ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«**Δυσκολίες κατανόησης στη διδακτική των διανυσμάτων**» (Έρευνα σε δείγματα πρωτοετών φοιτητών σε 3 σχολές του ΕΜΠ 2012-2013)

Φοιτητής: Λιονουδάκης Ευτύχιος, Α.Μ: 09105145

Επιβλέπων Καθηγητής: Ανάργυρος Φελλούρης, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Εξεταστική επιτροπή: 1) κ. Παναγιώτης Ψαρράκος, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

2) κ. Πέτρος Στεφανέας, Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα 2014

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία γράφτηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ. Στόχος ήταν η ανάλυση των λαθών στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας σε διαφορετικές σχολές του ΕΜΠ.

Ιδιαίτερα θερμές ευχαριστίες οφείλω στον Αναπληρωτή καθηγητή του τομέα Μαθηματικών της σχολής μου κ.Ανάργυρο Φελλούρη,που ήταν ο εισηγητής της εργασίας αυτής,για τη συνεργασία που είχαμε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την κ. Κάλλια Παυλοπούλου για τις υποδείξεις της στην υλοποίηση της έρευνας.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι τόσο η ποιοτική όσο η ποιοτική ποσοτική ανάλυση των λαθών στη Γραμμική Άλγεβρα σε φοιτητές του ΕΜΠ και συγκεκριμένα στους φοιτητές της σχολής μου, τους Πολιτικούς Μηχανικούς και τους Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς &Μηχανικούς Υπολογιστών.

Τα κεφάλαια με τα οποία θα ασχοληθούμε αφορούν τους Διανυσματικούς Χώρους και τις Ασύμβατες Ευθείες. Η έρευνα και ανάλυση των λαθών έγινε πάνω στα θέματα τελικών εξετάσεων στις τρεις σχολές που ανέφερα του Φεβρουαρίου 2013.

Συγκεκριμένα η εργασία αποτελείται από 4 κεφάλαια:

Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει συνοπτικά την ιστορία του διανυσματικού λογιμσμού.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη θεωρία των διανυσματικών Χώρων, με μια μικρή ιστορική αναφορά στο διανυσματικό λογισμό και τη θεωρία των ασυμβάτων ευθειών.

Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη διατύπωση και λύση καθενός από τα προβλήματα σε βήματα, τη διερεύνηση των λαθών που παρατηρήθηκαν στο δείγμα των φοιτητών και έπειτα την ποιοτική, ποσοτική ανάλυσή τους.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τους λόγους που γίνονται αυτά τα λάθη στη Γραμμική Άλγεβρα. Παρουσιάζουμε την έννοια του διανύσματος στο σχολείο και βαθύτερη ανάλυση των λόγων που εμφανίζονται διάφορες παρανοήσεις.

Αθήνα, Ιανουάριος 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{O}

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Εισαγωγή

Μια από τις πιο δύσκολες, αλλά ταυτόχρονα πιο χρήσιμες, μαθηματικές έννοιες, είναι η έννοια του διανύσματος. Πηγή πολλών παρερμηνειών και γνωστικών συγκρούσεων, αφού είναι πολυδιάστατη και εμπλέκει πολλά επίπεδα κατασκευής της γνώσης, «ταλαιπωρεί» κάθε χρόνο την πλειονότητα των μαθητών. Σε αυτήν μας την εργασία στοχεύουμε στην ανίχνευση και ανάδειξη, όσο αυτό είναι δυνατό στα πλαίσια μια διπλωματικής εργασίας, όλων των σχετικών, με την έννοια του διανύσματος, θεμάτων που απασχολούν τη σύγχρονη έρευνα στη διδακτική των επιστημών.

Ορίστηκαν από τον Tall(Introducing Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics) και τους συνεργάτες του οι τρεις κόσμοι των Μαθηματικών:

- Ο ενσωματωμένος **(embodied)** κόσμος είναι ένας κόσμος των αισθήσεων. Αντλεί την σιγουριά για την αλήθεια από το ότι τα πράγματα συμπεριφέρονται προβλέψιμα με έναν αναμενόμενο τρόπο. Για παράδειγμα, το διάνυσμα να έχει μέγεθος και κατεύθυνση. Η πρόσθεση των διανυσμάτων γίνεται με την τοποθέτηση της ουράς του δεύτερου διανύσματος μετά από τη μύτη του πρώτου, δηλαδή κάνοντάς τα διαδοχικά. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική κάτι που το βλέπουμε γεωμετρικά.

- Ο **proceptual** κόσμος είναι ένας κόσμος του υπολογισμού και του χειρισμού. Οι προτάσεις είναι αληθινές επειδή εκφράζονται μέσα από τα σύμβολα και μπορούν να ελεγχθούν με υπολογισμούς ή κατάλληλους χειρισμούς. Έτσι, τα διανύσματα μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες. Η πρόσθεση των διανυσμάτων γίνεται με την πρόσθεση των συντεταγμένων. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική επειδή η πρόσθεση των συντεταγμένων είναι αντιμεταθετική.

- Ο τυπικός (**formal**) κόσμος είναι ένας κόσμος των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρημάτων. Οι προτάσεις είναι αληθινές επειδή μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα και τους ορισμούς από την τυπική απαγωγή. Τα διανύσματα είναι στοιχεία ενός τυπικού συστήματος που ονομάζεται διανυσματικός χώρος (δεν χρειάζονται πλέον να έχουν μέγεθος ή κατεύθυνση!). Η πρόσθεση των διανυσμάτων είναι μέρος του ορισμού του διανυσματικού χώρου. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική επειδή αυτό είναι, επίσης, μέρος του ορισμού.

2. Συνοπτική ιστορία του διανυσματικού λογισμού

Η ιστορική πορεία μιας έννοιας ενδέχεται να μας προμηθεύσει ιδέες για το ποιο θα μπορούμε να είναι το πλέον κατάλληλο τυπικό παράδειγμα που θα αποτελέσει πυρήνα γύρω από τον οποίο θα δομηθεί μια δραστηριότητα μέσω της οποίας ο μαθητής θα εμπλακεί με την έννοια. Δηλαδή, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να υποστηρίξει πιθανούς τρόπους εισαγωγής ενός μαθηματικού αντικειμένου κατά ένα φυσικό τρόπο (Κεΐσογλου και Σπύρου, 2003, Πάσχος, 2003).

Ακόμη προσανατολίζει το δάσκαλο στη δουλειά του. Είναι ένα καλό όχημα για συλλογισμούς πάνω στη γνώση και στα εκπαιδευτικά προβλήματα, για δουλειά πάνω στις αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά. Αφού οι μαθητές, σε διάφορα επίπεδα, βρίσκουν μαθησιακά εμπόδια τα οποία είναι ίδια με εκείνα των μαθηματικών του παρελθόντος, η ιστορία των μαθηματικών εφοδιάζει την τάξη με δασκάλους, που έχουν ένα ισχυρό εργαλείο πρόβλεψης ψυχολογικών προβλημάτων στη μάθηση των μαθηματικών.

Εξάλλου η αντίληψή μας για την γενικότερη φύση της μαθηματικής επιστήμης και την εξέλιξή της μέσα στην ιστορική πορεία είναι βέβαιο ότι επηρεάζει άμεσα την διδακτική άποψη σχετικά με την εξελικτική διαμόρφωση της μαθηματικής γνώσης και τον τρόπο μαθηματικού σκέπτεσθαι σε κάθε άτομο.

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των πρώτων βημάτων του διανυσματικού λογισμού και η ανάδειξη στοιχείων χρήσιμων για τη διδακτική των μαθηματικών.

1.1. **Τα πρώτα ίχνη του διανύσματος**

Ένα καλό σημείο εκκίνησης για αυτήν την προς τα πίσω πορεία, θα είναι η διασαφήνιση της έννοιας του διανύσματος. Σύμφωνα με τους Moon και Spencer μπορούμε να δούμε το διάνυσμα από δυο πλευρές: την **αλγεβρική** και την **γεωμετρική**.

1. Η αλγεβρική φύση των διανυσμάτων

Το διάνυσμα ανήκει στην οικογένεια των hypernumbers, ακολουθεί συγκεκριμένους κανόνες της άλγεβρας. Αυτοί οι hypernumbers είναι μαθηματικές οντότητες κατασκευασμένες από πολλά ανεξάρτητα στοιχεία. Για παράδειγμα:

- Στο χώρο των δύο διαστάσεων: οι μιγαδικοί αριθμοί $z^* = (x,y) = x+iy$.
- Στο χώρο των τριών διαστάσεων, ένα διάνυσμα έχει την μορφή:

$$u_i = (u_1,u_2, u_3)$$

όπου οι αριθμοί u_1, u_2, u_3 καλούνται συντεταγμένες του διανύσματος

και γεωμετρικά αναπαριστούν αποστάσεις πάνω στους άξονες.

- Σε ένα ν-διάστατο χώρο, ένα διάνυσμα είναι της μορφής:

$$u_i = (u_1, u_2,\ldots\ldots, u_\nu)$$

2. Η γεωμετρική φύση των διανυσμάτων

Σαν προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα το διάνυσμα είναι μια γεωμετρική οντότητα ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων (οι αριθμοί που αναπαριστούν το διάνυσμα αλλάζουν, αλλά η οντότητα διάνυσμα παραμένει η ίδια). Για αυτό το λόγο, ίσως η σημαντικότερη ιδιότητα του διανύσματος είναι το αμετάβλητο της γεωμετρικής του αναπαράστασης κάτω από έναν μετασχηματισμό των συντεταγμένων.

Τα παραπάνω μπορεί να μας φανούν πολύ χρήσιμα αν αναλογιστούμε πως μέχρι τα τέλη του $17^{ου}$ αιώνα περίπου, υπάρχουν δυο μαθηματικές παραδόσεις, δυο ρεύματα μαθηματικής σκέψης και διαδικασίας. Η πρώτη, η μαθηματικό-αριθμητική παράδοση, προέρχεται από τη εποχή των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και περιλαμβάνει την προοδευτική διεύρυνση της έννοιας του αριθμού.

Έτσι κατά τη διάρκεια των ετών η έννοια του αριθμού έχει επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει από τους φυσικούς αριθμούς, τους αρνητικούς, τα κλάσματα μέχρι τους πληθάριθμους του Cantor και τα quaternions του Hamilton. Όσον αφορά τη δεύτερη, τη γεωμετρικό-φυσική, πηγάζει από την ανάγκη του ανθρώπου να αναπαραστήσει κάποια φυσικά μεγέθη όπως μήκος, εμβαδόν, όγκος, ταχύτητα κλπ., με τον πιο άμεσο και διαισθητικό τρόπο. Έτσι η φυσική πραγματικότητα αναπαρίσταται από μαθηματικά εργαλεία, όπως τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ας επιστρέψουμε όμως στην προσπάθειά μας αναζήτησης της προέλευσης του διανυσματικού λογισμού. Αν θελήσουμε να διερευνήσουμε την αλγεβρική του φύση θα πρέπει να ψάξουμε μετά τον $16^{ο}$ αιώνα, αφού αυτή την περίοδο έχουμε την εισαγωγή της κατάλληλης γλώσσας στην άλγεβρα (από το Vieta), και τη χρησιμοποίηση συστημάτων συντεταγμένων (από τους Descartes και Fermat). Αντίθετα τα ίχνη του διανύσματος στη γεωμετρικο-φυσική παράδοση τα βρίσκουμε ήδη στην αρχαία Ελλάδα.

1.1.1. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου

Μια από τις βασικότερες ιδέες του διανυσματικού λογισμού είναι ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων. Ήταν γνωστός τουλάχιστον από την εποχή του Αριστοτέλη (300 π.Χ.), ο οποίος τον χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, δυο δυνάμεων. Ακόμη χρησιμοποιήθηκε για τη σύνθεση ταχυτήτων και από άλλους Έλληνες συγγραφείς όπως τον Αρχιμήδη (250 π.Χ.) και τον Ήρωνα (100 μ.Χ.). Ακόμα το συναντάμε σε πολλά γραπτά έργα του $16^{ου}$ και $17^{ου}$ αιώνα, των Simon Stevin of Bruges, Galileo Galilei και Isaac Newton, αλλά και του $18^{ου}$αιώνα από τους Gauss, Argand, Oersted, Ampere και Faraday.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να ξεκαθαρίσουμε πως οι παραπάνω συγγραφείς δεν φαίνεται να γνώριζαν την έννοια του διανύσματος ή της πρόσθεσης διανυσμάτων. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου ήταν για αυτούς ένα εργαλείο που τους βοηθούσε στην κατασκευή διαγράμματος, με το οποίο γινόταν εύκολος ο υπολογισμός της συνισταμένης δυο φυσικών οντοτήτων. Έτσι, η συνεισφορά του στην ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού ήταν μόνο έμμεση, αλλά όχι ασήμαντη, αφού είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι των διανυσμάτων στη φυσική.

1.1.3. **Η επίδραση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.**

Το ενδιαφέρον μας για του μιγαδικούς αριθμούς έγκειται σε δυο αιτίες. Καταρχάς δεν πρέπει να ξεχνάμε πως οι μιγαδικοί είναι ένα διδιάστατο διανυσματικό σύστημα. Επιπλέον, όπως θα δούμε αργότερα, ο Hamilton κατασκεύασε τα quaternions σε μια προσπάθειά του για επέκταση των μιγαδικών στις τρεις διαστάσεις.

Μέχρι το 1831, τουλάχιστον πέντε άτομα οι Wessel, Gauss, Argard, Warren και Mourey, δημοσίευσαν εργασίες τους σχετικά με την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών, ενώ δυο ακόμα ο Wallis και ο Buée έφτασαν πολύ κοντά. Ας σημειωθεί, πως μέχρι τότε δεν γίνονταν ευρέως αποδεκτοί και ονομάζονταν: χίμαιρες, γελοίοι, παράλογοι, φανταστικοί, ψευδείς, πνευματικά βασανιστήρια, ενώ ο ίδιος ο Leibniz τους αποκαλεί "αμφίβια μεταξύ ύπαρξης και μη ύπαρξης".

Θα αναφέρουμε εδώ συνοπτικά κάποια ενδιαφέροντα σημεία από τη πορεία «νομιμοποίησης» των μιγαδικών αριθμών. Ο John Wallis (1616-1703) ήταν ο πρώτος που επιχείρησε να τους κατασκευάσει γεωμετρικά. Αν και απέτυχε, αξίζει να σημειωθεί ότι είναι δική του η ιδέα της αναπαράστασης των μιγαδικών με σημεία στο επίπεδο. Το επόμενο βήμα θα γίνει από το Caspar Wessel (1745-1818), του οποίου ο βασικός στόχος ήταν να εκφράσει την κατεύθυνση οποιασδήποτε ευθείας γραμμής με αναλυτικό τρόπο. Σημαντικά σημεία του έργου του ήταν η εισαγωγή του άξονα των φανταστικών αριθμών, ο ορισμός πράξεων μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων και ο συνυπολογισμός της κατεύθυνσης των ευθειών γραμμών.

Παρόμοιες ήταν και οι ιδέες του Argard, ο οποίος εισήγαγε τον όρο προσανατολισμένη γραμμή ή γραμμή κατεύθυνσης, με μόνη διαφορά ότι αντιμετώπισε τους μιγαδικούς περισσότερο αλγεβρικά. Τελικά το μιγαδικό επίπεδο, όπως το ξέρουμε σήμερα, το οφείλουμε στο Jean Robert Gauss (1768-1822). Αν και το σύστημα του ήταν ανάλογο με αυτό των προαναφερθέντων, η φήμη του ως μαθηματικός έπαιξε τον κύριο λόγο στην επικράτηση των ιδεών του. Αντιμετώπισε όμως τους μιγαδικούς ως μετατοπίσεις: θεώρησε τον $\alpha + \beta\, i$ ως μετατόπιση α μονάδων κατά μια καθορισμένη κατεύθυνση που ακολουθείται από μετατόπιση β μονάδων κατά την κατακόρυφη στην προηγούμενη κατεύθυνση. Επιπλέον σε αντίθεση με τους προηγούμενους, προτίμησε να αναπαραστήσει τους μιγαδικούς με σημεία στο επίπεδο και όχι με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα.

Μέχρι τώρα τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιήθηκαν σαν εργαλεία για την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Από το σημείο όμως αυτό και έπειτα οι όροι αντιστράφηκαν. Με την νομιμοποίηση των μιγαδικών και τον ορισμό πράξεων, μπορούσαν τώρα οι μιγαδικοί να παίξουν το ρόλο αναπαράστασης για τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και επιπλέον να χρησιμοποιηθούν για να οριστούν πράξεις μεταξύ αυτών των τμημάτων. Δημιουργήθηκε δηλαδή ένας διανυσματικός λογισμός του επιπέδου. Τι γίνεται όμως με τον τρισδιάστατο χώρο; Η κατασκευή ενός ανάλογου λογισμού για το χώρο ήταν η επόμενη πρόκληση για την μαθηματική κοινότητα. Πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να το επιτύχουν, αλλά τελικά ήταν ο Hamilton αυτός του οποίου οι προσπάθειες απέδωσαν καρπούς.

1.2. Τα πρώτα διανυσματικά συστήματα.

Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα ήταν πια επιτακτική η ανάγκη για ένα διανυσματικό λογισμό, που με τη βοήθειά του θα μπορούσαν να εκφραστούν οι φυσικοί νόμοι και να ελεγχθεί η καθολικότητά τους. Σημαντικό ρόλο σε αυτό διαδραμάτισε το έργο του William Rowan Hamilton (1805-1865).

1.2.1. Hamilton

Ο Hamilton από μικρή ηλικία έδειξε πως η δίψα του για μάθηση ήταν ακόρεστη. Σαν έφηβος μιλάει και γράφει 13 γλώσσες ενώ ήδη πριν ασχοληθεί εντατικά με τα μαθηματικά είχε διακριθεί στην οπτική και τη μηχανική. Το 1837 παρουσίασε μια άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών, στην οποία παρίστανε τους μιγαδικούς a + b i με τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b). Πλέον οι πράξεις των μιγαδικών ορίζονται απόλυτα αλγεβρικά ως εξής:

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c,\ b \pm d)$$

$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Με τα διατεταγμένα ζεύγη κατάφερε να «εξαφανίσει» τους φανταστικούς, κάτι που ήταν μεγάλο επίτευγμα αφού απελευθέρωσε τους μιγαδικούς από το μυστικισμό που τους περιέβαλλε. Παρατηρούμε, εξάλλου, πως οι παραπάνω πράξεις ικανοποιούν την προσαιτεριστική, την αντιμεταθετική και την επιμεριστική ιδιότητα και ότι με τη βοήθεια του Hamilton οι μιγαδικοί και τα διανύσματα απαλλάσσονται από τη γεωμετρική ερμηνεία.

Όπως ήταν αναμενόμενο ο Hamilton έθεσε το ερώτημα της ύπαρξης αντίστοιχης τρισδιάστατης άλγεβρας. Ουσιαστικά, επιζητούσε τριάδες, οι οποίες να ικανοποιούν την προσαιτεριστική, την αντιμεταθετική και την επιμεριστική ιδιότητα, αν οριστούν οι τέσσερις πράξεις όπως και στα ζεύγη.Η πράξη της πρόσθεσης δεν παρουσίαζε καμία δυσκολία αλλά για δέκα χρόνια τον ταλαιπωρούσε ο πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων. Τελικά, το 1843, συνειδητοποίησε πως οι δυσκολίες που συναντούσε θα εξαφανίζονταν αν αντί για τριάδες χρησιμοποιούσε τετράδες και αν εγκατέλειπε την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Το αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία των quaternions (τετράνια) τα οποία ήταν τετράδες αριθμών της μορφής:

$$(w, x, y, z) \text{ ή } q = w + i\,x + j\,y + k\,z$$

όπου w, x, y, z είναι πραγματικοί αριθμοί και i, j, k είναι τα μοναδιαία διανύσματα που βρίσκονται πάνω στους άξονες x, y και z αντίστοιχα. Ακόμα, τα i, j, k ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$ij = k \quad jk = i \quad ki = j$$

$$ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j$$

$$ii = jj = kk = -1$$

Επίσης, ονόμασε το w βαθμωτό μέρος (scalar part), ενώ το υπόλοιπο διανυσματικό μέρος (vector part). Ο Hamilton ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τους όρους βαθμωτό και διάνυσμα με τη σημερινό μαθηματικό τους νόημα.

Στη συνέχεια παίρνοντας δυο quaternions της μορφής

$$q = i\,x + j\,y + k\,z \text{ και } q' = i\,x' + j\,y' + k\,z'$$

όρισε τα:

$$Sqq' = -(xx' + yy' + zz') \quad \text{και} \quad Vqq' = i\,(yz' - zy') + j\,(zx' - xz') + k\,(xy' - yx').$$

Αυτός ο χωρισμός του πραγματικού μέρους Sqq΄ του γινομένου qq΄ από το διανυσματικό Vqq΄ αντιστοιχεί στο σημερινό εξωτερικό γινόμενο και στο αντίθετο του εσωτερικού γινομένου. Ακόμη απέδειξε πολλά θεωρήματα του γνωστού μας διανυσματικού λογισμού όπως το: Sqq΄ = 0 όταν τα q και q΄ είναι παράλληλα. Τα τελευταία είκοσι δυο χρόνια της ζωής του τα αφιέρωσε σχεδόν αποκλειστικά στην επεξεργασία των quaternions, περιλαμβανομένων των εφαρμογών τους στη δυναμική, στην αστρονομία και την κυματική θεωρία του φωτός. Σήμερα, είναι σαφές ότι δεν ήταν αυτή η συγκεκριμένη μορφή άλγεβρας που ήταν σημαντική, αλλά η ανακάλυψη της τεράστιας ελευθερίας των μαθηματικών να κατασκευάσουν άλγεβρες που δεν χρειάζεται να ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέτουν οι νόμοι της συνήθης αριθμητικής.

1.2.2. Grassmann

Ήδη από το 1840, τρία χρόνια πριν το Hamilton, ο Herman Günther Grassmann (1809-1877) σε μια εργασία του με τίτλο: Theorie der ebbe und flut, είχε αναπτύξει το πρώτο σύστημα διανυσματικής ανάλυσης του χώρου. Η θεωρία του εκδόθηκε βελτιωμένη το 1844 με τίτλο: Ausdehnungslehre, ένα χρόνο μετά την αναγγελία του Hamilton για την ανακάλυψη των quaternions, αλλά παρέμεινε άγνωστη έως και την επανέκδοσή της το 1862. Όμως ακόμα και τότε ο μυστικιστικός, πολύπλοκος και αφηρημένος τρόπος παρουσίασης του έργου του συντέλεσε στο να μην έχει άμεσο αντίκτυπο στην εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού.

Το έργο του Ausdehnungslehre ή λογισμός της επέκτασης (calculus of extension) προσανατολιζόταν προς τη ν-διάστατη γεωμετρία και υπό μια έννοια αποτελεί μια μη-Ευκλείδεια γεωμετρία. Η βασική του ιδέα ήταν ένας τύπος hypernumber (υπεραριθμού) με ν όρους που ονόμασε «επεκτεταμένη ποσότητα» (extensive magnitude) και ήταν της μορφής $x=x_1\varepsilon_1+x_2\ \varepsilon_2+\ldots\ldots+x_n\varepsilon_n$, όπου τα x_1 ,x_2, x_n είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ε_1, ε_2,…., ε_n πρωταρχικές μονάδες.Οι ν διαστάσεις του έδωσαν τη δυνατότητα σε εργασία του το 1855 με τίτλο «Sur les différents genres de multiplication» να ορίσει συνολικά 16 διαφορετικά είδη διανυσματικού γινομένου. Ειδικά για ν = 3 έχουμε μια άλγεβρα διανυσμάτων του χώρου. Αν πάρουμε δύο hypernumbers $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$ και $b=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$ οπου τα a_i, b_i είναι πραγματικοί αριθμοί και τα e_i αποτελούν ένα δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων τότε:

$$a \pm b= (a_1\pm b_1)e_1+(a_2\pm b_2)e_2+ (a_3\pm b_3)e_3,$$

ενώ για το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο όρισε

$$a/b= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\text{και} \qquad [ab]= (a_2b_3-a_3b_2)[e_2e_3]+(a_3b_1-a_1b_3)[e_3e_1]+ (a_1b_2-a_2b_1)[e_1e_2]$$

αντίστοιχα, όπου $e_i/e_i=1$, $e_i/e_j=0$ για I διάφορο του j και $[e_ie_j]=-[e_je_i]$, $[e_ie_i]=0$ για i,j ανήκει στο {1,2,3}

Όπως παρατηρούμε το εσωτερικό γινόμενο του Grassmann μεταξύ δυο υπεραριθμών ισούται με το αντίθετο του βαθμωτού μέρους του γινομένου δυο quaternions του Hamilton. Όσον αφορά το εξωτερικό γινόμενο, αν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε το $[e_2e_3]$ με e_1 θα διαπιστώσουμε πως είναι ακριβώς το ίδιο και στις δυο περιπτώσεις.Επιπλέον, πρώτος ο Grassmann, εισήγαγε την έννοια της γραμμικής εξάρτησης και hypernumbers, κάτι που τον βοήθησε στο να ορίσει τη διάσταση του χώρου, ως τον μεγαλύτερο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων hypernumbers. Στην έκδοση του 1862 όρισε τη μετρική $\sqrt{(x_1^2+ x_2^2+ . . . x_n^2)}$ όπου $(x_1, x_2,....,x_n)$ είναι μια επεκταμένη ποσότητα , με αποτέλεσμα να μετατρέψει το χώρο σε Ευκλείδειο.

Αν και η θεωρία του Grassmann βρίσκεται πιο κοντά στη σύγχρονη θεωρία των διανυσματικών χώρων και η μεθοδολογία του είναι το πρώτο βήμα για την μελέτη των αλγεβρικών δομών, δεν εκτιμήθηκε στην εποχή του, όπως προείπαμε στην αρχή της παραγράφου. Αντίθετα μεγάλο μέρος του έργου του κατασκευάστηκε εκ νέου από άλλους.

1.2.3. **Άλλα διανυσματικά συστήματα**

Εκτός από το Hamilton και το Grassmann τουλάχιστον άλλοι πέντεμαθηματικοί, οι August Ferdinad Möbius, Giusto Bellavitis, Adhémar Barré (ή Comte de Saint-Venant), Augustin Cauchy και Reverend Matthew O' Brien, ερευνούσαν για διανυσματικά συστήματα.Τα έργα τους είτε είχαν μικρή επίδραση στην ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού είτε δεν είχαν καμία άμεση συμβολή. Η παρουσίασή τους, όμως, θα συνεισφέρει στην εξαγωγή χρήσιμων γνωσιολογικών συμπερασμάτων για την γένεση και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Ας αρχίσουμε, λοιπόν, από το Möbius (1790-1868), ο οποίος κατασκεύασε ένα μαθηματικό σύστημα, το βαρυκεντρικό λογισμό (barycentric calculus), όμοιο σε αρκετά σημεία με το διανυσματικό λογισμό.

Με σύστημά του, ήθελε να αντιμετωπίσει τις γεωμετρικές οντότητες, που ήταν σημεία, ευθέως και από πλεονεκτική θέση. Η πρόσθεση ορίστηκε με τέτοιον τρόπο ώστε να λαμβάνεται υπόψη τόσο το μέγεθος όσο και η θέση. Η θεωρία του εκδόθηκε το 1827 στο Leipzing, όπου ήταν και καθηγητής. Μέχρι το τέλος της ζωής του ασχολήθηκε με αυτήν, βελτιώνοντάς την, κυρίως ύστερα από την επαφή του με το Grassmann.

Ο Bellavitis (1803-1880) ήταν Ιταλός μαθηματικός και δημιουργός του λογισμού των ισοδυναμιών (equipollences). Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, δυο ευθείες καλούνται ισοδύναμες αν είναι ίσες, παράλληλες και έχουν και την ίδια φορά. Οι οντότητες που περιγράφει ο Bellavitis συμπεριφέρονται γεωμετρικά ισοδύναμα με του μιγαδικούς αριθμούς, τους οποίους όμως δεν αναγνώριζε ως αλγεβρικές οντότητες. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως μαζί με τη θεωρία του έδωσε πολλές εφαρμογές της μεθόδου του σε προβλήματα από τα μαθηματικά και τη φυσική, κάτι που έκανε τόσο ο Hamilton όσο και ο Grassmann. Τελικά, το σύστημά του δεν είχε καμία απήχηση, ύστερα και από την αποτυχία του να το επεκτείνει στον τρισδιάστατο χώρο.

Ας περάσουμε στο Saint-Venant (1797-1886) που ήταν Γάλλος μηχανικός γνωστός από την ερευνά του για την ελαστικότητα. Όρισε τη διανυσματική πρόσθεση, αφαίρεση, διαφόριση καθώς και τον πολλαπλασιασμό όμοια με το σημερινό εξωτερικό γινόμενο. Αν και είχε επαφές με τους Cauchy και Grassmann, η επιρροή που άσκησε στη μαθηματική κοινότητα, ήταν πολύ μικρή.

Το 1853 ο Cauchy (1789-1857) εξέδωσε μια εργασία του με τίτλο: Sur les clefs algébriques, η οποία περιείχε μεθόδους για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Σε αυτήν εισήγαγε δυο οντότητες τις i και j που ονόμασε αλγεβρικά κλειδιά και για τις οποίες ίσχυε $i \cdot j = j \cdot i = 0$ και $i \cdot j = -j \cdot i$.Όπως παρατηρούμε, τα κλειδιά του Cauchy είναι αλγεβρικά ισοδύναμα με τα επεκτεταμένα μεγέθη του Grassmann, όσον αφορά το εξωτερικό γινόμενο. Αυτό ανάγκασε τον δεύτερο να ζητήσει από τη Γαλλική Ακαδημία το 1854 την αναγνώριση της πατρότητας της παραπάνω ανακάλυψης, αν και τελικά η ακαδημία δεν κατέληξε σε κάποια απόφαση. Τέλος, ο O’ Brien (1814-1855) καθηγητής στο King’s College, ασχολήθηκε με τη διανυσματική ανάλυση κυρίως τα τελευταία δέκα χρόνια της ζωής του. Το σύστημά που πρότεινε έχει πολλά κοινά με το σημερινό διανυσματικό λογισμό, αλλά η μη κατανόηση από τον ίδιο της προσεταιριστικής ιδιότητας του στέρησε τον τίτλο του «πατέρα της διανυσματικής ανάλυσης ».

Τρεις βασικές αρχές για τη διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας από τον Dorier.

Ο Harel θέτει 3 αρχές για τη διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας , εμπνευσμένος από τη ψυχολογική θεωρία του Piaget για την έννοια της ανάπτυξης: Η αρχή της ορθότητας, η αρχή της ανάγκης και την αρχή της γενικότητας.

Η αρχή της ορθότητας (**Concreteness Principle**) δηλώνει, “Για να μπορέσουν οι μαθητές να αποσπάσουν μια μαθηματική δομή από ένα δοθέν μοντέλο αυτής της δομής , τα στοιχεία αυτού του μοντέλου πρέπει να είναι εννοιολογικές οντότητες στα μάτια των μαθητών, το οποίο σημαίνει, ο μαθητής έχει ψυχικές διαδικασίες που μπορούν να πάρουν αυτά τα αντικείμενα σαν ‘’εισόδους’’ . Αυτή η αρχή παραβιάζεται οποτεδήποτε η γενική ιδέα του διανυσματικού χώρου διδάσκεται σαν γενίκευση από αφηρημένες δομές, σε μαθητές που δεν έχουν (ακόμα) κατασκευάσει αντικείμενα από αυτές τις δομές σαν ψυχικες διαδικασίες στις οποίες άλλες πνευματικές λειτουργίες μπορούν να διεξαχθούν.

Ξεκινώντας από την προϋπόθεση ότι οι μαθητές χτίζουν την κατανόηση μιας έννοιας στα συμφραζόμενα που είναι για να τους βοηθήσουν, ο Harel καταλήγει ότι η έμφαση σε μια γεωμετρική ενσάρκωση της αφηρημένης έννοιας της γραμμικής άλγεβρας παράγει μια αρκετά στερεή βάση για τη μαθηματική κατανόηση. Επέμενε, όμως, ότι θα ήταν λάθος να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας πρέπει να ξεκινάει με γεωμετρία και να χτίζει τις αλγεβρικές έννοιες σαν μια γενίκευση της γεωμετρίας. Ένα παράδειγμα διδασκαλίας βασισμένο στην προϋπόθεση που επιτρέπει ο Harel για να το παρατηρήσεις είναι όταν η γεωμετρία εισάγεται πριν από τις αλγεβρικές ιδέες που έχουν σχηματιστεί, αρκετοί μαθητές παραμένουν στον περιορισμένο κόσμο των γεωμετρικών διανυσμάτων και δε μετακινούνται σε μια γενική υπόθεση.

Η αρχή της ανάγκης(**The Necessity Principle**) - Για να μάθουν οι μαθητές, πρέπει να δουν μια (νοερή σαν αντίθεση στην κοινωνική ή οικονομική) ανάγκη για ότι είναι διατεθειμένοι να διδαχθούν- βασίζεται στην υπόθεση του Piaget (που επίσης έχει υιοθετηθεί από τη Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων που επεξεργάστηκε από τον Brousseau) ότι η γνώση αναπτύσσεται σαν λύση σε ένα πρόβλημα. Εάν ο δάσκαλος λύνει τα προβλήματα για τους μαθητές και το μόνο που ζητάει είναι η αναπαραγωγή των λύσεων ,τότε θα μάθουν να αναπαράγουν τις λύσεις των δασκάλων και όχι πώς να λύνουν τα προβλήματα. Ο ορισμός του διανυσματικού χώρου από μια παρουσίαση των ιδιοτήτων του R^n είναι ένα παράδειγμα παράβασης από την αρχής της ανάγκης(necessity Principle).

Η τελευταία , η αρχή της γενικότητας (**Generalisability Principle)** που αξιώνεται από τον Harel, ανησυχεί περισσότερο για τις διδακτικές αποφάσεις παρατηρώντας την επιλογή του διδακτικού υλικού περισσότερο από τη διαδικασία της μάθησης από μόνη της. ʹʹ Όταν η εισαγωγή αφορά ένα συγκεκριμένο μοντέλο, που είναι ένα μοντέλο που ικανοποιεί την αρχή της γενικότητας (Concreteness Principle), οι διδακτικές δραστηριότητες μέσα σε αυτό το μοντέλο πρέπει να επιτρέπουν και να ενθαρρύνουν την γενίκευση των εννοιών.« Αυτή η αρχή θα παραβιαζόταν αν αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούνταν για χάρη μιας ειδικής υλοποίησης σα να έχει λίγα κοινά με τις γενικές έννοιες που έχουμε σα στόχο. Για παράδειγμα, η θεωρία της γραμμικής εξάρτησης εισάγεται σε μια γεωμετρικό γενικό πλαίσιο και ορίζεται μέσω συγγραμικότητας ή συνεπιπεδότητα (co-planarity) δεν γενικεύεται εύκολα σε αφηρημένους διανυσματικούς χώρους. Η δουλειά του Harel ενέπνευσε την αναμόρφωση της διδακτέας ύλης στην USA όπως και συγγραφείς βιβλίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

Διανυσματικοί Χώροι ή Γραμμικοί Χώροι
Vector Spaces - Linear Spaces

Θεωρούμε ένα σώμα R. Καλούμε ένα σύνολο Ω **διανυσματικό χώρο** ή **γραμμικό χώρο** επί του σώματος R, εφόσον έχουμε ορίσει τους παρακάτω **δύο** νόμους με τις ιδιότητές τους επί του συνόλου Ω:

A. Μια *<u>πρόσθεση</u>* των μελών του Ω (*<u>εσωτερικός νόμος</u>*), δηλαδή μια απεικόνιση του ΩxΩ στο Ω η οποία σε κάθε ζεύγος (x, y), όπου x, y $\in$ Ω αντιστοιχεί ένα στοιχείο του Ω που το συμβολίζουμε με $x + y$ και η οποία έχει τις ιδιότητες:

i) Υπάρχει ένα στοιχείο (**ουδέτερο** ή **μηδενικό**) του Ω που το συμβολίζουμε με O_Ω τέτοιο ώστε:

$$\forall x \in \Omega \quad x + O_\Omega = O_\Omega + x = x$$

ii) Για κάθε στοιχείο *x* του συνόλου Ω υπάρχει ένα στοιχείο *y* στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε:

$$x + y = y + x = O_\Omega$$

Το στοιχείο y καλείται **συμμετρικό** ή **αντίθετο** του *x* και συμβολίζεται με $-x$.

iii) $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad \forall x,y,z \in \Omega$ **προσεταιριστική.**

iv) $x+y=y+x, \quad \forall x,y \in \Omega$ **αντιμεταθετική.**

Συνεπώς το σύνολο Ω είναι μια **αντιμεταθετική ομάδα** (ή **αβελιανή ομάδα**).

B. Μια *<u>απεικόνιση</u>* του RxΩ εντός του Ω (*<u>εξωτερικός νόμος</u>*), δηλαδή σε κάθε ζεύγος (λ, x), όπου $\lambda \in$R και $x \in \Omega$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο του Ω που το συμβολίζουμε με λx και η οποία έχει τις ιδιότητες:

i) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in \Omega, \quad \forall \lambda \in R$

ii) $(\lambda+\mu)x - \lambda x+\mu x, \quad \forall \lambda \in R, \quad \forall \mu \in R, \quad \forall x \in R$

iii) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x), \quad \forall \lambda \in R, \quad \forall \mu \in R, \quad \forall x \in \Omega$

iv) $1x = x, \quad \forall x \subset \Omega$, όπου 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του σώματος R

Το σώμα R καλείται **πεδίο συντελεστών**, ενώ τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου Ω **διανύσματα**.

Αν το πεδίο συντελεστών είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών R, τότε ο διανυσματικός χώρος Ω είναι ένας **<u>πραγματικός διανυσματικός χώρος</u>.**

Αν το πεδίο συντελεστών είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών C, τότε ο διανυσματικός χώρος Ω είναι ένας **<u>μιγαδικός διανυσματικός χώρος</u>**.

Το **ουδέτερο στοιχείο** ή **μηδενικό διάνυσμα** του διανυσματικού χώρου Ω υπάρχει και το συμβολίζουμε με O_Ω. Η ύπαρξη του μηδενικού διανύσματος του χώρου εξασφαλίζεται καθόσον ο διανυσματικός χώρος είναι μια *<u>αντιμεταθετική ομάδα</u>*.

Επιπλέον, το **αντίθετο** διάνυσμα του $x \in \Omega$ υπάρχει και το συμβολίζουμε με $-x$. Συνεπώς, η «**<u>αφαίρεση</u>**» ως πράξη ορίζεται κατά το γνωστά:

$$x - y = x + (-y)$$

Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

1. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C με πράξεις τη «συνήθη» πρόσθεση αυτών και τον «συνήθη» πολλαπλασιασμό επί ένα πραγματικό αριθμό, αποτελεί διανυσματικό χώρο επί του σώματος των πραγματικών αριθμών R.

2. Το σύνολο Ω των πραγματικών συναρτήσεων f με πεδίο ορισμό ένα διάστημα A του συνόλου των πραγματικών αριθμών R, δηλαδή $f: A \to R$ με τις παρακάτω «συνήθεις» πράξεις:

   i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in \Omega, \quad \forall x \in A$

   ii) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in R, \quad \forall x \in A$

   αποτελεί διανυσματικό χώρο.

3. Οι **χώροι** $\mathbf{R^n}$

   Ο χώρος n-διάστασης που συμβολίζονται με R^n, είναι το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ των πραγματικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (**συντεταγμένες**) στο οποίο έχουν οριστεί οι πράξεις:

   i) $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad \forall x, y \in R^n$

   ii) $\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \lambda \in R$

Γραμμική Ανεξαρτησία
Linear Independence

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενός διανυσματικού χώρου Ω είναι **<u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u>** αν η σχέση:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = O_n,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ανήκουν στο σώμα R του διανυσματικού χώρου, ικανοποιείται μόνον για:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_R$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι <u>**γραμμικώς εξαρτημένα**</u>.

Αν x_1, x_2, …, x_n είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου Ω, οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμοι:

i) Υπάρχει μία σχέση της μορφής:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_\Omega$$

όπου τα λ_1, λ_2, …, λ_n ανήκουν στο σώμα R του διανυσματικού χώρου Ω και δεν είναι όλα το μηδενικό στοιχείο του σώματος R.

ii) Ένα από τα x_i, i = 1, …, n είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Παραδείγματα

1. **Γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου R^n**

Αν τα διανύσματα:

$$x_i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i, \ldots, \xi_n^i) \quad i = 1, 2, \ldots, \kappa$$

του χώρου R^n είναι γραμμικώς εξαρτημένα, θα πρέπει η σχέση:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_\kappa x_\kappa = 0_R$$

να ισχύει για λ_1, λ_2, …, λ_κ μη όλα μηδέν.

Πράγματι η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\lambda_1(\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_n^1) + \lambda_2(\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^2) + \cdots + \lambda_\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa, \ldots, \xi_n^\kappa) = (0, 0, \ldots, 0)$$

ή υπό μορφή συστήματος n-εξισώσεων με κ-αγνώστους

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \xi_1^1 + \lambda_2 \xi_1^2 + \cdots + \lambda_\kappa \xi_1^\kappa &= 0 \\
\lambda_1 \xi_2^1 + \lambda_2 \xi_2^2 + \cdots + \lambda_\kappa \xi_2^\kappa &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_1 \xi_n^1 + \lambda_2 \xi_n^2 + \cdots + \lambda_\kappa \xi_n^\kappa &= 0
\end{aligned}$$

να έχει μη τετριμμένη (μηδενική) λύση.

Αν το σύστημα έχει τη μηδενική λύση, τότε τα διανύσματα x_i, i = 1, 2, …, κ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα τα n-διανύσματα:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

τότε το προηγούμενο σύστημα γράφεται:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

Προφανώς η λύση του συστήματος είναι:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = 0.$$

οπότε τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (κανονική βάση).

2. Γραμμικώς ανεξάρτητα μονώνυμα
Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων $P(x)$ το πολύ ν βαθμού. Τα μονώνυμα $1, x, x^2, \ldots, x^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

3. Στο διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων $f: R \to R$, οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = 1$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένες, καθόσον ισχύει πάντοτε:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \qquad \textbf{(Πυθαγόρειο θεώρημα)}$$

Βάση Διανυσματικού Χώρου
Vector Space Base

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενός διανυσματικού χώρου Ω αποτελούν μια **<u>βάση</u>** του διανυσματικού χώρου Ω, αν τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επί πλέον παράγουν τον χώρο Ω.

Παράδειγμα:
Αν ο διανυσματικός χώρος είναι ο R^n, τα διανύσματα αυτού:

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)$$

αποτελούν μια βάση (κανονική) του R^n, καθόσον τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κάθε άλλο διάνυσμα του R^n, για παράδειγμα, x = (α_1, α_2, …, α_n) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων, δηλαδή:

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(1,0,\ldots,0) + \alpha_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + \alpha_n(0,0,\ldots,1) =$$
$$= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n$$

Συνεπώς, τα e_1, e_2, …, e_n παράγουν τον χώρο R^n.

Είναι προφανές ότι κάθε διάνυσμα *x* του διανυσματικού χώρου Ω μπορεί να γραφεί σαν ένας ***μοναδικός*** συνδυασμός της βάσης e_1, e_2, …, e_n του διανυσματικού χώρου. Δηλαδή, οι συντελεστές λ_1, λ_2, …, λ_n στην έκφραση:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

είναι μοναδικοί και καλούνται *συντεταγμένες*, ενώ τα διανύσματα της μορφής $\lambda_i e_i$, i = 1, 2, …, n *συνιστώσες* του διανύσματος *x*.

Είναι επίσης προφανές ότι η βάση ενός διανυσματικού χώρου *δεν* είναι *μοναδική*.

Διάσταση Διανυσματικού Χώρου
Vector Space Dimension

Αν σ’ ένα διανυσματικό χώρο υπάρχουν n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, ενώ όλα τα n + 1 διανύσματα αυτού είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε ο διανυσματικός χώρος έχει **διάσταση** n.

1)Σ’ ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, υπάρχει μια βάση με n διανύσματα.
2)Σ’ ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, κάθε σύνολο από n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου αποτελεί και μια βάση του.
3)Αν ένας διανυσματικός χώρος έχει μια βάση, τότε η διάσταση του χώρου ισούται με το πλήθος των στοιχείων (πληθικός αριθμός) της βάσης.

Παραδείγματα:

1. Ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n έχει διάσταση n + 1.

2. Οι χώροι R^n έχουν διάσταση n.

Γραμμικές Απεικονίσεις
Linear Mappings

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους A και B επί του σώματος R και μία απεικόνιση *u* του A στον B. Θα λέμε ότι η απεικόνιση *u* είναι **<u>γραμμική</u>** αν ισχύουν:

i) $u(x+y)=u(x)+u(y), \quad \forall x,y \in A$

ii) $u(\lambda x)=\lambda u(x), \quad \forall x \in A \quad \kappa\alpha\iota \quad \forall \lambda \in R$

Η γραμμική απεικόνιση καλείται και **<u>ομομορφισμός</u>** του A εντός του B.
Αν η παραπάνω απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντος και επί, τότε καλείται και **<u>ισομορφισμός</u>**, οι δε διανυσματικοί χώροι A και B **<u>ισόμορφοι</u>**.

Η γραμμική απεικόνιση *u* του A εντός του ιδίου (δηλαδή: $u : A \to A$) καλείται και **<u>γραμμικός τελεστής (linear operator)</u>** εντός του A.

Θεωρούμε με Λ(A,B), το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων του A εντός του B. Ορίζουμε το <u>άθροισμα</u> $u + w$ δύο γραμμικών απεικονίσεων και το <u>γινόμενο</u> $\lambda \cdot u$ μιας γραμμικής απεικόνισης επί έναν αριθμό $\lambda \in R$ με τις σχέσεις:

$$(u+w)(x)=u(x)+w(x), \quad \forall x \in A$$
$$(\lambda u)(x)=\lambda \cdot u(x), \quad \forall x \in A \quad \kappa\alpha\iota \quad \forall \lambda \in R$$

Τότε, όπως εύκολα διαπιστώνεται, το παραπάνω σύνολο Λ(A,B) γίνεται ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος R.

Αν *u* είναι μια γραμμική απεικόνιση του διανυσματικού χώρου A στον διανυσματικό χώρο B, τότε ισχύουν:

i) $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \quad \kappa\alpha\iota \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$

ii) $u(O_A)=O_B$, όπου O_A και O_B είναι τα ουδέτερα (μηδενικά) διανύσματα των χώρων A και B αντίστοιχα.

Αν A και B είναι δύο διανυσματικοί χώροι επί του ιδίου σώματος R και αν (e_1, e_2, …, e_n) είναι μια βάση του A και (ξ_1, ξ_2, …, ξ_ν) τυχόντα ν διανύσματα του B, τότε υπάρχει <u>μία και μόνο μία</u> γραμμική απεικόνιση *u* του A εντός του B τέτοια ώστε:

$$u(e_1)=\xi_1, u(e_2)=\xi_2, \ldots, u(e_\nu)=\xi_\nu$$

Δύο διανυσματικοί χώροι A και B ν-διάστασης είναι ισόμορφοι.
Κάθε διανυσματικός χώρος ν-διάστασης είναι ισόμορφος προς τον χώρο R^ν.

ΑΣΥΜΒΑΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Στην ευκλείδεια γεωμετρία Α′ κ Β′ Ενιαίου Λυκείου βρίσκεται ο ορισμός: Δύο ευθείες λέγονται ασύμβατες, αν δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο (επομένως δεν έχουν κοινό σημείο και δεν είναι παράλληλες). Άρα δύο διαφορετικές ευθείες του χώρου μπορεί να είναι:

1. παράλληλες ή τεμνόμενες (οπότε ανήκουν στο ίδιο επίπεδο), ή

2. ασύμβατες

Γίνονται ερωτήσεις κατανόησης (π.χ. βρες μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας 2 ευθείες ασύμβατες και να διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει κ τις 2).

Υπάρχουν οδηγίες διδασκαλίας που αναφέρουν: Το πνεύμα της διδασκαλίας να μην εστιάζεται στις αποδείξεις, αυτές καθαυτές, των διαφόρων θεωρημάτων ,αλλά να αναδεικνύεται ο λειτουργικός τους ρόλος στο πλαίσιο της γεωμετρικής αισθητοποίησης του χώρου από μέρους των μαθητών, με τη συμβολή ερωτήσεων κατανόησης, ασκήσεων εμπέδωσης και κάποιων απλών αποδεικτικών ασκήσεων.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}</u>

3.1 Διατύπωση του Προβλήματος 1 και λύση του σε βήματα

Γενικά

Στην ανάλυση λαθών χρησιμοποιήθηκε το πρόβλημα που ακολουθεί και στη συνέχεια η σωστή λύση βασισμένη στη θεωρία που διδάχτηκε στις παραδόσεις του εξαμήνου στους φοιτητές της ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ, κατά το πρώτο εξάμηνο του έτους 2012-2013.Η λύση έχει χωριστεί σε βήματα ώστε να μπορέσουμε να αναλύσουμε καλύτερα τα λάθη που εμφανίζονται στις λύσεις που δίνουν οι φοιτητές.

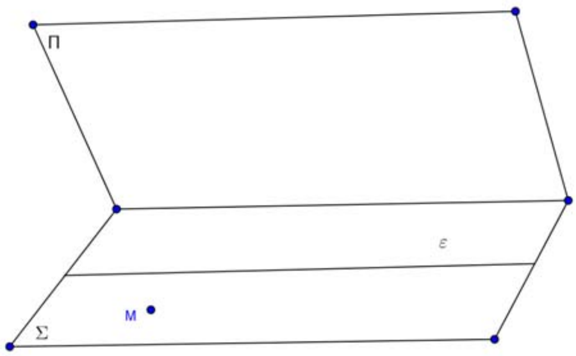
Διατύπωση προβλήματος και λύση του σε βήματα

<u>Πρόβλημα 1</u> —

Πρόβλημα $1^{ο}$: Δίνονται ευθεία ε: x-1= $\frac{y-3}{-2}$ =$\frac{z-5}{3}$ και επίπεδο Π : x+ 2y +z – 10=0.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη προς το επίπεδο Π.

ii) Να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ που είναι τομή του επιπέδου Π με το επίπεδο Σ που περιέχει το σημείο Μ (0,1,2) και την ε.



Σωστή Λύση (σε βήματα) $1^{ου}$ προβλήματος :

Βήμα $1^{ο}$:

Για τη λύση του πρώτου ερωτήματος χρειάζεται να βρούμε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ε που είναι το $\vec{a}$ =(1,-2,3) και μετά το $\vec{n}$ = (1,2,1) που είναι κάθετο προς το επίπεδο Π.

Βήμα $2^{ο}$:

Έπειτα, χρειάζεται να γνωρίζουμε ότι ε// Π ⇔ ε ⊥ $\vec{n}$ ⇔

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1,-2,3)\cdot(1,2,1)=1\cdot 1+(-2)\cdot 2+3\cdot 1=1-4+3=0.$$

Βήμα $3^{ο}$:

Για τη λύση του δεύτερου ερωτήματος πρέπει να βρούμε το επίπεδο Σ το οποίο μπορούμε να το βρούμε από την εξίσωση (r- $r\overrightarrow{M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$)=0 οπου r=(x,y,z), $r\overrightarrow{M}$ =(0,1,2) $\vec{a}$ =(1,-2,3), $\vec{b}$ =(1,3,5)-(0,1,2)=(1,2,3) και έχω:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12x - 0(y-1) - 4(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-z+2=0$$

<u>Βήμα 4^{ο}</u> :

Επιλύουμε κατάλληλα το σύστημα των εξισώσεων του επιπέδου Π και του επιπέδου Σ από όπου προκύπτουν οι αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας:

$$x = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-2}{3} = t$$

Διερεύνηση λαθών

Είδη λαθών στη λύση του προβλήματος 1 και κατηγοροποίηση τους

Σε αυτό το σημείο θα γίνει ποιοτική ανάλυση των λαθών που βρέθηκαν σε δείγμα 100 γραπτών, δηλαδή θα τα τοποθετήσουμε σε κατηγορίες ανάλογα με τα βήματα που έχουμε χωρίσει τη σωστή λύση του προβλήματος και σύμφωνα με τους πίνακες που υπάρχουν στο παράρτημα.

Τα λάθη χωρίζονται στις εξης κατηγορίες:

i) Λάθη κατανόησης της θεωρίας, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό (Κ)
ii) Μη επαρκή δικαιολόγηση (Δ)
iii) Λάθη στις πράξεις και στην επίλυση των συστημάτων (Π)

Συγκεκριμένα για την κατηγορία της κατανόησης (i) είχαμε τα εξής λάθη:

Α)Μη κατανόηση της έννοιας της παραλληλίας

Β) Αυθαίρετη εύρεση του $\vec{a}$

Γ) Λάθη στις πράξεις επίλυσης

Δ) Κάνουν λάθη στα πρόσημα

Ε) Λανθασμένη δικαιολόγηση

ΣΤ)Λανθασμένος τρόπος εύρεσης του επιπέδου Σ

Ζ) Αυθαίρετη εύρεση του επιπέδου Σ χωρίς χρησιμοποίηση του σημείου Μ

Η) Μη ορισμό σημείου (x,y,z)

Θ) Μη εύρεση του $\vec{b}$

Ι) Μη γνώση της ορίζουσας

Κ) Λάθη στην επίλυση της ορίζουσας

Λ) Αυθαίρετη λύση συστήματος κ όχι του σωστού για την εύρεση των αναλυτικών εξισώσεων

Μ) Λάθη στο σύστημα

Ποσοστιαία ανάλυση λαθών σύμφωνα με την έρευνα

Έχοντας παρουσιάσει το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας της Γραμμικής Άλγεβρας στη ΣΕΜΦΕ παρατηρούμε ότι υπάρχει δυσκολία των εννοιών της Άλγεβρας λόγω περιορισμένης εμβάθυνσης στη διδασκαλία του διανυσματικού λογισμού, των οριζουσών και άλλων εννοιών από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Αυτό το σκοπό έχει η έρευνα αυτή για να αναλυθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις που συναντάμε στους φοιτητές του ΕΜΠ.

Α) **Το δείγμα** μας αποτελείται από 100 γραπτά φοιτητών της ΣΕΜΦΕ που είχαν διδαχθεί τα κεφάλαια της Γραμμικής Άλγεβρας πάνω στην έννοια των διανυσμάτων και των ασυμβάτων.

Το δείγμα μας βοήθησε να εξάγουμε συμπεράσματα για την κατανόηση, τα λάθη και πιθανές παρανοήσεις γύρω από τις έννοιες που συμπεριλαμβάνονται σε αυτά τα κεφάλαια.Το δείγμα μας κρίνεται αντιπροσωπευτικό μιας κ αποτελείται από άτομα που έχουν ολοκληρώσει το Λύκειο και έχουν διδαχθεί αυτά τα κεφάλαια.Το δείγμα μας το έχουμε επιλέξει σύμφωνα με όσους ασχολήθηκαν με το πρώτο θέμα και το έχουμε χωρίσει σε υποομάδες!

Συγκεκριμένα οι 50 από τους 100 είναι όσοι έχουν πάρει συνολικό βαθμό από 5 και πάνω, οι 25 από τους 100 με αλφαβητική σειρά από το Α-Κ (και δεν έγραψαν πάνω από 5), οι άλλοι 25 από τους 100 τυχαία(δηλαδή οποιοδήποτε γράμμα και βαθμολογία)

Β) **Τα γραπτά** προέρχονται από τις τελικές γραπτές εξετάσεις όπως και στα άλλα τρία προβλήματα που θα δούμε παρακάτω(Παράρτημα).Ο αρχικός πίνακας περιλαμβάνει τα είδη των λαθών που εμφανίστηκαν στα γραπτά και την κωδικοποίηση τους. Οι φοιτητές καλούνται να απαντήσουν στις ερωτήσεις του προβλήματος χρησιμοποιώντας όσα έμαθαν στη σχολή καθώς και όσα γνωρίζουν από το σχολείο.

Γ) **Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων**

Για τους φοιτητές με βαθμολογία πάνω από 5 ο πίνακας είναι:

ΠΟΣΟΣΤΑ	ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ
Δ1-Δ2	12%	88%
Π1-Π2	20%	80%
Κ1-Κ2	10%	90%

Για τους φοιτητές από Α-Κ(και δεν έγραψαν πάνω από 5) ο πίνακας είναι:

ΠΟΣΟΣΤΑ	ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ
Δ1-Δ2	40%	60%
Π1-Π2	44%	56%
Κ1-Κ2	52%	48%

Για τους φοιτητές με τυχαία επιλογή ο πίνακας είναι:

ΠΟΣΟΣΤΑ	ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ
Δ1-Δ2	16%	84%
Π1-Π2	24%	76%
Κ1-Κ2	28%	72%

όπου **Δ:** έλλειψη δικαιολόγησης

Δ1: έλλειψη δικαιολόγησης για την παραλληλία

Δ2: έλλειψη δικαιολόγησης για την εξίσωση του επιπέδου Σ

Π: αριθμητικά λάθη στη λύση συστημάτων

Π1: αριθμητικό λάθος στο πρώτο ερώτημα

Π2: αριθμητικό λάθος στο δεύτερο ερώτημα

Κ : κατανόηση της ύλης των διανυσμάτων

Κ1: μη κατανόηση της έννοιας της παραλληλίας

Κ2: μη κατανόηση στην εύρεση του επιπέδου Σ και των αναλυτικών εξισώσεων

1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν σωστά

3.2 Διατύπωση του Προβλήματος 2 και λύση του σε βήματα

Γενικά

Στην ανάλυση λαθών χρησιμοποιήθηκε το πρόβλημα που ακολουθεί και στη συνέχεια η σωστή λύση βασισμένη στη θεωρία που διδάχτηκε στις παραδόσεις του εξαμήνου στους φοιτητές των Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ, κατά το πρώτο εξάμηνο του έτους 2012-2013. Η λύση έχει χωριστεί σε βήματα ώστε να μπορέσουμε να αναλύσουμε καλύτερα τα λάθη που εμφανίζονται στις λύσεις που δίνουν οι φοιτητές.

Διατύπωση προβλήματος και λύση του σε βήματα

Πρόβλημα 2^{o} : Δίνονται οι ευθείες δ: x-2y+z+1=0, x+y-z-2=0 και ε: x=2, y=2z-2. Να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ και να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και δ είναι ασύμβατες.

Σωστή Λύση (σε βήματα) 2^{ου} προβλήματος :

Βήμα 1^{o} :

Για να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ, αρχικά πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$x - 2y + z + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$x + y - z - 2 = 0 \qquad (2)$$

Προσθέτοντας την (1) + (2) προκύπτει :

$$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 2x-1 \qquad (3)$$

Τοποθετώντας την (3) στην (2) έχουμε

$$z = 3x-3 \qquad (4) ,$$

οπότε τα σημεία (x,y,z) της τομής ικανοποιούν τις εξισώσεις :

$$x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{3}$$

που είναι οι αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ.

Επομένως η ευθεία δ περνάει από το σημείο $M_1(0, -1, -3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\bar{a}=(1,2,3)$

<u>Βήμα 2ο</u> :

Για να αποδείξουμε ότι οι (ε) και (δ) είναι ασύμβατες πρέπει να κάνουμε τα εξής:

Αρχικά βρίσκω τις παραμετρικές εξισώσεις της (ε) γνωρίζοντας ότι :

$$x = 2, \quad y = 2z-2$$

και έχω:

$$(x, y, z)= (2,-2,0) + \lambda(0,2,1) ,$$

οπότε η ευθεία ε περνάει από το σημείο $M_2(2, -2, 0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{b} = (0,2,1)$

Για να δείξω ότι είναι ασύμβατες αρκεί να αποδείξουμε ότι το μικτό γινόμενο είναι διάφορο του μηδενός:

Η ορίζουσα ($\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$), όπου $\vec{r}$ = ((0,-1,-3)- (2,-2,0))= (-2,1,-3), $\vec{a}$ =(1,2,3), $\vec{b}$ =(0,2,1) είναι

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 .$$

<u>Β τρόπος επίλυσης του προβλήματος</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι ευθείες ε και δ

(i) δεν είναι παράλληλες και

(ii) δεν έχουν κοινό σημείο

Για το (i) έχουμε ότι τα παράλληλα διανύσματα των ε και δ είναι τα

$$\vec{a} =(1,2,3) \text{ και } \vec{b} =(0,2,1) \text{ και } \vec{b} \neq \lambda \vec{a}$$

Για το (ii) αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα :

$$\begin{aligned} x- 2y + z + 1 &= 0 \\ x+ y - z - 2 &= 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

$$x = z$$

$$y = 2z-2$$

δεν είναι συμβιβαστό ,δηλαδή δεν έχει λύση.

Πράγματι (Σ) $\Leftrightarrow$

$$x = 2, \quad -2y+z = -3, \quad y-z = 0, \quad y-2z = -2$$

$$\Leftrightarrow x=2, \quad y=z=3, \quad y=z=2 \quad \text{(αδύνατο)}$$

Διερεύνηση λαθών

Είδη λαθών στη λύση του προβλήματος 2 και κατηγοροποίηση τους

Σε αυτό το σημείο θα γίνει ποιοτική ανάλυση των λαθών που βρέθηκαν σε δείγμα 100 γραπτών, δηλαδή θα τα τοποθετήσουμε σε κατηγορίες ανάλογα με τα βήματα που έχουμε χωρίσει τη σωστή λύση του προβλήματος και σύμφωνα με τους πίνακες που υπάρχουν στο παράρτημα.

Τα λάθη χωρίζονται στις εξης κατηγορίες:

i) Λάθη κατανόησης της θεωρίας, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό (Κ)

ii) Μη επαρκή δικαιολόγηση (Δ)

iii) Λάθη στις πράξεις και στην επίλυση των συστημάτων (Π)

Συγκεκριμένα για την κατηγορία της κατανόησης (i) είχαμε τα εξής λάθη:

Α) Μη κατανόηση τι ζητείται στο ερώτημα

Β) Λάθη στις πράξεις επίλυσης

Γ) Κάνουν λάθη στα πρόσημα

Δ) Λανθασμένη δικαιολόγηση

Ε) Μη γνώση της ορίζουσας

ΣΤ) Λάθη στην επίλυση της ορίζουσας

Ζ) Αυθαίρετη λύση συστήματος κ όχι του σωστού για την εύρεση των αναλυτικών εξισώσεων

Η) Λάθη στο σύστημα

Ποσοστιαία ανάλυση λαθών σύμφωνα με την έρευνα

Έχοντας παρουσιάσει το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας της Γραμμικής Άλγεβρας στη σχολή Πολιτικών Μηχανικών παρατηρούμε ότι υπάρχει δυσκολία των εννοιών της Άλγεβρας λόγω περιορισμένης εμβάθυνσης στη διδασκαλία του διανυσματικού λογισμού,των οριζουσών και άλλων εννοιών από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.Για αυτό το σκοπό έχει η έρευνα αυτή για να αναλυθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις που συναντάμε στους φοιτητές του ΕΜΠ.

Α) Το δείγμα μας αποτελείται από 100 γραπτά φοιτητών των Πολιτικών Μηχανικών που είχαν διδαχθεί τα κεφάλαια της γραμμικής Άλγεβρας πάνω στην έννοια των διανυσμάτων και των ασυμβάτων.Το δείγμα μας βοήθησε να εξάγουμε συμπεράσματα για την κατανόηση,τα λάθη και πιθανές παρανοήσεις γύρω από τις έννοιες που συμπεριλαμβάνονται σε αυτά τα κεφάλαια.Το δείγμα μας κρίνεται αντιπροσωπευτικό μιας κ αποτελείται από άτομα που έχουν ολοκληρώσει το λύκειο και έχουν διδαχθεί αυτά τα κεφάλαια.Το δείγμα μας το έχουμε επιλέξει σύμφωνα με όσους ασχολήθηκαν με το πρώτο θέμα και το έχουμε χωρίσει σε υποομάδες!Συγκεκριμένα οι 50 από τους 100 είναι όσοι έχουν πάρει συνολικό βαθμό από 5 και πάνω ενώ οι υπόλοιποι 50 από τους 100 τυχαία(δηλαδή οποιοδήποτε γράμμα και βαθμολογία)

Β) **Τα γραπτά** προέρχονται από τις τελικές γραπτές εξετάσεις όπως και στα άλλα προβλήματα που θα δούμε παρακάτω(Παράρτημα).

Ο αρχικός πίνακας περιλαμβάνει τα είδη των λαθών που εμφανίστηκαν στα γραπτά και την κωδικοποίηση τους.Οι φοιτητές καλούνται να απαντήσουν στις ερωτήσεις του προβλήματος χρησιμοποιώντας όσα έμαθαν στη σχολή καθώς και όσα γνωρίζουν από το σχολείο.

Γ) **Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων**

Για τους φοιτητές με βαθμολογία πάνω από 5 ο πίνακας είναι:

ΠΟΣΟΣΤΑ	**ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**
Δ1-Δ2	8%	92%
Π1-Π2	16%	84%
Κ1-Κ2	6%	94%

Για τους φοιτητές με τυχαία επιλογή ο πίνακας είναι:

ΠΟΣΟΣΤΑ	**ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**
Δ1-Δ2	40%	60%
Π1-Π2	46%	54%
Κ1-Κ2	42%	58%

όπου **Δ:** έλλειψη δικαιολόγησης

Δ1: έλλειψη δικαιολόγησης για τις αναλυτικές εξισώσεις
Δ2: έλλειψη δικαιολόγησης για τις ασύμβατες
Π: αριθμητικά λάθη στη λύση συστημάτων
Π1: αριθμητικό λάθος στο πρώτο ερώτημα
Π2: αριθμητικό λάθος στο δεύτερο ερώτημα
Κ : κατανόηση της ύλης των διανυσμάτων
Κ1: μη κατανόηση της έννοιας των αναλυτικών εξισώσεων
Κ2: μη κατανόηση έννοιας ασυμβάτων

1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν σωστά

Διατύπωση του Προβλήματος 3 και λύση του σε βήματα

Γενικά

Στην ανάλυση λαθών χρησιμοποιήθηκε το πρόβλημα που ακολουθεί και στη συνέχεια η σωστή λύση βασισμένη στη θεωρία που διδάχτηκε στις παραδόσεις του εξαμήνου στους φοιτητές των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών ΕΜΠ, κατά το πρώτο εξάμηνο του έτους 2012-2013. Η λύση έχει χωριστεί σε βήματα ώστε να μπορέσουμε να αναλύσουμε καλύτερα τα λάθη που εμφανίζονται στις λύσεις που δίνουν οι φοιτητές.

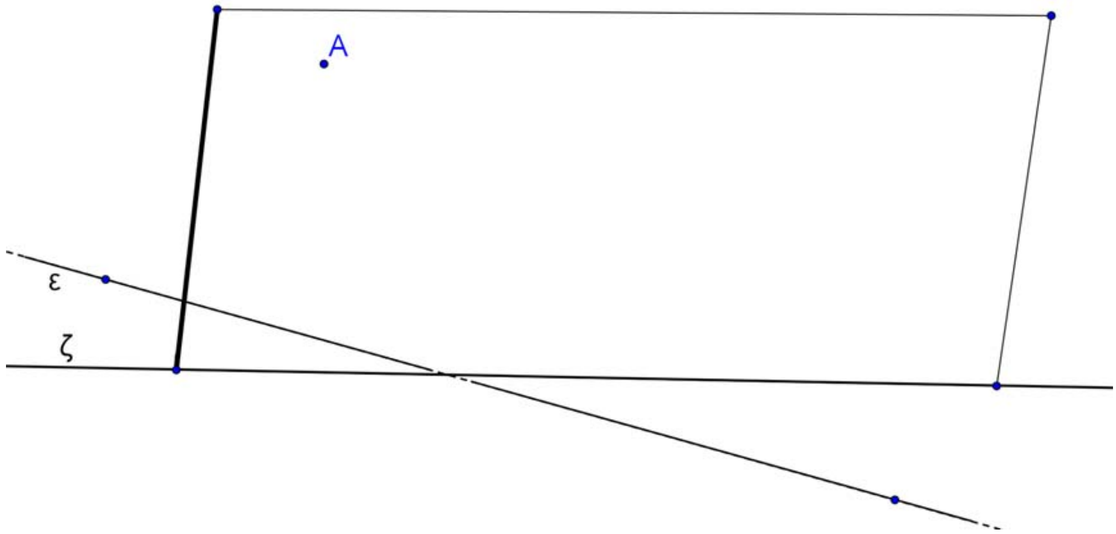
Διατύπωση προβλήματος και λύση του σε βήματα

<u>Πρόβλημα 3^{ο}</u> : Δίνονται οι ευθείες (ζ): x+y-2z=2, x-y+2z=0 και (ε): x=2, y=z+1 και το σημείο Α(2,3,2).

(1) Να βρεθούν διανύσματα προς τα οποία είναι παράλληλες οι (ε), (ζ) και οι αναλυτικές εξισώσεις της (ζ).

(2) Να αποδειχτεί ότι οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι ασύμβατες.

(3) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από το Α και την (ζ).



<u>Σωστή Λύση (σε βήματα) 3^{ου} προβλήματος</u> :

<u>Βήμα 1^{ο}</u> :

Για να βρούμε διανύσματα προς τα οποία είναι παράλληλες οι (ε) και (ζ), γράφουμε κατάλληλα την (ε) και έχουμε:

$$x=2\ ,\ \ \frac{y-0}{1}=\frac{z+1}{1}$$

Οπότε το διάνυσμα που είναι παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{n}$ =(0,1,1)

Τώρα για τη (ζ) αρκεί να βρω το εξωτερικό γινόμενο των παρ/λων διανυσμάτων των δυο επι x + y - 2z = 2 , x – y + 2z = 0, τα οποία είναι

$$\vec{n}_1 =(1,1,-2), \qquad \vec{n}_2 =(1,-1,2\ )$$

Έχουμε:

$$n_j = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0,-4,-2) = -2(0,2,1).$$

Για z=0 έχω x+y=2 και x=y, από όπου προκύπτει το σημείο Μ(1,1,0).

<u>Βήμα 2^{ο}</u> :

Οι αναλυτικές εξισώσεις της (ζ) από το σημείο Μ(1,1,0) και το $\vec{n}$ =(0,-4,-2) και είναι:

$$x = 1\ , \qquad \frac{y-1}{2} = z$$

<u>Βήμα 3</u> **:**

Για να αποδείξουμε ότι οι (ε) και (δ) είναι ασύμβατες πρέπει να κάνουμε τα εξής:

Αρχικά πρέπει να γνωρίζουμε ότι πρέπει να βρούμε την ορίζουσα του $(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2)\neq 0$ για να είναι ασύμβατες όπου $\vec{r}_1$=(2,0,-1) διάνυσμα που ικανοποιεί την (ε) και $\vec{r}_2$=(1,1,0) που ικανοποιεί την (ζ), $\vec{n}_1$= (0,1,1) $\vec{n}_2$=(0,2,1) τα παράλληλα διανύσματα στις (ε) και (ζ).

$$\vec{r}_1-\vec{r}_2 = (2,0,-1) - (1,1,0) = (1,-1,-1)$$

$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(1\times(-1)-(-2)\times 1)=1\neq 0$$

Άρα είναι ασύμβατες.

<u>Βήμα 4</u> **:**

Για να βρούμε την εξίσωση του επιπέδου από το σημείο Α(2,3,2) και την (ζ) πρέπει να βρούμε αρχικά το διάνυσμα $\overrightarrow{MA}$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια της ορίζουσας $(\vec{r}-\vec{r}_A,\ \overrightarrow{MA},\ \vec{n}_2)=0$, θα υπολογίσουμε το ζητούμενο, όπου $\vec{r}$ =(x,y,z), $\vec{n}_2=(0,2,1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x+y-2z-3=0.$$

Διερεύνηση λαθών

Είδη λαθών στη λύση του προβλήματος 3 και κατηγοριοποίηση τους

Σε αυτό το σημείο θα γίνει ποιοτική ανάλυση των λαθών που βρέθηκαν σε δείγμα 100 γραπτών, δηλαδή θα τα τοποθετήσουμε σε κατηγορίες ανάλογα με τα βήματα που έχουμε χωρίσει τη σωστή λύση του προβλήματος και σύμφωνα με τους πίνακες που υπάρχουν στο παράρτημα.

Τα λάθη χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

i) Λάθη κατανόησης της θεωρίας, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό(Κ)

ii) Μη επαρκή δικαιολόγηση (Δ)

iii) Λάθη στις πράξεις και στην επίλυση των συστημάτων (Π)

Συγκεκριμένα για την κατηγορία της κατανόησης (i) είχαμε τα εξής λάθη:

Α)Μη κατανόηση της έννοιας της παραλληλίας

Β)Αυθαίρετη εύρεση του $\vec{n}$

Γ)Λάθη στις πράξεις επίλυσης

Δ)Κάνουν λάθη στα πρόσημα

Ε)Λανθασμένη δικαιολόγηση

ΣΤ)Λανθασμένος τρόπος εύρεσης του επιπέδου Σ

Ζ)Αυθαίρετη εύρεση του επιπέδου Σ χωρίς χρησιμοποίηση του σημείουΜ

Η)Μη ορισμό σημείου (x,y,z)

Θ)Μη εύρεση $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$

Ι)Μη γνώση της ορίζουσας

Κ)Λάθη στην επίλυση της ορίζουσας

Λ)Αυθαίρετη λύση συστήματος και όχι του σωστού για την εύρεση των αναλυτικών εξισώσεων

Μ)Λάθη στο σύστημα

Ποσοστιαία ανάλυση λαθών σύμφωνα με την έρευνα

Έχοντας παρουσιάσει το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας της Γραμμικής Άλγεβρας στη σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών παρατηρούμε ότι υπάρχει δυσκολία των εννοιών της Άλγεβρας λόγω περιορισμένης εμβάθυνσης στη διδασκαλία του διανυσματικού λογισμού,των οριζουσών και άλλων εννοιών από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για αυτό το σκοπό έχει η έρευνα αυτή για να αναλυθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις που συναντάμε στους φοιτητές του ΕΜΠ.

Α) **Το δείγμα** μας αποτελείται από 100 γραπτά φοιτητών των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών που είχαν διδαχθεί τα κεφάλαια της γραμμικής Άλγεβρας πάνω στην έννοια των διανυσμάτων και των ασυμβάτων. Το δείγμα μας βοήθησε να εξάγουμε συμπεράσματα για την κατανόηση,τα λάθη και πιθανές παρανοήσεις γύρω από τις έννοιες που συμπεριλαμβάνονται σε αυτά τα κεφάλαια. Το δείγμα μας κρίνεται αντιπροσωπευτικό μιας κ αποτελείται από άτομα που έχουν ολοκληρώσει το λύκειο και έχουν διδαχθεί αυτά τα κεφάλαια. Το δείγμα μας το έχουμε επιλέξει σύμφωνα με όσους ασχολήθηκαν με το πρώτο θέμα και το έχουμε χωρίσει σε υποομάδες!Συγκεκριμένα οι 58 από τους 100 είναι όσοι έχουν πάρει συνολικό βαθμό από 5 και πάνω ενώ οι υπόλοιποι 42 από τους 100 τυχαία(δηλαδή οποιοδήποτε γράμμα και βαθμολογία)

Β) **Τα γραπτά** προέρχονται από τις τελικές γραπτές εξετάσεις όπως και στα άλλα προβλήματα που θα δούμε παρακάτω(Παράρτημα).Ο αρχικός πίνακας περιλαμβάνει τα είδη των λαθών που εμφανίστηκαν στα γραπτά και την κωδικοποίηση τους. Οι φοιτητές καλούνται να απαντήσουν στις ερωτήσεις του προβλήματος χρησιμοποιώντας όσα έμαθαν στη σχολή καθώς κ όσα γνωρίζουν από το σχολείο.

Γ) **Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων**

Για τους φοιτητές με βαθμολογία πάνω από 5 ο πίνακας είναι:

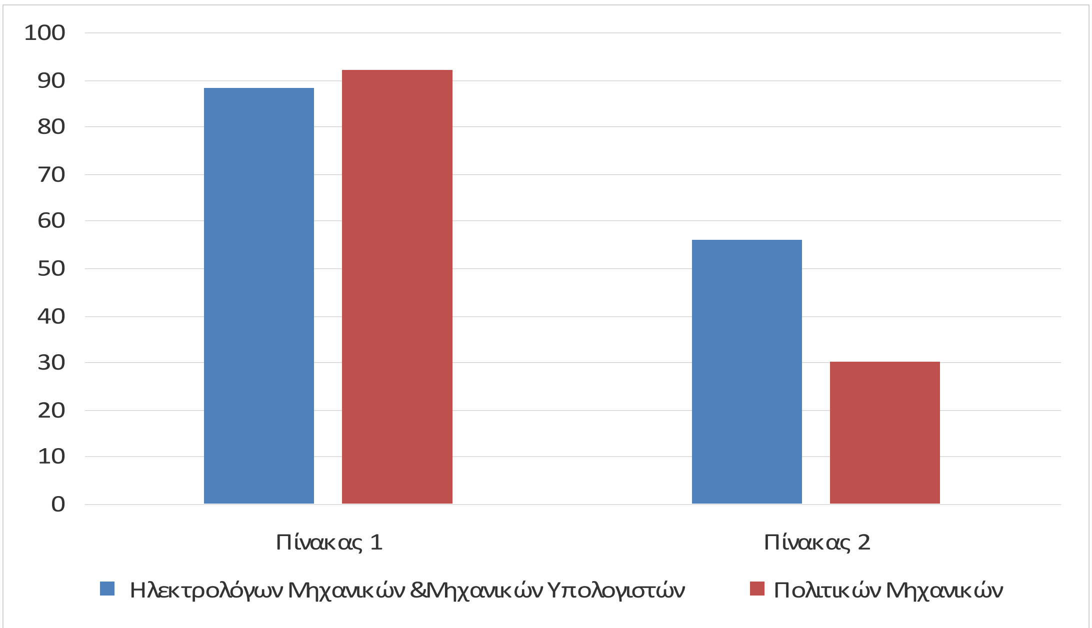
ΠΟΣΟΣΤΑ	**ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**
Δ1-Δ2	12.1%	87.9%
Π1-Π2	25.9%	74.1%
Κ1-Κ2	10.4%	89.6%

Για τους φοιτητές με τυχαία επιλογή (όχι πάνω από 5)ο πίνακας είναι:

ΠΟΣΟΣΤΑ	**ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΛΑΘΟΣ**
Δ1-Δ2	57.2%	42.8%
Π1-Π2	85.8%	14.2%
Κ1-Κ2	52.4%	47.6%

Σύγκριση αποτελεσμάτων στο κοινό ερώτημα για τις ασύμβατες

Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα ανάμεσα στους Πολιτικούς Μηχανικούς και τους Ηλεκτρολόγους Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών. Πρώτα θα παρουσιάσουμε ένα πίνακα για αυτούς που έγραψαν πάνω από 5 και μετά στο δεύτερο πίνακα αυτούς που κάτω από 5.Επομένως, έχουμε



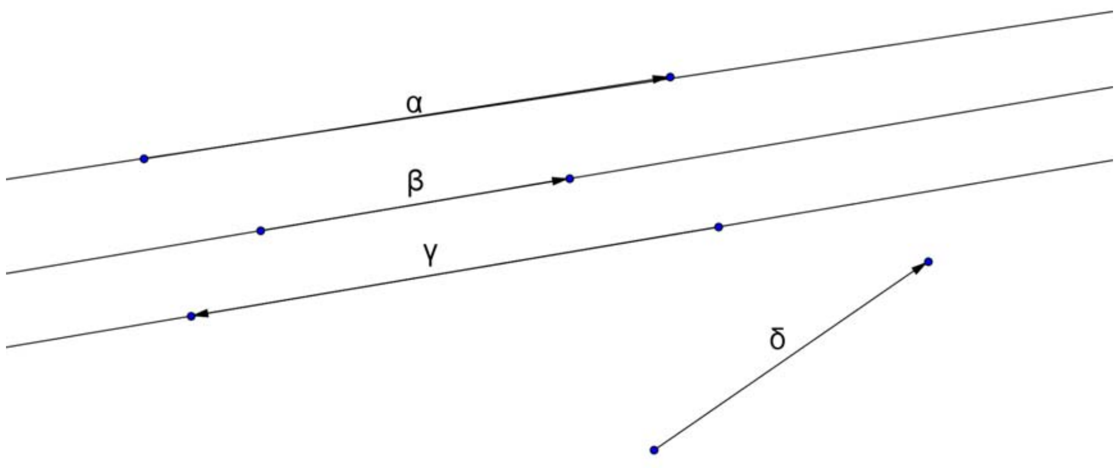
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

3.1 Η εισαγωγή στην έννοια του διανύσματος μέσα από το ισχύον σχολικό πρόγραμμα

Στα σχολικά συγγράμματα η έννοια των διανυσμάτων προσεγγίζεται μόλις στο Γυμνάσιο. Μέχρι την ηλικία αυτή, στο δημοτικό, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα διανυσματικά μεγέθη ως μονόμετρα. Πειραματίζονται και μέσα από τις παρατηρήσεις τους καταλήγουν σε συμπεράσματα για τις εμπλεκόμενες έννοιες. Για παράδειγμα η έννοια της δύναμης προσεγγίζεται μέσα από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων της επίδρασής της στα διάφορα σώματα. Δε χρησιμοποιείται κανένας μαθηματικός τύπος και κανένας συμβολισμός. Οι πληροφορίες που παρατίθενται στη συνέχεια είναι όπως παρουσιάζεται η έννοια του διανύσματος στο ισχύον εκπαιδευτικό σύστημα. Στο Γυμνάσιο τα διανύσματα προβλεπόταν να διδαχθούν ως αυτοδύναμη ενότητα στο μάθημα των Μαθηματικών, στο βιβλίο « Μαθηματικά Γ Γυμνασίου » (Αλιμπινίσης κ.α, 1989).

Για την εισαγωγή των εννοιών που σχετίζονται με το διάνυσμα και για την παρουσίαση ιδιοτήτων και πράξεων με διανύσματα χρησιμοποιούνται παραδείγματα από τη φυσική. Γίνεται διάκριση μονόμετρων και διανυσματικών μεγεθών. Μονόμετρα λέγονται εκείνα που καθορίζονται μόνο από την αριθμητική τους τιμή όπως για παράδειγμα, η θερμοκρασία, το μήκος, ενώ για τον ορισμό των διανυσματικών μεγεθών χρησιμοποιούνται παραδείγματα από τη φυσική. Συγκεκριμένα στο ίδιο σχολικό βιβλίο αναφέρεται το παράδειγμα μετατόπισης ενός ελικοπτέρου όπου για να καθορισθεί ακριβώς η μετατόπισή του χρειάζεται εκτός από το διάστημα που διήνυσε, να γνωρίζουμε την ευθεία πάνω στην οποία κινήθηκε, δηλαδή τη διεύθυνση της μετατόπισης και τη φορά προς την οποία κινήθηκε (παράδειγμα σχολικού βιβλίου Γ Γυμνασίου, σελ. 243). Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται η αναγκαιότητα εισαγωγής μεγεθών για τον προσδιορισμό των οποίων δεν αρκεί μόνο η αριθμητική τους τιμή και ονομάζονται **διανυσματικά μεγέθη**.

Αυτή είναι η γλώσσα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, ενός κλάδου της φυσικής όπου η ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι πια αρκετά ακριβής. Στο σχολικό βιβλίο « Μαθηματικά Γ Γυμνασίου » ο όρος διάνυσμα χρησιμοποιείται «για να παραστήσουμε ένα διανυσματικό μέγεθος». «Είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο το ένα άκρο καθορίζεται να είναι η αρχή του και το άλλο το πέρας του». Επίσης στο βιβλίο συνεχίζεται η εισαγωγή στην έννοια του διανύσματος προσδιορίζοντας τα χαρακτηριστικά του. « Έτσι σε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ διακρίνουμε τα εξής χαρακτηριστικά: i) τη διεύθυνση, δηλαδή την ευθεία που ορίζουν τα άκρα του Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή. Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια διεύθυνση, ενώ το $\vec{\delta}$ δεν έχει την ίδια διεύθυνση με κανένα από τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.



ii) τη φορά του διανύσματος, η οποία καθορίζεται από την κίνηση που οδηγεί από την αρχή Α προς το πέρας Β. Έτσι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ ενώ, έχουν την ίδια διεύθυνση, έχουν αντίθετη φορά. Ακόμη από τα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ που έχουν ίδια διεύθυνση, τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά ενώ το $\vec{\gamma}$ έχει αντίθετη φορά προς αυτά.

iii) το μέτρο του, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζεται με ΑΒ ».

Στη συνέχεια του ίδιου βιβλίου εισάγονται οι συντεταγμένες του διανύσματος και υπολογίζεται το μέτρο του μέσα από τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Τις περισσότερες φορές όμως το κεφάλαιο εισαγωγής στα διανύσματα παραλείπεται. Η έννοια του διανύσματος συναντάται επίσημα στην επόμενη βαθμίδα, στη δεύτερη τάξη του Λυκείου. Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές

1) να εξοικειωθούν με το λογισμό των διανυσμάτων, ώστε να ανταποκρίνονται με επιτυχία στις απαιτήσεις άλλων κλάδων που χρησιμοποιούν διανύσματα(κινηματική, ηλεκτρισμός, κι άλλες περιοχές της επιστήμης της φυσικής)

2) να προσεγγίζουν γεωμετρικά θέματα μέσω των διανυσμάτων, μια προσέγγιση που φαίνεται να τους διευκολύνει στη μελέτη και τη διεξαγωγή συμπερασμάτων

3) να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τα διανύσματα στη μελέτη θεμάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας και των μιγαδικών αριθμών. Οι μαθητές έρχονται εν τέλει σε επαφή με την έννοια αυτή στην ηλικία των 15-16 χρόνων. Στο μάθημα των μαθηματικών το διάνυσμα εισάγεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα, χωρίς να γίνεται αναφορά στα ελεύθερα ή εφαρμοστά διανύσματα. Αργότερα, με την εισαγωγή της έννοιας της ισότητας των διανυσμάτων, κάθε διάνυσμα παραμένει «αναλλοίωτο» εάν μετακινηθεί παράλληλα προς την αρχική του θέση.

Επομένως κάθε διάνυσμα του χώρου είναι ίσο με ένα μοναδικό διάνυσμα που έχει αρχή ένα σταθερό σημείο Ο (σημείο αναφοράς). Στη συνέχεια ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων καθώς και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό μαζί με βασικές τους ιδιότητες. Παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας, ενώ τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφεί ως η διαφορά $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, όπου Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Δίνεται επίσης και η τριγωνική ανισότητα απ'όπου προκύπτει για το μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων ότι $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

Στην ανισότητα αυτή τονίζεται ότι η αριστερή ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα και η δεξιά όταν τα διανύσματα είναι ομόρροπα. Στη συνέχεια διατυπώνεται η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων η οποία χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων ενώ με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος ένα διάνυσμα συμβολίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τις συντεταγμένες του απ' όπου διευκολύνεται και ο λογισμός των διανυσμάτων. Τέλος ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες που το διέπουν. Οι διαφορετικές εκφράσεις του εσωτερικού γινομένου επιτρέπουν τον υπολογισμό του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας δύο διανυσμάτων καθώς και την απόδειξη πολλών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Από την άλλη στα σχολικά βιβλία της φυσικής η εισαγωγή στην έννοια του διανύσματος πραγματοποιείται στην τάξη της Γ Γυμνασίου προτού διδαχθεί η έννοια αυτή στα μαθηματικά. Πρώτα εισάγεται η έννοια του διανυσματικού μεγέθους κι ύστερα το διάνυσμα χρησιμοποιείται ως μέσο για την παράστασή του. Γίνεται περιγραφή των χαρακτηριστικών ενός διανυσματικού μεγέθους, όπως για παράδειγμα της δύναμης, αλλά δε γίνεται άμεσα αναφορά στα στοιχεία του διανύσματος (μέτρο, διεύθυνση και φορά).

Για παράδειγμα, η δύναμη παρουσιάζεται ως ένα φυσικό μέγεθος που εκτός από μέτρο έχει και κατεύθυνση. Ένα φυσικό μέγεθος το οποίο εκτός από μέτρο έχει και κατεύθυνση χαρακτηρίζεται ως διανυσματικό και παριστάνεται με ένα βέλος. Έτσι η δύναμη είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που παριστάνεται με ένα βέλος. Το σημείο εφαρμογής του διανύσματος που παριστάνει τη δύναμη, είναι το σημείο του σώματος στο οποίο ασκείται. Η κατεύθυνση της δύναμης καθορίζει και την κατεύθυνση του διανύσματος. Το μέτρο της δύναμης ισούται με το μήκος του διανύσματος, εάν αυτό σχεδιασθεί με κατάλληλη κλίμακα.

Ο σύγχρονος τρόπος εισαγωγής της έννοιας του διανύσματος μέσα από τα μαθήματα της φυσικής και των μαθηματικών φαίνεται να διακατέχεται από μια ανακολουθία και να προκαλεί σύγχυση στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν την εν λόγω έννοια (Γαγάτσης και Δημητριάδου, 1995). Αλλιώς χρησιμοποιείται στη φυσική κι αλλιώς διδάσκεται στα μαθηματικά. Ενδεικτικά αναφέρονται κάποιες από τις διαφορές που εντοπίζονται στις δυο γνωστικές περιοχές όπως παρουσιάζονται στη σχετική βιβλιογραφία (Δημητριάδου,1993):

1) Συμβολισμός διανυσμάτων: στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών χρησιμοποιούνται σύμβολα του τύπου ΑΒ ή a σε αντίθεση με το σχολικό βιβλίο της φυσικής όπου δε γίνεται χρήση κανενός συμβόλου για τα διανύσματα

2) Χαρακτηριστικά διανυσμάτων: στα μαθηματικά οι όροι μέτρο, διεύθυνση και φορά συνδέονται άμεσα με τα διανύσματα κι όχι με τα διανυσματικά μεγέθη τα οποία παριστάνουν. Στη φυσική αντίθετα γίνεται άμεση αναφορά στα διανυσματικά μεγέθη, παρουσιάζονται ως μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται πλήρως από το μέτρο τους, την κατεύθυνσή τους (διεύθυνση και φορά) και το σημείο εφαρμογής τους ενώ τα χαρακτηριστικά των διανυσμάτων παριστάνουν τα στοιχεία του αντίστοιχου διανυσματικού μεγέθους.

3) Συντεταγμένες διανύσματος: ορίζονται μόνο στα μαθηματικά

4) Πράξεις στα διανύσματα: στα μαθηματικά παρουσιάζονται οι πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό, είτε με σύμβολα είτε με συντεταγμένες διανυσμάτων. Στη φυσική ισοδύναμη με την πρόσθεση διανυσμάτων θα μπορούσε να θεωρηθεί η σύνθεση διανυσματικών μεγεθών.

Στο τέλος της ενότητας εισαγωγής στην έννοια της δύναμης ως διάνυσμα, στο βιβλίο της φυσικής της Γ Γυμνασίου, επισυνάπτεται η ανάλυση της δύναμης. Αναφέρεται ότι κάθε δύναμη μπορεί να αναλυθεί σε δύο επιμέρους δυνάμεις που λέγονται συνιστώσες και την έχουν συνισταμένη. Επίσης η ανάλυση γίνεται σε δύο διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

Για να αναλυθεί η δύναμη σε δύο συνιστώσες, ώστε να βρεθούν δύο δυνάμεις που θα προκαλούσαν τα ίδια αποτελέσματα με την αρχική δύναμη, προτείνεται μια συγκεκριμένη διαδικασία

- αρχικά σχεδιάζεται ένας οριζόντιος κι ένας κατακόρυφος άξονας

- η δύναμη σχεδιάζεται με κατάλληλη κλίμακα και με διεύθυνση τέτοια ώστε να σχηματίζει τη ζητούμενη γωνία με τον οριζόντιο άξονα από το τέλος του διανύσματος που παριστάνει τη δύναμη σχεδιάζονται παράλληλες προς τους δύο άξονες. Τα σημεία τομής με τους άξονες καθορίζουν το τέλος των διανυσμάτων της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας μετρώντας τα μήκη των διανυσμάτων και χρησιμοποιώντας την ίδια κλίμακα με την οποία σχεδιάστηκε η δύναμη μπορεί να προσδιορισθούν τα μέτρα των συνιστωσών

<u>Δυσκολίες στα διανύσματα:</u>

Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σημασία και τη χρήση των διανυσμάτων στα Μαθηματικά και το γεγονός αυτό συνδέεται με τη δυσκολία μετάβασης από το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τις πράξεις τους (σώμα πραγματικών αριθμών) σε ένα καινούργιο σύνολο μαθηματικών αντικειμένων, που είναι τα διανύσματα. Ειδικότερα οι μαθητές δυσκολεύονται:

1)να καταλάβουν ότι ένα διάνυσμα χαρακτηρίζεται και από άλλα στοιχεία πέρα από έναν αριθμό που εκφράζει μόνο το μέτρο του,

2) να συγκρίνουν δύο διανύσματα λαμβάνοντας υπόψη τους όλα τα χαρακτηριστικά των διανυσμάτων,

3) να εκτελέσουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης διανυσμάτων,

4) να καταλάβουν ότι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να είναι αποτέλεσμα πολλών διαφορετικών εκφράσεων αφαίρεσης της μορφής $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, αν θεωρηθεί ένα τυχαίο σημείο **Ο** στο επίπεδο,

5) να μεταβούν από την πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων σε πρόσθεση διανυσμάτων με κοινή αρχή και να εφαρμόσουν τον νόμο του παραλληλογράμμου,

6) να αντιληφθούν ότι η ανάλυση ενός διανύσματος είναι συνδεδεμένη με την επιλογή αξόνων και, κατά προέκταση, με την επιλογή σημείου αρχής αξόνων,

7) να εξοικειωθούν με την έννοια της προβολής διανύσματος πάνω σε ευθεία ή διάνυσμα.

Οι παραπάνω δυσκολίες οδηγούν στη συνέχεια σε αδυναμία να καταλάβουν τους μιγαδικούς αριθμούς και την αναλυτική γεωμετρία στο Λύκειο.

Πιο συγκεκριμένα, όπως προκύπτει από έρευνες στην περιοχή των Μαθηματικών, πολλοί μαθητές διαφόρων ηλικιών:

1) θεωρούν ότι ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα είναι το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, π.χ.: ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι το ίδιο με ένα διάνυσμα ***ΑΒ*** επειδή και τα δύο έχουν άκρα,

2) συγχέουν την πρόσθεση διανυσμάτων και την πρόσθεση αριθμών, δηλαδή αθροίζουν δύο διανύσματα λαμβάνοντας υπόψη μόνο το μέτρο τους,

3)συγχέουν την πρόσθεση διανυσμάτων και την πρόσθεση ευθυγράμμων τμημάτων, π.χ.: όταν τους ζητηθεί να αθροίσουν δύο διανύσματα τα φέρνουν στην ίδια ευθεία, όπως θα έκαναν στην περίπτωση ευθυγράμμων τμημάτων, ή συμβολικά ***ΑΒ***+***ΒΓ***=ΑΒ+ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ

Είναι σαφές ότι οι αδυναμίες που διαπιστώνονται , εμφανίζονται κατά μείζονα λόγο στο σύνολο των αποφοίτων του Λυκείου. Τα προβλήματα αυτά αφορούν τόσο τον τρόπο σκέψης των φοιτητών όσο και τις ουσιαστικές γνώσεις τους, και μάλιστα σε περιοχές των Μαθηματικών όπου έχουν εξετασθεί στο σχολείο και στις Πανελλήνιες Εξετάσεις με επιτυχία. Παρατηρείται μάλιστα αυξητική τάση των ελλείψεων τα τελευταία χρόνια. το υπάρχον εκπαιδευτικό σύστημα δυστυχώς χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά πρωτίστως ως εργαλείο κατάταξης των μαθητών με αποτέλεσμα ένας μεγάλος αριθμός τους να αντιπαθεί τα Μαθηματικά ή στην καλύτερη περίπτωση να τα θεωρεί ως αναγκαίο κακό. Πρέπει να υπάρξει μια ορθότερη διάταξη της ύλης και εμπλουτισμός της με αντικείμενα που θα συμβάλλουν στους στόχους που έρχεται να υπηρετήσει η μαθηματική παιδεία σε αυτή τη βαθμίδα της εκπαίδευσης. Συχνές αλλαγές των εκπαιδευτικών συστημάτων που έχουν επιχειρηθεί από τις διάφορες κυβερνήσεις έγιναν χωρίς αποτίμηση των αποτελεσμάτων των προηγουμένων αλλαγών. Ιδιαίτερα πρέπει να τονιστεί ότι πρέπει να προηγείται η πιλοτική εφαρμογή σε πειραματικά σχολεία -των μεγάλων καινοτομιών τουλάχιστον- με επισήμανση και θεραπεία των προβλημάτων και δυσκολιών που αναφύονται και στη συνέχεια να επιχειρείται η εφαρμογή τους στο σύνολο του μαθητικού πληθυσμού.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να αποσκοπεί στη ωφέλεια του μαθητή από τα δύο βασικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών: Τον **παιδευτικό** και τον **εφαρμόσιμο** χαρακτήρα τους.

Α) Με τον **παιδευτικό** τους χαρακτήρα καλλιεργούν το νου, κυρίως οξύνοντας την αναλυτική και συνθετική σκέψη, εκπαιδεύουν στην ακρίβεια της διατύπωσης συλλογισμών, ενθαρρύνουν και συντελούν στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Εγκαθιδρύοντας «διαδικασίες» στο νου για διευκόλυνση ενσωμάτωσης νέων γνώσεων και από άλλες γνωστικές περιοχές, συνεισφέρουν στην παιδεία συνολικά. Στην εποχή μας, όπου η υπερβολική πληροφόρηση καταλήγει ουσιαστικά σε μη πληροφόρηση, η ισχυρή κριτική σκέψη αποτελεί ένα σημαντικό εφόδιο. Η συμβολή της μαθηματικής παιδείας είναι σημαντική προς αυτή την κατεύθυνση.

Β) Με τον **εφαρμόσιμο** χαρακτήρα τους, εφοδιάζουν με γνώσεις χρήσιμες τις άλλες επιστήμες. Αποτελεί κοινό τόπο ότι τα Μαθηματικά αποτελούν τη βάση της σύγχρονης τεχνολογίας. Μάλιστα η σημερινή τους εμβέλεια, έχει κατά πολύ ξεπεράσει το πλαίσιο των εφαρμογών στις θετικές επιστήμες και χρησιμοποιούνται σε πολλούς άλλους τομείς μέχρι και τις κοινωνικές επιστήμες. Κάτω από αυτή την οπτική, πέρα από την εμπέδωση διδασκομένων μαθηματικών εννοιών απαραίτητη είναι και η ανάπτυξη ικανοτήτων ως προς τη διαδικασία εφαρμογής τους σε πραγματικά προβλήματα.

Μέσα από τον **παιδευτικό** χαρακτήρα απορρέουν οι εξής κανόνες:

1) Έμφαση στη βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση των εννοιών και δευτερευόντως στις πράξεις. Όσο πιο πλήρης είναι η κατανόηση των

εννοιών και ανεξάρτητη από τα σύμβολα που τις συνοδεύουν, τόσο πιο άρτια είναι η γλωσσική της τους απόδοση.

2) Πρέπει να αρχίσει να συνοδεύει την εκμάθηση τύπων , κανόνων και θεωρημάτων. Να αποφεύγονται θεωρήματα χωρίς απόδειξη.

3) Η μετάβαση σε αφαιρετικό επίπεδο δεν πρέπει να εμφανίζεται ως επιβάρυνση και αύξηση της πολυπλοκότητας, αλλά σαν διευκόλυνση. Προφανώς οι αφαιρέσεις ή οι τυποποιήσεις δεν μπορούν να λειτουργήσουν, αν δεν υπάρχει μια προγενέστερη συσσώρευση αυτού που πρέπει να τυποποιηθεί. Επίσης πρέπει να γίνεται φανερό ότι η μετάβαση σε πιο αφηρημένο επίπεδο κάνει μια μέθοδο που εφαρμόζεται σε μια περιοχή, εφαρμόσιμη και σε μια διαφορετική περιοχή.

4) Αντί της υπερβολικής συσσώρευσης γνώσεων χρειάζεται κάποια ελάφρυνση, με ενίσχυση της δομής των γνώσεων και της συσχέτισης του καινούριου με το ήδη αφομοιωμένο.

5) Από πολύ νωρίς πρέπει να χρησιμοποιούνται προβλήματα που επιδέχονται διαφορετικούς τρόπους λύσης , ώστε να εμπεδώσουν οι μαθητές ότι η ορθότητα ενός συλλογισμού είναι διαφορετική από την απομνημόνευση μιας σειράς υποχρεωτικών βημάτων.

6) Σημαντική θεωρούμε την αναβάθμιση του μαθήματος της Θεωρητικής Γεωμετρίας, με την έμφαση στον ουσιαστικό της χαρακτήρα που σχετίζεται με την ενίσχυση της ανάλυσης, της σύνθεσης και όχι στην υποβάθμισή της σε αλγεβρικές πράξεις, όπως εν πολλοίς γίνεται σήμερα (μετρικές σχέσεις κτλ.).

Από τον **εφαρμόσιμο** χαρακτήρα των Μαθηματικών απορρέουν οι εξής κανόνες:

1. Η ύλη πρέπει να διαμορφώνεται με κριτήρια, πέραν των προηγούμενων, και από τις ανάγκες άλλων μαθημάτων σε Μαθηματικά, όπως η Φυσική.

2. Να υπάρχουν στην ύλη και να διδάσκονται παραδείγματα χρήσης των Μαθηματικών σε άλλες επιστήμες.

3. Να γίνεται εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων που αποκτήθηκαν σε μια ποικιλία προβλημάτων ακόμα και διεπιστημονικών.

4. Το μάθημα της Γεωμετρίας έχει σοβαρό λόγο ύπαρξης λόγω της δυνατότητας που καλλιεργεί σε όλους για την καλύτερη αντίληψη του χώρου,

αλλά και λόγω της ειδικής χρησιμότητάς της και του βασικού της ρόλου σε επιστημονικές περιοχές όπως Φυσική, Αρχιτεκτονική, Κατασκευές Πολιτικών Μηχανικών, Μηχανολόγων, σχεδιαστών βιομηχανικών προϊόντων κλπ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ1 (ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{o})

Κωδικοποίηση:

1) Δ: έλλειψη δικαιολόγησης

2) Δ1: έλλειψη δικαιολόγησης για την παραλληλία

3) Δ2: έλλειψη δικαιολόγησης για την εξίσωση του επιπέδου Σ

4) Π: αριθμητικά λάθη στη λύση συστημάτων

5) Π1: αριθμητικό λάθος στο πρώτο ερώτημα

6) Π2: αριθμητικό λάθος στο δεύτερο ερώτημα

7) Κ : κατανόηση της ύλης των διανυσμάτων

8)Κ1: μη κατανόηση της έννοιας της παραλληλίας

9) Κ2: μη κατανόηση στην εύρεση του επιπέδου Σ και των αναλυτικών εξισώσεων

10) 1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν σωστά

11) Α/Α ή ΑΡ. : αύξων αριθμός φοιτητών

12) Β1 έως Β4 :τα 6 βήματα της λύσης

Για τους φοιτητές με βαθμολογία πάνω από 5 ο πίνακας αναλυτικά είναι:

ΑΡ.	**Θ1**	**Θ1**	**Θ1**	**Θ1**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
27	1	1	1	1
28	1	1	1	1
29	1	1	1	1

30	1	1	1	1
31	1	1	1	1
32	1	1	1	Π1
33	1	1	1	Π1
34	1	1	1	Π1
35	1	1	1	Π1
36	1	1	1	Π1
37	1	1	1	Π1
38	1	1	1	Π2
39	1	1	1	Π2
40	1	1	1	Π2
41	1	1	1	Π2
42	Δ1	1	1	0
43	Δ1	1	1	0
44	1	Δ2	1	0
45	Δ1	Δ2	1	0
46	1	1	Κ1	Κ2
47	1	1	Κ1	Κ2
48	1	1	Κ1	0
49	Δ1	1	Κ1	0
50	Δ1	1	Κ1	0

Για τους φοιτητές από Α-Κ αναλυτικά ο πίνακας είναι:

ΑΡ.	**Θ1**	**Θ1**	**Θ1**	**Θ1**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	Κ1	1
5	1	1	1	Π2
6	1	1	Κ1	Π2
7	1	1	Κ1	Π2
8	1	1	1	Π2
9	1	1	1	Π2
10	1	1	Κ1	Π2
11	1	1	Κ1	Π2
12	1	1	Κ2	Π2
13	1	1	0	0
14	1	1	0	0

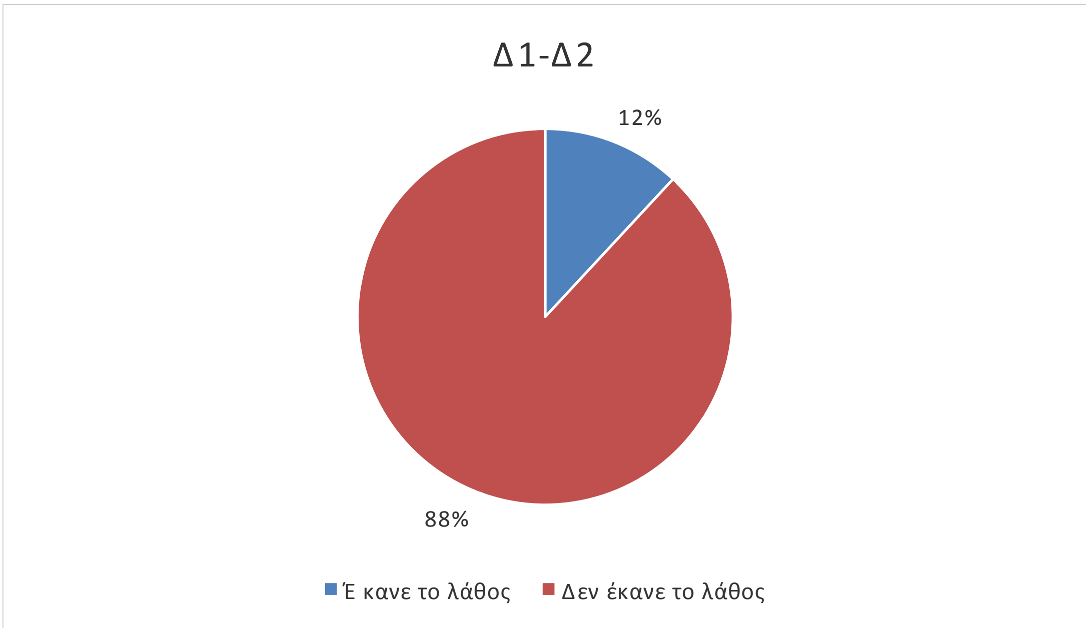
15	1	1	Κ2	0
16	Δ1	1	1	1
17	Δ1	Δ2	1	1
18	1	1	1	1
19	1	Δ2	Κ1	1
20	1	Δ2	Κ1	1
21	1	Δ2	Κ1	1
22	Δ1	Δ2	1	1
23	Δ1	Δ2	Κ1	1
24	Δ1	Δ2	1	0
25	Δ1	1	Κ1	1

Για τους φοιτητές με τυχαία επιλογή ο πίνακας είναι:

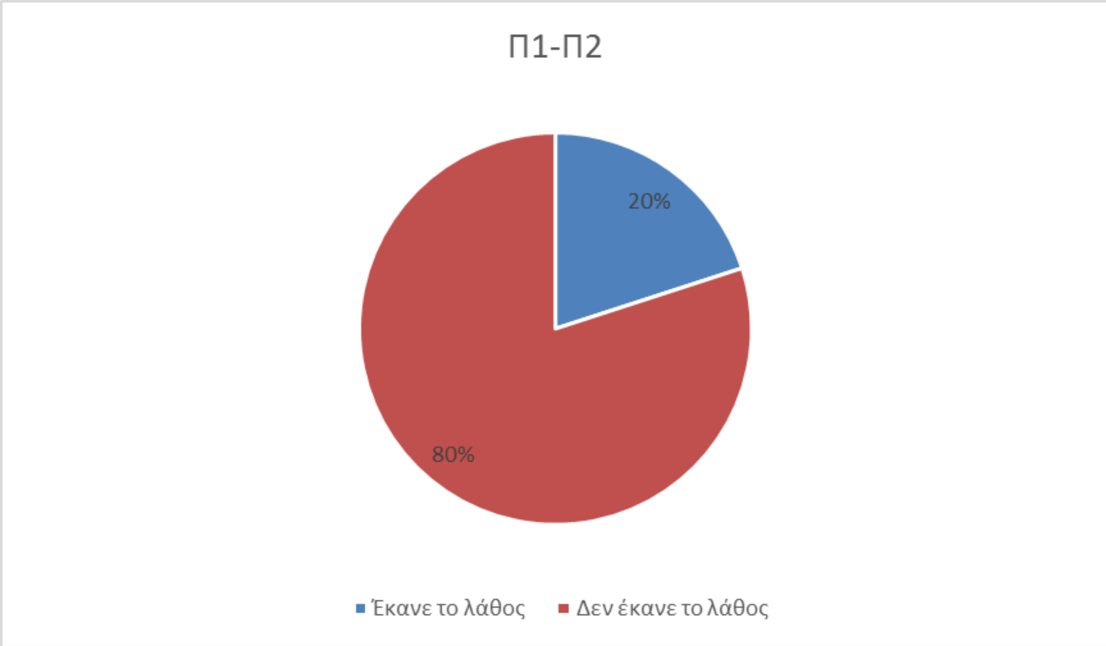
ΑΡ.	**Θ1**	**Θ1**	**Θ1**	**Θ1**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**
1.	1	1	1	1
2.	1	1	1	1
3.	1	1	1	1
4.	1	1	1	1
5.	1	1	1	1
6.	1	1	1	1
7.	1	1	1	1
8.	1	1	1	1
9.	1	1	1	1
10.	1	1	1	1
11.	1	1	Κ1	Π2
12.	1	1	Κ1	Π2
13.	1	1	1	Π2
14.	1	1	1	1
15.	1	1	Κ1	1
16.	1	1	1	1
17.	1	1	1	Π1
18.	1	1	1	Π1
19.	1	1	1	Π1
20.	1	1	Κ1	1
21.	1	1	Κ1	1
22.	1	Δ2	1	1
23.	Δ1	Δ2	1	1
24.	Δ1	Δ2	Κ1	1
25.	Δ1	1	Κ1	1

<u>**Διαγράμματα πίνακα 1**</u>

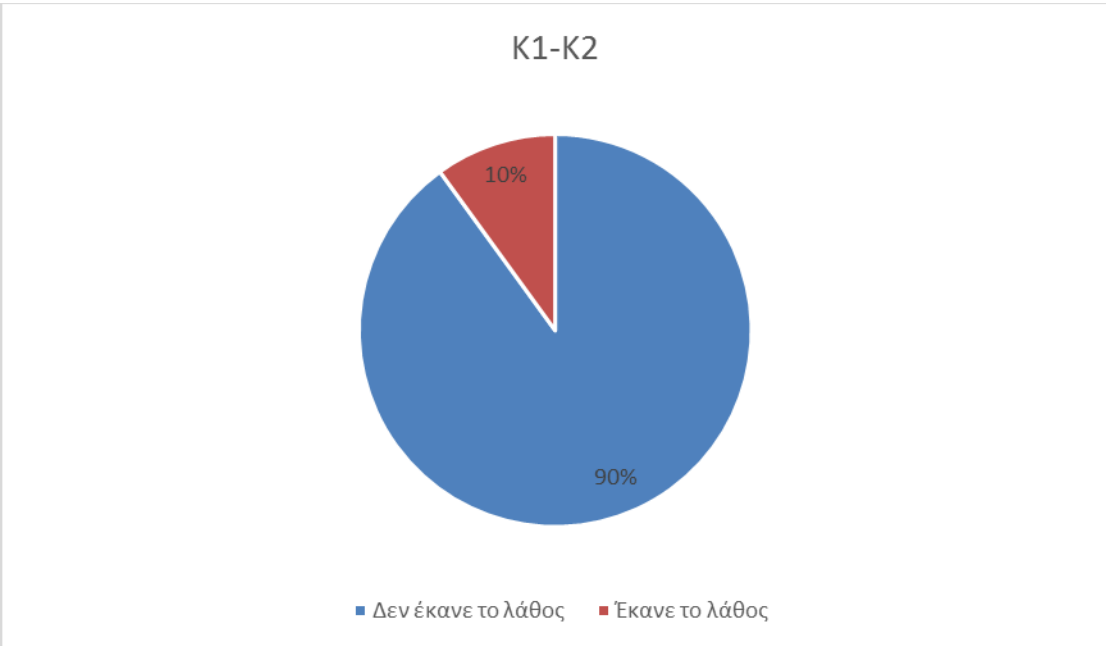
Διάγραμμα 1



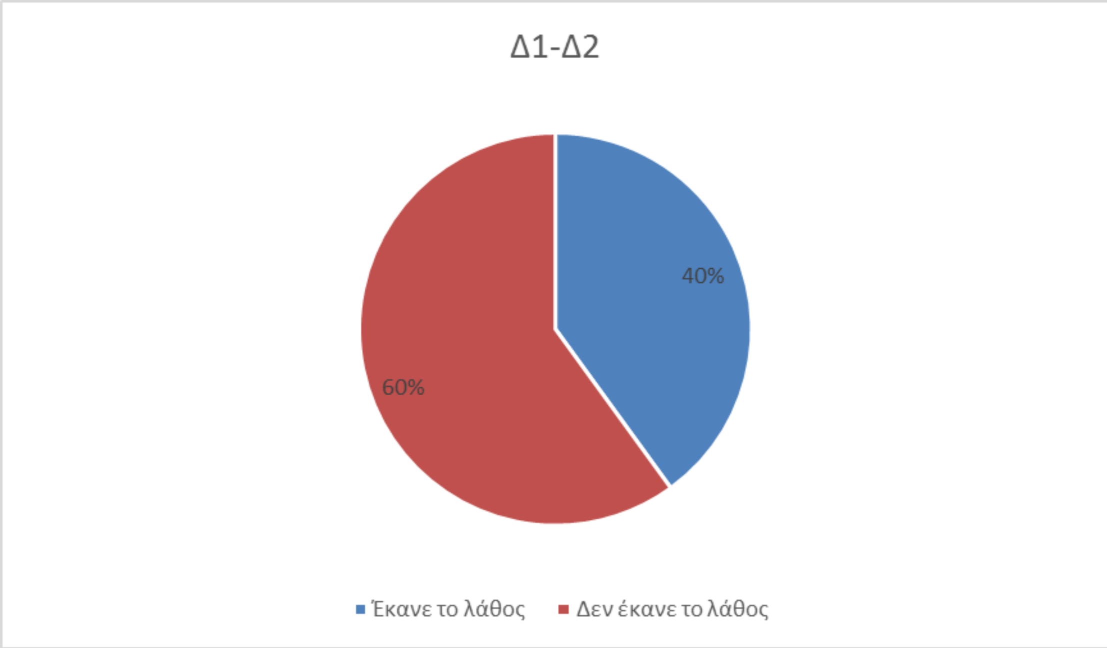
Διάγραμμα 2



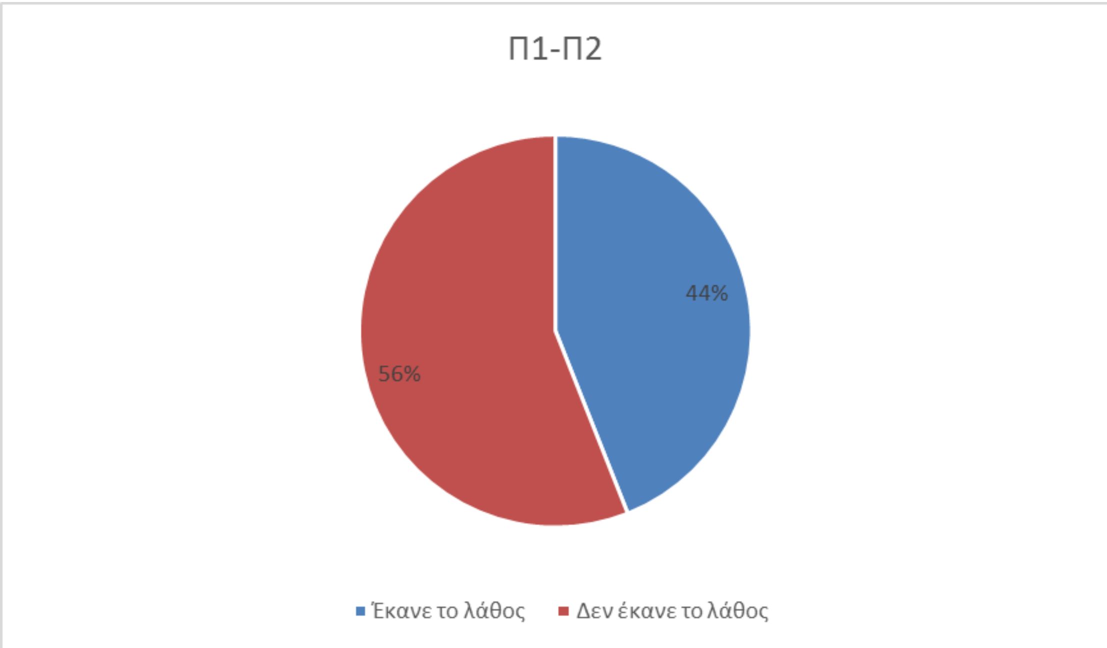
Διάγραμμα 3



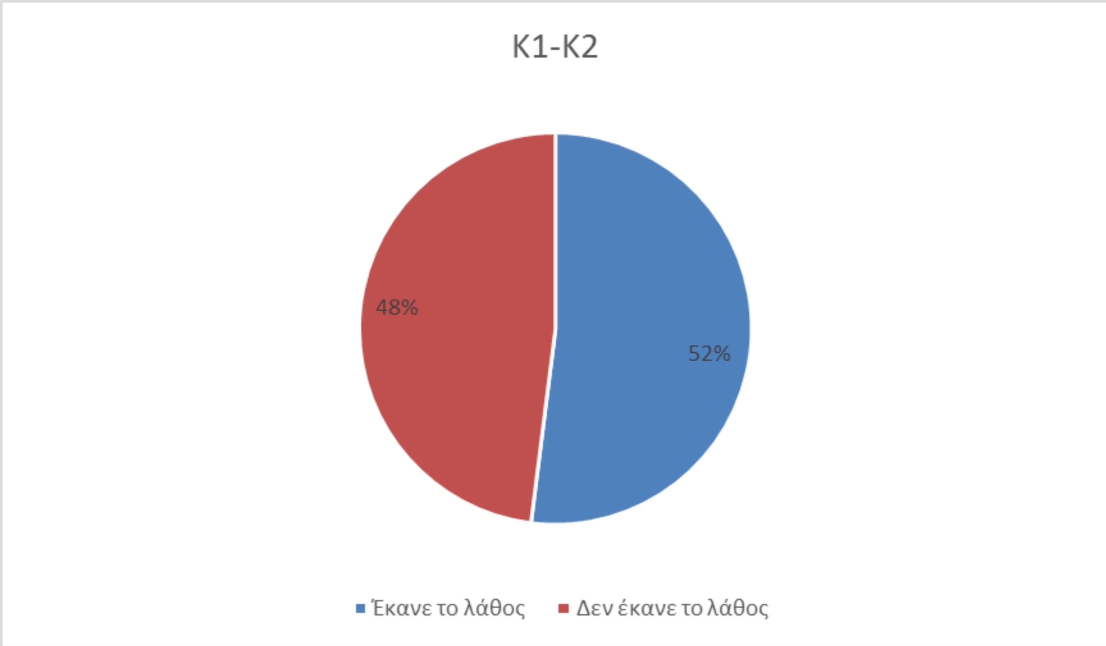
Διάγραμμα 4



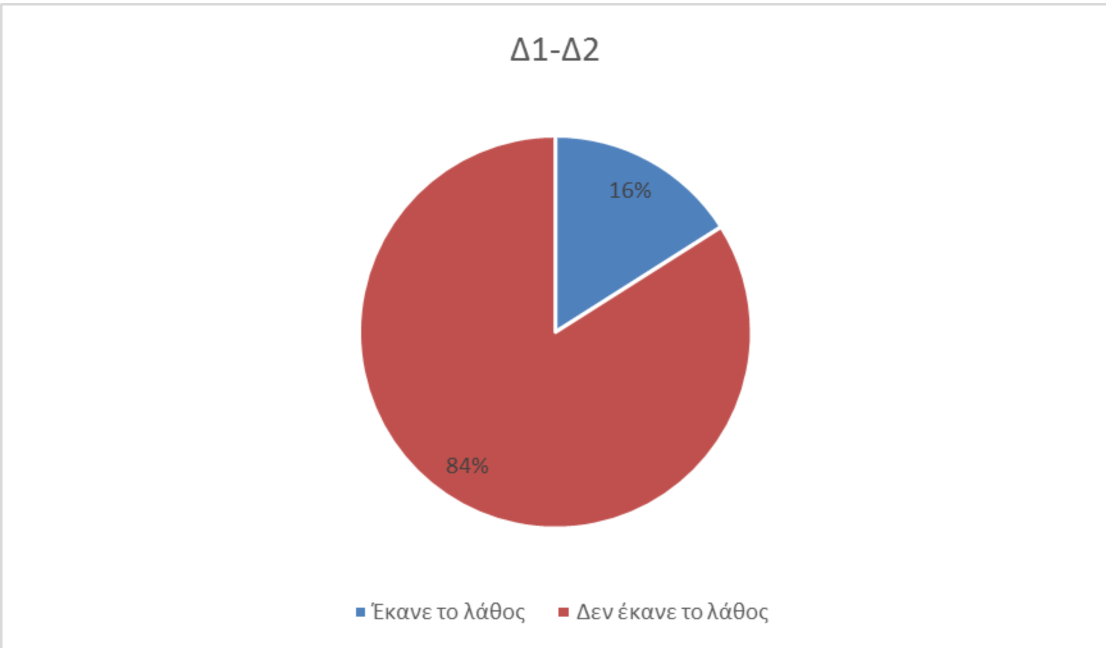
Διάγραμμα 5



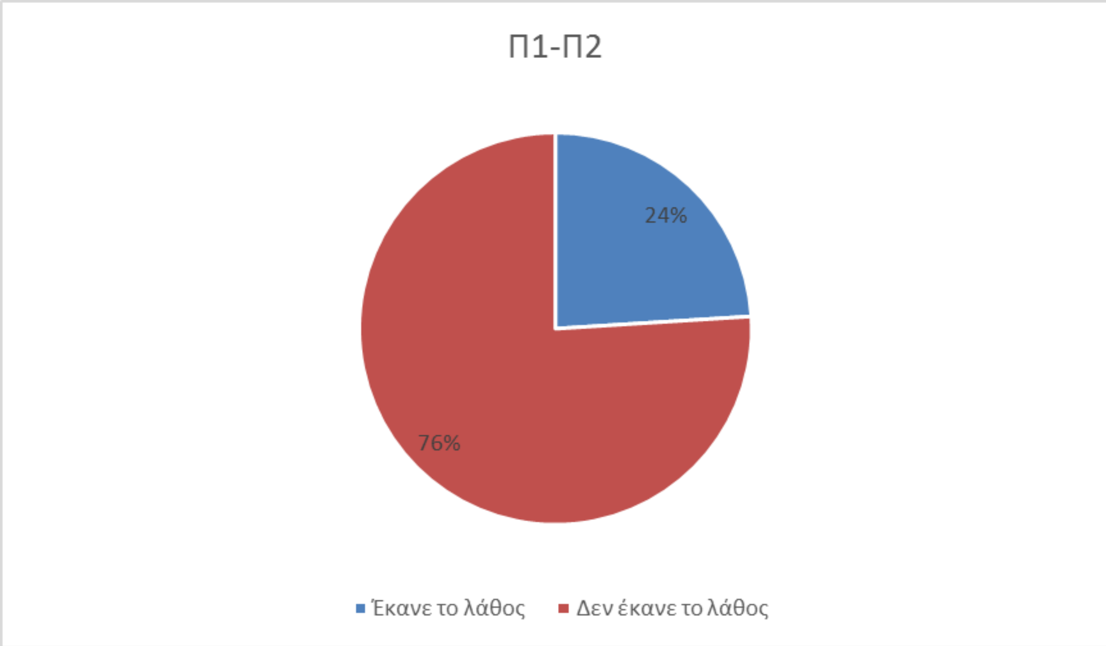
Διάγραμμα 6



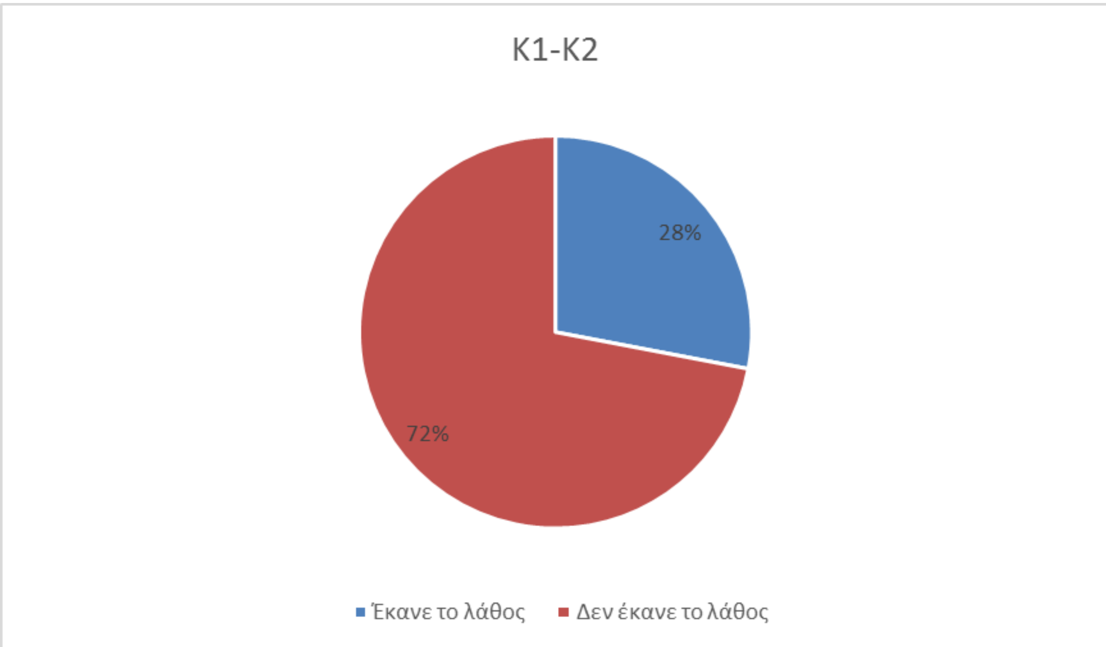
Διάγραμμα 7



Διάγραμμα 8



Διάγραμμα 9



ΠΙΝΑΚΑΣ 2(ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{o})

Κωδικοποίηση:

1) Δ: έλλειψη δικαιολόγησης

2) Δ1: έλλειψη δικαιολόγησης για τις αναλυτικές εξισώσεις

3) Δ2: έλλειψη δικαιολόγησης για τις ασύμβατες

4) Π: αριθμητικά λάθη στη λύση συστημάτων

5) Π1: αριθμητικό λάθος στο πρώτο ερώτημα

6) Π2: αριθμητικό λάθος στο δεύτερο ερώτημα

7) Κ : κατανόηση της ύλης των διανυσμάτων

8) Κ1: μη κατανόηση της έννοιας των αναλυτικών εξισώσεων

9) Κ2: μη κατανόηση έννοιας ασυμβάτων

10) 1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν σωστά

11) Α/Α ή ΑΡ. : αύξων αριθμός φοιτητών

12) Β1 έως Β2 :τα 4 βήματα της λύσης

Για τους φοιτητές με βαθμολογία πάνω από 5 ο πίνακας αναλυτικά είναι:

ΑΡ.	**Θ2**	**Θ2**
Α/Α	**Β1**	**Β2**
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	1	1
11	1	1
12	1	1
13	1	1
14	1	1
15	1	1
16	1	1
17	1	1

18	1	1
19	1	1
20	1	1
21	1	1
22	1	1
23	1	1
24	1	1
25	1	1
26	1	1
27	1	1
28	1	1
29	1	1
30	1	1
31	1	1
32	1	1
33	1	1
34	1	1
35	1	1
36	1	1
37	1	1
38	1	1
39	1	1
40	1	Π2
41	1	Π2
42	Δ1	Π2
43	Δ1	Π2
44	1	Π1
45	Δ1	Π1
46	1	Π1
47	Κ1	1
48	Κ1	1
49	Κ1	Π1
50	1	0

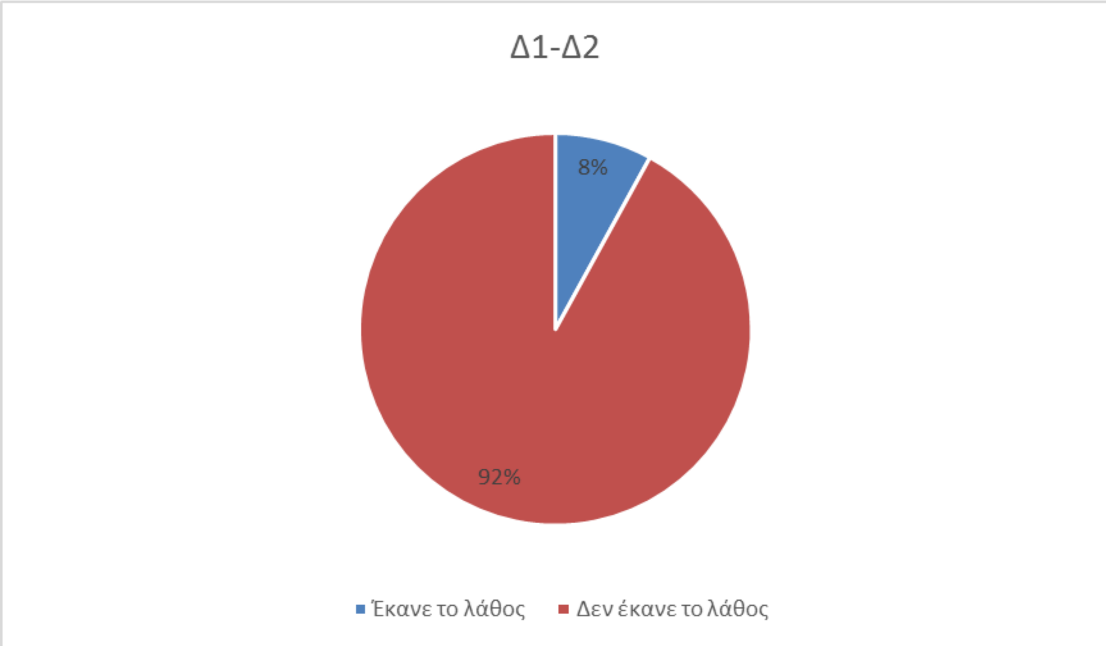
Για τους φοιτητές με τυχαία επιλογή ο πίνακας αναλυτικά είναι:

ΑΡ.	**Θ2**	**Θ2**
Α/Α	**Β1**	**Β2**
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1

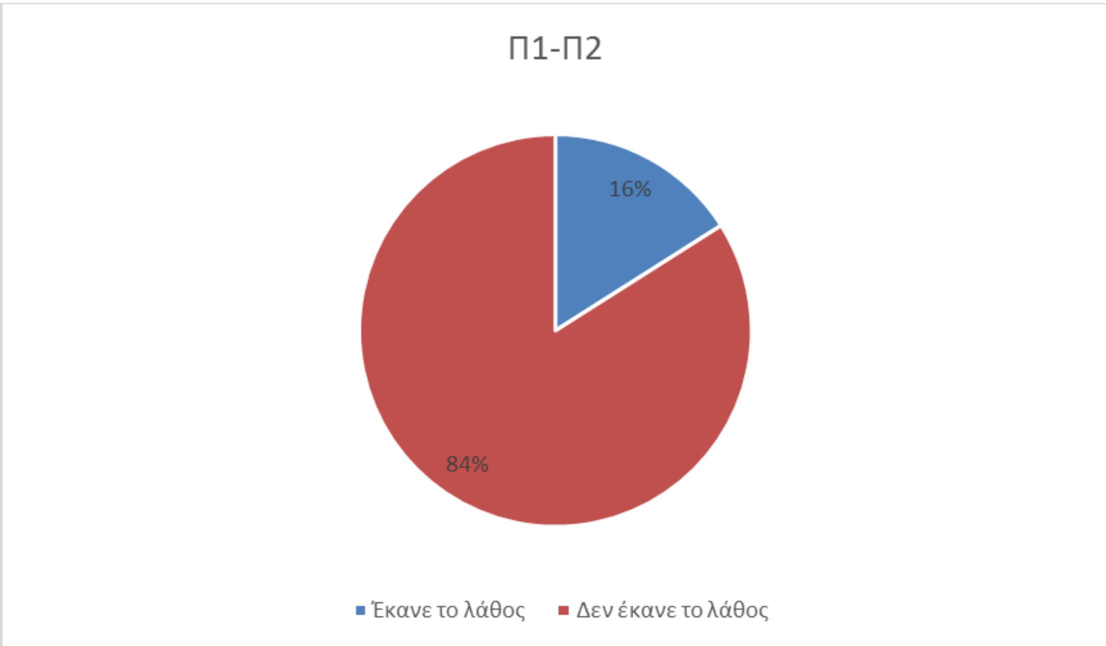
8	1	Π2
9	1	Π2
10	1	Π2
11	1	Π2
12	1	Π2
13	1	Π2
14	1	Π2
15	1	Π2
16	K1	Π1
17	K1	Π1
18	K1	Π1
19	1	Π1
20	1	Π1
21	K1	Π1
22	1	Π1
23	1	Π1
24	K1	Π1
25	1	Π1
26	1	Π1
27	1	Π1
28	1	Π1
29	K1	Π1
30	1	Π1
31	K1	Π1
32	Δ1	1
33	Δ1	1
34	K1	1
35	K1	1
36	1	1
37	K1	1
38	Δ1	1
39	Δ1	1
40	Δ1	1
41	Δ1	1
42	Δ1	1
43	Δ1	1
44	K1	Π1
45	Δ1	Π1
46	Δ1	Π1
47	K1	1
48	K1	1
49	K1	Π1
50	K1	Π1

Διαγράμματα πίνακα 2

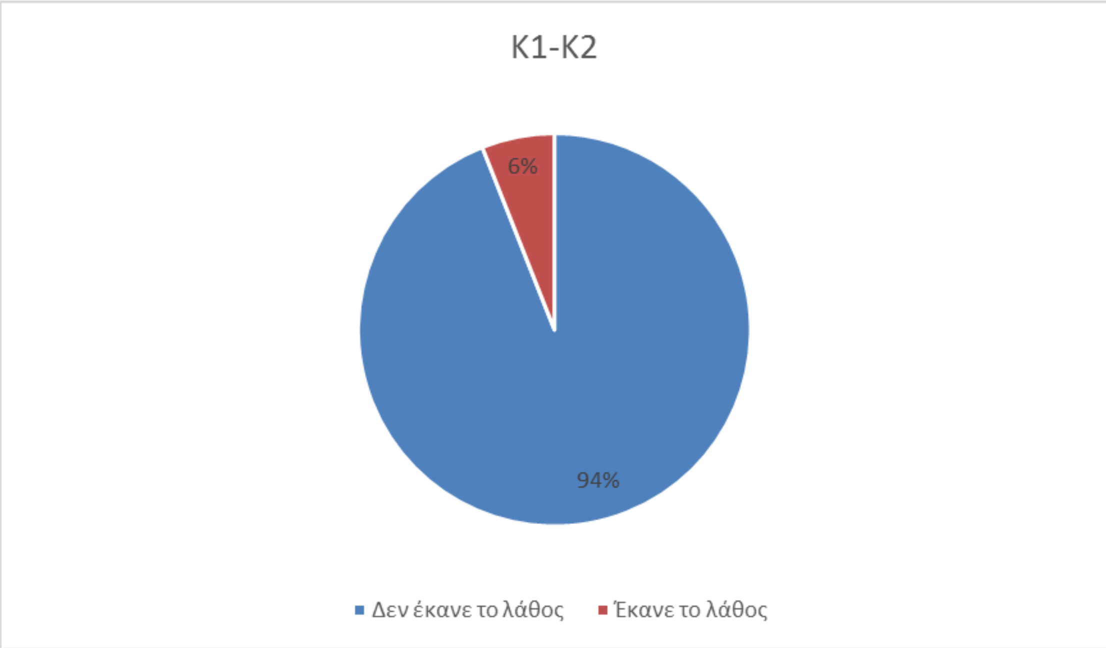
Διάγραμμα 1



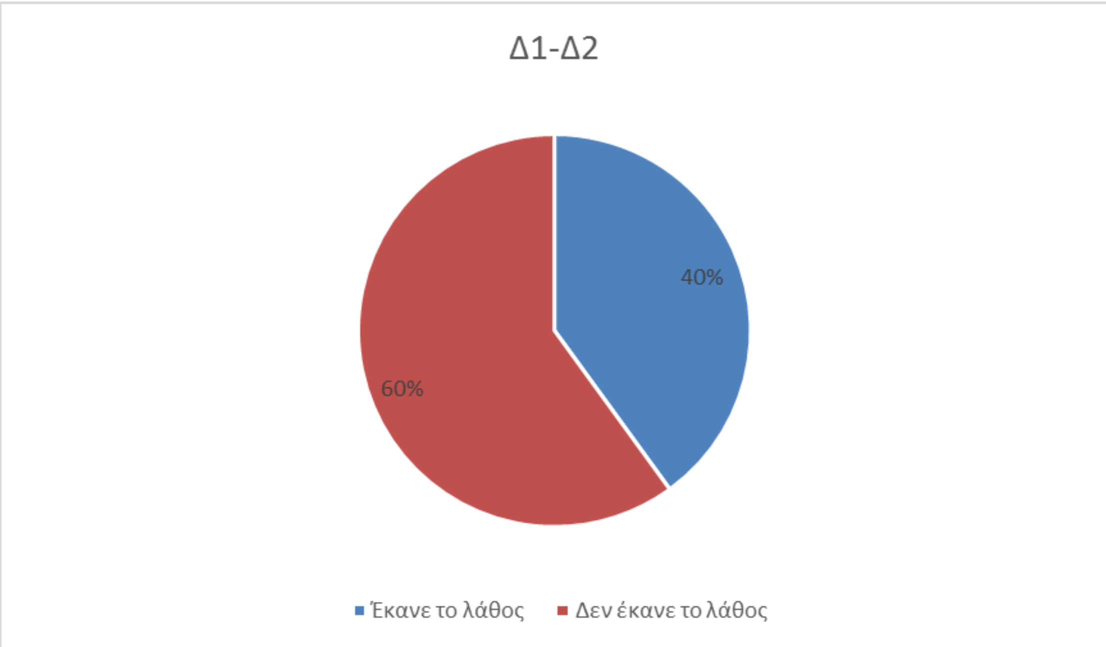
Διάγραμμα 2



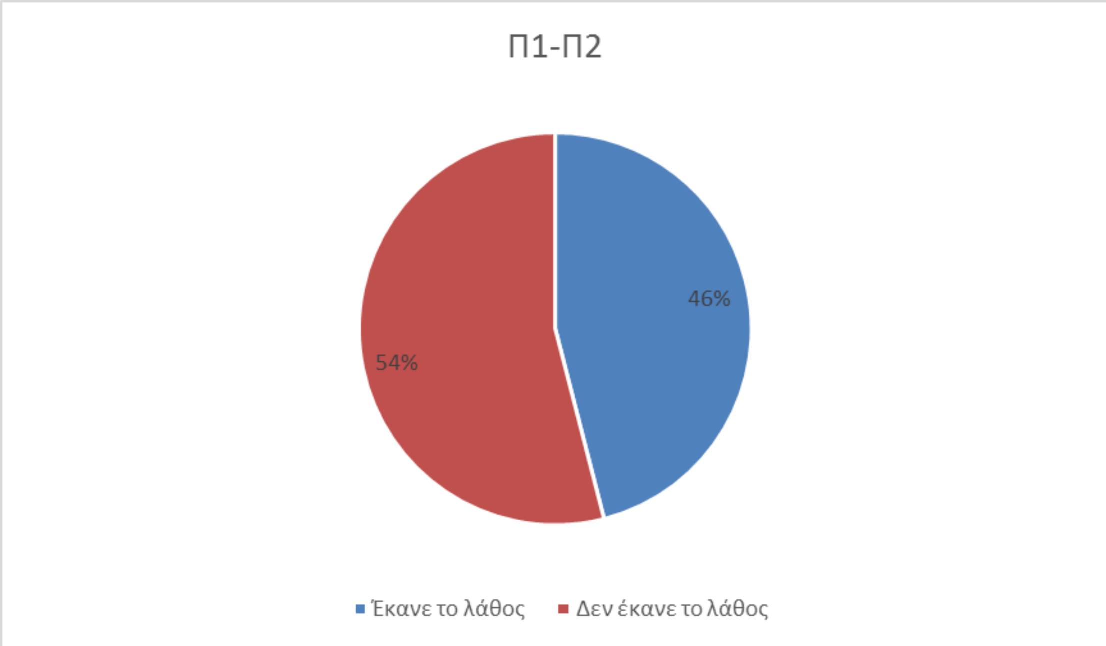
Διάγραμμα 3



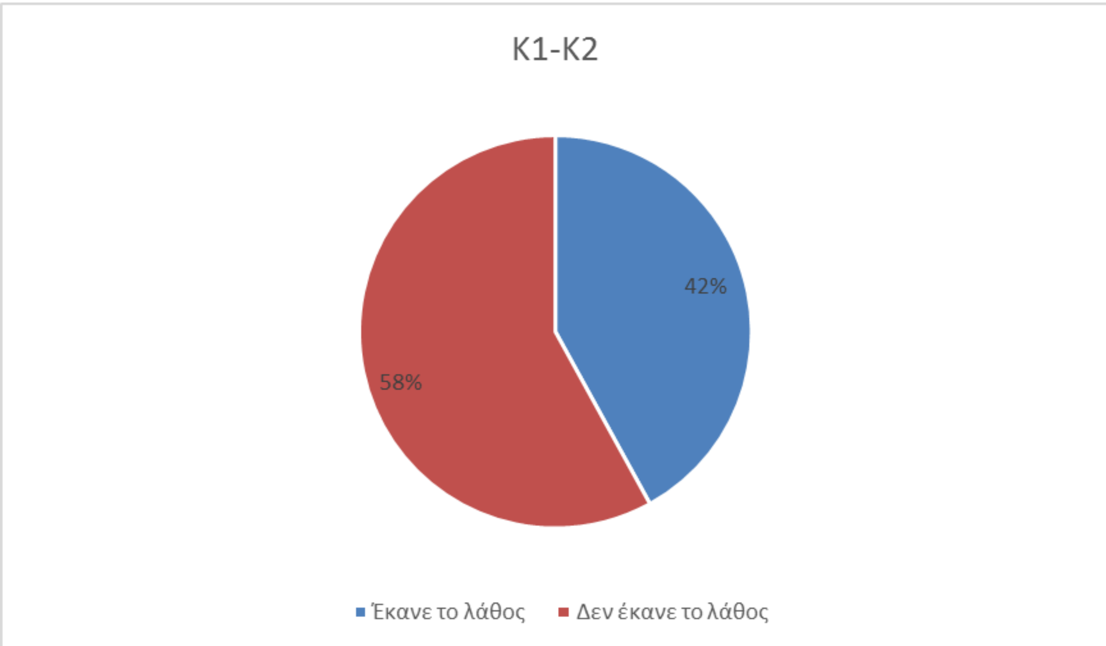
Διάγραμμα 4



Διάγραμμα 5



Διάγραμμα 6



ΠΙΝΑΚΑΣ 3 (ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{Ο})

Κωδικοποίηση:

1) Δ: έλλειψη δικαιολόγησης

2) Δ1: έλλειψη δικαιολόγησης για τις αναλυτικές εξισώσεις

3) Δ2: έλλειψη δικαιολόγησης για τις ασύμβατες

4) Π: αριθμητικά λάθη στη λύση συστημάτων

5) Π1: αριθμητικό λάθος στο πρώτο ερώτημα

6) Π2: αριθμητικό λάθος στο δεύτερο ερώτημα

7) Κ : κατανόηση της ύλης των διανυσμάτων

8)Κ1: μη κατανόηση της έννοιας των αναλυτικών εξισώσεων

9) Κ2: μη κατανόηση έννοιας ασυμβάτων

10) 1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν σωστά

11) Α/Α ή ΑΡ. : αύξων αριθμός φοιτητών

12) Β1 έως Β4 :τα 4 βήματα της λύσης

Για τους φοιτητές με βαθμολογία πάνω από 5 ο πίνακας αναλυτικά είναι:

ΑΡ.	**Θ2**	**Θ2**	**Θ2**	**Θ2**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1

20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
27	1	1	1	1
28	1	1	1	1
29	1	1	1	1
30	1	1	1	1
31	1	1	1	1
32	1	1	1	Π2
33	1	1	1	1
34	1	1	1	Π2
35	1	1	1	1
36	1	1	1	Π2
37	1	1	1	1
38	1	1	1	1
39	1	1	1	Π2
40	1	1	1	Π2
41	1	1	1	Π2
42	Δ1	1	1	Π2
43	Δ1	1	1	Π2
44	1	Π1	1	Π2
45	Δ1	Π1	1	Π2
46	1	Π1	1	Π2
47	1	1	Κ1	Κ2
48	1	1	Κ1	0
49	Δ1	Π1	Κ1	0
50	1	0	0	0
51	1	1	1	Κ2
52	Δ1	0	Δ2	Κ2
53	Δ1	Π1	Δ2	Π2
54	1	1	1	Π2
55	Δ1	Π1	Δ2	Π2
56	1	Π1	1	Π2
57	0	0	0	0
58	0	0	0	0

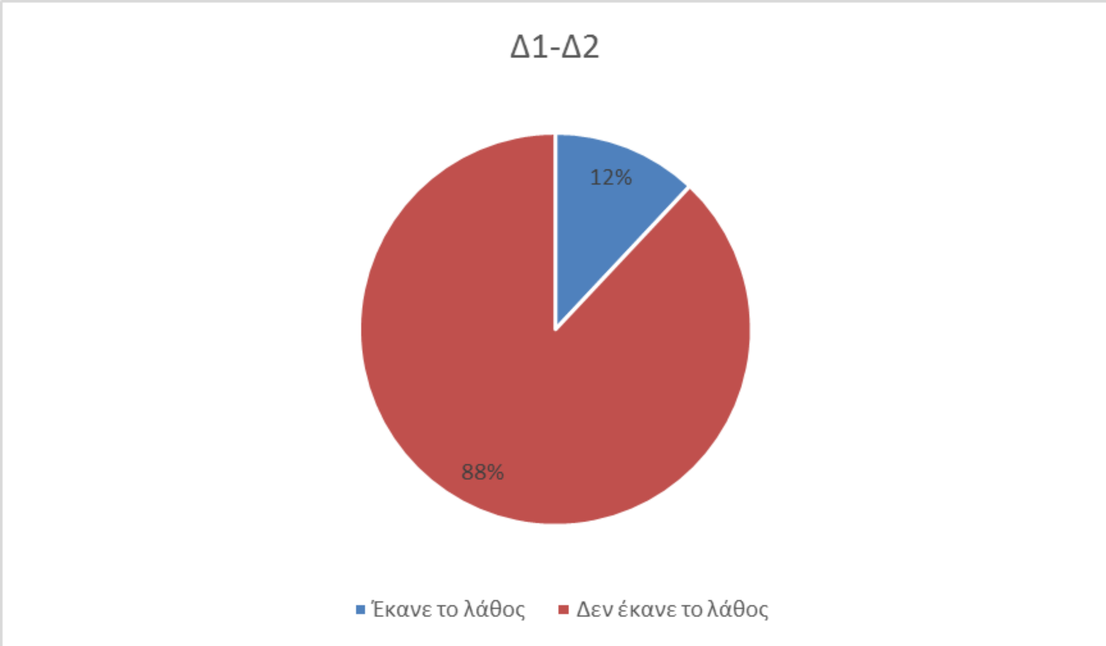
Για τους φοιτητές με τυχαία επιλογή (όχι πάνω από 5)ο πίνακας αναλυτικά είναι:

ΑΡ.	**Θ2**	**Θ2**	**Θ2**	**Θ2**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**
1	1	1	1	1

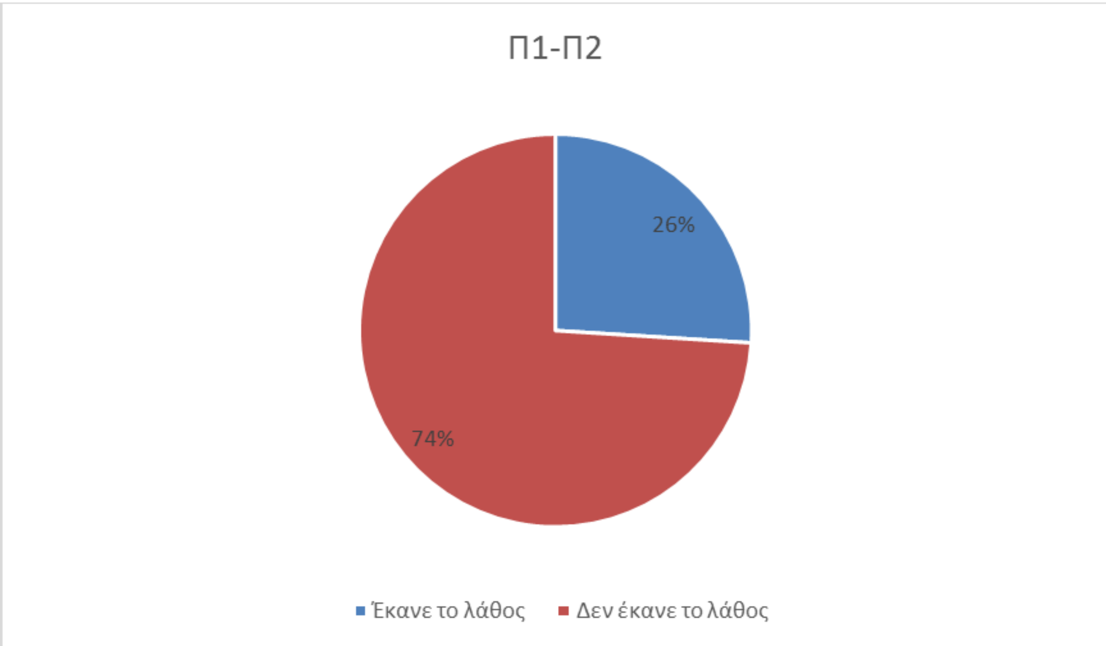
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	Π2
8	1	1	1	Π2
9	1	1	1	Π2
10	1	1	Κ2	Π2
11	1	1	Κ2	Π2
12	1	1	1	Π2
13	1	1	1	Π2
14	1	1	1	Π2
15	Κ1	1	Κ2	Π2
16	Κ1	1	1	Π2
17	Κ1	1	1	Π2
18	1	1	1	Π2
19	1	1	Κ2	Π2
20	Κ1	Π1	Κ2	1
21	1	Π1	Κ2	Π2
22	Κ1	Π1	Δ2	0
23	Κ1	Π1	Δ2	0
24	Δ1	Π1	Κ2	Π2
25	1	Π1	Δ2	1
26	1	Π1	Δ2	Π2
27	Δ1	Π1	Κ2	1
28	Δ1	Π1	Δ2	0
29	Κ1	Π1	Δ2	0
30	Δ1	Π1	Δ2	Π2
31	Δ1	Π1	Κ2	Π2
32	Δ1	1	Κ2	1
33	Δ1	1	Δ2	0
34	Κ1	1	Δ2	0
35	Κ1	1	Δ2	0
36	Δ1	Π1	Δ2	0
37	Κ1	Π1	Δ2	0
38	Δ1	Π1	0	0
39	Δ1	Π1	0	0
40	Δ1	Π1	Δ2	0
41	Δ1	Π1	Κ2	0
42	Δ1	Π1	Κ2	0

Διαγράμματα πίνακα 3

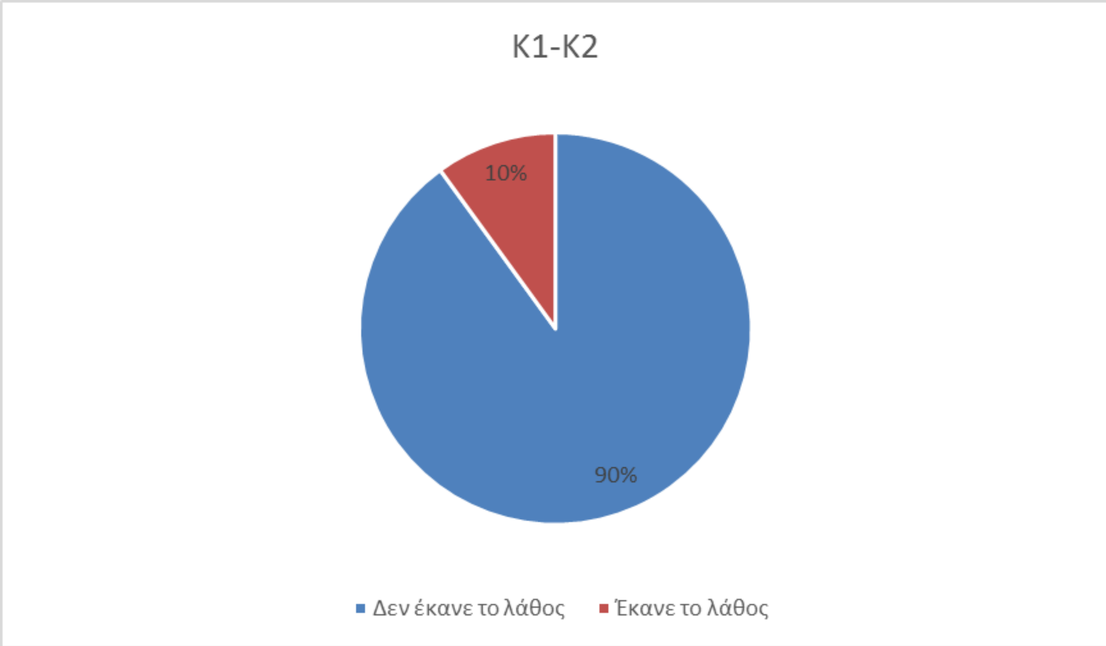
Διάγραμμα 1



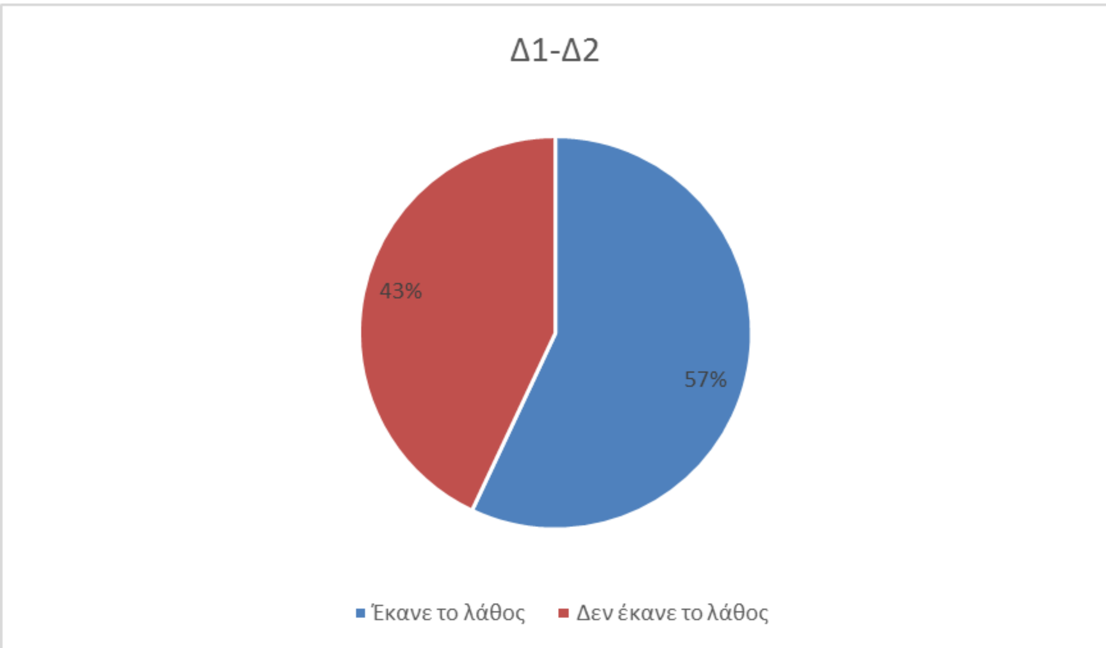
Διάγραμμα 2



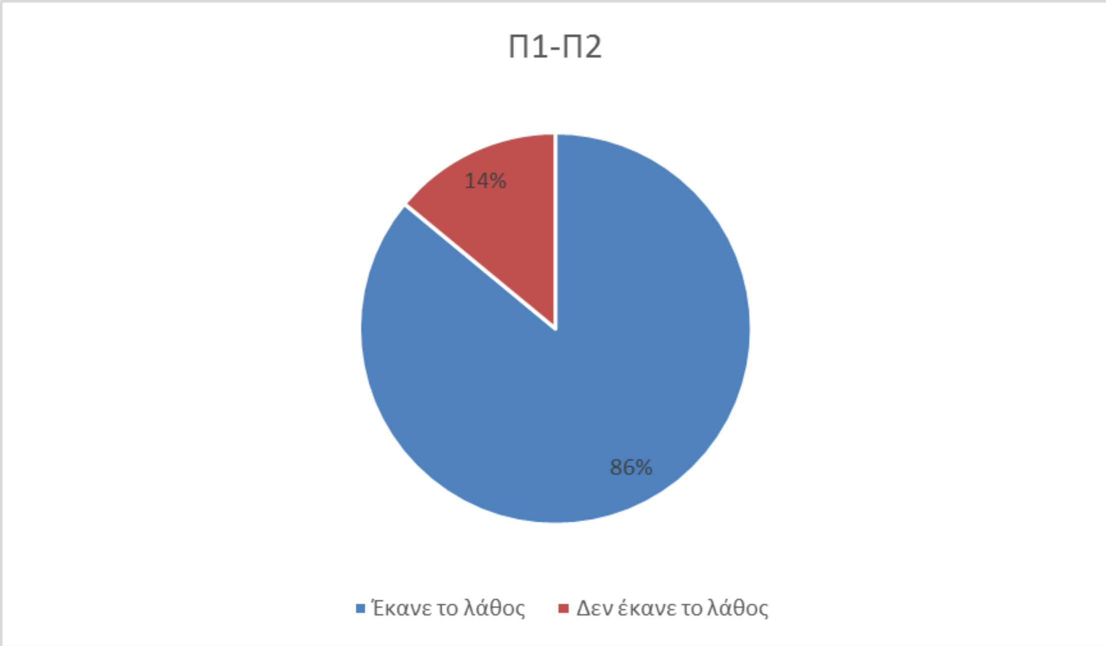
Διάγραμμα 3



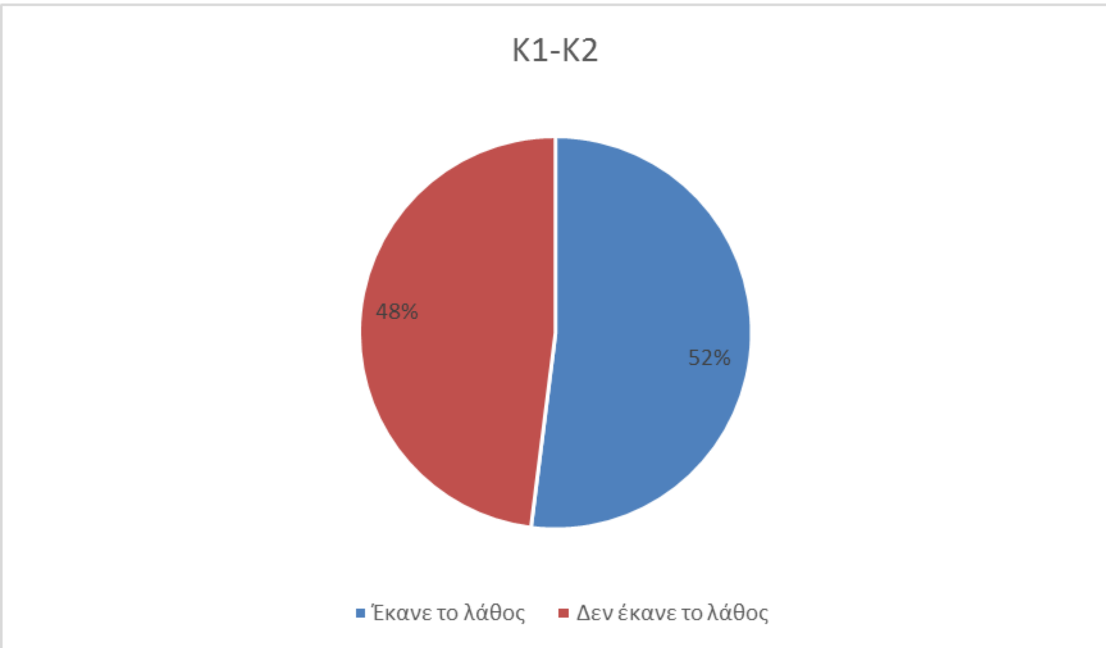
Διάγραμμα 4



Διάγραμμα 5


Π1-Π2
14%
86%
Έκανε το λάθος
Δεν έκανε το λάθος

Διάγραμμα 6


Κ1-Κ2
48%
52%
Έκανε το λάθος
Δεν έκανε το λάθος

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

<u>Έντυπο Υλικό</u>

1. Demetriadou, H. & Gagatsis, A. (????) On the history of the concept of vector and its introduction in elementary geometry textbooks, in Gagatsis, A. & Rogers, L. (ed.), Didactics and history of mathematic.
2. Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, 115-141.
3. Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Proceedings of PME 25.
4. J.L. Dorier (2002). ''Teaching Linear Algebra at University''
5. Καδιανάκης Ν., Καρανάσιος Σ. , «Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές», Έκδοση 2η ,Αθήνα 2002
6. Παυλάκος Γεώργιος, «Μεταπτυχιακή εργασία: Διανύσματα: Επιστημολογική προσέγγιση και δυσκολίες κατανόησης από τους μαθητές», Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών
7. Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ. & Σβέρκος, Α. (1989) Μαθηματικά της Γ΄Γυμνασίου, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β
8. Φελλούρης Γ. Αργύρης, « Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία», Εκδόσεις Συμεών- Έκδοση 6η ,Αθήνα 2001
9. Γαγάτσης, Α. & Δημητριάδου Ε. (1995). Προβλήματα Διδασκαλίας και Μάθησης της Έννοιας του Διανύσματος στην Ελλάδα
10. Συκαρά Νεκταρία(2005), Μεταπτυχιακή εργασία, «Προσεγγίσεις της έννοιας του διανύσματος από μαθητές δημοτικού μέσα σε

ένα τρισδιάστατο υπολογιστικό περιβάλλον προσομοίωσης», Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών ,"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ''

11. http://www.emelak.gr/Nea/Protasi_beltiosis_mathimatikon_DE.pdf, από τον τομέα μαθηματικών της σχολής ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ του Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

12. Tall D. (2004), Introducing Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics, (υπό έκδοση).