



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών
στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής σε
Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών

Διπλωματική Εργασία

Θεμιστοκλή Ν. Δικονυμάκη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2014

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κ. Γιαννάκογλου για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το παρόν θέμα καθώς και για την καθοδήγηση που μου παρείχε. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω όλη την ερευνητική ομάδα της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ του ΕΜΠ, για το χρόνο που αφιέρωσε ώστε να μου παρέχει γνώσεις και συμβουλές, οι οποίες με βοήθησαν σημαντικά στην δημιουργία, αντιμετώπιση όποιων προβλημάτων προέκυψαν αλλά και στην εκπόνηση της παρούσης εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να δώσω στον αδερφό μου, στην αδερφή μου και στους γονείς μου που με βοηθούν και μου συμπαραστέκονται πάντα, και συγκεκριμένα στην ολοκλήρωση των σπουδών μου στο ΕΜΠ, με την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ τους Δημήτρη, Χάρη, Κώστα, Άρτεμις, Πάνο, Σοφία, Γιάννα, Θέμη, ξάδερφο, Χρήστο, Μάχη, Αντώνη, την παρέα μου στα φοιτητικά μου χρόνια στο ΕΜΠ και έξω από αυτό, τον σύλλογο Κρητών και όλους που γνώρισα (μεγάλο ευχαριστώ στον Κονιάχο στο Βραχάτι στην Καστάνιτσα και στην ΝΥ).



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών
Διπλωματική Εργασία **Θεμιστοκλή Ν. Δικονυμάκη**
Επιβλέπων καθηγητής Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου
Αθήνα, 2014

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία ασχολείται με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών, μια νέα μέθοδος που προτείνεται ως εναλλακτική της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ο μικρότερος υπολογιστικός χρόνος που απαιτεί έναντι της μεθόδου της Χρονο-προέλασης για τον υπολογισμό του επιθυμητού πεδίου λύσεων. Ως αντιπαράθεση, το αυξημένο ποσό μνήμης που χρειάζεται, αποτελεί αρνητικό της μεθόδου. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε περιοδικά πεδία ροής και θεωρεί ότι η λύση που ζητείται αναλύεται σε σειρά Fourier. Για να βρεθούν τα πεδία λύσεων, απαιτείται ο υπολογισμός των συντελεστών Fourier, έτσι διακριτοποιείται η λύση σε έναν αριθμό "εικόνων" (ισοκατανεμημένα στον χρόνο στιγμιότυπα της ροής μέσα στην περίοδο του φαινομένου) και υπολογίζονται οι συντελεστές στα στιγμιότυπα αυτά λύνοντας τις "εικόνες" πεπλεγμένα (coupled).

Ο κώδικας που εφαρμόζει τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών προγραμματίστηκε σε CUDA/C για επεξεργαστές καρτών γραφικών. Τα αποτελέσματα που έδωσε η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών συγκρίθηκαν με αυτά της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Ο κώδικας που επιλύει την ροή με την μέθοδο της Χρονο-προέλασης προυπήρχε στο εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ και είναι και αυτός γραμμένος για Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών GPUs.



National Technical University of Athens
Σχολή οφ Μεσηανιζαλ Εγγινεερινγ
Δεπαρτεμεντ οφ Φλυιδε
Λαβορατορψ οφ Τηερμαλ Τυρβομασηινε
Παραλληλ ΦΔ & Οπτιμιζατιον Υνιτ

**Programming of the Harmonic Balance method for the numerical prediction of
periodic flow fields on GPUs**

Diploma Thesis **Themistoklis N. Dikonimakis**

advisor Kyriakos C.Giannakoglou, Professor NTUA
Athens, 2014

Abstract

The aspect of this thesis is the method of Harmonic Balance, in comparison with the classic one of Time Marching. Advantage of the Harmonic Balance method is that the transient phenomenon does not predicted numerically as the Time Marching method does (the periodic phenomenon is predicted numerically). In this way, Harmonic Balance method consumes less time for the periodic phenomenon's response. However, the amount of memory that in Harmonic Balance is used, is some times the memory Time Marching needs.

Harmonic Balance is used for the numerical prediction of periodic flow fields. In this aspect, it is considered that the solution fields can be written on series Fourier. In order to predict flow fields, Fourier factors should be found. In this way of thought, solution is discretized in a number of "snaps", which are same-distributed in the phenomenon period. "Snaps" are numerically predicted in a coupled way and from them, Fourier factors are found.

The Harmonic Balance code is written on CUDA/C for GPUs and the results are put on comparison with the one Time Marching method numerical predicts. The Time Marching code is also written on CUDA/C for GPUs and already existed on the Laboratory of Thermal Turbomachines Parallel CFD & Optimization Unit of National Technical University of Athens.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Δομή Διπλωματικής Εργασίας	2
2 Λίγα λόγια για τους Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών (GPU)	3
2.0.1 Παραλληλος Προγραμματισμός σε Επεξεργαστή Κάρτας Γραφικών GPU	4
3 Εξισώσεις Euler - Διακριτοποίηση και Οριακές συνθήκες	5
3.1 Εξισώσεις Euler	5
3.1.1 Παραδοχή του τέλειου αερίου	7
3.2 Διακριτοποίηση του πεδίου ροής	8
3.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler σε πεπερασμένους όγκους	9
3.3.1 Υπολογισμός του διανύσματος ροής	11
3.3.2 Αύξηση της τάξης ακρίβειας του σχήματος	15
3.4 Οριακές συνθήκες	15
3.4.1 Στερεά τοιχώματα	15
3.4.2 Είσοδος και Έξοδος πεδίου ροής	16
4 Η μέθοδος της Χρονο-προέλασης (Time Marching Method)	19
4.1 Γενικά Στοιχεία της Μεθόδου	19
4.2 Εξισώσεις Euler στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης - Διαδικασία Επίλυσης .	20
4.3 Επαναληπτική επίλυση με τη μέθοδο Jacobi	22
5 Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών (Harmonic Balance Method)	25

5.1	Μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου Ισορροπία των Αρμονικών	26
5.1.1	Θεωρητικό υπόβαθρο της Μεθόδου	26
5.1.2	Τρόπος Υπολογισμού των Πεδίων Λύσεων με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών	29
5.1.3	Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα	32
5.2	Οι εξισώσεις Euler με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών	33
5.2.1	Εξισώσεων Euler σύμφωνα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών	33
5.2.2	Διαδικασία εύρεσης τελικής λύσης - Επαναληπτική μέθοδος Jacobi .	38
5.2.3	Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα	40
6	Μελέτη Περιπτώσεων	43
6.1	Είδη Αγωγών που εξετάστηκαν	43
6.2	Περιοδικό Φαινόμενο και Συναρτήσεις Διέγερσης	45
6.3	Επιλογή κόμβων για τους οποίους παρουσιάζονται τα αποτελέσματά	48
6.4	Σύγκλιση μεθόδου Χρονο-προέλασης	49
7	Παρουσίαση και Σύγκριση Αποτελεσμάτων	57
7.1	Περίπτωση 1: Αγωγός σχήματος S	57
7.1.1	Ημιτονοειδής Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου	58
7.1.2	Συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου	62
7.1.3	Μη-συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου	66
7.2	Περίπτωση 2: Συγκλίνων Αγωγός	70
7.2.1	Ημιτονοειδής Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου	70
7.2.2	Συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου	74
7.2.3	Μη-συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου	78
8	Συμπεράσματα - Σχολιασμός Αποτελεσμάτων	83

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Προβλήματα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής κατά κύριο λόγο μη-μόνιμα, συνήθως αντιμετωπίζονται με τη γενική μέθοδο της Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος αυτή, όπως υποδεικνύει και το όνομα της, ορίζοντας τις οριακές συνθήκες, κάνει βήματα στο χρόνο και υπολογίζει το ζητούμενο πεδίο των λύσεων σε κάθε χρονική στιγμή. Όπως είναι λογικό, μία τέτοια μέθοδος υπολογίζει όλα τα στάδια μέχρι το φαινόμενο να ισορροπήσει στην τελική του ζητούμενη κατάσταση και συνεπώς ο χρόνος υπολογισμού των λύσεων είναι υψηλός. Επειδή ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του πεδίου των λύσεων είναι από τους πιο σημαντικούς παράγοντες στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, γίνονται προτάσεις νέων μεθόδων που να παρέχουν λύσεις ακριβείς σε μικρότερο χρονικό διάστημα. Στο πλαίσιο αυτής της φιλοσοφίας έχει προταθεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών[1] όπου εφαρμόζεται μόνο σε περιοδικές ροές και έχει το πλεονέκτημα να υπολογίζει κατευθείαν την περιοδική απόκριση χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός του μεταβατικού φαινομένου.

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η δημιουργία κώδικα για επεξεργαστές καρτών γραφικών GPU, γραμμένος δηλαδή σε C/CUDA[2], που να εφαρμόζει τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών για την αντιμετώπιση περιοδικών φαινομένων. Χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Euler στον τριδιάστατο χώρο και τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίθηκαν με αυτά της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί συνέχεια της διπλωματικής εργασίας του Γ.Κανέλλη[3], καθώς όλη η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών αναλύεται και προγραμματίζεται εκεί (για κεντρικούς επεξεργαστές CPUs σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran). Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, η μέθοδος αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε για επεξεργαστές καρτών γραφικών.

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών βασίζεται σε ένα ανάπτυγμα Fourier όπου αναδομώντας συγκεκριμένο αριθμό πεδίων λύσεων υπολογίζει οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στη περίοδο. Για να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Fourier απαιτείται ένας αριθμός συντελεστών, όσοι περισσότεροι οι συντελεστές τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια παρέχεται στη λύση, με κόστος μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο. Οι συντελεστές αυτοί είναι "εικόνες" του πεδίου ισο-κατανεμημένες στην περίοδο. Έτσι, αν θεωρηθούν $N_H = 2$ αρμονικές να αναλυθεί το πρόβλημα τότε θα προκύψουν $N_T = 2N_H + 1 = 5$ "εικόνες" ισο-κατανεμημένες στην περίοδο

του φαινομένου. Με άλλα λόγια, για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier απαιτείται υπολογιστικός χρόνος ίσος με αυτόν για τον υπολογισμό $N_T = 5$ χρονικά μόνιμων προβλημάτων, επιλυόμενων, όμως, πεπλεγμένα στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Με βάση αυτό, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι αρκετά πιο γρήγορη μέθοδος.

Στην διπλωματική αυτή εργασία εφαρμόστηκε η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών και τα αποτελέσματα που έδωσε συγκρίθηκαν με αυτά της μεθόδου της χρονο-προέλασης. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργήθηκαν τριδιάστατα δομημένα πλέγματα για δύο αγωγούς, ο ένας σχήματος S και ο άλλος συγκλίνων, όπου εφαρμόζοντας μια περιοδική στο χρόνο διαφορά πίεσης στα άκρα τους, το ρευστό στο εσωτερικό τους κινείται υποηχητικά (μη-μόνιμη ροή). Τα πεδία των λύσεων υπολογίζονται με τις διακριτοποιημένες με κεντροκομβική διατύπωση σε πεπερασμένους όγκους εξισώσεις Euler, χρησιμοποιώντας μία επαναληπτική μέθοδο Jacobi. Ο κώδικας που λύνει τη ροή με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης προυπήρχε στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ γραμμένος για επεξεργαστές καρτών γραφικών GPU. Πάνω σε αυτόν, προστέθηκε το τμήμα εκείνο που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών που και αυτό γράφτηκε σε C/CUDA δηλαδή για επεξεργαστές καρτών γραφικών GPU. Εφαρμόστηκαν τρεις διαφορετικές συναρτήσεις διέγερσης του φαινομένου ώστε να παρατηρηθεί η συμπεριφορά της μεθόδου, αλλά και να προσδιοριστεί ο αριθμός των αρμονικών που απαιτούνται κάθε φορά.

Ως συμπέρασμα μπορεί να παρατεθεί ότι η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών υπολογίζει έως και 50 % πιο γρήγορα τα ζητούμενα πεδία λύσεων σε πλήρως περιοδικά φαινόμενα και μάλιστα με αποτελέσματα όμοια με αυτά της μεθόδου της Χρονο-προέλασης.

1.1 Δομή Διπλωματικής Εργασίας

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στο λόγο για τον οποίο οι επεξεργαστές καρτών γραφικών GPUs χρησιμοποιούνται εκτεταμένα, καθώς παρατίθενται και μερικά λειτουργικά τους χαρακτηριστικά. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι εξισώσεις Euler και διακριτοποιούνται με κεντροκομβική διατύπωση, σε πεπερασμένους όγκους για τριδιάστατο πλέγμα. Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται επιγραμματικά η μέθοδος της Χρονο-προέλασης καθώς και γράφονται οι εξισώσεις Euler σε κατάλληλη μορφή για την εφαρμογή της. Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών, πώς υπολογίζει τα ζητούμενα πεδία των λύσεων και διακριτοποιούνται οι εξισώσεις Euler κατά τη μέθοδο αυτή. Στο έκτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι δύο αγωγοί, οι περιπτώσεις διέγερσης που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και ένας έλεγχος σύγκλισης στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης. Στο έβδομο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων για τους δύο αγωγούς και τις τρεις συναρτήσεις διέγερσης. Στο όγδοο κεφάλαιο, παρατίθενται συμπεράσματα που προκύπτουν από την ενασχόληση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών αλλά γίνεται και σχολιασμός των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου. Τέλος, στο ένατο κεφάλαιο γίνεται μία ανακεφαλαίωση της διπλωματικής εργασίας, του σκοπού της και των αποτελεσμάτων που παρείχε.

Κεφάλαιο 2

Λίγα λόγια για τους Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών (GPU)

Όλο ένα και περισσότερο, οι ανάγκες για υπολογιστική ισχύ αυξάνονται. Οι απαιτήσεις σε απόδοση και αποτελέσματα έχουν ωθήσει την Υπολογιστική Ρευστοδυναμική σε νέες μεθόδους και τρόπους προγραμματισμού, αξιοποιώντας νέα τεχνολογικά μέσα ώστε να επιτυγχάνονται εξίσου ικανοποιητικά αποτελέσματα σε λιγότερο χρόνο.

Οι κάρτες γραφικών αναπτύσσονται συνέχεια και επωφελούνται με όλες τις καινούριες τεχνολογίες που εμφανίζονται/δημιουργούνται, από τις ίδιες εταιρίες που τις κατασκευάζουν. Ο προγραμματισμός σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών (GPU) προχωράει παράλληλα με την ανάπτυξη τους, αφού όλες οι γραφικές εφαρμογές σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή είναι γραμμένες σε κώδικα για να τρέξουν σε μία GPU. Το μεγάλο βήμα έγινε το 2005 από την εταιρία NVIDIA που έφτιαξε μια βιβλιοθήκη με τις βασικές εντολές και λειτουργίες της γλώσσας προγραμματισμού C/C++ μαζί με προσθήκη κάποιων νέων λειτουργιών που δίνουν την δυνατότητα να χειριστεί κάποιος τις "δυνατότητες/παροχές" των καρτών γραφικών της (με συγκεκριμένη τεχνολογία κατασκευής), χρησιμοποιώντας ένα δικό του κώδικα. Με αυτόν τον τρόπο ο προγραμματισμός σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών άνοιξε για το ευρύ κοινό (που δεν μπορούσε μέχρι τότε να προγραμματίσει στην ήδη υπάρχουσα πλατφόρμα που χρησιμοποιούταν και θα χρησιμοποιείται για κατασκευή γραφικών προγραμμάτων, ανάλυση εικόνων, βίντεο παιχνίδια κτλ).

Το μεγάλο όφελος της χρήσης μίας κάρτας γραφικών για να τρέξει κάποιος κώδικας είναι η μεγάλη ταχύτητα εκτέλεσης της διεργασίας. Οι κάρτες γραφικών περιέχουν μεγάλο πλήθος επεξεργαστών (Cuda Cores ή αλλιώς πυρήνες) όπου ο παράλληλος προγραμματισμός είναι εφικτός. Σε γενικότερο πλαίσιο μπορεί να παρατηρηθεί ότι μία κάρτα γραφικών περιέχει δεκαπλάσιας τάξης αριθμό μικροεπεξεργαστών από ότι ένας κεντρικός επεξεργαστής ενός υπολογιστή. Μεγάλο αρνητικό των καρτών γραφικών είναι η περιορισμένη μνήμη αφού, ενώ η μνήμη που διαθέτουν είναι συνήθως πολύ γρήγορη, είναι αντιθέτως περιορισμένο το μέγεθος της. Η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογία μαζί με τη μεγάλη αγορά που έχει δημιουργηθεί τα

τελευταία χρόνια για επεξεργαστές γραφικών, έχει ήδη επιφέρει κάρτες γραφικών με μεγάλο μέγεθος μνήμης.

Στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, οι Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών (GPU) έχουν πρακτική αξία και εφαρμογή, αφού ο παράλληλος προγραμματισμός επιφέρει πιο γρήγορα αποτελέσματα. Στη διπλωματική αυτή εργασία γράφτηκε ο κώδικας που εφαρμόζει τη μέθοδο της Ισοροπίας των Αρμονικών σε γλώσσα προγραμματισμού C/CUDA. Η μέθοδος είχε αναπτυχθεί στη διπλωματική του Γ.Κανέλλη[3], αλλά για εφαρμογή σε κεντρικούς επεξεργαστές (CPUs). Ο κώδικας που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης προ υπήρχε στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, γραμμένος και αυτός σε C/CUDA, και πάνω σε αυτόν συμπληρώθηκε η νέα μέθοδος.

2.0.1 Παραλληλος Προγραμματισμός σε Επεξεργαστή Κάρτας Γραφικών GPU

Η κεντρική ιδέα του παράλληλου προγραμματισμού βρίσκει εφαρμογή στους Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών GPU. Στην ουσία, αυτό που λαμβάνει χώρα είναι η διαίρεση μιας διεργασίας σε πολλούς μικρο-επεξεργαστές (Cuda Cores ή αλλιώς πυρήνες). Αν παραδείγματος χάριν, υπάρχει στην μνήμη ένας πίνακας, με τις ταχύτητες όλων των κόμβων ενός πλέγματος μία χρονική στιγμή, και πρέπει να προστεθεί ένα νούμερο σε αυτές τις ταχύτητες, τότε αυτήν τη διεργασία μπορεί να την αναλάβουν οι πυρήνες (Cuda Cores) ενός Επεξεργαστή Κάρτας Γραφικών (GPU). Κάθε πυρήνας θα προσθέσει σε διαφορετικό σημείο του πίνακα των ταχυτήτων και η συνολική διαδικασία θα επιτευχθεί πιο γρήγορα.

Πιο αναλυτικά να αναφερθεί ότι στη C/CUDA ο χρήστης ορίζει έναν αριθμό από blocks και threads. Κάθε block αποτελείται από threads, και στην ουσία αυτοί είναι οι μικρο-επεξεργαστές στους οποίους διαχωρίζεται μια διεργασία. Δεν είναι υποχρεωτικό ο χρήστης να βάλει τόσα blocks όσοι οι πραγματικοί μικρο-επεξεργαστές (Cuda Cores) της Κάρτας Γραφικών του (GPU). Αυτή η ευελιξία αφενώς δίνει περισσότερες δυνατότητες στο χρήστη, αφετέρου υπάρχει για πρακτικούς λόγους. Ο κύριος λόγος είναι η ύπαρξη κοινής μνήμης (shared memory) ανά block, η οποία είναι πιο γρήγορη και προσπελάσιμη μόνο από τα threads του συγκεκριμένου block. Τα δεδομένα της κοινής μνήμης δεν μπορούν να αλλάξουν από τα threads αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν από όλα ενός block. Υπάρχει άλλο ένα είδος μνήμης που χειρίζονται οι Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών, και είναι η σταθερή μνήμη (constant memory). Η σταθερή μνήμη επίσης δεν μπορεί να αλλάξει κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του κώδικα, αλλά με μία "ανάγνωση" (read) από ένα thread αμέσως είναι γνωστή η μεταβλητή της και στα γειτονικά threads. Έτσι δεν χρειάζεται και αυτά με τη σειρά τους να διαβάσουν από τη μνήμη την ίδια μεταβλητή. Αυτή η δυνατότητα μπορεί να μειώσει τον χρόνο εκτέλεσης ενός προγράμματος.

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις Euler - Διακριτοποίηση και Οριακές συνθήκες

Στην διπλωματική αυτή εργασία χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Euler[4][5], δηλαδή το ρευστό θεωρείται μη-συνεκτικό και συμπιεστό. Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι εξισώσεις Euler. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το διακριτοποιημένο τριδιάστατο πεδίο ροής και διακριτοποιούνται οι εξισώσεις Euler σε πεπερασμένους όγκους στο πεδίο αυτό. Τέλος, αναφέρονται οι οριακές συνθήκες που τις διέπουν.

3.1 Εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις αναφέρονται στο καρτεσιανό τριδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) . Η ταχύτητα είναι \vec{U} και οι συνιστώσες της (u,v,w) στους άξονες (x,y,z) αντίστοιχα, ρ η πυκνότητα του ρευστού και e η εσωτερική του ενέργεια. Έτσι

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά τους τρεις άξονες (x,y,z) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\
\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου ο ταυιστής σ εκφράζει τις επιφανειακές δυνάμεις που δρουν σε ένα στοιχείο του ρευστού και ονομάζεται ταυιστής τάσεων.

Η εξίσωση της ενέργειας:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial uE}{\partial x} + \frac{\partial vE}{\partial y} + \frac{\partial wE}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + w\sigma_{xz}) \\
+ \frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_{yx} + v\sigma_{yy} + w\sigma_{yz}) &+ \frac{\partial}{\partial z}(u\sigma_{zx} + v\sigma_{zy} + w\sigma_{zz})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου τέθηκε:

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \tag{3.4}$$

Στο παραπάνω σύστημα των πέντε εξισώσεων, έχουμε άγνωστα μεγέθη τα ρ , u , v , w και e ανά κόμβο. Ακόμα, πρέπει να προσδιοριστεί ο ταυιστής τάσεων σ . Επειδή η διπλωματική αυτή εργασία αναφέρεται σε μη-συνεχτικό Νευτώνιο ρευστό, ο ταυιστής τάσεων είναι $\sigma = -P \cdot I$, όπου P η πίεση και I ο μοναδιαίος ταυιστής.

Με αυτήν την παρατήρηση, οι γενικές εξισώσεις μετατρέπονται στις γνωστές εξισώσεις Euler όπως παρουσιάζονται:

- Η εξίσωση διατήρησης της μάζας όπως ήταν:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \tag{3.5}$$

- Η εξίσωση διατήρησης της ορμής παρουσιάζεται κατά τους τρεις άξονες (x,y,z):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + P)}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^2 + P)}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

- Η εξίσωση της ενέργειας:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u(E + P)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(E + P)]}{\partial y} + \frac{\partial[w(E + P)]}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

Οι εξισώσεις Euler μπορούν να γραφούν στην παρακάτω συντηρητική διανυσματική γραφή (3.8).

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{J}}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

όπου

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

και

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + P) \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ v(E + P) \end{bmatrix}, \quad \vec{J} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + P \\ w(E + P) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.1.1 Παραδοχή του τέλειου αερίου

Επιλέχτηκε τέλειο αέριο ως το ρευστό που κινείται στον αγωγό που μελετήθηκε. Ως γνωστό, τα τέλεια αέρια ακολουθούν την καταστατική εξίσωση:

$$P = \rho R_g T \quad (3.11)$$

όπου P, T είναι η πίεση και η θερμοκρασία του ρευστού αντίστοιχα, ρ η πυκνότητα του και R_g η σταθερά του τέλειου αερίου.

Ακόμα ισχύει ότι $R_g = c_p - c_v$ όπου c_p και c_v οι ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση και όγκο αντίστοιχα.

Η στατική ενθαλπία υπολογίζεται από τον τύπο $h = e + \frac{P}{\rho}$. Όμως στα τέλεια αέρια η εσωτερική ενέργεια εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του ρευστού. Έτσι ισχύει ότι $e = c_v T$.

Άρα, αν αντικατασταθεί στην εξίσωση της ενθαλπίας η εσωτερική ενέργεια, η καταστατική εξίσωση (3.11) και η σταθερά του τέλειου αερίου R_g , η ενθαλπία παίρνει τη μορφή της (3.12).

$$h = c_p T \quad (3.12)$$

Τέλος, το πηλίκο των ειδικών θερμοχωρητικότητων ορίζει τον εκθέτη ισεντροπικής μεταβολής γ ,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.13)$$

Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τον αέρα είναι:

$$\begin{aligned} R_g &= 287.04 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2 \text{K}} \\ c_p &= 1004.64 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2 \text{K}} \\ c_v &= 717.6 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2 \text{K}} \\ \gamma &= 1.4 \end{aligned}$$

Τελειώνοντας πρέπει να προστεθούν οι τύποι της ολικής ενέργειας ανα μονάδα όγκου και της ολικής ενθαλπίας. Αντικαθιστώντας την καταστατική εξίσωση (3.11) και τη σταθερά του τέλειου αερίου στην εξίσωση (3.4), η πρώτη παίρνει τη μορφή:

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (3.14)$$

Αντίστοιχα, για την ολική ενθαλπία, ισχύει:

$$h_t = \frac{E + P}{\rho} = \frac{\gamma P}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} U^2 \quad (3.15)$$

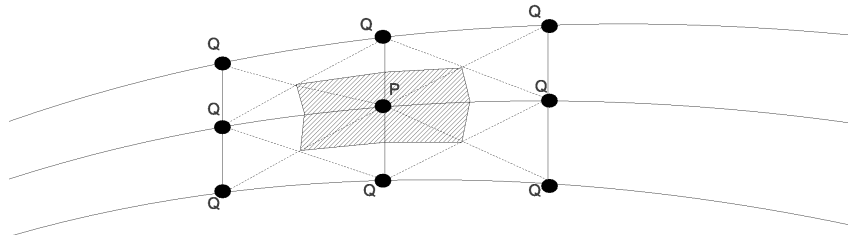
όπου U η ταχύτητα του ρευστού.

3.2 Διακριτοποίηση του πεδίου ροής

Έχοντας καταλήξει στις εξισώσεις που θα λυθούν, καθώς και στις παραδοχές που θα χρησιμοποιηθούν, επόμενο βήμα είναι η διακριτοποίηση του πεδίου ροής, δημιουργία δηλαδή του

πλέγματος στους κόμβους του οποίου θα λυθούν οι εξισώσεις. Ο επιλύτης της ροής που χρησιμοποιήθηκε έχει αναπτυχθεί από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ και είναι γραμμένος σε CUDA/C, δηλαδή για να τρέχει σε επεξεργαστές καρτών γραφικών GPUs. Το πλέγμα είναι τριδιάστατο, δομημένο και αποτελείται από εξαεδρικά στοιχεία.

Το διακριτοποιημένο πεδίο της ροής που αντιστοιχεί σε ένα κόμβο, αν είχαμε διδιάστατο πεδίο ροής, θα οριζόταν από το τετράπλευρο που ορίζουν τα βαρύκεντρα των τετράπλευρων με κορυφές τους γειτονικούς κόμβους Q γύρω από έναν κόμβο P, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Κυψέλη ελέγχου - διδιάστατο πεδίο.

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε τριδιάστατο πλέγμα, έτσι το διακριτοποιημένο πεδίο ροής ενός κόμβου P είναι τύπου κύβος με Q τους γειτονικούς κόμβους στο χώρο. Επειδή μία τέτοια απεικόνιση δεν θα ήταν εύκολη, δεν παρατίθεται εδώ σχήμα που να απεικονίζει την κυψέλη ελέγχου στον τριδιάστατο χώρο.

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις της ροής που αναφέρθηκαν παραπάνω, ολοκληρώνονται σε έναν πεπερασμένο όγκο και οι λύσεις βρίσκονται για κάθε κόμβο του πλέγματος (κεντροκομβική διατύπωση - vertex-centered formulation). Με άλλα λόγια, σε κάθε κόμβο ορίζεται ένας όγκος ελέγχου (κυψέλη ελέγχου) γύρω του, που οι λύσεις των εξισώσεων στο συγκεκριμένο κόμβο χαρακτηρίζουν το πεδίο αυτό, δηλαδή τον πεπερασμένο όγκο γύρω του.

3.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler σε πεπερασμένους όγκους

Στη μορφή (3.8) οι εξισώσεις Euler είναι σε διανυσματική μορφή. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο ∇ οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (3.16)$$

όπου φυσικά $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ και $\underline{\vec{F}} = (\vec{F}, \vec{G}, \vec{J})$.

Οι εξισώσεις (3.16) ολοκληρώνονται σε έναν όγκο ελέγχου (ενός κόμβου P) όπως ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, και παίρνουν την μορφή:

$$\int_{cell_P} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\vec{F}} \right) dx dy dz = 0 \quad (3.17)$$

όπου $cell_P$ νοείται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου ενός κόμβου P.

Θεωρήθηκε ακόμα $\int_{cell_P} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy dz = cell_P \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)$ που, στην ουσία, είναι το Θεώρημα Μέσης

Τιμής με P εσωτερικό σημείο και $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}$ συνεχή στον πεπερασμένο όγκο που περιέχει το P . Ακόμα για τον δεύτερο όρο της εξίσωσης (3.17), από το (γενικευμένο) θεώρημα Green-Gauss έχουμε την έκφραση:

$$\int_{cell_P} \nabla \cdot \underline{\vec{F}} dx dy dz = \int_{S_P} \underline{\vec{F}} \cdot \vec{n} ds$$

όπου S_P νοείται η εξωτερική επιφάνεια της κυψέλης ελέγχου ενός κόμβου P. Έτσι η εξίσωση (3.17) γίνεται:

$$cell_P \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right) + \int_{S_P} \underline{\vec{F}} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (3.18)$$

όπου ο όρος $\int_{S_P} \underline{\vec{F}} \cdot \vec{n} ds$ υποδηλώνει ολοκλήρωση στον όγκο της κυψέλης ελέγχου. Το \vec{n} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην εξωτερική πλευρά της κυψέλης και με προσανατολισμό προς το εξωτερικό αυτής και ds το στοιχειώδες εμβαδό.

Στη συνέχεια τέθηκε :

$$\vec{H} = \underline{\vec{F}} \cdot \vec{n} = \vec{F} n_x + \vec{G} n_y + \vec{J} n_z \quad (3.19)$$

και

$$\int_{S_P} \vec{H} ds = \sum_{P \neq Q} \vec{\phi}_{PQ} \quad (3.20)$$

Άρα η εξίσωση (3.18) μέσω των (3.19) και (3.20) παίρνει τη μορφή:

$$cell_P \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right) + \sum_{P \angle Q} \vec{\phi}_{PQ} = 0 \quad (3.21)$$

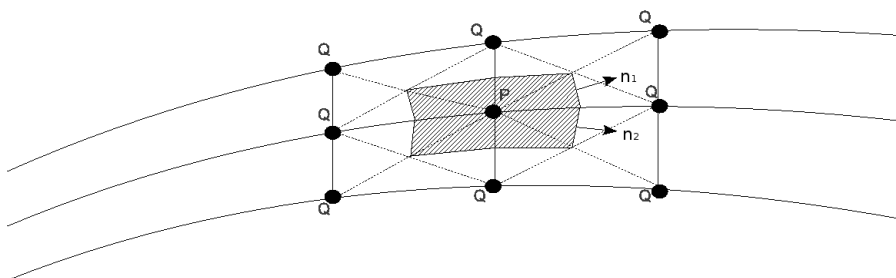
Στην εξίσωση (3.21) το σύμβολο $P \angle Q$ υπονοεί άθροιση από κάθε γειτονικό κόμβο Q ενός κόμβου P. Ακόμα το $\vec{\phi}_{PQ}$ ονομάζεται διάνυσμα ροής και αναφέρεται στο κοινό όριο δύο γειτονικών κυψελών ελέγχου. Με άλλα λόγια, αυτός ο όρος εξετάζει πως τα ροικά μεγέθη ενός κόμβου επηρεάζουν και επηρεάζονται από τον κάθε γειτονικό τους κόμβο.

3.3.1 Υπολογισμός του διανύσματος ροής

Εδώ αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού του διανύσματος ροής $\vec{\phi}_{PQ}$. Το διάνυσμα ροής υπολογίζεται ανάμεσα σε δύο γειτονικούς κόμβους P-Q και ουσιαστικά ορίζεται στο κοινό όριο των δύο κυψελών ελέγχου. Κάθε διάνυσμα ροής είναι συνάρτηση των ροικών μεγεθών των δύο κόμβων καθώς και της κοινής επιφάνειας των κυψελών πάνω στην οποία και υπολογίζεται.

$$\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = \vec{n}_{PQ} \quad (3.22)$$

Τα \vec{n}_1 και \vec{n}_2 είναι διανύσματα κάθετα στις επιφάνειες, στο κοινό όριο των κυψελών ελέγχου δύο γειτονικών κόμβων με μέτρο το καθένα ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του ορίου που είναι κάθετο και \vec{n}_{PQ} το συνισταμένο τους διάνυσμα. Παρατίθεται εδώ ένα σχήμα, 3.2, που δείχνει τα δυο αυτά διανύσματα \vec{n}_1 και \vec{n}_2 αν το πεδίο ροής ήταν διδιάστατο, επειδή ένα τριδιάστατο σχήμα θα ήταν πολύπλοκο παραλείπεται. Στον τριδιάστατο χώρο τα διανύσματα είναι κάθετα στην επιφάνεια της κυψέλης ελέγχου.



Σχήμα 3.2: Διανύσματα κάθετα στο όριο των κυψελών ελέγχου

Έτσι, για το διάνυσμα ροής είναι: $\Phi_{PQ} = f(W_{PQ}^L, W_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ})$ δηλαδή όπως αναφέρθηκε και παραπάνω εξαρτάται από τα ροικά μεγέθη των δύο κόμβων στους οποίους υπολογίζεται

καθώς και απο την κοινή επιφάνεια των δύο κυψελών. Ακόμα ορίζεται το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος \vec{F} ως προς τις ροικές μεταβλητές \vec{W} :

$$A_x = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{W}} , \quad A_y = \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{W}} , \quad A_z = \frac{\partial \vec{J}}{\partial \vec{W}} \quad (3.23)$$

όπου τα \vec{F} , \vec{G} και \vec{J} όπως ορίστηκαν στην (3.10). Συνεπάγεται λοιπόν για το Ιακωβιανό μητρώο ότι

$$A = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{W}} = A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z \quad (3.24)$$

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιαστεί το Ιακωβιανό μητρώο A. Οι παραγωγίσεις για το σχηματισμό του μητρώου A γίνονται στα διανύσματα (3.10) ως προς τις ροικές μεταβλητές \vec{W} όπως αναφέρθηκε στην (3.23).

Έτσι παρουσιάζεται παρακάτω κάθε στήλη του ξεχωριστά.

$$A(:, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\vec{U} \cdot \vec{n})u + \frac{\gamma-1}{2}(U^2) \vec{n}_x \\ -(\vec{U} \cdot \vec{n})v + \frac{\gamma-1}{2}(U^2) \vec{n}_y \\ -(\vec{U} \cdot \vec{n})w + \frac{\gamma-1}{2}(U^2) \vec{n}_z \\ \vec{U} \cdot \vec{n} (\frac{\gamma-1}{2} \vec{U} - h_t) \end{bmatrix}$$

$$A(:, 2) = \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{U} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)un_x \\ vn_x - (\gamma - 1)un_y \\ wn_x - (\gamma - 1)un_z \\ h_t n_x - (\gamma - 1)(\vec{U} \cdot \vec{n})u \end{bmatrix}$$

$$A(:, 3) = \begin{bmatrix} n_y \\ un_y - (\gamma - 1)vn_x \\ \vec{U} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)vn_y \\ wn_y - (\gamma - 1)vn_z \\ h_t n_y - (\gamma - 1)(\vec{U} \cdot \vec{n})v \end{bmatrix}$$

$$A(:, 4) = \begin{bmatrix} n_z \\ un_z - (\gamma - 1)wn_x \\ vn_z - (\gamma - 1)wn_y \\ \vec{U} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)wn_z \\ h_t n_z - (\gamma - 1)(\vec{U} \cdot \vec{n})w \end{bmatrix}$$

$$A(:, 5) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma - 1)n_x \\ (\gamma - 1)n_y \\ (\gamma - 1)n_z \\ \gamma(\vec{U} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι :

$$\vec{H} = A\vec{W} \quad (3.25)$$

άρα το \vec{H} είναι ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς τις ροϊκές μεταβλητές, δηλαδή το \vec{W} . Αντίστοιχα ισχύει και για τα διανύσματα (3.10) δηλαδή :

$$\vec{F} = A_x\vec{W}, \quad \vec{G} = A_y\vec{W}, \quad \vec{J} = A_z\vec{W} \quad (3.26)$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \lambda_2 &= \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \lambda_3 &= \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \lambda_4 &= ((\vec{U} \cdot \vec{n} + c)|\vec{n}| \\ \lambda_5 &= ((\vec{U} \cdot \vec{n} - c)|\vec{n}| \end{aligned} \quad (3.27)$$

Υπολογίζονται τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του μητρώου A, τα αριστερά από τη σχέση $(A - \lambda I)\vec{r} = 0$ ενώ τα δεξιά υπολογίζονται από τη σχέση $\vec{s}(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & u & v & w & \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \end{bmatrix} \\ \vec{r}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & n_y & -n_x & -n_z & un_y - vn_x - wn_z \end{bmatrix} \\ \vec{r}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & n_z & -n_x & -n_y & un_z - vn_x - wn_y \end{bmatrix} \\ \vec{r}_4 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & \frac{u}{c} + n_x & \frac{v}{c} + n_y & \frac{w}{c} + n_z & \frac{1}{2c}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{c}{\gamma-1} + \vec{U} \cdot \vec{n} \end{bmatrix} \\ \vec{r}_5 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & \frac{u}{c} - n_x & \frac{v}{c} - n_y & \frac{w}{c} - n_z & \frac{1}{2c}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{c}{\gamma-1} - \vec{U} \cdot \vec{n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1 &= \left[\begin{array}{ccccc} 1 - \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \end{array} \right] \\
\vec{s}_2 &= \left[\begin{array}{ccccc} vn_x - un_y + wn_z & n_y & -n_x & -n_z & 0 \end{array} \right] \\
\vec{s}_3 &= \left[\begin{array}{ccccc} wn_x + vn_y - un_z & n_z & -n_y & -n_x & 0 \end{array} \right] \\
\vec{s}_4 &= \left[\begin{array}{ccccc} -\frac{\vec{U} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)}{4c} & \frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} & \frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} & \frac{n_z}{2} - \frac{(\gamma-1)w}{2c} & \frac{(\gamma-1)}{2c} \end{array} \right] \\
\vec{s}_5 &= \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\vec{U} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)}{4c} & -\frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} & -\frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} & -\frac{n_z}{2} - \frac{(\gamma-1)w}{2c} & \frac{(\gamma-1)}{2c} \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Έχοντας τα παραπάνω μητρώα (3.27), (3.28) και (3.29), μπορεί να γραφεί το μητρώο A στη μορφή:

$$A = P\Lambda P^{-1} \tag{3.30}$$

όπου Λ διαγώνιος πίνακας με στοιχεία του τις ιδιοτιμές του πίνακα A και P και P^{-1} τα μητρώα με τις ιδιοσυχνότητες του.

Τέλος, ορίζονται τα μητρώα :

$$A^+ = P\Lambda^+P^{-1}, \quad A^- = P\Lambda^-P^{-1} \tag{3.31}$$

όπου Λ^+ περιέχει τις θετικές ιδιοτιμές του A , ενώ ο Λ^- τις αρνητικές.

Ακόμα ισχύει:

$$|A| = |A^+| + |A^-| \tag{3.32}$$

Υπάρχουν στη βιβλιογραφία[6] πολλοί τρόποι υπολογισμού του διανύσματος ροής $\vec{\phi}_{PQ}$ (3.21). Στην εργασία αυτή το διάνυσμα ροής υπολογίστηκε μέσω του σχήματος Roe, το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω.

Σχήμα Roe

Το σχήμα Roe υπολογίζει το διάνυσμα της ροής μέσω του τύπου:

$$\vec{\phi}_{PQ} = \frac{1}{2}[\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ})] - \frac{1}{2}|A_{PQ}|(\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L) \tag{3.33}$$

όπου τα \vec{W}_{PQ}^R και \vec{W}_{PQ}^L αναφέρονται στα ροικά μεγέθη των γειτονικών κόμβων P και Q . Το $|A_{PQ}|$ υπολογίζεται από τη σχέση (3.32) που χρειάζεται τα $|A^+|$ και $|A^-|$, με βάση όμως τις κατά Roe μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών ροής. Αυτές είναι:

$$\vec{U}_{PQ} = [\tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{w} \quad \tilde{P}] \tag{3.34}$$

όπου τα 4 πρώτα μεγέθη υπολογίζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\vec{U}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{U}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{U}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.35)$$

ενώ για τον υπολογισμό της μέσης τιμής κατά Roe πίεσης υπολογίζεται πρώτα η ενθαλπία και έπειτα η ζητούμενη πίεση.

$$h_t = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (3.36)$$

3.3.2 Αύξηση της τάξης ακρίβειας του σχήματος

Στην ανάλυση που προηγήθηκε δεν αναφέρθηκε σε τι αντιστοιχούν οι όροι \vec{W}^L και \vec{W}^R . Οι όροι αυτοί θα μπορούσαν να είναι τα ροικά μεγέθη των κόμβων P και Q, με αυτόν τον τρόπο θα είχε επιτευχθεί πρώτη τάξης ακρίβεια. Αυτό που εφαρμόζεται για να αυξηθεί η ακρίβεια είναι το θεώρημα Taylor για τις πρωτεύουσες μεταβλητές $[\rho \ u \ v \ w \ E]$ και έπειτα να υπολογιστούν τα \vec{W}^L και \vec{W}^R . Έτσι για αποκοπή όρων από δεύτερης τάξης και πάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{U}_{PQ}^L &= U_P + \frac{1}{2} \overline{PQ} (\nabla \vec{U})_P \\ \vec{U}_{PQ}^R &= U_P - \frac{1}{2} \overline{PQ} (\nabla \vec{U})_Q \end{aligned} \quad (3.37)$$

Η μέθοδος αυτή αύξησης της τάξης ακρίβειας απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων των πρωτευουσών μεταβλητών στους κόμβους του πλέγματος.

3.4 Οριακές συνθήκες

Μέχρι τώρα η ανάλυση που έγινε για τον υπολογισμό του διανύσματος της ροής $\vec{\phi}_{PQ}$, αναφερόταν σε έναν εσωτερικό κόμβο του πλέγματος. Πρέπει να προστεθεί ακόμα ο υπολογισμός του διανύσματος ροής για έναν οριακό κόμβο πάνω στο τοίχωμα, καθώς και για τους οριακούς κόμβους στην είσοδο και στην έξοδο του αγωγού.

3.4.1 Στερεά τοιχώματα

Στην περίπτωση του στερεού τοιχώματος, το διάνυσμα ροής υπολογίζεται ως συνάρτηση μόνο του κόμβου P και του διανύσματος που είναι κάθετο στην επιφάνεια του τοιχώματος,

κατ' αντιστοιχία της κανονικής περίπτωσης εσωτερικού κόμβου.

$$\vec{\phi}_{wall} = f(\vec{W}_P, \vec{n}_P) \quad (3.38)$$

\vec{n}_P το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του τοιχώματος. Για το διάνυσμα ροής ισχύει για κάθε γειτονικό κόμβο Q :

$$\sum_{P \neq Q} \vec{\phi}_{wall} = \sum_{P \neq Q} (\vec{H} \cdot \vec{n}_P) = \sum_{P \neq Q} (\vec{F} \cdot \vec{n}_P + \vec{G} \cdot \vec{n}_P + \vec{J} \cdot \vec{n}_P) \quad (3.39)$$

Έτσι, αφού $\vec{n}_P = (n_x, n_y, n_z)$ το διάνυσμα της ροής γίνεται:

$$\vec{\phi}_{wall} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{U} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{U} \cdot \vec{n}) + P n_x \\ \rho v(\vec{U} \cdot \vec{n}) + P n_y \\ \rho w(\vec{U} \cdot \vec{n}) + P n_z \\ (E + P)(\vec{U} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

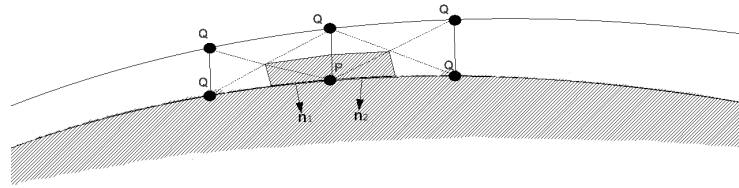
όπου αν εφαρμοστεί η συνθήκη μη-εισχώρησης του ρευστού, δηλαδή $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$ το διάνυσμα ροής μετατρέπεται στην παρακάτω μορφή:

$$\vec{\phi}_{wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ P n_x \\ P n_y \\ P n_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Το σχήμα 3.3 απεικονίζει τα κάθετα διανύσματα στο όριο της κυψέλης ελέγχου ενός οριακού κόμβου P που βρίσκεται στο όριο του πεδίου ροής, είναι δηλαδή πάνω στο στερεό τοίχωμα. Το σχήμα είναι για διδιάστατο πεδίο ροής αλλά, όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η διαφορά που υπάρχει από το τριδιάστατο είναι ότι, στο τριδιάστατο πεδίο, τα κάθετα διανύσματα είναι στο κέντρο του οριακού τετραπλεύρου της κυψέλης ελέγχου αντί της οριακής ακμής που είναι εδώ.

3.4.2 Είσοδος και Έξοδος πεδίου ροής

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A δείχνουν τον τρόπο που μεταφέρεται η πληροφορία. Με άλλα λόγια, όταν η ιδιοτιμή είναι θετική, η πληροφορία μεταφέρεται στην κατεύθυνση που κινείται το ρευστό, ενώ όταν η ιδιοτιμή είναι αρνητική, τότε η πληροφορία μεταφέρεται αντίθετα από την κίνηση του ρευστού. Πιο αναλυτικά, σε



Σχήμα 3.3: Κάθετα διανύσματα στο όριο της κυψέλης ελέγχου ενός οριακού κόμβου του πλέγματος

υποηχητικές ροές η μία ιδιοτιμή είναι αρνητική πάντα ενώ σε υπερηχητικές ροές όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \lambda_2 &= \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \lambda_3 &= \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \lambda_4 &= (\vec{U} \cdot \vec{n} + c)|\vec{n}| \\ \lambda_5 &= (\vec{U} \cdot \vec{n} - c)|\vec{n}|\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ιδιοτιμή είναι αρνητική για υποηχητικές ροές. Αυτό που συμπεραίνεται από αυτό το γεγονός είναι ότι για να "κλείσουν" οι εξισώσεις Euler χρειάζονται 4 γνωστά μεγέθη στην είσοδο του πεδίου (πλέγματος) και ένα στην έξοδο του (αφού η εργασία αυτή αναφέρεται σε υποηχητικές ροές). Τα γνωστά αυτά μεγέθη που απαιτούνται, εξαρτώνται από την εκάστοτε εφαρμογή.

Η εργασία αυτή μελετά έναν αγωγό όπου στο εσωτερικό του το ρευστό κινείται υποηχητικά. Ορίστηκε στην είσοδο του η πυκνότητα και η ταχύτητα, ενώ στην έξοδο του ορίστηκε η στατική πίεση. Έτσι, είναι γνωστά τα μεγέθη $[\rho_{in} \ u_{in} \ v_{in} \ w_{in}]$ στην είσοδο του αγωγού, και στην έξοδο ορίζεται η στατική πίεση P_{out} .

Κεφάλαιο 4

Η μέθοδος της Χρονο-προέλασης (Time Marching Method)

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά στη μέθοδο της Ξρονο-προέλασης (Time-Marching Method) με την οποία λύνονται οι εξισώσεις Euler, που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η διαδικασία επίλυσης μας οδηγεί στον υπολογισμό των ροϊκών μεγεθών ($\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E$) σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Στην εργασία αυτή εξετάστηκε αγωγός, όπου εφαρμόζεται μια διαφορά πίεσης στα άκρα του (υποηχητική ροή στον αγωγό). Σκοπός της παρουσίασης αυτής είναι να γίνουν αντιληπτές οι διαφορές των δύο μεθόδων (Χρονο-προέλασης και Ισορροπίας των Αρμονικών) στον τρόπο εύρεσης των πεδίων λύσεων. Να σημειωθεί, ότι ο κώδικας που λύνει τη ροή με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης είναι γραμμένος και αυτός σε C/CUDA (δηλαδή τρέχει σε επεξεργαστές καρτών γραφικών) και χρησιμοποιήθηκε για να συγκριθούν και να ελεγχθούν τα αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν από τον κώδικα που λύνει τη ροή με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών που προγραμματίστηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία. Ο κώδικας που εφαρμόζει τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης προϋπήρχε στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.

4.1 Γενικά Στοιχεία της Μεθόδου

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η μέθοδος της Χρονο-προέλασης για τον υπολογισμό των πεδίων λύσεων ενός αγωγού, όπου εφαρμόζεται περιοδική διαφορά πίεσης στα άκρα του. Το φαινόμενο δεν είναι σταθερό στο χρόνο αφού η πίεση αλλάζει περιοδικά. Με τη μέθοδο της Ξρονο-προέλασης υπολογίζεται ένα πεδίο λύσεων από τη μία χρονική στιγμή στην επόμενη. Είναι δηλαδή μια μέθοδος που κινείται βηματικά, έχοντας γνωστό το πεδίο κάποια χρονική στιγμή, το υπολογίζει στην αμέσως επόμενη χρονική στιγμή αντλώντας πληροφορία από τις λύσεις των προηγούμενων χρονικών στιγμών. Επειδή η τάξη ακρίβειας των λύσεων είναι δεύτερης τάξης, το σχήμα επίλυσης πρέπει επίσης να είναι δεύτερης τάξης, έτσι

κάθε φορά για τον υπολογισμό της λύσης στην επόμενη χρονική στιγμή χρησιμοποιούνται οι δύο προηγούμενες/υπολογισμένες χρονικά λύσεις. Πιο αναλυτικά, είναι γνωστές οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών της ροής \vec{W} για κάθε κόμβο του πλέγματος (ένα πεδίο τιμών) την πρώτη χρονική στιγμή έστω $t = 0$, αυτές οι τιμές είναι γνωστές την πρώτη φορά από την αρχικοποίηση που γίνεται στο πλέγμα. Υπολογίζονται για την επόμενη χρονική στιγμή με ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών πίσω διαφορίσης πρώτης τάξης ακρίβειας οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών του πεδίου (με τη λέξη πεδίο εννοούμε για κάθε κόμβο - όλο το πλέγμα), προφανώς αντλώντας πληροφορία από τη μοναδική προηγούμενη χρονική στιγμή. Τέλος, από εκεί και πέρα χρησιμοποιείται ένα σχήμα δεύτερης τάξης ακρίβειας αντλώντας πληροφορία από τις δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές και υπολογίζεται το πεδίο τη νέα χρονική στιγμή.

Ακόμα να προστεθεί, ότι από το ένα χρονικό βήμα στο επόμενο, γίνονται βήματα στο ψευδο-χρόνο για λόγους σύγκλισης και η λύση του τελευταίου ψευδο-χρονικού βήματος κρατείται ως λύση της επόμενης χρονικής στιγμής. Αυτό παρουσιάζεται σχηματικά για να γίνει πιο κατανοητό παρακάτω όπου συμβολίζονται με n οι στιγμές στον πραγματικό χρόνο και k οι στιγμές στον ψευδο-χρόνο:

$$\vec{w}^{t=n} = \vec{w}_{k=1}^{t=n} \rightarrow \vec{w}_{k=2}^{t=n} \dots \rightarrow \vec{w}_{k=n}^{t=n} = \vec{w}^{t=n+1}$$

4.2 Εξισώσεις Euler στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης - Διαδικασία Επίλυσης

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Euler, ολοκληρωμένες σε έναν πεπερασμένο όγκο, όπως προέκυψαν από το προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (4.1)$$

προστίθεται ο ψευδο-χρονικός όρος, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, και η εξίσωση γίνεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}} \right)_P A_{cell} + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (4.2)$$

όπου t ο πραγματικός χρόνος και t_{ps} ο ψευδο-χρόνος. Όπως και παραπάνω, ο δείκτης n αντιπροσωπεύει τον πραγματικό χρόνο και ο δείκτης k τον ψευδο-χρόνο.

Η παράγωγος του πραγματικού χρόνου με σχήμα πεπερασμένων διαφορών πίσω διαφορίσης

δεύτερης τάξης ακρίβειας είναι:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{3\vec{W}^{n+1} - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (4.3)$$

ενώ η παράγωγος του ψευδο-χρόνου με ένα απλό σχήμα πρώτης τάξης ακρίβειας είναι:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}}\right)^{k+1} = \frac{\vec{W}^{k+1} - \vec{W}^k}{\Delta t_{ps}} = \frac{\overline{\Delta \vec{W}}^{k+1}}{\Delta t_{ps}} \quad (4.4)$$

πρέπει να αναφερθεί ότι δεν χρειάζεται μεγαλύτερη ακρίβεια για τον ψευδο-χρόνο καθώς ο όρος δεν έχει φυσική σημασία και δεν αλλοιώνει τα αποτελέσματα αλλά, αντιθέτως, βοηθά τη σύγκλιση.

Ο όρος $\sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}$ είναι μη-γραμμική συνάρτηση του \vec{W} και γράφεται μέσω Δ -διατύπωσης. Έτσι ο όρος γίνεται:

$$\sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k+1} = \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} + \sum_{Q \in P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1} \quad (4.5)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.3), (5.27), και (4.5) στην αρχική εξίσωση (5.21), αυτή γίνεται:

$$\frac{\overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1}}{\Delta t_{ps}} + \frac{3\vec{W}^{n+1,k+1} - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} + \sum_{Q \in P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1} = 0$$

ή, καλύτερα,

$$\frac{\overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1}}{\Delta t_{ps}} + \frac{3(\vec{W}^{n+1,k} + \overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1}) - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} + \sum_{Q \in P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1} = 0 \quad (4.6)$$

Η (4.6) απεικονίζει τις εξισώσεις ροής γραμμένες για μία χρονική στιγμή $t = n$ σε ένα κόμβο P (αφού $\vec{W} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E]$ είναι οι 5 μεταβλητές της ροής, στην ουσία η (4.6) σημαίνει σύστημα 5 εξισώσεων). Ο όρος $\sum_{Q \in P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \overline{\Delta \vec{W}}^{n+1,k+1}$ εξαρτάται από το \vec{W}_P και

από \vec{W}_Q , έχει δηλαδή πληροφορία από τον ίδιο τον κόμβο P και από τους γειτονικούς του κόμβους Q. Έτσι ο όρος αυτός αναπτύσσεται και γράφεται όπως φαίνεται παρακάτω, όπου το [diag] και το [zm] είναι πίνακες με διαστάσεις 5×5 των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από

τα \vec{W}_P και \vec{W}_Q του πιο πρόσφατου ψευδο-χρονικού βήματος.

$$\sum_{Q \neq P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta \vec{W}^{n+1,k+1} = [diag]_P \cdot \Delta \vec{W}_P + \sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q \quad (4.7)$$

Χωρίζοντας τώρα γνωστούς από αγνώστους, η τελική εξίσωση προς λύση με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης είναι:

$$\left[A_{cell} \cdot I_{5 \times 5} \cdot \left(\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta t_{ps}} \right) + [diag]_{5 \times 5} \right] \cdot \Delta \vec{W}_P + \sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q = [res]_{5 \times 1} \quad (4.8)$$

όπου :

$$[res]_{5 \times 1} = - \left(\frac{3\vec{W}^{n+1,k} - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{Q \neq P} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} \right) \quad (4.9)$$

Το $[res]$ είναι το υπόλοιπο (residual) και εκφράζει τη φυσική του προβλήματος. Όταν $[res] < e$, όπου $e =$ ένας πολύ μικρός αριθμός (καθώς δεν γίνεται να μηδενιστεί το υπόλοιπο σε μία αριθμητική επίλυση), για κάθε κόμβο του πλέγματος, θεωρείται ότι έχει βρεθεί η ζητούμενη λύση τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ανανεώνονται τα μητρώα λύσεων και συνεχίζεται ο υπολογισμός του επόμενου χρονικού βήματος.

4.3 Επαναληπτική επίλυση με τη μέθοδο Jacobi

Οι 5 εξισώσεις Euler ολοκληρωμένες σε έναν όγκο ελέγχου, διακριτοποιημένες για ένα κόμβο μία χρονική στιγμή παρουσιάζονται στην (4.8). Άρα πρέπει να λυθεί ένα σύστημα που αποτελείται από την εξίσωση (4.8) για κάθε κόμβο του πλέγματος. Οι άγνωστοι μας είναι $5 \times N_s$ (όπου N_s ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος) που πρέπει να υπολογιστούν για να βρεθεί η επόμενη ψευδο-χρονική στιγμή. Άρα έχουμε ένα σύστημα της μορφής :

$$[B]_{5N_s \times 5N_s} \cdot \Delta \vec{W}_{5N_s} = [C]_{5N_s}$$

Αυτό το σύστημα δεν μπορεί να λυθεί απευθείας με αντιστροφή του μητρώου $[B]$. Γράφεται η (4.8) πιο σύντομα :

$$[DIAG]_{5 \times 5} \Delta \vec{W}_P^{new} = [res]_{5 \times 1} - \sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q^{old} \quad (4.10)$$

όπου

$$[DIAG]_{5 \times 5} = \left[A_{cell} \cdot I_{5 \times 5} \cdot \left(\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta t_{ps}} \right) + [diag]_{5 \times 5} \right]$$

και, τελικά, μετατρέπεται στη μορφή που φαίνεται παρακάτω. Να προστεθεί εδώ ότι τα $[zm]$, $[res]$ και $[DIAG]^{-1}$ έχουν υπολογιστεί για τα τρέχοντα $\vec{W}^{n+1,k}$.

$$\Delta \vec{W}_P^{new} = [DIAG]_{5 \times 5}^{-1} \cdot \left([res]_{5 \times 1} - \sum_{Q \in P} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q^{old} \right) \quad (4.11)$$

Συνοπτικά παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου Jacobi:

1. $\Delta \vec{W}^{old} = 0$
2. $n = 0$
3. Επιλύεται η εξίσωση (5.34) για κάθε κόμβο P, υπολογίζονται δηλαδή τα $\Delta \vec{W}^{new}$
4. $\Delta \vec{W}^{old} = \Delta \vec{W}^{new}$
5. αν $n < n_{Jacobi}$, τότε $n = n + 1$ και επιστροφή στο βήμα 3
6. Τέλος

Το n_{Jacobi} το επιλέγει ο χρήστης, ο οποίος στην ουσία ορίζει πόσες επαναλήψεις θα γίνουν, καθώς δεν υπάρχει κριτήριο σύγκλισης σε κάθε κύκλο (στην διπλωματική αυτή και στους κώδικες που αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν ορίστηκε $n = 15$). Όταν τελειώσουν οι προκαθορισμένες επαναλήψεις από τη Jacobi υπολογίζονται τα νέα \vec{W} και η διαδικασία επαναλαμβάνεται από την αρχή όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Ο υπολογισμός των νέων μητρώων \vec{W} γίνεται ως εξής:

$$\vec{W}^{n+1,k+1} = \vec{W}^{n+1,k} + \Delta \vec{W}_{Jacobi}$$

Κεφάλαιο 5

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών (Harmonic Balance Method)

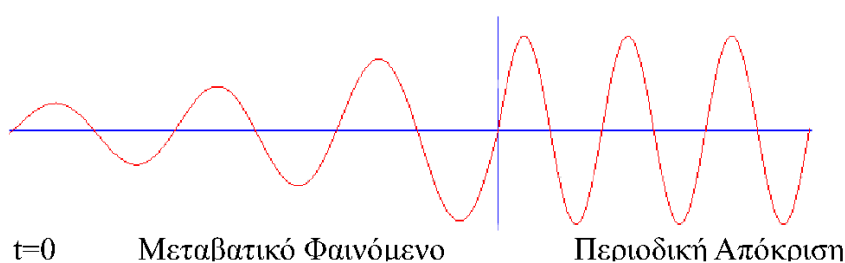
Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι το κύριο αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας. Αυτή η μέθοδος προγραμματίστηκε σε C/CUDA και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά της μεθόδου Χρονο-προέλασης η οποία αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ανάλυση που ακολουθεί χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο γίνεται μια αναφορά στο μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου, πώς αυτή θεμελιώνεται και με ποιό τρόπο υπολογίζει τα επιθυμητά πεδία λύσεων. Το τμήμα αυτό είναι βασισμένο στη διπλωματική του Γ.Κανέλλη[3] καθώς εκεί αναλύθηκε η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών και προγραμματίστηκε για εφαρμογή σε κεντρικούς επεξεργαστές (CPUs) αλλά και σε ξένες δημοσιεύσεις[7][8]. Στο δεύτερο μέρος γίνεται αναφορά στις εξισώσεις Euler και πώς αυτές διαμορφώνονται και τελικά γράφονται και προγραμματίζονται στη διπλωματική αυτή εργασία.

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμόζεται σε περιοδικά φαινόμενα, δηλαδή θεωρείται ότι το πεδίο λύσεων \vec{W} μπορεί να προσεγγιστεί μέσω σειράς Fourier με N_H αρμονικές/συχνότητες. Το φαινόμενο που μελετάται είναι περιοδικό με συχνότητα $f = \frac{1}{T}$. Στην εργασία αυτή εφαρμόστηκε η περιοδική αλλαγή της πίεσης εξόδου ενός αγωγού.

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών είναι ότι υπολογίζεται κατ' ευθείαν το περιοδικό φαινόμενο χωρίς να υπολογίζεται η μεταβατική περίοδος από μία μόνιμη αρχική κατάσταση, πράγμα που συμβαίνει με τη μέθοδο της χρόνο-προέλασης. Αυτά τα στοιχεία θα αναφερθούν και στη συνέχεια πιο αναλυτικά.

5.1 Μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου Ισορροπία των Αρμονικών

Η μέθοδος της Ισορροπία των Αρμονικών εφαρμόζεται σε περιοδικά φαινόμενα και επιτρέπει την εύρεση κατ' ευθείαν της περιοδικής λύσης αναπτύσσοντας την σε σειρά Fourier, χωρίς την ανάγκη να υπολογιστεί το μεταβατικό φαινόμενο από την ηρεμία του πεδίου έως ότου αυτό συγκλίνει σε μία περιοδική απόκριση. Το σχήμα 6.1 είναι τυπικό και απεικονίζει αυτό ακριβώς, η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών υπολογίζει κατευθείαν την "Περιοδική Απόκριση", ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης υπολογίζει αναγκαστικά και την "Μεταβατική Περίοδο".



Σχήμα 5.1: Τυπική απεικόνιση μετάβασης από μια μόνιμη κατάσταση σε μία περιοδική

Παρακάτω θα αναφερθούν οι βασικές αρχές της μεθόδου δίνοντας περισσότερη έμφαση στους υπολογισμούς που απαιτούνται για να βρεθεί η επιθυμητή λύση και όχι στην μαθηματική απόδειξη τους, καθώς κάτι τέτοιο θα ξέφευγε από το πλαίσιο της διπλωματικής αυτής.

5.1.1 Θεωρητικό υπόβαθρο της Μεθόδου

Μελετάται ένα περιοδικό φαινόμενο όπου η λύση \vec{W} αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Πιο αναλυτικά, έστω ότι το φαινόμενο διέπεται από την εξίσωση:

$$\frac{dW(t)}{dt} + R(t) = 0 \quad (5.1)$$

όπου W η λύση που πρέπει να υπολογιστεί (δηλαδή οι μεταβλητές της ροής στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ή πιο σωστά ολόκληρο το πεδίο των μεταβλητών ροής - για κάθε κόμβο, για όλο το πλέγμα) και R το χωρικό υπόλοιπο (spatial residual) της εξίσωσης που στην ουσία εκφράζει όλη τη φυσική του προβλήματος. Επειδή το R εκφράζει τη φυσική του προβλήματος (είναι οι εξισώσεις Euler που δίνουν τη ζητούμενη λύση) είναι και συνάρτηση του W δηλαδή ισχύει $R(t) = R(W(t))$.

Η λύση W μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier έτσι:

$$\begin{aligned} W(t) &\approx \widehat{W}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{W}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{W}_{bn} \sin(\omega n t)) \\ R(t) &\approx \widehat{R}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{R}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{R}_{bn} \sin(\omega n t)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$ με T την περίοδο της διέγερσης στο φαινόμενο που μελετάται και N_H οι αρμονικές στις οποίες αναλύεται το πρόβλημα. Αν, παραδείγματος χάριν, το πρόβλημα μοντελοποιείται με $N_H = 2$ αρμονικές τότε είναι $N_t = 2N_H + 1 = 5$ τα άγνωστα πεδία που πρέπει να υπολογιστούν (ως άγνωστα πεδία νοείται ολόκληρο το πλέγμα για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή). Έτσι, στη γενική περίπτωση, υπάρχουν $2N_H + 1$ άγνωστοι που πρέπει να υπολογιστούν. Αν βρεθούν αυτοί οι άγνωστοι, από την (5.2), μπορεί να υπολογιστεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή στην περίοδο το ζητούμενο πεδίο λύσεων. Με άλλα λόγια, αν είναι γνωστοί οι $2N_H + 1$ συντελεστές της (5.2) μπορεί να αναπαραχθεί το πεδίο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο.

Πρέπει να παρατηρηθεί εδώ το γεγονός ότι η ανάπτυξη της λύσης με σειρά Fourier είναι μια προσέγγιση, δηλαδή μόνο αν επιλεγούν αρκετές αρμονικές $N_T = 2N_H + 1$ θα υπάρχει ικανοποιητική ακρίβεια στα αποτελέσματα. Γενικά το με πόσες αρμονικές πρέπει να λυθεί ένα πρόβλημα εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το αν η περίοδος είναι μεγάλη ή μικρή (σε μικρότερη περίοδο απαιτούνται περισσότερες αρμονικές), από το φαινόμενο και πόσο δύσκολα μπορεί να συγκλίνει σε κάποια περιοχή (γενικά πιο σύνθετο φαινόμενο/πρόβλημα απαιτεί περισσότερες αρμονικές) και άλλα.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (5.2), αυτή παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{N_H} (-\widehat{W}_{an} \omega n \sin(\omega n t) + \widehat{W}_{bn} \omega n \cos(\omega n t)) \quad (5.3)$$

και αντικαθιστώντας στην (5.1) τις (5.2) και (5.3), παίρνει τη μορφή:

$$\widehat{R}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{W}_{bn} \omega n + \widehat{R}_{an}) \cos(\omega n t) + \sum_{n=1}^{N_H} (-\widehat{W}_{an} \omega n + \widehat{R}_{bn}) \sin(\omega n t) = 0 \quad (5.4)$$

Αυτή η εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται για κάθε t όπως και η αρχική (5.1). Έτσι πρέπει ο σταθερός όρος (που δεν πολλαπλασιάζεται με κάποιο τριγωνομετρικό όρο) να είναι μηδενικός και οι συντελεστές των ημίτονων και συνημίτονων να είναι επίσης μηδενικοί. Στην εξίσωση αυτή υπάρχουν N_H ημίτονα και N_H συνημίτονα άρα προκύπτει ένα σύστημα με $2N_H + 1$

εξισώσεις όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

$$\begin{aligned} & \widehat{R}_0 = 0 \\ & \widehat{W}_{bn}\omega n + \widehat{R}_{an} = 0 \quad n = 1 \rightarrow N_H \\ - & \widehat{W}_{an}\omega n + \widehat{R}_{bn} = 0 \quad n = 1 \rightarrow N_H \end{aligned} \left| \begin{array}{l} \\ \\ 2N_H+1 \text{ equations} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Το σύστημα (5.5) δεν μπορεί να λυθεί άμεσα. Αυτό οφείλεται στη μη-γραμμικότητα της σχέσης $R = R(W)$, γιατί υπάρχει σχέση που να συνδέει τα \widehat{R}_{ai} με τα \widehat{W}_{bi} και \widehat{W}_{ai} και αντίστοιχα για τα \widehat{R}_{bi} ενώ δεν μπορεί να βρεθεί σχέση που να συνδέει τα \widehat{R}_{ai} μόνο με τα \widehat{W}_{bi} και τα \widehat{R}_{bi} μόνο με τα \widehat{W}_{ai} .

Εδώ έρχεται η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών για να δώσει μία λύση στην αντιμετώπιση του παραπάνω συστήματος (5.5). Έχουμε $N_T = 2N_H + 1$ αγνώστους, έτσι ως πρώτο βήμα διακριτοποιείται χρονικά η ζητούμενη λύση W και το χωρικό υπόλοιπο R σε $N_T = 2N_H + 1$ χρονικά ίσα απέχοντα βήματα μέσα στην περίοδο.

$$\vec{W}_{hb} = \begin{pmatrix} W(t_0) \\ W(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ W(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad \vec{R}_{hb} = \begin{pmatrix} R(t_0) \\ R(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ R(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Στις παραπάνω διακριτοποιήσεις όπου $\Delta t = \frac{T}{2N_H + 1} = \frac{2\pi}{2N_H + 1} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega}$ όπου

$$\alpha = \frac{2\pi}{2N_H + 1}.$$

Για όλα τα στοιχεία που διακριτοποιούνται παραπάνω ικανοποιείται η σειρά Fourier στις (5.2) και έτσι μπορεί το σύστημα (5.5) να εκφραστεί με βάση τη διακριτοποιημένη μορφή της λύσης W_{hb} και του χωρικού υπολοίπου R_{hb} . Το σύστημα έχει $N_T = 2N_H + 1$ άγνωστα πεδία, και οι χρονικές διακριτοποιήσεις είναι επίσης $N_T = 2N_H + 1$ έτσι θα προκύψει ένα νέο σύστημα όπου οι συντελεστές Fourier \widehat{W} και \widehat{R} θα είναι συναρτήσεις των χρονικών διακριτοποιήσεων όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω, και οι οποίοι είναι τώρα υπολογίσιμοι αφού υπάρχει σχέση $R = R(W)$. Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνεται ένας διακριτός μετασχηματισμός του συστήματος (5.5) από το πεδίο της συχνότητας, στο πεδίο του χρόνου (ισαπέχουσες χρονικές στιγμές στην περίοδο). Αυτός είναι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT).

Αντικαθιστώντας τους νέους συντελεστές Fourier \widehat{W} και \widehat{R} στο σύστημα (5.5) προκύπτει νέο σύστημα στο πεδίο του χρόνου που μπορεί να λυθεί όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

5.1.2 Τρόπος Υπολογισμού των Πεδίων Λύσεων με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών

Δεν θα αναπτυχθεί εδώ όλη η θεωρία της μεθόδου, αλλά θα παρουσιαστεί ο τρόπος υπολογισμού των συντελεστών Fourier που απαιτούνται για την εύρεση της λύσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο.

Αποδεικνύεται ότι μεταξύ των συντελεστών Fourier (στην εξίσωση (5.2)) και των διακριτών χρονικών λύσεων που αναπτύχθηκαν παραπάνω (εξίσωση (5.6)) ισχύει η μητρική σχέση:

$$\vec{\widehat{W}} = \frac{1}{N_T} E \vec{W} \quad (5.7)$$

ή πιο αναλυτικά:

$$\begin{bmatrix} \widehat{W}_0 \\ \widehat{W}_{a1} \\ \widehat{W}_{b1} \\ \vdots \\ \widehat{W}_{a \cdot N_H} \\ \widehat{W}_{b \cdot N_H} \end{bmatrix} = \frac{1}{N_T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2\cos(a) & 2\cos(2a) & \dots & 2\cos((N_T - 1)a) \\ 0 & 2\sin(a) & 2\sin(2a) & \dots & 2\sin((N_T - 1)a) \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2\cos(N_H \cdot a) & 2\cos(2N_H \cdot a) & \dots & 2\cos((N_T - 1)N_H \cdot a) \\ 0 & 2\sin(N_H \cdot a) & 2\sin(2N_H \cdot a) & \dots & 2\sin((N_T - 1)N_H \cdot a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t_0) \\ W(t_0 + \Delta t) \\ W(t_0 + 2\Delta t) \\ \vdots \\ W(t_0 + T - 2\Delta t) \\ W(t_0 + T - \Delta t) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

όπου N_T ο αριθμός των εικόνων ή χρονικών στιγμών, που έχει διαμεριστεί η περίοδος. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω ισχύει $N_T = 2N_H + 1$ με N_H τον αριθμό των αρμονικών. Ακόμα για το a ισχύει όπως και παραπάνω: $a = \frac{2\pi}{2N_H + 1}$.

Η ίδια σχέση ισχύει και για το R,

$$\vec{\widehat{R}} = \frac{1}{N_T} E \vec{R} \quad (5.9)$$

δίνει τους συντελεστές Fourier. Αφού λοιπόν έχουν βρεθεί αυτοί μπορεί να υπολογιστεί το W (πεδίο λύσεων - ροϊκά μεγέθη κάθε κόμβου για ολόκληρο το πλέγμα) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο από την εξίσωση (5.2). Αυτό που απαιτεί αυτή η σχέση είναι η εύρεση των διακριτοποιημένων W όπως "χωρίστηκε" η περίοδος σε ίσα χρονικά διαστήματα (εξίσωση (5.6)), ο πίνακας E είναι σταθερός και εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των αρμονικών.

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τα \widehat{W} που υπολογίστηκαν στο σύστημα (5.5), το σύστημα

μετατρέπεται στη μορφή:

$$\left(\begin{array}{r} 0 = \widehat{R}_0 \\ -\omega \widehat{W}_{b1} = \widehat{R}_{a1} \\ \omega \widehat{W}_{a1} = \widehat{R}_{b1} \\ -2\omega \widehat{W}_{b2} = \widehat{R}_{a2} \\ 2\omega \widehat{W}_{a2} = \widehat{R}_{b2} \\ \vdots \\ -N_H \omega \widehat{W}_{bN_H} = \widehat{R}_{aN_H} \\ -N_H \omega \widehat{W}_{aN_H} = \widehat{R}_{bN_H} \end{array} \right) \Rightarrow \omega A \cdot \widehat{\vec{W}} = \widehat{\vec{R}} \Big|_{\text{μητρωνικά}} \quad (5.10)$$

όπου ο πίνακας A είναι :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_H & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι διαμορφώνονται οι εξισώσεις (5.7), (5.9) και (5.10). Αν αντικατασταθεί η (5.9) στην (5.10) ισχύει:

$$\omega A \cdot \widehat{\vec{W}} = \widehat{\vec{R}} \Rightarrow \omega A E \vec{W} = E \vec{R} \Rightarrow \omega E^{-1} A E \vec{W} = \vec{R} \quad (5.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση έχει τεθεί το γινόμενο πινάκων $E^{-1} A E = D$ όπου D ένας νέος πίνακας διαστάσεων $N_T \times N_T$. Η εξίσωση (5.11) παίρνει τη μορφή:

$$\vec{R} + \omega D \vec{W} = 0 \quad (5.12)$$

και είναι η εξίσωση Ισορροπίας των Αρμονικών (Harmonic Balance equation).

Παρουσιάζονται για λόγους πληρότητας οι πίνακες E^{-1} και $E^{-1} A$ ενώ για τον πίνακα D παρουσιάζεται μία αναδρομική σχέση που υπολογίζει τα στοιχεία του. Πρέπει να παρατηρηθεί εδώ ότι και οι τρεις αυτοί πίνακες είναι σταθεροί για κάθε πρόβλημα αφού εξαρτώνται μόνο από τον αριθμό των αρμονικών που έχει επιλεγεί, δηλαδή σε πόσα ίσα χρονικά βήματα θα

χωριστεί η περίοδος.

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 2 & \cos(a) & \sin(a) & \cdots & \cos(N_H a) & \sin(N_H \cdot a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cdots & \cos(N_H a) & \sin(N_H \cdot 2a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos((N_T - 1)a) & \sin((N_T - 1)a) & \cdots & \cos(N_H(N_T - 1) \cdot a) & \sin(N_H \cdot (N_T - 1)a) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

και

$$E^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -N_H \\ 0 & \sin(a) & -\cos(a) & \cdots & N_H \sin(N_H a) & -N_H \cos(N_H \cdot 1a) \\ 0 & \sin(2a) & -\cos(2a) & \cdots & N_H \sin(N_H \cdot 2a) & -N_H \cos(N_H \cdot 2a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sin((N_T - 1)a) & -\cos((N_T - 1)a) & \cdots & N_H \sin(N_H \cdot (N_T - 1)a) & -N_H \cos(N_H \cdot (N_T - 1)a) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Τέλος για τον πίνακα D υπάρχει η σχέση (5.15):

$$D_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{\kappa=1}^{N_H} \kappa \sin(\kappa a (j - i)) \quad (5.15)$$

και η διαστάσεις του πίνακα είναι $N_T \times N_T$. Πρέπει εδώ να προστεθεί ότι ο πίνακας D έχει μηδενικά όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του, καθώς και ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε σειράς του ισούται με μηδέν. Τέλος, στον πίνακα D παρατηρείται κυκλική εναλλαγή των στοιχείων του από γραμμή σε γραμμή, δηλαδή το 3^ο στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι το 4^ο της 2^{ης} γραμμής κ.ο.κ.

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία η διαδικασία εύρεσης των συντελεστών Fourier είναι βηματικά: υπολογισμός του πίνακα E , του πίνακα E^{-1} και του πίνακα A , από αυτούς υπολογίζεται ο πίνακας D όπου πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{N_T}$. Τέλος, για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier, εφαρμόζεται η σχέση (5.8).

Εδώ παρουσιάζεται συνοπτικά ο τρόπος λύσης του αρχικού προβλήματος, όπως ορίζει η μέθοδος Ισοροπίας των Αρμονικών.

1. Αντί της αρχικής εξίσωσης (5.1) λύνεται η εξίσωση (5.12). Αφού έχει αποδειχτεί ότι το W μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier, με την προϋπόθεση ότι το φαινόμενο είναι περιοδικό ως προς τον πραγματικό χρόνο, τότε ισχύει :

$$\frac{dW}{dt} = \omega DW$$

με $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και T την περίοδο της διέγερσης του φαινομένου.

2. Από την εξίσωση (5.12) υπολογίζονται τα W στις διακριτοποιημένες θέσεις μέσα στην περίοδο (σε ίσα απέχουσες N_T στιγμές). Ανάλογα το πρόβλημα συνήθως εδώ έχει προστεθεί και ψευδο-χρονικός όρος για λόγους σύγκλισης, δεν επηρεάζει το φαινόμενο και δεν έχει σχέση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών.

$$\vec{R} + \omega D\vec{W} = 0$$

3. Υπολογίζονται οι συντελεστές Fourier μέσω της σχέσης (5.7)

$$\vec{W} = \frac{1}{N_T} \vec{E} \vec{W}$$

4. Υπολογίζεται το $W(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο μέσω της σειράς Fourier που αναλύεται (εξίσωση (5.2))

$$W(t) \approx \widehat{W}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{W}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{W}_{bn} \sin(\omega n t))$$

5.1.3 Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Έχοντας παρουσιάσει τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών καθώς και με ποιον τρόπο υπολογίζει το ζητούμενο πεδίο λύσεων, θα παρατεθούν εδώ δύο συμπεράσματα που αφορούν τη μέθοδο αυτή.

- Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν υπολογίζει το μεταβατικό φαινόμενο αλλά κατευθείαν το πλήρως αναπτυγμένο περιοδικό φαινόμενο. Με άλλα λόγια, δεν ξεκινά από μία χρονική στιγμή $t = 0$ και προχωρά βηματικά στο χρόνο έως ότου συγκλίνει το χωρικό υπόλοιπο (spatial residual) όπως κάνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης, αλλά υπολογίζει αμέσως στην περιοδική κατάσταση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα κάθε φορά να χρειάζεται όση μνήμη απαιτείται για να αποθηκευτούν οι N_T εικόνες του πεδίου που χρησιμοποιούνται. Αντίθετα, η μέθοδος της χρονο-προέλασης χρειάζεται μία εικόνα του πεδίου και σε κάθε χρονικό βήμα την ανανεώνει με τη νέα λύση. Ως συμπέρασμα παρατίθεται λοιπόν, ότι η μνήμη που απαιτείται είναι μεγαλύτερη και μάλιστα N_T φορές μεγαλύτερη από αυτήν που απαιτεί η Χρονο-προέλαση αλλά επαρκεί για να απεικονίσει κατευθείαν το πεδίο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο.
- Το άθροισμα των στοιχείων κάθε σειράς του πίνακα D ισούται με μηδέν. Έτσι ένα σταθερό φαινόμενο (steady πρόβλημα) μπορεί να θεωρηθεί οριακά περιοδικό και να υπολογιστεί από τη σχέση (5.12):

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

Στον κώδικα που έχει αναπτυχθεί, αν τεθεί $N_H = 0$ τότε το τμήμα του κώδικα που εμπλέκει τις εικόνες του πεδίου (ουσιαστικά η (5.12) που κάνει το πρόβλημα πεπλεγμένο) μηδενίζει, και ο κώδικας τρέχει κανονικά ένα σταθερό φαινόμενο (steady πρόβλημα). Ο λόγος που στον κώδικα μηδενίζεται ο όρος που εμπλέκει τις διάφορες εικόνες του πεδίου είναι γιατί βάζοντας $N_H = 0$, υπάρχει μία μόνο εικόνα στην περίοδο (αφού $N_T = 2N_H + 1$) και ο πίνακας D έχει ένα μόνο στοιχείο, και αυτό μηδενικό, αφού όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι μηδενικά.

5.2 Οι εξισώσεις Euler με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν οι εξισώσεις Euler με βάση τη θεωρία που αναπτύχθηκε παραπάνω, δηλαδή θα γραφτούν οι εξισώσεις (Euler) σύμφωνα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών. Στη συνέχεια, θα λάβουν τη μορφή με την οποία χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση. Θα παρουσιαστεί λοιπόν η αριθμητική επίλυση που έγινε, καθώς επίσης και διάφορα συμπεράσματα και ιδιαιτερότητες της μεθόδου.

5.2.1 Εξισώσεων Euler σύμφωνα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών

Όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση που προηγήθηκε στο θεωρητικό τμήμα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών, αν ένα πεδίο αναλύεται σε σειρά Fourier δηλαδή, μπορεί να παραστεί από την εξίσωση:

$$W(t) \approx \widehat{W}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{W}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{W}_{bn} \sin(\omega n t)) \quad (5.16)$$

τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει για την παράγωγο του ζητούμενου W η παρακάτω σχέση, γνωστή και ως εξίσωση της Ισορροπίας των Αρμονικών,

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \omega D \vec{W} \quad (5.17)$$

Το \vec{W} συμβολίζει τα ροϊκά μεγέθη που πρέπει να υπολογιστούν σε κάθε κόμβο σε ολόκληρο το πεδίο. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι στη σχέση που αναλύεται το \vec{W} σε σειρά Fourier (σχέση (5.16)) δεν εμπλέκεται κανένα ροϊκό μέγεθος από άλλη χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο που μελετάμε το φαινόμενο, παρά μόνο οι συντελεστές Fourier (που είναι γνωστοί σε εκείνη τη φάση της επίλυσης) εμπλέκονται στο πεδίο της συχνότητας μέσω ημίτονων και

συνημίτονων. Με άλλα λόγια, για κάθε χρονική στιγμή t σε κάθε κόμβο, υπολογίζεται στο πεδίο της συχνότητας ένα ζητούμενο ροϊκό μέγεθος. Αντίθετα, στην εξίσωση Ισορροπίας των Αρμονικών, μέσω του πίνακα D (σχέση (5.17)) εμπλέκονται μεταξύ τους τα ροϊκά μεγέθη ενός κόμβου με τα αντίστοιχα ροϊκά μεγέθη του ίδιου κόμβου σε άλλες "εικόνες" του πεδίου μέσα στην περίοδο. Δηλαδή, εμπλέκονται χρονικά μεταξύ τους τα μεγέθη ενός κόμβου. Θα αναλυθεί παρακάτω καλύτερα η εξάρτηση που έχει κάθε όρος της τελικής εξίσωσης που θα διαμορφωθεί.

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται αναλυτικότερα η Εξίσωση της Ισορροπίας των Αρμονικών για να γίνουν πιο κατανοητές οι εξαρτήσεις και οι απαιτήσεις που αυτή φέρει.

Αν θεωρηθούν N_H αρμονικές, τότε πρέπει να υπολογιστούν $N_T = 2N_H + 1$ ισαπέχουσες χρονικά "εικόνες" του πεδίου μέσα στην περίοδο. Στην εξίσωση που θα παρουσιαστεί παρακάτω, ο όρος της παραγωγού αντικαθίσταται από τον όρο ωDW όπως προτάζει η εξίσωση της Ισορροπίας των Αρμονικών. Πιο αναλυτικά, αφού ο πίνακας D έχει διαστάσεις $N_T \times N_T$ και το W στη σχέση αυτή συμβολίζει εκτός από τα ροϊκά μεγέθη αλλά και τις "εικόνες" του πεδίου στη περίοδο η σχέση γράφεται με την παρακάτω μορφή

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \omega D_{i,1}\vec{W}_1 + \omega D_{i,2}\vec{W}_2 + \omega D_{i,3}\vec{W}_3 + \omega D_{i,4}\vec{W}_4 \dots \quad (5.18)$$

Οι δείκτες $1, 2, 3 \dots$ αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές που έχει σπάσει η περίοδος του προβλήματος (N_T "εικόνες"). Πιο συνοπτικά, γράφεται η εξίσωση (5.18) με την παρακάτω μορφή.

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \sum_{j=1}^{N_T} \omega D_{i,j} \vec{W}_j \quad (5.19)$$

Η εξίσωση (5.19) αποδεικνύει ότι η επίλυση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών δεν έχει καθόλου την έννοια των χρονικών βημάτων, δηλαδή της Χρονο-προέλασης. Λύνονται και υπολογίζονται παράλληλα τα N_T στιγμιότυπα του πεδίου μέσα στην περίοδο.

Έχοντας λοιπόν παρουσιάσει άμεσα, τη βασική διαφορά των δύο μεθόδων που εξετάζονται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, και έμμεσα, τη μετατροπή από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου και πάλι πίσω στο πεδίο των συχνοτήτων που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών ακολουθεί η διαμόρφωση των Εξισώσεων Euler.

Παρουσιάζεται η διακριτοποιημένη μορφή των ολοκληρωμένων εξισώσεων Euler σε έναν όγκο ελέγχου, για έναν κόμβο P κάποια χρονική στιγμή.

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (5.20)$$

Το σύμβολο $\sum_{Q \in P}$ σημαίνει άθροιση για κάθε κόμβο Q που είναι γειτονικός του κόμβου P . Αν

έχουμε δηλαδή δομημένο και διδιάστατο πλέγμα που εφαρμόζουμε την εξίσωση, τότε ο όρος αυτός αναφέρεται στους 4 γειτονικούς κόμβους του P. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε τριδιάστατο δομημένο πλέγμα, οπότε ο όρος αναφέρεται στους 6 γειτονικούς κόμβους του κόμβου P.

Στην εξίσωση λοιπόν (5.20) προσθέτουμε ένα ψευδο-χρονικό όρο, όπως έγινε και στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης. Ο όρος αυτός δεν αλλάζει το φαινόμενο που μελετάται αλλά χρησιμοποιείται μόνο για λόγους σύγκλισης. Η εξίσωση (5.20) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}}\right)_P A_{cell} + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}\right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (5.21)$$

Ο όρος $\sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}$ αντιπροσωπεύει τη φυσική του προβλήματος. Όπου αναφέρεται \vec{W} είναι τα ροϊκά μεγέθη του εκάστοτε κόμβου. Ως ροϊκά μεγέθη σε αυτήν τη διπλωματική εργασία έχουμε $[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E]$ όπου ρ η πυκνότητα στον συγκεκριμένο κόμβο, u, v, και w οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού στους τρεις άξονες (τριδιάστατο πρόβλημα) στον συγκεκριμένο κόμβο και E ενέργεια.

Αν αντικατασταθεί η εξίσωση της Ισορροπίας των Αρμονικών όπως παρουσιάστηκε (σχέση (5.19)) στην εξίσωση (5.21) τότε η τελευταία παίρνει την παρακάτω μορφή,

$$A_{cell} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}}\right)_P + A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \vec{W}_j^{k+1} + \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} = 0 \quad (5.22)$$

Στην (5.22) όπου $k+1$ εννοείται η τελευταία ψευδο-χρονική στιγμή που υπολογίζει η εξίσωση. Όπως και στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης, έτσι και εδώ το τελευταίο ψευδο-χρονικό βήμα κρατείται ως λύση (αυτή έτσι και αλλιώς είναι και η ουσία της ψευδο-χρονικής παραγωγού, να κάνει επαναλήψεις και να υποβοηθά τη σύγκλιση του προβλήματος).

Στη συνέχεια, αναλύονται όλοι οι όροι της εξίσωσης (5.22) εφαρμόζοντας τη Δ -διατύπωση (Δ -formulation). Έτσι για τον όρο \vec{W}_j^{k+1} ισχύει:

$$\vec{W}^{k+1} = \vec{W}^k + \Delta \vec{W}^{k+1} \quad (5.23)$$

Ακόμα, γράφεται ο όρος $\sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1}$ με τη Δ -διατύπωση (Δ -formulation) και παίρνει την παρακάτω έκφραση.

$$\sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} = \sum_{Q \in P} \vec{\Phi}_{PQ}^k + \sum_{Q \in P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^k \cdot \Delta \vec{W}^{k+1} \quad (5.24)$$

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (5.24) $\sum_{Q \in P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^k \cdot \Delta \vec{W}^{k+1}$ εξαρτάται από τα ροϊκά με-

γέθη του ίδιου του κόμβου αλλά και από τα ροϊκά μεγέθη των γειτονικών κόμβων. Έτσι, πιο πρακτικά, ο όρος αυτός γράφεται με την παρακάτω μορφή όπως και στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης.

$$\sum_{Q \angle P} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^k \cdot \overline{\Delta \vec{W}}^{k+1} = [diag]_P \cdot \overline{\Delta \vec{W}}_P^{k+1} + \sum_{Q \angle P} [zm]_Q \cdot \overline{\Delta \vec{W}}_Q^{k+1} \quad (5.25)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.25) στην εξίσωση (5.24) σχηματίζεται η τελική εξίσωση που απεικονίζει τη φυσική του προβλήματος, προστίθεται δηλαδή η εξάρτηση των ροϊκών μεγεθών ενός κόμβου από τον ίδιο τον εαυτό του αλλά και από τις τιμές που έχουν οι γειτονικοί κόμβοι.

$$\sum_{Q \angle P} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} = \sum_{Q \angle P} \vec{\Phi}_{PQ}^k + [diag]_P \cdot \overline{\Delta \vec{W}}_P^{k+1} + \sum_{Q \angle P} [zm]_Q \cdot \overline{\Delta \vec{W}}_Q^{k+1} \quad (5.26)$$

Πρέπει εδώ να παρατηρηθεί ότι οι πίνακες $[diag]$ και $[zm]$ έχουν διαστάσεις 5×5 αφού αντιμετωπίζεται το φαινόμενο σε τριδιάστατο πλέγμα (5 ροϊκά μεγέθη σε κάθε κόμβο) και φυσικά οι τιμές τους είναι συνάρτηση των ροϊκών μεγεθών του κάθε φορά κόμβου P και των γειτονικών κόμβων Q αντίστοιχα.

Τέλος, αναλύεται και η ψευδο-χρονική παράγωγος με ένα απλό σχήμα πίσω διαφόρισης όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}} \right)^{k+1} = \frac{\vec{W}^{k+1} - \vec{W}^k}{\Delta t_{ps}} = \frac{\overline{\Delta \vec{W}}^{k+1}}{\Delta t_{ps}} \quad (5.27)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.23), (5.26) και (5.27) στην εξίσωση (5.22), αυτή παίρνει την ακόλουθη μορφή.

$$A_{cell} \frac{\overline{\Delta \vec{W}}^{k+1}}{\Delta t_{ps}} + A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} (\vec{W}^k + \Delta \vec{W}^{k+1}) + \sum_{Q \angle P} \vec{\Phi}_{PQ}^k + [diag]_P \cdot \overline{\Delta \vec{W}}_P^{k+1} + \sum_{Q \angle P} [zm]_Q \cdot \overline{\Delta \vec{W}}_Q^{k+1} = 0 \quad (5.28)$$

Χωρίζεται το δεξί από το αριστερό μέλος, δηλαδή ποια μεγέθη θα χρειαστεί να αντιστραφούν σε επόμενο βήμα για να βρεθεί το $\overline{\Delta \vec{W}}$, ή αλλιώς η μεταβολή της τελικής λύσης σε κάθε κόμβο για κάθε ροϊκό μέγεθος του.

Επειδή ο όρος $\sum_{Q \angle P} \vec{\Phi}_{PQ}^k$ είναι ένας πίνακας μεγάλος και με πολλά μηδενικά στοιχεία (αφού ο κάθε κόμβος δεν έχει εξάρτηση από όλους τους άλλους κόμβους του πλέγματος αλλά μόνο από τους γειτονικούς του) μεταφέρεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης για αποφυγή της αντιστροφής του. Ακόμα ο όρος $A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} (\vec{W}^k + \Delta \vec{W}^{k+1})$ επειδή εμπλέκει όλα τα

ισαπέχοντα χρονικά πεδία γράφεται για την στιγμή k και μεταφέρεται και αυτός στο δεξί μέλος. Τέλος, ο όρος που επιφέρει την εξάρτηση κάθε κόμβου από τους γειτονικούς του $-\sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \overrightarrow{\Delta W}_Q^k$ - επίσης μεταφέρεται στο δεξί μέλος, προφανώς για την πιο πρόσφατη λύση, δηλαδή, για k .

Έτσι η εξίσωση (5.28) παίρνει τη μορφή :

$$\left(\frac{\overrightarrow{A_{cell}}}{\Delta t_{ps}} \cdot I_{5 \times 5} + [diag]_P \right) \Delta \overrightarrow{W}_P^{k+1} = -A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \overrightarrow{W}^j - \sum_{Q \neq P} \overrightarrow{\Phi}_{PQ}^k - \sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \overrightarrow{\Delta W}_Q^k \quad (5.29)$$

Οι εξισώσεις Euler είναι διακριτοποιημένες σε έναν όγκο ελέγχου, για έναν κόμβο του πλέγματος, σε μία από τις N_T ισαπέχουσες χρονικές στιγμές στη περίοδο. Οι πίνακες $[zm]_Q$ και $[diag]_P$ έχουν διαστάσεις 5×5 όπως αναφέρθηκε και παραπάνω ενώ ο πίνακας $\Delta \overrightarrow{W}_P^{k+1}$ έχει διαστάσεις 5×1 όπως εξάλλου προβλέπεται. Περιέχει τις ανανεώσεις των ροικών μεγεθών ενός κόμβου. Έτσι στο δεξί μέλος, το αποτέλεσμα του πρώτου όρου είναι ένας πίνακας 5×1 , του δεύτερου όρου επίσης και του τρίτου είναι ένας πολλαπλασιασμός πινάκων 5×5 με 5×1 , άρα το αποτέλεσμα έχει διαστάσεις 5×1 .

Στον κώδικα που αναπτύχθηκε, η εξίσωση (5.29) δεν αντιμετωπίστηκε με αυτόν τον τρόπο ακριβώς. Δηλαδή, δεν λύθηκε από κόμβο σε κόμβο και να αποθηκεύεται το αποτέλεσμα και έπειτα να προχωρά η επίλυση στον επόμενο κόμβο αλλά λύθηκε για ολόκληρο το πλέγμα κατευθείαν. Με αυτόν τον τρόπο όλοι οι πίνακες που αναφέρθηκαν έχουν μία ακόμα διάσταση, την N_S που είναι οι κόμβοι του πλέγματος. Για παράδειγμα, ο πίνακας $[zm]_Q$ ενός κόμβου χρειάζεται σε όλους τους γείτονες του, αν λυθεί όλο το πλέγμα μαζί μπορεί να υπολογιστεί μία φορά και να συνεισφέρει κατευθείαν σε όλους τους γειτονικούς του. Ακόμα πρέπει να

αναφερθεί ξανά ότι λόγω του όρου της Ισορροπίας των Αρμονικών $A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \overrightarrow{W}^j$ είναι

αναπόφευκτο να υπολογιστούν και όλες οι ισαπέχουσες χρονικές στιγμές ταυτόχρονα. Με άλλα λόγια, στην μνήμη του υπολογιστή (ή του επεξεργαστή κάρτας γραφικών (GPU) για τη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία) πρέπει να δεσμευτεί N_T φορές το πλέγμα και να λυθεί πεπλεγμένα (coupled method) σε αντίθεση με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης που το πλέγμα δεσμεύεται μία φορά στην μνήμη και με κάθε χρονικό βήμα ανανεώνεται. Αυτό είναι και το μεγαλύτερο μειονέκτημα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών που όμως καλύπτεται από θέμα χρόνου (το πρόβλημα λύνεται πιο γρήγορα).

Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις πάνω στην εξίσωση (5.29):

1. Ο όρος της Ισορροπίας των Αρμονικών με τον πίνακα D εμπλέκει όλες τις ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μεταξύ τους, δηλαδή κάθε ροική μεταβλητή επηρεάζεται από τον εαυτό της στις υπόλοιπες $N_T - 1$ ισαπέχουσες χρονικές στιγμές ($N_T - 1$ γιατί ο πίνακας D έχει μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου του, άρα δεν υπάρχει εξάρτηση από την ίδια χρονική στιγμή, μόνο από τις υπόλοιπες). Αυτή η επιρροή αναλύθηκε και παραπάνω.

2. Ο όρος $\sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \overrightarrow{\Delta W}_Q^k$ έχει πληροφορία από τους γειτονικούς κόμβους του κόμβου που μελετάται, την ίδια χρονική στιγμή. Δίνει λοιπόν πληροφορία χωρικά και όχι χρονικά.
3. Τέλος, ο όρος $[diag]_P$ εμπλέκει τις μεταβλητές της ροής ενός κόμβου μεταξύ τους. Δεν έχει ούτε χωρική ούτε χρονική εξάρτηση.

5.2.2 Διαδικασία εύρεσης τελικής λύσης - Επαναληπτική μέθοδος Jacobi

Όλες οι N_T "εικόνες" του πεδίου λύνονται πεπλεγμένα. Έτσι αρχικά ορίζεται με πόσες αρμονικές θα αντιμετωπιστεί το πρόβλημα και, συνεπώς, πόση μνήμη θα δεσμευτεί στον υπολογιστή (επεξεργαστή κάρτας γραφικών -GPU για αυτήν τη διπλωματική εργασία). Γράφεται η εξίσωση (5.29) στη μορφή :

$$\left(\frac{\overrightarrow{A_{cell}}}{\Delta t_{ps}} \cdot I_{5 \times 5} + [diag]_P \right) \Delta \overrightarrow{W}_P^{k+1} = [res]_{5 \times 1} \quad (5.30)$$

όπου

$$[res]_{5 \times 1} = -A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \overrightarrow{W}^k - \sum_{Q \neq P} \overrightarrow{\Phi}_{PQ}^k - \sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \overrightarrow{\Delta W}_Q^k \quad (5.31)$$

Υπολογίζεται ολόκληρος ο πίνακας $[res]_{5 \times 1}$ όπου συγκεκριμένα για τον υπολογισμό του όρου $A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \overrightarrow{W}^k$ καλούνται από την μνήμη και χρησιμοποιούνται και οι υπόλοιπες "εικόνες" του πεδίου.

Στη συνέχεια, υπολογίζεται το δεξί μέλος της εξίσωσης (5.29) ή σύντομα από τη μορφή :

$$[DIAG]_{5 \times 5} \Delta \overrightarrow{W}_P^{k+1} = [res]_{5 \times 1} \quad (5.32)$$

ο πίνακας $[DIAG]_{5 \times 5}$ όπου :

$$[DIAG]_{5 \times 5} = \left(\frac{\overrightarrow{A_{cell}}}{\Delta t_{ps}} \cdot I_{5 \times 5} + [diag]_P \right) \quad (5.33)$$

Επόμενο βήμα είναι να αντιστραφεί ο πίνακας $[DIAG]_{5 \times 5}$ και να πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα $[res]_{5 \times 1}$, έτσι υπολογίζονται οι ανανεώσεις των ροικών μεγεθών ολόκληρου το πεδίου.

Για να είναι πιο ολοκληρωμένη η παραπάνω λογική διαδικασία πρέπει να προστεθούν τα ψευδο-χρονικά βήματα και η επίλυση με τη μέθοδο Jacobi που πραγματοποιείται. Έτσι γίνονται τα ακόλουθα βήματα.

1. Αρχικοποίηση όλων των πεδίων με μία αρχική συνθήκη (Θα αναφερθεί στη συνέχεια αυτό το κομμάτι)
2. $t_{ps} = 0$ άρα $k = 0$, αρχή υπολογισμών για ψευδο-χρονικό βήμα $k = 1$. Λύνονται τα N_T πεδία: Επαναλήψεις από $i = 1$ έως $i = N_T$

Επεξήγηση: Να προστεθεί ότι γίνονται επαναλήψεις στον ψευδο-χρόνο και τα αποτελέσματα του τελευταίου ψευδο-χρονικού βήματος κρατούνται ως λύση του πεδίου τη συγκεκριμένη ισαπέχουσα/προκαθορισμένη χρονική στιγμή. Οι ενέργειες στις επαναλήψεις στον ψευδο-χρόνο είναι οι εξής:

- Υπολογίζονται για όλες τις ισαπέχουσες/προκαθορισμένες χρονικές στιγμές το δεξί και το αριστερό μέλος της εξίσωσης (5.29) όπως αναφέρθηκε παραπάνω.
 - Υπολογίζονται οι διορθώσεις των ροικών μεγεθών όλων των "εικόνων" με τη μέθοδο Jacobi, και ανανεώνονται οι λύσεις $\Delta \vec{W}^{k+1}$
3. Γίνεται έλεγχος αν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου για όλες τις ισαπέχουσες "εικόνες" στην περίοδο.
 4. Αν δεν ικανοποιείται, αυξάνεται το ψευδο-χρονικό βήμα $k = k + 1$ και επιστρέφει η διαδικασία στον κύκλο επαναλήψεων
 5. Αν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, η επίλυση σταματά.
 6. Αφού, έχουν βρεθεί οι λύσεις των πεδίων, υπάρχει πλέον η δυνατότητα όπως υποδεικνύει και η θεωρία να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier, έτσι εφαρμόζεται η εξίσωση (5.7):

$$\vec{W} = \frac{1}{N_T} \vec{E} \vec{W}$$

7. Εφαρμόζεται η εξίσωση (5.2) και υπολογίζεται το πεδίο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο
8. Τέλος

Η επίλυση με τη μέθοδο Jacobi που αναφέρεται παραπάνω ακολουθεί την εξής διαδικασία (όπως ακριβώς και στη μέθοδο της Χρονο-προέλασης):

1. Θέτουμε $\Delta \vec{W}^{old} = 0$.
2. $n = 0$
3. Υπολογίζονται τα $\Delta \vec{W}^{new}$ για κάθε κόμβο P από την παρακάτω εξίσωση.

$$\Delta \vec{W}_P^{new} = [DIAG]_{4 \times 4}^{-1} \cdot \left([res]_{4 \times 1} - \sum_{Q \neq P} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q^{old} \right) \quad (5.34)$$

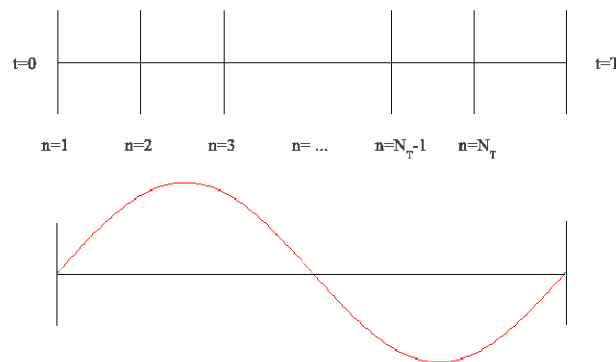
$$4. \Delta \vec{W}^{old} = \Delta \vec{W}^{new}$$

5. Αν $n < n_{Jacobi}$, τότε $n = n + 1$ και επιστροφή στο βήμα 3.

6. Τέλος

5.2.3 Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

- Ως πρώτο, αναφέρεται το θέμα της αρχικοποίησης. Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ασχολείται με έναν αγωγό με μία διαφορά πίεσης στα άκρα του, όπου ρέει ρευστό στο εσωτερικό του. Αλλάζοντας περιοδικά στο χρόνο την πίεση στην έξοδο του αγωγού, το ρευστό τίθεται σε κίνηση. Υπολογίζονται με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών όλα τα ροϊκά μεγέθη. Αφού το φαινόμενο είναι χρονικά περιοδικό (παραδείγματος χάριν αλλάζουμε την πίεση εξόδου με ένα ημίτονο : $P_{out} = P_{st} + 0.2 \cdot P_{st} \cdot \sin(\omega t)$) αρχικοποιείται κάθε μία από τις N_T "εικόνες" του πεδίου ανάλογα με τη θέση της. Πιο παραστατικά παρουσιάζεται το παρακάτω απλό σχήμα:



Σχήμα 5.2: Κάθε "εικόνα" αρχικοποιείται ανάλογα της συνάρτησης διέγερσης στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή που αναφέρεται.

όπως γίνεται φανερό παραπάνω, η πρώτη "εικόνα" ($n = 1$) θα υπολογίσει το πρώτο πεδίο και για αυτό αρχικοποιείται βάζοντας στον τύπο $P_{out} = P_{st} + 0.2 \cdot P_{st} \cdot \sin(\omega t)$ όπου $t = 0$. Για τις υπόλοιπες "εικόνες" ακολουθείται η ίδια τακτική, έτσι η καθεμιά έχει διαφορετική αρχικοποίηση από τις υπόλοιπες και πιθανόν αυτό είναι καλύτερο ως προς τη σύγκλιση τους.

- Δεύτερον, ως κριτήριο σύγκλισης εννοείται ο μηδενισμός του πίνακα $[res]$ (υπόλοιπο residual). Το υπόλοιπο αυτό εκφράζει τη φυσική του προβλήματος που λύνεται και ο μηδενισμός του σημαίνει ότι έχει βρεθεί η λύση που ζητάμε. Με άλλα λόγια έχει συγκλίνει ο κώδικας και έχουν υπολογιστεί τα ροϊκά μεγέθη για κάθε κόμβο του πλέγματος που επαληθεύουν τις εξισώσεις Euler με βάση τις οριακές συνθήκες που έχουν τεθεί.

Όμως, ο κυριολεκτικός "μηδενισμός" του υπολοίπου $[res]$, δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Έτσι, ως μηδενισμός θεωρείται η απόλυτη διαφορά μεταξύ του υπολοίπου και

ενός αριθμού που ορίζεται στον κώδικα και ονομάζεται κριτήριο σύγκλισης. Αυτός ο αριθμός είναι της τάξης του 10^{-20} .

- Τέλος, μία ακόμα παρατήρηση που πρέπει να αναφερθεί είναι μία μέθοδος χρήσης πιο πρόσφατων λύσεων που εφαρμόστηκε στον κώδικα. Αυτό έγινε γιατί έτσι αποφεύγεται η αποθήκευση στη μνήμη του επεξεργαστή κάρτας γραφικών (GPU) περισσότερων πεδίων από όσα χρειάζονται όπως προ-αναφέρθηκε και στην ανάλυση παραπάνω.

Αναλύοντας τη μέθοδο χρησιμοποίησης πιο πρόσφατων λύσεων. Στη διαδικασία επίλυσης, αφού οριστεί το ψευδο-χρονικό βήμα, ξεκινά ένας κύκλος επαναλήψεων ανάμεσα σε όλα τα πεδία (N_T) και υπολογίζονται οι πίνακες $[DIAG]_{5 \times 5}$ και $[res]_{5 \times 1}$ για κάθε ένα από αυτά και έπειτα ανανεώνονται τα ροϊκά τους μεγέθη. Όμως, για να υπο-

λογιστεί ο όρος της Ισορροπίας των Αρμονικών $A_{cell} \omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \vec{W}^k$ χρειάζεται τα \vec{W}

των υπολοίπων πεδίων. Έτσι το πρώτο πεδίο που υπολογίζεται αντλεί τα \vec{W} των υπολοίπων που υπάρχουν στη μνήμη της τελευταίας ψευδο-χρονικής στιγμής και αφού κάνει ολόκληρη τη διαδικασία ανανεώνει τον εαυτό του. Το δεύτερο πεδίο που ακολουθεί όταν θα αντλήσει τα \vec{W} των υπολοίπων πεδίων θα έχει από όλα τα πεδία τα ροϊκά μεγέθη της τελευταίας ψευδο-χρονικής στιγμής εκτός από του πρώτου πεδίου που μόλις ανανεώθηκαν. Αντίστοιχα το τρίτο πεδίο θα έχει από όλα τα πεδία τα \vec{W} της τελευταίας χρονικής στιγμής εκτός από το πρώτο και το δεύτερο πεδίο που έχουν ήδη ανανεωθεί κ.ο.κ., μέχρι που το τελευταίο πεδίο αντλεί από τα υπόλοιπα τα ροϊκά μεγέθη της επόμενης χρονικής στιγμής που τώρα καλείται να υπολογίσει για τον εαυτό του. Πιο παραστατικά αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, όπου \vec{W} τα ροϊκά μεγέθη κάθε ισαπέχουσας "εικόνας".

$$\begin{array}{cccccccc}
 W_1^k & \leftarrow & & W_2^k & W_3^k & W_4^k & \dots & W_{N_T-1}^k & W_{N_T}^k \\
 W_2^k & \leftarrow & W_1^{k+1} & & W_3^k & W_4^k & \dots & W_{N_T-1}^k & W_{N_T}^k \\
 W_3^k & \leftarrow & W_1^{k+1} & W_2^{k+1} & & W_4^k & \dots & W_{N_T-1}^k & W_{N_T}^k \\
 W_4^k & \leftarrow & W_1^{k+1} & W_2^{k+1} & W_3^{k+1} & & \dots & W_{N_T-1}^k & W_{N_T}^k \\
 \vdots & & & & & & & & \\
 W_{N_T}^k & \leftarrow & W_1^{k+1} & W_2^{k+1} & W_3^{k+1} & & \dots & W_{N_T-1}^{k+1} & W_{N_T}^k
 \end{array}$$

Με αυτόν τον τρόπο, πάντα, το τελευταίο πεδίο χρησιμοποιεί τα νέα \vec{W} ενώ το πρώτο, κανένα νέο στοιχείο και αντίστοιχα για τα υπόλοιπα πεδία. Έτσι, μπορεί να θεωρηθεί ότι τα πρώτα πεδία "αδικούνται", σε αντίθεση με τα τελευταία που επωφελούνται. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το ζήτημα προστέθηκε στον κώδικα ένας μετρητής που αντιστρέφει τη σειρά που γίνονται οι επαναλήψεις. Με αυτόν τον τρόπο, τη μία φορά ξεκινά από την "εικόνα" 1 και φτάνει μέχρι την N_T και την επόμενη ξεκινά από την N_T και φτάνει μέχρι την 1 αντίστροφα. Με αυτή την τεχνική "αδικούνται" τα πρώτα πεδία σε ένα ψευδο-χρονικό βήμα και στο επόμενο ψευδο-χρονικό βήμα "αδικούνται" τα τελευταία κι αυτή η εναλλαγή συνεχίζει συνέχεια όσο συνεχίζεται η επίλυση.

Κατά μέσω όρο, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι όλα τα πεδία αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο χωρίς να δίνονται σε κάποιο συνέχεια ανανεωμένες λύσεις ή το αντίθετο.

Κεφάλαιο 6

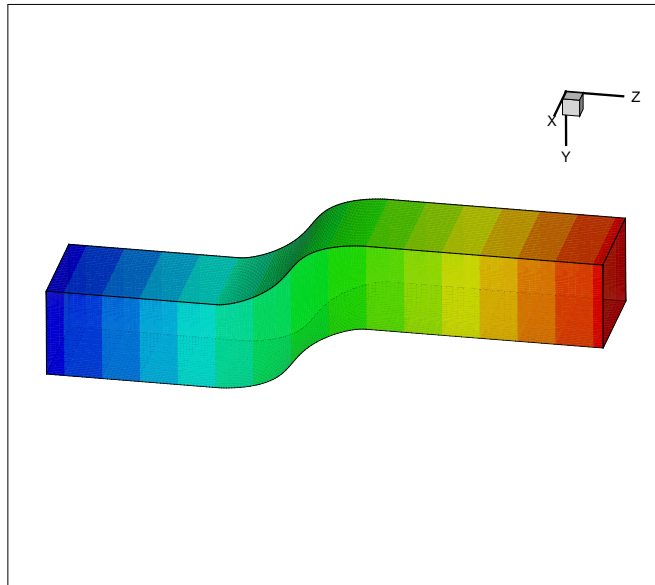
Μελέτη Περιπτώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν στη διπλωματική αυτή εργασία, δηλαδή τα είδη των αγωγών που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι διάφορες περιοδικές συναρτήσεις που εφαρμόστηκαν και διήγειραν περιοδικά τη ροή του ρευστού στο εσωτερικό του εκάστοτε αγωγού. Ακόμα, θα εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση, η μέθοδος της Χρονο-προέλασης, με της οποίας τα αποτελέσματα συγκρίνονται οι λύσεις που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών.

6.1 Είδη Αγωγών που εξετάστηκαν

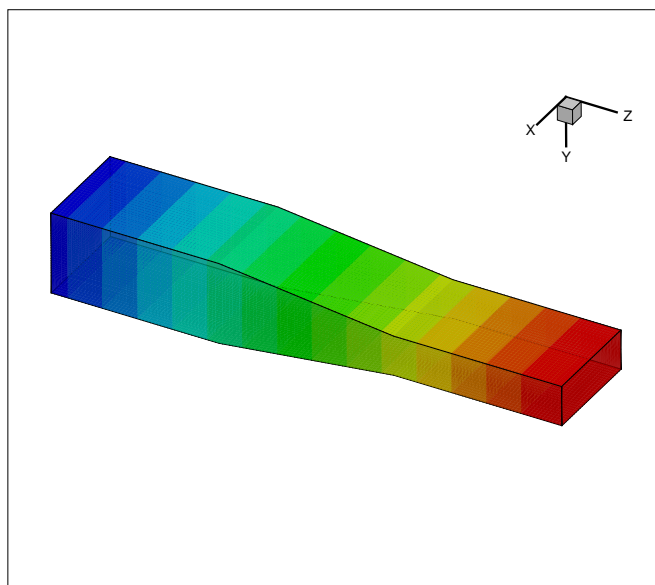
Στη διπλωματική αυτή εργασία εξετάστηκαν δύο διαφορετικοί τύποι αγωγών στο εσωτερικό των οποίων κινείται το ρευστό. Ως πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ένας αγωγός σχήματος S τετραγωνικής διατομής. Ο εν λόγω αγωγός παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1.

Το πλέγμα είναι τριδιάστατο, δομημένο και αποτελείται από εξαεδρικά στοιχεία. Για τη διακριτοποίηση του πεδίου ροής χρησιμοποιείται πλέγμα 321.630 κόμβων. Η είσοδος του ρευστού είναι από τη μία πλευρά του αγωγού και η έξοδος του από την άλλη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το φαινόμενο στο λαιμό του αγωγού, όπου το ρευστό αλλάζει διεύθυνση και παρατηρείται αύξηση της πίεσης στα εξωτερικά τοιχώματα του αγωγού (εξωτερικά όπως αλλάζει διεύθυνση το ρευστό), ενώ στα εσωτερικά (της καμπύλης του αγωγού) παρατηρείται υποπίεση.



Σχήμα 6.1: Αγωγός σχήματος S τετραγωνικής διατομής, το χρώμα αλλάζει κατά μήκος του αγωγού χωρίς να υποδηλώνει κάτι.

Ως δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ένας συγκλίνων ευθύς αγωγός. Πιο αναλυτικά, έγινε μετατροπή του πλέγματος του παραπάνω αγωγού σχήματος S τετραγωνικής διατομής, ώστε να είναι ευθύς και έπειτα δημιουργήθηκε στη μέση του ένα συγκλίνων κομμάτι που μειώνει το εμβαδό της διατομής στο μισό. Διαμορφώθηκε ο δεύτερος αγωγός όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.2. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πώς συμπεριφέρεται το ρευστό στο συγκλίνων τμήμα καθώς εκεί αυξάνεται η πίεση και αφού η διατομή είναι μικρότερη αυξάνεται και η ταχύτητα του ρευστού. Στη διπλωματική αυτή εργασία εξετάζεται πώς οι δύο μέθοδοι (μέθοδος Χρονο-προέλασης και μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών) υπολογίζουν τα ζητούμενα μεγέθη και απεικονίζουν το φαινόμενο.



Σχήμα 6.2: Συγκλίνων Αγωγός τετραγωνικής διατομής, το χρώμα αλλάζει κατά μήκος του αγωγού χωρίς να υποδηλώνει κάτι.

Να παρατηρηθεί εδώ, ότι οι δύο αγωγοί είναι όμοιοι, δηλαδή είναι ίδιου μεγέθους, έχουν το ίδιο μήκος 7.36 μέτρα (άξονας z), τετραγωνική διατομή εισόδου 1,5 μέτρα (άξονας x) και 1,18 μέτρα (άξονας y). Το μόνο που αλλάζει είναι η διαμόρφωση του κάθε ενός στο μέσο του. Οι δύο αγωγοί έχουν τον ίδιο αριθμό κόμβων όπως αναφέρθηκε (321.630 κόμβοι) και μάλιστα με τον ίδιο τρόπο τοποθετημένους, με μόνη διαφορά την κατανομή τους στην εκάστοτε διατομή.

6.2 Περιοδικό Φαινόμενο και Συναρτήσεις Διέγερσης

Η διπλωματική αυτή εργασία εξετάζει τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών, η οποία απαιτεί το φαινόμενο που μελετάται να είναι περιοδικό, συνεπώς η συνάρτηση διέγερσης να είναι περιοδική. Έτσι, για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στους προαναφερθέντες αγωγούς επιλέχθηκαν περιοδικές συναρτήσεις.

Αναλυτικά, στον αγωγό (είτε σχήματος S είτε συγκλίνοντα - ίδιες περιπτώσεις συναρτήσεων διέγερσης εφαρμόστηκαν και στους δύο αγωγούς) το ρευστό είναι συμπιεστό και κινείται με υποηχητική ταχύτητα στο εσωτερικό του. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3, από την ανάλυση του Ιακωβιανού μητρώου απαιτούνται τέσσερα μεγέθη στην είσοδο του αγωγού και ένα στην έξοδο του, καθώς τέσσερις ιδιοτιμές είναι θετικές και μία είναι αρνητική. Τα τέσσερα μεγέθη που επιλέγονται στην είσοδο του αγωγού είναι η πυκνότητα και η ταχύτητα (τρεις συνιστώσες της ταχύτητας στους τρεις άξονες του καρτεσιανού επιπέδου), ενώ το ένα που απαιτείται στη έξοδο επιλέγεται να είναι η πίεση. Επιλέγεται ακόμα, να αλλάζει η πίεση εξόδου περιοδικά και να διεγείρει το ρευστό στο εσωτερικό του αγωγού που μελετάται.

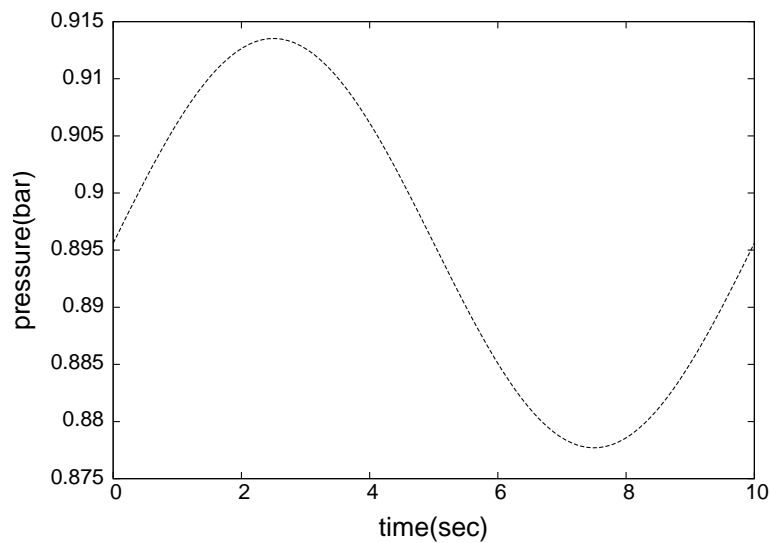
Μπορεί να προστεθεί εδώ, ότι αλλάζοντας την πίεση στην έξοδο ενός αγωγού, δημιουργείται διαφορά πίεσης στα δύο άκρα του, με συνέπεια να κινείται το ρευστό στο εσωτερικό του. Στην ουσία αυτό το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στις περιπτώσεις που εξετάζει αυτή η διπλωματική εργασία. Η πίεση εξόδου αλλάζει περιοδικά γύρω από την τιμή $P_{out} = 0.89561\text{bar}$ και η περίοδος του φαινομένου είναι σε όλες τις περιπτώσεις $T = 10\text{sec}$.

Πιο συγκεκριμένα, για καθέναν από τους δύο αγωγούς που αναφέρθηκαν εξετάζονται τρεις περιπτώσεις συναρτήσεων διέγερσης. Στην πρώτη και πιο απλή περίπτωση, η πίεση στην έξοδο του αγωγού αλλάζει ημιτονοειδώς. Οι άλλες δύο περιπτώσεις είναι πολυωνυμικές, δηλαδή η πίεση εξόδου αλλάζει ακολουθώντας μία πολυωνυμική συνάρτηση. Παρουσιάζονται παρακάτω οι συναρτήσεις αυτές καθώς και σχήματά τους.

1. Η πρώτη συνάρτηση διέγερσης είναι ένα ημίτονο όπως δείχνει η (6.1) με μέγιστο $1.02P_{out}$ δηλαδή η πίεση εξόδου προσαυξημένη κατά 2%

$$P_{out} = 0.89561 + (0.89561 \cdot 0.02)\sin(\omega t) \quad (6.1)$$

Ορίζεται $\omega = \frac{2\pi}{T}$ με $\pi = 3.14159$, T η περίοδος του φαινομένου και t ο χρόνος. Ακολουθεί σχήμα 6.3 της συνάρτησης (6.1).

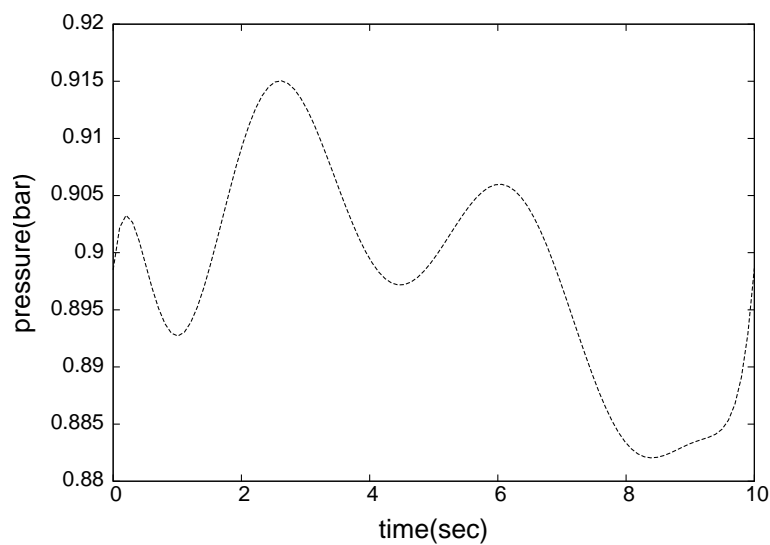


Σχήμα 6.3: Ημιτονοειδής αλλαγή πίεσης εξόδου αγωγού, σχέση (6.1).

2. Η δεύτερη συνάρτηση διέγερσης που εξετάστηκε είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση ενάτου βαθμού, η (6.2).

$$P_{out} = 0.009346x^9 - 0.004272x^8 - 0.06404x^7 + 0.02988x^6 + 0.1497x^5 - 0.06269x^4 - 0.1312x^3 + 0.03455x^2 + 0.02292x + 0.8995 \quad (6.2)$$

Στην παραπάνω συνάρτηση όπου $x = \frac{t-5.006}{2.944}$ και ακόμα όπου t ο χρόνος μέσα στη περίοδο. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης (6.2) παρουσιάζεται στο σχήμα 6.4

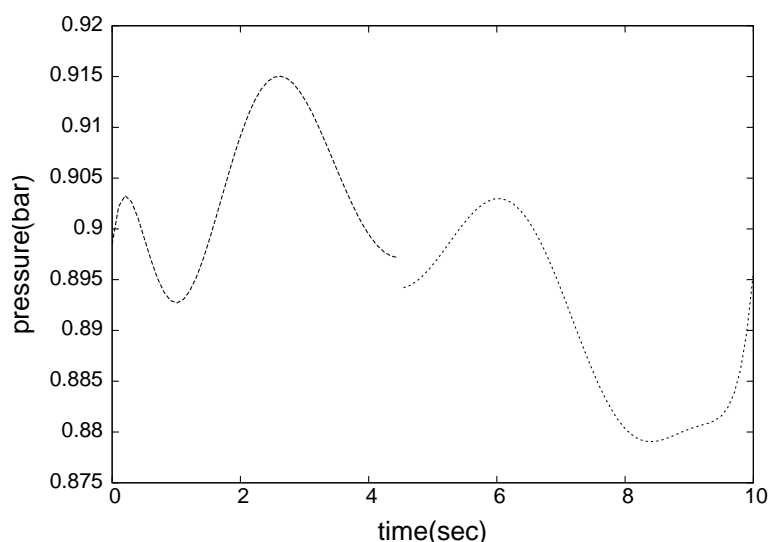


Σχήμα 6.4: Πολυωνυμική αλλαγή πίεσης εξόδου αγωγού, σχέση (6.2).

3. Τελευταία συνάρτηση διέγερσης επιλέχθηκε μία όχι συνεχής συνάρτηση. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκε η προηγούμενη συνάρτηση (6.2), αλλάζοντας το σταθερό όρο στα 4,5sec δημιουργείται μία ασυνέχεια στη συνάρτηση (ένα "σπάσιμο"). Η γραφική παράσταση 6.5 απεικονίζει τη συνάρτηση (6.3).

$$P_{out} = \begin{cases} 0.009346x^9 - 0.004272x^8 - 0.06404x^7 + 0.02988x^6 + 0.1497x^5 \\ - 0.06269x^4 - 0.1312x^3 + 0.03455x^2 + 0.02292x + 0.8995 & , \quad t < 0.45T \\ 0.009346x^9 - 0.004272x^8 - 0.06404x^7 + 0.02988x^6 + 0.1497x^5 \\ - 0.06269x^4 - 0.1312x^3 + 0.03455x^2 + 0.02292x + 0.8965 & , \quad t > 0.45T \end{cases} \quad (6.3)$$

Κατ' αντιστοιχία με τη δεύτερη συνάρτηση (6.2), είναι $x = \frac{t-5.006}{2.944}$ και όπου t ο χρόνος μέσα στη περίοδο. Η γραφική παράσταση της τρίτης συνάρτησης παρουσιάζεται στο σχήμα 6.5.



Σχήμα 6.5: Μη Συνεχής Πολυωνυμική αλλαγή πίεσης εξόδου αγωγού, σχέση (6.3).

Επιλέχθηκε να εξεταστεί μία συνάρτηση διέγερσης με ασυνέχεια καθώς, στην πράξη, είναι πολύ πιθανό, παραδείγματος χάριν, κάποιο κρουστικό φαινόμενο να δημιουργεί διαταραχές στην πίεση εξόδου. Σε μία μηχανολογική κατασκευή (αγωγός, αεροτομή ή οποιασδήποτε κατηγορίας κατασκευή που μελετάται σε περιοδικές διεγέρσεις), ακόμα και να έχει σχεδιαστεί για ομαλή αλλαγή πίεσης εξόδου, μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί απότομα η πίεση και συνεπώς για να μοντελοποιηθεί αυτή η διέγερση απαιτείται η ασυνέχεια στη συνάρτηση.

Πρέπει να προστεθεί εδώ ότι η συναρτήσεις διέγερσης (6.2) και (6.3) δεν είναι περιοδικές, δηλαδή τα πολυώνυμα για τιμές μικρότερες του μηδενός και μεγαλύτερες του 10 δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά. Επιλέχθηκαν πολυωνυμικές αυτές οι συναρτήσεις καθώς μία τυχαία διέγερση σε μία μηχανολογική κατασκευή δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί με μαθηματικά

περιοδικές συναρτήσεις. Αντίθετα είναι πολύ εύκολο, να προσεγγιστεί με ένα πολυώνυμο. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών απαιτεί περιοδικές συναρτήσεις, για ακριβή προσέγγιση της λύσης. Όπως θα παρατηρηθεί και στα σχήματα των αποτελεσμάτων σε επόμενο κεφάλαιο, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών αντιδρά διαφορετικά στις διάφορες ασυνέχειες τοπικά, είτε εσωτερικά της περιόδου είτε στα όρια αυτής. Αν το σημείο ασυνέχειας είναι εσωτερικό σημείο της περιόδου, τότε η προσέγγιση που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών περνά από το κέντρο αυτής, δηλαδή θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η μέθοδος αντιδρά ομαλά σε μία ασυνέχεια στο εσωτερικό της περιόδου χωρίς να επηρεάζονται αρνητικά τα αποτελέσματα που δίνει. Στην περίπτωση που το σημείο ασυνέχειας είναι όριο της περιόδου που μελετάται, δηλαδή στην αρχή και στο τέλος της, τότε παρατηρούνται ταλαντώσεις στην προσέγγιση της λύσης. Οι ταλαντώσεις είναι τοπικές στο σημείο ασυνέχειας και μπορεί να θεωρηθεί ότι η λύση εκεί δεν είναι ακριβής στο σημείο εκείνο.

6.3 Επιλογή κόμβων για τους οποίους παρουσιάζονται τα αποτελέσματα

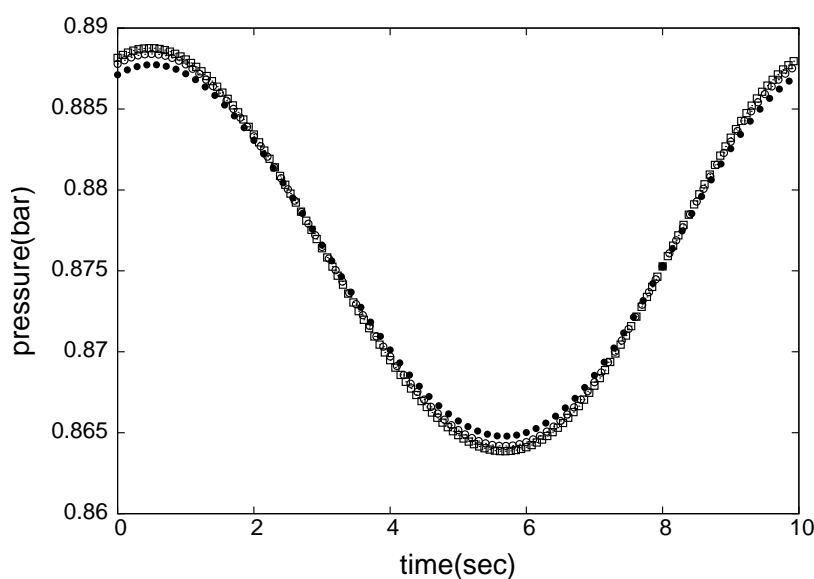
Στην εργασία αυτή εξετάστηκαν οι παραπάνω περιπτώσεις συναρτήσεων διέγερσης για κάθε έναν από τους δύο αγωγούς που αναφέρθηκαν. Τα αποτελέσματα απεικονίζουν τα ζητούμενα μεγέθη $[p, u, v, w, E]$ κάθε κόμβου του πλέγματος σε κάθε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο. Λέγοντας "κάθε χρονική στιγμή" εννοείται πως στον κώδικα ορίζεται αριθμός χρονικών βημάτων και υπολογίζονται εκεί τα μεγέθη αυτά, παραδείγματος χάριν 100 χρονικά βήματα αντιστοιχούν σε 100 λύσεις καθεμιά σε διαφορετική χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο.

Για να μπορέσουν να συγκριθούν οι δύο μέθοδοι πρέπει να συγκριθούν τα αποτελέσματα που υπολογίζει η καθεμιά, έτσι ώστε να γίνει φανερό κατά πόσο υπολογίζουν τις ίδιες λύσεις. Επιλέχθηκε ως μέγεθος προς σύγκριση και απεικόνιση σε σχήματα η στατική πίεση, καθώς αυτή αλλάζει περιοδικά και αυτή έχει ενδιαφέρον να παρουσιαστεί για διάφορα σημεία του αγωγού για όλη την περίοδο που εξελίσσεται το φαινόμενο. Ακόμα επιλέχθηκαν συγκεκριμένα σημεία (κόμβοι του πλέγματος) των οποίων η πίεση θα απεικονιστεί σε σχήματα. Αναλυτικά, αφού μελετώνται αγωγοί, επιλέγεται ο κεντρικός κόμβος της διατομής του αγωγού, για να απεικονιστεί η πίεση του σε κάθε συνάρτηση διέγερσης. Ακόμα επιλέγονται 11 διατομές κατά το μήκος του αγωγού με πρώτη την είσοδο του αγωγού και ενδέκατη την έξοδο του. Οι 11 αυτές διατομές είναι σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Το πλέγμα αποτελείται από 151 διατομές συνολικά (30 κόμβοι στον άξονα x επί 71 κόμβους στον άξονα y η πρώτη διατομή στην είσοδο του αγωγού, επί 151 τέτοιες διατομές σχηματίζουν ολόκληρο τον αγωγό). Έτσι το πρώτο σημείο είναι το κέντρο της πρώτης διατομής, το δεύτερο σημείο είναι το κέντρο της δέκατης έκτης διατομής κ.ο.κ μέχρι το ενδέκατο σημείο που είναι το κέντρο στην διατομή εξόδου του αγωγού. Ο λόγος που επιλέχθηκαν σημεία σε διατομές του εκάστοτε αγωγού, είναι γιατί η σύγκριση όλων των κόμβων είναι αδύνατη καθώς και η παρακολούθηση συνολικά των ροικών μεγεθών ενός αγωγού δεν επιφέρει σαφή εικόνα για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών που εδώ εξετάζεται.

6.4 Σύγκλιση μεθόδου Χρονο-προέλασης

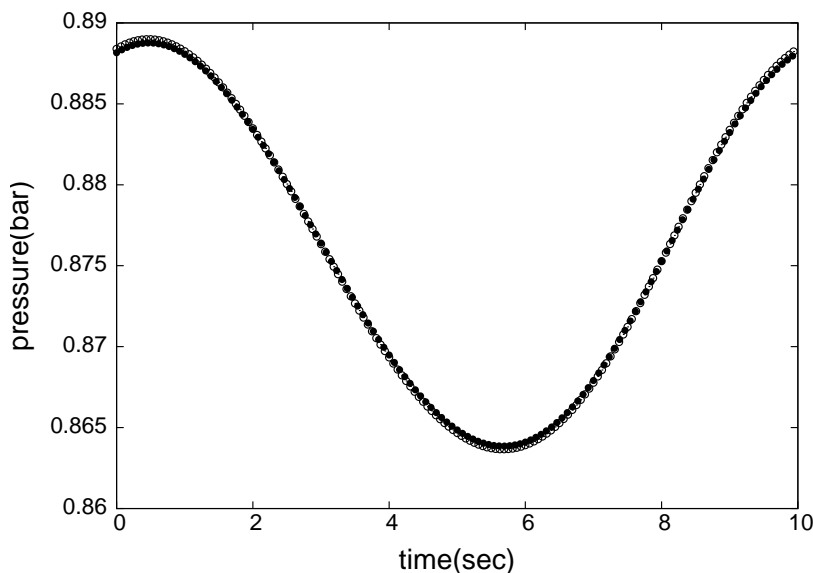
Γίνεται ένας έλεγχος ώστε να βρεθεί πότε έχουν συγκλίνει σε ικανοποιητικό επίπεδο τα αποτελέσματα που παράγει ο κώδικας της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Αυτό γίνεται καθώς με αυτά θα συγκριθούν τα αποτελέσματα της Ισορροπίας των Αρμονικών. Στον κώδικα δίνεται επιλογή πόσα πραγματικά χρονικά βήματα θα γίνουν και το πλήθος αυτών επηρεάζει τα αποτελέσματα που υπολογίζονται. Έτσι θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του κώδικα που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης ώστε να επιλεγεί εκείνος ο αριθμός χρονικών βημάτων που έχει την καλύτερη σύγκλιση αποτελεσμάτων.

Πρώτα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για τον αγωγό σχήματος S αν η πίεση εξόδου αλλάζει σύμφωνα με την πρώτη συνάρτηση (6.1), δηλαδή το ημίτονο. Επιλέγεται το σημείο στο οποίο θα αναφέρονται τα σχήματα, να βρίσκεται πάνω στο "λαιμό" του αγωγού, δηλαδή στη μέση του κατά τον z άξονα. Επιλέγεται πρώτα να τρέξει ο κώδικας κάνοντας 70 χρονικά βήματα στην περίοδο, δηλαδή χωρίζει τη περίοδο ($T = 10\text{sec}$) σε 70 χρονικές στιγμές. Έπειτα, τρέχει, χωρίζοντας την περίοδο σε 100 χρονικές στιγμές και σε 130 αντίστοιχα. Για το σημείο που βρίσκεται στην έκτη διατομή και για ημιτονοειδή πίεση εξόδου, υπολογίζεται το παρακάτω σχήμα (6.6) που απεικονίζει και τις 3 περιπτώσεις χρονικών βημάτων.



Σχήμα 6.6: Πίεση του κόμβου (κέντρο της διατομής) στον αγωγό S - συνάρτηση διέγερσης (6.1) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 70 (μαύροι κύκλοι), 100 (άδειοι κύκλοι) και 130 (τετράγωνα) χρονικά βήματα στην περίοδο.

Το σχήμα (6.7) παρουσιάζει την πίεση του βου κόμβου (κέντρο 6ης διατομής) στον αγωγό S, για 130 και 160 χρονικά βήματα στην περίοδο, συμπληρωματικά του σχήματος (6.6). Παρατηρείται ότι, όσο αυξάνει ο αριθμός των χρονικών βημάτων που επιλέγεται, τα αποτελέσματα τείνουν να είναι ανεξάρτητα του πλέγματος. Έτσι, δεν έχουν παρά ελάχιστη διαφορά μεταξύ τους.

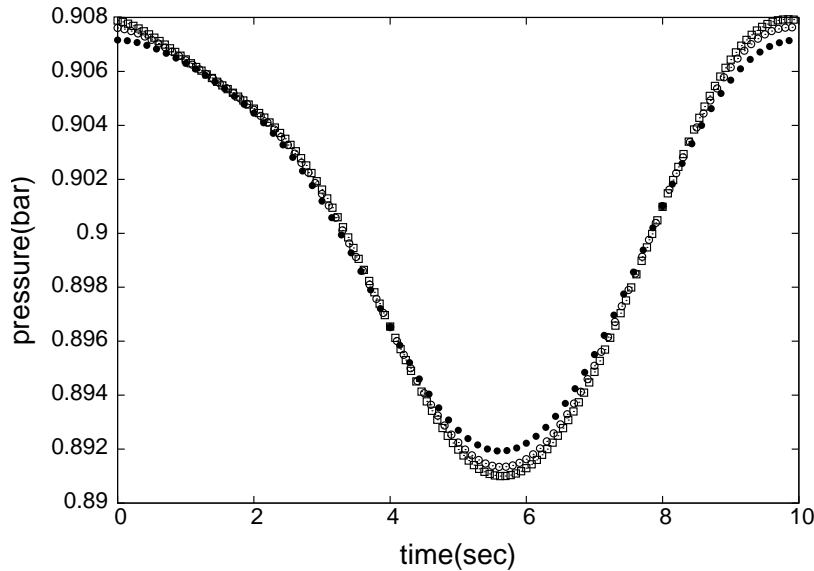


Σχήμα 6.7: Πίεση βου κόμβου (κέντρο 6ης διατομής) στον αγωγό S - συνάρτηση διέγερσης (6.1) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 100 (μαύροι κύκλοι) και 130 (άδειοι κύκλοι) χρονικά βήματα στην περίοδο.

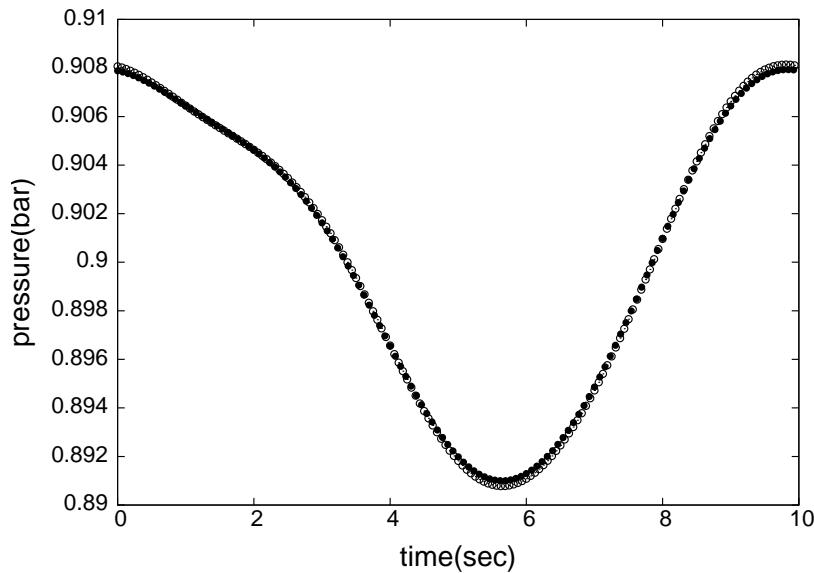
Επομένως, είναι ασφαλές να θεωρηθεί ως αποδεκτή η λύση των 130 χρονικών βημάτων και με αυτή να συγκριθούν τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών.

σχήματα και στα άλλα κεντρικά σημεία στις υπόλοιπες 10 διατομές για 70 χρονικά βήματα, 100 χρονικά βήματα, 130 και 160 χρονικά βήματα στη περίοδο αντίστοιχα, έχουν ανάλογες διαφορές μεταξύ τους και δεν παρουσιάζονται αναλυτικότερα.

Παρατίθενται εδώ τα αντίστοιχα σχήματα για τη δεύτερη συνάρτηση που είναι πολυωνυμική για 70-100-130 χρονικά βήματα στην περίοδο και 130-160 όπως φαίνεται στα σχήματα (6.8) και (6.9) αντίστοιχα. Τα σχήματα είναι για το 7ο σημείο που έχει επιλεγεί, δηλαδή το κέντρο της 7ης διατομής στο πλέγμα του αγωγού S.



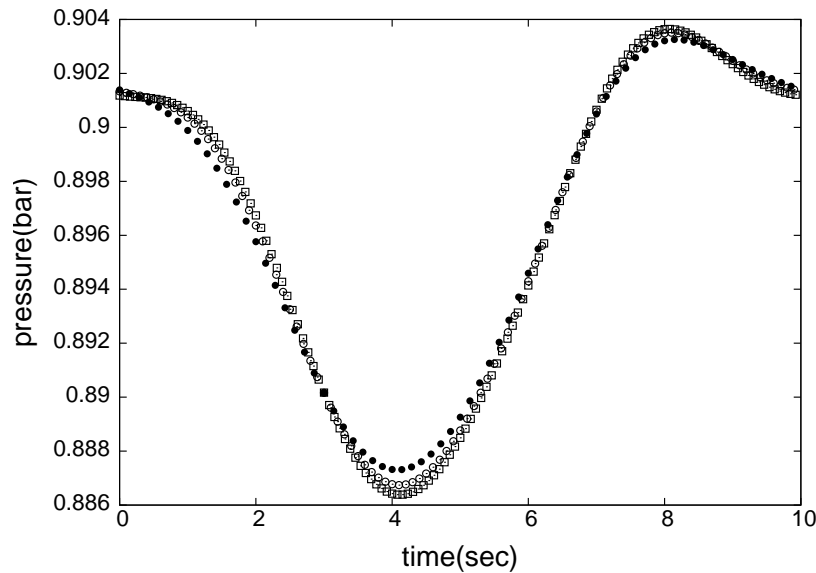
Σχήμα 6.8: Πίεση 7ου κόμβου (κέντρο 7ης διατομής) στον αγωγό S - συνάρτηση διέγερσης (6.2) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 70 (μαύροι κύκλοι), 100 (άδειοι κύκλοι) και 130 (τετράγωνα) χρονικά βήματα στην περίοδο.



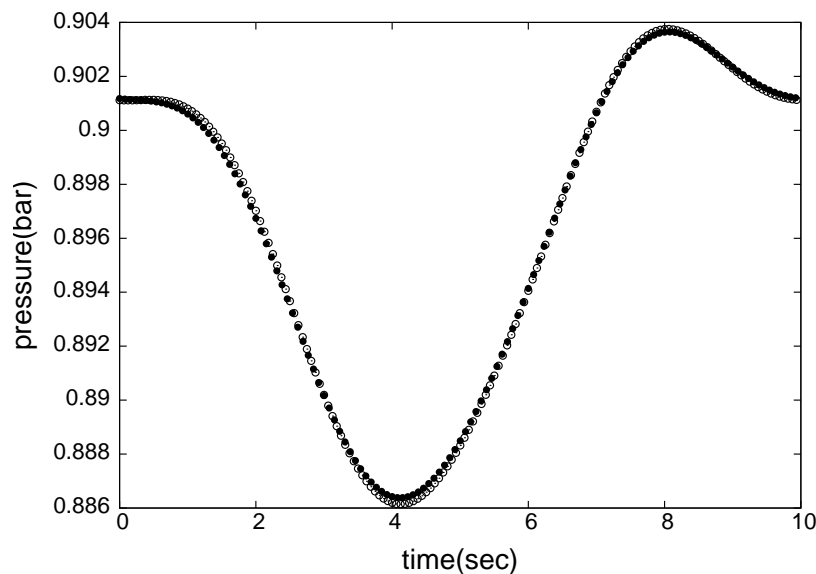
Σχήμα 6.9: Πίεση 7ου κόμβου (κέντρο 7ης διατομής) στον αγωγό S - συνάρτηση διέγερσης (6.2) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 100 (μαύροι κύκλοι) και 130 (άδειοι κύκλοι) χρονικά βήματα στην περίοδο.

Συμπεραίνεται από τα σχήματα ότι, και στην περίπτωση της δεύτερης συνάρτησης, η λύση με τα 130 χρονικά βήματα στην περίοδο δεν διαφέρει αρκετά από αυτή με τα 160 χρονικά βήματα. Επομένως, και εδώ η σύγκριση θα γίνει με αυτήν τη λύση.

Τέλος, για τον αγωγό σχήματος S εξετάζουμε και την τρίτη συνάρτηση διέγερσης (6.3). Επιλέγεται σημείο εξέτασης το κέντρο της 8ης διατομής. Παρουσιάζονται τα σχήματα (6.10) και (6.11), για 70-100-130 χρονικά βήματα στην περίοδο και στη συνέχεια για 130-160 χρονικά βήματα αντίστοιχα.



Σχήμα 6.10: Πίεση δού κόμβου (κέντρο 8ης διατομής) στον αγωγό S - συνάρτηση διέγερσης (6.3) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 70 (μαύροι κύκλοι), 100 (άδειοι κύκλοι) και 130 (τετράγωνα) χρονικά βήματα στην περίοδο.

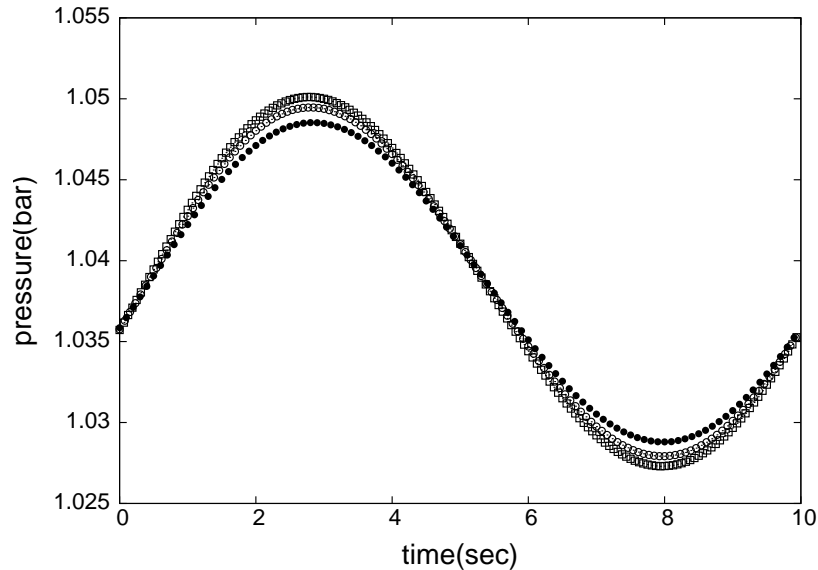


Σχήμα 6.11: Πίεση δού κόμβου (κέντρο 8ης διατομής) στον αγωγό S - συνάρτηση διέγερσης (6.3) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 100 (μαύροι κύκλοι) και 130 (άδειοι κύκλοι) χρονικά βήματα στην περίοδο.

Το συμπέρασμα παραμένει το ίδιο και εδώ, όπου η λύση των 130 χρονικών βημάτων στην περίοδο είναι ικανοποιητική και με αυτή θα συγκριθούν τα αποτελέσματα της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών.

Αντίστοιχος έλεγχος έχει γίνει και για τον συγκλίνοντα αγωγό ώστε να διαπιστωθεί από ποιο σημείο και μετά τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν αρκετά.

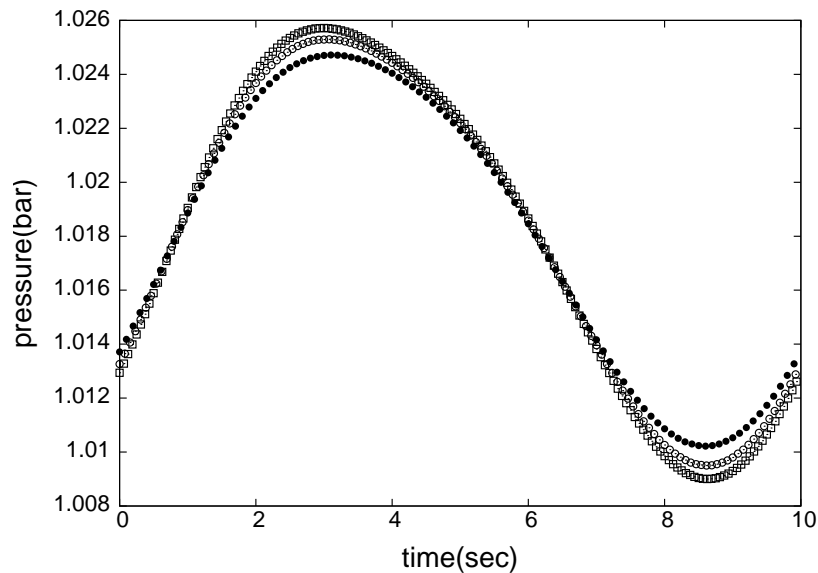
Παρατίθεται ένα σχήμα (6.12) που απεικονίζει τη μεταβολή της πίεσης του 4ου σημείου (δηλαδή του κέντρου της 4ης διατομής του συγκλίνοντα αγωγού) στη διάρκεια της περιόδου ($T = 10\text{sec}$) για χρονικά βήματα 100-130 και 160 αντίστοιχα, με συνάρτηση διέγερσης την (6.1).



Σχήμα 6.12: Πίεση 4ου κόμβου (κέντρο 4ης διατομής) στον συγκλίνοντα αγωγό - συνάρτηση διέγερσης (6.1) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 100 (μαύροι κύκλοι), 130 (άδειοι κύκλοι) και 160 (τετράγωνα) χρονικά βήματα στην περίοδο.

Παρατηρείται μεγάλη διαφορά από τα 100 χρονικά βήματα στα 160 χρονικά βήματα στη περίοδο αντίστοιχα. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η λύση των 160 χρονικών βημάτων στη περίοδο προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη λύση και με αυτή θα συγκριθούν τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών.

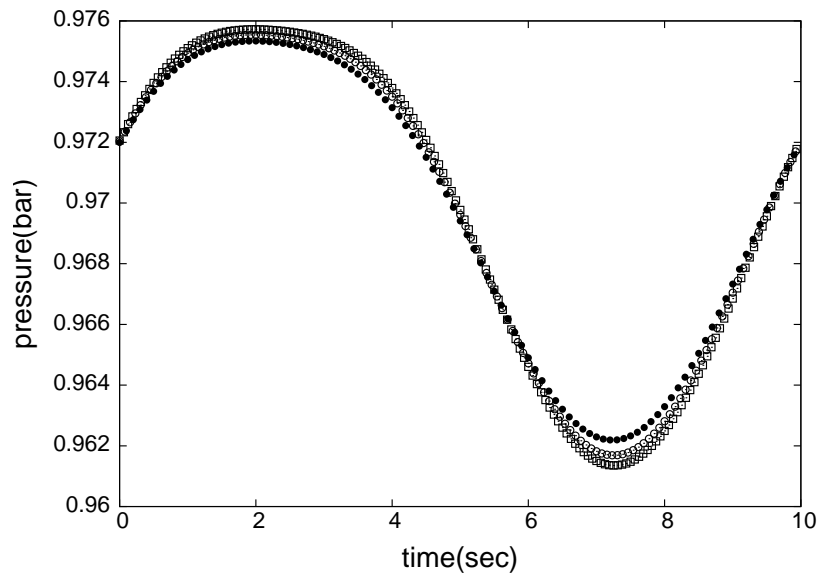
Ελέγχεται η σύγκλιση της μεθόδου και για τη δεύτερη συνάρτηση διέγερσης (6.2). Επιλέγεται το κέντρο της 5ης διατομή του αγωγού και παρουσιάζεται η μεταβολή της πίεσής του, συναρτήσει του χρόνου. Το σχήμα (6.13) απεικονίζει τις λύσεις για 100-130 και 160 χρονικά βήματα στην περίοδο αντίστοιχα, με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης.



Σχήμα 6.13: Πίεση 5ου κόμβου (κέντρο 5ης διατομής) στον συγκλίνοντα αγωγό - συνάρτηση διέγερσης (6.2) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 100 (μαύροι κύκλοι), 130 (άδειοι κύκλοι) και 160 (τετράγωνα) χρονικά βήματα στην περίοδο.

Η λύση που παρέχουν τα 160 χρονικά βήματα στην περίοδο θεωρείται ικανοποιητική, τα αποτελέσματα της Ισορροπίας των Αρμονικών θα συγκριθούν με αυτήν τη λύση.

Τέλος, γίνεται έλεγχος στο επίπεδο της σύγκλισης για τον συγκλίνοντα αγωγό και στην τρίτη συνάρτηση διέγερσης που εξετάζει αυτή η διπλωματική εργασία (6.3). Επιλέγεται το κέντρο της 6ης διατομής του πλέγματος του αγωγού. Το σχήμα (6.14) που ακολουθεί απεικονίζει την μεταβολή της πίεσης στην περίοδο, για 100-130 και 160 χρονικά βήματα αντίστοιχα, με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης.



Σχήμα 6.14: Πίεση του κόμβου (κέντρο 6ης διατομής) στον συγκλίνοντα αγωγό - συνάρτηση διέγερσης (6.3) - Μέθοδος Χρονο-προέλασης με 100 (μαύροι κύκλοι), 130 (άδειοι κύκλοι) και 160 (τετράγωνα) χρονικά βήματα στην περίοδο.

Η σύγκλιση της λύσης των 160 χρονικών βημάτων στην περίοδο είναι ικανοποιητική. Τα αποτελέσματα που θα δώσει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, θα συγκριθούν με αυτά της μεθόδου της Χρονο-προέλασης για 160 χρονικά βήματα στην περίοδο.

Κεφάλαιο 7

Παρουσίαση και Σύγκριση

Αποτελεσμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει παρουσίαση των αποτελεσμάτων που δίνουν οι δύο μέθοδοι, Ισορροπίας των Αρμονικών και Χρονο-προέλασης. Συγκεκριμένα θα παρουσιαστεί πρώτα ο αγωγός σχήματος S συγκρίνοντας για διάφορο αριθμό αρμονικών τα αποτελέσματα που δίνει με αυτά της μεθόδου της Χρονο-προέλασης και για τις τρεις περιπτώσεις συναρτήσεων διέγερσης. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί με τον ίδιο τρόπο ο συγκλίνων αγωγός με τα αποτελέσματα που δίνει.

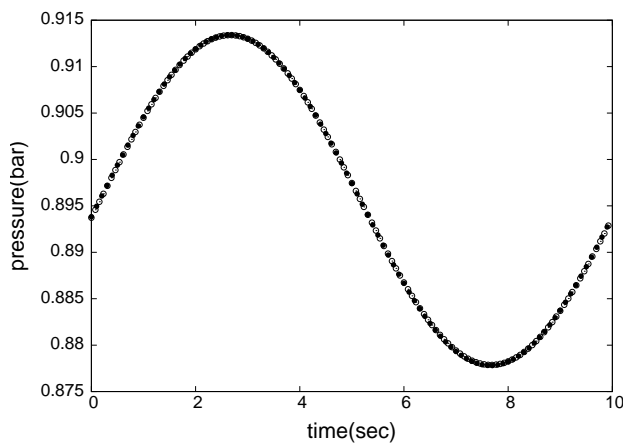
Τα αποτελέσματα είναι σχήματα πίεσης ενός σημείου σε κάποια διατομή του αγωγού. Για καλύτερη και "πιο σφαιρική" επίβλεψη επιλέγονται οι διατομές: 10 που είναι η έξοδος του αγωγού, 7 που βρίσκεται λίγο πριν το μέσο του αγωγού (πάνω στον "λαιμό" ή στο συγκλίνον τμήμα ανάλογα την περίπτωση), 5 το μέσο του αγωγού (και αυτό το σημείο είναι στον "λαιμό" ή στο συγκλίνον τμήμα ανάλογα με την περίπτωση) και 3 μόλις τελειώνει ο "λαιμός" ή το συγκλίνον τμήμα του αγωγού, ανάλογα την περίπτωση.

7.1 Περίπτωση 1: Αγωγός σχήματος S

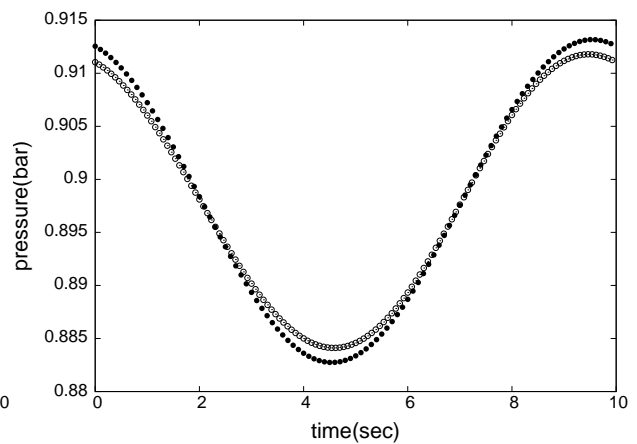
Για τον αγωγό σχήματος S παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων. Τα αποτελέσματα είναι χωρισμένα ανάλογα τη συνάρτηση διέγερσης κάθε φορά. Παρατηρείται ότι μικρός αριθμός αρμονικών δεν επαρκεί για τη σωστή προσέγγιση των αποτελεσμάτων (γίνεται μία όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση), όσο αυξάνονται οι αρμονικές που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση του φαινομένου η ακρίβεια αυξάνεται. Ο αριθμός των αρμονικών που απαιτούνται εξαρτάται συνήθως από την πολυπλοκότητα της συνάρτησης διέγερσης και την επιθυμητή ακρίβεια. Αν η συνάρτηση διέγερσης μπορεί να προσεγγιστεί, παραδείγματος χάριν, με δύο αρμονικές, τότε για ολόκληρο το φαινόμενο απαιτούνται τουλάχιστον δύο αρμονικές. Πολλές φορές, υπάρχει περίπτωση για να συγκλίνουν επαρκώς όλες οι μεταβλητές της ροής, να απαιτούνται παραπάνω αρμονικές από όσες χρειάζεται η συνάρτηση διέγερσης, για το λόγο αυτό αναφέρεται "τουλάχιστον όσες χρειάζεται η συνάρτηση διέγερσης". Γενικότερα, ο αριθμός των αρμονικών εξαρτάται κατά μεγάλο βαθμό από το φαινόμενο που πρέπει να προσεγγιστεί. Όπως γίνεται φανερό και από τα σχήματα που ακολουθούν, στον συγκλίνοντα αγωγό απαιτούνται περισσότερες αρμονικές για τον επαρκή προσδιορισμό των αποτελεσμάτων.

7.1.1 Ημιτονοειδής Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου

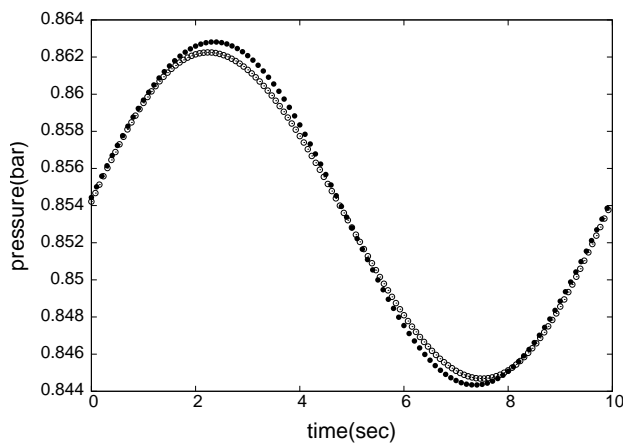
Τα σχήματα 7.2, 7.4, 7.6 και 7.8 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα για την ημιτονοειδή συνάρτηση διέγερσης (6.1) της πίεσης εξόδου του αγωγού σχήματος S, με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση μίας, δύο, τριών και τεσσάρων αρμονικών αντίστοιχα μαζί με τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης με 130 χρονικά βήματα στην περίοδο.



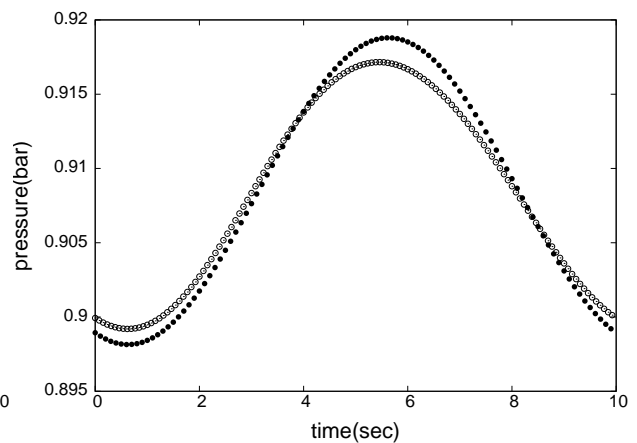
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

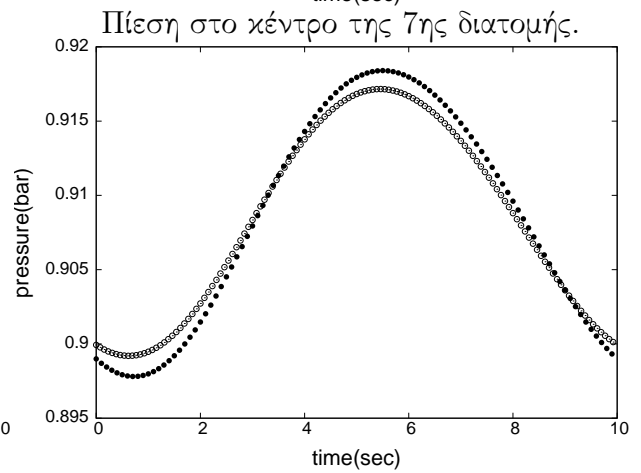
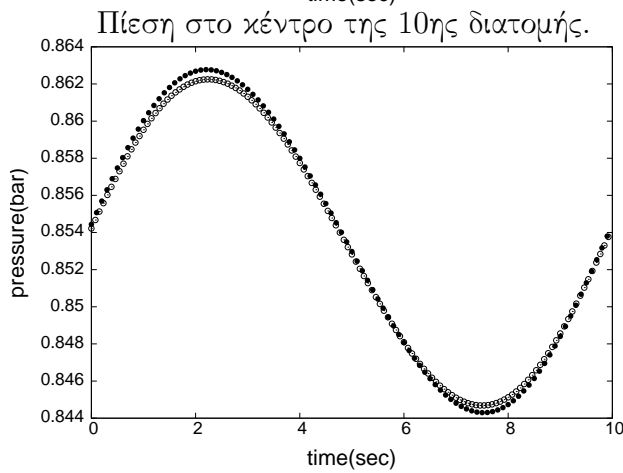
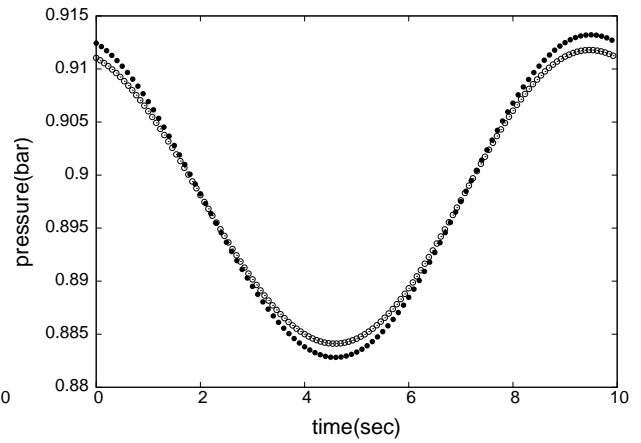
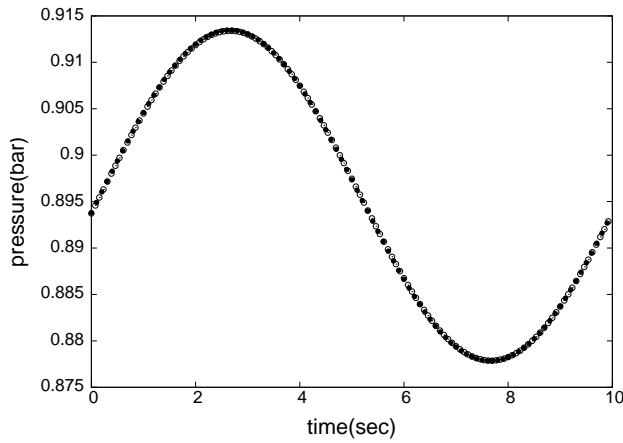


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

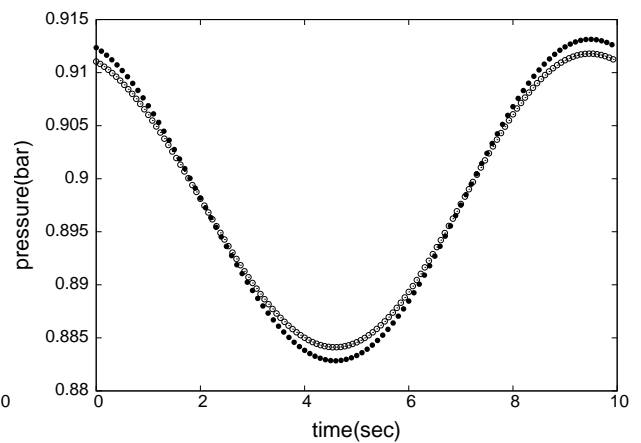
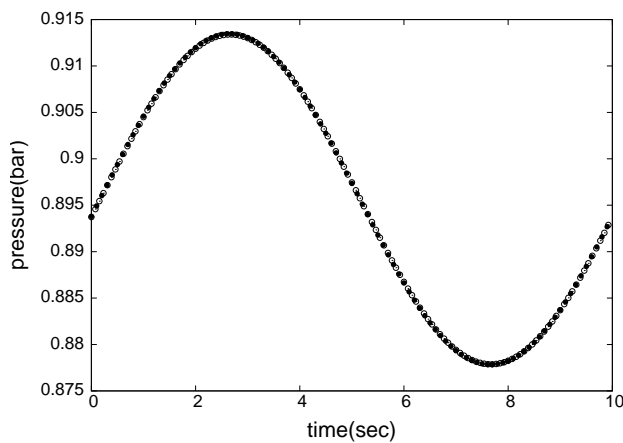
Σχήμα 7.2: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 1 Αρμονική (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

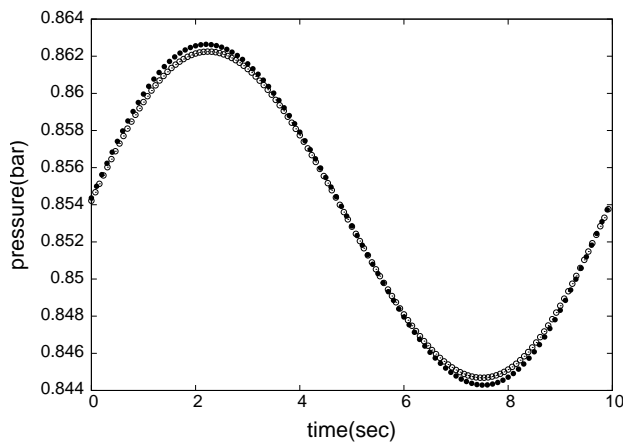
Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.4: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 2 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

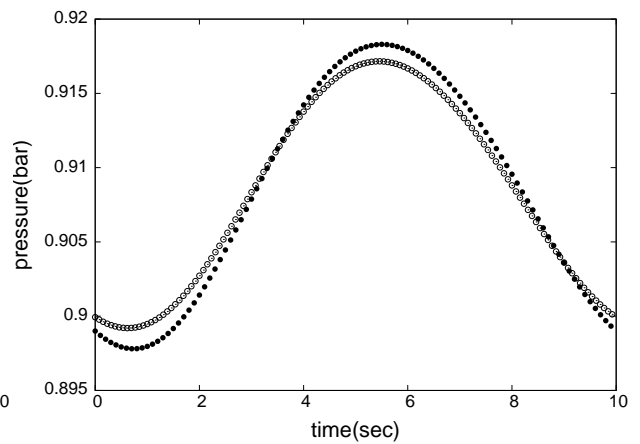


Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.

Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

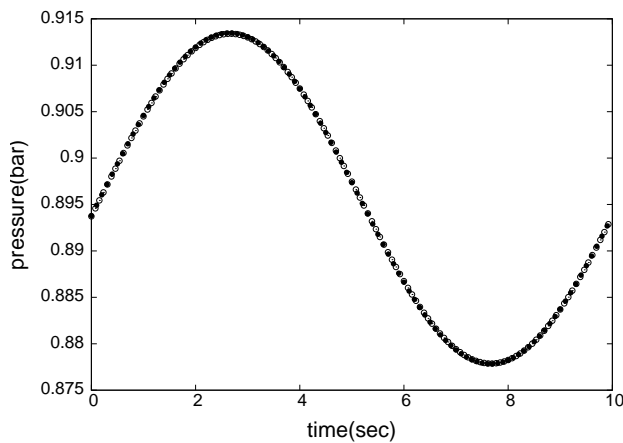


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

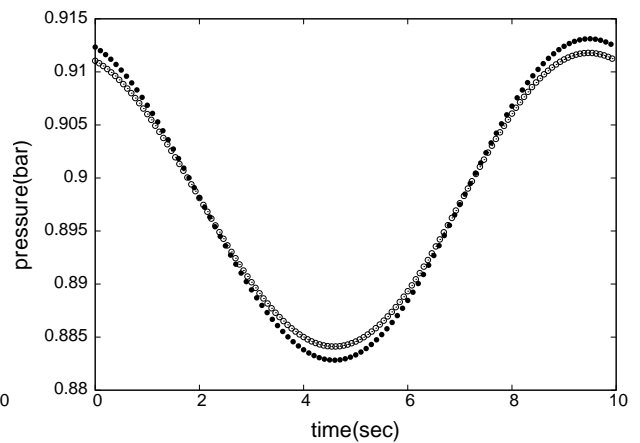


Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

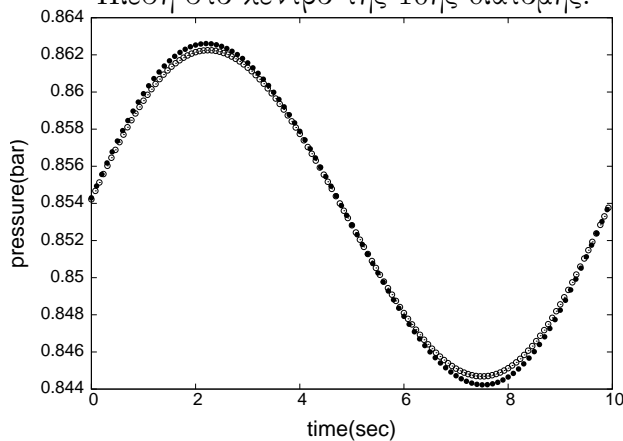
Σχήμα 7.6: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 3 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



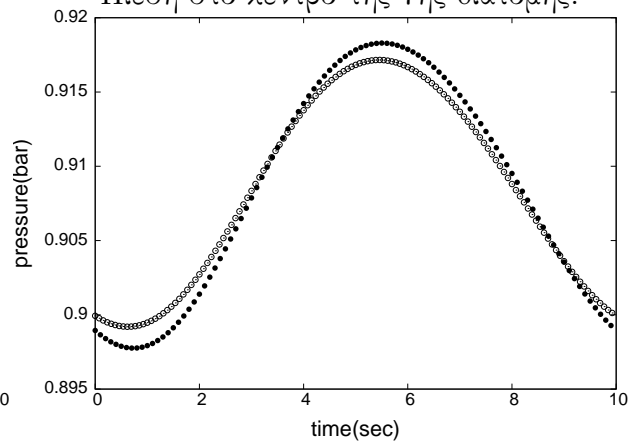
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.8: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 4 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

Για την εξαγωγή όλων των παραπάνω αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε επεξεργαστής κάρτας γραφικών (GPU) της εταιρίας NVIDIA και συγκεκριμένα η GTX 580 τεχνολογίας Fermi 2.0.

Στο σχήμα 7.2 για το κέντρο της 10ης διατομής του αγωγού και με χρήση μίας αρμονικής, φαίνεται ότι η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών και η μέθοδος της Χρονο-προέλασης δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα. Η ημιτονοειδής συνάρτηση διέγερσης που εφαρμόζεται μπορεί να προσεγγισθεί ακριβώς με μία αρμονική. Η πίεση στο σχήμα 7.2 για τις υπόλοιπες διατομές δεν είναι ταυτόσημα προσδιορισμένη από τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών, παρ' ότι τα αποτελέσματα έχουν μικρή διαφορά από τα επιθυμητά, που δίνει η Χρονο-προέλαση. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών έτρεξε σε 1536 *sec* ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης σε 18645 *sec*. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση μίας αρμονικής και με συνάρτηση διέγερσης την (6.1) είναι 12 φορές πιο γρήγορη.

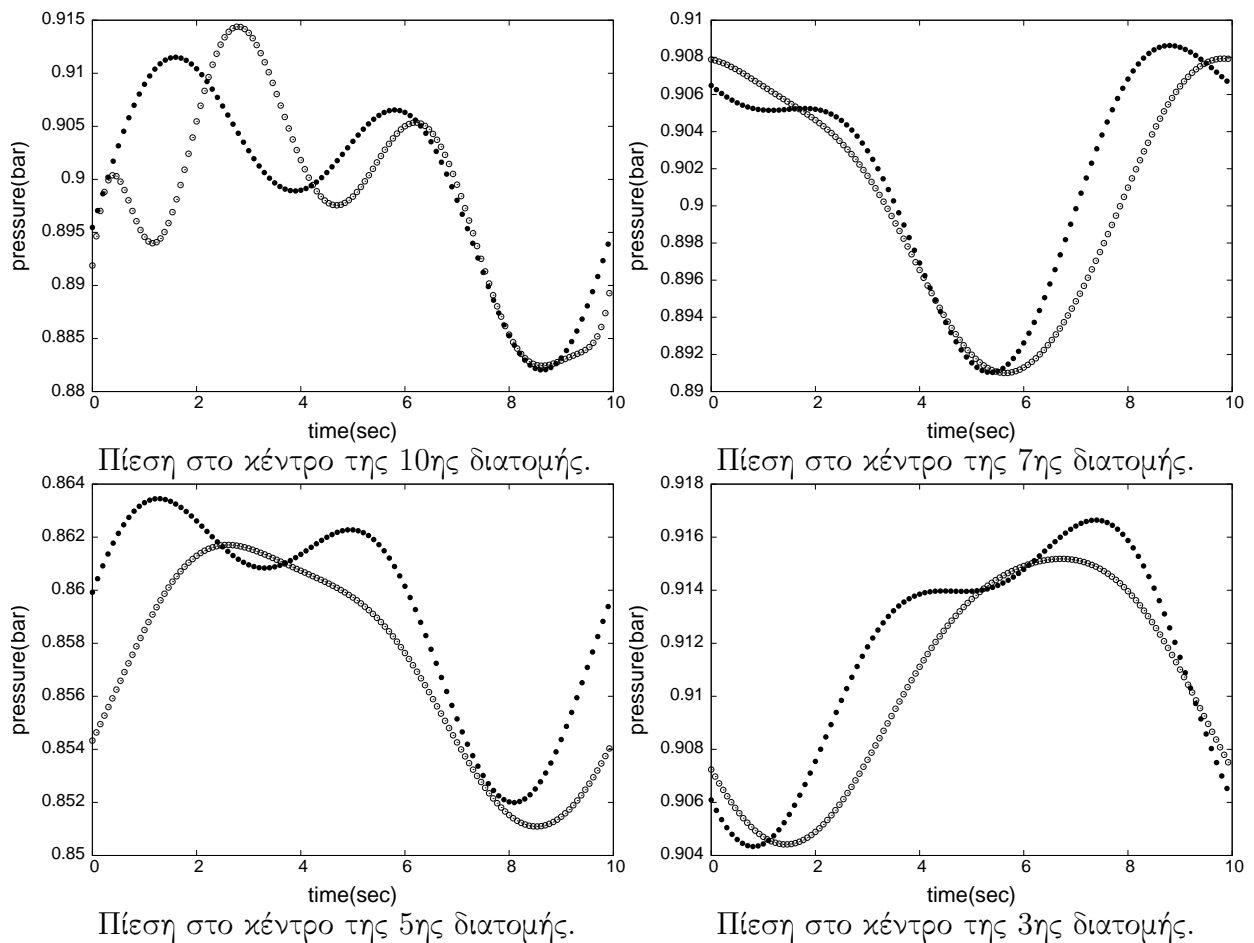
Αυξάνοντας τον αριθμό των αρμονικών σε δύο, τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών προσεγγίζουν καλύτερα αυτά που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης, από ότι με την χρήση μίας αρμονικής, σχήματα 7.4. Για την πίεση στην 10η διατομή του ίδιου σχήματος, φαίνεται ταυτόσημη προσέγγιση των δύο μεθόδων (γεγονός που αναμένεται αφού η ημιτονοειδής συνάρτηση διέγερσης (6.1) μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς με δύο αρμονικές), ενώ στις υπόλοιπες διατομές τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών παρουσιάζουν καλύτερη σύγκλιση από ότι με τη χρήση μίας αρμονικής. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 2565 *sec* ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης σε 18645 *sec* κάνοντας την πρώτη 7 φορές πιο γρήγορη.

Με τη χρήση τριών αρμονικών τα αποτελέσματα που προσεγγίζονται δεν είναι διαφορετικά από αυτά με τη χρήση δύο αρμονικών, σχήμα 7.6. Μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν αξίζει να χρησιμοποιηθούν τρεις αρμονικές για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος, αφού τα αποτελέσματα δεν βελτιώνονται. Αντίστοιχα, παρατηρούνται και για τη χρήση τεσσάρων αρμονικών με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, σχήμα 7.8. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 3977 *sec* με την χρήση τριών αρμονικών ενώ με την χρήση τεσσάρων 5552 *sec*, η μέθοδος της Χρονο-προέλασης ολοκληρώθηκε σε 18645 *sec*.

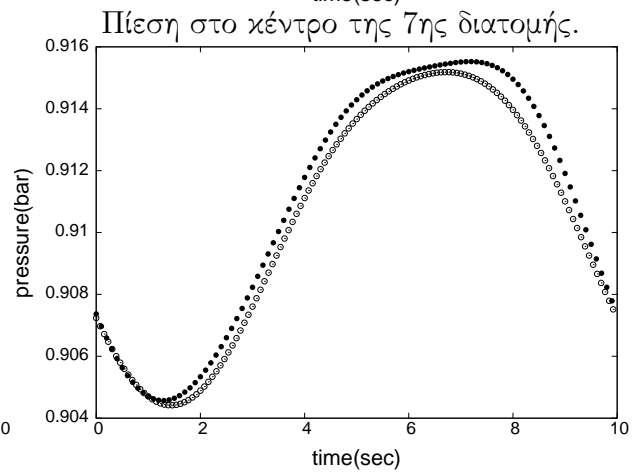
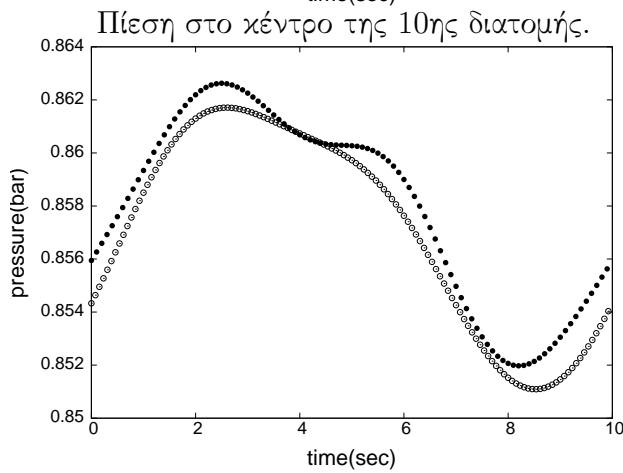
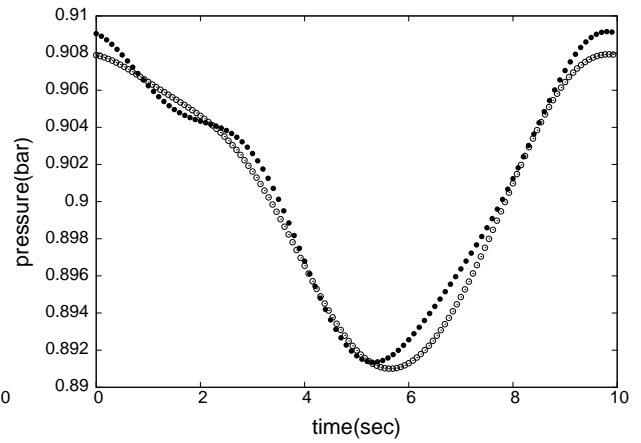
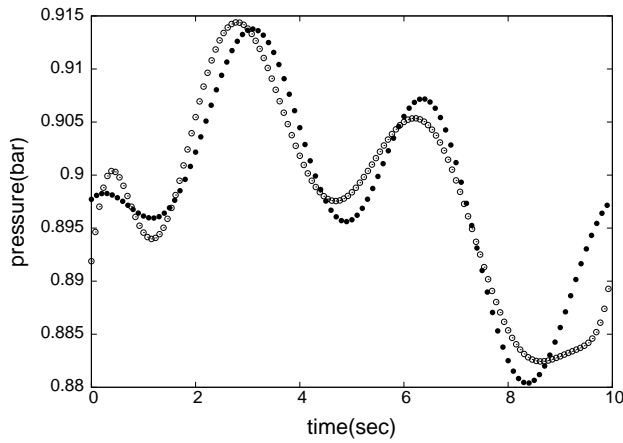
Συμπερασματικά, για τον αγωγό σχήματος S με συνάρτηση διέγερσης την ημιτονοειδή (6.1), δεν απαιτούνται παραπάνω από δύο αρμονικές για τον ακριβή προσδιορισμό των μεταβλητών ροής σε ολόκληρο το πεδίο.

7.1.2 Συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αγωγού σχήματος S για την συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου (συνάρτηση διέγερσης (6.2)) με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση δύο (σχήμα 7.10), τριών (σχήμα 7.12), τεσσάρων (σχήμα 7.14) και πέντε αρμονικών (σχήμα 7.16) με τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης με 130 χρονικά βήματα στην περίοδο.



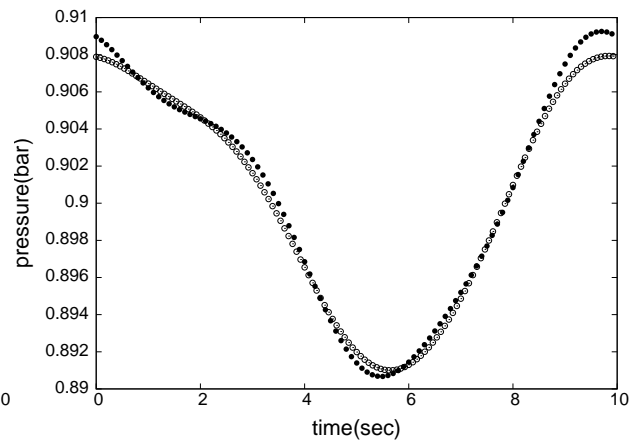
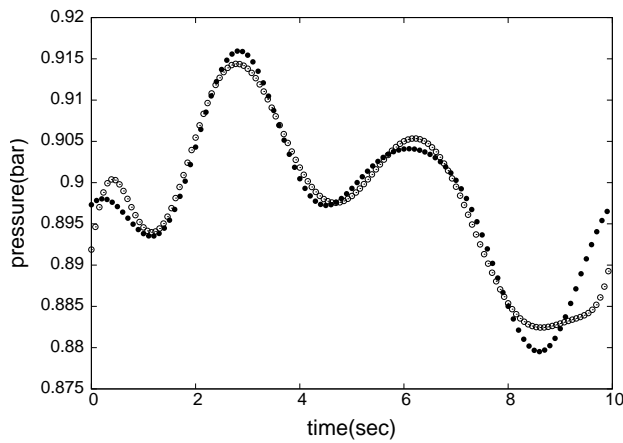
Σχήμα 7.10: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 2 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

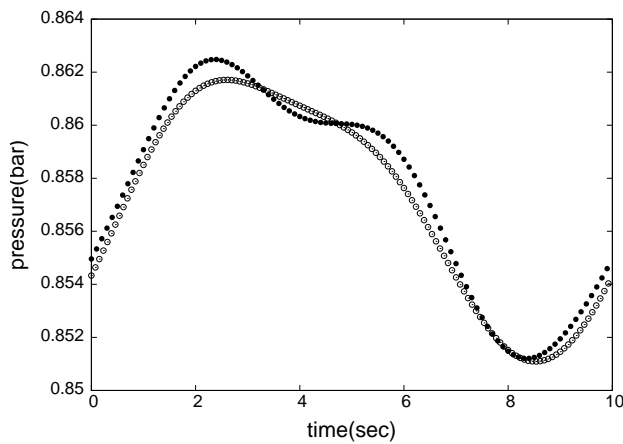
Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.12: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 3 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

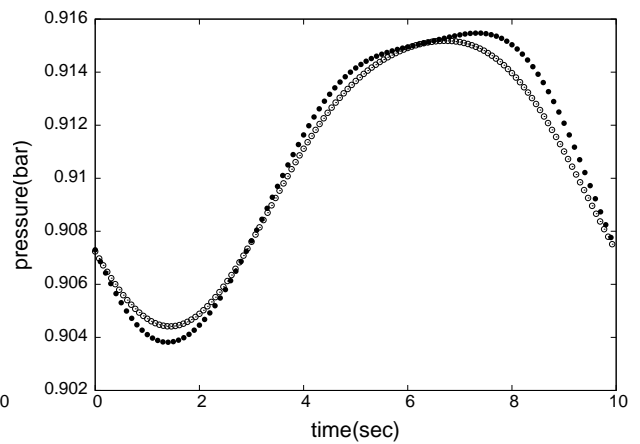


Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.

Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

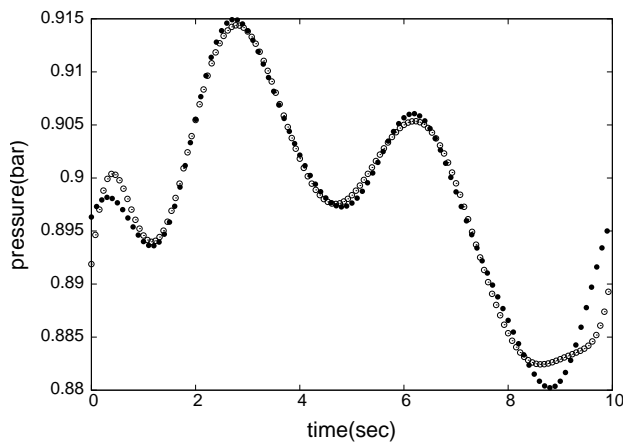


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

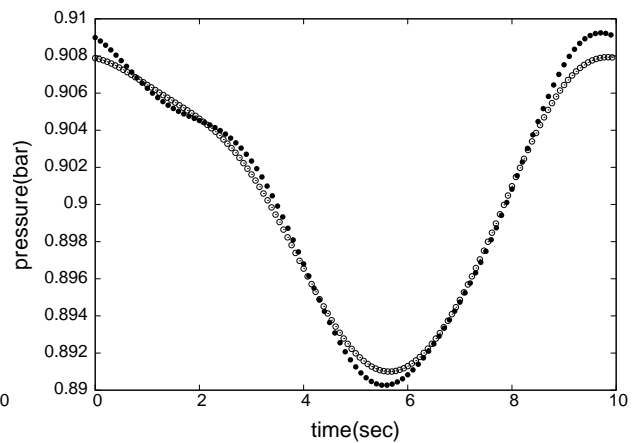


Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

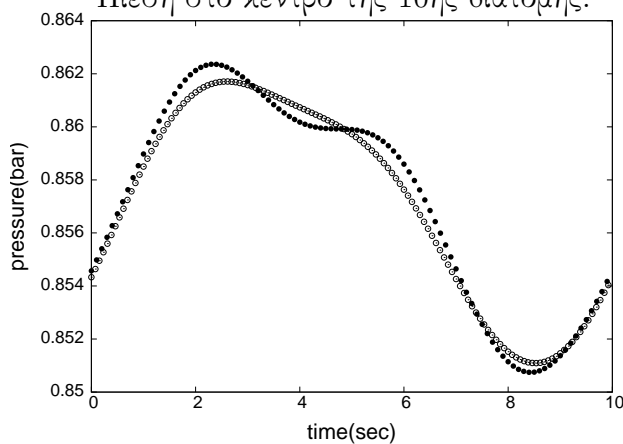
Σχήμα 7.14: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 4 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



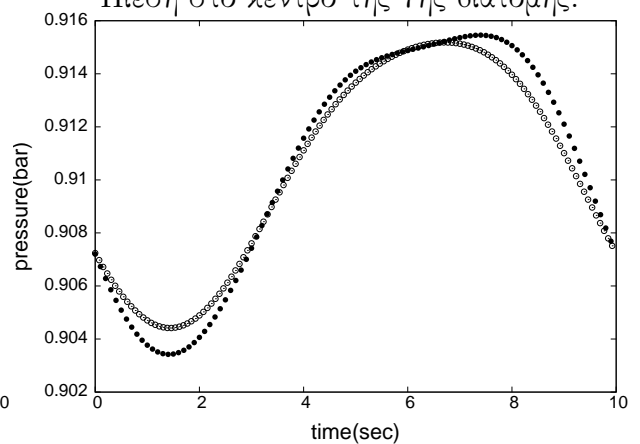
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.16: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 5 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

Επίσης σε αυτή την περίπτωση συνάρτησης διέγερσης όλα τα αποτελέσματα εξήχθησαν χρησιμοποιώντας τον ίδιο επεξεργαστή κάρτας γραφικών NVIDIA GTX 580 όπως και προηγουμένως.

Τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δεν είναι ικανοποιητικά με τη χρήση μόνο δύο αρμονικών, σχήμα 7.10, η απόκλιση από τα αποτελέσματα που δίνει η Χρονο-προέλαση είναι αρκετά μεγάλη. Με χρήση μόνο δύο αρμονικών, η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών, δίνει μία όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της λύσης. Επειδή η συνάρτηση διέγερσης (6.2) δεν είναι περιοδική, υπάρχει απόκλιση κοντά στα άκρα του πεδίου, δηλαδή κοντά στο 0 και στο 10. Με τη χρήση περισσότερων αρμονικών τα αποτελέσματα στο υπόλοιπο κομμάτι της περιόδου προσεγγίζονται πολύ ικανοποιητικά. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 2353 *sec* ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης 16093 *sec*.

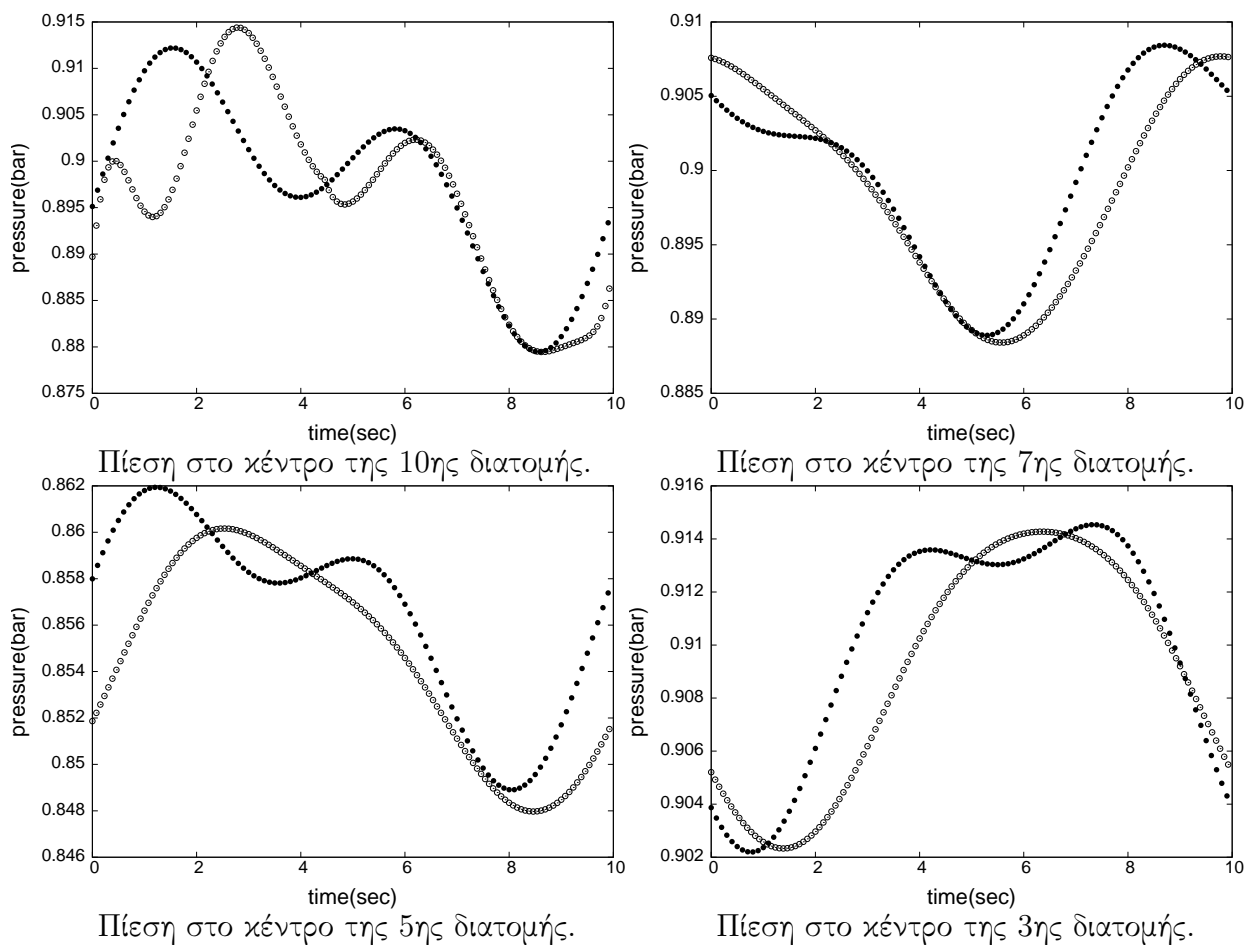
Στο σχήμα 7.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών με τη χρήση τριών αρμονικών. Παρατηρείται καλύτερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης από ότι με χρήση δύο αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης (6.2) απαιτεί παραπάνω αρμονικές για τον ακριβή προσδιορισμό της, όπως φαίνεται από το σχήμα 7.12 για την 10η διατομή του αγωγού. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 3457 *sec* ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης 16093 *sec*.

Αυξάνοντας τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών σε τέσσερις, τα αποτελέσματα βελτιώνονται ικανοποιητικά, σχήμα 7.14. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.12 - 10η διατομή του αγωγού, προσεγγίζεται στο μεγαλύτερο τμήμα της ικανοποιητικά και τα αποτελέσματα στις υπόλοιπες διατομές δεν απέχουν πολύ από τα επιθυμητά που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης. Παραπάνω αύξηση του πλήθους των αρμονικών ενδείκνυται καθώς τα αποτελέσματα συνεχίζουν να βελτιώνονται. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι 3 φορές πιο γρήγορη από τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης, στη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης διέγερσης και αγωγού, καθώς χρειάστηκε 4975 *sec* για τον προσδιορισμό των μεταβλητών ροής ολόκληρου το πεδίου ροής έναντι 16093 *sec* που χρειάστηκε η μέθοδος της Χρονο-προέλασης.

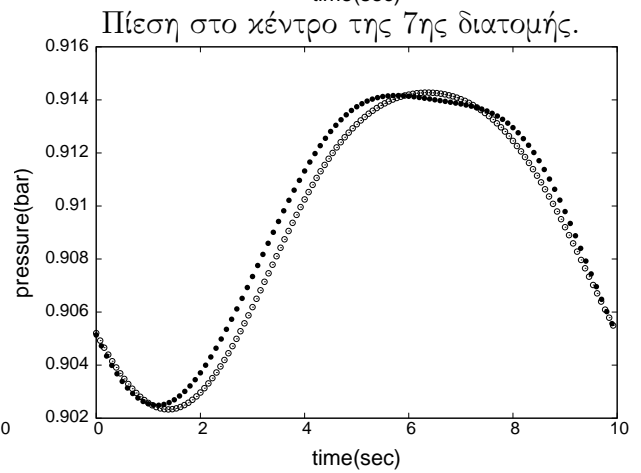
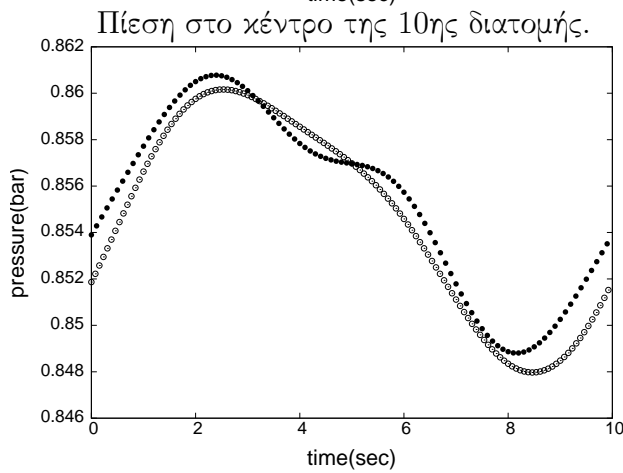
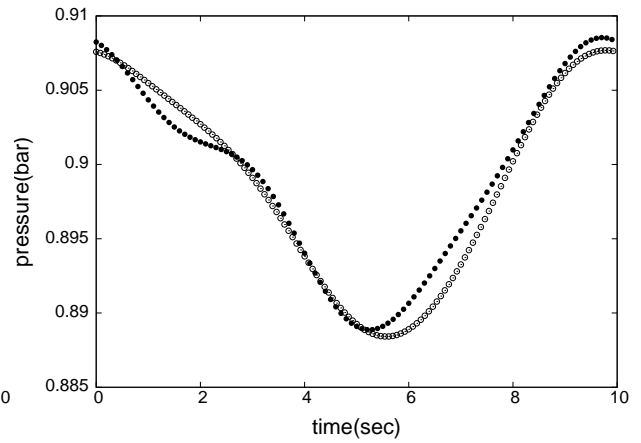
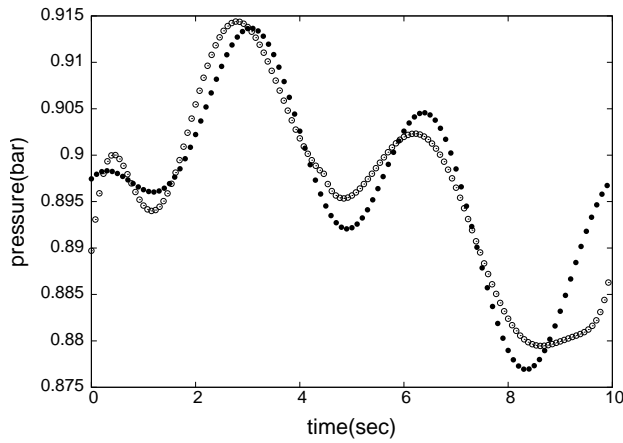
Το σχήμα 7.16 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση πέντε αρμονικών. Ο προσδιορισμός των μεγεθών της ροής σε όλες τις διατομές του αγωγού είναι ικανοποιητικός καθώς η απόκλιση από τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης δεν είναι μεγάλη. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών έτρεξε σε 7763 *sec* ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης σε 16093 *sec*. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι 2 φορές πιο γρήγορη στην συγκεκριμένη επιλογή αγωγού και συνάρτησης διέγερσης. Περαιτέρω αύξηση του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δεν βελτιώνει επαρκώς τα αποτελέσματα. Η χρήση πέντε αρμονικών ενδείκνυται για τον υπολογισμό των ροικών μεγεθών σε αυτήν την περίπτωση.

7.1.3 Μη-συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου

Τα σχήματα 7.18, 7.20, 7.22 και 7.24 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα του αγωγού σχήματος S για την μη-συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου (συνάρτηση διέγερσης (6.3)) με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση δύο, τριών, τεσσάρων και πέντε αρμονικών αντίστοιχα και τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης με 130 χρονικά βήματα στη περίοδο.



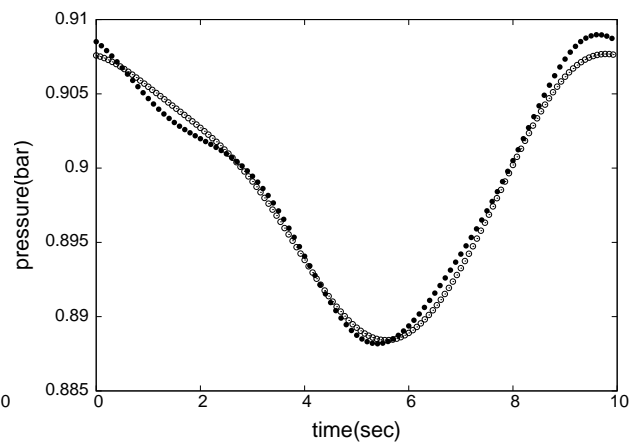
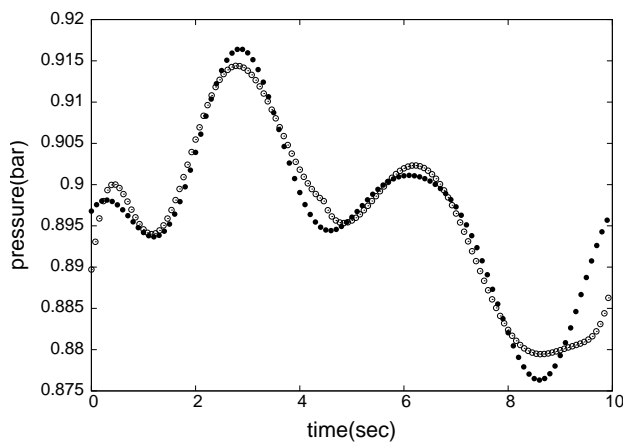
Σχήμα 7.18: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 2 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

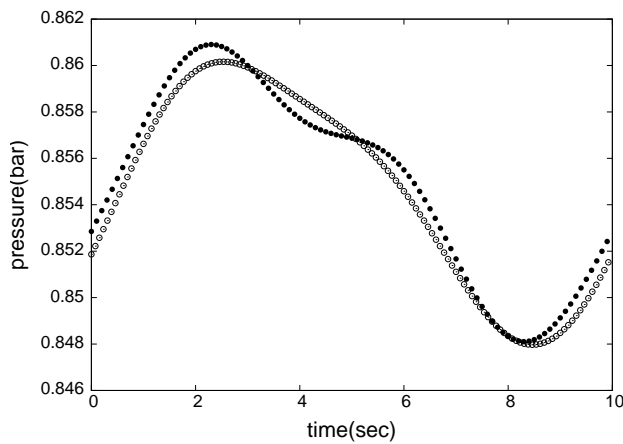
Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.20: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 3 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

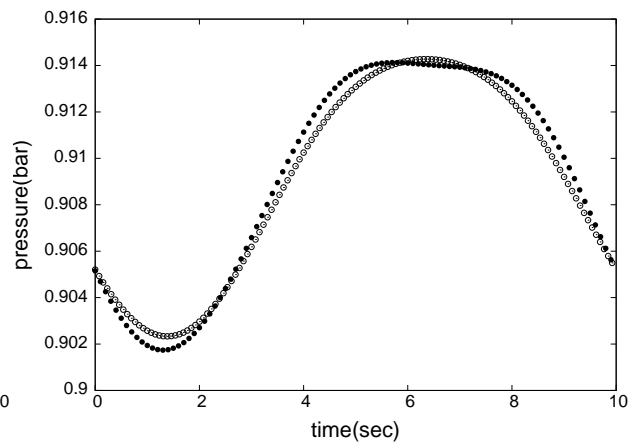


Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.

Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

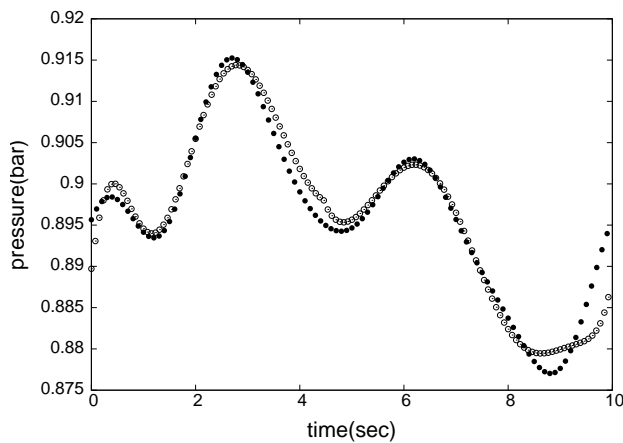


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

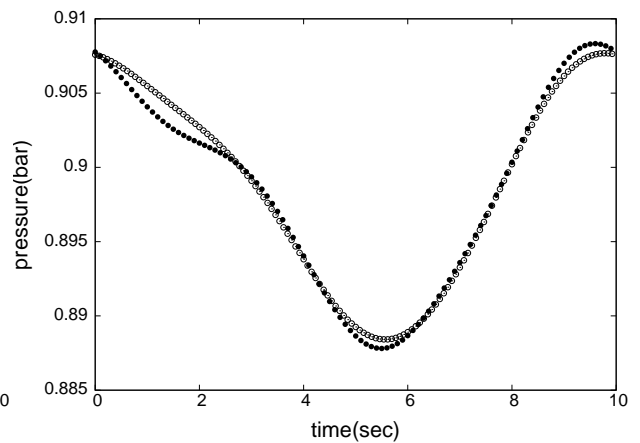


Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

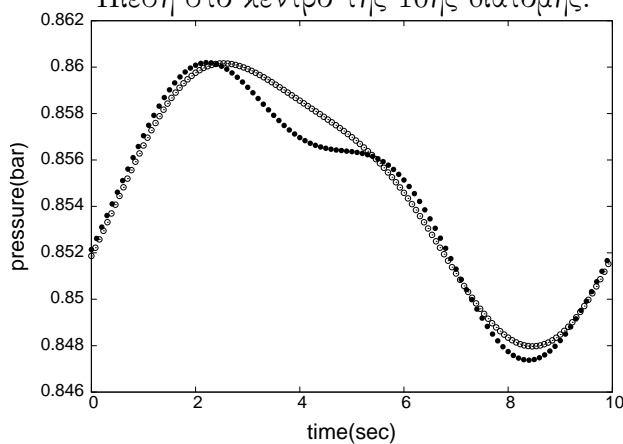
Σχήμα 7.22: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 4 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



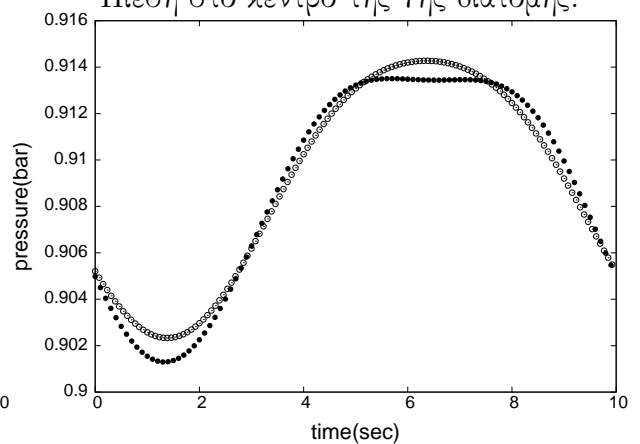
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.24: Αγωγός S - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 5 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 130 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

Χρησιμοποιήθηκε ο επεξεργαστής κάρτας γραφικών NVIDIA GTX 580 για την εξαγωγή των συγκεκριμένων αποτελεσμάτων.

Αντίστοιχα με την συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου και εδώ, που παρατηρείται ασυνέχεια στη μεταβολή της πίεσης εξόδου του αγωγού στα 4,5 sec της περιόδου, τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών με τη χρήση δύο αρμονικών (σχήμα 7.18) δεν είναι ικανοποιητικά. Με δύο αρμονικές δεν μπορεί η συνάρτηση διέγερσης (6.3) να προσεγγιστεί με ακρίβεια και, συνεπώς, ούτε τα ροϊκά μεγέθη στις υπόλοιπες διατομές του αγωγού. Στο σημείο ασυνέχειας, στα 4,5 sec της περιόδου, η προσέγγιση που δίνει η λύση της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι "ομαλή" δηλαδή δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις της λύσης ούτε αποκλίσεις, αντιθέτως η μέθοδος περνά από το σημείο αυτό χωρίς να δημιουργούνται προβλήματα στην επίλυση.

Το σχήμα 7.20 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση τριών αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.20 - 10η διατομή του αγωγού, δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά με τρεις αρμονικές συνεπώς τα αποτελέσματα των υπολοίπων διατομών παρουσιάζουν μεγαλύτερες αποκλίσεις από τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Απαιτείται αύξηση του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών για περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας των λύσεων.

Αυξάνοντας τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των αρμονικών τα αποτελέσματα είναι πιο ικανοποιητικά, σχήμα 7.22. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.22 - 10η διατομή του αγωγού, προσεγγίζεται ικανοποιητικά με την χρήση 4 αρμονικών, έτσι στις υπόλοιπες διατομές του αγωγού τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μικρή διαφορά από εκείνα που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 5030 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης σε 16247 sec δηλαδή η πρώτη είναι 3 φορές πιο γρήγορη και δίνει αποτελέσματα κοντά στα επιθυμητά.

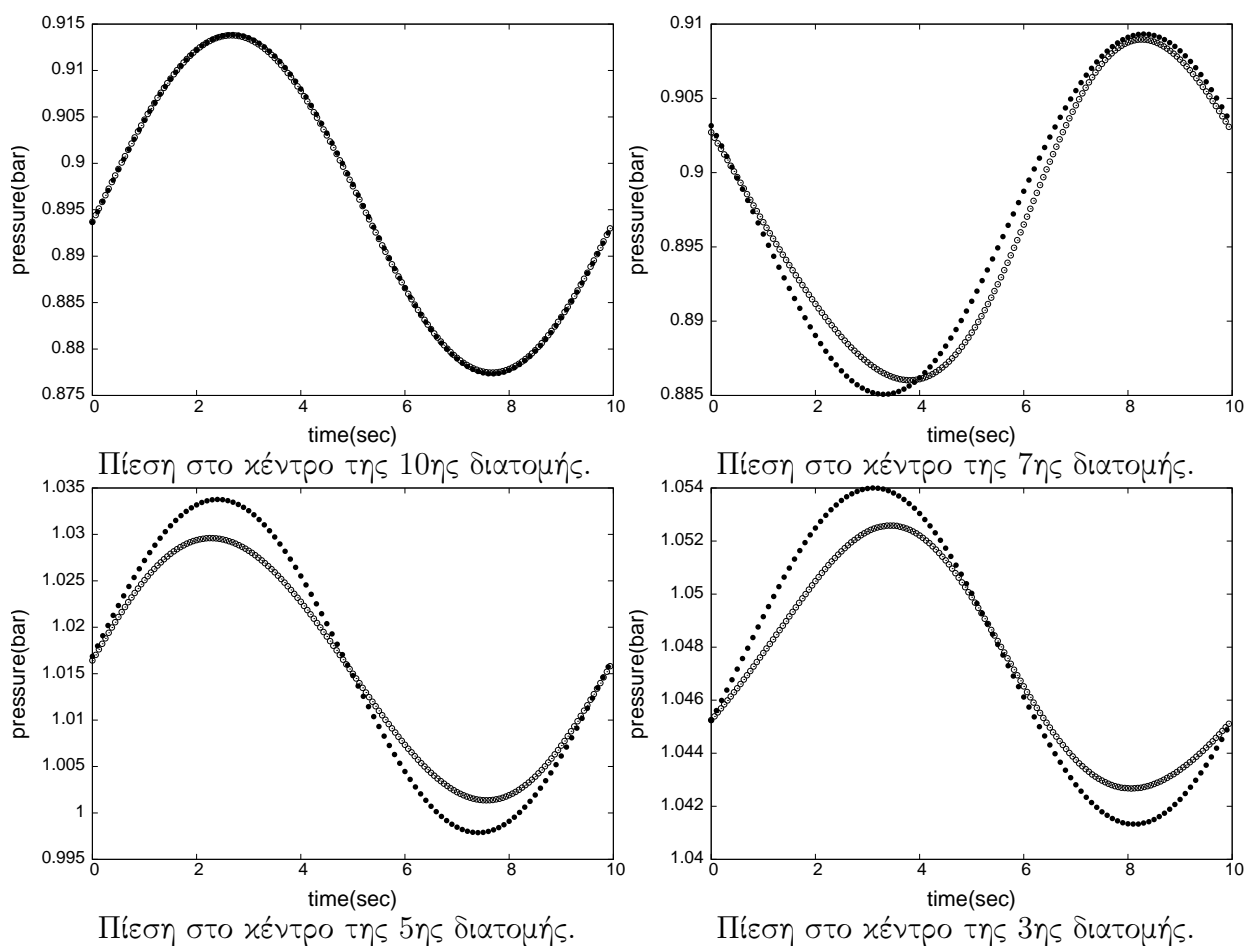
Στο σχήμα 7.24 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση πέντε αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.24 - 10η διατομή του αγωγού, προσεγγίζεται καλύτερα από ότι με την χρήση τεσσάρων αρμονικών. Τα αποτελέσματα στις υπόλοιπες διατομές είναι εξίσου με μικρή απόκλιση από τα αυτά της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι 2 φορές πιο γρήγορη στις συγκεκριμένες συνθήκες, συνάρτηση διέγερσης και επιλογής αγωγού, αφού η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 7904 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης 16247 sec. Παραπάνω αύξηση των αρμονικών που χρησιμοποιούνται, αφενός δεν προσφέρει επαρκώς καλύτερα αποτελέσματα, αφετέρου πλησιάζει σε χρονικές απαιτήσεις ίσες με της μεθόδου της Χρονο-προέλασης, οπότε δεν υπάρχει κέρδος χρησιμοποίησης της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών.

7.2 Περίπτωση 2: Συγκλίνων Αγωγός

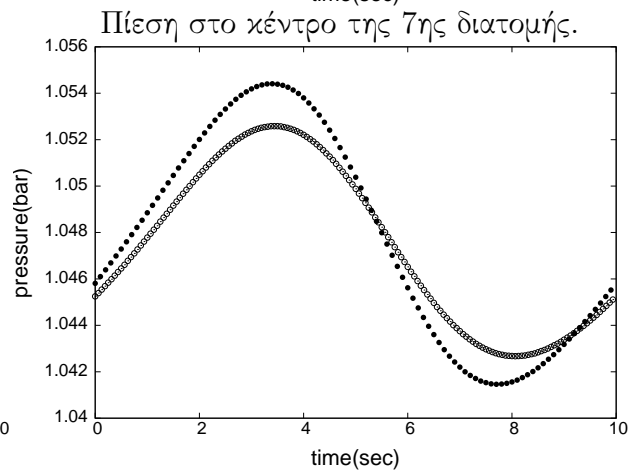
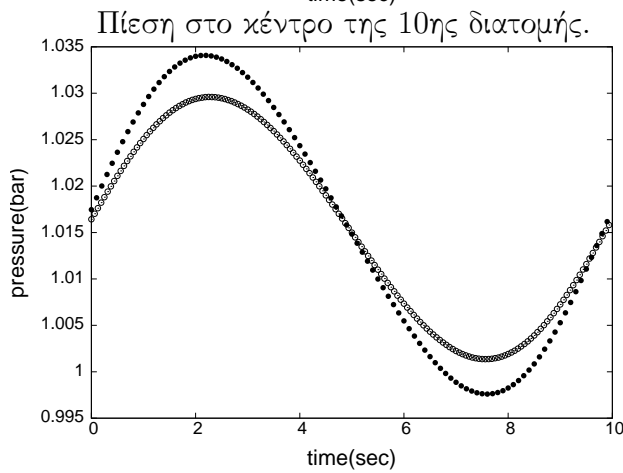
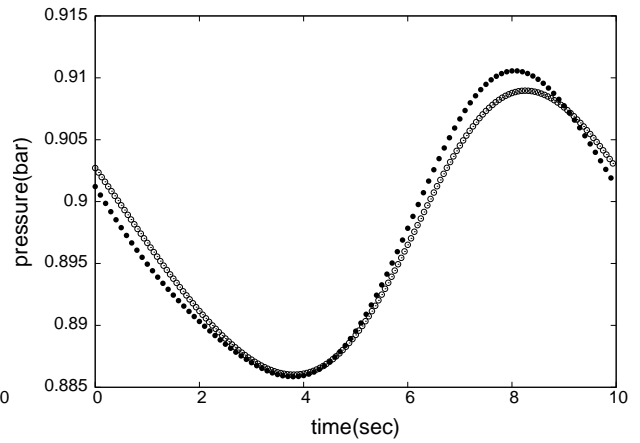
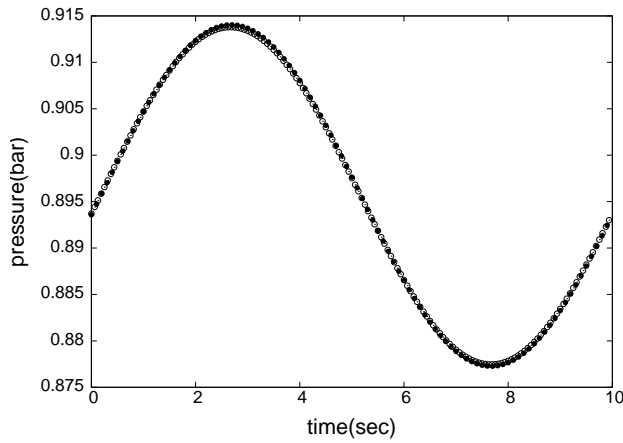
Για τον συγκλίνοντα αγωγό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων, Ισορροπίας των Αρμονικών και Χρονο-προέλασης. Τα αποτελέσματα είναι χωρισμένα ανάλογα την συνάρτηση διέγερσης όπως και στον αγωγό σχήματος S που προηγήθηκε. Τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών είναι πιο ακριβή, όταν χρησιμοποιούνται περισσότερες αρμονικές. Αυτό φάνηκε από τα αποτελέσματα του αγωγού σχήματος S, αντίστοιχα ισχύει και εδώ.

7.2.1 Ημιτονοειδής Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου

Τα αποτελέσματα του συγκλίνοντα αγωγού για την ημιτονοειδή μεταβολή της πίεσης εξόδου με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση μίας, δύο, τριών και τεσσάρων αρμονικών και τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης με 160 χρονικά βήματα στην περίοδο, παρουσιάζονται στα σχήματα 7.26, 7.28, 7.30, 7.32 αντίστοιχα.



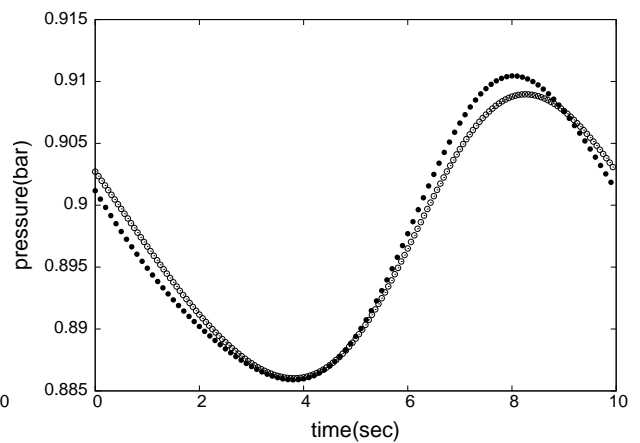
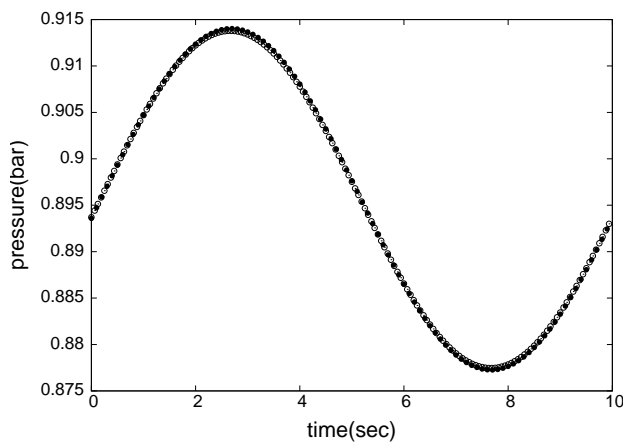
Σχήμα 7.26: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 1 Αρμονική (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

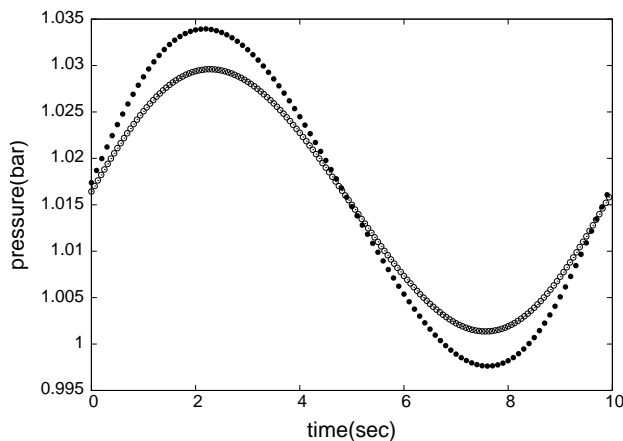
Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.28: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 2 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

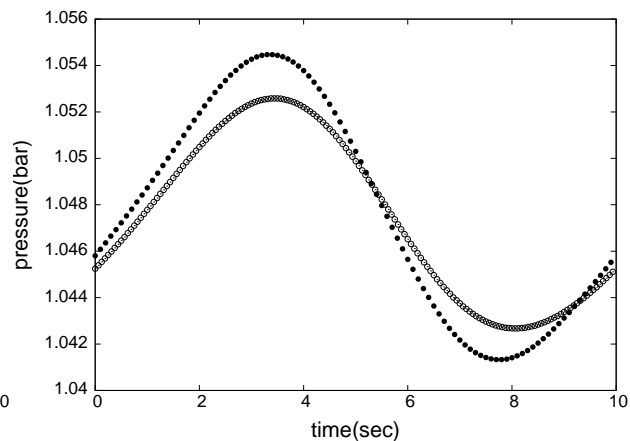


Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.

Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

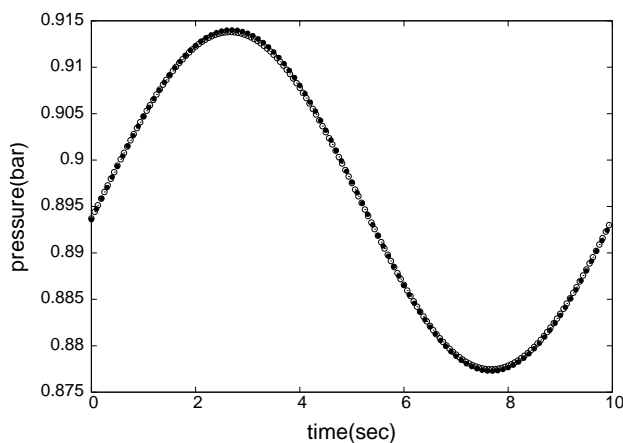


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

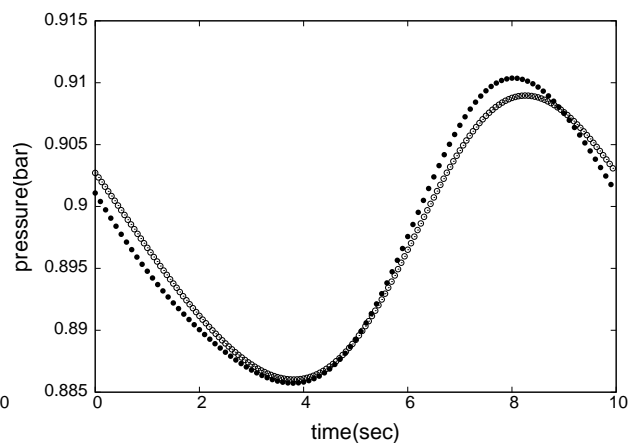


Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

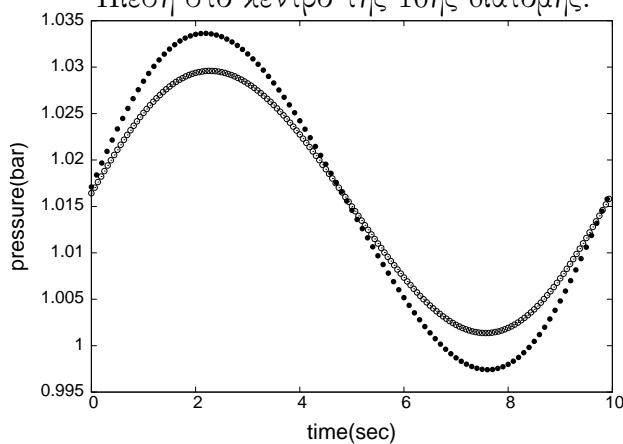
Σχήμα 7.30: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 3 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



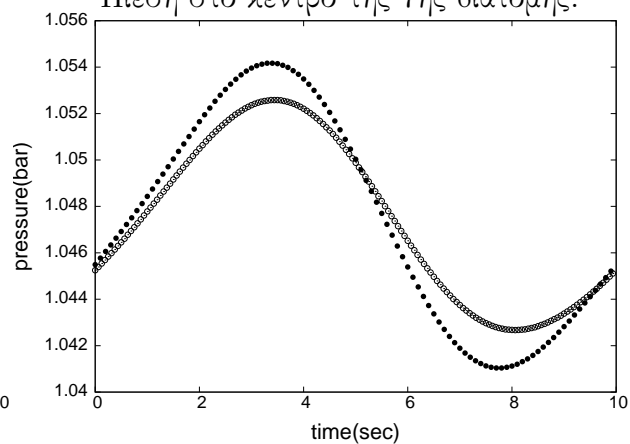
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.32: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.1) - Ισορροπία των Αρμονικών με 4 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα υπολογίστηκαν σε έναν επεξεργαστή κάρτας γραφικών GTX 580 της εταιρίας NVIDIA.

Το σχήμα 7.26 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση μίας αρμονικής. Η συνάρτηση διέγερσης (6.1) είναι ημιτονοειδής και για αυτό μία αρμονική αρκεί για την ακριβή προσέγγιση της (σχήμα 7.26 - 10η διατομή αγωγού). Στις υπόλοιπες διατομές του συγκλίνοντα αγωγού (σχήμα 7.26), η πίεση παρουσιάζει διαφορά από τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης. Ο υπολογισμός της ροής στο συγκλίνον τμήμα του αγωγού απαιτεί παραπάνω αρμονικές για να συγκλίνουν επαρκώς όλες οι μεταβλητές της ροής, παρ' ότι η συνάρτηση διέγερσης δεν χρειάζεται για να προσεγγιστεί.

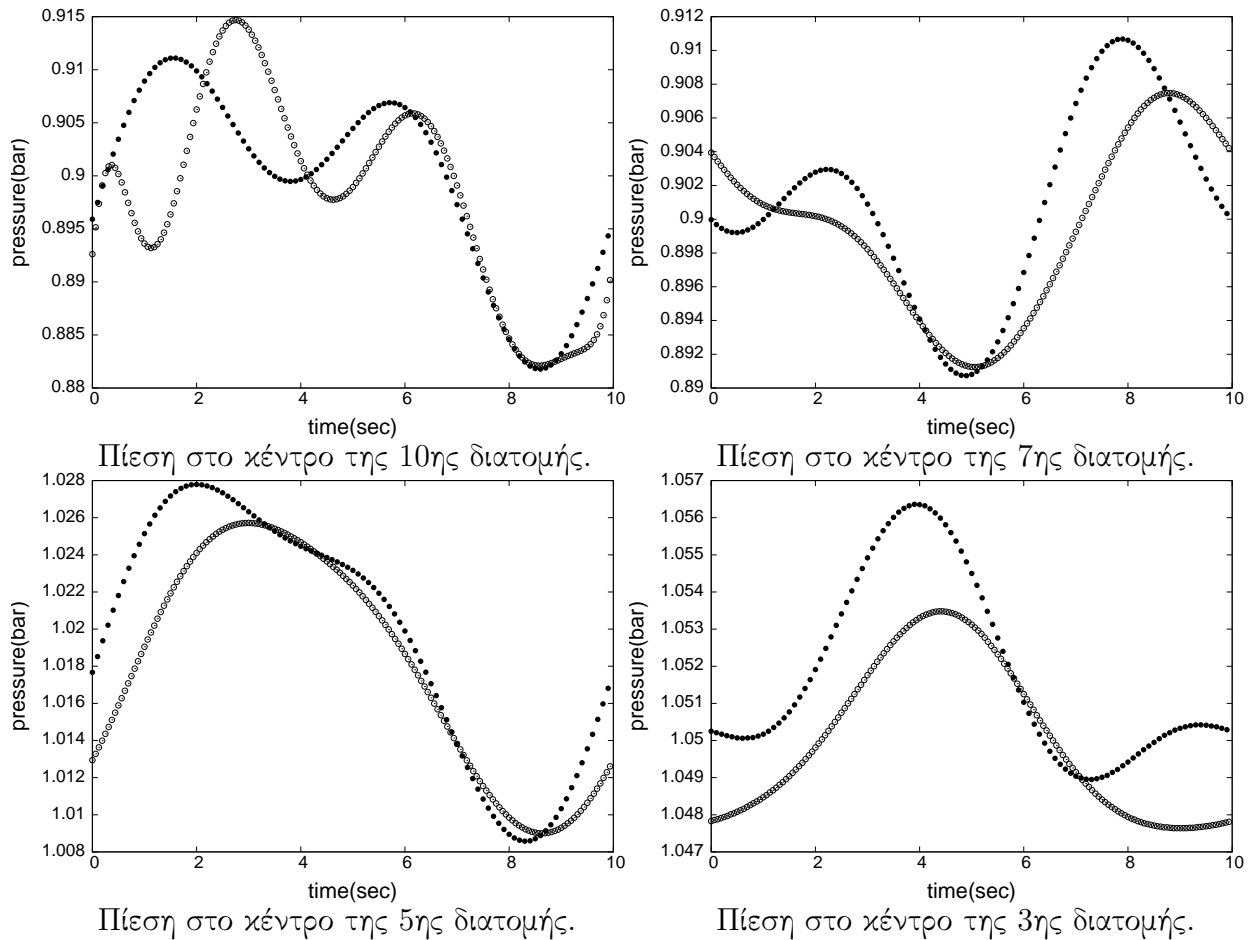
Τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση δύο αρμονικών παρουσιάζονται στο σχήμα 7.28. Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα είναι καλύτερα απ' ότι με την χρήση μίας αρμονικής του σχήματος 7.26. Ακόμα η προσέγγιση των αποτελεσμάτων της μεθόδου της Χρονο-προέλασης είναι ικανοποιητική. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι 6 φορές πιο γρήγορη αφού ολοκληρώνει την διαδικασία επίλυσης σε 3509 *sec* έναντι της μεθόδου της Χρονο-προέλασης που απαιτεί 20809 *sec*.

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση τριών αρμονικών δίνει τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 7.30. Το όφελος από την προσθήκη μίας παραπάνω αρμονικής είναι αμελητέο, αφού η πίεση στις διατομές του συγκλίνοντα αγωγού (σχήμα 7.30) δεν έχει προσεγγίσει παραπάνω τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης.

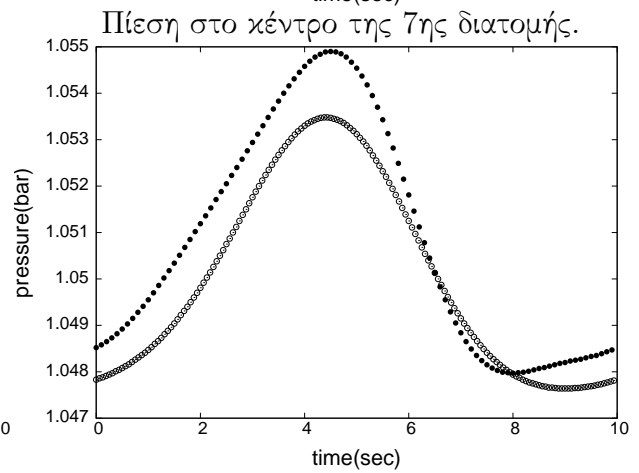
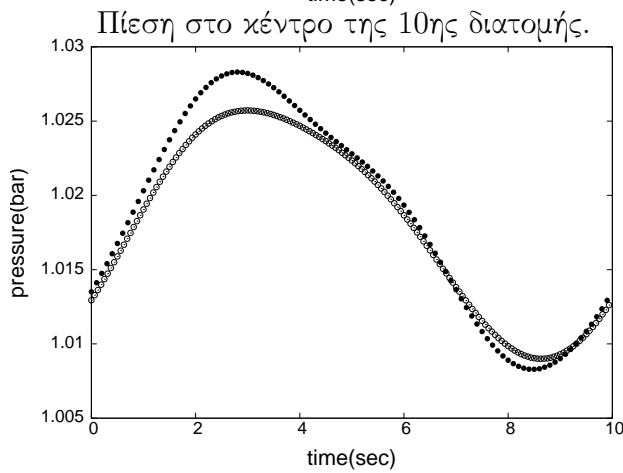
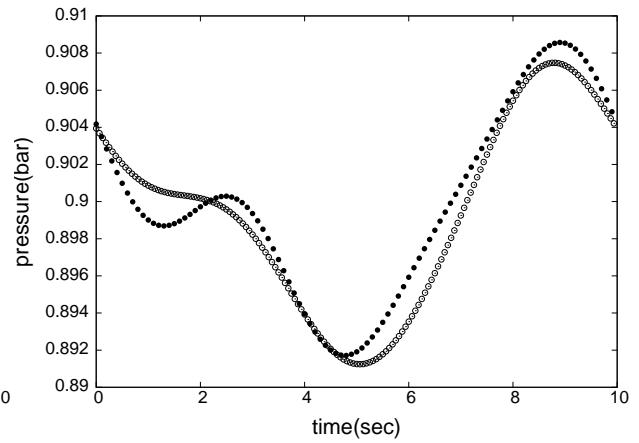
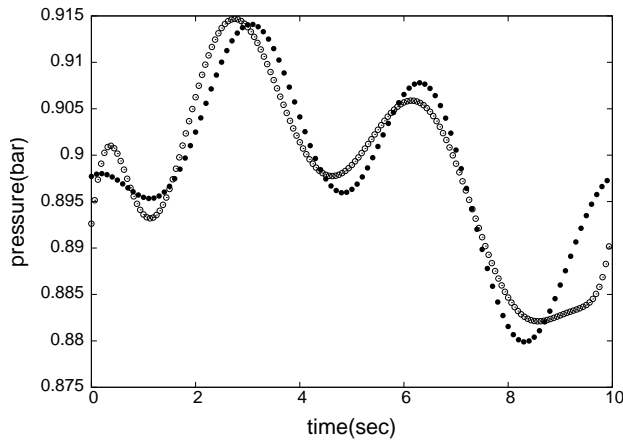
Με χρήση τεσσάρων αρμονικών παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στο σχήμα 7.32. Δεν προσφέρονται καλύτερα αποτελέσματα από αυτά που ήταν με χρήση τριών αρμονικών. Δεν ενδείκνυται η χρήση παραπάνω αρμονικών για τον υπολογισμό των ροϊκών μεταβλητών σε αυτές τις συνθήκες (σχήμα αγωγού, συνάρτηση διέγερσης (6.1), οριακές συνθήκες κτλ).

7.2.2 Συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του συγκλίνοντα αγωγού για την συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου (6.2), με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση δύο, τριών, τεσσάρων και πέντε αρμονικών και τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης με 160 χρονικά βήματα στη περίοδο στα σχήματα 7.34, 7.36, 7.38 και 7.40.



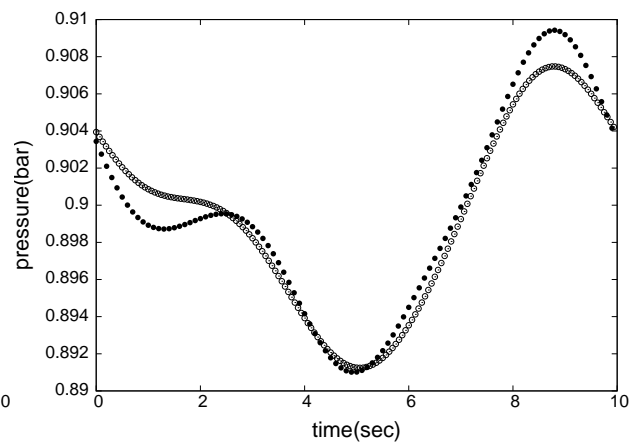
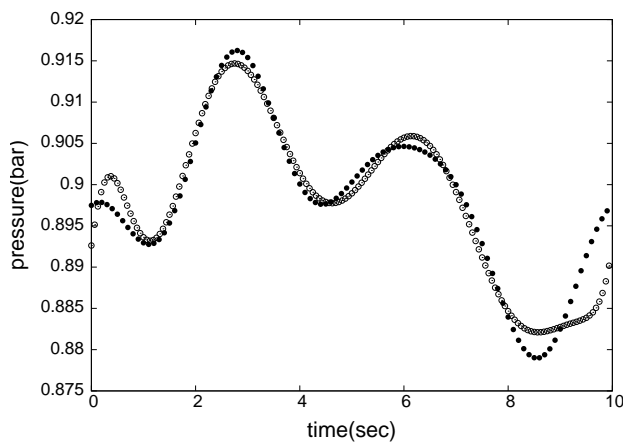
Σχήμα 7.34: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 2 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

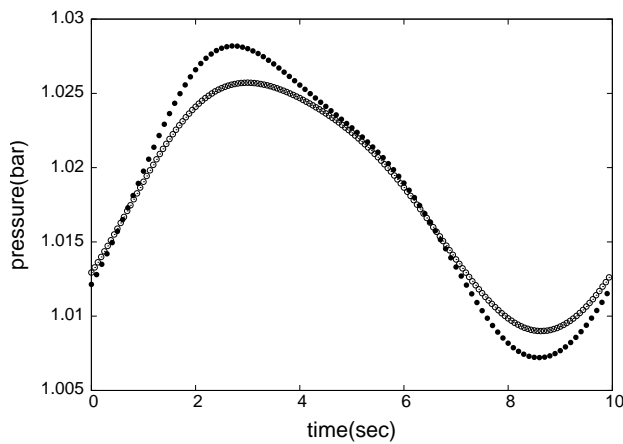
Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.36: Συγκλίτων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 3 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

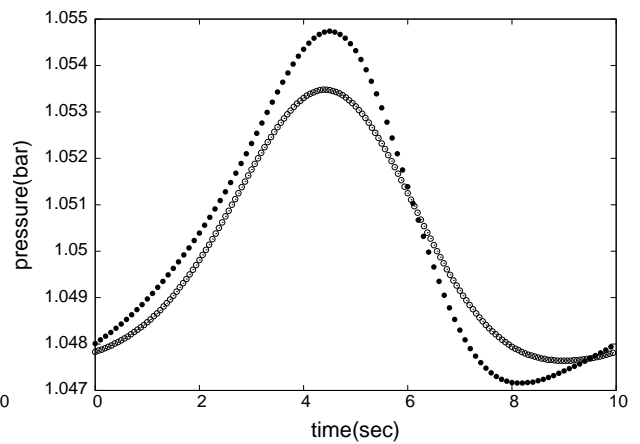


Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.

Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

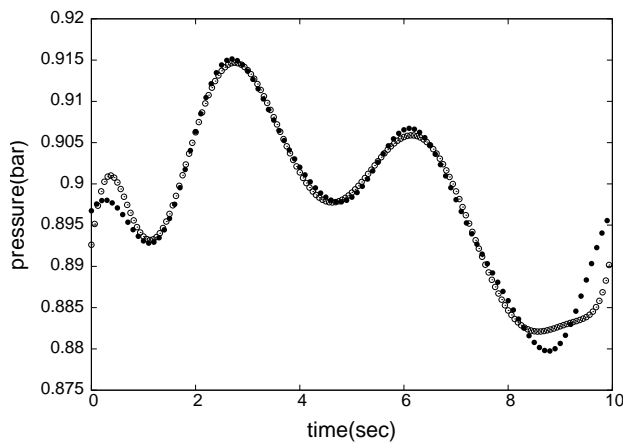


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

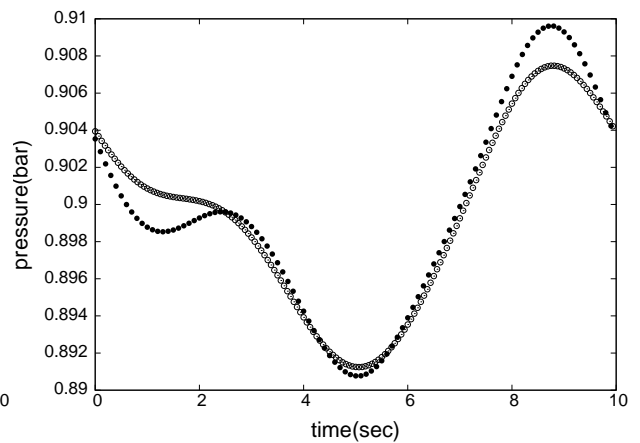


Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

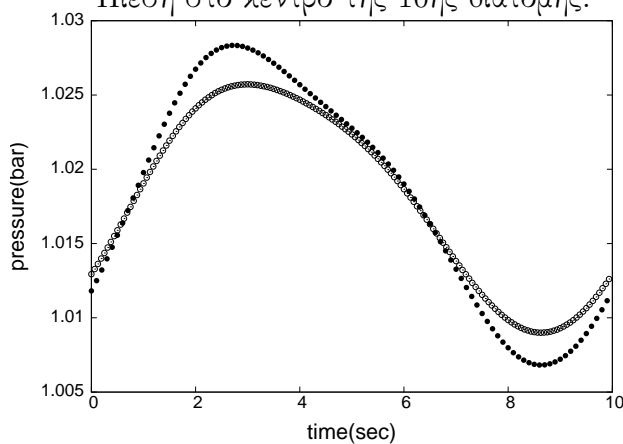
Σχήμα 7.38: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 4 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



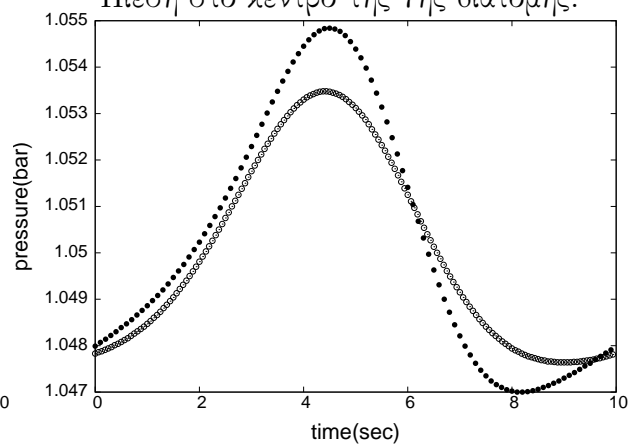
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.40: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.2) - Ισορροπία των Αρμονικών με 5 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

Επίσης σε αυτή την περίπτωση συνάρτησης διέγερσης όλα τα αποτελέσματα εξήχθησαν χρησιμοποιώντας τον ίδιο επεξεργαστή κάρτας γραφικών NVIDIA GTX 580 όπως και προηγουμένως.

Τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, σχήμα 7.34, με τη χρήση δύο αρμονικών και συνάρτηση διέγερσης την (6.2), δεν είναι ικανοποιητικά, η απόκλιση από τα αποτελέσματα που δίνει η Χρονο-προέλαση είναι αρκετά μεγάλη. Η συνάρτηση διέγερσης (6.2) δεν είναι περιοδική (είναι ένα πολυώνυμο όπως έχει παρουσιαστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο), υπάρχει απόκλιση κοντά στα άκρα του πεδίου, δηλαδή κοντά στο 0 και στο 10. Απαιτείται χρήση περισσότερων αρμονικών ώστε τα αποτελέσματα να προσεγγιστούν καλύτερα.

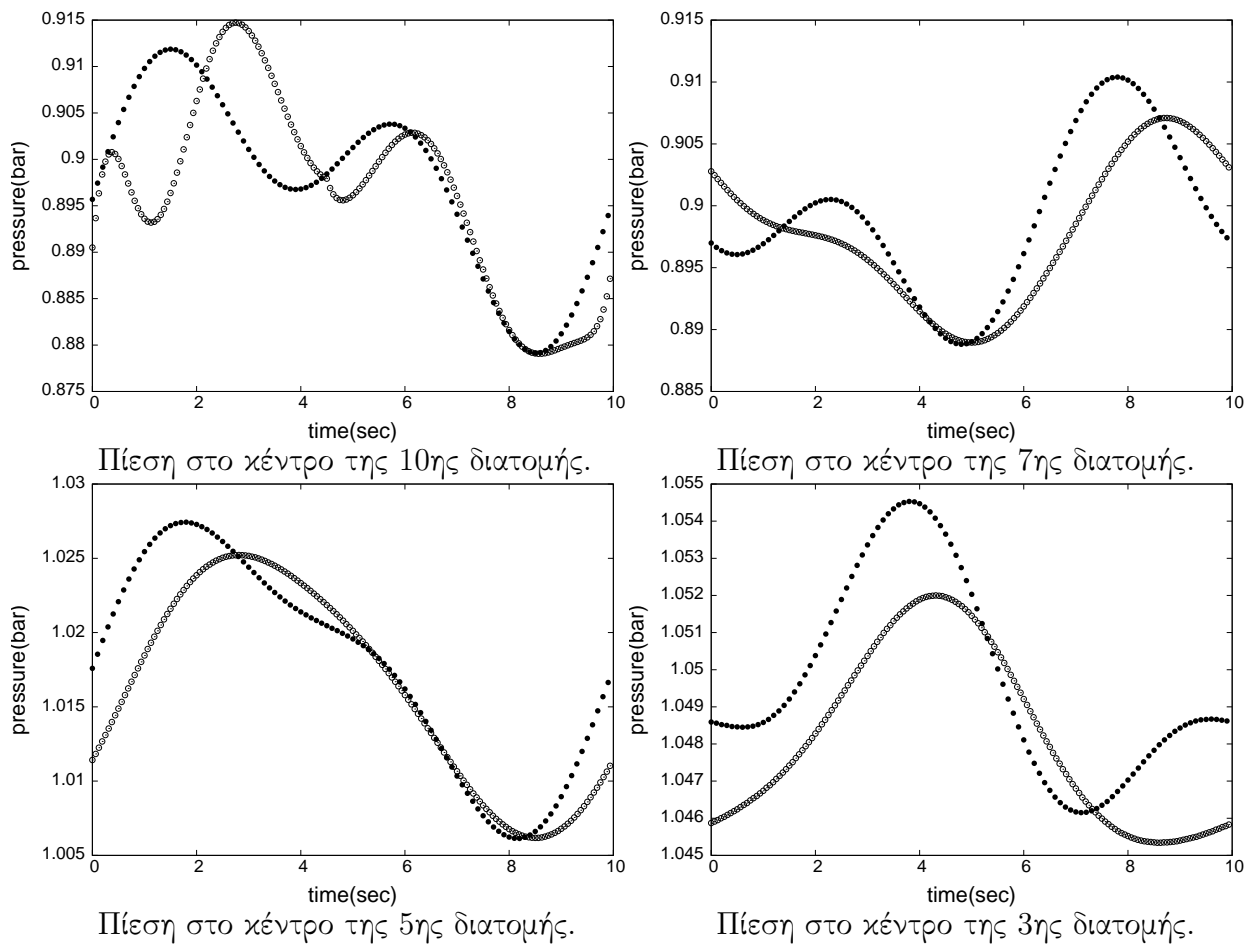
Με τη χρήση τριών αρμονικών η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δίνει τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 7.36. Παρατηρείται καλύτερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης από ότι με χρήση δύο αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης (6.2) απαιτεί παραπάνω αρμονικές για τον ακριβή προσδιορισμό της, όπως φαίνεται από το σχήμα 7.36 - 10η διατομή του αγωγού. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 5127 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης 20380 sec.

Αυξάνοντας τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών, τα αποτελέσματα βελτιώνονται ικανοποιητικά, στο σχήμα 7.14 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με χρήση τεσσάρων αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.36 - 10η διατομή του αγωγού, προσεγγίζεται ικανοποιητικά και τα αποτελέσματα στις υπόλοιπες διατομές δεν απέχουν πολύ από τα επιθυμητά που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης. Παραπάνω αύξηση του πλήθους των αρμονικών ενδείκνυται καθώς τα αποτελέσματα συνεχίζουν να βελτιώνονται. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι σχεδόν 3 φορές πιο γρήγορη από τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης, στην συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης διέγερσης και αγωγού, καθώς χρειάστηκε 7514 sec για τον προσδιορισμό των μεταβλητών ροής ολόκληρου το πεδίου ροής έναντι 20380 sec που χρειάστηκε η μέθοδος της Χρονο-προέλασης.

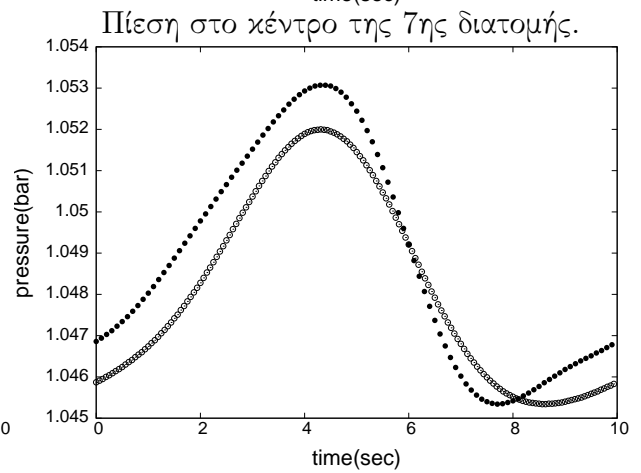
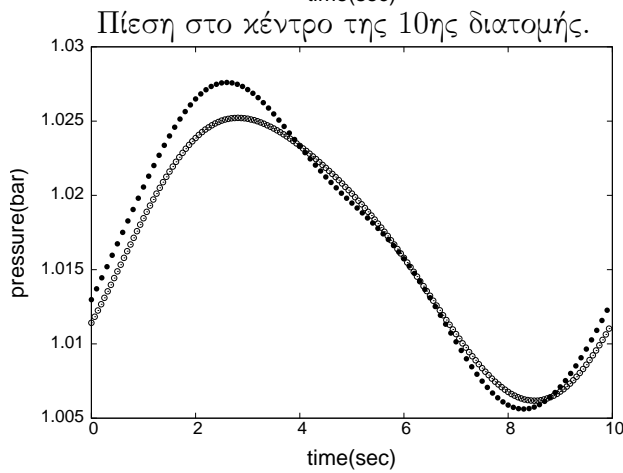
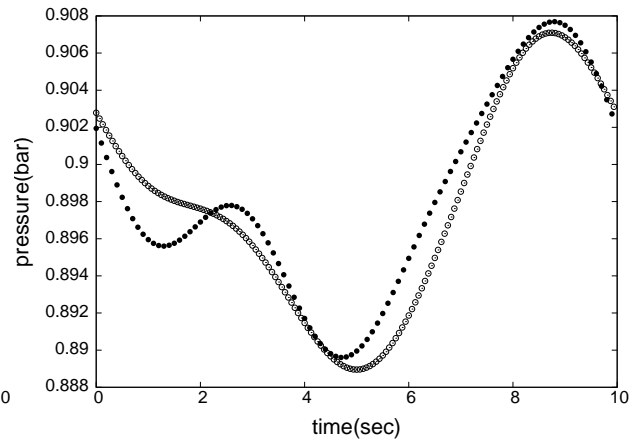
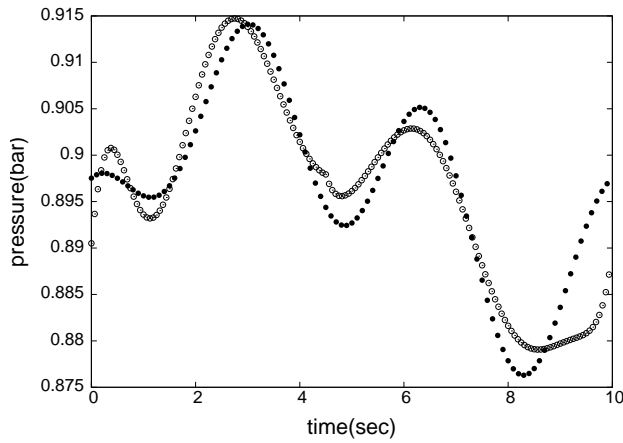
Το σχήμα 7.40 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση πέντε αρμονικών. Ο προσδιορισμός των μεγεθών της ροής σε όλες τις διατομές του αγωγού είναι ικανοποιητικός. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών έτρεξε σε 10535 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης σε 20380 sec. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι 2 φορές πιο γρήγορη στη συγκεκριμένη επιλογή αγωγού και συνάρτησης διέγερσης. Περαιτέρω αύξηση του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δεν βελτιώνει επαρκώς τα αποτελέσματα. Η χρήση πέντε αρμονικών ενδείκνυται για τον υπολογισμό των ροικών μεγεθών σε αυτήν την περίπτωση.

7.2.3 Μη-συνεχής Πολυωνυμική Μεταβολή της Πίεσης Εξόδου

Τα αποτελέσματα του συγκλίνοντα αγωγού για την μη-συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση δύο, τριών, τεσσάρων και πέντε αρμονικών και τα αποτελέσματα της μεθόδου της Χρονο-προέλασης με 160 χρονικά βήματα στην περίοδο παρουσιάζονται στα σχήματα 7.34, 7.36, 7.38 και 7.40 αντίστοιχα που ακολουθούν.



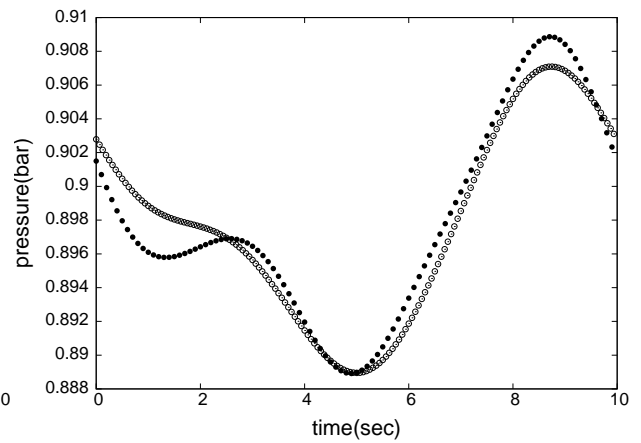
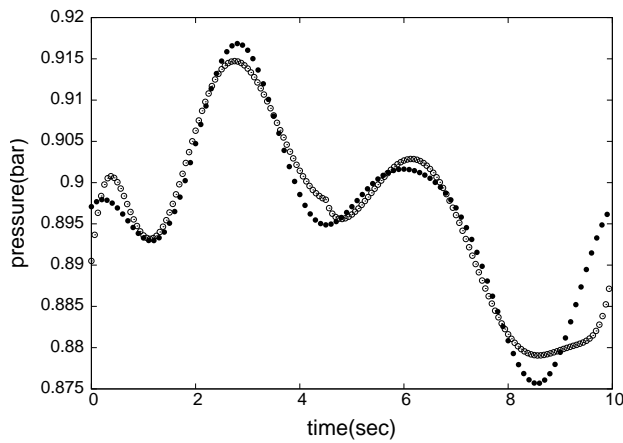
Σχήμα 7.42: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 2 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

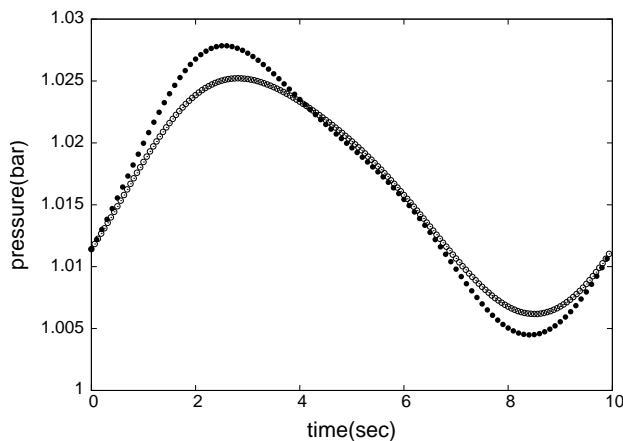
Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.44: Συγκλίτων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 3 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

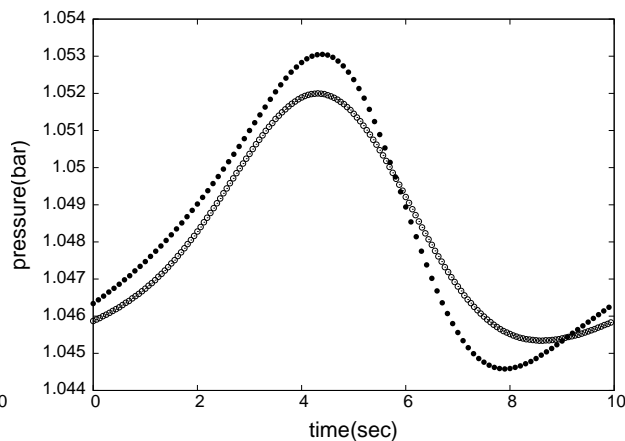


Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.

Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.

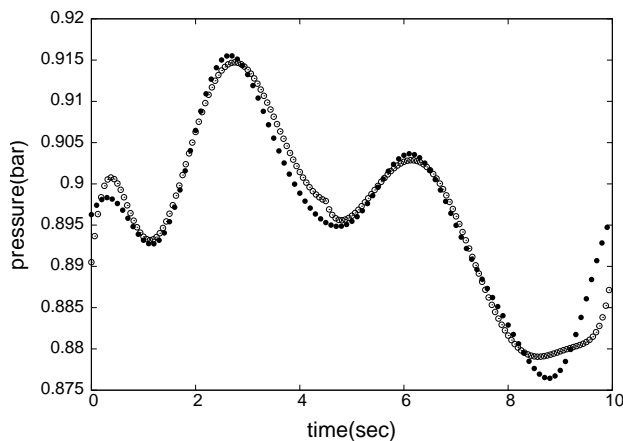


Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.

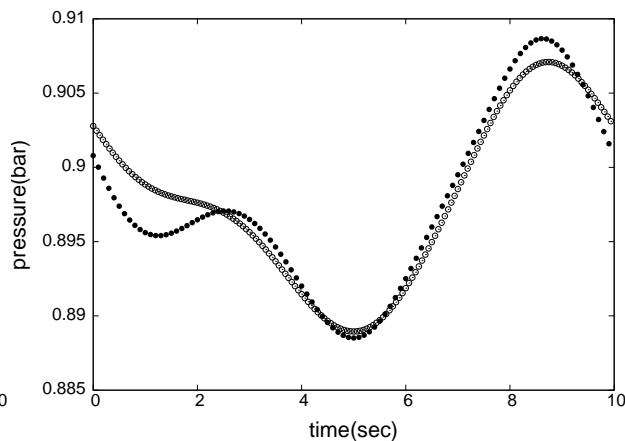


Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

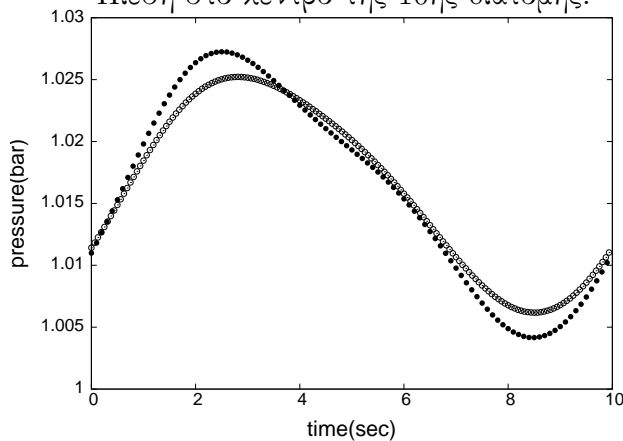
Σχήμα 7.46: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 4 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).



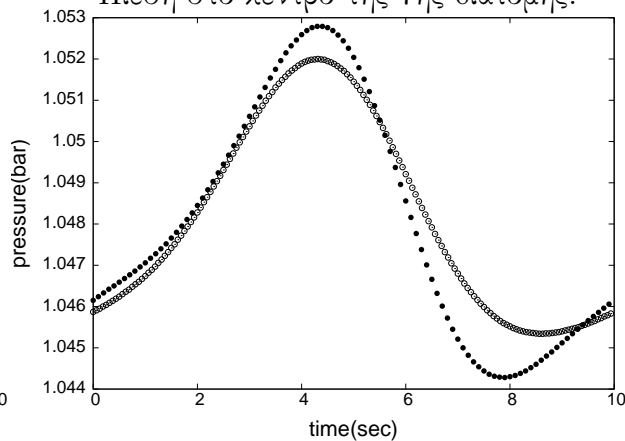
Πίεση στο κέντρο της 10ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 7ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 5ης διατομής.



Πίεση στο κέντρο της 3ης διατομής.

Σχήμα 7.48: Συγκλίνων Αγωγός - Συνάρτηση Διέγερσης (6.3) - Ισορροπία των Αρμονικών με 5 Αρμονικές (μαύροι κύκλοι) και Χρονο-προέλαση με 160 χρονικά βήματα (άδειοι κύκλοι).

Τα αποτελέσματα για την μη-συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου εξήχθησαν χρησιμοποιώντας έναν επεξεργαστή κάρτας γραφικών NVIDIA GTX 580.

Τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών με τη χρήση δύο αρμονικών (σχήμα 7.42) για τη μη-συνεχή πολυωνυμική μεταβολή της πίεσης εξόδου του αγωγού δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά. Με δύο αρμονικές δεν μπορεί η συνάρτηση διέγερσης (6.3) να προσεγγιστεί με ακρίβεια και συνεπώς ούτε τα ροϊκά μεγέθη στις υπόλοιπες διατομές του αγωγού. Στο σημείο ασυνέχειας, στα 4,5 sec της περιόδου, δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις της λύσης ούτε αποκλίσεις, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δεν επηρεάζεται από την ασυνέχεια στο εσωτερικό της περιόδου. Η ασυνέχεια στην αρχή και στο τέλος της περιόδου, στη συνάρτηση διέγερσης (6.3) δημιουργεί ταλαντώσεις, τοπικά, στα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών. Αύξηση του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο παρακάμπτει το πρόβλημα αυτό στα άκρα του πεδίου καθώς το φαινόμενο δεν είναι γραμμικό και δεν επηρεάζονται εξίσου τα αποτελέσματα με τη συνάρτηση διέγερσης.

Το σχήμα 7.44 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση τριών αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.44 - 10η διατομή του αγωγού, δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά με τρεις αρμονικές συνεπώς ούτε τα αποτελέσματα των υπολοίπων διατομών προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης. Απαιτείται αύξηση του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών για περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας των λύσεων. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 5129 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης 20500 sec.

Αυξάνοντας τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών από τρεις σε τέσσερις τα αποτελέσματα είναι καλύτερα, σχήμα 7.46. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.46 - 10η διατομή του αγωγού, προσεγγίζεται ικανοποιητικά με την χρήση τεσσάρων αρμονικών, έτσι στις υπόλοιπες διατομές του αγωγού τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μικρή διαφορά από εκείνα που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 7517 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης σε 20500 sec.

Στο σχήμα 7.48 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών με χρήση πέντε αρμονικών. Η συνάρτηση διέγερσης, σχήμα 7.48 - 10η διατομή του αγωγού, προσεγγίζεται καλύτερα από ότι με την χρήση τεσσάρων αρμονικών. Τα αποτελέσματα στις υπόλοιπες διατομές είναι εξίσου με μικρή απόκλιση από τα αυτά που δίνει η μέθοδος της Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι 2 φορές πιο γρήγορη στις συγκεκριμένες συνθήκες, συνάρτηση διέγερσης και επιλογή αγωγού, αφού η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών χρειάστηκε 10562 sec ενώ η μέθοδος της Χρονο-προέλασης 20500 sec. Δεν ενδείκνυται παραπάνω αύξηση του αριθμού των αρμονικών που χρησιμοποιεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών καθώς ο υπολογιστικός χρόνος των λύσεων μεγαλώνει ενώ δεν παρέχεται επαρκώς μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα - Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Η διπλωματική αυτή εργασία ασχολείται με επεξεργαστές καρτών γραφικών GPUs. Στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ, προυπήρχε κώδικας γραμμένος σε C/CUDA (για επεξεργαστές καρτών γραφικών GPUs) όπου λύνει τις εξισώσεις Euler με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης. Πάνω σε αυτόν προστέθηκε κώδικας που εφαρμόζει τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών έχει αναλυθεί στη διπλωματική εργασία του Γ.Κανέλλη[3], αλλά για εφαρμογή σε κεντρικούς επεξεργαστές (CPUs). Στη διπλωματική αυτή γράφτηκε ξανά για εφαρμογή σε επεξεργαστές καρτών γραφικών, όπου και χρησιμοποιήθηκε επεξεργαστής κάρτας γραφικών μία NVIDIA GTX 580 τεχνολογίας Fermi 2.0, για όλες τις περιπτώσεις συναρτήσεων διέγερσης που μελετήθηκαν καθώς και για τις δύο περιπτώσεις αγωγών που επιλέχθηκαν. Θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο επόμενης διπλωματικής εργασίας, η εφαρμογή της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών σε κώδικα που λύνει τις εξισώσεις Navier-Stokes με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών προτείνεται για την αντιμετώπιση περιοδικών φαινομένων καθώς δεν υπολογίζει το μεταβατικό φαινόμενο αλλά κατευθείαν την περιοδική απόκριση. Μάλιστα, δεν επιλύει σε όλο το εύρος της περιόδου αλλά σε μεμονωμένα σημεία, ισο-κατανομημένα στην περίοδο, και ακολούθως με μία ανάλυση Fourier αναπαράγει ολόκληρο το πεδίο. Λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας, η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών υπολογίζει τα επιθυμητά πεδία λύσεων πιο γρήγορα από τη γενική μέθοδο Χρονο-προέλασης. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε σε δύο αγωγούς, ο ένας σχήματος S και ο δεύτερος συγκλίνων. Στους αγωγούς άλλαζε περιοδικά η πίεση εξόδου, έτσι για κάθε αγωγό εφαρμόστηκαν τρεις συναρτήσεις διέγερσης. Ως συνάρτηση διέγερσης επιλέχτηκε μία ημιτονοειδής συνάρτηση, μία πολυωνυμική συνάρτηση αρκετά σύνθετη και τέλος μία πολυωνυμική πάλι, που παρουσιάζει ασυνέχεια κοντά στο μέσο της περιόδου. Τα αποτελέσματα που έδωσε η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και με βάση αυτά παρατίθενται τα παρακάτω συμπεράσματα.

1. Η μέθοδος υπολογίζει ταυτόσημα αποτελέσματα με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης,

εφόσον η συνάρτηση διέγερσης είναι περιοδική. Σημαντική παράμετρος είναι να έχουν επιλεγεί κατάλληλος αριθμός αρμονικών για την αντιμετώπιση του εκάστοτε φαινομένου.

2. Η χρήση περισσότερων αρμονικών αυξάνει την ακρίβεια της λύσης αλλά αυξάνει και τον χρόνο που απαιτείται για τον υπολογισμό της.
3. Κατά κανόνα ο αριθμός των αρμονικών που απαιτούνται είναι μεγαλύτερος ή ίσος με αυτόν που χρειάζεται για να προσεγγιστεί με ακρίβεια η συνάρτηση διέγερσης. Αυτό συμβαίνει γιατί το φαινόμενο δεν είναι γραμμικό και για να συγκλίνει παντού η λύση, ίσως, χρειάζονται παραπάνω αρμονικές από όσες αρκούν για την συνάρτηση διέγερσης. Στο συγκλίνοντα αγωγό για παράδειγμα, απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός αρμονικών για ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης, από ότι στη περίπτωση του αγωγού σχήματος S.
4. Αν η συνάρτηση διέγερσης δεν είναι περιοδική, τότε δεν μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά το πεδίο των λύσεων στην αρχή και στο τέλος της περιόδου, καθώς παρατηρούνται ταλαντώσεις τοπικά. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων δεν επηρεάζεται το ίδιο, καθώς το φαινόμενο δεν είναι γραμμικό. Τα αποτελέσματα στις διατομές του υπόλοιπου αγωγού προσδιορίζονται επαρκώς αν επιλεγούν περισσότερες αρμονικές. Ένας τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος θα μπορούσε να είναι ο καθορισμός μίας λίγο ευρύτερης περιόδου για την ίδια συνάρτηση (μη περιοδική), διευρυμένη δηλαδή στην αρχή και στο τέλος της. Δηλαδή, αν ενδιαφέρει μία περίοδος 10 sec, αυτή να επεκταθεί, παραδείγματος χάριν, 2 sec στην αρχή και 2 sec στο τέλος της και να υπολογιστούν με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών τα πεδία λύσεων για περίοδο φαινομένου 14 sec. Έτσι θα παρατηρηθούν ταλαντώσεις της λύσης στα άκρα του πεδίου (οχι περιοδική συνάρτηση) αλλά το πραγματικά ζητούμενο πεδίο θα είναι το εσωτερικό (10 sec) όπου και θα έχει προσεγγιστεί ικανοποιητικά. Όπως είναι φανερό μία τέτοια αντιμετώπιση δίνει την δυνατότητα να εφαρμοστεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών σε μη περιοδικές συναρτήσεις αυξάνοντας όμως τον χρόνο που απαιτείται καθώς κάνει υπολογισμούς για μεγαλύτερο χρονικό πεδίο από το ζητούμενο. Ένας εναλλακτικός τρόπος να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα των ταλαντώσεων σε μη περιοδικές συναρτήσεις, ίσως, είναι η διαμόρφωση της συνάρτησης διέγερσης έτσι ώστε να μεταφερθεί η ασυνέχεια που οφείλεται στην μη περιοδικότητα στο εσωτερικό της ζητούμενης περιόδου, αφού η μέθοδος, την εσωτερική ασυνέχεια την αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο χωρίς την ύπαρξη ταλαντώσεων. Θα μπορούσε να ξεκινάει η συνάρτηση από το μέσο της περιόδου και μόλις φτάσει στο τέλος να συνεχίσει για το άλλο μισό από την αρχή. Έτσι θα υπάρχει ασυνέχεια λόγω μη περιοδικότητας της συνάρτησης, στο μέσο της περιόδου, αλλά στα άκρα (αρχή και τέλος) της θα είναι κανονικά συνεχής. Μια τέτοια μελέτη θα μπορούσε να αποτελεί πεδίο ενασχόλησης επόμενης διπλωματικής εργασίας.
5. Η μέθοδος είναι πιο γρήγορη από τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης και σε καθαρά περιοδικά φαινόμενα η λύση που προσφέρει είναι ταυτόσημη. Μάλιστα με επαρκή αριθμό αρμονικών ώστε να πετυχαίνεται το μέγιστο καλύτερο αποτέλεσμα η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών μπορεί να ολοκληρώσει τον υπολογισμό των ζητούμενων πεδίων λύσεων έως και στον μισό χρόνο από ότι η μέθοδος της Χρονο-προέλασης.

6. Αρνητικό της μεθόδου είναι το μέγεθος της μνήμης που χρειάζεται, καθώς είναι $N_T = 2N_H + 1$ φορές το πεδίο των λύσεων, όπου N_H ο αριθμός των αρμονικών. Αντίθετα, η μέθοδος της Χρονο-προέλασης απαιτεί μία φορά το πεδίο των λύσεων στην μνήμη, αφού σε κάθε χρονικό βήμα το ανανεώνει. Εδώ να προστεθεί ότι αναφέρεται μνήμη του επεξεργαστή κάρτας γραφικών (GPU) όπου τα περιθώρια θεωρητικά είναι πιο μικρά από ότι αν η μέθοδος έτρεχε στον κεντρικό επεξεργαστή (CPU) και χρησιμοποιούσε την κεντρική μνήμη του υπολογιστή. Παρ' όλα αυτά δεν υπάρχει μεγάλος πρόβλημα καθώς η μνήμη είναι αρκετή για πολλές αρμονικές (ειδικά όπως προχωρά η τεχνολογία καρτών γραφικών, η προσφερόμενη μνήμη είναι όλο ένα και περισσότερη). Προφανώς το μέγιστο πλήθος αρμονικών εξαρτάται από το μέγεθος του πεδίου των λύσεων.

Βιβλιογραφία

- [1] A.Da Ronch, M. Ghoreysky, K.J. Badcock S.Görtz M. Widhalm R.P. Dwight: *Linear frequency domain and harmonic balance predictions of dynamic derivatives*. 2006.
- [2] Sanders, J. and Kandrot, E.: *CUDA by example: An introduction to General-Purpose GPU Programming*. Addison-Wesley, 2010.
- [3] Γ.Κανέλλης: *Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής. Διπλωματική εργασία. Αθήνα.*
- [4] Τσαγκάρης, Σωκράτης: *Μηχανική των Ρευστών*. Αθήνα.
- [5] Κ.Χ.Γιαννάκογλου: *Θερμικές Σροβιλομηχανές*. Αθήνα.
- [6] Roe, P.: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 43(2):357–372, 1981.
- [7] Kenneth C. Hall, Jeffrey P.Thomas and Clark, W.S.: *Computation of unsteady non-linear flows in cascades using a harmonic balance technique*. AIAA, 40(5), 2002.
- [8] Arathi K. Gopinath, Edwin van der Weide, Juan J. Alonso Antony Jameson Kivanc Ekici and Hall, Kenneth C.: *Three-dimensional unsteady multi-stage turbomachinery simulations using the harmonic balance technique*.