μάζας και υψηλής ταχύτητας σε μεγάλου πάχους πλάκες σύνθετου υλικού. Όμως, μόνο γενική παραμόρφωση (global deflection) φαίνεται στο σχήμα 7 β, η οποία μπορεί να συμβεί σε κρούση μεγάλης μάζας και υψηλής ταχύτητας σε λεπτές πλάκες σύνθετου υλικού.




(α) (β)

**Σχήμα 7:** Ακραίες αποκρίσεις της πλάκας υπό κρουστική φόρτιση, (α) καθαρά τοπική παραμόρφωση και (β) καθαρά συνολική παραμόρφωση

Η τοπική παραμόρφωση τυπικά περιγράφεται με χρήση ενός κατάλληλου νόμου επαφής, ο οποίος σχετίζει τη **συγκεντρωμένη δύναμη επαφής $F_c$** και το **επιφανειακό κοίλωμα α** ως:

$$\boxed{F_c = k_a a^q} \qquad (2.2)$$

όπου $\mathbf{k_a}$ είναι η δυσκαμψία επαφής, **q** είναι η παράμετρος ισχύος και **α** το επιφανειακό κοίλωμα που καθορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της μετατόπισης της διάταξης κρούσης $\mathbf{w_i}$ και της μετατόπισης του πίσω μετώπου $\mathbf{w_b}$ [1] ή το μέσο επίπεδο $\mathbf{w_o}$ της πλάκας στο σημείο κρούσης [6]. Έτσι:

$$a = w_i - w_o \qquad (2.3)$$

Όπως θα φανεί στις επόμενες ενότητες, ο νόμος επαφής είναι απαραίτητο στοιχείο για την ανάπτυξη αναλυτικών μοντέλων του φαινομένου της κρούσης. Εναλλακτικά μοντέλα, όπως το σύστημα μάζας – ελατηρίου και μέθοδοι διατήρησης ορμής, χρησιμοποιούν το συντελεστή απόδοσης για χαρακτηρισμό της απώλειας σε τοπική ενέργεια εξαιτίας της κρούσης [11]. Ο νόμος επαφής μπορεί να επιτευχθεί με πειραματικές ή αναλυτικές μεθόδους και εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού των σωμάτων, τη διαδοχή στρώσεων, το μέγεθος και το σχήμα της διάταξης κρούσης.

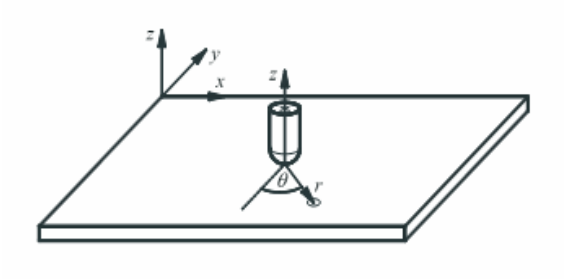
Για τα σύνθετα υλικά είναι αποδεκτό ότι η τοπική παραμόρφωση μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας ένα στατικά προσδιορισμένο νόμο επαφής για λογικούς ρυθμούς παραμόρφωσης [14,15] όπως συμβαίνει με τις περιπτώσεις κρούσης χαμηλής ταχύτητας. Το στατικό φορτίο επαφής μεταξύ δύο γραμμικά ελαστικών σωμάτων περιγράφεται από το νόμο επαφής Hertz, ο οποίος βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις: άπειρο πάχος πλάκας (π.χ. κρούση στο μισό πάχος πλάκας), τα σώματα σε επαφή είναι ισοτροπικά, επαφή χωρίς τριβή μεταξύ της διάταξης κρούσης και της πλάκας, και αμελητέα καμπυλότητα της επιφάνειας της πλάκας κατά τη διάρκεια της επαφής. Ο νόμος επαφής Hertz εφαρμόζεται σε μεγάλο εύρος περιπτώσεων ακόμα και όταν όλες οι υποθέσεις δεν ικανοποιούνται (π.χ. κοίλωμα στην επιφάνεια των πλακών από σύνθετο υλικό), διότι συνήθως ταιριάζει αρκετά καλά με τα πειραματικά δεδομένα που επιτυγχάνονται από τις δοκιμές κοιλώματος της επιφάνειας.

### 2.3.1 Νόμος επαφής Hertz για πολύστρωτες πλάκες από σύνθετο υλικό

Στην περίπτωση ημισφαιρικής κρουστικής διάταξης με κρούση σε πλάκα (σχήμα 8), ο νόμος επαφής Hertz (σχ. 2.2) καθορίζεται εξισώνοντας τη δύναμη q με 3/2 και τη δυσκαμψία επαφής από ka σε $k_H$:

$$k_H = \frac{4}{3} Q_a \sqrt{R} \quad (2.4) \qquad \text{όπου:} \qquad Q_a = \left(\frac{1}{Q_{zi}} + \frac{1}{Qz_{zp}}\right)^{-1} \quad (2.5)$$

Οι παράμετροι $Q_{zi}$ και $Q_{zp}$ είναι οι ενεργοί συντελεστές επαφής κατά μήκος του άξονα φόρτισης z της κρουστικής διάταξης και της πλάκας, αντίστοιχα, R είναι η ακτίνα του άκρου της κρουστικής διάταξης.




**Σχήμα 8:** Συστήματα συντεταγμένων (καρτεσιανό x,y,z & κυλινδρικό r,θ,z)

Η κάθετη πίεση επαφής p της θεωρίας Hertz εξαρτάται από την ακτίνα επαφής $R_c$ ως εξής:

$$p(r) = p_o \sqrt{1 - \frac{r_c^2}{R_c^2}} \ , \quad 0 \le r_c \le R_c \qquad (2.6)$$

$$R_c = \left(\frac{3}{4} \frac{F_c R}{4 Q_a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{Ra} \qquad (2.7)$$

όπου r είναι η ακτινική θέση ενός τυχαίου σημείου στη ζώνη επαφής, και p είναι η μέγιστη πίεση στη θέση $r_c = 0$ που δίνεται από τη σχέση:

$$p_o = \frac{3F_c}{2\pi R_c^2} \quad (2.8)$$

Για ισοτροπικά υλικά (π.χ. για χαλύβδινη κρουστική διάταξη), ο ενεργός συντελεστής επαφής δίνεται από τη σχέση:

$$Q_z = \frac{E}{(1-v^2)} \qquad (2.9)$$

όπου E και ν είναι το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson, αντίστοιχα. Για την περίπτωση όπου η κρουστική διάταξη είναι πολύ πιο άκαμπτη από την πλάκα, η εξίσωση 2.5 απλοποιείται στην $Q_a \approx Q_{zp}$.

Η επέκταση της εξίσωσης 2.9 για υλικά με εγκάρσια ισοτροπία (κατά μήκος του άξονα φόρτισης z) είναι η [6]:

$$Q_{zp} = \frac{E_z}{(1-v_{vz}v_{zv})} \qquad (2.10)$$

όπου $\nu_{vz}$ και $\nu_{zv}$ είναι οι λόγοι Poisson κατά την έννοια του πάχους. Στις περισσότερες πλάκες από σύνθετο υλικό $v_{vz}v_{zv} \approx 0$ και η εξίσωση 2.10 απλοποιείται στην $Q_{zp} = \mathrm{E}_z$ [19,22]. Ο συντελεστής ελαστικότητας κατά την έννοια του πάχους του πολύστρωτου σύνθετου είναι $E_z$ θα είναι ίσος με τον εγκάρσιο συντελεστή ελαστικότητας μονής στρώσης (π.χ. $E_z = E_2$).

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση 2.10 είναι μια προσέγγιση του ενεργού συντελεστή της εγκάρσιας ισοτροπίας των πλακών η οποία υποεκτιμά τον συντελεστή επαφής τυπικών πλακών συνθέτων υλικών κατά 10-20% [7,18].

Η έκφραση του $Q_{zp}$ που προτείνεται από τον Turner [17] δίνεται από τη σχέση:

$$Q_{zp} = \frac{2}{\beta_1\beta_3} \qquad (2.11)$$

όπου:

$$\beta_1 = \left(\frac{\frac{\mathrm{E}_v}{\mathrm{E}_z} - v_{vz}^2}{1-v_{vv}^{\ 2}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \beta_2 = \left(\frac{1+(\frac{\mathrm{E}_v}{2G_{vz}}-1)-v_{v2}(1+v_{vv})}{1-v_{vv}^{\ 2}}\right) \qquad (2.12)$$

και

$$\beta_3 = \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-v_{vv}}{G_{vv}}\right)$$

Η έκφραση που αναπτύχθηκε από τον Greszezuk [23] δίνεται από τη σχέση:

$$Q_{zp} = \frac{2\sqrt{\frac{Grz}{Crr}(C_{rr}C_{ZZ} - C_{rz}^2)}}{\sqrt{(\sqrt{C_{rr}C_{zz}} + G_{zr})^2 - (C_{rz} + G_{zr})^2}} \quad (2.13)$$

όπου:

$$C_{rr} = \frac{E_v(1 - v_{vz}v_{zn})\Omega}{(1 + v_{vv})}, \; C_{rz} = E_v v_{zv}\Omega \quad C_{zz} = E_z(1 - v_{vv})\Omega \quad , \Omega = \frac{1}{(1 - v_{vv} - 2v_{vz}v_{zv})} \quad (2.14)$$

<u>Σε μία ορθοτροπική πλάκα</u>, ο ενεργός συντελεστής επαφής Q που καθορίζεται από την εξίσωση 2.10 εξαρτάται από την κατεύθυνση. Τότε, το σχήμα της διείσδυσης, το οποίο είναι κυκλικό σε εγκάρσια ισοτροπικές πλάκες κατά μήκος του άξονα z, γίνεται ελλειπτικό σε ορθοτροπικές πλάκες. Ο ενεργός συντελεστής επαφής μπορεί να εκτιμηθεί ενσωματώνοντας το $E_v(\theta)$ σε 2π και λαμβάνοντας τη μέση τιμή [6]. Όμως, από τη στιγμή που οι πλάκες από σύνθετο υλικό έχουν $v_{vz}v_{zv} \approx 0$, η λύση ξανά απλοποιείται στην $Q_{\zeta zp} = \mathrm{E}_z$.

### 2.3.2 Διαδικασία επαφής αποφόρτισης και επαναφόρτισης

Τυπικά<u>, σε μία περίπτωση κρούσης η δύναμη επαφής αυξάνει σε μία μέγιστη τιμή και τότε μειώνεται πάλι στο μηδέν</u>. Κατά τη διάρκεια της φάσης αποφόρτισης ο νόμος επαφής Hertz δεν είναι επαρκής (Yang και Sun [3]). Η φάση αποφόρτισης είναι σημαντικά διαφορετική από τη φάση φόρτισης εξαιτίας της δημιουργίας μόνιμης πτύχωσης. Με σκοπό τη διερεύνηση αυτού του φαινομένου, ο Crook [24], πρότεινε την ακόλουθη εξίσωση:

$$F_c = F_m\left(\frac{a - a_o}{a_{\max} - a_o}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (2.15)$$

όπου $F_m$ είναι η δύναμη επαφής στην αρχή της αποφόρτισης, $\alpha_{max}$ είναι η διείσδυση που αντιστοιχεί στο $F_m$ (π.χ. μέγιστη διείσδυση) και $\alpha_o$ είναι η μόνιμη διείσδυση. Η εξίσωση 2.15 μπορεί να γραφεί ως:

$$F_c = s(a - a_o)^{5/2} \quad (2.16)$$

όπου:

$$s = \frac{F_m}{(a_{\max} - a_o)^{5/2}} \quad (2.17)$$

ονομάζεται **δυσκαμψία αποφόρτισης**. Εξισώνοντας το νόμο επαφής Hertz για τη φόρτιση με την εξίσωση 2.15, η μόνιμη διείσδυση $\alpha_o$ και η κρίσιμη διείσδυση $\alpha_{cr}$ δίνονται από τη σχέση:

$$a_o = \begin{cases} a_{\max}(1 - (\frac{a_{cr}}{a_{\max}})^{2/5}) & \text{για } a_{\max} > a_{cr} \text{ και } a_{\max} \le a_{cr} \\ 0 & \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\text{όπου } a_{cr} = \frac{k_H}{s} \quad (2.19)$$

Η διαδικασία με σκοπό να καθορίσουμε το $a_{cr}$ ξεκινά από την επιλογή της σωστής τιμής του $\alpha_o$ με την έννοια του νόμου επαφής κατά την αποφόρτιση (εξίσωση 2.15), έτσι ώστε οι περιοχές κάτω από τις αναλυτικές καμπύλες αποφόρτισης είναι ίσες με αυτές που υπολογίζονται από τις αντίστοιχες πειραματικές καμπύλες. Εάν αυτές οι τιμές του $\alpha_o$ αντικατασταθούν στην εξίσωση 2.17, ένα εύρος τιμών του s προκύπτει. Χρησιμοποιώντας μια μέση τιμή των s, τελικά προκύπτει η τιμή του $\alpha_{cr}$.

Εάν πραγματοποιείται μία ακόμα φάση επαναφόρτισης, ο νόμος επαφής ξανά απέχει από την καμπύλη αποφόρτισης αλλά πάντα επιστρέφει στο σημείο όπου η αποφόρτιση ξεκίνησε [19]. Η καμπύλη επαναφόρτισης μοντελοποιείται ως εξής:

$$F_c = F_m(\frac{a - a_o}{a_{\max} - a_o})^{3/2} \quad (2.20)$$

Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει ανάγκη για εκτέλεση πειραμάτων επαναφόρτισης για εύρεση των παραμέτρων του νόμου επαφής.

### 2.3.3 Ελαστοπλαστικά μοντέλα επαφής

Μόνιμες παραμορφώσεις μπορούν να εισαχθούν στα σύνθετα υλικά όταν η διείσδυση ξεπερνά μία κρίσιμη τιμή διότι η συμπεριφορά του υλικού κυρίως εξαρτάται από τις ιδιότητες της μήτρας όπου αναμένεται πλαστική συμπεριφορά. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο νόμος επαφής του Hertz υπερεκτιμά τη μέγιστη δύναμη επαφής και οι ελαστοπλαστικοί νόμοι επαφής δίνουν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Σε αυτά τα μοντέλα, η κρίσιμη διείσδυση λαμβάνεται υπόψη κατά τη διάρκεια της διαδικασίας φόρτισης, σε αντίθεση με την προηγούμενη προσέγγιση όπου η κρίσιμη διείσδυση λαμβάνεται στη φάση αποφόρτισης.

Ελαστοπλαστικά μοντέλα θεωρούν ότι αρχικά το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά μέχρι μία κρίσιμη τιμή διείσδυσης (σχήμα 9). Σε αυτό το σημείο, η επιφάνεια επαφής διαιρείται σε μία πλαστική και σε μία ελαστική ζώνη καθώς η φόρτιση αυξάνεται και ένας νέος νόμος επαφής επιτυγχάνεται [1].

Το ελαστοπλαστικό μοντέλο που αναπτύχθηκε από τον Christoforou [20], περιγράφει τη φόρτιση και αποφόρτιση επαφής μεταξύ μίας άκαμπτης σφαίρας και μίας λεπτής πλάκας από πολύστρωτο σύνθετο υλικό στηριγμένο σε ένα άκαμπτο υπόστρωμα. Έτσι, το μοντέλο επικεντρώνεται μόνο σε τοπικές παραμορφώσεις καθώς η συνολική απόκριση γίνεται αμελητέα. Το υλικό θεωρείται εγκάρσια ισοτροπικό και ακολουθεί μία ελαστική – τέλεια πλαστική συμπεριφορά του νόμου τάσης – παραμόρφωσης κάθετα κατά την έννοια του πάχους. Ως τάση διαρροής, θεωρείται ένα μέγιστο κριτήριο αστοχίας το οποίο περιέχει μόνο τη διατμητική αντοχή $S_u$, αν και προσεγγίζεται με τη διατμητική αντοχή του πολύστρωτου $S_L$ [3]. Η ανάπτυξη του Cairns οδηγεί στον ίδιο νόμο επαφής για φόρτιση θεωρώντας ότι η ακτίνα επαφής και η διείσδυση είναι πολύ μικρότερες από την ακτίνα της διάταξης κρούσης.

Όμως, για την περίπτωση φόρτισης, ο **νόμος επαφής** καθορίζεται ως εξής:

$$F_c = \frac{\pi R E_z}{(1-\nu_{vz}\nu_{zv})h} a^2 \text{ εάν } 0 \le a \le a_{cr} \text{ ή } F_c = 2\pi R S_u (2a - a_{cr}) \text{ εάν } a_{cr} \le a \le a_{\max}$$

και για τη φάση ελαστικής αποφόρτισης, ο νόμος επαφής είναι:

$$F_c = \frac{\pi R E_z}{(1-\nu_{vz}\nu_{zv})h} (a^2 - a_o^2)$$

όπου h είναι το πάχος του δοκιμίου. Η κρίσιμη διείσδυση $a_{cr}$ και η μόνιμη διείσδυση $\alpha_o$ δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$a_{cr} = \frac{2S_u h(1-\nu_{vz}\nu_{zv})}{E_z} \quad (2.23)$$

$$a_o = a_{\max} - a_{cr} \quad (2.24)$$

Ένας άλλος νόμος επαφής (Yigit και Christoforou [21]), ο οποίος προκύπτει συνδυάζοντας την κλασσική θεωρία επαφής Hertz και την ελαστοπλαστική θεωρία διείσδυσης του Johnson [14], δίνεται από τη σχέση:

$$F_c = k_H a^{3/2} \text{ εάν } 0 \le a \le a_{cr} \quad \text{και} \quad F_c = k_H a_{cr}^{\ 3/2} + k_y (a - a_{cr}) \text{ εάν } a_{cr} \le a \le a_{\max} \quad (2.25)$$

και για τη φάση ελαστικής αποφόρτισης, ο νόμος επαφής είναι:

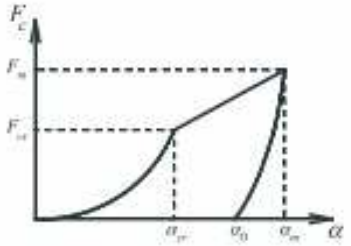
$$F_c = k_H (a^{3/2} - a_m^{3/2} + a_{cr}^{3/2}) + k_y (a_{\max} - a_{cr}) \quad (2.26)$$

όπου $k_y$ είναι η γραμμική ακαμψία της φάσης ελαστοπλαστικής φόρτισης, η οποία είναι ίση με την κλίση της καμπύλης ελαστικής διείσδυσης στο σημείο $\alpha = \alpha_{cr}$:

$$k_y = \frac{3}{2} k_H \sqrt{a_{cr}} \quad (2.27)$$

Η κρίσιμη διείσδυση αcr μπορεί να προσδιοριστεί από τη κατανομή τάσης επαφής χρησιμοποιώντας κριτήριο μέγιστης διατμητικής αστοχίας [14]. Γνωρίζοντας ότι $Y_c$ είναι η εγκάρσια θλιπτική αντοχή του πολύστρωτου, το $\alpha_{cr}$ προσεγγίζεται ως εξής [10] (κατανομή τάσης επαφής χρησιμοποιώντας κριτήριο μέγιστης διατμητικής αστοχίας):

$$a_{cr} = \frac{0.68 (Yc)^2 \pi^2 R}{Q_a^2} \quad (2.28)$$



**Σχήμα 9:** Λεπτομέρεια των φάσεων του νόμου επαφής

### 2.3.4 Γραμμικοποιημένοι νόμοι επαφής

Στα αναλυτικά μοντέλα του φαινομένου της κρούσης (παράγραφος 2.4), οι τοπικές παραμορφώσεις περιγράφονται με απλό τρόπο χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο νόμο επαφής. Όταν ο νόμος επαφής αντικαθίσταται στις ισχύουσες

εξισώσεις της πλάκας και της κρουστικής διάταξης, δεν είναι διαθέσιμη γενικά μία ακριβής λύση αυτών των εξισώσεων και απαιτείται αριθμητική λύση. Όμως, σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να επιτευχθεί μία λύση κλειστής μορφής εάν ο νόμος επαφής γραμμικοποιηθεί (π.χ. Christoforou και Swanson [25] , Olsson [15]). Οι κλειστής μορφής εξισώσεις που προκύπτουν συνεισφέρουν στην καλύτερη κατανόηση των επιδράσεων των παραμέτρων που ισχύουν στη συμπεριφορά του φαινομένου κρούσης.

## 2.4 ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΡΟΥΣΗΣ

Τα αναλυτικά μοντέλα κρούσης είναι ένα δυνατό εργαλείο για εξαγωγή γρήγορων προβλεπτικών αποτελεσμάτων για μία δεδομένη διάταξη κρούσης. Αυτά τα μοντέλα συνήθως αναπτύσσονται για πρόβλεψη της απόκρισης του συστήματος στην ελαστική περιοχή, τα οποία είναι επαρκή για σύγκριση διαφορετικών περιπτώσεων κρούσης με διαφορετικές τιμές των ισχυουσών παραμέτρων.

Αυτά τα μοντέλα περιγράφουν την κίνηση της διάταξης κρούσης, την κίνηση της δομής (π.χ. πλάκες από πολύστρωτο σύνθετο υλικό) και την τοπική κάμψη στην περιοχή γύρω από το σημείο κρούσης. Για να λάβουμε υπόψη αυτές τις τοπικές κάμψεις, συνήθως χρησιμοποιείται ένας νόμος επαφής.

Είναι σημαντικό να καθορίσουμε τις επιδράσεις του μεγάλου αριθμού των ισχυουσών παραμέτρων στη συμπεριφορά σε κρούση. Με σκοπό να κάνουμε την ανάλυση πιο αποδοτική μειώνουμε τον αριθμό των παραμέτρων σε μία ομάδα κατάλληλων αδιάστατων παραμέτρων που παρέχουν πιο βαθειά γνώση στο πρόβλημα κρούσης, ελαχιστοποιώντας τον αριθμό των υπολογισμών που απαιτούνται [27,21].

Τα αναλυτικά μοντέλα συνήθως κατατάσσονται στις εξής δύο κατηγορίες με βάση το πώς μοντελοποιείται η πλάκα [1,12]:

i) **Πλήρως αναλυτικά μοντέλα (πολλοί βαθμοί ελευθερίας)**: Βασίζονται σε άθροιση με αριθμητικό τρόπο η οποία σπάνια επιτρέπει άμεσες εκφράσεις για την αποτίμηση της επίδρασης των διαφορετικών παραμέτρων.

ii) **Μοντέλα ισορροπίας ενέργειας και μάζας – ελατηρίου (ενός ή δύο βαθμών ελευθερίας)**: Επιτρέπουν λύσεις κλειστής μορφής οι οποίες άμεσα δείχνουν την επίδραση των παραμέτρων που ισχύουν, αλλά έχουν περιορισμένη

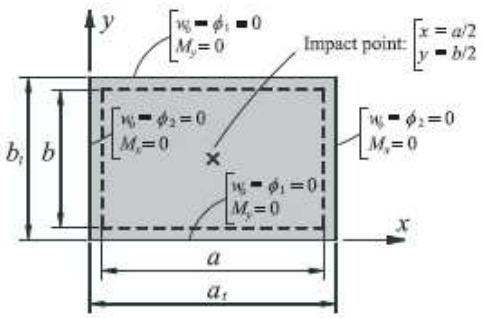
ευελιξία στο χειρισμό περίπλοκων γεωμετριών και διαφορετικών συμπεριφορών σε κρούση.

Στα μοντέλα που περιγράφονται παρακάτω το φορτίο βάρους της κρουστικής διάταξης θεωρείται αμελητέο καθώς η δύναμη βαρύτητας είναι μικρή σχετικά σε σχέση με τη δύναμη επαφής κατά τη διάρκεια της κρούσης. Επίσης, χρησιμοποιούνται οι στατικές ιδιότητες ενός υλικού για κρούσεις χαμηλής ταχύτητας χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι πιθανές επιδράσεις του ρυθμού παραμόρφωσης.

### 2.4.1 Πλήρως αναλυτικά μοντέλα (complete analytical models)

Οι εξισώσεις που ισχύουν για μία πλάκα πολύστρωτου σύνθετου υλικού (που προέρχονται από μία επιλεγμένη θεωρία πλακών) μαζί με την εξίσωση που ισχύει για τη διάταξη κρούσης, ένας κατάλληλος νόμος επαφής, και μία κατάλληλη προσέγγιση των αγνώστων παραμέτρων καταλήγουν στα πλήρως αναλυτικά μοντέλα του φαινομένου κρούσης [3] [12]. Τα πλήρη μοντέλα περιγράφουν πλήρως τη δυναμική συμπεριφορά της πλάκας και συχνά λαμβάνονται ως αναφορά για επαλήθευση αναλυτικών απλοποιημένων μοντέλων (π.χ. Yigit και Christoforou [3]). Επίσης, τα πλήρως αναλυτικά μοντέλα είναι έγκυρα στις περιπτώσεις όπου τα κύματα διαστολής δεν είναι σημαντικά, ενώ είναι πιθανό να προκύψουν απλοποιημένα μοντέλα τα οποία προβλέπουν την απόκριση για εξεζητημένες συμπεριφορές (συμπεριφορά κρούσης άπειρης πλάκας και ψευδοστατική).

Οι συνοριακές συνθήκες που θεωρούνται στη δοκιμή πτώσης βάρους και αναφέρονται στο ASTM D7136/D7136M [29] προσεγγίζονται με τις συνοριακές συνθήκες απλής στήριξης. Με αυτές τις θεωρήσεις, οι λύσεις των μετατοπίσεων θεωρούνται με χρήση της μεθόδου Navier η οποία δίνει, για κάποιες διατάξεις πολύστρωτων, την ακριβή λύση των εξισώσεων για τις δύο θεωρίες πλακών: την κλασσική θεωρία πολύστρωτων πλακών και την θεωρία πλακών πρώτης τάξης διατμητική παραμόρφωση. Στην πράξη, ακριβής λύσεις για τη δυναμική απόκριση πλακών γενικά δεν είναι διαθέσιμες εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών ή τη διάταξη του πολύστρωτου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούνται κλασσικές μέθοδοι μεταβολών, όπως η μέθοδος Raleigh – Ritz [28], [30].




**Σχήμα 10:** Διαστάσεις και συνοριακές συνθήκες φόρτισης πλάκας

Οι συνοριακές συνθήκες για απλά στηριγμένες πλάκες και θεωρία πλακών πρώτης τάξης διατμητική παραμόρφωση μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$w_o(x,0,t) = 0,\ w_o(x,b_1,t) = 0,\ w_o\ (0,y,t) = 0,\ w_o\ (\alpha_1,y,t) = 0$$

$$\varphi_1(x,0,t) = 0,\ \varphi_1(x,b_1,t) = 0,\ \varphi_2\ (0,y,t) = 0,\ \varphi_2\ (\alpha_1,y,t) = 0 \qquad (2.29)$$

$$M_y\ (x,0,t) = 0,\ M_y\ (x,b_1,t) = 0,\ M_x\ (0,y,t) = 0,\ M_x\ (\alpha_1,y,t) = 0$$

όπου t είναι ο χρόνος, $\mathbf{w_o}$ είναι η μετατόπιση του μέσου επιπέδου στην κάθετη διεύθυνση z, $\boldsymbol{\varphi_1}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}$ αντίστοιχα είναι οι περιστροφές ενός κάθετου διανύσματος ως προς τους άξονες y και x, και $\mathbf{M_y}$ και $\mathbf{M_x}$ είναι αντίστοιχα οι ροπές κάμψης ως προς τους x και y άξονες. Επιπλέον, $\boldsymbol{\alpha_1}$ και $\mathbf{b_1}$ είναι οι επίπεδες διαστάσεις της πλάκας, και **α** και **b** είναι οι ενεργές διαστάσεις της πλάκας.

Οι εξισώσεις που ισχύουν λύνονται με επέκταση των αγνώστων μετατοπίσεων και περιστροφών σε σειρές Fourier (π.χ. άθροιση) η οποίες ικανοποιούν τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες της πλάκας. Για την θεωρούμενη θεωρία πλακών, αυτές είναι:

$$w_o(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (2.30)$$

$$\phi_1(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(t)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (2.31)$$

$$\phi_2(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Y}_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (2.32)$$

όπου $W_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$ και $Y_{mn}(t)$ είναι οι συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε οι αντίστοιχες εξισώσεις που ισχύουν να ικανοποιούνται παντού στην πλάκα.

Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά των υπό εξέταση πλακών είναι συμμετρικά και ισορροπημένα. Όμως, οι ακόλουθες απλοποιήσεις για τις εξισώσεις που ισχύουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν:

1. **Συμμετρικές πλάκες**: το μητρώο ακαμψίας για σύζευξη κάμψης – εφελκυσμού [B] είναι μηδενικό. Η απλοποίηση επιτρέπει την αποσύζευξη της εξίσωσης που δίνει την καμπτική μετατόπιση $w_o$ των άλλων δύο εξισώσεων για μετατοπίσεις $u_o$ και $v_o$ για την κλασσική θεωρία πλακών. Και για την θεωρία πλακών πρώτης τάξης διατμητική παραμόρφωση, οι εξισώσεις περιστροφής αποσυνδέονται από τις επίπεδες μετατοπίσεις.

2. **Συμμετρικές και ισορροπημένες πλάκες**: τα στοιχεία $A_{16}$ και $A_{26}$ του μητρώου ακαμψίας σε εφελκυσμό – θλίψη [A] είναι ίσα με μηδέν.

3. Όλες **οι στρώσεις** του πολύστρωτου σύνθετου υλικού **κατασκευάζονται με το ίδιο υλικό και το κέντρο μαζών τοποθετείται στη γραμμή συμμετρίας** του σύνθετου: ο όρος αδράνειας $I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} zpdz$ ισούται με μηδέν.

4. Όλες **οι στρώσεις μοντελοποιούνται ως ένα εγκάρσια ισοτροπικό υλικό**: εάν θεωρήσουμε τη θεωρία πλακών με πρώτης τάξης διατμητική παραμόρφωση, το στοιχείο ακαμψίας σε εγκάρσια διάτμηση $A_{45}$ είναι ίσο με μηδέν.

**Κλασσική θεωρία πλακών**

Η απλοποιημένη εξίσωση που προκύπτει από την κλασσική θεωρία πλακών είναι:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D_{11}(-\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}) + D_{12}(-\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}) + D_{16}(-2\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y})] + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[D_{16}(-\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}) + D_{26}(-\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}) +$$
$$+ D_{66}(-2\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y})] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[D_{12}(-\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}) + D_{22}(-\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}) + D_{26}(-2\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y})] + q = I_1 \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}$$

Από την άλλη πλευρά, το φορτίο q(x,y,t) καθορίζεται ως ένα συγκεντρωμένο φορτίο κρούσης στη θέση x = a/2 και y=b/2 και καθορίζεται ως [1]:

$$q(x,y,t) = F_c(t)\delta(x-\frac{a}{2})\delta(y-\frac{b}{2}) \quad (2.34)$$

όπου $\mathbf{F_c(t)}$ είναι το φορτίο επαφής που περιγράφεται από έναν επιθυμητό νόμο επαφής (βλ.2.3). Η συνάρτηση δ(.) είναι η συνάρτηση δέλτα Dirac, η οποία έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\xi)\delta(\xi-\xi_o)d\xi = \mu(\xi_o) \quad (2.35)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση Navier (εξίσωση 2.30) και τις αντίστοιχες χωρικές παραγώγους στην εξίσωση (2.33), πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της εξίσωσης με $\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})$ και τελικά ολοκληρώνοντας τον χώρο x-y, <u>η εξίσωση στο σημείο κρούσης</u> (π.χ. στο x=α/2 και y=b/2) γίνεται:

$$\ddot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} = \frac{4}{ab\chi} F_c(t)\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad (2.36)$$

Εάν m και n ποικίλουν αντίστοιχα από 1 μέχρι p και 1 έως q, η κίνηση της πλάκας περιγράφεται από N=pq εξισώσεις. Εξαιτίας του σημείου κρούσης, μόνο περιττοί όροι m και n συνεισφέρουν στη λύση. Για τα άλλα υλικά σημεία της πλάκας, το δεξί τμήμα της εξίσωσης 2.36 ισούται με μηδέν. Ο όρος χ καθορίζεται από την εξίσωση 2.37 και $\omega_{mn}^2$ είναι η φυσική συχνότητα που καθορίζεται από την εξίσωση 2.38.

$$\chi = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3[(\frac{m\pi}{\alpha})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2] \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\chi}[&D_{11}(\frac{m\pi}{\alpha})^4 + 2(D_{12}+2D_{66})(\frac{m\pi}{\alpha})^2(\frac{n\pi}{b})^2 - 4D_{16}(\frac{m\pi}{\alpha})^3(\frac{n\pi}{b}) \\ &- 4D_{26}(\frac{m\pi}{\alpha})(\frac{n\pi}{b})^3 + D_{22}(\frac{m\pi}{b})^4]\end{aligned} \quad (2.38)$$

Η εξίσωση που ισχύει για τη διάταξη κρούσης εύκολα βρίσκεται με χρήση της αρχής D'Alembert. Αμελώντας τη δύναμη βαρύτητας της διάταξης κρούσης, η εξίσωση που λαμβάνεται είναι:

$$\boxed{F_c(t) + M_i \ddot{w}_i = 0} \qquad (2.39)$$

Εάν εξίσωση κλειστής μορφής δεν είναι δυνατή, η δυναμική απόκριση της πλάκας και της διάταξης κρούσης μπορεί να επιτευχθεί με χρονική ολοκλήρωση N+1 δεύτερης τάξης διαφορικών εξισώσεων με κατάλληλες αρχικές συνθήκες (βλ. εξίσωση 2.40) χρησιμοποιώντας μία διαδικασία αριθμητικής επίλυσης όπως η μέθοδος Newmark με βήμα – βήμα αριθμητική ολοκλήρωση.

$$W_{mn}(0) = 0\,,\ \dot{W}_{mn}(0) = 0\,,\ w_1 = 0\,,\ \dot{w}_1 = V_o \quad (2.40)$$

όπου $V_o$ είναι η αρχική ταχύτητα κρούσης και $M_i$ είναι η μάζα της διάταξης κρούσης.

**Θεωρία πλάκας πρώτης τάξης διατμητική παραμόρφωση**

Για τη θεωρία πλάκας πρώτης τάξης διατμητική παραμόρφωση, οι απλοποιημένες εξισώσεις για πρόβλεψη των αγνώστων μεταβλητών $w_o$, $\varphi_1$ και $\varphi_2$ είναι:

$$A_{55}\left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right) + \mathrm{A}_{44}\left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right)] + q = I_1 \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}[D_{11}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{12}(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}) + D_{16}(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y}[D_{16}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{26}(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}) + D_{66}(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x})] \\ &- A_{55}(\frac{\partial w_o}{\partial x} + \phi_1) = \mathrm{I}_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}[D_{16}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{26}(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}) + D_{66}(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y}[D_{12}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{22}(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}) + D_{26}(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x})] \\ &- A_{44}(\frac{\partial w_o}{\partial y} + \phi_2) = \mathrm{I}_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (2.43)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην κλασσική θεωρία πολύστρωτων πλακών, το σύστημα των εξισώσεων το οποίο περιγράφει τη δυναμική απόκριση της πλάκας είναι:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Καθορίζοντας $a_m = \dfrac{m\pi}{\alpha}$ και $\beta_n = \dfrac{n\pi}{b}$, οι όροι $s_{ij}$ και $q_{mn}$ βρίσκονται ως εξής:

$$s_{11} = \beta_n^2 \mathrm{A}_{44} + \alpha_m^2 \mathrm{A}_{55},\ s_{12} = a_m \mathrm{A}_{55},\ s_{13} = \beta_n \mathrm{A}_{44}$$

$$s_{22} = a_m^2 D_{11} + \beta_m^2 D_{66} + A_{55} - (\frac{1}{2ab}) D_{16}$$

$$s_{23} = a_m \beta_n (D_{12} + D_{66}) - A_{55} - (\frac{m}{4na^2}) D_{16} - (\frac{n}{4mb^2}) D_{26} \quad (2.45)$$

$$s_{33} = \beta_n^2 D_{22} + a_m^2 D_{66} + A_{44} - (\frac{1}{2ab}) D_{26}$$

$$q_{mn} = \frac{4F_c(t)}{ab} \sin(a_m \frac{a}{2}) \sin(\beta_n \frac{b}{2}) \quad (2.46)$$

Για κάθε συνδυασμό (m,n), ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους λύνεται για τους συντελεστές $W_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$ και $Y_{mn}(t)$. Η κίνηση για τη διάταξη κρούσης καθορίζεται ξανά από την εξίσωση (2.39). Οι αρχικές συνθήκες καθορίζονται από:

$$W_{mn}(0) = 0,\ \dot{W}_{mn}(0) = 0,\ w_1 = 0,\ \dot{w}_1 = V_o \quad (2.40)$$

$$X_{mn}(0) = 0,\ \dot{X}_{mn}(0) = 0,\ Y_{mn}(0) = 0,\ \dot{Y}_{mn}(0) = 0 \quad (2.47)$$

όπου $V_o$ είναι η αρχική ταχύτητα κρούσης και $M_i$ είναι η μάζα της διάταξης κρούσης.

### 2.4.2 Μοντέλα κρούσης άπειρης πλάκας (infinite plate impact models)

Η απόκριση μιας πλάκας υπό κρουστική φόρτιση αποτελείται από καμπτικά και διατμητικά κύματα όταν το κύριο κύμα που ξεκινά από το σημείο κρούσης δεν έχει χρόνο να φτάσει στα όρια της πλάκας (σχήμα 7β). Αυτή η προσομοίωση είναι παρόμοια με την κρούση σε άπειρη πλάκα. Όμως, το μέγεθος της επίπεδης πλάκας και οι οριακές συνθήκες δεν επηρεάζουν την απόκριση.

Το μοντέλο που περιγράφεται εδώ προτάθηκε από τον Olsson [4], [15] και χρησιμοποιείται στην ανάπτυξη προσεγγίσεων για πρόβλεψη του τύπου της απόκρισης για μία καθορισμένη διάταξη κρούσης (ενότητα 2.5). Η λύση προτάθηκε για την περιγραφή της κρούσης μέχρι τα κύματα να ανακλαστούν από τα όρια των ορθοτροπικών πλακών από μία κρουστική διάταξη με ημισφαιρικό άκρο.

Σε ορθοτροπικές πλάκες, τα κύματα διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες σε διαφορετικές διευθύνσεις και τα μέτωπο της κυματομορφής σε κάμψη θα έχει ένα σχεδόν ελλειπτικό σχήμα με κέντρο το σημείο κρούσης. Η ανάλυση θεωρεί ότι η περιοχή επηρεάζεται από το κύριο κύμα που εκπέμπεται από το σημείο κρούσης και μπορεί να προσεγγιστεί από μία τετραγωνική απλά στηριγμένη πλάκα με μήκη a και b. Έτσι, η ανάπτυξη του μοντέλου μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας το πλαίσιο των πλήρως αναλυτικών μοντέλων (ενότητα 2.4.1) θεωρώντας την κλασσική θεωρία των πολύστρωτων πλακών και τον ίδιο νόμο επαφής για τη διαδικασία φόρτισης και αποφόρτισης. Όμως, καμία πρόβλεψη δεν έγινε για κύματα εγκάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης. Σε εφαρμογές, οι διατμητικές παραμορφώσεις είναι συνήθως μικρής σημασίας για μονολιθικά πολύστρωτα σύνθετα υλικά.

Η εξίσωση που ισχύει για περιγραφή σε εγκάρσια μετατόπιση σε ορθοτροπική πλάκα με απλή στήριξη θεωρώντας την κλασσική θεωρία πολύστρωτων πλακών, με κρούση στο σημείο x=a/2 και y=b/2 (βλ. σχήμα 2.5) είναι:

$$\ddot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} = \frac{4}{abI_1} F_c(t) \quad (2.48)$$

όπου οι φυσικές συχνότητες $\omega_{mn}$ περιγράφονται από:

$$\ddot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} = \frac{4}{abI_1} F_c(t)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{I_1}[D_{11}(\frac{m\pi}{\alpha})^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(\frac{m\pi}{\alpha})^2(\frac{n\pi}{b})^2 + D_{22}(\frac{m\pi}{b})^4] \quad (2.49)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.48) μπορεί να βρεθεί με χρήση του ολοκληρώματος Duhamel:

$$W_{mn} = \frac{4}{abI_1\omega_{mn}} \int_0^t F_c(\tau)\sin[\omega_{mn}(t-\tau)]d\tau \quad (2.50)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2.50) στην εξίσωση (2.30), η εγκάρσια μετατόπιση της πλάκας στο σημείο κρούσης, x=a/2 και y=b/2, είναι:

$$w_o(\alpha/2,b/2,t)=\frac{4}{abI_1}\int_0^t F_c(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}}\sin[\omega_{mn}(t-\tau)]d\tau \quad (2.51)$$

Το διπλό άθροισμα στην εξίσωση (2.51) μπορεί να προσεγγιστεί από ένα συνεχές ολοκλήρωμα των m και n. Από τη στιγμή που μόνο περιττοί αριθμοί χρησιμοποιούνται στις αθροίσεις, μόνο μισά από τα συνεχή ολοκληρώματα θα πρέπει να διατηρηθούν:

$$w_o(\alpha/2,b/2,t)=\frac{1}{abI_1}\int_0^t F_c(\tau)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}}\sin[\omega_{mn}(t-\tau)]dmdnd\tau \quad (2.52)$$

Το γεγονός ότι τα κύματα είναι κλειστές ελλείψεις σημαίνει ότι m≡n, το οποίο επιτρέπει να θεωρήσουμε το λόγο a/b ίσο με το λόγο των μηκών κύματος $\lambda_x/\lambda_y$. Τα μήκη κύματος είναι τα αντίστροφα των αριθμών του κύματος $k=\omega_{mn}/c_{bend,i}$ (i=x,y), όπου $c_{bend,i}$ είναι οι καμπτικές ταχύτητες του κύματος. Γνωρίζοντας ότι $c_{bend,x}=\sqrt{\omega_{mn}}(D_{11}/I_1)^{1/4}$ και $c_{bend,y}=\sqrt{\omega_{mn}}(D_{22}/I_1)^{1/4}$, η ακόλουθη σχέση επιτυγχάνεται:

$$\frac{a}{b}=\frac{c_{bend,x}}{c_{bend,\upsilon}}=\left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.53)$$

Τότε, οι φυσικές συχνότητες μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\omega_{mn}=\frac{2\pi^2 mn}{ab}\sqrt{\frac{D^*}{I_1}} \quad (2.54)$$

όπου <u>$D^*$ ονομάζεται ενεργός ακαμψία της πλάκας [15]</u> και καθορίζεται από αρκετά περίπλοκες εκφράσεις με χρήση ελλειπτικών συναρτήσεων. Μία επαρκής προσέγγιση είναι [4],[9]:

$$D^*\approx\sqrt{\left(\frac{A+1}{2}\right)D_{11}D_{22}} \text{ όπου } A=\frac{D_{12}+2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \quad (2.55)$$

Όμως, η **μετατόπιση της πλάκας** μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$w_o(\alpha/2, b/2, t) = \frac{1}{8\sqrt{I_1 D^*}} \int_0^t F_c(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

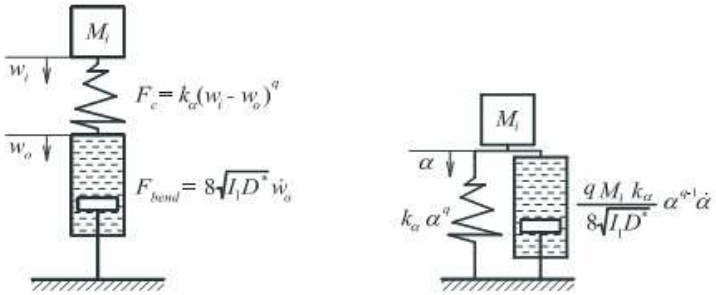
Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση που ισχύει για τη διάταξη κρούσης περιγράφεται από την εξίσωση [2.39]. Με διπλή ολοκλήρωση, η **μετατόπιση της διάταξης κρούσης** εκφράζεται από τη σχέση:

$$w_i(t) = V_o t - \frac{1}{M_i} \int_o^t \int_0^\tau F_c(\tau') d\tau' d\tau \quad (2.57)$$

Η διείσδυση της πλάκας καθορίστηκε από την εξίσωση (2.3). Παραγωγίζοντας δύο φορές σε σχέση με το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.56) και (2.57), και το νόμο επαφής της εξίσωσης (2.2), η διείσδυση βρίσκεται ότι υπακούει στην εξής μη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{a} + \frac{1}{8\sqrt{I_1 D^*}} q k_a a^{q-1} \dot{a} + \frac{k_a}{M_i} a^q = 0 \quad (2.58)$$

Εάν ένας γραμμικός νόμος επαφής χρησιμοποιηθεί, τότε q=1 και η εξίσωση (2.58) καταλήγει στη γνωστή διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, η οποία έχει λύσεις κλειστής μορφής. Στους Yigit και Christoforou [10] αναπτύσσονται αυτές οι κλειστές μορφές. Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο που καθορίζεται από την εξίσωση (2.58) μπορεί να παρασταθεί από ένα απλοποιημένο μοντέλο συγκεντρωμένης μάζας του σχήματος 11α [24], το οποίο είναι ισοδύναμο με το μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας του σχήματος 11β.




**Σχήμα 11:** Μοντέλα συγκεντρωμένης μάζας για συμπεριφορά άπειρης πλάκας

Η εξίσωση (2.58) μπορεί να εκφραστεί σε αδιάστατη μορφή, η οποία είναι πιο αποτελεσματική με σκοπό την ανάλυση των επιδράσεων των παραμέτρων της

συμπεριφοράς σε κρούση. Αυτό συμβαίνει διότι οι παράμετροι που ισχύουν καθορίζονται ως κρίσιμοι αδιάστατοι παράμετροι, καταλήγοντας σε λιγότερο χαρακτηριστικοί παράμετροι της απόκρισης σε κρούση. Αυτό το πλαίσιο μπορεί να αναπτυχθεί καθορίζοντας όλα τα βασικά μεγέθη του προβλήματος (π.χ. μάζα [M], μήκος [L] και χρόνος [T]) με επιλογή των παραμέτρων του προβλήματος κρούσης [26],[27]. Οι επιλεγμένες διευκρινίσεις είναι [31]: μάζα [M]=$M_i$, μήκος [L]=$V_o$[T], και ο χρόνος [T] προκύπτει από την ακαμψία επαφής $k_\alpha$ η οποία εξαρτάται από τον επιλεγμένο νόμο επαφής. Όμως,

$$[T] = (k_a^{-1}[M][L]^{(1-q)})^{1/2} = (k_a^{-1} M_i V_o^{(1-q)})^{1/(1+q)}$$

Οι παραπάνω διευκρινίσεις είναι ισοδύναμες με τον καθορισμό της μεταβλητής [L] ίσης με $\alpha_{max}$ [3,10,26]. Το <u>$\alpha_{max}$ αντιστοιχεί στη μέγιστη διείσδυση της πλάκας</u> (π.χ. όταν η συνολική απόκριση της πλάκας αμελείται, η οποία ονομάζεται κρούση ημι-χώρου). Η έκφραση του $\alpha_{max}$ βρίσκεται εξισώνοντας την ενέργεια κρούσης με την ενέργεια διείσδυσης. Συνεπώς, η δύναμη κρούσης κανονικοποιείται σε σχέση με τη μέγιστη ενέργεια κρούσης για συμπεριφορά ημι-χώρου. Όμως, η εξίσωση $\alpha_{max}$ για γενικό νόμο επαφής καταλήγει στην:

$$a_{\max} = \left(\frac{1+q}{2}\frac{M_i V_o^2}{k_a}\right)^{\frac{1}{(1+q)}} \quad (2.59)$$

Η <u>αδιάστατη διαφορική εξίσωση</u> που προκύπτει είναι:

$$\ddot{\bar{a}} + \zeta q \bar{a}^{q-1} \dot{\bar{a}} + \bar{a}^q = 0 \quad (2.60)$$

όπου η παύλα δείχνει τις αδιάστατες παραμέτρους και οι αρχικές συνθήκες είναι $\bar{a}(0) = 0$ και $\dot{\bar{a}}(0) = 0$. <u>Όλοι οι παράμετροι που περιγράφουν τη συμπεριφορά σε κρούση συγκεντρώνονται σε μία μόνο αδιάστατη παράμετρο ζ</u>. Η παράμετρος καθορίζεται ως:

$$\boxed{\zeta = \frac{1}{8\sqrt{I_1 D^*}}(k_a M_i^q V_o^{q-1})^{1/(1+q)}} \quad (2.61)$$

Στη βιβλιογραφία, η παράμετρος ζ ονομάζεται σχετική κινητικότητα της πλάκας [4], ανελαστική παράμετρος ή συντελεστής απώλειας. Η υψηλότερη δύναμη επαφής επιτυγχάνεται όταν ζ=0, στην οποία περίπτωση η πλάκα είναι πολύ άκαμπτη και το πρόβλημα μειώνεται σε εκείνο το πρόβλημα κρούσης ημιχώρου όπου η διάταξη κρούσης θα αναπηδήσει σε σχέση με την αρχική ταχύτητα $V_o$ [6]. Καθώς η παράμετρος κρούσης ζ αυξάνεται, η ιστορία της δύναμης επαφής γίνεται μη συμμετρική και η διάρκεια επαφής αυξάνεται καθώς η καμπτική παραμόρφωση του στόχου γίνεται πιο σημαντική (π.χ. η συμπεριφορά πλησιάζει τον τύπο ψευδοστατικής απόκρισης). Σε υψηλές τιμές ζ το μοντέλο δεν είναι κατάλληλο καθώς το μοντέλο επηρεάζεται από τις οριακές συνθήκες και τη γενική παραμόρφωση της κατασκευής.

Σύμφωνα με τον Olsson [4] η παράμετρος ζ καθορίζεται εισάγοντας την έννοια της κινητικότητας C, η οποία καθορίζεται ως η ταχύτητα ανά μονάδα δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα στοιχείο. Η **κινητικότητα της πλάκας, $C_p$**, δίνεται από:

$$C_p = \frac{\dot{w}_o}{F_{bend}} = \frac{1}{8\sqrt{I_1 D^*}} \quad (2.62)$$

Η κινητικότητα της διάταξης κρούσης, $C_i$, μπορεί να καθοριστεί από την μέγιστη (αρχική) ταχύτητα, $V_o$, ανά μέγιστο φορτίο, $F_{max}$ για μία πλήρως ακίνητη πλάκα (π.χ. $C_p = 0$ και η διείσδυση είναι μέγιστη $a_{max}$ ):

$$C_i = \frac{\dot{V}_o}{F_{\max}} = \frac{V_o}{k a_{\max}^q} = (k_a^{-1} V^{1-q} (\frac{1+q}{2} M_i)^{-q})^{1/(1+q)} \quad (2.63)$$

Με χρήση διευκρινίσεων κινητικότητας, η παράμετρος ζ μπορεί να επαναπροσδιοριστεί με χρήση της επόμενης έκφρασης:

$$\zeta = (\frac{2}{1+q})^{q/(1+q)} \frac{C_p}{C_i} \quad (2.64)$$

Το απλοποιημένο μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί μέχρι τα κύματα να ανακλαστούν από τα όρια. Η εξίσωση (2.65) προτάθηκε από τον Olsson [4] και δίνει τη θέση σε **πολικές συντεταγμένες r και θ για το μπροστινό άκρο του n-στου μεγέθους κύματος** σε μία ορθοτροπική πλάκα. Όμως, το απλοποιημένο μοντέλο δεν

είναι κατάλληλο εάν η τιμή που δίνεται από αυτή την εξίσωση είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη απόσταση από το σημείο κρούσης στα όρια της πλάκας.

$$r_n(\theta) = \left(\frac{2D_r(\theta)D^*}{I\sqrt{D_{11}D_{22}}}\right)^{1/4}\sqrt{\pi n t} \quad (2.65)$$

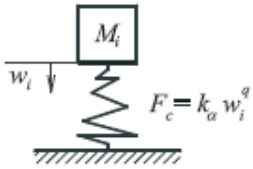
όπου $D_r(\theta)$ είναι η ακτινική καμπτική ακαμψία της πλάκας στη διεύθυνση θ.

### 2.4.3 Μοντέλα κρούσης ημιχώρου (half – space impact models)

**Όταν η μάζα της διάταξης κρούσης είναι πολύ μικρή, και ο στόχος είναι αρκετά δύσκαμπτος**, η κρούση δεν παράγει σημαντική συνολική απόκριση και μπορεί να προσεγγιστεί με κρούση σε ημι-χώρο (π.χ. η απόκριση είναι πλήρως τοπική). Τότε, η συμπεριφορά μπορεί να προσεγγιστεί με ένα απλό μοντέλο μάζας – ελατηρίου όπως φαίνεται στο σχήμα 12. Η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$M_i \ddot{w}_i + F_c = 0 \qquad (2.66)$$

όπου ο νόμος επαφής καθορίζεται από τη σχέση $F_c = k_a a^q = k_a w_i^q$ και οι αρχικές συνθήκες $w_i(0) = 0$ και $\dot{w}_{i1}(0) = V_o$




**Σχήμα 12:** Μοντέλο ελατηρίου μάζας για συμπεριφορά κρούσης ημιχώρου

Το αδιάστατο πλαίσιο που περιγράφεται από τους Yigit και Christoforou [21] καθορίζει τα μεγέθη του προβλήματος ως [M]=Mi, [L]=$\alpha_{cr}$, και $[T] = (k_a^{-1} M_i a_{cr}^{(1-q)})^{1/2}$. Ο όρος $\alpha_{cr}$ αφορά την πλαστική διείσδυση η οποία καθορίζεται από την εξίσωση (2.28). Χρησιμοποιώντας αυτές τις διευκρινίσεις, η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης (2.66) είναι:

$$\ddot{w}_i + \overline{w}_i = 0 \quad (2.67)$$

Από την άλλη πλευρά, η κανονικοποιημένη ταχύτητα κρούσης β κατηγοριοποιεί όλες τις παραμέτρους για συμπεριφορά ημιχώρου. Όμως, η παράμετρος β χαρακτηρίζει πλήρως τη συμπεριφορά ημιχώρου και ονομάζεται χαρακτηριστική παράμετρος κρούσης. Έτσι:

$$\beta = \frac{V_o}{\omega \alpha_{cr}} \quad (2.68)$$

όπου ω είναι η συχνότητα επαφής που δίνεται από:

$$\omega = [T]^{-1} = (k_a^{-1} M_i a_{cr}^{(1-q)})^{-1/2} \quad (2.69)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το αδιάστατο πλαίσιο της παραγράφου 2.4.2, π.χ. μάζα [M]=$M_i$, μήκος [L]=$\alpha_{max}$ και χρόνος $[T] = (k_a^{-1} M_i a_{cr}^{(1-q)})^{1/2}$, η παράμετρος β παραμένει σταθερή. Συγκεκριμένα, για γραμμικό νόμο επαφής q=1, η παράμετρος β είναι ίση με 1, και για νόμο επαφής τύπου Hertz q=3/2, β η παράμετρος είναι ίση με $(5/4)^{-1/2}$. Αυτό το αποτέλεσμα υπονοεί ότι η προβλεπόμενη κανονικοποιημένη απόκριση για αυτή τη συμπεριφορά είναι σταθερή με οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων που ισχύουν σε αυτή τη συμπεριφορά. Αυτή η ενδιαφέρουσα θεώρηση χρησιμοποιείται στο διάγραμμα χαρακτηρισμού σε κρούση των Christoforou και Yigit [3,10,11] (παράγραφος 2.5).

Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο που καθορίζεται για συμπεριφορά σε κρούση με έλεγχο κυμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό την περιγραφή της συμπεριφοράς ημιχώρου. Όπως έχει παρατηρηθεί, η συμπεριφορά σε κρούση ημιχώρου θα επιτευχθεί όταν η παράμετρος ζ τείνει στο μηδέν.

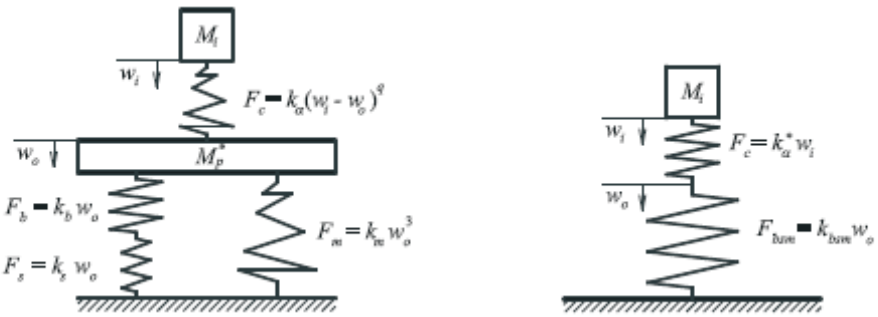
### 2.4.4 Ψευδοστατικά μοντέλα κρούσης (quasi – static impact models)

**Για αρκετά μεγάλους χρόνους κρούσης**, η απόκριση είναι περισσότερο ή λιγότερο ψευδοστατική, υπό την έννοια ότι το φορτίο και η παραμόρφωση δίνουν την ίδια σχέση όπως στη στατική φόρτιση. Βασισμένοι σε εκτεταμένη πειραματική και υπολογιστική εμπειρία, οι ερευνητές προτείνουν ότι η απόκριση είναι σχεδόν ψευδοστατική εάν ο ενεργός λόγος μάζας μ είναι μεγαλύτερος από μία κρίσιμη τιμή [32]. Αυτός ο ενεργός λόγος μάζας δίνεται από:

$$\mu = \frac{M_i}{M_p^*} \quad (2.70)$$

όπου $M_i$ είναι η μάζα της διάταξης κρούσης και $M_p^*$ είναι η ισοδύναμη συγκεντρωμένη μάζα της κατασκευής, η οποία εξαρτάται από τον τύπο της κατασκευής και τις συνθήκες στήριξης. Για τετραγωνικές και απλά εδραζόμενες πλάκες θεωρείται ίσος με ¼ της συνολικής μάζας της πλάκας $M_p$, όπως προκύπτει από την εξίσωση (2.36).

Το πιο πλήρες απλοποιημένο μοντέλο για περιγραφή σε ψευδοστατική συμπεριφορά φαίνεται στο σχήμα 13$^{α}$ [33], όπου οι όροι $k_s$, $k_b$ και $k_m$ είναι διατμητική, καμπτική και μεμβρανική δυσκαμψία της πλάκας υπό στατική φόρτιση. Η έκφραση των $k_s$, $k_b$ και $k_m$ είναι συνάρτηση των συνοριακών συνθηκών, του σχήματος και της διάταξης πολύστρωτου της κατασκευής. Οι τιμές δυσκαμψίας μπορούν να επιτευχθούν πειραματικά, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους, ή αναλυτικά στις περιπτώσεις με απλές γεωμετρίες πλάκας [21].




**Σχήμα 13:** (α) Πλήρη και (β) απλοποιημένα μοντέλα μάζας – ελατηρίου για ψευδοστατική συμπεριφορά σε κρούση

Οι εξισώσεις που ισχύουν για κάθε μάζα αμελώντας τις δυνάμεις βαρύτητας είναι [33] (σχήμα 13α):

$$M_i \ddot{w}_i + k_a (w_i - w_o)^q = 0 \quad (2.71)$$

$$M_p^* \ddot{w}_o + k_s w_o + k_b w_o + k_m w_o^3 - k_a (w_i - w_o)^q = 0 \quad (2.72)$$

όπου οι αρχικές συνθήκες είναι $w_i = w_o = 0$, $\dot{w}_{io} = 0$ και $\dot{w}_i = V_o$. Στον Olsson [8] αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται σε συνεργασία με οριακή τιμή δύναμης αποκόλλησης και κρίσιμη ενέργεια για ανάπτυξη αποκόλλησης στρώσεων με σκοπό να γίνει πρόβλεψη για έναρξη ζημιάς σε κρούση και ανάπτυξη κατά τη διάρκεια ψευδοστατικής απόκρισης που προκαλείται από κρουστικές διατάξεις μεγάλης μάζας.

Η ισοδύναμη μάζα της πλάκας $M_p^*$ είναι αμελητέα όταν η μάζα της διάταξης κρούσης είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της συνολικής μάζας της πλάκας. Αμελώντας τη μάζα της πλάκας και γραμμικοποιώντας την ακαμψία $k_m$ και $k_\alpha$ (π.χ. γραμμική ακαμψία $k_m^*$ και $k_\alpha^*$), το μοντέλο καταλήγει στο μοντέλο του σχήματος 13b [4]. Σε αυτή την περίπτωση, ολόκληρη η ακαμψία μπορεί να είναι συγκεντρωμένη σε μονή δυσκαμψία $k_\Sigma$ η οποία καθορίζεται ως:

$$k_\Sigma = \frac{k_\alpha^* k_{bsm}}{k_a^* + k_{bsm}} \text{ , όπου } k_{bsm} = (\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_s})^{-1} + k_m^* \quad (2.73)$$

Η εξίσωση που ισχύει για αυτή την περίπτωση είναι:

$$M_i \ddot{w}_i + k_\Sigma w_i = 0 \quad (2.74)$$

όπου οι αρχικές συνθήκες είναι $w_i = 0$ και $\dot{w}_i = V_o$. Πιο απλοποιημένες εκδόσεις προτείνονται στη βιβλιογραφία, όπως μοντέλα με αμελητέες μεμβρανικές και / ή διατμητικές επιδράσεις [3]. Η εξίσωση (2.74) μπορεί να ξαναγραφεί σε αδιάστατη μορφή χρησιμοποιώντας τις διευκρινίσεις μεγέθους (ενότητα 2.4.2) καθορισμένη για γραμμικό νόμο επαφής (π.χ. q=1). Επομένως:

$$\ddot{\bar{w}}_i + (\frac{k_{bsm}}{k_{bsm} + k_a^*})\bar{w}_i = 0 \quad (2.75)$$

## 2.5 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΗΣ ΖΗΜΙΑΣ ΣΕ ΚΡΟΥΣΗ

Υπάρχουν προσεγγίσεις στη βιβλιογραφία οι οποίες προβλέπουν τον τύπο συμπεριφοράς σε κρούση τετραγωνικών, επίπεδων, και μονολιθικών πολυστρωματικών σύνθετων πλακών. Αυτές οι προσεγγίσεις βασίζονται σε απλοποιημένα αναλυτικά μοντέλα της συμπεριφοράς σε κρούση και αναπτύσσουν

χαρακτηριστικές παραμέτρους, οι οποίες πληροφορούν για τον τύπο συμπεριφοράς. Οι θεωρούμενες συμπεριφορές είναι αυτές που καταλήγουν σε οριακά ορατή ζημιά (Barely Visible Impact Damage – BVID) εάν το μέγιστο φορτίο φτάνει στην σχεδιασμένη κρίσιμη τιμή ζημιάς.

Η προσέγγιση που περιγράφεται με λεπτομέρεια σε αυτή την ενότητα είναι το διάγραμμα χαρακτηρισμού των Christoforou και Yigit [3,10,11]. Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι δεν μπορούν να χαρακτηριστούν όλες οι περιπτώσεις κρούσης επαρκώς με χρήση των ακόλουθων προσεγγίσεων, καθώς αυτές βασίζονται σε απλοποιημένα μοντέλα που βασίζονται σε συγκεκριμένη υπόθεση η οποία μπορεί να ισχύει για συγκεκριμένες διατάξεις κρούσης.

### 2.5.1 Christoforou και Yigit διάγραμμα χαρακτηρισμού

Το διάγραμμα χαρακτηρισμού σε κρούση που προτάθηκε από τους Christoforou και Yigit [2,3,10,11] προβλέπει τον τύπο συμπεριφοράς, όπως επίσης και τη μέγιστη ελαστική δύναμη κρούσης για ένα μεγάλο εύρος περιπτώσεων κρούσης. **Η πρόβλεψη της μέγιστης δύναμης κρούσης είναι χρήσιμη καθώς μπορεί να συγκριθεί με μία οριακή τιμή για έναρξη ζημιάς** (βλ. ενότητα 2.6).

Η κατασκευή του διαγράμματος βασίζεται σε απλοποιημένα αναλυτικά μοντέλα άπειρης πλάκας και ψευδοστατική συμπεριφορά σε κρούση, και χρησιμοποιεί το αδιάστατο πλαίσιο (παράγραφος 2.4.2) (π.χ. την κανονικοποίηση σε σχέση με τη μέγιστη διείσδυση $\alpha_{max}$). Επίσης, χρησιμοποιείται ένας γραμμικοποιημένος νόμος επαφής του ελαστοπλαστικού μοντέλου που προτάθηκε από τους Yigit και Christoforou [21], που καταλήγει σε λύσεις κλειστής μορφής για τα μοντέλα κρούσης.

#### Συμπεριφορά άπειρης πλάκας

Οι λύσεις κλειστής μορφής της εξίσωσης (2.76), είναι οι εκφράσεις της κανονικοποιημένης δύναμης σε κρούση ως μία συνάρτηση της παραμέτρου σχετικής κινητικότητας ζ με q=1 (βλ. εξισώσεις (2.60 και 2.61). Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι η παράμετρος ζ αλλάζει σε $\zeta=2\zeta_{\omega}$ η οποία απλοποιεί τις εξισώσεις που προκύπτουν:

$$\overline{F}\omega(\bar{t}) = \bar{a}(t) = \begin{cases} \dfrac{\exp^{-\zeta_\omega \bar{t}}}{\sqrt{1-\zeta_\omega^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta_\omega^2}\bar{t}) \\ \bar{t}\exp^{-\bar{t}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\zeta_\omega^2-1}} (\exp^{(-\zeta_\omega+\sqrt{\zeta_\omega^2-1})\bar{t}} - \exp^{(-\zeta\omega+\sqrt{\zeta_\omega^2-1})\bar{t}}) \end{cases} \quad (2.76)$$

για $\zeta_\omega$<1, $\zeta_\omega$=1 και $\zeta_\omega$>1 αντίστοιχα.

Ο <u>αδιάστατος χρόνος στον οποίο λαμβάνει χώρα η μέγιστη δύναμη κρούσης</u> μπορεί να βρεθεί θέτοντας τις παραγώγους σε σχέση με το χρόνο ίσες με μηδέν, στην εξίσωση (2.76), καταλήγοντας:

$$\overline{t_\omega} = \begin{cases} \arccos(\dfrac{\zeta_\omega}{\sqrt{1-\zeta_\omega^2}}) \\ 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\zeta_\omega^2-1}} \ln(\dfrac{\zeta_\omega+\sqrt{\zeta_\omega^2-1}}{\zeta_\omega-\sqrt{\zeta_\omega^2-1}}) \end{cases}$$ για $\zeta_\omega$<1, $\zeta_\omega$=1 και $\zeta_\omega$>1 αντίστοιχα (2.77)

Τότε, η μέγιστη κανονικοποιημένη δύναμη κρούσης αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.77) στην εξίσωση (2.76) γίνεται:

$$\overline{F}_{\omega,\max}(\bar{t}_\omega) = \overline{\alpha}(\bar{t}_\omega) \quad (2.78)$$

Από την εξίσωση (2.78), καταλήγουμε ότι η συμπεριφορά σε άπειρη πλάκα είναι συνάρτηση μόνο της παραμέτρου $\zeta_\omega$, διότι το $\bar{t}_\omega$ εξαρτάται από αυτή.

**Συμπεριφορά ημιχώρου**

Όπως παρατηρήθηκε στην ενότητα 2.4.3, η συμπεριφορά ημιχώρου μπορεί να περιγραφεί με χρήση μοντέλου ελατηρίου – μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα 12. Εξαιτίας του αδιάστατου πλαισίου που χρησιμοποιείται, η εξάρτηση στο χαρακτηρισμό της παραμέτρου ημιχώρου β αποφεύγεται και η κανονικοποιημένη δύναμη κρούσης μπορεί να επιτευχθεί κανονικοποιώντας την εξίσωση (2.66):

$$\overline{F}_{hs}(\bar{t}) = \overline{\alpha}(\bar{t}) = \overline{\omega}_i(\bar{t}) = \sin\bar{t} \quad (2.79)$$

Έτσι, εάν η απόκριση σε κρούση είναι τοπική, η μέγιστη κανονικοποιημένη κρούση λαμβάνει χώρα το χρόνο $\bar{t}_{hs} = \pi / 2$ και η δύναμη πλησιάζει τη μονάδα $\overline{F}_{hs,\max} = 1$. Αυτή η ανάπτυξη μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί με χρήση της εξίσωσης (2.60) του μοντέλου κρούσης με έλεγχο κύματος και με εξίσωση της παραμέτρου $\zeta_\omega$ ίσης με το μηδέν.

**Ψευδοστατική συμπεριφορά**

Η ψευδοστατική συμπεριφορά περιγράφεται από το μοντέλο του σχήματος 13β. Εξισώνοντας τη γραμμική ακαμψία επαφής $k_\alpha^*$ με $k_y$ (εξίσωση 2.27), και καθορίζοντας **$\lambda = k_{bsm}/k_y$ (π.χ. σχετική δυσκαμψία)**, η λύση της αδιάστατης εξίσωσης (2.75) είναι:

$$\overline{\omega}_i(\bar{t}) = \sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\bar{t}\right) \quad (2.80)$$

και η <u>κανονικοποιημένη δύναμη κρούσης</u> για ψευδοστατική συμπεριφορά είναι:

$$\overline{F}_q(\bar{t}) = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\bar{t}\right) \quad (2.81)$$

Από την εξίσωση (2.81), η <u>μέγιστη κανονικοποιημένη δύναμη κρούσης</u> λαμβάνει χώρα τη στιγμή:

$$\bar{t}_q = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \quad (2.82)$$

και καθορίζεται ως:

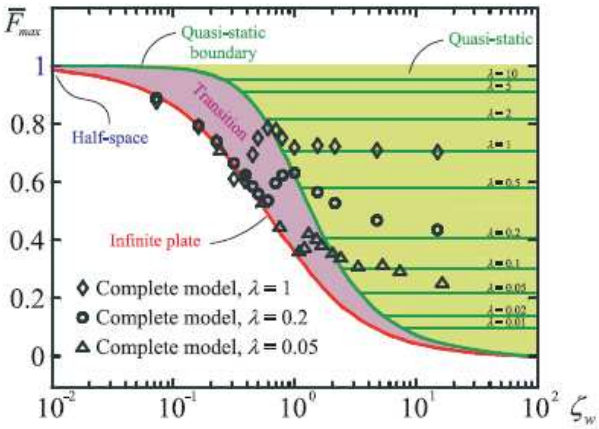
$$\boxed{\overline{F}_{q,\max} = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} \quad (2.83)$$

Στην εξίσωση (2.83) φαίνεται ότι η μέγιστη κανονικοποιημένη δύναμη κρούσης στην ψευδοστατική συμπεριφορά εξαρτάται μόνο από την παράμετρο λ.

**Διάγραμμα χαρακτηρισμού σε κρούση**

Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές λύσεις στις περισσότερες από τις παραπάνω περιπτώσεις, μπορεί να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα χαρακτηρισμού (σχήμα 14). Αυτό το διάγραμμα αναπαριστά τη μεταβολή της μέγιστης κανονικοποιημένης δύναμης κρούσης $F_{max}$ ως συνάρτηση της παραμέτρου σχετικής κινητικότητας $\zeta_\omega$. Για

την κατασκευή του διαγράμματος, η καμπύλη που αναπαριστά τη συμπεριφορά άπειρης πλάκας επιτυγχάνεται από την εξίσωση (2.78), και οι οριζόντιες γραμμές με διαφορετικές τιμές της σχετικής ακαμψίας λ επιτυγχάνονται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.83).




**Σχήμα 14:** Διάγραμμα χαρακτηρισμού σε κρούση (Christoforou και Yigit [2,3,10,11]), και αδιάστατη μέγιστη δύναμη $F_{max}$ σε σχέση με τη σχετική κινητικότητα $\zeta_\omega$

Στο διάγραμμα φαίνονται τέσσερεις διαφορετικές περιοχές. Διατάξεις κρούσης οι οποίες καθορίζουν σημεία στο δεξί τμήμα του διαγράμματος συμπεριφέρονται ως ψευδοστατικά. Για τα σημεία τα οποία είναι κοντά στην κόκκινη γραμμή η συμπεριφορά είναι άπειρης πλάκας. Ανάμεσα στις δύο περιοχές υπάρχει μία ζώνη μετάβασης όπου η απόκριση είναι συνδυασμός των δύο συμπεριφορών. Η καμπύλη που αναπαριστά το όριο της ψευδοστατικής απόκρισης επιτυγχάνεται από τη σχέση $\overline{F}_b = \sqrt{\dfrac{0.68}{0.68+\zeta_\omega^2}}$, όπως φαίνεται στις [10,32]. Τελικά, τα σημεία κοντά στη μέγιστη αδιάστατη δύναμη F=1 καταλήγει σε συμπεριφορά ημιχώρου, και μπορεί να επιτευχθεί θέτοντας στα απλοποιημένα μοντέλα (άπειρη πλάκα και ψευδοστατικό): $\zeta_\omega = 0$ ή $\lambda \to \infty$.

Με σκοπό την παρουσίαση της εγκυρότητας του διαγράμματος χαρακτηρισμού, πραγματοποιήθηκε προσομοίωση αρκετών περιπτώσεων κρούσης καλύπτοντας όλες τις περιοχές με διαφορετική συμπεριφορά [10]. Οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με αριθμητική ολοκλήρωση του πλήρους αναλυτικού μοντέλου, το οποίο θεωρεί την κλασσική θεωρία πολύστρωτης πλάκας και συνθήκες απλής στήριξης (βλ. ενότητα 2.4.1). Όπως φαίνεται, οι προσομοιώσεις ακολουθούν με

λογικό τρόπο τις μορφές του διαγράμματος χαρακτηρισμού. Στη ζώνη μετάβασης, ένα πλήρως αναλυτικό μοντέλο απαιτείται με σκοπό την καλύτερη περιγραφή της απόκρισης.

Συνοψίζοντας, η πρόβλεψη του τύπου συμπεριφοράς όπως και η μέγιστη δύναμη κρούσης για μία δεδομένη περίπτωση κρούσης μπορεί να γίνει υπολογίζοντας μόνο δύο κρίσιμες παραμέτρους: λ (π.χ. κρίσιμη παράμετρος της ψευδοστατικής συμπεριφοράς σε κρούση) και $\zeta_{\omega}$ (π.χ. κρίσιμη παράμετρος της συμπεριφορά σε κρούση με διάδοση κύματος). Όμως, η συνεισφορά της δυναμικής των κατασκευών θα πρέπει να συμπεριληφθεί και να αναπαρασταθεί με χρήση της σχετικής μάζας της διάταξης κρούσης μ που δίνεται από την εξίσωση (2.70). Όταν διαφορετικές καταστάσεις κρούσης (σε σχέση με τις οριακές συνθήκες, τα υλικά, το μέγεθος κλπ.) με παρόμοιες κρίσιμες παραμέτρους συγκρίνονται, τότε η δυναμική, ο τύπος συμπεριφοράς και η κανονικοποιημένη απόκριση είναι παρόμοια [26].

## 2.6 ΖΗΜΙΑ ΛΟΓΩ ΚΡΟΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Το φαινόμενο της ζημιάς σε κρούση σε κατασκευές από πολύστρωτα σύνθετα υλικά είναι περίπλοκο και δύσκολο να μοντελοποιηθεί αναλυτικά εξαιτίας της μεγάλης ποικιλίας των τρόπων ζημιάς και της περίπλοκης διαδικασίας αλληλεπίδρασης. Ο καθορισμός της έναρξης και διάδοσης των τρόπων ζημιάς σχετίζεται με την υπολειπόμενη αντοχή της κατασκευής.

Όμοια με την απόκριση κρούσης, ανάλογα με τις ισχύουσες παραμέτρους, η προκαλούμενη ζημιά μπορεί να είναι τοπική, ολική ή και τα δύο [2, 5]. Η τοπική ζημιά σε κρούση αποτελείται κυρίως από μία ορατή μόνιμη επιφανειακή κοιλότητα στη ζώνη επαφής που περιλαμβάνει τρόπους ζημιάς της ίνας και της μήτρας, όπου η συνολική ζημιά σε κρούση αποτελείται κυρίως από εκτεταμένες αποκολλήσεις των στρώσεων. Η καθολική τοπική ζημιά είναι η πλήρης διάτρηση της πλάκας. Σχετικά με αυτούς τους τύπους της ζημιάς, υπάρχουν περίπλοκα σχέδια ρωγμών της μήτρας και θραύσεις ίνας.

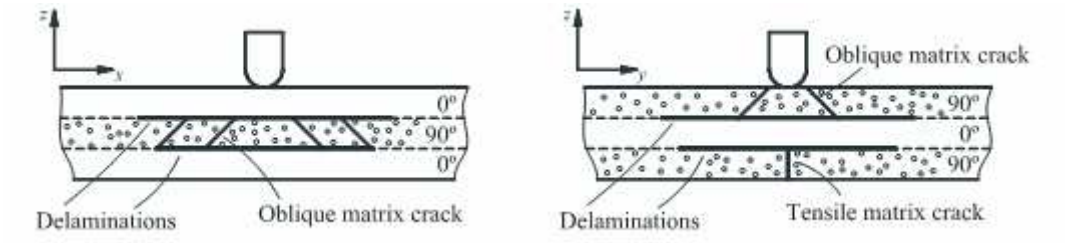
Με σκοπό τη γεφύρωση της αναλυτικής πρόβλεψης της συμπεριφοράς σε κρούση και την έναρξη της ζημιάς, **η δύναμη κρούσης τυπικά χρησιμοποιείται και συγκρίνεται με μία επιτρεπόμενη τιμή ζημιάς**. Η ζημιά λαμβάνει χώρα εάν η

προβλεπόμενη ελαστική δύναμη κρούσης είναι μεγαλύτερη από μία οριακή τιμή που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο τύπο απόκρισης [1,2,9,34,35].

### 2.6.1 Ρωγμή μήτρας

Η διαδικασία ζημιάς λόγω κρούσης ξεκινά με τοπικές ρωγμές της μήτρας και αποσυνδέσεις της διεπιφάνειας ίνας – μήτρας, η οποία κανονικά δεν είναι ανιχνεύσιμη κατά τη διάρκεια των δοκιμών κρούσης π.χ. με δυναμόμετρο της διάταξης κρούσης ή με μη καταστροφικούς ελέγχους (NDI). Έχει δειχθεί από τον Sjoblom [36] ότι η παρουσία ρωγμών μήτρας δεν επηρεάζει σημαντικά τη συνολική δυσκαμψία του πολύστρωτου κατά τη διάρκεια συμβάντος κρούσης. Όμως, τα άκρα των ρωγμών της μήτρας δρουν ως σημεία έναρξης αποκόλλησης των στρώσεων στις διεπιφάνειες μεταξύ των στρώσεων με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών. Αυτές οι αποκολλήσεις μεταβάλλουν την τοπική και / ή τη συνολική δυσκαμψία της κατασκευής [13].

Δύο είδη ρωγμών μήτρας μπορούν να παρατηρηθούν: κάθετες και πλάγιες ρωγμές (σχήμα 15). Οι κάθετες ρωγμές δημιουργούνται από καμπτική παραμόρφωση της πλάκας εξαιτίας εφελκυστικών τάσεων και συνεπώς είναι τοποθετημένες στις κάτω στρώσεις. Όμως, οι κάθετες ρωγμές είναι τυπικές σε περιπτώσεις κρούσης που συμπεριφέρονται ως ψευδοστατικές. Πλάγιες ρωγμές σχηματίζονται από μεγάλες εγκάρσια διατμητικές τάσεις που καταλήγουν από το φορτίο επαφής και την καμπτική παραμόρφωση της πλάκας. Αυτές οι ρωγμές είναι τυπικά τοποθετημένες στις πάνω και μεσαίες στρώσεις.




(α) (β)

**Σχήμα 15:** Τύποι ρωγμών μήτρας σε μία [0/90/0] πολύστρωτη πλάκα (Richardson και Wishear [55]), (α) διαμήκης όψη, και (β) εγκάρσια όψη

Τυπικά, σε πολύστρωτα σύνθετα υλικά η ρωγμή της μήτρας ξεκινά από την επιφάνεια κρούσης του δοκιμίου ως αποτέλεσμα υψηλών και τοπικών τάσεων

επαφής. Η ζημιά διαδίδεται προς τα κάτω με μία διαδοχή ρωγμών των στρώσεων (intra – ply cracks) και αποκολλήσεων της διεπιφάνειας, καταλήγοντας σε μία μορφή πεύκου (σχήμα 16 α). Για λεπτά πολύστρωτα σύνθετα υλικά, οι καμπτικές τάσεις στην πίσω επιφάνεια του πολύστρωτου εισάγουν εφελκυστικές ρωγμές στη μήτρα, και η ζημιά προχωρά από την κάτω επιφάνεια προς τη διάταξη κρούσης καταλήγοντας σε μία μορφή ανεστραμμένου πεύκου (σχήμα 16 β).

**Σχήμα 16:** Προβολή διατάξεων ζημιάς (Abrate [1], (α) πεύκο και (β) ανεστραμμένο πεύκο)

**Οριακή τιμή φορτίου για κάθετες ρωγμές μήτρας**

Μία νέα οριακή τιμή ζημιάς προτείνεται για την πρόβλεψη της ρωγμής στη μήτρα στην εξωτερική στρώση που είναι τοποθετημένη στην πίσω επιφάνεια μίας τετραγωνικής πλάκας από σύνθετο υλικό εξαιτίας της κάμψης.

Οι μέγιστες τιμές των επίπεδων εφελκυστικών τάσεων εξαιτίας της καμπτικής παραμόρφωσης δημιουργήθηκαν από ένα ανομοιόμορφο στατικό φορτίο ακτίνας R, $q_o = F_{mc}^{ten} / (\pi R^2)$, με κέντρο στο σημείο (x,y,z) = (α/2, b/2, -h/2) σε απλά εδραζόμενη, τετραγωνική και ορθοτροπική πλάκα (βλ. σχήμα 10), μπορούν να προσεγγιστούν από [56]:

$$(\sigma_x)_{\max} \frac{8b^2}{\pi^5 R^2 h^2} f_x(s, C_{ij}, D_{ij} / h^3) F_{mc}^{ten} \quad (2.84)$$

$$(\sigma_y)_{\max} \frac{8b^2}{\pi^5 R^2 h^2} f_y(s, C_{ij}, D_{ij} / h^3) F_{mc}^{ten} \quad (2.85)$$

όπου R είναι η ακτίνα του άκρου της κρουστικής διάταξης και h είναι το πάχος της πλάκας. Αυτές οι μέγιστες επίπεδες εφελκυστικές τάσεις βρίσκονται στο σημείο (x, y, z) = (α/2, b/2, h/2), π.χ. στο σημείο κρούσης και στο απέναντι σημείο στην πίσω επιφάνεια της πλάκας, και υπολογίζονται με χρήση της κλασσικής θεωρίας πολύστρωτων πλακών, χρησιμοποιώντας τη λύση Navier για πλάκες απλά

στηριγμένες, και αμελώντας τις μεμβρανικές τάσεις και τις τοπικές παραμορφώσεις. Οι όροι $f_x(s, C_{ij}, D_{ij} / h^3)$ και $f_x(s, C_{ij}, D_{ij} / h^3)$ καθορίζονται αντίστοιχα ως:

$$f_x(s, C_{ij}, D_{ij} / h^3) = h^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{\theta} (s^2 m^2 C_{11} + n^2 C_{12}) \quad (2.86)$$

$$f_y(s, C_{ij}, D_{ij} / h^3) = h^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{\theta} (s^2 m^2 C_{12} + n^2 C_{22}) \quad (2.87)$$

όπου: s=b/α, $\xi = \frac{1}{mn} \sin(\frac{m\pi R}{a}) \sin(\frac{n\pi R}{b})$ ,

$$\theta = D_{11} m^4 s^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 s^2 + D_{22} n^4$$

και $C_{ij}$, $D_{ij}$ είναι αντίστοιχα τα στοιχεία καταστατικής και καμπτικής ακαμψίας των πλακών από πολύστρωτο σύνθετο υλικό που υπολογίζεται με χρήση ομογενών μηχανικών σταθερών [37]. Οι εξισώσεις (2.86) και (2.87) είναι έγκυρες μόνο για περιττές τιμές των m και n. Προσθέτοντας αρκετούς όρους, η λύση των εξισώσεων (2.84) και (2.85) μπορεί να συγκλίνει, αν και η σύγκλιση δεν είναι δυνατή στην περίπτωση σημειακού φορτίου [30].

Οι μέγιστες τάσεις που δίνονται από τις εξισώσεις (2.84) και (2.85) πρέπει να μετασχηματιστούν σε στοιχεία τάσης στην πίσω εξωτερική στρώση του πολύστρωτου σύνθετου υλικού (π.χ. $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_p$). Αυτό γίνεται υπολογίζοντας τα στοιχεία παραμορφώσεων της πλάκας και έπειτα τα στοιχεία παραμόρφωσης περιστρέφονται στις τοπικές συντεταγμένες της στρώσης (ο άξονας 1 ευθυγραμμίζεται με τις ίνες, και ο άξονας 2 αντιστοιχεί στην εγκάρσια διεύθυνση των ινών). Τελικά, με χρήση του καταστατικού μητρώου της στρώσης, οι αντίστοιχες τάσεις επιτυγχάνονται. Όλες αυτές οι λειτουργίες συγκεντρώνονται στην επόμενη εξίσωση:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_p = [C]_p [T]_\gamma [S] \begin{Bmatrix} (\sigma_x)_{\max} \\ (\sigma_y)_{\max} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

όπου $[C]_p$ είναι το καταστατικό μητρώο της πίσω εξωτερικής στρώσης ως προς το σύστημα συντεταγμένων της στρώσης, $[T_\alpha]_\gamma$ είναι το μητρώο περιστροφής των

μηχανικών παραμορφώσεων από το σύστημα συντεταγμένων της πλάκας στο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης και [S] είναι το μητρώο ευκαμψίας της πλάκας στο σύστημα συντεταγμένων της πλάκας (π.χ. $[S]=[C]^{-1}$). Αναπτύσσοντας την εξίσωση (2.88), **οι τάσεις της στρώσης** που παίρνουμε είναι:

$$\begin{aligned}(\sigma_1)_p &= ((C_{11})_p c^2 + (C_{12})_p s^2)(S_{11}(\sigma_x)_{\max} + S_{12}(\sigma_y)_{\max}) \\ &+ ((C_{11})_p s^2 + (C_{12})_p c^2)(S_{12}(\sigma_x)_{\max} + S_{22}(\sigma_y)_{\max})\end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned}(\sigma_2)_p &= ((C_{12})_p c^2 + (C_{22})_p s^2)(S_{11}(\sigma_x)_{\max} + S_{12}(\sigma_y)_{\max}) \\ &+ ((C_{12})_p s^2 + (C_{22})_p c^2)(S_{12}(\sigma_x)_{\max} + S_{22}(\sigma_y)_{\max})\end{aligned} \quad (2.90)$$

$$(\sigma_6)_p = 2cs(C_{66})_p[(S_{12} - S_{11})(\sigma_x)_{\max} + (S_{22} - S_{12})(\sigma_y)_{\max}] \quad (2.91)$$

όπου c=cos(θ), s=sin(θ), και θ είναι ο προσανατολισμός της ίνας της στρώσης σύνθετου υλικού σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων της πλάκας.

Επιπλέον, η εγκάρσια εφελκυστική αντοχή στην αρχική θέση $Y_T^{is}$ και η επίπεδη διατμητική αντοχή στη φυσική θέση $S_T^{is}$ για μία εξωτερική στρώση, η οποία θεωρείται αρκετά λεπτή σε σχέση με όλο το πάχος του πολύστρωτου σύνθετου υλικού, μπορεί να υπολογισθεί:

Λεπτή εξωτερική στρώση
$$\begin{cases} Y_T^{is} = 1.12^2 \sqrt{\dfrac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \dfrac{G_{Ic}}{\pi h_p}} \\ S_L^{is} = 2\sqrt{\dfrac{G_{12} G_{IIc}}{\pi h_p}} \end{cases} \quad (2.92)$$

όπου E, G και ν είναι οι ελαστικές σταθερές της στρώσης, $h_p$ είναι το πάχος της στρώσης, και $G_{Ic}$ και $G_{IIc}$ είναι αντίστοιχα η ανθεκτικότητα σε θραύση σε mode I και mode II. Από την άλλη πλευρά, η αντοχή σε εφελκυσμό και η επίπεδη διατμητική αντοχή για στρώσεις με μεγάλο πάχος πλησιάζουν στις τιμές που μετρώνται από δοκιμές σε πολύστρωτα μονής κατεύθυνσης ινών, $Y_T^{is} = Y_T$ και $S_L^{is} = S_L$.

Με την παρουσία επίπεδου διατμητικού και εγκάρσιου εφελκυσμού, ο κρίσιμος ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας $G_c$ εξαρτάται από τη συνδυασμένη επίδραση όλων των μικροσκοπικών μηχανισμών απορρόφησης ενέργειας όπως η

δημιουργία νέας επιφάνειας θραύσης. Το LaRC κριτήριο αστοχίας [38-42] χρησιμοποιείται για πρόβλεψη της ρωγμής της μήτρας υπό πολυαξονική φόρτιση:

$$\boxed{(1-g)\frac{(\sigma_2)_p}{Y_T^{is}} + g\left(\frac{(\sigma_2)_p}{Y_T^{is}}\right)^2 + \left(\frac{(\sigma_6)_p}{S_L^{is}}\right)^2 \le 1} \quad (2.93)$$

όπου $g = G_{Ic}/G_{IIc}$.

Αντικαθιστώντας τις εγκάρσιες και διατμητικές τάσεις ($(\sigma_2)_p$ και $(\sigma_6)_p$) στην εξίσωση (2.105), και τις αντίστοιχες αντοχές για λεπτές και παχιές εξωτερικές στρώσεις, **η κρίσιμη τιμή του φορτίου για εφελκυστική θραύση μήτρας $F_{mc}^{ten}$ μπορεί να υπολογιστεί** παίρνοντας απλά τη μέγιστη τιμή των δύο ακραίων περιπτώσεων, τη λεπτή και παχιά: $F_{mc}^{ten}=\max\{ (F_{mc}^{ten})_{thin}, F_{mc}^{ten})_{thin}\}$.

**Κρίσιμο φορτίο για πλάγια ρωγμή μήτρας**

Το τασικό πεδίο στο σημείο κρούσης (x,y,z) = (α/2, b/2, -h/2) είναι 3D εξαιτίας της καμπτικής παραμόρφωσης και του φορτίου επαφής. Οι επίπεδες θλιπτικές και διατμητικές τάσεις εξαιτίας της καμπτικής παραμόρφωσης μπορούν να προσεγγιστούν με τον ίδιο τρόπο όπως παρουσιάζεται στην προηγούμενη ενότητα για καθορισμό ενός κρίσιμου φορτίου για κάθετη ρωγμή μήτρας στην πίσω εξωτερική στρώση του πολύστρωτου σύνθετου υλικού. Λύσεις για τις τάσεις εξαιτίας συγκεντρωμένων φορτίων σε ανισοτροπικές πλάκες είναι σπάνιες και κλειστές μορφές λύσεων περιορίζονται σε εγκάρσια ισοτροπικές πλάκες που φορτίζονται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας τους, και θεωρώντας κατανομή πίεσης τύπου Hertz όπως επίσης η πλάκα είναι ημι-άπειρη, π.χ. ημιχώρος [16,43]. Για προσέγγιση σε απλοποιημένη μορφή του τασικού πεδίου στο σημείο κρούσης, η υπέρθεση των καμπτικών τάσεων και των τάσεων επαφής μιας πλάκας ημιχώρου μπορεί να εφαρμοστεί όπως παρουσιάζεται από τον Olsson [44].

Από την άλλη πλευρά, οι μέγιστες διατμητικές τάσεις κατά την έννοια του πάχους εξαιτίας της καμπτικής παραμόρφωσης που δημιουργήθηκε από ένα εγκάρσια στατικό σημειακό φορτίο $F_{mc}^{sh}$ και τοποθετείται στο κέντρο απλά στηριγμένης, τετραγωνικής και ορθοτροπικής πλάκας (βλ. σχήμα 10), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας σε τρεις διαστάσεις [30]. Αυτές οι μέγιστες τάσεις είναι

τοποθετημένες στα άκρα και στο μέσο επίπεδο της πλάκας (π.χ. $(\sigma_r)_{max}$: (x,y,z) = (0,b/2,0), και $(\sigma_q)_{max}$: (x,y,z) = (α/2,0,0)).

Για τον καθορισμό του κρίσιμου φορτίου για τη ρωγμή της μήτρας στο σημείο κρούσης ή στα άκρα της πλάκας, απαιτείται ένα κριτήριο αστοχίας σε 3D. Η εμφάνιση των ρωγμών της μήτρας που βρίσκονται σε αυτά τα σημεία δεν είναι τόσο σημαντική όσο οι ρωγμές της μήτρας που βρίσκονται σε άλλα σημεία καθώς τα πρώτα δεν ενεργούν ως σημεία έναρξης ρωγμής για μεγάλες αποκολλήσεις στρώσεων και δεν υπονοούν μία σημαντική μείωση της υπολειπόμενης αντοχής της κατασκευής.

Ο Olsson [7] πρότεινε ένα απλό κρίσιμο φορτίο για ρωγμή μήτρας εξαιτίας της διατμητικής τάσης κατά την έννοια του πάχους που δημιουργείται από ένα στατικά συγκεντρωμένο φορτίο επαφής. Η κρίσιμη τιμή υπολογίζεται θεωρώντας την κατανομή Hertz της πίεση επαφής, και την αντίστοιχη μέγιστη τιμή της διατμητικής τάσης στην κατεύθυνση κατά την έννοια του πάχους και εντός της ακτίνας επαφής. Με τον ίδιο τρόπο με το απλοποιημένο πεδίο διατμητικής τάσης που υποδεικνύεται από τον Davies [34], η κατανομή της διατμητικής τάσης κατά την έννοια του πάχους θεωρείται παραβολική με τη μέγιστη τιμή τοποθετημένη στο μέσο επίπεδο. Το κρίσιμο φορτίο καθορίζεται ως:

$$F_{mc}^{sh} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(\pi S_L h)^{3/2}\sqrt{\frac{R}{Q_a}} \quad (2.94)$$

όπου h είναι το πάχος της πλάκας, R είναι η ακτίνα του άκρου της κρουστικής διάταξης, και $Q_a$ είναι ο ενεργός συντελεστής ελαστικότητας επαφής (βλ. εξίσωση (2.5)).

### 2.6.2 Αποκόλληση στρώσεων

Οι αποκολλήσεις των στρώσεων εισάγονται από διατμητικές τάσεις μεταξύ των στρώσεων, οι οποίες προωθούνται από τις ρωγμές της μήτρας, από τη διαφορετική δυσκαμψία μεταξύ των γειτονικών στρώσεων, από το πάχος της στρώσης (ply clustering), και από την παραμόρφωση του πολύστρωτου. Αυξάνοντας οποιονδήποτε από αυτούς τους συντελεστές θα καταλήξουμε σε μία αυξημένη διαφοροποίηση των παραμορφώσεων κάμψης των γειτονικών ομάδων των στρώσεων με διαφορετικούς προσανατολισμούς, καταλήγοντας σε μεγάλες παραμορφώσεις.

Η μελέτη της διαφοροποίησης της δυσκαμψίας καταλήγει σε σημαντική πληροφορία θεωρώντας τη θέση, τον προσανατολισμό και το μέγεθος των αποκολλήσεων των στρώσεων. Ο Liu [45] πρότεινε την ακόλουθη αδιάστατη παράμετρο διαφοροποίησης $M_L$ για πλάκες δύο στρώσεων βασιζόμενη στη διαφορά της καμπτικής τους δυσκαμψίας σε σχέση με το συνολικό σύστημα συντεταγμένων της πλάκας:

$$M_L = \frac{D_{ij}(\theta_b) - D_{ij}(\theta t)}{D_{ij}(0_b^o) - D_{ij}(90_t^o)} \quad (2.95)$$

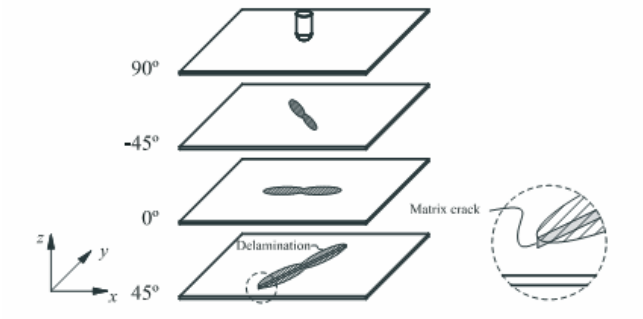
όπου $D_{ij}$ είναι τα στοιχεία της μήτρας της καμπτικής ακαμψίας. Κάθε πλάκα θεωρείται ξεχωριστή, ενώ $D_{ij}(\theta_b)$ είναι η ακαμψία της κάτω στρώσης που λειτουργεί μόνη της, και ο όρος t αναφέρεται στην πάνω στρώση. Ενώ ένας συντελεστής ανομοιομορφίας μπορεί να καθοριστεί για κάθε καμπτικό συντελεστή $D_{ij}$, θεωρούμε μόνο τον όρο $D_{11}$.

Η παράμετρος ανομοιομορφίας που προτείνεται στην εξίσωση (2.107) είναι ανεπαρκής για πλάκες μονής κατεύθυνσης καθώς η παράμετρος $M_L$ δεν είναι ίση με μηδέν παρά το γεγονός ότι αυτά τα πολύστρωτα δεν έχουν διεπιφάνειες με ανομοιόμορφες γωνίες γειτονικών ινών. Επιπλέον, για πλάκες με περισσότερες από μία διεπιφάνειες με ανομοιόμορφους προσανατολισμούς ινών των γειτονικών ινών, αυτή η παράμετρος δεν είναι εφαρμόσιμη. Για την επίλυση αυτών των περιορισμών, μία νέα παράμετρο $M_M$ υπολογίζεται ως (Morita [46]):

$$M_M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\Delta C_{11}(\theta) z_i\right]_{\max}}{D_{11}(\theta)} d\theta \quad (2.96)$$

όπου $\Delta C_{11}(\theta)$ είναι η διαφορά της επίπεδης δυσκαμψίας μεταξύ των γειτονικών στρώσεων στη διεύθυνση θ, $z_i$ είναι η απόσταση κατά την έννοια του πάχους από την ουδέτερη επιφάνεια μέχρι τη θεωρούμενη διεπιφάνεια, και $D_{11}(\theta)$ είναι η καμπτική δυσκαμψία ολόκληρου του πολύστρωτου στη διεύθυνση θ. Η παράμετρος $M_M$ είναι ένα μέγεθος της ασυνέχειας της μέγιστης καμπτικής τάσης που δίνεται ως μία ολοκληρωμένη ποσότητα σε σχέση με το θ. Θεωρείται εμπειρικά ότι όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος $M_M$, τόσο μεγαλύτερη είναι η περιοχή ζημιάς λόγω κρούσης.

Οι αποκολλήσεις λαμβάνουν χώρα μόνο στις διεπιφάνειες μεταξύ των στρώσεων με διαφορετικό προσανατολισμό. Το σχήμα της αποκόλλησης είναι γενικά της μορφής 'μακρόστενου φυστικιού', όπου οι κύριοι άξονές του ακολουθούν τον προσανατολισμό της χαμηλότερης στρώσης στη διεπιφάνεια [1,5]. Αυτά τα σχήματα είναι αποτέλεσμα της κατανομής διατμητικών τάσεων γύρω από τη γειτονική περιοχή της διάταξης κρούσης, της χαμηλής διατμητικής αντοχής διαμέσου των στρώσεων ή κοντά στη διεύθυνση των ινών, και των ρωγμών της μήτρας που δημιουργούνται από καμπτικές επίπεδες τάσεις [47]. Το σχήμα 17 δείχνει μία τυπική διασπορά αυτών των αποκολλήσεων.

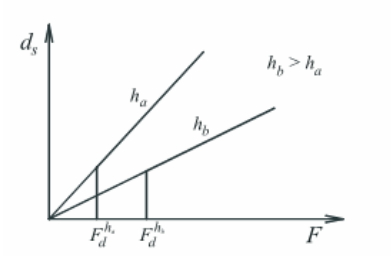



**Σχήμα 17:** Παράδειγμα αποκολλήσεων μορφής 'φυστικιού'

Υπάρχουν δύο διαφορετικές φάσεις κατά τη διάρκεια της διαδικασίας δημιουργίας αποκόλλησης λόγω κρούσης (βλ. σχήμα 18). Αρχικά, όταν η δύναμη κρούσης φτάσει μία κρίσιμη τιμή $F_d$, υπάρχει ασταθής διάδοση ρωγμής που οδηγεί σε ακαριαία μεγάλες περιοχές αποκόλλησης. Αυτό συχνά οδηγεί στην πτώση της δύναμης κρούσης στην απόκριση, δείχνοντας ξαφνική απώλεια στη δυσκαμψία [48]. Το κρίσιμο φορτίο $F_d$ δεν αναπαριστά φυσικά την έναρξη της ζημιάς, καθώς λιγότερο κρίσιμες ρωγμές στη μήτρα και μικρές αποκολλήσεις μπορούν να ξεκινήσουν σε μικρότερες δυνάμεις. Όμως, αναπαριστά την αρχική τιμή στην οποία η ζημιά μπορεί να ανιχνευθεί χρησιμοποιώντας μεθόδους μη καταστροφικού ελέγχου (σχήμα 18). Σε δεύτερη φάση, μετά την ανάπτυξη της ασταθούς ρωγμής, το μέγεθος των αποκολλήσεων αυξάνει γραμμικά με τη δύναμη δείχνοντας σταθερή ανάπτυξη των αποκολλήσεων. Ο επόμενος ημι-εμπειρικός τύπος σχετίζει το μέγιστο μέγεθος αποκόλλησης $d_s$ και τη δύναμη κρούσης F (Jackson και Poe [49]):

$$\boxed{d_s = \frac{1}{\pi S_L h} F} \quad (2.97)$$

όπου $S_L$ είναι η διατμητική αντοχή μεταξύ των στρώσεων και h είναι το πάχος της πλάκας.




**Σχήμα 18:** Μέγιστο μέγεθος αποκόλλησης ως μία συνάρτηση της δύναμης κρούσης για πλάκες με διαφορετικό πάχος (Christoforou [19])

**Κρίσιμη τιμή για αποκόλληση των στρώσεων**

Τα κριτήρια για ρωγμή της μήτρας δίνονται από τις εξισώσεις (2.105) και (2.106) και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κρίσιμα φορτία αποκόλλησης θεωρώντας ότι τα άκρα της ρωγμής της μήτρας λειτουργούν ως σημεία έναρξης για αποκολλήσεις σε κρούση με ψευδοστατική συμπεριφορά.

Ένα κριτήριο ανάπτυξης αποκόλλησης των στρώσεων για στατικές συνθήκες προκύπτει από τον Davies [34,50]. Το μοντέλο βασίστηκε στη Γραμμικά Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων και θεωρεί ότι η θραύση mode II καθορίζει την ανάπτυξη σε αποκόλληση των στρώσεων σε μία απλά στηριγμένη κυκλική πλάκα. Για να απλοποιήσουμε την ανάπτυξη του μοντέλου, θεωρήθηκαν συνθήκες στατικής φόρτισης, το πολύστρωτο θεωρήθηκε ισοτροπικό, μόνο μικρές παραμορφώσεις θεωρήθηκαν (μεμβρανικές επιδράσεις αμελήθηκαν), και κατανεμημένες αποκολλήσεις στρώσεων μετατράπηκαν σε μία μονή και τέλεια κυκλική αποκόλληση στο μέσο επίπεδο. Με λεπτομέρεια, η σχέση μεταξύ της μετατόπισης εκτός του επιπέδου $w_o$ και ένα εξωτερικό σημειακό φορτίο $F_{d1}^{stat}$ δίνεται από τη θεωρία λεπτών πλακών ως:

$$w_o = \frac{3r_p^2(1-v^2)}{4\pi E h^3} F_{d1}^{stat} \quad (2.98)$$

όπου E,v, h και $r_p$ είναι αντίστοιχα ο συντελεστής ελαστικότητας, ο λόγος Poisson, το πάχος και η ακτίνα της πλάκας. Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι γραμμικό, επιτρέπει

την εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης για την ανάπτυξη της ελαστικής ενέργειας μια πλάκας με μία κυκλική αποκόλληση στο μέσο επίπεδο με ακτίνα $\alpha_c$:

$$U = \frac{3r_p^2(1-v^2)}{8\pi \mathrm{E} h^3}(F_{d1}^{stat})^2 - \frac{3a_c^2(1-v^2)}{8\pi \mathrm{E} h^3}(F_{d1}^{stat})^2 + 2(\frac{3a_c^2(1-v^2)}{8\pi \mathrm{E}(\frac{h}{2})^3}(\frac{F_{d1}^{stat}}{2})^2) \quad (2.99)$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωση (2.111) είναι η ελαστική ενέργεια της πλάκας χωρίς την αποκόλληση. Ο δεύτερος όρος είναι η ενέργεια κυκλικής πλάκας ακτίνας $\alpha_c$. Ο τελευταίος όρος σχετίζεται με την ελαστική ενέργεια δύο κυκλικών πλακών ακτίνας $a_c$ και ύψους h/2. Γνωρίζοντας ότι $\frac{\partial U}{\partial a_c} = 2\pi\alpha_c G_{IIc}$, **το κρίσιμο φορτίο για μία κυκλική αποκόλληση** στο μέσο επίπεδο είναι:

$$F_{d1}^{stat} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{8\mathrm{E}G_{IIc}}{1-v^2}h^{3/2}} \quad (2.100)$$

Θεωρώντας $E/(1-v^2) = (12D)/h^3$, όπου D είναι η καμπτική ακαμψία, η εξίσωση (2.100) μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$F_{d1}^{stat} = \pi\sqrt{\frac{32DG_{IIc}}{3}} \quad (2.101)$$

Οι εξισώσεις (2.100) και (2.101) δείχνουν ότι η αποκόλληση αναπτύσσεται υπό ένα σταθερό φορτίο ανεξάρτητα από το μέγεθος της αποκόλλησης. Όμως, μία αρχική ατέλεια δεν απαιτείται και έτσι το κριτήριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της έναρξης της αποκόλλησης. Επιπλέον, πειραματικά δεδομένα και προσομοιώσεις πεπερασμένων στοιχείων υποδεικνύουν ότι το κρίσιμο φορτίο αποκόλλησης είναι ανεξάρτητο από τις συνοριακές συνθήκες και από το επίπεδο μέγεθος της πλάκας [7,8,13]. Αν και το κριτήριο αποκόλλησης προήλθε θεωρώντας συνθήκες στατικής φόρτισης, μπορεί με τη χρήση ενός νέου συντελεστή διόρθωσης να χρησιμοποιηθεί για αποκρίσεις κρούσης δυναμικών επιδράσεων, όπως συμβαίνει κατά τη συμπεριφορά άπειρης πλάκας [7].

### 2.6.3 Μόνιμη πτύχωση

Κρούση σε μία πλάκα από πολύστρωτο σύνθετο υλικό, συνήθως έχει ως αποτέλεσμα μία ορατή μόνιμη πτύχωση στο σημείο κρούσης ως αποτέλεσμα της πλαστικότητας της μήτρας, αποδόμηση των σπασμένων ινών, και τριβή μεταξύ αυτών των ινών και της μήτρας. Αμέσως μετά την κρούση, η μόνιμη πτύχωση έχει την υψηλότερη τιμή της και σταδιακά το βάθος της μειώνεται εξαιτίας της χαλάρωσης του υλικού.

Η **πρόβλεψη του κρίσιμου φορτίου στο οποίο η μόνιμη πτύχωση** ξεκινά μπορεί να προσεγγιστεί με την ακόλουθη απλή εξίσωση:

$$F_{ind} = k_y a_{cr} \quad (2.104)$$

όπου $k_y$ είναι μία γραμμικοποιημένη δυσκαμψία της ελαστοπλαστικής φάσης φόρτισης (εξίσωση (2.27)), και $a_{cr}$ είναι η κρίσιμη πτύχωση πάνω από την οποία μόνιμη πτύχωση αρχίζει και καθορίζεται από την εξίσωση (2.28).

Η αντίστοιχη κρίσιμη ταχύτητα για μόνιμη πτύχωση μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μιας απλής εξίσωσης ενέργειας ενός απλοποιημένου ψευδοστατικού μοντέλου που περιγράφεται στις ενότητες (2.4.4) και αναπαριστάται από το σχήμα 13β. Θεωρώντας ότι η ενέργεια κρούσης χρησιμοποιείται για τοπική και συνολική παραμόρφωση της πλάκας, η **κρίσιμη ταχύτητα** καταλήγει σε:

$$Vi_{nd} = \frac{a_{cr}}{M_i^{1/2}}[k_y + \frac{k_y^2}{k_{bsm}}]^{1/2} \quad (2.105)$$

όπου $k_{bsm}$ είναι η συνολική ακαμψία της πλάκας.

### 2.6.4 Αστοχία της ίνας

Η <u>αστοχία της ίνας γενικά λαμβάνει χώρα πολύ αργότερα κατά τη διαδικασία θραύσης από ότι η θραύση της μήτρας και η αποκόλληση</u>, και θεωρείται ως πρόδρομος της διάτρησης της πλάκας. Η αστοχία της ίνας προκαλείται από τη διάταξη κρούσης εξαιτίας τοπικών θλιπτικών και διατμητικών τάσεων, και σε επιφάνειες που απουσιάζει το κρουστικό φορτίο εξαιτίας εφελκυστικών καμπτικών τάσεων. Πιο εκτεταμένη θραύση ίνας συνήθως λαμβάνει χώρα στο κεντρικό τμήμα της περιοχής αποκόλλησης και εμφανίζεται να είναι αρκετά ομοιόμορφη κατά την

έννοια του πάχους στο πολύστρωτο σύνθετο υλικό. Η αστοχία της ίνας σε λεπτά πολύστρωτα γενικά επηρεάζει περισσότερες στρώσεις σύνθετου και είναι πιο εκτεταμένη από ότι σε παχιά πολύστρωτα, δείχνοντας τη σημασία των μεμβρανικών τάσεων στο σχηματισμό της θραύσης ίνας [5].

### 2.6.5 Διάτρηση

Διάτρηση λαμβάνει χώρα όταν οι ίνες φτάσουν την κρίσιμη παραμόρφωσή τους, δίνοντας τη δυνατότητα στην κρουστική διάταξη να διαπεράσει πλήρως το υλικό. Με αυτή την υπόθεση, μία συντηρητική εκτίμηση του ψευδοστατικού κρίσιμου φορτίου για διάτρηση $F_{per}^{ten}$ μπορεί να επιτευχθεί με απλή αντικατάσταση της επίπεδης διαμήκους τάσης στην πίσω εξωτερική στρώση (εξίσωση 2.101) στο επόμενο κριτήριο αστοχίας της ίνας σε εφελκυσμό [41]:

$$\frac{(\sigma_1)_p}{X_T} \leq 1 \quad (2.106)$$

όπου $X_T$ είναι η αντοχή εφελκυσμού της ίνας. Όμως, **το κρίσιμη φορτίο για διάτρηση** $F_{per}^{ten}$ γίνεται:

$$F_{per}^{ten} = \frac{\pi^5 R^2 h^2 X_T}{8b^2 X} \quad (2.107)$$

όπου X καθορίζεται ως:

$$X = [((C_{11})_p c^2 + (C_{12})_p s^2)S_{11} + ((C_{11})_p s^2 + (C_{12})_p c^2)S_{12}]xf_x(s, C_{ij}, D_{ij}/h^3) +$$
$$+ [((C_{11})_p c^2 + (C_{12})_p s^2)S_{12} + ((C_{11})_p s^2 + (C_{12})_p c^2)S_{22}]xf_y(s, C_{ij}, D_{ij}/h^3)$$
(2.108)

Από την άλλη μεριά, <u>θεωρώντας το νόμο επαφής Hertz και μία ομοιόμορφη κατανομή κατά την έννοια του πάχους των διατμητικών τάσεων</u>, ένα κρίσιμο φορτίο διάτρησης εξαιτίας της αστοχίας σε διάτμηση του πολύστρωτου μπορεί να επιτευχθεί. Το **κρίσιμο φορτίο** που παίρνουμε είναι:

$$F_{per}^{sh} = \sqrt{6}(\pi S_L h)^{3/2}\sqrt{\frac{R}{Q_a}} \quad (2.109)$$

όπου $S_L$ είναι η αντοχή σε διάτμηση, h είναι το πάχος της πλάκας, R είναι η ακτίνα του άκρου της διάταξης κρούσης, και $Q_\alpha$ είναι ο ενεργός συντελεστής ελαστικότητας της επαφής (βλ. εξίσωση (2.25)). Η αντίστοιχη ταχύτητα κατά την οποία η διάτρηση λαμβάνει χώρα μπορεί να σχηματιστεί με χρήση μιας απλής ισορροπίας ενέργειας παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιείται στον καθορισμό της κρίσιμης ταχύτητας για μόνιμη πτύχωση. Θεωρώντας ότι η ενέργεια κρούσης χρησιμοποιείται για τη διάτρηση και τη συνολική παραμόρφωση της πλάκας, **η κρίσιμη ταχύτητα** καταλήγει σε:

$$V_{per}^{sh} = M_i^{-1/2}[\frac{4(2\pi)^{5/2}}{5} k_H^{-3/2} R^{5/4} (hS_L)^{5/2} + 8\pi^3 k_H^{-1} k_{bsm}^{-1} R^{3/2} (hS_L)^3]^{1/2} \quad (2.110)$$

όπου $k_{bsm}$ είναι η ακαμψία της πλάκας. Εάν η συνολική παραμόρφωση της πλάκας αμελείται (π.χ. συμπεριφορά ημιχώρου), ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (2.110) διαγράφεται.

Στον Wen [52,53], προτείνονται κρίσιμες τιμές για διάτρηση σε κρούση σε τετραγωνικές, επίπεδες, και μονολιθικές πλάκες από πολύστρωτο σύνθετο υλικό με εφαρμογή διατάξεων κρούσης με διαφορετικά σχήματα άκρου. Η προσέγγιση βασίζεται στην υπόθεση ότι η παραμόρφωση είναι τοπική και η μέση πίεση που παρέχεται από την πλάκα για να αντισταθεί στη διάταξη κρούσης μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα. Ένα τμήμα είναι η συνεκτική ψευδοστατική πίεση αντίστασης εξαιτίας της ελαστο-πλαστικής παραμόρφωσης της πλάκας. Η άλλη είναι μία δυναμική πίεση αντίστασης που προκύπτει από επιδράσεις ταχύτητας. Η αντίστοιχη **κρίσιμη τιμή για διάταξη με ημισφαιρικό άκρο** είναι:

$$V_{per}^{com} = \frac{3\pi R^2 h\sqrt{\rho\sigma_{yc}}}{32M_i}[1+\sqrt{1+\frac{128\mathrm{M}_i}{9\pi R^2 h}}] \quad (2.111)$$

όπου R είναι η ακτίνα του άκρου της διάταξης κρούσης, $M_i$ είναι η μάζα της διάταξης κρούσης, h είναι το πάχος της πλάκας, ρ είναι η πυκνότητα του σύνθετου υλικού, και $\sigma_{yc}$ είναι το ελαστικό όριο της πλάκας σε συμπίεση κατά την έννοια του πάχους, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί στην εγκάρσια θλιπτική αντοχή $Y_c$. Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι το $Y_c$ είναι η αντοχή που εξαρτάται από το ρυθμό παραμόρφωσης [54]

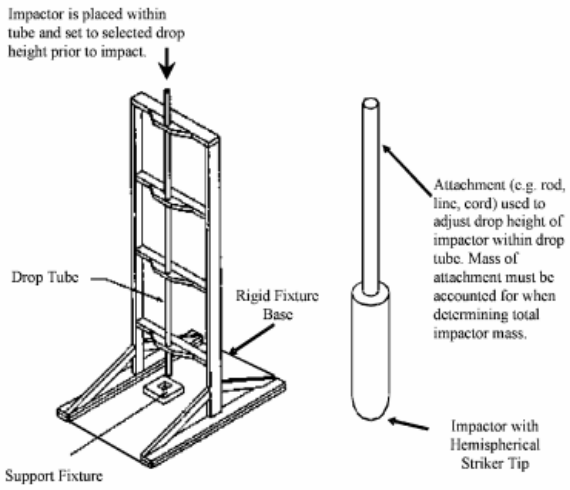
# 3. ΔΟΚΙΜΕΣ ΚΡΟΥΣΗΣ

## 3.1 Τυποποιημένη μέθοδος δοκιμής για μέτρηση της αντίστασης σε ζημιά ενός σύνθετου υλικού λόγω κρούσης με πτώση βάρους (ASTM D7136/D7136M)

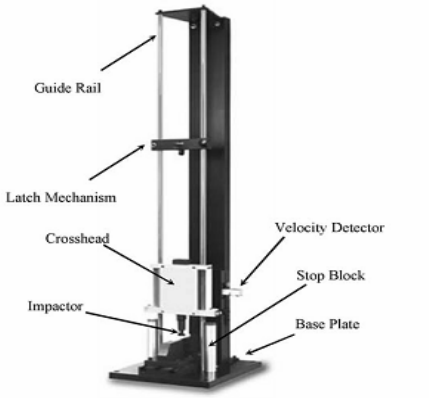
### 3.1.1 Σκοπός – περίληψη της μεθόδου

Αυτή η μέθοδος δοκιμής καθορίζει την αντίσταση σε ζημιά πλακών από πολύστρωτο σύνθετο υλικό με μονής κατεύθυνσης συνεχείς ίνες και πολυμερική μήτρα, οι οποίες υπόκεινται σε κρούση με πτώση βάρους.

Μία επίπεδη τετραγωνική πλάκα από σύνθετο υλικό υπόκειται σε εκτός του επιπέδου, συγκεντρωμένο φορτίο κρούσης χρησιμοποιώντας μία συσκευή πτώσης βάρους με ημισφαιρική κρουστική διάταξη (σχήμα 19 & 20).

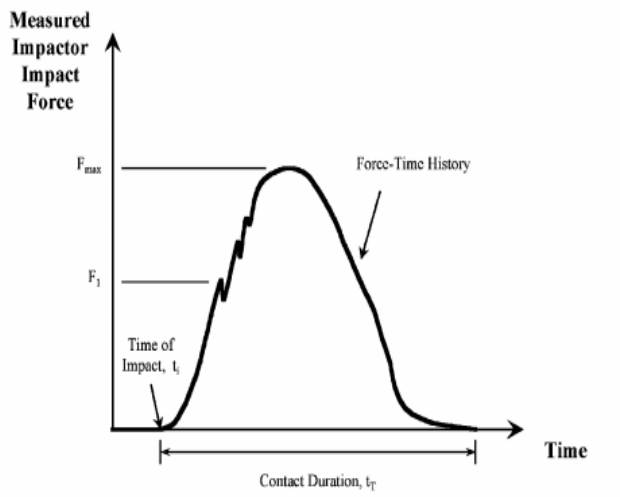



**Σχήμα 19**: Διάταξη κρούσης με κυλινδρικό άκρο και μονής στήλης μηχανισμό οδήγησης

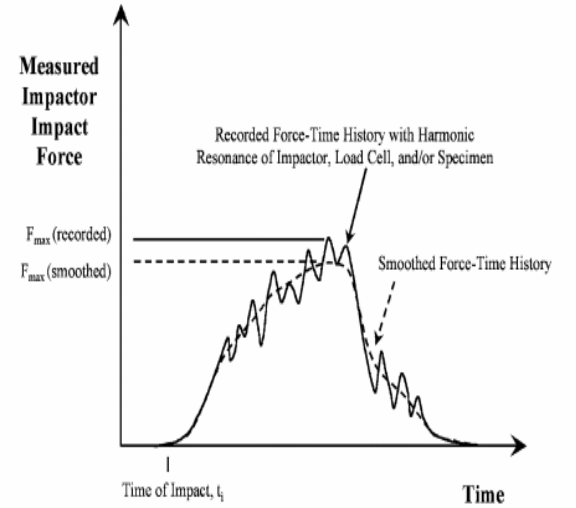



**Σχήμα 20** : Διάταξη κρούσης με μηχανισμό οδήγησης διπλής στήλης

Η δυναμική ενέργεια του βάρους πτώσης, όπως καθορίζεται από τη μάζα και το ύψος πτώσης της κρουστικής διάταξης, προσδιορίζεται πριν τη δοκιμή. Εξοπλισμός και διαδικασίες παρέχονται για προαιρετική μέτρηση της δύναμης επαφής (σχήμα 21 & 22) και της ταχύτητας κατά τη διάρκεια της κρούσης.

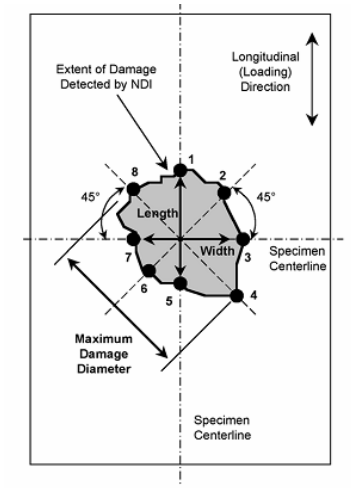



**Σχήμα 21**: Δύναμη κρούσης σε σχέση με το χρόνο

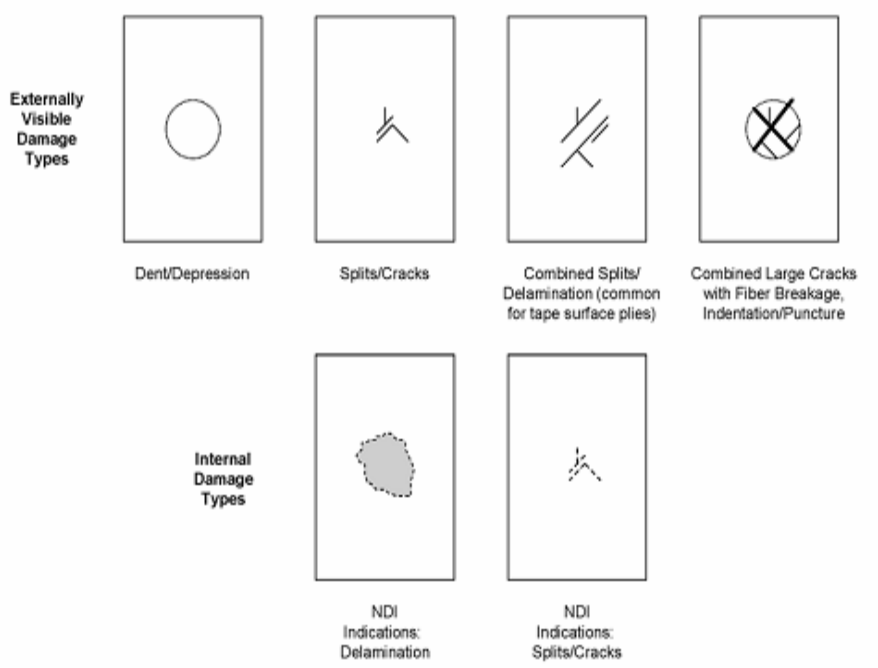



**Σχήμα 22**: Δύναμη κρούσης σε σχέση με το χρόνο (συντονισμός)

Προτιμώμενες ζημιές που προκύπτουν από την κρούση είναι τοποθετημένες στο κέντρο της πλάκας, αρκετά πιο μακριά από τα άκρα έτσι ώστε οι τοπικές τάσεις στα άκρα και στο σημείο κρούσης δεν αλληλεπιδρούν κατά τη διάρκεια της φάσης σχηματισμού της ζημιάς. Η αντίσταση στη ζημιά ποσοτικοποιείται ως αποτέλεσμα του μεγέθους και του τύπου της ζημιάς στο δοκίμιο (σχήμα 23 & 24).




**Σχήμα 23**: Μέτρηση έκτασης ζημιάς



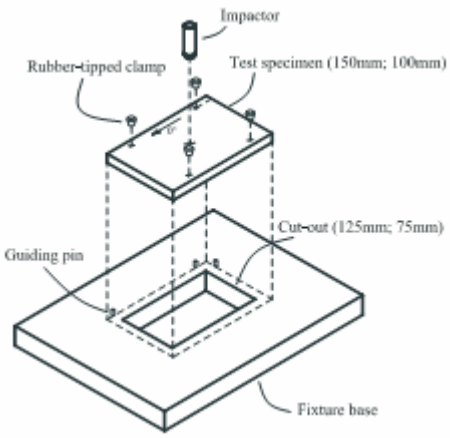

**Σχήμα 24**: Συχνοί τρόποι ζημιάς λόγω κρούσης με πτώση βάρους εκτός του επιπέδου

Οι ιδιότητες αντίστασης στη ζημιά που δημιουργούνται από αυτή τη μέθοδο δοκιμής εξαρτώνται από αρκετούς παράγοντες, οι οποίοι περιλαμβάνουν τη γεωμετρία του δοκιμίου, τη διαστρωμάτωση, τη γεωμετρία της διάταξης κρούσης, τη μάζα της διάταξης κρούσης, την ενέργεια κρούσης και τις συνοριακές συνθήκες. Έτσι, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν είναι δυνατόν να προεκταθούν σε διαφορετική κλίμακα άλλων διατάξεων, αλλά είναι συγκεκριμένα και αφορούν το συνδυασμό των γεωμετρικών και φυσικών συνθηκών που δοκιμάζονται.

### 3.1.2 Αναλυτική περιγραφή της πειραματικής μεθόδου κρούσης με πτώση βάρους

Η μέθοδος αφορά μία ορθογώνια, επίπεδη και μονολιθική πλάκα από πολύστρωτο σύνθετο υλικό με επίπεδες διαστάσεις 150mm x 100mm. Εάν τα πολύστρωτα είναι κατασκευασμένα από στρώσεις μονής κατεύθυνσης ινών, καθορίζεται μία ισορροπημένη και συμμετρική αλληλουχία στρώσεων της μορφής $[(45/0/-45/90)_n]_s$. Ο συνολικός αριθμός n επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε το πάχος της πολυμερισμένης πλάκας να είναι κοντά στα 5mm. Η αλληλουχία στρώσεων της πλάκας καθορίζεται λαμβάνοντας τον προσανατολισμό της ίνας $0^o$ σε πλήρη ευθυγράμμιση με την μεγαλύτερη επίπεδη διάσταση της πλάκας.

Τα δοκίμια είναι τοποθετημένα σε μία επίπεδη βάση με ορθογώνιο άνοιγμα 125mm x 75mm το οποίο επιτρέπει τη διάταξη κρούσης να έρθει σε επαφή με το δοκίμιο χωρίς παρεμβολή (σχήμα 25). Το σύστημα συγκράτησης του δοκιμίου, που παρέχεται για πλήρη περιορισμό της μετακίνησής του κατά τη διάρκεια της κρούσης, θεωρείται ότι αποτελεί απλή στήριξη.




**Σχήμα 25**: Δοκίμιο κρούσης

Οι δοκιμές κρούσης εκτελούνται με μία συσκευή, η οποία περιλαμβάνει μηχανισμό οδήγησης, ένα άκαμπτο σύστημα συγκράτησης, μία διάταξη κρούσης με πτώση βάρους ενσωματωμένης με μετρητικό σύστημα, έναν αισθητήρα ταχύτητας και μία διάταξη ανάσχεσης της αναπήδησης. Οι κρούσεις εκτελούνται ελευθερώνοντας τη διάταξη κρούσης επιλεγμένης μάζας από ένα προκαθορισμένο ύψος, και αφήνοντας να πέσει ελεύθερα σύμφωνα με τη βαρυτική δύναμη και ακολουθώντας τον μηχανισμό οδήγησης. Η γωνία κρούσης είναι κάθετη στο δοκίμιο

και το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στο κέντρο της πλάκας μέσω χαλύβδινης ημισφαιρικής διάταξης κρούσης. Λίγο πριν την κρούση στο δοκίμιο, ένας χαλύβδινος δείκτης συνδεδεμένος με τη διάταξη κρούσης περνά από έναν οπτικό αισθητήρα ο οποίος ενεργοποιεί το σύστημα καταγραφής και υπολογίζει την αρχική ταχύτητα κρούσης $V_o$. Η ταχύτητα υπολογίζεται από την απόσταση μεταξύ των δύο άκρων του δείκτη και το χρόνο διέλευσης από τον αισθητήρα. Από τη στιγμή έναρξης της κρούσης, η δύναμη επαφής ανιχνεύεται από τον μετατροπέα δύναμης που είναι προσαρμοσμένος στη διάταξη κρούσης και το ιστορικό της δύναμης αποθηκεύεται σε υπολογιστή. Τελικά, εάν δεν λαμβάνει χώρα διάτρηση, μία διάταξη ανάσχεσης της αναπήδησης επίσης ενεργοποιείται από έναν οπτικό αισθητήρα έτσι ώστε να μην συμβαίνει ξανά κρούση.

Η συνάρτηση της <u>ταχύτητα και της μετατόπισης με το χρόνο της διάταξης κρούσης</u>, V(t) και $w_i(t)$ αντίστοιχα, μπορούν να υπολογισθούν ολοκληρώνοντας μία και δύο φορές τη συνάρτηση της δύναμης:

$$V(t) = Vo + gt - \int_0^t \frac{F(t)}{M_i} dt \qquad (3.1)$$

$$w_i(t) = w_o + V_o t + \frac{gt^2}{2} - \int_0^t (\int_0^t \frac{F(t)}{M_i} dt) dt \qquad (3.2)$$

όπου $V_o$ είναι η αρχική ταχύτητα κρούσης, g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, t είναι ο χρόνος και $w_o$ είναι η θέση της διάταξης κρούσης από τη θέση αναφοράς τη χρονική στιγμή t=0.

Επιπλέον, η <u>ενέργεια που απορροφάται από το δοκίμιο</u>, $E_\alpha(t)$, μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$E_a(t) = \frac{M_i(V_o^2 - V(t)^2)}{2} + M_i g w_i(t) \quad (3.3)$$

Η τυποποίηση αφορά δοκιμή δείγματος πέντε δοκιμίων χρησιμοποιώντας σταθερή μάζα κρουστικής διάταξης 5.5 kgr και σταθερή <u>ενέργεια κρούσης</u> που υπολογίζεται ως συνάρτηση του πάχους δοκιμίου:

$$E_i = C_E h \qquad (3.4)$$

όπου h είναι το πάχος της πλάκας και $C_E$ είναι ο λόγος της ενέργειας κρούσης προς το πάχος του δοκιμίου και ισούται με 6.7J/mm. Ο λόγος καθορισμού της ενέργειας κρούσης με χρήση της εξίσωσης (3.4) σχετίζεται με τις επιδράσεις των συνθηκών στήριξης στη ζημιά λόγω κρούσης. Όταν κρούση λαμβάνει χώρα ακολουθώντας τις τυποποιημένες προδιαγραφές, το δοκίμιο θα αναπτύξει μεγέθη ζημιάς μικρότερα από το μισό του πλάτους του μη στηριγμένου δοκιμίου (π.χ. 38mm), και έτσι αποφεύγονται σημαντικές αλληλεπιδράσεις των περιοχών ζημιάς με τις συνθήκες στήριξης των άκρων.

Στους ακόλουθους πίνακες (σχήμα 26 & 27) συνοψίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των δοκιμίων και της διάταξης κρούσης σύμφωνα με την προδιαγραφή.

| **Δοκίμιο** | |
|---|---|
| Σχήμα | Επίπεδο και ορθογώνιο |
| Πάχος | h = 5mm |
| Επίπεδες διαστάσεις | $\alpha_1$=150 mm x $b_1$=100mm |
| Τύπος στρώσης | Ίνες μονής κατεύθυνσης ή ύφασμα |
| Αλληλουχία στρώσεων | $[(45/0/-45/90)_n]_s$ (για στρώσεις μονής κατεύθυνσης ινών) |
| Συνοριακές συνθήκες | Τέσσερα σημεία συγκράτησης |

**Σχήμα 26:** ASTM D7136/D7136M Προδιαγραφές δοκιμίου

| **Διάταξη κρούσης** | |
|---|---|
| Σχήμα | Ημισφαιρικό |
| Ακτίνα | R = 8mm |
| Υλικό | Χάλυβας (60 έως 62 HRC) |
| Μάζα | $M_i$ = 5.5 kg |
| Ταχύτητα | $V_o = \sqrt{\frac{2(C_E h)}{M_i}}$ |
| Γωνία κρούσης | Κάθετη στην πλάκα |

**Σχήμα 27:** ASTM D7136/D7136M προδιαγραφές διάταξης κρούσης

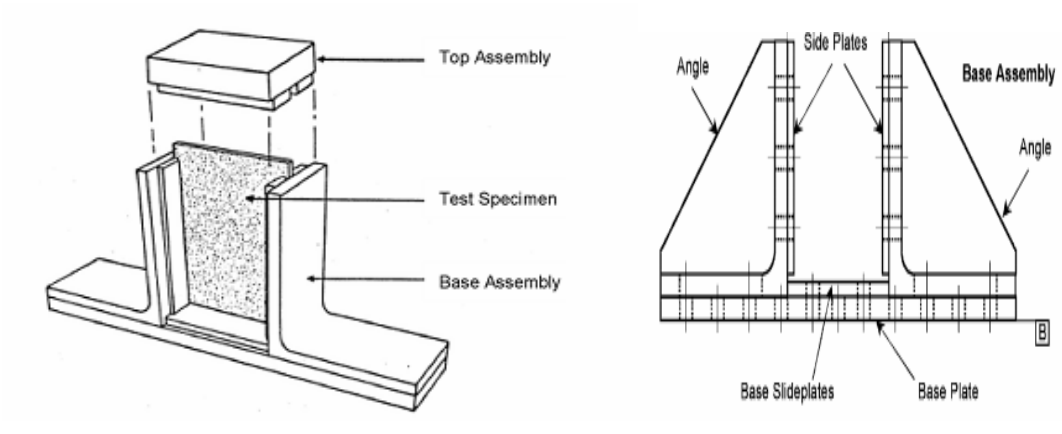
## 3.2 Τυποποιημένη μέθοδος δοκιμής για ιδιότητες εναπομένουσας αντοχής σε θλίψη σε πλάκες από σύνθετο υλικό με ύπαρξη ζημιάς λόγω κρούσης – compression after impact (ASTM D7137/D7137M)

### 3.2.1. Σκοπός – περίληψη της μεθόδου

Αυτή η μέθοδος δοκιμής καλύπτει τις ιδιότητες εναπομένουσας αντοχής σε θλίψη πλακών από πολύστρωτο σύνθετο υλικό με πολυμερική μήτρα, με διευθύνσεις ινών πολλών κατευθύνσεων, και οι οποίες είναι συμμετρικές και ισορροπημένες σε σχέση με τη διεύθυνση δοκιμής. Η μέθοδος χρησιμοποιεί μία επίπεδη, τετραγωνική πλάκα από σύνθετο υλικό, η οποία προηγουμένως έχει υποστεί ζημιά λόγω κρούσης, και η οποία δοκιμάζεται σε θλιπτική φόρτιση χρησιμοποιώντας μία διάταξη σταθεροποίησης.

Οι ιδιότητες που προκύπτουν από αυτή τη μέθοδο εξαρτώνται από πολλές παραμέτρους, οι οποίες περιλαμβάνουν τη γεωμετρία του δοκιμίου, τη διαστρωμάτωση, τον τύπο ζημιάς, το μέγεθος της ζημιάς, τη θέση της ζημιάς, και τις συνοριακές συνθήκες. Συνεπώς, τα αποτελέσματα γενικά δεν είναι εφαρμόσιμα σε άλλες διατάξεις, και είναι συγκεκριμένα για το συνδυασμό των γεωμετρικών και φυσικών συνθηκών που ελέγχονται.

Στη δοκιμή αυτή, η πλάκα που έχει υποστεί ζημιά τοποθετείται σε μία διάταξη στήριξης πολλαπλών δοκιμίων και ευθυγραμμίζεται με σκοπό την ελαχιστοποίηση της εκκεντρότητας φόρτισης και της εισαγωγής κάμψης στο δοκίμιο (σχήμα 28 & 29).




**Σχήμα 28:** Συναρμολόγηση διάταξης στήριξης

**Σχήμα 29:** Διάταξη δοκιμής θλίψης μετά την κρούση (Boeing)

Η συναρμολόγηση δοκιμίου / διάταξης τοποθετείται ανάμεσα σε δύο πλάκες πίεσης και στη συνέχεια φορτίζεται υπό θλιπτικό φορτίο μέχρι αστοχίας. Η εφαρμοζόμενη δύναμη, η μετατόπιση της κεφαλής και δεδομένα παραμόρφωσης καταγράφονται κατά τη διάρκεια της φόρτισης.

Συνηθισμένοι τρόποι αστοχίας προκαλούν ζημιά στο δοκίμιο. Όμως, αποδεκτές αστοχίες μπορούν να ξεκινήσουν μακριά από τη θέση της ζημιάς, σε περιπτώσεις που αυτή δημιουργεί μία σχετικά χαμηλή συγκέντρωση τάσεων ή εάν η έκτασή της είναι μικρή ή και τα δύο. Μη αποδεκτοί τρόποι αστοχίας είναι εκείνοι που σχετίζονται με εισαγωγή φόρτισης από τη διάταξη στήριξης, τοπικές συνθήκες στήριξης των άκρων, και αστάθεια του δοκιμίου (εκτός και εάν το δοκίμιο είναι αντιπροσωπευτικό μιας συγκεκριμένης δομικής εφαρμογής).

### 3.2.2 Αναλυτική περιγραφή της δοκιμής θλίψης μετά την κρούση

Η διάταξη του συστήματος στήριξης του δοκιμίου κατά τη δοκιμή θλίψης μετά την κρούση μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα επηρεάζονται από τη γεωμετρία των διαφόρων πλευρικών πλακών και από την παρουσία κενών μεταξύ αυτών και του δοκιμίου, γεγονός οποίο μπορεί να μειώσει την ενεργό στήριξη του άκρου καταλήγοντας σε συνθήκες συγκεντρωμένης εισαγωγής φορτίου στην πάνω και κάτω επιφάνεια του δοκιμίου. Επιπλέον, τα αποτελέσματα μπορούν να επηρεαστούν από διαφοροποιήσεις στην εφαρμοζόμενη ροπή στις πλευρικές συνδέσεις της πλάκας. Χαλάρωση των συνδέσεων μπορεί να μειώσει την ενεργό στήριξη του άκρου.

Σφάλματα μπορεί να υπάρξουν εάν η διάταξη της δοκιμής δεν είναι ευθυγραμμισμένη σε σχέση με τον άξονα φόρτισης της μηχανής δοκιμής. Γι' αυτό το λόγο, το πρότυπο προτείνει την τοποθέτηση τεσσάρων αισθητήρων strain gages σε επιλεγμένες θέσεις με σκοπό την ανίχνευση της κάμψης του δοκιμίου πριν και κατά τη διάρκεια της δοκιμής.

Η διαδικασία δοκιμής ξεκινά με μία μετατόπιση θλίψης, η οποία προ – φορτίζει τη διάταξη του δοκιμίου με 450 N. Αυτή η φόρτιση εφαρμόζεται με στόχο τη διαβεβαίωση ότι όλες οι επιφάνειες φόρτισης είναι σε επαφή και ευθυγραμμίζει τις πλάκες εάν είναι απαραίτητο. Στη συνέχεια, το φορτίο μειώνεται σε 150 N και η μηχανή δοκιμής ρυθμίζεται στο μηδέν. Έπειτα, μία θλιπτική μετατόπιση εφαρμόζεται σε καθορισμένο ρυθμό (π.χ. μέγιστο ρυθμό 1.25 mm / min) ενώ καταγράφονται τα δεδομένα, μέχρι περίπου 10% της αναμενόμενης μέγιστης δύναμης (συνήθως, η μέγιστη δύναμη είναι άγνωστη). Συνεπώς, η θλιπτική φόρτιση μειώνεται ξανά στα 150 N με ένα ισοδύναμο ρυθμό φόρτισης. Τελικά, τα δεδομένα των strain gages που έχουν καταγραφεί ελέγχονται με σκοπό τον έλεγχο της κάμψης του δοκιμίου. Μία διαφορά στην κλίση τάσης – παραμόρφωσης ή δύναμης – παραμόρφωσης από τις απέναντι επιφάνειες του δοκιμίου υποδηλώνει κάμψη στο δοκίμιο. Η εξίσωση (3.5) προσδιορίζει ένα ποσοστό της κάμψης $P_B$ στη μέγιστη εφαρμοζόμενη φόρτιση για κάθε μία από τις θέσεις στην μπροστά και πίσω επιφάνεια:

$$P_B = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} x100 \qquad (3.5)$$

όπου $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι οι παραμορφώσεις που λαμβάνονται από τα strain gages σε μία θέση στην μπροστά και στην πίσω επιφάνεια του δοκιμίου αντίστοιχα. Το πρόσημο του υπολογισμένου ποσοστού κάμψης φανερώνει την κατεύθυνση στην οποία η κάμψη λαμβάνει χώρα. Πρέπει να παρατηρηθεί ότι η κάμψη συχνά εισάγεται από την ασυμμετρία του δοκιμίου που δημιουργείται από τη ζημιά λόγω κρούσης.

Μετά τον έλεγχο των strain gages και την σωστή ευθυγράμμιση της διάταξης του δοκιμίου, η δοκιμή θλίψης μετά την κρούση εκτελείται φορτίζοντας το δοκίμιο με συγκεκριμένο ρυθμό ενώ τα δεδομένα καταγράφονται. Το δοκίμιο φορτίζεται μέχρι να εφαρμοστεί η μέγιστη δύναμη και η δύναμη να πέσει 30% από τη μέγιστη.

Η μέγιστη θλιπτική εναπομένουσα αντοχή (ultimate compressive residual strength) υπολογίζεται από τον εξής τύπο:

$$F^{CAI} = P_{max} / A \qquad (3.6)$$

όπου:

$F^{CAI}$ είναι η μέγιστη θλιπτική εναπομένουσα αντοχή σε MPa [psi]

$P_{max}$ είναι η μέγιστη δύναμη πριν την αστοχία σε N [lbf] και

A είναι το εμβαδόν της διατομής σε $mm^2$ [$in^2$].

Το ενεργό μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E^{CAI} = (P_{3000} - P_{1000}) / ((\varepsilon_{3000} - \varepsilon_{1000})\ A) \quad (3.7)$$

όπου:

$E^{CAI}$ είναι το ενεργό μέτρο ελαστικότητας σε θλίψη σε MPa [psi],

$P_{3000}$ είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη που αντιστοιχεί σε $\varepsilon_{3000}$ σε N [lbf],

$P_{1000}$ η εφαρμοζόμενη δύναμη που αντιστοιχεί σε $\varepsilon_{3000}$ σε N [lbf],

$\varepsilon_{3000}$ η τιμή της παραμόρφωσης που καταγράφεται πιο κοντά στα 3000 microstrain

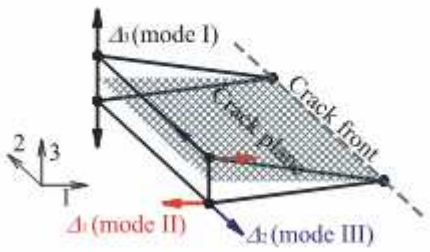
$\varepsilon_{1000}$ η τιμή της παραμόρφωσης που καταγράφεται πιο κοντά στα 1000 microstrain

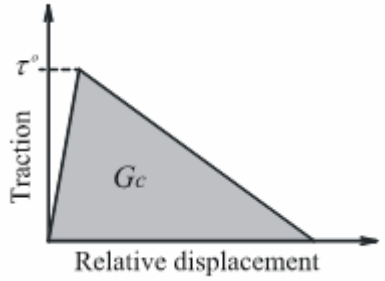
Η εφαρμοζόμενη δύναμη στα 1000 και 3000 microstrain βασίζεται στη μέση τιμή της παραμόρφωσης και για τα τέσσερα strain gages.

# 4. ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ (Interlaminar damage)

## 4.1 Μοντέλο ζημιάς για αποκόλληση στρώσεων συνθέτου υλικού (interlaminar damage) (Turon)

Στην ενότητα παρουσιάζονται τα κύρια χαρακτηριστικά του μοντέλου αποκόλλησης των στρώσεων (Turon 2006) [62] με κάποιες τροποποιήσεις του αρχικού σχηματισμού. Ο καταστατικός νόμος που χρησιμοποιείται φαίνεται στο σχήμα 31 και αποτελεί μία διγραμμική σχέση μεταξύ των σχετικών μετατοπίσεων και των δυνάμεων έλξης. Η πρώτη γραμμή παριστάνει μία ελαστική σχέση, πριν την έναρξη της ζημιάς. Η έναρξη της ζημιάς σχετίζεται με την αντοχή της διεπιφάνειας $\tau^o$. Όταν το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δύναμη έλξης – μετατόπιση είναι ίσο με την ανθεκτικότητα σε θραύση $G_c$, οι δυνάμεις έλξης της διεπιφάνειας μηδενίζονται και μία νέα επιφάνεια ρωγμής δημιουργείται.




**Σχήμα 30**: Τρόποι διάδοσης της αποκόλλησης **Σχήμα 31**: Διγραμμικός καταστατικός νόμος

Οι διαφορετικές σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των κόμβων των στοιχείων επιφάνειας παρουσιάζονται στο σχήμα 30, όπου κάθε μετατόπιση συνδέεται απευθείας με τον αντίστοιχο τρόπο διάδοσης της αποκόλλησης, θεωρώντας ότι το μέτωπο της ρωγμής βρίσκεται στη γραμμή του σχήματος (crack front). Σε κλίμακα πεπερασμένου στοιχείου, δεν είναι δυνατόν να γίνει διάκριση μεταξύ των διατμητικών τρόπων αποκόλλησης (mode II & III) καθώς το μέτωπο της ρωγμής είναι στην πραγματικότητα άγνωστο. Γι' αυτόν το λόγο, οι διατμητικοί τρόποι διάδοσης τοποθετούνται στην ίδια κατηγορία κατά το σχηματισμό των μοντέλων συνεκτικότητας (cohesive models).

Στα μοντέλα ζημιάς η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ανά μονάδα επιφάνειας της διεπιφάνειας σε ισοθερμικές συνθήκες καθορίζεται ως εξής:

$$\psi(\Delta i, d) = (1-d)\psi^o(\Delta i) \text{ με i=1,2,3} \quad (4.1)$$

όπου d είναι η ισοτροπική μεταβλητή ζημιάς και $\psi^o(\Delta i)$ είναι συνάρτηση της σχετικής μετατόπισης που καθορίζεται ως εξής:

$$\psi^o(\Delta i) = \frac{1}{2}\Delta i D_i^o \Delta_j \text{ με i=1,2,3} \quad (4.2)$$

Η εξίσωση (4.1) δείχνει ότι τα στοιχεία της σχετικής μετατόπισης, $\Delta_i$, είναι οι ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος (π.χ. σχηματισμοί μετατόπισης), και d είναι η εσωτερική μεταβλητή που διαβεβαιώνει ότι διατηρείται η μη αντιστροφή του μοντέλου.

Αρνητικές τιμές του $\Delta_3$ (mode I) δεν έχουν φυσική σημασία διότι οι ρωγμές είναι κλειστές και δεν δημιουργείται καμία ζημιά. Όμως, το μοντέλο ζημιάς έχει μονομερή συμπεριφορά για αυτό τον τρόπο διάδοσης της ρωγμής, το οποίο σημαίνει ότι η μεταβλητή ζημιάς μπορεί να ενεργοποιείται και απενεργοποιείται ως μία συνάρτηση της κατάστασης φόρτισης. Όμως, η εξίσωση (4.1) τροποποιείται ως εξής:

$$\psi(\Delta i, d) = (1-d)\psi^o(\Delta i) - d\psi^o(\delta_{3i} < -\Delta_3 >) \text{ με i=1,2,3} \quad (4.3)$$

όπου <-> είναι οι παρενθέσεις Macaulay που καθορίζονται ως <x>=1/2(x+|x|), και $\delta_{ij}$ είναι το δέλτα του Kronecker.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Coleman (Simo και Ju(1987)), η καταστατική εξίσωση διαβάζει:

$$\tau_i = \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \iota} = (1-d)D_{ij}^o \Delta_j - dD_{ij}^o \delta_{3j} < -\Delta_3 > \text{ με i,j=1,2,3} \quad (4.4)$$

όπου $D_{ij}^o$ είναι ο τανυστής ακαμψίας όταν δεν υπάρχει ζημιά, που καθορίζεται ως εξής:

$$D_{ij}^o = \delta_{ij}K \qquad \text{με i,j = 1,2,3} \quad (4.5)$$

όπου K είναι μία μονόμετρη παράμετρος που αντιστοιχεί στην κλίση της πρώτης γραμμής στον καταστατικό νόμο, που τυπικά ονομάζεται ακαμψία ποινής. Όπως δείχνει η εξίσωση 4.5, η ακαμψία ποινής είναι η ίδια για κάθε τρόπο διάδοσης της αποκόλλησης των στρώσεων.

### 4.1.1 Προσομοίωση αποκόλλησης στρώσεων

Για να διαβεβαιώσουμε τη θερμοδυναμική συνοχή του μοντέλου, η ενέργεια που χάνεται ανά μονάδα επιφάνειας κατά τη διαδικασία διάδοσης της ζημιάς, Ξ, πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη του μηδενός:

$$\Xi = \mathrm{Y}\dot{d} \geq 0 \quad (4.6)$$

όπου η θερμοδυναμική δύναμη Y που σχετίζεται με την εσωτερική μεταβλητή d καθορίζεται ως εξής:

$$Y = -\frac{\partial \psi}{\partial d} \qquad (4.7)$$

Η τιμή της μεταβλητής ζημιάς πρέπει να καθοριστεί σε κάθε χρονικό βήμα κατά τη διάρκεια της διαδικασίας φόρτισης. Όμως, είναι απαραίτητο να καθορίσουμε μία κατάλληλη νόρμα του διανύσματος σχετικής μετατόπισης, την επιφάνεια για την ενεργοποίηση ζημιάς, ένα νόμο για την εξέλιξη ζημιάς και κριτήρια για την έναρξη και την διάδοση της ζημιάς.

### 4.1.2 Νόρμα διανύσματος σχετικής μετατόπισης

Η νόρμα που επιλέγεται για τα στοιχεία της σχετικής μετατόπισης καθορίζεται ως εξής:

$$\lambda = \sqrt{< \Delta_3 >^2 + \Delta_{shear}^2} \qquad (4.8)$$

όπου $\Delta_3$ είναι είναι η σχετική μετατόπιση σε mode I, και $\Delta_{shear}$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα των σχετικών μετατοπίσεων σε mode II & III:

$$\Delta_{shear} = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \qquad (4.9)$$

Συνήθως, τα modes II & III σε διάτμηση παρουσιάζονται μαζί καθώς η εξέλιξή τους ξεχωριστά εξαρτάται από τη σχετική μετατόπιση μεταξύ των ομόλογων κόμβων σε σχέση με τον προσανατολισμό του μετώπου της ρωγμής. Καθώς σε επίπεδο πεπερασμένου στοιχείου ο προσανατολισμός της ρωγμής είναι γενικά άγνωστος, είναι αδύνατο να γίνει διάκριση μεταξύ των mode II & III.

### 4.1.3 Επιφάνεια για ενεργοποίηση ζημιάς και νόμος για εξέλιξη ζημιάς

Η επιφάνεια για ενεργοποίηση ζημιάς από τον Turon (2006) τροποποιείται με την έκφραση:

$$F(\Delta_t, d_t) := G(\Delta_t) - d_t \leq 0 \qquad \forall t \geq 0 \qquad (4.10)$$

όπου $G(\Delta_t)$ είναι μία μονότονη συνάρτηση φόρτισης, η οποία εξαρτάται από το διάνυσμα σχετικής μετατόπισης $\Delta=\{\Delta_1, \Delta_2,\Delta_3\}^T$ τη χρονική στιγμή t, και $d_t$ είναι η μεταβλητή ζημιάς τη χρονική στιγμή t και d είναι η μεταβλητή ζημιάς τη χρονική στιγμή t, η οποία χρησιμοποιείται ως η οριακή τιμή της συνάρτησης.

Η εξέλιξη της μεταβλητής ζημιάς καθορίζεται με βάση τους περιορισμούς Kuhn-Tucher, οι οποίοι δίνουν τις συνθήκες φόρτιση-αποφόρτισης-επαναφόρτισης (Oliver (1990)) ως εξής:

$$\dot{d} \geq 0\,; \qquad F(\Delta_t, d_t) := G(\Delta_t) - d_t \leq 0\,; \quad \dot{d}F(\Delta_t, d_t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \qquad (4.11)$$

Από την άλλη πλευρά, για να διαβεβαιώσουμε ότι η επιφάνεια της ενεργοποίησης της ζημιάς θα εξελίσσεται όσο η εσωτερική μεταβλητή εξελίσσεται, η συνθήκη επιμονής (ή συνοχής) απαιτείται. Αυτή η συνθήκη είναι η εξής:

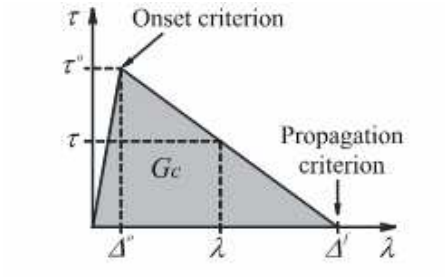
$$F(\Delta_t, d_t) = 0 \Rightarrow \dot{F}(\Delta_t, d_t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \qquad (4.12)$$

Όμως, η μεταβλητή ζημιάς d καθορίζεται έμμεσα ως εξής:

$$d_t = \max\{0, \max_s(G(\Delta_t))\} \quad 0 \leq s \leq t \quad \forall t \geq 0 \qquad (4.13)$$

η οποία περιγράφει πλήρως την εξέλιξη της εσωτερικής μεταβλητής για κάθε κατάσταση φόρτισης-αποφόρτισης-επαναφόρτισης. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση (σχ.32) για κάθε λόγο β σε mixed-mode (εξίσωση 4.21), η συνάρτηση $G(\Delta_t)$ καθορίζεται ως εξής:

$$G(\Delta_t) = \min\{\frac{\Delta_t^f(\lambda_t - \Delta_t^o)}{\lambda_t(\Delta_t^f - \Delta_t^o)}, 1\} \qquad \forall t \geq 0 \qquad (4.14)$$




**Σχήμα 32 :** Παράμετροι για τη διγραμμική καταστατική εξίσωση

Η εξίσωση 4.14 καθορίζει τη συνάρτηση φόρτισης με χρήση μιας διγραμμικής καταστατικής εξίσωσης, όπου $\Delta_t^o$ και $\Delta_t^f$ είναι οι παράμετροι έναρξης και διάδοσης της ζημιάς τη χρονική στιγμή t, αντίστοιχα. Οι τιμές των $\Delta_t^o$ και $\Delta_t^f$ επιτυγχάνονται με χρήση των κριτηρίων έναρξης και διάδοσης ζημιάς, αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές θα είναι σταθερές εκτός και αν ο λόγος mixed-mode αλλάξει. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην εξίσωση 4.14 καθορίζονται στο σχήμα 32.

### 4.1.4 Κριτήριο για διάδοση ζημιάς

Το κριτήριο διάδοσης για εξέλιξη της αποκόλλησης των στρώσεων σε συνθήκες φόρτισης μεικτού τύπου καθορίζεται με χρήση των ρυθμών απελευθέρωσης ενέργειας και των τιμών ανθεκτικότητας σε θραύση. Το κριτήριο βασίζεται στην εργασία των Benzeggagh και Kenane (1996), και αρχικά καθορίστηκε για mixed mode I και II:

$$G_c = G_{Ic} + (G_{IIc} - G_{Ic})(\frac{G_{II}}{G_I + G_{II}})^n \qquad (4.15)$$

όπου $G_{Ic}$ και $G_{IIc}$ είναι οι τιμές ανθεκτικότητας σε θραύση σε mode I & II, αντίστοιχα, ενώ $G_I$ και $G_{II}$ είναι οι ρυθμοί απελευθέρωσης ενέργειας σε mode I & II, αντίστοιχα. Η παράμετρος n βρίσκεται με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων των σημείων των πειραματικών δεδομένων των τιμών ανθεκτικότητας σε θραύση με διαφορετικούς λόγους διάδοση αποκόλλησης μεικτού τύπου.

$$G_c = G_{Ic} + (G_{shear\_c} - G_{Ic})B^n \qquad (4.16)$$

όπου $G_{shear}$ και $G_{shear\_c}$ είναι ο ρυθμός απελευθέρωσης σε διάτμηση και η ανθεκτικότητα σε θραύση μόνο σε mode II, αντίστοιχα. Οι εκφράσεις των $G_{shear}$ και $G_{shear\_c}$ καθορίζονται από τις εξισώσεις 4.17 και 4.18, αντίστοιχα (Camanho (2003)).

$$G_{shear} = G_{II} + G_{III} \qquad (4.17)$$

$$G_{shear\_c} = G_{IIc} \ (=G_{IIIc}) \qquad (4.18)$$

Η εξίσωση 4.17 ισχύει όταν οι καταστατικές εξισώσεις σε mode II & III είναι ίσες. Αυτή η υπόθεση είναι πολύ κοινή διότι η ανθεκτικότητα σε θραύση σε mode III είναι δύσκολο να επιτευχθεί και τυπικά θεωρείται ίση με την $G_{IIc}$.

Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση 4.18 διαβεβαιώνει ότι το κριτήριο διάδοσης της αποκόλλησης είναι συνεπές με τις περιπτώσεις φόρτισης σε mode II ή III. Όπως στην περίπτωση της εξίσωσης 4.17, η εξίσωση 4.18 σημαίνει ότι οι καταστατικές εξισώσεις για mode II και III είναι ίσες.

Η παράμετρος B καθορίζεται ως εξής:

$$B = \frac{G_{shear}}{G_I + G_{shear}} \qquad (4.19)$$

Ο λόγος β μεικτού τύπου καθορίζεται από τον Turon (2006) και δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = \frac{\Delta_{shear}}{<\Delta_3> + \Delta_{shear}} \qquad (4.20)$$

Όμως, ο καθορισμός της παραμέτρου β από την εξίσωση 4.21, η οποία επιτρέπει την παράμετρο B να είναι ίση με το β αναπτύσσοντας την εξίσωση 4.19 και θεωρώντας την ίδια ποινή στην ακαμψία (penalty stiffness) για όλους τους τρόπους διάδοσης της αποκόλλησης.

$$\beta = \frac{\Delta_{shear}^2}{<\Delta_3>^2 + \Delta_{shear}^2} = \frac{\Delta_{shear}^2}{\lambda^2} \qquad (4.21)$$

Τελικά, το κριτήριο διάδοσης της αποκόλλησης καθορίζεται από τους όρους της σχετικής μετατόπισης και επιτυγχάνεται από την εξίσωση 4.16 και γνωρίζοντας ότι η ρωγμή διαδίδεται όταν ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας είναι ίσος με την κρίσιμη τιμή. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 4.22 (προκύπτει από την εξίσωση 4.16) και την εξίσωση 4.23, το κριτήριο διάδοσης της αποκόλλησης καταλήγει στην εξίσωση 4.24.

$$G_c(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}\Delta_3^o\Delta_3^f + (\frac{1}{2}\mathrm{K}\Delta_{shear}^o\Delta_{shear}^f - \frac{1}{2}\mathrm{K}\Delta_3^o\Delta_3^f)\beta^n \qquad (4.22)$$

$$G_c(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}\Delta^o\Delta^f \qquad (4.23)$$

$$\Delta^f = \frac{\Delta_3^o\Delta_3^f + (\Delta_{shear}^o\Delta_{shear}^f - \Delta_3^o\Delta_3^f)\beta^n}{\Delta^o} \qquad (4.24)$$

$\Delta_3^o$ και $\Delta_{shear}^o$ είναι οι σχετικές μετατοπίσεις για έναρξη διάδοσης ζημιάς σε mode I και σε διάτμηση αντίστοιχα, και $\Delta_3^f$ και $\Delta_{shear}^f$ είναι οι σχετικές μετατοπίσεις για διάδοση ζημιάς σε mode I και mode διάτμησης αντίστοιχα. Η παράμετρος $\Delta^o$ είναι η μετατόπιση στην έναρξη της ζημιάς, και καθορίζεται με χρήση του κριτηρίου έναρξης της ζημιάς. Συνήθως, το κριτήριο διάδοσης της ζημιάς σχηματίζεται ανεξάρτητα από το κριτήριο έναρξης της ζημιάς. Όμως, η εξίσωση 4.24 δείχνει ότι και τα δύο κριτήρια συνδέονται σε αυτό το μοντέλο.

### 4.1.5 Κριτήριο για έναρξη ζημιάς

Σε αυτό το μοντέλο, το κριτήριο για έναρξη της ζημιάς θεωρείται το ίδιο όπως το κριτήριο που εφαρμόζεται κατά τη διάδοση της ζημιάς. Αυτό σημαίνει ότι το κριτήριο για έναρξη της ζημιάς βασίζεται επίσης σε ενεργειακούς όρους, το οποίο είναι διαφορετικό χαρακτηριστικό από τους συνήθης σχηματισμούς για ζημιά με όρους συνεκτικότητας (cohesive damage) όπου χρησιμοποιείται κάποιο κριτήριο βασιζόμενο σε τασική περιγραφή. Τα μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τους την αλληλεπίδραση των στοιχείων τάσης (stress components) βασίζονται στο κριτήριο Ye (1988). Όμως, πειραματικά δεδομένα αντοχής του υλικού για την έναρξη διάδοσης της αποκόλλησης των στρώσεων υπό φόρτιση μεικτού τύπου δεν είναι προς το παρόν διαθέσιμα, και συνεπώς, αυτά τα κριτήρια αστοχίας δεν έχουν πλήρως επαληθευτεί.

Όμως, αντικαθιστώντας στην εξίσωση 4.16 μόνο τους όρους ελαστικής ενέργειας της καταστατικής εξίσωσης, η εξίσωση 4.25 επιτυγχάνεται η οποία τελικά καταλήγει στην εξίσωση 4.26 με στόχο να βρεθεί το κριτήριο για έναρξη της αστοχίας σε όρους σχετικών μετατοπίσεων (εξίσωση 4.27).

$$G_o(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}(\Delta_3^o)^2 + (\frac{1}{2}\mathrm{K}(\Delta_{shear}^o)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{K}(\Delta_3^o)^2)\beta^n \qquad (4.25)$$

$$\psi(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}(\Delta^o)^2 \qquad (4.26)$$

$$\Delta^o = ((\Delta_3^o)^2 + ((\Delta_{shear}^o)^2 - (\Delta_3^o)^2 \beta^n)^{1/2} \qquad (4.27)$$

### 4.1.6 Προσαρμογές σχηματισμού για συνεκτικά πεπερασμένα στοιχεία μηδενικού πάχους (non-zero-thickness cohesive elements)

Έχοντας σχηματίσει ένα συνεκτικό μοντέλο για στοιχεία μηδενικού πάχους, οι απαιτούμενες τροποποιήσεις οι οποίες θα δώσουν τη δυνατότητα χρήσης των στοιχείων μηδενικού πάχους (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία συνεχούς μέσου – continuum elements) περιγράφονται σε αυτή την ενότητα.

### 4.1.7 Σχέση μεταξύ σχετικών μετατοπίσεων και παραμορφώσεων

Εάν ένα στοιχείο συνεχούς μέσου (continuum element) χρησιμοποιείται, τα δεδομένα εισόδου δεν είναι οι σχετικές μετατοπίσεις, αλλά ο τανυστής παραμορφώσεων. Όμως, για να δημιουργηθεί ένα μοντέλο με χαλάρωση, η σχετική μετατόπιση $\Delta_i$ και το αντίστοιχο στοιχείο παραμόρφωσης $\varepsilon_{ij}$ μπορούν να συσχετιστούν με χρήση της έκφρασης:

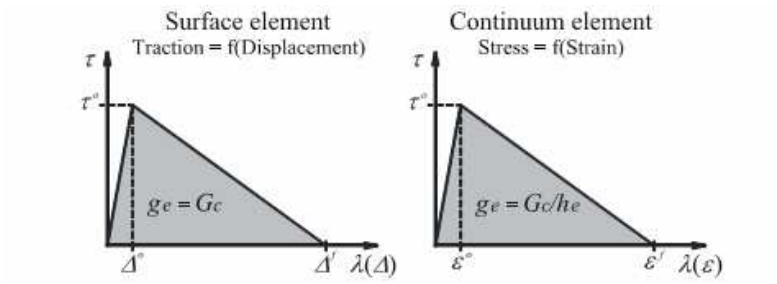
$$\Delta_i = h_e \varepsilon_{ij} n_j (2 - \delta_{3i}) \quad \text{i,j =1,2,3} \qquad (4.28)$$

όπου $h_e$ είναι το πάχος του στοιχείου, και n είναι το αντίστοιχο στοιχείο του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο επίπεδο ρωγμής, $n=\{0,0,1\}^T$ (σχήμα 31).

Όπως διευκρινίστηκε στη διατύπωση του μοντέλου, η περιοχή κάτω από την καταστατική εξίσωση $g_e$ που καθορίζεται από τις τάσεις και τις σχετικές μετατοπίσεις είναι απευθείας η ανθεκτικότητα σε θραύση του υλικού $G_c$. Όμως, εάν το καταστατικό μοντέλο καθορίζεται με όρους τάσεων και παραμορφώσεων, ο νόμος πρέπει να προσαρμοστεί με το πάχος του στοιχείου he. Τότε, η προκύπτουσα επιφάνεια ge είναι η ενέργεια που χάνεται σε μονάδα όγκου στο αντίστοιχο σημείο ολοκλήρωσης του πεπερασμένου στοιχείου. Αυτή η ενέργεια είναι ίση με την ανθεκτικότητα σε θραύση του υλικού διαιρεμένη με το πάχος του πεπερασμένου στοιχείου (εξίσωση 4.29). Αυτή η προσέγγιση ακολουθεί το μοντέλο Crack Band που προτείνεται από τους Bazant και Oh (1983), η οποία είναι η προσέγγιση που συνήθως χρησιμοποιείται για να διαβεβαιωθεί η σωστή απώλεια ενέργειας και η ανεξαρτησία του πλέγματος σε μοντέλα ζημιάς συνεχούς μέσου.

$$E = G_c A_{crack} = g_e (A_{crack} h_e) \Rightarrow g_e = \frac{G_c}{h_e} \quad (4.29)$$

Οι ποσότητες ενέργειας που χάνονται σε κάθε περίπτωση παρουσιάζονται στο σχήμα 33.




**Σχήμα 33** : Καταστατικά διαγράμματα που καθορίζονται από τις τάσεις και τις σχετικές μετατοπίσεις (αριστερά) ή από τις τάσεις και τις παραμορφώσεις (δεξιά)

### 4.1.8 Ποινή ακαμψίας

Εάν τα συνεκτικά στοιχεία είναι στοιχεία όγκου (cohesive volumetric elements), η τιμή της ποινής της ακαμψίας ποικίλει σε σχέση με το λόγο μεικτού τύπου. Αυτές οι διευκρινίσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν σε συνάρτηση με το πάχος του στοιχείου και τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού της μοντελοποιημένης διεπιφάνειας. Συγκεκριμένα, η εξίσωση 30 καθορίζει την ποινή ακαψμίας μόνο για mode I, και η εξίσωση 4.31 καθορίζει την ποινή ακαμψίας για modes II & III (διάτμηση):

$$K_1 = \frac{E_m}{h_e} \quad (3.30)$$

$$K_2 = \frac{G_m}{h_e} \quad (3.31)$$

όπου $E_m$ είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και $G_m$ είναι ο διατμητικός συντελεστής ελαστικότητας του υλικού της διεπιφάνειας. Συνήθως, οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού της διεπιφάνειας θεωρούνται εκείνες του βασικού υλικού, αν και αυτό γενικά δεν είναι σωστό.

Για επιφανειακά συνεκτικά πεπερασμένα στοιχεία, η ποινή ακαμψίας επιλέγεται με μια καθορισμένη τιμή για όλους τους λόγους μεικτού τρόπου διάδοσης της αποκόλλησης. Ιδανικά, η τιμή της ποινής για την ακαμψία είναι άπειρη διότι αυτά

τα πεπερασμένα στοιχεία δεν έχουν πάχος, και έτσι δεν επηρεάζουν την ευκαμψία της όλης κατασκευής. Όμως, πολύ υψηλή τιμή της ακαμψίας της διεπιφάνειας μπορεί να δημιουργήσει αριθμητικά προβλήματα όπως η δημιουργία ψευδών ταλαντώσεων κατά την έλξη των στοιχείων. Όμως, μια κατάλληλη τιμή της ποινής της ακαμψίας θα πρέπει να επιλεγεί με στόχο δοθεί λογική ακαμψία χωρίς τη δημιουργία αριθμητικών προβλημάτων. Βασιζόμενος σε μηχανικές θεωρήσεις, ο Turon (2007) πρότεινε την εξίσωση 4.32 με στόχο την εκτίμηση της δυσκαμψίας της διεπιφάνειας K για διάδοση της αποκόλλησης σε mode I.

$$K = \frac{aE_{33}}{t} \qquad (4.32)$$

όπου $E_{33}$ είναι το μέτρο ελαστικότητας κατά την έννοια του πάχους (through-the-thickness) του σύνθετου υλικού, α είναι μία αύξουσα παράμετρος (συνήθως λαμβάνεται περίπου $a \approx 50$ και t είναι το πάχος του σύνθετου υλικού που συνορεύει με το συνεκτικό στοιχεία. Η εξίσωση 32 μπορεί επίσης να αναπτυχθεί για τους τρόπους διατμητικής διάδοσης της αποκόλλησης, αντικαθιστώντας το $E_{33}$ με το διατμητικό συντελεστή ελαστικότητας. Όμως, επειδή ο τύπος του μοντέλου για τα επιφανειακά στοιχεία θεωρεί την ίδια τιμή ποινής δυσκαμψίας για κάθε λόγο μεικτού τύπου αποκόλλησης, η εξίσωση 4.32 χρησιμοποιείται για όλες τις περιπτώσεις διότι δίνει την μεγαλύτερη τιμή.

### 4.1.9 Επαναπροσδιορισμός των κριτηρίων έναρξης και διάδοσης της ζημιάς

Επειδή η τιμή της ποινής της δυσκαμψίας για πεπερασμένα στοιχεία όγκου είναι συνάρτηση του λόγου διάδοσης της αποκόλλησης μεικτού τύπου, τα κριτήρια έναρξης και διάδοσης της ζημιάς σε σχέση με τις σχετικές μετατοπίσεις μπορούν να επαναπροσδιοριστούν. Όμως, η διαδικασία που χρησιμοποιείται στις ενότητες 2.3 και 2.4 για να βρεθούν αυτές οι εκφράσεις δεν μπορούν με ακρίβεια να εφαρμοστούν στην περίπτωσή μας καθώς η συνάρτηση που περιγράφει την διαφοροποίηση της ποινής της δυσκαμψίας για έναν καθορισμένο λόγο μεικτού τρόπου είναι άγνωστη.

Για να βρούμε το κριτήριο έναρξης της ζημιάς, η εξίσωση 4.33 χρησιμοποιείται. Αυτή η εξίσωση είναι το κριτήριο ζημιάς με αντικατάσταση των αντίστοιχων όρων ελαστικής ενέργειας (π.χ. η εξίσωση 25 με διαφορετικές τιμές ποινής δυσκαμψίας μόνο σε mode I και μόνο σε διατμητικό mode. Από την αντίθετη

πλευρά, η εξίσωση 4.34 αναπαριστά την ελαστική ενέργεια της καταστατικής εξίσωσης που καθορίζεται με όρους σχετικών μετατοπίσεων σε καθαρό mode I, $\Delta_3^o(\beta)$ και καθαρό διατμητικό mode $\Delta_{shear}^o(\beta)$ για έναρξη ζημιάς σε καθορισμένο λόγο μεικτού τύπου διάδοση αποκόλλησης.

$$G_o(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}_1(\Delta_3^o)^2 + (\frac{1}{2}\mathrm{K}_2(\Delta_{shear}^o)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{K}_1(\Delta_3^o)^2)\beta^n \qquad (4.33)$$

$$\psi(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}_1(\Delta_3^o(\beta))^2 + \frac{1}{2}\mathrm{K}_2(\Delta_{shear}^o(\beta))^2 \qquad (4.34)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 4.33 και 4.34, και την επιλεγμένη διευκρίνιση του λόγου μεικτού τύπου διάδοση (εξίσωση 21), οι όροι $\Delta_3^o(\beta)$ και $\Delta_{shear}^o(\beta)$ μπορούν να βρεθούν:

$$<\Delta_3^o(\beta)> = \left(\frac{2G_o(\beta)}{\mathrm{K}_1 + (\frac{\beta}{1-\beta})\mathrm{K}_2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.35)$$

$$\Delta_{shear}^o(\beta) = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle \Delta_3^o(\beta) \right\rangle \qquad (4.36)$$

Τελικά, το κριτήριο έναρξης της ζημιάς επιτυγχάνεται παίρνοντας την ευκλείδεια νόρμα της σχετικής μετατόπισης που περιγράφεται στις εξισώσεις 4.35 και 4.36:

$$\Delta^o = (<\Delta_3^o(\beta)>^2 + (\Delta_{shear}^o(\beta))^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.37)$$

Με τον ίδιο τρόπο, το κριτήριο διάδοσης της ζημιάς μπορεί να εξαχθεί. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση 4.38 αναπαριστά το κριτήριο ζημιάς με αντικατάσταση των αντίστοιχων όρων της ανθεκτικότητας σε θραύση (π.χ. από την εξίσωση 4.22 με διαφορετική τιμή της ποινής δυσκαμψίας για καθαρό mode I και καθαρό mode σε διάτμηση). Στην αντίθετη περίπτωση, η εξίσωση 4.39 δίνει την ανθεκτικότητα σε θραύση για έναν δεδομένο λόγο μεικτού τρόπου διάδοσης αποκόλλησης σε σχέση με τη σχετική μετατόπιση για έναρξη της ζημιάς σε καθαρό

mode I και διάτμηση $\Delta_3^o(\beta)$ και $\Delta_{shear}^o(\beta)$ και για διάδοση ζημιάς, $\Delta_3^f(\beta)$ και $\Delta_{shear}^f(\beta)$.

$$G_c(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}_1\Delta_3^o\Delta_3^f + (\frac{1}{2}\mathrm{K}_2\Delta_{shear}^o\Delta_{shear}^f - \frac{1}{2}\mathrm{K}_1\Delta_3^o\Delta_3^f)\beta^n \qquad (4.38)$$

$$G_c(\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{K}_1 < \Delta_3^o(\beta) >< \Delta_3^f(\beta) + \frac{1}{2}\mathrm{K}_2(\Delta_{shear}^o(\beta))(\Delta_{shear}^f(\beta)) \qquad (4.39)$$

όπου $\Delta_3^f(\beta)$ και $\Delta_{shear}^f(\beta)$ μπορούν να βρεθούν:

$$< \Delta_3^f(\beta) >= \frac{\mathrm{K}_1(1-\mathrm{B}^n)\Delta_3^o\Delta_3^f + \mathrm{K}_2 B^n \Delta_{shear}^o\Delta_{shear}^f}{< \Delta_3^o(\beta) > (K_1 + (\frac{\beta}{1-\beta})K_2)} \qquad (4.40)$$

$$\Delta_{shear}^f(\beta) = (\frac{\beta}{1-\beta})^{\frac{1}{2}} < \Delta_3^f(\beta) > \qquad (4.41)$$

Τελικά, το κριτήριο διάδοσης της ζημιάς επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια νόρμα των σχετικών μετατοπίσεων που περιγράφονται στις εξισώσεις 4.40 και 4.41:

$$\Delta^f(\beta) = (< \Delta_3^f(\beta) >^2 + (\Delta_{shear}^f(\beta))^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.42)$$

Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι η παράμετρος B πρέπει να καθοριστεί από την εξίσωση 4.43, καθώς οι τιμή της δυσκαμψίας ποινής σε mode I και σε διατμητικά modes είναι διαφορετικές και δεν μπορούν να απλοποιηθούν.

$$B = \frac{K_2 B}{K_2 B + K_1(1-B)} \qquad (4.43)$$

Εάν οι εξισώσεις (4.30) και (4.31) αντικατασταθούν στην εξίσωση (4.43), η παράμετρος B μπορεί να καθοριστεί σε συνάρτηση με τις ελαστικές ιδιότητες που θα ληφθούν για το υλικό της διεπιφάνειας. Έτσι θα ισχύει ότι:

$$B = \frac{G_m B}{G_m B + E_m(1-B)} \qquad (4.44)$$

## 4.2 Αποκόλληση στρώσεων συνθέτου υλικού με χρήση συνεκτικών στοιχείων (cohesive zone model) (ABAQUS)

Η ζημιά (ή αποκόλληση) μεταξύ των στρώσεων του σύνθετου υλικού (delamination) μπορεί να μοντελοποιηθεί με χρήση συνεκτικών πεπερασμένων στοιχείων (cohesive zone elements). Το μοντέλο αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι μεταξύ των διαφορετικών στρώσεων σύνθετου υλικού υπάρχει ένα άλλο υλικό που υπακούει στο δικό του καταστατικό νόμο. Αυτή η διεπιφάνεια συνδέει τα διαφορετικά δομικά στοιχεία (στρώσεις) και κυρίως βασίζεται στο συνεκτικό μοντέλο ρωγμής που παρουσιάστηκε από τους Dugdale 1960, Barenblatt 1962 και Hillerborg 1976. Αυτή η θεωρία βασίζεται στην παρουσία ζώνης συνεκτικής ζημιάς κοντά στο μέτωπο της ρωγμής που συνδέει τις δυνάμεις έλξης με τις μεταπηδήσεις των μετατοπίσεων στη διεπιφάνεια όπου η ρωγμή λαμβάνει χώρα.

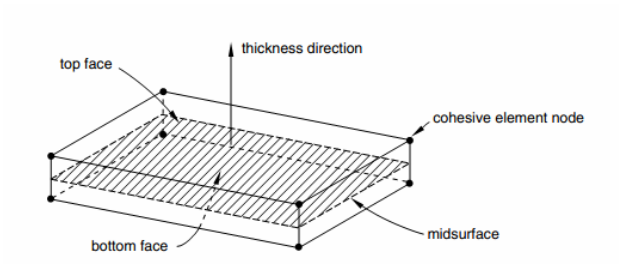
Η έναρξη της ρωγμής συνδέεται άμεσα με την αντοχή του υλικού της διεπιφάνειας και η εξέλιξη της ζημιάς σχετίζεται με τους κρίσιμους ρυθμούς απελευθέρωσης ενέργειας. Όταν η συνολική επιφάνεια κάτω από την καμπύλη έλξης – διαχωρισμού είναι ίση με την κρίσιμη τιμή της ανθεκτικότητας σε θραύση του υλικού της διεπιφάνειας, η παραμένουσα ελκτική δύναμη μηδενίζεται. Το κύριο πλεονέκτημα της θεωρίας αυτής σχετίζεται με τη δυνατότητα να έχουμε την έναρξη και διάδοση της ρωγμής στο ίδιο μοντέλο, και έτσι να μειώνουμε την πολυπλοκότητα του αριθμητικού μοντέλου.

Το κρίσιμο πρόβλημα της μοντελοποίησης με συνεκτική ζώνη (cohesive zone model) σχετίζεται με τη διαδρομή της ρωγμής που πρέπει να είναι γνωστή από την αρχή. Μόνο σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούν διακριτά στοιχεία διεπιφάνειας (που υπακούουν στον καταστατικό νόμο) να εισαχθούν στο πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων. Για σύνθετα υλικά, ο προσδιορισμός της διαδρομής της ρωγμής δεν είναι πρόβλημα εξαιτίας της φύσης του υλικού που επιτρέπει την ύπαρξη της αποκόλλησης μόνο μεταξύ των διαφορετικά προσανατολισμένων στρώσεων. Η ρωγμή μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί εκ των προτέρων.

### 3.2.1 Χωρική αναπαράσταση του συνεκτικού στοιχείου

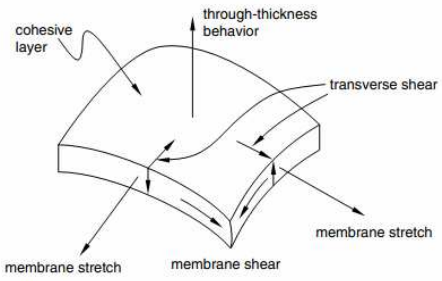
Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται για να καθοριστούν τα συνεκτικά πεπερασμένα στοιχεία. Είναι

χρήσιμο στην περίπτωση των συνεκτικών πεπερασμένων στοιχείων να θεωρήσουμε ότι αποτελούν σύνθεση δύο επιφανειών που διαχωρίζονται από κάποιο πάχος. Η σχετική κίνηση της πάνω και της κάτω επιφάνειας μετράται κατά τη διεύθυνση του πάχους, αναπαριστώντας με αυτό τον τρόπο το άνοιγμα ή το κλείσιμο της διεπιφάνειας. Η σχετική αλλαγή της θέσης της πάνω και της κάτω επιφάνειας μετράται σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση του πάχους και ποσοτικοποιεί την εγκάρσια διατμητική συμπεριφορά του συνεκτικού πεπερασμένου στοιχείου.




**Σχήμα 34 :** Χωρική αναπαράσταση του τρισδιάστατου συνεκτικού πεπερασμένου στοιχείου

Η έκταση και η διάτμηση της μέσης επιφάνειας του πεπερασμένου στοιχείου (η μέση επιφάνεια ανάμεσα στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια) σχετίζονται με μεμβρανικές παραμορφώσεις του συνεκτικού στοιχείου. Όμως, θεωρούμε ότι τα συνεκτικά πεπερασμένα στοιχεία δεν δημιουργούν τάσεις σε καθαρά μεμβρανική απόκριση. Το σχήμα 35 δείχνει τους διαφορετικούς τρόπους παραμόρφωσης του συνεκτικού στοιχείου.




**Σχήμα 35** : Τρόποι παραμόρφωσης του συνεκτικού πεπερασμένου στοιχείου

### 4.2.2 Καταστατική απόκριση / μοντέλο ζημιάς για συνεκτικά πεπερασμένα στοιχεία

Η συμπεριφορά των συνεκτικών πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση με το Abaqus / Explicit βασίζεται απευθείας στους όρους του

νόμου έλξης – διαχωρισμού (traction – separation law) θεωρώντας τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Νόμος γραμμικής ελαστικής έλξης – διαχωρισμού για το υλικό χωρίς ζημιά.
- Έναρξη της ζημιάς βασιζόμενη στο κριτήριο τάσης.
- Αποδόμηση του υλικού βασιζόμενη στη μηχανική θραύσεων.

### 4.3.3 Συμπεριφορά γραμμικής ελαστικής έλξης – διαχωρισμού

Το διαθέσιμο μοντέλο στο Abaqus θεωρεί αρχικά γραμμική ελαστική συμπεριφορά και ακολουθεί η έναρξη και η εξέλιξη της ζημιάς. Η ελαστική συμπεριφορά γράφεται σε όρους ελαστικού καταστατικού μητρώου που συσχετίζει τις ονομαστικές τάσεις με τις ονομαστικές παραμορφώσεις κατά μήκος της διεπιφάνειας. Οι ονομαστικές τάσεις είναι οι δυνάμεις διαιρεμένες με την αρχική επιφάνεια σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης, ενώ οι ονομαστικές παραμορφώσεις είναι οι διαχωρισμοί διαιρεμένοι με το αρχικό πάχος σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης. Η προκαθορισμένη τιμή του αρχικού καταστατικού πάχους είναι 1.0 εάν η απόκριση της έλξης-διαχωρισμού είναι καθορισμένη, που διαβεβαιώνει ότι η ονομαστική παραμόρφωση είναι ίση με την τιμή διαχωρισμού (π.χ. σχετικές μετατοπίσεις στην πάνω και κάτω επιφάνεια). Το καταστατικό πάχος που χρησιμοποιείται για την απόκριση έλξης-διαχωρισμού διαφέρει από το γεωμετρικό πάχος.

Το διάνυσμα ονομαστικής τάσης έλξης t αποτελείται από τρεις συνιστώσες $t_n$ $t_s$ $t_t$ στις τρεις διαστάσεις οι οποίες αποτελούν την κάθετη και τις δύο διατμητικές συνιστώσες, αντίστοιχα. Οι αντίστοιχοι διαχωρισμοί δίνονται από τις τιμές $\delta_n$ $\delta_s$ $\delta_t$. Θεωρώντας το αρχικό πάχος του συνεκτικού πεπερασμένου στοιχείου, οι ονομαστικές παραμορφώσεις καθορίζονται ως εξής:

$$\varepsilon_n = \frac{\delta_n}{\mathrm{T}_o}, \varepsilon_s = \frac{\delta_s}{\mathrm{T}_o}, \varepsilon_n = \frac{\delta_t}{\mathrm{T}_o} \quad (4.45)$$

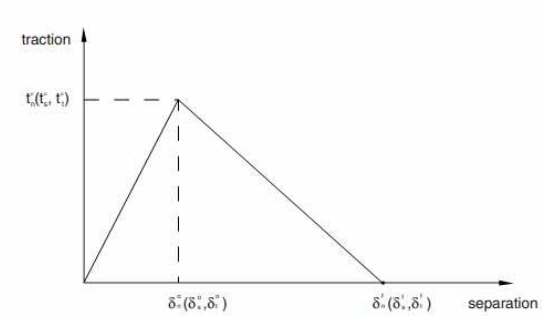
Η ελαστική συμπεριφορά μπορεί να καθοριστεί ως εξής:

$$t = \begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{ns} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{nt} & K_{st} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{Bmatrix} = K\varepsilon \quad (4.46)$$

### 4.2.4 Έναρξη ζημιάς (damage initiation)

Δύο διαφορετικά κριτήρια έναρξης ζημιάς, είναι διαθέσιμα στο Abaqus για συνεκτικά στοιχεία που καθορίζονται από το νόμο έλξης – διαχωρισμού:

- το κριτήριο μέγιστης ονομαστικής τάσης (MAXS) και
- το κριτήριο ονομαστικής τάσης δευτέρου βαθμού (QUADS).




**Σχήμα 36** : Τρόποι παραμόρφωσης του συνεκτικού πεπερασμένου στοιχείου

Όταν το κριτήριο έναρξης της ζημιάς ικανοποιείται, η απόκριση του υλικού αλλάζει σύμφωνα με το νόμο εξέλιξης της ζημιάς. Το κριτήριο έναρξης της ζημιάς είναι συνδυασμός των τάσεων που ικανοποιεί μία κρίσιμη τιμή η οποία είναι μία συνάρτηση υλικού. Όπως κάθε κριτήριο αστοχίας, τιμή μεγαλύτερη ή ίση από τη μονάδα δείχνει ότι το κριτήριο έναρξης της ζημιάς ικανοποιείται. Και για τα δύο κριτήρια, οι τιμές $t_n$ $t_s$ $t_t$ αντιπροσωπεύουν τις μέγιστες επιτρεπτές τιμές των ονομαστικών τάσεων όταν η παραμόρφωση είναι κάθετη στη διεπιφάνεια ή ανήκει στην πρώτη ή τη δεύτερη διατμητική διεύθυνση. Τα δύο κριτήρια είναι τα εξής:

i) Κριτήριο μέγιστης ονομαστικής τάσης (MAXS)

$$\max\{\frac{\langle t_n \rangle}{t_n^o}, \frac{\langle t_s \rangle}{t_s^o}, \frac{\langle t_t \rangle}{t_t^o}\} \quad (4.47)$$

ii) Κριτήριο ονομαστικής τάσης τετραγωνικής μορφής (QUADS)

$$\{\frac{\langle t_n \rangle}{t_n^o}\}^2 + \{\frac{\langle t_s \rangle}{t_s^o}\}^2 + \{\frac{\langle t_t \rangle}{t_t^o}\}^2 = 1 \quad (4.48)$$

Και τα δύο κριτήρια βασίζονται στις τάσεις, αλλά το κριτήριο μέγιστης ονομαστικής τάσης δεν θεωρεί καμία συσχέτιση μεταξύ των τάσεων σε διαφορετικές

διευθύνσεις. Στο κριτήριο ονομαστικής τάσης δευτέρου βαθμού, μία σχέση τετραγωνικής μορφής συνδέει τις τάσεις σε όλες τις διαφορετικές διευθύνσεις.

### 4.2.5 Νόμος εξέλιξης της ζημιάς για συνεκτικά πεπερασμένα στοιχεία

Ο νόμος εξέλιξης της ζημιάς περιγράφει το ρυθμό με τον οποίο η δυσκαμψία του υλικού υποβαθμίζεται από τη στιγμή που το αντίστοιχο κριτήριο έναρξης της ζημιάς ικανοποιείται. Μία μονόμετρη παράμετρος ζημιάς D, αναπαριστά τη συνολική ζημιά στο υλικό και αποτυπώνει τις συνδυασμένες επιδράσεις όλων των ενεργών μηχανισμών. Αρχικά η παράμετρος αυτή έχει την τιμή 0. Εάν μοντελοποιείται η εξέλιξη της ζημιάς, το D εξελίσσεται μονοτονικά με την περαιτέρω φόρτιση μετά την έναρξη της ζημιάς. Τα στοιχεία τάσης του μοντέλου έλξης – διαχωρισμού επηρεάζονται από τη ζημιά σύμφωνα με τη σχέση:

$$t_n = \begin{cases} (1-D)\bar{t}_n, \bar{t}_n \geq 0 \\ \bar{t}_n \end{cases} \quad , \bar{t}_n \geq 0 \quad (4.49)$$

ή διαφορετικά (καμία ζημιά στη δυσκαμψία συμπίεσης)

$$t_s = (1-D)\bar{t}_s \qquad (4.50)$$

$$t_t = (1-D)\bar{t}_t \qquad (4.51)$$

όπου $\bar{t}_n$, $\bar{t}_s$ και $\bar{t}_t$ είναι τα στοιχεία τάσης που προβλέπονται για την ελαστική συμπεριφορά έλξης – διαχωρισμού για τις τρέχουσες παραμορφώσεις χωρίς ζημιά. Για να περιγράψουμε την εξέλιξη της ζημιάς σε ένα συνδυασμό σε ορθή και διατμητική παραμόρφωση κατά μήκος της διεπιφάνειας, είναι χρήσιμο να εισάγουμε την ενεργό μετατόπιση (Camanho και Davila, 2002) που καθορίζεται ως

$$\delta_m = \sqrt{<\delta_n>^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2} \quad (4.52)$$

### 4.2.6 Καθορισμός μεικτού τύπου (mixed mode)

Ο μεικτός τύπος των πεδίων παραμόρφωσης στη ζώνη συνεκτικότητας υπολογίζει τους σχετικούς λόγους της ορθής και διατμητικής παραμόρφωσης. Υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού του μεικτού τύπου (Abaqus): ο ένας βασίζεται στις ενέργειες και ο άλλος βασίζεται στις έλξεις. Ένας από τους δύο καθορίζεται κατά

την περιγραφή της διαδικασίας εξέλιξης της ζημιάς. Θεωρώντας $G_n$, $G_s$ και $G_t$ το έργο που παράγεται από τις έλξεις και τις συζυγής σχετικές τους μετατοπίσεις στην κάθετη, στην πρώτη και δεύτερη διατμητική διεύθυνση, αντίστοιχα, και καθορίζοντας ως $G_T = G_n+G_s+G_t$ , οι διευκρινίσεις μεικτού τύπου βασιζόμενες στις ενέργειες είναι ως εξής:

$$m_1=\frac{G_n}{G_T}\,,\ m_2=\frac{G_s}{G_T}\,,\ m_3=\frac{G_t}{G_T} \quad (4.53)$$

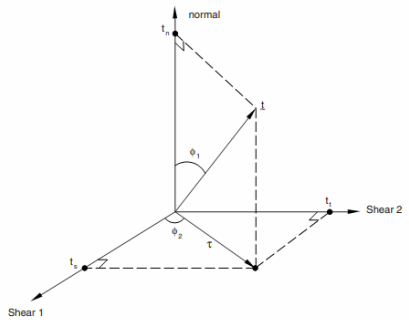
Είναι φανερό ότι μόνο δύο από τις τρεις παραπάνω ποσότητες είναι ανεξάρτητες. Είναι επίσης χρήσιμο να καθορίσουμε την ποσότητα $G_s = G_s + G_t$ για να καθορίσουμε το λόγο του συνολικού έργου που παράγεται από τη διατμητική έλξη και τα αντίστοιχα στοιχεία σχετικής μετατόπισης. Απαιτείται ο καθορισμός των ιδιοτήτων του υλικού που σχετίζεται με την εξέλιξη της ζημιάς ως συνάρτηση των $m_2 + m_3$ (=Gs/$G_T$) (ή ισοδύναμα 1-$m_1$) και $m_3$ / $m_2 + m_3$ (=$G_t/G_s$).

Οι αντίστοιχοι καθορισμοί του μεικτού τύπου που βασίζονται στα στοιχεία έλξης δίνονται από:

$$\phi_1=(\frac{2}{\pi})\tan^{-1}(\frac{\tau}{<t_n>}) \quad (4.54)$$

$$\phi_2=(\frac{2}{\pi})\tan^{-1}(\frac{t_t}{t_s}) \qquad (4.55)$$

όπου $\tau=\sqrt{t_s^2+t_t^2}$ είναι το μέτρο της ενεργού διατμητικής έλξης. Τα μέτρα των γωνιών που χρησιμοποιούνται στην παραπάνω διευκρίνιση (πριν την κανονικοποίηση με το συντελεστή 2/π) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:




**Σχήμα 37:** Μετρήσεις μεικτού τύπου βασισμένες στην έλξη

Οι λόγοι μεικτού τύπου που καθορίζονται με βάση τις ενέργειες και τις έλξεις μπορεί να είναι γενικά αρκετά διαφορετικοί. Το ακόλουθο παράδειγμα απεικονίζει αυτό το σημείο. Με βάση τις ενέργειες, μία παραμόρφωση στην κάθετη διεύθυνση είναι εκείνη για την οποία ισχύουν $G_n \neq 0$ και $G_s = G_t = 0$, ανεξάρτητα από τις τιμές της κάθετης και των διατμητικών έλξεων. Συγκεκριμένα, για ένα υλικό με συμπεριφορά σε έλξη – διαχωρισμό, η κάθετη και οι διατμητικές έλξεις μπορούν να είναι μη μηδενικές για παραμόρφωση στην καθαρά κάθετη διεύθυνση. Για αυτή την περίπτωση ο καθορισμός του μεικτού τύπου που βασίζεται στις ενέργειες θα έδειχνε μία καθαρά κάθετη παραμόρφωση, ενώ ο καθορισμός που βασίζεται στις έλξεις θα έδινε ένα μείγμα κάθετης και διατμητικής παραμόρφωσης.

Υπάρχουν δύο στοιχεία για τον καθορισμό της εξέλιξης της ζημιάς. Το πρώτο στοιχείο περιλαμβάνει είτε τον καθορισμό της ενεργού μετατόπισης σε πλήρη αστοχία, $\delta_m^f$, σε σχέση με την ενεργό μετατόπιση στην έναρξη της ζημιάς, $\delta_m^o$, ή την ενέργεια που διαχέεται εξαιτίας της αστοχίας, $G^c$. Το δεύτερο στοιχείο στον καθορισμό της εξέλιξης της ζημιάς είναι ο καθορισμός της φύσης της εξέλιξης της μεταβλητής ζημιάς D, μεταξύ της έναρξης της ζημιάς και της τελικής αστοχίας. Αυτό μπορεί να γίνει είτε καθορίζοντας γραμμικούς ή εκθετικούς νόμους χαλάρωσης ή καθορίζοντας το D απευθείας ως μία συνάρτηση σε μορφή πίνακα της ενεργού μετατόπισης σε σχέση με την ενεργό μετατόπιση κατά την έναρξη της ζημιάς. Τα δεδομένα υλικού που περιγράφονται παραπάνω είναι γενικά συναρτήσεις των μεταβλητών μεικτού τύπου, της θερμοκρασίας και / ή του πεδίου.

### 4.2.7 Εξέλιξη ζημιάς με βάση την ενεργό μετατόπιση

Καθορίζεται η ποσότητα $\delta_m^f - \delta_m^o$ (π.χ., η ενεργός μετατόπιση σε πλήρη αστοχία, $\delta_m^f$, σε σχέση με την ενεργό μετατόπιση κατά την έναρξη της ζημιάς,) σε μορφή πίνακα σε συνάρτηση με τις μεταβλητές μεικτού τύπου, της θερμοκρασίας, και / ή του πεδίου. Επιπλέον, μπορεί να γίνει επιλογή είτε γραμμικού ή εκθετικού νόμου χαλάρωσης που καθορίζει τη λεπτομερή εξέλιξη (μεταξύ έναρξης και πλήρους αστοχίας) της **μεταβλητής ζημιάς D**, ως μία συνάρτηση της ενεργού μετατόπισης πέρα από την έναρξη της ζημιάς. Εναλλακτικά, αντί να γίνει χρήση της γραμμικής ή εκθετικής χαλάρωσης, μπορεί να καθοριστεί η μεταβλητή ζημιάς, D, απευθείας ως

ένας πίνακας σε συνάρτηση της ενεργού μετατόπισης μετά την έναρξη της ζημιάς, $\delta_m^f - \delta_m^o$, του μεικτού τύπου, της θερμοκρασίας και / ή των μεταβλητών πεδίου.

Γραμμική εξέλιξη ζημιάς

Για γραμμική χαλάρωση (βλ. σχήμα) χρησιμοποιείται εξέλιξη της μεταβλητής ζημιάς D που μειώνεται (στην περίπτωση της εξέλιξης ζημιάς υπό σταθερό μεικτό τύπο, θερμοκρασία, και μεταβλητές πεδίου) στην έκφραση που προτείνεται από τους Camanho και Davila, με όνομα:

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_m^{\max} - \delta_m^o)}{\delta_m^{\max} (\delta_m^f - \delta_m^o)} \qquad (4.56)$$

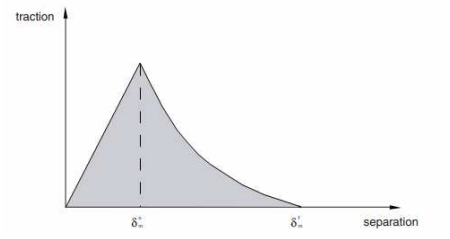
όπου $\delta_m^{\max}$ αναφέρεται στη μέγιστη τιμή της ενεργού μετατόπισης που επιτυγχάνεται κατά τη διάρκεια της ιστορίας φόρτισης. Η υπόθεση σταθερού μεικτού τύπου σε ένα υλικό σημείο μεταξύ της έναρξης της ζημιάς και της τελικής αστοχίας είναι συνήθης για προβλήματα που περιλαμβάνουν μονοτονική ζημιά (ή μονοτονική θραύση).

Εκθετική εξέλιξη ζημιάς

Για εκθετική χαλάρωση χρησιμοποιείται εξέλιξη της μεταβλητής ζημιάς D που μειώνεται (στην περίπτωση εξέλιξης ζημιάς υπό σταθερά μεικτό τρόπο, θερμοκρασία και μεταβλητές πεδίου) σε:

$$D = 1 - \{\frac{\delta_m^o}{\delta_m^{\max}}\}\{1 - \frac{1 - \exp(-a(\frac{\delta_m^{\max} - \delta_m^o}{\delta_m^f - \delta_m^o}))}{1 - \exp(-a)}\} \qquad (4.57)$$

Στην έκφραση παραπάνω το α είναι μία αδιάστατη παράμετρος υλικού που καθορίζει το ρυθμό εξέλιξης της ζημιάς και exp(x) είναι εκθετική συνάρτηση.




**Σχήμα 38**: Εκθετική εξέλιξη ζημιάς

### 4.2.8 Εξέλιξη ζημιάς με βάση την ενέργεια

Η εξέλιξη της ζημιάς μπορεί να βασίζεται στην ενέργεια που διαχέεται ως αποτέλεσμα της διαδικασίας ζημιάς, που ονομάζεται επίσης ενέργεια θραύσης. Η ενέργεια θραύσης ισούται με την επιφάνεια κάτω από την καμπύλη έλξης – διαχωρισμού και καθορίζεται ως μία ιδιότητα υλικού, ενώ επιλέγεται είτε γραμμική είτε εκθετική συμπεριφορά χαλάρωσης. Η επιφάνεια κάτω από τη γραμμική ή εκθετική απόκριση ζημιάς είναι ίση με την ενέργεια θραύσης.

Η εξάρτηση της ενέργειας θραύσης με τον μεικτό τρόπο μπορεί να καθοριστεί είτε απευθείας σε μορφή πίνακα είτε χρησιμοποιώντας αναλυτικούς τρόπους όπως ήδη περιγράφηκε. Όταν χρησιμοποιούνται αναλυτικοί τρόποι, ο λόγος μεικτού τύπου θεωρείται ότι καθορίζεται με όρους ενέργειας.

Μορφή εκθετικού νόμου

Η εξάρτηση της ενέργειας θραύσης στο νόμο διάδοσης μπορεί να καθοριστεί βασιζόμενη σε ένα κριτήριο αστοχίας εκθετικού τύπου. Το εκθετικό κριτήριο αστοχίας θεωρεί ότι η αστοχία υπό συνθήκες μεικτού τύπου καθορίζονται από αλληλεπίδραση των ενεργειών εκθετικού νόμου που απαιτούνται για να προκληθεί αστοχία στους ξεχωριστούς τρόπους διάδοσης (ορθός και διατμητικοί). Δίνεται από τη σχέση:

$$\{\frac{G_n}{G_n^c}\}^a + \{\frac{G_s}{G_s^c}\}^a + \{\frac{G_t}{G_t^c}\}^a = 1 \quad (4.58)$$

με την ενέργεια θραύσης μεικτού τύπου $G^c = G_n + G_s + G_t$ όταν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται. Στην παραπάνω έκφραση οι ποσότητες $G_n, G_s, G_t$ αναφέρονται στο έργο που παράγεται από την έλξη και τη συζυγή σχετική μετατόπιση στην κάθετη και στην πρώτη και δεύτερη διατμητική διεύθυνση, αντίστοιχα. Πρέπει να καθοριστούν οι ποσότητες $G_n^c, G_s^c, G_t^c$ οι οποίες αναφέρονται στις κρίσιμες ενέργειες θραύσης που απαιτούνται για να προκαλέσουν αστοχία στην κάθετη, την πρώτη και δεύτερη διατμητική διεύθυνση, αντίστοιχα.

Τύπος Benzeggagh – Kenane (BK)

Το κριτήριο θραύσης Benzeggagh – Kenane είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν οι κρίσιμες ενέργειες θραύσης κατά την παραμόρφωση καθαρά στην πρώτη και δεύτερη διατμητική διεύθυνση είναι ίσες, π.χ. $G_s^c = G_t^c$. Δίνεται από τη σχέση:

$$G_n^C + (G_s^C - G_n^C)\{\frac{G_S}{G_T}\} = G^c \quad (4.59)$$

όπου $G_S = G_s + G_t$ , $G_T = G_n + G_S$ και n είναι η παράμετρος υλικού.

Γραμμική εξέλιξη ζημιάς

Για γραμμική χαλάρωση χρησιμοποιείται εξέλιξη της μεταβλητής ζημιάς D ότι μειώνεται σε :

$$D = \frac{\delta_m^f(\delta_m^{\max} - \delta_m^o)}{\delta_m^{\max}(\delta_m^f - \delta_m^o)} \quad (4.60)$$

όπου $\delta_m^f = 2G^C / T_{eff}^o$ με $T_{eff}^o$ είναι η ενεργός έλξη κατά την έναρξη της ζημιάς. Ο όρος $\delta_m^{\max}$ αναφέρεται στη μέγιστη τιμή της ενεργού μετατόπισης που επιτυγχάνεται κατά τη διάρκεια της ιστορίας φόρτισης.

Εκθετική εξέλιξη ζημιάς

Για εκθετική χαλάρωση χρησιμοποιείται μία εξέλιξη της μεταβλητής ζημιάς D που μειώνεται σε:

$$D = \int_{\delta_m^o}^{\delta_m^f} \frac{T_{eff}\, d\delta}{G^c - G_o} \quad (4.61)$$

Στην παραπάνω έκφραση $T_{eff}$ και δ είναι η ενεργός έλξη και μετατόπιση, αντίστοιχα, ενώ $G_o$ είναι η ελαστική ενέργεια κατά την έναρξη της ζημιάς. Σε αυτή την περίπτωση η έλξη μπορεί να μην πέσει αμέσως μετά την έναρξη της ζημιάς.

# 5. ΖΗΜΙΑ ΕΝΤΟΣ ΤΩΝ ΣΤΡΩΣΕΩΝ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ (Intralaminar Damage)

## 5.1 Εισαγωγή

Τα κριτήρια αστοχίας που βασίζονται στην αντοχή του σύνθετου υλικού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προβλέψουν την έναρξη των μηχανισμών ζημιάς (damage onset), οι οποίοι συνεισφέρουν στην τελική αστοχία μιας κατασκευής. Όμως, αυτά τα κριτήρια είναι ανακριβή για να προβλέψουν την τελική δομική αστοχία των κατασκευών από σύνθετα υλικά, η οποία θα οδηγήσει στην τελική κατάρρευση. Η μηχανική ζημιάς συνεχούς μέσου (continuum damage mechanics) είναι μια πιο ακριβής μεθοδολογία για να προβλέψει την ψευδο-ψαθυρή αστοχία των σύνθετων υλικών, από την στιγμή της έναρξης της ζημιάς μέχρι την τελική κατάρρευση της κατασκευής.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά το μοντέλο ζημιάς εντός των στρώσεων του σύνθετου υλικού (intralaminar damage) που αναπτύχθηκε από τον Miami [63-66]. Το μοντέλο αυτό υπολογίζει τη θραύση της μήτρας (matrix cracking) και τους μηχανισμούς ζημιάς σε σπάσιμο της ίνας (fiber breakage) για 3D στρώσεις. Το μοντέλο αυτό, μαζί με το μοντέλο αποκόλλησης στρώσεων (delamination damage model) μπορούν να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση της κρούσης (impact) και της θλίψης μετά την κρούση (compression after impact), ενώ χρησιμοποιεί λεπτομερής θερμοδυναμικές θεωρήσεις όπου είναι δεδομένη η μη – αντιστρεπτότητα των διαδικασιών ζημιάς. Τα κύρια χαρακτηριστικά του μοντέλου παρουσιάζονται παρακάτω:

- Ο μεγαλύτερος αριθμός των σταθερών του υλικού για τον καθορισμό του μοντέλου ζημιάς μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τυποποιημένες εργαστηριακές δοκιμές των σύνθετων υλικών.

- Οι συναρτήσεις ενεργοποίησης ζημιάς (damage activation functions), οι οποίες προβλέπουν τους διαφορετικούς μηχανισμούς αστοχίας σε επίπεδο στρώσης, βασίζονται κυρίως στα κριτήρια αστοχίας LaRC04. Αυτά τα κριτήρια λαμβάνουν υπόψη την επίδραση της φυσικής θέσης (in-situ) του πάχους μιας στρώσης στις εγκάρσιες εφελκυστικές και διατμητικές αντοχές.

- Το μοντέλο λαμβάνει υπόψη τις επιδράσεις κλεισίματος της ρωγμής (crack-closure) υπό συνθήκες αντιστροφής της φόρτισης. Η επίδραση αυτών των φαινομένων είναι σημαντική σε κατασκευές που υφίστανται φόρτιση πολλών αξόνων, όπως οι δοκιμές κρούσης και η θλίψη μετά την κρούση.

## 5.2 Μοντέλο ζημιάς συνεχούς μέσου (continuum damage mechanics model) – καταστατική εξίσωση

Η καταστατική εξίσωση επιτυγχάνεται με τον καθορισμό ενός θερμοδυναμικού δυναμικού. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιείται η πυκνότητα συμπληρωματικής ελεύθερης ενέργειας, η οποία καθορίζεται ως εξής:

$$G = \frac{\sigma_{11}^2}{2(1-d_1)E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{2(1-d_2)E_2} + \frac{\sigma_{33}^2}{2(1-d_3)E_3} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}\sigma_{33} +$$
$$-\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{23}^2}{2(1-d_4)G_{23}} + \frac{\sigma_{13}^2}{2(1-d_5)G_{12}} + (a_{11}\sigma_{11} + \alpha_{22}(\sigma_{22}+\sigma_{33}))\Delta\mathrm{T} + \qquad (5.1)$$
$$+(\beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{22}(\sigma_{22}+\sigma_{33}))\Delta\mathrm{M}$$

όπου $E_1$, $E_2$, $\nu_{12}$ και $G_{12}$ είναι οι επίπεδες ελαστικές σταθερές μιας στρώσης με μονή διεύθυνση ινών. Η μεταβλητή ζημιάς $d_1$ σχετίζεται με τη διαμήκη αστοχία της ίνας, ενώ οι μεταβλητές $d_2$ και $d_3$ αφορούν την εγκάρσια αστοχία (θραύση μήτρας) που προκαλείται από φορτίσεις εντός και εκτός του επιπέδου, αντίστοιχα. Οι μεταβλητές ζημιάς $d_4$, $d_5$ και $d_6$ επηρεάζονται από τις διαμήκης και εγκάρσιες ρωγμές, $\alpha_{11}$ και $\alpha_{22}$ είναι οι συντελεστές θερμικής διαστολής στη διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση, αντίστοιχα και $\beta_{11}$ και $\beta_{22}$ είναι οι συντελεστές γυροσκοπικής διαστολής στη διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση, αντίστοιχα. Τέλος, ΔΤ και ΔΜ είναι οι διαφορές θερμοκρασίας και υγρασίας σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές αναφοράς.

Θεωρώντας τη δυνατότητα αντιστροφής θερμοδυναμικά της διαδικασίας ζημιάς, μπορεί να βρεθεί η καταστατική σχέση των παραμορφώσεων, $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{23}\}^T$ και των τάσεων $\sigma = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{12}\ \sigma_{13}\ \sigma_{23}\}^T$:

$$\varepsilon = \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \mathrm{H} : \sigma + \alpha\Delta\mathrm{T} + \beta\Delta\mathrm{M} \qquad (5.2)$$

όπου ο τανυστής ευκαμψίας της στρώσης $H = \dfrac{\partial^2 G}{\partial\sigma \otimes \partial\sigma}$ καθορίζεται ως:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_1)E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1-d_2)E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{(1-d_3)E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_4)G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_5)G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{13}} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

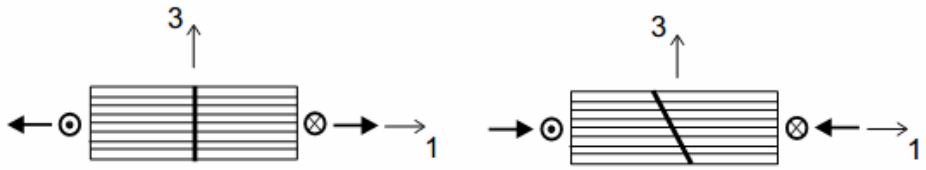
## 5.3 Συναρτήσεις ενεργοποίησης ζημιάς

Το ελαστικό πεδίο περικλείεται από τέσσερις επιφάνειες, η κάθε μία από τις οποίες θεωρεί ένα μηχανισμό αστοχίας: διαμήκης και εγκάρσια θραύση σε εφελκυσμό και θλίψη. Αυτές οι επιφάνειες σχηματίζονται από τις συναρτήσεις ενεργοποίησης ζημιάς βασιζόμενες στα κριτήρια αστοχίας LaRC04, αμελώντας τις τάσεις εκτός του επιπέδου. Αυτές οι συναρτήσεις ενεργοποίησης $F_N$, σχετίζονται με ζημιά στη διαμήκη (N=1+,1-) και την εγκάρσια (N=2+,2-) διεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα 39 και ορίζονται ως εξής:

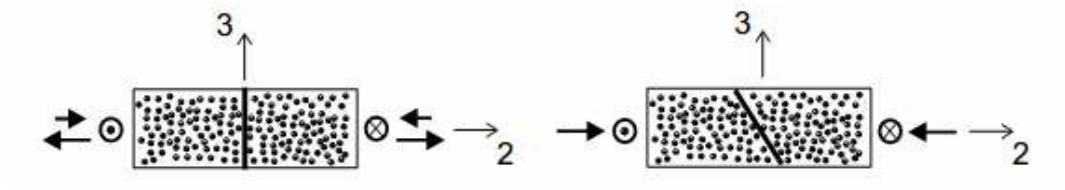
$$F_{1+} = \phi_{1+} - r_{1+} \le 0 \ , \quad F_{1-} = \phi_{1-} - r_{1-} \le 0 \qquad (5.4\alpha)$$

$$F_{2+} = \phi_{2+} - r_{2+} \le 0 \ , \quad F_{2-} = \phi_{2-} - r_{2-} \le 0 \qquad (5.4\beta)$$

όπου οι συναρτήσεις φόρτισης $\varphi_N$ (N=1+,1-,2+,2-) εξαρτώνται από τον τανυστή παραμορφώσεων και τις ελαστικές σταθερές (ελαστικές ιδιότητες και ιδιότητες αντοχής). Τα ελαστικά όρια $r_N$ (N=1+,1-,2+,2-) παίρνουν αρχική τιμή 1 όταν το υλικό είναι άθικτο και αυξάνονται με τη ζημιά. Τα ελαστικά όρια είναι εσωτερικές μεταβλητές του καταστατικού μοντέλου, και σχετίζονται με τις μεταβλητές ζημιάς $d_M$ (M=1+,1-,2+,2-,6) από τους νόμους εξέλιξης της ζημιάς.




α) Θραύση σε διαμήκη εφελκυσμό β) Θραύση σε διαμήκη θλίψη




γ) Εγκάρσια θραύση ($\alpha_o$ =0$^o$) δ) Εγκάρσια θραύση ($\alpha_o$ =53$^o$)

**Σχήμα 39**: Επιφάνειες θραύσης και αντίστοιχες εσωτερικές μεταβλητές για τέσσερις διαφορετικούς τρόπους

Τα ελαστικά όρια $r_N$ καθορίζουν το επίπεδο των ελαστικών παραμορφώσεων που μπορεί να επιτευχθεί πριν την συσσώρευση επιπλέον ζημιάς. Τα όρια του ελαστικού πεδίου επιτυγχάνονται εφαρμόζοντας τις συνθήκες Kuhn-Tucker και τις συνθήκες συνοχής. Θεωρώντας την επίδραση των ρωγμών κατά την ύπαρξη αντιστροφής φορτίου, τα όρια ελαστικού πεδίου είναι:

$$r_{N+} = \max\{1, \max_{s=0,t}\{\phi^s_{N+}\}, \max_{s=0,t}\{\phi^s_{N-}\}\} \quad N=1,2 \qquad (5.5\alpha)$$

$$r_{N-} = \max\{1, \max_{s=0,t}\{\phi^s_{N-}\}\} \quad N=1,2 \qquad (5.5\beta)$$

### 5.3.1 Θραύση σε διαμήκη εφελκυσμό

<u>Το κριτήριο LaRC04</u> για αστοχία ίνας σε εφελκυσμό είναι ένα <u>κριτήριο μέγιστης επιτρεπόμενης παραμόρφωσης</u> που καθορίζεται ως εξής:

$$\phi_{1+} = \frac{E_1}{X_T}\varepsilon_{11} = \frac{\tilde{\sigma}_{11} - \nu_{12}\tilde{\sigma}_{22}}{X_T} \quad (5.6)$$

όπου $X_T$ είναι η εφελκυστική αντοχή της ίνας. Ο ενεργός τανυστής τάσης $\tilde{\sigma}_{11}$ υπολογίζεται ως $\tilde{\sigma} = H_0^{-1} : \varepsilon$ όπου $H_o$ είναι ο τανυστής ευκαμψίας στην περίπτωση που δεν υπάρχει ζημιά με χρήση της εξίσωσης 5.3 όπου $d_N$ = 0 (N=1,2,…..,6).

### 5.3.2 Θραύση σε διαμήκη θλίψη

Η συνάρτηση ενεργοποίησης ζημιάς χρησιμοποιείται για πρόβλεψη ζημιάς σε διαμήκη θλίψη ($\tilde{\sigma}_{11}$<0) και επίπεδη διάτμηση (κόμπος ίνας) καθορίζεται ως συνάρτηση των στοιχείων του τανυστή τάσεων $\tilde{\sigma}^m$ σε σύστημα συντεταγμένων (m) που αναπαριστά την έλλειψη ευθυγράμμισης της ίνας:

$$\phi_{1-} = \frac{\left\langle \left| \tilde{\sigma}_{12}^{m} \right| \right\rangle + n^{L} \tilde{\sigma}_{22}^{m}}{S_{L|}} \qquad (5.7)$$

όπου ο <u>διαμήκης συντελεστής τριβής $n^L$</u> μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ως εξής:

$$n_L \approx -\frac{S_L \cos(2a_o)}{Y_c \cos^2 a_o} \qquad (5.8)$$

με $\alpha_o$ = 53$^o$. Τα <u>στοιχεία του ενεργού τανυστή των τάσεων</u> στο σύστημα συντεταγμένων που σχετίζεται με την περιστροφή των ινών υπολογίζονται ως εξής:

$$\tilde{\sigma}_{22}^{m} = \tilde{\sigma}_{11} \sin^2 \phi^c + \tilde{\sigma}_{22} \cos^2 \phi^c - 2\left|\tilde{\sigma}_{12}\right| \sin\phi^c \cos\phi^c \qquad (5.9)$$

$$\tilde{\sigma}_{12}^{m} = (\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{11}) \sin\phi^c \cos\phi^c + \left|\tilde{\sigma}_{12}\right| (\cos^2 \phi^c - \sin^2 \phi^c) \qquad (5.10)$$

Η <u>γωνία $\varphi^c$ λόγω της μη ευθυγράμμισης</u> προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τυποποιημένες τιμές αντοχών σε διάτμηση και διαμήκη θλίψη, $S_L$ και $X_c$, αντίστοιχα:

$$\phi^c = \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\left(\frac{S_L}{X_C} + n^L\right)\frac{S_L}{X_C}}}{2\left(\frac{S_L}{X_C} + n^L\right)}\right) \qquad (5.11)$$

### 5.3.3 Εγκάρσια θραύση κάθετα στο μέσο επίπεδο της στρώσης

Εγκάρσιες ρωγμές της μήτρας κάθετα στο μέσο επίπεδο της στρώσης, π.χ με $\alpha_o$ =0$^o$, δημιουργούνται με συνδυασμό των επίπεδων διατμητικών και των εγκάρσιων εφελκυστικών τάσεων, ή επίπεδων διατμητικών και μικρών εγκάρσιων θλιπτικών τάσεων. Αυτές οι συνθήκες παρουσιάζονται με τα ακόλουθα κριτήρια αστοχίας:

$$\phi_{2+} = \begin{cases} \sqrt{(1-g)\frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y^T} + g\left(\frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{12}}{S_L}\right)^2} & \text{εάν } \tilde{\sigma}_{22} \geq 0 \text{ ή εάν } \tilde{\sigma}_{22} < 0 \\ \frac{1}{S_L}\left\langle \left|\tilde{\sigma}_{12}\right| + n^L \tilde{\sigma}_{22} \right\rangle & \end{cases} \qquad (5.12)$$

όπου $Y_T$ είναι η αντοχή σε εγκάρσιο εφελκυσμό, και g είναι ο λόγος ανθεκτικότητας σε θραύση που ορίζεται από το πηλίκο $g=G_{2+}/G_6$, όπου $G_{2+}$ είναι η ανθεκτικότητα

θραύσης σε εγκάρσιο εφελκυσμό και $G_6$ είναι η ανθεκτικότητα σε θραύση λόγω διάτμησης.

### 5.3.4 Θραύση σε εγκάρσια συμπίεση

Το κριτήριο θραύσης της μήτρας για τάσεις εγκάρσιας συμπίεσης αποτελείται από μία σχέση δευτέρου βαθμού ανάμεσα στις ενεργές διατμητικές τάσεις που δρουν στο επίπεδο θραύσης:

$$\phi_{2-} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{\tau}_{eff}^{T}}{S_T}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\tau}_{eff}^{L}}{S_L}\right)^2}\text{, εάν } \tilde{\sigma}_{22} < 0 \quad (5.13)$$

όπου οι ενεργές τάσεις $\tilde{\tau}_{eff}^{T}$ και $\tilde{\tau}_{eff}^{L}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\tilde{\tau}_{eff}^{T} = \left\langle -\tilde{\sigma}_{22}\cos(a_o)(\sin(a_o) - n^T\cos(a_o)\cos(\theta_s))\right\rangle \quad (5.14)$$

$$\tilde{\tau}_{eff}^{L} = \left\langle \cos(a_o)(|\tilde{\sigma}_{12}| + n^L\tilde{\sigma}_{22}\cos(a_o)\sin(\theta_s))\right\rangle \quad (5.15)$$

με $\theta_s = \arctan(\frac{-|\tilde{\sigma}_{12}|}{\tilde{\sigma}_{22}\sin(a_o)})$ (αποκλίνουσα γωνία), $n^T = \frac{-1}{\tan(2a_o)}$ (συντελεστής εγκάρσιας επιρροής) και $S_T = Y_c\cos(a_o)[\sin(a_o) + \frac{\cos(a_0)}{\tan(2a_o)}]$ (αντοχή σε εγκάρσια διάτμηση)

## 5.4 Νόμοι εξέλιξης ζημιάς

Οι εσωτερικές μεταβλητές $r_N$ καθορίζουν το όριο των ελαστικών περιοχών, και σχετίζονται με τις μεταβλητές ζημιάς με χρήση των νόμων εξέλιξης της ζημιάς. Αυτοί οι νόμοι εκφράζονται με την εξής γενική μορφή:

$$d_M = 1 - \frac{1}{f_N(r_N)}\exp\{A_M[1 - f_N(r_N)]\}\text{, M=1+,1-,2+,2-,6} \quad (5.16)$$

όπου η συνάρτηση $f_N(r_N)$ (N=1+,1-,2+,2-) επιλέγεται για να εξαναγκάσει τη χαλάρωση της καταστατικής σχέσης.

Οι παράμετροι $A_M$ (M=1+,1-,2+,2-,6) υπολογίζονται για να διαβεβαιώσουν ότι η υπολογιζόμενη πυκνότητα της ενέργειας διάχυσης $g_M$ είναι ανεξάρτητη του μεγέθους του πεπερασμένου στοιχείου, και έτσι επιλέγεται με σκοπό να πληρεί την παρακάτω συνθήκη για όλους τους τρόπους αστοχίας:

$$g_M = \int_1^{\infty} \frac{\partial G}{\partial d_M} \frac{\partial d_M}{\partial r_M} dr_M = \frac{G_M}{l^*}, \text{ M=1+,1-,2+,2-,6} \qquad (5.17)$$

όπου $l^*$ είναι το χαρακτηριστικό μήκος του πεπερασμένου στοιχείου.

Συγκεκριμένα, οι νόμοι διάδοσης της ζημιάς και οι αντίστοιχες παράμετροι είναι οι εξής:

- **Διαμήκης εφελκυσμός**: Ο νόμος εξέλιξης της ζημιάς σε διαμήκη εφελκυσμό ακολουθεί έναν νόμο γραμμικό – εκθετικό με στόχο τη θεώρηση της διαδικασίας αστοχίας ίνας – μήτρας ακολουθούμενη από γεφύρωμα της ίνας και απόσπαση. Η χαλάρωση είναι γραμμική μέχρι η τάση να φτάσει της τάση απόσπασης $X_{Po}$, και η αντίστοιχη ενέργεια διάχυσης ανά μονάδα επιφάνειας είναι $G_{1+}^L$. Καθώς οι παραμορφώσεις συνεχίζουν να αυξάνονται, η απόκριση χαλάρωσης ακολουθεί εκθετικό νόμο και η ενέργεια διάχυσης ανά μονάδα επιφάνειας είναι $G_{1+}^E$. Ο αντίστοιχος νόμος εξέλιξης της ζημιάς καθορίζεται ως:

$$d_{1+} = 1 - (1 - d_{1+}^L)(1 - d_{1+}^E) \qquad (5.18)$$

όπου:

$$d_{1+}^L = 1 + \frac{K_1}{E_1} - (\frac{K_1}{E_1} + 1)\frac{1}{r_{1+}^L} \quad ; \quad d_{1+}^E = 1 - \frac{1}{r_{1+}^E}\exp[A_{1+}(1 - r_{1+}^E)]$$

$$r_{1+}^L = \max[1, \min(r_{1+}, r_{1+}^F)] \ ; \ r_{1+}^E = \max[1, (1 - d_{1+}^F)\frac{X_T}{X_{PO}} r_{1+}]$$

$$K_1 = \frac{l^* X_T E_1 (X_T - X_{PO})}{2G_{1+}^L E_1 - l^* X_T (X_T - X_{PO})}; \ r_{1+}^F = 1 + \frac{E_1}{K_1}(1 - \frac{X_{PO}}{X_T})$$

$$d_{1+}^F = 1 + \frac{K_1}{E_1} - (\frac{K_1}{E_1} + 1)\frac{1}{r_{1+}^F}; \ A_{1+} = \frac{2l^* X_{PO}^2}{2(1 - d_{1+}^F)E_1 G_{1+}^E - l^* X_{PO}^2}$$

- **Διαμήκης θλίψη**: Ο νόμος διάδοσης της ζημιάς σε διαμήκη θλίψη μπορεί να εκφραστεί ως ένας συνδυασμός μηχανισμών αστοχίας που προκαλούνται από εφελκυστικά φορτία $d_{1+}(r_{1+})$ και των μηχανισμών αστοχίας που προκαλείται με θλίψη, $d_{1-}(r_{1-})$:

$$d_{1-} = 1-[1-d_{1-}^{*}(r_{1-})][1-A_1^{\pm} d_{1+}^{*}(r_{1+})] \quad (5.19)$$

όπου $d_{1-}^{*} = 1-\frac{1}{r_{1-}}\exp\{A_{1-}-(1-r_{1-})]\}$. Η παράμετρος $A_1^{\pm}$ λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ανάκτησης της ακαμψίας των σπασμένων ινών λαμβάνοντας υπόψη την παράμετρο b που παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1: $A_1^{\pm} \approx b\frac{E_1-E_2}{E_1}$

- **Εγκάρσιος εφελκυσμός**, ο οποίος καθορίζεται ως:

$$d_{2+} = 1-\frac{1}{f_{2+}(r_{2+})}\exp\{A_{2+}[1-f_{2+}(r_{2+})]\} \quad (5.20)$$

$$\text{όπου } f_{2+}(r_{2+}) = \frac{1}{2g}[g-1+\sqrt{(1-g)^2+4gr_{2+}^2}]$$

- **Εγκάρσια θλίψη**, η οποία καθορίζεται ως:

$$d_{2-} = 1-\frac{1}{r_{2-}}\exp\{A_{2-}(1-r_{2-})]\} \quad (5.21)$$

- **Επίπεδη διάτμηση**: Η δυσκαμψία σε διατμητικές τάσεις μειώνεται ως αποτέλεσμα διαμήκων και εγκάρσιων ρωγμών:

$$d_6 = 1-[1-d_6^{*}(r_{2+})])(1-d_{1+}) \quad (5.22)$$

$$\text{όπου : } d_6^{*}(r_{2+}) = 1-\frac{1}{r_{2+}}\exp\{A_6(1-r_{2+})]\}$$

$$A_6 = \frac{2l^{*}S_L^2}{2G_{12}G_6 - l^{*}S_L^2}$$

Οι παράμετροι $A_{1-}$, $A_{2+}$ και $A_{2-}$ υπολογίζονται αριθμητικά με χρήση αλγορίθμων.
Τέλος, οι μεταβλητές ζημιάς εκτός του επίπεδου καθορίζονται ως εξής:

$$d_3(r_{1-}, r_{2-}) = 1-[1-d_{1-}(r_{1-})][(1-d_{2-}(r_{2-})] \quad (5.23)$$

$$d_4(r_{2+}) = d_6(r_{2+}) \qquad (5.24)$$

$$d_5(r_{1+}) = d_1(r_{1+}) \qquad (5.25)$$

### 5.4 Μέγιστο μέγεθος επίπεδου πεπερασμένου στοιχείου

Η κλίση του νόμου χαλάρωσης για κάθε τρόπο ζημιάς καθορίζεται για υπολογισμό της κατάλληλης ποσότητας ενέργειας που χάνεται σύμφωνα με το μήκος του στοιχείου, π.χ. η περιοχή κάτω από τι διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης είναι η αντίστοιχη ανθεκτικότητα σε θραύση διαιρεμένη με το χαρακτηριστικό μήκος του πεπερασμένου στοιχείου $G_M/l^*$ (M=1+, 1-,2+,2-,6) σύμφωνα με την εξίσωση 6.16. Με σκοπό να αποφύγουμε απότομη πτώση (snap – back) του τμήματος χαλάρωσης για κάθε τρόπο αστοχίας, ένα <u>ελάχιστο χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου</u> $l^*_{\max}$ μπορεί να βρεθεί εξισώνοντας την ελαστική ενέργεια του στοιχείου, $\frac{1}{2}X_M \varepsilon_M (l^*)^2 h_{el} = \frac{1}{2}\frac{X_M{}^2}{E_M}(l^*)^2 h_{el}$, με την ενέργεια που χάνεται κατά τη διαδικασία θραύσης, $G_M l^* h_{el}$ :

$$l^*_{\max} = \frac{2E_M G_M}{X_M^2}, \text{ M=1+,1-,2+,2-,6} \quad (5.26)$$

όπου $h_{el}$ είναι το πάχος του πεπερασμένου στοιχείου, $E_M$, $G_M$ και $X_M$ είναι, αντίστοιχα, το μέτρο ελαστικότητας του Young, η ανθεκτικότητα σε θραύση και οι αντοχές της στρώσης που αντιστοιχούν σε κάθε τρόπο αστοχίας (υποτίθεται ότι $E_6 = G_{12}$ και $X_6=S_L$).

Για πεπερασμένα στοιχεία μεγαλύτερα από το μέγιστο μήκος πεπερασμένου στοιχείου $l^*_{\max}$, δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί δεδομένη η κατάλληλη απώλεια ενέργειας χωρίς να αποφευχθεί η απότομη κλίση στην καταστατική απόκριση. Για αυτά τα πεπερασμένα στοιχεία, <u>μείωση της αντοχής του αντίστοιχου τρόπου ζημιάς</u> μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$X_M = \sqrt{\frac{2E_M G_M}{l^*_{\max}}}, \text{ M=1+,1-,2+,2-,6} \quad (5.27)$$

## 5.5 Ιδιότητες υλικών

Τυποποιημένες δοκιμές είναι διαθέσιμες για μέτρηση των περισσότερων ανεξάρτητων ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών που χρειάζονται για τον καθορισμό του μοντέλου ζημιάς που περιγράφηκε. Το μοντέλο χρειάζεται τα ακόλουθα δεδομένα:

- Ελαστικές ιδιότητες της στρώσης ($E_1$,$E_2$,$G_{12}$,$G_{23}$,$\nu_{12}$,$\nu_{23}$) και αντοχές της στρώσης ($X_T$,$X_C$,$Y_T$,$Y_C$,$S_L$) μετρημένες από τυποποιημένες δοκιμές ASTM ή άλλες που καθορίζονται από τον κατασκευαστή.

- Τέσσερα στοιχεία για την ανθεκτικότητα σε θραύση, που σχετίζονται με τη διαμήκη αστοχία σε εφελκυσμό και θλίψη ($G_{1+}$ και $G_{1-}$ αντίστοιχα) και με την εγκάρσια αστοχία σε εφελκυσμό και διάτμηση ($G_{2+}$ και $G_{6-}$ αντίστοιχα). Το $G_{2+}$ μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας μία τυποποιημένη ASTM δοκιμή, ενώ το $G_{6+}$ χρησιμοποιώντας δοκιμή σε κάμψη (four-point bending end-notched flexure test του Martin). Οι τιμές $G_{1+}$ και $G_{1-}$ μετρώνται χρησιμοποιώντας συμπαγής (compact) δοκιμές εφελκυσμού και θλίψης σύμφωνα με τον Pinho (δεν υπάρχει τυποποιημένη δοκιμή για μέτρηση της ανθεκτικότητας σε θραύση που να σχετίζεται με τη θραύση στη διαμήκη διεύθυνση).

Η ανθεκτικότητα σε θραύση $G_{2-}$ εξαρτάται από το $G_6$ και από τη γωνία θραύση $\alpha_o$ στη μορφή $G_{2-} = G_6 / \cos(a_0)$. Επιπλέον, το μοντέλο απαιτεί το δεδομένο των αντοχών στη φυσική θέση (in situ) $Y_T^{is}$ και $S_T^{is}$, τα οποία είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων ιδιοτήτων του υλικού.

## 5.6 Αντοχές στη φυσική θέση (in-situ)

Οι συναρτήσεις ενεργοποίησης της ζημιάς βασίζονται στα κριτήρια αστοχίας LaRC04, τα οποία λαμβάνουν υπόψη την επίδραση στη φυσική θέση (in-situ). Το φαινόμενο in-situ είναι η ικανότητα των στρώσεων του σύνθετου υλικού να αυξάνουν τις αντοχές τους όταν βρίσκονται σε μορφή πολύστρωτου σύνθετου (laminate) συγκριτικά με την αντοχή της ίδιας στρώσης με μονής κατεύθυνσης ίνες. Οι εγκάρσιες και διατμητικές αντοχές επηρεάζονται από το φαινόμενο φυσικής θέση (in situ) και είναι συναρτήσεις του πάχους της στρώσης $h_p$, της θέσης της στρώσης στο πολύστρωτο, και του προσανατολισμού της ίνας από τις γειτονικές στρώσεις. Οι

εξισώσεις, οι οποίες καθορίζουν τις αντίστοιχες αντοχές στη φυσική θέση σε συνάρτηση με τη θέση και το πάχος της στρώσης παρουσιάζονται παρακάτω:

Αντοχή σε εγκάρσιο εφελκυσμό στη φυσική θέση

- Για παχιά ενσωματωμένη στρώση: $Y_T^{is} = 1.12\sqrt{2}Y_T$ (5.28)
- Για λεπτή ενσωματωμένη στρώση: $Y_T^{is} = 2\sqrt{\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\frac{G_{2+}}{\pi h_p}}$ (5.29)
- Για μία εξωτερική στρώση: $Y_T^{is} = 1.12^2\sqrt{\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\frac{G_{2+}}{\pi h_p}}$ (5.30)

Διατμητική αντοχή στη φυσική θέση (in situ)

$$S_L^{is} = \sqrt{\frac{(1+\varsigma\chi G_{12}^2)^{\frac{1}{2}}-1}{3\varsigma G_{12}}} \quad (5.31)$$

όπου $\varsigma$ καθορίζει τη μη γραμμικότητα της σχέσης διατμητική τάση – διατμητική παραμόρφωση και η οποία είναι μηδέν για γραμμική συμπεριφορά. Η παράμετρος χ καθορίζεται σύμφωνα με το σχηματισμό μιας δεδομένης στρώσης:

- Για μία παχιά ενσωματωμένη στρώση: $\chi = \frac{12S_L^2}{G_{12}} + \frac{72}{4}\varsigma S_L^4$ (5.32)
- Για μία λεπτή ενσωματωμένη στρώση: $\chi = \frac{48G_6}{\pi h_p}$ (5.33)
- Για μία εξωτερική στρώση: $\chi = \frac{24G_6}{\pi h_p}$ (5.34)

## 5.7 Ζημιά και αστοχία για σύνθετα υλικά

### 5.7.1 Κριτήριο αστοχίας Hashin 2D

Τα κριτήρια έναρξης της ζημιάς για τα σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ίνες που βασίζονται στη θεωρία Hashin περιλαμβάνουν τέσσερεις μηχανισμούς έναρξης ζημιάς: εφελκυσμός ίνας, θλίψη ίνας, εφελκυσμός μήτρας, και θλίψη μήτρας.

Τα κριτήρια έναρξης της ζημιάς έχουν τις εξής γενικές μορφές:

Εφελκυσμός ίνας ($\hat{\sigma}_{11} \geq 0$): $$F_f^t = (\frac{\hat{\sigma}_{11}}{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}) + a(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S^L})^2 \quad (5.35)$$

Θλίψη ίνας ($\hat{\sigma}_{11} < 0$): $$F_f^c = (\frac{\hat{\sigma}_{11}}{\mathrm{X}^C})^2 \quad (5.36)$$

Εφελκυσμός μήτρας ($\hat{\sigma}_{22} \geq 0$): $$F_m^t = (\frac{\hat{\sigma}_{22}}{Y^{\mathrm{T}}})^2 + (\frac{\hat{\tau}_{12}}{S^L})^2 \quad (5.37)$$

Θλίψη μήτρας ($\hat{\sigma}_{22} < 0$): $$F_m^C = (\frac{\hat{\sigma}_{22}}{2S^{\mathrm{T}}})^2 + [(\frac{Y^C}{2S^L})^2 - 1]\frac{\hat{\sigma}_{22}}{\mathrm{Y}^C} + (\frac{\hat{\tau}_{12}}{S^{L|}})^2 \quad (5.38)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ισχύουν τα εξής:

$X^T$ αντοχή σε διαμήκη εφελκυσμό

$X^C$ αντοχή σε διαμήκη θλίψη

$Y^T$ αντοχή σε εγκάρσιο εφελκυσμό

$Y^C$ αντοχή σε εγκάρσια θλίψη

$S^L$ αντοχή σε διαμήκη διάτμηση

$S^T$ αντοχή σε εγκάρσια διάτμηση

α συντελεστής που προσδιορίζει τη συνεισφορά της διατμητικής τάσης στο κριτήριο έναρξης εφελκυσμού της ίνας, και $\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\tau}_{12}$ είναι στοιχεία του ενεργού τανυστή των τάσεων $\hat{\sigma}$ που χρησιμοποιούνται για αποτίμηση των κριτηρίων έναρξης και τα οποία υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma} = M\sigma \quad (5.39)$$

όπου <u>σ είναι η πραγματική τάση</u> και <u>M είναι ο τελεστής ζημιάς</u>:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_f)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_m)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_s)} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

όπου $d_f$, $d_m$ και $d_s$ είναι εσωτερικές μεταβλητές ζημιάς που χαρακτηρίζουν τη ζημιά της ίνας, της μήτρας και της διάτμησης, οι οποίες προκύπτουν από τις μεταβλητές ζημιάς $d_f^t$, $d_f^c$, $d_m^t$ και $d_m^c$ που αντιστοιχούν στους τέσσερεις τρόπους αστοχίας, ως εξής:

- $d_f = d_f^t$ εάν $\hat{\sigma}_{11} \geq 0$ ή $d_f = d_f^c$ εάν $\hat{\sigma}_{11} < 0$ (5.41)
- $d_m = d_m^t$ εάν $\hat{\sigma}_{22} \geq 0$ ή $d_m = d_m^c$ εάν $\hat{\sigma}_{22} < 0$ (5.42)
- $d_s = 1-(1-d_f^t)(1-d_f^c)(1-d_m^t)(1-d_m^c)$ (5.43)

Πριν από οποιαδήποτε έναρξη και εξέλιξη ζημιάς ο τελεστής ζημιάς, M, είναι ίσος με το μοναδιαίο πίνακα, έτσι ώστε $\hat{\sigma} = \sigma$.

### 5.7.2 Κριτήριο αστοχίας Hashin 3D

Το κριτήριο αστοχίας Hashin (Hashin 1980) εξάγεται και αυτό από τη θεωρία Mohr – Coulomb, αλλά αντίθετα από τη θεωρία του Puck, δεν λαμβάνει υπόψη το επίπεδο της θραύσης. Ο κύριος λόγος είναι ότι το 1980 ήταν αδύνατο να έχουμε την απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ για την επίλυση αυτού του προβλήματος. Το κριτήριο αστοχίας του Hashin σε τρεις διαστάσεις λαμβάνει υπόψη του δύο είδη θραύσης για τα σύνθετα υλικά: την αστοχία των ινών και της μήτρας. Κάθε ένας από αυτούς τους μηχανισμούς αστοχίας θα πρέπει να υπολογισθεί διαφορετικά για θλιπτικές και εφελκυστικές τάσεις.

Το κριτήριο για το μηχανισμό αστοχίας της ίνας είναι το εξής:

$$F_f = \left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2}(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) \text{ για } \sigma_1 \geq 0 \qquad (5.44\alpha)$$

$$\text{ή} \quad F_f = \left(\frac{\sigma_1}{X_c}\right)^2 \qquad \text{για } \sigma_1 < 0 \qquad (5.44\beta)$$

όπου $X_t$ και $X_c$ είναι η αντοχή στη διεύθυνση των ινών σε εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα, $S_{12}$ είναι η επίπεδη διατμητική αντοχή της στρώσης σύνθετου υλικού.

Το κριτήριο για το μηχανισμό θραύσης της μήτρας είναι το εξής:

$$F_m = \frac{(\sigma_2+\sigma_3)^2}{Y_t^2} + \frac{\tau_{12}^2 - (\sigma_2 x \sigma_3)}{S_{23}^2} + \frac{\tau_{12}^2 - \tau_{13}^2}{S_{13}^2} \quad \text{για } (\sigma_2+\sigma_3)\geq 0 \quad (5.45\alpha)$$

ή

$$F_m = \frac{1}{Yc}[(\frac{Y_c}{2S_{23}})^2 - 1](\sigma_2+\sigma_3) + \frac{1}{4S_{23}^2}(\sigma_2+\sigma_3)^2 + \frac{1}{S_{23}^2}(\tau_{23}^2 - [\sigma_2 x \sigma_3]) + \frac{1}{S_{12}^2}(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2)$$

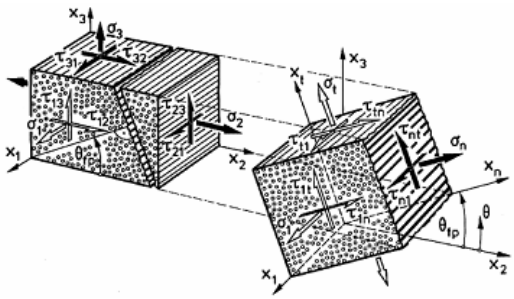
$$\text{για } (\sigma_2+\sigma_3)<0 \qquad (5.45\beta)$$

όπου $Y_t$ και $Y_c$ είναι η εφελκυστική και θλιπτική αντοχή κάθετα στη διεύθυνση της ίνας, $S_{13}$ και $S_{23}$ είναι η διατμητική αντοχή εντός και εκτός επιπέδου της στρώσης του σύνθετου υλικού. Ένα πλεονέκτημα του κριτηρίου Hashin είναι ότι όλες οι τιμές αντοχής μπορούν να επιτευχθούν από τυποποιημένες δοκιμές υλικού. Και για τα δύο κριτήρια, η αστοχία προβλέπεται όταν οι δείκτες $F_f$ ή $F_m$ είναι ίσοι με τη μονάδα.

### 5.7.3 Κριτήριο αστοχίας Puck

Το κριτήριο αστοχίας του Puck (Puck και Schurmann 1998, Puck, Kopp et al.2001, Puck και Schurmann 2001) είναι ένα διαδραστικό τασικό κριτήριο που ισχύει για στρώσεις συνθέτων υλικών με μονή κατεύθυνση ινών.

Το κριτήριο Puck βασίζεται στην υπόθεση Mohr – Coulomb: η αστοχία προκαλείται από ορθές και διατμητικές τάσεις ($\sigma_n$, $\tau_{nl}$ και $\tau_{nt}$) που ενεργούν σε επίπεδο θραύσης κεκλιμένο σε γωνία $\theta_{fp}$ από το επίπεδο του υλικού (βλ. σχήμα 40).



**Σχήμα 40**: Καθορισμός του επιπέδου θραύσης

Οι τρόποι θραύσης που μπορούν να προβλεφθούν από τη θεωρία Puck είναι:

- η θραύση της ίνας (fiber failure $f_{E(FF)}$) και
- η αστοχία στην περιοχή μεταξύ των ινών (inter fiber failure $f_{E(IFF)}$). Η αστοχία στην περιοχή μεταξύ των ινών που περιγράφεται από το κριτήριο Puck είναι στην ουσία η περίπτωση ρωγμής της μήτρας.

Το κριτήριο αστοχίας της ίνας, $f_{E(FF)}$, υπό συνδυασμένη φόρτιση είναι:

$$f_{E(FF)} = \frac{1}{\varepsilon_{1t}}(\varepsilon_1 + \frac{v_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2) \text{ για } (..) \geq 0 \qquad (5.46\alpha)$$

ή $$f_{E(FF)} = \frac{1}{\varepsilon_{1c}} \left| (\varepsilon_1 + \frac{v_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2) \right| \text{ για } (..) < 0 \qquad (5.46\beta)$$

Οι διαφορετικές παράμετροι σημαίνουν τα εξής:

- $\varepsilon_{1t}$ και $\varepsilon_{1c}$ είναι οι τάσεις αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα.
- $E_{f1}$ και $v_{f12}$ είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και ο λόγος Poisson για τη στρώση στη διεύθυνση της ίνας.
- $m_{\sigma f}$ είναι ο 'συντελεστής μεγέθυνσης τάσης' που σύμφωνα με τους (Puck και Schurmann 1998, Puck, Kopp et al.2001, Puck και Schurmann 2001)) θεωρείται ότι τυπικές τιμές είναι 1.3 για σύνθετα υλικά με ίνες γυαλιού και 1.1 για υλικά με ίνες άνθρακα.

Το κριτήριο αστοχίας της ίνας Puck από την εξίσωση (5.46) χρειάζεται συγκεκριμένες παραμέτρους ίνας ($E_{f1}$, $v_{f12}$ και $m_{\sigma f}$) που δεν μπορούν να επιτευχθούν από τυποποιημένες δοκιμές υλικών υπό μονοαξονικά φορτία. Όπως παρουσιάζεται στη δημοσίευση του Puck (Puck και Schurmann 2001), τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εξίσωση 5.46 είναι συγκρίσιμα με τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε με χρήση του κλασσικού κριτηρίου μέγιστης παραμόρφωσης (εξίσωση 5.47). Για αυτό το λόγο το κριτήριο μέγιστης τάσης έχει χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο αστοχίας της ίνας για αυτή την εργασία:

$$f_{E(FF)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1t}} \text{ για } \varepsilon_1 \geq 0 \qquad (5.47\alpha)$$

ή $$f_{E(FF)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1c}} \text{ για } \varepsilon_1 < 0 \qquad (5.47\beta)$$

Για τις δύο εξισώσεις (5.46) και (5.47), η ίνα αστοχεί όταν ο δείκτης $f_{E(FF)}$ φτάνει στην τιμή της μονάδας.

Το κριτήριο αστοχίας για την περιοχή μεταξύ των ινών (περίπτωση ρωγμής μήτρας), $f_{E(IFF)}$, βασίζεται στην υπόθεση ότι η θραύση δημιουργείται μόνο από τάσεις που ενεργούν στο επίπεδο θραύσης. Το επίπεδο θραύσης μπορεί να είναι κεκλιμένο σε σχέση με το επίπεδο υλικού κατά γωνία με τιμή ανάμεσα σε -90$^o$ και +90$^o$. Οι ορθές και διατμητικές τάσεις που ενεργούν σε αυτό το επίπεδο υπολογίζονται περιστρέφοντας τον τρισδιάστατο τανυστή των τάσεων από το υλικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο θραύσης χρησιμοποιώντας τυπικούς μετασχηματισμούς τανυστή:

$$\sigma_n(\theta) = \sigma_2 \cos^2(\theta) + \sigma_3 \sin^2(\theta) + 2\tau_{23} \sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\tau_{nt}(\theta) = (\sigma_3 - \sigma_2)\sin(\theta)\cos(\theta) + \tau_{23}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \quad (5.48)$$

$$\tau_{nl}(\theta) = \tau_{31}\sin(\theta) + \tau_{21}\cos(\theta)$$

όπου:

- $\sigma_n(\theta)$ είναι η ορθή τάση στο επίπεδο θραύσης
- $\tau_{nl}(\theta)$ και $\tau_{nt}(\theta)$ είναι οι διατμητικές τάσεις στο επίπεδο θραύσης, παράλληλα και κάθετα στη διεύθυνση ινών.
- θ είναι η γωνία μεταξύ του επιπέδου θραύσης και του επιπέδου του υλικού.

Το κριτήριο αστοχίας μεταξύ των ινών ($F_{iff}$) είναι μόνο μία συνάρτηση των τάσεων που ενεργούν στο επίπεδο θραύσης:

$$F_{iff} = \sqrt{[(\frac{1}{R_\perp} - \frac{P^+_{\perp\psi}}{R_{\perp\psi}})\sigma_n(\theta)]^2 + (\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{tt}})^2} + \frac{P^+_{\perp\psi}}{R_{\perp\psi}}\sigma_n(\theta) \qquad \text{για } \sigma_n \geq 0 \quad (5.49\alpha)$$

$$\text{ή} \quad F_{iff} = \sqrt{(\frac{\tau_{nt}(\theta)}{R_{tt}})^2 + (\frac{\tau_{nl}(\theta)}{R_{t\|}})^2 + [(\frac{P^-_{\perp\psi}}{R_{\perp\psi}})\sigma_n(\theta)]^2} + \frac{P^-_{\perp\psi}}{R_{\perp\psi}}\sigma_n(\theta) \text{ για } \sigma_n \leq 0 \quad (5.49\beta)$$

όπου $R_\perp$ είναι η αντίσταση αστοχίας κάθετη στις ίνες, $R_{\perp\psi}$ και $R_{t\|}$ είναι οι αντιστάσεις σε διάτμηση, και $P^+_{\perp\psi}$ και $P^-_{\perp\psi}$ είναι οι παράμετροι κλίσης που αναπαριστούν επιδράσεις εσωτερικής τριβής στο κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb (περισσότερες

λεπτομέρειες στους Puck και Schurmann 1998, Puck, Kopp et al.2001, Puck και Schurmann 2001)). Οι παράμετροι που παρουσιάστηκαν πριν μπορούν να υπολογισθούν (Puck, Kopp et al.2001) χρησιμοποιώντας τις εξής σχέσεις (5.50):

$$\frac{P_{\perp\psi}^{+}}{R_{\perp\psi}} = \frac{P_{\perp\perp}^{+}}{R_{\perp\perp}}(\cos\psi)^2 + \frac{P_{\perp\parallel}^{+}}{R_{\perp\parallel}}(\sin\psi)^2 \qquad \frac{P_{\perp\psi}^{+}}{R_{\perp\psi}} = \frac{P_{\perp\perp}^{+}}{R_{\perp\perp}}(\cos\psi)^2 + \frac{P_{\perp\parallel}^{+}}{R_{\perp\parallel}}(\sin\psi)^2$$

$$(\cos\psi)^2 = \frac{\tau_{nt}^2(\theta)}{\tau_{nt}^2(\theta) + \tau_{nl}^2(\theta)} \qquad (\sin\psi)^2 = \frac{\tau_{nl}^2(\theta)}{\tau_{nt}^2(\theta) + \tau_{nl}^2(\theta)}$$

$$R_{\perp} = Y_t \qquad R_{\perp\parallel} = S_{21} \qquad R_{\perp\perp} = \frac{Y_c}{2(1+P_{\perp\perp}^{-})}$$

όπου $Y_t$ και $Y_c$ είναι οι αντοχές του υλικού σε επίπεδο εφελκυσμό και θλίψη σε διεύθυνση κάθετη στην ίνα. Επιπλέον των τυπικών παραμέτρων του υλικού, απαιτούνται ειδικές παράμετροι Puck. Η μέτρηση αυτών των παραμέτρων απαιτεί πολύπλοκη πολυαξονική δοκιμή. Όμως, ο Puck προτείνει τη χρήση των παραμέτρων που δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| | $P_{\perp\parallel}^{+}$ | $P_{\perp\parallel}^{-}$ | $P_{\perp\perp}^{+}$ | $P_{\perp\perp}^{-}$ |
|---|---|---|---|---|
| Ίνα γυαλιού | 0.3 | 0.25 | 0.2 – 0.25 | 0.2 – 0.25 |
| Ίνα άνθρακα | 0.35 | 0.30 | 0.25 – 0.30 | 0.25 – 0.30 |

**Σχήμα 41**: Παράμετροι Puck από (Puck, Kopp et al.2001)

Με σκοπό την αποτίμηση του κριτηρίου αστοχίας στην περιοχή μεταξύ των ινών $f_{E(FF)}$, απαιτείται να βρεθεί η γωνία του επιπέδου θραύσης, $\theta_{fp}$, που ανταποκρίνεται στο συνολικό μέγιστο του $f_{E(FF)}$. Εξαιτίας της συμμετρίας, το εύρος των πιθανών γωνιών μπορούν να περιοριστούν σε $-90^o \leq \theta \leq 90^o$. Το μέγιστο βρίσκεται μέσω επαναληπτικής διαδικασίας.

# 6. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΡΟΥΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΥΛΙΚΟ

## 6.1 Εισαγωγή

Τα μοντέλα που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με στοιχεία που έχουν σχηματισμό επίπεδης έντασης (πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης, μεμβρανικά και κελύφους). Υπάρχει όμως η δυνατότητα στο Abaqus με χρήση υπορουτίνων που καθορίζονται από το χρήστη να επεκταθεί αυτή η χρήση σε στοιχεία με άλλη τασική κατάσταση (για παράδειγμα 3D). Στο Abaqus δύο υπορουτίνες είναι διαθέσιμες:

- Υπορουτίνα VUMAT (Abaqus explicit) για <u>μονής κατεύθυνσης ίνες</u> (unidirectional) (επέκταση της δυνατότητας του προγράμματος Abaqus για να συμπεριλάβει 3D μοντέλα)
- Υπορουτίνα VUMAT για υφάσματα συνθέτων υλικών (woven fabric)

### 6.1.1 Σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης ινών

Θεωρούμε αρχικά ότι ισχύουν οι σχέσεις τάσεων / παραμόρφωσεων για ορθοτροπικά ελαστικό υλικό:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{11} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{11} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση που εμφανίζεται ζημιά εισάγονται τέσσερεις μεταβλητές:

- Δύο μεταβλητές που σχετίζονται με εφελκυσμό και θλίψη ινών: $d_{ft}$, $d_{fc}$
- Δύο μεταβλητές που σχετίζονται με εφελκυσμό και θλίψη μήτρας: $d_{mt}$, $d_{mc}$

Αυτές οι τέσσερεις μεταβλητές ζημιάς χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τις συνολικές μεταβλητές ζημιάς για την ίνα και τη μήτρα.

$$d_f = 1-(1-d_{ft})(1-d_{fc})$$

$$d_m = 1-(1-d_{mt})(1-d_{mc})$$

Οι ελαστικές σταθερές με ύπαρξη ζημιάς, $C_{ij}$, καθορίζονται σε σχέση με της ελαστικές σταθερές της περίπτωσης που δεν υπάρχει ζημιά και των μεταβλητών ζημιάς που ορίστηκαν προηγουμένως.

$$C_{11} = (1-d_f)C_{11}^0$$

$$C_{22} = (1-d_f)(1-d_m)C_{22}^0$$

$$C_{33} = (1-d_f)(1-d_m)C_{33}^0$$

$$C_{12} = (1-d_f)(1-d_m)C_{12}^0$$

$$C_{13} = (1-d_f)(1-d_m)C_{13}^0$$

$$C_{22} = (1-d_f)(1-d_m)C_{22}^0$$

$$G_{12} = (1-d_f)(1-s_{mt}d_{mt})(1-s_{mc}d_{mc})G_{12}^0$$

$$G_{23} = (1-d_f)(1-s_{mt}d_{mt})(1-s_{mc}d_{mc})G_{23}^0$$

$$G_{31} = (1-d_f)(1-s_{mt}d_{mt})(1-s_{mc}d_{mc})G_{31}^0$$

Οι συντελεστές $s_{mt}$ και $s_{mc}$ ελέγχουν την απώλεια της διατμητικής δυσκαμψίας από την αστοχία της μήτρας σε εφελκυσμό και θλίψη, αντίστοιχα.

Οι ελαστικές σταθερές στην περίπτωση του σύνθετου υλικού που δεν έχει καμία ζημιά είναι συναρτήσεις των μέτρων ελαστικότητας του Young και των λόγων Poisson ως εξής:

$$C_{11}^0 = E_{11}^0(1-\nu_{23}\nu_{32})\Gamma$$

$$C_{22}^0 = E_{22}^0(1-\nu_{13}\nu_{31})\Gamma$$

$$C_{33}^0 = E_{33}^0(1-\nu_{12}\nu_{21})\Gamma$$

$$C_{12}^0 = E_{11}^0(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})\Gamma$$

$$C_{23}^0 = E_{22}^0(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{21})\Gamma$$

$$C_{13}^{0} = E_{11}^{0}(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\Gamma$$

$$\text{όπου} \quad \Gamma = 1/(1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})$$

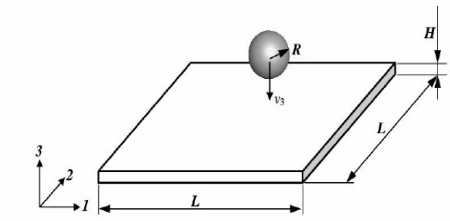
Για την υπορουτίνα VUMAT στην περίπτωση του σύνθετου υλικού με ίνες μονής κατεύθυνσης πρέπει να καθοριστούν οι εξής 19 ελαστικές σταθερές:

- Μέτρα ελαστικότητας του Young στους τρεις κύριους άξονες: $E^{o}_{11}$, $E^{o}_{22}$, $E^{o}_{33}$.
- Λόγοι Poisson: $\nu_{12}$,$\nu_{13}$,$\nu_{23}$
- Μέτρα διάτμησης: $G^{o}_{12}$, $G^{o}_{13}$,$G^{o}_{23}$
- Αντοχές σε διάτμηση: $S_{12}$, $S_{13}$, $S_{23}$
- Τάση αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη σε κάθε κύρια κατεύθυνση

  $X_{1t}$, $X_{1c}$, $X_{2t}$, $X_{2c}$, $X_{3t}$, $X_{3c}$
- Συντελεστής απόσβεσης (προαιρετικός): β

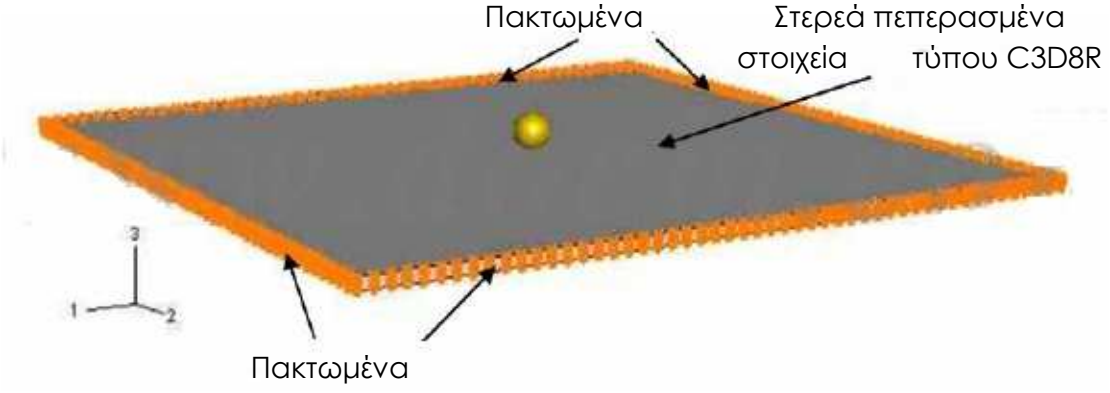
### 6.1.2 Εφαρμογή κρούσης σε πλάκα από σύνθετο υλικό

Στην εφαρμογή που ακολουθεί θα πραγματοποιηθεί ανάλυση σε κανονική κρούση ενός χαλύβδινου άκαμπτου σφαιριδίου σε μία πλάκα από σύνθετο υλικό με ταχύτητα $10^2$ mm/sec, χρησιμοποιώντας το εμπορικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Abaqus / Explicit. Στην εικόνα παρουσιάζεται το σχήμα της πλάκας με τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά. Αρχικά, θα καθοριστούν οι ιδιότητες του σύνθετου υλικού και η διαστρωμάτωση, θα μελετηθεί η ικανότητα του γενικού αλγορίθμου επαφής να μοντελοποιήσει την επιφανειακή διάβρωση σε πολλαπλά σώματα επαφής κατά τη διάρκεια κρούσης μεγάλης ταχύτητας, και θα διερευνηθεί η ζημιά και η αστοχία του σύνθετου υλικού. Η δεύτερη εικόνα παρουσιάζει τις λεπτομέρειες του μοντέλου, συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρίας και τον συνοριακών συνθηκών. Η πλάκα είναι πλήρως πακτωμένη σε όλες τις πλευρές της.



Γεωμετρικά χαρακτηριστικά: L=100mm, H=1.6mm, R=2.5mm, $h_{layer}$=0.2mm και ταχύτητα κρούσης: $v_3$ = -$10^5$ mm/sec, συντελεστής τριβής=0.5

**Σχήμα 42:** Κρούση άκαμπτου σφαιριδίου σε επίπεδη πλάκα από σύνθετο υλικό




**Σχήμα 43**: Μοντέλο γεωμετρίας και συνοριακών συνθηκών

Η πλάκα από σύνθετο υλικό αποτελείται από 8 στρώσεις με μονής κατεύθυνσης ίνες άνθρακα με μήτρα εποξικής ρητίνης σε διαστρωμάτωση (0/90/$\pm$45/ $\mp$45/90/0). Κάθε στρώση σύνθετου υλικού έχει πάχος 0.2 mm. Για να προσομοιώσουμε την κρούση σε σύνθετα υλικά, η μοντελοποίηση της ζημιάς και της αστοχίας είναι κρίσιμη καθώς επιτρέπει τη σφαίρα να διεισδύσει στην πλάκα. Παράλληλα, στην παρούσα εφαρμογή χρησιμοποιείται ένα μοντέλο υλικού που καθορίζεται από τον χρήστη με μορφή υπορουτίνας VUMAT (Abaqus Explicit). Το μοντέλο υλικού βασίζεται στα κριτήρια αστοχίας Hashin για σύνθετα υλικά με μονής κατεύθυνσης ίνες (Hashin, 1980) και θεωρεί τέσσερεις πιθανούς τρόπους αστοχίας: εφελκυσμός και θλίψη της μήτρας, εφελκυσμός ίνας και θλίψη ίνας (λυγισμός ίνας).

Χρησιμοποιούνται τυπικές γραμμικές ελαστικές ιδιότητες για σύνθετο υλικό με ίνες άνθρακα:

- $E_{11}$=1.64$^5$ MPa,
- $E_{22}$=$E_{33}$=1.2$^4$ MPa,
- $G_{12}$=$G_{13}$=4500 MPa,
- $G_{23}$=4500 MPa
- $v_{12}$=$v_{13}$=0.32
- $v_{23}$=0.45

Οι σταθερές αντοχής του υλικού είναι οι εξής:

- Αντοχή σε εφελκυσμό στη διεύθυνση των ινών: $X_{1t}$ = 2724 MPa
- Θλιπτική αντοχή στη διεύθυνση των ινών: $X_{1c}$ = 111 MPa
- Εφελκυστική αντοχή στη διεύθυνση 2: $X_{2t}$ = 50 MPa
- Θλιπτική αντοχή στη διεύθυνση 2: $X_{2c}$ = 1690 MPa
- Εφελκυστική αντοχή στη διεύθυνση 3: $X_{3t}$ = 290 MPa
- Θλιπτική αντοχή στη διεύθυνση 3: $X_{3c}$ = 290 MPa
- Διατμητική αντοχή στο επίπεδο 12: $S_{12}$ = 120 MPa
- Διατμητική αντοχή στο επίπεδο 13: $S_{13}$ = 137 MPa
- Διατμητική αντοχή στο επίπεδο 23: $X_{23}$ = 90 MPa

όπου η 1 - διεύθυνση είναι κατά μήκος των ινών, η 2 – διεύθυνση εγκάρσια στις ίνες στην επιφάνεια της στρώσης, και 3 – διεύθυνση είναι κάθετα στη στρώση.

### 6.1.3 Υπορουτίνα VUMAT σε κώδικα Fortran

```
subroutine vumat(
c Read only -
     1 nblock, ndir, nshr, nstatev, nfieldv, nprops, lanneal,
     2 stepTime, totalTime, dt, cmname, coordMp, charLength,
     3 props, density, strainInc, relSpinInc,
     4 tempOld, stretchOld, defgradOld, fieldOld,
     5 stressOld, stateOld, enerInternOld, enerInelasOld,
     6 tempNew, stretchNew, defgradNew, fieldNew,
c Write only -
     7 stressNew, stateNew, enerInternNew, enerInelasNew )
c
      include 'vaba_param.inc'
c
c 3D Orthotropic Elasticity with Hashin 3d Failure criterion
c
c The state variables are stored as:
c    state(*,1)   = material point status
c    state(*,2:7) = damping stresses
c
c User defined material properties are stored as
c  * First line:
c     props(1) --> Young's modulus in 1-direction, E1
c     props(2) --> Young's modulus in 2-direction, E2
c     props(3) --> Young's modulus in 3-direction, E3
c     props(4) --> Poisson's ratio, nu12
c     props(5) --> Poisson's ratio, nu13
```

```
c     props(6) --> Poisson's ratio, nu23
c     props(7) --> Shear modulus, G12
c     props(8) --> Shear modulus, G13
c
c  * Second line:
c     props(9)  --> Shear modulus, G23
c     props(10) --> beta damping parameter
c     props(11) --> "not used"
c     props(12) --> "not used"
c     props(13) --> "not used"
c     props(14) --> "not used"
c     props(15) --> "not used"
c     props(16) --> "not used"
c
c  * Third line:
c     props(17) --> Ultimate tens stress in 1-direction, sigu1t
c     props(18) --> Ultimate comp stress in 1-direction, sigu1c
c     props(19) --> Ultimate tens stress in 2-direction, sigu2t
c     props(20) --> Ultimate comp stress in 2-direction, sigu2c
c     props(21) --> Ultimate tens stress in 2-direction, sigu3t
c     props(22) --> Ultimate comp stress in 2-direction, sigu3c
c     props(23) --> "not used"
c     props(24) --> "not used"
c
c  * Fourth line:
c     props(25) --> Ultimate shear stress, sigu12
c     props(26) --> Ultimate shear stress, sigu13
c     props(27) --> Ultimate shear stress, sigu23
c     props(28) --> "not used"
c     props(29) --> "not used"
c     props(30) --> "not used"
c     props(31) --> "not used"
c     props(32) --> "not used"
c

      dimension props(nprops), density(nblock),
     1 coordMp(nblock,*),
     2 charLength(*), strainInc(nblock,ndir+nshr),
     3 relSpinInc(nblock,nshr), tempOld(nblock),
     4 stretchOld(nblock,ndir+nshr), defgradOld(nblock,ndir+nshr+nshr),
     5 fieldOld(nblock,nfieldv), stressOld(nblock,ndir+nshr),
     6 stateOld(nblock,nstatev), enerInternOld(nblock),
     7 enerInelasOld(nblock), tempNew(*),
     8 stretchNew(nblock,ndir+nshr), defgradNew(nblock,ndir+nshr+nshr),
     9 fieldNew(nblock,nfieldv), stressNew(nblock,ndir+nshr),
     1 stateNew(nblock,nstatev),
     2 enerInternNew(nblock), enerInelasNew(nblock)
*
      character*80 cmname
*
      parameter( zero = 0.d0, one = 1.d0, two = 2.d0, half = .5d0 )
*
      parameter(
     *    i_svd_DmgFiberT   = 1,
     *    i_svd_DmgFiberC   = 2,
     *    i_svd_DmgMatrixT  = 3,
     *    i_svd_DmgMatrixC  = 4,
     *    i_svd_statusMp    = 5,
     *    i_svd_dampStress = 6,
c     *    i_svd_dampStressXx = 6,
c     *    i_svd_dampStressYy = 7,
c     *    i_svd_dampStressZz = 8,
c     *    i_svd_dampStressXy = 9,
c     *    i_svd_dampStressYz = 10,
c     *    i_svd_dampStressZx = 11,
     *    i_svd_Strain   = 12,
```

```
c     *    i_svd_StrainXx = 12,
c     *    i_svd_StrainYy = 13,
c     *    i_svd_StrainZz = 14,
c     *    i_svd_StrainXy = 15,
c     *    i_svd_StrainYz = 16,
c     *    i_svd_StrainZx = 17,
     *     n_svd_required = 17 )
*
      parameter(
     *     i_s33_Xx = 1,
     *     i_s33_Yy = 2,
     *     i_s33_Zz = 3,
     *     i_s33_Xy = 4,
     *     i_s33_Yz = 5,
     *     i_s33_Zx = 6 )
*
* Structure of property array
      parameter (
     *     i_pro_E1    = 1,
     *     i_pro_E2    = 2,
     *     i_pro_E3    = 3,
     *     i_pro_nu12  = 4,
     *     i_pro_nu13  = 5,
     *     i_pro_nu23  = 6,
     *     i_pro_G12   = 7,
     *     i_pro_G13   = 8,
     *     i_pro_G23   = 9,
*
     *     i_pro_beta  = 10,
*
     *     i_pro_sigu1t = 17,
     *     i_pro_sigu1c = 18,
     *     i_pro_sigu2t = 19,
     *     i_pro_sigu2c = 20,
     *     i_pro_sigu3t = 21,
     *     i_pro_sigu3c = 22,
     *     i_pro_sigu12 = 25,
     *     i_pro_sigu13 = 26,
     *     i_pro_sigu23 = 27 )
* Temporary arrays
      dimension eigen(maxblk*3)
*
* Read material properties
*
      E1 = props(i_pro_E1)
      E2 = props(i_pro_E2)
      E3 = props(i_pro_E3)
      xnu12 = props(i_pro_nu12)
      xnu13 = props(i_pro_nu13)
      xnu23 = props(i_pro_nu23)
      G12 = props(i_pro_G12)
      G13 = props(i_pro_G13)
      G23 = props(i_pro_G23)
*
      xnu21 = xnu12 * E2 / E1
      xnu31 = xnu13 * E3 / E1
      xnu32 = xnu23 * E3 / E2
*
*
* Compute terms of stiffness matrix
      gg = one / ( one - xnu12*xnu21 - xnu23*xnu32 - xnu31*xnu13
     *     - two*xnu21*xnu32*xnu13 )
      C11  = E1 * ( one - xnu23*xnu32 ) * gg
      C22  = E2 * ( one - xnu13*xnu31 ) * gg
      C33  = E3 * ( one - xnu12*xnu21 ) * gg
      C12  = E1 * ( xnu21 + xnu31*xnu23 ) * gg
```

```
      C13  = E1 * ( xnu31 + xnu21*xnu32 ) * gg
      C23  = E2 * ( xnu32 + xnu12*xnu31 ) * gg
*
      f1t = props(i_pro_sigu1t)
      f1c = props(i_pro_sigu1c)
      f2t = props(i_pro_sigu2t)
      f2c = props(i_pro_sigu2c)
      f3t = props(i_pro_sigu3t)
      f3c = props(i_pro_sigu3c)
      f12 = props(i_pro_sigu12)
      f13 = props(i_pro_sigu13)
      f23 = props(i_pro_sigu23)
*
      beta = props(i_pro_beta)
*
* Assume purely elastic material at the beginning of the analysis
*
      if ( totalTime .eq. zero ) then
        if (nstatev .lt. n_svd_Required) then
          call xplb_abqerr(-2,'Subroutine VUMAT requires the '//
     *         'specification of %I state variables. Check the '//
     *         'definition of *DEPVAR in the input file.',
     *         n_svd_Required,zero,' ')
          call xplb_exit
        end if
        call OrthoEla3dExp ( nblock,
     *       stateOld(1,i_svd_DmgFiberT),
     *       stateOld(1,i_svd_DmgFiberC),
     *       stateOld(1,i_svd_DmgMatrixT),
     *       stateOld(1,i_svd_DmgMatrixC),
     *       C11, C22, C33, C12, C23, C13, G12, G23, G13,
     *       strainInc,
     *       stressNew )
        return
      end if
*
*  Update total elastic strain
      call strainUpdate ( nblock, strainInc,
     *     stateOld(1,i_svd_strain), stateNew(1,i_svd_strain) )
*
* Stress update
      call OrthoEla3dExp ( nblock,
     *     stateOld(1,i_svd_DmgFiberT),
     *     stateOld(1,i_svd_DmgFiberC),
     *     stateOld(1,i_svd_DmgMatrixT),
     *     stateOld(1,i_svd_DmgMatrixC),
     *     C11, C22, C33, C12, C23, C13, G12, G23, G13,
     *     stateNew(1,i_svd_strain),
     *     stressNew )
*
* Failure evaluation
*
      call copyr ( nblock,
     *     stateOld(1,i_svd_DmgFiberT), stateNew(1,i_svd_DmgFiberT) )
      call copyr ( nblock,
     *     stateOld(1,i_svd_DmgFiberC), stateNew(1,i_svd_DmgFiberC) )
      call copyr ( nblock,
     *     stateOld(1,i_svd_DmgMatrixT), stateNew(1,i_svd_DmgMatrixT) )
      call copyr ( nblock,
     *     stateOld(1,i_svd_DmgMatrixC), stateNew(1,i_svd_DmgMatrixC) )
      nDmg = 0
      call eig33Anal ( nblock, stretchNew, eigen )
      call Hashin3d  ( nblock, nDmg,
     *     f1t, f2t, f3t, f1c, f2c, f3c, f12, f23, f13,
     *     stateNew(1,i_svd_DmgFiberT),
     *     stateNew(1,i_svd_DmgFiberC),
```

```
     *     stateNew(1,i_svd_DmgMatrixT),
     *     stateNew(1,i_svd_DmgMatrixC),
     *     stateNew(1,i_svd_statusMp),
     *     stressNew, eigen )
*     -- Recompute stresses if new Damage is occurring
      if ( nDmg .gt. 0 ) then
        call OrthoEla3dExp ( nblock,
     *        stateNew(1,i_svd_DmgFiberT),
     *        stateNew(1,i_svd_DmgFiberC),
     *        stateNew(1,i_svd_DmgMatrixT),
     *        stateNew(1,i_svd_DmgMatrixC),
     *        C11, C22, C33, C12, C23, C13, G12, G23, G13,
     *        stateNew(1,i_svd_strain),
     *        stressNew )
      end if
*
* Beta damping
      if ( beta .gt. zero ) then
        call betaDamping3d ( nblock,
     *        beta, dt, strainInc,
     *        stressOld, stressNew,
     *        stateNew(1,i_svd_statusMp),
     *        stateOld(1,i_svd_dampStress),
     *        stateNew(1,i_svd_dampStress) )
      end if
*
* Integrate the internal specific energy (per unit mass)
*
      call EnergyInternal3d ( nblock, stressOld, stressNew,
     *   strainInc, density, enerInternOld, enerInternNew )
*
      return
      end


***************************************************************
*   OrthoEla3dExp: Orthotropic elasticity - 3d            *
***************************************************************
      subroutine OrthoEla3dExp ( nblock,
     *     dmgFiberT, dmgFiberC, dmgMatrixT, dmgMatrixC,
     *     C11, C22, C33, C12, C23, C13, G12, G23, G13,
     *     strain, stress )
*
      include 'vaba_param.inc'

*  Orthotropic elasticity, 3D case -
*
      parameter( zero = 0.d0, one = 1.d0, two = 2.d0)
      parameter(
     *     i_s33_Xx = 1,
     *     i_s33_Yy = 2,
     *     i_s33_Zz = 3,
     *     i_s33_Xy = 4,
     *     i_s33_Yz = 5,
     *     i_s33_Zx = 6,
     *     n_s33_Car = 6 )
*
      dimension  strain(nblock,n_s33_Car),
     *     dmgFiberT(nblock), dmgFiberC(nblock),
     *     dmgMatrixT(nblock), dmgMatrixC(nblock),
     *     stress(nblock,n_s33_Car)
*     -- shear fraction in matrix tension and compression mode
      parameter ( smt = 0.9d0, smc = 0.5d0 )
*
      do k = 1, nblock
*     -- Compute damaged stiffness
```

```
      dft = dmgFiberT(k)
      dfc = dmgFiberC(k)
      dmt = dmgMatrixT(k)
      dmc = dmgMatrixC(k)
      df = one - ( one - dft ) * ( one - dfc )
*
      dC11 = ( one - df ) * C11
      dC22 = ( one - df ) * ( one - dmt ) * ( one - dmc ) * C22
      dC33 = ( one - df ) * ( one - dmt ) * ( one - dmc ) * C33
      dC12 = ( one - df ) * ( one - dmt ) * ( one - dmc ) * C12
      dC23 = ( one - df ) * ( one - dmt ) * ( one - dmc ) * C23
      dC13 = ( one - df ) * ( one - dmt ) * ( one - dmc ) * C13
      dG12 = ( one - df )
     *     * ( one - smt*dmt ) * ( one - smc*dmc ) * G12
      dG23 = ( one - df )
     *     * ( one - smt*dmt ) * ( one - smc*dmc ) * G23
      dG13 = ( one - df )
     *     * ( one - smt*dmt ) * ( one - smc*dmc ) * G13
*     -- Stress update
      stress(k,i_s33_Xx) = dC11 * strain(k,i_s33_Xx)
     *     + dC12 * strain(k,i_s33_Yy)
     *     + dC13 * strain(k,i_s33_Zz)
      stress(k,i_s33_Yy) = dC12 * strain(k,i_s33_Xx)
     *     + dC22 * strain(k,i_s33_Yy)
     *     + dC23 * strain(k,i_s33_Zz)
      stress(k,i_s33_Zz) = dC13 * strain(k,i_s33_Xx)
     *     + dC23 * strain(k,i_s33_Yy)
     *     + dC33 * strain(k,i_s33_Zz)
      stress(k,i_s33_Xy) = two * dG12 * strain(k,i_s33_Xy)
      stress(k,i_s33_Yz) = two * dG23 * strain(k,i_s33_Yz)
      stress(k,i_s33_Zx) = two * dG13 * strain(k,i_s33_Zx)
    end do
*
    return
    end

*****************************************************************
*   strainUpdate: Update total strain                           *
*****************************************************************
    subroutine strainUpdate ( nblock,
     *    strainInc, strainOld, strainNew )
*
    include 'vaba_param.inc'
*
    parameter(
     *    i_s33_Xx = 1,
     *    i_s33_Yy = 2,
     *    i_s33_Zz = 3,
     *    i_s33_Xy = 4,
     *    i_s33_Yz = 5,
     *    i_s33_Zx = 6,
     *    n_s33_Car = 6 )
*
    dimension strainInc(nblock,n_s33_Car),
     *    strainOld(nblock,n_s33_Car),
     *    strainNew(nblock,n_s33_Car)
*
    do k = 1, nblock
      strainNew(k,i_s33_Xx)= strainOld(k,i_s33_Xx)
     *                    + strainInc(k,i_s33_Xx)
      strainNew(k,i_s33_Yy)= strainOld(k,i_s33_Yy)
     *                    + strainInc(k,i_s33_Yy)
      strainNew(k,i_s33_Zz)= strainOld(k,i_s33_Zz)
     *                    + strainInc(k,i_s33_Zz)
      strainNew(k,i_s33_Xy)= strainOld(k,i_s33_Xy)
     *                    + strainInc(k,i_s33_Xy)
```

```
      strainNew(k,i_s33_Yz)= strainOld(k,i_s33_Yz)
     *                    + strainInc(k,i_s33_Yz)
      strainNew(k,i_s33_Zx)= strainOld(k,i_s33_Zx)
     *                    + strainInc(k,i_s33_Zx)
      end do
*
      return
      end


************************************************************
*   Hashin3d w/ Modified Puck: Evaluate Hashin 3d failure  *
*   criterion for fiber, Puck for matrix                   *
************************************************************
      subroutine Hashin3d ( nblock, nDmg,
     *     f1t, f2t, f3t, f1c, f2c, f3c, f12, f23, f13,
     *     dmgFiberT, dmgFiberC, dmgMatrixT, dmgMatrixC,
     *     statusMp, stress, eigen )
*
      include 'vaba_param.inc'

      parameter( zero = 0.d0, one = 1.d0, half = 0.5d0, three = 3.d0 )
      parameter(
     *     i_s33_Xx = 1,
     *     i_s33_Yy = 2,
     *     i_s33_Zz = 3,
     *     i_s33_Xy = 4,
     *     i_s33_Yz = 5,
     *     i_s33_Zx = 6,
     *     n_s33_Car = 6 )
*
      parameter(i_v3d_X=1,i_v3d_Y=2,i_v3d_Z=3 )
      parameter(n_v3d_Car=3 )
*
      parameter ( eMax = 1.00d0, eMin = -0.8d0 )
*
      dimension  dmgFiberT(nblock), dmgFiberC(nblock),
     *     dmgMatrixT(nblock), dmgMatrixC(nblock),
     *     stress(nblock,n_s33_Car),
     *     eigen(nblock,n_v3d_Car),
     *     statusMp(nblock)
*
      f1tInv = zero
      f2tInv = zero
      f3tInv = zero
      f1cInv = zero
      f2cInv = zero
      f3cInv = zero
      f12Inv = zero
      f23Inv = zero
      f13Inv = zero
*
      if ( f1t .gt. zero ) f1tInv = one / f1t
      if ( f2t .gt. zero ) f2tInv = one / f2t
      if ( f3t .gt. zero ) f3tInv = one / f3t
      if ( f1c .gt. zero ) f1cInv = one / f1c
      if ( f2c .gt. zero ) f2cInv = one / f2c
      if ( f3c .gt. zero ) f3cInv = one / f3c
      if ( f12 .gt. zero ) f12Inv = one / f12
      if ( f23 .gt. zero ) f23Inv = one / f23
      if ( f13 .gt. zero ) f13Inv = one / f13
*
      do k = 1, nblock
        if ( statusMp(k) .eq. one ) then
*
        lFail = 0
```

```
*
      s11 = stress(k,i_s33_Xx)
      s22 = stress(k,i_s33_Yy)
      s33 = stress(k,i_s33_Zz)
      s12 = stress(k,i_s33_Xy)
      s23 = stress(k,i_s33_Yz)
      s13 = stress(k,i_s33_Zx)
*
*     Evaluate Fiber modes
      if ( s11 .gt. zero ) then
*     -- Tensile Fiber Mode
        rft = (s11*f1tInv )**2 + (s12*f12Inv )**2 + (s13*f13Inv )**2
        if ( rft .ge. one ) then
          lDmg = 1
          dmgFiberT(k) = one
        end if
      else if ( s11 .lt. zero ) then
*     -- Compressive Fiber Mode
        rfc = abs(s11) * f1cInv
        if ( rfc .ge. one ) then
          lDmg = 1
          dmgFiberC(k) = one
        end if
      end if
*
*     Evaluate Matrix Modes
      if ( ( s22 + s33 ) .gt. zero ) then
*     -- Tensile Matrix mode
        rmt = ( s11 * half * f1tInv )**2
     *        + ( s22**2 * abs(f2tInv * f2cInv) )
     *        + ( s12 * f12Inv )**2
     *        + ( s22 * (f2tInv + f2cInv) )
        if ( rmt .ge. one ) then
          lDmg = 1
          dmgMatrixT(k) = one
        end if
      else if ( ( s22 + s33 ) .lt. zero ) then
*     -- Compressive Matrix Mode
        rmc = ( s11 * half * f1tInv )**2
     *        + ( s22**2 * abs(f2tInv * f2cInv) )
     *        + ( s12 * f12Inv )**2
     *        + ( s22 * (f2tInv + f2cInv) )
        if ( rmc .ge. one ) then
          lDmg = 1
          dmgMatrixC(k) = one
        end if
      end if
*
      eigMax=max(eigen(k,i_v3d_X),eigen(k,i_v3d_Y),eigen(k,i_v3d_Z))
      eigMin=min(eigen(k,i_v3d_X),eigen(k,i_v3d_Y),eigen(k,i_v3d_Z))
      enomMax = eigMax - one
      enomMin = eigMin - one
*
      if ( enomMax .gt. eMax .or.
     *     enomMin .lt. eMin .or.
     *     dmgFiberT(k) .eq. one ) then
        statusMp(k) = zero
      end if
*
      nDmg = nDmk + lDmg
*
      end if
*
    end do
*
    return
```

```
      end

************************************************************
*  betaDamping: Add beta damping                           *
************************************************************
      subroutine betaDamping3d ( nblock,
     *    beta, dt, strainInc, sigOld, sigNew,
     *    statusMp, sigDampOld, sigDampNew )
*
      include 'vaba_param.inc'
*
      parameter(
     *    i_s33_Xx = 1,
     *    i_s33_Yy = 2,
     *    i_s33_Zz = 3,
     *    i_s33_Xy = 4,
     *    i_s33_Yz = 5,
     *    i_s33_Zx = 6,
     *    n_s33_Car = 6 )
*
      dimension  sigOld(nblock,n_s33_Car),
     *    sigNew(nblock,n_s33_Car),
     *    strainInc(nblock,n_s33_Car),
     *    statusMp(nblock),
     *    sigDampOld(nblock,n_s33_Car),
     *    sigDampNew(nblock,n_s33_Car)
*
      parameter ( zero = 0.d0, one = 1.d0, two=2.0d0,
     *    half = 0.5d0, third = 1.d0/3.d0 )
      parameter ( asmall = 1.d-16 )
*
      betaddt =  beta / dt
*
      do k =1 , nblock
        sigDampNew(k,i_s33_Xx) = betaddt * statusMp(k) *
     *      ( sigNew(k,i_s33_Xx)
     *      - ( sigOld(k,i_s33_Xx) - sigDampOld(k,i_s33_Xx) ) )
        sigDampNew(k,i_s33_Yy) = betaddt * statusMp(k) *
     *      ( sigNew(k,i_s33_Yy)
     *      - ( sigOld(k,i_s33_Yy) - sigDampOld(k,i_s33_Yy) ) )
        sigDampNew(k,i_s33_Zz) = betaddt * statusMp(k) *
     *      ( sigNew(k,i_s33_Zz)
     *      - ( sigOld(k,i_s33_Zz) - sigDampOld(k,i_s33_Zz) ) )
        sigDampNew(k,i_s33_Xy) = betaddt * statusMp(k) *
     *      ( sigNew(k,i_s33_Xy)
     *      - ( sigOld(k,i_s33_Xy) - sigDampOld(k,i_s33_Xy) ) )
        sigDampNew(k,i_s33_Yz) = betaddt * statusMp(k) *
     *      ( sigNew(k,i_s33_Yz)
     *      - ( sigOld(k,i_s33_Yz) - sigDampOld(k,i_s33_Yz) ) )
        sigDampNew(k,i_s33_Zx) = betaddt * statusMp(k) *
     *      ( sigNew(k,i_s33_Zx)
     *      - ( sigOld(k,i_s33_Zx) - sigDampOld(k,i_s33_Zx) ) )
*
        sigNew(k,i_s33_Xx) = sigNew(k,i_s33_Xx)+sigDampNew(k,i_s33_Xx)
        sigNew(k,i_s33_Yy) = sigNew(k,i_s33_Yy)+sigDampNew(k,i_s33_Yy)
        sigNew(k,i_s33_Zz) = sigNew(k,i_s33_Zz)+sigDampNew(k,i_s33_Zz)
        sigNew(k,i_s33_Xy) = sigNew(k,i_s33_Xy)+sigDampNew(k,i_s33_Xy)
        sigNew(k,i_s33_Yz) = sigNew(k,i_s33_Yz)+sigDampNew(k,i_s33_Yz)
        sigNew(k,i_s33_Zx) = sigNew(k,i_s33_Zx)+sigDampNew(k,i_s33_Zx)
*
      end do
*
      return
      end
```

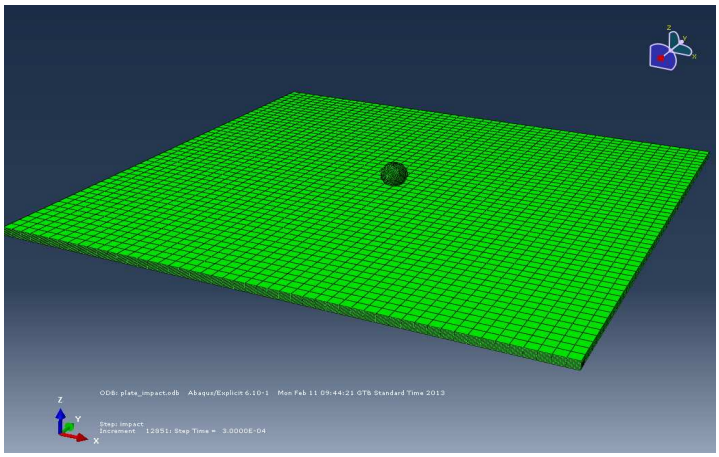
```
************************************************************
*   EnergyInternal3d: Compute internal energy for 3d case  *
************************************************************
      subroutine EnergyInternal3d(nblock, sigOld, sigNew ,
     *  strainInc, curDensity, enerInternOld, enerInternNew)
*
      include 'vaba_param.inc'
*
      parameter(
     *    i_s33_Xx = 1,
     *    i_s33_Yy = 2,
     *    i_s33_Zz = 3,
     *    i_s33_Xy = 4,
     *    i_s33_Yz = 5,
     *    i_s33_Zx = 6,
     *    n_s33_Car = 6 )
*
      parameter( two = 2.d0, half = .5d0 )
*
      dimension sigOld (nblock,n_s33_Car), sigNew (nblock,n_s33_Car),
     *    strainInc (nblock,n_s33_Car), curDensity (nblock),
     *    enerInternOld(nblock), enerInternNew(nblock)
*
      do k = 1, nblock
        stressPower  = half * (
     *      ( sigOld(k,i_s33_Xx) + sigNew(k,i_s33_Xx) )
     *      * ( strainInc(k,i_s33_Xx) )
     *      +      ( sigOld(k,i_s33_Yy) + sigNew(k,i_s33_Yy) )
     *      * ( strainInc(k,i_s33_Yy))
     *      +      ( sigOld(k,i_s33_Zz) + sigNew(k,i_s33_Zz) )
     *      * ( strainInc(k,i_s33_Zz))
     *      + two * ( sigOld(k,i_s33_Xy) + sigNew(k,i_s33_Xy) )
     *      * strainInc(k,i_s33_Xy)
     *      + two * ( sigOld(k,i_s33_Yz) + sigNew(k,i_s33_Yz) )
     *      * strainInc(k,i_s33_Yz)
     *      + two * ( sigOld(k,i_s33_Zx) + sigNew(k,i_s33_Zx) )
     *      * strainInc(k,i_s33_Zx) )
*
        enerInternNew(k) = enerInternOld(k) + stressPower/curDensity(k)
      end do
*
      return
      end

************************************************************
*   CopyR: Copy from one array to another                  *
************************************************************
      subroutine CopyR(nCopy, from, to )
*
      include 'vaba_param.inc'
*
      dimension from(nCopy), to(nCopy)
*
      do k = 1, nCopy
        to(k) = from(k)
      end do
*
      return
      end

*************************************************************************
* eig33Anal: Compute eigen values of a 3x3 symmetric matrix analytically *
*************************************************************************
      subroutine eig33Anal( nblock, sMat, eigVal )
*
```

```
      include 'vaba_param.inc'
*
      parameter(i_s33_Xx=1,i_s33_Yy=2,i_s33_Zz=3 )
      parameter(i_s33_Xy=4,i_s33_Yz=5,i_s33_Zx=6 )
      parameter(i_s33_Yx=i_s33_Xy )
      parameter(i_s33_Zy=i_s33_Yz )
      parameter(i_s33_Xz=i_s33_Zx,n_s33_Car=6 )
*
      parameter(i_v3d_X=1,i_v3d_Y=2,i_v3d_Z=3 )
      parameter(n_v3d_Car=3 )
*
      parameter ( zero = 0.d0, one = 1.d0, two = 2.d0,
     *    three = 3.d0, half = 0.5d0, third = one / three,
     *    pi23 = 2.094395102393195d0,
     *    fuzz = 1.d-8,
     *    preciz = fuzz * 1.d4 )
*
      dimension eigVal(nblock,n_v3d_Car), sMat(nblock,n_s33_Car)
*
      do k = 1, nblock
        sh  = third*(sMat(k,i_s33_Xx)+sMat(k,i_s33_Yy)+sMat(k,i_s33_Zz))
        s11 = sMat(k,i_s33_Xx) - sh
        s22 = sMat(k,i_s33_Yy) - sh
        s33 = sMat(k,i_s33_Zz) - sh
        s12 = sMat(k,i_s33_Xy)
        s13 = sMat(k,i_s33_Xz)
        s23 = sMat(k,i_s33_Yz)
*
        fac  = max(abs(s11), abs(s22), abs(s33))
        facs = max(abs(s12), abs(s13), abs(s23))
        if( facs .lt. (preciz*fac) ) then
          eigVal(k,i_v3d_X) = sMat(k,i_s33_Xx)
          eigVal(k,i_v3d_Y) = sMat(k,i_s33_Yy)
          eigVal(k,i_v3d_Z) = sMat(k,i_s33_Zz)
        else
          q = third*((s12**2+s13**2+s23**2)+half*(s11**2+s22**2+s33**2))
          fac = two * sqrt(q)
          if( fac .gt. fuzz ) then
            ofac = two/fac
          else
            ofac = zero
          end if
          s11 = ofac*s11
          s22 = ofac*s22
          s33 = ofac*s33
          s12 = ofac*s12
          s13 = ofac*s13
          s23 = ofac*s23
          r = s12*s13*s23
     *        + half*(s11*s22*s33-s11*s23**2-s22*s13**2-s33*s12**2)
          if( r .ge. one-fuzz ) then
            cos1 = -half
            cos2 = -half
            cos3 = one
          else if( r .le. fuzz-one ) then
            cos1 = -one
            cos2 = half
            cos3 = half
          else
            ang = third * acos(r)
            cos1 = cos(ang)
            cos2 = cos(ang+pi23)
            cos3 =-cos1-cos2
          end if
          eigVal(k,i_v3d_X) = sh + fac*cos1
          eigVal(k,i_v3d_Y) = sh + fac*cos2
```

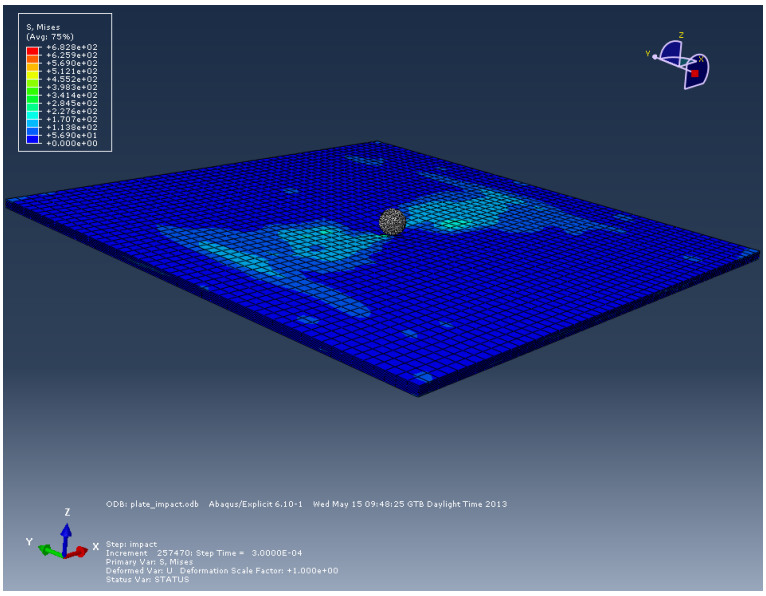
```
      eigVal(k,i_v3d_Z) = sh + fac*cos3
    end if
  end do
*
  return
  end
```

### 6.1.4 Αποτελέσματα

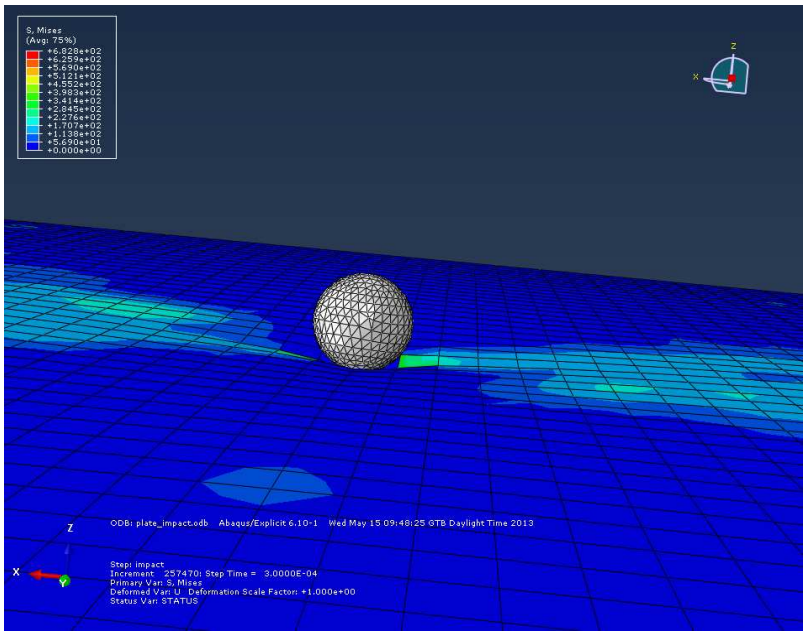
Στα παρακάτω σχήματα (σχήμα 44 – 64) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα κατά την προσομοίωση κρούσης σφαιριδίου σε πλάκα από σύνθετο υλικό και αφορούν το αναπτυσσόμενο πεδίο τάσεων και την παραμόρφωση της πλάκας, την προκαλούμενη ζημιά κάθε στρώσης, την ενέργεια, τη μεταβολή της ταχύτητας και της δύναμης κρούσης.



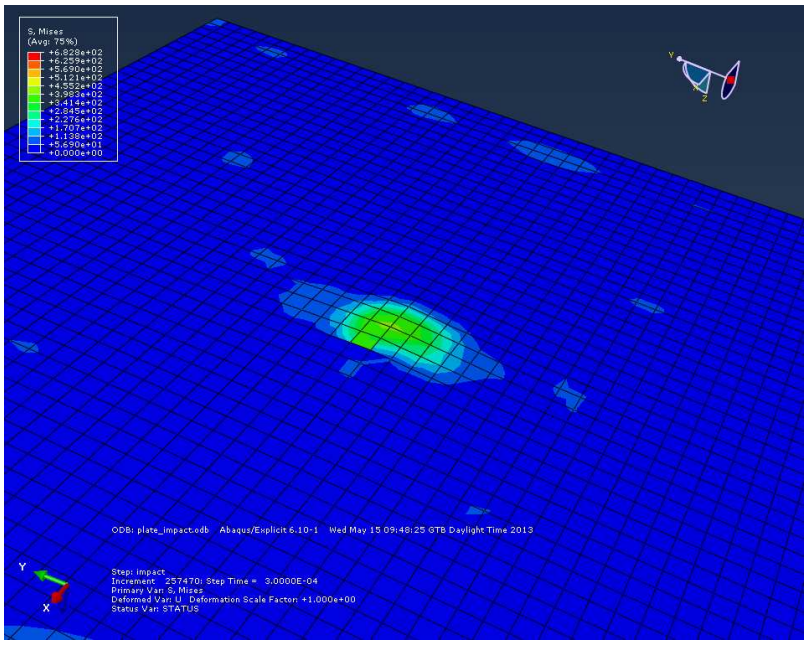

**Σχήμα 44 :** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό



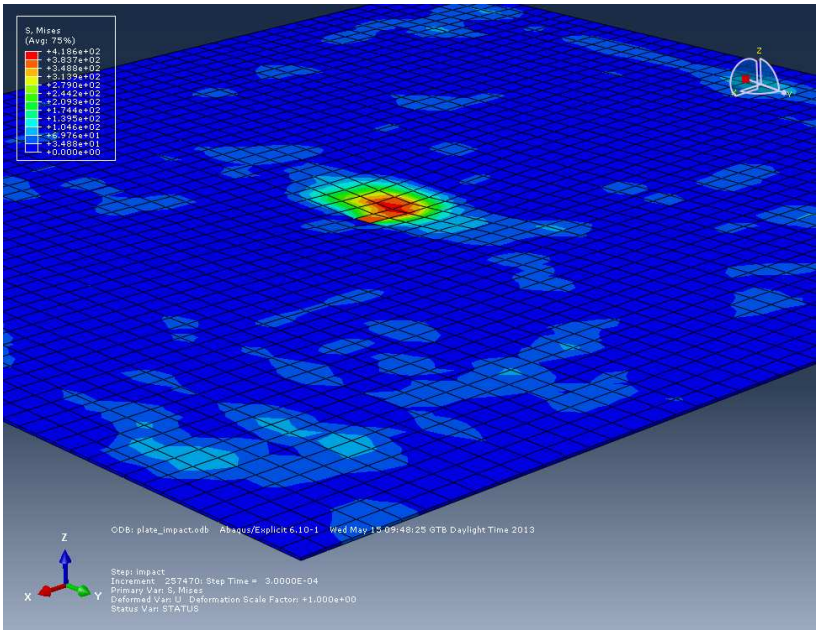

**Σχήμα 45 :** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό



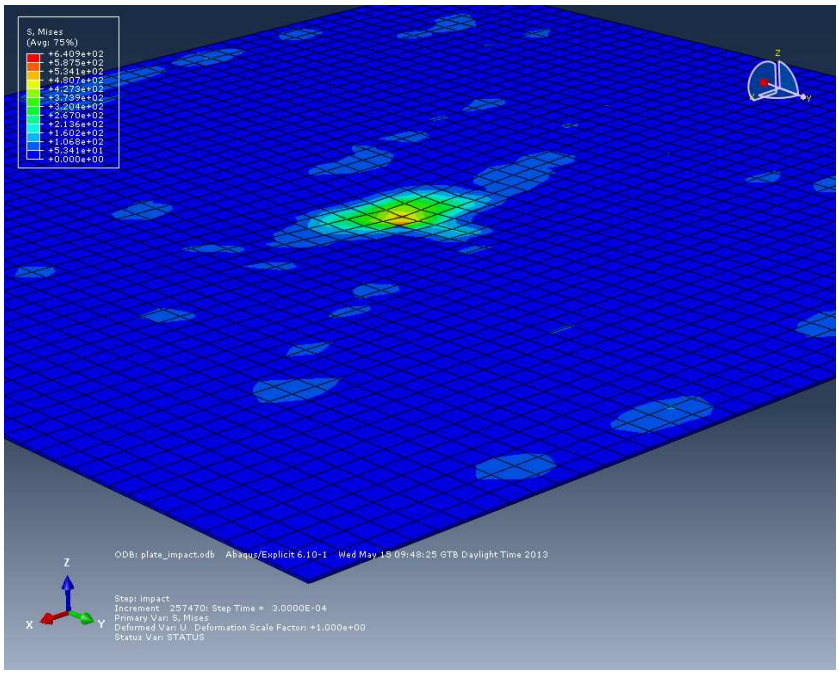

**Σχήμα 46:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό



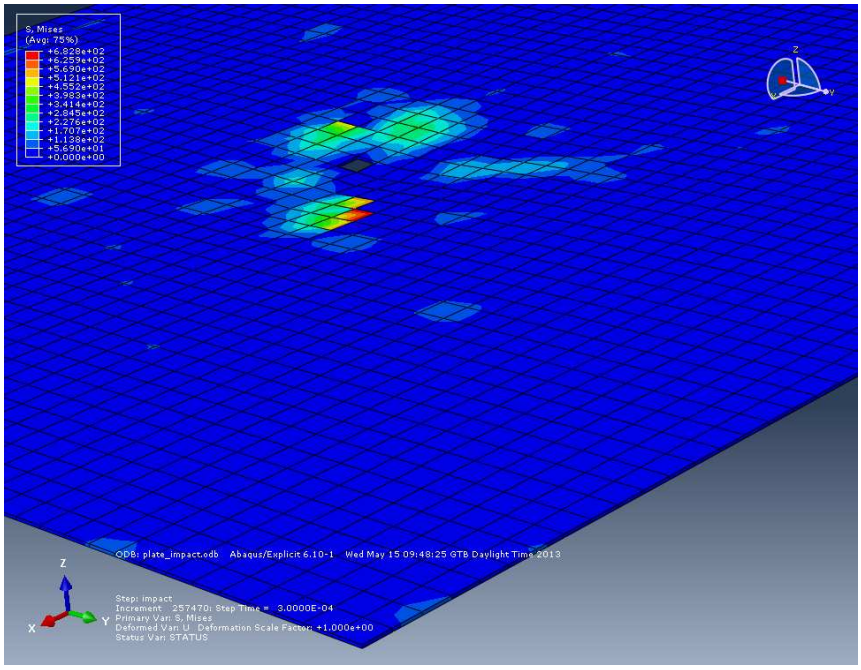

**Σχήμα 47:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (πίσω όψη)



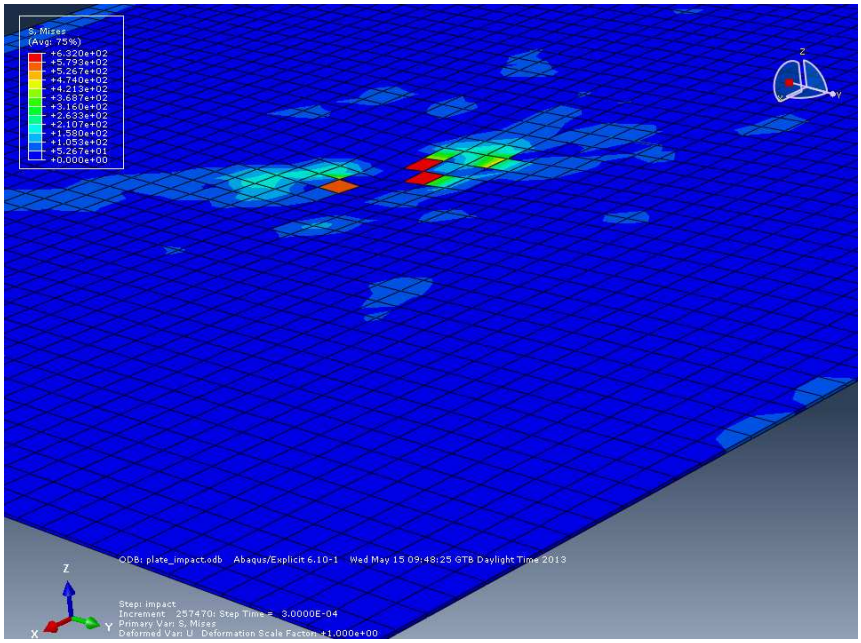

**Σχήμα 48:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (1st ply)



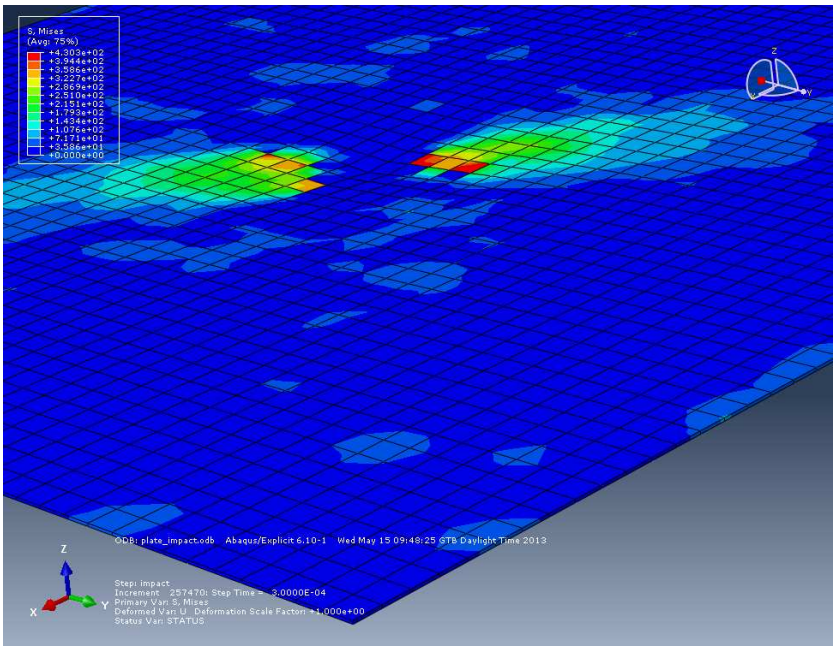

**Σχήμα 49:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (2nd ply)



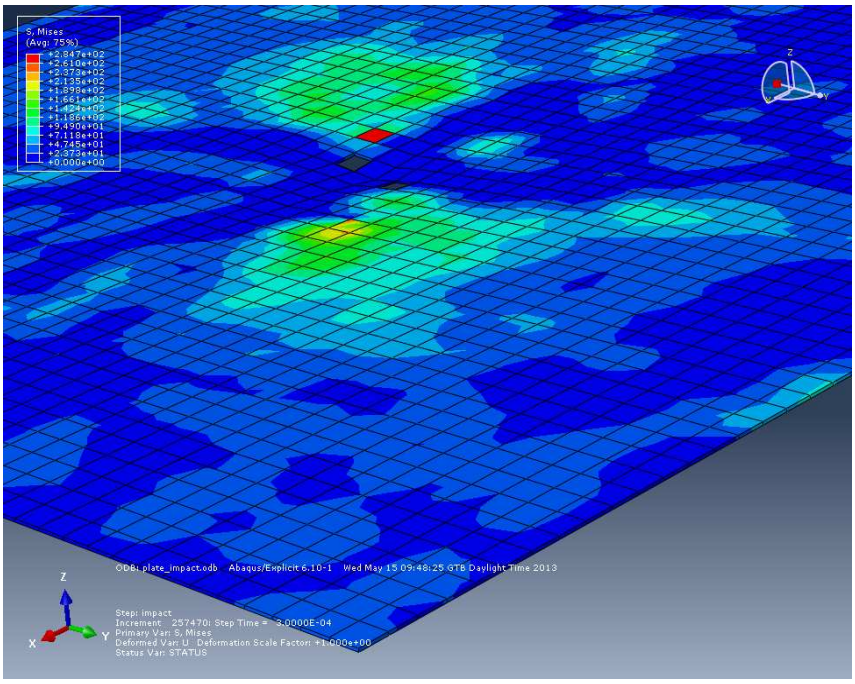

**Σχήμα 50:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (3nd ply)



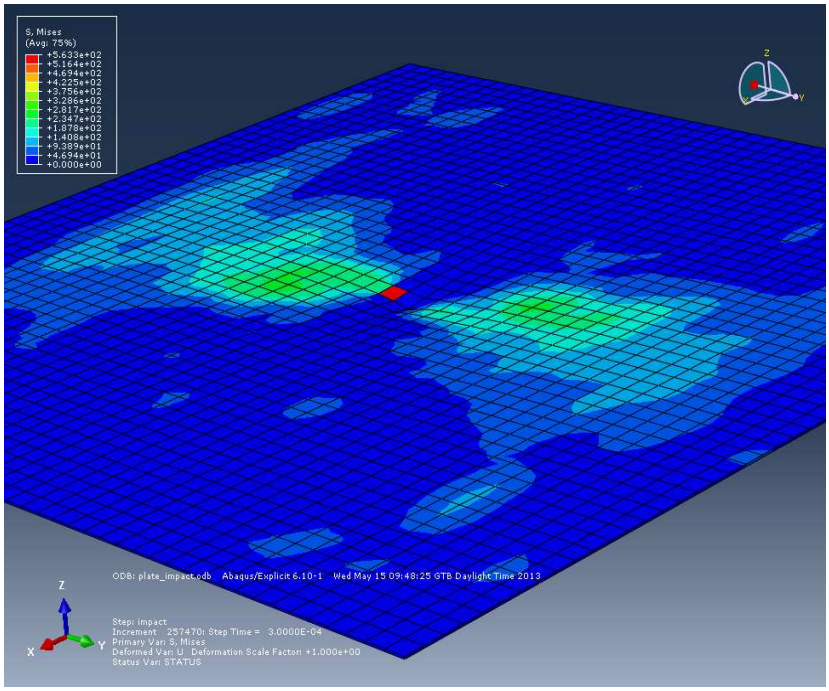

**Σχήμα 51:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (4th ply)



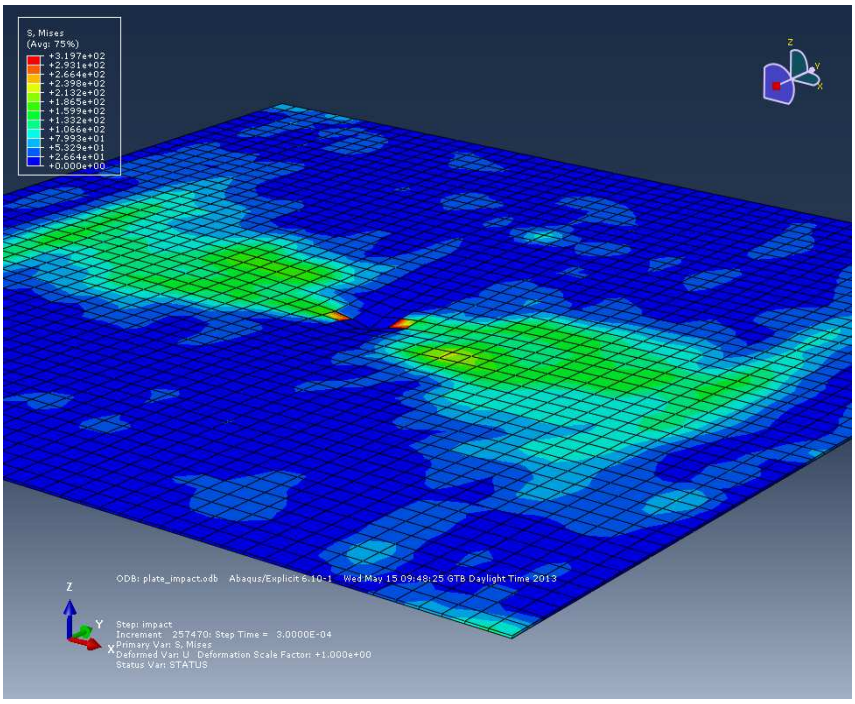

**Σχήμα 52:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό ($5^{th}$ ply)



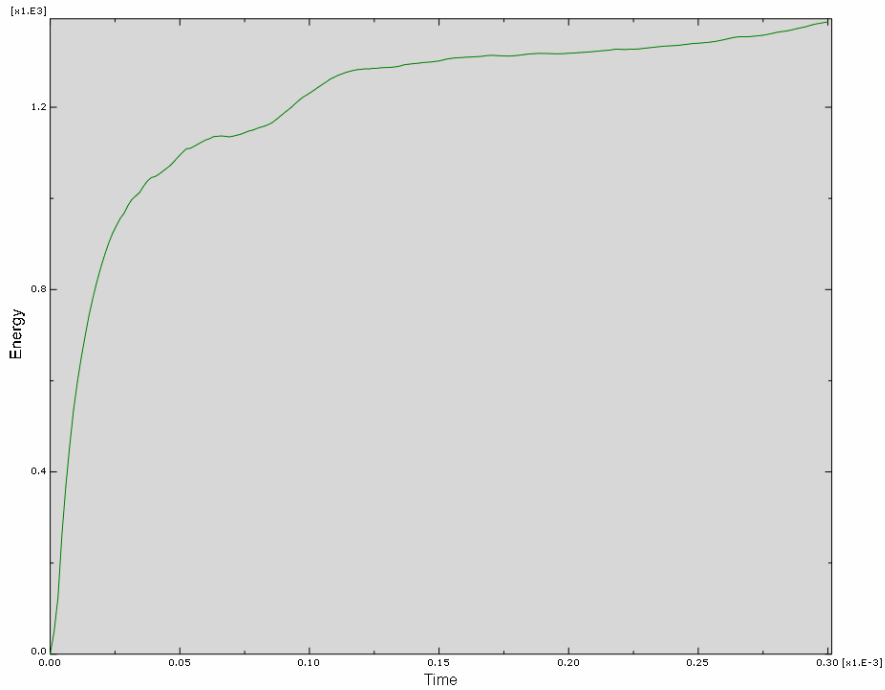

**Σχήμα 53:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό ($6^{th}$ ply)



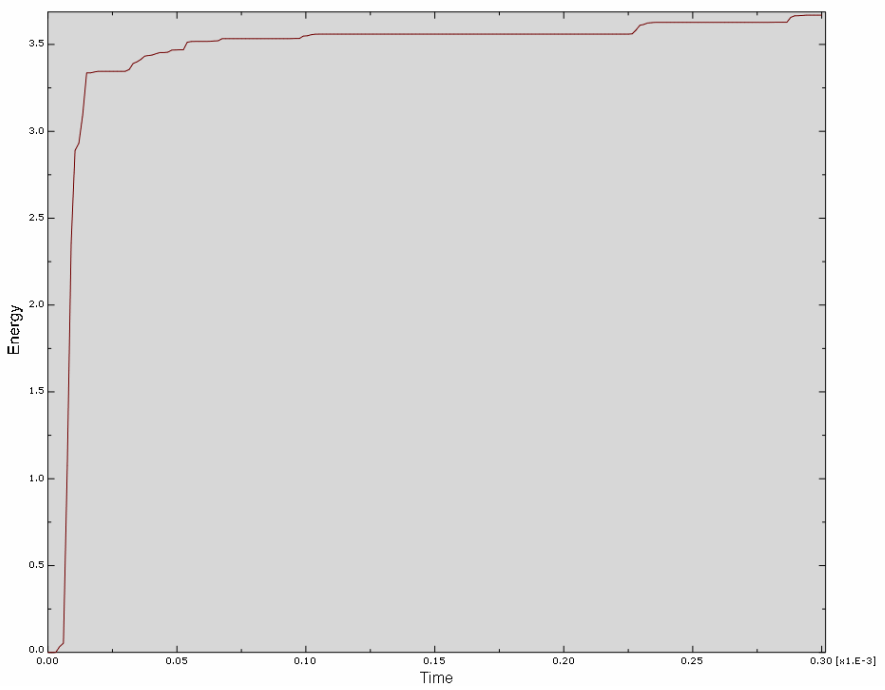

**Σχήμα 54:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (7th ply)



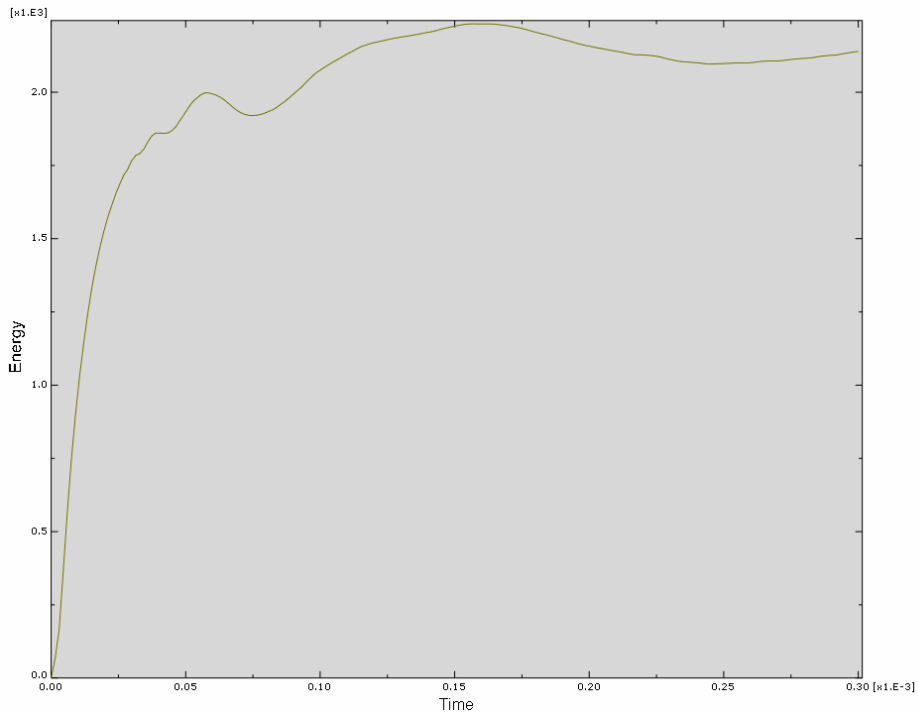

**Σχήμα 55:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (8th ply)



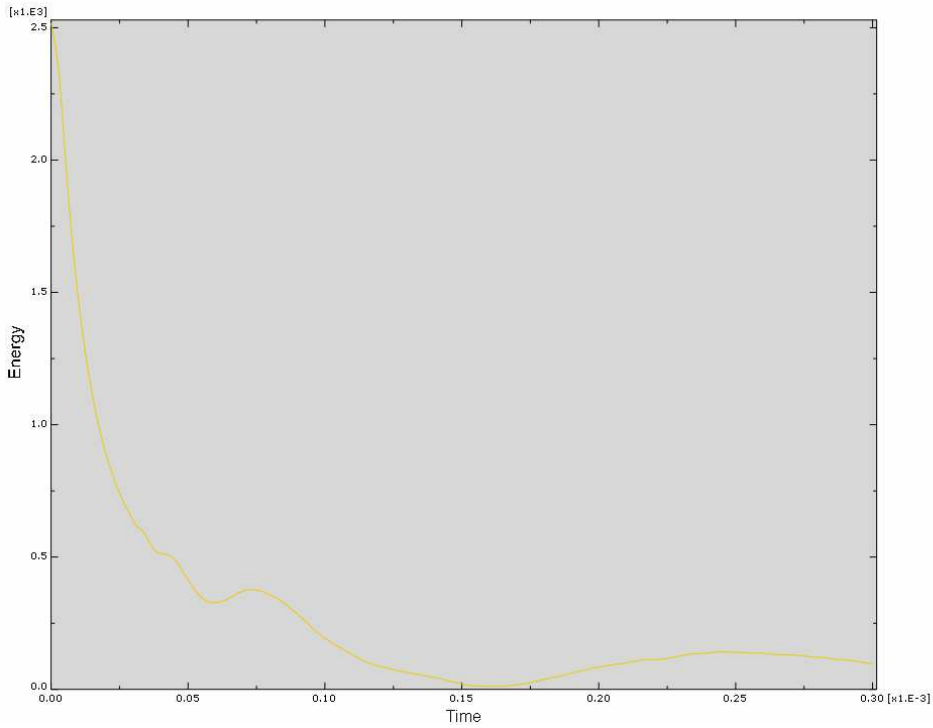

**Σχήμα 56:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (Artificial strain energy)



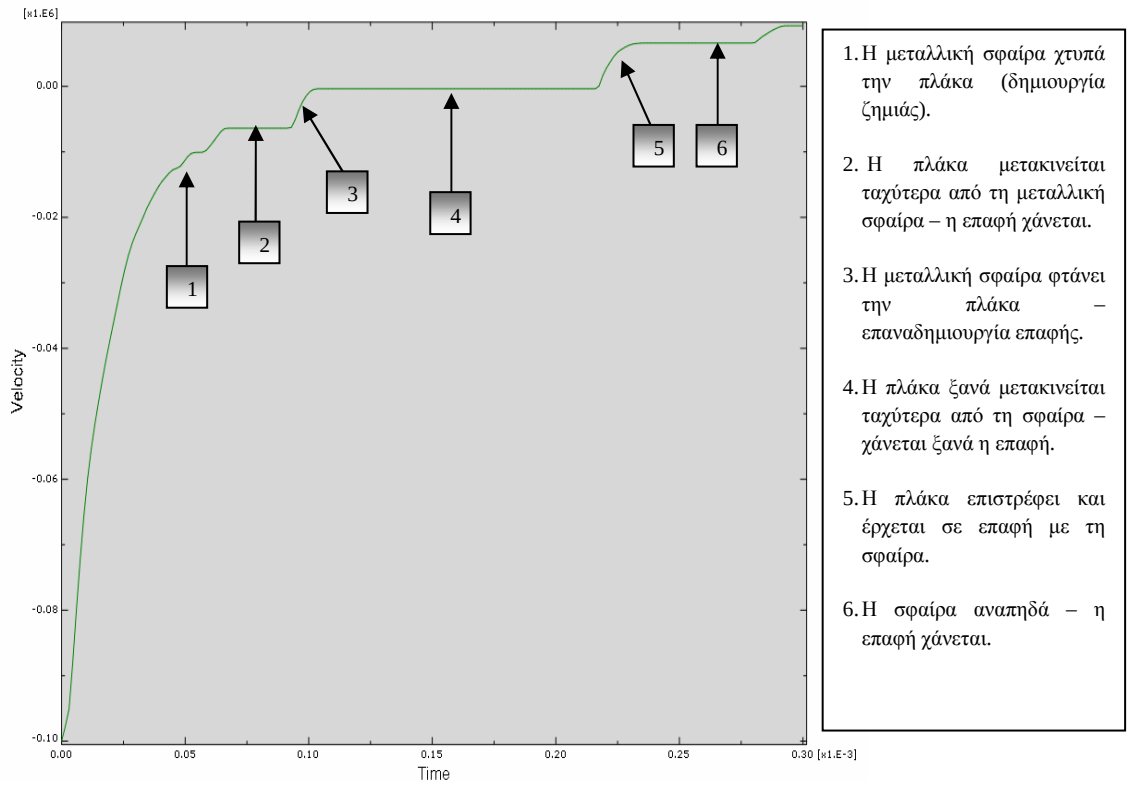

**Σχήμα 57:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (Frictional dissipation)



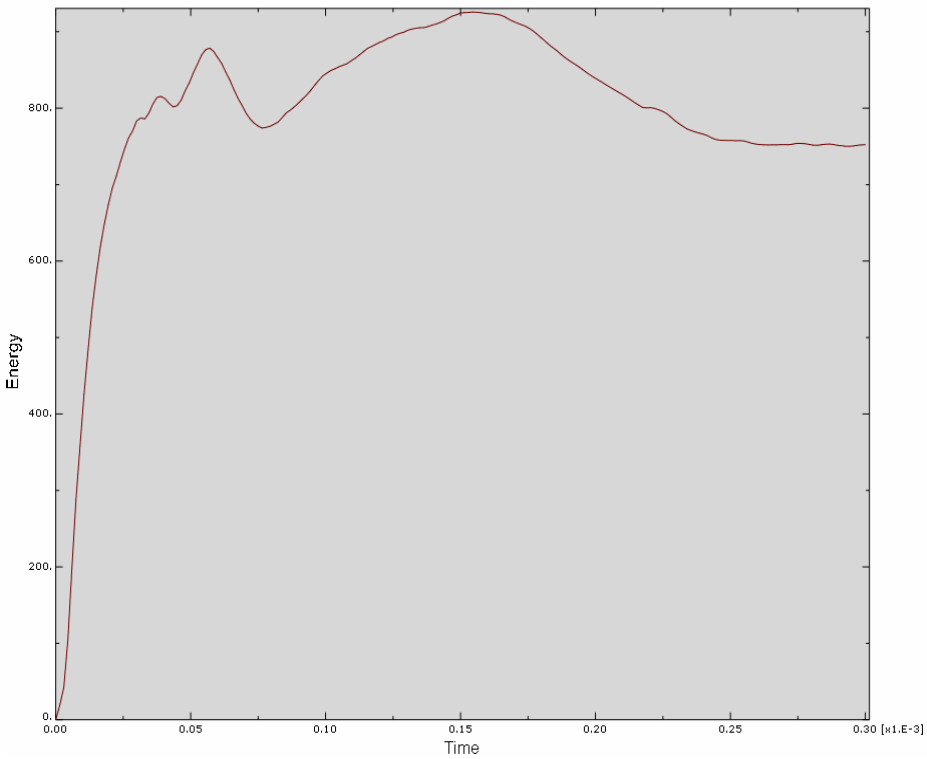

**Σχήμα 58:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (Internal energy)



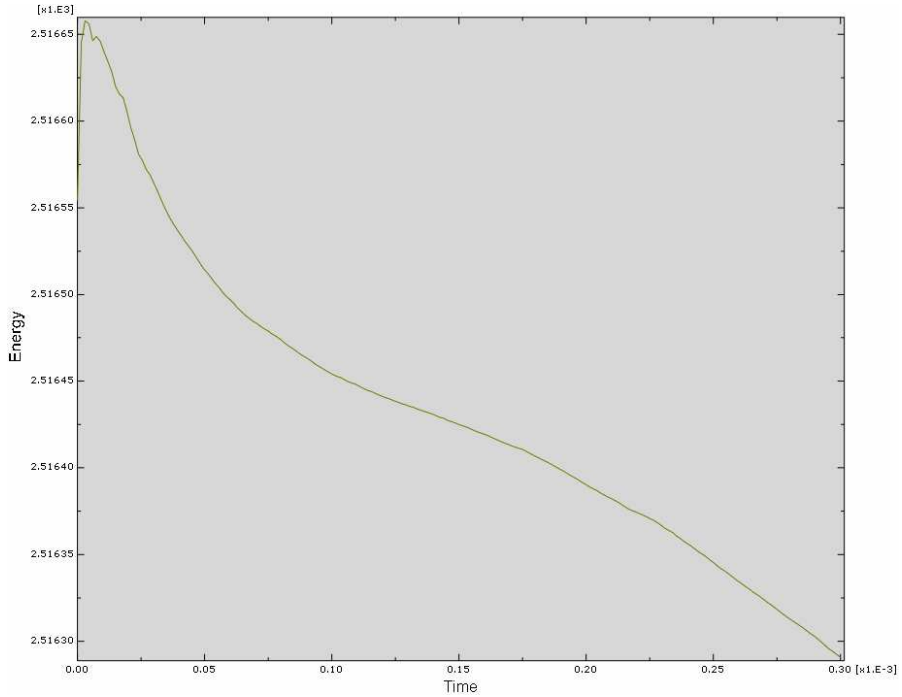

**Σχήμα 59:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (Kinetic Energy)



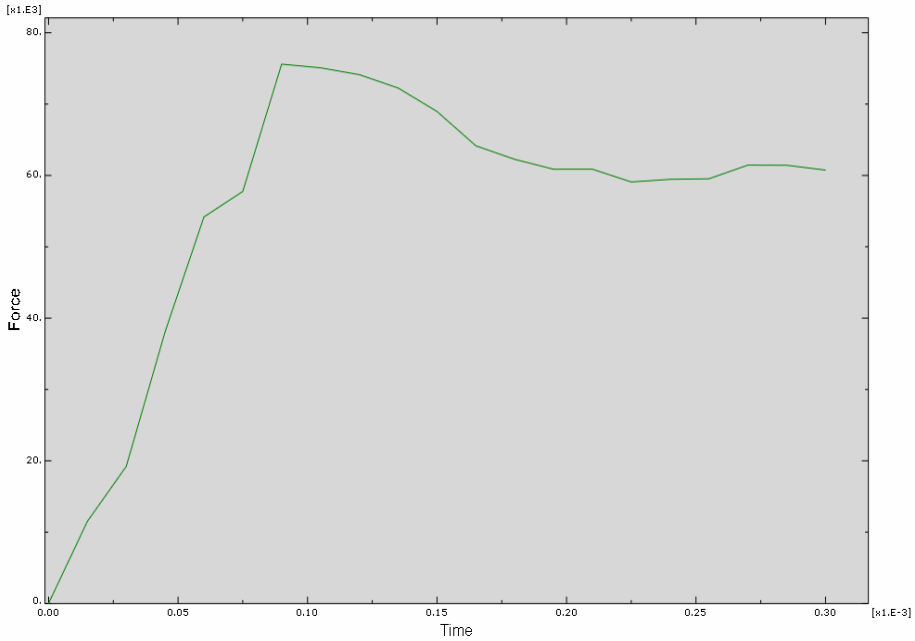

**Σχήμα 60:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό - ταχύτητα σφαίρας (κόμβος 1106)



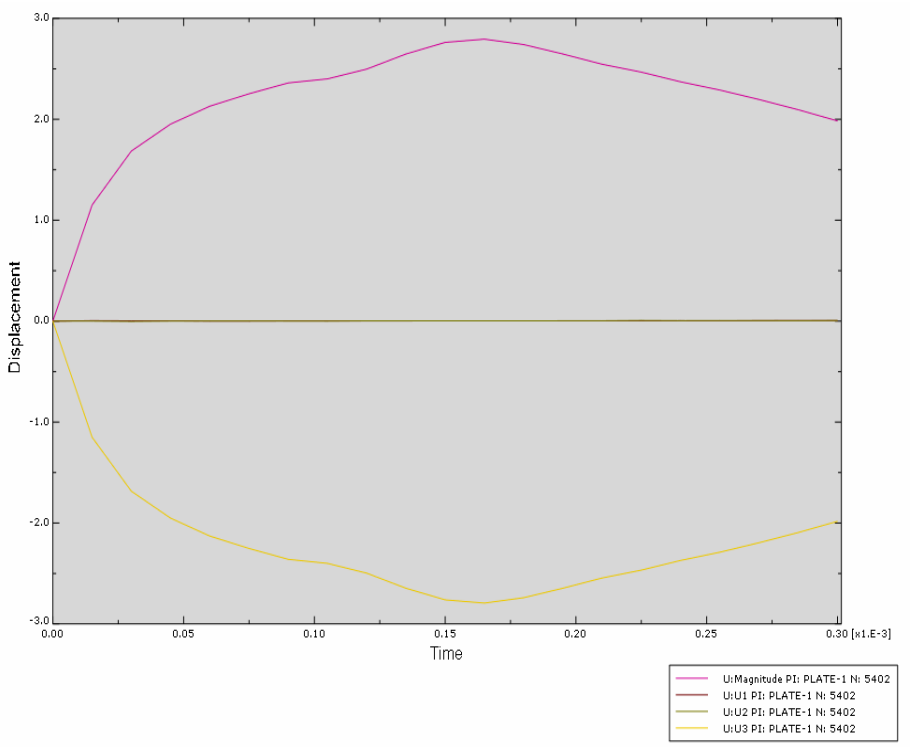

**Σχήμα 61:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (Ενέργεια παραμόρφωσης μοντέλου)




**Σχήμα 62:** Προσομοίωση κρούσης πλάκας από σύνθετο υλικό (Συνολική ενέργεια μοντέλου)




**Σχήμα 63:** Δύναμη κρούσης σε σχέση με το χρόνο




**Σχήμα 64:** Μετατόπιση σημείου κρούσης της πλάκας

# 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

## 7.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία καλύπτεται ένα μεγάλο εύρος ανάλυσης του φαινομένου κρούσης χαμηλής ταχύτητας σε μονολιθική, επίπεδη και τετραγωνική πλάκα πολυμερούς σύνθετου υλικού με ενίσχυση ινών. Συνοψίζοντας, γίνεται παρουσίαση των αναλυτικών, των τυποποιημένων πειραματικών και των υπολογιστικών μεθόδων προσέγγισης του φαινομένου της κρούσης και της ζημιάς που προκαλείται εξαιτίας της επιβολής κρουστικής δύναμης σε δομή σύνθετου υλικού. Η υπολογιστική μελέτη αφορά το σχηματισμό και την εφαρμογή καταστατικών μοντέλων για την περιγραφή της συμπεριφοράς του σύνθετου υλικού, και την αποτίμηση της αποδοτικότητας των εικονικών δοκιμών με χρήση πεπερασμένων στοιχείων στις περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούνται αυτά τα μοντέλα.

## 7.2 Μελλοντικές εργασίες – προτεινόμενο πεδίο έρευνας

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας του φαινομένου της κρούσης σε δομή από σύνθετο υλικό, που οφείλεται κατά κύριο λόγω στην ύπαρξη σύνθετων μηχανισμών διάδοσης της ζημιάς, μια πιο λεπτομερής και στοχευόμενη ανάλυση θα πρέπει να πραγματοποιηθεί με στόχο την επίτευξη πιο ρεαλιστικών αποτελεσμάτων. Η ανάλυση αυτή θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω έρευνας, ενώ θα πρέπει κατά κύριο λόγο να επικεντρωθεί στα ακόλουθα πεδία – κατευθύνσεις:

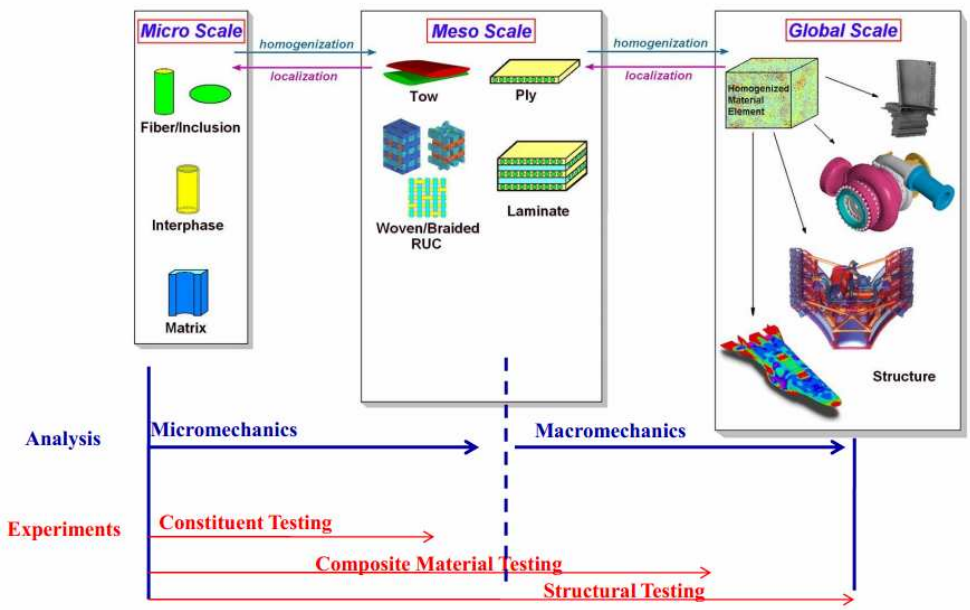
- Σύγκριση αναλυτικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων με πειραματικά δεδομένα (εκτέλεση πειραμάτων ή βιβλιογραφία) για διάφορες περιπτώσεις κρούσης (διαφορετική διαστρωμάτωση, ενέργειες κρούσης).

- Προσομοίωση δοκιμής θλίψης μετά την κρούση (compression after impact) και πρόβλεψη εναπομένουσας αντοχής της κατασκευής λόγω κρούσης (residual strength of impacted structure) μέσω υπολογιστικών μοντέλων.

- Δημιουργία υπορουτινών VUMAT (σε Fortran) στο Abaqus για το μοντέλο ζημιάς αποκόλλησης των στρώσεων (Turon 2006) και για το μοντέλο θραύσης της μήτρας συνεχούς μέσου (continuum damage model).

- Ενσωμάτωση των νέων μοντέλων ζημιάς των σύνθετων υλικών στα μοντέλα κρούσης του Abaqus με τη μορφή υπορουτινών VUMAT και σύγκριση αποτελεσμάτων.

- Καταγραφή και εφαρμογή μοντέλων πολλαπλής κλίμακας (**multiscale damage models**) που λαμβάνουν υπόψη ταυτόχρονα την εγκάρσια θραύση της μήτρας (transverse cracking), την αποκόλληση των στρώσεων (delamination) καθώς επίσης και την αλληλεπίδραση (interaction) μεταξύ των δύο αυτών ειδών ζημιάς σε διαφορετικές κλίμακες (μικροκλίμακα: επίπεδο ίνας/μήτρας, μεσοκλίμακα: επίπεδο στρώσης και πολύστρωτου και μακροκλίμακα: επίπεδο κατασκευής) (σχήμα 65).




**Σχήμα 65: Αλληλεπίδραση των σχετικών κλιμάκων στη δομική ανάλυση και δοκιμή.**

Δημιουργία υπορουτινών VUMAT σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran και ενσωμάτωσή τους στα μοντέλα κρούσης του Abaqus – Σύγκριση με προηγούμενα μοντέλα καθώς επίσης και με πειραματικά δεδομένα από δοκιμές ή βιβλιογραφία.

- Προσέγγιση φαινομένου κρούσης μέσω της μεθοδολογίας πολλαπλών επιπέδων (**multilevel approach**) η οποία βασίζεται σε συνολική προσέγγιση με μέσω χονδροκομμένης και γραμμικής μοντελοποίησης (global coarse and linear modelling) και τοπικής λεπτομερούς και μη γραμμικής μοντελοποίησης (finer and non linear simulation.

## 8. Βιβλιογραφία

[1] Abrate, S.. Impact on composite structures. Cambridge, UK: Cambridge University Press; 1998.

[2] Christoforou, A.P.. Impact dynamics and damage in composite structures. Composite Structures 2001;52(2):181-188.

[3] Christoforou, A.P., Yigit, A.S.. Characterization of impact in composite plates. Composite Structures 1998;43(1):15-24.

[4] Olsson, R.. Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 2000;31(8):879-887.

[5] Davies, G.A.O., Olsson, R.. Impact on composite structures. The Aeronautical Journal 2004;108(1089):541-563.

[6] Olsson, R.. Impact response of composite laminates – a guide to closed form solutions, FFA TN 1992-33. Tech. Rep.; The Aeronautical Research Institute of Sweden, Bromma; 1993.

[7] Olsson, R., Donadon, M.V., Falzon, B.G. Delamination threshold load for dynamic impact of plates. International Journal of Solids and Structures 2006; 43(10):3124-3141.

[8] Olsson, R.. Analytical prediction of large mass impact damage in composite laminates. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 2001;32(9):1207-1215.

[9] Olsson, R.. Closed form prediction of peak load and delamination onset under small masss impact. Composite Structures 2003;59(3):341-349.

[10] Yigit, A.S., Christoforou, A.P.. Limits of asymptotic solutions in low-velocity impact of composite plates. Composite Structures 2007;81(4):568-574.

[11] Christoforou, A.P., Yigit, A.S.. Effect of flexibility on low velocity impact response. Journal of Sound and Vibration, 1998;217(3):563-578.

[12] Abrate, S.. Modeling of impacts on composite structures. Composite Structures 2001;51(2):129-138.

[13] Schoeppner, G.A., Abrate, S.. Delamination threshold loads for low velocity impact on composite laminates. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 2000;31(9):903-915.

[14] Johnson, K.L.. Contact mechanics. Cambridge University Press; 1985.

[15] Olsson, R.. Impact response of orthotropic composite plates predicted from a one – parameter differential equation. AIAA Journal 1992;30(6):1587-1596.

[16] Dahan, M., Zarka, J.. Elastic contact between a sphere and a semi infinite transversely isotropic body. International Journal of Solids and Structures 1980;16(5):409-419.

[17] Turner, J.R.. Contact on a transversely isotropic half-space, or between two transversely isotropic bodies. International Journal of Solids and Structures 1980;16(5):409-419.

[18] Swanson, S.R. Hertzian contact of orthotropic materials. International Journal of Solids and Structures 2004;41(7):1945-1959.

[19] Yang, S.H., C.T.. Indenatation law for composite laminates. Composite Materials: Testing and Design (Sixth Conference), ASTM STP 787. ASTM Special Technical Publication; 1982, p.425-449.

[20] Christoforou, A.P.. On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate. Composite Structures 1993;26(1-2):77-82.

[21] Yigit, A.S., Christoforou, A.P.. On the impact of a spherical indenter and an elastic-plastic transversely isotropic half-space. Composites Engineering 1994;4(11):1143-1152.

[22] Tan, T.M., Sun, C.T.. Use of statical indentation laws in the impact analysis of laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics 1985;52(1):6-12.

[23] Grezczuk, L.B.. Damage in composite materials due to low velocity impact. New York: John Wiley and Sons; 1982.

[24] Crook, A.W.. A study of some impacts between metal bodies by a piezoelectric method. Proceedings of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical 1952;212(1110):337-390.

[25] Christoforou, A.P., Swanson, S.R. Analysis of impact response in composite plates. International Journal of Solids and Structures 1991;27(2):161-170.

[26] Christoforou, A.P., Yigit, A.S.. Scaling of low-velocity impact response in composite structures. Composite Structures 2009;91(3):358-365.

[27] Davies, G.A.O.. Structural Impact and Crashworthiness: Keynote lectures; vol. 1. International Conference on Structural Impact and Crashworthiness. Elsevier Applied Science Publishers;1984.

[28] Vlot, A.. Low Velocity Impact Loading on Fibre Reinforced Aluminium Laminates (PhD Thesis).1991.

[29] ASTM D7136/D7136M-05. Standard Test Method for Measuring the Damage Resistance of a Fiber Reinforced Polymer Matrix Composite to a Drop-Weight Impact Event. ASTM International. West Conshohocken PA, USA.2005.

[30] Reddy, J.N.. Theory and analysis of elastic plates and shells. Philadelphia: Taylor and Francis; 2007.

[31] Zener, C.. The intrinsic inelasticity of large plares. Physical Review 1941;59(8):669-673.

[32] Swanson, S.R.. Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures. Composites Engineering 1992;2(4):261-267.

[33] Shivakumar, K.N., Elber, W., Illg, W.. Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates. Journal of Applied Mechanics 1985;52(3):674-680.

[34] Davies, G.A.O., Zhang, X., Zhou, G., Watson, S.. Numerical modeling of impact damage. Composites 1994;25(5):342-350.

[35] Elder, D.J., Thomson, R.S., Nguyen, M.Q., Scott, M.L.. Review of delamination predictive methods for low speed impact of composite laminates. Composite Structures 2004;66(1-4):677-683.

[36] Sjoblom, P.O., Hartness, J.T., Cordell, T.M.. On low-velocity impact testing of composite materials. Journal of Composite Materials 1988;22(1):30-52.

[37] Nettles, A.T.. Basic mechanics of laminated composite plates. Tech. Rep. NASA Reference Publication 1351; 1994.

[38] Dávila, C.G.. Camanho, P.P.. Physically based failure criteria for transverse matrix cracking. 9th Portuguese conference on fracture. Setubal, Portugal. 2004, p1-8.

[39] Camanho, P.P., Dávila, C.G., Pinho, S.T., Iannucci, L., Robinson, P.. Prediction of in situ strengths and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 2006;37(2)165-176.

[40] Dávila, C.G., Jaunky, N., Goswami, S.. Failure criteria for FRP laminates in plane stress. Vol. 7. 2003, p. 5380-5390.

[41] Pinho, S.T., Dávila, C.G., Camanho, P.P., Iannucci, L., Robinson, P.. Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. Tech. Rep. NASA/TM-2005-213530;2006.

[42] Dávila, C.G., Camanho, P.P., Rose, C.A.. Failure criteria for FRP laminates. Journal of Composite Materials 2005;39(4):323-345.

[43] Conway, H.D., Farnham, K.A., Ku, T.C.. The indentation of a transversely isotropic half-space by a rigid sphere. Journal of Applied Mechanics 1967;34:491-492.

[44] Olsson, R., Nilsson, S.. Simplified prediction of stresses in transversely isotropic composite plates under Hertzian contact load. Composite Structures 2006;73(1):70-77.

[45] Liu, D.. Impact-induced delamination – A view of bending stiffness mismatching. Journal of Composite Materials 1988;22(7):674-692.

[46] Morita, H., Adachi, T., Tateishi, Y., Matsumoto, H.. Characterization of impact damage resistance of CF/PEEK and CF/toughened epoxy laminates under low and high velocity impact tests. Journal of Reinforced Plastics and Composites 1997;16(2):131-143.

[47] Davies, G.A.O., Zhang, X.. Impact damage prediction in carbon composite structures. International Journal of Impact Engineering 1995;16(1):149-170.

[48] Zhang, X.. Impact damage in composite aircraft structures. Experimental testing and numerical simulation. Proceedings of the Insitution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering 1998;212(4):245-259.

[49] Jackson, W.C., Poe, C.C.. Use of impact force as a scale parameter for the impact response of composite laminates. Journal of Composites Technology and Research 1993;15(4):282-289.

[50] Davies, G.A.O., Robinson, P.. Predicting failure by debonding delaminations. In: debonding/delamination of composites, AGARD-CP-530 (Advisory Group for Aerospace Research and Development). Neuilly Sur Seine, France. 1992, p.5-11.

[51] Suemasu, H., Majima, O.. Multiple delaminations and their severity in circular axisymmetric plates subjected to transverse loading. Journal of Composite Materials 1996;30(4):411-453.

[52] Wen, H.M.. Predicting the penetration and perforation of FRP laminates struck normally by projectiles with different nose shapes. Composite Structures 2000;49(3):321-329.

[53] Wen, H.M.. Penetration and perforation of thick FRP laminates. Composites Science and Technology 2001;61(8):1163-1172.

[54] Hsiao, H.M., Daniel, I.M., Cordes, R.D.. Strain rate effects on the transverse compressive and shear hahavior of unidirectional composites. Journal of Composite Materials 1999;33(17):1620-1642.

[55] Richardson, M.O.W., Wisheart, M.J.. Review of low-velocity impact properties of composite materials. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 1996;27(12):1123-1131.

[56] Reddy, J.N.. Theory and analysis of elastic plates and shells. Philadelphia: Taylor and Francis; 2007.

[57] González, E.V. Miami, P., Turon, A., Camanho, P.P. Renart, J..Simulation of delamination by means of cohesive elements using an explicit finite element code. Computers Materials and Contiua – CMC 2009;9(1): 51-92.

[58] Lopes, C.S Camanho, P.P. Gurdal, Z., Miami, Gonzalez, E.V. Low velocity impact damage on dispersed stacking sequence laminates, Part II: Numerical simulations. Composites Science and Technology 2009;69(7-8):937-947.

[59] González, E.V, Maimí, P., Camanho, P.P., Lopes, C.S., Blanco, N.. Effects of ply clustering in laminated composite plates under low-velocity impact loading. Composites science and Technology 2010.

[60] Turon, A., González, E.V, Maimí, P., Camanho, P.P., Costa, J.. Reformulation of a cohesive damage model to accurately simulate delamination under mixed-mode loading in composites. Mechanics of Materials 2010.

[61] González, E.V, R.. Simulation of interlaminar and intralaminar damage in polymer-based composites for aeronautical applications under impact loading (PhD Thesis); 2010.

[62] Turon, A.. Simulation of delamination in composites under quasi-static and fatigue loading using cohesive zone models (PhD Thesis). 2006.

[63] Maimi, P. Camanho, P.P., Mayugo, J.A., Dávila, C.G.. A continuum damage model for composite laminates: Part I Constitutive model. Mechanics of Materials 2007;39(10):897-908.

[64] Maimi, P. Camanho, P.P., Mayugo, J.A., Dávila, C.G.. A continuum damage model for composite laminates: Part II Computational implementation and validation. Mechanics of Materials 2007;39(10):909-919.

[65] Maimi, P. Camanho, P.P., Mayugo, J.A., Dávila, C.G.. A thermodynamically consistent model for advanced composites. Tech. Rep. NASA / TM-2006-214282; 2006.

[66] Maimi, P.. Modelización constitutive y computatcional del daño y la fractura de materials compuestos (PhD Thesis). 2006.

[67] Miguel Bessa, Meso – mechanical model of the structural integrity of advanced composite laminates (MSC thesis); 2010.

[68] Jeannot Frieden ,Characterisation of Low Impact Energy Induced Damage in Composite Plates with Embedded Optical Sensors (PhD thesis); 2011.

[69] Nguyen Duc Anh, Low – energy impact behavior of laminated composite (MSC thesis); 2010.

[70] Jens Wiegand, Constitutive modeling of composite materials under impact loading (PhD thesis); 2008.

[71] ILYAS Muhammad, Damage modeling of carbon epoxy laminated composites submitted to impact loading (PhD thesis); 2010.

[72] Beate D. Heru Utomo, High – speed impact modeling and testing of Dyneema composite (PhD thesis); 2011.

[73] Emre Erbil, Impact loading in laminated composites (MSC thesis), 2008.

[74] Hongquan Liu, Ply clustering effect on composite laminates under low – velocity impact using FEA, 2012.

[75] Luke Francis Thompson, Through – thickness compression testing and theory of carbon fibre composite materials (PhD thesis); 2011.

[76] K.I. Tserpes, V.Karachalios, I.Giannopoulos, V.Prentzias, R.Rusek, Strain and damage monitoring in CFRP fuselage panels using fiber Bragg grating sensors. Part I: Design, manufacturing and impact test. Composite Structures (2013): 1-39.

[77] R.Ruzek, P.Kudrna, M.Kadlec, V.Karachalios, K.I. Tserpes, Strain and damage monitoring in CFRP fuselage panels using fiber Bragg gratin sensors. Part II: Mechanical Testing and Validation. Composite Structures (2013): 1-29.