Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων & Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

Διπλωματικη Εργασια

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

του
Βασιλη Βρεττακου

Επιβλέπων: Δ.Τζανετης, τ. Καθηγητης

Αθήνα, 2014

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, στο τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.
Η ολοκλήρωση της θα ήταν αδύνατη χωρίς την πολύτιμη υποστήριξη του καθηγητή μου, τ. Καθηγητή Ε.Μ.Π., Κου Δημήτρη Τζανετή. Θέλω να τον ευχαριστήσω θερμά καθώς με την διδασκαλία του στο μάθημα 'Μαθηματική Προτυποποίηση' με ενέπνευσε για να ασχοληθώ με τον συγκεκριμένο κλάδο στην εργασία μου. Επίσης η συμβολή του ήταν καθοριστική κατά την εκπόνηση της.
Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κο Α. Χαραλαμπόπουλο, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κο Δ. Γκιντίδη και τον Επίκουρο Καθηγητή Κο Ι. Καραφύλλη που δέχθηκαν να είναι στην τριμελή εξεταστική επιτροπή μου.

Επιβλέπων Καθηγητής:

τ. Καθηγητής Δ. Τζανετής

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Αν. Καθηγητής Α. Χαραλαμπόπουλος
Αν. Καθηγητής Δ. Γκιντίδης
Επ. Καθηγητής Ι. Καραφύλλης

Περίληψη

Η εκμετάλευση των πηγών που μας προσφέρει η φύση ήταν πάντα αναπόσπαστο κομμάτι της εξέλιξης του ανθρώπινου γένους όπως και κάθε άλλου ζωικού πληθυσμού. Η ανάγκη για τροφή και βελτίωση των συνθηκών διαβίωσης βασίζεται σε μεγάλο ποσοστό στην άντληση φυσικών πόρων. Όπως είναι λοιπόν επόμενο χρειάζεται κάποια μαθηματική προσέγγιση ώστε να ακολουθείται σωστή πολιτική για την εκμετάλευση των φυσικών πόρων. Αλόγιστη άντληση θα προκαλούσε εξαφάνιση των πηγών και συνεπώς και αφανισμό των πληθυσμών που τις εκμεταλεύονται. Οι φυσικές πηγές μπορούν να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στις ανανεώσιμες και στις μη ανανεώσιμες πηγές.

Σε αυτή την εργασία γίνεται μία προσπάθεια για τον εντοπισμό μαθηματικών μοντέλων που οδηγούν στον σωστό τρόπο με τον οποίο ένας πληθυσμός εκμεταλεύεται μία πηγή προς όφελος του (είτε για την ανάπτυξη του, είτε για οικονομικό κέρδος).
Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία συνοπτική παρουσίαση των μαθηματικών όρων που θα χρησιμοποιηθούν. Εξετάζονται οι έννοιες της μαθηματικής μοντελοποίησης, του δυναμικού προγραμματισμού και της βελτιστοποίησης. Μεγάλη έμφαση δίνεται στην θεωρία ευστάθειας και επίσης γίνεται μία ανάλυση για την λογιστική εξίσωση, την εξίσωση Bellman και την αρχή μεγίστου του Pontryagin.
Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για την βέλτιστη εκμετάλευση μίας ανανεώσιμης πηγής από έναν πληθυσμό. Σε βάθος χρόνου έχουν προταθεί πολλά μαθηματικά πρότυπα για το σύστημα **ανανεώσιμη πηγή - πληθυσμός που την εκμεταλεύεται**. Σε αυτή την εργασία επιλέξαμε το μοντέλο που προτείνουν οι B. Dubey και A. Patra στην διατριβή τους: "A Mathematical Model for Optimal Management and Utilization of a Renewable Resource by Population" το 2012, για το τμήμα μαθηματικών του ινστιτούτου Τεχνολογίας και Επιστήμης στο Pilani, Ινδία. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην λογιστική εξίσωση. Παρουσιάζουμε μία ανάλυση του μοντέλου και των παραμέτρων που οδηγούν σε αυτό, καθώς και την βέλτιστη πολιτική άντλησης που προτείνεται ότι πρέπει να ακολουθήσει ο πληθυσμός κατά την εκμετάλευση της ανανεώσιμης πηγής.
Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο, με την βοήθεια του Δυναμικού Προγραμματισμού, παρουσιάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο για την οικονομική εκμετάλευση μίας μη ανανεώσιμης πηγής. Το μοντέλο αυτό προτείνεται στο βιβλίο 'Applied Computational Economics and Finance' των M. Miranda και P. Fackler.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1 Θεωρία Ευστάθειας

1.1.1 Γενικά

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων και οι μέθοδοι επίλυσης τους είναι αναπόσπαστο κομμάτι της γενικότερης εξέλιξης των μαθηματικών. Ένα χαρακτηριστικό των διαφορικών εξισώσεων του $20^{ου}$ αιώνα αποτέλεσε η δημιουργία γεωμετρικών μεθόδων, ειδικότερα για μη γραμμικές ε-ξισώσεις. Στόχος ήταν η κατανόηση της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων από γεωμετρικής αλλά και από αναλυτικής άποψης.

Τα βασικά ερωτήματα με τα οποία ασχολείται η Ποιοτική Θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι τα εξής:

1. Προϋποθέσεις ύπαρξης λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης
2. Προϋποθέσεις μοναδικότητας της λύσης ενός προβλήματος αρχικών συνθηκών
3. Ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης και συνεχής εξάρτηση της από τις αρχικές συνθήκες.

Το τελευταίο ερώτημα αποτελεί και το αντικείμενο της **Θεωρίας Ευστάθειας**.

Θεμελιωτές της Θεωρίας Ευστάθειας των διαφορικών εξισώσεων υπήρξαν δύο σπουδαίοι μαθηματικοί ο Ρώσος Aleksandr M. Lyapunov (1857 – 1918) και ο Γάλλος Henry Poincare (1854 – 1912). Η έννοια της ευστάθειας σχετίζεται με την πιθανότητα μικρά σφάλματα, που εμφανίζονται στην πορεία της μαθηματικής διαδικασίας, να μπορούν να εξαφανίζονται καθώς η διαδικασία προχωρά. Αντίστροφα αστάθεια προκύπτει αν μικρά σφάλματα τείνουν να αυξηθούν.

1.1.2 Ευστάθεια βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [13], [2] και [9].

Έστω I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, με $t\epsilon I$ και $x : I \to \mathbb{R}$ μία πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1.1}$$

με $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μία δοσμένη πραγματική συνάρτηση. Η εξίσωση 1.1 ονομάζεται βαθμωτή αυτόνομη διαφορική εξίσωση. Βαθμωτή επειδή το x είναι μονοδιάστατο και αυτόνομη επειδή η f δεν εξαρτάται άμεσα από το t. Η συνάρτηση x αποτελεί λύση της 1.1 στο I όταν $\dot{x} = f(x(t))$, $\forall t\epsilon I$. Επίσης πολλές φορές μας ενδιαφέρει μία ειδική λύση της 1.1 η οποία σε κάποια χρονική στιγμή $t_0\epsilon I$ έχει τιμή $x_0 = x(t_0)$. Δηλαδή μας ενδιαφέρει η μελέτη του προβλήματος

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad . \tag{1.2}$$

Το πρόβλημα 1.2 ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών.

Θεώρημα 1.1.1: Αν $f\epsilon C^0(\mathbb{R})$, δηλαδή η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_0\epsilon\mathbb{R}$ και $t_0\epsilon\mathbb{R}$ το πρόβλημα αρχικών τιμών $\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0$ έχει μία λύση $x(t)$. Η λύση αυτή έχει ένα μέγιστο διάστημα ύπαρξης I_{x_0}.
Επιπλέον αν η $f\epsilon C^1(\mathbb{R})$, δηλαδή είναι συνεχής με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, τότε η $x(t)$ είναι μοναδική στο I_{x_0}.

Η λύση $x(t)$ του προβλήματος 1.2 μπορεί να δωθεί και στην μορφή $\phi(t, x_0)$ ώστε να είναι εμφανής η εξάρτηση της από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή $x(t) = \phi(t, x_0)$ και $x_0 = \phi(t_0, x_0)$.

Ορισμός 1.1.2: Το γράφημα της λύσης του προβλήματος 1.2 δηλαδή το σύνολο $\{(t, x(t)) : t\epsilon I_{x_0}\}$ ονομάζεται διαδρομή μέσω του x_0. Η τροχιά του x_0 ορίζεται ως το υποσύνολο $\{x(t) : t\epsilon I_{x_0}\}$ του x-άξονα. Δηλαδή η τροχιά του x_0 είναι η προβολή πάνω στον άξονα x της διαδρομής μέσω του x_0.
Τα γραφήματα των τροχιών στον x-άξονα αποτελούν το πορτραίτο φάσεων της διαφορικής εξίσωσης 1.1.

Ορισμός 1.1.3: Ένα σημείο $x^*\epsilon\mathbb{R}$ θα λέγεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο ή στάσιμο σημείο της διαφορικής εξίσωσης 1.1 αν $f(x^*) = 0$.

Προφανώς όταν το x^* είναι σημείο ισορροπίας τότε η σταθερή συνάρτηση $x(t) = x^*$ αποτελεί μία λύση της 1.1 για όλα τα t και η τροχιά της είναι το ίδιο το x^*.
Θα εισάγουμε τώρα την έννοια της ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας. Διαισθητικά ένα σημείο ισορροπίας x^* είναι ευσταθές αν όλες οι λύσεις που ξεκινούν κοντά στο x^* μένουν κοντά σε αυτό. Επιπλέον αν κοντινές λύσεις τείνουν στο x^* καθώς $t \to +\infty$ τότε το x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Πιο αναλυτικά:

Ορισμός 1.1.4: Ένα σημείο ισορροπίας x^* της 1.1 ονομάζεται
(i) ευσταθές αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε για κάθε x_0 με $|x_0 - x^*| < \delta$, η λύση $x(t) = \phi(t, x_0)$ της 1.1 που διέρχεται από το x_0 για $t = t_0$ να ικανοποιεί την ανισότητα $|x(t) - x^*| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$,
(ii) ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει ένα $m > 0$ τέτοιο ώστε $|x(t) - x^*| \to 0$ καθώς $t \to +\infty$ για όλα τα x_0 με $|x(0) - x^*| < m$ και
(iii) ασταθές όταν δεν είναι ευσταθές.

1.1.3 Ευστάθεια διαφορικών συστημάτων

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [13], [2] και [9].

Έστω το διαφορικό σύστημα της μορφής

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}(t)) \tag{1.3}$$

όπου $t \epsilon J \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \epsilon D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, ...$ και $f : D \to \mathbb{R}^n$. Συστήματα της μορφής 1.3 ονομάζονται αυτόνομα επειδή το διανυσματικό πεδίο του δεύτερου μέλους δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο.
Για τα αυτόνομα διαφορικά συστήματα μπορεί να γενικευτεί το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της παραφράφου 1.1.2 που ισχύει για τις βαθμωτές αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις.

Θεώρημα 1.1.5: Έστω $f : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής όπου $D \subset \mathbb{R}^n$ και $t \epsilon J \subset \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\mathbf{x}_0 \epsilon D$ και $t_0 \epsilon J$ το πρόβλημα αρχικών τιμών $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ έχει μία λύση $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0)$. Η λύση αυτή έχει ένα μέγιστο διάστημα ύπαρξης I_{x_0}.
Επιπλέον αν $f \epsilon C^1(D)$, δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τα $x_1, x_2, ..., x_n$ ($\mathbf{x} \equiv \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$) στο $D \subset \mathbb{R}^n$, τότε η $\mathbf{x}(t)$ είναι μοναδική.

Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \epsilon D$ για το οποίο ισχύει $f(\mathbf{x}^*) = 0$ ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο ή στάσιμο σημείο του συστήματος 1.3. Η λύση $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ είναι προφανώς μία λύση του συστήματος 1.3 που λέγεται στάσιμη λύση ή λύση ισορροπίας.
Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της ευστάθειας κατά Lyapunov για τα αυτόνομα διαφορικά συστήματα.

Ορισμός 1.1.6: Έστω $\mathbf{x}^*$ ένα σημείο ισορροπίας του αυτόνομου διαφορικού συστήματος 1.3. Τότε το $\mathbf{x}^*$ ονομάζεται
(i) ευσταθές αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε η σχέση $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$ να συνεπάγεται ότι $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$,
(ii) ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και επιπλέον ισχύει $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$ και
(iii) ασταθές όταν δεν είναι ευσταθές.

Ορισμός 1.1.7: Αν $\mathbf{x}(t)$ η λύση του συστήματος 1.3 τότε το σύνολο $\{t, \mathbf{x}(t) : t \epsilon J\}$ ορίζει έναν $(n + 1)$-διάστατο χώρο. Το γράφημα της λύσης, δηλαδή η καμπύλη σε αυτόν το χώρο, που διέρχεται από το $\mathbf{x}_0 (= \mathbf{x}(t_0))$ λέγεται διαδρομή του 1.3 μέσω του $\mathbf{x}_0$. Η τροχιά του $\mathbf{x}_0$ ορίζεται ως το υποσύνολο $\{\mathbf{x}(t) : t \epsilon J\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι τροχιές, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, είναι οι προβολές των διαδρομών στον $\mathbb{R}^n$.
Τα γραφήματα των τροχιών στον $\mathbb{R}^n$ αποτελούν τον χώρο φάσεων του συστήματος 1.3.

1.1.4 Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [13], [2], [7], [15], [9] και [11]. Τα σχήματα είναι από το σύγγραμα [7].

Γενική θεωρία

Έστω το γραμμικό αυτόνομο διαφορικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές

$$\mathbf{x}'(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \tag{1.4}$$

όπου A πίνακας σταθερών nxn με $|A| \neq 0$ και $t\epsilon\mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι η αρχή αποτελεί σημείο ισορροπίας του συστήματος 1.4.
Το επόμενο θεώρημα εξετάζει την ευστάθεια της μηδενικής λύσης (επομένως και όλων των λύσεων) του συστήματος.

Θεώρημα 1.1.8: Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = 0$ είναι
(i) ασυμπτωτικά ευσταθές αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του A είναι όλα αρνητικά,
(ii) ευσταθές αν ο A έχει ένα τουλάχιστον ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών πολλαπλότητας 1 και για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ισχύει η περίπτωση (i) και
(iii) ασταθές σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Επίπεδα Αυτόνομα Γραμμικά Συστήματα

Έστω το δισδιάστατο αυτόνομο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &\equiv \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \tfrac{dx_2}{dt} &\equiv \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

όπου τα $a_{i,j}$ σταθεροί όροι. Το 1.5 είναι γραμμικό επειδή οι όροι ως προς τα $x_1, x_2, \dot{x_1}$ και $\dot{x_2}$ είναι όλοι γραμμικοί και αυτόνομο επειδή τα δεξιά μέλη δεν περιέχουν την ανεξάρτητη μεταβλητή t.
Το σύστημα 1.5 μπορεί να γραφεί και σε μορφή πίνακα

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1.6}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ και $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Έστω το σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1(0), x_2(0))$. Τότε κάθε λύση του συστήματος 1.5 ή του 1.6, που διέρχεται από αυτό το σημείο παριστάνει μια καμπύλη στο επίπεδο Ox_1x_2. Η λύση συμβολίζεται με $\mathbf{x}(t) = \phi(t, \mathbf{x}_0) = (x_1(t), x_2(t))$. Οι καμπύλες των λύσεων ονομάζονται **τροχιές** και ο χώρος $\mathbb{R}^2$ **επίπεδο φάσεων** ή **φασικός χώρος**.
Το σύνολο των λύσεων του συστήματος στον φασικό χώρο $\mathbb{R}^2$ καλείται **διάγραμμα φάσης** ή **φασικό πορτραίτο**.
Επίσης λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, η θεωρία ύπαρξης και μοναδικότητας μας εξασφαλίζει ότι οι τροχιές δεν τέμνονται. Τέλος στα κρίσιμα σημεία, όπως είναι φανερό, δεν ορίζεται η παράγωγος $\frac{dx_2}{dx_1}$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως από τα κρίσιμα σημεία μπορούν να ξεκινούν ή να καταλήγουν περισσότερες από μία τροχιές.

Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι για κάθε πίνακα A, 2×2, υπάρχει ένας πίνακας Q με $|Q| \neq 0$ ώστε ο πίνακας $J = Q^{-1}AQ$ να παίρνει μία από τις παρακάτω μορφές Jordan

$$\begin{gathered} J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \\ J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1.7}$$

όπου τα $\lambda_{0,1,2}, a, b$, και μ είναι πραγματικές σταθερές.
Έτσι το σύστημα 1.6, με την εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, μπορεί να πάρει την μορφή

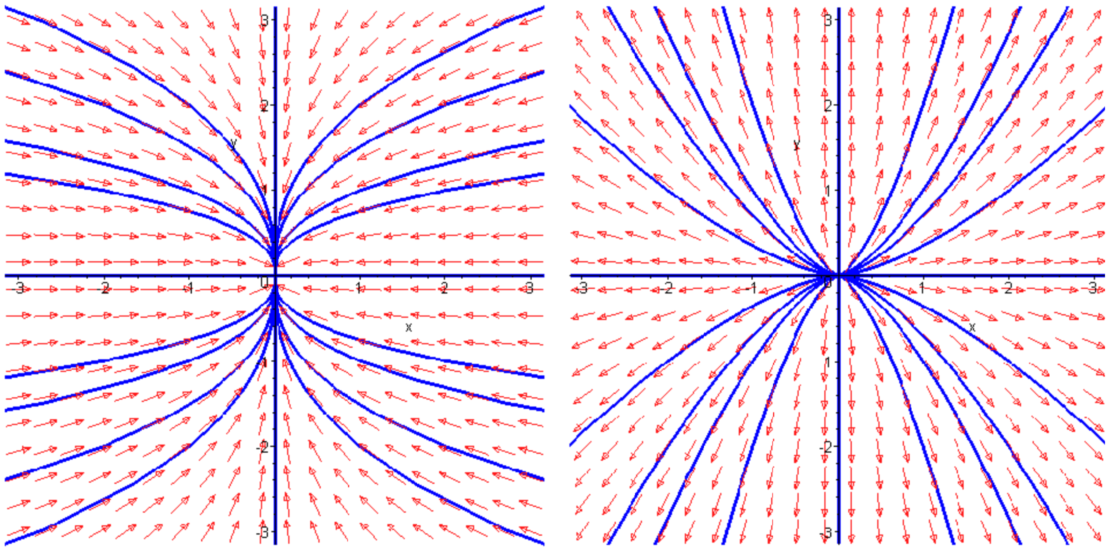
$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} \tag{1.8}$$

με τον J να έχει την μορφή ενός από τους παραπάνω 4 πίνακες. Ο πίνακας J_1 έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές, ο πίνακας J_2 έχει μιγαδικές ιδιοτιμές $a \pm ib$, και οι πίνακες J_3 και J_4 έχουν μια διπλή ιδιοτιμή.
Συνεπώς για να μελετήσουμε την συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος 1.6 αρκεί να εξετάσουμε την συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος 1.8. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

(α) Ιδιοτιμές πραγματικές και άνισες: Τότε το σύστημα 1.8 παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= \lambda_1 y_1 \\ \dot{y_2} &= \lambda_2 y_2 \end{aligned}$$

άρα οι λύσεις του είναι $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ και $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ όπου $c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R}$.
(i) Αν $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ όταν δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές τότε το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος** (σχήμα 1.1).
(ii) Αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ όταν δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι θετικές τότε το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασταθής κόμβος** (σχήμα 1.1).
(iii) Αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ όταν δηλαδή η μία ιδιοτιμή είναι θετική και η άλλη αρνητική τότε το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **σημείο σάγματος** (σχήμα 1.2).

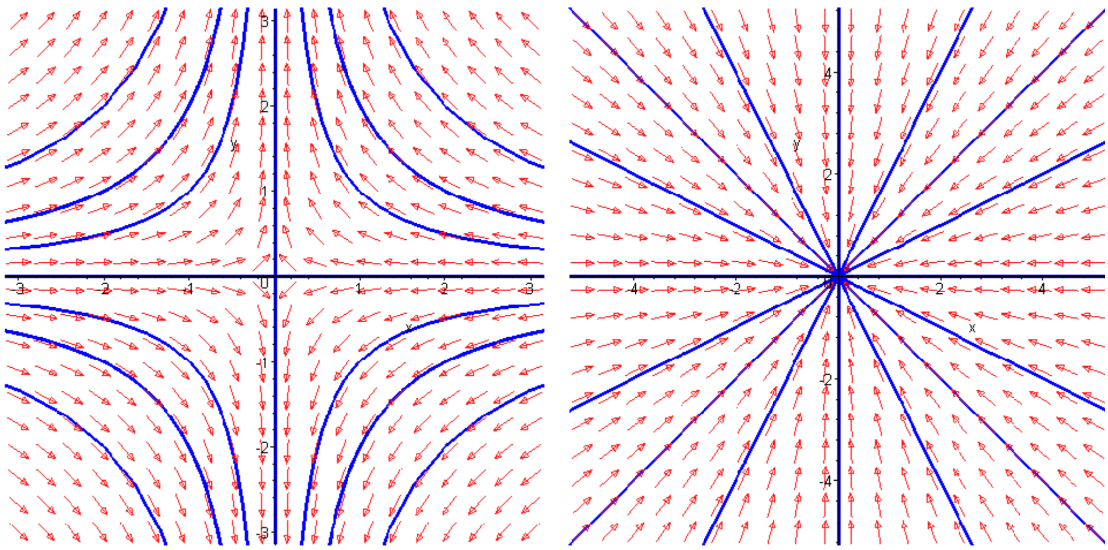


Σχήμα 1.1: **Αριστερά:** Ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος, **Δεξιά:** Ασταθής κόμβος, [7].

(β) Ίσες ιδιοτιμές:
(i) Αν ο J είναι διαγώνιος τότε το σύστημα 1.8 παίρνει την μορφή

$$\dot{y_1} = \lambda_0 y_1$$
$$\dot{y_2} = \lambda_0 y_2$$

με λύσεις $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_0 t}$ και $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_0 t}$ όπου $c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R}$. Τότε
• αν η ιδιοτιμή είναι αρνητική ($\lambda_0 < 0$) το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές άστρο** (σχήμα 1.2) και
• αν η ιδιοτιμή είναι θετική ($\lambda_0 > 0$) το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασταθές άστρο**.



Σχήμα 1.2: **Αριστερά:** Σημείο σάγματος, **Δεξιά:** Ασυμπτωτικά ευσταθές άστρο, [7].

(ii) Αν ο J δεν είναι διαγώνιος τότε το σύστημα 1.8 έχει την μορφή

$$\dot{y_1} = \lambda_0 y_1 + \mu y_2$$
$$\dot{y_2} = \lambda_0 y_2$$

οπότε οι λύσεις είναι $y_1(t) = (c_1 + t\mu c_2)e^{\lambda_0 t}$ και $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_0 t}$ με $c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R}$. Τότε
• αν η ιδιοτιμή είναι αρνητική ($\lambda_0 < 0$) το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής νόθος κόμβος** (σχήμα 1.3) και
• αν η ιδιοτιμή είναι θετική ($\lambda_0 > 0$) το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασταθής νόθος κόμβος**.

(γ) Μιγαδικές ιδιοτιμές ($\lambda = a \pm bi$)**:**
Το σύστημα 1.8 θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= ay_1 + by_2 \\ \dot{y_2} &= -by_1 + ay_2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Το μετατρέπουμε σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $y_1 = r\cos\theta$ και $y_2 = r\sin\theta$.
Παραγωγίζουμε ως προς t και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y_2} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned} \tag{1.10}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με $y_1 = r\cos\theta$ και την δεύτερη με $y_2 = r\sin\theta$ και έχουμε

$$\begin{aligned} y_1\dot{y_1} &= r\dot{r}\cos^2\theta - r^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\ y_2\dot{y_2} &= r\dot{r}\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{1.11}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις της 1.11 παίρνουμε

$$r\dot{r} = y_1\dot{y_1} + y_2\dot{y_2} \quad . \tag{1.12}$$

Η 1.12 γράφεται:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= y_1\dot{y_1} + y_2\dot{y_2} \\ r\dot{r} &= y_1(ay_1 + by_2) + y_2(-by_1 + ay_2) \\ r\dot{r} &= a(y_1^2 + y_2^2) \\ r\dot{r} &= ar^2 \\ \dot{r} &= ar \quad . \end{aligned}$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των 1.10 με $y_2 = r\sin\theta$ και την δεύτερη με $y_1 = r\cos\theta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y_2\dot{y_1} &= r\dot{r}\sin\theta\cos\theta - r^2\dot{\theta}\sin^2\theta \\ y_1\dot{y_2} &= r\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta \end{aligned} \tag{1.13}$$

και αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη από την δεύτερη παίρνουμε

$$r^2\dot{\theta} = y_1\dot{y_2} - y_2\dot{y_1} \quad . \tag{1.14}$$

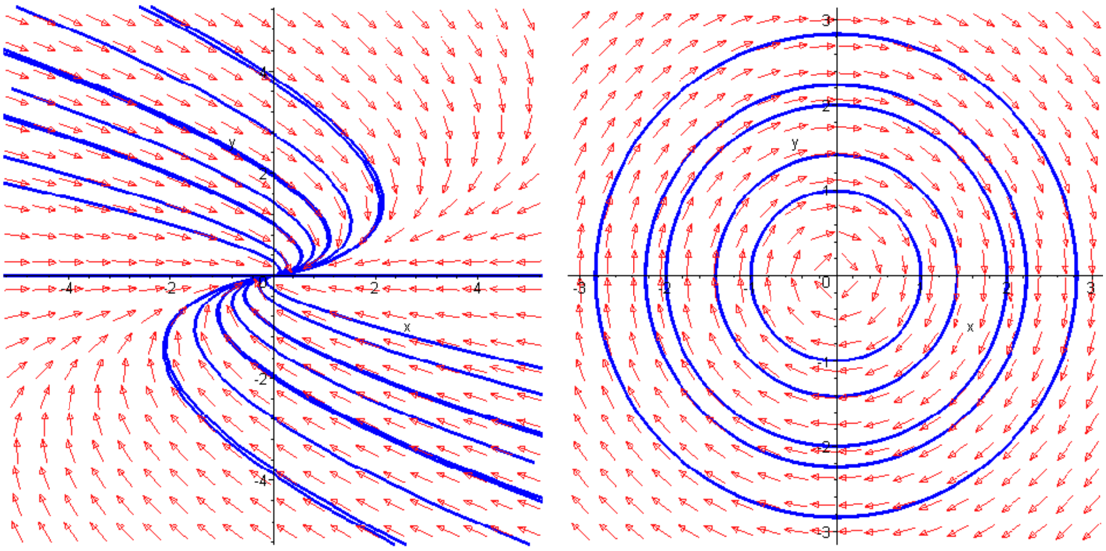
Η 1.14 γράφεται

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= y_1\dot{y_2} - y_2\dot{y_1} \\ r^2\dot{\theta} &= y_1(-by_1 + ay_2) - y_2(ay_1 + by_2) \\ r^2\dot{\theta} &= -b(y_1^2 + y_2^2) \\ r^2\dot{\theta} &= -br^2 \\ \dot{\theta} &= -b \quad . \end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα 1.9 γίνεται

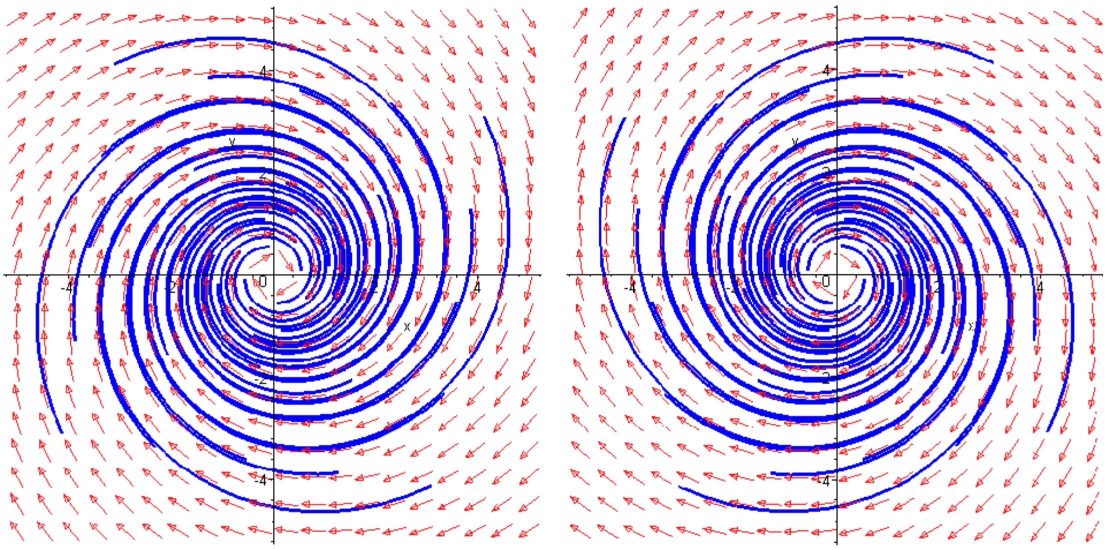
$$\begin{aligned} \dot{r} &= ar \\ \dot{\theta} &= -b \end{aligned} \tag{1.15}$$

που έχει λύσεις $r(t) = c_1 e^{at}$ και $\theta(t) = -bt + c_2$ με $c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R}$. Οπότε
(i) Αν $a = 0$, δηλαδή φανταστικές ιδιοτιμές, τότε το κρίσιμο σημείο καλείται **κέντρο** και οι τροχιές αποτελούνται από ομόκεντρους κύκλους, αφού $\dot{r} = 0$ (σχήμα 1.3),



Σχήμα 1.3: **Αριστερά:** Ασυμπτωτικά ευσταθής νόθος κόμβος, **Δεξιά:** Κέντρο, [7].

(ii) αν $a < 0$ το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής εστία** (σχήμα 1.4) και
(iii) αν $a > 0$ το κρίσιμο σημείο ονομάζεται **ασταθής εστία** (σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4: **Αριστερά:** Ασυμπτωτικά ευσταθής εστία, **Δεξιά:** Ασταθής εστία, [7].

Μία συνοπτική παρουσίαση με τις πληροφορίες που προέκυψαν για το σύστημα 1.6 δίνεται στον πίνακα 1.16.

Ιδιοτιμές	**Είδος Κρίσιμου Σημείου**	**Είδος Ευστάθειας**
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Κόμβος	Ασυμπτωτικά ευσταθής
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Κόμβος	Ασταθής
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Σημείο σάγματος	Ασταθές
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Νόθος κόμβος	Ασυμπτωτικά ευσταθής
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Νόθος κόμβος	Ασταθής
$\lambda_{1,2} = a \pm bi$	Εστία	
$a < 0$		Ασυμπτωτικά ευσταθής
$a > 0$		Ασταθής
$\lambda_{1,2} = \pm bi$	Κέντρο	Ευσταθές

(1.16)

Η ανάλυση που έγινε σε αυτή την ενότητα αφορά μόνο σε γραμμικά συστήματα δεύτερης τάξης της μορφής $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, των οποίων οι λύσεις αναπαρίστανται γεωμετρικά σαν καμπύλες του $\mathbb{R}^2$. Παρόμοια αλλά πιο πολύπλοκη ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα n-οστής τάξης, δηλαδή ο πίνακας συντελεστών A να είναι $n \times n$. Τότε οι λύσεις θα είναι καμπύλες σε έναν n-διάστατο χώρο φάσεων.

1.1.5 Ευστάθεια σχεδόν γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο - Γραμμικοποίηση

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [13], [2] και [9].

Έστω το μη-γραμμικό αυτόνομο σύστημα στο επίπεδο

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1.17}$$

για το οποίο ισχύει $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Δηλαδή η αρχή των αξόνων O(0,0) αποτελεί κρίσιμο σημείο του.
Έστω επίσης ότι το σύστημα 1.17 μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + f_1(x,y), \quad a, b\epsilon\mathbb{R} \\ y' &= cx + dy + g_1(x,y), \quad c, d\epsilon\mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.18}$$

ώστε να ισχύει

$$\lim_{r \to 0} \frac{f_1(x,y)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{g_1(x,y)}{r} = 0 \tag{1.19}$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ορισμός 1.1.9: Όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις 1.18 και 1.19 για το σύστημα 1.17 τότε το σύστημα ονομάζεται σχεδόν γραμμικό σύστημα γύρω από το σημείο (0,0).
Επίσης το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \tag{1.20}$$

αποτελεί την γραμμικοποίηση του συστήματος 1.17 γύρω από την αρχή (0,0).

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που το κρίσιμο σημείο δεν είναι η αρχή των αξόνων μπορούμε να οδηγηθούμε σε παρόμοια αποτελέσματα με χρήση τοπικών συντεταγμένων.
Έστω για παράδειγμα το (ξ,η) ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος 1.17. Τότε με τον μετασχηματισμό των μεταβλητών $x_1 = x - \xi$ και $y_1 = y - \eta$, το σύστημα 1.17 γίνεται

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_1 + \xi, y_1 + \eta) = F(x_1, y_1) \\ y_1' &= g(x_1 + \xi, y_1 + \eta) = G(x_1, y_1) \end{aligned} \tag{1.21}$$

του οποίου το (0,0) είναι κρίσιμο σημείο. Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί η προηγούμενη διαδικασία στο σύστημα 1.21.

Ένας τρόπος προσδιορισμού της γραμμικοποίησης ενός σχεδόν γραμμικού συστήματος είναι με την χρήση του αναπτύγματος Taylor.
Έστω (ξ,η) ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος 1.17 και έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι διαφορίσιμες σε μια γειτονιά του (ξ,η). Τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\xi,\eta) + (x-\xi)f_x(\xi,\eta) + (y-\eta)f_y(\xi,\eta) + R_1(x,y) \\ g(x,y) &= g(\xi,\eta) + (x-\xi)g_x(\xi,\eta) + (y-\eta)g_y(\xi,\eta) + R_2(x,y) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Τα υπόλοιπα $R_i(x,y)$ με $i = 1,2$ ικανοποιούν την σχέση

$$\lim_{r\to 0} \frac{R_i(x,y)}{r} = 0, \quad i = 1,2 \tag{1.23}$$

όπου $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, επίσης με την εισαγωγή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων $x_1 = x - \xi$, $y_1 = y - \eta$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $f(\xi,\eta) = g(\xi,\eta) = 0$, αφού το (ξ,η) είναι κρίσιμο σημείο του συστήματος, το σύστημα 1.17 γίνεται

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 f_x(\xi,\eta) + y_1 f_y(\xi,\eta) + R_1(x_1+\xi, y_1+\eta) \\ y_1' &= x_1 g_x(\xi,\eta) + y_1 g_y(\xi,\eta) + R_2(x_1+\xi, y_1+\eta) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Συνεπώς αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις 1.18 και 1.19, το σύστημα 1.17 είναι σχεδόν γραμμικό και σύμφωνα με τους αρχικούς συμβολισμούς θα έχουμε $a = f_x(\xi,\eta)$, $b = f_y(\xi,\eta)$, $c = g_x(\xi,\eta)$ και $d = g_y(\xi,\eta)$. Οπότε το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το κρίσιμο σημείο (ξ,η) θα είναι

$$\begin{aligned} x_1' &= f_x(\xi,\eta)\cdot x_1 + f_y(\xi,\eta)\cdot y_1 \\ y_1' &= g_x(\xi,\eta)\cdot x_1 + g_y(\xi,\eta)\cdot y_1 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Ορισμός 1.1.10: Αν για το κρίσιμο σημείο (ξ,η) του συστήματος 1.17 ισχύει

$$\begin{vmatrix} f_x(\xi,\eta) & f_y(\xi,\eta) \\ g_x(\xi,\eta) & g_y(\xi,\eta) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.26}$$

τότε αυτό ονομάζεται υπερβολικό κρίσιμο σημείο του 1.17.

Θεώρημα 1.1.11:(Γραμμικοποίησης) Έστω ότι το (ξ,η) αποτελεί υπερβολικό κρίσιμο σημείο του σχεδόν γραμμικού συστήματος 1.17.
Τότε σε μια γειτονιά του (ξ,η) το σύστημα 1.17 και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα 1.25 έχουν τοπολογικά ισοδύναμα επίπεδα φάσεων. Δηλαδή το ίδιο είδος ευστάθειας, εκτός από την περίπτωση που το (ξ,η) αποτελεί κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα 1.25.

1.1.6 Άμεση μέθοδος ή 2^η μέθοδος Lyapunov

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [13], [2], [15], [5] και [9].

Γενικά

Η μέθοδος γραμμικοποίησης που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο δίνει χρήσιμες πληροφορίες για την ευστάθεια των κρίσιμων σημείων των σχεδόν γραμμικών συστημάτων. Έχει όμως κάποια μειονεκτήματα, όπως να μην αποφαίνεται όταν οι ιδιοτιμές του πίνακα του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι φανταστικές. Όταν δηλαδή, όπως είδαμε και στο θεώρημα 1.1.11, το κρίσιμο σημείο αποτελεί κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.
Σε αυτές τις περιπτώσεις, αλλά και σε όλες τις υπόλοιπες, έχει εφαρμογή μια άλλη μέθοδος που ονομάζεται άμεση μέθοδος ή 2^η μέθοδος Lyapunov. Αναφέρεται ως άμεση επειδή για την εκτέλεση της δεν απαιτείται γνώση της λύσης του διαφορικού συστήματος και επίσης εφαρμόζεται απευθείας πάνω στο ίδιο το σύστημα. Η τεχνική αυτή είναι αρκετά ισχυρή και εξασφαλίζει μια πιο γενική μορφή πληροφοριών. Τα συμπεράσματα σχετικά με την ευστάθεια ή την αστάθεια ενός κρίσιμου σημείου του διαφορικού συστήματος προκύπτουν από την κατασκευή ενός κατάλληλου βοηθητικού συναρτησιακού. Η επιλογή του συναρτησιακού αυτού, είναι μία δύσκολη διαδικασία που απαιτεί αρκετή εμπειρία επειδή δεν υπάρχει σαφής τρόπος εντοπισμού του. Στην περίπτωση που το διαφορικό σύστημα αποτελεί πρότυπο κάποιου φυσικού προβλήματος το βοηθητικό συναρτησιακό σχετίζεται με την ολική ενέργεια αυτού του φυσικού προβλήματος.
Τα κυριότερα χαρακτηριστικά της άμεσης μεθόδου ή δεύτερης μεθόδου Lyapunov είναι τα εξής:

1. Για την εφαρμογή της μεθόδου δεν χρειάζεται η γνώση της λύσης του διαφορικού συστήματος. Επίσης δεν απαιτείται η γνώση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης, αν ορίζεται.

2. Σε αντίθεση με την μέθοδο της γραμμικοποίησης, το είδος των πληροφοριών που εξασφαλίζονται είναι ολικού και όχι τοπικού χαρακτήρα.

3. Η μέθοδος εφαρμόζεται με την ίδια επιτυχία και σε μη αυτόνομα συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

4. Ένα σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι η δυσκολία επιλογής κατάλληλου συναρτησιακού, ειδικά στην περίπτωση που το διαφορικό σύστημα δεν σχετίζεται άμεσα με κάποιο φυσικό πρόβλημα.

Θεωρήματα Ευστάθειας και Αστάθειας κατά Lyapunov

Έστω το αύτονομο διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \quad \mu\varepsilon \;\; \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \;\; f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

όπου $x \epsilon D \subset \mathbb{R}^n$ και η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο πεδίο $D \subset \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης $\mathbf{x}^*$ ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος 1.27.

Ορισμός 1.1.12: Η συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται θετικά ορισμένη σε μια περιοχή S του κρίσιμου σημείου $\mathbf{x}^*$, αν $V(\mathbf{x}^*) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \epsilon S \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ και $V(\mathbf{x}^*) = 0$.
Η V ονομάζεται θετικά ημιορισμένη σε μια περιοχή S του $\mathbf{x}^*$, αν $V(\mathbf{x}^*) \geq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \epsilon S \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ και $V(\mathbf{x}^*) = 0$.
Ανάλογοι είναι οι ορισμοί και της αρνητικά ορισμένης και αρνητικά ημιορισμένης συνάρτησης.

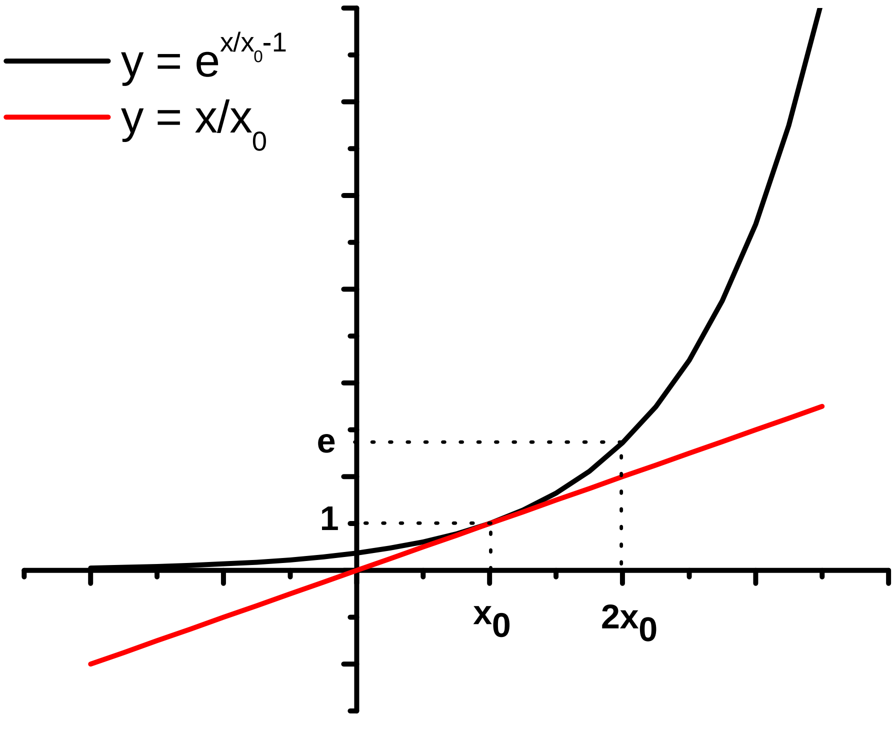
Παραδείγματα: **1)** Έστω ότι η αρχή (0,0) αποτελεί κρίσιμο σημείο για ένα αυτόνομο διαφορικό σύστημα στο επίπεδο. Τότε η συνάρτηση $V_1(x, y) = x^2 + y^2$ είναι θετικά ορισμένη παντού.
Πράγματι $V_1(0, 0) = 0$ και $V_1(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Επίσης η συνάρτηση $V_2(x, y) = -x^4 - y^6$ είναι αρνητικά ορισμένη παντού αφού $V_2(0, 0) = 0$ και $V_2(x, y) < 0$, $\forall (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
2) Έστω ότι το σημείο (1,2) αποτελεί κρίσιμο σημείο ενός αυτόνομου συστήματος στο επίπεδο. Τότε η συνάρτηση $V(x, y) = (x - 1)^2 + y^4(y - 2)^2$ είναι θετικά ημιορισμένη παντού.
Έχουμε $V(1, 2) = 0$ και $V(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 2)\}$ αφού και $V(1, 0) = 0$.
3) Έστω ότι το σημείο (x_0, y_0) αποτελεί κρίσιμο σημείο για ένα αυτόνομο διαφορικό σύστημα στο επίπεδο, με $x_0, y_0 > 0$.
Τότε το συναρτησιακό $V(x, y) = (x - x_0 - x_0 \ln \frac{x}{x_0}) + (y - y_0 - y_0 \ln \frac{y}{y_0})$ είναι θετικά ορισμένο στο πρώτο τεταρτημόριο.
Πράγματι έχουμε $V(x_0, y_0) = 0$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $V(x, y) > 0$, για κάθε $(x, y) \epsilon \mathbb{R}^{+2} \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Ισοδύναμα αρκεί να δειχθεί ότι

$$\begin{cases} x - x_0 - x_0 \ln \frac{x}{x_0} > 0, \quad \forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \qquad \kappa\alpha\iota \\ y - y_0 - y_0 \ln \frac{y}{y_0} > 0, \quad \forall y \epsilon \mathbb{R} \setminus \{y_0\} \end{cases} \tag{1.28}$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
x - x_0 - x_0 \ln \frac{x}{x_0} &> 0 \\
x - x_0 &> x_0 \ln \frac{x}{x_0} \\
\frac{x - x_0}{x_0} &> \ln \frac{x}{x_0} \\
e^{\frac{x}{x_0} - 1} &> \frac{x}{x_0}
\end{aligned}
$$

που ισχύει όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.5 για κάθε $x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.



Σχήμα 1.5: Παράδειγμα 3

Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη ανισότητα της 1.28. Συνεπώς έχουμε ότι $V(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ και $V(x_0, y_0) = 0$ άρα το συναρτησιακό V είναι θετικά ορισμένο παντού.

Θεώρημα 1.1.13: Η συνάρτηση $V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν

$$a > 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad 4ac - b^2 > 0 \quad , \tag{1.29}$$

και αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν

$$a < 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad 4ac - b^2 > 0 \quad . \tag{1.30}$$

Το παραπάνω είναι ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για την κατασκευή θετικών ή αρνητικών ορισμένων συναρτησιακών.

Ορισμός 1.1.14: Η ολική παράγωγος της συνάρτησης $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κατά μήκος της τροχιάς του αυτόνομου διαφορικού συστήματος 1.27, που αντιστοιχεί σε μια λύση του $\phi(t)$, είναι

$$\dot{V}(\phi(t)) = \frac{dV(\phi(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \quad . \tag{1.31}$$

Παρατήρηση: Έστω το αυτόνομο διαφορικό σύστημα στο επίπεδο

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1.32}$$

και έστω ότι οι τροχιές του περιγράφονται από τις συναρτήσεις $\{x = \phi_1(t), y = \phi_2(t)\}$. Τότε μία λύση του θα είναι η $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$. Οπότε η ολική παράγωγος μιας συνάρτησης $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος, που αντιστοιχούν στην λύση $\phi(t)$, θα είναι

$$\dot{V}(\phi(t)) = \frac{dV(\phi(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y) \quad . \tag{1.33}$$

Όπως βλέπουμε δηλαδή η ολική παράγωγος της V μπορεί να προσδιοριστεί από το σύστημα και την συνάρτηση V, χωρίς να είναι απαραίτητη η γνώση των λύσεων του συστήματος.

Θεώρημα 1.1.15:(Ευστάθειας κατά Lyapunov) Έστω $\mathbf{x}^*$ ένα κρίσιμο σημείο του αυτόνομου διαφορικού συστήματος 1.27, δηλαδή $f(\mathbf{x}^*) = 0$. Έστω επίσης μία συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη σε μια περιοχή S του κρίσιμου σημείου $\mathbf{x}^*$. Τότε
(i) αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη στην S, η λύση $\mathbf{x}^*(t)$ είναι ευσταθής και
(ii) αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη στην S, η λύση $\mathbf{x}^*(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Τα συναρτησιακά που πληρούν τις προϋποθέσεις της περίπτωσης (i) του παραπάνω θεωρήματος ονομάζονται **ασθενή συναρτησιακά Lyapunov**, ενώ αυτά που πληρούν τις προϋποθέσεις της περίπτωσης (ii) ονομάζονται **συναρτησιακά Lyapunov**.
Επίσης μπορεί να προσδιοριστεί μία περιοχή S, γύρω από το κρίσιμο σημείο $\mathbf{x}^*$, έτσι ώστε όλες οι λύσεις που ξεκινούν από αυτή την περιοχή να είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Μία τέτοια περιοχή S ονομάζεται πεδίο ασυμπτωτικής ευστάθειας ή **πεδίο έλξης** του συστήματος.
Όπως είναι φυσικό ο προσδιορισμός του πεδίου έλξης εξαρτάται άμεσα από το συναρτησιακό Lyapunov που έχει επιλεχθεί. Όταν το πεδίο έλξης είναι όλο το $\mathbb{R}^n$, τότε το σύστημα ονομάζεται **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές**.

Θεώρημα 1.1.16:(Αστάθειας κατά Lyapunov) Έστω $\mathbf{x}^*$ ένα κρίσιμο σημείο του αυτόνομου διαφορικού συστήματος 1.27, δηλαδή $f(\mathbf{x}^*) = 0$. Έστω επίσης μία συνάρτηση $V(\mathbf{x})$, συνεχώς διαφορίσιμη σε μια περιοχή S του κρίσιμου σημείου $\mathbf{x}^*$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες
(i) $V(\mathbf{x}^*) = 0$,
(ii) η $\dot{V}(\mathbf{x})$ είναι θετικά ορισμένη και
(iii) σε κάθε περιοχή του $\mathbf{x}^*$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\mathbf{x}$ για το οποίο $V(\mathbf{x}) > 0$,
τότε η λύση $\mathbf{x}(t)$ είναι ασταθής.

1.2 Μαθηματική Προτυποποίηση

1.2.1 Γενικά

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [16] και [10].

Μαθηματικό μοντέλο είναι η περιγραφή ενός συστήματος με την βοήθεια των μαθηματικών. Με την χρησιμοποίηση δηλαδή μαθηματικής γλώσσας και εννοιών. Η διαδικασία κατασκευής ενός μαθηματικού μοντέλου ονομάζεται **μαθηματική προτυποποίηση** ή μαθηματική μοντελοποίηση. Η μαθηματική προτυποποίηση βρίσκει εφαρμογές σε όλα τα πεδία των επιστημών όπως στις φυσικές επιστήμες (φυσική, βιολογία, γεωλογία), στις κοινωνικές επιστήμες (ψυχολογία, κοινωνιολογία,), στην οικονομία, οικολογία, μηχανική και σε πολλούς άλλους τομείς. Σκοπός ενός μαθηματικού μοντέλου είναι να βοηθήσει στη κατανόηση των παραμέτρων και των στοιχείων ενός συστήματος, αλλά και να κάνει πρόβλεψη για την μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος που μελετά. Τα μοντέλα αποτελούνται από μεταβλητές και μαθηματικές σχέσεις (αλγεβρικές σχέσεις, τελεστές, διαφορικές εξισώσεις κ.λ.π.) και ανάλογα την δομή τους και το σύστημα που εξετάζουν μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες κατηγορίες.
• Ντετερμινιστικά και στοχαστικά: Ντετερμινιστικό μοντέλο είναι αυτό του οποίου οι μεταβλητές είναι καθορισμένες από τις παραμέτρους του μοντέλου και από προηγούμενες καταστάσεις αυτών των μεταβλητών. Αντίθετα ένα μοντέλο είναι στοχαστικό όταν χαρακτηρίζεται από τυχαιότητα και οι μεταβλητές του δεν περιγράφονται από συγκεκριμένες τιμές αλλά από κατανομές πιθανοτήτων. Ντετερμινιστικά είναι τα μοντέλα που περιγράφουν φυσικούς νόμους ή έχουν εφαρμογές στην μηχανική ενώ παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων αποτελούν οι μαρκοβιανές αλυσίδες και οι τυχαίοι περίπατοι.
• Διακριτά και συνεχή: Ένα διακριτό μοντέλο αντιμετωπίζει τις μεταβλητές του με διακριτό τρόπο, όπως για παράδειγμα τον χρόνο ανά έτη. Σε ένα συνεχές μοντέλο οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν τιμές από τον άξονα των πραγματικών αριθμών, να εκφράζουν για παράδειγμα χρόνο, ταχύτητα ή θερμοκρασία.
• Στατικά και δυναμικά: Σε ένα δυναμικό μοντέλο προβλέπονται οι μεταβολές του συστήματος με την πάροδο του χρόνου και καθώς το σύστημα αλλάζει καταστάσεις. Τα στατικά όμως μοντέλα εκφράζουν συστήματα που βρίσκονται σε ισορροπία και έτσι είναι χρονικά ανεξάρτητα. Τα δυναμικά μοντέλα στη πλειονότητα τους, περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις.
Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να πάρουν πολλές μορφές και η επιτυχία τους είναι άμεση συνέπεια του πόσο καλά είναι προσαρμοσμένα στην φύση του προβλήματος που μελετάνε. Τρία είναι τα βασικά βήματα που ακολουθούνται για την κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου. Πρώτον εξετάζουμε τις φυσικές ιδιαιτερότητες του προβλήματος.

Στην συνέχεια εκφράζουμε αυτές τις ιδιαιτερότητες και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος σε μαθηματική μορφή και τέλος συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με πειραματικά δεδομένα. Οι μέθοδοι στις οποίες βασιζόμαστε για την κατασκευή ενός μαθηματικού προτύπου είναι πολλές όπως φυσικές αρχές, ασυμπτωτική ανάλυση, διαστατικός έλεγχος και θεωρία διαταραχών.

1.2.2 Πληθυσμιακά μοντέλα - Λογιστική εξίσωση

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [16] και [10].

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο η μαθηματική προτυποποίηση έχει εφαρμογές σε όλες τις επιστήμες. Μία από τις πιο διαδεδομένες της μορφές είναι τα πληθυσμιακά πρότυπα. Τα μοντέλα αυτά μελετάνε την εξέλιξη ενός πληθυσμού μέσα στον χρόνο. Η αναζήτηση τέτοιου είδους μοντέλων ήταν από τα πρώτα χρόνια της μαθηματικής προτυποποίησης μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της. Κατά την εξέλιξη της μαθηματικής προτυποποίησης έχουν δημιουργηθεί πολλά πληθυσμιακά πρότυπα. Συνεπώς ανάλογα το είδος που μελετάται, και τις φυσικές του ιδιαιτερότητες, γίνεται επιλογή του κατάλληλου μοντέλου αλλά και οι κατάλληλες τροποποιήσεις στο μοντέλο αυτό. Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες πληθυσμιακών προτύπων όπως τα πληθυσμιακά μοντέλα ενός είδους, τα μοντέλα αλληλεπιδρώντων πληθυσμών, τα μοντέλα θηρευτή θηράματος, συμβίωσης δύο ή περισσοτέρων ειδών και πολλά άλλα. Κάποια από τα πιο διαδεδομένα πληθυσμιακά πρότυπα είναι η λογιστική εξίσωση, το μοντέλο θηρευτή θηράματος Lotka-Voltera και ο μαλθουσιανός ή εκθετικός νόμος πληθυσμιακής ανάπτυξης.

Λογιστική εξίσωση

Η Λογιστική εξίσωση σαν μαθηματικό πληθυσμιακό πρότυπο εισήχθη το 1838 από τον Βέλγο μαθηματικό Pierre-Francois Verhulst (1804-1849). Η προσπάθεια του ήταν να μελετήσει την εξέλιξη ενός πληθυσμού με την πάροδο του χρόνου. Οι λογικές παραδοχές που οδηγούν στην εξαγωγή του λογιστικού μοντέλου είναι οι εξής.
Έστω $P \equiv P(t)$ ο πληθυσμός του προς εξέταση είδους. Όπως είναι λογικό ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος του πληθυσμού, δηλαδή

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad k > 0 \quad . \tag{1.34}$$

Επίσης είναι ανάλογος της διαθέσιμης τροφής, η οποία είναι σταθερή μείον την κατανάλωση που κάνει ο πληθυσμός δηλαδή $A - B \cdot P$ με $A, B > 0$. Άρα έχουμε

$$\frac{dP}{dt} = kP(A - B \cdot P) \quad . \tag{1.35}$$

Τέλος αν συμπεριλάβουμε και τους θανάτους που είναι ανάλογοι του πληθυσμού το μοντέλο παίρνει την μορφή

$$\frac{dP}{dt} = kP(A - B \cdot P) - C \cdot P \tag{1.36}$$

με $k, A, B, C > 0$. Με πράξεις η 1.36 γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= kP(A - B \cdot P) - C \cdot P \\ &= kBP(\frac{A}{B} - P - \frac{C}{kB}) \\ &= kBP(\frac{kA - C}{kB} - P) \\ &= rP(1 - \frac{P}{R}) \end{aligned}$$

που αποτελεί το λογιστικό πληθυσμιακό πρότυπο.
Όπως φαίνεται τελικά στο μοντέλο η μεταβολή του πληθυσμού είναι ανάλογη του πληθυσμού, αλλά υπάρχει κι ένας όρος που προκαλεί μείωση στον πληθυσμό και είναι ανάλογος του P^2. Ξέρουμε ότι P^2 είναι ο στατιστικός μέσος του αριθμού τυχαίων συναντήσεων δύο μελών του πληθυσμού. Ο όρος αυτός εκφράζει ανταγωνισμό μεταξύ των μελών του πληθυσμού. Συνεπώς είναι φυσιολογικό να προκαλεί μείωση στον πληθυσμό κατά τις τυχαίες συναντήσεις των μελών του. Σαν ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε πως κάθε μέλος έχει τον προσωπικό του ζωτικό χώρο που επηρρεάζει τα υπόλοιπα ή δολοφονίες κατά την διεκδίκηση τροφής ή μεταδιδόμενες ασθένειες ή άλλους λόγους που προκαλούν μείωση κατά τις συναντήσεις. Για αυτό τον λόγο το λογιστικό μοντέλο εκφράζει πολύ ικανοποιητικά πληθυσμούς σε μικρές και κλειστές κοινωνίες.
Η σταθερά r ονομάζεται **ενδογενής δείκτης ανάπτυξης** και εκφράζει την αναλογική αύξηση του πληθυσμού στην μονάδα του χρόνου. Η σταθερά R ονομάζεται **φέρουσα ικανότητα** και εκφράζει τον μέγιστο πληθυσμό του είδους που μελετάμε, που μπορεί να συντηρήσει το περιβάλλον επ' αόριστον. Όπως θα δούμε και στην συνέχεια άλλωστε, λύνοντας την λογιστική εξίσωση, προκύπτει ότι καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο ($t \to \infty$) ο πληθυσμός τείνει στην φέρουσα ικανότητα του ($P(t) \to R$).
Αν λοιπόν την χρονική στιγμή που ξεκινάμε την μελέτη ($t = 0$) ο πληθυσμός έχει μία αρχική τιμή P_0, μικρότερη της φέρουσας ικανότητας του R, έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{R}) \\ \\ P(0) = P_0 \quad . \end{cases} \tag{1.37}$$

Ορίζουμε μία νέα μεταβλητή y ώστε $y = \frac{P}{R}$.
Οπότε με τον μετασχηματισμό $P = yR$ και ύστερα από απλοποιήσεις το 1.37 γίνεται

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry(1 - y) \\ \\ y(0) = y_0 = \frac{P_0}{R} \end{cases} \tag{1.38}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= ry(1-y)\\
\frac{dy}{y(1-y)} &= rdt\\
\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y(1-y)} &= \int_0^t rdt\\
\int_{y_0}^{y(t)} (\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})dy &= rt\\
[\ln|y| - \ln|1-y|]_{y_0}^{y(t)} &= rt\\
[\ln\frac{|y|}{|1-y|}]_{y_0}^{y(t)} &= rt\\
\ln\frac{|y(t)|}{|1-y(t)|} - \ln\frac{|y_0|}{|1-y_0|} &= rt\\
\ln\frac{|y(t)|\cdot|1-y_0|}{|y_0|\cdot|1-y(t)|} &= rt\\
\frac{|y(t)|\cdot|1-y_0|}{|y_0|\cdot|1-y(t)|} &= e^{rt}
\end{aligned}$$

και αφού $y_0, y(t) > 0$ έχουμε

$$\frac{y(t)}{y_0} = \frac{|1-y(t)|}{|1-y_0|}e^{rt} \quad .$$

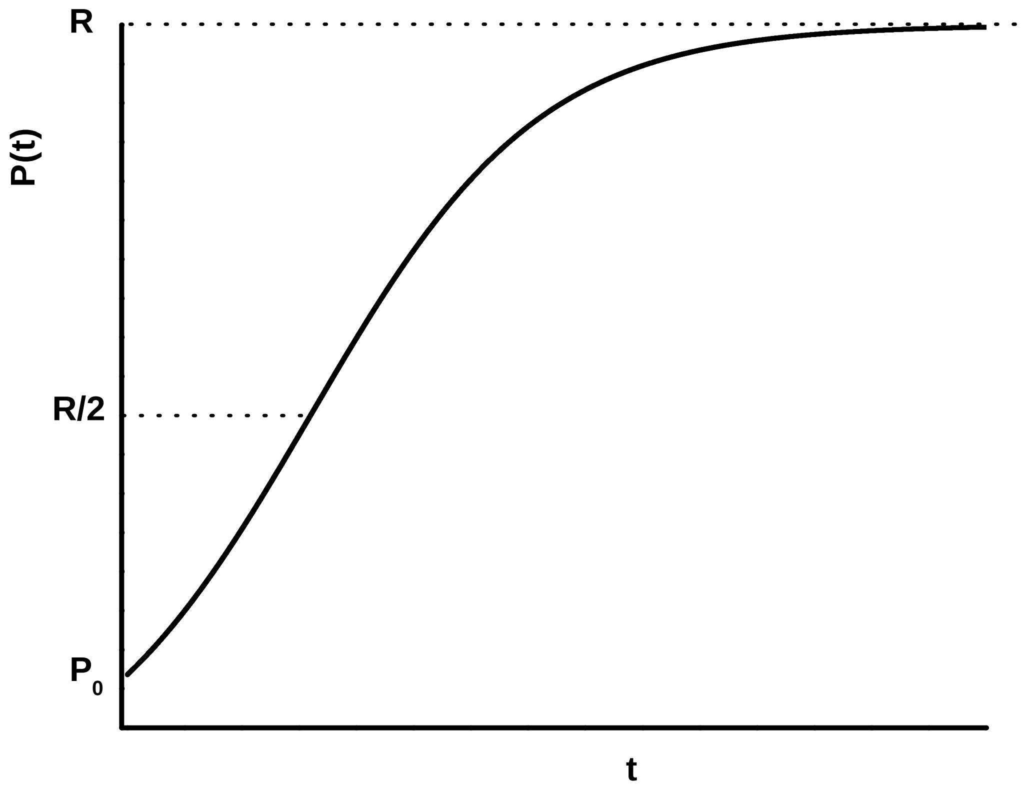
Αντικαθιστώντας τώρα την μεταβλητή y παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{P(t)}{R}}{\frac{P_0}{R}} &= \frac{|1-\frac{P(t)}{R}|}{|1-\frac{P_0}{R}|}e^{rt}\\
\frac{P(t)}{P_0} &= \frac{|R-P(t)|}{|R-P_0|}e^{rt}
\end{aligned}$$

όμως $R - P(t) > 0$ και $R - P_0 > 0$ λόγω ιδιότητας της φέρουσας ικανότητας R. Οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{P(t)}{P_0} &= \frac{R-P(t)}{R-P_0}e^{rt}\\
P(t) &= \frac{RP_0e^{rt}}{P_0e^{rt} + R - P_0}\\
P(t) &= \frac{RP_0}{P_0 + (R-P_0)e^{-rt}} \quad ,
\end{aligned}$$

που αποτελεί και την λύση της λογιστικής εξίσωσης. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως είναι φανερό από την λύση ότι $P \to R$ καθώς $t \to \infty$. Η γραφική παράσταση της λογιστικής εξίσωσης ονομάζεται και S-καμπύλη και φαίνεται στο σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: S-καμπύλη

Τα κρίσιμα σημεία της
$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{R}) \tag{1.39}$$
είναι τα $P = 0$ και $P = R$.
Η ανάλυση ευστάθειας μας δίνει ότι το $P = R$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και το $P = 0$ ασταθές. Άλλωστε αυτό ήταν κάτι που αναμέναμε αφού ο πληθυσμός έχει την τάση να πάρει την τιμή της φέρουσας ικανότητας και όχι την τάση να εξαφανιστεί ($P = 0$).

1.3 Δυναμικός Προγραμματισμός

1.3.1 Γενικά

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [1] και [20].

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μία υπολογιστική μέθοδος που εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθεί μία σύνθετη απόφαση η οποία προκύπτει από την σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλοεξαρτώνται. Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στην διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων, μέσω μιας κατάλληλης αναδρομικής σχέσης, ώστε η σύνθεση τους να δίνει τελικά την ζητούμενη απόφαση. Χαρακτηριστικό του δυναμικού προγραμματισμού είναι ότι δεν υπάρχει διατύπωση της μεθόδου που να έχει γενική λειτουργική ισχύ. Οι αναδρομικές σχέσεις που συνεπάγεται η μέθοδος διαφέρουν ανάλογα με την φύση του κάθε προβλήματος. Έτσι για την κατάστρωση και την επίλυση ενός προβλήματος παρουσιάζονται συχνά δυσκολίες αφού κάθε σύστημα έχει τα δικά του χαρακτηριστικά και επιδέχεται επίλυση προσαρμοσμένη σε αυτά.
Θεμελιωτής του δυναμικού προγραμματισμού υπήρξε ο Richard Bellman (1920-1984) και αναπτύχθηκε κυρίως για προβλήματα βελτιστοποίησης με διαδοχικές αποφάσεις. Βρίσκει εφαρμογές σε διάφορα πεδία της επιστήμης όπως στην Επιχειρησιακή Έρευνα, στην Βιολογία, στην Οικολογία και στην Πληροφορική. Ειδικότερα ο δυναμικός προγραμματισμός έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμος σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου αποθεμάτων, βέλτιστου ελέγχου ουρών αναμονής και βιολογικών πληθυσμών, βέλτιστης συντήρησης και αντικατάστασης μηχανημάτων, βέλτιστης διαχείρισης δικτύων και τηλεπικοινωνιών.

1.3.2 Εξίσωση Bellman

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [12], [1], [18], [20] και [19].

Τα προβλήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που τα κάνουν να διαφέρουν από τα υπόλοιπα μαθηματικά μοντέλα. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι τα εξής:

1. Οι αποφάσεις λαμβάνονται διαδοχικά.
2. Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε επιμέρους βήματα και σε κάθε βήμα χρειάζεται να ληφθεί μία απόφαση.
3. Κάθε βήμα έχει έναν ορισμένο αριθμό καταστάσεων που συνδέονται με αυτό.
4. Στόχος της απόφασης που λαμβάνεται σε κάθε βήμα είναι να μετατρέπει την παρούσα κατάσταση σε μία κατάσταση η οποία συνδέεται με το επόμενο βήμα.
5. Με κάθε απόφαση συνδέεται ένα κέρδος ή ένα κόστος.
6. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους. Να επιλεχθεί δηλαδή μία βέλτιστη σειρά αποφάσεων (**βέλτιστη πολιτική**).

7. Τέλος τα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού ικανοποιούν την μαρκοβιανή ι-διότητα. Δηλαδή για την επιλογή απόφασης, για μια μελλοντική κατάσταση, λαμβάνεται υπόψιν μόνο η παρούσα κατάσταση και όχι οι προηγούμενες. Οπότε οι αποφάσεις που επακολουθούν εξαρτώνται αποκλειστικά από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε και όχι από τον τρόπο με τον οποίο έχουμε φτάσει σε αυτή την κατάσταση.

Λόγω της τελευταίας τους ιδιότητας τα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού ονομάζονται και **Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων**. Ο όρος αυτός εισήχθει από τον Bellman το 1957 όταν συνδύασε τις θεωρίες του δυναμικού προγραμματισμού και των μαρκοβιανών διαδικασιών.
Ένα μαρκοβιανής απόφασης μοντέλο έχει την ακόλουθη δομή: Σε κάθε περίοδο t, παρατηρούμε την κατάσταση ενός οικονομικού συστήματος s_t και λαμβάνουμε μία απόφαση x_t η οποία μας αποφέρει ένα κέρδος $f(s_t, x_t)$. Είναι φυσικό το κέρδος να εξαρτάται άμεσα από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα και από την απόφαση που έχουμε πάρει για αυτή την κατάσταση. Ειδικότερα αφού το οικονομικό σύστημα αποτελεί μία μαρκοβιανή διαδικασία η κατάσταση για την περίοδο $t+1$ εξαρτάται αποκλειστικά από την κατάσταση και την απόφαση που έχουμε λάβει την περίοδο t, αλλά και από ένα εξωγενές τυχαίο σφάλμα ε_{t+1} που είναι άγνωστο όμως την περίοδο t.
Δηλαδή έχουμε

$$s_{t+1} = g(s_t, x_t, \varepsilon_{t+1}) \quad . \tag{1.40}$$

Σκοπός είναι να βρεθεί μία αλληλουχία αποφάσεων (πολιτική) x_t^* η οποία να προβλέπει τις αποφάσεις $x_t = x_t^*(s_t)$ που πρέπει να ληφθούν σε κάθε κατάσταση και περίοδο ώστε να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό κέρδος μέσα σε έναν χρονικό ορίζοντα T. Στα οικονομικά μοντέλα συμμετέχει σε κάθε περίοδο και ένας ρυθμιστικός παράγοντας μείωσης του κέρδους δ. Ο παράγοντας αυτός στις περισσότερες περιπτώσεις είναι μικρότερος της μονάδας και μπορεί να εκφράζει φορολογία, ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων, τάσεις της αγοράς και οτιδήποτε άλλο μπορεί να λειτουργήσει ανασταλτικά για το συνολικό κέρδος.
Οι μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων μπορεί να εξετάζονται είτε σε άπειρο χρονικό ορίζοντα ($T = \infty$) είτε σε πεπερασμένο χρόνο ($T < \infty$). Επίσης μπορούν να αποτελούν είτε ντετερμινιστικά είτε στοχαστικά μοντέλα. Στην περίπτωση που το μοντέλο είναι στοχαστικό τα εξωγενή τυχαία σφάλματα ε_t θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στον χρόνο και ανεξάρτητα από τις προηγούμενες καταστάσεις και αποφάσεις. Ο χώρος όλων των πιθανών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να έρθει το σύστημα συμβολίζεται με S και ο χώρος όλων των πιθανών αποφάσεων που μπορεί να ληφθούν με X.
Σε αυτού του είδους τα μοντέλα εφαρμόζεται ο κανόνας βελτιστοποίησης του Bellman:

Μία βέλτιστη αλληλουχία αποφάσεων έχει την εξής ιδιότητα. Ανεξάρτητα από τις αρχικές αποφάσεις, οι αποφάσεις που απομένουν πρέπει να συνιστούν μία βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση που προκύπτει από τις αρχικές αποφάσεις.

Συνέπεια του κανόνα βελτιστοποίησης του Bellman αποτελεί ο ακρογωνιαίος λίθος του δυναμικού προγραμματισμού, η εξίσωση Bellman. Θεωρούμε $V_t(s)$ το μέγιστο εφικτό τρέχον και αναμενόμενο κέρδος όταν το οικονομικό σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση s την περίοδο t. Τότε η **συνάρτηση κέρδους** $V_t : S \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την εξίσωση Bellman.

$$V_t(s) = \max_{x \epsilon X(s)} \{f(s,x) + \delta V_{t+1}(g(s,x,\varepsilon))\} \qquad s \epsilon S, \quad t = 1, 2, ..., T \quad . \tag{1.41}$$

Η εξίσωση Bellman περιλαμβάνει όλη την ουσία του δυναμικού προγραμματισμού, που δεν είναι άλλη από την βέλτιστη ισορροπία μεταξύ των τρεχόντων κερδών $f(s_t, x_t)$ και των προσδοκόμενων κερδών $\delta V_{t+1}(s_{t+1})$ σε ένα οικονομικό σύστημα.
• Αν το μοντέλο μας εξετάζεται σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα τότε οι αποφάσεις λαμβάνονται μόνο στις περιόδους από 1 έως T. Δεν θα ληφθεί απόφαση πέρα από την κατάσταση της περιόδου T αλλά ενδεχομένως να υπάρχει κέρδος $V_{T+1}(s_{T+1})$ στην ακόλουθη περίοδο από την τελική. Για αυτό το κέρδος της τελευταίας κατάστασης ορίζεται με βάση κάποιες οικονομικές τελικές συνθήκες, σχετικές με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Στις περισσότερες εφαρμογές η τελική συνθήκη είναι $V_{T+1} = 0$ που μας δείχνει ότι δεν αναμένονται κέρδη πέρα από την πάροδο του χρονικού μας ορίζοντα.
• Αν η μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων είναι άπειρου χρονικού ορίζοντα τότε όπως είναι φυσικό η συνάρτηση κέρδους θα είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Συνεπώς η εξίσωση Bellman θα παίρνει την μορφή

$$V(s) = \max_{x \epsilon X(s)} \{f(s,x) + \delta V(g(s,x,\varepsilon))\}, \quad s \epsilon S \quad . \tag{1.42}$$

1.3.3 Βελτιστοποίηση

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [4], [21], [23] και [3].

Από τα παραπάνω είναι εύκολα κατανοητό πως το ζητούμενο πάντα σε προβλήματα αποφάσεων είναι η επίλογη μίας βέλτιστης πολιτικής. Ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που αναφέρεται στην αναζήτηση βέλτιστων παραμέτρων ενός περίπλοκου συστήματος, ονομάζεται **βελτιστοποίηση**. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης μίας ή πολλών μεταβλητών κάτω από κάποιους περιορισμούς ανάλογα το είδος του προβλήματος. Οι περιορισμοί αυτοί όπως θα δούμε παρακάτω μπορεί να είναι είτε περιορισμοί ισότητας, είτε περιορισμοί ανισότητας. Για την ελαχιστοποίηση (μεγιστοποίηση) μίας συνάρτησης μίας μεταβλητής αρκούν αναλυτικές και αλγεβρικές μέθοδοι, ενώ για τις συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών συνήθως χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό των ελαχίστων (μεγίστων) σημείων. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο και η εξίσωση Bellman αποτελεί έναν κανόνα βελτιστοποίησης, ο οποίος βρίσκει εφαρμογή στα προβλήματα του δυναμικού προγραμματισμού.
Παραθέτουμε τώρα δύο ακόμη πολύ σημαντικά εργαλεία της βελτιστοποίησης, που έχουν πολλές εφαρμογές τόσο στον δυναμικό προγραμματισμό όσο και στην μαθηματική προτυποποίηση γενικότερα.

Συνθήκες Karush Kuhn Tucker

Οι Karush Kuhn Tucker συνθήκες πήραν το όνομα τους από τους μαθηματικούς Harold Kuhn (1925-) και Albert Tucker (1905-1995) που τις δημοσίευσαν το 1951. Αργότερα ανακαλύφθηκε ότι σε παρόμοια αποτελέσματα είχε καταλήξει και ο William Karush (1917-1997) κατά την εκπόνηση της μεταπτυχιακής του εργασίας το 1939.
Οι συνθήκες Karush Kuhn Tucker (**KKT**) είναι πρώτης τάξης αναγκαίες συνθήκες,όχι απαραίτητα ικανές, ώστε η λύση ενός μη γραμμικού συστήματος να είναι βέλτιστη. Οι KKT

συνθήκες έχουν την ιδιότητα να επιτρέπουν και περιορισμούς ανισότητας έτσι η προσέγγιση τους σε μη γραμμικά συστήματα τις κάνει μία γενίκευση των πολλαπλασιαστών Lagrange, που επιτρέπουν μόνο περιορισμούς ισότητας.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $f(x)$ υπό τους περιορισμούς $g_i(x) \leq 0$ και $h_j(x) = 0$. Το x είναι η μεταβλητή βελτιστοποίησης, η συνάρτηση f ονομάζεται **αντικειμενική συνάρτηση** και στα οικονομικά μοντέλα καλείται συνάρτηση κόστους, οι συναρτήσεις g_i $(i = 1, 2, ..., m)$ αποτελούν τους περιορισμούς ανισότητας και οι συναρτήσεις h_j $(j = 1, 2, ..., l)$ τους περιορισμούς ισότητας. Θεωρούμε ότι $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και ότι οι συναρτήσεις περιορισμού $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο σε ένα σημείο x^*. Αν το x^* αποτελεί σημείο τοπικού ελαχίστου τότε υπάρχουν σταθερές μ_i $(i = 1, 2, ..., m)$ και λ_j $(j = 1, 2, ..., l)$, που ονομάζονται πολλαπλασιαστές KKT, και για τις οποίες ισχύει:
Για την μεγιστοποίηση της $f(x)$

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla h_j(x^*) \tag{1.43}$$

και για την ελαχιστοποίηση της $f(x)$

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla h_j(x^*) \tag{1.44}$$

ενώ συγχρόνως ισχύει

$$\begin{aligned} g_i(x^*) \leq 0, \quad & \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x^*) = 0, \quad & \forall j = 1, ..., l \\ \mu_i \geq 0, \quad & \forall i = 1, ..., m \\ \mu_i g_i(x^*) = 0, \quad & \forall i = 1, ..., m \quad . \end{aligned} \tag{1.45}$$

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $m = 0$, δηλαδή όταν δεν έχουμε περιορισμούς ανισότητας, τότε οι συνθήκες KKT μετατρέπονται σε συνθήκες Lagrange και οι πολλαπλασιαστές KKT σε πολλαπλασιαστές Lagrange. Παραπάνω αναφέραμε ότι οι συνθήκες KKT είναι αναγκαίες και τις πιο πολλές φορές όχι ικανές για την βέλτιστη λύση ενός μη γραμμικού συστήματος. Για να είναι και ικανές αρκεί η συνάρτηση f και οι συναρτήσεις g_i να είναι συνεχείς διαφορίσιμες κυρτές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις των περιορισμών ισότητας h_j να είναι γραμμικές.
Οι συνθήκες Karush Kuhn Tucker βρίσκουν εφαρμογές σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης και κυρίως σε οικονομικά μοντέλα που το ζητούμενο είναι να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση κόστους ή να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση κέρδους.

Αρχή μεγίστου του Pontryagin

Η αρχή μεγίστου ή νόμος μεγιστοποίησης του Pontryagin είναι ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της θεωρίας βελτίστου ελέγχου. Ο **Βέλτιστος Έλεγχος** είναι μία μέθοδος της βελτιστοποίησης που έχει σαν σκοπό τον εντοπισμό της βέλτιστης πολιτικής που πρέπει να εφαρμοσθεί σε ένα σύστημα. Την βέλτιστη δηλαδή αλληλουχία αποφάσεων για τις μεταπηδήσεις του συστήματος στις διάφορες καταστάσεις του. Η αρχική εφαρμογή της αρχής του Pontryagin ήταν η μεγιστοποίηση της τελικής ταχύτητας πυραύλου. Αργότερα όμως βρήκε

εφαρμογές σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης κυρίως στον δυναμικό προγραμματισμό και σε οικονομικά μοντέλα.
Θεωρούμε ένα πρόβλημα αποφάσεων με την εξής δομή. Έστω ένα σύστημα που μελετάται στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ και μπορεί να βρεθεί σε n τον αριθμό καταστάσεις. Οι καταστάσεις του συστήματος εκφράζονται μέσω των μεταβλητών κατάστασης $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ οι οποίες μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$$V(T) = c_1 X_1(T) + c_2 X_2(T) + ... + c_n X_n(T) \quad , \tag{1.46}$$

γνωστή στα οικονομικά μοντέλα και σαν συνάρτηση κέρδους (value function). Οι σταθερές $c_1, c_2, ..., c_n$ είναι γνωστές καθώς και το σημείο εκκίνησης $X_1(0), X_2(0), ..., X_n(0)$. T είναι ένας ορισμένος τελικός χρόνος για την μελέτη του συστήματος. Επίσης δίνονται οι συναρτήσεις που εκφράζουν τις μεταβολές των καταστάσεων

$$\begin{aligned} \tfrac{dX_1}{dt} &= f_1(X_1, X_2, ..., X_n, u) \\ \tfrac{dX_2}{dt} &= f_2(X_1, X_2, ..., X_n, u) \\ &\vdots \\ \tfrac{dX_n}{dt} &= f_n(X_1, X_2, ..., X_n, u) \end{aligned} \tag{1.47}$$

όπου u είναι ένα διάνυσμα αποφάσεων. Αν U είναι ο χώρος με όλες τις πιθανές αλληλουχίες αποφάσεων (πολιτικές) τότε έχουμε ότι $u \epsilon U$. Ο στόχος λοιπόν είναι να βρούμε την βέλτιστη πολιτική, u_{opt}, ώστε να οδηγηθούν οι μεταβλητές κατάστασης από τις αρχικές τους τιμές $X_1(0), X_2(0), ..., X_n(0)$ στις τελικές $X_1(T), X_2(T), ..., X_n(T)$ μεγιστοποιώντας όμως την συνάρτηση κέρδους $V(T)$.
Για να εφαρμόσουμε την αρχή του Pontryagin χρειαζόμαστε την αντίστοιχη Χαμιλτονιανή συνάρτηση. Η Χαμιλτονιανή ορίζεται

$$H = \frac{dV}{dt} + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n \tag{1.48}$$

όπου για τα $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ισχύει

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_i} \tag{1.49}$$

και $\lambda_i(T) = c_i$ για $i = 1, 2, ..., n$. Δηλαδή οι συναρτήσεις λ_i είναι φραγμένες. Φυσικά όπως είναι φανερό αν η H είναι ανεξάρτητη του X_i τότε $\frac{\partial H}{\partial X_i} = 0$ κι έτσι η λ_i είναι μία σταθερά. Σύμφωνα με την αρχή του Pontryagin η βέλτιστη πολιτική, u_{opt}, είναι αυτή που μεγιστοποιεί την χαμιλτονιανή. Δηλαδή

$$\frac{\partial H}{\partial u_{opt}(t)} = 0 \quad . \tag{1.50}$$

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό μοντέλο για την εκμετάλλευση ανανεώσιμης πηγής από πληθυσμό

2.1 Γενικά

Οι ανανεώσιμες πηγές είναι οι κυριότεροι προμηθευτές τροφής και υλικών, των σημαντικότερων δηλαδή αγαθών για την ανάπτυξη των βιολογικών πληθυσμών. Η σωστή εκμετάλλευση τους ήταν πάντα ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που απασχολούσε την οικολογία. Λάθος πολιτική άντλησης μπορεί να είναι καταστροφική και να οδηγήσει σε εξαφάνιση της πηγής και φυσικά να επηρρεάσει την βιωσιμότητα πληθυσμών που εξαρτώνται από αυτήν.
Οι περισσότερες προσπάθειες για μαθηματική μοντελοποίηση ανανεώσιμων πηγών, αφορούν την αλιεία και την δασοκομία. Οι δύο αυτές κατηγορίες είναι οι κυριότεροι εκπρόσωποι ανανεώσιμων πηγών που εκμεταλλεύεται ο άνθρωπος.
Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει προσπάθεια μοντελοποίησης ενός συστήματος "ανανεώσιμη πηγή - πληθυσμός που την εκμεταλλεύεται", με βάση την λογιστική εξίσωση. Θα θεωρήσουμε δηλαδή ότι η ανάπτυξη της πηγής εκφράζεται μέσω της λογιστικής όπως αντίστοιχα και του πληθυσμού. Θα αναζητήσουμε συνθήκες που επιτρέπουν την συνύπαρξη και την ανάπτυξη και των δύο, και τέλος θα εξετάσουμε ποια είναι η βέλτιστη πολιτική άντλησης που πρέπει να εφαρμόσει ο πληθυσμός.

2.2 Μαθηματικό Μοντέλο

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [14], [16], [10] και [22].

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μελετήσουμε την εξάρτηση μίας ανανεώσιμης πηγής από τον πληθυσμό που την εκμεταλλεύεται. Ο πληθυσμός αντλεί την βιομάζα της πηγής για την ανάπτυξη του και προς όφελος του. Όπως είναι όμως φυσιολογικό αλόγιστη συγκομιδή μπορεί

να προκαλέσει αντίθετα αποτελέσματα και να οδηγήσει σε εξαφάνιση της βιομάζας της πηγής. Όπως αντίστοιχα και καθόλου συγκομιδή οδηγεί σε έκρηξη του πληθυσμού της βιομάζας που πάλι προκαλεί καταστροφή της ανανεώσιμης πηγής. Στόχος είναι να εντοπίσουμε μία **βέλτιστη πολιτική άντλησης** ώστε και ο πληθυσμός να επωφελείται αλλά και η πηγή να αναπτύσσεται.
Θεωρούμε μία ανανεώσιμη πηγή σε ένα περιβάλλον, με βιομάζα $B(t)$, που εκφράζεται από την λογιστική εξίσωση. Συνεπώς έχουμε

$$\frac{dB}{dt} = a_0 B(1 - \frac{B}{M}) \tag{2.1}$$

όπου a_0 είναι ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης της πηγής και M η φέρουσα ικανότητα της, υπό την απουσία όμως πληθυσμού.
Έστω τώρα ένας πληθυσμός $N(t)$ που χρησιμοποιεί την πηγή για την ανάπτυξη του. Τότε ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης και η φέρουσα ικανότητα της πηγής θα εξαρτώνται από τον πληθυσμό αυτό. Δηλαδή $a_0 \equiv a_0(N)$ και $M \equiv M(N)$. Άρα η 2.1 γίνεται

$$\frac{dB}{dt} = a_0(N)B - \frac{z_0 B^2}{M(N)} \tag{2.2}$$

με $z_0 > 0$.
Σε αυτό το σημείο μπορούμε να κάνουμε δύο τροποποιήσεις στο μοντέλο που έχουν να κάνουν με τις φυσικές ιδιαιτερότητες του συστήματος που μελετάμε. Θα γίνει προσπάθεια να εντοπιστεί το είδος των συναρτήσεων $a_0(N)$ και $M(N)$.
• Όταν ξεκινάμε την μελέτη του προβλήματος, την χρονική στιγμή $t = 0$, ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης της βιομάζας της πηγής είναι μία θετική σταθερά. Αυτό είναι φυσιολογικό αφού απουσιάζει ο παράγοντας (πληθυσμός) που την αντλεί. Με την πάροδο του χρόνου και υπό την παρουσία τώρα του πληθυσμού που εκμεταλλεύεται την πηγή, όπως είναι αναμενόμενο, ο δείκτης ανάπτυξης της βιομάζας μεταβάλλεται. Για την ακρίβεια μειώνεται, συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής του είναι αρνητικός. Δηλαδή για το συγκεκριμένο σύστημα ισχύει

$$\begin{cases} a_0(0) = r > 0 \\ a_0'(N) < 0, \quad N > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$a_0(N) = r - a_1 N \tag{2.4}$$

με $a_1 > 0$.
• Επίσης την χρονική στιγμή $t = 0$ και χωρίς την παρουσία πληθυσμού η φέρουσα ικανότητα της πηγής είναι και αυτή μία θετική σταθερά, έστω m_0. Και ισχύει ότι και για τον ενδογενή δείκτη ανάπτυξης. Δηλαδή για $N > 0$ έχουμε αρνητικό ρυθμό μεταβολής της φέρουσας ικανότητας. Άρα

$$\begin{cases} M(0) = m_0 > 0 \\ M'(N) < 0, \quad N > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Συνεπώς και η $M(N)$ είναι φθίνουσα και μπορούμε να θεωρήσουμε

$$M(N) = \frac{m_0}{1 + m_1 N} \tag{2.6}$$

με $m_1 > 0$.
Με αυτές τις δύο υποθέσεις για τις $a_0(N)$ και $M(N)$ η 2.2 γίνεται

$$\frac{dB}{dt} = (r - a_1 N)B - \frac{f_0 B^2 (1 + m_1 N)}{m_0}$$
$$\frac{dB}{dt} = rB - a_1 NB - \frac{f_0 B^2}{m_0} - \frac{f_0 B^2 m_1 N}{m_0}$$
$$\frac{dB}{dt} = rB(1 - \frac{f_0 B}{r m_0}) - a_1 NB - \frac{f_0 m_1 N B^2}{m_0}$$

και θέτοντας $\frac{r m_0}{f_0} = K$ και $\frac{f_0 m_1}{m_0} = a_2$ παίρνουμε

$$\frac{dB}{dt} = rB(1 - \frac{B}{K}) - a_1 NB - a_2 NB^2 \quad . \tag{2.7}$$

Βλέπουμε στην 2.7 ότι η νέα φέρουσα ικανότητα της βιομάζας της πηγής, υπό την παρουσία του πληθυσμού, είναι K. Οι όροι $a_1 NB$ και $a_2 NB^2$ εκφράζουν τις συναντήσεις των μελών του πληθυσμού με τα μέλη/μόρια της βιομάζας της πηγής. Δηλαδή είναι οι όροι που φανερώνουν την εκμετάλλευση της πηγής από τον πληθυσμό και είναι φυσικό να είναι αρνητικοί.
Υποθέτουμε επίσης ότι και ο πληθυσμός που εκμεταλλεύεται την πηγή, $N(t)$, ακολουθεί την λογιστική εξίσωση. Δηλαδή

$$\frac{dN}{dt} = sN(1 - \frac{N}{L}) \tag{2.8}$$

με το s να αποτελεί τον ενδογενή δείκτη ανάπτυξης και το L την φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού υπό την απουσία όμως της πηγής. Κατά την παρουσία της πηγής ο πληθυσμός επωφελείτε οπότε τώρα οι συναντήσεις των μελών του με τα μέλη της βιομάζας της πηγής ευνοούν την ανάπτυξη του. Άρα η 2.8 γίνεται

$$\frac{dN}{dt} = sN(1 - \frac{N}{L}) + b_1 NB + b_2 NB^2 \quad .$$

Δηλαδή το σύστημα λαμβάνει την μορφή

$$\tfrac{dB}{dt} = rB(1 - \tfrac{B}{K}) - a_1 NB - a_2 NB^2$$

$$\tfrac{dN}{dt} = sN(1 - \tfrac{N}{L}) + b_1 NB + b_2 NB^2$$

Τέλος πρέπει να προσθέσουμε έναν όρο που να φανερώνει την πολιτική που εφαρμόζει ο πληθυσμός στο θέμα της εκμετάλλευσης της ανανεώσιμης πηγής. Δηλαδή την συχνότητα με την οποία ο πληθυσμός αντλεί την βιομάζα της πηγής. Έστω η πολιτική αυτή E. Η άντληση λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί $E \cdot B$. Όμως η άντληση της πηγής δεν έχει πάντα τα ίδια αποτελέσματα και πολλές φορές μπορεί να είναι και μηδενική. Για παράδειγμα στην αλιεία δεν είναι πάντα εγγυημένη μία μεγάλη συλλογή βιομάζας (ψάρια). Η συγκομιδή λοιπόν εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους όπως το είδος της πηγής, τα μέσα που χρησιμοποιούνται, την εποχή που γίνεται η άντληση και πολλές άλλες. Η τυχαιότητα αυτή στην επιτυχία της συγκομιδής της πηγής εκφράζεται με μία θετική σταθερά q *. Συνεπώς η άντληση μπορεί να εκφραστεί σαν qEB και τελικά το σύστημα ανανεώσιμη πηγή - πληθυσμός θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \tfrac{dB}{dt} &= rB(1-\tfrac{B}{K}) - a_1NB - a_2NB^2 - qEB \;, \quad B(0)>0 \\ \tfrac{dN}{dt} &= sN(1-\tfrac{N}{L}) + b_1NB + b_2NB^2 \;, \quad N(0)>0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Διαστατικός έλεγχος

Μία από τις σημαντικότερες μεθόδους για να ελέγξουμε την ορθότητα ενός μοντέλου ως προς τις φυσικές ιδιαιτερότητες του συστήματος που αναπαριστά είναι ο διαστατικός έλεγχος. Εξετάζουμε δηλαδή αν οι μονάδες των φυσικών μεγεθών του συστήματος συμφωνούν με βάση τις εξισώσεις του μοντέλου. Στο παραπάνω σύστημα ανανεώσιμη πηγή - πληθυσμός θεωρούμε γνωστές τις μονάδες των μεγεθών t, B, N και θα αναζητήσουμε τις μονάδες των r, K, s, L και E μέσω των εξισώσεων της 2.9. Φυσικά μπορούν να προσδιοριστούν και οι μονάδες των a_1, a_2, b_1 και b_2 αλλά σε αυτές τις σταθερές δεν έχουμε προσδώσει κάποια φυσική ερμηνεία ώστε να μπορεί να ελεγχθεί το αποτέλεσμα. Επίσης η σταθερά q είναι αδιάστατη. Έτσι, έστω ότι το t έχει μονάδες χρόνου (Time), το B μονάδες πυκνότητας ($\frac{Mass}{Volume}$) και το N μετριέται σε άτομα (Individuals). Δηλαδή

$$\begin{cases} [t] = T \\ [B] = \frac{M}{V} \\ [N] = I \quad . \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις μονάδες των μεγεθών στην πρώτη εξίσωση της 2.9 παίρνουμε

$$\frac{M}{VT} = [r]\frac{M}{V} - [r]\frac{M^2}{V^2[K]} - [a_1]\frac{IM}{V} - [a_2]\frac{IM^2}{V^2} - [E]\frac{M}{V} \quad .$$

Οπότε προκύπτει

$$\begin{cases} [r] = \frac{1}{T} \\ [K] = \frac{M}{V} \\ [E] = \frac{1}{T} \end{cases}$$

Το r προέκυψε να έχει μονάδες συχνότητας. Φυσιολογικό αφού είναι ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης της πηγής. Το K μονάδες πυκνότητας. Επίσης αναμενόμενο επειδή είναι η φέρουσα ικανότητα οπότε πρέπει να έχει ίδιες μονάδες με το B αφού $B \to K$ καθώς $t \to \infty$. Τέλος η πολιτική άντλησης E που εφαρμόζει ο πληθυσμός έχει σωστά μονάδες αντίστροφου χρόνου αφού εκφράζει την συχνότητα άντλησης της πηγής.
Με αυτό τον έλεγχο διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν σωστές μονάδες για τα μεγέθη r, K και E με βάση την φυσική ερμηνεία που τους έχουμε δώσει. Άρα η πρώτη εξίσωση διαστατικά είναι ορθή. Ελέγχουμε τώρα την δεύτερη εξίσωση της 2.9 για να δούμε τι μονάδες προκύπτουν για τα s και L.

$$\frac{I}{T} = [s]I - [s]\frac{I^2}{L} + [b_1]\frac{IM}{V} + [b_2]\frac{IM^2}{V^2} \quad .$$

*Στην αλιεία η σταθερά q ονομάζεται Catchability coefficient και ορίζεται σαν η σχέση μεταξύ των ψαριών που αλιεύονται και του διαθέσιμου πληθυσμού τους.

Οπότε παίρνουμε

$$\begin{cases} [s] = \frac{1}{T} \\ [L] = I \end{cases}$$

Σωστά λοιπόν προκύπτει ότι ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης έχει μονάδες συχνότητας και η φέρουσα ικανότητα ίδιες μονάδες με το N.
Συνεπώς το μοντέλο 2.9 είναι διαστατικά σωστό.

2.3 Ανάλυση Ευστάθειας

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [14], [13] και [9].

Το μοντέλο 2.9 αποτελεί ένα βιολογικό πρότυπο. Όλα τα βιολογικά πρότυπα για να έχουν καλή συμπεριφορά θα πρέπει οι λύσεις τους να είναι μη αρνητικές και φραγμένες. Για το 2.9 ισχύει ότι η περιοχή

$$\Omega = \{(B, N)\epsilon\mathbb{R}_2^+ : 0 \leq B \leq K,\ 0 \leq N \leq L_0\}$$

αποτελεί μία περιοχή έλξης για όλες τις λύσεις που ξεκινούν από το πρώτο τεταρτημόριο. Αφού K, όπως έχουμε δει, είναι η φέρουσα ικανότητα της βιομάζας της πηγής ($B < K$) και L_0 η φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού υπό την παρουσία της πηγής ($N < L_0$) με

$$L_0 = \frac{L}{s}(s + b_1K + b_2K^2) \quad .$$

Για την εύρεση των σημείων ισορροπίας παίρνουμε

$$\begin{cases} rB(1 - \frac{B}{K}) - a_1NB - a_2NB^2 - qEB = 0 \\ \\ sN(1 - \frac{N}{L}) + b_1NB + b_2NB^2 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Δηλαδή

$$B[r(1 - \frac{B}{K}) - a_1N - a_2NB - qE] = 0 \tag{2.11}$$

και

$$N[s(1 - \frac{N}{L}) + b_1B + b_2B^2] = 0 \quad . \tag{2.12}$$

Από την 2.12 έχουμε ότι

$$N = 0 \tag{2.13}$$

ή

$$N = \frac{L}{s}(s + b_1B + b_2B^2) \quad . \tag{2.14}$$

Οπότε

(i) Για $N = 0$:

• Η 2.11 δίνει $B = 0$ άρα ένα κρίσιμο σημείο είναι το $P_0(0,0)$ ή

• Έχουμε

$$r - qE - \frac{rB}{K} = 0$$
$$B = \frac{K}{r}(r - qE)$$

Δηλαδή ένα δεύτερο κρίσιμο σημείο είναι το $P_1(\frac{K}{r}(r-qE),0)$. Προφανώς για την ύπαρξη του P_1 θα πρέπει να ισχύει

$$r > qE \quad . \tag{2.15}$$

(ii) Για $N = \frac{L}{s}(s + b_1B + b_2B^2)$:

• Πάλι η 2.11 μας δίνει $B = 0$ άρα ένα τρίτο σημείο είναι το $P_2(0,L)$ ή

• Έχουμε

$$r - a_1\frac{L}{s}(s + b_1B + b_2B^2) - qE - a_2B\frac{L}{s}(s + b_1B + b_2B^2) - \frac{rB}{K} = 0$$
$$r - a_1L - \frac{a_1b_1LB}{s} - \frac{a_1b_2LB^2}{s} - qE - a_2LB - \frac{a_2b_1LB^2}{s} - \frac{a_2b_2LB^3}{s} - \frac{rB}{K} = 0$$
$$\frac{a_2b_2L}{s}B^3 + \frac{a_1b_2L + a_2b_1L}{s}B^2 + (\frac{a_1b_1L}{s} + \frac{r}{K} + a_2L)B + a_1L - r + qE = 0$$

ή αλλιώς

$$\gamma_1B^3 + \gamma_2B^2 + \gamma_3B + \gamma_4 = 0 \tag{2.16}$$

με

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{a_2b_2L}{s} \\ \\ \gamma_2 = \frac{a_1b_2L + a_2b_1L}{s} \\ \\ \gamma_3 = \frac{a_1b_1L}{s} + \frac{r}{K} + a_2L \\ \\ \gamma_4 = a_1L - r + qE \end{cases} \tag{2.17}$$

Όπως βλέπουμε $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ άρα για να έχει θετική πραγματική λύση η 2.16 θα πρέπει $\gamma_4 < 0$ δηλαδή

$$r > a_1L + qE \quad . \tag{2.18}$$

Συνεπώς η 2.18 αποτελεί την συνθήκη ώστε η 2.16 να έχει μία μοναδική θετική λύση B^*. Γνωρίζοντας την τιμή της B^* αντικαθιστούμε στην 2.14 και παίρνουμε

$$N^* = \frac{L}{s}(s + b_1B^* + b_2B^{*2}) \quad . \tag{2.19}$$

Δηλαδή το σημείο (B^*, N^*) ικανοποιεί το σύστημα

$$\begin{matrix} r(1 - \frac{B}{K}) - a_1N - a_2NB - qE = 0 \\ s(1 - \frac{N}{L}) + b_1B + b_2B^2 = 0 \end{matrix} \tag{2.20}$$

Τελικά τα 4 σημεία ισορροπίας του συστήματος 2.9 είναι τα
- $P_0(0,0)$
- $P_1(\frac{K}{r}(r-qE),0)$ αν $r > qE$
- $P_2(0,L)$ και
- $P_3(B^*,N^*)$ αν $r > a_1 L + qE$.

Βλέπουμε ότι μόνο στο P_3 έχουμε συνύπαρξη. Από την 2.18 διακρίνουμε ότι για την συνύπαρξη της ανανεώσιμης πηγής με τον πληθυσμό που την εκμεταλλεύεται, απαιτείται ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης της βιομάζας της πηγής να είναι μεγαλύτερος από μία τιμή. Η τιμή αυτή εξαρτάται από την φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού και από την πολιτική άντλησης που εφαρμόζει για την πηγή. Κάτι που άλλωστε είναι απόλυτα λογικό.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η συμβίωση και όχι η εξαφάνιση είτε του πληθυσμού είτε της βιομάζας της πηγής συνεπώς πέρα από την 2.18 αναζητούμε μία επιπλέον συνθήκη ώστε το κρίσιμο σημείο $P_3(B^*,N^*)$ να είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Έστω το συναρτησιακό

$$V(B,N) = (B - B^* - B^* \ln\frac{B}{B^*}) + (N - N^* - \ln\frac{N}{N^*}) \quad . \tag{2.21}$$

Το $V(B,N)$ είναι θετικά ορισμένο όπως έχουμε δει στο παράδειγμα 3 της παραγράφου 1.1.6. Οπότε από το θεώρημα 1.1.15 της ευστάθειας κατά Lyapunov για να είναι το P_3 ασυμπτωτικά ευσταθές αρκεί η $\dot{V}$ να είναι αρνητικά ορισμένη.
Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (1 - B^*\frac{B^*}{B}\frac{1}{B^*})\frac{dB}{dt} + (1 - N^*\frac{N^*}{N}\frac{1}{N^*})\frac{dN}{dt} \\ &= (1 - \frac{B^*}{B})\frac{dB}{dt} + (1 - \frac{N^*}{N})\frac{dN}{dt} \quad .\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα από την 2.9 έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{B-B^*}{B}[rB(1-\frac{B}{K}) - a_1NB - a_2NB^2 - qEB] + \frac{N-N^*}{N}[sN(1-\frac{N}{L}) + b_1NB + b_2NB^2] \\ &= (B-B^*)(r - \frac{rB}{K} - a_1N - a_2NB - qE) + (N-N^*)(s - \frac{sN}{L} + b_1B + b_2B^2) \quad .\end{aligned}$$

Προσθαφαιρούμε τώρα στον συντελεστή του $(B-B^*)$ τους όρους $\frac{rB^*}{K}$, a_2N^*B, $a_2N^*B^*$ και στον συντελεστή του $(N-N^*)$ τον όρο $\frac{sN^*}{L}$ και προκύπτει

$$\frac{dV}{dt} = (B-B^*)(-\frac{rB}{K} + \frac{rB^*}{K} + a_2N^*B - a_2N^*B^* - \frac{rB^*}{K} - a_2N^*B + a_2N^*B^* + r - a_1N$$

$$-a_2NB - qE) + (N-N^*)(-\frac{sN}{L} + \frac{sN^*}{L} + s - \frac{sN^*}{L} + b_1B + b_2B^2)$$

και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$\frac{dV}{dt} = (B - B^*)[-\tfrac{r}{K}(B - B^*) - a_2N^*(B - B^*)]$$

$$+(B - B^*)(a_2N^*B - a_2N^*B^* - \tfrac{rB^*}{K} + r - a_1N - a_2NB - qE)$$

$$+(N - N^*)(s - \tfrac{sN^*}{L} + b_1B + b_2B^2)$$

$$+(N - N^*)(-\tfrac{sN}{L} + \tfrac{sN^*}{L})$$

$$= (-\tfrac{r}{K} - a_2N^*)(B - B^*)^2$$

$$+(B - B^*)(-a_2NB + a_2N^*B - a_1N + a_1N^*)$$

$$+(B - B^*)(r - a_1N^* - a_2N^*B^* - \tfrac{rB^*}{K} - qE)$$

$$+(N - N^*)(b_1B - b_1B^* + b_2B^2 - b_2B^{*2})$$

$$+(N - N^*)(s - \tfrac{sN^*}{L} + b_1B^* + b_2B^{*2})$$

$$-\tfrac{s}{L}(N - N^*)^2 \quad .$$

Όμως αφού το (B^*, N^*) ικανοποιεί το σύστημα 2.20 έχουμε

$$\begin{cases} r - a_1N^* - a_2N^*B^* - \tfrac{rB^*}{K} - qE = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ s - \tfrac{sN^*}{L} + b_1B^* + b_2B^{*2} = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, τελικά προκύπτει

$$\frac{dV}{dt} = (-\tfrac{r}{K} - a_2N^*)(B - B^*)^2$$

$$+(B - B^*)[-a_2B(N - N^*) - a_1(N - N^*)]$$

$$+(N - N^*)[b_1(B - B^*) + b_2(B - B^*)(B + B^*)]$$

$$-\tfrac{s}{L}(N - N^*)^2$$

$$= (-\tfrac{r}{K} - a_2N^*)(B - B^*)^2 + [-a_1 - a_2B + b_1 + b_2(B + B^*)](B - B^*)(N - N^*) - \tfrac{s}{L}(N - N^*)^2$$

ή

$$\frac{dV}{dt} = c_1(B - B^*)^2 + c_2(B - B^*)(N - N^*) + c_3(N - N^*)^2$$

με

$$\begin{cases} c_1 = -\tfrac{r}{K} - a_2N^* \\ \\ c_2 = -a_1 - a_2B + b_1 + b_2(B + B^*) \\ \\ c_3 = -\tfrac{s}{L} \end{cases}$$

Τώρα από το θεώρημα 1.1.13 η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν
• $c_1 < 0$ και
• $4c_1c_3 - {c_2}^2 > 0$
Η πρώτη συνθήκη προφανώς ισχύει αφού

$$c_1 = -\frac{r}{K} - a_2N^* < 0 \quad ,$$

άρα για να είναι η $\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη θα πρέπει

$$4c_1c_3 - {c_2}^2 > 0$$
$$4(-\frac{r}{K} - a_2N^*)(-\frac{s}{L}) - [-a_1 - a_2B + b_1 + b_2(B + B^*)]^2 > 0$$

και αφού K είναι η φέρουσα ικανότητα του B αρκεί

$$[(b_2 - a_2)K - a_1 + b_1 + b_2B^*]^2 < \frac{4s}{L}(\frac{r}{K} + a_2N^*) \quad . \tag{2.22}$$

Η 2.22 αποτελεί την συνθήκη ώστε το $V(B, N)$ να είναι συναρτησιακό Lyapunov και άρα το (B^*, N^*) να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να έχουμε αρμονική συνύπαρξη της ανανεώσιμης πηγής και του πληθυσμού που την εκμεταλλεύεται πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες. Μία που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του σημείου (B^*, N^*) και μία που μας διασφαλίζει ότι είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Οι συνθήκες αυτές είναι οι 2.18 και 2.22.
Δηλαδή πρέπει

$$\begin{cases} r > a_1L + qE \\ \kappa\alpha\iota \\ [(b_2 - a_2)K - a_1 + b_1 + b_2B^*]^2 < \frac{4s}{L}(\frac{r}{K} + a_2N^*) \end{cases} \tag{2.23}$$

2.4 Βέλτιστη πολιτική άντλησης

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [14], [4] και [21].

Ο αντικειμενικός σκοπός ενός πληθυσμού που εκμεταλλεύεται την βιομάζα μιας ανανεώσιμης πηγής δεν είναι άλλος από το να αποκομίσει το μέγιστο όφελος από την άντληση της πηγής σε συνδυασμό με τη μη εξαφάνιση της. Στόχος αυτής της παραγράφου είναι ο εντοπισμός της καταλληλότερης πολιτικής άντλησης της πηγής ώστε να αποφέρει το μέγιστο δυνατό κέρδος για τον πληθυσμό χωρίς να οδηγήσει την πηγή στην εξαφάνιση. Έστω p η τιμή πώλησης για κάθε μονάδα βιομάζας που αντλείται και c το κόστος άντλησης. Στην κατασκευή του μοντέλου θεωρήσαμε την συνάρτηση άντλησης qEB οπότε το κέρδος από την άντληση μπορεί να εκφραστεί ως $pqEB - cE$.

Συνεπώς η συνάρτηση κέρδους κάθε χρονική στιγμή εκφράζεται ως

$$J = \int_0^\infty e^{-\delta t}(pqB - c)Edt \tag{2.24}$$

όπου δ είναι ο ρυθμιστικός παράγοντας που είδαμε στην παράγραφο 1.3.2. Στο συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να εκφράζει διάφορες παραμέτρους που θέτει ο ρυθμιστής (πολιτεία) όπως νομοθετικές διατάξεις για την προστασία της πηγής, φορολογία και πολλές άλλες. Στόχος λοιπόν είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους J, υπό τον περιορισμό του μοντέλου 2.9.
Όπως είδαμε και στην παράγραφο 1.3.3 μπορούμε να εφαρμόσουμε στην συνάρτηση κέρδους την αρχή μεγίστου του Pontryagin και από εκεί να προκύψει η βέλτιστη πολιτική άντλησης για την πηγή. Η συνάρτηση κέρδους είναι η J και οι συναρτήσεις που εκφράζουν τις μεταβολές των καταστάσεων είναι οι εξισώσεις του μοντέλου 2.9. Οπότε από την 1.48 η αντίστοιχη χαμιλτονιανή είναι

$$\begin{aligned} H = e^{-\delta t}(pqB - c)E + \lambda_1[rB(1 - \tfrac{B}{K}) - a_1NB - a_2NB^2 - qEB] \\ +\lambda_2[sN(1 - \tfrac{N}{L}) + b_1NB + b_2NB^2] \end{aligned} \tag{2.25}$$

όπου για τα λ_1 και λ_2 ισχύει

$$\begin{aligned} \tfrac{d\lambda_1}{dt} &= -\tfrac{\partial H}{\partial B} \\ \tfrac{d\lambda_2}{dt} &= -\tfrac{\partial H}{\partial N} \quad . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή μεγίστου του Pontryagin η βέλτιστη πολιτική άντλησης E_{opt}, είναι αυτή που μεγιστοποιεί την χαμιλτονιανή. Άρα

$$\frac{\partial H}{\partial E_{opt}} = 0 \quad . \tag{2.27}$$

Από τις εξισώσεις 2.26 και 2.27 προκύπτει το E_{opt} σαν συνάρτηση των B και N.
Από την 2.27 έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial E_{opt}} &= 0 \\ e^{-\delta t}(pqB - c) - \lambda_1 qB &= 0 \end{aligned}$$

ή

$$\lambda_1 = e^{-\delta t}(p - \frac{c}{qB}) \quad . \tag{2.28}$$

Η πρώτη εξίσωση της 2.26 μας δίνει

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -e^{-\delta t}pqE - \lambda_1(r - \frac{2rB}{K} - a_1N - 2a_2NB - qE) - \lambda_2(b_1N + 2b_2NB) \quad . \tag{2.29}$$

Και επειδή εξετάζουμε την βέλτιστη πολιτική άντλησης της πηγής, θεωρούμε ότι υπάρχει βιομάζα στην ανανεώσιμη πηγή ($B \neq 0$) αλλά και πληθυσμός που την εκμεταλλεύεται ($N \neq 0$).

Συνεπώς ισχύει το σύστημα 2.20, για μη μηδενικά B και N. Άρα η 2.29 γίνεται

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -e^{-\delta t}pqE - \lambda_1[r(1-\frac{B}{K}) - a_1N - a_2NB - qE - \frac{rB}{K} - a_2NB] - \lambda_2(b_1N + 2b_2NB)$$

ή

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -e^{-\delta t}pqE + \lambda_1(\frac{rB}{K} + a_2NB) - \lambda_2(b_1N + 2b_2NB) \quad . \tag{2.30}$$

Επίσης από την δεύτερη εξίσωση της 2.26 και με την βοήθεια πάλι του 2.20 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial N}\\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_1(-a_1B - a_2B^2) - \lambda_2(s - \frac{2sN}{L} + b_1B + b_2B^2)\\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= \lambda_1(a_1B + a_2B^2) - \lambda_2[s(1-\frac{N}{L}) + b_1B + b_2B^2 - \frac{sN}{L}]\\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= \lambda_1(a_1B + a_2B^2) + \lambda_2\frac{sN}{L}\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας το λ_1 από την 2.28 έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_2}{dt} &= e^{-\delta t}(p - \frac{c}{qB})(a_1B + a_2B^2) + \lambda_2\frac{sN}{L}\\ \frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{sN}{L}\lambda_2 &= (p - \frac{c}{qB})(a_1B + a_2B^2)e^{-\delta t}\end{aligned}$$

ή

$$\frac{d\lambda_2}{dt} - A_2\lambda_2 = -B_2e^{-\delta t} \tag{2.31}$$

με

$$\begin{cases} A_2 = \frac{sN}{L} \\ \\ B_2 = (\frac{c}{qB} - p)(a_1B + a_2B^2) \end{cases}$$

Για να βρεθεί το λ_2 αρκεί να λυθεί η διαφορική εξίσωση 2.31. Οπότε

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_2}{dt} - A_2\lambda_2 &= -B_2e^{-\delta t}\\ \frac{d\lambda_2}{dt}e^{-A_2t} - A_2\lambda_2e^{-A_2t} &= -B_2e^{-\delta t - A_2t}\\ \lambda_2e^{-A_2t} &= -\int B_2e^{-(A_2+\delta)t}dt\\ \lambda_2e^{-A_2t} &= -B_2\frac{1}{-(A_2+\delta)}\int -(A_2+\delta)e^{-(A_2+\delta)t}dt\\ \lambda_2e^{-A_2t} &= \frac{B_2}{A_2+\delta}e^{-A_2t-\delta t} + c_0\\ \lambda_2 &= \frac{B_2}{A_2+\delta}e^{-\delta t} + c_0e^{A_2t} \quad .\end{aligned}$$

Όπως είδαμε όμως στην παράγραφο 1.3.3, στην αρχή μεγίστου του Pontryagin, τα λ_i είναι φραγμένες συναρτήσεις του t. Συνεπώς για να εξασφαλίζεται κάτι τέτοιο, καθώς $t\epsilon[0,+\infty)$, θα πρέπει $c_0 = 0$.
Τελικά λοιπόν για το λ_2 θα ισχύει

$$\lambda_2 = \frac{B_2}{A_2+\delta} e^{-\delta t} \quad . \tag{2.32}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή του λ_2 στην 2.30 παίρνουμε

$$\frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1(\frac{rB}{K} + a_2 NB) = -e^{-\delta t} pqE - \frac{B_2}{A_2+\delta} e^{-\delta t}(b_1 N + 2b_2 NB)$$

ή

$$\frac{d\lambda_1}{dt} - A_1\lambda_1 = -B_1 e^{-\delta t} \tag{2.33}$$

με

$$\begin{cases} A_1 = \frac{rB}{K} + a_2 NB \\ \\ B_1 = pqE + \frac{B_2}{A_2+\delta}(b_1 N + 2b_2 NB) \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό του λ_1 αρκεί να λυθεί η διαφορική εξίσωση 2.33. Οπότε ομοίως με πριν προκύπτει

$$\lambda_1 = \frac{B_1}{A_1+\delta} e^{-\delta t} + c_1 e^{A_1 t}$$

και πάλι θα πρέπει $c_1 = 0$, άρα για το λ_1 τελικά θα ισχύει

$$\lambda_1 = \frac{B_1}{A_1+\delta} e^{-\delta t} \quad . \tag{2.34}$$

Τελικά από τις εξισώσεις 2.28 και 2.34 έχουμε

$$\frac{B_1}{A_1+\delta} = p - \frac{c}{qB} \quad . \tag{2.35}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην 2.35 τα A_1, B_1, A_2 και B_2 και λύνοντας ως προς E, προκύπτει η βέλτιστη πολιτική άντλησης.

$$\frac{pqE + \frac{B_2}{A_2+\delta}(b_1N + 2b_2NB)}{\frac{rB}{K} + a_2NB + \delta} = \frac{pqB - c}{qB}$$

$$[pqE + \frac{(\frac{c}{qB} - p)(a_1B + a_2B^2)(b_1N + 2b_2NB)}{\frac{sN}{L} + \delta}]qB = (pqB - c)(\frac{rB}{K} + a_2NB + \delta)$$

$$pq^2BE + \frac{(c - pqB)(a_1B + a_2B^2)(b_1N + 2b_2NB)}{\frac{sN}{L} + \delta} = (pqB - c)(\frac{rB}{K} + a_2NB + \delta)$$

$$E = \frac{1}{pq^2B}[(pqB - c)(\frac{rB}{K} + a_2NB + \delta) - \frac{(c - pqB)(a_1B + a_2B^2)(b_1N + 2b_2NB)}{\frac{sN}{L} + \delta}]$$

$$E = \frac{1}{pq}[(p - \frac{c}{qB})(\frac{rB}{K} + a_2NB + \delta) - \frac{(\frac{c}{qB} - p)(a_1B + a_2B^2)(b_1N + 2b_2NB)}{\frac{sN}{L} + \delta}]$$

ή

$$E_{opt} = \frac{1}{pq}(p - \frac{c}{qB})[(\frac{rB}{K} + a_2NB + \delta) + \frac{(a_1B + a_2B^2)(b_1N + 2b_2NB)}{\frac{sN}{L} + \delta}] \quad . \tag{2.36}$$

Η E_{opt} αποτελεί την βέλτιστη πολιτική άντλησης για κάθε στιγμή. Δηλαδή μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 η βιομάζα της πηγής έχει την τιμή $B(t_0)$ και ο πληθυσμός που την εκμεταλλεύεται την τιμή $N(t_0)$. Συνεπώς αντικαθιστώντας τις δύο αυτές τιμές στην 2.36 προκύπτει η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να εφαρμόσει ο πληθυσμός, για την συγκομιδή της βιομάζας της ανανεώσιμης πηγής, την συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

2.5 Αριθμητικές προσομοιώσεις

Τα σχήματα και οι συνδυασμοί τιμών για τις παραμέτρους του συστήματος είναι από το σύγγραμμα [14].

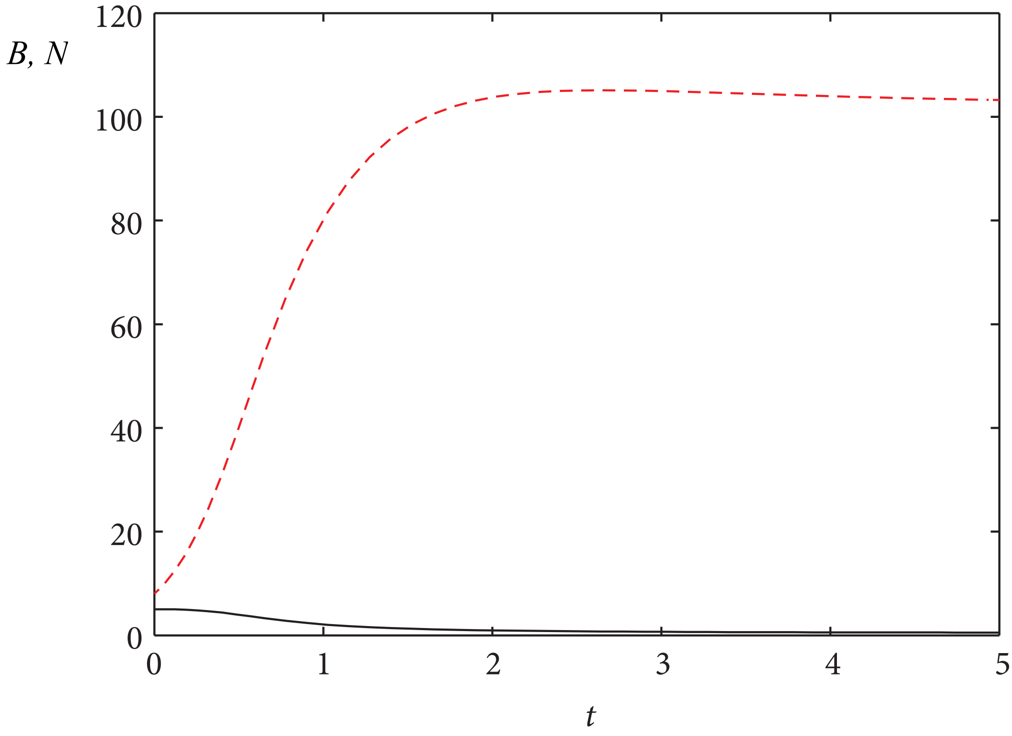
Για να ερευνήσουμε την συμπεριφορά του μαθηματικού μοντέλου 2.9 θα επιλέξουμε τιμές για τις παραμέτρους του προβλήματος. Επιλέγουμε τον ακόλουθο συνδυασμό τιμών (και υπάρχουν φυσικά και πολλοί άλλοι).

$$\begin{gathered} r = 1,6 \quad s = 1,2 \quad K = 100 \quad L = 100 \\ E = 100 \quad p = 0,1 \quad q = 0,01 \quad a_1 = 0,001 \\ a_2 = 0,01 \quad b_1 = 0,01 \quad b_2 = 0,1 \end{gathered} \tag{2.37}$$

με αρχικές συνθήκες $B(0) = 5$ και $N(0) = 8$. Βλέπουμε ότι για αυτές τις τιμές των παραμέτρων η συνθήκη 2.18 ικανοποιείται. Συνεπώς το σημείο ισορροπίας $P_3(B^*, N^*)$ υπάρχει και δίνεται από

$$B^* = 0,479 \quad και \quad N^* = 102,3108 \tag{2.38}$$

Όμως οι τιμές 2.37 δεν ικανοποιούν την συνθήκη 2.22, άρα το P_3 δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.



Σχήμα 2.1: Η μαύρη συνεχής καμπύλη εκφράζει την βιομάζα της πηγής B και η κόκκινη διακεκομμένη τον πληθυσμό N, [14].

Στο διάγραμμα του σχήματος 2.1 βλέπουμε την εξέλιξη της πυκνότητας της βιομάζας της πηγής B και του πληθυσμού N συναρτήσει του χρόνου, με βάση τις τιμές 2.37 για τις παραμέτρους του μοντέλου. Όπως φαίνεται η πυκνότητα της βιομάζας της πηγής μειώνεται ενώ ο πληθυσμός

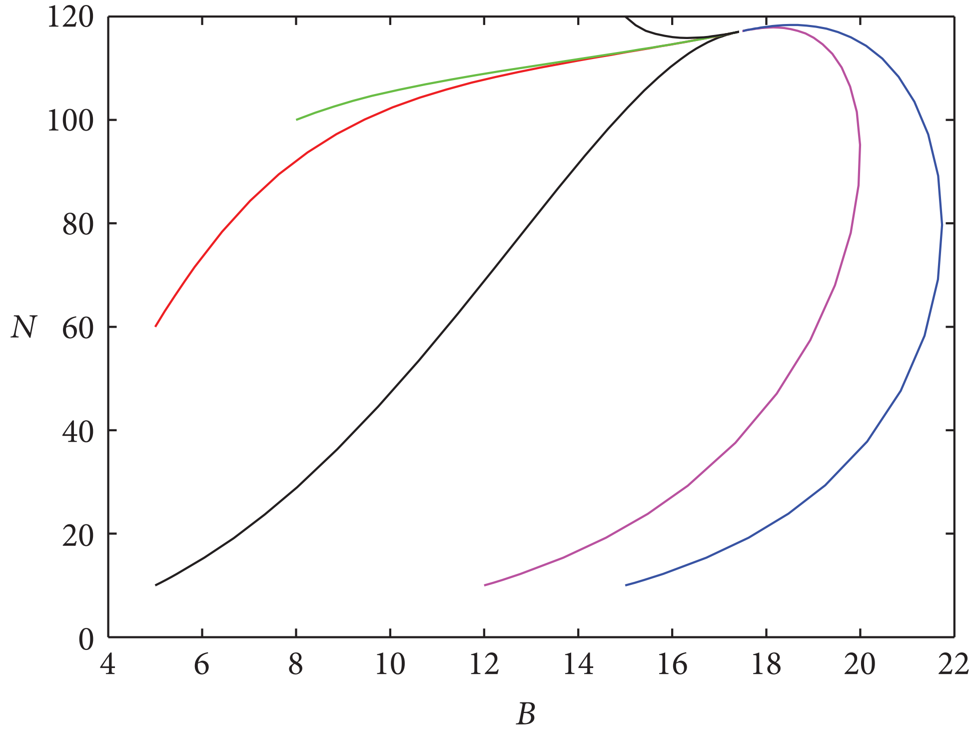
αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, ώσπου και τα δύο σταθεροποιούνται στο επίπεδο ισορροπίας τους. Έχουμε δηλαδή στο σημείο $P_3(0.479, 102.3108)$ τοπική ευστάθεια που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.
Τώρα επιλέγουμε διαφορετικό συνδυασμό τιμών για τις παραμέτρους

$$\begin{array}{cccc} r=1,6 & s=1,2 & K=100 & L=100 \\ E=100 & p=0,1 & q=0,01 & a_1=0,001 \\ a_2=0,0001 & b_1=0,01 & b_2=0,0001 & . \end{array} \tag{2.39}$$

Για αυτές τις τιμές ικανοποιείται ξανά η συνθήκη 2.18 άρα υπάρχει το σημείο ισορροπίας $P_3(B^*, N^*)$

$$B^* = 17,4311 \quad \kappa\alpha\iota \quad N^* = 117,0579 \tag{2.40}$$

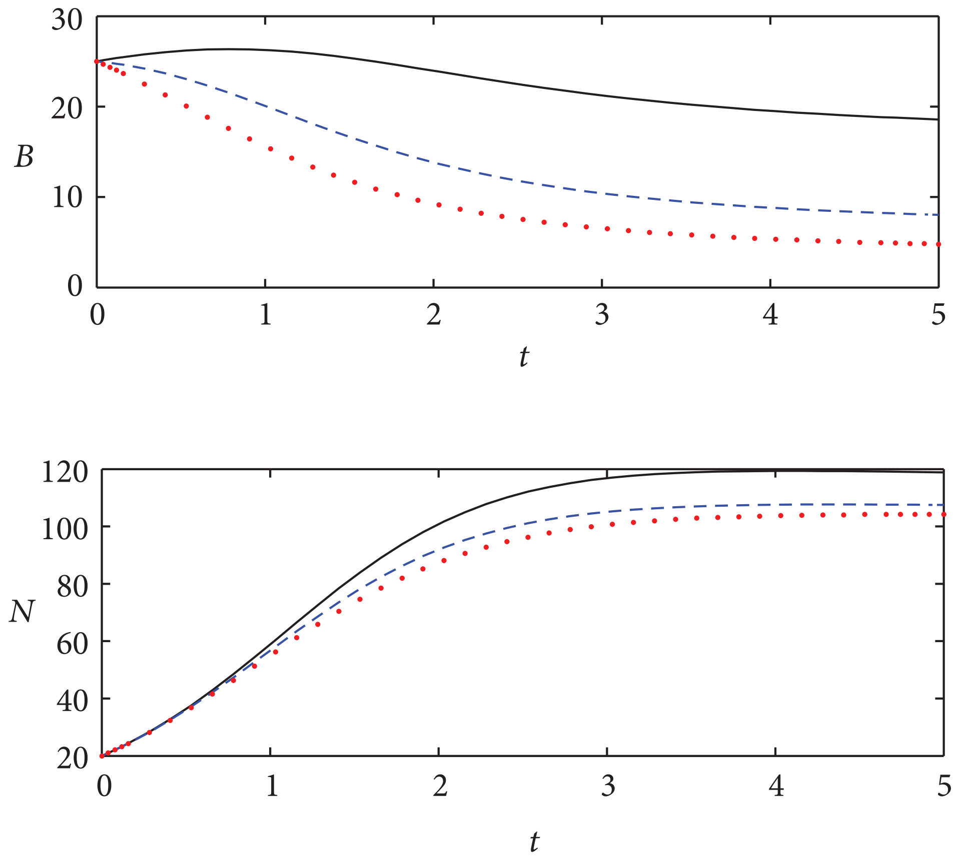
Επίσης με τις τιμές 2.39 ικανοποιείται και η συνθήκη 2.22 συνεπώς το P_3 είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
Στο διάγραμμα του σχήματος 2.2 βλέπουμε τις συμπεριφορές των B και N στο $B-N$ επίπεδο για διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Όπως φαίνεται όλες οι τροχιές, που ξεκινούν από διαφορετικά αρχικά σημεία, τείνουν στο σημείο ισορροπίας $P_3(17.4311, 117.0579)$. Αυτό φανερώνει την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου P_3.



Σχήμα 2.2: Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου $P_3(B^*, N^*)$, [14].

Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παράμετροι a_2 και b_2 είναι πολύ σημαντικές για το συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο. Στα διαγράμματα του σχήματος 2.3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των B και N για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου a_2 και στα διαγράμματα του σχήματος 2.4 για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου b_2.

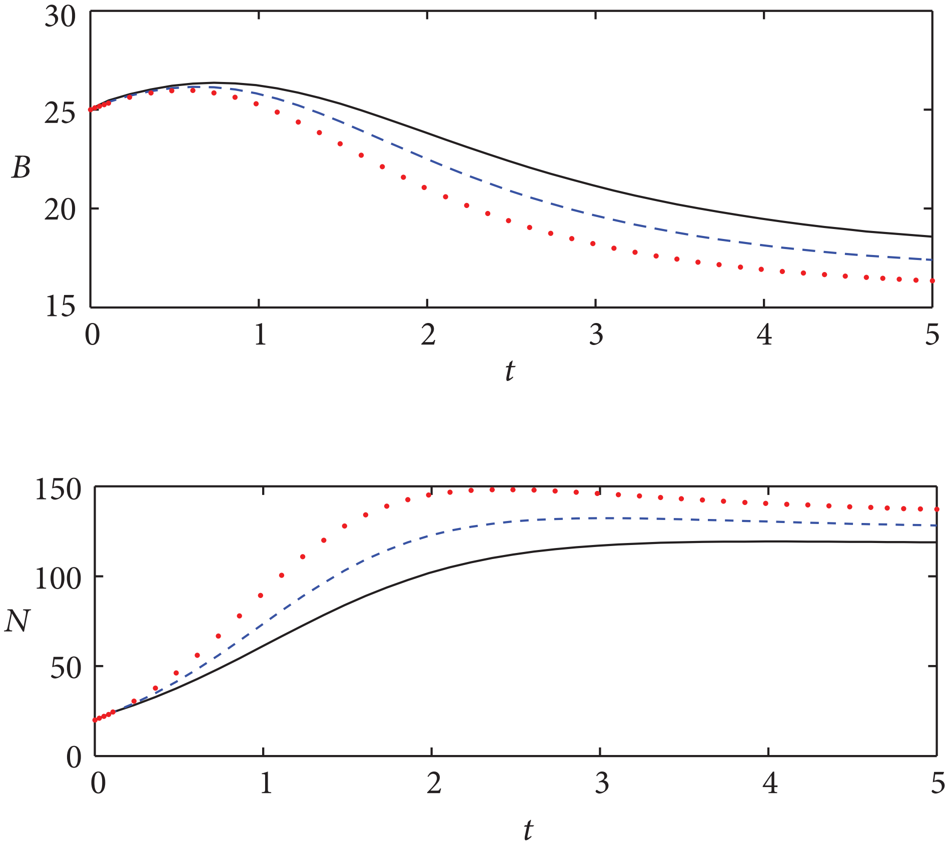
Όπως βλέπουμε στο πάνω διάγραμμα του 2.3 το B μειώνεται όταν το a_2 αυξάνεται. Για πολύ μικρή τιμή του a_2 (όπως για τις τιμές 2.39) το B αρχικά αυξάνεται ελαφρά και μετά μειώνεται



Σχήμα 2.3: Η μαύρη συνεχής καμπύλη είναι για $a_2 = 0,0001$. Η μπλε διακεκομμένη για $a_2 = 0,0005$ και η κόκκινη με τις τελείες για $a_2 = 0,001$, [14].

ώσπου να φτάσει στο επίπεδο ισορροπίας του. Από κάποια τιμή του a_2 και πάνω το B συνεχώς μειώνεται μέχρι να σταθεροποιηθεί στο επίπεδο ισορροπίας του.
Στο κάτω διάγραμμα του 2.3 βλέπουμε ότι και το N μειώνεται με την αύξηση του a_2. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι η αύξηση του a_2 προκαλεί μείωση του επιπέδου ισορροπίας της βιομάζας της πηγής B. Αφού λοιπόν ο πληθυσμός N εξαρτάται από την πηγή άρα και αυτός μειώνεται. Επίσης είναι φανερό πως για κάθε τιμή του a_2 το N αυξάνεται μέχρι να φτάσει στο επίπεδο ισορροπίας του.

Από το σχήμα 2.4 διακρίνουμε ότι η παράμετρος b_2 είναι πολύ σημαντική. Στα δύο διαγράμματα βλέπουμε ότι το B μειώνεται ενώ το N αυξάνεται, με την αύξηση του b_2. Δηλαδή για όλες τις τιμές του b_2 ο πληθυσμός N αυξάνεται ώσπου να φτάσει στην τιμή ισορροπίας του. Αντίθετα η βιομάζα της πηγής B αρχικά αυξάνεται για κάποιο χρονικό διάστημα και ύστερα μειώνεται μέχρι να σταθεροποιηθεί στο επίπεδο ισορροπίας της. Αυτό μας δείχνει ότι αν ο πληθυσμός εκμεταλλεύεται την πηγή χωρίς έλεγχο, τότε η βιομάζα της θα μειώνεται διαρκώς και μπορεί να οδηγήσει σε εξαφάνιση της ανανεώσιμης πηγής.



Σχήμα 2.4: Η μαύρη συνεχής καμπύλη είναι για $b_2 = 0,0001$. Η μπλε διακεκομμένη για $b_2 = 0,0005$ και η κόκκινη με τις τελείες για $b_2 = 0,001$, [14].

2.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτάθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο που εκφράζει το οικολογικό σύστημα: Ανανεώσιμη πηγή - Πληθυσμός που την εκμεταλλεύεται. Ο πληθυσμός και η βιομάζα της πηγής θεωρήθηκε ότι αναπτύσσονται με βάση την λογιστική εξίσωση. Επίσης μελετήθηκε ποια είναι η βέλτιστη πολιτική άντλησης που πρέπει να εφαρμόσει ο πληθυσμός για την εκμετάλλευση της ανανεώσιμης πηγής.
Αρχικά είδαμε ότι για την ύπαρξη σημείου ισορροπίας, στο οποίο να μην εξαφανίζεται ούτε η πηγή ούτε ο πληθυσμός, χρειάζεται να ισχύει μία συνθήκη. Ο ενδογενής δείκτης ανάπτυξης της βιομάζας της πηγής πρέπει να είναι μεγαλύτερος από μία τιμή. Η τιμή αυτή δείξαμε ότι εξαρτάται από την φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού που εκμεταλλεύεται την πηγή και από την πολιτική άντλησης που εφαρμόζει. Στην συνέχεια από την άμεση μέθοδο Lyapunov προέκυψε μία ακόμα συνθήκη που μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου αυτού. Είδαμε από τις αριθμητικές προσομοιώσεις ότι όταν ισχύουν οι δύο συνθήκες τότε όλες οι λύσεις που ξεκινούν από το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου $B - N$ τείνουν στο σημείο ισορροπίας. Συνεπώς η εξασφάλιση των δύο αυτών συνθηκών επιτρέπει την αρμονική συνύπαρξη του πληθυσμού και της ανανεώσιμης πηγής. Επίσης από τα διαγράμματα φάνηκε ότι πολύ σημαντικές για το μοντέλο είναι οι παράμετροι a_2 και b_2. Ειδικά η παράμετρος b_2 μας αποδεικνύει την ζημιά που μπορεί να προκληθεί, αν ο πληθυσμός εφαρμόσει λάθος πολιτική άντλησης κατά την

εκμετάλλευση της ανανεώσιμης πηγής.
Τέλος, με βάση αυτό το μοντέλο και από την αρχή μεγίστου του Pontryagin προτάθηκε μία βέλτιστη πολιτική άντλησης που να ευνοεί την ανάπτυξη τόσο της ανανεώσιμης πηγής όσο και του πληθυσμού που την εκμεταλλεύεται.

Κεφάλαιο 3

Μαθηματικό μοντέλο για την οικονομική εκμετάλλευση μη ανανεώσιμης πηγής

3.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί από κάποιον διαχειριστή, με σκοπό το μέγιστο κέρδος από την οικονομική εκμετάλλευση μίας μη ανανεώσιμης πηγής. Η μη ανανεώσιμη πηγή, για παράδειγμα μπορεί να είναι μία περιοχή με ορυκτό πλούτο και ο διαχειριστής η εταιρία που έχει αναλάβει την εξόρυξη και την εκμετάλλευση του. Τα έσοδα της εταιρίας προκύπτουν από την πώληση του ορυκτού που εξάγει. Επίσης όπως είναι φυσικό υπάρχει το κόστος εξόρυξης, επεξεργασίας, μεταφοράς και διάθεσης του ορυκτού στην αγορά. Συνεπώς πολλές φορές, και όταν το απόθεμα τείνει να εξαντληθεί, είναι πιο συμφέρον για την εταιρία να σταματήσει την εξόρυξη και όχι να την συνεχίσει μέχρι την εξάντληση όλου του ορυκτού πλούτου. Αυτό συμβαίνει επειδή το κόστος για την εξόρυξη ενός μικρού αποθέματος μπορεί να ξεπερνάει τα έσοδα που θα προκύψουν από την εκμετάλλευση του και έτσι να μην αποφέρει κέρδος για την εταιρία. Στην ουσία λοιπόν αναζητούμε την βέλτιστη πολιτική εξόρυξης για να μεγιστοποιεί το κέρδος και την οριακή αυτή κατάσταση (αν υπάρχει) στην οποία ο διαχειριστής πρέπει να εγκαταλείψει το ορυχείο.
Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε διαδοχικές καταστάσεις, με βάση χρονικές περιόδους. Σε κάθε κατάσταση πρέπει να ληφθεί μία απόφαση με σκοπό την βέλτιστη πολιτική (αλληλουχία αποφάσεων) που πρέπει να ακολουθηθεί. Συνεπώς μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3.
Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε την έννοια της σκιώδους τιμής (shadow price) που θα μας χρειαστεί για την κατάστρωση του μοντέλου. Η μελέτη και η λύση του προβλήματος θα βασιστούν στην εξίσωση Bellman και στις συνθήκες Euler για μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων.

3.2 Σκιώδης τιμή (Shadow price)

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [17] και [24].

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης **shadow price** λ, ονομάζεται η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε μεταβολή ενός περιορισμού κατά μία μονάδα. Στα οικονομικά μοντέλα, όταν η αντικειμενική συνάρτηση αντιπροσωπεύει κέρδος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η shadow price εκφράζει την μοναδιαία αύξηση ή μείωση του κέρδους όταν ο περιορισμός αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα κατά μία μονάδα. Η μελέτη των shadow prices κάθε περιορισμού μας παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης της αντικειμενικής συνάρτησης.
Στον τομέα των επιχειρήσεων, shadow price είναι η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένη να πληρώσει η επιχείρηση για μία επιπλέον μονάδα μίας περιορισμένης λειτουργίας. Για παράδειγμα, έστω μία εταιρία που εκμεταλλεύεται ένα ορυχείο. Αν η εργασία για την εξόρυξη του ορυκτού διαρκεί 40 ώρες την εβδομάδα, τότε η shadow price εκφράζει την μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο διαχειριστής ώστε να διαρκέσει η εξόρυξη μία επιπλέον ώρα, βασισμένος στο όφελος που θα αποκομίσει από αυτή την αλλαγή.
Τυπικά η shadow price είναι η τιμή που παίρνει ο πολλαπλασιαστής Lagrange στην βέλτιστη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Συνεπώς πράγματι εκφράζει την απειροελάχιστη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκαλείται από απειροελάχιστη μεταβολή του περιορισμού. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι στην βέλτιστη λύση η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων των συναρτήσεων περιορισμού.
Στις μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων, όπως είναι φυσικό, σε κάθε κατάσταση διαφέρει η shadow price. Δηλαδή αποτελεί συνάρτηση της μεταβλητής κατάστασης. Στα μοντέλα αυτά η shadow price ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης κέρδους, αφού άλλωστε εκφράζει την οριακή μεταβολή του κέρδους. Δηλαδή

$$\lambda(s) \equiv V'(s) = \frac{dV(s)}{ds} \quad . \tag{3.1}$$

3.3 Συνθήκες Euler

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [17], [1] και [20].

Όπως είδαμε και στην παράγραφο 1.3.2, ο σκοπός των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού σε ένα οικονομικό σύστημα δεν είναι άλλος από την εύρεση της βέλτιστης ισορροπίας μεταξύ των τρεχόντων και των προσδοκόμενων κερδών. Συνεπώς αναζητούμε συνθήκες που να μας οδηγούν σε αύτη την βέλτιστη λύση. Τέτοιου είδους συνθήκες είναι οι **συνθήκες Euler**. Χαρακτηρίζοντας την λύση μίας μαρκοβιανής διαδικασίας αποφάσεων μέσω των συνθηκών Euler μας παρέχεται μία συνεχής ερμηνεία της κάθε κατάστασης που βοηθάει στην κατανόηση και την εξήγηση των βασικών χαρακτηριστικών του οικονομικού συστήματος που μελετάμε. Οι συνθήκες Euler προκύπτουν εφαρμόζοντας τις συνθήκες Karush Kuhn Tucker στην εξίσωση Bellman.
Υποθέτουμε ότι μελετάμε ένα μαρκοβιανής απόφασης μοντέλο, με την δομή που εξετάσαμε

στην παράγραφο 1.3.2. Δηλαδή σε ένα οικονομικό σύστημα σε κάθε περίοδο t παρατηρείται μία κατάσταση s_t (μεταβλητή κατάστασης) και λαμβάνεται μία απόφαση x_t (μεταβλητή δράσης) η οποία αποφέρει κέρδος $f(s_t, x_t)$ (συνάρτηση απόδοσης). Επίσης κάθε κατάσταση εξαρτάται αποκλειστικά από την προηγούμενη κατάσταση και από την απόφαση που έχει ληφθεί στην προηγούμενη κατάσταση. Δηλαδή $s_{t+1} = g(s_t, x_t)$. Η συνάρτηση g ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης. Τέλος δ είναι ο ρυθμιστικός παράγοντας μείωσης κέρδους και $V(s)$ η συνάρτηση κέρδους.
Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $f, g : S \times X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης και ότι ο παράγοντας μείωσης κέρδους είναι μικρότερος της μονάδας. Τότε οι συνθήκες ισορροπίας Euler δεν αναφέρονται στην συνάρτηση κέρδους αλλά στην παράγωγο της που όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ταυτίζεται με την shadow price.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν υπάρχουν περιορισμοί για την απόφαση που πρέπει να πάρουμε σε κάθε κατάσταση.

• Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί για την μεταβλητή δράσης x. Τότε η βέλτιστη απόφαση x, δεδομένης μίας κατάστασης s, ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

$$\begin{cases} f_x(s,x) + \delta\lambda(g(s,x))g_x(s,x) = 0 \\ f_s(s,x) + \delta\lambda(g(s,x))g_s(s,x) = \lambda(s) \end{cases} \tag{3.2}$$

Οι f_x, f_s, g_x και g_s είναι μερικές παράγωγοι των οποίων οι διαστάσεις είναι 1xm, 1xn, nxm και nxn αντίστοιχα, όπου n και m είναι οι διαστάσεις του χώρου των καταστάσεων S, και του χώρου των αποφάσεων X αντίστοιχα.
Στις περιπτώσεις που η μεταβατική κατάσταση εξαρτάται μόνο από την απόφαση που έχει ληφθεί, δηλαδή $s_{t+1} = g(x_t)$, και όχι άμεσα από την προηγούμενη κατάσταση *, έχουμε $g_s = 0$. Οπότε από την δεύτερη εξίσωση της 3.2 παίρνουμε $f_s(s,x) = \lambda(s)$ και συνεπώς οι συνθήκες Euler παίρνουν την μορφή της εξίσωσης

$$f_x(s,x) + \delta f_s(g(x(s)), x(s))g'(x) = 0 \quad . \tag{3.3}$$

που ονομάζεται εξίσωση Euler για μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων.

• Οι συνθήκες Euler παίρνουν διαφορετική μορφή όταν οι αποφάσεις x υπόκεινται σε περιορισμούς. Έστω για παράδειγμα ότι για την μεταβλητή δράσης ισχύει ο περιορισμός

$$a(s) \leq x \leq b(s) \tag{3.4}$$

όπου $a, b : S \to X$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις της μεταβλητής κατάστασης s. Τότε οι συνθήκες Euler παίρνουν την μορφή

$$\begin{cases} f_x(s,x) + \delta\lambda(g(s,x))g_x(s,x) = \mu \\ f_s(s,x) + \delta\lambda(g(s,x))g_s(s,x) + \min\{\mu, 0\}a'(s) + \max\{\mu, 0\}b'(s) = \lambda(s) \end{cases} \tag{3.5}$$

όπου τα x και μ ικανοποιούν τις συμπληρωματικές συνθήκες

$$\begin{cases} a(s) \leq x \leq b(s) \\ x_i > a_i(s) \Rightarrow \mu_i \geq 0 \\ x_i < b_i(s) \Rightarrow \mu_i \leq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

*Φυσικά πάντα κάθε κατάσταση εξαρτάται από την προηγούμενη αφού $x_t \equiv x_t(s_t)$ και άλλωστε πρόκειται για μαρκοβιανή διαδικασία.

Το μ είναι ένα $1 \times m$ διάνυσμα του οποίου το i-στό στοιχείο εκφράζει το τρέχον και προσδοκόμενο κέρδος που προκύπτει από μία οριακή μεταβολή του i-οστού στοιχείου της μεταβλητής δράσης (x_i). Κατά την βέλτιστη κατάσταση ισορροπίας ισχύουν τα εξής. Το μ_i πρέπει να είναι μη θετικό αν το x_i είναι μικρότερο από το άνω του όριο, διαφορετικά τα κέρδη θα αυξάνονταν με μικρή αύξηση του x_i οπότε δεν θα είχαμε βέλτιστη ισορροπία. Ομοίως το μ_i πρέπει να είναι μη αρνητικό αν το x_i είναι μεγαλύτερο από το κάτω του όριο, διαφορετικά τα κέρδη θα αυξάνονταν με μικρή μείωση του x_i. Τέλος αν το x_i έχει την τιμή είτε του άνω είτε του κάτω ορίου του, το μ_i πρέπει να είναι μηδέν για να αποκλείει την πιθανότητα αύξησης των κερδών μέσω μίας οριακής μεταβολής του x_i προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Η γνώση της σταθερής κατάστασης (κατάστασης ισορροπίας) μίας μαρκοβιανής διαδικασίας αποφάσεων είναι πολύ σημαντική. Στα ντετερμινιστικά προβλήματα η οικονομική διαδικασία θα τείνει στην σταθερή κατάσταση ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες. Η σταθερή κατάσταση λοιπόν χαρακτηρίζει την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του οικονομικού μοντέλου. Για αυτό μας ενδιαφέρει κυρίως να κατανοήσουμε την συμπεριφορά του μοντέλου γύρω από την σταθερή του κατάσταση γιατί αυτή είναι η κατάσταση στην οποία τείνει να διαμείνει. Ωστόσο στα στοχαστικά μοντέλα η μεταβλητή κατάστασης και η μεταβλητή δράσης δεν τείνουν σε συγκεκριμένες τιμές και έτσι η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του μοντέλου μπορεί να περιγραφεί μόνο πιθανοθεωρητικά. Παρόλ' αυτά, σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατάσταση ισορροπίας από το αντίστοιχο ¨ντετερμινιστικό - ισοδύναμο' πρόβλημα, που προκύπτει με την αντικατάσταση όλων των εξωγενών τυχαίων σφαλμάτων με τις αντίστοιχες μέσες τιμές τους.
Η γνώση της σταθερής κατάστασης τέλος, μας παρέχει την δυνατότητα για μία λογική αρχική εκτίμηση για την βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί.

3.4 Μαθηματικό Μοντέλο

Πηγές μας για αυτή την παράγραφο αποτελούν τα συγγράμματα [17], [12], [1] και [20].

Θεωρούμε σαν μη ανανεώσιμη πηγή ένα ορυχείο και μία εταιρία σαν διαχειριστή που το εκμεταλλεύεται. Σκοπός της εταιρίας είναι να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της από την εξόρυξη και την εκμετάλλευση του ορυκτού πλούτου του ορυχείου.
Υποθέτουμε ότι κάθε χρόνο η εταιρία ξεκινάει με ένα προκαθορισμένο απόθεμα ορυκτού s, από το οποίο εξορύσσεται ένα μέρος x. Το κόστος εξόρυξης το συμβολίζουμε με $c(s, x)$. Όπως βλέπουμε το κόστος εξόρυξης είναι συνάρτηση και του αρχικού αποθέματος και όχι μόνο του μέρους που εξορύσσεται. Αυτό είναι απολύτως φυσικό αφού είναι διαφορετικό το κόστος εξόρυξης του ίδιου ποσού ορυκτού, από μία περιοχή πλούσια σε ορυκτό απ' ότι σε μία περιοχή στην οποία είναι πιο αραιά κατανεμημένο.
Τέλος με $p(x)$ εκφράζουμε την τιμή πώλησης κάθε μονάδας του ορυκτού στην αγορά. Θεωρώντας ότι το τρέχον απόθεμα ορυκτού είναι $\overline{s}$ αναζητούμε την βέλτιστη πολιτική που πρέπει να εφαρμόσει η εταιρία ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της σε βάθος χρόνου και την κατάλληλη στιγμή στην οποία πρέπει να εγκαταλείψει το ορυχείο.
Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού άπειρου ορίζοντα, με τον χρόνο t να μετριέται σε έτη. Η μεταβλητή κατάστασης $s\epsilon[0, \overline{s}]$ εκφράζει το απόθεμα του ορυκτού που έχει απομείνει στην αρχή κάθε έτους και η μεταβλητή δράσης $x\epsilon[0, s]$ το μέρος του ορυκτού

που θα εξορυχθεί το έτος αυτό.
Φυσικά στην αρχή κάθε χρόνου το απόθεμα θα είναι αυτό που ήταν στην αρχή του προηγούμενου μείον το μέρος που είχε εξορυχθεί το προηγούμενο έτος. Δηλαδή ισχύει

$$s_{t+1} = s_t - x_t \tag{3.7}$$

ή αλλιώς, η συνάρτηση μετάβασης θα είναι

$$g(s,x) = s - x \quad . \tag{3.8}$$

Επίσης το κέρδος της εταιρίας σε κάθε κατάσταση (έτος) προκύπτει από την πώληση του ορυκτού μείον το κόστος εξόρυξης. Οπότε η συνάρτηση απόδοσης είναι

$$f(s,x) = p(x)x - c(s,x) \quad . \tag{3.9}$$

Το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε σαν πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού, συνεπώς η συνάρτηση κέρδους εκφράζεται μέσω της εξίσωσης Bellman. Μάλιστα, επειδή το πρόβλημα είναι άπειρου χρονικού ορίζοντα χρησιμοποιούμε την μορφή της εξίσωσης 1.42, που συναντήσαμε στη παράγραφο 1.3.2. Οπότε η συνάρτηση κέρδους για το ορυχείο, δεδομένου ότι έχει ένα απόθεμα s είναι

$$V(s) = \max_{0 \le x \le s} \{p(x)x - c(s,x) + \delta V(s-x)\} \quad . \tag{3.10}$$

Φυσικά δεν μπορεί να αποκλειστεί η πιθανότητα ότι σε κάποιο επίπεδο αποθέματος θα ήταν προτιμότερο να εγκαταλειφθεί το ορυχείο. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να έχουμε την βέλτιστη λύση είναι οι συνθήκες Euler που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η μεταβλητή δράσης x υπόκειται σε περιορισμούς αφού

$$0 \le x \le s \tag{3.11}$$

άρα από την 3.5 έχουμε

$$p(x) + p'(x)x - c_x(s,x) - \delta\lambda(s-x) = \mu \tag{3.12}$$

και

$$-c_s(s,x) + \delta\lambda(s-x) + \max(\mu, 0) = \lambda(s) \tag{3.13}$$

όπου το ορυκτό που έχει εξορυχθεί x και το προσδοκόμενο οριακό κέρδος μ πρέπει να ικανοποιούν τις συμπληρωματικές συνθήκες

$$\begin{cases} 0 \le x \le s \\ x > 0 \Rightarrow \mu \ge 0 \\ x < s \Rightarrow \mu \le 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Συνεπώς σε κάθε περίοδο θα πρέπει να λαμβάνεται η εξής απόφαση. Είτε να εξορύσσεται ορυκτό ώσπου το προσδοκόμενο οριακό κέρδος να τείνει στο μηδέν είτε αν δεν μπορεί να γίνει αυτό, να εγκαταλειφθεί το ορυχείο.
Επομένως η βέλτιστη λύση προκύπτει από τις συνθήκες Euler. Η 3.12 και η 3.13, όταν το μ τείνει στο μηδέν μας δίνουν

$$\begin{aligned} p_t + {p_t}' x_t &= c_{xt} + \lambda_t \\ \lambda_t &= -c_{st} + \delta\lambda_{t+1} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Αυτή είναι η βέλτιστη πολιτική εξόρυξης που πρέπει να εφαρμόζεται από την εταιρία μέχρι να εγκαταλειφθεί το ορυχείο. Αυτό θα συμβεί όταν το απόθεμα φτάσει σε μία οριακή κατάσταση s^*. Σε αυτή την κατάσταση θα ισχύει $\lambda^* = x^* = 0$ αφού η εταιρία δεν θα κάνει εξόρυξη ορυκτού ($x^* = 0$) και δεν θα έχει επομένως και μεταβολή στο κέρδος της ($\lambda^* = 0$).

Βιβλιογραφία

[1] Δυναμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές, Γ. Δατσέρης, ΤΕΙ Κρήτης.

[2] Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Κ. Κυριάκη και Γ. Δάσιος, Αθήνα (1994).

[3] Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Α. Μπακόπουλος, Ι. Χρυσοβέργης, Αθήνα (1999).

[4] Αρχή Μεγίστου και Βέλτιστος Έλεγχος, Δ. Θεοδόσης Παλιμέρης, Ε.Μ.Π. (2011).

[5] Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Γ. Παντελίδης, Δ. Κραββαρίτης, Ν. Χατζησάββας, Αθήνα (1990).

[6] Οικολογικό Μοντέλο του Θερμαϊκού Κόλπου, Δ. Πατουχέας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (1995).

[7] Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές με την χρήση του Maple, Δ. Σουρλάς, Πανεπιστήμιο Πατρών.

[8] Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις, Ι. Σπηλιώτης, Αθήνα (2004).

[9] Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Ν. Σταυρακάκης, Αθήνα (2010).

[10] Σημειώσεις του διδάσκοντα Δ. Τζανετή για το μάθημα Μαθηματική Προτυποποίηση της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Ε.Μ.Π.

[11] Mathematica και Εφαρμογές, Σ. Τραχανάς, Κρήτη (2001).

[12] Η Εξίσωση Hamilton-Jacobi και Εφαρμογές, Α. Ψυλλάκης, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (2006).

[13] Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, W. Boyce and R. DiPrima, (1997).

[14] A Mathematical Model for Optimal Management and Utilization of a Renewable Resource by Population, B. Dubey and Atasi Patra, India (2012).

[15] Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters, Y. Fang, Case Western Reserve University (1994).

[16] Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, J. David Logan, (1997).

[17] Applied Computational Economics and Finance, Mario J. Miranda and Paul L. Fackler, U.S.A.

[18] The Bellman Principle of Optimality, I. Rosu.

[19] Hamilton − Jacobi − Bellman Equations, I. Smears, Durham University.

[20] Markov Decision Processes and Bellman Equations, E. Todorov, University of Washington (2012).

[21] Pontryagin's Maximum Principle, T. Watkins, San Jose State University.

[22] Management, co-management or no management, Fisheries and Aquaculture Department (2003).

[23] wikipedia.org/wiki/Karush Kuhn Tucker conditions.

[24] wikipedia.org/wiki/shadow price.