Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Διπλωματική Εργασία

Διατεταγμένοι Γραμμικοί Χώροι και Επέκταση Θετικών Τελεστών

Μαρία Παπαδάκη
Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Πολυράκης

Αθήνα 2013

Αφιερώνεται στους γονείς μου και στον αδελφό μου

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία δίνει έμφαση στη θεωρία των Διατεταγμένων γραμμικών χώρων. Γίνεται μία διεξοδική μελέτη και παρουσίαση αλγεβρικών ιδιοτήτων των χώρων αυτών, που είναι πολύ σημαντικές και διαδραμματίζουν μείζονα ρόλο στην μελέτη προβλημάτων της Συναρτησιακής Ανάλυσης, όπου οι χώροι που συναντάμε είναι τις περισσότερες φορές εφοδιασμένοι με κάποια σχέση διάταξης. Επίσης, μελετούνται θετικοί τελεστές και θεωρήματα θετικής επέκτασης τελεστών. Στο πρώτο κεφάλαιο, ορίζεται η έννοια του διατεταγμένου γραμμικού χώρου και δίνονται κάποια σύνολα μαθηματικών αντικειμένων των οποίων η δομή αντιπροσωπεύεται από την έννοια του γραμμικού χώρου. Η έννοια αυτή είναι μία σημαντική έννοια στα Μαθηματικά, που είναι χρήσιμη στην Ανάλυση και στις άλλες επιστήμες. Στην συνέχεια μελετώνται ιδιότητες και έννοιες που σχετίζονται με την διάταξη, όπως η έννοια του κώνου, του οξύ κώνου, του διατεταγμένου διαστήματος, της κυρτής θήκης υποσυνόλου του χώρου, της διατακτικής μονάδας, ενώ αποδεικνύονται κάποιες πολύ σημαντικές προτάσεις και δίνονται αντίστοιχα παραδείγματα. Επίσης, περιγράφονται κάποιοι τρόποι κατασκευής διατεταγμένων γραμμικών χώρων από ήδη υπάρχοντες, όπως μέσω καρτεσιανών γινομένων ή ευθέων αθροισμάτων διατεταγμένων γραμμικών χώρων. Στην συνέχεια, εισάγεται η έννοια των Αρχιμήδειων γραμμικών χώρων, δίνονται παραδείγματα τέτοιων χώρων και αποδεικνύονται σημαντικές προτάσεις πάνω στη θεωρία τους. Πολύ σημαντικοί είναι οι γραμμικοί σύνδεσμοι (χώροι *Riesz*) των οποίων η μελέτη επικεντρώνεται στην ενότητα 1.4, όπου μελετώνται αναλυτικά οι ιδιότητές τους και ορίζεται η έννοια των *Dedekind* πλήρων χώρων *Riesz*, των γραμμικών υποσυνδέσμων και των συνδέσμων-υποχώρων. Σε όλη την έκταση της ενότητας δίνονται πολλά παραδείγματα, ώστε να γίνει όσο το δυνατόν περισσότερο κατανοητή η χρησιμότητα των γραμμικών συνδέσμων στις εφαρμογές. Στο κεφάλαιο-2 μελετώνται κάποια κυρτά υποσύνολα ενός οξύ κώνου, που είναι ειδικής μορφής, και ονομάζονται βάσεις του κώνου. Η θεωρία των βάσεων των κώνων είναι σημαντικό στοιχείο της γεωμετρίας των κώνων

και έχει πολλές εφαρμογές στη χρηματοοικονομική θεωρία. Ειδικότερα, σε μία οικονομία, κάθε βάση του κώνου κατανάλωσης ορίζει ένα σύνολο προϋπολογισμού, και αντιστρόφως κάθε σύνολο προϋπολογισμού ορίζει μία βάση του κώνου κατανάλωσης. Το κεφάλαιο-3 αποτελεί ένα εισαγωγικό κεφάλαιο στην θεωρία τελεστών, όπου υπενθυμίζονται βασικά αποτελέσματα σχετικά με τους συνεχείς (ή φραγμένους) τελεστές μεταξύ χώρων με νόρμα, ορίζεται ο χώρος $B(X, Y)$ των φραγμένων τελεστών μεταξύ των χώρων με νόρμα X, Y και ορίζεται η νόρμα τελεστή σε αυτόν τον χώρο. Στην ενότητα 3.4 παρουσιάζεται η βασική θεωρία σχετικά με τους συζυγείς τελεστές και αποδεικνύονται κάποια βασικά θεωρήματά τους. Το κεφάλαιο-4 είναι αφιερωμένο στην επέκταση θετικών τελεστών. Αφού δοθούν οι απαραίτητοι ορισμοί, διατυπώνεται το θεώρημα επέκτασης των $Hahn - Banach$ σε διατεταγμένους γραμμικούς χώρους, το οποίο διαδραματίζει μείζων ρόλο στην Ανάλυση, και ειδικότερα στη θεωρία Διατεταγμένων Χώρων. Στη συνέχεια, γίνεται εφαρμογή του θεωρήματος $Hahn - Banach$ στους χώρους $Riesz$ και ειδικεύονται τα αποτελέσματα για θετικά γραμμικά συναρτησιακά. Στο κεφάλαιο-5 μελετώνται οι τύποι των $Riesz - Kantorovich$. Ο τύπος των $Riesz - Kantorovich$ προσδιορίζει το $supremum$ δύο τελεστών, που ορίζονται μεταξύ δύο διατεταγμένων γραμμικών χώρων. Μελετώνται κάποιες συνθήκες οι οποίες είναι επαρκείς για την ισχύ του, και οι οποίες μας δίνουν την δυνατότητα να πάρουμε επεκτάσεις γνωστών αποτελεσμάτων που αφορούν ιδιότητες των συνδέσμων, αλλά και που απορρέουν από την Ιδιότητα Διάσπασης για τους χώρους των διατακτικά φραγμένων τελεστών μεταξύ δύο γραμμικών χώρων. Εκτός από τη μεγάλη χρησιμότητα του θεωρήματος των $Riesz - Kantorovich$ στην Ανάλυση, το θεώρημα αυτό έχει σημαντικές εφαρμογές στην Μαθηματική Οικονομία, και ειδικότερα στη θεωρία Γενικής Ισορροπίας.

Υπάρχουν αρκετά $papers$ που ασχολούνται με ανοικτά προβλήματα πάνω στη θεωρία των διατεταγμένων γραμμικών χώρων και των γραμμικών συνδέσμων και η θεωρία τους αποτελεί το αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π., κ. Ιωάννη Πολυράκη, που ήταν ο επιβλέπων της παρούσας διπλωματικής εργασίας, για την πολύτιμη βοήθειά του σε επιστημονικό επίπεδο, αλλά και την άριστη συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια διεκπεραίωσής της. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, Καθηγητές κ. Σωτήρη Καρανάσιο και κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, και γενικότερα τους καθηγητές του τομέα Μαθηματικών του Ε.Μ.Π. για το πνεύμα συνεργασίας που με περιέβαλε καθόλη τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος, θα ήθελα να

ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αγάπη και την στήριξή της σε όλους τους τομείς, που μου προσέφερε πάντα και συνεχίζει να μου προσφέρει.

Μαρία Παπαδάκη
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα 2013

Περιεχόμενα

1 Διατεταγμένοι Γραμμικοί Χώροι **11**

1.1 Βασικές Έννοιες 11

1.2 Διατεταγμένοι υπόχωροι 23

1.3 Αρχιμήδειοι γραμμικοί χώροι 25

1.4 Γραμμικοί Σύνδεσμοι (Χώροι *Riesz*) 29

1.4.1 Βασικές Έννοιες 29

1.4.2 *Dedekind* Πλήρεις Χώροι *Riesz* 36

1.4.3 Γραμμικοί υποσύνδεσμοι και σύνδεσμοι-υπόχωροι 38

2 Βάσεις Κώνων **41**

2.1 Κυρτά σύνολα 41

2.2 Ορισμός και ιδιότητες των Βάσεων κώνων 45

3 Θετικοί τελεστές **55**

3.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί 55

3.2 Συνεχείς (ή φραγμένοι) τελεστές 58

3.3 Ο χώρος $B(X, Y)$ των φραγμένων τελεστών 59

3.4 Συζυγείς τελεστές 62

4 Επέκταση θετικών τελεστών **67**

4.1 Επέκταση 67

4.1.1 Θεώρημα $Hahn - Banach$ σε χώρους *Riesz* 67

4.1.2 Θετικά γραμμικά συναρτησιακά 70

5 Οι τύποι των $Riesz - Kantorovich$ **73**

5.1 Εισαγωγή 73

5.2 Το Θεώρημα των $Riesz - Kantorovich$ 74

Κεφάλαιο 1

Διατεταγμένοι Γραμμικοί Χώροι

1.1 Βασικές Έννοιες

Πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος ονομάζεται μία τριάδα $(X, +, *)$, όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο, $+ : X \times X \to X$ μία εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και $* : \mathbb{R} \times X \to X$ μία εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$, για κάθε $x, y, z \in X$.

(ii) $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in X$.

(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο 0 του X, που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, ώστε $x + 0 = 0 + x = x$, για κάθε $x \in X$.

(iv) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα στοιχείο $-x$ του X, που ονομάζεται αντίθετο του x, ώστε $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(v) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(vi) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (όπου στο πρώτο μέλος το σύμβολο $+$ εκφράζει τη συνήθη πρόσθεση των πραγματικών αριθμών, ενώ στο δεύτερο μέλος το σύμβολο $+$ εκφράζει την πρόσθεση στο διανυσματικό χώρο X).

(vii) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (όπου στο δεύτερο μέλος το $\lambda\mu$ είναι το σύνηθες γινόμενο των πραγματικών αριθμών λ και μ).

$(viii)$ $1 x = x$, για κάθε $x \in X$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται και διανύσματα.

Παρακάτω, χάριν συντομίας, αντί να λέμε "ο διανυσματικός χώρος $(X, +, *)$", θα λέμε "ο διανυσματικός χώρος X".

Σημείωση: Αν στον παραπάνω ορισμό αντικαταστήσουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών έχουμε την έννοια του μιγαδικού διανυσματικού χώρου.

Ορισμός. Έστω X γραμμικός χώρος. Μία διμελής σχέση $\leq$ στον X ονομάζεται <u>μερική διάταξη στον X</u>, αν για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(1) $x \leq x$
(αυτοπαθής ιδιότητα)

(2) Αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε συνεπάγεται ότι $x = y$
(αντισυμμετρική ιδιότητα)

(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε ισχύει ότι $x \leq z$
(μεταβατική ιδιότητα)

(4) Αν $x \leq y$, τότε συνεπάγεται ότι $x + z \leq y + z$ και $\lambda x \leq \lambda y$, $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
(συμβατότητα με τη γραμμική δομή του χώρου)

Τότε, ο X, ή ακριβέστερα το ζευγάρι $(X, \leq)$ ονομάζεται <u>(μερικά) διατεταγμένος γραμμικός χώρος (*partially ordered linear space*).</u>

<u>Σημείωση:</u> Είναι γνωστή η έννοια της μερικής διάταξης σε ένα μη κενό σύνολο X, ως η διμελής σχέση $\leq$ στον X, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(3), δηλαδή την αυτοπαθή, την αντισυμμετρική, και την μεταβατική ιδιότητα. Επειδή, στην προκειμένη περίπτωση, δεν έχουμε απλώς ένα μη κενό σύνολο X, αλλά έχουμε έναν γραμμικό χώρο, η μερική διάταξη οφείλει να είναι συμβατή με την γραμμική δομή του χώρου, δηλαδή να ικανοποιεί επιπροσθέτως και την ιδιότητα (4), και ονομάζεται μερική γραμμική διάταξη.

Αν X είναι διατεταγμένος γραμμικός χώρος, το σύνολο των στοιχείων του που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός ονομάζεται <u>θετικός κώνος του X</u> και

συμβολίζεται με X_+. Δηλαδή,

$$X_+ = \{ x \in X \, , \, x \geq 0 \}$$

Ο θετικός κώνος του X ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(1) $X_+ + X_+ \subseteq X_+$

(δηλαδή, αθροίσματα στοιχείων του X_+ ανήκουν στον X_+)

(2) $\lambda x \in X_+$, για κάθε $x \in X_+$, και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$

(δηλαδή, τα θετικά πολλαπλάσια στοιχείων του X_+ ανήκουν στον X_+)

(3) $X_+ \cap \{ -X_+ \} = \{0\}$

(Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\exists x \in X_+$ τέτοιο ώστε $x \in X_+ \cap \{ -X_+ \}$ τότε, επειδή $x \in X_+ \Rightarrow x \geq 0 \, (*)$ και επειδή $x \in -X_+ \Rightarrow x \leq 0 \, (**)$. Επομένως, από (*),(**) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα, έπεται ότι $x = 0$.)

Από τις ιδιότητες (1) και (2), διαπιστώνουμε ότι ο θετικός κώνος X_+ είναι κυρτό σύνολο. Γενικότερα, κάθε μη κενό υποσύνολο του X που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) και (2) ονομάζεται <u>κώνος (*wedge*)</u> και όπως παρατηρούμε, κάθε κώνος είναι κυρτό σύνολο. Επίσης, αν W είναι ένας κώνος του X, τότε το σύνολο $W \cap \{ -W \}$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X. Όταν ο διανυσματικός αυτός υπόχωρος είναι ο τετριμμένος (δηλαδή, ισχύει η ιδιότητα (3)), τότε ο κώνος ονομάζεται <u>οξύς κώνος (*cone*).</u>

Παρατήρηση. Ο οξύς κώνος είναι ένα πολύ σημαντικό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου, επειδή μπορεί να ορίσει σχέση μερικής γραμμικής διάταξης στο χώρο. Πράγματι, αν $P \subseteq X$ είναι ένας οξύς κώνος του X (όπου X γραμμικός χώρος), τότε ορίζεται μία σχέση μερικής γραμμικής διάταξης $\leq$ στον X, που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq y \iff y - x \in P$$

Πράγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η σχέση $\leq$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (1),(2),(3) και (4) του ορισμού της μερικής γραμμικής διάταξης. Επίσης, στην περίπτωση που ο X εφοδιασθεί με αυτήν την σχέση γραμμικής διάταξης, τότε ο θετικός του κώνος είναι ο P, δηλαδή $P \equiv X_+ = \{ x \in X \, , \, x \geq 0\}$ και ο X λέμε ότι είναι <u>γραμμικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P</u>, και αυτό που εννοούμε είναι ότι η διάταξη είναι εκείνη που επάγεται από τον κώνο P, δηλαδή ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο που περιγράψαμε.

Παρατήρηση. Αν P κώνος του X, τότε το σύνολο $P - P$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τον P.

Θα το αποδειξουμε. Πράγματι, έστω x διάνυσμα που ανήκει στον διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τον P. Επομένως, το x θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του P, δηλαδή θα υπάρχουν διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in P$ και πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Οι αριθμοί $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ είναι πραγματικοί, και μπορεί να είναι είτε θετικοί ή αρνητικοί. Αν τώρα 'διαχωρίσουμε' τους δείκτες $\{i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ σε δύο σύνολα: $I_1 = \{i : a_i \geq 0\}$ (οι δείκτες εκείνοι για τους οποίους το αντίστοιχο a_i είναι μη-αρνητικό), και $I_2 = \{i : a_i < 0\}$(οι δείκτες εκείνοι για τους οποίους το αντίστοιχο a_i είναι αρνητικό), τότε έχουμε ότι:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i \in I_1} a_i x_i - \sum_{i \in I_2} (-a_i) x_i \in P - P.$$

Επομένως, δείξαμε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται απο τον P είναι ο $P - P$.

Πολύ σημαντική είναι η έννοια του παράγων κώνου.

Ένας κώνος P ενός διανυσματικού χώρου X ονομάζεται <u>παράγων (*generating*)</u> αν $X = P - P$, δηλαδή ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τον P συμπίπτει με τον X.

Παρατήρηση. Ένας κώνος P ενός διανυσματικού χώρου X είναι παράγων (*generating*), αν κυριαρχεί (*majorizes*) στο χώρο X, δηλαδή, για κάθε $x \in X$, υπάρχει κάποιο $y \in P$, που να ικανοποιεί το ότι $y \geq_P x$, όπου με $\geq_P$ εννοούμε την διάταξη που επάγεται από τον κώνο P.

Υπάρχουν κάποιες πολύ θεμελιώδεις έννοιες, και μερικά χρήσιμα σύνολα που συνδέονται με έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο, και αναπτύσσονται αμέσως παρακάτω.

Έστω x και y δύο διανύσματα ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου X, που ικανοποιούν τη σχέση $x \leq y$. Τότε, το <u>διατεταγμένο διάστημα</u> , που συμβολίζεται με $[x, y]$, είναι το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$$

Αν δεν ισχύει ότι $x \leq y$, τότε ορίζουμε $[x, y] = \emptyset$, έτσι ώστε το διατεταγμένο διάστημα να ορίζεται για όλα τα διανύσματα x και y του χώρου X.

Παρατήρηση. Κάθε διατεταγμένο διάστημα είναι κυρτό σύνολο.

Ένα υποσύνολο A ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου X ονομάζεται διατακτικά κυρτό ($full$ ή $order-convex\ set$) αν για κάθε $x\,,\,y\,\in\,A$ έχουμε ότι $[\,x\,,\,y\,]\,\subseteq\,A$. (Δηλαδή, για κάθε δύο στοιχεία του A, το διατεταγμένο διάστημά τους βρίσκεται μέσα στο A).

Το γεγονός ότι η τομή μίας οικογένειας διατακτικά κυρτών συνόλων είναι διατακτικά κυρτό σύνολο, μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό της διατακτικά κυρτής θήκης ($full\ hull$) ενός υποσυνόλου του διατεταγμένου γραμμικού χώρου X.

Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος, και έστω B υποσύνολο του X. Η τομή όλων των διατακτικά κυρτών υποσυνόλων του X που περιέχουν το B είναι διατακτικά κυρτό και ονομάζεται κυρτό περίβλημα ή αλλιώς κυρτή θήκη του B, και συμβολίζεται με $[B]$. Η διατακτικά κυρτή θήκη του B δίνεται από την εξής σχέση:

$$[B]\,=\,(\,B\,+\,L_+\,)\,\cap\,(B\,-\,L_+\,)\,=\,\cup_{x\,,\,y\in B}\,[\,x\,,\,y\,]$$

Πράγματι, από τον ορισμό της διατακτικά κυρτής θήκης του B, είναι προφανές ότι ισούται με την ένωση όλων των διατεταγμένων διαστημάτων $[\,x\,,\,y\,]$ με $x\,,\,y\,\in\,B$. Θα το αποδείξουμε. Πράγματι, έστω $D\,=\,\cup_{\substack{x\,,\,y\in B\\ x\,\leq\,y}}\,[\,x\,,\,y\,]$. Θα δείξουμε ότι $D\,=\,[B]$. Το D είναι διατακτικά κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν $x\,,\,y\,\in\,D$, τότε θα δείξουμε ότι $[\,x\,,\,y\,]\,\subseteq\,D$. Επειδή το $x\,\in\,D$ έπεται ότι $\exists\,x_1\,,\,y_1\,\in\,B$ με $x_1\,\leq\,y_1$, τέτοια ώστε $x_1\,\leq\,x\,\leq\,y_1$. Επίσης, επειδή $y\,\in\,D$ έπεται ότι $\exists\,x_2\,,\,y_2\,\in\,B$ με $x_2\,\leq\,y_2$, τέτοια ώστε $x_2\,\leq\,y\,\leq\,y_2$. Άρα, αν $z\,\in\,[\,x\,,\,y\,]$, τότε $x_1\,\leq\,x\,\leq\,z\,\leq\,y\,\leq\,y_2$ και προφανώς $x_1\,,\,y_2\,\in\,B$, άρα $z\,\in\,[\,x_1\,,\,y_2\,]$. Επομένως, βρήκαμε ένα διατεταγμένο διάστημα με άκρα που να ανήκουν στο B, το οποίο να περιέχει το z. Άρα, $z\,\in\,D$. Επομένως, δείξαμε ότι $\forall\,z\,\in\,[\,x\,,\,y\,]\,\Rightarrow\,z\,\in\,D$, άρα $[\,x\,,\,y\,]\,\subseteq\,D$, δηλαδή το D είναι διατακτικά κυρτό. Επίσης, το D περιέχει το B.

Άρα, το D (επειδή είναι διατακτικά κυρτό και περιέχει το B) θα περιέχει τη διατακτικά κυρτή θήκη του B, δηλαδή $[\,B\,]\,\subseteq\,D$ (*).

Έστω τώρα ένα $z\,\in\,D$. Τότε, επειδή $D\,=\,\cup_{\substack{x\,,\,y\in B\\ x\,\leq\,y}}\,[\,x\,,\,y\,]$, θα υπάρχουν $x\,,\,y\,\in\,B\,:\,x\,\leq\,z\,\leq\,y$. Άρα, $z\,\in\,[\,x\,,\,y\,]\,\subseteq\,[B]$. Επομένως, δείξαμε ότι για κάθε $z\,\in\,D$, έπεται ότι $z\,\in\,[B]$. Επομένως, $D\,\subseteq\,[B]$ (**).

Από (*) και (**), έπεται ότι $[B]\,=\,\cup_{x\,,\,y\in B}\,[\,x\,,\,y\,]$.

Παρατήρηση. Η διατακτικά κυρτή θήκη ενός κυρτού συνόλου είναι κυρτό σύνολο. Επίσης, η διατακτικά κυρτή θήκη ενός ισορροπημένου συνόλου είναι ισορροπημένο σύνολο. (Να υπενθυμίσουμε ότι ένα υποσύνολο S ενός διανυσματικού χώρου ονομάζεται ισορροπημένο (*circled* ή *balanced*) όταν για κάθε $x \in S$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει ότι $\lambda x \in S$)

Εν συνεχεία, θα δούμε πότε ένα υποσύνολο ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου είναι άνω (ή κάτω) φραγμένο, και πότε είναι διατακτικά φραγμένο, με σκοπό να εισάγουμε τις θεμελιώδεις έννοιες των *supremum* και *infimum*, έννοιες κυρίαρχης σημασίας στον ορισμό των χώρων *Riesz* στην συνέχεια.

Ένα υποσύνολο A ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου X ονομάζεται <u>άνω φραγμένο</u>, αν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $x \in X$ (το οποίο ονομάζεται άνω φράγμα (*upper bound*) του A), τέτοιο ώστε $a \leq x$, $\forall a \in A$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το κάτω φραγμένο υποσύνολο του χώρου. Πιο συγκεκριμένα, ένα υποσύνολο A ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου X ονομάζεται <u>κάτω φραγμένο</u>, αν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $x \in X$ (το οποίο ονομάζεται κάτω φράγμα (*lower bound*) του A), τέτοιο ώστε $x \leq a$, $\forall a \in A$.

Ένα υποσύνολο A ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου X ονομάζεται <u>διατακτικά φραγμένο</u>, αν το A είναι άνω και κάτω φραγμένο, ή ισοδύναμα αν περιέχεται σε ένα διατεταγμένο διάστημα του χώρου (δηλαδή, αν $\exists\, x\,,\, y \in X$ τέτοια ώστε $A \subseteq [\,x\,,\,y\,]$).

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου χώρου X. Ένα διάνυσμα $u \in X$ ονομάζεται <u>ελάχιστο άνω φράγμα (*least upper bound*) ή *supremum* του A</u>, και συμβολίζεται με $\sup A$, αν

(α) το u είναι άνω φράγμα του A, δηλαδή $a \leq u$, $\forall a \in A$, και

(β) το u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, δηλαδή για οποιοδήποτε άλλο άνω φράγμα v του A ισχύει ότι $u \leq v$.

Παρατήρηση. Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Αν ο κώνος του X, που ορίζει τη διάταξη στο χώρο, είναι οξύς, τότε ένα μη κενό υποσύνολο του χώρου μπορεί να έχει το πολύ ένα *supremum*. Αν δηλαδή το *supremum* υπάρχει, τότε αυτό είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω $A \subseteq X$. Αν υποθέσουμε ότι $u\,,\,v \in X$ είναι *supremum* του A, τότε έχουμε ότι $u \geq v$ και $v \geq u$ (από τον ορισμό των $u\,,\,v$ ως *supremum* του A). Ισοδύναμα, έχουμε ότι $u - v \geq 0$ και $-\,(\,u - v\,) \geq 0$, και επειδή ο κώνος του χώρου είναι οξύς, έπεται ότι $u - v = 0 \iff u = v$. (Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι $\pm x \in P$ με P

οξύ κώνο του χώρου, άρα $P \cap (-P) = \{0\}$, έπεται ότι $x \in P$, $-x \in P \iff x \in (-P) \Rightarrow x \in P \cap (-P) = \{0\} \Rightarrow x = 0$).

Ο ορισμός του μεγίστου κάτω φράγματος (*greatest lower bound*) ή $infimum$ ορίζεται ανάλογα.

Οι κλασσικοί συμβολισμοί για το $supremum$ του πεπερασμένου συνόλου $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ είναι:

$$sup\ \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \text{ ή } \bigvee_{i=1}^{n} x_i \quad \text{και} \quad inf\ \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \text{ ή } \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$$

για το $infimum$ του ίδιου συνόλου.

Ειδικότερα, για το δισύνολο $\{x, y\}$, συμβολίζουμε με:

$sup\ \{x, y\}$ ή $x \vee y$ το $supremum$ του $\{x, y\}$, και με $inf\ \{x, y\}$ ή $x \wedge y$ το $infimum$ του $\{x, y\}$.

Προφανώς, σε κάθε διατεταγμένο γραμμικό χώρο, ισχύει ότι $x \vee x = x \wedge x = x$.

Παρατήρηση. Σε ειδικής μορφής διατεταγμένους γραμμικούς χώρους, κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων έχει $supremum$ και $infimum$. Στους περισσότερους διατεταγμένους γραμμικούς χώρους, για κάθε ζευγάρι σημείων x, y που δεν είναι συγκρίσιμα (ως προς την σχέση μερικής γραμμικής διάταξης), δηλαδή $x \not\leq y$ και $y \not\leq x$, το $supremum$ $x \vee y$ και το $infimum$ $x \wedge y$ δεν υπάρχουν.

Θα συνεχίσουμε με τον ορισμό του άνω (και κάτω) κατευθυνόμενου υποσυνόλου ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου, και με την απόδειξη μίας πολύ σημαντικής πρότασης που δίνει μία αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ο θετικός κώνος ενός γραμμικού χώρου να παράγει το χώρο.

Ένα μη κενό υποσύνολο D ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου ονομάζεται <u>άνω κατευθυνόμενο</u>, και συμβολίζεται $D \uparrow$, αν για κάθε ζευγάρι $x, y \in D$, υπάρχει κάποιο $z \in D$ που να είναι άνω φράγμα του δισυνόλου $\{x, y\}$, δηλαδή $x \leq z$ και $y \leq z$.

Το κάτω κατευθυνόμενο (*directed downward*) σύνολο ορίζεται ανάλογα.

Πρόταση. *Έστω X γραμμικός χώρος. Ο X_+ παράγει τον X αν και μόνο αν ο X είναι άνω κατευθυνόμενος.*

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Έστω ότι ο X_+ παράγει τον X, δηλαδή $X = X_+ - X_+$. Τότε, για κάθε $x\,,\, y \in X$, υπάρχουν στοιχεία $x_1\,,\, x_2\,,\, y_1\,,\, y_2 \in X_+$, τέτοια ώστε $x = x_1 - x_2$ και $y = y_1 - y_2$. Άρα, $x \leq x_1$ και $y \leq y_1$ και επομένως $x, y \leq x_1 + y_1$. Επομένως, για το ζεύγος στοιχείων $\{\, x\,,\, y\,\}$ του γραμμικού χώρου X βρήκαμε ένα στοιχείο, το $x_1 + y_1$, που να είναι άνω φράγμα του δισυνόλου. Επομένως, ο X είναι άνω κατευθυνόμενος.

" $\Leftarrow$ "

Έστω ότι ο X είναι άνω κατευθυνόμενος. Τότε, για κάθε $x \in X$, αν θεωρήσουμε το δισύνολο $\{\, x\,,\, 0\,\}$, τότε υπαρχει $z \in X$, τέτοιο ώστε $z \geq x$ και $z \geq 0$. Άρα, $z - x \geq 0$. Επομένως, έχουμε ότι $x = z - (\, z - x\,)$ και $z \geq 0\,,\, z - x \geq 0$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το τυχόν $x \in X$ γράφεται ως διαφορά στοιχείων του X_+. Επομένως, ο X_+ παράγει τον X. □

Έστω X γραμμικός χώρος. Το στοιχείο $e \in X_+$ ονομάζεται <u>διατακτική μονάδα (*order unit*)</u> του X, αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει πραγματικός αριθμός $a > 0$, ώστε $x \in [\,-ae\,,\, ae\,]$.

Πρόταση. *Αν ο X έχει διατακτική μονάδα, τότε ο θετικός κώνος X_+ του X παράγει τον X.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X έχει διατακτική μονάδα και έστω $x \in X$. Τότε, $\exists\, e \in X_+$, ώστε για το $x \in X$, υπάρχει πραγματικός αριθμός $a > 0$, ώστε $x \in [\,-ae\,,\, ae\,]$. Δηλαδή, $-\,ae \leq x \leq ae$. Άρα, $ae - x \geq 0$. Αποδείξαμε ότι $x = ae - (\, ae - x\,)$ και $ae \geq 0\,,\; ae - x \geq 0$, δηλαδή το τυχόν $x \in X$ γράφεται ως διαφορά δύο στοιχείων του X_+. Επομένως, ο X_+ παράγει τον X. □

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι η διατακτική μονάδα ενός διατεταγμένου χώρου *Banach* ταυτίζεται με εσωτερικό σημείο του θετικού του κώνου.

Πρόταση. *Αν X είναι χώρος Banach διατεταγμένος από τον κλειστό κώνο P και $x_0 \in P$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) το x_0 είναι διατακτική μονάδα του X,
(ii) το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του P.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$

Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι διατακτική μονάδα του X, δηλαδή $\forall x \in X$, $\exists a > 0 : x \in [-ax_0, ax_0]$. Τότε, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-nx_0, nx_0]$. Επειδή ο κώνος P είναι κλειστός, έπεται ότι τα διατεταγμένα διαστήματα $[-nx_0, nx_0]$ είναι κλειστά. Επομένως, ο X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του, και επειδή ο X είναι χώρος $Banach$, και άρα πλήρης, ισχύει το θεώρημα $Baire$. Από το θεώρημα $Baire$, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο από την οικογένεια κλειστών υποσυνόλων $\{[-nx_0, nx_0]\}_{n\in\mathbb{N}}$ που να έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε το σύνολο $[-n_0x_0, n_0x_0]$ να έχει εσωτερικά σημεία. Από αυτό έπεται ότι και το σύνολο $[-x_0, x_0]$ έχει εσωτερικά σημεία. Έστω $z \in int([-x_0, x_0])$.Τότε, υπάρχει ρ>0, ώστε $z + B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$. Θα αποδείξουμε ότι $x_0 + B\left(0, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq P$, και επομένως το x_0 θα είναι εσωτερικό σημείο του P, αφού θα έχω βρει μια μπάλα με κέντρο το x_0 που να ανήκει στον P. Επειδή, $z + B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$, έχουμε ότι για κάθε $x \in B(0, \rho)$ ισχύει ότι $-x_0 \leq z + x \leq x_0$, άρα $-x_0 - z \leq x \leq x_0 - z$. Όμως $-x_0 \leq x \leq x_0$, αφού $x_0 \in int([-x_0, x_0]) \subseteq [-x_0, x_0]$, και άρα $-2x_0 \leq x \leq 2x_0$. Από τη σχέση αυτή έχουμε ότι $B\left(0, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq [-x_0, x_0]$, επομένως $x_0 + B\left(0, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq [0, 2x_0] \subseteq P$ (επειδή $x_0 \in P$, $0 \in P$ και P κώνος) . Άρα, για το x_0 υπάρχει μία μπάλα του χώρου, η $B\left(x_0, \frac{\rho}{2}\right)$ η οποία περιέχεται στον κώνο P. Επομένως, , το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του P.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του P. Επομένως, $x_0 + B(0, \rho) \subseteq P$, για κάποιο ρ. Δηλαδή υπάρχει μία μπάλα γύρω από το x_0 που να περιέχεται στον κώνο P. Θα δείξουμε καταρχάς ότι $B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$. Πράγματι, αν $z \in B(0, \rho)$, τότε $x_0 + z \in P$ (επειδή $x_0 + B(0, \rho) \subseteq P$), άρα $z \geq -x_0$. Επίσης, $x_0 - z \in P$, άρα $z \leq x_0$. Επομένως, $z \in [-x_0, x_0]$ και το z είναι τυχαίο στοιχείο της μπάλας $B(0, \rho)$, άρα $B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$, και αποδείχτηκε το ζητούμενο. Έστω τώρα $x \in X$. Αρκεί να δειξουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in [-n_0x_0, n_0x_0]$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n > \| x \|$ (ο φυσικός n υπάρχει γιατί αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε προκύπτει ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq \| x \|$, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός $\| x \|$είναι άνω φράγμα του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, άτοπο, επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο). Τότε, η ποσότητα $\frac{x}{n}$ έχει νόρμα $\| \frac{x}{n} \| = \frac{\|x\|}{\|n\|} = \frac{\|x\|}{n} < 1$, άρα $\rho\frac{x}{n} \in B(0, \rho)$ (πράγματι, $\| \rho\frac{x}{n} - 0 \| = \| \rho\frac{x}{n} \| < \rho$), επομένως $-x_0 \leq \rho\frac{x}{n} \leq$

x_0, άρα $x \in [-n_0x_0\,,\, n_0x_0\,]$, όπου $n_0 > \frac{n}{\rho}$. Επομένως, το x_0 είναι διατακτική μονάδα του X. □

Παράδειγμα-1

Ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών l_∞, εφοδιασμένος με την σημειακή διάταξη είναι μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος.

Θα δείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία $\mathbf{1} = (1\,,1\,,1\,,\ldots,1\,,\ldots)$ είναι διατακτική μονάδα (*order unit*) του χώρου l_∞ και εσωτερικό σημείο του l_∞^+.

Για να δείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία $\mathbf{1} = (1\,,1\,,1\,,\ldots,1\,,\ldots)$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\, x \in l_\infty$, υπάρχει ένα $a > 0$, ώστε $x \in [-a\mathbf{1}\,,\, a\mathbf{1}\,]$, δηλαδή $-a\mathbf{1} \leq x \leq a\mathbf{1} \Leftrightarrow (-a\,,-a\,,\ldots,-a\,,\ldots) \leq (x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n\,,\ldots) \leq (a\,,a\,,a\,,\ldots,a\,,\ldots) \Leftrightarrow -a \leq x_n \leq a\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow |\, x_n \,| \leq a\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Επειδή $x \in l_\infty \Rightarrow \|\, x \,\|_\infty = \sup\limits_i(|\, x_i \,|) < \infty$, και έστω ότι $\sup\limits_i(|\, x_i \,|) = M$. Τότε, για κάθε $a \geq M$, έχουμε ότι $\sup\limits_i(|\, x_i \,|) \leq a$, άρα $|\, x_i \,| \leq a\,,\forall\, i \Leftrightarrow -a \leq x_i \leq a\,,\forall\, i \Leftrightarrow (-a\,,-a\,,\ldots,-a\,,\ldots) \leq (x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n\,,\ldots) \leq (a\,,a\,,a\,,\ldots,a\,,\ldots) \Leftrightarrow -a\mathbf{1} \leq x \leq a\mathbf{1}$. Επομένως, το $\mathbf{1}$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου l_∞. Κατόπιν, θα δείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία $\mathbf{1}$ είναι εσωτερικό σημείο του l_∞^+. Λαμβάνοντας υπόψιν την προηγούμενη πρόταση, το συμπέρασμα είναι άμεσο, επειδή έχουμε ήδη αποδείξει ότι η σταθερή ακολουθία $\mathbf{1}$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εσωτερικού σημείου. Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι υπάρχει ένα $\rho>0$, τέτοιο ώστε η μπάλα $B(\mathbf{1}\,,\rho) \subseteq l_\infty^+$. Έστω ένα $z \in B(\mathbf{1}\,,\rho)$. Τότε, $\|\, z_i - 1 \,\|_\infty < \rho$ $\Rightarrow \sup\limits_i |\, z_i - 1 \,| < \rho \Rightarrow |\, z_i - 1 \,| < \rho\,,\forall\, i \Leftrightarrow -\rho \leq z_i - 1 \leq \rho\,,\forall\, i \Leftrightarrow$ $-\rho+1 \leq z_i \leq \rho+1\,,\forall\, i$. Για $\rho=1$, έχουμε ότι $0 \leq z_i \leq 2\,,\forall\, i$. Άρα, $z_i \geq 0\,,\forall\, i \Leftrightarrow z \geq 0$ και, επειδή $z \in l_\infty$ έπεται ότι $\|\, z \,\|_\infty < \infty$. Επομένως, $z \in l_\infty^+$. Επομένως, δείξαμε ότι το $\mathbf{1}$ είναι εσωτερικό σημείο του l_∞.

Παράδειγμα-2

Ο χώρος $C[0\,,1]$, των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[0\,,1]$, εφοδιασμένος με την σημειακή διάταξη, είναι μερικά διατεταγμένος χώρος. Θα δείξουμε ότι η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}(t) = 1\,,\forall\, t \in [0\,,1]$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου $C[0\,,1]$ και επίσης ότι η $\mathbf{1}$ είναι εσωτερικό σημείο του $C[0\,,1]^+$.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι $\mathbf{1} \in C[0,1]$. Για να δείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία $\mathbf{1}$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου $C[0,1]$, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \in C[0,1]$, υπάρχει ένα $a > 0$, ώστε $x \in [-a\mathbf{1}, a\mathbf{1}]$, δηλαδή $-a\mathbf{1} \leq x \leq a\mathbf{1}$. Έστω $x \in C[0,1]$. Τότε, $\| x \|_\infty = max_{t\in[0,1]} \mid x(t) \mid \Rightarrow \mid x(t) \mid \leq \| x \|_\infty \ \forall t \in [0,1] \Rightarrow \mid x \mid \leq \| x \|_\infty \Rightarrow - \| x \|_\infty \ \mathbf{1} \leq x \leq \| x \|_\infty \ \mathbf{1}$. Άρα, για $a = \| x \|_\infty > 0$ έχουμε το ζητούμενο. Επομένως, η $\mathbf{1}$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου $(C[0,1], \| . \|_\infty)$. Εν συνεχεία, θα δείξουμε ότι η $\mathbf{1}$ είναι εσωτερικό σημείο του $C[0,1]^+$. Να παρατηρήσουμε ότι η μπάλα του χώρου $C[0,1]$ με κέντρο την $\mathbf{1}$ και ακτίνα κάποιο $\rho>0$ είναι η εξής:

$$B(\mathbf{1}, \rho) = \{ x \in C[0,1] \mid \| x - \mathbf{1} \| < \rho \Leftrightarrow \mid x(t) - 1 \mid < \rho, \forall t \Leftrightarrow 1 - \rho \leq x(t) \leq 1 + \rho \}.$$

Αν $\rho=\frac{1}{2}$, παρατηρούμε ότι αν $x \in B\left(\mathbf{1}, \frac{1}{2}\right)$, τότε $x(t) > 1-\rho = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \forall t$, άρα $x(t) > 0, \forall t$, άρα $x \in C[0,1]^+$. Επομένως, $\mathbf{1} \in int\left(C[0,1]^+\right)$. Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη πρόταση, καθώς και το ότι αποδείξαμε ότι η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ είναι διατακτική μονάδα του χώρου, και να συμπεράνουμε άμεσα ότι είναι εσωτερικό σημείο του θετικού κώνου του χώρου.

Παράδειγμα-3

Ο θετικός κώνος c_0^+ του χώρου των πραγματικών ακολουθιών που τείνουν στο μηδέν, δηλαδή $c_0 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$, δεν έχει εσωτερικά σημεία.

Ο χώρος c_0 είναι ο χώρος των πραγματικών ακολουθιών που τείνουν στο μηδέν, δηλαδή $c_0 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$. Έστω $x \in c_0^+$. Παρατηρούμε ότι η μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα κάποιο $\rho>0$ είναι η εξής:

$$B(x, \rho) = \{ y \in c_0 \mid \| x - y \| < \rho \Leftrightarrow \mid x(i) - y(i) \mid < \rho, \forall i$$

$$\Leftrightarrow x(i) - \rho \leq y(i) \leq x(i) + \rho, \forall i \}$$

Επειδή η ακολουθία x είναι ακολουθία που τείνει στο μηδέν, έπεται ότι $0 \leq x(i) \leq \frac{\rho}{4}$, $\forall i \geq n_0$ (όπου υπενθυμίζουμε ότι ο δείκτης n_0 είναι ο δείκτης εκείνος από τον οποίον και μετά οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται σε μία περιοχή του μηδενός). Ορίζω την εξής ακολουθία του χώρου c_0:

$$y(i) = \begin{cases} x(i) & \mid i < n_0 \\ -x(i) & \mid i \geq n_0 \end{cases}$$

Τότε, παρατηρούμε ότι $y \in c_0$, αφού οι όροι της από τον δείκτη n_0 και μετά ισούνται με $-x(i)$ και η x τείνει στο μηδέν. Επίσης, $y \notin c_0^+$ αφού οι όροι της από τον δείκτη n_0 και μετά ισούνται με $-x(i) < 0$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$(x-y)(i) = \begin{cases} 0 & \mid i < n_0 \\ 2x(i) & \mid i \geq n_0 \end{cases}$$

και επομένως, $\| x - y \| \leq \frac{\rho}{2} < \rho$. Άρα, $\forall x \in c_0^+$ και $\forall \rho > 0$ υπάρχει $y \in B(x, \rho)$, τέτοιο ώστε $y \notin c_0^+$. Επομένως, $B(0, \rho) \nsubseteq c_0^+$, δηλαδή το τυχαίο $x \in c_0^+$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του c_0^+, από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο χώρος c_0^+ δεν έχει εσωτερικά σημεία.

1.2 Διατεταγμένοι υπόχωροι

Μπορούμε να ορίσουμε νέους διατεταγμένους γραμμικούς χώρους, από ήδη υπάρχοντες.

Παράδειγμα-1

Έστω γραμμικός χώρος X, διατεταγμένος από τον κώνο P. Τότε, κάθε υπόχωρος του X μπορεί να θεωρηθεί και ο ίδιος ως μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Πράγματι, αν Y είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X, τότε είναι προφανές ότι ο Y εφοδιασμένος με την επαγόμενη διάταξη από τον X, γίνεται αυτομάτως μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος, με θετικό κώνο τον $Y_+ = Y \cap P$, δηλαδή την τομή του θετικού κώνου του χώρου με τον υπόχωρο Y. Ο κώνος $Y \cap P$ ορίζει δηλαδή διάταξη στον υπόχωρο Y. Συμπερασματικά, οι γραμμικοί υπόχωροι ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου θεωρούνται διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι με την επαγόμενη γραμμική διάταξη και ονομάζονται διατεταγμένοι υπόχωροι του αρχικού χώρου.

Παράδειγμα-2

Ένας άλλος τρόπος κατασκευής διατεταγμένων γραμμικών χώρων είναι μέσω των καρτεσιανών γινομένων. Αν $\{ L_i , L_i^+ \}_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια διατεταγμένων γραμμικών χώρων , τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $L^+ = \prod_{i \in I} L_i^+$ είναι ένας οξύς κώνος του καρτεσιανού γινομένου $L = \prod_{i \in I} L_i$ και ονομάζεται ο κώνος-γινόμενο (*product cone*) της οικογένειας κώνων $\{L_i^+\}_{i \in I}$, και επομένως το ζευγάρι (L , L^+)είναι διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Παραδείγματος χάριν, ο χώρος $\mathbb{R}^n = \{ (x_1 , x_2 , ... , x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} , \forall i = 1 , 2 , ... , n \}$ των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών, είναι μερικά διατεταγμένος χώρος, με θετικό κώνο το σύνολο $P = \{ x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 , \forall i = 1 , 2 , ... , n \}$, επειδή προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο του χώρου $\mathbb{R}$ με τον εαυτό του n φορές, διατεταγμένο από τον κώνο $\mathbb{R}_+ = \{ a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0 \}$. Παρατηρώ ότι ενώ ο $\mathbb{R}$ είναι ολικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος (δηλαδή κάθε δύο στοιχεία του είναι συγκρίσιμα ως προς τη συνήθη σχέση διάταξης), ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ολικά διατεταγμένος. Άρα, στο καρτεσιανό γινόμενο διατεταγμένων χώρων δεν διατηρείται κατ΄ ανάγκην η ολική διάταξη. Θα δείξουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο ολικά διατεταγμένων γραμμικών χώρων δεν είναι ολικά διατεταγμένος χώρος. Έστω (X , X_+), και (Y , Y_+) ολικά διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι. Τότε, ο $(Z = X \times Y , X_+ \times Y_+)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος, με την εξής διάταξη: $(x , y) \geq (x' , y') \Leftrightarrow x \geq x'$ και $y \geq y'$. Αν θεωρήσω τα στοιχεία

(x_1, y_1) και (x_2, y_2), με $x_1 > x_2$ και $y_1 < y_2$, τότε τα στοιχεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δεν είναι συγκρίσιμα.

Παράδειγμα-3

Αν $\{L_i, L_i^+\}_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια διατεταγμένων γραμμικών χώρων (υποχώρων ενός γραμμικού χώρου E), τότε το ευθύ άθροισμα των χώρων $\oplus_{i \in I} L_i = \{x = \sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in L_i, \forall i \in I\}$, διατεταγμένο από τον κώνο $\oplus_{i \in I} L_i^+$ είναι επίσης μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος.

Έχοντας ένα μερικά διατεταγμένο χώρο, ή μία οικογένεια μερικά διατεταγμένων χώρων, είδαμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε νέους διατεταγμένους χώρους. Η κατασκευή αυτή έχει μεγάλη σημασία, αφενός για τον προφανή λόγο ότι κατασκευάζουμε νέους χώρους από ήδη υπάρχοντες των οποίων γνωρίζουμε με σαφήνεια τη δομή τους, και αφετέρου ιδιότητες όπως το να είναι ο χώρος (ή η οικογένεια χώρων) γραμμικός σύνδεσμος, ή να είναι διατακτικά (ή *Dedekind*) πλήρης, ιδιότητες που θα μελετήσουμε εκτενώς σε επόμενα κεφάλαια, διατηρούνται στους χώρους γινόμενο, καθώς και στο ευθύ άθροισμα.

1.3 Αρχιμήδειοι γραμμικοί χώροι

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εισάγουμε την έννοια της Αρχιμήδειας ιδιότητας (*Archimedean Property*) και η μελέτη της ειδικής κατηγορίας των Αρχιμήδειων χώρων. Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό τους.

Ορισμός. Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος X ονομάζεται Αρχιμήδειος (ή λέμε ότι ο X έχει την Αρχιμήδεια ιδιότητα), όταν ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

Αν για $y \in X$ και $x \in X_+$ με $n\,y \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $y \leq 0$.

Παρατήρηση. Έστω X γραμμικός χώρος, και έστω K οξύς κώνος του X. Λέμε ότι ο K είναι Αρχιμήδειος κώνος (*Archimedean cone*) αν η γραμμική διάταξη που επάγεται από τον κώνο K στον γραμμικό χώρο X καθιστά τον X έναν Αρχιμήδειο διατεταγμένο γραμμικό χώρο.

Στον παραπάνω ορισμό του Αρχιμήδειου χώρου, το διάνυσμα x, το οποίο υποθέσαμε ότι ανήκει στον θετικό κώνο του X, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ανήκει εν γένει στον γραμμικό χώρο X. Έτσι, οδηγούμαστε στον παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα. *Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος X είναι Αρχιμήδειος, αν και μόνο αν, ισχύει η εξής συνεπαγωγή:*

Για $x\,,\,y \in X$ *και* $n\,y \leq x\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *έπεται ότι* $y \leq 0$.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Υποθέτουμε ότι ο X είναι Αρχιμήδειος. Έστω $x\,,\,y \in X$ με $n\,y \leq x\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $y \leq 0$. Επειδή η συνθήκη ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς, τότε για $n+1$, έχουμε ότι $(\,n+1\,)\,y \leq x\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ή ισοδύναμα $n\,y \leq x - y\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Επειδή $x - y \geq 0$ (πράγματι, η σχέση $n\,y \leq x$ για $n = 1$ δίνει ότι $y \leq x \Leftrightarrow x - y \geq 0$), έπεται ότι $y \leq 0$, επειδή ο χώρος X είναι Αρχιμήδειος, και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

" $\Leftarrow$ "

Αν ισχύει η συνεπαγωγή, τότε προφανώς ο χώρος X είναι Αρχιμήδειος, εξ΄ ορισμού.

Αποδεικνύουμε παρακάτω ιδιότητες των Αρχιμήδειων χώρων.

Πρόταση-1

Δείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο μίας οικογένειας δύο Αρχιμήδειων διατεταγμένων γραμμικών χώρων είναι ένας Αρχιμήδειος διατεταγμένος χώρος.

Απόδειξη

Έστω L_1 , L_2 Αρχιμήδειοι διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι.

Το καρτεσιανό γινόμενο των παραπάνω χώρων είναι ο γραμμικός χώρος $L_1 \times L_2 = \{ z = (z_1 , z_2) \mid z_1 \in L_1 , z_2 \in L_2 \}$, διατεταγμένος ως εξής: Αν $x , y \in L_1 \times L_2$ με $x = (x_1 , x_2)$ και $y = (y_1 , y_2)$ τότε $x \preccurlyeq_{L_1 \times L_2} y \Leftrightarrow x_1 \preccurlyeq_{L_1} y_1$ και $x_2 \preccurlyeq_{L_2} y_2$. Θα δείξουμε ότι ο $L_1 \times L_2$ είναι Αρχιμήδειος, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $\forall z , w \in L_1 \times L_2$ με $n z \leq w , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \leq \mathcal{O} = (0 , 0)$. Έστω λοιπόν $z , w \in L_1 \times L_2$. Τότε, $z = (z_1 , z_2)$ και $w = (w_1 , w_2)$, με $z_1 , w_1 \in L_1$ και $z_2 , w_2 \in L_2$. Υποθέτουμε επίσης ότι $n z \leq w , \forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή $n z \leq w \Leftrightarrow n (z_1 , z_2) \leq (w_1 , w_2) \Leftrightarrow (n z_1 , n z_2) \leq (w_1 , w_2) \Leftrightarrow (n z_1 - w_1 , n z_2 - w_2) \leq (0 , 0) \Leftrightarrow \begin{cases} n z_1 - w_1 \leq 0 \\ n z_2 - w_2 \leq 0 \end{cases}$.

Από το ότι $n z_1 \leq w_1 , \forall n \in \mathbb{N} \underset{L_1 \text{Αρχιμήδειος}}{\Rightarrow} w_1 \leq 0$ (1)

Παρόμοια, επειδή $n z_2 \leq w_2 , \forall n \in \mathbb{N} \underset{L_2 \text{Αρχιμήδειος}}{\Rightarrow} w_2 \leq 0$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2), έπεται ότι $w = (w_1 , w_2) \leq (0 , 0)$. Άρα, αποδείξαμε ότι ο $L_1 \times L_2$ είναι Αρχιμήδειος γραμμικός χώρος.

Πρόταση-2

Αν K οξύς κώνος ενός διανυσματικού χώρου X, και $Y = K - K$ ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τον οξύ κώνο K στον X, έχουμε:

Ο K είναι Αρχιμήδειος κώνος του X, αν και μόνο αν, είναι Αρχιμήδειος κώνος του Y.

Απόδειξη

" $\Rightarrow$ "

Έστω ότι ο K είναι Αρχιμήδειος κώνος του X, δηλαδή ότι η διάταξη $\leq_K$ (την οποία θα την συμβολίζουμε, χάριν ευκολίας, απλά με $\leq$) καθιστά τον X Αρχιμήδειο. Θα δείξουμε ότι ο $Y = K - K$, εφοδιασμένος με την ίδια διάταξη, είναι Αρχιμήδειος. Έστω $z , w \in Y$, με $n z \leq w , \forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $z \leq 0$. Ο Y είναι υπόχωρος του X, άρα $z , w \in X$, και επειδή αφενός ισχύει

εξ' υποθέσεως ότι $z\,,\,w\,\in\,Y$, με $n\,z\,\leq\,w\,,\,\forall\,n\,\in\,\mathbb{N}$, και αφετέρου ισχύει ότι ο X είναι Αρχιμήδειος, έχουμε ότι $z\,\leq\,0$, και άρα δείξαμε ότι ο Y είναι Αρχιμήδειος.

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι ο Y είναι Αρχιμήδειος. Θα αποδείξουμε ότι ο X είναι Αρχιμήδειος. Έστω $x\,,\,y\,\in\,X$, με $n\,x\,\leq\,y\,,\,\forall\,n\,\in\,\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $x\,\leq\,0$ (ότι δηλαδή $x\,\notin\,K$). Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $x\,\in\,K$. Επειδή $x\,\geq\,0\,\Rightarrow\,n\,x\,\geq\,0$ (επειδή $n\,\geq\,0$) $\Rightarrow\,0\,\leq\,n\,x\,\leq\,y\,\Rightarrow\,y\,\geq\,0$. Δηλαδή, δείξαμε ότι $x\,,\,y\,\in\,K$ (επειδή δείξαμε ότι $x\,,\,y\,\geq\,0$). Όμως, $K\,\subseteq\,Y$, αφού ο Y είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τον K, άρα θα περιέχει και τον K ως υποσύνολό του. Επομένως, έχουμε δείξει ότι για $x\,,\,y\,\in\,Y$ με $n\,x\,\leq\,y\,,\,\forall\,n\,\in\,\mathbb{N}$, έπεται ότι $x\,\geq\,0$. Άτοπο, επειδή σύμφωνα με την υπόθεση ο Y είναι Αρχιμήδειος χώρος. Επομένως, $x\,\leq\,0$ και αποδείξαμε ότι ο X είναι Αρχιμήδειος. □

Παράδειγμα μη-Αρχιμήδειου χώρου

Ένα παράδειγμα μη-Αρχιμήδειου διατεταγμένου γραμμικού χώρου είναι ο $L\,=\,\mathbb{R}^2$, εφοδιασμένος με την λεξικογραφική διάταξη:

$$(\,x_1\,,\,x_2\,)\,\geq\,(\,y_1\,,\,y_2\,)\,\text{εάν}\;x_1\,>\,y_1\;\text{ή}\;x_1\,=\,y_1\,\text{και}\;x_2\,>\,y_2$$

Ο L εφοδιασμένος με τον κώνο L_+, όπου:

$$L_+\,=\,\{\,(\,x\,,\,y\,)\,\in\,\mathbb{R}\,:\,x\,>\,0\;\text{ή}\;x\,=\,0\;\text{και}\;y\,\geq\,0\,\}$$

είναι μη-Αρχιμήδειος γραμμικός χώρος. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι :

$n\,(\,0\,,\,1\,)\,\leq\,(\,1\,,\,0\,),\,\forall\,n\,\in\,\mathbb{N}$ ενώ $(\,0\,,\,1\,)\,\notin\,-\,L_+$.

Θα κλείσουμε την ενότητα των Αρχιμήδειων Διατάξεων με δύο βασικά αποτελέσματα που περιέχουν κάποιες βασικές ιδιότητες της διατακτικής συνέχειας (*order continuity*) σε Αρχιμήδειους διατεταγμένους γραμμικούς χώρους.

Θεώρημα. *Έστω* $x_1, \ldots, x_k$ *θετικά διανύσματα ενός Αρχιμήδειου διατεταγμένου γραμμικού χώρου. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές ακολουθίες* $\{a_n^i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ *ικανοποιούν το γεγονός ότι* $lim_{n\to\infty} a_n^i = a_i$ *στον* $\mathbb{R}$*, για κάθε* $i = 1, \ldots, k$ *και* $a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^k x_k \leq 0$*, για κάθε* n*. Τότε, έχουμε ότι* $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k \leq 0$*.*

Απόδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$ (σταθεροποιώ έναν φυσικό αριθμό). Επειδή $lim_{n\to\infty} a_n^i = a_i$ στον $\mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$, επιλέγουμε κάποια $n \in \mathbb{N}$, ώστε να ισχύει $a_i - a_n^i < \frac{1}{m}$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Παρατηρούμε ότι: $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = (a_1 - a_n^1) x_1 + \ldots + (a_k - a_n^k) x_k + a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^k x_k \underset{a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^k x_k \leq 0}{\leq} (a_1 - a_n^1) x_1 + \ldots + (a_k - a_n^k) x_k \leq \frac{1}{m} x_1 + \frac{1}{m} x_k \Rightarrow m\,(a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k) \leq x_1 + \ldots + x_k$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Επειδή ο χώρος είναι Αρχιμήδειος και ισχύει ότι $m\,(a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k) \leq x_1 + \ldots + x_k, \forall m \in \mathbb{N}$, όπως αποδείξαμε παραπάνω, έπεται ότι $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k \leq 0$. □

Ένα βασικό αποτέλεσμα του προηγούμενου Θεωρήματος είναι το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα. *Έστω* $x_1, \ldots, x_k$ *και* $y_1, \ldots, y_m$ *διανύσματα ενός Αρχιμήδειου διατεταγμένου γραμμικού χωρου* X*. Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών* $\{a_n^i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ *και* $\{b_n^j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ *ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:*

(α) $a_n^i \to_{n\to\infty} a_i$ *για κάθε* $i = 1, \ldots, k$*,*

(β) $b_n^j \to_{n\to\infty} b_j$ *για κάθε* $j = 1, \ldots, m$*, και*

(γ) $a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^k x_k \leq b_n^1 y_1 + \ldots + b_n^m y_m$ *για κάθε* n*.*

Αν τα x_i *και τα* y_j *ανήκουν στον* $L_+ - L_+$ *(δηλαδή στο χώρο που παράγει ο θετικός κώνος* L_+*), τότε:*

$a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k \leq b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$.

1.4 Γραμμικοί Σύνδεσμοι (Χώροι *Riesz*)

1.4.1 Βασικές Έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των χώρων *Riesz*, των οποίων η σημασία απηχεί όχι μόνο στην Ανάλυση, αλλά και στις εφαρμογές.

Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό των χώρων *Riesz*.

Ορισμός. Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος X ονομάζεται <u>γραμμικός σύνδεσμος (*linear lattice*) ή χώρος *Riesz*</u> όταν υπάρχει το *supremum* και το *infimum* για κάθε πεπερασμένο υποσυνόλο του χώρου.

Αν X γραμμικός σύνδεσμος, για κάθε $x \in X$ ορίζουμε τα παρακάτω σύμβολα:

$x^+ = x \vee 0$, το θετικό μέρος του x
$x^- = (-x) \vee 0$, το αρνητικό μέρος του x
$|x| = x \vee (-x)$, η απόλυτη τιμή του x

Θεώρημα. *(Ιδιότητες Γραμμικών Συνδέσμων)*
Έστω X γραμμικός σύνδεσμος. Για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *και* $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
(2) $sup\{x, -x, 0\} = sup\{x, -x\}$
(3) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$ *και* $x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$
(4) $x - y \vee z = (x - y) \vee (x - z)$ *και* $x - y \wedge z = (x - y) \wedge (x - z)$
(5) $x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$
(6) $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$ *και*
$\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$, *για κάθε* $\lambda \geq 0$
(7) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$*και* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
(8) $x + y = x \vee y + x \wedge y$
(9) $x = x^+ - x^-$.
Ακόμα, αν $x = x_1 - x_2$ *με* $x_1, x_2 \in X_+$, *τότε* $x_1 \geq x^+$*και* $x_2 \geq x^-$
(10) $x^+ \wedge x^- = 0$
(11) $|x| = x^+ + x^-$
(12) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$
(13) $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$

(14) $\mid x \mid \vee \mid y \mid = \frac{1}{2}(\mid x + y \mid + \mid x - y \mid)$ *και*
$\mid x \mid \wedge \mid y \mid = \frac{1}{2}(\mid x + y \mid - \mid x - y \mid)$

Παρατήρηση-1

Από την ιδιότητα (5) του παραπάνω Θεωρήματος, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος X είναι γραμμικός σύνδεσμος, αν και μόνο αν, για κάθε $x \in X$ υπάρχει το x^+.

Πράγματι, μπορούμε να το αποδείξουμε.

" $\Rightarrow$ " Υποθέτουμε ότι ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος. Δηλαδή, $\forall x, y \in X$ υπάρχει το $x \vee y$. Άρα, για $y = 0$ και $\forall x \in X$, υπάρχει το $x \vee 0 = x^+$.

" $\Leftarrow$ " Έστω ότι $\forall x \in X$, υπάρχει το $x \vee 0$ στον X. Έστω $x, y \in X$. Ισχύει ότι $\{x, y\} = \{x - y, 0\} + \{y\}$. Από την υπόθεση, έχουμε ότι το *supremum* του $\{x - y, 0\}$ υπάρχει. Επίσης, το *supremum* του μονοσυνόλου $\{y\}$υπάρχει και είναι ίσο με y. Γνωρίζουμε επίσης ότι $sup(A + B) = sup\, A + sup\, B$ (★), εφόσον τα $sup\, A$ και $sup\, B$ υπάρχουν. Άρα το $sup\{x, y\}$ υπάρχει. Επομένως, ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος.

(★) **Απόδειξη:** Έστω $sup(A) = x_a$, $sup(B) = x_b$.

Θα δείξουμε ότι $sup(A + B) = x_a + x_b$.

Έχουμε ότι $\forall x \in A$, $x_a \geq x$ (*). Επίσης, $\forall y \in B$, $x_b \geq y$ (**).

Από (*) και (**), έπεται ότι $x_a + x_b \geq x + y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, δηλαδή $x_a + x_b \geq A + B$ (άρα, το $x_a + x_b$ είναι άνω φράγμα του $A + B$).

Για να δείξουμε ότι το $x_a + x_b$ είναι το *supremum* του $A + B$, αρκεί να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε άλλο άνω φράγμα w του $A + B$, θα ισχύει ότι $A + B \leq w$.

Έστω w άνω φράγμα του $A + B$, δηλαδή $w \geq A + B$.

Άρα, έχουμε ότι $w \geq x + y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$

$\Rightarrow x \leq w - y_0$, $\forall x \in A$, y_0 σταθερό

$\Rightarrow x_a \leq w - y_0 \;\Rightarrow y_0 \leq w - x_a$, $\forall y_0 \in B \;\Rightarrow x_b \leq w - x_a$

$\Rightarrow x_a + x_b \leq w$.

Επομένως, αποδείξαμε ότι $sup(A + B) = x_a + x_b$.

Παρατήρηση-2

Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος X είναι γραμμικός σύνδεσμος, αν και μόνο αν, για κάθε $x \in X$, $\exists y \in X$, τέτοιο ώστε το $x \vee y$ να υπάρχει στον X.

Ο οξύς κώνος ενός χώρου *Riesz* ονομάζεται δικτυωτός κώνος (*lattice cone*). Επίσης, λέμε ότι ένας οξύς κώνος K ενός διανυσματικού χώρου X είναι δικτυωτός κώνος, αν ο X μερικά διατεταγμένος από τον οξύ κώνο K, είναι χώρος *Riesz*. Με άλλα λόγια, ο οξύς κώνος X_+ ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου X είναι δικτυωτός κώνος, αν και μόνο αν, ο X είναι χώρος *Riesz*. Ακόμη, λέμε ότι μία γραμμική διάταξη $\geq$ πάνω σε έναν αυθαίρετο γραμμικό χώρο X είναι διάταξη συνδέσμου (*lattice ordering*), αν ο θετικός του κώνος $X_+ = \{ x \in X , x \geq 0 \}$ είναι δικτυωτός κώνος.

Εν συνεχεία, θα δούμε ότι για να είναι ένας γραμμικός χώρος X γραμμικός σύνδεσμος, αρκεί να υπάρχει το *supremum* και το *infimum* για κάθε ζευγάρι στοιχείων του X.

Λήμμα. *Ένας γραμμικός χώρος X είναι γραμμικός συνδεσμος, αν και μόνο αν, για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $x , y \in X$, υπάρχει το infimum τους $x \wedge y$ στον X. Επιπλέον, αν x και y είναι στοιχεία ενός χώρου Riesz, τότε:*

$$x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ και } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$$

Ομοίως, ένας διατεταγμένος χώρος X είναι χώρος Riesz, αν και μόνο αν, για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $x , y \in X$, το supremum τους $x \vee y$ υπάρχει στον X.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Υποθέτουμε ότι ο γραμμικός χώρος X είναι γραμμικός σύνδεσμος. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό του γραμμικού συνδέσμου, έχουμε ότι για κάθε μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο του χώρου υπάρχει το *supremum* και το *infimum*. Άρα, για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $x , y \in X$, υπάρχει το *supremum* του δισυνόλου $\{ x , y \}$, αφού το δισύνολο είναι πεπερασμένο υποσύνολο του χώρου.

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων $x , y \in X$, υπάρχει το *infimum* τους $x \wedge y$ στον X. Θα αποδείξουμε ότι ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος, ότι δηλαδή για κάθε μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο του χώρου υπάρχει το το *supremum* και το *infimum*. Θα το αποδείξουμε επαγωγικά. Για $n = 2$, δηλαδή για τα στοιχεία $x_1 , x_2 \in X$, υπάρχει εξ' υποθέσεως το *supremum* τους. Υποθέτουμε ότι ισχύει η υπόθεση για $n =$

k (επαγωγική υπόθεση) και θα την αποδείξουμε για $n = k + 1$. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in X$. Από την επαγωγική υπόθεση, το *supremum* των $x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ υπάρχει στον X, και έστω $sup\,(x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = y \in X$. Επίσης, το $sup\,(x_1) = x_1$, δηλαδή υπάρχει. Επομένως ισχύει ότι $sup\,(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = sup\,(x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) + sup\,(x_1) = y + x_1 \in X$. Επομένως, δείξαμε ότι ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος.

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε την σχέση: $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$, όπου x και y είναι στοιχεία ενός γραμμικού συνδέσμου X.

Υποθέτουμε ότι για κάθε ζευγάρι στοιχείων του διατεταγμένου χώρου X υπάρχει το $infimum$ τους. Έστω $x, y \in X$. Θέτουμε $z = (-x) \wedge (-y)$ (το $infimum$ των αντιθέτων τους, το οποίο υπάρχει επειδή ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος). Θα δείξουμε ότι $x \vee y = -z$. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι, $z \leq -x$ και $z \leq -y$, αφού το z είναι το $infimum$ των $-x$ και $-y$. Ισοδύναμα, $x \leq -z$ και $y \leq -z$, δηλαδή το $-z$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου $\{x, y\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $-z$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{x, y\}$. Έστω t ένα άνω φράγμα του συνόλου $\{x, y\}$, δηλαδή που ικανοποιεί τις σχέσεις $x \leq t$ και $y \leq t$. Ισοδύναμα, $-t \leq -x$ και $-t \leq -y$, δηλαδή το $-t$ είναι κάτω φράγμα του δισυνόλου $\{-x, -y\}$, και επομένως θα είναι μικρότερο ή ίσο από το $infimum$ του, δηλαδή $-t \leq z$. Ισοδύναμα, $t \geq -z$. Αποδείξαμε ότι το τυχαίο άνω φράγμα t του συνόλου $\{x, y\}$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το $-z$, και το $-z$ είναι επίσης άνω φράγμα του συνόλου $\{x, y\}$, άρα έπεται ότι το $-z$ είναι το $x \vee y$. Δηλαδή, δείξαμε ότι $x \vee y = -z \Leftrightarrow x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$.

Η σχέση $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$ αποδεικνύεται με τελείως ανάλογο τρόπο. □

Παραδείγματα γραμμικών συνδέσμων

Παράδειγμα-1

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, εφοδιασμένη με την συνήθη διάταξη, είναι γραμμικός σύνδεσμος. Πράγματι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ είτε $x \leq y$ ή $y \leq x$, επειδή η συνήθης διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι ολική, δηλαδή κάθε ζευγάρι στοιχείων του $\mathbb{R}$ είναι συγκρίσιμο. Άρα, αν $x \leq y \Rightarrow x \vee y = max\,\{x, y\} = y$ και

$x \wedge y = min\,\{x\,,\,y\} = x$. Ενώ αν $y \leq x \Rightarrow x \vee y = max\,\{x\,,\,y\} = x$ και $x \wedge y = min\,\{x\,,\,y\} = y$.

Παράδειγμα-2

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ (όπου $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1\,,\,x_2\,,\,...\,,\,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\,,\,\forall i = 1\,,\,2\,,\,...\,,\,n\}$) είναι γραμμικός σύνδεσμος, εφοδιασμένος με τη συνήθη διάταξη, δηλαδή: Για $x = (x_1\,,\,x_2\,,\,...\,,\,x_n)$, $y = (y_1\,,\,y_2\,,\,...\,,\,y_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι: $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1\,,\,2\,,\,...\,,\,n$. Το *supremum* δύο στοιχείων $x\,,\,y \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από την σχέση:

$$x \vee y = (max\,\{x_1\,,\,y_1\}\,,\,max\,\{x_2\,,\,y_2\}\,,\,...\,,\,max\,\{x_n\,,\,y_n\})$$

Πράγματι, αν $z = (max\,\{x_1\,,\,y_1\}\,,\,max\,\{x_2\,,\,y_2\}\,,\,...\,,\,max\,\{x_n\,,\,y_n\})$, τότε έχουμε ότι $z \in \mathbb{R}^n$, αφού είναι μία n-άδα πραγματικών αριθμών. Προφανώς, $z \geq x$ και $z \geq y$, αφού $max\,\{x_i\,,\,y_i\} \geq x_i\,,\,y_i\;,\,\forall i = 1\,,\,2\,,\,...\,,\,n$. Δηλαδή το z είναι άνω φράγμα των x και y. Έστω $w \in \mathbb{R}^n$ με $w \geq x$ και $w \geq y$, δηλαδή w άνω φράγμα των x και y. Τότε, $w_i \geq x_i\,,\,y_i\;\forall i \Rightarrow w_i \geq max\,\{x_i\,,\,y_i\}\;\forall i \Rightarrow w \geq z \Rightarrow z = x \vee y$.

Ανάλογα, το *infimum* δύο στοιχείων $x\,,\,y \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από την σχέση:

$$x \wedge y = (min\,\{x_1\,,\,y_1\}\,,\,min\,\{x_2\,,\,y_2\}\,,\,...\,,\,min\,\{x_n\,,\,y_n\})$$

και η απόδειξη είναι παρόμοια.

Παράδειγμα-3

Ο χώρος $C\,[0\,,\,1]$, των συνεχών συναρτήσεων από το $[0\,,\,1]$ στο $\mathbb{R}$, είναι γραμμικός σύνδεσμος. Ο $C\,[0\,,\,1]$ είναι εφοδιασμένος με την σημειακή διάταξη, δηλαδή: Για $f\,,\,g \in C\,[0\,,\,1]$, $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)\,,\,\forall x \in [0\,,\,1]$. Το *supremum* δύο στοιχείων του $C\,[0\,,\,1]$ δίνεται από τη σχέση:

$$(f \vee g)(x) = max\,\{f(x)\,,\,g(x)\}$$

Πράγματι, αν $z : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $z(t) = max\,\{f(t)\,,\,g(t)\}\;\forall t$, τότε $z \in C\,[0\,,\,1]$ και $z \geq f$ και $z \geq g$, αφού $max\,\{f(t)\,,\,g(t)\} \geq f(t)\,,\,g(t)\;\forall t$. Δηλαδή το z είναι άνω φράγμα των f και g. Έστω $w \in C\,[0\,,\,1]$ με $w \geq f\,,\,g$, δηλαδή w άνω φράγμα των f και g. Τότε, $w(t) \geq f(t)\,,\,g(t)\,,\,\forall t \Rightarrow w(t) \geq max\,\{f(t)\,,\,g(t)\}\,,\,\forall t \Rightarrow w \geq z \Rightarrow z = f \vee g$.

Ανάλογα, το $infimum$ δύο στοιχείων του $C\,[\,0\,,\,1\,]$ δίνεται από τη σχέση:

$$(\,f\,\wedge\,g\,)\,(\,x\,)\,=\,min\,\{\,f\,(\,x\,)\,,\,g\,(\,x\,)\,\}$$

και η απόδειξη είναι παρόμοια.

Παράδειγμα-4

Ο χώρος $C\,[\,X\,]$, δηλαδή ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στον τοπολογικό χώρο X, είναι γραμμικός σύνδεσμος. Ο $C\,[\,X\,]$ είναι εφοδιασμένος και πάλι με την σημειακή διάταξη, δηλαδή: $f\,,\,g\,\in\,C\,[\,X\,]$, $f\,\leq\,g\,\Leftrightarrow\,f\,(\,x\,)\,\leq\,g\,(\,x\,)\,,\,\forall\,x\,\in\,X$. Το $supremum$ και το $infimum$ δύο στοιχείων του $C\,[\,X\,]$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$(\,f\,\vee\,g\,)\,(\,x\,)\,=\,max\,\{\,f\,(\,x\,)\,,\,g\,(\,x\,)\,\}\,\text{και}\,(\,f\,\wedge\,g\,)\,(\,x\,)\,=\,min\,\{\,f\,(\,x\,)\,,\,g\,(\,x\,)\,\}$$

Επίσης, ο χώρος $C_b\,(\,X\,)$, όλων των φραγμένων, συνεχών συναρτήσεων στον τοπολογικό χώρο X, εφοδιασμένος με την σημειακή διάταξη, είναι γραμμικός σύνδεσμος.

Παράδειγμα-5

Ο γραμμικός χώρος $L_p\,(\,\mu\,)$, $0\,\leq\,p\,\leq\,\infty$, όπου μ μέτρο (συγκεκριμένα, το μέτρο $Lebesgue$), εφοδιασμένος με την σχεδόν παντού σημειακή διάταξη, δηλαδή: $f\,\leq\,g$ στον $L_p\,(\,\mu\,)$, αν $f\,(\,x\,)\,\leq\,g\,(\,x\,)$, για σχεδόν κάθε x ως προς το μέτρο μ (δηλαδή, παντού, εκτός από ένα σύνολο μέτρου (ως προς μ) μηδέν), τότε ο $L_p\,(\,\mu\,)$ είναι γραμμικός σύνδεσμος. Το $supremum$ και το $infimum$ δύο συναρτήσεων $f\,,\,g\,\in\,L_p\,(\,\mu\,)$ δίνονται από τις σχέσεις: $(\,f\,\vee\,g\,)\,=\,max\,\{\,f\,(\,x\,)\,,\,g\,(\,x\,)\,\}$ και $(\,f\,\wedge\,g\,)\,=\,min\,\{\,f\,(\,x\,)\,,\,g\,(\,x\,)\,\}$.

Υπενθύμιση: Ο χώρος $L_p\,(\,\mu\,)$ είναι το σύνολο όλων των μ-μετρήσιμων συναρτήσεων f για τις οποίες ισχύει ότι $\int_\Omega\,|\,f\,|^p\,d\mu$, όπου Ω είναι μ-μετρήσιμο σύνολο.

Άσκηση

Δείξτε ότι ο λεξικογραφικός κώνος είναι ένας δικτυωτός κώνος ($lattice\ cone$).

Λύση

Ο λεξικογραφικός κώνος είναι ο $L_+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ είτε $x > 0$, ή $x = 0$ και $y \geq 0 \}$

Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^2$, εφοδιασμένος με τον λεξικογραφικό κώνο, ο οποίος επάγει την λεξικογραφική διάταξη στον $\mathbb{R}^2$. Θα δείξουμε ότι ο L_+ είναι δικτυωτός κώνος, δηλαδή θα δείξουμε ισοδύναμα ότι ο $\mathbb{R}^2$ μερικά διατεταγμένος από τον λεξικογραφικό κώνο είναι γραμμικός σύνδεσμος. Έστω $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. Τότε, ένα από τα παρακάτω θα είναι αληθή:

- $x \in L_+$. Τότε, $x \in L_+ \Leftrightarrow x = (x_1, x_2)$ με είτε $x_1 \geq 0$ ή $x_1 = 0$ και $x_2 \geq 0$. Άρα, $x \geq 0$. Άρα, έχουμε ότι $x \geq x, 0$ (δηλαδή το x είναι άνω φράγμα του x και του 0). Έστω z ένα τυχαίο άνω φράγμα των x και 0. Επομένως, $z \geq x, 0 \Rightarrow z \geq x$. Δείξαμε επομένως ότι το τυχαίο άνω φράγμα z των x και 0 είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το x, όπου το x δείξαμε ότι είναι άνω φράγμα των x και 0. Άρα, συμπεραίνουμε ότι το x είναι το *supremum* των x και 0, όπου το x ήταν τυχαίο στοιχείο του χώρου. Επομένως, δείξαμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει το $x \vee 0 = x$, και όπως αποδείξαμε σε προηγούμενη παρατήρηση, αυτό ισοδυναμεί με το να είναι ο χώρος γραμμικός σύνδεσμος.

- $x \in (-L_+)$. Τότε, $x \in (-L_+) \Leftrightarrow x = (x_1, x_2)$ με είτε $x_1 \leq 0$ ή $x_1 = 0$ και $x_2 \leq 0$. Άρα, $x \leq 0$. Επομένως, $0 \geq x, 0$. Δηλαδή, το 0 είναι άνω φράγμα των x και 0. Έστω z τυχαίο άνω φράγμα των x και 0. Δηλαδή, $z \geq x, 0 \Rightarrow z \geq 0$. Άρα, $0 = x \vee 0$ για το τυχαίο $x \in \mathbb{R}^2$. Επομένως, ο $(\mathbb{R}^2, L_+)$ είναι γραμμικός σύνδεσμος.

Σημείωση: Ο λεξικογραφικός κώνος $L_+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ είτε $x > 0$, ή $x = 0$ και $y \geq 0 \}$ είναι οξύς κώνος. Για να το αποδείξουμε, αρκεί να δείξουμε ότι $L_+ \cap (-L_+) = \{0\}$. Πράγματι, έστω $x = (x_1, x_2) \in L_+ \cap (-L_+)$. Τότε, θα ισχύουν οι εξής συνθήκες για το στοιχείο x: $\{$ είτε $x_1 \geq 0$ ή $x_1 = 0$ και $x_2 \geq 0 \}$ και $\{$ είτε $x_1 \leq 0$ ή $x_1 = 0$ και $x_2 \leq 0 \}$. Η μόνη περίπτωση που μπορούν να συναληθεύουν οι δύο συνθήκες είναι όταν $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$, δηλαδή όταν $x = (0, 0)$. Επομένως, ο L_+ είναι οξύς κώνος.

1.4.2 *Dedekind* Πλήρεις Χώροι *Riesz*

Ορισμός. Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος *Riesz* ονομάζεται *Dedekind* πλήρης (ή διατακτικά πλήρης) αν κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει *supremum*. (Ισοδύναμα, αν κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολό του έχει *infimum*).

Παράδειγμα

Ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών l_∞ είναι *Dedekind* πλήρης. Πραγματικά, αν $A \subseteq l_\infty$, $A \leq x$, τότε, υπάρχει το $sup(A) = z$, με $z(i) = sup_{a \in A} a(i)$.

(Σημείωση: το Α είναι υποσύνολο του l_∞, και άρα τα στοιχεία του είναι φραγμένες ακολουθίες της μορφής $a = (a(1), a(2), a(3), ...)$).

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που περιγράφει πότε ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος είναι *Dedekind* πλήρης.

Θεώρημα. *Έστω X μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Ο χώρος X είναι Dedekind πλήρης, αν και μόνο αν, για κάθε άνω κατευθυνόμενο υποσύνολο A του X, που έχει άνω φράγμα, υπάρχει το supremum του.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε μόνο το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι κάθε άνω κατευθυνόμενο, υποσύνολο του Χ, άνω φραγμένο, έχει *supremum*.

Έστω $A \subseteq X$, $A \leq x$. Τότε, το σύνολο $B = \{\bigvee_{i=1}^{n} x_i \mid x_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$, με τη διάταξη του Χ, είναι άνω κατευθυνόμενο, με $B \leq x$. Επομένως, υπάρχει το *supremum* του B, έστω $z = sup(B)$, και είναι εύκολο να δείξουμε ότι ταυτίζεται με το *supremum* του Α. Πράγματι, έστω $y = sup(A)$. Τότε, $y \geq x$, $\forall x \in A \Rightarrow y \geq \vee_{i=1}^{n} x_i$, $\forall x_i \in A \Rightarrow y \geq B$. Άρα, το y είναι άνω φράγμα του B. Θα δείξουμε ότι το y είναι το *supremum* του B. Έστω w άνω φράγμα του B. Τότε, επειδή $A \subseteq B$, έχουμε ότι $w \geq x$, $\forall x \in A$, άρα $w \geq y$ (όπου $y = sup(A)$) . Άρα, το y είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B, δηλαδή $y = z$, όπου zείχαμε ορίσει το $sup(B)$. Επομένως ο Χ είναι *Dedekind* πλήρης. □

Το σύνολο $B = \{\bigvee_{i=1}^{n} x_i \mid x_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$ στην παραπάνω απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αύξον δίκτυο $(y_x)_{x \in B}$, όπου το y_x ταυτίζεται με το x, δηλαδή $\forall x \in B$, $y_x \equiv x$. Έτσι, οδηγούμαστε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα. *Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Ο χώρος X είναι Dedekind πλήρης, αν και μόνο αν, κάθε αύξον και άνω φραγμένο δίκτυο $(x_a)_{a \in A}$ έχει supremum.*

Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται πολλές φορές όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος είναι Dedekind πλήρης.

1.4.3 Γραμμικοί υποσύνδεσμοι και σύνδεσμοι-υπόχωροι

Όπως είδαμε στην Ενότητα 1.2, αν έχουμε έναν μερικά διατεταγμένο γραμμικό χώρο E και $X \subseteq E$ γραμμικό υπόχωρο του E, τότε ο υπόχωρος X μπορεί να θεωρηθεί ως μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος με την επαγόμενη διάταξη (η οποία συμβολίζεται με $\geq_X$) και ορίζεται ως εξής:

$$\text{Για κάθε } x\,,\, y \in X \text{ έχουμε } x \geq_X y \Leftrightarrow x \geq y\ ,$$

όπου $\geq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης στον E. Για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε την επαγόμενη διάταξη $\geq_X$ του υποχώρου X πάλι με $\geq$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο θετικός κώνος X_+ του X δίνεται από τον τύπο:

$$X_+ = E_+ \cap X$$

δηλαδή ως η τομή του θετικού κώνου όλου του χώρου E_+ με τον υπόχωρο X.

Κάθε γραμμικός υπόχωρος X του E, διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη ονομάζεται <u>διατεταγμένος υπόχωρος του E</u>.

<u>Παρατήρηση</u>

Έστω E μερικά διατεταγμένος χώρος, όχι κατ΄ ανάγκην γραμμικός σύνδεσμος, δηλαδή ενδέχεται για κάποια ζεύγη στοιχείων του E να μην υπάρχει το $supremum$ και το $infimum$ τους. Έστω X διατεταγμένος υπόχωρος του E, δηλαδή εφοδιασμένος με την επαγόμενη διάταξη, όπως την ορίσαμε προηγουμένως. Υποθέτουμε ότι $x\,,\, y \in X$. Η έννοια του $supremum$ του ζεύγους $\{\, x\,,\, y\,\}$ στον E , και του $supremum$ του ζεύγους $\{\, x\,,\, y\,\}$ στον υπόχωρο X διαφέρουν. Πράγματι, το πρώτο είναι το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του ζεύγους $\{\, x\,,\, y\,\}$ που ανήκουν στον E, ενώ το δεύτερο είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα του ζεύγους $\{\, x\,,\, y\,\}$ που ανήκουν στον X.

Το $supremum$ του $\{\, x\,,\, y\,\}$ στον X, αν φυσικά υπάρχει, συμβολίζεται με $sup_X\ \{\, x\,,\, y\,\}$ και έχουμε ότι $sup_X\ \{\, x\,,\, y\,\} = z$, αν και μόνο αν, $z \in X$ (δηλαδή το z ανήκει στον υπόχωρο X, δηλαδή υπάρχει) και $\forall\, w \in X$ ώστε $w \geq x\,,\, y \Rightarrow w \geq z$ (δηλαδή για κάθε άνω φράγμα των x και y να ισχύει ότι θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το z, και άρα το z θα είναι το ελάχιστο άνω φράγμα).

Ανάλογα ορίζεται το $infimum$ του ζεύγους $\{\, x\,,\, y\,\}$ στον υπόχωρο X ως το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του $\{\, x\,,\, y\,\}$ που ανήκουν στον υπόχωρο X και συμβολίζεται με $inf_X\ \{\, x\,,\, y\,\}$.

Τονίζουμε ότι τα $sup_X \{x, y\}$ και $inf_X \{x, y\}$ ενδέχεται να μην υπάρχουν, ακόμα και στην περίπτωση που ο E είναι γραμμικός σύνδεσμος, κάτι που συνεπάγεται ότι τα $x \vee y$ και $x \wedge y$ υπάρχουν.

Εν συνεχεία, θα διατυπώσουμε τους ορισμούς των γραμμικών υποσυνδέσμων ($linear\ sublattices$) και των συνδέσμων-υποχώρων ($lattice-subspaces$) ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου.

Ορισμοί

(1) Έστω Ε γραμμικός σύνδεσμος και Χ διατεταγμένος υπόχωρος του Ε. Αν για κάθε $x, y \in X$, $x \vee y \in X$, και $x \wedge y \in X$, λέμε ότι ο Χ είναι γραμμικός υποσύνδεσμος ($linear\ sublattice$) του Ε.

(2) Αν Χ είναι διατεταγμένος υπόχωρος του Ε, και για κάθε $x, y \in X$, υπάρχουν τα $sup_X \{x, y\}$, $inf_X \{x, y\}$, τότε λέμε ότι ο Χ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος ($lattice - subspaces$) του Ε.

Παρατηρήσεις

(1) Αν ο Ε είναι γραμμικός σύνδεσμος, και ο Χ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του Ε, για κάθε $x, y \in X$ έχουμε:

$$sup_X \{x, y\} \geq x \vee y \geq x \wedge y \geq inf_X \{x, y\}$$

Αν επιπλέον έχουμε ότι $sup_X \{x, y\} = x \vee y$ και $inf_X \{x, y\} = x \wedge y$, τότε ο Χ είναι γραμμικός υποσύνδεσμος του Ε.

(2) Κάθε γραμμικός υποσύνδεσμος του Ε είναι και σύνδεσμος-υπόχωρος. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή το σύνολο των συνδέσμων-υποχώρων περιέχει γνήσια το σύνολο των γραμμικών συνδέσμων.

Παραδείγματα γραμμικών υποσυνδέσμων και συνδέσμων-υποχώρων

Παράδειγμα-(1) Έστω $E = C[0, 1]$, ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$. Έστω ο γραμμικός υπόχωρος $X = \{a + tb \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ του Ε, δηλαδή το σύνολο των γραμμικών συναρτήσεων. Αν θεωρήσω $x, y \in X$, τότε παρατηρώ ότι υπάρχουν τα $sup_X \{x, y\}$ και $inf_X \{x, y\}$, άρα ο Χ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος. Όμως, $sup_X \{x, y\} \neq x \vee y$ και $inf_X \{x, y\} \neq x \wedge y$, άρα συμπεραίνουμε ότι ο Χ δεν είναι γραμμικός υποσύνδεσμος του Ε.

Παράδειγμα-(2) Αν θεωρήσουμε πάλι τον $C\,[\,0\,,\,1\,]$, και τον γραμμικό υπόχωρο $X = \{\, x \in C\,[\,0\,,\,1\,] \mid x\,(\,t\,) = 0\,,\, \forall\, t \geq \frac{1}{2}\,\}$, δηλαδή όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f\,:\,[\,0\,,\,1\,] \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι μηδέν στο διάστημα $\left[\,\frac{1}{2}\,,\,1\,\right]$, τότε ο X είναι υποσύνδεσμος του $C\,[\,0\,,\,1\,]$. (και άρα, προφανώς, είναι και σύνδεσμος-υπόχωρος του $C\,[\,0\,,\,1\,]$).

Παράδειγμα-(3) Έστω $E = l_\infty$, ο χώρος των (πραγματικών) φραγμένων ακολουθιών, και έστω επίσης $X = c_0$, ο χώρος των (πραγματικών) ακολουθιών που τείνουν στο μηδέν. Ο c_0 είναι γραμμικός υπόχωρος του l_∞ (πράγματι, ο c_0 είναι υποσύνολο του l_∞, αφού κάθε ακολουθία που τείνει στο μηδέν είναι προφανώς φραγμένη ακολουθία, και επίσης ο c_0 είναι γραμμικός χώρος, εφοδιασμένος με τις πράξεις "$+$" και "$*$", οι οποίες να είναι οι κατά συνιστώσες πράξεις που ορίζονται μεταξύ ακολουθιών). Έστω $x = (\,x_n\,)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (\,y_n\,)_{n\in\mathbb{N}}$ $\in c_0$. Τότε, ισχύει ότι $x \vee y = (\,x_n \vee y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \wedge y = (\,x_n \wedge y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ο ισχυρισμός είναι ότι $x \vee y$, $x \wedge y \in c_0$, δηλαδή ότι είναι τελικά μηδενικές ακολουθίες. Θα το αποδείξουμε.

Έστω ε>0. Επειδή $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, έχουμε ότι, για το ε>0, $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1$ $\mid x_n \mid <$ ε. Ομοίως, επειδή $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ έχουμε ότι, για το ε>0, $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2$ $\mid y_n \mid <$ ε. Οπότε, αν θέσουμε $n_0 = max\,\{\,n_1\,,\,n_2\,\}$, τότε έχουμε ότι $\forall n \geq n_0$ $\mid x_n \mid, \mid y_n \mid <$ ε , άρα $\forall n \geq n_0\ max\,\{\,\mid x_n \mid, \mid y_n \mid\,\} <$ ε $\Rightarrow \mid max\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\} \mid <$ ε . Δηλαδή, δείξαμε ότι $\forall$ ε>0, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\mid max\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\} \mid <$ ε , άρα $max\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, άρα $(max\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Όμως, επειδή $x_n\,,\,y_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n \vee y_n = max\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\}$ και $x_n \wedge y_n = min\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\}$ (πράγματι, όπως είδαμε στην ενότητα 1.4.1, η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, εφοδιασμένη με την συνήθη διάταξη, είναι γραμμικός σύνδεσμος. Πραγματικά, για κάθε $x\,,\,y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ είτε $x \leq y$ ή $y \leq x$, επειδή η συνήθης διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι ολική, δηλαδή κάθε ζευγάρι στοιχείων του $\mathbb{R}$ είναι συγκρίσιμο. Άρα, αν $x \leq y$ $\Rightarrow x \vee y = max\,\{\,x\,,\,y\,\} = y$ και $x \wedge y = min\,\{\,x\,,\,y\,\} = x$. Ενώ αν $y \leq x \Rightarrow x \vee y = max\,\{\,x\,,\,y\,\} = x$ και $x \wedge y = min\,\{\,x\,,\,y\,\} = y$). Επομένως, $(max\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\})_{n\in\mathbb{N}} = x \vee y$ και δείξαμε ότι $x \vee y \in c_0$. Ομοίως, $(min\,\{\,x_n\,,\,y_n\,\})_{n\in\mathbb{N}} = x \wedge y = -\,(\,-x\,) \vee (\,-y\,) \in c_0$ (αφού δείξαμε ότι $\forall x = (\,x_n\,)_{n\in\mathbb{N}}\,, y = (\,y_n\,)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, $x \vee y \in c_0$). Επομένως, δείξαμε ότι $\forall x = (\,x_n\,)_{n\in\mathbb{N}}\,, y = (\,y_n\,)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, $x \vee y \in c_0$ και $x \vee y \in c_0$, δηλαδή ο c_0 είναι γραμμικός υποσύνδεσμος του l_∞ (επομένως, και σύνδεσμος-υπόχωρος του l_∞).

Κεφάλαιο 2

Βάσεις Κώνων

Σε αυτήν την ενότητα, θα μελετήσουμε κάποια κυρτά υποσύνολα ενός οξύ κώνου, που είναι ειδικής μορφής και ονομάζονται βάσεις του κώνου. Η θεωρία των βάσεων των κώνων είναι σημαντικό στοιχείο της γεωμετρίας των κώνων και έχει πολλές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική θεωρία. Ειδικότερα, σε μία οικονομία, κάθε βάση του κώνου κατανάλωσης ορίζει ένα σύνολο προϋπολογισμού, και αντιστρόφως κάθε σύνολο προϋπολογισμού ορίζει μία βάση του κώνου κατανάλωσης. Καταρχάς, θα υπενθυμήσουμε την έννοια και τις ιδιότητες του κυρτού συνόλου.

2.1 Κυρτά σύνολα

Ορισμός. Ένα μη κενό υποσύνολο C ενός διανυσματικού χώρου X ονομάζεται κυρτό (*convex*), αν για $x\,,\,y\,\in C$ και $\lambda\in\,(\,0\,,\,1\,)$, έπεται ότι $\lambda x\,+\,(1-\lambda)\,y\,\in\,C$.

Παρατήρηση:

Αν $x\,,\,y\in\mathbb{R}^3$, με $x\neq y$, είναι γνωστό ότι το σύνολο $[\,x\,,\,y\,]\,=\,\{\,\lambda x+(1-\lambda)y\,:\,\lambda\in\,[\,0\,,\,1\,]\,\}$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία x και y. Επίσης, αν $x\,,\,y\,,\,z$ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}^2$ το τρίγωνο $T\,(x\,,\,y\,,\,z)$ με κορυφές τα σημεία αυτά περιγράφεται ως

$$T\,(x\,,\,y\,,\,z)\,=\,\{\,\lambda_1 x\,+\,\lambda_2 y\,+\,\lambda_3 z\,:\,\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\lambda_3\geq 0\,,\,\lambda_1\,+\,\lambda_2\,+\,\lambda_3\,=\,1\,\}\,.$$

Η έννοια του κυρτού συνόλου περιγράφει μια σημαντική κατηγορία υποσυνόλων διανυσματικών χώρων.

Παραδείγματα κυρτών συνόλων

Παράδειγμα (1) Κάθε υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν Y υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου, και $x\,,\,y \in Y$, τότε για $\lambda \in [\,0\,,\,1\,]$ έχουμε ότι $\lambda x \in Y$, $(1-\lambda)\,y \in Y$ και επομένως $\lambda x + (1-\lambda)\,y \in Y$, αφού ο Y είναι διανυσματικός υπόχωρος. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει. Δηλαδή, ένα κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι κατ΄ ανάγκην υπόχωρος. Η γραμμικότητα είναι πιο ισχυρή έννοια από την κυρτότητα. Συχνά λέμε ότι η κυρτότητα είναι έννοια 'λίγο πριν' την γραμμικότητα.

Παράδειγμα (2) Για κάθε $x \in X$, το μονοσύνολο $\{\,x\,\}$ είναι κυρτό. Πράγματι, για $\lambda \in [\,0\,,\,1\,]$, έχουμε ότι $\lambda x + (1-\lambda)\,x = (\,\lambda + (1-\lambda))\,x = x \in X$.

Παράδειγμα (3) Ένα υποσύνολο A της ευθείας των πραγματικών αριθμών ($A \in \mathbb{R}$) είναι κυρτό, αν και μόνο αν, είναι διάστημα. (Όχι κατ΄ ανάγκην κλειστό).

Παράδειγμα (4) Ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, δηλαδή το σύνολο $\{\,x = (a_1\,,\,a_2\,) \in \mathbb{R}^2 : a_1^2 + a_2^2 \leq 1\,\}$, είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Ιδιότητες κυρτών συνόλων

Ιδιότητα (1) Το σύνολο K είναι κυρτό, αν και μόνο αν ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $x_1\,,\,x_2\,,\,...\,,\,x_n \in K$ και για κάθε $\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,...\,,\,\lambda_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, με $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, το στοιχείο $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ ανήκει στο K. Οι γραμμικοί συνδυασμοί $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ με $\lambda_i \geq 0$ και $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$ ονομάζονται <u>κυρτοί συνδυασμοί.</u>

Ιδιότητα (2) Η τομή αυθαίρετης οικογένειας κυρτών υποσυνόλων ενός διανυσματικού χώρου είναι επίσης κυρτό σύνολο. Δηλαδή, αν $(K_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κυρτών υποσυνόλων ενός διανυσματικού χώρου, τότε το σύνολο $\cap_{i\in I}K_i$ είναι κυρτό. Θα το αποδείξουμε. Αρκεί, σύμφωνα με τον ορισμό της κυρτότητας ενός συνόλου, να δείξουμε ότι για $x\,,\,y\,\in\,\cap_{i\in I}K_i$ και για κάποιο $\lambda\in(0\,,\,1)$ έπεται ότι $\lambda x+(1\,-\,\lambda)y\in\cap_{i\in I}K_i$. Πράγματι, έστω $x\,,\,y\,\in\,\cap_{i\in I}K_i$ και $\lambda\in(0\,,\,1)$. Επειδή $x\,,\,y\,\in\,\cap_{i\in I}K_i$, έπεται ότι $x\,,\,y\,\in\,K_i$, $\forall i$. Έστω $i\in I$. Επειδή $x\,,\,y\,\in K_i$ και το K_i είναι κυρτό, έπεται ότι $\lambda x+(1\,-\,\lambda)y\in K_i$, για το λ που έχουμε υποθέσει. Επομένως, $\forall i\in I$, έχουμε ότι $\lambda x+(1\,-\,\lambda)y\in K_i$ και άρα έπεται ότι $\lambda x+(1\,-\,\lambda)\,y\,\in\,\cap_{i\in I}K_i$ και αποδείξαμε το ζητούμενο.

Ιδιότητα (3) Αν $T\,:\,X\,\longrightarrow\,Y$ γραμμικός τελεστής και $K\subset X$ κυρτό, τότε το $T\,[K]$ είναι κυρτό υποσύνολο του Y. Θα το αποδείξουμε. Καταρχάς, να υπενθυμίσουμε ότι $T\,(\,K\,)\,=\,\{\,y\,\in\,Y\,\mid\,y\,=\,T\,(\,x\,)\,:\,x\,\in\,K\,\}$. Θα το αποδείξουμε με βάση τον ορισμό του κυρτού συνόλου. Έστω $y_1\,,\,y_2\,\in\,T\,(\,K\,)$ και $\lambda\in\,(0\,,\,1)$. Από τον ορισμό του συνόλου $T\,(\,K\,)$, έχουμε ότι υπάρχουν $x_1\,,\,x_2\,\in\,K$ τέτοια ώστε $y_1\,=\,T\,(\,x_1\,)$ και $y_2\,=\,T\,(\,x_2\,)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda y_1+(1\,-\,\lambda)\,y_2\,\in\,T\,(\,K\,)$. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο $x\,\in\,K$ τέτοιο ώστε $\lambda y_1+(1\,-\,\lambda)\,y_2\,=\,T\,(\,x\,)$. Έχουμε ότι $\lambda y_1+(1\,-\,\lambda)\,y_2$ $=\lambda T\,(\,x_1\,)+(1\,-\,\lambda)\,T\,(\,x_2\,)\underset{\text{επειδή } T\text{γραμμικός τελεστής}}{=}T\,(\,\lambda\,x_1\,)+T\,(\,(1\,-\,\lambda)\,x_2\,)=$ $T\,(\,\lambda\,x_1+(1\,-\,\lambda)\,x_2\,)$. Επομένως, βρήκαμε ένα στοιχείο $x\,\in\,K$ τέτοιο ώστε $\lambda y_1+(1\,-\,\lambda)\,y_2\,=\,T\,(\,x\,)$, που είναι το $x\,=\,\lambda\,x_1+(1\,-\,\lambda)\,x_2$.

Η κυρτή θήκη ενός συνόλου L

Ορισμός. Έστω L ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Η κυρτή θήκη του συνόλου L, που συμβολίζεται με $co\,(L)$, είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το L.

Η ύπαρξη της κυρτής θήκης $co\,(L)$εξασφαλίζεται από το ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον κυρτό σύνολο που περιέχει το L, και είναι ο ίδιος ο χώρος X, και από την προαναφερθείσα Ιδιότητα (2) προκύπτει ότι η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του X που περιεχουν το L, δηλαδή το σύνολο $\cap\,\{K\,;\,L\subset K\,,\,K\text{κυρτό}\,\}$, είναι κυρτό σύνολο, και μάλιστα το μικρότερο κυρτό που περιέχει το L.

Είδαμε την 'εξωτερική περιγραφή' της κυρτής θήκης. Όπως και στην πείπτωση της γραμμικής θήκης ενός συνόλου, έτσι και για την κυρτή θήκη $co\,(L)$

υπάρχει εναλλακτική αναλυτική περιγραφή του συνόλου, που δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση. *Έστω L μηκενό σύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Τότε,*

$$co\,(L) \,=\, \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, x_i \in L\,,\, l_i \in, \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,,\, i \,=\, 1\,,\, 2\,,\, ...\,,\, n\,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,=\, 1\,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(Δηλαδή, το σύνολο $co\,(L)$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών στοιχείων του L)

2.2 Ορισμός και ιδιότητες των Βάσεων κώνων

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, και P κώνος του E, $P \neq \{0\}$. Ένα υποσύνολο $B \subseteq P$ ονομάζεται βάση του κώνου P, αν το B είναι κυρτό, και για κάθε $x \in P$, $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in B$.

Δηλαδή, αν B είναι βάση του κώνου P, τότε κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in P$ έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $x = ab$, όπου $b \in B$ και $a > 0$. Το γεγονός ότι κάθε βάση ενός κώνου είναι κυρτό σύνολο υποδεικνύει ότι το μηδενικό στοιχείο δεν ανήκει στη βάση, δηλαδή $0 \notin B$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $0 \in B$, τότε για κάθε στοιχείο της βάσης $b \in B$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$, έχουμε ότι $\lambda b \in B$ (επειδή $0, b \in B$, και επειδή B κυρτό, έπεται ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ το στοιχείο $\lambda b = (\lambda b + (1 - \lambda) 0) \in B$), και άρα το στοιχείο b έχει άπειρα πολλαπλάσια μέσα στη βάση B , άτοπο).

Πρόταση. *Κάθε κυρτό υποσύνολο B ενός μερικά διατεταγμένου γραμμικού χώρου X αποτελεί βάση του κώνου P του X, αν και μόνο αν, $P = \cup\{aB \mid a \geq 0\}$ και το 0 δεν ανήκει στη μικρότερη γραμμική πολλαπλότητα του X που περιέχει το B.*

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Έστω B βάση του κώνου P. Για κάθε $x \in P$, με $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός $a > 0$, ώστε $x = ab$, για κάποιο $b \in B$ (από ορισμό της βάσης κώνου). Συνεπώς, παρατηρούμε ότι ο κώνος P ταυτίζεται από το σύνολο $\cup\{aB \mid a \geq 0\}$, αφού κάθε στοιχείο του P γράφεται ως μη-αρνητικό πολλαπλάσιο κάποιου στοιχείου της βάσης B. Μένει να δείξουμε ότι το 0 δεν ανήκει στη μικρότερη γραμμική πολλαπλότητα του X που περιέχει το B. Η μικρότερη γραμμική πολλαπλότητα του X που περιέχει το B είναι το σύνολο $L = \{\lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2 \mid b_1, b_2 \in B \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}\}$. Θα δείξουμε ότι $0 \notin L$. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $0 \in L$. Τότε, υπάρχουν $b_1, b_2 \in B$ και $\lambda > 0$, ώστε $0 = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2 \Leftrightarrow (\lambda - 1) b_2 = \lambda b_1$ (1). Από τη σχέση (1), παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο στοιχεία του κώνου P, τα $x_1 = (\lambda - 1) b_2$

και $x_2 = \lambda b_1$, τα οποία έχουν την ίδια αναπαράσταση ως προς τη βάση B, άτοπο (από τον ορισμό της βάσης κώνου). Επομένως, $0 \notin L$.

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι $P = \cup \{ aB \mid a \geq 0 \}$ και ότι το 0 δεν ανήκει στη μικρότερη γραμμική πολλαπλότητα του X που περιέχει το B. Θα δείξουμε ότι το B αποτελεί βάση του κώνου P. Από την υπόθεση έχουμε ότι το B είναι κυρτό. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του κώνου P γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως ab με $b \in B$ και $a > 0$. Έστω $b_1 , b_2 \in B$ και λ_1 , λ_2 θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ώστε $\lambda_1 b_1 = \lambda_2 b_2$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε αν διαιρέσουμε τη σχέση $\lambda_1 b_1 = \lambda_2 b_2$ με $\lambda_1 - \lambda_2$, τότε έχουμε ότι $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} b_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} b_2 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} b_1 + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) b_2 = 0$. Δηλαδή, το 0 γράφτηκε στην μορφή $\lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$, με $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$, λ_1 , λ_2 θετικούς πραγματικούς αριθμούς, και $b_1 , b_2 \in B$, άρα $0 \in L$, άτοπο, επειδή από την υπόθεση το 0 δεν ανήκει στη μικρότερη γραμμική πολλαπλότητα του X που περιέχει το B, δηλαδή στο L. Άρα, πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow b_1 = b_2$. Επομένως, αποδείξαμε την μοναδικότητα της αναπαράστασης ως προς τα στοιχεία του κυρτού συνόλου B, δηλαδή δείξαμε ότι το B αποτελεί βάση του P. □

Θεώρημα. *Έστω L και M διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι, με τον M να είναι Αρχιμήδειος. Τότε, κάθε προσθετική απεικόνιση $f : L_+ \longrightarrow M_+$ επεκτείνεται σε έναν θετικό τελεστή από τον L στον M.*

Απόδειξη. Έστω $f : L_+ \longrightarrow M_+$ προσθετική απεικόνιση. Θα δείξουμε ότι η f επεκτείνεται σε έναν θετικό τελεστή από τον L στον M. Θεωρώ το χώρο $X = L_+ - L_+$, που παράγεται από τον L_+ και ορίζω τον τελεστή $S : X \longrightarrow M$ ως εξής: Για κάθε $x \in X$, επιλέγω $x_1 , x_2 \in L_+$, με $x = x_1 - x_2$, και θέτω $S (x) = f (x_1) - f (x_2)$. Παρατηρούμε ότι ο S αποτελεί επέκταση της f στο χώρο $X = L_+ - L_+$ (πράγματι, για $x \in L_+ \Rightarrow S (x) = f (x) \geq 0$). Θα δείξουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2$, με $x_1 , x_2 , y_1 , y_2 \in L_+$. Έχουμε ότι $S (x) = f (x_1) - f (x_2)$ και $S (x) = f (y_1) - f (y_2)$. Για να δείξουμε ότι η S είναι καλά ορισμένη αρκεί να δείξουμε ότι $f (x_1) - f (x_2) = f (y_1) - f (y_2)$. Πράγματι, επειδή $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \Rightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$. Άρα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η f είναι προσθετική, έχουμε ότι $f (x_1) + f (y_2) = f (x_1 + y_2) = f (x_2 + y_1) = f (x_2) + f (y_1) \Rightarrow f (x_1) - f (x_2) =$

$f(y_1) - f(y_2)$. Άρα, S καλά ορισμένη. Θα δείξουμε ότι η S είναι γραμμική. Έστω $x = x_1 - x_2$ και $y = y_1 - y_2$, με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L_+$. $S(x+y) = S((x_1+y_1)-(x_2+y_2)) = f(x_1+y_1) - f(x_2+y_2)$ $= f(x_1) + f(y_1) - f(x_2) - f(y_2) = f(x_1) - f(x_2) + f(y_1) - f(y_2) =$ $S(x) + S(y)$. Άρα, S προσθετική. Θα δείξουμε ότι η S είναι ομογενής. Καταρχάς, θα δείξουμε ότι η S είναι μονότονη, δηλαδή ότι : Για $x \geq y$ στον $X \Rightarrow$ $S(x) \geq S(y)$ στον M. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x \geq y$ στον X, τότε $x - y \geq 0$, δηλαδή $x - y \in L_+$ και από το ότι η S είναι προσθετική, έπεται ότι: $S(x) = S((x-y)+y) = S(x-y) + S(y) = f(x-y) + S(y) \geq$ $S(y)$. Επομένως, δείξαμε ότι η S είναι μονότονη. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η S είναι ομογενής, δηλαδή ότι $S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in X$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in L_+$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιλέγω δύο ακολουθίες ρητών αριθμών $\{r_n\}$ και $\{t_n\}$, με $r_n \uparrow \lambda$ και $t_n \uparrow \lambda$ (οι ακολουθίες υπάρχουν λόγω πυκνότητας των ρητών). Ισχύει η ανισότητα: $r_n x \leq \lambda x \leq t_n x \Rightarrow S(r_n x) \leq S(\lambda x) \leq S(t_n x) \Rightarrow$ $r_n S(x) \leq S(\lambda x) \leq t_n S(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $S(\lambda x) \in M_+ - M_+$ (από τον ορισμό της S). Επειδή $x \in L_+$, έχουμε ότι $S(x) = f(x) \in$ M_+(αφού $f : L_+ \longrightarrow M_+$) και M Αρχιμήδειος. Επομένως, από γνωστό θεώρημα των Αρχιμήδειων χώρων, έπεται ότι $\lambda S(x) \leq S(\lambda x) \leq \lambda S(x)$ $\Rightarrow S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in L_+$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in X$και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι $x = x_1 - x_2$, με $x_1, x_2 \in L_+$. Τότε, $S(\lambda x) = S(\lambda x_1 + (-\lambda) x_2)$ $= S(\lambda x_1) + S(-\lambda x_2) = \lambda\, S(x_1) - \lambda\, S(x_2) = \lambda\,(S(x_1) - S(x_2)) = \lambda$ $(f(x_1) - f(x_2)) = \lambda S(x)$. Επομένως, δείξαμε ότι $S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Αποδείξαμε ότι η S είναι προσθετική και ομογενής, δηλαδή είναι γραμμική. Επομένως, η $S : X \longrightarrow M$ (όπου $X = L_+ - L_+$) είναι η μοναδική επέκταση της προσθετική απεικόνισης $f : L_+ \longrightarrow M_+$ σε θετικό τελεστή. □

Η ύπαρξη μίας βάσης συνδέεται με την ύπαρξη αυστηρά θετικών γραμμικών συναρτησιακών.

Θεώρημα. *Ένας οξύς κώνος K ενός γραμμικού χώρου X έχει βάση, αν και μόνο αν, ο X αναγνωρίζει ένα K- αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό. Επιπλέον, αν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα οποιοδήποτε K- αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό, τότε για κάθε $a>0$ (φιξαρισμένο) το κυρτό σύνολο*

$$B = \{x \in K : f(x) = a\}$$

είναι βάση για τον κώνο K.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μία ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα. *Έστω X γραμμικός χώρος, K κώνος του X, και έστω $B \subseteq P$. Το B είναι βάση του P, αν και μόνο αν, υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f του X, ώστε*

$$B = \{ x \in K \mid f(x) = 1 \}$$

Τότε, λέμε ότι η βάση B ορίζεται από το γραμμικό συναρτησιακό f.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Έστω B βάση του κώνου K. Επομένως, από τον ορισμό της βάσης κώνου, για κάθε $x \in K$, $x \neq 0$, υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός λ_x, ώστε $\lambda_x x \in B$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: Για κάθε $x \in K$, $x \neq 0$, θέτουμε $f(x) = \frac{1}{\lambda_x}$ (όπου το λ_x το ορίσαμε προηγουμένως). Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in K$, $x \neq 0$, το $f(x)$ είναι ο μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός ώστε $\frac{x}{f(x)} \in B$ (πράγματι, παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$, άρα πράγματι $\frac{x}{f(x)} \in B$). Επομένως, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda > 0$, έχουμε ότι $\frac{\lambda x}{\lambda f(x)} \in B \Rightarrow f\left(\frac{\lambda x}{\lambda f(x)}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda f(x)} f(\lambda x) = 1 \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Επομένως, δείξαμε ότι η f είναι θετικά ομογενής. Θα δείξουμε ότι η f είναι προσθετική. Για κάθε $x, y \in K$ με $x, y \neq 0$, έχουμε $\frac{x}{f(x)}, \frac{y}{f(y)} \in B$. Επειδή το B είναι κυρτό (από τον ορισμό της βάσης κώνου) και επειδή $\frac{f(x)}{f(x)+f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} = 1$, έχουμε ότι το στοιχείο $\frac{f(x)}{f(x)+f(y)} \frac{x}{f(x)} + \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} \frac{y}{f(y)} = \frac{x+y}{f(x)+f(y)} \in B \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{f(x)+f(y)}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)+f(y)} f(x+y) = 1 \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$. Επομένως, δειξαμε ότι η f είναι προσθετική. Επειδή λοιπόν δείξαμε ότι η f είναι θετικά ομογενής και προσθετική, έπεται ότι η f είναι γραμμική. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα που αποδείξαμε παραπάνω , έπεται ότι η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησιακό του X.

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι f είναι αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό και ότι $B = \{ x \in K \mid f(x) = 1 \}$. Θα δείξουμε ότι το B είναι βάση του κώνου K. Το B είναι κυρτό. Πράγματι, έστω $x, y \in B$ και $\lambda > 0$. Τότε, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(\lambda x) + f((1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = \lambda + (1-\lambda) = 1$, άρα $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$, και άρα το B ειναι κυρτό. Για κάθε $x \in K$, έχουμε ότι $\frac{x}{f(x)} \in B$ (πράγματι, $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$) και ο αριθμός $\frac{1}{f(x)}$ είναι ο μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός λ_x, για τον

οποίον ισχύει ότι $\lambda_x x \in B$. Ο λ_x είναι μοναδικός, επειδή αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in B$, τότε έπεται ότι $f(\lambda x) = 1 \Rightarrow \lambda f(x) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{f(x)}$. Επομένως, το B είναι βάση του κώνου K. □

Έστω X μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος, με κώνο P. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κυρτό υποσύνολο B του P, ώστε το B να αποτελεί βάση του P. Θα αποδείξουμε δύο χρήσιμες προτάσεις που αφορούν το χώρο X.

Πρόταση. *Αν* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$, *με* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *και* $b_i \in B$, *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, n$, *τότε* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

Απόδειξη. Αφού το σύνολο B είναι βάση του P, από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f ώστε $f(b) = 1, \forall b \in B$. Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε ότι, επειδή από την υπόθεση $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$, έπεται ότι $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = 0$. Επειδή το f είναι γραμμικό, έχουμε ότι $0 = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (επειδή το f είναι εκείνο το αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό για το οποίο ισχύει ότι $f(b) = 1, \forall b \in B$, και άρα $f(b_i) = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, αφού $b_i \in B$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.) Επομένως, δείξαμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Πρόταση. *Αν* $b_1, b_2 \in B$ *και* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *ώστε* $\lambda_1 b_1 \leq \lambda_2 b_2$, *τότε* $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Απόδειξη. Επειδή η B είναι βάση του P, έπεται ότι υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f ώστε $f(b) = 1, \forall b \in B$. Εφόσον $\lambda_1 b_1 \leq \lambda_2 b_2$, έχουμε ισοδύναμα ότι $\lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1 \geq 0$, και άρα $f(\lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1) \geq 0$ (επειδή το f είναι αυστηρά θετικό). Από τη γραμμικότητα του f έχουμε ότι $0 \leq f(\lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1) = \lambda_2 f(b_2) - \lambda_1 f(b_1) = \lambda_2 - \lambda_1$(επειδή το f είναι εκείνο το αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό για το οποίο ισχύει ότι $f(b) = 1, \forall b \in B$, και $b_1, b_2 \in B$). Δηλαδή $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 0$ και επομένως $\lambda_1 \leq \lambda_2$. □

Έστω P κώνος του E, όπου E γραμμικός χώρος. Το γραμμικό συναρτησιακό f του E είναι <u>ομοιόμορφα μονότονο (*uniformly monotonic*) στον P</u> αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $a > 0$, ώστε

$$f(x) \geq a \parallel x \parallel, \text{για κάθε } x \in P$$

Πρόταση. *Έστω E γραμμικός χώρος, P κώνος του E, και f γραμμικό συναρτησιακό του E, αυστηρά θετικό στον P. Αν $B = \{ x \in P \mid f(x) = 1 \}$, έχουμε ότι:*

Η βάση B του P είναι norm-φραγμένη, αν και μόνο αν, το συναρτησιακό f είναι ομοιόμορφα μονότονο στον P.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Υποθέτουμε ότι η βάση B του P είναι $norm$-φραγμένη. Έστω λοιπόν M ένα $norm$-φράγμα της B (δηλαδή $\forall x \in B$, $\| x \| \leq M$). Επειδή η B είναι βάση του κώνου P, έχουμε ότι $\forall x \in P$, $x \neq 0$, ισχύει ότι $\frac{x}{f(x)} \in B$ (πράγματι, $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$). Επειδή το $\frac{x}{f(x)}$ είναι ένα στοιχείο που ανήκει στην B, έχουμε ότι η νόρμα του θα φράσσεται από $norm$-φράγμα M της B, δηλαδή $\| \frac{x}{f(x)} \| \leq M \Rightarrow \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \leq M \Rightarrow \| f(x) \| \geq \frac{\|x\|}{M} \underset{(f \text{ αυστηρά θετικό στον } P)}{\Rightarrow}$ $f(x) \geq \frac{1}{M} \| x \|$, άρα η f είναι ομοιόμορφα μονότονη στον P (πράγματι, βρήκαμε ένα $a > 0$, το $a = \frac{1}{M}$, ώστε για κάθε $x \in P$ με $x \neq 0$, να ισχύει ότι $f(x) \geq a \| x \|$).

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι το συναρτησιακό f είναι ομοιόμορφα μονότονο στον P, δηλαδή ότι $f(x) \geq a \| x \|$, για κάθε $x \in P$. Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in P$, με $x \neq 0$, έχουμε ότι $f(x) \geq a \| x \| > 0$, δηλαδή το f είναι αυστηρά θετικό στον P. Επομένως, επειδή το f είναι αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του E, το υποσύνολο $B = \{ x \in P \mid f(x) = 1 \}$ του P είναι βάση του P. Κάθε στοιχείο της βάσης έχει εικόνα μέσω της f την τιμή 1, δηλαδή $\forall x \in B \Rightarrow f(x) = 1$, άρα $\left.\begin{array}{c} f(x) \geq a \| x \| \\ f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \| x \| \leq 1 \Rightarrow$ $\| x \| \leq \frac{1}{a}$, $\forall x \in B$. Επομένως, δείξαμε ότι η νόρμα ενός τυχαίου στοιχείου της βάσης φράσσεται από το $\frac{1}{a}$, άρα το $\frac{1}{a}$ αποτελεί ένα $norm$-φράγμα της B. Επομένως, δείξαμε ότι η B είναι $norm$-φραγμένη. □

Πρόταση. *Έστω E γραμμικός χώρος. Αν P είναι πεπερασμένης διάστασης κλειστός κώνος του E, τότε κάθε βάση του P είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $X = P - P$, ο γραμμικός υπόχωρος του E, που παράγεται από τον κώνο P. Τότε, ο X είναι πεπερασμένης διάστασης (επειδή παράγεται από τον πεπερασμένης διάστασης κώνο P), είναι κλειστός υπόχωρος του E (επειδή

παράγεται από τον P, που είναι κλειστός κώνος του E). Έστω f ένα αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του X. Τότε, το $B = \{ x \in P \mid f(x) = 1 \}$ είναι βάση του P, που ορίζεται από το f. Θα δείξουμε ότι η B είναι φραγμένη. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι η B δεν είναι φραγμένη. Τότε, θα υπάρχει μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε $\| x_n \| \longrightarrow \infty$ (δηλαδή θα υπάρχει μία ακολουθία του χώρου B που να τείνει στο άπειρο, που να μην είναι δηλαδή φραγμένη στο B). Θεωρούμε την ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του χώρου X). Επειδή ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, έπεται ότι η μοναδιαία μπάλα του X είναι συμπαγής. Επομένως, για την ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω x_0 το όριο της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $y_{k_n} \longrightarrow x_0$. Επειδή ο P είναι κλειστός, έπεται ότι $x_0 \in P$ και επίσης $\| x_0 \| = 1$ (επειδή το x_0 ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του X). Τότε, έχουμε ότι $f(x_0) = lim f(y_{k_n}) = 0$ (πράγματι, $f(x_0) = f(lim y_{k_n}) = lim f(y_{k_n})$. Όμως, $f(y_{k_n}) = f\left(\frac{x_{k_n}}{\|x_{k_n}\|}\right) = \frac{1}{\|x_{k_n}\|} f(x_{k_n}) = \frac{1}{\|x_{k_n}\|}$, επειδή $f(x_{k_n}) = 1$, αφού $x_{k_n} \in B$. Όμως, $\| x_n \| \longrightarrow \infty$, άρα έπεται έπισης ότι $\| x_{k_n} \| \longrightarrow \infty$, άρα $f(y_{k_n}) = \frac{1}{\|x_{k_n}\|} \longrightarrow \infty$, και επομένως, $f(x_0) = lim f(y_{k_n}) = 0$). Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή η f είναι αυστηρά θετική στον P (και εμείς βρήκαμε ένα στοιχείο, το $x_0 \in P$ για το οποίο $f(x_0) = 0$). Άρα, δείξαμε ότι κάθε βάση στον P είναι φραγμένη. □

Πρόταση. *Έστω E χώρος με νόρμα, P κώνος του E, και $f \in P^0$*
(όπου $P^0 = \{ f \in E^* \mid f(x) \geq 0, \forall x \in P \} =$
$=\{ f : E \to \mathbb{R} \mid f$ γραμμική και συνεχής, με $f(x) \geq 0, \forall x \in P \}$, είναι ο δυϊκός κώνος του P στον E^*).
τότε, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) το f είναι εσωτερικό σημείο του P^0,
(ii) το f ορίζει φραγμένη βάση στον P.

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$

Υποθέτουμε ότι το f είναι εσωτερικό σημείο του P^0, άρα υπάρχει ένα ρ>0, ώστε $B(f, \rho) \subseteq P^0$, όπου $B(f, \rho)$είναι ανοικτή μπάλα του χώρου E^*, με κέντρο το f και ακτίνα ρ, δηλαδή μία ανοικτή περιοχή του f. Θα δείξουμε ότι το f ορίζει φραγμένη βάση στον P. Καταρχάς, για να δειξουμε ότι το f ορίζει βάση στον P, αρκεί να δείξουμε ότι το f είναι αυστηρά θετικό στον P. Θα το αποδείξουμε με άτοπο. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in P$, με

$x \neq 0$, ώστε $f(x) = 0$, τότε για κάθε $g \in E^*$, με $g \neq 0$, έχουμε ότι $f + \frac{\rho}{2\|g\|}g \in P^0$. Επομένως, για το x που υποθέσαμε παραπάνω ότι υπάρχει, προκύπτει ότι $f(x) + \frac{\rho}{2\|g\|}g(x) = \frac{\rho}{2\|g\|}g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0$. Ανάλογα, αν αντί του g θεωρήσουμε το $-g$, έχουμε ότι $-g(x) \geq 0$. Άρα από τις σχέσεις $\left.\begin{array}{c} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = 0, \forall g \in E^*$. Επομένως, $x = 0$, άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $x \neq 0$. Άρα, το f είναι αυστηρά θετικό στον P, και άρα ορίζει βάση στον P, την $B = \{x \in P \mid f(x) = 1\}$. Θα δείξουμε ότι η B είναι φραγμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι $B \subseteq B\left(0, \frac{2}{\rho}\right)$ (πράγματι, αν η B περιέχεται μέσα στην μπάλα $B\left(0, \frac{2}{\rho}\right)$, τότε κάθε στοιχείο της θα έχει νόρμα μικρότερη ή ίση από το $\frac{2}{\rho}$, άρα το $\frac{2}{\rho}$ αποτελεί άνω φράγμα της B). Έστω $x \in B$. Θα δείξουμε ότι $x \in B\left(0, \frac{2}{\rho}\right)$, δηλαδή ότι $\| x \| \leq \frac{2}{\rho}$. Για κάθε $g \in B(0, 1)$ έχουμε ότι $f + \frac{\rho}{2}g \in P^0$, άρα $f(x) + \frac{\rho}{2}g(x) \underset{\text{επειδή } x \in B \Rightarrow f(x) = 1}{=} 1 + \frac{\rho}{2}g(x) \geq 0 \Rightarrow -g(x) \leq \frac{2}{\rho}$. Επειδή, $g \in B(0, 1)$, έπεται λόγω συμμετρίας ότι $-g \in B(0, 1)$, και ανάλογα, αν αντί του g θεωρήσουμε το $-g$, έχουμε ότι $g(x) \leq \frac{2}{\rho}$. Άρα από τις σχέσεις $\left.\begin{array}{c} -g(x) \leq \frac{2}{\rho} \\ g(x) \leq \frac{2}{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $| g(x) | \leq \frac{2}{\rho}$, για κάθε $g \in B(0, 1)$. Επειδή, $| g(x) | \leq \frac{2}{\rho}$, για κάθε $g \in B(0, 1)$, έπεται ότι και το *supremum*: $sup\{| g(x) || g \in B(0, 1)\} \leq \frac{2}{\rho}$, όμως έξ΄ ορισμού το παραπάνω *supremum* είναι η νόρμα του x, δηλαδή $\| x \| = sup\{| g(x) || g \in B(0, 1)\} \leq \frac{2}{\rho}$. Δείξαμε επομένως ότι $\|\xi\| \leq \frac{2}{\rho}$, δηλαδή $x \in \mathrm{B}\left(0, \frac{2}{\rho}\right)$. Επομένως, δείξαμε ότι η βάση B είναι φραγμένη.

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Υποθέτουμε ότι η βάση $B = \{x \in P \mid f(x) = 1\}$, που ορίζεται από το αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχει $\rho > 0$, ώστε $B \subseteq B(0, \rho)$, θα υπάρχει δηλαδή μία μπάλα γύρω από το μηδέν, που μέσα σε αυτήν να περιέχεται η βάση B. Θα δείξουμε ότι το f είναι εσωτερικό σημείο του P^0. Αρκεί να δείξουμε ότι $B\left(f, \frac{1}{\rho}\right) = f + B\left(0, \frac{1}{\rho}\right) \subseteq P^0$. Έστω $g \in B\left(0, \frac{1}{\rho}\right)$. Τότε, για κάθε στοιχείο της βάσης $x \in B \subseteq B(0, \rho)$, έχουμε ότι $| g(x) | \leq \| g \| \| x \| \underset{\text{επειδή } g \in B\left(0, \frac{1}{\rho}\right) \text{και } x \in B(0, \rho)}{\leq} \frac{1}{\rho}\rho = 1$. Επομένως, έχουμε ότι $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + g(x) \geq 1 + (-1) = 0$, για

κάθε $x \in B$. Από το ότι $(f+g)(x) \geq 0$, για κάθε $x \in B$, έπεται ότι $(f+g)(x) \geq 0$, για κάθε $x \in P$ (από τον ορισμό της βάσης κώνου), άρα $f+g \in P^0$, με $g \in B\left(0, \frac{1}{\rho}\right)$ τυχαίο. Άρα, $f + B\left(0, \frac{1}{\rho}\right) \subseteq P^0$. Όμως, $f + B\left(0, \frac{1}{\rho}\right) = B\left(f, \frac{1}{\rho}\alpha\right)$, άρα $B\left(f, \frac{1}{\rho}\right) \subseteq P^0$, δηλαδή υπάρχει μία μπάλα γύρω από την f που να βρίσκεται μέσα στο P^0, άρα δείξαμε ότι η f είναι εσωτερικό σημείο του P^0. □

Παραδείγματα στις βάσεις κώνων

Παράδειγμα-(1) Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^2$,

$$\left(\text{όπου, } \mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2\}\right)$$

και θεωρώ τον θετικό κώνο του $\mathbb{R}^2$, τον $\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Τότε, το σύνολο $D_1 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1 + x_2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2_+$, είναι βάση του κώνου $\mathbb{R}^2_+$. Θα το αποδείξουμε. Αρκεί να δείξουμε ότι το D_1 είναι κυρτό, και ότι $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, με $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in D_1$. Το D_1 είναι κυρτό (δηλαδή, $\forall x, y \in D_1$και $\forall \lambda \in (0, 1) \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in D_1$). Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x, y \in D_1$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε έχουμε ότι $x_1 + x_2 = 1$ και $y_1 + y_2 = 1$ (όπου, $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$). Τότε, $\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)$. Θέτουμε $\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 = z_1$ και $\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 = z_2$. Τότε, $\lambda x + (1-\lambda) y = (z_1, z_2)$. Για να δείξουμε ότι $\lambda x + (1-\lambda) y \in D_1$, αρκεί να δείξουμε ότι $z_1 + z_2 = 1$. Πράγματι, $z_1 + z_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 + \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 = \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) = \lambda + (1-\lambda) = 1$. Άρα, το D_1 είναι κυρτό. Μένει να δείξουμε ότι $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, με $x \neq 0 = (0, 0)$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in D_1$. Έστω $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, με $x \neq 0 = (0, 0)$. Έστω ότι υπάρχει $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in D_1$. Τότε, $\lambda_x(x_1, x_2) = (\lambda_x x_1, \lambda_x x_2) \in D_! \Leftrightarrow \lambda_x x_1 + \lambda_x x_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_x = \frac{1}{x_1 + x_2}$, και είναι μοναδικό για κάθε $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, με $x \neq 0 = (0, 0)$, αφού εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του εκάστοτε x. Παραδείγματος χάριν, για $x = (2, 1) \Rightarrow \lambda_x = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

Παράδειγμα-(2) Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^3$,

$$\left(\text{όπου, } \mathbb{R}^3 = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, 3 \} \right)$$

και έστω ο οξύς κώνος του $\mathbb{R}^3$: $K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\} = \{ \lambda (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Προφανώς, το σύνολο $B = \{ (x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ είναι κυρτό υποσύνολο του K, και $\forall x \in K$, υπάρχει $\lambda_x > 0$ μοναδικό, τέτοιο ώστε $\lambda_x x \in B$. Πράγματι, για κάθε $z \in K$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_z > 0$ και $x \in B$, ώστε $z = \lambda_z x$, από τον ορισμό του K. Από αυτό έπεται ότι $\frac{1}{\lambda_z} z \in B$. Άρα, το ζητούμενο λ_x είναι το $\frac{1}{\lambda_z}$, δηλαδή $\lambda_x = \frac{1}{\lambda_z}$.

Παράδειγμα-(3) Έστω ο χώρος ακολουθιών l_2, όπου

$$l_2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \| x \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Έστω ο οξύς κώνος $K = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2 \mid x_1 \geq \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2} \right\}$ $= \{ x = \lambda(1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2 \mid \lambda \geq 0 \text{και } \sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 \leq 1 \}$. Τότε, το σύνολο $B = \{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in K \mid x_1 = 1 \}$ είναι βάση του K. (Πράγματι, το B είναι κυρτό υποσύνολο του K, και για κάθε $x \in K$, με $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in B$, και προκύπτει άμεσα από τον τρόπο που ορίσαμε τον οξύ κώνο K).

Κεφάλαιο 3

Θετικοί τελεστές

3.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

Μία απεικόνιση $T : X \to Y$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων ονομάζεται:

- προσθετική (*additive*), αν για κάθε $x\,,\, y \in X$, έχουμε ότι $T\,(\,x + y\,) = T\,(\,x\,) + T\,(\,y\,)$.
- ομογενής (*homogeneous*), όταν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $T\,(\,\lambda\, x\,) = \lambda\, T\,(\,x\,)$.
- γραμμική (*linear*), αν είναι προσθετική και ομογενής.

Μία γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων ονομάζεται γραμμικός τελεστής (*linear operator*), ή απλά τελεστής .

Πολύ συχνά, στη Θεωρία Τελεστών, συμβολίζουμε το διάνυσμα $T\,(\,x\,)$ με $T\,x$.

Ορισμός. Ο διανυσματικός χώρος όλων των γραμμικών τελεστών από έναν γραμμικό χώρο X σε έναν γραμμικό χώρο Y συμβολίζεται με $\mathcal{L}\,(\,X\,,\,Y\,)$. Δηλαδή,

$$\mathcal{L}\,(\,X\,,\,Y\,) = \{\,T : X \to Y \mid T\,\text{γραμμική}\,\}\,.$$

Εν συνεχεία, θα εισάγουμε κάποιες κατηγορίες τελεστών μεταξύ διατεταγμένων γραμμικών χώρων, οι οποίοι συνδέονται με τη δομή (όσον αφορά στη διάταξη) των εν λόγω χώρων.

Ένας τελεστής $T : L \to M$ μεταξύ δύο διατεταγμένων γραμμικών χώρων, ονομάζεται θετικός (*positive*), συμβολικά $T \geq 0$, αν για κάθε $x \in L^+$, $T(x) \geq 0$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_+(L, M)$ το σύνολο όλων των θετικών γραμμικών τελεστών από τον διατεταγμένο χώρο L στον διατεταγμένο χώρο M. Ο $\mathcal{L}_+(L, M)$ επάγει την διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{L}(L, M)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $T, S \in \mathcal{L}(L, M)$ έχουμε $T \geq S \Leftrightarrow Tx \geq Sx, \forall x \in \mathcal{L}_+(L, M)$. Τότε, ο $\mathcal{L}_+(L, M)$ είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος.

Ο $T \in \mathcal{L}_+(L, M)$ονομάζεται αυστηρά θετικός (*strictly positive*), συμβολικά $T \gg 0$, αν για κάθε $x \in L^+$, $x \neq 0$, $T(x) > 0$.

Επίσης, ο τελεστής T ονομάζεται κανονικός (*regular*), αν ο T μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο θετικών τελεστών και διατακτικά φραγμένος (*order bounded*), αν ο T 'μεταφέρει' διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του L σε διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του M.

Παρατήρηση:

(1) Κάθε αυστηρά θετικός τελεστής είναι θετικός.

(2) Κάθε θετικός τελεστής είναι κανονικός.

(3) Κάθε κανονικός τελεστής είναι διατακτικά φραγμένος.

Αν L, M διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι, συμβολίζουμε το γραμμικό χώρο όλων των διατακτικά φραγμένων τελεστών από τον L στον M με $\mathcal{L}_b(L, M)$, και τον γραμμικό χώρο όλων των κανονικών τελεστών απο τον L στον M με $\mathcal{L}_r(L, M)$. Δηλαδή,

$$\mathcal{L}_b(L, M) = \{T : L \to M \mid T \text{ διατακτικά φραγμένος}\}, \text{ και}$$

$$\mathcal{L}_r(L, M) = \{T : L \to M \mid T \text{ κανονικός}\}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω συμβολισμό, και λάβουμε υπόψιν την προαναφερθείσα παρατήρηση, καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις έγκλεισης μεταξύ των γραμμικών χώρων που μόλις αναφέραμε:

$$\mathcal{L}_r(L, M) \subseteq \mathcal{L}_b(L, M) \subseteq \mathcal{L}(L, M)$$

Παρατήρηση:

Το σύνολο των θετικών τελεστών από τον L στον M είναι κώνος του $\mathcal{L}\,(\,L\,,\,M\,)$. Στην περίπτωση που ο L^+ είναι παράγων, τότε ο κώνος αυτός είναι οξύς.

3.2 Συνεχείς (ή φραγμένοι) τελεστές

Ορισμός. Μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, όπου $(X, \| . \|_X)$, $(Y, \| . \|_Y)$ χώροι με νόρμα, λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, ώστε για κάθε $x \in X$ με $\| x - x_0 \| < \delta$, να ισχύει $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$.

Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής για κάθε $x \in X$, δηλαδή σε κάθε σημείο του χώρου X.

Θεώρημα. *Έστω $(X, \| . \|_X)$, $(Y, \| . \|_Y)$ χώροι με νόρμα, και $f : X \longrightarrow Y$ μία συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι συνεχής

(2) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X και $x \in X$, ώστε $x_n \xrightarrow{\|.\|_X} x$, ισχύει ότι $f(x_n) \xrightarrow{\|.\|_Y} f(x)$

(3) Αν $V \subset Y$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ είναι ανοικτό στον X. (δηλαδή, η f αντιστρέφει ανοικτά υποσύνολα του Y σε ανοικτά υποσύνολα του X)

(4) Αν $K \subset Y$ κλειστό, τότε το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X. (δηλαδή, η f αντιστρέφει κλειστά υποσύνολα του Y σε κλειστά υποσύνολα του X)

Ορισμός. Ένα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα $(X, \| . \|_X)$ ονομάζεται φραγμένο αν υπάρχει $K > 0$, ώστε για κάθε $x \in A$, να ισχύει ότι $\| x \| \leq K$ (δηλαδή η νόρμα κάθε στοιχείου του συνόλου A φράσσεται από τη σταθερά K).

Στην επόμενη πρόταση θα δούμε κάποια κριτήρια συνέχειας γραμμικών τελεστών.

Πρόταση. *Έστω $(X, \| . \|_X)$, $(Y, \| . \|_Y)$ χώροι με νόρμα και $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Ο $T : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής.

(2) $\exists M > 0$ ώστε $\| T(x) \|_Y \leq M \| x \|_X, \forall x \in X$.

3.3 Ο χώρος $B(X, Y)$ των φραγμένων τελεστών

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, οι συνεχείς γραμμικοί τελεστές ονομάζονται και φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

Το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y συμβολίζεται με $B(X, Y)$.

Ο χώρος των γραμμικών τελεστών μεταξύ διανυσματικών χώρων είναι επίσης διανυσματικός χώρος (με τις προφανείς πράξεις). Ο χώρος $B(X, Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των γραμμικων τελεστών, δηλαδή αν $T, S : X \longrightarrow Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, όπου $(X, \| . \|_X)$, $(Y, \| . \|_Y)$ χώροι με νόρμα, και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οι $T + S$ και λT είναι επίσης φραγμένοι. (Πράγματι, επειδή οι T και S είναι φραγμένοι τελεστές, από την πρόταση της προηγούμενης ενότητας, έπεται ότι υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$, ώστε $\| T(x) \|_Y \leq M_1 \| x \|_X$ και $\| S(x) \|_Y \leq M_2 \| x \|_X$, για κάθε $x \in X$.

Έπεται ότι $\| (T + S)(x) \|_Y = \| T(x) + S(x) \|_Y \leq \| T(x) \|_Y + \| S(x) \|_Y \leq M_1 \| x \|_X + M_2 \| x \|_X = (M_1 + M_2) \| x \|_X$, για κάθε $x \in X$. Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι $\| (\lambda T)(x) \|_Y \leq |\lambda| M_1 \| x \|$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, δείξαμε ότι ο χώρος $B(X, Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των γραμμικων τελεστών.

Να θυμηθούμε ότι αν K είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τότε ορίζουμε την νόρμα της συνάρτησης f ως εξής:

$$\| f \| = sup\{ | f(t) | : t \in K \}$$

και $\| f \| \in \mathbb{R}$ (δηλαδή, η νόρμα της συνάρτησης f είναι φραγμένη), διότι οι συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή μετρικό χώρο είναι φραγμένες.

Ο χώρος $B(X, Y)$, εκτός από το ότι είναι διανυσματικός χώρος όπως αποδείξαμε παραπάνω, δέχεται και μία νόρμα, η οποία ορίζεται φυσιολογικά δεδομένου ότι είναι χώρος συναρτήσεων (αφού περιέχει τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές από τον X στον Y). Αν $T : X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής και $T \neq 0$, τότε $sup\{ \| T(x) \|_Y : x \in X \} = \infty$, δηλαδή το *supremum* των νορμών των εικόνων όλων των $x \in X$ μέσω της T ισούται με άπειρο. Αν όμως 'περιοριστούμε' στην μοναδιαία μπάλα του χώρου X, τότε το εν λόγω *supremum* θα είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή:

$sup\{\| T(x)\|_Y : \| x \| \leq 1\} < \infty$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\| T \| = sup\{\| T(x)\|_Y : \| x \| \leq 1\}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση $\| . \| : B(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ που μόλις ορίσαμε είναι νόρμα στον $B(X, Y)$.

Αν X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \longrightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, τότε:

(1)$\| T(x)\| \leq \| T \| \cdot \| x \|$, για κάθε $x \in X$.

(2) $\| T \| = inf\{M > 0 : \| T(x)\| \leq M \cdot \| x \|, \forall x \in X\}$

Πρόταση. *Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα, και $T : X \longrightarrow Y$, $S : Y \longrightarrow Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε, η σύνθεση $S \circ T : X \longrightarrow Z$ των T και S είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε, έχουμε ότι $\| (S \circ T)(x) \| = \| S(T(x)) \| \leq \| S \| \cdot \| T(x) \| \leq \| S \| \cdot \| T \| \cdot \| x \|$. Επομένως, ο $S \circ T$ είναι φραγμένος τελεστής με $\| S \circ T \|] \leq \| S \| \cdot \| T \|$ (επειδή δείξαμε ότι το $\| S \| \cdot \| T \|$ είναι ένα $M > 0$ τέτοιο ώστε $\| T(x) \| \leq M \cdot \| x \|, \forall x \in X$, και η νόρμα $\| S \circ T \|$ είναι εξ' ορισμού το infκαι $\{M > 0 : \| T(x) \| \leq M \cdot \| x \|, \forall x \in X\}$, άρα ισχύει $\| S \circ T \|] \leq \| S \| \cdot \| T \|$). Δηλαδή, αποδείξαμε ότι αν $T \in B(X, Y)$, $S \in B(Y, Z)$, τότε $S \circ T \in B(X, Z)$ και $\| S \circ T \|] \leq \| S \| \cdot \| T \|$. □

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα, και Y χώρος Banach. Τότε, ο χώρος $B(X, Y)$ με τη νόρμα που έχουμε ορίσει είναι χώρος Banach (ανεξάρτητα από το αν ο X είναι πλήρης, ή όχι).*

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα, Z ένας πυκνός υπόχωρος του X, και Y ένας χώρος Banach. Τότε, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Z \longrightarrow Y$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $\widetilde{T} : X \longrightarrow Y$. Επιπλέον, θα ισχύει ότι $\| \widetilde{T} \| = \| T \|$ (δηλαδή, η επέκταση 'διατηρεί' τη νόρμα).*

Η διάταξη στον $B(X, Y)$

Έστω X, Y διατεταγμένοι χώροι με νόρμα. Τότε, ο $\mathcal{L}(X, Y)$ είναι διατεταγμένος χώρος. Η διάταξη στον $B(X, Y)$ είναι αυτή που επάγεται από τον $\mathcal{L}(X, Y)$, δηλαδή εκείνη που προκύπτει αν θεωρήσουμε τον $B(X, Y)$ ως διατεταγμένο υπόχωρο του $\mathcal{L}(X, Y)$. Έτσι για κάθε $T, S \in B(X, Y)$ έχουμε:

$$T \geq S \Leftrightarrow T(x) \geq S(x), \forall x \in X_+$$

Τότε, $B_+(X, Y) = \{T \in B(X, Y) \mid T(x) \geq 0, \forall x \in X_+\}$ είναι ο θετικός κώνος του $B(X, Y)$.

Κάθε τελεστής $T \in B_+(X, Y)$ ονομάζεται θετικός. Αν $T \in B_+(X, Y)$ και $T(x) > 0$, για κάθε $x \in X_+$, με $x \neq 0$, ο T είναι αυστηρά θετικός.

3.4 Συζυγείς τελεστές

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τον συζυγή ενός γραμμικού τελεστή μεταξύ χώρων με νόρμα. Θεωρούμε γνωστή την έννοια του φραγμένου τελεστή, η οποία ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Καταρχάς, θα υπενθυμίσουμε τον ορισμό του δυϊκού ενός χώρου με νόρμα.

Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τότε, ορίζεται ο χώρος

$$X^* = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ γραμμική και συνεχής} \}$$

και ονομάζεται <u>δυϊκός του X</u>.

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, X^*, Y^* οι αντίστοιχοι δυϊκοί τους, $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός, φραγμένος τελεστής και ένα στοιχείο $y^* \in Y^*$.

Τότε, η συνάρτηση $(y^* \circ T)$ είναι γραμμική.

Πράγματι, έστω x, $y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε, έχουμε ότι, $(y^* \circ T)(\lambda x + \mu y) := y^*(T(\lambda x + \mu y)) = y^*(\lambda T(x) + \mu T(y)) = y^*(\lambda T(x)) + y^*(\mu T(y))$ $= \lambda y^*(T(x)) + \mu y^*(T(y)) :=$

$\lambda (y^* \circ T)(x) + \mu (y^* \circ T)(y)$. Επομένως, η συνάρτηση $(y^* \circ T)$ είναι γραμμική.

Η συνάρτηση $(y^* \circ T)$ είναι συνεχής.

Πράγματι, για κάθε $x \in X$, έχουμε:

$|(y^* \circ T)(x)| = |y^*(T(x))| \leq \| y^* \| \cdot \| T(x) \| \leq \| y^* \| \cdot \| T \| \cdot \| x \| \Rightarrow$

$\| y^* \circ T \| \leq \| y^* \| \cdot \| T \|$ (1), επειδή $\| y^* \circ T \| = sup\{ | (y^* \circ T)(x) | \mid \| x \|_X \leq 1 \}$.

Επομένως, αποδείξαμε ότι η απεικόνιση $(y^* \circ T)$ είναι γραμμική και συνεχής, άρα $(y^* \circ T) \in X^*$.

Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^*, \text{ με } T^*(y^*) = y^* \circ T$$

Δηλαδή, για $x \in X$, έχουμε ότι $(T^*(y^*))(x) = (y^* \circ T)(x) \in \mathbb{R}$.

Η T^* είναι γραμμική. Πράγματι, για y_1^*, $y_2^* \in Y^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$T^*(\lambda y_1^* + \mu y_2^*) := (\lambda y_1^* + \mu y_2^*)(T(x)) \underset{y_1^*, y_2^* \in Y^*}{=} \lambda y_1^*(T(x)) + \mu y_2^*(T(x))$ $:= \lambda T^*(y_1^*) + \mu T^*(y_2^*)$.

Επίσης, η T^* είναι φραγμένη. Πράγματι, από τη σχέση (1), έπεται ότι $\| T^* \| \leq \| T \|$.

Επομένως, η απεικόνιση T^* είναι γραμμικός, φραγμένος τελεστής, δηλαδή $T^* \in \mathcal{B}\,(Y^*, X^*)$ και ονομάζεται <u>συζυγής τελεστής του T</u>. .

Πολλές φορές, είναι χρήσιμο και διευκολύνει να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $< x, x^* >$ αντί του $x^*(x)$. Με αυτόν τον συμβολισμό, ο συζυγής ενός τελεστή $T : X \longrightarrow Y$ (όπου X, Y χώροι με νόρμα) ορίζεται ως εξής:

$$< x, T^*(y^*) > = < T(x), y^* > \quad \text{για } x \in X,\ y^* \in Y^*.$$

Στη συνέχεια, θα δούμε κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν τους συζυγείς των φραγμένων γραμμικών τελεστών μεταξύ χώρων με νόρμα.

Πρόταση. *Αν S και T είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές από έναν χώρο με νόρμα X σε έναν χώρο με νόρμα Y και $a \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, τότε*

$$(S + T)^* = S^* + T^* \text{ και } (aS)^* = a(S^*).$$

Πόρισμα. *Αν X και Y είναι χώροι με νόρμα, τότε η απεικόνιση $\varphi(T) = T^*$ που απεικονίζει τον τελεστή T στον συζυγή του T^* είναι ισομετρικός ισομορφισμός από τον $B(X, Y)$ στον $B(Y^*, X^*)$.*

Ο ισομετρικός ισομορφισμός που αναφέρεται στο παραπάνω πόρισμα δεν είναι απαραίτητα επί, ακόμα και στην περίπτωση που οι X και Y είναι χώροι *Banach*.

Πρόταση. *Υποθέτουμε ότι X, Y και Z είναι χώροι με νόρμα, και $S \in B(X, Y)$ και $T \in B(Y, Z)$. Τότε, ο συζυγής της σύνθεσης των δύο συναρτήσεων είναι*

$$(TS)^* = S^*T^*$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι $(TS)^* = S^*T^*$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $z^* \in Z^*$ ισχύει ότι

$$< x, (TS)^*(z^*) > = < x, S^*T^*z^* > .$$

Πράγματι, έστω $x \in X$ και $z^* \in Z^*$. Τότε, έχουμε ότι:
$< x, (TS)^*(z^*) > = < TSx, z^* > = < Sx, T^*z^* > = < x, S^*T^*z^* >$.
Επομένως, δείξαμε ότι $(TS)^* = S^*T^*$. □

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ χώροι με νόρμα, και $T : X \longrightarrow Y$ γραμμικός τελεστής, τότε ο T λέγεται <u>ισομορφισμός</u> αν είναι 1-1, επί, και οι T, T^{-1} είναι φραγμένοι και σε αυτήν την περίπτωση, οι χώροι X, Y λέγονται ισόμορφοι. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\| T(x) \|_Y = \| x \|_X$, για κάθε $x \in X$, τότε ο T λέγεται <u>ισομετρία</u> και σε αυτήν την περίπτωση, οι χώροι X, Y λέγονται ισομετρικοί.

Θεώρημα. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα, και $T : X \longrightarrow Y$ ισομορφισμός του X επί του Y. Τότε, η απεικόνιση $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$, που δίνεται από τον τύπο $T^*(y^*) = y^*T$, όπου με y^*T εννοούμε την σύνθεση των συναρτήσεων y^* και T, είναι ισομορφισμός από τον Y^* επί του X^* και $\| T^* \| = \| T \|$. Αν ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός (δηλαδή, ισομετρία), τότε το ίδιο ισχύει και για τον συζυγή T^*.*

Πρόταση. *Υποθέτουμε ότι ο T είναι ισομορφισμός από έναν χώρο με νόρμα X σε έναν χώρο με νόρμα Y. Τότε, ο συζυγής του αντίστροφου του T είναι:*

$$\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, ο τελεστής T^* είναι ισομορφισμός από τον Y^* στον X^*. Επομένως, επειδή η T^* είναι ένα-προς-ένα, έπεται ότι υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $(T^*)^{-1}$. Για να δείξουμε ότι $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $y \in Y$ και για κάθε $x^* \in X^*$, ισχύει ότι: $< y, (T^{-1})^*(x^*) > = < y, (T^*)^{-1}(x) >$. Πράγματι,

$< y, (T^{-1})^*(x^*) > = < T^{-1}y, x^* > = < T^{-1}y, T^*(T^*)^{-1}(x^*) > = < TT^{-1}y, (T^*)^{-1}(x^*) > = < y, (T^*)^{-1}(x^*) >$.

Επομένως, δείξαμε ότι $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. □

Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι X και Y είναι χώροι με νόρμα, και $T \in B(X, Y)$. Ο τελεστής T^* είναι 1-1, αν και μόνο αν, το $T(X)$ είναι πυκνό στον Y.*

Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι X είναι χώρος Banach, Y είναι χώρος με νόρμα, και $T \in B(X, Y)$. Τότε, ο T είναι είναι ισομορφισμός του X επί του Y, αν και μόνο αν, ο T^* είναι ισομορφισμός του Y^* επί του X^*.*

Το ίδιο ισχύει στην περίπτωση που η έννοια του 'ισομορφισμού' αντικατασταθεί από την έννοια της 'ισομετρίας'.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Έστω $T : X :\longrightarrow Y$ ισομορφισμός ή ισομετρία του X επί του Y. Τότε, από παραπάνω θεώρημα, έπεται ότι ο T^* είναι ισομορφισμός, ή ισομετρία αντίστοιχα, του Y^* επί του X^*.

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι ο T^* είναι ισομορφισμός του Y^* επί του X^*. Θα δείξουμε ότι ο T είναι είναι ισομορφισμός του X επί του Y.

Επειδή, ο T^* είναι ισομορφισμός του Y^* επί του X^*, έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα μέσω του T^* της μοναδιαίας μπάλας του χώρου X^* είναι φραγμένη, δηλαδή θα περιέχεται μέσα σε μία μπάλα με κέντρο το $\mathcal{O}_Y$. Δηλαδή, $(T^*)^{-1}(B_{X^*}) \subseteq c\,B_Y$ (1) , για κάποια θετική σταθερά c. Έστω $x \in X$. Τότε, $\| Tx \| = sup\{|< Tx, y^* >| \; y^* \in B_{Y^*}\} \underset{\text{από ορισμό του συζυγούς του } T}{=}$ $sup\{|< x, T^* y^* >| \; y^* \in B_{Y^*}\} \underset{(1)}{\geq} sup\{|< x, x^* >| \; x^* \in c^{-1} B_{X^*}\} =$

$c^{-1} sup\{|< x, x^* >| \; x^* \in B_{X^*}\} = c^{-1} \| x \|$. Από αυτό προκύπτει ότι ο T είναι ισομορφισμός. Επειδή ο T^* είναι ισομορφισμός, έπεται ότι ο T^* είναι 1-1, και από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι το $T(X)$ είναι πυκνό στον Y, δηλαδή $\overline{T(X)} = Y$. Επίσης, ο $T(X)$ είναι πλήρης (επειδή είναι η εικόνα του χώρου *Banach* X μέσω του τελεστή T) και άρα είναι κλειστό, άρα $\overline{T(X)} = T(X)$ και άρα $T(X) = Y$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο T^* είναι ισομετρία του Y^* επί του X^*. Τότε, η σταθερά c που δόθηκε στο προηγούμενο βήμα μπορεί να θεωρηθεί ίση με την μονάδα. Το παραπάνω, μαζί με το γεγονός ότι $\| T \| = \| T^* \|$, αποδεικνύουν ότι $\| x \| \leq \| Tx \| \leq \| x \|$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, δείξαμε ότι ο T είναι ισομετρία. $\square$

Αν X, Y διατεταγμένοι χώροι *Banach* και $T \in B_+(X, Y)$, τότε $T^* \in B_+(Y_+^*, X_+^*)$. Πραγματικά, για κάθε $f \in Y_+^*$, έχουμε $T(f) \in X_+^*$, γιατί για κάθε $x \in X_+$, έχουμε

$(T^*(f))(x) = f(T(x)) \geq 0$, γιατί $T(x) \in Y_+$ και $f \in Y_+^*$.

Κεφάλαιο 4

Επέκταση θετικών τελεστών

4.1 Επέκταση

4.1.1 Θεώρημα $Hahn - Banach$ σε χώρους $Riesz$

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς ορίζεται γενικά μία προσθετική απεικόνιση, με σκοπό να εξετάσουμε πότε μία τέτοια απεικόνιση μεταξύ δύο οξέων κώνων, μπορεί να επεκταθεί σε θετικό τελεστή.

Ορισμός. Μία απεικόνιση $T : W_1 \to W_2$, μεταξύ δύο κώνων, ονομάζεται προσθετική, αν για κάθε $x , y \in W_1$ έχουμε ότι $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Λήμμα. *Έστω L και M διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι, με τον M Αρχιμήδειο. Για κάθε προσθετική απεικόνιση $T : L^+ \to M^+$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) Η απεικόνιση T επεκτείνεται σε θετικό τελεστή από τον L στον M .

(2) Κάθε επέκταση της T σε όλον τον L προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο στον $L^+ - L^+$ (δηλαδή, στον γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τον L^+).

(3) Αν ο L^+ είναι παράγων, τότε ο T επεκτείνεται, κατά μοναδικό τρόπο, σε θετικό τελεστή από τον L στον M.

Το υπόλοιπο της ενότητας αφιερώνεται στην παρουσίαση βασικών αποτελεσμάτων, που αφορούν στις επεκτάσεις θετικών τελεστών. Το πρώτο αποτέλεσμα επέκτασης που θα δούμε είναι μία γενίκευση του κλασικού Θεωρήματος

Επέκτασης των $Hahn - Banach$, σε διατεταγμένους γραμμικούς χώρους. Το προαναφερθέν θεώρημα διαδραματίζει μείζων ρόλο στην Ανάλυση, και ειδικότερα στη θεωρία Διατεταγμένων Χώρων.

Πρωτού αναφερθούμε στο θεώρημα, θα ανακαλέσουμε μερικούς ορισμούς:

Ορισμός. Μία απεικόνιση $p : X \to M$, όπου X γραμμικός χώρος και M διατεταγμένος γραμμικός χώρος, ονομάζεται υπογραμμική ($sublinear$), αν είναι:

(α) υποαθροιστική ($subadditive$), δηλαδή για κάθε $x , y \in X$,

$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, και

(β) θετικά ομογενής ($positively\ homogeneous$), δηλαδή για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \geq 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Ορισμός. Μία απεικόνιση $f : C \to M$, όπου C κυρτό υποσύνολο γραμμικού χώρου, και M διατεταγμένος γραμμικός χώρος, ονομάζεται κυρτή ($convex$), για κάθε $x , y \in C$, και για κάθε $a \in [0 , 1]$, ισχύει ότι

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$$

Παρατήρηση. Κάθε υπογραμμική απεικόνιση είναι κυρτή.

Πράγματι, επειδή η f είναι υπογραμμική, έχουμε ότι

$$f(ax + (1 - a)y) \leq f(ax) + f((1 - a)y) \ (*)$$

και επειδή $a \in [0 , 1]$, και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η f είναι θετικά ομογενής, έχουμε ότι

$$f(ax) + f((1 - a)y) = af(x) + (1 - a)f(y) \ (**)$$

Από (*) και (**), έπεται ότι $f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$, δηλαδή f κυρτή.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το Θεώρημα Επέκτασης $Hahn - Banach$.

Θεώρημα. *Έστω X (πραγματικός) γραμμικός χώρος, M Dedekind πλήρης χώρος Riesz, και $p : X \to M$ κυρτή συνάρτηση - ειδικότερα, έστω p υπογραμμική.*

Αν Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $S : Y \to M$ τελεστής, τέτοιος ώστε $S(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$ (δηλαδή, ο S 'κυριαρχείται' από το υπογραμμικό p στον υπόχωρο Y), τότε υπάρχει τελεστής $T : X \to M$, τέτοιος ώστε:

(1) $T = S$ στον Y, δηλαδή ο T είναι γραμμική επέκταση του S σε όλον το χώρο X, και

(2) $T(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$ (δηλαδή, ο T 'κυριαρχείται' από το υπογραμμικό p σε όλον το χώρο X)

Υπενθυμίζουμε ότι ένας γραμμικός υπόχωρος G ενός χώρου *Riesz* E ονομάζεται <u>γραμμικός υποσύνδεσμος (*vector sublattice*)</u>, αν για κάθε $x, y \in G$ το διάνυσμα $x \vee y$ (το οποίο το θεωρούμε σε όλον τον E) ανήκει στον G.

<u>Εφαρμογή του Θεωρήματος Επέκτασης</u> <u>*Hahn – Banach*</u> **<u>σε χώρους</u>** <u>*Riesz*</u>

Θεώρημα. *Έστω $T : L \to M$ θετικός τελεστής μεταξύ δύο χώρων Riesz, με τον M να είναι Dedekind πλήρης. Έστω G Riesz υπόχωρος του L, και*

$S : G \to M$ τελεστής, τέτοιος ώστε $0 \leq S(x) \leq T(x)$, $\forall x \in G^+$. Τότε, ο S επεκτείνεται σε θετικό τελεστή από τον L στον M, τέτοιο ώστε

$0 \leq S(x) \leq T(x)$, $\forall x \in L^+$.

Υπενθύμιση: Ένας γραμμικός υπόχωρος G ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου L <u>κυριαρχεί (*majorizes*) στον L</u>, αν $\forall x \in L$, υπάρχει κάποιο $y \in G$, με $x \leq y$. Τότε, ο υπόχωρος G ονομάζεται <u>*majorizing*</u>.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι κάθε θετικός τελεστής του οποίου το πεδίο ορισμού είναι ένας γραμμικός υπόχωρος που κυριαρχεί στο χώρο, και του οποίου οι τιμές ανήκουν σε έναν *Dedekind* πλήρη χώρο *Riesz*, έχει πάντοτε θετική επέκταση. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στον *Kantorovich*, και διατυπώνεται στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω L και M διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι, με τον M Dedekind πλήρη χώρο Riesz. Αν G είναι majorizing γραμμικός υπόχωρος του L, και*

$T : G \to M$ θετικός τελεστής, τότε ο T έχει θετική γραμμική επέκταση σε όλον τον L.

4.1.2 Θετικά γραμμικά συναρτησιακά

Ορισμός. Ο γραμμικός τελεστής $T : L \to \mathbb{R}$ ονομάζεται γραμμικό συναρτησιακό στον L.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησιακών στον L ονομάζεται αλγεβρικός δυϊκός (*algebraic dual*) του L, και συμβολίζεται με L^*.

Δηλαδή,

$$L^* = \{ f : L \to \mathbb{R} \mid f \text{ γραμμική} \}$$

Ένα γραμμικό συναρτησιακό $f \in L^*$, όπου L διατεταγμένος γραμμικός χώρος, ονομάζεται:

- θετική (*positive*), συμβολικά $f \geq 0$, αν για κάθε $x \in L^+$, $f(x) \geq 0$.
- αυστηρά θετική (*strictly positive*), συμβολικά $f \gg 0$, αν για κάθε $x \in L^+$, $x \neq 0$, $f(x) > 0$.
- κανονική (*regular*), αν η f μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο θετικών συναρτησιακών.
- διατακτικά φραγμένη (*order bounded*), αν η f 'μεταφέρει' διατακτικά φραγμένα διαστήματα του L σε διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση:

(1) Κάθε αυστηρά θετικό συναρτησιακό είναι θετικό.

(2) Κάθε θετικό συναρτησιακό είναι κανονικό.

(3) Κάθε θετικό συναρτησιακό (και επομένως, κάθε κανονικό γραμμικό συναρτησιακό) είναι διατακτικά φραγμένο.

Τώρα θα εισάγουμε τις έννοιες του διατακτικού δυϊκού (*order dual*) και του κανονικού δυϊκού (*regular dual*) ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου.

Ορισμός. Για έναν δοθέντα διατεταγμένο γραμμικό χώρο L, οι διανυσματικοί χώροι:

$$L^\sim := \mathcal{L}_b(L, \mathbb{R}) \quad \text{και} \quad L^r := \mathcal{L}_r(L, \mathbb{R})$$

είναι ο διατακτικός δυϊκός (*order dual*) και ο κανονικός δυϊκός (*regular dual*) του L, αντίστοιχα.

Με άλλα λόγια, ο διατακτικός δυϊκός $L^{\sim}$ είναι ο γραμμικός χώρος που αποτελείται από όλα τα διατακτικά φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά στον L, και ο κανονικός δυϊκός L^r είναι ο γραμμικός χώρος που αποτελείται από όλα τα κανονικά γραμμικά συναρτησιακά στον L. Προφανώς, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις εγκλεισμού: $L^r \subseteq L^{\sim} \subseteq L^*$.

Λήμμα. *Αν L διατεταγμένος γραμμικός χώρος, τότε το σύνολο όλων των θετικών γραμμικών συναρτησιακών στον L είναι κώνος στον L^* (όπως, επίσης, και στους χώρους L^r και $L^{\sim}$).*

Όταν ο κώνος L^+ είναι παράγων, ο κώνος όλων των θετικών γραμμικών συναρτησιακών είναι οξύς κώνος.

Το Θεώρημα του Kantorovich, που είδαμε στην ενότητα 1.5.1, και αφορά στην επέκταση θετικών γραμμικών συναρτησιακών, για την περίπτωση που ο Dedekind πλήρης χώρος Riesz M είναι ο $\mathbb{R}$, ειδικεύεται στην ακόλουθη ειδική περίπτωση, που είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές.

Θεώρημα. *Αν X είναι majorizing γραμμικός υπόχωρος ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου L, και $f : X \to \mathbb{R}$ θετικό γραμμικό συναρτησιακό, τότε η f έχει θετική γραμμική επέκταση σε όλον τον L.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ θετικό γραμμικό συναρτησιακό, όπου X *majorizing* γραμμικός υπόχωρος του γραμμικού χώρου L. Έστω $x \in L$ και έστω $y \in G$ με $x \leq y$. Επειδή ο G είναι *majorizing* $\Rightarrow \exists\, u \in G$ με $u \leq x$. Επειδή $u \leq y$ και f θετικό $\Rightarrow f(u) \leq f(y)$, $\forall y \in G$ με $x \leq y$. Ιδιαιτέρως έπεται ότι $\forall x \in L$, το *infimum*: $inf\{f(y) : y \in G$ και $x \leq y\}$υπάρχει στον $\mathbb{R}$. Ορίζω την απεικόνιση $p : L \longrightarrow \mathbb{R}$ με: $p(x) = inf\{f(y) : y \in G$ και $x \leq y\}$. Παρατηρώ ότι $\forall x \in G$, $f(x) = p(x)$ και η p είναι υπογραμμική απεικόνιση. Από το θεώρημα $Hahn-Banach$, έπεται ότι η f έχει μία γραμμική επέκταση S σε όλον τον L, με $S(x) \leq p(x)$, $\forall x \in L$. Θα δείξουμε ότι ο S είναι θετικός. Έστω $z \in L_+$. Άρα $-z \leq 0$. Έχουμε $-S(z) = S(-z) \leq p(-z) \leq p(0) = 0$ $\Rightarrow S(z) \geq 0$. Άρα S θετική. Επομένως, αποδείξαμε ότι η f έχει θετική γραμμική επέκταση σε όλον τον L. □

Κεφάλαιο 5

Οι τύποι των $Riesz - Kantorovich$

5.1 Εισαγωγή

Ο τύπος των $Riesz - Kantorovich$ προσδιορίζει το $supremum$ δύο τελεστών, που ορίζονται μεταξύ δύο μερικά διατεταγμένων διανυσματικών χώρων. Θα μελετήσουμε κάποιες συνθήκες οι οποίες είναι επαρκείς για την ισχύ του, και οι οποίες μας δίνουν τη δυνατότητα να πάρουμε επεκτάσεις γνωστών αποτελεσμάτων που αφορούν ιδιότητες των συνδέσμων, αλλά και που απορρέουν από την Ιδιότητα Διάσπασης για τους χώρους των διατακτικά φραγμένων τελεστών μεταξύ των δύο διανυσματικών χώρων. Εκτός από την μεγάλη χρησιμότητα του Θεωρήματος των $Riesz - Kantorovich$ στην Ανάλυση, και πιο συγκεκριμένα στη θεωρία των Μερικά Διατεταγμένων Γραμμικών χώρων, το Θεώρημα αυτό έχει σημαντικές εφαρμογές στην Μαθηματική Οικονομία, και ειδικότερα στη Θεωρία Γενικής Ισορροπίας.

5.2 Το Θεώρημα των *Riesz – Kantorovich*

Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα των *Riesz – Kantorovich*, θα αναφερθούμε στην πολύ σημαντική ιδιότητα των διατεταγμένων γραμμικών χώρων, την Ιδιότητα Διάσπασης του *Riesz* (*Riesz Decomposition Property*).

Ορισμός. Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος <u>έχει την Ιδιότητα Διάσπασης του *Riesz* (*R.D.P.*)</u> αν ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

Για $x\,,\,u\,,\,v\,\in\,L_+$ και $x\,\leq\,u\,+\,v$, υπάρχουν $x_1\,,\,x_2\,\in\,L$, τέτοια ώστε $0\,\leq\,x_1\,\leq\,u$, $0\,\leq\,x_2\,\leq\,v$, και $x\,=\,x_1\,+\,x_2$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα των *Riesz – Kantorovich*.

Θεώρημα. *Εάν ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος, εφοδιασμένος με έναν οξύ κώνο που τον παράγει, έχει την Ιδιότητα Διάσπασης του Riesz (R.D.P.), τότε για κάθε Dedekind πλήρη χώρο Riesz M, ο διατεταγμένος διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}_b(L,M)$ είναι επίσης ένας Dedekind πλήρης χώρος Riesz, και επομένως σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $\mathcal{L}_r(L,M)=\mathcal{L}_b(L,M)$.*

Επιπλέον, για κάθε $S,T\in\mathcal{L}_b(L,M)$ και για κάθε $x\in L_+$ έχουμε ότι:

(1) $[S\vee T]\,(x)=sup\,\{\,S(y)+T(z):y,\,z\in L_+$ και $y+z=x\}$

(2) $[S\wedge T](x)=\inf\{\,S(y)\,+\,T(z)\,:\,y,z\,\in L_+$ και $y\,+\,z\,=\,x\}$

(3) $\mid S\mid(x)=\,sup\,\{S(y)\,:\,-x\,\leq\,y\,\leq\,x\,\}$

Επιπλέον, ισχύει $T_a\uparrow T$ στον $\mathcal{L}_b(L,M)$ αν και μόνο αν $T_a(x)\uparrow T(x)$ στον M, για κάθε $x\in L_+$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο M είναι ένας *Dedekind* πλήρης χώρος *Riesz*.

Επειδή ο L_+ παράγει τον χώρο L, το σύνολο $\mathcal{L}_+(L,M)$, των θετικών τελεστών από τον L στον M, είναι ένας οξύς κώνος

(δηλαδή, $\mathcal{L}_+(L,M)\,\cap\,(\,-\,\mathcal{L}_+(L,M)\,)\,=\,\{0\}$).

Θα το αποδείξουμε. Πράγματι, έστω $T\,\in\,\mathcal{L}_+(L,M)\,\cap\,(\,-\,\mathcal{L}_+(L,M)\,)$, δηλαδή έστω $\pm T\,\in\,\mathcal{L}_+(L,M)$.

Τότε, επειδή $T\,\in\,\mathcal{L}_+(L,M)$ έχουμε ότι $T\,(\,x\,)\,\in\,M_+\,,\,\forall\,x\,\in\,L_+$.

Επίσης, επειδή $-T\,\in\,\mathcal{L}_+(L,M)$, έχουμε ότι $-T\,(\,x\,)\,\in\,M_+\,,\,\forall\,x\,\in\,L_+$.

Έστω ένα $x\,\in\,L_+$ σταθερό. Τότε, $T\,(\,x\,)\,\in\,M_+$ και $-T\,(\,x\,)\,\in\,M_+$ (*).

Γνωρίζουμε ότι κάθε *vector lattice* έχει οξύ κώνο, για να ορίζονται τα $x\vee y$ και $x\,\wedge\,y$ στον χώρο κατά μοναδικό τρόπο. Επειδή ο M είναι χώρος *Riesz* (*vector lattice*) , έπεται ότι ο κώνος M_+ είναι οξύς.

Επομένως, από τις σχέσεις (*) έπεται ότι $T(x) = 0$ για το τυχαίο $x \in L_+$. Επομένως, δείξαμε ότι ο T περιορισμένος στον κώνο L_+ είναι ο μηδενικός τελεστής.

Έστω τώρα $x \in L$. Τότε, επειδή ο L_+ παράγει τον L, έχουμε ότι $x = x_1 - x_2$, με $x_1, x_2 \in L_+$.

Άρα, $T(x) = T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2) = 0 - 0 \Rightarrow T(x) = 0$ για το τυχαίο $x \in L$. Επομένως, $T = 0$.

Δηλαδή, δείξαμε ότι $\mathcal{L}_+(L, M) \cap (-\mathcal{L}_+(L, M)) = \{0\}$.

Επομένως ο χώρος $\mathcal{L}_b(L, M)$, των διατακτικά φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον L στον M, είναι ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος.

Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$S \vee T = (S - T)^+ + T$, $S \wedge T = -[(-S) \vee (-T)]$, $|S| = S \vee (-S)$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε την ισχύ του πρώτου τύπου

[(1) $[S \vee T](x) = sup\{S(y) + T(z) : y, z \in L_+$ και $y + z = x\}$], όταν T=0.

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $[S \vee 0](x) := S^+(x) = sup\{S(y) : 0 \leq y \leq x\}$, $\forall S \in \mathcal{L}_b(L, M)$ και $\forall x \in L_+$.

Έστω $S \in \mathcal{L}_b(L, M)$. (Φιξάρω έναν τελεστή του χώρου $\mathcal{L}_b(L, M)$)

Ορίζω την απεικόνιση $R : L_+ \to M_+$, $\forall x \in L_+$ ως εξής :

$$R(x) = sup\{S(y) : 0 \leq y \leq x\} = sup\, S[(0, x)]$$

Η απεικόνιση R μπορεί να ορισθεί, επειδή υπάρχει το *supremum* του συνόλου $\{S(y) : 0 \leq y \leq x\}$ αφού ο χώρος M είναι *Dedekind* πλήρης.

Επειδή, ο $S \in \mathcal{L}_b(L, M)$ έχουμε ότι ο S 'μεταφέρει' διατακτικά φραγμένα διαστήματα του L σε διατακτικά φραγμένα διαστήματα του M.

Επομένως, $R(x) \in M_+$, $\forall x \in L_+$.

Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση R που ορίσαμε είναι προσθετική.

Καταρχάς, θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x, y \in L$ισχύει ότι $[0, x] + [0, y] = [0, x + y]$.

Έστω $w \in [0, x] + [0, y]$. Τότε, υπάρχουν w_1, w_2 με $w = w_1 + w_2$, και $w_1 \in [0, x]$, $w_2 \in [0, y]$, δηλαδή $0 \leq w_1 \leq x$ και $0 \leq w_2 \leq y$, και άρα έπεται ότι

$0 \leq w \leq x + y$, δηλαδή $w \in [0, x + y]$. Άρα, δείξαμε ότι $[0, x] + [0, y] \subseteq [0, x + y]$. (*)

Έστω $w \in [0, x+y]$, δηλαδή $0 \leq w \leq x+y$. Τότε, επειδή ο L έχει την Ιδιότητα Διάσπασης του *Riesz*, έπεται ότι $w = w_1 + w_2$,
με $0 \leq w_1 \leq x$ και $0 \leq w_2 \leq y$ και άρα $w = w_1 + w_2 \in [0, x] + [0, y]$.

Επομένως δείξαμε ότι $[0, x+y] \subseteq [0, x] + [0, y]$. (**)
Από τις σχέσεις (*),(**), έπεται το ζητούμενο, ότι δηλαδή $[0, x] + [0, y] = [0, x+y]$.
Επειδή ο S είναι γραμμικός τελεστής, έχουμε ότι

$$S([0, x]) + S([0, y]) = S([0, x+y])$$

$$\Longleftrightarrow \{S(t) \mid 0 \leq t \leq x\} + \{S(w) \mid 0 \leq w \leq y\} = \{S(\omega) \mid 0 \leq \omega \leq x+y\}$$

Άρα, θεωρώντας γνωστό το ότι $sup(A+B) = sup(A) + sup(B)$,

$$sup\{S(t) \mid 0 \leq t \leq x\} + sup\{S(w) \mid 0 \leq w \leq y\} =$$

$$= sup\{S(\omega) \mid 0 \leq \omega \leq x+y\} \quad (1)$$

Όμως, από τον ορισμό της R, η σχέση (1) δίνει ότι $R(x) + R(y) = R(x+y)$.
Επομένως, αποδείξαμε ότι η απεικόνιση R (όπου $R : L_+ \to M_+$) είναι προσθετική.

Επίσης, η R είναι θετικά ομογενής (δηλαδή, $R(\lambda x) = \lambda R(x) \ \ \forall \lambda \in R_+$ και $x \in L_+$).
Θα το αποδείξουμε.
Πράγματι, για κάθε $x \in L_+$, έχουμε ότι $\lambda[0, x] = [0, \lambda x]$,
άρα $R(\lambda x) = sup\, S([0, x]) = sup\, S(\lambda[0, x]) = \lambda\, sup\, S([0, x]) = \lambda R(x)$.
Επομένως, η R επεκτείνεται στον L ως εξής:
Για $x \in L$, $R(x) = R(x_1 - x_2)$, όπου $x = x_1 - x_2$ με $x_1, x_2 \in L_+$.

Τονίζουμε ότι η R είναι καλά ορισμένη.
Πράγματι, έστω $x \in L$. Τότε, επειδή $L = L_+ - L_+$ το x γράφεται ως διαφορά στοιχείων του L_+ αλλά όχι κατά μοναδικό τρόπο.
Έστω λοιπόν, $x = x_1 - x_2$ και $x = x_1' - x_2'$.

Επομένως, $x_1 + x_2^{'} = x_1^{'} + x_2$ (*). Θα δείξουμε ότι οι εικόνες είναι ίδιες, ότι δηλαδή $R(x_1 - x_2) = R(x_1^{'} - x_2^{'}) \iff R(x_1) - R(x_2) = R(x_1^{'}) - R(x_2^{'}) \iff R(x_1) + R(x_2^{'}) = R(x_1^{'}) + R(x_2)$,

$\iff R(x_1 + x_2^{'}) = R(x_1^{'} + x_2)$

που ισχύει λόγω της (*).

Επίσης, η R είναι και γραμμική.

Για κάθε $x \in L_+$, έχουμε ότι $R(x) \geq S(x)$ και $R(x) \geq S(0) = 0$.

Άρα, $R \geq S$ και $R \geq 0$, και άρα, το R είναι άνω φράγμα του διισυνόλου $\{S, 0\}$.

Θα αποδείξουμε ότι η R είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{S, 0\}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οποιοδήποτε άλλο άνω φράγμα του $\{S, 0\}$ θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την R.

Υποθέτουμε ότι $\Phi \in \mathcal{L}_b(L, M)$, ώστε $\Phi \geq S$ και $\Phi \geq 0$.

Τότε, για κάθε $0 \leq y \leq x$ έχουμε ότι $S(y) \leq \Phi(y) \leq \Phi(x)$

Άρα, $\Phi(x) \geq S(y)$, $\forall 0 \leq y \leq x$. Επομένως, από ορισμό του $R(x)$ έχουμε ότι $\Phi(x) \geq R(x)$, $\forall x \in L_+$.

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι η R είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{S, 0\}$. Επομένως, $R = S \vee 0$ στον $\mathcal{L}_b(L, M)$.

Επομένως αποδείξαμε ότι ο $\mathcal{L}_b(L, M)$ είναι χώρος *Riesz*.

Θα αποδείξουμε ότι ο $\mathcal{L}_b(L, M)$ είναι *Dedekind* πλήρης. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αύξον, άνω φραγμένο δίκτυο του $\mathcal{L}_b(L, M)$ υπάρχει το *supremum* του.

Έστω $(T_a)_{a \in A} \subseteq \mathcal{L}_b(L, M)$ αύξον δίκτυο, και άνω φραγμένο, δηλαδή $T_a \leq T$, $\forall a$ για κάποιο $T \in \mathcal{L}_b(L, M)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει το *supremum* της $(T_a)_{a \in A}$.

Επειδή, $T_a \leq T$ έπεται ότι $T_a(x) \leq T(x)$, $\forall x \in L_+$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $S : L_+ \to M_+$, ως εξής: $S(x) = sup_{a \in A} T_a(x)$.

Επειδή το σύνολο $\{T_a(x), a \in A\}$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του M (αφού, $T_a(x) \leq T(x)$, $\forall x \in L_+$), και επειδή ο M είναι *Dedekind* πλήρης χώρος, έπεται ότι υπάρχει το *supremum* του, και επειδή ο κώνος M_+ είναι οξύς, έπεται ότι είναι μοναδικό.

Θα αποδείξουμε ότι η S είναι προσθετική.

Έστω $x\,,\,y\,\in\,L_+$. Τότε,

$$\{\,T_a\,(\,x\,)\mid a\,\in\,A\}\,+\,\{\,T_b\,(\,y\,)\mid b\,\in\,A\}\,\supseteq\,\{\,T_a\,(\,x\,+y\,)\mid a\,\in\,A\}$$

και επειδή εξ' ορισμού

$$S\,(\,x\,)\,=\,sup_{a\in A}\,T_a\,(\,x\,)\,,\,S\,(\,y\,)\,=\,sup_{b\in A}\,T_b\,(\,y\,)\,,\,S\,(\,x+y\,)\,=\,sup_{a\in A}\,T_a\,(\,x+y\,)\,,$$

έχουμε ότι:

$$sup_{a\,\in\,A}\,\{\,T_a\,(\,x\,+y\,)\,\}\,\leq\,sup_{a\,\in\,A}\,\{\,T_a\,(\,x\,)\,\}\,+\,sup_{b\,\in\,A}\,\{\,T_b\,(\,y\,)\,\}$$

$$\Rightarrow\;S\,(\,x\,+y\,)\,\leq\,S\,(\,x)\,+\,S\,(\,y\,)\;\;(*)$$

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι $S\,(\,x\,)\,+\,S\,(\,y\,)\,\leq\,S\,(\,x\,+y\,)$.

Αν θεωρήσω δύο στοιχεία των συνόλων $\{\,T_a\,(\,x\,)\,\}$ και $\{\,T_b\,(\,y\,)\,\}$, έστω $T_a\;(\,x\,)$ και $T_b\;(\,y\,)$, τότε, επειδή το δίκτυο είναι άνω κατευθυνόμενο, θα υπάρχει ένα στοιχείο T_c του δικτύου, τέτοιο ώστε $T_a\,,\,T_b\,\leq\,T_c$.

Επομένως, έχουμε ότι $T_a\;(\,x\,)\,+\,T_b\;(\,y\,)\,\leq\,T_c\;(\,x\,)\,+\,T_c\;(\,y\,)$.

Όμως, το $T_c\;(\,x\,)\,+\,T_c\;(\,y\,)\,\in\,\{\,T_a\,(\,x\,+y\,)\mid a\,\in\,A\}$ και άρα

$T_c\;(\,x\,)\,+\,T_c\;(\,y\,)\,\leq\,S\;(\,x\,+\,y\,)$.

Επομένως, δείξαμε ότι $T_a\;(\,x\,)\,+\,T_b\;(\,y\,)\,\leq\,S\;(\,x\,+\,y\,)\,,\,\forall T_a\;(\,x\,)\,\in\,\{\,T_a\,(\,x\,)\,\}\,,\,\forall T_b\;(\,y\,)\,\in\,\{\,T_b\,(\,y\,)\,\}$.

Άρα,

$$sup_{a\,\in\,A}\,\{\,T_a\,(\,x\,)\,\}\,+\,sup_{b\,\in\,A}\,\{\,T_b\,(\,y\,)\,\}\,\leq\,S\;(\,x\,+\,y\,)\;\Rightarrow$$

$$S\,(\,x\,)\,+\,S\,(\,y\,)\,\leq\,S\,(\,x\,+y\,)\;(**)$$

Από (*) και (**), έπεται ότι η S είναι προσθετική.

Επειδή ο M είναι Αρχιμήδειος (επειδή, όπως γνωρίζουμε κάθε *Dedekind* πλήρης χώρος *Riesz* είναι Αρχιμήδειος) , και η S είναι προσθετική, έπεται ότι έχει μία μοναδική θετική γραμμική επέκταση σε όλον τον L. Επομένως, υπάρχει το *supremum* για την $(T_a)_{a\,\in\,A}$, δηλαδή ο $\mathcal{L}_b(L,M)$ είναι *Dedekind* πλήρης .

Επομένως, αποδείξαμε ότι ο $\mathcal{L}_b(L,M)$ είναι ένας *Dedekind* πλήρης χώρος *Riesz*. □

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι ένας θετικός τελεστής, του οποίου το πεδίο ορισμού είναι ένας *Riesz* υπόχωρος, επεκτείνεται σε έναν θετικό τελεστή με πεδίο ορισμού όλον τον χώρο *Riesz*, αν και μόνο αν, κυριαρχείται από μία μονότονη υπογραμμική απεικόνιση.

Το γεγονός ότι οι θετικοί τελεστές επεκτείνονται σε όλον το χώρο *Riesz* (αν βέβαια πληρούνται οι προϋποθέσεις) μας δείχνει μία περίπτωση όπου μπορεί να φανεί η χρησιμότητα του Θεωρήματος των *Riesz – Kantorovich*.

Θεώρημα. *Έστω L και M χώροι Riesz, με τον M να είναι Dedekind πλήρης. Αν G είναι ένας Riesz υπόχωρος του L, και $T : G \to M$ είναι ένας θετικός τελεστής, τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) Ο T επεκτείνεται σε θετικό τελεστή από τον L στον M.

(2) Ο T επεκτείνεται σε διατακτικά φραγμένο (order bounded) τελεστή από τον L στον M.

(3) Υπάρχει μονότονη, υπογραμμική απεικόνιση p: $L \to M$, που ικανοποιεί το γεγονός ότι $T(x) \leq p(x), \forall x \in G$. (δηλαδή, ο T κυριαρχείται από την p στον Riesz υπόχωρο G).

Απόδειξη. <u>(1) ⇒ (2)</u>

Γνωρίζουμε ότι ο T επεκτείνεται σε έναν θετικό τελεστή από τον L στον M. Όμως, ένας θετικός τελεστής είναι διατακτικά φραγμένος (*order bounded*). Επομένως, ο T επεκτείνεται σε έναν διατακτικά φραγμένο (*order bounded*) τελεστή από τον L στον M.

<u>(2) ⇒ (3)</u>

Γνωρίζουμε ότι ο T επεκτείνεται σε έναν διατακτικά φραγμένο (*order bounded*) τελεστή από τον L στον M. Έστω, λοιπόν, η εν λόγω επέκταση, $S \in \mathcal{L}_b(L, M)$, που ικανοποιεί το γεγονός ότι $S(x) = T(x), \forall x \in G$. Τότε, η απεικόνιση $p : L \to M$, που ορίζεται ως εξής: $p(x) := |S|(x^+)$ είναι μονότονη, υπογραμμική και ικανοποιεί το ότι:

$T(x) \leq T(x^+) \leq |S|(x^+) = p(x), \forall x \in G$ (δηλαδή, η T κυριαρχείται από την p στον υπόχωρο G).

Επομένως, αποδείξαμε ότι υπάρχει μία μονότονη, υπογραμμική απεικόνιση

$p : L \to$ M (που είναι η $p(x) = |S|(x^+), x \in L$), που ικανοποιεί το ότι $\mathrm{T(x)} \leq \mathrm{p(x)}, \forall \in \mathrm{G}$.

<u>(3) ⇒ (1)</u>

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μία μονότονη, υπογραμμική απεικόνιση $p : L \to M$, η οποία ικανοποιεί το γεγονός ότι $T(x) \leq p(x), \forall \in G$ (δηλαδή, η T κυ-

ριαρχείται από την p στον υπόχωρο G). Τότε, ο τύπος $q(x) := p(x^+)$, $x \in L$ ορίζει μία υπογραμμική απεικόνιση από τον L στον M (αφού ορίζεται με τη βοήθεια της υπογραμμικής απεικόνισης p).

Θα δείξουμε ότι ο τελεστής T κυριαρχείται από την υπογραμμική απεικόνιση q στον G.

Πράγματι, έστω ένα $x \in G$. Τότε, $T(x) \leq T(x^+) \leq p(x^+) = q(x)$.

Επομένως, από το Θεώρημα Επέκτασης $Hahn-Banach$, υπάρχει μία γραμμική επέκταση $R : L \to M$ (δηλαδή, $R \in \mathcal{L}(L, M)$) του τελεστή T,

η οποία κυριαρχείται από το υπογραμμικό q σε όλον το χώρο L

(δηλαδή, $R(x) \leq q(x)$, $\forall x \in L$)

Θα δείξουμε ότι η επέκταση R του T είναι θετική (δηλαδή, $\forall x \in L_+$, $R(x) \geq 0$)

Πράγματι, έστω ένα $x \in L_+$. Τότε,

$$-R(x) = R(-x) \leq q(-x) = p((-x)^+) = p(0) = 0 \quad \Rightarrow R(x) \geq 0$$

Επομένως, δείξαμε ότι η R είναι μία θετική, γραμμική επέκταση του T σε όλον τον L. □

Στην ειδική περίπτωση που ο $Dedekind$ πλήρης χώρος $Riesz$ M είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ (δηλαδή, M=$\mathbb{R}$), το Θεώρημα των $Riesz-Kantorovich$ ειδικεύεται στην ακόλουθη σημαντική περίπτωση που χρησιμοποιείται ευρέως στις εφαρμογές:

Θεώρημα. *Εάν ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος L με έναν κώνο που τον παράγει έχει την Ιδιότητα Διάσπασης του Riesz (R.D.P.), τότε ο διατακτικός δυϊκός του (order dual) $L^\sim$ είναι ένας Dedekind πλήρης χώρος Riesz και συμπίπτει με τον regular dual του L^r, δηλαδή $L^\sim = L^r$.*

Επιπλέον, για κάθε $f, g \in L^\sim$ και για κάθε $x \in L_+$, έχουμε ότι:

(1) $[f \vee g](x) = sup\{f(y) + g(z) : y, z \in L_+$ και $y + z = x\}$

(2) $[f \wedge g](x) = inf\{f(y) + g(z) : y, z \in L_+$ και $y + z = x\}$

(3) $|f|(x) = sup\{f(y) : -x \leq y \leq x\}$

Οι τύποι στο Θεώρημα των $Riesz - Kantorovich$ που περιγράφουν τις πράξεις μεταξύ των συνδέσμων στον χώρο $\mathcal{L}_b(L, M)$ (δηλαδή, υπολογίζουν το $supremum$, το $infimum$ και την απόλυτη τιμή για στοιχεία του χώρου

$\mathcal{L}_b(L, M)$, δηλαδή για διατακτικά φραγμένους τελεστές από τον L στον M) είναι γνωστοί ως 'οι τύποι των $Riesz - Kantorovich$' .

Ειδικότερα, ο τύπος: $[S \vee T]\,(x) = sup\,\{\,S(y) + T(z) : y,\, z \in L_+$ και $y + z = x\}$

συχνά αναφέρεται ως 'ο τύπος των $Riesz - Kantorovich$' και διαδραμματίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία.

Η γενική του δατύπωση είναι η εξής:

Αν $S_1\,,\, S_2\,,\, ...\,,\, S_m \in \mathcal{L}_b(L, M)$, τότε το $supremum$ τους για κάθε $x \in L_+$, δίνεται από τον τύπο των $Riesz - Kantorovich$:

$$[\bigvee_{i=1}^{m} (\,S_i\,)\,]\,(\,x\,) = \; sup\,\{\sum_{i=1}^{m} S_i\,(\,x_i\,) \;:\; x_i \in L_+ \;\text{ για κάθε } i \;\text{ και } \sum_{i=1}^{m} (\,x_i\,) = x\}$$

Εν συνεχεία, θα μελετήσουμε τις πράξεις μεταξύ συνδέσμων του χώρου $\mathcal{L}_b(L, M)$, για την περίπτωση όπου έχουμε κατευθυνόμενα σύνολα ($directed\ sets$). Την περιγραφή των πράξεων δίνει το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο και αποδεικνύουμε.

Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι ο L είναι ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με έναν οξύ κώνο που τον παράγει και την Ιδιότητα Διάσπασης του Riesz (R.D.P.), και έστω M ένας Dedekind πλήρης χώρος Riesz. Τότε, για κάθε $S\,,\, T \in \mathcal{L}_b(L, M)$ και για κάθε $x \in L_+$ έχουμε ότι:*

$$(1)\;\; \left\{\sum_{i=1}^{n} S\,(\,x_i\,) \vee T\,(\,x_i\,) \;:\; x_i \in L_+ \;\; \textit{και} \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; x\right\} \uparrow [\,S \vee T\,]\,(\,x\,)$$

$$(2)\;\; \left\{\sum_{i=1}^{n} S\,(\,x_i\,) \wedge T\,(\,x_i\,) \;:\; x_i \in L_+ \;\; \textit{και} \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; x\right\} \downarrow [\,S \wedge T\,]\,(\,x\,)$$

$$(3)\;\; \left\{\sum_{i=1}^{n} |\,T\,(\,x_i\,)\,| : \; x_i \in L_+ \;\; \textit{και} \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; x\right\} \uparrow |\,T\,|\;\,(\,x\,)$$

Απόδειξη. **(1)** Ονομάζουμε $D := \{\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) : x_i \in L_+$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i = x\}$.

Επειδή, $x_i \in L_+$, $\forall i = 1, ..., n$, με $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$, και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $S(x_i), T(x_i) \leq (S \vee T)(x_i)$, έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (S \vee T)(x_i) \vee (S \vee T)(x_i) = [S \vee T](x)$$

(Απόδειξη της τελευταίας ισότητας:
Καταρχάς, $(S \vee T)(x_i) \vee (S \vee T)(x_i) = (S \vee T)(x_i)$ και επομένως,
$\sum_{i=1}^{n} (S \vee T)(x_i) \vee (S \vee T)(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (S \vee T)(x_i) =$
$(S \vee T)(x_1) + (S \vee T)(x_2) + ... + (S \vee T)(x_n) =$
$(S \vee T)(x_1 + x_2 + ... + x_n) = (S \vee T)(x)$)

Δηλαδή, αποδειξαμε ότι $\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) \leq (S \vee T)(x)$ για κάθε $n-$ άδα στοιχείων x_i με $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$. Επομένως, $D \leq (S \vee T)(x)$, δηλαδή το $(S \vee T)(x)$ είναι άνω φράγμα για το D.

Θα δείξουμε ότι το $(S \vee T)(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ($supremum$)του D.

Πράγματι, έστω u άνω φράγμα του D, δηλαδή $D \leq u$.

Τότε, για κάθε $y, z \in L_+$ με $y + z = x$, έχουμε ότι:

$S(y) + T(z) \leq S(y) \vee T(z) + S(z) + T(z) \leq u$

Εφόσον δειξαμε ότι $S(y) \vee T(z) + S(z) + T(z) \leq u$ με $y, z \in L_+$ και $y + z = x$, έχουμε ότι:

$sup\{S(y) + T(z) : y, z \in L_+$,και $y + z = x\} := S \vee T(x) \leq u$

Δηλαδή, καταλήξαμε στο ότι $S \vee T(x) \leq u$, όπου τυχαίο άνω φράγμα του D. Επομένως, $supD = S \vee T(x)$ και ο Ισχυρισμός αποδείχτηκε.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του Θεωρήματος, αρκεί να δείξουμε ότι το D είναι άνω κατευθυνόμενο ($directed\ upward$).

Έστω $(x_i)_{i=1}^{n}$, $(y_i)_{j=1}^{m} \subseteq L_+$, τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j = x$. Από γνωστό Θεώρημα, υπάρχει μία πεπερασμένη συλλογή $\{z_{ij} : i = 1, ..., n ; j = 1, ..., m\}$ θετικών διανυσμάτων, τέτοιων ώστε:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}, \text{ για κάθε } i = 1, ..., n \text{και}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}, \text{ για κάθε } j = 1, ..., m$$

Επίσης, να παρατηρήσουμε ότι $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m} z_{ij} = x$.
Λαμβάνοντας υπόψιν την ταυτότητα μεταξύ συνδέσμων:
$x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[S(x_i) + T(x_i) + |S(x_i) - T(x_i)|]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} S(z_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} T(z_{ij}) + |\sum_{j=1}^{m}\{S(z_{ij}) - T(z_{ij})\}|\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\{S(z_{ij}) + T(z_{ij}) + |S(z_{ij}) - T(z_{ij})|\}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S(z_{ij}) \vee T(z_{ij}).$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S(z_{ij}) \vee T(z_{ij}) \quad (*)$$

Με τελείως παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύουμε επίσης ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} S(y_i) \vee T(y_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S(z_{ij}) \vee T(z_{ij}) \quad (**)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (*) και (**), αποδείξαμε για τα δύο τυχαία στοιχεία $\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i)$ και $\sum_{i=1}^{n} S(y_i) \vee T(y_i)$ του χώρου D, ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα τους που ανήκει στο D, και είναι το $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S(z_{ij}) \vee T(z_{ij})$ (Πράγματι, το $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S(z_{ij}) \vee T(z_{ij})$ ανήκει στο D, αφού $z_{ij} \in L_+$ και $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m} z_{ij} = x$). Άρα, αποδείξαμε ότι το σύνολο D είναι άνω κατευθυνόμενο (*directed upward*).

Επομένως, αποδείξαμε ότι $supD = S \vee T(x)$ και ότι το D είναι άνω κατευθυνόμενο (*directed upward*), και άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο.

(2) Το γεγονός ότι $\{\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \wedge T(x_i) : x_i \in L_+$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i = x\} \downarrow [S \wedge T](x)$ έπεται από το (1), σε συνδυασμό με την ταυτότητα

$T \wedge S = -[(-T) \vee (-S)]$.

(3) Το γεγονός ότι $\{\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)| : x_i \in L_+$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i = x\} \uparrow |T|(x)$ έπεται από το (1) και την ταυτότητα $|T| = T \vee (-T)$ □

Παρατήρηση. Όσον αφορά στην Ιδιότητα Διάσπασης του *Riesz* και τον τύπο των *Riesz – Kantorovich*, υπάρχουν ακόμα αρκετά ανοικτά προβλήματα.

Κλείνοντας το κεφάλαιο, θα παραθέσουμε μερικά από αυτά:

- Το αντίστροφο του Θεωρήματος-3 (*Riesz – Kantorovich*, όταν M=$\mathbb{R}$) είναι αληθές; Δηλαδή, για έναν μερικά διατεταγμένο διανυσματικό χώρο του οποίου ο οξύς κώνος παράγει τον χώρο (είναι *generating*) και του οποίου ο διατακτικός δυϊκός (*order dual*) είναι χώρος *Riesz*, έχει την Ιδιότητα Διάσπασης του *Riesz*;

- Ας υποθέσουμε ότι ο L είναι ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με έναν οξύ κώνο που τον παράγει, και ότι δύο γραμμικες συναρτήσεις $f, g \in L^{\sim}$ έχουν *supremum* στον $L^{\sim}$. Τότε, το *supremum* των f, g δίνεται από τον τύπο των *Riesz–Kantorovich*; Δηλαδή, το $f \vee g$ δίνεται από τον τύπο: $[f \vee g](x) = sup\{f(y) + g(x-y) : 0 \leq y \leq x\}$, για κάθε $x \in L_+$;

Υπάρχουν αρκετά *papers* που ασχολούνται με αυτά τα ανοικτά προβλήματα, καθώς η Θεωρία των Διατεταγμένων χώρων, των γραμμικών συνδέσμων, των χώρων *Riesz*, και οι τύποι των *Riesz – Kantorovich* είναι το αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας.

Βιβλιογραφία

[1] Ι. Α. Πολυράκης, Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, Αθήνα 2010

[2] Σωτήρης Καρανάσιος, Θεωρία Τελεστών & Εφαρμογές (Πρώτη έκδοση), Αθήνα 2009

[3] Σπύρος Αργυρός, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης (Δεύτερη έκδοση), Ιανουάριος 2003

[4] Σπύρος Αργυρός, Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης (Δεύτερη έκδοση), Μάϊος 2004

[5] *C. D. Aliprantis and R. Tourky*, *Cones and Duality*, *Graduate Studies in Mathematics*, *vol*84

[6] *C. D. Aliprantis and Owen Burkinshaw*, *Positive Operators*, *Springer*

[7] *Graham Jameson*, *Lecture Notes in Mathematics*, *Ordered Linear Spaces*, *New York* 1970

[8] *The Lyx Tutorial*, *by the Lyx Documentation Team*, *February* 2013