Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
& Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Μαθηματική προτυποποίηση στις σύγχρονες επιστήμες και την
οικονομία

Διπλωματική Εργασία
Μη Γραμμικοί Τελεστές Μονότονου Τύπου
Εφαρμογές σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών
Σταύρος Α. Βουδούρης

Επιβλέπων Καθηγητής: Γεώργιος Σμυρλής

ΑΘΗΝΑ 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές Γεώργιο Σμυρλή και Δημήτριο Κραββαρίτη για την καθοδήγηση τους και τη συνεισφορά τους στην εκπόνηση αυτής της εργασίας καθώς και τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής Ιωάννη Τσιniά και Βασίλειο Παπανικολάου.

Μη Γραμμικοί Τελεστές Μονότονου Τύπου και Εφαρμογές σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

12 Απριλίου 2014

Πρόλογος.

Η ύλη η οποία περιλαμβάνεται στις σελίδες που ακολουθούν, όπως θα διαπιστώσετε από τα περιεχόμενα, ταξινομείται σε μέρος A και μέρος B. Το μέρος A, περιλαμβάνει, την ύλη του αντικειμένου αυτής της εργασίας (μη γραμμικοί τελεστές μονότονου τυπου και εφαρμογές σε Π.Σ.Τ.)

Το μέρος B, περιλαμβάνει, υπό μορφή παραρτημάτων το αναγκαίο υπόβαθρο, το οποίο θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση του μέρους A, λόγω του μεγάλου πλήθους εννοιών και συμπερασμάτων που υπεισέρχονται σ'αυτό και θεωρούνται γνωστά ώστε η αναφορά και η υπενθύμιση να είναι εύκολη.

Στο τέλος αυτών των σελίδων αναφέρεται η Βιβλιογραφία της οποίας έγινε χρήση.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Γραμμικότητα και μη γραμμικότητα

Στις επόμενες παραγράφους θα εισάγουμε τις ιδέες της γραμμικότητας και της μη γραμμικότητας. Ο διαχωρισμός των μερικών και των συνήθων διαφορικών εξισώσεων στις δύο αυτές διαφορετικές κατηγορίες είναι σημαντικός. Εκτός από το ότι οι γραμμικές εξισώσεις γενικά, λύνονται ευκολότερα, το σύνολο των λύσεών τους έχει μία γραμμική αλγεβρική δομή, δηλαδή το άθροισμα δύο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής εξίσωσης είναι και αυτό λύση όπως επίσης και κάθε σταθερό πολλαπλάσιο μιας λύσης. Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως και στις μη γραμμικές εξισώσεις. Το άθροισμα δυο λύσεων ή το γινόμενο μιας λύσης με μία σταθερά, δεν είναι απαραίτητα λύση. Στις μη γραμμικές εξισώσεις δεν ισχύει η αρχή της πρόσθεσης ή της επαλληλίας των λύσεων. Η αρχή της επαλληλίας των λύσεων των γραμμικών εξισώσεων πολύ συχνά μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε λύσεις που μπορούν να ικανοποιήσουν διάφορες αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Μάλιστα, η παρατήρηση αυτή αποτελεί τη βάση της μεθόδου Fourier ή μεθόδου αναπτυγμάτων σε ιδιοσυναρτήσεις για γραμμικές εξισώσεις. Οι γραμμικές εξισώσεις μπορούν επίσης να λυθούν με τη χρήση μεθόδων-μετασχηματισμών όπως είναι οι μετασχηματισμοί Laplace και Fourier. Συνοψίζοντας, θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι υπάρχει μία βαθειά και ουσιαστική διαφορά μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών προβληματων.

Για να διατυπώσουμε σαφέστερα τις έννοιες αυτές, θεωρούμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \tag{1.1}$$

ορίζει ένα διαφορικό τελεστή L που δρα στην άγνωστη συναρτηση $u(x, t)$ και γράφουμε την εξίσωση (1.1) στη μορφή

$$Lu(x, t) = f(x, t), \text{ με } (x, t) \in D$$

ή παραλείποντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές, στη μορφή

$$Lu = f, \text{ με } (x, t) \in D \tag{1.2}$$

Στην (1.2) όλοι οι όροι στους οποίους υπάρχει η u έχουν μεταφερθεί στο αριστερό μέλος και συγχωνευθεί στον όρο Lu. Στο δεύτερο μέλος, η f είναι γνωστή συνάρτηση. Αν $f = 0$ στο D, τότε η (1.2) λέγεται ομογενής και αν η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε η (1.2) λέγεται μη ομογενής. Η εξίσωση της θερμότητας $u_t - ku_{xx} = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $Lu = 0$, όπου L είναι ο διαφορικός τελεστής (με μερικές παραγώγους) $\partial/\partial t - k\partial^2/\partial x^2$, και είναι προφανώς ομογενής. Η μερική διαφορική εξίσωση $uu_t + 2txu - sintx = 0$, γράφεται ώς $Lu = sintx$, όπου ο διαφορικός τελεστής L ορίζεται από τη σχεση $Lu = uu_t + 2txu$. Η εξίσωση αυτή είναι μη ομογενής. Η έννοια της γραμμικότητας εξαρτάται από τον τελεστή L στη (1.2). Λέμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση (1.2) είναι γραμμική αν ο L έχει τις ιδιότητες

(i). $L(u + w) = L(u) + L(w)$,

(ii). $L(cu) = cL(u)$,

όπου u, w είναι συναρτήσεις και c είναι σταθερά. Αν η (1.2) δεν είναι γραμμική, τότε λέγεται μη γραμμική.

***Παράδειγμα* 1.1.** *Η εξίσωση θερμότητας $u_t - ku_{xx} = 0$, $t > 0, 0 < x < 1$ είναι γραμμική. Πράγματι,*

$$\begin{aligned} L(u + w) &= (u + w)_t - k(u + w)_{xx} \\ &= u_t + w_t - ku_{xx} - kw_{xx} \\ &= Lu + Lw \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(cu) &= (cu)_t - k(cu)_{xx} \\ &= cu_t - cku_{xx} \\ &= cLu \end{aligned}$$

***Παράδειγμα* 1.2.** *Η διαφορική εξίσωση $uu_t + 2txu = sintx$ είναι μη γραμμική αφού,*

$$\begin{aligned} L(u + w) &= (u + w)(u + w)_t + 2tx(u + w) \\ &= uu_t + wu_t + uw_t + ww_t + 2txu + 2txw \end{aligned}$$

αλλά

$$Lu + Lw = uu_t + 2txu + ww_t + 2txw$$

Παρατηρούμε ότι ο μη ομογενής όρος $sintx$ δεν επηρεάζει τη γραμμικότητα ή τη μη γραμμικότητα. Είναι φανερό ότι η $Lu = f$ είναι γραμμική αν η Lu ειναι πρώτου βαθμού ως προ τη συνάρτηση u και τις παραγώγους της. Άρα η γενικότερη γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης είναι της μορφής

$$\begin{aligned} &a(x,t)u_{tt} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{xx} \\ &\quad + d(x,t)u_t + e(x,t)u_x + g(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in D \end{aligned} \tag{1.3}$$

όπου a, b, c, d, e, f, g είναι δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις στο D. Αν κάποιος από τους συντελεστές $a, \ldots, g$ εξαρτάται από τη u, θα λέμε ότι η εξίσωση είναι σχεδόν γραμμική (quasi linear).

Γνωρίζουμε ότι η (1.3) είναι υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική σε ένα χωρίο D αν η παράσταση $b(x,t)^2 - 4a(x,t)c(x,t)$ είναι θετική, μηδέν ή αρνητική, αντίστοιχα στο χωρίο αυτό. Π.χ. η εξίσωση θερμότητας $u_t - ku_{xx} = 0$ έχει $b^2 - 4ac = 0$, οπότε είναι παραβολική σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

Επαλληλία

Έστω $Lu = 0$ μια ομογενής, γραμμική εξίσωση και έστω ότι και οι συναρτήσεις u_1 και u_2 είναι λύσεις της. Τότε προφανώς έπεται ότι και η $u_1 + u_2$ είναι λύση, αφού

$$L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2 = 0 + 0 = 0.$$

Επίσης και η cu_1 είναι λύση, αφού $L(cu_1) = cLu_1 = c \cdot 0 = 0$. Μία απλή επαγωγική απόδειξη δείχνει ότι αν $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι λύσεις της εξίσωσης $Lu = 0$ και $c_1, \ldots, c_n$ είναι σταθερές, τότε ο γραμμικός συνδυασμός $cu_1 + \ldots + c_n u_n$ είναι επίσης λύση. Αυτή είναι η αρχή της επαλληλίας για γραμμικές, ομογενείς εξισώσεις. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις για τη σύγκλιση, η αρχή της επαλληλίας μπορεί να επεκταθεί και σε σειρές συναρτήσεων $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots$

Μια άλλη μορφή επαλληλίας είναι ένα συνεχές ανάλογο της αρχής που μόλις αναφέραμε. Έστω $u(x, t, a)$ μια οικογένεια λύσεων στο χωρίο D, όπου a μια πραγματική μεταβλητή που ανήκει σε ένα διάστημα Γ. Δηλαδή, ας υποθέσουμε ότι η $u(x, t, a)$ είναι λύση της εξίσωσης $Lu = 0$ για κάθε $a \in \Gamma$. Πότε μπορούμε, φορμαλιστικά, να χρησιμοποιήσουμε την επαλληλία και να κατασκευάσουμε τη συναρτηση,

$$v(x, t) = \int_\Gamma c(a)u(x, t, a)da$$

όπου $c(a)$ είναι μία συνάρτηση που παριστάνει ένα συνεχές σύνολο συντελεστών, ανάλογο των $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

Αν είναι δυνατό να δικαιολογήσουμε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} Lv &= L\int_\Gamma c(a)u(x, t, a)da \\ &= \int_\Gamma c(a)Lu(x, t, a)da \\ &= \int_\Gamma c(a) \cdot 0da = 0, \end{aligned}$$

τότε η v είναι επίσης λύση της $Lu = 0$. Τα παραπάνω διαδοχικά βήματα, δηλαδή η αρχή της επαλληλίας, εξαρτώνται από το αν μπορούμε να εναλλάξουμε τον τελεστή L και την ολοκλήρωση. Για να ισχύει εδώ η αρχή της επαλληλίας, τα βήματα αυτά απαιτούν προσεκτική και αυστηρή επαλήθευση.

***Παράδειγμα* 1.3.** *Θεωρούμε την εξίσωση θερμότητας*

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση,

$$u(x, t; a) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-a)^2/4kt}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

είναι λύση της (1.4). *Η λύση αυτή λέγεται θεμελιώδης λύση. Εφαρμόζοντας φορμαλιστικά την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε το ολοκλήρωμα*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(a)\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-a)^2/4kt}da,$$

όπου $c(a)$ *είναι κάποια συνάρτηση. Τότε, αν η* c *είναι συνεχής και φραγμένη, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να παραγωγίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα και επομένως ότι η* u *είναι λύση.*

Η μελέτη μη γραμμικών συναρτήσεων είναι αντικείμενο της μη γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης. Όλες οι γνωστές έννοιες των γραμμικών συναρτήσεων (τελεστών) έχουν το ανάλογό τους στις μη γραμμικές συναρτήσεις (τελεστές) και κάποιες επιπλέον έννοιες. Θεωρητικός σκοπός της μη γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης είναι η απλοποίηση και ενοποίηση αποτελεσμάτων της μη γραμμικής κλασσικής ανάλυσης και πρακτικός σκοπός αυτής της μελέτης είναι οι εφαρμογές σε μη γραμμικές εξισώσεις που περιγράφονται με μη γραμμικούς τελεστές, σε ένα περιβάλλον συγκεκριμένων συναρτησιακών χώρων που επεμβαίνουν στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Όλες οι μη ομογενείς εξισώσεις (διαφορικές, ολοκληρωτικές, συναρτησιακές κ.τ.λ.) μελετώνται σε ένα χώρο Banach $\mathcal{X}$, και γράφονται ως εξής,

$$(A - \lambda I)f = g, \quad f, g \in \mathcal{X}, g \neq 0.$$

Αν τώρα ο τελεστής $A-\lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $f = (A-\lambda I)^{-1}g$ και στην περιπτωση που γνωρίζουμε πως δρά ο τελεστής $(A - \lambda I)^{-1}$, τότε η άγνωστη f, δηλαδή η λύση της εξίσωσης $(A - \lambda I)f = g$ είναι

$$f = (A - \lambda I)^{-1}g.$$

Μια άλλου είδους προσέγγιση τέτοιων προβλημάτων σκιαγραφείται με το παράδειγμα που ακολουθεί. Ας θεωρήσουμε το κλασσικό πρόβλημα Dirichlet:

Να βρεθεί $u \in \mathcal{X} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ώστε

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

Συμβολίζουμε με $(-\Delta)^{-1}$ τον αντίστροφο τελεστή (χωρίς να ξέρουμε τη μορφή του) και υποθέτοντας ότι υπάρχει, θα προέκυπτε

$$u = (-\Delta)^{-1}f(u(x)).$$

Θέτοντας

$$(-\Delta)^{-1}f(u(x)) = T$$

έχουμε

$$u = T(u).$$

Οπότε αν αποδείξουμε ότι ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο το πρόβλημα έχει λυθεί (υπαρξιακά). Ωστόσο προκύπτουν πολλά ερωτήματα σε σχέση με την παραπάνω διαδικασία, όπως, υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής $(-\Delta)^{-1}$ του $-\Delta$; Ποια είναι η μορφή του; Η εικόνα $T(u)$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$;

Επίσης ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης της ύπαρξης, μίας τουλάχιστον λύσης μίας γενικής εξίσωσης $T(x) = y$ όπου

$$T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

απεικόνιση και $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ μετρικοί χώροι με νόρμα, Banach, Hilbert κ.τ.λ., είναι να καταφέρουμε να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Τότε για κάθε $y_0 \in \mathcal{Y}$ θα υπάρχει $x_0 \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $T(x_0) = y_0$.

Σημαντικές έννοιες στη θεωρία των μη γραμμικών είναι αυτές της συνέχειας (με τις διάφορες παραλλαγές της) της μονοτονίας, της ψευδομονοτονίας, της κυρτότητας (τελεστών και συνόλων) των γραμμικών και των διγραμμικών συναρτησιακών καθώς και οι έννοιες της ασθενούς κάτω ημισυνέχειας, της πιεστικότητας, της Frechet παραγώγου, της Gateaux παραγώγου κτλ.

Μία κλάση τελεστών που έχει μελετηθεί αρκετά στη μη γραμμική συναρτησιακή ανάλυση είναι αυτή των μονότονων τελεστών η οποία γενικεύει την έννοια των θετικών γραμμικών τελεστών. Θα ξεκινήσουμε με τους προαπαιτούμενους ορισμούς και στη συνέχεια θα αναφερθούμε μέσω θεωρημάτων, πορισμάτων, λημμάτων σε συμπερασματα-αποτελέσματα των μεταξύ τους σχέσεων και στους τελεστές Nemytski. Τέλος θα επιχειρήσουμε την εφαρμογή των παραπάνω στην επίλυση γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων στηριζόμενοι στα βασικά θεωρήματα του Κεφαλαίου 4.

Κεφάλαιο 2

Βασικοί ορισμοί και παραδείγματα

Ορισμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε συγκεντρωμένους τους ορισμούς των εννοιών που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, στα υπόλοιπα κεφάλαια, καθώς επίσης και σχετικά παραδείγματα για πληρέστερη κατανόηση. Προτιμήθηκε αυτός ο τρόπος παρουσίασης των εννοιών (αντί να αναφέρονται στο σημείο που είναι απαραίτητες), ώστε να εντοπιστούν, για αρκετές από αυτές, οι μεταξύ τους *λεπτές* διαφορές. Ας τις χαρακτηρίσουμε *κεντρικές έννοιες* για διάκριση από τις υπόλοιπες έννοιες που εμπλέκονται, και είναι πάρα πολλές, τις οποίες θα χαρακτηρίσουμε ως *βασικές έννοιες*, των οποίων οι ορισμοί και οι ιδιότητες βρίσκονται στα αυτοτελή παραρτήματα στο τέλος αυτής της εργασίας.

Έστω λοιπόν $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Έχουμε ορίσει ως αλγεβρικό δυϊκό χώρο του $\mathcal{X}$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{X}^\#$ το σύνολο

$$\mathcal{X}^\# = \{g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : g \text{ γραμμική}\}$$

και ως τοπολογικό δυϊκό ή συζυγή του $\mathcal{X}$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{X}^*$ το σύνολο

$$\mathcal{X}^* = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : f \text{ γραμμική, συνεχής (φραγμένη)}\}.$$

Προφανώς ισχύει ότι $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}^\#$ και ο $\mathcal{X}^*$ είναι χώρος Banach.

Θεωρούμε το δυναμοσύνολο $P(\mathcal{X}^*)$ του $\mathcal{X}^*$ και έναν τελεστή

$$A : \mathcal{X} \to P(\mathcal{X}^*).$$

Ο A μπορεί να είναι πλειονότιμος, δηλαδή π.χ.

$$x \in \mathcal{X} \to A(x) = \{f_1, f_2, f_3\},$$

ή ο A μπορεί να είναι μονότιμος, δηλαδή π.χ.

$$x \in \mathcal{X} \to A(x) = \{f\}.$$

Γενικότερα, ως ένα παράδειγμα πλειονότιμης απεικόνισης μπορούμε να αναφέρουμε την απεικόνιση η οποία σε κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση αντιστοιχεί το αόριστο ολοκλήρωμά της. Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του μονότονου τελεστή.

***Ορισμός* 2.1.** *Έστω $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\mathcal{X}^*)$. Αν ο A είναι πλειονότιμος θα λέμε ότι είναι* μονότονος *αν*
$$\langle f_x - f_y, x - y \geq 0,$$
για κάθε $x, y \in D(A)$, για κάθε $f_x \in A(x)$ και για κάθε $f_y \in A(y)$. Αν ο A είναι μονότιμος, ας τον συμβολίζουμε με T, θα λέμε ότι

(i). *είναι* μονότονος *αν και μόνο αν*
$$\langle T_x - T_y, x - y\rangle \geq 0, \text{ για κάθε } x, y \in D(T),$$
ή
$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0, \text{ για κάθε } x, y \in D(T).$$
Αξίζει να σημειωθεί ότι τα T_x, T_y, είναι γραμμικά, συνεχή συναρτησιακά επί του $\mathcal{X}$. Να θυμίσουμε επίσης ότι αν $x^* \in \mathcal{X}^*$ και $x \in \mathcal{X}$, τότε $\langle x^*, x\rangle := x^*(x)$ και με x^*_x συμβολίζουμε το στοιχείο του $\mathcal{X}^*$ με το οποίο αντιστοιχεί ο T το $x \in D(T) \subset \mathcal{X}$, ως άλλο τρόπο αναπαράστασης του $T_x \in \mathcal{X}^*$.

(ii). *είναι* γνησίως μονότονος *αν και μόνο αν*
$$\langle T_x - T_y, x - y\rangle > 0, \text{ για κάθε } x, y \in D(T), \text{ με } x \neq y.$$

(iii). *είναι* αυστηρά μονότονος *αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ ώστε*
$$\langle T_x - T_y, x - y\rangle > c\|x - y\|^2, \text{ για κάθε } x, y \in D(T)$$

***Ορισμός* 2.2.** *Έστω $A : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\mathcal{X}^*)$ ένας τελεστής (μονότιμος ή πλειονότιμος). Ορίζουμε ως* γράφημα *του A το σύνολο*
$$G(A) = \{[x, f_x] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*, \text{ τέτοια ώστε } f_x \in A(x)\}.$$

***Ορισμός* 2.3.** *Θεωρούμε το σύνολο*
$$M = \{A : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\mathcal{X}^*), \text{ όπου } A \text{ μονότονος τελεστής}\}$$
και έστω $A_1, A_2 \in M$. Θα λέμε ότι ο A_1 είναι μικρότερος ή ίσος του A_2 και θα συμβολίζουμε με $A_1 \leq A_2$ αν και μόνο αν
$$G(A_1) \subset G(A_2).$$

***Ορισμός* 2.4.** *Έστω A ένας μονότονος τελεστής με $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$. Θα λέμε ότι ο A είναι* μεγιστικά μονότονος *αν για A' μονότονο τελεστή με $A \leq A'$ ισχύει $A = A'$. Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Θα λέμε ότι ο μονότονος τελεστής*
$$T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
είναι μεγιστικά μονότονος *αν και μόνο αν*
$$R(T + I) = \mathcal{H},$$
δηλαδή για κάθε $h \in \mathcal{H}$ υπάρχει $x \in D(T) \subset \mathcal{H}$ ώστε
$$(T + I)(x) = h.$$

Ορισμός 2.5. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* συνεχής στο $x_0 \in \mathcal{X}$ *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$ ισχύει ότι*

$$T(x_n) \to T(x_0).$$

Ο T λέγεται συνεχής στον $\mathcal{X}$ αν είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Ορισμός 2.6. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* demicontinuous στο $x_0 \in \mathcal{X}$ *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$ ισχύει ότι $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$. Αν ο T είναι demicontinuous σε κάθε $x \in \mathcal{X}$ λέγεται* demicontinuous στον $\mathcal{X}$.

Ορισμός 2.7. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* hemicontinuous *αν και μόνο αν η πραγματική συνάρτηση*

$$t \to \langle T(x + ty), w\rangle, \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

είναι συνεχής για κάθε $x, y, w \in \mathcal{X}$,

ή

Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται hemicontinuous στο $x \in \mathcal{X}$ *αν για κάθε ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $t_n \to 0$ και $t_n > 0$, η ακολουθία $(T(x+t_n y))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο $T(x)$ για κάθε $y \in \mathcal{X}$.*

Ορισμός 2.8. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* ασθενώς συνεχής στο $x_0 \in \mathcal{X}$ *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x_0$ καθώς $n \to \infty$ ισχύει ότι $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$.*

Ορισμός 2.9. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* ισχυρά συνεχής στο x_0 *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x_0$ καθώς $n \to \infty$ ισχύει ότι $T(x_n) \to T(x_0)$.*

Ορισμός 2.10. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* Lipschitz συνεχής στον $\mathcal{X}$ *αν υπάρχει σταθερά K με $0 < K < \infty$ ώστε*

$$\|T(x) - T(y)\|_{\mathcal{X}^*} \leq K\|x - y\|_{\mathcal{X}}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{X}.$$

Είναι προφανές ότι κάθε Lipschitz συνεχής τελεστής είναι και συνεχής. Επίσης κάθε γραμμικός φραγμένος τελεστής είναι Lipschitz συνεχής.

Ορισμός 2.11. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* τοπικά φραγμένος στο $x_0 \in \mathcal{X}$ *αν υπάρχει περιοχή $V(x_0)$ τέτοια ώστε το σύνολο $T(V(x_0))$ είναι φραγμένο στον $\mathcal{X}^*$. Ο T λέγεται* τοπικά φραγμένος στον $\mathcal{X}$ *αν είναι τοπικά φραγμένος για κάθε $x \in \mathcal{X}$, ή αλλιώς αν για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχουν $\varepsilon > 0$, $K > 0$, ώστε για κάθε $y \in \mathcal{X}$ με $\|x - y\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$ ισχύει $\|Ty\|_{\mathcal{X}^*} \leq K$.*

Ορισμός 2.12. *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ μη γραμμικός τελεστής και $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο T λέγεται* ψευδομονότονος *αν η ισχύς των προϋποθέσεων*

(i). *για* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ *με* $x_n \rightharpoonup x \in \mathcal{X}$ *και* $T(x_n) \rightharpoonup y \in \mathcal{X}^*$

(ii).
$$\limsup \langle T(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$

συνεπάγεται ότι

(a). $y = T(x)$

(b). $\langle T(x_n), x_n\rangle \to \langle T(x), x\rangle$.

***Ορισμός* 2.13.** *Έστω* $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *μη γραμμικός τελεστής και* $\mathcal{X}$ *ένας χώρος Banach. Ο* T *λέγεται* πιεστικός (coercive) *αν και μόνο αν*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle T(x), x\rangle}{\|x\|} = \infty.$$

Ειδικά αν είναι $\mathcal{X} = \mathbb{R}$*, ο* T *λέγεται πιεστικός αν και μόνο αν*

$$\lim_{x\to\infty} T(x) = +\infty.$$

***Ορισμός* 2.14.** *Έστω* $f : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, όπου* Θ *ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$*. Θα λέμε ότι η* f *είναι* συνάρτηση Καραθεοδωρή *αν ικανοποιούνται οι συνθήκες*

(i). $x \mapsto f(x, s)$ *είναι μετρήσιμη για κάθε* $s \in \mathbb{R}$.

(ii). $s \mapsto f(x, s)$ *είναι συνεχής για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει επίσης ότι αν η f *είναι συνάρτηση Καραθεοδωρή και η* $u : \Theta \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμη, τότε η συνάρτηση* $f(\cdot, u(\cdot)) : \Theta \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμη.*

***Ορισμός* 2.15.** *Έστω* $f : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, όπου* Θ *ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$*. Θα λέμε ότι η* f *ικανοποιεί τη* συνθήκη αύξησης, τάξεως $p - 1 > 0$ *(growth condition) αν για κάθε* $x \in \Theta$ *και για κάθε* $y \in \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$|f(x, y)| \leq |a(x)| + b|y|^{p-1},$$

με $a \in \mathcal{L}^q(\Theta)$ *και* $b > 0$ *σταθερά, όπου* $1/p + 1/q = 1$.

***Ορισμός* 2.16.** *Έστω* $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ *ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$*. Έστω επίσης συνάρτηση* $f : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Καραθεοδωρή καθώς και τη συνθήκη αύξησης τάξεως* $p - 1 > 0$*. Ορίζουμε τον τελεστή* $F : \mathcal{L}^p(\Theta) \to \mathcal{L}^q(\Theta)$*, όπου* $1/p + 1/q = 1$*, ώστε*

$$(Fu)(x) := f(x, u(x)), \text{ για κάθε } u \in \mathcal{L}^p(\Theta), x \in \Theta.$$

Ο τελεστής F *ονομάζεται* τελεστής Nemytski.

Το παρακάτω θεώρημα περιγράφει μία χαρακτηριστική ιδιότητα του τελεστή Nemytski.

***Θεώρημα* 2.17.** *Έστω $f : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Καραθεοδωρή καθώς και τη συνθήκη αύξησης τάξεως $p-1>0$. Τότε, ο τελεστής Nemytski F απεικονίζει τον $\mathcal{L}^p(\Theta)$ στον $\mathcal{L}^q(\Theta)$.*

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{L}^p(\Theta)$. Τότε, η $u(x)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, οπότε υπάρχει ακολουθία $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ κλιμακωτών συναρτήσεων τέτοια ώστε $u_n(x) \to u(x)$ σχεδόν παντού στο Θ. Από τη δεύτερη συνθήκη Καραθεοδωρή έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(x,u_n(x)) = f(x,u(x)) = (Fu)(x), \text{ σχεδόν παντού στο } \Theta. \tag{2.1}$$

Θεωρούμε

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{M(n)} c_i^n X_{\Theta_i^n}(x),$$

όπου Θ_i^n είναι μετρήσιμα υποσύνολα του Θ, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$f(x,u_n(x)) = f\left(x, \sum_{i=1}^{M(n)} c_i^n X_{\Theta_i^n}(x)\right) = \sum_{i=1}^{M(n)} f(x,c_i^n) X_{\Theta_i^n}(x).$$

Επομένως, η $f(x,u_n(x))$ είναι μετρήσιμη αφού οι συναρτήσεις $f(x,c_i^n)$ είναι μετρήσιμες. Οπότε, από τη σχέση (2.1) έπεται ότι και η $(Fu)(x)$ είναι μετρήσιμη ως όριο μετρήσιμων συναρτήσεων. Επί πλέον, η f πληροί τη συνθήκη αύξησης τάξεως $p-1>0$ και ως γνωστόν ισχύει

$$(a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p), \text{ για κάθε } a,b \in \mathbb{R} \text{ με } a>0, b>0.$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} |(Fu)(x)|^q = |f(x,u(x))|^q &\le (|a(x)| + b|u(x)|^{p-1})^q \\ &\le 2^q(|a(x)|^q + b^q|u(x)|^{(p-1)q}) \\ &= 2^q(|a(x)|^q + b^q|u(x)|^p). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Όμως, η συνάρτηση $(|a(x)|^q + b^q|u(x)|^p)$ είναι ολοκληρώσιμη ως άθροισμα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, οπότε από τη σχέση (2.2) έπεται ότι και η $|(Fu)(x)|^q = |f(x,u(x))|^q$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, για κάθε $u \in \mathcal{L}^p(\Theta)$, η $(Fu) \in \mathcal{L}^q(\Theta)$ και έτσι ο τελεστής Nemytski F είναι καλώς ορισμένος. □

Παραδείγματα

***Παράδειγμα* 2.18.** *Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε*

(a). *η f είναι μονότονη αν και μόνο αν είναι αύξουσα, αφού*

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = (f(x) - f(y))(x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

δηλαδή, ή

$$f(x) \leq f(y) \text{ για } x < y, \text{ με } x, y \in \mathbb{R},$$

ή

$$f(x) \geq f(y) \text{ για } x > y, \text{ με } x, y \in \mathbb{R},$$

και έτσι η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(b). *η f είναι γνήσια μονότονη αν και μόνο αν είναι γνησίως αύξουσα, διότι ισχύουν τα παραπάνω χωρίς το ίσον.*

(c). *η f είναι αυστηρά μονότονη αν και μόνο αν*

$$\inf\left\{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \text{ με } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq y\right\} > 0$$

***Παράδειγμα* 2.19.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση και $c > 0$ ώστε $f'(x) - f'(y) \geq c(x-y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \geq y$. Τότε η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά μονότονη διότι έχουμε*

$$\frac{f'(x) - f'(y)}{x - y} \geq c, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ με } x > y$$

οπότε,

$$\inf\left\{\frac{f'(x) - f'(y)}{x - y}, \text{ με } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq y\right\} > 0,$$

και έτσι η f' είναι αυστηρά μονότονη σύμφωνα με το παράδειγμα 2.18.

***Παράδειγμα* 2.20.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση και $c > 0$ ώστε $f''(x) \geq c$, για κάθε$x \in \mathbb{R}$. Τότε η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά μονότονη διότι*

$$\langle f'(x) - f'(y), x - y \rangle \geq c|x - y|^2,$$

δηλαδή

$$(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq c(x - y)^2, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}, c > 0.$$

Το ζητούμενο έπεται από το παράδειγμα 2.19.

***Παράδειγμα* 2.21.** *Να θυμίσουμε ότι ένας τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, όπου $\mathcal{X}$ χώρος Banach λέγεται*

(i). *θετικός αν $\langle T(x), x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$,*

(ii). *γνήσια θετικός αν $\langle T(x), x \rangle > 0$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$,*

(iii). *αυστηρά θετικός αν* $\langle T(x), x\rangle \geq c\|x\|^2$*, για κάθε* $x > 0$ *και* $c > 0$.

Ας υποθέσουμε ότι ο τελεστής T *είναι γραμμικός. Τότε*

(a). *Ο* T *είναι μονότονος αν και μόνο αν είναι θετικός διότι*

$$\langle T(x-y), x-y\rangle \geq 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{X},$$

οπότε θέτοντας $z = x - y$ *έχουμε το ζητούμενο.*

(b). *Ο* T *είναι γνήσια μονότονος αν και μόνο αν ειναι γνήσια θετικός διότι ισχύουν τα παραπάνω χωρίς το ίσον.*

(c). *Ο* T *είναι αυστηρά μονότονος αν και μόνο αν είναι αυστηρά θετικός διότι*

$$\langle T(x-y), x-y\rangle \geq c\|x-y\|^2, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{X},$$

οπότε θέτοντας $z = x - y$ *έχουμε το ζητούμενο.*

Από το παραπάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η έννοια της μονοτονίας τελεστών γενικεύει την έννοια της θετικότητας των γραμμικών τελεστών.

Παράδειγμα 2.22. *Έστω* $f : D \subset \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *μία Gateaux-διαφορίσιμη συνάρτηση στο κυρτό υποσύνολο* D*, όπου* $\mathcal{X}$ *είναι πραγματικός χώρος Banach. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.*

1. *Η* f *είναι κυρτή (αντίστοιχα γνησίως κυρτή).*
2. *Η* $f' : D \to \mathcal{X}^*$ *είναι μονότονη (αντίστοιχα γνησίως μονότονη).*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in D$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\phi(t) := f(x+ty), \text{ για κάθε } t \in [0,1].$$

Επειδή η f είναι Gateaux-διαφορίσιμη συνάρτηση στο D, αποδεικνύεται ότι

$$\phi'(t) = f'(x+t(y-x))(y-x), \text{ για κάθε } t \in [0,1],$$

ή αλλιώς

$$\phi'(t) = \langle f'(x+t(y-x)), y-x\rangle, \text{ για κάθε } t \in [0,1],$$

αφού $f'(u) \in \mathcal{X}^*$, για κάθε $u \in D$.
$(1 \to 2)$. Έστω ότι η f είναι κυρτή. Τότε, η ϕ είναι επίσης κυρτή και η ϕ' είναι αύξουσα. Άρα, για κάθε $x, y \in D$ ισχύει

$$\phi'(1) \geq \phi'(0),$$

ή ισοδύναμα

$$\langle f'(y) - f'(x), y-x\rangle \geq 0.$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι μονότονη.
$(2 \to 1)$. Έστω ότι η f' είναι μονότονη συνάρτηση και έστω $s, t \in [0,1]$ με $s < t$. Τότε,

$$\phi'(t) - \phi'(s) = \langle f'(x+t(y-x)) - f'(x+s(x-y)), y-x\rangle. \tag{2.3}$$

Η f' είναι μονότονη, οπότε

$$\langle f'(x+t(y-x)) - f'(x+s(x-y)), (x+t(y-x)) - (x+s(y-x))\rangle \geq 0,$$

και απλοποιώντας προκύπτει

$$(t-s)\langle f'(x+t(y-x)) - f'(x+s(x-y)), y-x\rangle \geq 0. \tag{2.4}$$

Επειδή όμως $s < t$, από την (2.3) έχουμε ότι

$$\phi'(t) \geq \phi'(s), \text{ για κάθε } t, s \in [0,1], \text{ με } s < t.$$

Έτσι, η ϕ' είναι αύξουσα, οπότε η ϕ είναι κυρτή. Επομένως, η f είναι κυρτή. □

Παράδειγμα 2.23. *Έστω K ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$. Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$F : K \to K$$

με την ιδιότητα

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|, \text{ για κάθε } x, y \in K.$$

Έστω επίσης ο τελεστής $T = I - F$ που ορίζεται πάνω στο K. Τότε, ο T είναι μονότονος τελεστής.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in K$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle T(x) - T(y), x - y\rangle &= (x - F(x) - y + F(x), x - y)\\ &= \|x-y\|^2 - (F(x) - F(y), x - y)\\ &\geq \|x-y\|^2 - \|F(x) - F(y)\|\|x-y\| \geq 0.\end{aligned}$$

Οπότε, ο τελεστής $T = I - F$ είναι μονότονος. □

Παράδειγμα 2.24. *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert με νόρμα $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και $K \subset \mathcal{H}$ ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Θεωρούμε τη μετρική προβολή του $\mathcal{H}$ στο K την $P_K : \mathcal{H} \to K$ με $P_K(f) := u$, για κάθε $f \in \mathcal{H}$, όπου $u \in K$ για το οποίο ισχύει η ισότητα*

$$\|f - u\| = \min\{\|f - w\| : w \in K\}$$

και η ανισότητα

$$(f - P_K(f), w - P_K(f)) \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K.$$

Η μετρική προβολή P_K είναι μονότονος τελεστής. Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$, επομένως ισχύουν

$$(x - P_K(x), w - P_K(x)) \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K \tag{2.5}$$

και

$$(y - P_K(y), w - P_K(y)) \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K. \tag{2.6}$$

Άρα, η σχέση (2.5) ισχύει και για $w = P_K(y) \in K$, οπότε έχουμε

$$(x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)) \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K. \tag{2.7}$$

Επίσης, η σχέση (2.6) ισχύει και για $w = P_K(x) \in K$, οπότε έχουμε

$$(y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)) \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K. \tag{2.8}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.7) και (2.8) προκύπτει

$$\begin{aligned}
0 &\geq (x - P_K(x) - y + P_K(y), P_K(y) - P_K(x)) \\
&= (x - y, P_K(y) - P_K(x)) + (P_K(y) + P_K(x), P_K(y) - P_K(x)) \\
&= (x - y, P_K(y) - P_K(x)) + \|P_K(y) - P_K(x)\|^2
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\|P_K(y) - P_K(x)\|^2 \leq (y - x, P_K(y) - P_K(x)). \tag{2.9}$$

Αλλά, $\|P_K(y) - P_K(x)\|^2 \geq 0$, άρα από τη σχέση (2.9) έχουμε ότι

$$(y - x, P_K(y) - P_K(x)) \geq 0, \text{ με } x, y \in \mathcal{H}.$$

Άρα, ισχύει

$$(y - x, P_K(y) - P_K(x)) \geq 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{H},$$

οπότε η μετρική προβολή P_K είναι μονότονος τελεστής.

Παράδειγμα 2.25. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach, $\mathcal{X}^*$ ο δυϊκός του και*

$$J : \mathcal{X} \to P(\mathcal{X}^*)$$

μία δυϊκή απεικόνιση, με

$$J(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|, \|x^*\| = \|x\|\}, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{X}.$$

Τότε η J είναι μονότονος τελεστής.

Απόδειξη. Θεωρούμε $x^* \in J(x)$ και $y^* \in J(y)$ και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{X}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\langle x^* - y^*, x - y\rangle &= \langle x^*, x\rangle - \langle y^*, x\rangle - \langle x^*, y\rangle + \langle y^*, y\rangle \\
&\geq \|x^*\|^2 - \|y^*\|\|x\| - \|x^*\|\|y\| + \|y^*\|^2 \\
&= \|x^*\|^2 - 2\|y^*\|\|x^*\| + \|y^*\|^2 \\
&= (\|x^*\| - \|y^*\|)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Άρα η J είναι μονότονος τελεστής. □

Κεφάλαιο 3

Ιδιότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε τις κυριότερες ιδιότητες των *κεντρικών εννοιών* του κεφαλαίου 2 καθώς και των μεταξύ τους σχέσεων (μέσω θεωρημάτων, προτάσεων, πορισμάτων, λημμάτων). Τα αποτελέσματα αυτά σε συνδυασμό με τα *Βασικά Θεωρήματα* του επόμενου κεφαλαίου 4 θα μας βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ) τα οποία διαπραγματευόμαστε στο κεφάλαιο 5. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει μια μονοτονία λόγω της συνεχούς παράθεσης εκφωνήσεων και αποδείξεων προτάσεων. Το μειονέκτημα όμως αυτό, στο κεφάλαιο 5, θα μετατραπεί σε πλεονέκτημα διότι θα είναι διαυγής, συνοπτική και εύληπτη η διαδικασία επίλυσης δυσκόλων Π.Σ.Τ. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή την παρεμβολή όλων των απαραίτητων προτάσεων στο σημείο που θα εμφανιζόταν η ανάγκη, θα δημιουργούσε διακοπτόμενη και ασυνεχή διαδικασία και θα χανόταν το νόημα. Με τον τρόπο παρουσίασης που προτιμήθηκε απλά θα γίνεται μια παραπομπή στο αντίστοιχο *έτοιμο* αποτέλεσμα.

***Θεώρημα* 3.1.** *Έστω τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, όπου $\mathcal{X}$ χώρος Banach. Τότε,*

(i). *Αν ο T είναι συνεχής τότε είναι και demicontinuous (μικτά συνεχής).*

(ii). *Αν ο T είναι demicontinuous τότε είναι και hemicontinuous.*

Απόδειξη. **(i).** Έστω T συνεχής στο $x_0 \in \mathcal{X}$. Τότε για κάθε ακολουθία

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X} \text{ με } x_n \to x_0,$$

σύμφωνα με τον ορισμό, ισχύει $T(x_n) \to T(x_0)$. Γνωρίζουμε όμως ότι κάθε ισχυρά συγκλίνουσα ακολουθία είναι και ασθενώς συγκλίνουσα, οπότε

$$T(x_n) \rightharpoonup T(x_0).$$

Έτσι, σύμφωνα με τον ορισμό ο T είναι demicontinuous στο $x_0 \in \mathcal{X}$.

(ii). Έστω T demicontinuous στο $x_0 \in \mathcal{X}$. Τότε, για κάθε ακολουθία

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X} \text{ με } x_n \to x_0,$$

σύμφωνα με τον ορισμό, ισχύει $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n = x_0 + t_n y$ όπου $t_n \to 0$ και $t_n > 0$, $y \in \mathcal{X}$. Προφανώς $x_n \to x_0$, για κάθε $y \in \mathcal{X}$ και επειδή ο T είναι demicontinuous ισχύει $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ δηλαδή $T(x_0+t_n y) \rightharpoonup T(x_0)$, για κάθε $y \in \mathcal{X}$. Άρα, ο T είναι hemicontinuous στο $x_0 \in \mathcal{X}$.

□

***Θεώρημα* 3.2.** *Κάθε demicontinuous τελεστής, είναι τοπικά φραγμένος.*

***Θεώρημα* 3.3.** *Έστω $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ισχυρά μονότονος και Lipschitz συνεχής τελεστής. Τότε η εξίσωση $Ax = g$, όπου $x, g \in \mathcal{H}$, έχει μοναδική λύση στον $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = x - tAx - tg$ με g σταθερό. Η ϕ ορίζεται στον $\mathcal{H}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ή $t \in \mathbb{C}$. Αν καταφέρουμε να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $t \neq 0$, για το οποίο η ϕ είναι συστολή, τότε θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathcal{H}$ ώστε

$$\phi(x_0) = x_0 = x_0 - tAx_0 - tg.$$

Δηλαδή $Ax_0 = g$. Έχουμε λοιπόν

$$\phi(x) - \phi(y) = x - y - t(Ax - Ay), \quad x, y \in \mathcal{H},$$

οπότε

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|^2 = \|x - y\|^2 - t^2\|Ax - Ay\|^2 - 2tRe(Ax - Ay, x - y). \tag{3.1}$$

Επειδή ο A είναι αυστηρά μονότονος και Lipschitz συνεχής, από την (3.1) έχουμε

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|^2 \leq (1 + t^2k^2 - 2tm)\|x - y\|^2. \tag{3.2}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει $t \neq 0$ ώστε $1 + t^2k^2 - 2tm < 1$. Άρα, από την (3.2), η ϕ είναι συστολή και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

***Θεώρημα* 3.4.** *(Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένας τελεστής να είναι μονότονος). Ο τελεστής $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι μονότονος αν και μόνο αν η πραγματική συνάρτηση*

$$F(t) = (A(x + ty), y), \quad x, y \in \mathcal{H}$$

είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Έστω A μονότονος και $t > t_0$. Τότε

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= (A(x + ty), y) - (A(x + t_0y), y) \\ &= (A(x + ty) - A(x + t_0y), y) \\ &= \frac{(A(x + ty) - A(x + t_0y), (t - t_0)y)}{t - t_0} \\ &= \frac{(A(x + ty) - A(x + t_0y), ty - t_0y)}{t - t_0} \\ &= \frac{(A(x + ty) - A(x + t_0y), x + ty - x - t_0y)}{t - t_0} \geq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

οπότε $F(t) - F(t_0) \geq 0$, δηλαδή

$$F(t) \geq F(t_0), \quad \text{για } t > t_0. \tag{3.4}$$

Έστω ότι η F είναι αύξουσα, δηλαδή ότι ισχύει η (3.4). Τότε λόγω της (3.3), ισχύει

$$(A(x + ty) - A(x + t_0 y), y) \geq 0, \tag{3.5}$$

οπότε αν θέσουμε $x + ty = w_1$, $x + t_0 y = w_2$, $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$, η (3.5) γίνεται

$$\frac{(A(w_1) - A(w_2), w_1 - w_2)}{t - t_0} \geq 0$$

και επειδή $t - t_0 > 0$ προκύπτει ότι

$$(A(w_1) - A(w_2), w_1 - w_2) \geq 0,$$

για κάθε $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$. Άρα ο A είναι μονότονος.

$\square$

***Θεώρημα* 3.5.** *Έστω $A : \mathcal{X} \to P(\mathcal{X}^*)$ με A μονότονο τελεστή. Αν*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0 \text{ για κάθε } [y, y^*] \in G(A)$$

συνεπάγεται ότι ο A είναι μεγιστικά μονότονος.

Μια εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος έχει ως εξής:
Έστω $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ γραμμικός, μονότιμος και θετικός τελεστής με $\mathcal{H}$ χώρο Hilbert. Τότε, ο A είναι μεγιστικά μονότονος τελεστής.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι

$$(A(x) - z, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Θα δείξουμε ότι $z = A(y)$, οπότε ο A θα είναι μεγιστικά μονότονος. Θέτουμε $x = y + \lambda u$, για $\lambda > 0$ και $u \in \mathcal{H}$. Τότε η σχέση της υπόθεσης γίνεται

$$(A(y + \lambda u) - z, \lambda u) \geq 0,$$

δηλαδή

$$(A(y) + \lambda A(u) - z, u) \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda > 0, u \in \mathcal{H}.$$

Για $\lambda \to 0$ προκύπτει

$$(A(y) - z, u) \geq 0, \text{ για κάθε } u \in \mathcal{H}.$$

Αφού η παραπάνω ισχύει για κάθε $u \in \mathcal{H}$, θα ισχύει και για $-u$. Άρα,

$$(A(y) - z, -u) \geq 0,$$

δηλαδή

$$(A(y) - z, u) \leq 0$$

και έτσι

$$(A(y) - z, u) = 0.$$

Άρα, $A(y) - z = 0$, οπότε $A(y) = z$. $\square$

***Πρόταση* 3.6.** *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος τελεστής στον χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε, ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$, υπάρχει περιοχή U του x, τέτοια ώστε η εικόνα $T(U) \subset \mathcal{X}^*$ να είναι φραγμένη. Έστω λοιπόν ότι ο τελεστής T δεν είναι τοπικά φραγμένος. Τότε, υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $x_n \to x$, και $\|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \to \infty$, καθώς $n \to \infty$. Εφόσον $x_n \to x$, έπεται ότι

$$\|x_n\|_{\mathcal{X}} \to \|x\|_{\mathcal{X}}$$

και έτσι η ακολουθία $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$a_n = \frac{1}{1 + \|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\|_{\mathcal{X}}}$$

και είναι $0 < a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο τελεστής T είναι μονότονος, οπότε για κάθε $u \in \mathcal{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle T(x_n) - T(u), x_n - u\rangle \\ &= \langle T(x_n) - T(u), x_n - x + x - u\rangle, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \langle T(x_n), u - x\rangle &\leq \langle T(x_n), x_n - x\rangle + \langle T(u), x_n - u\rangle \\ &\leq \|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\|_{\mathcal{X}} + \|T(u)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - u\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\|_{\mathcal{X}} + \|T(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\|_{\mathcal{X}} + \|u\|_{\mathcal{X}}). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανισοτική σχέση με a_n, και επειδή $a_n < 1$, έχουμε

$$a_n\langle T(x_n), u - x\rangle \leq 1 + a_n\|T(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\| + \|u\|). \tag{3.6}$$

Θεωρούμε την ποσότητα $A(x,u) = a_n\|T(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\|_{\mathcal{X}} + \|u\|_{\mathcal{X}})$, η οποία εξαρτάται από τα $x, u \in \mathcal{X}$ και όχι από το $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, η σχέση (3.6) γράφεται

$$a_n\langle T(x_n), w\rangle \leq 1 + A(x,w), \text{ για κάθε } w \in \mathcal{X}. \tag{3.7}$$

Άρα, η σχέση (3.7) ισχύει και για $-w \in \mathcal{X}$, οπότε έχουμε

$$a_n\langle T(x_n), -w\rangle \leq 1 + A(x,w), \text{ για κάθε } w \in \mathcal{X}. \tag{3.8}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3.7) και (3.8) προκύπτει ότι

$$|\langle a_nT(x_n), w\rangle| \leq 1 + A(x,w), \text{ για κάθε } w \in \mathcal{X}.$$

Άρα, ισχύει

$$\sup_{n\to\infty} |\langle a_nT(x_n), w\rangle| < 0$$

και έτσι, από το θεώρημα Banach-Steinhaus ομοιόμορφου φράγματος, προκύπτει ότι υπάρχει $\lambda(x) > 0$, τέτοιο ώστε

$$a_n \|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \leq \lambda(x),$$

δηλαδή

$$\|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \leq \frac{\lambda(x)}{a_n} = \lambda(x)(1 + \|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \|x_n - x\|_{\mathcal{X}}),$$

δηλαδή μετά από απλές πράξεις

$$\|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \leq \frac{\lambda(x)}{1 - \lambda(x)\|x_n - x\|_{\mathcal{X}}}. \tag{3.9}$$

Επειδή $x_n \to x$, η ακολουθία $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, οπότε και η ακολουθία $(\lambda(x)/(1-\lambda(x))\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Επομένως, από τη σχέση (3.9) έπεται ότι η $(\|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο αφού $\|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \to \infty$. Άρα, ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος. □

***Πρόταση* 3.7.** *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας γραμμικός και μονότονος τελεστής στο χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε ο τελεστής T είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Ο T είναι μονότονος τελεστής. Έτσι, από την πρόταση 3.6, έπεται ότι ο T είναι τοπικά φραγμένος. Έτσι, ο T είναι γραμμικός και τοπικά φραγμένος τελεστής σε μία περιοχή του $0 \in \mathcal{X}$. Άρα, ο T είναι φραγμένος και στην κλειστή μοναδιαία μπάλα. Επομένως, υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε

$$\|T(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \leq c\|u\|_{\mathcal{X}}, \text{ για κάθε } u \in \mathcal{X},$$

οπότε ο T είναι συνεχής τελεστής. □

***Πρόταση* 3.8.** *Έστω $A : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}^*}$ μονότονος και $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Τότε, ο αντίστροφος τελεστής A^{-1}, του A, με $A^{-1} : \mathcal{H}^* \to 2^{\mathcal{H}}$ είναι επίσης μονότονος.*

Απόδειξη. Έστω $u, v \in \mathcal{H}^*$ ώστε $x \in A^{-1}(u)$, $y \in A^{-1}(v)$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$(x - y, u - v) \geq 0.$$

Ισχύει ότι $u \in A(x)$ και ότι $v \in A(y)$. Επιδή ο A είναι μονότονος ισχύει

$$(A(x) - A(y), x - y) \geq 0,$$

οπότε

$$(u - v, x - y) \geq 0.$$

□

***Λήμμα* 3.9.** *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος και hemicontinuous τελεστής στον χώρο Banach $\mathcal{X}$. Εάν υπάρχουν $x \in \mathcal{X}$ και $b \in \mathcal{X}^*$ τέτοια ώστε*

$$\langle b - T(y), x - y \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X},$$

τότε $b = T(x)$.

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{X}$. Θέτουμε $y = x - tz$ με $t > 0$. Ισχύει

$$\langle b - T(y), x - y \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}. \tag{3.10}$$

Επομένως, η (3.10) ισχύει και για $y = x - tz$ με $t > 0$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \langle b - T(x - tz), x - (x - tz) \rangle &= \langle b - T(x - tz), tz \rangle \\ &= t\langle b - T(x - tz), z \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\langle b - T(x - tz), z \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}, t > 0. \tag{3.11}$$

Έστω ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ με $t_n > 0$ και $t_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n = x - t_n z$, για κάθε $z \in \mathcal{X}$ με $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ και $x_n \to x$ πάνω σε μία ημιευθεία. Όμως ο T είναι hemicontinuous, άρα $T(x_n) = T(x - t_n z) \rightharpoonup T(x)$, καθώς $n \to \infty$. Οπότε ισχύει

$$\langle b - T(x - t_n z), z \rangle \rightharpoonup \langle b - T(x), z \rangle, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Αλλά από τη σχέση (3.11) έπεται ότι

$$\langle b - T(x), z \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}, \tag{3.12}$$

οπότε και

$$\begin{aligned} &\langle b - T(x), -z \rangle \geq 0, \\ &\langle b - T(x), z \rangle \leq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Επομένως από τις (3.12) και (3.13) προκύπτει ότι $\langle b - T(x), z \rangle = 0$, για κάθε $z \in \mathcal{X}$, έτσι

$$b - T(x) = 0, \text{ δηλαδή } b = T(x).$$

□

***Πρόταση* 3.10.** *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας hemicontinuous και μονότονος τελεστής στον ανακλαστικό χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε ο τελεστής T είναι demicontinuous.*

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{X}$ και ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$. Ο T είναι μονότονος τελεστής, οπότε από την πρόταση 3.6 έπεται ότι ο T είναι τοπικά φραγμένος τελεστής. Άρα η ακολουθία

$$(T(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}^*$$

είναι φραγμένη. Επιπλέον, ο χώρος Banach $\mathcal{X}$ είναι ανακλαστικός, άρα και ο $\mathcal{X}^*$ είναι ανακλαστικός. Οπότε, υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $(T(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ της $(T(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$T(u_{n_k}) \rightharpoonup b \in \mathcal{X}^* \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Λόγω της μονοτονίας του T έπεται ότι

$$\langle T(u_{n_k}) - T(w), u_{n_k} - w \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{X}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Άρα και

$$\langle b - T(w), u - w \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{X}. \tag{3.14}$$

Επομένως, ο T είναι μονότονος και hemicontinuous και για $x \in \mathcal{X}$ και $b \in \mathcal{X}^*$ ισχύει η σχέση (3.14). Έτσι, από το λήμμα 3.9 έπεται ότι $b = T(u)$. Οπότε

$$T(u_{n_k}) \rightharpoonup T(u).$$

Δηλαδή ο T είναι demicontinuous. □

***Πόρισμα* 3.11.** *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος τελεστής στον ανακλαστικό χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε, ο T είναι demicontinuous αν και μόνο αν είναι hemicontinuous.*

***Πρόταση* 3.12.** *Αν $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ με $\mathcal{X}$ ανακλαστικό χώρο Banach και A ψευδομονότονος και φραγμένος, τότε ο A είναι demicontinuous.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $u_n \to u$ τότε $Au_n \rightharpoonup Au$. Η ακολουθία u_n είναι φραγμένη, άρα και η ακολουθία Au_n είναι φραγμένη. Επειδή ο $\mathcal{X}$ είναι ανακλαστικός το ίδιο θα ισχύει και για τον $\mathcal{X}^*$. Άρα υπάρχει υπακολουθία Au_{n_k}, τέτοια ώστε

$$Au_{n_k} \rightharpoonup v \in \mathcal{X}^*.$$

Άρα

$$\lim(Au_{n_k}, u_{n_k} - u) = 0.$$

Επειδή ο A είναι ψευδομονότονος έχουμε

$$v = Au \text{ και } Au_{n_k} \rightharpoonup Au.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $Au_n \rightharpoonup Au$. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε Au_{n_k} εκτός της ασθενούς παριοχής U, $Au_{n_{m_\rho}} \rightharpoonup v$. Άτοπο. □

***Πρόταση* 3.13.** *Αν $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ με $D(A) = \mathcal{X}$ και A μονότονος και hemicontinuous τότε ο A είναι μεγιστικά μονότονος.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{X}, x^* \in \mathcal{X}^*$, τέτοια ώστε

$$(x^* - A(y), x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $x^* = A(x)$. Θέτουμε

$$y = x - \lambda(z - x), \quad \lambda > 0, z \in \mathcal{X}.$$

Τότε

$$(x^* - A(x - \lambda(z - x)), \lambda z - \lambda x) \geq 0,$$

δηλαδή

$$(x^* - A(x - \lambda(z - x)), z - x) \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda > 0, z \in \mathcal{X}.$$

Άρα

$$(x^* - A(x - t_n(z - x)), z - x) \geq 0.$$

Για $n \to +\infty$ και επειδή ο A είναι hemicontinuous ισχύει

$$(x^* - A(x), z - x) \geq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}.$$

Άρα θα ισχύει και για $-z$, οπότε τελικά ισχύει

$$(x^* - A(x), z - x) = 0, \text{ δηλαδή } x^* = A(x).$$

□

***Πρόταση* 3.14.** *Έστω $A : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}^*}$ μεγιστικά μονότονος τελεστής. Τότε το $A(\mathcal{X})$ είναι κλειστό και κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Το $A(\mathcal{X})$ είναι κλειστό. Έστω $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset A(\mathcal{X})$, τέτοια ώστε $x_n^* \to x^*$. Θα δείξουμε ότι το $x^* \in A(\mathcal{X})$. Αφού ο A είναι μονότονος ισχύει

$$(x_n^* - y^*, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}, y^* \in A(y).$$

Για $n \to \infty$ έχουμε

$$(x^* - y^*, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}, y^* \in A(y)$$

και επειδή ο A είναι μεγιστικά μονότονος συμπεραίνουμε ότι $x^* \in A(\mathcal{X})$.

Το $A(\mathcal{X})$ είναι κυρτό. Αν $x_1^*, x_2^* \in A(\mathcal{X})$, τότε

$$\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in A(\mathcal{X}), \text{ για κάθε } \lambda \in [0,1].$$

Έχουμε

$$(x_1^* - y^*, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}, y^* \in A(y)$$

και

$$(x_2^* - y^*, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}, y^* \in A(y).$$

Τότε

$$(\lambda x_1^* - \lambda y^*, x - y) \geq 0$$

και

$$((1-\lambda)x_2^* - (1-\lambda)y^*, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}, y^* \in A(y).$$

δηλαδή

$$(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* - y^*, x - y) \geq 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{X}, y^* \in A(y).$$

Άρα, επειδή ο A είναι μεγιστικά μονότονος ισχύει

$$\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in A(\mathcal{X}).$$

Οπότε το $A(\mathcal{X})$ είναι κυρτό σύνολο. □

***Πρόταση* 3.15.** *Έστω $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος και συνεχής τελεστής και $\mathcal{X}$ χώρος Banach. Τότε ο T είναι ψευδομονότονος τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x$, $T(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$ και $\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$. Τότε έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}(\langle T(x_n), x_n\rangle) \leq \langle y, x\rangle. \tag{3.15}$$

Ο T είναι μονότονος, άρα για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$ ισχύει

$$\langle T(\xi) - T(x_n), \xi - x_n\rangle \geq 0,$$

δηλαδή

$$\langle T(\xi), x_n\rangle + \langle T(x_n), \xi\rangle - \langle T(\xi), \xi\rangle \leq \langle T(x_n), x_n\rangle. \tag{3.16}$$

Άρα, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$, προκύπτει από τη σχέση (3.16) ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \geq \limsup_{n\to\infty}(\langle T(\xi), x_n\rangle + \langle T(x_n), \xi\rangle - \langle T(\xi), \xi\rangle).$$

Οπότε από την (3.15) προκύπτει για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$

$$\langle y, x\rangle \geq \limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \geq \limsup_{n\to\infty}(\langle T(\xi), x_n\rangle + \langle T(x_n), \xi\rangle - \langle T(\xi), \xi\rangle),$$

και επειδή $x_n \rightharpoonup x$, $T(x_n) \rightharpoonup y$, έχουμε

$$\langle y, x\rangle \geq \langle T(\xi), x\rangle + \langle y, \xi\rangle - \langle T(\xi), \xi\rangle, \text{ για κάθε } \xi \in \mathcal{X},$$

ή, ισοδύναμα

$$\langle y - T(\xi), x - \xi\rangle \geq 0, \text{ για κάθε } \xi \in \mathcal{X}. \tag{3.17}$$

Από τη σχέση (3.17) και το λήμμα 3.9 έπεται ότι $y = T(x)$. Έτσι, η (3.15) γράφεται

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \leq \langle T(x), x\rangle. \tag{3.18}$$

Ο T είναι μονότονος, οπότε ισχύει

$$\langle T(x) - T(x_n), x - x_n\rangle \geq 0,$$

ή, ισοδύναμα

$$\langle T(x), x\rangle - \langle T(x), x_n\rangle - \langle T(x_n), x\rangle - \langle T(x_n), x_n\rangle \geq 0. \tag{3.19}$$

Από τη σχέση (3.19) έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty}(\langle T(x), x\rangle - \langle T(x), x_n\rangle - \langle T(x_n), x\rangle + \langle T(x_n), x_n\rangle) \geq 0,$$

και επειδή $x_n \rightharpoonup x$, $T(x_n) \rightharpoonup y$, έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \geq \langle T(x), x\rangle. \tag{3.20}$$

Επιπλέον ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \geq \liminf_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle. \tag{3.21}$$

Οπότε από τις (3.18), (3.20) και (3.21) έχουμε

$$\langle T(x), x\rangle \geq \limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \geq \liminf_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \geq \langle T(x), x\rangle,$$

άρα,

$$\begin{aligned}\langle T(x), x\rangle &= \limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\langle T(x_n), x_n\rangle \to \langle T(x), x\rangle.$$

Έτσι, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x$, $T(x_n) \rightharpoonup y$ και

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n - x\rangle \leq 0,$$

ισχύουν

$$y = T(x) \text{ και } \langle T(x_n), x_n\rangle \to \langle T(x), x\rangle.$$

Επομένως, ο T είναι ψευδομονότονος τελεστής. □

***Πρόταση* 3.16.** *Έστω $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος και συνεχής τελεστής. Έστω $B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας ισχυρά συνεχής τελεστής. Τότε, ο τελεστής*

$$T = A + B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*,$$

είναι ψευδομονότονος.

Απόδειξη. Ο $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονος και συνεχής τελεστής επί του χώρου Banach $\mathcal{X}$. Από την πρόταση 3.15 έπεται ότι ο A είναι ψευδομονότονος. Έστω η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x$, $T(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$ και

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n - x\rangle \leq 0.$$

Τότε,

$$(A + B)(x_n) \rightharpoonup y \text{ δηλαδή } A(x_n) + B(x_n) \rightharpoonup y. \tag{3.22}$$

Ο B είναι ισχυρά συνεχής, οπότε

$$B(x_n) \to B(x). \tag{3.23}$$

Από τις σχέσεις (3.22), (3.23) προκύπτει

$$A(x_n) \rightharpoonup y - B(x). \tag{3.24}$$

Επίσης έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n - x\rangle = \limsup_{n\to\infty}(\langle A(x_n), x_n - x\rangle + \langle B(x_n), x_n - x\rangle) \le 0. \tag{3.25}$$

Επιπλέον, επειδή $x_n \rightharpoonup x$ και ο B είναι ισχυρά συνεχής, ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty}\langle B(x_n), x_n - x\rangle = 0. \tag{3.26}$$

Από τις σχέσεις (3.25), (3.26) προκύπτει

$$\limsup_{n\to\infty}\langle A(x_n), x_n - x\rangle \le 0. \tag{3.27}$$

Ο A είναι ψευδομονότονος και για την ακολουθία (x_n) ισχύουν οι σχέσεις (3.24), (3.27), δηλαδή

$$A(x_n) \rightharpoonup y - B(x) \text{ και } \limsup_{n\to\infty}\langle A(x_n), x_n - x\rangle \le 0.$$

Επομένως,

$$A(x) = y - B(x) \text{ και } \langle A(x_n), x_n\rangle \to \langle A(x), x\rangle.$$

Έτσι,

$$y = A(x) + B(x) = (A+B)(x) = T(x)$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\langle A(x_n), x_n\rangle = \langle A(x), x\rangle.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle &= \lim_{n\to\infty}(\langle A(x_n), x_n\rangle + \langle B(x_n), x_n\rangle)\\ &= \langle A(x), x\rangle + \langle B(x), x\rangle\\ &= \langle A(x) + B(x), x\rangle\\ &= \langle T(x), x\rangle.\end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x$, $T(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$ και $\limsup_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n - x\rangle \le 0$ ισχύουν

$$y = T(x) \text{ και } \langle T(x_n), x_n\rangle \to \langle T(x), x\rangle.$$

Άρα, ο T είναι ψευδομονότονος. $\square$

***Θεώρημα* 3.17.** *Εάν ο τελεστής $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι γραμμικός και μεγιστικά μονότονος, τότε*

(a). *Ο $D(T)$ είναι πυκνός υπόχωρος στον $\mathcal{H}$, δηλαδή $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$.*

(b). *Για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει ο τελεστής*

$$(I + \lambda T)^{-1} : \mathcal{H} \to D(T) \subset \mathcal{H},$$

ο οποίος είναι συνεχής και φραγμένος, με $\|(I+\lambda T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le 1$.

(c). *Ο τελεστής T είναι κλειστός, δηλαδή το γράφημά του*

$$G(T) = \{[x, T(x)] : x \in D(T)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Απόδειξη. Ο T είναι μεγιστικά μονότονος. Επομένως, ισχύουν τα εξής.

Ο T είναι μονότονος, δηλαδή

$$\langle u, T(u)\rangle \geq 0, \text{ για κάθε } u \in D(T) \subset \mathcal{H}. \tag{3.28}$$

Επίσης

$$R(T + I) = \mathcal{H}. \tag{3.29}$$

(a). Έστω $f_0 \in \mathcal{H}$ για το οποίο ισχύει

$$\langle u, f_0\rangle = 0, \text{ για κάθε } u \in D(T) \subset \mathcal{H}. \tag{3.30}$$

Από τη σχέση (3.29) έχουμε ότι για $f_0 \in \mathcal{H} = R(T + I)$, υπάρχει

$$u_0 \in D(T + I) = D(T),$$

τέτοιο ώστε

$$(T + I)(u_0) = f_0. \tag{3.31}$$

Από τις σχέσεις (3.30), (3.31) προκύπτει

$$\langle u, T(u_0)\rangle + \langle u, u_0\rangle = 0, \text{ για κάθε } u \in D(T) \subset \mathcal{H}. \tag{3.32}$$

Για $u_0 \in D(T)$ ισχύει η σχέση (3.32), αλλά

$$\|u_0\|^2 \geq 0$$

και από την (3.28) έχουμε

$$\langle u_0, T(u_0)\rangle \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η σχέση (3.32) πρέπει $\|u_0\| = 0$ και $T(u_0) = 0$. Άρα,

$$(u_0, T(u_0)) + \|u_0\|^2 = 0.$$

Όμως $(u_0, T(u_0)) \geq 0$ από την (3.28) και επειδή $\|u_0\|^2 \geq 0$, αναγκαστικά

$$(u_0, T(u_0) = \|u_0\|^2,$$

οπότε $u_0 = 0$ και $T(u_0) = 0$. Άρα για να ισχύει η σχέση (3.31) πρέπει

$$f_0 = 0.$$

Οπότε, με $f_0 \in \mathcal{H}$ και $\langle u, f_0\rangle = 0$, για κάθε $u \in D(T)$, τότε $f_0 = 0$. Έτσι το μοναδικό ορθογώνιο στοιχείο του $\mathcal{H}$ είναι το 0, άρα σύμφωνα με τις συνέπειες του θεωρήματος Hahn-Banach ισχύει $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$. Επομένως ο $D(T)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

(b). Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής

$$(I+T) : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

αντιστρέφεται και ότι ο αντίστροφός του,

$$(I+T)^{-1} : \mathcal{H} \to D(T) \subset \mathcal{H},$$

είναι συνεχής και φραγμένος, με

$$\|(I+T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

Από την (3.29) έπεται ότι ο $(I+\lambda T)$ είναι επί. Άρα, για $f \in \mathcal{H} = R(I+T)$, υπάρχει $u_1 \in D(I+T) = D(T)$, τέτοιο ώστε

$$(I+T)(u_1) = f. \tag{3.33}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u_2 \in D(I+T) = D(T)$ τέτοιο ώστε

$$(I+T)(u_2) = f. \tag{3.34}$$

Από τις (3.33), (3.34) προκύπτει

$$u_1 - u_2 + T(u_1 - u_2) = 0.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 + T(u_1 - u_2)\rangle \\ &= \|u_1 - u_2\|^2 + \langle u_1 - u_2, T(u_1 - u_2)\rangle \end{aligned} \tag{3.35}$$

Αλλά $\|u_1 - u_2\|^2 \geq 0$ και από την (3.28) έχουμε

$$\langle u_1 - u_2, T(u_1 - u_2)\rangle \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η (3.35) πρέπει

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0, \text{ δηλαδή } u_1 = u_2.$$

Επομένως, ο $(I+T)$ είναι $1-1$ και επί, άρα υπάρχει ο αντίστροφός του, $(I+T)^{-1}$ και για κάθε $f \in \mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικό $u \in D(T)$, τέτοιο ώστε

$$(I+T)^{-1}(f) = u, \ (I+T)(u) = f.$$

Επομένως,

$$\langle f, u\rangle = \langle u + T(u), u\rangle = \|u\|^2 + \langle T(u), u\rangle. \tag{3.36}$$

Από την (3.36) παίρνουμε

$$\langle f, u\rangle \geq \|u\|^2, \tag{3.37}$$

ενώ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\|f\|\|u\| \geq \langle f, u \rangle. \tag{3.38}$$

Άρα, από τις σχέσεις (3.37), (3.38) έπεται ότι

$$\|u\|^2 \leq \|f\|\|u\|,$$

ή, ισοδύναμα, $\|f\| \geq \|u\| = \|(I+T)^{-1}(f)\|$, ή ισοδύναμα, για $f \neq 0$

$$\frac{\|(I+T)^{-1}(f)\|}{\|f\|} \leq 1.$$

Επομένως, ισχύει

$$\|(I+T)^{-1}(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup\left\{\frac{\|(I+T)^{-1}(f)\|}{\|f\|} : f \in \mathcal{H}, f \neq 0\right\} \leq 1.$$

Άρα, ο $(I+T)^{-1}$ είναι φραγμένος και γραμμικός. Επομένως είναι και συνεχής. Τώρα, θα δείξουμε ότι για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει ο τελεστής

$$(I+\lambda T)^{-1} : \mathcal{H} \to D(T) \subset \mathcal{H},$$

ο οποίος είναι συνεχής και φραγμένος με

$$\|(I+\lambda T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

Για $\lambda = 1$, δείξαμε ότι ισχύει. Έστω λοιπόν κάποιο $\lambda_0 > 0$. Ο τελεστής $(I+\lambda_0 T)^{-1}$ είναι $1-1$, επί, συνεχής, γραμμικός και φραγμένος με

$$\|(I+\lambda_0 T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

Άρα, για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in D(T)$, τέτοιο ώστε

$$(I+\lambda_0 T)(u) = f,\; u + \lambda_0 T(u) = f.$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $\lambda > \lambda_0$, ο $(I+\lambda T)$ είναι επί. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{H}$, υπάρχει $u \in D(T)$, τέτοιο ώστε

$$(I+\lambda T)(u) = f.$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{H}$, υπάρχει λύση $u \in D(T)$ για την εξίσωση

$$u + \lambda T(u) = f \tag{3.39}$$

ή, ισοδύναμα

$$\lambda T(u) = f - u.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με λ_0 και στη συνέχεια προσθέτοντας και στα δύο μέλη τη u παίρνουμε την εξίσωση

$$(I + \lambda_0 T)(u) = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \tag{3.40}$$

Επειδή όμως υπάρχει ο $(I + \lambda_0 T)^{-1}$ η σχέση (3.40) γίνεται

$$u = (I + \lambda_0 T)^{-1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} f - \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right) \tag{3.41}$$

Θεωρώντας

$$A(u) = (I + \lambda_0 T)^{-1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u_1 \right)$$

η (3.41) γράφεται

$$u = \mathcal{A}(u).$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $u \in D(T)$ τέτοιο ώστε

$$u = A(u),$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής A έχει σταθερό σημείο. Έστω $u_1, u_2 \in D(T)$. Τότε

$$\begin{aligned} \|A(u_1) - A(u_2)\| &= \left\| (I + \lambda_0 T)^{-1} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) (u_1 - u_2) \right\| \\ &= \left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| \left\| (I + \lambda_0 T)^{-1} (u_1 - u_2) \right\| \\ &\leq \left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| \left\| (I + \lambda_0 T)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|(u_1 - u_2)\| \\ &\leq \left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| \|(u_1 - u_2)\| \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < \left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| < 1,$$

παίρνουμε ότι

$$0 < \frac{\lambda_0}{2} < \lambda,$$

ο τελεστής A είναι συστολή και από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach υπάρχει $u \in D(T)$ τέτοιο ώστε

$$u = A(u),$$

δηλαδή

$$u = (I + \lambda T) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right).$$

Άρα η εξίσωση (3.39) έχει λύση και μάλιστα μοναδική διότι εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις $u_1, u_2 \in D(T)$ της εξίσωσης (3.39), τοτε

$$u_1 = (I + \lambda T)(u_1) \text{ και } u_2 = (I + \lambda T)(u_2)$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 - u_2 + \lambda T(u_1 - u_2) \\ &= \langle u - u_2, u_1 - u_2 + \lambda T(u_1 - u_2)\rangle \\ &= \|u_1 - u_2\|^2 + \langle u_1 - u_2, \lambda T(u_1 - u_2)\rangle , \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|u_1 - u_2\|^2 = - \langle u_1 - u_2, \lambda T(u_1 - u_2)\rangle \tag{3.42}$$

Αλλά,

$$\|u_1 - u_2\|^2 \geq 0$$

και λόγω μονοτονίας του T έχουμε

$$\langle u_1 - u_2, \lambda T(u_1 - u_2)\rangle \geq 0$$

Άρα για να ισχύει η σχέση (3.42) πρέπει

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0 \text{ ή } u_1 = u_2.$$

Επομένως η εξίσωση (3.39) έχει μοναδική λύση. Άρα ο τελεστής $(I + \lambda T)$ είναι $1 - 1$ και επί, οπότε αντιστρέφεται. Έτσι έχουμε δειξει ότι για $\lambda_0 = 1$ και για $\lambda > \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} = \lambda_0^{'}$ το θεώρημα ισχύει. Επομένως και για $\lambda_0^{''} = \frac{1}{2} + \varepsilon$ με $\varepsilon > 0$ ισχύει για κάθε $\lambda > 0$, δηλαδή για κάθε $\lambda > 0$ υπάρχει ο τελεστής $(I + T)^{-1} : \mathcal{H} \to D(T) \subset \mathcal{H}$ ο οποίος είναι συνεχής και φραγμένος με $\left\|(I + T)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$.

(c). Θα αποδειξουμε ότι ο T είναι κλειστός τελεστής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το γράφημα του T, το $G(T) = \{[x, T(x)] : x \in D(T)\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Έστω $((x_n, T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στοιχείων του $G(T)$ που συγκλίνει στο στοιχείο $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Θα αποδείξουμε ότι $(x, y) \in G(T)$ δηλαδή $x \in D(T)$ και $y = T(x)$. Πράγματι εφ'όσον $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$ έπεται ότι

$$x_n \to x \text{ και } T(x_n) \to y.$$

Άρα και

$$x_n + T(x_n) \to x + y, \text{ δηλαδή } (I + T)(x_n) \to x + y. \tag{3.43}$$

Επειδή όμως από το (b) του Θεωρήματος έπεται ότι ο τελεστης $(I+T)^{-1}$ υπάρχει, είναι συνεχής και γραμμικός, από τη σχέση (3.43) συμπεραίνουμε ότι

$$x_n \to (I + T)^{-1}(x + y)$$

Αλλά $x_n \to x$ οπότε από τα παραπάνω έπεται ότι

$$x = (I + T)^{-1}(x + y)$$

και $x \in D(T)$ και

$$x + y = (I + T)(x) \Rightarrow x + y = x + T(x) \Rightarrow y = T(x).$$

Επομένως ο τελεστής T είναι κλειστος. □

***Θεώρημα* 3.18.** *Ο τελεστής Nemytski $F : \mathcal{L}^p(V) \to \mathcal{L}^q(V)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n(x))_{n\in\mathbb{R}}$ ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^p(V)$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ της $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ και $u \in \mathcal{L}^p(V)$ τέτοια ώστε

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \text{ σχεδόν παντού στο } V \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} |(Fu_{n_k})(x) - (Fu)(x)|^q &= |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q \\ &\leq c(|f(x, u_{n_k}(x))|^q + |f(x, u(x))|^q) \\ &\leq c(|\alpha(x)^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$g_{n_k}(x) = f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))$$

και

$$h_{n_k}(x) = c(|\alpha(x)^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u_{n_k}(x))|^q)$$

οπότε

$$g_{n_k} \in \mathcal{L}^1(V) \text{ και } h_{n_k} \in \mathcal{L}^1(V)$$

Έτσι, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$|g_{n_k}(x)|^q \leq h_{n_k}(x) \text{ σχεδόν παντού στον } \mathcal{L}^1(V). \tag{3.44}$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη Καραθεοδωρή. Οπότε αφού $u_{n_k}(x) \to u(x)$ σ.π. στο V, καθώς $k \to \infty$ έπεται ότι

$$f(x, u_{n_k}(x)) \to f(x, u(x))$$

Άρα,

$$g_{n_k}(x) \to 0 \text{ σχεδόν παντού στο } V$$

και

$$h_{n_k}(x) \to c(|\alpha(x)^q + b^q|u(x)|^p + |f(x, u(x))|^q)$$

και τότε

$$h_{n_k}(x) \to h(x), \text{ σχεδόν παντού στο } V \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Επίσης, εφ'όσον $u_n \to u$ στον $\mathcal{L}^p$ τότε και $\|u_n\| \to \|u\|$, άρα και $h_{n_k} \to h$ στον $\mathcal{L}^1$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\|F(u_{n_k}) - F(u)\|^q_{\mathcal{L}^q(V)} &= \int_V |(Fu_{n_k})(x) - (F(u)(x)|^q dx \\
&= \int_V |(f(x, u_{n_k})(x) - (f(x, u(x))|^q dx \\
&= \int_V |g_{n_k}(x)|^q dx
\end{aligned}$$

και προφανώς, $\int_\Omega |g_{n_k}(x)|^q dx \to 0$. Επομένως,

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|^q_{\mathcal{L}^q(V)} \to 0 \text{ δηλαδή } F(u_{n_k}) \to F(u). \tag{3.45}$$

Έτσι έπεται ότι $F(u_n) \to F(u)$, διότι εάν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της u_n, τέτοια ώστε

$$F(u_{n_i}) \nrightarrow F(u).$$

Τότε, όπως αποδείχθηκε παραπάνω, υπάρχει υπακολουθία της $(F(u_{n_i}))_{i\in\mathbb{N}}$, έστω

$$(F(u_{n_{i_m}}))_{m\in\mathbb{N}} \text{ τέτοια ώστε } F(u_{n_{i_m}}) \to F(u).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, οπότε $F(u_{n_k}) \to F(u)$. Άρα ο τελεστής Nemytski F είναι συνεχής. □

***Πρόταση* 3.19.** *Ο τελεστής Nemytski $F : \mathcal{L}^p(V) \to \mathcal{L}^q(V)$ είναι φραγμένος και μάλιστα υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει*

$$\|Fu\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq c(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(V)} + b\,\|u\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(V)}), \text{ για κάθε } u \in \mathcal{L}^p(V).$$

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{L}^p(V)$. Τότε, η σχεση (2.2)

$$|(Fu)(x)|^q \leq 2^q(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p).$$

Άρα,

$$\int_V |(Fu)(x)|^q dx \leq 2^q \left(\int_V |\alpha(x)|^q + b^q \int_V |u(x)^p dx \right).$$

Οπότε,

$$
\begin{aligned}
\|Fu\|^q_{\mathcal{L}^q(V)} &\leq 2^q(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(V)} + b^q\,\|u\|^p_{\mathcal{L}^q(V)}) \\
(\|Fu\|^q_{\mathcal{L}^q(V)})^{\frac{1}{q}} &\leq [2^q(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(V)} + b^q\,\|u\|^p_{\mathcal{L}^q(V)})]^{\frac{1}{q}} \\
&= 2(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(V)} + b^q\,\|u\|^p_{\mathcal{L}^q(V)})^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{1+\frac{1}{q}}[(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(V)})^{\frac{1}{q}} + (b^q)^{\frac{1}{q}}(\|u\|^p_{\mathcal{L}^q(V)})^{\frac{1}{q}}] \\
&= 2^{1+\frac{1}{q}}(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(V)} + b\,\|u\|^{\frac{p}{q}}_{\mathcal{L}^q(V)}) \\
&= c(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(V)} + b\,\|u\|^{p-1}_{\mathcal{L}^q(V)}) \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

όπου $c = 2^{1+\frac{1}{q}}$ σταθερά. Άρα από τη σχεση (3.46) έπεται ότι για κάθε $u \in \mathcal{L}^p(V)$ ισχύει

$$\|Fu\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq c(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(V)} + b\,\|u\|^{p-1}_{\mathcal{L}^q(V)}), \text{ με } c > 0 \text{ σταθερά}$$

και επομένως ο τελεστής Nemytski F είναι φραγμένος. □

Τα επόμενα τέσσερα λήμματα αφορούν ιδιότητες του διγραμμικού συναρτησιακού

$$a(u, w) := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uw dx,$$

όπου $u, w \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)$ και $a \geq 0$.

***Λήμμα* 3.20.** *Για σταθερό $u \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)$, το γραμμικό συναρτησιακό*

$$w \mapsto a(u, w), \text{ για κάθε } w \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega),$$

είναι φραγμένο (συνεχές).

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)$ σταθερό. Τότε, για κάθε $w \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
|a(u, w)| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u||\nabla w| dx + a\int_\Omega |u||w| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla w|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= (\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^{p-1}\|\nabla w\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)} + ak\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Άρα, ισχύει

$$|a(u, w)| \leq (\|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)} + ak\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)})\|w\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)},$$

για κάθε $w \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)$. Θέτουμε $M = \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)} + ak\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)} > 0$, και επειδή το $u \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)$ είναι σταθερό, το M είναι επίσης σταθερό. Άρα, η παραπάνω ανίσωση γράφεται

$$|a(u, w)| \leq M\|w\|_{\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)}, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega).$$

Επομένως, το γραμμικό συναρτησιακό $a(u, w)$ είναι φραγμένο, για σταθερό $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Άρα, $a(u, w) \in (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$, για κάθε $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

***Λήμμα* 3.21.** *Ο τελεστής $A : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ είναι μονότονος με*

$$A(u)(w) := a(u, w), \quad \forall w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

όπου για κάθε $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ είναι $A(u) \in (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει

$$\langle A(u) - A(w), u - w \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Για $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle = a(u, u) &= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + a \int_\Omega u^2 dx \\ &= \|u\|^p_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} + a\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ομοίως, για $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει

$$\langle Aw, w \rangle = a(w, w) = \|w\|^p_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} + a\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Επιπλέον, για $u, w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε

$$\langle Au, w \rangle = a(u, w) \leq \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

και

$$\langle Aw, u \rangle = a(w, u) \leq \|w\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} + a\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Επομένως, για $u, w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle A(u) - A(w), u - w \rangle &= \langle A(u), u \rangle - \langle A(u), w \rangle - \langle A(w), u \rangle + \langle A(w), w \rangle \\ &\geq a(\|u\|_{\mathcal{L}^2} - \|w\|_{\mathcal{L}^2})^2 + \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \\ &\quad - \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} - \|w\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \\ &\quad + \|w\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle A(u) - A(w), u - w \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Οπότε, ο τελεστής A είναι μονότονος. $\square$

***Λήμμα* 3.22.** *Ο τελεστής $A : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ είναι πιεστικός.*

Απόδειξη. Για $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε

$$\langle Au, u\rangle = a(u,u) = \|\nabla u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + a\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \geq \|\nabla u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \|u\|^p_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Οπότε, για $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, με $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}} \geq \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.47}$$

Αλλά,

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty} \|u\|^{p-1}_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \infty,$$

οπότε από τη σχέση (3.47) προκύπτει ότι

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}} = \infty.$$

Άρα, ο τελεστής A είναι πιεστικός. □

Λήμμα 3.23. *Ο τελεστής $A : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Τότε,

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \to 0. \tag{3.48}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, u(x)) := |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \text{ για κάθε } x \in \Omega, u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Η f πληροί τις συνθήκες Καραθεοδωρή καθώς και την growth condition. Άρα, είναι καλώς ορισμένος ο τελεστής Nemytski $F : \mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathcal{L}^q(\Omega)$ με

$$(Fu)(x) := f(x, u(x)) = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).$$

Έτσι, από το θεώρημα 3.18 έπεται ότι ο τελεστής F είναι συνεχής. Άρα, αφού $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι

$$F(u_n) \to F(u), \text{ καθώς } n \to \infty,$$

οπότε και

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \to 0. \tag{3.49}$$

Τότε, για κάθε $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle Au_n - Au, w\rangle &= a(u_n, w) - a(u, w) \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w dx + a\int_\Omega u_n w dx \\
&\quad - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx - a\int_\Omega u w dx \\
&= \int_\Omega F(u_n)\nabla w dx + a\int_\Omega u_n w dx \\
&\quad - \int_\Omega F(u)\nabla w dx - a\int_\Omega u w dx \\
&= \int_\Omega (F(u_n) - F(u))\nabla w dx + a\int_\Omega (u_n - u) w dx \\
&\leq (\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)})\|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Άρα, από την παραπάνω σχέση, για κάθε $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ με $\|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} \neq 0$, ισχύει

$$\frac{\langle Au_n - Au, w\rangle}{\|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}} \leq \|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)},$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
\|Au_n - Au\|_{(\mathcal{W}_0^{1,p})^*} &= \sup\left\{\frac{\langle Au_n - Au, w\rangle}{\|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}}} : w \in \mathcal{W}_0^{1,p}, \|w\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \neq 0\right\} \\
&\leq \|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.48), (3.49), (3.50) προκύπτει ότι

$$\|Au_n - Au\|_{(\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*} \to 0.$$

Επομένως,

$$Au_n \to Au,$$

οπότε ο A είναι συνεχής τελεστής. □

Λήμμα 3.24. *Εάν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιει την growth condition*

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

Θέτουμε

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-p}, & n > p \\ +\infty, & n \leq p \end{cases}$$

Τότε, ο τελεστής $B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ο οποίος ορίζεται ώς

$$\langle B(u), w\rangle := \int_\Omega g(u) w dx, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

είναι φραγμένος για $r \leq p^*$. Εάν επιπλέον, $r < p^*$, τότε ο B είναι ισχυρά συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$. Θέτουμε $q = r$ και $q' = \frac{r}{r-1}$. Εφ'όσον $r \leq p^*$, η ενσφήνωση $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^r(\Omega)$ είναι συνεχής. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
|\langle B(u), w\rangle| &= |\int_\Omega g(u)wdx| \leq \int_\Omega |g(u)||w|dx \\
&\leq \int_\Omega c(1+|u|^{r-1})|w|dx \\
&\leq c\int_\Omega |w|dx + c\left(\int_\Omega (1+|u|^{(r-1)q'})dx\right)^{\frac{1}{q'}} c\left(\int_\Omega |w|dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c\,\|w\|_{\mathcal{X}} + c\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{L}^{(r-1)q'}(\Omega)}\,\|w\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \\
&\leq c\,\|w\|_{\mathcal{X}} + k\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}\,\|w\|_{\mathcal{X}} \\
&= \|w\|_{\mathcal{X}}\,(c + k\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}).
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $u, w \in \mathcal{X}$ ισχύει

$$|\langle B(u), w\rangle| \leq \|w\|_{\mathcal{X}}\,(c + k\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}) \tag{3.51}$$

Επομένως από τη σχέση (3.51) για κάθε $w \in \mathcal{X}$ με $\|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0$ έχουμε

$$\frac{|\langle B(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} \leq c + k\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}\,, \text{ για κάθε } u \in \mathcal{X}$$

Άρα, για κάθε $u \in \mathcal{X}$ είναι

$$\begin{aligned}
\|B(u)\|_{\mathcal{X}^*} &= \sup\left\{\frac{|\langle B(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} : w \in \mathcal{X}, \|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0\right\} \\
&\leq c + k\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|B(u)\|_{\mathcal{X}^*} \leq c + k\,\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Άρα, ο τελεστής B είναι φραγμένος. Εάν επιπλέον, $r < p^*$, τότε η ενσφήνωση $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^r(\Omega)$ είναι συμπαγής. Έστω η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ και $u \in \mathcal{X}$ με $u_n \rightharpoonup u$ στο $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ καθώς $n \to \infty$. Λόγω της συμπαγούς ενσφήνωσης του $\mathcal{X}$ στο χώρο $\mathcal{L}^r(\Omega)$, έπεται ότι $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$ στον $\mathcal{L}^r(\Omega)$. Θεωρούμε τον τελεστή

$$F : \mathcal{L}^r(\Omega) \to \mathcal{L}^{r'}(\Omega) \text{ με } F(u) := g(u), \text{ για κάθε } u \in \mathcal{L}^r(\Omega),$$

O F είναι τελεστής Nemytski και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής και ικανοποιεί την growth condition

$$|g(u)| \leq c(1+|u|^{r-1}), \text{ για κάθε } u \in \mathcal{L}^r(\Omega),$$

τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.18, ο τελεστης F είναι συνεχής. Επομένως, αφού $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$, στον $\mathcal{L}^r(\Omega)$ τότε

$$F(u_n) \to F(u), \text{ καθώς } n \to \infty \text{ στον } \mathcal{L}^{r'}(\Omega).$$

Άρα έχουμε

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)} \to 0 \tag{3.52}$$

Τότε, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ ισχύει

$$\begin{aligned} |\langle B(u_n) - B(u), w\rangle| &= |\int_\Omega (g(u_n) - g(u))wdx| \\ &\leq \int_\Omega |(g(u_n) - g(u))||w|dx \\ &= \int_\Omega |(F(u_n) - F(u))||w|dx \\ &\leq \|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)} \\ &\leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$|\langle B(u_n) - B(u), w\rangle| \leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{X}}. \tag{3.53}$$

Επομένως από τη σχέση (3.53) για κάθε $w \in \mathcal{X}$ με $\|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0$ έχουμε

$$\frac{|\langle B(u_n) - B(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} \leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)},$$

οπότε ισχύει

$$\|B(u_n) - B(u)\|_{\mathcal{X}^*} = \sup\left\{\frac{|\langle B(u_n) - B(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} : w \in \mathcal{X}, \|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0\right\},$$

δηλαδή

$$\|B(u_n) - B(u)\|_{\mathcal{X}^*} \leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)} \tag{3.54}$$

Άρα από τις σχεσεις (3.52) και (3.54) έχουμε

$$\|B(u_n) - B(u)\|_{\mathcal{X}^*} \to 0$$

Επομένως ο τελεστής B είναι ισχυρά συνεχής. $\square$

***Λήμμα* 3.25.** *Έστω οι τελεστές $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ και $B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ με $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, οι οποίοι ορίζονται ώς εξής.*

$$\langle A(u), w\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

και

$$\langle B(u), w\rangle := \int_{\Omega} g(u) w dx, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Εάν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και πληροί*

1. *Τη growth condition*

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty,$$

2. *Την ασυμπτωτική συνθήκη*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} xg(x) > -\infty$$

   και επιπλέον $1 < p < n$ *και* $r < \frac{np}{n-p}$,

τότε ο τελεστής $(A + B) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι ψευδομονότονος, ισχυρά συνεχής, φραγμένος και πιεστικός.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και πληροί τη growth condition και επι πλέον $1 < p < n$ και $r < \frac{np}{n-p}$. Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.24 ο τελεστής B. είναι ισχυρά συνεχής και φραγμένος. Από τα Λήμματα 3.21, 3.23 έπεται ότι ο τελεστής A είναι μονότονος και συνεχης. Έτσι σύμφωνα με την Πρόταση 3.16, έπεται ότι ο τελεστής $(A + B)$ είναι ψευδομονότονος. Προφανώς ο $(A + B)$ είναι φραγμένος και ισχυρά συνεχής. Για $u \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\langle A(u), u\rangle \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u dx = \|u\|_{\mathcal{X}}^p. \tag{3.55}$$

και

$$\langle B(u), u\rangle = \int_{\Omega} g(u) u dx, \tag{3.56}$$

Η συνάρτηση g πληροί τη ασυμπτωτική συνθήκη, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $xg(x) > k$. Επομένως για $u \in \mathcal{X}$ είναι

$$\begin{aligned} & ug(u) > k \\ & \int_{\Omega} ug(u) dx > \int_{\Omega} k dx \\ & \int_{\Omega} ug(u) dx > k|\Omega| = M. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Από τις σχέσεις (3.56), (3.57) έπεται ότι

$$\langle B(u), u\rangle > M. \tag{3.58}$$

Έτσι, για $u \in \mathcal{X}$ με $\|u\|_{\mathcal{X}} \neq 0$ και από τις σχέσεις (3.55), (3.58) έχουμε

$$\frac{\langle (A + B)(u), u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} > \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \frac{M}{\|u\|_{\mathcal{X}}}.$$

Άρα εφ'όσον $p > 1$ έπεται ότι

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{X}} \to \infty} \frac{\langle (A+B)(u), u \rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} = \infty$$

Επομένως, ο τελεστής $(A+B)$ είναι πιεστικός. $\square$

Κεφάλαιο 4

Βασικά Θεωρήματα

Τα θεωρήματα που ακολουθούν αποτελούν *φάρους*, ιδιαίτερα στον *σκοτεινό χώρο* της μη γραμμικότητας. Είναι τεράστιας σημασίας εργαλεία στην επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών.

Προβολή σε κυρτό σύνολο ή βέλτιστη προσέγγιση

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και K κλειστό και κυρτό υποσύνολό του. Ένα ερώτημα είναι το εξής: Για δοσμένο $x \in \mathcal{H} \setminus K$, υπάρχει στοιχείο $y \in K$, ώστε η $d(x, K) = \inf\{\|x-z\|, z \in K\}$ να είναι η μικρότερη δυνατή; Παρατηρούμε ότι αν $x \in K$ τότε προφανώς $y = x$. Τα συμπεράσματα των θεωρημάτων που ακολουθούν θα δώσουν απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. .

***Θεώρημα* 4.1.** *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και K ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{H} \setminus K$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $y \in K$ (που ασφαλώς εξαρτάται από το x και το K) τέτοιο ώστε*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| = d.$$

Απόδειξη. **Ύπαρξη:** Υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του K (από τον ορισμό του infimum) τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n - x\| = d_n.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του παραλληλογράμμου και την κυρτότητα του K, θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο K, και δεδομένου ότι το K είναι πλήρες σύνολο, ως κλειστό υποσύνολο πλήρους χώρου, θα συγκλίνει σε ένα στοιχείο του K, έστω y. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2$$

και ότι

$$\|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 + \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2\\ &= 2d_n^2 + 2d_m^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2\\ &= 2d_n^2 + 2d_m^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2\\ &= 2d_n^2 + 2d_m^2 - \|2(\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x)\|^2\\ &= 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2.\end{aligned}$$

Λόγω της κυρτότητας του K ισχύει

$$d^2 \leq \|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2$$

οπότε

$$-4d^2 \geq -4\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\|^2\\ &\leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2.\end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d,$$

έχουμε και

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - x\| = d,$$

οπότε για $n, m \to \infty$ προκύπτει ότι $\|y_n - y_m\|^2 \to 0$. Άρα η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και συγκλίνει στο $y \in K$. Αφού $y \in K$ θα είναι $\|y - x\| \geq d$. Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|(x - y_n) - (y - y_n)\| \leq \|x - y_n\| + \|y - y_n\|\\ &= d_n + \|y_n - y\|.\end{aligned}$$

Όταν $n \to \infty$ έχουμε ότι $d_n + \|y_n - y\| \to d + 0 = d$ οπότε $\|x - y\| \leq d$. Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι $d = \|x - y\|$.
Μοναδικότητα: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $y, y' \in K$ με $\|x - y\| = d$ και $\|x - y'\| = d$. Τότε

$$\begin{aligned}\|y - y'\|^2 &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y' - x\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(y + y') - x\|^2\\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.\end{aligned}$$

Άρα $\|y - y'\|^2 = 0$ οπότε $y = y'$. $\square$

***Ορισμός* 4.2.** *Το στοιχείο $y \in K$, όπου K κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert, που ικανοποιεί την*

$$\|x-y\| = \inf_{z\in K} \|x-z\| = \min_{z\in K} \|x-z\|$$

ονομάζεται προβολή του x στο K *και το συμβολίζουμε με $y = P_K(x)$. Είναι φανερό ότι $x = P_K(x)$ για κάθε $x \in K$.*

***Θεώρημα* 4.3.** *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και K ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{H}$ και $x \in \mathcal{H}$. Τότε $y = P_K(x)$ αν $y \in K$ και $(y, z-y) \geq (x, z-y)$ για κάθε $z \in K$, ή ισοδύναμα $(x-y, z-y) \leq 0$, για κάθε $z \in K$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $y = P_K(x) \in K$. Εφ' όσον το K είναι κυρτό ισχύει ότι $(1-t)y + tz = y + t(z-y) \in K$ για κάθε $z \in K$ και $0 \leq t \leq 1$. Ως εκ τούτου από την

$$\|x-y\| = \inf_{z\in K} \|x-z\|$$

η συνάρτηση

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \|x-y-t(z-y)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2t(x-y, z-y) + t^2\|z-y\|^2\end{aligned}$$

επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή της για $t = 0$. Έτσι $\Phi'(0) \leq 0$, και επειδή

$$\Phi'(t) = -2(x-y, z-y) + 2t\|z-y\|^2,$$

έχουμε

$$-2(x-y, z-y) \geq 0.$$

οπότε

$$(x-y, z-y) \leq 0 \text{ για κάθε } z \in K$$

ή

$$(x, z-y) - (y, z-y) \leq 0$$

ή

$$(y, z-y) \geq (x, z-y) \text{ για κάθε } z \in K.$$

□

***Θεώρημα* 4.4.** *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και K ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{H} \setminus K$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $y \in K$ ώστε*

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-z\|, z \in K\} = d = \min\{\|x-z\|, z \in K\}$$

και $x - y \perp K$.

Απόδειξη. Επειδή κάθε κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{H}$ η ύπαρξη και η μοναδικότητα ενός $y \in K$ ώστε

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-z\|, z \in K\} = d = \min\{\|x-z\|, z \in K\}$$

για κάθε $x \in \mathcal{H} \setminus K$ είναι εξασφαλισμένες από το προηγούμενο θεώρημα. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x - y \perp K$. Υποθέτουμε ότι το $x - y$ δεν είναι κάθετο στο K. Άρα για κάποιο $y_1 \in K$ θα ισχύει $(x-y, y_1) \neq 0$. Θέτουμε $h = x - y$, οπότε $(h, y_1) \neq 0$, και για κάθε $\lambda \in K$, όπου $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|h - \lambda y_1\|^2 &= (h - \lambda y_1, h - \lambda y_1) \\
&= (h,h) - \bar{\lambda}(h, y_1) - \lambda(y_1, h) + \lambda\bar{\lambda}(y_1, y_1) \\
&= \|h\|^2 - \bar{\lambda}(h, y_1) - \lambda\overline{(h, y_1)} + \lambda^2\|y_1\|^2.
\end{aligned}$$

Για $\lambda = \frac{(h,y_1)}{\|y_1\|^2}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|h - \lambda y_1\|^2 &= \frac{\overline{(h,y_1)}(h,y_1)}{\|y_1\|^2} - \frac{\overline{(h,y_1)}(h,y_1)}{\|y_1\|^2} + \frac{(h,y_1)^2}{\|y_1\|^4}\|y_1\|^2 \\
&= \|h\|^2 - \frac{|(h,y_1)|^2}{\|y_1\|^2} < d^2
\end{aligned}$$

οπότε $\|h - \lambda y_1\| < d$, άτοπο αφού

$$h - \lambda y_1 = x - y - \lambda y_1 = x - (y + \lambda y_1),$$

και

$$\|h - \lambda y_1\| = \|x - (y + \lambda y_1)\| \geq d.$$

Άρα $x - y \perp K$. □

***Θεώρημα* 4.5.** *(Ορθογώνιας διάσπασης ή ορθογώνιας προβολής). Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και K ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Τότε $\mathcal{H} = K \oplus K^{\perp}$, δηλαδή κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = y + z$, όπου $y \in K$ και $z \in K^{\perp}$.*

Απόδειξη. Αν $x \in K$ τότε έχουμε την προφανή ανάλυση $x = x + 0$, με $0 \in K^{\perp}$. Έστω τώρα ότι $x \notin K$, δηλαδή $x \in \mathcal{H} \setminus K$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 4.4, υπάρχει μοναδικό στοιχείο $y \in K$, για το οποίο

$$\|x - y\| = \inf_{w \in K} \|x - w\| = d(x, K) = \delta,$$

και το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη $x - y \perp K$. Άρα $x - y \in K^{\perp}$. Έτσι, θέτοντας $z = x - y$, παίρνουμε $x = z + y$, που είναι η ζητούμενη αναπαράσταση του x.

Έχουμε λοιπόν εξασφαλίσει την ύπαρξη. Για τη μοναδικότητα, έστω ότι υπάρχουν δύο αναπαραστάσεις $x = y + z$ και $x = y_1 + z_1$ με $y_1 \in K$ και $z_1 \in K^{\perp}$. Τότε το $y - y_1 \in K$ και το $z - z_1 \in K^{\perp}$. Όμως

$$y - y_1 = x - z - (x - z_1) = z_1 - z,$$

δηλαδή $y - y_1 \in K \cap K^{\perp} = \{0\}$, που σημαίνει ότι $y = y_1$ και $z = z_1$. □

***Πρόταση* 4.6.** *Ο τελεστής προβολής $P_K : \mathcal{H} \to K$ με $P_K(x) = y$ όπου $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και K κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(a). $\mathrm{Im}(P_K) = K$ *και* $\ker(P_K) = K^{\perp}$.

(b). *είναι γραμμικός.*

(c). *είναι αδύναμος, δηλαδή $P_K^2 = P_K$.*

(d). *έχει $\|P_K\| = 1$ (άρα είναι φραγμένος τελεστής).*

Η προβολή P_K είναι η μοναδική απεικόνιση με τις ιδιότητες $(a) - (d)$.

***Πόρισμα* 4.7.** *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και K ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Τότε ο τελεστής P_K είναι μη διασταλτικός (non-expansive), δηλαδή $\|P_K(x) - P_K(x')\| \leq \|x - x'\|$ για κάθε $x, x' \in \mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Έστω $x, x' \in \mathcal{H}$ και $y = P_K(x)$ και $y' = P_K(x')$. Τότε

$$(y, z - y) \geq (x, z - y) \text{ για κάθε } z \in K \tag{4.1}$$
$$(y', z - y') \geq (x', z - y') \text{ για κάθε } z \in K. \tag{4.2}$$

Θέτοντας στην (4.1) όπου $z = y'$ και στην (4.2) όπου $z = y$ και προσθέτοντας παίρνουμε

$$(y - y', y - y') \leq (x - x', y - y')$$

άρα

$$\|y - y'\|^2 \leq \|x - x'\| \|y - y'\|.$$

Δηλαδή

$$\|y - y'\| \leq \|x - x'\|.$$

Άρα $\|P_K(x) - P_K(x')\| \leq \|x - x'\|$ για κάθε $x, x' \in \mathcal{H}$. □

***Θεώρημα* 4.8.** *(Αναπαράστασης Riesz-Frechet). Για δεδομένο $\phi \in \mathcal{H}^*$, υπάρχει μοναδικό $f \in \mathcal{H}$, τέτοιο ώστε*

$$\langle \phi, v \rangle = (f, v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}.$$

Επιπλέον ισχύει ότι $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|\phi\|_{\mathcal{H}^*}$

Απόδειξη. Έστω

$$N = \phi^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathcal{H} : \phi(x) = 0\} = \ker \phi.$$

Επειδή η ϕ είναι γραμμική και συνεχής, ο N είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.
Αν $N = \mathcal{H}$ τότε $\phi = 0$ και άρα $f = 0$.
Αν $N \neq \mathcal{H}$ τότε $N^{\perp} \neq \{0\}$. Άρα υπάρχει $z \in N^{\perp}$, $z \neq 0$, με $\phi(z) \neq 0$. Για κάθε $v \in \mathcal{H}$ έχουμε ότι $v\phi(z) - z\phi(v) \in N$, οπότε το $v\phi(z) - z\phi(v)$ είναι κάθετο στο z. Άρα

$$0 = (v\phi(z) - z\phi(v), z) = (v\phi(z), z) - (z\phi(v), z),$$

οπότε

$$\phi(v) = \frac{\phi(z)}{\|z\|^2}(v, z) = (v, \overline{\frac{\phi(z)}{\|z\|^2}}, z).$$

Αν θέσουμε $\overline{\frac{\phi(z)}{\|z\|^2}} z = f$, τότε $\phi(v) = (v, f)$, δηλαδή

$$\langle \phi, v \rangle = (f, v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}.$$

Τέλος, το f είναι μοναδικό καθώς αν υπήρχε $f' \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε

$$\langle \phi, v \rangle = (f, v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H},$$

$$\langle \phi, v \rangle = (f', v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H},$$

τότε παίρνουμε ότι

$$(f - f', v) = 0, \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H},$$

δηλαδή ότι $f = f'$. □

***Θεώρημα* 4.9.** *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert με νόρμα $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$. Εάν το $K \subset \mathcal{H}$ είναι κλειστό, κυρτό και μη κενό, τότε, για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$ τέτοιο ώστε*

$$\|f - u\| = \min\{\|f - w\| : w \in K\}. \tag{4.3}$$

Επιπλέον, το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$(f - u, w - u) \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K. \tag{4.4}$$

***Παρατήρηση* 4.10.** *Με βάση το παραπάνω θεώρημα, είναι καλώς ορισμένη η απεικόνιση*

$$P_K : \mathcal{H} \to K \text{ με } P_K(f) := u, \text{ για κάθε } f \in \mathcal{H},$$

όπου $u \in K$, για το οποίο ισχύει η ισότητα (4.3). Η P_K, όπως γνωρίζουμε, ονομάζεται μετρική προβολή του $\mathcal{H}$ στο K και προφανώς $P_K(h) = h$, για κάθε $h \in K$. Χρησιμοποιώντας τη μετρική προβολή P_K του $\mathcal{H}$ στο K, η σχέση (4.4) γράφεται ισοδύναμα

$$\langle f - P_K(f), w - P_K(f) \rangle \leq 0, \text{ για κάθε } w \in K. \tag{4.5}$$

Δηλαδή, το $u = P_K(f)$ είναι το πλησιέστερο σημείο του K προς το $f \in \mathcal{H}$ και η ανισότητα (4.5) δείχνει ότι για οποιοδήποτε $w \in K$ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $f - P_K(f)$ και $w - P_K(f)$ είναι αμβλεία.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι χρήσιμο στην απόδειξη του θεωρήματος Lax-Milgram.

***Θεώρημα* 4.11.** *Έστω $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο διγραμμικό συναρτησιακό σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε υπάρχει μοναδικός γραμμικός και φραγμένος τελεστής S στον $\mathcal{H}$ ώστε*

$$a(x, y) = \langle x, Sy \rangle, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{H}.$$

Απόδειξη. Για σταθερό $y \in \mathcal{H}$, η απεικόνιση $a(\cdot, y) : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό επί του $\mathcal{H}$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό στοιχείο $Sy \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε

$$a(x, y) = \langle x, Sy \rangle, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Θα δείξουμε ότι ο τελεστής S είναι γραμμικός και φραγμένος στον $\mathcal{H}$. Πράγματι, για κάθε $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\begin{aligned} a(x, y_1 + y_2) &= \langle x, S(y_1 + y_2) \rangle, \\ a(x, y_1) &= \langle x, Sy_1 \rangle, \\ a(x, y_2) &= \langle x, Sy_2 \rangle. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} a(x, y_1 + y_2) &= a(x, y_1) + a(x, y_2), \\ \langle x, S(y_1 + y_2) \rangle &= \langle x, Sy_1 \rangle + \langle x, Sy_2 \rangle, \\ S(y_1 + y_2) &= S(y_1) + S(y_2). \end{aligned}$$

Επίσης, από τις

$$\begin{aligned} a(x, \lambda y) &= \langle x, S(\lambda y) \rangle, \\ a(x, \lambda y) &= \langle x, \lambda S(y) \rangle, \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\langle x, S(\lambda y) \rangle = \langle x, \lambda S(y) \rangle,$$

δηλαδή

$$S(\lambda y) = \lambda S(y)$$

και έτσι ο S είναι γραμμικός. Θα δείξουμε ότι είναι και φραγμένος. Πράγματι από τη σχέση

$$a(x, y) = \langle x, Sy \rangle,$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$ και επειδή το a είναι φραγμένο, έχουμε $|a(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$ για κάποιο $c > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$. Για $x = Sy$ παίρνουμε

$$|a(Sy, y)| = \langle Sy, Sy \rangle = \|Sy\|^2 \leq c\|Sy\|\|y\|.$$

Άρα για $Sy \neq 0$ έχουμε $\|Sy\| \leq c\|y\|$. Άρα ο S είναι φραγμένος. Τέλος, η μοναδικότητα του S προκύπτει άμεσα από το ότι αν υπάρχει $\hat{S}$, τέτοιος ώστε

$$\langle x, Sy \rangle = \langle x, \hat{S}y \rangle, \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{H},$$

τότε $S = \hat{S}$. □

***Θεώρημα* 4.12.** *(Lax-Milgram). Έστω $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ χώρος Hilbert και*

$$a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

ένα συνεχές διγραμμικό συναρτησιακό με την ιδιότητα

$$|a(v, v)| \geq k\|v\|^2, \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H} \quad \text{(συνθήκη πιεστικότητας).}$$

Τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{H}^*$, υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}$, έτσι ώστε

$$\phi(v) = a(v, u) \text{ ή } \langle \phi, v \rangle = a(v, u).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής S, τέτοιος ώστε

$$a(v, y) = \langle v, Sy \rangle = \langle v, w \rangle, \text{ για κάθε } v, y \in \mathcal{H}, \text{ με } w = Sy. \tag{4.6}$$

Όταν το y διατρέχει τον χώρο $\mathcal{H}$, το $w = Sy$ διατρέχει ένα γραμμικό υπόχωρο του $\mathcal{H}$, το σύνολο $\mathrm{Im}(S)$ των εικόνων του S. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνθήκη πιεστικότητας και θέτοντας $v = y$ στη συνθήκη πιεστικότητας παίρνουμε

$$k\|y\|^2 \leq |a(y, y)| = |\langle y, Sy \rangle| \leq \|y\|\|Sy\|.$$

Άρα,

$$k\|y\| \leq \|Sy\|, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{H}. \tag{4.7}$$

Έστω τώρα $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του $\mathcal{H}$, έτσι ώστε $\|Sy_n - \hat{v}\| \to 0$, για κάποιο $\hat{v} \in \mathcal{H}$. Τότε από τις σχέσεις

$$a(v, y_n) = \langle v, Sy_n \rangle, \tag{4.8}$$

$$a(v, y_m) = \langle v, Sy_m \rangle, \tag{4.9}$$

παίρνουμε

$$a(v, y_n - y_m) = \langle v, Sy_n - Sy_m \rangle.$$

Ομοίως,

$$k\|y_n - y_m\| \leq \|Sy_n - Sy_m\| \to 0, \ n, m \to \infty.$$

Άρα, η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{H}$ και αφού ο $\mathcal{H}$ είναι πλήρης, υπάρχει $y \in \mathcal{H}$ ώστε $\|y_n - y\| \to 0$. Από τη συνέχεια της a και του εσωτερικού γινομένου, έχουμε από τη σχέση (4.6)

$$\lim_{n\to\infty} a(v, y_n) = a(v, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle v, Sy_n \rangle = \langle v, \hat{v} \rangle,$$

δηλαδή

$$a(v, y) = \langle v, Sy \rangle.$$

Δηλαδή το όριο $\hat{v}$ της ακολουθίας Sy_n είναι το σημείο $Sy_n \in \mathrm{Im}(S)$. Άρα, ο $\mathrm{Im}(S)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathrm{Im}(S) = \mathcal{H}$. Έστω ότι $\mathrm{Im}(S)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Τότε υπάρχει στοιχείο $h \in \mathcal{H} - \mathrm{Im}(S)$, $h \neq 0$, τέτοιο ώστε $h \perp \mathrm{Im}(S)$. Δηλαδή

$$\langle h, Sy \rangle = 0, \text{ για κάθε } y \in \mathcal{H}.$$

Η παραπάνω σχέση, για $y = h$ γίνεται

$$0 = \langle h, Sh \rangle = a(h, h).$$

Όμως, από την ιδιότητα πιεστικότητας έχουμε $0 = a(h,h) \geq k\|h\|^2$, άρα $h = 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι $h \neq 0$. Επομένως $\mathrm{Im}(S) = \mathcal{H}$.

Αναφορικά τώρα με το αν η απεικόνιση $w = Sy$ είναι αμφιμονοσήμαντη, πράγματι ισχύουν τα εξής. Έστω $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ και $Sy_1 = Sy_2$, τότε $S(y_1 - y_2) = 0$. Σύμφωνα με την (4.7) έχουμε

$$k\|y_1 - y_2\| \leq \|S(y_1 - y_2)\| = 0.$$

Δηλαδή $y_1 = y_2$. Επομένως η $w = Sy$ αντιστρέφεται, δηλαδή η απεικόνιση $y = S^{-1}w$ είναι καλά ορισμένη. Επίσης από τη σχέση (4.7) έχουμε

$$\|y\| \leq \frac{1}{k}\|Sy\|$$

οπότε ο τελεστής $S^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι φραγμένος. Για να δείξουμε το ζητούμενο του θεωρήματος, έστω $\phi \in \mathcal{H}^*$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό. Τότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι

$$\phi(v) = \langle v, w_\phi \rangle, \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}, \text{ με } w_\phi \in \mathcal{H}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi(v) = a(v, u)$. Με δεδομένη την ύπαρξη του αντιστρόφου τελεστή S_ϕ^{-1} έχουμε

$$\langle v, w_\phi \rangle = a(v, S_\phi^{-1} w_\phi), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}.$$

Άρα, $\phi(v) = a(v, u)$, με $u = S_\phi^{-1} w_\phi$. □

***Θεώρημα* 4.13.** *(Stampacchia). Έστω $a(u, v)$ ένα διγραμμικό συνεχές πιεστικό συναρτησιακό. Έστω K κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Για δεδομένο $\phi \in \mathcal{H}^*$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$, τέτοιο ώστε*

$$a(u, v - u) \geq < \phi, v - u >, \text{ για κάθε } v \in K. \tag{4.10}$$

Επιπλέον, αν το a είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\frac{1}{2}a(u,u) - < \phi, u > = \min_{u \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - < \phi, v >\} \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα αναπαράστασης των Riesz-Frechet, υπάρχει μοναδικό $f \in \mathcal{H}$, τέτοιο ώστε

$$< \phi, v >= (f, v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}.$$

Εξ'άλλου για σταθερό $u \in \mathcal{H}$, η απεικόνιση $v \mapsto a(u, v)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον $\mathcal{H}$ και σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης Riesz-Frechet υπάρχει στοιχείο του $\mathcal{H}$, έστω Au, τέτοιο ώστε

$$a(u, v) = (Au, v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}.$$

Είναι φανερό ότι ο A είναι ένας γραμμικός τελεστής από τον $\mathcal{H}$ στον $\mathcal{H}$ και ότι

$$\|Au\| \leq c\|u\|, \text{ για κάθε } u \in \mathcal{H} \tag{4.12}$$

$$(Au, u) \geq a\|u\|^2, \text{ για κάθε } u \in \mathcal{H}. \tag{4.13}$$

Μετά από αυτή τη θεώρηση, το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθεί $u \in K$, τέτοιο ώστε

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u), \text{ για κάθε } v \in K. \tag{4.14}$$

Έστω $\rho > 0$, σταθερό. Η ανισότητα (4.14) ισοδυναμεί με την

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0, \text{ για κάθε } v \in K, \tag{4.15}$$

δηλαδή $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$. Για κάθε $v \in K$ θέτουμε $= P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Θα δείξουμε ότι αν το $\rho > 0$ επιλεγεί κατάλληλα τότε το S είναι μία αυστηρή συστολή, δηλαδή υπάρχει $k < 1$, τέτοιο ώστε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq k\|v_1 - v_2\|, \text{ για κάθε } v_1, v_2 \in K.$$

Από γνωστή πρόταση ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\| &= \|P_K(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho Av_2 + v_2)\| \\ &\leq \|\rho f - \rho Av_1 + v_1 - \rho f + \rho Av_2 - v_2\| \\ &= \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|,\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho a + \rho^2 c^2).\end{aligned}$$

Αν το $\rho > 0$ επιλεγεί ώστε $k^2 = 1 - 2\rho a + \rho^2 c^2 < 1$ (π.χ. $0 < \rho < 2a/c^2$), τότε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq k\|v_1 - v_2\|, \text{ για κάθε } v_1, v_2 \in K,$$

με $k < 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, η S έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Τέλος, έστω u τέτοιο ώστε

$$a(u, v - u) \geq < \phi, v - u >, \text{ για κάθε } v \in K.$$

Η συμμετρία του a υποδηλώνει ότι

$$a(v-u,u) \geq < \phi, v-u >, \text{ για κάθε } v \in K.$$

Θέτουμε

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < \phi, v >, \text{ για κάθε } v \in K.$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u+(v-u)) \\ &= \frac{1}{2}a(u+(v-u), u+(v-u)) - < \phi, u+(v-u) > \\ &= \frac{1}{2}(u,u) - < \phi, u > + a(v-u,u) + \frac{1}{2}a(v-u,v-u) - < \phi, v-u > \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(v-u,v-u) + a(v-u,u) - < \phi, v-u > . \end{aligned}$$

Λόγω της πιεστικότητας προκύπτει ότι

$$a(v-u,v-u) \geq 0.$$

Επίσης

$$a(v-u,u) - < \phi, v-u > \geq 0,$$

οπότε $F(u) \leq F(v)$, για κάθε $v \in K$, οπότε το u είναι ελαχιστοποιητής του $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < \phi, v >, v \in K$. □

***Παρατήρηση* 4.14.** *Το θεώρημα Lax-Milgram προκύπτει πλέον ως πόρισμα του θεωρήματος Stampacchia ως εξής. Αν K κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$ ώστε για δεδομένο $\phi \in \mathcal{H}^*$ ισχύει*

$$a(u,v) \geq \langle \phi, v \rangle, \text{ για κάθε } v \in K. \tag{4.16}$$

Θέτοντας $v = -v$ προκύπτει

$$a(u,v) \leq \langle \phi, v \rangle, \text{ για κάθε } v \in K. \tag{4.17}$$

Από τις (4.16) και (4.17) συμπεραίνουμε ότι

$$a(u,v) = \langle \phi, v \rangle, \text{ για κάθε } v \in K.$$

***Πρόταση* 4.15.** *Εάν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής και πιεστική, τότε η f είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Η f είναι πιεστική, άρα

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $M > 0$, υπάρχει $R > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| \geq R$ ισχύει

$$\frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} > M \text{ δηλαδή } \langle f(x), x \rangle > M\|x\|.$$

Επομένως, για $M = \|y\| > 0$ και $R = \|x\| > 0$ ισχύει

$$\langle f(x), x\rangle > M\|x\| = \|y\|\|x\| \geq \langle y, x\rangle,$$

δηλαδή

$$\langle f(x) - y, x\rangle > 0. \tag{4.18}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - y$ με $x \in \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση H είναι συνεχής αφού η f είναι συνεχής. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\langle H(x), x\rangle = \langle f(x) - y, x\rangle = \langle f(x), x\rangle - \langle y, x\rangle$$

οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.18) προκύπτει ότι

$$\langle H(x), x\rangle > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } R = \|x\| > 0.$$

Άρα, από το πόρισμα του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer (βλ. Παράρτημα Σταθερά Σημεία), υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_0\| \leq R$, τέτοιο ώστε

$$H(x_0) = 0,$$

δηλαδή

$$f(x_0) = y.$$

Επομένως, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = y.$$

Άρα, η f είναι επί. □

***Θεώρημα* 4.16.** *(Minty-Browder). Έστω $\mathcal{X}$ χώρος ένας διαχωρίσιμος και ανακλαστικός χώρος Banach. Αν ο τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονος, συνεχής και πιεστικός, τότε ο T είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathcal{X}^*$. Εφ' όσον ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει ακολουθία $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποχώρων του $\mathcal{X}$ με $\dim \mathcal{X}_n < \infty$ και

$$\mathcal{X}_n = span\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

τέτοια ώστε

$$\mathcal{X} = \overline{\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{X}_n}.$$

Περιορίζοντας τον T στον $\mathcal{X}_n$, οι ιδιότητες της συνέχειας και της πιεστικό- τητας του T διατηρούνται. Έτσι, ο $T : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_n^*$ είναι συνεχής και πιεστικός τελεστής. Άρα, από γνωστή πρόταση έπεται ότι ο T είναι επί στον $\mathcal{X}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, υπάρχει $x_n \in \mathcal{X}_n$ τέτοιο ώστε

$$T(x_n) = y.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$. Έχουμε

$$\frac{\langle T(x_n), x_n\rangle}{\|x_n\|} = \frac{\langle y, x_n\rangle}{\|x_n\|} \leq \frac{\|y\|\|x_n\|}{\|x_n\|} = \|y\|. \tag{4.19}$$

Η x_n είναι φραγμένη ακολουθία διότι αν δεν ήταν φραγμένη θα υπήρχε υπακολουθία x_n με $\|x_n\| \to \infty$, οπότε λόγω της πιεστικότητας του T θα είχαμε

$$\frac{\langle T(x_n), x_n \rangle}{\|x_n\|} \to \infty$$

το οποίο είναι άτοπο από τη σχέση (4.19). Επειδή ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ανακλαστικός, για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ που είναι φραγμένη υπάρχει μία υπακολουθία της, έστω $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ με $x_{n_k} \rightharpoonup x$, καθώς $k \to \infty$, και $x \in \mathcal{X}$. Ο T επιπλέον είναι μονότονος, οπότε ισχύει

$$\langle T(x_{n_k}) - T(z), x_{n_k} - z \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X},$$

δηλαδή

$$\langle y - T(z), x_{n_k} - z \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}.$$

Λόγω της ασθενούς σύγκλισης της x_{n_k}, έπεται ότι

$$\langle y - T(z), x_{n_k} - z \rangle \rightharpoonup \langle y - T(z), x - z \rangle, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}.$$

Αλλά $\langle y - T(z), x_{n_k} - z \rangle \geq 0$, για κάθε $z \in \mathcal{X}$ οπότε και

$$\langle y - T(z), x - z \rangle \geq 0, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{X}.$$

Επομένως, από το λήμμα 3.9 προκύπτει ότι

$$y = T(x).$$

Άρα, για κάθε $y \in \mathcal{X}^*$ υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$, οπότε ο T είναι επί. □

***Θεώρημα* 4.17.** *(Heim Brezis). Έστω $\mathcal{X}$ διαχωρίσιμος και ανακλαστικός χώρος Banach. Έστω επίσης τελεστής $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, ψευδομονότονος, φραγμένος και πιεστικός. Τότε $R(A) = \mathcal{X}^*$.*

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

Εφαρμογή του θεωρήματος Lax-Milgram

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (πρόβλημα Dirichlet)

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Για δεδομένη $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του (5.1) μία συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, που είναι τέτοια ώστε

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{5.2}$$

***Θεώρημα* 5.1.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Τότε το πρόβλημα Dirichlet* (5.1) *έχει μοναδική ασθενή λύση.*

(Σημειώνουμε ότι, για διάκριση, την ισοδύναμη νόρμα της κλασσικής νόρμας στον χώρο Hilbert, συμβολίζουμε με $\|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx$).

Απόδειξη. Στο χώρο Hilbert $(\mathcal{H}_0^1(\Omega), \|\cdot|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)})$ θεωρούμε το διγραμμικό συναρτησιακό

$$a(\cdot,\cdot) : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},$$

όπου

$$a(u, w) := \int_\Omega \nabla u \nabla w dx, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Τότε, για κάθε $u, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ισχύει

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= |\int_\Omega \nabla u \nabla w dx| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla w| dx \\ &\leq \|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \|w|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Άρα το συναρτησιακό a είναι συνεχές. Επιπλέον, για κάθε $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε

$$a(u,u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx = \|u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.$$

Οπότε το συναρτησιακό a είναι και πιεστικό. Επομένως, από το Θεώρημα Lax-Milgram 4.12, υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$a(u,w) = \langle f, w\rangle, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Άρα, για δεδομένη συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ώστε να ικανοποιείται η (5.2). Επομένως, υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ για το πρόβλημα Dirichlet (5.1). □

***Πρόταση* 5.2.** *Η συνάρτηση $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, που σε κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ αντιστοιχεί τη μοναδική λύση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ του προβλήματος* (5.1), *είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $F(f) = u$, δηλαδή

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{5.3}$$

Η συνάρτηση F είναι γραμμική αφού για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει

$$F(f+g) = F(f) + F(g).$$

Για $w = u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, η σχέση (5.3) γίνεται

$$\int_\Omega (\nabla u)^2 dx = \int_\Omega f u dx,$$

δηλαδή

$$\|u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f u dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \tag{5.4}$$

Με χρήση της ανισότητας Poincare, η σχέση (5.4) γράφεται

$$\|u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} C \|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)},$$

δηλαδή

$$\|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \tag{5.5}$$

Αλλά $u = F(f)$, οπότε από τη σχέση (5.5) έχουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, ισχύει ότι

$$\|F(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \tag{5.6}$$

με αποτέλεσμα η γραμμική συνάρτηση F να είναι συνεχής. □

***Παρατήρηση* 5.3.** *Γνωρίζουμε ότι για κάθε $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ισχύει η σχέση*

$$\|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq (C+1)\|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.$$

Άρα, για $u = F(f) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε

$$\frac{1}{C+1}\|F(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C+1}\|F(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \|F(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.$$

Έτσι, από τη σχέση (5.6), *για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει*

$$\frac{1}{C+1}\|F(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \tag{5.7}$$

Αλλά, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει

$$\|F(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \geq \|F(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Άρα, η σχέση (5.7) *γράφεται, θεωρώντας $M = C(C+1) > 0$,*

$$\|F(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq M\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \text{ για κάθε } f \in \mathcal{L}^2(\Omega),$$

δηλαδή

$$\|F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} \leq M. \tag{5.8}$$

Επομένως, η γραμμική συνάρτηση $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ είναι συνεχής.

***Παράδειγμα* 5.4.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο. Αν $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ και $c(x) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ με $c(x) \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω, τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε ασθενή μορφή ως

$$-\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega c(x) v dx = \int_\Omega f v dx, \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{5.9}$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Green, η (5.9) γίνεται

$$-\int_{\partial\Omega} v(\nabla u n) dS + \int_\Omega (\nabla u \nabla v) dx + \int_\Omega c(x) v dx = \int_\Omega f v dx, \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

όπου n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση της (5.9), αν

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v) dx + \int_\Omega c(x) v dx = \int_\Omega f v dx, \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Αν θεωρήσουμε $F : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ με $F(v) = \int_\Omega fvdx$, τότε το F είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, αφού από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$F(v) = \int_\Omega fvdx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}.$$

Επίσης, αν θέσουμε $B : \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ με

$$B(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v)dx + \int_\Omega c(x)vdx,$$

τότε η B είναι φραγμένη διγραμμική μορφή αφού

$$|B(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|c\|_\infty \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Τέλος, η B είναι πιεστική αφού

$$B(u,u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}, \text{ για κάθε } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Άρα από το θεώρημα Lax-Milgram υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$B(u,v) = F(v), \text{ για κάθε } v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Οπότε υπάρχει μοναδική λύση της (5.9). □

Εφαρμογή του θεωρήματος σταθερού σημείου του Schauder

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (πρόβλημα Dirichlet)

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.10}$$

Για δεδομένη $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του προβλήματος (5.10), μία συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, που είναι τέτοια ώστε

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega g(u) w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{5.11}$$

***Θεώρημα* 5.5.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Τότε το πρόβλημα* (5.10) *έχει ασθενή λύση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $T : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$, με

$$T(f) := F(g(f)), \text{ για κάθε } f \in \mathcal{L}^2(\Omega),$$

όπου $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, ο τελεστής του προβλήματος (5.1), με

$$F(f) = u, \text{ για κάθε } f \in \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Ο T είναι καλώς ορισμένος τελεστής διότι η g είναι φραγμένη συνάρτηση, οπότε υπάρχει $m > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$|(g \circ f)(x))| \leq m. \tag{5.12}$$

Η g είναι συνεχής συνάρτηση και $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε

$$\|g \circ f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \int_{\Omega)} m^2 dx \leq m^2 \mu(\Omega),$$

δηλαδή

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq m\sqrt{\mu(\Omega)}. \tag{5.13}$$

Άρα η $(g \circ f) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. και επομένως,

$$T(f) = F(g(f)) \in \mathcal{L}^2(\Omega), \text{ για κάθε } f \in \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Επίσης, ο τελεστής T είναι φραγμένος διότι για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ έχουμε

$$\|T(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|F(g(f))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|F\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|g(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \tag{5.14}$$

Ο τελεστής F είναι φραγμένος και μάλιστα από τη σχέση (5.8) έχουμε

$$\|F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} \leq M,$$

όπου $M = C(C+1) > 0$ και $C > 0$ είναι η σταθερά που προκύπτει από την ανισότητα Poincare. Άρα από τις σχέσεις (5.8) και (5.13), η (5.14) γίνεται

$$\|T(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq Mm\sqrt{\mu(\Omega)}$$

και θεωρώντας $k = Mm\sqrt{\mu(\Omega)} > 0$ έχουμε

$$\|T(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq k, \text{ για κάθε } f \in \mathcal{L}^2(\Omega). \tag{5.15}$$

Επομένως, $T(f) \in B(0,k)$ και άρα

$$T : \mathcal{L}^2(\Omega) \to B(0,k) \subset \mathcal{L}^2(\Omega),$$

οπότε ο τελεστής T είναι φραγμένος. Επιπλέον, ο τελεστής T είναι συμπαγής. Πράγματι, έστω $U \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Η συνάρτηση g είναι φραγμένη, οπότε το $g(U) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα ενσφήνωσης του Lebesque, το $F(g(U))$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Άρα, για κάθε $U \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ φραγμένο, το $T(U)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Έτσι, ο τελεστής T είναι συμπαγής.

Ο τελεστής T είναι επίσης συνεχής. Πράγματι, έστω η ακολουθία

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ με } u_n \to u, \text{ καθώς } n \to \infty,$$

όπου $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Άρα, υπάρχει μία υπακολουθία

$$(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

με $u_{n_k}(x) \to u(x)$ σχεδόν παντού στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$ και τότε

$$\begin{aligned} \|T(u_{n_k}) - T(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \|F(g(u_{n_k})) - F(g(u))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq M\|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

αφού ο F είναι συνεχής και φραγμένος τελεστής. Αλλά, η συνάρτηση g είναι φραγμένη και από τη σχέση (5.12) έχουμε

$$|g(u_{n_k})| \leq m, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, για την υπακολουθία $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $u_{n_k}(x) \to u(x)$ σχεδόν παντού στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Επομένως, από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesque (βλ. Παράρτημα Χώροι Συναρτήσεων) έχουμε

$$\|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \to 0.$$

Άρα, από τη σχέση (5.16) προκύπτει ότι

$$\|T(u_{n_k}) - T(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \to 0,$$

οπότε

$$T(u_{n_k}) \to T(u) \text{ στον } \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Έτσι, $T(u_n) \to T(u)$, διότι διαφορετικά θα υπήρχε μία ακολουθία

$$(u_{k_l})_{k_l \in \mathbb{N}} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } T(u_{k_l}) \nrightarrow T(u)$$

στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$, άτοπο. Άρα, $T(u_n) \to T(u)$ και ο τελεστής T είναι συνεχής.

Έτσι, ο $T : B(0,k) \to B(0,k) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι συνεχής, φραγμένος και συμπαγής και η $B(0,k)$ είναι ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Οπότε, από το πόρισμα του θεωρήματος σταθερού σημείου του Schauder (βλ. Παράρτημα Σταθερά Σημεία) υπάρχει σταθερό σημείο u για τον τελεστή T με

$$T(u) = F(g(u)) = u,$$

δηλαδή

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega g(u) w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

$\square$

Εφαρμογή του θεωρήματος σταθερού σημείου του Banach

***Θεώρημα* 5.6.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (πρόβλημα Dirichlet)*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.17}$$

όπου η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz με σταθερά $k > 0$. Εάν για τη σταθερά k ισχύει $k < \lambda_1$, όπου

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\|w\|^2_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}}{\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} : w \in \mathcal{H}^1_0(\Omega) \right\},$$

τότε το πρόβλημα (5.17) *έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση g είναι Lipschitz με σταθερά $k > 0$, άρα ισχύει

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.18}$$

Για $y = 0$, η σχέση (5.18) γίνεται

$$|g(x) - g(0)| \leq k|x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Αλλά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$||g(x)| - |g(0)|| \leq |g(x) - g(0)|. \tag{5.20}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (5.19) και (5.20) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|g(x)| \leq k|x| + |g(0)|. \tag{5.21}$$

Η σχέση (5.21) ισχύει για κάθε $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα έχουμε

$$|g(u(x))|^2 \leq (k|u(x)| + |g(0)|)^2 \leq 2(k^2|u(x)|^2 + |g(0)|^2). \tag{5.22}$$

Επιπλέον, η σχέση (5.18) ισχύει για κάθε $u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού υψώσουμε στο τετράγωνο και ολοκληρώσουμε, ισχύει

$$\|g(u) - g(w)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq k\|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \tag{5.23}$$

Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ όπως ορίστηκε στο πρόβλημα (5.1). Τότε, για κάθε $u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει ότι $g(u), g(w) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε από τη σχέση (5.23) έχουμε

$$\begin{aligned} \|F(g(u)) - F(g(w))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \|F(g(u) - g(w))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))}\|g(u) - g(w)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq k\|F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))}\|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ο τελεστής F είναι αυτοσυζυγής διότι για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ υπάρχουν $u, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, αντίστοιχα, που είναι ασθενείς λύσεις του προβλήματος (5.1), και είναι τέτοιες ώστε

$$u = F(f) \text{ και } v = F(g).$$

Επομένως, ισχύουν

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \tag{5.25}$$

και

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega g w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{5.26}$$

Η σχέση (5.25) ισχύει για $w = v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, άρα

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{5.27}$$

Η σχέση (5.26) ισχύει για $w = u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, άρα

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g u dx. \tag{5.28}$$

Από τις σχέσεις (5.27) και (5.28) προκύπτει

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega g u dx,$$

δηλαδή

$$\int_\Omega f F(g) dx = \int_\Omega g F(f) dx,$$

ή

$$\langle f, F(g) \rangle = \langle F(f), g \rangle, \text{ για κάθε } f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Έτσι, ο τελεστής F είναι αυτοσυζυγής. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ο τελεστής $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι συμπαγής. Άρα, ισχύει το Φασματικό Θεώρημα και έτσι υπάρχει ακολουθία ιδιοτιμών $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ με $\lambda_1 > 0$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

και

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\|w|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}}{\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} : w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \right\}.$$

Επομένως, ισχύει

$$\lambda_1 \leq \frac{\|w|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}}{\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

δηλαδή

$$\lambda_1 \|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|w|^2_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}^1_0(\Omega).$$

Επιπλέον, για κάθε $f \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ υπάρχει $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$, η οποία είναι ασθενής λύση του προβλήματος (5.1), και είναι τέτοια ώστε

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}^1_0(\Omega). \tag{5.29}$$

Οπότε, για $w = u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$, η σχέση (5.29) γίνεται

$$\|u|^2_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} = \int_\Omega f u dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Άρα,

$$\lambda_1 \|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},$$

ή

$$\|F(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$
$$\|F(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda_1}.$$

Επομένως, η σχέση (5.25) δίνει

$$\|F(g(u)) - F(g(w))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{k}{\lambda_1} \|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \text{ για κάθε } u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega),$$

με $k < \lambda_1$, δηλαδή $k/\lambda_1 < 1$. Έτσι, η συνάρτηση $F \circ g$ είναι συστολή. Άρα, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach (βλ. Παράρτημα Σταθερά Σημεία) προκύπτει ότι η $F \circ g$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Δηλαδή, υπάρχει μοναδική $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$F(g(u)) = u,$$

ή

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega g(u) w dx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{H}^1_0(\Omega).$$

Έτσι, το πρόβλημα (5.17) έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$. □

Εφαρμογή του θεωρήματος Minty-Browder

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο. Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + au = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.30}$$

όπου $a \geq 0$ σταθερά και $2 \leq p < \infty$ με $p \geq \frac{2n}{n+2}$.

***Παρατήρηση* 5.7.** *Για $p = 2$ και $a = 0$, προκύπτει το γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.1) το οποίο έχει μελετηθεί.*

***Θεώρημα* 5.8.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ υπάρχει ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (5.30), έστω $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, για την οποία ισχύει*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uwdx = \int_\Omega fwdx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.31}$$

Για να έχει νόημα η ισότητα (5.31), δεδομένης $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, πρέπει $u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Από το θεώρημα ενσφήνωσης του Sobolev (βλ. Παράρτημα Χώροι Sobolev) προκύπτει ότι εάν $p \geq 2n/(n+2)$, τότε $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε πράγματι η ισότητα (5.31) είναι καλώς ορισμένη. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό

$$a(u, w) := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uwdx, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

***Παρατήρηση* 5.9.** *Ο τελεστής $A : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$, όπου για κάθε $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$*

$$(Au)(w) := a(u, w), \text{ για κάθε } w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

είναι καλώς ορισμένος. Τότε, η ισότητα (5.31) γράφεται

$$\langle Au, w\rangle = \langle f, w\rangle, \text{ για κάθε } w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

ή

$$A(u) = f.$$

Άρα, για δεδομένη $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (5.30), μία συνάρτηση $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, για την οποία ισχύει

$$A(u) = f.$$

Έτσι, για να αποδείξουμε την ύπαρξη ασθενούς λύσης αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής A είναι επί. Ο $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach, αφού $1 < p < \infty$. Άρα, αν αποδείξουμε ότι ο τελεστής A είναι μονότονος, πιεστικός και συνεχής, τότε από το θεώρημα Minty-Browder 4.16 έπεται ότι ο A είναι επί.

Με τη βοήθεια των λημμάτων 3.21, 3.22, 3.23 αποδεικνύεται το θεώρημα ύπαρξης ασθενούς λύσης για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.30).

Εφαρμογή του θεωρήματος Brezis

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο. Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.32}$$

όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Για δεδομένη $f \in (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ ονομάζουμε ασθενή λύση του προβλήματος (5.32), μία συνάρτηση $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, που είναι τέτοια ώστε για κάθε $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ να ισχύει

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + \int_\Omega g(u) w dx = \int_\Omega f w dx. \tag{5.33}$$

***Θεώρημα* 5.10.** *Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση η οποία πληροί την growth condition*

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty,$$

την ασυμπτωτική συνθήκη

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x)x > -\infty$$

και επιπλέον, $1 < p < n$ και $r < np/(n-p)$. Τότε, για κάθε $f \in (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ υπάρχει ασθενής λύση $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ για το πρόβλημα (5.32).

Απόδειξη. Θεωρούμε τους τελεστές

$$A : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*, \quad B : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*,$$

οι οποίοι ορίστηκαν στα λήμματα 3.24, 3.25. Οι προϋποθέσεις των λημμάτων 3.24, 3.25 ισχύουν, άρα ο τελεστής $(A + B) : \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \to (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ είναι ψευδομονότονος, φραγμένος και συνεχής, όπου για κάθε $u, w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε

$$\langle (A+B)(u), w\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + \int_\Omega g(u) w dx.$$

Επίσης, ο $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, για $1 < p \leq n$ είναι διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach. Άρα, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Brezis 4.17 και έτσι ο τελεστής $(A + B)$ είναι επί. Επομένως, για κάθε $f \in (\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega))^*$ και για κάθε $w \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, υπάρχει $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$\langle (A+B)(u), w\rangle = \langle f, w\rangle,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Παράρτημα A

Νόρμες σε Γραμμικούς χώρους

Βασικοί Ορισμοί

***Ορισμός* A.1.** *Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i). $\|x\| \geq 0$ *για κάθε* $x \in X$.

(ii). $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(iii). $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *για κάθε* $x \in X$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *για κάθε* $x, y \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Μπάλες και σφαίρες σε χώρους με νόρμα

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Ορίζουμε ως

(i). ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα M το σύνολο

$$B(x, M) = \{y \in X : \|x - y\| < M\}.$$

(ii). κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα M το σύνολο

$$B[x, M] = \{y \in X : \|x - y\| \leq M\}.$$

(iii). σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα M το σύνολο

$$S(x, M) = \{y \in X : \|x - y\| = M\}.$$

***Παρατήρηση* A.2.** *Η ανοικτή μπάλα $B(x, M)$ είναι ανοικτό σύνολο στη μετρική που ορίζει η νόρμα. Η κλειστή μπάλα $B[x, M]$ ταυτίζεται με την κλειστότητα της $B(x, M)$, είναι κλειστό σύνολο, και τέλος $S(x, M) = \partial B[x, M]$ και η σφαίρα $S(x, M)$ είναι επίσης κλειστό σύνολο.*

Η δομή του $(X, \|\cdot\|)$ ως μετρικού χώρου παρουσιάζει ισχυρή ομοιογένεια. Αυτό κατ' αρχάς προκύπτει από την ακόλουθη, που είναι εύκολο να διαπιστωθεί, σχέση

$$x + B(0, M) = B(x, M).$$

Δηλαδή η ανοικτή μπάλα ακτίνας M γύρω από τυχαίο x προκύπτει σαν μεταφορά κατά x της ανοικτής μπάλας με κέντρο το 0 και την ίδια ακτίνα. Αυτή η απλή ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί στη μελέτη των συνεχών γραμμικών τελεστών. Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει για διαστολές και συστολές μπαλών. Δηλαδή αν $\lambda > 0$ και $M > 0$ ισχύει

$$\lambda B(0, M) = B(0, \lambda M).$$

Η σχέση της αλγεβρικής και της τοπολογικής δομής χώρων με νόρμα

***Πρόταση* A.3.** *Έστω δυο ακολουθίες $\{x_n\}, \{y_n\}$ σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$.*

(i). *Αν $x_n \to x, y_n \to y$, τότε $x_n + y_n \to x + y$*

(ii). *Αν $x_n \to x$ και $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\lambda_n \to \lambda$ τότε $\to \lambda_n x_n \to \lambda x$*

(iii). *Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ακολουθίες Cauchy τότε και η $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.*

***Πρόταση* A.4.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X.*

(i). *Αν $Y^0 \neq \emptyset$ τότε $Y = X$,*

(ii). *Η κλειστότητα $\overline{Y}$ του Y, είναι υπόχωρος του X.*

Χώροι Banach

***Ορισμός* A.5.** *Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα. (Δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X.)*

***Ορισμός* A.6.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα αν είναι συγκλίνουσα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|\sum_{i=1}^{n} x_i - x\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.*

***Πρόταση* A.7.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στο X είναι συγκλίνουσα.*

***Ορισμός* A.8.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και A υποσύνολο του X. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε*

$$\rho(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$$

Πρόταση **Α.9.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X, $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει*

$$\rho(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho(x, Y).$$

Θεώρημα **Α.10.** *Έστω$(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο X είναι χώρος Banach.*

Πόρισμα **Α.11.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος.*

Πόρισμα **Α.12.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε η διάσταση $dimX$ του X είναι είτε πεπερασμένη ή υπεραριθμήσιμη.*

Πρόταση **Α.13.** *Αν ο $(X, \|\cdot\|)$είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Κλασσικά Παραδείγματα

Τα κλασσικά παραδείγματα χώρων Banach αποτελούν οι χώροι ακολουθιών $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, ο $\ell_\infty(\mathbb{N})$ και ο $c_0(\mathbb{N})$ καθώς και ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Για $1 \leq p < \infty$ ο χώρος $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζεται ως

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ..., \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

και γίνεται διανυσματικός χώρος με πράξεις κατά σημείο. Η νόρμα στον $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζεται για $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Το γεγονός ότι αν οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκουν στον ℓ_p τότε η ακολουθία $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει επίσης στον ℓ_p καθώς και η τριγωνική ανισότητα της νόρμας $\|\cdot\|_p$ αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας Minkowski. Ο χώρος $\ell_\infty(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις φραγμένες πραγματικές ακολουθίες και η νόρμα $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$ για $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ ορίζεται ως

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

και είναι χώρος με νόρμα. Ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ώστε $a_n \to 0$, και είναι προφανώς υπόχωρος του $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Έτσι ο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος με νόρμα.

Πρόταση **Α.14.** *Ο χώρος $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ όπου $\|\cdot\|$ είναι μια οποιαδήποτε νόρμα, είναι διαχωρίσιμος.*

Πρόταση **Α.15.** *Οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < \infty$, είναι διαχωρίσιμοι.*

Πρόταση **Α.16.** *Ο χώρος $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι διαχωρίσιμος.*

Πρόταση **Α.17.** *Ο χώρος $\ell_1(\mathbb{N})$ είναι χώρος Banach.*

Παράρτημα B

Χώροι Hilbert

Εσωτερικά Γινόμενα

***Ορισμός* B.1.** *Έστω E διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον E είναι μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες*

(i). $\langle x, x\rangle \geq 0$*, για κάθε* $x \in E$.

(ii). *Αν*$\langle x, x\rangle = 0$ *τότε* $x = 0$.

(iii). $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$*, για κάθε* $x, y \in E$.

(iv). $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$ *για κάθε* $x, y, z \in E$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

***Πρόταση* B.2.** *(ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$ έχουμε*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

***Πρόταση* B.3.** *Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ σε ένα διανυσματικό χώρο E ορίζει μια νόρμα στον E από τη σχέση*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}, x \in E.$$

***Πόρισμα* B.4.** *Η ανισότητα C-S διατυπώνεται ως $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.*

***Πρόταση* B.5.** *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $x \in E$, η νόρμα στον E που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

***Πρόταση* B.6.** *(Κανόνας παραλληλογράμμου). Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$ ισχύει*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

***Ορισμός* B.7.** *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δύο στοιχεία $x, y \in E$ λέγονται κάθετα ή ορθογώνια (συμβολικά $x \perp y$), όταν $\langle x, y\rangle = 0$.*

***Πόρισμα* B.8.** *Το 0 είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του E και είναι το μοναδικό στοιχείο με την ιδιότητα αυτή.*

***Πρόταση* B.9.** *(Πυθαγόρειο Θεώρημα). Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in E$ ώστε $x \perp y$. Τότε ισχύει*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Χώροι Hilbert

***Ορισμός* B.10.** *Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον H ώστε*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

για κάθε $x \in H$.

***Πρόταση* B.11.** *Έστω H χώρος Hilbert και K κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y \in K$ ώστε*

$$\|x - y\| = \rho(x, K) = \inf\{\|x - z\| : z \in K\}$$

***Ορισμός* B.12.** *Έστω A μη κενό υποσύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ένα στοιχείο $x \in E$ καλείται κάθετο στο A (συμβολικά $x \perp A$), αν για κάθε $y \in A$, είναι $\langle x, y \rangle = 0$, δηλαδή για κάθε $y \in A$, είναι $x \perp y$.*

***Πρόταση* B.13.** *Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H και $x \in H \backslash F$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ ώστε $x - y \perp F$.*

***Ορισμός* B.14.** *Έστω H χώρος Hilbert και $A \subset H$. Το ορθογώνιο σύνολο του A είναι το σύνολο*

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp y, \forall y \in A\}.$$

***Πρόταση* B.15.** *Έστω H χώρος Hilbert και $A \subset H$. Τότε το $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.*

***Πόρισμα* B.16.** *Αν F γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H τότε $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.*

***Θεώρημα* B.17.** *Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H. Τότε $H = F \oplus F^{\perp}$ (δηλαδή F, $F^{\perp}$ κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του H, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ και $H = F + F^{\perp}$).*

***Πρόταση* B.18.** *Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H. Τότε υπάρχει προβολή $P : H \to F$ με $\ker P = F^{\perp}$ και $\|P\| = 1$.*

***Ορισμός* B.19.** *Η προβολή $P : H \to F$ με $P(x) = y$ όπου $\|x - y\| = \rho(x, F)$ καλείται ορθή προβολή του H επί του F.*

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

***Πρόταση* B.20.** *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x \in E$. Θεωρούμε τη απεικόνιση $f_x : E \ni y \mapsto f_x(y) = \langle y, x \langle \in \mathbb{R}$. Τότε η f_x είναι γραμμική, συνεχής και $\|f_x\| = \|x\|$.*

***Θεώρημα* B.21.** *(Riesz). Έστω H χώρος Hilbert. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλαδή $f(y) = \|y, x\|, \forall y \in H$.*

***Πόρισμα* B.22.** *Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση*

$$T : H \ni x \mapsto T(x) = f_x \in H^*$$

είναι γραμμική ισομετρία επί.

Ορθοκανονικά Συστήματα

Ορθοκανονικά Σύνολα

***Ορισμός* B.23.** *Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο $S = \{e_i \in E : i \in I\}$ καλείται ορθοκανονικό αν*

(i). *$e_i \perp e_j, \forall i, j \in I$ με $i \neq j$.*

(ii). *$\|e_i\| = 1, \forall i \in I$.*

***Θεώρημα* B.24.** *(Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt). Έστω $\{x_1, x_2, \ldots\}$ μια ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ώστε*

$$\langle e_n : n = 1, 2, \ldots \rangle = \langle x_n : n = 1, 2, \ldots \rangle$$

όπου με $\langle e_n : n = 1, 2, \ldots \rangle, \langle x_n : n = 1, 2, \ldots \rangle$ συμβολίζουμε τους γραμμικούς χώρους· που παράγονται από τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}, \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, αντίστοιχα.

***Πρόταση* B.25.** *Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και*

$$S = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο στον E. Θέτουμε

$$F = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle.$$

Τότε για κάθε $x \in E$, το $u = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$ είναι το πλησιέστερο στοιχείο του F στο x.

***Πρόταση* B.26.** *(Ανισότητα Bessel). Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$.*

Σειρές σε χώρους Banach

Ορισμός **B.27.** *Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του X. Με τον όρο σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ονομάζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου*

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n, , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα στο x και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Πρόταση **B.28.** *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Πρόταση **B.29.** *(Κριτήριο Cauchy). Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ σ' ένα χώρο Banach X συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy (δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$).*

Πρόταση **B.30.** *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ συγκλίνει (στο $\mathbb{R}$) τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (στον X).*

Πρόταση **B.31.** *Έστω H χώρος Hilbert, $\{e_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H και $(\lambda_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $(\lambda_n) \in \ell_2$.*

Πόρισμα **B.32.** *Για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ συγκλίνει στον H.*

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός **B.33.** *Έστω H χώρος Hilbert και $S = \{e_i : i \in I\}$ μια ορθοκανονική οικογένεια του H. Η S καλείται ορθοκανονική βάση του H αν είναι μια μεγιστική ορθοκανονική οικογένεια του H, δηλαδή δεν περιέχεται γνήσια σε μια άλλη ορθοκανονική οικογένεια του H.*

Πρόταση **B.34.** *Έστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{E} = \{e_n : n = 1, 2, \ldots\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία του H. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i). *Η $\mathcal{E}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H.*

(ii). *Αν $x \in H$ και $x \perp e_n$ για όλα τα $n = 1, 2, \ldots$ τότε $x = 0$.*

(iii). *Για κάθε $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.*

(iv). *Για κάθε $x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\langle y, e_n\rangle$.*

(v). *Για κάθε $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle^2$.*

Θεώρημα **B.35.** *Έστω H ένας χώρος Hilbert άπειρης διάστασης. Τότε ο H είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο H έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.*

Θεώρημα **B.36.** *Κάθε διαχωρίσιμος και απειροδιάστατος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2.*

Παράρτημα C

Συνεχείς (ή φραγμένοι) Τελεστές

Ορισμοί-Ιδιότητες

***Ορισμός* C.1.** *Μια συνάρτηση $f : X \to Y$, όπου (X, ρ) και (Y, d) είναι δυο μετρικοί χώροι, λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x_0, x) < \delta$ να ισχύει $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.*

***Θεώρημα* C.2.** *Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i). *Η f είναι συνεχής*

(ii). *Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$*

(iii). *Αν $V \subset Y$ ανοικτό τότε το $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ είναι ανοικτό στον X.*

(iv). *Αν $K \subset Y$ κλειστό τότε το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X.*

***Ορισμός* C.3.** *Ένα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x\| \leq K$ για κάθε $x \in A$.*

***Πρόταση* C.4.** *(Χαρακτηρισμοί συνέχειας). Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i). *Ο $T : X \to Y$ είναι συνεχής.*

(ii). *Υπάρχει $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(x_0, \delta)]$ να είναι φραγμένο.*

(iii). *Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(0_x, \delta)]$ να είναι φραγμένο.*

(iv). *Το $T[B(0_x, 1)]$ είναι φραγμένο.*

(v). *Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.*

(vi). *Ο T είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$\|T(x) - T(z)\|_Y \leq M\|x - z\|_X$$

για κάθε , $x, z \in X$.

***Πρόταση* C.5.** *Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα. Αν οι $T, S : X \to Y$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οι $T + S$ και λT είναι επίσης φραγμένοι. Στη βιβλιογραφία οι συνεχείς γραμμικοί τελεστές αναφέρονται σαν φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και τους συμβολίζουμε με $B(X, Y)$.*

***Πόρισμα* C.6.** *Ο $B(X, Y)$ είναι διανυσματικός χώρος.*

Η νόρμα στο χώρο $B(X, Y)$

Ο χώρος $B(X, Y)$ εκτός από το ότι είναι διανυσματικός χώρος δέχεται και μία νόρμα που ορίζεται φυσιολογικά δεδομένου ότι είναι χώρος συναρτήσεων. Ας θυμήσουμε ότι αν K είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε ορίζουμε $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$ και είναι $\|f\| \in \mathbb{R}$ διότι οι συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή μετρικό χώρο είναι φραγμένες. Αν τώρα $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής και $T \neq 0$ τότε $\sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X\} = \infty$ αλλά $\sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\| \leq 1\} < \infty$, άρα μπορούμε να ορίσουμε

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\| \leq 1\}.$$

***Πρόταση* C.7.** *Η συνάρτηση $\|\cdot\| : B(X, Y) \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $B(X, Y)$.*

***Πρόταση* C.8.** *Αν X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε*

(i). $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ *για κάθε* $x \in X$.

(ii). $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X\}$.

***Πρόταση* C.9.** *Αν X, Y, Z χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε η σύνθεση $S \circ T : X \to Z$ των T και S είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

***Θεώρημα* C.10.** *Έστω X χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach. Τότε ο χώρος $B(X, Y)$ με τη νόρμα που έχουμε ορίσει είναι χώρος Banach.*

***Θεώρημα* C.11.** *Έστω X χώρος με νόρμα, Z ένας πυκνός υπόχωρος του X και Y ένας χώρος Banach. Τότε κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Z \to Y$, επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σ'ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $\tilde{T} : X \to Y$. Επιπλέον θα ισχύει $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

***Πόρισμα* C.12.** *Αν X, Y, Z όπως στο προηγούμενο θεώρημα τότε η απεικόνιση*

$$I : B(Z, Y) \to B(X, Y)$$

που αντιστοιχεί σε κάθε συνεχή $T : Z \to Y$ τη μοναδική συνεχή επέκτασή του $\tilde{T} : X \to Y$ είναι γραμμική ισομετρία.

Γραμμικά συναρτησοειδή και ο X^*

***Πρόταση* C.13.** *Έστω X διανυσματικός χώρος και Y, Z υπόχωροι του X ώστε $Y \bigcap Z = \{0\}$. Τότε κάθε $x \in \langle Y \cup Z \rangle$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$.*

Ειδικότερα, αν Y είναι υπόχωρος του X και $x \in X \setminus Y$ τότε κάθε $x' \in \langle Y \cup \{x\} \rangle$ γράφεται κατά μονδαικό τρόπο ως

$$x' = y + \lambda x \text{ με } y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός* C.14.** ***(i). *Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται πεπερασμένης συνδιάστασης αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, .., x_n\} \subset X$ ώστε*

$$X = \langle Y \cup \{x_1, .., x_n\} \rangle.$$

(ii). *Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται συνδιάστασης 1 αν $Y \neq X$ και υπάρχει ένα $x \in X$ ώστε $X = \langle Y \cup \{x\} \rangle$.*

(iii). *Ένας υπόχωρος Y του X λέγεται συνδιάστασης n, όπου n φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν $x_1, .., x_n$, στον X ώστε $\langle Y \cup \{x_1, .., x_n\} \rangle = X$, και n είναι ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα.*

***Ορισμός* C.15.** *Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται υπερεπίπεδο αν $W = x + Y$ όπου $x \in X$ και Y είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του X.*

***Πρόταση* C.16.** *Έστω X διανυσματικός χώρος. Τότε:*

(i). *Αν $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ τότε ο $\ker f$ είναι συνδιάστασης 1.*

(ii). *Ένα $W \subset X$ είναι υπερεπίπεδο αν και μόνο αν υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε $W = f^{-1}(\{t\})$.*

(iii). *Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή τότε $\ker f = \ker g$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ ώστε $f = \lambda g$.*

***Πρόταση* C.17.** *(Κριτήρια συνέχειας συναρτησοειδών με υπερεπίπεδα). Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i). *Το f είναι φραγμένο (δηλαδή συνεχές).*

(ii). *Το $\ker f$ είναι κλειστό.*

(iii). *Το $\ker f$ δεν είναι πυκνό στο X.*

***Πόρισμα* C.18.** *Έστω Y υπόχωρος συνδιάστασης 1 ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$. Τότε ένα από τα ακόλουθα ισχύει αποκλειστικά*

(i). *Ο Y είναι κλειστός υπόχωρος*

(ii). *Ο Y είναι πυκνός υπόχωρος.*

Ορισμός C.19. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός ή συζυγής του X συμβολίζεται με X^* και είναι ο χώρος $B(X,\mathbb{R})$ των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X.*

Πρόταση C.20. *Αν X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο.*

Πόρισμα C.21. *Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα τότε ο αλγεβρικός δυϊκός $X^{\#}$και ο δυϊκός X^*του X ταυτίζονται.*

Πρόταση C.22. *Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό και μη φραγμένο συναρτησοειδές. Άρα για X απειροδιάστατο χώρο με νόρμα ο X^* είναι γνήσιος υπόχωρος του $X^{\#}$.*

Ισομορφισμοί και Ισομετρίες χώρων με νόρμα

Ορισμός C.23. *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, χώροι με νόρμα.*

(i). *Οι X, Y λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός, $1-1$ και επί τελεστής ώστε οι T και T^{-1} να είναι φραγμένοι. (Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση ισομορφισμός).*

(ii). *Οι X, Y λέγονται ισομετρικοί αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός, $1-1$ και επί τελεστής ώστε $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. (Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση ισομετρία.)*

Πρόταση C.24. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός, $1-1$ και επί. Τα επόμενα είναι: ισοδύναμα:*

(i). *Ο T είναι ισομορφισμός.*

(ii). *Υπάρχουν θετικοί c, C ώστε $c\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$*

Η αυτόματη συνέχεια γραμμικών τελεστών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Πρόταση C.25. *Κάθε χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ πεπερασμένης διάσταση είναι πλήρης.*

Λήμμα C.26. *Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $(e_i)_{i=1}^n$ μια Hamel βάση του X. Τότε υπάρχει $M > 0$, που εξαρτάται από τη νόρμα και τη βάση, ώστε για κάθε $x \in X$,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ με } \|x\| \leq 1$$

να ισχύει $\max\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\} \leq M$.

***Θεώρημα* C.27.** *(αυτόματης συνέχειας). Έστω X, Y χώροι με νόρμα με τον X πεπερασμένης διάστασης. Τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος.*

***Πόρισμα* C.28.** *Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $dimX = dimY$ τότε οι X και Y είναι ισόμορφοι.*

***Πόρισμα* C.29.** *Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Αν $K \subset X$ είναι κλειστό και φραγμένο τότε το K είναι συμπαγές. Ειδικότερα οι κλειστές μπάλες $B[x, M]$ και οι σφαίρες $S(x, M)$ είναι συμπαγή σύνολα.*

Παράρτημα D

Το Θεώρημα Hahn-Banach

***Ορισμός* D.1.** *Μια συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}$, όπου X διανυσματικός χώρος, λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές, αν ισχύουν τα ακόλουθα*

(i). $p(x) \geq 0, \forall x \in X$.

(ii). $p(\lambda x) = \lambda p(x) \, \forall \lambda \geq 0$ *(θετικά ομογενής).*

(iii). $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(τριγωνική ιδιότητα).*

***Θεώρημα* D.2.** *(Hahn-Banach). Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αν Y είναι υπόχωρος του X και $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, ώστε $f(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$ τότε υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\tilde{f}|_Y = f$. (Δηλαδή η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f).*

***Λήμμα* D.3.** *Έστω X, Y, p, f όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Δηλαδή Y είναι υπόχωρος του X, p είναι υπογραμμικό, $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική και $f(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$. Υποθέτουμε ότι $z_0 \in X$ και $z_0 \in Y$. Τότε υπάρχει $\tilde{f} : Z = \langle Y \cup \{z_0\} \rangle \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f ώστε $\tilde{f}(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in Z$.*

***Πόρισμα* D.4.** *Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X. Αν $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $M \geq 0$ ώστε $f(y) \leq M\|y\|$ για όλα τα $y \in Y$, τότε υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση του f ώστε $\tilde{f}(x) \leq M\|x\|$ για όλα τα $x \in X$. Ειδικότερα, αν $M = \|f\|$, τότε $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Συνέπειες του Θεωρήματος Hahn-Banach

***Πρόταση* D.5.** *Έστω X χώρος με νόρμα και $x_0 \in X$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $f(x_0) = \|x_0\|$.*

***Πρόταση* D.6.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε για κάθε $x \in X$, $\|x\| = \sup\{x^*(x) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$.*

***Πρόταση* D.7.** *Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \backslash Y$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ ώστε $f(y) = 0, \forall y \in Y$ και $f(x_0) = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$. Συνεπώς αν Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, τότε υπάρχει $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ με $f|_Y = 0$.*

***Πρόταση* D.8.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.*

***Λήμμα* D.9.** *Έστω Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in S_x$ με $d(x, Y) > 1 - \varepsilon$*

***Θεώρημα* D.10.** *(Riesz). Έστω X χώρος νόρμα. Τότε η B_X είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}

***Θεώρημα* D.11.** *(Κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}). Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $^\wedge : X \to X^{**}$ ώστε*

(i). $\|x\|_X = \|\hat{x}\|_{X^{**}}$.

(ii). *Για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $x^*(x) = \hat{x}(x^*)$.*

***Θεώρημα* D.12.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει χώρος Banach $\tilde{X}$ και ισομετρική εμφύτευση $T : X \to \widetilde{X}$ ώστε $T[X]$ να είναι πυκνός υπόχωρος του $\widetilde{X}$.*

Οι δυϊκοί χώροι του $\ell_p(\mathbb{N})$

***Πρόταση* D.13.** *Έστω X να συμβολίζει κάποιο $\ell_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < \infty$ ή τον $c_0(\mathbb{N})$. Τότε κάθε $x^* \in X^*$ αναπαρίσταται με μια ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ώστε για κάθε $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ να ισχύει*

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n$$

***Πρόταση* D.14.** *Έστω X όπως στην προηγουμένη πρόταση και $x^*, y^* \in X^*$. Τότε:*

(i). *Η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που αναπαριστά το x^* είναι μοναδική.*

(ii). *Α η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το x^* και η ακολουθία $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το y^* τότε $(\beta_n + \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το $x^* + y^*$.*

(iii). *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και η $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το x^* τότε $(\lambda\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναπαριστά το λx^*.*

Θεώρημα* D.15.** ***(i). *Έστω $1 \leq p < \infty$ και q το συζυγές του p. Δηλαδή $q = \infty$, αν $p = 1$, ενώ για $1 < p < \infty$ τα p, q ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε για $X = \ell_p(\mathbb{N})$ και $x^* \in X^*$, αν $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία που αναπαριστά το x^* ισχύει $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q(\mathbb{N})$ και $\|x^*\| = \|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q$. Άρα ο X^* είναι ισομετρικός με τον $\ell_q(\mathbb{N})$.*

(ii). *Αν $X = c_0(\mathbb{N})$ τότε ο X^* είναι ισομετρικός με τον $\ell_1(\mathbb{N})$.*

Παράρτημα Ε

Γεωμετρική Μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach

Το συναρτησιακό Minkowski

***Ορισμός* Ε.1.** *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X ώστε $0 \in K^0$. Το συναρτησοειδές Minkowski του K ορίζεται να είναι η συνάρτηση $\rho_K : X \to \mathbb{R}$, με*

$$\rho_K(x) = inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\} = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

***Πρόταση* Ε.2.** *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^0$. Τότε*

(i). $\rho_K(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in X$.

(ii). $\rho_K(0) = 0$.

(iii). $\rho_K(\lambda x) = \lambda \rho_K(x)$ *για κάθε* $\lambda \geq 0$ *και* $x \in X$.

(iv). $\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$ *για κάθε* $x, y \in X$.

(v). $\{x \in X : \rho_K(x) < 1\} \subset K \subset \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\}$.

***Πρόταση* Ε.3.** *Έστω X χώρος με νόρμα και $\rho : X \to \mathbb{R}$ ένα θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i). *Η ρ είναι συνεχής.*

(ii). *Η ρ είναι συνεχής στο $0 \in X$.*

(iii). *Υπάρχει V ανοικτή περιοχή του $0 \in X$ ώστε $\rho(V)$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

***Πόρισμα* Ε.4.** *Αν το K είναι κυρτό με $0 \in K^0$ τότε το συναρτησοειδές Minkowski του K είναι συνεχές.*

***Πρόταση* Ε.5.** *Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $0 \in K^0$ και έστω ρ_K το συναρτησοειδές Minkowski του K. Τότε*

(i). $K^0 = \{x \in X : \rho_K(x) < 1\}$.

(ii). $\bar{K} = \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\}$.

(iii). $\partial K = \{x \in X : \rho_K(x) = 1\}$.

***Πρόταση* E.6.** *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X, ώστε $0 \in K^0$. Τότε*

$$\rho_{K^0} = \rho_K = \rho_{\bar{K}}$$

όπου ρ_{K^0}, ρ_K, $\rho_{\bar{K}}$ είναι τα συναρτησοειδή Minkowski των K^0, K και $\bar{K}$ αντίστοιχα.

***Πόρισμα* E.7.** *Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $K^0 \neq \emptyset$. Τότε $\overline{K^0} = \overline{K}$ και $(\overline{K})^0 = K^0$.*

***Πόρισμα* E.8.** *Έστω K κυρτό με $K^0 \neq \emptyset$. Τότε για κάθε $V \subset K$ ανοιχτό κυρτό και πυκνό στο K έχουμε ότι $V = K^0$.*

Διαχωριστικά Θεωρήματα Hahn-Banach

***Θεώρημα* E.9.** *(Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα). Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό υποσύνολο του X με $K^0 \neq \emptyset$ και $x_0 \in X \backslash K^0$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$, $f \neq 0$, ώστε*

$$\sup_{x \in K} f(x) \leq f(x_0).$$

***Θεώρημα* E.10.** *Έστω K_1, K_2 κυρτά μη κενά υποσύνολα ενός χώρου X με νόρμα, ώστε $K_1^0 \neq \emptyset$ και $K_1^0 \cap K_2 = \emptyset$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$, $f \neq 0$ ώστε*

$$\sup_{x \in K_1} f(x) < \sup_{x \in K_2} f(x)$$

***Θεώρημα* E.11.** *Έστω K_1, K_2 κυρτά μη κενά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X, $K_1 \bigcap K_2 = \emptyset$, K_1 συμπαγές και K_2 κλειστό. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ ώστε*

$$\underset{x \in K_1}{sup} f(x) \leq \underset{x \in K_2}{inf} f(x).$$

Το θεώρημα Krein-Milman

***Ορισμός* E.12.** *Έστω X διανυσματικός χώρος, K κυρτό υποσύνολο του X και $x \in K$. Το x λέγεται ακραίο σημείο του K, αν δεν υπάρχουν, $y, z \in K$ με $y \neq z$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. (Δηλαδή το x είναι ακραίο σημείο του K αν δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο άλλων σημείων του K). Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με $E_x(K)$.*

***Ορισμός* E.13.** *Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα μη κενό κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X. Ένα υποσύνολο A του K καλείται ακραίο υποσύνολο του K αν το A είναι κλειστό, κυρτό και ικανοποιεί την ιδιότητα*

Για κάθε $x, y \in K$ και $0 < \lambda < 1$, αν $.\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ τότε και $x, y \in A$.

***Πρόταση* Ε.14.** *Έστω X χώρος με νόρμα και K ένα μη κενό κυρτό και κλειστό υποσύνολο του X.*

(i). *Αν $\{A_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από ακραία υποσύνολα του K με $\cap_{i \in I} A_i = A \neq \emptyset$, τότε το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.*

(ii). *Αν $A \subset B \subset K$ ώστε το B είναι ακραίο υποσύνολο του K και το A ακραίο υποσύνολο του B, τότε το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.*

***Θεώρημα* Ε.15.** *(Krein-Milman). Έστω X χώρος με νόρμα και K ένα μη κενό συμπαγές κυρτό υποσύνολο του X. Τότε $K = \bar{co}E_x(K)$.*

***Θεώρημα* Ε.16.** *(Καραθεοδωρή). Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, $dim X = n$ και K κλειστό κυρτό φραγμένο υποσύνολό του. Τότε κάθε $x \in K$ είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ $n+1$ ακραίων σημείων του K.*

Παράρτημα F

Εφαρμογές του Θεωρήματος Baire στους Χώρους Banach

Αρχή ομοιόμορφου φράγματος

***Θεώρημα* F.1.** *(Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος). Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y. Αν η οικογένεια $(T_i)_{i\in I}$ είναι κατά σημείο φραγμένη (δηλαδή για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} < +\infty$) τότε είναι ομοιόμορφα φραγμένη (δηλαδή $\sup\{\|T_i\| : i \in I\} < +\infty$).*

***Πόρισμα* F.2.** *(Θεώρημα Banach-Steinhaus). Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $T_n : X \to Y, n = 1, 2, ...$ μία ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει το όριο $\underset{n}{lim} T_n(x)$. Τότε θέτοντας $T : X \to Y$ με $T(x) = \underset{n}{lim} T_n(x)$, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

***Πόρισμα* F.3.** *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $K \subset X$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$να ισχύει $sup\{[|x^*(x)| : x \in K\} < \infty$. Τότε το σύνολο K είναι φραγμένο.*

Θεωρήματα Ανοιχτής Απεικόνισης, Κλειστού Γραφήματος

***Λήμμα* F.4.** *Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν για κάποια $r > \varepsilon > 0$ ισχύει $B_Y(0, r) \subset \overline{T[B_X(0, 1)] + B_Y(0, \varepsilon)}$ τότε $B_Y(0, r) \subset T[B_X(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}})]$. Ειδικότερα αν $B_Y(0, r) \subset \overline{T[B_x(0, 1)]}$ τότε $B_Y(0, r) \subset T[B_X(0, 1)]$.*

***Θεώρημα* F.5.** *(Ανοικτής Απεικόνισης). Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι επί. Τότε ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, δηλαδή για κάθε G ανοικτό υποσύνολο του X το $T[G]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.*

***Πόρισμα* F.6.** *Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Αν $T : X \to Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής και ο T είναι $1 - 1$ και επί τότε ο T είναι ισομορφισμός.*

***Πόρισμα* F.7.** *Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος, $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ είναι δύο νόρμες στον X έτσι ώστε οι $(X, \|\cdot\|)$, $(X, \|\cdot\|')$ να είναι χώροι Banach και υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\| \leq M\|x\|'$ για κάθε $x \in X$ τότε οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες (δηλαδή θα υπάρχει και $m > 0$ ώστε $m\|x\|' \leq \|x\|$, για κάθε $x \in X$).*

***Πρόταση* F.8.** *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach Y υπάρχει ένας επί φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : \ell_1(\mathbb{N}) \to Y$.*

***Θεώρημα* F.9.** *(Κλειστού Γραφήματος). Έστω X, Y δυο χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα του T είναι κλειστό τότε ο τελεστής T είναι φραγμένος.*

Χώροι Πηλίκα

Έστω X ένας γραμμικός χώρος και Y ένας γραμμικός υπόχωρός του. Για $x_1, x_2 \in X$ ορίζεται η σχέση

$$x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in Y$$

και είναι άμεσο ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον X. Επίσης $x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in Y \iff x_1 \in x_2 + Y$ και άρα η κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in X$ είναι το σύνολο $\{z \in X : z \sim x\} = x + Y$. Ο χώρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με X/Y και ονομάζεται χώρος πηλίκο του X ως προς τον Y. Έτσι $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$. Ο X/Y εφοδιάζεται κατά φυσιολογικό τρόπο με πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού από τις σχέσεις

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y$$

$$\lambda(x + Y) = \lambda x + Y.$$

Είναι άμεσο ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες (δηλαδή αν $x_1 + Y = x_1' + Y$ και $x_2 + Y = x_2' + Y$ τότε $(x_1 + x_2) + Y = (x_1' + x_2') + Y$ και $\lambda x_1 + Y = \lambda x_1' + Y$) και καθιστούν τον X/Y διανυσματικό χώρο με μηδενικό στοιχείο το $0 + Y = Y$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρός του. Η φυσιολογική υποψήφια νόρμα για το χώρο X/Y είναι αυτή που ορίζεται από τη σχέση

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\| : y \in Y\} = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = \rho(x, Y). \tag{F.1}$$

Έχουμε ότι $\|\lambda(x + Y)\| = |\lambda|\|x + Y\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x + Y \in X/Y$. Για να δούμε την τριγωνική ιδιότητα θεωρούμε $x_1, x_2 \in X$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in Y$ ισχύει

$$\rho(x_1 + x_2, Y) \leq \|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|.$$

Συνεπώς $\|(x_1 + x_2) + Y\| \leq \inf\{\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| : y_1, y_2 \in Y\} = \inf\{\|x_1 - y_1\| : y_1 \in Y\} + \inf\{\|x_2 - y_2\| : y_2 \in Y\} = \|x_1 + Y\| + \|x_2 + Y\|$. Επομένως $\|(x_1 + Y) + (x_2 + Y)\| \leq \|x_1 + Y\| + \|x_2 + Y\|$ και η τριγωνική ανισότητα έχει δειχθεί. Επίσης $\|x + Y\| \geq 0$ για κάθε $x + Y \in X/Y$. Για να είναι η $\|\cdot\|$ νόρμα πρέπει να ισχύει $\|x + Y\| = 0$ αν και μόνο αν $x + Y = Y$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in Y$. Όμως $\|x + Y\| = 0 \iff \rho(x, Y) = 0 \iff x \in \bar{Y}$. Έτσι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X/Y αν και μόνο αν $\bar{Y} = Y$, δηλαδή αν και μόνο αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

***Πρόταση* F.10.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο X/Y με τη νόρμα*

$$\|x+Y\| = \rho(x,Y) = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\}$$

είναι χώρος με νόρμα και ο $\pi : X \to X/Y$ με $\pi(x) = x+Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. (Ο χώρος $(X/Y, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος πηλίκο του X και ο $\pi : X \to X/Y$ τελεστής πηλίκο). Αν ο X είναι χώρος Banach τότε και ο $(X/Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

***Πρόταση* F.11.** *Έστω X, Z χώροι Banach και $T : X \to Z$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Τότε ο χώρος πηλίκο $X/\ker T$ είναι ισόμορφος του Z.*

***Πόρισμα* F.12.** *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος Y του $\ell_1(\mathbb{N})$ ώστε ο χώρος πηλίκο $\ell_1(\mathbb{N})/Y$ να είναι ισόμορφος με τον X.*

Διασπάσεις Χώρων Banach

Ένας γραμμικός χώρος X είναι το ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων του Y, Z αν κάθε $x \in X$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$. Σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε $X = Y \oplus Z$. Παρατηρούμε ότι $X = Y \oplus Z$ αν και μόνο αν $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αν ο X γράφεται ως ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ τότε ορίζεται η απεικόνιση $P : X \to X$ από τον τύπο

$$P(y+z) = y$$

και η P είναι ταυτοδύναμος γραμμικός τελεστής, δηλαδή $P^2 = P$, ενώ $P(x) = x$ αν και μόνο αν $x \in Y$ και $P(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in Z$. Η απεικόνιση αυτή είναι η προβολή επί του Y κατά μήκος του Z. Αντιστρόφως αν $P : X \to X$ είναι γραμμικός τελεστής ώστε $P^2 = P$ τότε, θέτοντας $Y = P[X]$ και $Z = \ker(P)$, έχουμε $X = Y \oplus Z$ και ο τελεστής P είναι προβολή του X επί του Y. (Πράγματι, έστω $w \in Y \cap Z$. Τότε $w \in Y = P[X]$ και άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $w = P(x)$. Εφόσον $P^2 = P$ θα έχουμε $P(x) = P(P(x)) = P(w)$ και άρα $w = P(w)$. Αφού $w \in Z = \ker(P)$ έπεται ότι $P(w) = 0$ και άρα $w = 0$. Επομένως $Y \cap Z = \{0\}$. Αν τώρα $x \in X$ τότε $x = P(x) + (I-P)(x)$ με $P(x) \in Y$ και $(I-P)(x) \in \ker(P) = Z$ εφόσον $P((I-P)(x)) = (P-P^2)(x) = 0$). Αν X είναι γραμμικός χώρος και Y ένας υπόχωρός του, κάθε υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$ λέγεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y.

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα μας ενδιαφέρουν οι προβολές που είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Παρατηρούμε ότι αν $P \in B(X)$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με $P^2 = P$ τότε ο $Y = P[X]$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Πράγματι, έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στον $Y = P[X]$ και $x \in X$ ώστε $y_n \to x$. Για κάθε n επιλέγοντας $x_n \in X$ ώστε $P(x_n) = y_n$ έχουμε ότι $P(y_n) = P(P(x_n)) = P^2(x_n) = P(x_n) = y_n$. Λόγω της συνέχειας της P έπεται ότι $P(y_n) \to P(x)$ δηλαδή $y_n \to P(x)$. Συνεπώς $x = P(x) \in P[X]$ και άρα ο $P[X]$ είναι κλειστός.

Ένας κλειστός υπόχωρος Y του X λέγεται συμπληρωματικός υπόχωρος αν υπάρχει φραγμένη (συνεχής) προβολή του X επί του Y.

***Πρόταση* F.13.** *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i). *Ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.*

(ii). *Υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$. (Σε αυτήν την περίπτωση ο Z λέγεται τοπολογικό συμπλήρωμα του Y και λέμε ότι ο X είναι το τοπολογικό ευθύ άθροισμα των Y και Z).*

***Πόρισμα* F.14.** *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X με πεπερασμένη συνδιάσταση. Τότε κάθε αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y είναι και τοπολογικό. Ειδικότερα ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.*

***Πρόταση* F.15.** *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος.*

***Πρόταση* F.16.** *Έστω X ένας χώρος Banach και Y, Z δυο κλειστοί υπόχωροι του X με $Y \cap Z = \{0\}$. Τότε ο υπόχωρος $Y + Z$ είναι κλειστός αν και μόνο αν $\rho(S_Y(0,1), S_Z(0,1)) > 0$.*

Παράρτημα G

Παράγωγοι

I. Παράγωγοι συναρτήσεων

Μέρος IA

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ιδιότητες των παραγώγων συναρτήσεων των τύπων

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

IAa. Παράγωγος συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Θυμίζουμε μερικούς ορισμούς (ορίου και συνέχειας).

***Ορισμός* G.1.** *Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ στο x^0, όπου x^0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της ανν*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } 0 < |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

***Ορισμός* G.2.** *Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο x^0 του πεδίου ορισμού της ανν*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon,$$

ή ισοδύναμα ανν $\lim_{x\to x^0} f(x) = f(x^0)$.

***Ορισμός* G.3.** *Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x^0 του πεδίου ορισμού της το οποίο είναι και σημείο συσσώρευσης ανν το*

$$\lim_{x\to x^0}\left(\frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0}\right) = l \in \mathbb{R} \text{ ή } \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h}\right) = l \in \mathbb{R}$$

και συμβολίζουμε $l = f'(x^0)$ (παράγωγος αριθμός στη θέση x^0). Ορίζεται μια συνάρτηση $f' : A \to \mathbb{R}$ όπου A το υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f σε κάθε στοιχείο x του οποίου είναι *παραγωγίσιμη και έχει τύπο* $f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ *την οποία ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση της* f.

***Πρόταση* G.4.** *Αν μια συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x^0 *του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο* x^0.

IAb. Μερικές παράγωγοι συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

***Ορισμός* G.5.** *Μια συνάρτηση* f *λέμε ότι έχει όριο* $l \in \mathbb{R}$ *στο* $\vec{x}^0$, *όπου* $\vec{x}^0$ *σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της ανν*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - l| < \varepsilon.$$

***Ορισμός* G.6.** *Μια συνάρτηση* f *λέμε ότι είναι συνεχής στο* $\vec{x}^0$ *του πεδίου ορισμού της ανν*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| < \varepsilon$$

***Ορισμός* G.7.** *Μια συνάρτηση* $y = f(x_1, ..., x_n)$ *λέμε ότι έχει μερική παράγωγο ως προς* x_i, $i = 1, ..., n$ *στο σημείο* $\vec{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ *του πεδίου ορισμού της το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης ανν το όριο*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i^0 + h, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h},$$

υπάρχει και ισούται με κάποιο πραγματικό αριθμό l. *Συμβολίζουμε συνήθως με*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = l \in \mathbb{R} \text{ ή } f_{x_i}(x_1^0, ..., x_n^0) = l \in \mathbb{R}.$$

***Ορισμός* G.8.** *Η συνάρτηση* $y = f(\vec{x})$ *λέμε ότι είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς* x_i *στο σύνολο* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανν η* f *έχει μερική παράγωγο ως προς* x_i *σε κάθε σημείο* $\vec{x} \in \Omega$. *Στην περίπτωση αυτή ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$$

που ονομάζεται συνάρτηση μερικής παραγώγου ή απλά μερική παράγωγος (partial derivative) της f *ως προς* x_i. *Να τονίσουμε ότι η μερική παράγωγος είναι συνάρτηση* n *μεταβλητων.*

***Παρατήρηση* G.9.** *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *η ύπαρξη παραγώγου στο σημείο* x^0 *του πεδίου ορισμού της συνεπάγεται την συνέχεια σε αυτό το σημείο. Αντίθετα αν* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *η ύπαρξη μερικών παραγώγων σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν συνεπάγεται και συνέχεια στο σημείο αυτό. Αυτό συμβαίνει επειδή η ύπαρξη μερικών παραγώγων προσδιορίζει τη συμπεριφορά της συνάρτησης μόνο στις κατευθύνσεις των αξόνων και όχι προς κάθε κατεύθυνση (σε επόμενη παράγραφο θα ορίσουμε μια πιο "ισχυρή" έννοια "παραγώγου", τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης).*

Όπως τονίσαμε οι n μερικές παράγωγοι συναρτήσεις $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$ μιας συνάρτησης $y = f(x_1, ..., x_n)$ είναι επίσης συναρτήσεις n-μεταβλητών και με μερική παραγώγιση αυτών (εφόσον πληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις) παράγονται n^2 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης, όπως τις χαρακτηρίζουμε. Είναι

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv f_{x_j x_i}, & i \neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv f_{x_i x_i}, & i = j. \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο παράγονται οι μερικές παράγωγοι τρίτης, τέταρτης,... τάξης. Να τονίσουμε ότι οι n^2 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης μιας $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, θεωρούμενες ως στοιχεία ενός $n \times n$ πίνακα H (Hessian)

$$H = \left[\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2}. \end{bmatrix}$$

αποδεικνύονται πολύ χρήσιμες στον χαρακτηρισμό των ακροτάτων της f.

***Θεώρημα* G.10.** *(μικτών παραγώγων ή θεώρημα Schwarz-Young). Αν οι μερικές παράγωγοι* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_N}$ *και οι μικτές μερικές παράγωγοι* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$ *μιας συνάρτησης* $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή* $S \subseteq X$ *τότε για κάθε εσωτερικό σημείο του* S *ισχύει*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i},$$

Δηλαδή οι μικτές παράγωγοι είναι ανεξάρτητες από τη σειρά παραγώγισης ως προς τις διάφορες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι ο πίνακας Hesse, Hf είναι συμμετρικός. Προφανώς το θεώρημα των μικτών παραγώγων ισχύει και για τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης του δύο. Να θυμίσουμε ότι με $a = (a_1, a_2, ..., a_N)$, $a_i \in \mathbb{N}_0$ και $|a| = \sum_{i=1}^{N} a_i$ συμβολίζουμε το λεγόμενο πολυδείκτη και

$$D_a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε τους χώρους συνεχών συναρτήσεων οι οποίοι είναι εξαιρετικής σημασίας και χρησιμότητας στον ορισμό και την ανάλυση πιο γενικών χώρων, όπως των χώρων Lebesque και των χώρων Sobolev.

***Ορισμός* G.11.** *Έστω* $k \in \mathbb{N}_0$ *και* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *με* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* a *πολυδείκτης. Ορίζουμε ως*

$$C_k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ με } D^a f \text{ συνεχή για κάθε } |a| \leq k\}$$

δηλαδή τις συναρτήσεις που είναι k*-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Διευκρινίζουμε ότι* $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ *συμβολίζει τις συνεχείς συναρτήσεις και* $C^1(\Omega)$ *τις συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης.*

***Ορισμός* G.12.** *Με $\overline{\Omega}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ορίζουμε ως φορέα (support) μιας συνάρτησης $f : \Omega \to \mathbb{R}$ το σύνολο*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \overline{\Omega}.$$

***Ορισμός* G.13.** *Ορίζουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα ως το σύνολο*

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \text{ με } \operatorname{supp} f \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega\}.$$

Ορίζουμε επίσης $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ με $k \in \mathbb{N}_0$ και τονίζουμε ότι $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

***Παράδειγμα* G.14.** *Έστω $\Omega = (-1, 1)$, $\varepsilon > 0$ και*

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-\varepsilon^2}}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Τότε $\operatorname{supp} f = [-\varepsilon, \varepsilon]$ και $f \in C_0^\infty(-1, 1)$.

Ερώτημα: Τι προϋποθέσεις πρέπει να πληροί μία συνάρτηση ϕ ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x}\phi(x)dx$;
Απάντηση: Αρκεί να υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του $(0, 1)$ ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \setminus K$ και $\phi|_K$ να είναι φραγμένη. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\phi(x)dx = \int_K \frac{1}{x}\phi(x)dx$$

υπάρχει.

***Πρόταση* G.15.** *Έστω $f \in C_0(\Omega)$. Τότε η f επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{\Omega}$ με την*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

δηλαδή η $\tilde{f} \in C_0(\overline{\Omega})$.

***Παρατήρηση* G.16.** *Λόγω της πρότασης συχνά θεωρούμε ότι η συνάρτηση f μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$, κάτι το οποίο δεν είναι σωστό, αφού $\tilde{f} \in C_0(\overline{\Omega})$.*

***Ορισμός* G.17.** *Ορίζουμε ως $C^k(\overline{\Omega})$ το σύνολο των συναρτήσεων $f \in C^k(\Omega)$ για τις οποίες, για κάθε πολυδείκτη a με $|a| \leq k$, η απεικόνιση $x \mapsto D^a f(x)$ έχει συνεχή επέκταση στο $\overline{\Omega}$. Διευκρινίζουμε ότι*

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \cap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\overline{\Omega}).$$

***Παρατήρηση* G.18.** *Το σύνολο $C(\Omega)$ δεν είναι υποσύνολο του $C(\overline{\Omega})$. Για παράδειγμα αναφέρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ και το σύνολο $\Omega = (0, 1)$.*

***Πρόταση* G.19.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και f ή $g \in C_0^1(\Omega)$ τότε*

$$\int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, ..., n.$$

***Πρόταση* G.20.** *Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $f \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε*

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{|a| \leq k} |D^a f(x)| .$$

Τότε ο χώρος $(C^k(\overline{\Omega}), \| \cdot \|_{C^k(\overline{\Omega})})$ είναι χώρος Banach.

***Πρόταση* G.21.** *Αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ τότε*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

***Ορισμός* G.22.** *Το σύνολο των συναρτήσεων f που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τάξεως $\leq k$ θα συμβολίζουμε με C^k. Μια συνάρτηση $f \in C^k$, που ονομάζεται και C^k συνάρτηση, λέμε ότι είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (k-times continuously differentiable). Αν $k = +\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ή ότι η f είναι μία C^∞ συνάρτηση και διαβάζουμε C-άπειρο. Μια συνάρτηση f που είναι απλώς συνεχής θα λέμε ότι είναι μια C συνάρτηση.*

Έτσι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή $f \in C^k$, τότε η k τάξεως μερική παράγωγός της έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^k f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}}, \quad r_i \in \{0, ..., k\} \text{ και } r_1 + ... + r_n = k.$$

Προφανώς αν κάποιο r_i είναι μηδέν τότε η f δεν έχει παραγωγηθεί ως προς τη μεταβλητή x_i. Π.χ.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^0 \partial x_2^3 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^3 \partial x_3}.$$

Επειδή αρκετές φορές χρειάζεται να αναφερθούμε π.χ. στις μερικές παραγώγους τέταρτης τάξης μιας συνάρτησης f έστω τριών ανεξάρτητων μεταβλητών δηλαδή $f(x_1, x_2, x_3)$ για ευκολία εισάγουμε τον πολυδείκτη $a = (a_1, ..., a_N)$ με $a_i \in \mathbb{N}_0$ και ορίζοντας ως $|a| = a_1 + ... + a_N$ συμφωνούμε με $D^a f$ να συμβολίζουμε την

$$\frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}.$$

Δηλαδή

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}$$

για $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Με βάση τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε για το παράδειγμα $a = (a_1, a_2, a_3)$ με $|a| = 4$ ότι
$$D^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_3^{a_3}}.$$
Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να προκύψει η τέταρτης τάξης μερική παράγωγος. Δηλαδή
$$a = (1,1,2), a = (2,1,1), a = (0,0,4), \text{ κ.λ.π }.$$

Διευκρινίζουμε ότι στον ορισμό του $D^a f$ αν $|a| = 0$, δηλαδή $a = (0, ..., 0)$ τότε $D^0 f = f$. Αν $|a| = 1$, δηλαδή $a = (0, ..., 1, ..., 0)$ με 1 στην i-θέση τότε η $D^1 f = \partial f / \partial x_i$ ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή x_i, $i = 1, ..., N$. Τέλος αν $|a| > 1$, δηλαδή $a = (a_1, ..., a_N)$ η $D^a f$ ονομάζεται a-τάξης μικτή παράγωγος της f και για να είμαστε πιο ακριβείς a-τάξης μικτή παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές $x_1, ...x_N$ αντίστοιχα.

***Ορισμός* G.23.** *Αν $f : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι μια C^1 συνάρτηση τότε η κλίση (gradient) της f σε ένα σημείο $\vec{x}^0 \in \Omega$ συμβολίζεται με $gradf(\vec{x}^0)$ ή $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ και ορίζεται ως το διάνυσμα στήλη*
$$\vec{\nabla} f(\vec{x}^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$
Ο τελεστής $\vec{\nabla}(\cdot)$ ονομάζεται τελεστής Nabla ή τελεστής Hamilton ή Ανάδελτα. Το διάνυσμα $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ με αρχή το $\vec{x}^0 \in \Omega$ γράφεται ως
$$\vec{\nabla} f(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_i$$
όπου $\vec{e}_i$ τα μοναδιαία διανύσματα. Αν η κλίση της f υπάρχει σε κάθε σημείο του Ω τότε η συνάρτηση $\vec{\nabla} f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ με
$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$
ονομάζεται κλίση του βαθμωτού πεδίου f.

Διευκρίνιση: Ο συμβολισμός $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ χρησιμοποιείται σε αυτό το σημείο για να τονίσουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του τελεστή $\vec{\nabla}(\cdot)$ ενώ στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό $\nabla(\cdot)$.

***Πρόταση* G.24.** *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης είναι δηλαδή C^1 συναρτήσεις σε ένα κοινό πεδίο ορισμού τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(i). $\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla} f \pm \vec{\nabla} g$

(ii). $\vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(iii). $\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla} f \cdot g + f \cdot \vec{\nabla} g$

(iv). $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\vec{\nabla} f \cdot g - f \cdot \vec{\nabla} g}{g^2}, \quad g \neq 0.$

IAc. Μερικές παράγωγοι συναρτήσεων $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

***Ορισμός* G.25.** *Μια συνάρτηση $\vec{f}$ λέμε ότι έχει όριο το $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ στο $\vec{x}^0$, όπου $\vec{x}^0$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της ανν*

$$\forall \varepsilon \, \exists \in \delta = \delta(\varepsilon) \text{ ώστε } \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{l}\| < \varepsilon.$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = (\lim_{\vec{x} \to \vec{x}^0} f_1(\vec{x}), ..., \lim_{\vec{x} \to \vec{x}^0} f_m(\vec{x})).$$

***Ορισμός* G.26.** *Μια συνάρτηση $\vec{f}$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο $\vec{x}^0$ του πεδίου ορισμού της ανν κάθε μια από τις "συντεταγμένες" βαθμωτές συναρτήσεις της, f_i, $i = 1, ..., m$ είναι συνεχής στο $\vec{x}^0$.*

***Ορισμός* G.27.** *Μια συνάρτηση*

$$\vec{f}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

λέμε ότι έχει μερική παράγωγο ως προς x_i, $i = 1, ..., n$ στο εσωτερικό σημείο $\vec{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ ανν το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(x_1^0, ..., x_i^0 + h, ..., x_n^0) - \vec{f}(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h},$$

υπάρχει και είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^m$. Συμβολίζουμε συνήθως με

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \text{ ή } \vec{f}_{x_i}(x_1^0, ..., x_n^0).$$

Τονίζουμε ότι με χρήση του θεωρήματος συνιστωσών του ορίου διανυσματικής συνάρτησης προκύπτει ότι ισχύει

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^0)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, ..., n.$$

***Ορισμός* G.28.** *Έστω $\vec{f} = (f_1, ..., f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια C^1 διανυσματική συνάρτηση. Τότε η κλίση της $\vec{f}$ στο εσωτερικό σημείο $\vec{x}^0$ του Ω συμβολίζεται με $\overset{\square}{\nabla} \vec{f}(\vec{x}^0)$ και ορίζεται ως*

$$\overset{\square}{\nabla} \vec{f}(\vec{x}^0) = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m(\vec{x}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Διευκρίνιση: *Στη συνέχεια θα απλουστεύσουμε το συμβολισμό* $\overset{\square}{\nabla}(\cdot)$ *σε* $\nabla(\cdot)$. *Χρησιμοποιήσαμε στο σημείο αυτό τον προηγούμενο συμβολισμό για να τονίσουμε τον "πινακικό" χαρακτήρα του τελεστή* $\nabla(\cdot)$ *όταν δρα σε διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής.*

Αφού ορίσαμε την κλίση διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}$ *εύκολα προκύπτει ότι*

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} f(\vec{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = Hf(\vec{x}).$$

Μέρος IB

IBa. Παράγωγος κατά κατεύθυνση συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

***Ορισμός* G.29.** *Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ορισμένη στο ανοικτό διάστημα* $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\vec{x}^0 \in \Omega$ *και* $\vec{u}$ *μοναδιαίο διάνυσμα του* $\mathbb{R}$. *Θα λέμε ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη κατά κατεύθυνση στο* $\vec{x}^0$ *στην κατεύθυνση* $\vec{u}$ *ανν υπάρχει πραγματικός αριθμός* a *τέτοιος ώστε*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}^0)}{t}.$$

Ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό a *παράγωγο κατά κατεύθυνση της* f *στο* $\vec{x}^0$ *στην κατεύθυνση* $\vec{u}$ *και γράφουμε* $D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = a$ *(να τονίσουμε ότι η έννοια αυτή ταυτίζεται με την κλασσική παράγωγο της* f *στο* x_0*).*

IBb. Παράγωγος κατά κατεύθυνση συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (γενίκευση των μερικών παραγώγων σε τυχαία κατεύθυνση)

Θυμίζουμε ότι το

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{e}_i) - f(\vec{x}^0)}{t} \right) = l \in \mathbb{R}$$

εκφράζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στο $\vec{x}^0$, σε διανυσματική μορφή, δηλαδή $\partial f(\vec{x}^0)/\partial x_i = l$.

Έστω $\vec{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$ με $\|\vec{u}\| = 1$ και $0 < t < 1$. Το σημείο

$$\vec{x} = (x_1(t), ..., x_n(t)) = (x_1^0 + tu_i, ..., x_n^0 + tu_n) = \vec{x}^0 + t\vec{u}$$

βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $\vec{x}^0$, $\vec{x}^0 + t\vec{u}$ και ισχύει

$$\|\vec{x}^0 + t\vec{u} - \vec{x}^0\| = \|t\vec{u}\| = |t|\|\vec{u}\| = |t|$$

και η διαφορά $f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}^0)$ είναι η μεταβολή της f στην κατεύθυνση $\vec{u}$ σε ένα διάστημα μήκους t.

***Ορισμός* G.30.** *Ορίζουμε το παρακάτω όριο (αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός) ως παράγωγο κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}^0$ στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ και συμβολίζουμε $D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0)$ δηλαδή*

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}^0)}{t} = A \in \mathbb{R}.$$

Αν το $\vec{u}$ δεν είναι μοναδιαίο τότε το $\vec{u}/\|\vec{u}\| = \vec{v}$ είναι μοναδιαίο και αυτό χρησιμοποιούμε ως $\vec{u}$ στο παραπάνω όριο.

Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο τα εξής.

(i). Πρέπει $\|\vec{u}\| = 1$.

(ii). Αν $\vec{u} = [1]$ τότε έχουμε τον ορισμό της παραγώγου $f'(x^0)$ των μονομεταβλητών συναρτήσεων.

(iii). Αν $\vec{u} = \vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ με μονάδα στη i-θέση τότε έχουμε τον ορισμό της μερικής παραγώγου $\partial f(\vec{x}^0)/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$.

(iv). Μέσω του ορισμού δεν είναι απλός ο υπολογισμός της παραγώγου κατά κατεύθυνση. Για το λόγο αυτό θα εκφράσουμε την παράγωγο κατά κατεύθυνση με χρήση των μερικών παραγώγων και είναι

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} u_i \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ &= \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{u}\| \cos(\theta) \end{aligned}$$

δηλαδή η $D_{\vec{u}}f(\vec{x}^0)$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος κλίσης $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$. Από το σημείο $\vec{x}^0$ και το διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$) ορίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$g(t) = f(h(t)) = f(\vec{x}^0 + t\vec{u}) = f(x_1^0 + tu_1, ..., x_n^0 + tu_n)$$

όπου $\vec{x} = \vec{h}(t) = \vec{x}^0 + t\vec{u}$. Η g είναι μονομεταβλητή συνάρτηση και μας λέει πως μεταβάλλεται η τιμή της f κατά μήκος της ευθείας $\vec{x} = \vec{x}^0 + t\vec{u}$ καθώς απομακρυνόμαστε από το $\vec{x}^0$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$ ή στην αντίθετη κατεύθυνση $-\vec{u}$. Το γράφημα της g είναι μία καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ που προκύπτει από την τομή της υπερεπιφάνειας $y = f(\vec{x})$ με ένα υπερεπίπεδο που περνά από το σημείο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ και είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{u}$. Η κλίση της καμπύλης αυτής στο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ είναι η $g'(0)$ και η τιμή της κλίσης αυτής είναι η παράγωγος κατά κατεύθυνση. Είναι

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial f(\vec{x}^0 + t\vec{u})}{\partial x_1} u_1 + ... + \frac{\partial f(\vec{x}^0 + t\vec{u})}{\partial x_n} u_n. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 0$ έχουμε

$$g'(0) = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1} u_1 + ... + \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n} u_n.$$

Άρα

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0) \cdot \vec{u}.$$

Επαναλαμβάνουμε αν $\vec{u} = \vec{e}_i$, $i = 1, ..., n$, τότε

$$D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., n.$$

Δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{x}^0$ είναι οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $\vec{x}^0$ στις κατευθύνσεις των $\vec{e}_i$, μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων. Από γνωστή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου και το γεγονός ότι $\|\vec{u}\| = 1$ έχουμε

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \cos\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ και $\vec{u}$ στο $\vec{x}^0$. Προφανώς

$$\min D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = -\|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| \leq D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) \leq \|\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)\| = \max D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0)\|$$

και $D_{\vec{u}} f(\vec{x}^0) = 0$ όταν $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0) \perp \vec{u}$. Το $\vec{\nabla} f(\vec{x}^0)$ δείχνει την κατεύθυνση στην οποία ένα μονοπάτι που περνά από το $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ του γραφήματος της f αυξάνει γρηγορότερα. Είναι το μονοπάτι της πιο απόκρυμνης αναρρίχησης (path of steepest ascent).

***Θεώρημα* G.31.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Τότε σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f στο οποίο $\vec{\nabla} f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ το $D_{\vec{u}} f(\vec{x})$ μεγιστοποιείται όταν*

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f(\vec{x})}{\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\|}$$

και

$$\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\| = \max\{D_{\vec{u}} f(\vec{x}) : \vec{u} \text{ μοναδιαίο διάνυσμα }\}.$$

Δηλαδή το $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ δείχνει στην κατεύθυνση στην οποία η f "αυξάνει γρηγορότερα".

Το παρακάτω θεώρημα χρησιμοποιεί την έννοια της διαφορισιμότητας που ορίζεται σε επόμενη παράγραφο και πρέπει να ξαναδιαβαστεί αφού οριστεί η διαφορισιμότητα. Αναφέρεται σε αυτό το σημείο διότι εκφράζει ένα μάλλον απρόσμενο αποτέλεσμα που αφορά στη σχέση παραγώγου κατά κατεύθυνση και της συνέχειας.

***Θεώρημα* G.32.** *(Ικανή συνθήκη ύπαρξης παραγώγου κατά κατεύθυνση). Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}$ τότε υπάρχει παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ και ισχύει*

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})^T \cdot \vec{u}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει και είναι μάλλον απρόσμενο αποτέλεσμα, π.χ.

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2)$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Τότε έχουμε

$$\frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + tu_2^4}$$

οπότε $D_{\vec{u}} f(0,0) = \frac{u_2^2}{u_1}$ αν $u_1 \neq 0$. Αν $u_1 = 0$ τότε $D_{\vec{u}} f(0,0) = 0$. Συνεπώς η $D_{\vec{u}} f(0,0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη σε κάθε κατεύθυνση αν και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $(0,0)$.

IBc. Παράγωγος κατά κατεύθυνση συνάρτησης $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

***Ορισμός* G.33.** *Αν $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{u}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι η $\vec{f}$ έχει στο σημείο $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ παράγωγο κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}$ όταν υπάρχουν οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση, στην κατεύθυνση $\vec{u}$, των συναρτήσεων f_i, $i = 1, ..., m$ όπου $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ και $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δηλαδή να υπάρχουν οι $D_{\vec{u}} f_i(\vec{x}^0)$ για $i = 1, ..., m$. Τότε γράφουμε*

$$D_{\vec{u}} \vec{f}(\vec{x}^0) = \big(D_{\vec{u}} f_1(\vec{x}^0), ..., D_{\vec{u}} f_m(\vec{x}^0)\big)$$

αλλιώς, όταν υπάρχει η οριακή τιμή,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}^0 + t\vec{u}) - \vec{f}(\vec{x}^0)}{t} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^0)}{\partial \vec{u}}.$$

Η παράγωγος κατά κατεύθυνση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής (μεταβολή ανα μονάδα μήκους) της συνάρτησης $\vec{f}$ κατά μήκος της ευθείας $\vec{x}(t) = \vec{x}^0 + t\vec{u}$. Προτρέχουμε να αναφέρουμε ότι η παράδοση αυτή εγκαταλείπεται στην περίπτωση απεικονίσεων μεταξύ απειροδιάστατων χώρων.

***Θεώρημα* G.34.** *(Ικανή συνθήκη ύπαρξης παραγώγου κατά κατεύθυνση). Αν μια $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος και ισχύει*

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{x})^T \cdot \vec{u}$$

***Παρατήρηση* G.35.** *Η ύπαρξη όλων των παραγώγων κατά κατεύθυνση σε ένα σημείο αποτυγχάνει να μας εξασφαλίσει συνέχεια της συνάρτησης σε αυτό το σημείο. Για το λόγο αυτό, η παράγωγος κατά κατεύθυνση (άρα και οι μερικές παράγωγοι) δεν αποτελεί κατά κάποιον τρόπο την καλύτερη επέκταση της έννοιας της παραγώγου των μονομεταβλητών συναρτήσεων. Αντίθετα όπως θα δούμε στη συνέχεια το διαφορικό γενικεύει κατά τρόπο ικανοποιητικό την επέκταση αυτή από τη μία σε πολλές διαστάσεις.*

Μέρος IC

ICa. Διαφορισιμότητα-προσέγγιση-εφαπτόμενη ευθεία-ολικό διαφορικό και ολική παράγωγος συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

***Ορισμός* G.36.** *Μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq R$ είναι διαφορίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Omega$ όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός a που εξαρτάται από το x_0 και είναι ανεξάρτητος του h έτσι ώστε για κάθε $(x_0 + h) \in \Omega$ να ισχύει*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(h) \text{ με } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah - r(h)}{h} = 0$$

ή

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{r(h)}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a + \frac{r(h)}{h} \right).$$

Τον πραγματικό αριθμό a τον έχουμε ορίσει ως παράγωγο της f στο x_0 και συμβολίζουμε με $f'(x_0) = a$.

***Πρόταση* G.37.** *Ισχύει ότι μία συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη σε ένα x_0 ανν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.*

***Ορισμός* G.38.** *Ονομάζουμε τη γραμμική συνάρτηση*

$$L(h) = f'(x_0)h = df(x_0), \quad h \in \mathbb{R}$$

διαφορικό της f στο x_0 με αύξηση h. Ονομάζουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$P(h) = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + df(x_0), \quad h \in \mathbb{R}$$

εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f. Θέτουμε $h = dx$, οπότε $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Μπορούμε να θεωρήσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ της f στο σημείο x_0 όχι μόνο ως έναν πραγματικό αριθμό αλλά και ως έναν τελεστή $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στέλνει το h στο $f'(x_0)h$. Πρέπει να τονίσουμε ότι το διαφορικό είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών με διαφορετικό ρόλο η καθεμία. Το x_0 ανήκει στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f στο οποίο η $f'(x_0)$ υπάρχει ενώ το h είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Για αυτό καλύτερος συμβολισμός είναι $df(x_0, dx)$ ή $df(x_0, h)$. Σύμφωνα με την

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = r(h) \text{ με } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

το σφάλμα με το οποίο η γραμμική συνάρτηση $P(h)$ προσεγγίζει την τιμή $f(x_0 + h)$ μικραίνει καθώς $h \to 0$. Συνάγεται λοιπόν ότι η διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης και η δυνατότητα προσέγγισής της από μία γραμμική συνάρτηση είναι ιδιότητες ισοδύναμες.

ICb. Διαφορισιμότητα-προσέγγιση-εφαπτόμενο υπερεπίπεδο-ολικό διαφορικό και ολική παράγωγος συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

***Ορισμός* G.39.** *Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση, $\vec{x}^0$ ένα εσωτερικό σημείο του Ω και $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ όπου $\vec{h} \neq \vec{0}$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$ όταν υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ να ισχύει*

$$f(\vec{x}^0 + \vec{h}) - \Big[f(\vec{x}^0) + L(\vec{h})\Big] = r(\vec{h}) \text{ με } \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

ή

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(x^0 + \vec{h}) - \Big[f(\vec{x}^0) + L(\vec{h})\Big]}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Θέτουμε $L(\vec{h}) = a_1h_1 + ... + a_nh_n$ και $r(\vec{h}) = \varepsilon_1h_1 + ... + \varepsilon_nh_n$.

***Θεώρημα* G.40.** *(προσέγγισης). Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση, $\vec{x}^0$ ένα εσωτερικό σημείο του Ω και $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$. Τότε ισχύει*

$$\begin{aligned} f(\vec{x}^0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}^0) + \frac{f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}h_1 + ... + \frac{f(\vec{x}^0)}{\partial x_n}h_n + r(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}^0) + \nabla f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h} + r(\vec{h}) \end{aligned}$$

όπου ο όρος σφάλματος $r(\vec{h})$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{h_i\to 0, i=1,...,n} \frac{\varepsilon_1h_1 + ... + \varepsilon_nh_n}{\sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}}.$$

Συνδυάζοντας το θεώρημα και τον ορισμό προκύπτει ότι οι συντελεστές a_i της $L(\vec{h})$ είναι οι

$$a_i = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i}, \text{ για } i = 1, ..., n.$$

***Ορισμός* G.41.** *Ονομάζουμε την*

$$L(\vec{h}) = df(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h} = \left[\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Ολικό διαφορικό της f στο $\vec{x}^0$, την

$$f'(\vec{x}^0) = Df(\vec{x}^0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T = \left[\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_n}\right]$$

Ιακωβιανή ορίζουσα της f στο $\vec{x}^0$ και την

$$\begin{aligned} P(\vec{h}) &= f(\vec{x}^0) + L(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}^0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h} = f(\vec{x}^0) + df(\vec{x}^0) \\ &= f(\vec{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} h_i \end{aligned}$$

Εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της f στο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$.

Θέτοντας $\vec{h} = \vec{dx} = (x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0) = (h_1, ..., h_n)$ η $P(\vec{h})$ γράφεται ως

$$P(\vec{h}) = f(\vec{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)$$

και αν $n = 2$ ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο. Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο σημείο $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ της υπερεπιφάνειας της f, που είναι άμεσο αποτέλεσμα της διαφορισιμότητας της f στο $\vec{x}^0$, αποτελεί την καλύτερη δυνατή γραμμική προσέγγιση της f τοπικά στο σημείο $\vec{x}^0$ μεταξύ όλων των υπερεπιπέδων που διέρχονται από το $(\vec{x}^0, f(\vec{x}^0))$ και μας παρέχει τη δυνατότητα απόκτησης γνώσεων για την συμπεριφορά μιας μη γραμμικής συνάρτησης μέσω μιας τοπικής γραμμικής προσέγγισής της.

***Θεώρημα* G.42.** *Αν η $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0 \in \Omega$ τότε είναι συνεχής στο $\vec{x}^0$.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$ ισχύει ότι

$$f(\vec{x}^0 + \vec{h}) = f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0)\vec{h} + r(\vec{h}).$$

Όμως $f'(\vec{x}^0)\vec{h}$ και $r(\vec{h})$ τείνουν στο 0 καθώς $\vec{h} \to \vec{0}$, άρα

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}^0 + \vec{h}) = f(\vec{x}^0) + \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f'(\vec{x}^0)\vec{h} + \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} r(\vec{h}) = f(\vec{x}^0).$$

□

***Παρατήρηση* G.43.** *Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει αφού για παράδειγμα αν $f(x) = |x|$, γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι διαφορίσιμη στο 0.*

***Θεώρημα* G.44.** *(Ικανή συνθήκη ύπαρξης παραγώγου κατά κατεύθυνση). Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}$ τότε υπάρχει παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση οπουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ και ισχύει*

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})^T \cdot \vec{u}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει και είναι μάλλον απρόσμενο αποτέλεσμα, π.χ.

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2)$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Τότε έχουμε

$$\frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t u_2^4}$$

οπότε $D_{\vec{u}} f(0,0) = \frac{u_2^2}{u_1}$ αν $u_1 \neq 0$. Αν $u_1 = 0$ τότε $D_{\vec{u}} f(0,0) = 0$. Συνεπώς η $D_{\vec{u}} f(0,0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη σε κάθε κατεύθυνση αν και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $(0,0)$.

Αν όμως οι μερικές παράγωγοι έχουν μια επιπλέον ιδιότητα, πέραν της ύπαρξης, καταφέρνουν να εξασφαλίσουν διαφορισιμότητα όπως μας διαβεβαιώνει το παρακάτω θεώρημα.

***Θεώρημα* G.45.** *(ικανή συνθήκη διαφορισιμότητας). Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία έχει όλες τις μερικές παραγώγους συνεχείς σε μία γειτονιά του $\vec{x}^0 \in \Omega$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$.*

ICc. Διαφορισιμότητα-ολικό διαφορικό-ολική παράγωγος συνάρτησης $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Γενικεύουμε τις παραπάνω έννοιες που ήδη ορίσαμε για $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στις συναρτήσεις $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, ..., x_n) = (f_1(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x}))$$

όπου $f_i(\vec{x})$ είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$, για $i = 1, ..., m$.

***Ορισμός* G.46.** *Έστω $\vec{f} = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^0 \in \Omega$ και $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ όπου $\vec{h} \neq \vec{0}$. Θα λέμε ότι η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0$ όταν υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε για κάθε $\vec{x}^0 + \vec{h} \in \Omega$ να ισχύει*

$$\vec{f}(\vec{x}^0 + \vec{h}) - \left[\vec{f}(\vec{x}^0) + L(\vec{h})\right] = \vec{r}(\vec{h}) \text{ με } \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

ή

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|\vec{f}(x^0 + \vec{h}) - \left[\vec{f}(\vec{x}^0) + L(\vec{h})\right]\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

***Ορισμός* G.47.** *Ονομάζουμε την*

$$\vec{L}(\vec{h}) = d\vec{f}(\vec{x}^0) = D\vec{f}(\vec{x}^0)\vec{h} = \vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{h} = \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{x}^0)^T \cdot \vec{h}$$

Ολικό διαφορικό της f στο $\vec{x}^0$ και την

$$\begin{aligned}
\vec{f}'(\vec{x}^0) = D\vec{f}(\vec{x}^0) &= \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{x}^0)^T \\
&= \begin{bmatrix} \vec{\nabla} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m(\vec{x}^0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}
\end{aligned}$$

Ιακωβιακό πίνακα της f στο $\vec{x}^0$.

***Θεώρημα* G.48.** *Αν η $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}^0 \in \Omega$ τότε είναι και συνεχής στο $\vec{x}^0$.*

***Θεώρημα* G.49.** *(ικανή συνθήκη διαφορισιμότητας). Έστω $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του Ω.*

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω, η διαφορισιμότητα είναι σημαντικότατε έννοια στη μελέτη των μη γραμμικών πολυμεταβλητών συναρτήσεων αφού μας επιτρέπει τη γραμμικοποίησή τους τοπικά. Το διαφορικό είναι η θεμελιώδης έννοια στη μελέτη πολυμεταβλητών συναρτήσεων και όχι η έννοια της μερικής παραγώγου και αυτό γιατί η ύπαρξη διαφορικού συνεπάγεται την ύπαρξη μερικών παραγώγων ενώ το αντίθετο δεν ισχύει πάντα. Το γεγονός αυτό είναι απρόσμενο αποτέλεσμα αφού συνηθισμένοι από τις μονομεταβλητές συναρτήσεις διαφορισιμότητα και παραγωγισιμότητα είναι έννοιες ισοδύναμες.

II. Παράγωγοι απεικονίσεων-τελεστών

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ιδιότητες των παραγώγων απεικονίσεων-τελεστών των τύπων

$$\begin{aligned}
&F : X \to Y, \quad X, Y \text{ γενικοί χώροι} \\
&F : X \to \mathbb{R} \text{ (συναρτησιακά)}
\end{aligned}$$

IIA. Παράγωγος κατά κατεύθυνση απεικόνισης μεταξύ απειροδιάστατων χώρων-Gateaux παράγωγος

***Ορισμός* G.50.** *Έστω τελεστής $F : D_F \subseteq X \to Y$ όπου X, Y διανυσματικοί τοπολογικοί χώροι και x_0 εσωτερικό σημείο του D_F, $h \in X$ με $h \neq 0_X$. Θεωρούμε $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ με $\varepsilon > 0$*

τέτοιο ώστε $(x_0 + th) \in D_F$ για κάθε $t \in I_\varepsilon$ οπότε ορίζεται μια απεικόνιση $f : I_\varepsilon \to Y$ με τύπο $f(t) = F(x_0 + th)$. Αν η αφηρημένη συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$ θα λέμε ότι ο τελεστής F είναι παραγωγίσιμος στο x_0 κατά την κατεύθυνση h και συμβολίζουμε $\delta F(x_0; h) = f'(0)$ την παράγωγο του τελεστή F κατά την κατεύθυνση h στο x_0. Δηλαδή

$$\delta F(x_0; h) = f'(0) = \frac{dF(x_0 + th)}{dt}|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}$$

αν υπάρχει στο Y, όπου το όριο εννοείται με την τοπολογία (μετρική, νόρμα) του χώρου Y. Αν $h = 0_X$ τότε ορίζουμε $\delta F(x_0; 0_X) = 0_Y$. Την παράγωγο κατά κατεύθυνση h του τελεστή F, $\delta F(x_0; h)$, ονομάζουμε εναλλακτικά μεταβολή πρώτης τάξης του τελεστή F στο x_0 κατά την κατεύθυνση h, Gateaux μεταβολή ή Gateaux διαφορικό πρώτης τάξης του τελεστή F στο x_0 κατά την κατεύθυνση h ή πρώτη μεταβολική παράγωγο κατά Lagrange.

***Ορισμός* G.51.** *Αν η $\delta F(x_0; h)$ υπάρχει για όλες τις κατευθύνσεις $h \in X$ την απεικόνιση $\delta F(x_0; \cdot) : D_F \to Y$ καλούμε πρώτη μεταβολή της F στο x_0. Αν η πρώτη μεταβολή της F στο x_0 συνιστά ένα γραμμικό φραγμένο τελεστή, αυτόν τον τελεστή ονομάζουμε Gateaux παράγωγο της F στο x_0 και η F λέγεται Gateaux διαφορίσιμη στο x_0. Η Gateaux παράγωγος της F στο x_0 συμβολίζεται με $\delta F(x_0)$ ή $F'_G(x_0)$. Η F θα καλείται Gateaux διαφορίσιμη ανν είναι Gateaux διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του D_F. (Υπάρχουν περιπτώσεις που η πρώτη μεταβολή δεν είναι γραμμικός τελεστής οπότε η F δεν είναι Gateaux διαφορίσιμη).*

Ιδιότητες και σχόλια για την πρώτη μεταβολή και την Gateaux παράγωγο:

(1). Ισχύουν τα εξής.

$$\begin{aligned}
&\delta(aF)(x_0; h) = a\delta F(x_0; h), \quad a \in \mathbb{R} \\
&(aF)'_G(x_0) = aF'_G(x_0), \quad a \in \mathbb{R} \\
&\delta(F + R)(x_0; h) = \delta F(x_0; h) + \delta R(x_0; h) \\
&(F + R)'_G(x_0) = F'_G(x_0) + R'_G(x_0)
\end{aligned}$$

όπου F, R απεικονίσεις.

(2). Η $\delta F(x_0; h)$ του τελεστή F είναι ένας τελεστής δύο ορισμάτων του τύπου

$$\delta F(\cdot, \cdot) : U \times V \to Y$$

όπου

$$\begin{aligned}
U &= \{x \in X : \exists \delta F(x; h) \text{ ως προς κάποιες κατευθύνσεις}\} \\
V &= \{h \in X : h \text{ κατεύθυνση ώστε να ορίζεται η } \delta F(x; h)\}.
\end{aligned}$$

(3). Η $\delta F(x; h)$ είναι ομογενής ως προς h, δηλαδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\delta F(x; ah) = a\delta F(x; h)$.

(4). Η $\delta F(x_0; h)$ δεν είναι σίγουρα γραμμικός τελεστής ή συνεχής γραμμικός τελεστής δηλαδή δεν είναι πάντοτε αθροιστικός τελεστής ως προς h.

(5). Η $\delta F(x_0; h)$ υπολογίζεται εύκολα με αναγωγή σε παραγώγιση συναρτήσεων μιας μεταβλητής και στη συνέχεια η γνώση της $\delta F(x_0; h)$ είναι σημαντική διότι

(a). Αν υπάρχει και η Frechet παράγωγος (ορίζεται σε επόμενη παράγραφο) $F'_{\mathcal{F}}(x_0)$ του τελεστή F τότε ισχύει $\delta F(x_0; h) = F'_{\mathcal{F}}(x_0)(h)$.

(b). Υπάρχουν απλά θεωρήματα για τον έλεγχο της αθροισιμότητας και της συνέχειας της $\delta F(x_0; h)$ ως προς h.

(d). Η ύπαρξη της παραγώγου κατά κατεύθυνση είναι αρκετή για την διατύπωση χρήσιμων μεταβολικών αρχών στη Μαθηματική Φυσική, αναγκαίων συνθηκών βελτιστοποίησης συναρτησιακών και αλγορίθμων εύρεσης ακροτάτων κυρτών συναρτησιακών.

IIB. Ολική παράγωγος απεικόνισης μεταξύ απειροδιάστατων χώρων-παράγωγος Frechet

***Ορισμός* G.52.** *Θεωρούμε τους χώρους με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X), Y, \|\cdot\|_Y)$, μια απεικόνιση $F : X \to Y$ και $x_0 \in X$, $h \in X$. Η F θα καλείται Frechet διαφορίσιμη στο x_0 ανν υπάρχει A γραμμικός και φραγμένος τελεστής $A : X \to Y$ έτσι ώστε*

$$\lim_{h \neq 0_X, \|h\|_X \to 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \quad \forall h \in X.$$

Τον γραμμικό και φραγμένο (είναι και συνεχής) τελεστή A ονομάζουμε Frechet παράγωγο της απεικόνισης F στο x_0 και συμβολίζουμε με $DF(x_0)$ ή $F'_{\mathcal{F}}(x_0)$ και το στοιχείο $A(h) = DF(x_0)(h)$ ονομάζουμε διαφορικό κατά Frechet του τελεστή F στο x_0. Η F θα καλείται Frechet διαφορίσιμη ανν είναι Frechet διαφορίσιμη σε κάθε $x_0 \in X$.

Ιδιότητες και σχόλια για τη Frechet παράγωγο:

(1). Ισχύουν τα παρακάτω.

$$\begin{aligned}
&(aF)'_{\mathcal{F}}(x_0) = aF'_{\mathcal{F}}(x_0)\\
&(F + R)'_{\mathcal{F}}(x_0) = F'_{\mathcal{F}}(x_0) + R'_{\mathcal{F}}(x_0)\\
&(R \circ F)'_{\mathcal{F}}(x_0) = R'_{\mathcal{F}}(F(x_0))F'_{\mathcal{F}}(x_0).
\end{aligned}$$

(2). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστής F μεταξύ των χώρων X, Y είναι Frechet διαφορίσιμος και ισχύει

$$F'_{\mathcal{F}}(x_0) = F(x_0).$$

(3). Αν η Frechet παράγωγος ενός τελεστή F στη θέση x_0 υπάρχει τότε υπάρχει και η Gateaux παράγωγος του τελεστή F στο x_0 και ισχύει $F'_{\mathcal{F}}(x_0) = F'_G(x_0)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

(4). Αν ένας τελεστής F έχει Frechet παράγωγο στο $x_0 \in intD_F$ τότε είναι και συνεχής στο x_0, κάτι που δεν ισχύει όταν έχει Gateaux παράγωγο στο x_0.

Παράρτημα Η

Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Με τον όρο βελτιστοποίηση (optimization) συναρτήσεων αναφερόμαστε στον προσδιορισμό και την μελέτη των ακροτάτων (μεγίστων ή ελαχίστων) τιμών τους τοπικά ή σφαιρικά με ή χωρίς περιορισμούς. Δεσμευμένη βελτιστοποίηση (constrained optimization) ή βελτιστοποίηση υπο συνθήκη είναι η διαδικασία προσδιορισμού βέλτιστων σημείων (τιμών) μιας αντικειμενικής συνάρτησης όταν το πεδίο ορισμού της περιορίζεται σε ένα σύνολο σημείων που ικανοποιούν ένα σύστημα ανισοεξισωτικών περιορισμών. Μη δεσμευμένη βελτιστοποίηση είναι προφανές ότι είναι η διαδικασία προσδιορισμού βέλτιστων σημείων (τιμών) μιας συνάρτησης σε ελεύθερο πεδίο ορισμού (απαλλαγμένο ανισοεξισωτικών περιορισμών).

Το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της διανυσματικής μεταβλητής $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\max \text{ ή } \min \text{ της } z = f(\vec{x}) = f(x_1, ..., x_n), \quad \vec{x} \in \Omega,$$

ενώ το γενικό πρόβλημα δεσμευμένης βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\max \text{ ή } \min \text{ της } z = f(\vec{x}) = f(x_1, ..., x_n), \quad \vec{x} \in \Omega,$$

όπου

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\vec{x}) = b_i, i = 1, ..., n\}.$$

Σε πρώτη φάση θα ασχοληθούμε με τη μη δεσμευμένη βελτιστοποίηση. Αναφερόμαστε αρχικά σε ορισμένες έννοιες οι οποίες παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη βελτιστοποίηση και αυτές είναι οι *τετραγωνικές μορφές* που αποτελούν ειδική κατηγορία πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού της οποίας κάθε όρος είναι μονώνυμο δευτέρου βαθμού.

(1). Η πιο απλή πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η γραμμική της οποίας ο τύπος είναι

$$f(\vec{x}) = f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

όπου $\vec{a}$ είναι κάποιο συγκεκριμένο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$.

(2). Η μη γραμμική πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δευτέρου βαθμού έχει τύπο

$$
\begin{aligned}
Q(x_1, ..., x_n) &= \vec{x}^T A \vec{x} \\
&= [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \frac{1}{2}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{nn}x_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

όπου A είναι ένας μοναδικός συμμετρικός πίνακας και λέγεται τετραγωνική μορφή. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε με μία απλή τεχνική έστω και αν ο A δεν είναι συμμετρικός να τον μετατρέψουμε σε μοναδικό συμμετρικό δεδομένου ότι κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να εκφρασθεί με άπειρους τρόπους μέσω πινάκων. Ένα παράδειγμα τετραγωνικής μορφής είναι το

$$Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + ly^2 + myz + nz^2$$

με τον αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & l & \frac{m}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{m}{2} & n \end{bmatrix}$$

και

$$[x \ y \ z] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q(x, y, z).$$

***Ορισμός* H.1.** *Αν A είναι ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας τότε η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας A λέμε ότι είναι*

(i). *θετικά ορισμένη-ος ανν $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,*

(ii). *θετικά ημιορισμένη-ος ανν $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,*

(iii). *αρνητικά ορισμένη-ος ανν $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,*

(iv). *αρνητικά ημιορισμένη-ος ανν $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$,*

(v). *αόριστη-ος ανν $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$, για κάποια $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$ για κάποια άλλα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Είναι φανερό ότι αν A είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας τότε ο $-A$ είναι αρνητικά ορισμένος και αντίστροφα.

Ορισμός* H.2.** ***(1). *Αν από ένα $n \times n$ πίνακα A απομακρύνουμε $n - k$ σειρές και τις αντίστοιχες $n - k$ στήλες προκύπτει μια υπομήτρα που ονομάζεται κύρια υπομήτρα τάξης k την ορίζουσα της οποίας ονομάζουμε κύρια ελάσσονα τάξης k.*

(2). *Ειδικά ονομάζεται ηγετική κύρια ελάσσονα βαθμού k η ορίζουσα $det(A_k)$ όπου*

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Το παρακάτω θεώρημα προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο χαρακτηρισμού ενός πίνακα ως προς την οριστικότητα μέσω κυρίων ελασσόνων τάξης k. Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ldots, A_n = A$$

τις ηγετικές κύριες ελάσσονες τάξης $1, 2, 3, ..., n$ αντίστοιχα.

***Θεώρημα* Η.3.** *Ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας A είναι*

(i). *θετικά ορισμένος ανν όλες οι ηγετικές κύριες ελάσσονες της A είναι θετικές, δηλαδή $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n| > 0$.*

(ii). *θετικά ημιορισμένος ανν οι κύριες ελάσσονες της A είναι μη αρνητικές.*

(iii). *αρνητικά ορισμένος ανν τα πρόσημα των ηγετικών κυρίων ελασσόνων της A εναλλάσονται αρχίζοντας με αρνητικό, δηλαδή $|A_1| < 0$, $|A_2| > 0$,. . ., $(-1)^n|A_n| > 0$.*

(iv). *αρνητικά ημιορισμένος ανν κάθε κύρια ελάσσονα περιττής τάξης είναι μη θετική και κάθε κύρια ελάσσονα άρτιας τάξης είναι μη αρνητική.*

(v). *αόριστος σε κάθε άλλη περίπτωση.*

Το ακόλουθο θεώρημα προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο χαρακτηρισμού της οριστικότητας ενός πίνακα A μέσω των ιδιοτιμών του.

***Θεώρημα* Η.4.** *Η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ και ο αντίστοιχος πίνακας A που την ορίζει είναι*

(i). *θετικά ορισμένη ανν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι θετικές.*

(ii). *θετικά ημιορισμένη ανν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι μη αρνητικές και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda_i = 0$.*

(iii). *αρνητικά ορισμένη ανν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι αρνητικές.*

(iv). *αρνητικά ημιορισμένη ανν όλες οι ιδιοτιμές λ_i της A είναι μη θετικές και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda_i = 0$.*

(v). *αόριστη ανν έχει τουλάχιστον μια θετική και τουλάχιστον μια αρνητική ιδιοτιμή.*

***Πόρισμα* Η.5.** *Η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη ανν $det(A) = 0$.*

Κριτήρια χαρακτηρισμού ακροτάτων

Έστω $y = f(x_1, ..., x_n) = f(\vec{x})$. Τότε

$$Df(\vec{x}) = \vec{\nabla} f^T(\vec{x}) = \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\right]$$

και

$$D^2 f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$ λέγονται στάσιμα σημεία και ως ικανές συνθήκες χαρακτηρισμού ενός στάσιμου σημείου, έστω x^* έχουμε τις εξής:

(1). Αν ο $Hf(x^*)$ είναι θετικά ορισμένος τότε το x^* είναι τοπικό ελάχιστο.

(2). Αν ο $Hf(x^*)$ είναι αρνητικά ορισμένος τότε το x^* είναι τοπικό μέγιστο.

(3). Αν ο $Hf(x^*)$ είναι αόριστος τότε το x^* είναι σαγματικό σημείο.

Δηλαδή το είδος της τετραγωνικής μορφής $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T \cdot Hf(x^*) \cdot \vec{h}$ και ειδικότερα το είδος του πίνακα $Hf(x^*)$ χαρακτηρίζει το είδος των τοπικών ακροτάτων της f στο στάσιμο σημείο x^*. Π.χ. αν $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση τότε αν $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ στάσιμο σημείο της f, δηλαδή $\partial f(x^*)/\partial x_1 = 0$ και $\partial f(x^*)/\partial x_2 = 0$, ισχύουν τα παρακάτω.

(1). Το x^* είναι τοπικό ελάχιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} > 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 > 0.$$

(2). Το x^* είναι τοπικό μέγιστο αν

$$\partial^2 f(x^*) < 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 > 0.$$

(3). Το x^* είναι σαγματικό σημείο αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 < 0.$$

(4). Δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το x^* αν

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0.$$

Παράρτημα I

Τύποι Green

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ ανοικτό και φραγμένο. Με $\partial\Omega$ συμβολίζουμε το σύνορο του Ω το οποίο υποθέτουμε ότι είναι λείο. Με $\vec{n} = (n_1, ..., n_N)$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο, κάθετο στο $\partial\Omega$, διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω. Υποθέτουμε επίσης συναρτήσεις $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ όπου $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ οι οποίες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης δηλαδή ανήκουν στο $C^1(\Omega)$. Τότε ισχύει ο λεγόμενος τύπος Gauss-Green (παραγοντική ολοκλήρωση)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uvn_i(x)dS - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

για $i = 1, ..., N$. Έχουμε επίσης τους εξής συμβολισμούς.

$$\vec{\nabla} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}) = \nabla u$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ (τελεστής Laplace)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \text{ (κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του } \vec{n}.$$

***Πρόταση* I.1.** *Αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ τότε*

(i). *Ο πρώτος τύπος του Green δίνεται ως*

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS = \int_\Omega u\Delta v dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

(ii). *Ο δεύτερος τύπος του Green δίνεται ως*

$$\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS = \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx.$$

Απόδειξη. (i). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\Delta v dx &= \int_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2 v}{\partial x_N^2}\right)dx\\
&= \int_\Omega u\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}udx\\
&= \sum_{i=1}^N \left(\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial x_i}un_i dS - \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx\right)\\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial x_i}un_i dS - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx\\
&= \int_{\partial\Omega}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}un_i\right)dS - \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx\\
&= \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS - \int_\Omega \nabla u\nabla v dx.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS = \int_\Omega u\Delta v dx + \int_\Omega \nabla u\nabla v dx.$$

(ii). Λόγω του (i) ισχύουν οι

$$\int_\Omega u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS - \int_\Omega \nabla u\nabla v dx$$

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS - \int_\Omega \nabla u\nabla v dx.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)dS.$$

□

***Πρόταση* I.2.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και f ή $g \in C_0^1(\Omega)$ τότε*

$$\int_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i}f dx, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Παράρτημα J

Χώροι Συναρτήσεων

Στοιχεία θεωρίας μέτρου

***Ορισμός* J.1.** *Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται σ-άλγεβρα στο X αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

(i). $X \in \mathcal{A}$

(ii). *αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$*

(iii). *αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

***Παρατήρηση* J.2.** *Αν η (iii) αντικατασταθεί από την*

(iii)′. *αν $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, η οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται άλγεβρα.*

***Ορισμός* J.3.** *Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται αριθμήσιμα προσθετικό ή σ-προσθετικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

(i). $\mu(\emptyset) = 0$

(ii). *$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i)$, αν $\{A_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ (αριθμήσιμη προσθετικότητα ή σ-προσθετικότητα).*

Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ λέγεται μετρήσιμος χώρος και η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου λέμε ότι το μ είναι μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ή απλά στον X. Σε αυτήν την περίπτωση τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγονται $\mathcal{A}$-μετρήσιμα ή απλά μετρήσιμα σύνολα.

***Ορισμός* J.4.** *Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ άλγεβρα στο X. Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

(i). $\mu(\emptyset) = 0$

(ii). *$\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ αν $\{A_i\}_{i=1,...,n}$ πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. (πεπερασμένη προσθετικότητα)*

***Παρατήρηση* J.5.** *Είναι σαφές ότι κάθε μέτρο μ σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A}$ είναι και πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.*

Παραδείγματα

(i). Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε για κάθε $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{αν το } A \text{ έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία } (n = 0, 1, ...) \\ +\infty, & \text{αν το } A \text{ είναι άπειρο σύνολο} \end{cases}$$

και

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ +\infty, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases}$$

και

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $x \in X$. Το μ λέγεται αριθμητικό μέτρο και το δ_x λέγεται μέτρο Dirac στο σημείο x.

(ii). Πιο ενδιαφέροντα μέτρα είναι το μέτρο Lebesque λ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ με σπουδαία ιδιότητα το μέτρο κάθε διαστήματος του $\mathbb{R}$ να είναι ισό με το μήκος του και η γενίκευση του λ_n στον $\mathbb{R}^n$. Η $B(\mathbb{R})$ είναι η σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}$ και $B(\mathbb{R}^n)$ είναι η σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}^n$.

***Ορισμός* J.6.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μ λέγεται*

(i). *πεπερασμένο, αν $\mu(X) < +\infty$*

(ii). *μέτρο πιθανότητας, αν $\mu(X) = 1$ και*

(iii). *σ-πεπερασμένο, αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε*

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X \text{ και } \mu(A_n) < +\infty \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και αντιστοίχως ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου, χώρος μέτρου πιθανότητας, χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Οι μετρήσιμες συναρτήσεις που ορίζουμε στη συνέχεια είναι μια κλάση συναρτήσεων θεμελιώδης στη θεωρία ολοκλήρωσης, όπως είναι ο ρόλος των μετρήσιμων συνόλων στη μελέτη των μέτρων.

***Ορισμός* J.7.** *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται μετρήσιμη ως προς $\mathcal{A}$ ή $\mathcal{A}$-μετρήσιμη ή απλά μετρήσιμη αν για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ το $[f \leq \beta] = f^{-1}([-\infty, \beta])$ είναι μετρήσιμο, δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη λέγεται μ-μετρήσιμη. Ειδικά μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ λ-μετρήσιμη λέγεται Lebesque μετρήσιμη. Αν ο X είναι μετρικός χώρος μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, +\infty]$ $B(X)$-μετρήσιμη λέγεται Borel μετρήσιμη.*

***Ορισμός* J.8.** *Μια μετρήσιμη συνάρτηση $S : X \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν το σύνολο $S(X)$ των τιμών της είναι πεπερασμένο. Αν η S είναι απλή τότε υπάρχει μια μοναδική πεπερασμένη μετρήσιμη διαμέριση $\{A_1, ..., A_n\}$ του X, δηλαδή $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, $\cup_{i=1}^n A_i = X$ και τα A_i είναι μη κενά, ξένα ανα δύο και μοναδικοί αριθμοί $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ με $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ ώστε $S = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. Αυτή η παράσταση λέγεται κανονική μορφή της S και προκύπτει θέτοντας $A_i = S^{-1}(\{a_i\})$ για $i = 1, ..., n$.*

***Ορισμός* J.9.** *Έστω $f : X \to [0, +\infty)$ απλή συνάρτηση. Αν η f σε κανονική μορφή γράφεται $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, το ολοκλήρωμα (Lebesque) της f (ως προς μ) ορίζεται να είναι ο αριθμός $\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$ και συμβολίζεται με*

$$\int f d\mu.$$

Αν εμφανιστεί στο παραπάνω άθροισμα ο όρος $0 \cdot (+\infty)$ τότε θέτοντας $0 \cdot (+\infty) = 0$ προκύπτει ότι $\int f d\mu \in [0, +\infty]$.

***Πρόταση* J.10.** *Έστω $f, g \geq 0$ απλές συναρτήσεις και $a \geq 0$. Τότε*

(i). $\int afd\mu = a \int fd\mu$.

(ii). $\int (f + g)d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$.

(iii). *Αν $f \leq g$ τότε $\int fd\mu \leq \int gd\mu$.*

***Ορισμός* J.11.** *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesque της f ως προς μ ορίζεται ως*

$$\int fd\mu = \sup\{\int sd\mu : s \text{ απλή με } 0 \leq s \leq f\}.$$

Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε το ολοκλήρωμα της f στο A ορίζεται ως

$$\int_A fd\mu = \int f\chi_A d\mu$$

και είναι σαφές ότι $\int_A fd\mu \in [0, +\infty]$.

***Πρόταση* J.12.** *Έστω $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις, $A, B \in \mathcal{A}$ και $a \geq 0$. Τότε*

(i). $\int afd\mu = a \int fd\mu$

(ii). *αν $f \leq g$ τότε $\int fd\mu \leq \int gd\mu$*

(iii). *αν $A \subset B$ τότε $\int_A fd\mu \leq \int_B fd\mu$*

(iv). *αν $\mu(A) = 0$ ή αν $f = 0$ στο A τότε $\int_A fd\mu = 0$*

***Θεώρημα* J.13.** *(Μονότονης σύγκλισης του Lebesque). Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n = 1, 2, ...$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq ....$ Θέτουμε $\lim_n f_n = f$. Τότε*

$$\int fd\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

***Πόρισμα* J.14.** *Έστω $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

***Πόρισμα* J.15.** *(Θεώρημα Beppo Levi). Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n = 1, 2, ...$ ακολυθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Τότε*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

***Πόρισμα* J.16.** *(Λήμμα Fatou). Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$ ακολυθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

***Πόρισμα* J.17.** *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $\nu = \nu(f, \mu) : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$$

(Το ν λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ). Τότε

(i). *Το ν είναι μέτρο*

(ii). *αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$ (λέμε τότε ότι το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ και γράφουμε $\nu << \mu$)*

(iii). *αν $g : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τοτε*

$$\int g d\nu = \int g f d\mu$$

και $\nu(fg, \mu) = \nu(g, \nu(f, \mu)) = \nu(f, \nu(g, \mu))$.

***Ορισμός* J.18.** *Μια ιδιότητα P των σημείων του X λέμε ότι ισχύει μ-σχεδόν παντού στο X ή μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ αν το σύνολο $\{x \in X : \text{ το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\}$ είναι μ-μηδενικό. Για συντομία γράφουμε μ-σ.π αντί για μ-σχεδόν παντού.*

***Ορισμός* J.19.** *Αν f, g συναρτήσεις στο X τότε $f = g$ μ-σ.π σημαίνει ότι το σύνολο $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ είναι μ-μηδενικό. Ανάλογα αν οι f, g παίρνουν τιμές στο $[-\infty, +\infty]$ τότε $f \leq g$ μ-σ.π (αντ. $f < g$ μ-σ.π) σημαίνει ότι το σύνολο $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ (αντ. το σύνολο $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$) είναι μ-μηδενικό.*

***Πρόταση* J.20.** *Έστω $f : X \to [-\infty, +\infty]$ (αντ. $\mathbb{C}$) μ-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε*

(i). *Κάθε συνάρτηση $g : X \to [-\infty, +\infty]$ (αντ. $\mathbb{C}$) ώστε $f = g$ μ-σ.π είναι μ-μετρήσιμη.*

(ii). *υπάρχει $g : X \to [-\infty, +\infty]$ (αντ. $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$-μετρήσιμη ώστε $f = g$ μ-σ.π.*

***Πρόταση* J.21.** *Έστω $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

(i). *Αν $f = g$ μ-σ.π, τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$*

(ii). *Ισχύει $f = 0$ μ-σ.π. αν και μόνο αν $\int f d\mu = 0$.*

***Ορισμός* J.22.** *Έστω p και q δυο θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Οι αριθμοί p, q θα λέγονται συζυγείς εκθέτες αν $1/p + 1/q = 1$, δηλαδή $p + q = pq$.*

Παρατήρηση* J.23.** ***(1). *Αν ο αριθμός p τείνει στο 1 τότε ο q τείνει στο ∞ οπότε αν $p = 1$ και $q = \infty$ τους θεωρούμε επίσης συζυγείς εκθέτες.*

(2). *Μια πιο ειδική περίπτωση, αλλά σημαντική, συζυγών εκθετών αποτελεί η $p = q = 2$.*

***Λήμμα* J.24.** *(Ανισότητα Young). Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a, b \geq 0$ και $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. Τότε ισχύει*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Η ισότητα ισχύει ανν $a^p = b^q$. Επίσης αν $\varepsilon > 0$ τότε

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}.$$

Ειδικά για $p = q = 2$ η ανισότητα Young είναι προφανής, αφού

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

δηλαδή $(a - b)^2 \geq 0$.

***Πρόταση* J.25.** *(Ανισότητα Hölder). Έστω p, q συζυγείς εκθέτες με $1 < p < +\infty$ και $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

$$\int fg d\mu \leq \left(\int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Για $p = q = 2$ η ανισότητα Hölder λέγεται Cauchy-Schwarz-Buniakowski.

Ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder αποτελεί η παρακάτω ανισότητα. Αν

$$X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n) \text{ για } p = q = 2, \mathcal{X} = \{1, ..., n\},$$

$$\mathcal{A} = P(\mathcal{X}), \mu(\{i\}) = 1, f(i) = |x_i|, g(i) = |y_i| \text{ για } i = 1, ..., n$$

έχουμε

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

***Πρόταση* J.26.** *(Ανισότητα Minkowski). Έστω $1 < p < +\infty$ και $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ειδική περίπτωση της ανισότητας Minkowski αποτελεί η παρακάτω ανισότητα. Αν

$$X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n) \text{ για } p = q = 2, \mathcal{X} = \{1, ..., n\},$$

$$\mathcal{A} = P(\mathcal{X}), \mu(\{i\}) = 1, f(i) = |x_i|, g(i) = |y_i| \text{ για } i = 1, ..., n$$

έχουμε

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

***Ορισμός* J.27.** *Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται Lebesque ολοκληρώσιμη αν $\int |f| d\mu < \infty$. Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα ορίζεται αφού η $|f|$ είναι θετική μετρήσιμη συνάρτηση.*

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^1(\mu)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$) το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων ως προς μ συναρτήσεων με τιμές μιγαδικές (αντ. πραγματικές). Ορίζουμε ολοκλήρωμα για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [-\infty, +\infty]$ θέτοντας

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu, \text{ για } A \in \mathcal{A}$$

με την προϋπόθεση ότι τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_A f^+ d\mu$ και $\int_A f^- d\mu$ είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση αυτή $\int_A f d\mu \in [-\infty, +\infty]$.

Στη συνέχεια επιχειρούμε να εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται και ορίζονται οι χώροι συναρτήσεων $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Προτρέχουμε να πούμε ότι προκύπτουν, με ένα συγκεκριμένο τρόπο που θα περιγράψουμε, από ένα σύνολο $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ και μ είναι ένα μέτρο σε ένα γενικό χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ για αυτό και συχνά συμβολίζουμε $\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αρχικά θα αναφερθούμε στον $\mathcal{L}^1$ και τον σχετιζόμενο προκύπτοντα L^1 και στη συνέχεια στον $\mathcal{L}^p$ και τον σχετιζόμενο προκύπτοντα L^p, $1 \leq p \leq \infty$. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ημινόρμας την οποία υπενθυμίζουμε. Για λόγους σύγκρισης υπενθυμίζουμε και την έννοια της νόρμας.

***Ορισμός* J.28.** *Έστω $E(\mathbb{R})$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια πραγματική συνάρτηση $N : E \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν*

(i). *$N(v) \geq 0$ για κάθε $v \in E$.*

(ii). *$N(v) = 0$ ανν $v = 0$.*

(iii). *$N(av) = |a|N(v)$ για κάθε $v \in E$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

(iv). $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ *για κάθε* $u, v \in E$.

Αν η συνθήκη (ii) αντικατασταθεί από τη συνθήκη

(ii)′. $v = 0 \Rightarrow N(v) = 0$

τότε η N *λέγεται ημινόρμα. Στη συνέχεια τη νόρμα θα συμβολίζουμε με* $\|\cdot\|_{(\cdot)}$ *και την ημινόρμα με* $\|\cdot|_{(\cdot)}$ *με ενδεχόμενο υποδείκτη και στη μία περίπτωση και στην άλλη για περισσότερη ακρίβεια.*

Α Μέρος.

***Ορισμός* J.29.** *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου. Ορίζουμε και συμβολίζουμε* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *το χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται επί του* X *και των οποίων το θετικό και το αρνητικό μέρος έχουν πεπερασμένο ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο* μ, *δηλαδή*

$$\int f\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

και αν $E \subset \mathcal{A}$ *τότε*

$$\int_E f\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *ορίζουμε την ποσότητα*

$$\|f|_{\mathcal{L}^1} = \int |f| d\mu.$$

Αν η f *παίρνει μιγαδικές τιμές συμβολίζουμε με* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *και αν παίρνει πραγματικές τιμές με* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

***Λήμμα* J.30.** *Ο χώρος* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *είναι γραμμικός χώρος ως προς τις πράξεις*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (af)(x) &= af(x)\end{aligned}$$

και η $\|\cdot|_{\mathcal{L}^1}$ *είναι ημινόρμα επί του* $\mathcal{L}^1(\mu)$. *Επιπλέον η* $\|f|_{\mathcal{L}^1} = 0$ *ανν* $f(x) = 0$ *σ.π. επί του* X *και όχι για κάθε* $x \in X$.

Για να μετατρέψουμε το χώρο $\mathcal{L}^1(\mu)$ σε χώρο με νόρμα θα ταυτίζουμε δύο συναρτήσεις που συμπίπτουν σ.π, δηλαδή, χρησιμοποιούμε κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων.

***Ορισμός* J.31.** *Δυο συναρτήσεις του* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *θα λέγονται* μ*-ισοδύναμες αν είναι ίσες* μ*-σ.π. Η κλάση ισοδυναμίας που προσδιορίζεται από την* $f \in \mathcal{L}^1$ *συμβολίζεται με* $[f]$ *και αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις του* $\mathcal{L}^1$ *που είναι* μ*-ισοδύναμες προς την* f.

Ο χώρος L^1 αποτελείται από όλες τις μ-ισοδύναμες κλάσεις του $\mathcal{L}^1$. Αν η $[f] \in L^1$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\|f\|_{L^1} = \int |f| d\mu.$$

***Θεώρημα* J.32.** *Ο χώρος Lebesgue L^1 είναι γραμμικός χώρος με νόρμα.*

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα στοιχεία του L^1 είναι κλάσεις συναρτήσεων που ανήκουν στον $\mathcal{L}^1$. Γράφουμε συνήθως $\|f\|_{L^1}$ αντί για $\|[f]\|_{L^1}$ και συχνά την κλάση $[f]$ την αναφέρουμε σαν στοιχείο f του L^1.

***Πρόταση* J.33.** *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $a, b \in \mathbb{C}$ τότε*

(i). $af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii). $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$.

***Πρόταση* J.34.** *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f \leq g$ τότε $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

***Πρόταση* J.35.** *Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ τότε $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.*

***Πρόταση* J.36.** $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(i). *Αν $f = g$ μ-σ.π, τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$*

(ii). *Αν $f = 0$ μ-σ.π αν και μόνο αν $\int_A f d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

***Θεώρημα* J.37.** *(Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Έστω $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f = \lim_n f_n$. Έστω ότι υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ για $n = 1, 2, \ldots$ και ισχύουν*

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$$

και

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

***Ορισμός* J.38.** *(Πραγματική ή μιγαδική άλγεβρα Banach). Ένας $(V, \|\cdot\|)$ χώρος Banach ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot : V \times V \to V$ και έχει τις ιδιότητες*

(i). $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$.

(ii). $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.

(iii). $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$.

(iv). $a(u \cdot v) = (au) \cdot v = u \cdot (av)$.

(v). $\|u \cdot v\| \leq \|u\| \|v\|$

για κάθε $u, v, w \in V$ και $a \in \mathbb{R}$ ή $a \in \mathbb{C}$ λέγεται άλγεβρα Banach. Αν επιπλέον ισχύει η

(vi). $u \cdot v = v \cdot u$

τότε λέγεται μεταθετική άλγεβρα Banach.

***Πρόταση* J.39.** *Ο $L^1(\lambda)$ με την συνέλιξη σαν πολλαπλασιασμό είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.*

***Ορισμός* J.40.** *Συνέλιξη των συναρτήσεων $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesque ορίζουμε την*

$$h(x) = (f * g)(x) = \begin{cases} \int f(x-y)g(y)d\lambda(y), & \text{αν } \int |f(x-y)g(y)|d\lambda(y) < \infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

***Θεώρημα* J.41.** *Η $h \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και*

$$\int |h| d\lambda \leq \int |f| d\lambda \int |g| d\lambda,$$

δηλαδή $\|f * g|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f|_{\mathcal{L}^1} \|g|_{\mathcal{L}^1}$, οπότε $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

***Πρόταση* J.42.** *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, τότε $f * g = g * f$.*

Στη συνέχεια αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$, με $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([a,b])$ και $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b])$ συμβολίζουμε τους $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$ και $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ αντίστοιχα, όπου λ το μέτρο Lebesque στο διάστημα $[a,b]$. Ανάλογοι συμβολισμοί ισχύουν και για $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

***Ορισμός* J.43.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Η f λέγεται ολοκληρώσιμη ανν η $f \in L^1(\Omega)$.*

***Ορισμός* J.44.** *Η f λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη ανν για κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές ο περιορισμός της f στο K είναι $L^1(K)$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω από κάθε K συμπαγές υποσύνολο του Ω. Το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Ω συμβολίζεται με $L^1_{loc}(\Omega)$.*

***Παράδειγμα* J.45.** *Έστω $\Omega = (0,1)$ και $f(x) = 1/x$. Η $f \in L^1_{loc}(0,1)$ αλλά η $f \notin L^1(0,1)$ αφού $\int_0^1 f(x)dx = \infty$. Είναι $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

Χρήσιμα αποτελέσματα της θεωρίας ολοκλήρωσης

***Θεώρημα* J.46.** *(Μονότονης σύγκλισης Beppo Levi). Έστω αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$, τέτοια ώστε*

$$\sup_n \int_\Omega f_n dx < \infty.$$

Τότε η $f_n(x)$ συγκλίνει σ.π. στο Ω σε κάποια $f(x)$, η οποία ανήκει στον $L^1(\Omega)$ και $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

***Θεώρημα* J.47.** *(Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque). Έστω ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συναρτησεων του $L^1(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$ σ.π. στο Ω και ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ σ.π. στο Ω (η g λέμε τότε ότι είναι ένα ολοκληρώσιμο άνω φράγμα των συναρτήσεων f_n για $n \in \mathbb{N}$). Τότε η $f \in L^1(\Omega)$ και*

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

***Λήμμα* J.48.** *(Fatou). Έστω ακολουθία $\{f_n\}$ συναρτήσεων του $L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $f_n(x) \geq 0$ σ.π στο Ω και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$. Θέτουμε για κάθε $x \in \Omega$*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x).$$

Τότε η $f \in L^1(\Omega)$ και

$$\int_\Omega f dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) dx.$$

***Θεώρημα* J.49.** *(πυκνότητας). Ο χώρος $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^1(\Omega)$, δηλαδή για κάθε $f \in L^1(\Omega)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $f_1 \in C_0(\Omega)$ ώστε $\|f - f_1\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$.*

***Θεώρημα* J.50.** *(Tonelli). Έστω $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ ανοικτά και $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in \Omega_1$ και*

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty.$$

Τότε $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

***Θεώρημα* J.51.** *(Fubini). Υποθετουμε ότι $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Τότε*

(i). *για σχεδόν κάθε $x \in \Omega_1$ ισχύει $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ και*

$$\int_{\Omega_2} F(x,y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

(ii). *για σχεδόν κάθε $y \in \Omega_2$ ισχύει $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ και*

$$\int_{\Omega_1} F(x,y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

(iii). *Ισχύει ότι*

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) dx dy.$$

B Μέρος.

***Ορισμός* J.52.** *Έστω $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $1 \leq p \leq \infty$.*

- *Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε την ποσότητα*

$$\|f|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Για $p=\infty$ ορίζουμε την ποσότητα*

$$\|f|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf\{C \in [0,+\infty] : \mu([|f| > C]) = 0\}$$

η οποία λέγεται ουσιώδες supremum της f (και είναι καλά ορισμένη διότι το σύνολο του οποίου παίρνουμε το infimum περιέχει το ∞ οπότε είναι μη κενό).

Ορισμός J.53. *Ορίζουμε και συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ και $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, $1 \le p \le +\infty$, το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές μιγαδικές, πραγματικές αντίστοιχα, ώστε $\|f|_{\mathcal{L}^p} < \infty$.*

Ορισμός J.54. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $1 \le p < \infty$. Ορίζουμε και συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^p(\mu) \equiv \mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι τέτοιες ώστε η $|f|^p$ να είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ δηλαδή $|f|^p \in L^1(\mu)$.*

Παρατήρηση J.55. ***(i).*** *Αν $a,b \in \mathbb{R}$ με $a \le b$ συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}([a,b])$ τον $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda)$ και με $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([a,b])$ τον $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$ όπου λ το μέτρο Lebesque στο διάστημα $[a,b]$.*

(ii). *Για $p=1$ έχουμε $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ και $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ περίπτωση που έχουμε ήδη εξετάσει.*

Σχέση μεταξύ των χώρων $L^p(\mu)$ για μ πεπερασμένο ή μη

Πρόταση J.56. *Έστω $f : X \to \mathbb{C}$. Αν $\mu(X) < \infty$, $1 \le r < s \le \infty$, $f \in \mathcal{L}^s(\mu)$, τότε*

$$\|f\|_r \le \begin{cases} \|f\|_s \mu(x)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}, & s < \infty \\ \|f\|_s \mu(x)^{\frac{1}{r}}, & s = \infty \end{cases}$$

Θεώρημα J.57. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε*

(i). *Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη ανν το*

$$A(f) = \{x \in [a,b] : \text{ η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\}$$

έχει μέτρο Lebesque 0 (δηλαδή η f είναι λ-σ.π συνεχής στο $[a,b]$).

(ii). *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε η f είναι Lebesque ολοκληρώσιμη (ως προς λ) και*

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Παράδειγμα J.58. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{L}^2[0,1] \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}^1[0,1].$$

Π.χ αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |f| d\lambda &= \lim_n \int_{[\frac{1}{n},1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) \\
&= \lim_n \int_{[\frac{1}{n},1]} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= \lim_n \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 2
\end{aligned}
$$

και

$$
\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda = \lim_n \int_{[\frac{1}{n},1]} \frac{1}{x} dx = \infty.
$$

Άρα $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$ ενώ $f \notin \mathcal{L}^2[0,1]$.

Είναι τελείως διαφορετική η σχέση των $\mathcal{L}^p(\mu)$ όταν το μ δεν είναι πεπερασμένο. Αυτό φαίνεται από τα παραδείγματα των χώρων $\ell^p(\Gamma)$ που ορίζουμε στη συνέχεια.

***Ορισμός* J.59.** *Έστω Γ ένα σύνολο και $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε ως*

$$
\ell^p(\Gamma) = \mathcal{L}^p(\mu)
$$

όπου μ το αριθμητικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(\Gamma, P(\Gamma))$. Αν $\Gamma = \mathbb{N}$ τότε $\ell^p(\mathbb{N}) \equiv \ell^p$. Ορίζουμε επίσης ως νόρμες τις ποσότητες

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\ell^p} &= \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty, \\
\|f\|_{\ell^\infty} &= \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)|^p : F \subset \Gamma, F \text{ πεπερασμένο} \right\}.
$$

***Πρόταση* J.60.** *Έστω Γ σύνολο και $1 \leq r < s \leq \infty$. Τότε $\ell^r(\Gamma) \subset \ell^s(\Gamma)$.*

***Παράδειγμα* J.61.** *Ισχύει ότι*

$$
\ell^1 \underset{\neq}{\subset} \ell^2.
$$

Π.χ αν $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = 1/n$ τότε

$$
\|f\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty
$$

και

$$
(\|f\|_{\ell^2})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.
$$

Άρα $f \in \ell^2$ αλλά $f \notin \ell^1$ οπότε $\ell^1 \subset \ell^2$.

***Πρόταση* J.62.** *(Ανισότητα Hölder). Έστω p, q συζυγείς εκθέτες με $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ και $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(i). $\|fg\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$.

(ii). $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

***Πρόταση* J.63.** *(Ανισότητα Minkowski). Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(i). $\|f+g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}$.

(ii). $(f+g) \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

***Λήμμα* J.64.** *Ο χώρος $\mathcal{L}^p(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ ως προς τις πράξεις $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και $(af)(x) = af(x)$.*

***Πρόταση* J.65.** *Η συνάρτηση $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p} : \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \to \mathbb{R}$ με $f \to \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}}$ είναι ημινόρμα στο γραμμικό χώρο $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ και το ζεύγος $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}})$ είναι μιγαδικός χώρος με ημινόρμα. Όμοια ο $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ είναι πραγματικός χώρος με ημινόρμα.*

***Παρατήρηση* J.66.** *Επισημαίνουμε ότι αν $f = 0$ είναι φανερό ότι $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$, ενώ από την $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$ δεν προκύπτει ότι $f = 0$ αφού η τελευταία ισχύει μόνο μ-σ.π. Για να μετατρέψουμε το χώρο $\mathcal{L}^p(\mu)$ σε χώρο με νόρμα θα ταυτίζουμε δυο συναρτήσεις του που συμπίπτουν σχεδόν παντού, δηλαδή χρησιμοποιούμε κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων, αντί των συναρτήσεων.*

***Ορισμός* J.67.** *Αν $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ (αντίστοιχα $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$) όπου $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε $f \sim g$ ανν $f = g$ μ-σ.π και αποδεικνύεται ότι είναι σχέση ισοδυναμίας δημιουργώντας κλάσεις ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p(\mu)$. Ο χώρος $L^p(\mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις που προσδιορίζονται από τις $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ και συμβολίζουμε $[f] \in L^p(\mu)$. Αν η $[f] \in L^p(\mu)$ ορίζουμε την ποσότητα*

$$\|[f]\|_{L^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

για $1 \leq p < \infty$ και

$$\|[f]\|_{L^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf\{C \geq 0 : \mu([|f| > C] = 0)\}.$$

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε πραγματικό ή μιγαδικό χώρο με νόρμα $(V, \|\cdot\|)$ η συνάρτηση $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ με $\rho(x, y) = \|x - y\|$ είναι μια μετρική. Ο $(V, \|\cdot\|)$ λέγεται μιγαδικός ή πραγματικός χώρος Banach αν ο μετρικός χώρος (V, ρ) είναι πλήρης. Στον $L^p(\mu)$ ορίζεται η μετρική $(f, g)_{L^p} \to \|f - g\|_{L^p}$. Έτσι λέγοντας ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f στον $L^p(\mu)$ θα εννοούμε ότι $f_n, f \in L^p(\mu)$ και $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ και θα γράφουμε $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$. Όμοια λέγοντας ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική στον $L^p(\mu)$ θα εννοούμε ότι $f_n \in L^p(\mu)$ και

$$\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\|_{L^p} = 0.$$

***Λήμμα* J.68.** *Έστω $\{f_n\}$ στον $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ με $\|f_n - f_{n+1}\|_{L^p} \leq 1/2^{2n}$, $n = 1, 2, ...$ Τότε υπάρχει μετρήσιμη f ώστε $f_n \to f$ μ-σ.π.*

***Θεώρημα* J.69.** *(Riesz-Fischer). Οι $L^p(\mu)$ για $1 \le p \le \infty$ είναι χώροι Banach.*

***Πρόταση* J.70.** *Έστω $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n = 1, 2, ...$ και $1 \le p < \infty$. Έστω επίσης $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$. Τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

***Πρόταση* J.71.** *Έστω $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n = 1, 2, ...$ και $1 \le p \le \infty$. Έστω επίσης $|f| \le g$ και $|f_n| \le g$ με $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ για $n = 1, 2, ...$ Αν $f_n \to f$ μ-σ.π ή κατά μέτρο τότε $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$.*

***Πρόταση* J.72.** *Το σύνολο των απλών συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mu)$.*

***Θεώρημα* J.73.** *Έστω p, q συζυγείς εκθέτες με $1 \le p < \infty$. Η συνάρτηση $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ με*

$$T_g(f) = \int fgd\mu, \quad \forall g \in L^q(\mu) \text{ και } f \in L^p(\mu)$$

είναι ισομετρία και επί. Δηλαδή οι χώροι $(L^p(\mu))^*$ και $L^q(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι

(i). *αν $p = 1$ και το μ είναι σ-πεπερασμένο.*

(ii). *αν $1 < p < \infty$ και το μ είναι αυθαίρετο μέτρο.*

***Παρατήρηση* J.74.** *Από το γεγονός ότι οι $(L^p(\mu))^*$ και $L^q(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι προήλθε ο όρος συζυγέις εκθέτες για τους p, q.*

Το πιο σημαντικό συμπέρασμα του προγούμενου θεωρήματος είναι ότι η T είναι επί οπότε κάθε γραμμικό συνεχές συναρτησιακό του $L^p(\mu)$ αναπαρίσταται με ένα ολοκλήρωμα. Της ίδιας μορφής είναι το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz που θα δούμε σε επόμενη παράγραφο. Αυτά τα αποτελέσματα είναι η βάση για πολλές εφαρμογές της θεωρίας μέτρου στη συναρτησιακή ανάλυση αφού επιτρέπουν τη μελέτη συνεχών γραμμικών συναρτησιακών με μεθόδους της θεωρίας μέτρου.

***Πρόταση* J.75.** *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο μέτρο Borel στο X. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$.*

***Ορισμός* J.76.** *Μια $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται κλιμακωτή αν υπάρχει διαμέριση $[a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b]$ του $[a, b]$ ώστε η f να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα (t_{i-1}, t_i) $i = 1, ..., n$. Αν η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ θα λέγεται κλιμακωτή αν $f|_{[a,b]}$ είναι κλιμακωτή για κάθε διάστημα $[a, b]$.*

***Πρόταση* J.77.** *Έστω μ κανονικό μέτρο στον $\mathbb{R}$ που ορίζεται σε μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Τότε καθένα από τα εξής δύο σύνολα είναι πυκνό στον $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$.*

(i). *Το σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που μηδενίζονται στο συμπλήρωμα ενός φραγμένου διαστήματος.*

(ii). *Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που μηδενίζονται στο συμπλήρωμα ενός φραγμένου διαστήματος.*

***Πρόταση* J.78.** *Ο $L^1(\lambda)$ με την συνέλιξη σαν πολλαπλασιασμό είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.*

Στην συνέχεια αντιμετωπίζουμε τους χώρος $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, κατά κάποιον τρόπο ανεξάρτητα από την προέλευσή τους, ορίζοντάς τους εκ νέου. Μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητές τους και οι μεταξύ τους σχέσεις και εννοείται ότι αρκετές ιδιότητες που θα αναφέρουμε μας είναι ήδη γνωστές από τον προηγούμενο τρόπο θεώρησης. *Δεν ασχολούμαστε με τους χώρος $L^p(\Omega)$ με $0 < p < 1$ διότι αποδεικνύεται ότι ο δυϊκός τους χώρος $(L^p(\Omega))^*$ είναι φτωχός αφού ισχύει ότι $(L^p(\Omega))^* = \{0\}$.*

***Ορισμός* J.79.** *Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ορίζουμε ως*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ με } f \text{ μετρήσιμη και } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

και

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

***Παρατήρηση* J.80.** *Ο $L^1(\Omega)$ που ήδη ορίσαμε είναι ειδική περίπτωση των χώρων $L^p(\Omega)$ και μία $f \in L^1(\Omega)$ λέγεται ολοκληρώσιμη.*

***Ορισμός* J.81.** *Έστω $p = \infty$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ορίζουμε ως*

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ με } f \text{ μετρήσιμη για την οποία} \\ \text{υπάρχει } C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ σ.π στο } \Omega \} \end{aligned}$$

και

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{ C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ σ.π στο } \Omega \}.$$

Παρατήρηση* J.82. *(i). *Ισχύει $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ για κάθε $x \in \Omega \setminus A$ όπου A σύνολο μέτρου 0.*

(ii). *Η $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ λέγεται ουσιώδες supremum (essential supremum) της f.*

***Ορισμός* J.83.** *Αν $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε $f = g$ ανν $f = g$ σ.π στο Ω.*

***Ορισμός* J.84.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Ορίζουμε ως*

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ με } f \text{ μετρήσιμη και ολοκλήρωσιμη} \\ \text{στα συμπαγή υποσύνολα } K \text{ του } \Omega \} \end{aligned}$$

και η $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση* J.85. *(i). *Τα συμπαγή υποσὺνολα έχουν) πεπερασμένο μέτρο.*

(ii). *Στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι τα συμπαγή είναι κλειστά και φραγμένα και αντίστροφα.*

(iii). *Έστω συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Τότε ο περιορισμός της f στο K ανήκει στον $L^1(K)$ όπου K συμπαγές υποσύνολο του Ω.*

***Θεώρημα* J.86.** *(Ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα). Έστω $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^q(\Omega)$ με p, q συζυγείς εκθέτες. Τότε η $fg \in L^1(\Omega)$ και*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Παρατήρηση* J.87.** ***(i). *Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της ανισότητας Hölder για ολοκληρώματα περιγράφεται στη συνέχεια. Έστω $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ με $1 \leq i \leq k$ και*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

για $p \geq 1$, τότε η $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ και

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

(ii). *Αν $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ με $1 \leq p \leq q \leq \infty$ τότε η $f \in L^r(\Omega)$ για κάθε r με $p \leq r \leq q$ και $\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^a \|f\|_{L^q}^{1-a}$ (ανισότητα παρεμβολής) όπου $1/r = a/p + (1-a)/p$ για $0 \leq a \leq 1$.*

Για παράδειγμα αν $p = 3/2$ τότε $q = 3$ και η f με βάση το συμπέρασμα της ανισότητας παρεμβολής ανήκει στους L^r με $3/2 \leq r \leq 3$. Αν θεωρήσουμε $r = 5/2$ τότε $a = 1/5$ οπότε έχουμε

$$\|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \leq \|f\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{5}} \|f\|_{L^3}^{\frac{4}{5}}.$$

***Θεώρημα* J.88.** *Αν οι $f, g \in L^p(\Omega)$ τότε η $f + g \in L^p(\Omega)$ ενώ η fg δεν ανήκει γενικά στον $L^p(\Omega)$.*

***Θεώρημα* J.89.** *Οι $L^p(\Omega)$ είναι γραμμικοί χώροι και η $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ είναι νόρμα για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.*

***Θεώρημα* J.90.** *Οι $L^p(\Omega)$ είναι χώροι Banach για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.*

***Θεώρημα* J.91.** *Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία του $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ και $f \in L^p(\Omega)$ ώστε $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ ώστε*

(i). *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ σ.π στο Ω.*

(ii). *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και σ.π στο Ω με $h \in L^p(\Omega)$.*

***Ορισμός* J.92.** *Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Η $f : \Omega \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι ανήκει στον $L^p_{loc}(\Omega)$ αν f_{χ_k} ανήκει στον $L^p(\Omega)$ για κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$.*

***Θεώρημα* J.93.** *Αν $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $\phi \in C_0(\Omega)$ τότε η $f\phi \in L^1(\Omega)$.*

***Λήμμα* J.94.** *Έστω συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\int_\Omega f\phi = 0$ για κάθε $\phi \in C_0(\Omega)$ ή $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Τότε $f = 0$ σ.π στο Ω.*

***Πρόταση* J.95.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό και $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ με $p_1 \leq p_2$. Τότε $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$.*

***Πρόταση* J.96.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Τότε*

(i). $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

(ii). $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *με* $1 \leq p \leq \infty$.

***Πρόταση* J.97.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Τότε*

(i). *ο $C(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$ μόνο αν το Ω είναι φραγμένο.*

(ii). *ο $C_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$.*

(iii). *ο $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στους $L^p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ ως προς την $\| \cdot \|_{L^p}$ ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για $p = \infty$.*

(iv). *ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στους $L^p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ δηλαδή για κάθε $f \in L^p(\Omega)$ υπάρχει $\{f_n\}$ στον $C_0^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

(v). *ο $C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

(vi). *ο $C(\Omega) \not\subset L^1(\Omega)$.*

(vii). $C([a,b]) \subset L^1([a,b])$.

Συνέλιξη

***Θεώρημα* J.98.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $y \to f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Τότε

(i). $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii). $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

***Πρόταση* J.99.** *(Ορισμός του φορέα μετρήσιμης συνάρτησης). Να θυμίσουμε ότι ο φορέας μιας συνεχούς συνάρτησης είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού συνόλου στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και f μια συνάρτηση ορισμένη στο Ω με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την οικογένεια $\{w_i\}_{i \in I}$ όλων των ανοικτών υποσυνόλων του Ω τέτοιων ώστε $f = 0$ σ.π στο w_i για κάθε $i \in I$. Θέτουμε $w = \cup_{i \in I} w_i$. Τότε $f = 0$ σ.π στο Ω και ορίζουμε ώς φορέα της f το $\Omega \setminus w$, δηλαδή* $\operatorname{supp} f = \Omega \setminus w$.

Παρατήρηση* J.100.** ***(i). *Αν $f_1 = f_2$ σ.π στο Ω τότε $\operatorname{supp} f_1 = \operatorname{supp} f_2$ οπότε μπορούμε να αναφερόμαστε στο φορέα μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ χωρίς να διευκρινίζουμε ποιον αντιπρόσωπο επιλέγουμε στην κλάση ισοδυναμίας.*

(ii). *Αν η f είναι συνεχής στο Ω τότε αυτός ο ορισμός συμπίπτει με τον συνήθη ορισμό.*

***Πρόταση* J.101.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g.$$

***Παρατήρηση* J.102.** *Αν οι f, g έχουν και οι δύο συμπαγή φορέα τότε και η $f * g$ έχει συμπαγή φορέα. Γενικά αν ο ένας μόνο από τους φορείς είναι συμπαγής τότε η $f * g$ δεν έχει συμπαγή φορέα.*

***Πρόταση* J.103.** *Έστω $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, k ακέραιος. Τότε*

(i). $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

(ii). $D^k(f * g) = (D^k f) * g$.

Ειδικά αν $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ τότε $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ομαλοποιητικές ακολουθίες

***Ορισμός* J.104.** *Καλούμε ομαλοποιητική ακολουθία, κάθε ακολουθία συναρτήσεων $\{\rho_n\}$ τέτοια ώστε*

(i). $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(ii). $\operatorname{supp} \rho_n \subset B(0, 1/n)$.

(iii). $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = 1$.

(iv). $\rho_n \geq 0$ *στο* $\mathbb{R}^N$.

Π.χ, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

και

$$\rho_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx \right)^{-1} n^N \rho(nx).$$

Η $\{\rho_n\}$ είναι ομαλοποιητική.

***Πρόταση* J.105.** *Έστω $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Τότε $\rho_n * f \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$.*

***Πρόταση* J.106.** *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε $\rho_n * f \to f$ στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

***Πρόταση* J.107.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Τότε ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Οι χώροι $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$

***Θεώρημα* J.108.** *Οι $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ είναι ανακλαστικοί.*

***Θεώρημα* J.109.** *(Αναπαράστασης του Riesz). Έστω $1 < p < \infty$ και $\phi \in (L^p(\Omega))^*$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^q(\Omega)$ (ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p) τέτοια ώστε*

$$\langle \phi, f\rangle = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \text{ για κάθε } f \in L^p(\Omega).$$

Επιπλέον ισχύει $\|u\|_{L^q} = \|\phi\|_{(L^p)^*}$.

***Παρατήρηση* J.110.** *Κάθε γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, παριστάνεται μέσω μιας συνάρτησης u του $L^q(\Omega)$. Η απεικόνιση $\phi \to u$ είναι γραμμικός τελεστής ισομετρικός και επί ο οποίος μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τον $(L^p)^*$ με τον $L^q(\Omega)$. Στη συνέχεια πορευόμαστε με βάση την ταύτιση αυτή.*

***Θεώρημα* J.111.** *(Πυκνότητας). Ο χώρος $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στους $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.*

***Ορισμός* J.112.** *Οι χώροι $L^p(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμοι για $1 < p < \infty$.*

***Παρατήρηση* J.113.** *Θεωρούμε $u \in L^p(\Omega)$. Με τη βοήθεια της u ορίζουμε ένα συναρτησιακό f_u επί του $L^q(\Omega)$ δηλαδή $f_u : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ με*

$$f_u(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad v \in L^q(\Omega)$$

και αποδεικνύεται ότι το f_u είναι γραμμικό και συνεχές, οπότε είναι στοιχείο του $(L^q)^*$. Έχουμε δείξει ότι το $f_u \in (L^q(\Omega))^*$ αλλά γράφουμε $u \in (L^q(\Omega))^*$ αφού η απεικόνιση $T : u \to f_u$ είναι γραμμική ισομετρία όπως μας εξασφαλίζει το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Θα γράφουμε

$$\langle u, v\rangle_{L^p,L^q} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

το οποίο ορίζουμε ως δυϊκό γινόμενο. Άρα $L^p(\Omega) \subset (L^q(\Omega))^*$ και ακόμα πιο ισχυρά ισχύει $(L^q(\Omega))^* = L^p(\Omega)$ σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης του Reisz. Είναι γνωστό ότι η ασθενής σύγκλιση $v_n \rightharpoonup v$ στον $L^q(\Omega)$ ισοδυναμεί με την έκφραση

$$\langle u, v_n\rangle_{L^p,L^q} \to \langle u, v\rangle_{L^p,L^q}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Έχουμε δηλαδή σύγκλιση ολοκληρωμάτων χωρίς κυριαρχημένη σύγκλιση, λήμμα Fatou κ.λ.π.

***Παρατήρηση* J.114.** *Έστω $f, g \in L^2(\Omega)$. Ορίζουμε την ποσότητα*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

η οποία αποδεικνύεται ότι είναι εσωτερικό γινόμενο με αποτέλεσμα η ανισότητα Cauchy-Schwarz να παίρνει τη μορφή

$$|(f, g)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Αφού οι χώροι $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ με $1 \leq p \leq \infty$ είναι Banach, είναι πλήρεις ως προς τη μετρική ρ που επάγει η νόρμα $\|\cdot\|_{L^p}$, δηλαδή $\rho(f, g) = \|f - g\|_{L^p}$. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, στον $L^2(\Omega)$ η $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ μπορεί να προκύψει από το εσωτερικό γινόμενο $(f, g)_{L^2}$. Άρα ο $L^2(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert και λόγω αυτής της ιδιότητας είναι ο καταλληλότερος χώρος-πλαίσιο στον οποίο επιχειρούμε να αναζητήσουμε λύσεις γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ο χώρος $L^1(\Omega)$

***Θεώρημα* J.115.** *Έστω $\phi \in (L^1(\Omega))^*$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\langle \phi, f\rangle = \int_\Omega u(x)f(x)dx \text{ για κάθε } f \in L^1(\Omega).$$

Επιπλέον ισχύει

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}.$$

Παρατήρηση* J.116.** ***(i). *Κάθε γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον $L^1(\Omega)$, παριστάνεται μέσω μιας συνάρτησης u του $L^\infty(\Omega)$. Η απεικόνιση $\phi \mapsto u$ είναι επί ισομετρία και μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τον $(L^1(\Omega))^*$ με τον $L^\infty(\Omega)$.*

(ii). *Ο $L^1(\Omega)$ δεν είναι ανακλαστικός.*

Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$

***Παρατήρηση* J.117.** *Από την ταύτιση $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ προκύπτει ότι*

(i). *Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B[0,1]_{L^\infty(\Omega)}$ είναι συμπαγής για την ασθενή $*$ τοπολογία $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.*

(ii). *Εάν $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L^\infty(\Omega)$ τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε μια υπακολουθία της η οποία συγκλίνει στον $L^\infty(\Omega)$ για την ασθενή $*$ τοπολογία $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.*

***Πρόταση* J.118.** *Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι ανακλαστικός. Αυτό προκύπτει από τον απλό συλλογισμό ότι αν ίσχυε το αντίθετο, θα έπρεπε και ο $L^1(\Omega)$ να είναι ανακλαστικός, το οποίο δεν ισχύει.*

Τίθεται το εξής ερώτημα. Με τι μοιάζει ο $(L^\infty(\Omega))^*$; Με χρήση της αντιμεταθετικής C^* άλγεβρας Banach αποδεικνύεται ότι ο $(L^\infty(\Omega), \mathbb{C})^*$ ταυτίζεται με το χώρο μέτρων (Radon) πάνω στον K (με τιμές στον $\mathbb{C}$) όπου K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ο $(L^\infty(\Omega), \mathbb{R})^*$ ταυτίζεται με το χώρο μέτρων (Radon) πάνω στο K (με τιμές στο $\mathbb{R}$).

***Λήμμα* J.119.** *Έστω X χώρος Banach και $(\Omega_i)_{i\in I}$ ώστε*

(i). *Για κάθε $i \in I$ το Ω_i είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X.*

(ii). *$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ αν $i \neq j$.*

(iii). *Το I δεν είναι αριθμήσιμο.*

Τότε ο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

***Θεώρημα* J.120.** *Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.*

Παράρτημα Κ

Ασθενείς Παράγωγοι Συναρτήσεων

Υπενθυμίζουμε από το Παράρτημα Παράγωγοι το ακόλουθο θεώρημα.

***Θεώρημα* Κ.1.** *(μικτών παραγώγων ή θεώρημα Schwarz-Young). Αν οι μερικές παράγωγοι* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_N}$ *και οι μικτές μερικές παράγωγοι* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$ *μιας συνάρτησης* $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή* $S \subseteq X$ *τότε για κάθε εσωτερικό σημείο του* S *ισχύει*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i},$$

Δηλαδή οι μικτές παράγωγοι είναι ανεξάρτητες από τη σειρά παραγώγισης ως προς τις διάφορες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι ο πίνακας Hesse, Hf, είναι συμμετρικός. Προφανώς το θεώρημα των μικτών παραγώγων ισχύει και για τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης του δύο.

***Ορισμός* Κ.2.** *Το σύνολο των συναρτήσεων* f *που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τάξεως* $\leq k$ *θα συμβολίζουμε με* C^k*. Μια συνάρτηση* $f \in C^k$*, που ονομάζεται και* C^k *συνάρτηση, λέμε ότι είναι* k*-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (*k*-times continuously differentiable). Αν* $k = +\infty$*, τότε λέμε ότι η συνάρτηση* f *είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ή ότι η* f *είναι μία* C^∞ *συνάρτηση και διαβάζουμε "*C*-άπειρο". Μια συνάρτηση* f *που είναι απλώς συνεχής θα λέμε ότι είναι μια* C *συνάρτηση.*

Έτσι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή $f \in C^k$, τότε η k τάξεως μερική παράγωγός της έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^k f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}}, \quad r_i \in \{0, ..., k\} \text{ και } r_1 + ... + r_n = k.$$

Προφανώς αν κάποιο r_i είναι μηδέν τότε η f δεν έχει παραγωγηθεί ως προς τη μεταβλητή x_i. Π.χ.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^0 \partial x_2^3 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^3 \partial x_3}.$$

Επειδή αρκετές φορές χρειάζεται να αναφερθούμε π.χ. στις μερικές παραγώγους τέταρτης τάξης μιας συνάρτησης f, έστω τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή $f(x_1, x_2, x_3)$ για ευκολία εισάγουμε τον πολυδείκτη $a = (a_1, ..., a_N)$ με $a_i \in \mathbb{N}_0$ και ορίζοντας ως $|a| = a_1 + ... + a_N$ συμφωνούμε με $D^a f$ να συμβολίζουμε την

$$\frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}.$$

Δηλαδή

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}$$

για $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε για το παράδειγμα $a = (a_1, a_2, a_3)$ με $|a| = 4$ ότι

$$D^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_3^{a_3}}.$$

Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να προκύψει η τέταρτης τάξης μερική παράγωγος. Δηλαδή

$$a = (1, 1, 2), a = (2, 1, 1), a = (0, 0, 4), \text{ κ.λ.π .}$$

Διευκρινίζουμε ότι στον ορισμό του $D^a f$ αν $|a| = 0$, δηλαδή $a = (0, ..., 0)$ τότε $D^0 f = f$. Αν $|a| = 1$, δηλαδή $a = (0, ..., 1, ..., 0)$ με 1 στην i-θέση τότε η $D^1 f = \partial f / \partial x_i$ ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή x_i, $i = 1, ..., N$. Τέλος αν $|a| > 1$, δηλαδή $a = (a_1, ..., a_N)$ η $D^a f$ ονομάζεται a-τάξης μικτή παράγωγος της f και για να είμαστε πιο ακριβείς a-τάξης μικτή παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές $x_1, ... x_N$ αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε επίσης την παρακάτω πρόταση (βλέπε Παράρτημα Τύποι Green)

***Πρόταση* Κ.3.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και f ή $g \in C_0^1(\Omega)$ τότε*

$$\int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} f dx, \quad i = 1, ..., m$$

Επίσης ισχύει η εξής πρόταση.

***Πρόταση* Κ.4.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $f \in C(\Omega)$ και υπάρχει συνάρτηση $g_i(x) \in C(\Omega)$ με $i = 1, ..., m$ ώστε για κάθε $\phi \in C_0^1(\Omega)$ να ισχύει*

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega g_i(x) \phi(x) dx \tag{K.1}$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη ως προς τη μεταβλητή x_i και ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i.$$

***Ορισμός* К.5.** *Στηριζόμενοι στην ισότητα* (K.1) *μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της κλασσικής μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή x_i, $i = 1, ..., m$ για οποιαδήποτε $f \in C(\Omega)$ ορίζοντας ως ασθενή μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x_i τη συνάρτηση $g_i \in C(\Omega)$ για την οποία ισχύει η* (K.1). *Συχνά χρησιμοποιείται ο γνωστός κλασσικός συμβολισμός $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ για την g_i αλλά πρέπει να διευκρινίζεται ότι πρόκειται για την ασθενή μερική παράγωγο της f ως προς x_i.*

***Πρόταση* К.6.** *Έστω συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ και $u' \in L^1(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε η κλασσική u' είναι και ασθενής παράγωγος της u, δηλαδή οι δύο έννοιες ταυτίζονται όταν η u είναι παραγωγίσιμη. Είναι φανερό ότι αν $u' \in C(I)$ το συμπέρασμα ισχύει κατά μείζονα λόγο αφού $C(I) \subset L^1(I)$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε την πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε το γενικευμένο θεώρημα του διαφορικού λογισμού το οποίο αναφέρει:

***Θεώρημα* К.7.** *Αν w είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάθε $x \in I$ και η κλασσική παράγωγός της είναι ολοκληρώσιμη στο I, δηλαδή $w' \in L^1(I)$ τότε για κάθε $a, b \in I$ με $a < b$ ισχύει*

$$\int_a^b w'(t)dt = w(b) - w(a).$$

Έστω συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ με $u' \in L^1(I)$ όπου $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Έστω επίσης $\phi \in C_0^1(I)$. Έχουμε

$$\int_a^b (u\phi)' = [u(x)\phi(x)]_a^b = u(b)\phi(b) - u(a)\phi(a) = 0.$$

Επίσης

$$\int_a^b (u\phi)' = \int_a^b u'\phi + \int_a^b u\phi'.$$

Άρα

$$\int_a^b u'\phi + \int_a^b u\phi' = 0,$$

οπότε

$$\int_a^b u\phi' = -\int_a^b u'\phi.$$

Επομένως με βάση τον ορισμό της ασθενούς παραγώγου η κλασσική παράγωγος u' της u είναι και ασθενής παράγωγός της. $\square$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν η $u \in C^1(\Omega)$, τότε οι ασθενείς μερικές παράγωγοι της u είναι ίσες με τις κλασσικές μερικές παραγώγους της.

***Ορισμός* К.8.** *Αν δεχτούμε ότι οι συναρτήσεις f και g_i δεν είναι συνεχείς, ότι ανήκουν στον $L^2(\Omega)$ και ότι για κάθε $\phi \in C_0^1(\Omega)$ ισχύει η ισότητα*

$$\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi,$$

μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της κλασσικής μερικής παραγώγου στον ευρύτερο χώρο συναρτήσεων $L^2(\Omega)$ ορίζοντας την g_i ως ασθενή (ή γενικευμένη) μερική παράγωγο της $f \in L^2(\Omega)$ ως προς τη μεταβλητή x_i.

***Ορισμός* K.9.** *Έστω $f \in L^2(\Omega)$. Την συνάρτηση $g \in L^2(\Omega)$ που ικανοποιεί την ισότητα*

$$\int_\Omega f(x)D^a\phi dx = (-1)^{|a|}\int_\Omega g(x)\phi(x)dx$$

για κάθε $\phi \in C_0^{|a|}(\Omega)$ ή για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ονομάζουμε a-τάξης ασθενή (γενικευμένη) μικτή παράγωγο της f ως προς τις μεταβλητές $x_1, ..., x_N$ αντίστοιχα.

Συχνά χρησιμοποιείται ο γνωστός κλασσικός συμβολισμός $D^a f$ ή και $f^{(a)}$ για την g αλλά πρέπει να διευκρινίζεται ότι πρόκειται για την ασθενή παράγωγο της f. Θα μας διευκολύνει, όπως θα φανεί στο παράρτημα των κατανομών, να καθιερώσουμε τον χαρακτηρισμό ασθενής παράγωγος και να κρατήσουμε τον χαρακτηρισμό γενικευμένη παράγωγος για την παράγωγο μιας συνάρτησης με την έννοια των κατανομών. Τονίζουμε ότι πρόκειται για μια απλή σύμβαση, η οποία γενικά στην βιβλιογραφία δεν ισχύει.

Παρατήρηση* K.10.** ***(i). *Αν η $f \in L^2(\Omega)$ έχει a-τάξης ασθενή παράγωγο $D^a f = F$ και η F έχει b-τάξης ασθενή παράγωγο Φ τότε υπάρχει η $a+b$-τάξης ασθενής παράγωγος $D^{a+b} f = \Phi$ της f.*

(ii). *Ισχύει $D^a\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right) = \sum_{k=1}^n c_k D^a f_k$.*

(iii). *Η $D^a f$ δεν εξαρτάται από τη σειρά των $\partial^{a_k} f/\partial x_k^{a_k}$, $k = 1, ..., n$.*

(iv). *Η $D^1(f_1 f_2) = (D^1 f_1)f_2 + f_1(D^1 f_2)$ ισχύει αν υποθέσουμε ότι οι $f_1, f_2, D^1 f_1, D^1 f_2$ ανήκουν στον $L^2(\Omega)$.*

(v). *Στην κλασσική περίπτωση, αν η συνάρτηση δεν έχει κατώτερης τάξης παράγωγο τότε δεν μπορεί να έχει ανώτερης τάξης παράγωγο. Στις ασθενείς παραγώγους κάτι τέτοιο δεν ισχύει.*

(vi). *Η ασθενής παράγωγος σαν συνάρτηση του $L^2(\Omega)$ ορίζεται σ.π στο Ω.*

Συνοψίζουμε και γενικεύουμε τα προηγούμενα με τους δύο παρακάτω ορισμούς.

***Ορισμός* K.11.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in C^k(\Omega)$. Τότε*

$$D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_N^{a_N}}, \quad a_i \in \mathbb{N},$$

όπου $D^0 f = f$ και $|a| = a_1 + ... + a_N = k$.

***Ορισμός* K.12.** *Έστω $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Τότε η $D^a f = g$ με $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ λέγεται a-τάξης ασθενής παράγωγος της f αν*

$$\int_\Omega f\frac{\partial^{|a|}\phi}{\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_N^{a_N}}dx = (-1)^{|a|}\int_\Omega g\phi dx, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(Διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό είτε $f \in C^k(\Omega)$ είτε $f \in L^1_{loc}(\Omega)$).

***Παρατήρηση* K.13.** *Η ασθενής παράγωγος δεν είναι τοπική ιδιότητα αλλά αναφέρεται σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και δεν είναι μοναδική με την αυστηρή έννοια αφού π.χ. αν $\int_0^1 v\phi = 0$ για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ τότε $v = 0$ σ.π. στο Ω.*

***Παράδειγμα* K.14.** *Έστω $u(x) = |x|$, $x \in I = (-1,1)$. Θεωρούμε $\phi \in C_0^1((-1,1))$. Τότε έχουμε*

$$\int_{-1}^{1} u\phi' = -\int_{-1}^{1} g\phi,$$

όπου

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0) \\ +1, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Η $g \in L^1_{loc}(-1,1)$, και είναι η πρώτης τάξης ασθενής παράγωγος της u.

***Παράδειγμα* K.15.** *Έστω $\Omega = (-1,1)$ και*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Η $u \in L^1(-1,1) \subset L^1_{loc}(-1,1)$. Θεωρούμε $\phi \in C_0^1(-1,1)$. Τότε έχουμε

$$\int_{-1}^{1} u\phi' = -\int_{-1}^{1} H\phi,$$

όπου

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

η μοναδιαία κλιμακωτή συνάρτηση Heaviside. Η συνάρτηση $H \in L^1_{loc}(-1,1)$ είναι η πρώτης τάξης ασθενής παράγωγος της u.

Το παρακάτω παράδειγμα αποτελεί παεάδειγμα συνάρτησης που ανήκει στον $L^1_{loc}(\Omega)$ και δεν έχει ασθενή παράγωγο που ανήκει στον $L^1_{loc}(\Omega)$.

***Παράδειγμα* K.16.** *Έστω $\Omega = (-1,1)$ και*

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0] \\ 1, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι η u έχει ασθενή παράγωγο $u' \in L^1_{loc}(-1,1)$. Τότε για κάθε $\phi \in C_0^1(-1,1)$ πρέπει να ισχύει

$$\int_{-1}^{1} u\phi' = -\int_{-1}^{1} u'\phi.$$

Έστω $0 < \varepsilon < 1$ και $\phi_\varepsilon \in C_0^1(-1,1)$ ώστε

$$\operatorname{supp}\phi_\varepsilon \subset (-\varepsilon,\varepsilon), \phi_\varepsilon(0) = 1 \text{ και } 0 \le \phi_\varepsilon \le 1.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} u(x)\phi_\varepsilon'(x)dx = -\int_{-1}^{1} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx \\
&\int_{-1}^{0} u(x)\phi_\varepsilon'(x)dx + \int_{0}^{1} u(x)\phi_\varepsilon'(x)dx = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx \\
&\int_{-1}^{0} (-1)\phi_\varepsilon'(x)dx + \int_{0}^{1} \phi_\varepsilon'(x)dx = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx \\
&-[\phi_\varepsilon(x)]_{-1}^{0} + [\phi_\varepsilon(x)]_0^1 = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx \\
&-\phi_\varepsilon(0) + \phi_\varepsilon(-1) + \phi_\varepsilon(1) - \phi_\varepsilon(0) = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx \\
&2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx
\end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
2 &= \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\phi_\varepsilon(x)dx\right| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)\phi_\varepsilon(x)|dx \\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)||\phi_\varepsilon(x)|dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)|dx \overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0,
\end{aligned}$$

άτοπο. Άρα η u δεν έχει ασθενή παράγωγο $u' \in L^1_{loc}(-1,1)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f \in L^1(\Omega)$ τότε $\int_E |f|d\mu \to 0$ καθώς $\mu(E) \to 0$. Αυτό το κενό, την μη ύπαρξη a-τάξης ασθενούς παραγώγου για κάποιες συναρτήσεις του $L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, θα συμπληρώσει η έννοια της παραγώγου συνάρτησης με την έννοια των κατανομών, (βλέπε Παράρτημα Κατανομές) την οποία (για λόγους διάκρισης) θα αποκαλούμε γενικευμένη παράγωγο.

Παράρτημα L

Κατανομές

Προσεγγίζοντας τις γενικευμένες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους

Έστω μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $0 \leq x \leq \pi$. Γνωρίζουμε ότι η f μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από τους ημιτονικούς της συντελεστές Fourier

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx,$$

δηλαδή από τη "δράση" της πάνω στο βοηθητικό σύνολο συναρτήσεων

$$\sin(x), \sin(2x), ...$$

. Ο παραπάνω τρόπος περιγραφής της f δεν εστιάζει στη σημειακή συμπεριφορά της, δηλαδή στην αντιστοίχιση σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενός πραγματικού αριθμού $y = f(x)$, την τιμή της στο x, αλλά στηρίζεται στην ολική συμπεριφορά της, δηλαδή στη δράση της, όπως προαναφέραμε, πάνω στο βοηθητικό σύνολο συναρτήσεων $\sin(x), \sin(2x), ...$

Η βασική ιδέα της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων στηρίζεται σε μία τέτοια θεώρηση μιας συνάρτησης f και στην περιγραφή της με αυτόν τον έμμεσο τρόπο. Αντί λοιπόν να αντιστοιχούμε τις τιμές της σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, αντιστοιχούμε τον πραγματικό αριθμό $\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\phi(\vec{x})d\vec{x}$ για κάθε συνάρτηση ϕ που ανήκει σε μία κλάση K βοηθητικών συναρτήσεων, οι οποίες χρησιμεύουν ως μέσο ορισμού της f. Αντιμετωπίζοντας με αυτόν τον τρόπο την συνάρτηση f λέμε ότι είναι ένα συναρτησιακό στο σύνολο K.

***Ορισμός* L.1.** *Ονομάζουμε δοκιμαστικές συναρτήσεις (test functions) τις συναρτήσεις που είναι άπειρες φορές διαφορίσιμες και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο χωρίο. Το σύνολο των δοκιμαστικών συναρτήσεων συμβολίζουμε με C_0^∞ ή C_c^∞. Ονομάζουμε φορέα της δοκιμαστικής συνάρτησης ϕ και συμβολίζουμε με* supp ϕ*, το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει τα σημεία x για τα οποία $\phi(x) \neq 0$. Δηλαδή*

$$\operatorname{supp} \phi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \textit{ τέτοια ώστε } \phi(x) \neq 0\}},$$

όπου με την παύλα συμβολίζουμε το τοπολογικό κάλυμμα του συνόλου. Ως ένα παράδειγμα δοκιμαστικής συνάρτησης αναφέρουμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

***Ορισμός* L.2.** *Ονομάζουμε γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή κάθε γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό T που δρα πάνω σε ένα σύνολο των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Δηλαδή κάθε συνεχή απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε δοκιμαστική συνάρτηση ϕ (μέσα από ένα συγκεκριμένο νόμο, σχετιζόμενο με μια συνάρτηση f, τον οποίο ας συμβολίσουμε T_f) έναν πραγματικό αριθμό, δηλαδή $T_f : C_0^\infty \to \mathbb{R}$. Την εικόνα του T συμβολίζουμε με $T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle$.*

Παρατήρηση* L.3.** ***(i). *Το ότι η T_f είναι γραμμική σημαίνει ότι*

$$\langle T_f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \rangle = a_1\langle T_f, \phi_1 \rangle + a_2\langle T_f, \phi_2 \rangle,$$

όπου $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(ii). *Το ότι η T_f είναι συνεχής σημαίνει ότι αν πάρουμε μία ακολουθία $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου όλες οι συναρτήσεις μηδενίζονται έξω από ένα κοινό σύνολο και οι ϕ_n και όλες οι παράγωγοί τους συγκλίνουν ομοιόμορφα στο μηδέν τότε*

$$\langle T_f, \phi_n \rangle \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Θα αναφέρουμε δύο παραδείγματα γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών, τα οποία κατηγοριοποιούν κατά κάποιο τρόπο τις γενικευμένες συναρτήσεις σε ομαλές (regular) και σε ιδιάζουσες (singular).

***Παράδειγμα* L.4.** *Θεωρούμε μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ στον $\mathbb{R}^n$ (μια συνάρτηση που ολοκληρώνεται σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$). Ορίζουμε μέσω της f, μια γενικευμένη συνάρτηση που περιγράφεται από τη σχέση*

$$\begin{aligned}\langle T_f, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, ..., x_n)\phi(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n\end{aligned}$$

όπου $\phi \in C_0^\infty$, δηλαδή σε κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f αντιστοιχεί μια μοναδική γενικευμένη συνάρτηση T_f. Η T λέγεται ομαλή.

***Παράδειγμα* L.5.** *Ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ την γενικευμένη συνάρτηση δ με*

$$\langle \delta, \phi \rangle = \delta(\phi) = \phi(0), \quad \phi \in C_0^\infty,$$

δηλαδή ένα συναρτησιακό που απεικονίζει κάθε δοκιμαστική συνάρτηση ϕ στην τιμή της στο μηδέν. Αντίστοιχα ορίζουμε και την μετατοπισμένη γενικευμένη συνάρτηση δ_{x_0} με

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \delta_{x_0}(\phi) = \delta(x - x_0) = \phi(x_0).$$

Γράφουμε επίσης

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x)\phi(x)dx = \phi(x_0).$$

Η δ λέγεται ιδιάζουσα.

Συνεχίζουμε με την εισαγωγή των γενικευμένων παραγώγων των γενικευμένων συναρτήσεων. Πώς μπορεί να οριστεί μία τέτοια έννοια; Ας θεωρήσουμε αρχικά μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f' να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Μπορούμε να ορίσουμε τη γενικευμένη συνάρτηση

$$\begin{aligned}\langle T_{f'}, \phi\rangle = \langle f', \phi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx \\ &= [f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx \\ &= -\langle f, \phi'\rangle = -\langle T_f, \phi'\rangle, \quad \phi \in C_0^\infty.\end{aligned}$$

Εξασφαλίζοντας ότι το δεξιό μέλος ορίζει μία γενικευμένη συνάρτηση, πράγμα το οποίο είναι εύκολο να δείξουμε, η παραπάνω ισότητα μας δίνει την ιδέα για τον ορισμό της γενικευμένης παραγώγου.

***Ορισμός* L.6.** *Η γενικευμένη παράγωγος n-τάξης της γενικευμένης συνάρτησης T ορίζεται από τον τύπο*

$$\langle T^{(n)}, \phi\rangle = T^{(n)}(\phi) = (-1)^n T(\phi^{(n)}) = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)}\rangle,$$

δηλαδή η $T^{(n)}$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση που απεικονίζει τη δοκιμαστική συνάρτηση ϕ στην τιμή που η T απεικονίζει τη δοκιμαστική συνάρτηση $(-1)^n\phi^{(n)}$. Ειδικά για το συναρτησιακό του Dirac έχουμε

$$\delta^{(n)}(\phi) = (-1)^n \delta(\phi^{(n)}), n = 1, 2, ...$$

***Παρατήρηση* L.7.** *Με την απαίτηση κάθε δοκιμαστική συνάρτηση να μηδενίζεται έξω από κάποιο φραγμένο σύνολο, ώστε να εξαλείψουμε τη συνεισφορά από τους συνοριακούς όρους στην παραγοντική ολοκλήρωση, μπορούμε να ορίσουμε κάθε τάξης παράγωγο της γενικευμένης συνάρτησης αφού υπάρχει κάθε τάξης παράγωγος της $\phi \in C_0^\infty$.*

Η έννοια της κατανομής γενικεύει την έννοια της συνάρτησης. Έτσι όλες οι τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως κατανομές ενώ υπάρχουν κατανομές που δεν προέρχονται από τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και μια τέτοια είναι η συνάρτηση δ.

Για τη θεωρία κατανομών εισάγεται επίσης μια καινούργια έννοια παραγώγισης. Η γενικευμένη αυτή παραγώγιση εισήχθη αρχικά από τον S.L. Sobolev το 1937 και χρησιμοποιήθηκε πολύ αργότερα στη θεωρία κατανομών από τον L. Schwarz το 1947. Το πλεονέκτημα της γενικευμένης παραγώγου είναι ότι επιτρέπει την παραγώγιση και συναρτήσεων που με την κλασσική έννοια δεν είναι παραγωγίσιμες όπως για παράδειγμα όλων των συνεχών συναρτήσεων.

Έτσι η γενικευμένη παράγωγος της μοναδιαίας κλιμακωτής συνάρτησης του Heaviside με

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση δ. Επίσης πολύ σημαντική για τις εφαρμογές είναι η επέκταση της έννοιας του μετασχηματισμού Fourier και στις κατανομές. Διατυπώνοντας πιο αυστηρά τα προηγούμενα έχουμε

Ορισμός* L.8.** ***(i). *Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε το σύνολο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα ώς,*

$$\mathbb{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$$

δηλαδή $f \in \mathbb{D}(\Omega)$ σημαίνει ότι supp $f \subset \Omega$ *και υπάρχουν όλες οι παράγωγοι,*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{a_1}, \partial x_2^{a_2}, ..., \partial x_n^{a_n}},\ \alpha = (a_1, a_2, ..., a_n),$$

όπου $|\alpha| = a_1 + ... + a_n$ και $a_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, ..., n$. Επίσης $D^{(0,...,0)} f = f$.

(ii). *Στο $\mathbb{D}(\Omega)$ όριζουμε την εξής έννοια σύγκλισης: Έστω (f_n) ακολουθία, $f_n \in \mathbb{D}(\Omega)$ και $f \in \mathbb{D}(\Omega)$. Θα λέμε ότι*

$$f_n \to f \text{ στο } \mathbb{D}$$

αν

(1). *οι f_n και f έχουν κοινό φορέα, δηλαδή $\exists K \subset \Omega$ συμπαγές, τέτοιο ώστε* supp f_n, supp $f \subset K$ *και*

(2). *$D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ ομοιόμορφα για κάθε πολυδείκτη $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$.*

***Ορισμός* L.9.** *Το σύνολο των κατανομών επί του Ω ειναι το σύνολο όλων των συνεχών (με την προηγούμενη έννοια) γραμμικών συναρτησιακών του $\mathbb{D}(\Omega)$, δηλαδή*

$$\mathbb{D}'(\Omega) := \{\phi : C_0^\infty \to \mathbb{R}, \phi \text{ συνεχές}\}$$

Το $\phi \in \mathbb{D}'(\Omega)$ είναι συνεχές αν για κάθε $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τετοια ώστε $u_n \to u$,στο $\mathbb{D}$ έπεται ότι

$$\phi(u_n) \to \phi(u).$$

Ο $\mathbb{D}'(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και είναι τοπολογικός δυϊκός και όχι δυϊκός ενός χώρου με νόρμα.

***Παράδειγμα* L.10.** *Κάθε $f \in L^p(\Omega)$ είναι κατανομή. Πράγματι ορίζουμε το συναρτησιακό*

$$T(u) = \int_\Omega u f dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Θα δείξουμε ότι το T είναι συνεχές. Έστω $u_n \to u$, στο $\mathbb{D}$. Τότε υπάρχει συμπαγές $K \subset \Omega$ τέτοιο ώστε $\operatorname{supp} u, \operatorname{supp} u_n \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$. *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_n - u) f dx &\leq \left(\int_\Omega |u_n - u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_K |u_n - u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u_n - u\|_K |K|^{1/2} \|f\|_{L^2}\end{aligned}$$

όπου $\|u_n - u\|_K = \sup_{x\in K} |u_n(x) - u(x)|$ και $|K|$ ο όγκος του K με $|K| < \infty$. Επειδή από την υπόθεση $u_n \to u$ στο $\mathbb{D}$, έπεται ότι $\|u_n - u\| \to 0$ (δηλαδή $u_n \to u$ ομοιόμορφα στο K) και παίρνουμε

$$\int_\Omega u_n f dx \to \int_\Omega u f dx \Rightarrow T(u_n) \to T(u)$$

Επομένως $T \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

***Παράδειγμα* L.11.** *Ορίζουμε την γενικευμένη συνάρτηση $\delta : C_0^\infty \to \mathbb{R}$ με*

$$\delta(u) = u(0), \quad u \in C_0^\infty$$

Έστω $u_n \to u$ στο $\mathbb{D}$, $\operatorname{supp} u_n \subset K$, $\operatorname{supp} u \subset K$. *Τότε*

$$\delta(u_n) = u_n(0) \to u(0) = \delta(u)$$

διότι $u_n \to u$ ομοιόμορφα στο K, (αν $0 \notin K$ τότε $u_n(0) = 0 = u(0)$). Άρα $\delta \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

Ορισμός L.12. *(Σύγκλιση Κατανομών) Έστω μία ακολουθία κατανομών $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θα λέμε ότι η T_n συγκλίνει σε μία κατανομή T αν για κάθε $u \in \mathbb{D}(\Omega)$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, u > = < T, u >$$

όπου $< T, u > := T(u)$.

***Παράδειγμα* L.13.** *Έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^n$ με $x_n \to x$. Ορίζουμε $T := \delta_{x_n}$ (δηλαδή $\delta_a(\phi) := \phi(a)$). Ισχύει, $T_n \to \delta_x$. Πράγματι, έστω $u \in \mathbb{D}(\Omega)$, είναι*

$$< T_n, u > = < \delta_{x_n}, u > = u(x_n) \to u(x) = \delta_x(u) = < \delta_x, u > .$$

Άρα $T_n \to \delta_x$.

***Παράδειγμα* L.14.** *Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κατανομών με $T_n \in L^p(\Omega)$, δηλαδή υπάρχει $f_n \in L^p(\Omega)$, τέτοια ώστε $T_n(u) = \int_\Omega f_n u dx$ για $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Αν υπάρχει $f \in L^p(\Omega)$ τέτοια ώστε $f_n \to f$, στον L^p τότε $T_n \to T$, όπου T είναι η κατανομή που αντιστοιχεί στην f, δηλαδή,*

$$T(u) = \int_\Omega f u dx$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (f_n - f)udx\right| &\leq \int_\Omega |f_n - f||u|dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|f_n - f|)^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{1/q} \\ &= \|f_n - f\|_p \|u\|_q \to 0\end{aligned}$$

για $n \to \infty$. Είναι $\|u\|_q < \infty$ διότι $\int_\Omega |u|^q dx = \int_K |u|^q dx$ όπου $K \subset \Omega$ συμπαγές ($K =$ $\operatorname{supp} u$). Το q ορίζεται από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

***Ορισμός* L.15.** *Ορίζεται η παράγωγος α-τάξης μίας κατανομής T, ώς η κατανομή $D^\alpha T$, η οποία δίνεται από τη σχέση,*

$$< D^\alpha T, u >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha u >, \quad u \in \mathbb{D}(\Omega)$$

και α πολυδείκτης (κατά κάποιο τρόπο μιμείται την παραγοντική ολοκλήρωση). Με αυτήν την έννοια της παραγώγου κάθε κατανομή είναι απεριόριστα διαφορίσιμη.

***Πρόταση* L.16.** *Ο τελεστής της παραγώγισης D^α είναι συνεχής στον $\mathbb{D}'(\Omega)$.*

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία κατανομών $T_n \to T \in \mathbb{D}'(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι $D^\alpha T_n \to D^\alpha$. Έχουμε

$$< D^\alpha T_n, u >= (-1)^{|\alpha|} < T_n, D^\alpha u > \to < D^\alpha T, u >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha u >,$$

για κάθε $u \in \mathbb{D}(\Omega)$. Άρα $D^\alpha T_n \to D_\alpha T$. Σημειώνεται ότι αν $u \in \mathbb{D}(\Omega)$ τότε και $D^\alpha u \in$ $D(\Omega)$. □

***Παρατήρηση* L.17.** *Για μία συνάρτηση $f \in L^p$, η παράγωγος α-τάξης ορίζεται πάντα με την έννοια των κατανομών. Επίσης άπειρα αθροίσματα και παράγωγοι εναλλάσσονται ελεύθερα χωρίς περιορισμούς με την έννοια των κατανομών.*

Παρατήρηση* L.18.** ***(1). *Αν $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ τότε η $T_u : \mathbb{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ με*

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u\phi$$

αποδεικνύεται ότι είναι στοιχείο του $\mathbb{D}'(\Omega)$ και η απεικόνιση $u \mapsto T_u$ είναι $1-1$ το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού των μεταβολών:

Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι $\int_\Omega u\phi = 0$ για κάθε $\phi \in \mathbb{D}(\Omega)$. Τότε είναι $u(x) = 0$ σ.π. στο Ω.

Άρα $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathbb{D}'(\Omega)$ με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του $L^1_{loc}(\Omega)$ δίνει μια διαφορετική κατανομή στο $\mathbb{D}'(\Omega)$, δηλαδή ο $L^1_{loc}(\Omega)$ εμφυτεύεται στον $\mathbb{D}'(\Omega)$. Για αυτόν το λόγο πολλές φορές γράφουμε (λανθασμένα) ότι $u \in \mathbb{D}'(\Omega)$ αντί $T_u \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

(2). Αν μ ένα μέτρο Borel πεπερασμένο πάνω στα συμπαγή υποσύνολα του Ω ορίζουμε $T_\mu : \mathbb{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ με $\langle T_\mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(x) d\mu$ και αποδεικνύεται ότι $T_\mu \in \mathbb{D}'(\Omega)$ αν και συχνά γράφουμε $\mu \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

(3). Έστω $u \in C^1(\Omega)$, οπότε $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $\partial u / \partial x_i \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Τότε

$$\frac{\partial T_u}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Παρατηρούμε ότι οι γενικευμένες μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι ίσες με τις κλασσικές μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

(4). Έστω $\Omega = (-1, 1)$ και

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $u \in L^1((-1,1)) \subset L^1_{loc}((-1,1))$. Επομένως η u ορίζει μια κατανομή T_u με

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{-1}^{1} u\phi \text{ με } \phi \in \mathbb{D}((-1,1)).$$

Είναι

$$\langle T_u^{(1)}, \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle = -\int_{-1}^{1} u\phi' = \int_{-1}^{1} H\phi',$$

όπου H είναι η συνάρτηση Heaviside. Άρα $T_u^{(1)} = u' = H$ ή $D^1 T_u = u' = H$ και γράφουμε $u' = H$ με την έννοια των κατανομών. Παρατηρούμε επίσης ότι η $u' = H \in L^1_{loc}((-1,1))$.

(5). Ισχύει ότι $H' = \delta$ με την έννοια των κατανομών αφού

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = \int_{-1}^{1} H\phi' = \langle \delta, \phi \rangle$$

για κάθε $\phi \in \mathbb{D}((-1,1))$. Παρατηρούμε ότι η $H' = \delta \notin L^1_{loc}((-1,1))$ και αποτελεί κλασσικό παράδειγμα για το γεγονός ότι δεν έχουν όλες οι $L^1_{loc}(\Omega)$ συναρτήσεις γενικευμένη παράγωγο.

Παράρτημα M

Χώροι Sobolev

***Ορισμός* M.1.** *Οι χώροι Sobolev είναι χώροι συναρτήσεων των οποίων οι ασθενείς παραγωγοι βρίσκονται σε κάποιο χώρο L^p, $1 \leq p \leq \infty$ Δηλαδή,*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ για κάθε } |\alpha| \leq m\}$$

Π.χ για $m = 0$, είναι $W^{0,p}(\Omega) = L(\Omega)$, για $p = 2$, είναι $W^{m,2} = H^m(\Omega)$ και για $p = \infty$, είναι $W^{m,\infty}(\Omega)$.

Στους χώρους $W^{m,p}$ ορίζεται η νόρμα,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

όπου

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

***Πρόταση* M.2.** *Οι χώροι $W^{m,p}$ εφοδιασμένοι με τη νόρμα $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ είναι χωροι Banach.*

Απόδειξη. Έστω (u_n) μία ακολουθία Cauchy στον $W^{m,p}(\Omega)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|u_n - u_k\|_{W^{m,p}} < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, k \geq N$$

δηλαδή

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_k\|_{L^p} < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, k \geq N, \text{ και } |\alpha| \leq m.$$

□

Αυτό σημαίνει ότι οι ακολουθίες $(D^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$, για κάθε $|\alpha|\le m$. Από την πληρότητα του $L^p(\Omega)$ παιρνω την ύπαρξη συνάρτησης $u_\alpha\in L^p(\Omega)$ τέτοιας ώστε

$$D^\alpha u_k \underset{k\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} u_\alpha,\ \text{για κάθε } |\alpha|\le m$$

Ειδικά για $\alpha=0$, έχουμε $u_k \underset{k\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} u$, όπου $a=0$ σημαίνει ότι $\alpha=(0,0,0,...,0)$. Τις συναρτήσεις του $L^p(\Omega)$ μπορούμε να τις δούμε σαν κατανομές. Επειδή οι τελεστές D^α είναι συνεχείς σε χώρους κατανομών παίρνουμε (από την $u_k\overset{L^p}{\to}u$ καθώς $k\to\infty$),

$$D^\alpha u_k \overset{\mathbb{D}'}{\to} D^\alpha u.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται,

$$D^\alpha u=u_\alpha\in L^p(\Omega).$$

Επομένως η u έχει παραγώγους τάξης μέχρι m στον $L^p(\Omega)$, άρα $u\in W^{m,p}(\Omega)$. Το ότι

$$u_k \underset{k\to\infty}{\overset{W^{m,p}}{\to}} u,$$

έπεται από τις σχέσεις

$$\|D^\alpha u_k - D^\alpha u\|_{L^p} = \|D^\alpha u_k - u_\alpha\|_{L^p} \underset{k\to\infty}{\to} 0,\ \text{για κάθε } |\alpha|\le m.$$

***Παρατήρηση* Μ.3.** *Ο χώρος $W_0^{k,p}(\Omega)$ ($\Omega\subset\mathbb{R}^n$, ανοιχτό), ορίζεται ώς το κλειστο περιβλημα του $C_0^\infty(\Omega)$ στον $W^{k,p}(\Omega)$, δηλαδη*

$$W_0^{k,p}(\Omega):=\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

***Παρατήρηση* Μ.4.** *Οι χωροι $H^m(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert με εσωτερικό γινόμενο,*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le m}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(\Omega)$, δηλαδή

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx \ \text{(όπου } \overline{v} \text{ ο μιγαδικός συζυγής του } v).$$

Προσέγγιση από λείες συναρτήσεις

Τα στοιχεία των χώρων $W^{m,p}$μπορούν να προσεγγιστούν από λείες (απείρως διαφορίσιμες) συναρτήσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση της τεχνικής της ομαλοποίησης. Έστω $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, για παράδειγμα

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & |x|\ge 1\\ c\cdot exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & |x|<1\end{cases}$$

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων,

$$\eta_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad \varepsilon>0$$

***Ορισμός* Μ.5.** *Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f,$$

δηλαδή

$$f^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_\Omega \eta_\varepsilon f(x-y)dy.$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ λέγεται ομαλοποιητική ακολουθία της f.

***Θεώρημα* Μ.6.** *(Βασικές ιδιότητες της ομαλοποιητικής ακολουθίας) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Ισχύουν τα εξής.*

(i). *$f^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.*

(ii). *$f^\varepsilon \to f$ (σημειακά), σχεδόν παντού για $\varepsilon \to 0$.*

(iii). *$f^\varepsilon \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή $K \subset \Omega$, καθώς $\varepsilon \to 0$.*

(iv). *Αν $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ τότε $f^\varepsilon \overset{L^p_{loc}(\Omega)}{\to} f$.*

***Παρατήρηση* Μ.7.** *Έστω $(f_n), f_n \in L^p_{loc}(\Omega)$ και $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, ώστε*

$$f_n \overset{L^p_{loc}(\Omega)}{\to} f,$$

τότε $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(K)} = 0$, (δηλ. $f_n \overset{L^p(K)}{\to} f$), για κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές.

***Θεώρημα* Μ.8.** *(Τοπική προσέγγιση από λείες συναρτήσεις) Έστω $u \in W^{k,p}(\Omega)$ και $1 \le p < \infty$,*

$$u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u.$$

Τότε $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ και $u^\varepsilon \overset{W^{k,p}_{loc}(\Omega)}{\to} u$, καθώς $(\varepsilon \to 0)$.

Απόδειξη. Ισχύει $D^\alpha u^\varepsilon = (D^\alpha u)^\varepsilon \ \ \forall |\alpha| \le k$, διότι

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= \int_\Omega D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha_y[\eta_\varepsilon(x-y)]u(y)dy \\ &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \\ &= (D^\alpha u)^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Η εναλλαγή της διαφόρισης με την ολοκλήρωση στη δευτερη ισότητα γίνεται διότι $|D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)| \le M_\alpha |u(y)|$ και η $u(y)$ ειναι ολοκληρώσιμη στην $B(x,\varepsilon)$. Η τέταρτη ισότητα έπεται από τον ορισμό της παραγώγου με την έννοια των κατανομών (ασθενούς παραγώγου). Από το (i) του θεωρήματος Μ.6 έπεται ότι $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Από το (iv) του ίδιου θεωρήματος έχουμε

$$(D^\alpha u)^\varepsilon \overset{L^p_{loc}(\Omega)}{\to} D^\alpha u, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0$$

και επειδή

$$D^\alpha u^\varepsilon = (D^\alpha u)^\varepsilon, \quad D^\alpha u^\varepsilon \overset{L^p_{loc}(\Omega)}{\to} D^\alpha u, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0, \text{ για κάθε } |\alpha| \le k$$

έχουμε

$$u^\varepsilon \overset{W^{k,p}_{loc}(\Omega)}{\to} u \text{ καθώς } \varepsilon \to 0.$$

□

***Θεώρημα* Μ.9.** *(Προσέγγιση από λείες συναρτήσεις) Έστω Ω φραγμένο και $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) από λειες συναρτήσεις $u_n \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$u_n \overset{W^{k,p}(\Omega)}{\to} u.$$

***Παρατήρηση* Μ.10.** *Οι συναρτήσεις u_n δεν είναι απαραίτητα φραγμένες στο Ω.*

***Πόρισμα* Μ.11.** *Ο $C^\infty(\Omega)$ ειναι πυκνός στον $W^{k,p}(\Omega)$.*

***Θεώρημα* Μ.12.** *(Προσέγγιση από λείες συναρτήσεις μέχρι το σύνορο) Έστω Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$. Έστω $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία λείων συναρτήσεων (u_n) με $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, τέτοια ώστε*

$$u_n \overset{W^{k,p}(\Omega)}{\to} u$$

Επέκταση

***Θεώρημα* Μ.13.** *Έστω Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$. Έστω V ανοιχτό και φραγμένο σύνολο, το οποίο περιέχει συμπαγώς το Ω δηλαδή $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset V$. Τότε υπάρχει γραμμικός φραγμένος τελεστής,*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

τέτοιος ώστε

(i). *$Eu = u$ σχεδόν παντού στο Ω,*

(ii). $\operatorname{supp}(Eu) \subset V$.

***Ορισμός* Μ.14.** *Η Eu λέγεται επέκταση της u στον $\mathbb{R}^n$.*

Ίχνος

***Θεώρημα* Μ.15.** *Έστω Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$. Τότε υπάρχει γραμμικός φραγμένος τελεστής,*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

τέτοιος ώστε

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ για } u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega}).$$

***Ορισμός* Μ.16.** *Η Tu λέγεται ίχνος της u στο $\partial\Omega$.*

Εμφυτεύσεις Sobolev

***Ορισμός* Μ.17.** *Έστω $1 \leq p < n$ ($n = dim\Omega$). Ο συζυγής κατά Sobolev p^* του p ορίζεται από τη σχέση,*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

***Παρατήρηση* Μ.18.** *Ισχύει $p^* > p$.*

***Θεώρημα* Μ.19.** *(Ανισότητα Galiardo - Nirenberg - Sobolev (G.N.S)) Έστω $1 \leq p < n$. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(p, n)$ τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{για κάθε } u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

***Θεώρημα* Μ.20.** *(Εμφύτευσης του Sobolev) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq p < n$ και $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Τότε $u \in L^{p^*}(\Omega)$ και υπάρχει σταθερά $c = c(p, n, \Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^{p*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

δηλαδή η εμφύτευση του $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^{p^*}(\Omega)$ είναι συνεχής. Συμβολικά γράφουμε,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Απόδειξη. Θα επεκτείνουμε την ανισότητα G.N.S σε στοιχεια του $W^{1,p}(\Omega)$. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης από λείες συναρτήσεις μέχρι το σύνορο, υπάρχει ακολουθία (u_n) τέτοια ώστε $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ και

$$u_n \overset{W^{1,p}(\Omega)}{\to} u$$

Για να εφαρμόσουμε την ανισότητα G.N.S πρέπει να επεκτείνουμε τις u_n στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και φραγμένο τέτοιο ώστε $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset V$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα επέκτασης και παίρνουμε $\overline{u}_n := Eu_n$,

$$\|\overline{u}_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c_{ext}\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

και supp $\overline{u}_n \subset V$. Τώρα εφαρμόζουμε την ανισότητα G.N.S και προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned}\|\overline{u}_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq \|\overline{u}_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq c_{g.n.s}\|\overline{u}_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq c_{g.n.s}c_{ext}\|\overline{u}_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &= c_{g.n.s}c_{ext}\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Τελικά

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c\|u_n\|_{w^{1,p}(\Omega)} \tag{M.1}$$

Το όριο στο δεξί μέλος για $n \to \infty$ είναι $\|\overline{u}_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. ᾿ρα αρκεί να δείξουμε ότι $u_n \overset{L^{p^*}(\Omega)}{\to} u$ οπότε και $u \in L^{p^*}(\Omega)$ και $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Γράφουμε την (M.1) για $u_m - u_n$ στη θέση του u_n οπότε

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c\|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \text{ καθώς } m, n \to \infty.$$

Επομένως η (u_n) είναι Cauchy στον $L^{p^*}(\Omega)$, άρα υπάρχει $u \in L^{p^*}(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$u_n \overset{L^{p^*}(\Omega)}{\to} u$$

Θα δείξουμε ότι $u_n \overset{L^p(\Omega)}{\to} v$. Πράγματι αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = 1$ με $a = \frac{p^*}{p} > 1$ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει

$$\int_\Omega |u_n - v|^p \leq \left(\int_\Omega |u_n - v|^{pa}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_\Omega 1^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\int_\Omega |u_n - v|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} |\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}}$$

δηλαδή

$$\|u_m - v\|_{L^p} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}}\|u_n - v\|_{L^{p^*}} = |\Omega|^{\frac{1}{n}}\|u_n - v\|_{L^{p^*}} \to 0.$$

Επομένως $u_n \overset{L^p}{\to} v$ και επειδή $u_m \overset{L^p}{\to} u$ έπεται ότι $u = v$ σχεδόν παντού, δηλαδή $u \in L^{p^*}(\Omega)$ και $u_n \overset{L^{p^*}(\Omega)}{\to} v = u$. □

Συμπαγείς εμφυτεύσεις

***Ορισμός* M.21.** *Έστω X, Y χώροι Banach. Θα λέμε ότι ο X εμφυτεύεται συμπαγώς στον Y αν υπάρχει απεικόνιση $j : X \to Y$, $1-1$ η οποία είναι συμπαγης. Θα συμβολίζουμε με*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y.$$

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι οι εμφυτεύσεις της παρ. 6 για $1 \leq q < p^*$ είναι επιπλέον συμπαγείς.

***Θεώρημα* M.22.** *(Rellich-Kondrachov) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $1 \leq p < n$ και $\partial\Omega \in C^1$. Τότε*

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \text{ για κάθε } 1 \leq q < p^*.$$

Ανισότητες Poincaré

***Ορισμός* Μ.23.** *Ορίζουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης u στο Ω, ώς εξής.*

$$< u >_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx.$$

***Θεώρημα* Μ.24.** *(Ανισότητα Poincaré) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό και $\partial\Omega \in C^1$. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(n, p, \Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\|u- < u >_\Omega \|_{L^p(\Omega)} \leq c\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

***Θεώρημα* Μ.25.** *(Ανισότητα Poincaré-Friedrichs) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $1 \leq p \leq \infty$. Τότε ισχύει*

(i). $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c\|Du\|_{L^p(\Omega)}$, *για κάθε* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *για κάθε* $q \in [1, p^*]$, *όπου* $c = c(p, q, n, \Omega)$,

(ii). $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$, *για κάθε* $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$.

Παρατήρηση* Μ.26.** ***(1). *Η (i) ισχύει και για όλα τα σύνολα Ω που είναι φραγμένα προς μία κατεύθυνση, δηλαδή υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$\Omega \subset S_a := \{x \in \mathbb{R}^n : |xv| \leq a\},$$

(2). *Επειδή $p \in [1, p^*]$, ισχύει*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|Du\|_{L^p(\Omega)} \text{ για κάθε } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Αναλυτική αντιμετώπιση και παρατηρήσεις

Οι ορισμοί που ακολουθούν διακρίνονται από μια γενικότητα και ορίζουν συνοπτικά τους χώρους Sobolev.

***Ορισμός* Μ.27.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό, $(k, p) \in \mathbb{N}_0 \times [1, +\infty]$. Ορίζουμε ως*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \text{ που έχουν } D^a f \text{ και κείνται μέσα στον } L^p(\Omega)\ \forall a \text{ με } |a| \leq k\}$$

τους οποίους καλούμε χώρους Sobolev. Θέτουμε $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$. Για $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $p < \infty$, ορίζουμε

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|a| \leq k} \int_\Omega |D^a f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|a| \leq k} \|D^a f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Για $f \in W^{k,\infty}(\Omega)$, ορίζουμε

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max\left\{\|D^a f\|_\infty : a \in \mathbb{N}_0^n, |a| \leq k\right\}.$$

***Ορισμός* Μ.28.** *Ορίζουμε*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} := W_0^{k,p}(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}^n,$$

Ω ανοικτό και $(k,p) \in \mathbb{N}_0 \times [1,+\infty]$. Για $p = 2$ θέτουμε $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ και για $k = 1$ είναι $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Μία πολύ βασική ιδιότητα των χώρων Sobolev περιγράφεται από το ακόλουθο θεώρημα.

***Θεώρημα* Μ.29.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω ανοικτό. Για κάθε $(k,p) \in \mathbb{N}_0 \times [1,+\infty]$ ο Sobolev χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach. Ειδικότερα κάθε $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(f,g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|a|\leq k} \int_\Omega D^a f D^a g = \sum_{|a|\leq k} (D^a f, D^a g)_{L^2(\Omega)}.$$

Λόγω του πλήθους των αποτελεσμάτων στους χώρους Sobolev για μια αναλυτική και λεπτομερέστερη ταξινόμησή τους, στη συνέχεια, αντιμετωπίζουμε τους χώρους Sobolev διακρίνοντας δύο βασικές περιπτώσεις Α και Β με τις ανάλογες υποπεριπτώσεις.

AI. $W^{1,p}(I), I = (a,b)$ διάστημα φραγμένο ή μη, $1 \leq p \leq \infty$.

AII. $W^{k,p}(I), 1 \leq p \leq \infty, k \geq 2$.

AIII. $W_0^{1,p}(I), 1 \leq p < \infty$.

AIV. $W_0^{k,p}(I), 1 \leq p < \infty, k \geq 2$.

A*. $(W_0^{1,p}(I))^* = W^{-1,q}$.

BI. $W^{1,p}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $1 \leq p \leq \infty, N \geq 2$.

BII. $W^{k,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty, k \geq 2$.

BIII. $W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$.

BIV. $W_0^{k,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty, k \geq 2$.

B*. $(W_0^{1,p}(\Omega))^* = W^{-1,q}$.

AI. Χώροι Sobolev $W^{1,p}(I)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, I διάστημα φραγμένο ή μη

***Ορισμός* Μ.30.** *Ορίζουμε*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(I) &= \{u \in L^p(I) \text{ με } u \text{ να έχει ασθενή παράγωγο πρώτης τάξης στον } L^p(I)\} \\ &= \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ ώστε } \int_I u\phi' = -\int_I g\phi, \forall \phi \in C_0^1(I) \right\} \end{aligned}$$

τον οποίο ονομάζουμε χώρο Sobolev $W^{1,p}(I)$. Αν $u \in W^{1,p}(I)$ την g του ορισμού συμβολίζουμε με u' δηλαδή $g = u'$.

***Ορισμός* Μ.31.** *Ορίζουμε νόρμα στο χώρο Sobolev $W^{1,p}(I)$ ως εξής:*
Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} = \left(\|u\|^p_{L^p}(I) + \|u'\|^p_{L^p(I)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Για $p = \infty$ ορίζουμε

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(I)} := \|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)}.$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} W^{1,2}(I) &= H^1(I) \\ &= \left\{ u \in L^2(I) : \exists u' \in L^2(I) \text{ ώστε } \int_I u\phi' = -\int_I u'\phi, \forall \phi \in C^1_0(I) \right\} \end{aligned}$$

και είναι

$$\|u\|_{W^{1,2}(I)} = \|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)} = \left(\|u\|^2_{L^2}(I) + \|u'\|^2_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ένα παράδειγμα συνάρτησης που ανήκει στον $W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq \infty$ είναι η συνάρτηση $u(x) = (x + |x|)/2$ ορισμένη στο $I = (-1, 1)$ και είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$u'(x) = H(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ένα παράδειγμα συνάρτησης που δεν ανήκει στον $W^{1,p}(I)$ είναι η συνάρτηση H.

Παρατήρηση* Μ.32.** ***(1). *Ισχύει ότι $W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$ για $1 \leq p \leq \infty$.*

(2). *Αν $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ και η $u' \in L^p(I)$ τότε η $u \in W^{1,p}(I)$.*

(3). *Αν το I είναι φραγμένο ισχύει $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$ για $1 \leq p \leq \infty$.*

(4). *Μια συνάρτηση συνεχής στο $\overline{I}$ και με παράγωγο συνεχή κατά τμήματα στο $\overline{I}$ ανήκει στον $W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq \infty$.*

(5). *Ο χώρος $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο*

$$(\cdot, \cdot)_{H^1(I)} : H^1(I) \times H^1(I) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$(u, v)_{H^1(I)} := (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)}$$

και την αντίστοιχη επαγόμενη νόρμα

$$\| \cdot \|_{H^1(I)} : H^1(I) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

για κάθε $u \in H^1(I)$, η οποία είναι ισοδύναμη με την κλασσική νόρμα του $W^{1,2}(I)$.

***Πρόταση* Μ.33.** *Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ είναι ένας χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος H^1 είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

***Παρατήρηση* Μ.34.** *Αν $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία του $W^{1,p}(I)$ με $u_n \to u$ στον $L^p(I)$ και $u_n' \to v \in L^p(I)$ τότε η $u \in W^{1,p}(I)$ και $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$. Αρκεί η (u_n') να παραμένει φραγμένη στον $L^p(I)$.*

Τα λήμματα που ακολουθούν βοηθούν στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

***Λήμμα* Μ.35.** *Έστω $f \in L^1_{loc}(I)$ τέτοια ώστε*

$$\int_I f\phi' = 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(I).$$

Τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $f = C$ σ.π. στο I.

***Λήμμα* Μ.36.** *Έστω $g \in L^1_{loc}(I)$. Για y_0 σταθερό στο I, θέτουμε*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, \quad x \in I.$$

Τότε $v \in C(I)$ και

$$\int_I v\phi' = -\int_I g\phi, \quad \forall \phi \in C_0^1(I).$$

***Θεώρημα* Μ.37.** *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ τέτοια ώστε*

$$u = \tilde{u} \text{ σ.π. στο } I$$

και

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Παρατήρηση* Μ.38.** ***(1). *Από το θεώρημα αυτό συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις του $W^{1,p}(I)$ είναι χονδρικά παράγουσες συναρτήσεων του $L^p(I)$.*

(2). *Είναι γνωστό ότι αν $u \in W^{1,p}(I)$ και η συνάρτηση v είναι τέτοια ώστε $u = v$ σ.π. στο I τότε η $v \in W^{1,p}(I)$. Από το παραπάνω θεώρημα διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(I)$ έχει μοναδικό συνεχή αντιπρόσωπο, δηλαδή υπάρχει μόνο μία συνεχής συνάρτηση που ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας της u. Όταν χρειαζόμαστε το $u(x)$ να έχει νόημα για κάθε $x \in \overline{I}$ θα αντικαθιστούμε την u με τον συνεχή αντιπρόσωπό της $\tilde{u}$ συμβολίζοντας όμως πάλι με u.*

(3). *Αν $u \in W^{1,p}(I)$ και $u' \in C(\overline{I})$ τότε η $\tilde{u} \in C^1(\overline{I})$ και σύμφωνα με το παραπάνω θα γράφουμε $u \in C^1(\overline{I})$.*

***Πρόταση* Μ.39.** *Έστω $u \in L^p$ με $1 < p \leq \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.*

(1). $u \in W^{1,p}$.

(2). *Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε*

$$\left|\int_I u\phi'\right| \leq C\|\phi\|_{L^q(I)}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I).$$

(3). *Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε ανοικτό $\omega \subset\subset I$ και κάθε $h \in \mathbb{R}$, με $|h| < \mathrm{dist}(\omega, CI)$, να ισχύει*

$$\|r_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε $C = \|u'\|_{L^p}$ στις (2) και (3).

***Παρατήρηση* Μ.40.** *Όταν $p = 1$, ισχύουν επίσης οι ακόλουθες συνεπαγωγές.*

$$(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3).$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι το I είναι φραγμένο. Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1), δηλαδή οι συναρτήσεις του $W^{1,1}$, είναι οι απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις. Αυτές χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ξένων μεταξύ τους διαστημάτων (a_k, b_k) του I με $\sum |b_k - a_k| < \delta$, να ισχύει $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.
Ενώ οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (2) (ή την (3)) με $p = 1$ είναι οι συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής. Οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να χαρακτηριστούν με διαφόρους τρόπους:

-είναι διαφορές αυξουσών και φραγμένων (ενδεχομένως ασυνεχών) συναρτήσεων στο I,

-είναι οι συναρτήσεις u για τις οποίες υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\sum_{i=0}^{k-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \leq C,$$

για κάθε ακολουθία $t_0 < \cdots < t_k$ του I,

-είναι οι συναρτήσεις $u \in L^1(I)$, των οποίων η παράγωγος-κατανομή είναι ένα φραγμένο μέτρο.

***Πόρισμα* Μ.41.** *Μια συνάρτηση $u \in L^\infty$ ανήκει στον $W^{1,\infty}(I)$, ανν υπάρχει σταθερά C, τέτοια ώστε*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \text{ σ.π. για } x, y \in I.$$

***Θεώρημα* Μ.42.** *(Τελεστής Επεκτάσεως). Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Υπάρχει ένας τελεστής επέκτασης $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$, γραμμικός και συνεχής, τέτοιος ώστε*

(1).

$$Pu|_I = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

(2).

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

(3).

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

(όπου το C εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$).

***Λήμμα* Μ.43.** *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε*

$$\eta \tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \text{ και } (\eta \tilde{u})' = \eta' \tilde{u} + \eta \tilde{u'}.$$

***Λήμμα* Μ.44.** *Έστω $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ και } (\rho * v)' = \rho * v'.$$

***Θεώρημα* Μ.45.** *(Πυκνότητα). Έστω $u \in W^{1,p}(I)$ με $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) στον $C_0^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $u_n|_I \to u$ στον $W^{1,p}(I)$.*

***Παρατήρηση* Μ.46.** *Ο $C_0(I)$ δεν είναι πυκνός στον $W^{1,p}(I)$ εκτός αν $I = \mathbb{R}$.*

***Θεώρημα* Μ.47.** *Υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$), τέτοια ώστε*

(1).

$$\|u\|_{L^\infty}(I) \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

δηλαδή ισχύει ότι $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ με συνεχή ενσφήνωση, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Επιπλέον, αν το I είναι φραγμένο, έχουμε

(2). *η ενσφήνωση*

$$W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$$

είναι συμπαγής για $1 < p \leq \infty$,

(3). *η ενσφήνωση*

$$W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$$

είναι συμπαγής για $1 \leq q < \infty$.

Παρατήρηση* Μ.48.** ***(i). *Η ενσφήνωση $W^{1,1}(I) \subset C(\overline{I})$ είναι συνεχής αλλά ποτέ συμπαγής ακόμα και αν το διάστημα I είναι φραγμένο. Αλλά αν η (u_n) είναι φραγμένη στον $W^{1,1}(I)$ (με I φραγμένο ή μη), υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) τέτοια ώστε η $u_{n_k}(x)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in I$ (θεώρημα Helly). Όταν το I είναι μη φραγμένο και $1 < p \leq \infty$, η ενσφήνωση $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ είναι συνεχής αλλά όχι συμπαγής. Ωστόσο αν η (u_n) είναι φραγμένη στον $W^{1,p}(I)$ με $1 < p \leq \infty$ υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) και $u \in W^{1,p}(I)$ τέτοια ώστε $u_{n_k} \to u$ στον $L^\infty(J)$ για κάθε J φραγμένο υποσύνολο του I.*

(ii). *Έστω I ένα φραγμένο διάστημα και $1 \leq q \leq \infty$. Από το (ii) εύκολα αποδεικνύεται ότι η νόρμα*

$$|||u||| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}(I)$.

(iii). *Έστω I ένα μη φραγμένο διάστημα. Αν $u \in W^{1,p}(I)$, τότε $u \in L^q(I)$ για κάθε $q \in [p,\infty]$ αφού*

$$\int |u|^q \leq \|u\|_{L^\infty}^{q-p} \|u\|_{L^p}^p.$$

Γενικά, όμως, $u \notin L^q(I)$ για κάθε $q \in [1,p)$.

***Πόρισμα* M.49.** *Υποθέτουμε το I μη φραγμένο και έστω $u \in W^{1,p}(I)$ όπου $1 \le p < \infty$. Τότε έχουμε*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0.$$

***Πόρισμα* M.50.** *(Παραγώγιση γινομένου). Έστω $u, v \in W^{1,p}(I)$, όπου $1 \le p \le \infty$. Τότε $uv \in W^{1,p}(I)$ και*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Επιπλέον ισχύει ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

***Πόρισμα* M.51.** *(Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης). Έστω $G \in C^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $G(0) = 0$ και έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \text{ και } (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

AII. Οι χώροι $W^{k,p}(I)$, $1 \le p \le \infty$, $k \ge 2$

***Ορισμός* M.52.** *Αν $k \ge 2$ ακέραιος και $1 \le p \le \infty$ πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά τον χώρο*

$$W^{k,p}(I) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(I) : u' \in W^{k-1,p}(I) \right\}.$$

Θέτουμε

$$H^k(I) = W^{k,2}.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $u \in W^{k,p}(I)$ ανν υπάρχουν k συναρτήσεις $g_1, ..., g_k \in L^p(I)$ τέτοιες ώστε

$$\int uD^j\phi = (-1)^j \int g_j\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I), \forall j = 1, ..., k,$$

όπου το $D^j\phi$ συμβολίζει την παράγωγο τάξεως j της συνάρτησης ϕ. Όταν $u \in W^{k,p}(I)$, μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τις διαδοχικές παραγώγους $u' = g_1$, $(u')' = g_2$,...μέχρι την τάξη k, τις οποίες συμβολίζουμε με Du, D^2u,...,D^ku. Ο χώρος $W^{k,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{a=1}^{k} \|D^a u\|_{L^p}$$

και ο χώρος H^k είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^k} = (u, v)_{L^2} + \sum_{a=1}^{k} (D^a u, D^a v).$$

Αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\| \cdot \|_{W^{k,p}}$ είναι ισοδύναμη με την

$$|||u||| = \|u\|_{L^p} + \|D^k u\|_{L^p}.$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν $1 \leq j \leq k-1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το ε και το $|I| \leq \infty$), τέτοια ώστε

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq \varepsilon \|D^k u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{k,p}.$$

Επεκτείνονται και στους χώρους $W^{k,p}$ οι ιδιότητες που παρουσιάστηκαν για τον $W^{1,p}$. Για παράδειγμα $W^{k,p}(I) \subset C^{k-1}(\bar{I})$ με συνεχή ενσφήνωση.

AIII. Οι χώροι $W_0^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$

***Ορισμός* M.53.** *Για $1 \leq p < \infty$, συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(I)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^1(I)$ στον $W^{1,p}(I)$. Γράφουμε $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$. Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο $W^{1,p}$. Ο χώρος H_0^1 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που επάγει ο H^1. Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι, επιπλέον, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$. Ο χώρος H_0^1 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

Παρατήρηση* M.54.** ***(i). *Όταν $I = \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι ο $C_0^1(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$ και επομένως $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

(ii). *Χρησιμοποιώντας μια ομαλοποιητική ακολουθία (ρ_n), εύκολα επαληθεύουμε ότι*

(a). *Ο $C_0^\infty(I)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}(I)$,*

(b). *αν $u \in W^{1,p}(I) \cap C_0(I)$, τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$.*
Το ακόλουθο θεώρημα δίνει έναν ουσιώδη χαρακτηρισμό των συναρτήσεων του $W_0^{1,p}(I)$.

***Θεώρημα* M.55.** *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ ανν $u = 0$ στο ∂I.*

***Παρατήρηση* M.56.** *Το θεώρημα εξηγεί το σημαντικό ρόλο που παίζει ο χωρος $W_0^{1,p}$. Πράγματι, οι συνήθεις (ή μερικές) διαφορικές εξισώσεις είναι συζευγμένες με συνοριακές συνθήκες, δηλαδή συνθήκες που καθορίζουν την τιμή της u στο σύνορο ∂I.*

***Πρόταση* M.57.** *(Ανισότητα Poincaré). Υποθέτουμε ότι το διάστημα I είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το $|I|$) τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Με άλλα λόγια, στον $W_0^{1,p}(I)$ η έκφραση $\|u'\|_{L^p}$ είναι μια νόρμα ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}$.

***Παρατήρηση* M.58.** *Αν το I είναι φραγμένο, η έκφραση $(u', v')_{L^2}$ ορίζει στον H_0^1 ένα εσωτερικό γινόμενο και η αντίστοιχη νόρμα, δηλαδή η $\|u'\|_{L^2}$, είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του H^1.*

AIV. Οι χώροι $W_0^{k,p}(I)$, $1 \le p < \infty$, $k \ge 2$

***Ορισμός* Μ.59.** *Για δεδομένο ακέραιο $k \ge 2$ και πραγματικό $1 \le p < \infty$, ορίζουμε τον χώρο $W_0^{k,p}(I)$ ως το κλειστό περίβλημα του $C_0^k(I)$ στον $W^{k,p}(I)$. Αποδεικ΄νυεται ότι*

$$W_0^{k,p}(I) = \{u \in W^{k,p}(I) : u = Du = ... = D^{k-1}u = 0 \text{ στο } \partial I\}.$$

Πρέπει να διακρίνεται ο χώρος

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = Du = 0 \text{ στο } \partial I\}$$

από τον χώρο

$$W_0^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = 0 \text{ στο } \partial I\}.$$

A*. Ο δυϊκός του $W_0^{1,p}(I)$-$W^{-1,q}$

***Ορισμός* Μ.60.** *Σημειώνουμε με $W^{-1,q}(I)$ τον δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(I)$ με $1 \le p < \infty$ και με $H^{-1}(I)$ τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(I)$. Συνηθίζουμε να ταυτίζουμε τον L^2 με τον δυϊκό του, αλλά δεν ταυτίζουμε τον H_0^1 με τον δυϊκό του. Ισχύουν οι εγκλεισμοί*

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το I είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,q}, \quad \forall 1 \le p < \infty,$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το I δεν είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,q}, \text{ μόνο για κάθε } 1 \le p \le 2$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Τα στοιχεία του $W^{-1,q}$ μπορεί να παρασταθούν μέσω συναρτήσεων του L^q. Συγκεκριμένα έχουμε την παρακάτω πρόταση.

***Πρόταση* Μ.61.** *Έστω $F \in W^{-1,q}$. Τότε υπάρχουν $f_0, f_1 \in L^q$ τέτοιες ώστε*

$$\langle F, v\rangle = \int f_0 v + \int f_1 v', \quad \forall v \in W_0^{1,p}$$

και

$$\|F\| = \max\{\|f_0\|_{L^q}, \|f_1\|_{L^q}\}.$$

Όταν το I είναι φραγμένο μπορούμε να πάρουμε $f_0 = 0$.

Παρατήρηση* Μ.62.** ***(1). *Οι συναρτήσεις f_0 και f_1 δεν είναι μοναδικές.*

(2). *Συνηθίζεται να ταυτίζεται η F με την κατανομή $f_0 - f_1'$, όπου εξ' ορισμού, η $f_0 - f_1'$ είναι το γραμμικό συναρτησιακό*

$$v \mapsto \int f_0 v + \int f_1 v'$$

πάνω στον C_0^∞.

(3). *Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης ισχύει επίσης για συνεχή γραμμικά συναρτησιακά πάνω στον $W^{1,p}$.*

BI. Οι χώροι $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό, $N \ge 2$

***Ορισμός* M.63.** *Ορίζουμε*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L^p : \text{ η } u \text{ έχει γενικευμένες μερικές παραγώγους} \\ &\qquad \text{1ης τάξης στον } L^p(\Omega)\} \\ &= \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ ώστε } \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ να ισχύει} \\ &\qquad \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi, i = 1, ..., N\} \end{aligned}$$

τον οποίο ονομάζουμε χώρο Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$ τις g_i, $i = 1, ..., N$ συμβολίζουμε με $\partial u/\partial x_i$. Επίσης $\nabla u = (\partial u/\partial x_1, ..., \partial u/\partial x_N)$.

***Ορισμός* M.64.** *Ορίζουμε νόρμα στο χώρο $W^{1,p}(\Omega)$ ως εξής. Για $1 \le p < \infty$ ορίζουμε*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \text{ ή } \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ειδικά για $p = 2$ θέτουμε

$$W^{1,2}(\Omega) \equiv H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \le i \le N \right\}$$

και είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

και επομένως η νόρμα του $H^1(\Omega)$ είναι

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \equiv \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

που επάγεται από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο και είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,2}(\Omega)$.

***Πρόταση* M.65.** *Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι χώρος Banach για $1 \le p \le \infty$. Είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \le p < \infty$. Ο χώρος H^1 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

***Λήμμα* M.66.** *Έστω $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και έστω $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ με $1 \le p \le \infty$. Τότε*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ και } \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, ..., N.$$

***Θεώρημα* M.67.** *(Friedrichs). Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε*

(i). $u_n|_\Omega \to u$ *στον* $L^p(\Omega)$.

(ii). $\nabla u_n|_\Omega \to \nabla u|_\Omega$ *στον* $L^p(\omega)^N$ *για κάθε* $\omega \subset\subset \Omega$.

Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός $\omega \subset\subset \Omega$ *σημαίνει ότι το* ω *είναι ένα ανοικτό τέτοιο ώστε* $\bar{\omega} \subset \Omega$ *και το* $\bar{\omega}$ *να είναι συμπαγές).*

***Παρατήρηση* M.68.** *Αποδεικνύεται (θεώρημα Meyers-Serrin) ότι αν* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *τότε υπάρχει ακολουθία* (u_n) *τέτοια ώστε* $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *και* $u_n \to u$ *στον* $W^{1,p}(\Omega)$. *Γενικά, αν το* Ω *είναι ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο και αν* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία* (u_n) *στον* $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ *τέτοια ώστε* $u_n \to u$ *στον* $W^{1,p}(\Omega)$.

***Πρόταση* M.69.** *Έστω* $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$. *Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.*

(i). $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii). *Υπάρχει σταθερά* C *τέτοια ώστε*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, ..., N$$

(iii). *Υπάρχει σταθερά* C *τέτοια ώστε, για κάθε ανοικτό* $\omega \subset\subset \Omega$ *και κάθε* $h \in \mathbb{R}^N$, *με* $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, *να ισχύει*

$$\|r_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|h|.$$

Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *στις δύο τελευταίες.*

***Παρατήρηση* M.70.** *Όταν* $p = 1$, *οι ακόλουθες συνεπαγωγές επίσης ισχύουν:*

$$1. \Rightarrow 2. \Leftrightarrow 3.$$

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την 2. (ή την 3.) με $p = 1$ *είναι οι συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής (στη γλώσσα των κατανομών πρόκειται για τις συναρτήσεις του* L^1, *των οποίων όλες οι πρώτες παράγωγοι με την έννοια των κατανομών είναι φραγμένα μέτρα). Ο χώρος αυτός παίζει σημαντικότερο ρόλο από το χώρο* $W^{1,1}$. *Συναντούμε συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής (ή ιδίας φύσεως) στη θεωρία ελαχιστικών επιφανειών, σε προβλήματα πλαστικότητας (συναρτήσεις φραγμένης παραμορφώσεως) και στις σχεδόν γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, που έχουν ασυνεχείς λύσεις, ή κύματα κρούσεως.*

***Παρατήρηση* M.71.** *Από το θεώρημα Fréchet-Kolmogorov και την πρόταση M.69 προκύπτει ότι αν* F *συμβολίζει τη μοναδιαία μπάλα του* $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ *(*Ω *τυχαίο ανοικτό σύνολο), τότε το* $F|_\Omega$ *είναι σχετικά συμπαγές στον* $L^p(\Omega)$, *για κάθε* $\omega \subset\subset \Omega$. *(Θα δούμε αργότερα, στο θεώρημα Relligh-Kondrachov, αν το* Ω *είναι φραγμένο και με ομαλό σύνορο, τότε η* F *είναι σχετικά συμπαγής στον* $L^p(\Omega)$. *Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να μην ισχύει αν το* Ω *δεν είναι φραγμένο ή αν το* Ω *δεν έχει ομαλό σύνορο). Έπεται ότι, αν η* (u_n) *είναι μια φραγμένη ακολουθία του* $W^{1,p}(\Omega)$ *με* $1 \leq p \leq \infty$ *και* Ω *είναι τυχαίο και ανοικτό, μπορούμε να εξαγάγουμε μια υπακολουθία* (u_{n_k}) *τέτοια ώστε* $u_{n_k}(x)$ *να συγκλίνει σ.π στο* Ω.

***Παρατήρηση* Μ.72.** *Η προηγούμενη πρόταση δείχνει ότι αν $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ και το Ω είναι ένα συνεκτικό και ανοικτό σύνολο, τότε έχουμε*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla\|_{L^\infty} \operatorname*{dist}_{\Omega}(x,y), \text{ σ.π για } x,y \in \Omega,$$

όπου $\mathrm{dist}_\Omega(x,y)$ συμβολίζει τη γεωδαισιακή απόσταση του x από το y στο Ω. Προκύπτει ότι η u έχει ένα συνεχή αντιπρόσωπο που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα για κάθε $x,y \in \Omega$. Συμπεραίνουμε ότι αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, και το Ω είναι ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο, και αν $\nabla u = 0$ σ.π στο Ω, τότε η u είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Τέλος, ας σημειώσουμε ότι αν $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ και Ω είναι ανοικτό και κυρτό, τότε ισχύει

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty}|x-y|, \quad \forall x,y \in \Omega.$$

***Πρόταση* Μ.73.** *(Παραγώγιση γινομένου). Έστω $u,v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ και*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1,...,N.$$

***Πρόταση* Μ.74.** *(Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης). Έστω $G \in C^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $G(0) = 0$ και $|G'(s)| \leq M$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ και } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

***Πρόταση* Μ.75.** *(Τύπος αλλαγής μεταβλητών). Έστω Ω και Ω' δυο ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$ και έστω $H : \Omega' \to \Omega$ μια απεικόνιση αμφιμονοσήμαντη και επί, $x = H(y)$, τέτοια ώστε*

$$H \in C^1(\Omega'),\ H^{-1} \in C^1(\Omega),\ JacH \in L^\infty(\Omega'),\ JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ και

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H}{\partial y_i}(y) \quad \forall j = 1,...,N,$$

όπου $JacH$ συμβολίζει τον Ιακωβιανό πίνακα $\frac{\partial H_i}{\partial y_i}$ και είναι στοιχείο του $L^\infty(\Omega')^{N\times N}$.

Συμβολισμοί. Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}^N$, γράφουμε

$$x = (x', x_N) \text{ με } x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ και } x' = (x_1, ..., x_{N-1})$$

και θέτουμε

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Συμβολίζουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) : x_N > 0\}\\
&Q = \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ και } |x_N| < 1\}\\
&Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+\\
&Q_0 = \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ και } x_N = 0\}.
\end{aligned}$$

***Ορισμός* Μ.76.** *Λέμε ότι ένα ανοικτό Ω είναι τάξεως C^1 αν για κάθε $x \in \Gamma = \partial\Omega$ υπάρχει περιοχή U του x στον $\mathbb{R}^N$ και μια απεικόνιση $H \to Q \to U$ αμφιμονοσήμαντη και επί, τέτοια ώστε*

$$H \in C^1(\bar{Q}),\ H^{-1} \in C^1(\bar{U}),\ H(Q_+) = U \cap \Omega \text{ και } H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

***Λήμμα* Μ.77.** *Για δεδομένη $u \in W^{1,p}(Q_+)$, ορίζουμε πάνω στο Q τη συνάρτηση u^* επεκτεταμένη με ανάκλαση, δηλαδή*

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N), & x_N > 0 \\ u(x', -x_N), & x_N < 0. \end{cases}$$

Τότε $u^* \in W^{1,p}(Q)$ και

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leq 2\|u\|_{L^p(Q_+)}, \quad \|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

***Λήμμα* Μ.78.** *(Διαμέριση της μονάδας). Έστω Γ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $U_1, ..., U_k$ ανοικτά τέτοια ώστε $\Gamma \subset \cup_{i=1}^k U_i$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $\theta_0, ..., \theta_k$ του $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ τέτοιες ώστε*

(i). $0 \leq \theta_i \leq 1$, *για κάθε $i = 0, ..., k$ και $\sum_{i=0}^k \theta_i = 1$ στο $\mathbb{R}^N$.*

(ii). $\operatorname{supp} \theta_i$ *είναι συμπαγής και* $\operatorname{supp} \theta_i \subset U_i$ *για κάθε $i = 1, ..., k$. Επίσης* $\operatorname{supp} \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.

Όταν το Ω είναι φραγμένο ανοικτό και $\Gamma = \partial\Omega$, τότε $\theta_0|_\Omega \in C_0^\infty(\Omega)$.

***Θεώρημα* Μ.79.** *Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1 με Γ φραγμένο (ή $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Τότε υπάρχει ένας τελεστής επέκτασης*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

γραμμικός τέτοιος ώστε, για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$, να ισχύει

(i). $Pu|_\Omega = u$.

(ii). $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$.

(iii). $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

όπου το C εξαρτάται μόνο από το Ω.

***Πόρισμα* Μ.80.** *(Πυκνότητα). Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, τέτοια ώστε $u_n|_\Omega \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Με άλλα λόγια, οι περιορισμοί στο Ω των συναρτήσεων του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ αποτελούν έναν πυκνό υπόχωρο του $W^{1,p}(\Omega)$.*

BII. Οι χώροι $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $N \geq 2$, $k \geq 2$

***Ορισμός* Μ.81.** *Έστω $K \geq 2$ ένας ακέραιος και p ένας πραγματικός με $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε αναδρομικά το χώρο*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega), \forall i = 1, ..., N \right\}.$$

Ισοδύναμα, ο χώρος αυτός ορίζεται με

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall a \text{ με } |a| \leq k \; \exists g_a \in L^p(\Omega) \text{ τέτοιο ώστε} \\ \int_\Omega u D^a \phi = (-1)^{|a|} \int_\Omega g_a \phi, \; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε $D^a u = g_a$. Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$, εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |a| \leq k} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)}$$

είναι χώρος Banach. Ειδικά για $p = 2$ θέτουμε $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Ο $H^k(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{0 \leq |a| \leq k} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}$$

είναι χώρος Hilbert.

***Παρατήρηση* Μ.82.** *Αποδεικνύεται ότι, αν το Ω είναι "αρκετά ομαλό", με $\partial\Omega$ φραγμένο, τότε η νόρμα του $W^{k,p}(\Omega)$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα*

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|a|=k} \|D^a u\|_{L^p}.$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι για κάθε πολυδείκτη a, με $0 < |a| < k$, και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από τα Ω, ε, a) τέτοια ώστε

$$\|D^a u\|_{L^p} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Ανισότητες Sobolev

Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^N$.

***Θεώρημα* Μ.83.** *(Sobolev, Gagliardo, Niremberg). Έστω $1 \leq p < N$, τότε*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

όπου το p^* δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

***Λήμμα* M.84.** *Έστω $N \geq 2$ και $f_1, ..., f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Για $x \in \mathbb{R}^N$ και $1 \leq i \leq N$, θέτουμε*

$$\tilde{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Τότε η συνάρτηση

$$f(x) = f_1(\tilde{x_1}) \cdots f_N(\tilde{x_N}), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^N)$ και

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

***Πόρισμα* M.85.** *Έστω $1 \leq p < N$. Τότε*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

με συνεχή ενσφήνωση.

***Πόρισμα* M.86.** *(Οριακή περίπτωση $p = N$). Ισχύει*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

με συνεχή ενσφήνωση.

***Θεώρημα* M.87.** *(Morrey). Έστω $p > N$, τότε*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

με συνεχή ενσφήνωση. Επιπλέον, για κάθε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ισχύει

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^a \|\nabla u\|_{L^p} \quad \text{σ.π για } x, y \in \mathbb{R}^N,$$

με $a = 1 - N/p$ και C μια σταθερά (που εξαρτάται μόνο από το p και το N).

Παρατήρηση* M.88.** ***(i). *Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει η ύπαρξη μιας συνάρτησης $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ τέτοιας ώστε $u = \tilde{u}$ σ.π στον $\mathbb{R}^N$. (Πράγματι, έστω $A \subset \mathbb{R}^N$ ένα σύνολο μέτρου μηδέν τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα για $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus A$. Επειδή το $\mathbb{R}^N \setminus A$ είναι πυκνό στον $\mathbb{R}^N$, η $u|_{\mathbb{R}^N \setminus A}$ έχει μια (μοναδική) συνεχή επέκταση στον $\mathbb{R}^N$). Με άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}$, $p > N$, έχει ένα συνεχή αντιπρόσωπο. Στη συνέχεια, θα αντικαθιστούμε συστηματικά την u με τον συνεχή αντιπρόσωπό της όταν αυτό φανεί χρήσιμο.*

(ii). *Από τη σχέση εγκλεισμού προκύπτει ότι αν $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $N < p < \infty$, τότε*

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0.$$

Πράγματι, υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Η u είναι επίσης ομοιόμορφο όριο στον $\mathbb{R}^N$ της ακολουθίας u_n.

***Πόρισμα* M.89.** *Έστω $k \geq 1$ ένας ακέραιος και $1 \leq p < \infty$. Ισχύουν*

(i). *αν* $1/p - k/N > 0$*, τότε* $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^t(\mathbb{R}^N)$*, όπου* $1/t = 1/p - k/N$*,*

(ii). *αν* $1/p - k/N = 0$*, τότε* $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^t(\mathbb{R}^N)$*, για κάθε* $t \in [p, \infty)$*,*

(iii). *αν* $1/p - k/N < 0$*, τότε* $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$*,*

με συνεχείς ενσφηνώσεις. Επιπλέον, αν ο $k - N/p > 0$ *δεν είναι ακέραιος, θέτουμε*

$$m = \left[k - \frac{N}{p}\right] \text{ και } \theta = \left(k - \frac{N}{p}\right) - m, (0 < \theta < 1).$$

Έχουμε, για κάθε $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$*,*

$$\|D^a u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{k,p}}, \quad \forall a \text{ με } |a| \leq m$$

και

$$|D^a u(x) - D^a u(y)| \leq C\|u\|_{W^{k,p}}|x-y|^\theta \text{ σ.π για } x, y \in \mathbb{R}^N, \forall a, |a| = m.$$

Ειδικά, $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^m(\mathbb{R}^N)$*.*

***Παρατήρηση* M.90.** *Η περίπτωση* $p = 1$ *και* $k = N$ *είναι αρκετά ειδική. Ισχύει* $W^{N,1} \subset L^\infty$*. Πράγματι, έστω* $u \in C_0^\infty$*. Έχουμε*

$$u(x_1, ..., x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_N} \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \ldots \partial x_N}(t_1, ..., t_N) dt_1 ... dt_N$$

και άρα

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{W^{N,1}} \quad \forall u \in C_0^\infty.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοικτό τάξεως C^1, με Γ φραγμένο, ή ότι $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

***Πόρισμα* M.91.** *Έστω* $1 \leq p \leq \infty$*. Ισχύουν*

(i). *αν* $1 \leq p < N$*, τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$*, όπου* $1/p^* = 1/p - 1/N$*,*

(ii). *αν* $p = N$*, τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ *για κάθε* $t \in [p, +\infty)$*,*

(iii). *αν* $p > N$*, τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*,*

με συνεχείς ενσφηνώσεις. Επιπλέον, αν $p > N$*, έχουμε, για κάθε* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*,*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^a \text{ σ.π για } x, y \in \Omega,$$

όπου το $a = 1 - N/p$ *και το* C *εξαρτώνται μόνο από τα* Ω, p *και* N*. Ειδικά,*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}).$$

***Πόρισμα* M.92.** *Το συμπέρασμα του πορίσματος M.89 ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον* $\mathbb{R}^N$ *με το* Ω*.*

***Θεώρημα* Μ.93.** *(Relligh-Kondrachov). Υποθέτουμε ότι το Ω είναι φραγμένο και τάξεως C^1. Τότε*

(i). *αν $p < N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ για κάθε $t \in [1, p^*)$, όπου $1/p^* = 1/p - 1/N$,*

(ii). *αν $p = N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ για κάθε $t \in [1, +\infty)$,*

(iii). *αν $p > N$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,*

με συμπαγείς ενσφηνώσεις. Ειδικά

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

με συμπαγή ενσφήνωση για κάθε p.

***Παρατήρηση* Μ.94.** *Το θεώρημα Rellich-Kondrachov είναι σχεδόν βέλτιστο με την εξής έννοια.*

(i). *Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, η ενσφήνωση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ δεν είναι γενικά συμπαγής.*

(ii). *Η ενσφήνωση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ δεν είναι ποτέ συμπαγής, ακόμα και αν το Ω είναι φραγμένο και ομαλό.*

***Παρατήρηση* Μ.95.** *Έστω Ω ένα φραγμένο ανοικτό τάξεως C^1. Τότε η νόρμα*

$$|||u||| = \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^t}$$

είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}$, αρκεί να ισχύει

$$\begin{aligned} &1 \leq t \leq p^* \text{ αν } 1 \leq p < N \\ &1 \leq t < \infty \text{ αν } p = N \\ &1 \leq t \leq \infty \text{ αν } p > N \end{aligned}$$

***Παρατήρηση* Μ.96.** *(Οριακή περίπτωση $p = N$). Έστω Ω ένα φραγμένο ανοικτό τάξεως C^1 και $u \in W^{1,N}(\Omega)$. Τότε γενικά $u \notin L^\infty(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1/2\}$$

η συνάρτηση

$$u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^a \text{ με } 0 < a < 1 - 1/N$$

ανήκει στον $W^{1,N}(\Omega)$ αλλά δεν είναι φραγμένη, λόγω της ανωμαλίας στο $x = 0$. Ισχύει όμως η ανισότητα Trudinger

$$\int_\Omega e^{|u|^{N/(N-1)}} < \infty \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega).$$

BIII. Οι χώροι $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $N \geq 2$

***Ορισμός* Μ.97.** *Έστω $1 \leq p < \infty$. Συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^1(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Γράφουμε*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$, εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο $W^{1,p}(\Omega)$, είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι ανακλαστικός, αν $1 < p < \infty$. Ο H_0^1 είναι ένας χώρος Hilbert για το εσωτερικό γινόμενο του H^1.

***Παρατήρηση* Μ.98.** *Επειδή ο $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ έχουμε*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Αντίθετα, αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, τότε γενικά $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$. Αλλά αν το $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ είναι "αρκετά ισχνό" και $p < N$ έχουμε $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ και $N \geq 2$, αποδεικνύεται ότι $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

***Παρατήρηση* Μ.99.** *Επαληθεύεται μέσω μιας ομαλοποιητικής ακολουθίας (ρ_n) ότι ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα τον $C_0^\infty(\Omega)$ αντί του $C_0^1(\Omega)$ στον ορισμό του $W_0^{1,p}(\Omega)$. Οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι "χονδρικά" συναρτήσεις του $W^{1,p}(\Omega)$ που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.*

Οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί υπονοούν ότι πρόκειται για συναρτήσεις που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

***Λήμμα* Μ.100.** *Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω, τότε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

***Θεώρημα* Μ.101.** *Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1. Έστω*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ με } 1 \leq p < \infty.$$

Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

(i). $u = 0$ *στο* $\partial\Omega = \Gamma$.

(ii). $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

***Πρόταση* Μ.102.** *Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1. Έστω $u \in L^p(\Omega)$, με $1 < p < \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.*

(i). $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii). *Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}} \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^N), \forall i = 1, ..., N.$$

(iii). *Η συνάρτηση*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

ανήκει στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ και στην περίπτωση αυτή,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

***Πόρισμα* M.103.** *(Ανισότητα Poincarë). Υποθέτουμε ότι το ανοικτό Ω είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το Ω και το p) τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

Ειδικά η έκφραση $\|\nabla u\|_{L^p}$ είναι μια νόρμα πάνω στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ που είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|u\|_{W^{1,p}}$. Η έκφραση $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο πάνω στον $H_0^1(\Omega)$ που επάγει τη νόρμα $\|\nabla u\|_{L^2}$, ισοδύναμη με τη νόρμα $\|u\|_{H^1}$.

***Παρατήρηση* M.104.** *Η ανισότητα Poincarë ισχύει επίσης αν το Ω είναι πεπερασμένου μέτρου ή αν το Ω είναι φραγμένο σε μία τουλάχιστον κατεύθυνση.*

BIV. Οι χώροι $W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $k \geq 2$

***Ορισμός* M.105.** *Για ακέραιο $k \geq 2$ και $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τον $W_0^{k,p}(\Omega)$ ως το κλειστό περίβλημα του $C_0^k(\Omega)$ στον $W^{k,p}(\Omega)$.*

***Παρατήρηση* M.106.** *"Χονδρικά" μια συνάρτηση u ανήκει στον $W_0^{k,p}(\Omega)$, αν $u \in W^{k,p}(\Omega)$ και αν $D^a u = 0$ στο $\partial\Omega$ για κάθε πολυδείκτη a, τέτοιον ώστε $|a| \leq k-1$. Πρέπει να διακρίνονται οι χώροι $W_0^{k,p}(\Omega)$ και $W^{k,p}(\Omega) \cap W_0^{k,p}(\Omega)$ για $k \geq 2$.*

B*. Ο δυϊκός χώρος του $W_0^{1,p}(\Omega)$-$W^{-1,q}(\Omega)$

***Ορισμός* M.107.** *Με $W^{-1,q}(\Omega)$ συμβολίζουμε το δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(\Omega)$, με $1 \leq p < \infty$, και με $H^{-1}(\Omega)$ τον δυϊκό του $H_0^1(\Omega)$. Ταυτίζουμε τον $L^2(\Omega)$ με τον δυϊκό του, αλλά δεν ταυτίζουμε τον $H_0^1(\Omega)$ με τον δυϊκό του. Έχουμε τον ακόλουθο εγκλεισμό.*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

με συνεχείς πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το Ω είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega), \text{ αν } \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις. Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega), \text{ αν } \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2.$$

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία του $W^{-1,q}(\Omega)$ με την παρακάτω πρόταση.

***Πρόταση* Μ.108.** *Έστω $F \in W^{-1,q}(\Omega)$. Τότε υπάρχουν $f_0, ..., f_N \in L^q(\Omega)$, τέτοιες ώστε*

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}$$

και

$$\max_{0 \le i \le N} \|f_i\|_{L^q} = \|F\|.$$

Αν το Ω είναι φραγμένο, μπορούμε να πάρουμε $f_0 = 0$.

Παράρτημα Ν

Λογισμός σε χώρους Banach

Εισαγωγή

Κάποιες μερικές διαφορικές εξισώσεις, είτε γραμμικές είτε μη γραμμικές προκύπτουν ως εξισώσεις Euler-Lagrange για την ελαχιστοποίηση συναρτησιακών. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία του λογισμού των μεταβολών για να παρουσιάσουμε κομψές αποδείξεις που αφορούν στην ύπαρξη και στις ποιοτικές ιδιότητες λύσεων τέτοιων προβλημάτων. Ο στόχος του παραρτήματος αυτού είναι μία αρχική εισαγωγή στη θεωρία αυτή.

Το κίνητρο

Ξεκινάμε παρουσιάζοντας τα κίνητρα αυτής της προσέγγισης μέσω κάποιων παραδειγμάτων.

***Παράδειγμα* Ν.1.** *(Εξίσωση Laplace). Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \tag{N.1}$$

όπου Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^d$ με επαρκώς ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Ορίζουμε επίσης το συναρτησιακό $J : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{X}$ είναι ένας χώρος συναρτήσεων που θα οριστεί παρακάτω, ως

$$J(u) := \int_\Omega (|\nabla u|^2 + fu)dx \tag{N.2}$$

για κάθε $u \in \mathbb{X}$ (ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι τέτοιος ώστε το παραπάνω ολοκλήρωμα να είναι καλώς ορισμένο). Υποθέτουμε τώρα ότι διαταράσσουμε τη συνάρτηση u και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την τιμή του σναρτησιακού J σε μία καινούρια θέση του χώρου $\mathbb{X}$, στη συνάρτηση $u + \varepsilon v$, όπου $v \in \mathbb{X}$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Με ένα γρήγορο υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$\frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega f v dx\right) + \varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^2 dx,$$

ώστε καθώς $\varepsilon \to 0$, το κύριο μέρος της παραπάνω σχέσης να είναι ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους. Δηλαδή το όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ της παραπάνω έκφρασης είναι

$$DJ(u;v) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega f v dx \right),$$

όπου ο συμβολισμός $DJ(u;v)$ υπονοεί ότι πραγματοποιούμε μία απειροελάχιστη μεταβολή στο συναρτησιακό J στη θέση u κατά την κατεύθυνση $v \in \mathbb{X}$ (αν θεωρήσουμε το $\mathbb{X}$ ως διανυσματικό χώρο, δεν αντιμετωπίζουμε κάποιο εννοιολογικό πρόβλημα).

Επιλέγοντας v ώστε να μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ (π.χ επιλέγοντας $v \in \mathbb{X} = \mathbb{H}^1_0$) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνουμε

$$DJ(u;v) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega (-\Delta u + f) v dx. \tag{N.3}$$

Διαισθητικά και από την εμπειρία στους τρόπους αναζήτησης κρίσιμων σημείων για συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα κρίσιμο σημείο (ασχέτως από το αν πρόκειται για μέγιστο ή ελάχιστο) για το συναρτησιακό J, θα βρίσκεται στη θέση u, αν η τιμές του συναρτησιακού δεν αλλάζουν για μικρές διαταραχές γύρω από το $u \in \mathbb{X}$, δηλαδή αν

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν u είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού J, τότε $DJ(u;v) = 0$. Αυτό πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιτρεπτή επιλογή κατεύθυνσης $v \in \mathbb{X}$ και έτσι η (N.3) *μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το κρίσιμο σημείο u^* του J ως λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Laplace* (N.1). *Δηλαδή αν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τα κρίσιμα σημεία του J τότε μπορούμε να εξάγουμε συμπέρασματα για τις λύσεις της εξίσωσης* (N.1).

Η μέθοδος του παραδείγματος N.1 μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες εξισώσεις, παρουσιάζοντας ενδιαφέρον κυρίως σε μη γραμμικές ελλειπτικές εξισώσεις. Το επόμενο παράδειγμα μας δίνει μια ιδέα γύρω από αυτό.

***Παράδειγμα* N.2.** *(Μη γραμμικές ελλεικτικές εξισώσεις). Θεωρούμε το συναρτησιακό $J : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, ως*

$$J(u) := \int_\Omega G(x, u, \nabla u) dx \tag{N.4}$$

για κάθε $u \in \mathbb{X}$, όπου $G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση επαρκώς ομαλή ως προς όλες τις ματεβλητές της. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $G(x, u, p)$ για να συμβολίσουμε τις τιμές της G, όπου $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, u είναι η τιμή της συνάρτησης u στο σημείο x και $p = \nabla u$, το gradient της u στο σημείο $x \in \Omega$.

Επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς που κάναμε στο παράδειγμα N.1 για να βρούμε ένα κρίσιμο σημείο του J και έχουμε

$$\frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \left(\frac{\partial G}{\partial u} v + \frac{\partial G}{\partial p} \nabla v \right) dx + O(\varepsilon)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης G ενώ με $O(\varepsilon)$ συμβολίζουμε όρους τάξης ε ή μεγαλύτερης. Επίσης, δεδομένου ότι το p είναι διάνυσμα, με $\partial G/\partial p$ συμβολίζουμε το $\nabla_p G(x, u, p)$.

Ολοκληρώνουμε τώρα κατά μέρη υποθέτοντας ότι η v μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$ και έχουμε

$$\frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)\right] v dx + O(\varepsilon).$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ έχουμε ότι

$$DJ(u; v) := \int_\Omega \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)\right] v dx. \tag{N.5}$$

Τότε, επεκτείνοντας τα επιχειρήματα του παραδείγματος N.1 σχετικά με τις θέσεις των κρίσιμων σημείων του J στο $\mathbb{X}$, εξάγουμε ότι ένα κρίσιμο σημείο θα βρίσκεται στη θέση $u^* \in \mathbb{X}$, αρκεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$DJ(u^*; v) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{X}. \tag{N.6}$$

Μια γρήγορη σύγκριση των (N.5) *και* (N.6) *δείχνει ότι (με κατάλληλη επιλογή του χώρου $\mathbb{X}$) τα κρίσιμα σημεία του J επιλύουν την εξίσωση Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right) = 0. \tag{N.7}$$

Ανάλογα με την επιλογή της συνάρτησης G μπορούμε να εξάγουμε μία μεγάλη ποικιλία εξισώσεων Euler-Lagrange. Π.χ

(i). *αν $G(x, u, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + fu$ τότε παίρνουμε την μη ομογενή εξίσωση Laplace $\Delta u = f$ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.*

(ii). *αν $G(x, u, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + F(u)$ όπου $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε παίρνουμε την ημιγραμμική εξίσωση Laplace $\Delta u = F'(u)$ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.*

(iii). *αν $G(x, u, p) = \frac{1}{r+2}|p|^{r+2} + fu$ τότε παίρνουμε τη μη γραμμική εξίσωση*

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^r \nabla u) = f,$$

η οποία ανάγεται στην κλασσική μη ομογενή εξίσωση Laplace για $r = 0$.

Λογισμός σε χώρο Banach

Gâteaux και Fréchet παράγωγοι

Στο σημείο αυτό θα θέσουμε σε αυστηρή μαθηματική βάση τις έννοιες των παραγώγων συναρτησιακών που χρησιμοποιήθηκαν στα παραδείγματα N.1 και N.2 για την εξαγωγή της εξίσωσης Euler-Lagrange. Έστω λοιπόν $\mathbb{X}$ ένας χώρος Banach και $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό.

***Ορισμός* N.3.** *(Παράγωγος κατά κατεύθυνση). Η παράγωγος κατά κατεύθυνση του F στο $x \in \mathbb{X}$ κατά την κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ δίνεται από το όριο*

$$DF(x;h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon},$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

Ο τελεστής $h \mapsto DF(x;h)$ δεν είναι απαραίτητο να είναι γραμμικός. Αν είναι γραμμικός τότε μιλάμε για την έννοια της Gâteaux παραγώγου.

***Ορισμός* N.4.** *(Παράγωγος Gâteaux). Ένα συναρτησιακό F καλείται ασθενώς (Gâteaux) παραγωγίσιμο στο $x \in \mathbb{X}$ αν είναι ασθενώς παραγωγίσιμο κατά κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ και ο τελεστής $h \mapsto DF(x;h)$ είναι γραμμικός και συνεχής (δηλαδή φραγμένος), δηλαδή αν υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $A : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\lim_{\varepsilon} \frac{|F(x+\varepsilon h) - F(x) - \varepsilon Ah|}{\varepsilon} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}. \tag{N.8}$$

Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής A καλείται Gâteaux παράγωγος του F στο x, συμβολίζεται ως $DF(x)$ και ορίζεται ως

$$DF(x)h := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon}.$$

Η Gâteaux παράγωγος, αν υπάρχει, είναι μοναδική, πράγμα το οποίο προκύπτει από τη μοναδικότητα του ορίου.

***Παρατήρηση* N.5.** *Αν ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, π.χ αν $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, τότε η Gâteaux παράγωγος συμπίπτει με το gradient ενώ η Gâteaux παράγωγος κατά κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ συμπίπτει με την παράγωγο κατά κατεύθυνση $\nabla F \cdot h$.*

***Παρατήρηση* N.6.** *Η Gâteaux παράγωγος μπορεί να γενικευτεί για συναρτησιακά $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, όπου $\mathbb{Y}$ είναι χώρος Banach, διατηρώντας τον ίδιο ορισμό και με μόνες αλλαγές τις*

(i). *η απόλυτη τιμή στην* (N.8) *πρέπει να αντικατασταθεί με τη νόρμα του $\mathbb{Y}$*

(ii). *ο τελεστής DF είναι τέτοιος ώστε $DF : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$.*

***Παρατήρηση* N.7.** *Η Gâteaux παράγωγος ορίζει ένα γραμμικό συναρτησιακό $DF(x) \in \mathbb{X}'$ τέτοιο ώστε*

$$DF(x;h) = \langle DF(x), h \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}'}, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Το γραμμικό αυτό συναρτησιακό καλείται gradient του F.

Η Gâteaux διαφορισιμότητα (ασθενής παράγωγος) δεν είναι η μοναδική έννοια διαφορισιμότητα που συναντούμε σε ένα χώρο Banach.

***Ορισμός* N.8.** *(Fréchet διαφορισιμότητα). Ο τελεστής $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ καλείται Fréchet (ισχυρά) διαφορίσιμος στο $x \in \mathbb{X}$ αν υπάρχει τελεστής $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ τέτοιος ώστε*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - Ah|}{\|h\|} = 0. \tag{N.9}$$

Ο τελεστής A, που επίσης συμβολίζεται με $DF(x)$ καλείται Fréchet παράγωγος του F στο x.

***Παρατήρηση* N.9.** *Η Fréchet παράγωγος μπορεί να γενικευτεί για συναρτήσεις $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, όπου $\mathbb{Y}$ είναι χώρος Banach, διατηρώντας τον ίδιο ορισμό και μόνες αλλαγές τις*

(i). *η απόλυτη τιμή στην* (N.9) *πρέπει να αντικατασταθεί από τη νόρμα του $\mathbb{Y}$*

(ii). *ο DF είναι ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής τέτοιος ώστε $DF : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$.*

Αν ένα συναρτησιακό είναι Fréchet διαφορίσιμο τότε είναι και Gâteaux διαφορίσιμο αλλά το αντίθετο δεν ισχύει απαραίτητα. Επιπλέον, αν ένα συναρτησιακό είναι Fréchet διαφορίσιμο τότε παράγωγος Fréchet είναι μοναδική.

***Πρόταση* N.10.** *Έστω $D \subset \mathbb{X}$ και έστω $F : D \to \mathbb{R}$ ισχυρά διαφορίσιμο συναρτησιακό στο σημείο $x \in \mathrm{int}(D)$. Τότε το F είναι συνεχές στο x.*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $x \in \mathrm{int}(D)$ υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $x + h \in D$ για $\|h\| \leq \varepsilon_1$. Επίσης λόγω ισχυρής διαφορισιμότητας του F, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|F(x+h) - F(x) - DF(x)h| \leq \varepsilon\|h\|, \text{ αν } \|h\| \leq \varepsilon_2.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x)| &= |F(x+h) - F(x) - DF(x)h + DF(x)h| \\
&\leq |F(x+h) - F(x) - DF(x)h| + |DF(x)h| \\
&\leq |F(x+h) - F(x) - DF(x)h| + \|DF(x)\|\|h\|
\end{aligned}$$

όπου $\|DF(x)\|$ είναι η νόρμα του τελεστή $DF \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$. Επιλέγοντας $\delta = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ η παραπάνω εκτίμηση δίνει

$$|F(x+h) - F(x)| \leq (\varepsilon + \|DF(x)\|)\|h\|,$$

σχέση η οποία ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ και μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|F(x+h) - F(x)| \leq C\|h\|,$$

από την οποία έπεται η συνέχεια στο x. $\square$

***Παρατήρηση* N.11.** *Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ τότε η πρόταση N.10 ισχύει αρκεί όλες οι απόλυτες τιμές να αντικατασταθούν με τις αντίστοιχες νόρμες του χώρου $\mathbb{Y}$.*

***Παρατήρηση* N.12.** *Σε αντίθεση με το συμπέρασμα της πρότασης N.10 η Gâteaux διαφορισιμότητα σε ένα σημείο δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια του συναρτησιακού στο σημείο αυτό αλλά μία ασθενέστερη έννοια που καλέιται ημισυνέχεια. Συγκεκρίμενα αν $F : D \to \mathbb{Y}$ (όπου θα μπορούσε $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$) είναι ασθενώς διαφορίσιμο συναρτησιακό σε ένα σημείο $x \in \mathrm{int}(D)$ τότε μπορούμε μόνο να εγγυηθούμε ότι*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(x + \varepsilon h) = F(x), \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

δηλαδή ότι το F είναι ημισυνεχές στο x. Εναλλακτικά η ημισυνέχεια του F είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια της πραγματικής συνάρτησης $\phi(\varepsilon) = F(x + \varepsilon h)$ για κάθε $h \in \mathbb{X}$. Δεδομένου οτι η *ασθενής διαφορισιμότητα του F στο x είναι ισοδύναμη με τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης ϕ, έπεται η συνέχεια της ϕ και κατ'επέκτασιν η ημισυνέχεια του F. Είναι προφανές ένα ημισυνεχές συναρτησιακό σε ένα σημείο $x \in \mathbb{X}$ δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχές στο x. Για παράδειγμα η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με*

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1}(x_1^2 + x_2^2), & x_1 \neq x_2 \\ 0, & x_1 = 0, \end{cases}$$

η οποία είναι ημισυνεχής και ασθενώς διαφορίσιμη στο $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

***Παράδειγμα* N.13.** *Έστω $\mathbb{X}$ χώρος Hilbert, $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή και $L : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ γραμμική μορφή και έστω $F(x) = a(x, x) + L(x)$. Τότε το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{X}$ και κατά κάθε κατύθυνση $h \in \mathbb{X}$ και*

$$DF(x; h) = a(x, h) + L(h), \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Αν η a και η L είναι συνεχείς τότε το F είναι ισχυρά διαφορίσιμο και η παράγωγος $DF(x)$ ορίζεται ως

$$DF(x; h) := a(x, h) + L(h), \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

***Παράδειγμα* N.14.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό και $\mathbb{X} = L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Έστω επίσης g μία C^1 συνάρτηση τέτοια ώστε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υπό υποθέσεις για τη g, η απεικόνιση*

$$x \mapsto \int_\Omega g(x(t))dt$$

ορίζει ένα συναρτησιακό $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{X}$. Το συναρτησιακό αυτό είναι ασθενώς διαφορίσιμο σε κάθε $x \in \mathbb{X}$ και κατά κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ και

$$DF(x; h) = \int_\Omega g'(x(t))h(t)dt.$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

***Ορισμός* N.15.** *Έστω $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Το F είναι δύο φορές Gâteaux διαφορίσιμο σε ένα σημείο $x \in \mathbb{X}$ κατά τις κατευθύνσεις $h, j \in \mathbb{X}$ αν ο τελεστής $DF(x, h)$ είναι μία φορά Gâteaux διαφορίσιμος στο σημείο x κατά την κατεύθυνση j. Η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται με $D^2F(x, h, j)$, είναι στοιχείο του $\mathbb{Y}$ και δίνεται ως*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{DF(x + \varepsilon j, h) - DF(x, h)}{\varepsilon}.$$

***Παράδειγμα* N.16.** *Αν $F(x) = a(x, x) + L(x)$ τότε*

$$D^2F(x, h, j) = a(h, j) + a(j, h).$$

***Παρατήρηση* Ν.17.** *Η δεύτερη παράγωγος Gâteaux ορίζει έναν τελεστή $D^2F(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$ (ισοδύναμα μία διγραμμική μορφή) τέτοιον ώστε*

$$D^2F(x,h,j) = \langle D^2F(x)h, j\rangle_{\mathbb{X}',\mathbb{X}}, \quad \forall h, j \in \mathbb{X}.$$

Ο τελεστής αυτός καλείται Εσσιανός.

Πρόταση* Ν.18. *(i). *Αν ένα συναρτησιακό F είναι Gâteaux διαφορίσιμο τότε υπάρχει $s \in (0,1)$ τέτοιο ώστε*

$$F(x+h) = F(x) + DF(x+sh;h),$$

ή ισοδύναμα

$$F(x+h) = F(x) + \langle DF(x+sh), h\rangle.$$

(ii). *Αν το F είναι δύο φορές Gâteaux διαφορίσιμο τότε υπάρχει $s \in (0,1)$ τέτοιο ώστε*

$$F(x+h) = F(x) + DF(x,h) + \frac{1}{2}D^2F(x+sh,h,h),$$

ή ισοδύναμα

$$F(x+h) = F(x) + \langle DF(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2F(x+sh)h, h\rangle.$$

Απόδειξη. (i). Αν το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο τότε η πραγματική συνάρτηση

$$t \mapsto \phi(t) := F(x+th), \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

είναι διαφορίσιμη. Τότε με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για τη συνάρτηση ϕ παίρνουμε το ζητούμενο.
(ii). Ομοίως, με εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης ϕ. □

Κυρτότητα και Διαφορισιμότητα

Η κυρτότητα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση. Αρχικά δίνουμε κάποιους ορισμούς.

***Ορισμός* Ν.19.** *Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{X}$ είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in U$ ισχύει ότι $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ για κάθε $\lambda \in (0,1)$.*

***Ορισμός* Ν.20.** *Ένα συναρτησιακό $F : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in U$ ισχύει ότι*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y),$$

για κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Όπως θα δούμε παρακάτω η έννοια της κυρτότητας σχετίζεται με την αυτήν της διαφορισιμότητας.

***Θεώρημα* N.21.** *Έστω $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ένα Gâteaux διαφορίσιμο συναρτησιακό σε ένα κυρτό και ανοικτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{X}$. Τότε το F είναι κυρτό αν και μόνο αν ισχύει κάτι από τα παρακάτω.*

(i).

$$F(y) - F(x) \geq DF(x; y-x), \quad \forall x, y \in U,$$

ή ισοδύναμα, αντιλαμβανόμενοι την Gâteaux παράγωγο ως απεικόνιση της μορφής $DF(x) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ (δηλαδή ως στοιχείο του $\mathbb{X}'$)

$$F(y) - F(x) \geq \langle DF(x), y-x \rangle, \quad \forall x, y \in U. \tag{N.10}$$

(ii). *Η Gâteaux παράγωγος $DF(x) \in \mathbb{X}'$ είναι μονότονος τελεστής, δηλαδή*

$$\langle DF(y) - DF(x), y-x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in U. \tag{N.11}$$

Απόδειξη. (i). Θεωρούμε δύο σημεία $x, y \in U$ και παίρνουμε τον κυρτό τους συνδυασμό

$$(1-\varepsilon)x + \lambda y = x + \varepsilon(y-x).$$

Από την κυρτότητα του F έχουμε τη σχέση

$$F(x+\varepsilon(y-x)) \leq (1-\varepsilon)F(x) + \varepsilon F(y) = F(x) + \varepsilon(F(y) - F(x)), \quad \forall x, y \in U, \varepsilon \in (0,1),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{F(x+\varepsilon(y-x)) - F(x)}{\varepsilon} \leq F(y) - F(x).$$

Δεδομένου ότι το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο στο $x \in \mathbb{X}$ μπορούμε να πάρουμε το όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ και έτσι έχουμε

$$\langle DF(x), y-x \rangle \leq F(y) - F(x),$$

θεωρώντας το $DF(x)$ ως στοιχείο του $\mathbb{X}'$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι η (N.10) ισχύει για κάθε ζευγάρι $x, y \in U \times U$. Τότε θα ισχύει και για τα ζευγάρια $(x, x+\varepsilon(y-x))$ και $(y, x+\varepsilon(y-x))$, για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$. Έτσι οδηγούμαστε στις ανισότητες

$$\begin{aligned} F(x) &\geq F(x+\varepsilon(y-x)) - \varepsilon\langle DF(x+\varepsilon(y-x)), y-x \rangle \\ F(y) &\geq F(x+\varepsilon(y-x)) + (1-\varepsilon)\langle DF(x+\varepsilon(y-x)), y-x \rangle. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $(1-\varepsilon)$ και τη δεύτερη με ε και προσθέτοντας παίρνουμε τη ζητούμενη κυρτότητα.

(ii). Έστω ότι το F είναι κυρτό. Τότε γράφοντας τη (N.10) δύο φορές, εναλλάσσοντας τις θέσεις των x, y και προσθέτοντας παίρνουμε την (N.11).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (N.11). Τότε με εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής (Πρόταση N.18) έχουμε ότι για κάθε $x, y \in U$ υπάρχει $s \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$F(y) - F(x) = \langle DF(x+s(y-x)) - DF(x), y-x \rangle + \langle DF(x), y-x \rangle.$$

Τώρα εφαρμόζοντας την (N.11) για το ζευγάρι $(x+s(y-x), x) \in U \times U$ παίρνουμε

$$\langle DF(x+s(y-x)) - DF(x), y-x \rangle \geq 0, \quad \forall s \in (0,1).$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε τη (N.10) οπότε το F είναι κυρτό. $\square$

Παρατήρηση **N.22.** *Αν το F είναι γνησίως κυρτό τότε οι ανισότητες* (N.10) *και* (N.11) *είναι γνήσιες.*

Θεώρημα **N.23.** *Έστω $U \subset \mathbb{X}$ ένα κυρτό και ανοικτό σύνολο. Αν $F : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές Gâteaux διαφορίσιμο για κάθε κατεύθυνση στο U τότε η δεύτερη παράγωγος D^2F ορίζει μία θετικά ορισμένη μορφή, δηλαδή*

$$D^2F(x,h,h) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}, h \in U, h \neq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle D^2F(x)h,h\rangle \geq 0, \quad \forall x \in U, h \in \mathbb{X}. \tag{N.12}$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το ανάπτυγμα Taylor. (Πρόταση N.18). □

Παρατήρηση **N.24.** *Αν το F είναι γνησίως κυρτό τότε η ανισότητα* (N.12) *είναι γνήσια.*

Κυρτότητα και Συνέχεια

Η κυρτότητα εγγυάται κάποιες χρήσιμες ιδιότητες συνέχειας. Αρχικά υπενθυμίζουμε κάποιους ορισμούς συνέχειας.

Ορισμός **N.25.** *(Κάτω ημισυνέχεια). Ένα συναρτησιακό καλείται κάτω ημισυνεχές αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ στον $\mathbb{X}$ ισχύει*

$$\liminf_n F(x_n) \geq F(x).$$

Ορισμός **N.26.** *(Ασθενής κάτω ημισυνέχεια). Ένα συναρτησιακό καλείται ασθενώς κάτω ημισυνεχές αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$ ισχύει*

$$\liminf_n F(x_n) \geq F(x).$$

Για κυρτά συναρτησιακά οι παραπάνω ορισμοί σχετίζονται. Προς αυτήν την κατεύθυνση υπενθυμίζουμε το λήμμα Mazur από τη συναρτησιακή ανάλυση.

Λήμμα **N.27.** *(Mazur). Έστω $\mathbb{X}$ ένας χώρος Banach και έστω μία ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N(n)$ και ακολουθία συνόλων πραγματικών αριθμών $\{a(n)_k\}_{k=n}^{N(n)}$ με τις ιδιότητες $a(n)_k \in (0,1)$ για κάθε k και $\sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k = 1$, τέτοια ώστε η ακολουθία*

$$\bar{x}_n := \sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k x_k,$$

να έχει την ιδιότητα $\bar{x}_n \to x$ (όπου τώρα η σύγκλιση είναι ισχυρή).

Το λήμμα Mazur μας επιτρέπει να μετατρέψουμε ασθενείς συγκλίσεις σε ισχυρές, δεδομένων κατάλληλων κυρτών συνδυασμών. Έστω $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$. Τότε, από το λήμμα Mazur μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία $\bar{x}_n \to x$ στον $\mathbb{X}$. Δεδομένου ότι για κάθε n η $\bar{x}_n$ είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων της αρχικής ακολουθίας, αν το F είναι κυρτό τότε έχουμε

$$F(\bar{x}_n) = F\left(\sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k x_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k F(x_k).$$

Η ασθενής κάτω ημισυνέχεια είναι ισχυρότερη ιδιότητα από την ισχυρή κάτω ημισυνέχεια με την έννοια ότι ένα ισχυρά κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό δεν είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές ενώ το αντίθετο ισχύει πάντα. Παρόλα αυτά, για κυρτά συναρτησιακά, οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.

***Πρόταση* N.28.** *Έστω $F : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ένα κυρτό συναρτησιακό. Τότε το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές αν και μόνο αν είναι ισχυρά κάτω ημισυνεχές.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές τότε είναι και ισχυρά κάτω ημισυνεχές (χωρίς χρήση της κυρτότητας). Υποθέτουμε τώρα ότι το F είναι ισχυρά κάτω ημισυνεχές και κυρτό. Θεωρούμε μία ακολουθία x_n τέτοια ώστε $x_n \rightharpoonup x$ και κατασκευάζουμε την ακολουθία $\bar{x}_n$ με $\bar{x}_n \to x$, της οποίας την ύπαρξη μας εγγυάται το λήμμα Mazur. Από την κυρτότητα του F έχουμε

$$F(\bar{x}_n) = F\left(\sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k x_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N(n)} a(n)_k F(x_k), \tag{N.13}$$

για $k = n, \ldots, N(n)$. Από τον ορισμό του $\liminf F(x_n)$ υπάρχει υπακολουθία $F(x_{n_r})$ τέτοια ώστε $\lim_r F(x_{n_r}) = \liminf F(x_n)$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$F(x_{n_r}) < \liminf F(x_n) + \varepsilon \text{ για } n > N.$$

Τότε, εφαρμόζοντας τη (N.13) για την παραπάνω υπακολουθία παίρνουμε ότι για αρκετά μεγάλα r,

$$F(\bar{x}_{n_r}) < \liminf F(x_n) + \varepsilon.$$

Άρα

$$\liminf F(\bar{x}_n) < \liminf F(x_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Από την ισχυρή κάτω ημισυνέχεια έχουμε ότι

$$F(x) \leq \liminf_n F(\bar{x}_n),$$

δηλαδή

$$F(x) < \liminf F(x_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

και έτσι

$$F(x) \leq \liminf F(x_n).$$

Άρα το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές. □

***Πρόταση* N.29.** *Αν ένα συναρτησιακό $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτό και Gâteaux διαφορίσιμο στο $x \in \mathbb{X}$ τότε το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές στο x.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ έτσι ώστε $x_n \rightharpoonup$ στο $\mathbb{X}$. Δεδομένου ότι το F είναι κυρτό και Gâteaux διαφορίσιμο στο x, εφαρμόζουμε την (N.11) για $y = x$ και $x = x_n$ και παίρνουμε

$$F(x_n) - F(x) \geq \langle DF(x), x_n - x\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{N.14}$$

Αφού $x_n \rightharpoonup x$ στο $\mathbb{X}$, για κάθε $v \in \mathbb{X}'$ έχουμε ότι $\langle v, x_n - x\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Επιλέγουμε $v = DF(x) \in \mathbb{X}'$ και παίρνουμε το όριο καθώς $n \to \infty$ στη (N.14) και έχουμε

$$\liminf_n F(x_n) \geq F(x),$$

δηλαδή ότι το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές. □

***Παράδειγμα* N.30.** *Θεωρούμε το συναρτησιακό $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$F(x) = a(x, x) + L(x).$$

Η κυρτότητα του συναρτησιακού σχετίζεται με την πιεστικότητά του, δηλαδή την ύπαρξη σταθεράς $C > 0$ τέτοιας ώστε

$$|a(x, x)| \geq C\|x\|^2_{\mathbb{X}}, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Αν η παραπάνω σχέση ισχύει, το F είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές.

***Παρατήρηση* N.31.** *Η πιεστικότητα δεν είναι εύκολο να ικανοποιείται σε όλο το $\mathbb{X}$. Μπορεί να ισχύει σε υποσύνολα του $\mathbb{X}$, συμπαγώς εμφυτευμένα στο $\mathbb{X}$. Ως παραδείγματα μπορούμε να θεωρήσουμε συναρτησιακά ορισμένα σε χώρους Sobolev.*

Βελτιστοποίηση σε χώρο Banach

Βελτιστοποίηση σε διανυσματικό χώρο

***Θεώρημα* N.32.** *(Weierstrass). Έστω $U \subset \mathbb{X}$ ένα φραγμένο και ασθενώς κλειστό υποσύνολο ενός ανακλαστικού χώρου Banach $\mathbb{X}$. Έστω επίσης $F : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ένα ασθενώς κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό. Τότε το F δέχεται ελάχιστο στο U.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\} \subset U$ μια ελαχιστοποιούσα ακολουθία, δηλαδή μια ακολουθία τέτοια ώστε $F(x_n) \to m$, όπου $m = \inf_{x \in U} F(x)$. Αυτή η ακολουθία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $x \in \mathbb{X}$, αφού είναι φραγμένη και ο $\mathbb{X}$ είναι ανακλαστικός. Θα δείξουμε ότι το στοιχείο x είναι τέτοιο ώστε $F(x) = m$, δηλαδή ότι το x είναι ελαχιστοποιητής. Πράγματι, λόγω ασθενούς κάτω ημισυνέχειας έχουμε $\liminf_n F(x_n) \geq F(x)$ και επειδή η $\{x_n\}$ είναι ελαχιστοποιούσα ακολουθία έχουμε τελικά ότι $F(x) = m$. □

***Παρατήρηση* N.33.** *Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση για το φραγμένο σύνολο U με την υπόθεση*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = \infty.$$

***Θεώρημα* N.34.** *(Συνθήκες πρώτης μεταβολής). Έστω U ανοικτό και $F : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ Gâteaux διαφορίσιμο συναρτησιακό με τοπικό ελάχιστο στο $x \in \mathbb{X}$. Τότε η συνθήκη πρώτης μεταβολής $DF(x) = 0$ ισχύει.*

Απόδειξη. Αφού το F έχει τοπικό ελάχιστο στο x, για κάθε κατεύθυνση $h \in \mathbb{X}$ ισχύει

$$F(x) \leq F(x + \varepsilon h), \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

για μικρό ε. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{X},$$

και επειδή το F είναι Gâteaux διαφορίσιμο στο x έχουμε

$$\langle DF(x), h \rangle \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Αφού ο $\mathbb{X}$ είναι διανυσματικός χώρος μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για $-h \in \mathbb{X}$ έτσι ώστε τελικά να πάρουμε ότι στο τοπικό ελάχιστο x ισχύει

$$\langle DF(x), h \rangle = 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

$\square$

***Παρατήρηση* N.35.** *Η συνθήκη πρώτης μεταβολής αντιμετωπίζεται ως ισότητα στο δυϊκό χώρο $\mathbb{X}'$, δηλαδή*

$$\langle DF(x), h \rangle_{\mathbb{X}', \mathbb{X}} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Αν θεωρηθεί ως τελεστική εξίσωση τότε βρίσκεται σε ασθενή μορφή.

***Παρατήρηση* N.36.** *Μια εναλλακτική μορφή της συνθήκης πρώτης μεταβολής με όρους μεταβολικών ανισοτήτων είναι*

$$\langle DF(x), y - x \rangle_{\mathbb{X}', \mathbb{X}} \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{X}$$

(το y πρέπει να είναι επιτρεπτό με την έννοια ότι $x + \varepsilon_n (y - x) \in U$, για κάθε όρο της ακολουθίας ε_n, με $\varepsilon_n \to 0$).

Βελτιστοποίηση και κυρτότητα

Η κυρτότητα μας οδηγεί σε κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα που αφορούν τη θεωρία βελτιστοποίησης.

Πρόταση* N.37.** ***(i). *Ένα τοπικό ελάχιστο ενός συναρτησιακού που είναι ορισμένο σε κυρτό σύνολο είναι ολικό ελάχιστο.*

(ii). *Αν το συναρτησιακό είναι γνησίως κυρτό τότε το ελάχιστο είναι μοναδικό*

Απόδειξη. (i). Υποθέτουμε ότι το $x \in \mathbb{X}$ είναι τοπικό ελάχιστο, δηλαδή $F(x) \le F(x')$ για κάθε $x' \in V$, όπου V είναι μία επαρκώς μικρή περιοχή του x. Για κάθε $y \in U$ θεωρούμε τον κυρτό συνδυασμό $(1-\varepsilon)x + \varepsilon y = x + \varepsilon(y-x) \in U$, $\varepsilon \in [0,1]$. Για αρκετά μικρές τιμές των ε, $x + \varepsilon(y-x) \in V$ και επειδή το x είναι τοπικό ελάχιστο έχουμε

$$F(x) \le F(x + \varepsilon(y-x))$$

και λόγω κυρτότητας του F παίρνουμε

$$F(x + \varepsilon(y-x)) \le (1-\varepsilon)F(x) + \varepsilon F(y) = F(x) + \varepsilon(F(y) - F(x)),$$

για κάθε αρκετά μικρό $\varepsilon \ge 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$F(x) \le F(x) + \varepsilon(F(y) - F(x)),$$

ή ισοδύναμα $F(x) \le F(y)$ για κάθε $y \in U \subset \mathbb{X}$. Άρα το x είναι ολικό ελάχιστο.
(ii). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ δύο ολικά ελάχιστα του F τέτοια ώστε $x_1 \ne x_2$. Θεωρούμε το σημείο $x = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2 \in \mathbb{X}$. Λόγω γνήσιας κυρτότητας του F έχουμε $F(x) < F(x_1) = F(x_2)$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο. □

***Θεώρημα* N.38.** *Έστω $U \subset \mathbb{X}$, κυρτό και $F : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ Gâteaux διαφορίσιμο προς όλες τις κατευθύνσεις και κυρτό συναρτησιακό. Τότε το $x \in U$ είναι ελάχιστο αν και μόνο αν $DF(x; y - x) \ge 0$, για κάθε $y \in U$, ή ισοδύναμα*

$$\langle DF(x), y - x\rangle \ge 0, \quad \forall y \in U.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $x \in U$ είναι ελάχιστο. Τότε $F(x) \le F(z)$, για κάθε $z \in U$. Για οποιαδήποτε $x, y \in U$, θέτουμε

$$z = (1-\varepsilon)x + \varepsilon y = x + \varepsilon(y-x) \in U \text{ για } \varepsilon \in (0,1),$$

οπότε έχουμε

$$F(x) \le F(x + \varepsilon(y-x)), \quad \forall y \in U, \varepsilon > 0,$$

δηλαδή

$$\frac{F(x + \varepsilon(y-x)) - F(x)}{\varepsilon} \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0$, έχουμε

$$\langle DF(x), y - x\rangle \ge 0, \quad \forall y \in U.$$

Για το αντίστροφο, αφού F είναι κυρτό και Gâteaux διαφορίσιμο έχουμε

$$F(y) - F(x) \ge \langle DF(x), y - x\rangle, \quad \forall x, y \in U.$$

Επειδή για $x \in U$ έχουμε $\langle DF(x), y - x\rangle \ge 0$, για κάθε $y \in U$, παίρνουμε ότι $F(x) \le F(y)$ για κάθε $y \in U$ και έτσι το x είναι τοπικό ελάχιστο. □

Προβολές

Ξεκινάμε με ένα βασικό αποτέλεσμα, το θεώρημα προβολής σε κλειστό και κυρτό υποσύνολο.

***Θεώρημα* N.39.** *Έστω $\mathbb{X}$ χώρος Hilbert και $K \subset \mathbb{X}$ κλειστό και κυρτό. Τότε, για $x \in \mathbb{X}$ το πρόβλημα ελαχιστοποίησης*

$$\min_{z \in K} \|x - z\|$$

έχει μοναδική λύση, x^*, που ορίζει έναν τελεστή συστολή $P_K : \mathbb{X} \to K$, ως $P_K x := x^*$. Επιπλέον το x^* χαρακτηρίζεται από τη λύση της ανισότητας

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K. \tag{N.15}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(z) := \|x - y\|^2$. Η ύπαρξη έπεται αν πάρουμε μια ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\{z_n\} \subset K$, δηλαδή μια ακολουθία τέτοια ώστε $F(z_n) \to m$ όπου $m = \inf_{z \in K} \|x - z\|^2$. Η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη άρα ασθενώς συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x^* \in \mathbb{X}$ ώστε $z_n \rightharpoonup x^*$. Από την κλειστότητα του K έχουμε ότι $x^* \in K$. Το όριο αυτό είναι ο ζητούμενος ελαχιστοποιητής, το οποίο έπεται από το γεγονός ότι η νόρμα είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής συνάρτηση και γνησίως κυρτή. Η μοναδικότητα έπεται λόγω γνήσιας κυρτότητας.

Για να δείξουμε ότι ο ελαχιστοποιητής ικανοποιεί την (N.15) παρατηρούμε ότι $F(z) = \langle x - z, x - z \rangle$. Αν το x^* είναι το στοιχείο εκείνο του K που ελαχιστοποιεί την απόσταση τότε $F(x^*) \leq F(z)$ για κάθε $z \in K$. Δηλαδή το x^* είναι λύση της ανισότητας

$$\langle x - x^*, x - x^* \rangle \leq \langle x - z, x - z \rangle, \quad \forall z \in K.$$

Έστω τώρα $y \in K$. Θέτουμε

$$z = (1 - \varepsilon)x^* + \varepsilon y = x^* + \varepsilon(y - x^*), \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Αφού $z \in K$ έχουμε

$$\langle x - x^*, x - x^* \rangle \leq \langle (x - x^*) - \varepsilon(y - x^*), (x - x^*) - \varepsilon(y - x^*) \rangle, \quad \forall y \in K, \varepsilon \in (0, 1).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$0 \leq -\langle x - x^*, y - x^* \rangle + \varepsilon \|y - x^*\|^2, \quad \forall y \in K, \varepsilon \in (0, 1)$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ έχουμε

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

□

Μεταβολικές ανισότητες

Διγραμμικές μορφές

Έστω $\mathbb{X}$ ένας χώρος Hilbert.

***Ορισμός* Ν.40.** *Μια απεικόνιση $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ που είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές της καλείται διγραμμική μορφή στο $\mathbb{X}$.*

***Ορισμός* Ν.41.** *Μια διγραμμική μορφή καλείται συμμετρική αν $a(x, y) = a(y, x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{X}$.*

***Ορισμός* Ν.42.** *Μια διγραμμική μορφή καλείται συνεχής αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

***Ορισμός* Ν.43.** *Μια διγραμμική μορφή καλείται πιεστική αν υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε*

$$\alpha\|x\|^2 \leq |a(x, x)|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

***Παράδειγμα* Ν.44.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ και $\mathbb{X} = W_0^{1,2}(\Omega)$, ο χώρος Sobolev που αποτελείται από συναρτήσεις οι οποίες έχουν πρώτης τάξης ασθενείς παραγώγους που ανήκουν στον $L^2(\Omega)$ και μηδενίζονται στο $\partial\Omega$ με την έννοια του ίχνους. Ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι χώρος Hilbert με τη νόρμα*

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

που εξάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx.$$

Υπενθυμίζουμε την ανισότητα Poincaré, σύμφωνα με την οποία

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C\|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Αυτό σημαίνει ότι η $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ είναι ισοδύναμη νόρμα στον $W_0^{1,2}(\Omega)$. Στη συνέχεια θα θεωρούμε το χώρο $\mathbb{X}$ με αυτήν τη νόρμα, την οποία θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$.

Θεωρούμε τη διγραμμική μορφή $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Είναι προφανές ότι η a είναι συμμετρική. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz δίνει

$$|a(u, v)| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx \leq \|u\|\|v\|$$

και εξασφαλίζει τη συνέχεια της a. Επιπλέον

$$a(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2,$$

δηλαδή η a είναι και πιεστική.

Εισαγωγή στις μεταβολικές ανισότητες

Παρουσιάζουμε μια εισαγωγή στη θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων θεωρώντας $\mathbb{X}$ ένα χώρο Hilbert και $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, όπου $F(x) = 1/2(x,x) + L(x)$. Η a είναι συνεχής, συμμετρική και πιεστική διγραμμική μορφή ενώ η L είναι συνεχής γραμμική μορφή.

***Θεώρημα* N.45.** *Έστω $K \subset \mathbb{X}$ κλειστό και κυρτό. Το πρόβλημα $\min_{x\in K} F(x)$ έχει μοναδική λύση που είναι ισοδύναμη με τη λύση του προβλήματος μεταβολικής ανισότητας*

$$\text{να βρεθεί } x \in K, \text{ ώστε } a(x, y - x) \leq L(y - x), \quad \forall y \in K.$$

Έστω $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \frac{1}{2}a(x,x) + L(x)$ όπου a συνεχής και πιεστική διγραμμική μορφή και $K \subset \mathbb{X}$ κλειστό και κυρτό.

***Θεώρημα* N.46.** *(Lax-Milgram-Stampacchia). Για δεδομένο $L \in \mathbb{X}'$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$, τέτοιο ώστε*

$$a(u, v - u) \geq \langle L, v - u\rangle, \quad \forall v \in K. \tag{N.16}$$

Επιπλέον, αν το a είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle L, u\rangle = \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle L, v\rangle\right\}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα αναπαράστασης των Riesz-Frechet, υπάρχει μοναδικό $f \in \mathbb{X}$, τέτοιο ώστε

$$\langle L, v\rangle = (f, v), \quad \forall v \in \mathbb{X}.$$

Εξ'άλλου για σταθερό $u \in \mathbb{X}$, η απεικόνιση $v \mapsto a(u, v)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον $\mathbb{X}$ και σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης Riesz-Frechet υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{X}$, έστω Au, τέτοιο ώστε

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall v \in \mathbb{X}.$$

Είναι φανερό ότι ο A είναι ένας γραμμικός τελεστής από τον $\mathbb{X}$ στον $\mathbb{X}$ και ότι

$$\begin{aligned} &\|Au\| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{X} \\ &(Au, u) \geq a\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Μετά από αυτή τη θεώρηση, το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθεί $u \in K$, τέτοιο ώστε

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \tag{N.17}$$

Έστω $\rho > 0$, σταθερό. Η ανισότητα (N.17) ισοδυναμεί με την

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K,$$

δηλαδή $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$. Για κάθε $v \in K$ θέτουμε $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Θα δείξουμε ότι αν το $\rho > 0$ επιλεγεί κατάλληλα τότε το S είναι μία γνήσια συστολή, δηλαδή υπάρχει $k < 1$, τέτοιο ώστε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq k\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in K.$$

Από γνωστή πρόταση ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\| &= \|P_K(\rho f - \rho A v_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho A v_2 + v_2)\| \\ &\le \|\rho f - \rho A v_1 + v_1 - \rho f + \rho A v_2 - v_2\| \\ &= \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|,\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\le \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho a + \rho^2 c^2).\end{aligned}$$

Αν το $\rho > 0$ επιλεγεί ώστε $k^2 = 1 - 2\rho a + \rho^2 c^2 < 1$ (π.χ $0 < \rho < 2a/c^2$), τότε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \le k\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in K,$$

με $k < 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, η S έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Τέλος, έστω u τέτοιο ώστε

$$a(u, v - u) \ge \langle L, v - u\rangle, \quad \forall v \in K.$$

Η συμμετρία του a υποδηλώνει ότι

$$a(v - u, u) \ge \langle L, v - u\rangle, \quad \forall v \in K.$$

Θέτουμε

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle L, v\rangle, \quad \forall v \in K.$$

Τότε

$$\begin{aligned}F(u) &= F(u + (v - u)) \\ &= \frac{1}{2}a(u + (v - u), u + (v - u)) - \langle L, u + (v - u)\rangle \\ &= \frac{1}{2}(u, u) - \langle L, u\rangle + a(v - u, u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) - \langle L, v - u\rangle \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + a(v - u, u) - \langle L, v - u\rangle.\end{aligned}$$

Λόγω της πιεστικότητας προκύπτει ότι

$$a(v - u, v - u) \ge 0.$$

Επίσης

$$a(v - u, u) - \langle L, v - u\rangle \ge 0,$$

οπότε $F(u) \le F(v)$, για κάθε $v \in K$, οπότε το u είναι ελαχιστοποιητής του $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle L, v\rangle, v \in K$. □

***Θεώρημα* N.47.** *(Minty). Το πρόβλημα μεταβολικής ανισότητας ισοδυναμεί με το πρόβλημα*

$$\text{να βρεθεί } x \in K \text{ τέτοιο ώστε } a(y, y-x) \geq \langle f, y-x \rangle, \quad \forall y \in K, f \in \mathbb{X}'. \tag{N.18}$$

Απόδειξη. Έστω $x^* \in K$ λύση της (N.16). Τότε, για κάθε $y \in K$

$$a(y, y-x^*) = a(y-x^*, y-x^*) + a(x^*, y-x^*) \geq a(x^*, y-x^*) \geq \langle f, y-x^* \rangle,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα της a ως προς το πρώτο όρισμά της και την πιεστικότητα για να συμπεράνουμε ότι $a(y-x^*, y-x^*) > 0$. Άρα, μία λύση της (N.16) είναι λύση της (N.18). Υποθέτουμε τώρα ότι το $x^* \in K$ είναι λύση της (N.18). Για οποιοδήποτε $y \in K$ και $\varepsilon \in (0,1)$, ορίζουμε $z = x^* + \varepsilon(y-x^*) \in K$ και εφαρμόζουμε την (N.18) για το ζεύγος $(x^*, z) \in K \times K$. Έτσι, έχουμε

$$a(x^* + \varepsilon(y-x^*), \varepsilon(y-x^*)) \geq \langle f, \varepsilon(y-x^*) \rangle, \quad \forall y \in K$$

το οποίο μας οδηγεί μέσω του ορίου καθώς $\varepsilon \to 0$ στην (N.16). □

Παράρτημα Ο

Ασθενείς Λύσεις Π.Σ.Τ

Αρχίζουμε με μια παρατήρηση η οποία περιγράφει ένα σύνηθες σκεπτικό ανάλογο του οποίου χρησιμοποιούμε στη συνέχεια.

Παρατήρηση* Ο.1.** ***(i). *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και αναζητούμε λύση x_0 της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x_0 \in \mathbb{Q}$. Αν περιοριστούμε στο σύνολο $\mathbb{Q}$, επειδή ως γνωστόν δεν είναι πλήρες, δεν διαθέτουμε εργαλεία όπως για παράδειγμα το θεώρημα Bolzano ώστε με τη χρήση του να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση. Για το λόγο αυτό μπορούμε να επεκταθούμε αναζητώντας λύση σε όλο το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να δείξουμε, με κάποιον τρόπο, ότι η λύση που βρήκαμε είναι ρητός αριθμός.*

(ii). *Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει μια λύση της $h(x) = 0$ και γνωρίζουμε ότι κάποιο x_0 ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση g η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Άρα θα ισχύει $g'(x_0) = 0$. Αν διαθέτουμε με κάποιον τρόπο την ισότητα $h(x) = g'(x)$ τότε είναι φανερό ότι ο ελαχιστοποιητής x_0 της g είναι η ζητούμενη λύση της $h(x) = 0$.*

Στο παράρτημα περί λογισμού σε χώρους Banach αναφέρθηκε η παρακάτω πρόταση.

***Πρόταση* Ο.2.** *Έστω $\mathbb{X}$ ανακλαστικός χώρος Banach και έστω συναρτησιακό $I : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, πιεστικό και ασθενώς κάτω ημισυνεχές. Τότε το συναρτησιακό I λαμβάνει ελάχιστη τιμή.*

Στη συνέχεια μέσα από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα επίλυσης ενός Π.Σ.Τ θα αντιληφθούμε τη θέση και τη σημασία της "λεγόμενης" ασθενούς λύσης του Π.Σ.Τ. Γενικά μιλώντας, η ασθενής λύση ενός Π.Σ.Τ είναι μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί μια σχέση ασφαλώς συσχετιζόμενη με τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος που όμως υπακούει σε "χαλαρότερες" συνθήκες.

Πρόβλημα (αρχέτυπο Π.Σ.Τ Dirichlet).

Δοθείσης συνάρτησης $f \in L^2(\Omega)$ ζητείται συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ η οποία να ικανοποιεί το Π.Σ.Τ

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \tag{O.1}$$

***Παρατήρηση* O.3.** *Υπενθυμίζουμε ότι* $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}}$. *Επίσης υπενθυμίζουμε ότι αν* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \leq p < \infty$ *και αν το σύνορο του* Ω *είναι* C^1 *τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i). $u(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$

(ii). $u \in W_0^{1,p}(\Omega).$

Είναι λογικό λοιπόν να αναζητούμε λύσεις του προβλήματος (O.1) στο χώρο Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ για κατάλληλο p που στην περίπτωση μας είναι $p = 2$ οπότε έχουμε $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Η συνοριακή συνθήκη ενσωματώνεται στο χώρο $W_0^{1,p}$. Μία συνάρτηση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ η οποία ικανοποιεί το (O.1) καλείται κλασσική λύση. Η εύρεση κλασσικής λύσης είναι μία ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση ακόμα και αν αυτή υπάρχει. Θέλουμε επομένως να χαλαρώσουμε την υπόθεση $u \in C^2$. Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τη διαφορική εξίσωση με μία συνάρτηση $v \in C_0^1(\Omega)$ και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε παίρνουμε

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v dx = \int_\Omega f v dx$$

που με χρήση του τύπου Gauss-Green έχουμε

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

και επειδή $v(x) = 0$ στο $\partial\Omega$ προπύπτει ότι

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \tag{O.2}$$

Μία συνάρτηση u που ικανοποιεί την εξίσωση (O.2) για κάθε $v \in C_0^1(\Omega)$ θα καλείται ασθενής λύση του προβλήματος (O.1).

Η απαίτηση να είναι η u ασθενής λύση αυξάνει τις δυνατότητες επιλογής αλλά είμαστε υποχρεωμένοι στη συνέχεια να δείξουμε ότι η ασθενής λύση που βρήκαμε ικανοποιεί το πρόβλημά μας. Στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια εύρεσης μίας ασθενούς λύσης του (O.1). Όπως θα φανεί από τις προτάσεις που ακολουθούν αυτή η αναζήτηση σχετίζεται άμεσα με το αν το συναρτησιακό

$$I(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega f w dx$$

λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Η πρόταση που ακολουθεί είναι πολύ σημαντική διότι μεταθέτει το πρόβλημα εύρεσης ασθενούς λύσης του Π.Σ.Τ στην ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού ταυτίζοντας την ασθενή λύση με τη θέση ελαχίστου του εν λόγω συναρτησιακού.

Μεταβολικές μέθοδοι

***Πρόταση* O.4.** *Θεωρούμε* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ανοικτό και φραγμένο και* $f \in L^2(\Omega)$. *Τότε η συνάρτηση* $u \in H_0^1(\Omega)$ *είναι ασθενής λύση του προβλήματος* (O.1) *ανν και μόνο αν ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό* $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f v dx.$$

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$). Έστω ότι η $u \in H_0^1(\Omega)$ ελαχιστοποιεί το I, δηλαδή $I(w) \geq I(u)$, για κάθε $w \in H_0^1(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι η u είναι ασθενής λύση του (O.1), δηλαδή ότι

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Έστω λοιπόν $v \in H_0^1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = I(u + tv)$. Μετά τους σχετικούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$g(t) = I(u) + \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + t \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f v dx \right).$$

Η g είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς t συνεπώς η παράγωγός της θα δίνεται ως

$$g'(t) = t \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f v dx.$$

Αφού η u ελαχιστοποιεί το I θα έχουμε ότι

$$g(t) = I(u + tv) \geq I(u) = g(0).$$

Άρα, $g'(0) = 0$, δηλαδή ικανοποιείται η σχέση (O.2) που σημαίνει ότι η u είναι ασθενής λύση του (O.1).

($\Longrightarrow$). Έστω ότι η $u \in H_0^1$ είναι ασθενής λύση του (O.1). Θα δείξουμε ότι ελαχιστοποιεί το I. Προς αυτήν την κατεύθυνση έστω $w \in H_0^1$. Θέτουμε $v = u - w$ και ορίζουμε πάλι τη συνάρτηση g όπως στο πρώτο σκέλος της απόδειξης. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} g(t) &= I(u + tv) \\ &= I(u) + \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + t \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f v dx \right) \\ &\geq I(u), \end{aligned}$$

αφού η u είναι ασθενής λύση. Άρα, $g(t) \geq I(u)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Για $t = -1$ έχουμε

$$g(-1) = I(w) = I(u - u + w) \geq I(u).$$

Άρα η u ελαχιστοποιεί το I. □

Το ερώτημα αν το πρόβλημα (O.1) έχει ασθενή λύση παραμένει. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί από την πρόταση O.4 αν καταφέρουμε να δείξουμε ότι το συναρτησιακό I λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Αυτό επιτυγχάνεται δείχνοντας ότι το I είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lambda = \inf\{I(w) : w \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει $\{w_n\}$ ακολουθία στον $H_0^1(\Omega)$ ώστε

$$\lim_{n \to \infty} I(w_n) = \lambda$$

και η $\{I(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ως συγκλίνουσα θα είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$ με αποτέλεσμα επειδή ο $H_0^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός να υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\{w_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ της $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον $H_0^1(\Omega)$ με $\lim_{k \to \infty} w_{n_k} = u$, και μάλιστα $\lambda = I(u)$.

***Πρόταση* O.5.** *Έστω το συναρτησιακό $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ με*

$$I(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega f w dx.$$

Τοτε το I είναι κάτω φραγμένο.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega f w dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \varepsilon \int_\Omega |w|^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega f^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega -\varepsilon C \int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega f^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C\right)\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega f^2 dx \\ &\geq -\frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega f^2 dx, \end{aligned}$$

επιλέγοντας $\varepsilon > 0$ ώστε $\frac{1}{2} - \varepsilon C > 0$ και χρησιμοποιώντας τις ανισότητες ε-Young και Poincaré. Δηλαδή

$$-\frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega f^2 dx \leq I(w).$$

Άρα το σύνολο τιμών του I είναι κάτω φραγμένο. □

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτουν τα εξής.

A. Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda = \inf\{I(w) : w \in H_0^1\}.$$

B. Άρα υπάρχει $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1$ ώστε

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} I(w_n).$$

C. Η $\{I(w_n)\}$ ως συγκλίνουσα θα είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$.

D. Επειδή ο $H_0^1(\Omega)$ είναι ανακλαστικός υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ της $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$w_{n_k} \rightharpoonup u \text{ στον } H_0^1.$$

Θα δείξουμε ότι $I(u) = \lambda$ οπότε το u θα είναι το infimum του συνόλου τιμών του I με αποτέλεσμα να το ελαχιστοποιεί. Έχουμε λοιπόν ότι

$$0 \leq |\nabla w_{n_k} - \nabla u|^2 = |\nabla w_{n_k}|^2 + |\nabla u|^2 - 2\nabla w_{n_k} \cdot \nabla u.$$

Άρα
$$|\nabla w_{n_k}|^2 \geq |\nabla u|^2 + 2(\nabla w_{n_k} - \nabla u)\nabla u.$$
Άρα
$$\begin{aligned} I(w_{n_k}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_{n_k}|^2 dx - \int_\Omega f w_{n_k} dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\cdot 2\int_\Omega (\nabla w_{n_k} - \nabla u)\nabla u dx - \int_\Omega f w_{n_k} dx. \end{aligned}$$
Παίρνοντας το όριο καθώς $k \to \infty$ έχουμε
$$\lambda = \lim_{k\to\infty} I(w_{n_k}) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx = I(u).$$
Όμως $\lambda = \inf\{I(w) : w \in H_0^1(\Omega)\}$, άρα $I(u) = \lambda$. Δηλαδή το u ελαχιστοποιεί το I και σύμφωνα με την πρόταση Ο.4 είναι ασθενής λύση του προβλήματος (Ο.1). Άρα με τη βοήθεια των προτάσεων Ο.2, Ο.4 και Ο.5, το πρόβλημα Dirichlet (Ο.1) έχει ασθενή λύση. Απομένει να δείξουμε ότι η ασθενής λύση u είναι και κλασσική λύση του (Ο.1). Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι $u \in C^2(\overline{\Omega})$ και ότι $u(x) = 0$ στο $\partial\Omega$ (να παρατηρήσουμε ότι εν γένει τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα). Αφού η u είναι ασθενής λύση του (Ο.1) ικανοποιεί την
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx,$$
με $v \in C^1(\overline{\Omega})$ και $v(x) = 0$ στο $\partial\Omega$ οπότε με χρήση του τύπου Gauss-Green έχουμε
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS - \int_\Omega \Delta u \cdot v dx = \int_\Omega f v dx,$$
ή
$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v dx = \int_\Omega f v dx,$$
ή
$$\int_\Omega (-\Delta u - f) v dx = 0,$$
από όπου με χρήση ενός επιχειρήματος πυκνότητας προκύπτει ότι
$$-\Delta u = f \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Συνοψίζουμε την προηγούμενη διαδικασία επίλυσης του Π.Σ.Τ (Ο.1) στο ακόλουθο πρόγραμμα που περιγράφει τις γενικές γραμμές της μεταβολικής μεθόδου στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Βήμα 1ο. Δίνουμε τον ακριβή ορισμό της ασθενούς λύσης ο οποίος χρησιμοποιεί ως βασικά του εργαλεία τους χώρους Sobolev.

Βήμα 2ο. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας ασθενούς λύσης με μεταβολικές μεθόδους (δηλαδή εύρεση συναρτήσεων που ελαχιστοποιούν κάποιο συναρτησιακό ή μηδενίζουν κάποια παράγωγο).

Βήμα 3ο. Δείχνουμε ότι η ασθενής λύση είναι π.χ τάξεως C^2. Αυτό αποτελεί ένα αποτέλεσμα ομαλότητας το οποίο να τονίσουμε ότι είναι πολύ λεπτό θέμα.

Βήμα 4ο. Επιστροφή στις κλασσικές λύσεις. Δείχνουμε ότι μια ασθενής λύση π.χ τάξεως C^2 είναι και κλασσική λύση.

***Παρατήρηση* Ο.6.** *Η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω είναι ευέλικτη και εφαρμόζεται σε ένα πλήθος προβλημάτων, τονίζοντας ότι κάθε πρόβλημα έχει την ιδιαιτερότητά του ανα βήμα. Θα επιμείνουμε όμως ότι είναι απολύτως βασικό να κάνουμε τη σωστή επιλογή του συναρτησιακού χώρου στον οποίο ζητείται η ασθενής λύση.*

Στο πρόβλημα που ακολουθεί θα περιγράψουμε έναν άλλο τρόπο προσέγγισης της ασθενούς λύσης, μέσω του θεωρήματος του Riesz.

Πρόβλημα.

Έστω $f \in L^2(\Omega)$. Τότε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \tag{O.3}$$

έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H_0^1(\Omega)$.

Λύση.

Αρχικά πρέπει να βρούμε τη σχέση που πρέπει να ισχύει ώστε μια u να είναι ασθενής λύση του (Ο.3). Προς αυτήν την κατεύθυνση πολλαπλασιάζουμε τη διαφορική εξίσωση με μία $v \in C_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώνουμε στο Ω. Έχουμε λοιπόν ότι

$$-\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega vu dx = \int_\Omega fv dx.$$

Από το θεώρημα Gauss-Green παίρνουμε ότι

$$-\int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega vu dx = \int_\Omega fv dx,$$

δηλαδή ότι

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \tag{O.4}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ με

$$F(v) = \int_\Omega fv dx$$

η οποία θα αποδείξουμε ότι είναι ένα φραγμένο και γραμμικό συναρτησιακό. Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι το F είναι γραμμικό ενώ είναι φραγμένο αφού

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_\Omega fvdx \right| \leq \int_\Omega |fv|dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Riesz υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\langle u, v \rangle = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

δηλαδή

$$\int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega fvdx.$$

Άρα το u είναι μοναδική ασθενής λύση του (Ο.3).

Παράρτημα Ρ

Σταθερά Σημεία

Γενικά μιλώντας, σταθερά σημεία μίας $F : A \to A$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $F(x) = x$. Πολλά προβλήματα της μη γραμμικής ανάλυσης μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια θεωρημάτων σταθερού σημείου.

Ορισμός* Ρ.1.** ***(i). *Μία συνάρτηση $f : M \to M$ όπου (M, ρ) μετρικός χώρος λέγεται συστολή (Contraction) αν υπάρχει $0 < a < 1$ έτσι ώστε $\forall x, y \in M$ να ισχύει*

$$\rho(Ax, Ay) \leq a\rho(x, y)$$

(ii). *Μία συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ όπου $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ χώρος με νόρμα λέγεται μη διασταλτική (non expansive) αν*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathcal{X}} \leq \|x - y\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

(iii). *Μία συνάρτηση $r : \mathcal{X} \to M$ όπου $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ χώρος με νόρμα και $M \subset \mathcal{X}$ ονομάζεται περιστολή (retraction) αν r συνεχής και $r(x) = x$ για κάθε $x \in M$.*

***Θεώρημα* Ρ.2.** *(Συστολή του Banach). Έστω S πλήρης μετρικός χώρος και $f : S \to S$ συστολή. Τότε η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in S$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$. Επιπλέον*

$$x = \lim f^n(x_0)$$

με x_0 τυχαίο στοιχείο του S.

Απόδειξη. Έστω (S, ρ) ο πλήρης μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in S$. Σχηματίζουμε την ακολουθία

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots$$

Θα δείξουμε ότι η $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έστω $m \neq n$ $(m < n)$. Εφαρμόζοντας συνεχώς την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) + \rho(f^{m+1}(x_0), f^n(x_0))$$

$$\begin{aligned} \rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) \\ + \ldots + \rho(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)). \end{aligned} \tag{Ρ.1}$$

Επειδή η f είναι συστολή ισχύει

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) &= \rho(f(f^{m-1}(x_0)), f(f^m(x_0))) \\ &\leq a\rho(f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) &\leq a^2\rho(f^{m-2}(x_0), f^{m-1}(x_0)) \\ &\leq \ldots \leq a^m\rho(x_0, f(x_0)).\end{aligned} \tag{P.2}$$

Από τις (P.1) και (P.2) έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq\ & a^m\rho(x_0, f(x_0)) + a^{m+1}\rho(x_0, f(x_0)) \\ &+ \ldots + a^{n-1}\rho(x_0, f(x_0)) \\ =\ & a^m(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-m-1})\rho(x_0, f(x_0))\end{aligned}$$

άρα

$$\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \frac{a^m}{1-a}\rho(x_0, f(x_0)).$$

Επειδή $0 < a < 1$ η $\{a^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική. άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N(\varepsilon)$ ώστε

$$\rho(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \frac{a^m}{1-a}\rho(x_0, f(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall n > m > N(\varepsilon).$$

Οπότε η $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και λόγω πληρότητας του S θα συγκλίνει σε κάποιο $x \in S$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \rho(f^n(x_0), x) = 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x) = x$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(f(x), x) &\leq \rho(f(x), f^n(x_0)) + \rho(f^n(x_0), x) \\ &\leq a\rho(x, f^{n-1}(x_0)) + \rho(f^n(x_0), x) \quad \forall n = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \rho(f^n(x_0), x) = 0$ οπότε $\rho(f(x), x) = 0$ και έτσι $f(x) = x$. Τέλος θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο σταθερό σημείο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $y \neq x$ ώστε $f(y) = y$. Τότε

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq a\rho(x, y),$$

δηλαδή $(1-a)\rho(x, y) \leq 0$, και επειδή $\rho(x, y) > 0$, προκύπτει ότι $a > 1$. Καταλήξαμε σε άτοπο και έτσι το σταθερό σημείο x είναι μοναδικό.

$\square$

***Παρατήρηση* P.3.** *Αν το U είναι κλειστό υποσύνολο του S τότε ο (U, ρ) θα είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος οπότε η $f : U \to U$ έχει ένα σταθερό σημείο στο U.*

***Θεώρημα* P.4.** *(Brouwer σε σφαίρα του $\mathbb{R}^N$) Έστω Σ κλειστή σφαίρα του $\mathbb{R}^N$ και $f : \Sigma \to \Sigma$ συνεχής. Τότε η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $\Sigma = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^N$. Για την απόδειξη του θεωρήματος Brouwer θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο αναφέρουμε χωρίς απόδειξη:
(Retraction Theorem). Δεν υπάρχει περιστολή της μπάλας $\bar{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^N$ στο σύνορό της $\partial B(x_0, R)$. Δηλαδή δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση

$$r : \bar{B}(x_0, R) \to \partial B(x_0, R),$$

τέτοια ώστε $r(x) = x$ για κάθε $x \in \partial B(x_0, R)$.
Έστω ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο. Τότε $x - f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \bar{B}(0,1)$. Θεωρούμε την ημιευθεία που ενώνει το σημείο $F(x)$ με το σημείο x. Η ημιευθεία αυτή τέμνει την επιφάνεια-σύνορο σε ένα σημείο και δημιουργείται μία

$$r(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x)),$$

με $\lambda(x) > 0$ και $\|r(x)\| = 1$ όπου $r : \bar{B}(0,1) \to \partial B(0,1)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η r είναι περιστολή. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
&\|r(x)\|^2 = 1\\
&\|x - f(x)\|^2 \lambda^2(x) + 2(f(x), x - f(x))\lambda(x) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τριώνυμο ως προς $\lambda(x)$ και μας δίνει ότι για κάθε $x \in \bar{B}(0,1)$

$$\begin{aligned}
\lambda(x) = &\frac{-(f(x), x - f(x))}{\|x - f(x)\|^2}\\
&\pm \frac{\sqrt{(f(x), x - f(x))^2 + (1 - \|f(x)\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}.
\end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση λ είναι συνεχής και δεδομένου ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής παίρνουμε τελικά τη συνέχεια της συνάρτησης r. Επιπλέον από την κατασκευή της r ισχύει ότι $r(x) = x$ για κάθε $x \in \partial B(0,1)$. Δηλαδή είδαμε ότι η $r(x)$ είναι περιστολή το οποίο είναι άτοπο λόγω του Retraction Theorem. άρα πρέπει να υπάρχει ένα τουλάχιστον x τέτοιο ώστε $x - f(x) = 0$ οπότε η f έχει σταθερό σημείο.

Έστω τώρα $\Sigma = \bar{B}(0,R) \subset \mathbb{R}^N$. Θεωρούμε την $G(x) = f(Rx)/R$, $x \in \bar{B}(0,1)$ με $G : \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$ η οποία είναι προφανώς συνεχής. Σύμφωνα με τα προηγούμενα η G έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in \bar{B}(0,1)$ τέτοιο ώστε $G(x_0) = x_0$. άρα $f(Rx_0)/R = x_0$ οπότε $f(Rx_0) = Rx_0$ από όπου προκύπτει ότι η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. □

***Θεώρημα* P.5.** *(Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer). Κάθε συνεχής συνάρτηση από την μπάλα $B(0,1)$ του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο.*

***Πόρισμα* P.6.** *Αν $f : B(0,R) \to B(0,R)$ συνεχής, τότε έχει σταθερό σημείο.*

***Πόρισμα* P.7.** *Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό και $f : K \to K$ συνεχής συνάρτηση τότε η f έχει σταθερό σημείο.*

***Πόρισμα* P.8.** *Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = R > 0$ ισχύει ότι $(f(x), x) \geq 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_0\| \leq R$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Ισχύει ακριβώς το ίδιο αν $(f(x), x) \leq 0$.*

Το Θεώρημα Schauder

***Πρόταση* P.9.** *Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, $K \subset \mathcal{X}$ συμπαγές. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $\mathcal{X}_\varepsilon \subset \mathcal{X}$ και συνεχής απεικόνιση $g_\varepsilon : K \to \mathcal{X}_\varepsilon$ τέτοια ώστε*

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

Αν επιπλέον το K είναι κυρτό, τότε $g_\varepsilon : K \to K$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το K είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ τέτοια ώστε $K \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Θεωρούμε

$$\mathcal{X}_\varepsilon = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] \subset \mathcal{X}$$

και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$b_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & x \in B(x_i, \varepsilon), i = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

και

$$g_\varepsilon(x) = \frac{b_1(x)x_1 + b_2(x)x_2 + \cdots + b_n(x)x_n}{b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x)}, \quad x \in K.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon(x) - x\| &= \|\frac{b_1(x)x_1 + \cdots + b_n(x)x_n}{b_1(x) + \cdots + b_n(x)} - x\| \\ &= \|\frac{b_1(x)x_1 + \cdots + b_n(x)x_n}{b_1(x) + \cdots + b_n(x)} - \frac{b_1(x)x + \cdots + b_n(x)x}{b_1(x) + \cdots + b_n(x)}\| \\ &= \|\frac{b_1(x)(x_1 - x)}{b_1 + \cdots + b_n(x)} + \cdots + \frac{b_n(x)(x_n - x)}{b_1(x) + \cdots + b_n(x)}\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Τέλος, αν το K είναι κυρτό, τότε η $g_\varepsilon : K \to K$ ως κυρτός συνδυασμός. □

***Θεώρημα* P.10.** *(Schauder). Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, K κλειστό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και $f : K \to K$ συνεχής. Τότε η f έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $g_\varepsilon : K \to K$. Θεωρούμε το

$$K_\varepsilon = conv\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{X}_\varepsilon$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση $f_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$, με

$$f_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(f(x)).$$

Για την $f_\varepsilon(x)$ ισχύει το Θεώρημα Brouwer, οπότε υπάρχει x_ε, τέτοιο ώστε $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Όταν το $\varepsilon \to 0$, το $x_\varepsilon \to x \in K$, επειδή το $x_\varepsilon \in K$ και το K είναι συμπαγές. Ισχύει επίσης ότι

$$\begin{aligned} \|f(x) - x\| &= \|f(x) - x + x_\varepsilon - x_\varepsilon + f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| \\ &\leq \|x_\varepsilon - x\| + \|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| + \|f(x_\varepsilon) - f(x)\| \to 0, \end{aligned}$$

καθώς $\varepsilon \to 0$, διότι

$$\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| = \|f_\varepsilon(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| = \|g_\varepsilon(f(x_\varepsilon)) - f(x_\varepsilon)\|.$$

άρα $\|f(x) - x\| \leq 0$, οπότε $f(x) = x$.

□

***Πόρισμα* P.11.** *Έστω $\mathcal{X}$ χώρος Banach, $K \subset \mathcal{X}$ κλειστό, φραγμένο και κυρτό. Έστω επίσης $f : K \to K$ συνεχής και συμπαγής. Τότε η f έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Το $\widehat{K} = \overline{conv} f(K)$ είναι κυρτό και συμπαγές. Θεωρούμε την $f : \widehat{K} \to \widehat{K}$. Ισχύει ότι $\widehat{K} \subset K$, οπότε

$$f(\widehat{K}) \subset f(K) \subset \overline{conv} f(K) = \widehat{K}.$$

άρα υπάρχει $x_0 \in \widehat{K} \subset K$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. □

Βιβλιογραφία

[1] Bershchanskii, Y. M., and Meerov, M. V., The complementarity problem: theory and methods of solution, Automation and remote Control 44 (1983) 687-710

[2] Brder, K. C., Fixed point Theorems with applications to Economics and Game theory, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1985.

[3] Dafermos, S., Traffic equilibria and variational inequalities, Transportation Science 14 (1980) 42-54.

[4] Dafermos, S., Sensitivity analysis in variational inequalities, Mathematics of Operations Research 13 (1988) 421-434.

[5] Dafermos, S. C., and McKelvey, S. C., Partitionable variational inequalities with applications to network and economic equilibria, Journal of Optimization Theory and Applications 73 (1992) 243-268.

[6] Dafermos, S., and Nagurney, A., Sensitivity analysis for the asymmetric network equilibrium problem, Mathematical Programming 28 (1984a) 174-184.

[7] Dafermos, S., and Nagurney, A., Sensitivity analysis for the general spatial economic equilibrium problem, Operations Research 32 (1984b) 1069-1086.

[8] Dupuis, P., a Ishii, H., On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod Problem, with applications, Stochastic and Stochastic Reports 35 (1991) 31-62.

[9] Dupuis, P., and Nagurney, A., Dynamical systems and variational inequalities, Annals of Operations Research 44 (1993) 9-42.

[10] Hartman, P., and Stampacchia, G., On some nonlinear elliptic differential functional equations, Acta Mathematica 115 (1966) 271-310.

[11] Karamardian, S., The nonlinear complementarity problem with applications, part 1, Journal of Optimization Theory and Applications 4 (1969) 87-98.

[12] Kelley, J. L., General Topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1955.

[13] Kinderlehrer, D., and Stampacchia, G., An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[14] Kostreva, M. M., Recent results on complementarity modelsfor engineering and economics, INFOR 28 (1990) 324-334.

[15] Kyparisis, J., Sensitivity analysis framework for variational inequalities, Mathematical Programming 38 (1987) 203-213.

[16] Lemke, C. E., Recent results on complementarity problems, in nonlinear programming, pp. 349-384, J. B. Rosen, O. L. Mangasarian, and K. Ritter, editors, Academic Press, New York, 1970.

[17] Lemke, C. E., A survey of complementarity problems, in variational inequalities and compelmentarity problems, pp. 213-239, R. Q. Cottle, F. Giannessi, and J. L. Lions, editors, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1980.

[18] Mancino, O., and Stampacchia, G., Convex programming and variational inequalities, Journal of Optimization theory and applications 9 (1972) 3-23.

[19] McKelvey, S.C., Partitionable variational inequalities and an application to the market equilibrium problem, Ph. D. thesis, Division of applied Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island, 1989.

[20] Nagurney, A., editor, Advances in equilibrium modeling, Analysis, and Computation, Annals of operations research 44, J. C. Baltzer AG Scientific Publishing Company, Basel, Switzerland, 1993.

[21] Nagurney, A., and Zhang, D., Projected dynamical systems and variational inequalities with applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, 1996.

[22] Qiu, Y., and Magnanti, T. L., Sensitivity analysis for variational inequalities, Mathematics of Operations research 17 (1992) 61-70.

[23] Robinson, S. M., Strongly regular generalized equations, Mathematics of Operations research 5 (1980) 43-62.

[24] Rockafellar, R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[25] Smith, M. J., Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria, Transportation research 13B (1979) 295-304.

[26] Tobin, R. L., Sensitivity analysis for variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications 48 (1986) 191-204.

[27] Zhang, D., and Nagurney, A., On the stability of projected dynamical systems, Journal of Optimization theory and applications 85 (1995) 97-124.