ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Κατανομή Πόρων σε Ad-Hoc Ασύρματα Δίκτυα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μιχαήλ Μυλωνάκης

Επιβλέπων : Παναγιώτης Κωττής
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Απρίλιος 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Κατανομή Πόρων σε Ad-Hoc Ασύρματα Δίκτυα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μιχαήλ Μυλωνάκης

Επιβλέπων : Παναγιώτης Κωττής
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23η Απριλίου 2014

....	....	....
Παναγιώτης Κωττής	Χρήστος Καψάλης	Γεώργιος Φικιώρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Απρίλιος 2014

....

Μυλωνάκης Μιχαήλ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η διατύπωση αποδοτικού αλγορίθμου κατανομής πόρων σε ad-hoc ασύρματα δίκτυα, όπου εμφανίζονται διαδοχικά νέοι κόμβοι. Συγκεκριμένα, θεωρείται χώρος σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, στον οποίο εμφανίζονται κόμβοι ακολουθώντας χωροχρονική κατανομή Poisson δεδομένης έντασης. Σε πρώτη φάση, κόμβοι με αυξημένη υπολογιστική ικανότητα τοποθετούνται στο χώρο με τέτοιο τρόπο ώστε το πλήθος τους να θεωρείται το ελάχιστο δυνατό, η εμβέλειά τους να καλύπτει όλο το χώρο και το δίκτυο να καθίσταται συνεκτικό. Στη συνέχεια, οι συνολικοί διαθέσιμοι πόροι κατανέμονται καταλλήλως στους κόμβους αυτούς προκειμένου αυτοί, με τη σειρά τους, να τους κατανείμουν στους νεοεισερχόμενους κόμβους. Ακολουθεί το κυρίως μέρος της διαδικασίας, κατά το οποίο κόμβοι εμφανίζονται στο χώρο σύμφωνα με τη κατανομή Poisson. Οι κόμβοι αυξημένης υπολογιστικής ικανότητας αποφασίζουν, με κατάλληλο τρόπο, για το ποιοι κόμβοι θα παραχωρήσουν πόρους σε κάθε νεοεισερχόμενο κόμβο σε κάθε βήμα. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αποσκοπεί στο εξής: Να κατανέμονται πόροι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στις περιοχές όπου αναμένεται να αποδοθούν στο μέλλον.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στα ad-hoc δίκτυα εστιάζοντας στα πρωτόκολλα επικοινωνίας που χρησιμοποιούνται και στον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η δρομολόγηση σε τέτοιου είδους δίκτυα. Επίσης, γίνεται εκτενής αναφορά στις απαιτήσεις ασφαλείας που πρέπει να πληρούνται αλλά και στην δυσκολία εφαρμογής μηχανισμών ασφαλείας στη συγκεκριμένη κατηγορία δικτύων. Τέλος, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες εφαρμογές των ad-hoc δικτύων. Στο Κεφάλαιο 2, εισάγεται η χωρική σημειακή διαδικασία Poisson ως άμεση γενίκευση της χρονικής σημειακής διαδικασίας Poisson. Στο Κεφάλαιο 3, γίνεται συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας μαθηματικής βελτιστοποίησης. Στο Κεφάλαιο 4, διατυπώνεται, αρχικά, το πρόβλημα που πρόκειται να επιλυθεί και, στη συνέχεια, καταστρώνεται ο προτεινόμενος αλγόριθμος. Τέλος, το Κεφάλαιο 5 περιγράφει τα βήματα της προτεινόμενης προσομοίωσης καθώς και τα ερωτήματα που θα διερευνηθούν.

Λέξεις κλειδιά

Ad-hoc δίκτυα, Χωρική σημειακή διαδικασία Poisson, Μαθηματική Βελτιστοποίηση, Κατανομή πόρων.

Abstract

This diploma thesis deals with efficient resource allocation in ad-hoc wireless networks, in which new nodes appear successively. A finite rectangular space is assumed in which nodes appear according to a spatio-temporal Poisson distribution of known intensity. Firstly, nodes with strong computational power are placed in the space in such a way that their number will be approximately minimum, whole space will be under coverage of nodes and also the network will be connected. Afterwards, total available resources are distributed in nodes appropriately so that they allocate them later in new nodes which will appear in the space. In the main part of the process, new nodes appear in the space according to the spatio-temporal Poisson distribution. When a new node appears in the space, the nodes with strong computational power decide, with appropriate way, which nodes will allocate resources to it. Aim of the algorithm is the following: In every step of the procedure, resources will be allocated to locations of the space where demand for them will be existed.

The first chapter provides an introduction to ad-hoc networks, focusing on communication protocols and on the rooting strategies which are used in this kind of networks. Security demands and limitations in these networks are elaborated, too. Finally, the first chapter presents the major applications of ad-hoc networks. The second chapter introduces the spatial Poisson point process as a generalization of the temporal Poisson point process. The third chapter provides an overview of the theory of mathematical optimization. In the fourth chapter, the problem under consideration is formulated and afterwards the proposed algorithm is presented. Finally, the fifth chapter describes the steps of the proposed simulation and the topics which will be investigated.

Key words

Ad-hoc networks, Spatial point Poisson process, Mathematical optimization, Resource allocation.

Ευχαριστήριο σημείωμα

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή Ε.Μ.Π και επιβλέποντα της εργασίας κ. Παναγιώτη Κωττή για την ανάθεση της διπλωματικής εργασίας καθώς και για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της.

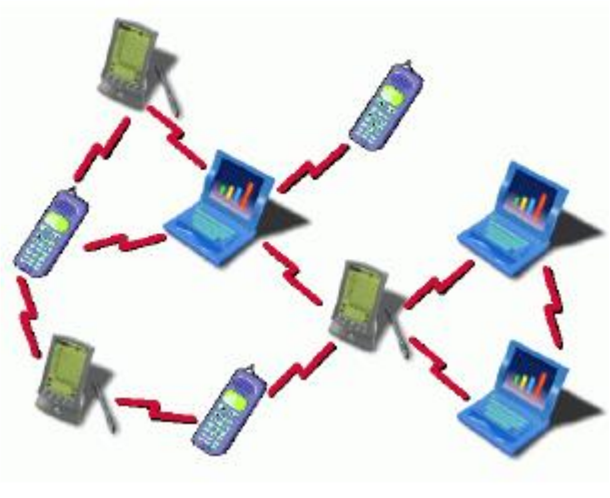
Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη συνεχή υποστήριξη κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ AD-HOC ΔΙΚΤΥΑ

1.1 Εισαγωγή

Ένα ad-hoc δίκτυο αποτελείται από ένα σύνολο αυτόνομων κόμβων για το οποίο δεν υπάρχει προκαθορισμένη δομή ώστε να διατηρείται το δίκτυο σε συνοχή. Οι κόμβοι επικοινωνούν μεταξύ τους με ασύρματο τρόπο και συνήθως θεωρούνται ομότιμες οντότητες από το δίκτυο. Σε ένα ad-hoc δίκτυο, οι κόμβοι προσφέρονται να προωθήσουν δεδομένα σε άλλους κόμβους, οπότε η απόφαση για το ποιοί κόμβοι θα δρομολογήσουν δεδομένα γίνεται δυναμικά ανάλογα με την τοπολογία του δικτύου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα δομημένα δίκτυα στα οποία δρομολογητές αναλαμβάνουν το θέμα της δρομολόγησης.
Η αποκεντρωμένη φύση των ad-hoc δικτύων τα κάνει κατάλληλα για ποικίλες εφαρμογές. Οι ελάχιστες απαιτήσεις στη διαμόρφωση ενός δικτύου και η ταχεία και εύκολη επεκτασιμότητα των ad-hoc συστημάτων τα καθιστούν τα καταλληλότερα σε έκτακτες περιπτώσεις, όπως φυσικές καταστροφές ή στρατιωτικές συγκρούσεις. Τα γνωστότερα ad-hoc δίκτυα είναι τα mobile ad-hoc networks, γνωστά και ως MANET.
Τα δίκτυα ad-hoc διαμορφώνονται δυναμικά μεταξύ μιας ομάδας ασυρμάτων κόμβων και δεν απαιτούν καμμία υπάρχουσα υποδομή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1 .



Σχήμα 1.1: Κόμβοι και συνδέσεις σε ένα ad-hoc δίκτυο

1.2 Χαρακτηριστικά ad-hoc δικτύων

Βασικά χαρακτηριστικά των ad-hoc δικτύων είναι τα ακόλουθα:

1. Κόμβοι μπορούν να εισέρχονται ή και να εξέρχονται από το δίκτυο χωρίς περιορισμούς κατά εντελώς τυχαίο τρόπο.

2. Ένα ad-hoc δίκτυο μπορεί να είναι ετερογενές δηλαδή να αποτελείται από διαφορετικό τύπο κόμβων. Μπορεί να αποτελείται, για παράδειγμα, από PDAs, κινητά τηλέφωνα, φορητούς υπολογιστές κ.τ.λ. που πρέπει να έχουν τη δυνατότητα επικοινωνία μεταξύ τους.

3. Κάθε κόμβος μπορεί να διαφέρει σε πολλά χαρακτηριστικά από τους υπόλοιπους κόμβους όπως π.χ. στην υπολογιστική ισχύ, την εμβέλεια, τη διάρκεια ζωής των μπαταριών.

4. Η κατανομή των κόμβων στο χώρο καθορίζει και την τοπολογία που θα χρησιμοποιηθεί. Όταν, για παράδειγμα, όλες οι συσκευές βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη, είναι εφικτή μια σύνδεση απλού βήματος από κόμβο σε κόμβο. Αντίθετα, όταν το δίκτυο εκτείνεται σε μεγάλη γεωγραφική έκταση, απαιτείται διασύνδεση πολλαπλών βημάτων μεταξύ των κόμβων.

5. Τα διάφορα ad-hoc δίκτυα μπορεί να διαφέρουν ως προς διάφορα χαρακτηριστικά τους, όπως οι χρησιμοποιούμενοι ρυθμοί μετάδοσης πληροφορίας, το αν υπάρχει η δυνατότητα broadcast ή multicast, το αν συνυπάρχουν ή όχι με άλλα δίκτυα σταθερής υποδομής ή τέλος, το αν υποστηρίζουν κινητικότητα των χρηστών και με ποιες ταχύτητες.

6. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των ad-hoc δικτύων είναι η εμβέλεια των κόμβων του. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη είναι η εμβέλεια των κόμβων, τόσο μικρότερο είναι το πλήθος μεταδόσεων που απαιτείται για την αποστολή πακέτων μεταξύ κόμβων. Δηλαδή, όσο μικρότερη είναι η εμβέλεια των κόμβων τόσο περισσότερες μεταδόσεις θα μπορούν να πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Επιπλέον, η εμβέλεια έχει καθοριστικό ρόλο και στην κατανάλωση ενέργειας κάθε κόμβου, που αποτελεί πολύ σημαντική παράμετρο στα περισσότερα είδη ad-hoc δικτύων και καθοριστική στα MANET. Έτσι, η εμβέλεια πρέπει να επιλέγεται όσο το δυνατό μικρότερη, φροντίζοντας όμως να είναι επαρκής ώστε το δίκτυο να είναι συνεκτικό. Η έννοια της συνεκτικότητας αναφέρεται στη δυνατότητα επικοινωνίας οποιουδήποτε κόμβου του δικτύου με οποιοδήποτε άλλο κόμβο μέσω συνδέσεων ενός ή πολλαπλών βημάτων.

1.3 Πρωτόκολλα επικοινωνίας

Στα ad-hoc δίκτυα η τεχνολογία που χρησιμοποιείται για την επικοινωνία μεταξύ κόμβων μπορεί να είναι οποιαδήποτε από το ευρύ φάσμα τεχνολογιών ασυρμάτων επικοινωνιών που υπάρχουν σήμερα. Κάποιες από αυτές αναλύονται στη συνέχεια.
Ανάλογα με την έκταση της περιοχής την οποία καλείται να καλύψει ένα ad-hoc δίκτυο, μπορεί να χρησιμοποιηθούν τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται στα Ασύρματα Προσωπικά Δίκτυα (Wireless Personal Area Networks-WPAN), στα ασύρματα τοπικά δίκτυα (Wireless Local Area Networks-WLAN) ή στα ασύρματα μητροπολιτικά δίκτυα (Wireless Metropolitan Area Networks-WMAN). Συγκεκριμένα:

- Η ακτίνα κάλυψης ενός WPAN είναι της τάξης των μερικών μέτρων, το πολύ μέχρι 20 μέτρα.

- Η ακτίνα κάλυψης ενός WLAN περιορίζεται περίπου στα 100 μέτρα.

- Η ακτίνα κάλυψης ενός WMAN είναι της τάξης μερικών χιλιομέτρων.

Για έκαστο των κατωτέρω τύπων δικτύων, έχουν προταθεί διάφορες τεχνολογίες ασύρματης επικοινωνίας. Ενδεικτικά, αναφέρονται ορισμένες τις δυνατές επιλογές:

- WPAN: Bluetooth, UWB
- WLAN: IEEE 802.11a, IEEE 802.11b, IEEE 802.11g
- WLAN: IEEE 802.16e

Τα βασικά χαρακτηριστικά των τεχνολογιών αυτών αναφέρονται στον Πίνακα 1.1 μαζί με τα συστήματα GPRS και UMTS που χρησιμοποιούνται στην κινητή τηλεφωνία, για ευκολότερη σύγκριση.
Τα δίκτυα WLAN,WMAN και WPAN έχουν σχεδιασθεί για σταθερά τερματικά και έχουν προδιαγραφές για το φυσικό επίπεδο και το επίπεδο σύνδεσης δεδομένων του μοντέλου OSI. Αυτά τα δίκτυα μπορούν να υποστηρίξουν και κινητούς κόμβους αλλά με σοβαρούς περιορισμούς. Ένας τρόπος αντιμετώπισης των περιορισμών αυτών είναι η χρήση φορητής IP διεύθυνσης για τους κόμβους (mobile IP) καθώς και η χρήση ταχέων πρωτοκόλλων δρομολόγησης.

	Maximum data rate (17)	Frequency allocation	Channel band-width	Number of RF Chan-nels	Multiple Access technol-ogy	Typical range	Mobility support
Bluetooth	1 Mbps	2.4 GHz (ISM)	1 MHz	79	FHSS	10 m	(1)
UWB	110 Mbps (at 10m)	3.1-10.6 GHz	Min. 500 MHz Max. 7.5 GHz	1-15	THSS OFDM (11)	10-15 m	(1)
IEEE 802.11b	11 Mbps	2.4-2.497 GHz (ISM)	25 MHz	3	DSSS	50-80 m (9)	(2)
IEEE 802.11g	54 Mbps	2.4-2.497 GHz (ISM)	(10)	(10)	(10)	50-80 m (9)	(2)
IEEE 802.11a	54 Mbps	various bands in 5 GHz region	20 MHz	US: 12 EU: 8 Japan: 4	OFDM	40-60 m (9)	(2)
IEEE 802.16e	75 Mbps	2-11 GHz 10-66 GHz (3)	1.5 – 20 MHz (3)	(3)	(15)	30 km (4) 4 km (5)	(6)
GPRS	171 kbps (12)	800, 900 and 1800 MHz bands (13)	200 kHz (13)	(13)	TDMA with FDD	1-5 km (14)	Handover possible also at high speeds
UMTS(W-CDMA) (8)	2 Mbps	1920-1980 MHz 2110-2170 MHz	5 MHz	(7)	DSSS	1-3 km (16)	Handover possible also at high speeds

Πίνακας 1.1: Βασικά χαρακτηριστικά διαφορετικών ασύρματων τεχνολογιών

Σημειώσεις:

(1) Δεν υποστηρίζεται διαπομπή.

(2) Είναι δυνατή η κίνηση εντός μίας κυψέλης. Δεν υποστηρίζεται διαπομπή.

(3) Το πρωτόκολλο IEEE 802.16 είναι σχεδιασμένο για μεγάλο εύρος αδειοδοτημένων και μη αδειοδοτημένων συχνοτήτων με ευέλικτη κατανομή εύρους ζώνης που καθιστά ευκολότερο το σχεδιασμό κυψελών.

(4) Για συνδέσεις με οπτική επαφή.

(5) Ακόμα και για συνδέσεις χωρίς οπτική επαφή.

(6) Κινητικότητα υποστηρίζεται μόνο στη ζώνη 2-6 GHz. Σε αρκετά χαμηλές ταχύτητες, είναι δυνατή η διαπομπή μεταξύ γειτονικών κυψελών.

(7) Το πλήθος των ζωνών συχνοτήτων εξαρτάται από το διαχειριστή του δικτύου.

(8) Από τις διάφορες εκδόσεις του UMTS, εδώ θεωρείται το ευρωπαϊκό W-CDMA.

(9) Το κάτω όριο αντιστοιχεί σε ρυθμό μετάδοσης δεδομένων 11 Mbps ενώ το άνω όριο αντιστοιχεί σε ρυθμό μετάδοσης δεδομένων 2 Mbps.

(10) Για ρυθμούς μετάδοσης 1, 2, 5, 5.5 και 11 Mbps, χρησιμοποιείται εύρος ζώνης, κενά φασματικά διαστήματα και σχήματα διαμόρφωσης όπως αυτά στο IEEE 802.11b. Οι υπόλοιποι υποστηριζόμενοι ρυθμοί μετάδοσης χρησιμοποιούν OFDM.

(11) Το UWB μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας διαφορετικές τεχνικές εξάπλωσης του φάσματος. Οι περισσότερες υλοποιήσεις χρησιμοποιούν OFDM ή THSS.
(12) Αυτός είναι ο μεγαλύτερος εφικτός ρυθμός μετάδοσης, ο οποίος χρησιμοποιεί 8 χρονικές σχισμές και σχήμα κωδικοποίησης 4 (CS-4).
(13) Όπως και στο GSM.
(14) Με το σχήμα κωδικοποίησης 1 (CS-1), η ακτίνα κάλυψης τους GSM για φωνή και του GPRS για δεδομένα είναι η ίδια. Με τα σχήματα κωδικοποίησης CS-2, CS-3 και CS-4, η ακτίνα κάλυψης μειώνεται. Το τυπικό εύρος στον ανωτέρω πίνακα αναφέρεται σε αστικές περιοχές. Θεωρητικά, η μέγιστη ακτίνα κάλυψης φθάνει τα 30 km.
(15) Το IEEE 802.16 υποστηρίζει τρεις τεχνολογίες πρόσβασης στο φυσικό στρώμα: (i) Διαμόρφωση ενός φέροντος (CS) (ii) OFDM σε συνδυασμό με TDMA (iii) OFDMA. Οι τεχνολογίες OFDM και OFDMA προτείνονται κυρίως για συνδέσεις χωρίς οπτική επαφή.
(16) Στον ανωτέρω πίνακα, το τυπικό εύρος αναφέρεται σε αστικές περιοχές. Θεωρητικά, το μέγιστο εύρος φθάνει τα 20 Km.
(17) Τα μεγέθη αναφέρονται σε ένα χρήστη. Σε περίπτωση διαμοιραζόμενης χρήσης του καναλιού, η χωρητικότητα διαιρείται σε όλους τους χρήστες.

1.4 Δρομολόγηση στα ad-hoc δίκτυα

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στα ad-hoc δίκτυα είναι η δρομολόγηση. Μία ιδιαιτερότητα που πρέπει να αντιμετωπίσουν οι αλγόριθμοι δρομολόγησης των ad-hoc δικτύων είναι η κινητικότητα των χρηστών, που μεταβάλλει πολύ συχνά την τοπολογία του δικτύου, με αποτέλεσμα να απαιτείται συχνά η ανακάλυψη νέων διαδρομών. Επιπλέον, εξαιτίας του περιορισμένου διαθέσιμου εύρους ζώνης στα ασύρματα δίκτυα, το πλήθος των σχετικών με τη δρομολόγηση μηνυμάτων απαιτείται να είναι περιορισμένο. Επίσης, στα ασύρματα δίκτυα, το ποσοστό των πακέτων που χάνονται είναι ιδιαίτερα αυξημένο, τόσο λόγω της αυξημένης πιθανότητας λαθών μετάδοσης, όσο και λόγω της αυξημένης πιθανότητας διακοπής συνδέσεων (π.χ. εξαιτίας της μετακίνησης ενός κόμβου).
Όλα τα ανωτέρω έχουν ως αποτέλεσμα τη διαφοροποίηση σε σχέση με τα ενσύρματα δίκτυα των επιθυμητών ιδιοτήτων που πρέπει να έχουν οι αλγόριθμοι δρομολόγησης στα ad-hoc δίκτυα. Έτσι, τα χρησιμοποιούμενα πρωτόκολλα πρέπει να είναι κατανεμημένα, όπου κάθε κόμβος διαθέτει την ευφυΐα να λαμβάνει αποφάσεις δρομολόγησης. Αυτό είναι απαραίτητο, αφού ένα συγκεντρωτικό πρωτόκολλο δεν είναι αξιόπιστο σε περίπτωση κίνησης των κόμβων. Επιπλέον, το πρωτόκολλο πρέπει να λαμβάνει ταχείες αποφάσεις δρομολόγησης προκειμένου αυτές να εφαρμόζονται πριν την κάθε αλλαγή της τοπολογίας, διατηρώντας παράλληλα χαμηλή την τηλεπικοινωνιακή επιβάρυνση λόγω δρομολόγησης. Εκτός αυτών, είναι επιθυμητό το πρωτόκολλο δρομολόγησης να μπορεί να λαμβάνει αποφάσεις δρομολόγησης

βασιζόμενες και στην ενεργειακή κατάσταση κάθε κόμβου, καθώς και στην πιθανή επίδραση των αποφάσεων αυτών. Τέλος, κάθε σύνδεση μεταξύ κόμβων πρέπει να θεωρείται από το πρωτόκολλο δρομολόγησης ως μίας κατεύθυνσης και όχι αμφίδρομη, αφού η επικοινωνία προς μία κατεύθυνση μπορεί να περιορίζεται π.χ. από τη μορφολογία του χώρου, ενώ η επικοινωνία προς την άλλη κατεύθυνση να είναι εφικτή.

Τα πρωτόκολλα δρομολόγησης κατηγοριοποιούνται με κριτήριο το αν η δρομολόγηση γίνεται κατανεμημένα σε επίπεδο κόμβου ή καθορίζεται, αρχικά, εξ ολοκλήρου από τον κόμβο αποστολέα της πληροφορίας. Στην πρώτη περίπτωση κάθε κόμβος αποφασίζει για τον επόμενο κόμβο στον οποίο θα προωθήσει το πακέτα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, που πολλές φορές ονομάζεται δρομολόγηση πηγής, η διαδρομή που θα ακολουθήσει κάθε πακέτο καθορίζεται από τον κόμβο αποστολέα του πακέτου. Οι διαδρομές αυτές μπορεί να είναι στατικές ή να προσαρμόζονται δυναμικά στην τοπολογία του δικτύου. Ένας άλλος τρόπος κατηγοριοποίησης των πρωτοκόλλων δρομολόγησης είναι σε πρωτόκολλα βασισμένα σε πίνακες (table driven protocols), όπου κάθε κόμβος διατηρεί πληροφορίες για τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου, και σε κατ’ απαίτηση πρωτόκολλα που ενεργοποιούνται από την αφετηρία της πληροφορίας (source initiated on-demand driven protocols), τα οποία ενεργοποιούν μια διαδρομή μόνο όταν αυτή ζητηθεί από κάποιο κόμβο αφετηρία. Για την προσαρμογή της δρομολόγησης στην τοπολογία του ad-hoc δικτύου, χρησιμοποιούνται δύο κύριες κατηγορίες αλγορίθμων. Την πρώτη κατηγορία αποτελούν οι αλγόριθμοι βασιζόμενοι σε διανύσματα απόστασης (distance vectors). Στα πρωτόκολλα αυτά, κάθε κόμβος αποστέλλει σε όλους τους γειτονικούς του κόμβους τις αποστάσεις που γνωρίζει για όλους τους κόμβους του δικτύου. Με βάση τις πληροφορίες από τους γειτονικούς του κόμβους, κάθε κόμβος υπολογίζει τις συντομότερες διαδρομές προς κάθε πιθανό προορισμό (κλασικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αλγορίθμων είναι ο Distributed Bellman-Ford ή DBF). Τη δεύτερη μεγάλη κατηγορία αλγορίθμων δρομολόγησης αποτελούν οι αλγόριθμοι που βασίζονται στην κατάσταση των συνδέσεων (link state). Στα πρωτόκολλα που χρησιμοποιούν τέτοιου είδους αλγορίθμους, κάθε κόμβος έχει πλήρη, καθολική εικόνα για το δίκτυο. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, κάθε κόμβος μπορεί να επιλέξει τη συντομότερη διαδρομή προς οποιοδήποτε κόμβο, χρησιμοποιώντας κάποιο συγκεντρωτικό αλγόριθμο δρομολόγησης (π.χ. Dijkstra).

1.5 Ασφάλεια στα ad-hoc δίκτυα

1.5.1 Απαιτήσεις ασφάλειας

Η ασφάλεια είναι ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα κατά την ανάπτυξη ενός ad-hoc δικτύου. Οι σημαντικότερες απαιτήσεις ασφάλειας είναι οι ακόλουθες:

- **Διαθεσιμότητα:** Η διαθεσιμότητα εξασφαλίζει τη βιωσιμότητα των υπηρεσιών του δικτύου, παρά τις denial of services (DOS) επιθέσεις που ενδεχομένως δεχθεί. Μια DOS επίθεση μπορεί να εκκινήσει από οποιοδήποτε σημείο ενός ad-hoc δικτύου. Επίσης, τα συστήματα που εξασφαλίζουν τη διαθεσιμότητα προσπαθούν να αντιμετωπίσουν τις επιθέσεις κατανάλωσης ενέργειας, καθώς, επίσης, και την εγωιστική συμπεριφορά τους κατά την προώθηση μηνυμάτων. Ο στόχος της επίθεσης κατανάλωσης ενέργειας είναι να προκαλεί τη συνεχή αποστολή αιτημάτων για την ανακάλυψη μιας διαδρομής ή άχρηστα πακέτα στον κόμβο-θύμα ώστε να λιγοστέψει τη διάρκεια ζωής της μπαταρίας του. Η εγωιστική συμπεριφορά ενός κόμβου μπορεί να εμφανισθεί στην ακόλουθη περίπτωση: Σε ένα ad-hoc δίκτυο πολλαπλών βημάτων, η επικοινωνία μεταξύ δύο κόμβων εξαρτάται από τη συνεργασία των ενδιάμεσων κόμβων που πρέπει να προωθήσουν την πληροφορία ώστε αυτή να φθάσει στον τελικό αποδέκτη. Η επικοινωνία αυτή είναι εξασφαλισμένη σε ένα δίκτυο στο οποίο υπάρχει μια κεντρική αρχή που εξαναγκάζει τους ενδιάμεσους κόμβους να συνεργάζονται. Αν, όμως, δεν υπάρχει κεντρική αρχή, όπως συμβαίνει στα ad-hoc δίκτυα, η επικοινωνία αυτή δεν είναι εξασφαλισμένη. Αυτό οφείλεται στην εγωιστική συμπεριφορά των κόμβων. Δηλαδή, κάθε κόμβος, στην προσπάθειά του να μεγιστοποιήσει το όφελος του από κάθε επικοινωνία, δεν ενδιαφέρεται για το αποτέλεσμα των επιλογών του στη συνολική απόδοση του δικτύου. Προκειμένου, για παράδειγμα, ένας κόμβος να μη σπαταλήσει ενέργεια, μπορεί να μην προωθήσει ένα μήνυμα σε επόμενο κόμβο. Αν αυτή η συμπεριφορά κυριαρχήσει στην πλειοψηφία των κόμβων, θα έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία επικοινωνίας μεταξύ των κόμβων.

  Στο φυσικό επίπεδο, μια εχθρική οντότητα μπορεί να προκαλέσει συνωστισμό (jamming) για να παρέμβει στις επικοινωνίες. Συγκεκριμένα, ένας εχθρικός κόμβος μπορεί να παρεμβάλλει την επικοινωνία δύο κόμβων, εκπέμποντας στην ίδια συχνότητα. Στο επίπεδο δικτύου, μπορεί να διαταραχθεί το πρωτόκολλο προώθησης και να διακοπεί το δίκτυο. Σε ανώτερα επίπεδα μπορούν να διαταραχθούν οι αντίστοιχες υπηρεσίες, όπως η υπηρεσία διαχείρισης κλειδιού.

- **Εμπιστευτικότητα:** Η εμπιστευτικότητα εξασφαλίζει ότι συγκεκριμένου τύπου πληροφορία δεν εκτίθεται σε μη εξουσιοδοτημένες οντότητες. Η μετάδοση ευαίσθητων πληροφοριών, όπως π.χ. στρατιωτικές πληροφορίες, απαιτεί εμπιστευτικότητα. Η διαρροή διαβαθμισμένης πληροφορίας σε εχθρούς μπορεί να έχει καταστροφικές συνέπειες. Η συνήθης τακτική για να διατηρηθούν ευαίσθητα δεδομένα ασφαλή είναι η κρυπτογράφηση των δεδομένων με κλειδί που είναι διαθέσιμο μόνο στους αποδεκτούς προορισμούς.

- **Αυθεντικότητα:** Η αυθεντικότητα επιτρέπει στους κόμβους να πιστοποιήσουν την ταυτότητά τους. Χωρίς την αυθεντικότητα, αντίπαλος μπορεί να μεταμφιεσθεί σε ένα κόμβο ώστε να αποκτήσει μη εξουσιοδοτημένη πρόσβαση σε πηγές του δικτύου, σε ευαίσθητες πληροφορίες ή και να παρέμβει στις λειτουργίες άλλων κόμβων. Η εξασφάλιση της αυθεντικότητας των χρηστών ή των κόμβων επιτρέπει στους παραλήπτες των πληροφοριών να επιβεβαιώσουν ότι η πληροφορία έχει αποσταλεί από νομιμοποιημένο αποστολέα.

- **Μη αποποίηση:** Η απαίτηση αυτή εξασφαλίζει ότι ο αποστολέας ενός μηνύματος δεν μπορεί να αποποιηθεί την αποστολή ενός μηνύματος. Η μη αποποίηση είναι χρήσιμη για τον εντοπισμό και την απομόνωση εκτεθειμένων κόμβων.

- **Φρεσκάδα πληροφορίας:** Η απαίτηση αυτή αποσκοπεί στο να δηλώσει ότι οι πληροφορίες και τα μηνύματα που ανταλλάσσονται είναι πρόσφατα και διαβεβαιώνει ότι δεν επαναλαμβάνεται η αναμετάδοση παλαιών μηνυμάτων. Συνήθως, σε όλα τα μηνύματα περιλαμβάνεται ένας καταμετρητής χρόνου, βάσει του οποίου μπορεί να διασφαλισθεί ότι ένα μήνυμα είναι πρόσφατο. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται η προστασία από την άσκοπη κατανάλωση ενεργειακών πόρων στους κόμβους από μηνύματα τα οποία για κάποιο λόγο κυκλοφορούν σε ατέρμονες βρόχους.

- **Ακεραιότητα πληροφορίας:** Η ακεραιότητα της πληροφορίας σχετίζεται με τη γνησιότητα των δεδομένων που ανταλλάσσονται μεταξύ εμπλεκομένων κόμβων. Σύμφωνα με την απαίτηση αυτή, ένα μήνυμα που αποστέλλεται από ένα κόμβο Α σε ένα κόμβο Β δεν πρέπει να έχει τροποποιηθεί π.χ. από ένα κακόβουλο κόμβο Γ κατά τη διάρκεια της μετάδοσης. Ένα μήνυμα μπορεί, επίσης, να τροποποιηθεί ή να καταστραφεί λόγω εξασθένησης του σήματος. Ένα καλό και ασφαλές σύστημα πρέπει να είναι σε θέση να ανιχνεύσει οποιοδήποτε πρόβλημα ακεραιότητας ώστε, όταν διαπιστωθεί π.χ. μια αλλοίωση ενός πακέτου από κακόβουλο κόμβο, το πρόβλημα να εντοπισθεί και να διορθωθεί άμεσα. Εφόσον έχει εφαρμοσθεί ένας εύρωστος μηχανισμός εμπιστευτικότητας, η ακεραιότητα πληροφορίας είναι σχετικά εύκολο να επιτευχθεί.

- **Επεκτασιμότητα και αυτό-οργάνωση:** Συνήθως, τα ad-hoc δίκτυα χρειάζονται επέκταση με προσθήκη μεγάλου αριθμού νέων κόμβων. Η ανάγκη αυτή απαιτεί να έχει προβλεφθεί η δυνατότητα επέκτασης με κριτήριο την ενεργειακή επιβίωση είτε τη δυνατότητα αναδιοργάνωσης του δικτύου. Το πλήθος των γειτόνων, οι αποστάσεις μεταξύ κόμβων και η απαιτούμενη ισχύς για την αποστολή μηνυμάτων μπορεί να μην είναι σταθερά κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικτύου. Επομένως, οι κόμβοι σε ad-hoc δίκτυα πρέπει να είναι ικανοί να αυτό-οργανώνονται και να επιλέγουν τους κατάλληλους μηχανισμούς προσαρμογής σε κάθε περίπτωση..

1.5.2 Περιορισμοί στην ασφάλεια των ad-hoc δικτύων

Ορισμένα χαρακτηριστικά των ad-hoc δικτύων καθιστούν ανεφάρμοστη τη χρήση των περισσότερων αλγορίθμων ασφαλείας. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ορισμένα τέτοια χαρακτηριστικά μαζί τις επιπτώσεις τους στην ασφάλεια των ad-hoc δικτύων:

- **Έλλειψη υποδομής:** Η έλλειψη κεντρικών επεξεργαστών, εξειδικευμένου λογισμικού, και σταθερών δρομολογητών αποκλείει την ανάπτυξη κεντρικής τακτικής ασφαλείας. Ως εκ τούτου, οποιοδήποτε σχήμα ασφάλειας πρέπει να λειτουργεί κατά κατανεμημένο και συνεργατικό τρόπο.

- **Χρήση ασύρματων συνδέσεων:** Σε αντίθεση με τα ενσύρματα δίκτυα στα οποία μια κακόβουλη οντότητα πρέπει να κερδίσει φυσική πρόσβαση στην ενσύρματη υποδομή δικτύων ή να διέλθει μέσω αρκετών γραμμών άμυνας στα firewalls και στις πύλες εξόδου (gate-ways), οι επιθέσεις στα ασύρματα δίκτυα μπορούν να προέλθουν από όλες τις κατευθύνσεις και να στοχεύσουν οποιοδήποτε κόμβο. Για το λόγο αυτό, τα ad-hoc δίκτυα δεν διαθέτουν μια οργανωμένη γραμμή άμυνας και κάθε κόμβος πρέπει να είναι προετοιμασμένος να αμυνθεί σε κάθε είδους επιθέσεις.

- **Πολλαπλά άλματα:** Στα περισσότερα ad-hoc δίκτυα, τα πακέτα διέρχονται από πολλούς κόμβους, πριν φθάσουν στον τελικό τους προορισμό. Το χαρακτηριστικό αυτό αποτελεί ένα σοβαρό σημείο τρωτότητας των δικτύων αυτών.

- **Αυτονομία κινήσεων κόμβων:** Οι κόμβοι των ad-hoc δικτύων μπορούν να μεταβάλλουν θέση κατά ανεξάρτητο τρόπο. Έτσι, η ανίχνευση ενός κόμβου σε ένα ad-hoc δίκτυο δεν είναι πάντα εύκολη ή εφικτή σε ορισμένες περιπτώσεις.

- **Αμορφία:** Σε ένα ad-hoc δίκτυο, κόμβοι μπορούν να εισέρχονται και να εξέρχονται συνεχώς. Για να δημιουργηθεί ένα καλό σύστημα ασφαλείας, το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό πρέπει να ληφθεί υπόψη ώστε να υπάρχει η δυνατότητα ασφαλούς σύνδεσης με οποιοδήποτε κόμβο ή άλλη οντότητα που εισέρχεται κατά καιρούς στο δίκτυο.

- **Ενεργειακοί περιορισμοί:** Όταν ένας κόμβος υλοποιεί κάποια πρόσθετη λειτουργία, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η ενεργειακή επιβάρυνση που προκαλείται. Είναι επιθυμητό, οι λειτουργίες ασφαλείας ενός κόμβου να μειώνουν κατά το λιγότερο δυνατό το χρόνο ζωής των κόμβων.

- **Περιορισμοί μνήμης:** Δεδομένου ότι κάθε κόμβος ενός ad-hoc δικτύου διαθέτει συνήθως περιορισμένη μνήμη, είναι επιθυμητό ο κώδικας του αλγορίθμου ασφαλείας να είναι έχει περιορισμένη έκταση.

1.6 Χρήσεις των ad-hoc δικτύων

Στον Πίνακα 1.2 συνοψίζονται οι κύριες χρήσεις των ad-hoc δικτύων:

[redacted] Mobile ad hoc network applications

Application	Possible scenarios/services
Tactical networks	• Military communication and operations • Automated battlefields
Emergency services	• Search and rescue operations • Disaster recovery • Replacement of fixed infrastructure in case of environmental disasters • Policing and fire fighting • Supporting doctors and nurses in hospitals
Commercial and civilian environments	• E-commerce: electronic payments anytime and anywhere • Business: dynamic database access, mobile offices • Vehicular services: road or accident guidance, transmission of road and weather conditions, taxi cab network, inter-vehicle networks • Sports stadiums, trade fairs, shopping malls • Networks of visitors at airports
Home and enterprise networking	• Home/office wireless networking • Conferences, meeting rooms • Personal area networks (PAN), Personal networks (PN) • Networks at construction sites
Education	• Universities and campus settings • Virtual classrooms • Ad hoc communications during meetings or lectures
Entertainment	• Multi-user games • Wireless P2P networking • Outdoor Internet access • Robotic pets • Theme parks
Sensor networks	• Home applications: smart sensors and actuators embedded in consumer electronics • Body area networks (BAN) • Data tracking of environmental conditions, animal movements, chemical/biological detection
Context aware services	• Follow-on services: call-forwarding, mobile workspace • Information services: location specific services, time dependent services • Infotainment: touristic information
Coverage extension	• Extending cellular network access • Linking up with the Internet, intranets, etc.

Πίνακας 1.2: Χρήσεις των ad-hoc δικτύων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - Η ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON

2.1 Χρονικές σημειακές διαδικασίες-Ορισμός και ειδικές κατηγορίες

2.1.1 Ορισμός σημειακών χρονικών σημειακών διαδικασιών

Αποφεύγοντας τον αυστηρά μαθηματικό ορισμό ο οποίος είναι αρκετά τεχνικός, μια σημειακή διαδικασία μπορεί να οριστεί ως μια τυχαία συλλογή από σημεία τα οποία περιλαμβάνονται σε ένα χώρο S. Στις περισσότερες εφαρμογές, κάθε σημείο μιας τέτοιας διαδικασίας αντιπροσωπεύει τη χρονική στιγμή ή/και τη θέση ενός γεγονότος.
Στην παρούσα ενότητα μελετώνται οι χρονικές σημειακές διαδικασίες οι οποίες αποτελούν τη συνηθέστερη περίπτωση μονοδιάστατων σημειακών διαδικασιών.
Στόχος είναι να αναδειχθεί η διαφορετικότητα αλλά και η απλότητα της χρονικής διαδικασίας Poisson σε σχέση με τις άλλες συνήθεις χρονικές σημειακές διαδικασίες.
Σε επόμενη ενότητα το χρονικό αυτό μοντέλο της διαδικασίας Poisson θα γενικευθεί, προκειμένου να συμπεριληφθούν σε αυτό και άλλες διαστάσεις που θα προσφέρουν τη δυνατότητα να διατυπωθούν μαθηματικά μοντέλα για χωροχρονικά γεγονότα.

Ορισμός 2.1: Μία κανονική χρονική σημειακή διαδικασία ορίζεται έτσι ώστε η πιθανότητα ώστε ένα γεγονός να πραγματοποιηθεί μέσα στο χρονικό παράθυρο $[t, t+\Delta t)$ να περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Pr(\text{ένα γεγονός στο διάστημα } [t, t+\Delta t) \mid N_t, \mathbf{w}_t) = \mu(t; N_t, \mathbf{w}_t)\Delta t + o(t, \Delta t) \tag{2.1}$$

$$\Pr(\text{δύο ή περισσότερα γεγονότα στο διάστημα } [t, t+\Delta t) \mid N_t, \mathbf{w}_t) = o(t, \Delta t) \tag{2.2}$$

όπου

N_t : το πλήθος των γεγονότων που συνέβησαν πριν από την χρονική στιγμή t (θεωρείται ότι η παρατήρηση των γεγονότων εκκίνησε την χρονική στιγμή t=0)

$\mathbf{w}_t$: το διάνυσμα των χρονικών στιγμών παρατήρησης των N_t αυτών γεγονότων, δηλαδή το διάνυσμα $[w_1, ..., w_{N_t}]$

$o(t, \Delta t)$: μία ποσότητα για την οποία ισχύει $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(t, \Delta t)}{\Delta t} = 0$

$\mu(t; N_t, \mathbf{w}_t)$: μη αρνητική συνάρτηση

Οι ανωτέρω εξισώσεις εκφράζουν τα εξής:

- Όχι περισσότερα από ένα γεγονότα μπορούν να συμβούν σε ένα επαρκώς μικρό χρονικό διάστημα
- Η πιθανότητα ένα γεγονός να συμβεί σε ένα αρκετά μικρό διάστημα είναι ανάλογη της διάρκειας του διαστήματος

Από τον προηγούμενο ορισμό είναι φανερό ότι η υπό συνθήκη πιθανότητα ενός γεγονότος να πραγματοποιηθεί σε ένα αρκετά μικρό χρονικό διάστημα ισούται με το γινόμενο της διάρκειας του διαστήματος και της μη αρνητικής συνάρτησης $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_t)$ που ονομάζεται ένταση της σημειακής διαδικασίας και μετρείται σε γεγονότα/sec.

Επισημαίνεται ότι με βάση τον ορισμό 2.1, η ένταση μιας σημειακής διαδικασίας εξαρτάται:

- Από το χρόνο
- Το ιστορικό της σημειακής διαδικασίας

2.1.2 Ειδικές κατηγορίες κανονικών σημειακών διαδικασιών

i. **Διαδικασία Poisson:** Αποτελεί την απλούστερη σημειακή διαδικασία. Η έντασή της δεν εξαρτάται από το ιστορικό της διαδικασίας, δηλαδή ισχύει $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_t) = \lambda(t)$. Η ποσότητα $\lambda(t)$ μπορεί να είναι σταθερή (ομογενής διαδικασία Poisson), μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο (μη ομογενής διαδικασία Poisson) ή μπορεί να αποτελεί και η ίδια στοχαστική διαδικασία (διπλά στοχαστική διαδικασία Poisson). Ανεξάρτητα από το ποια από τις ανωτέρω περιπτώσεις εξετάζεται, η πραγματοποίηση ενός γεγονότος δεν εξαρτάται στατιστικά από τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες συνέβησαν προηγούμενα γεγονότα, δηλαδή η διαδικασία Poisson δεν έχει μνήμη.

ii. **Διαδικασίες μηδενικής μνήμης:** Μια σημειακή διαδικασία είναι μηδενικής μνήμης αν για κάθε $N_t \geq 1$, η ένταση $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_t)$ είναι ανεξάρτητη του διανύσματος $\mathbf{w}_t$. Είναι φανερό ότι η διαδικασία Poisson αποτελεί ειδική περίπτωση διαδικασίας μηδενικής μνήμης.

iii. **Διαδικασίες m-μνήμης:** Μια σημειακή διαδικασία είναι m-μνήμης **(**$m \geq 1$**)** αν για κάθε $N_t \geq m$, η ένταση $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_t)$εξαρτάται μονάχα από τα t, N_t και τα m πλέον πρόσφατα γεγονότα $w_{N_t - m+1}, ..., w_{N_t - 1}, w_{N_t}$ και είναι ανεξάρτητη από τα $N_t - m$ προγενέστερα γεγονότα.

   Ειδική υποκατηγορία των διαδικασιών m-μνήμης αποτελούν οι διαδικασίες με μνήμη 1. Για αυτές, με βάση τα προηγούμενα, ισχύει ότι $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_{N_t}) = \mu(t; N_t, w_{N_t})$. Συχνά, γίνεται η υπόθεση ότι η ένταση της διαδικασίας δεν εξαρτάται εξατομικευμένα από τα t, w_{N_t} αλλά μόνο από τη διαφορά αυτών $t - w_{N_t}$, δηλαδή ότι $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_{N_t}) = \mu(N_t, t - w_{N_t})$. Οι διαδικασίες αυτές ονομάζονται ομογενείς σημειακές διαδικασίες μνήμης 1. Το ακόλουθο θεώρημα καθιστά τις συγκεκριμένες διαδικασίες ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και χρήσιμες.

Θεώρημα 2.1: Μία σημειακή διαδικασία είναι ομογενής σημειακή διαδικασία μνήμης 1 μόνο εφόσον τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών γεγονότων αποτελούν στατιστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Μία ειδική αλλά ευρέως χρησιμοποιούμενη υποκατηγορία των ομογενών σημειακών διαδικασιών μνήμης 1 συγκροτούν οι ανανεωτικές διαδικασίες. Συγκεκριμένα, μία σημειακή κατανομή ονομάζεται τροποποιημένη ανανεωτική αν έχει ένταση της μορφής $\mu(t; N_t, \mathbf{w}_t) = h(t - w_{N_t})$. Ονομάζεται συνήθης ανανεωτική μόνο εφόσον ισχύει επιπλέον και ότι $\mu(t; N_t = 0) = h(t)$.

2.2 Η ομογενής και μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson

Με βάση την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας, η χρονική διαδικασία Poisson αποτελεί τη μοναδική κανονική χρονική σημειακή διαδικασία στην οποία το παρόν δεν σχετίζεται κατά κανένα τρόπο με το παρελθόν. Η ιδιότητα της αυτή, γνωστή και ως έλλειψη μνήμης, αποτελεί το λόγο επιλογής της για τους σκοπούς της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας. Στην παρούσα ενότητα, ορίζεται με αυστηρό μαθηματικό τρόπο η χρονική διαδικασία Poisson και διατυπώνονται ορισμένες από τις βασικές ιδιότητές της. Με στόχο την καλύτερη κατανόηση αναπτύσσεται πρώτα το ομογενές μοντέλο της και, στη συνέχεια, το μη ομογενές. Αρχικά, ορίζεται η έννοια της διαδικασίας καταμέτρησης η οποία αποτελεί ένα εναλλακτικό τρόπο να προσεγγισθούν οι σημειακές διαδικασίες.

Ορισμός 2.2: Μία χρονική διαδικασία καταμέτρησης είναι μία στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $N(t) \geq 0$
2. Η $N(t)$ είναι μη φθίνουσα και λαμβάνει ακέραιες τιμές.

Για $a < b$, η διαφορά $N(b) - N(a)$ δηλώνει το πλήθος των γεγονότων στο διάστημα $(a, b]$.

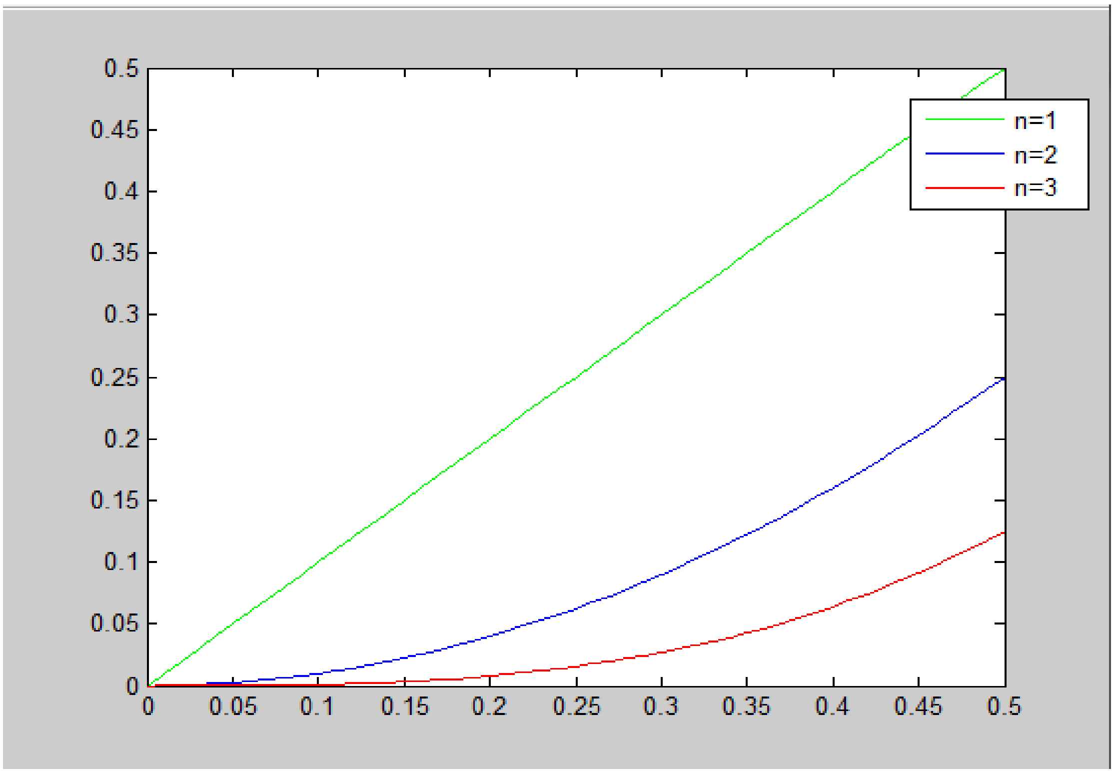
Αν και ήδη έγινε αναφορά στον ορισμό 2.1, ακολούθως ορίζεται πότε μια συνάρτηση είναι $o(h)$ και ορισμένες σχετικές ιδιότητες.

Ορισμός 2.3: Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι $o(h)$ αν $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.3, για να είναι μια συνάρτηση $o(h)$ πρέπει να τείνει προς το μηδέν ταχύτερα από τη γραμμική συνάρτηση $g(h)=h$.Δηλαδή, η συνάρτηση $f(h)$ πρέπει να είναι μικρότερη από το h για μικρές τιμές του h.

Τα ανωτέρω καθίστανται κατανοητά μέσω του απλού παραδείγματος καθώς και του Σχήματος 2.1 που το συνοδεύει

Η συνάρτηση $f(x)=x^n, n>1$, είναι $o(h)$ καθώς $\lim_{h\to 0}\frac{h^n}{h}=\lim_{h\to 0}h^{n-1}=0$. Αντιθέτως, όταν $n=1$ η $f(x)$ δεν είναι $o(h)$.



Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση f(x)=x^n κοντά στο μηδέν για διαφορετικές τιμές του n

Θεώρημα 2.2: Για συναρτήσεις που είναι $o(h)$, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι $o(h)$, τότε και η συνάρτηση $f(x)+g(x)$ είναι $o(h)$.

2.Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι $o(h)$ και c σταθερά, τότε και η συνάρτηση $cf(x)$ είναι $o(h)$.

Ορισμός 2.4[1]: Η ομογενής χρονική διαδικασία Poisson $\{X(t), t \geq 0\}$ με ένταση τη θετική ποσότητα λ αποτελεί μια χρονική διαδικασία καταμέτρησης με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $X(0) = 0$
2. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες αυξήσεις.
3. $\Pr[X(t+h) - X(t) = 1] = \lambda h + o(h)$ (2.3)
4. $\Pr[X(t+h) - X(t) \geq 2] = o(h)$ (2.4)

όπου $h > 0$ ένα αυθαίρετα μικρό χρονικό διάστημα

Ορισμός 2.5: Η ομογενής χρονική διαδικασία Poisson $\{X(t), t \geq 0\}$ με ένταση την ποσότητα λ είναι μια χρονική διαδικασία καταμέτρησης με τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

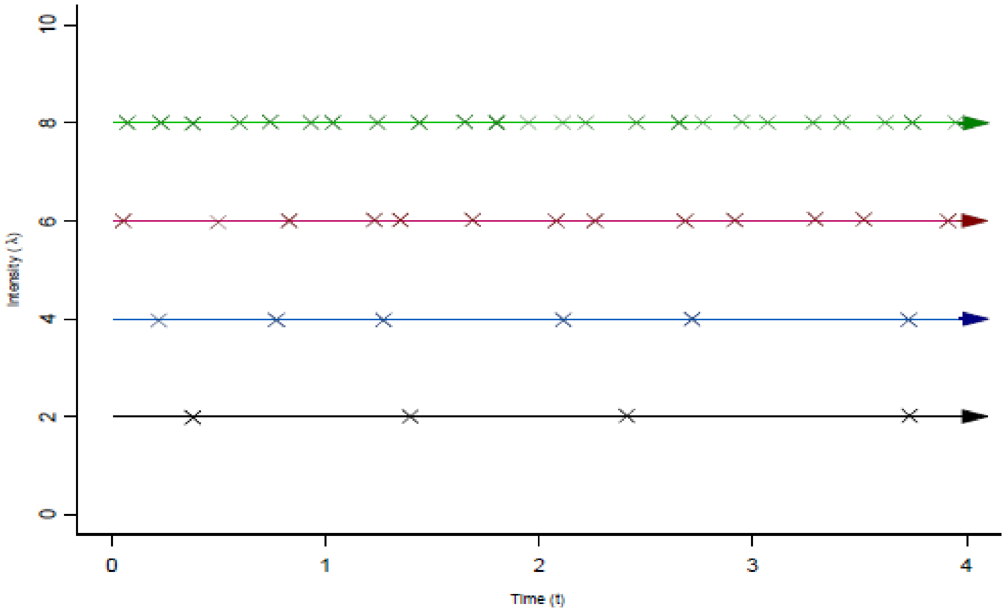
1. $X(0) = 0$
2. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες αυξήσεις
3. Το πλήθος των γεγονότων σε ένα διάστημα $(a, b]$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda(b-a)$ δηλαδή:

$$\Pr[X(b) - X(a) = n] = \frac{[\lambda(b-a)]^n e^{-\lambda(b-a)}}{n!} \tag{2.5}$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $0 < a \leq b$ και $\lambda > 0$

Στο Σχήμα 2.2 φαίνονται, τυχαία στιγμιότυπα για 4 ομογενείς χρονικές διαδικασίες Poisson με $\lambda = 2, 4, 6, 8$.

[1] Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι ο ορισμός αυτός αποτελεί άμεση συνέπεια του ορισμού 2.1 .



Σχήμα 2.2: Τυχαία στιγμιότυπα για 4 ομογενείς χρονικές διαδικασίες διαφορετικής έντασης

Θεώρημα 2.3: Οι ορισμοί 2.4 και 2.5 είναι ισοδύναμοι.

Ορισμός 2.6: Έστω $T_0 = 0$ και έστω ότι T_n είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ του $(n-1)^{ου}$ και του $n^{ου}$ γεγονότος όπου $n \geq 1$ ακέραιος. Τότε, το T_n ονομάζεται $n^{ος}$ χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων.

Θεώρημα 2.4: Ας υποτεθεί ότι $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ είναι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων μιας ομογενούς χρονικής διαδικασίας Poisson. Τότε, οι $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έκαστη των οποίων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$.

Θεώρημα 2.5: Ας υποτεθεί ότι μια χρονική διαδικασία καταμέτρησης $N(t)$ έχει χρόνους μεταξύ διαδοχικών γεγονότων $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ που αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$ και $N(0) = 0$. Τότε, η $N(t)$ είναι ομογενής χρονική διαδικασία Poisson.

Θεώρημα 2.6: Με δεδομένο ότι n γεγονότα μιας ομογενούς χρονικής διαδικασίας Poisson συνέβησαν στο διάστημα $(0, t]$, η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των χρονικών στιγμών των γεγονότων $W_1, W_2, \ldots, W_n$ δίδεται από τη σχέση:

$$f_{W_1,W_2,...,W_n}(w_1, w_2,..., w_n \mid X(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \quad (2.6)$$

για $0<w_1 < w_2 < ... < w_n < t$

Κατά τον ορισμό της ομογενούς χρονικής διαδικασίας Poisson θεωρήθηκε ότι η ένταση λ της διαδικασίας είναι σταθερή. Η υπόθεση αυτή, όμως, σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να είναι πολύ περιοριστική. Για παράδειγμα, ας υποτεθεί ότι διατυπώνονται μαθηματικά οι ημερήσιες αφίξεις ασθενών σε ένα νοσοκομείο με μία ομογενή χρονική κατανομή Poisson έντασης λ. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να θεωρείται ότι η άφιξη ασθενούς μεταξύ 3.00-4.00 π.μ. είναι το ίδιο πιθανή με την άφιξη ασθενούς μεταξύ 12.00-1.00 μ.μ. Είναι φανερό ότι μια τέτοια θεώρηση μπορεί να είναι τελείως λανθασμένη. Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια θα παρουσιασθεί η μη ομογενής εκδοχή της χρονικής διαδικασίας Poisson.

Ορισμός 2.7: Η μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$ με μη αρνητική ένταση $\lambda(t)$ είναι μια χρονική διαδικασία καταμέτρησης με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\mathrm{X}(0) = 0$
2. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες αυξήσεις.
3. $\Pr[\mathrm{X}(t+h) - \mathrm{X}(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$ (2.7)
4. $\Pr[\mathrm{X}(t+h) - \mathrm{X}(t) \geq 2] = o(h)$ (2.8)

όπου $h > 0$ ένα αυθαίρετα μικρό χρονικό διάστημα.

Ορισμός 2.8: Η μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$ με μη αρνητική ένταση $\lambda(t)$ είναι μια χρονική διαδικασία καταμέτρησης με τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. $\mathrm{X}(0) = 0$
2. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες αυξήσεις
3. Το πλήθος των γεγονότων σε ένα διάστημα $(a,b]$ ακολουθεί ως τυχαία μεταβλητή την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\int_a^b \lambda(t)dt$ δηλαδή:

$$\Pr[X(b) - X(a) = n] = \frac{\left(\int_a^b \lambda(t)dt\right)^n e^{-\int_a^b \lambda(t)dt}}{n!} \quad (2.9)$$

$0<a \leq b,\ \lambda > 0,\ n = 0,1,2,...,$

Θεώρημα 2.7: Οι ορισμοί 2.7 και 2.8 είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 2.8: Έστω ότι $X_1(t), X_2(t)$ είναι ανεξάρτητες μη ομογενείς χρονικές διαδικασίες Poisson με εντάσεις $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$,αντίστοιχα. Τότε, η $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ είναι επίσης μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι γενίκευση του θεωρήματος 2.8.

Θεώρημα 2.9: Έστω ότι $X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)$ είναι ανεξάρτητες μη ομογενείς χρονικές διαδικασίες Poisson με εντάσεις $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_m(t)$,αντίστοιχα. Τότε η $X(t) = \sum_{j=1}^{m} X_j(t)$ είναι επίσης μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)$.

Θεώρημα 2.10: Έστω $X(t)$ είναι μια μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda(t)$ η οποία παράγει δύο διαφορετικούς τύπους γεγονότων. Ας υποτεθεί ότι τα γεγονότα του πρώτου τύπου συνθέτουν τη διαδικασία καταμέτρησης $N_1(t)$ ενώ τα γεγονότα του δεύτερου τύπου συνθέτουν τη διαδικασία καταμέτρησης $N_2(t)$. Έστω, επίσης, ότι ένα γεγονός συμβαίνει με πιθανότητα p να είναι του πρώτου τύπου και με πιθανότητα 1- p να είναι του δεύτερου τύπου. Τότε:

1. Η $N_1(t)$ είναι μια μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson με ένταση $p\lambda(t)$.
2. Η $N_2(t)$ είναι μια μη ομογενής χρονική διαδικασία Poisson με ένταση $(1-p)\lambda(t)$.
3. Οι $N_1(t)$ και $N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 2.11: Με δεδομένο ότι n γεγονότα μιας μη ομογενούς χρονικής διαδικασίας Poisson συνέβησαν στο διάστημα $(a,b]$, η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των χρονικών στιγμών των γεγονότων $W_1, W_2, ..., W_n$ δίνεται από τη σχέση:

$$f_{W_1,W_2,...,W_n}(w_1, w_2, ..., w_n \mid X(b) - X(a) = n) = \frac{n!\prod_{i=1}^{n} \lambda(w_i)}{(\int_a^b \lambda(t)dt)^n} \qquad (2.10)$$

για $a<w_1 < w_2 < ... < w_n < b$.

2.3 Η χωρική σημειακή διαδικασία Poisson

Στην ενότητα αυτή, η χρονική διαδικασία Poisson, στην οποία έγινε εκτενής αναφορά προηγουμένως, γενικεύεται σε χώρους περισσότερων διαστάσεων. Καίτοι η ανάλυση που θα ακολουθήσει για την επονομαζόμενη χωρική διαδικασία Poisson είναι γενική, η θεμελίωση των χωροχρονικών διαδικασιών Poisson είναι άμεση αφού μπορεί να δοθεί χρονική υπόσταση σε μία από τις διαστάσεις της χωρικής διαδικασίας Poisson χωρίς απόκλιση από τη γενικότητα των ορισμών. Σε αντίθεση με την προηγούμενη ενότητα, στην παρούσα ενότητα εισάγεται απευθείας το μη ομογενές μοντέλο της χωρικής διαδικασίας Poisson. Γίνεται κατανοητό ότι το ομογενές μοντέλο αποτελεί άμεση επέκταση του μη ομογενούς μοντέλου.

Ορισμός 2.9: Μία χωρική διαδικασία καταμέτρησης στο χώρο $D \subseteq R^d$ αποτελεί στοχαστική διαδικασία $\{N(S)$ με S οποιοδήποτε φραγμένο υποσύνολο του $D\}$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $N(S) \geq 0$
2. Η $N(S)$ λαμβάνει ακέραιες τιμές και ισχύει $N(A) \leq N(B)$ όταν $A \subseteq B$.

Για $A \subseteq B$, η διαφορά $N(B) - N(A)$ δηλώνει το πλήθος των γεγονότων στο σύνολο $B - A$.

Ορισμός 2.10: Η χωρική μη ομογενής διαδικασία Poisson $\{\mathrm{X}(S)$ με S οποιοδήποτε υποσύνολο του $D\}$ με μη αρνητική ένταση $\lambda(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D$, αποτελεί χωρική διαδικασία καταμέτρησης στο χώρο $D \subseteq R^d$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\mathrm{X}(\varnothing) = 0$
2. Το πλήθος των γεγονότων σε οποιαδήποτε περιοχή είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των γεγονότων σε κάθε άλλη ξένη προς αυτήν περιοχή.
3. Για κάθε $\mathbf{x} \in D$ ισχύουν τα εξής:

- $$\Pr(N(d\mathbf{x}) = 1) = \int_{d\mathbf{x}} \lambda(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + o\left(\int_{d\mathbf{x}} \lambda(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \quad (2.11)$$

- $$\Pr(N(d\mathbf{x}) \geq 2) = o\left(\int_{d\mathbf{x}} \lambda(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \quad (2.12)$$

Ορισμός 2.11: Η χωρική μη ομογενής διαδικασία Poisson $\{\mathrm{X}(S)$ με $S \subseteq D$ οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο$\}$ με μη αρνητική ένταση $\lambda(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D$ αποτελεί χωρική διαδικασία καταμέτρησης στο χώρο $D \subseteq R^d$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\mathrm{X}(\varnothing) = 0$
2. Το πλήθος των γεγονότων σε οποιαδήποτε περιοχή είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των γεγονότων σε κάθε άλλη ξένη προς αυτήν περιοχή.

3. Το πλήθος των γεγονότων σε οποιοδήποτε σύνολο S ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\int_S \lambda(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ δηλαδή:

$$\Pr[X(S)=n]=\frac{\left(\int_S \lambda(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)^n e^{-\int_S \lambda(\mathbf{x})d\mathbf{x}}}{n!} \quad n=0,1,2,..., \tag{2.13}$$

Θεώρημα 2.12: Οι ορισμοί 2.10 και 2.11 είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 2.13: Έστω $X_1(S)$ και $X_2(S)$ ανεξάρτητες χωρικές μη ομογενείς διαδικασίες Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με εντάσεις $\lambda_1(\mathbf{x})$ και $\lambda_2(\mathbf{x})$, αντίστοιχα. Τότε, η $X(S)=X_1(S)+X_2(S)$ είναι επίσης μη ομογενής χωρική διαδικασία Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με ένταση $\lambda(\mathbf{x})=\lambda_1(\mathbf{x})+\lambda_2(\mathbf{x})$.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι γενίκευση του θεωρήματος 2.13 .

Θεώρημα 2.14: Έστω $X_1(S), X_2(S),..., X_m(S)$ ανεξάρτητες μη ομογενείς χωρικές διαδικασίες Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με εντάσεις $\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}),..., \lambda_m(\mathbf{x})$,αντίστοιχα. Τότε, η $X(S)=\sum_{j=1}^{m} X_j(S)$ είναι επίσης μη ομογενής χωρική διαδικασία Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με ένταση $\lambda(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(\mathbf{x})$.

Θεώρημα 2.15: Έστω $X(S)$ χωρική μη ομογενής διαδικασία Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με ένταση $\lambda(\mathbf{x})$ η οποία παράγει δύο διαφορετικούς τύπους γεγονότων. Ας υποτεθεί ότι τα γεγονότα του πρώτου τύπου συνθέτουν τη διαδικασία καταμέτρησης $N_1(S)$ ενώ τα γεγονότα του δεύτερου τύπου συνθέτουν τη διαδικασία καταμέτρησης $N_2(S)$. Θεωρείται επίσης ότι ένα γεγονός με πιθανότητα p είναι του πρώτου τύπου ενώ με πιθανότητα 1- p είναι του δεύτερου τύπου. Τότε:

1.Η $N_1(S)$ είναι μια χωρική μη ομογενής διαδικασία Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με ένταση $p\lambda(\mathbf{x})$.
2.Η $N_2(S)$ είναι μια χωρική μη ομογενής διαδικασία Poisson στο χώρο $D \subseteq R^d$ με ένταση $(1-p)\lambda(\mathbf{x})$.
3. Οι $N_1(S)$ και $N_2(S)$ είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 2.16: Με δεδομένο ότι n γεγονότα μιας χωρικής μη ομογενούς διαδικασίας Poisson ορισμένης στο χώρο $D \subseteq R^d$ συνέβησαν στην φραγμένη περιοχή $S \subseteq D$, η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των θέσεων των γεγονότων $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, ..., \mathbf{W}_n \in S$ δίδεται από τη σχέση:

$$f_{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, ..., \mathbf{W}_n}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \mid N(S) = n) = \frac{n! \prod_{i=1}^{n} \lambda(w_i)}{\left(\int_S \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^n} \tag{2.14}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

3.1 Διατύπωση γενικού προβλήματος μαθηματικής βελτιστοποίησης

Ένα πρόβλημα μαθηματικής βελτιστοποίησης έχει στη γενική του περίπτωση την εξής μορφή:

$$\text{minimize } f(x_1,...,x_N) \tag{3.1}$$

subject to

$$f_i(x_1,...,x_N) \le 0,\ i=1,...,L \tag{3.2}$$

$$h_i(x_1,...,x_N) = 0,\ i=1,...,M \tag{3.3}$$

Στο ανωτέρω πρόβλημα:

- Η συνάρτηση $f: R^N \to R$ αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.
- Οι συναρτήσεις $f_i: R^N \to R, i=1,...,L$ αποτελούν τις συναρτήσεις περιορισμών ανισότητας του προβλήματος.
- Οι συναρτήσεις $h_i: R^N \to R, i=1,...,M$ αποτελούν τις συναρτήσεις περιορισμών ισότητας του προβλήματος.

Στόχος της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι ο προσδιορισμός ενός διανύσματος $(x_1^*,...,x_N^*)$, το οποίο ικανοποιεί τους περιορισμούς ενώ, παράλληλα δεν υπάρχει άλλο διάνυσμα $(x_1^{**},...,x_N^{**})$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς και $f(x_1^{**},...,x_N^{**}) < f(x_1^*,...,x_N^*)$. Τότε, το διάνυσμα $(x_1^*,...,x_N^*)$ αποτελεί τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

3.2 Ειδικές κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικής βελτιστοποίησης

Με κριτήριο τη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x_1,...,x_N)$ και των συναρτήσεων περιορισμών $f_i(x_1,...,x_N), i=1,...,L$ και $h_i(x_1,...,x_N), i=1,...,M$, τα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να ενταχθούν σε διαφορετικές κατηγορίες. Ενδεικτικά, παρουσιάζονται, ορισμένες από αυτές τις κατηγορίες.

1. **Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού:**
   Είναι προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης όπου όλες οι ανωτέρω συναρτήσεις είναι γραμμικές. Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \tag{3.4}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leq 0, \; i = 1, ..., L \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} x_j = 0, \; i = 1, ..., M \tag{3.6}$$

   Για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν γνωστοί αλγόριθμοι (π.χ. αλγόριθμος Simplex)

2. **Προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού:**
   Είναι προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι τετραγωνική συνάρτηση ενώ οι συναρτήσεις περιορισμών είναι γραμμικές. Ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{3.7}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leq 0, \; i = 1, ..., L \tag{3.8}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} x_j = 0, \; i = 1, ..., M \tag{3.9}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N), \mathbf{c} = (c_1, ..., c_N)$ και $\mathbf{Q}$ συμμετρικός $N \times N$ πίνακας

   Αν ο πίνακας $\mathbf{Q}$ είναι θετικά ορισμένος, το πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού αποτελεί πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης, που αποτελεί κατηγορία προβλημάτων που θα διατυπωθεί στη συνέχεια.
   Γενίκευση των προβλημάτων τετραγωνικού προγραμματισμού αποτελούν τα προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού με τετραγωνικούς ανισοτικούς περιορισμούς. Τέτοια προβλήματα έχουν την εξής μορφή:

$$\text{minimize } \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}_0\mathbf{x}+\mathbf{q}_0^T\mathbf{x} \tag{3.10}$$

subject to

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}_i\mathbf{x}+\mathbf{q}_i^T\mathbf{x}+r_i \le 0,\ i=1,...,L \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = 0,\ i=1,...,M \tag{3.12}$$

όπου $\mathbf{x}=(x_1,...,x_N)$,

$\mathbf{q}_i = (q_{i1},...,q_{iN}), i=0,1,...,L$

$\mathbf{P}_i, i=0,1,...,L$ συμμετρικοί $N\times N$ πίνακες

3. **Προβλήματα γεωμετρικού προγραμματισμού:**
   Είναι προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης που έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\text{minimize } f(x_1,...,x_N) \tag{3.13}$$

subject to

$$f_i(x_1,...,x_N) \le 1,\ i=1,...,L \tag{3.14}$$

$$h_i(x_1,...,x_N) = 1,\ i=1,...,M \tag{3.15}$$

όπου $$f_i(x_1,...,x_N)=\sum_{k=1}^{F} c_{ik}x_1^{a_{i1k}}x_2^{a_{i2k}}\cdots x_n^{a_{iNk}}, i=1,...,L,\ a_{ijk}\in R,\ c_{ik}>0 \tag{3.16}$$

και $$h_i(x_1,...,x_N)=c_i x_1^{a_{i1}}x_2^{a_{i2}}\cdots x_n^{a_{iN}}, i=1,...,M,\ a_{ij}\in R,\ c_i>0 \tag{3.17}$$

4. **Προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης:**
   Είναι προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης που ορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (3.1), (3.2) και (3.3), η αντικειμενική συνάρτηση και οι συναρτήσεις ανισοτικών περιορισμών των οποίων είναι κυρτές, ενώ οι συναρτήσεις των περιορισμών ισότητας είναι γραμμικές . Σημειώνεται ότι κυρτή είναι μία συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει:

$$f(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) \le af(\mathbf{x})+bf(\mathbf{y})\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in R^N \tag{3.18}$$

$\forall a,b$ τέτοια ώστε $a+b=1, a\ge 0, b\ge 0$

3.3 Επίλυση προβλημάτων μαθηματικής βελτιστοποίησης

Ακολούθως, διατυπώνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε στο γενικό πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1)-(3.3), ένα σημείο $\mathbf{x}^* = (x_1^*,...,x_N^*)$

να αποτελεί τοπικό ελάχιστο. Αρχικά, διατυπώνονται ορισμένοι απαραίτητοι μαθηματικοί ορισμοί.

Ορισμός 3.1: Μια πραγματική συνάρτηση $f: A \to B$ με πεδίο ορισμού $A \subseteq R^N$ και πεδίο τιμών $B \subseteq R^N$ λέγεται συνεχής στο σημείο $\mathbf{x}$ αν $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ συνεπάγεται $f(\mathbf{x}_k) \to f(\mathbf{x})$.

Ορισμός 3.2: Η κλίση μιας πραγματικής συνάρτησης $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_N)$ συνεχώς διαφορίσιμης, δηλαδή με συνέχεις μερικές παραγώγους, είναι το διάνυσμα

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_N}\right]^T \tag{3.19}$$

Ορισμός 3.3: Αν μια πραγματική συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_N)$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης, ο πίνακας δευτέρων παραγώγων ή Hessian της f στο $\mathbf{x}$ ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_N^2} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Ορισμός 3.4: Για το πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3), το επιτρεπτό σύνολο F ορίζεται ως εξής:

$$F = \left\{ \mathbf{x} \in R^N : f_i(\mathbf{x}) \le 0, i = 1, ..., L \text{ και } h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, ..., M \right\} \tag{3.21}$$

Ορισμός 3.5: Στο πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3), ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in F$ ονομάζεται τοπικό ελάχιστο της f στο σύνολο F αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $\mathbf{x}$ για το οποίο ισχύει $\mathbf{x} \in F$ και $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\| \le \varepsilon$ όπου $\left\| \mathbf{x} \right\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$.

Ορισμός 3.6: Στο πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3), ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in F$ ονομάζεται γενικό ελάχιστο της f στο σύνολο F αν $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $\mathbf{x} \in F$.

Θεώρημα 3.1: Αν στο πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3), η $f: R^N \to R$ είναι συνεχής και το $F \subset R^N$ είναι συμπαγές, ή ισοδύναμα κλειστό και φραγμένο, σύνολο, η f έχει γενικό ελάχιστο εντός του F.

Ορισμός 3.7: Για το πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3), ένας ανισοτικός περιορισμός λέγεται ενεργός στο $\mathbf{x} \in F$ αν $f_i(\mathbf{x}) = 0$ και μη ενεργός αν $f_i(\mathbf{x}) < 0$. Το σύνολο των ενεργών περιορισμών στο σημείο $\mathbf{x} \in F$ είναι το σύνολο $J(\mathbf{x}) = \left\{ j : f_j(\mathbf{x}) \right\}$.

Ορισμός 3.8: Για το πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3), ένα σημείο $\mathbf{x} \in F$ λέγεται κανονικό σημείο των περιορισμών αν οι κλίσεις των περιορισμών ισότητας $\nabla h_i(\mathbf{x}), i = 1,...,M$ και των ενεργών περιορισμών ανισότητας $\nabla f_j(\mathbf{x}),\ j \in J(\mathbf{x})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Θεώρημα 3.2 (Συνθήκες Kuhn-Tucker): Αν το σημείο $\mathbf{x} \in R^N$ είναι τοπικό ελάχιστο του προβλήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3) και κανονικό σημείο των περιορισμών, τότε υπάρχουν $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,...,\lambda_M) \in R^M$ και $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,...,\mu_L) \in R^L$ τέτοια ώστε:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{L} \mu_j \nabla f_j(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{3.22}$$

$$h_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1,...,M \tag{3.23}$$

$$f_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ j = 1,...,L \tag{3.24}$$

$$\mu_j f_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ j = 1,...,L \tag{3.25}$$

$$\mu_j \geq 0,\ j = 1,...,L \tag{3.26}$$

Θεώρημα 3.3 (Αναγκαίες συνθήκες δεύτερης τάξης): Αν οι συναρτήσεις f, f_j, h_i είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες και το σημείο $\mathbf{x} \in R^N$ είναι τοπικό ελάχιστο του προβλήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3) και κανονικό σημείο των περιορισμών, τότε υπάρχουν $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,...,\lambda_M) \in R^M$ και $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,...,\mu_L) \in R^L$ με $\mu_i \geq 0, i = 1,...,L$ που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 3.2 και επίσης ο πίνακας $\dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}^2} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \dfrac{\partial^2 h_i(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2} + \sum_{j=1}^{L} \mu_j \dfrac{\partial^2 f_j(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2}$ είναι θετικά ημιορισμένος πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο των περιορισμών ισότητας και ενεργών περιορισμών ανισότητας στο $\mathbf{x}^*$, ή ισοδύναμα, η τετραγωνική μορφή $\mathbf{y}^T \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{y}$ είναι μη αρνητική για κάθε $\mathbf{y} \in R^N$ που ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$(\nabla h_i(\mathbf{x}^*))^T \mathbf{y} = 0, i = 1,...,M \tag{3.27}$$

$$(\nabla f_j(\mathbf{x}^*))^T \mathbf{y} = 0,\ j \in J(\mathbf{x}^*) \tag{3.28}$$

Σημειώνεται ότι

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{L} \mu_j f_j(\mathbf{x}) \tag{3.29}$$

Θεώρημα 3.4 (Ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης): Αν στο πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3)

(i) οι συναρτήσεις f, f_j, h_i είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες

(ii) το σημείο $\mathbf{x}^* \in F$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 3.2 με $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,...,\lambda_M) \in R^M$ και $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,...,\mu_L) \in R^L$

(iii) ο πίνακας $\dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}^2} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \dfrac{\partial^2 h_i(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2} + \sum_{j=1}^{L} \mu_j \dfrac{\partial^2 f_j(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^2}$

είναι θετικά ορισμένος στον υποχώρο $T = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} \in R^M : (\nabla h_i(\mathbf{x}^*))^T \mathbf{y} = 0, i = 1,...,M \\ \qquad (\nabla f_j(\mathbf{x}^*))^T \mathbf{y} = 0, \, j \in J'(\mathbf{x}^*) \end{array} \right\}$

όπου $J'(\mathbf{x}^*) = \left\{ j : f_j(\mathbf{x}^*) = 0, \mu_j > 0 \right\} \subset J(\mathbf{x}^*)$ δηλαδή ισχύει $\mathbf{y}^T \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{y} > 0$

για κάθε $\mathbf{y} \in T, \mathbf{y} \neq 0$

το σημείο $\mathbf{x}^*$ είναι τοπικό ελάχιστο του προβλήματος.

Σε προβλήματα στα οποία υπάρχει γενικό ελάχιστο, όπως αυτά που περιγράφονται στο θεώρημα 3.1, η αναζήτηση του γενικού ελαχίστου γίνεται αναλυτικά με τη χρήση των θεωρημάτων 3.2 και 3.4. Συγκεκριμένα:

1. Από την επίλυση των σχέσεων του θεωρήματος 3.2 προκύπτουν πιθανές θέσεις τοπικών ελάχιστων του προβλήματος βελτιστοποίησης.

2. Από τις ανωτέρω πιθανές θέσεις τοπικών ελαχίστων, αυτές που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 3.4 αποτελούν πραγματικές θέσεις τοπικών ελαχίστων.

3. Από τις ανωτέρω πραγματικές θέσεις τοπικών ελαχίστων, η θέση στην οποία η συνάρτηση f λαμβάνει την ελάχιστη τιμή αποτελεί την θέση γενικού ελαχίστου του προβλήματος ενώ η ελάχιστη αυτή τιμή αποτελεί το γενικό ελάχιστο του προβλήματος.

Σημειώνεται ότι, στα προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης, κάθε τοπικό ελάχιστο του προβλήματος είναι συγχρόνως και γενικό ελάχιστο.

Στα περισσότερα προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης, η αναλυτική λύση που προτάθηκε προηγουμένως είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και δεν προτιμάται στην πράξη. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται διαφορετικοί αλγόριθμοι για την επίλυση των διαφορετικών κατηγοριών προβλημάτων μαθηματικής βελτιστοποίησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ

4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω ο καρτεσιανός χώρος $[0,a]\times[0,b]$ που θα αναφέρεται στη συνέχεια ως χώρος S. Κατά το χρονικό διάστημα $[0,c]$ στο χώρο αυτό αναμένεται να εμφανισθούν κόμβοι σύμφωνα με μία χωρική (ή χωροχρονική) διαδικασία Poisson με διαστάσεις το χρόνο t καθώς και τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y. Έστω ότι η πολυδιάστατη αυτή διαδικασία Poisson χαρακτηρίζεται από ένταση $\lambda(t,x,y)$ με $t\in[0,c], x\in[0,a], y\in[0,b]$. Η εμβέλεια των κόμβων που θα εμφανισθούν σταδιακά είναι R.

Στο χώρο S θα τοποθετηθούν αρχικά M κόμβοι εμβέλειας $R'\geq R$, στις θέσεις p_i με $i\in N$ και $1\leq i\leq M$. Οι M αυτοί κόμβοι έχουν κρίσιμο ρόλο στη λειτουργία του αυτοοργανούμενου δικτύου και προς τούτο διαθέτουν αυξημένη υπολογιστική δυνατότητα σε σχέση με τους κόμβους που θα εμφανισθούν αργότερα. Οι M αυτοί κόμβοι που θα αναφέρονται και ως ισχυροί κόμβοι, θα τοποθετηθούν έτσι ώστε:

- Η εμβέλειά τους να καλύπτει όλο το χώρο, ισοδύναμα, κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος να βρίσκεται στην εμβέλεια ενός τουλάχιστον κόμβου από τους M ισχυρούς κόμβους.
- Κάθε κόμβος από τους M να βρίσκεται στην εμβέλεια τουλάχιστον ενός άλλου κόμβου από τους M, ισοδύναμα, οι ισχυροί M κόμβοι να συγκροτούν ένα συνεκτικό δίκτυο.
- Το πλήθος των ισχυρών κόμβων να θεωρείται το ελάχιστο δυνατό. Αυτό είναι επιθυμητό διότι όπως, αναφέρθηκε προηγουμένως, οι κόμβοι αυτοί έχουν αυξημένες δυνατότητες και, ως εκ τούτου, είναι μεγαλύτερου κόστους.

Πρέπει, επίσης, να τονισθεί, ότι η ένταση της χωροχρονικής διαδικασίας Poisson η οποία αναμένεται στο χώρο S είναι γνωστή στους ισχυρούς κόμβους.

Στην ενότητα 4.2 προτείνεται ένας αλγόριθμος για την τοποθέτηση στον χώρο S των M αρχικών κόμβων.

Ως πόρος σε ένα ad-hoc δίκτυο νοείται, συνήθως, η χρησιμοποίηση συγκεκριμένου εύρους ζώνης για συγκεκριμένη χρονική διάρκεια

Κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος απαιτεί για τη λειτουργία του A πόρους ενώ έκαστος των M αρχικών κόμβων απαιτεί B πόρους. Οι συνολικοί διαθέσιμοι πόροι στην αρχή του προβλήματος είναι $N+M*B$. Το N επιλέγεται έτσι ώστε (i) να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του A και (ii) να ισχύει

$\Pr\{$κόμβοι που θα εμφανισθούν στο χώρο S στο χρονικό παράθυρο [0,c] $> N/A\} \leq P_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{j=\frac{N}{A}} \left(\int_{S,c} \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^n e^{-\int_{S,c} \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \leq P_0 \qquad (4.1)$$

$$\text{όπου } \int_{S,c} \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \lambda(t,x,y) dt dx dy \qquad (4.2)$$

Οι $M*B$ πόροι κατανέμονται ισομερώς στους M ισχυρούς κόμβους, δηλαδή έκαστος εξ αυτών λαμβάνει B πόρους προκειμένου να καλύψει τις ιδίες απαιτήσεις του. Οι υπόλοιποι N πόροι αποδίδονται επίσης στους M ισχυρούς κόμβους προκειμένου, στη συνέχεια, αυτοί να τους κατανείμουν στους νεοεισερχόμενους κόμβους. Συμβολίζονται με m_i, $1 \leq i \leq M$, οι πρόσθετοι πόροι που λαμβάνει έκαστος των M ισχυρών κόμβων. Επομένως, έκαστος των M ισχυρών κόμβων διαθέτει $B + m_i$ πόρους. Επομένως, πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- $m_i > 0$ για κάθε $1 \leq i \leq M$ αφού ισχυρός κόμβος j με $m_j = 0$ δεν έχει κάποια χρησιμότητα για το δίκτυο.
- $\sum_{i=1}^{i=M} m_i = N$ αφού δεν υπάρχει λόγος να υπάρξουν αχρησιμοποίητοι πόροι.

Η επιλογή των m_i είναι καθοριστική για τη λειτουργία του δικτύου: Οι N πόροι πρέπει να τοποθετηθούν όσο το δυνατό πλησιέστερα στις περιοχές όπου αναμένεται να αποδοθούν. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, κακή κατανομή των N πόρων στους M ισχυρούς κόμβους θα οδηγήσει τους νεοεισερχόμενους κόμβους να αναζητήσουν κλάσμα των A πόρων σε κόμβους μακριά από την εμβέλεια τους, χαρακτηριστικό που είναι ανεπιθύμητο. Στην ενότητα 4.3 προτείνεται ένας αλγόριθμος για την κατάλληλη επιλογή των m_i.

Η τοποθέτηση των ισχυρών κόμβων στο χώρο S και η κατανομή των διαθέσιμων πόρων σε αυτούς αποτελούν τη φάση έναρξης του προβλήματος. Στη συνέχεια, ακολουθεί το κυρίως μέρος της διαδικασίας, κατά το οποίο κόμβοι εμφανίζονται στο χώρο S ακολουθώντας τη χωροχρονική διαδικασία Poisson που αναφέρθηκε προηγουμένως, ζητώντας από τους προϋπάρχοντες κόμβους στο χώρο να τους παραχωρήσουν πόρους. Ιδιαίτερα σημαντικός ρόλος έχει αποδοθεί στους M αρχικούς κόμβους, οι οποίοι λόγω αυξημένης υπολογιστικής ικανότητας αποφασίζουν ποιοι κόμβοι θα είναι αυτοί που θα παραχωρήσουν πόρους (και πόσους) σε κάθε νεοεισερχόμενο κόμβο.

Κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος μπορεί να λάβει A ή, ενδεχομένως, περισσότερους πόρους, εφόσον κριθεί σκόπιμο, προκειμένου, στη συνέχεια, να διαμοιράσει τους πλεονάζοντες πόρους σε άλλους κόμβους που θα εμφανισθούν αργότερα.

Η στρατηγική που ακολουθείται για την αναζήτηση των A πόρων είναι κλιμακούμενη και δεν επιβαρύνει το αυτοοργανούμενο δίκτυο σε υπερβολικό βαθμό:

Αρχικά, γίνεται αναζήτηση των πόρων από κόμβους κοντά στο νεοεισερχόμενο κόμβο. Εφόσον οι πόροι δεν εξευρίσκονται, η αναζήτηση προχωρεί περαιτέρω στο δίκτυο. Η στρατηγική αυτή περιγράφεται με λεπτομέρεια στην ενότητα 4.4. Συγκεκριμένα, στην υποενότητα 4.4.1 μελετάται η περίπτωση κατά την οποία ο νεοεισερχόμενος κόμβος επιτυγχάνει να εξεύρει τους πόρους τους οποίους χρειάζεται σε ένα βήμα. Στην υποενότητα 4.4.2 μελετάται η περίπτωση όπου η εξεύρεση των απαιτούμενων πόρων απαιτεί περισσότερα βήματα.

4.2 Τοποθέτηση των Μ ισχυρών κόμβων

Το πρώτο βήμα, λοιπόν, είναι η τοποθέτηση των M ισχυρών κόμβων στο χώρο S ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα, δηλαδή κάλυψη ολόκληρου του χώρου S, συνεκτικότητα του δικτύου, και ελαχιστοποίηση κατά το δυνατό του πλήθους των ισχυρών κόμβων.
Κατά την λύση του προβλήματος, κάθε κόμβος με εμβέλεια R' μπορεί να περιγραφεί από ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας R' με κέντρο τη θέση του κόμβου. Καταρχήν, δίδονται ορισμένοι ορισμοί που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι:

***Ορισμός 4.1*:** Ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας r ονομάζεται $r-$δίσκος.

***Ορισμός 4.2*:** Δύο κυκλικοί δίσκοι θεωρούνται συνδεδεμένοι αν το κέντρο του καθενός ανήκει στον άλλο.

Στη συνέχεια ένα σύνολο κυκλικών δίσκων τοποθετημένων στο επίπεδο θα περιγράφεται με τη βοήθεια γράφου. Υπενθυμίζεται ότι ένας γράφος αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών που συνδέονται με ακμές.

***Ορισμός 4.3*:** Γράφος ενός οποιουδήποτε πλήθους κυκλικών δίσκων τοποθετημένων στο ίδιο επίπεδο θα ονομάζεται ένας γράφος που διαθέτει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Έχει για κορυφές τα κέντρα των κυκλικών δίσκων.
- Ακμές υπάρχουν μονάχα μεταξύ των κορυφών του γράφου που αποτελούν κέντρα συνδεδεμένων κυκλικών δίσκων.

Μονοπάτι σε ένα γράφο ονομάζεται κάθε ακολουθία κορυφών της οποίας διαδοχικά στοιχεία, δηλαδή διαδοχικές κορυφές, συνδέονται μεταξύ τους με ακμή.
Συνδεδεμένος ονομάζεται ένας γράφος όταν για κάθε ζεύγος κορυφών του, υπάρχει ένα μονοπάτι που οδηγεί από την μία κορυφή στην άλλη.

Ορισμός 4.4: Ένα σύνολο κυκλικών δίσκων τοποθετημένων στο ίδιο επίπεδο ονομάζεται συνδεδεμένο αν ο γράφος που αντιστοιχεί σε αυτούς τους κυκλικούς δίσκους είναι συνδεδεμένος.

Με βάση τους ανωτέρω ορισμούς, το προς επίλυση πρόβλημα μετασχηματίζεται ισοδυνάμως ως εξής:

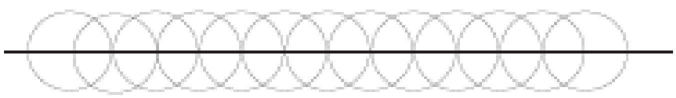
Ένας επίπεδος χώρος σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις a και b είναι επιθυμητό να καλυφθεί εξ ολοκλήρου από $R'-$δίσκους, δηλαδή $r-$δίσκους με r ίσο με την εμβέλεια των ισχυρών κόμβων R', κατά τρόπο ώστε:

1. Να ελαχιστοποιείται το πλήθος των κυκλικών δίσκων.
2. Οι κυκλικοί δίσκοι να είναι συνδεδεμένοι.

Πριν παρουσιασθεί ο τρόπος με τον οποίο θα επιτευχθεί το ζητούμενο, δίδεται ένας ακόμα ορισμός που θα χρησιμεύσει στη συνέχεια.

Ορισμός 4.5: Ως $r-$αλυσίδα ορίζεται μια σειρά από $r-$δίσκους των οποίων τα κέντρα βρίσκονται επί ευθείας με απόσταση μεταξύ των κέντρων διαδοχικών κυκλικών δίσκων ίση με r.

Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται μια οριζόντια $r-$αλυσίδα.



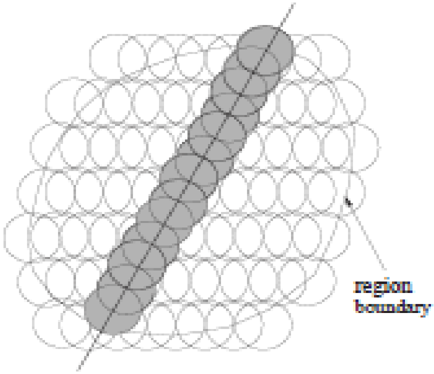
Σχήμα 4.1: Οριζόντια r-αλυσίδα

Προς επίλυση του ανωτέρω προβλήματος, το πρώτο βήμα είναι να καλυφθεί ολόκληρος ο χώρος S με οριζόντιες $R'-$αλυσίδες. Αυτό υλοποιείται ως εξής:

- Για κάθε άρτιο αριθμό k, τοποθετείται μια $R'-$αλυσίδα παράλληλη στον x-άξονα έτσι ώστε το σημείο $(0, k(\sqrt{3}/2+1)R')$ να είναι κέντρο ενός $R'-$δίσκου ο οποίος ανήκει στην $R'-$αλυσίδα.

- Για κάθε περιττό αριθμό k, τοποθετείται μια $R'-$αλυσίδα παράλληλη στον x-άξονα έτσι ώστε το σημείο $(R'/2, k(\sqrt{3}/2+1)R')$ να είναι κέντρο ενός $R'-$δίσκου ο οποίος ανήκει στην $R'-$αλυσίδα.

Στη συνέχεια, μία ακόμα $R'-$αλυσίδα τοποθετείται έτσι ώστε να τέμνει όλες τις $R'-$αλυσίδες τμήμα των οποίων περιέχεται στο χώρο S. Αυτό είναι πάντοτε εφικτό εφόσον ο χώρος S είναι κυρτός. Η γεωμετρία για τυχαίο κυρτό χώρο S φαίνεται στο Σχήμα 4.2 .



Σχήμα 4.2: Συνδεδεμένη κάλυψη τυχαίου κυρτού χώρου S από r-δίσκους

Το ακόλουθο θεώρημα [10] αποδεικνύει ότι στη συγκεκριμένη συνδεδεμένη κάλυψη του χώρου S από $R'-$δίσκους, το πλήθος των $R'-$δίσκων φθάνει κοντά στο ελάχιστο δυνατό πλήθος $R'-$δίσκων που μπορεί να επιτύχει συνδεδεμένη κάλυψη του χώρου S.

Θεώρημα 4.1**:** Έστω S φραγμένη, κυρτή περιοχή του χώρου με περίμετρο L και εμβαδό A (με $A \geq \pi r^2$). Είναι επιθυμητό η περιοχή S να καλυφθεί ολόκληρη από $r-$δίσκους οι οποίοι θα συγκροτούν ένα συνδεδεμένο σύνολο από κυκλικούς δίσκους. Έστω ότι με τον αλγόριθμο που παρουσιάσθηκε προηγουμένως απαιτούνται n κυκλικοί δίσκοι για το σκοπό αυτό, ενώ το ελάχιστο πλήθος δίσκων είναι n_{opt}. Τότε, ισχύει η σχέση:

$$n / n_{opt} \leq 2.693\left(1+2.243\left(Lr/A\right)\right) \qquad (4.3)$$

Για χώρο S σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου και κόμβους εμβέλειας R' που ενδιαφέρουν στα πλαίσια της εργασίας, η σχέση (4.1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{n}{n_{opt}} \leq 2.693\left(1+4.486\left(\left(\left(a+b\right)R'\right)/(ab)\right)\right) \qquad (4.4)$$

.

4.3 Κατανομή πόρων στους M ισχυρούς κόμβους

Στην προηγούμενη ενότητα περιγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο οι M κόμβοι θα τοποθετηθούν στο χώρο S. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο οι N πόροι θα κατανεμηθούν στους M αρχικούς κόμβους. Πριν παρουσιασθεί ο τρόπος της κατανομής αυτής, αναλύεται η έννοια της καλά υποστηριζόμενης κατανομής Poisson από συγκεκριμένη διάταξη κόμβων στον χώρο S και συγκεκριμένη κατανομή πόρων σε αυτούς.

4.3.1 Η καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson

Βοηθητικό απλοποιημένο πρόβλημα: Έστω χώρος S και M αρχικοί κόμβοι τοποθετημένοι στις θέσεις $p_i,\ i=1,...,M$, οι οποίες προσδιορίσθηκαν κατά το προηγούμενο βήμα σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφηκε στην ενότητα 4.2 . Θεωρείται μια τυχαία κατανομή των N πόρων στους M κόμβους $m_i, i=1,...,M$, για την οποία, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 4.1 πρέπει να ισχύουν $m_i > 0, 1 \le i \le M$ και $\sum_{i=1}^{i=M} m_i = N$.

Ας υποτεθεί ότι εμφανίζονται στο χώρο S κόμβοι ακολουθώντας μία χωρική διαδικασία Poisson δύο διαστάσεων. Κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος λαμβάνει ακριβώς A πόρους από κάποιον από τους M ισχυρούς κόμβους με τους οποίους μπορεί να επικοινωνήσει. Στην περίπτωση όπου ένας νεοεισερχόμενος κόμβος είναι σε θέση να επικοινωνήσει με περισσότερους από ένα από τους M κόμβους, επιλέγει με τυχαίο τρόπο ένα από αυτούς.

Καίτοι ο ανωτέρω αλγόριθμος κατανομής πόρων αποτελεί μια απλοποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου που θα περιγραφεί στις επόμενες ενότητες, θα βοηθήσει στην ανάπτυξη ενός κατάλληλου μοντέλου κατανομής των N πόρων στους M κόμβους έτσι ώστε οι πόροι να τοποθετηθούν γεωγραφικά όσο το δυνατό πλησιέστερα στις περιοχές του χώρου S όπου θα ζητηθούν. Στη συνέχεια, το μοντέλο αυτό θα χρησιμοποιηθεί και στον προτεινόμενο αλγόριθμο.

Υπενθυμίζεται ότι, με βάση τον ορισμό 2.11, σε ένα οποιοδήποτε χωρίο F που ανήκει στο χώρο S ($F \subseteq S$) θα εμφανιστούν κατά μέσο όρο $\int_F \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ κόμβοι. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό και αποτελεί τη βάση όσων θα προταθούν στη συνέχεια.

Το ερώτημα που σχετίζεται με το προηγούμενο πρόβλημα είναι το ποιά είναι η κατάλληλη ένταση $\lambda'(x,y)$ της δισδιάστατης χωρικής διαδικασίας Poisson με $\int_S \lambda'(x,y)dxdy = N/A$ προκειμένου όλοι οι κόμβοι που θα εμφανισθούν κατά μέσο όρο στο χώρο S να εξυπηρετηθούν. Η συνθήκη $\int_S \lambda'(x,y)dxdy = N/A$ εκφράζει ότι το συνολικό πλήθος των διαθέσιμων πόρων θα επαρκεί κατά μέσο όρο για την κάλυψη των αναγκών των κόμβων που θα εμφανισθούν στο χώρο.

Η απάντηση στο ανωτέρω ερώτημα δεν είναι φυσικά μοναδική, καθώς για το ανωτέρω ζήτημα μπορεί να δοθούν διαφορετικές προσεγγίσεις. Οι διαφορετικές αυτές χωρικές διαδικασίες Poisson με ένταση τη συνάρτηση $\lambda'(x,y)$ θα ονομάζονται καλά υποστηριζόμενες κατανομές Poisson.

Επειδή η συνάρτηση $\lambda'(x,y)$ εξαρτάται τόσο από τις θέσεις p_i όσο και από τους πόρους m_i των αρχικών κόμβων, στην ουσία αποτελεί συνάρτηση και αυτών δηλαδή $\lambda'(x,y) = \lambda'(x,y;p_1,...,p_M,m_1,...,m_M)$.

Πριν από τη διατύπωση της προτεινόμενης καλά υποστηριζόμενης κατανομής Poisson, παρατίθενται ορισμένοι απαραίτητοι μαθηματικοί ορισμοί.

***Ορισμός 4.6*:** Ορίζεται ως μέτρο στο χώρο R^N μια απεικόνιση της μορφής

$$\|\bullet\| : R^N \to R, \quad \mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$$

η οποία για κάθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^N$ και $\lambda \in R$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$1. \|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ και } \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.5}$$

$$2. \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| \tag{4.6}$$

$$3. \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \tag{4.7}$$

***Θεώρημα 4.2*:** Στο χώρο R^N έκαστη των κατωτέρων ισοτήτων ορίζει ένα μέτρο:

$$N_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

$$N_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_N| = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \tag{4.9}$$

$$N_3(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_3 = \max\left(|x_1|,|x_2|,...,|x_N|\right) = \max_{1\leq i\leq N} |x_i| \tag{4.10}$$

***Ορισμός 4.7*:** Το σύνολο $B(\xi,\rho) = \left\{\mathbf{x} \in R^N : \|\mathbf{x}-\xi\| \leq \rho\right\}$, όπου το εμφανιζόμενο μέτρο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από αυτά του θεωρήματος 4.2, ονομάζεται ανοικτή σφαίρα κέντρου ξ και ακτίνας ρ.

***Ορισμός 4.8*:** Ένα υποσύνολο A του R^N λέγεται ανοικτό σύνολο, εφόσον για κάθε $\xi \in A$, υπάρχει ανοικτή σφαίρα $B(\xi,\rho), \rho > 0$ με $B(\xi,\rho) \subseteq A$.

***Ορισμός 4.9*: **Ένα υποσύνολο A του R^N λέγεται συνεκτικό αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά ανοικτά σύνολα U,V τέτοια ώστε

$$A \subseteq U \cup V, A \cap U \neq \varnothing, A \cap V \neq \varnothing \text{ και } (A \cap U) \cap (A \cap V) = \varnothing \tag{4.11}$$

***Ορισμός 4.10*:** Στην περιοχή S διακρίνονται οι υποπεριοχές $S_i, 1 \leq i \leq L$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

- Κάθε περιοχή S_i αποτελεί ένα συνεκτικό υποσύνολο του R^2.
- Όλα τα σημεία μιας περιοχής S_i βρίσκονται στην εμβέλεια των ίδιων ακριβώς ισχυρών κόμβων.

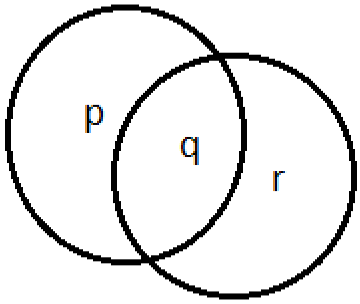
Έτσι, κάθε υποπεριοχή S_i χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα M διαστάσεων που συμβολίζεται ως $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{iM})$. Το διάνυσμα $\mathbf{s}_i$ έχει 1 στη θέση j εφόσον η περιοχή S_i βρίσκεται στην εμβέλεια του $j-$οστου αρχικού κόμβου· διαφορετικά έχει μηδέν.

***Ορισμός 4.11 (Προτεινόμενη καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson)*:** Μία καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson στο χώρο S ορίζεται σε έκαστη των υποπεριοχών S_i ως εξής:

$$\lambda'(x,y;p_1,...,p_M,m_1,...,m_M) = \sum_{\{1\leq j\leq M \text{ με } s_{ij}=1\}} \frac{m_j f(x,y)}{A \sum_{\{1\leq t\leq L, s_{tj}=1\}} \left(\int_{S_t} f(x,y)dxdy \right)} \tag{4.12}$$

όπου A οι πόροι τους οποίους απαιτεί για την λειτουργία του κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος και $f(x,y)$ πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται επίσης στο χώρο S

Προς διευκρίνιση του πολύπλοκου στη διατύπωση ορισμού 4.11, ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα το οποίο θα αποσαφηνίσει τον ορισμό αυτό. Ας υποτεθεί ότι ο χώρος S είναι ο χώρος $p \cup q \cup r$ του Σχήματος 4.3. Τα κέντρα των δύο κυκλικών δίσκων (με ακτίνα R') αντιστοιχούν στους δύο κόμβους που είναι τοποθετημένοι στο χώρο ενώ οι κυκλικοί δίσκοι αντιστοιχούν στις εμβέλειες των δύο κόμβων. Έστω, επίσης, ότι ο κόμβος με εμβέλεια το χώρο $p \cup q$ διαθέτει k_1 πόρους ενώ ο κόμβος με εμβέλεια το χώρο $q \cup r$ διαθέτει k_2 πόρους. Επισημαίνεται ότι με βάση τον ορισμό 4.10, το σύνορο μεταξύ των περιοχών p και q καθώς και το σύνορο μεταξύ των περιοχών q και r ανήκουν στην περιοχή q.



Σχήμα 4.3: Τοπολογία παραδείγματος

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.11 η ένταση της καλά υποστηριζόμενης Poisson είναι:

Περιοχή p: $\lambda'(x,y) = \dfrac{k_1 f(x,y)}{A \int\limits_{p \cup q} f(x,y)dxdy}$

Περιοχή q: $\lambda'(x,y) = \dfrac{k_1 f(x,y)}{A \int\limits_{p \cup q} f(x,y)dxdy} + \dfrac{k_2 f(x,y)}{A \int\limits_{q \cup r} f(x,y)dxdy}$

Περιοχή r: $\lambda'(x,y) = \dfrac{k_2 f(x,y)}{A \int\limits_{q \cup r} f(x,y)dxdy}$

Η συνάρτηση $f(x,y)$ προσφέρει τη δυνατότητα να δοθεί βάρος στα διάφορα σημεία του χώρου γύρω από ένα κόμβο. Για τις ανάγκες του απλοποιημένου βοηθητικού προβλήματος αυτό δεν είναι απαραίτητο, οπότε μπορεί να τεθεί απλά $f(x,y) = 1$.
Ορισμένες παρατηρήσεις για τη συγκεκριμένη καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson:

1. Εύκολα επαληθεύεται ότι ικανοποιείται η συνθήκη $\int\limits_S \lambda'(x,y)dxdy = N/A$.

2. Είναι η απλούστερη επιλογή. Κάθε κόμβος ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους διασπείρει τους πόρους που διαθέτει σε όλη την έκταση της εμβέλειάς του. Η διασπορά είναι ομοιόμορφη, όταν $\lambda(x,y) = c \in R$ ή ανομοιόμορφη όταν ως $\lambda(x,y)$ επιλεγεί μια σύνθετη συνάρτηση.

3. Περιοχές που βρίσκονται στην εμβέλεια περισσότερων του ενός κόμβων ευνοούνται από τη συγκεκριμένη καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson σε σχέση με περιοχές που βρίσκονται στην εμβέλεια ενός μόνο κόμβου. Αυτό

είναι συνέπεια του ότι κάθε κόμβος διασπείρει τους πόρους του ανεξάρτητα από τους άλλους κόμβους.

4. Μία περισσότερο δίκαιη καλά υποστηριζόμενη κατανομή θα ήταν καταλληλότερη για ένα αλγόριθμο, σύμφωνα με τον οποίο νεοεισερχόμενοι κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται στην εμβέλεια περισσότερων του ενός κόμβων αποφάσιζαν με έναν καταλληλότερο αλλά περισσότερο πολύπλοκο τρόπο σε ποιόν ισχυρό κόμβο θα απευθυνθούν για να εξεύρουν τους απαιτούμενους πόρους. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν συμβαίνει ούτε στο συγκεκριμένο απλοποιημένο πρόβλημα, ούτε στον αλγόριθμο που θα καταστρωθεί στη συνέχεια.

4.3.2 Η κατανομή των Ν πόρων στους Μ κόμβους.

Στη συνέχεια, αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο οι N πόροι θα κατανεμηθούν στους M ισχυρούς κόμβους οι οποίοι έχουν τοποθετηθεί στο χώρο S. Υπενθυμίζεται ότι στο χώρο S θα εμφανισθούν κόμβοι ακολουθώντας μια χωροχρονική διαδικασία Poisson τριών διαστάσεων (με διαστάσεις το χρόνο t και τις δύο καρτεσιανές συντεταγμένες x, y), η οποία χαρακτηρίζεται από ένταση $\lambda(t,x,y)$ με $t \in [0,c], x \in [0,a], y \in [0,b]$. Ολοκληρώνοντας την ένταση $\lambda(t,x,y)$ ως προς t δημιουργείται μία χωρική κατανομή με ένταση $\bar{\lambda}^t = \int_0^c \lambda(t,x,y)dt$ η οποία δεν έχει χρονική διάσταση και στην οποία, σύμφωνα με τον ορισμό 2.11, η επίδραση του χρόνου έχει συμπεριληφθεί κατά μέσο τρόπο. Η χωρική διαδικασία $\bar{\lambda}^t(x,y)$ αποτελεί ουσιαστικά τη χωρική εκδοχή της πραγματικής χωροχρονικής διαδικασίας Poisson. Στόχος είναι η επιλογή των $m_i, 1 \le i \le M$, ώστε η καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson από τη συγκεκριμένη διάταξη κόμβων στο χώρο S και τη συγκεκριμένη κατανομή πόρων σε αυτούς να πλησιάσει όσο το δυνατό περισσότερο τη διαδικασία $\bar{\lambda}^t(x,y)$. Τότε, η ίδια η $\bar{\lambda}^t(x,y)$ (άρα και η πραγματική κατανομή Poisson) θα υποστηρίζεται αρκετά καλά από τη συγκεκριμένη τοποθέτηση των κόμβων στον χώρο αλλά και την κατανομή των πόρων στους κόμβους. Ως συνάρτηση $f(x,y)$ στον ορισμό 4.11 της καλά υποστηριζόμενης κατανομής χρησιμοποιείται η $\bar{\lambda}^t$ δηλαδή θεωρείται ότι $f(x,y) = \bar{\lambda}^t = \int_0^c \lambda(t,x,y)dt$. Κατ' αυτό τον τρόπο, η καλά υποστηριζόμενη κατανομή διασπείρει με καλύτερη προσέγγιση τους πόρους γύρω από κάθε κόμβο. Αυτό θα της επιτρέψει να προσεγγίσει ευκολότερα την κατανομή $\bar{\lambda}^t$. Έτσι το πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

$$\min_{m_1,m_2,\ldots,m_M} \sum_{i=1}^{L} \int_{S_i} \left(\lambda'(x,y;p_1,\ldots,p_M,m_1,\ldots,m_M) - \bar{\lambda}^t(x,y) \right)^2 dxdy \quad (4.13)$$

$$\text{με} \sum_{i=1}^{i=M} m_i = N \quad (4.14)$$

$$m_i > 0,\ 1 \le i \le M \quad (4.15)$$

4.4 Κατάστρωση του επαναληπτικού τμήματος του αλγορίθμου

4.4.1 Οι ζητούμενοι πόροι εξευρίσκονται σε ένα βήμα

Στις ενότητες 4.2 και 4.3 οι αρχικοί κόμβοι τοποθετήθηκαν στο χώρο S και, στη συνέχεια, οι N διαθέσιμοι πόροι κατανεμήθηκαν σε αυτούς. Εφόσον, λοιπόν, η εναρκτήρια φάση του προβλήματος ολοκληρώθηκε, το επόμενο βήμα είναι η διατύπωση του επαναληπτικού τμήματος του προτεινόμενου αλγορίθμου κατανομής πόρων. Για λόγους καλύτερης οργάνωσης, αυτή γίνεται σε δύο υποενότητες: Στην παρούσα υποενότητα, περιγράφεται η περίπτωση κατά την οποία ο νεοεισερχόμενος κόμβος επιτυγχάνει να εξεύρει τους ζητούμενους πόρους σε ένα βήμα. Στην επόμενη υποενότητα, αναλύονται οι περιπτώσεις όπου, προκειμένου να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις σε πόρους ενός νεοεισερχόμενου κόμβου, χρειάζονται περισσότερα βήματα.

Ας υποτεθεί ότι στο χώρο S υπάρχουν κάποια χρονική στιγμή $M+V$ κόμβοι, όπου M οι ισχυροί κόμβοι και V οι κόμβοι οι οποίοι εμφανίσθηκαν στη συνέχεια και έλαβαν πόρους με $V \ge 0$. Έστω ότι οι θέσεις των V κόμβων συμβολίζονται με $p_{M+1},\ldots,p_{M+V}$ και ας υποτεθεί ότι εμφανίζεται νέος κόμβος στη θέση p_{M+V+1} που βρίσκεται στην εμβέλεια K κόμβων. Υπενθυμίζεται ότι η πλήρης κάλυψη της περιοχής S από τους ισχυρούς κόμβους εξασφαλίζει ότι $K \ge 1$. Οι K αυτοί κόμβοι θα αποκαλούνται και γείτονες του νεοεισερχόμενου κόμβου. Επίσης μπορεί, να γραφεί $K = K_1 + K_2$ όπου K_1 το πλήθος των ισχυρών κόμβων που βρίσκονται στην εμβέλεια του νεοεισερχόμενου κόμβου και K_2 το πλήθος των μη ισχυρών κόμβων που βρίσκονται στην εμβέλεια του νεοεισερχόμενου κόμβου.

Τα προτεινόμενα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

1. Αρχικά, κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος αποστέλλει ένα μήνυμα γνωριμίας το οποίο λαμβάνουν οι K γείτονες του.

2. Οι γείτονες του απαντούν στο νεοεισερχόμενο κόμβο, ενημερώνοντάς τον για τη θέση τους στο χώρο αλλά και το πλήθος των διαθέσιμων πόρων τους. Ως διαθέσιμοι πόροι ενός κόμβου ορίζονται:

- Προκειμένου για κάποιον από τους M ισχυρούς κόμβους, οι συνολικοί πόροι ελαττωμένοι κατά τους B πόρους τους οποίους χρειάζεται για ιδία χρήση.
- Προκειμένου περί κάποιου από τους V ήδη νεοεισελθόντες κόμβους, οι συνολικοί πόροι ελαττωμένοι κατά τους A πόρους τους οποίους χρειάζεται για ιδία χρήση.

3. Στη συνέχεια, ο νεοεισερχόμενος κόμβος επιλέγει με τυχαίο τρόπο κάποιον από τους K_1 ισχυρούς κόμβους που βρίσκονται στην εμβέλειά του. Αν $K_1 = 1$, επιλέγει το μοναδικό ισχυρό κόμβο που είναι στην εμβέλεια του. Ακολούθως, αποστέλλει στον ισχυρό κόμβο που επέλεξε τις πληροφορίες που συνέλεξε από τους γείτονές του κατά το προηγούμενο βήμα. Από τη στιγμή αυτή, ο νεοεισερχόμενος κόμβος γίνεται εξαρτημένος από τον ισχυρό κόμβο που επέλεξε και που θα συμβολίζεται με I_0. Κάθε στιγμή οι ισχυροί κόμβοι γνωρίζουν ακριβώς τη θέση και τους διαθέσιμους πόρους των εξαρτημένων τους κόμβων. Αυτό επιτυγχάνεται με το βήμα 7 του αλγορίθμου που θα περιγραφεί στη συνέχεια. Ο ισχυρός κόμβος λαμβάνει τις πληροφορίες που του έστειλε ο νεοεισερχόμενος κόμβος διαθέτοντας, πλέον, την εξής γνώση: Εκτός από τη θέση και τους διαθέσιμους πόρους των εξαρτημένων του κόμβων τα οποία ήδη γνωρίζει, γνωρίζει, προσωρινά, τη θέση και τους διαθέσιμους πόρους των γειτόνων του νεοεισερχόμενου κόμβου. Με βάση τη συνολική πληροφορία που διαθέτει, καλείται να αποφασίσει από ποιούς κόμβους ο νεοεισερχόμενος κόμβος θα λάβει τους πόρους που χρειάζεται. Αν οι διαθέσιμοι πόροι που διαπιστώνει ο ισχυρός κόμβος ότι διαθέτουν ο ίδιος, οι εξαρτημένοι του κόμβοι και οι γείτονες του νεοεισερχόμενου κόμβου είναι C_0 ίσο με A, εκτελείται το βήμα 4 του αλγορίθμου. Στην περίπτωση κατά την οποία $C_0 > A$, εκτελείται το βήμα 5 του αλγορίθμου. Η περίπτωση κατά την οποία $C_0 < A$ εξετάζεται στην επόμενη υποενότητα.

4. Στην περίπτωση κατά την οποία $C_0 = A$, ο ισχυρός κόμβος δεσμεύει όλους τους πόρους που διαπιστώνει ότι είναι διαθέσιμοι προκειμένου να εξυπηρετήσει το νεοεισερχόμενο κόμβο. Στη συνέχεια, εκτελείται το βήμα 6 του αλγορίθμου.

5. Στην περίπτωση όπου $C_0 > A$, η απόφαση δέσμευσης των ζητούμενων πόρων λαμβάνεται με κριτήριο αντίστοιχο με αυτό της ενότητας 4.3 που αφορούσε την κατανομή των N πόρων στους M ισχυρούς κόμβους.
   Κατά τη βελτιστοποίηση της ενότητας 4.3, η τοπολογία του προβλήματος σχετιζόταν με το χώρο S και τους M αρχικούς κόμβους τοποθετημένους σε συγκεκριμένες θέσεις. Η βελτιστοποίηση την οποία πραγματοποιεί στο σημείο αυτό ο ισχυρός κόμβος που επιλέχθηκε από το νεοεισερχόμενο κόμβο, έχει

περισσότερο εντοπισμένο χαρακτήρα σε σχέση με την προηγούμενη βελτιστοποίηση. Ας υποτεθεί ότι $p'_0, p'_1, ..., p'_T$ είναι οι θέσεις των κόμβων οι οποίοι ή βρίσκονται στην εμβέλεια του νεοεισερχόμενου κόμβου ή αποτελούν υποτελείς κόμβους του ισχυρού κόμβου ο οποίος αναλαμβάνει να πραγματοποιήσει τη βελτιστοποίηση (ο δείκτης 0 θα χρησιμοποιείται γενικά για το νεοεισερχόμενο κόμβο). Έστω, επίσης, $R'_0, R'_1, ..., R'_T$, οι αντίστοιχοι κυκλικοί δίσκοι που αντιπροσωπεύουν τις εμβέλειες των κόμβων αυτών. Ο χώρος στον οποίο πραγματοποιείται η βελτιστοποίηση είναι ο χώρος $(\bigcup_{i=0}^{T} R'_i) \cap S$. Στο χώρο αυτό, ο ισχυρός κόμβος γνωρίζει την ύπαρξη μόνο των $T+1$ προαναφερθέντων κόμβων, αγνοώντας οποιοδήποτε άλλο κόμβο. Οπότε η τοπολογία του προβλήματος είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της ενότητας 4.3 με τις αντιστοιχίες που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1.

	Πρόβλημα ενότητας 4.3	**Παρόν πρόβλημα**
Χώρος	S	$(\bigcup_{i=0}^{T} R'_i) \cap S$
Θέσεις Κόμβων	$p_i, 1 \le i \le M$	$p'_0, p'_1, ..., p'_T$

Πίνακας 4.1: Σύγκριση των τοπολογιών των βελτιστοποιήσεων (i) της ενότητας 4.3 και (ii) της υποενότητας 4.4.1

Η περιοχή $(\bigcup_{i=0}^{T} R'_i) \cap S$ διαμερίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 4.10 ενώ η καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson ορίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 4.11.
Στη συνέχεια, διατυπώνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης που καλείται να επιλύσει ο ισχυρός κόμβος που επιλέχθηκε από το νεοεισερχόμενο κόμβο. Και στη συγκεκριμένη βελτιστοποίηση, ως συνάρτηση $f(x,y)$ στον ορισμό 4.11 της καλά υποστηριζόμενης κατανομής χρησιμοποιείται η $\bar{\lambda}^t$, δηλαδή θεωρείται ότι $f(x,y) = \bar{\lambda}^t = \int_0^c \lambda(t,x,y)dt$.

Ας υποτεθεί ότι:

x_0 : οι συνολικοί πόροι που θα λάβει τελικά ο νεοεισερχόμενος κόμβος

$x_1, ..., x_T$: οι διαθέσιμοι πόροι πριν την αναδιανομή των πόρων, που θα εξευρεθούν από τους κόμβους οι οποίοι ή βρίσκονται στην εμβέλεια του νεοεισερχόμενου κόμβου (συμπεριλαμβανομένου του κόμβου I_0) ή είναι εξαρτημένοι κόμβοι του ισχυρού κόμβου I_0 που έχει αναλάβει να πραγματοποιήσει τη βελτιστοποίηση (εξαιρείται ο νεοεισερχόμενος κόμβος)

$x'_1,...,x'_T$: οι διαθέσιμοι πόροι μετά την αναδιανομή των ανωτέρω πόρων

$p'_0, p'_1,..., p'_T$: οι θέσεις των κόμβων οι οποίοι ή βρίσκονται στην εμβέλεια του νεοεισερχόμενου κόμβου (συμπεριλαμβανομένου του κόμβου I_0) ή είναι εξαρτημένοι κόμβοι του ισχυρού κόμβου ο οποίος αναλαμβάνει να πραγματοποιήσει τη βελτιστοποίηση

$$\min_{x_0, x'_1,...,x'_T} \sum_{i=1}^{L} \int_{S_i} (\lambda'(x, y; p'_0, p'_1,..., p'_T, x_0, x'_1,..., x'_T) - \bar{\lambda}^t(x, y))^2 dxdy \tag{4.16}$$

με $x_0 \geq A$ (4.17)

$x'_1,..., x'_T \geq 0$ (4.18)

$x'_i \leq x_i, i = 1,..., T$ (4.19)

$$x_0 + \sum_{i=1}^{i=T} x'_i = \sum_{i=1}^{i=T} x_i \tag{4.20}$$

Στη συνέχεια, εκτελείται το βήμα 6 του αλγορίθμου.

6. Ο ισχυρός κόμβος αποφασίζει πόσους πόρους θα λάβει ο νεοεισερχόμενος κόμβος και από ποιούς κόμβους. Κατόπιν, ενημερώνει τους εξαρτημένους του κόμβους (άρα και το νεοεισερχόμενο κόμβο) για την απόφασή του. Ο νεοεισερχόμενος κόμβος με τη σειρά του ενημερώνει τους γείτονές του.

7. Ορισμένοι από τους κόμβους που παραχώρησαν πόρους στο νεοεισερχόμενο κόμβο δεν είναι εξαρτημένοι κόμβοι του ισχυρού κόμβου που πραγματοποίησε τη βελτιστοποίηση. Οι κόμβοι αυτοί οφείλουν να ενημερώσουν το δικό τους ισχυρό κόμβο για τη μείωση αυτή των διαθέσιμων πόρων που υπέστησαν. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, οι ισχυροί κόμβοι διαθέτουν κάθε στιγμή ακριβή γνώση των διαθέσιμων πόρων των εξαρτημένων τους κόμβων.

4.4.2 Οι ζητούμενοι πόροι εξευρίσκονται σε περισσότερα του ενός βήματα

Ας υποτεθεί ότι οι διαθέσιμοι πόροι που ο ισχυρός κόμβος διαπιστώνει ότι διαθέτουν ο ίδιος, οι υποτελείς του κόμβοι και οι γείτονες του νεοεισερχόμενου κόμβου είναι $C_0 = \sum_{i=1}^{T} x_i < A$. Στην περίπτωση αυτή, ο ισχυρός κόμβος δεσμεύει τους C_0 αυτούς πόρους προκειμένου να τους παραχωρήσει στον νεοεισερχόμενο κόμβο. Ο νέος κόμβος , όμως, δεν εξυπηρετείται πλήρως με αυτούς τους πόρους καθώς χρειάζονται

$A_1 = A - C_0$ επιπλέον πόροι. Πριν αναζητηθούν αυτοί οι επιπλέον πόροι, εκτελούνται τα βήματα 6 και 7 του αλγορίθμου τα οποία περιγράφηκαν στην προηγούμενη υποενότητα προκειμένου να πληροφορηθούν οι εμπλεκόμενοι κόμβοι περί της δέσμευσης των C_0 πόρων. Στη συνέχεια, ο ισχυρός κόμβος ενημερώνει το νεοεισερχόμενο κόμβο ότι χρειάζονται A_1 επιπλέον πόροι. Η αναζήτηση των επιπλέον αυτών πόρων από το νεοεισερχόμενο κόμβο ανατίθεται κατά σειρά στους εξής κόμβους:

1. Σε άλλους ισχυρούς κόμβους που βρίσκονται στην εμβέλειά του, εφόσον υπάρχουν. Η σειρά επιλογής των ισχυρών αυτών κόμβων είναι τυχαία. Αν οι κόμβοι αυτοί είναι $n \geq 1$ σε πλήθος, θα συμβολίζονται ως $I_i, 1 \leq i \leq n$.

2. Σε όλους τους υπόλοιπους ισχυρούς κόμβους του χώρου ($I_i, i > n$). Ο νεοεισερχόμενος κόμβος ενημερώνει τον κόμβο I_0 ότι μετά το βήμα 1, αναζητούνται επιπλέον A_{n+1} πόροι. Ο I_0 αναλαμβάνει να εξεύρει τους πόρους αυτούς εκ μέρους του νεοεισερχόμενου κόμβου. Η διαδικασία αναζήτησης είναι η εξής:
   Ο κόμβος I_0 αναθέτει σε κάποιο ισχυρό κόμβο που αποτελεί γείτονα του -τον οποίο επιλέγει με τυχαίο τρόπο- να αναζητήσει τους πόρους που υπολείπονται προκειμένου να εξευρεθεί το σύνολο των A_1 πόρων. Στην περίπτωση όπου δεν εξευρεθούν όλοι οι πόροι κατ' αυτό τον τρόπο, η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά. (Ο γείτονας του I_0 που επιλέχθηκε επιλέγει ένα δικό του ισχυρό γείτονα και του αναθέτει την αναζήτηση των πόρων που υπολείπονται κ.ο.κ.). Κόμβος ο οποίος έχει ήδη συμμετάσχει στη διαδικασία αναζήτησης πόρων του παρόντος νεοεισερχόμενου κόμβου δε μπορεί να επιλεγεί ξανά από γείτονά του. Αν λόγω του περιορισμού αυτού η διαδικασία αναζήτησης δεν μπορεί να προχωρήσει, γίνεται διαδοχική οπισθοχώρηση στους ισχυρούς κόμβους οι οποίοι έχουν συμμετάσχει ήδη στη διαδικασία μέχρι να βρεθεί κόμβος με γείτονα ισχυρό κόμβο που δεν έχει συμμετάσχει στη διαδικασία αναζήτησης. Αν κατά την οπισθοχώρηση, κάποιος κόμβος διαθέτει περισσότερους από έναν γείτονες που δεν έχουν συμμετάσχει στη διαδικασία, επιλέγεται με τυχαίο τρόπο κάποιος από αυτούς. Λόγω της συνεκτικότητας του δικτύου, με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι μπορούν να ενεργοποιηθούν κατά τη διαδικασία αναζήτησης όλοι οι ισχυροί κόμβοι. Αν, βέβαια, οι κόμβοι που έχουν εμφανισθεί στο χώρο είναι περισσότεροι από N/A, οι απαιτούμενοι πόροι δεν είναι δυνατό να εξευρεθούν τελικά. Στην περίπτωση αυτή, η προηγούμενη οπισθοχώρηση δεν θα επιτύχει να δώσει λύση στο πρόβλημα και ο αλγόριθμος θα τερματισθεί. Εναλλακτικά, μπορεί να τεθεί ένα όριο στο μέγιστο βάθος αναζήτησης προκειμένου η αναζήτηση λιγοστών πόρων να μην υπερφορτώσει το δίκτυο.

Έστω A_i οι πόροι που απομένει να εξευρεθούν μετά την ανάθεση της αναζήτησης επιπλέον πόρων στον ισχυρό κόμβο I_{i-1} για $i \geq 1$. Ακολούθως παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο ο I_i αποφασίζει πόσοι πόροι θα παραχωρηθούν και από ποιούς κόμβους στο νεοεισερχόμενο κόμβο. Στην περίπτωση αυτή, κάθε κόμβος I_i βλέπει μόνο τους πόρους τους οποίους έχουν οι εξαρτημένοι του κόμβοι, έστω $C_i \geq 0$.

- Αν $A_i > C_i$, δεσμεύονται όλοι οι A_i πόροι και η διαδικασία συνεχίζεται με τον επόμενο κόμβο και με $A_{i+1} = A_i - C_i > 0$.

- Αν $A_i = C_i$, δεσμεύονται όλοι οι C_i πόροι και η διαδικασία δεν χρειάζεται να προχωρήσει σε επόμενο ισχυρό κόμβο.

- Αν $A_i < C_i$, ο κόμβος I_i καλείται να αποφασίσει ποιοί θα είναι αυτοί οι A_i πόροι εκ των C_i οι οποίοι θα δεσμευθούν. Σε αντίθεση με τη βελτιστοποίηση της υποενότητας 4.4.1, στην παρούσα περίπτωση είναι γνωστό το πλήθος των πόρων που θα δεσμευθούν. Έστω $p_1'', p_2''..., p_{D_i}''$ οι θέσεις των εξαρτημένων κόμβων του κόμβου I_i και του ίδιου του I_i και $R_1'', R_2''..., R_{D_i}''$ οι αντίστοιχοι κυκλικοί δίσκοι που αντιπροσωπεύουν τις εμβέλειες των κόμβων αυτών. Ο χώρος στον οποίο πραγματοποιείται η βελτιστοποίηση είναι ο χώρος $(\bigcup_{i=1}^{D_i} R_i'') \cap S$. Ο ισχυρός κόμβος στο χώρο αυτό αντιλαμβάνεται την ύπαρξη μόνο των D ανωτέρω κόμβων και αγνοεί οποιοδήποτε άλλο κόμβο. Έτσι, κατ' αναλογία του Πίνακα 4.1, φαίνεται στον Πίνακα 4.2 η τοπολογία της βελτιστοποίησης που θα εκτελεσθεί σε αυτό το βήμα.

	Παρόν Πρόβλημα
Χώρος	$(\bigcup_{i=1}^{D_i} R_i'') \cap S$
Θέσεις Κόμβων	$p_1'', p_2''..., p_{D_i}''$

Πίνακας 4.2: Τοπολογία βελτιστοποίησης υποενότητας 4.4.2

Η περιοχή $(\bigcup_{i=1}^{D} R_i'') \bigcap S$ διαμερίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 4.10 ενώ η καλά υποστηριζόμενη κατανομή Poisson ορίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 4.11. Και στη συγκεκριμένη βελτιστοποίηση, ως συνάρτηση $f(x,y)$ στον ορισμό 4.11 της καλά υποστηριζόμενης κατανομής χρησιμοποιείται η $\bar{\lambda}^t$ δηλαδή θεωρείται ότι $f(x,y) = \bar{\lambda}^t = \int_0^c \lambda(t,x,y)dt$.

Ακολούθως, διατυπώνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο καλείται να επιλύσει ο εκάστοτε ισχυρός κόμβος.

Ας υποτεθεί ότι:

$x_1'',\ldots,x_{D_i}''$: οι διαθέσιμοι πόροι πριν από την αναδιανομή των πόρων, του κόμβου I_i και των εξαρτημένων του κόμβων

$x_1''',\ldots,x_{D_i}'''$: οι διαθέσιμοι πόροι μετά την αναδιανομή των πόρων, του κόμβου I_i και των εξαρτημένων του κόμβων

$p_1'',\ldots,p_{D_i}''$: οι θέσεις του κόμβου I_i και των εξαρτημένων του κόμβων

$$\min_{x_1''',\ldots,x_{D_i}'''} \sum_{i=1}^{L} \int_{S_i} (\lambda'(x,y;p_0'',p_1'',\ldots,p_{D_i}'',x_1''',\ldots,x_{D_i}''') - \bar{\lambda}^t(x,y))^2 dxdy \qquad (4.21)$$

με $x_1''',\ldots,x_{D_i}''' \geq 0$ (4.22)

$$x_i''' \leq x_i'', i = 1,\ldots,D_i \qquad (4.23)$$

$$A_i + \sum_{i=1}^{i=D_i} x_i''' = \sum_{i=1}^{i=D_i} x_i'' \qquad (4.24)$$

Κάθε ισχυρός κόμβος μετά την ολοκλήρωση της αναζήτησης πόρων οφείλει:

- Αν είναι ένας από τους κόμβους $I_i, 1 \leq i \leq n$, να ενημερώσει τους εξαρτημένους του κόμβους για τους πόρους τους οποίους δέσμευσε από αυτούς καθώς και το νεοεισερχόμενο κόμβο για το πλήθος των πόρων που εξευρέθηκε και τελικά του παραχωρήθηκε.

- Αν είναι ένας από τους κόμβους $I_i, i > n$, να ενημερώσει τους εξαρτημένους του κόμβους για τους πόρους τους οποίους δέσμευσε από αυτούς. Όταν εξευρεθούν όλοι οι πόροι, ο κόμβος I_0 ενημερώνεται ότι όλοι οι πόροι βρέθηκαν και, με τη σειρά του, ενημερώνει και το νεοεισερχόμενο κόμβο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

5.1 Τα βήματα της προσομοίωσης

Η προσομοίωση του προβλήματος θα πραγματοποιηθεί σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα:

1. Επιλέγονται οι διαστάσεις του χώρου S, το χρονικό εύρος παρατήρησης c, καθώς και η ένταση $\lambda(t,x,y)$ με $t\in[0,c], x\in[0,a], y\in[0,b]$ της χωροχρονικής διαδικασίας Poisson. Η ένταση $\lambda(t,x,y)$ επιλέγεται με βάση τα επιθυμητά χαρακτηριστικά και τις απαιτήσεις του δικτύου που πρόκειται να προσομοιωθεί.

2. Επιλέγονται τα χαρακτηριστικά των ισχυρών κόμβων που θα τοποθετηθούν στο χώρο S. Τα χαρακτηριστικά αυτά περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, την εμβέλεια R' και το πλήθος B των πόρων για ιδία χρήση.

3. Επιλέγονται τα χαρακτηριστικά των κόμβων που αναμένονται να εμφανισθούν στο χώρο S. Η εμβέλεια των νεοεισερχόμενων κόμβων τίθεται ίση με R ενώ επιλέγεται και το πλήθος A των πόρων για ιδία χρήση.

4. Επιλέγεται το P_0 που εκφράζει την πιθανότητα εμφανιζόμενος κόμβος ή κόμβοι να μην μπορούν να εξεύρουν τους απαιτούμενους πόρους λόγω εξάντλησης πόρων. Στη συνέχεια, επιλέγεται το πλήθος N των διαθέσιμων πόρων που θα κατανεμηθεί, αρχικά, στους ισχυρούς κόμβους από τη σχέσεις (4.1) και (4.2).

5. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο, που περιγράφηκε με λεπτομέρεια στην ενότητα 4.2, τοποθετούνται οι ισχυροί κόμβοι στο χώρο S. Το συνολικό πλήθος των ισχυρών κόμβων που θα χρειασθούν συμβολίζεται με M ενώ οι θέσεις των ισχυρών κόμβων συμβολίζονται με $p_i, i=1,...,M$.

6. Στη συνέχεια, εκτελείται η βελτιστοποίηση που διατυπώθηκε στην υποενότητα 4.3.2. Με αυτό τον τρόπο, υπολογίζονται τα m_i, δηλαδή το πλήθος των διαθέσιμων πόρων που θα λάβει έκαστος των ισχυρών κόμβων.

7. Σε κάθε ισχυρό κόμβο παραχωρούνται $B+m_i, i=1,...,M$ πόροι όπου B οι πόροι που απαιτούνται από τον ισχυρό κόμβο για ιδία χρήση. Συνεπώς, μόνο

οι m_i εξ αυτών είναι διαθέσιμοι προκειμένου να παραχωρηθούν από τους ισχυρούς κόμβους σε νεοεισερχόμενους κόμβους. Επίσης, κάθε ισχυρός κόμβος προγραμματίζεται να έχει γνώση της έντασης της χωροχρονικής διαδικασίας Poisson, η οποία επιλέχθηκε κατά το βήμα 1 της προσομοίωσης.

8. Ακολούθως, απλοί κόμβοι εμφανίζονται στο χώρο S σύμφωνα με τη χωροχρονική κατανομή Poisson έντασης $\lambda(t,x,y)$. Η εξυπηρέτηση των κόμβων αυτών γίνεται σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφηκε στην ενότητα 4.4. Σημειώνεται ότι η ένταση $\lambda(t,x,y)$ επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι πρακτικά απίθανο να εμφανισθεί νέος κόμβος πριν την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης προηγούμενου κόμβου.

9. Κατά την αναζήτηση των απαιτούμενων πόρων από κάποιο νεοεισερχόμενο κόμβο, εφόσον J ισχυροί κόμβοι με $1 \le J \le M$ έχουν ήδη ενεργοποιηθεί στη διαδικασία αναζήτησης και οι A πόροι δεν έχουν εξευρεθεί εξ' ολοκλήρου, ο αλγόριθμος τερματίζεται. Το J πρέπει να επιλεγεί με κατάλληλο τρόπο: Αν το J επιλεγεί αρκετά μικρό, δηλαδή $J \ll M$, ο αλγόριθμος ενδεχομένως να τερματιστεί ενώ υπάρχουν αρκετοί διαθέσιμοι πόροι στο δίκτυο. Αν το J επιλεγεί αρκετά μεγάλο, δηλαδή $J \approx M$, η αναζήτηση λιγοστών πόρων από τον αλγόριθμο μπορεί να υπερφορτώσει άσκοπα το δίκτυο. Στην περίπτωση κατά την οποία τεθεί $J = M$, ο αλγόριθμος διακόπτεται μονάχα όταν πράγματι οι N πόροι έχουν εξαντληθεί.

5.2 Εξαγόμενα συμπεράσματα

Από την εκτέλεση της προσομοίωσης θα εξαχθεί μία σειρά από συμπεράσματα. Μερικά από αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Θα διαπιστωθεί αν η επιλογή της συγκεκριμένης καλά υποστηριζόμενης κατανομής Poisson ήταν επιτυχημένη. Παράλληλα, μπορεί να εξετασθεί το ενδεχόμενο υιοθέτησης μιας καταλληλότερης καλά υποστηριζόμενης κατανομής.

2. Θα αξιολογηθεί ο τυχαίος τρόπος με τον οποίο κάθε νεοεισερχόμενος κόμβος επιλέγει τον ισχυρό του κόμβο καθώς και τους επόμενους ισχυρούς κόμβους που συμμετέχουν στη διαδικασία αναζήτησης πόρων. Θα εξεταστούν και αξιολογηθούν περισσότερο πολύπλοκα σχήματα επιλογής ισχυρού κόμβου.

Ως βασικό δείκτης αξιολόγησης των ανωτέρω θα χρησιμοποιηθεί, κυρίως, η συχνότητα αναζήτησης πόρων σε κόμβους που βρίσκονται μακριά από τον νεοεισερχόμενο κόμβο.

Βιβλιογραφία

[1] Wireless ad hoc networking-The art of networking without a network, Magnus Frodigh, Per Johansson, Peter Larsson

[2] An overview of Mobile Ad Hoc Networks: Applications and Challenges, Jeroen Hoebeke, Ingrind Moerman, Bart Dhoedt, Piet Demeester

[3] Random Point Processes, Donald L. Snyder, Wiley, 1975

[4] Multivariate Nonhomogeneous Poisson Processes, Evan Saltzman

[5] Statistics for Spatial Data, Wiley, Noel A. C. Cressie, 1993

[6] Θεωρία Τηλεφωνικής Κίνησης, Ε. Δ. Συκάς, Σεπτέμβριος 2012

[7] A tutorial on geometric programming, Stephen Boyd, Seung-Jean Kim, Lieven Vandenberghe, Arash Hassibi

[8] Τεχνικές Βελτιστοποιησέως (Σημειώσεις), Ν. Γ. Μαράτος, Αθήνα 1990

[9] Convex Optimization, Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, Cambridge University Press, 2004

[10] Node Placement for Connected Coverage in Sensor Networks, Koushik Kar, Suman Banerjee