

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΓΙΑΝΝΟΥΛΗ ΦΑΚΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΝΟΣ
ΜΙΚΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΕΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ $N+1$ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑ-
ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΥΠΟΥ ΜΑΝΕΝ ΣΤΟ
ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΣΩΜΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
ΤΗΛΕΜΑΧΟΣ ΚΑΛΒΟΥΡΙΔΗΣ
Ομότιμος Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ

2014

**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES**



**DOCTORAL THESIS
DEMETRIOS GN. FAKIS**

**NUMERICAL INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF
A SMALL BODY IN A MAXWELL RING-TYPE N-BODY
SYSTEM WHERE THE CENTRAL PRIMARY CREATES
A MANEV-TYPE POST-NEWTONIAN
POTENTIAL FIELD**

**SUPERVISOR
Dr KALVOURIDIS TILEMAHOS
Professor Emeritus
National Technical University of Athens
School of Applied Mathematics and Physical Sciences**

ATHENS

2014

*Στους γονείς μου
Γιαννούλη και Φραγκίσκη*

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Μετσόβιου Πολυτεχνείου με Επιβλέποντα τον Καθηγητή κ. Τηλέμαχο Καλβουρίδη και μέλη της Τριμελούς Επιτροπής Παρακολούθησης, τον Καθηγητή κ. Αναστάσιο Μαυραγάνη της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών και τον Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Παπαδάκη του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στον αντίστοιχο πρόλογο της μεταπτυχιακής μου εργασίας πριν από τέσσερα χρόνια η οποία επισφράγισε τις σπουδές μου για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού διπλώματος εξειδίκευσης του Τομέα Μηχανικής της ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ, είχα υποσχεθεί στο δάσκαλό μου, Καθηγητή κ. Καλβουρίδη, ότι θα προσπαθήσω να φανώ αντάξιος της εμπιστοσύνης του και ότι το ταξίδι μου στους δρόμους της Ουράνιας Μηχανικής, που είχα ξεκινήσει μαζί του πριν από λίγο καιρό, θα συνεχιζόταν. Έτσι και έγινε! Και τώρα, ολοκληρώνοντας την προσπάθειά μου, μπορώ να πω πως ήταν ένα ταξίδι δύσκολο, μα συνάμα όμορφο και συναρπαστικό, που μόνο καλές αναμνήσεις μου άφησε στο τέλος. Δε θα ξεχάσω ποτέ μου τον τρόπο με τον οποίο ο δάσκαλός μου με εμπύχωνε και με έβγαζε από δύσκολες καταστάσεις, αλλά και την ευγένεια με την οποία μου συμπεριφέρθηκε κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Η μεθοδικότητά του, ο ήρεμος και νηφάλιος τρόπος που αντιμετώπιζε κάθε πρόβλημα που παρουσιαζόταν, αλλά και η εξαιρετική καθοδήγησή του, θα αποτελέσουν για μένα μια πολύ σημαντική εμπειρία και μια πολύτιμη παρακαταθήκη για τη μελλοντική επαγγελματική και επιστημονική μου πορεία. Θα ήθελα να του εκφράσω τις ευχαριστίες και την ευγνωμοσύνη μου για όσα έχει κάνει μέχρι σήμερα για μένα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ.κ. Αναστάσιο Μαυραγάνη και Κωνσταντίνο Παπαδάκη που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής. Ειδικότερα για τον κ. Μαυραγάνη, θέλω να τονίσω ότι οι πολύωρες συζητήσεις μας πάνω σε θέματα της Ουράνιας Μηχανικής, εμπλούτισαν τις γνώσεις μου. Ευχαριστώ επίσης τον φίλο και συνάδελφο στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση Δρ. Βασίλη Τσόγκα, που με παρακίνησε να παρακολουθήσω το μεταπτυχιακό πρόγραμμα, τις συνάδελφους Δρ. Μαρία Κρουσταλλούδη και Δρ. Κατερίνα Χατζηφωτεινού, για την πολύτιμη βοήθειά τους και τη μετάγχιση της εμπειρίας τους σε θέματα που άπτονται της διατριβής, τη συνάδελφο Φυσικό κ. Έρη Καλβουρίδη για την πολύτιμη βοήθειά της στην επιμέλεια κάποιων εργασιών που δημοσιεύθηκαν αλλά και τους εκλεκτούς φίλους και συνοδοιπόρους στο ίδιο μεταπτυχιακό πρόγραμμα, Δρ. Θοδωρή Ζαρμπούτη και Δρ. Δημήτρη Μυλωνά, για την ηθική συμπαράσταση και τη φιλία τους με την οποία με περιέβαλαν όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος οφείλω πολλές ευχαριστίες στη συνάδελφο, καθηγήτρια της Αγγλικής Φιλολογίας κ. Ελένη Φελούκα, η οποία ανέλαβε την επιμέλεια όχι μόνο των αγγλικών κειμένων τα οποία συνοδεύουν την παρούσα διατριβή αλλά και των δημοσιεύσεων σε διεθνή περιοδικά και πρακτικά συνεδρίων.

Δημήτριος Φακής

Αθήνα 2014

**ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΝΟΣ ΜΙΚΡΟΥ
ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ N+1 ΣΩΜΑΤΩΝ
ΜΕ ΜΕΤΑ-ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΥΠΟΥ ΜΑΝΕΒ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟ
ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΣΩΜΑ**

**Διδακτορική διατριβή του
Δημητρίου Γιαννούλη Φακή**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία πραγματεύεται μία παραλλαγή του δακτυλιοειδούς προβλήματος των N+1 σωμάτων (ring problem), η οποία έγκειται στο γεγονός ότι τα $v=N-1$ όμοια περιφερειακά σώματα κείνται στις κορυφές ενός ιδεατού κανονικού ν-γώνου και δημιουργούν Νευτώνεια δυναμικά, ενώ το N-οστό πρωτεύον σώμα με διαφορετική μάζα από εκείνη των περιφερειακών δημιουργεί ένα Μετα-Νευτώνειο δυναμικό τύπου Manev $V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right)$, όπου $A=1$ και

$B=ea$ (όπου e καθαρός αριθμός και a η πλευρά του κανονικού πολυγωνικού σχηματισμού των περιφερειακών σωμάτων). Το δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους: (i) το πλήθος v των περιφερειακών σωμάτων, (ii) την παράμετρο $\beta=m_0/m$ του λόγου της μάζας του κεντρικού σώματος m_0 προς τη μάζα m ενός περιφερειακού και (iii) τον συντελεστή e της "διαταραχής" του Μετα-Νευτώνειου πεδίου του κεντρικού σώματος. Σε αυτό το εξελιγμένο μοντέλο, μελετάται η δυναμική συμπεριφορά του μικρού σώματος, το οποίο κινείται στο πεδίο που δημιουργείται από όλα τα μεγάλα σώματα του σχηματισμού, χωρίς το ίδιο να επηρεάζει την κίνησή τους. Πιο συγκεκριμένα, ερευνούμε τις θέσεις ισορροπίας και την ευστάθειά τους, καθώς και την επίδραση των παραμέτρων v , β και e σε διάφορα χαρακτηριστικά του δυναμικού προβλήματος, όπως στις καμπύλες και στις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας, στην ύπαρξη και εξέλιξη των εστιακών σημείων και καμπύλων, στις ελκτικές περιοχές των θέσεων ισορροπίας, στην κατανομή και παραμετρική εξέλιξη των απλών, διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών στο φασικό χώρο των αρχικών συνθηκών, αλλά και στην ευστάθεια και στις διακλαδώσεις τους με άλλες οικογένειες διαφορετικής πολλαπλότητας. Η διατριβή εμπλουτίζεται με 750 περίπου σχήματα και διαγράμματα, καθώς και με 76 πίνακες με ενδεικτικά αποτελέσματα.

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF A SMALL BODY IN A MAXWELL RING-TYPE N-BODY SYSTEM WHERE THE CENTRAL PRIMARY CREATES A MANEV-TYPE POST-NEWTONIAN POTENTIAL FIELD

**Doctoral Thesis of
Demetrios Gn. Fakis**

ABSTRACT

The N-body problem is one of the most important issues in Celestial Mechanics. In the relevant literature there are many particular cases for systems with $N > 3$. One of these cases is based upon a model where the $N-1$ of the bodies-members of the system are considered to have equal masses m and are located at the vertices of an imaginary regular polygon, while another body with different mass m_0 is located at the center of mass of the system. In the resultant force field created by the N big bodies, there is a very small body which moves without affecting the motion of the primaries. The initial statement of the problem was based on the assumption that all big bodies create Newtonian force fields. Here we consider a version of the model where the central body creates a Manev-type potential $V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right)$, where $A=1$ and $B=e\alpha$ with α being the side of the regular polygon of the primaries configuration. The problem is characterized by three parameters, namely the number ν of the peripheral primaries, the mass parameter $\beta = m_0/m$ and a coefficient e which measures the contribution of the non-Newtonian term of the potential. We investigate the equilibrium locations, their stability and the effect of the above parameters on these features as well as, the zero-velocity curves and surfaces and their parametric evolution, the existing focal points and focal curves, the basins of attraction of the equilibria, the simple, double and triple periodic orbits, their distribution in the phase space of the initial conditions, their parametric variation, as well as their stability and the bifurcations of their families. The Thesis is enriched with more than 750 figures, plots and diagrams as well as, with 76 tables containing some indicative results.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	xi
ABSTRACT	xiii
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ	1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ-ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ N ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΛΥΣΕΩΝ-ΚΕΝΤΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ-ΤΟ ΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ $N+1$ ΣΩΜΑΤΩΝ- ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑ-ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ

1.1	Βασικές αρχές της κλασικής Μηχανικής-Η έννοια του δυναμικού και δυνάμεις προερχόμενες από δυναμικά	25
1.2	Το γενικό πρόβλημα των N σωμάτων-Ειδικές λύσεις	27
1.2.1	Γενικά	27
1.2.2	Κατηγορίες ειδικών λύσεων	28
1.3	Κεντρικοί σχηματισμοί N σωμάτων στο επίπεδο και στο χώρο (central ή permanent configurations)-Ομογραφικές λύσεις	29
1.3.1	Κεντρικοί σχηματισμοί-Ορισμοί	29
1.3.2	Ομογραφικές λύσεις σε κεντρικούς σχηματισμούς	31
1.3.3	Ομοθετικές λύσεις σε κεντρικούς σχηματισμούς	33
1.3.4	Λύσεις σχετικής ισορροπίας σε κεντρικούς σχηματισμούς (permanent configurations or relative equilibria)	33
1.4	Κανονικοί πολυγωνικοί σχηματισμοί σωμάτων	34
1.5	Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός μικρού σώματος σε κανονικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς N σωμάτων (ring problem of $N+1$ bodies)	36
1.6	Μετα-Νευτώνεια δυναμικά και διάφορες εκφράσεις του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης	40
1.6.1	Η κίνηση της γραμμής των αψίδων της σεληνιακής τροχιάς και το «άγνωστο» δυναμικό του Νεύτωνα	40
1.6.2	Δυναμικό τύπου Bertrand	43
1.6.3	Δυναμικό τύπου Hall-Newcomb	43

1.6.4	Δυναμικό τύπου Manev	44
1.6.5	Δυναμικό τύπου Schwarzschild	45
1.6.6	Δυναμικό τύπου Mucket-Treder	46
1.6.7	Δυναμικό τύπου Yukawa	46
1.6.8	Δυναμικό τύπου Elipe-Arribas-Palacios-Kalvouridis - Γενικευμένες κεντρικές δυνάμεις	47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

2.1	Περιγραφή του προβλήματος	49
2.2	Αδρανειακό και συνοδεύον συστήματα αναφοράς	50
2.3	Ιδιότητες και χαρακτηριστικά των κανονικών πολυγώνων	51
2.3.1	Γενικά	51
2.3.2	Συμμετρίες του πολυγωνικού σχηματισμού	53
2.3.3	Σχέσεις μεγεθών που προκύπτουν από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πολυγωνικού σχηματισμού	54
2.4	Δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων του πολυγωνικού σχηματισμού	57
2.5	Εξισώσεις κινήσεως του μικρού σώματος S στο αδρανειακό σύστημα	60
2.6	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων της κίνησης στο αδρανειακό σύστημα	61
2.7	Αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης στο περιστρεφόμενο σύστημα	64
2.8	Παράμετροι του προβλήματος	68
2.9	Ολοκλήρωμα της κίνησης (ολοκλήρωμα τύπου Jacobi)	70
2.10	Ευστάθεια του πολυγωνικού σχηματισμού	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ-ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

3.1	Γενικά	73
3.2	Αριθμητικός προσδιορισμός των θέσεων ισορροπίας	73

3.3	Υπαρξη των θέσεων ισορροπίας-Ζώνες ισορροπίας στο επίπεδο των primaries και θέσεις ισορροπίας εκτός του επιπέδου αυτού	75
3.4	Ζώνες ισορροπίας	85
3.5	Επίδραση της παραμέτρου μάζας β και του συντελεστή e στη διαμόρφωση και εξέλιξη των ζωνών ισορροπίας (επίπεδες θέσεις ισορροπίας)	90
3.5.1	Περίπτωση με Νευτώνεια δυναμικά ($e=0$)	90
3.5.2	Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e>0$	93
3.5.3	Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e<0$	98
3.6	Εξέλιξη της κατανομής των θέσεων ισορροπίας στις ζώνες E_1 και E_2 - Παραμετρική μεταβολή τους	102
3.7	Μελέτη της γραμμικής ευσταθείας των θέσεων ισορροπίας	119
3.8	Εφαρμογή του κριτηρίου ευσταθείας Routh-Hurwitz	121

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΣΗ-ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΠΑΓΙΔΕΥΣΗΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

4.1	Εισαγωγή	125
4.2	Σχεδιασμός των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας	126
4.3	Μελέτη της παραμετρικής μεταβολής των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας	127
4.3.1	Περίπτωση με Νευτώνεια δυναμικά ($\beta \neq 0$ και $e = 0$)	128
4.3.2	Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e > 0$	130
4.3.3	Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e < 0$	132
4.4	Μελέτη της εξέλιξης των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και των περιοχών παγίδευσης στο επίπεδο xy , σε σχέση με τη σταθερά C	139
4.4.1	Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e > 0$	139
4.4.2	Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e < 0$	142

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ $C=C(x)$ -ΕΣΤΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ-ΕΣΤΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

5.1	Διαγράμματα των καμπύλων $C=C(x)$ -Γενικά χαρακτηριστικά	149
5.2	Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C=C(x)$	151
5.2.1	Μεταβολή των καμπύλων με την παράμετρο ν	151
5.2.2	Μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο μάζας β	152
5.2.3	Μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο e	154
5.3	Εστιακά σημεία των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας-Εστιακές καμπύλες	160
5.3.1	Γενικά-Βαρυτική περίπτωση	160
5.4	Συγγραμμικά και τριγωνικά εστιακά σημεία	164
5.4.1	Σχέση συγγραμμικών-τριγωνικών εστιακών σημείων με τον άξονα y	167
5.5	Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος β παραμένει σταθερή-Η συνάρτηση F_β	171
5.5.1	Προσδιορισμός των σημείων της εστιακής καμπύλης μέσω των ριζών της συνάρτησης F_β . Δισδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση των εστιακών καμπύλων	179
5.5.2	Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β	181
5.6	Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος e παραμένει σταθερή-Η συνάρτηση F_e	183
5.7	Η συνάρτηση F_e στη βαρυτική περίπτωση ($e=0$)	186
5.8	Η συνάρτηση F_e στην περίπτωση $e>0$	187
5.9	Η συνάρτηση F_e στην περίπτωση $e<0$	189
5.9.1	Μελέτη της εξέλιξης του πλήθους των εστιακών σημείων συναρτήσει του συντελεστή e για σχηματισμό με περιττό αριθμό περιφερειακών σωμάτων, μέσω των διαγραμμάτων $x-C$ στο επίπεδο $y=0$	189
5.9.2	Μελέτη της εξέλιξης των εστιακών σημείων συναρτήσει του συντελεστή e για σχηματισμό με περιττό αριθμό περιφερειακών σωμάτων, μέσω των διαγραμμάτων $x-F_e$ για $y=0$	192

5.9.3	Μέθοδος προσδιορισμού των σημείων επαφής των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης F_e με τον άξονα των x	195
5.9.4	Δισδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση των εστιακών καμπύλων για δεδομένο συντελεστή διαταραχής e	196
5.9.5	Περιοχές τιμών της μεταβλητής y και εξέλιξη του πλήθους των εστιακών σημείων συναρτήσει της μεταβλητής y	200
5.9.6	Μελέτη της εξέλιξης των εστιακών σημείων που προκύπτουν από τη συνάρτηση F_e , για δεδομένο συντελεστή διαταραχής e , συναρτήσει της μεταβλητής y	201
5.10	Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_e=F_e(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β	203
5.11	Μεταβολή των θέσεων των κοινών σημείων διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_e=F_e(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β , συναρτήσει της παραμέτρου v	206
5.12	Επίδραση της παραμέτρου v στις συναρτήσεις F_β και F_e	209
5.12.1	Γενικά	209
5.12.2	Επίδραση της παραμέτρου v στη συνάρτηση F_β	210
5.12.3	Επίδραση της παραμέτρου v στη συνάρτηση F_e	212
5.12.4	Εκτίμηση για τον τρόπο εξέλιξης των εστιακών καμπύλων, όταν μεταβάλλεται ο διαταρακτικός συντελεστής e (για $e < 0$)	215

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΑΥΤΩΝ-ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΠΑΓΙΔΕΥΣΗΣ

6.1	Εισαγωγή	225
6.2	Διαγράμματα $\beta-C_w$ και μεταβολή των επιτρεπτών περιοχών της κίνησης	227
6.2.1	Σχεδίαση των καμπύλων $\beta-C_w$ για τις υπάρχουσες ζώνες ισορροπίας και τις "εκτός επιπέδου" θέσεις ισορροπίας. Εφαρμογή για $v=7$ και $e = -0.05$	228
6.2.2	Εφαρμογή για $\beta=2$ ($v=7$, $e = -0.05$)	233

6.3	Ταυτόχρονες τοπολογικές αλλαγές των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση	249
------------	---	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΛΚΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

7.1	Εισαγωγή	255
7.2	Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες	257
7.3	Διαδικασία για τον καθορισμό των ελκτικών περιοχών στο επίπεδο Oxy	259
7.4	Γενικά περί ελκτικών περιοχών στο επίπεδο της κίνησης	262
7.5	Ελκτικές περιοχές για Νευτώνεια δυναμικά	264
7.5.1	Μορφολογία και δομή των ελκτικών περιοχών	264
7.5.2	Ταχύτητα σύγκλισης- Περιοχές βραδείας ή ταχείας σύγκλισης	270
7.6	Παραμετρική μεταβολή των ελκτικών περιοχών	272
7.7	Περίπτωση με $e > 0$	272
7.8	Περίπτωση με $e < 0$	273
7.8.1	Ελκτικές περιοχές για τιμές των παραμέτρων e και β που εμπίπτουν στην περιοχή I του διαγράμματος διακλαδώσεων	273
7.8.2	Περιοχές με μικρή ή μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης στην περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$ και $e=-0.1$	281
7.8.3	Ελκτικές περιοχές για τιμές των παραμέτρων e και β που εμπίπτουν στην περιοχή V του διαγράμματος διακλαδώσεων	283
7.8.4	Περιοχές με μικρή ή μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης στην περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$ και $e=-0.2$	286
7.8.5	Συγκριτική μελέτη της περίπτωσης με $v=7$, $\beta=2$ και $e=-0.1$ (περιοχή I), με την περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$ και $e=-0.2$ (περιοχή V)	287

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

8.1	Εισαγωγή	291
8.2	Επίπεδες κινήσεις του μικρού σώματος στο συνοδικό πλαίσιο αναφοράς	293
8.2.1	Εξισώσεις πρώτης μεταβολής	293

8.2.2	Γενικές ιδιότητες του πίνακα \mathcal{D} πρώτης μεταβολής	297
8.3	Περιοδικές τροχιές-Συνθήκες περιοδικότητας	297
8.3.1	Γενικά	297
8.3.2	Συνθήκες περιοδικότητας	298
8.3.3	Προτάσεις που αφορούν στις περιοδικές τροχιές	299
8.3.4	Ιδιότητες του μονόδρομου πίνακα $\mathcal{D}(t)$ στις περιοδικές τροχιές	300
8.3.5	Κατηγορίες επίπεδων περιοδικών τροχιών	300
8.4	Επίπεδες συμμετρικές περιοδικές τροχιές-Υπαρξη επίπεδων περιοδικών τροχιών συμμετρικών ως προς άξονα του συνοδικού συστήματος	301
8.5	Μέθοδοι αναζήτησης περιοδικών τροχιών	302
8.5.1	Γενικά	302
8.5.2	Σύντομη περιγραφή της μεθόδου της σάρωσης (scanning ή grid search)	303
8.5.3	Αστοχίες της μεθόδου-Πρακτικά προβλήματα που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή της μεθόδου και τρόποι αντιμετώπισής τους	304
8.6	Οικογένειες περιοδικών τροχιών-Χαρακτηριστικές καμπύλες	305
8.7	Φυσικό πέρας των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών	306
8.8	Ευστάθεια των επίπεδων περιοδικών τροχιών	307
8.9	Μέθοδοι προσδιορισμού της οριζόντιας ευστάθειας	307
8.9.1	Μέθοδος των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα.	307
8.9.2	Μέθοδος του Hénon.	310
8.10	Διαγράμματα οριζόντιας ευστάθειας - Διακλαδώσεις των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών των επίπεδων περιοδικών τροχιών-Κρίσιμες τροχιές πρώτου και δευτέρου είδους	316

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ-ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

9.1	Εισαγωγή	323
9.1.1	Βασικές αρχές που αφορούν στην αριθμητική διερεύνηση των τροχιών του μικρού σώματος	324
9.1.2	Συμβολισμοί των οικογενειών	329
9.1.3	Κατηγορίες απλών περιοδικών τροχιών	330
9.2	Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στη Νευτώνεια βαρυτική περίπτωση	337

	($e=0$) και κατανομή των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών των απλών συμμετρικών περιοδικών τροχιών στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C	
9.2.1	Περιγραφή των νέων οικογενειών στη βαρυτική περίπτωση για $v=7$ και $\beta=2$ και η εξέλιξη των τροχιών-μελών τους	338
9.2.2	Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_1	339
9.2.3	Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_2	342
9.2.4	Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_3	346
9.2.5	Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_4	350
9.3	Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στην περίπτωση που το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e>0$	355
9.4	Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στην περίπτωση που το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e<0$	355
9.4.1	Περιπτώσεις που μελετήθηκαν για διάφορες τιμές των παραμέτρων και κατανομές των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών στα αντίστοιχα διαγράμματα x_0-C	356
9.5	Μελέτη των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών για $v=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$	362
9.6	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ F1(οικογένειες S1-S2-S7-S8)	362
9.6.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	362
9.6.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	366
9.7	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F2 (οικογένειες S4-S14-S15-S17)	372
9.7.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	372
9.7.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	376
9.8	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F3 (οικογένειες S9-S10-S13)	384
9.8.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	384
9.8.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	389
9.9	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F4 (οικογένειες S41-S43-S44-S45-S46)	397
9.9.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους	397

	καμπύλης για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$. Ευστάθεια	
9.9.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	406
9.10	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F5 (οικογένειες S50-S51-S52)	411
9.10.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	411
9.10.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	415
9.11	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F6 (οικογένειες S68-S69-S72-S73)	419
9.11.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης για $\nu=7$. Ευστάθεια	419
9.11.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	423
9.12	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F7 ("Fish-type" Families , S11-S12-S82-S84-S86-S87-S88)	429
9.12.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	429
9.12.2	Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$	433
9.13	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F8 (Δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2)	438
9.13.1	Παραμετρική εξέλιξη των χαρακτηριστικών καμπύλων των κύριων οικογενειών S18 και S55 των δενδροειδών κατανομών στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 αντίστοιχα	438
9.13.2	Εξέλιξη των τροχιών των κύριων οικογενειών των δενδροειδών κατανομών, κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης, στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 . Μελέτη ευστάθειας	443
9.13.3	Διαγράμματα των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0-C των οικογενειών των δενδροειδών κατανομών, στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 , για $\nu=7$ και διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e	451
9.13.4	Εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών S33 και S54 κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων τους. Μελέτη ευστάθειας	458
9.13.5	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 ,	460

	κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων τους($x_0 < 0$)	
9.13.6	Μελέτη ευστάθειας των τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 ($x_0 < 0$)	464
9.13.7	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων τους($x_0 > 0$)	468
9.13.8	Μελέτη ευστάθειας των τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 ($x_0 > 0$)	472
9.13.9	Γενικές παρατηρήσεις για τις οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής	475
9.13.10	Συμμετρία των ισοενεργειακών τροχιών (ίδια τιμή της σταθεράς C) που ανήκουν στην ίδια οικογένεια της δένδροειδούς κατανομής	476
9.13.11	Παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων x_0-C και $x_0-T/2$, των οικογενειών των δένδροειδών κατανομών στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2	477
9.14	Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_0 του φασικού χώρου x_0-C της περίπτωσης για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=-0.27$. Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης	483
9.14.1	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης των οικογενειών ($S90$, $S90A$, $S90B$, $S90G$) και ($S91$, $S91A$). Ευστάθεια	484
9.14.2	Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης της οικογένειας $S92$. Ευστάθεια	487

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ-ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

10.1	Εισαγωγή	491
10.2	ΔΙΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ	493
10.2.1	Γενικά χαρακτηριστικά των διπλών περιοδικών τροχιών και κατανομές των χαρακτηριστικών τους καμπύλων, για την περίπτωση που θα μελετηθεί, στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C	493

10.3	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G1 (οικογένειες D1-D5-D9)	495
10.3.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	495
10.3.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών G1	498
10.4	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G2 (οικογένειες D15-D21-D22-D24)	499
10.4.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	499
10.4.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών G2	503
10.5	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G3 (οικογένειες D30-D31-D33)	505
10.5.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	505
10.5.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών G3	508
10.6	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ D28	509
10.6.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της οικογένειας. Ευστάθεια	509
10.7	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G4 (οικογένειες D54-D56-D59-D66)	512
10.7.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	512
10.7.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών G4	516
10.8	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ D67	518
10.8.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της οικογένειας. Ευστάθεια	518
10.9	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ G5 (δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισοροπίας των ζωνών E_1 και E_2)	519
10.9.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισοροπίας της ζώνης E_2 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 < 0$). Μελέτη ευστάθειας	521
10.9.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισοροπίας της ζώνης E_2	528
10.10	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ D51 και D52	529
10.10.1	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	529

10.10.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 των οικογενειών D51 και D52	532
10.11	Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E ₁ , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων($x_0>0$). Μελέτη ευστάθειας	533
10.11.1	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E ₁ ($x_0>0$)	541
10.12	Συμμετρία των ισοενεργειακών τροχιών (ίδια τιμή της σταθεράς C) που ανήκουν στην ίδια οικογένεια της δενδροειδούς κατανομής.	543
10.13	ΤΡΙΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ	545
10.13.1	Γενικά χαρακτηριστικά των τριπλών περιοδικών τροχιών και κατανομές των χαρακτηριστικών τους καμπύλων, για την περίπτωση που θα μελετηθεί, στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0 -C	545
10.14	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H1 (οικογένειες T1-T5-T7)	548
10.14.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια.	548
10.14.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H1	551
10.15	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H2 (οικογένειες T11-T12-T14)	552
10.15.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	552
10.15.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H2	555
10.16	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H3 (οικογένειες T8-T10-T21)	557
10.16.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	557
10.16.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H3	559
10.17	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H4 (οικογένειες T17-T18)	561
10.17.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	561
10.17.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H4	564
10.18	ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H5 (οικογένειες T45-T47-T49)	566
10.18.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια	566
10.18.2	Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H5	569
10.19	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ T50	572

10.19.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης. Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της οικογένειας. Ευστάθεια	572
10.20	ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ H6 (δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2)	574
10.20.1	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων($x_0<0$). Μελέτη ευστάθειας	575
10.20.2	Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_2(x_0<0)$	582
10.21	Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων($x_0>0$). Μελέτη ευστάθειας	584
10.21.1	Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0>0)$	591
10.22	Συμμετρία των ισοενεργειακών τροχιών (ίδια τιμή της σταθεράς C) που ανήκουν στην ίδια οικογένεια της δενδροειδούς κατανομής.	593
10.23	Κοινό διάγραμμα κατανομής των χαρακτηριστικών καμπύλων των απλών, διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=-0.1$	594

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΣΥΝΟΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ-ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

11.1	Αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής	599
11.2	Γενικά χαρακτηριστικά του δακτυλοειδούς προβλήματος των $N+1$ σωμάτων	600
11.2.1	Γενικά χαρακτηριστικά που αφορούν στο πρόβλημα του πολυγωνικού σχηματισμού των $N+1$ σωμάτων	600
11.3	Συμμετρία, παράμετροι, θέσεις ισορροπίας, καμπύλες και επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας, περιοχές επιτρεπτής επίπεδης κίνησης του μικρού	601

	σώματος	
11.3.1	Συμμετρία και παράμετροι του προβλήματος	601
11.3.2	Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για επίπεδες κινήσεις	602
11.3.3	Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας $C(x,y;\beta,\epsilon)$ για την επίπεδη κίνηση	602
11.3.4	Θέσεις ισορροπίας	603
11.3.5	Περιοχές επιτρεπτής κίνησης και περιοχές παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος	607
11.4	Διαγράμματα $x-C$ και παραμετρική μεταβολή αυτών-Εστιακά σημεία και εστιακές καμπύλες	607
11.4.1	Διαγράμματα $C(x,y=0;\nu,\beta,\epsilon)$ και παραμετρική μεταβολή τους	607
11.4.2	Συμμετρία των καμπύλων των διαγραμμάτων $C(x,y=0;\nu,\beta,\epsilon)$	608
11.4.3	Τοπικά ακρότατα των καμπύλων των διαγραμμάτων $C(x,y=0;\nu,\beta,\epsilon)$	608
11.4.4	Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C=C(x)$	608
11.5	Εστιακά σημεία και εστιακές καμπύλες	609
11.5.1	Σχέση συγγραμμικών-τριγωνικών εστιακών σημείων με τον άξονα y	611
11.5.2	Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος β παραμένει σταθερή- H συνάρτηση F_β	612
11.5.3	Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος ϵ παραμένει σταθερή- H συνάρτηση F_ϵ	613
11.5.4	Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_\epsilon=F_\epsilon(x)$	614
11.5.5	Επίδραση της παραμέτρου ν στη συνάρτηση F_β	615
11.5.6	Επίδραση της παραμέτρου ν συνάρτηση F_ϵ	615
11.6	Ελκτικές περιοχές	616
11.6.1	Γενικά χαρακτηριστικά	616
11.6.2	Ευαισθησία του αλγορίθμου στη μεταβολή των αρχικών τιμών	618
11.6.3	Περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev	619
11.7	Μελέτη των περιοδικών τροχιών (απλών και πολλαπλών)-Οικογένειες συμμετρικών τροχιών-Ευστάθεια	619
11.7.1	Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος	619
11.7.2	Ταξινόμηση των επίπεδων περιοδικών τροχιών	620
11.7.3	Γενικά συμπεράσματα από τη μελέτη των τροχιών	620
11.7.4	Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στη Νευτώνεια βαρυτική περίπτωση	621
11.7.5	Επίπεδες συμμετρικές περιοδικές κινήσεις στην περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $\epsilon > 0$	622
11.7.6	Επίπεδες συμμετρικές περιοδικές κινήσεις στην περίπτωση όπου το	622

	κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e < 0$	
11.7.7	Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στην περιοχή αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας», στην περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e < 0$	623
11.8	Προοπτικές για περαιτέρω έρευνα	625
11.8.1	Προοπτικές για το ίδιο μοντέλο	625
11.8.2	Επεκτάσεις-γενικεύσεις του μοντέλου	626
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	627
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	637
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ	641
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	649
	EXTENDED ABSTRACT	665

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η παρατήρηση του έναστρου ουρανού, η Δύση και η Ανατολή του Ηλιου, οι φάσεις της Σελήνης, οι εκλείψεις του Ηλίου και της Σελήνης, η εναλλαγή των εποχών, οι σύνοδοι των πλανητών, οι μετεωρίτες και τόσα άλλα φυσικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στην απεραντοσύνη του σύμπαντος, κέντρισαν το ενδιαφέρον του ανθρώπου σχεδόν από τις πρώτες στιγμές της ύπαρξής του και τον οδήγησαν αρχικά στο δρόμο της μεταφυσικής, μετέπειτα της φιλοσοφίας και αργότερα της επιστημονικής αναζήτησης. Τα φαινόμενα του ουρανού, όπως και αυτά που συνέβαιναν στην ατμόσφαιρα ή στην επιφάνεια της Γης (εκρήξεις ηφαιστειών, σεισμοί, πλημμύρες, καταιγίδες, αστραπές, κεραυνοί, παλίρροιες), προσωποποιήθηκαν και συνδέθηκαν με δεκάδες θεότητες, μικρές ή μεγάλες, σημαντικές ή λιγότερο σημαντικές, που έγιναν αντικείμενα λατρείας των λαών και των φυλών της Γης, που ζούσαν στα τέσσερα σημεία του ορίζοντα. Αρχικά, οι δοξασίες, οι δεισιδαιμονίες, οι προλήψεις και οι προκαταλήψεις κυριαρχούσαν στον απλό λαό, και καλλιεργούνταν συστηματικά και με προφανή σκοπιμότητα από τα εκάστοτε ιερατεία. Από τους πανίσχυρους «μάγους» των αφρικανικών φυλών μέχρι τη μεσαιωνική Ιερά εξέταση, η αντιμετώπιση των λιγοστών φωνών, που τολμούσαν να αρθρώσουν κάποιες αλήθειες, ήταν ίδια. Πνίγονταν, έσβηναν, ή εξαφανίζονταν από τα ισχυρά κατεστημένα που κυριαρχούσαν και επιβάλλονταν σε όλους τους λαούς, όλες τις εποχές. Οι σκόπιμες στρεβλώσεις της αλήθειας, εξυπηρετούσαν κάθε λογής συμφέροντα. Και ο απλός λαός, εξαρτούσε όλες του τις καθημερινές δραστηριότητες, από τους κακούς ή καλούς οιωνούς που ερμηνεύονταν από Πυθείες, μάντεις, ιεροφάντεις, προφήτες, μελλοντολόγους, μάγισσες και οραματιστές. Η καλή ή η κακή σοδειά, η νίκη ή η ήττα σε μια μάχη, η γονιμότητα ή μη των γυναικών, η καλή ή η κακή τύχη, συνδέονταν συχνά με ουράνια φαινόμενα αλλά και με γήινες εκδηλώσεις της φύσης. Η πορεία από την άγνοια και τη μυθοπλασία, μέχρι την επιστημονική αλήθεια δεν ήταν καθόλου εύκολη. Παρόλα αυτά, η Αστρονομία, παρά το μεγάλο της αντίπαλο, την Αστρολογία, που εξακολουθεί ακόμη και στις μέρες μας να την αντιμάχεται και να προκαλεί στους

πολλούς σύγχυση, αποτέλεσε το αρχαιότερο, ίσως, συγκροτημένο σύνολο γνώσεων και η εξέλιξή της υπήρξε απόλυτα συνυφασμένη με την πορεία του ανθρώπου μέχρι σήμερα. Η ονομασία «Αστρονομία» που καθιερώθηκε πρώτα από τους Έλληνες και σήμαινε «τους νόμους των άστρων» διατηρήθηκε μέχρι τις μέρες μας σαν ένας διεθνής επιστημονικός όρος χωρίς να χάσει ούτε το ελάχιστο από το περιεχόμενο της και χωρίς να αλλάξει προσανατολισμό και σκοπό, που είναι ακριβώς η μελέτη και η ερμηνεία των αστρικών φαινομένων όχι μόνο στο κοντινό περιβάλλον του ηλιακού μας συστήματος αλλά και στον ευρύτερο χώρο έξω από αυτό.

Τα υπάρχοντα ιστορικά στοιχεία δείχνουν, ότι ήδη από την τρίτη περίπου χιλιετία π.Χ. άρχισε να αναπτύσσεται η Αστρονομία στην πιο αρχέγονη μορφή της. Η έλλειψη τρόπων και μεθόδων, έκανε τους ανθρώπους της εποχής εκείνης να πιστεύουν, ότι η Γη είναι επίπεδη και ότι αν κάποιος προχωρούσε μέχρι την άκρη του ορίζοντα, θα έπεφτε. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι παρότι εμφανίζονται μεγάλες διαφορές ανάμεσα στις απόψεις που ανέπτυξαν οι πρώτοι πολιτισμοί σχετικά με τη Γη και τη θέση της στο σύμπαν, η κυρίαρχη ιδέα ήταν, ότι ο πλανήτης μας ήταν ένα στερεό που επέπλεε πάνω στο νερό.

Οι Βαβυλώνιοι και οι Χαλδαίοι φαίνεται ότι ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν συστηματικά τον ουρανό. Παρόλο που και αυτοί συσχέτισαν μύθους και δοξασίες με τα άστρα και τις κινήσεις τους, όμως άφησαν χρήσιμη βασική γνώση για τους μεταγενέστερους, καταγράφοντας τους αστρικούς σχηματισμούς που παρατηρούσαν και περιγράφοντας διάφορα φαινόμενα που συνέβαιναν στον ουρανό. Η προφανής αδυναμία τους να δώσουν πειστικές ερμηνείες από τη μια, και η ανάγκη να προβλέπουν το μέλλον τους από την άλλη, τους έφεραν πιο κοντά στην Αστρολογία παρά στην Αστρονομία. Κάτι ανάλογο συνέβη λίγο αργότερα με τους Αιγυπτίους. Και βέβαια, όταν οι λαοί άρχισαν να έρχονται σε επαφή μεταξύ τους, είτε με ειρηνικό τρόπο, είτε, συνηθέστερα, με κατακτητικούς πολέμους για την επικράτηση ή την κυριαρχία, πολλά από τα στοιχεία που αποτελούσαν δοξασίες για ένα λαό, συνήθως μεταφέρονταν, επιβάλλονταν και τελικά ενσωματώνονταν με τις απαραίτητες προσαρμογές, στους γειτονικούς ή τους κατακτούμενους λαούς.

Μέσα από αυτό το συνονθύλευμα των αντιλήψεων, οι Έλληνες ανέσυραν τα πιο θετικά στοιχεία δίνοντας σημαντική ώθηση στην εξέλιξη της Αστρονομίας, κάτι που έκαναν άλλωστε και με τις υπόλοιπες επιστήμες. Το σημαντικότερο όμως είναι, ότι προσπάθησαν να βρουν εξηγήσεις κατ' αρχήν φιλοσοφικές, και στη συνέχεια να διατυπώσουν ολοκληρωμένες θεωρίες περιγράφοντας με μεθοδικότητα και συνέπεια την εξέλιξη του κόσμου από τη στιγμή της δημιουργίας του. Αρχικά είχαν σχηματίσει την αντίληψη μίας επίπεδης Γης που περιβάλλεται από μία περιστρεφόμενη σφαίρα. Αργότερα, λαμπροί φιλόσοφοι και στοχαστές, προχώρησαν την ανθρώπινη διάνοηση αρκετά βήματα μπροστά. Γύρω στο 500 π.Χ. ο Αναξίμανδρος, ισχυρίστηκε, ίσως για πρώτη φορά, ότι η Γη είναι στρογγυλή. Μέχρι το 300 π.Χ. ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης είχαν υιοθετήσει και αναπτύξει την ιδέα της σφαιρικής Γης-γιατί πώς αλλιώς θα μπορούσαν να εξηγηθούν οι εκλείψεις του Ηλιου και της Σελήνης- που ήταν περικυκλωμένη από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα. Την ίδια όμως περίπου περίοδο, ένας άλλος σπουδαίος πρόγονός μας, συνέλαβε για πρώτη φορά την ιδέα του ηλιοκεντρικού συστήματος. Εμπνευστής της ήταν ο σημαντικότερος αστρονόμος των αρχαίων χρόνων, ο Αρίσταρχος ο Σάμιος, που έζησε από το 310 έως το 230 π.Χ. Σύμφωνα με τον Αρίσταρχο, ο Ήλιος αποτελεί το κέντρο του σύμπαντος και γύρω από αυτόν περιστρέφονται οι πλανήτες, ανάμεσά τους και η Γη. Η τελευταία, περιστρέφεται επίσης γύρω από τον άξονά της κάθε εικοσιτέσσερις ώρες. Η θεωρία του Αρίσταρχου, που πήγαινε κόντρα στα πιστεύω της εποχής, δεν είχε πολλούς υποστηρικτές. Ένας από τους λιγοστούς οπαδούς ήταν ο Σέλευκος, ένας Βαβυλώνιος αστρονόμος, που λέγεται ότι απέδειξε την ηλιοκεντρική δομή του ηλιακού μας συστήματος με λογικούς συλλογισμούς το 2^ο αιώνα π.Χ. επιβεβαιώνοντας την θεωρία του Αρίσταρχου. Δυστυχώς, η θεωρία του Αρίσταρχου, που σήμερα ξέρουμε ότι είναι σωστή, δυσαρέστησε τους φιλοσόφους όχι μόνο της εποχής του αλλά και τους μεταγενέστερους, δεν υιοθετήθηκε από τον αρχαίο κόσμο και σύντομα ξεχάστηκε, για τον απλό λόγο ότι η Γη εμφανιζόταν να παίζει στο Σύμπαν ένα δευτερεύοντα ρόλο από εκείνον του Ήλιου.

Ένας άλλος μεγάλος Έλληνας αστρονόμος, γεωγράφος, χαρτογράφος και μαθηματικός ήταν ο Ίππαρχος ο Ρόδιος, ή Ίππαρχος ο Νικαεύς (περ. 190πΧ- 120 πΧ), που θεωρείται από πολλούς ο «πρίγκηπας της παρατήρησης», ο «πατέρας της Αστρονομίας», ο «θεμελιωτής της τριγωνομετρίας» κ.ο.κ. Ο Ίππαρχος ανάμεσα στα άλλα, υπολόγισε πως το ηλιακό ή τροπικό έτος έχει διάρκεια 365,242 ημέρες (σήμερα τα σύγχρονα ατομικά ρολόγια τον επιβεβαιώνουν υπολογίζοντάς το σε 365,242199 ημέρες!), ανακάλυψε τη μετάπτωση των ισημεριών, υπολόγισε τη διάμετρο της Σελήνης και την κυμαινόμενη απόστασή της από τη Γη και επινόησε την κλίμακα των μεγεθών των αστερών από τη μέτρηση της φωτεινότητάς τους, που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα από όλους τους αστρονόμους του κόσμου. Η μεγαλύτερη όμως προσφορά του, είναι η δημιουργία του πρώτου καταλόγου αστερών, τουλάχιστον στο δυτικό κόσμο. Ο κατάλογος αυτός, που συνέταξε με μεθοδικότητα, υπομονή και γνώση, περιελάμβανε τις θέσεις και τις κινήσεις στον ουρανό περισσότερων από 1000 αστερών. Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε, ότι ανακάλυψε τον αστρολάβο (όργανο με τη βοήθεια του οποίου μέτρησε τις συντεταγμένες των αστερών), τελειοποίησε τη διόπτρα (όργανο που του επέτρεψε να εκτιμήσει την φαινόμενη διάμετρο του Ηλίου και της Σελήνης, την απόσταση και το πραγματικό μέγεθός τους), ενώ βελτίωσε παλαιότερα όργανα όπως τον Γνώμονα, το Ηλιοτρόπιο ή «Σκιάθηρον», το Ηλιορολόγιο, το Καθετίον, την Κλεψύδρα, τους "Κρίκους", τη Στερεά σφαίρα και το Υδρολόγιο. Θεωρείται επίσης ο πρώτος που διαίρεσε τους κύκλους των παραπάνω αστρονομικών οργάνων σε 360 μοίρες και αυτός που πρώτος κατασκεύασε την Υδρόγειο σφαίρα. Η τεράστια σημασία του πρωτοποριακού έργου του Ίππαρχου, αναγνωρίστηκε από την Ευρωπαϊκή Διαστημική Υπηρεσία, που έδωσε το όνομά του σε ένα δορυφόρο, ο οποίος έχει ως αποστολή τη λεπτομερή χαρτογράφηση του ουρανού.

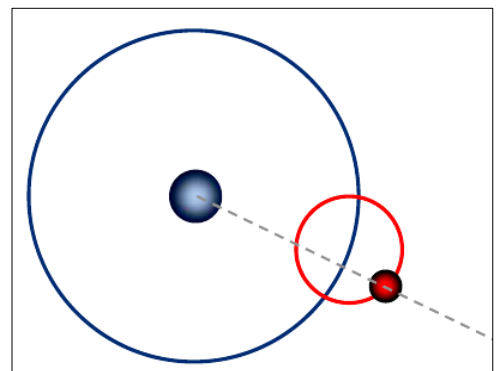
Το έργο του Ίππαρχου θα είχε ξεχαστεί από καιρό ή ακόμη, θα είχε εξαφανιστεί, αν δεν ήταν ο Πτολεμαίος (127μΧ-151μΧ), ο οποίος δημοσίευσε μερικά από τα ευρήματα του Ίππαρχου μαζί με το δικό του έργο. Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, Έλληνας φυσικός, φιλόσοφος, αστρονόμος και αστρολόγος, γεννήθηκε στη Ρωμαϊκή Αίγυπτο και έζησε στην Αλεξάνδρεια. Έγραψε πολλά βιβλία σχετικά με

την Αστρονομία. Το πιο σημαντικό από αυτά ήταν η «Μεγίστη» (ή «Μαθηματική Σύνταξις) που σώθηκε στα αραβικά ως *Αλμαγέστη* (κάποιες σελίδες από χειρόγραφο εκείνης της περιόδου, παρουσιάζεται στη διπλανή εικόνα), και αποτέλεσε το σημαντικότερο βιβλίο-εγχειρίδιο πάνω στην παρατηρησιακή και μαθηματική



Αστρονομία για περίπου 1400 χρόνια. Ο Πτολεμαίος έκανε επιλογή των καλύτερων αστρονομικών κανόνων που θέσπισαν οι Έλληνες προκάτοχοί του και ιδιαίτερα ο Ίππαρχος και φαίνεται ότι τους συνδύασε, είτε άμεσα, είτε έμμεσα, με δεδομένα και παραμέτρους που απέκτησε από τους Βαβυλώνιους. Υποστηρίζοντας το γεωκεντρικό σύστημα, επινόησε ένα ευφυέστατο σύστημα θεωρώντας τη Γη σφαιρική και ακίνητη. Για να εξηγήσει την ανάδρομη κίνηση των πλανητών, εισήγαγε το γεωκεντρικό μοντέλο των έκκεντρων κύκλων και επικύκλων που είχε ήδη προταθεί από τον Απολλώνιο τον Περγαίο και τον Ίππαρχο. Σύμφωνα με αυτό,

κάθε πλανήτης διαγράφει κύκλο γύρω από ένα κέντρο, το οποίο με τη σειρά του κινείται πάνω σε ένα κύκλο μεγαλύτερης ακτίνας γύρω από την Γη, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αξιοσημείωτη είναι η αναφορά στην έννοια του "εξισωτικού σημείου" ή "εξισωτή" (equant) που επινόησε ο Πτολεμαίος. Αν ένας παρατηρητής βρίσκεται



πάνω στο εξισωτικό σημείο, τότε αυτός θα βλέπει το σώμα που περιφέρεται γύρω του σε έναν επίκυκλο, να διανύει σε ίσους χρόνους ίσες γωνίες (κάτι που παραπέμπει στο νόμο των ίσων εμβαδών του Kepler).

Η θεωρία του Κλαύδιου Πτολεμαίου ήταν βέβαια λανθασμένη, αλλά συνέπιπτε σε μεγάλο βαθμό, τόσο με τις φιλοσοφικές απόψεις του Αριστοτέλη, όσο και με εκείνες της χριστιανικής θρησκείας. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, η μεν θεωρία του

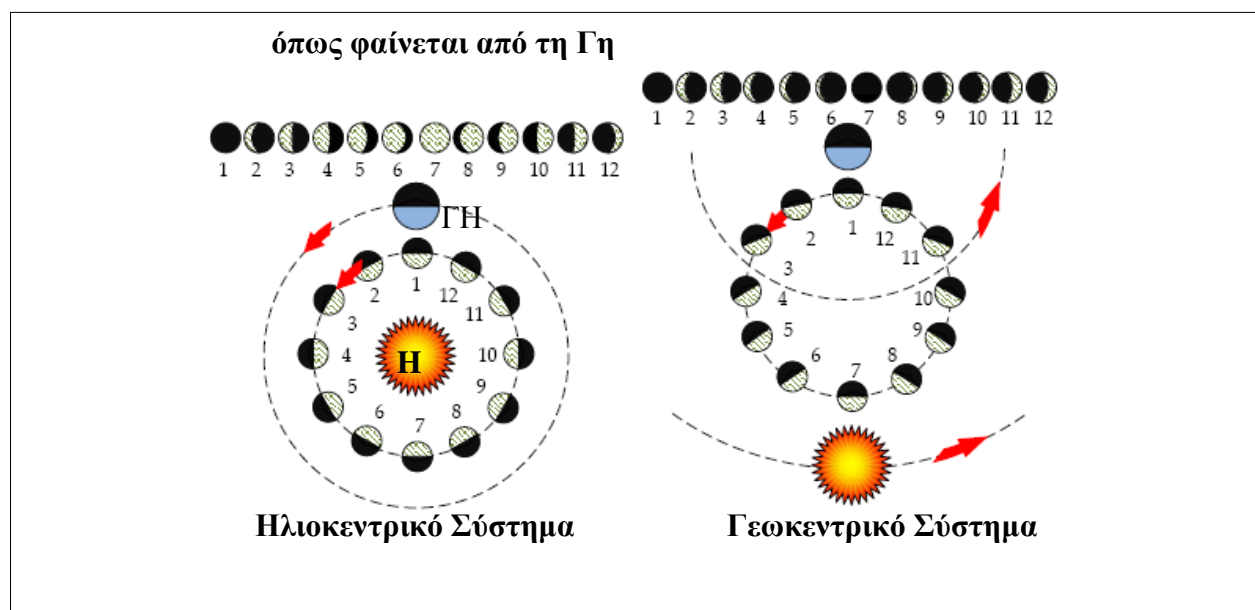
Πτολεμαίου να ενισχύσει τη χριστιανική πίστη, η δε εκκλησία (ιδιαίτερα η ρωμαιοκαθολική) με τη σειρά της να ενισχύσει και να υποστηρίξει τη θεωρία του Πτολεμαίου. Η αμοιβαία αυτή στήριξη είχε σαν αποτέλεσμα την αδιαμφισβήτητη και πλήρη αποδοχή και καθιέρωση του Πτολεμαϊκού συστήματος. Χαρακτηριστικών χρόνων που ακολούθησαν ήταν ότι όποιος χριστιανός τολμούσε να διαφωνήσει, χαρακτηριζόταν ως αιρετικός και συνήθως ετιμωρείτο αυστηρά, ακόμα και με θάνατο.

Μετά από αιώνες σιωπής και αποδοχής της γεωκεντρικής θεωρίας, ο Πολωνός Νικόλαος Κοπέρνικος (1473-1543), στην προσπάθειά του να βελτιώσει το σύστημα του Πτολεμαίου το οποίο παρουσίαζε κάποιες ατέλειες και ύστερα από πολλές παρατηρήσεις και υπολογισμούς, διατύπωσε την ηλιοκεντρική θεωρία. Για την ακρίβεια, ο Κοπέρνικος επανέφερε και επαναδιατύπωσε τη θεωρία του Αρίσταρχου. Έτσι, ο Ήλιος ξαναβρέθηκε στο κέντρο του σύμπαντος με τους πλανήτες να περιφέρονται γύρω από αυτόν. Όμως, από το φόβο να μην κατηγορηθεί και προπαντός να μην τιμωρηθεί από την εκκλησία, οι απόψεις του αυτές είδαν το φως της δημοσιότητας με ψευδώνυμο, ακριβώς τη χρονιά που πέθανε. Αν και ο Κοπέρνικος γλύτωσε τη μνήμη της Εκκλησίας, δυστυχώς κάποιοι από τους υποστηρικτές του δεν είχαν την ίδια τύχη. Ένας από αυτούς, ο Ιταλός φιλόσοφος Giordano Bruno, κήκε στην πυρά επειδή είχε υιοθετήσει τις απόψεις του Κοπέρνικου.

Μερικά χρόνια αργότερα, και συγκεκριμένα το 1546, γεννήθηκε ο Δανός αστρονόμος Tycho Brahe. Ο Brahe υπήρξε ένας λαμπρός παρατηρητής και συγκέντρωσε ένα τεράστιο όγκο δεδομένων σχετικά με τις κινήσεις των πλανητών. Δυστυχώς για εκείνον όμως, ήταν οπαδός της γεωκεντρικής θεωρίας και ποτέ δεν εξέτασε το έργο του από μία άλλη οπτική γωνία. Μετά το θάνατό του, το 1601, ο νεαρός βοηθός του, Johannes Kepler, ανέλαβε να συνεχίσει το έργο του. Ξεκίνησε να κάνει ανάλυση των δεδομένων και διαπίστωσε ότι ο μόνος τρόπος για να ταιριάξουν, ήταν να υιοθετήσει την ηλιοκεντρική θεωρία. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να διατυπώσει τρεις νόμους για τις κινήσεις των πλανητών που επρόκειτο να φέρουν επανάσταση στην σύγχρονη Αστρονομία. Το μοντέλο του

Kepler βελτίωσε κατά πολύ την ακρίβεια των προβλέψεων για τις κινήσεις των πλανητών, αρκετά χρόνια πριν ο Ισαάκ Νεύτωνας αναπτύξει τη θεωρία της βαρύτητας και διατυπώσει τους νόμους της κίνησης.

Η διαμάχη ανάμεσα στην επιστημονική σκέψη και το θρησκευτικό δογματισμό του «πίστευε και μη ερεύνα» συνεχίστηκε με τον Ιταλό επιστήμονα Γαλιλαίο (1564-1642), ο οποίος, χρησιμοποιώντας για πρώτη φορά το τηλεσκόπιο, έκανε πολλές ανακαλύψεις, ερχόμενος συχνά σε αντιπαράθεση με την εκκλησία. Ο Γαλιλαίος παρατήρησε τη Σελήνη, την Αφροδίτη, τον Ήλιο και το Δία και ανακάλυψε τέσσερις δορυφόρους γύρω από το Δία, οι οποίοι είναι σήμερα γνωστοί ως οι δορυφόροι του Γαλιλαίου. Οι παρατηρήσεις των φάσεων της Αφροδίτης από το Γαλιλαίο είναι μια τρανταχτή απόδειξη της ηλιοκεντρικής θεωρίας. Στην παρακάτω εικόνα δίνεται μία φανταστική και μία πραγματική θεώρηση των φάσεων της Αφροδίτης, όταν παρατηρείται από ένα γεωκεντρικό και από ένα ηλιοκεντρικό σύστημα αντίστοιχα.



Στο γεωκεντρικό σύστημα η Αφροδίτη δεν περνά ποτέ πίσω από τον Ήλιο και συνεπώς δε μπορεί να φωτίζεται πλήρως, όπως συμβαίνει στη θέση 7 του ηλιοκεντρικού συστήματος. Ο Γαλιλαίος έσπευσε να δημοσιεύσει τα συμπεράσματά του πριν τον προλάβουν άλλοι, στέλνοντας ένα αντίγραφο στις 13 Μαρτίου 1610 στην αυλή της Φλωρεντίας. Μέχρι τις 19 Μαρτίου, 550 αντίγραφα είχαν τυπωθεί και πουληθεί. Κάτω, όμως από την απειλή να τον κάψουν ζωντανό, ο Γαλιλαίος αναγκάστηκε να ανακαλέσει τη θεωρία του και να περάσει το υπόλοιπο της ζωής

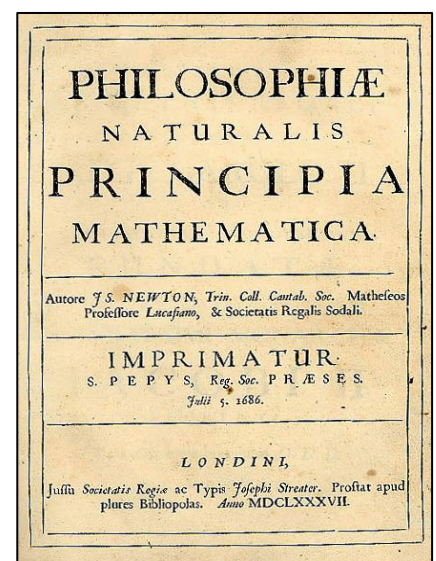
του σε κατ' οίκον περιορισμό, μέχρι το θάνατό του, το 1642. Οι επιστημονικά τεκμηριωμένες παρατηρήσεις του, διαδόθηκαν σε όλο το κόσμο και η δυναμική που δημιουργήθηκε, ανάγκασε ακόμα και το εκκλησιαστικό κατεστημένο να καταλάβει ότι ούτε οι αφορισμοί, ούτε το κάψιμο των βιβλίων, ούτε οι απειλές, ούτε οι εκτελέσεις μπορούσαν να σταματήσουν την εξάπλωση των νέων γνώσεων. Γιατί απλά ο Γαλιλαίος βασιζόταν στην πραγματικότητα.

Την ίδια χρονιά που πέθανε ο Γαλιλαίος, γεννήθηκε ίσως ο μεγαλύτερος επιστήμονας όλων των εποχών, ο Isaac Newton (1642-1727). Με το μεγαλειώδες έργο του “*Principia Mathematica*”(1687) θεμελίωσε

τον Παγκόσμιο Νόμο της Βαρύτητας, και έδωσε τεκμηριωμένες απαντήσεις σε αστρονομικά προβλήματα της εποχής του, ενώ επινόησε τον απειροστικό λογισμό, που έμελε να αλλάξει τη μαθηματική λογική και προσέγγιση πολλών θεμάτων επιστημονικού ενδιαφέροντος. Ο Νεύτωνας ενοποίησε τη γήινη μηχανική του Γαλιλαίου με την ουράνια μηχανική, που είχε προκύψει εμπειρικά από τους νόμους του Kepler και με τη χρήση του απειροστικού λογισμού εξέφρασε τις πλανητικές κινήσεις με μαθηματικό τρόπο, αποδεικνύοντας ότι η τροχιά ενός πλανήτη οφείλει να είναι ελλειπτική.

Η θεωρία της βαρύτητας οδήγησε λαμπρούς επιστήμονες προς τη διερεύνηση και τη δημιουργία προβλημάτων σχετικά με τη μελέτη συστημάτων σωμάτων που κινούνται υπό την επίδραση των αμοιβαίων ελκτικών τους δυνάμεων. Άρχισαν έτσι να μελετούν τις κινήσεις των πλανητών και να φτιάχνουν μοντέλα προβλημάτων Ουράνιας Μηχανικής.

Στην πιο απλή μορφή του, ένα τέτοιο πρόβλημα που αναφέρεται στην κίνηση του ζεύγους Γης-Σελήνης και του ζεύγους Ηλίου-Δία υπό την αλληλεπίδραση της βαρυτικής τους έλξης, αποδεικνύεται ότι έχει αναλυτικές λύσεις. Αυτό το πρόβλημα έγινε γνωστό ως πρόβλημα των δύο σωμάτων. Το φυσιολογικό επόμενο βήμα στην επιστημονική αναζήτηση, ήταν να μελετηθούν οι κινήσεις τριών σωμάτων που

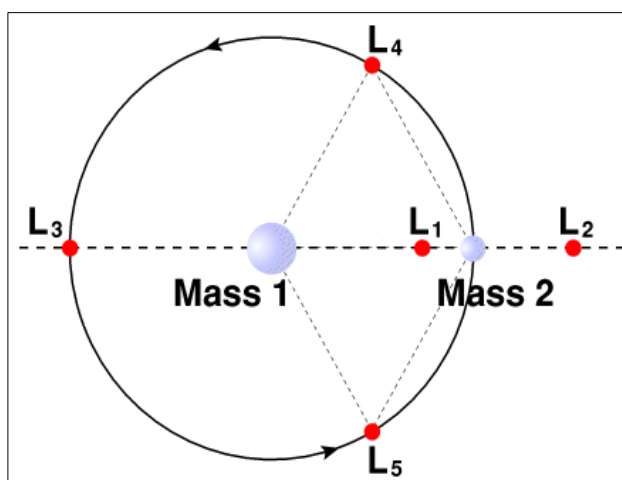


υπόκεινται στις αμοιβαίες τους ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις. Έτσι γεννήθηκε το γνωστό πρόβλημα των τριών σωμάτων.

Ο J.L. Lagrange (1736-1813) απέδειξε ότι όταν το ένα από τα τρία σώματα είναι πολύ μικρό σε σχέση με τα υπόλοιπα, τότε υπάρχουν 5 θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος, τόσο για τις επίπεδες κινήσεις του όσο και για τις τρισδιάστατες. Οι θέσεις αυτές που προκύπτουν ως λύσεις ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, ονομάζονται σημεία Lagrange ή στάσιμες λύσεις (stationary solutions), ή libration points.

Από τις πέντε αυτές θέσεις, οι τρεις που συμβολίζονται με L_1 , L_2 , L_3 κείνται πάνω στον άξονα των συζυγιών (δηλαδή την ευθεία που συνδέει τα δύο μεγάλα σώματα)

και για αυτό ονομάζονται συγγραμμικά σημεία. Τα άλλα δύο, L_4 , L_5 κείνται εκτός του άξονα συζυγιών και σε συμμετρικές ως προς αυτόν θέσεις και ονομάζονται τριγωνικά σημεία. Η ορθότητα του μαθηματικού φορμαλισμού του προβλήματος αυτού επαληθεύτηκε στην περίπτωση του



συστήματος Ήλιος-Δίας όπου στις προβλεφθείσες θέσεις L_4 , L_5 εντοπίσθηκε μία ομάδα αστεροειδών, οι λεγόμενοι Τρώες.

Όπως είναι λογικό, το ενδιαφέρον προχώρησε περαιτέρω με τη μελέτη του γενικού προβλήματος των N σωμάτων, όπου για δεδομένες αρχικές συνθήκες θέσης - ταχύτητας και υπό την επίδραση μόνο των αμοιβαίων βαρυτικών τους δυνάμεων, αναζητούνται οι τροχιές κάθε σώματος. Αν και η προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος αυτού, για $N > 2$, οδήγησε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, η αναζήτηση αυτή έγινε αφορμή ώστε να βρεθούν νέες μαθηματικές μέθοδοι και να διατυπωθούν νέες μαθηματικές θεωρίες, που η εφαρμογή τους επεκτάθηκε πέρα από τον κλάδο της Ουράνιας Μηχανικής.

Ο Euler (1707-1783), υπήρξε ένας από τους πιο παραγωγικούς ερευνητές στην ιστορία των μαθηματικών. Μελέτησε και αυτός (πριν από τον Lagrange) το ίδιο

πρόβλημα και η συμβολή του στη θεωρητική μελέτη του θέματος είναι τεράστια. Η έμπνευσή του να εισάγει εκτός του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς το οποίο περιστρέφεται (συνοδικό σύστημα αναφοράς) μαζί με τα μεγάλα σώματα, οδήγησε σε κλασικά μαθηματικά ευρήματα που άπτονται της μελέτης της δυναμικής των συστημάτων. Υπήρξε πρωτοπόρος στην εφαρμογή της θεωρίας των διαταραχών στην Ουράνια Μηχανική μαζί με τους J.L. Lagrange, Clairaut και d'Alembert.

Αξιοσημείωτη είναι όμως και η προσφορά του P.S.Laplace (1749-1827), στον οποίο λέγεται ότι οφείλεται η έννοια της Ουράνιας Μηχανικής. Κληροδοτώντας στην επιστημονική κοινότητα το πεντάτομο έργο του “*Traité de Mécanique Céleste*”, ήταν πεπεισμένος για τη σταθερότητα του Ηλιακού συστήματος.

Ο U.J.Le Verrier (1811-1877) και αργότερα ο Henri Poincaré (1854-1912) αναθεώρησαν την άποψη για σταθερότητα του Ηλιακού συστήματος που είχε πραγματευτεί ο Laplace. Με την ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων και τη βελτίωση των μεθόδων της αναλυτικής μηχανικής, έγινε εφικτό να αποδειχθεί το αβάσιμο της άποψης περί ευστάθειας του Ηλιακού συστήματος που πίστευε ο Laplace. Η τεράστια επιστημονικού μεγέθους διαπίστωση του Poincaré ότι το πρόβλημα των τριών σωμάτων δεν είναι αναλυτικά επιλύσιμο (πόσο μάλλον το πρόβλημα του Ήλιου και των εννέα πλανητών), λειτούργησε ως προθάλαμος εκκόλαψης της ιδέας των χαοτικών συμπεριφορών σε μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Οι τρεις τόμοι, α) *Integral Invariants and Asymptotic Properties of Certain Solutions*, β) *Approximations by Series* και γ) *Periodic and Asymptotic Solutions*, που αποτελούν το έργο του “*Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*”, ακόμα και σήμερα κρατούν αμείωτο το ενδιαφέρον της επιστήμης.

Ο Poincaré, με τη μεγάλη του συνεισφορά στην εξέλιξη της Ουράνιας Μηχανικής, θεμελίωσε το στόχο της, που ήταν πλέον η απάντηση στο ερώτημα εάν ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα αρκεί από μόνος του για να εξηγήσει όλες τις αντιληπτές κινήσεις των ουρανίων σωμάτων. Με αφετηρία τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, η Ουράνια Μηχανική έγινε περισσότερο πολυσχιδής από ότι ήταν στο παρελθόν. Έχασε τον τίτλο της θεωρητικής Αστρονομίας (ιστορικός τίτλος, όταν η αστρονομία

περιοριζόταν μόνο στην αστρομετρία και η Ουράνια Μηχανική αναπαριστούσε τις παρατηρήσεις και το θεωρητικό της μέρος αντίστοιχα), αλλά απέκτησε στενότερη σχέση με τη φυσική και τα μαθηματικά.

Αξιοσημείωτη είναι και η προσφορά του James Clerk Maxwell (1831 – 1879), με την πρωτοπόρα εργασία του (1859) για την ευστάθεια των δακτυλίων του Κρόνου. Ο Maxwell υιοθέτησε ένα μοντέλο που απετελείτο από πολλά ίσης μάζας διακριτά μικρά σώματα, τα οποία κατανέμονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους πάνω στην περιφέρεια ενός φανταστικού κύκλου ή δακτυλίου ο οποίος περιβάλλει ένα πολύ μεγαλύτερης μάζας ουράνιο σώμα. Η βασική ιδέα αυτού του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε έκτοτε ως σημείο αναφοράς της σύγχρονης έρευνας πολυπληθών δυναμικών συστημάτων.

Θα ήταν επιστημονική παράλειψη και μέγιστη ιεροσυλία να μην αναφέρουμε τη θεμελιώδη συμβολή του θεωρούμενου από πολλούς ως ο μεγαλύτερος Φυσικός του 20^{ου} αιώνα, Albert Einstein (1879-1955). Η ιδιοφυής σύλληψη και η επαναστατική για εκείνη την εποχή, Θεωρία της Σχετικότητας, έμελλε να στιγματίσει την εξέλιξη της Επιστήμης τον αιώνα που μας πέρασε. Με την εφαρμογή της, εξηγήθηκαν με ακρίβεια φαινόμενα που δεν είχαν μπορέσει να ερμηνευθούν από την κλασική Νευτώνεια Μηχανική. Ο Αριστοτέλης υποστήριζε την απολυτότητα του χώρου και του χρόνου, ενώ ο Νεύτωνας δεν διαφωνούσε ως προς το χρόνο αλλά θεωρούσε το χώρο σχετικό. Ο Einstein συνέλαβε και αξιοποίησε την ιδέα της σχετικότητας και του χρόνου και του χώρου.

Αν επιχειρήσουμε να περιγράψουμε τις διάφορες φάσεις μελέτης της δυναμικής των συστημάτων ουρανίων σωμάτων, μπορούμε να διακρίνουμε:

α) την **φυσική της κίνησης**, δηλαδή τη διερεύνηση της φύσης των δυνάμεων που επηρεάζουν την κίνηση των σωμάτων, και την εν συνεχεία δημιουργία ενός φυσικού μοντέλου πάνω σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα της Ουράνιας Μηχανικής. Τελικός στόχος είναι ο φορμαλισμός και η διατύπωση των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση των σωμάτων.

β) τα **μαθηματικά της κίνησης**, δηλαδή, τη μαθηματική διερεύνηση των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης των σωμάτων (διάφορες μορφές

απεικόνισης των λύσεων, ασυμπτωτική συμπεριφορά, ευστάθεια, σύγκλιση λύσεων κλπ.).

γ) τον **υπολογισμό της κίνησης**, δηλαδή, τον «ακριβή» προσδιορισμό των χαρακτηριστικών μεγεθών της κίνησης με βάση κάποιες αρχικές συνθήκες. Στο στάδιο αυτό και επειδή όλα σχεδόν τα προβλήματα της Ουράνιας Μηχανικής δεν έχουν αναλυτικές λύσεις, είμαστε υποχρεωμένοι να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους οι οποίες μας παρέχουν προσεγγιστικές λύσεις. Τα τελευταία χρόνια οι αριθμητικές τεχνικές συνεχώς βελτιώνονται, ενώ η εμφάνιση προηγμένου λογισμικού, όπως τα πακέτα Mathematica, MatLab κλπ., αποτελούν πολύτιμο βοήθημα προς αυτή την κατεύθυνση.

δ) την **εκτίμηση της ορθότητας των αποτελεσμάτων**, δηλαδή, την σύγκριση της μαθηματικής λύσης που αφορά σε ένα συγκεκριμένο δυναμικό πρόβλημα της Ουράνιας Μηχανικής, με τα αποτελέσματα της παρατήρησης. Μέσα από τη σύγκριση των θεωρητικών - παρατηρησιακών αποτελεσμάτων μπορεί κανείς να βγάλει συμπεράσματα σχετικά με την συνέπεια και την επάρκεια των φυσικών και μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν. Εάν αυτή η προσέγγιση δεν είναι ικανοποιητική, τότε η διαδικασία μελέτης του προβλήματος οδηγεί στον επανασχεδιασμό του με παράλληλη βελτίωση του φυσικού μοντέλου και εξεύρεση νέων ακριβέστερων μαθηματικών λύσεων.

Ένα από τα πιο γνωστά μέχρι σήμερα, προβλήματα της Ουράνιας Μηχανικής, είναι το πρόβλημα των N-σωμάτων. Στην προσπάθειά τους να το προσεγγίσουν, οι επιστήμονες κατέφυγαν σε διάφορες απλουστεύσεις, που είχαν να κάνουν κυρίως με τη γεωμετρική του δομή και με το πλήθος των μελών του συστήματος. Μία από τις απλουστεύσεις, αναφέρεται με τον όρο «περιορισμένο πρόβλημα των N σωμάτων» όπου συνήθως το ένα από τα N σώματα είναι πολύ μικρότερο από τα άλλα, ώστε να μην επηρεάζεται η κίνησή του από τα βαρυτικά πεδία των υπόλοιπων μεγάλων σωμάτων (primaries), αλλά να μην επηρεάζει αυτό την κίνηση τους. Επί πλέον συχνά ο όρος «περιορισμένο» αναφέρεται σε έναν επίπεδο σχηματισμό των υπόλοιπων μεγάλων σωμάτων του συστήματος. Αν η κίνηση του μικρού σώματος

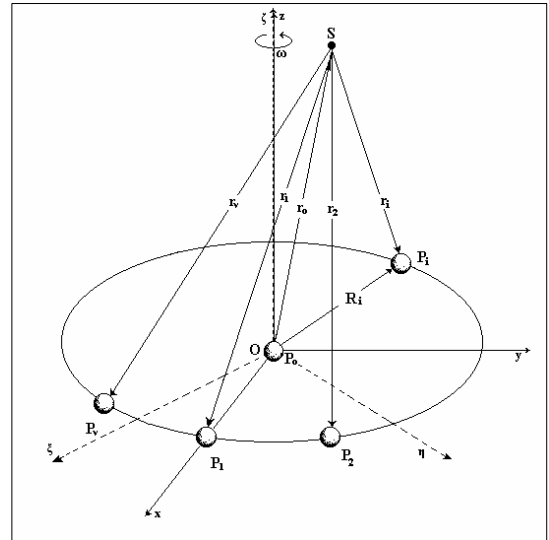
πραγματοποιείται πάνω στο επίπεδο της κίνησης των μεγάλων σωμάτων, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως επίπεδο (planar), διαφορετικά ως τρισδιάστατο (3-D). Στην κατηγορία αυτή ανήκει και το περίφημο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων. Στην περίπτωση αυτή, διακρίνουμε δύο μεγάλες υποκατηγορίες παραλλαγών, που έχουν να κάνουν με το είδος των κλειστών τροχιών, που εκτελούν τα δύο μεγάλα σώματα περί το κοινό κέντρο μάζας τους. Έτσι αν οι τροχιές τους είναι κυκλικές, μιλάμε για το κυκλικό πρόβλημα (circular), ενώ αν είναι ελλειπτικές μιλάμε για το ελλειπτικό πρόβλημα (elliptic). Ειδική περίπτωση της πρώτης υποκατηγορίας είναι το γνωστό πρόβλημα Copenhagen, όπου τα δύο μεγάλα σώματα έχουν ίσες μάζες (ανηγμένη μάζα $\mu=0.5$).

Στην κατηγορία των περιορισμένων επίπεδων κυκλικών προβλημάτων με περισσότερα από δύο σώματα ανήκει και ένα μοντέλο που προτάθηκε το 1999 από τους Maranhao & Llibre και εξετάζει την κίνηση ενός μικρού σώματος στο βαρυτικό πεδίο τριών μεγάλων σωμάτων, από τα οποία τα δύο έχουν ίσες μάζες και βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από το τρίτο σώμα που έχει διαφορετική μάζα και είναι τοποθετημένο στο κέντρο μάζας του συστήματος.

Ένας πολυπληθέστερος σχηματισμός είναι αυτός που περιγράφεται ως το περιορισμένο επίπεδο κυκλικό πρόβλημα των 4+1 σωμάτων, ή πρόβλημα του Ollöngren από το όνομα του ερευνητή που το πρότεινε και το περιέγραψε (Ollöngren, 1988; Markellos *et al.*, 1997, 2002; Perdios *et al.*, 2003; Papadakis & Kanavos, 2007;). Σ' αυτό, τρία ίσης μάζας μεγάλα σφαιρικά και ομογενή σώματα βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενώ ένα τέταρτο μεγάλο σώμα, σφαιρικό και ομογενές, με διαφορετική μάζα βρίσκεται στο κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου. Και εδώ εξετάζεται η κίνηση ενός μικρού σώματος στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από την παρουσία των τεσσάρων μεγάλων σωμάτων.

Ως επέκταση και γενίκευση του παραπάνω συστήματος, τα τελευταία χρόνια έχει εμφανιστεί το λεγόμενο «Δακτυλιοειδές πρόβλημα των N+1 σωμάτων» ή «Ring problem of (N+1) bodies» ή «Regular polygon problem of (N+1) bodies» που προσελκύει το ιδιαίτερο ενδιαφέρον των ερευνητών, οι οποίοι μελετούν διάφορες πλευρές της δυναμικής του (Kalvouridis, 1999a,b,c, 2001a,b,c, 2003; Arribas &

Elīpe, 2004; Κρουσταλλούδη, 2006; Elīpe *et al.*, 2007; κ.α.). Υπενθυμίζουμε ότι στο πρόβλημα αυτό: $N=v+1$ μεγάλα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και από αυτά, τα $v=N-1$ μεγάλα ομογενή και σφαιρικά σώματα έχουν ίσες μάζες και βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού v -γώνου (primaries), ενώ το N -οστό σώμα έχει διαφορετική μάζα και βρίσκεται στο κέντρο μάζας του σχηματισμού (central primary). Ένα μικρό σώμα αμελητέας μάζας (particle) κινείται στο βαρυτικό πεδίο των προηγούμενων $v+1$ σωμάτων χωρίς το ίδιο να επηρεάζει την κίνησή τους (βλ. διπλανή εικόνα).



Όπως ήδη αναφέραμε στις παραπάνω περιγραφές των προβλημάτων, όλες τους

βασίστηκαν στην παραδοχή ότι τα μεγάλα σώματα δημιουργούν Νευτώνεια πεδία δυνάμεων. Όμως για πολλά χρόνια η μελέτη της δυναμικής ενός σώματος σε πεδία δυνάμεων διάφορων των Νευτώνειων, ως εναλλακτική πρόταση στην θεωρία της Σχετικότητας, αποτέλεσε για πολλούς ερευνητές ιδιαίτερη πρόκληση για περαιτέρω διερεύνηση. Έτσι κατά καιρούς προτάθηκαν διάφορες μορφές δυναμικών που αποσκοπούσαν στην προσομοίωση της συμπεριφοράς δυναμικών συστημάτων μεγάλης κλίμακας (παρόμοιες προσπάθειες έγιναν και σε συστήματα μοριακής κλίμακας). Μεταξύ άλλων αναφέρουμε τα δυναμικά που προτάθηκαν από τους Manev, Schwarzschild, Schwarzschild-De Sitter, Reissner-Nordstrom, Fock, Arribas-Elīpe-Kalvouridis-Palatsios κ.ο.κ. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η δομή της έκφρασης του δυναμικού επιτρέπει τον διαχωρισμό του σε ένα Νευτώνειο όρο και σε ένα άθροισμα όρων που μπορεί να θεωρηθεί, κάτω από ορισμένες συνθήκες, ως μικρή διαταραχή. Έτσι μπορούν να ερμηνευθούν με κλασσικό τρόπο φαινόμενα όπως οι κινήσεις των κομητών στην άμεση γειτονιά του Ήλιου ή μεγάλων πλανητών, η μετατόπιση το περιηλίου του πλανήτη Ερμή, η ανάπτυξη δακτυλίων γύρω από ένα μη σφαιρικό πλανήτη, ή η κίνηση στο φωτο-βαρυτικό πεδίο ενός μη σφαιρικού περιστρεφόμενου μεγάλου άστρου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης

μπορεί να ανατρέξει για περισσότερες λεπτομέρειες στα πολύ αναλυτικά άρθρα των Mioc(1994, 2004), Mioc & Stoica(1995,1997), Mioc & Stavinschi (1998, 1999a,b, 2000a,b) Mioc & Perez-Chavella(2008). Σχετική με το θέμα αυτό είναι και μια ενδιαφέρουσα εργασία του Kalvouridis (2008d) ο οποίος μελέτησε τις περιοχές τρισδιάστατων λύσεων σε ένα δακτυλιοειδή σχηματισμό N σωμάτων με κεντρικό σώμα το οποίο δημιουργεί πεδίο τύπου Manev ή Schwarzschild.

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται μία παραλλαγή του δακτυλιοειδούς προβλήματος των $N+1$ σωμάτων (ring problem or regular polygon problem of $(N+1)$ bodies) κατά την οποία τα μεν $n=N-1$ μεγάλα σφαιρικά και ομογενή σώματα που βρίσκονται στις κορυφές του κανονικού n -γώνου δημιουργούν Νευτώνεια πεδία, το δε N -οστό σώμα που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του σχηματισμού,

δημιουργεί ένα Μετα-Νευτώνειο δυναμικό τύπου Manev $V(r) = -k^2 M m \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right)$,

όπου A και B είναι σταθερές ποσότητες. Όταν $A=1$ (όπως θεωρούμε στην παρούσα διατριβή) και $B=0$, τότε το πρόβλημα ανάγεται στη γνωστή κλασική Νευτώνεια εκδοχή του προβλήματος. Σε αυτό το εξελιγμένο μοντέλο, μελετάται η δυναμική συμπεριφορά του μικρού σώματος το οποίο κινείται στο πεδίο που δημιουργείται από όλα τα μεγάλα σώματα του σχηματισμού.

Το περιεχόμενο της εργασίας έχει οργανωθεί σε έντεκα κεφάλαια που πλαισιώνονται από τρία παραρτήματα, εκτενή βιβλιογραφία και ευρεία περίληψη στην αγγλική γλώσσα. Παρακάτω γίνεται συνοπτική περιγραφή του περιεχομένου κάθε κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 1. Στο 1^ο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις βασικές αρχές της κλασικής Μηχανικής, και στη γενική έννοια των δυναμικών τα οποία διακρίνονται σε ομογενή, μη ομογενή και σχεδόν ομογενή. Στη συνέχεια δίνονται κάποιες βασικές έννοιες του προβλήματος των N σωμάτων, όπως οι έννοιες του κεντρικού σχηματισμού, των ομογραφικών λύσεων (homographic solutions) και των ειδικότερων περιπτώσεών τους όπως οι ομοιόθετες (homothetic solutions) και οι λύσεις σχετικής ισορροπίας (relative equilibrium). Ακολουθεί μια ιστορική αναδρομή στο δακτυλιοειδές πρόβλημα των $(N+1)$ σωμάτων και στις διάφορες

παραλλαγές του που έχουν προταθεί κατά καιρούς. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με μία αναφορά στις προσπάθειες των μετά τον Νεύτωνα ερευνητών να βελτιώσουν τον νόμο της Παγκόσμιας Έλξης ώστε να εξηγηθούν με όρους κλασσικής μηχανικής διάφορα φυσικά φαινόμενα τα οποία είτε είχαν παρατηρηθεί πριν από την εμφάνιση της Θεωρίας της Σχετικότητας, όπως η μεταπτωτική κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη, είτε ανακαλύφθηκαν μετά από αυτήν, και στα οποία η Νευτώνεια θεωρία με τη γνωστή μορφή του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης αδυνατούσε να δώσει πειστικές απαντήσεις. Οι περισσότερες από τις προσπάθειες αυτές περιορίζονται σε απλές «παρεμβάσεις-βελτιώσεις» του Νόμου με την εισαγωγή διαφόρων διορθωτικών όρων, ώστε να ενισχυθεί η Παγκοσμιότητά του και να προσεγγισθεί καλύτερα η εξέλιξη των φαινομένων που περιγράψαμε.

Κεφάλαιο 2. Στο 2^ο Κεφάλαιο γίνεται λεπτομερής περιγραφή του προβλήματος που πραγματεύεται η παρούσα διατριβή, συσχετίζονται τα γεωμετρικά στοιχεία του κανονικού πολυγωνικού σχηματισμού των N μεγάλων σωμάτων και εξετάζονται οι ιδιότητες που απορρέουν από τις υπάρχουσες συμμετρίες. Με βάση την παραδοχή ότι τα μεγάλα σώματα βρίσκονται συνεχώς σε σχετική ισορροπία μεταξύ τους και ότι επιπλέον περιστρέφονται περί έναν, κάθετο προς το επίπεδό τους, άξονα, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, εξάγονται τόσο η συνθήκη για τη διατήρηση της μορφής του σχηματισμού, όσο και οι εξισώσεις κίνησης του μικρού σώματος σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς που έχει ως αρχή το κέντρο μάζας του συστήματος. Κατόπιν, μετασχηματίζονται οι εξισώσεις ώστε να περιγράφουν την κίνηση σε ένα κινούμενο (συνοδεύον) καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το οποίο είναι σταθερά συνδεδεμένο με τα μεγάλα σώματα και τέλος κανονικοποιούνται (αδιαστατοποιούνται) τα φυσικά μεγέθη που εμφανίζονται σε αυτές. Στην τελική αυτή μορφή το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους: (i) το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων ($n \in \mathbb{N} - \{1\}$), (ii) την παράμετρο $\beta = m_0/m$ που είναι ο λόγος της κεντρικής μάζας m_0 προς τη μάζα m ενός περιφερειακού ($\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^+$) και (iii) τον συντελεστή e της "διαταραχής" του Νευτώνειου πεδίου του κεντρικού σώματος P_0 ($e = B/a$ όπου a είναι η διαστατή πλευρά του κανονικού πολυγωνικού σχηματισμού και $e \in \mathbb{R}$). Από τις παραδοχές

που έχουμε κάνει και από τη μορφή των εξισώσεων της κίνησης προκύπτει ότι το πρόβλημα είναι αυτόνομο δηλαδή δεν περιέχεται άμεσα σε αυτές ο χρόνος. Από τις αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης απορρέει ένα ολοκλήρωμα της κίνησης τύπου Jacobi το οποίο θα αποτελέσει τη βάση για τη μελέτη πολλών από τα χαρακτηριστικά της δυναμικής συμπεριφοράς του μικρού σώματος όπως οι θέσεις ισορροπίας του, οι επιτρεπτές περιοχές της κίνησης (επίπεδης ή τρισδιάστατης) κ.ο.κ.

Κεφάλαιο 3. Εισάγοντας στις εξισώσεις της κίνησης τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ισορροπία, εξάγεται ένα μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα, από την αριθμητική επίλυση του οποίου προκύπτουν οι ακριβείς συντεταγμένες των θέσεων ισορροπίας του συστήματος. Οι θέσεις αυτές χαρακτηρίζονται ως συγγραμμικές (κατά μήκος των ακτίνων που συνδέουν το κεντρικό primary με ένα περιφερειακό), ή ως τριγωνικές (κατά μήκος των ακτίνων που συμπίπτουν με τις διχοτόμους των επίκεντρων γωνιών μεταξύ δύο διαδοχικών primaries). Στο βαρυντικό πρόβλημα οι δυναμικά ισοδύναμες θέσεις ισορροπίας συγκροτούν ομάδες (ζώνες ισορροπίας) κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από n σημεία, κείνται όλες στο επίπεδο των μεγάλων σωμάτων και είναι για ένα συγκεκριμένο n , είτε πέντε, είτε τρεις ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου β . Στην περίπτωση που η παράμετρος $e \neq 0$, τότε αν $e > 0$ ισχύουν όσα και στη βαρυντική περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι η μετάβαση (διακλάδωση) από τις πέντε στις τρεις ζώνες γίνεται για ζεύγη τιμών e, β των οποίων ο γεωμετρικός τόπος είναι μία καμπύλη (καμπύλη διακλάδωσης) της οποίας η μορφή εξαρτάται από την τρίτη παράμετρο n . Στην περίπτωση που $e < 0$ τότε ενδέχεται να εμφανίζονται δύο επιπλέον ζώνες ισορροπίας αλλά και δύο θέσεις εκτός επιπέδου επί του άξονα των z εκατέρωθεν του επιπέδου των primaries. Η μελέτη της επικρατούσας κάθε φορά κατάστασης ισορροπίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων $e (< 0)$ και β γίνεται με τη βοήθεια ενός εξαιρετικά σημαντικού διαγράμματος διακλαδώσεων το οποίο αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο πλήθος n (στην παρούσα διατριβή θεωρούμε ότι $n=7$) περιφερειακών σωμάτων και αποτελείται από τρεις καμπύλες οι οποίες αλληλοτεμνόμενες διαχωρίζουν το επίπεδο $e\beta$ σε πέντε περιοχές τιμών. Κάθε περιοχή χαρακτηρίζεται

από την εμφάνιση τριών, πέντε ή επτά ζωνών. Με βάση αυτό το διάγραμμα γίνεται εκτενής περιγραφή και μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων β και ϵ στη διαμόρφωση και εξέλιξη των ζωνών ισορροπίας, ενώ έχει εξαιρετική σημασία στην κατανόηση του μηχανισμού εξέλιξης των περιοχών της κίνησης (επίπεδης ή τρισδιάστατης) όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Παράλληλα με τον εντοπισμό των θέσεων ισορροπίας γίνεται και η μελέτη της γραμμικής ευστάθειας αυτών χρησιμοποιώντας αφενός μεν την κλασική μέθοδο προσδιορισμού των ιδιοτιμών της χαρακτηριστικής εξίσωσης του διαταραγμένου συστήματος, αφετέρου δε το κριτήριο των Routh-Hurwitz.

Κεφάλαιο 4. Αρχικά δίνονται οι ορισμοί των καμπύλων και επιφανειών μηδενικής ταχύτητας και κάποιες βασικές ιδιότητές τους, ενώ περιγράφεται η μέθοδος που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό τους και η οποία βασίζεται στην ύπαρξη του ολοκληρώματος της κίνησης τύπου Jacobi. Γίνεται λεπτομερής μελέτη της παραμετρικής μεταβολής αυτών των καμπύλων και των επιφανειών για την επίπεδη κίνηση, τόσο στη βαρυτική περίπτωση όπου $\epsilon=0$, όσο και στις περιπτώσεις όπου ο συντελεστής ϵ του δυναμικού Manen του κεντρικού σώματος είναι είτε θετικός, είτε αρνητικός. Τέλος, μελετάται η εξέλιξη των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και η ύπαρξη και μεταβολή των περιοχών παγίδευσης του μικρού σώματος σε σχέση με την Ιακωβιανή σταθερά C , στις περιπτώσεις θετικών και αρνητικών τιμών της παραμέτρου ϵ .

Κεφάλαιο 5. Αρχικά ορίζονται τα διαγράμματα $x-C$, αναφέρονται τα γενικά χαρακτηριστικά τους και τονίζεται η χρησιμότητά τους στη μελέτη των συμμετρικών περιοδικών τροχιών που θα ακολουθήσει σε επόμενα κεφάλαια. Στη συνέχεια, γίνεται διεξοδική παραμετρική μελέτη των καμπύλων $C=C(x)$, από τα οποία εξάγουμε πλούσια συμπεράσματα σε ότι αφορά στην εξέλιξη των θέσεων ισορροπίας αλλά και στο διαχωρισμό του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών σε επιτρεπτές και μη επιτρεπτές περιοχές της επίπεδης κίνησης του μικρού σώματος.

Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται σε μία ιδιότητα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας $C=C(x; y=0)$ η οποία είχε μελετηθεί στο βαρυτικό δακτυλιοειδές πρόβλημα των

$N+1$ σωμάτων (Kalvouridis, 2004) και έγκειται στο γεγονός ότι καμπύλες που είχαν σχεδιασθεί για μία τιμή της παραμέτρου ν και για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β , διέρχονταν όλες από δύο σημεία που βρίσκονταν κοντά στο κεντρικό σώμα και εκατέρωθεν του άξονα των C (εστιακά σημεία).

Στην παρούσα διατριβή, αναζητούνται παρόμοια σημεία και για τιμές $y \neq 0$, όπου αποδεικνύεται η ύπαρξή τους και διαπιστώνεται ότι ανήκουν σε μία συνεχή κλειστή τρισδιάστατη καμπύλη κυματοειδούς μορφής (εστιακή καμπύλη), η οποία αναπτύσσεται πάνω στην επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας η οποία περιβάλλει το κεντρικό primary. Η καμπύλη αυτή διατηρεί όλα τα χαρακτηριστικά συμμετρίας του δυναμικού πεδίου και του κανονικού πολυγωνικού σχηματισμού, καθώς επίσης παρουσιάζει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα, στα εστιακά σημεία k' και k αντίστοιχα, όπως τα συμβολίζουμε.

Για την πληρέστερη κατανόηση των ιδιοτήτων των εστιακών σημείων, δίνονται ορισμοί που τα αφορούν, ενώ μελετάται η θέση τους ως προς τον άξονα y του συνοδικού συστήματος.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται η ύπαρξη παρόμοιων εστιακών σημείων και εστιακών καμπύλων στο συγκεκριμένο μοντέλο, όπου η προστιθέμενη τρίτη παράμετρος e είναι φυσικό να διαφοροποιεί λίγο ή πολύ τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη βαρυτική περίπτωση. Λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα, εξετάζεται πρώτα η περίπτωση όπου η παράμετρος μάζας β διατηρείται σταθερή και μεταβάλλεται η παράμετρος e και καθορίζεται η μαθηματική έκφραση μιας συνάρτησης F_β , οι μη μηδενικές ρίζες της οποίας αποτελούν τις θέσεις (x_k^β, C_k^β) και $(x_{k'}^\beta, C_{k'}^\beta)$ των εστιακών σημείων k και k' αντίστοιχα. Η συνάρτηση F_β περιγράφει μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων ως προς β και από την επίλυσή της μέσω μαθηματικών μεθόδων, προκύπτει η δισδιάστατη και τρισδιάστατη (για διάφορες επιτρεπτές τιμές της y) απεικόνιση των εστιακών καμπύλων στο επίπεδο xy και στο χώρο xyC αντίστοιχα. Τέλος, αποδεικνύεται η ύπαρξη και υπολογίζονται οι θέσεις, δύο κοινών σημείων διέλευσης των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$, οι οποίες έχουν σχεδιαστεί για $\nu=7$ και για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη που ακολουθεί και αφορά στην ύπαρξη και εξέλιξη των εστιακών σημείων - εστιακών καμπύλων, για την περίπτωση όπου η παράμετρος e διατηρείται σταθερή και μεταβάλλεται η παράμετρος μάζας β . Κατ' αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση, οι θέσεις (x_k^e, C_k^e) και (x_k^e, C_k^e) των εστιακών σημείων προσδιορίζονται μέσω της επίλυσης της αντίστοιχης συνάρτησης $F_e=0$, για διάφορες επιτρεπτές τιμές της μεταβλητής y , όπου η F_e περιγράφει μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων ως προς e . Γίνεται λεπτομερής διερεύνηση για τις περιπτώσεις με $e=0$, $e>0$ και $e<0$, από την οποία προκύπτουν αξιοσημείωτα συμπεράσματα. Ειδικότερα για την περίπτωση με $e<0$, γίνεται λεπτομερής περιγραφή των εστιακών σημείων και εστιακών καμπύλων μέσω των διαγραμμάτων $x-C$ και $x-F_e$, ενώ ακολουθεί η δισδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση τους για $e<0$ και προσδιορίζεται η εξέλιξη και το πλήθος τους, συναρτήσει της μεταβλητής y . Μια αντίστοιχη μελέτη της εξέλιξης του πλήθους των εστιακών καμπύλων γίνεται και μέσω των διαγραμμάτων $x-F_e$. Τέλος, σχεδιάζοντας τις καμπύλες $F_e=F_e(x)$ για $n=7$ και για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e , αποδεικνύεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η ύπαρξη δύο κοινών σημείων διέλευσης των καμπύλων αυτών, ενώ υπολογίζονται και οι θέσεις τους οι οποίες κι αυτές είναι ανεξάρτητες των τιμών e και β . Τα σημεία αυτά είναι τα ίδια με τα κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και ο γεωμετρικός τους τύπος είναι περιφέρειες κύκλων, οι ακτίνες των οποίων εξαρτώνται μόνο από την τιμή της παραμέτρου v .

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη μελέτη της επίδρασης του πλήθους n των περιφερειακών σωμάτων στις συναρτήσεις F_β και F_e , ενώ περιγράφεται ο μηχανισμός εξέλιξης των εστιακών καμπύλων όταν μεταβάλλεται ο διαταρακτικός όρος e , για διάφορες τιμές της παραμέτρου v .

Κεφάλαιο 6. Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου ορίζονται οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση, οι οποίες για κάθε τιμή του C οριοθετούν τις περιοχές του χώρου xyz όπου είναι δυνατή και επομένως πραγματοποιήσιμη η κίνηση του μικρού σώματος, ενώ αναφέρονται μερικά γενικά χαρακτηριστικά τους. Συμβολίζοντας με C_w τις τιμές που αντιστοιχούν στις θέσεις ισορροπίας τόσο των ζωνών όσο και των "εκτός επιπέδου" σημείων ισορροπίας $L_{\pm z}$, τότε για μία

συγκεκριμένη τριάδα ν , β , e , τοπολογικές αλλαγές των επιφανειών αυτών συμβαίνουν ακριβώς όταν $C = C_w$ (bifurcation points), όπου $w = E_1, E_2, A_1, A_2, B, C_2, C_1$ και $L_{\pm z}$ αντίστοιχα.

Η μελέτη της εξέλιξης και των τοπολογικών μεταβολών των περιοχών τρισδιάστατης κίνησης γίνεται είτε με τη βοήθεια των καμπύλων $C_w = C_w(\beta)$, που σχεδιάζονται για σταθερές τιμές των ν και e , είτε με τη βοήθεια των καμπύλων $C_w = C_w(e)$ που σχεδιάζονται για σταθερές τιμές των ν και β . Σε κάθε περίπτωση, οι καμπύλες αυτές τέμνονται μεταξύ τους σε διάφορα σημεία με αποτέλεσμα να δημιουργούνται διαστήματα τιμών της παραμέτρου β (αντίστοιχα της παραμέτρου e) μέσα σε καθένα από τα οποία ισχύει διαφορετική ανισοτική σχέση μεταξύ των Ιακωβιανών σταθερών C_w των υπάρχουσών ζωνών ισορροπίας και των εκτός επιπέδου σημείων (εφόσον υπάρχουν). Το πλήθος των τομών αυτών των καμπύλων, το πλήθος των δημιουργούμενων διαστημάτων τιμών της παραμέτρου β (αντίστοιχα της παραμέτρου e), καθώς και η μορφή των ανισοτικών σχέσεων που ισχύουν σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, μεταβάλλονται όταν μεταβάλλονται οι τιμές των παραμέτρων ν και e . Προφανώς επειδή τα σημεία τομής των καμπύλων $C_w = C_w(\beta)$ (ή $C_w = C_w(e)$), ανήκουν ταυτόχρονα σε δύο διαδοχικά διαστήματα τιμών της β (αντίστοιχα της e), εκεί θα συμβαίνει διπλή τοπολογική αλλαγή των περιοχών της κίνησης.

Κεφάλαιο 7. Μελετώνται οι ελκτικές περιοχές (attracting domains) των ζωνών ισορροπίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e . Κάθε τέτοια περιοχή ορίζεται ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy των primaries τα οποία λαμβανόμενα ως αρχικές προσεγγίσεις μιας αριθμητικής μεθόδου επίλυσης του μη γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, των οποίων οι θέσεις ισορροπίας αποτελούν λύση, οδηγούν τη συγκεκριμένη μέθοδο σε σύγκλιση σε ένα οποιοδήποτε σημείο της αντίστοιχης ζώνης ισορροπίας. Όπως είναι φυσικό, οι ελκτικές περιοχές της κάθε ζώνης παρουσιάζουν τα στοιχεία συμμετρίας του σχηματισμού των primaries αλλά και του δυναμικού πεδίου που αυτά δημιουργούν. Η μη γραμμικότητα τόσο του αρχικού δυναμικού συστήματος όσο και του συνεπαγόμενου αλγεβρικού μέσω του οποίου υπολογίζονται οι θέσεις ισορροπίας,

έχει ως αποτέλεσμα οι ελκτικές περιοχές να εμφανίζουν περιοχές ντετερμινιστικές και περιοχές χαοτικές με μορφοκλασματική δομή σε κάθε περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν περιοχές των οποίων η σύσταση είναι «συμπαγής» με την έννοια ότι όλα τα σημεία τους οδηγούν στα σημεία ισορροπίας μιας συγκεκριμένης ζώνης και για αυτό το λόγο παρουσιάζουν ντετερμινιστικής φύσεως χαρακτηριστικά αφού μικρές αλλαγές στις τιμές τους οδηγούν στον ίδιο στόχο. Υπάρχουν όμως και μη συμπαγείς περιοχές οι οποίες αποτελούνται από διάσπαρτα σημεία, και εντοπίζονται κυρίως στα ασαφή όρια των συμπαγών περιοχών των ζωνών (χαοτικές περιοχές).

Κεφάλαιο 8. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας των περιοδικών τροχιών και κυρίως των συμμετρικών οι οποίες θα αποτελέσουν το αντικείμενο της μελέτης μας δίνοντας έμφαση στις γενικές ιδιότητες του μονόδρομου πίνακα $\mathcal{D}(T)$ των επίπεδων τροχιών αυτής της κατηγορίας. Παρουσιάζεται η ορολογία που θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα κεφάλαια, η κατηγοριοποίησή τους σε ορθές και ανάδρομες, απλές και πολλαπλές περιοδικές, τροχιές απλής και πολλαπλής συμμετρίας, μεγάλης ή μικρής περιόδου κ.ο.κ., ενώ αναλύεται η εφαρμοζόμενη μέθοδος αναζήτησης και εντοπισμού των τροχιών αυτών στον φασικό χώρο των αρχικών συνθηκών. Τέλος περιγράφεται η ακολουθούμενη μεθοδολογία για τη μελέτη της ευστάθειας των τροχιών αυτών αλλά και η θεωρία των διακλαδώσεων των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών μέσω των διαγραμμάτων ευστάθειας τα οποία αφορούν στη βασική παράμετρο ευστάθειας a και τα οποία συνήθως σχεδιάζονται σε άξονες $a-x_0$ ή $a-C$.

Κεφάλαια 9-10. Στο κεφάλαιο 9 μελετώνται αρχικά οι επίπεδες συμμετρικές απλές περιοδικές τροχιές για τη βαρυτική περίπτωση ($e=0$). Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι αποτελούνται από ένα βασικό βρόχο, διακρίνονται δε σε τέσσερις βασικές κατηγορίες ανάλογα με τη μορφή της διαγραφόμενης τροχιάς, ήτοι: σε πλανητικού, δορυφορικού, διαπλανητικού τύπου και τροχιές που διαγράφονται γύρω από μία θέση ισορροπίας. Η περίπτωση αυτή παρότι είχε ήδη μελετηθεί στο παρελθόν (Kalnouridis *et al.*, 2008) εμπλουτίστηκε με νέες οικογένειες ώστε να αποτελέσει τη βάση σύγκρισης με τις εικόνες κατανομής των οικογενειών που λαμβάνονται

θεωρώντας μη μηδενικές τιμές της παραμέτρου Manev . Όπως διαπιστώθηκε, η μεν περίπτωση με $e > 0$ παρουσιάζει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με τη βαρυτική, ενώ η περίπτωση με $e < 0$ διαφοροποιείται σημαντικά λόγω της αλλαγής της δομής της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας που διαμορφώνεται στην περιοχή του κεντρικού σώματος και παίρνει τη μορφή μιας αναδίπλωσης. Λόγω της μορφολογίας αυτής αναπτύσσονται στην περιοχή των θέσεων ισορροπίας των δύο νέων ζωνών ισορροπίας δένδροειδείς κατανομές περιοδικών τροχιών που διακλαδίζονται με άλλες οικογένειες της ίδιας ή μεγαλύτερης πολλαπλότητας. Ακριβώς λόγω της ιδιαιτερότητας αυτής, δόθηκε μεγαλύτερη βαρύτητα στη μελέτη διαφόρων περιπτώσεων με $e < 0$, ώστε να αντληθούν περισσότερες πληροφορίες οι οποίες να βοηθήσουν στην κατανόηση του μηχανισμού της παραμετρικής εξέλιξης των χαρακτηριστικών καμπύλων αλλά και των ίδιων των τροχιών. Η παρακολούθηση αυτής της παραμετρικής εξέλιξης έγινε με τη βοήθεια διαγραμμάτων συσχέτισης των διαφόρων μεγεθών των τροχιών όπως η αρχική θέση και η θέση στην ημιπερίοδο, η ημιπερίοδος, η τιμή της Ιακωβιανής σταθεράς κ.ο.κ. Στο Κεφάλαιο 10 επαναλαμβάνεται η ίδια μελέτη η οποία όμως τώρα αφορά στις συμμετρικές διπλές και τριπλές περιοδικές τροχιές, στην κατανομή τους, στην παραμετρική τους εξέλιξη, στην παραμετρική εξέλιξη των τροχιών-μελών τους, στην ευστάθεια και στις διακλαδώσεις τους με οικογένειες της ίδιας ή διαφορετικής πολλαπλότητας.

Κεφάλαιο 11. Στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής κρίθηκε χρήσιμο να παρατεθούν οργανωμένα κατά κεφάλαιο, συγκεντρωμένα και κωδικοποιημένα, τα πλούσια συμπεράσματα και αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της παρούσας μελέτης. Γίνεται τέλος αναφορά στις προοπτικές που υπάρχουν για περαιτέρω έρευνα και άλλων πτυχών της δυναμικής συμπεριφοράς του μικρού σώματος (κατακόρυφη ευστάθεια και κρίσιμα σημεία, τρισδιάστες περιοδικές κινήσεις, *regularization*, κ.ο.κ.) τόσο με χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου, όσο και με τη γενίκευση, βελτίωση ή διαφοροποίηση του μοντέλου θεωρώντας μεταξύ άλλων και άλλες μορφές Μετα-Νευτώνειων δυναμικών πάντα όμως μέσα στα πλαίσια της Κλασικής Δυναμικής.

Στα Παραρτήματα (Α-Γ) που ακολουθούν, εκτίθενται διάφοροι πίνακες με αποτελέσματα, καθώς και μερικά από τα προγράμματα σε κώδικα Mathematica που καταρτίστηκαν.

Η διατριβή εμπλουτίζεται με 750 περίπου σχήματα και διαγράμματα, καθώς και με 76 πίνακες με ενδεικτικά αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ-ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ Ν ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΛΥΣΕΩΝ-ΚΕΝΤΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ-ΤΟ ΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ N+1 ΣΩΜΑΤΩΝ- ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑ-ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ

1.1 Βασικές αρχές της κλασικής Μηχανικής-Η έννοια του δυναμικού και δυνάμεις προερχόμενες από δυναμικά

Οι βασικές παραδοχές της λεγόμενης κλασικής Μηχανικής και γενικότερα της κλασικής φυσικής αναφέρονται αφενός μεν στις ιδιότητες του χώρου μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση, αφετέρου δε στις ιδιότητες του χρόνου. Οι χώροι θεωρούνται Ευκλείδειοι, ομογενείς και ισότροποι, ενώ ο χρόνος θεωρείται ομογενής, μεταβαλλόμενος κατά τρόπο συνεχή και μονοτόνως αύξοντα.

Θεμέλιο της κλασικής μηχανικής είναι η Νευτώνεια Μηχανική στην οποία κυρίαρχο ρόλο για την κίνηση των σωμάτων αποτελεί ο νόμος της παγκόσμιας έλξης που εκφράζει όπως είδαμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα σε δύο σημειακά υλικά σώματα, ενώ ο νόμος που εκφράζει το δεύτερο αξίωμα του Νεύτωνα αποτελεί βασικό νόμο της φύσης που συνδέει βασικά μεγέθη, όπως η δύναμη και η μάζα.

Όπως γνωρίζουμε, όταν η δύναμη που επιδρά σε ένα υλικό σημείο είναι συνάρτηση μόνο της θέσης $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)$ (ως προς ένα αδρανειακό σύστημα) και υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V(x,y,z)$ τέτοια ώστε η δύναμη \mathbf{F} να εκφράζεται υπό τη μορφή:

$$\mathbf{F}=-\text{grad}V \quad (1.1)$$

τότε λέμε ότι η \mathbf{F} προέρχεται από δυναμικό. Η συνάρτηση V ονομάζεται δυναμικό ή δυναμική ενέργεια. Ενίοτε αναφερόμαστε στη δυναμική συνάρτηση¹ $U(x,y,z)$ η οποία διαφέρει από το δυναμικό $V(x,y,z)$ μόνο κατά το πρόσημο (Παπαϊωάννου, 1952; Μυλωνάς, 1978), δηλαδή,

$$V(x,y,z) = - U(x,y,z) \text{ και συνεπώς } \Delta V=-\Delta U. \quad (1.2)$$

¹ Αρκετοί συγγραφείς χρησιμοποιούν καταχρηστικά τις δύο αυτές διακριτές έννοιες με το ίδιο όνομα, δυναμικό

Στην περίπτωση αυτή η σχέση (1.1) διαμορφώνεται στην

$$\mathbf{F} = \text{grad}U. \quad (1.3)$$

Και οι δύο αυτές ποσότητες εκφράζουν έργο ή ενέργεια και μετρώνται με τις ίδιες φυσικές μονάδες. Είναι γνωστό ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να προέρχεται η δύναμη από δυναμικό είναι η στροφή $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ή $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ένα πεδίο δυνάμεων που πληροί τις προϋποθέσεις αυτές, ονομάζεται διατηρητικό ή αστρόβιλο. Τα δυναμικά (ή συναρτήσεις δυναμικού) χαρακτηρίζονται ως (Kellog, 1929):

- Ομογενή, όταν αποδίδονται από ομογενείς μαθηματικές συναρτήσεις των συντεταγμένων. Παραδείγματα αποτελούν το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό και το δυναμικό Coulomb που εκφράζονται με ομογενείς συναρτήσεις βαθμού ομογενείας -1.
- Μη ομογενή, όταν οι μαθηματικές συναρτήσεις που τα εκφράζουν δεν είναι ομογενείς.
- Σχεδόν ομογενή (quasi-homogeneous). Τον ορισμό αυτό εισήγαγε ο Diacu (Diacu, 2009 "*How I discovered Manev*") προκειμένου να χαρακτηρίσει εκείνα τα πεδία των δυναμικών τα οποία δεν είναι γνήσια ομογενή, αλλά δημιουργούνται από την επαλληλία ομογενών δυναμικών πεδίων (συναρτήσεων δυναμικού με διαφορετικό βαθμό ομογενείας, λ.χ το δυναμικό τύπου Manev μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από δύο ομογενή δυναμικά με βαθμούς ομογενείας -1 και -2). Τα δυναμικά αυτά συναντώνται συνήθως σε προβλήματα της μη γραμμικής δυναμικής και κυρίως στη Φυσική και στην Αστρονομία. Στην κατηγορία αυτή, εκτός του προαναφερθέντος δυναμικού τύπου Manev, ανήκουν επίσης τα δυναμικά τύπου Schwarzschild, Elise *et al.*, κ.ο.κ.

1.2 Το γενικό πρόβλημα των N σωμάτων-Ειδικές λύσεις

1.2.1 Γενικά

Όταν αναφερόμαστε σε ένα σύστημα N υλικών σωμάτων που αλληλεπιδρούν μέσω των βαρυτικών έλξεών τους και περιοριζόμαστε σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, στην πραγματικότητα ομιλούμε για ένα μαθηματικό μοντέλο που θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγίσει μερικές πλευρές ενός πραγματικού φυσικού συστήματος συνήθως μεγάλης κλίμακας όπως το ηλιακό μας σύστημα ή κάποιο άλλο αστρικό σύστημα όπως λ.χ. τα ανοικτά και σφαιρικά σμήνη (open and globular clusters που περιλαμβάνουν από μερικές δεκάδες μέχρι εκατοντάδες χιλιάδες άστρα), τους γαλαξίες, τα σμήνη γαλαξιών (clusters of galaxies), κ.λ.π.. Όταν το πλήθος N των σωμάτων του συστήματος είναι σχετικά μικρό ($N < 10^2$), τότε είμαστε μέσα στα όρια της περιοχής μελέτης που παραδοσιακά ονομάζουμε Ουράνια Μηχανική. Όταν $N > 10^2$, τότε η μελέτη τέτοιων συστημάτων ανήκει στην Αστρική Δυναμική (Stellar Dynamics) (Boccaletti & Pucacco, 2001). Προφανώς και στις δύο περιπτώσεις το πρόβλημα έγκειται στο να κατανοήσουμε αν και κατά πόσον το μαθηματικό μοντέλο των N υλικών σημείων είναι κατάλληλο για να περιγράψει την κίνηση N σωμάτων με πεπερασμένες και εν γένει διαφορετικές μάζες.

Η μορφή των γενικών εξισώσεων της κίνησης, για Νευτώνεια δυναμικά, είναι:

$$m_k \vec{\ddot{r}}_k = \sum_j^N G \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_k), \quad j \neq k, \quad r_{jk} = |\vec{r}_j - \vec{r}_k| \quad (1.4)$$

Επειδή δεν υπάρχει κάποια γενική αναλυτική λύση του συστήματος (1.4), κατά καιρούς αναζητήθηκαν ειδικές λύσεις όπου τα N υλικά σημεία πληρούν συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Από ιστορικής πλευράς, οι πρώτοι που έδωσαν συγκεκριμένες λύσεις στο σύστημα με $N=3$ (πρόβλημα των τριών σωμάτων) ήταν οι Euler (1764), Lagrange (1772) και Laplace (1789). Ο Lagrange έδειξε ότι στην περίπτωση τριών σωμάτων με πεπερασμένες μάζες που υφίστανται τη δράση των μεταξύ τους αμοιβαίων έλξεων, υπάρχουν πέντε διαφορετικοί σχηματισμοί έτσι ώστε κάτω από τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες, οι λόγοι των μεταξύ τους αποστάσεων να διατηρούνται σταθεροί. Σε όλους αυτούς τους σχηματισμούς, τα σώματα διαγράφουν όμοιες κωνικές τομές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους.

Στους τρεις από τους σχηματισμούς αυτούς, τα τρία σώματα βρίσκονται πάντα πάνω σε μία ευθεία, ενώ στους δύο άλλους σχηματισμούς, σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Οι σχηματισμοί αυτοί είναι γνωστοί με τους χαρακτηρισμούς, συγγραμμική και ισόπλευρη λύση αντίστοιχα. Η συγγραμμική λύση είχε προηγουμένως βρεθεί από τον Euler (1764). Οι λύσεις αυτές αποτελούν, όπως θα δούμε στη συνέχεια, τις πρώτες ομογραφικές λύσεις που βρέθηκαν για το πρόβλημα των N σωμάτων.

1.2.2 Κατηγορίες ειδικών λύσεων

Με βάση την ταξινόμηση και την ονοματολογία που έδωσε ο Wintner (1947) στις ειδικές λύσεις του γενικού προβλήματος, αυτές μπορούν να διακριθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- **Επίπεδες λύσεις.** Μία λύση του προβλήματος των N σωμάτων ονομάζεται επίπεδη, αν όλα τα σώματα βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο Π . Αν το επίπεδο αυτό έχει σταθερή θέση (ανεξάρτητη του χρόνου) ως προς ένα αδρανειακό κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων (σταθερό ή αναλλοίωτο (invariant) επίπεδο), τότε η λύση ονομάζεται διαρκής επίπεδη (planar). Αν η θέση αυτού του επιπέδου μεταβάλλεται με το χρόνο σε σχέση με ένα αδρανειακό κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς, τότε η λύση αναφέρεται ως στιγμιαία επίπεδη (flat). Παρότι ο τελευταίος όρος δεν είναι δόκιμος εντούτοις καλύπτει μια κατηγορία λύσεων. Προφανώς κάθε flat λύση δεν είναι απαραίτητα και planar. Συνήθως η διάκριση αυτή δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Σημειώνουμε επίσης ότι οι παραπάνω ορισμοί είναι εντελώς ανάλογοι με αυτούς της στιγμιαίας ή συνεχούς επίπεδης κίνησης ενός στερεού σώματος.
- **Ευθύγραμμες λύσεις.** Ονομάζονται οι λύσεις για τις οποίες τα N υλικά σημεία βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή. Αν τα υλικά σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία γραμμή κάποια χρονική στιγμή $t=t_0$, χωρίς να είναι βέβαιο ότι θα παραμείνουν σε αυτή και για $t \neq t_0$, τότε η λύση ονομάζεται στιγμιαία ευθύγραμμη (collinear) και τα σημεία λέμε ότι είναι σε συζυγία (syzygy). Αν όμως τα N σημεία βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία η

οποία παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε η λύση ονομάζεται διαρκής ευθύγραμμη (rectilinear).

- **Ομογραφικές λύσεις (homographic solutions).** Για τις λύσεις αυτές θα αναφερθούμε αναλυτικότερα παρακάτω (§1.3.2).

1.3 Κεντρικοί σχηματισμοί N σωμάτων στο επίπεδο και στο χώρο (central ή permanent configurations)-Ομογραφικές λύσεις

1.3.1 Κεντρικοί σχηματισμοί-Ορισμοί

Ο όρος κεντρικός σχηματισμός (central configuration) καθιερώθηκε από τον Wintner στα 1947 προκειμένου να αποδώσει την κατάσταση ενός συστήματος N σωμάτων τα οποία λόγω των κατάλληλων αρχικών συνθηκών κινούνται έτσι, ώστε οι σχετικές τους αποστάσεις να διατηρούνται σταθερές κάθε χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι ο σχηματισμός μπορεί να αλλάζει σε μέγεθος (ή προσανατολισμό) καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος t , αλλά όχι σε μορφή (σχήμα ή γεωμετρία). Αν αναφέρουμε την κίνηση των μελών του συστήματος ως προς ένα κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων, ο κεντρικός σχηματισμός μπορεί να εκτελέσει ως προς το κέντρο μάζας του (προκειμένου να παραμείνει κεντρικός) μόνο δύο ανεξάρτητες «κινήσεις»:

- Μία ομοιόμορφη διαστολή (αντίστοιχα συστολή)
- Μία περιστροφή (με σταθερή ή μη γωνιακή ταχύτητα) περί το κέντρο μάζας.

Ο κεντρικός σχηματισμός μπορεί να εκτελεί είτε ταυτόχρονα και τις δύο κινήσεις (ομογραφική λύση)(homographic solution), είτε μόνο τη μία από τις δύο. Όταν δεν υπάρχει συστολή ή διαστολή, τότε τα σώματα –μέλη του σχηματισμού βρίσκονται σε σχετική κατάσταση ισορροπίας (relative equilibrium) εκτελώντας μόνο περιστροφή απόλυτα στερεού σώματος περί το κέντρο μάζας. Αν δεν υπάρχει περιστροφή παρά μόνο διαστολή ή συστολή, τότε η λύση είναι ομοιόθετη (homothetic solution).

Ένας εναλλακτικός ορισμός για έναν κεντρικό σχηματισμό είναι και αυτός που λέει ότι ο σχηματισμός είναι κεντρικός όταν το διάνυσμα της επιτάχυνσης για καθένα

από τα N σώματα του συστήματος είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα της δύναμης. Με άλλα λόγια, η δυναμική κάθε σώματος-μέλους του σχηματισμού «μιμείται» αυτήν ενός προβλήματος «κεντρικής δύναμης» (Saari, 2005). Σημειώνουμε ότι μέχρι την εποχή του Wintner οι ερευνητές χρησιμοποιούσαν τον όρο **permanent configuration** που είχε εισάγει ο Moulton στα 1910.

Το πρόβλημα της μελέτης των κεντρικών σχηματισμών στη γενική περίπτωση των N -σωμάτων, το οποίο σημειωτέον παραμένει άλυτο μέχρι σήμερα, χαρακτηρίστηκε από τον Don Saari ως ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα του 21^{ου} αιώνα (Saari, 2006), ο δε Smale (2000) το κατέταξε έκτο στη λίστα που κατάρτισε με τα δέκα πιο σημαντικά προβλήματα προς επίλυση για τον 21^ο αιώνα. Η μεγάλη σημασία αυτής της μορφής των σχηματισμών αναδεικνύεται από το γεγονός ότι:

- Αποτελούν σημεία διακλάδωσης (bifurcation points) της τοπολογικής κατάταξης των συνεπίπεδων λύσεων του προβλήματος των N -σωμάτων
- Αποτελούν οριακούς σχηματισμούς, τόσο για περιπτώσεις ταυτόχρονων κρούσεων των σωμάτων μεταξύ τους, όσο και για πλήρως παραβολικές τροχιές
- Είναι οι μόνοι σχηματισμοί που διατηρούν διαχρονικά τη μορφή τους στο σύστημα των N σωμάτων

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο, για $N=3$ το πρόβλημα είχε λυθεί πλήρως από τους Euler (1764) και Lagrange (1772). Ακολούθησε η μελέτη του Liouville (1842) πάνω στο πρόβλημα των τριών σωμάτων, καθώς και η εργασία του Maxwell (1856) πάνω στη μοντελοποίηση του συστήματος των δακτυλίων του Κρόνου (η εργασία αυτή περιλαμβάνεται σε ένα τόμο που περιέχει μια συλλογή επιστημονικών εργασιών του και εκδόθηκε στο Cambridge το 1890). Με την ανατολή του 20^{ου} αιώνα ο Dziobek (1900) προσπάθησε να δώσει λύσεις σε συστήματα με 4 και πέντε σώματα, ενώ στη συνέχεια βρέθηκαν από τον Moulton (1914) όλες οι συγγραμμικές λύσεις για οποιοδήποτε N και για διάφορες μάζες. Στις επόμενες δεκαετίες ασχολήθηκαν με το πρόβλημα πολλοί επιφανείς επιστήμονες. Στο σημείο αυτό παραθέτουμε με χρονολογική σειρά μία σύντομη λίστα με επιλεγμένες εργασίες που αφορούν στους κεντρικούς σχηματισμούς και έχουν

δημοσιευθεί από το 1980 μέχρι σήμερα, περιλαμβάνονται δε στη σχετική βιβλιογραφία της παρούσας διατριβής προς διευκόλυνση των ενδιαφερόμενων αναγνωστών: Palmore, 1980; Saari, 1980; Llibre, 1991; Scheeres, 1992; Glass, K., 1997; Cors *et al.*, 2004; Sekiguchi, 2004; Arribas *et al.*, 2006; Perov & Medvedev, 2008; Llibre & Mello, 2008, 2009; Gidea & Llibre, 2010; κ.α.

1.3.2 Ομογραφικές λύσεις σε κεντρικούς σχηματισμούς

Οι λύσεις που βρήκαν οι Euler (1764) και Lagrange (1772) για το επίπεδο προβλήματος των τριών σωμάτων, αποτελούν επίσης και τις πρώτες ομογραφικές (homographic) λύσεις δηλαδή σχηματισμούς των σωμάτων του συστήματος οι οποίοι παραμένουν όμοιοι προς τον εαυτό τους όταν μεταβάλλεται ο χρόνος. Το Σχήμα 1.1 δείχνει μερικά στιγμιότυπα από ένα animation που κατασκεύασε ο Moeckel, όπου απεικονίζονται τρεις διαφορετικές θέσεις των τριών σωμάτων στο αντίστοιχο πρόβλημα, που κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους. Λύσεις αυτής της μορφής (δηλαδή ομογραφικές) βρέθηκαν επίσης και στο γενικό πρόβλημα των N σωμάτων από τους Moulton (1910), Wintner (1947), Diacu *et al.*, (2008), Diacu & Chavela (2011), κ.α. Η σχέση μεταξύ ομογραφικών λύσεων και κεντρικών σχηματισμών υπεδείχθη από τον Lagrange στα 1772 για την περίπτωση $N=3$ και συνοψίζεται στο ακόλουθο θεώρημα:

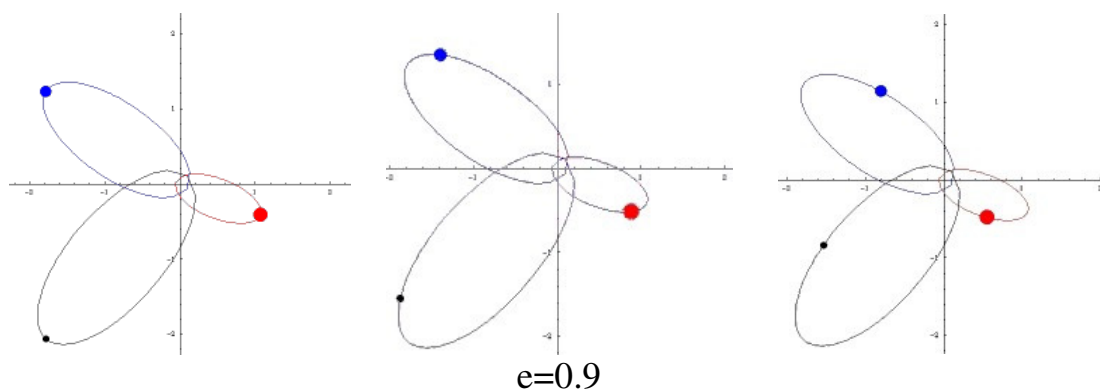
Θεώρημα 1 (Lagrange): Μία λύση του προβλήματος των N σωμάτων είναι ομογραφική αν και μόνο αν, τα σώματα σχηματίζουν τον ίδιο κεντρικό σχηματισμό για κάθε χρονική στιγμή για την οποία η λύση είναι ορισμένη.

Το θεώρημα αυτό δείχνει ότι οι ομογραφικές λύσεις και οι κεντρικοί σχηματισμοί ανήκουν στην ίδια μαθηματική κλάση και συνεπώς οι ιδιότητές τους σχετίζονται.

Σχετικό με το παραπάνω θεώρημα είναι και το επόμενο:

Θεώρημα 2 (Perko-Walter-Elmabsout): Για $N \geq 4$, N μάζες που βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, αποτελούν ένα κεντρικό σχηματισμό αν και μόνο αν, όλες οι μάζες είναι ίσες.

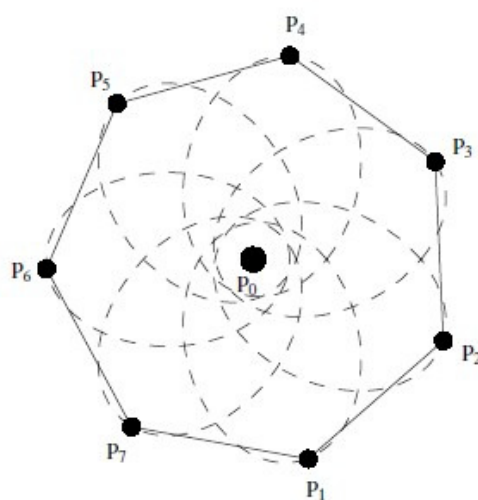
Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Perko-Walter (1986) για ομογραφικές λύσεις και από τον Elmabsout (1988) για κεντρικούς σχηματισμούς. Το προηγούμενο Θεώρημα 1 του Lagrange δείχνει ότι οι δύο αποδείξεις είναι ισοδύναμες.



$e=0.9$

Σχήμα 1.1α. Διάφορες φάσεις μιας ομογραφικής λύσης σε ένα σύστημα τριών σωμάτων με διαφορετικές μάζες. Οι εκκεντρότητες των τροχιών των σωμάτων είναι $\varepsilon=0.9$

Ομογραφικές λύσεις σε κανονικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς με σχεδόν ομογενή δυναμικά μελέτησαν επίσης οι Arribas *et al.*, (2006, 2007). Στο Σχήμα 1.1β δείχνεται η ομογραφική λύση ενός σχηματισμού κανονικού πολυγώνου με κεντρικό σώμα και $n=7$ (Cattani & Prokopenya, 2004).



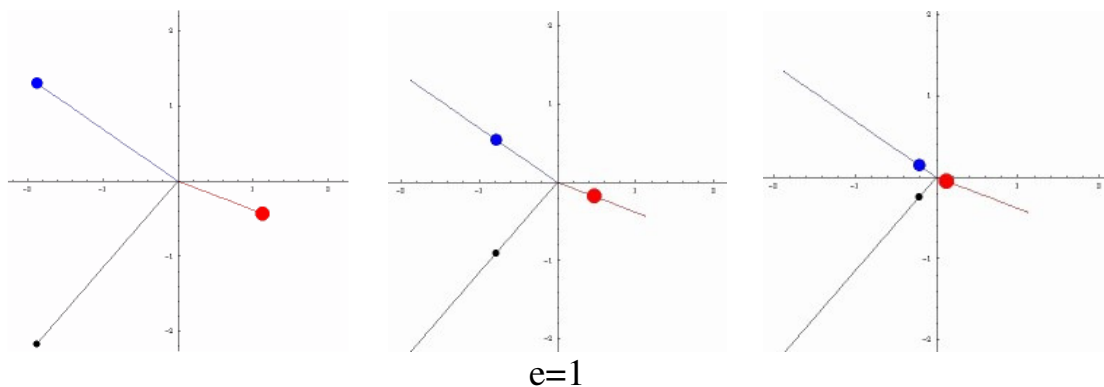
Σχήμα 1.1β. Ομογραφική λύση ενός σχηματισμού κανονικού επταγώνου με κεντρικό σώμα (Cattani & Prokopenya, 2004)

1.3.3 Ομοθετικές λύσεις σε κεντρικούς σχηματισμούς

Οι ομοθετικές (ή ομοιοθετικές) λύσεις (homothetic solutions) αποτελούν ειδική περίπτωση των ομογραφικών λύσεων. Για αυτές ισχύει συμπληρωματικά το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3α (Lagrange- Pizzetti): Μία ομογραφική λύση είναι ομοθετική, αν και μόνο αν, η στροφορμή του συστήματος είναι μηδέν.

Στο επόμενο Σχήμα 1.2 δείχνουμε τρεις διαφορετικές φάσεις ομοθετικών λύσεων σε ένα σύστημα τριών σωμάτων.



Σχήμα 1.2. Διάφορες φάσεις μια ομοθετικής λύσης σε ένα σύστημα τριών σωμάτων με διαφορετικές μάζες. Οι εκκεντρότητες των τροχιών των τριών σωμάτων είναι $e=1$ (ευθείες)

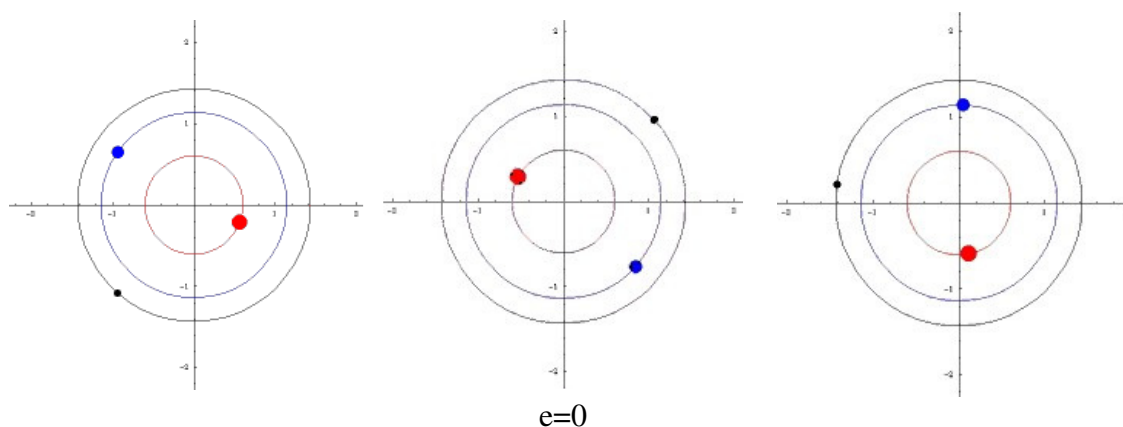
1.3.4 Λύσεις σχετικής ισορροπίας σε κεντρικούς σχηματισμούς (permanent configurations or relative equilibria)

Οι λύσεις αυτές αποτελούν ειδική περίπτωση των ομογραφικών λύσεων. Μία κατάσταση σχετικής ισορροπίας (relative equilibrium) περιγράφεται από το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3β (Lagrange- Pizzetti): Μία ομογραφική λύση αποτελεί λύση σχετικής ισορροπίας, αν και μόνο αν, ο σχηματισμός των σωμάτων είναι επίπεδος και περιστρέφεται σαν απόλυτα στερεός σχηματισμός με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Saari's conjecture (1969): Αν η πολική ροπή αδρανείας I , είναι σταθερή, τότε η κίνηση του συστήματος των N σωμάτων είναι κίνηση στερεού σώματος.

Μέχρι σήμερα η παραπάνω αρχή έχει αποδειχθεί για ορισμένες περιπτώσεις, όπως, στην περίπτωση συγγραμμικών σωμάτων (Diacu *et.al.*, 2005; Saari, 2005) και στη γενική περίπτωση με τρία σώματα (N=3) McCord, 2002; Moeckel, 2005). Το Σχήμα 1.3 δείχνει τρία διαφορετικά στιγμιότυπα κατά την κίνηση τριών σωμάτων που βρίσκονται σε σχετική ισορροπία μεταξύ τους.



Σχήμα 1.3. Διάφορες φάσεις μιας λύσης σχετικής ισορροπίας σε ένα σύστημα τριών σωμάτων με διαφορετικές μάζες. Οι εκκεντρότητες των τροχιών των τριών σωμάτων είναι $e=0$ (κύκλοι)

Όπως αναφέραμε οι λύσεις σχετικής ισορροπίας διάφορων σχηματισμών N σωμάτων και κάτω από διάφορα δυναμικά μελετήθηκαν από πολλούς ερευνητές. Παραθέτουμε με χρονολογική σειρά ένα μικρό μέρος αυτής της βιβλιογραφίας: MacMillan & Bartky 1932; Brumberg, 1957; Simo, 1978; Palmore, 1980; Moeckel, 1985; Meyer & Schmidt, 1988; Elmabsout, 1988, 1996; Roberts, 2000; Bang & Elmabsout, 2004; κ.α.

1.4 Κανονικοί πολυγωνικοί σχηματισμοί σωμάτων

Ένας κανονικός πολυγωνικός σχηματισμός N σωμάτων αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γενικού προβλήματος των N σωμάτων με το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι συνιστά ένα δυναμικό σύστημα με απλά γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Ένας παρόμοιος σχηματισμός προτάθηκε ήδη περί τα μέσα του 19^{ου} αιώνα από τον Maxwell ο οποίος στα 1865 κέρδισε το θεσμοθετημένο βραβείο

Adams σε διαγωνισμό που είχε προκηρυχθεί λίγο νωρίτερα με θέμα την ερμηνεία των δακτυλίων του Κρόνου. Από τότε οι κανονικοί πολυγωνικοί σχηματισμοί των Ν σωμάτων βρέθηκαν συχνά στο επίκεντρο του επιστημονικού ενδιαφέροντος και πολλές εργασίες δημοσιεύτηκαν με σκοπό να μοντελοποιήσουν διάφορα δυναμικά συστήματα. Μία κατηγορία αυτών των εργασιών αναφέρεται στη μελέτη του «κεντρικού χαρακτήρα» του σχηματισμού (Saari, 1980; Casassayas *et al.*, 1994; Grebenikov, 1997, 1998; Gadomski, 1998) καθώς επίσης στην ύπαρξη ομογραφικών λύσεων (Arribas *et al.*, 2007), λύσεων σχετικής ισορροπίας των σωμάτων (Elmabsout, 1988) και συνθηκών ευστάθειας του σχηματισμού για διάφορες τιμές των παραμέτρων (Salo & Yoder, 1988; Roberts, 2000; Vanderbei & Koleman, 2007; κ.α.). Μια δεύτερη κατηγορία εργασιών περιλαμβάνει μελέτες για κανονικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς όπου όμως τα δυναμικά δεν είναι Νευτώνεια αλλά Μετα-Νευτώνεια (Mioc & Stavinschi, 1998, 1999; Arribas, *et al.*, 2004, 2007, 2008, 2009, 2010). Οι δύο αυτές κατηγορίες διαπραγματεύονται το πρόβλημα από καθαρά μαθηματικής άποψης. Σε μια τρίτη κατηγορία, εκτός από την καθαρά μαθηματική προσέγγιση, γίνεται προσπάθεια να προσομοιωθούν πραγματικά φυσικά συστήματα όπως συστήματα σχεδόν συντροχιακών (quasi co-orbital) δορυφόρων που κινούνται γύρω από ένα μεγάλο πλανήτη (Peron & Medvedev, 2008), συστήματα patchy-structured galaxies (Nezhinskii & Ollongren, 1992) ή να μελετηθούν οι δακτύλιοι που εμφανίζονται σε όλους τους μακρυνούς πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος (Willerding, 1986; Vanderbei & Koleman, 2007; Barrabes & Cors, 2010; κ.α.). Αναφορικά με τα συστήματα quasi-coorbital δορυφόρων των μεγάλων πλανητών, σημειώνουμε ότι τις τελευταίες δεκαετίες έχουν ανακαλυφθεί αρκετά τέτοια συστήματα και συγκεκριμένα, όπως αναφέρουν οι Peron & Medvedev (2008): οι Metis–Adrastea, Lysithea-Elara για τον Δία, οι ομάδες Telesto-Tethys-Calypso και Dione-Helene-Polydeuces για τον Κρόνο, οι Cupid-Belinda για τον Ουρανό.

1.5 Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός μικρού σώματος σε κανονικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς N σωμάτων (ring problem of $N+1$ bodies)

Μία ξεχωριστή κατηγορία προβλημάτων που όμως σχετίζεται στενά με τις προηγούμενες, περιλαμβάνει τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός πολύ μικρού σώματος στο δυναμικό περιβάλλον που δημιουργεί ένας κανονικός πολυγωνικός σχηματισμός N σωμάτων με πολύ μεγαλύτερες μάζες από αυτήν του μικρού σώματος. Στην περίπτωση αυτή, τα $n=N-1$ μεγάλα σώματα θεωρούνται ότι βρίσκονται στις κορυφές ενός νοητού κανονικού n -γώνου (άρα σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις) όπου και διατηρούνται σε σχετική ισορροπία, ενώ το N -οστό μεγάλο σώμα βρίσκεται στο κέντρο μάζας του συστήματος και μπορεί να έχει διαφορετική μάζα από αυτήν των περιφερειακών σωμάτων. Συνεπώς, ο κανονικός πολυγωνικός σχηματισμός θεωρείται ως ένα στερεό σύστημα N σωμάτων το οποίο μπορεί να περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα περί το κέντρο μάζας του. Η εκδοχή αυτή που τα τελευταία χρόνια έγινε γνωστή με το όνομα ring problem των $N+1$ σωμάτων (Kalvouridis, 1999a,b,c), μελετήθηκε κάτω από διάφορες παραλλαγές που αφορούσαν είτε στα πεδία των δυνάμεων που δημιουργούνται από τον σχηματισμό των μεγάλων σωμάτων, είτε στη μορφή του μικρού σώματος. Πιο συγκεκριμένα, οι Ollöngren (1989), Scheeres (1992), Scheeres and Vinh (1993), Elmabsout (1996), Kalvouridis (1999a,b,c, 2001a,b, 2003, 2004, 2006, 2008d,e, 2011), Hadjifotinou & Kalvouridis (2005), Pinotsis (2005, 2010), Mavraganis & Kalvouridis (2007), Bario *et al.*, (2008, 2009), Croustalloudi & Kalvouridis (2008, 2011), Papadakis (2009), Bountis & Papadakis (2009), Barrabes *et al.*, (2010), Garcia-Azpeitia & Ize (2011), Fakis & Kalvouridis (2013b), κ.α., μελέτησαν την περίπτωση όπου το μικρό σώμα θεωρείται σημειακό, ενώ οι περιπτώσεις όπου το μικρό σώμα θεωρείται ότι είναι ένα τριαξονικό απόλυτα στερεό ή ένας γυροστάτης (λ.χ. τεχνητός δορυφόρος, διαστημικό τηλεσκόπιο, κ.ο.κ.) μελετήθηκαν από τους (Kalvouridis & Tsogas, 1999d, 2002), Tsogas *et al.*, (2005), Kalvouridis (2009c).

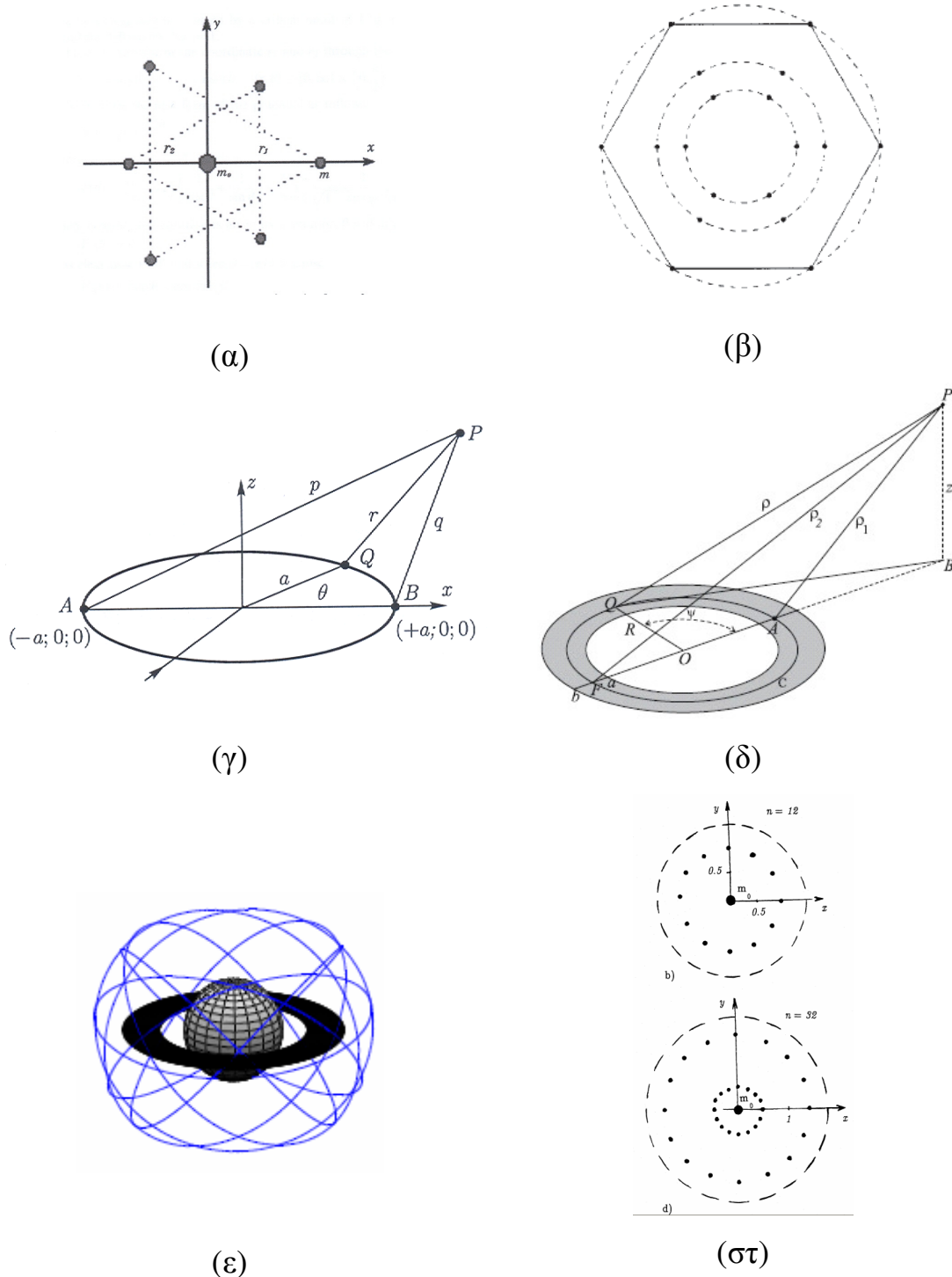
Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι εκτός από τη γεωμετρική απλότητα του σχηματισμού ένα επιπλέον πλεονέκτημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι με αλλαγή των βασικών του παραμέτρων το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε κάποιο

από τα προβλήματα-μοντέλα της Ουράνιας Μηχανικής που προτάθηκαν στο παρελθόν, όπως η περίπτωση της Κοπεγχάγης στο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, το περιορισμένο πρόβλημα των πέντε σωμάτων που προτάθηκε από τον Ollöngren (1988) και το περιορισμένο πρόβλημα των τεσσάρων σωμάτων που προτάθηκε από τους Maranhao & Llibre (1999).

Σε μια άλλη κατηγορία εντάσσονται προβλήματα αυτού του τύπου όπου τα πεδία που δημιουργούν τα μεγάλα σώματα οφείλονται είτε σε Μετα-Νευτώνεια δυναμικά, είτε σε συνδυασμένα δυναμικά όπου λαμβάνονται υπόψιν και άλλοι παράγοντες όπως η πίεση της ακτινοβολίας (φωτοβαρυτικά προβλήματα) ή το σφαιροειδές σχήμα τους (Kalvouridis *et al.*, 2006a,b, 2007; Elipe *et al.*, 2007; Kalvouridis, 2008a,b,c; Kalvouridis *et al.*, 2008; Kalvouridis & Hadjifotinou, 2008, 2011b; κ.α.) κ.ο.κ. Στην κατηγορία αυτή εντάσσεται και η παρούσα διατριβή.

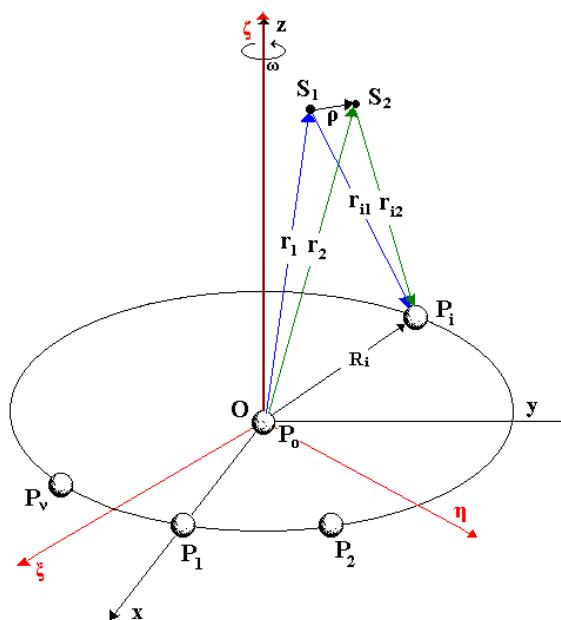
Σε μία τελευταία κατηγορία περιλαμβάνονται ενδιαφέροντα προβλήματα που παρουσιάζουν παραλλαγές του αρχικού κανονικού πολυγωνικού μοντέλου. Μεταξύ των παραλλαγών αυτών που εμφανίστηκαν στη διεθνή βιβλιογραφία τα τελευταία χρόνια, αναφέρουμε το μοντέλο των Segikushi (2004)(Σχήμα 1.4α), Shiqing Zhang & Zhifu Xie (2001) και Liu Wenzong *et al.*, (2005) (Σχήμα 1.4β), όπου τα περιφερειακά πρωτεύοντα σώματα βρίσκονται στις κορυφές $2k$ nested κανονικών πολυγώνων, το μοντέλο των Broucke & Elipe (2005) (Σχήμα 1.4γ) οι οποίοι αντικατέστησαν τα n περιφερειακά σώματα με ένα υλικό κυκλικό δακτύλιο που χαρακτηρίζεται από συνεχή και σταθερή κατανομή μάζας (κάτι παρόμοιο είχε προτείνει ο Laplace προκειμένου να ερμηνεύσει τους δακτυλίους του Κρόνου πριν από τον Maxwell), το μοντέλο όπου το πεδίο δημιουργείται από μία συνεχή και ομογενή κατανομή ύλης σε μορφή δακτυλιοειδούς δίσκου (Alberti & Vidal, 2007) (Σχήμα 1.4δ), το μοντέλο όπου το πεδίο δημιουργείται αφενός μεν από ένα διδιάστατο (επίπεδο) δακτυλιοειδή δίσκο με συνεχή και ομοιόμορφη κατανομή μάζας, αφετέρου δε από ένα μεγάλο ομογενές σφαιρικό σώμα που βρίσκεται στο κέντρο του κυκλικού δακτυλίου (Eva Tresaco *et al.*, 2011, 2012) (προσομοίωση της κίνησης δορυφόρου στο σύστημα πλανήτη - πλανητικού δακτυλίου) (Σχήμα 1.4ε),

το μοντέλο των Nezhinskij & Ollongren (1992) για τους patchy-structured galaxies (Σχήμα 1.4στ), κ.ο.κ.



Σχήμα 1.4. (α) Το μοντέλο του Masayoshi Segikushi, (β) το μοντέλο των Liu Wenzhong- Zhang Tongjie- Xu Bin, (γ) το μοντέλο της στερεάς κυκλικής ράβδου των Broucke & Elipe, (δ) το μοντέλο του επίπεδου δακτυλιοειδούς δίσκου των Alberti & Vidal, (ε) το μοντέλο της Eva Tresaco, (στ) το μοντέλο των Nezhinskij-Ollongren για τους patchy galaxies

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, αναφέρουμε επίσης ότι πρόσφατα οι Croustalloudi & Kalvouridis (2012, 2014) παρουσίασαν μία νέα εκδοχή-βελτίωση του αρχικού μοντέλου των $N+1$ σωμάτων, το πρόβλημα των $N+2$ σωμάτων, όπου η σημειακή μάζα έχει αντικατασταθεί από ένα σύστημα δύο μικρών σωμάτων (minor bodies) καθένα από τα οποία εκτός από την επίδραση των μεγάλων σωμάτων δέχεται και την μικρή αλλά προσδιορίσιμη επίδραση του άλλου μικρού σώματος (Σχήμα 1.5). Τα δύο μικρά σώματα μπορεί να είναι φυσικά (λ.χ. δίδυμοι "αστεροειδείς" στο σύστημα Ήλιος-Δίας), ή τεχνητά, όπως ένα ζεύγος τεχνητών δορυφόρων (dual satellite system) του τύπου PROBA-3 της ESA που εκτελούν πτήση σε σχηματισμό. Οι διαστημικές αποστολές όπως αυτή του δορυφόρου NEAR της NASA στη ζώνη των αστεροειδών (1997) και η προσέγγισή του στον αστεροειδή Eros, καθώς και η ανακάλυψη περισσότερων από 300 εξωηλιακών πλανητικών συστημάτων, πολλά από τα οποία είναι πολυμελή και ενδεχομένως να βρεθούν στο μέλλον και συστήματα πλανήτη-συντροχιακών δορυφόρων, θεωρούμε ότι θα διευρύνουν τις προοπτικές για προσομοίωση του προβλήματος αυτού με υπάρχοντα δυναμικά συστήματα στο διάστημα.



Σχήμα 1.5. Το δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+2$ σωμάτων (Croustalloudi & Kalvouridis, 2012,2014)

1.6 Μετα-Νευτώνεια δυναμικά και διάφορες εκφράσεις του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης

1.6.1 Η κίνηση της γραμμής των ασφίδων της σεληνιακής τροχιάς και το «άγνωστο» δυναμικό του Νεύτωνα

Ως Μετα-Νευτώνεια δυναμικά χαρακτηρίζονται εκείνα τα δυναμικά τα οποία προτάθηκαν μετά την εμφάνιση του περίφημου νόμου της Παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, και κυρίως μετά την εμφάνιση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Η ιστορία τους, όσο και αν φαίνεται περίεργο, έχει ηλικία τριών αιώνων αφού ο ίδιος ο Νεύτωνας εκτός από τον περίφημο νόμο της Παγκόσμιας έλξης που διατύπωσε προκειμένου να στηρίξει θεωρητικά τους νόμους του Kepler, εισήγαγε και έναν επιπλέον όρο που εκφράζει μία ακόμη κεντρική δύναμη-διαταραχή-διόρθωση προκειμένου να ερμηνεύσει την κίνηση της γραμμής των ασφίδων της Σελήνης η οποία παρουσιάζει μία περίοδο 18,6 ετών. Ο αρχικός κλασικός νόμος του Νεύτωνα αναφέρεται σε σημειακές μάζες ή σε ομογενή (δηλαδή σταθερής πυκνότητας) και απόλυτα σφαιρικά σώματα. Όμως στην περίπτωση των πραγματικών ουρανίων σωμάτων ούτε το πρώτο συμβαίνει, αλλά ούτε και το δεύτερο. Αν περιορισθούμε στη Γη, ούτε η πυκνότητά της είναι σταθερή, αλλά ούτε και το σχήμα της είναι απόλυτα σφαιρικό αφού προσεγγίζει περισσότερο προς αυτό ενός πεπλατυσμένου σφαιροειδούς. Επιπλέον, η κλίση του άξονά της, που δεν είναι και αυτή σταθερή στο χώρο και στο χρόνο, έχει ως αποτέλεσμα, η σεληνιακή τροχιά, η οποία δεν βρίσκεται πάνω στο επίπεδο της εκλειπτικής και επιπλέον υφίσταται και την επίδραση του Ηλίου, να μην είναι μια σταθερή Keplerian τροχιά που μπορεί να περιγραφεί με απόλυτη ακρίβεια από τον κλασικό νόμο του Νεύτωνα. Στην πραγματικότητα, παρουσιάζεται πιο σύνθετη. Το γεγονός αυτό ήταν ήδη γνωστό στον Νεύτωνα, αλλά και σε άλλους συγχρόνους του, οι οποίοι έστω και με τα πενιχρά μέσα παρατήρησης που διέθεταν, μπορούσαν να διαπιστώσουν κάποιες μικρές παρεκκλίσεις από την ιδεατή θεωρητική τροχιά για τον κοντινό γείτονα και συνοδοιπόρο του πλανήτη μας. Όπως αναφέρουν οι Arribas *et al.*, (2004) ο Νεύτωνας στο Liber II, propositio XLIV του περίφημου συγγράμματός του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Koyre & Cohen, 1972), πρόσθεσε

μια διαταραχή στο πρόβλημα του Kepler. Πράγματι μια σύντομη πρόταση στο τέλος του Corollarium 2, του propositio XLV, αποκαλύπτει ότι μια τέτοια διόρθωση θα καθιστούσε το νόμο του Kepler ικανό ώστε να συμπεριλάβει και τις μικρές κινήσεις των ασίδων της σεληνιακής τροχιάς. Στην προκειμένη περίπτωση, το δυναμικό σύμφωνα με τον Νεύτωνα, θα έπρεπε να έχει τη μορφή:

$$V(r) = -GMm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{2r^2} \right) \quad (1.7)$$

όπου οι ποσότητες A και B είναι παράμετροι ανεξάρτητες από την ακτινική απόσταση r των δύο σωμάτων. Ο Νεύτωνα δεν πρόβαλε αρκετά την ιδέα του αυτή, η οποία με τον καιρό παραμερίστηκε και ξεχάστηκε.

Συστήματα δύο ουράνιων σωμάτων που κινούνται υπό την επίδραση τέτοιων δυναμικών (όπως αυτό της σχέσης (1.7)) εντάσσονται σε μια κατηγορία που ο Deprit (1981) χαρακτήρισε ως σχεδόν-Κεπλέρια συστήματα (quasi-Keplerian systems). Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε και χρησιμοποιείται ακόμη από τους πιο σύγχρονους ερευνητές. Όπως θα δούμε πιο κάτω, το "διορθωμένο" δυναμικό που πρότεινε ο Νεύτωνα, το πρότεινε πολλά χρόνια αργότερα και ένας Βούλγαρος φυσικός ο Georgi Manev, του οποίου όμως η θεωρία «αγνοήθηκε» για πάνω από 60 χρόνια από την επιστημονική κοινότητα.

Ο Νεύτωνα έδειξε λοιπόν ότι μια «διορθωμένη» δύναμη² μπορεί να προκαλέσει μεταπτωτική κίνηση της τροχιάς ενός δορυφόρου όπως η Σελήνη γύρω από ένα πλανήτη όπως η Γη. Με άλλα λόγια, η τροχιά ενός σώματος ως προς ένα άλλο σώμα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι μια έλλειψη της οποίας ο εστιακός άξονας (γραμμή των ασίδων) περιστρέφεται στο επίπεδο της κίνησης. Παρά το σημαντικό αυτό συμπέρασμα, η έρευνα του Νεύτωνα πάνω σε ένα τέτοιο μοντέλο δύναμης παρέμεινε αδημοσίευτη κατά τη διάρκεια της ζωής του. Όμως ο κατάλογος Portsmouth Collection με τις αδημοσίευτες εργασίες του, που είδε το φως της δημοσιότητας στα 1888, αποκαλύπτει και αναδεικνύει το ενδιαφέρον αυτό θέμα. Παρόμοια σχόλια για τον διορθωτικό όρο του Νεύτωνα βρίσκονται επίσης στις

² Πρέπει να τονισθεί ότι λόγω της εισαγωγής του διορθωτικού όρου και των πρόσθετων παραμέτρων, ο νόμος της Παγκόσμιας έλξης χάνει τον «παγκόσμιο» χαρακτήρα του και προσαρμόζεται στα εκάστοτε ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ελκόμενων σωμάτων.

εργασίες των Szenkovits *et al.*, (2004) και Haranas *et al.*, (2011) όπου κανείς μπορεί να βρει μια εξαιρετικά πλούσια ιστορική αναδρομή πάνω στο πρόβλημα των Μετα-Νευτώνειων δυναμικών. Οι συγγραφείς αναφέρονται στην ίδια παρατήρηση του Νεύτωνα η οποία περιλαμβάνεται στα Principia (Book I, Article IX, Proposition XLIV, Theorem XIV, Corollary 2). Τέλος, μνεία για τη «χαμένη ευκαιρία» του Νεύτωνα να προλάβει ή να καθυστερήσει την εμφάνιση της Θεωρίας της Σχετικότητας γίνεται από τον Florin Diacu (σε απόσπασμα ομιλίας του τον Νοέμβριο του 2009 κατά τον εορτασμό της επετείου των 150 ετών από τη γέννηση του Georgi Manev στη Σόφια της Βουλγαρίας).

Μετά τον Νεύτωνα, ένα παρόμοιο «διορθωμένο» (ή «εμπλουτισμένο») δυναμικό προτάθηκε από τον Clairaut³, ο οποίος όμως και αυτός με τη σειρά του εγκατέλειψε σύντομα προς χάριν του αποδεκτού πλέον από την επιστημονική κοινότητα περίφημου αρχικού μοντέλου του Νεύτωνα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, παρόμοιες προσπάθειες έγιναν και κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα, αλλά και του 20^{ου}, ιδιαίτερα όταν το ενδιαφέρον αναζωπυρώθηκε μετά την εμφάνιση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Τα περισσότερα από τα δυναμικά που προτάθηκαν αποσκοπούσαν κυρίως στο γεφύρωμα της απόστασης μεταξύ της κλασικής Νευτώνειας θεωρίας και της Θεωρίας της Σχετικότητας προσπαθώντας να αποκαταστήσουν το τρωθέν γόητρο της πρώτης ώστε να καταστεί δυνατή η ερμηνεία υπαρκτών φυσικών φαινομένων όπως η παρατηρούμενη μετάθεση των περιηλίων των πλανητών στο ηλιακό μας σύστημα. Όπως θα δούμε, στις περισσότερες περιπτώσεις οι προτεινόμενες εκφράσεις περιέχουν ένα όρο που εκφράζει το κλασικό Νευτώνειο δυναμικό και έναν ή περισσότερους επιπλέον όρους που είναι συναρτήσεις της απόστασης μεταξύ δύο σημειακών μαζών.

³ Το πρόβλημα της κίνησης της Σελήνης υπήρξε κατά τον 18^ο αιώνα πεδίο διαμάχης μεταξύ των επιστημόνων της εποχής, ξεκίνησε δε από την εργασία του Alexis Claude Clairault που ανακοινώθηκε στα 1747 και στην οποία ο Clairault αμφισβητούσε την εγκυρότητα του νόμου του Νεύτωνα. Συμπρωταγωνιστές στη διαμάχη αυτή, που ονομάστηκε από μερικούς "Η μάχη του 18^{ου} αιώνα γύρω από την κίνηση της Σελήνης" ("The 18th-century battle over lunar motion", S. Bodenmann, Physics Today, January 2010), ήταν δύο επιφανείς μαθηματικοί, ο Leonhard Euler και ο Jean le Rond d' Alembert.

Τα δυναμικά αυτά έχουν μελετηθεί από πολλούς ερευνητές και τα σημαντικότερα από αυτά θα τα παρουσιάσουμε με συντομία και με χρονολογική σειρά εμφάνισης. Στο σημείο αυτό πρέπει να πούμε ότι η κατηγορία των Μετα-Νευτώνειων δυναμικών μπορεί να χωρισθεί σε δύο μικρότερες υποκατηγορίες. Στην πρώτη από αυτές μπορούν να ενταχθούν οι επεμβάσεις-διορθώσεις στην πρόταση του Νεύτωνα και οι οποίες παρουσιάστηκαν μέχρι λίγο πριν την εμφάνιση της Θεωρίας της Σχετικότητας. Η δεύτερη υποκατηγορία περιλαμβάνει τα δυναμικά που εμφανίστηκαν μετά τον Αϊνστάιν με σκοπό να καταστήσουν τη Νευτώνεια έκφραση ικανή ώστε να καλυφθούν οι αδυναμίες της έναντι της Θεωρίας της Σχετικότητας (Μετα-Αϊνστάινεια δυναμικά).

1.6.2 Δυναμικό τύπου Bertrand

Ο G. Bertrand πρότεινε στα 1873 μια ad hoc μεταβολή του νόμου του Νεύτωνα, τροποποιώντας τον έτσι ώστε η βαρυτική δύναμη να είναι αντιστρόφως ανάλογη του $r^{2+\epsilon}$, όπου ϵ πολύ μικρή θετική ποσότητα και r η απόσταση μεταξύ ενός σωματιδίου και της μάζας-πηγής του πεδίου στο αντίστοιχο πρόβλημα του Νεύτωνα. Για να «ταιριάξει» η παρατηρούμενη αιώνια (secular) μετάθεση του περιηλίου του Ερμή (και άλλων πλανητών όπως της Αφροδίτης και του Αρη), ο G. Bertrand υπολόγισε διάφορες τιμές του ϵ .

1.6.3 Δυναμικό τύπου Hall-Newcomb

Στα 1895 οι Hall-Newcomb χρησιμοποίησαν ένα δυναμικό παρόμοιο με αυτό του Bertrand. Ο μιν A. Hall δουλεύοντας πάνω στο ίδιο πρόβλημα που απασχόλησε και τον Bertrand, υπολόγισε ότι η σταθερά ϵ θα έπρεπε να παίρνει τιμές $\epsilon=1.6 \times 10^{-7}$, ο δε S. Newcomb βρήκε ότι η σταθερά αυτή θα έπρεπε να ισούται με $\epsilon=1.574 \times 10^{-7}$. Λίγα χρόνια αργότερα ο E. W. Brown χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις από τη μετάθεση του περιγείου της Σελήνης, έδειξε ότι αν η σταθερά ϵ είναι διάφορη του μηδενός, τότε αυτή θα έπρεπε να είναι μικρότερη από 4×10^{-8} (Hagihara, 1972). Παρά τη «διόρθωση» το δυναμικό και η δύναμη που προτάθηκαν τόσο από τον Bertrand όσο

και από τους Hall-Newcomb δεν μπόρεσαν να προσεγγίσουν ικανοποιητικά όλες τις παρατηρούμενες στο ηλιακό μας σύστημα μεταθέσεις των περιάστρων.

1.6.4 Δυναμικό τύπου Manev

Στα 1924 ο Βούλγαρος φυσικός Giorgi Manev (ή Maneff κατά την γαλλική εκδοχή), πρότεινε έναν τύπο παρόμοιο με αυτόν που όπως είδαμε είχε ήδη προτείνει ο Νεύτωνας:

$$V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right) \quad (1.8a)$$

με αφορμή μια παρατήρηση του Poincaré στο βιβλίο του “Electricité et Optique” (1901), σύμφωνα με την οποία η θεωρία του Lorentz που αναφέρεται στη δυναμική των κινούμενων σωμάτων (πάνω στην οποία βασίσθηκε η ειδική θεωρία της Σχετικότητας) δεν ικανοποιούσε την αρχή της δράσης-αντίδρασης. Στη σχέση (1.8) η σταθερά B έχει διαστάσεις μήκους, ενώ όταν A=1 και B=0 μεταπίπτει στο κλασικό Νευτώνειο δυναμικό. Ωστόσο, η σταθερά B που είχε προτείνει ο Νεύτωνας ήταν διαφορετική από την αντίστοιχη σταθερά του Manev. Στην περίπτωση του δυναμικού του Manev, η σταθερά αυτή είναι πολύ μικρή και συνεπώς ο δικός του νόμος της βαρύτητας στην ουσία αποτελεί μια μικρή διαταραχή του Νευτώνειου μοντέλου. Όμως η διαταραχή αυτή είναι αρκετή για να αλλάξει τη συμπεριφορά της Νευτώνειας έλξης όταν δύο σώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο, όπως συμβαίνει με τον πλανήτη Ερμή και τον Ηλιο (Manev, 1924, 1925, 1930a and b).

Η θεωρία του Manev αγνοήθηκε από τους ερευνητές για αρκετές δεκάδες χρόνια μέχρις ότου στις αρχές της δεκαετίας του 1990 επανήλθε στο προσκήνιο (Diacu, : 2009. *How I discovered Manev*) και η μορφή του δυναμικού που προτάθηκε από αυτόν άρχισε να εφαρμόζεται σε διάφορα δυναμικά συστήματα (Diacu, 1993; Stoica & Mioc, 1996; Delgado *et al.*, 1996; Bobylev *et al.*, 1997; Mioc & Stoica, 1995, 1997; Mioc & Stavinschi, 1999b; Llibre *et al.*, 2001; Arribas & Elipe, 2004; Balsas *et al.*, 2009; Arribas *et al.*, 2010; Kalvouridis & Fakis, 2010; Fakis & Kalvouridis, 2011, 20013b,c, 2014a,b; Fakis *et al.*, 2013a, Croustaloudi *et al.*, 2012) αποδεικνύοντας το αυξημένο ενδιαφέρον και τις σημαντικές εφαρμογές σε διάφορες

περιοχές και προβλήματα της Δυναμικής Αστρονομίας όπως η μελέτη της κίνησης φυσικών και τεχνητών δορυφόρων ενός μη σφαιρικού πλανήτη, οι πλανητικοί δακτύλιοι, οι τροχιές των κομητών και των αστεροειδών ως προς τον Ηλιο που αποτελεί ισχυρή πηγή ακτινοβολίας, οι κινήσεις των διπλών αστέρων κ.ο.κ. Το δυναμικό (1.8α) οδηγεί σε μία τροποποιημένη μορφή του νόμου του Νεύτωνα:

$$\vec{F} = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r^3} + \frac{2B}{r^4} \right) \vec{r} \quad (1.8\beta)$$

1.6.5 Δυναμικό τύπου Schwarzschild

Το δυναμικό αυτό έχει τη μορφή:

$$V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^3} \right) \quad (1.9\alpha)$$

(Mios & Stavinschi, 1998), όπου A και B σταθερές και r η απόσταση μεταξύ των δύο μαζών. Η σταθερά B εκφράζεται σε μονάδες μήκους στο τετράγωνο. Για $A=1$, ο πρώτος όρος εκφράζει το Νευτώνειο δυναμικό που οδηγεί στην κλασική μορφή του νόμου της Παγκόσμιας έλξης. Ουσιαστικά η πρόταση που κάνει ο Schwarzschild για μια νέα μορφή του δυναμικού, διαφέρει μόνο ως προς την τάξη μεγέθους του διαταρακτικού όρου από τον αντίστοιχο του δυναμικού Manev. Έτσι, ο νόμος της Παγκόσμιας έλξης ανάμεσα στις μάζες M και m διαμορφώνεται από τον Schwarzschild ως εξής:

$$\vec{F} = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r^3} + \frac{3B}{r^5} \right) \vec{r} \quad (1.9\beta)$$

Με τη μορφή του δυναμικού Schwarzschild προσομοιάζει το δυναμικό McCullagh (προσεγγιστικό) που δημιουργεί ένα υλικό σώμα οποιουδήποτε σχήματος και οποιασδήποτε κατανομής μάζας:

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{GM}{2r^3} (A + B + C - 3I) \quad (1.10)$$

όπου G είναι η παγκόσμια σταθερά, M είναι η μάζα του σώματος που δημιουργεί το πεδίο, A, B, C , είναι οι ροπές αδρανείας του σώματος ως προς τους άξονες x, y, z , ενός συστήματος $Oxyz$ με αρχή το κέντρο μάζας του σώματος και I η έκφραση ροπής

αδρανείας ως προς σύστημα με αρχή ένα τυχόν σημείο του σώματος. Όταν το σώμα είναι ομογενής σφαίρα, τότε:

$$A=B=C=I$$

Ο πρώτος όρος της (1.10) εκφράζει το Νευτώνειο δυναμικό που οφείλεται σε μια σημειακή μάζα (η ομογενής σφαίρα ανάγεται και αυτή σε σημειακή μάζα). Η σχέση (1.10) μπορεί να αναχθεί στην (1.9) αν θεωρήσουμε ότι:

$$B = \frac{GM}{2}(A + B + C - 3I).$$

1.6.6 Δυναμικό τύπου Mucket-Treder

Το δυναμικό αυτό προτάθηκε από τους Mucket-Treder (1977) ως ένα Μετα-Νευτώνειο δυναμικό με λογαριθμικό διορθωτικό όρο, προκειμένου να ερμηνευθεί η μετάθεση του περιηλίου των πλανητών κατά την κίνηση του Kepler.

Το δυναμικό αυτό οδηγεί σε μία τροποποιημένη μορφή του Νόμου της Παγκόσμιας έλξης:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^3}(1 + \epsilon \ln r)\vec{r} \quad (1.11)$$

όπου G είναι η παγκόσμια σταθερά έλξης του Νεύτωνα, M , m οι δύο σημειακές μάζες και ϵ μία αριθμητική σταθερά πολύ μικρότερη της μονάδας. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι η μορφή της βαρυτικής δύναμης των Mucket-Treder μοιάζει με αυτήν του Bertrand, αν στη σχέση που πρότεινε ο τελευταίος θεωρηθεί ότι $\epsilon < 0$ και ότι η ποσότητα r^ϵ αναλύεται σε σειρά,

$$r^\epsilon = 1 + \epsilon \ln r + \frac{(\epsilon \ln r)^2}{2!} + \frac{(\epsilon \ln r)^3}{3!} + \dots$$

περιοριζόμενοι στους δύο πρώτους όρους.

1.6.7 Δυναμικό τύπου Yukawa

Έχει τη μορφή:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \left(1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \quad (1.12)$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων με μάζες M και m , G είναι η Νευτώνεια σταθερά της Παγκόσμιας έλξης, $\alpha = kK/GMm$, και k, K είναι σταθερές της νέας δύναμης. Τέλος, λ είναι η ακτίνα εμβέλειας (range) αυτής της δράσης.

Η αντίστοιχη δύναμη μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^3} \left(1 + \alpha \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \vec{r} \quad (1.13)$$

(Δρης, 2004; Haranas & Ragos, 2011; Haranas, *et al.*, 2011; Haranas & Gkigkitzis, 2012; κ.α.).

1.6.8 Δυναμικό τύπου Elipe-Arribas-Palacios-Kalvouridis - Γενικευμένες κεντρικές δυνάμεις

Στην προκειμένη περίπτωση θεωρείται ότι η δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων- μελών του συστήματος με μάζες M και m είναι μια γενικής μορφής δύναμη, που αποδίδεται από μια συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης r . Πιο συγκεκριμένα, αν k^2 είναι η σταθερά του Gauss, η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωμάτων προέρχεται από ένα δυναμικό της μορφής (Arribas *et al.*, 2006, 2007, 2008, 2009):

$$V(r) = -k^2 Mmf(1/r) \quad (1.14)$$

όπου:

$$f(1/r) = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{A_i}{r^i} = \left(\frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \dots + \frac{A_\rho}{r^\rho} \right). \quad (1.15)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα σχεδόν-ομογενές δυναμικό (quasi-homogeneous potential) που μπορεί να αναχθεί σε κάποιο από τα προηγούμενα σχεδόν-ομογενή δυναμικά που παρουσιάσαμε.

Αν π.χ. $A_1=1$ και $A_i=0, i=2, \dots, \rho$, τότε έχουμε το κλασικό Νευτώνειο δυναμικό. Αν $A_1, A_2 \neq 0$, και $A_i=0, i=3, \dots, \rho$, τότε έχουμε δυναμικό τύπου Manev. Τέλος, αν $A_1, A_3 \neq 0$ και $A_2=0, A_i=0, i=4, \dots, \rho$, τότε έχουμε δυναμικό τύπου Schwarzschild (Arribas, *et al.*, 2006, 2007). Με τον τρόπο αυτόν η έκφραση του νόμου της

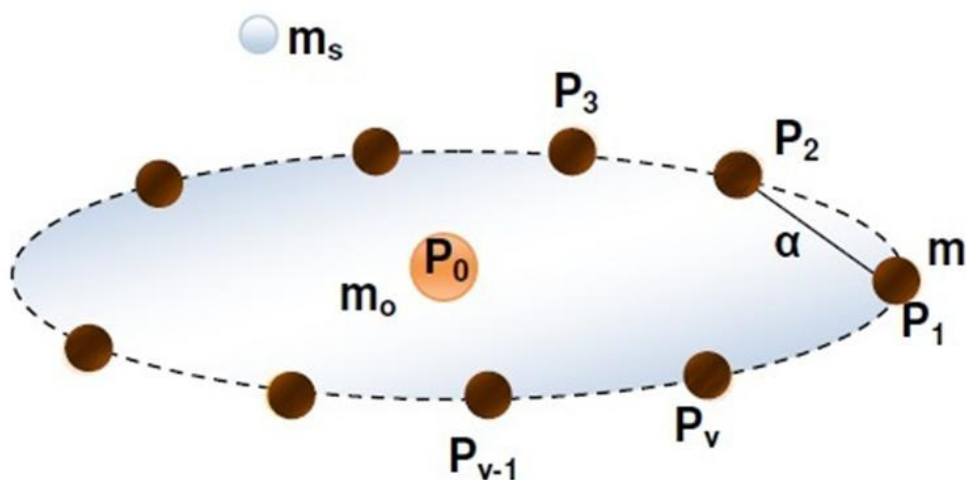
Παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, συμπληρώνεται με διορθωτικούς-διαταρακτικούς όρους, που την καθιστούν πιο γενική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

2.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στο περιορισμένο πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων (δακτυλιοειδές πρόβλημα-Ring Problem) μελετάται η κίνηση ενός μικρού σώματος αμελητέας μάζας m_s , στο πεδίο δυνάμεων που δημιουργούν $N=v+1$ μεγάλα σφαιρικά και ομογενή σώματα. Από αυτά, τα v έχουν ίσες μάζες m και βρίσκονται στις κορυφές κανονικού v -γώνου πλευράς a (περιφερειακά σώματα), ενώ στο κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται ένα σώμα διαφορετικής μάζας m_0 (κεντρικό σώμα), με $m_0 \neq m$ (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1. Διάταξη των primaries στο δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων

Στην παρούσα διατριβή θα θεωρήσουμε ότι τα v περιφερειακά σώματα δημιουργούν Νευτώνεια δυναμικά, ενώ το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev

$V(r) = -k^2 M m \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right)$, όπου A και B είναι σταθερές ποσότητες. Αν $A=1$, ο πρώτος

όρος αντιστοιχεί στο γνωστό κλασικό Νευτώνειο δυναμικό. Σημειώνουμε επίσης ότι για $B=0$ το πρόβλημα ανάγεται στη βαρυτική περίπτωση του δακτυλιοειδούς προβλήματος (Kalvouridis, 2008d).

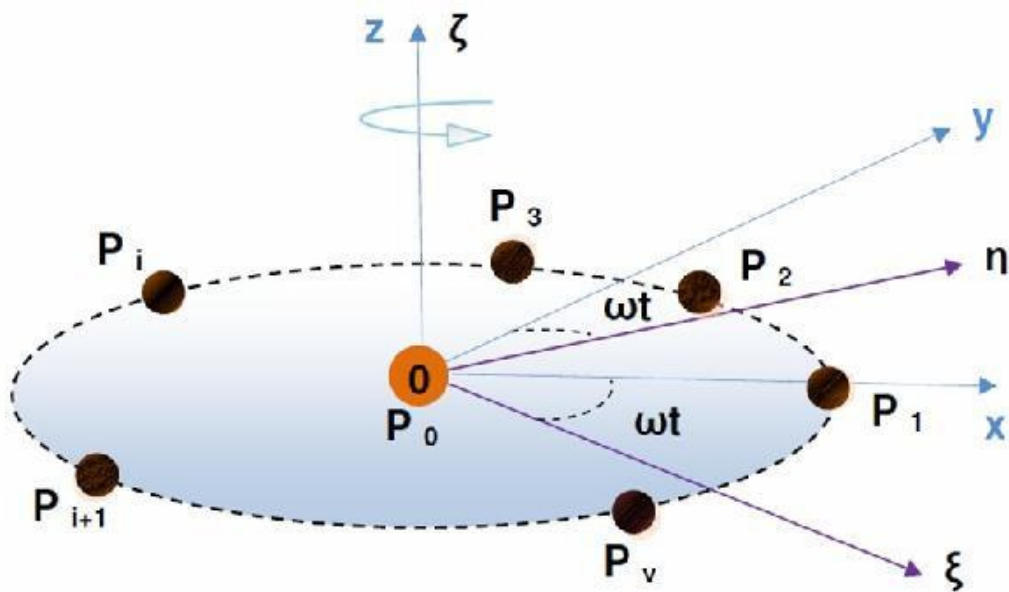
Το σύστημα των n περιφερειακών σωμάτων (peripheral primaries) περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας O (όπου βρίσκεται το κεντρικό πρωτεύον P_0) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , υπό την επίδραση των αμοιβαίων ελκτικών δυνάμεών τους. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ο σχηματισμός είναι κεντρικός (central configuration), ενώ διατηρούνται σταθεροί και οι λόγοι των σχετικών αποστάσεων μεταξύ των primaries (relative equilibrium).

Ένα μικρό σώμα S (particle) αμελητέας μάζας m_s σε σχέση με τα πρωτεύοντα σώματα του σχηματισμού ($m_s \ll m$ και $m_s \ll m_0$) κινείται στο πεδίο δυνάμεων των N primaries, χωρίς το ίδιο να επηρεάζει την κίνησή τους. Στην παρούσα διατριβή εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά του μικρού σώματος S , που μπορεί να είναι ένας μικρός φυσικός ή τεχνητός δορυφόρος, μέσα στο δυναμικό περιβάλλον που διαμορφώνεται από την παρουσία των primaries.

2.2 Αδρανειακό και συνοδεύον συστήματα αναφοράς

Για την περιγραφή του προβλήματος θα χρησιμοποιηθούν δύο συστήματα καρτεσιανών συντεταγμένων: ένα αδρανειακό (ή σταθερό) σύστημα συντεταγμένων $O\xi\zeta$ με μοναδιαία διανύσματα $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ και αρχή το κέντρο μάζας O του συστήματος και ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, το συνοδεύον ή περιστρεφόμενο (synodic) με μοναδιαία διανύσματα $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, το οποίο έχει την ίδια αρχή με το αδρανειακό σύστημα και του οποίου ο άξονας Oz συμπίπτει με τον $O\xi$. Το χαρακτηριστικό του συνοδικού συστήματος είναι ότι περιστρέφεται περί τον άξονα Oz με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω με την οποία περιστρέφονται και τα περιφερειακά

σώματα. Για λόγους απλούστευσης, ο θετικός ημιάξονας Ox ταυτίζεται με την ημιευθεία P_0P_1 (Σχήμα 2.2). Το μη γραμμικό δυναμικό σύστημα που θα μελετηθεί είναι αυτόνομο, αφού όπως θα προκύψει στη συνέχεια οι εξισώσεις της κίνησης δεν περιέχουν ρητά τον χρόνο.



Σχήμα 2.2. Τα συστήματα αναφοράς $Oxiζ$ (αδρανειακό) και $Oxyz$ (συνοδεύον)

2.3 Ιδιότητες και χαρακτηριστικά των κανονικών πολυγώνων

2.3.1 Γενικά

- Όπως γνωρίζουμε ένα κανονικό πολύγωνο είναι ένα κυρτό επίπεδο γεωμετρικό σχήμα που έχει όλες τις γωνίες και όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους.
- Τα κανονικά πολύγωνα περιγράφονται και εγγράφονται σε κύκλους με ακτίνες αντίστοιχα την απόσταση από το κέντρο μέχρι μία κορυφή ή το μήκος της μεσοκάθετης μιας οποιασδήποτε πλευράς (απόστημα ή απόθημα) (apothem).
- Τα κανονικά n -γωνα έχουν είτε άρτιο αριθμό πλευρών και κορυφών, είτε περιττό.

- Ο Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) όντας ακόμη σπουδαστής στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν απέδειξε το 1796 ότι ένα κανονικό n -γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη⁴ αν και μόνον αν ο αριθμός n είναι της μορφής :

$$2^k p_1 p_2 \dots p_s$$

όπου k, s είναι φυσικοί αριθμοί και p_i ($i=1,2,\dots,s$) είναι πρώτοι αριθμοί

(prime numbers) της μορφής⁵ $2^{2^m} + 1$ (m φυσικός αριθμός).

- Αν συμβολίσουμε με a_i , $i=3,4,\dots,n$ την ακολουθία των αποστημάτων των κανονικών πολυγώνων με i πλευρές των εγγεγραμμένων σε κύκλο (O, R) , τότε, η ακολουθία a_i είναι αύξουσα και φραγμένη από επάνω. Η ακολουθία λοιπόν συγκλίνει για $i \rightarrow \infty$ και το όριό της $\lim a_i$ είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου R .
- Το κανονικό n -γωνο είναι όμοιο με κάθε άλλο n -γωνο.
- Αν συμβολίσουμε με p_i και p_i' τις περιμέτρους των κανονικών πολυγώνων με i πλευρές που είναι αντίστοιχα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα σε κύκλο (O, R) , τότε, όταν το πλήθος των πλευρών αυξάνει, η περίμετρος των εγγεγραμμένων πολυγώνων στον κύκλο (O, R) αυξάνει, ενώ αυτή των περιγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο ελαττούται. Η ακολουθία των περιμέτρων των εγγεγραμμένων πολυγώνων είναι αύξουσα και φραγμένη από επάνω, ενώ η ακολουθία των περιμέτρων των περιγεγραμμένων πολυγώνων είναι

⁴ Λέγεται ότι η ανακάλυψη αυτή ενθουσίασε τον Gauss και καθόρισε τη μετέπειτα πορεία του στον κλάδο των Μαθηματικών. Μάλιστα προς το τέλος της ζωής του παράγγειλε στον μαρμαρά, που θα έφτιαχνε το ταφικό του μνημείο, να σχεδιάσει ένα κανονικό 17-γωνο. Ο μαρμαράς αρνήθηκε με τη δικαιολογία ότι η δύσκολη κατασκευή που του ζητήθηκε, θα έμοιαζε περισσότερο με κύκλο.

⁵ Οι αριθμοί αυτής της μορφής ονομάζονται πρώτοι αριθμοί του Fermat από τον Γάλλο δικηγόρο του Κοινοβουλίου της Τουλούζης και ερασιτέχνη μαθηματικό Pierre de Fermat (1601/1608- 1655) που πρώτος τους μελέτησε. Έτσι για $m=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ παίρνουμε τους αριθμούς του Fermat $F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537, F_5=4294967297, F_6=18446744073709551617$, κ.ο.κ.

φθίνουσα και φραγμένη από κάτω. Οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και μάλιστα έχουν κοινό όριο το μήκος της περιφέρειας (O, R) .

2.3.2 Συμμετρίες του πολυγωνικού σχηματισμού

- Σε ένα κανονικό n -γωνο υπάρχουν n συνεπίεδοι άξονες συμμετρίας. Ειδικότερα:
 - ◆ Αν $n =$ άρτιος ($n=2κ$), τότε οι κορυφές ανά δύο είναι αντιδιαμετρικά σημεία, η δε ευθεία που τα συνδέει είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου και αποτελεί άξονα συμμετρίας. Επομένως ορίζονται $n/2=κ$ άξονες συμμετρίας. Υπάρχουν όμως και άλλοι $n/2=κ$ άξονες συμμετρίας που ενώνουν δύο αντιδιαμετρικά μέσα πλευρών διευθύνσεις των διχοτόμων των επίκεντρων γωνιών, ή διευθύνσεις των αποστημάτων)
 - ◆ Αν $n =$ περιττός ($n=2κ+1$), τότε η μεσοκάθετη κάθε πλευράς διέρχεται από την απέναντι κορυφή και αποτελεί άξονα συμμετρίας του. Το πλήθος των αξόνων αυτών είναι n .
- Επιπλέον, το σχήμα παρουσιάζει συμμετρία σε στροφές κατά γωνία $2π/n$ περί άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχήματος που διέρχεται από το κέντρο του.
- Αν θεωρήσουμε ως άξονα των x έναν άξονα συμμετρίας που συνδέει το κέντρο του n -γώνου με μία κορυφή του, τότε ο κάθετος προς τον x άξονας y :
 - ◆ όταν $n=$ περιττός δεν αποτελεί άξονα συμμετρίας
 - ◆ όταν $n=$ άρτιος $=2λ$ τότε είναι άξονας συμμετρίας. Στην περίπτωση αυτή, η διεύθυνσή του :
 - είτε θα διέρχεται από δύο αντιδιαμετρικές κορυφές του πολυγώνου όταν $λ=$ άρτιος (όπως συμβαίνει π.χ στις περιπτώσεις με $n=4, 8, 12, 16, 32,$ κ.ο.κ.)
 - είτε θα συμπίπτει με τη διεύθυνση της διχοτόμου της επίκεντρης γωνίας (ή του αποστήματος) όταν $λ=$ περιττός (όπως συμβαίνει π.χ. στις περιπτώσεις $n=2, 6, 10,$ κ.ο.κ.).

Οι παραπάνω περιπτώσεις συνοψίζονται στον Πίνακα 2.1 που ακολουθεί.

Πίνακας 2.1. Συμμετρία του άξονα y

v =περιττός	Ο y δεν είναι άξονας συμμετρίας	
v =άρτιος= 2λ	λ = περιττός	Ο y είναι άξονας συμμετρίας και συμπίπτει με τη διχοτόμο της επίκεντρης γωνίας που σχηματίζουν δύο περιφερειακά primaries.
	λ = άρτιος	Ο y είναι άξονας συμμετρίας και διέρχεται από δύο αντιδιαμετρικά περιφερειακά primaries.

2.3.3 Σχέσεις μεγεθών που προκύπτουν από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πολυγωνικού σχηματισμού

Οι γωνίες (σε μοίρες) ενός κανονικού v -γώνου είναι ρητοί αριθμοί αφού εκφράζονται ως το πηλίκο $360/v$. Το πηλίκο αυτό είτε είναι ακριβές, δηλαδή ακέραιο ή δεκαδικό με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (τερματιζόμενος δεκαδικός) (terminating decimal number), είτε είναι ένας περιοδικός αριθμός με άπειρα ψηφία (repeating, or recurring, or periodic decimal number). Στην τελευταία αυτή περίπτωση, η περιοδικότητα μπορεί να εμφανίζεται από κάποιο ψηφίο (ακέραιο ή δεκαδικό) του αριθμού και μετά και η ακολουθία των επαναλαμβανόμενων ψηφίων αποτελεί την περίοδο του αριθμού. Έτσι ο περιοδικός αριθμός μπορεί να παριστάνεται σε συντομευμένη γραφή, σημειώνοντας με μία συνεχή γραμμή τα επαναλαμβανόμενα ψηφία. Π.χ. αν $v=14$, τότε $360/14=180/7=25,714285\ 714285..= 25,\underline{714285}$ (περίοδος είναι η ακολουθία των ψηφίων 714285), αν $v=26$, τότε $360/26=180/13=13,84615\ 384615..= 13,\underline{84615}$ (περίοδος είναι η ακολουθία των ψηφίων 384615), αν $v=52$, τότε $360/52=180/26=6,92307\ 692307..= \underline{6,92307}$ (περίοδος είναι η ακολουθία των ψηφίων 692307), κ.ο.κ. Όταν το κλάσμα $360/v$ τραπεί σε ανάγωγη μορφή p/q , τότε, όπως γνωρίζουμε, αν ο παρονομαστής έχει πρώτους παράγοντες μόνο το 2 ή το 5 ή και τους δύο, δηλαδή μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $q=2^{\mu}5^{\nu}$, όπου μ, ν φυσικοί αριθμοί, το ανάγωγο κλάσμα μπορεί να τραπεί σε τερματιζόμενο δεκαδικό αριθμό, διαφορετικά το

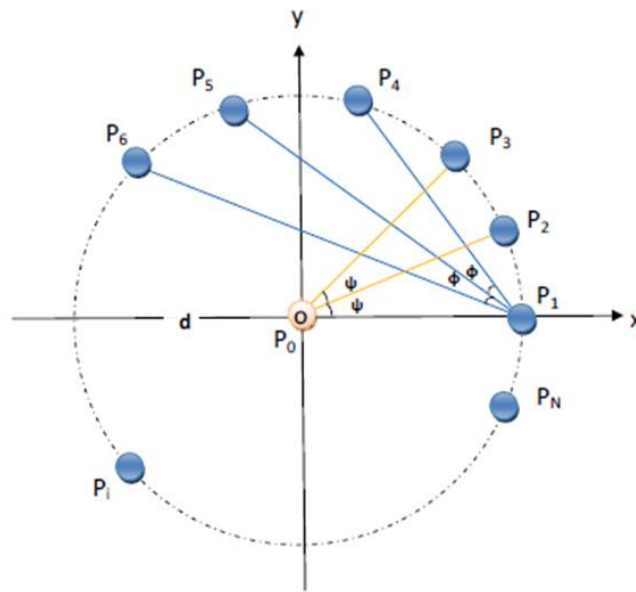
κλάσμα δίνει περιοδικό δεκαδικό αριθμό. Π.χ. στην περίπτωση $v=7$, οπότε η γωνία είναι $360/7$, ο παρονομαστής δεν έχει πρώτους παράγοντες το 2 ή το 5 και η γωνία θα εκφράζεται ως ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός. Το ίδιο συμβαίνει με τις τιμές $v=11, 13, 14, 17, 19$, κ.ο.κ.

Οι επίκεντρες και οι εγγεγραμμένες γωνίες οι οποίες σχηματίζονται στο κανονικό v -γωνο (Σχήμα 2.3), δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\psi} = \frac{2\pi}{v} \quad (2.1)$$

και

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\psi}}{2} = \frac{\pi}{v} \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.3. Οι επίκεντρες και οι εγγεγραμμένες γωνίες

Αν a είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών περιφερειακών σωμάτων, δηλαδή η πλευρά του νοητού v -γώνου της διάταξης των μεγάλων σωμάτων, και d είναι η ακτίνα του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το v -γωνο, τότε από το ισοσκελές τρίγωνο που σχηματίζεται από δύο διαδοχικά περιφερειακά σώματα και το κεντρικό (Σχήμα 2.4α), προκύπτει η ισότητα:

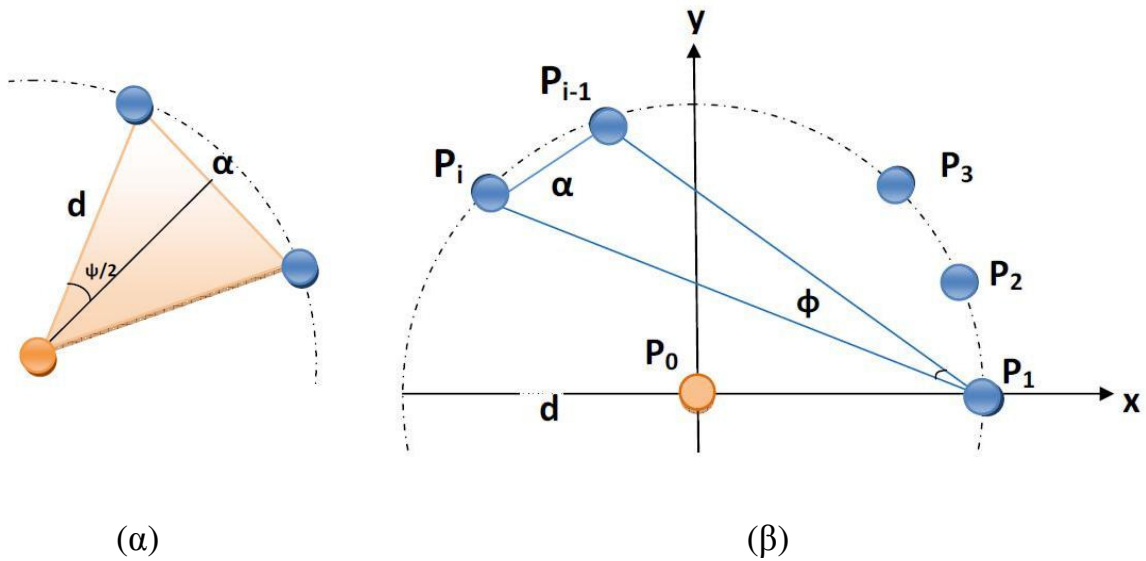
$$\left(d \cos \frac{\Psi}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = d^2$$

και συνεπώς λόγω των (2.1) και (2.2),

$$d = \frac{\alpha}{2\sin(\pi/\nu)} \quad (2.3)$$

Εξάλλου οι αποστάσεις μεταξύ ενός περιφερειακού σώματος έστω του P_1 και ενός άλλου περιφερειακού P_i υπολογίζονται από το τρίγωνο $P_1P_{i-1}P_i$ (Σχήμα 2.4β):

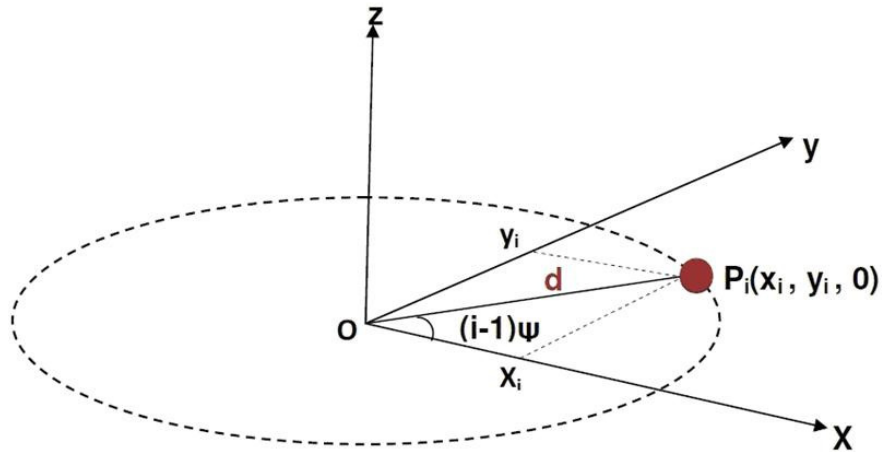
$$\frac{\sin\phi}{\alpha} = \frac{\sin[(\nu - i + 1)\phi]}{(P_1P_i)} \Rightarrow (P_1P_i) = \frac{\sin[(\nu - i + 1)\phi]}{\sin\phi} \alpha \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.4. (α)-(β) Γωνίες και αποστάσεις μεταξύ των σωμάτων του σχηματισμού

Επίσης, οι διαστατές συντεταγμένες των περιφερειακών σωμάτων P_i στο συνοδικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ (Σχήμα 2.5), δίνονται από τις σχέσεις:

$$P_i(x_i, y_i, 0) = P_i(d\cos(i-1)\psi, d\sin(i-1)\psi, 0), \quad i=1, \dots, \nu \quad (2.5)$$



Σχήμα 2.5. Συντεταγμένες περιφερειακών σωμάτων στο συνοδικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz

2.4 Δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων του πολυγωνικού σχηματισμού

Για να διατηρείται η σταθερότητα του σχηματισμού προϋπόθεση είναι το άθροισμα των ελκτικών δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε primary, από τα υπόλοιπα $n-1$ περιφερειακά και το κεντρικό primary P_0 , να εξισορροπεί την αδρανειακή δύναμη (φυγόκεντρο) που επίσης ασκείται σ' αυτό (Σχήμα 2.6).

Έστω $\vec{F}_{j,i}$ η ελκτική δύναμη που ασκεί το primary P_i στο P_j . Τότε: $\vec{F}_{j,i} = \frac{F_{j,i}}{(P_j P_i)^2} \vec{p}_{ji}$,

όπου \vec{p}_{ji} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $P_j P_i$ και $(P_j P_i)$ η απόσταση μεταξύ των P_j, P_i .

Από το νόμο της παγκόσμιας έλξης και τη σχέση (2.4), προκύπτει:

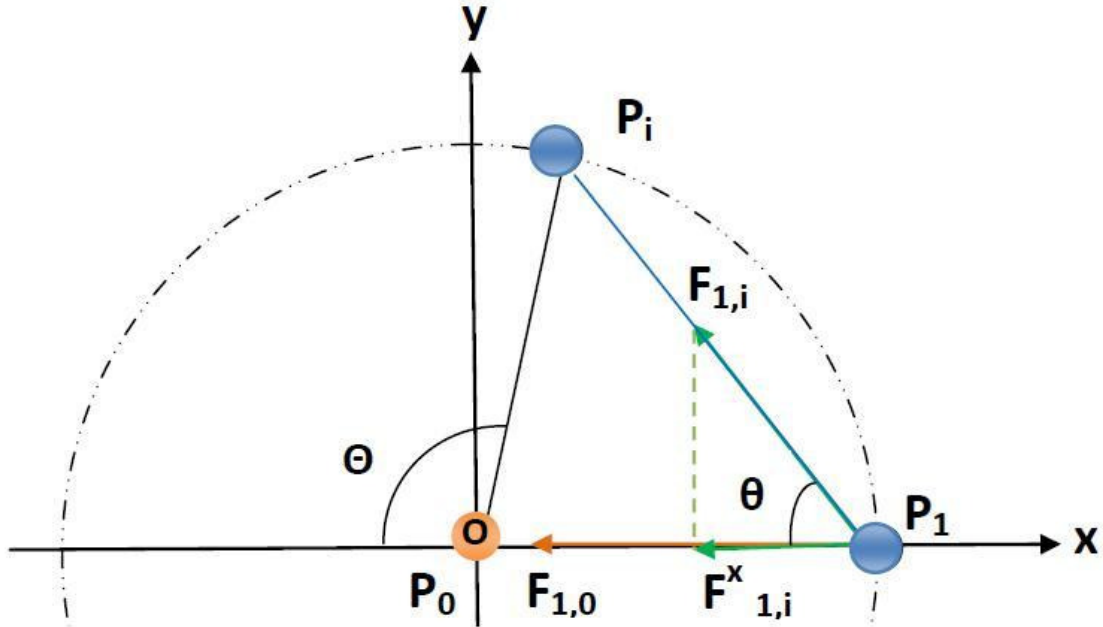
$$\vec{F}_{1,i} = \frac{k^2 m^2}{(P_1 P_i)^2} \vec{p}_{1i} = \frac{k^2 m^2 \sin^2 \varphi}{\alpha^2 \sin^2 [(n-i+1)\varphi]} \vec{p}_{1i} \quad (2.6)$$

όπου k^2 η σταθερά του Gauss.

Ορίζουμε ως β το λόγο m_0/m . Η δύναμη που ασκείται από το κεντρικό σώμα P_0 στο P_1 , είναι:

$$\vec{F}_{1,0} = \frac{k^2 m_0 m}{(P_1 P_0)^3} \overrightarrow{P_1 P_0} + 2 \frac{k^2 B m_0 m}{(P_1 P_0)^4} \overrightarrow{P_1 P_0} = -\frac{k^2 \beta m^2}{d^2} \vec{i} - 2 \frac{k^2 \beta B m^2}{d^3} \vec{i} \quad (2.7)$$

όπου β είναι η παράμετρος της μάζας και d η ακτίνα του σχηματισμού.



Σχήμα 2.6. Δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων του σχηματισμού

Η διανυσματική προβολή της $\vec{F}_{1,i}$ πάνω στον άξονα Ox , είναι: $\vec{F}_{1,i}^x = (F_{1,i} \cos \theta)(-\vec{i})$.

Όμως επειδή οι γωνίες Θ και θ βαίνουν στο ίδιο τόξο (Σχήμα 2.6) και

$$\Theta = \pi - (i-1)\psi, \quad \theta \text{ έχουμε τελικά: } \theta = \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi - (i-1)\psi}{2} = \frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{v}$$

Τελικά χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.6), έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,i}^x &= F_{1,i} \cos\left(\frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{v}\right)(-\vec{i}) = -\frac{k^2 m^2 \sin^2 \varphi}{\alpha^2 \sin^2[(v-i+1)\varphi]} \cos\left(\frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{v}\right) \vec{i} = \\ &= -\frac{k^2 m^2 \sin^2(\pi/v) \sin[(i-1)\pi/v]}{\alpha^2 \sin^2[(i-1)\pi/v]} \vec{i} = -\frac{k^2 m^2 \sin^2(\pi/v)}{\alpha^2 \sin^2[(i-1)\pi/v]} \vec{i}, \quad i=2, \dots, v \end{aligned} \quad (2.8)$$

Προκειμένου λοιπόν να διατηρείται ο σχηματισμός, θα ισχύει για τις διανυσματικές προβολές των δυνάμεων στον άξονα Ox :

$$\sum_{i=2}^{\nu} \vec{F}_{1,i}^x + \vec{F}_{1,0} + (m d \omega^2) \vec{i} = \vec{0}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.7) και (2.8), έχουμε:

$$\frac{k^2 m^2}{\alpha^2} \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi / \nu)}{\sin[(i-1)\pi / \nu]} \vec{i} + \frac{k^2 \beta m^2}{d^2} \vec{i} + 2 \frac{k^2 \beta B m^2}{d^3} \vec{i} = (m d \omega^2) \vec{i}$$

Θέτοντας:

$$\Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi / \nu)}{\sin[(i-1)\pi / \nu]}, \quad M = \frac{\alpha}{d} = 2 \sin(\pi / \nu) \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mathbf{e} \alpha \quad (\text{όπου } e \text{ καθαρός αριθμός και } \alpha \text{ η}$$

πλευρά του κανονικού πολυγωνικού σχηματισμού των περιφερειακών σωμάτων),

έχουμε:

$$\frac{k^2}{\alpha^2} m \Lambda + \frac{k^2 \beta m M^2}{\alpha^2} + 2 \frac{k^2 \beta e m M^3}{\alpha^2} = \omega^2 \frac{\alpha}{M}$$

ή

$$\frac{k^2 m}{\alpha^3 \omega^2} - \frac{1}{M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3)}$$

Και τελικά:

$$\frac{k^2 m}{\alpha^3 \omega^2} = \frac{1}{\Delta} \tag{2.9}$$

όπου θέσαμε

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3) \tag{2.10}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Δ εξαρτάται από την παράμετρο της μάζας β και από τον συντελεστή e της "διαταραχής" του Νευτώνειου πεδίου του κεντρικού σώματος του σχηματισμού. Για κάθε λοιπόν ζεύγος τιμών των παραμέτρων αυτών, προκύπτει ένα διαφορετικό δυναμικό πρόβλημα για το οποίο η παραπάνω ποσότητα Δ είναι σταθερή. Με αυτή την επισήμανση, η σχέση (2.9) αποτελεί γενίκευση του τρίτου νόμου του Kepler.

2.5 Εξισώσεις κινήσεως του μικρού σώματος S στο αδρανειακό σύστημα

Έστω ότι τα διανύσματα θέσης του μικρού σώματος S και των περιφερειακών σωμάτων P_i ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων Οξηζ (Σχήμα 2.7), είναι αντίστοιχα,

$$S: \vec{r}_{0/A} = (\xi, \eta, \zeta),$$

$$P_i: \vec{R}_{i/A} = (\xi_i, \eta_i, 0)$$

ή χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\{ \}$ για ένα διάνυσμα υπό μορφή πίνακα-στήλης,

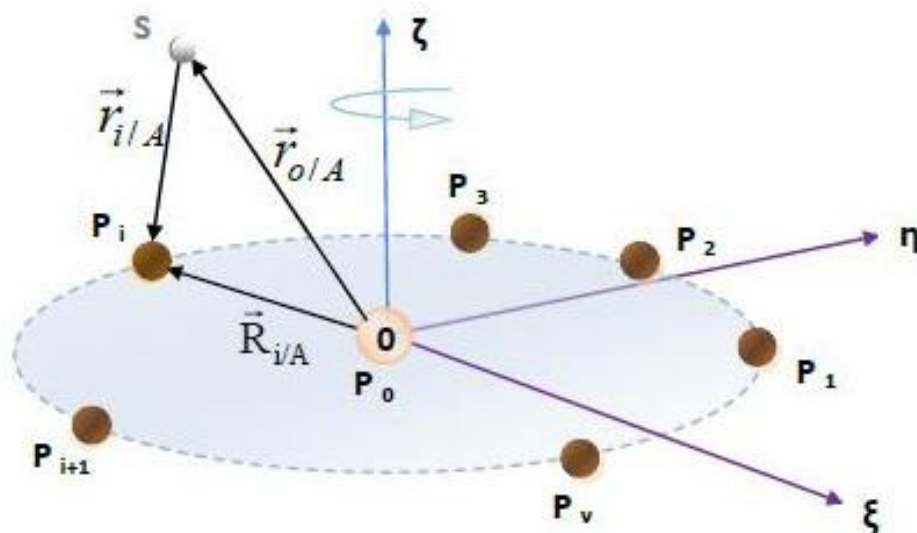
$$\{r_{0/A}\} = [\xi \ \eta \ \zeta]^T, \quad \{R_{i/A}\} = [\xi_i \ \eta_i \ 0]^T$$

Για τα σχετικά διανύσματα θέσεως του m_s ως προς το m_i θα είναι:

$$r_{i/A} = \vec{OP}_i - \vec{OS} = \vec{R}_{i/A} - \vec{r}_{0/A} = (\xi_i - \xi, \eta_i - \eta, -\zeta), \quad i=1,2, \quad (2.11)$$

και θα ισχύουν:

$$r_{i/A}^2 = (\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + \zeta^2, \quad r_{0/A}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.7. Αδρανειακό σύστημα αναφοράς Οξηζ

Οι εξισώσεις της κίνησης του μικρού σώματος S διαμορφώνονται λόγω των ελκτικών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό, από το κεντρικό και τα περιφερειακά σώματα, ως εξής:

$$m_s \ddot{\vec{r}}_{0/A} = \frac{k^2 m_s m_0}{r_{0/A}^3} (-\vec{r}_{0/A}) + \frac{2k^2 e a m_s m_0}{r_{0/A}^4} (-\vec{r}_{0/A}) + k^2 m_s m \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_{i/A}^3} \vec{r}_{i/A}$$

ή

$$\ddot{\vec{r}}_{0/A} = \frac{k^2 m \beta}{r_{0/A}^3} (-\vec{r}_{0/A}) + \frac{2k^2 e a m \beta}{r_{0/A}^4} (-\vec{r}_{0/A}) + k^2 m \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_{i/A}^3} \vec{r}_{i/A} \quad (2.13)$$

ή με την αναλυτική έκφραση των συντεταγμένων τους

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix}^T = k^2 m \begin{bmatrix} \frac{-\beta \xi}{r_{0/A}^3} - \frac{2e a \beta \xi}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^v \frac{\xi_i - \xi}{r_{i/A}^3} \\ \frac{-\beta \eta}{r_{0/A}^3} - \frac{2e a \beta \eta}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^v \frac{\eta_i - \eta}{r_{i/A}^3} \\ \frac{-\beta \zeta}{r_{0/A}^3} - \frac{2e a \beta \zeta}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^v \frac{-\zeta}{r_{i/A}^3} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, v \quad (2.14)$$

Επομένως, οι σχέσεις (2.13 και 2.14) παριστάνουν τις διαστατές διανυσματικές εξισώσεις της κίνησης του σώματος S ως προς το αδρανειακό σύστημα.

2.6 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων της κίνησης στο αδρανειακό σύστημα

Οι εξισώσεις κινήσεως που προέκυψαν πιο πάνω, περιέχουν τα φυσικά μεγέθη (αποστάσεις, ταχύτητες, μάζες, χρόνο) στη διαστατή τους μορφή, δηλαδή εκφρασμένα σε κάποιο σύστημα μονάδων.

Επειδή η χρήση των φυσικών μεγεθών με τις μονάδες τους, δυσχεραίνει τους υπολογισμούς και επί πλέον δεν προσθέτει τίποτα το ουσιαστικό στη διερεύνηση του προβλήματος, γι' αυτό προχωρούμε στη λεγόμενη αδιαστατοποίηση, δηλαδή την απαλλαγή των φυσικών μεγεθών από συγκεκριμένες μονάδες. Έτσι το μοντέλο με τις

αδιάστατες εξισώσεις κίνησης, μπορεί να περιγράψει με τον ίδιο απαράλλακτο τρόπο, ομοειδή φυσικά συστήματα ανεξαρτήτως μεγέθους και κλίμακας. Στην πραγματικότητα η αδιαστατοποίηση δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία ακόμη μέτρηση με ένα αντίστοιχο μέγεθος, (που το θεωρούμε ως νέα μονάδα) και το οποίο εκφράζεται στο ίδιο σύστημα μονάδων με το αρχικό.

Η προσαρμογή των αποτελεσμάτων στα πραγματικά φυσικά διαστατά μεγέθη του συγκεκριμένου φυσικού συστήματος, γίνεται με την ίδια ευκολία ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία. Στην προκειμένη περίπτωση, ως νέα μονάδα μήκους επιλέγεται η απόσταση α μεταξύ δύο διαδοχικών περιφερειακών primaries, ως μονάδα μάζας m η μάζα του ενός περιφερειακού και ως μονάδα χρόνου, ο χρόνος μιας περιστροφής. Δια μέσου αυτών, εισάγονται οι παρακάτω μετασχηματισμοί:

$$\xi^* = \xi / \alpha, \quad \eta^* = \eta / \alpha, \quad \zeta^* = \zeta / \alpha, \quad m_0 = \beta m \quad \text{και} \quad t^* = \omega t = t \quad (2.15)$$

όπου β είναι η παράμετρος της μάζας, όπως έχει ήδη ορισθεί, t είναι ο πραγματικός χρόνος (ο οποίος εκφράζεται με μονάδες χρόνου), t^* είναι ο αδιάστατος ή μετασχηματισμένος χρόνος και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος, η οποία στο εξής θα θεωρείται μοναδιαία. Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{0/A}$ του S, προκύπτει ως:

$$\vec{r}_{0/A} = (\xi, \eta, \zeta) = \alpha(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) = \alpha \vec{r}_{0/A}^* \quad (2.16)$$

Με παραγωγή ως προς τον πραγματικό χρόνο t του $\vec{r}_{0/A}$, οι αδιάστατες ταχύτητες και επιταχύνσεις, είναι:

$$\vec{\dot{r}}_{0/A} = \frac{d\vec{r}_{0/A}}{dt} = \alpha \vec{\dot{r}}_{0/A}^* \omega \quad (2.17)$$

$$\vec{\ddot{r}}_{0/A} = \frac{d\vec{\dot{r}}_{0/A}}{dt} = \alpha \omega^2 \vec{\ddot{r}}_{0/A}^* \quad (2.18)$$

Τα υπόλοιπα διαστατά διανύσματα του σχηματισμού, θα συνδέονται με τα αντίστοιχά τους αδιάστατα, με τις σχέσεις:

$$\vec{r}_{i/A} = \alpha \vec{r}_{i/A}^*, \quad \vec{R}_{i/A} = \alpha \vec{R}_{i/A}^* \quad (2.19)$$

Τα μέτρα των διανυσμάτων που δίνονται στις ισότητες (2.13), διαμορφώνονται ως εξής:

$$\mathbf{r}_{i/A}^{*2} = (\xi_i^* - \xi^*)^2 + (\eta_i^* - \eta^*)^2 + \zeta^{*2} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_{0/A}^{*2} = \xi^{*2} + \eta^{*2} + \zeta^{*2}.$$

Η εισαγωγή των προηγούμενων εκφράσεων στις εξισώσεις της κίνησης (2.13) του σωματιδίου S, δίνει:

$$\omega^2 \ddot{\mathbf{r}}_{0/A}^* = \frac{k^2 m \beta}{\alpha^3 r_{0/A}^{*3}} (-\alpha \dot{\mathbf{r}}_{0/A}^*) + \frac{2k^2 e \alpha m \beta}{\alpha^4 r_{0/A}^{*4}} (-\alpha \dot{\mathbf{r}}_{0/A}^*) + k^2 m \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha^3 r_{i/A}^{*3}} \alpha \dot{\mathbf{r}}_{i/A}^*$$

ή

$$\ddot{\mathbf{r}}_{0/A}^* = \frac{k^2 m}{\omega^2 \alpha^3} \left(-\frac{\beta}{r_{0/A}^{*3}} \dot{\mathbf{r}}_{0/A}^* - \frac{2e\beta}{r_{0/A}^{*4}} \dot{\mathbf{r}}_{0/A}^* + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_{i/A}^{*3}} \dot{\mathbf{r}}_{i/A}^* \right) \quad (2.20)$$

Λόγω της σχέσης (2.20) και παραλείποντας τους αστερίσκους από όλες τις σχέσεις, χάριν ευκολίας, οι αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης του S ως προς το αδρανειακό σύστημα γίνονται:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{0/A} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta}{r_{0/A}^3} \dot{\mathbf{r}}_{0/A} - \frac{2e\beta}{r_{0/A}^4} \dot{\mathbf{r}}_{0/A} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_{i/A}^3} \dot{\mathbf{r}}_{i/A} \right) \quad (2.21\alpha)$$

ή

$$\{\ddot{\mathbf{r}}_{0/A}\} = [\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}]^T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\frac{\beta\xi}{r_{0/A}^3} - \frac{2e\beta\xi}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\xi_i - \xi}{r_{i/A}^3} \\ -\frac{\beta\eta}{r_{0/A}^3} - \frac{2e\beta\eta}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\eta_i - \eta}{r_{i/A}^3} \\ -\frac{\beta\zeta}{r_{0/A}^3} - \frac{2e\beta\zeta}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-\zeta}{r_{i/A}^3} \end{bmatrix} \quad (2.21\beta)$$

όπου η ποσότητα $\frac{1}{\Delta} = \frac{k^2 m}{\omega^2 \alpha^3}$, καθώς και τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{r}_{i/A}$ και $\mathbf{r}_{0/A}$ είναι αδιάστατα. Για τα μέτρα των τελευταίων, παραλείποντας τους αστερίσκους, ισχύει:

$$\mathbf{r}_{0/A}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_{i/A}^2 = (\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + \zeta^2 \quad (2.22)$$

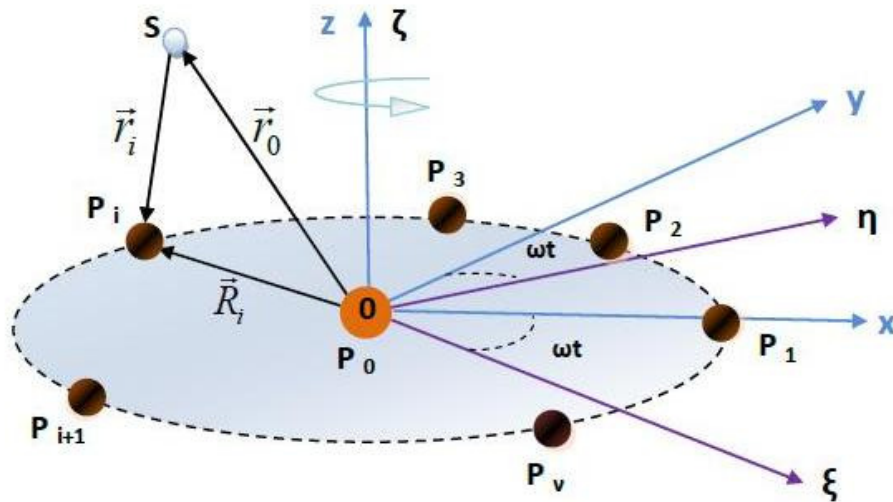
Οι αδιάστατες συντεταγμένες του περιφερειακού primary P_i ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, είναι (αφού μετασχηματισθούν οι σχέσεις (2.4) διά των (2.15) και παραλειφθούν οι αστερίσκοι):

$$P_i(x_i, y_i, 0) = P_i\left(R_v \frac{\cos[(i-1)2\pi/v]}{2\sin(\pi/v)}, R_v \frac{\sin[(i-1)2\pi/v]}{2\sin(2\pi/v)}, 0\right) \quad (2.23)$$

όπου $R_v=d$, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

2.7 Αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης στο περιστρεφόμενο σύστημα

Έστω $\vec{r}_{0/A} = (\xi, \eta, \zeta)$ και $\vec{r}_0 = (x, y, z)$ τα διανύσματα θέσης του S ως προς το αδρανειακό (A) και το περιστρεφόμενο σύστημα αντίστοιχα και $\vec{R}_{i/A} = (\xi_i, \eta_i, 0)$ και $\vec{R}_i = (x_i, y_i, 0)$ τα διανύσματα θέσης των primaries ως προς τα δύο προηγούμενα συστήματα (Σχήμα 2.8). Επίσης, έστω $\vec{\xi}_i = (x_i - x, y_i - y, -z)$, $i=1,2,\dots,v$ τα σχετικά διανύσματα θέσης του S ως προς τα primaries στο περιστρεφόμενο σύστημα.



Σχήμα 2.8. Συνοδεύον σύστημα αναφοράς $Oxyz$ και διανύσματα θέσεως του μικρού σώματος

Τότε: $\vec{r}_0 = A\vec{r}_{0/A}$ και $\vec{r}_{0/A} = A^T\vec{r}_0$,

όπου A είναι ο τετραγωνικός πίνακας στροφής του περιστρεφόμενου συστήματος $Oxyz$ ως προς το αδρανειακό $O\xi\zeta$ και ο A^T είναι ο ανάστροφός του. Δηλαδή,

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } A^T = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ με γωνία στροφής } \omega t = t \text{ (}\omega=1\text{)}.$$

Επομένως, για το διάνυσμα θέσης, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις του S , ισχύει:

$$\begin{aligned} \{r_{0/A}\} &= \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \\ z \end{bmatrix} \\ \{\dot{r}_{0/A}\} &= \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos t - \dot{y} \sin t - x \sin t - y \cos t \\ \dot{x} \sin t + \dot{y} \cos t + x \cos t - y \sin t \\ \dot{z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\{\ddot{r}_{0/A}\} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \cos t - \ddot{y} \sin t - 2\dot{x} \sin t - 2\dot{y} \cos t - x \cos t + y \sin t \\ \ddot{x} \sin t + \ddot{y} \cos t + 2\dot{x} \cos t - 2\dot{y} \sin t - x \sin t - y \cos t \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Τα αδιάστατα μέτρα των διανυσμάτων είναι ίσα ως προς τα δύο συστήματα: $r_{0/A} = r_0$

και $\vec{r}_{i/A} = \vec{r}_i$.

Ο πολλαπλασιασμός των αδιάστατων εξισώσεων της κίνησης ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (2.21α), με τον πίνακα στροφής A , δίνει:

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\beta\xi}{r_{0/A}^3} - \frac{2e\beta\xi}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\xi_i - \xi}{r_{i/A}^3} \\ -\frac{\beta\eta}{r_{0/A}^3} - \frac{2e\beta\eta}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\eta_i - \eta}{r_{i/A}^3} \\ -\frac{\beta\zeta}{r_{0/A}^3} - \frac{2e\beta\zeta}{r_{0/A}^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-\zeta}{r_{i/A}^3} \end{bmatrix}$$

Λόγω των εκφράσεων (2.24) και (2.25), προκύπτουν τελικά οι αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης του S στο περιστρεφόμενο σύστημα Oxyz:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\frac{\beta x}{r_0^3} - \frac{2e\beta x}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_i - x}{r_i^3} \\ -\frac{\beta y}{r_0^3} - \frac{2e\beta y}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{y_i - y}{r_i^3} \\ -\frac{\beta z}{r_0^3} - \frac{2e\beta z}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-z}{r_i^3} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ή

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} = U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} = U_y \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} = U_z \end{aligned} \quad (2.27)$$

όπου

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] \quad (2.28)$$

είναι η δυναμική συνάρτηση του συστήματος και r_0, r_i τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων με $r_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ και $r_i = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$.

Δ είναι η ποσότητα:

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3)$$

και

$$\Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi/\nu)}{\sin[(i-1)\pi/\nu]}, \quad M=2\sin(\pi/\nu).$$

Εξάλλου οι μερικές παράγωγοι ως προς x, y και z της δυναμικής συνάρτησης U είναι ίσες με:

$$\begin{aligned} U_x &= x + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta x}{r_0^3} - \frac{2e\beta x}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_i - x}{r_i^3} \right) \\ U_y &= y + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta y}{r_0^3} - \frac{2e\beta y}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{y_i - y}{r_i^3} \right) \\ U_z &= -\frac{z}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{2e\beta}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι ο φορμαλισμός και ο τρόπος αδιαστατοποίησης που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των εξισώσεων (2.27) βασίζεται στη μεθοδολογία που έχει προταθεί από τον Kalvouridis (1999a) και έχει ακολουθηθεί και από άλλους ερευνητές (Arribas & Elipe, 2004, κ.α.). Μερικοί ερευνητές στο παρελθόν (Scheeres, 1992; Scheeres & Vinh, 1993) μελετώντας το ίδιο πρόβλημα επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν κυλινδρικά συστήματα συντεταγμένων προκειμένου να εκφράσουν τις εξισώσεις κινήσεως του μικρού σώματος. Επιπλέον θεώρησαν την ακτίνα του σχηματισμού ως μονάδα μέτρησης των αποστάσεων (αντί της πλευράς του πολυγώνου που θεωρήσαμε στην παρούσα διατριβή) γεγονός που

συνεπάγεται ότι η γωνιακή ταχύτητα του σχηματισμού θα είναι διάφορη της μονάδας όταν μεταβάλλεται το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων (ενώ στη διατριβή η γων. ταχύτητα λαμβάνεται ως 1). Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι $\omega=1$, τότε τα κανονικά πολύγωνα θα έχουν διαστατή πλευρά a_n η τιμή της οποίας προσδιορίζεται από τη σχέση 2.9 για $\omega=1$, $a_n = \sqrt[3]{k^2 m \Delta}$, η δε ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου θα είναι $d_n=R_n$ και θα προσδιορίζεται από τη σχέση 2.3. Αν όμως ορίσουμε $d=1$, τότε από τη σχέση (2.3) θα είναι $a_n=2\sin(\pi/n)$ και η γωνιακή ταχύτητα θα είναι $\omega = \omega_n \neq 1$ η δε τιμή της για κάθε n θα καθορίζεται από τη σχέση (2.9).

2.8 Παράμετροι του προβλήματος

Από την προηγηθείσα ανάλυση προκύπτει ότι το δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους: (i) το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων, (ii) την παράμετρο $\beta=m_0/m$ του λόγου της μάζας του κεντρικού σώματος m_0 προς τη μάζα m ενός περιφερειακού και (iii) τον συντελεστή e που χαρακτηρίζει το Μετα-Νευτώνειο πεδίου του κεντρικού σώματος P_0 . Να σημειώσουμε εδώ ότι ο Scheeres (1992), χρησιμοποιεί ως παράμετρο μάζας τον αντίστροφο λόγο $m/m_0=1/\beta$, που τον συμβολίζει με μ , ενώ οι Hadjifotinou & Kalvouridis (2005) προτείνουν εναλλακτικά τη χρήση της ανηγμένης (στη συνολική μάζα του σχηματισμού) μάζας μ ενός περιφερειακού σώματος, ή της αντίστοιχης μάζας μ_0 του κεντρικού σώματος (κατ' αντιστοιχία με τον ορισμό των ανηγμένων μαζών στο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων), ήτοι:

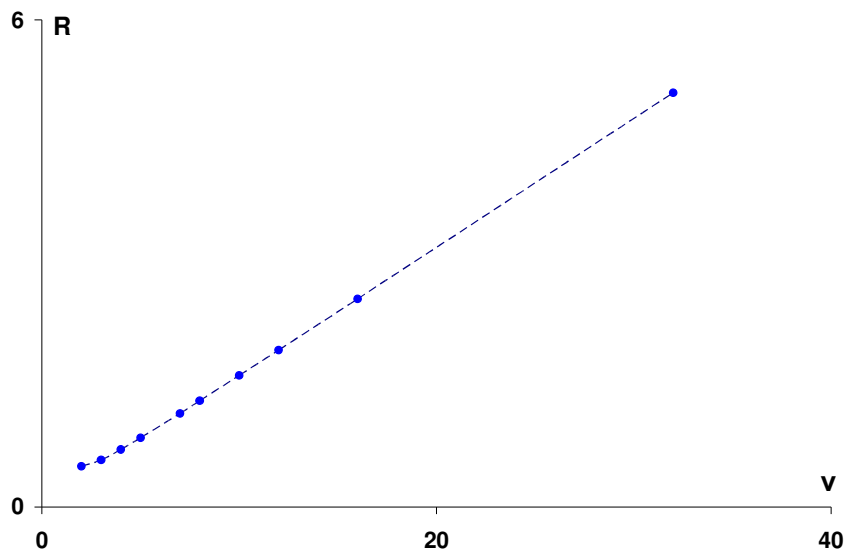
$$\mu = \frac{m}{m_0 + nm} = \frac{v}{v + \beta}, \quad \mu_0 = \frac{m_0}{m_0 + nm} = 1 - \frac{v}{v + \beta} = 1 - \mu$$

Όσον αφορά στις τιμές που παίρνουν οι παράμετροι αυτές, η παράμετρος n παίρνει θετικές ακέραιες τιμές μεγαλύτερες της μονάδας ($n \in \mathbb{N} - \{1\}$, όπου \mathbb{N} το σύνολο των φυσικών αριθμών), η παράμετρος β παίρνει πάντα θετικές πραγματικές τιμές ($\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^+$), ενώ η παράμετρος e μπορεί να πάρει πραγματικές τιμές, θετικές ή αρνητικές ($e \in \mathbb{R}$). Σημειώνουμε επίσης ότι, σύμφωνα με τον τρόπο αδιαστατοποίησης που

περιγράφηκε προηγουμένως, η αδιάστατη ακτίνα R του κύκλου των primaries επηρεάζεται μόνο από την παράμετρο ν . Στον Πίνακα 2.2 παρατίθενται οι ακτίνες κάποιων πολυγωνικών σχηματισμών, ενώ στο Σχήμα 2.9 που ακολουθεί, δείχνεται η μεταβολή της R με την παράμετρο ν , από όπου φαίνεται να υπάρχει μία κατά προσέγγιση γραμμική σχέση μεταξύ των δύο αυτών ποσοτήτων.

Πίνακας 2.2. Αδιάστατες ακτίνες $R=d$ των πολυγωνικών σχηματισμών για διάφορες τιμές του ν

ν	R
2	0.5
3	0.577735
4	0.707107
5	0.850651
7	1.15238
8	1.30656
10	1.61803
12	1.931852
16	2.562915
32	5.101149



Σχήμα 2.9. Μεταβολή της ακτίνας R των πολυγωνικών σχηματισμών με το v

2.9 Ολοκλήρωμα της κίνησης (ολοκλήρωμα τύπου Jacobi)

Όπως είναι γνωστό, ένα ολοκλήρωμα της κίνησης είναι μία συνάρτηση της μορφής,

$$Q(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = C$$

και διατηρεί σταθερή τιμή κατά μήκος μιας λύσης. Η ύπαρξη τέτοιων ολοκληρωμάτων, συνεπάγεται την ελάττωση του πλήθους των ανεξάρτητων μεταβλητών που εμφανίζονται στο δυναμικό σύστημα. Επιπλέον, τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως απλά κριτήρια ακριβείας για τον έλεγχο της ορθότητας των αριθμητικών υπολογισμών (τροχιών ή θέσεων ισορροπίας) σε προβλήματα στα οποία η εύρεση αναλυτικών μορφών λύσεων δεν είναι εφικτή.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ένα τέτοιο ολοκλήρωμα βρίσκεται εύκολα αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη από τις εξισώσεις κινήσεως (2.27) επί \dot{x} , τη δεύτερη επί \dot{y} και την τρίτη επί \dot{z} , οπότε θα έχουμε:

$$\ddot{x} - 2\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y}\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) - C \quad (2.30)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό, που είναι ένα **πρώτο ολοκλήρωμα** επειδή περιέχει παραγώγους των μεταβλητών κατά μία τάξη μικρότερη από την τάξη των διαφορικών εξισώσεων κίνησης, είναι τύπου Jacobi επειδή μοιάζει με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα του περιορισμένου προβλήματος των τριών σωμάτων. Στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα αυτό ως μία βασική ποσότητα η οποία καθορίζει όχι μόνο τον τρόπο εξέλιξης των περιοχών κινήσεως στο επίπεδο και στο χώρο αλλά και τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι οικογένειες των περιοδικών τροχιών στον αντίστοιχο φασικό χώρο των αρχικών συνθηκών.

2.10 Ευστάθεια του πολυγωνικού σχηματισμού

Όσον αφορά στην ευστάθεια των κανονικών πολυγωνικών σχηματισμών με ή χωρίς κεντρικό σώμα και με περιφερειακά σώματα ίσης μάζας, για Νευτώνεια ή ορισμένα Μετα-Νευτώνεια δυναμικά, όπως ήδη αναφέραμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο 1, έχουν ασχοληθεί στο παρελθόν διάφοροι ερευνητές όπως οι Salo & Yoder (1988), Scheeres (1992), Vanderbei & Kolemen (2007) Arribas *et al.*, (2007), κ.α. Οι παραδοχές, οι προσεγγίσεις και οι τεχνικές που ακολουθούνται είναι διαφορετικές γι' αυτό και οι εκτιμώμενες οριακές τιμές των παραμέτρων (κυρίως το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων n και η παράμετρος μάζας) οι οποίες αποτελούν το κατώφλι για την ύπαρξη ευσταθών σχηματισμών, διαφέρουν μεταξύ τους ενίοτε σημαντικά. Παρ' όλα αυτά υπάρχει η γενική εκτίμηση ότι σχηματισμοί αυτού του τύπου είναι ασταθείς για μεν τα

Νευτώνεια δυναμικά όταν $\nu < 7$, για δε τα Μετα-Νευτώνεια δυναμικά που εκφράζονται από συναρτήσεις της μορφής:

$$V(r) = -k^2 M m f(1/r)$$

$$\text{όπου : } f(1/r) = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{A_i}{r^i} = \left[\frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \dots + \frac{A_\rho}{r^\rho} \right]$$

όταν $\nu \leq 6$. Τα δυναμικά τύπου Manev ή Schwarzschild, όπως ήδη αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, μπορούν να θεωρηθούν ότι εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ-ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

3.1 Γενικά

Όπως είναι γνωστό, σε μία θέση ισορροπίας το μικρό σώμα έχει ταχύτητα και επιτάχυνση μηδέν. Συνεπώς, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που εκφράζουν την κατάσταση αυτή είναι οι:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινήσουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες αναφέρονται στην ισορροπία του μικρού σώματος ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα $Oxyz$ και όχι ως προς το αδρανειακό $O\xi\zeta$. Αν εισάγουμε τις συνθήκες αυτές στις εξισώσεις κίνησης (2.27) (Κεφ.2^ο), προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= U_x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= U_y = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= U_z = 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Στα σημεία ισορροπίας λόγω της μορφής της δυναμικής συνάρτησης και των σχέσεων (3.1), παρουσιάζονται ακρότατα(μέγιστα ή ελάχιστα).

3.2 Αριθμητικός προσδιορισμός των θέσεων ισορροπίας

Όπως ήδη αναφέραμε, σε μία θέση ισορροπίας το μικρό σώμα έχει ταχύτητα και επιτάχυνση μηδέν. Συνεπώς, από τις εξισώσεις κίνησης (2.27) (Κεφ.2^ο), προκύπτει το μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα (3.1) το οποίο επιλύεται μόνο με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων. Η μέθοδος που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε στο

συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η γνωστή μέθοδος των Newton-Raphson⁶ η οποία χαρακτηρίζεται από απλότητα στην κωδικοποίησή της, ακρίβεια των αποτελεσμάτων και πολύ καλή ταχύτητα σύγκλισης (η σύγκλιση είναι τετραγωνική).

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, θεωρούμε μια προσεγγιστική λύση (x_0, y_0, z_0) του συστήματος (3.1) που αποτελεί την τιμή εκκίνησης του αλγορίθμου. Η τιμή αυτή μπορεί να βρεθεί είτε από τα διαγράμματα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, είτε από τον εντοπισμό μικρών περιοχών τιμών των x , y και z μέσα στις οποίες οι συναρτήσεις του συστήματος (3.1) αλλάζουν ταυτόχρονα πρόσημο.

Αν θέσουμε

$$U_x(x, y, z) = F(x, y, z)$$

$$U_y(x, y, z) = G(x, y, z)$$

$$U_z(x, y, z) = H(x, y, z)$$

τότε ο αλγόριθμος θα πάρει τη μορφή

$$x^{(v)} = x^{(v-1)} - \frac{NOMX}{J}$$

$$y^{(v)} = y^{(v-1)} - \frac{NOMY}{J}$$

$$z^{(v)} = z^{(v-1)} - \frac{NOMZ}{J}$$

όπου :

$$NOMX = F(G_y H_z - H_y G_z) - F_y(GH_z - HG_z) + F_z(GH_y - HG_y)$$

$$NOMY = F_x(GH_z - HG_z) - F(G_x H_z - H_x G_z) + F_z(G_x H - H_x G)$$

$$NOMZ = F_x(G_y H - H_y G) - F_y(G_x H - H_x G) + F(G_x H_y - H_x G_y)$$

$$J = F_x(G_y H_z - H_y G_z) - F_y(G_x H_z - H_x G_z) + F_z(G_x H_y - H_x G_y)$$

⁶ Η μέθοδος αυτή προτάθηκε αρχικά από τον Νεύτωνα στα 1669 (Sebah & Gourdon, 2001) ο οποίος την εφάρμοσε για να επιλύσει αριθμητικά την πολυωνυμική εξίσωση: $y^3 - 2y - 5 = 0$. Μερικά χρόνια αργότερα (1690), ο Joseph Raphson (1678-1715) την βελτίωσε δίνοντάς της τη μορφή που γνωρίζουμε. Έκτοτε υπήρξαν διάφορες γενικεύσεις της από πολλούς μαθηματικούς όπως οι Simpson (1710-1761), Mourraille (1720-1808), Cauchy (1789-1857), Kantorovich (1912-1986) κ.ο.κ.

Οι μερικές παράγωγοι της δυναμικής συνάρτησης υπολογίζονται στη θέση $(x^{(v-1)}, y^{(v-1)}, z^{(v-1)})$ και τα κριτήρια διακοπής της μεθόδου είναι :

$$\left| x^{(v)} - x^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| y^{(v)} - y^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| z^{(v)} - z^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon$$

όπου $\varepsilon = 10^{-12}$ είναι η ακρίβεια υπολογισμών (ή ακρίβεια σύγκλισης) που θεωρήσαμε για τις ανάγκες του προβλήματός μας.

3.3 Ύπαρξη των θέσεων ισορροπίας-Ζώνες ισορροπίας στο επίπεδο των primaries και θέσεις ισορροπίας εκτός του επιπέδου αυτού

Στη βαρυτική περίπτωση του Ring Problem αποδείχθηκε (Καλβουρίδης, 1999a) ότι δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας εκτός του επιπέδου xy του σχηματισμού. Στην περίπτωση αυτή ($e=0$) η ποσότητα

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2)$$

παραμένει θετική για όλες τις τιμές των παραμέτρων ν και β , αφού αυτές είναι πάντα θετικές, και συνεπώς και οι ποσότητες Λ και M είναι επίσης θετικές. Εξάλλου η μερική παράγωγος ως προς z της συνάρτησης U είναι ίση με

$$U_z = \frac{-z}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_0^3} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right)$$

οπότε από τη συνθήκη ισορροπίας $U_z=0$, συνεπάγεται ότι $z=0$ αφού η παρένθεση είναι πάντα θετική. Με άλλα λόγια τα σημεία ισορροπίας κείνται στο επίπεδο xy του σχηματισμού.

Με ανάλογο τρόπο, αυτό αποδεικνύεται και στην περίπτωση ύπαρξης κεντρικού δυναμικού τύπου $Manev$ για οποιαδήποτε τιμή $e>0$. Η ποσότητα Δ διαμορφώνεται στην

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3)$$

η οποία είναι επίσης θετική για $e>0$. Η μερική παράγωγος ως προς z της συνάρτησης U είναι ίση με :

$$U_z = \frac{-z}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{2e\beta}{r_0^4} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right)$$

και από τη συνθήκη ισορροπίας θα έχουμε ότι $U_z=0$. Όμως επειδή τόσο η Δ όσο και η ποσότητα στην παρένθεση είναι θετικές, αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει και πάλι $z=0$. Άρα όλες οι θέσεις ισορροπίας θα κείνται και στην περίπτωση αυτή πάνω στο επίπεδο xy των primaries.

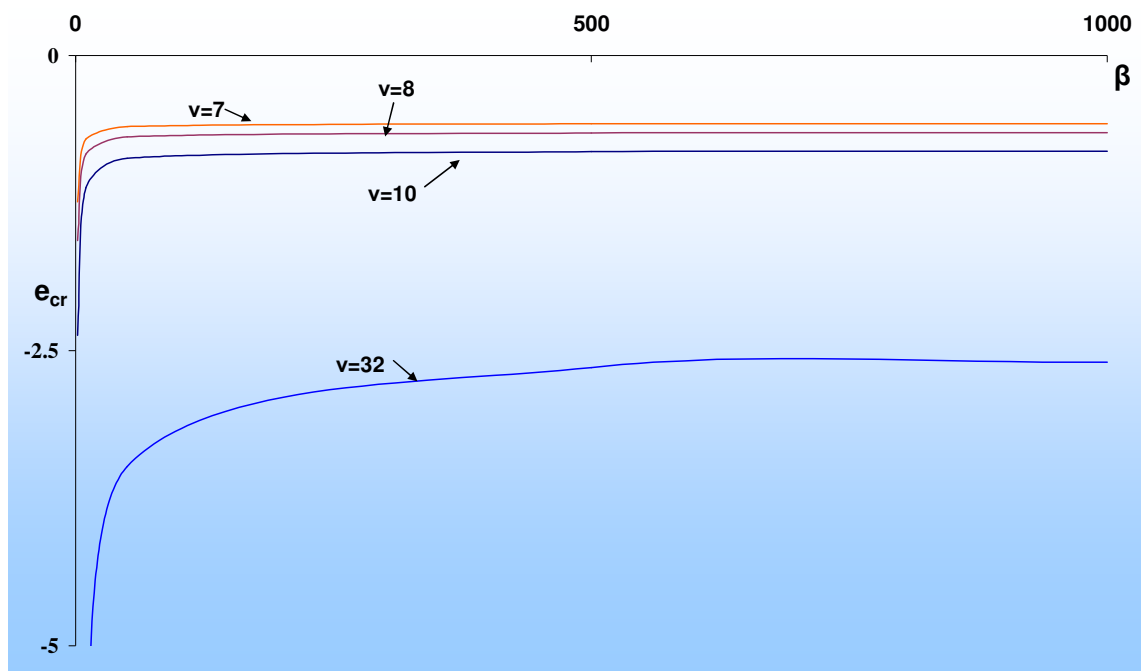
Όταν $e < 0$, και επειδή το Δ είναι πάντα θετικό, σύμφωνα με τη σχέση (2.9) του 2^{ου} κεφαλαίου, πρέπει να εντοπίσουμε και να αποκλείσουμε εκείνες τις τιμές των β και e που για ένα συγκεκριμένο ν , είτε μηδενίζουν την ποσότητα αυτή, είτε την καθιστούν αρνητική. Ειδικότερα, όταν $\Delta = 0$, τότε από τις εξισώσεις (2.31) του 2^{ου} κεφαλαίου, προκύπτει ότι τόσο η συνάρτηση U όσο και οι μερικές της παράγωγοι κάθε τάξεως ως προς x , y και z δεν υπάρχουν και συνεπώς δεν έχει νόημα να μελετήσουμε την ύπαρξη θέσεων ισορροπίας και γενικότερα την ύπαρξη λύσεων. Οι τιμές της παραμέτρου $e=e_{cr}$ που μηδενίζουν την ποσότητα Δ (περίπτωση απροσδιοριστίας) για συγκεκριμένες τιμές των δύο άλλων παραμέτρων β και ν , προσδιορίζονται από τη σχέση

$$e_{cr} = -\frac{\Lambda + \beta M^2}{2\beta M^3} \quad (3.2)$$

και δίνονται ενδεικτικά στον Πίνακα 3.1 και στο Σχήμα 3.1 που ακολουθεί.

Πίνακας 3.1. Κρίσιμες τιμές της παραμέτρου e για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β και διάφορους πολυγωνικούς σχηματισμούς (ν)

	β	e_{cr}
7	2	-1.2401839
	10	-0.7089897
	50	-0.6027509
	500	-0.5788472
	1000	-0.5775192
	10000	-0.5763240
8	2	-1.5694649
	10	-0.8365181
	50	-0.6899288
	500	-0.6569462
	1000	-0.6551138
	10000	-0.6534647
10	2	-2.3714107
	10	-1.1214957
	50	-0.8715127
	500	-0.8152666
	1000	-0.8121418
	10000	-0.8093295
32	2	-25.8755922
	10	-7.2155778
	50	-3.4835749
	500	-2.6438743
	1000	-2.5972243
	10000	-2.5552392



Σχήμα 3.1. Μεταβολή της κρίσιμης τιμής του e με την παράμετρο β , για διάφορες τιμές του ν

Συνεπώς, οι αποδεκτές τιμές της e για δεδομένες τιμές των β και ν πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση:

$$e > e_{cr}, \quad (3.2\alpha)$$

η δε περιοχή των αποδεκτών τιμών στο διάγραμμα (β, e) του Σχήματος 3.1 για κάθε ν , είναι αυτή που εκτείνεται μεταξύ της αντίστοιχης καμπύλης $e=e_{cr}$ και των δύο αξόνων.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η παράμετρος β , για σταθερό αριθμό των ν περιφερειακών σωμάτων, η κρίσιμη τιμή e_{cr} μειώνεται κατά απόλυτη τιμή. Επίσης παρατηρούμε ότι διατηρώντας την παράμετρο μάζας β σταθερή, όσο αυξάνεται ο αριθμός των περιφερειακών σωμάτων του πολυγωνικού σχηματισμού, η κρίσιμη τιμή e_{cr} αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή, οπότε οι καμπύλες μετατοπίζονται προς τα κάτω, διευρύνοντας με αυτόν τον τρόπο την περιοχή των αποδεκτών τιμών β και e . Όπως βλέπουμε από τα διαγράμματα του Σχήματος 3.1, η καμπύλη $e_{cr}=e_{cr}(\beta)$ για κάθε ν εξελίσσεται έτσι ώστε να τείνει ασυμπτωτικά αφενός μεν στον άξονα των e , αφετέρου δε σε μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των β διαφορετική για κάθε ν ,

της οποίας η τιμή e_{cr} είναι (βρίσκεται εφαρμόζοντας τον κανόνα του De L' Hôpital στη σχέση 3.2 όταν $\beta \rightarrow \infty$)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e_{cr,v} = -\frac{1}{4\sin\left(\frac{\pi}{v}\right)} \quad (3.2\beta)$$

και της οποίας η απόλυτη τιμή αυξάνει με το v .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι τιμές των β και e για κάποιο v ικανοποιούν την ανισότητα $e > e_{cr}$, οπότε $\Delta > 0$. Τότε από την τρίτη εξίσωση των (3.1) προκύπτει ότι σε μια θέση ισορροπίας θα πρέπει να ισχύει επίσης ότι,

$$\frac{z}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{2e\beta}{r_0^4} + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Μηδενισμός του αριστερού μέλους της (3.3) θα συμβαίνει αν :

- $z=0$, που παραπέμπει και πάλι σε θέσεις ισορροπίας στο επίπεδο των primaries , ή
- $\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{2e\beta}{r_0^4} + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} = 0$ (3.4)

Επειδή στη σχέση 3.4 η παράμετρος e μπορεί να παίρνει αρνητικές τιμές, πρέπει να διερευνήσουμε τη δυνατότητα να υπάρχουν σημεία ισορροπίας εκτός του επιπέδου των primaries. Λόγω της συμμετρίας του σχηματισμού αλλά και του δυναμικού πεδίου, αν υπάρχουν τέτοια σημεία, ή θα κατανέμονται στο χώρο σύμφωνα με την παραπάνω συμμετρία ή θα βρίσκονται πάνω στον κατακόρυφο άξονα Oz.

Η αναζήτηση σημείων εκτός του άξονα Oz, με τρισδιάστατη λεπτομερή σάρωση του χώρου και εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων (πχ. Newton-Raphson για τρεις μεταβλητές), δεν απέδωσαν αποτελέσματα. Συνεπώς περιοριζόμαστε στην δεύτερη υπόθεση για την ύπαρξη σημείων πάνω στο κατακόρυφο άξονα Oz. Για το σκοπό αυτό δίνουμε τη σχέση (3.4) υπό μορφή συνάρτησης:

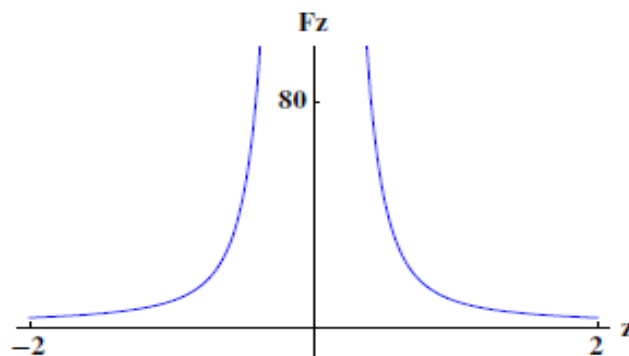
$$F_z = \frac{\beta}{r_0^3} + \frac{2e\beta}{r_0^4} + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} \quad (3.5)$$

Για να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν σημεία ισορροπίας στον άξονα των z εξετάζουμε αν υπάρχουν ρίζες της εξίσωσης $F_z = 0$ για $x = y = 0$. Αν υπάρχουν, τότε

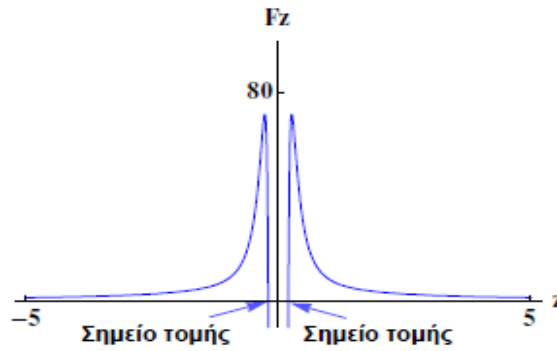
αυτές θα είναι και οι θέσεις των σημείων ισορροπίας στον άξονα Oz. Στο Σχήμα 3.2α δίνεται η γραφική παράσταση της $F_z(z; x=0, y=0, e, \beta)$ για $\nu=7, \beta=5$ και $e=0$, που αντιστοιχεί στη βαρυτική περίπτωση. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν σημεία τομής της F_z με τον άξονα Oz (ρίζες), αποτέλεσμα αναμενόμενο, αφού δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας πάνω σε αυτόν τον άξονα όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Παρόμοια είναι και η περίπτωση για $e>0$.

Ακολουθώντας δίνουμε στο Σχήμα 3.2β, τη γραφική απεικόνιση της F_z συναρτήσεως του z για $e<0$ και συγκεκριμένα για $\nu=7, \beta=5$ και $e = -0.1$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο σημεία τομής της F_z με τον άξονα Oz, άρα και δύο ρίζες της F_z . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας πάνω στον άξονα των z . Επειδή η συνάρτηση U είναι άρτια ως προς την μεταβλητή z , $U(x,y,z) = U(x,y,-z)$, αυτά τα δύο σημεία θα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση F_z επιλύεται αριθμητικά με την απλή μέθοδο Newton-Raphson για μια μεταβλητή, οπότε προσδιορίζονται οι συντεταγμένες των δύο σημείων.



(α)



(β)

Σχήμα 3.2. (α) Διάγραμμα $z-F_z$ για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=0$

(β) Διάγραμμα $z-F_z$ για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e= -0.1$

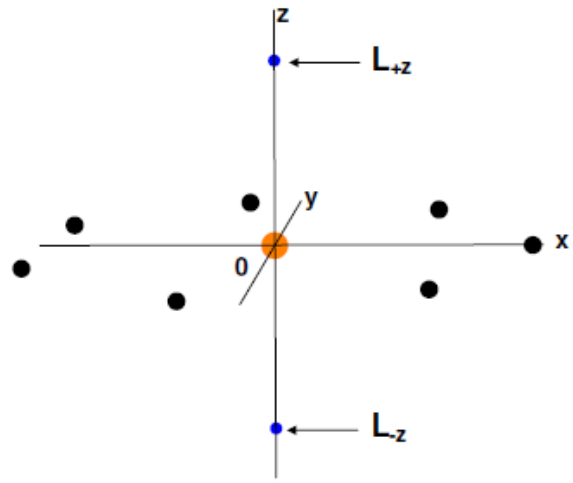
Τα σημεία αυτά, τα οποία στο εξής θα τα αναφέρουμε ως "εκτός επιπέδου" σημεία ισορροπίας, συγκροτούν ένα ζεύγος συμμετρικών θέσεων ως προς το επίπεδο xy των primaries και συμβολίζονται με L_{+z} και L_{-z} για τον θετικό και αρνητικό ημιάξονα των z αντίστοιχα (Σχήμα 3.3α). Λόγω της συμμετρίας του σχηματισμού ως προς τον άξονα z , οι Ιακωβιανές σταθερές $C_{L_{+z}}$ και $C_{L_{-z}}$ των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} αντίστοιχα, είναι ίσες και για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιούμε τον κοινό συμβολισμό C_{L_z} . Η παραπάνω διαπίστωση γίνεται αντιληπτή και από την αριθμητική επίλυση του αλγεβρικού συστήματος 3.1 (για $x=y=0$), τα αποτελέσματα της οποίας παραθέτονται στον Πίνακα A.3 του Παραρτήματος A. Προφανώς και οι αποστάσεις, των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} από το κεντρικό σώμα είναι ίσες.

Κάτι παρόμοιο έχει παρατηρηθεί και στην περίπτωση του δακτυλιοειδούς προβλήματος με κεντρικό σώμα το οποίο αποτελεί πολύ ισχυρή πηγή ακτινοβολίας, δηλαδή έχει συντελεστή ακτινοβολίας $b_0 > 1$ (στην περίπτωση αυτή η πίεση της ακτινοβολίας ξεπερνά τη βαρυτική δύναμη) (Kalvouridis & Hadjifotinou, 2011a,b). Επειδή αυτές οι θέσεις ισορροπίας, επηρεάζουν τη διαμόρφωση των περιοχών της επιτρεπτής τρισδιάστατης κίνησης, θα τις συναντήσουμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 6^ο), καθώς και στο κεφάλαιο που πραγματεύεται τις ελκτικές περιοχές (Κεφάλαιο 7^ο).

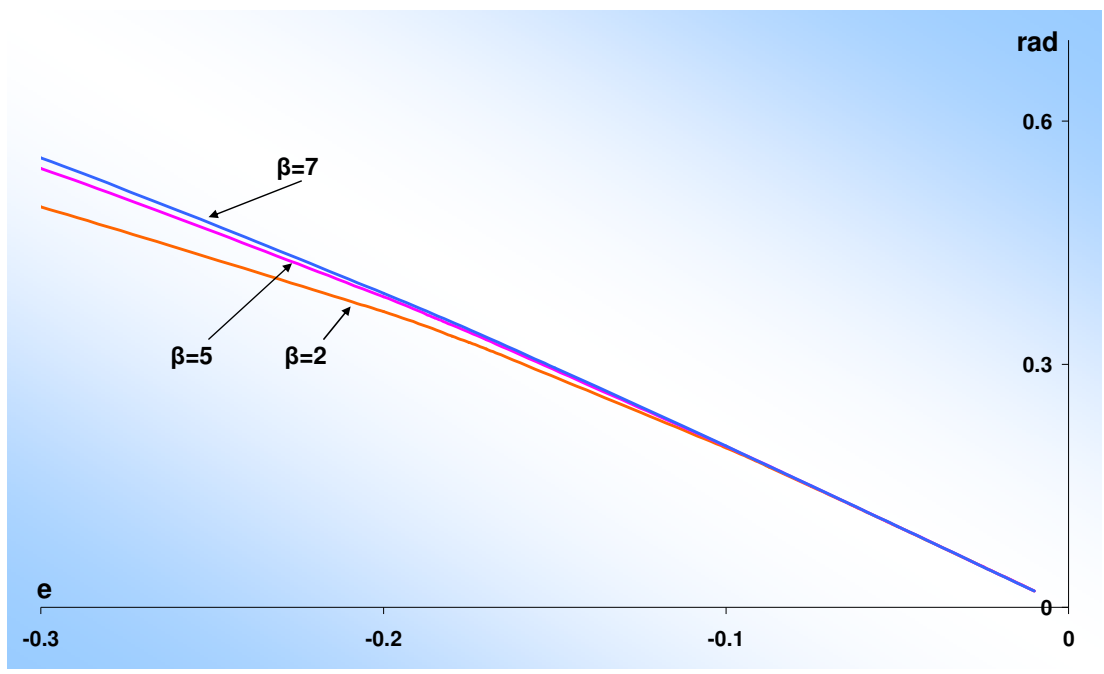
Προς το παρόν θα περιορισθούμε στο να δείξουμε σε διαγράμματα, τη μεταβολή της απόστασής τους (rad) από το πρωτεύον σώμα, καθώς και της Ιακωβιανής τους σταθεράς C_{Lz} , με την παράμετρο e για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β (Σχήματα 3.3 β-γ), αλλά και με την παράμετρο β για διάφορες τιμές της παραμέτρου e (Σχήματα 3.3 δ-ε). Στον Πίνακα A.3 του Παραρτήματος A δίνουμε ενδεικτικά τις τιμές των θέσεων, της Ιακωβιανής σταθεράς και της ευστάθειας των σημείων αυτών για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e .

Στο διάγραμμα e -rad (Σχήμα 3.3β) παρατηρούμε ότι για σταθερό αριθμό περιφερειακών σωμάτων και για σταθερή την παράμετρο μάζας β , όσο το e αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή, τόσο αυξάνονται και οι αποστάσεις των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} από το κεντρικό σώμα. Επίσης για σταθερό αριθμό περιφερειακών σωμάτων αλλά και για την ίδια τιμή της e , όσο μεγαλώνει η παράμετρος β , τόσο πάλι αυξάνεται η απόσταση των L_{+z} και L_{-z} από το κεντρικό σώμα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι σε μία περιοχή αρκετά μικρών απόλυτων τιμών του e , οι καμπύλες σχεδόν συμπίπτουν και εξελίσσονται με σχεδόν γραμμικό τρόπο.

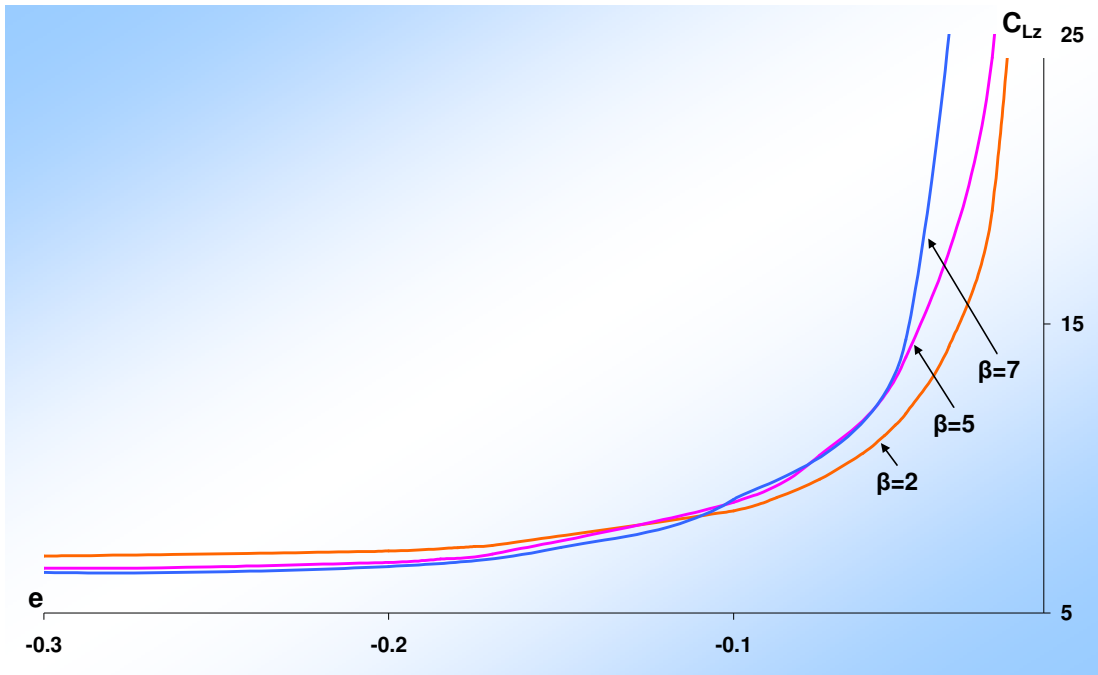
Στο διάγραμμα e - C_{Lz} (Σχήμα 3.3γ) παρατηρούμε τη μείωση των τιμών της Ιακωβιανής σταθεράς που αντιστοιχούν στα $L_{\pm z}$, καθώς αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e και διατηρείται σταθερό το ν . Όπως φαίνεται στο ίδιο διάγραμμα, οι καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί για διάφορες τιμές του β , παρουσιάζουν σχεδόν σταθερή τιμή της C_{Lz} για μεγάλες σχετικά απόλυτες τιμές του e ($|e| > 0.2$).



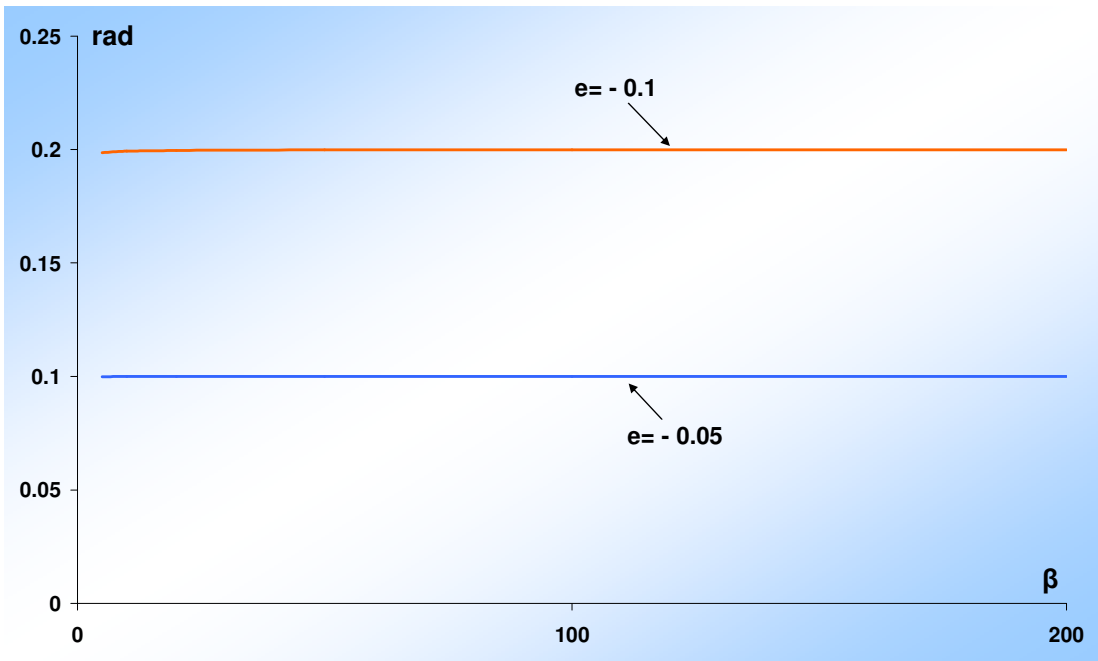
(α)



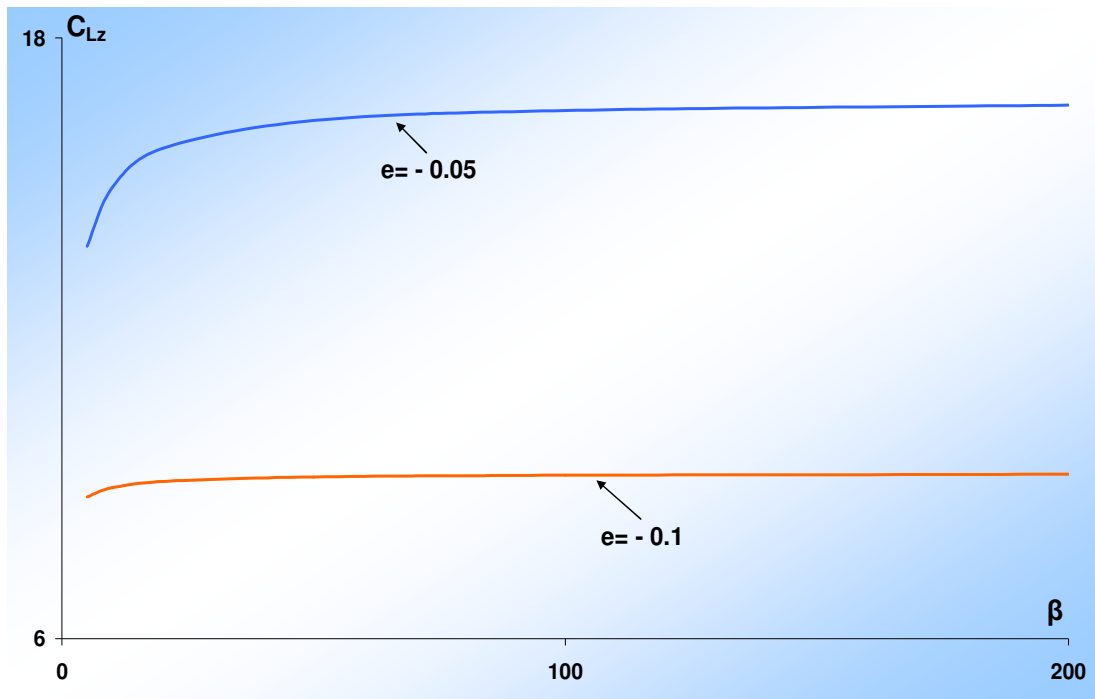
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

- Σχήμα 3.3.** (α) "Εκτός επιπέδου" θέσεις ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} ,
 (β) Διάγραμμα e-rad για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β και $\nu=7$,
 (γ) Διάγραμμα e- C_{Lz} για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β και $\nu=7$,
 (δ) Διάγραμμα β -rad για διάφορες τιμές της παραμέτρου e και $\nu=7$,
 (ε) Διάγραμμα β - C_{Lz} για διάφορες τιμές της παραμέτρου e και $\nu=7$

Για σταθερό αριθμό περιφερειακών σωμάτων και για σταθερή την παράμετρο e , στο διάγραμμα β -rad (Σχήμα 3.3 δ) παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το β οι αποστάσεις των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} από το κεντρικό σώμα αυξάνονται κι αυτές αλλά κατά πολύ λίγο. Παρατηρούμε δε, ότι για σχετικά μεγάλες τιμές της β οι αποστάσεις συσσωρεύονται σε μία οριακή τιμή η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\text{rad} \approx 2|e|$. Επίσης για σταθερό αριθμό περιφερειακών σωμάτων αλλά και για την ίδια τιμή της β , όσο μεγαλώνει κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e , τόσο αυξάνεται η απόσταση των L_{+z} και L_{-z} από το κεντρικό σώμα.

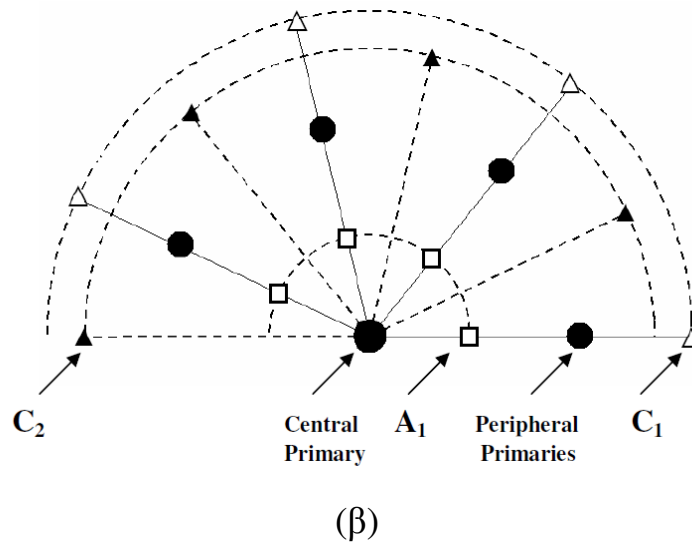
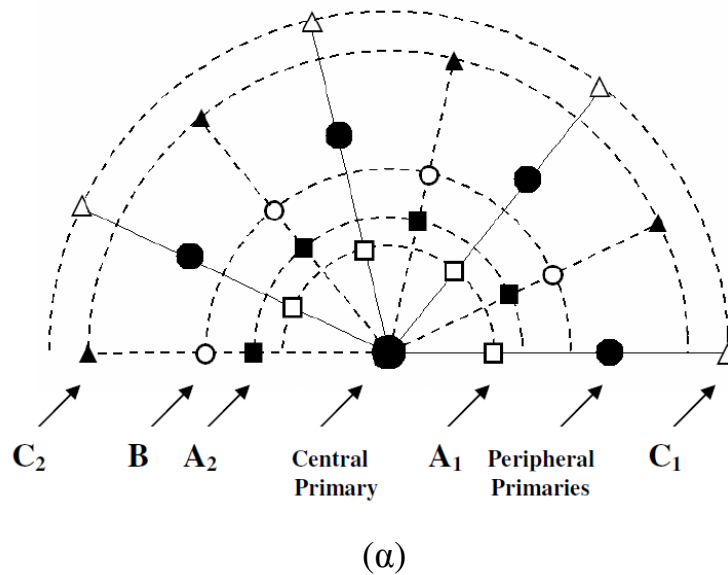
Στο διάγραμμα β - C_{Lz} (Σχήμα 3.3ε) παρατηρούμε την αύξηση των τιμών της Ιακωβιανής σταθεράς που αντιστοιχούν στα $L_{\pm z}$, καθώς αυξάνεται η παράμετρος μάζας β και διατηρείται σταθερό το ν . Και σε αυτή την περίπτωση για σχετικά

μεγάλες τιμές της β οι καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί τείνουν σε μία οριακή τιμή της σταθεράς C_{Lz} . Τέλος, για σταθερό αριθμό περιφερειακών σωμάτων αλλά και για την ίδια τιμή της β , όσο μεγαλώνει κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e , τόσο μειώνονται οι τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C_{Lz} που αντιστοιχούν στα "εκτός επιπέδου" σημεία ισορροπίας $L_{\pm z}$.

3.4 Ζώνες ισορροπίας

Όπως ήδη αναφέρθηκε, κατά τη μελέτη του προβλήματος των $N+1$ σωμάτων με Νευτώνεια δυναμικά (βαρυτική περίπτωση), οι θέσεις ισορροπίας αποδείχθηκε ότι κείνται σε ομόκεντρους κύκλους, με κοινό κέντρο, το κέντρο του σχηματισμού (Kalvouridis, 1999a; Croustalloudi & Kalvouridis, 2003).

Οι θέσεις αυτές συγκροτούν ομάδες κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από n (=πλήθος των περιφερειακών σωμάτων) δυναμικά ισοδύναμες θέσεις οι οποίες ισαπέχουν μεταξύ τους αλλά και από το κεντρικό πρωτεύον σώμα και συνεπώς μπορούν να θεωρηθούν ότι βρίσκονται πάνω σε μια ιδεατή περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή O , που ονομάζεται ζώνη ισορροπίας. Υπάρχουν, τόσες ζώνες ισορροπίας όσες και οι ομάδες των ισοδύναμων θέσεων ισορροπίας. Η μεταβολή της παραμέτρου μάζας β , επηρεάζει τόσο τις θέσεις όσο και το πλήθος των ζωνών ισορροπίας. Στη βαρυτική περίπτωση οι ζώνες αυτές είναι είτε πέντε, είτε τρεις και συμβολίζονται, με τη σειρά εμφάνισής τους από το κέντρο προς την περιφέρεια, ως (A_1, A_2, B, C_2, C_1) ή (A_1, C_2, C_1) αντίστοιχα (Σχήμα 3.4). Η αλλαγή από πέντε σε τρεις πραγματοποιείται για κάθε n σε μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου μάζας β , που συμβολίζεται με l_n και ονομάζεται κρίσιμη ή οριακή τιμή (critical value) (Croustalloudi & Kalvouridis, 2003, 2007a) (Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.4. Βαρυτική περίπτωση. (α) $\beta < l_v$, πέντε ζώνες ισορροπίας, (β) $\beta > l_v$, τρεις ζώνες ισορροπίας

Στον Πίνακα 3.2 που ακολουθεί, δίνουμε τις προσεγγιστικές τιμές της κρίσιμης τιμής l_v του β για διάφορα n (configurations). Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή αυξάνει καθώς αυξάνει το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων. Οι διακριτές αυτές τιμές φαίνονται στο διάγραμμα του Σχήματος 3.5 και η περιβάλλουσά τους (στική καμπύλη) προσεγγίζεται αρκετά ικανοποιητικά από ένα πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού της μορφής (Fakis *et al.*, 2013):

$$l_v(n) = 0.0000418632n^4 + 0.018856n^3 - 0.0648675n^2 - 0.104225n + 0.40547$$

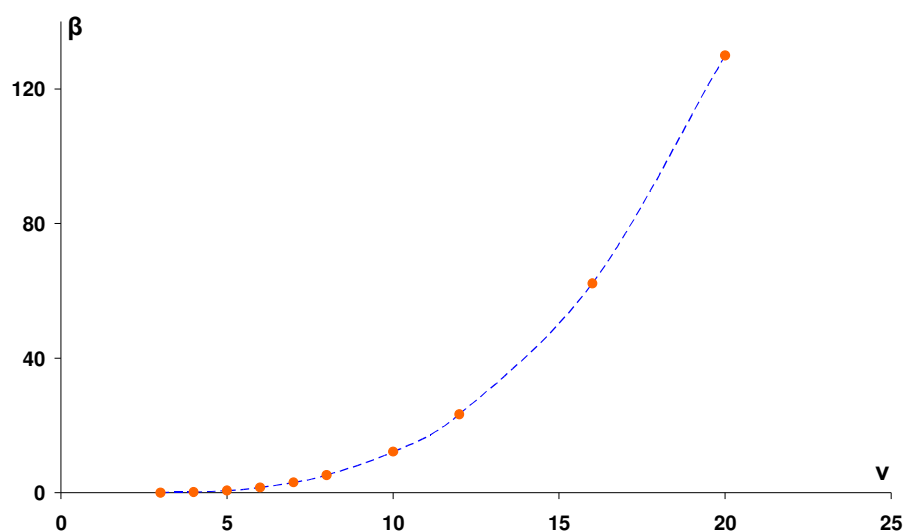
όπου $n=2, 3, 4, \dots$

Κατά συνέπεια δίνοντας στην παραπάνω σχέση την τιμή του ν θα πάρουμε την κρίσιμη τιμή l_ν της παραμέτρου μάζας όπου συμβαίνει μετάβαση από τις πέντε στις τρεις ζώνες ισορροπίας.

Πίνακας 3.2. Προσεγγιστικές τιμές της κρίσιμης τιμής l_ν για διάφορα ν

(Croustalloudi & Kalvouridis, 2003, 2007a)

Πλήθος περιφερειακών σωμάτων ν	l_ν
3	0.014
4	0.184
5	0.6496
6	1.547
7	3.08
8	5.24
10	12.16
12	23.26
16	62.11
20	129.92



Σχήμα 3.5. Η "περιβάλλουσα" καμπύλη των διακριτών κρίσιμων τιμών της παραμέτρου μάζας

Για να υπάρχει συμφωνία με την ορολογία του περιορισμένου προβλήματος των 3 σωμάτων, αλλά και για να γίνεται ορθότερη η ταυτοποίησή τους, τα σημεία ισορροπίας συχνά αναφέρονται με ειδικότερες ονομασίες όπως περιγράφουμε στη συνέχεια:

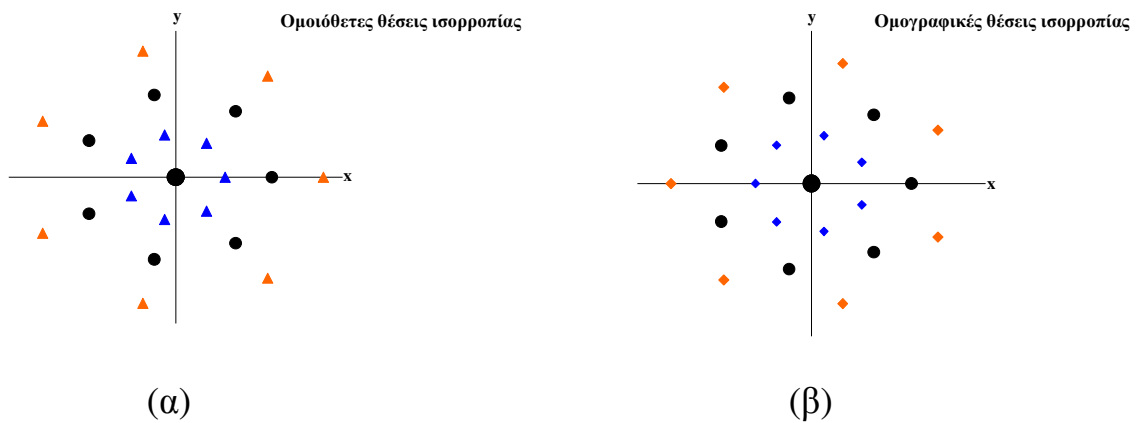
- Τα σημεία της ζώνης A_1 που βρίσκονται πάνω στις ακτίνες που συνδέουν το κεντρικό με τα περιφερειακά, ονομάζονται **εσωτερικά συγγραμμικά** σημεία ισορροπίας (inner collinear equilibrium points).
- Τα σημεία της ζώνης C_1 που βρίσκονται πάνω στις προεκτάσεις των ακτίνων που προαναφέρθηκαν, ονομάζονται **εξωτερικά συγγραμμικά** σημεία (outer collinear equilibrium points).
- Τα σημεία των ζωνών A_2 και B που βρίσκονται μέσα στις τριγωνικές περιοχές που σχηματίζονται από το κεντρικό σώμα και δύο διαδοχικά περιφερειακά, ονομάζονται **εσωτερικά τριγωνικά** σημεία ισορροπίας (inner triangular equilibrium points).
- Τα σημεία ισορροπίας της ζώνης C_2 που βρίσκονται στις προεκτάσεις των προηγούμενων τριγωνικών περιοχών, ονομάζονται **εξωτερικά τριγωνικά** σημεία ισορροπίας (outer triangular equilibrium points).

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1: Δύο ή περισσότερες θέσεις ισορροπίας ονομάζονται **δυναμικά ισοδύναμες**, αν χαρακτηρίζονται από την ίδια σταθερά C και την ίδια κατάσταση ευστάθειας (ευσταθής ή ασταθής). Στην περίπτωση αυτή όλες οι δυναμικά ισοδύναμες θέσεις ισορροπίας συγκροτούν μία «ομάδα» με κοινά χαρακτηριστικά.

Ορισμός 2: Ονομάζουμε **ομοιόθετες** εκείνες τις θέσεις ισορροπίας που σχηματίζουν όμοιο σχηματισμό με αυτόν των πρωτευόντων σωμάτων και στον ίδιο προσανατολισμό με αυτόν (Σχήμα 3.6α).

Ορισμός 3: Ονομάζουμε **ομογραφικές** εκείνες τις θέσεις ισορροπίας που σχηματίζουν όμοιο σχηματισμό με αυτόν των πρωτευόντων σωμάτων, αλλά ο σχηματισμός αυτός βρίσκεται σε διαφορετικό προσανατολισμό ως προς αυτόν των σωμάτων (εστραμμένος κατά μία γωνία, που στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι π/ν) (Σχήμα 3.6β).



Σχήμα 3.6. (α) Ομοιόθετες θέσεις ισορροπίας, (β) Ομογραφικές θέσεις ισορροπίας. Οι μεγάλες μαύρες κουκίδες δείχνουν τις θέσεις των primaries

Σε αυτό το κεφάλαιο αναζητούνται οι θέσεις ισορροπίας και μελετάται η παραμετρική μεταβολή τους με την αλλαγή τόσο της παραμέτρου β , όσο και του συντελεστή e του δυναμικού Manev του κεντρικού σώματος. Η μεταβολή αυτή απεικονίζεται σε διάφορα διαγράμματα, καμπύλες και σχήματα.

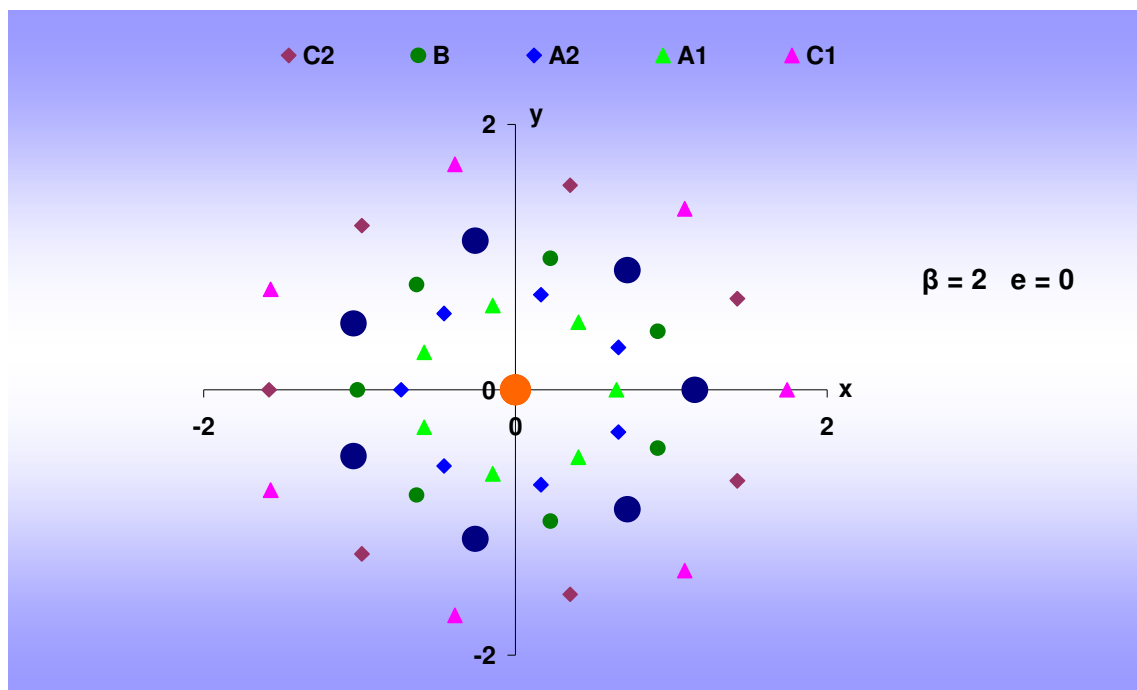
3.5 Επίδραση της παραμέτρου μάζας β και του συντελεστή e στη διαμόρφωση και εξέλιξη των ζωνών ισορροπίας (επίπεδες θέσεις ισορροπίας)

Γενικά, η επίδραση των παραμέτρων β και e στη διαμόρφωση των ζωνών ισορροπίας είναι εξαιρετικά σημαντική. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την επίδραση αυτή σε ένα σχηματισμό με επτά περιφερειακά σώματα ($n=7$) και για τρεις περιπτώσεις με $e=0$, $e>0$ και $e<0$.

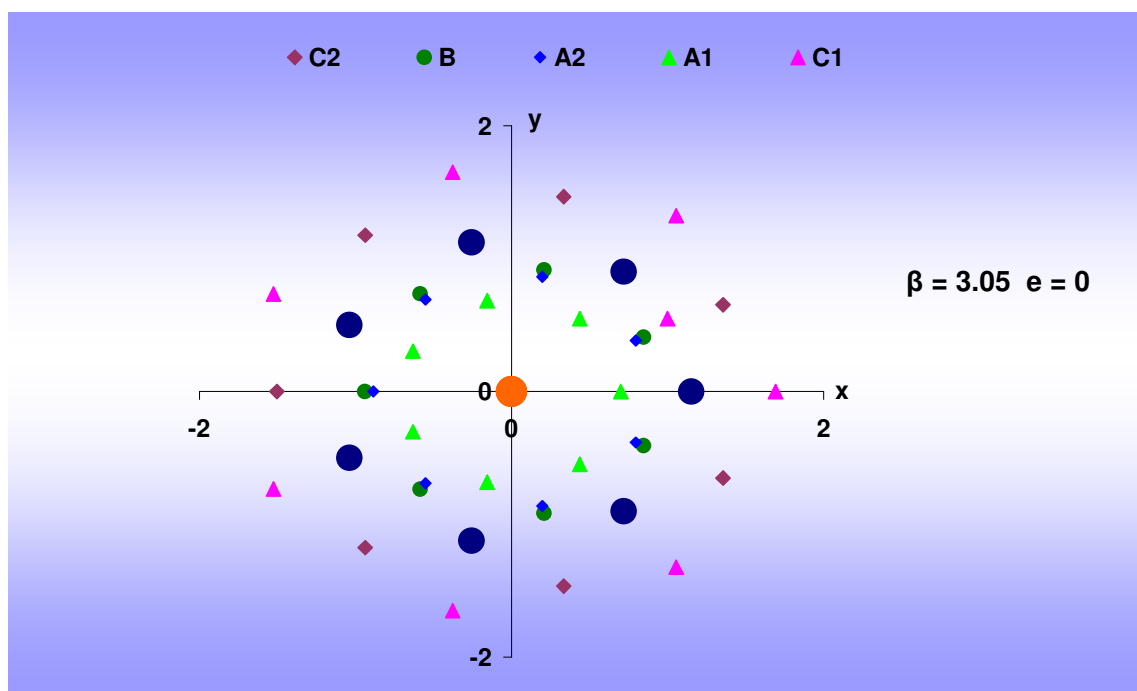
3.5.1 Περίπτωση με Νευτώνεια δυναμικά ($e=0$)

Η τιμή της παραμέτρου μάζας β στη βαρυτική περίπτωση (Νευτώνεια δυναμικά), όχι μόνο καθορίζει το πλήθος των υπάρχουσών ζωνών (μέσω της κρίσιμης τιμής l_n η οποία για $n=7$ ισούται με $l_n=3.08$), αλλά βρίσκεται και σε άμεση σχέση με τις σχετικές αποστάσεις των ζωνών μεταξύ τους. Όσον αυξάνει η τιμή της β , οι ζώνες ισορροπίας πλησιάζουν μεταξύ τους (Σχήμα 3.7) από διαφορετικές κατευθύνσεις προσεγγίζοντας τον φανταστικό κύκλο των primaries. Όσον αφορά στις ενεργειακές τους τιμές C_k , όσο μεγαλώνει το β , οι τιμές τους και οι απόλυτες διαφορές τους

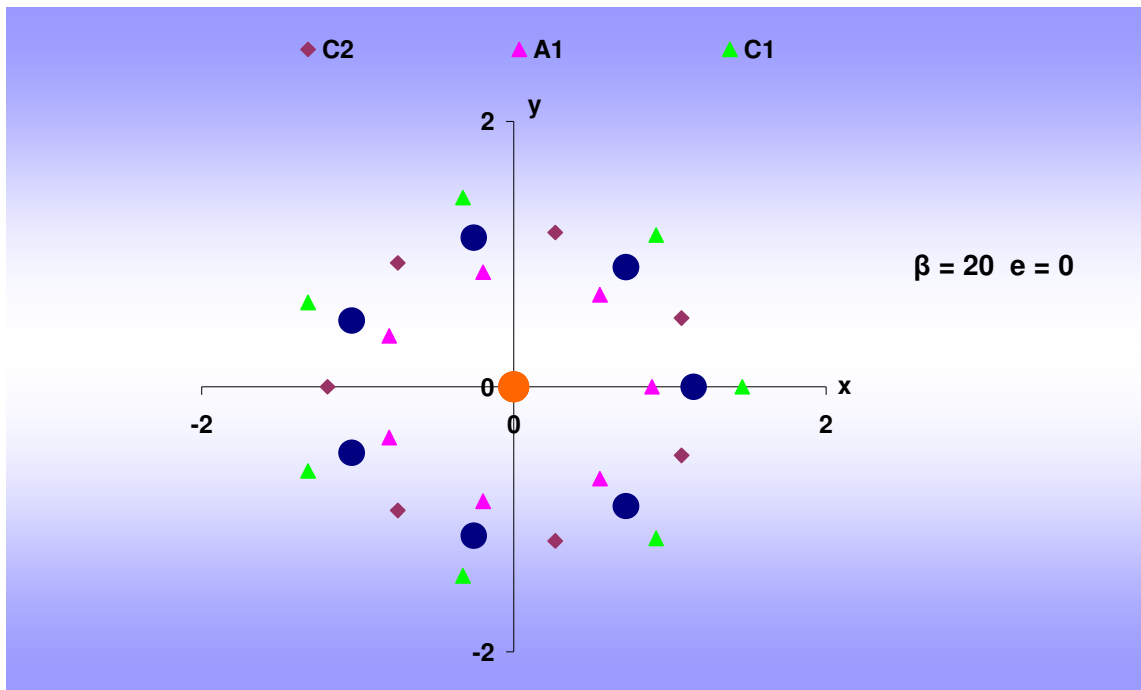
μικραίνουν (Kalvouridis, 1999a). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να «επισπεύδονται» οι τοπολογικές αλλαγές, αφού τα C_k διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους και συνεπώς συμβαίνουν σε στενότερες περιοχές τιμών της C . Την επίδραση αυτή αντικατοπτρίζει ο Πίνακας 3.3, που ακολουθεί.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 3.7. Κατανομή των θέσεων ισορροπίας στη βαρυτική περίπτωση (Νευτώνεια δυναμικά) ($e=0$): (α) $\beta=2$, (β) $\beta=3.05$, (γ) $\beta= 20$

Πίνακας 3.3. Μεταβολή της διαφοράς των ακτινικών αποστάσεων και των ενεργειακών σταθερών C των δύο ακραίων ζωνών A_1 και C_1 με την παράμετρο μάζας β για την περίπτωση Νευτώνειων δυναμικών

β	$\text{rad}(C_1) - \text{rad}(A_1)$	$ C_{A_1} - C_{C_1} $
2	0.894173285	0.16866342
5	0.872714113	0.16941420
10	0.715164574	0.11993417
20	0.577443902	0.07241709
50	0.430082748	0.03263753
100	0.342665437	0.01699928
500	0.201082325	0.00351345

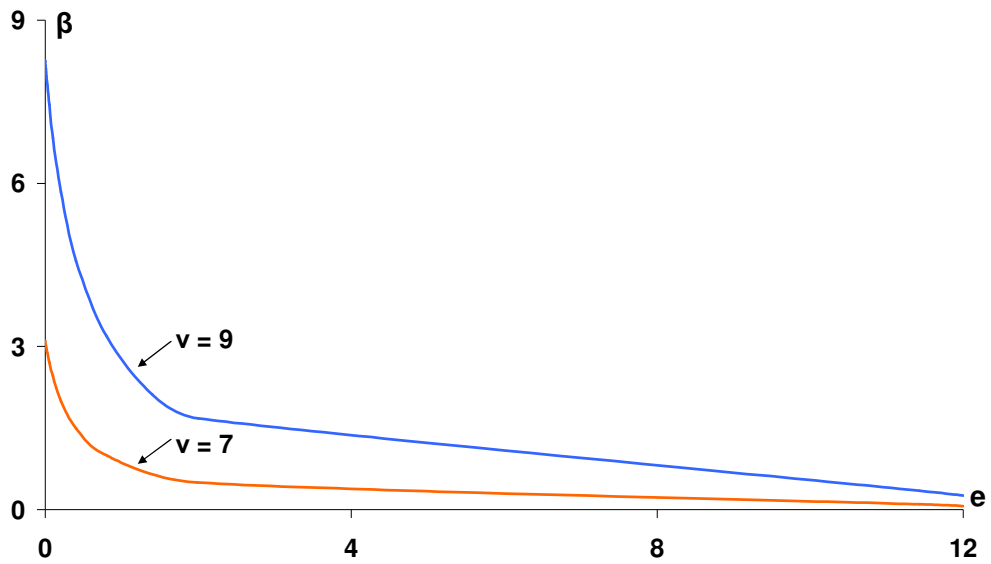
3.5.2 Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e > 0$

Στην περίπτωση αυτή, όπως και στη βαρυτική περίπτωση, οι εμφανιζόμενες ζώνες ισορροπίας βρίσκονται όλες στο επίπεδο xy της κίνησης των primaries και είναι είτε πέντε είτε τρεις με κατανομή εντελώς ανάλογη με αυτήν που εμφανίζεται στη βαρυτική περίπτωση (Σχήμα 3.4). Εξετάσαμε την παραμετρική μεταβολή των ζωνών ισορροπίας:

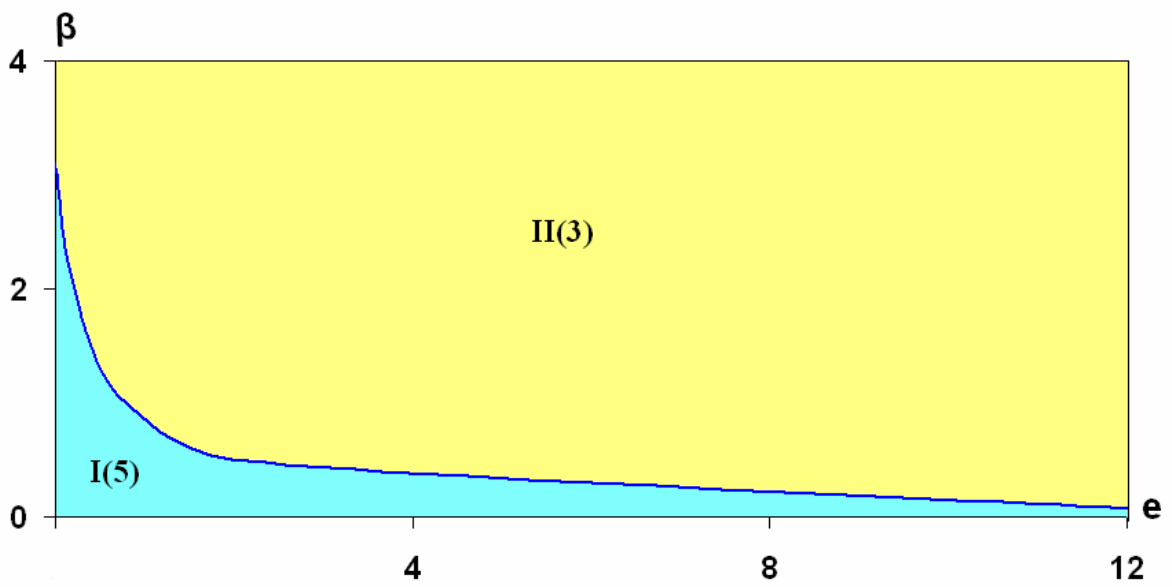
- (i) Διατηρώντας την τιμή της ανηγμένης μάζας β σταθερή και μεταβάλλοντας την παράμετρο e ,
- (ii) Διατηρώντας την παράμετρο e σταθερή και μεταβάλλοντας την παράμετρο μάζας β .

Έτσι προέκυψαν ζεύγη τιμών β και e , ο γεωμετρικός τόπος των οποίων είναι μία οριακή καμπύλη που την ονομάζουμε καμπύλη διακλάδωσης (bifurcating curve), η οποία χωρίζει το επίπεδο $e\beta$ σε δύο περιοχές κάθε μία από τις οποίες χαρακτηρίζεται από διαφορετικό πλήθος και είδος θέσεων ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα, για τιμές (e, β) που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη αυτή υπάρχουν πέντε ζώνες ισορροπίας (A_1, A_2, B, C_2, C_1), ενώ για τιμές (e, β) που είναι πάνω από την καμπύλη αυτή, οι ζώνες ισορροπίας είναι μόνο τρεις (A_1, C_2, C_1). Στο Σχήμα 3.8α έχουμε σχεδιάσει τις καμπύλες διακλάδωσης για δύο διαφορετικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς με $n=7$ και $n=9$. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του συντελεστή e ($e < 1$) οι καμπύλες διακλάδωσης εμφανίζουν μία, κατά προσέγγιση, εκθετική εξέλιξη, ενώ για $e > 1$ τείνουν προς κάποια οριακή τιμή της β . Στο ίδιο Σχήμα 3.8α, παρατηρούμε ακόμη ότι όσο αυξάνει το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων η καμπύλη διακλάδωσης μετατίθεται προς το άνω μέρος του διαγράμματος, δηλαδή αυξάνουν οι κρίσιμες τιμές β για δεδομένη τιμή της e . Στο Σχήμα 3.8β, φαίνονται οι δύο περιοχές που ορίζει η καμπύλη διακλάδωσης στο επίπεδο $e\beta$ για την περίπτωση με $n=7$. Τέλος, στον Πίνακα 3.4 που ακολουθεί, παραθέτουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές ζευγών (e, β) των καμπύλων διακλάδωσης για $n=7$ και $n=9$.

Να σημειώσουμε ότι η επίδραση του όρου της «διαταραχής» με $e > 0$, σε σχέση με τη βαρυτική περίπτωση, είναι μικρή όταν το e είναι πολύ μικρό και αυξάνεται όσο αυξάνεται το e .



(α)



(β)

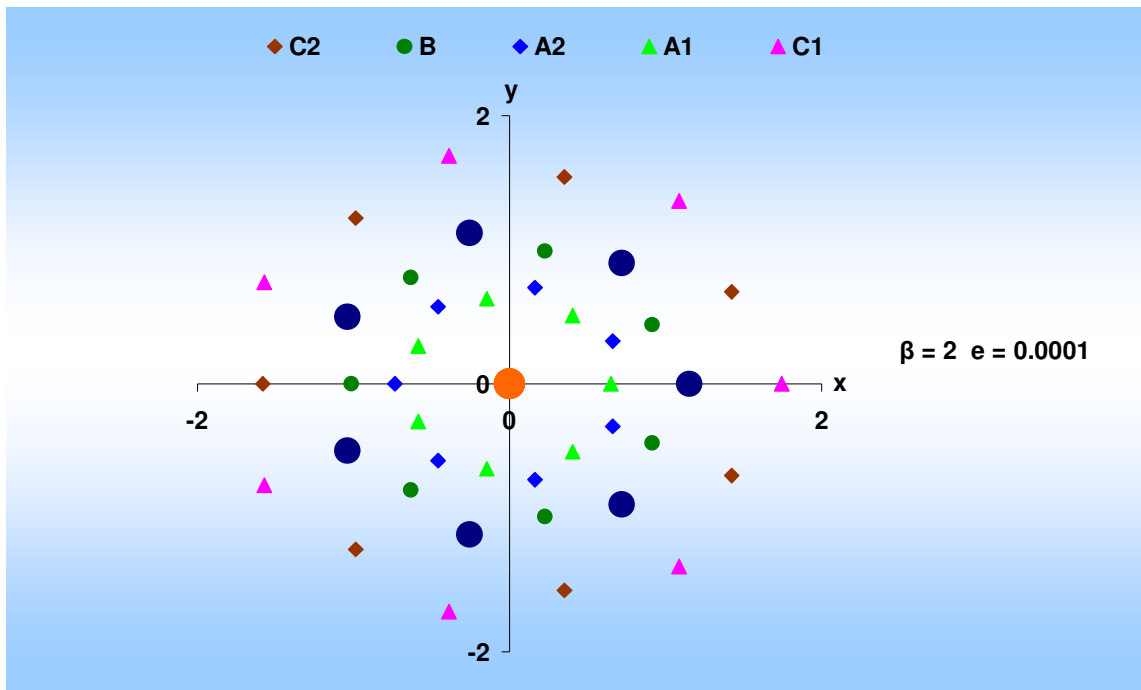
Σχήμα 3.8. (α) Καμπύλη διακλάδωσης (bifurcating curve) του πλήθους των ζωνών ισορροπίας στο επίπεδο της κίνησης για $\nu=7$ και $\nu=9$, $e>0$ και διάφορες τιμές της β ,
 (β) Οι δύο περιοχές του επιπέδου $e\beta$

Πίνακας 3.4. Ενδεικτικές τιμές (e, β) σημείων των καμπύλων διακλάδωσης για $v=7$ και $v=9$

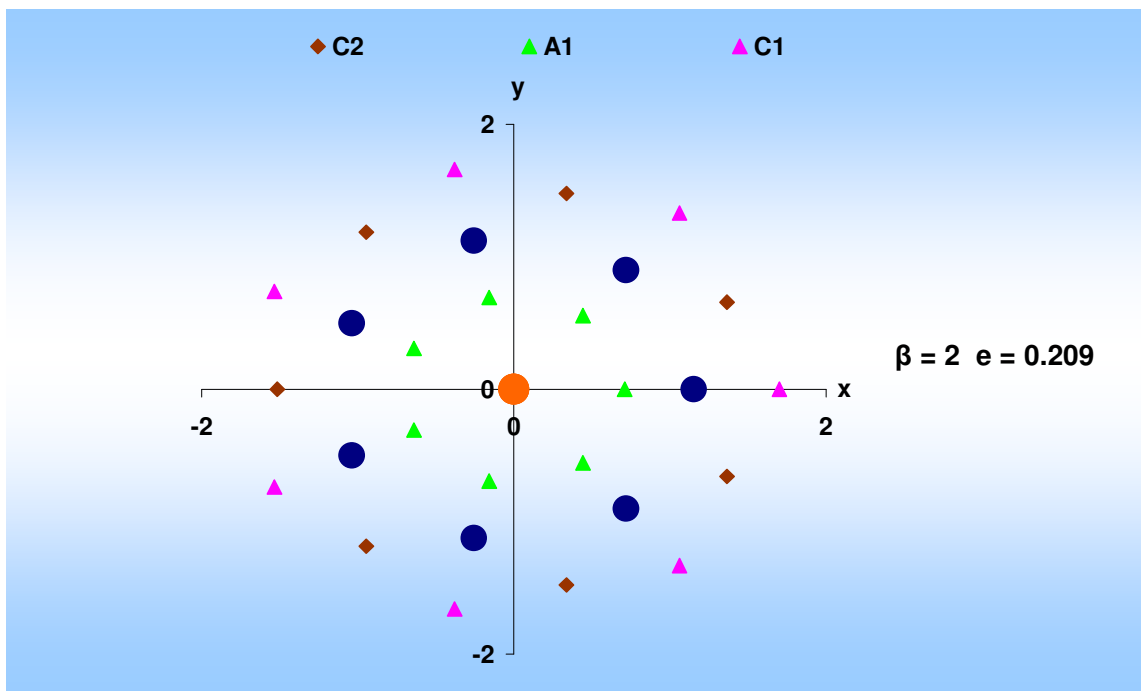
e	v = 7	v = 9
	β	β
0.0001	3.100	8.255
0.001	3.093	8.239
0.01	3.022	8.100
0.055	2.708	7.443
0.1	2.455	6.890
0.209	2.000	5.840
0.406	1.5	4.573
0.799	1	3.194
1.979	0.5	1.677
11.427	0.1	0.349
12	0.07	0.344

- **Εφαρμογή για $v=7, \beta=2$ και διάφορες θετικές τιμές του e**

Ενδεικτικά, στα Σχήματα $\psi_{\beta v} 3.9\alpha-3.9\beta$ απεικονίζονται οι κατανομές των θέσεων ισορροπίας για $v=7, \beta=2$ με $e=0.0001$ (περιοχή I του διαγράμματος διακλάδωσης του Σχήματος 3.8) και $e=0.209$ (περιοχή II). Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε προηγουμένως, στην πρώτη περίπτωση παρουσιάζονται πέντε ζώνες ισορροπίας (με τη σειρά εμφάνισής τους από το κέντρο προς την περιφέρεια: A_1, A_2, B, C_2, C_1) (Σχήμα 3.9α), ενώ στη δεύτερη μόνο τρεις (A_1, C_2, C_1) (Σχήμα 3.9β).



(α)

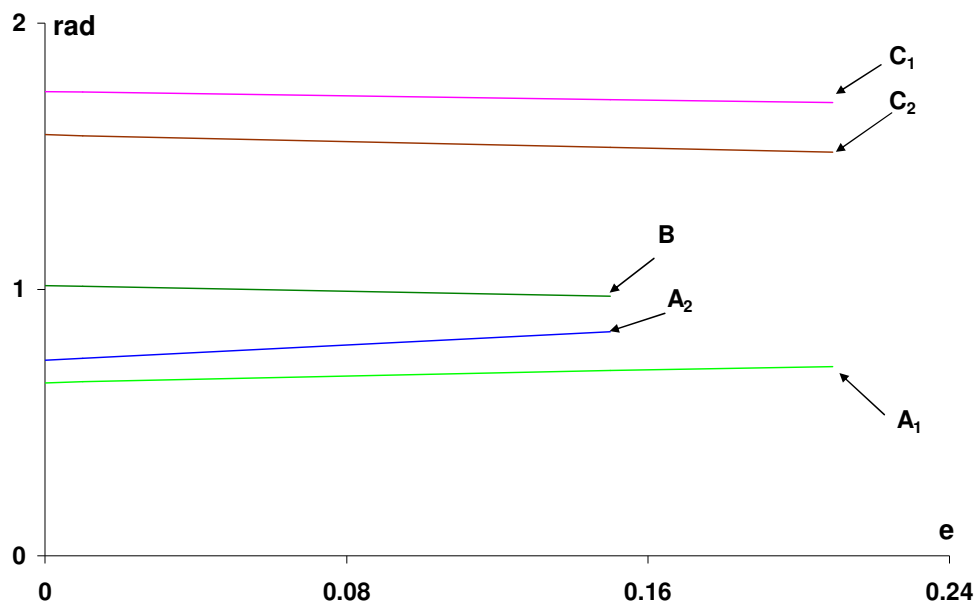


(β)

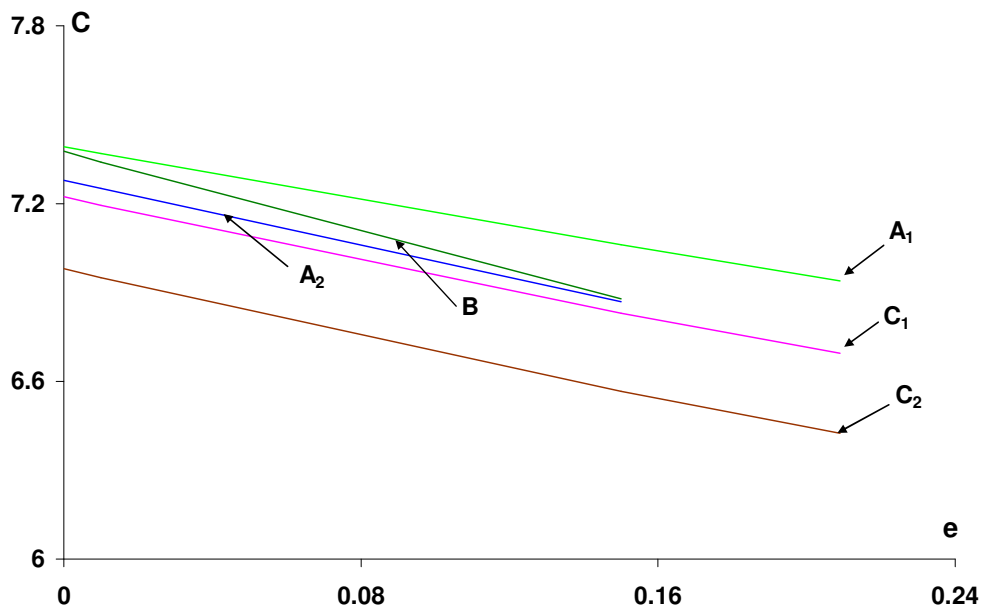
Σχήμα 3.9. Κατανομές των θέσεων ισορροπίας για $n=7$ και $\beta=2$
 (α) $e=0.0001$, (β) $e=0.209$

Στα επόμενα σχήματα 3.10α και β, παρουσιάζουμε τα διαγράμματα μεταβολής των αποστάσεων των ζωνών ισορροπίας (rad) από το κέντρο O του συστήματος (Σχήμα

3.10α) καθώς και των Ιακωβιανών σταθερών τους C με την τιμή της παραμέτρου e για $\beta=2$ (Σχήμα 3.10β).



(α)



(β)

Σχήμα 3.10. Μεταβολές των ζωνών ισορροπίας για $n=7$, $\beta=2$ και διάφορες θετικές τιμές της παραμέτρου e . (α) διάγραμμα e -rad, (β) διάγραμμα e -C

Από τα σχήματα αυτά σε συνδυασμό και με τα εκτιθέμενα αποτελέσματα στους Πίνακες Α.2.1 του παραρτήματος Α, προκύπτει ότι όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου e :

- η τιμή της Ιακωβιανής σταθεράς C ελαττώνεται ελαφρά,
- οι ακτίνες των ζωνών A_1 και C_2 αυξάνονται, ενώ αντίθετα η ακτίνα της ζώνης C_1 ελαττώνεται.

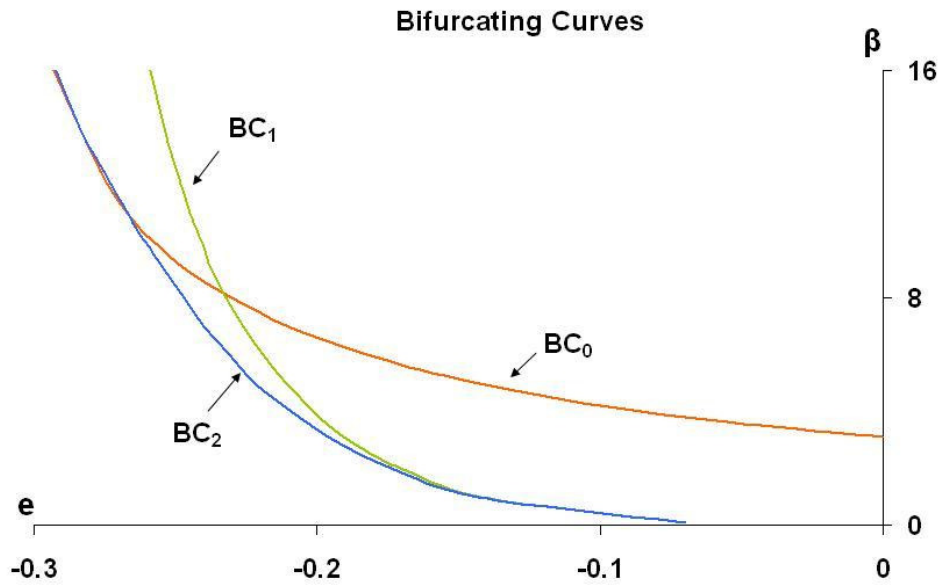
Παρόμοιες μεταβολές παρατηρήθηκαν για όλες τις τιμές της παραμέτρου β που μελετήσαμε.

3.5.3 Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e < 0$

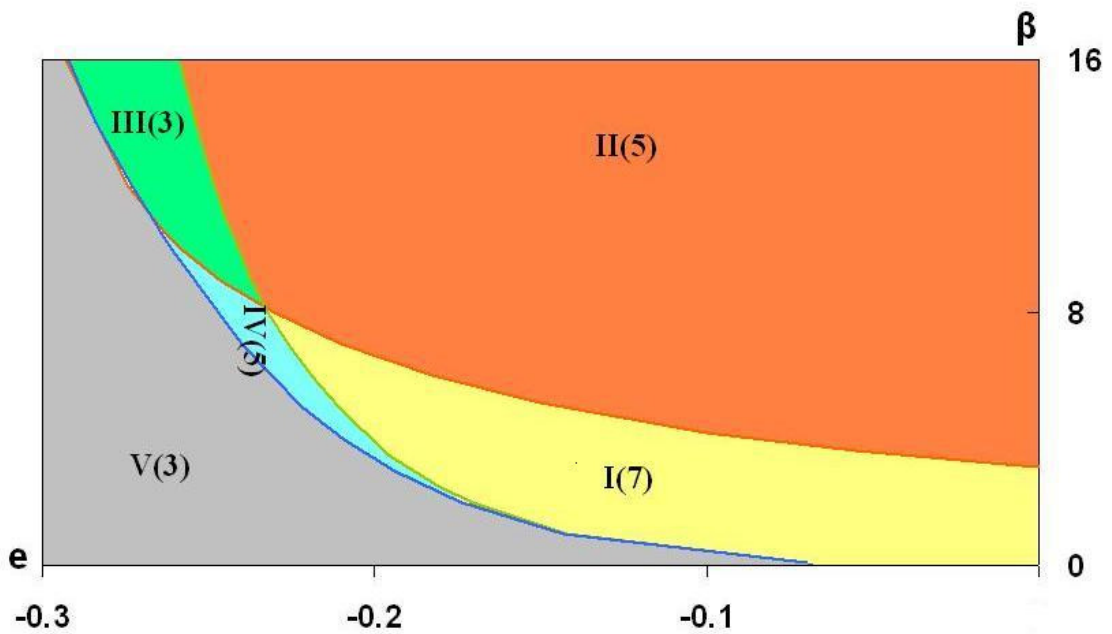
Όταν η παράμετρος e είναι αρνητική, λαμβάνουν χώρα σημαντικές αλλαγές στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, μεταξύ των οποίων και στις υπάρχουσες θέσεις ισορροπίας, στην κατανομή τους και στην παραμετρική μεταβολή τους. Οι δύο ουσιαστικές διαφορές από τις περιπτώσεις με $e \geq 0$, είναι:

- Η εμφάνιση δύο διακριτών ζωνών ισορροπίας E_1 και E_2 στο επίπεδο Oxy , την παραμετρική εξέλιξη των οποίων θα μελετήσουμε επισταμένως στη συνέχεια της μελέτης μας.
- Η εμφάνιση ενός ζεύγους σημείων ισορροπίας L_{+z} , L_{-z} εκτός του επιπέδου της κίνησης πάνω στον άξονα των z του συνοδικού συστήματος και σε συμμετρικές ως προς το επίπεδο αυτό, θέσεις, όπως ήδη έχουμε αναλύσει.

Παρακάτω θα εξετάσουμε την παραμετρική εξέλιξη των ζωνών ισορροπίας για $n=7$ και διάφορες τιμές της ανηγμένης μάζας β , ξεκινώντας από πολύ μικρές (κατά απόλυτη τιμή) τιμές του διαταρακτικού όρου e και φτάνοντας σε εκείνες τις περιοχές τιμών του e που παύουν να υπάρχουν οι δύο ζώνες ισορροπίας E_1 και E_2 . Για ένα κανονικό πολυγωνικό σχηματισμό 7 περιφερειακών σωμάτων ($n=7$), ερευνήσαμε την παραμετρική μεταβολή των ζωνών ισορροπίας για τα διαστήματα τιμών: $-0.3 < e < 0$ και $0 < \beta < 16$, ενώ στο Σχήμα 3.11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, όπου φαίνεται η εξέλιξη των καμπύλων διακλάδωσης.



(α)



(β)

Σχήμα 3.11. Καμπύλες διακλάδωσης (bifurcating curves) του πλήθους των ζωνών ισορροπίας στο επίπεδο της κίνησης για $n=7$, $e < 0$ και διάφορες τιμές της β . (α) οι τρεις καμπύλες BC_0 , BC_1 και BC_2 , (β) οι πέντε περιοχές του επιπέδου $e\beta$

Για $v=7$ και $e<0$, παρατηρούμε την ύπαρξη τριών καμπύλων διακλάδωσης (bifurcating curves), BC_0 , BC_1 και BC_2 . (Σχήμα 3.11α). Για μικρές (απόλυτα) τιμές της e και της παραμέτρου μάζας β , οι δύο καμπύλες BC_1 και BC_2 τείνουν να ταυτισθούν στο δεξιό κάτω άκρο του διαγράμματος, ενώ για μεγαλύτερες (απόλυτα) τιμές της e και της β , οι καμπύλες BC_0 και BC_2 τείνουν να ταυτισθούν. Η εξέλιξη των τριών αυτών καμπύλων δημιουργεί πέντε περιοχές στο επίπεδο $e\beta$, σε κάθε μία από τις οποίες το πλήθος και το είδος των ζωνών ισορροπίας είναι διαφορετικός (Σχήμα 3.11β). Βρήκαμε ότι ισχύουν οι εξής κανόνες:

- Στην περιοχή αριστερά της BC_0 **εμφανίζονται** οι ζώνες B και A_2 .
- Στην περιοχή, αριστερά της BC_1 **εξαφανίζονται** οι ζώνες E_1 και A_1 .
- Τέλος στην περιοχή προς τα αριστερά της BC_2 **εξαφανίζονται** οι ζώνες A_2 και E_2 .

Δεδομένου ότι στην πορτοκαλί περιοχή του διαγράμματος (περιοχή II) εμφανίζονται οι πέντε ζώνες ισορροπίας, C_2 , E_2 , E_1 , A_1 και C_1 , αν εφαρμόσουμε τους παραπάνω κανόνες θα έχουμε ότι:

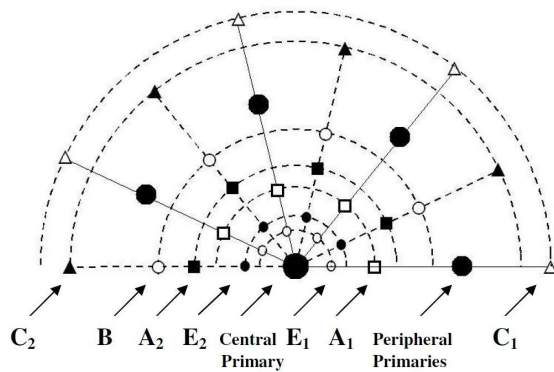
- Στην περιοχή I (κίτρινη περιοχή) που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων BC_0 και BC_1 θα υπάρχουν και οι επτά ζώνες και συγκεκριμένα οι **C_2 , B , A_2 , E_2 , E_1 , A_1 και C_1** .
- Στην περιοχή IV (γαλάζια περιοχή) που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων BC_0 , BC_1 και BC_2 , θα υπάρχουν πέντε ζώνες, οι **C_2 , B , A_2 , E_2 και C_1** .
- Στην περιοχή III (πράσινη περιοχή) που περικλείεται από τις καμπύλες BC_0 , BC_1 θα υπάρχουν τρεις ζώνες και συγκεκριμένα οι **C_2 , E_2 και C_1** .
- Τέλος στην περιοχή V (γκρίζα περιοχή) θα υπάρχουν μόνο τρεις ζώνες οι **C_2 , B και C_1** .

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα σύνορα των περιοχών όπου οι καμπύλες διακλάδωσης τείνουν να ταυτιστούν, η εμφάνιση και εξαφάνιση κάποιων ζωνών γίνεται σχεδόν ταυτόχρονα. Οι αλλαγές αυτές γίνονται εύκολα κατανοητές ακολουθώντας τους κανόνες εμφάνισης και εξαφάνισης ζωνών που αναφέραμε παραπάνω.

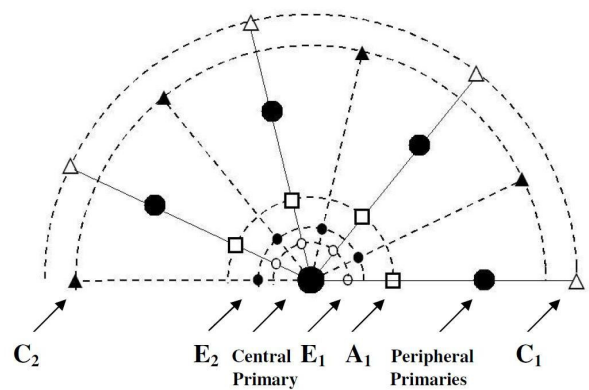
Από τη μελέτη της εξέλιξης του πλήθους και του είδους των ζωνών ισορροπίας, σε σχέση με τις τιμές των β και e , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: **για σταθερή**

τιμή της ανηγμένης μάζας β του δυναμικού συστήματος και μεταβάλλοντας την μεταβλητή e , τελικά απομένουν πάντα οι τρεις ζώνες ισορροπίας C_2 , B , και C_1 (γκρίζα περιοχή του Σχήματος 3.11).

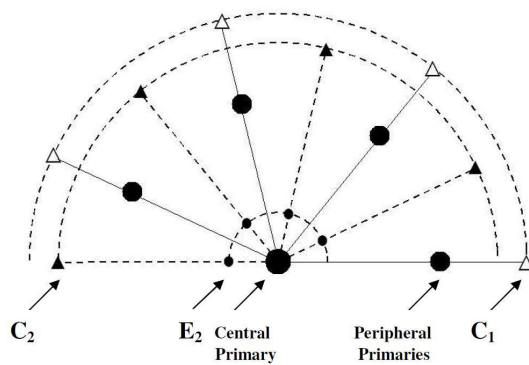
Στα σχήματα 3.12(α)-(ε) περιγράφουμε τις διάφορες περιπτώσεις ανάπτυξης των θέσεων ισορροπίας που αντιστοιχούν στις πέντε περιοχές (I-V) του διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11.



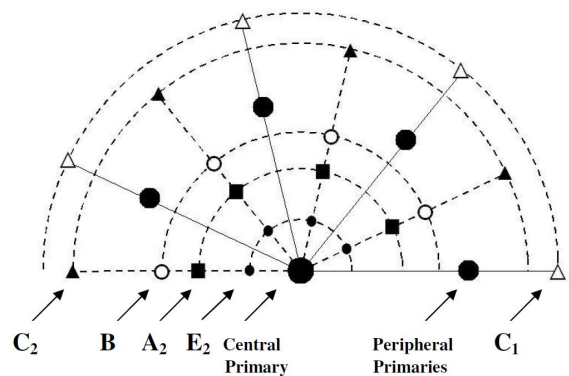
(α)



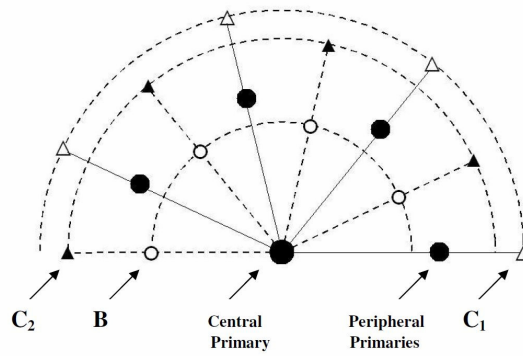
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Σχήμα 3.12. Ενδεικτική κατανομή των θέσεων ισορροπίας σε ζώνες στις πέντε σχηματιζόμενες περιοχές του διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11 (α) περιοχή I (επτά ζώνες ισορροπίας), (β) περιοχή II (πέντε ζώνες ισορροπίας), (γ) περιοχή III (τρεις ζώνες ισορροπίας), (δ) περιοχή IV (πέντε ζώνες ισορροπίας) και (ε) περιοχή V (τρεις ζώνες ισορροπίας). Οι μεγάλες μαύρες κουκίδες δείχνουν τις θέσεις των primaries, ενώ τα μικρά τρίγωνα-τετράγωνα, οι μικροί κύκλοι και οι μικρές μαύρες κουκίδες δείχνουν τις θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος

3.6 Εξέλιξη της κατανομής των θέσεων ισορροπίας στις ζώνες E_1 και E_2 - Παραμετρική μεταβολή τους

Για τις περιοχές τιμών (β , $e < 0$) που εμπίπτουν στις περιοχές I και II του διαγράμματος του Σχήματος 3.11, παρατηρείται στις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για την επίπεδη κίνηση, μία αναδίπλωση της κεντρικής «καμινάδας» προς το εσωτερικό της, με αποτέλεσμα την εμφάνιση δύο νέων διακριτών ζωνών ισορροπίας E_1 και E_2 , με θέσεις σαφώς προσδιορίσιμες.

Τα σημεία της ζώνης E_1 κείνται στις ευθείες που συνδέουν το κεντρικό πρωτεύον με ένα περιφερειακό μεγάλο σώμα και συνεπώς είναι ομοιόθετες θέσεις ισορροπίας σε σχέση με τις θέσεις των περιφερειακών σωμάτων του σχηματισμού, καθώς επίσης και με τις θέσεις ισορροπίας των ζωνών A_1 και C_1 . Τα σημεία της ζώνης E_2 κείνται στις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν δύο διαδοχικά περιφερειακά σώματα με το κεντρικό πρωτεύον και είναι ομογραφικές θέσεις ισορροπίας με το

σηματισμό των περιφερειακών σωμάτων, αλλά και ομοιόθετα με τα σημεία των ζωνών C_2 , B και A_2 . Με βάση τον σχετικό ορισμό που δώσαμε στη παράγραφο 3.4, τα σημεία ισορροπίας της ζώνης E_1 είναι εσωτερικά συγγραμμικά σημεία, ενώ αυτά της ζώνης E_2 , είναι εσωτερικά τριγωνικά σημεία.

Να σημειώσουμε το γεγονός ότι ενδέχεται το ζεύγος τιμών των παραμέτρων (β , $e < 0$) να οδηγήσει σε σημεία εντός των περιοχών III, IV ή V του διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11, οπότε στις περιοχές III και IV η μία από τις ζώνες αυτές και συγκεκριμένα η E_1 εξαφανίζεται και απομένει μόνο η E_2 , ενώ στη περιοχή V εξαφανίζονται και οι δύο.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των ζωνών ισορροπίας E_1 και E_2 διατηρώντας σταθερές τις δύο παραμέτρους του τριπαραμετρικού δυναμικού συστήματος που μελετούμε (ν , β , e), καθώς θα μεταβάλλεται η τρίτη παράμετρος, ενώ όλες οι παράμετροι θα αναφέρονται σε τέτοιες τιμές ώστε να βρίσκονται εντός των περιοχών του εκάστοτε διαγράμματος διακλαδώσεων, όπου συνυπάρχουν οι ζώνες E_1 και E_2 .

Να σημειώσουμε εδώ ότι από την αριθμητική επίλυση του αλγεβρικού συστήματος (3.1), προέκυψε για τις Ιακωβιανές σταθερές C_{E_1} και C_{E_2} των ζωνών E_1 και E_2 αντίστοιχα, ότι :

- για σχετικά μικρές απόλυτες τιμές της παραμέτρου e οι τιμές των C_{E_1} και C_{E_2} σχεδόν ταυτίζονται,
- όσο αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e , η ζώνη ισορροπίας E_1 αναπτύσσεται σε λίγο μεγαλύτερες τιμές της σταθεράς C , σε σχέση με τη ζώνη ισορροπίας E_2 . Δηλαδή ισχύει $C_{E_1} > C_{E_2}$. Είναι τόσο μικρή όμως η διαφορά τους που για λόγους απλούστευσης στη συνέχεια θα αναφερόμαστε

$$\text{στη μέση τιμή τους } C_E \left(C_E = \frac{C_{E_1} + C_{E_2}}{2} \right).$$

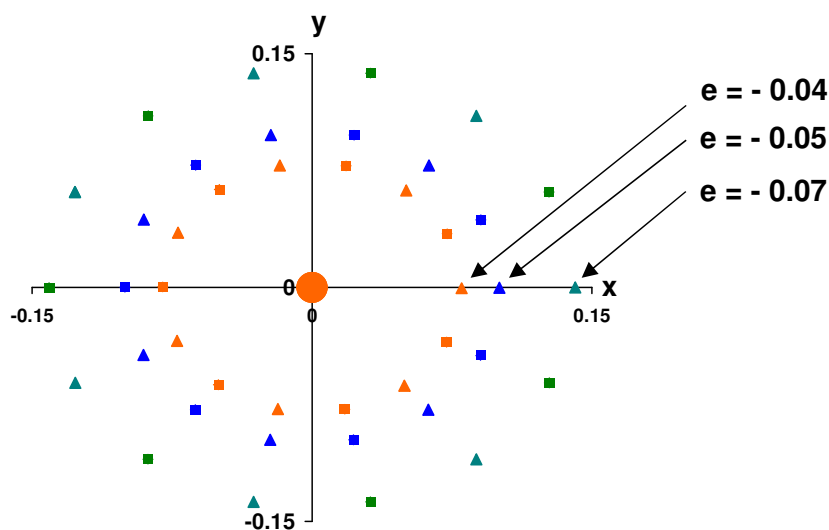
Οι τελευταίες παρατηρήσεις γίνονται αντιληπτές και από το Πίνακα A.2.2 του Παραρτήματος A, που παραθέτουμε στο τέλος της παρούσας έρευνας.

(i) Μεταβάλλοντας την παράμετρο e

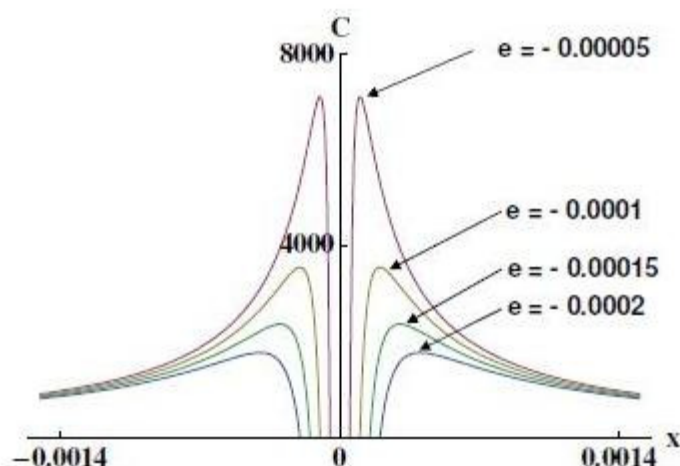
Στο Σχήμα 3.13α βλέπουμε την κατανομή των θέσεων ισορροπίας στο επίπεδο xy , των ζωνών E_1 και E_2 για $\nu=7$, $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e . Παρατηρούμε την αύξηση της μέσης απόστασης των σημείων ισορροπίας από το κεντρικό σώμα, καθώς αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή, η τιμή της παραμέτρου e .

Στο Σχήμα 3.13β παραθέτουμε το τμήμα του διαγράμματος $x-C$ κοντά στην περιοχή του κεντρικού σώματος P_0 , όπου διακρίνονται οι θέσεις των ζωνών E_1 και E_2 (ακρότατα της καμπύλων) για $\nu=7$, $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e . Όπως φαίνεται, όταν αυξάνεται η απόλυτη τιμή της παραμέτρου e , οι Ιακωβιανές σταθερές C_{E1} και C_{E2} των θέσεων ισορροπίας των δύο αντίστοιχων ζωνών ελαττώνονται, ενώ παρατηρούμε και εδώ την αισθητή απομάκρυνση των ακρότατων των καμπύλων από το κεντρικό σώμα.

$\nu = 7 \quad \beta = 2$



(α)

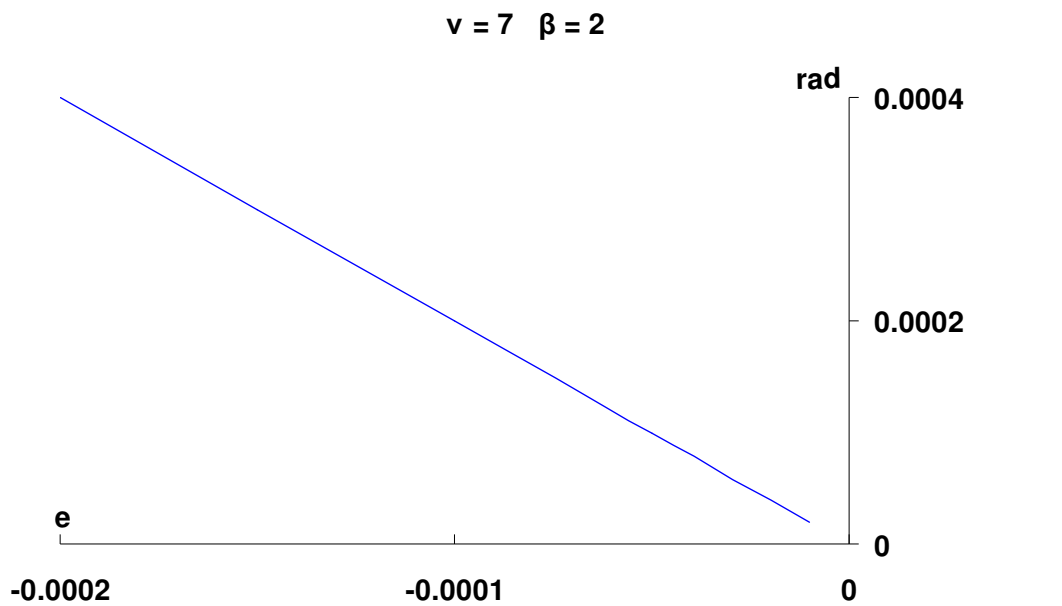


(β)

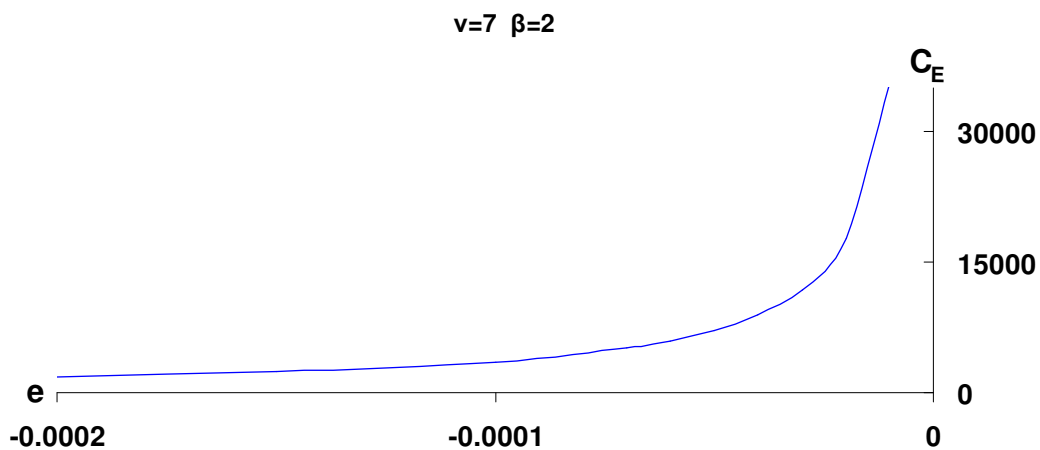
Σχήμα 3.13. (α) Κατανομή των θέσεων ισορροπίας των ζωνών E_1 (μικρά τρίγωνα) και E_2 (μικρά τετράγωνα) για $\nu=7$, $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e , (β) Διάγραμμα $x-C$ με τις θέσεις και τις σταθερές C των ζωνών E_1 και E_2 για $\nu=7$, $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e

Στο διάγραμμα του Σχήματος 3.14α που ακολουθεί, δείχνεται η μεταβολή της μέσης απόστασης (rad) από την αρχή O των ζωνών E_1 και E_2 (μέση ακτίνα των ζωνών) με την παράμετρο e για $\nu=7$, $\beta=2$. Η προκύπτουσα σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών e και rad είναι γραμμική, για μικρές δε απόλυτες τιμές του e , ο λόγος της μέσης απόστασης rad προς την απόλυτη τιμή της e ισούται με δύο.

Στο Σχήμα 3.14β απεικονίζεται η μεταβολή της μέσης τιμής της Ιακωβιανής σταθεράς των ζωνών E_1 και E_2 με την παράμετρο e για την περίπτωση όπου $\nu=7$, $\beta=2$. Παρατηρούμε την ελάττωση των τιμών της σταθεράς C καθώς αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή ο συντελεστής e .



(α)



(β)

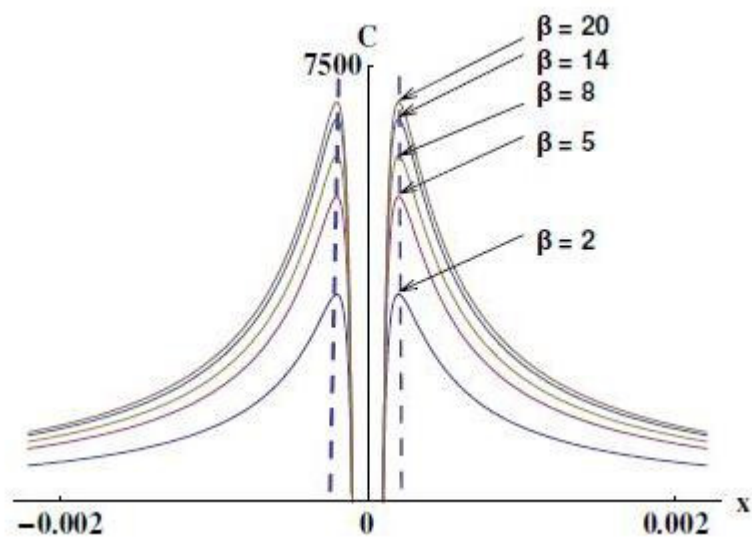
Σχήμα 3.14. (α) Μεταβολή της μέσης απόστασης (rad) από την αρχή O , των ζωνών E_1 και E_2 με την παράμετρο e για $\nu=7$ και $\beta=2$, (β) Μεταβολή της μέσης τιμής C_E των Ιακωβιανών σταθερών των ζωνών E_1 και E_2 με την παράμετρο e , για $\nu=7$ και $\beta=2$

(ii) Μεταβάλλοντας την παράμετρο β

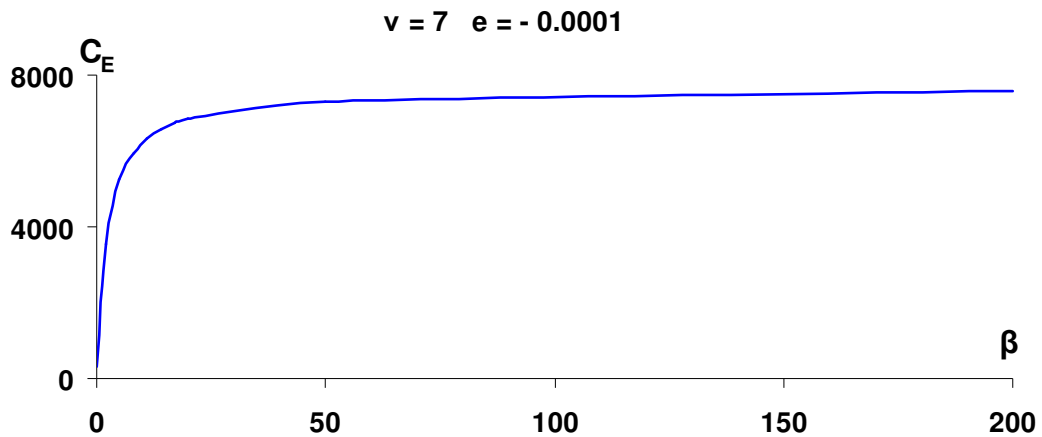
Στο Σχήμα 3.15α, παραθέτουμε το τμήμα του διαγράμματος $x-C$ κοντά στην περιοχή του κεντρικού σώματος P_0 όπου διακρίνονται πάλι οι θέσεις των ζωνών E_1

και E_2 για $\nu=7$, $e=-0.0001$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου β . Όπως φαίνεται, όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου β , οι Ιακωβιανές σταθερές C_{E_1} και C_{E_2} των θέσεων ισορροπίας των δύο αντίστοιχων ζωνών αυξάνονται και μάλιστα όσο μεγαλώνει η τιμή της β , οι ενεργειακές σταθερές C_{E_1} και C_{E_2} τείνουν να συσσωρευτούν σε μια μικρή περιοχή τιμών. Αξιοσημείωτο είναι και το γεγονός ότι για πολύ μικρές τιμές, κατά απόλυτη τιμή του διαταρακτικού όρου e (όπως στο διάγραμμα όπου $e=-0.0001$) και για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου β , οι ζώνες ισορροπίας E_1 και E_2 βρίσκονται πάνω σε μία φανταστική περιφέρεια μέσης ακτίνας $r \approx 2|e|$. Αυτό γίνεται ακόμα πιο κατανοητό στο ίδιο σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί και οι ευθείες $x = \pm 0.0002$, οι οποίες διέρχονται από τις θέσεις των σημείων ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 .

Στο Σχήμα 3.15β απεικονίζουμε τη μεταβολή της μέσης τιμής της Ιακωβιανής σταθεράς των ζωνών E_1 και E_2 με την παράμετρο μάζας β για την περίπτωση όπου $\nu=7$, $e=-0.0001$. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, η καμπύλη αυτή τείνει ασυμπτωτικά προς ένα άνω όριο της C , που στην προκειμένη περίπτωση είναι $C \approx 7650$. Προφανώς η τιμή αυτή διαφοροποιείται αν μεταβληθεί η τιμή είτε του e είτε του ν .



(α)



(β)

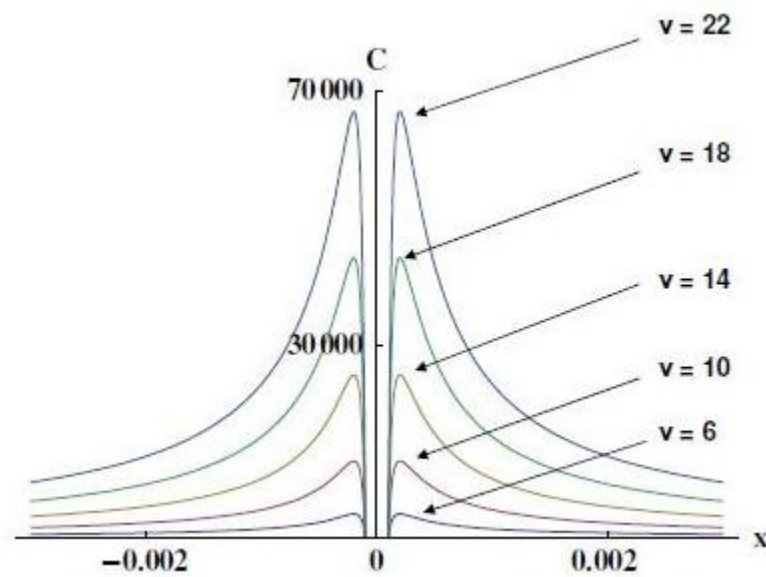
Σχήμα 3.15. (α) Διάγραμμα $x-C$ με τις θέσεις και τις σταθερές C των ζωνών E_1 και E_2 για $\nu=7$, $e = -0.0001$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β . Οι διακεκομμένες γραμμές είναι οι ευθείες $x = \pm 0.0002$, οι οποίες διέρχονται από τις θέσεις των ακρότατων των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας. (β) Μεταβολή της μέσης τιμής C_E των Ιακωβιανών σταθερών των ζωνών E_1 και E_2 με την παράμετρο β , για $\nu=7$ και $e=-0.0001$

(iii) Μεταβάλλοντας την παράμετρο ν

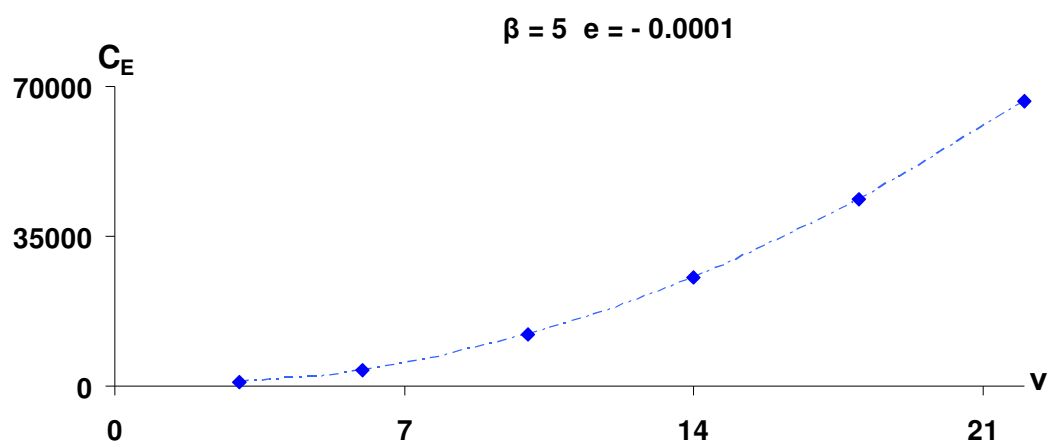
Στα διαγράμματα $x-C$ του σχήματος 3.16α μπορούμε να παρατηρήσουμε τις μεταβολές τόσο των θέσεων, όσο και των σταθερών C που αντιστοιχούν στις ζώνες ισορροπίας E_1 και E_2 , συναρτήσει του πλήθους ν των περιφερειακών σωμάτων, για $\beta=5$ και $e=-0.0001$.

Παρατηρούμε και σε αυτή την περίπτωση, ότι για πολύ μικρές τιμές κατά απόλυτη τιμή του διαταρακτικού όρου e (όπως στο διάγραμμα όπου $e = -0.0001$) και για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , οι ζώνες ισορροπίας E_1 και E_2 βρίσκονται κάθε φορά, πάνω σε μία φανταστική περιφέρεια μέσης ακτίνας $r \approx 2|e|$. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι γενικά για πολύ μικρές τιμές (κατά απόλυτη τιμή) του συντελεστή e και διάφορες τιμές των παραμέτρων ν και β , ισχύει μία γραμμική σχέση που συνδέει τη μέση απόσταση (rad) των ζωνών E_1 και E_2 με το e , ο λόγος των οποίων ισούται με δύο.

Στο Σχήμα 3.16β παρατηρούμε τη μεταβολή της μέσης τιμής της Ιακωβιανής σταθεράς των ζωνών E_1 και E_2 για $\beta=5$, $e=-0.0001$ σε διάφορους πολυγωνικούς σχηματισμούς (configurations), όπου προκύπτει ότι οι τιμές των C_{E_1} , C_{E_2} αυξάνουν όταν αυξάνει το πλήθος ν των περιφερειακών σωμάτων. Επειδή η μεταβλητή ν παίρνει μόνο διακριτές τιμές, ενώσαμε ενδεικτικά με στικτή καμπύλη την περιβάλλουσα των αντίστοιχων τιμών, ώστε να καταστεί πιο ευδιάκριτη η μεταβολή αυτή.



(α)



(β)

Σχήμα 3.16. (α) Διάγραμμα x - C με τις θέσεις και τις σταθερές C των ζωνών E_1 και

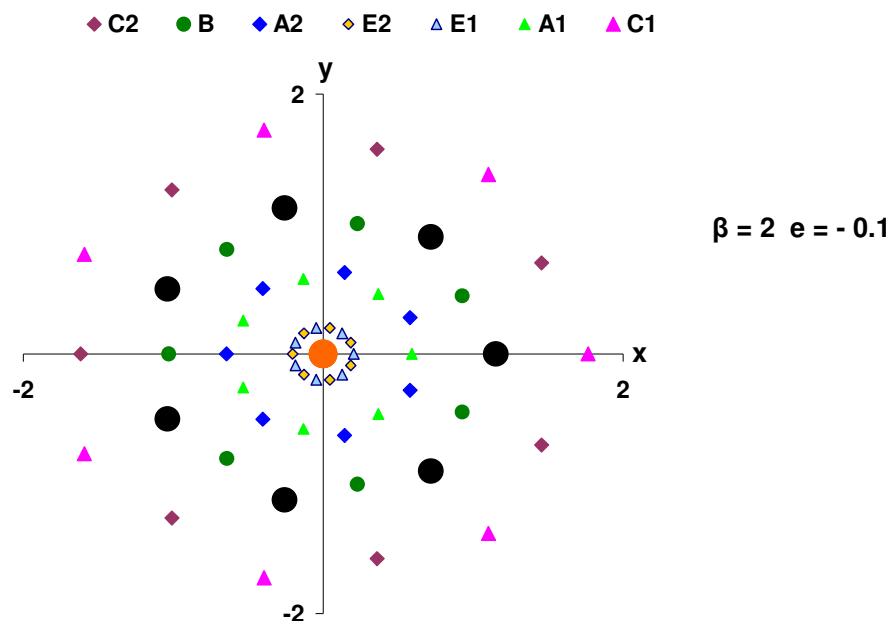
E_2 για $\beta=5$, $e=-0.0001$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , (β) Μεταβολή της μέσης τιμής C_E των Ιακωβιανών σταθερών των ζωνών E_1 και E_2 των E_1 και E_2 με την παράμετρο ν , για $\beta=5$ και $e=-0.0001$

• **Εφαρμογή για $\nu=7$, $\beta=2$ και $\beta=5$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e**

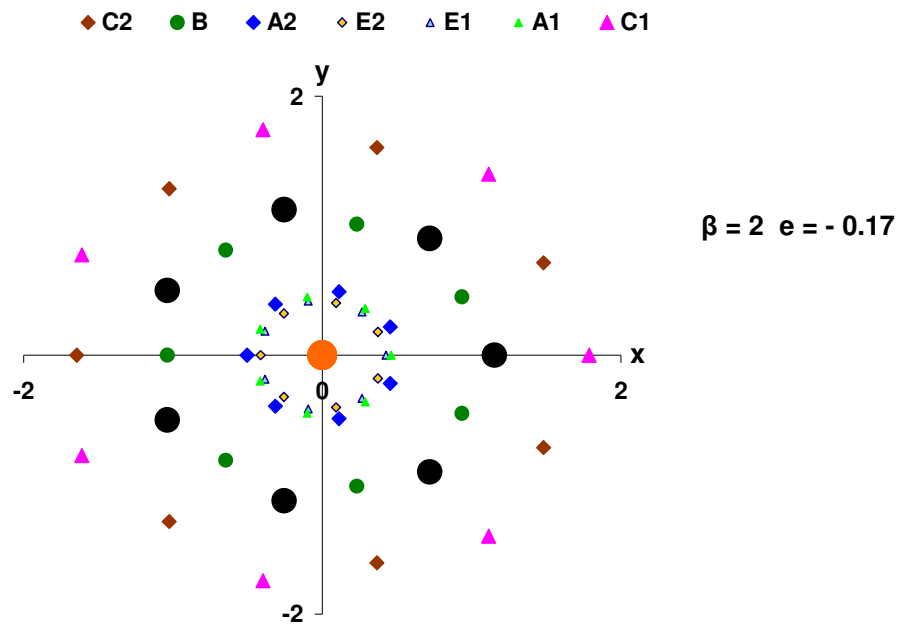
Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τα όσα αναφέραμε προηγουμένως σε δύο περιπτώσεις με: (i) $\beta=2$ και (ii) $\beta=5$, στις οποίες θα παρακολουθήσουμε την εξέλιξη των ζωνών ισορροπίας μεταβάλλοντας την τιμή της διαταρακτικής μεταβλητής e (<0).

(i) **Εφαρμογή με $\beta=2$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e**

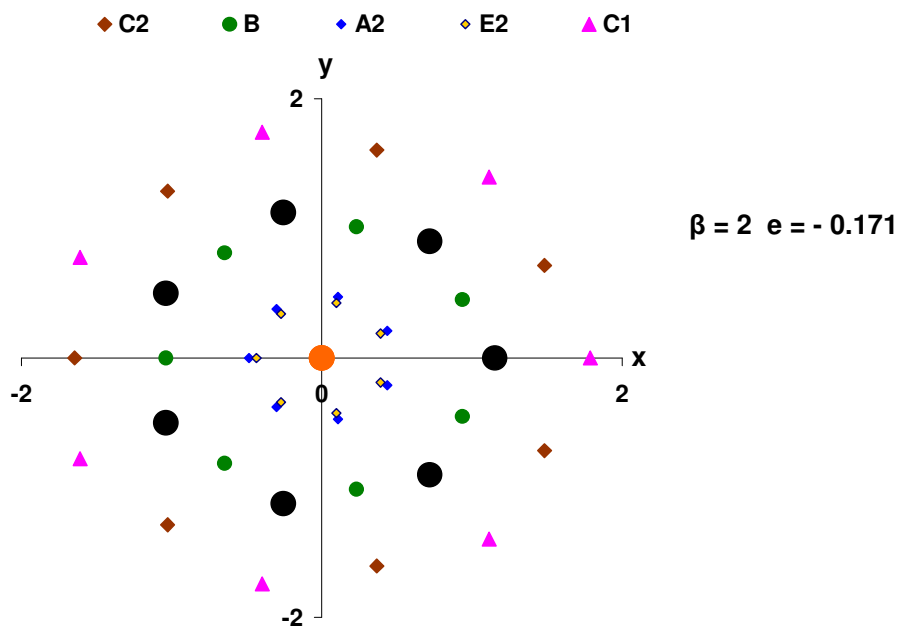
Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι θέσεις ισορροπίας στο επίπεδο xy για $\nu=7$, $\beta=2$ και για διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου e ($e=-0.1, -0.17, -0.171$ και -0.17375).



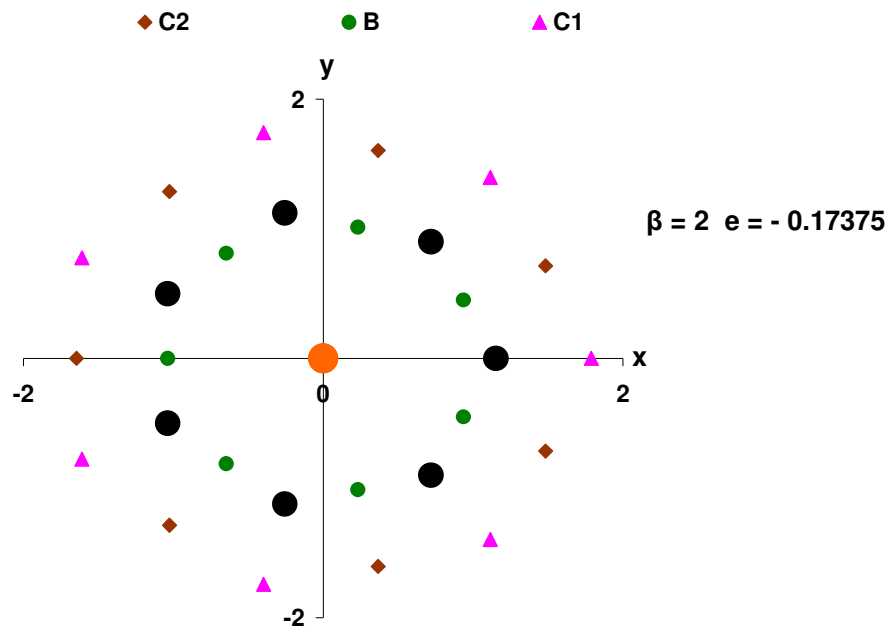
(α)



(β)



(γ)



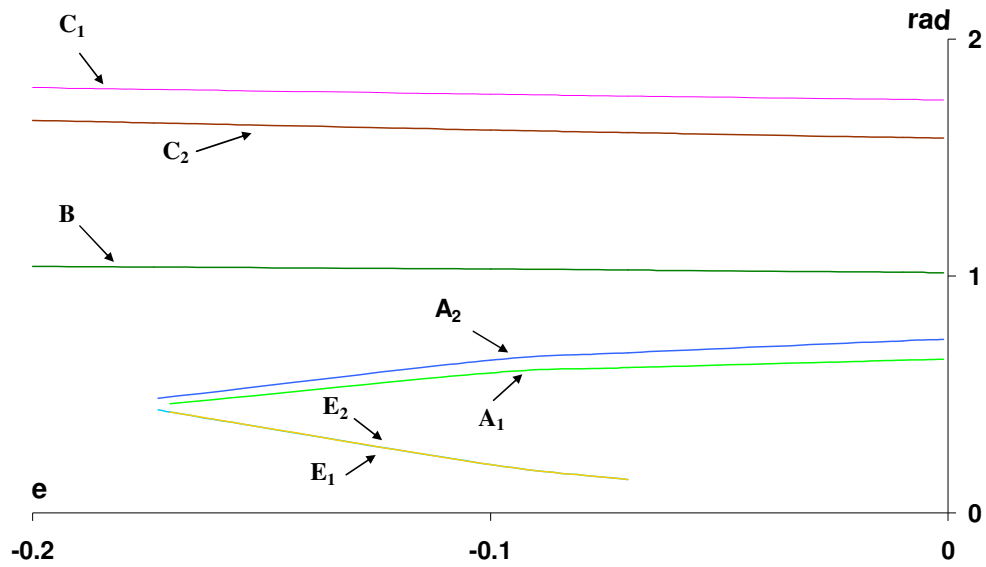
(δ)

Σχήμα 3.17. Κατανομές των θέσεων ισορροπίας για $\beta=2$: (α) $e=-0.1$,
(β) $e=-0.17$, (γ) $e=-0.171$, (δ) $e=-0.17375$

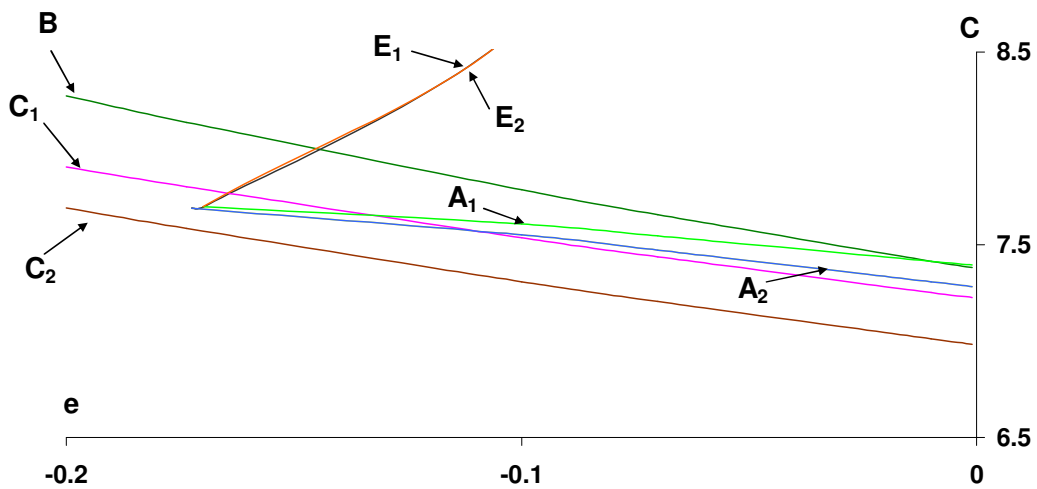
Παρατηρούμε ότι:

- Για $-0.171 < e < 0$ (περιοχή I του διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11) παρουσιάζονται επτά ζώνες ισορροπίας οι: $E_2, E_1, A_1, A_2, B, C_2, C_1$, πάντα με τη σειρά εμφάνισής τους από το κέντρο προς την περιφέρεια (Σχήμα 3.17α και β).
- Για $-0.17375 < e \leq -0.171$ (περιοχή IV) οι ζώνες E_1, A_1 εξαφανίζονται και συνεπώς απομένουν πέντε ζώνες ισορροπίας οι: E_2, A_2, B, C_2, C_1 (Σχήμα 3.17γ).
- Για $e \leq -0.17375$ (περιοχή V) εξαφανίζονται και οι ζώνες E_2, A_2 και απομένουν τελικά οι: B, C_2, C_1 (Σχήμα 3.17δ).

Οι μεταβολές των αποστάσεων (rad) των ζωνών ισορροπίας από το κέντρο O του συστήματος και των Ιακωβιανών σταθερών τους C με την τιμή της παραμέτρου e, φαίνονται στα Σχήματα 3.18α και 3.18β αντίστοιχα.



(α)



(β)

Σχήμα 3.18. Μεταβολές των ζωνών ισορροπίας για $n=7$, $\beta=2$ και διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου e . (α) διάγραμμα e -rad, (β) διάγραμμα e -C

Από τα σχήματα αυτά σε συνδυασμό και με τα εκτιθέμενα αποτελέσματα στους Πίνακες Α.2.2 του Παραρτήματος Α προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας 3.5 ο οποίος δείχνει τη μεταβολή των αποστάσεων (rad) των ζωνών ισορροπίας από το κέντρο O του συστήματος καθώς και των Ιακωβιανών σταθερών τους C , όταν ο συντελεστής

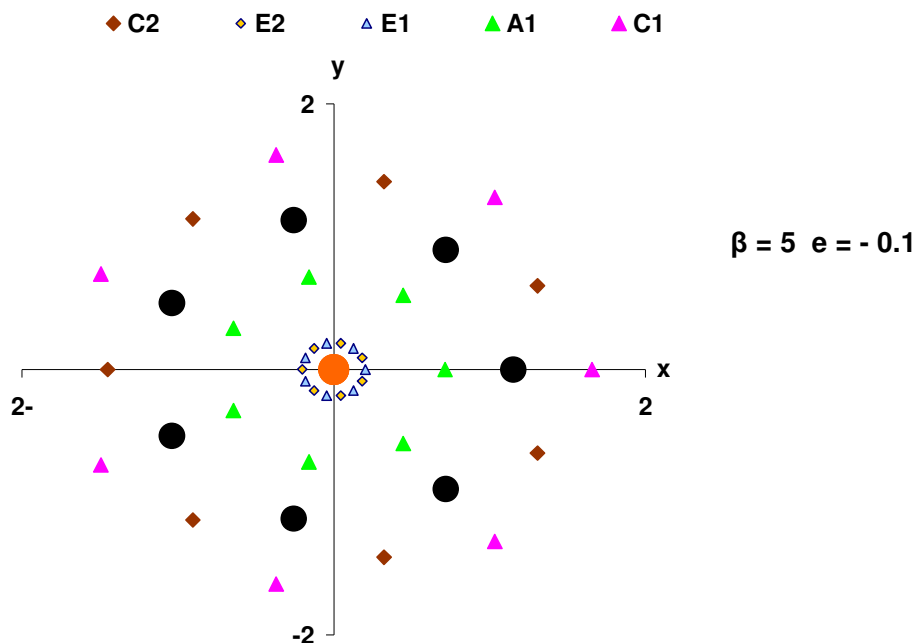
e μειώνεται. Το σύμβολο + (συν) αναφέρεται σε αύξηση και το σύμβολο - (πλην) σε μείωση των αναφερόμενων τιμών.

Πίνακας 3.5. Μεταβολή των αποστάσεων (rad) των ζωνών ισορροπίας από το κέντρο O του συστήματος καθώς και των Ιακωβιανών σταθερών τους C

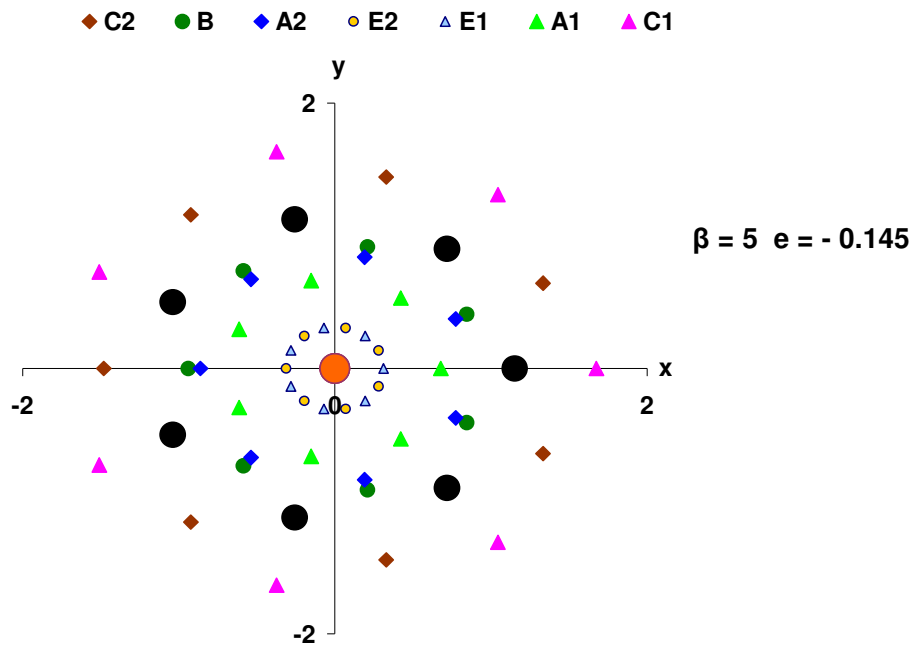
Ζώνη Ισορροπίας	C_2	B	A_2	E_2	E_1	A_1	C_1
rad	+	+	-	+	+	-	+
C	+	+	+	-	-	+	+

(ii) Εφαρμογή με $\beta=5$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e

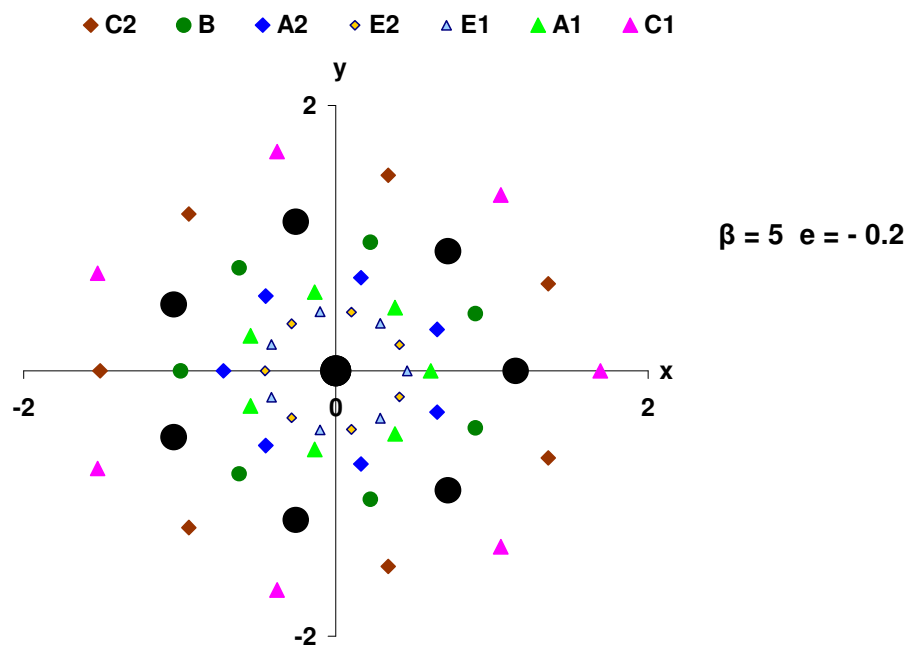
Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι θέσεις ισορροπίας στο επίπεδο xy για $n=7$, $\beta=5$ και για διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου e ($e=-0.1$, -0.145 , -0.2 , -0.2105 και -0.222).



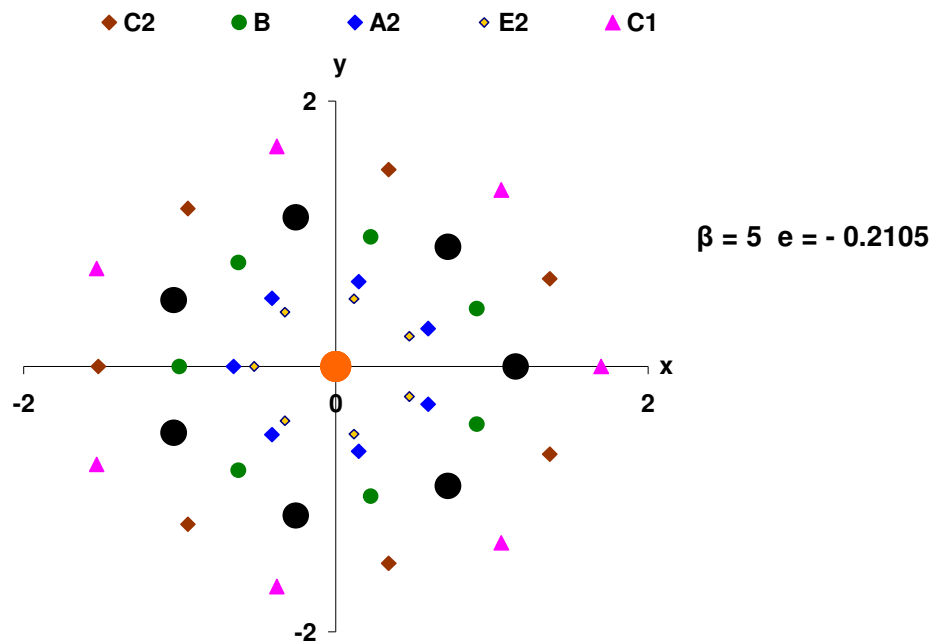
(α)



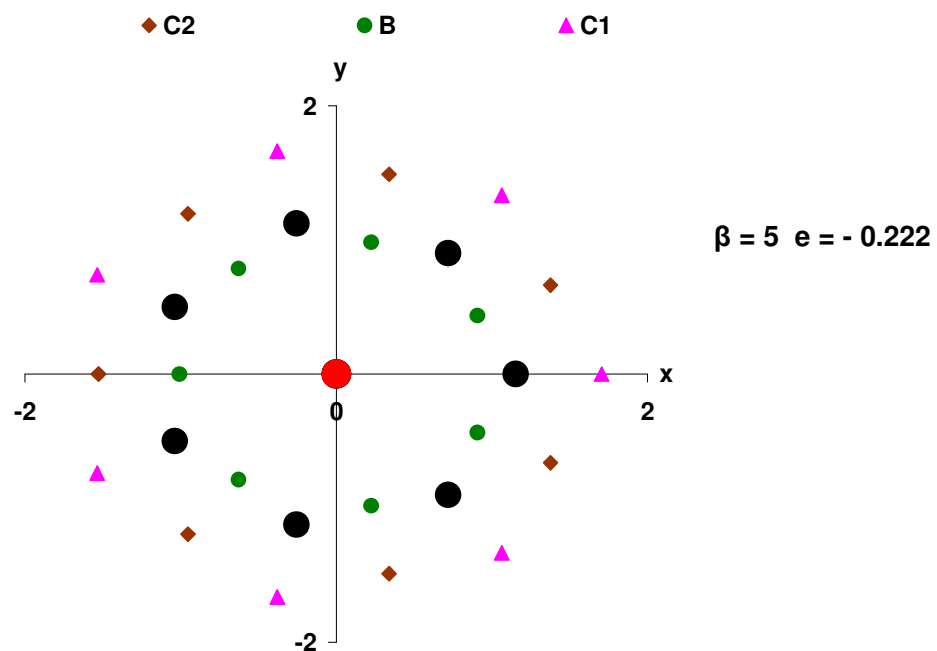
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

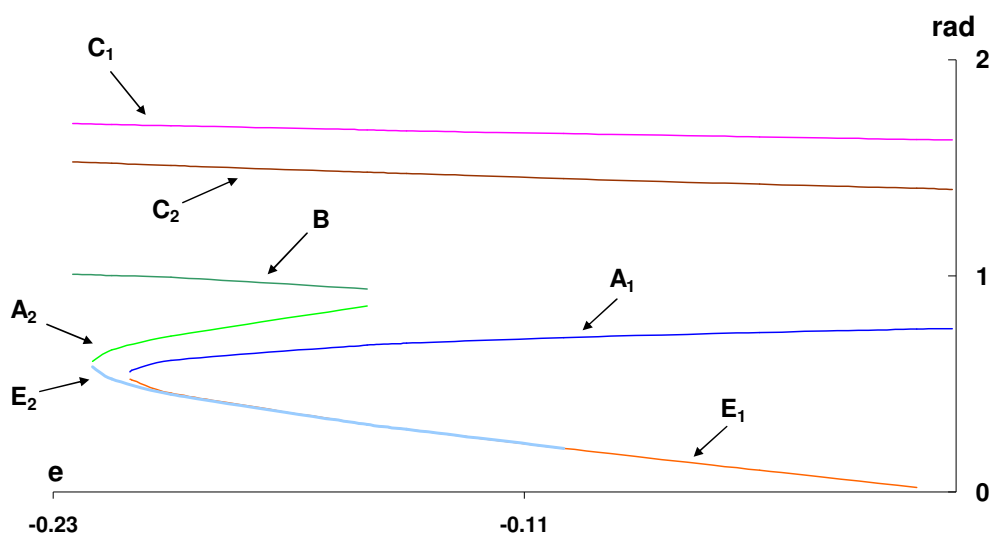
Σχήμα 3.19. Κατανομές των θέσεων ισορροπίας για $\beta=5$. (α) $e=-0.1$,
 (β) $e=-0.145$, (γ) $e=-0.2$, (δ) $e=-0.2105$, (ε) $e=-0.222$

Παρατηρούμε ότι:

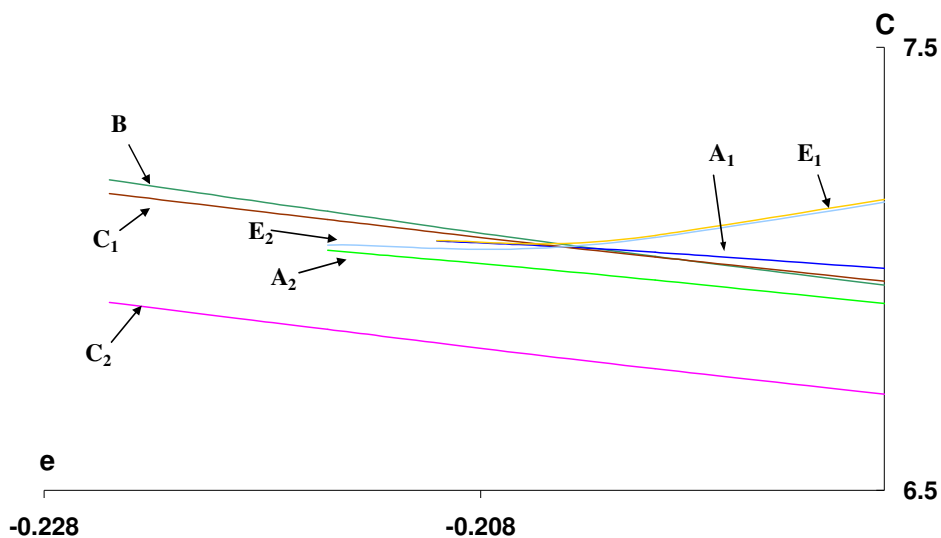
- Για $-0.145 < e < 0$ (περιοχή II του διαγράμματος διακλαδώσεων) παρουσιάζονται πέντε ζώνες ισορροπίας οι: E_2 , E_1 , A_1 , C_2 , C_1 , όπως εμφανίζονται από το κέντρο προς την περιφέρεια (Σχήμα 3.19α).

- Για $-0.2105 < e \leq -0.145$ (περιοχή I) εμφανίζονται οι ζώνες ισορροπίας A_2 , B και μάλιστα με παραπλήσια ακτίνα ζώνης. Επίσης παρατηρούμε ότι για $e=-0.2$, οι ζώνες ισορροπίας E_1 και A_1 βρίσκονται πάρα πολύ κοντά. Επομένως έχουμε επτά ζώνες, τις: E_2 , E_1 , A_1 , A_2 , B , C_2 , C_1 (Σχήματα 3.19β και γ).
- Για $-0.222 < e \leq -0.2105$ (περιοχή IV) εξαφανίζονται οι ζώνες E_1 και A_1 και απομένουν πέντε ζώνες ισορροπίας οι: E_2 , A_2 , B , C_2 , C_1 (Σχήμα 3.19δ).
- Για $e \leq -0.222$ (περιοχή V) εξαφανίζονται οι ζώνες E_2 , A_2 και τελικά απομένουν οι : B , C_2 , C_1 (Σχήμα 3.19ε).

Οι μεταβολές των αποστάσεων (rad) των ζωνών ισορροπίας από το κέντρο O του συστήματος και των Ιακωβιανών σταθερών τους C με την τιμή της παραμέτρου e , για αυτήν την περίπτωση ($\beta=5$), φαίνονται στα σχήματα 3.20α και 3.20β αντίστοιχα.



(α)



(β)

Σχήμα 3.20. Μεταβολές των ζωνών ισορροπίας για $\nu=7$, $\beta=5$ και διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου e . (α) διάγραμμα e -rad, (β) διάγραμμα e -C

Από τα σχήματα 3.20α και 3.20β, σε συνδυασμό και με τα εκτιθέμενα αποτελέσματα στους Πίνακες Α.2.2 του Παραρτήματος Α προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας 3.6, ο οποίος δείχνει τη μεταβολή τόσο των αποστάσεων (rad) των ζωνών ισορροπίας από το κέντρο Ο του συστήματος, όσο και των Ιακωβιανών σταθερών τους C, όταν ο συντελεστής e μειώνεται. Το πρόσημο + (συν) αναφέρεται σε αύξηση και το πρόσημο - (πλην) σε μείωση των αναφερόμενων τιμών.

Πίνακας 3.6. Μεταβολή των αποστάσεων (rad) των ζωνών ισορροπίας από το κέντρο Ο του συστήματος καθώς και των Ιακωβιανών σταθερών τους C

Ζώνη Ισορροπίας	C ₂	B	A ₂	E ₂	E ₁	A ₁	C ₁
rad	+	+	-	+	+	-	+
C	+	+	+	-	-	+	+

3.7 Μελέτη της γραμμικής ευστάθειας των θέσεων ισορροπίας

Αν L είναι μία από τις θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος, το διάνυσμα θέσης της L στο χώρο των φάσεων (συντεταγμένες και ταχύτητες) θα είναι:

$$\vec{r}_L = (x_L, y_L, z_L, 0, 0, 0),$$

Θεωρούμε μία γειτονική θέση \vec{r} του σημείου ισορροπίας L ,

$$\vec{r} = \vec{r}_L + \delta \vec{r} = (x_L + \delta x, y_L + \delta y, z_L + \delta z, 0 + \delta \dot{x}, 0 + \delta \dot{y}, 0 + \delta \dot{z})$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κινήσεως, οπότε αναλύοντας σε σειρές Taylor τις U_x, U_y, U_z και παραλείποντας τους μη γραμμικούς όρους, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα καταστατικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta x) &= \delta \dot{x} \\ \frac{d}{dt}(\delta z) &= \delta \dot{z} \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= \delta \dot{y} \\ \frac{d}{dt}(\delta \dot{x}) &= 2\delta \dot{y} + U_{xx}\delta x + U_{xy}\delta y + U_{xz}\delta z \\ \frac{d}{dt}(\delta \dot{y}) &= -2\delta \dot{x} + U_{yx}\delta x + U_{yy}\delta y + U_{yz}\delta z \\ \frac{d}{dt}(\delta \dot{z}) &= U_{zx}\delta x + U_{zy}\delta y + U_{zz}\delta z \end{aligned} \tag{3.5}$$

και σε μορφή πινάκων

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} & 0 & 2 & 0 \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} & -2 & 0 & 0 \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

όπου για το συγκεκριμένο πρόβλημα θα έχουμε:

$$U_x = x + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta x}{r_0^3} - \frac{2e\beta x}{r_0^4} + \sum_{i=1}^v \frac{x_i - x}{r_i^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
U_y &= y + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta y}{r_0^3} - \frac{2e\beta y}{r_0^4} + \sum_{i=1}^v \frac{y_i - y}{r_i^3} \right) \\
U_z &= \frac{-z}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{2e\beta}{r_0^4} + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} \right) \\
U_{xx} &= 1 + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta x^2}{r_0^5} - \frac{2e\beta}{r_0^4} + \frac{8e\beta x^2}{r_0^6} - \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^v \frac{(x_i - x)^2}{r_i^5} \right) \\
U_{yy} &= 1 + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta y^2}{r_0^5} - \frac{2e\beta}{r_0^4} + \frac{8e\beta y^2}{r_0^6} - \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^v \frac{(y_i - y)^2}{r_i^5} \right) \\
U_{zz} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta z^2}{r_0^5} - \frac{2e\beta}{r_0^4} + \frac{8e\beta z^2}{r_0^6} - \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^v \frac{z^2}{r_i^5} \right) \\
U_{xy} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{3\beta xy}{r_0^5} + \frac{8e\beta xy}{r_0^6} + \sum_{i=1}^v \frac{3(x_i - x)(y_i - y)}{r_i^5} \right) \\
U_{xz} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{3\beta xz}{r_0^5} + \frac{8e\beta xz}{r_0^6} - \sum_{i=1}^v \frac{3(x_i - x)z}{r_i^5} \right) \\
U_{yz} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{3\beta yz}{r_0^5} + \frac{8e\beta yz}{r_0^6} - \sum_{i=1}^v \frac{3(y_i - y)z}{r_i^5} \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Για να έχουμε λύση διάφορη της τετριμμένης (μηδενικής), θα πρέπει:

$$|A - \lambda I| = 0$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 6x6 και A είναι ο πίνακας των συντελεστών του 2^{ου} μέλους της (3.6).

Θέτοντας

$$F_w = \frac{\partial U_x}{\partial w}, \quad G_w = \frac{\partial U_y}{\partial w}, \quad H_w = \frac{\partial U_z}{\partial w}, \quad \text{με } w=x,y,z$$

η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι ένα πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού,

$$P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^6 + \alpha_1 \lambda^5 + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_5 \lambda + \alpha_6 = 0 \tag{3.8}$$

όπου:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 4 - (H_z + G_y + F_x)$$

$$\alpha_3 = 2(F_y - G_x)$$

$$\alpha_4 = -4H_z + (G_y H_z - G_z H_y) + (F_z H_x - F_x H_z) + (F_x G_y - F_y G_x)$$

$$\alpha_5 = -2 \left[(F_z H_y - F_y H_z) + (G_x H_z - G_z H_x) \right]$$

$$\alpha_6 = F_x (H_y G_z - G_y H_z) + F_y (G_x H_z - H_x G_z) + F_z (H_x G_y - G_x H_y)$$

Τότε οι μεταβολές δx , δy , δz , μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή,

$$\delta x = \sum_{i=1}^6 A_i e^{\rho_i t}, \quad \delta y = \sum_{i=1}^6 B_i e^{\rho_i t}, \quad \delta z = \sum_{i=1}^6 C_i e^{\rho_i t}$$

όπου ρ_i , $i=1,2,\dots,6$, είναι οι ρίζες της (3.8) και

$$A_i = A_i(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0)$$

$$B_i = B_i(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0) \quad i=1,2,\dots,6$$

$$C_i = C_i(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0)$$

Η ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος στη θέση ισορροπίας L ελέγχεται λοιπόν με τη βοήθεια των ιδιοτιμών της (3.8). Αν έστω και μία από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οι οποίες προσδιορίζονται αριθμητικά, έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ασταθής. Αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ασυμπτωτικά ευσταθής. Αν έστω και μία από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει μηδενικό πραγματικό μέρος και όλες οι υπόλοιπες ρίζες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται οριακά ευσταθής.

3.8 Εφαρμογή του κριτηρίου ευσταθείας Routh-Hurwitz

Ένα πολύ γνωστό και εύχρηστο κριτήριο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά για τη διερεύνηση της ευσταθείας γραμμικών και γραμμικοποιημένων συστημάτων, είναι το κριτήριο Routh- Hurwitz. Σύμφωνα με αυτό, αν

$$P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \dots + \alpha_n$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τότε για να έχουν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $P(\lambda) = 0$ αρνητικά πραγματικά μέρη, πρέπει και αρκεί όλες οι κύριες διαγώνιες ελάσσονες του πίνακα του Hurwitz:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

να είναι θετικές (θετικά ορισμένες). Ο πίνακας αυτός σχηματίζεται ως εξής. Οι συντελεστές του πολυωνύμου από α_1 μέχρι α_n γράφονται ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Οι στήλες αποτελούνται η μεν πρώτη από τους συντελεστές με περιττό δείκτη, η δε δεύτερη από τους συντελεστές με άρτιο δείκτη (και το μηδέν). Οι επόμενες δύο στήλες είναι επανάληψη, αντίστοιχα των δύο πρώτων στηλών, μόνο που τα πρώτα τους στοιχεία είναι μηδέν, κ.λ.π. Οι κύριες διαγώνιες ελάσσονες ορίζουσες είναι,

$$D_1 = \alpha_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_7 & \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_4 \end{vmatrix}, \text{ κ.ο.κ.} \quad (3.10)$$

Όταν βρούμε μία από τις προαναφερόμενες ορίζουσες αρνητική, δεν χρειάζεται να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των υπολοίπων, γιατί σύμφωνα με το κριτήριο η

λύση θα είναι ασταθής. Αν όμως βρούμε μία ή περισσότερες από τις ορίζουσες ίση με το μηδέν τότε έχουμε ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με πραγματικά μέρη μηδέν, οπότε η λύση μπορεί να είναι ευσταθής (όχι ασυμπτωτικά), αλλά μπορεί και να είναι ασταθής. Το τι ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση αυτή μας λέει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα: "Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μία θέση ισορροπίας ευσταθής, είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να έχουν πραγματικά μέρη αρνητικά και εκείνες οι οποίες έχουν πραγματικά μέρη μηδέν να έχουν αντίστοιχα χαρακτηριστικά ιδιοδιανύσματα σε πλήθος ίσο με την πολλαπλότητά τους (δηλαδή να είναι απλού τύπου)".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΣΗ-ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΠΑΓΙΔΕΥΣΗΣ- ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

4.1 Εισαγωγή

Σε προβλήματα δύο βαθμών ελευθερίας κίνησης (επίπεδη κίνηση), οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας οριοθετούν τις περιοχές του επιπέδου xy , όπου είναι δυνατή και επομένως πραγματοποιήσιμη η κίνηση του μικρού σώματος. Για την «χάραξη» των καμπύλων αυτών θα χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα της ενέργειας του Jacobi : $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x,y,z) - C$, όπου ο όρος της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται, όπως επίσης και η συνιστώσα z . Προφανώς, οι περιοχές επιτρεπτής κίνησης είναι αυτές για τις οποίες ισχύει $2U(x,y) \geq C$. Το όριο μεταξύ των περιοχών επιτρεπτής και απαγορευμένης κίνησης είναι η καμπύλη (ή οι καμπύλες) που αποτελεί (ή αποτελούν) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (x,y) του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν για μία σταθερή τιμή του C την εξίσωση:

$$2U(x,y) = C$$

Αν για μια τιμή του C υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαφορετικές κλειστές περιοχές στις οποίες επιτρέπεται η κίνηση, τότε το μικρό σώμα δεν μπορεί να «μετακινηθεί» εκτός των περιοχών αυτών «διαπερνώντας» την οριακή καμπύλη μηδενικής ταχύτητας. Έτσι εγκλωβίζεται στην περιοχή στην οποία βρίσκεται. Οι περιοχές αυτές παγίδευσης του μικρού σώματος ονομάζονται ενίοτε περιοχές Hill, από τον ερευνητή που πρώτος τις εντόπισε και τις περιέγραψε στο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων. Οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας είναι ισοενεργειακές και ισοταχείς καμπύλες και εμπίπτουν στη γενικότερη κατηγορία των ισοσταθμικών καμπύλων όπως: οι ισοκλινείς, οι ισοϋψείς, οι ισοδυναμικές, οι ισοβαρείς, οι ισοθερμικές κ.α.

Αν για την περιγραφή της κίνησης στο επίπεδο xy θεωρήσουμε και μία τρίτη διάσταση στην οποία μετρώνται οι τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C (άξονας των C), τότε παίρνουμε τις ονομαζόμενες επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για την επίπεδη κίνηση του μικρού σώματος. Αυτές δείχνουν σε τρισδιάστατη απεικόνιση τις περιοχές του χώρου xyC στις οποίες η κίνηση του μικρού σώματος είναι επιτρεπτή ή όχι.

4.2 Σχεδιασμός των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας

Για τον σχεδιασμό των καμπύλων μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες αναλυτικές (μέθοδος ταχίστης καθόδου), ή ημιαναλυτικές (μέθοδος των τομών) μέθοδοι που έχουν προταθεί στο παρελθόν. Όλες τους απαιτούν πολύ υπολογιστικό χρόνο, ενώ είναι περιορισμένης αξιοπιστίας με την έννοια ότι δεν μπορούν να προσεγγίσουν επακριβώς τη μορφή των καμπύλων κυρίως στις περιπτώσεις εκείνες, όπου είτε οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του C εμφανίζουν μεγάλη πύκνωση σε κάποιες περιοχές του επιπέδου xy , οπότε καθιστούν εξαιρετικά δυσχερή τον διαχωρισμό τους, είτε εμφανίζουν σε ορισμένα τμήματά τους πολύ μεγάλες καμπυλότητες ή απότομες αλλαγές αυτής, με αποτέλεσμα να γίνεται «μεταπήδηση» από τις συγκεκριμένες καμπύλες στις γειτονικές τους. Το έργο της σχεδίασης των καμπύλων έχει απλουστευτεί σημαντικά με τη χρήση διαφόρων λογισμικών πακέτων, όπως το Mathematica και το Matlab στα οποία το μόνο που απαιτείται είναι η γραφή του κατάλληλου κώδικα. Βέβαια και στην περίπτωση αυτή απαιτείται από τον χρήστη σχετική εμπειρία και καλή γνώση των δυνατοτήτων του λογισμικού αυτού διότι εμφανίζονται μερικές φορές προβλήματα τα οποία μπορεί να οδηγήσουν σε λάθος εκτιμήσεις και εσφαλμένες απεικονίσεις. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε το λογισμικό πακέτο Mathematica και μάλιστα θα βασισθούμε στην έκδοση 7.0 (Παπαδάκης, 2010). Στο Παράρτημα Β παρατίθεται κώδικας Mathematica (B.1), που καταρτίσθηκε για τον σχεδιασμό των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας.

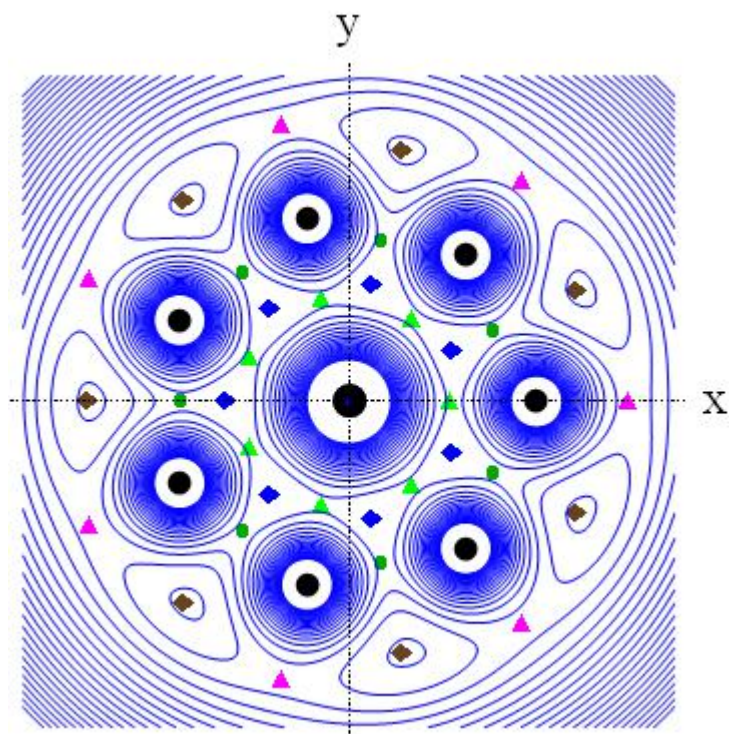
4.3 Μελέτη της παραμετρικής μεταβολής των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας

Οι ισοενεργειακές καμπύλες για μία συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς $C=C_\alpha$ λαμβάνονται από την τομή της επιφάνειας $C = C(x,y)$ με το επίπεδο $C=C_\alpha$. Συνεπώς τα δίκτυα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας που απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα, προκύπτουν από την επαλληλία των καμπύλων που λαμβάνονται από τις τομές αυτές για διάφορες τιμές της σταθεράς C . Δείχνουν τον τοπογραφικό χάρτη της δυναμικής συνάρτησης U και αποτελούν μέθοδο πρόβλεψης-εξέλιξης των θέσεων, των σημείων ισορροπίας στο επίπεδο xy .

Παρακάτω αναφέρουμε εκείνες τις ιδιότητες των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, που μας δίνουν τη δυνατότητα να εντοπίζουμε εκείνες τις περιοχές που υπάρχουν σημεία ισορροπίας :

- Δύο κλάδοι μιας καμπύλης μηδενικής ταχύτητας (με την ίδια τιμή της σταθεράς C) δεν τέμνονται παρά μόνο σε σημεία ισορροπίας.
- Αν μια καμπύλη μηδενικής ταχύτητας είναι κλειστή και στο εσωτερικό της ισχύει ότι $T > 0$ (θετική κινητική ενέργεια, επιτρεπτή κίνηση), τότε η κίνηση είναι περατωμένη. Στην περίπτωση αυτή αν μεταβαλλόμενης της τιμής της C η καμπύλη μικραίνει, τότε τελικά εκφυλίζεται σε σημείο που αποτελεί θέση ισορροπίας.
- Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται πάντοτε πάνω στις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας.

Ενδεικτικά παραθέτουμε παρακάτω ένα δίκτυο καμπύλων μηδενικής ταχύτητας (Σχήμα 4.1), όπου έχουμε σημειώσει τις θέσεις ισορροπίας που υπάρχουν όπως ακριβώς περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και γίνονται εμφανείς οι ιδιότητες που μόλις αναφέραμε .



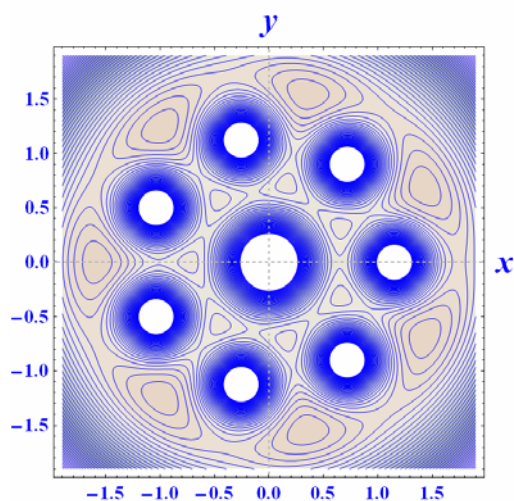
Σχήμα 4.1. Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και θέσεις ισορροπίας για για τη βαρυτική περίπτωση όπου $\nu=7$ και $\beta=2$

4.3.1 Περίπτωση με Νευτώνεια δυναμικά ($\beta \neq 0$ και $e = 0$)

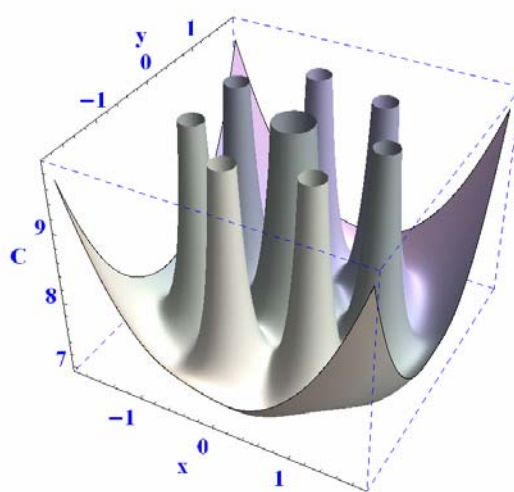
Η περίπτωση αυτή έχει μελετηθεί επισταμένως στο παρελθόν για διάφορους σχηματισμούς (Kalnouridis, 2001). Η αλλαγή από πέντε σε τρεις ζώνες ισορροπίας πραγματοποιείται στην περίπτωση που $\nu=7$, στην τιμή $l_\nu = 3.08$. Στο σχήμα 4.2α₁ είναι προφανής η ύπαρξη πέντε ζωνών ισορροπίας, ενώ στο σχήμα 4.2α₂ όπου η τιμή της παραμέτρου μάζας β είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής l_ν , εμφανίζονται μόνο τρεις ζώνες. Τα σχήματα 4.2β₁ και 4.2β₂ δείχνουν τη διαμόρφωση των «καμινάδων» που περιβάλλουν τις θέσεις των πρωτευόντων σωμάτων. Όταν $\beta < 1$, τότε η κεντρική «καμινάδα» είναι στενότερη από αυτές των περιφερειακών σωμάτων ενώ όταν $\beta > 1$, όπως στις περιπτώσεις που μελετάμε, συμβαίνει το αντίθετο και μάλιστα αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές όσο αυξάνεται η παράμετρος μάζας β . Τέλος, όταν $\beta=1$, όλες οι «καμινάδες» είναι ίδιες.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

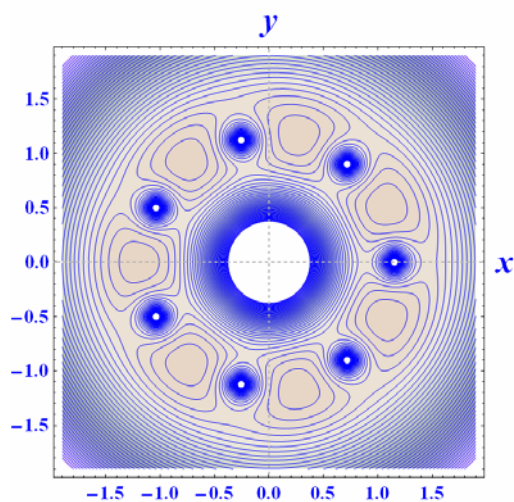
Η κίνηση του μικρού σώματος, σε όλες τις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε, επιτρέπεται στο εσωτερικό των «καμινάδων», όπως επίσης και κάτω από την επιφάνεια-βάση των «καμινάδων». Οι λευκές κλειστές περιοχές που εμφανίζονται γύρω από τα πρωτεύοντα σώματα στα δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, είναι περιοχές επιτρεπτής κίνησης και άρα περιοχές στις οποίες η κίνηση του μικρού σώματος παγιδεύεται.



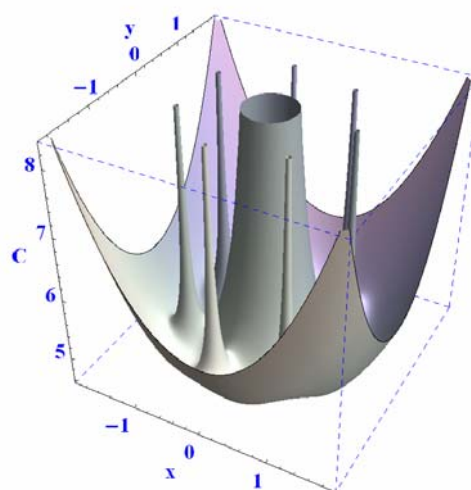
(α_1)



(β_1)



(α_2)



(β_2)

Σχήμα 4.2. Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας. (α_1)-(β_1) για $v=7$, $\beta=2$ ($\beta < l_v$) και $e=0$, (α_2)-(β_2) για $v=7$, $\beta=20$ ($\beta > l_v$) και $e=0$

4.3.2 Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e > 0$

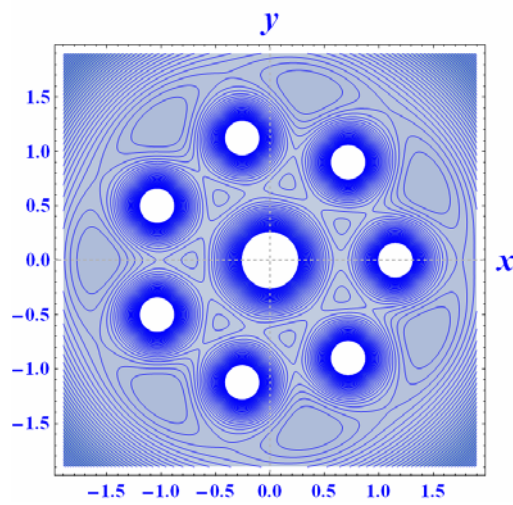
Στην περίπτωση που το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev και η παράμετρος e είναι θετική, η μορφή των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας, παραμένουν όμοιες με αυτές της περίπτωσης των Νευτώνειων δυναμικών που περιγράψαμε προηγουμένως. Οι παρουσιαζόμενες αποκλίσεις που παρατηρούνται, οφείλονται στην παρουσία του «διαταρακτικού» όρου του δυναμικού Manev, όπου η επίδραση της παραμέτρου μάζας β είναι ισχυρότερη από αυτήν της παραμέτρου e (θετικής).

Το πλήθος των ζωνών ισορροπίας, όπως περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εξαρτάται από την περιοχή στην οποία βρίσκεται το ζεύγος τιμών (e, β) , όπως αυτή καθορίζεται από το διάγραμμα των καμπύλων διακλάδωσης του Σχήματος 3.8 (Κεφ. 3^ο). Όταν η παράμετρος e είναι θετική, οι εμφανιζόμενες ζώνες είναι και πάλι 5 ή 3, όπως στη βαρυτική περίπτωση. Αν το ζεύγος των τιμών (e, β) , βρίσκεται κάτω από την καμπύλη διακλάδωσης (Περιοχή I) υπάρχουν 5 ζώνες, ενώ αν βρίσκεται κάτω από την καμπύλη διακλάδωσης (Περιοχή II) υπάρχουν τρεις. Παρατηρώντας τα δίκτυα μηδενικών καμπύλων στα Σχήματα 4.3–4.4 διαπιστώνουμε την αλλαγή του πλήθους των ζωνών ισορροπίας, ανάλογα το ζεύγος τιμών (e, β) . Έτσι για $\beta=2$ και $e = 0.0001, 0.1$ (Σχήμα 4.3 α_1, α_2) βρισκόμαστε στη περιοχή I και υπάρχουν πέντε ζώνες ισορροπίας (A_1, A_2, B, C_2, C_1), ενώ για $\beta=5$ και $e = 0.0001, 0.1$ (Σχήμα 4.4 α_1, α_2) βρισκόμαστε στη περιοχή II και υπάρχουν τρεις ζώνες ισορροπίας (A_1, C_2, C_1).

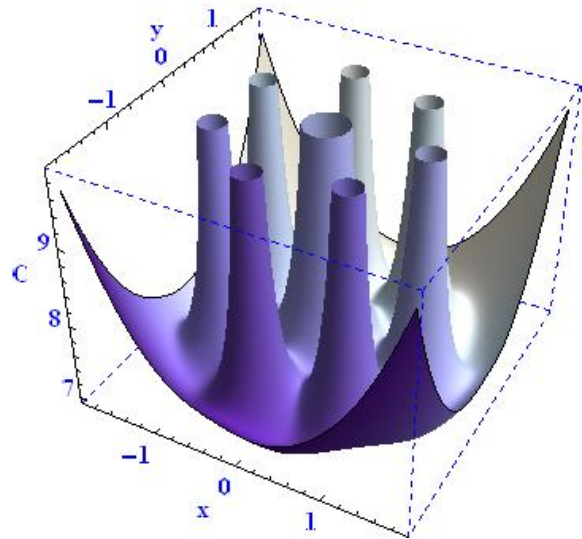
Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου e και διατηρώντας την παράμετρο β σταθερή, διευρύνεται η κλειστή περιοχή της επιτρεπτής κίνησης που διαμορφώνεται γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα, ενώ στενεύουν τα όρια των περιοχών επιτρεπτής κίνησης γύρω από τα περιφερειακά σώματα. Η ίδια συμπεριφορά συναντάται όπως είναι φυσικό και στις αντίστοιχες «καμινάδες» που διαμορφώνονται στην επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας (Σχήμα 4.3 β_1, β_2 , όπου $\beta=2$ και $e = 0.0001, 0.1$ και Σχήμα 4.4 β_1, β_2 , όπου $\beta=5$ και $e = 0.0001, 0.1$).

Διατηρώντας την παράμετρο e σταθερή και μεταβάλλοντας την παράμετρο β , παρατηρούμε ακριβώς την ίδια εξέλιξη όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως

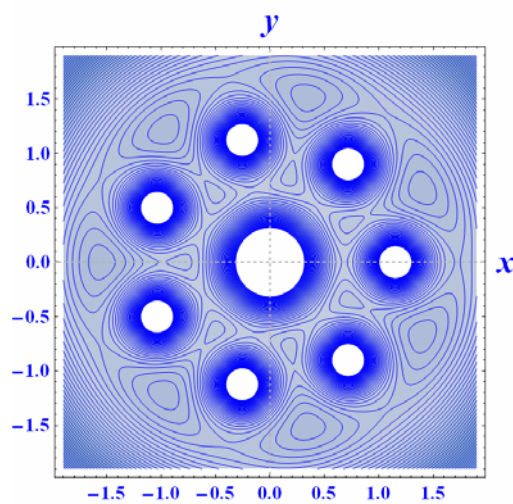
(Σχήμα 4.3α₁, όπου $\epsilon = 0.0001$ και $\beta=2$ και Σχήμα 4.4α₁, όπου και $\epsilon = 0.0001$ και $\beta=5$).



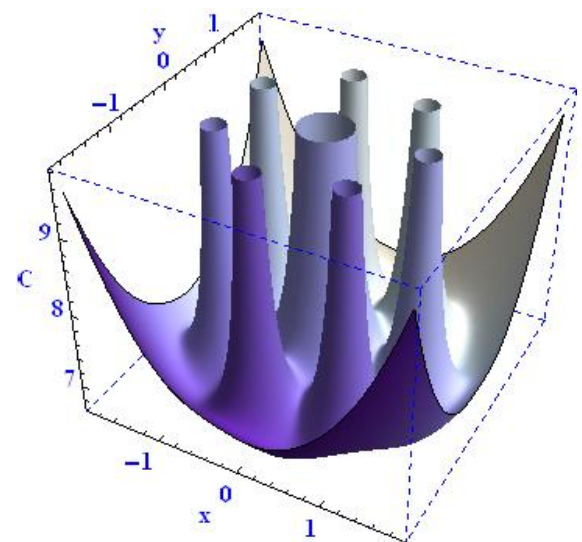
(α₁)



(β₁)

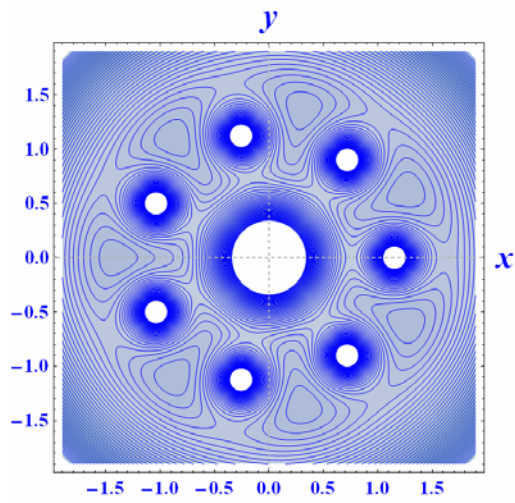


(α₂)

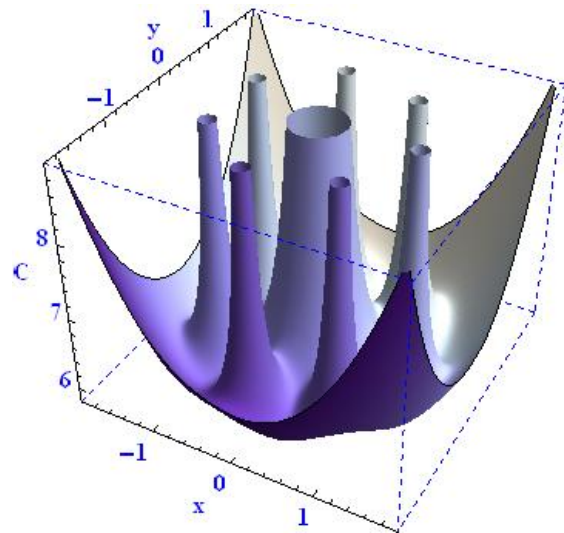


(β₂)

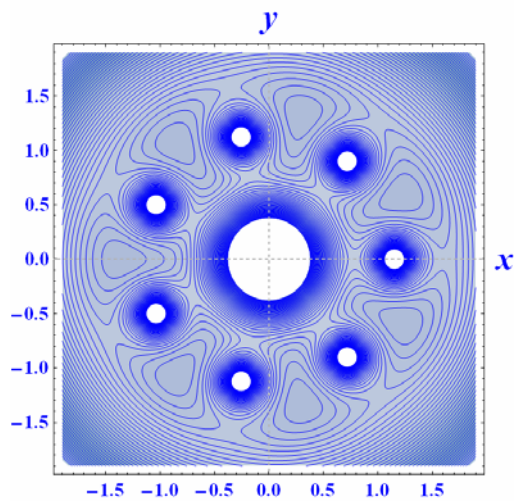
Σχήμα 4.3. Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας. (α₁)-(β₁) για $v=7$, $\beta=2$ και $\epsilon=0.0001$, (α₂)-(β₂) για $v=7$, $\beta=2$ και $\epsilon=0.1$



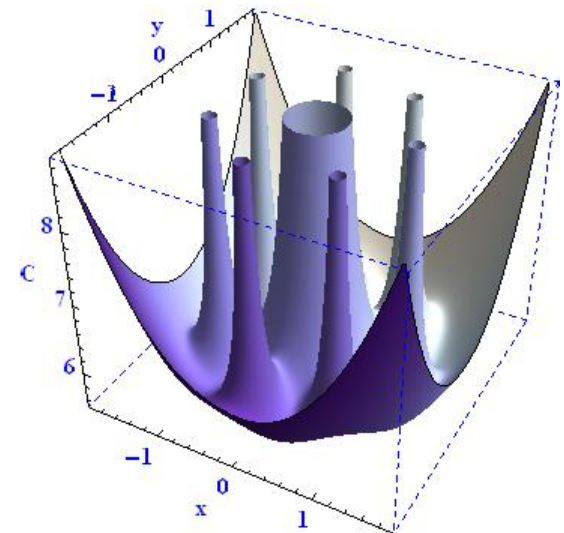
(α_1)



(β_1)



(α_2)



(β_2)

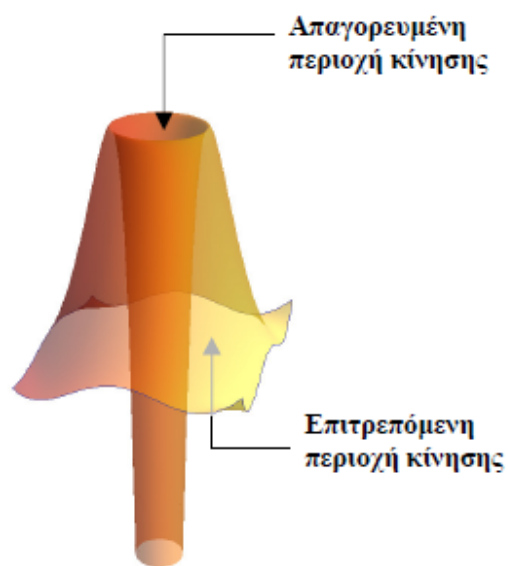
Σχήμα 4.4. Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας. (α_1)-(β₁) για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=0.0001$, (α_2)-(β₂) για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=0.1$

4.3.3 Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $\epsilon < 0$

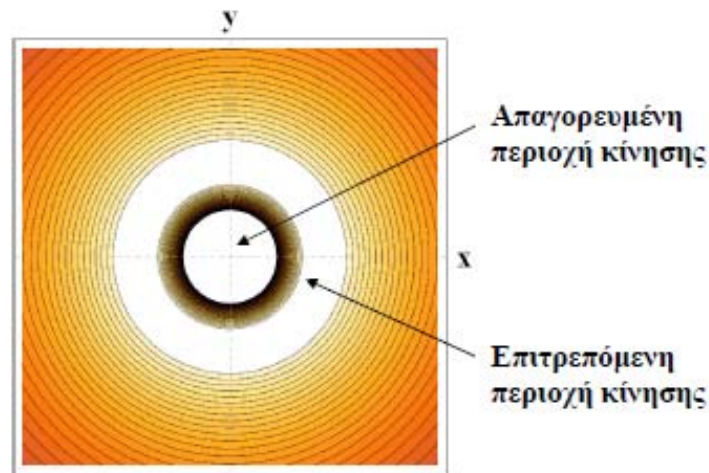
Η παρατηρούμενη αναδίπλωση της «καμινάδας» που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον σώμα προς το εσωτερικό της και η οποία ξεκινάει μόλις το ϵ γίνει αρνητικό (Σχήματα 4.6-4.7), είναι μία από τις σημαντικότερες διαφοροποιήσεις από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Για πολύ μικρές κατά απόλυτη τιμή, τιμές της ϵ , η αναδίπλωση αυτή εμφανίζεται σε πολύ μεγάλες τιμές της σταθεράς C έχει δε ως αποτέλεσμα να διαμορφώνεται κοντά και γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα,

μία περιοχή του χώρου xyC όπου η κίνηση του μικρού σώματος επιτρέπεται και άλλη μία περιοχή όπου η κίνηση είναι μη επιτρεπτή. Οι περιοχές αυτές διαχωρίζονται από την επιφάνεια του αναδιπλούμενου τμήματος και δείχνονται επακριβώς στο Σχήμα 4.5α. Η κίνηση του μικρού σώματος είναι απαγορευμένη στο εσωτερικό της επιφάνειας που δημιουργεί η αναδίπλωση και επιτρέπεται στο εξωτερικό της και στην περιοχή που βρίσκεται κάτω από το χείλος της αναδίπλωσης.

Απεικονίζοντας το αντίστοιχο δίκτυο καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα, διακρίνουμε τις προηγούμενες περιγραφείσες περιοχές του χώρου xyC στο επίπεδο κίνησης xy . Έτσι προκύπτει μία κλειστή περιοχή κοντά και γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα, όπου η κίνηση του μικρού σώματος είναι μη επιτρεπτή και η οποία περιβάλλεται από μία άλλη ευρύτερη κλειστή δακτυλιοειδή περιοχή μέσα στην οποία η κίνηση είναι επιτρεπτή (Σχήμα 4.5β).



(α)



(β)

Σχήμα 4.5. Περιοχές επιτρεπτής και απαγορευμένης κίνησης.

(α) Λεπτομέρεια κεντρικής καμινάδας στη περιοχή αναδίπλωσης,

(β) λεπτομέρεια καμπύλων μηδενικής ταχύτητας

γύρω από το κεντρικό primary

Οι δύο αυτές περιοχές είναι πολύ μικρών διαστάσεων και διακρίνονται σαφώς μόνο στα Σχήματα 4.6 α_2 , 4.7 α_2 και 4.7 α_3 ενώ στα υπόλοιπα είναι εξαιρετικά δυσδιάκριτες. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, η λευκή κλειστή περιοχή που περιβάλλει άμεσα το κεντρικό πρωτεύον σώμα, είναι περιοχή μη επιτρεπτής κίνησης, ενώ η ευρύτερη δακτυλιοειδής λευκή περιοχή που περιβάλλει την προηγούμενη, είναι περιοχή επιτρεπτής κίνησης (Σχήμα 4.5β).

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε και θα αναδείξουμε με τη βοήθεια σχημάτων την παραμετρική εξέλιξη των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας στη επίπεδη κίνηση. Για ένα συγκεκριμένο σχηματισμό ($\nu=7$) παρατηρούμε την εξέλιξη των επιφανειών αυτών, αφενός μεν διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β και μεταβάλλοντας το e , αφετέρου δε μεταβάλλοντας την παράμετρο β και διατηρώντας σταθερή την e . Σε όλες τις περιπτώσεις παρακολουθούμε την εξέλιξη μέχρι εκείνες τις περιοχές τιμών (ν, β, e) , για τις οποίες συμβαίνει η πλήρης καταβύθιση της κεντρικής «καμινάδας». Πλήρης καταβύθιση θεωρούμε ότι συμβαίνει όταν παύουν να υπάρχουν και οι δύο ζώνες ισορροπίας E_1 και E_2 , δηλαδή όταν το ζεύγος τιμών (e, β) βρίσκεται στην

περιοχή V του διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11(Κεφ. 3^ο), που αναφέρεται στην περίπτωση για $v=7$.

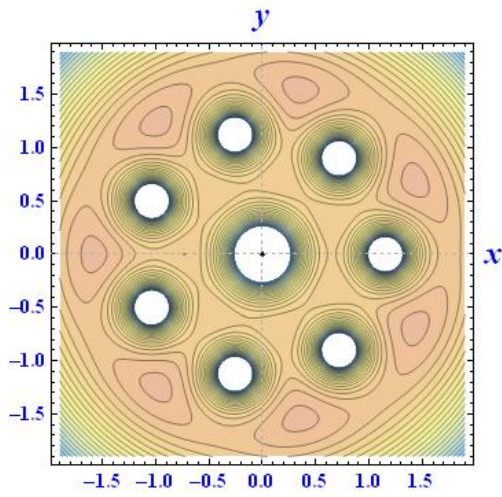
Για σταθερές τιμές της παραμέτρου β , όσο μικραίνει η τιμή της e , τόσο η τιμή της σταθεράς C ελαττώνεται, και η «κεντρική καμινάδα» αναδιπλούμενη προς τα κάτω εξακολουθεί να χαμηλώνει. Η διαδικασία αυτή ολοκληρώνεται με την πλήρη «καταβύθιση» της κεντρικής «καμινάδας» (Σχήματα 4.6 β_3 και 4.7 β_6). Μετά από το σημείο αυτό και για όλες τις τιμές της C (αρνητικές) θα υπάρχει πάντα μία μικρή κλειστή περιοχή που θα περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον, όπου η κίνηση του μικρού σώματος θα είναι απαγορευμένη

Εξάλλου, καθώς η τιμή της παραμέτρου e ελαττώνεται (αλγεβρικά), παρατηρείται μία στένωση της εξωτερικής επιφάνειας της κεντρικής «καμινάδας» που συνοδεύεται από μία παράλληλη διεύρυνση του εσωτερικού αναδιπλούμενου τμήματός της (είναι εμφανές στα Σχήματα 4.7 α_2 και 4.7 α_3), ενώ ταυτόχρονα διευρύνονται και οι περιφερειακές καμινάδες.

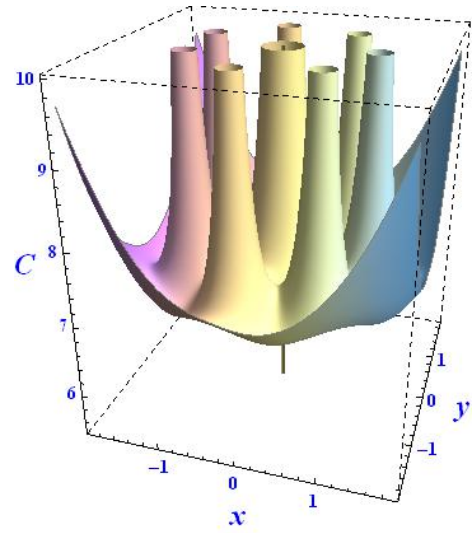
Διατηρώντας σταθερή την αρνητική τιμή του e και μεταβάλλοντας την παράμετρο β , τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη μας έχουν συνοπτικά ως εξής :

Παρατηρήσαμε για σχετικά μικρές τιμές του β ($\beta < 10$), μία διεύρυνση της εξωτερικής επιφάνειας της κεντρικής καμινάδας (περιοχή επιτρεπτής κίνησης), με ταυτόχρονη στένωση των περιφερειακών καμινάδων. Για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου β ($\beta > 10$), δεν παρατηρούνται αξιοσημείωτες μεταβολές στην περιοχή επιτρεπτής κίνησης της κεντρικής καμινάδας, ενώ η στένωση των περιφερειακών συνεχίζει να υφίσταται.

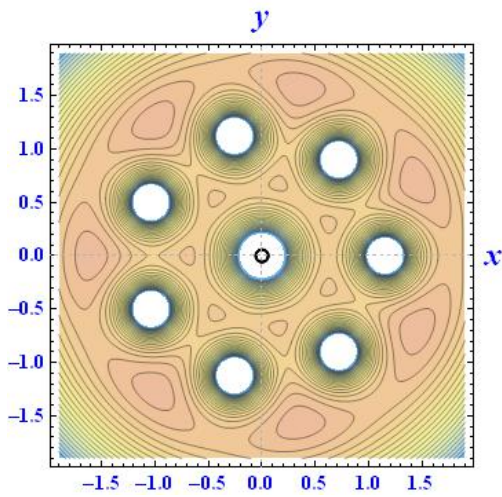
Το μόνο που δεν επηρεάζεται είναι η κατάσταση της ευστάθειας των σημείων αυτών, αφού σε κάθε περίπτωση οι θέσεις αυτές είναι ασταθείς.



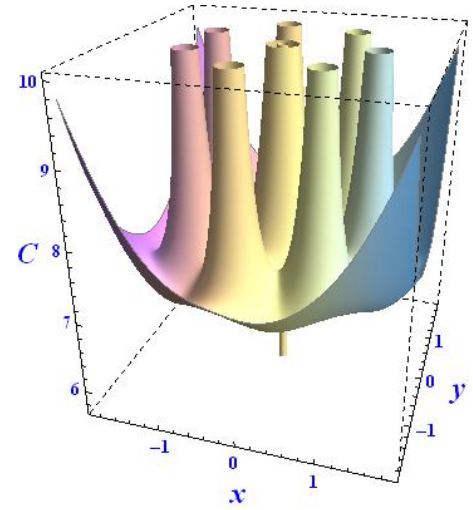
(α_1)



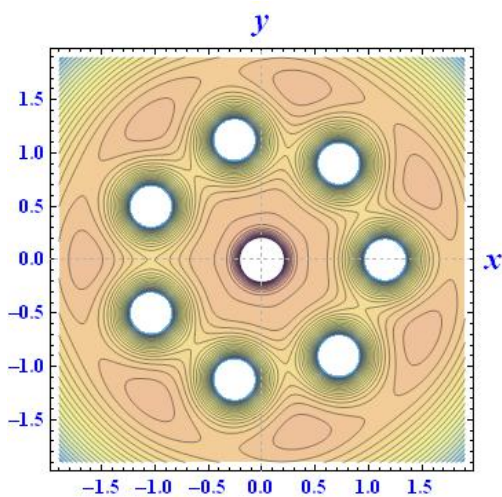
(β_1)



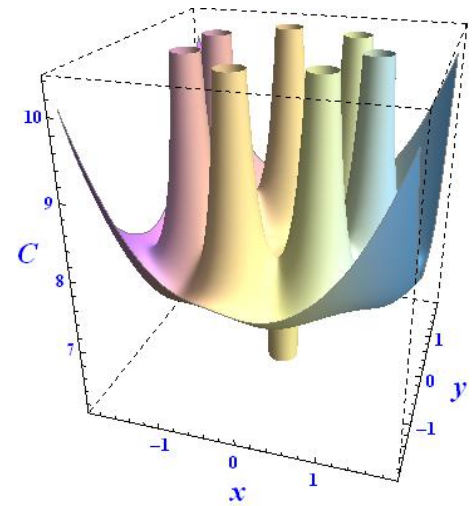
(α_2)



(β_2)



(α_3)

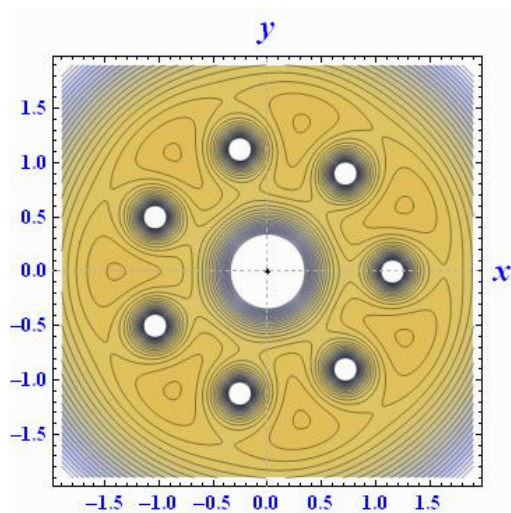


(β_3)

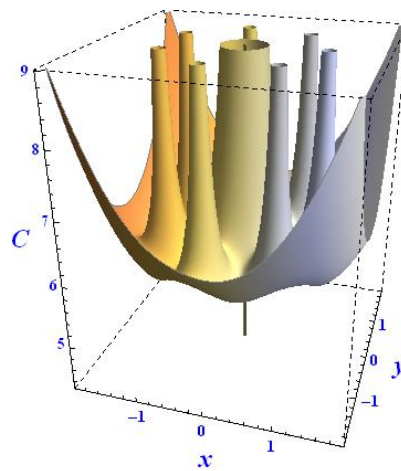
Σχήμα 4.6. Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για $\nu=7$, $\beta=2$ και διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου ϵ .

$(\alpha_1) - (\beta_1) \epsilon = -0.0001$, $(\alpha_2) - (\beta_2) \epsilon = -0.05$ και

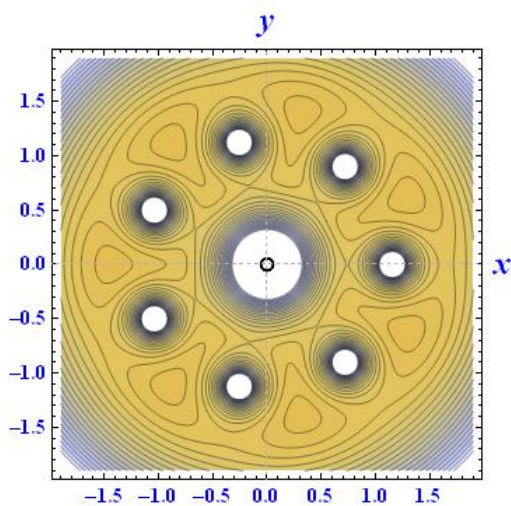
$(\alpha_3) - (\beta_3) \epsilon = -0.18$



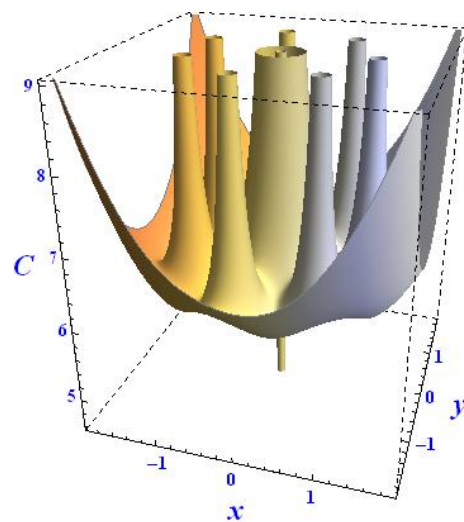
(α_1)



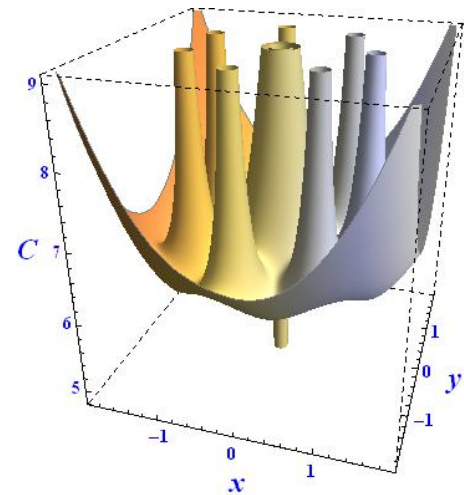
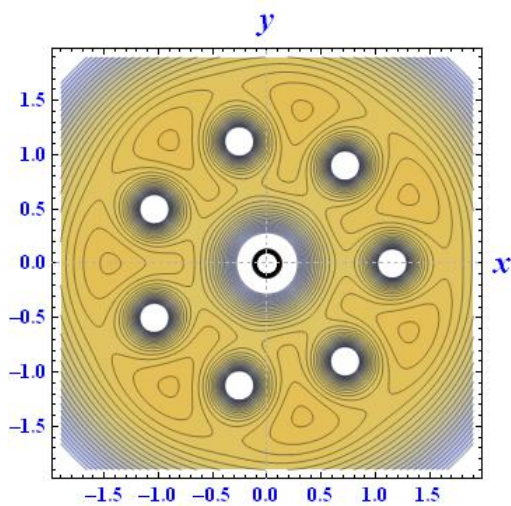
(β_1)

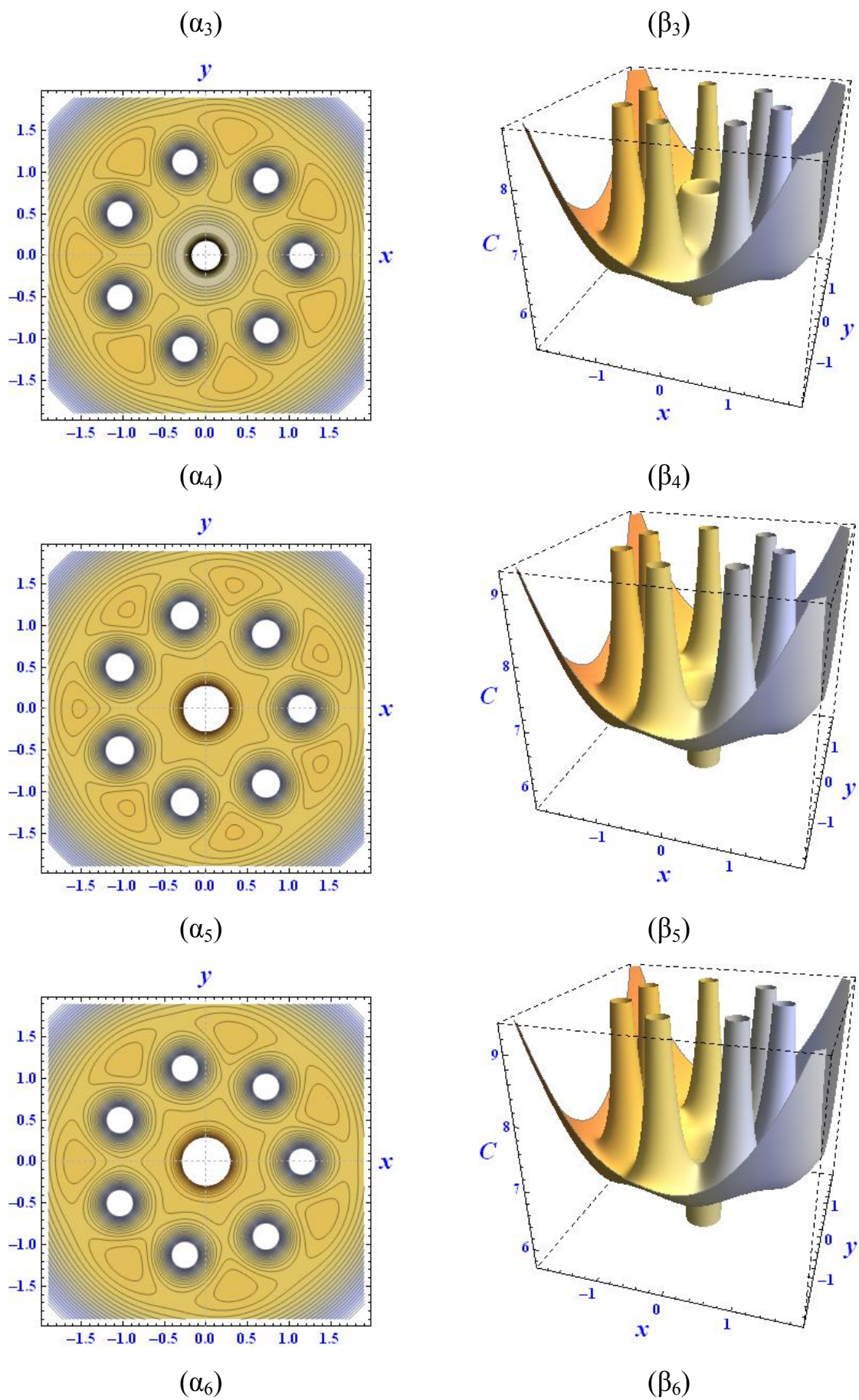


(α_2)



(β_2)





Σχήμα 4.7. Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και επιφάνειες μηδενικής

ταχύτητας για $v=7$, $\beta=5$ και διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου e .

$$\begin{aligned}(\alpha_1)-(\beta_1) e &= - 0.0001, (\alpha_2)-(\beta_2) e = - 0.05, (\alpha_3)-(\beta_3) e = - 0.09, \\(\alpha_4)-(\beta_4) e &= - 0.15, (\alpha_5)-(\beta_5) e = - 0.218 \text{ και } (\alpha_6)-(\beta_6) e = - 0.225\end{aligned}$$

4.4 Μελέτη της εξέλιξης των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και των περιοχών παγίδευσης στο επίπεδο xy , σε σχέση με τη σταθερά C

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την παραμετρική εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής και απαγορευμένης κίνησης στο επίπεδο xy , που είναι και το επίπεδο το οποίο ορίζουν τα μεγάλα σώματα του δακτυλιοειδούς σχηματισμού. Θα περιοριστούμε στις περιπτώσεις με $e>0$ και $e<0$, αφού για $e=0$ που είναι η βαρυτική περίπτωση, έχει ήδη μελετηθεί και αναλυθεί επαρκώς τα προηγούμενα χρόνια. Στο Παράρτημα Β παρατίθεται ο κώδικας Mathematica (B.2) που χρησιμοποιήθηκε για τον σχεδιασμό αυτών των περιοχών.

4.4.1 Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $e>0$

Όπως ελέγχθη στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, τα Σχήματα (4.3 $\beta_1-\beta_2$, 4.4 $\beta_1-\beta_2$) αποτελούν τις γραφικές απεικονίσεις της $C = C(x,y)$. Όταν αυξάνει η τιμή της C οι κλειστές περιοχές γύρω από τα περιφερειακά primaries συρρικνώνονται, τείνοντας ασυμπτωτικά προς μία οριακή κλειστή καμπύλη που αναπτύσσεται γύρω από τα σώματα αυτά. Αντίθετα διευρύνεται η εξωτερική κλειστή περιβάλλουσα καμπύλη. Όταν η C ελαττώνεται, οι εσωτερικές κλειστές περιοχές γύρω από τα primaries διευρύνονται και προσεγγίζουν αφενός μεν την κλειστή καμπύλη του κεντρικού σώματος, αφετέρου δε την εξωτερική κλειστή περιβάλλουσα. Για ένα συγκεκριμένο πολυγωνικό σχηματισμό n σωμάτων και μία συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου β , παρατηρούνται τοπολογικές αλλαγές στη μορφή των καμπύλων και συνεπώς των περιοχών επιτρεπτής κίνησης, στις τιμές της ενέργειας C που αντιστοιχούν στις θέσεις ισορροπίας.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση με $v=7$, $\beta=5$ και $e=0.1$, όπου σύμφωνα με το διάγραμμα διακλαδώσεων του Σχήματος 3.8(Κεφ. 3^ο), το ζεύγος τιμών $(e, \beta)=(0.1,$

5) ανήκει στην περιοχή $\Pi(3)$ και επομένως εμφανίζονται τρεις ζώνες ισορροπίας (A_1, C_2, C_1).

Για την διάταξη των τιμών των Ιακωβιανών σταθερών, ισχύει η ανισότητα :

$$C_{A1} > C_{C1} > C_{C2}$$

όπου: $C_{A1} = 6.03909331$, $C_{C1} = 5.85837094$ και $C_{C2} = 5.54279275$.

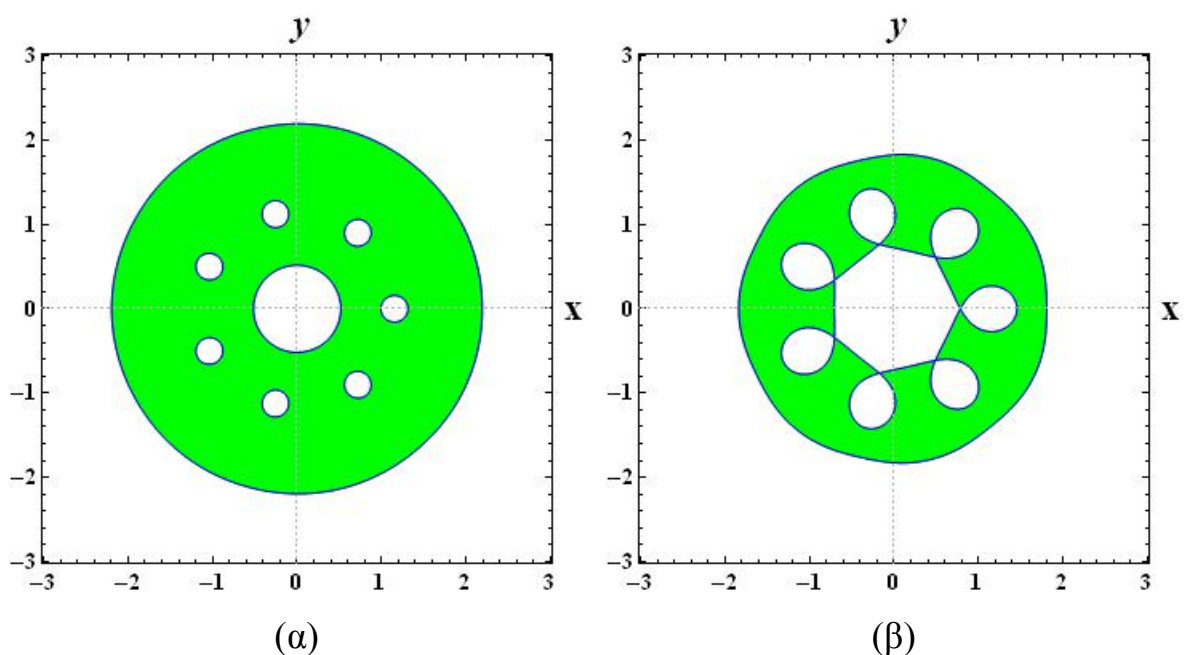
Σε όλα τα σχήματα που ακολουθούν, οι λευκές περιοχές είναι οι περιοχές επιτρεπτής κίνησης και οι έγχρωμες, εκείνες στις οποίες η κίνηση δεν είναι επιτρεπτή. Αναλυτικότερα:

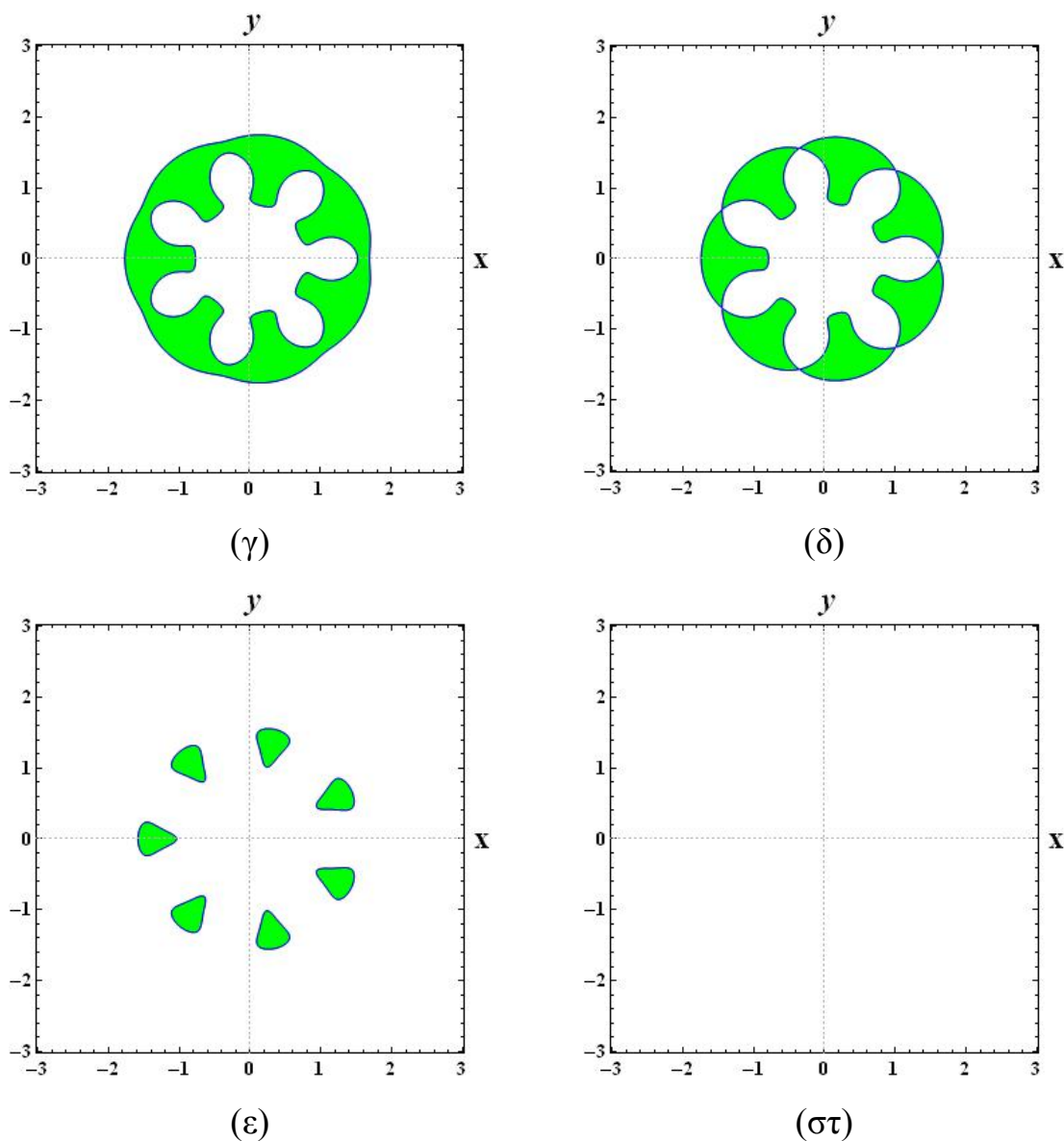
Σε κάθε τομή $C=C_a$ με $C > C_{A1}$, παρατηρούμε ότι οι ισοενεργειακές καμπύλες αποτελούνται: (1) από κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν κάθε μεγάλο σώμα και (2) από μία μεγαλύτερη κλειστή εξωτερική καμπύλη που περιβάλλει όλες τις προηγούμενες. Συνεπώς υπάρχουν $n+1$ κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν τα μεγάλα σώματα. Από αυτές οι n που περικλείουν τα περιφερειακά σώματα είναι ίσες μεταξύ τους, ενώ η άλλη που περιβάλλει το κεντρικό σώμα είναι διαφορετική όταν $\beta \neq 1$. Στο εσωτερικό των κλειστών αυτών περιοχών η κινητική ενέργεια του μικρού σώματος είναι θετική και συνεπώς η κίνησή του επιτρέπεται. Αν το μικρό σώμα λόγω των αρχικών του συνθηκών, βρεθεί στο εσωτερικό μιας τέτοιας κλειστής περιοχής, παγιδεύεται, δηλαδή η κίνησή του είναι περατωμένη. Η περιοχή του επιπέδου xy , που περιλαμβάνεται μεταξύ της μεγάλης κλειστής εξωτερικής καμπύλης και των $n+1$ κλειστών εσωτερικών, χαρακτηρίζεται από αρνητική κινητική ενέργεια. Συνεπώς στην περιοχή αυτή η κίνηση του μικρού σώματος απαγορεύεται. Αντίθετα, σε όλο το επίπεδο που εκτείνεται πέραν της μεγάλης περιβάλλουσας εξωτερικής καμπύλης, η κινητική ενέργεια ξαναγίνεται θετική και επομένως η κίνηση του μικρού σώματος είναι εκεί δυνατή (Σχήμα 4.8α).

Αν $C = C_{A1}$, τότε οι κλειστές περιοχές γύρω από τα μεγάλα περιφερειακά σώματα αγγίζουν την κλειστή καμπύλη που αναπτύσσεται γύρω από το κεντρικό σώμα στα σημεία των θέσεων ισορροπίας της ζώνης A_1 . Η τιμή αυτή του C σηματοδοτεί την πρώτη bifurcation (Σχήμα 4.8β).

Όταν $C_{C1} < C < C_{A1}$, δημιουργείται μία ενιαία εσωτερική κλειστή περιοχή που περιβάλλει όλα τα μεγάλα σώματα του σχηματισμού, ενώ εξακολουθεί να υφίσταται

και η εξωτερική κλειστή περιβάλλουσα καμπύλη που όμως συστέλλεται και πλησιάζει προς τα μεγάλα σώματα (Σχήμα 4.8γ). Συνεπώς η μόνη περιοχή παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος είναι αυτή που διαμορφώνεται γύρω από τα $n+1$ σώματα. Όταν $C = C_{C1}$ παρατηρούμε τη δεύτερη bifurcation, καθώς η ενιαία εσωτερική κλειστή καμπύλη αγγίζει την εξωτερική κλειστή καμπύλη στα σημεία των θέσεων ισορροπίας της ζώνης C_1 (Σχήμα 4.8δ). Από το σημείο αυτό και για χαμηλότερες τιμές της C δεν υπάρχουν πλέον περιοχές παγίδευσης. Όταν $C_{C2} < C < C_{C1}$ οι δύο κλειστές καμπύλες έχουν ενοποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται n νησίδες που αναπτύσσονται μεταξύ των περιφερειακών σωμάτων (Σχήμα 4.8ε). Στο εσωτερικό αυτών των νησίδων η κινητική ενέργεια είναι αρνητική και συνεπώς η κίνηση του μικρού σώματος εκεί, δεν είναι δυνατή. Δεν υπάρχουν πλέον περιοχές παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος, το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται παντού στο επίπεδο xy εκτός των νησίδων. Όσο ελαττώνεται περαιτέρω η τιμή της σταθεράς C , οι νησίδες αυτές συρρικνώνονται έως ότου για $C = C_{C2}$ εκφυλίζονται σε σημεία και κατόπιν εξαφανίζονται. Για τιμές $C < C_{C2}$ η κίνηση του μικρού σώματος είναι ελεύθερη παντού στο επίπεδο xy . (Σχήμα 4.8στ). Η παραπάνω παραμετρική εξέλιξη των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και για αυτές τις τιμές των μεταβλητών ν , β και ϵ είναι παρόμοια με αυτήν της βαρυτικής περίπτωσης.





Σχήμα 4.8. Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας και περιοχές επιτρεπτής (λευκές) και μη επιτρεπτής (έγχρωμες) κίνησης για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=0.1$. (α) $C=7$, (β) $C=C_{A1}=6.03909331$, (γ) $C=5.9$, (δ) $C=C_{C1}=5.85837094$, (ε) $C=5.65$ και (στ) $C=C_{C2}=5.54279275$

4.4.2 Περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev και $\epsilon < 0$

Οι τιμές των μεταβλητών ν , β και ϵ για τις οποίες θα εξετάσουμε την παραμετρική εξέλιξη των περιοχών παγίδευσης στο επίπεδο xy , αφορούν στην περίπτωση $\nu=7$, $\beta=2$ και $\epsilon = -0.05$. Το χαρακτηριστικό ζεύγος (ϵ, β) ανήκει στην περιοχή $I(7)$ του διαγράμματος καμπύλων διακλάδωσης για $\epsilon < 0$, του Σχήματος 3.11(Κεφ.

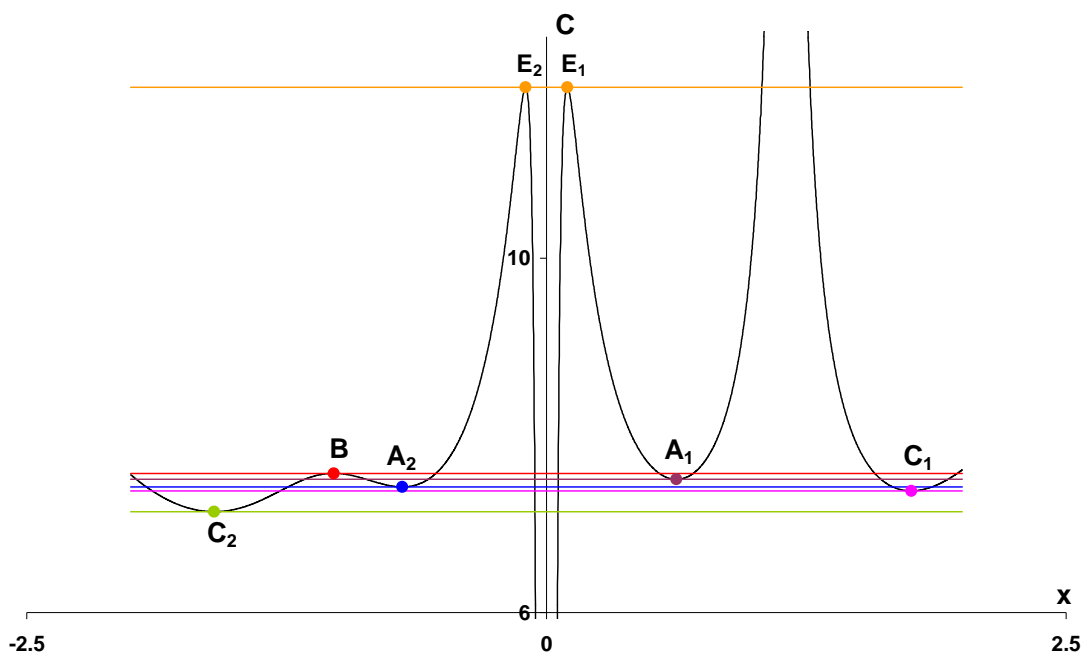
3^ο). Σε αυτήν την περιοχή τιμών εμφανίζονται 7 ζώνες ισορροπίας και η διάταξη των τιμών των Ιακωβιανών σταθερών τους C , έχει ως εξής :

$$C_{E1} \approx C_{E2} > C_B > C_{A1} > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$$

όπου :

$$\begin{aligned} C_{E1} \approx C_{E2} &= 11.9275865 \\ C_B &= 7.57197553 \\ C_{A1} &= 7.50317263 \\ C_{A2} &= 7.41838529 \\ C_{C1} &= 7.37392456 \\ C_{C2} &= 7.13836310 \end{aligned}$$

Για να διευκολυνθούμε στην παρακολούθηση της εξέλιξης των καμπύλων, θα χρησιμοποιήσουμε βοηθητικά το αντίστοιχο διάγραμμα $x - C$ στο οποίο θα κάνουμε διάφορες τομές παράλληλες στον άξονα των x (Σχήμα 4.9). Οι έγχρωμες κουκίδες αντιστοιχούν στα ακρότατα, άρα και στις τιμές όπου αναμένουμε αλλαγές στην τοπολογία τους (bifurcation points), καθώς οι τομές περνούν από αυτά τα σημεία και τέμνουν τον άξονα C στην αντίστοιχη τιμή. Στα επί μέρους Σχήματα 4.10, με λευκό χρώμα σημειώνουμε τις περιοχές όπου επιτρέπεται η κίνηση, ενώ οι έγχρωμες περιοχές είναι περιοχές όπου η κίνηση είναι απαγορευμένη.



Σχήμα 4.9. Βοηθητικό διάγραμμα $x-C$ παρακολούθησης της εξέλιξης των περιοχών κίνησης

Έτσι, όταν $C > C_{E1,E2}$ (Σχήμα 4.10α), διαμορφώνονται μόνο n κλειστές περιοχές επιτρεπτής κίνησης γύρω από τα n περιφερειακά μεγάλα σώματα που αποτελούν περιοχές παγίδευσης. Όλες αυτές οι περιοχές περιβάλλονται από μία κλειστή καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στην ευρύτερη περιοχή του επιπέδου xy , πέρα από την οποία η κίνηση του μικρού σώματος είναι τελείως ελεύθερη.

Όταν $C = C_{E1,E2}$ τότε, γύρω από το κεντρικό πρωτεύον διαμορφώνονται δύο κλειστές περιοχές που το περιβάλλουν και οι οποίες είναι δυσδιάκριτες (Σχήμα 4.10β). Στην εσωτερική η κίνηση είναι απαγορευμένη. Αυτή με τη σειρά της περιβάλλεται από μία δακτυλιοειδή κλειστή περιοχή όπου η κίνηση είναι επιτρεπτή. Όσο η σταθερά Jacobi ελαττώνεται και για $C_{E1,E2} > C > C_B$ αυτές οι δύο περιοχές γύρω από το πρωτεύον σώμα διευρύνονται και μπορούμε εύκολα να τις διακρίνουμε. Επιπλέον οι κλειστές περιοχές που περιβάλλουν τα n περιφερειακά σώματα διατηρούν τη μορφή τους αλλά διευρύνονται και αυτές με την ελάττωση της σταθεράς C (Σχήμα 4.10γ). Όλες αυτές οι περιοχές περιβάλλονται από μία κλειστή καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στην ευρύτερη περιοχή του επιπέδου xy , πέρα από την οποία η κίνηση του μικρού σώματος είναι τελείως ελεύθερη, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση για $e > 0$. Η μορφή αυτή των διαγραμμάτων διατηρείται μέχρις ότου η C λάβει την τιμή $C = C_B$.

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε, ότι η ύπαρξη της εξωτερικής κλειστής περιβάλλουσας καμπύλης μηδενικής ταχύτητας, παρατηρείται μέχρις ότου η τιμή της σταθεράς C γίνει ίση $C = C_{C1}$. Επομένως κρίνεται δεδομένη η ύπαρξη της μέχρι την τιμή αυτή και θεωρείται άσκοπη η επανάληψη της περιγραφής της έως τότε. Επίσης άσκοπη θεωρείται και η συνεχής αναφορά στην ύπαρξη της κεντρικής απαγορευμένης περιοχής κίνησης περί του κεντρικού σώματος, αφού αυτή παρατηρείται μέχρις ότου η τιμή της σταθεράς C γίνει ίση με τη χαμηλότερη τιμή C των υπάρχουσών ζωνών ισορροπίας την $C = C_{C2}$.

Όταν $C = C_B$, οι κλειστές περιοχές της επιτρεπτής κίνησης που αναπτύσσονται γύρω από τα περιφερειακά πρωτεύοντα έρχονται σε επαφή. (Σχήμα 4.10δ). Από την τιμή αυτή και για τιμές $C_B > C > C_{A1}$, παρατηρούμε ότι δημιουργείται μία ενιαία κλειστή περιοχή επιτρεπτής κίνησης (Σχήμα 4.10ε). Κατά συνέπεια διαμορφώνονται δύο

περιοχές παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος, αυτή που μόλις περιγράψαμε και η περιοχή ανάμεσα στην εσωτερική και εξωτερική περιβάλλουσα του κεντρικού σώματος.

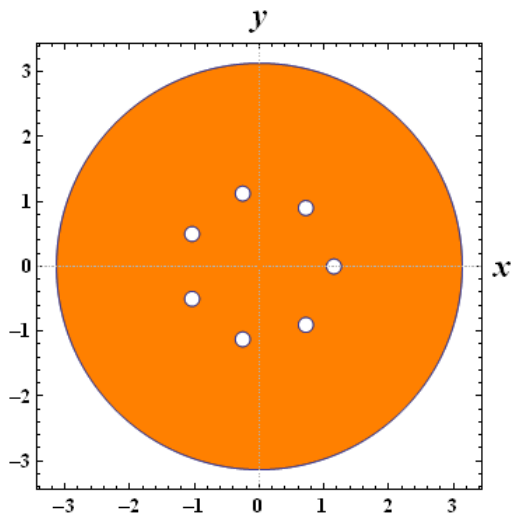
Όταν $C=C_{A1}$ στα σημεία της ζώνης αυτής αρχίζουν να δημιουργούνται οι πρώτες δίοδοι επικοινωνίας μεταξύ των δύο περιοχών παγίδευσης της κίνησης (Σχήμα 4.10στ). Για $C_{A1} > C > C_{A2}$ παρατηρούμε διεύρυνση των διαύλων επικοινωνίας των περιοχών επιτρεπτής κίνησης γύρω από τα n περιφερειακά σώματα και το κεντρικό σώμα. Έχουν δημιουργηθεί n νησίδες απαγορευμένης κίνησης μεταξύ αυτών των περιοχών, οι οποίες συρρικνώνονται με την ελάττωση της σταθεράς C έως την τιμή $C = C_{A2}$ (Σχήμα 4.10ζ).

Για $C = C_{A2}$ οι προηγούμενες n νησίδες απαγορευμένης κίνησης έχουν εκφυλιστεί σε σημεία, ακριβώς εκεί που βρίσκονται οι θέσεις ισοροπίας της ζώνης A_2 . Όταν η σταθερά C παίρνει τιμές τέτοιες ώστε $C_{A2} > C > C_{C1}$, παρατηρούμε ότι δημιουργείται μία ενιαία κλειστή περιοχή επιτρεπτής κίνησης, στο κέντρο της οποίας εξακολουθεί να υπάρχει μία πολύ μικρότερη κλειστή περιοχή, που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον, όπου η κίνηση είναι απαγορευμένη (Σχήμα 4.10η). Κατά συνέπεια διαμορφώνεται μόνο μία μεγάλη περιοχή παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος.

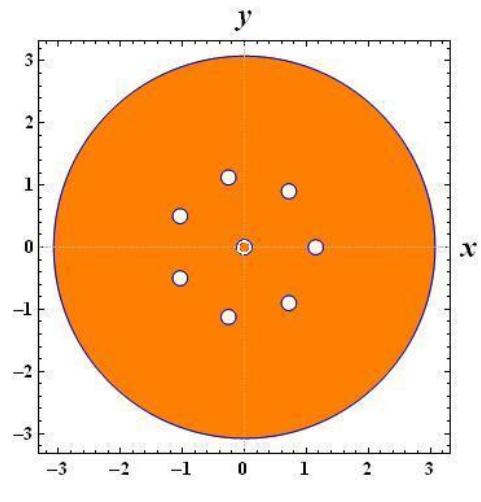
Για $C = C_{C1}$, στα σημεία της ζώνης αυτής αρχίζουν να δημιουργούνται οι πρώτες δίοδοι επικοινωνίας της εσωτερικής περιοχής επιτρεπτής κίνησης με την εξωτερική περιοχή, όπου η κίνηση είναι ελεύθερη (Σχήμα 4.10θ).

Όταν $C_{C1} > C > C_{C2}$, η συνένωση της προηγούμενα κλειστής περιοχής με την εξωτερική ελεύθερη, δίνει τη δυνατότητα στο μικρό σώμα, να μπορεί να κινηθεί ελεύθερα από τον εσωτερικό κύκλο των μεγάλων σωμάτων, προς τα έξω και αντίστροφα. Τώρα πλέον, εκτός της μικρής απαγορευμένης περιοχής γύρω από το κεντρικό πρωτεύον, δημιουργούνται n νησίδες απαγορευμένης κίνησης (Σχήμα 4.10ι), των οποίων η έκταση περιορίζεται όσο η τιμή της C τείνει προς την C_{C2} , οπότε εκφυλίζονται και εξαφανίζονται. Για όλο αυτό το διάστημα τιμών της C , δεν υπάρχει καμία περιοχή παγίδευσης του μικρού σώματος. Τέλος, για τιμές $C \leq C_{C2}$, η

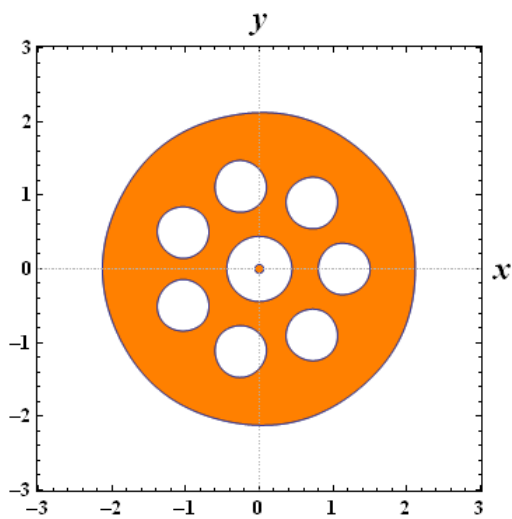
κίνηση του μικρού σώματος είναι επιτρεπτή σε όλο το επίπεδο εκτός από μία μικρή κλειστή περιοχή που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον (Σχήμα 4.10ια).



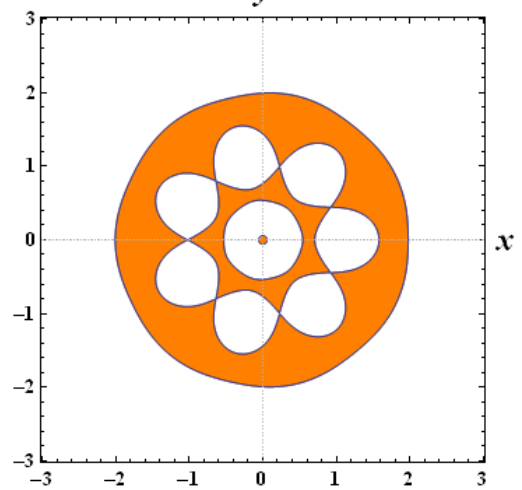
(α)



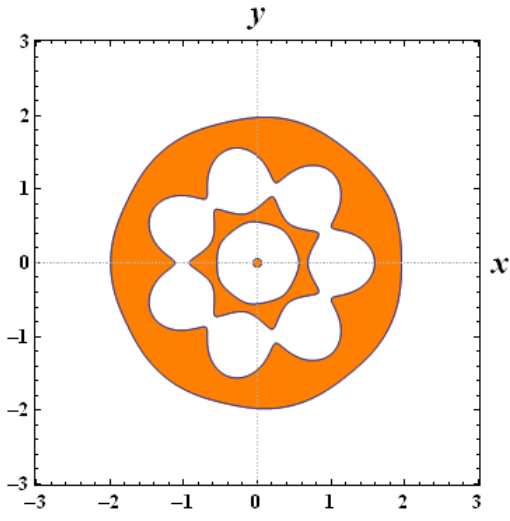
(β)



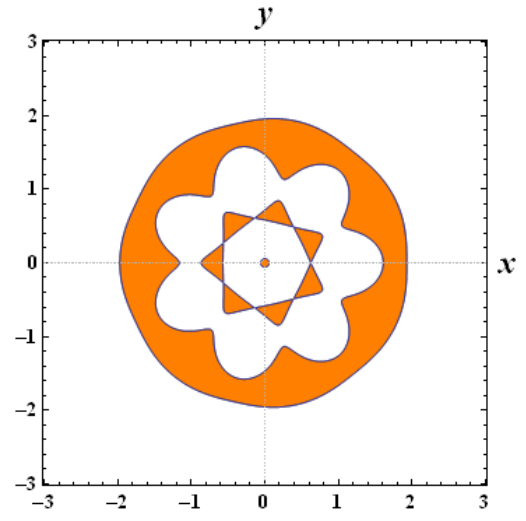
(γ)



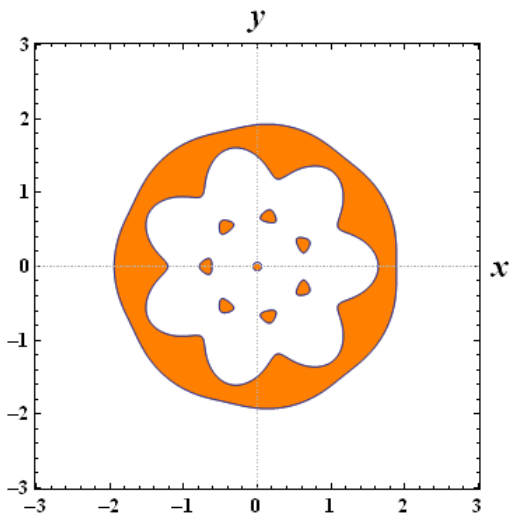
(δ)



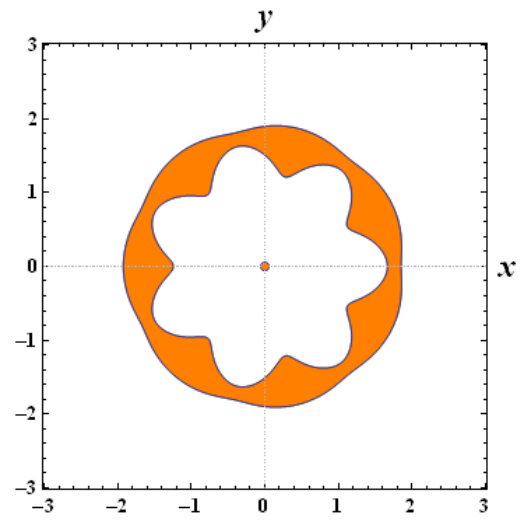
(ε)



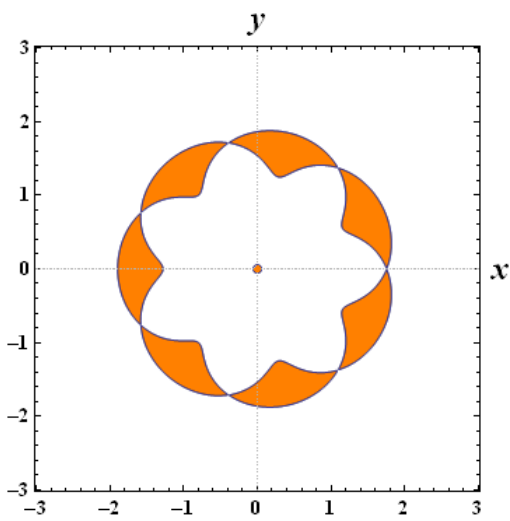
(σ)



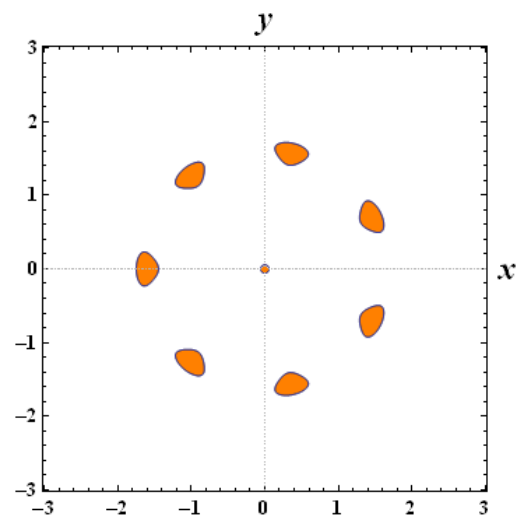
(ζ)



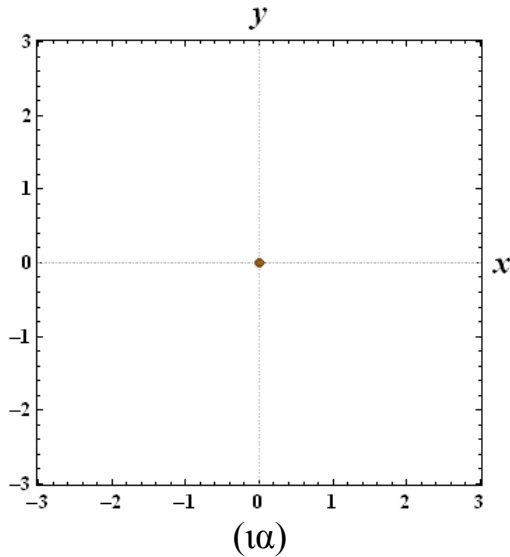
(η)



(θ)



(ι)



Σχήμα 4.10. Διάφορες φάσεις εξέλιξης των περιοχών επιτρεπτής (λευκές) και μη επιτρεπτής (έγχρωμες) κίνησης για την περίπτωση $\nu=7$, $\beta=2$ και $e=-0.05$.

- (α) $C=12$ ($C > C_{E1,E2}$), (β) $C=11.9$ ($C \approx C_{E1,E2}$), (γ) $C=7.85$ ($C_{E1,E2} > C > C_B$),
 (δ) $C=7.57197553$ ($C = C_B$), (ε) $C=7.54$ ($C_B > C > C_{A1}$), (στ) $C=7.50317263$
 ($C = C_{A1}$), (ζ) $C=7.45$ ($C_{A1} > C > C_{A2}$), (η) $C=7.41838529$ ($C = C_{A2}$),
 (θ) $C=7.37392456$ ($C = C_{C1}$), (ι) $C=7.2$ ($C_{C1} > C > C_{C2}$) και
 (1α) $C=7.1383631$ ($C = C_{C2}$)

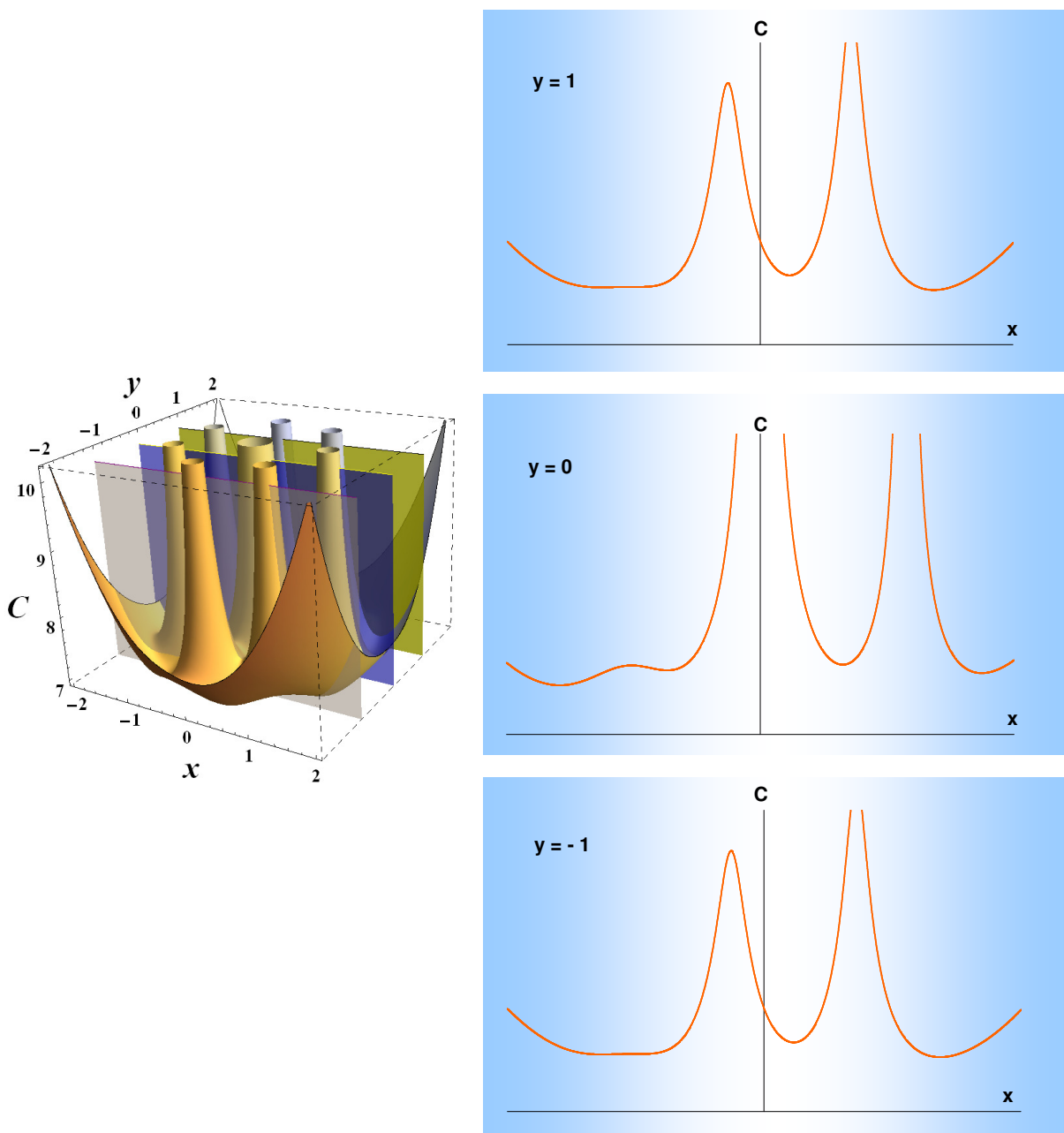
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ $C=C(x)$ -ΕΣΤΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ-ΕΣΤΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

5.1 Διαγράμματα των καμπύλων $C=C(x)$ -Γενικά χαρακτηριστικά

Εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη και την κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς του μικρού σώματος εντός του δυναμικού πεδίου που δημιουργείται στο δακτυλιοειδές πρόβλημα (αλλά και σε άλλα δυναμικά συστήματα αυτής της κατηγορίας, όπως το περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, το πρόβλημα των 2+2 σωμάτων καθώς και οι φωτοβαρυτικές εκδοχές τους, κ.λ.π), αποτελούν τα διαγράμματα της Ιακωβιανής σταθεράς C , συναρτήσει της τετμημένης x , για διάφορες τιμές της τεταγμένης y . Πιο συγκεκριμένα, ο εντοπισμός των θέσεων ισορροπίας, η παραμετρική μεταβολή τους, τα εστιακά σημεία και οι εστιακές καμπύλες, αλλά και η αναζήτηση των απλών συμμετρικών περιοδικών τροχιών στην επίπεδη κίνηση, η εξέλιξη των οικογενειών, οι διακλαδώσεις και η παραμετρική μεταβολή τους πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των διαγραμμάτων αυτών.

Τα διαγράμματα $x-C$, λαμβάνονται από την τομή της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας της επίπεδης κίνησης $C = C(x, y)$ με το επίπεδο $y=y_i$. Τα σχήματα και διαγράμματα που ακολουθούν (Σχήμα 5.1) αναφέρονται στη βαρυτική περίπτωση για $\nu=7$ και $\beta=2$. Διακρίνονται οι τομές της επιφάνειας $C = C(x, y)$ με τα επίπεδα $y = -1$, $y = 0$ και $y = 1$ και τα αντίστοιχα διαγράμματα $x-C$.



Σχήμα 5.1. Επιφάνεια $C=C(x,y)$ η οποία τέμνεται από τα επίπεδα $y = 0$ και $y = \pm 1$ και τα αντίστοιχα διαγράμματα $x-C$

Ειδικότερα, τα διαγράμματα που λαμβάνονται για $y=0$, είναι αυτά από τα οποία αντλούμε τις περισσότερες πληροφορίες για τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος, που αφορούν κυρίως στις επίπεδες κινήσεις. Όσον αφορά στα γενικά χαρακτηριστικά των τελευταίων μπορούμε να πούμε ότι:

- Εμφανίζουν διαύλους (channels) επιτρεπτής κίνησης στις περιοχές των primaries οι οποίοι αποτελούν τις επίπεδες τομές των «καμινάδων» για $y=0$.
Ειδικότερα :

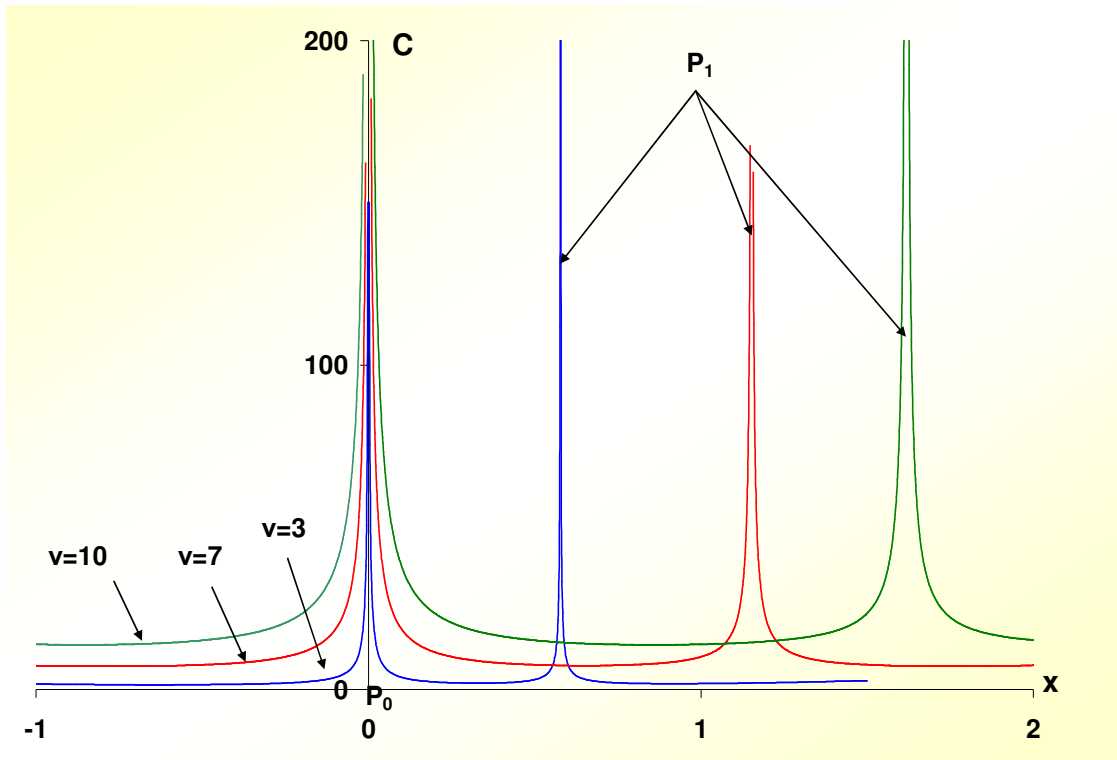
- Όταν το n είναι περιττός, τότε το διάγραμμα δεν είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα C , ενώ εμφανίζονται δύο τέτοιοι δίαυλοι, ο ένας στην περιοχή του κεντρικού primary P_0 και το δεύτερο στην περιοχή του σώματος P_1 .
- Όταν το n είναι άρτιος, τότε το διάγραμμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα C , και εμφανίζονται τρεις τέτοιοι δίαυλοι ο ένας από τους οποίους γύρω από το κεντρικό primary και δυο άλλοι που είναι ίδιοι γύρω από τα περιφερειακά σώματα P_1 και $P_{(n/2)+1}$.
- Οι «ασύμπτωτες» των διαύλων αυτών διέρχονται από τις θέσεις των primaries.
- Εμφανίζουν τοπικά ακρότατα τα οποία απεικονίζουν τις θέσεις ισορροπίας πάνω στον άξονα x . Ειδικότερα :
 - Όταν το n είναι περιττός, εμφανίζονται σημεία ισορροπίας, συγγραμμικά και τριγωνικά, που αντιπροσωπεύουν όλες τις υπάρχουσες ζώνες ισορροπίας.
 - Όταν το n είναι άρτιος, εμφανίζονται μόνο τα συγγραμμικά σημεία ισορροπίας.

5.2 Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C=C(x)$

5.2.1 Μεταβολή των καμπύλων με την παράμετρο n

Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο n (έχουν σχεδιασθεί μόνο τα τμήματα των καμπύλων που αναπτύσσονται στις περιοχές των primaries P_0 και P_1) για σταθερές τιμές των β ($=2$) και e ($=0$). Όσο αυξάνει η τιμή του n , παρατηρούμε τα εξής :

- Η βάση της κεντρικής «καμινάδας» περί το P_0 διευρύνεται και μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της C .
- Οι περιφερειακές «καμινάδες» απομακρύνονται από το κέντρο (αρχή) και παράλληλα οι βάσεις τους διευρύνονται και μετατοπίζονται και αυτές προς μεγαλύτερες τιμές της C .



Σχήμα 5.2. Μεταβολή του διαγράμματος $x-C$ στην περιοχή της κεντρικής καμινάδας P_0 και του περιφερειακού P_1 , για $\beta=2$ και διάφορες τιμές του ν ($=3, 7$ και 10)

Στις επόμενες δύο παραγράφους θα εξετάσουμε τη μεταβολή των καμπύλων με τις άλλες δύο παραμέτρους για ένα δεδομένο ν .

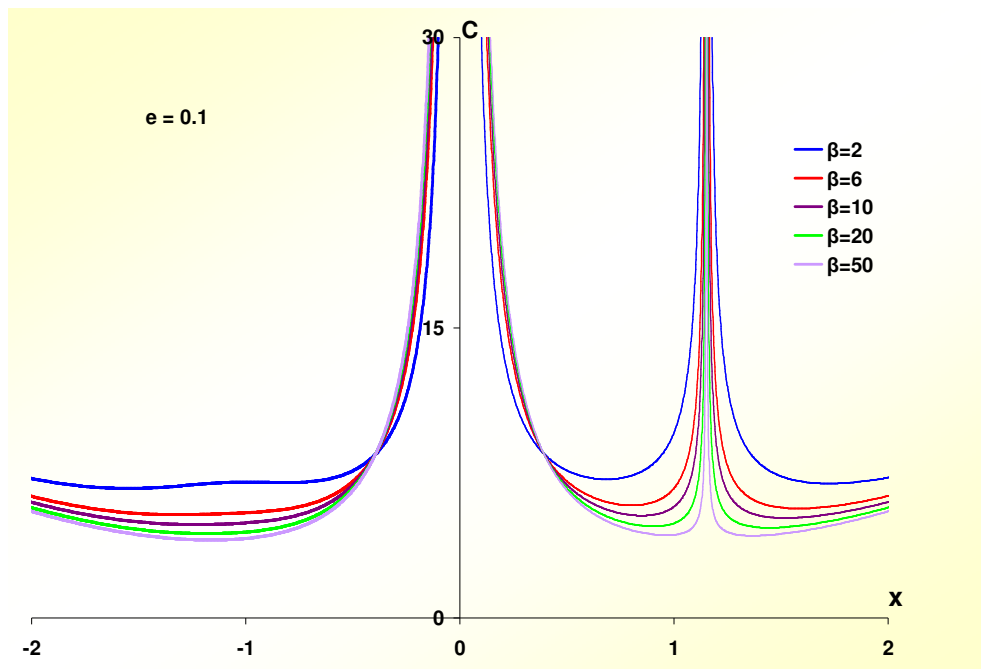
5.2.2 Μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο μάζας β

Διατηρώντας τις τιμές των παραμέτρων ν και e σταθερές και εφόσον $e>0$ οι καμπύλες παρουσιάζουν παρόμοια μορφή και εξέλιξη με αυτήν της βαρυτικής περίπτωσης. Το Σχήμα 5.3α δείχνει τη μεταβολή για διάφορες τιμές της β όταν $\nu=7$ και $e=0.1$.

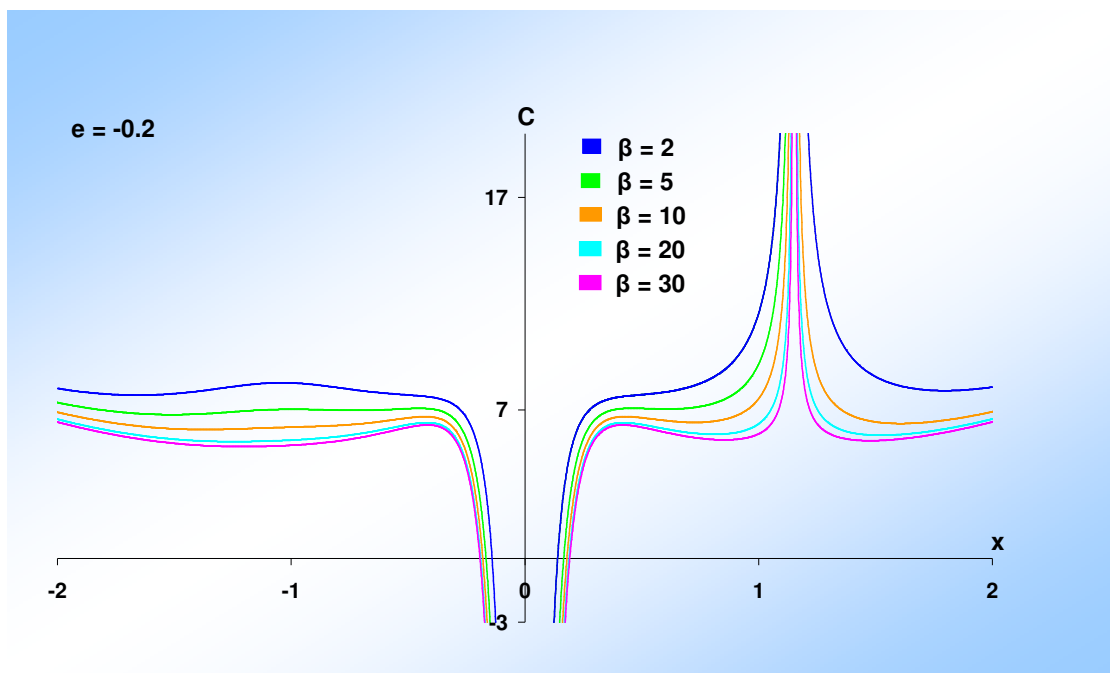
Όταν όμως $e<0$ εμφανίζονται σημαντικές διαφοροποιήσεις που οφείλονται στην «αναδίπλωση» προς το εσωτερικό της «καμινάδας» που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον σώμα. Το Σχήμα 5.3β δείχνει τη μεταβολή των καμπύλων αυτών για

διάφορες τιμές της β όταν $\nu=7$ και $e = -0.2$. Πιο συγκεκριμένα, από τα δύο Σχήματα 5.3α και 5.3β επισημαίνουμε ότι:

- Όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου μάζας β , παρατηρείται μία διεύρυνση του αναδιπλουμένου τμήματος της κεντρικής καμινάδας και μια στένωση της περιφερειακής καμινάδας. Ταυτόχρονα μετατοπίζονται οι βάσεις των διαύλων προς χαμηλότερες τιμές της C .
- Η μετατόπιση αυτή δημιουργεί μία "συσσώρευση" των καμπύλων $C=C(x)$ προς κάποια οριακή θέση η οποία εξαρτάται από την τιμή της e .



(α)



(β)

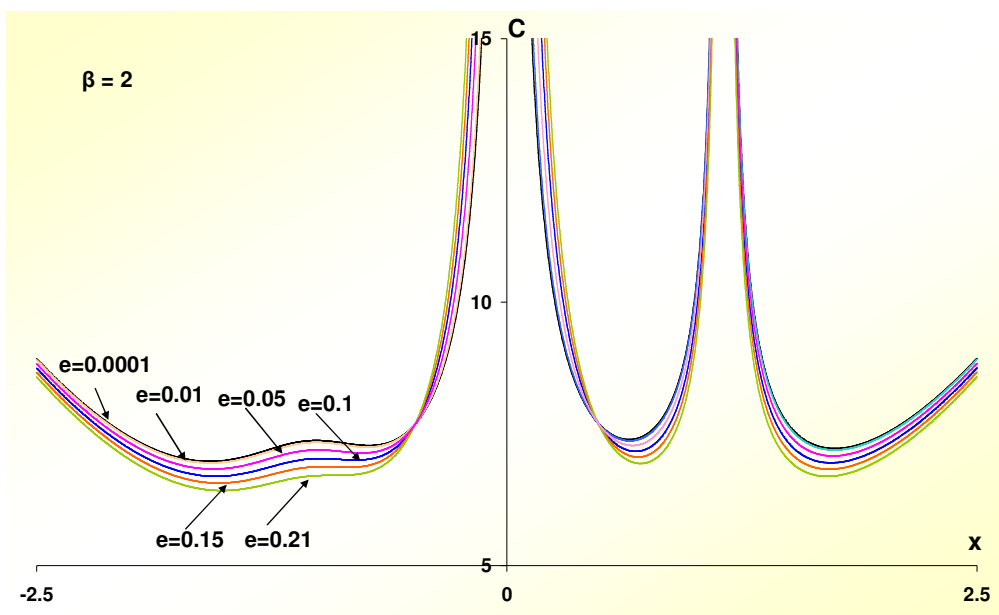
Σχήμα 5.3. Καμπύλες $C=C(x)$ για $\nu=7$, διάφορες τιμές του β και σταθερή τιμή της e . (α) $e=0.1$, (β) $e=-0.2$

5.2.3 Μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο e

Διατηρώντας τις παραμέτρους ν και β σταθερές, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $e > 0$

Όπως συμβαίνει στη βαρυντική περίπτωση, όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου e , παρατηρείται μία διεύρυνση της βάσης της κεντρικής καμινάδας με αντίστοιχη στένωση του περιφερειακού διαύλου, ενώ ταυτόχρονα μετατοπίζονται οι βάσεις των καμινάδων προς χαμηλότερες τιμές της C (Σχήμα 5.4).

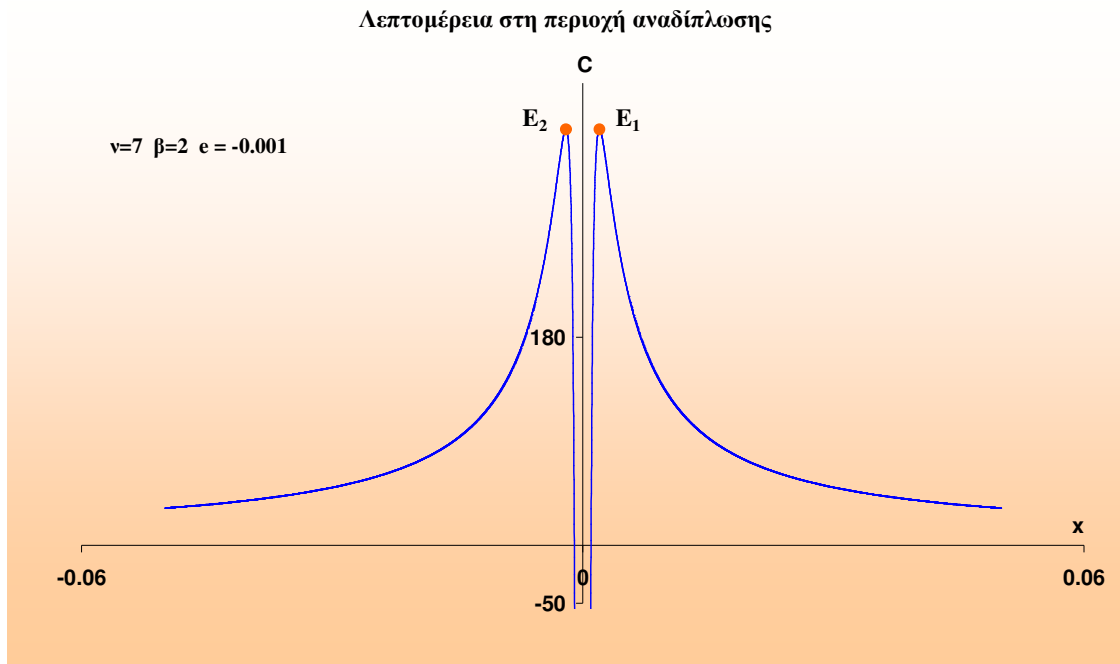


Σχήμα 5.4. Παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο $e > 0$ ($\nu=7$, $\beta=2$)

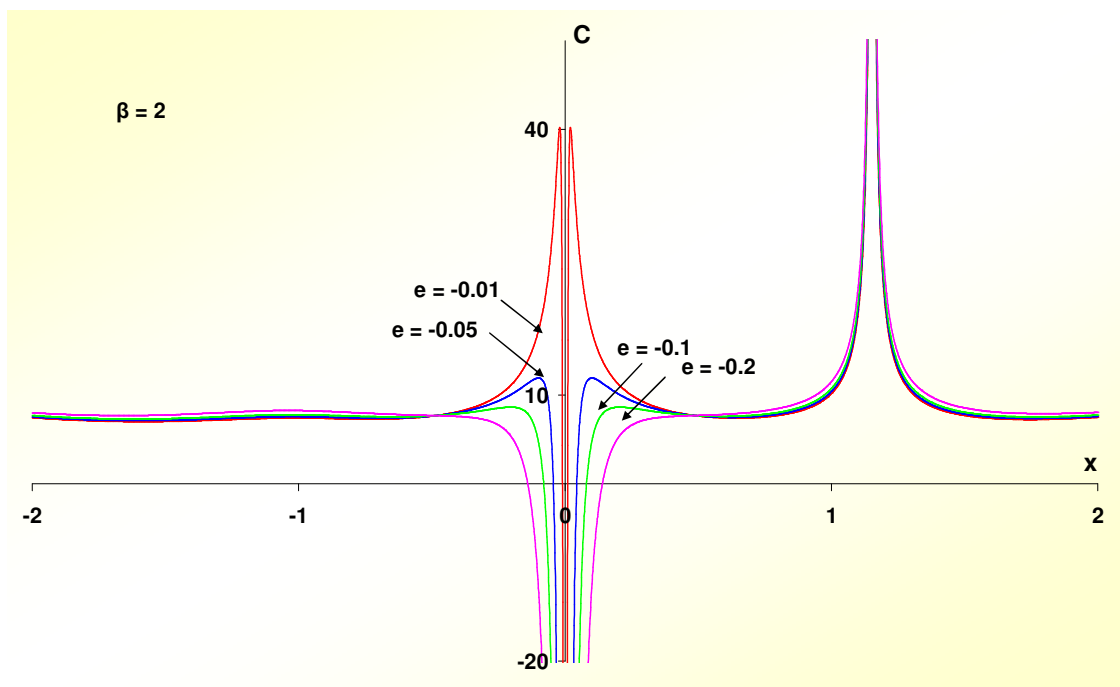
(ii) $e < 0$

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην Παράγραφο 3.5.3 και λαμβάνοντας υπόψη μας το διάγραμμα διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11 (Κεφ 3^ο), όπου απεικονίζεται η εξέλιξη τους στο επίπεδο $e\beta$, αναμένουμε αντίστοιχες μεταβολές της μορφής των καμπύλων $C=C(x)$ μηδενικής ταχύτητας κατά την παραμετρική εξέλιξή τους με $e < 0$. Οι μεταβολές αυτές οφείλονται πρωτίστως στην αναδίπλωση της «καμινάδας» γύρω από την περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος προς το εσωτερικό της, λεπτομέρεια της οποίας δείχνεται στο Σχήμα 5.5. Η παραμετρική μεταβολή των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας $C=C(x)$ για $\nu=7$, $\beta=2$ και $e < 0$ απεικονίζεται στο Σχήμα 5.6. Παρατηρούμε ότι όταν η απόλυτη τιμή της e αυξάνει, τότε :

- Το χείλος της αναδίπλωσης εξομαλύνεται και ταυτόχρονα μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές της Ιακωβίνικης σταθεράς C
- Παρουσιάζεται μια διεύρυνση του ανεστραμμένου τμήματος της κεντρικής καμινάδας
- Παρόμοια διεύρυνση παρατηρείται και στις περιφερειακές καμινάδες, με παράλληλη μετατόπιση της βάσης τους προς μεγαλύτερες τιμές της C .

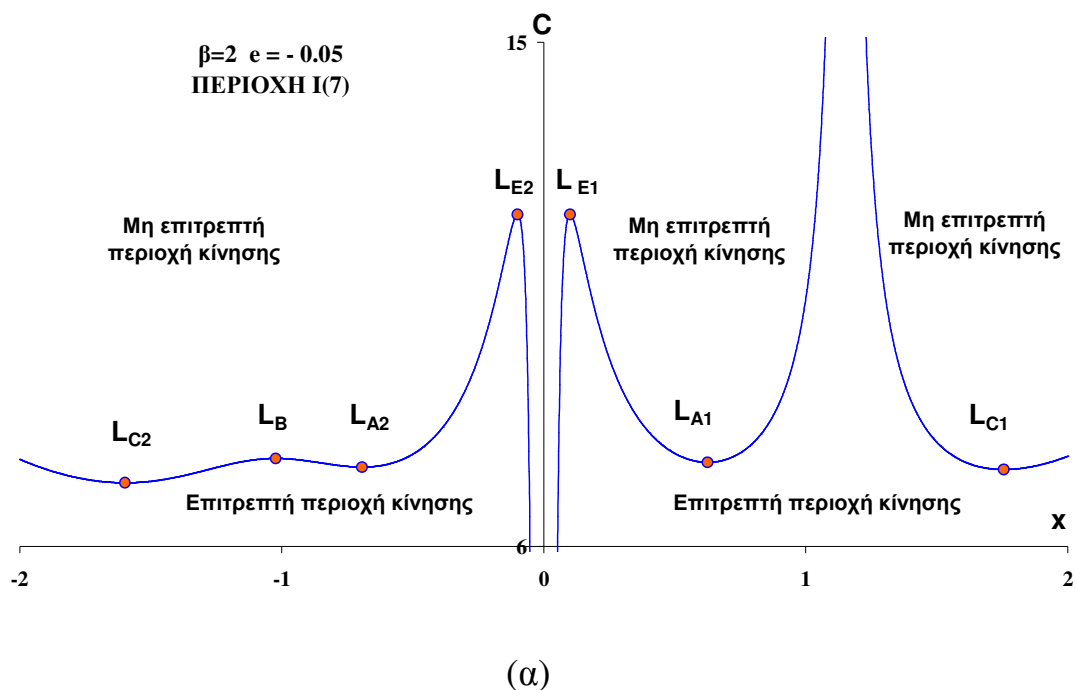


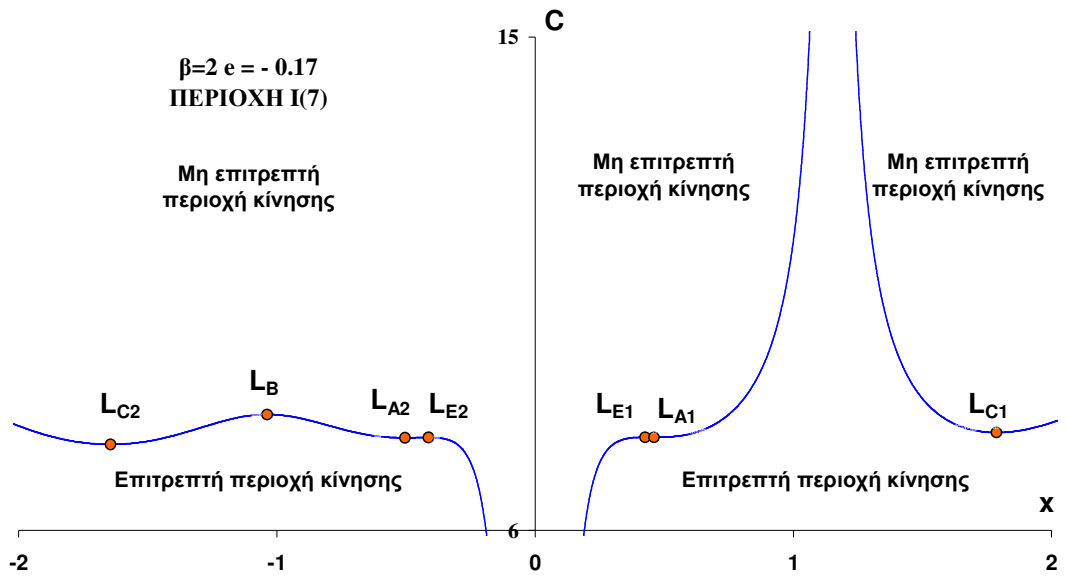
Σχήμα 5.5. Λεπτομέρεια της καμπύλης $C=C(x)$ στην περιοχή του κεντρικού primary, όπου εμφανίζεται η αναδίπλωση της καμπύλης



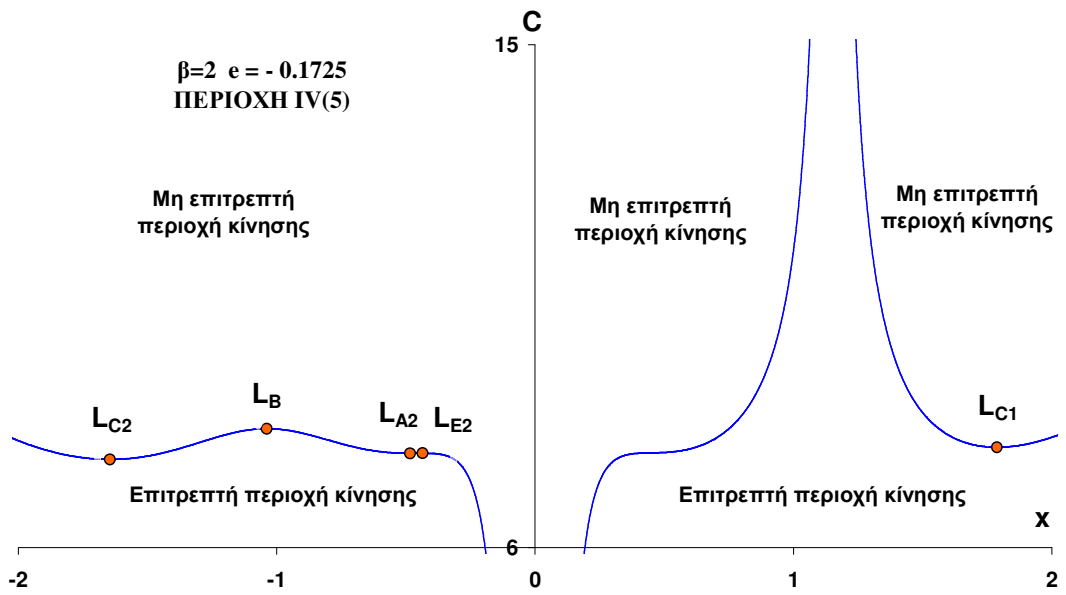
Σχήμα 5.6. Παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων $x-C$ με την παράμετρο $e < 0$ ($\nu=7, \beta=2$)

Στο Σχήμα 5.7 που ακολουθεί, παρακολουθούμε την εξέλιξη των ακροτάτων των καμπύλων αυτών (που αντιστοιχούν στις θέσεις ισορροπίας πάνω στον άξονα των x , για $\nu=7$ και $\beta=2$) και συνεπώς και των ζωνών ισορροπίας. Οι καμπύλες των Σχημάτων 5.7α και 5.7β έχουν σχεδιασθεί για $\epsilon=-0.05$ και $\epsilon=-0.17$ αντίστοιχα, τιμές οι οποίες εμπίπτουν στην περιοχή I (επτά ζώνες ισορροπίας) του διαγράμματος των καμπύλων διακλάδωσης του Σχήματος 3.11 (Κεφ 3^ο). Οι καμπύλες του Σχήματος 5.7γ και 5.7δ έχουν σχεδιασθεί για $\epsilon=-0.1725$ και $\epsilon=-0.17375$ αντίστοιχα, τιμές οι οποίες εμπίπτουν στην περιοχή IV (πέντε ζώνες ισορροπίας) η πρώτη και περιοχή V (τρεις ζώνες ισορροπίας) η δεύτερη, του ίδιου διαγράμματος.

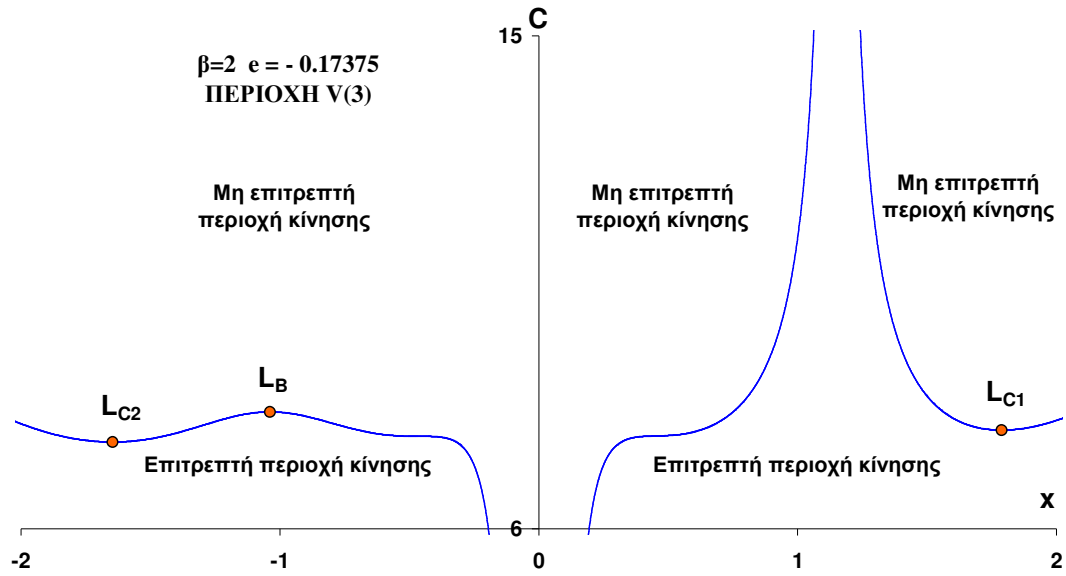




(β)



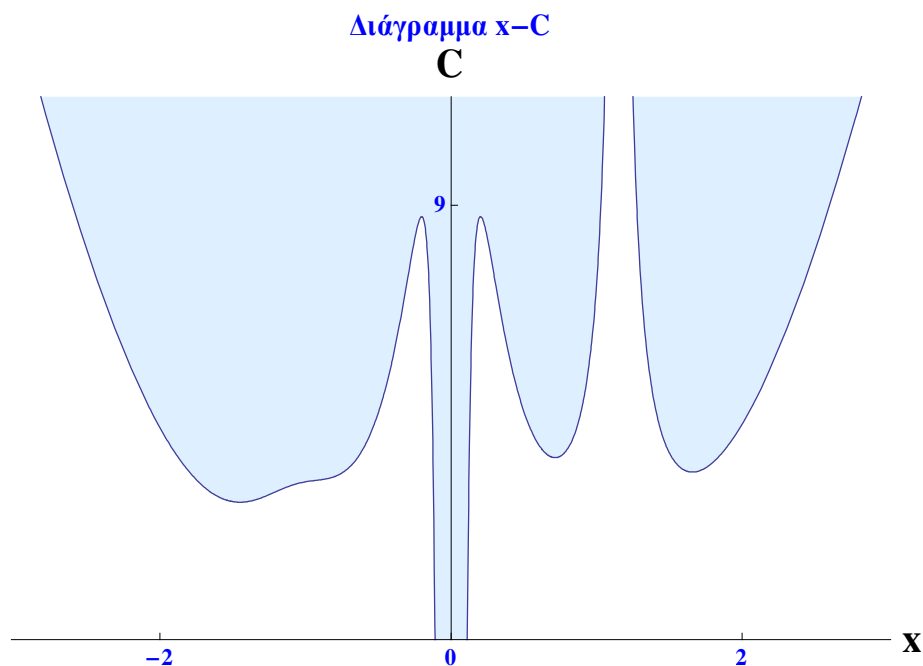
(γ)



(δ)

Σχήμα 5.7. Καμπύλες $C=C(x)$ με τις επιτρεπτές και μη-επιτρεπτές περιοχές κίνησης και τα ακρότατα της C για $\beta=2$ και διάφορες τιμές (αρνητικές) του e , στην περιοχή του κεντρικού σώματος. (α) $e=-0.05$ (περιοχή I), (β) $e=-0.17$ (περιοχή I), (γ) $e=-0.1725$ (περιοχή IV) και (δ) $e=-0.17375$ (περιοχή V)

Στα παραπάνω διαγράμματα $x-C$, εκτός των άλλων σημειώσαμε τις επιτρεπτές και απαγορευμένες περιοχές κίνησης, οι οποίες διαχωρίζονται από τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας στο επίπεδο $x-C$. Μια πιο σαφή εικόνα των περιοχών κίνησης αποτυπώνεται στο Σχήμα 5.8 όπου με λευκό χρώμα παριστάνονται οι περιοχές επιτρεπτής κίνησης, ενώ οι έγχρωμες περιοχές αποτελούν τις περιοχές απαγορευμένης κίνησης.

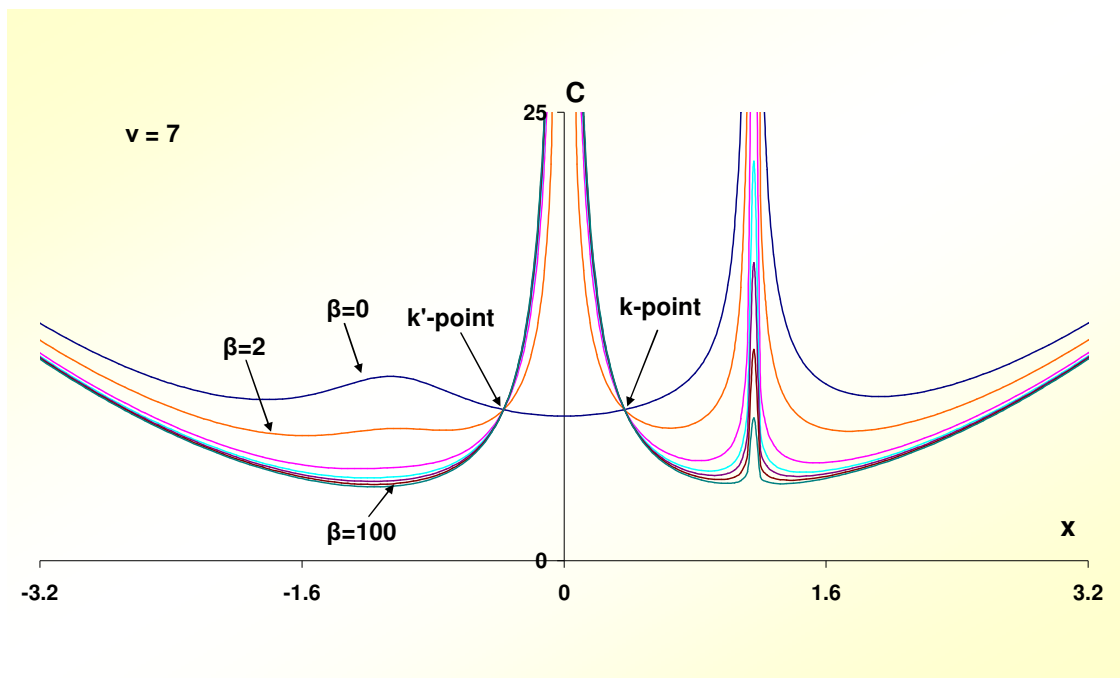


Σχήμα 5.8. Επιτρεπτές (λευκές) και απαγορευμένες (έγχρωμες) περιοχές κίνησης, για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e = -0.1$

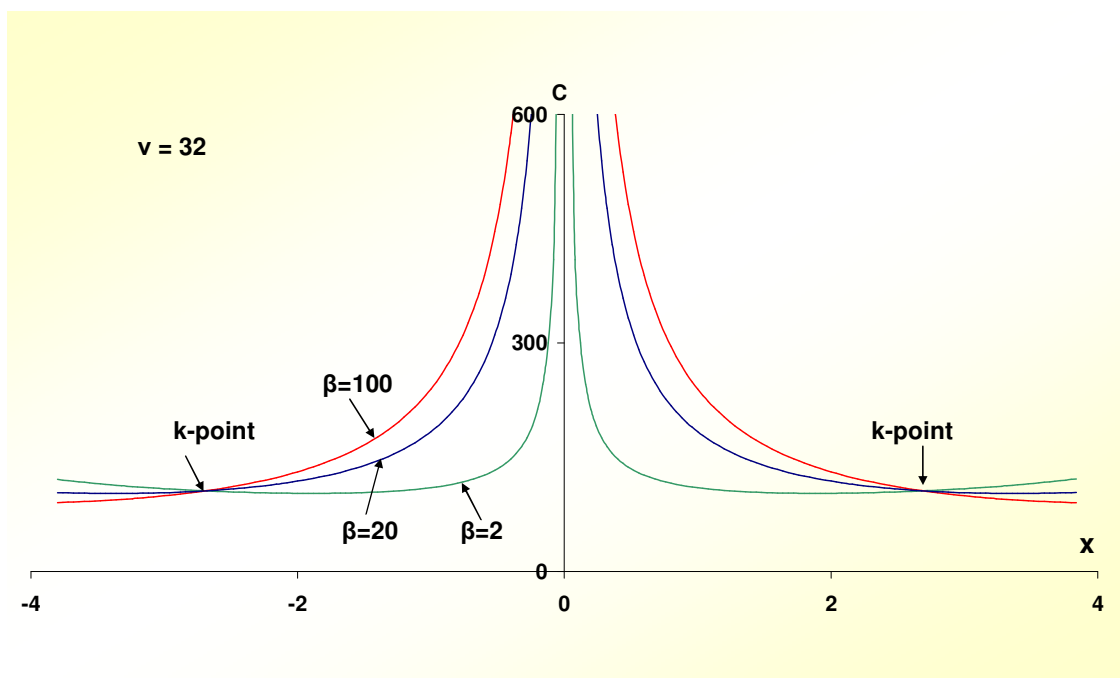
5.3 Εστιακά σημεία των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας-Εστιακές καμπύλες

5.3.1 Γενικά-Βαρυτική περίπτωση

Κατά τη διάρκεια της μελέτης των διαγραμμάτων $x-C$ (για $y=0$) στο βαρυτικό δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων (Kalnouridis, 2004), διαπιστώθηκε ότι οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας που είχαν σχεδιασθεί για μία τιμή της παραμέτρου ν και για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β , διέρχονταν όλες από δύο σημεία που βρίσκονταν κοντά στο κεντρικό πρωτεύον και εκατέρωθεν του άξονα των C . Τα σημεία αυτά συμβολίσθηκαν με k και k' (στη σχετική βιβλιογραφία αναφέρονται ως k -points) ονομάσθηκαν δε, λόγω της ιδιότητάς τους αυτής, εστιακά σημεία (focal points). Αποδείχθηκε η ύπαρξή τους για όλες τις τιμές της παραμέτρου ν και προσδιορίσθηκαν οι συντεταγμένες τους (x_k, C_k) και $(x_{k'}, C_{k'})$ για διάφορες περιπτώσεις κανονικών πολυγωνικών σχηματισμών (Σχήματα 5.9α, 5.9β).



(α)



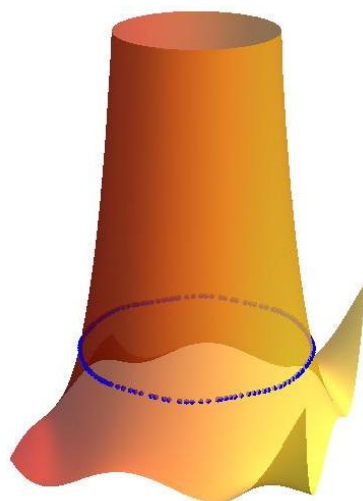
(β)

Σχήμα 5.9. Εστιακά σημεία στα διαγράμματα $x-C$ για τη βαρυτική περίπτωση (Kalvouridis, 2004). (α) $\nu=7$, (β) $\nu=32$

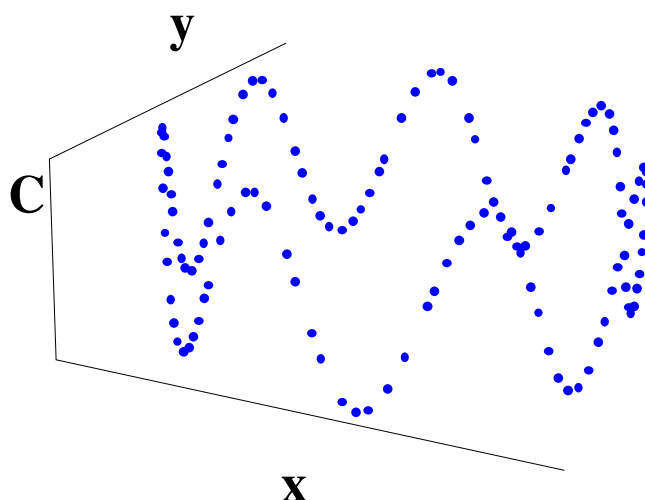
Επεκτείνοντας τη μελέτη μας, αναζητήσαμε παρόμοια σημεία και για τιμές $y \neq 0$, όπου διαπιστώσαμε την ύπαρξή τους και βρήκαμε ότι ανήκουν σε μία συνεχή κλειστή καμπύλη κυματοειδούς μορφής, που την ονομάζουμε **εστιακή καμπύλη**.

Αυτή η καμπύλη αναπτύσσεται πάνω στην επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας η οποία περιβάλλει το κεντρικό primary (κεντρική «καμινάδα») και είναι προφανές ότι αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο όλων των εστιακών σημείων που εμφανίζονται (Σχήματα 5.10α, β).

Η σχεδίαση της χωρικής αυτής καμπύλης επιτυγχάνεται με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε (είτε σε κώδικα Fortran, είτε σε κώδικα Mathematica), και βασίζεται στη σάρωση του άξονα y της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$, με σταθερό βήμα δικής μας επιλογής. Οι οριακές τιμές $y=\pm y_c$ της σάρωσης καθορίζονται από εκείνα τα επίπεδα, που έχουν ένα μόνο σημείο επαφής με την επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας γύρω από το κεντρικό σώμα.



(α)



(β)

Σχήμα 5.10. (α) Η εστιακή καμπύλη όπως αυτή διαμορφώνεται στην

επιφάνεια της κεντρικής καμινάδας στη βαρυτική περίπτωση για $v=7$,
(β) λεπτομέρεια της κυματοειδούς μορφής της εστιακής καμπύλης στο
χώρο xyC

Παρόμοιες εστιακές καμπύλες βρήκαμε όταν μελετήσαμε τις μη βαρυτικές περιπτώσεις του προβλήματός μας ($e \neq 0$).

Σαν ένα προκαταρκτικό γενικό σχόλιο αναφέρουμε πως για κάθε τιμή της παραμέτρου v , τα εστιακά σημεία και οι εστιακές καμπύλες παρατηρούνται στις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας που αναπτύσσονται γύρω από τα primaries εκείνα, στις εκφράσεις του δυναμικού των οποίων υπεισέρχονται οι παράμετροι. Έτσι λ.χ. στο πρόβλημα της παρούσας διατριβής, όπου τόσο η παράμετρος β , όσο και η e υπεισέρχονται στην έκφραση του δυναμικού του κεντρικού σώματος, οι εστιακές καμπύλες εμφανίζονται ως χωρικές καμπύλες πάνω στα τμήματα των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ που περιβάλλουν το συγκεκριμένο primary, δηλαδή στην κεντρική «καμινάδα». Επειδή η παρουσία του διαταρακτικού όρου στο δυναμικό του κεντρικού σώματος δεν αλλοιώνει τη συμμετρία του πεδίου, η οποία με τη σειρά της ακολουθεί τη συμμετρία του σχηματισμού των primaries, οι εστιακές καμπύλες θα παρουσιάζουν και αυτές τα ίδια στοιχεία συμμετρίας με αυτά του σχηματισμού των primaries. Στην προκειμένη περίπτωση, οι εστιακές καμπύλες είναι δύο τύπων, όσες και οι παράμετροι που υπεισέρχονται στο δυναμικό του κεντρικού primary:

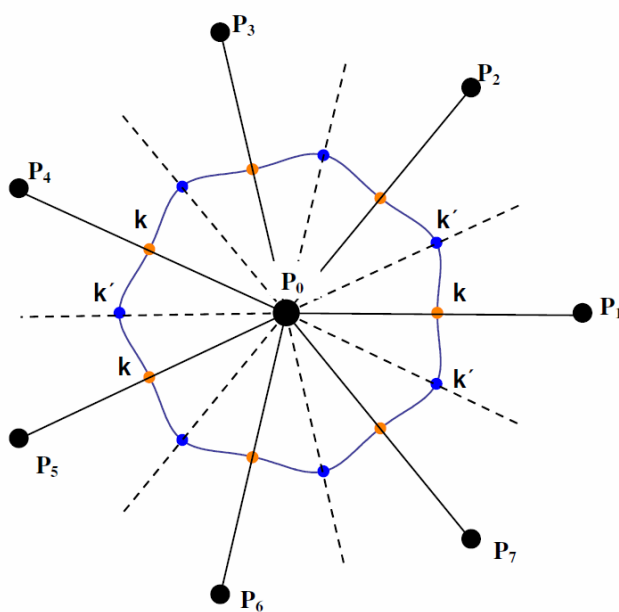
- Εστιακές καμπύλες για σταθερή τιμή της β που είναι ανεξάρτητες από την παράμετρο e .
- Εστιακές καμπύλες για σταθερή τιμή της e που είναι ανεξάρτητες από την παράμετρο β .

Στις επόμενες παραγράφους θα αναφερθούμε λεπτομερέστερα στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των καμπύλων αυτών, καθώς επίσης στη μορφή των συναρτήσεων από τις οποίες προκύπτουν τα εστιακά σημεία για κάθε τέτοια καμπύλη. Τέλος θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά και την παραμετρική εξέλιξη αυτών των συναρτήσεων.

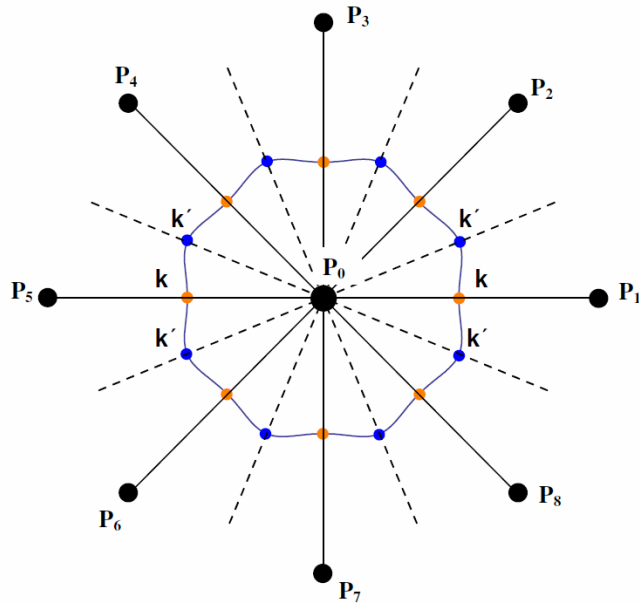
5.4 Συγγραμμικά και τριγωνικά εστιακά σημεία

Στο Σχήμα 5.11 που ακολουθεί, αποτυπώσαμε την προβολή της εστιακής καμπύλης στο επίπεδο xy , όπου φαίνονται και τα $n+1$ σώματα.

Παρατηρήσαμε, ότι πάνω στις διευθύνσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζονται από το κεντρικό primary και δύο διαδοχικά περιφερειακά σώματα κείνται σημεία τύπου k' , ενώ πάνω στις διευθύνσεις που συνδέουν το κεντρικό σώμα με ένα περιφερειακό κείνται σημεία τύπου k . Κατ' αναλογία με τους ορισμούς των συγγραμμικών και τριγωνικών σημείων ισορροπίας, ορίζουμε τα σημεία k ως **συγγραμμικά εστιακά σημεία** και τα k' ως **τριγωνικά εστιακά σημεία**. Επειδή στο πρόβλημά μας έχουμε ορίσει τον θετικό ημιάξονα Ox να διέρχεται από ένα περιφερειακό σώμα (έστω το P_1), γίνεται αντιληπτό ότι στον άξονα αυτό θα έχουμε πάντα συγγραμμικό εστιακό σημείο. Στον αρνητικό ημιάξονα όμως, ο τύπος του εστιακού σημείου εξαρτάται από το αν είναι περιττός ή άρτιος ο αριθμός n των περιφερειακών σωμάτων. Στο Σχήμα 5.11 σημειώσαμε με μπλε κουκίδες τα τριγωνικά k' σημεία και με πορτοκαλί τα συγγραμμικά k σημεία.



(α)



(β)

Σχήμα 5.11. Προβολή της εστιακής καμπύλης στο επίπεδο των primaries όπου έχουν σημειωθεί τα συγγραμμικά και τριγωνικά εστιακά σημεία k και k' αντίστοιχα, για: (α) περιττό αριθμό ($v=7$) περιφερειακών σωμάτων
(β) άρτιο αριθμό ($v=8$) περιφερειακών σωμάτων

Όταν το πλήθος v των περιφερειακών σωμάτων είναι περιττό (Σχήμα 5.11α) ο αρνητικός ημιιάξονας των x δείχνει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας μεταξύ κεντρικού και δύο διαδοχικών περιφερειακών σωμάτων οπότε το παρατηρούμενο εκεί εστιακό σημείο είναι ένα τριγωνικό k' εστιακό σημείο. Το συγγραμμικό και το αντίστοιχο τριγωνικό εστιακό σημείο δεν είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα C αφού έχουν διαφορετικές συντεταγμένες $(x_{k'}, C_{k'})$ και (x_k, C_k) .

Όταν το πλήθος v των περιφερειακών σωμάτων είναι άρτιο (Σχήμα 5.11β) τόσο ο θετικός ημιιάξονας των x όσο και ο αρνητικός θα έχουν τις διευθύνσεις που συνδέουν το κεντρικό με δύο αντιδιαμετρικά περιφερειακά οπότε και τα δύο παρατηρούμενα εστιακά σημεία θα είναι συγγραμμικά. Συνεπώς θα έχουν συντεταγμένες $(-x_k, C_k)$, (x_k, C_k) και θα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των C . Στις περιπτώσεις όπου $v =$ άρτιος, τα τριγωνικά εστιακά σημεία τύπου k' θα βρεθούν αν θεωρήσουμε ότι το επίπεδο $y=0$ στρέφεται περί τον άξονα C κατά γωνία π/v και

σχεδιάσουμε το νέο $x'-C$ διάγραμμα που προκύπτει από την τομή της κεντρικής καμινάδας με το επίπεδο αυτό. Τότε πάνω στο νέο επίπεδο $x'-C$ θα εμφανίζονται δύο k' εστιακά σημεία τα οποία θα βρίσκονται πάνω στον εστραμμένο άξονα x' και σε συμμετρικές θέσεις ως προς τον άξονα C . Για τον εντοπισμό αυτών των σημείων ενδείκνυται η χρήση των πολικών συντεταγμένων.

Λόγω της συμμετρίας του σχηματισμού σε στροφές κατά γωνίες $2\pi/n$, το πλήθος των συγγραμμικών ή τριγωνικών εστιακών σημείων (k ή k') θα ισούται με n και οι προβολές των σημείων αυτών θα βρίσκονται πάνω σε δύο φανταστικές περιφέρειες οι οποίες αποτελούν τις οριζόντιες τομές της κεντρικής καμινάδας που λαμβάνονται για $C_{k'}$ και C_k αντίστοιχα, έχουν κέντρο πάνω στον κατακόρυφο άξονα C (που περνάει από το κεντρικό primary) και ακτίνες τα $|x_{k'}|$ και $|x_k|$ αντίστοιχα.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα n συγγραμμικά εστιακά σημεία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, αφού χαρακτηρίζονται από την ίδια σταθερά $C = C_k$ και βρίσκονται στην ίδια απόσταση $x = |x_k|$ από το κεντρικό primary. Ισοδύναμα μεταξύ τους είναι προφανώς και τα τριγωνικά εστιακά σημεία με $x = |x_{k'}|$ και $C = C_{k'}$.

Οι θέσεις των συγγραμμικών εστιακών σημείων είναι ομοιόθετες ενώ των τριγωνικών ομογραφικές (εστραμμένες κατά γωνία π/n) σε σχέση με τις θέσεις των primaries (Σχήμα 5.11).

Μεταξύ των συντεταγμένων (στο διάγραμμα $x-C$) των συγγραμμικών και τριγωνικών εστιακών σημείων, ισχύουν οι σχέσεις :

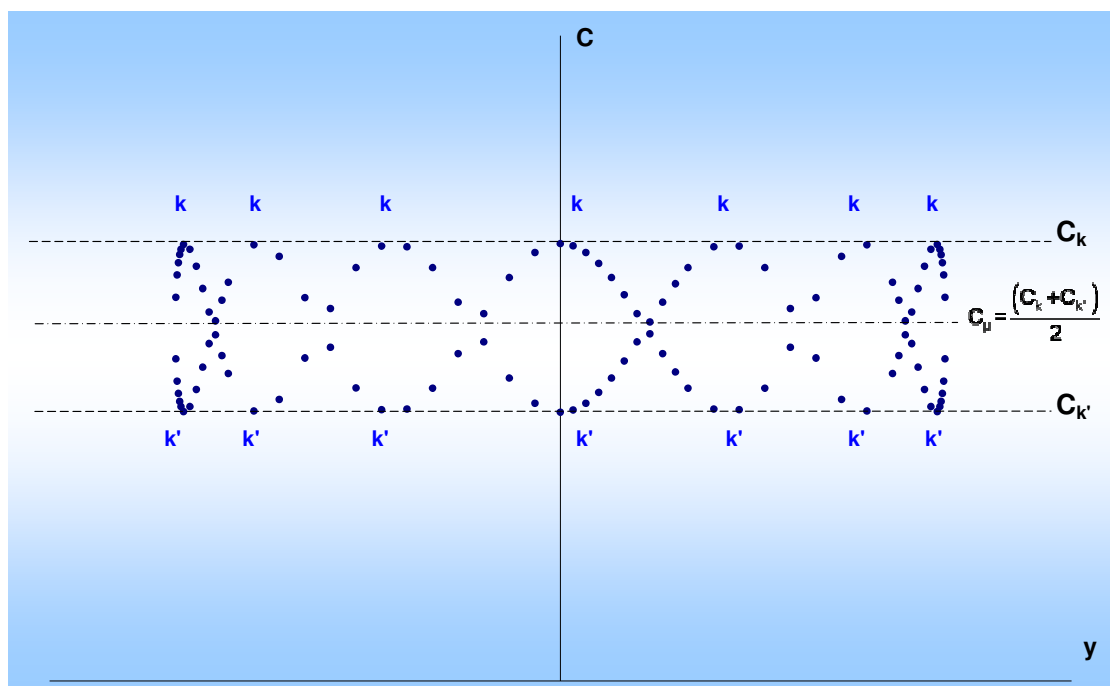
$$\begin{aligned} |x_{k'}| &> |x_k| \\ C_{k'} &< C_k \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ανάμεσα στις δύο αυτές οριακές τιμές του C , εξελίσσεται η εστιακή καμπύλη και αναπτύσσονται όλα τα εστιακά σημεία που εμφανίζονται στις τομές της κεντρικής «καμινάδας» με επίπεδα παράλληλα προς το επίπεδο $x-C$ για τιμές του y στο διάστημα τιμών $[0, \pm y_c]$.

Στο Σχήμα 5.12 δίνεται η προβολή της εστιακής καμπύλης στο επίπεδο Cy , όπου γίνεται αντιληπτή η κυματοειδής μορφή της καμπύλης αλλά και οι δύο οριακές

τιμές C_k και $C_{k'}$ ανάμεσα στις οποίες εξελίσσεται. Η μέση ενεργειακή στάθμη της εστιακής καμπύλης δίνεται από την σχέση: $C_\mu = (C_k + C_{k'})/2$.

Τέλος, γίνεται φανερή η ισοδυναμία μεταξύ των συγγραμμικών εστιακών σημείων, αφού αυτά κείτονται πάνω στη ίδια διακεκομμένη γραμμή και χαρακτηρίζονται από την ίδια Ιακωβιανή σταθερά C . Αντίστοιχη είναι η ισοδυναμία των τριγωνικών εστιακών σημείων.



Σχήμα 5.12. Προβολή εστιακής καμπύλης στο επίπεδο Cy , όπου με διακεκομμένες γραμμές φαίνονται οι ενεργειακές στάθμες C_k και $C_{k'}$ καθώς και η μέση τιμή αυτών

5.4.1 Σχέση συγγραμμικών-τριγωνικών εστιακών σημείων με τον άξονα y

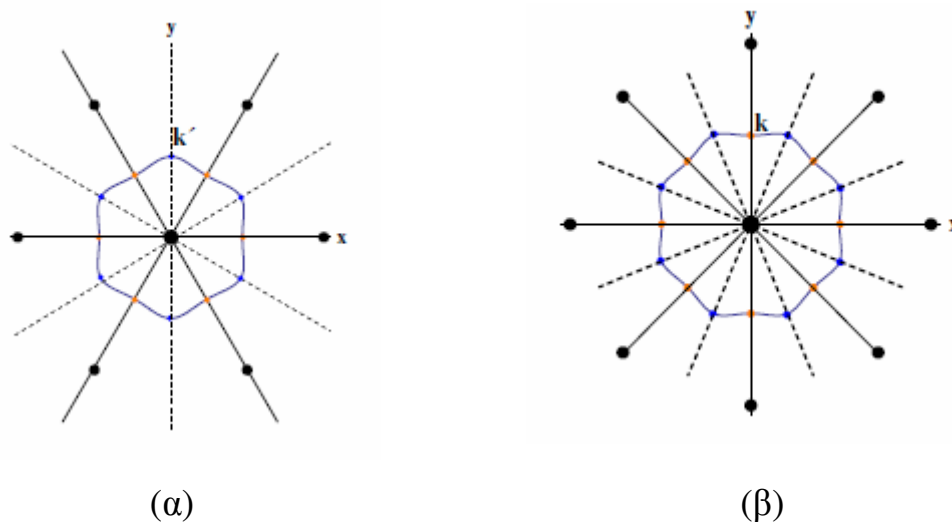
Συνδυάζοντας τους δακτυλιοειδείς σχηματισμούς των n περιφερειακών σωμάτων με τα εστιακά σημεία, καταλήξαμε σε κάποιες παρατηρήσεις όσον αφορά στη συμμετρία του σχηματισμού ως προς τον άξονα y , αλλά και τη σχέση που έχει αυτό με τα συγγραμμικά και τριγωνικά σημεία k και k' αντίστοιχα, που βρίσκονται πλησιέστερα στον άξονα αυτόν ή πάνω σε αυτόν. Στην παρούσα παράγραφο σε αυτά ακριβώς τα εστιακά σημεία αναφερόμαστε. Ο αριθμός n προφανώς μπορεί να είναι άρτιος ($n=2\lambda$) ή περιττός ($n=2\lambda + 1$). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

A. $v=\acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma=2\lambda$

Ο άξονας y θα είναι στην προκειμένη περίπτωση ένας επίπεδος άξονας συμμετρίας του πολυγωνικού σχηματισμού και μάλιστα ισχύει ότι :

A.1 Αν $\lambda=\text{περιττός}$ (όπως στην περίπτωση $v=6$, οπότε $\lambda=3$) συμπίπτει με τη διεύθυνση της διχοτόμου της επίκεντρης γωνίας που σχηματίζεται από δύο διαδοχικά περιφερειακά primaries, δηλαδή με τη διεύθυνση των τριγωνικών σημείων k' (Σχήμα 5.13α)

A.2 Αν $\lambda=\acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma$ (όπως στην περίπτωση $v=8$, οπότε $\lambda=4$) συμπίπτει με τη διεύθυνση δύο αντιδιαμετρικών primaries, δηλαδή με τη διεύθυνση των συγγραμμικών εστιακών σημείων k (Σχήμα 5.13β).



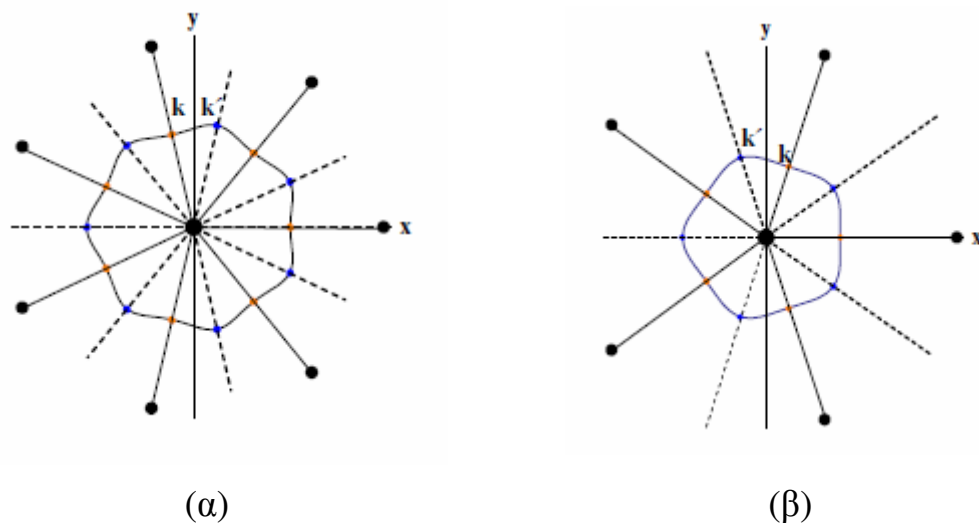
Σχήμα 5.13. (α) Πολυγωνικός σχηματισμός 6 περιφερειακών σωμάτων, (β) πολυγωνικός σχηματισμός 8 περιφερειακών σωμάτων

B. $v=\text{περιττός}=2\lambda+1$

Στην προκειμένη περίπτωση ο άξονας y δεν είναι ένας επίπεδος άξονας συμμετρίας, διχοτομεί όμως πάντα τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαδοχικές διευθύνσεις $k' - k$ που είναι εκατέρωθέν του, σε δύο ίσες γωνίες $\pi/(2v)$ η καθεμία. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι :

B.1. Αν $\lambda=\text{περιττός}$ (όπως στην περίπτωση $v=7$, οπότε $\lambda=3$), τότε δεξιά του άξονα y βρίσκεται η διεύθυνση k' και αριστερά του η διεύθυνση k (Σχήμα 5.14α).

B.2. Αν $\lambda=\text{άρτιος}$ (όπως στην περίπτωση $\nu=5$, οπότε $\lambda=2$), τότε δεξιά του άξονα y βρίσκεται η διεύθυνση k , και αριστερά του βρίσκεται η διεύθυνση k' (Σχήμα 5.14β).



Σχήμα 5.14. (α) Πολυγωνικός σχηματισμός 7 περιφερειακών σωμάτων, (β) πολυγωνικός σχηματισμός 5 περιφερειακών σωμάτων

Στον Πίνακα 5.1 παραθέτουμε τις τιμές των εστιακών σημείων στο επίπεδο $x-C$ για $y=0$, για διάφορους σχηματισμούς με περιττό αριθμό περιφερειακών σωμάτων. Οι διαφορές των ακραίων τιμών (όπως δείχνει ο Πίνακας 5.2) είναι της τάξεως του 10^{-3} για τα x_k , $x_{k'}$ και 10^{-4} για τα C_k , $C_{k'}$ για μικρές τιμές του ν και μειώνονται καθώς αυξάνει το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων ν .

Με άλλα λόγια, όσο το ν αυξάνει, οι τιμές των C_k , $C_{k'}$, που επίσης αυξάνουν, τείνουν να ταυτισθούν μετατοπιζόμενες ταυτόχρονα προς το επάνω τμήμα της κεντρικής «καμινάδας». Το ίδιο συμβαίνει με τις τιμές των x_k και $x_{k'}$ οι οποίες απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων και των οποίων οι απόλυτες τιμές τείνουν να ταυτισθούν όπως προκύπτει από το Σχήμα 5.9 και τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.1. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η χωρική κυματοειδής εστιακή καμπύλη που περιγράψαμε, όσο το ν αυξάνει, να τείνει να εξομαλυνθεί σε μία επίπεδη κυκλική καμπύλη της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα των C και της οποίας οι διαστάσεις αυξάνουν με το ν (Πίνακας 5.1).

Πίνακας 5.1. Συντεταγμένες των εστιακών σημείων k και k' και τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς τους, για διάφορους σχηματισμούς της βαρυτικής περίπτωσης, με ν =περιττός και $\gamma=0$

ν	$x_{k'}$	$C_{k'}$	x_k	C_k
3	-0.1105667341	3.4933816614	0.1096235547	3.5231251656
5	-0.2299502456	5.4065285348	0.2296320786	5.4138000693
7	-0.3694005677	8.4220245327	0.3692963400	8.4242860049
9	-0.5221210726	12.2403928681	0.5220858360	12.2411638102
11	-0.6846256780	16.7983184928	0.6846132700	16.7985974711
17	-1.2130886652	34.6892237683	1.2130879620	34.6892413321
21	-1.5897996760	50.0248023621	1.5897995200	50.0248065203

Πίνακας 5.2. Διαφορές μεταξύ των συντεταγμένων και σταθερών C , των εστιακών σημείων k και k' , για διάφορους σχηματισμούς της βαρυτικής περίπτωσης, με ν =περιττός και $\gamma=0$

ν	$ x_{k'} - x_k $	$ C_{k'} - C_k $
3	$9.4318 \cdot 10^{-4}$	$2.9744 \cdot 10^{-2}$
5	$3.1817 \cdot 10^{-4}$	$7.2721 \cdot 10^{-3}$
7	$1.0423 \cdot 10^{-4}$	$2.2615 \cdot 10^{-3}$
9	$3.5237 \cdot 10^{-5}$	$7.71 \cdot 10^{-4}$
11	$1.2408 \cdot 10^{-5}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$
17	$7.03 \cdot 10^{-7}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$
21	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$4.16 \cdot 10^{-6}$

Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε και για άρτιο αριθμό περιφερειακών σωμάτων.

5.5 Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος β παραμένει σταθερή-Η συνάρτηση F_β

Θα εξετάσουμε κατ' αρχήν την ύπαρξη εστιακών σημείων στα διαγράμματα $x-C$ για μια δεδομένη τιμή της παραμέτρου μάζας β και για διάφορες τιμές της παραμέτρου e , στα επίπεδα $y=y_i$ με $y \in [0, \pm y_c]$. Όμως για το επίπεδο $y=0$ και για $x=0$ (να είναι δηλαδή ταυτόχρονα και οι δύο μεταβλητές μηδέν) παρουσιάζεται μία απροσδιοριστία, που θα φανεί στη συνέχεια της μελέτης μας. Στους επόμενους υπολογισμούς θα τηρήσουμε τον περιορισμό ότι $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$. Άλλωστε για $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, ούτε η συνάρτηση $U(\mathbf{x}, y)$ ορίζεται. Προφανώς απροσδιοριστία της U υπάρχει και όταν $r_i \rightarrow 0$, $i=1,2,\dots,\nu$, αλλά για το συγκεκριμένο τμήμα της μελέτης περιοριζόμαστε στην περιοχή γύρω από το κεντρικό primary.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτές οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας σχεδιασμένες για διάφορα e τέμνονται όλες σε δύο εστιακά σημεία εκατέρωθεν του άξονα των C .

Όπως έχει αναφερθεί, το ολοκλήρωμα του Jacobi έχει τη μορφή :

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2U(x, y) - C$$

και σε μια καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στο επίπεδο xy

$$2U(x, y) - C = 0$$

όπου :

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right]$$

με

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3)$$

$$\text{όπου : } \Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi/\nu)}{\sin[(i-1)\pi/\nu]} \quad \text{και} \quad M = 2\sin(\pi/\nu)$$

Σε μία καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στο διάγραμμα (x, C) με $y=y_i$ θα έχουμε:

$$2U(x) - C = 0 \tag{5.2}$$

Έστω ότι δύο καμπύλες με παραμέτρους β , e και β , e' τέμνονται σε κάποιο σημείο.

Τότε θα ισχύει :

$$2U(x;\beta,e) - C = 2U'(x';\beta,e') - C'$$

Όμως στο σημείο τομής θα ισχύουν:

$$C=C', r_0=r_0' \text{ και } r_i=r_i' \quad (5.3)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$r_0^2 + \frac{2}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right] = r_0'^2 + \frac{2}{\Delta'} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0'} + \frac{e'}{r_0'^2} \right) + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i'} \right]$$

και λόγω των (5.3),

$$\Delta' \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right] - \Delta \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e'}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right] = 0$$

ή

$$(\Delta' - \Delta) \frac{\beta}{r_0} + \frac{\beta}{r_0^2} (\Delta' e - \Delta e') + (\Delta' - \Delta) \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} = 0$$

ή

$$(\Delta' - \Delta) \left[\frac{\beta}{r_0} + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right] + \frac{\beta}{r_0^2} (\Delta' e - \Delta e') = 0 \quad (5.4)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \Delta' e - \Delta e' &= M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e' M^3) e - M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3) e' = \\ &= (e - e') M(\Lambda + \beta M^2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \Delta' - \Delta &= M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e' M^3) - M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3) = \\ &= 2\beta(e' - e) M^4 \end{aligned}$$

Οπότε η (5.4) γίνεται:

$$2\beta(e' - e) M^3 \left[\frac{\beta}{r_0} + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right] - (e' - e) (\Lambda + \beta M^2) \frac{\beta}{r_0^2} = 0$$

ή

$$(e' - e) \left[2\beta M^3 \left(\frac{\beta}{r_0} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right) - (\Lambda + \beta M^2) \frac{\beta}{r_0^2} \right] = 0$$

και επειδή

$$e - e' \neq 0$$

για το σημείο τομής θα ισχύει :

$$2M^3 \left[\frac{\beta}{r_0} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] - (\Lambda + \beta M^2) \frac{1}{r_0^2} = 0$$

ή

$$-(\Lambda + \beta M^2) \frac{1}{r_0^2} + 2M^3 \frac{\beta}{r_0} + 2M^3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} = 0$$

ή

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} = \frac{(\Lambda + \beta M^2)}{2M^3} \frac{1}{r_0^2} - \frac{\beta}{r_0} \quad (5.5)$$

Η σχέση αυτή είναι ανεξάρτητη του e και συνεπώς όλες οι καμπύλες για διάφορες τιμές του e θα περνούν από το ίδιο εστιακό σημείο (ή εστιακά σημεία). Η σχέση (5.5) μπορεί να γραφεί

$$F_{\beta}(x; y_i, \beta) = \frac{r_0^2}{K - r_0\beta} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1 = 0 \quad (5.6\alpha)$$

όπου

$$K = \frac{\Lambda + \beta M^2}{2M^3} \quad (5.6\beta)$$

και οι τιμές που αναζητούμε είναι οι ρίζες της F_{β} .

Προφανώς στο σημείο $(x,y)=(0,0)$ θα παρουσιάζεται απροσδιοριστία της F_{β} , για τους λόγους που περιγράψαμε παραπάνω.

Η F_{β} εκφράζει μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων ως προς β . Επιλύεται αριθμητικά για κάθε τιμή της β με κάποια από τις υπάρχουσες μεθόδους, όπως η Newton-Raphson, ή η μέθοδος της διχοτόμησης. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα (5.15β) που αναφέρεται σε ένα πολυγωνικό σχηματισμό με περιττό πλήθος περιφερειακών σωμάτων, τα εστιακά σημεία εμφανίζονται στο τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται

κοντά στο κεντρικό primary (μεσαίος κλάδος) και είναι είτε δύο, είτε ένα (δύο όταν $y \neq y_c$ και ένα στις οριακές τιμές του y_c). Έχοντας βρει από την αριθμητική επίλυση τις ρίζες $x_{k'}^\beta$ και x_k^β (για να χρησιμοποιήσουμε ανάλογο συμβολισμό με αυτόν στην εργασία του Kalvouridis (2004), θέτοντάς τις στη σχέση,

$$r_0 = (x_\beta^2 + y_i^2)^{1/2}$$

και αντικαθιστώντας στη συνέχεια την παραπάνω τιμή στο αρχικό ολοκλήρωμα (5.2), υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές ($C_{k'}^\beta$ και C_k^β) της Ιακωβιανής σταθεράς. Οι τιμές των σταθερών C μπορούν να υπολογισθούν από την απλούστερη μορφή της (5.2) :

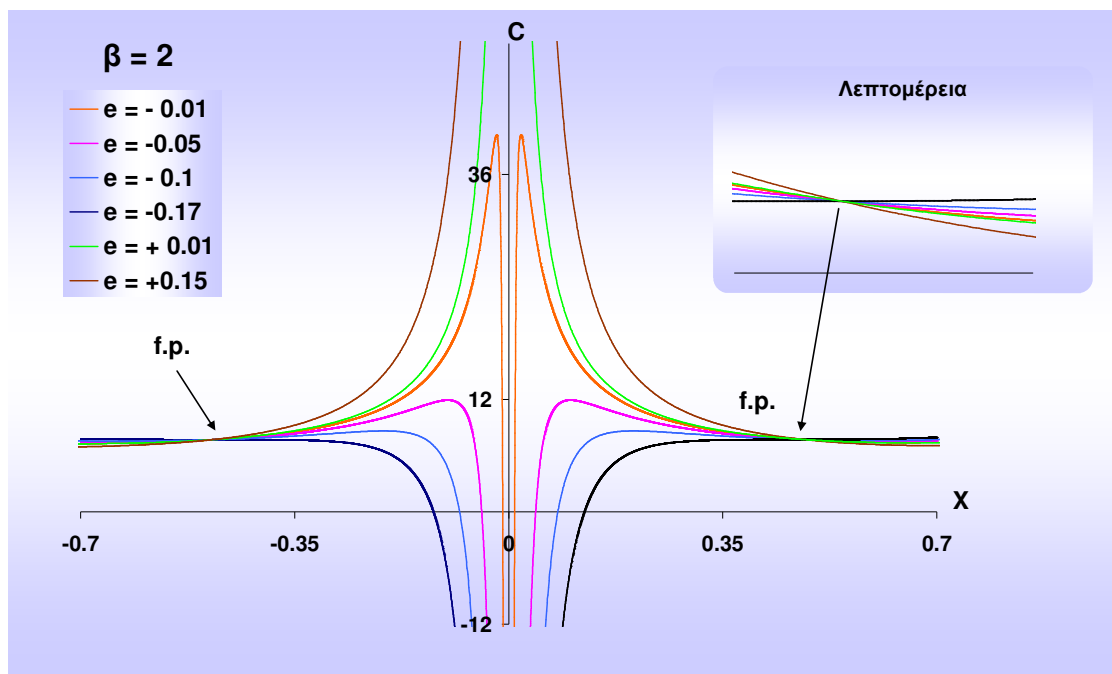
$$C = r_0^2 + \frac{1}{M^4 r_0^2} \quad (5.7)$$

Έτσι έχουμε προσδιορίσει τις συντεταγμένες των δύο εστιακών σημείων $x_{k'}$ και x_k (όταν $v =$ περιττός) στο διάγραμμα (x,C) . **Τονίζουμε ότι η σχέση (5.6a) ισχύει για $y=y_i$, με την y_i να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \pm y_c]$, δηλαδή εκεί που η αντίστοιχη επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ ή η καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στο αντίστοιχο διάγραμμα στο επίπεδο xy γύρω από το κεντρικό σώμα, το επιτρέπει.** Στα όρια αυτά της y_i έχουμε μόνο ένα εστιακό σημείο που είναι το σημείο επαφής της καμπύλης F_β με τον άξονα x . Τότε θα έχουμε :

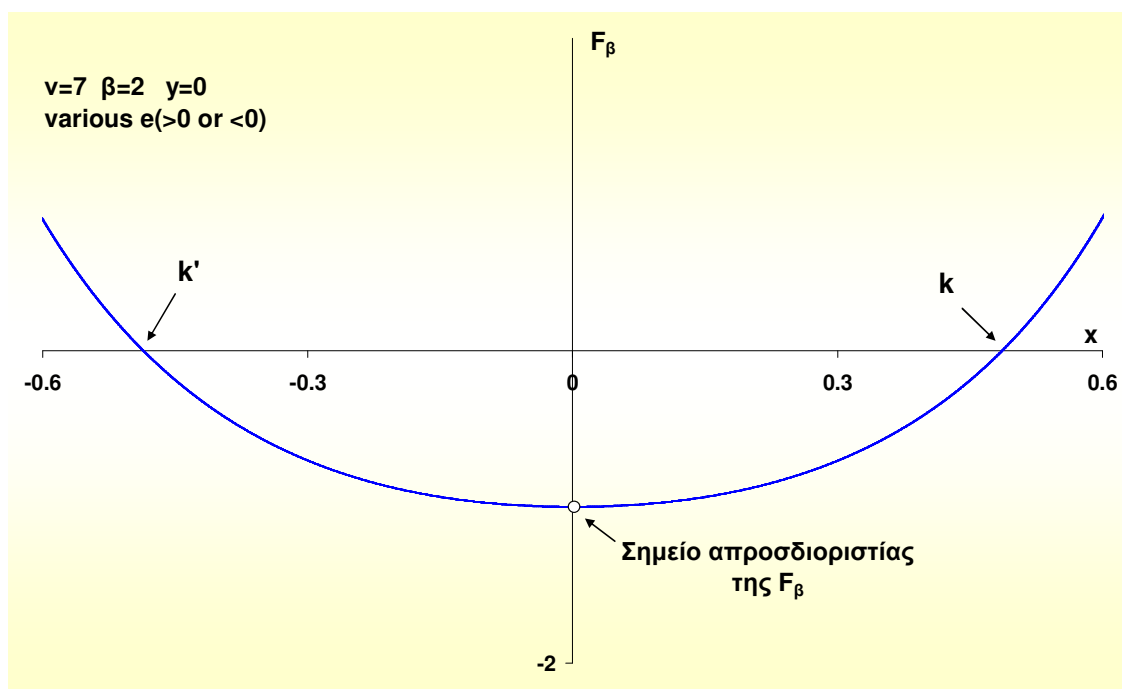
$$C_k^\beta \equiv C_{k'}^\beta, \quad x_{k'}^\beta \equiv x_k^\beta$$

Λόγω της μορφής της «καμινάδας» τα εστιακά σημεία (για διάφορες τιμές της y) και τα αντίστοιχα C θα βρίσκονται πάνω στο τμήμα της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας που ορίζεται μεταξύ των δύο ισοενεργειακών σταθμών $C_{k'}^\beta$ και C_k^β ή στην κλειστή περιοχή του επιπέδου xy που ορίζεται από τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις τιμές αυτές της Ιακωβιανής σταθεράς. Στο Σχήμα 5.15α φαίνονται τα εστιακά σημεία των διαγραμμάτων $x-C$ για $y=0$, στην περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$ και διάφορες τιμές, θετικές ή αρνητικές, του συντελεστή e . Στην ίδια περίπτωση αναφέρεται και το Σχήμα 5.15β, όπου φαίνονται οι δύο ρίζες της F_β , (σημεία στα οποία αυτή τέμνει τον άξονα των x). Το Σχήμα

5.15β αναφέρεται στο επίπεδο $y=0$ και επομένως για $x=0$ έχουμε την εμφάνιση της απροσδιοριστίας της F_β . Αυτός είναι και ο λόγος που έχουμε εξαιρέσει το σημείο αυτό από την καμπύλη $F_\beta = F_\beta(x)$ και έχουμε σχεδιάσει ένα μικρό κύκλο στη θέση του.



(α)

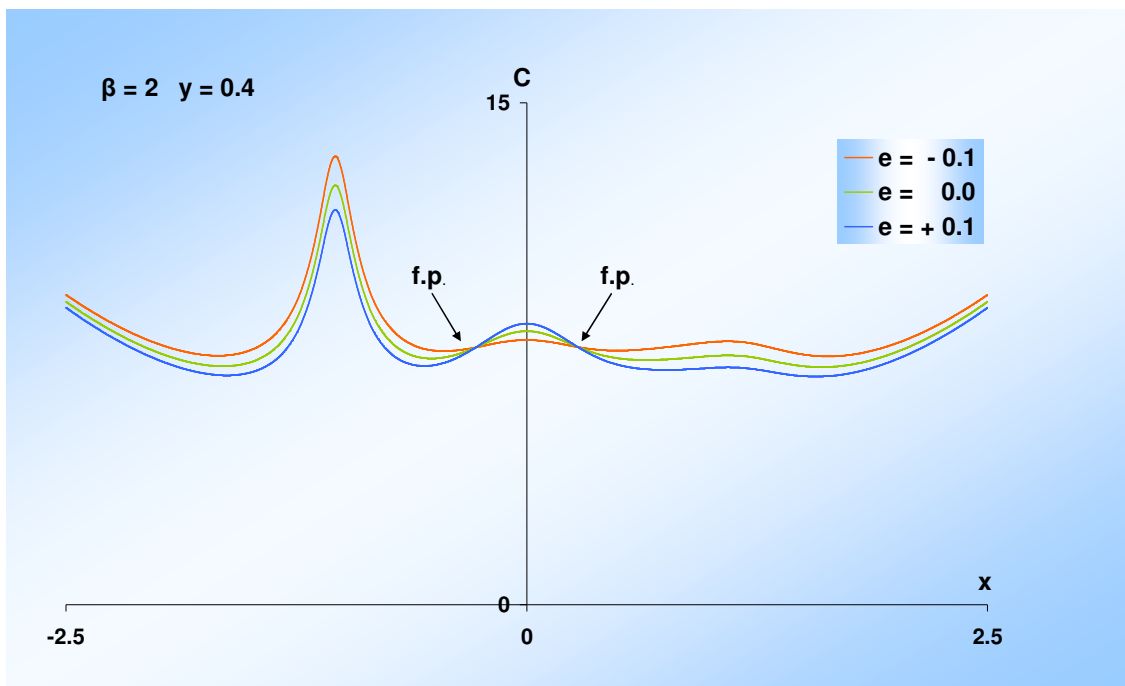


(β)

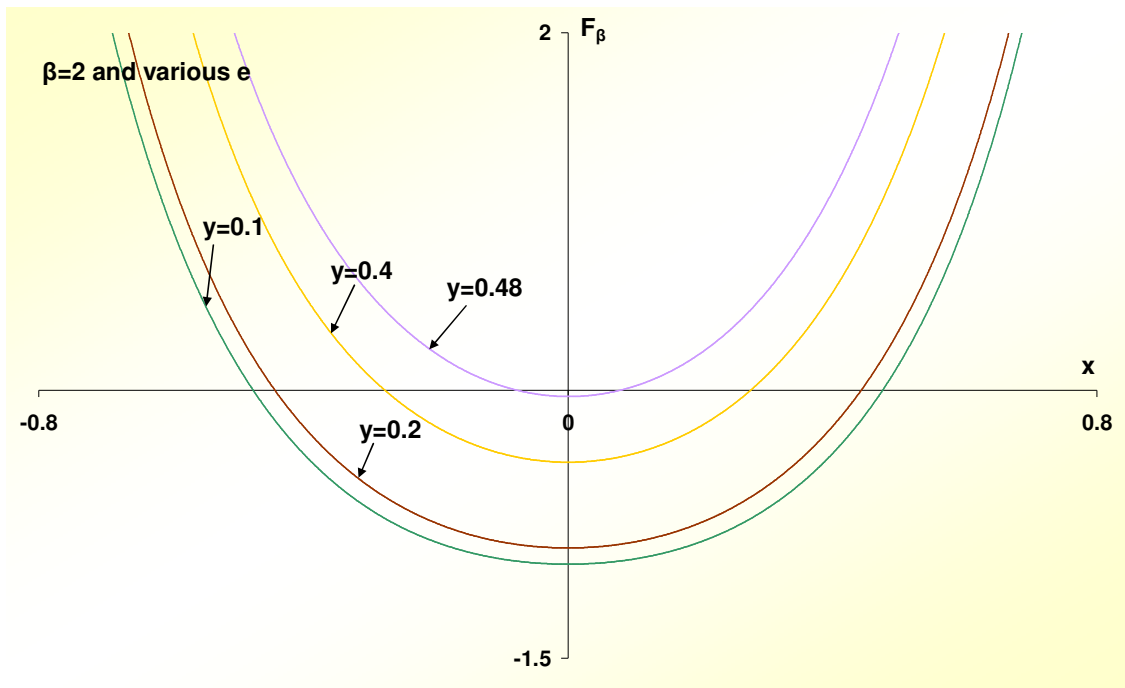
Σχήμα 5.15. (α) Εστιακά σημεία των διαγραμμάτων $x-C$ για $y=0$, στην

περίπτωση με $\nu=7$, $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e , (β) οι δύο ρίζες της F_β , εμφανίζονται στον κεντρικό κλάδο της καμπύλης $F_\beta = F_\beta(x)$

Οι ασύμπτωτες στο Σχήμα 5.15β εμφανίζονται εκεί όπου η $F_\beta \rightarrow \infty$, δηλαδή όταν $r_0 = K/\beta = (\Lambda + \beta M^2)/\beta M^3$. Παρακάτω δίνεται σε ανάλογα διαγράμματα η περίπτωση εστιακών σημείων των διαγραμμάτων $x-C$ για $y \neq 0$, $\beta=2$, $\nu=7$ και διάφορες θετικές ή αρνητικές τιμές του συντελεστή e . Στο Σχήμα 5.16α φαίνονται τα δύο εστιακά σημεία (focal points) των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας για $y=0.4$ και στο Σχήμα 5.16β αποτυπώνεται η συμπεριφορά των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$ για διάφορες επιτρεπτές τιμές των y . Προφανώς σε αυτή την περίπτωση όταν η μεταβλητή x πάρει την τιμή μηδέν ($x=0$) δεν υπάρχει απροσδιοριστία επειδή $y \neq 0$.



(α)



(β)

Σχήμα 5.16. (α) Καμπύλες $x-C$ και εστιακά σημεία για $v=7$, $\beta=2$, $y=0.4$ και διάφορες τιμές της e , (β) κεντρικοί κλάδοι των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$ για διάφορες τιμές της y και του e .

Στις οριακές τιμές της y_i η συνάρτηση F_β έχει μία μόνο ρίζα που είναι το σημείο επαφής της με τον άξονα των x . Αυτό σημαίνει ότι για την οριακή αυτή τιμή τόσο η μέθοδος Newton-Raphson όσο και η μέθοδος διχοτόμησης, αποτυγχάνουν στον ακριβή προσδιορισμό του σημείου αυτού. Έτσι, ειδικά για την περίπτωση αυτή, καταφεύγουμε σε ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού ο οποίος θα εφαρμοστεί και σε άλλες ανάλογες περιπτώσεις και θα περιγραφεί αναλυτικά στην παράγραφο 5.9.3. Στο σημείο αυτό περιοριζόμαστε να πούμε ότι βασίζεται στο γεγονός ότι το σημείο αυτό συμπίπτει με το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης F_β , η τιμή του οποίου πρέπει να είναι επίσης μηδέν.

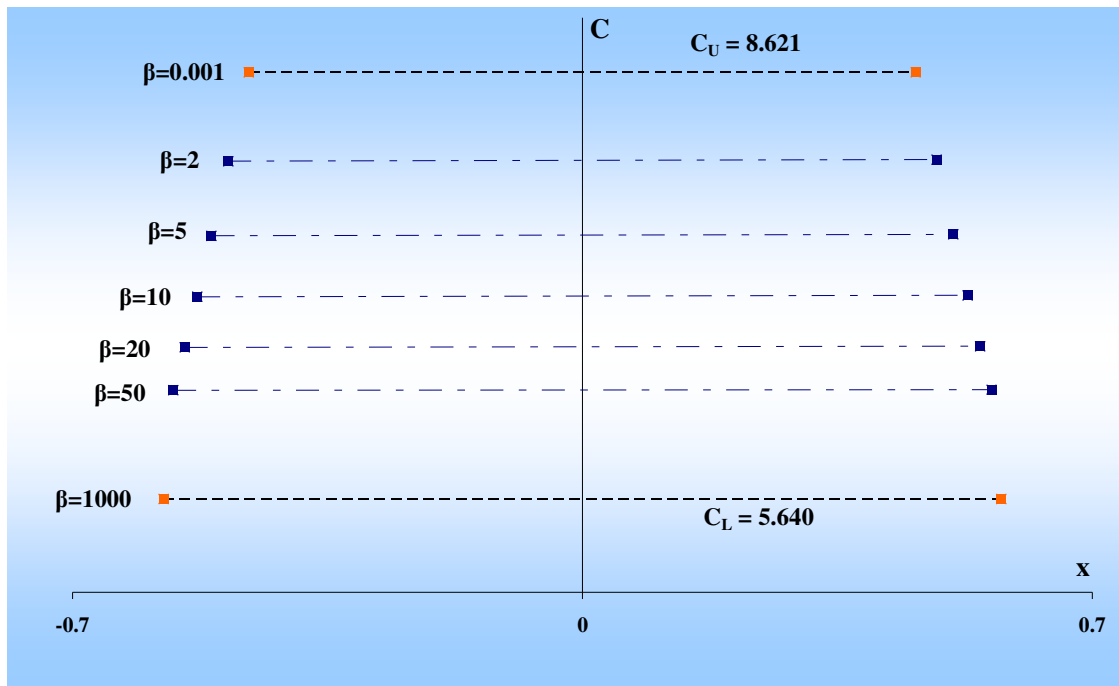
Στον Πίνακα 5.3 που ακολουθεί παραθέτουμε τα εστιακά σημεία και τις αντίστοιχες τιμές της σταθεράς C για $v=7$, $y=0$ και διάφορες τιμές του β , ενώ στο Σχήμα 5.17 φαίνεται η μεταβολή της θέσης των εστιακών σημείων όταν μεταβάλλεται η

παράμετρος β (η διακεκομμένη γραμμή δείχνει τη μέση ισοενεργειακή στάθμη $C_{\mu}^{\beta} = (C_k^{\beta} + C_{k'}^{\beta})/2$).

Πίνακας 5.3. Εστιακά σημεία για $v=7$, $y=0$ και διάφορες σταθερές τιμές της παραμέτρου β

β	x	C
2	-0.486481611	7.688334174
	0.486113091	7.688994174
5	-0.509509661	7.052912941
	0.509105757	7.063284852
10	-0.529082697	6.579911012
	0.528687535	6.588914257
20	-0.546313576	6.207301860
	0.545980558	6.214148435
50	-0.561870475	5.901867021
	0.561664368	5.905735961

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η τιμή της β , τόσο διευρύνεται η συνεχής εστιακή καμπύλη μετατοπιζόμενη προς χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C . Και στις δύο περιπτώσεις, οι τιμές της μέσης ενεργειακής στάθμης C_{μ}^{β} τείνουν συσσωρευόμενες προς μία οριακή τιμή $C_L \approx 5.64$ (κάτω όριο) για $\beta > 1000$. Αντίστοιχα, όταν $\beta \rightarrow 0$, βρήκαμε ότι υπάρχει ένα άνω όριο για τις τιμές του C που είναι $C_U \approx 8.621$. Όταν $\beta=0$, θεωρητικά δεν υπάρχει κεντρικό σώμα, γεγονός που σημαίνει ότι η κεντρική «καμινάδα» έχει εξαφανιστεί, δεν υπάρχουν ασυνέχειες στη θέση $r_0=0$ και κατά συνέπεια δεν έχει νόημα η αναζήτηση εστιακών σημείων



Σχήμα 5.17. Εστιακά σημεία για διάφορες τιμές της παραμέτρου β για $n=7$ και $y=0$. Όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου β , τόσο τα σημεία μετατοπίζονται προς τη βάση της «καμινάδας». Στο διάγραμμα έχουν χαραχθεί για κάθε β με διακεκομμένες γραμμές οι μέσες στάθμες C_{μ}^{β} των C_k^{β} και C_k^{β}

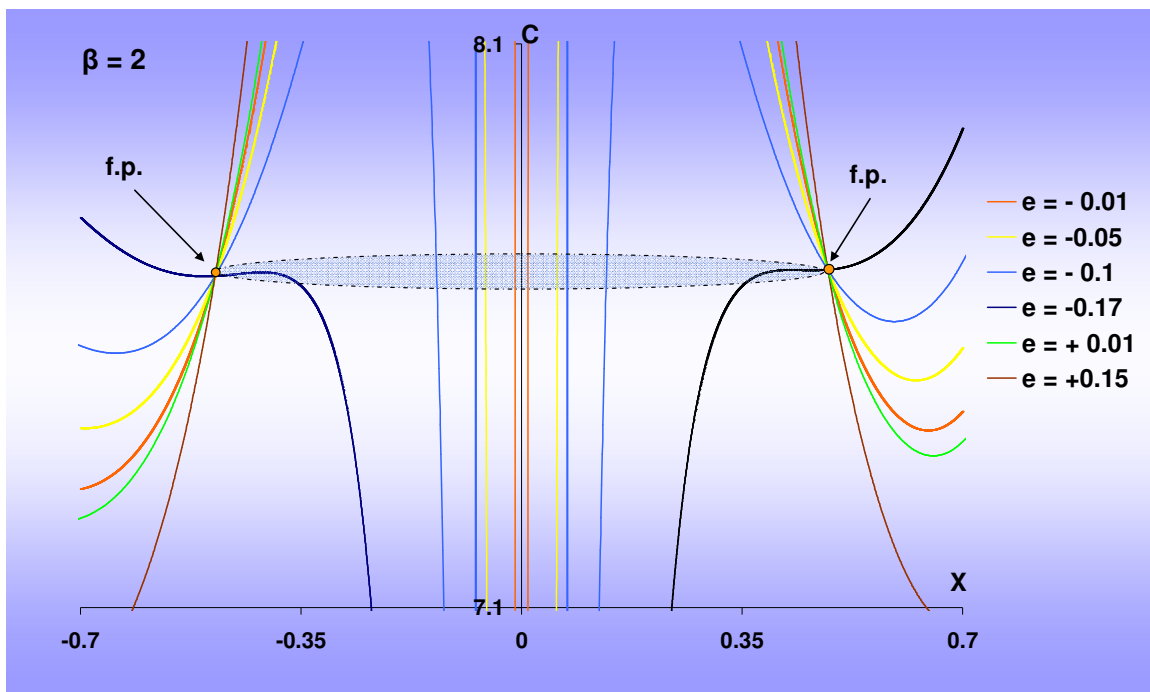
Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι οι τιμές των οριακών σημείων C , εξαρτώνται από το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων, όπως φαίνεται από την έκφραση της συνάρτησης F_{β} (σχέσεις 5.6α και 5.6β).

5.5.1 Προσδιορισμός των σημείων της εστιακής καμπύλης μέσω των ριζών της συνάρτησης F_{β} . Δισδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση των εστιακών καμπύλων

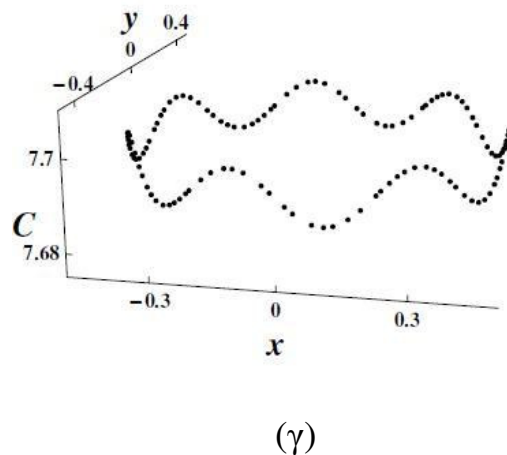
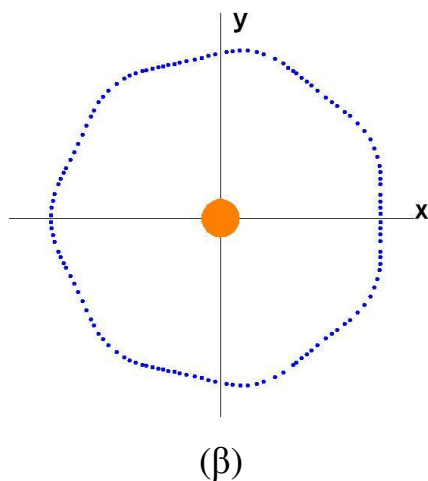
Θα μελετήσουμε την περίπτωση για $n=7$, $\beta=2$ και για διάφορες τιμές του συντελεστή e , καθώς θα σαρώσουμε τη μεταβλητή y εντός των ορίων των επιτρεπτών τιμών της. Στον Πίνακα Γ.1 του Παραρτήματος Γ δίνουμε τις συντεταγμένες των εστιακών σημείων στο χώρο xyC .

Στο Σχήμα 5.18α φαίνονται τα εστιακά σημεία στο διάγραμμα (x, C) για $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e . Η διακεκομμένη καμπύλη απεικονίζει κατά

προσέγγιση τη συνεχή εστιακή καμπύλη στο χώρο που αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των εστιακών σημείων, θεωρώντας και την τρίτη διάσταση (άξονας y) του διαγράμματος αυτού. Προκύπτει από την ταυτόχρονη και συνεχή μεταβολή του y , εξελίσσεται δε γύρω από το κεντρικό σώμα. Όταν λέμε κατά προσέγγιση εννοούμε ότι όπως δείχνει η πραγματική τριδιάστατη απεικόνιση των εστιακών σημείων στο χώρο xyC του Σχήματος 5.18γ, ο γεωμετρικός τόπος τους, είναι μία κυματοειδής συνεχή καμπύλη η οποία αναπτύσσεται πάνω στο τμήμα της επιφάνειας της «καμινάδας» που περιβάλλει το κεντρικό σώμα, και ορίζεται από τις οριζόντιες τομές (ισοϋψείς) $C = C_k^\beta$ και $C = C_k^\beta$. Στο σχήμα 5.18β δείχνουμε την προβολή στο επίπεδο xy της κατανομής των εστιακών σημείων (ο τρίτος άξονας μετράει τις τιμές της C) για διάφορες τιμές του y . Στην πραγματικότητα η προβολή αυτή είναι μία συνεχή καμπύλη που παρουσιάζει την κυματοειδή μορφή της τρισδιάστατης απεικόνισης. **Τονίζουμε επίσης ότι η εστιακή καμπύλη ποτέ δεν μπορεί να εκφυλισθεί σε σημείο γιατί τότε $r_0=0$, τιμή που έχει αποκλεισθεί εξ αρχής.**



(α)



Σχήμα 5.18. (α) Τα εστιακά σημεία στο διάγραμμα x-C για $\beta=2$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου e . Η διακεκομμένη καμπύλη απεικονίζει τη συνεχή εστιακή καμπύλη στο χώρο που αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των εστιακών σημείων θεωρώντας και την τρίτη διάσταση (άξονας y) του διαγράμματος, (β) προβολή στο επίπεδο xy της κατανομής των εστιακών σημείων για διάφορες τιμές του y , (γ) η κυματοειδής μορφή της συνεχούς καμπύλης εστιακών σημείων στο διάγραμμα xyC

5.5.2 Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β

Έχουμε τη συνάρτηση :

$$F_\beta(x; y_i, \beta) = \frac{r_0^2}{K - r_0\beta} \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} - 1$$

όπου
$$K = \frac{\Lambda + \beta M^2}{2M^3},$$

οι ρίζες της οποίας αντιστοιχούν στα εστιακά σημεία (focal points) των διαγραμμάτων x-C για την περίπτωση που εξετάζουμε.

Θεωρούμε δύο καμπύλες της μονοπαραμετρικής οικογένειας F_β με παραμέτρους β και β' και για $y=y_i$, οι οποίες τέμνονται σε κάποιο σημείο. Στο σημείο τομής θα είναι :

$$F_{\beta} = F'_{\beta}, \quad x = x', \quad r_0 = r_0', \quad r_i = r_i'$$

$$\text{όπου } r_0 = (x_{\beta}^2 + y_i^2)^{1/2} \text{ με } r_0 \neq 0$$

Επομένως :

$$F_{\beta} = F_{\beta'} \quad \text{ή} \quad \frac{r_0^2}{K - r_0\beta} \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} - 1 = \frac{r_0'^2}{K' - r_0'\beta'} \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i'} - 1$$

και καταλήγουμε στη σχέση :

$$(\beta - \beta') \left(\frac{1}{2M} - r_0 \right) = 0 \quad (\Delta' \beta - \Delta \beta') \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + (\Delta' - \Delta) \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i'} = 0.$$

Επειδή $\beta \neq \beta'$ για το σημείο τομής ισχύει η σχέση :

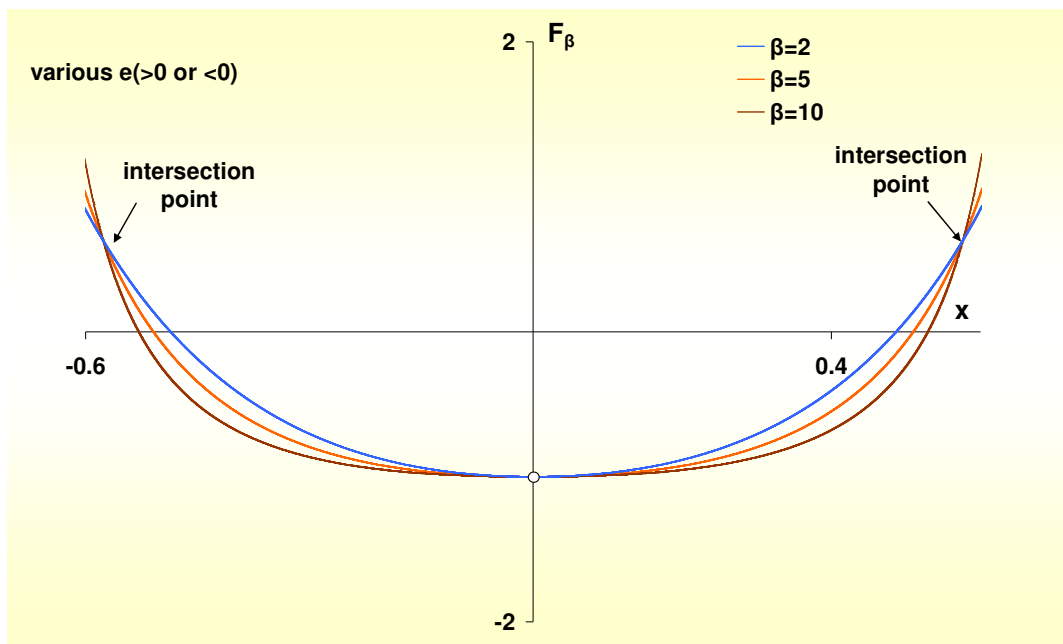
$$\frac{1}{2M} - r_0 = 0 \quad \text{ή} \quad r_0 = \frac{1}{2M}$$

η οποία είναι ανεξάρτητη του β και συνεπώς όλες οι καμπύλες για διαφορετικές τιμές του β θα περνούν από το ίδιο σημείο (intersection point). Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης μας δίνουν την τιμή της τετμημένης x του σημείου τομής των συναρτήσεων F_{β} για όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του y και είναι:

$$x_{F_{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4M^2} - y_i^2} \quad (5.8)$$

Προφανώς την αντίστοιχη τιμή της F_{β} τη βρίσκουμε από τη σχέση 5.6α. Άρα έχουμε βρει δύο σημεία τομής (intersection points) των συναρτήσεων F_{β} στο επίπεδο $y=y_i$, τα οποία είναι ανεξάρτητα από τις τιμές των e και β . Για $v=7$, $y=0$ και για οποιαδήποτε τιμή των e και β , υπολογίσαμε ότι $x_{F_{\beta}} = \pm 0.576191$. Στο Σχήμα 5.19 δίνονται τα κοινά διαγράμματα των συναρτήσεων F_{β} για $v=7$, διάφορες αρνητικές ή θετικές τιμές του συντελεστή e και για διάφορες τιμές της ανηγμένης μάζας β ($\beta=2,5,10$), όπου διακρίνονται αυτά τα δύο σημεία.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ισχύει και εδώ ο περιορισμός που θέσαμε εξ αρχής, δηλαδή **ότι τα x και y να μην είναι και τα δύο μηδέν.**



Σχήμα 5.19. Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$ για $y=0$ και για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β

5.6 Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος e παραμένει σταθερή-Η συνάρτηση F_e

Θα εξετάσουμε την ύπαρξη εστιακών σημείων στα διαγράμματα $x-C$ για μια δεδομένη τιμή της παραμέτρου μάζας e και για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , στα επίπεδα $y=y_i$ με $y \in [0, \pm y_c]$.

Όπως έχει αναφερθεί, το ολοκλήρωμα του Jacobi έχει τη μορφή :

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2U(x, y) - C$$

και σε μια καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στο επίπεδο xy

$$2U(x, y) - C = 0$$

όπου :

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right]$$

με

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3)$$

$$\text{όπου : } \Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi/\nu)}{\sin[(i-1)(\pi/\nu)]} \quad \text{και} \quad M = 2\sin(\pi/\nu)$$

Σε μία καμπύλη μηδενικής ταχύτητας στο διάγραμμα (x, C) θα έχουμε επιπλέον $y = y_i$. Άρα :

$$2U(x) - C = 0 \quad (5.9)$$

Με τη βασική προϋπόθεση $r_0 \neq 0$, θεωρούμε ότι δύο καμπύλες με παραμέτρους β, e και β', e τέμνονται σε κάποιο σημείο. Τότε θα ισχύει :

$$2U(x; \beta, e) - C = 2U(x'; \beta', e) - C'$$

Όμως στο σημείο τομής θα ισχύουν:

$$C = C', \quad x = x', \quad r_0 = r_0' \quad \text{και} \quad r_i = r_i' \quad (5.10)$$

Έχουμε λοιπόν :

$$r_0^2 + \frac{2}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] = r_0'^2 + \frac{2}{\Delta'} \left[\beta' \left(\frac{1}{r_0'} + \frac{e}{r_0'^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i'} \right]$$

και λόγω της (5.10),

$$\Delta' \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] - \Delta \left[\beta' \left(\frac{1}{r_0'} + \frac{e}{r_0'^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i'} \right] = 0$$

ή

$$\Delta' \beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) - \Delta \beta' \left(\frac{1}{r_0'} + \frac{e}{r_0'^2} \right) + (\Delta' - \Delta) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} = 0$$

ή

$$(\Delta' \beta - \Delta \beta') \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + (\Delta' - \Delta) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} = 0 \quad (5.11)$$

Όμως,

$$\Delta' \beta - \Delta \beta' = M(\Lambda + \beta' M^2 + 2\beta' e M^3) \beta - M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3) \beta' = (\beta - \beta') M \Lambda$$

και

$$\Delta' - \Delta = M(\Lambda + \beta' M^2 + 2\beta' e M^3) - M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3) = -(\beta - \beta') M^3 (1 + 2eM)$$

Οπότε η (5.11) γίνεται:

$$(\beta - \beta') \Lambda \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) - (\beta - \beta') M^2 (1 + 2eM) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} = 0 \quad (5.12)$$

ή

$$(\beta - \beta') \left[\Lambda \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) - M^2 (1 + 2eM) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] = 0$$

και επειδή

$$\beta - \beta' \neq 0$$

για το σημείο τομής θα ισχύει :

$$\Lambda \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) - M^2 (1 + 2eM) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} = 0 \quad (5.13)$$

Η σχέση αυτή είναι ανεξάρτητη του β και συνεπώς όλες οι καμπύλες για διάφορες τιμές του β θα περνούν από το ίδιο εστιακό σημείο.

Η σχέση (5.13) μπορεί να γραφεί ως :

$$F_e(x; y_i, e) = \frac{M^2 (1 + 2eM)}{\Lambda} \left(\frac{r_0^2}{r_0 + e} \right) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1 = 0 \quad (5.14)$$

και οι τιμές που αναζητούμε είναι οι ρίζες της F_e .

Σε ότι αφορά το πεδίο ορισμού της F_e , ισχύουν ακριβώς οι ίδιες παρατηρήσεις που έγιναν και στην περίπτωση της F_β . Η συνάρτηση αυτή επιλύεται αριθμητικά με τις μεθόδους που αναφέραμε. Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.9) κάθε τιμή-ρίζα x_k^e και y_k^e που έχει προκύψει, προσδιορίζουμε την αντίστοιχη τιμή της σταθεράς C (C_k^e και C_k^e αντίστοιχα).

Παρατήρηση

Βρίσκοντας τις ρίζες της F_e θέτοντάς τις στην

$$r_0 = (x_e^2 + y_i^2)^{1/2},$$

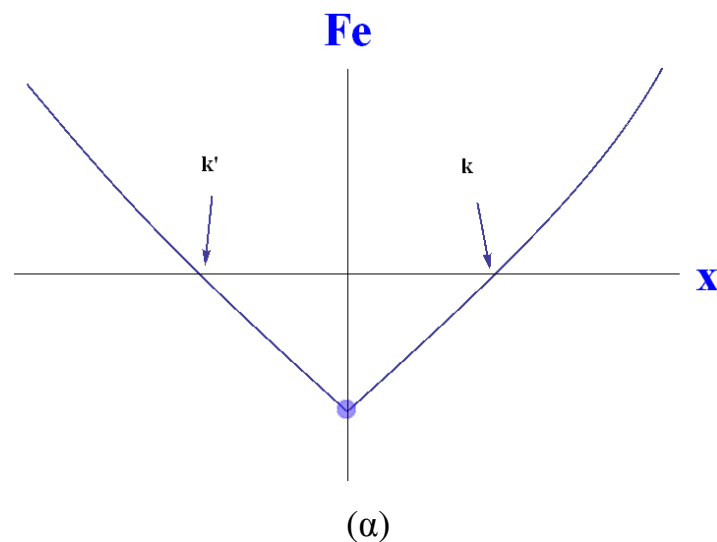
και αντικαθιστώντας στη συνέχεια την παραπάνω τιμή στο αρχικό ολοκλήρωμα (5.9), παίρνουμε την αντίστοιχη τιμή της Ιακωβιανής σταθεράς :

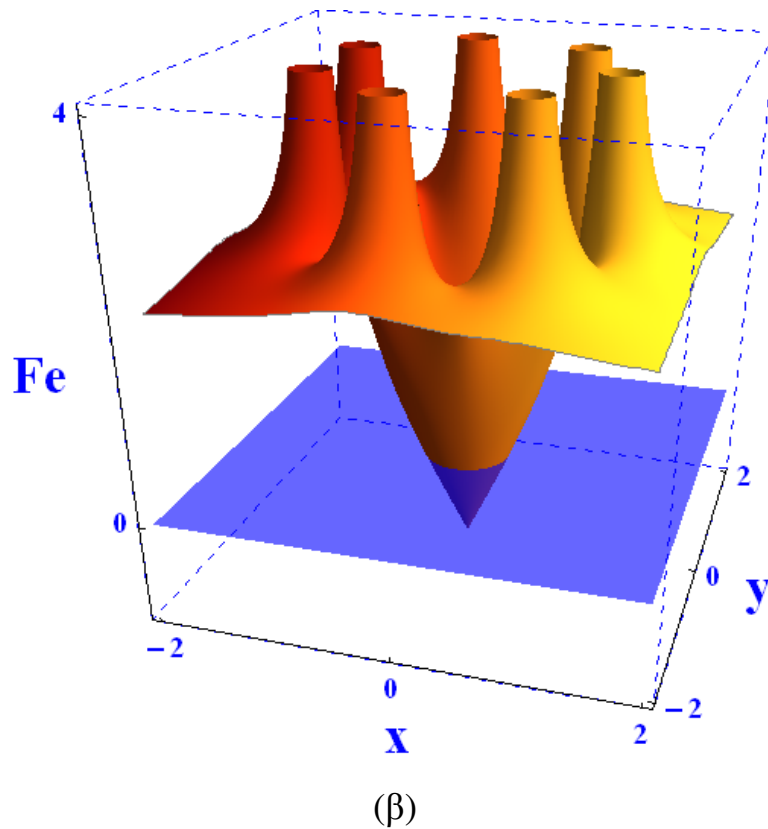
$$C = r_0^2 + \left(\frac{2}{M^3(1+2eM)} \right) \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) \quad (5.15)$$

5.7 Η συνάρτηση F_e στη βαρυτική περίπτωση ($e=0$)

Έχουμε ήδη περιγράψει εκτενώς την ύπαρξη και τις ιδιότητες των focal points στην παράγραφο 5.3.1 για τη βαρυτική περίπτωση. Η συνάρτηση που χρησιμοποιήσαμε για να βρούμε τις τετμημένες των εστιακών σημείων, ήταν η F_e για $e=0$. Παρακάτω δίνουμε το διάγραμμα $x-F_e$ για $y=0$, όπου φαίνονται οι ρίζες της F_e (Σχήμα 5.20α), καθώς και την τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης F_e στο χώρο xyF_e , όπου η τρίτη διάσταση μετρά τις τιμές της y (Σχήμα 5.20β). Το διάγραμμα $x-F_e$ προκύπτει από την τομή των επιπέδων $y=y_i$: $-y_C \leq y_i \leq y_C$, με την τρισδιάστατη επιφάνεια που δημιουργείται από την F_e στο χώρο xyF_e .

Η τομή της ίδιας επιφάνειας με το επίπεδο $F_e=0$, αποτελεί την προβολή της εστιακής καμπύλης στο επίπεδο xy . Αν υπολογίσουμε και την Ιακωβιανή σταθερά από τη σχέση (5.15) για $e=0$, τότε μπορούμε εύκολα να σχηματίσουμε την κυματοειδή μορφή της συνεχούς καμπύλης εστιακών σημείων στο διάγραμμα $C=C(x,y)$, για τη βαρυτική περίπτωση.

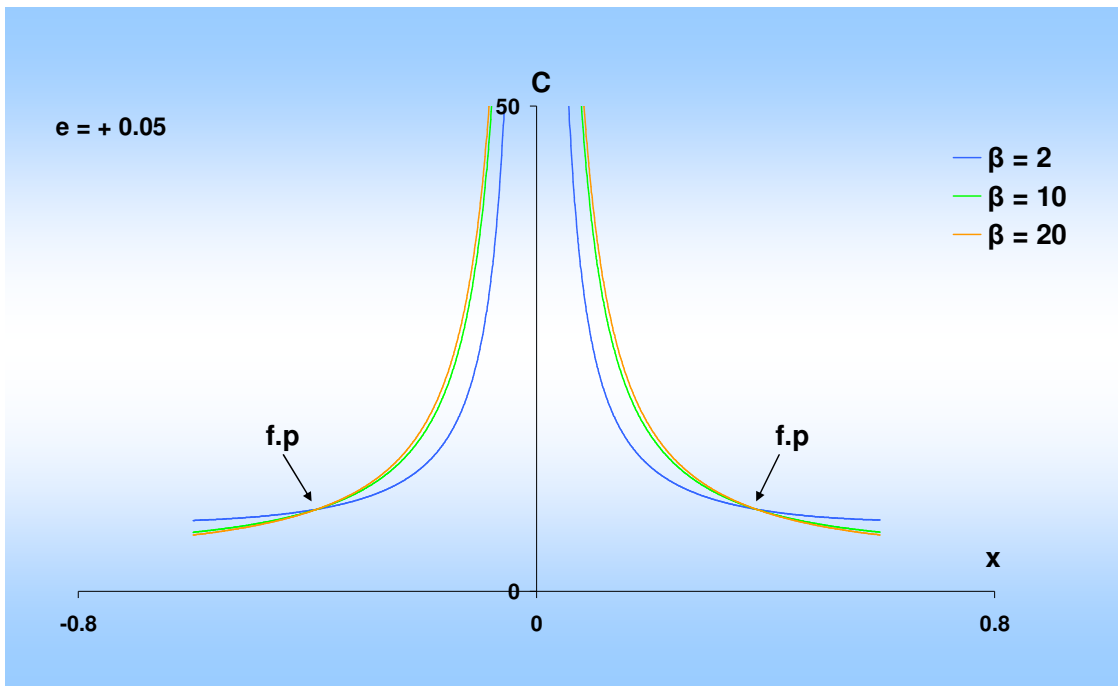




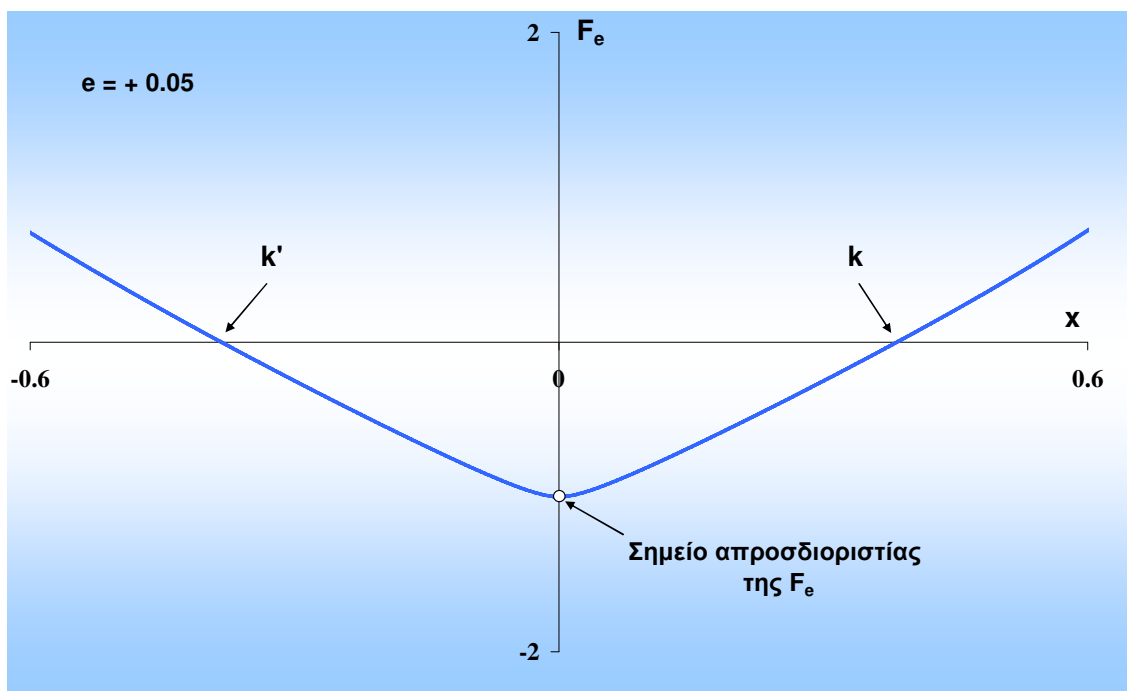
Σχήμα 5.20. (α) Οι δύο ρίζες της F_e , στο διάγραμμα $x-F_e$ (σημεία τομής με τον άξονα x), για $\nu=7$, $\beta=2$, $e=0$ και $y=0$, (β) κοινό διάγραμμα της επιφάνειας $F_e(x,y)$ και του επιπέδου $F_e=0$, για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων

5.8 Η συνάρτηση F_e στην περίπτωση $e>0$

Από τη σχέση (5.14) για $e>0$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β προέκυψε, ότι παρουσιάζονται πάντα δύο εστιακά σημεία, όπως στη βαρυτική περίπτωση. Στο Σχήμα 5.21α δίνεται το διάγραμμα $x-C$ για $\nu=7$, $e = +0.05$ και για $\beta=2, 10, 20$ όταν $y=0$, όπου διακρίνονται τα δύο εστιακά σημεία. Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.21β διαπιστώνουμε από το διάγραμμα $x-F_e$ την ύπαρξη αυτών των δύο σημείων που είναι οι ρίζες της συνάρτησης F_e .



(α)



(β)

Σχήμα 5.21. (α) Εστιακά σημεία για $e = + 0.05$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β , για $y=0$, (β) αντίστοιχο διάγραμμα $x-F_e$ όπου διαπιστώνεται η ύπαρξη των δύο εστιακών σημείων του διαγράμματος $x-C$

Στο Πίνακα Γ.2 του Παραρτήματος Γ, δίνονται οι συντεταγμένες x, C των εστιακών σημείων για διάφορες θετικές τιμές του συντελεστή e και για $y=0$. Τέλος, επισημαίνουμε ότι για οποιαδήποτε θετική τιμή του συντελεστή e υπάρχουν εστιακά σημεία και προφανώς και εστιακή καμπύλη.

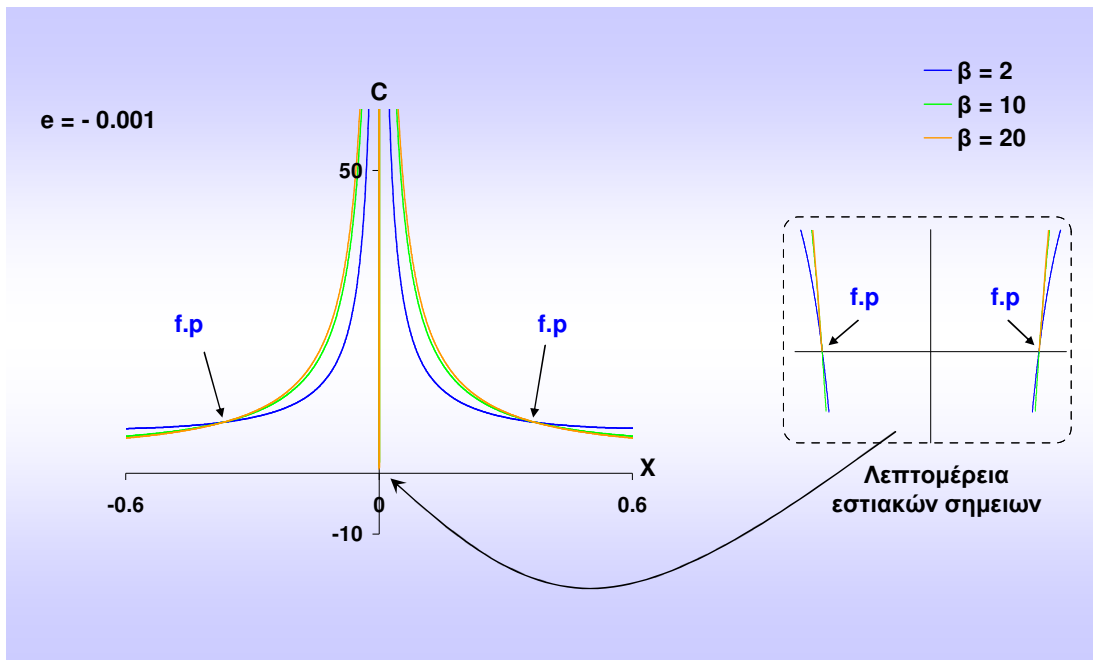
5.9 Η συνάρτηση F_e στην περίπτωση $e < 0$

Για άλλη μία φορά η αναδίπλωση της καμινάδας γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα, όταν ο συντελεστής e παίρνει αρνητικές τιμές, οδηγεί σε νέα συμπεράσματα όπως θα δούμε στη συνέχεια. Από τη μελέτη των διαγραμμάτων $x-C$ αλλά και από την επίλυση και γραφική απεικόνιση της F_e , προκύπτει ότι παρουσιάζονται **τέσσερα, τρία, δύο, ένα ή κανένα** εστιακό σημείο στις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας.

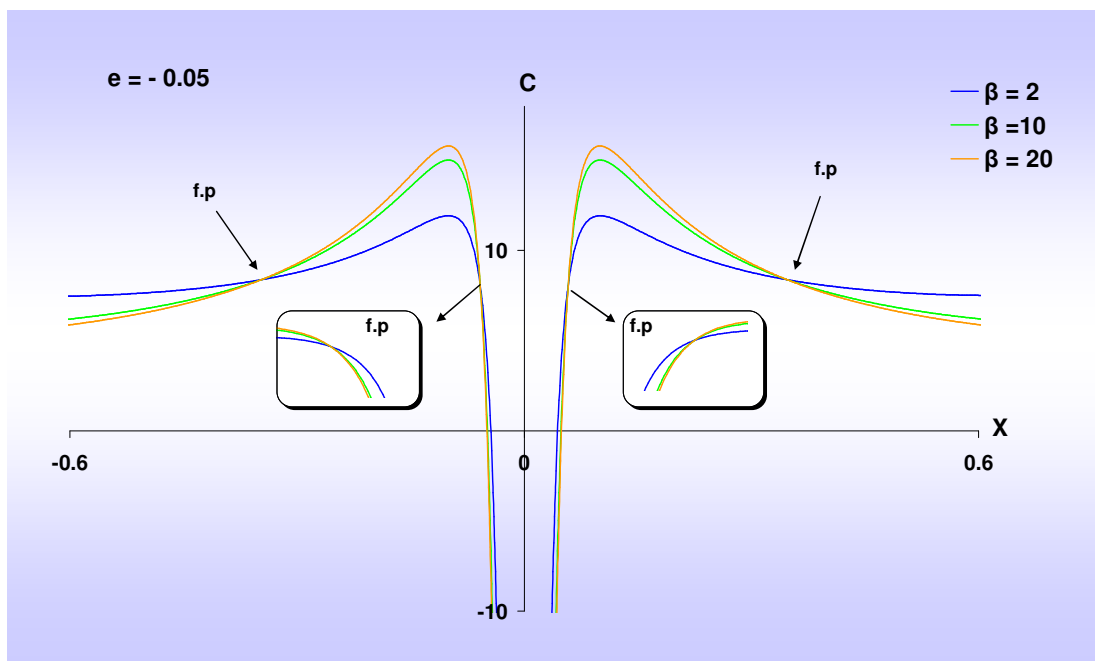
5.9.1 Μελέτη της εξέλιξης των εστιακών σημείων συναρτήσει του συντελεστή e για σχηματισμό με περιττό αριθμό περιφερειακών σωμάτων, μέσω των διαγραμμάτων $x-C$ στο επίπεδο $y=0$

Στο Σχήμα 5.22 παρουσιάζονται τα διαγράμματα $x-C$ ($y=0$) για σταθερές τιμές του συντελεστή $Ma_{\infty} = e$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β , σε δακτυλιοειδή σχηματισμό $n=7$ σωμάτων. Στα Σχήματα 5.22α, 5.22β και 5.22γ, όπου οι τιμές της παραμέτρου e είναι $e=-0.001$, $e=-0.05$ και $e=-0.1$ αντίστοιχα, εμφανίζονται τέσσερα εστιακά σημεία, από δύο σε κάθε κλάδο του διαγράμματος. Καθώς αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η e , τα σημεία τομής γίνονται τρία, εκ των οποίων τα δύο βρίσκονται στον αριστερό κλάδο του διαγράμματος (αρνητικά x) και το τρίτο βρίσκεται στο δεξιό κλάδο (σημείο επαφής). Στη συνέχεια τα εμφανιζόμενα εστιακά σημεία γίνονται δύο (και τα δύο στον αριστερό κλάδο του διαγράμματος). Η περίπτωση αυτή δείχνεται στο Σχήμα 5.22δ, όπου $e=-0.11804$. Τέλος, για την τιμή $e=-0.11806$ εμφανίζεται ένα μόνο εστιακό σημείο στο αριστερό σκέλος του διαγράμματος (σημείο επαφής με τον άξονα x), ενώ για μεγαλύτερες απόλυτες τιμές

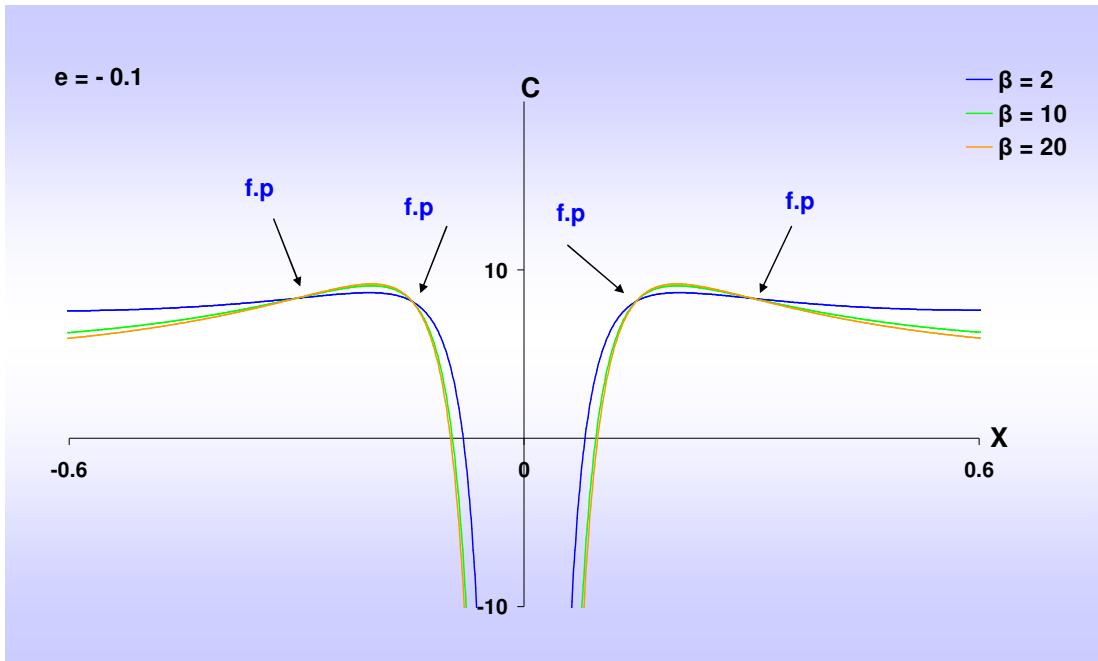
του e δεν υπάρχουν εστιακά σημεία. Η τελευταία αυτή περίπτωση δείχνεται στο Σχήμα 5.22ε όπου οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας έχουν σχεδιασθεί για $e = -0.17$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β . Η παρακολούθηση της εξέλιξης του πλήθους των εστιακών σημείων όταν μεταβάλλεται η e , γίνεται ακριβέστερη με τη βοήθεια των διαγραμμάτων $x - F_e$, όπως θα δούμε στη συνέχεια.



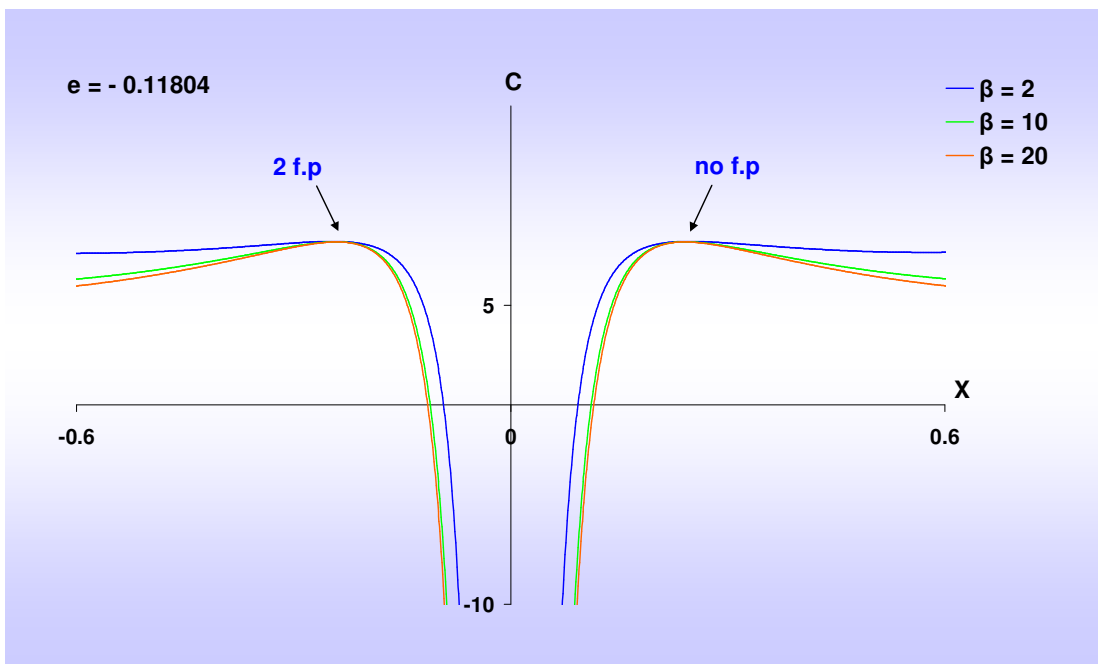
(α)



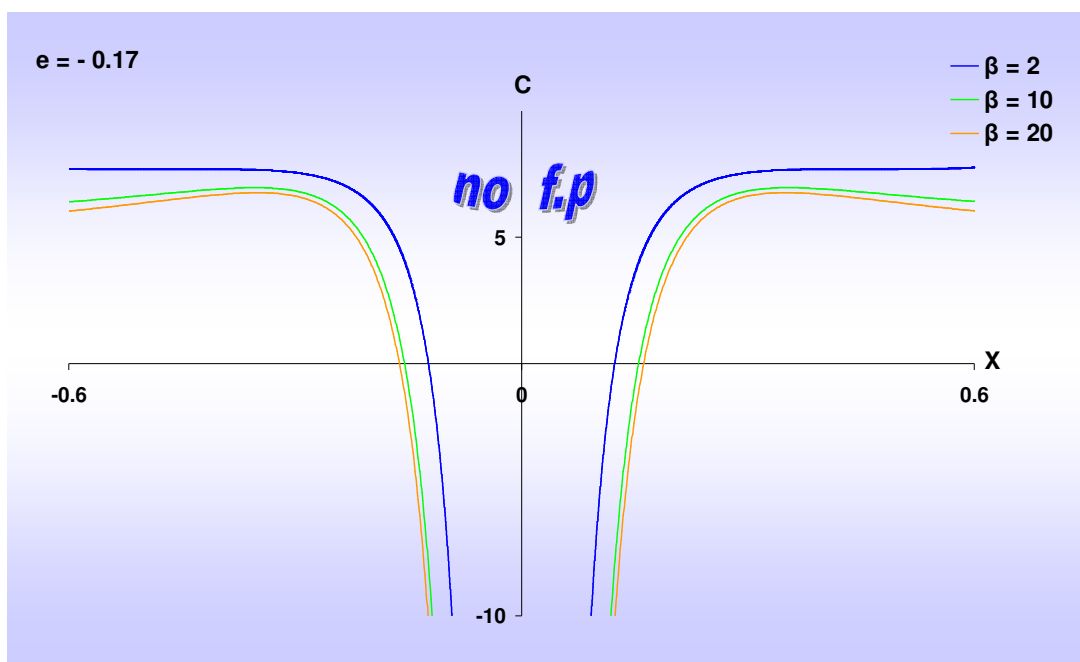
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Σχήμα 5.22. Διαγράμματα $x-C$ για $v=7$, $y=0$ και διάφορες σταθερές τιμές της παραμέτρου e όπου σημειώνονται τα υπάρχοντα εστιακά σημεία: (α) $e=-0.001$, τέσσερα εστιακά σημεία, (β) $e=-0.05$, τέσσερα εστιακά σημεία, (γ) $e=-0.1$, τέσσερα εστιακά σημεία, (δ) $e=-0.11804$, δύο εστιακά σημεία και (ε) $e=-0.17$, κανένα εστιακό σημείο

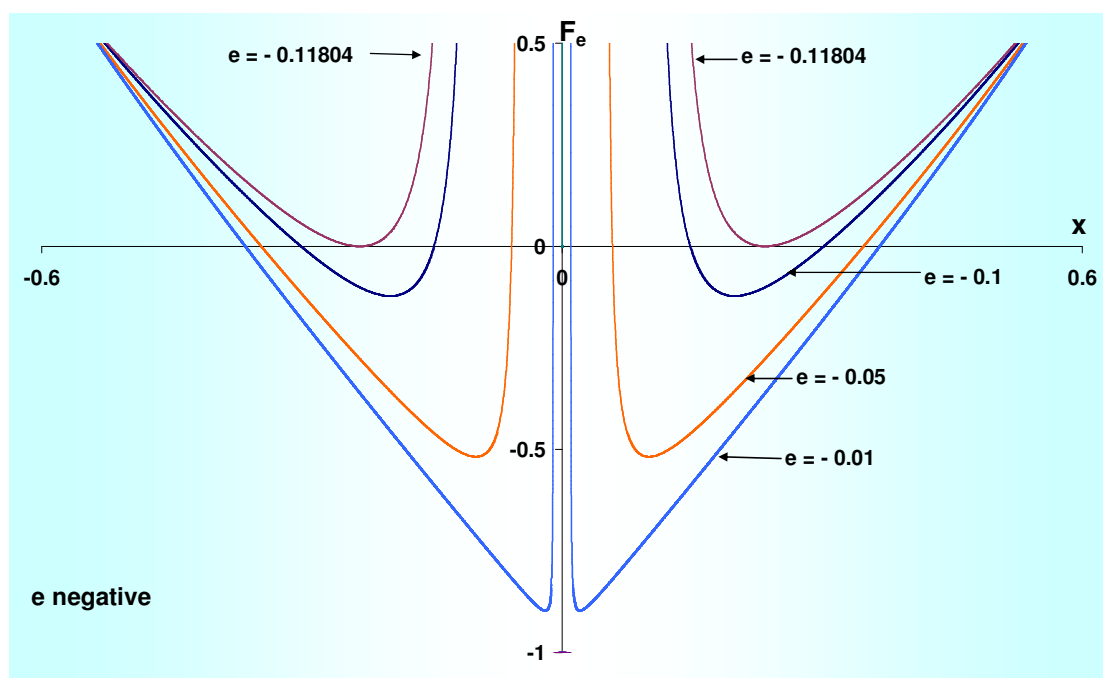
5.9.2 Μελέτη της εξέλιξης του πλήθους των εστιακών σημείων συναρτήσει του συντελεστή e για σχηματισμό με περιττό αριθμό περιφερειακών σωμάτων, μέσω των διαγραμμάτων $x-F_e$ για $y=0$

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε την εξέλιξη των εστιακών σημείων για την περίπτωση που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, επιλύοντας και απεικονίζοντας τις ρίζες της συνάρτησης F_e , σε διαγράμματα $x-F_e$ και για $y=0$.

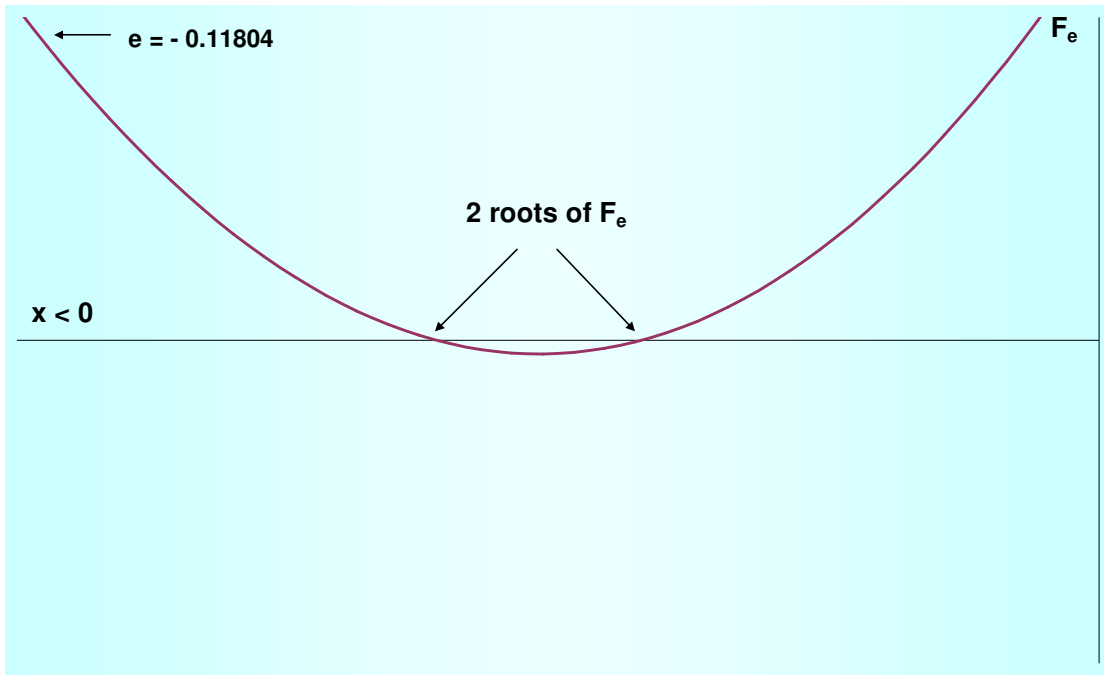
Στο Σχήμα 5.23α που ακολουθεί, δίνεται το διάγραμμα $x-F_e$ για $y=0$ και για διάφορες τιμές του συντελεστή e , τιμές οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν και στην προηγούμενη παράγραφο. Οι ρίζες της F_e είναι όσες και το πλήθος των εστιακών σημείων. Από αυτό το σχήμα προκύπτει ότι, όσο αυξάνει το e κατά απόλυτη τιμή τόσο οι δύο ρίζες της F_e που βρίσκονται στα αρνητικά x , αλλά και αυτές που

βρίσκονται στα θετικά x πλησιάζουν μεταξύ τους. Όμως αυτή η προσέγγιση γίνεται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ημιάξονα του x , λόγω της διαφοράς των τετμημένων αλλά και του C . Έτσι, για την τιμή λ.χ. $e=-0.11804$, ενώ στα αρνητικά x τα δύο σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες είναι πολύ κοντά αλλά εντοπίζονται ακόμη από το σχετικό πρόγραμμα H/Y (Fortran - Mathematica), στα θετικά x ο αντίστοιχος κλάδος της καμπύλης F_e εξελίσσεται πάνω από τον άξονα x χωρίς να έχει με αυτόν κανένα σημείο τομής (Σχήμα 5.23 β-γ). Με άλλα λόγια, το ελάχιστο που υπάρχει στο τμήμα της F_e στα θετικά x είναι πιο κοντά στον άξονα x από εκείνο στο τμήμα της καμπύλης για αρνητικά x ,

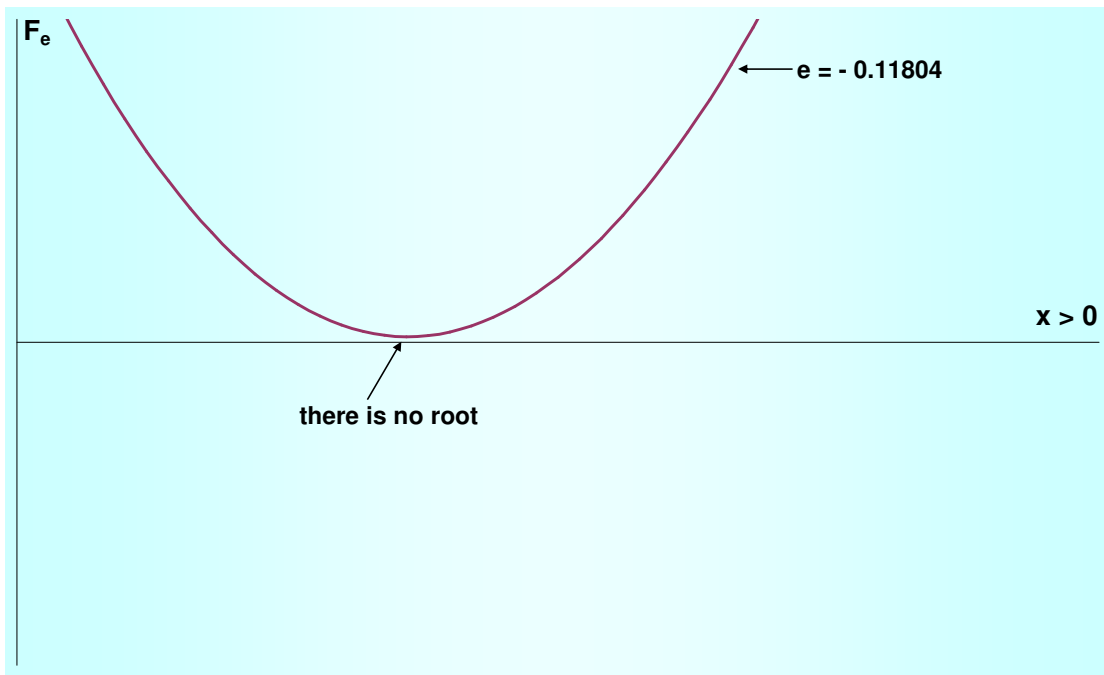
$$|\min F_e|_{x<0} > |\min F_e|_{x>0}$$



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.23. (α) Διαγράμματα $x-F_e$ για $y=0$ και διάφορες τιμές του e , (β)-(γ) λεπτομέρειες του διαγράμματος $x-F_e$ για $e = -0.11804$ και $y=0$, στον αρνητικό και θετικό ημιάξονα x αντίστοιχα

Για τιμές λίγο μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή από την $e = -0.11804$ τα δύο σημεία τομής της F_e στον αριστερό κλάδο ταυτίζονται σε ένα που είναι το σημείο επαφής

της συνάρτησης με τον άξονα x και συνεπώς έχουμε για την οριακή αυτή περίπτωση ένα μόνο εστιακό σημείο (αριστερά). Από εκεί και πέρα δεν υπάρχουν εστιακά σημεία. Ενδεικτικές τιμές συντεταγμένων των εστιακών σημείων για κάποιες τιμές της παραμέτρου e , δίνονται στον Πίνακα Γ.3 του Παραρτήματος Γ, όπου γίνεται φανερό ότι στην τιμή $e=-0.118036$ έχουμε τρία εστιακά σημεία (δύο αριστερά και ένα σημείο επαφής με τον άξονα x δεξιά), στην τιμή $e=-0.11804$ έχουμε μόνο δύο εστιακά σημεία στις αρνητικές τιμές του x . Τέλος στην τιμή $e=-0.11806$ υπάρχει ένα μόνο εστιακό σημείο στον αριστερό κλάδο, ενώ για μεγαλύτερες απόλυτες τιμές της e δεν υπάρχουν εστιακά σημεία.

5.9.3 Μέθοδος προσδιορισμού των σημείων επαφής των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης F_e με τον άξονα των x

Για να βρούμε τα σημεία επαφής των κλάδων της F_e με τον άξονα x και για συγκεκριμένη τιμή της y , πρέπει κατ' αρχήν να εντοπίσουμε τα τοπικά ακρότατα (ελάχιστα) της συνάρτησης για διάφορες τιμές της e . Για το λόγο αυτό:

(i) Υπολογίζω την πρώτη παράγωγο F_e' και βρίσκω τις ρίζες για διάφορα e . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί είτε με κάποια αριθμητική μέθοδο, είτε γραφικά.

(ii) Για τις ρίζες αυτές υπολογίζω την τιμή της δεύτερης παραγωγού F_e'' για κάθε e .

Τα ζητούμενα σημεία επαφής είναι αυτά για τα οποία

$$F_e''=0 \tag{5.16}$$

(iii) Τα ζεύγη τιμών x_c, e_c που αναζητώ, θα πρέπει να επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} F_e'(x_c; y_i, e_c) &= 0 \\ F_e''(x_c; y_i, e_c) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.17}$$

Για το τυχαίο ζεύγος x_c, e_c όμως θα έχω

$$\left. \begin{aligned} F_e'(x_c; y_i, e_c) &= 0 \\ F_e''(x_c; y_i, e_c) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.18}$$

Άρα θα πρέπει να κάνω διορθώσεις $x_c+\delta x_c, e_c+\delta e_c$, ώστε

$$\left. \begin{aligned} F_e'(x_c + \delta x_c; y_i, e_c + \delta e_c) &= 0 \\ F_e''(x_c + \delta x_c; y_i, e_c + \delta e_c) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Αναλύω σε σειρές Taylor κρατώντας τους γραμμικούς όρους

$$\left. \begin{aligned} F_e'(x_c; y_i, e_c) + \frac{\partial F_e'}{\partial x_c} \delta x_c + \frac{\partial F_e'}{\partial e_c} \delta e_c &= 0 \\ F_e''(x_c; y_i, e_c) + \frac{\partial F_e''}{\partial x_c} \delta x_c + \frac{\partial F_e''}{\partial e_c} \delta e_c &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ο πρώτος όρος της πρώτης εξίσωσης είναι μηδέν λόγω της (5.15). Άρα :

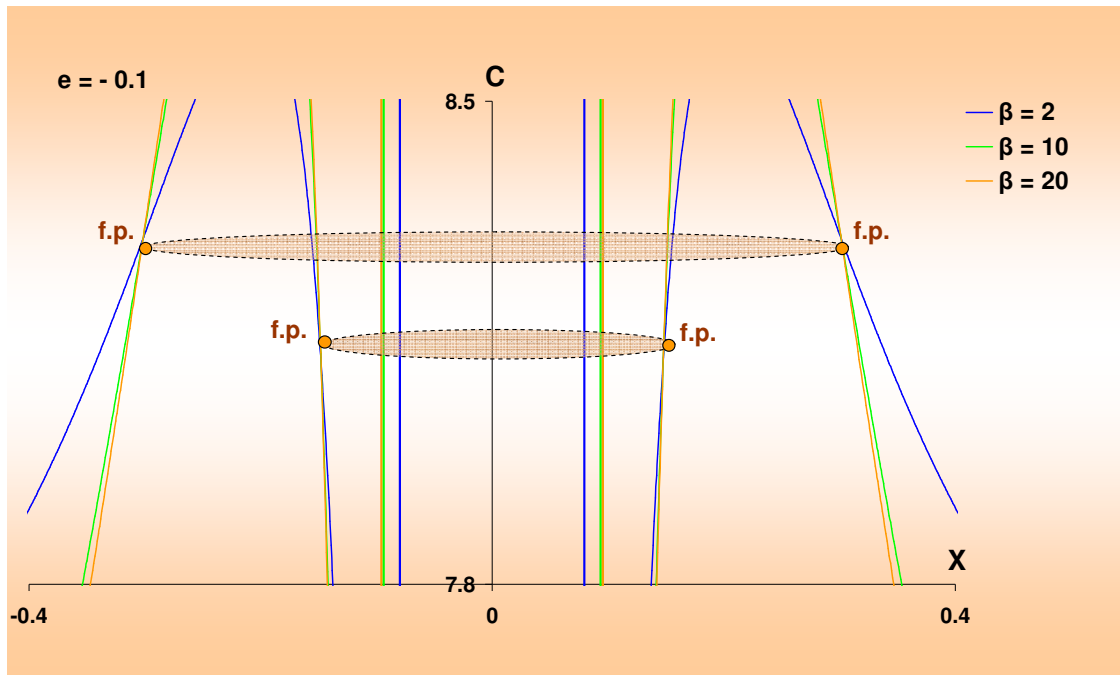
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_e'}{\partial x_c} \delta x_c + \frac{\partial F_e'}{\partial e_c} \delta e_c &= 0 \\ \frac{\partial F_e''}{\partial x_c} \delta x_c + \frac{\partial F_e''}{\partial e_c} \delta e_c &= -F_e''(x_c; e_c) \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

και λύνω ως προς δx_c , δe_c . Επειδή πιθανόν οι διορθώσεις να μην είναι ικανοποιητικές επαναλαμβάνω τη διαδικασία μέχρις ότου $|\delta x_c|, |\delta e_c| \leq \varepsilon$, με $\varepsilon = 10^{-9}$.

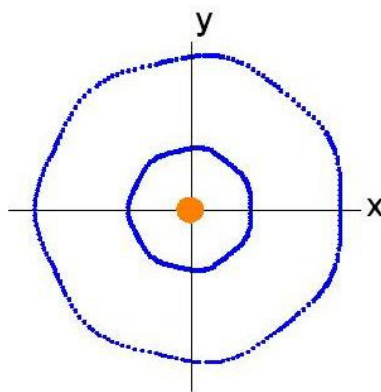
5.9.4 Δισδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση των εστιακών καμπύλων για δεδομένο συντελεστή διαταραχής e

Σαρώνοντας την τεταγμένη y και βρίσκοντας τις αντίστοιχες ρίζες της F_e καθώς και από την αντικατάσταση κάθε ζεύγους (x, y) που προκύπτει, στη σχέση (5.15), συγκεντρώσαμε στον Πίνακα Γ.4 του Παραρτήματος Γ, τα εστιακά σημεία στο χώρο xyC .

Στο Σχήμα 5.24α διακρίνουμε στο διάγραμμα $x-C$ τα τέσσερα εστιακά σημεία, τα οποία έχουμε επισημάνει, για $e=-0.1$, $y=0$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β . Στο ίδιο σχήμα απεικονίζουμε με διακεκομμένες τις δύο καμπύλες που αποτελούν το γεωμετρικό τόπο των εστιακών σημείων, θεωρώντας ως τρίτη διάσταση τον άξονα y . Η μία από τις καμπύλες αυτές εμφανίζεται σε υψηλότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C , ενώ η άλλη εμφανίζεται σε χαμηλότερες τιμές. Στο Σχήμα 5.24β δίνουμε την προβολή στο επίπεδο xy των δύο αυτών καμπύλων.



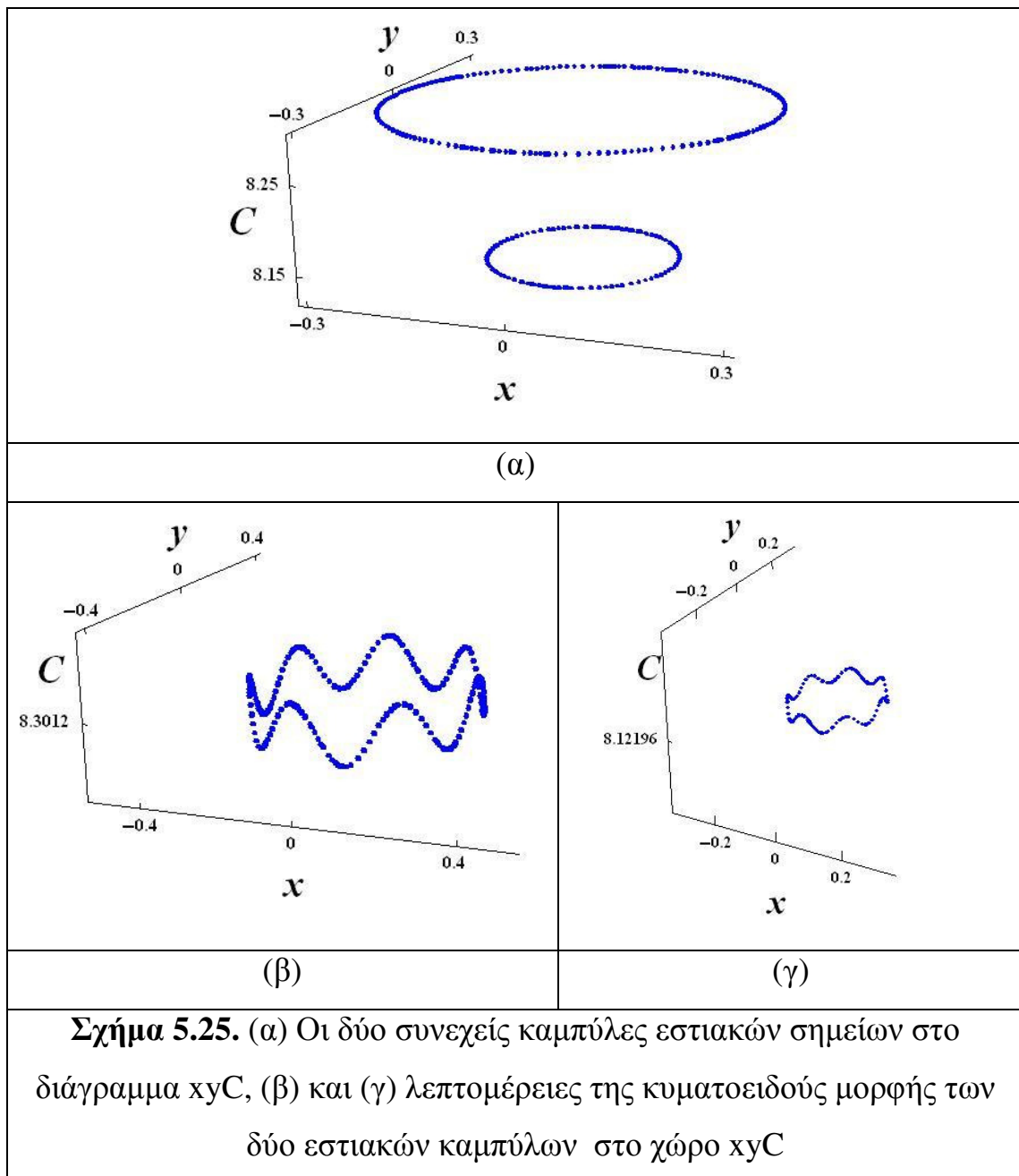
(α)



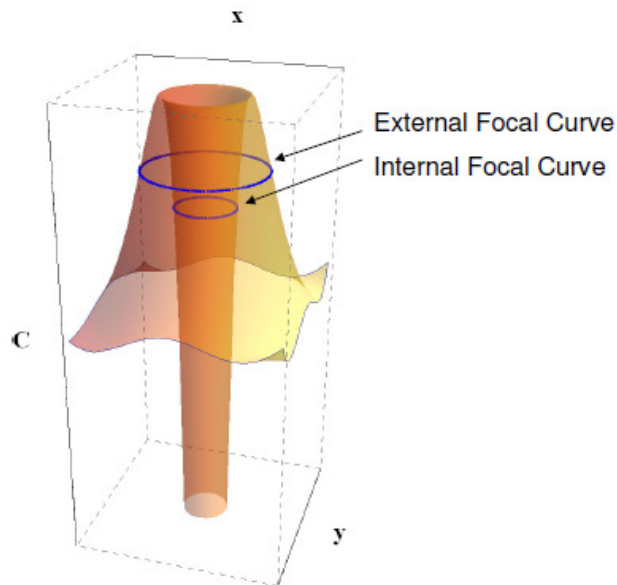
(β)

Σχήμα 5.24. (α) Τα τέσσερα εστιακά σημεία στο διάγραμμα $x-C$ για $e=-0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β . Οι δύο διακεκομμένες καμπύλες είναι οι εστιακές καμπύλες θεωρώντας και την τρίτη διάσταση y , (β) προβολή στο επίπεδο xy της κατανομής των εστιακών σημείων για διάφορες τιμές του y

Στην πραγματικότητα, οι δύο αυτές καμπύλες είναι συνεχείς στο χώρο xyC (Σχήμα 5.25α), έχουν κυματοειδή μορφή λόγω των διαφορετικών τιμών της Ιακωβιανής σταθεράς για κάθε τιμή της y και εμφανίζουν την ίδια συμμετρία σε στροφές $2\pi/\nu$ (εδώ περί τον άξονα OC) με αυτήν του σχηματισμού (Σχήματα 5.25β και 5.25γ).



Στο Σχήμα 5.26 φαίνονται οι δύο εστιακές καμπύλες, όπως αυτές αναπτύσσονται πάνω στην επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας. Η εξωτερική, (external focal curve) που αναπτύσσεται στην εξωτερική επιφάνεια της «καμινάδας» και η εσωτερική, που αναπτύσσεται πάνω στην επιφάνεια του αναδιπλούμενου τμήματός της (internal focal curve).



Σχήμα 5.26. Οι δύο εστιακές καμπύλες στην επιφάνεια της κεντρικής καμινάδας

Τα συγγραμμικά και τριγωνικά εστιακά σημεία της εξωτερικής καμπύλης τα ονομάζουμε \mathbf{k}_{ex} και \mathbf{k}'_{ex} , ενώ αυτά της εσωτερικής εστιακής καμπύλης \mathbf{k}_{in} και \mathbf{k}'_{in} αντίστοιχα. Τα μεν \mathbf{k}_{in} σημεία βρίσκονται στις ίδιες διευθύνσεις με τα \mathbf{k}_{ex} σημεία, ενώ τα \mathbf{k}'_{in} είναι στις ίδιες διευθύνσεις με τα \mathbf{k}'_{ex} . Τα \mathbf{k}_{ex} , \mathbf{k}'_{ex} σημεία εξελίσσονται στην επιφάνεια της κεντρικής καμινάδας μεταξύ των τιμών C_k^{ex} , $C_{k'}^{ex}$, ενώ τα \mathbf{k}_{in} , \mathbf{k}'_{in} σημεία εξελίσσονται στην επιφάνεια της αναδιπλούμενης περιοχής της κεντρικής καμινάδας, μεταξύ των αντίστοιχων τιμών C_k^{in} και $C_{k'}^{in}$. Αυτά τα ζεύγη τιμών των C δημιουργούν στο επίπεδο xy δύο ομόκεντρες κλειστές και πολύ στενές (αφού τα C_k^{ex} , $C_{k'}^{ex}$ όπως και τα C_k^{in} , $C_{k'}^{in}$ διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους) ζώνες, μέσα στις οποίες εξελίσσονται οι προβολές των εστιακών καμπύλων στο επίπεδο xy (Σχήμα 5.24β).

5.9.5 Περιοχές τιμών της μεταβλητής y και εξέλιξη του πλήθους των εστιακών σημείων συναρτήσει της μεταβλητής y

Από τα αριθμητικά δεδομένα του Πίνακα Γ.4 του Παραρτήματος Γ, προέκυψε η προβολή των εστιακών σημείων στο επίπεδο xy , μέσω της οποίας οριοθετείται η περιοχή τιμών της y . Η εμφάνιση δύο εστιακών καμπύλων για $e < 0$, δημιουργεί μια διαφορετική εξέλιξη του πλήθους των εστιακών σημείων από τις προηγούμενες περιπτώσεις, όπως θα φανεί στη συνέχεια. Η εξωτερική καμπύλη παίρνει τιμές για την μεταβλητή y στο διάστημα $[0, \pm y_{c.ex}]$, ενώ η εσωτερική στο διάστημα $[0, \pm y_{c.in}]$, όπου $y_{c.ex}$ και $y_{c.in}$ οι αντίστοιχες οριακές τιμές τους.

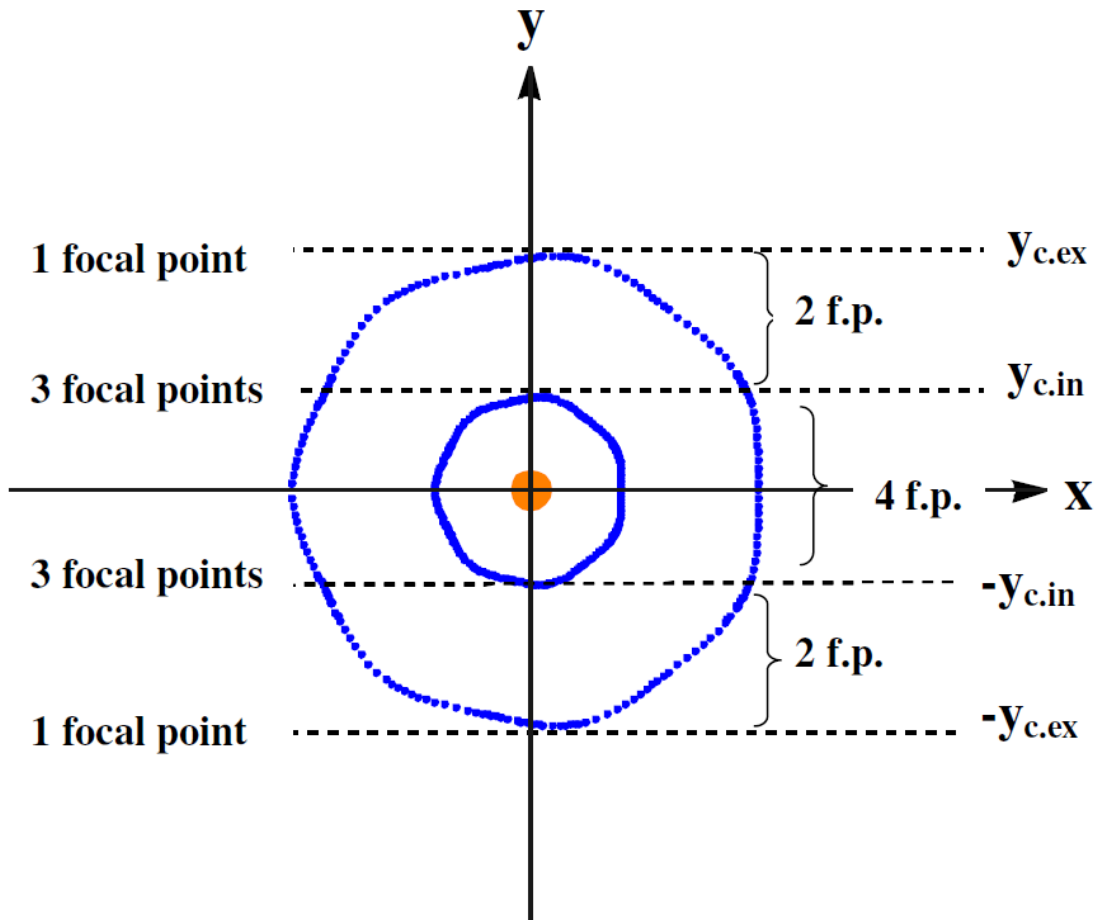
Στον Πίνακα 5.4 που ακολουθεί δίνεται το πλήθος των εστιακών σημείων, όπως αυτό διαμορφώνεται εντός των περιοχών που οριοθετούνται από τις τιμές των $y_{c.ex}$ και $y_{c.in}$.

Πίνακας 5.4. Πλήθος εστιακών σημείων στις περιοχές που δημιουργούν οι οριακές τιμές $y_{c.ex}$ και $y_{c.in}$

$y < -y_{c.in}$	Κανένα εστιακό σημείο
$y = -y_{c.ex}$	Ένα εστιακό σημείο
$-y_{c.ex} < y < -y_{c.in}$	Δύο εστιακά σημεία
$y = -y_{c.in}$	Τρία εστιακά σημεία
$-y_{c.in} < y < +y_{c.in}$	Τέσσερα εστιακά σημεία
$y = +y_{c.in}$	Τρία εστιακά σημεία
$+y_{c.in} < y < +y_{c.ex}$	Δύο εστιακά σημεία
$y = +y_{c.ex}$	Ένα εστιακό σημείο
$y > +y_{c.ex}$	Κανένα εστιακό σημείο

Το Σχήμα 5.27 που ακολουθεί κάνει ακόμα περισσότερο εμφανείς τις περιοχές τιμών της y σε σχέση με το πλήθος των εστιακών σημείων. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, για $v=7$ και $e = -0.1$ οι τιμές των οριακών τιμών της y είναι:

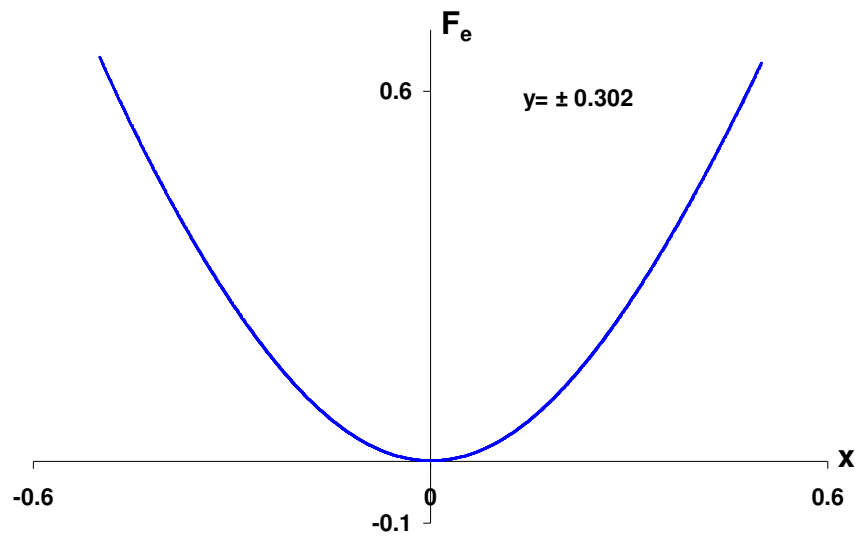
$$y_{c.ex} = \pm 0.302, \quad y_{c.in} = \pm 0.1478$$



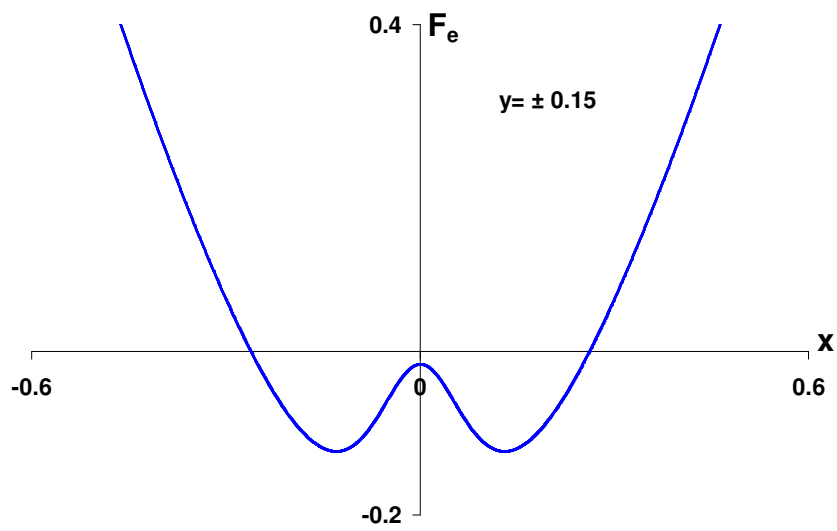
Σχήμα 5.27. Εξέλιξη του πλήθους των εστιακών σημείων, εντός της επιτρεπτής περιοχής τιμών της μεταβλητής y

5.9.6 Μελέτη της εξέλιξης των εστιακών σημείων που προκύπτουν από τη συνάρτηση F_e , για δεδομένο συντελεστή διαταραχής e , συναρτήσει της μεταβλητής y

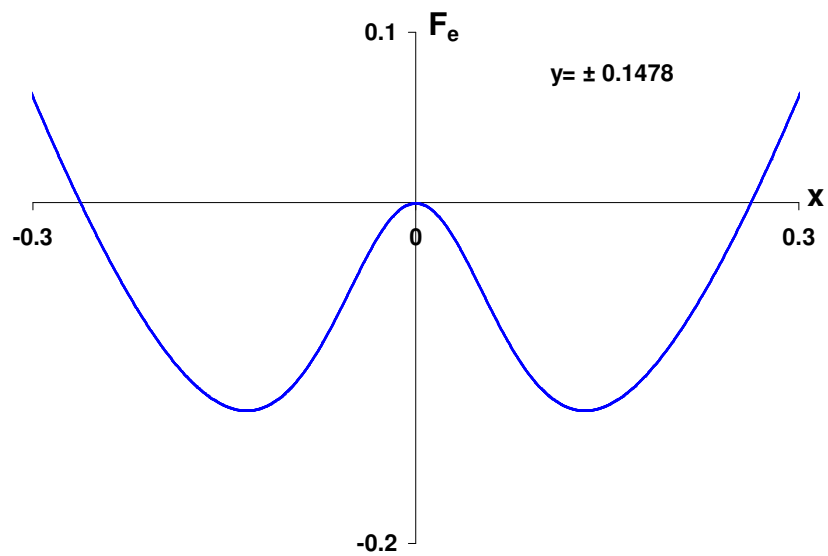
Στη συνέχεια δίνονται τα διαγράμματα $x-F_e$ για $e=-0.1$, $v=7$ και για διάφορες τιμές της y , συμπεριλαμβανομένου και των οριακών τιμών $y_{c.ex} = \pm 0.302$ και $y_{c.in} = \pm 0.1478$. Με αυτό τον τρόπο φαίνεται πώς εξελίσσεται η συνάρτηση F_e σε σχέση με τα σημεία τομής ή επαφής της με τον άξονα x και συνεπώς και το πλήθος των εστιακών σημείων καθώς μεταβάλλεται η y (Σχήμα 5.28).

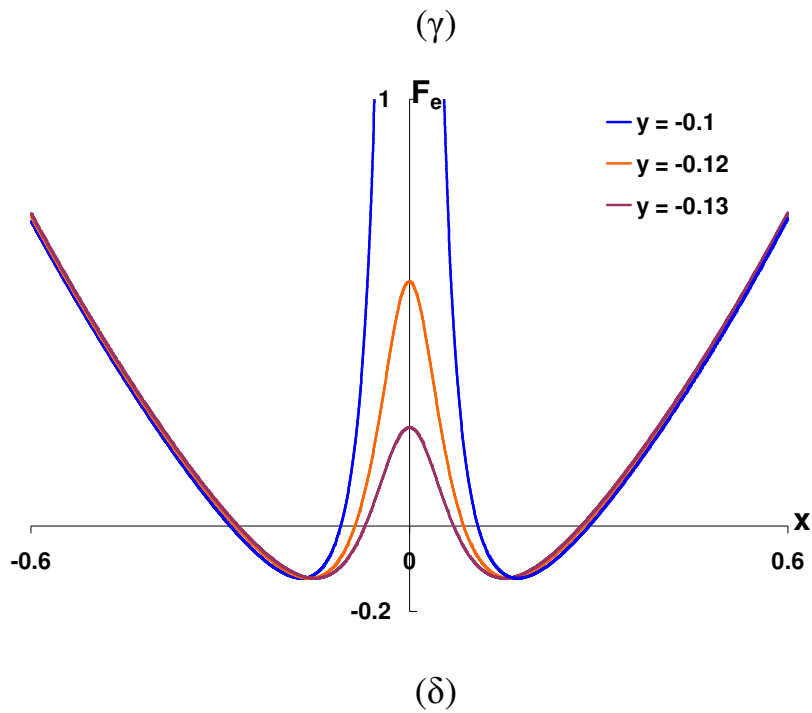


(α)



(β)





Σχήμα 5.28. Εξέλιξη του πλήθους των ριζών της F_e στα διαγράμματα $x-F_e$, για $e=-0.1$ και διάφορες τιμές της y

- (α) Διάγραμμα $x-F_e$ για $y= y_{c.ex} = \pm 0.302$, όπου υπάρχει ένα εστιακό σημείο. Η συνάρτηση F_e δεν είναι άρτια ως προς x και συνεπώς το σημείο επαφής δεν βρίσκεται ακριβώς στην τιμή $x=0$
- (β) Διάγραμμα $x-F_e$ για $y=\pm 0.15$ όπου υπάρχουν δύο εστιακά σημεία, (γ) διάγραμμα $x-F_e$ για $y= y_{c.in} = \pm 0.1478$, όπου υπάρχουν τρία εστιακά σημεία, (δ) διαγράμματα $x-F_e$ για διάφορες τιμές της y , όπου υπάρχουν τέσσερα εστιακά σημεία

5.10 Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_e=F_e(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β

Έχουμε τη συνάρτηση :

$$F_e(x; y_i, e) = \frac{M^2(1+2eM)}{\Lambda} \left(\frac{r_0^2}{r_0+e} \right) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1$$

οι ρίζες της οποίας αντιστοιχούν στα εστιακά σημεία (focal points) των διαγραμμάτων $x-C$ για την περίπτωση που εξετάζουμε.

Έστω δύο καμπύλες της συνάρτησης F_e με παραμέτρους e και e' και για $y=y_i$, οι οποίες τέμνονται σε κάποιο σημείο. Τότε θα ισχύει,

$$\frac{M^2(1+2eM)}{\Lambda} \left(\frac{r_0^2}{r_0+e} \right) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1 = \frac{M^2(1+2e'M)}{\Lambda} \left(\frac{r_0'^2}{r_0'+e'} \right) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1$$

Όμως στο σημείο τομής, $F_e=F_{e'}$, $r_0=r_0'$ και $r_i=r_i'$

$$\text{όπου } r_0 = (x_e^2 + y_c^2)^{1/2}$$

και καταλήγουμε στη σχέση :

$$(e-e')(2Mr_0-1)=0.$$

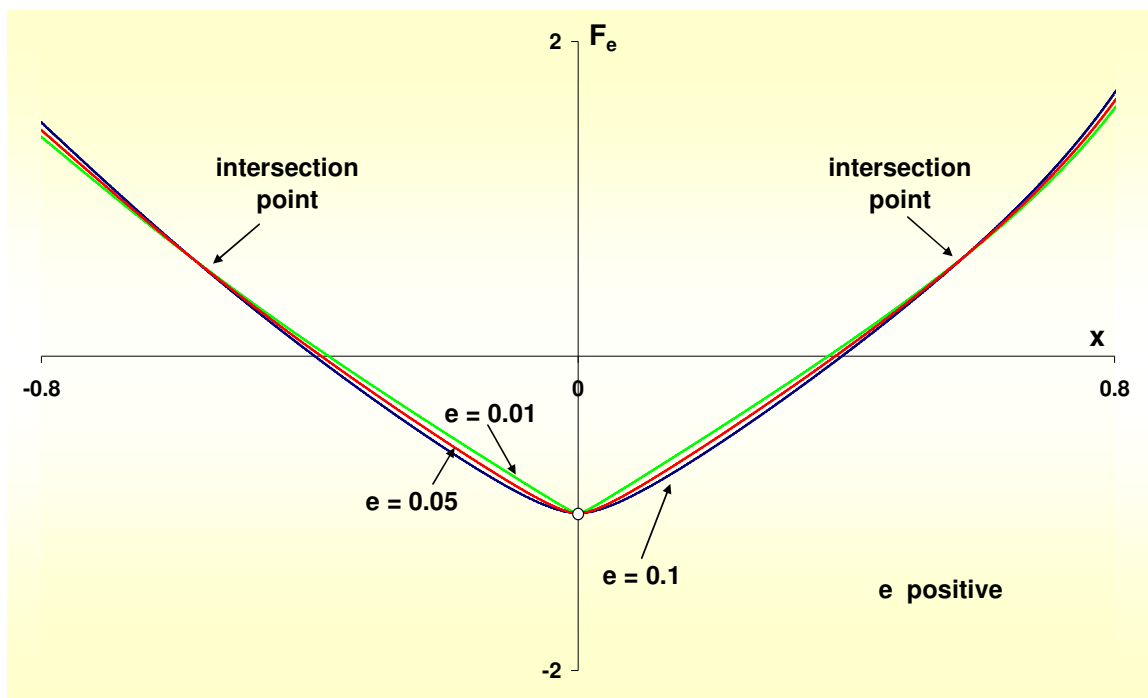
Επειδή $e \neq e'$ για το σημείο τομής ισχύει η σχέση :

$$2Mr_0-1=0 \quad \text{ή} \quad r_0 = \frac{1}{2M}$$

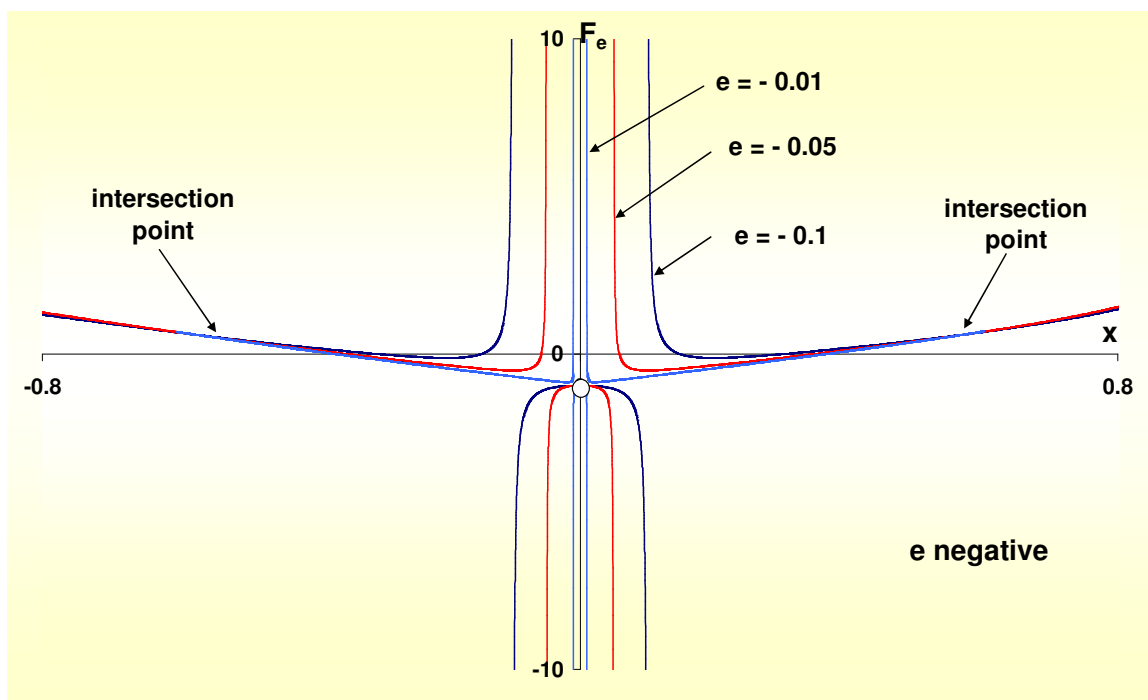
η οποία είναι ανεξάρτητη του e και συνεπώς όλες οι καμπύλες για διαφορετικές τιμές του e θα περνούν από το ίδιο σημείο (intersection point). Τελικά :

$$x_{F_e} = \pm \sqrt{\frac{1}{4M^2} - y_i^2}$$

Προφανώς την αντίστοιχη τιμή της F_e την βρίσκουμε από τη σχέση (5.14). Επομένως έχουμε βρει, όπως και στην περίπτωση της F_β , δύο κοινά σημεία διέλευσης (intersection points) του επιπέδου $y=y_i$, τα οποία είναι ανεξάρτητα από τις τιμές των e και β . Για $\nu=7$ και για οποιαδήποτε τιμή των e και β υπολογίσαμε ότι $x_e = \pm 0.576191$. Παρακάτω δίνονται σε κοινό διάγραμμα, τα διαγράμματα $x-F_e$ για τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ($\nu=7$, $\beta=2$). Στα Σχήματα 5.29α και 5.29β διακρίνουμε τα δύο κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_e=F_e(x)$, για $e>0$ ($e=0.01, 0.05, 0.1$) και για $e<0$ ($e=-0.01, -0.05, -0.1$), αντίστοιχα.



(α)



(β)

Σχήμα 5.29. Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_e = F_e(x)$ για $y=0$ και για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e : (α) για $e > 0$ και (β) για $e < 0$. Και στα δύο διαγράμματα έχουμε επισημάνει το σημείο απροσδιοριστίας

5.11 Μεταβολή των θέσεων των κοινών σημείων διέλευσης των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$ και $F_e = F_e(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β , συναρτήσει της παραμέτρου v

Για τις συναρτήσεις:

$$F_\beta(x; y_i, \beta) = \frac{r_0^2}{K - r_0\beta} \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} - 1$$

όπου

$$K = \frac{\Lambda + \beta M^2}{2M^3}$$

και

$$F_e(x; y_i, e) = \frac{M^2(1 + 2eM)}{\Lambda} \left(\frac{r_0^2}{r_0 + e} \right) \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} - 1$$

$$\text{με } r_0 = (x_\beta^2 + y_i^2)^{1/2} \text{ και } r_0 \neq 0,$$

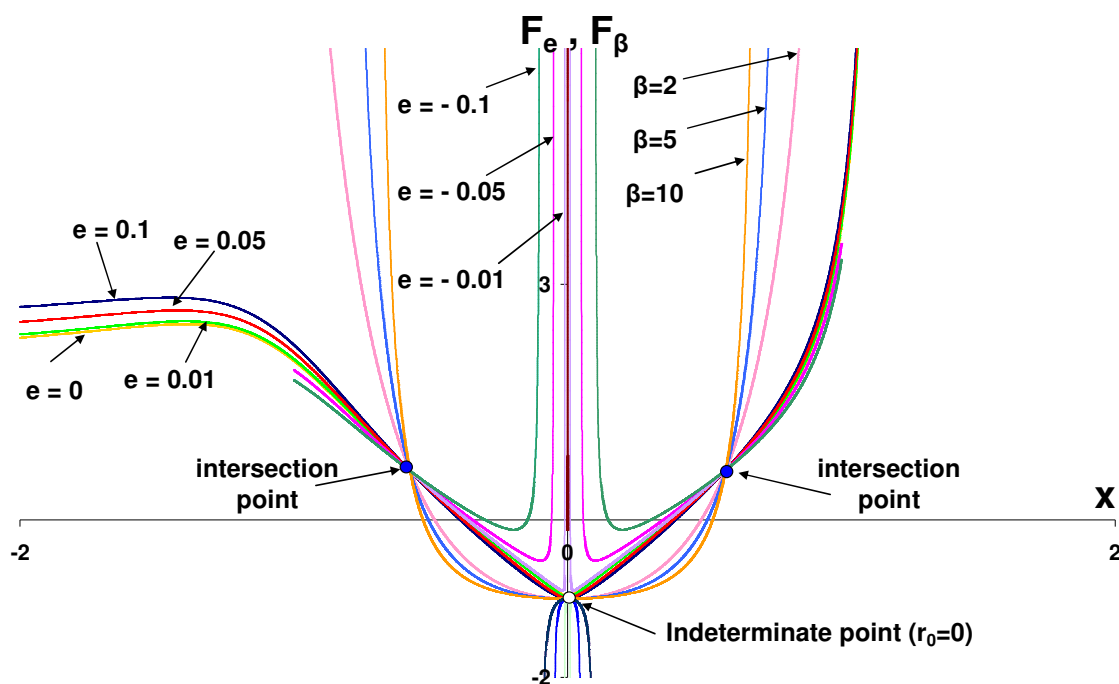
δείξαμε ότι για κάθε μία ξεχωριστά και για κάθε επίπεδο εντός των επιτρεπτών τιμών της y , παρουσιάζονται δύο κοινά σημεία διέλευσης στα αντίστοιχα κοινά διαγράμματά τους x - F . Στα διαγράμματα x - F_β παρουσιάζονται για σταθερή τιμή της παραμέτρου β και για διάφορες θετικές ή αρνητικές τιμές του συντελεστή M αν $e \neq 0$ ή και για $e=0$, ενώ στα διαγράμματα x - F_e παρουσιάζονται για σταθερές τιμές του συντελεστή e (θετικές ή αρνητικές ή και για τη μηδενική τιμή) και για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β . Δείξαμε επίσης σε κάθε περίπτωση ότι αυτά τα κοινά σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα τιμών των F_e ή F_β και οι τετμημένες τους βρίσκονται από την ίδια εξίσωση:

$$r_0 = \frac{1}{2M} \text{ όπου } r_0 = (x^2 + y_i^2)^{1/2}$$

με $x = x_{F_\beta}$ στην περίπτωση της F_β και $x = x_{F_e}$ στην περίπτωση της F_e . Δηλαδή σε κάθε περίπτωση βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας r_0 όπου,

$$r_0 = \frac{1}{2M} \tag{5.20}$$

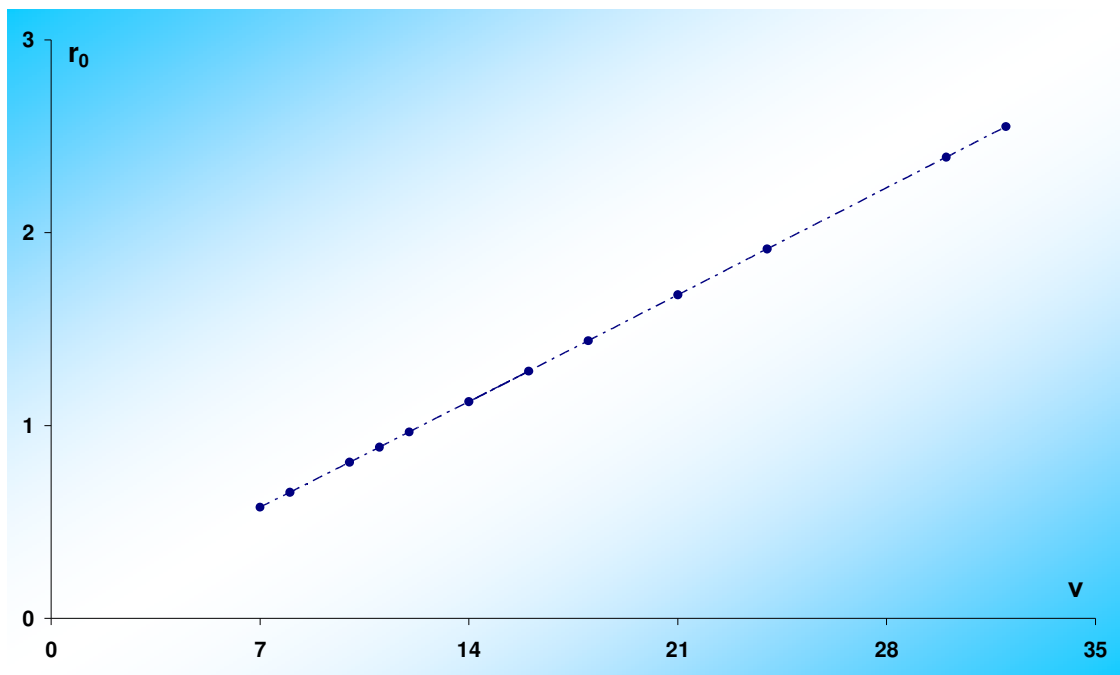
Προφανώς η ακτίνα του r_0 του κύκλου πάνω στον οποίο κείτονται τα δύο κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_e=F_e(x)$ είναι ανεξάρτητη από τις παραμέτρους e , β και εξαρτάται μόνο από την παράμετρο v . Στο Σχήμα 5.30 που ακολουθεί, έχουμε σχεδιάσει σε κοινό διάγραμμα τις καμπύλες $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_e=F_e(x)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων e , β και για $v=7$, όπου έχουμε σημειώσει και τα δύο κοινά σημεία διέλευσης τους,



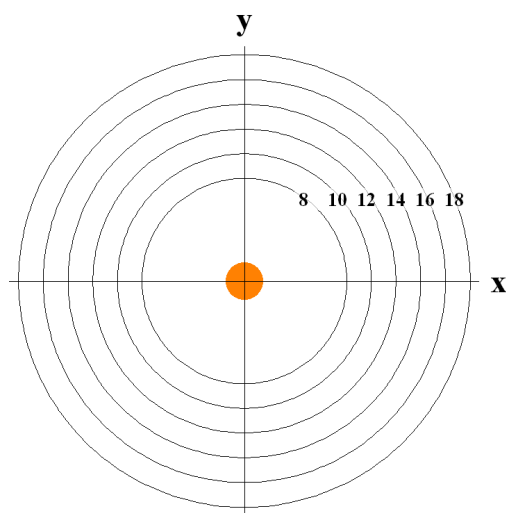
Σχήμα 5.30. Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_e=F_e(x)$, για διάφορες τιμές των παραμέτρων e και β και για $v=7$

Στο Σχήμα 5.31α φαίνεται η καμπύλη μεταβολής της ακτίνας του κύκλου πάνω στον οποίο κείτονται τα κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_e=F_e(x)$, συναρτήσει του πλήθους v των περιφερειακών σωμάτων. Παρόλο που η σχέση (5.20) δεν είναι γραμμική, εν τούτοις παρατηρούμε μία πολύ καλή γραμμική προσέγγιση για $v>6$.

Στο Σχήμα 5.31β δείχνουμε την εξέλιξη αυτών των κυκλικών περιφερειών στο επίπεδο xy για κάποιες τιμές του πλήθους v των περιφερειακών primaries και στον Πίνακα 5.5 παραθέτουμε ενδεικτικά κάποιες τιμές των ακτίνων για διάφορες τιμές του v .



(α)



(β)

Σχήμα 5.31. (α) Διάγραμμα r_0 - v , της ακτίνας του κύκλου πάνω στον οποίο κείτονται τα κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_\epsilon=F_\epsilon(x)$ συναρτήσει του v , (β) προβολή των κυκλικών περιφερειών στο επίπεδο xy , όπου σε κάθε περίπτωση σημειώνεται το πλήθος v των περιφερειακών σωμάτων

Πίνακας 5.5. Ακτίνες r_0 του κύκλου πάνω στον οποίο κείνται τα κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta=F_\beta(x)$ και $F_e=F_e(x)$, για διάφορες τιμές του ν

ν	r_0
7	0.576191
8	0.653281
10	0.809017
11	0.887366
12	0.965926
16	1.281460
14	1.123489
18	1.439690
21	1.677380
24	1.915320
30	2.391690
32	2.550570

5.12 Επίδραση της παραμέτρου ν στις συναρτήσεις F_β και F_e

5.12.1 Γενικά

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την επίδραση του πλήθους ν των περιφερειακών σωμάτων στις συναρτήσεις F_β και F_e και κατ' επέκταση στην εξέλιξη των εστιακών σημείων αλλά και των εστιακών καμπύλων στις οποίες ανήκουν κάθε φορά. Έχουμε ήδη μελετήσει (§5.5, §5.7, §5.8 και §5.9) την περίπτωση για $\nu=7$ και για τις δύο συναρτήσεις, όπου διαπιστώσαμε ότι όταν η παράμετρος β παραμένει σταθερή και για διάφορες τιμές του e (συνάρτηση F_β), πάντα υπάρχουν οι εστιακές καμπύλες, ενώ το ίδιο συμβαίνει για σταθερές μη αρνητικές τιμές του e και για διάφορες τιμές της παραμέτρου β (συνάρτηση F_e για $e=0$ ή $e>0$). Εκεί που παρουσιάζεται αξιοσημείωτο ενδιαφέρον, είναι όταν στην συνάρτηση F_e ο συντελεστής e παίρνει αρνητικές τιμές, όπου για απόλυτα μικρές τιμές του e , παρουσιάζονται δύο εστιακές καμπύλες · η εξωτερική και η εσωτερική.

Στη συνέχεια της μελέτης μας θα αναφερθούμε κατά κύριο λόγο στα συγγραμμικά και στα τριγωνικά εστιακά σημεία, όπως αυτά έχουν ορισθεί στις παραγράφους 5.4 και 5.9.4, αφού και τα υπόλοιπα εστιακά σημεία δείχνουν παρόμοια συμπεριφορά.

Στα διαγράμματα που ακολουθούν αναφερόμαστε στα εστιακά σημεία που προκύπτουν για $y=0$ και όταν πρόκειται για περιττό αριθμό περιφερειακών σωμάτων χρησιμοποιούμε τις τιμές των μέσων ενεργειακών σταθμών C_{μ}^{β} και C_{μ}^e για τις εστιακές καμπύλες που προκύπτουν από την F_{β} και F_e αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα έχουμε για την περίπτωση της F_{β} , $C_{\mu}^{\beta} = \frac{C_k^{\beta} + C_{k'}^{\beta}}{2}$, ενώ για τις εστιακές

καμπύλες που προκύπτουν από την F_e για $e < 0$, $C_{\mu}^e = \frac{C_k^{ex} + C_{k'}^{ex}}{2}$ για την εξωτερική

εστιακή καμπύλη και $C_{\mu}^e = \frac{C_k^{in} + C_{k'}^{in}}{2}$ για την εσωτερική. Κατά ανάλογο τρόπο όταν

αναφερόμαστε στις τετμημένες των εστιακών σημείων κάθε καμπύλης, με x_{μ}^{β} ή x_{μ}^e συμβολίζουμε τη μέση τιμή αυτών. **Στις περιπτώσεις σχηματισμών με άρτιο αριθμό περιφερειακών σωμάτων αναφερόμαστε σε συγγραμμικά εστιακά σημεία k , όπου αυτά έχουν την ίδια τιμή ενέργειας C και ίσες κατά απόλυτη τιμή τετμημένες x .**

5.12.2 Επίδραση της παραμέτρου ν στη συνάρτηση F_{β}

Ας θυμηθούμε από την παράγραφο 5.5 τη μορφή της συνάρτησης αυτής:

$$F_{\beta} = \frac{r_0^2}{K - r_0\beta} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1 = 0 \quad (5.6\alpha)$$

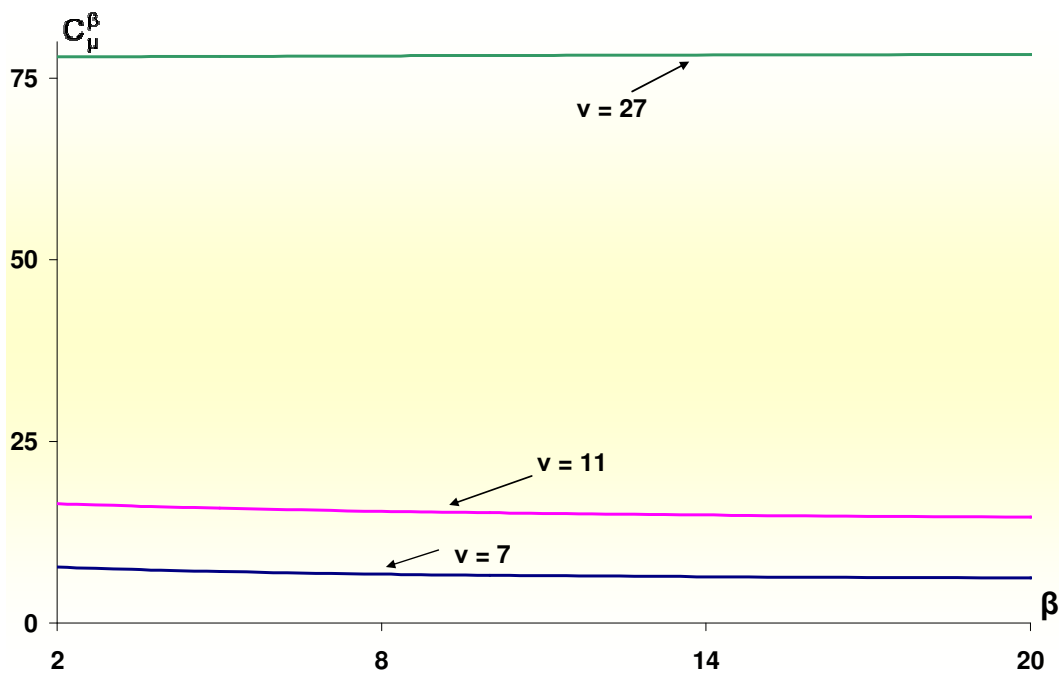
όπου

$$K = \frac{\Lambda + \beta M^2}{2M^3} \quad (5.6\beta)$$

Στην έκφραση (5.5α) ή στην (5.5β), η παράμετρος ν υπεισέρχεται στις ποσότητες Λ και M , όπου,

$$\Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi/\nu)}{\sin[(i-1)\pi/\nu]}, \quad M = 2\sin(\pi/\nu).$$

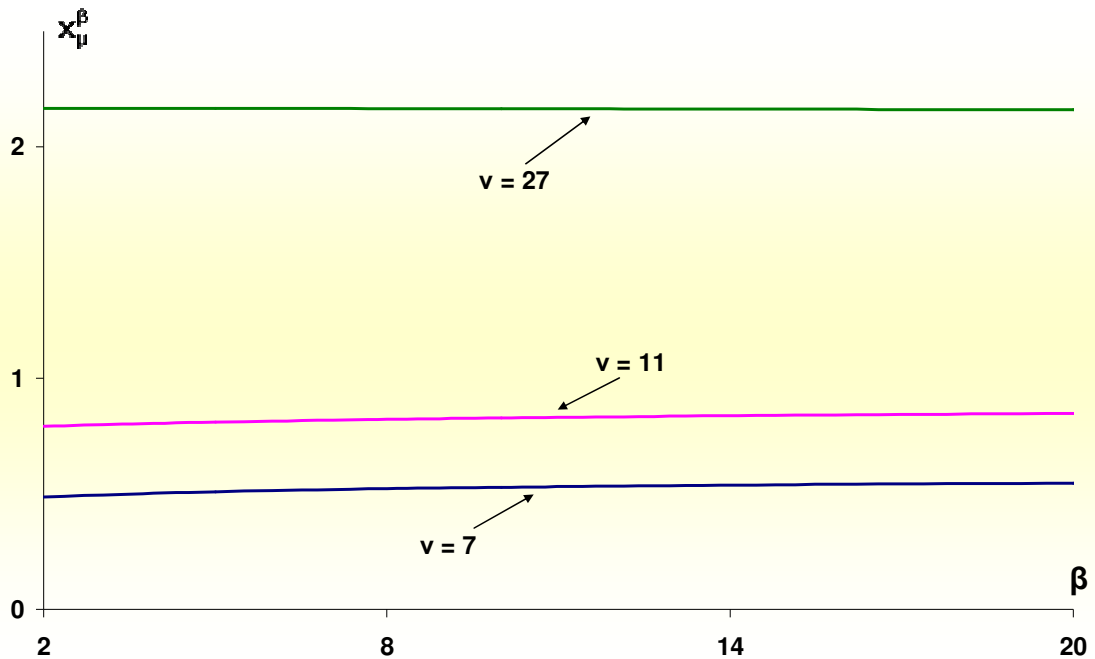
Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.32, δίνεται η μεταβολή της μέσης Ιακωβιανής σταθεράς C_{μ}^{β} των εστιακών σημείων συναρτήσει της παραμέτρου β , για τρεις κανονικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς με $\nu = 7, 11$ και 27 . Παρατηρούμε ότι για κάθε σχηματισμό καθώς μεταβάλλεται το β , η σταθερά C κινείται σε μία μικρή περιοχή τιμών, όπου από την έρευνά μας προέκυψε ότι για $\nu \leq 25$ η C ελαττώνεται, ενώ για $\nu > 25$ αυξάνεται (Πίνακας Γ.5 του Παραρτήματος Γ). Επίσης, όσο αυξάνεται ο αριθμός ν , η σταθερά C μετατοπίζεται προς υψηλότερες τιμές ενέργειας.



Σχήμα 5.32. Διάγραμμα β - C_{μ}^{β} για διάφορες τιμές του ν

Στο Σχήμα 5.33, δίνεται η μεταβολή της μέσης απόστασης x_{μ}^{β} των εστιακών σημείων από το κεντρικό πρωτεύον σώμα συναρτήσει της παραμέτρου β , για τους ίδιους σχηματισμούς με $\nu = 7, 11$ και 27 . Και σε αυτό το διάγραμμα παρατηρούμε ότι σε κάθε σχηματισμό οι αποστάσεις (τετμημένες x_{μ}^{β}) από το κεντρικό σώμα μεταβάλλονται εντός μιας στενής περιοχής τιμών και μάλιστα για $\nu \leq 25$ αυξάνονται, ενώ για $\nu > 25$ ελαττώνονται (Πίνακας Γ.5 του Παραρτήματος Γ). Τέλος, όσο

αυξάνεται το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων τόσο απομακρύνονται τα εστιακά σημεία από το κέντρο του σχηματισμού (Σχήμα 5.33).



Σχήμα 5.33. Διάγραμμα β - x_{μ}^{β} για διάφορες τιμές του ν

5.12.3 Επίδραση της παραμέτρου ν στη συνάρτηση F_e

Όπως αποδείξαμε στην παράγραφο 5.6, η συνάρτηση F_e έχει τη μορφή :

$$F_e = \frac{M^2(1+2eM)}{\Lambda} \left(\frac{r_0^2}{r_0+e} \right) \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} - 1 = 0$$

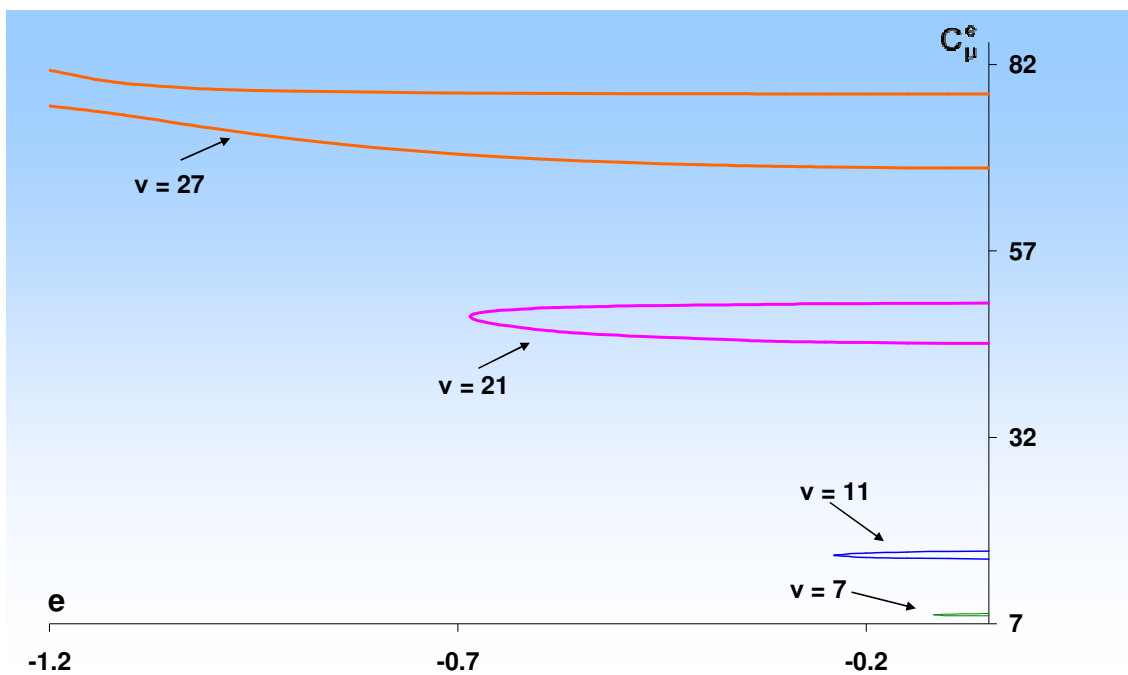
Όταν $e > 0$ όπως έχουμε επαναλάβει πολλές φορές, η εικόνα δεν διαφέρει από εκείνη της βαρυτικής περίπτωσης. Έτσι θα περιορισθούμε στην περίπτωση για $e < 0$, όπου εμφανίζονται οι δύο εστιακές καμπύλες.

Παρακάτω θα απεικονίσουμε σε κοινά διαγράμματα την εξέλιξη και των δύο παρουσιαζόμενων εστιακών καμπύλων, για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου ν ($\nu=7, 11, 21, 27$), ενώ θα μεταβάλλεται η παράμετρος e .

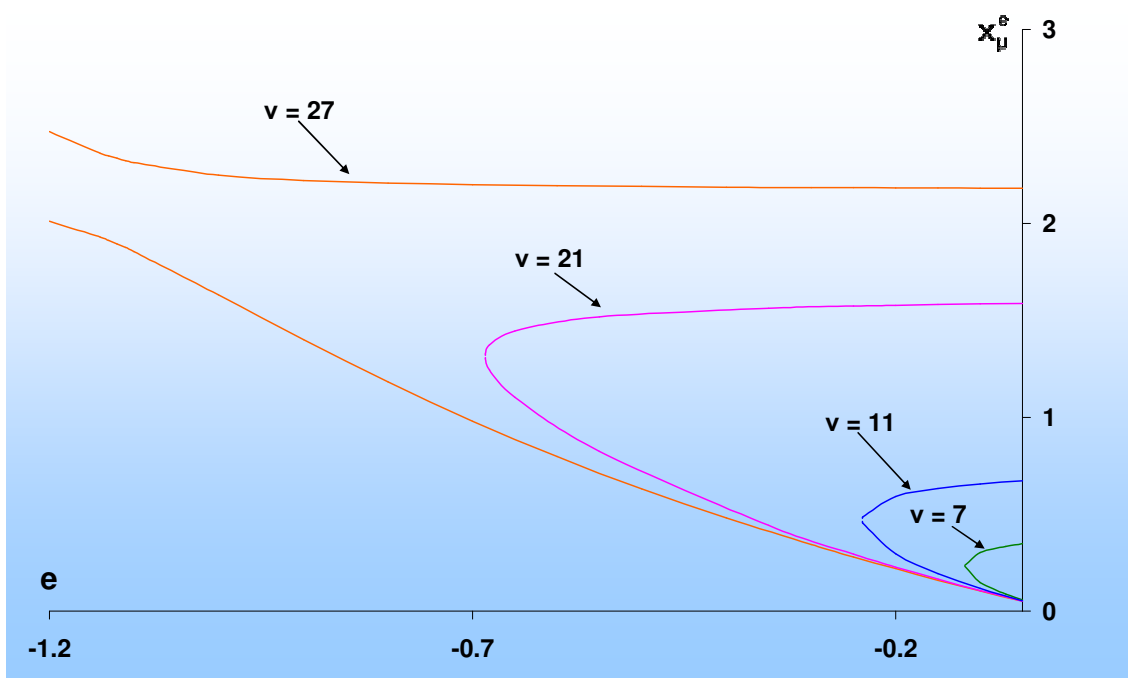
Στο Σχήμα 5.34α φαίνεται το διάγραμμα e - C_{μ}^e για $\nu=7, 11, 21$ και 27 , για διάφορες αρνητικές τιμές του διαταρακτικού e . Η περίπτωση για $\nu=7$ είναι δυσδιάκριτη, θα

εξεταστεί όμως λεπτομερέστερα στη συνέχεια αυτής της παραγράφου, οπότε θα γίνει απολύτως εμφανής (Σχήμα 5.35). *Για κάθε τιμή του ν , η καμπύλη με την υψηλότερη ενέργεια αναφέρεται στην εξωτερική εστιακή καμπύλη ενώ η άλλη στην εσωτερική.* Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το πλήθος ν των περιφερειακών σωμάτων, τόσο αυξάνεται και το εύρος τιμών των Ιακωβιανών σταθερών μέσα στις οποίες εξελίσσονται οι δύο εστιακές καμπύλες, ενώ αυξάνεται και η αρχική ενεργειακή διαφορά τους. Από την έρευνά μας προέκυψε, ότι ενώ για $\nu \leq 25$ οι δύο εστιακές καμπύλες τείνουν να ταυτιστούν σε κοινό επίπεδο, αφού μηδενίζεται η ενεργειακή τους διαφορά (περίπτωση με $\nu=7, 11, 21$), για $\nu > 25$ αυτό δε συμβαίνει (περίπτωση $\nu=27$).

Στο Σχήμα 5.34β δίνουμε το αντίστοιχο διάγραμμα $e-x_{\mu}^e$, όπου παρατηρούμε παρόμοιες συμπεριφορές με το διάγραμμα $e-C_{\mu}^e$ των καμπύλων. *Για κάθε τιμή του ν , η καμπύλη με τη μεγαλύτερη μέση απόσταση από το κεντρικό primary αναφέρεται στην εξωτερική εστιακή καμπύλη ενώ η άλλη στην εσωτερική.* Σε όλες τις περιπτώσεις ($\nu=7, 11, 21, 27$) η εξωτερική καμπύλη έχει μεγαλύτερη μέση ακτίνα και ενώ για $\nu \leq 25$ τα εστιακά σημεία της εσωτερικής και εξωτερικής καμπύλης ταυτίζονται για κάποια τιμή του e ($\nu=7, 11, 21$), για $\nu > 25$ αυτά διατηρούν μια απόσταση μεταξύ τους που δεν μηδενίζεται παρά μόνο αυξομειώνεται ($\nu=27$). Όσο αυξάνεται το ν , αυξάνεται και η αρχική διαφορά των μέσων ακτίνων των εστιακών καμπύλων.



(α)



(β)

Σχήμα 5.34. (α) Διάγραμμα $e-C_{\mu}^e$ των εστιακών σημείων της εξωτερικής και εσωτερικής εστιακής καμπύλης για $\nu=7, 11, 21$ και 27 ,
 (β) Διάγραμμα $e-x_{\mu}^e$ των εστιακών σημείων της εξωτερικής και εσωτερικής εστιακής καμπύλης για $\nu=7, 11, 21$ και 27

5.12.4 Εκτίμηση για τον τρόπο εξέλιξης των εστιακών καμπύλων, όταν μεταβάλλεται ο διαταρακτικός συντελεστής e (για $e < 0$)

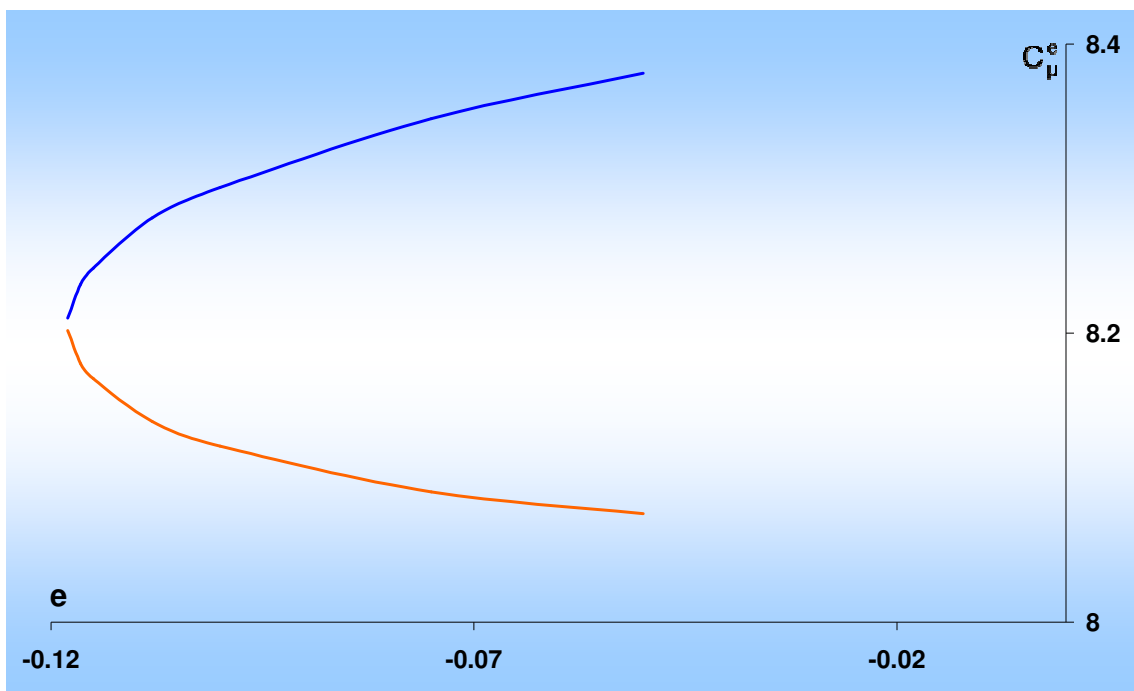
Παρακάτω θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά την εξέλιξη των εστιακών καμπύλων για τις τιμές $\nu=7$ και $\nu=27$ καθώς θα μεταβάλλεται η τιμή του e , όπου θα διαπιστώσουμε μία διαφορετική εξέλιξη, αφού, όπως αναφέραμε ήδη, για τιμές του ν πριν και μετά την τιμή $\nu=25$ υπάρχουν εμφανείς διαφορές.

Βασικό μας και πολύτιμο εργαλείο στην μελέτη αυτής της εξέλιξης είναι η συνάρτηση F_e , και τα υπολογιστικά προγράμματα Fortran και Mathematica, μέσω των οποίων υπολογίζουμε και απεικονίζουμε τις ρίζες της F_e .

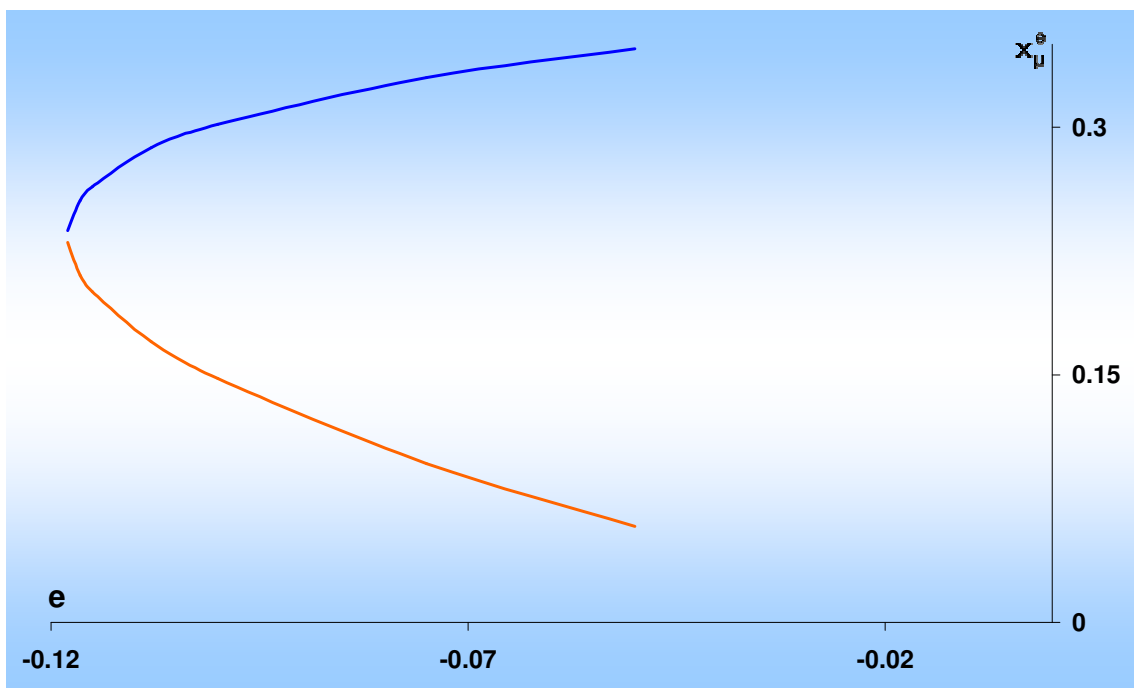
- **Για $\nu=7$**

Ξεκινώντας από πολύ μικρές αρνητικές τιμές του e και καθώς αυτές αυξάνονται κατά απόλυτη τιμή, οι δύο κυματοειδούς μορφής εστιακές καμπύλες, η εξωτερική (external) που αναπτύσσεται στην εξωτερική επιφάνεια της «καμινάδας» και η εσωτερική (internal) που αναπτύσσεται στο αναδιπλούμενο τμήμα της, μετατοπίζονται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Η μεν εξωτερική μετατοπίζεται προς χαμηλότερες τιμές της C , η δε εσωτερική προς υψηλότερες (Σχήμα 5.35), ενώ ταυτόχρονα το χείλος της αναδίπλωσης μετατοπίζεται κι αυτό προς χαμηλότερες τιμές ενέργειας.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται η ενεργειακή απόσταση των δύο καμπύλων και να πλησιάζουν μεταξύ τους μετατοπιζόμενες προς το χείλος της αναδίπλωσης της καμινάδας. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι η εξωτερική συστέλλεται και η εσωτερική διαστέλλεται, όπως προκύπτει από τα αριθμητικά δεδομένα που αποτυπώνονται στο Σχήμα 5.36, τότε μπορούμε να καταλάβουμε ότι με την απόλυτη αύξηση του e οι δύο καμπύλες τείνουν να ταυτιστούν σε κοινό επίπεδο.



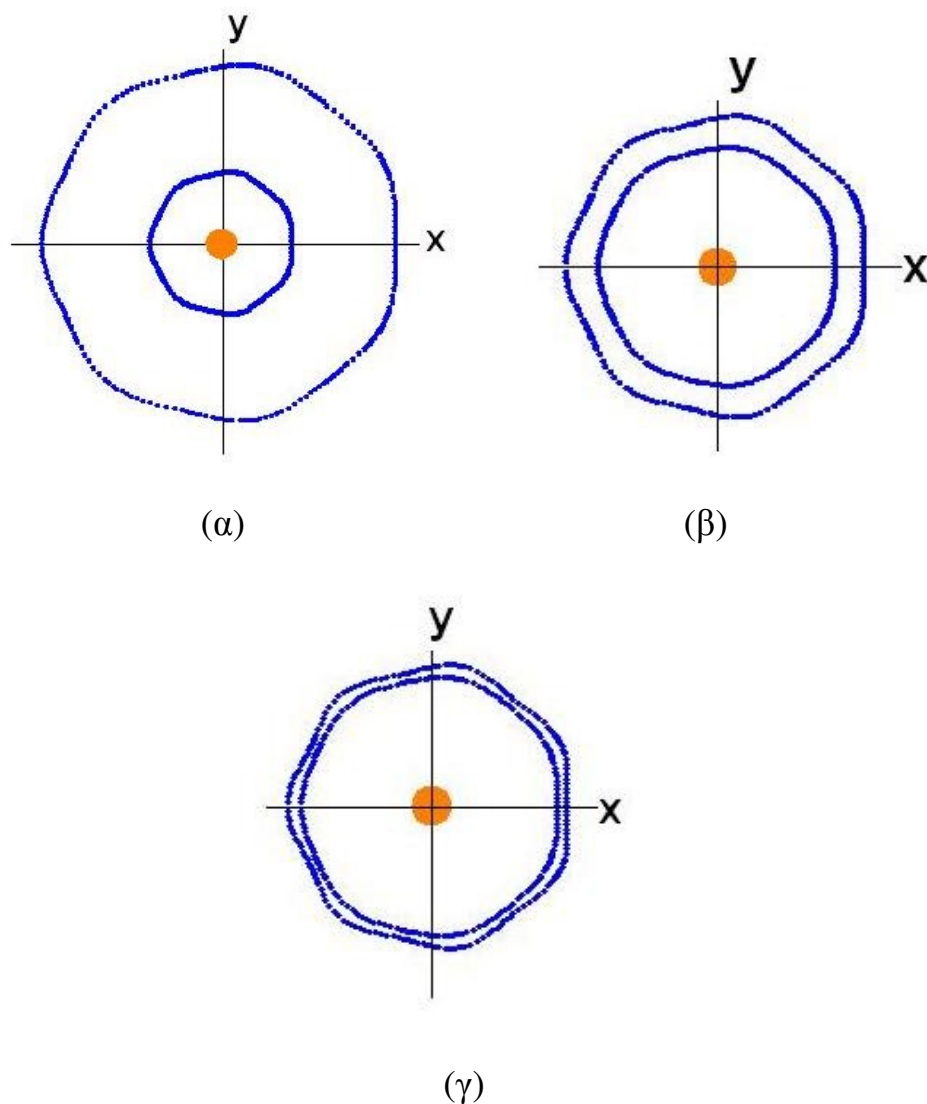
Σχήμα 5.35. Διάγραμμα $e-C_{\mu}^e$ των εστιακών σημείων της εξωτερικής (μπλε καμπύλη) και εσωτερικής εστιακής καμπύλης (πορτοκαλί καμπύλη) για $\nu=7$



Σχήμα 5.36. Διάγραμμα $e-x_{\mu}^e$ των εστιακών σημείων της εξωτερικής (μπλε καμπύλη) και εσωτερικής εστιακής καμπύλης (πορτοκαλί καμπύλη) για $\nu=7$

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αρχικά τα εστιακά σημεία που εμφανίζονται στο διάγραμμα $x-C$ για $y=0$, είναι συνολικά τέσσερα (δύο τριγωνικά και δύο

συγγραμμικά). Για $e=-0.118036$ τα δύο συγγραμμικά σημεία ταυτίζονται σε ένα, γεγονός που σημαίνει ότι οι δύο εστιακές καμπύλες «εφάπτονται» στη θέση αυτή. Από το σημείο αυτό και έπειτα, στο διάγραμμα $x-C$ εμφανίζονται μόνο τα δύο τριγωνικά σημεία, πράγμα που σημαίνει ότι η συνέχεια των δύο καμπύλων έχει διαρραγεί, με αποτέλεσμα να είναι πλέον μόνο κατά τμήματα συνεχείς. Για $e=-0.11804$, τα δύο τριγωνικά σημεία στον αρνητικό ημιάξονα των x , ταυτίζονται και αυτά σε ένα, ενώ στη συνέχεια όταν η e πάρει την τιμή $e = e_{lim} = -0.11806$ παύουν να υπάρχουν εστιακά σημεία και εστιακές καμπύλες. Άρα η e_{lim} αναφέρεται στην εξαφάνιση των τριγωνικών εστιακών σημείων που σηματοδοτεί και την πλήρη εξαφάνιση των εστιακών σημείων (Σχήμα 5.37).



Σχήμα 5.37. Εξέλιξη των εστιακών καμπύλων στο επίπεδο xy όπου

φαίνεται η προσέγγιση των δύο εστιακών καμπύλων: (α)-(β) Φάσεις προσέγγισης, όπου υπάρχουν και οι δύο καμπύλες και (γ) φάση κατά την οποία τα ομοιόθετα συγγραμμικά εστιακά σημεία τείνουν να ταυτιστούν σε ένα και ξεκινάει η εμφάνιση ασυνέχειας των δύο εστιακών καμπύλων

Σε παρόμοιες περιπτώσεις εξέλιξης των εστιακών καμπύλων, με το πλήθος n όμως των περιφερειακών σωμάτων να είναι άρτιος αριθμός, τα τέσσερα αρχικά εμφανιζόμενα στο διάγραμμα $x-C$ (για $y=0$) εστιακά σημεία είναι συγγραμμικά. Παρατηρείται ακριβώς η ίδια εξέλιξη, με τη μόνη διαφορά ότι όταν αυξάνει η απόλυτη τιμή του e τα δύο ζεύγη στον αρνητικό και στον θετικό ημιάξονα των x θα υφίστανται ίδιες μεταβολές (αφού είναι ίδια). Αρα, στην περίπτωση αυτή, για κάποια απόλυτη τιμή του e τα τέσσερα σημεία θα γίνουν δύο (ένα στον αρνητικό και ένα στον θετικό ημιάξονα του x) και για κάποια ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή τα δύο σημεία θα πάνε να υπάρχουν. Παρόμοιες μεταβολές θα παρατηρηθούν στα τέσσερα τριγωνικά σημεία κατά τη διεύθυνση της διχοτόμου, μόνο που εκεί οι μεταβολές αυτές θα συμβαίνουν για ελαφρώς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές του e . Έτσι η e_{lim} σε αυτή την περίπτωση θα αναφέρεται στην πλήρη εξαφάνιση των τριγωνικών εστιακών σημείων.

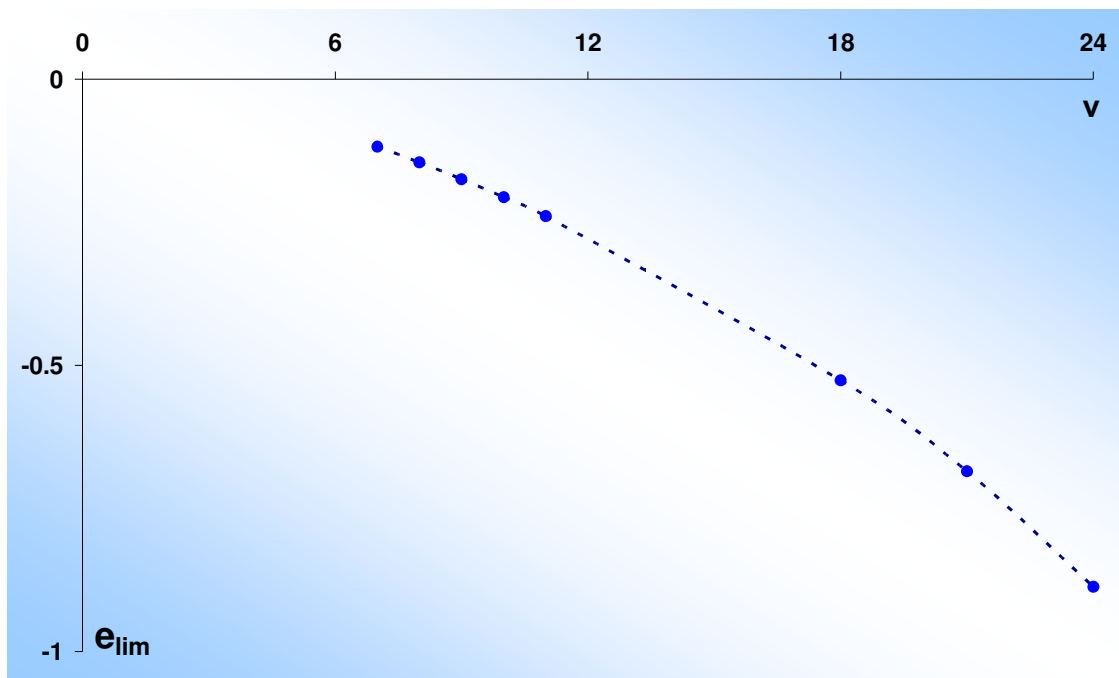
Από τη μελέτη που κάναμε, βρήκαμε για κάποιους δακτυλιοειδείς σχηματισμούς με $n \leq 25$ και για $y=0$, την οριακή εκείνη τιμή της παραμέτρου $e=e_{lim}$, όπου παύουν να υπάρχουν εστιακά σημεία. Τα αποτελέσματα αναφέρονται στον Πίνακα 5.6 που ακολουθεί :

Πίνακας 5.6. Οριακές τιμές της παραμέτρου e , όπου παύουν να υπάρχουν εστιακά σημεία, για διάφορα n και για $y=0$

n	e_{lim}
7	-0.11806
8	-0.14551

9	-0.17496
10	-0.20630
11	-0.23951
18	-0.52617
21	-0.6852
24	-0.88665

Στο Σχήμα 5.38 απεικονίζουμε γραφικά τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.6 όπου φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων, αυξάνει κατά απόλυτη τιμή και η οριακή τιμή της παραμέτρου e (μπλε κουκίδες του Σχήματος 5.38), για την οποία παύουν να υφίστανται εστιακά σημεία.

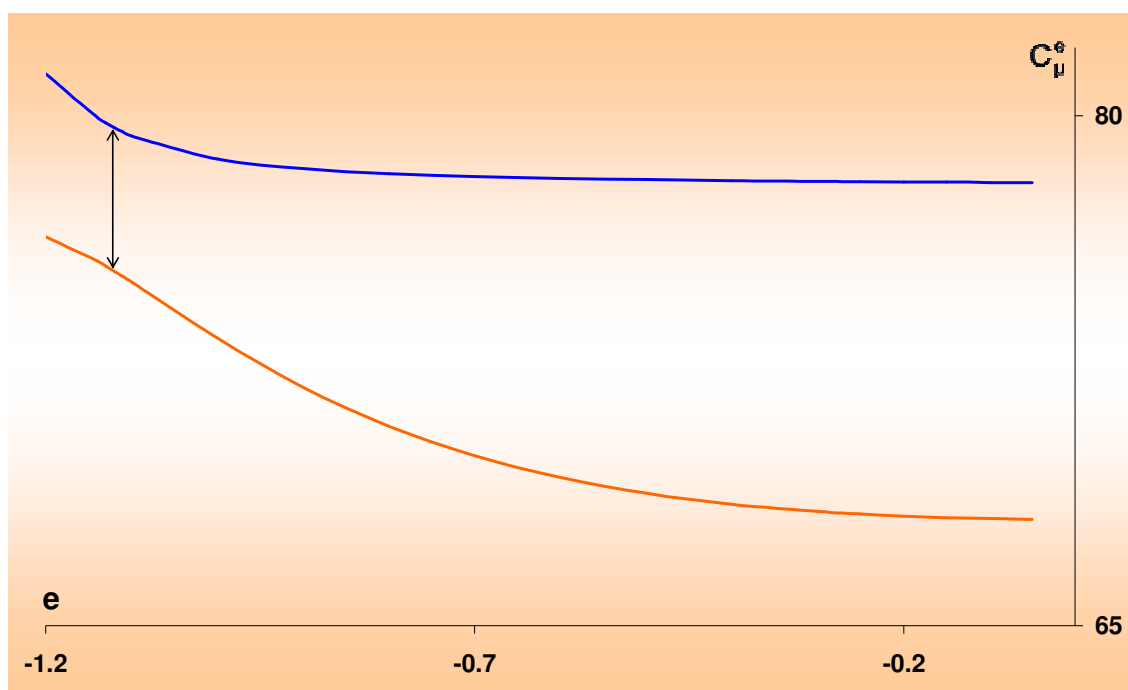


Σχήμα 5.38. Οριακές τιμές e_{lim} συναρτήσει του n

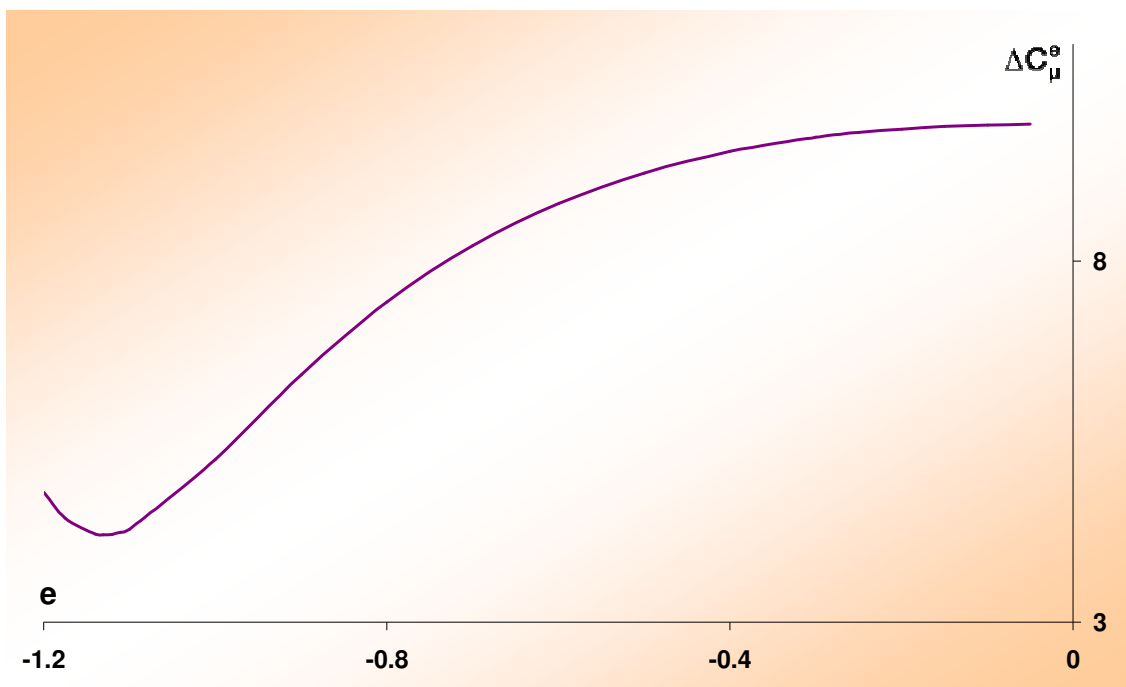
- Για $n=27$

Στο διάγραμμα $e-C_{\mu}^e$ που φαίνεται στο Σχήμα 5.39 παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η απόλυτη τιμή του e , οι δύο κυματοειδούς μορφής εστιακές καμπύλες, η εξωτερική

και η εσωτερική, μετατοπίζονται και οι δύο προς υψηλότερες τιμές της C . Η εσωτερική μετατοπίζεται με υψηλότερο ρυθμό σε σχέση με την εξωτερική, οπότε μειώνεται η ενεργειακή τους απόσταση και για κάποια τιμή του e λαμβάνει χώρα η μέγιστη μείωση αυτής, ενώ για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του e αυξάνεται και πάλι. Στην περίπτωση για $\nu=27$ η τιμή του e που αναφέρεται στη μέγιστη αυτή προσέγγιση των δύο καμπύλων, είναι $e \approx -1.135$ (διπλής κατεύθυνσης βέλος στο διάγραμμα $e-C_\mu^e$). Στο Σχήμα 5.40 παραθέτουμε το διάγραμμα μεταβολής της διαφοράς ΔC_μ^e των τιμών των Ιακωβιανών σταθερών C των δύο εστιακών καμπυλών συναρτήσει του e , όπου διαπιστώνουμε την αρχική μείωση και μετέπειτα αύξηση της μεταβολής αυτής.



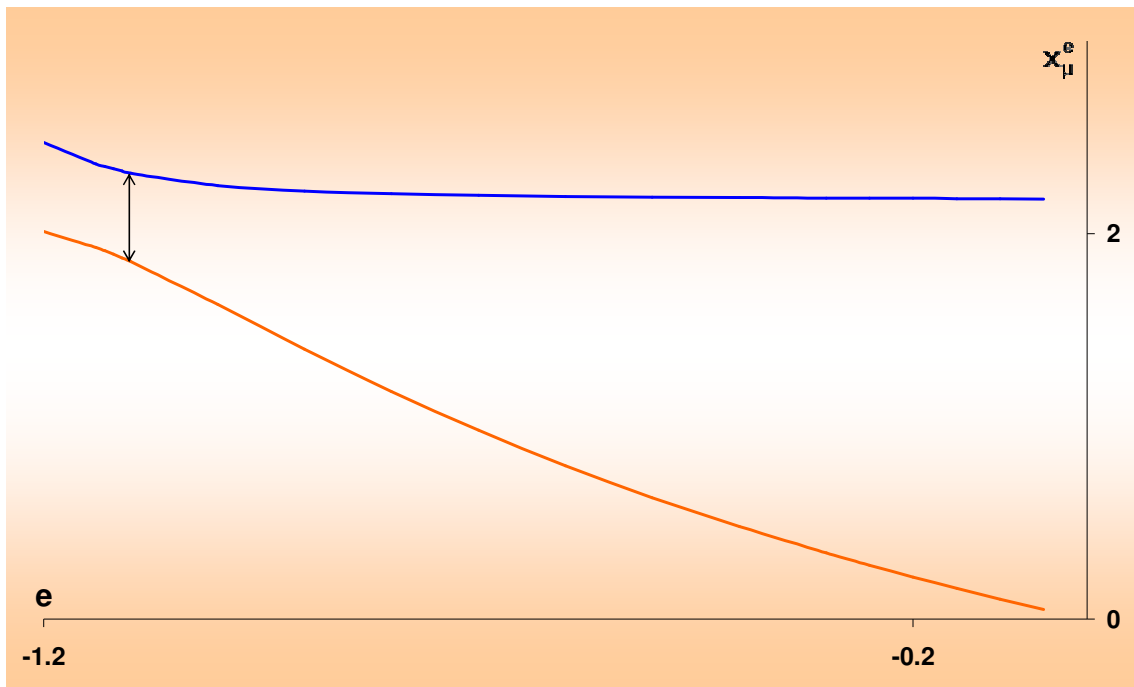
Σχήμα 5.39. Διάγραμμα $e-C_\mu^e$ των εστιακών σημείων της εξωτερικής (μπλε καμπύλη) και εσωτερικής εστιακής καμπύλης (πορτοκαλί καμπύλη) για $\nu=27$



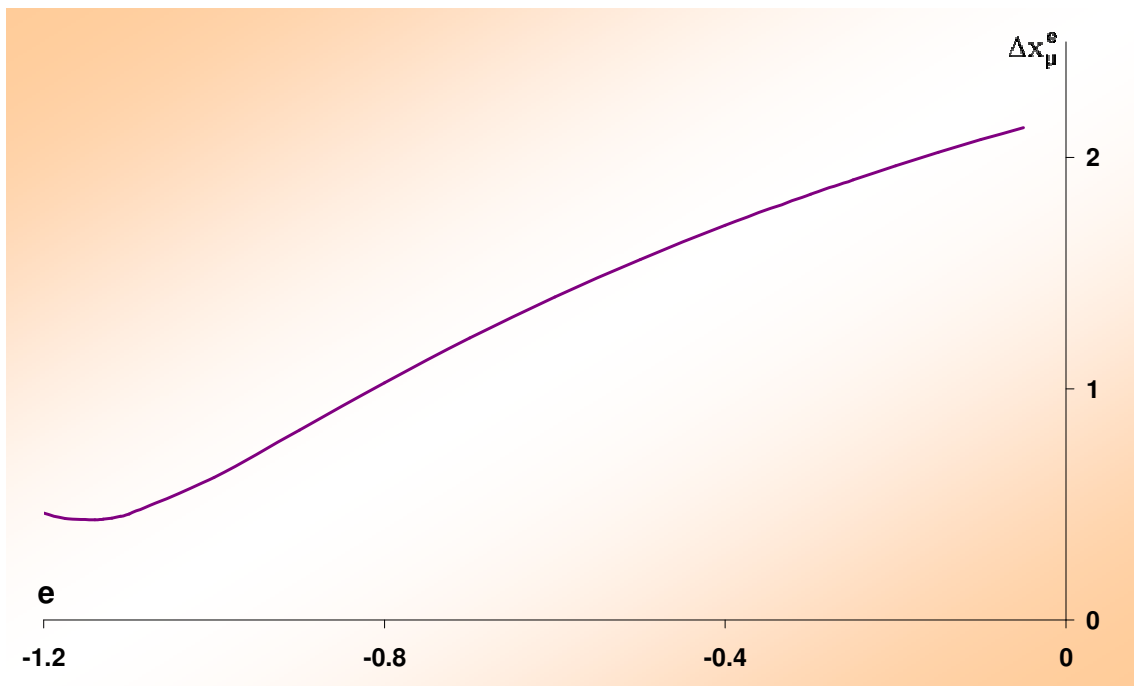
Σχήμα 5.40. Διάγραμμα μεταβολής των μέσων ενεργειακών αποστάσεων ΔC_{μ}^e μεταξύ των δύο εστιακών καμπυλών, συναρτήσει του e για $n=27$

Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται και σε ότι αφορά την εξέλιξη των αποστάσεων των συγγραμμικών και τριγωνικών εστιακών σημείων στο επίπεδο xy από το κεντρικό primary, όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.41 όπου απεικονίζεται το διάγραμμα $e-x_{\mu}^e$. Οι αποστάσεις αυτές παρουσιάζουν αρχικά μία αύξηση και για τις δύο καμπύλες, με το ρυθμό αύξησης των τετμημένων των εστιακών σημείων της εσωτερικής εστιακής καμπύλης, να είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο ρυθμό αύξησης της εξωτερικής. Δηλαδή, η εσωτερική εστιακή καμπύλη συστέλλεται γρηγορότερα από την εξωτερική κι ενώ πλησιάζουν αρκετά, δεν ταυτίζονται. Όμοια με προηγουμένως, για $e \approx -1.135$ παρουσιάζεται η μέγιστη προσέγγιση τους (διπλής κατεύθυνσης βέλος στο διάγραμμα $e-x_{\mu}^e$). Στο Σχήμα 5.42 παραθέτουμε το διάγραμμα μεταβολής της διαφοράς Δx των αποστάσεων των τετμημένων των εστιακών σημείων, συναρτήσει του e , όπου διαπιστώνουμε την αρχική μείωση και μετέπειτα αύξηση της μεταβολής αυτής. Στον Πίνακα Γ.6 του Παραρτήματος Γ, παραθέτουμε τις αριθμητικές τιμές των μέσων αποστάσεων x_{μ}^e και των μέσων

Ιακωβιανών σταθερών C_μ^e των εστιακών σημείων, της εξωτερικής και εσωτερικής εστιακής καμπύλης, για $\nu=27$ και για διάφορες τιμές του e .



Σχήμα 5.41. Διάγραμμα e - x_μ^e της εξωτερικής (μπλε καμπύλη) και εσωτερικής εστιακής καμπύλης (πορτοκαλί καμπύλη) για $\nu=27$



Σχήμα 5.42. Διάγραμμα μεταβολής των μέσων αποστάσεων Δx_μ^e μεταξύ των δύο εστιακών καμπυλών, συναρτήσει του e για $\nu=27$

Γενικά, από την έρευνά μας προκύπτει ότι όσο αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή το ϵ , οι δύο καμπύλες δεν τείνουν να ταυτιστούν σε κοινό επίπεδο (όπως στην περίπτωση $n \leq 25$) και δεν διαρρηγνύεται η συνέχεια τους, ενώ συνεχίζουν να βρίσκονται σε κάποια ενεργειακή απόσταση εξελισσόμενες με το τρόπο που περιγράψαμε, χωρίς να εξαφανίζονται.

Σε αυτή την περίπτωση, δεν έχει νόημα να αναφερθούμε σε περιττό ή άρτιο αριθμό n περιφερειακών σωμάτων, αφού αυτό δεν επηρεάζει την εξέλιξη που μελετήσαμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΑΥΤΩΝ-ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΠΑΓΙΔΕΥΣΗΣ

6.1 Εισαγωγή

Ως επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση, ορίζονται εκείνες οι επιφάνειες του τρισδιάστατου χώρου xyz , οι οποίες οριοθετούν τις περιοχές όπου είναι δυνατή και επομένως πραγματοποιήσιμη η κίνηση του μικρού σώματος. Όπως στην επίπεδη έτσι και στην τρισδιάστατη απεικόνιση των επιφανειών αυτών θα χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα του Jacobi,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) - C$$

όπου :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right]$$

Το αριστερό μέλος του ολοκληρώματος του Jacobi, αποτελεί το τετράγωνο της ταχύτητας του μικρού σώματος. Άρα είναι μη αρνητικό. Επομένως, ισχύει η σχέση :

$$2U(x, y, z) \geq C \quad (6.1)$$

Η ανισότητα (6.1) καθορίζει για κάθε τιμή της σταθεράς C , τις περιοχές του τρισδιάστατου χώρου, στις οποίες επιτρέπεται η κίνηση του μικρού σώματος και επομένως τις περιοχές όπου υπάρχουν λύσεις των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης.

Αν $C < 0$ η ανισότητα (6.1) ικανοποιείται πάντα. Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση είναι επιτρεπτή παντού στο χώρο. Αντίθετα, αν $C \geq 0$, υπάρχουν περιοχές στις οποίες η ανισότητα αυτή δεν ικανοποιείται και επομένως η κίνηση του μικρού σώματος είναι απαγορευμένη. Το όριο μεταξύ των περιοχών επιτρεπτής και απαγορευμένης κίνησης είναι η επιφάνεια (ή οι επιφάνειες) που αποτελεί (ή που

αποτελούν) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (x,y,z) του χώρου, τα οποία ικανοποιούν για μία σταθερή τιμή του C την εξίσωση :

$$2U(x, y, z) = C \quad (6.2)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η γραφική απεικόνιση των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας βασίζεται στη σχέση $2U(x,y,z) = C$. Αν για δεδομένες τιμές των παραμέτρων (ν, β, e) του προβλήματος μεταβάλλουμε την τιμή της σταθεράς C , τότε παρατηρούμε μεταβολές των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας οι οποίες έχουν να κάνουν με τη μορφή, το σχήμα και τις διαστάσεις τους. Κάποιες από τις επιφάνειες αυτές μπορεί να είναι κλειστές, κάποιες άλλες να είναι ανοιχτές, ενώ για κάποιες τιμές του C μπορεί να συνυπάρχουν και οι δύο αυτοί τύποι. Μεταβολή του C συνεπάγεται, μεταβολή του όγκου των κλειστών περιοχών γεγονός που σημαίνει ότι είτε συρρικνώνονται, είτε μεγεθύνονται. Παρατηρούμε επίσης ότι σε συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς C μπορεί να διαμορφωθούν νέες επιφάνειες, ή να εξαφανισθούν ήδη υπάρχουσες. Όλες αυτές οι μεταβολές σχετίζονται με τις αντίστοιχες των περιοχών της επιτρεπτής κίνησης του μικρού σώματος. Έχει λοιπόν ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε την εξέλιξή τους αφού η γνώση της τοπολογίας τους θα μας βοηθήσει να προχωρήσουμε στην αναζήτηση των κινήσεων του μικρού σώματος στο χώρο. Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ν, β και e , οι τοπολογικές αλλαγές των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας και συνεπώς και των περιοχών επιτρεπτής τρισδιάστατης κίνησης, συμβαίνουν για εκείνες τις τιμές της ενέργειας C που αντιστοιχούν στις θέσεις ισορροπίας. Αν συμβολίσουμε με C_w τις τιμές που αντιστοιχούν στις θέσεις ισορροπίας τόσο των ζωνών $E_1, E_2, A_1, A_2, B, C_2, C_1$ όσο και των "εκτός επιπέδου" σημείων ισορροπίας $L_{\pm z}$, τότε οι τοπολογικές αυτές αλλαγές συμβαίνουν ακριβώς όταν $C=C_w$, όπου $w = E_1, E_2, A_1, A_2, B, C_2, C_1, L_{\pm z}$. Οι συγκεκριμένες αυτές τιμές C_w της σταθεράς του Jacobi, καθορίζουν τα bifurcation points των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας .

Προφανώς σε ένα bifurcation point (x_1, y_1, z_1) θα ισχύει :

$$U_x(x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$U_y(x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$U_z(x_1, y_1, z_1) = 0$$

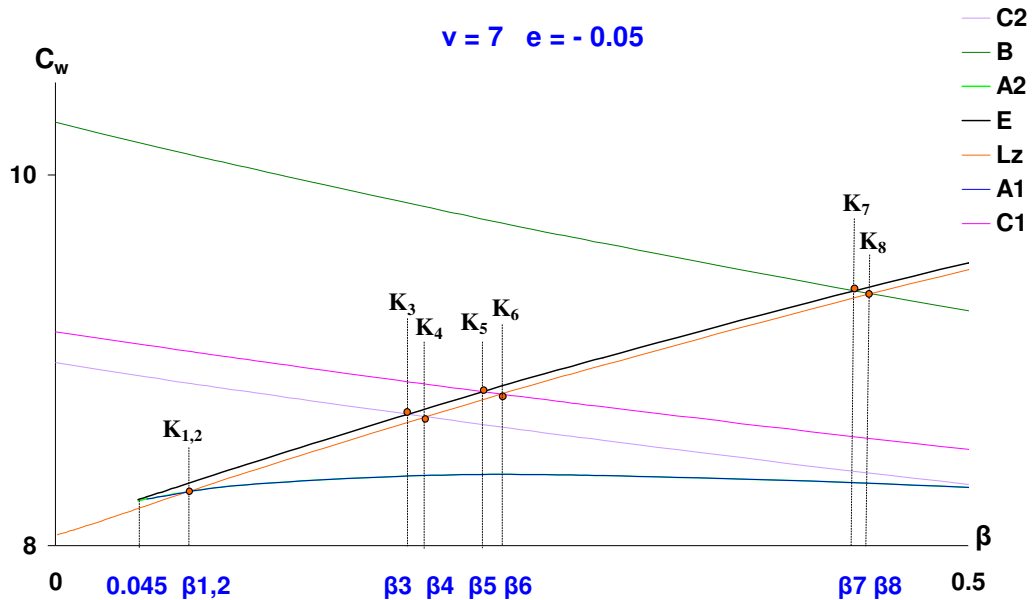
6.2 Διαγράμματα $\beta-C_w$ και μεταβολή των επιτρεπτών περιοχών της κίνησης

Στο 3^ο Κεφάλαιο και από το διάγραμμα της καμπύλης διακλάδωσης του Σχήματος 3.8 για $e > 0$, είδαμε ότι όταν ο διαταρακτικός όρος e είναι θετικός, η μεταβολή του πλήθους των ζωνών ισορροπίας είναι παρόμοια με αυτήν που συμβαίνει όταν $e = 0$. Με άλλα λόγια για κάθε n και για τα ζεύγη τιμών (e, β) που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη διακλάδωσης (περιοχή I) το πλήθος των ζωνών είναι πέντε, ενώ για τα ζεύγη που βρίσκονται πάνω από την καμπύλη διακλάδωσης (περιοχή II) το πλήθος των ζωνών είναι τρία. Όμως στην περίπτωση που η παράμετρος e γίνεται αρνητική τότε η μεταβολή των ζωνών ισορροπίας στο επίπεδο xy αποδίδεται από το συνθετότερο διάγραμμα των καμπύλων διακλάδωσης του Σχήματος 3.11 (Κεφ. 3^ο). Σε κάθε περίπτωση, η μεταβολή των παραμέτρων συνεπάγεται μεταβολές τόσο των περιοχών της επίπεδης επιτρεπτής κίνησης που διαμορφώνονται από τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, όσο και των περιοχών της τρισδιάστατης επιτρεπτής κίνησης που διαμορφώνονται από τις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας (Kalnouridis, 2001b, 2008b; Croustalloudi & Kalnouridis, 2007b). Όπως είπαμε προηγουμένως, στις τιμές της ενέργειας C_w που αντιστοιχούν στις θέσεις ισορροπίας, συμβαίνουν δραστικές τοπολογικές μεταβολές στην εξέλιξη των περιοχών της κίνησης. Η εξέλιξη αυτή παρακολουθείται μέσω των διαγραμμάτων $\beta-C_w$ για δεδομένες τιμές των παραμέτρων n και e . Στην περίπτωση αυτή, επειδή οι καμπύλες $C_w = C_w(\beta)$ που αντιστοιχούν στις ζώνες ισορροπίας (και τα "εκτός επιπέδου" σημεία $L_{\pm z}$) τέμνονται μεταξύ τους σε διάφορα σημεία, οι τομές αυτές ορίζουν διαστήματα τιμών της παραμέτρου β μέσα σε καθένα από τα οποία ισχύει διαφορετική ανισοτική σχέση μεταξύ των τιμών των σταθερών Jacobi C_w των ζωνών ισορροπίας (όσων υπάρχουν κάθε φορά) και των "εκτός επιπέδου" θέσεων $L_{\pm z}$ (που εμφανίζονται για αρνητικές τιμές της παραμέτρου e). Προφανώς το πλήθος των τομών αυτών των καμπύλων, το πλήθος των δημιουργούμενων διαστημάτων τιμών της παραμέτρου β , καθώς και η μορφή των ανισοτικών σχέσεων που ισχύουν σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, μεταβάλλονται όταν μεταβάλλονται οι τιμές των παραμέτρων n και e . Προκειμένου να γίνει κατανοητή η διαδικασία μελέτης της εξέλιξης των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας, θα επιλέξουμε μία περίπτωση με $n=7$ και $e < 0$, και θα περιγράψουμε

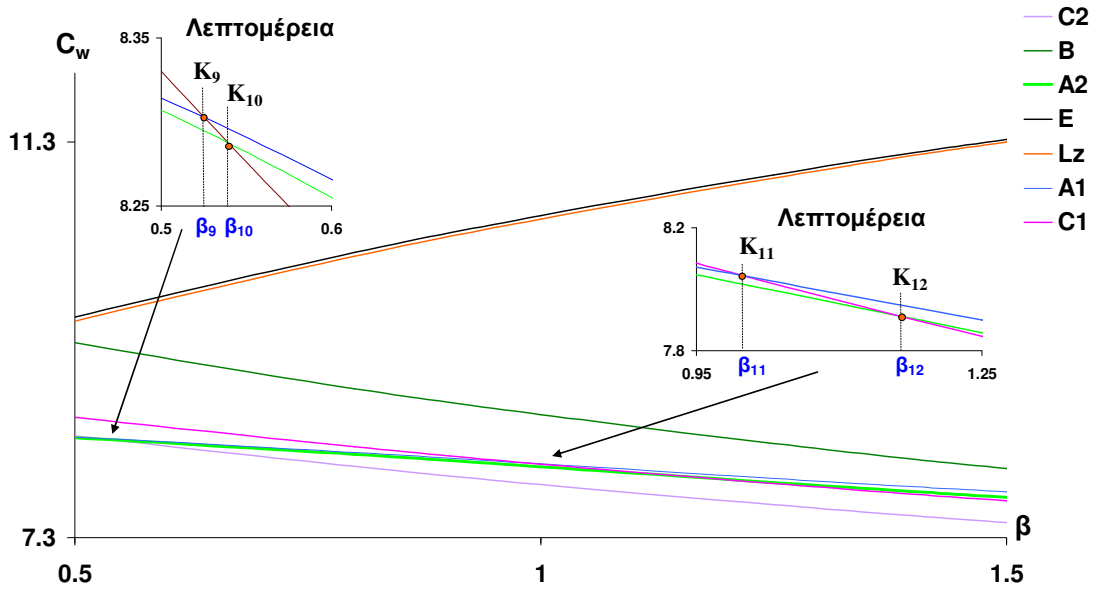
βήμα προς βήμα την εξέλιξη των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας όταν μεταβάλλεται η Ιακωβιανή σταθερά C .

6.2.1 Σχεδίαση των καμπύλων β - C_w για τις υπάρχουσες ζώνες ισορροπίας και τις "εκτός επιπέδου" θέσεις ισορροπίας. Εφαρμογή για $\nu=7$ και $e = -0.05$

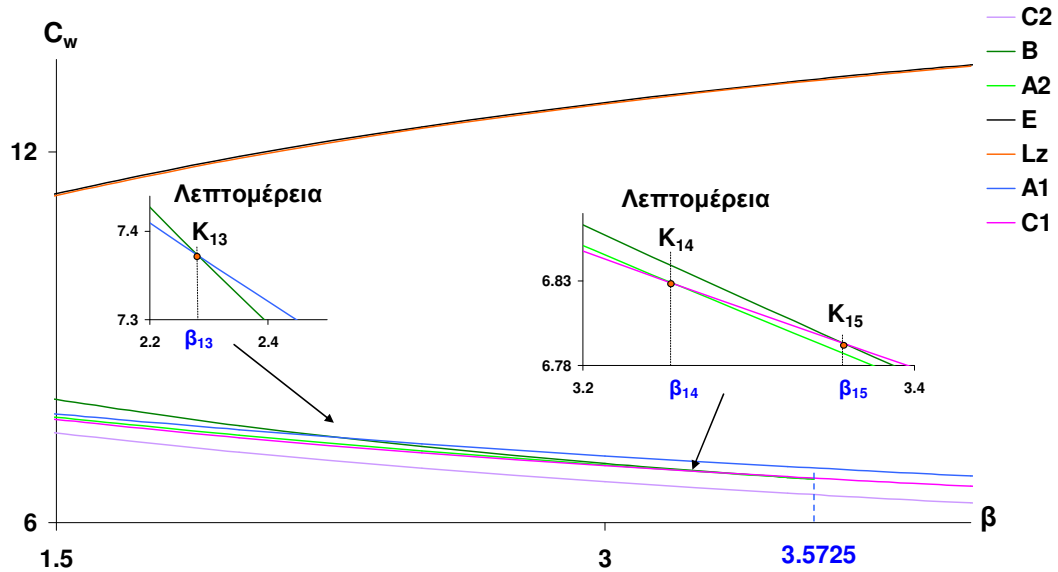
Από τους αριθμητικούς υπολογισμούς προέκυψαν τα διαγράμματα $\beta - C_w$ (Σχήματα 6.1α, β και γ) τα οποία απεικονίζουν την παραμετρική μεταβολή των σταθερών C_w των διαφόρων ζωνών ισορροπίας αλλά και των "εκτός επιπέδου" σημείων ισορροπίας, για μία σταθερή τιμή του συντελεστή e ($e = -0.05$), καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος β . Προκειμένου να αναδειχθούν οι λεπτομέρειες των διαγραμμάτων, στο μεν Σχήμα 6.1α θεωρήσαμε την περιοχή τιμών $\beta \in [0, 0.5]$, στο Σχήμα 6.1β την περιοχή τιμών $\beta \in [0.5, 1.5]$ και τέλος στο Σχήμα 6.1γ την περιοχή τιμών $\beta \in [1.5, 4]$. Οι λεπτομέρειες στις περιοχές των τομών των καμπύλων δείχνονται στις ένθετες μεγεθύνσεις.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 6.1. Διάγραμμα $\beta - C_w$ για $v=7$, $e=-0.05$ και για $0 \leq \beta \leq 4.0$, όπου φαίνονται τα σημεία τομής των καμπύλων $C_w=C_w(\beta)$ των ζωνών ισορροπίας

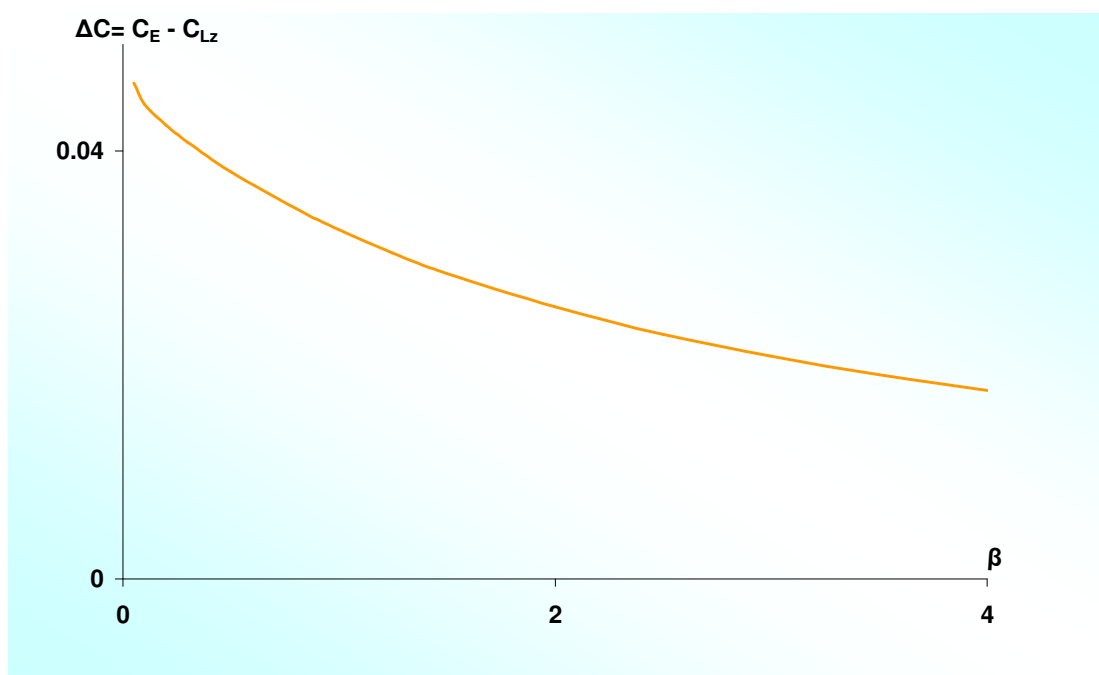
Τα σημεία τομής των καμπύλων $C_w=C_w(\beta)$, όπου $w= E_1, E_2, A_1, A_2, B, C_2, C_1, L_{\pm z}$, είναι στην προκειμένη περίπτωση 15 και τα συμβολίζουμε με $K_i, i=1, \dots, 15$. Κάθε σημείο τομής χαρακτηρίζεται από μία τιμή $\beta_i, i=1, \dots, 15$ και από μία τιμή C_w .

Επειδή οι σταθερές C_{E1} και C_{E2} των διακριτών ζωνών E_1 και E_2 σχεδόν ταυτίζονται ($C_{E1} \approx C_{E2}$), για το λόγο αυτό στις περιγραφές που θα ακολουθήσουν, θα χρησιμοποιούμε μερικές φορές (καταχρηστικά) αντί για τις διακριτές τιμές

$$C_{E1} \text{ και } C_{E2}, \text{ τη μέση τιμή τους } C_E \left(C_E = \frac{C_{E1} + C_{E2}}{2} \right).$$

Τέλος για τις σταθερές C_{L+z} και C_{L-z} ($C_{L+z} = |C_{L-z}|$) των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας $L_{\pm z}$, χρησιμοποιούμε τον κοινό συμβολισμό C_{Lz} .

Παρατηρούμε ότι για $\beta=0$ εμφανίζονται οι ζώνες C_2 , B , C_1 και ένα τετριμμένο σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων. Για $\beta > 0$ εκτός των προηγούμενων τριών ζωνών εμφανίζονται και τα δύο συμμετρικά "εκτός επιπέδου" σημεία ισορροπίας. Στην τιμή $\beta \approx 0.045$ εμφανίζονται ταυτόχρονα και με ίδιες σχεδόν ενέργειες, οι ζώνες A_1 , A_2 και E_1 , E_2 . Παρατηρούμε επίσης ότι οι σταθερές C_E και C_{Lz} έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου β , την ίδια σχεδόν τιμή και εξελίσσονται με παρόμοιο τρόπο. Στο Σχήμα 6.2 δείχνεται η σχεδόν εκθετική ελάττωση της διαφοράς $\Delta C = C_E - C_{Lz}$ μεταξύ των Ιακωβιανών σταθερών C_E και C_{Lz} των σημείων ισορροπίας των ζωνών E_1 , E_2 αφενός, και των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας $L_{\pm z}$ αντίστοιχα, με την παράμετρο β .



Σχήμα 6.2. Μεταβολή με την παράμετρο β , της διαφοράς της μέσης τιμής C_E των Ιακωβιανών σταθερών των ζωνών ισορροπίας E_1, E_2 αφενός και των "εκτός επιπέδου" θέσεων ισορροπίας $L_{\pm z}$ αφετέρου

Όπως δείχνει το Σχήμα 6.1, η σταθερά C_B έχει αρχικά τη μεγαλύτερη τιμή, καθώς όμως αυξάνεται η παράμετρος β , παρουσιάζει την ταχύτερη ελάττωση από όλες τις άλλες ζώνες. Αξιοσημείωτη είναι η συμπεριφορά των εμφανιζόμενων ζωνών A_1, A_2 και E_1, E_2 , καθώς αρχικά οι σταθερές C_{A1}, C_{A2} αυξάνονται μέχρι την τιμή $\beta \approx 0.46$ και κατόπιν ελαττώνονται. Οι σταθερές C_E και C_{Lz} παρουσιάζουν τάχιστα αύξηση των τιμών τους και για $\beta > \beta_8$ είναι εκείνες οι σταθερές με τη μεγαλύτερη τιμή καθ' όλη τη διάρκεια της παραμετρικής μεταβολής που εξετάζουμε, καταλήγοντας σε πολύ μεγάλες τιμές. Για πολύ μικρές τιμές του β οι σταθερές C_{A1} και C_{A2} έχουν παραπλήσιες τιμές και αυξανόμενης της τιμής β η διαφορά των τιμών τους αυξάνεται, ενώ για όλες τις τιμές του β οι τιμές των σταθερών C_E και C_{Lz} παραμένουν παραπλήσιες και μάλιστα με την αύξηση της παραμέτρου β πλησιάζουν όλο και πιο πολύ. Για τις σταθερές C_{C1} και C_{C2} παρατηρούμε ότι και αυτές ελαττώνονται με την αύξηση της παραμέτρου β . Επίσης για $\beta \approx 3.5725$ ($\beta = I_v$) παρατηρήσαμε την ταυτόχρονη εξαφάνιση των ζωνών B και A_2 , με σχεδόν ίδιες σταθερές Jacobi κατά την εξαφάνισή τους. Τελικά, για μεγαλύτερες τιμές του β απομένουν οι ζώνες C_2, E, A_1 και C_1 καθώς και τα "εκτός επιπέδου" σημεία ισορροπίας $L_{\pm z}$.

Στον Πίνακα 6.1 παραθέτουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των καμπύλων $C_w = C_w(\beta)$ της περίπτωσης που μελετάμε, τις οποίες υπολογίσαμε αριθμητικά. Οι ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των σταθερών C_w , όπως αυτές προκύπτουν από την παραμετρική μεταβολή τους, δίνονται στο Πίνακα 6.2.

Λόγω της πολύ μικρής διαφοράς των τιμών C_{A1} και C_{A2} , όταν αυτές αποκτούν ίδιες τιμές με τη σταθερά C_{Lz} , θεωρήσαμε ως κοινό το σημείο τομής των αντίστοιχων καμπύλων $C_w = C_w(\beta)$ το οποίο συμβολίζουμε με $K_{1,2}$ και αντιστοιχεί στην τιμή $\beta_{1,2}$.

Πίνακας 6.1. Συντεταγμένες (β , C_w) των σημείων τομής των καμπύλων

$C_w=C_w(\beta)$ για την περίπτωση με $\nu=7$ και $e= -0.05$

β	C_w
$\beta_{1,2} = 0.073$	$C_{Lz} = C_{A1} \approx C_{A2} = 8.292$
$\beta_3 = 0.193$	$C_E = C_{C2} = 8.7088$
$\beta_4 = 0.203$	$C_{Lz} = C_{C2} = 8.695$
$\beta_5 = 0.235$	$C_E = C_{C1} = 8.831$
$\beta_6 = 0.244$	$C_{Lz} = C_{C1} = 8.817$
$\beta_7 = 0.438$	$C_E = C_B = 9.376$
$\beta_8 = 0.4475$	$C_{Lz} = C_B = 9.360$
$\beta_9 = 0.5256$	$C_{C2} = C_{A1} = 8.302$
$\beta_{10} = 0.5397$	$C_{C2} = C_{A2} = 8.287$
$\beta_{11} = 0.9985$	$C_{C1} = C_{A1} = 8.044$
$\beta_{12} = 1.163$	$C_{C1} = C_{A2} = 7.912$
$\beta_{13} = 2.282$	$C_B = C_{A1} = 7.3721$
$\beta_{14} = 3.256$	$C_{C1} = C_{A2} = 6.827$
$\beta_{15} = 3.359$	$C_{C1} = C_B = 6.791$

Πίνακας 6.2. Ανισοτικές σχέσεις των σταθερών C_w για την περίπτωση με $\nu=7$ και $e= -0.05$

Περιοχές τιμών β	Διάταξη σταθερών C_w
$0 < \beta < 0.045$	$C_B > C_{C1} > C_{C2} > C_{Lz}$
$0.045 < \beta < \beta_{1,2}$	$C_B > C_{C1} > C_{C2} > C_E > C_{A1} > C_{A2} > C_{Lz}$
$\beta_{1,2} < \beta < \beta_3$	$C_B > C_{C1} > C_{C2} > C_E > C_{Lz} > C_{A1} > C_{A2}$
$\beta_3 < \beta < \beta_4$	$C_B > C_{C1} > C_E > C_{C2} > C_{Lz} > C_{A1} > C_{A2}$
$\beta_4 < \beta < \beta_5$	$C_B > C_{C1} > C_E > C_{Lz} > C_{C2} > C_{A1} > C_{A2}$
$\beta_5 < \beta < \beta_6$	$C_B > C_E > C_{C1} > C_{Lz} > C_{C2} > C_{A1} > C_{A2}$
$\beta_6 < \beta < \beta_7$	$C_B > C_E > C_{Lz} > C_{C1} > C_{C2} > C_{A1} > C_{A2}$
$\beta_7 < \beta < \beta_8$	$C_E > C_B > C_{Lz} > C_{C1} > C_{C2} > C_{A1} > C_{A2}$
$\beta_8 < \beta < \beta_9$	$C_E > C_{Lz} > C_B > C_{C1} > C_{C2} > C_{A1} > C_{A2}$

$\beta_9 < \beta < \beta_{10}$	$C_E > C_{Lz} > C_B > C_{C1} > C_{A1} > C_{C2} > C_{A2}$
$\beta_{10} < \beta < \beta_{11}$	$C_E > C_{Lz} > C_B > C_{C1} > C_{A1} > C_{A2} > C_{C2}$
$\beta_{11} < \beta < \beta_{12}$	$C_E > C_{Lz} > C_B > C_{A1} > C_{C1} > C_{A2} > C_{C2}$
$\beta_{12} < \beta < \beta_{13}$	$C_E > C_{Lz} > C_B > C_{A1} > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$
$\beta_{13} < \beta < \beta_{14}$	$C_E > C_{Lz} > C_{A1} > C_B > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$
$\beta_{14} < \beta < \beta_{15}$	$C_E > C_{Lz} > C_{A1} > C_B > C_{C1} > C_{A2} > C_{C2}$
$\beta_{15} < \beta < I_v \approx 3.573$	$C_E > C_{Lz} > C_{A1} > C_{C1} > C_B > C_{A2} > C_{C2}$
$\beta > I_v$	$C_E > C_{Lz} > C_{A1} > C_{C1} > C_{C2}$

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 6.2, δημιουργούνται συνολικά 17 διαστήματα τιμών της παραμέτρου β σε καθένα από τα οποία η διάταξη των τιμών των σταθερών Jacobi είναι διαφορετική. Συνεπώς, για τις δεδομένες τιμές των ν και e , υπάρχουν 17 διαφορετικοί τρόποι εξέλιξης των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας. Για τη συνέχεια θα επιλέξουμε μία από τις περιοχές αυτές περιγράφοντας την παραμετρική μεταβολή τόσο των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας, όσο και των προβολών τους σε διάφορα συντεταγμένα επίπεδα.

6.2.2 Εφαρμογή για $\beta=2$ ($\nu =7$, $e = -0.05$)

Από τον Πίνακα 6.2 διαπιστώνουμε ότι η τιμή $\beta=2$ ανήκει στο διάστημα (β_{12}, β_{13}) όπου η σχέση μεταξύ των τιμών των σταθερών C_w των θέσεων ισορροπίας εκφράζεται μέσω της ανισότητας:

$$C_E > C_{Lz} > C_B > C_{A1} > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$$

με τιμές :

$$C_E = 11.9275865$$

$$C_{Lz} = 11.902175218$$

$$C_B = 7.57197553$$

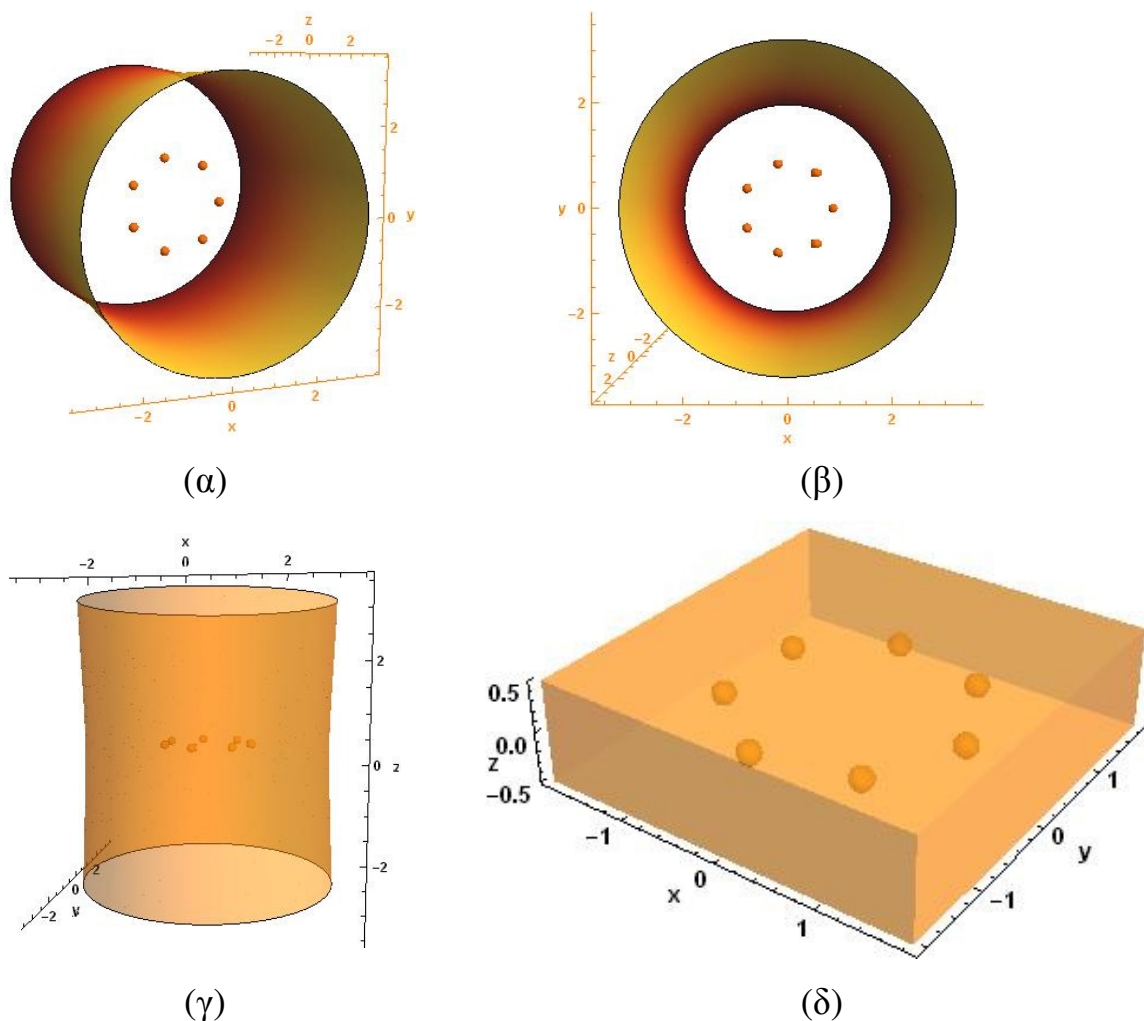
$$C_{A1} = 7.50317263$$

$$C_{A2} = 7.41838529$$

$$C_{C1} = 7.37392456$$

$$C_{C2} = 7.13836310$$

Στις τιμές αυτές συμβαίνουν όπως είπαμε τοπολογικές αλλαγές στην εξέλιξη των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας. Τις επιφάνειες αυτές τις έχουμε απεικονίσει κάτω από διάφορες οπτικές γωνίες ώστε να έχουμε πιο πλήρη εικόνα. Αναλυτικότερα: Όταν $C > C_E$ (Σχήμα 6.3), διαμορφώνονται n κλειστές, σχεδόν σφαιρικές επιφάνειες γύρω από τα περιφερειακά μεγάλα σώματα, στο εσωτερικό των οποίων η κίνηση του μικρού σώματος είναι επιτρεπτή. Ουσιαστικά οι περιοχές αυτές αποτελούν περιοχές παγίδευσης. Όλες αυτές οι περιοχές περιβάλλονται από μία μεγαλύτερη επιφάνεια υπό τη μορφή ανοιχτού δίκωνου υπερβολοειδούς, έξω από την οποία η κίνηση του μικρού σώματος είναι τελείως ελεύθερη. Αντίθετα, στην περιοχή που περιλαμβάνεται μεταξύ της εξωτερικής αυτής επιφάνειας και των σχεδόν σφαιρικών επιφανειών γύρω από τα πρωτεύοντα περιφερειακά σώματα, η κίνηση είναι απαγορευμένη.

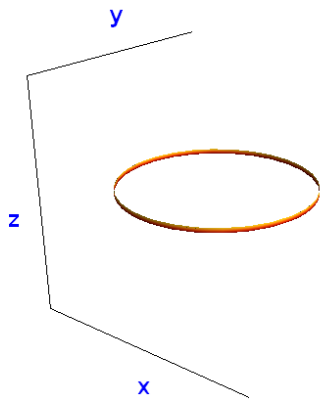


Σχήμα 6.3. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C = 12$ ($C > C_E$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

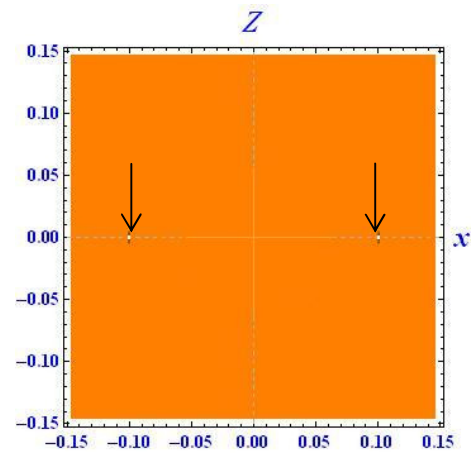
Στην τιμή $C = C_E$, γύρω από το κεντρικό σώμα και κοντά στο ισημερινό του επίπεδο, αρχίζουν να δημιουργούνται δύο περιβάλλουσες επιφάνειες συμμετρικές ως προς το επίπεδο αυτό οι οποίες ενούμενες κατά τα άκρα τους διαμορφώνουν ένα στενό <<τοροειδές>> (Σχήμα 6.4α). Καθώς ελαττώνεται η σταθερά C , οι επιφάνειες αυτές διογκώνονται, αναπτυσσόμενες πάντα συμμετρικά ως προς το ισημερινό επίπεδο του κεντρικού σώματος (Σχήμα 6.4β,γ), με τέτοιο τρόπο ώστε για την τιμή $C=C_{Lz}$, να διαμορφωθούν τελικά δύο σχεδόν σφαιρικές, κλειστές επιφάνειες που περικλείουν το κεντρικό πρωτεύον σώμα (Σχήμα 6.4δ). Τα συμμετρικά σημεία του άξονα z ως προς το κέντρο O , στα οποία έρχονται σε επαφή οι περιβάλλουσες επιφάνειες προς σχηματισμό των σφαιρικών επιφανειών, δεν είναι άλλα από τα "εκτός επιπέδου" σημεία ισορροπίας $L_{\pm z}$. Στην πορεία αυτής της εξέλιξης οι ακτίνες των δύο επιφανειών διαφοροποιούνται και έτσι δημιουργείται μεταξύ αυτών μία επιτρεπτή περιοχή κίνησης (λευκό χρώμα) που συνεχώς διευρύνεται. Είναι δεδομένο ότι η εμφάνιση αυτών των επιφανειών είναι απόρροια της εμφάνισης των ζωνών E_1 και E_2 πλησίον της περιοχής του κεντρικού σώματος.

Όλα τα παραπάνω γίνονται αντιληπτά, μέσω του Σχήματος 6.4, όπου στην αριστερή στήλη απεικονίζονται οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση και στη δεξιά στήλη, οι προβολές αυτών στο επίπεδο xz . Αυτό μας βοηθάει να κατανοήσουμε την εξέλιξη των περιοχών της τρισδιάστατης κίνησης στη κεντρική περιοχή και τη μεταβολή των διαστάσεων των κλειστών επιφανειών που σχηματίζονται εκεί. Οι λευκές περιοχές, είναι περιοχές επιτρεπτής κίνησης.

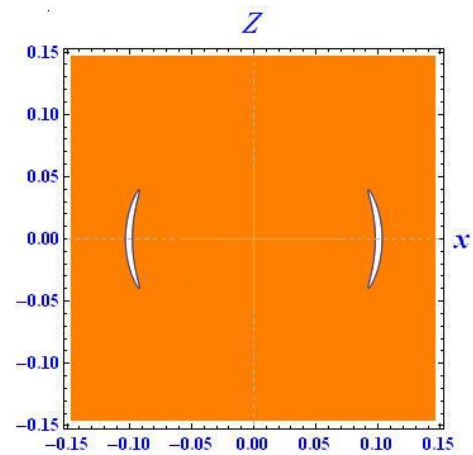
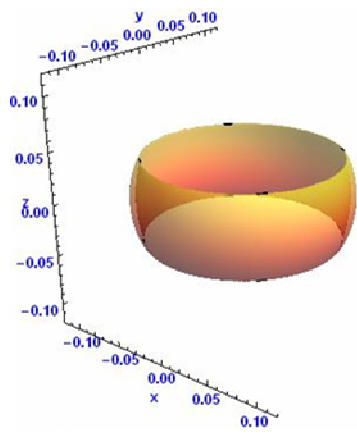
Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας
στην τρισδιάστατη κίνηση



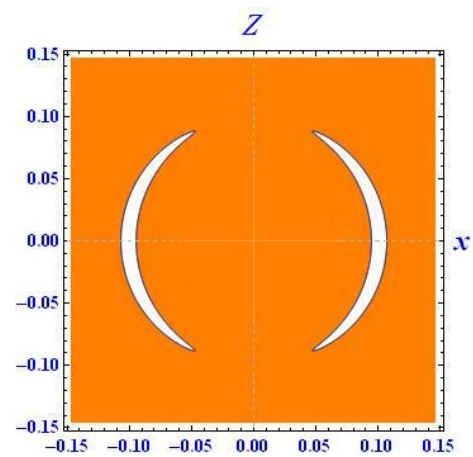
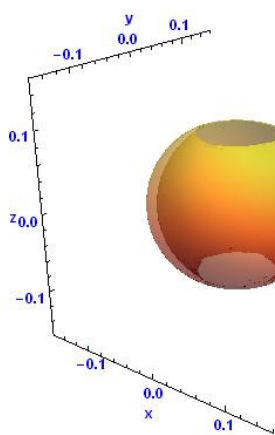
Προβολές στο επίπεδο xz



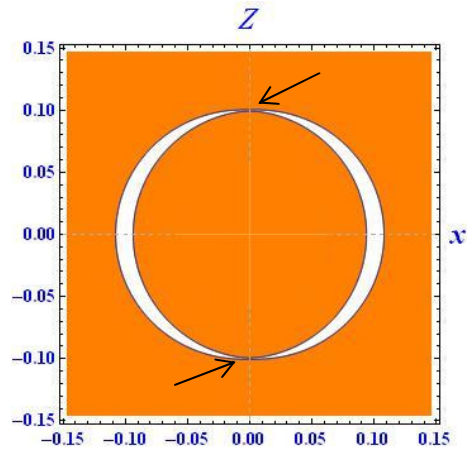
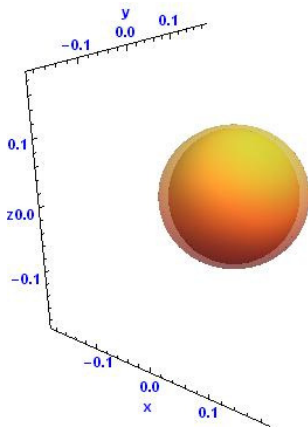
(α)



(β)



(γ)



(δ)

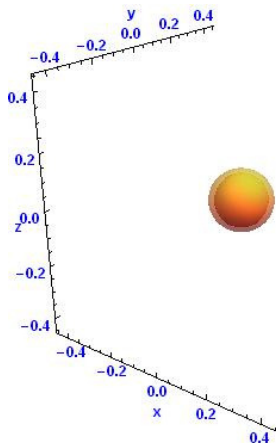
Σχήμα 6.4. Δημιουργία και εξέλιξη επιτρεπτών περιοχών κίνησης (λευκές περιοχές) και μη επιτρεπτών (έγχρωμες), στην περιοχή του κεντρικού σώματος

για: (α) $C = C_E = 11.9275$, (β) $C = 11.922$, (γ) $C = 11.91$ και

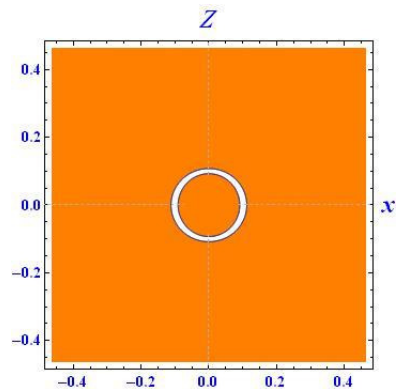
(δ) $C = C_{Lz} = 11.902$ ($C_{Lz} \leq C \leq C_E$)

Με δεδομένο ότι αυτές οι επιφάνειες θα εξελίσσονται ταυτόχρονα με τις υπόλοιπες που αναπτύσσονται γύρω από τα περιφερειακά μεγάλα σώματα, κρίναμε σκόπιμο να μελετήσουμε την περιοχή κοντά στο κεντρικό πρωτεύον σώμα και για τιμές της σταθεράς $C_{Lz} < C < C_B$, παρακολουθώντας λεπτομερειακά την εξέλιξη της παραμετρικής μεταβολής τους. Έτσι για αυτές τις τιμές της σταθεράς C και για την κεντρική περιοχή του σχηματισμού των n σωμάτων, προκύπτουν τα Σχήματα 6.5, που είναι παρόμοια με τα Σχήματα 6.4.

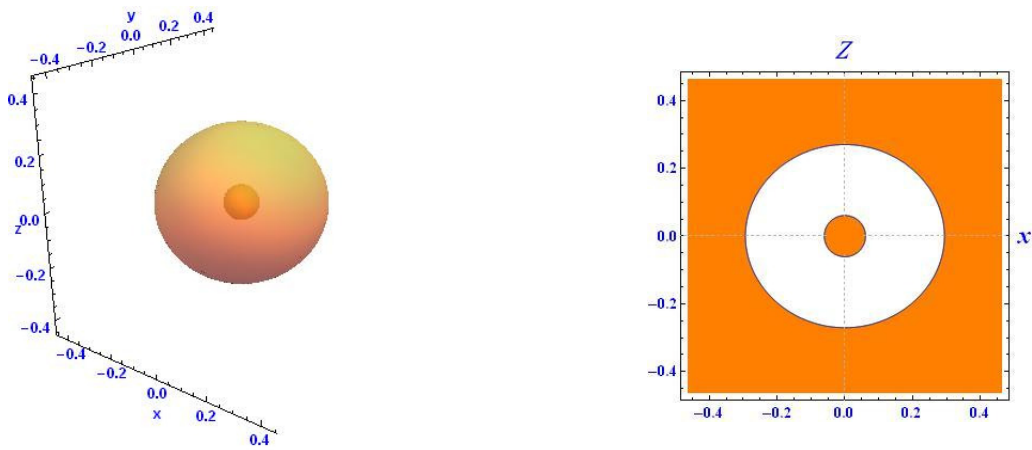
Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση



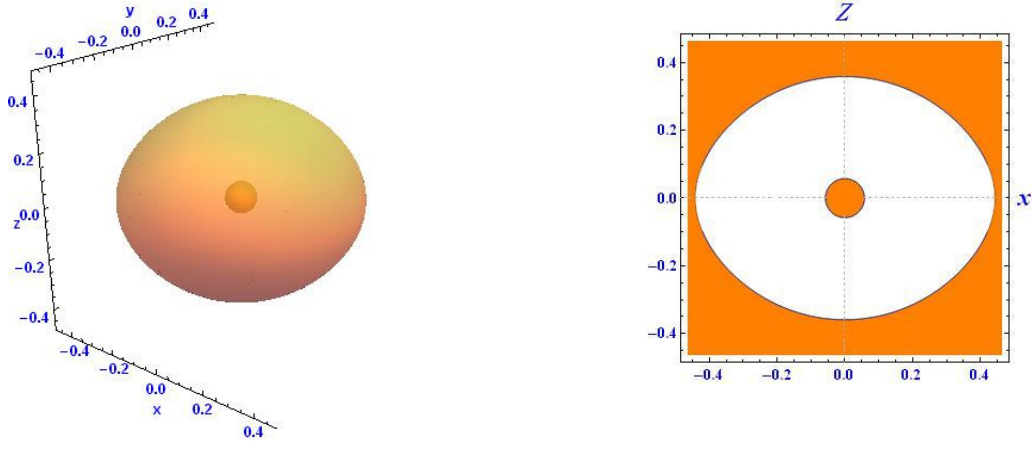
Προβολές στο επίπεδο xz



(α)



(β)

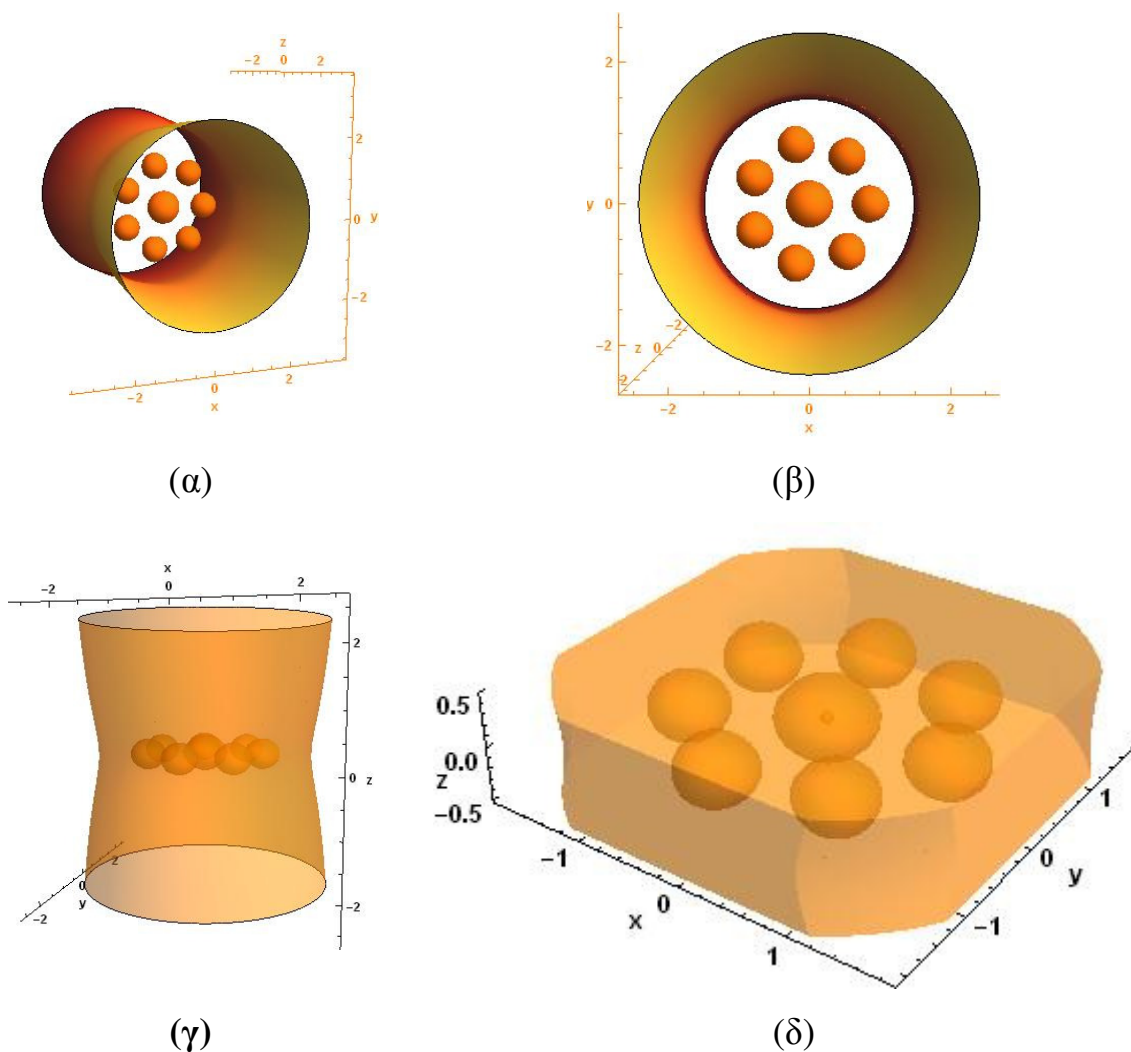


(γ)

Σχήμα 6.5. Δημιουργία και εξέλιξη επιτρεπτών περιοχών κίνησης(λευκές περιοχές) και μη επιτρεπτών (έγχρωμες) ,στην περιοχή του κεντρικού σώματος για: (α) $C = 11.85$, (β) $C = 8.85$ και (γ) $C = 7.85$, όπου $C_{Lz} < C < C_B$

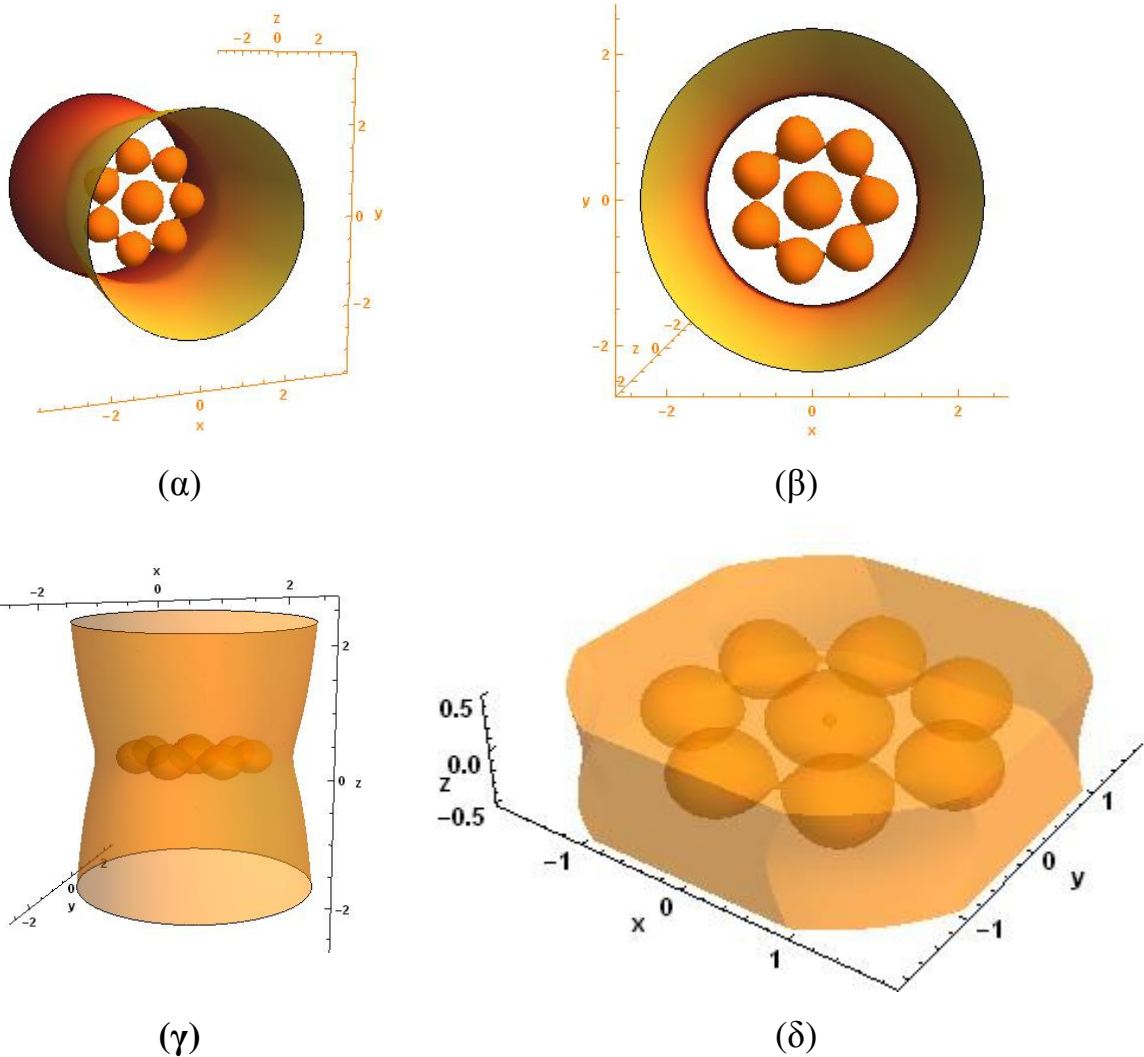
Παρατηρούμε ότι με την ελάττωση της σταθεράς του Jacobi η εσωτερική σφαιρική επιφάνεια συρρικνώνεται και η εξωτερική συμπιέζεται κατά τον άξονα z, παίρνοντας τη μορφή πεπλατυσμένου σφαιροειδούς. Προφανώς διευρύνεται η περιοχή επιτρεπτής κίνησης μεταξύ της εξωτερικής και εσωτερικής επιφάνειας, με την τελευταία να διατηρεί την σχεδόν σφαιρική μορφή της με σχεδόν αμετάβλητη ακτίνα από μια τιμή της σταθεράς C και μετά. Διατηρήσαμε σταθερή κλίμακα για όλα τα σχήματα για να γίνει κατανοητή η μεταβολή των όγκων που περικλείονται από τις υπό εξέταση επιφάνειες. Πέρα από την εμφάνιση των παραπάνω επιφανειών που περιβάλλουν την περιοχή του κεντρικού σώματος, για $C_B < C < C_E$, οι κλειστές,

σχεδόν σφαιρικές επιφάνειες που περιβάλλουν τα n περιφερειακά σώματα διατηρούν τη μορφή τους, αποτελούν περιοχές επιτρεπτής κίνησης και διευρύνονται όσο η σταθερά C ελαττώνεται. Όλες αυτές οι περιοχές περιβάλλονται από την κυλινδρική επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας, ελαφρώς συμπιεσμένης περιμετρικά στο μέσον της, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η οποία όμως έχει συρρικνωθεί ακόμα περισσότερο και έξω από την οποία η κίνηση στο χώρο είναι ελεύθερη (Σχήμα 6.6).



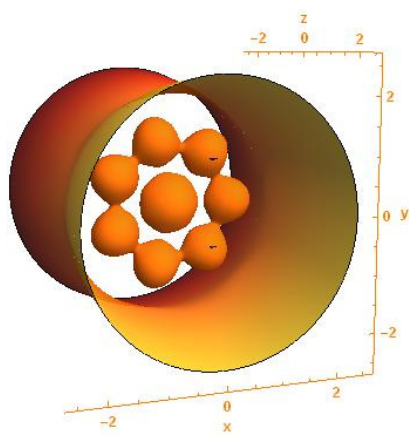
Σχήμα 6.6. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C = 7.85$ ($C_B < C < C_E$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

Όταν $C = C_B$ (Σχήμα 6.7), τότε οι κλειστές περιοχές της επιτρεπτής κίνησης που αναπτύσσονται γύρω από τα περιφερειακά σώματα έρχονται σε επαφή στα σημεία των θέσεων ισορροπίας της ζώνης B.

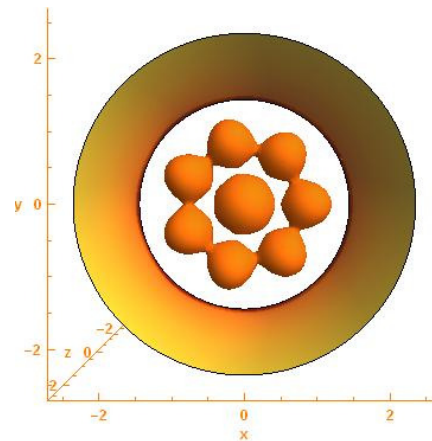


Σχήμα 6.7. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.57197553$ ($C=C_B$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

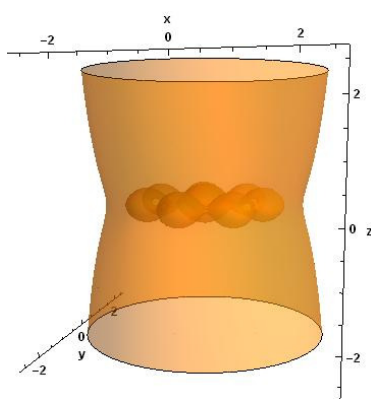
Για τιμές της σταθεράς C με $C_{A1} < C < C_B$ (Σχήμα 6.8), παρατηρούμε ότι δημιουργείται μία ενιαία κλειστή περιοχή επιτρεπτής κίνησης ανάμεσα στις επιφάνειες που περιέκλειαν τα περιφερειακά σώματα και που τώρα επικοινωνούν. Γίνεται φανερή η συμπίεση της διάστασης z των περιοχών αυτών καθώς η σταθερά C ελαττώνεται. Φανερή επίσης είναι και η συμπίεση της διάστασης z της εξωτερικής επιφάνειας του περιβάλλει το κεντρικό σώμα του σχηματισμού, ενώ η εσωτερική σχεδόν σφαιρική επιφάνεια, παραμένει αμετάβλητη.



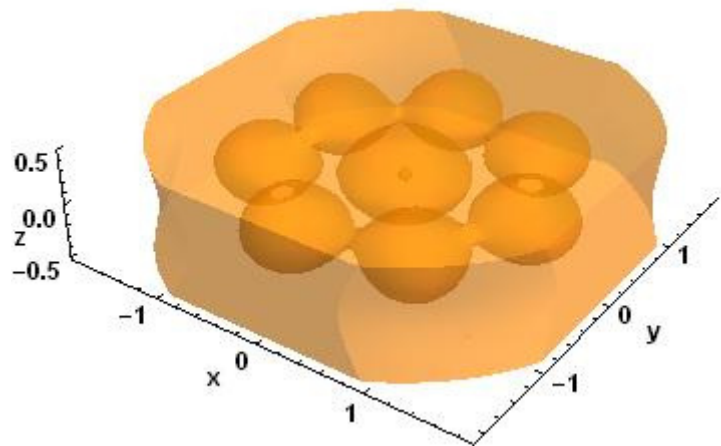
(α)



(β)



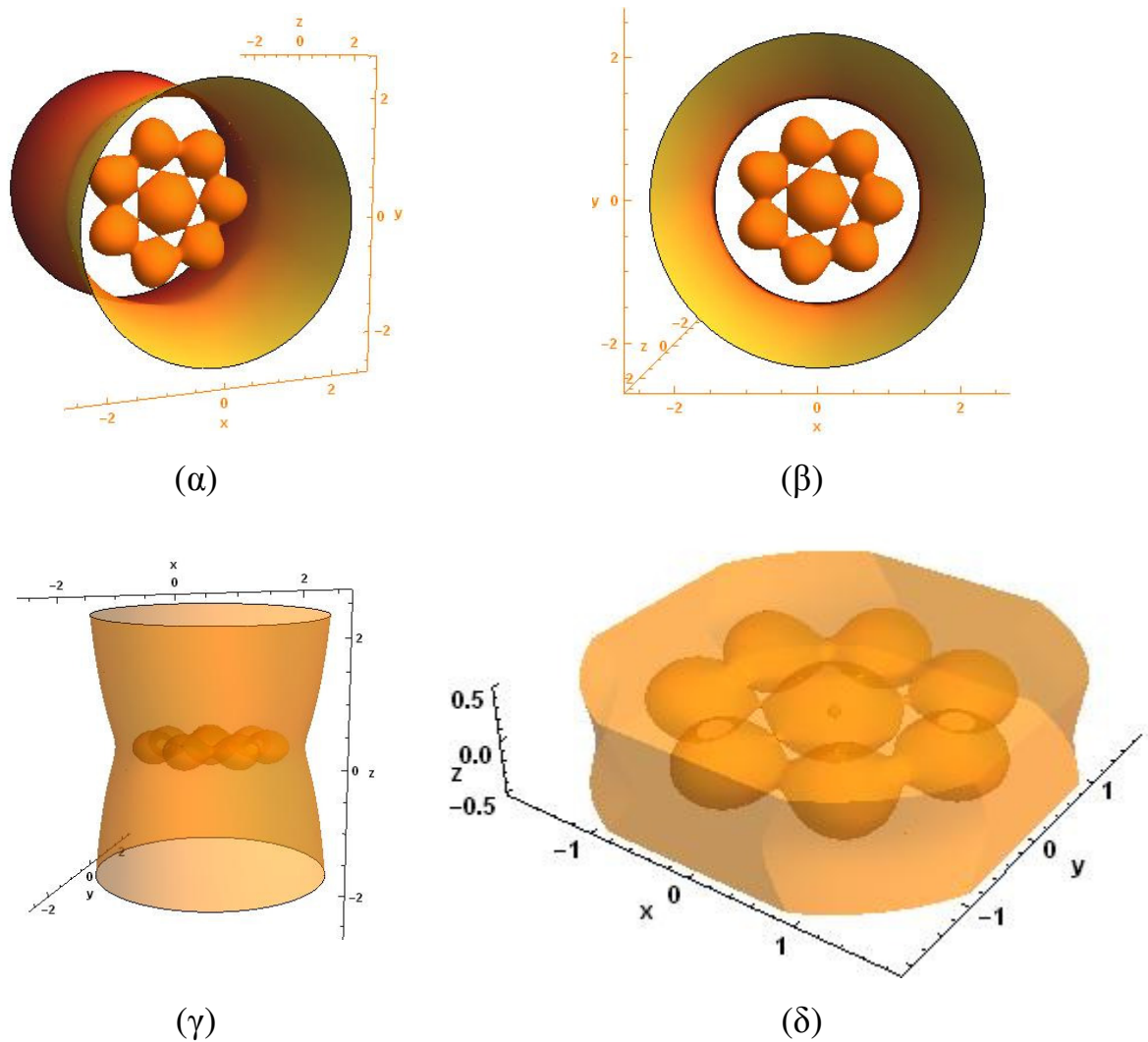
(γ)



(δ)

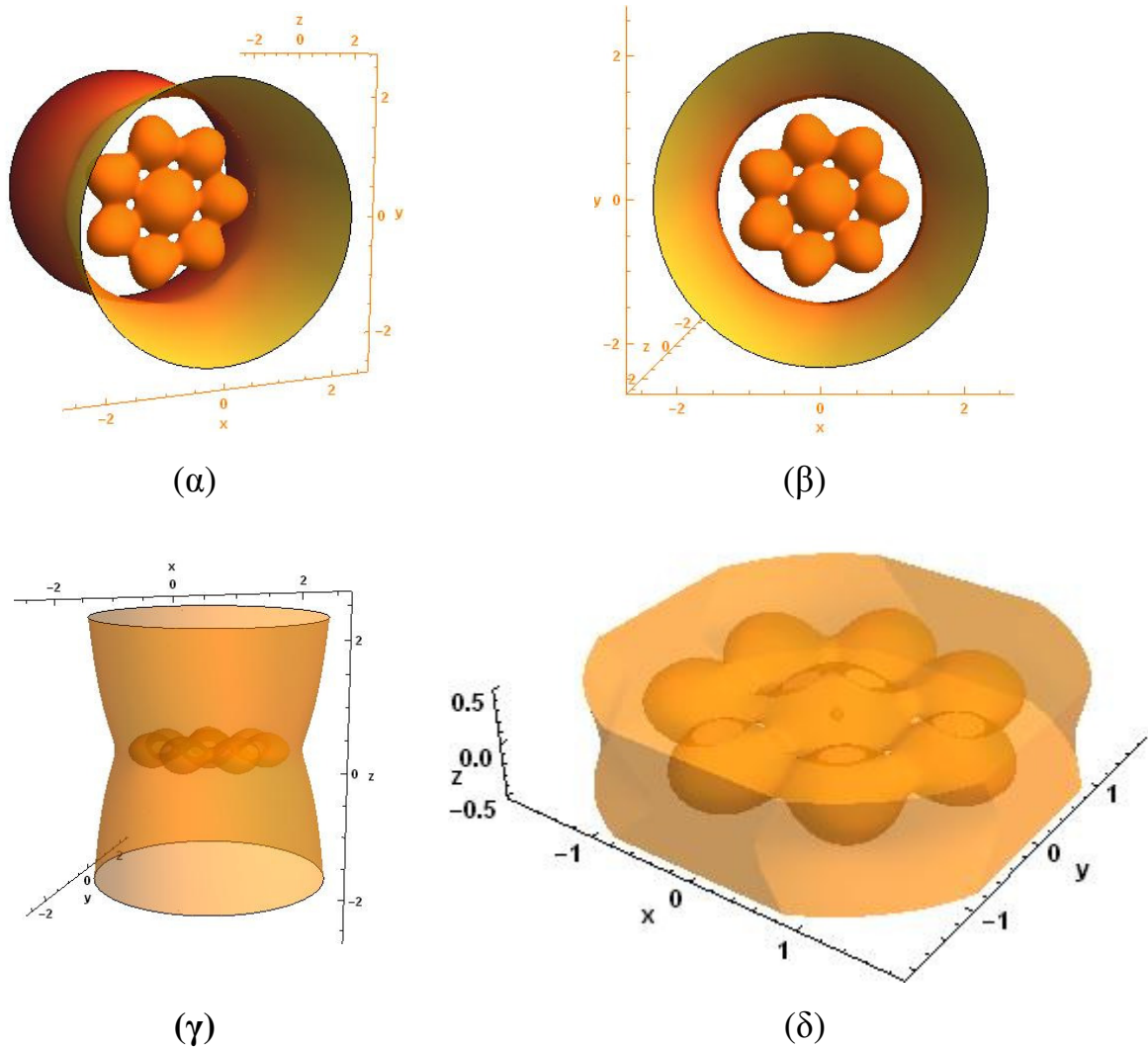
Σχήμα 6.8. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.54$ ($C_{A1} < C < C_B$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

Όταν $C=C_{A1}$ (Σχήμα 6.9), οι διογκωμένες περιοχές επιτρεπτής κίνησης που περιβάλλουν τα περιφερειακά, «αγγίζουν» την πεπλατυσμένη εξωτερική κλειστή επιφάνεια γύρω από το κεντρικό πρωτεύον, στα σημεία των θέσεων ισορροπίας της ζώνης A_1 .



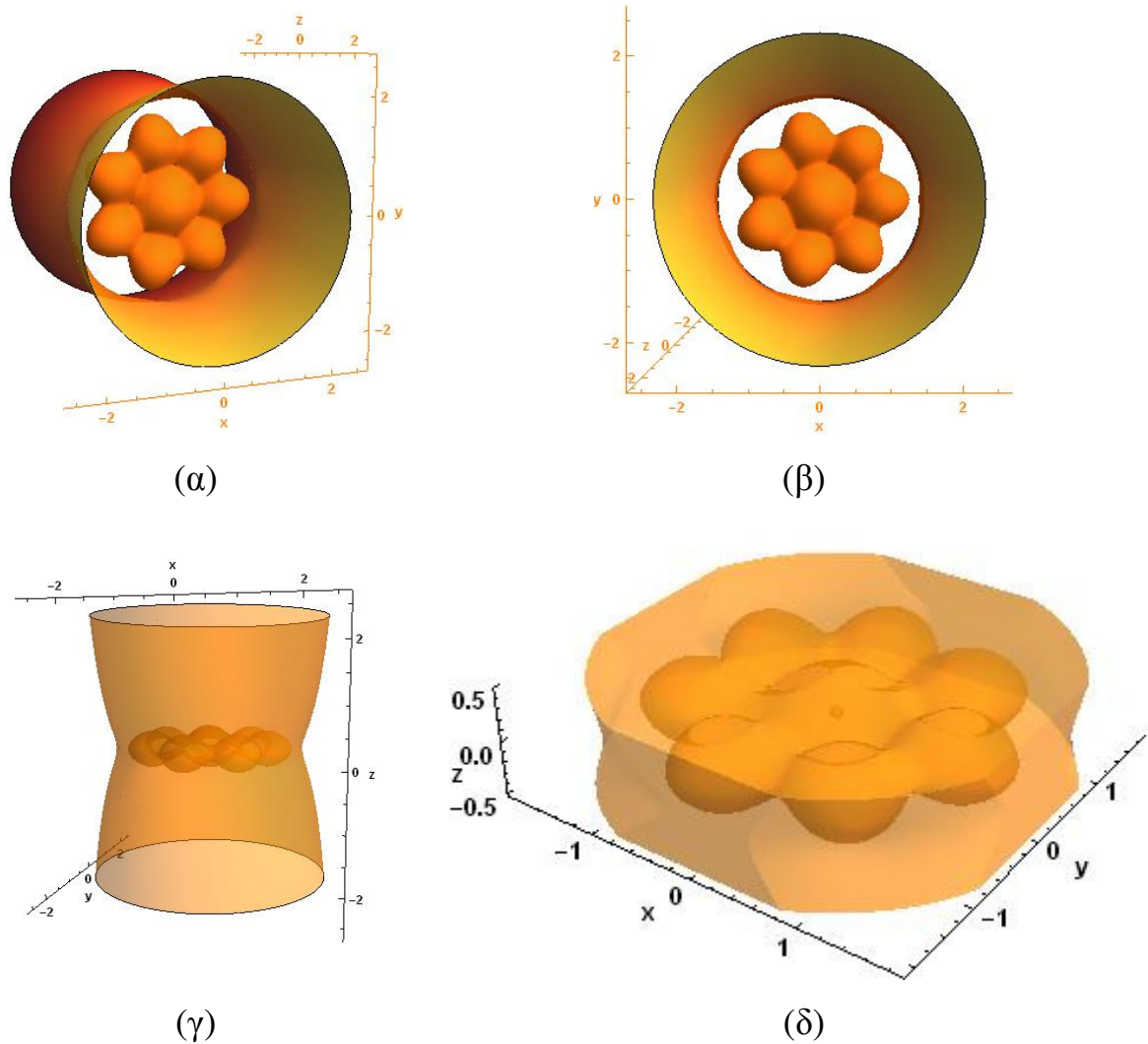
Σχήμα 6.9. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.50317263$ ($C=C_{A1}$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

Όταν $C_{A2} < C < C_{A1}$ (Σχήμα 6.10), παρατηρούμε την παραπέρα χωρική αύξηση των διαύλων επικοινωνίας των περιοχών επιτρεπτής κίνησης, γύρω από τα περιφερειακά σώματα και της εξωτερικής κλειστής επιφάνειας περί του κεντρικού σώματος. Εξακολουθούν να υπάρχουν περιοχές απαγορευμένης κίνησης μεταξύ των παραπάνω επιφανειών.



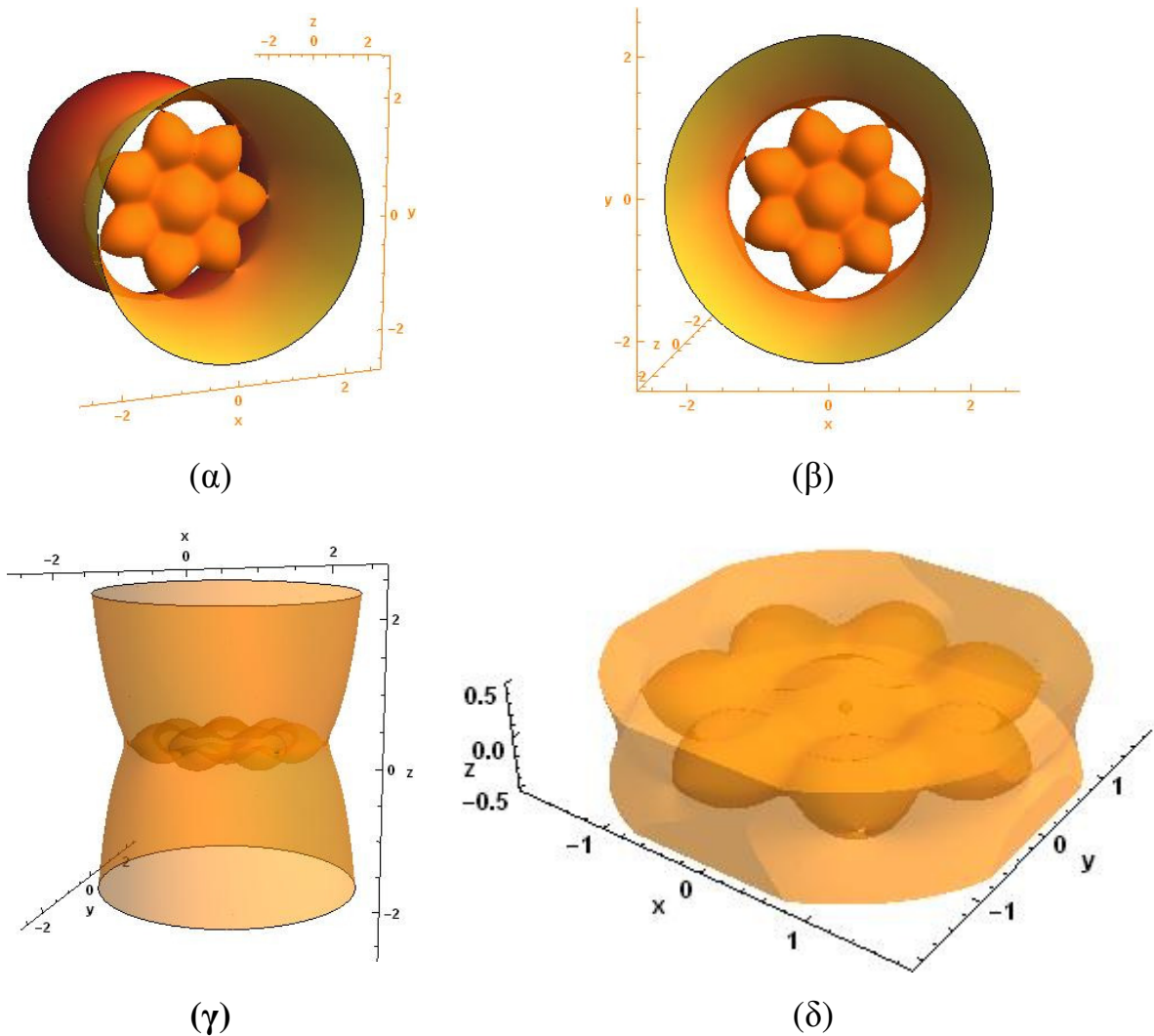
Σχήμα 6.10. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.45$ ($C_{A2} < C < C_{A1}$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

Με την περαιτέρω ελάττωση της σταθεράς C οι προηγούμενες περιοχές απαγορευμένης κίνησης συρρικνώνονται ακόμα περισσότερο και τελικά εκφυλίζονται για $C = C_{A2}$ σε σημεία, που αποτελούν τις θέσεις ισοροπίας της ζώνης A_2 (Σχήμα 6.11). Κατόπιν, για $C_{C1} < C < C_{A2}$ δημιουργείται μία ενιαία τρισδιάστατη περιοχή επιτρεπτής κίνησης, γύρω από την κεντρική σφαιρική επιφάνεια που περιβάλλει το κεντρικό σώμα.



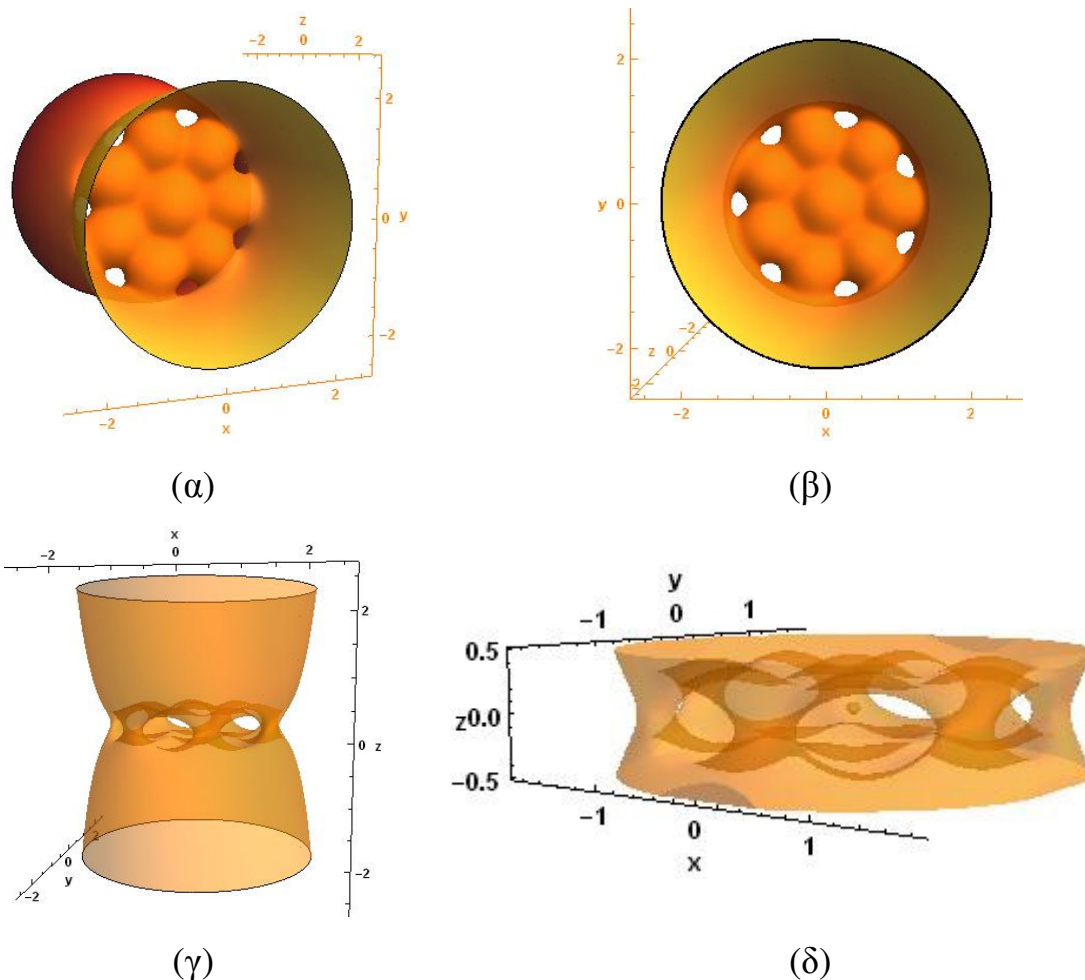
Σχήμα 6.11. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.41838529$ ($C = C_{A2}$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

Για $C = C_{C1}$ (Σχήμα 6.12), λαμβάνει χώρα άλλη μία bifurcation της παραμετρικής εξέτασης του προβλήματός μας, στα σημεία των θέσεων ισοροπίας της ζώνης C_1 . Στα σημεία αυτά υπάρχει η επαφή των χώρων που διαχώριζε έως τώρα η εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας. Δηλαδή δημιουργούνται οι πρώτοι διάυλοι επικοινωνίας προς την εξωτερική περιοχή της κυλινδρικής επιφάνειας, όπου η κίνηση του μικρού σώματος είναι παντού ελεύθερη.



Σχήμα 6.12. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.37392456$ ($C = C_{C1}$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

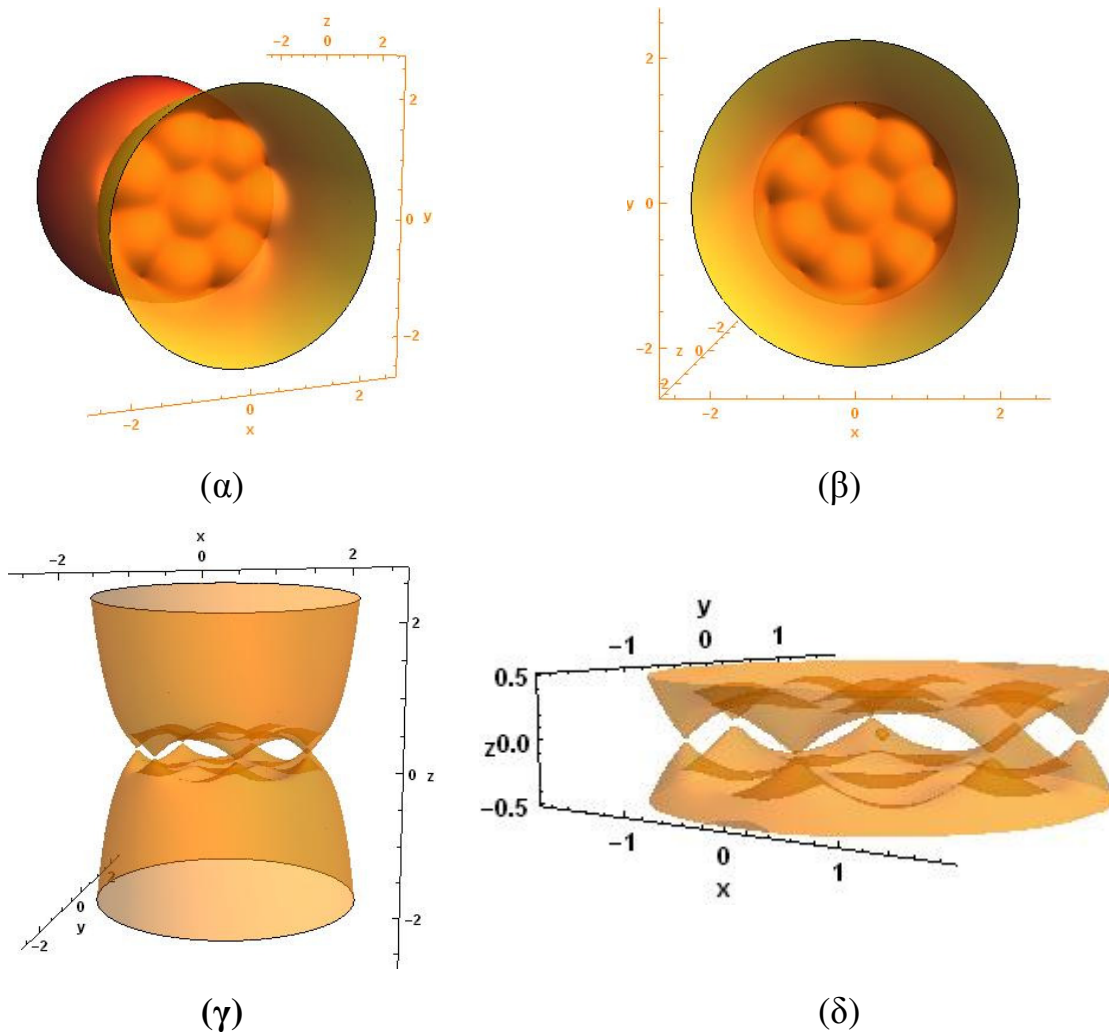
Όταν μειωθεί ακόμα περισσότερο η σταθερά C και για τιμές $C_{C2} < C < C_{C1}$, διευρύνονται ακόμα περισσότερο οι διάυλοι επικοινωνίας των δύο περιοχών που διαχώριζε έως τώρα η εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια (Σχήμα 6.13). Εκτός της κεντρικής σφαιρικής και σχεδόν αμετάβλητης, κατά την παραμετρική μεταβολή, επιφάνειας όπου απαγορεύεται η κίνηση, εξακολουθούν να υπάρχουν ακόμα περιοχές απαγορευμένης κίνησης. Οι τελευταίες αυτές περιοχές, είναι εκείνες που ενώνουν την περιοχή με $z > 0$ και την περιοχή με $z < 0$ της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας.



Σχήμα 6.13. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.2$ ($C_{C2} < C < C_{C1}$), όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

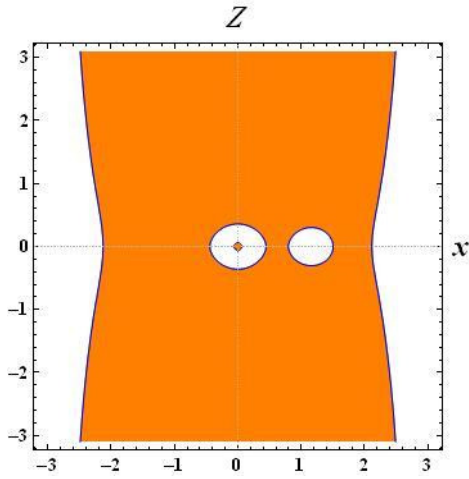
Για $C = C_{C2}$ (Σχήμα 6.14) προκύπτουν τα τελευταία σημεία επαφής της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας με το επίπεδο xy , στα σημεία ισορροπίας της ζώνης C_2 και τελικά την πλήρη αποκόλληση αυτών των δύο σχηματιζόμενων περιοχών εκατέρωθεν του επιπέδου xy .

Τέλος, για τιμές $C \leq C_{C2}$ η κίνηση του μικρού σώματος είναι επιτρεπτή σε όλο το χώρο, εκτός από την κλειστή περιοχή που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον.

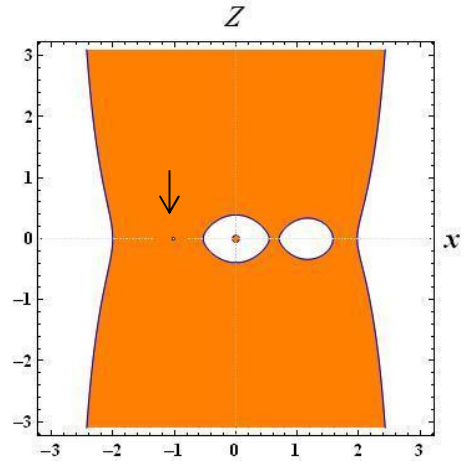


Σχήμα 6.14. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση για $C=7.1383631 (C = C_{C2})$, όπως φαίνονται από διαφορετικές γωνίες

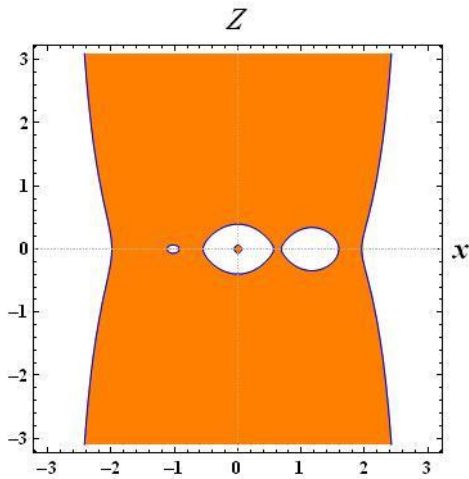
Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τις προβολές στο επίπεδο xz των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας στη τρισδιάστατη κίνηση. Έτσι προκύπτουν οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας στο επίπεδο xz . (Σχήμα 6.15). Στο Σχήμα 6.15β, το βέλος δείχνει το bifurcation point της ζώνης B, μέσω του οποίου οι επιφάνειες που περιβάλλουν τα περιφερειακά σώματα έρχονται σε επαφή. Γίνεται αντιληπτή η συμπίεση των κλειστών επιφανειών στο άξονα Oz και έχουμε άλλη μία εικόνα της παραμετρικής εξέλιξης των περιοχών επιτρεπτής κίνησης στο επίπεδο xz . Σε όλα τα σχήματα, οι έγχρωμες περιοχές απεικονίζουν τις απαγορευμένες περιοχές κίνησης και οι λευκές τις επιτρεπτές.



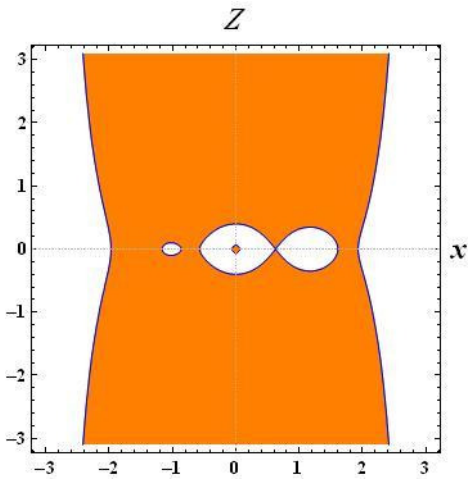
(α)



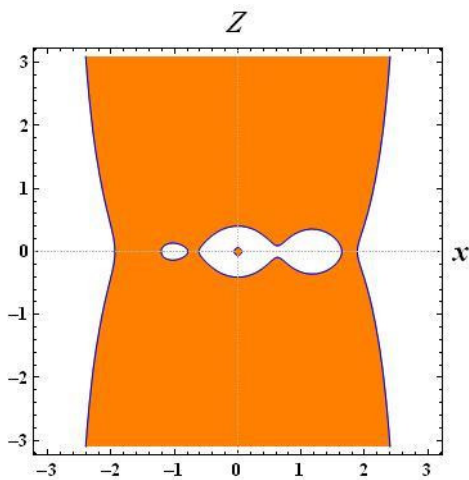
(β)



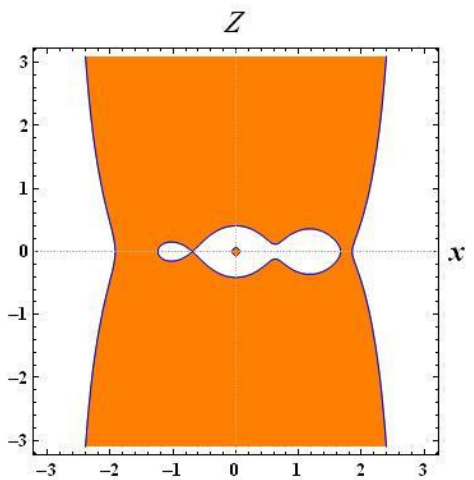
(γ)



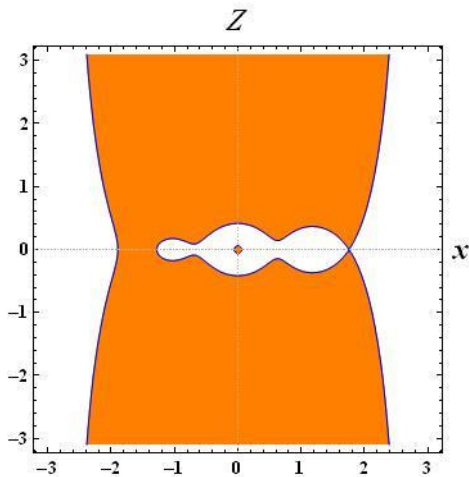
(δ)



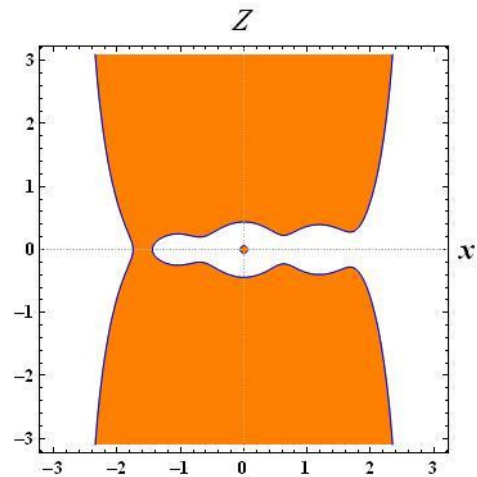
(ε)



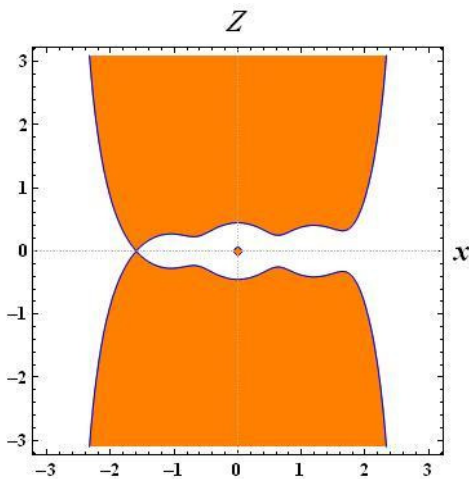
(στ)



(ζ)



(η)



(θ)

Σχήμα 6.15. Προβολές στο επίπεδο xz των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας της τρισδιάστατης κίνησης που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς. (α) $C = 7.85$, (β) $C = 7.5719$, (γ) $C = 7.54$, (δ) $C = 7.5031$, (ε) $C = 7.45$, (στ) $C = 7.4183$, (ζ) $C = 7.3739$, (η) $C = 7.2$ και (θ) $C = 7.1383$

6.3 Ταυτόχρονες τοπολογικές αλλαγές των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας στην τρισδιάστατη κίνηση

Στα σημεία τομής των καμπύλων $C_w = C_w(\beta)$ (Σχήμα 6.1), όπως αυτά αναπτύχθηκαν στη προηγούμενη παράγραφο, οι σταθερές C σημείων ισορροπίας, που ανήκουν σε διαφορετική ζώνη ή στα σημεία ισορροπίας "εκτός επιπέδου" αποκτούν ίσες τιμές.

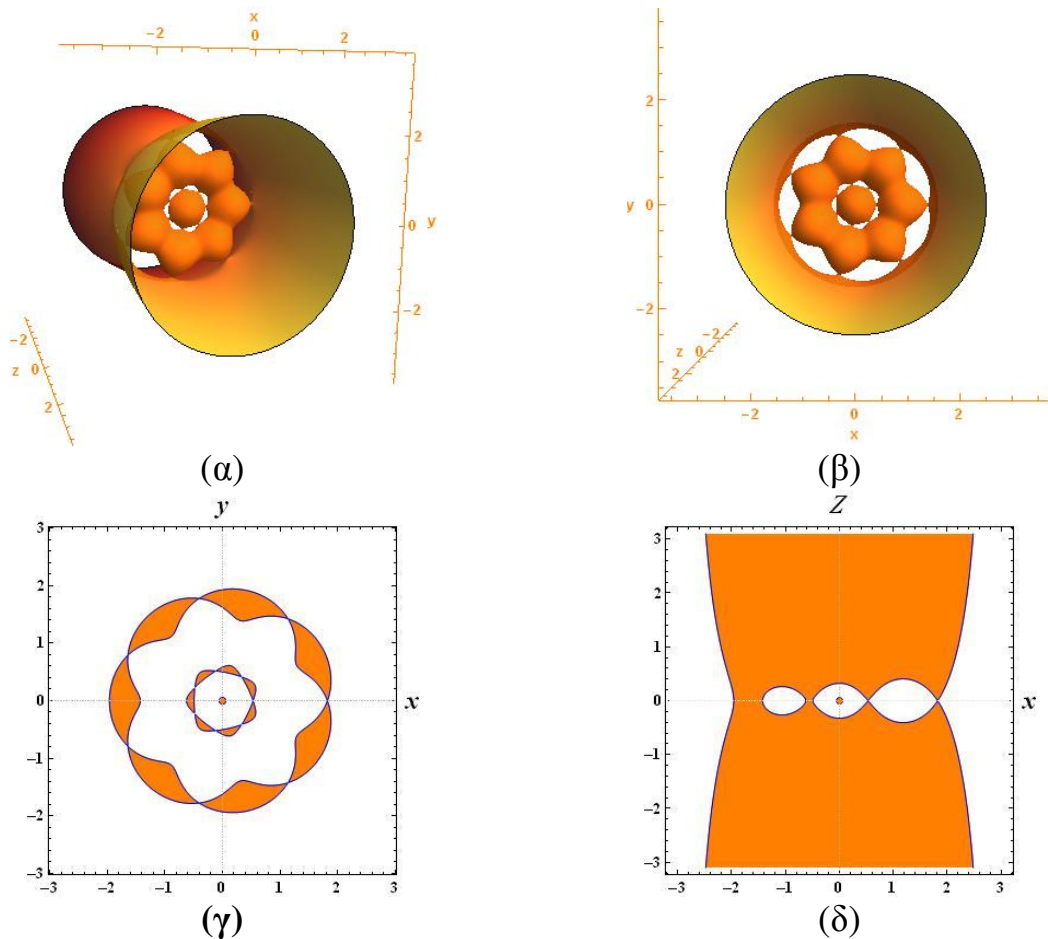
Γνωρίζουμε ότι σε κάθε τιμή της σταθεράς C_w που αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας, εμφανίζεται μία bifurcation. Τιμή στην οποία συμβαίνουν οι δραστικές τοπολογικές αλλαγές των περιοχών (τρισδιάστατων ή δισδιάστατων) επιτρεπτής κίνησης του μικρού σώματος, στο πεδίο που δημιουργούν το κεντρικό και τα n περιφερειακά σώματα. Τα σημεία τομής K_i ανήκουν ταυτόχρονα σε διαφορετικές ομάδες σημείων ισορροπίας, εκείνες που αντιστοιχούν στις τεμνόμενες καμπύλες. Άρα σε αυτά τα bifurcation points, θα λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα δύο τοπολογικές αλλαγές των περιοχών κίνησης.

Ενδεικτικά, παρουσιάζουμε δύο από τις περιπτώσεις διπλής τοπολογικής αλλαγής των περιοχών της κίνησης (bifurcations), για σταθερή τιμή του διαταρακτικού όρου $e = -0.05$. Έτσι θα καταστεί εμφανής η μεγάλη σημασία της ανισοτικής σχέσης των σταθερών C_w (Πίνακας 6.2) και πως αυτές οι ανισότητες επηρεάζουν την κίνηση, την ενέργεια αλλά και τις θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος.

Στα σχήματα που ακολουθούν, για κάθε περίπτωση δίνονται κατά σειρά, οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στον τρισδιάστατο χώρο xyz από δύο οπτικές γωνίες (πλάγια και κάτοψη) και οι προβολές αυτών στα επίπεδα xy και xz . Στις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας η κίνηση επιτρέπεται όπως ακριβώς έχει περιγραφεί στη προηγούμενη παράγραφο. Στις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας στα επίπεδα xy και xz να θυμίσουμε ότι οι λευκές περιοχές είναι περιοχές επιτρεπτής κίνησης, ενώ οι έγχρωμες απαγορευμένες περιοχές κίνησης, οι δε αριθμητικές τιμές των χαρακτηριστικών ζευγών (β_i, C_w) δίνονται από το Πίνακα 6.1.

Το Σχήμα 6.16 αναφέρεται στη περίπτωση με $n=7$, $e = -0.05$ και $\beta = \beta_{11} = 0.9985$, όπου για τις σταθερές C_w των τεμνόμενων καμπυλών στο σημείο K_{11} , ισχύει ότι : $C_{C1}=C_{A1}=8.044$. Η σχέση που συνδέει τις σταθερές C_w όλων των ζωνών ισορροπίας πριν και μετά το χαρακτηριστικό σημείο K_{11} , είναι οι παρακάτω:

- για $\beta_{10} < \beta < \beta_{11}$ ισχύει ότι $C_E > C_{Lz} > C_B > C_{C1} > C_{A1} > C_{A2} > C_{C2}$
- για $\beta_6 < \beta < \beta_7$ ισχύει ότι $C_E > C_{Lz} > C_B > C_{A1} > C_{C1} > C_{A2} > C_{C2}$

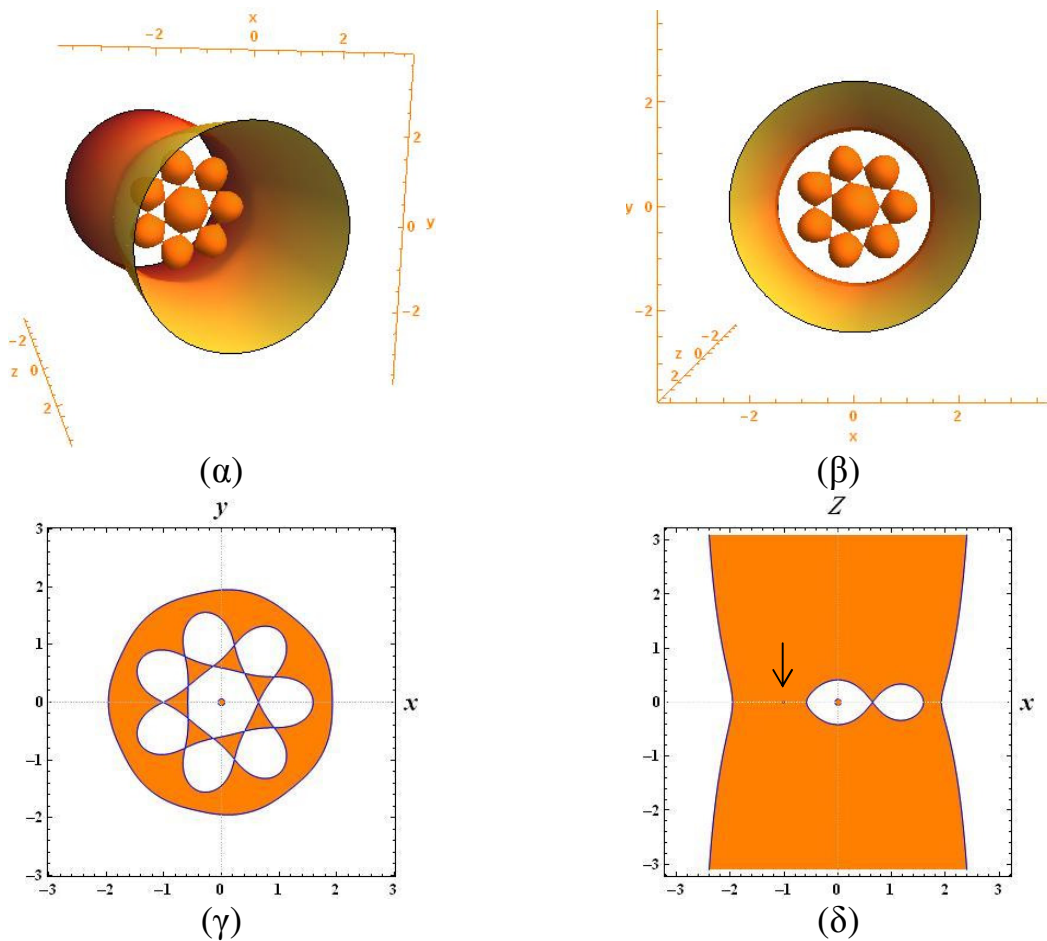


Σχήμα 6.16. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας της τρισδιάστατης κίνησης για $\nu=7$, $e = -0.05$, $\beta = 0.9985$ και $C = 8.044$. (α) και (β) πλάγιες όψεις, (γ) και (δ) προβολές των επιφανειών στα επίπεδα xy και xz αντίστοιχα

Σε αυτή την περίπτωση διπλής bifurcation, έχουμε την ταυτόχρονη δημιουργία επαφής των περιοχών των περιφερειακών σωμάτων με την περιοχή γύρω από το κεντρικό σώμα, αλλά και με την εξωτερική περιοχή επιτρεπόμενης κίνησης. Στη μεν πρώτη περίπτωση αυτό επιτυγχάνεται μέσω των bifurcation points της ζώνης A_1 , στη δε δεύτερη μέσω των bifurcation points της ζώνης C_1 . Προφανώς υπάρχει η δυνατότητα το μικρό σώμα να διαφύγει στην εξωτερική περιοχή, μέσω των σημείων ισορροπίας των ζωνών A_1 και C_1 .

Το Σχήμα 6.17 αναφέρεται στη περίπτωση με $\nu=7$, $e = -0.05$ και $\beta = \beta_{13} = 2.282$, όπου για τις σταθερές C_w των τεμνόμενων καμπυλών στο σημείο K_8 ισχύει ότι : $C_B = C_{A1} = 7.3721$. Η σχέση που συνδέει τις σταθερές C_w όλων των ζωνών ισορροπίας πριν και μετά το χαρακτηριστικό σημείο K_8 είναι οι παρακάτω :

- για $\beta_{12} < \beta < \beta_{13}$ ισχύει ότι $C_E > C_{Lz} > C_B > C_{A1} > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$
- για $\beta_{13} < \beta < \beta_{14}$ ισχύει ότι $C_E > C_{Lz} > C_{A1} > C_B > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$



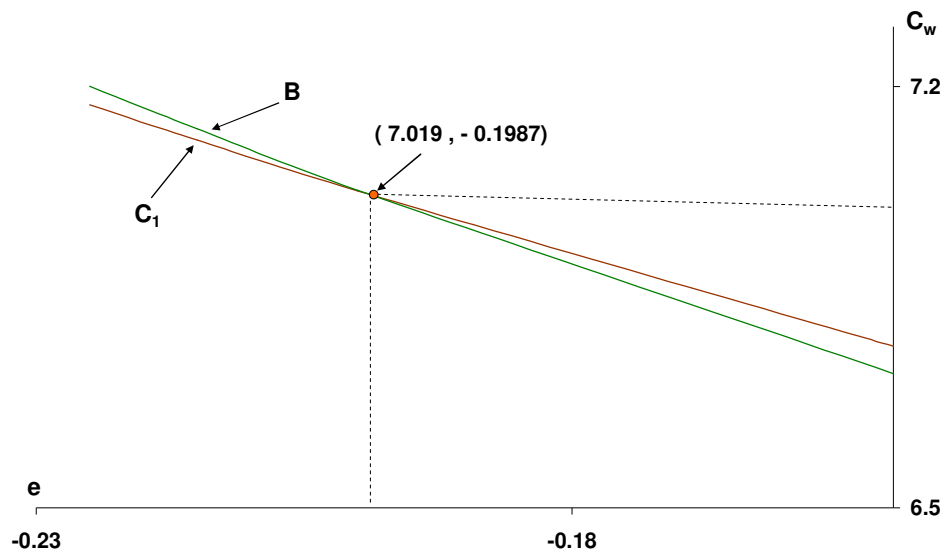
Σχήμα 6.17. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας της τρισδιάστατης κίνησης για $v=7$, $e = -0.05$, $\beta = 2.282$ και $C = 7.3721$. (α) και (β) πλάγιες όψεις, (γ) και (δ) προβολές των επιφανειών στα επίπεδα xy και xz αντίστοιχα

Σε αυτή την περίπτωση, επικοινωνούν οι περιοχές των περιφερειακών σωμάτων μεταξύ τους, μέσω των bifurcation points της ζώνης B, αλλά και οι περιοχές των περιφερειακών σωμάτων με την περιοχή του κεντρικού σώματος, μέσω των bifurcation points της ζώνης A_1 . Στο Σχήμα 6.17δ, που αναφέρεται στο επίπεδο xz , διακρίνεται αμυδρά ο διάυλος επικοινωνίας (βλέπε βέλος) που μόλις δημιουργήθηκε μέσω της επαφής των σημείων ισορροπίας της ζώνης B.

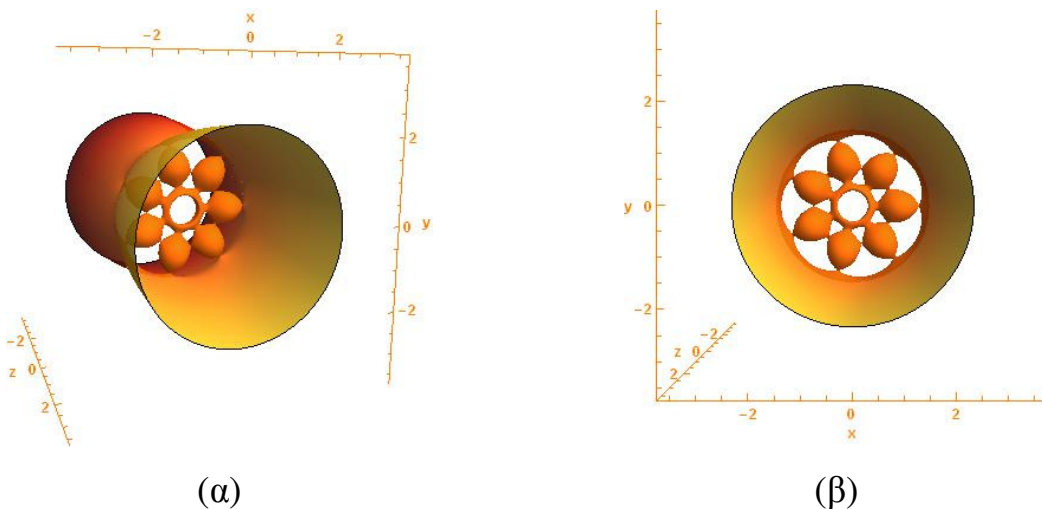
Τελειώνοντας την αναφορά μας στην παραπάνω ιδιότητα, διπλή και ταυτόχρονη αλλαγή των περιοχών επιτρεπτής κίνησης, διευκρινίζεται ότι ακριβώς παρόμοιες

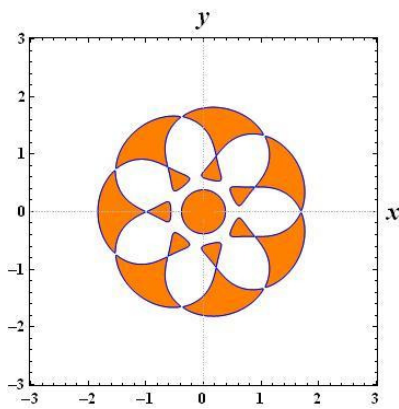
συμπεριφορές συναντώνται όταν διατηρείται σταθερή η τιμή της ανηγμένης μάζας β και μεταβάλλεται η τιμή του διαταρακτικού όρου e .

Αυτό γίνεται σαφές και από τη μελέτη του διαγράμματος $e-C_w$, για $\beta=5$, του Σχήματος 3.20β του τρίτου κεφαλαίου, λεπτομέρεια του οποίου παραθέτουμε παρακάτω (Σχήμα 6.18). Ενδεικτικά, για το σημείο τομής των καμπύλων $C_w=C_w(e)$ των ζωνών ισορροπίας B και C_1 , υπολογίσαμε το κοινό ζεύγος $(e, C_w) \approx (-0.1987, 7.019)$ και παρακάτω (Σχήμα 6.19) δίνουμε τις σχηματιζόμενες επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας στο χώρο και στο επίπεδο, όπως και προηγουμένως.

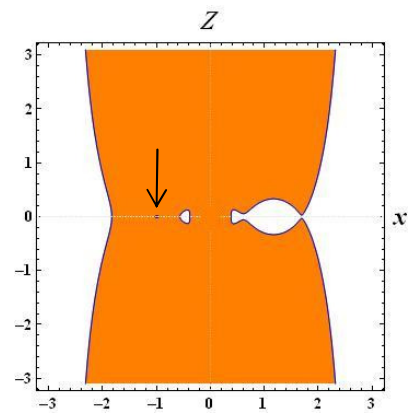


Σχήμα 6.18. Λεπτομέρεια διαγράμματος $e-C_w$ για $\nu=7$ και $\beta=5$, όπου φαίνεται το σημείο τομής των καμπύλων $C_w=C_w(e)$ των ζωνών ισορροπίας B και C_1





(γ)



(δ)

Σχήμα 6.19. Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας της τρισδιάστατης κίνησης για $\nu=7$, $\beta=5$, $e = - 0.1987$ και $C = 7.019$. (α) και (β) πλάγιες όψεις, (γ) και (δ) προβολές των επιφανειών στα επίπεδα xy και xz αντίστοιχα

Στην περίπτωση αυτή, όπου $C_{C1}=C_B$, εμφανίζονται τα πρώτα σημεία επαφής και επικοινωνίας, μεταξύ των εσωτερικών περιοχών που περικλείουν τα περιφερειακά σώματα με την εξωτερική περιοχή, στα bifurcation points της ζώνης C_1 . Ταυτόχρονα δημιουργούνται νέοι διάυλοι επικοινωνίας μεταξύ των περιοχών των περιφερειακών σωμάτων, μέσω των σημείων ισοροπίας της ζώνης B (βλέπε βέλος).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΛΚΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

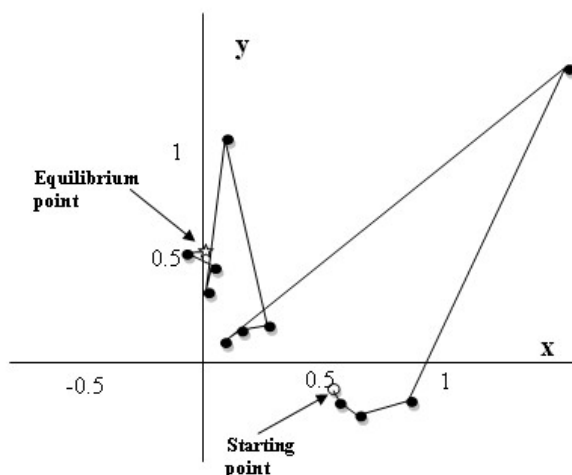
7.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η εύρεση των θέσεων ισορροπίας του μικρού σώματος μέσα στο δυναμικό πεδίο που δημιουργείται από την παρουσία των $N(=n+1)$ μεγάλων σωμάτων, επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας αριθμητικής μεθόδου η οποία για τις επίπεδες θέσεις ισορροπίας επιλύει το αλγεβρικό σύστημα των δύο μη γραμμικών εξισώσεων,

$$U_x = 0$$

$$U_y = 0$$

Η επαναληπτική διαδικασία για την επίτευξη της σύγκλισης προς μία λύση-θέση ισορροπίας του συστήματος παράγει μια ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων η οποία γεωμετρικά μπορεί να περιγραφεί με τις διαδοχικές «μετατοπίσεις-ευθύγραμμες διαδρομές» που ακολουθούνται από την αρχική θέση εκκίνησης (αρχική τιμή (x_0, y_0)) μέχρι τον τελικό «στόχο-προορισμό» που είναι το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας (Kalnouridis, 2009a,b). Το Σχήμα 7.1 δείχνει μια τέτοια ακολουθούμενη διαδρομή.



Σχήμα 7.1. Η τεθλασμένη διαδρομή που ακολουθείται από τις διαδοχικές προσεγγίσεις κατά τη διαδικασία σύγκλισης προς μία θέση ισορροπίας

Ως περιοχή σύγκλισης (region of convergence) ή ελκτική περιοχή (attracting domain) μιας θέσης ισορροπίας ορίζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy τα οποία λαμβανόμενα ως αρχικές προσεγγίσεις, συγκλίνουν σε αυτήν τη θέση-σημείο με τη βοήθεια μιας αριθμητικής μεθόδου (Croustalloudi & Kalvouridis, 2004a, b, 2007a; Kalvouridis & Croustalloudi, 2004, 2008; Goussidou-Koutita & Kalvouridis, 2008, 2009; Kalvouridis, 2009a, 2009b; Douskos, 2010; Kalvouridis & Kalvouridi, 2011; Croustalloudi *et al.*, 2012). Στην περίπτωση του δακτυλιοειδούς προβλήματος των N σωμάτων, όπως έχουμε αναφέρει, οι θέσεις ισορροπίας κατανέμονται σε κυκλικές ζώνες, το σύνολο των σημείων που οδηγούν στα σημεία ισορροπίας μιας συγκεκριμένης ζώνης απαρτίζουν την περιοχή σύγκλισης της ζώνης αυτής. Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης μιας ζώνης προκύπτει από την επαλληλία των περιοχών σύγκλισης όλων των θέσεων ισορροπίας που ανήκουν στη συγκεκριμένη ζώνη ισορροπίας.

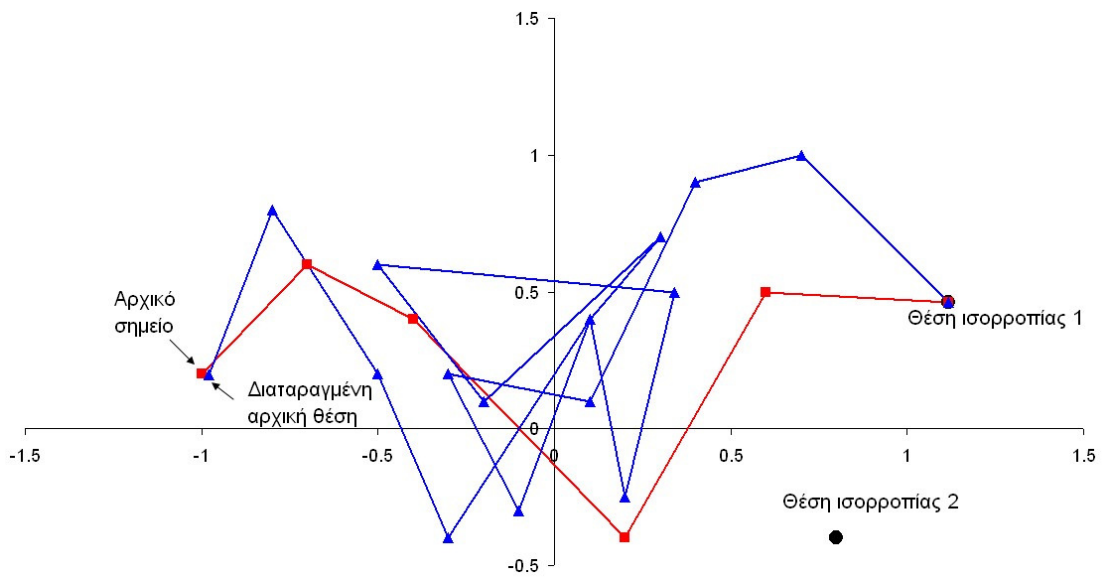
Για την εύρεση των ελκτικών περιοχών, αναζητείται ο καταλληλότερος από τους υπάρχοντες αλγόριθμους. Σε προηγούμενες μελέτες που πραγματοποιήθηκαν στην κατεύθυνση αυτή (Goussidou-Koutita & Kalvouridis, 2008, 2009) πάνω στο περιορισμένο δακτυλιοειδές βαρυτικό πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων, αλλά και άλλων προβλημάτων της Ουράνιας Μηχανικής (Magnetic Binary Problem, Πρόβλημα Κοπεγχάγης, κ.λ.π) εξετάστηκε η αποτελεσματικότητα διαφόρων αριθμητικών μεθόδων, όπως η μέθοδος Newton-Raphson, η μέθοδος Broyden και η τροποποιημένη μέθοδος Broyden. Στην έννοια της αποτελεσματικότητας, μεταξύ των άλλων, συμπεριλαμβάνουμε και συναξιολογούμε την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου και την ευκολία χρήσης (κωδικοποίηση σε γλώσσα προγραμματισμού). Τα αποτελέσματα των μελετών αυτών έδειξαν ότι υπάρχει ποιοτική ομοιότητα όσον αφορά στη μορφή και στον τρόπο της παραμετρικής εξέλιξης των περιοχών σύγκλισης, όμως ο αλγόριθμος Newton-Raphson, αποδείχθηκε ταχύτερος (συγκλίνει τετραγωνικά) και για την περίπτωσή μας παρέχει πιο αξιόπιστα και ακριβή αποτελέσματα. Με βάση τα συμπεράσματα αυτά, επιλέχθηκε για την περίπτωσή μας ο αλγόριθμος αυτός, ο οποίος για την περίπτωση των επίπεδων θέσεων ισορροπίας (δύο ανεξάρτητες μεταβλητές) παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_{n-1} - \frac{U_x U_{yy} - U_y U_{xy}}{U_{yy} U_{xx} - U_{xy}^2} \Big|_{(x_{n-1}, y_{n-1})} \\
 y_n &= y_{n-1} + \frac{U_x U_{yx} - U_y U_{xx}}{U_{yy} U_{xx} - U_{xy}^2} \Big|_{(x_{n-1}, y_{n-1})}
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

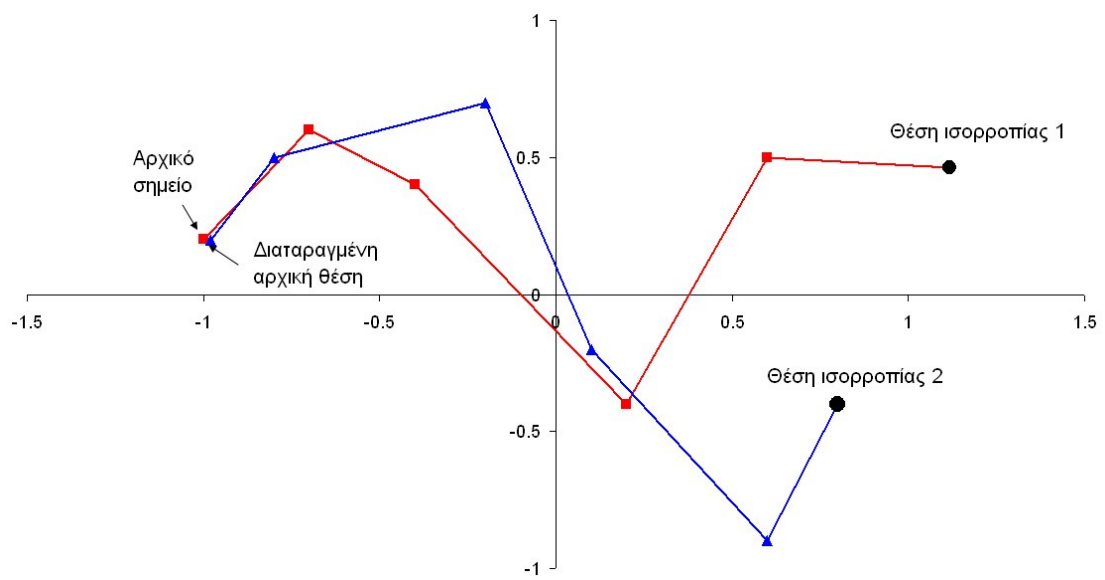
όπου U είναι η δυναμική συνάρτηση του προβλήματος και $U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}$ είναι οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοί της ως προς τις μεταβλητές x και y .

7.2 Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες

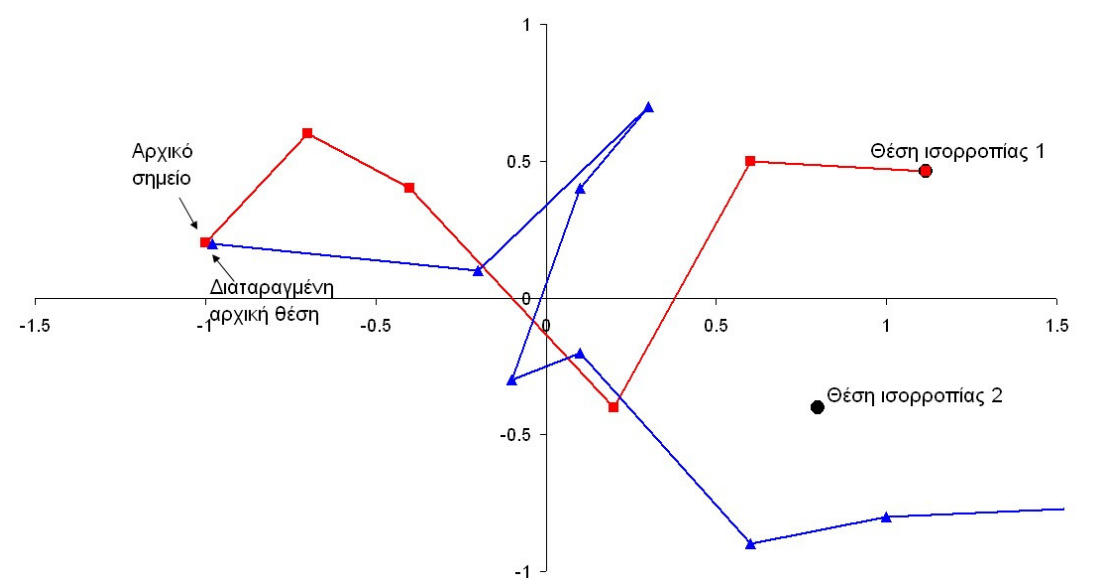
Η μη γραμμικότητα του αλγεβρικού συστήματος (7.1) έχει ως αποτέλεσμα σε αρκετές περιπτώσεις την ύπαρξη μιας εξαιρετικής ευαισθησίας της επαναληπτικής διαδικασίας του αλγορίθμου σε μικρές μεταβολές των αρχικών τιμών. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι για πολύ μικρές αλλαγές των αρχικών τιμών, η διαδικασία προσέγγισης της λύσης-θέσης ισορροπίας ενδέχεται να οδηγήσει σε μη προβλέψιμα αποτελέσματα, όπως λ.χ. στην ίδια θέση ισορροπίας αλλά με σαφώς περισσότερα βήματα-επαναλήψεις (Σχήμα 7.2α), σε διαφορετική θέση ισορροπίας που είτε ανήκει στην ίδια ζώνη, είτε σε διαφορετικές ζώνες (Σχήμα 7.2β), στη μη σύγκλιση (Σχήμα 7.2γ), ή ακόμη στη μη προσέγγιση του στόχου-θέσης ισορροπίας αλλά στην επ' άπειρο παλινδρόμηση της επαναληπτικής διαδικασίας μεταξύ δύο συγκεκριμένων τιμών (Σχήμα 7.2δ). Για όλους αυτούς τους λόγους, όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι περιοχές σύγκλισης των θέσεων ισορροπίας εμφανίζουν περιοχές ντετερμινιστικές και χαοτικές.

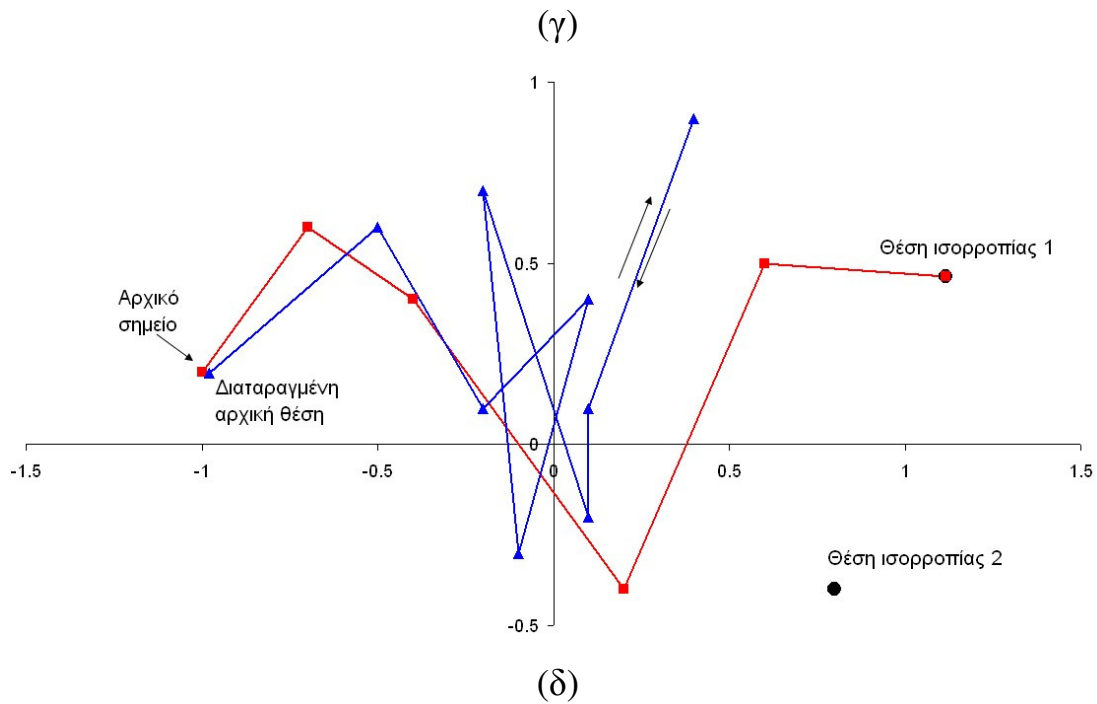


(α)



(β)





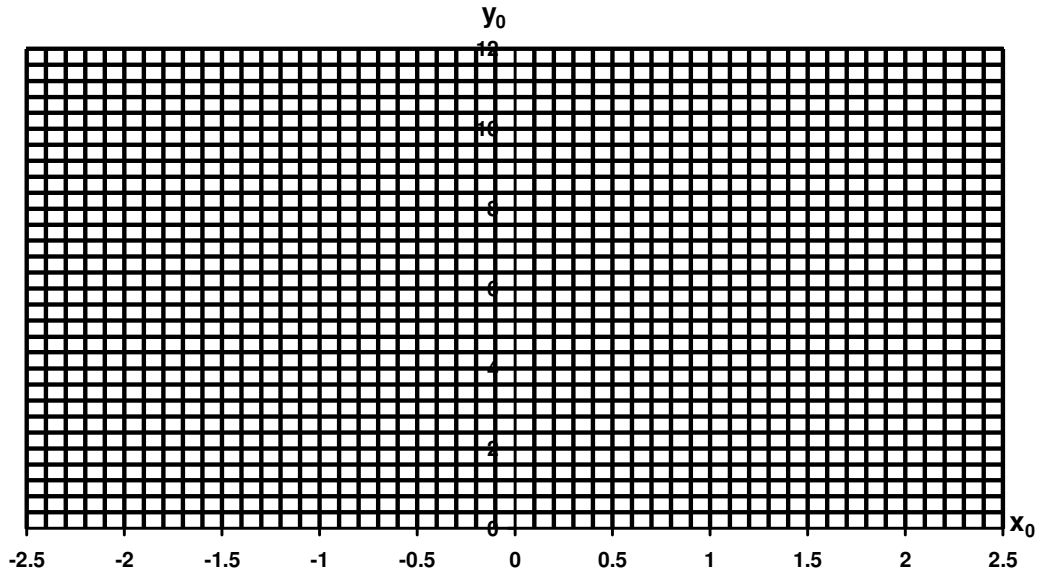
Σχήμα 7.2. (α)-(δ). Διάφορες περιπτώσεις της πορείας των διαδοχικών βημάτων του αλγορίθμου σε μικρές μεταβολές των αρχικών τιμών. Η κόκκινη τεθλασμένη δείχνει την διακριτή πορεία σύγκλισης προς μία θέση ισορροπίας (αδιατάρακτη τροχιά). Η μπλε τεθλασμένη δείχνει την πορεία των διαδοχικών προσεγγίσεων όταν υπάρχει μία μικρή μεταβολή στις αρχικές συνθήκες (διαταραγμένη τροχιά).

7.3 Διαδικασία για τον καθορισμό των ελκτικών περιοχών στο επίπεδο Oxy

Ο καθορισμός των περιοχών σύγκλισης των ζωνών υλοποιείται με την εφαρμογή διπλής σάρωσης (double scanning) του επιπέδου x_0y_0 και συγκεκριμένα της περιοχής αυτού που ορίζεται από τις τιμές :

$$x_0 \in [-2.5, 0) \cup (0, 2.5], \quad y_0 \in (0, 2.5] \quad (7.2)$$

Στο σχήμα 7.3 δείχνεται ο τρόπος διαμέρισης της περιοχής του επιπέδου x_0y_0 για την εφαρμογή της διπλής σάρωσης.



Σχήμα 7.3. Ενδεικτική διαμέριση του επιπέδου x_0y_0 . Κάθε κόμβος του δικτύου αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος αρχικών τιμών (x_0, y_0) για την εφαρμογή του αλγορίθμου

Η δυνατότητα περιορισμού της σάρωσης στο ημιεπίπεδο $y_0 > 0$ οφείλεται στην υπάρχουσα συμμετρία του σχηματισμού των σωμάτων ως προς τον άξονα Ox του συνοδικού συστήματος αναφοράς, καθώς και στην συνεπαγόμενη όμοια συμμετρία ως προς την κατανομή των θέσεων ισορροπίας.

Ως βήματα μεταβολής των τιμών των x_0 και y_0 για τη σάρωση χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0.005$ και ως κριτήρια τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας οι σχέσεις

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &< \varepsilon \\ |y_n - y_{n-1}| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{7.3}$$

όπου (x_n, y_n) , (x_{n-1}, y_{n-1}) , δύο διαδοχικές προσεγγίσεις κατά το n -οστό και $(n-1)$ -οστό επαναληπτικό βήμα (iteration) της αριθμητικής μεθόδου. Η ποσότητα ε εκφράζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Για την περίπτωση μας θεωρήσαμε ότι μία ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-9}$ είναι αρκετά ικανοποιητική. Για πρακτικούς λόγους, επιπλέον των παραπάνω κριτηρίων διακοπής της μεθόδου, εισάγουμε και ένα πρόσθετο κριτήριο που αναφέρεται στο μέγιστο αριθμό βημάτων n_{\max} της επαναληπτικής διαδικασίας,

πέραν του οποίου θεωρούμε ότι δεν υπάρχει σύγκλιση. Τα σημεία-αρχικές συνθήκες που εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή οδηγούνται σε ένα διαφορετικό σύνολο $O(NC)$ (not converging points). Για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής θεωρήσαμε ότι $n_{\max}=500$. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις που εξετάσαμε, το σύνολο αυτό ήταν σχεδόν κενό, γεγονός αυτό καταδεικνύει την πολύ καλή συμπεριφορά της επιλεγείσας μεθόδου Newton-Raphson για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι η ελάττωση του βήματος της σάρωσης έχει ως αποτέλεσμα την τετραγωνική αύξηση του πλήθους των προς επεξεργασία αρχικών συνθηκών, γεγονός που δυσχεραίνει την απεικόνισή τους στα διάφορα γραφήματα, ενώ δεν βελτιώνει σημαντικά την ποιότητά της πληροφορίας που εξάγουμε από αυτά.

Με τον τρόπο αυτό τα σημεία της περιοχής του επιπέδου x_0y_0 που ορίζεται από τις σχέσεις (7.2) και συγκλίνουν σε κάποια θέση ισορροπίας κατανεμήθηκαν σε τόσα σύνολα, όσο είναι το πλήθος των ζωνών ισορροπίας που εμφανίζονται για κάποια τιμή της παραμέτρου β . Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το πλήθος αυτό στο βαρυντικό πρόβλημα, για κάθε τιμή του ν (=πλήθος περιφερειακών σωμάτων), εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου β και ισούται με πέντε αν $0 < \beta \leq l_\nu$ και τρεις για $\beta > l_\nu$. Στον Πίνακα 3.2 του Κεφαλαίου 3, αναφέραμε τις τιμές της οριακής αυτής τιμής για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν .

Όσον αφορά στο μοντέλο που θεωρήσαμε στην παρούσα διατριβή, όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev, το πλήθος των ζωνών, όπως περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 3, εξαρτάται και από την τιμή της παραμέτρου e . Ειδικότερα, όταν η παράμετρος $e > 0$, τότε οι εμφανιζόμενες ζώνες είναι και πάλι πέντε ή τρεις, ανάλογα όμως με το αν το ζεύγος των τιμών (e, β) , βρίσκεται κάτω ή πάνω από την καμπύλη διακλάδωσης του Σχήματος 3.8 (Κεφ. 3^ο). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μια τέτοια καμπύλη υπάρχει για κάθε ν και μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της β καθώς αυξάνει το ν (Πίνακας 3.4, Κεφ. 3^ο). Τα σχηματιζόμενα σύνολα αρχικών συνθηκών που αντιστοιχούν στις ελκτικές περιοχές της περίπτωσης αυτής, θα αναφέρονται επίσης και με το συμβολισμό $R(A_1)$, $R(A_2)$, $R(B)$, $R(C_2)$ και $R(C_1)$.

Όταν $e < 0$ τότε, (βλέπε διάγραμμα του Σχήματος 3.11 του Κεφαλαίου 3) ενδέχεται να εμφανισθούν δύο επιπλέον νέες ζώνες επίπεδων θέσεων, οι E_1 και E_2 που βρίσκονται πολύ κοντά στην περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε δύο επιπλέον ελκτικές περιοχές, που τις συμβολίζουμε με $R(E_1)$ και $R(E_2)$. Όπως θα δούμε στην παράγραφο 7.4.4, και όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων β και e για κάθε n , οδηγεί σε 7 ή 5 ή 3 ζώνες (όχι πάντα οι ίδιες σε μια τριάδα) και φυσικά σε αντίστοιχο πλήθος ελκτικών περιοχών. Βέβαια, εκτός των επίπεδων ζωνών ισορροπίας εμφανίζονται και δύο εκτός επιπέδου σημεία L_{+z} , L_{-z} που κείνται πάνω στον άξονα Oz σε συμμετρικές θέσεις ως προς το επίπεδο xy . Όμως οι ελκτικές περιοχές των σημείων αυτών δεν θα εξετασθούν στην παρούσα διατριβή.

Υστερα από όλα τα παραπάνω μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι οι θέσεις ισορροπίας αποτελούν ένα είδος ελκυστών (ανεξάρτητα από την κατάσταση ευστάθειάς τους) για τη συγκεκριμένη αριθμητική μέθοδο, από όπου και η ονομασία που έχει δοθεί στις περιοχές που περιγράφονται στο Κεφάλαιο αυτό.

7.4 Γενικά περί των ελκτικών περιοχών στο επίπεδο της κίνησης

Η ελκτική περιοχή κάθε ζώνης ισορροπίας παρουσιάζει τα ίδια στοιχεία συμμετρίας με αυτά του σχηματισμού των μεγάλων σωμάτων και του δυναμικού πεδίου που δημιουργούν. Η συμμετρία αυτή εξακολουθεί να υφίσταται και στο μοντέλο της παρούσας διατριβής όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικού τύπου Manev. Όπως έχει διαπιστωθεί, κάθε ελκτική περιοχή αποτελείται από «συμπαγείς» υποπεριοχές και από διάσπαρτα σημεία. Στις «συμπαγείς» περιοχές όλα τα σημεία-μέλη του υποσυνόλου συγκλίνουν σε κάποια από τις θέσεις ισορροπίας της συγκεκριμένης ζώνης. Οι περιοχές αυτές έχουν ασαφή όρια-περιγράμματα και παρουσιάζουν (εκτός από τα ασαφή περιγράμματα) ντετερμινιστική συμπεριφορά, με την έννοια ότι μικρές μεταβολές των αρχικών τιμών που ανήκουν στις περιοχές αυτές, οδηγούν σε θέσεις ισορροπίας της ίδιας ζώνης (ίδια θέση ή άλλη θέση ισορροπίας της ίδιας ζώνης). Θα τις αναφέρουμε χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $S(A_1)$, $S(A_2)$, $S(B)$, $S(C_2)$, $S(C_1)$, $S(E_1)$ και $S(E_2)$. Τα διάσπαρτα (ή μεμονωμένα)

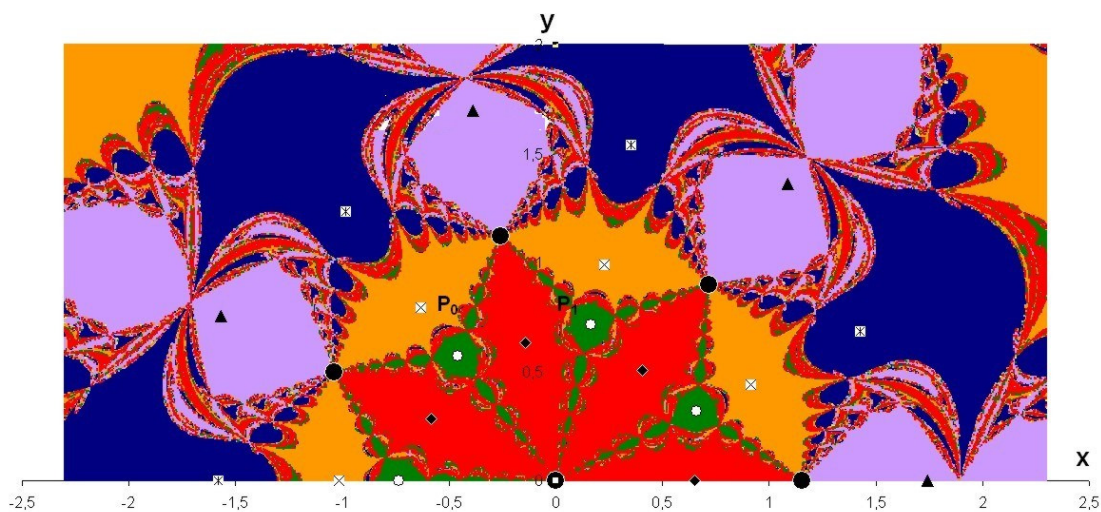
σημεία διαχέονται στα ασαφή όρια των «συμπαγών» περιοχών τόσο της συγκεκριμένης ζώνης όσο και άλλων ζωνών ισορροπίας και σχηματίζουν υποσύνολα τα οποία θα τα αναφέρουμε χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $D(A_1)$, $D(A_2)$, $D(B)$, $D(C_2)$, $D(C_1)$, $D(E_1)$ και $D(E_2)$. Κατά συνέπεια, και σύμφωνα με τους παραπάνω συμβολισμούς των σημειοσυνόλων ή υποσυνόλων, η ελκτική περιοχή κάθε ζώνης ισορροπίας αποτελείται από την ένωση των αντίστοιχων υποσυνόλων D και S , δηλαδή, $R(J)=S(J) \cup D(J)$, $J= A_1, A_2, B, \dots$

Όταν η αρχική προσέγγιση, ή αλλιώς το σημείο εκκίνησης της μεθόδου (initial or launching point), βρίσκεται στην κεντρική περιοχή μιας «συμπαγούς» ή ντετερμινιστικής περιοχής κάποιου σημείου ισορροπίας μιας συγκεκριμένης ζώνης ισορροπίας, τότε η διαδικασία σύγκλισης «τερματίζεται» σε μια θέση ισορροπίας (την ίδια ή άλλη ισοδύναμή της) της ζώνης αυτής με ένα ντετερμινιστικό τρόπο που σημαίνει ότι μικρές μεταβολές της αρχικής προσέγγισης δεν θα επηρεάσουν το τελικό αποτέλεσμα. Όμως, αν βρίσκεται στα ασαφή όρια της συμπαγούς περιοχής μιας ζώνης ισορροπίας, ή στα ασαφή όρια των συμπαγών περιοχών μιας άλλης ζώνης ισορροπίας, τότε διαπιστώνουμε ότι οι αρχικές προσεγγίσεις είναι εξαιρετικά ευαίσθητες σε μικρές μεταβολές έτσι ώστε η πρόβλεψη για τον τελικό στόχο-σημείο ισορροπίας να είναι εξαιρετικά αβέβαιη (χαοτικές περιοχές). Η αβεβαιότητα αυτή σύμφωνα με τους Peitgen *et al.*, (1992) οφείλεται στην συνύπαρξη πολλών ελκυστών, η ταυτόχρονη δράση των οποίων δημιουργεί πολύπλοκες δομές μορφοκλασματικού τύπου. Γενικότερα, παρατηρούνται αυτοόμοιοι σχηματισμοί οι οποίοι δεν μπορούν να περιγραφούν με μαθηματικές εκφράσεις στις οποίες εμπεριέχονται και οι παράμετροι του προβλήματος. Ως εκ τούτου η μελέτη της παραμετρικής συμπεριφοράς τους βασίζεται στην αριθμητική επεξεργασία περιπτώσεων που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές των παραμέτρων και σε μία ποιοτική εκτίμηση των αποτελεσμάτων. Παρόλ' αυτά, έστω και με τον τρόπο αυτό προσέγγισης, μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα γενικά συμπεράσματα που αφορούν σε κάποιες πτυχές της δυναμικής συμπεριφοράς του υπό μελέτη συστήματος.

7.5 Ελκτικές περιοχές για Νευτώνεια δυναμικά

7.5.1 Μορφολογία και δομή των ελκτικών περιοχών

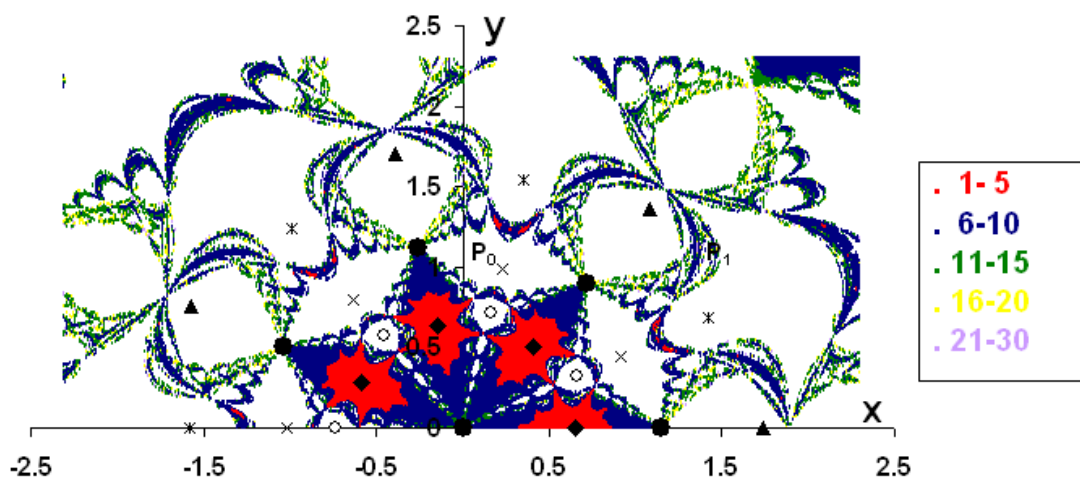
Στο Σχήμα 7.4 παρουσιάζουμε τις ελκτικές περιοχές για Νευτώνεια δυναμικά σε ένα κανονικό πολυγωνικό σχηματισμό με $n=7$ και τιμή παραμέτρου $\beta=2$. Με τις τιμές αυτές όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.2 (Κεφ. 3^ο), υπάρχουν πέντε θέσεις ισορροπίας, A_1, A_2, B, C_2, C_1 . Οι ελκτικές περιοχές των πέντε ζωνών αποδίδονται με διαφορετικό χρώμα. Συγκεκριμένα, με κόκκινο αποδίδεται η περιοχή του επιπέδου xy που κατέχει η ελκτική περιοχή της ζώνης A_1 , με πράσινο η ελκτική περιοχή της ζώνης A_2 , με πορτοκαλί η ζώνη B , με μπλε σκούρα η ζώνη C_2 και με βιολετί η C_1 .



Σχήμα 7.4. Κατανομή των ελκτικών περιοχών των πέντε ζωνών ισορροπίας για $n=7$ και $\beta=2$. (κόκκινη η περιοχή της ζώνης A_1 , πράσινη η περιοχή της A_2 , πορτοκαλί η περιοχή της B , μπλε σκούρα η περιοχή της C_2 , και βιολετί η περιοχή της C_1)

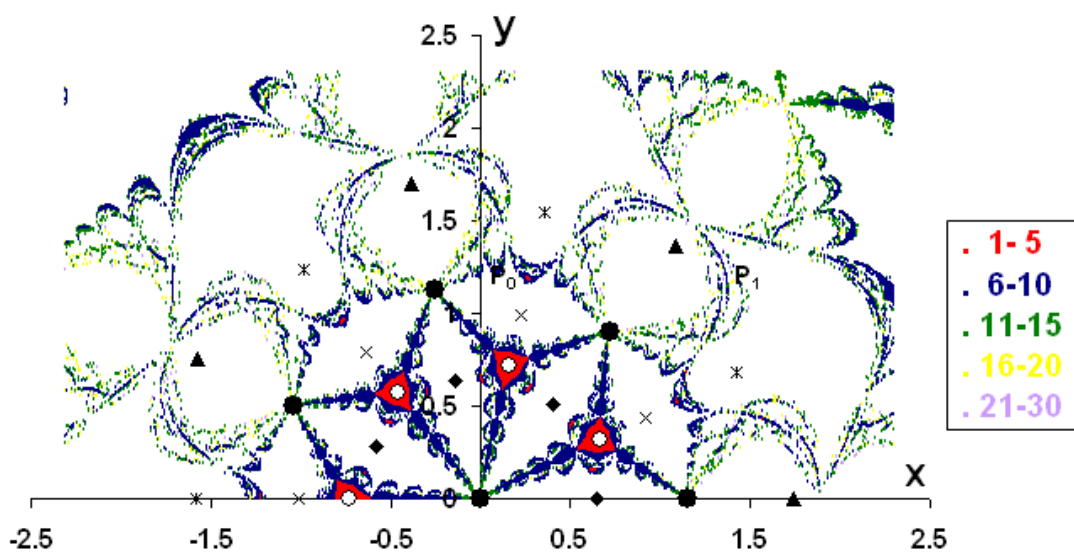
Στα Σχήματα 7.5α–7.5ε και σε κάθε ζώνη αποδίδονται με διαφορετικό χρώμα οι περιοχές που αντιστοιχούν στις κλάσεις των βημάτων που απαιτούνται για την σύγκλιση και στις οποίες θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο 7.5.2.

A1 ($\nu=7, \beta=2$)



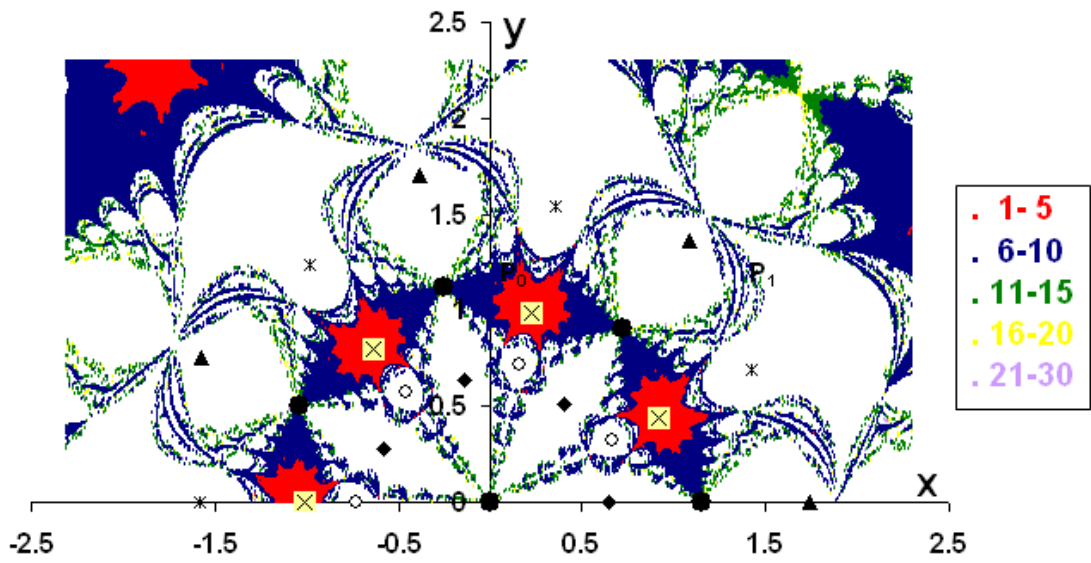
(α)

A2 ($\nu=7, \beta=2$)



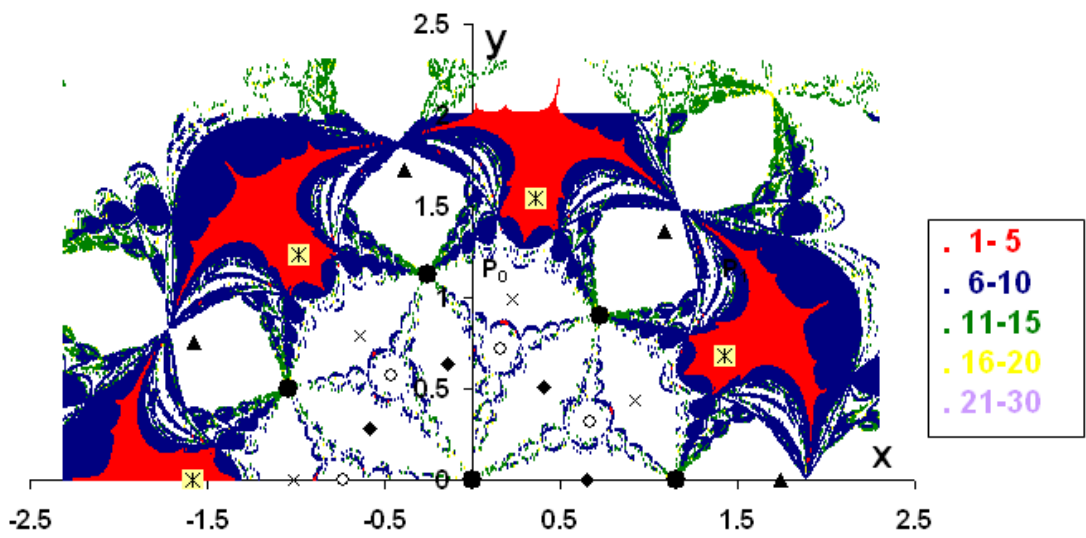
(β)

B ($\nu=7, \beta=2$)

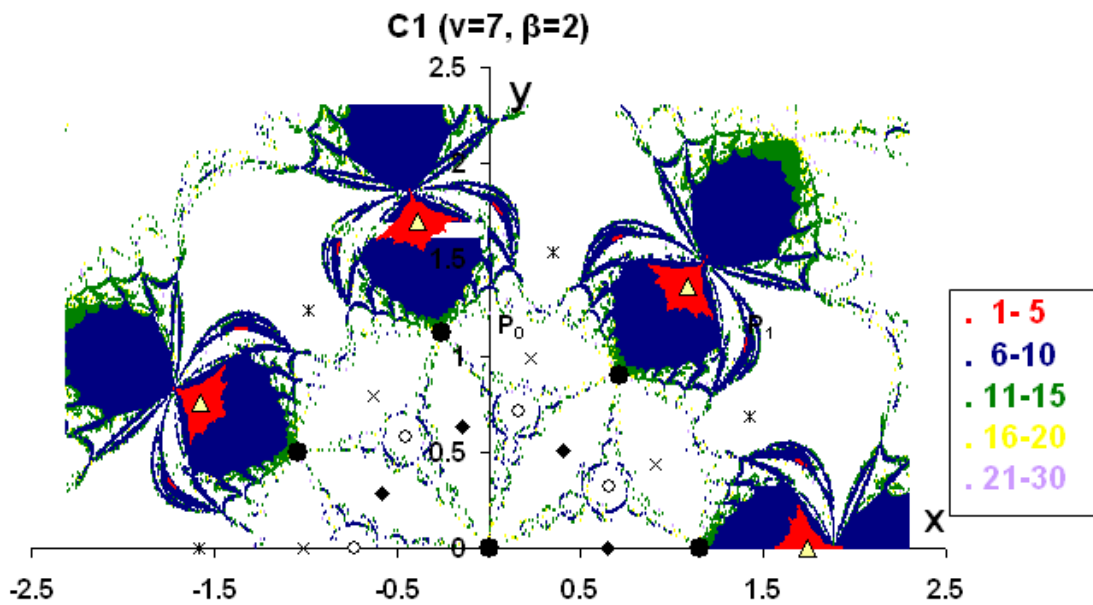


(γ)

C2 ($\nu=7, \beta=2$)



(δ)



(ε)

Σχήμα 7.5. Ελκτικές περιοχές και κλάσεις βημάτων για $v=7$, $\beta=2$. Με τις μεγάλες μαύρες κουκίδες σημειώνουμε τις θέσεις των primaries.

Οι θέσεις ισορροπίας σημειώνονται με τα σύμβολα:

◆ A1 ○ A2 × B * C2 ▲ C1.

(α) Ελκτική περιοχή της ζώνης A_1 , (β) ζώνης A_2 , (γ) ζώνης B, (δ) ζώνης C_2 και (ε) ζώνης C_1

Παρατηρώντας τις μορφές των ελκτικών περιοχών των διαφόρων ζωνών από τα Σχήματα 7.4 και 7.5 μπορούμε να σημειώσουμε τα εξής:

(α). Η ελκτική περιοχή της ζώνης A_1 αποτελείται από ρομβοειδή «συμπαγή» τμήματα με ασαφή, κυματοειδούς μορφής, πλευρικά όρια (Σχήμα 7.4). Τα τμήματα αυτά αναπτύσσονται μεταξύ του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος και καθενός από τα περιφερειακά σώματα. Στο εσωτερικό των τμημάτων αυτών εντοπίζονται οι θέσεις ισορροπίας της ζώνης αυτής (Σχήμα 7.5α). Παρατηρήθηκε (Croustalloudi & Kalnouridis, 2004a, 2007a; Κρουσταλλούδη, 2006) ότι όταν αυξάνει η παράμετρος β , οι περιοχές αυτές επεκτείνονται με τρόπο ώστε η ακτινική τους διάσταση να παραμένει σχεδόν ίδια, ενώ η εγκάρσια να αυξάνει. Η διαστολή αυτής της περιοχής έχει ως συνέπεια αφενός μεν να πλησιάζουν οι περιοχές αυτές μεταξύ τους αφετέρου δε να καταλαμβάνουν όλο και περισσότερο χώρο στο εσωτερικό του

φανταστικού κύκλου των primaries. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το β το πλήθος των σημείων του συνόλου $R(A_1)$ αυξάνει. Σημειώνουμε επίσης ότι όταν $\beta \geq l_v$, οπότε η ζώνη B παύει να υπάρχει, τα σημεία της ζώνης αυτής μετατρέπονται σε διάχυτα σημεία της ζώνης A_1 .

(β). Οι «συμπαγείς» περιοχές της ζώνης B αναπτύσσονται μεταξύ των άμεσα γειτονικών περιφερειακών σωμάτων των οποίων οι θέσεις κείνται πάνω στα όρια επαφής των περιοχών αυτών. Η μορφή τους μοιάζει με αυτή των συμπαγών περιοχών της ζώνης A_1 , όμως τα όριά τους είναι πιο σαφή (Σχήμα 7.5γ). Καθώς η παράμετρος β αυξάνει (παραμένοντας όμως στο διάστημα $0 < \beta < l_v$), η ακτινική τους διάσταση συμπίεζεται, ενώ η εγκάρσια παραμένει σχεδόν σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι οι συμπαγείς περιοχές της ζώνης αυτής συρρικνώνεται μέχρις ότου $\beta = l_v$, οπότε η ελκτική περιοχή της ζώνης αυτής παύει να υπάρχει.

(γ). Οι ελκτικές περιοχές της ζώνης A_2 αναπτύσσονται μεταξύ των «συμπαγών» περιοχών των ζωνών A_1 και B, και δημιουργούν τρεις διακλαδώσεις. Η μία από αυτές εξελίσσεται κατά μήκος της διεύθυνσης που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και από μία θέση ισορροπίας της ζώνης αυτής. Οι άλλες δύο αναπτύσσονται στις διευθύνσεις που ορίζονται από μία θέση ισορροπίας της ζώνης αυτής και από τα εκατέρωθεν αυτής περιφερειακά σώματα (Σχήμα 7.5β). Σε κάθε ένα από τους σχηματισμούς αυτούς παρατηρείται μία βασική «συμπαγής» περιοχή γύρω από την αντίστοιχη θέση ισορροπίας η οποία είναι περισσότερο εκτεταμένη από τις υπόλοιπες «συμπαγείς» περιοχές του σχηματισμού. Η ανάπτυξη των άλλων δύο «συμπαγών» περιοχών χαρακτηρίζεται από αυτοομοιότητα όπου οι διαστάσεις των αυτοόμοιων περιοχών ελαττώνονται καθώς πλησιάζουν το κεντρικό ή ένα περιφερειακό σώμα. Όλες αυτές οι «συμπαγείς» περιοχές περιβάλλονται από διάσπαρτα σημεία. Σε αντίθεση με την περίπτωση της ζώνης A_1 , όταν η παράμετρος β αυξάνει αλλά παραμένοντας στην περιοχή τιμών $0 < \beta < l_v$, οι ελκτικές περιοχές της A_2 ελαττώνονται σημαντικά.

Τονίζουμε και πάλι ότι στις ελκτικές περιοχές των ζωνών A_2 και B, οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται στο εσωτερικό των μεγαλύτερων «συμπαγών» περιοχών,

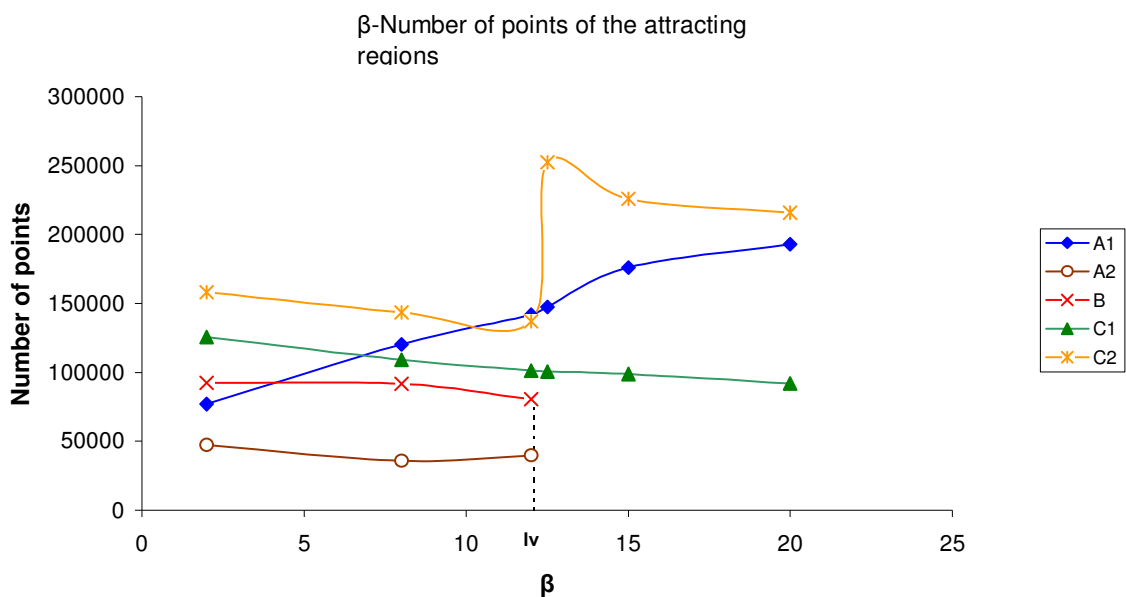
ενώ όταν η τιμή της παραμέτρου β πλησιάζει την οριακή τιμή $\beta \approx l_v$, οι θέσεις αυτές έχουν σχεδόν τις ίδιες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς, την ίδια σχεδόν απόσταση (ακτίνα ζώνης) από το κέντρο, αλλά και τις ίδιες σχεδόν συντεταγμένες και τείνουν να συμπέσουν με τα όρια των δύο υπό εξαφάνιση ζωνών. Για τιμές $\beta \geq l_v$, τα σημεία του επιπέδου που πριν (για $0 < \beta < l_v$) οδηγούσαν σε μία από τις ζώνες A_2 ή B , τώρα οδηγούν σε θέσεις των ζωνών A_1 , C_2 ή C_1 που εξακολουθούν να υπάρχουν, εμπλουτίζοντας τις ελκτικές περιοχές τους με νέα μέλη.

(δ). Η ελκτική περιοχή της ζώνης C_1 εμφανίζει συνθετότερη δομή και η ακριβής περιγραφή της είναι δυσχερέστερη. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι στην περιοχή κάθε σημείου ισορροπίας δημιουργούνται δύο «συμπαγείς» περιοχές. Η μεγαλύτερη από αυτές εμπεριέχει το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας (Σχήμα 7.5ε). Όσον αφορά στα διάσπαρτα σημεία, αυτά αφενός μεν οργανώνονται κατά τρόπο πυκνό ώστε να σχηματίζουν μηνίσκους που περιβάλλουν τις δύο «συμπαγείς» περιοχές, αφετέρου δε, διαχέονται στα όρια των «συμπαγών» περιοχών άλλων ζωνών ισορροπίας. Αύξηση του β συνεπάγεται μικρή αύξηση των διάσπαρτων σημείων. Αντίθετα οι «συμπαγείς» περιοχές της C_1 συστέλλονται ελαφρά καθώς αυξάνει η παράμετρος β . Ως τελικό αποτέλεσμα, η ελκτική περιοχή της ζώνης C_1 υφίσταται μία συρρίκνωση.

(ε). Οι «συμπαγείς» περιοχές της ζώνης C_2 εξελίσσονται μεταξύ των «συμπαγών» περιοχών των ζωνών C_1 και B και παρουσιάζουν μορφή μανιταριού. Οι θέσεις ισορροπίας της ζώνης εντοπίζονται στα κεντρικά τμήματα των «συμπαγών» περιοχών (Σχήμα 7.5δ). Τα διάσπαρτα σημεία περιβάλλουν πυκνά τις περιοχές αυτές. Καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β ($0 < \beta < l_v$), οι «συμπαγείς» περιοχές συστέλλονται ελαφρά, ενώ τα διάσπαρτα σημεία πυκνώνουν περισσότερο. Ομως, ως τελικό αποτέλεσμα, η ελκτική περιοχή της ζώνης αυτής συρρικνώνεται. Όταν $\beta = l_v$ παρατηρείται μία απότομη αύξηση των σημείων του συνόλου της C_2 που οφείλεται στην εξαφάνιση των ζωνών A_2 και B και την συνεπαγόμενη μετατόπιση των σημείων των ζωνών αυτών προς τις υπόλοιπες τρεις εναπομείνουσες ζώνες.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της εξέλιξης των ελκτικών περιοχών είναι ότι οι ελκτικές περιοχές των ζωνών A_1 και C_2 είναι οι πιο εκτεταμένες (τα σημειοσύνολα είναι τα μεγαλύτερα), από όλες τις ζώνες για όλες τις τιμές της παραμέτρου β . Η αντίστοιχη περιοχή της ζώνης A_2 , εφόσον η ζώνη αυτή υπάρχει (για $0 < \beta < l_v$), είναι η λιγότερη εκτεταμένη με το μικρότερο σημειοσύνολο.

Το Σχήμα 7.6 δείχνει τη μεταβολή των σημείων των ελκτικών περιοχών με την παράμετρο β για $n=10$.



Σχήμα 7.6. Μεταβολή του πλήθους των σημείων των ελκτικών περιοχών των ζωνών με την παράμετρο β στη βαρυτική περίπτωση. Στο σημείο της διακλάδωσης $\beta=l_v$, παρατηρείται μηδενισμός των σημειοσυνόλων των υπό εξαφάνιση ζωνών A_2 και B και απότομη αύξηση του σημειοσυνόλου της C_2 (Croustalloudi & Kalvouridis, 2007a)

7.5.2 Ταχύτητα σύγκλισης-Περιοχές βραδείας ή ταχείας σύγκλισης

Παράλληλα με τον καθορισμό των σημείων που συγκροτούν τις ελκτικές περιοχές, καταγράφηκε για κάθε σημείο ο αριθμός των βημάτων-επαναλήψεων που απαιτήθηκε για την επίτευξη της σύγκλισης σε μια θέση ισορροπίας με την προκαθορισμένη ακρίβεια. Με τον τρόπο αυτό δημιουργήθηκαν υποσύνολα των σημείων (x_0, y_0) του επιπέδου θεωρώντας τις κλάσεις βημάτων: 1-5, 6-10, 11-15, 16-20, 21-30 και >30 . Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι ο αριθμός των

απαιτούμενων για τη σύγκλιση βημάτων εξαρτάται όπως είναι φυσικό όχι μόνο από την προκαθορισμένη ακρίβεια με την οποία προσδιορίζεται η θέση ισορροπίας, (αφού όσο μεγαλύτερη είναι η επιδιωκόμενη ακρίβεια τόσο μεγαλύτερο θα είναι το πλήθος των βημάτων) αλλά και από την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιείται (υπάρχουν μέθοδοι οι οποίες συγκλίνουν τετραγωνικά όπως η Newton-Raphson που χρησιμοποιήσαμε, αλλά και μέθοδοι που συγκλίνουν γραμμικά όπως η απλή επαναληπτική μέθοδος ή ημιγραμμικά όπως η μέθοδος Broyden και η τροποποιημένη μέθοδος Broyden), ενώ το πλήθος των σημείων που απαρτίζουν την ελκτική περιοχή ή περιοχή σύγκλισης της κάθε ζώνης εξαρτάται επίσης από το μέγεθος του βήματος σάρωσης του προκαθορισμένου διαστήματος τιμών των x_0 και y_0 (όσο μικρότερο είναι το βήμα σάρωσης τόσο περισσότερα σημεία θα απαρτίζουν το γενικό σύνολο). Η ταχύτητα σύγκλισης συνδέεται με την οικονομία σε υπολογιστικό χρόνο, εκτιμάται δε, όπως είπαμε, με βάση το πλήθος των βημάτων που απαιτούνται από τον αλγόριθμο ώστε να συγκλίνει σε μια θέση ισορροπίας με την προκαθορισμένη ακρίβεια. Έτσι, η πρώτη κλάση χαρακτηρίζεται από ταχύτερη σύγκλιση, η δεύτερη από ταχεία σύγκλιση, οι δύο επόμενες από μέτρια σύγκλιση, η προτελευταία από αργή σύγκλιση και η τελευταία από πολύ αργή σύγκλιση. Οι γενικές παρατηρήσεις που αφορούν στην ταχύτητα σύγκλισης για τις διάφορες ζώνες ισορροπίας της βαρυτικής περίπτωσης (Croustalloudi & Kalvouridis 2004a, 2007a; Κρουσταλλούδη, 2006) μπορούν να συνοψισθούν στα επόμενα:

- Το υποσύνολο της κλάσης 1-5 βήματα συγκροτείται κυρίως από σημεία που βρίσκονται στο κεντρικό τμήμα (πυρήνα) των «συμπαγών» περιοχών (κόκκινες περιοχές των Σχημάτων 7.5α – 7.5ε).
- Τα σημεία που συγκροτούν την κλάση 6-10 βήματα, βρίσκονται είτε στα υπόλοιπα τμήματα των «συμπαγών» περιοχών, είτε μεταξύ των διάσπαρτων σημείων της ελκτικής περιοχής της ζώνης (μπλε περιοχές των Σχημάτων 7.5α – 7.5ε).
- Το ίδιο συμβαίνει και με τις υπόλοιπες κλάσεις 11-15 (πράσινες περιοχές), 16-20 (κίτρινες περιοχές), >20 (μωβ περιοχές), οι οποίες εμφανίζονται με

λιγότερα μέλη-σημεία από τις προηγούμενες κλάσεις τα οποία είτε κείνται στα όρια των «συμπαγών» περιοχών, είτε μεταξύ των διάσπαρτων σημείων.

7.6 Παραμετρική μεταβολή των ελκτικών περιοχών

Η δομή και η μορφή των ελκτικών περιοχών εξαρτάται όπως είναι φυσικό από τις παραμέτρους του προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε, η επίδραση των παραμέτρων ν και β έχει ήδη μελετηθεί σε διάφορους σχηματισμούς και συγκεκριμένα για $\nu = 3, 8, 10$ κ.λ.π και διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β (Croustalloudi & Kalvouridis, 2004a; Κρουσταλλούδη, 2006; Kalvouridis & Kalvouridi, 2011), ενώ ταυτόχρονα παρουσιάστηκαν τα σημαντικότερα συμπεράσματα από τις μελέτες αυτές, που αφορούσαν στη μεταβολή τόσο των ελκτικών περιοχών ως αμιγή σύνολα, όσο και των υποπεριοχών τους με τις κλάσεις βημάτων που ορίστηκαν. Όλες οι παραπάνω εργασίες αφορούσαν σε Νευτώνεια δυναμικά. Στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε, υπεισέρχεται στη συνάρτηση του δυναμικού μία ακόμη παράμετρος, η παράμετρος ϵ , η οποία όταν είναι θετική, διαφοροποιεί μεν τις διαμορφούμενες ελκτικές περιοχές όχι όμως στη μορφή της ελκτικής περιοχής που χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένη ζώνη για τη βαρυτική περίπτωση, αλλά στην καταλαμβανόμενη από αυτήν έκταση στο επίπεδο x_0y_0 . Μεγαλύτερες διαφοροποιήσεις παρατηρούνται στην περίπτωση που η παράμετρος ϵ παίρνει αρνητικές τιμές (Croustalloudi *et al.*, 2012). Τότε, η μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων γίνεται πιο σύνθετη, αφού, σύμφωνα με το διάγραμμα διακλαδώσεων 3.11β του Κεφαλαίου 3, οι συνδυασμοί των τιμών των δύο παραμέτρων ϵ και β μπορεί να οδηγήσουν σε 7, 5 ή 3 ζώνες (και μάλιστα στην τελευταία περίπτωση οι εμφανιζόμενες ζώνες μπορεί να συγκροτούνται από διαφορετικές τριάδες ζωνών, λ.χ. A_1, C_2, C_1 ή B, C_2, C_1). Για τους λόγους αυτούς στις επόμενες παραγράφους θα αναφερθούμε συνοπτικά μεν στην περίπτωση $\epsilon > 0$, πιο αναλυτικά δε στην περίπτωση $\epsilon < 0$.

7.7 Περίπτωση με $e > 0$

Οι ελκτικές περιοχές στην περίπτωση αυτή παρουσιάζουν τα ίδια ποιοτικά και μορφολογικά χαρακτηριστικά με αυτά της βαρυτικής, κάτι που αναμενόταν αφού το ίδιο συμβαίνει και με την κατανομή των θέσεων ισορροπίας, το πλήθος των ζωνών ισορροπίας και την ευστάθειά τους. Βέβαια η ακριβής μορφή και εξέλιξη επηρεάζεται από την παρουσία των δύο παραμέτρων β και e , με σημαντικότερη την μεταβολή του πλήθους των ζωνών ισορροπίας από πέντε σε τρεις (Κεφ. 3^ο, §3.5.2), η οποία για κάθε n συμβαίνει για ένα συγκεκριμένο ζεύγος τιμών των β και e (Κεφ. 3^ο, Πίνακας 3.4).

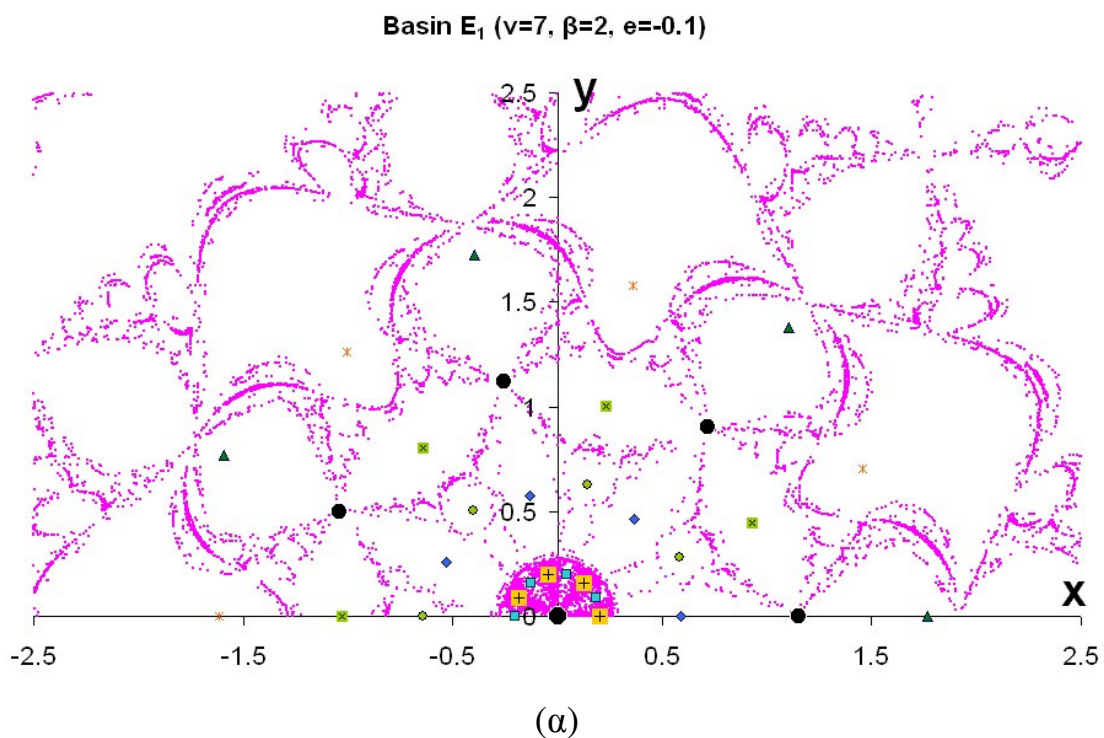
7.8 Περίπτωση με $e < 0$

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στην περίπτωση αυτή μπορεί να εμφανισθούν τρεις, πέντε ή επτά ζώνες ισορροπίας, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων e και β . Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις ελκτικές περιοχές σε δύο περιπτώσεις η μία από τις οποίες αφορά στις τιμές των e , β που εμπίπτουν στην περιοχή I του διαγράμματος διακλαδώσεων 3.11β του Κεφαλαίου 3 και η δεύτερη στις τιμές των e , β που εμπίπτουν στην περιοχή V του ίδιου διαγράμματος.

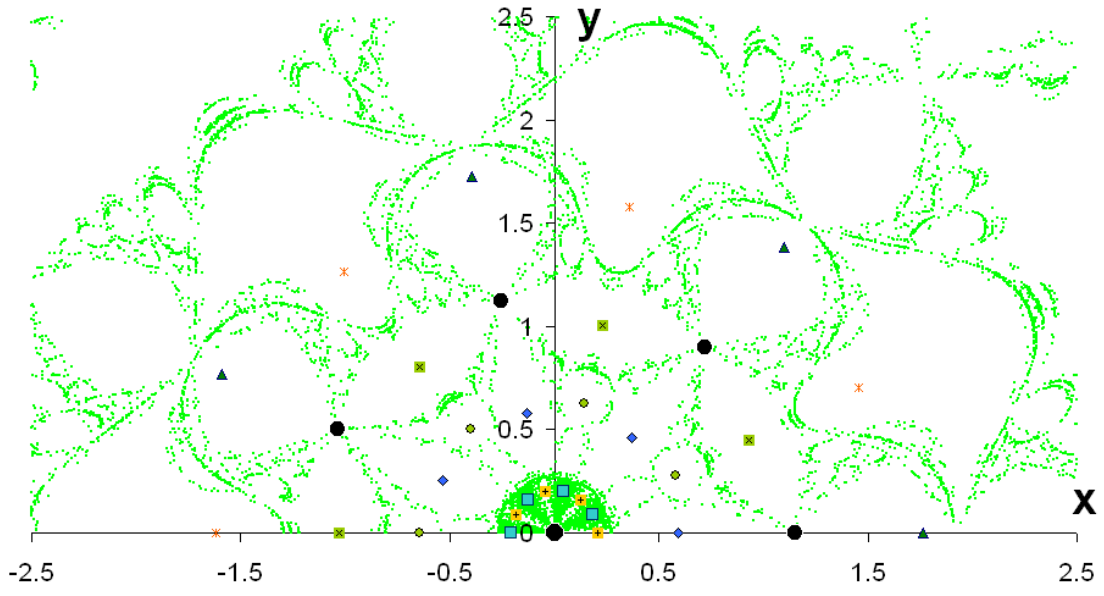
7.8.1 Ελκτικές περιοχές για τιμές των παραμέτρων e και β που εμπίπτουν στην περιοχή I του διαγράμματος διακλαδώσεων

Ως εφαρμογή θα χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους $n=7$, $\beta=2$ και $e=-0.1$. Για τις τιμές αυτές όπως προκύπτει από το διάγραμμα διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11β (Κεφ. 3^ο), θα υπάρχουν στο επίπεδο x_0y_0 επτά ζώνες ισορροπίας E_1 , E_2 , A_1 , A_2 , B , C_2 , C_1 . Όπως έχουμε περιγράψει στο 3^ο Κεφάλαιο, επιπλέον αυτών των ζωνών και για όλες τις αρνητικές τιμές της e , εμφανίζονται και δύο ακόμη θέσεις ισορροπίας πάνω στον άξονα Oz σε συμμετρικές θέσεις ως προς το επίπεδο x_0y_0 . Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε μόνο με τις ζώνες ισορροπίας που εμφανίζονται στο επίπεδο x_0y_0 . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε στο βαρυτικό πρόβλημα και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Newton-Raphson με βήματα σάρωσης $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0.005$ στα διαστήματα τιμών $x_0 \in [-2.5, +2.5]$,

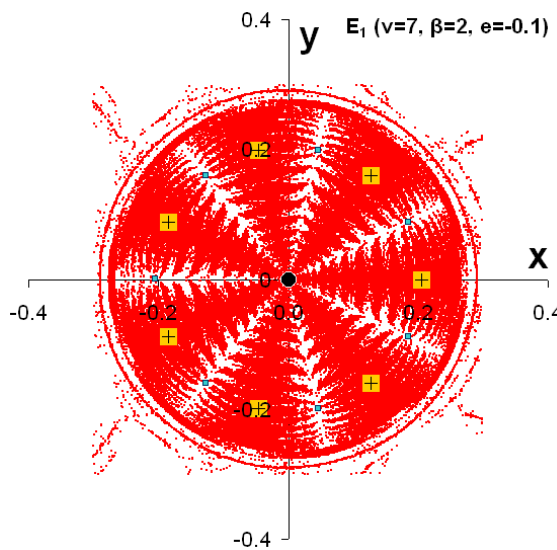
$y_0 \in [0, +2.5]$ με την ίδια ακρίβεια σύγκλισης $\varepsilon=10^{-9}$, πήραμε τα διαγράμματα ελκτικών περιοχών του Σχήματος 7.7 (Croustalloudi *et al.*, 2012). Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η παρουσία του δυναμικού τύπου Manev στο κεντρικό πρωτεύον δεν αλλοιώνει τα χαρακτηριστικά συμμετρίας του σχηματισμού ως προς τον άξονα Ox που υπήρχαν στην καθαρά Νευτώνεια περίπτωση και αφορούσαν στην κατανομή των θέσεων ισορροπίας και των ελκτικών περιοχών των ζωνών ισορροπίας, ενώ παράλληλα διατηρεί σε γενικές γραμμές τα κύρια χαρακτηριστικά των γνωστών από την βαρυτική περίπτωση ελκτικών περιοχών των πέντε ζωνών ισορροπίας A_1, A_2, B, C_2 και C_1 .



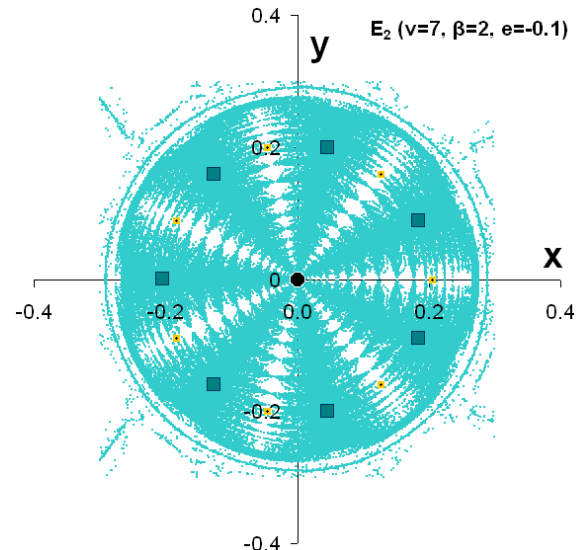
Basin E_2 ($\nu=7, \beta=2, e=-0.1$)



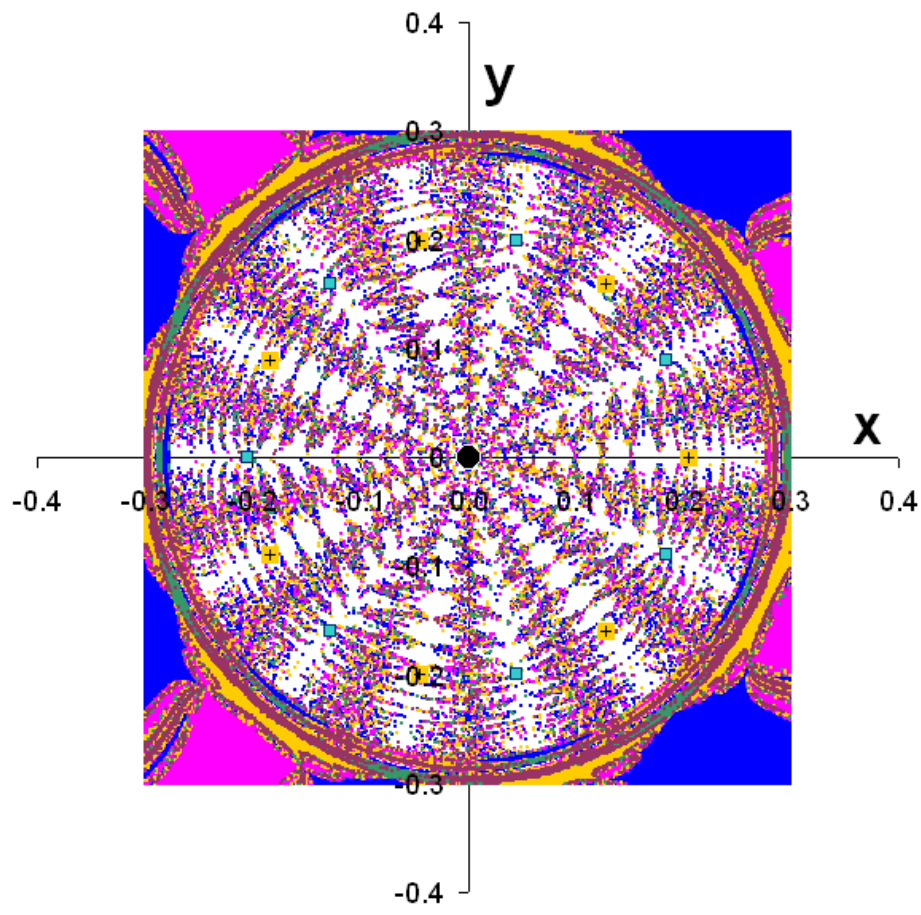
(β)



(γ)

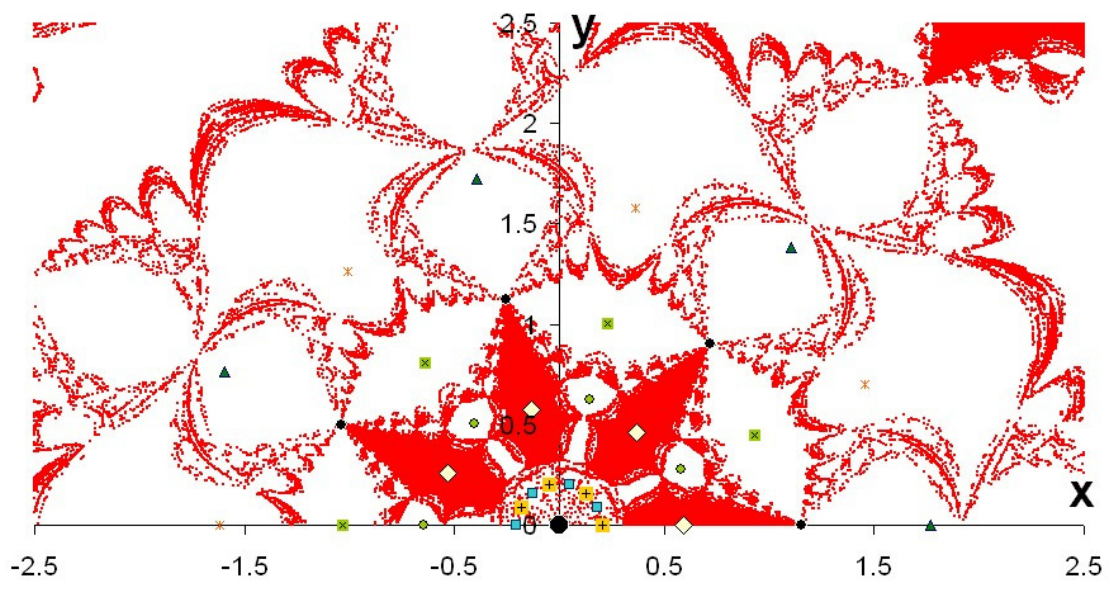


(δ)



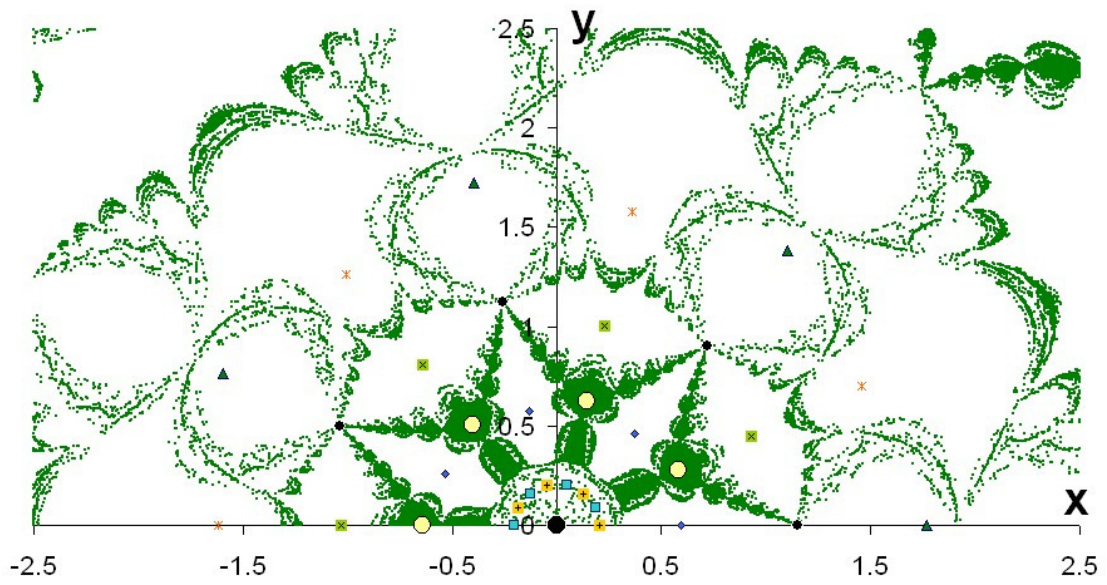
(ε)

BASIN A_1 ($\nu=7, \beta=2.0, e=-0.1$)



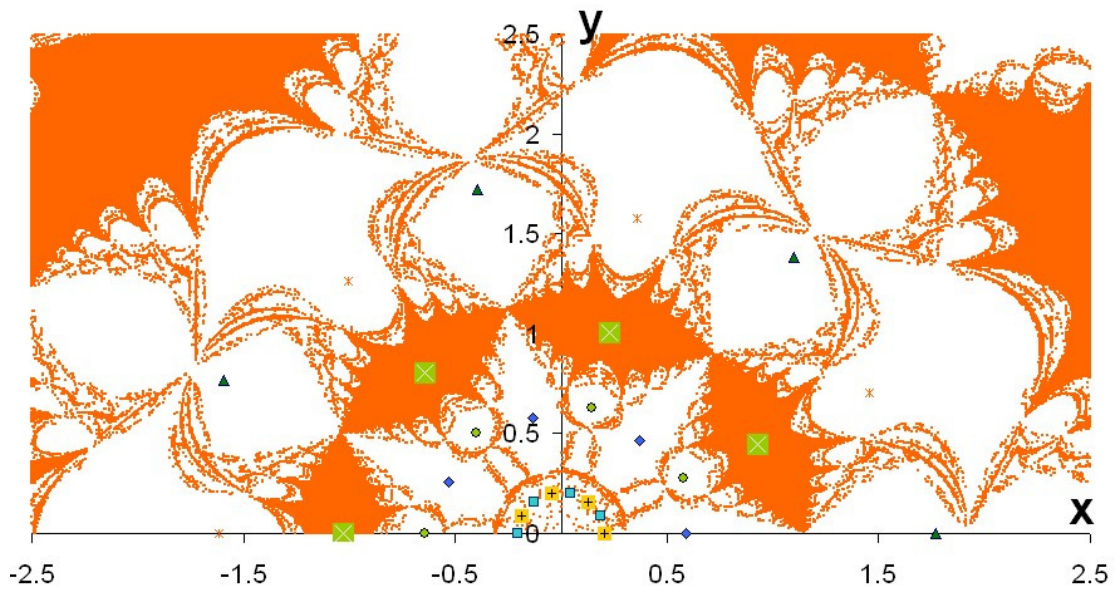
($\sigma\tau$)

BASIN A₂ ($\nu=7, \beta=2.0, e=-0.1$)

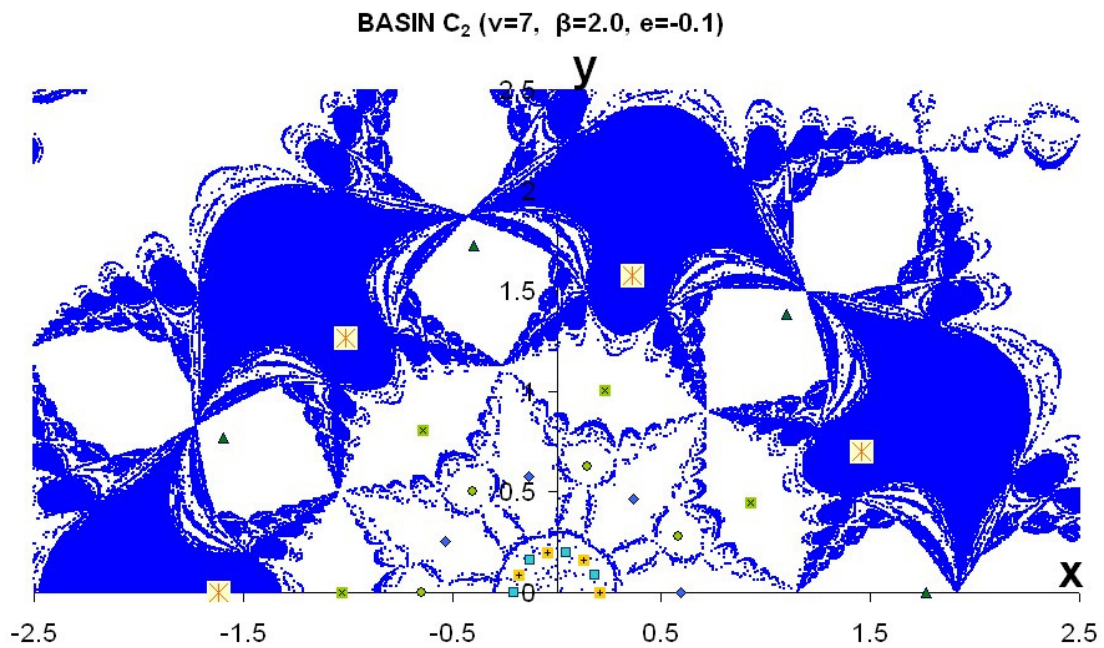


(ζ)

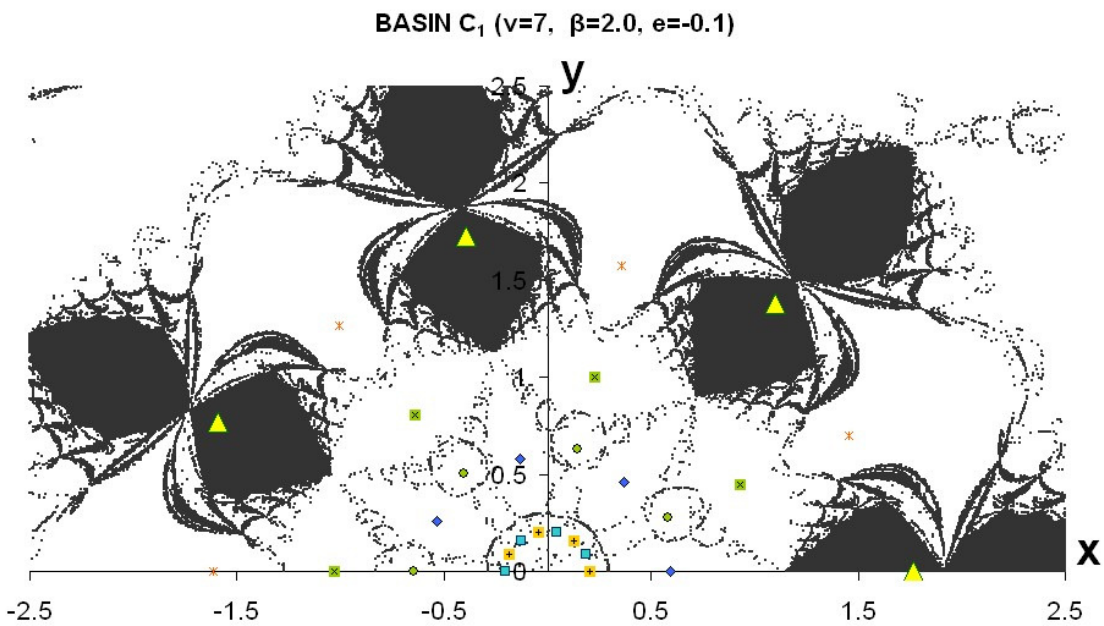
BASIN B ($\nu=7, \beta=2.0, e=-0.1$)



(η)



(θ)



(ι)

Σχήμα 7.7. Ελκτικές περιοχές των ζωνών ισορροπίας για $\nu=7, \beta=2, e=-0.1$.
 (α) ζώνης E_1 , (β) ζώνης E_2 , (γ) λεπτομέρεια του κεντρικού τμήματος της ζώνης E_1 ,
 (δ) λεπτομέρεια του κεντρικού τμήματος της ζώνης E_2 , (ε) λεπτομέρεια του
 κεντρικού κυκλικού τμήματος γύρω από το κεντρικό primary με συγκλίνοντα
 σημεία που ανήκουν στις ζώνες πλην των E_1 και E_2 (στ) ζώνης A_1 ,
 (ζ) ζώνης A_2 , (η) ζώνης B , (θ) ζώνης C_2 και (ι) ζώνης C_1

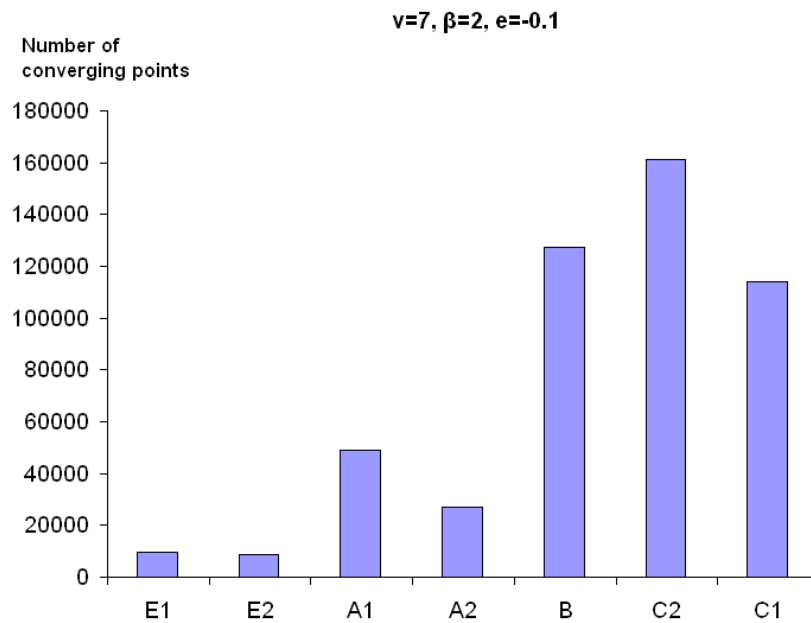
Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι ελκτικές περιοχές των πέντε ζωνών που εμφανίζονται και στην καθαρή Νευτώνεια περίπτωση παρουσιάζουν παρόμοια δομή για το λόγο αυτό θα επισημάνουμε κυρίως τις διαφορές που εμφανίζονται στις ελκτικές περιοχές αυτών των ζωνών. Πιο αναλυτική περιγραφή θα γίνει για τις ελκτικές περιοχές των ζωνών E_1 και E_2 οι οποίες εμφανίζονται για πρώτη φορά στις περιπτώσεις με $e < 0$ και παρουσιάζονται στις περιοχές I και II (και οι δύο), III και IV (μόνο η E_1) του διαγράμματος των διακλαδώσεων του Σχήματος 3.11β(Κεφ.3°).

- Ελκτικές περιοχές των ζωνών E_1 και E_2 (Σχήματα 7.7α και 7.7β). Οι «συμπαγείς» περιοχές τους περιορίζονται σε πολύ στενές διαμήκειες λωρίδες που περιβάλλουν τις ακτίνες πάνω στις οποίες κείνται τα σημεία ισορροπίας των ζωνών αυτών. Όσον αφορά στα διάσπαρτα σημεία, παρατηρείται μία πολύ πυκνή κατανομή τους σε μία κυκλική περιοχή που αναπτύσσεται γύρω από το κεντρικό primary P_0 (Σχήματα 7.7γ και 7.7δ). Μέσα στην περιοχή αυτή υπάρχουν διάσπαρτα σημεία που ανήκουν στις υπόλοιπες ζώνες (Σχήμα 7.7ε). Πέρα από την περιοχή αυτή, τα διάσπαρτα σημεία των δύο αυτών ζωνών κατανέμονται με παρόμοιο τρόπο στα όρια των «συμπαγών» περιοχών των άλλων ζωνών, παρουσιάζοντας παρόμοια μορφοκλασματική δομή.
- Ελκτική περιοχή της ζώνης A_1 (Σχήμα 7.7στ). Αναπτύσσεται με παρόμοιο τρόπο όπως και στη βαρυτική περίπτωση (Σχήμα 7.5α), με μόνη διαφορά ότι η «συμπαγής» περιοχή δεν απολήγει στο κεντρικό πρωτεύον σώμα αλλά περατούται στα όρια της κεντρικής κυκλικής περιοχής των ζωνών E_1 και E_2 που περιγράψαμε προηγουμένως. Στο εσωτερικό των «συμπαγών» περιοχών κείνται οι θέσεις ισορροπίας της ζώνης αυτής.
- Ελκτική περιοχή της ζώνης A_2 (Σχήμα 7.7ζ). Παρόμοια εξέλιξη με αυτήν της ζώνης A_1 παρατηρείται και στην προκειμένη περίπτωση, όπου το ένα από τα τρία σκέλη της «συμπαγούς» περιοχής (αυτό που στη βαρυτική περίπτωση κατέληγε στο κεντρικό primary) περατώνεται στα όρια της κυκλικής περιοχής των ζωνών E_1 και E_2 .
- Ελκτική περιοχή της ζώνης B (Σχήμα 7.7η). Οι «συμπαγείς» περιοχές της ζώνης αυτής δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη των ζωνών E_1 και E_2 .

Αντίθετα επηρεάζεται η κατανομή των διάσπαρτων σημείων στην περιοχή μεταξύ του κεντρικού primary και των παρυφών των «συμπαγών» περιοχών της ζώνης.

- Ελκτική περιοχή της ζώνης C_2 (Σχήμα 7.7θ). Και στην περίπτωση αυτή, ενώ δεν επηρεάζονται εμφανώς οι «συμπαγείς» περιοχές της ζώνης, αντίθετα η κατανομή των διάσπαρτων σημείων επηρεάζεται σαφώς κοντά στην περιοχή της κυκλικής κατανομής.
- Ελκτική περιοχή της ζώνης C_1 (Σχήμα 7.7ι). Και εδώ έχουμε παρόμοιες μεταβολές στην κατανομή των διάσπαρτων σημείων όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Στο ραβδόμορφο διάγραμμα του Σχήματος 7.8 απεικονίζεται το πλήθος των σημείων των ελκτικών περιοχών των επτά ζωνών. Παρατηρούμε ότι η ελκτική περιοχή της ζώνης C_2 είναι η πολυπληθέστερη και ακολουθούν αυτές των ζωνών B και C_1 . Αντίθετα, οι πιο ολιγομελείς είναι αυτές των ζωνών E_1 και E_2 . Στον Πίνακα 7.1 αναγράφεται το ακριβές πλήθος των σημείων της ελκτικής περιοχής κάθε ζώνης (Croustalloudi *et al.*, 2012). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το σύνολο όλων αυτών των σημείων ισούται σχεδόν με το σύνολο των σημείων (500000) που ελέγχθηκαν μέσα στην καθορισμένη περιοχή τιμών των μεταβλητών x και y , γεγονός που επιβεβαιώνει την πολύ καλή απόκριση της μεθόδου Newton-Raphson για τη μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος, αφού το ποσοστό των σημείων που δεν συνέκλιναν ήταν πολύ μικρό (<0.6%).



Σχήμα 7.8. Ραβδόμορφο διάγραμμα (bar chart) που απεικονίζει το πλήθος των σημείων των ελκτικών περιοχών ανά ζώνη ισορροπίας για $v=7, \beta=2, e=-0.1$

Πίνακας 7.1. Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών των ζωνών ισορροπίας για $v=7, \beta=2, e=-0.1$

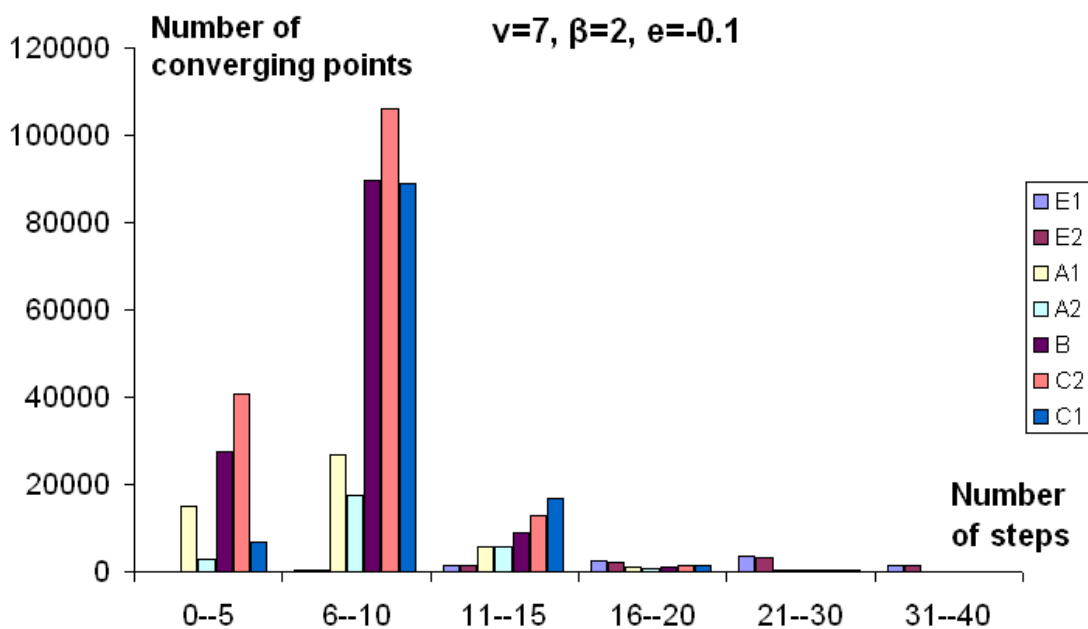
E₁	9509
E₂	8750
A₁	49215
A₂	27191
B	127368
C₂	161179
C₁	114154
Σύνολο	497366

Όσον αφορά στις περιπτώσεις εκείνες που τα ζεύγη των παραμέτρων (e, β) κείνται πάνω στις καμπύλες διακλαδώσεων του επιπέδου $e\beta$ του Σχήματος 3.11 (Κεφ. 3^ο), παρατηρείται μία απότομη μεταβολή στο πλήθος και στον τύπο των ζωνών ισορροπίας, γεγονός που συνεπάγεται την επίσης απότομη μεταβολή των σημείων ισορροπίας, άρα και των ελκτικών περιοχών (αύξηση ή ελάττωση) των ζωνών που εξακολουθούν να υπάρχουν και φυσικά του πλήθους των σημείων που τις

απαρτίζουν.

7.8.2 Περιοχές με μικρή ή μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης στην περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$ και $e=-0.1$

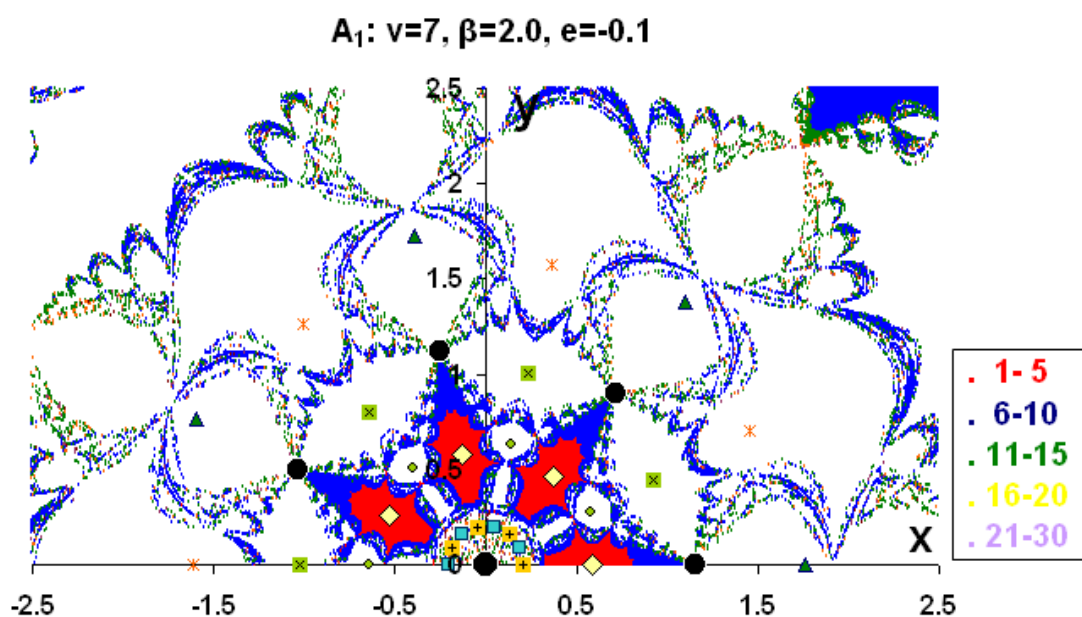
Στο ραβδόμορφο διάγραμμα του Σχήματος 7.9 απεικονίζεται το πλήθος των σημείων κάθε κλάσης βημάτων ανά ζώνη. Όπως παρατηρείται, η κλάση βημάτων 6-10 είναι η πολυπληθέστερη από όλες τις υπόλοιπες κλάσεις και αυτό συμβαίνει σε όλες τις ελκτικές περιοχές όλων των ζωνών. Ακολουθεί η κλάση βημάτων (1-5) η οποία συγκροτεί τις συμπαγείς υποπεριοχές όλων των ζωνών. Στον αντίποδα, παρατηρούμε τις κλάσεις βημάτων 21-30 και 31-40 να αποτελούνται από ελάχιστα έως καθόλου σημεία. Αυτό σημαίνει την πολύ καλή απόκριση της μεθόδου Newton-Raphson και την εξαιρετικά ταχεία σύγκλιση σε όλες τις περιπτώσεις. Στον Πίνακα 7.2 που ακολουθεί αναγράφονται οι απόλυτες τιμές των σημειοσυνόλων και η συμμετοχή τους στη διαμόρφωση της ελκτικής περιοχής, ενώ στο Σχήμα 7.10 απεικονίζουμε ενδεικτικά την κατανομή των κλάσεων βημάτων για την ζώνη A_1 .



Σχήμα 7.9. Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών ανά ζώνη και ανά κλάση βημάτων

Πίνακας 7. 2. Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών ανά ζώνη και ανά κλάση βημάτων για την περίπτωση $\nu=7, \beta=2, e=-0.1$

Κλάση βημάτων	Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών						
	E_1	E_2	A_1	A_2	B	C_2	C_1
1-5	0	0	15062	2907	27582	40697	6944
6-10	302	340	26830	17347	89487	106132	88971
11-15	1560	1530	5734	5589	8855	12759	16635
16-20	2584	2269	990	877	1043	1278	1367
21-30	3697	3353	443	342	310	259	195
31-40	1366	1258	156	129	91	54	42
Σύνολο	9509	8750	49215	27191	127368	161179	114154

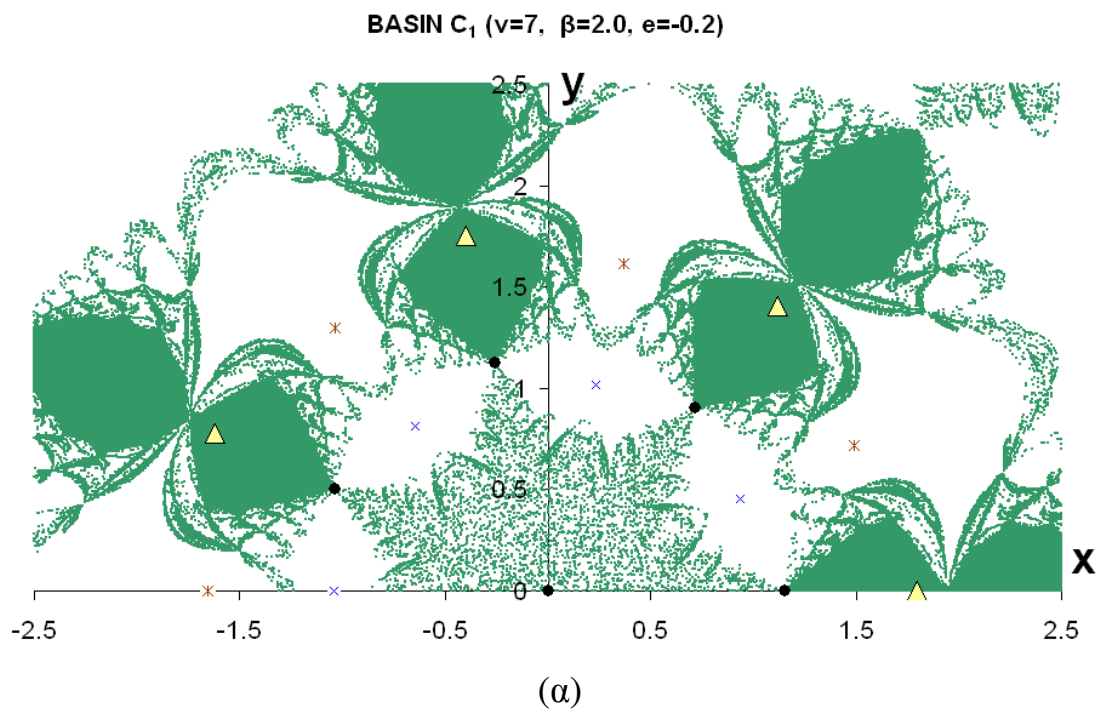


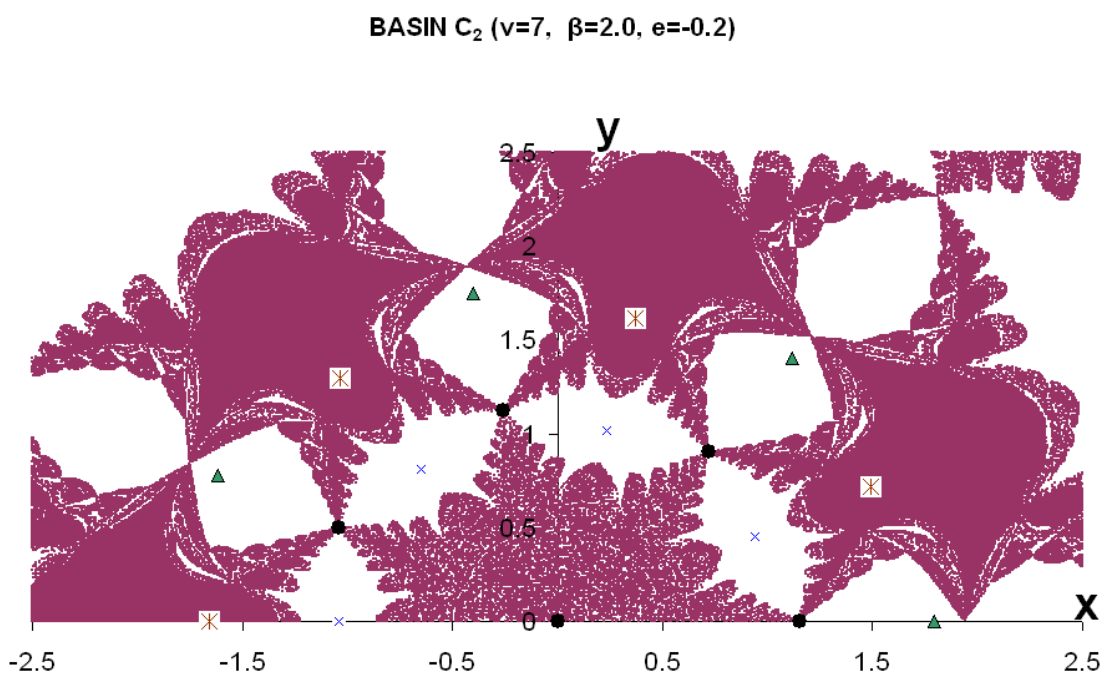
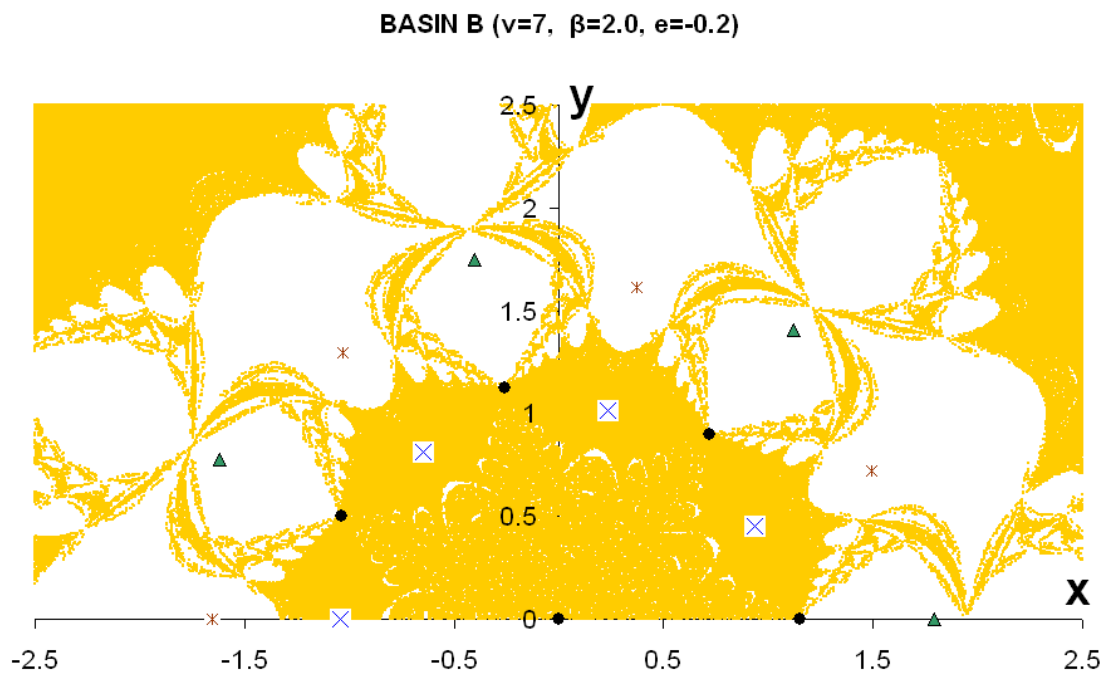
Σχήμα 7.10. Κατανομή των κλάσεων βημάτων στην ελκτική περιοχή της ζώνης A_1 για την περίπτωση με $\nu=7, \beta=2, e=-0.1$

7.8.3 Ελκτικές περιοχές για τιμές των παραμέτρων e και β που εμπίπτουν στην περιοχή V του διαγράμματος διακλαδώσεων

Στο Σχήμα 7.11 που ακολουθεί απεικονίζονται οι ελκτικές περιοχές για την περίπτωση $\nu=7, \beta=2$ και $e=-0.2$, η οποία εμπίπτει στην περιοχή V του διαγράμματος

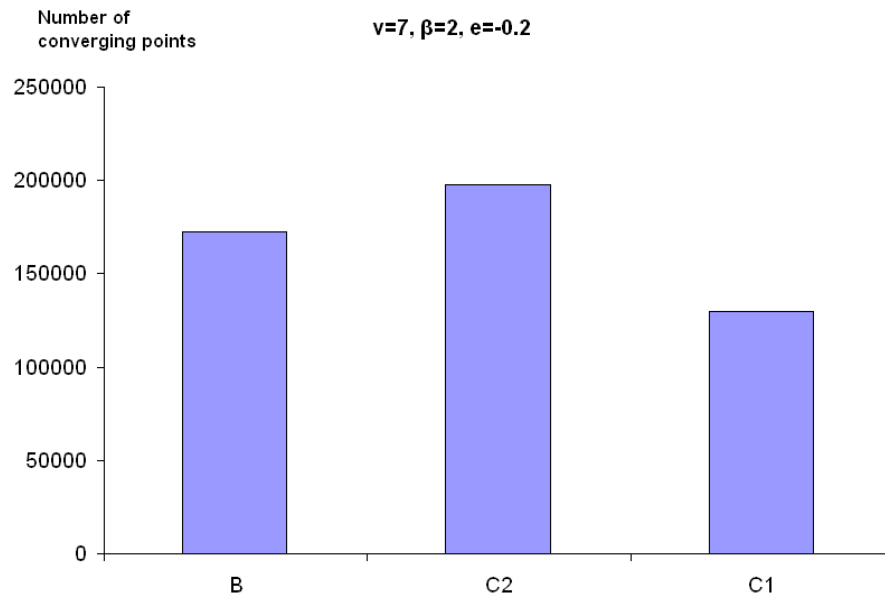
διακλαδώσεων(Σχήμα 3.11, Κεφ.3^ο), όπου εμφανίζονται μόνο τρεις ζώνες ισοροπίας, οι C_2 , B, C_1 . Όπως φαίνεται, τα σημεία που ανήκαν στις ελκτικές περιοχές των άλλων ζωνών που τώρα δεν υπάρχουν διαμοιράζονται στις τρεις αυτές ελκτικές περιοχές. Επειδή δε οι ελκτικές περιοχές των τεσσάρων ζωνών που ελλείπουν, αναπτύσσονταν κυρίως (οι συμπαγείς τους περιοχές) μεταξύ της αρχής και των συμπαγών περιοχών της ζώνης B, όπως αναμενόταν, τα σημεία της περιοχής αυτής προσλαμβάνονται κυρίως από την ελκτική περιοχή της ζώνης αυτής και δευτερευόντως από τις ελκτικές περιοχές των C_2 και C_1 . Αυτό καταδεικνύεται τόσο στο ραβδόμορφο διάγραμμα του Σχήματος 7.12, όσο και στις αναγραφόμενες τιμές στον Πίνακα 7.3.





Σχήμα 7.11. Ελκτικές περιοχές των ζωνών ισορροπίας για $\nu=7, \beta=2, e=-0.2$.

(α) ζώνης C₁, (β) ζώνης B, (γ) ζώνης C₂



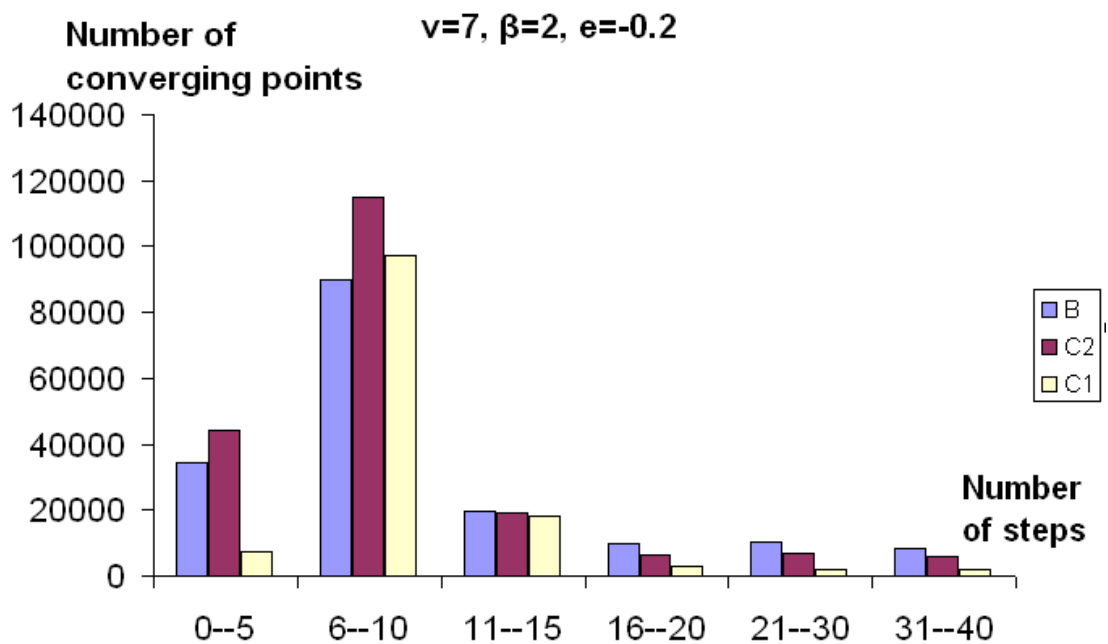
Σχήμα 7.12. Ραβδόμορφο διάγραμμα (bar chart) που απεικονίζει το πλήθος των σημείων ανά ζώνη ισορροπίας στην περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$, $e=-0.2$

Πίνακας 7.3. Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών των ζωνών ισορροπίας για $v=7$, $\beta=2$, $e=-0,2$

B	172377
C₂	197518
C₁	129800
Σύνολο	499695

7.8.4 Περιοχές με μικρή ή μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης στην περίπτωση με $v=7$, $\beta=2$ και $e=-0.2$

Όσον αφορά στην ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου, και στην περίπτωση αυτή έχουμε την ίδια ακριβώς συμπεριφορά, δηλαδή για τις περισσότερες αρχικές τιμές η σύγκλιση επιτυγχάνεται σε 6-10 βήματα, ενώ ακολουθεί η κλάση 1-5 που δίνει τις συμπαγείς περιοχές (Σχήμα 7.13). Ακολουθούν οι υπόλοιπες κλάσεις με τελευταία την σχετικά αργή κλάση των 31-40 βημάτων η οποία όμως συναντάται σε ελάχιστες αρχικές τιμές. Ο Πίνακας 7.4, δίνει ποσοτικές τιμές για κάθε κλάση βημάτων και καθε ζώνη.



Σχήμα 7.13. Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών ανά ζώνη και ανά κλάση βημάτων για την περίπτωση $v=7, \beta=2, e=-0.2$

Πίνακας 7.4. Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών ανά ζώνη και ανά κλάση βημάτων για την περίπτωση $v=7, \beta=2, e=-0.2$

Κλάση βημάτων	Πλήθος σημείων των ελκτικών περιοχών		
	B	C ₂	C ₁
1-5	34529	44080	7280
6-10	90001	114957	97336
11-15	19431	18987	18376
16-20	9624	6566	2863
21-30	10444	7057	2130
31-40	8348	5871	1815
Σύνολο	172377	197518	129800

7.8.5 Συγκριτική μελέτη της περίπτωσης με $v=7, \beta=2$ και $e=-0.1$ (περιοχή I), με την περίπτωση με $v=7, \beta=2$ και $e=-0.2$ (περιοχή V)

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όταν μεταβαίνουμε από μία περιοχή σε άλλη του διαγράμματος διακλαδώσεων στο επίπεδο εβ, το πλήθος των ζωνών ισορροπίας (ή

ενίοτε και ο τύπος τους) μεταβάλλεται. Αν από μία περιοχή του διαγράμματος διακλαδώσεων μεταβαίνουμε στη γειτονική της και το πλήθος των ζωνών μειώνεται, (όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις που εξετάσαμε), τότε είναι λογικό τα σημεία (x_0, y_0) του επιπέδου που άλλοτε οδηγούσαν σε κάποια από τις ζώνες της αρχικής περιοχής που τώρα δεν υφίστανται, να συσσωρεύονται σε μία από τις υπάρχουσες ζώνες της νέας περιοχής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του πλήθους των σημείων τα οποία συγκροτούν τις ελκτικές περιοχές των υφιστάμενων ζωνών. Η μεταβολή αυτή σε άλλες ζώνες είναι περισσότερο απότομη, ενώ σε άλλες μπορεί να είναι λιγότερο απότομη όπως δείχνει το Σχήμα 7.6 για τη βαρυτική περίπτωση (Croustalloudi & Kalvouridis, 2007a). Στο σημείο της διακλάδωσης $\beta=l_v$ παρατηρείται μηδενισμός των σημειοσυνόλων των υπό εξαφάνιση ζωνών A_2 και B και απότομη αύξηση του σημειοσυνόλου της C_2 .

Σχετικά με τις δύο περιπτώσεις που μελετήσαμε, επειδή στην περιοχή I υπάρχουν επτά ζώνες και στην περιοχή V μόνο τρεις, ευνόητο είναι ότι τα σημεία που άλλοτε οδηγούσαν στις ζώνες A_1 , A_2 , E_1 και E_2 , τώρα να εμπλουτίζουν τις ελκτικές περιοχές των ζωνών B , C_2 , C_1 όπως φαίνεται και από τους συγκριτικούς πίνακες του Πίνακα 7.5. Τα σημαντικότερα συμπεράσματα που απορρέουν από την εξέταση των τιμών που εμφανίζονται στους πίνακες αυτούς είναι:

- Η ζώνη C_2 εξακολουθεί να είναι η πολυπληθέστερη. Την ιδιότητα αυτή η ζώνη C_2 την διατηρεί σε όλες τις περιοχές του διαγράμματος διακλαδώσεων δεδομένου μάλιστα ότι εμφανίζεται για όλες τις τιμές των παραμέτρων e και β .
- Από τη γενική αύξηση του πλήθους των σημείων που παρατηρείται και στις τρεις ζώνες, περισσότερο «επωφελείται» η ζώνη B που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη σε απόλυτα μεγέθη, αλλά και ποσοστιαία αύξηση. Το αντίθετο συμβαίνει για τη ζώνη C_1 .
- Η αύξηση του γενικού αριθμού των σημείων κάθε ζώνης δεν επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο και τις κλάσεις βημάτων της συγκεκριμένης ζώνης. Παρατηρείται ότι οι κλάσεις 1-5 (ταχύτατη σύγκλιση) και 6-10 (ταχεία σύγκλιση) βημάτων, εμφανίζουν τη μικρότερη αύξηση. Σημειώνουμε στο

σημείο αυτό ότι οι δύο αυτές κλάσεις συγκροτούν ως επί το πλείστον τις «συμπαγείς» περιοχές των ζωνών. Αντίθετα, οι υπόλοιπες κλάσεις που αφορούν στη μέτρια (11-15, 16-20) και αργή σύγκλιση (>20) που συγκροτούν τα υποσύνολα των διάσπαρτων σημείων, εμφανίζουν πολύ μεγάλη αύξηση που μπορεί να ξεπεράσει το εκατονταπλάσιο ή και χιλιοπλάσιο των τιμών της αρχικής περιοχής.

Πίνακας 7.5. Συγκριτικοί πίνακες των δύο περιπτώσεων

A. Ελκτική περιοχή της ζώνης B

	Πλήθος σημείων της ελκτικής περιοχής της ζώνης B			
Κλάση βημάτων	Περιοχή V (e=-0.2)	Περιοχή I (e-0.1)	Διαφορά	Ποσοστιαία αύξηση %
1-5	34529	27582	6947	25.19
6-10	90001	89487	514	0.0056
11-15	19431	8855	10576	119.44
16-20	9624	1043	8581	82.27
21-30	10444	310	10134	3269.03
31-40	8348	91	8257	9073.63
Σύνολο	172377	127368	45009	35.34

B. Ελκτική περιοχή της ζώνης C₂

	Πλήθος σημείων της ελκτικής περιοχής της ζώνης C ₂			
Κλάση βημάτων	Περιοχή V (e=-0.2)	Περιοχή I (e-0.1)	Διαφορά	Ποσοστιαία αύξηση %
1-5	44080	40697	3383	8.31

6-10	114957	106132	8825	8.31
11-15	18987	12759	6228	48.81
16-20	6566	1278	5288	413.77
21-30	7057	259	6798	2624.71
31-40	5871	54	5817	10772.22
Σύνολο	197518	161179	36339	22.55

Γ. Ελκτική περιοχή της ζώνης C₁

Πλήθος σημείων της ελκτικής περιοχής της ζώνης C₁				
Κλάση βημάτων	Περιοχή V (e=-0.2)	Περιοχή I (e-0.1)	Διαφορά	Ποσοστιαία αύξηση %
1-5	7280	6944	336	4.84
6-10	97336	88971	8365	9.4
11-15	18376	16635	1741	10.47
16-20	2863	1367	1496	109.44
21-30	2130	195	1935	992.31
31-40	1815	42	1773	4221.43
Σύνολο	129800	114154	15646	13.71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

8.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε συνοπτικά τις διαδικασίες που θα εφαρμόσουμε στα επόμενα Κεφάλαια 9 και 10, προκειμένου να μελετήσουμε τις επίπεδες περιοδικές κινήσεις του μικρού σώματος εξαιτίας της δράσης που ασκούν πάνω σε αυτό όλα τα μεγάλα σώματα του δακτυλιοειδούς σχηματισμού. Ήδη στο Κεφάλαιο 2, εξάγαμε τις αδιάστατες (dimensionless) εξισώσεις (θα χρησιμοποιήσουμε την αρίθμηση του κεφαλαίου αυτού για τις εξισώσεις οι οποίες απλά αναφέρονται εδώ με «`» προκειμένου να διευκολυνθεί ο αναγνώστης) οι οποίες περιγράφουν την τριδιάστατη κίνηση του μικρού σώματος στο στρεφόμενο πλαίσιο αναφοράς Oxyz (synodic):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} = U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} = U_y \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} = U_z\end{aligned}\tag{2.27'}$$

όπου

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right]\tag{2.28'}$$

και

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3), \quad \Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2(\pi / \nu)}{\sin[(i-1)\pi / \nu]} \quad \text{και} \quad M = 2\sin(\pi/\nu)$$

είναι ποσότητες οι οποίες εξαρτώνται από τις τρεις παραμέτρους του προβλήματος, ν , β και e . Βρήκαμε επίσης ότι η κίνηση αυτή διέπεται από ένα ολοκλήρωμα της κίνησης τύπου Jacobi:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) - C \quad (2.32')$$

Υπενθυμίζουμε ότι η ποσότητα Δ πρέπει να είναι πάντα θετική λόγω της σχέσης (2.9') η οποία οδηγεί στη συνθήκη (3.2α) του 3^{ου} κεφαλαίου. Επειδή οι σχέσεις (2.27'), (2.28') και (2.32') δεν περιέχουν ρητά τον χρόνο t , το πρόβλημά μας χαρακτηρίζεται ως αυτόνομο. Επί πλέον, επειδή όλες οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο μικρό σώμα προέρχονται από δυναμικό, το δυναμικό σύστημα είναι (διατηρητικό) συντηρητικό, ανήκει δε στην κατηγορία των Χαμιλτονιανών αφού είναι δυνατή η εύρεση της αντίστοιχης Χαμιλτονιανής συνάρτησης.

Οι εξισώσεις (2.27') συνιστούν ένα σύστημα τριών μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODE's) δευτέρας τάξεως και η θεωρητική επίλυσή τους υλοποιείται εφόσον δοθούν οι αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ των έξι ανεξάρτητων μεταβλητών. Με άλλα λόγια, το συγκεκριμένο πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων που στα μαθηματικά ονομάζεται πρόβλημα αρχικών συνθηκών. Όμως, όπως συμβαίνει στην πλειονότητα των μη γραμμικών προβλημάτων, δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις και για το λόγο αυτό οδηγούμαστε στη χρήση αριθμητικών μεθόδων ώστε να προσεγγίσουμε μέσω αυτών τις πραγματικές λύσεις του προβλήματος.

Σύμφωνα με τις εκφράσεις (2.27') και (2.32') το πρόβλημα θα έχει λύση αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο παρακάτω συνθήκες:

- Οι τιμές των παραμέτρων ν , β και e είναι τέτοιες ώστε η ποσότητα Δ να είναι θετική.
- Οι αρχικές τιμές των μεταβλητών είναι τέτοιες ώστε η κινητική ενέργεια του μικρού σώματος να είναι θετική ή οριακά μηδέν.

Όσον αφορά στην πρώτη συνθήκη, όπως βρήκαμε στο Κεφάλαιο 3, επειδή οι παράμετροι ν και β είναι πάντα θετικές, τότε αν $e > 0$, η ποσότητα Δ είναι πάντα θετική.

Αν όμως $e < 0$, τότε θα πρέπει να σχεδιάσουμε για τη συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου v που μας ενδιαφέρει, μία καμπύλη που να δείχνει τη μεταβολή της κρίσιμης τιμής e_{cr} με την παράμετρο β , παρόμοια με αυτές του Σχήματος 3.1 (Κεφ, 3^ο). Η καμπύλη αυτή αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των "απαγορευμένων" ζευγών (β, e) που οδηγούν σε αδύνατη λύση.

8.2 Επίπεδες κινήσεις του μικρού σώματος στο συνοδικό πλαίσιο αναφοράς

8.2.1 Εξισώσεις πρώτης μεταβολής

Οι επίπεδες κινήσεις του μικρού σώματος στο επίπεδο Oxy, χαρακτηρίζονται από την εξίσωση του συνδέσμου $z=0$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα (2.27') ανάγεται στην απλούστερη μορφή

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} = U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} = U_y \end{aligned} \quad (8.1)$$

όπου

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right] \quad (8.2)$$

ενώ το ολοκλήρωμα της κίνησης παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U(x, y) - C \quad (8.3)$$

Έτσι, το αυτόνομο δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται πλέον από δύο βαθμούς ελευθερίας στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Χρησιμοποιώντας εναλλακτικά το συμβολισμό $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{x}$ και $x_4 = \dot{y}$ για τις ανεξάρτητες μεταβλητές, η κίνηση του μικρού σώματος περιγράφεται από ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως της μορφής:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

και αναλυτικά:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= F_1 = x_3 \\
\dot{x}_2 &= F_2 = x_4 \\
\dot{x}_3 &= F_3 = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_4 + U_{x_1} \\
\dot{x}_4 &= F_4 = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_3 + U_{x_2}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

όπου οι εκφράσεις των U_{x_1} (ή U_x) και U_{x_2} (ή U_y) έχουν ήδη δοθεί στο Κεφάλαιο 2, ενώ η συνάρτηση U και το ολοκλήρωμα Jacobi με το νέο συμβολισμό παίρνουν τη μορφή:

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{e}{r_0^2} \right) + \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} \right]$$

$$\text{με } r_0 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_i = \left[(x_{1i} - x_1)^2 + (x_{2i} - x_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ και}$$

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2U(x_1, x_2) - (x_3^2 + x_4^2) = C$$

Μία γενική λύση του συστήματος (8.4) θα έχει τη μορφή

$$x_i = x_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}; t), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{8.5}$$

όπου $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$ είναι οι αρχικές συνθήκες (τιμές των μεταβλητών για $t = 0$). Με παραγωγήιση των εξισώσεων (8.4) ως προς τις αρχικές συνθήκες x_{oj} , προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{oj}} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{oj}}, \quad \text{με } i, j = 1, 2, 3, 4 \tag{8.6}$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = P \cdot \mathcal{D} \tag{8.7}$$

$$\text{όπου}^7: \mathcal{D} = \mathcal{D}(\underline{x}_0; t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_{oj}} \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

και

⁷ Συνήθως για τον πίνακα πρώτης μεταβολής (matrizant) όπως και για τον μονόδρομο πίνακα των περιοδικών λύσεων χρησιμοποιείται το ελληνικό γράμμα Δ , όμως στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιήσαμε αντί αυτού το σύμβολο \mathcal{D} προκειμένου να αποφύγουμε την σύγχυση με την ποσότητα Δ που εμφανίζεται στη συνάρτηση U των εξισώσεων της κίνησης του μικρού σώματος στο δακτυλιοειδές πρόβλημα των $(N+1)$ σωμάτων.

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

οπότε λόγω των (8.4) θα είναι:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_4} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = 2, \quad \frac{\partial F_4}{\partial x_3} = -2, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x_1} = U_{x_1 x_1}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial x_4} = \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x_2} = U_{x_2 x_2}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = U_{x_1 x_2}$$

και

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} & 0 & 2 \\ U_{x_2 x_1} & U_{x_2 x_2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι μερικές παράγωγοι $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ για το υπό μελέτη πρόβλημα έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = U_{x_1 x_1} = 1 + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta x_1^2}{r_0^5} - \frac{2e\beta}{r_0^4} + \frac{8e\beta x_1^2}{r_0^6} - \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j^3} + \sum_{j=1}^v \frac{3(x_1 - x_{1j})^2}{r_j^5} \right)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} = U_{x_1 x_2} = U_{x_2 x_1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{3\beta x_1 x_2}{r_0^5} + \frac{8e\beta x_1 x_2}{r_0^6} + \sum_{j=1}^v \frac{3(x_1 - x_{1j})(x_2 - x_{2j})}{r_j^5} \right) \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x_1} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x_2} = U_{x_2 x_2} = 1 + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta x_2^2}{r_0^5} - \frac{2e\beta}{r_0^4} + \frac{8e\beta x_2^2}{r_0^6} - \sum_{j=1}^v \frac{1}{r_j^3} + \sum_{j=1}^v \frac{3(x_2 - x_{2j})^2}{r_j^5} \right)$$

όπου (x_{1j}, x_{2j}) , $j=1, \dots, n$ είναι οι συντεταγμένες των περιφερειακών primaries και r_j , $j=1, \dots, n$ είναι οι αποστάσεις του μικρού σώματος από τα περιφερειακά primaries. Οι σχέσεις (8.6) αποτελούν 16 διαφορικές εξισώσεις, 1^{ης} τάξεως, ονομάζονται εξισώσεις α' μεταβολής, αναφέρονται στη συγκεκριμένη λύση $x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}; t)$ και χρησιμοποιούνται κατά την αναζήτηση των περιοδικών τροχιών μαζί με τις 4 εξισώσεις κίνησης τόσο για την εύρεση των προσεγγιστικών λύσεων σε κάποιες από τις μεθόδους αναζήτησης περιοδικών τροχιών (λ.χ. τη μέθοδο της ταχίστης καθόδου), όσο και για τον προσδιορισμό της ευστάθειάς τους.

Ο πίνακας $\mathcal{D}(\underline{x}_0; t) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right)$ λέγεται πίνακας α' μεταβολής ή *matrizant* του συστήματος

και ισχύει:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} = \delta_{ij}, \quad (8.11)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker. Συνεπώς:

$$\mathcal{D}(\underline{x}_0; 0) = I_{4 \times 4} \quad (8.12)$$

Παρόλο που τα στοιχεία του πίνακα \mathcal{D} μεταβάλλονται κατά μήκος μιας τροχιάς του σωματιδίου, η ορίζουσά του, για Χαμιλτονιανά συστήματα, διατηρεί σταθερή τιμή και σε κάθε χρονική στιγμή ισούται με τη μονάδα (Meironitch, 1970).

$$\det(\mathcal{D}(\underline{x}_0; t)) = 1 \quad (8.13)$$

Ο ρόλος της *matrizant* είναι μεγάλης σημασίας για τον προσδιορισμό των λύσεων γενικότερα και ειδικότερα του εντοπισμού των περιοδικών τροχιών. Με τη βοήθεια αυτής καθώς και της σχέσης (8.13) αποδεικνύεται το αναλλοίωτο των όγκων στο χώρο των φάσεων (θεώρημα Abel- Liouville).

8.2.2 Γενικές ιδιότητες του πίνακα \mathcal{D} πρώτης μεταβολής

- Όπως αναφέραμε προηγουμένως, μία ιδιότητα του πίνακα $\mathcal{D}(t)$, η οποία χαρακτηρίζει κυρίως τα Χαμιλτονιανά συστήματα είναι ότι η ορίζουσα του είναι σταθερή και μάλιστα ίση προς τη μονάδα (σχέση 8.13).
- Μια άλλη ιδιότητα είναι η σχέση (8.8) σύμφωνα με την οποία τα στοιχεία του πίνακα \mathcal{D} είναι οι μερικές παράγωγοι της λύσης του αρχικού συστήματος ως προς τις αρχικές συνθήκες.
- Τέλος μια σημαντική ιδιότητα του πίνακα \mathcal{D} , αφορά στην συμπλεκτικότητα του η οποία εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathcal{D}^T(\underline{x}_0; t)Q\mathcal{D}(\underline{x}_0; t) = Q \quad (8.14)$$

όπου ο πίνακας Q , ονομάζεται συμπλεκτικός, και η μορφή του εξαρτάται από το υπό μελέτη πρόβλημα. Η ορίζουσα του πίνακα Q διατηρεί σταθερή τιμή

$$\det Q = 1 \quad (8.15)$$

κατά μήκος μιας οποιασδήποτε τροχιάς-λύσης. Από τη σχέση (8.14) προκύπτουν ορισμένες ανεξάρτητες διγραμμικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του πίνακα \mathcal{D} που αποτελούν τις συμπλεκτικές σχέσεις. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι σχέσεις (8.8), (8.13), (8.14) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κριτήρια για την ορθότητα των αριθμητικών ολοκληρώσεων.

8.3 Περιοδικές τροχιές-Συνθήκες περιοδικότητας

8.3.1 Γενικά

Από τις υπάρχουσες λύσεις-τροχιές, εκείνες που έχουν τη μεγαλύτερη σημασία είναι οι περιοδικές (Hadjidemetriou, 1984). Αυτό αναδεικνύεται με πολύ χαρακτηριστικό τρόπο μέσα από τα λόγια του Poincaré: "Η μελέτη των περιοδικών τροχιών, είναι το πολύτιμο και ακριβό εργαλείο που διαθέτουμε για να μπορέσουμε να εισχωρήσουμε σ' ένα άγνωστο χώρο και να αποκαλύψουμε μερικά από τα μυστικά του". Η άποψη αυτή ενισχύεται από τον ίδιο με την περίφημη υπόθεσή του η οποία αναφέρει ότι "οι περιοδικές λύσεις κατανέμονται πυκνά στο χώρο των φάσεων, γεγονός που σημαίνει

ότι αν δοθεί μια μη-περιοδική λύση, μπορεί να βρεθεί οσοδήποτε κοντά της μία περιοδική λύση (με περίοδο που θα μπορούσε να είναι πολύ μεγάλη) τέτοια ώστε η διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις να είναι όσο μικρή επιθυμούμε για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα" (Poincaré, 1897).

Όταν μιλάμε για περιοδικές τροχιές, πρέπει να διευκρινίσουμε αν πρόκειται για περιοδικές τροχιές κατά την απόλυτη έννοια, δηλαδή αναφερόμενες σε ένα αδρανειακό πλαίσιο, ή αν είναι περιοδικές τροχιές κατά τη σχετική έννοια, δηλαδή ως προς ένα κινούμενο πλαίσιο. Στη συγκεκριμένη διατριβή και στο πρόβλημα που διαπραγματευόμαστε θα αναφερόμαστε στη δεύτερη εκδοχή.

8.3.2 Συνθήκες περιοδικότητας

Ας θεωρήσουμε και πάλι το αυτόνομο σύστημα (8.4). Αν για τις αρχικές συνθήκες

$$x_{10} = x_1(0), \quad x_{20} = x_2(0), \quad x_{30} = x_3(0), \quad x_{40} = x_4(0),$$

η λύση παρουσιάζει την ιδιότητα

$$x_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}; t + T) = x_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}; t), \quad i=1,2,3,4 \quad (8.16)$$

τότε λέμε ότι η λύση (τροχιά) είναι περιοδική με περίοδο T . Συνεπώς στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$x_i(x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}; T) = x_{i0}, \quad i=1,2,3,4 \quad (8.17)$$

Οι σχέσεις (8.16) ή (8.17) αποτελούν τις συνθήκες περιοδικότητας. Οι εξισώσεις μεταβολών (8.6) στην περίπτωση αυτή αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με περιοδικούς συντελεστές, περιόδου T , οπότε ο πίνακας $P(t)$ με στοιχεία

$$p_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad \text{είναι ένας περιοδικός πίνακας (συνήθως αναφέρεται και ως } T\text{-περιοδικός,}$$

αφού έχει περίοδο T). Οπότε:

$$P(t) = P(t + T).$$

Αν $\mathcal{D}(t)$ είναι η matrizant, τότε ο πίνακας $\mathcal{D}(T)$ που λαμβάνεται για $t=T$ καλείται μονόδρομος πίνακας (monodromy matrix) και παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη

διερεύνηση της γραμμικής ευστάθειας της περιοδικής τροχιάς στην οποία θα αναφερθούμε σε επόμενες παραγράφους.

8.3.3 Προτάσεις που αφορούν στις περιοδικές τροχιές

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποιες προτάσεις που αφορούν στην περίοδο των περιοδικών τροχιών (Boccaletti & Pucacco, 2001).

Πρόταση 1η

Αν T είναι η περίοδος μιας περιοδικής λύσης (8.16), τότε και η mT (όπου m θετικός ακέραιος) μπορεί να θεωρηθεί επίσης "περίοδος" για τη λύση αυτή. Π.χ. αν η περίοδος μιας περιοδικής τροχιάς είναι 1.5, τότε και οι τιμές 3.0, 4.5, ... αποτελούν περιόδους της τροχιάς αυτής (για $m=1, 2, 3, \dots$).

Πρόταση 2η

Αν T_1 και T_2 είναι δύο περίοδοι της περιοδικής λύσης (8.16), τότε και η T_1+T_2 είναι περίοδοι της λύσης αυτής. Π.χ. αν μια περιοδική τροχιά έχει περιόδους 3.0 και 4.5, τότε και η τιμή $3.0 + 4.5 = 7.5$ θα αποτελεί επίσης περίοδο της λύσης αυτής.

Πρόταση 3η

Αν μία περιοδική λύση έχει περιόδους $T_1, T_2, T_3, \dots, T_f$, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός αυτών $\sum_{k=1}^f c_k T_k$, όπου οι συντελεστές c_k είτε όλοι είτε μερικοί, είναι

θετικοί, αποτελεί επίσης περίοδο της λύσης αυτής αρκεί το άθροισμα αυτό να μην είναι μικρότερο από την $\min\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_f\}$. Η πρόταση αυτή ουσιαστικά αποτελεί συνδυασμό των προηγούμενων δύο προτάσεων. Π.χ. αν $T_1=3.0$, $T_2=4.5$ και $T_3=7.5$, τότε και η $2T_1+3T_2+T_3=27$ αποτελεί περίοδο, όπως και η $T_1-2T_2+T_3=1.5$, ενώ δεν αποτελεί περίοδο η $2T_1-3T_2+T_3=0$ αλλά προφανώς ούτε και η $-2T_1-3T_2+2T_3=-4.5$.

8.3.4 Ιδιότητες του μονόδρομου πίνακα $\mathcal{D}(T)$ στις περιοδικές τροχιές

Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά και χωρίς απόδειξη τις σημαντικότερες ιδιότητες του μονόδρομου πίνακα για την περίπτωση των περιοδικών λύσεων.

- Ο μονόδρομος πίνακας έχει μία μοναδιαία ιδιοτιμή
- Ισχύει $\mathcal{D}(\underline{x}_0; t + T) = \mathcal{D}(\underline{x}_0; t)\mathcal{D}(\underline{x}_0; T)$ (που αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος του Floquet).
- Επίσης $\mathcal{D}(nT) = \mathcal{D}^n(T)$

8.3.5 Κατηγορίες επίπεδων περιοδικών τροχιών

Οι επίπεδες περιοδικές τροχιές χαρακτηρίζονται ως

- Συμμετρικές και μη συμμετρικές (ασύμμετρες)
- Απλές και n-πολλαπλές περιοδικές τροχιές

Με τον όρο «συμμετρική» (αντίστοιχα «μη συμμετρική») θα εννοούμε μια επίπεδη τροχιά που είναι συμμετρική (αντίστοιχα «μη συμμετρική») ως προς τον οριζόντιο άξονα x του συνοδικού συστήματος των συντεταγμένων. Η χρήση αυτού του όρου έχει υιοθετηθεί επίσης και από τον Hénon (2005). Σύμφωνα με τη σύμβαση αυτή, ασύμμετρες τροχιές θεωρούνται και εκείνες οι τροχιές οι οποίες δεν είναι μεν συμμετρικές ως προς τον άξονα x , μπορεί να είναι όμως συμμετρικές ως προς τον κάθετο άξονα y του συνοδικού συστήματος. Και βέβαια, μία συμμετρική τροχιά ως προς τον άξονα Ox μπορεί να έχει και άλλους άξονες συμμετρίας. Στην περίπτωση αυτή την χαρακτηρίζουμε ως πολλαπλά συμμετρική τροχιά και ειδικότερα διπλή, τριπλή, κ.ο.κ. συμμετρική, ανάλογα με το πλήθος των αξόνων συμμετρίας που διαθέτει.

Όσον αφορά στις απλές και n-πολλαπλές ($n > 1$) περιοδικές τροχιές ο σχετικός χαρακτηρισμός αναφέρεται στο πλήθος των τομών της τροχιάς με τον άξονα συμμετρίας στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου (ή και ημιπεριόδου). Έτσι, ως απλές περιοδικές τροχιές χαρακτηρίζουμε εκείνες που στη διάρκεια μιας ημιπεριόδου

τέμνουν τον άξονα συμμετρίας x μία μόνο φορά κάθετα επιπλέον του σημείου εκκίνησης, ως διπλές περιοδικές τροχιές εκείνες που τέμνουν τον x δύο φορές κάθετα (δύο διελεύσεις) και ως n -πολλαπλές περιοδικές εκείνες που στο χρόνο μιας ημιπεριόδου τέμνουν κάθετα τον άξονα x σε n σημεία (n διελεύσεις).

Τονίζουμε επίσης το γεγονός *ότι μία συμμετρική τροχιά είναι πάντα περιοδική, ενώ δεν συμβαίνει πάντα το αντίστροφο.*

8.4 Επίπεδες συμμετρικές περιοδικές τροχιές-Ύπαρξη επίπεδων περιοδικών τροχιών συμμετρικών ως προς άξονα του συνοδικού συστήματος

Η ύπαρξη συμμετρίας στις τροχιές ελαττώνει, όπως είναι φυσικό, σημαντικά το χρόνο των αριθμητικών ολοκληρώσεων (στο $1/2$ για τις τροχιές απλής συμμετρίας, στο $1/4$ για τις τροχιές διπλής συμμετρίας, κ.ο.κ). Η ύπαρξη επίπεδων τροχιών συμμετρικών ως προς έναν άξονα του συνοδικού συστήματος διαπιστώνεται από το κατά πόσον οι εξισώσεις κινήσεως διατηρούν την αρχική τους μορφή κάτω από ένα μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς τον άξονα αυτόν, ταυτόχρονα με το μετασχηματισμό του χρόνου $t = -\tau$, που αφορά στις θέσεις, στις ταχύτητες και στις επιταχύνσεις. Έτσι, αν θεωρήσουμε τις επίπεδες κινήσεις στο επίπεδο Oxy , ο μετασχηματισμός συμμετρίας ως προς κάποιον από τους άξονες συντεταγμένων θα έχει τη γενική μορφή:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix}, t = -\tau. \quad (8.18)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις (Καλβουρίδης, 2004):

- Συμμετρία ως προς τον άξονα Ox , οπότε τα στοιχεία του πίνακα S θα έχουν τιμές: $s_{11} = 1, s_{22} = -1, s_{33} = -1, s_{44} = 1$ (8.19)

- Συμμετρία ως προς τον άξονα Oy , οπότε τα στοιχεία του πίνακα S θα έχουν τιμές: $s_{11} = -1, s_{22} = 1, s_{33} = 1, s_{44} = -1$ (8.20)

Οι επίπεδες συμμετρικές τροχιές τέμνουν τον άξονα συμμετρίας τους κάθετα σε δύο σημεία (στην αρχή των χρόνων και στην ημιπερίοδο). Όταν οι τροχιές αυτές έχουν μόνο δύο τομές με τον άξονα συμμετρίας τους (δηλαδή τον τέμνουν κάθετα σε δύο διαδοχικές διαβάσεις τους), τότε ονομάζονται απλές. Τονίζουμε στο σημείο αυτό, ότι σιωπηρά έχουμε δεχθεί αυτόνομα συστήματα για τα οποία δεν παίζει ρόλο η επιλογή της αρχής των χρόνων. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ως αρχική θέση το ένα από τα δύο σημεία διέλευσης του μικρού σώματος από τον άξονα συμμετρίας του. Τότε το μικρό σώμα θα διέρχεται από το δεύτερο σημείο σε χρόνο ίσο με μία ημιπερίοδο.

Θεωρώντας ως άξονα συμμετρίας τον άξονα Ox , θα ισχύουν στην περίπτωση αυτή οι παρακάτω συνθήκες στα σημεία τομής:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \neq 0, y(t=0) = y_0 = 0, \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 = 0, \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

και

$$\begin{aligned} x(t=T/2) &= x_{T/2} \neq 0, y(t=T/2) = y_{T/2} = 0, \\ \dot{x}(t=T/2) &= \dot{x}_{T/2} = 0, \dot{y}(t=T/2) = \dot{y}_{T/2} \neq 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

8.5 Μέθοδοι αναζήτησης περιοδικών τροχιών

8.5.1 Γενικά

Στον τομέα της αναζήτησης περιοδικών τροχιών έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι όπως οι επιφάνειες τομής Poincaré (Poincaré surface of sections), η μέθοδος της σάρωσης (grid-search or scanning method), η μέθοδος αναλυτικής συνέχειας (analytic continuation), η μέθοδος της ταχίστης καθόδου (steepest-descent method), κ.ο.κ. Για την αναλυτική περιγραφή των μεθόδων αυτών παραπέμπουμε στα βιβλία-σημειώσεις (Καλβουρίδης, 2001 και 2004). Κρίνουμε όμως σκόπιμο να αναφερθούμε συνοπτικά στη μέθοδο αναζήτησης των περιοδικών τροχιών με σάρωση που εφαρμόσαμε στο πρόβλημά μας.

8.5.2 Σύντομη περιγραφή της μεθόδου της σάρωσης (scanning ή grid search)

Η μέθοδος αυτή (Markellos *et al.*, 1974; Kalvouridis, 1999b, 2003; Hénon, 2003; Καλβουρίδης, 2004) εφαρμόζεται κυρίως στις περιπτώσεις αναζήτησης επίπεδων τροχιών συμμετρικών ως προς άξονα ή τριδιάστατων τροχιών συμμετρικών ως προς επίπεδο με την προϋπόθεση της ύπαρξης ενός ολοκληρώματος της κίνησης (τύπου Jacobi). Είναι αρκετά απλή και συνδυαζόμενη με τη μέθοδο της διχοτόμησης (bisection), μπορεί να αποδώσει αρκετά ακριβή αποτελέσματα.

Όσον αφορά στις επίπεδες συμμετρικές ως προς άξονα τροχίες, η μέθοδος βασίζεται στο γεγονός ότι μία τέτοια τροχιά που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα συμμετρίας (έστω τον Ox), ξεκινά κάθετα ως προς αυτόν και ύστερα από το χρόνο μιας ημιπεριόδου, τον ξανατέμνει κάθετα (βλέπε §8.4).

Αν επιπλέον υπάρχει (όπως στην περίπτωση του προβλήματος που μελετούμε) ένα ολοκλήρωμα της κίνησης $G(x_1, x_2, x_3, x_4) = C$, τότε για τις αρχικές συνθήκες (8.21) θα έχουμε,

$$G(x_{10}, x_{40}) = C \quad (8.23)$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε πως μπορούμε χρησιμοποιώντας το διάγραμμα x_{10} - C των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας να έχουμε ως ανεξάρτητες μεταβλητές τα C και x_{10} τη δε τιμή του x_{40} να την υπολογίζουμε με τη βοήθεια της σχέσης (8.23).

Διατηρώντας σταθερή τιμή στο C μεταβάλλουμε το x_{10} με σταθερό βήμα του οποίου το μέγεθος καθορίζουμε αυθαίρετα. Για κάθε τιμή της x_{10} ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις κινήσεως μέχρι τη χρονική στιγμή, κατά την οποία η τροχιά τέμνει για δεύτερη φορά τον άξονα συμμετρίας ($x_2(T/2) = 0$). Τη στιγμή αυτή καταγράφουμε τις τιμές της $x_3(T/2)$. Αν για δύο διαδοχικές τιμές του x_{10} , έστω x_{10} και $x_{10}' = x_{10} + \delta x_{10}$ (δx_{10} είναι το βήμα), η $x_3(T/2)$ αλλάζει πρόσημο, δηλαδή ισχύει η συνθήκη: $x_3(T/2) \cdot x_3'(T/2) < 0$, τότε, λόγω της συνέχειας των λύσεων, αυτό θα σημαίνει ότι στο διάστημα $[x_{10}, x_{10}']$ θα υπάρχει μία (τουλάχιστον, ή γενικά περιττός

αριθμός) τιμή x^*_{10} που θα αντιστοιχεί σε συμμετρική λύση. Διχοτομώντας συνεχώς το διάστημα αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές συνθήκες της συμμετρικής λύσης με την ακρίβεια που επιθυμούμε. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να ολοκληρωθεί η σάρωση της περιοχής του διαγράμματος x_{10} -C που μας ενδιαφέρει.

8.5.3 Αστοχίες της μεθόδου-Πρακτικά προβλήματα που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή της μεθόδου και τρόποι αντιμετώπισής τους

Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την εφαρμογή της μεθόδου αναζήτησης των επίπεδων συμμετρικών περιοδικών τροχιών αφού η μέθοδος μπορεί να εμφανίσει αστοχίες (Καλβουρίδης, 2005). Έτσι:

- Αν σε κάποιο διάστημα τιμών x_0 , υπάρχει άρτιος αριθμός αλλαγών του προσήμου της $\dot{x}_1(T/2)$, τότε η μέθοδος δεν μπορεί να εντοπίσει τις αλλαγές αυτές. Όμως αν υπάρχουν ενδείξεις ότι στο διάστημα αυτό υπάρχουν συμμετρικές τροχιές, τότε πρέπει να ελαττώσουμε το διάστημα.
- Αν σε κάποιο διάστημα υπάρχει περιττός αριθμός αλλαγών προσήμου (>1) στην τιμή της $\dot{x}_1(T/2)$, τότε πιθανόν να μην εντοπισθούν κάποιες από αυτές. Όμως ισχύει εδώ ότι και στην προηγούμενη περίπτωση. Δηλαδή, αν υπάρχουν ενδείξεις ότι υπάρχουν περισσότερες συμμετρικές τροχιές τότε ελαττώνουμε και πάλι το διάστημα.
- Αν η συνολική εικόνα μιας χαρακτηριστικής καμπύλης στο διάγραμμα x_0 -C εμφανίζει κενά, τότε πρέπει να πυκνώσουμε τοπικά το δίκτυο αναζήτησης.

Εξάλλου κάποια πρακτικά προβλήματα που ανακύπτουν στις εφαρμογές, αντιμετωπίζονται με την ενσωμάτωση μικρών βοηθητικών ρουτινών, ούτως ώστε να αποφευχθούν εσφαλμένες εκτιμήσεις ή υπολογισμοί (Καλβουρίδης, 2004).

Αναφέρουμε τα βασικότερα:

- Απαιτείται ο ακριβής προσδιορισμός του σημείου τομής της τροχιάς με τον άξονα συμμετρίας με τη βοήθεια μικρής ρουτίνας που ενσωματώνεται στο αντίστοιχο πρόγραμμα H/Y.

- Όταν συμβαίνει αλλαγή στο πρόσημο της $\dot{x}_1(T/2)$ πρέπει να ελεγχθούν:
 - i) Αν η διαφορά μεταξύ των ημιπεριόδων $T/2$ των τροχιών αυτών είναι μικρή (συνήθως μικρότερη του 0.1)
 - ii) Αν η τιμή της $x_2(T/2)$ είναι μικρότερη κάποιας προκαθορισμένης τιμής (συνήθως μικρότερης 1.D-5). Αυτό γίνεται για να αποκλεισθεί το ενδεχόμενο τροχιών κρούσης, όπου η ολοκλήρωση τερματίζεται πριν η τροχιά τμήσει τον άξονα συμμετρίας)
 - iii) Αν οι συνιστώσες $\dot{x}_2(T/2)$ της ταχύτητας των δύο τροχιών είναι της αυτής τάξης μεγέθους.

8.6 Οικογένειες περιοδικών τροχιών-Χαρακτηριστικές καμπύλες

Οι περιοδικές τροχιές (επίπεδες ή τριδιάστατες) είναι κατανομημένες στο χώρο των φάσεων αρχικών συνθηκών σε κλάσεις, οι οποίες ονομάζονται **οικογένειες**. Κάθε οικογένεια μπορεί να απεικονισθεί με μία καμπύλη η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική καμπύλη** της οικογένειας, περιέχει δε άπειρες τροχιές, οι οποίες παρουσιάζουν παρόμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά, τα δε ποσοτικά τους χαρακτηριστικά (αρχικές συνθήκες, συνθήκες στην ημιπερίοδο, περίοδος, παράμετροι οριζόντιας και κατακόρυφης ευσταθείας, κ.λ.π) μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης της κλάσης (Hénon, 1965). Ειδικότερα κάθε οικογένεια επίπεδων συμμετρικών περιοδικών τροχιών, ορίζει μία χαρακτηριστική καμπύλη η οποία μπορεί να παρασταθεί είτε στο επίπεδο $x_{01}\dot{x}_{02}$, είτε (όπως είναι συνηθέστερο) στο επίπεδο $x_{01}C$ (C η σταθερά του ολοκληρώματος του Jacobi), αφού η \dot{x}_{02} μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια του ολοκληρώματος του Jacobi ως συνάρτηση της C . Η απεικόνιση των χαρακτηριστικών καμπύλων στο τελευταίο επίπεδο θεωρείται πιο χρήσιμη, αφού στο ίδιο επίπεδο απεικονίζονται και οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, οι οποίες δίνουν τις περιοχές επιτρεπτής κίνησης και επομένως τις περιοχές του επιπέδου στις οποίες πρέπει να περιορισθεί η έρευνα εντοπισμού των αρχικών συνθηκών μιας επίπεδης συμμετρικής περιοδικής τροχιάς.

Παρόμοια απεικόνιση των χαρακτηριστικών καμπύλων γίνεται και για κάποιες κατηγορίες τρισδιάστατων συμμετρικών περιοδικών κινήσεων σε τριδιάστατους χώρους, π.χ. τριδιάστατες περιοδικές τροχιές συμμετρικές ως προς ένα συντεταγμένο επίπεδο λ.χ το xz στο χώρο x_0z_0C , όπου ο ένας από τους δύο άξονες μετράει τις τιμές της σταθεράς C του Jacobi (Hadjifotinou & Kalvouridis, 2005; Hadjifotinou *et al.*, 2006; Kalvouridis & Hadjifotinou, 2011a).

8.7 Φυσικό πέρας των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών

Όπως γνωρίζουμε (Szebehely, 1967) οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών των περιοδικών τροχιών είτε είναι αυτοκλειόμενες, είτε έχουν μία φυσική δυναμική αρχή και ένα τέλος. Αυτή η φυσική αρχή και κατάληξη μπορεί να είναι είτε σε μία πρωτεύουσα μάζα του συστήματος (ejection-collision orbits), είτε σε ένα σημείο ισορροπίας, είτε τέλος στο άπειρο. Ένας τρόπος για να εκφράσουμε την αρχή του τερματισμού (termination principle), είναι να θεωρήσουμε το άθροισμα της μέγιστης διάστασης μιας τροχιάς (D), την περίοδό της (T) και τη σταθερά του Jacobi (C), ήτοι

$$s = D + T + |C| \quad (8.24)$$

Ο φυσικός τερματισμός, ή η αρχή μιας οικογένειας, θα αντιστοιχεί στην τιμή $s \rightarrow \infty$, εφόσον κάποιος από τους τρεις όρους τείνει στο άπειρο. Η αρχή αυτή διατυπώθηκε αρχικά από τον Strömberg και γι' αυτό φέρει το όνομά του.

Μία τροποποιημένη μορφή της αρχής του Strömberg, προτάθηκε από τον Birkhoff και δίνεται από τη σχέση:

$$\lim(D + T + \frac{1}{d}) = \infty \quad (8.25)$$

όπου D η μέγιστη διάσταση της τροχιάς, T η περίοδός της και d η ελάχιστη από όλες τις αποστάσεις μεταξύ της τροχιάς και των πρωτευόντων σωμάτων ή των θέσεων ισορροπίας.

8.8 Ευστάθεια των επίπεδων περιοδικών τροχιών

Όταν αναφερόμαστε στην ευστάθεια μιας επίπεδης περιοδικής τροχιάς εννοούμε ότι η τροχιά είναι ευσταθής τόσο σε διαταραχές στο επίπεδο της τροχιάς, όσο και σε διαταραχές κάθετες προς το επίπεδο αυτό. Στην πρώτη περίπτωση ομιλούμε για οριζόντια ευστάθεια (horizontal stability), ενώ στη δεύτερη για κατακόρυφη (vertical stability). Συχνά όμως στην πράξη αποδίδουμε τον χαρακτηρισμό της ευστάθειας περιοριζόμενοι μόνο στην οριζόντια ευστάθεια των επίπεδων περιοδικών τροχιών, δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτήν, ενώ με την κατακόρυφη ευστάθεια ασχολούμαστε κυρίως όταν πρόκειται να μελετήσουμε τις τρισδιάστατες τροχιές που πηγάζουν (διακλαδίζονται) από τις επίπεδες.

8.9 Μέθοδοι προσδιορισμού της οριζόντιας ευστάθειας

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τον τρόπο υπολογισμού της οριζόντιας ευστάθειας των επίπεδων τροχιών και να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η μελέτη αφορά στα τμήματα των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών που βρίσκονται μέσα στην περιοχή του διαγράμματος x_0-C που εξετάσαμε. Οι περισσότερες οικογένειες απλών, διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών που εντοπίσαμε, δεν παρουσιάζουν περιοχές ευστάθειας, ενώ εντοπίσαμε και τροχιές που παρουσιάζουν ευστάθεια σε περιορισμένες περιοχές.

8.9.1 Μέθοδος των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα

Η μέθοδος αυτή αποτελεί τον θεωρητικά ακριβέστερο τρόπο υπολογισμού των παραμέτρων ευσταθείας, και βασίζεται στην εύρεση των ιδιοτιμών του μονόδρομου $\mathcal{D}(T)$ πίνακα μιας περιοδικής τροχιάς, δηλαδή του πίνακα πρώτης μεταβολής (matrizant) $\mathcal{D}(t)$ κατά τη στιγμή $t=T$ της ολοκλήρωσης ενός πλήρους κύκλου (περιόδου) της συγκεκριμένης περιοδικής τροχιάς. Βέβαια είναι πιο σύνθετος τρόπος υπολογισμού αφού απαιτεί την επίλυση τόσο των εξισώσεων της κίνησης όσο και των εξισώσεων πρώτης μεταβολής:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}} \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{j0}} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (8.26)$$

Αυτό σημαίνει ότι για τις επίπεδες κινήσεις θα πρέπει να επιλύσουμε ένα σύστημα με 20 συνολικά εξισώσεις (4+16), ενώ για τις κινήσεις στο χώρο οι σχέσεις που απορρέουν από την (8.26) είναι 36, οπότε θα πρέπει να επιλύσουμε ένα σύστημα με 42 συνολικά εξισώσεις (6 + 36). Σε κάθε περίπτωση ακολουθεί η διαγωνιοποίηση του μονόδρομου πίνακα $\mathcal{D}(T)$ με την εύρεση των ιδιοτιμών αυτού. Από το είδος των ιδιοτιμών θα αντλήσουμε τις πληροφορίες για την κατάσταση της ευστάθειας ή αστάθειας της συγκεκριμένης περιοδικής τροχιάς. Στις επίπεδες τροχιές ο διαστάσεων 4x4 μονόδρομος πίνακας έχει τέσσερις συνολικά ιδιοτιμές, εν γένει μιγαδικές, ενώ στις τριδιάστατες τροχιές οι ιδιοτιμές είναι έξι. Σύμφωνα με τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων, οι περιοδικές λύσεις έχουν μία από τις ιδιοτιμές ίση με τη 1 (μονάδα). Γνωρίζουμε επίσης ότι στα χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα οι ιδιοτιμές εμφανίζονται κατά αντίστροφα ζεύγη. Συνεπώς όταν εξετάζουμε τις περιοδικές λύσεις ενός χαμιλτονιανού συστήματος, δύο από τις ιδιοτιμές θα είναι ίσες με τη μονάδα. Για να είναι ευσταθής μία περιοδική λύση θα πρέπει όλες οι ιδιοτιμές της να κείνται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Περιοριζόμενοι προς το παρόν στις επίπεδες λύσεις, θα έχουμε για τη διαδικασία διαγωνιοποίησης του μονόδρομου πίνακα και τη διερεύνηση του είδους της ευστάθειας:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{10}} - \lambda & \frac{\partial x_1}{\partial x_{20}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{30}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{40}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} - \lambda & \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{10}} - \lambda & \frac{\partial x_3}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial x_4}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_4}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_4}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_4}{\partial x_{10}} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8.27)$$

όπου όλα τα στοιχεία είναι υπολογισμένα στην περίοδο T . Από αυτήν προκύπτει μια πολυωνυμικής $4^{\text{ου}}$ βαθμού χαρακτηριστική της οποίας οι ρίζες-ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\text{Tr}\mathcal{D}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \quad \text{και} \quad \det\mathcal{D}(T) = 1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \quad (8.28)$$

Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ οι (8.28) δίνουν:

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \text{Tr}\mathcal{D}(T) - 2, \quad \text{και} \quad \lambda_3\lambda_4 = 1 \quad (8.29)$$

Κατά συνέπεια τα λ_3 και λ_4 αποτελούν τις ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής:

$$\lambda^2 + \kappa\lambda + 1 = 0 \quad (8.30)$$

όπου:

$$\kappa = 2 - \text{Tr}\mathcal{D}(T)$$

Δηλαδή οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα εξαρτώνται αποκλειστικά από το $\text{Tr}\mathcal{D}(T)$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $|k| < 2$, οι ιδιοτιμές λ_3 και λ_4 είναι συζυγείς μιγαδικοί, κείνται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και η τροχιά είναι ευσταθής (οριζόντια).
- Αν $|k| > 2$, τότε οι ιδιοτιμές λ_3 και λ_4 είναι πραγματικοί αριθμοί, κείνται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και η τροχιά είναι ασταθής.
- Αν $|k| = 2$, τότε $\lambda_3 = \lambda_4 = \pm 1$ οι ιδιοτιμές κείνται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και η τροχιά είναι οριακά ευσταθής (κρίσιμη τροχιά).

8.9.2 Μέθοδος του Hénon

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η ευστάθεια των επίπεδων περιοδικών τροχιών μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια της απεικόνισης Poincaré των λύσεων αυτών. Με άλλα λόγια, μελετούμε τη συμπεριφορά των τομών των λύσεων με την επιφάνεια τομής $x_2 = 0$ (αναλλοίωτα σημεία), όπως αυτές απεικονίζονται σε ένα διάγραμμα (x_1, x_3) , σε ισοενεργειακές διαταραχές των μεταβλητών αυτών που επιβάλλουμε στις αρχικές

συνθήκες. Έτσι, η μελέτη της ευστάθειας των περιοδικών τροχιών ανάγεται ουσιαστικά στη μελέτη της ευστάθειας των αναλλοίωτων σημείων της απεικόνισης.

Θεωρούμε μία επίπεδη περιοδική τροχιά με αρχικές συνθήκες $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$ της οποίας την ευστάθεια πρόκειται να μελετήσουμε με την προτεινόμενη μέθοδο του Hénon όπου ως επιφάνεια τομής θα χρησιμοποιήσουμε το επίπεδο $x_2 = 0$. Εξάλλου διαθέτουμε και ένα ολοκλήρωμα τύπου Jacobi, που αν το εφαρμόσουμε για τις αρχικές συνθήκες θα είναι,

$$H(x_{10}, 0, x_{30}, x_{40}) = C \quad (8.31)$$

Η τιμή x_{40} μπορεί να υπολογισθεί από την (8.31). Έτσι, για την τροχιά αυτή θα ισχύει:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_{10}, x_{30}; C) \\ x_3 &= g(x_{10}, x_{30}; C) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Επειδή η τροχιά είναι περιοδική θα ισχύει γενικά

$$(x_{1(t=T)} = x_{10}, x_{2(t=T)} = x_{20}, x_{3(t=T)} = x_{30}, x_{4(t=T)} = x_{40}) \quad (8.33)$$

ενώ σε ένα αναλλοίωτο σημείο με τις προϋποθέσεις που θέσαμε θα ισχύουν οι συνθήκες

$$x_{1(t=T)} = x_{10}, x_{3(t=T)} = x_{30} \quad (8.34)$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια της τροχιάς, θεωρούμε τις τομές με το επίπεδο $x_2=0$ μιας "γειτονικής" λύσης, που αντιστοιχεί σε "γειτονικές" αρχικές συνθήκες

$$\underline{x}'_0 = (x'_{10}, x'_{20}, x'_{30}, x'_{40}) \text{ με } x'_{i0} = x_{i0} + \Delta x_{i0}$$

(υπενθυμίζουμε τον συμβολισμό για το επίπεδο $x_1=x, x_2=y, x_3=\dot{x}, x_4=\dot{y}$). Η λύση αυτή όπως και η αρχική μη διαταραγμένη θα ικανοποιεί το ολοκλήρωμα της κίνησης (αφού θεωρήσαμε ισοενεργειακές τροχιές)

$$H'(x'_{10}, 0, x'_{30}, x'_{40}) = H(x_{10}, 0, x_{30}, x_{40}) = C. \quad (8.35)$$

Για τις "διαταραγμένες" αρχικές συνθήκες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x'_1 &= f(x'_{10}, x'_{30}; C) \\ x'_3 &= g(x'_{10}, x'_{30}; C) \end{aligned} \quad (8.36)$$

όπου:

$$x'_1 = x_1 + \Delta x_1$$

$$x'_3 = x_3 + \Delta x_3$$

Συνεπώς, η σχέση (8.36) γράφεται:

$$x_1 + \Delta x_1 = f(x_{10} + \Delta x_{10}, x_{30} + \Delta x_{30}; C) \quad (8.37)$$

$$x_3 + \Delta x_3 = g(x_{10} + \Delta x_{10}, x_{30} + \Delta x_{30}; C)$$

Αναλύοντας σε σειρές Taylor τα δεύτερα μέλη των (8.37) και θεωρώντας μόνο τους γραμμικούς όρους παίρνουμε:

$$x_1 + \Delta x_1 = f(x_{10}, x_{30}; C) + \frac{\partial f}{\partial x_{10}} \Delta x_{10} + \frac{\partial f}{\partial x_{30}} \Delta x_{30}$$

$$x_3 + \Delta x_3 = g(x_{10}, x_{30}; C) + \frac{\partial g}{\partial x_{10}} \Delta x_{10} + \frac{\partial g}{\partial x_{30}} \Delta x_{30}$$

Λόγω της (8.32) καταλήγουμε στις

$$\Delta x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_{10}} \Delta x_{10} + \frac{\partial f}{\partial x_{30}} \Delta x_{30} \quad (8.38)$$

$$\Delta x_3 = \frac{\partial g}{\partial x_{10}} \Delta x_{10} + \frac{\partial g}{\partial x_{30}} \Delta x_{30}$$

Αν θέσουμε:

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_{10}}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial x_{30}} \quad (8.39)$$

$$c = \frac{\partial g}{\partial x_{10}}, \quad d = \frac{\partial g}{\partial x_{30}}$$

τότε η (8.39) μπορεί να γραφεί ως:

$$\Delta x_1 = \alpha \Delta x_{10} + b \Delta x_{30} \quad (8.40)$$

$$\Delta x_3 = c \Delta x_{10} + d \Delta x_{30}$$

όπου οι ποσότητες α , b , c και d , ονομάζονται παράμετροι ευστάθειας ή δείκτες ευαισθησίας.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα των συντελεστών του συστήματος (8.36) που συνδέουν γραμμικά τις μεταβολές:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \lambda \Delta x_{10} \\ \Delta x_3 &= \lambda \Delta x_{30}\end{aligned}\tag{8.41}$$

σχετίζονται με τους χαρακτηριστικούς εκθέτες του Poincare με μία σχέση της μορφής:

$$\lambda = e^{\alpha T}\tag{8.42}$$

Το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα ιδιοτιμών του πίνακα των συντελεστών του συστήματος (8.36). Συνδυάζοντας τις (8.40) και (8.41) έχουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{10} \\ \Delta x_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{8.43}$$

Για να έχει το ομογενές σύστημα (8.43) λύση διάφορη της τετριμμένης θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι ίση με το μηδέν.

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0\tag{8.44}$$

Από το ανάπτυγμα της (8.44) προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 - (\alpha + d)\lambda + \alpha d - bc = 0\tag{8.45}$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο διατήρησης των εμβαδών (ή των όγκων σε περιπτώσεις πολυδιάστατων χώρων) στο χώρο των φάσεων, που εκφράζεται με τη σταθερότητα της Ιακωβιανής (θεώρημα του Liouville):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{10}} & \frac{\partial f}{\partial x_{30}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{10}} & \frac{\partial g}{\partial x_{30}} \end{vmatrix} = 1, \text{ ή } \begin{vmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha d - bc = 1\tag{8.46}$$

η (8.45) γράφεται ως εξής:

$$\lambda^2 - (\alpha + d)\lambda + 1 = 0\tag{8.47}$$

Οπότε:

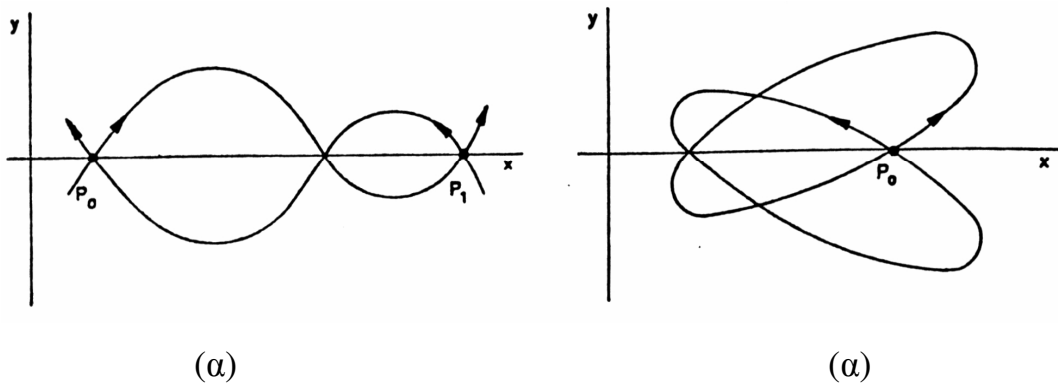
- Αν $|\alpha + d| > 2$, τότε η (8.47) έχει θετική διακρίνουσα και δύο πραγματικές ρίζες η μία από τις οποίες είναι μεγαλύτερη του mod1, οπότε το αναλλοίωτο σημείο συνεπώς και η τροχιά είναι ασταθής.

- Αν $|a + d| < 2$, τότε η (8.47) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες mod 1 και το αναλλοίωτο σημείο συνεπώς και η τροχιά είναι ευσταθής.

Με άλλα λόγια ευσταθείς περιοχές σε μια χαρακτηριστική καμπύλη εμφανίζονται εκεί όπου $-2 \leq a + d \leq 2$. Έτσι κάθε φορά που η τιμή της ποσότητας $a + d$ περνάει τις οριακές τιμές $+2$ ή -2 , θα έχουμε αλλαγή από αστάθεια σε ευστάθεια και αντιστρόφως, φαινόμενο που ο Poincaré αποκάλεσε "ανταλλαγή των ευσταθειών". Στις περιπτώσεις αυτές ονομάζουμε κρίσιμη τροχιά πρώτου είδους κάθε περιοδική τροχιά της οικογένειας (τάξης) για την οποία η ποσότητα $a + d = +2$ και κρίσιμη τροχιά δεύτερου είδους κάθε περιοδική τροχιά της οικογένειας για την οποία $a + d = -2$.

Αν και αρκεί ο προσδιορισμός των παραμέτρων a και d για τον εντοπισμό των περιοχών ευστάθειας καθώς και τον καθορισμό των κρίσιμων περιοδικών τροχιών πρώτου και δεύτερου είδους, εντούτοις ο καθορισμός των τιμών και των δύο άλλων παραμέτρων b και c είναι εξαιρετικά χρήσιμος για τη μελέτη των διακλαδώσεων που πηγάζουν από την χαρακτηριστική καμπύλη μιας οικογένειας. **Η σχέση (8.46) χρησιμοποιείται σαν κριτήριο ελέγχου της ακρίβειας των υπολογισμών των τεσσάρων παραμέτρων ευσταθείας.**

Όσον αφορά στην ειδική περίπτωση των συμμετρικών τροχιών όπου $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$ (εκκίνηση κάθετη στον άξονα συμμετρίας x_1 και κάθετη διέλευση στην ημιπερίοδο από τον ίδιο άξονα), είδαμε ότι κατά τον μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς τον άξονα x , οι εξισώσεις κινήσεως παραμένουν οι ίδιες όταν αλλάζουμε ταυτόχρονα το πρόσημο της συντεταγμένης y (ή x_2) και του χρόνου t (Hénon, 1965). Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε τροχιά, αντιστοιχεί μία άλλη τροχιά συμμετρική ως προς τον άξονα συμμετρίας, η οποία διαγράφεται με αντίθετη φορά και έχει την ίδια ενέργεια με την πρώτη (Σχήμα 8.1).



Σχήμα 8.1. (Hénon, 1965). (α) Τυχούσα τροχιά και η συμμετρική της ως προς τον άξονα συμμετρίας Ox , (β) περιοδική τροχιά και η συμμετρική της ως προς τον ίδιο άξονα

Συνεπώς, για τις συμμετρικές τροχιές θα ισχύει

$$\alpha = d$$

και κατά συνέπεια η χαρακτηριστική (8.47) θα παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0 \tag{8.51}$$

Έτσι, οι συνθήκες ευστάθειας για την περίπτωση των συμμετρικών τροχιών διαμορφώνονται στις εξής:

- Αν $|\alpha| > 1$, τότε έχουμε ασταθή τροχιά.
- Αν $|\alpha| < 1$, τότε έχουμε ευσταθή τροχιά.

Συνεπώς, στις περιοχές της χαρακτηριστικής καμπύλης των συμμετρικών περιοδικών τροχιών όπου $-1 \leq \alpha \leq 1$ θα υπάρχει ευστάθεια. Κάθε φορά που η τιμή της ποσότητας α περνάει τις οριακές τιμές $+1$ ή -1 , θα έχουμε αλλαγή από αστάθεια σε ευστάθεια και αντιστρόφως.

Στην πράξη για να υπολογίσουμε τον συντελεστή α υπολογίζουμε αριθμητικά μία τροχιά πολύ γειτονική προς την αρχική περιοδική, όπου παίρνουμε το Δx_0 πολύ μικρό και το $\Delta x_{30} = 0$. Τότε στο τέλος της περιόδου (δηλαδή κατά την p -οστή τομή με τον άξονα $x_2=0$), θα έχουμε:

$$\alpha = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} = \frac{x_1'(T) - x_1(T)}{x'_{10} - x_{10}} = \frac{x_1'(T) - x_{10}}{x'_{10} - x_{10}} \quad (8.52\alpha)$$

όπου x'_{10} και $x_1'(T)$ είναι η αρχική συνθήκη και η συνθήκη κατά την "περίοδο" της διαταραγμένης λύσης.

Με την ίδια ολοκλήρωση υπολογίζουμε και τον συντελεστή b από τη σχέση

$$b = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_{30}} = \frac{x_1'(T) - x_1(T)}{x'_{30} - x_{30}} = \frac{x_1'(T) - x_{10}}{x'_{30} - x_{30}} \quad (8.52\beta)$$

Οι άλλοι δύο συντελεστές c και d θα υπολογισθούν αν θεωρήσουμε το $\Delta x_0 = 0$ και το Δx_{30} πολύ μικρό και κάνουμε με αυτές τις αρχικές συνθήκες μια νέα ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης, ολοκληρώνοντας και πάλι μέχρι την περίοδο (δηλαδή την p -οστή τομή με τον άξονα $x_2=0$).

$$c = \frac{\Delta x_3}{\Delta x_{10}} = \frac{x_3'(T) - x_3(T)}{x'_{10} - x_{10}} = \frac{x_3'(T) - x_{30}}{x'_{10} - x_{10}} \quad (8.53\alpha)$$

$$d = \frac{\Delta x_3}{\Delta x_{30}} = \frac{x_3'(T) - x_3(T)}{x'_{30} - x_{30}} = \frac{x_3'(T) - x_{30}}{x'_{30} - x_{30}} \quad (8.53\beta)$$

8.10 Διαγράμματα οριζόντιας ευστάθειας-Διακλαδώσεις των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών των επίπεδων περιοδικών τροχιών-Κρίσιμες τροχιές πρώτου και δευτέρου είδους

Η παράμετρος οριζόντιας ευσταθείας a μιας οικογένειας συμμετρικών περιοδικών τροχιών μεταβάλλεται κατά τρόπο συνεχή κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης της οικογένειας. Ο τρόπος μεταβολής της μας δίνει πληροφορίες όχι μόνο για τις περιοχές ευστάθειας της συγκεκριμένης οικογένειας, αλλά και για τα σημεία της χαρακτηριστικής από τα οποία διακλαδίζονται άλλες οικογένειες συμμετρικών

περιοδικών τροχιών της ίδιας με αυτήν ή διαφορετικής πολλαπλότητας, ή ακόμη και οικογένειες ασύμμετρων περιοδικών τροχιών. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των διαγραμμάτων ευσταθείας τα οποία αφορούν ως επί πλείστον τη βασική παράμετρο α και συνήθως σχεδιάζονται σε άξονες (α, x_{10}) . Όπως ήδη αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο, το τμήμα της χαρακτηριστικής καμπύλης μίας οικογένειας για το οποίο η παράμετρος οριζόντιας ευστάθειας α , λαμβάνει τιμές τέτοιες ώστε:

$$-1 \leq \alpha \leq 1 \quad (8.54)$$

χαρακτηρίζεται από ευστάθεια. Στην περιοχή αυτή ισχύει:

$$\alpha = \cos\left(2\pi \frac{\kappa}{\lambda}\right) = \cos\varphi \quad (8.55)$$

όπου κ, λ είναι **πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι με $\kappa < \lambda$** . Από τις σχέσεις (8.54) και (8.55) προκύπτει ότι όλες οι διακλαδώσεις της αρχικής οικογένειας με οικογένειες διαφόρων πολλαπλοτήτων «συνωστίζονται» μέσα σε αυτό το διάστημα. Για το λόγο αυτό, στα διαγράμματα αυτά χαράσσουμε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα x_{10} στις θέσεις $\alpha=+1$ και $\alpha=-1$, οι οποίες καθορίζουν την περιοχή ευστάθειας του δυναμικού συστήματος. Οι περιοδικές τροχιές που αντιστοιχούν στις τιμές $\alpha=+1$ ή -1 ονομάζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές (critical periodic orbits) (Hénon & Guyot, 1970). Αυτές που αντιστοιχούν στην τιμή $\alpha=+1$ ονομάζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές πρώτου είδους και αυτές που αντιστοιχούν στην τιμή $\alpha=-1$ ονομάζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές δευτέρου είδους.

Στη σχέση (8.55) η γωνία φ είναι η γωνία περιστροφής, δηλαδή η γωνία που ορίζει τις μη μοναδιαίες ιδιοτιμές του πίνακα $\mathcal{D}(T)$ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Αν θεωρήσουμε ότι η τροχιά έχει δύο φορές την περίοδο, οι ιδιοτιμές αυτές θα περιστραφούν πάνω στο μοναδιαίο κύκλο κατά γωνία φ . Γενικότερα οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathcal{D}(\lambda T)$ ορίζονται στο μοναδιαίο κύκλο με περιστροφή κατά γωνία $\theta = \lambda\varphi$. Σε ένα σημείο διακλάδωσης λοιπόν, οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathcal{D}(\lambda T)$ θα είναι όλες ίσες με τη μονάδα. Οι τροχιές που αντιστοιχούν σε αυτά τα σημεία είναι οι κρίσιμες τροχιές πρώτου και δευτέρου είδους.

Στον Πίνακα 8.1 που ακολουθεί δίνουμε τις τιμές που μπορεί να έχει ο λόγος κ/λ (Markellos, 1974) με τις προϋποθέσεις που τέθηκαν, μέχρι την τιμή λ=8, ενώ στον Πίνακα 8.2 δίνουμε τις τιμές της παραμέτρου α που αντιστοιχούν σε αυτές τιμές και αφορούν στις διακλαδώσεις των απλών περιοδικών τροχιών. Παρόμοιοι πίνακες μπορούν να καταρτισθούν για περιοδικές τροχιές πολλαπλότητας n, οπότε για τους ίδιους λόγους του Πίνακα 8.1 θα έχουμε διακλαδώσεις σε επίπεδες τροχιές πολλαπλότητας λn (Πίνακας 8.3). Να τονιστεί ότι στο λόγο κ/λ, η τιμή κ αντιστοιχεί στην πολλαπλότητα της οικογένειας από την οποία πηγάζουν διακλαδώσεις, ενώ η τιμή λ αντιστοιχεί στην πολλαπλότητα των διακλαδιζόμενων οικογενειών

Πίνακας 8.1 Τιμές του λόγου κ/λ

		Τιμές λ						
		2	3	4	5	6	7	8
Τιμές κ	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
	2		2/3		2/5		2/7	
	3			3/4	3/5		3/7	3/8
	4				4/5		4/7	
	5					5/6	5/7	5/8
	6						6/7	
	7							7/8

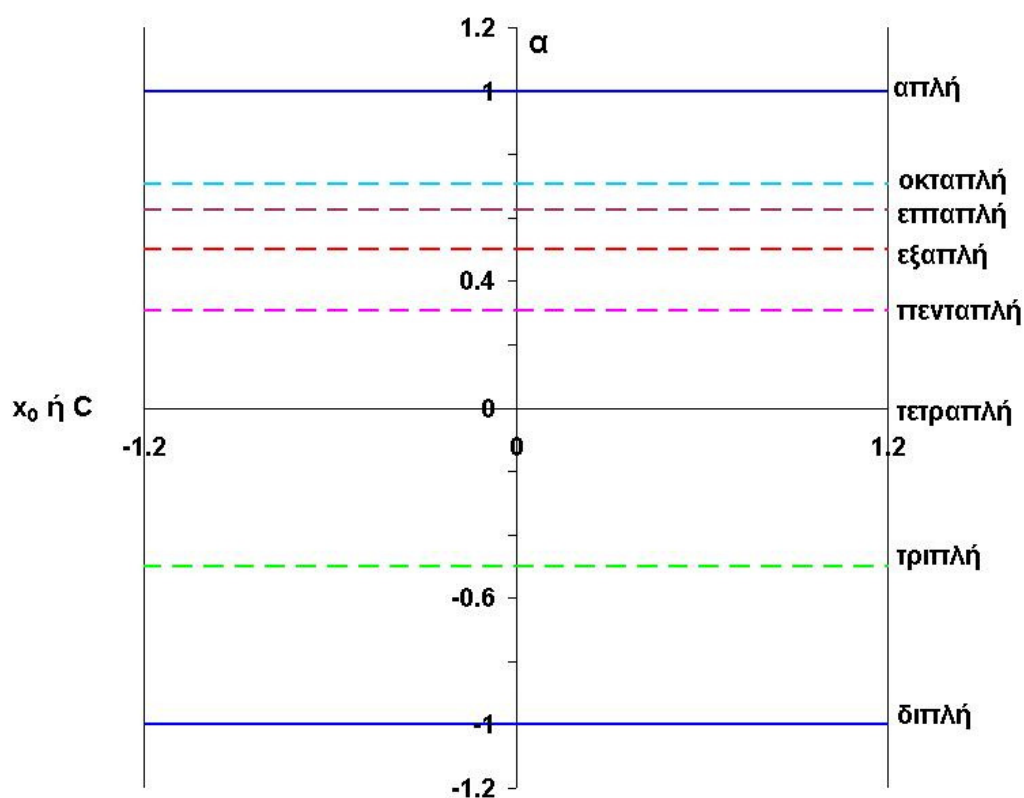
Πίνακας 8.2. Διακλαδώσεις βασικής οικογένειας απλών περιοδικών τροχιών

κ/λ	Τιμή παραμέτρου ευστάθειας α	Πολλαπλότητα διακλαδούμενης οικογένειας
1/1	α=+1	απλή (ή ασύμμετρη ή καμμία)
1/2	α= cos2π(1/2)=-1	διπλή

1/3	$\alpha = \cos 2\pi(1/3) = -0.5$	τριπλή
1/4	$\alpha = \cos 2\pi(1/4) = 0$	τετραπλή
1/5	$\alpha = \cos 2\pi(1/5) = +0.309$	πενταπλή
1/6	$\alpha = \cos 2\pi(1/6) = +0.5$	εξαπλή
1/7	$\alpha = \cos 2\pi(1/7) = +0.623$	επταπλή
1/8	$\alpha = \cos 2\pi(1/8) = +0.707$	οκταπλή

Πίνακας 8.3. Διακλαδώσεις βασικών οικογενειών περιοδικών τροχιών διαφόρων πολλαπλοτήτων

κ/λ	Τιμή παραμέτρου ευστάθειας α	Πολλαπλότητα διακλαδούμενης οικογένειας
2/3	$\alpha = \cos 2\pi(2/3) = -0.5$	τριπλή
2/5	$\alpha = \cos 2\pi(2/5) = -0.809$	πενταπλή
2/7	$\alpha = \cos 2\pi(2/7) = -0.223$	επταπλή
3/4	$\alpha = \cos 2\pi(3/4) = 0$	τετραπλή
3/5	$\alpha = \cos 2\pi(3/5) = -0.809$	πενταπλή
3/7	$\alpha = \cos 2\pi(3/7) = -0.9$	επταπλή
3/8	$\alpha = \cos 2\pi(3/8) = -0.707$	οκταπλή
4/5	$\alpha = \cos 2\pi(4/5) = +0.309$	πενταπλή
4/7	$\alpha = \cos 2\pi(4/7) = -0.892$	επταπλή
5/6	$\alpha = \cos 2\pi(5/6) = +0.5$	εξαπλή
5/7	$\alpha = \cos 2\pi(5/7) = +0.223$	επταπλή
5/8	$\alpha = \cos 2\pi(5/8) = -0.707$	οκταπλή
6/7	$\alpha = \cos 2\pi(6/7) = +0.623$	επταπλή
7/8	$\alpha = \cos 2\pi(7/8) = +0.707$	οκταπλή



Σχήμα 8.2. "Template" των τιμών της παραμέτρου οριζόντιας ευστάθειας α , για διακλαδώσεις από μία βασική (μητρική) οικογένεια συμμετρικών απλών περιοδικών τροχιών. Η κλίμακα τιμών του οριζόντιου άξονα (που μπορεί να είναι άξονας τιμών του x_0 ή του C) είναι απλώς ενδεικτική. Στην τιμή $\alpha=1$, ενδέχεται να υπάρχει διακλάδωση με οικογένεια ασύμμετρων περιοδικών τροχιών (Hénon, 1965), ή να μην υπάρχει διακλάδωση με άλλη οικογένεια, όπως αναφέρουμε στο κείμενο που ακολουθεί

Σύμφωνα με τον Hénon (1965), μπορούμε για τις συμμετρικές περιοδικές τροχιές να εξιδικεύσουμε τις διακλαδώσεις στα κρίσιμα σημεία πρώτου ($\alpha=1$) ή δευτέρου ($\alpha=-1$) είδους, με τη βοήθεια των δύο παραμέτρων ευστάθειας b, c , ως εξής:

- $\alpha=1, b \neq 0, c=0$.

(i) Δεν υπάρχει διακλάδωση αλλά η χαρακτηριστική καμπύλη της βασικής οικογένειας παρουσιάζει ακρότατο ως προς το C (στο επίπεδο x_0C) (Σχήμα 8.3α).

(ii) Η βασική οικογένεια τέμνεται (διασταυρώνεται) με μία άλλη οικογένεια συμμετρικών περιοδικών τροχιών της ίδιας πολλαπλότητας (Σχήμα 8.3β).

(iii) Η βασική οικογένεια τέμνεται (διασταυρώνεται) με μία άλλη οικογένεια συμμετρικών περιοδικών τροχιών της ίδιας πολλαπλότητας, η οποία επί πλέον παρουσιάζει ακρότατο ως προς C (Σχήμα 8.3γ).

- $\alpha = 1, b = 0, c \neq 0$.

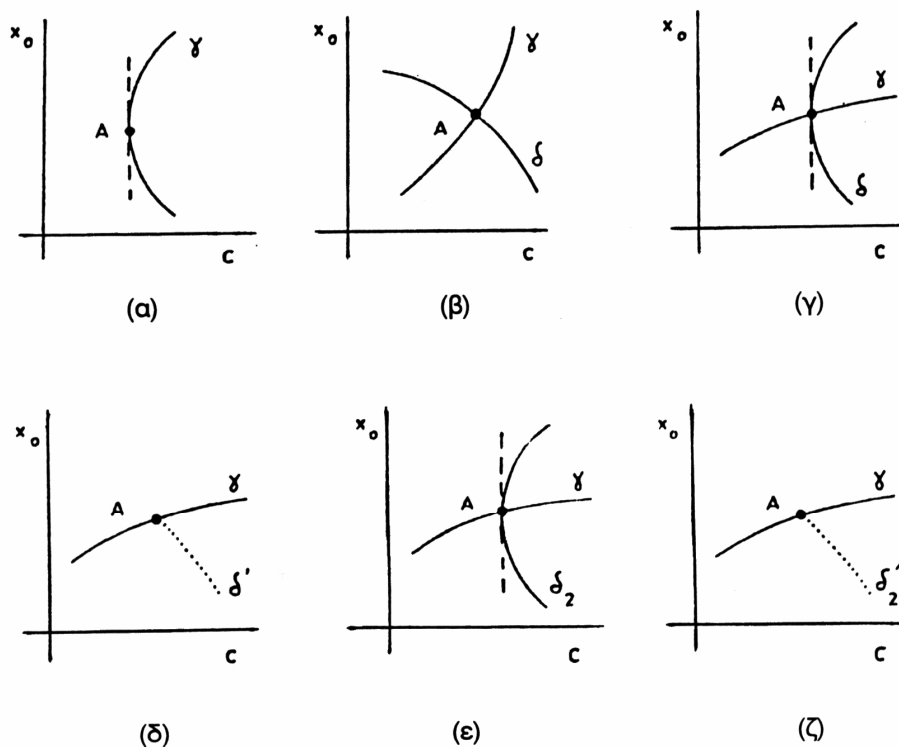
Η βασική οικογένεια διασταυρώνεται με μία οικογένεια ασύμμετρων περιοδικών τροχιών της ίδιας πολλαπλότητας (Σχήμα 8.3δ).

- $\alpha = -1, b \neq 0, c = 0$.

Η βασική οικογένεια διασταυρώνεται κατά ορθή γωνία με μία οικογένεια συμμετρικών περιοδικών τροχιών διπλάσιας πολλαπλότητας (Σχήμα 8.3ε).

- $\alpha = -1, b = 0, c \neq 0$.

Η βασική οικογένεια διασταυρώνεται λοξά με μία οικογένεια συμμετρικών περιοδικών τροχιών διπλάσιας πολλαπλότητας (Σχήμα 8.3ζ).



Σχήμα 8.3. (Hénon, 1965). (α)-(ζ) Οι 6 βασικοί τύποι διακλαδώσεων στα κρίσιμα σημεία. Η διάστικτη καμπύλη της περίπτωσης (δ) αποτελεί την προβολή της χαρακτηριστικής της οικογένειας των ασύμμετρων περιοδικών τροχιών που εξελίσσεται εκτός του επιπέδου

Όπως σημειώνει ο Hénon (1965), όλη η προηγούμενη ανάλυση που αναφέρεται σε ένα κρίσιμο σημείο των χαρακτηριστικών των απλών περιοδικών τροχιών, μπορεί άμεσα να επεκταθεί στην περίπτωση των n -πολλαπλά περιοδικών τροχιών αρκεί να αντικατασταθεί παντού η λέξη "απλή περιοδική" με τη λέξη " n -περιοδική" και η λέξη "διπλά περιοδική" με τη λέξη " $2n$ -περιοδική". Επίσης αναφέρει τα εξής: "Επειδή συχνά η παράμετρος a παίρνει πολύ μεγάλες τιμές και από την άλλη, σημασία έχει η περιοχή τιμών της a μεταξύ $+1$ και -1 , γι' αυτό ο Von Hoerner (1963) προτείνει να χρησιμοποιηθούν οι τιμές που είναι αντιστρόφως ανάλογες του υπερβολικού ημιτόνου της a ".

Σε πρόσφατη μελέτη των διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών στο πρόβλημα του Hill με πλάτυνση του δευτερεύοντος primary, η Perdiou (2008) συμπλήρωσε τις παραπάνω συνθήκες του Hénon με την ακόλουθη περίπτωση που αφορά στις πολλαπλές περιοδικές τροχιές:

- $\alpha = 1, b = 0, c = 0$

Όταν ισχύει η συνθήκη αυτή, τότε μία οικογένεια περιοδικών τροχιών πολλαπλότητας $n > 1$ διακλαδίζεται σε μία οικογένεια περιοδικών τροχιών πολλαπλότητας m όπου m είναι υποπολλαπλάσιο του n . Στο σημείο της διακλάδωσης αυτής, η αρχική κάθετη διέλευση της n -περιοδικής τροχιάς από τον άξονα συμμετρίας συμπίπτει με την αρχική κάθετη διέλευση της m -περιοδικής τροχιάς από τον ίδιο άξονα, καθώς και με τις πλάγιες (μη κάθετες διελεύσεις) από τον άξονα συμμετρίας.

Παρατήρηση

Στο σημείο όπου διασταυρώνονται δύο οικογένειες διαφόρων πολλαπλοτήτων, η παράμετρος οριζόντιας ευστάθειας θα έχει διαφορετική τιμή, ανάλογα με το αν διατρέχουμε τη μία ή την άλλη χαρακτηριστική. Π.χ. αν υπάρχει διακλάδωση μιας απλής περιοδικής τροχιάς με μία τριπλή, τότε στο κοινό σημείο διασταύρωσης για την μεν απλή η παράμετρος ευστάθειας θα έχει τιμή $\alpha = -0.5$, ενώ διατρέχοντας την τριπλή περιοδική οικογένεια η τιμή της παραμέτρου θα είναι $\alpha = 1$. Αυτό έχει επιβεβαιωθεί στην πράξη από τον Barbanis (1985).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

9.1 Εισαγωγή

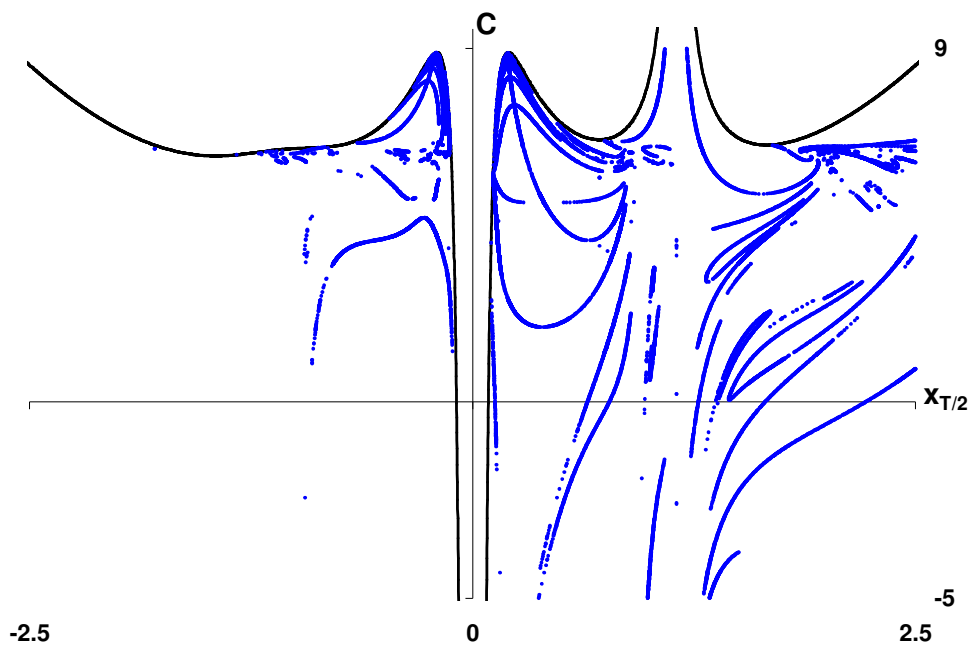
Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο παρουσίασης των αποτελεσμάτων με αυτόν στα προηγούμενα κεφάλαια, θα εξετάσουμε τις επίπεδες συμμετρικές περιοδικές τροχιές στις τρεις βασικές περιπτώσεις: (α) στη βαρυτική ($e=0$), (β) στην περίπτωση κεντρικού σώματος με δυναμικό Ma_{neven} και θετική παράμετρο e , και (γ) στην περίπτωση κεντρικού σώματος με δυναμικό Ma_{neven} και αρνητική παράμετρο e . Όσον αφορά στην πρώτη περίπτωση, παρότι έχει ήδη μελετηθεί από τους Kalnouridis *et al.*, (2008), κρίναμε σκόπιμο στην παρούσα διατριβή να εμπλουτίσουμε με νέες οικογένειες συμμετρικών περιοδικών τροχιών αρκετές περιοχές του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών, ώστε να διαμορφωθεί πληρέστερη εικόνα για την εξέλιξη των κινήσεων του σωματιδίου γεγονός που θα αποτελέσει ταυτόχρονα πολύτιμη βάση σύγκρισης για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Η δεύτερη περίπτωση (με $e>0$) παρουσιάζει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με την προηγούμενη και για το λόγο αυτό δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα. Αντίθετα, δίνεται έμφαση στην τρίτη περίπτωση ($e<0$) αφού εδώ η δυναμική του σωματιδίου διαφοροποιείται σημαντικά, όπως κατ'επανάληψη έχουμε τονίσει σε όλα τα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής. Στο πλαίσιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τις κατανομές των βασικών οικογενειών συμμετρικών περιοδικών τροχιών, την εξέλιξη των τροχιών ενδεικτικά σε κάποιες από αυτές, την παραμετρική μεταβολή τους και παράλληλα θα μελετήσουμε την ευστάθειά τους.

9.1.1 Βασικές αρχές που αφορούν στην αριθμητική διερεύνηση των τροχιών του μικρού σώματος

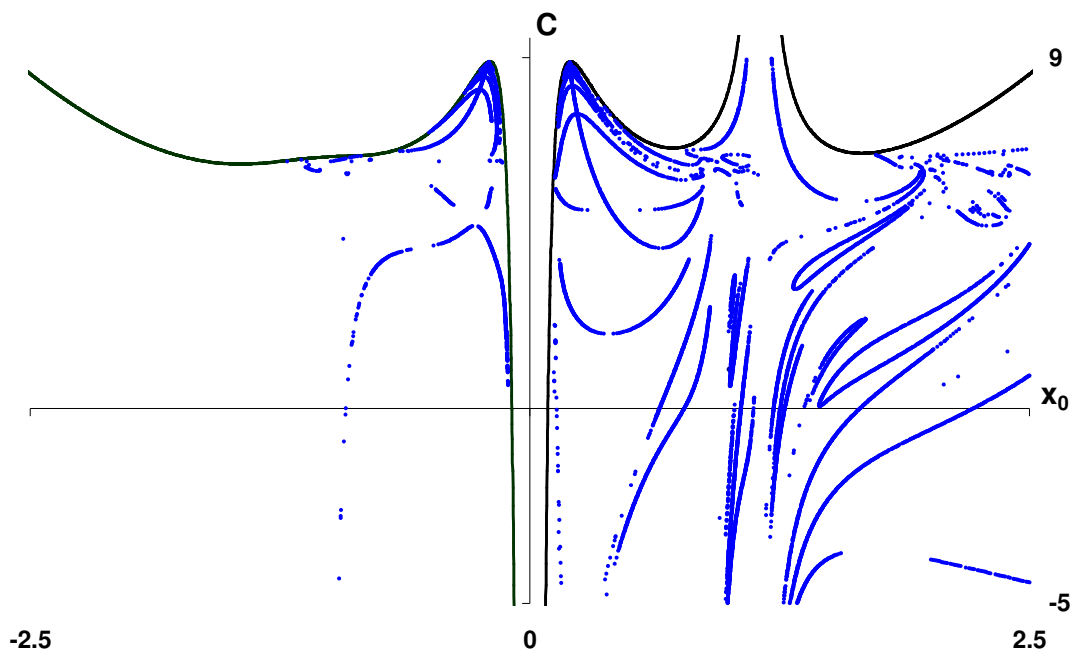
Υπενθυμίζουμε ότι:

- Το δυναμικό σύστημα είναι αυτόνομο αφού δεν εμπλέκεται άμεσα ο χρόνος ούτε στη δυναμική συνάρτηση, ούτε στις εξισώσεις κινήσεως και κατά συνέπεια ούτε και στο ολοκλήρωμα της ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ως αρχική θέση οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς. Ως τέτοιο λοιπόν επιλέγουμε το σημείο τομής της τροχιάς με τον άξονα Ox του συνοδικού συστήματος αναφοράς.
- Όλες οι επίπεδες κινήσεις του μικρού σώματος θεωρούμε ότι πραγματοποιούνται στο επίπεδο Oxy του στρεφομένου πλαισίου που είναι και το επίπεδο κίνησης των primaries.
- Η περιοδικότητα των κινήσεων αναφέρεται στο ίδιο πλαίσιο.
- Η έννοια της συμμετρίας αναφέρεται ως προς τον άξονα Ox του ίδιου συστήματος των συντεταγμένων, όπου ο θετικός ημιάξονας συνδέει το κεντρικό primary με το περιφερειακό P_1 .
- Η μεθοδος αναζήτησης που επιλέχθηκε είναι η grid-search (μέθοδος της σάρωσης των αρχικών συνθηκών), η οποία εφαρμόζεται στον φασικό χώρο των αρχικών συνθηκών $(x_0, 0, 0, \dot{y}_0)$, αφού η αρχική ταχύτητα \dot{y}_0 των επίπεδων συμμετρικών τροχιών υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος της κίνησης ως συνάρτηση της σταθεράς C και της αρχικής θέσης x_0 , $\dot{y}_0 = \pm\sqrt{2U - C}$.
- Όλες οι τροχιές υπολογίσθηκαν για θετικές τιμές της αρχικής ταχύτητας $\dot{y}_0 > 0$. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι τα διαγράμματα x_0-C κατανομής των χαρακτηριστικών καμπύλων των περιοδικών τροχιών περιττής πολλαπλότητας (απλές, τριπλές, κ.ο.κ.) που λαμβάνονται αν θεωρήσουμε ότι $\dot{y}_0 < 0$, συμπίπτουν ακριβώς με τα διαγράμματα $x_{T/2}-C$ των οικογενειών που λαμβάνονται θεωρώντας $\dot{y}_0 > 0$ (βλέπε Σχήματα 9.1α και 9.1β). Αυτό οφείλεται στο ότι οι συμμετρικές τροχιές περιττής πολλαπλότητας που

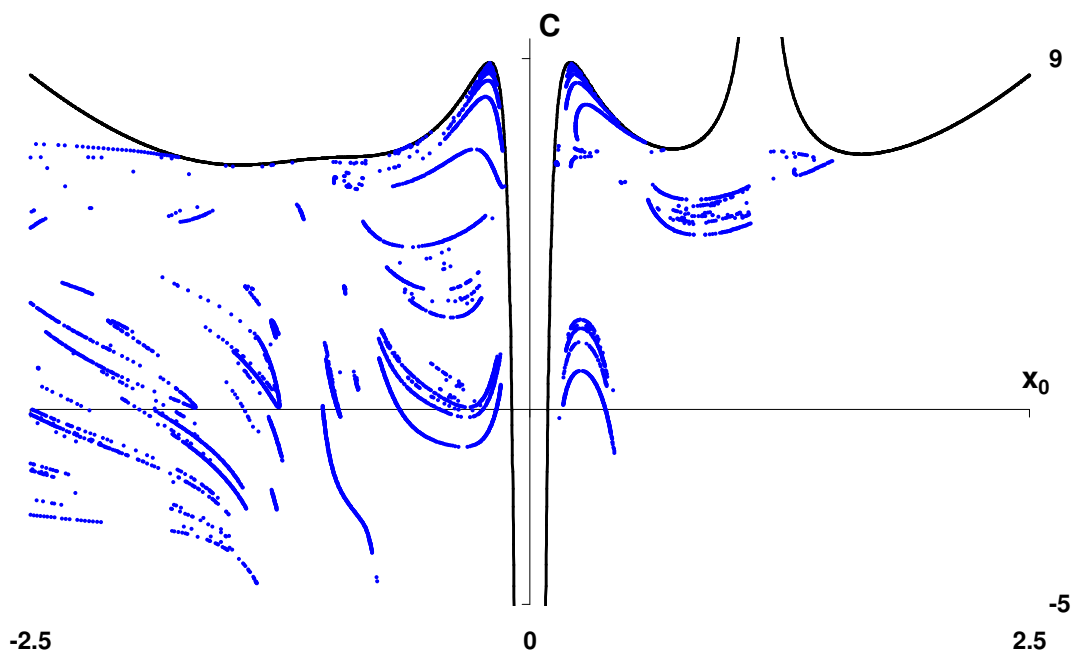
ξεκινούν κάθετα στον άξονα συμμετρίας στη θέση x_0 , τον ξανατέμνουν κάθετα στην ημιπερίοδο σε ένα σημείο $x_{T/2}$ με ταχύτητα $\dot{y}_{T/2}$ αντίθετης φοράς από αυτήν της \dot{y}_0 (δηλαδή αν $\dot{y}_0 > 0$, τότε $\dot{y}_{T/2} < 0$) (Σχήματα 9.2α, 9.2β). Αυτό δεν συμβαίνει στις τροχιές άρτιας πολλαπλότητας (διπλές, τετραπλές, κ.ο.κ.) (Σχήματα 9.1γ, 9.1δ, 9.1ε) όπου οι ταχύτητες \dot{y}_0 και $\dot{y}_{T/2}$ (στην αρχή και στην ημιπερίοδο) έχουν την ίδια φορά (και οι δύο θετικές ή και οι δύο αρνητικές) (Σχήματα 9.2γ, 9.2δ). Σε κάθε περίπτωση ($\dot{y}_0 > 0$ ή $\dot{y}_0 < 0$) στο διάγραμμα x_0 -C κάθε οικογένεια εμφανίζει δύο συζυγείς κλάδους και κατά την εφαρμογή της μεθόδου αναζήτησης grid-search απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή προκειμένου να μην θεωρηθούν ως διαφορετικές οικογένειες οι δύο αυτοί συζυγείς κλάδοι. Για την αποσαφήνιση αυτής της περίπτωσης παραθέτουμε στο Σχήμα 9.1στ την τροχιά μίας διπλής περιοδικής οικογένειας με $\dot{y}_0 > 0$, όπου με διαφορετικά χρώματα φαίνονται οι δύο συζυγείς κλάδοι της και γίνεται κατανοητό ότι εναλλαγή της αρχικής με την τελική θέση θα επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα.



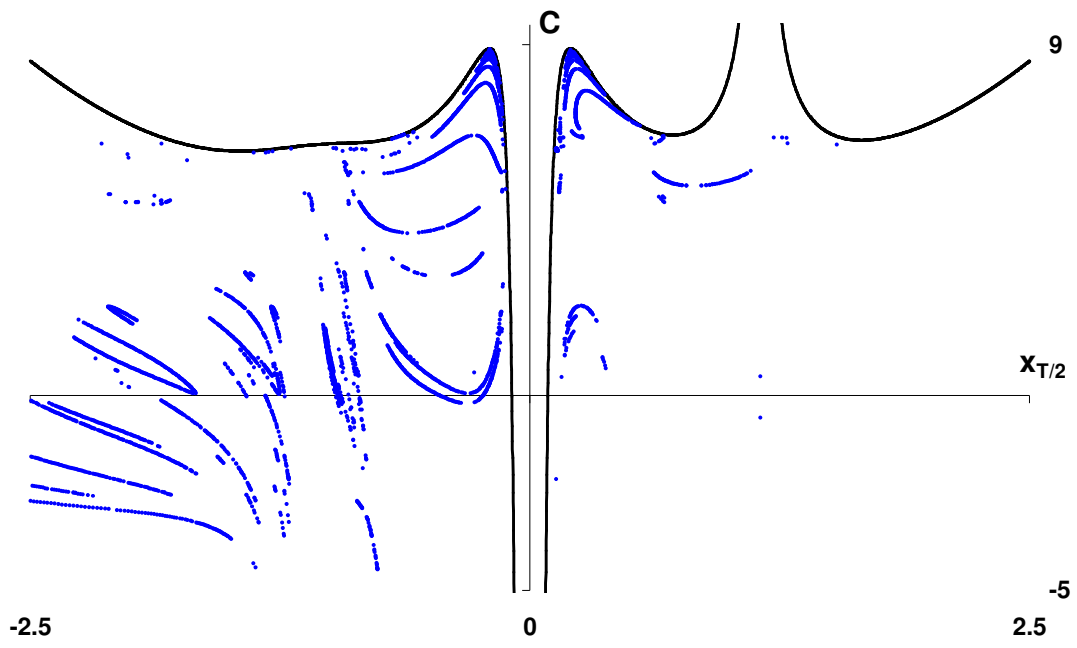
(α)



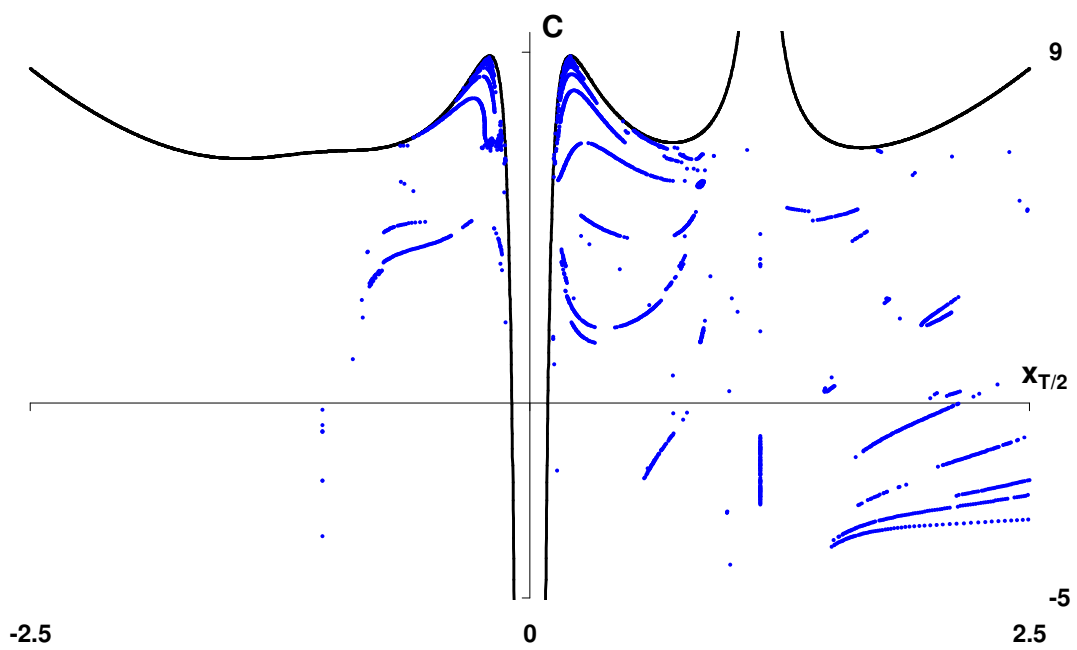
(β)



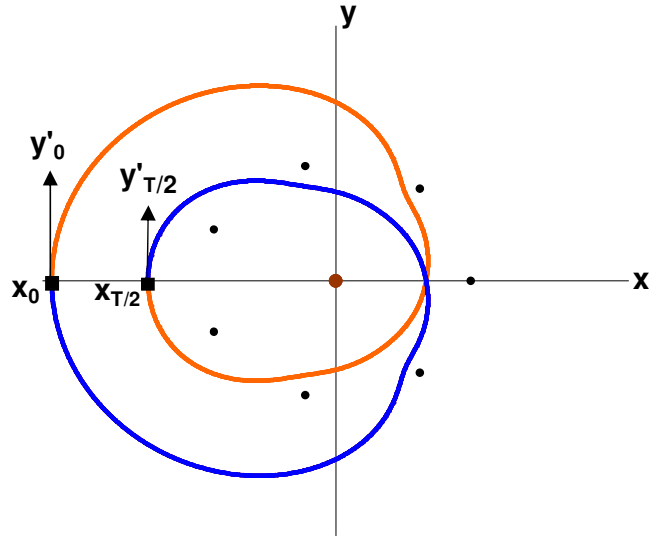
(γ)



(δ)

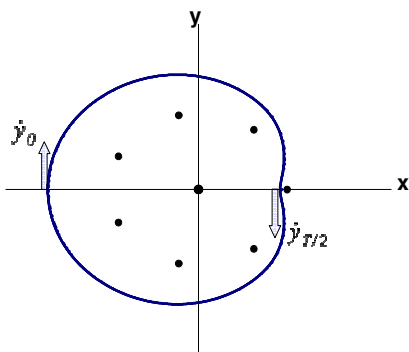


(ε)

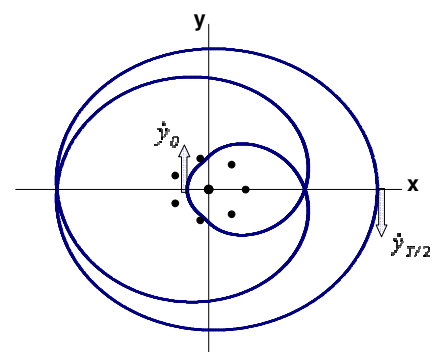


(στ)

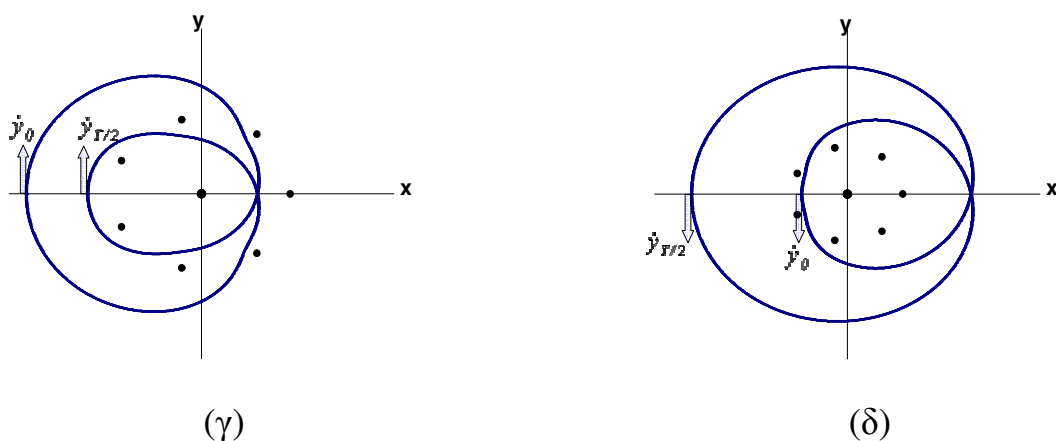
Σχήμα 9.1. Χαρακτηριστικές καμπύλες οικογενειών για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=-0.1$: (α) Διάγραμμα $x_{T/2}$ -C, απλών περιοδικών τροχιών με $\dot{y}_0 > 0$, (β) διάγραμμα x_0 -C απλών περιοδικών τροχιών με $\dot{y}_0 < 0$, (γ) διάγραμμα x_0 -C διπλών περιοδικών με $\dot{y}_0 > 0$, (δ) διάγραμμα $x_{T/2}$ -C διπλών περιοδικών τροχιών με $\dot{y}_0 > 0$, (ε) διάγραμμα $x_{T/2}$ -C διπλών περιοδικών τροχιών με $\dot{y}_0 < 0$ και (στ) χαρακτηριστική καμπύλη διπλής περιοδικής τροχιάς με σημειωμένες τις θέσεις και τις ταχύτητες στην περίοδο και στην ημιπερίοδο



(α)



(β)



Σχήμα 9.2. Φορές των ταχυτήτων κατά την αρχή των χρόνων και κατά την ημιπερίοδο σε τροχιές διαφορετικής πολλαπλότητας. (α) Απλή περιοδική τροχιά, (β) τριπλή περιοδική τροχιά, (γ) διπλή περιοδική τροχιά με $\dot{y}_0 > 0$ και $\dot{y}_{T/2} > 0$, (δ) διπλή περιοδική τροχιά με $\dot{y}_0 < 0$ και $\dot{y}_{T/2} < 0$

9.1.2 Συμβολισμοί των οικογενειών

Ενώ σε προηγούμενες εργασίες έχουν χρησιμοποιηθεί διάφοροι συμβολισμοί για τις οικογένειες των περιοδικών τροχιών διαφόρων σχηματισμών και παραλλαγών του δακτυλοειδούς προβλήματος (Kalvouridis, 1999b, 2001a, 2003; Psarros & Kalvouridis, 2005; Hadjifotinou & Kalvouridis, 2005; Κρουσταλλούδη, 2006; Elipe *et al.*, 2007; Kalvouridis *et al.*, 2008; Croustalloudi & Kalvouridis, 2008), στην παρούσα διατριβή κρίναμε ως καταλληλότερο και απλούστερο, έναν ελαφρά τροποποιημένο συμβολισμό, όπου κάθε οικογένεια περιοδικών κινήσεων θα ταυτοποιείται με ένα γράμμα της λατινικής αλφαβήτου (S για τις απλές περιοδικές τροχιές (Simple), D για τις διπλές (Double) και T για τις τριπλές (Triple)), θα συνοδεύεται δε από έναν αριθμό (μονοψήφιο, διψήφιο ή τριψήφιο) και σπανιότερα από ένα γράμμα στο τέλος, που θα ολοκληρώνει την ταυτοποίησή της. Μόνη εξαίρεση θα αποτελέσει η ταυτοποίηση των νέων οικογενειών με τις οποίες συμπληρώθηκε μία βαρυτική περίπτωση ($v=7$, $\beta=2$, $e=0$), που έχει μελετηθεί από τους Kalvouridis *et al.*, (2008) και παρουσιάζουμε στην παρούσα διατριβή, όπου ακολουθήθηκε η ονοματοδοσία που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτή.

Σημειώνουμε τέλος ότι κατά τη μελέτη της παραμετρικής μεταβολής των χαρακτηριστικών καμπύλων, ίδιες οικογένειες που εμφανίζονται στις διάφορες

περιπτώσεις (πλην της βαρυτικής) που μελετήσαμε, θα φέρουν τα ίδια στοιχεία ταυτότητας.

Στον Πίνακα 9.1α που ακολουθεί παραθέτουμε την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συμβολισμών, της βαρυτικής και της περίπτωσης με την παράμετρο Manev e.

Πίνακας 9.1α. Αντιστοιχία συμβολισμών των οικογενειών της βαρυτικής με αυτές της περίπτωσης με την παράμετρο Manev

ΒΑΡΥΤΙΚΗ	MANEV	ΒΑΡΥΤΙΚΗ	MANEV
SA ₀	S1	SS	S55
SA	S2	ST	S68
SB	S3	SW	S50
SC	S4	SX	S51
SF	S7	SN1	S73
SH	S8	SN3	S46
SI	S9	SN6	S11
SJ	S10	SUA	S45
SK	S13	SUA3	S44A
SM	S14	SUB	S44
SO	S15	SUC	S44B
SP	S16	SUE	S43B
SQ	S17	SUF	S41
SR	S18	SUH	S43

9.1.3 Κατηγορίες απλών περιοδικών τροχιών

Για να διευκολυνθούμε στην περιγραφή των απλών περιοδικών τροχιών-λύσεων θα χρησιμοποιήσουμε χαρακτηρισμούς που βασίζονται σε διάφορα κριτήρια που θέσαμε για το σκοπό αυτό και έχουν σε συντομία ως εξής:

(A) Με βάση τον τρόπο διαγραφής της τροχιάς ως προς τα primaries

Το μεγάλο πλήθος περιοδικών τροχιών που προέκυψε κατά τη μελέτη του δακτυλιοειδούς προβλήματος καθιστά αναγκαία και χρήσιμη την κατάταξή τους σε διάφορες ομάδες (Κρουσταλλούδη, 2006; Croustalloudi & Kalvouridis, 2007c, 2008; Kalvouridis *et al.*, 2008) ώστε να είναι ευχερέστερη η μελέτη τους. Στην περίπτωσή μας και ειδικότερα για τις απλές περιοδικές τροχιές, θα χρησιμοποιήσουμε την κατάταξη που έχει γίνει σε παρόμοιο πρόβλημα από τους Kalvouridis *et al.*, (2008). Σύμφωνα με αυτήν, μπορούμε να θεωρήσουμε τέσσερις ομάδες απλών περιοδικών τροχιών, και συγκεκριμένα:

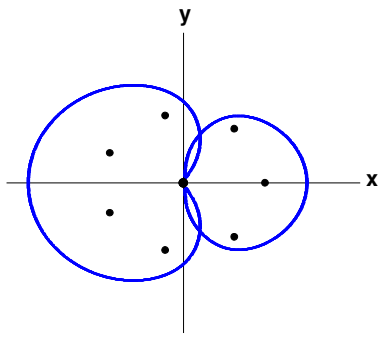
Ομάδα I. Τροχιές πλανητικού τύπου (planetary-type orbits). Στις τροχιές αυτές, το μικρό σώμα ακολουθεί μία διαδρομή γύρω από το κεντρικό primary P_0 και κινείται είτε εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του φανταστικού κύκλου των primaries, είτε εξ ολοκλήρου εκτός αυτού. Δηλαδή στη δεύτερη περίπτωση η τροχιά του μικρού σώματος περικλείει όλα τα primaries. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι οικογένειες, που οι χαρακτηριστικές τους καμπύλες εξελίσσονται στο εσωτερικό της κεντρικής «καμινάδας» του διαγράμματος x_0-C και θεωρητικά γεννώνται για $C \rightarrow \infty$. Τέτοιες οικογένειες εμφανίζονται σε όλους τους σχηματισμούς, δηλαδή για κάθε ν , του δακτυλιοειδούς προβλήματος αλλά και σε όλες τις παραλλαγές του (με πίεση ακτινοβολίας, με δυναμικά τύπου Manev, κ.λ.π). Ειδικά στην περίπτωση Manev με $e < 0$, εντοπίσαμε τροχιές πλανητικού τύπου και σε περιοχές εκτός της κεντρικής «καμινάδας» του διαγράμματος x_0-C , όπου το μικρό σώμα κινείται, τόσο στο εσωτερικό του φανταστικού κύκλου των primaries, όσο και εκτός αυτού, όπως συμβαίνει με τις τροχιές της οικογένειας S5A (Σχήμα 9.3α).

Ομάδα II. Τροχιές δορυφορικού τύπου (satellite-type orbits). Το μικρό σώμα κινείται γύρω από ένα μόνο περιφερειακό primary. Παράδειγμα αποτελούν η οικογένεια της οποίας οι τροχιές διαγράφονται γύρω από το primary P_1 (Σχήμα 9.3β) και η χαρακτηριστική της καμπύλη εξελίσσεται στο εσωτερικό της «καμινάδας» περί το primary P_1 στο διάγραμμα x_0-C . Παρόμοιες οικογένειες εξελίσσονται στο εσωτερικό των καμινάδων περί τα άλλα περιφερειακά primaries του σχηματισμού. Όπως και η προηγούμενη περίπτωση, έτσι κι εδώ οικογένειες

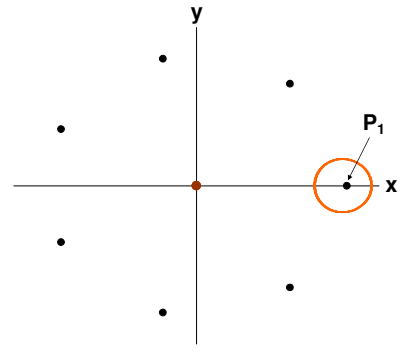
τροχιών αυτού του τύπου, εμφανίζονται σε όλους τους σχηματισμούς, δηλαδή για κάθε n , του δακτυλιοειδούς προβλήματος, καθώς και σε όλες τις παραλλαγές του.

Ομάδα III. Τροχιές διαπλανητικού τύπου (interplanetary orbits). Αποτελούν τη μεγάλη πλειοψηφία των οικογενειών απλών περιοδικών τροχιών και τούτο διότι οι συνδυασμοί των $n+1$ primaries ανά δύο, τρία κ.ο.κ., και συνεπώς των διαφορετικών κινήσεων, είναι τόσο περισσότεροι όσο αυξάνει ο αριθμός n των περιφερειακών σωμάτων. Στο πρόβλημα που μελετούμε και για το συγκεκριμένο βασικό configuration που χρησιμοποιούμε στις εφαρμογές, οι τροχιές αυτής της κατηγορίας διαγράφονται γύρω από 2, 3, 4, 5, 6, ή 7 primaries συμπεριλαμβανομένου σε αρκετές περιπτώσεις και του κεντρικού primary (π.χ γύρω από δύο περιφερειακά, δύο περιφερειακά και το κεντρικό, κ.ο.κ.) (Σχήμα 9.3γ,δ). Όπως θα δούμε στη συνέχεια μία κοινή ιδιότητα όλων αυτών είναι ότι καθώς η Ιακωβιανή σταθερά C μεταβάλλεται, το μικρό σώμα πραγματοποιεί εγγύτατες προσεγγίσεις σε όλα ή σε μερικά από τα primaries που περικλείονται στην τροχιά.

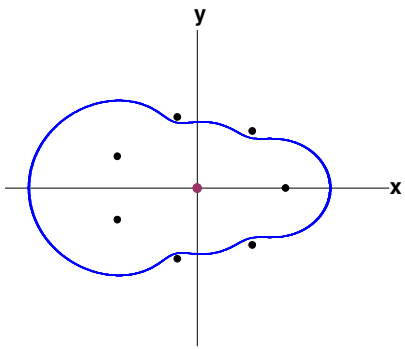
Ομάδα IV. Τροχιές που διαγράφονται γύρω από ένα σημείο ισορροπίας (orbits around an equilibrium point). Οι οικογένειες αυτές εκπορεύονται από ασταθή σημεία ισορροπίας και οι τροχιές τους διαγράφονται μόνο γύρω από αυτά τα σημεία αναπτυσσόμενες άλλοτε εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του φανταστικού κύκλου των primaries (όταν η θέση ισορροπίας βρίσκεται μέσα στον κύκλο αυτό) όπως συμβαίνει με τις τροχιές της οικογένειας S67 (Σχήμα 9.3ε), άλλοτε εξ ολοκλήρου εκτός αυτού (όταν η θέση ισορροπίας είναι εκτός του κύκλου), όπως συμβαίνει με τις τροχιές της οικογένειας S73 (Σχήμα 9.3στ) και άλλοτε μπορεί να διαγράφουν ένα τμήμα τους μέσα στον κύκλο των primaries και το υπόλοιπο εκτός αυτού, όπως συμβαίνει κατά την εξέλιξη των οικογενειών S33 και S54 που εκπορεύονται αντίστοιχα από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 και E_1 στην περιοχή της αναδίπλωσης (όταν $e < 0$) (Σχήματα 9.3ζ και 9.3γ).



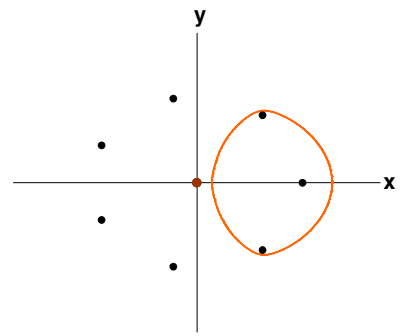
(α)



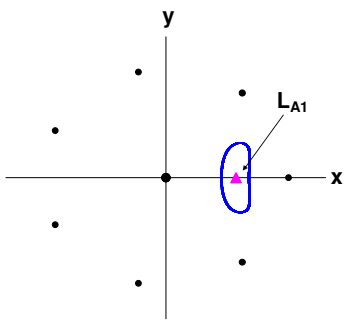
(β)



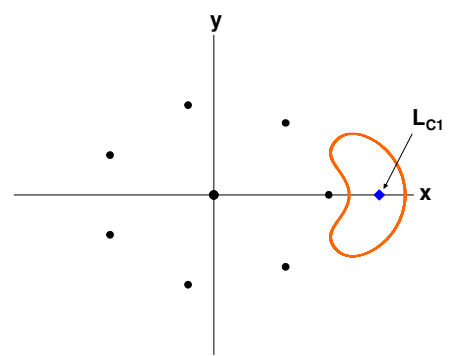
(γ)



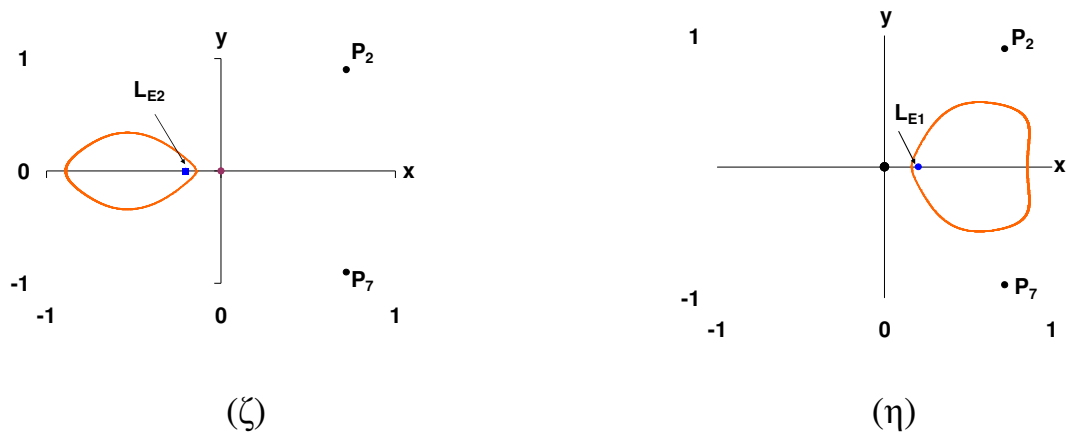
(δ)



(ε)



(σ)

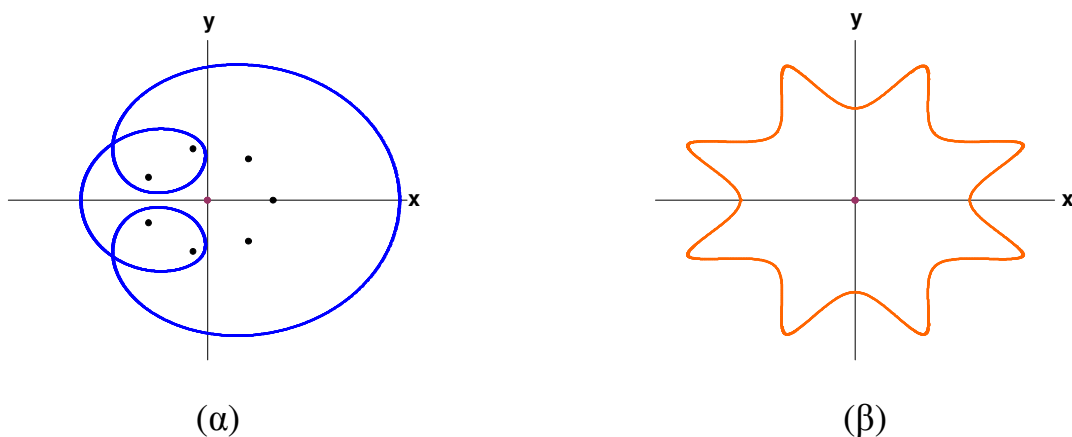


Σχήμα 9.3. (α) Τροχιές πλανητικού τύπου, (β) τροχιές δορυφορικού τύπου, (γ)-(δ) τροχιές διαπλανητικού τύπου, (ε)-(η) τροχιές γύρω από μία θέση ισορροπίας

(B) Με βάση την εμφανιζόμενη συμμετρία

Διακρίνουμε τις τροχιές σε:

- Απλές συμμετρικές (ως προς τον βασικό άξονα συμμετρίας x) (Σχήμα 9.4α).
- Πολλαπλά συμμετρικές:
 - Διπλά συμμετρικές (συνήθως ως προς τους δύο άξονες x, y του συνοδικού συστήματος συντεταγμένων).
 - Πολλαπλά συμμετρικές (ως προς τον βασικό άξονα συμμετρίας x και ως προς άλλους άξονες συμμετρίας που συμπίπτουν με άξονες συμμετρίας του σχηματισμού, όπως συμβαίνει λ.χ στις δένδροειδούς κατανομής οικογένειες που αναπτύσσονται στις περιοχές των θέσεων ισορροπίας E_1 και E_2 όταν η παράμετρος $Ma_{\text{neven}} < 0$, και τις οποίες θα συναντήσουμε στη συνέχεια της μελέτης μας (Σχήμα 9.4β).

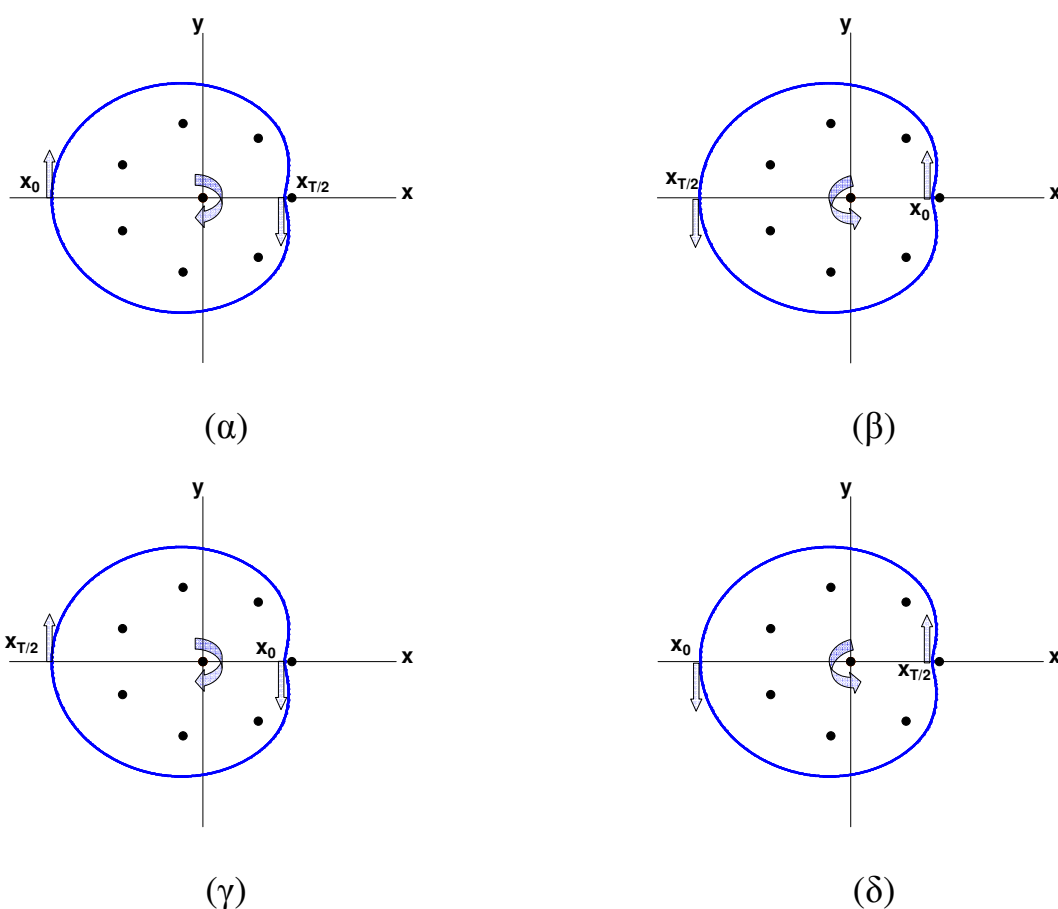


Σχήμα 9.4. Διάφορες μορφές συμμετρικών τροχιών. (α) Απλή συμμετρική (ως προς τον άξονα Ox), (β) πολλαπλά συμμετρική

(Γ) Σύμφωνα με τη φορά διαγραφής τους

Διακρίνουμε τις τροχιές σε:

- Ορθές (direct), όταν η φορά διαγραφής τους είναι ίδια με τη φορά περιστροφής του συνοδικού πλαισίου αναφοράς $Oxyz$ (Σχήμα 9.5α).
- Ανάδρομες (retrograde), όταν η φορά διαγραφής τους είναι αντίθετη από αυτήν του $Oxyz$ (Σχήμα 9.5β).



Σχήμα 9.5. (α) Ανάδρομη (retrograde) τροχιά για $\dot{y}_0 > 0$, (β) ορθή (direct) τροχιά για $\dot{y}_0 > 0$, (γ) ανάδρομη τροχιά για $\dot{y}_0 < 0$, (δ) ορθή τροχιά για $\dot{y}_0 < 0$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι παρόμοια διάκριση σε κατηγορίες θα χρησιμοποιήσουμε και στις περιοδικές τροχιές μεγαλύτερης πολλαπλότητας (διπλές, τριπλές, κ.ο.κ.) τις οποίες θα περιγράψουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

(Δ) Σύμφωνα με το μέγεθος της ημιπεριόδου (T/2)

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά μεγέθη μιας περιοδικής τροχιάς είναι η περίοδος της. Αντί αυτής, στα επόμενα (πίνακες, διαγράμματα, κ.λ.π) χρησιμοποιούμε τις τιμές της ημιπεριόδου T/2 αφού, όπως έχουμε αναφέρει σε προγενέστερα κεφάλαια, η αριθμητική ολοκλήρωση των επίπεδων συμμετρικών ως προς τον άξονα Ox τροχιών περατούται στο χρόνο μιας ημιπεριόδου. Είναι προφανές ότι τα ποιοτικά συμπεράσματα που εξάγονται και σχετίζονται με την ημιπερίοδο, επεκτείνονται χωρίς κανένα πρόβλημα και στην περίοδο.

Προκειμένου να καταστήσουμε ευχερέστερη τη σύγκριση των μελών των διαφόρων οικογενειών, θεσπίσαμε την ποιοτική διάκριση των ημιπεριόδων ανάλογα με το μέγεθός τους, και τις διαβαθμίσαμε σύμφωνα με τον Πίνακα 9.1β που ακολουθεί. Τονίζουμε το γεγονός ότι πρόκειται για μια καθαρά ενδεικτική και αυθαίρετη κλίμακα, που η χρήση της περιορίζεται στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.

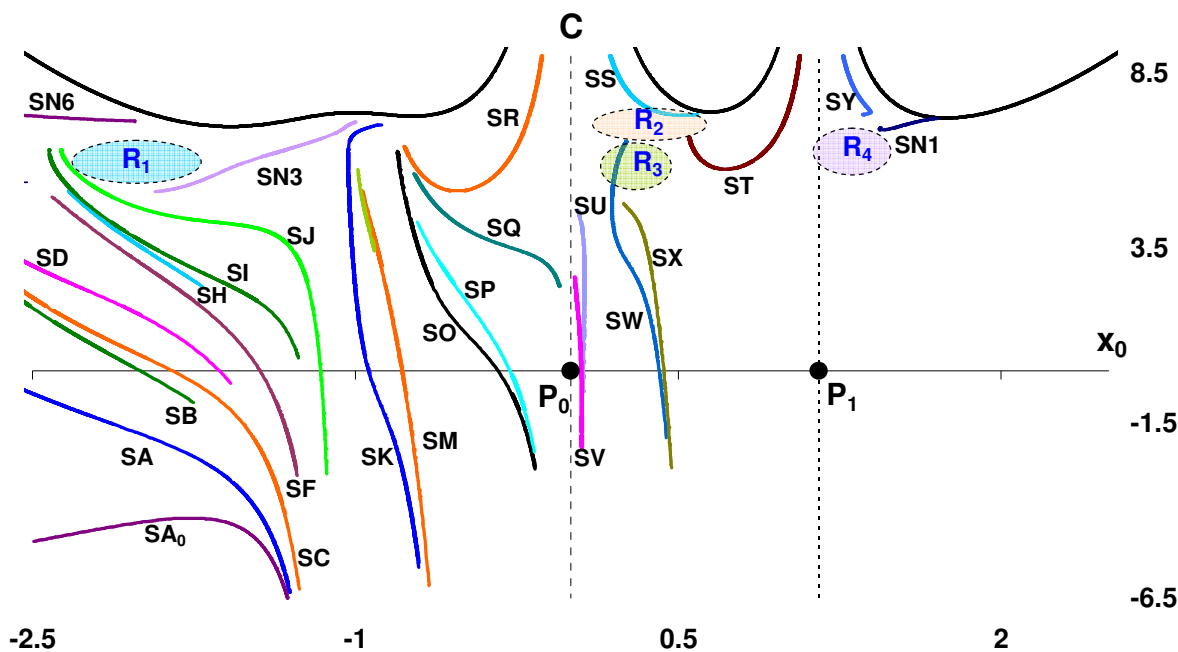
Πίνακας 9.1β. Διαβάθμιση μεγέθους των τιμών της ημιπεριόδου των περιοδικών τροχιών

Χαρακτηρισμός τιμής ημιπεριόδου T/2	Συμβολισμός	Περιοχή τιμών
Πολύ μικρή (Very Small)	VS	$0 < T/2 \leq 0.5$
Μικρή (Small)	S	$0.5 < T/2 \leq 2.0$
Μεσαία (Medium)	M	$2.0 < T/2 \leq 4.0$
Μεγάλη (Large)	L	$4.0 < T/2 \leq 8.0$
Πολύ μεγάλη (Very Large)	VL	$8.0 < T/2 \leq 12.0$
Εξαιρετικά μεγάλη (Extremely Large)	EL	$T/2 > 12$

9.2 Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στη Νευτώνεια βαρυτική περίπτωση ($e=0$) και κατανομή των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών των απλών συμμετρικών περιοδικών τροχιών στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C

Αναζητήσαμε τις συμμετρικές περιοδικές τροχίες με τη βοήθεια της μεθόδου Grid Search ερευνώντας την περιοχή $x_0 \in [-2.5, 2.5]$ και $C \in [-6, 9]$ του διαγράμματος x_0-C στο φασικό χώρο των αρχικών συνθηκών και για την περίπτωση όπου $v=7$ και $\beta=2$. Η περίπτωση αυτή, όπως ήδη αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, έχει ήδη ερευνηθεί στο πρόσφατο παρελθόν από τους Kalnouridis *et al.*, (2008), όμως επειδή υπήρχαν ενδείξεις για την ύπαρξη και άλλων οικογενειών, έγινε μία νέα σάρωση του χώρου που περιλαμβάνεται στα προαναφερθέντα όρια τιμών των x_0 , C , ώστε αφενός μεν να ταυτοποιηθούν και να μελετηθούν οι νέες οικογένειες, αφετέρου δε να επεκταθούν οι ήδη υπάρχουσες. Για τη συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου μάζας, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, εμφανίζονται πέντε ζώνες ισορροπίας και στο διάγραμμα x_0-C των αρχικών συνθηκών, οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας εμφανίζουν (λόγω του ότι το v είναι περιττός αριθμός) πέντε ακρότατα που αντιπροσωπεύουν τις πέντε αυτές ζώνες.

Στο Σχήμα 9.6 που ακολουθεί παρουσιάζουμε τις οικογένειες (παλαιές και νέες) των συμμετρικών απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται στην παραπάνω περιοχή του διαγράμματος x_0-C . Ειδικότερα, εντός των περιοχών R_1 , R_2 , R_3 και R_4 , που περικλείονται μέσα στα διάστικτα πλαίσια, βρίσκονται οι νέες οικογένειες οι οποίες βρέθηκαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής και οι οποίες θα παρουσιασθούν αναλυτικότερα στις επόμενες παραγράφους. Σημειώνουμε επίσης ότι ειδικά για τις νέες οικογένειες της βαρυτικής περίπτωσης επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε, για λόγους ομοιομορφίας, τους αλφαβητικούς συμβολισμούς που είχαν χρησιμοποιηθεί και στην προαναφερθείσα εργασία.



Σχήμα 9.6. Κατανομή των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών απλών συμμετρικών περιοδικών τροχιών στο διάγραμμα αρχικών συνθηκών x_0 - C , για τη βαρυντική περίπτωση με $\nu=7$ και $\beta=2$. Οι νέες οικογένειες βρέθηκαν στις περιοχές μέσα στα διάστικτα πλαίσια

9.2.1 Περιγραφή των νέων οικογενειών στη βαρυντική περίπτωση για $\nu=7$ και $\beta=2$ και η εξέλιξη των τροχιών-μελών τους

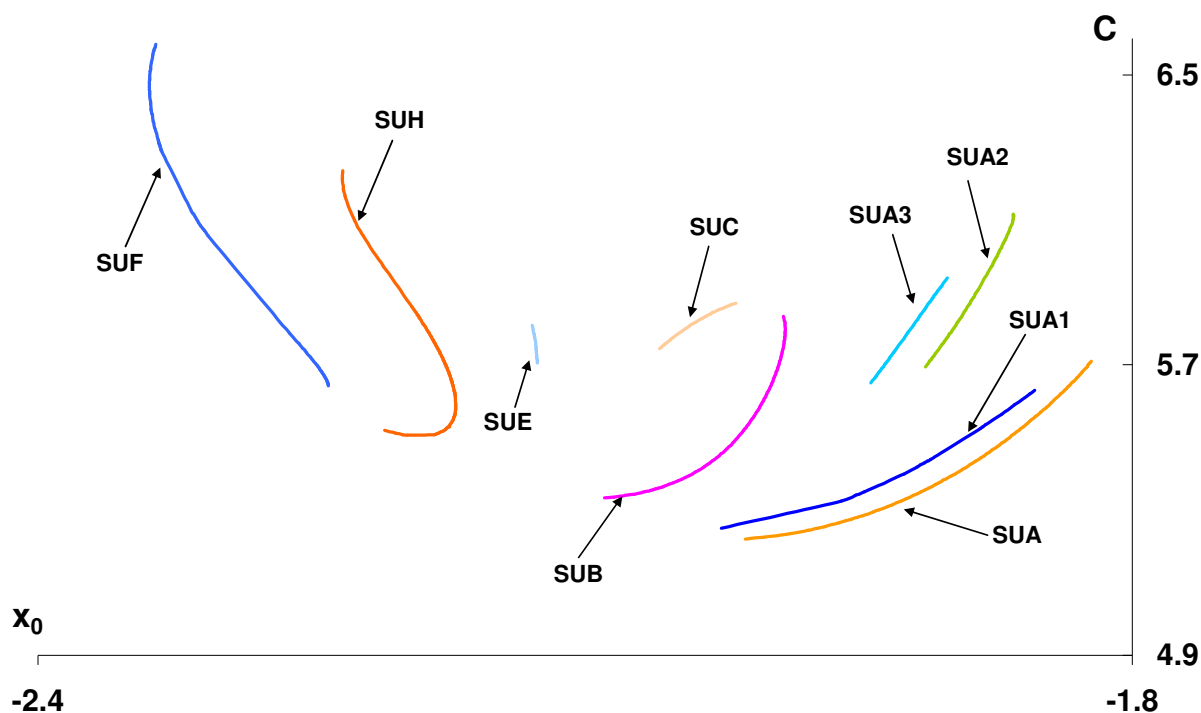
Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τις νέες οικογένειες ανά περιοχή, οι οποίες εντοπίστηκαν στο διάγραμμα x_0 - C της βαρυντικής περίπτωσης και για μερικές από αυτές θα περιγράψουμε την εξέλιξη των τροχιών τους κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Για τη μελέτη αυτών των οικογενειών θα παραθέτουμε κάθε φορά δύο είδη σχημάτων. Στο πρώτο θα απεικονίζεται η χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας, πάνω στην οποία θα σημειώνονται με πορτοκαλί κουκίδες οι αρχικές συνθήκες των τροχιών οι οποίες θα παρατίθενται στο δεύτερο σχήμα.

9.2.2 Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_1

Στο Σχήμα 9.7 φαίνονται οι εννέα νέες οικογένειες που εντοπίσαμε στο δεύτερο τεταρτημόριο του διαγράμματος x_0-C ($C>0$, $x_0<0$) και είναι κατά σειρά εμφάνισης από τα αριστερά της περιοχής R_1 , οι: SUF, SUH, SUE, SUC, SUB, SUA3, SUA2, SUA1 και SUA. Όλες οι τροχιές αυτών των οικογενειών είναι ανάδρομες (retrograde) και εκκινούν από τον αρνητικό ημιάξονα x_0 , ενώ στην ημιπερίοδο τέμνουν τον αντίστοιχο θετικό ημιάξονα, με εξαίρεση τις τροχιές της SUF οι οποίες στην ημιπερίοδο τέμνουν και πάλι τον αρνητικό ημιάξονα x_0 . Η ημιπερίοδος τους λαμβάνει τιμές από 4.0(L) έως 8.0(L) (τροχιές μεγάλης ημιπεριόδου).

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο, ότι η συγκεκριμένη ομάδα οικογενειών εμφανίζεται, όπως προκύπτει από τη μελέτη μας και στην περίπτωση του δυναμικού Manev τόσο για θετικές όσο και για αρνητικές τιμές της παραμέτρου e .

Στον Πίνακα 9.2 παραθέτουμε ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή αυτή.



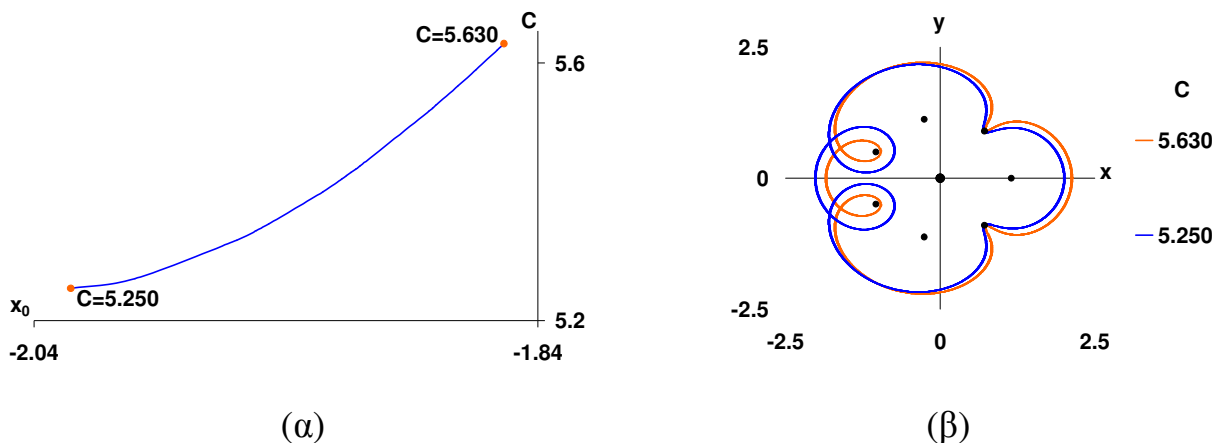
Σχήμα 9.7. Ομάδα οικογενειών της περιοχής R_1

Στη συνέχεια, περιγράφουμε ενδεικτικά τις τροχιές που αντιστοιχούν στις χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών SNA1 και SNA2 αυτής της περιοχής, οι

οποίες είναι οι μόνες που δεν εμφανίζονται, όταν η παράμετρος ϵ παίρνει αρνητικές τιμές.

(i) Οικογένεια SUA1

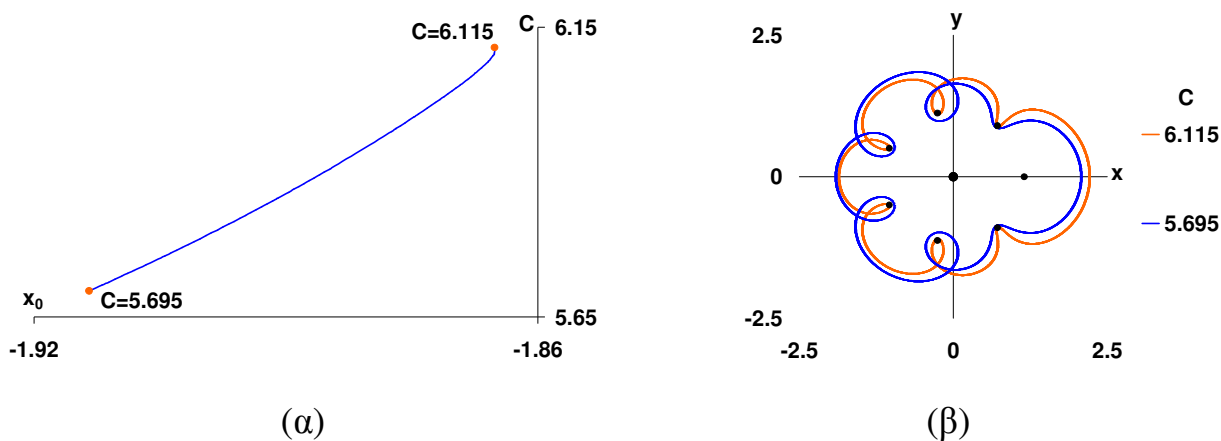
Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.8), οι οποίες περικλείουν όλα τα primaries εκτός των P_2 και P_6 , στα οποία η τροχιά πλησιάζει πάρα πολύ κοντά καθώς η σταθερά C αυξάνεται. Σχηματίζουν επίσης δύο βρόχους, οι οποίοι περιβάλλουν τα primaries P_4 και P_5 και μάλιστα όσο η σταθερά C αυξάνεται τόσο πιο κλειστοί είναι οι βρόχοι. Οι ημιπερίοδοι μεταβάλλονται από 6.09 (L) έως 6.46 (L).



Σχήμα 9.8. Οικογένεια SUA1. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

(ii) Οικογένεια SUA2

Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.9), οι οποίες περικλείουν όλα τα primaries εκτός των P_2 και P_6 , στα οποία η τροχιά πλησιάζει πάρα πολύ κοντά καθώς η σταθερά C αυξάνεται, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση των τροχιών της οικογένειας SUA1. Σχηματίζουν τέσσερις βρόχους γύρω από τα primaries P_3 , P_4 , P_5 και P_6 και μάλιστα όσο η σταθερά C αυξάνεται τόσο πιο κλειστοί είναι αυτοί οι βρόχοι. Οι ημιπερίοδοι για αυτή την οικογένεια μεταβάλλονται από 6.86 (L) έως 7.03 (L).



Σχήμα 9.9. Οικογένεια SUA2. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

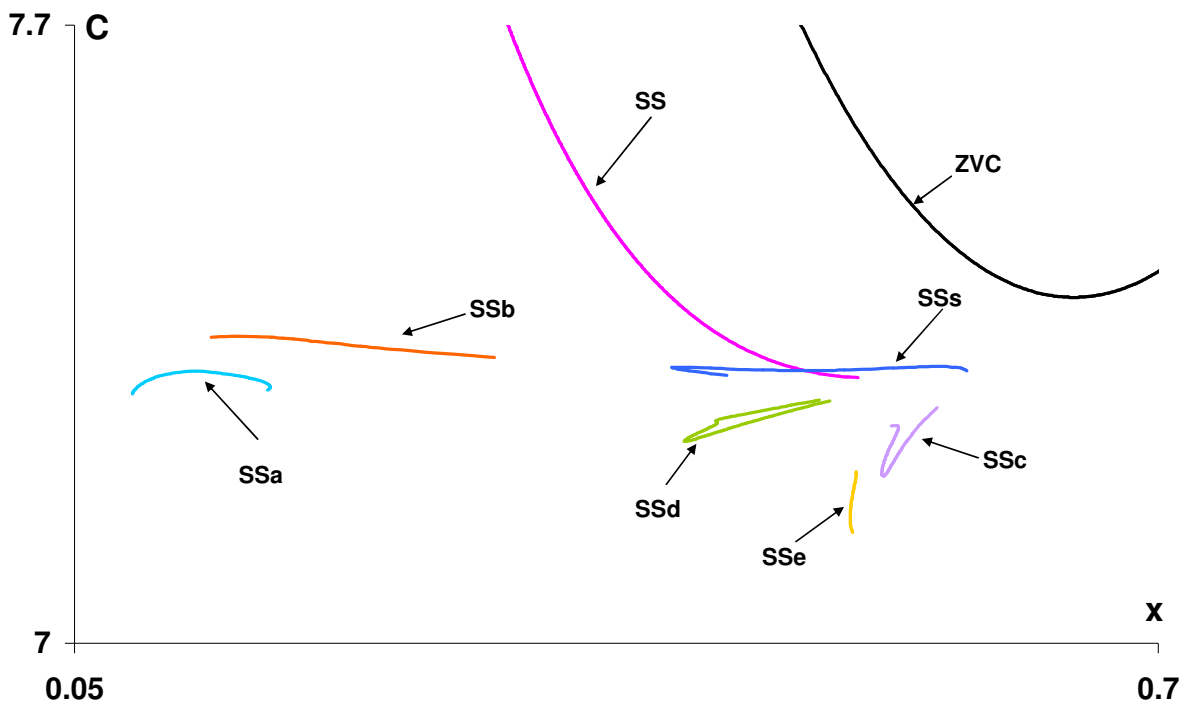
Πίνακας 9.2. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή R_1

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	$T/2$
SUA	5.709868278	-1.822526000	1.193766136	2.228426000	-1.521632236	6.400128892
	5.394959739	-1.898912000	1.360040222	2.313101000	-1.698797448	7.080948554
	5.219959917	-2.012196000	1.495308771	2.350851000	-1.784187929	7.903646899
SUA1	5.629912405	-1.853453000	1.243441934	2.123881000	-1.455536979	6.094916269
	5.439956320	-1.910648000	1.350544501	2.058875000	-1.469803094	6.073525300
	5.249949963	-2.025370000	1.494686267	2.002015000	-1.495754921	6.463432678
SUA2	6.109951027	-1.865072000	1.040543303	2.202995000	-1.357887232	7.017954604
	5.834977741	-1.893528000	1.183666906	2.105955000	-1.367745173	6.880159755
	5.694969538	-1.913423000	1.254432516	2.071460000	-1.390135666	7.018341631
SUA3	5.939956454	-1.901342000	1.143962057	2.303474000	-1.520036923	7.406056677
	5.784973359	-1.923612000	1.225131829	2.335332000	-1.602303225	7.683956667
	5.649969563	-1.943485000	1.292719081	2.358035000	-1.666487825	8.016701353
SUB	5.834510558	-1.991235000	1.256239326	2.863486000	-2.163029457	6.252108801
	5.504969744	-2.015468000	1.399235128	2.958468000	-2.341251339	6.878302481
	5.334009912	-2.089381000	1.515499502	2.990098000	-2.411486107	7.671392507

SUC	5.869867694	-2.017299000	1.263666271	2.812627000	-2.097589965	6.059799746
	5.819967556	-2.038759000	1.301302758	2.797298000	-2.092317119	6.001664759
	5.744966856	-2.059211000	1.347064078	2.786755000	-2.098487565	5.982100420
SUE	5.809929387	-2.128926000	1.385473508	2.505627000	-1.773664463	6.724381962
	5.734929582	-2.126675000	1.410233001	2.507059000	-1.796206950	6.859908095
	5.704919614	-2.126237000	1.420438178	2.507742000	-1.805265620	6.925217622
SUF	6.584935728	-2.335361000	1.324018928	-0.486254900	-1.050872702	4.485473101
	6.056019857	-2.306879000	1.479569950	-0.441877900	-1.359130089	3.997128478
	5.642049974	-2.240759000	1.548646083	-0.400828700	-1.588809521	4.510006297
SUH	6.235941973	-2.232831000	1.334497004	0.757697000	-1.138188672	4.404437296
	5.726039887	-2.178884000	1.461723701	0.738640700	-1.326250275	4.386655773
	5.519999971	-2.209917000	1.558867107	0.731520400	-1.396517407	5.437683806

9.2.3 Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_2

Στο Σχήμα 9.10 και κοντά στην χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας SS, φαίνονται οι έξι νέες οικογένειες που εντοπίσαμε και είναι κατά σειρά εμφάνισης από τα αριστερά της περιοχής οι: SSa, SSb, SSs, SSd, SSe και SSsc. Όλες οι τροχιές αυτών των οικογενειών είναι ορθές (direct), εξελίσσονται στο πρώτο τεταρτημόριο του διαγράμματος x_0-C ($C>0$, $x_0>0$) και εκκινούν από τον θετικό ημιάξονα x_0 , ενώ στην ημιπερίοδο τέμνουν τον αντίστοιχο αρνητικό ημιάξονα. Στον Πίνακα 9.3 παραθέτουμε ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή αυτή.

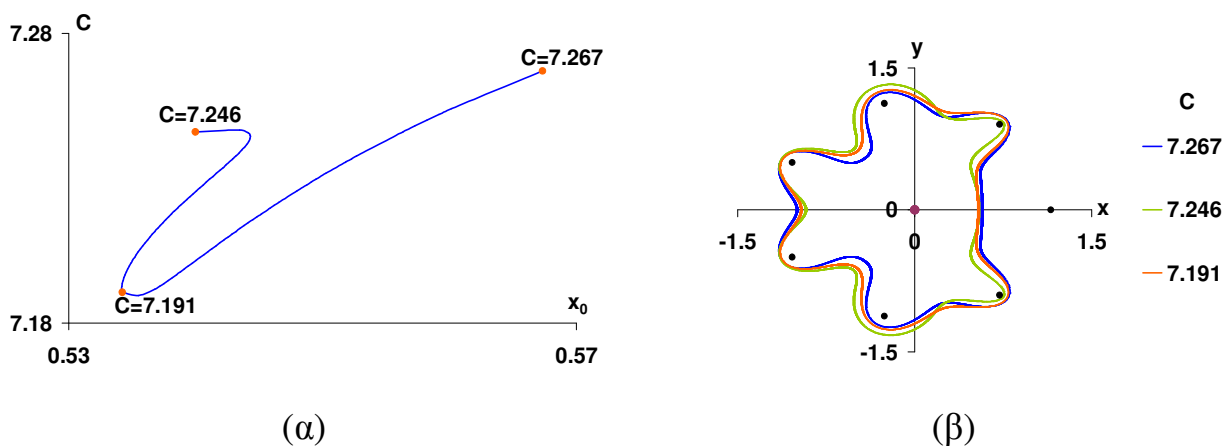


Σχήμα 9.10. Ομάδα οικογενειών της περιοχής R_2

Στη συνέχεια δίνουμε λεπτομερή περιγραφή των τροχιών που αντιστοιχούν στις χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών SSc , SSd και SSs .

(i) Οικογένεια SSc

Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.11), οι οποίες περικλείουν όλα τα primaries εκτός του P_1 . Η χαρακτηριστική καμπύλη έχει τη μορφή «άγκιστρου», η δε ημιπερίοδος των τροχιών κυμαίνεται από 5.2 (L) μέχρι 7.15(L).

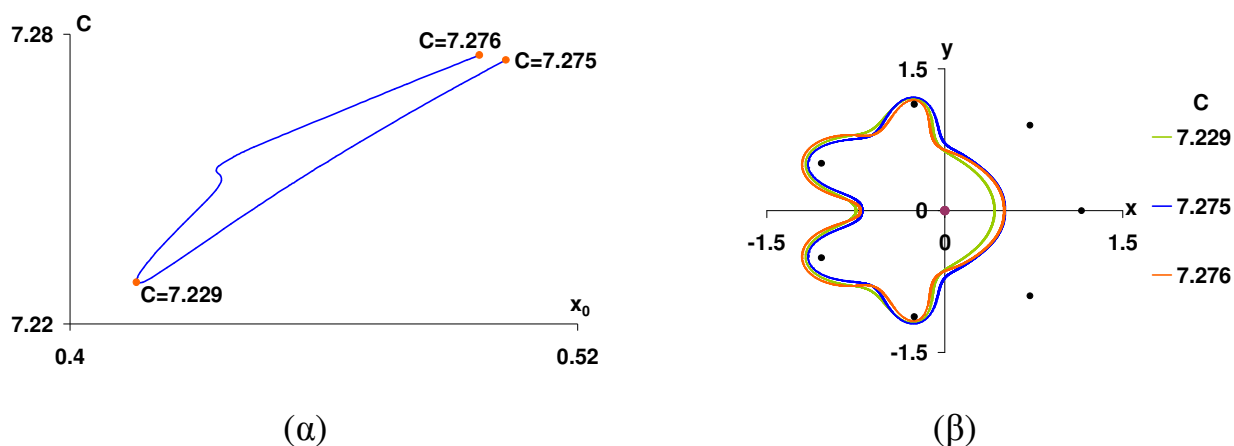


Σχήμα 9.11. Οικογένεια SSc . (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των

τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

(ii) Οικογένεια SSd

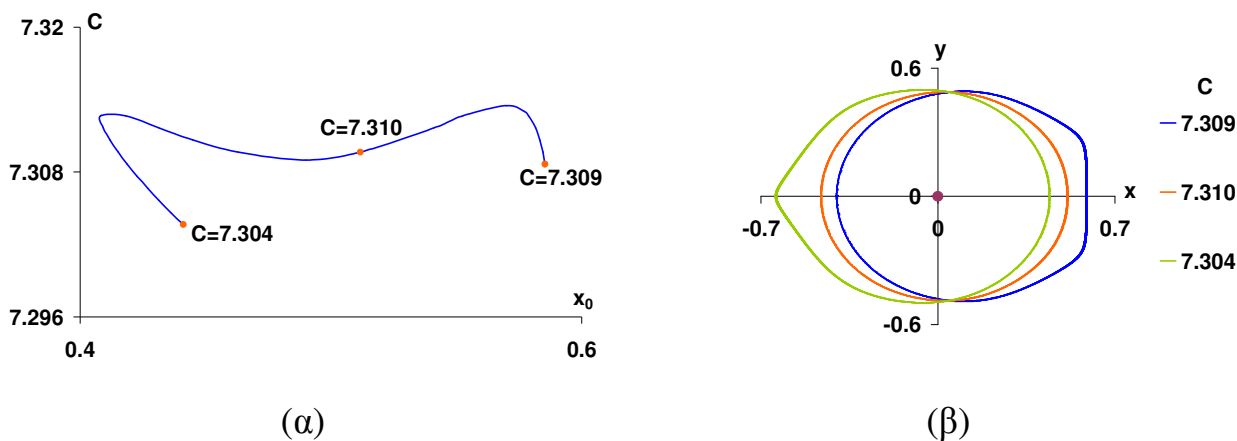
Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.12), οι οποίες περικλείουν όλα τα primaries εκτός των P_1 , P_2 και P_6 . Η χαρακτηριστική καμπύλη έχει τη μορφή «φουρκέτας», ενώ η ημιπερίοδος των τροχιών κυμαίνεται από 4.47 (L) μέχρι 6.24 (L).



Σχήμα 9.12. Οικογένεια SSd. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

(iii) Οικογένεια SSs

Η χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας αυτής, διακλαδίζεται με την χαρακτηριστική της οικογένειας SS και αποτελείται από τροχιές πλανητικού τύπου (Σχήμα 9.13). Καθώς διατρέχεται η καμπύλη από τα αριστερό άκρο της προς το δεξιό, οι τροχιές μετατοπίζονται προς τα δεξιά του άξονα των x , η δε ταχύτητα στην ημιπερίοδο αυξάνεται. Η ημιπερίοδος τους κυμαίνεται από 2.52(M) μέχρι 3.39(M).



Σχήμα 9.13. Οικογένεια SSs. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

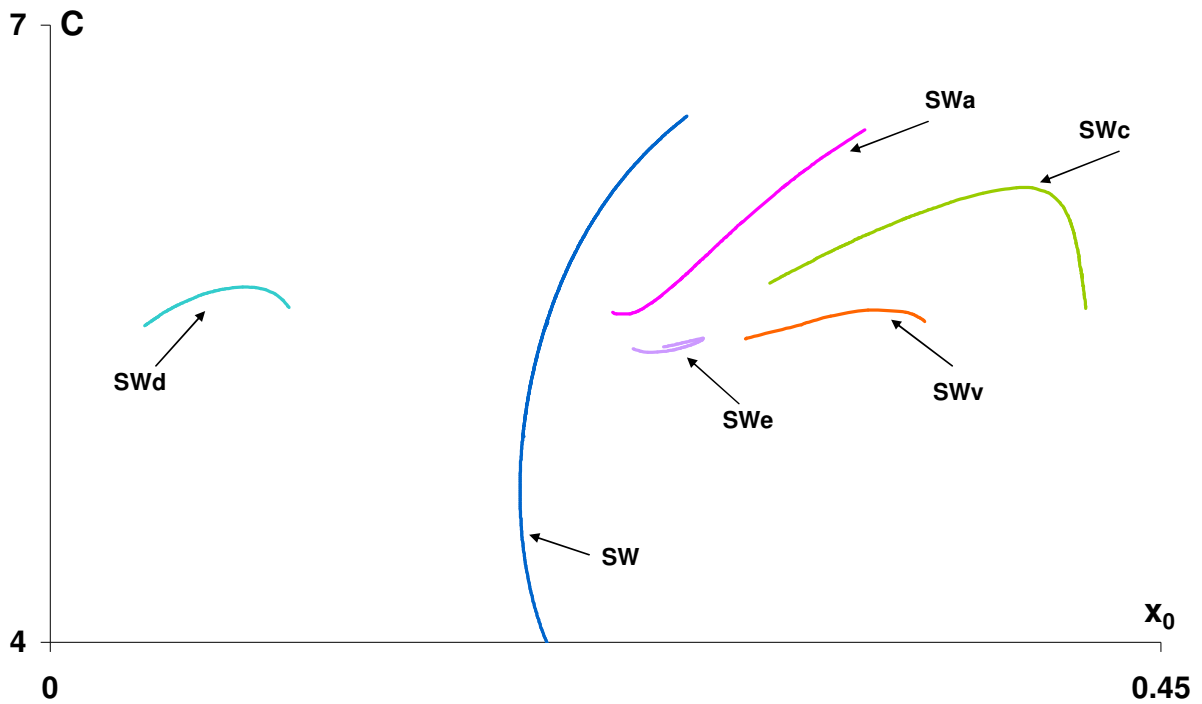
Πίνακας 9.3. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή R_2

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2
SS	8.999999907	0.181863200	1.788384184	-0.181862800	-1.788386585	0.319472148
	8.050619967	0.256165700	1.392814009	-0.256166400	-1.392773405	0.577809189
	7.300999999	0.519838000	0.529469068	-0.523393400	-0.503671942	3.172437160
SSa	7.282649836	0.084763870	3.718242750	-0.980000600	-0.301338583	4.609873960
	7.306649861	0.133629300	2.772386002	-0.975715100	-0.256695844	3.656802781
	7.286649855	0.165791000	2.378953546	-0.979728800	-0.294533482	4.337075883
SSb	7.346640116	0.132030200	2.788231938	-1.109363000	-0.042424413	4.266543527
	7.339640195	0.206411800	1.986529241	-1.118903000	-0.053025190	4.135443052
	7.323650908	0.301995300	1.368373738	-1.140306000	-0.059359506	4.195905130
SSc	7.267009148	0.567315600	0.446672834	-1.000408000	-0.330765377	7.148423399
	7.190649553	0.534207800	0.591564306	-0.965403100	-0.423452544	5.204742854
	7.246005989	0.539983600	0.528886207	-0.925303900	-0.330798854	6.071160442
SSd	7.274649623	0.503004300	0.601240725	-0.700106900	-0.098198532	6.031286024
	7.228649750	0.415664900	0.915079729	-0.751434500	-0.227642716	4.473578880
	7.275650485	0.496749300	0.618780293	-0.714487900	-0.072554378	6.241828097

SSe	7.194670183	0.518934900	0.624027388	-0.629585200	-0.373566939	5.353109652
	7.154665008	0.515638500	0.663033602	-0.642146600	-0.407502265	4.888939825
	7.125671918	0.516763200	0.681978163	-0.642574100	-0.441169305	4.752930121
SSs	7.303649997	0.441187100	0.779849323	-0.642942700	-0.127637657	3.395020038
	7.309649999	0.511694400	0.545179008	-0.463626100	-0.693318806	2.518832108
	7.308649996	0.585312000	0.358557213	-0.400770200	-0.926360455	3.447457809

9.2.4 Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_3

Στο Σχήμα 9.14 φαίνονται οι πέντε νέες οικογένειες που εντοπίσαμε εκατέρωθεν της οικογένειας SW. Αριστερά της SW βρίσκεται η SWd, ενώ δεξιά της βρίσκονται οι SWa, SWc, SWe και SWv. Οι χαρακτηριστικές όλων αυτών των οικογενειών εξελίσσονται στο πρώτο τεταρτημόριο του διαγράμματος x_0-C (όπου $C>0$ και $x_0>0$). Οι τροχιές-μέλη (πλην αυτών της SWa) είναι ορθές και εκκινούν από τον θετικό ημιάξονα x_0 , ενώ στην ημιπερίοδο τέμνουν τον αντίστοιχο αρνητικό ημιάξονα. Όσον αφορά στις τροχιές της οικογένειας SWa, αυτές είναι ανάδρομες, εκκινούν δε και καταλήγουν στο θετικό ημιάξονα x_0 . Στον Πίνακα 9.4 παραθέτουμε ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή αυτή.

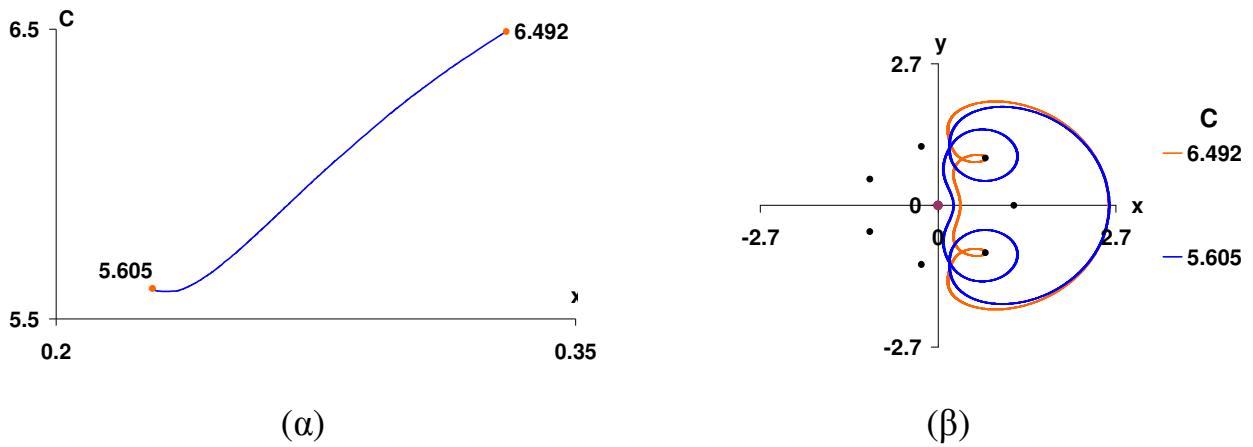


Σχήμα 9.14. Ομάδα οικογενειών της περιοχής R_3

Στη συνέχεια δίνουμε λεπτομερή περιγραφή των τροχιών που αντιστοιχούν στις χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών SWa , SWc και SWd .

(i) Οικογένεια SWa

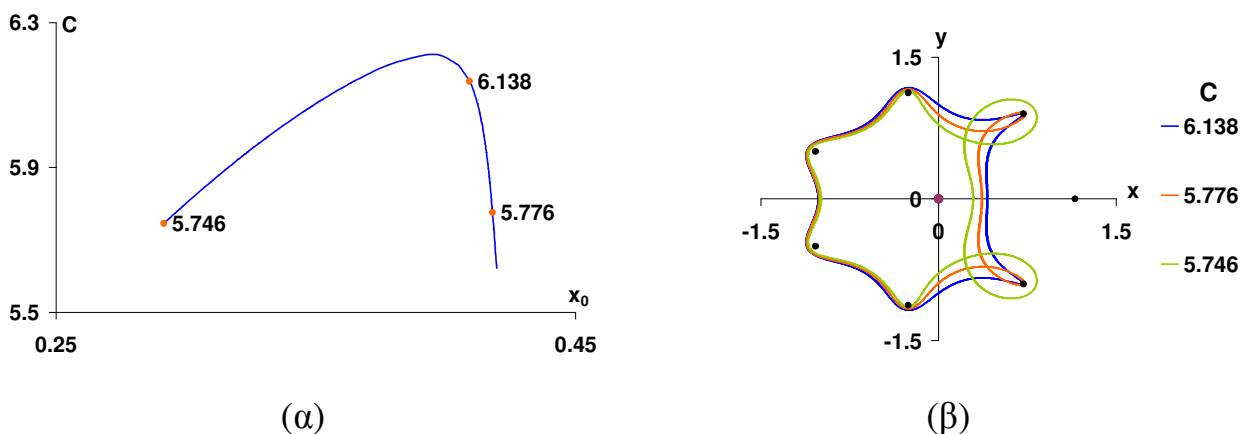
Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.15), οι οποίες περικλείουν τα primaries P_1 , P_2 και P_7 , σχηματίζοντας βρόχους στα δύο τελευταία primaries. Όσο η σταθερά C αυξάνεται, η περίοδος, η ταχύτητα εκκίνησης και η ταχύτητα στην ημιπερίοδο των τροχιών μειώνονται, ενώ οι βρόχοι στενεύουν, ώστε τελικά οι τροχιές να καταλήξουν σε τροχιές κρούσης με τα P_2 και P_7 . Η ημιπερίοδός τους κυμαίνεται από 4.70 (L) μέχρι 5.73 (L).



Σχήμα 9.15. Οικογένεια SWa. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

(ii) Οικογένεια SWc

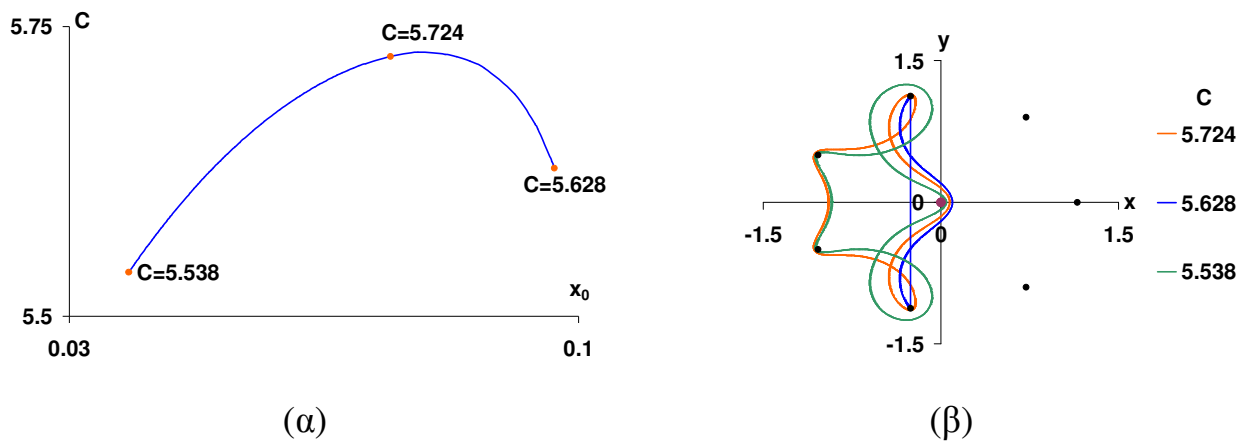
Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.16), οι οποίες περικλείουν όλα τα primaries σχηματίζουν δε βρόχους γύρω από τα P_2 και P_7 . Όσο η σταθερά C αυξάνεται, τόσο πιο κλειστοί γίνονται οι βρόχοι και οδηγούμαστε τελικά σε τροχιές κρούσης με τα P_2 και P_7 . Παράλληλα, η ταχύτητα εκκίνησης και η ταχύτητα στην ημιπερίοδο των τροχιών μειώνονται. Η χαρακτηριστική καμπύλη παρουσιάζει ακρότατο, ενώ η ημιπερίοδος των τροχιών μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή της x_0 .



Σχήμα 9.16. Οικογένεια SWc. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

(iii) Οικογένεια SWd

Αποτελείται από απλές συμμετρικές τροχιές διαπλανητικού τύπου (Σχήμα 9.17), οι οποίες περικλείουν όλα τα primaries και ταυτόχρονα σχηματίζουν βρόχους γύρω από τα P_3 και P_6 . Καθώς διατρέχεται η χαρακτηριστική καμπύλη από τα αριστερά του διαγράμματος προς τα δεξιά, οι βρόχοι των τροχιών γίνονται ολοένα και πιο κλειστοί μέχρι να καταλήξουν σε τροχιές κρούσης με τα P_3 και P_6 . Παράλληλα, η ταχύτητα εκκίνησης και η ταχύτητα στην ημιπερίοδο των τροχιών μειώνονται, ενώ η ημιπερίοδος των τροχιών αυξάνεται, με τιμές που κυμαίνονται από 1.63(S) έως 2.25(M). Το Σχήμα 9.17β δείχνει την τροχιά κρούσης (μπλε χρώμα) που χαρακτηρίζεται από τις αρχικές συνθήκες $x_0 = 5.628$, $C = 0.097$.



Σχήμα 9.17. Οικογένεια SWd. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

Πίνακας 9.4. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή R_3

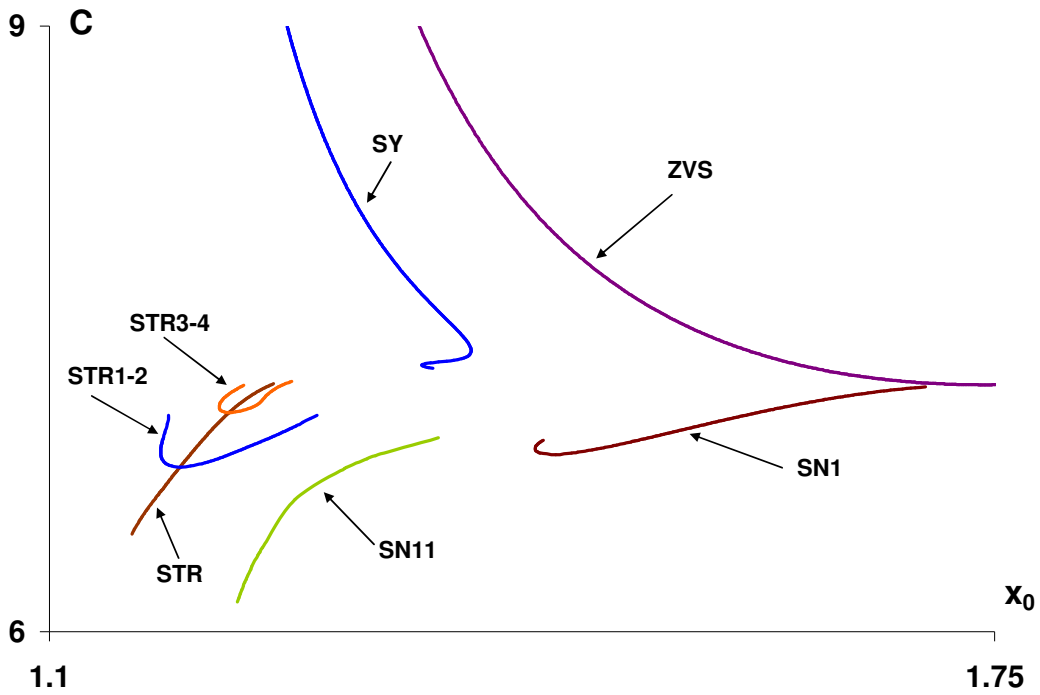
	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	$T/2$
SW	6.556999991	0.257854000	1.843589731	2.610425000	-1.678164330	4.573166947
	3.999979985	0.201035200	2.732428703	2.343265000	-2.092438831	2.263237142
	-1.900033195	0.444940100	3.129116344	1.321617000	-3.399863382	0.653344630
SWa	6.491969093	0.329951900	1.529266588	2.587775000	-1.669796320	5.079199819
	6.011039833	0.277390800	1.891009538	2.602651000	-1.824853523	4.707685887
	5.605069974	0.227807600	2.247443913	2.591652000	-1.921181211	5.736195335

SWc	5.746057562	0.291487700	1.899482191	-0.996948100	-1.276723241	2.886031084
	6.137859367	0.409072100	1.404470666	-1.016806000	-1.113179987	2.450422735
	5.776011732	0.417957500	1.508321757	-1.007542000	-1.265255079	2.196398545
SWd	5.627743914	0.096647190	3.663529103	-0.972042800	-1.320583586	1.631529925
	5.724055601	0.074122230	4.217744362	-0.951276700	-1.281227300	1.817245720
	5.538056450	0.038179000	6.002428714	-0.925348400	-1.348108625	2.250454089
SWe	5.428079775	0.236004300	2.240144030	-0.168320400	-2.718573361	3.940844157
	5.464079721	0.263127200	2.094361410	-0.164473500	-2.747706561	3.386955860
	5.436080758	0.248431300	2.172562309	-0.183446300	-2.587627248	3.475108727
SWv	5.476079868	0.281686400	2.009279628	-0.441128200	-1.559284320	5.987811882
	5.586042017	0.351031500	1.735866795	-0.894918700	-1.324725726	4.047828546
	5.560022524	0.354246600	1.734025571	-0.893901100	-1.334315988	4.216666569

9.2.5 Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_4

Στην περιοχή R_4 εντοπίσαμε δύο νέες οικογένειες, κοντά στην χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας SY, τις SN11 και STR καθώς και τις διακλαδώσεις της τελευταίας, STR1-2 και STR3-4 (Σχήμα 9.18). Οι χαρακτηριστικές των οικογενειών εξελίσσονται στο πρώτο τεταρτημόριο του διαγράμματος x_0-C ($C>0$, $x_0>0$), ενώ οι τροχιές-μέλη είναι ορθές, πλανητικού τύπου και περικλείουν όλα τα primaries σχηματίζοντας αστεροειδή μορφή. Εκκινούν από τον θετικό ημιάξονα x_0 , ενώ στην ημιπερίοδο τέμνουν τον αντίστοιχο αρνητικό ημιάξονα.

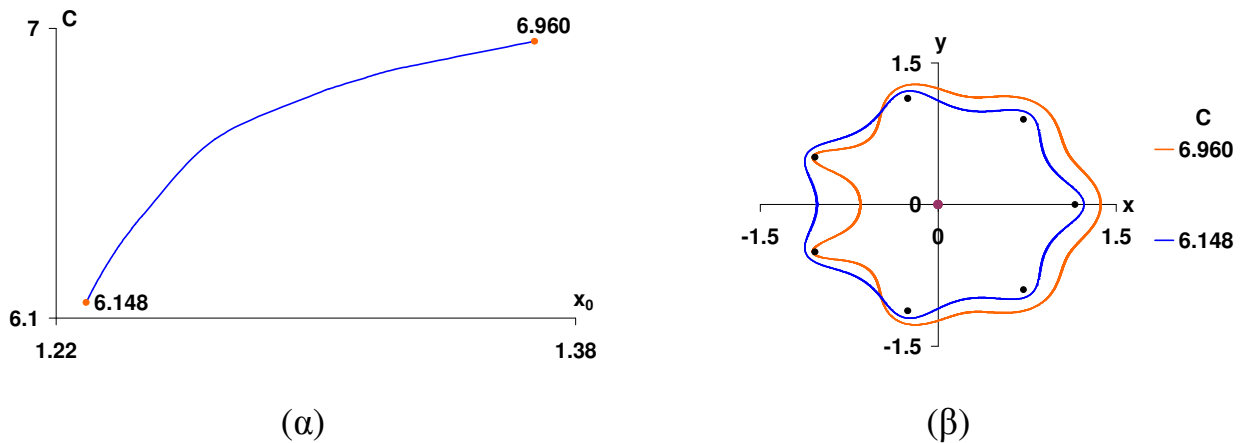
Στον Πίνακα 9.5 παραθέτουμε ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται εντός της περιοχής αυτής.



Σχήμα 9.18. Ομάδα οικογενειών της περιοχής R_4

(i) Οικογένεια SN11

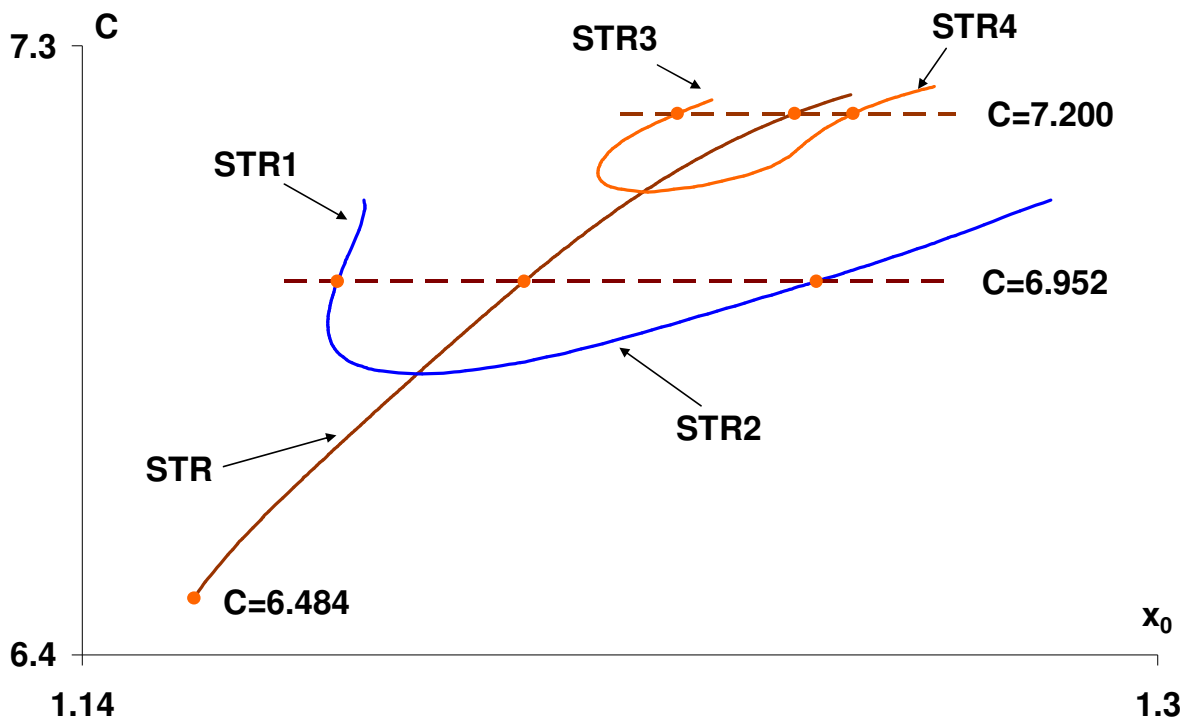
Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η σταθερά C παρουσιάζεται μία μετατόπιση των τροχιών προς τα δεξιά πλησιάζοντας κοντά στα primaries P_4 και P_5 , ενώ απομακρύνονται από τα υπόλοιπα περιφερειακά primaries. Ταυτόχρονα παρατηρούμε αύξηση της τιμής της ταχύτητας στη ημιπερίοδο αλλά και αύξηση της ημιπεριόδου, οι τιμές της οποίας κυμαίνονται μεταξύ 2.45(M) και 4.39(L) (Σχήμα 9.19).



Σχήμα 9.19. Οικογένεια SN11. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης

(ii) Οικογένειες STR

Ενδιαφέρουσα είναι η μορφή της διπλής τρίαυνας (trident) που σχηματίζουν οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών αυτής της ομάδας (Σχήμα 9.20). Η ομάδα αποτελείται από τον κεντρικό κορμό της τρίαυνας STR και τις δύο διακλαδώσεις της STR1-2 (STR1 αριστερά του κεντρικού κορμού της STR και STR2 δεξιά αυτού) και STR3-4 (STR3 αριστερά του κεντρικού κορμού της STR και STR4 δεξιά αυτού). Μελετούμε την εξέλιξη των τροχιών κάθε διακλάδωσης για δύο ίδιες κάθε φορά τιμές της σταθεράς C (οι τιμές που τέμνει η διακεκομμένη γραμμή κάθε κλάδο εκατέρωθεν του κεντρικού κλάδου), ενώ για τον κεντρικό κορμό της οικογένειας λαμβάνουμε τις δύο αυτές τιμές της C καθώς και τη χαμηλότερη τιμή που μπορέσαμε να εντοπίσουμε με τη μέθοδο grid-search ($C=6.484$).



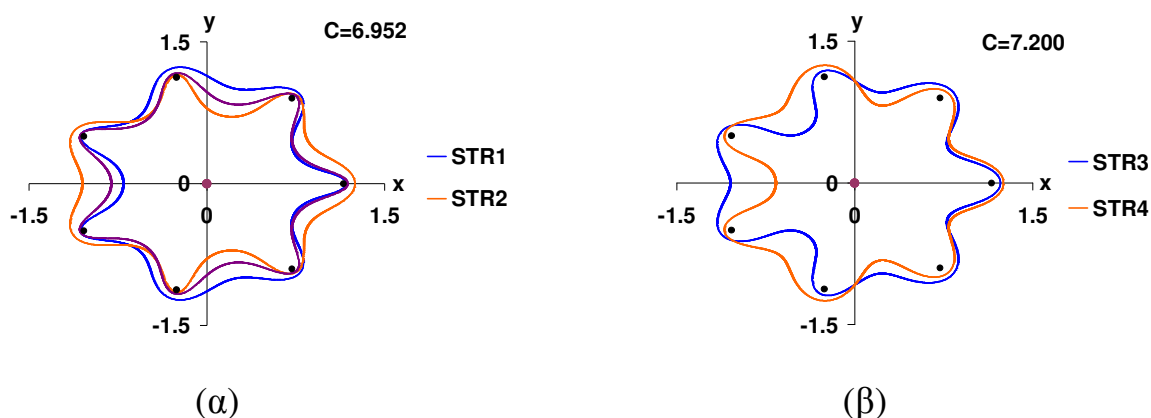
Σχήμα 9.20. Χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών της ομάδας STR

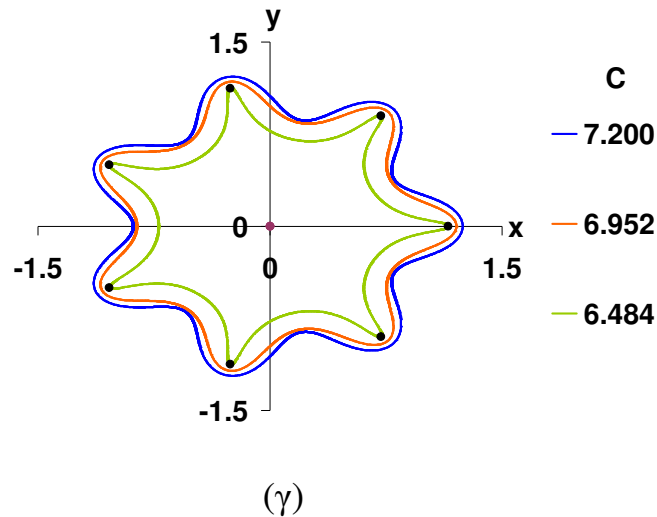
Παρατηρώντας την εξέλιξη των τροχιών του κλάδου STR1-2 βλέπουμε ότι ξεκινά από το αριστερό άκρο του με τροχιά κρούσης με τα primaries P_1 , P_4 και P_5 . Στη συνέχεια, και καθώς προσεγγίζουμε την κεντρική οικογένεια STR, οι τροχιές απομακρύνονται από τα προηγούμενα primaries για να καταλήξουν στο άλλο άκρο σε τροχιά κρούσης με τα P_2 , P_3 , P_6 και P_7 (Σχήμα 9.21α). Οι τροχιές αυτές είναι

πολλαπλά συμμετρικές και καθώς αυξάνεται η τιμή της x_0 η τιμή της ταχύτητας στην ημιπερίοδο αλλά και η τιμή της περιόδου παρουσιάζουν ακρότατο, ακριβώς στη θέση που διακλαδίζεται η STR1-2 με την STR. Όσον αφορά στις τιμές της ημιπεριόδου, αυτές κυμαίνονται από 3.41(M) μέχρι 4.76(L).

Όσον αφορά στην εξέλιξη των τροχιών του κλάδου STR3-4 και ξεκινώντας από το αριστερό άκρο του, παρατηρούμε ότι αυτές διαγράφονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να πλησιάζουν τα P_3 και P_6 , ενώ φτάνοντας στο άλλο άκρο του πλησιάζουν τα P_2, P_4, P_5 και P_7 primaries και απομακρύνονται από τα υπόλοιπα (Σχήμα 9.21β). Και αυτές οι τροχιές είναι πολλαπλά συμμετρικές και καθώς αυξάνεται η τιμή της x_0 , η τιμή της ταχύτητας στην ημιπερίοδο αλλά και η τιμή της περιόδου παρουσιάζουν ακρότατο, ακριβώς στη θέση που διακλαδίζεται η STR3-4 με την STR. Οι τιμές της ημιπεριόδου κυμαίνονται από 4.19 (L) μέχρι 5.90 (L).

Όσον αφορά στον κεντρικό κορμό της τρίαυνας και ξεκινώντας από τις υψηλότερες τιμές της σταθεράς C της οικογένειας, παρατηρούμε ότι όσο ελαττώνεται η τιμή της C οι τροχιές συρρικνώνονται και δίνουν τροχιές κρούσης με όλα τα περιφερειακά primaries (Σχήμα 9.21γ). Επίσης παρατηρούμε ότι με την ελάττωση της σταθεράς C , αυξάνεται με ομοιόμορφο τρόπο και η ταχύτητα στην ημιπερίοδο, ενώ η ημιπερίοδος παίρνει τιμές από 3.31(M) μέχρι 5.33 (L).





Σχήμα 9.21. Εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος των χαρακτηριστικών των οικογενειών: (α) STR1-2, (β) STR3-4, (γ) STR

Πίνακας 9.5. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών που εξελίσσονται μέσα στην περιοχή R_4

	C	\mathbf{x}_0	$\dot{\mathbf{y}}_0$	$\mathbf{x}_{T/2}$	$\dot{\mathbf{y}}_{T/2}$	T/2
STR	6.483987814	1.156618000	12.914266438	-0.721473800	-0.892176250	3.314565379
	6.952019927	1.205748000	3.432555501	-0.863323700	-0.610213826	3.680960956
	7.200039592	1.245986000	2.412003540	-0.886248100	-0.369373044	4.986700769
STR 1-2	6.952039788	1.177988000	5.120804808	-0.708097700	-0.574571226	3.830426474
	6.820050108	1.184162000	4.578240082	-0.810544300	-0.691474062	3.411504019
	6.952024439	1.249228000	2.410929584	-1.054126000	-0.648152618	3.832837924
STR 3-4	7.200039475	1.228585000	2.747159035	-1.051275000	-0.415666617	5.498424047
	7.088029529	1.220207000	2.968038761	-0.912522000	-0.511446590	4.188759172
	7.200039410	1.254671000	2.275060019	-0.669832300	-0.313588275	5.276280611
SN11	6.147986906	1.229286000	2.917902766	-1.025050000	-1.108478796	2.454691726
	6.416000957	1.246403000	2.562848406	-1.047335000	-0.978614397	2.733094552
	6.960017151	1.367300000	1.355530934	-0.660049100	-0.587494412	4.390315843

SN1	6.948019999	1.439763989	1.039324968	2.014461306	-0.750038607	4.194407332
	7.026010000	1.550942578	0.668496741	1.902731007	-0.553022653	2.426212592
	7.212000000	1.702513672	0.141913423	1.782470528	-0.136233234	2.275583439

9.3 Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στην περίπτωση που το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου $Manev$ με $e > 0$

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, η συγκεκριμένη περίπτωση παρουσιάζει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με τη βαρυτική. Αυτό σημαίνει ότι τόσο τα διαγράμματα x_0-C του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών και η εξέλιξη των οικογενειών σε αυτόν, όσο και η μορφή των τροχιών-μελών των οικογενειών αυτών, η εξέλιξή τους και όλες οι παραμετρικές μεταβολές, είναι παρόμοιες. Για το λόγο αυτό κρίνεται περιττή η επανάληψη παρόμοιων διαγραμμάτων αφού δεν προσθέτει καμία καινούργια πληροφορία για τα χαρακτηριστικά του δυναμικού συστήματος και δεν διαφοροποιεί τα όσα συμπεράσματα έχουμε εξάγει αναφορικά με τη βαρυτική περίπτωση.

9.4 Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στην περίπτωση που το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου $Manev$ με $e < 0$

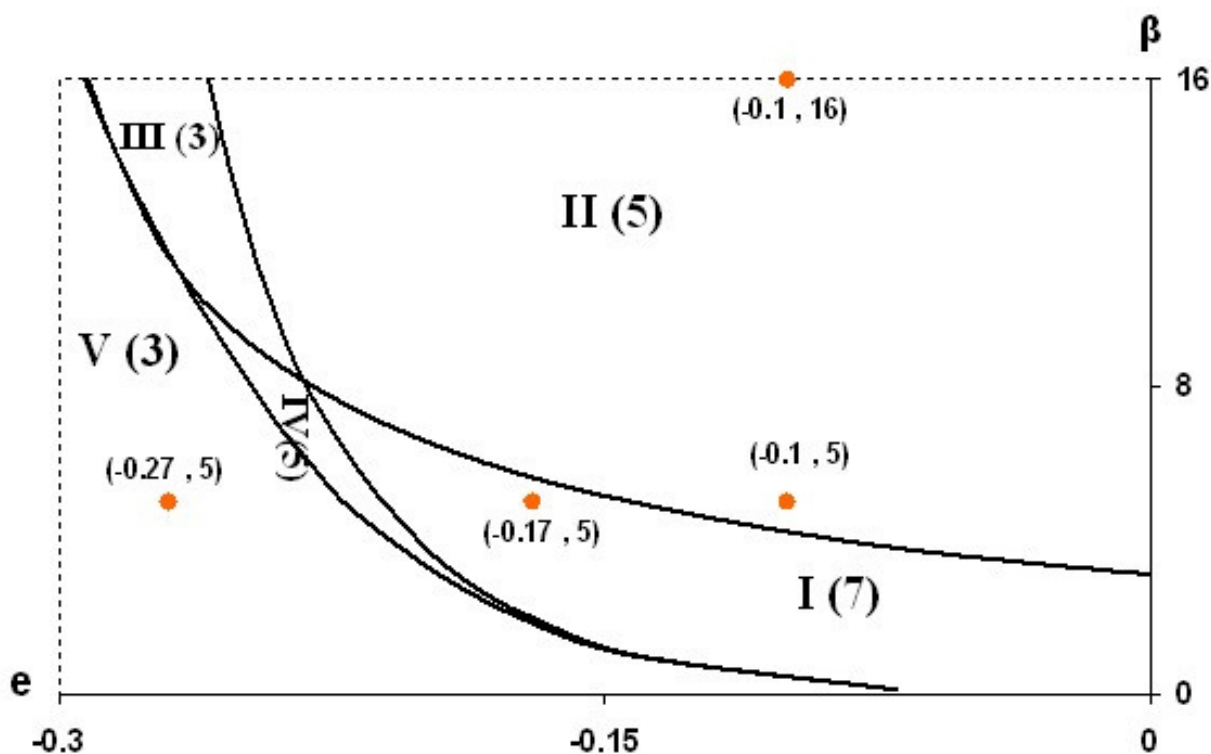
Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια (Κεφ.3 και 4), στην περίπτωση που η παράμετρος $Manev$ είναι αρνητική και εφόσον οι τιμές των τριών παραμέτρων (ν , β , e) καθιστούν την ποσότητα Δ θετική, οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας των διαγραμμάτων x_0-C παρουσιάζουν στην περιοχή του κεντρικού σώματος μια αναδίπλωση με αποτέλεσμα, δύο νέες ζώνες ισορροπίας να εμφανίζονται στο επίπεδο κίνησης των primaries. Το γεγονός αυτό προκαλεί τη διαφοροποίηση των χαρακτηριστικών καμπύλων των περιοδικών τροχιών σε σχέση με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις ($e=0$ και $e>0$). Οι σημαντικότερες μεταβολές συμβαίνουν στην περιοχή της αναδίπλωσης όπου αναπτύσσεται ένα πυκνό δίκτυο οικογενειών περιοδικών τροχιών (δενδροειδείς κατανομές οικογενειών), το οποίο δεν εμφανίζεται στις περιπτώσεις με $e \geq 0$. Μικρές ή μεγάλες μεταβολές όμως συμβαίνουν και στις οικογένειες που εντοπίζονται και στις προηγούμενες

περιπτώσεις και αφορούν στα ποσοτικά χαρακτηριστικά των τροχιών όπως οι αρχικές συνθήκες και οι συνθήκες στην ημιπερίοδο, η περίοδος των τροχιών καθώς το μέτρο της ταχύτητας στην ημιπερίοδο.

9.4.1 Περιπτώσεις που μελετήθηκαν για διάφορες τιμές των παραμέτρων και κατανομές των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών στα αντίστοιχα διαγράμματα x_0 -C

Στην παρούσα διατριβή, εξετάσαμε αναλυτικά τις συμμετρικές απλές περιοδικές τροχιές για $\nu=7$ και τέσσερα διαφορετικά ζεύγη παραμέτρων (e, β) επιλέγοντάς τα έτσι ώστε να αντλήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά του συστήματος σε αλλαγές των παραμέτρων και να διαμορφώσουμε όσο πιο αξιόπιστα γενικά συμπεράσματα μπορούμε. Επικουρικά, και προκειμένου να αντιληφθούμε καλύτερα την παραμετρική εξέλιξη των χαρακτηριστικών των οικογενειών και των τροχιών τους εξετάσαμε τοπικά και άλλα ζεύγη παραμέτρων όπως τα $(e=-0,1, \beta=10)$ και $(e=-0.23, \beta=5)$. Στο Σχήμα 9.22 παραθέτουμε πάλι το διάγραμμα διακλαδώσεων e - β για $\nu=7$, όπου έχουμε επισημάνει με κόκκινες κουκίδες, τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις των ζευγών των παραμέτρων που μελετήσαμε:

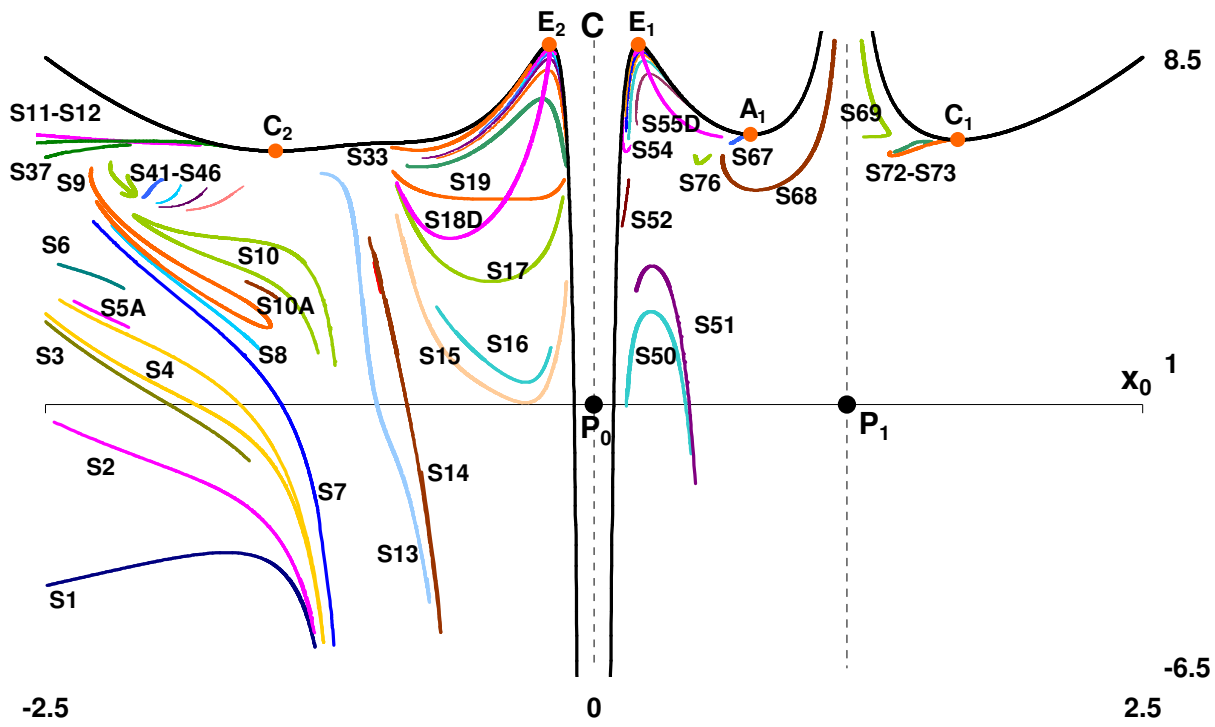
- $\beta=5, e =-0.1$
- $\beta=5, e =-0.17$
- $\beta=5, e =-0.27$
- $\beta=16, e =-0.1$



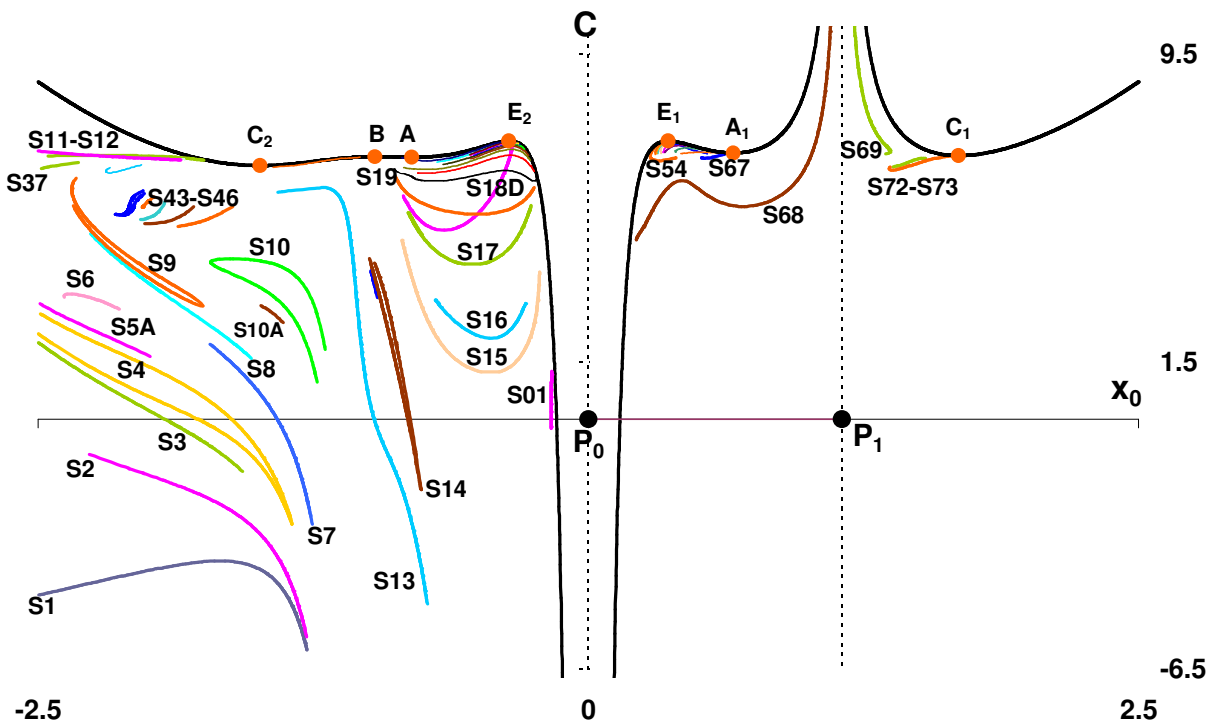
Σχήμα 9.22 Το διάγραμμα e - β για $n=7$, με τις καμπύλες διακλαδώσεων των ζωνών ισορροπίας. Με κόκκινες κουκίδες σημειώνονται οι βασικές περιπτώσεις των παραμέτρων που μελετήσαμε

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα, οι δύο από τις περιπτώσεις αφορούν στην περιοχή II όπου υπάρχουν πέντε ζώνες ισορροπίας ($\beta=5$, $e=-0.1$ και $\beta=16$, $e=-0.1$), μία αφορά στην περιοχή I με επτά ζώνες ισορροπίας ($\beta=5$, $e=-0.17$) και μία αφορά στην περιοχή V με τρεις ζώνες ισορροπίας ($\beta=5$, $e=-0.27$). Αυτό σημαίνει ότι, τόσο τα διαγράμματα x_0 -C με τις αντίστοιχες καμπύλες μηδενικής ταχύτητας όσο και τα εμφανιζόμενα σε αυτές ακρότατα, διαφοροποιούνται με αποτέλεσμα τη μεταβολή της κατανομής των οικογενειών, καθώς κάποιες από αυτές παύουν να υπάρχουν, κάποιες μεταβάλουν την εξέλιξή τους και κάποιες άλλες γεννώνται.

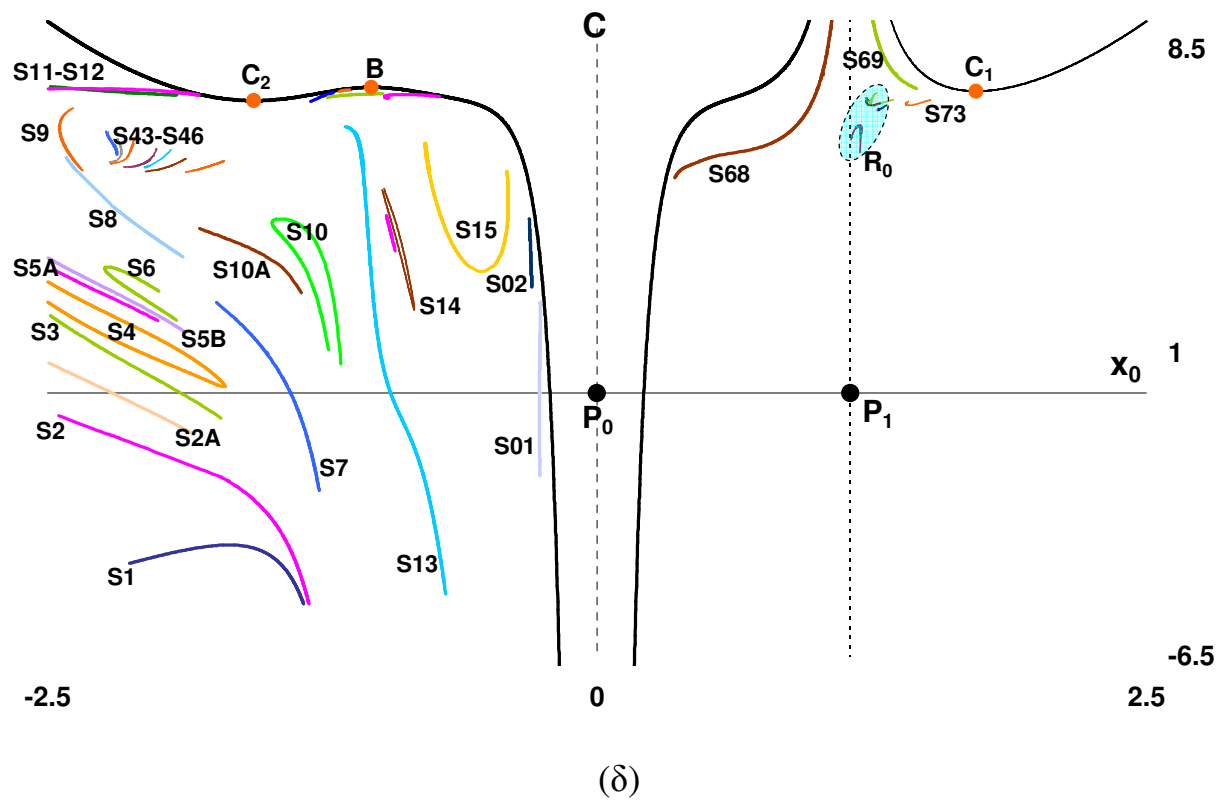
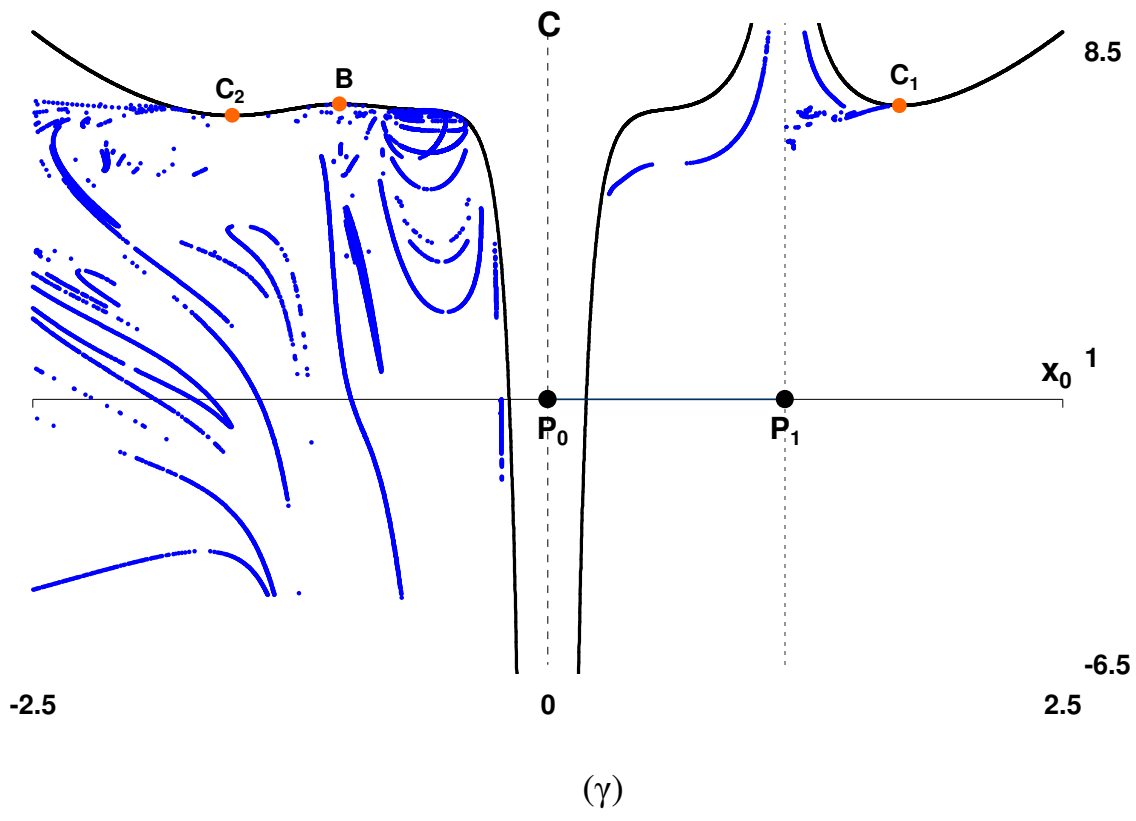
Στα επόμενα Σχήματα 9.23α - 9.23ε παραθέτουμε την κατανομή των οικογενειών απλών συμμετρικών τροχιών για κάθε ένα από τα βασικά ζεύγη των παραμέτρων που χρησιμοποιήσαμε, καθώς επίσης και την κατανομή για την περίπτωση με $n=7$, $\beta=5$ και $e=-0.23$ (που χρησιμοποιήθηκε επικουρικά) η οποία ανήκει στην περιοχή V με τρεις ζώνες ισορροπίας. Η τελευταία περίπτωση βρίσκεται πολύ κοντά στην καμπύλη διακλάδωσης BC_2 του διαγράμματος διακλαδώσεων.

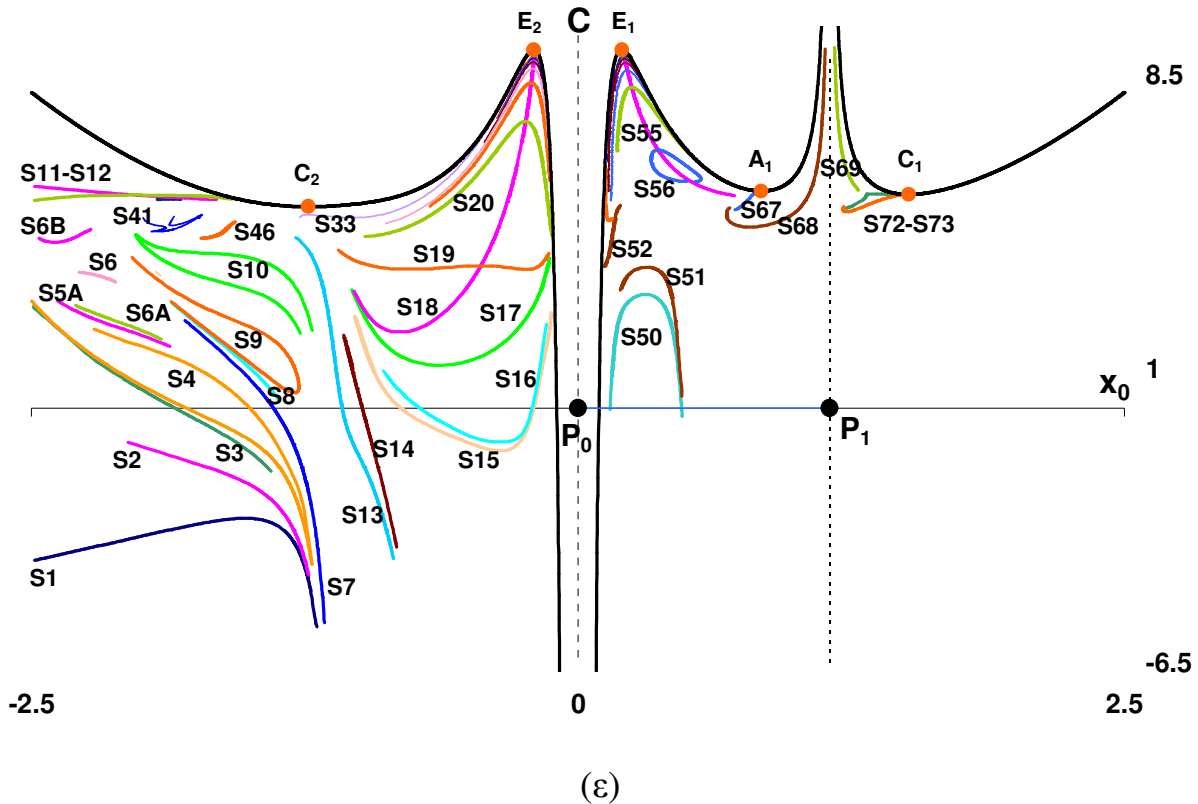


(α)



(β)





Σχήμα 9.23. Χαρακτηριστικές καμπύλες οικογενειών απλών συμμετρικών τροχιών στο επίπεδο αρχικών συνθηκών x_0 - C για τις περιπτώσεις: (α) $\beta=5$, $e=-0.1$, (β) $\beta=5$, $e=-0.17$, (γ) $\beta=5$, $e=-0.23$, (δ) $\beta=5$, $e=-0.27$, (ε) $\beta=16$, $e=-0.1$

Επειδή στα διαγράμματα του Σχήματος 9.23, κάποιες χαρακτηριστικές καμπύλες οικογενειών δεν διακρίνονται με σαφήνεια ώστε να αντιληφθούμε την εξέλιξή τους στο φασικό χώρο, είτε γιατί συνωστίζονται σε πολύ μικρό χώρο του διαγράμματος, είτε γιατί η εξέλιξή τους είναι πολύ σύντομη, φροντίσαμε σε επόμενες παραγράφους να δώσουμε λεπτομερέστερη εικόνα μεγεθύνοντας τις περιοχές όπου εμφανίζονται ώστε να μελετηθεί ευχερέστερα η παραμετρική μεταβολή τους. Ειδικά για την περίπτωση με $\beta=5$, $e=-0.27$ που φαίνεται στο Σχήμα 9.23(δ), έχουμε προσδιορίσει μέσα σε διάστικτο πλαίσιο την περιοχή R_0 , η οποία περικλείει μία ομάδα χαρακτηριστικών καμπύλων οι οποίες λόγω της εγγύτητάς τους είναι εξαιρετικά δυσδιάκριτες και για αυτό το λόγο θα εξεταστούν σε ξεχωριστή παράγραφο στη συνέχεια της μελέτης μας.

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό, ότι εντοπίστηκε ένας πολύ μεγάλος αριθμός οικογενειών (πάνω από 100) σε κάθε περίπτωση, οι οποίες όπως είναι φυσικό, λόγω

του περιορισμένου χώρου της διατριβής δεν είναι δυνατόν να αναφερθούν όλες. Έτσι, κρίναμε αναγκαίο να περιορισθούμε σε μερικές μόνο από αυτές τις οποίες στη συνέχεια ομαδοποιήσαμε, έχοντας ως αποκλειστικό κριτήριο την «χωροταξική» τους κατανομή στο επίπεδο x_0 -C και την καλύτερη ανάδειξη των μεταβολών που υφίστανται οι χαρακτηριστικές καμπύλες κατά την παραμετρική τους εξέλιξη. Ο Πίνακας 9.6 που ακολουθεί περιέχει τις ομάδες και τις οικογένειες που συμπεριλαμβάνονται σε καθεμία από αυτές. Κάθε ομάδα των απλών περιοδικών τροχιών χαρακτηρίζεται με το σύμβολο F και συμπληρώνεται με έναν διαφορετικό αριθμό κάθε φορά.

Πίνακας 9.6. Ομαδοποίηση οικογενειών απλών περιοδικών τροχιών

ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ-ΜΕΛΗ
F1	S1-S2-S7-S8
F2	S4-S14-S15-S17
F3	S9-S10-S13
F4	S41- S43- S44- S45-S46
F5	S50-S51-S52
F6	S68-S69-S72-S73
F7	"Fish-type" κατανομή των οικογενειών S11-S12-S82-S84-S86-S87-S88
F8	Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισοροπίας E_2 και E_1

9.5 Μελέτη των οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

Στη μελέτη των οικογενειών που θα ακολουθήσει, αναφερόμαστε ως επί το πλείστον στην περίπτωση που οι παράμετροι λαμβάνουν τις εξής τιμές: $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$. Υπάρχουν όμως και κάποιες περιπτώσεις που είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές τιμές β και e , γεγονός που θα γίνεται αντιληπτό στη ροή του κειμένου.

9.6 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ F1 (οικογένειες S1-S2-S7-S8)

9.6.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0-C όπου $x_0 < 0$. Από αυτές, η χαρακτηριστική της S1 αναπτύσσεται εξ ολοκλήρου στις αρνητικές τιμές της C και παρουσιάζει ακρότατο ως προς την C. Ο προς τα δεξιά κλάδος του ακροτάτου εξελίσσεται σχεδόν παράλληλα με την ασύμπτωτη διά του P_0 (Σχήμα 9.24α). Το ίδιο συμβαίνει και με τις χαρακτηριστικές των υπόλοιπων οικογενειών της συγκεκριμένης ομάδας. Οι κλάδοι αυτοί πλησιάζουν μεταξύ τους και σχηματίζουν δέσμη.

Η οικογένεια S1 αποτελείται από ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου (Σχήμα 9.24β) οι οποίες διαγράφονται έξω και γύρω από τον σχηματισμό των primaries. Η ημιπερίοδος τους στο διάστημα που εξετάσαμε κυμαίνονταν από 1.1(S)– 2.17(M) (τροχιές μικρής και μεσαίας ημιπεριόδου).

Όσον αφορά στην οικογένεια S2, η χαρακτηριστική καμπύλη της εξελίσσεται στον ίδιο χώρο του διαγράμματος x_0-C με σχεδόν σταθερή κλίση ως προς τον άξονα x_0 μέχρι περίπου την τιμή $C=-1.6$. Στη συνέχεια κάμπτεται και για μικρότερες τιμές της C συνεχίζει σχεδόν παράλληλα προς τον άξονα C (Σχήμα 9.23α). Αποτελείται από διαπλανητικού τύπου ανάδρομες τροχιές με τιμές ημιπεριόδου που κυμαίνονται από 1.0(S)- 2.3(M), όπου το μικρό σώμα διαγράφει κατά το μεγαλύτερο μέρος του εξωτερικά τα περιφερειακά σώματα, εισέρχεται μέσα στον κύκλο των primaries μεταξύ των P_7 και P_1 και εξέρχεται εκ νέου μεταξύ των P_1 και P_2 (Σχήμα 9.25α).

Καθώς ελαττώνεται η τιμή της C οι τροχιές συρρικνώνονται και πλησιάζουν το περιφερειακό P_1 ενώ η περίοδος ελαττώνεται, όπως επίσης και η ταχύτητα στην ημιπερίοδο.

Οι τροχιές της οικογένειας S_7 είναι ανάδρομες διαπλανητικού τύπου με ημιπεριόδους που κυμαίνονται από $0.98(S) - 4.33(L)$ (τροχιές μικρής έως μεγάλης ημιπεριόδου) και διαγράφονται έτσι ώστε να παραμένουν εκτός τροχιάς τα primaries P_3 και P_6 (Σχήμα 9.25β).

Τέλος, οι τροχιές της οικογένειας S_8 είναι κι αυτές ανάδρομες διαπλανητικού τύπου με ημιπεριόδους που κυμαίνονται από $1.63(S) - 3.38(L)$ και διαγράφονται έτσι ώστε μόνο τα primaries P_0, P_1, P_4 και P_5 να περικλείονται στο εσωτερικό τους (Σχήμα 9.26β).

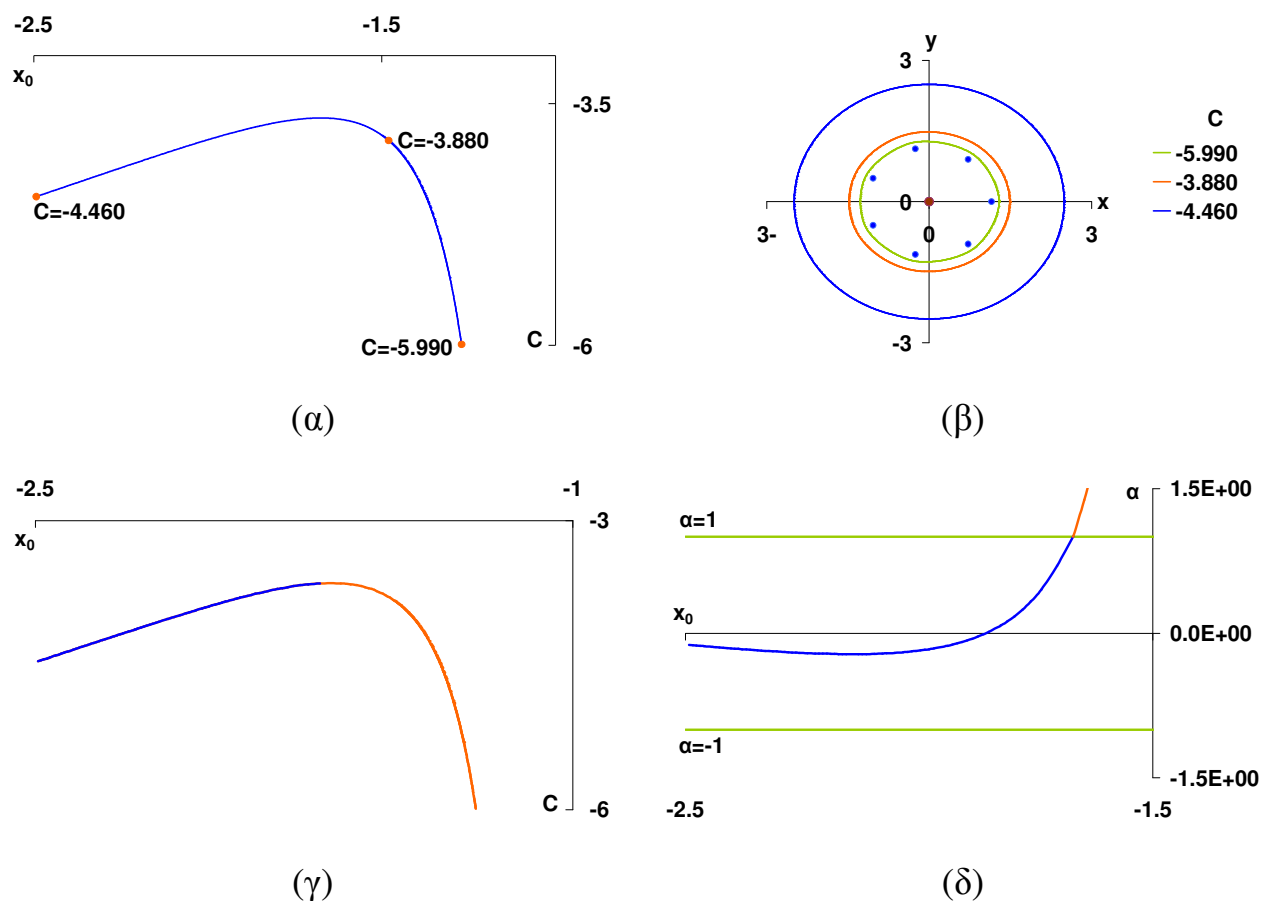
Σε όλες τις οικογένειες της ομάδας, η περίοδος ελαττώνεται καθώς οι χαρακτηριστικές πλησιάζουν την ασύμπτωτη διά του κεντρικού primary, δηλαδή καθώς η απόλυτη τιμή της x_0 μικραίνει (Σχήμα 9.28). Παρόμοια μεταβολή (ελάττωση) της περιόδου παρατηρείται και όταν ελαττώνεται η σταθερά του Jacobi C , με εξαίρεση τις τροχιές της οικογένειας S_1 (Σχήμα 9.29) η οποία παρουσιάζει ακρότατο ως προς C (στην ίδια τιμή που εμφανίζεται και στο διάγραμμα x_0-C) όπου παρά την ύπαρξη του ακροτάτου, παρατηρείται συνεχής ελάττωση της περιόδου.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όσον αφορά στη μελέτη της ευστάθειας των τροχιών που εξετάζονται σε κάθε ομάδα, παραθέτουμε το διάγραμμα ευστάθειας x_0-a ή $C-a$, από το οποίο εξάγουμε τα συμπεράσματά μας σε συμφωνία με τη θεωρία που έχουμε ήδη αναπτύξει στο προηγούμενο Κεφάλαιο 8. Σε όλα τα διαγράμματα που αφορούν στην ευστάθεια κάθε οικογένειας τροχιών, τα τμήματα των καμπύλων που έχουν μπλε χρώμα αντιστοιχούν σε ευσταθείς τροχιές, ενώ αυτά που έχουν πορτοκαλί χρώμα, σε ασταθείς. Τέλος στους πίνακες όπου παραθέτουμε ενδεικτικά και για ορισμένες τροχιές της κάθε ομάδας οικογενειών, τις τιμές των βασικών μεγεθών κάθε τροχιάς, στην τελευταία στήλη χαρακτηρίζουμε την ευστάθεια τους ως ευσταθή (S Stable) ή ως ασταθή (U Unstable).

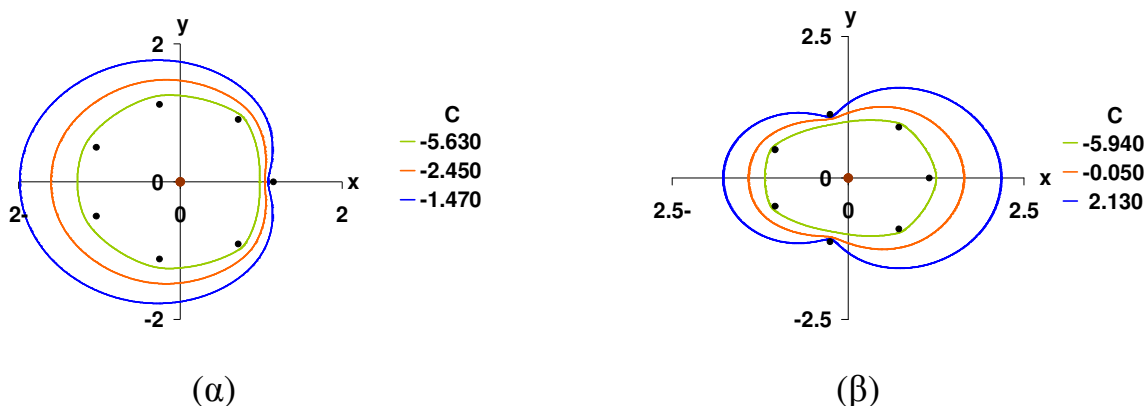
Από το διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της οικογένειας S1 (Σχήμα 9.24δ), οι τροχιές που προκύπτουν είναι άλλοτε ευσταθείς και άλλοτε ασταθείς. Διακρίνουμε μάλιστα την ύπαρξη μίας κρίσιμης περιοδικής τροχιάς πρώτου είδους ($\alpha=+1$), γεγονός που επαληθεύει τη θεωρία, αφού παρουσιάζεται ακρότατο ως προς C (Hénon 1965b). Στο Σχήμα 9.24γ διακρίνουμε τα τμήματα της χαρακτηριστικής από τα οποία προκύπτουν αυτές οι τροχιές. Οι τροχιές των υπόλοιπων οικογενειών της ομάδας (S2,S7 και S8) είναι ασταθείς και ειδικότερα για τις τροχιές της S8 από το διάγραμμα ευστάθειάς του Σχήματος 9.26γ, διακρίνουμε τον εξαιρετικά ασταθή χαρακτήρα τους.

Στον Πίνακα 9.7 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.

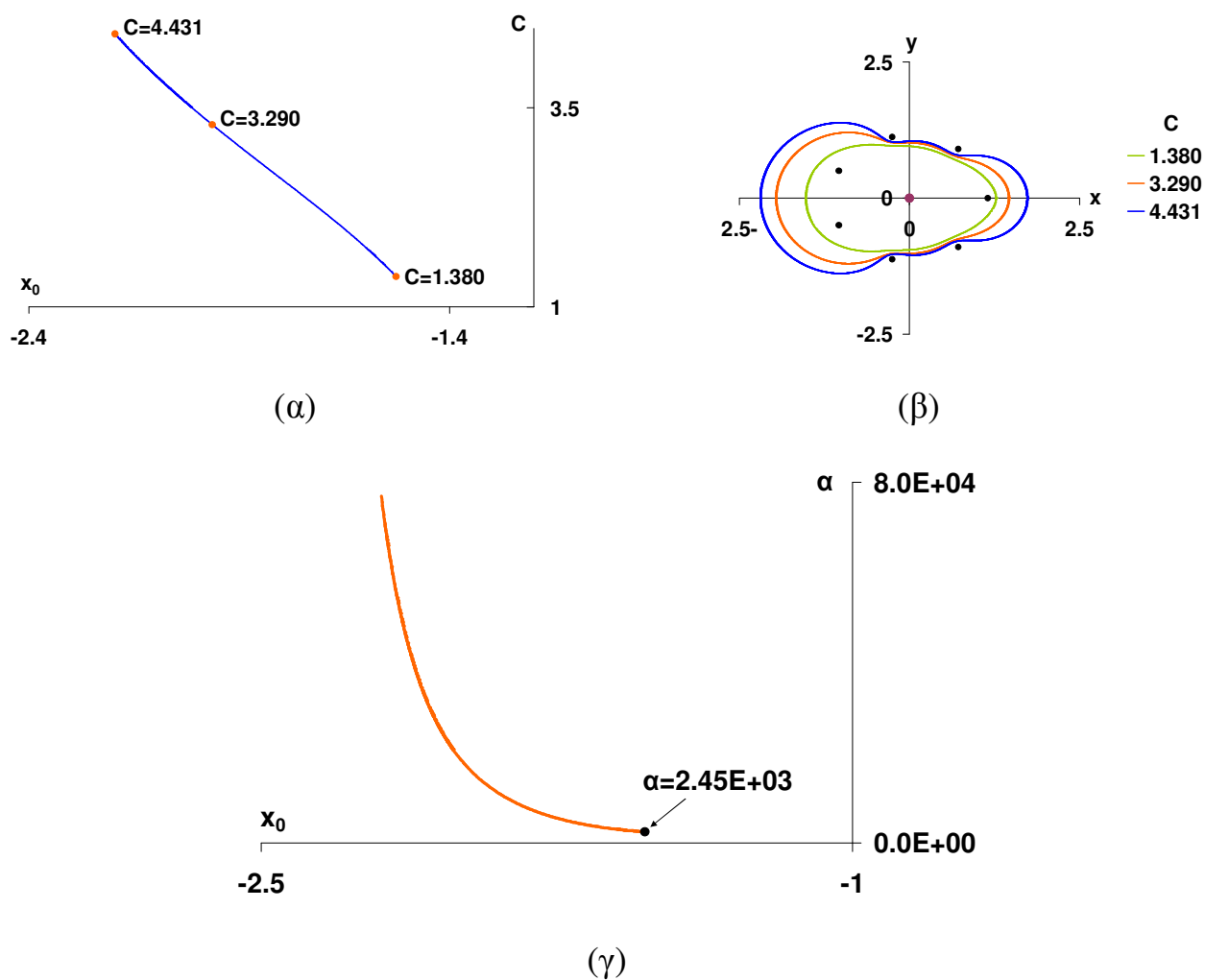


Σχήμα 9.24. Οικογένεια S1. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και περιοχές ευστάθειας,

(δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α



Σχήμα 9.25. Εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος των χαρακτηριστικών των οικογενειών: (α) S2, (β) S7



Σχήμα 9.26. Οικογένεια S8. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με

σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα,

(β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής,

(γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Πίνακας 9.7. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F1

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S1	-4.460010027	-2.492315430	3.605746154	2.492315600	-3.605746248	2.171276857	S
	-3.880000038	-1.479901184	3.185423899	1.485784961	-3.261598404	1.447104774	U
	-5.990020152	-1.270547190	3.509014398	1.290941817	-3.817659796	1.113648938	U
S2	-0.429997898	-2.459619019	2.973582895	2.459619460	-2.973583184	2.304501300	U
	-3.240000094	-1.446328659	3.083035725	1.021474706	-3.467449910	1.319608604	U
	-5.630010111	-1.273941582	3.457062832	0.981059402	-3.685594384	1.067202087	U
S7	4.523192908	-2.280732178	1.799501047	2.599643399	-2.113667327	4.328843257	U
	1.205920039	-1.593955284	2.259559593	1.942979130	-2.378334821	2.165802566	U
	-5.940046135	-1.185069428	3.509072165	1.251528764	-3.983699953	0.984724125	U
S8	4.431219895	-2.195386033	1.747769295	1.728236018	-1.461264368	3.376542862	U
	3.289999931	-1.964248369	1.890621686	1.458160828	-1.887608476	2.459369698	U
	1.379919903	-1.527129993	2.213169852	1.270141256	-2.792855453	1.624751328	U

9.6.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0 -C, x_0 -T/2 και C-T/2

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

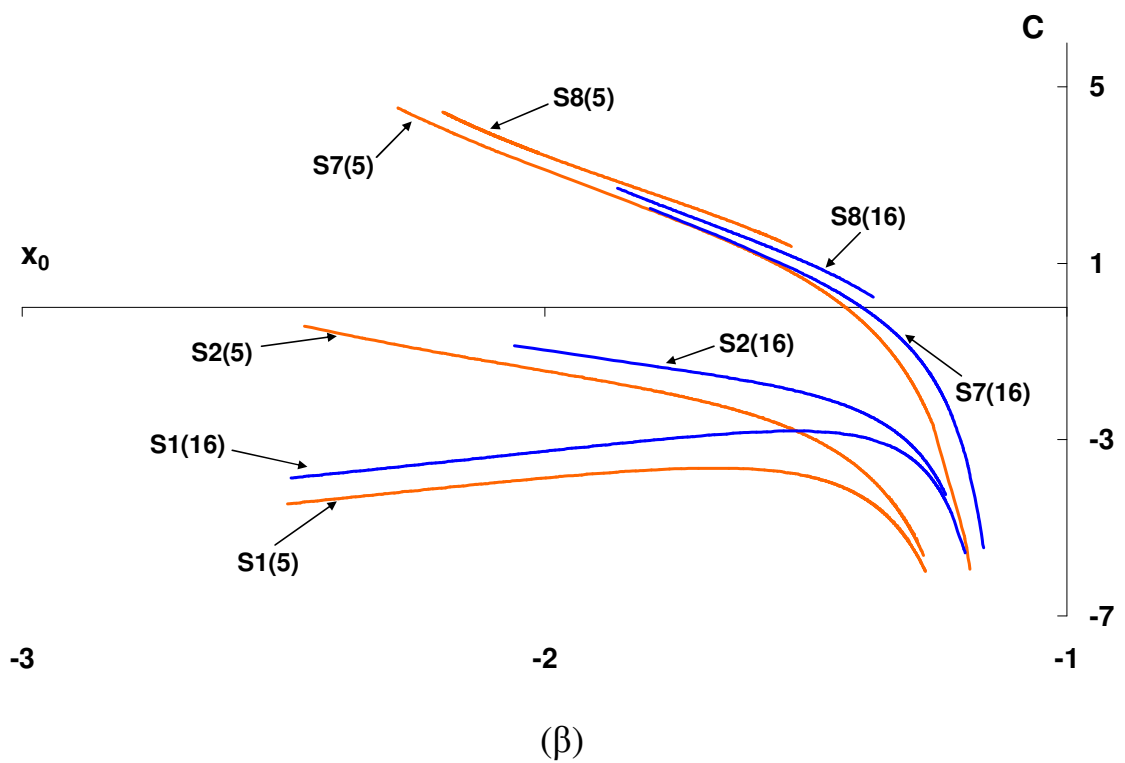
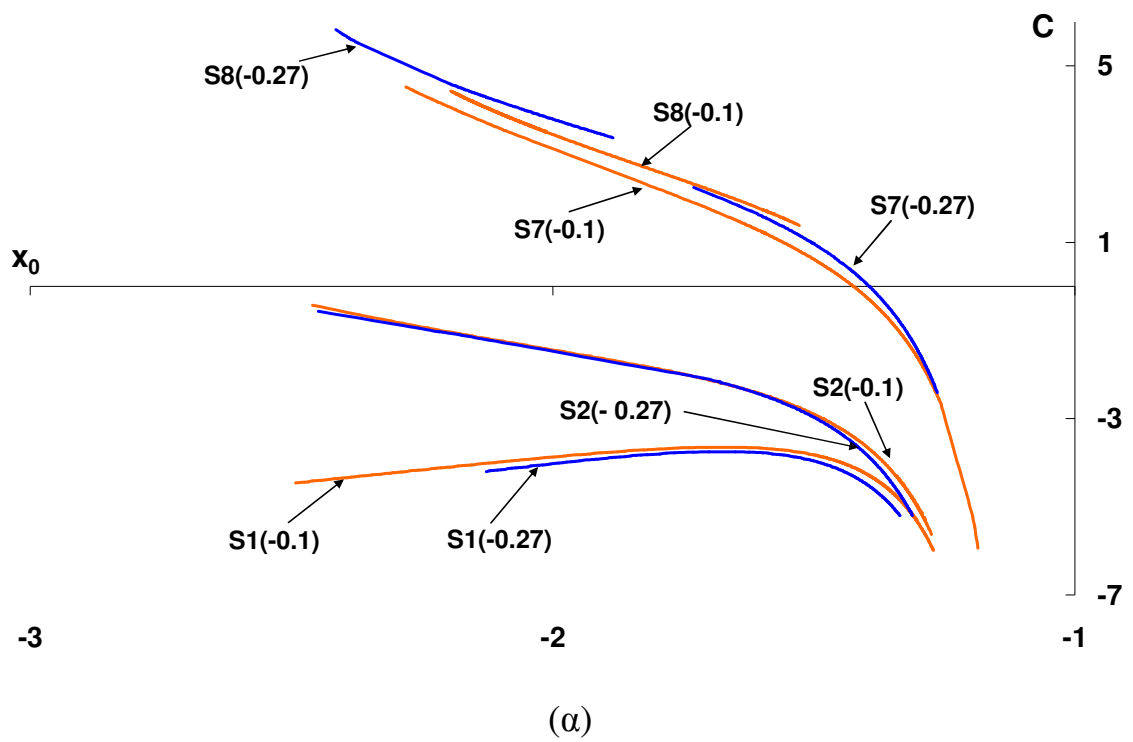
Όσον αφορά στην παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων και των τροχιών με την παράμετρο β , διευκρινίζουμε ότι τα σχόλια που θα γίνουν στη συνέχεια αφορούν σε τιμές της $5 \leq \beta \leq 16$. Όμως από ενδείξεις που είχαμε εξετάζοντας μεγαλύτερες τιμές της β , τα συμπεράσματα μπορούν να επεκταθούν

μέχρι την τιμή $\beta=100$ λαμβάνοντας βέβαια υπόψιν ότι όσον αυξάνει η β οι μεταβολές που παρατηρούνται ελαττώνονται, έτσι ώστε στο διάστημα τιμών $100 < \beta < 500$ να είναι εξαιρετικά μικρές, και να τείνουν να μηδενισθούν όταν $\beta > 500$. Η παρατήρηση αυτή αφορά τόσο στη βαρυτική όσο και στην περίπτωση Manev με $e > 0$ ή $e < 0$.

(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0-C

Όταν διατηρείται σταθερή η τιμή της β και μεταβάλλεται η τιμή της e , τότε παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει η απόλυτη τιμή της e , η καμπύλη της οικογένειας $S1$ μετατοπίζεται σε χαμηλότερες τιμές της C , η καμπύλη της $S2$ μεταβάλλεται ελάχιστα, η $S7$ μετατοπίζεται ελάχιστα προς τα άνω, ενώ ταυτόχρονα μετατοπίζεται κυρίως προς τα δεξιά δηλαδή στην αρχή των αξόνων, και τέλος η $S8$ μετατοπίζεται κυρίως προς μεγαλύτερες τιμές της C (Σχήμα 9.27α).

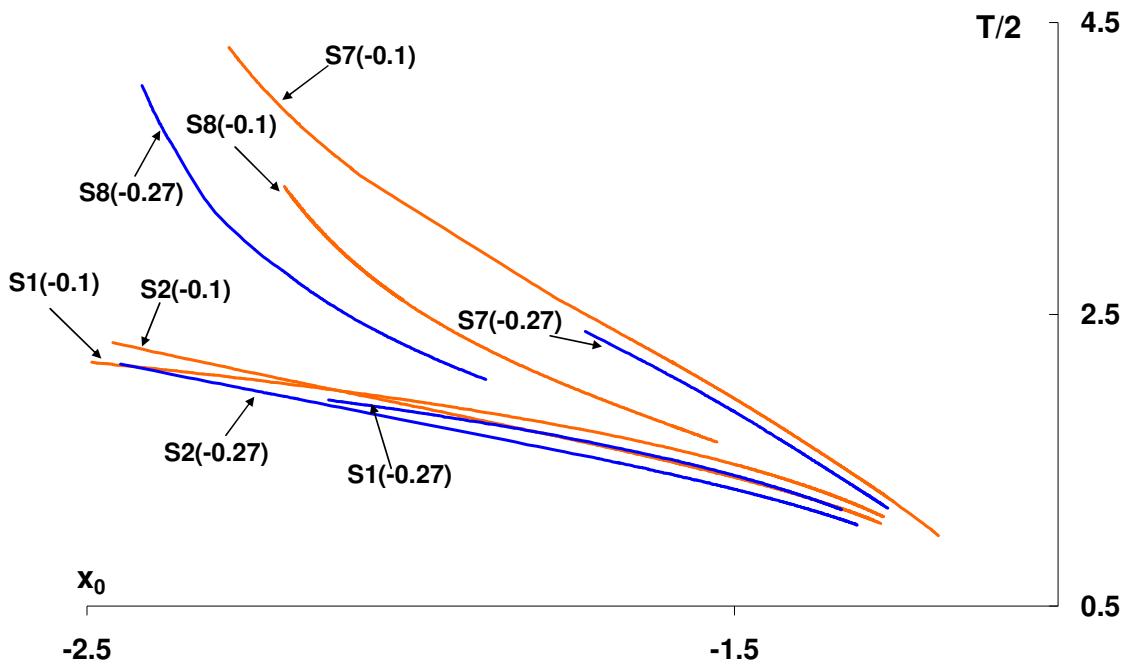
Διατηρώντας σταθερή την τιμή της e και μεταβάλλοντας την τιμή της β , η $S1$ μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό της προς μεγαλύτερες τιμές της C και η $S2$ παρουσιάζει μία μετατόπιση προς τα άνω και προς τα δεξιά δηλαδή προς μεγαλύτερες τιμές της C αλλά και πλησιέστερα προς την αρχή των αξόνων. Η καμπύλη της $S7$ πραγματοποιεί μετατόπιση παρόμοια με αυτήν της $S2$, ενώ τέλος η $S8$ παρουσιάζει μετατόπιση προς τα κάτω (μικρότερες τιμές C) και δεξιά (αρχή των αξόνων) (Σχήμα 9.27β).



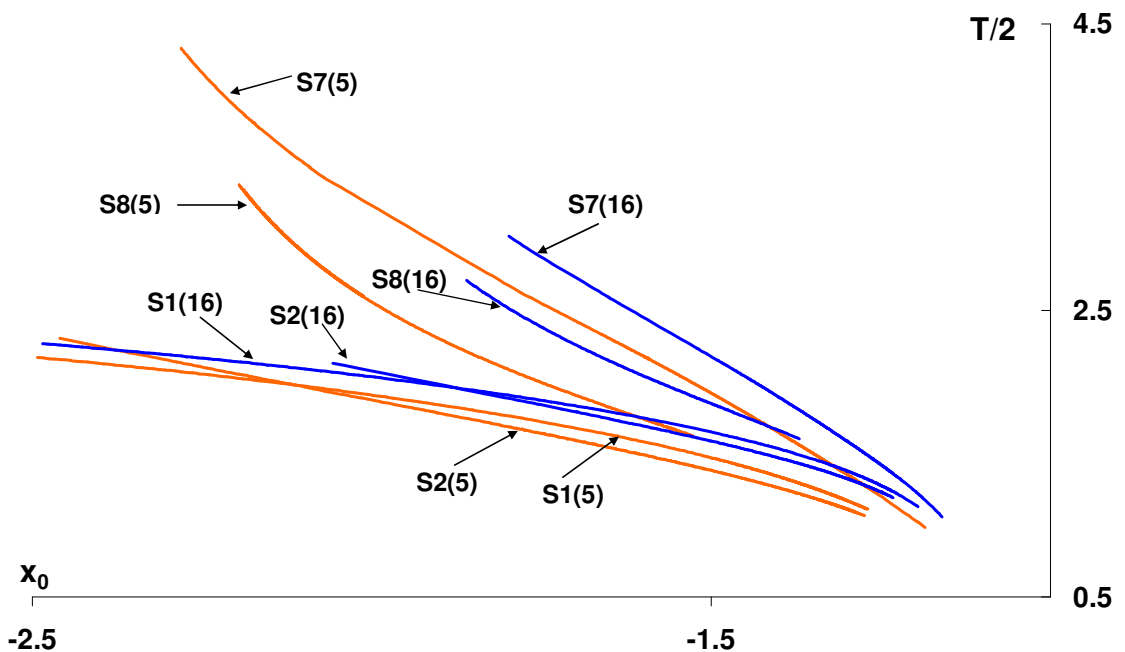
Σχήμα 9.27. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων: (α) με την παράμετρο ϵ για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $\epsilon=-0.1$

(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$

Στην περίπτωση αυτή, αύξηση της απόλυτης τιμής της ϵ με σταθερή την τιμή της β , επιφέρει μετατόπιση των καμπύλων προς μικρότερες τιμές της περιόδου. Η μετατόπιση αυτή είναι μεγαλύτερη στην οικογένεια S8 και μικρότερη στις υπόλοιπες (S1, S2 και S7) (Σχήμα 9.28α). Αντίθετα, αύξηση της τιμής της παραμέτρου β διατηρώντας την ϵ σταθερή, προκαλεί μετατόπιση των καμπύλων προς μεγαλύτερες τιμές της περιόδου (Σχήμα 9.28β).



(α)

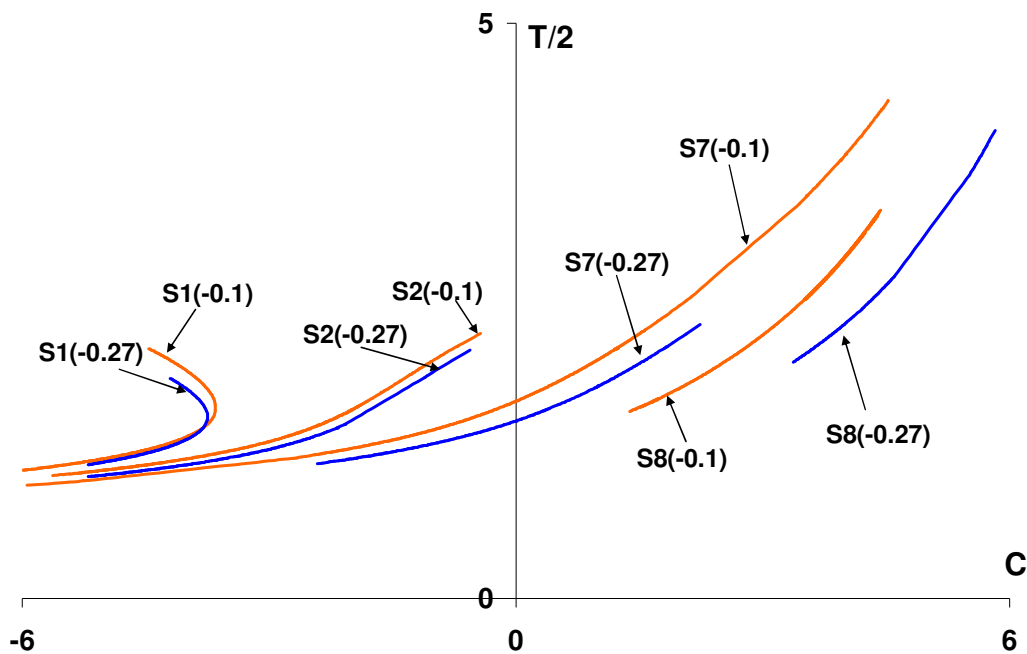


(β)

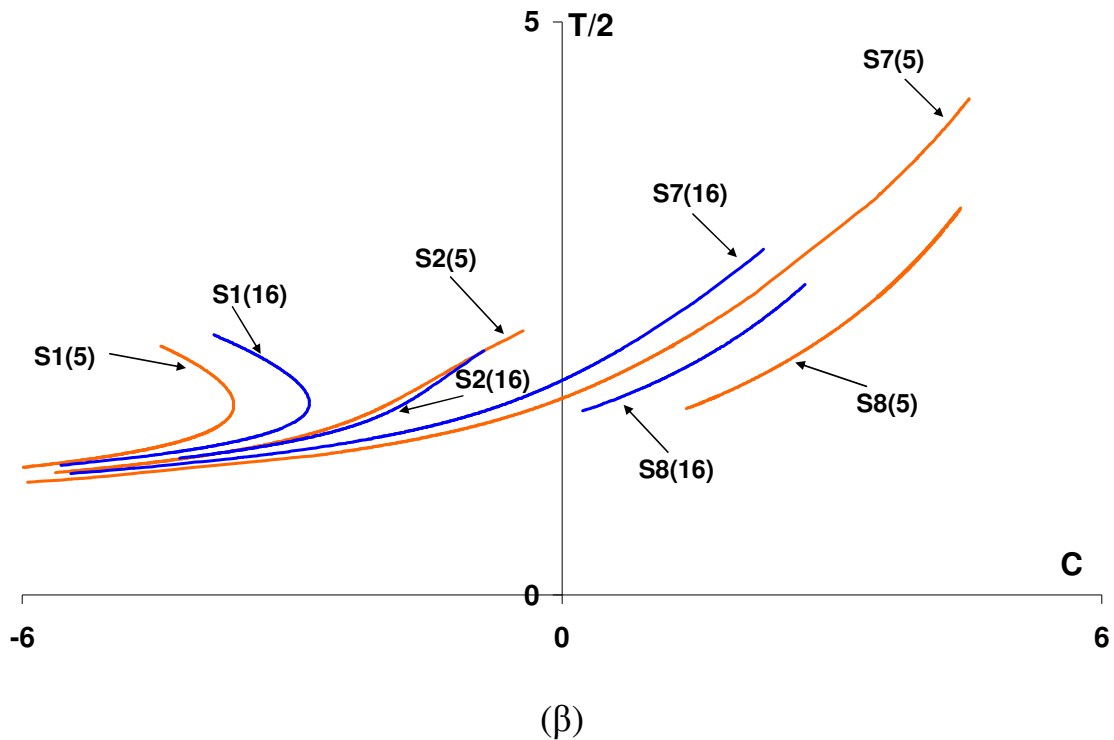
Σχήμα 9.28. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C-T/2$

Διατηρώντας την παράμετρο β σταθερή και αυξάνοντας απόλυτα την τιμή της e παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $C-T/2$ των οικογενειών μετατοπίζονται προς μικρότερες τιμές της περιόδου (Σχήμα 9.29α), ενώ διατηρώντας την e σταθερή και αυξάνοντας την τιμή της β μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της περιόδου (Σχήμα 9.29β).



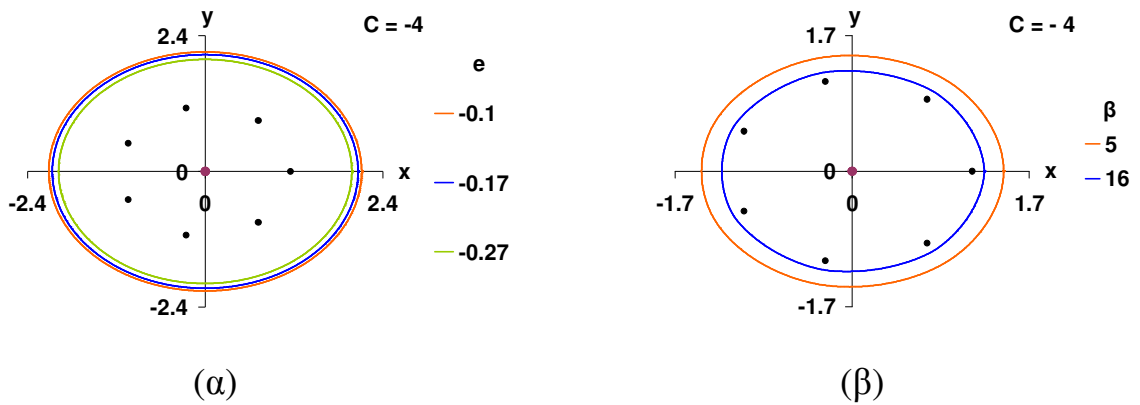
(α)



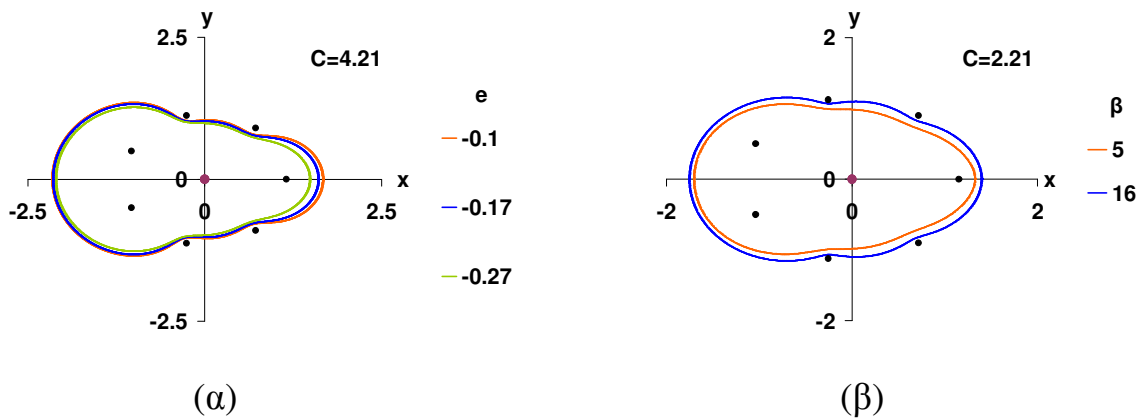
Σχήμα 9.29. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iv) Παραμετρική εξέλιξη των τροχιών

Όπως παρατηρούμε στα Σχήματα 9.30α και 9.31α αναφορικά με τις οικογένειες S1 και S8, τροχιές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της C και για την αυτή τιμή της παραμέτρου β , παρουσιάζουν συρρίκνωση καθώς αυξάνει κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e . Παρόμοιες μεταβολές συμβαίνουν και στα υπόλοιπα μέλη-οικογένειες της ομάδας. Όμως, όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β (για ίδια τιμή της e), τότε οι μεν τροχιές της οικογένειας S1 συρρικνώνονται (Σχήμα 9.30β), ενώ οι τροχιές της S8 και των υπολοίπων μελών της ομάδας διευρύνονται (Σχήμα 9.31β).



Σχήμα 9.30. Οικογένεια S1. Παραμετρική μεταβολή ισοενεργειακών τροχιών για $C=-4$: (α) με την παράμετρο e , (β) με την παράμετρο β



Σχήμα 9.31. Οικογένεια S8. Παραμετρική μεταβολή ισοενεργειακών τροχιών: (α) με την παράμετρο e για $C=4.21$, (β) με την παράμετρο β για $C=2.21$

9.7 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F2 (οικογένειες S4-S14-S15-S17)

9.7.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

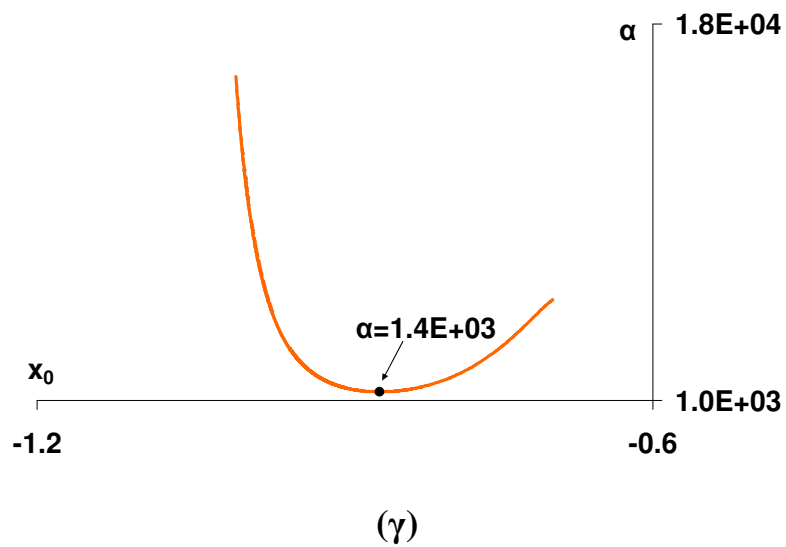
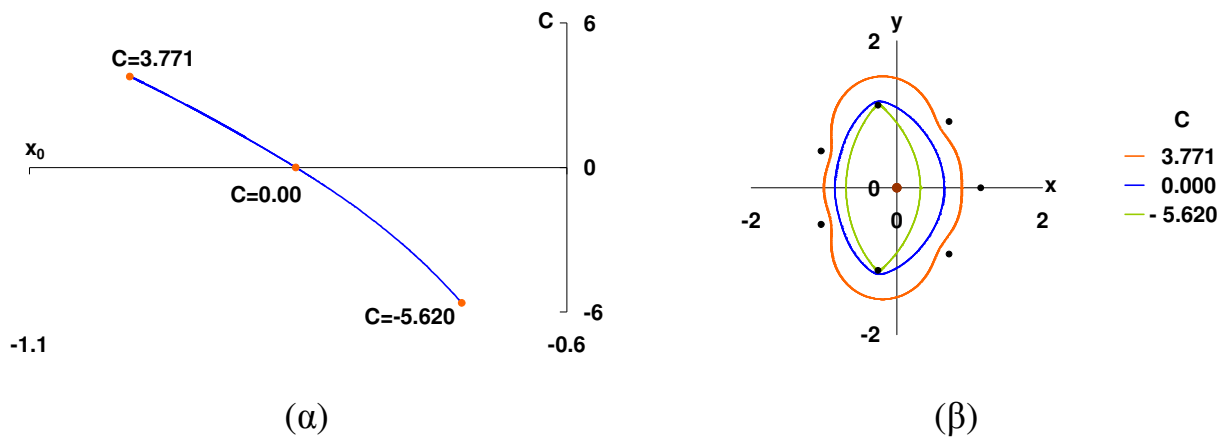
Όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0-C όπου $x_0 < 0$, και είναι ανάδρομες διαπλανητικού τύπου. Από αυτές, οι χαρακτηριστικές των S4, S14 αναπτύσσουν ένα μέρος στα θετικά C και ένα μέρος στα αρνητικά, ενώ οι χαρακτηριστικές των S15, S17 αναπτύσσονται εξ ολοκλήρου στις θετικές τιμές των C και παρουσιάζουν ακρότατο (Σχήμα 9.23α). Η χαρακτηριστική της S4 εμφανίζει δύο σκέλη τα οποία κατά το ένα άκρο τους ($C > 0$) πλησιάζουν πολύ το ένα με το άλλο με πιθανή ταύτισή τους, ενώ κατά το άλλο άκρο

($C < 0$) ενώνονται. Είναι πιθανό η χαρακτηριστική της οικογένειας να αυτοκλείεται σχηματίζοντας κλειστή καμπύλη (θηλιά ή βρόχο). Η χαρακτηριστική της οικογένειας S14 εμφανίζεται ως μία συνεχής καμπύλη με μεγάλο σχετικά μήκος και σχεδόν σταθερής κλίσης ως προς των άξονα των x_0 . Κοινό γνώρισμα όλων των τροχιών αυτής της ομάδας είναι οι μικρές (S) έως μεσαίες (M) τιμές των ημιπεριόδων τους.

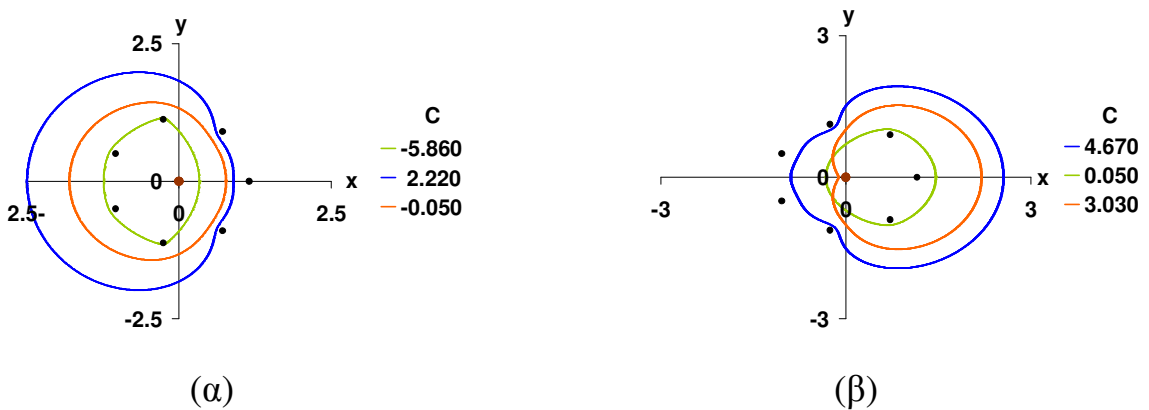
Οι τροχιές της οικογένειας S4 διαγράφονται έτσι ώστε να παραμένουν έξω από αυτές τα primaries P_1 , P_2 και P_7 (Σχήμα 9.33α). Οι ημιπεριόδοί τους κυμαίνονται από 0.81 (S) - 2.54 (M). Οι τροχιές της S14 διαγράφονται έτσι ώστε μόνο τα primaries P_0 , P_3 και P_6 να βρίσκονται στο εσωτερικό τους και συρρικνώνονται όταν η σταθερά C ελαττώνεται, καταλήγοντας σε τροχιές κρούσης με τα P_3 και P_6 (Σχήμα 9.32β). Οι τιμές των ημιπεριόδων αυτών των τροχιών κυμαίνονται από 0.71 (S) έως 2.64 (M). Η οικογένεια S15 αποτελείται από τροχιές που εσωκλείουν τα primaries P_0 , P_1 , P_2 , P_7 (Σχήμα 9.33β) και οι ημιπεριόδοί τους με τιμές που κυμαίνονται από 1.09(S) έως 3.41(M). Τέλος οι τροχιές της οικογένειας S17 διαγράφονται γύρω από το κεντρικό σώμα και το P_1 (Σχήμα 9.34β) με μεσαίες ή μεγάλες ημιπεριόδους (M ή L) που κυμαίνονται από 1.19 (S) έως 3.39 (M), όταν δε ελαττώνεται η τιμή της σταθεράς C σε κάθε σκέλος της, οι τροχιές συρρικνώνονται.

Οι τροχιές των οικογενειών S4, S14 (Σχήμα 9.32γ) και S15 παρουσιάζουν μεγάλη αστάθεια, ενώ αυτές της οικογένειας S17 για μία μικρή περιοχή τιμών της x_0 και στην περιοχή του ακροτάτου είναι ευσταθείς και μάλιστα όσο αυξάνεται η σταθερά C, αποκτούν και αυτές εξαιρετική αστάθεια (Σχήμα 9.34γ). Να σημειώσουμε ότι στη περίπτωση αυτή εμφανίζονται κρίσιμα σημεία πρώτου($\alpha=+1$) και δεύτερου ($\alpha=-1$)είδους.

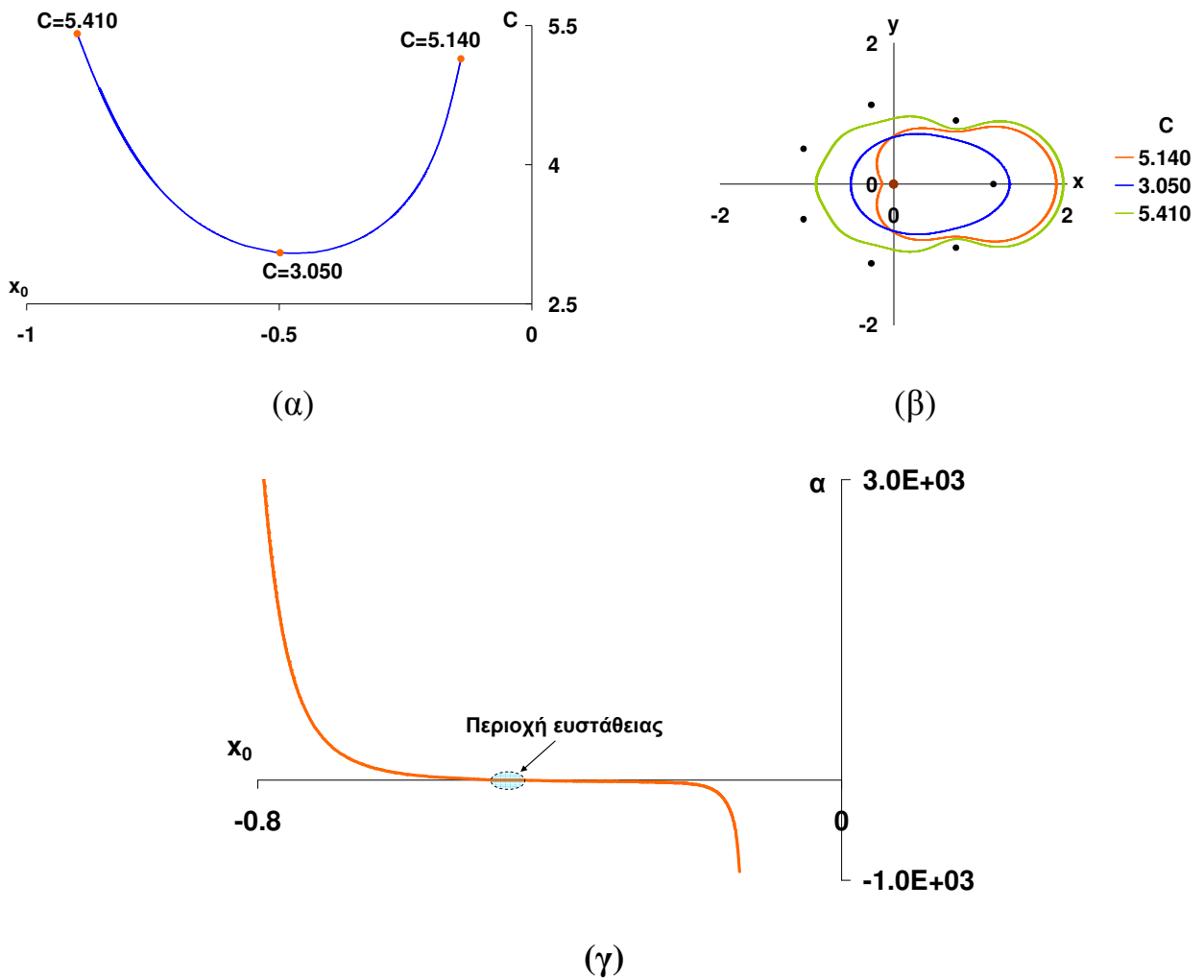
Στον Πίνακα 9.8 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



Σχήμα 9.32. Οικογένεια S14. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της καμπύλης, (γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α



Σχήμα 9.33. Εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών: (α) S4, (β) S15



Σχήμα 9.34. Οικογένεια S17. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της καμπύλης, (γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Πίνακας 9.8. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F2

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	$T/2$	Stability
S4	2.249999968	-2.498630165	2.513304838	0.894080543	-2.203559044	2.542176626	U
	0.519999980	-2.001980934	2.536282273	0.820507370	-2.506834575	1.876681879	U
	-5.860009699	-1.232605377	3.493590278	0.335577389	-3.728118503	0.813149853	U
	0.539999931	-1.728833843	2.429613993	0.124112045	-2.468513702	1.456956114	U
	2.589999566	-2.435629204	2.393610669	0.108874299	-1.447922302	2.521127123	U

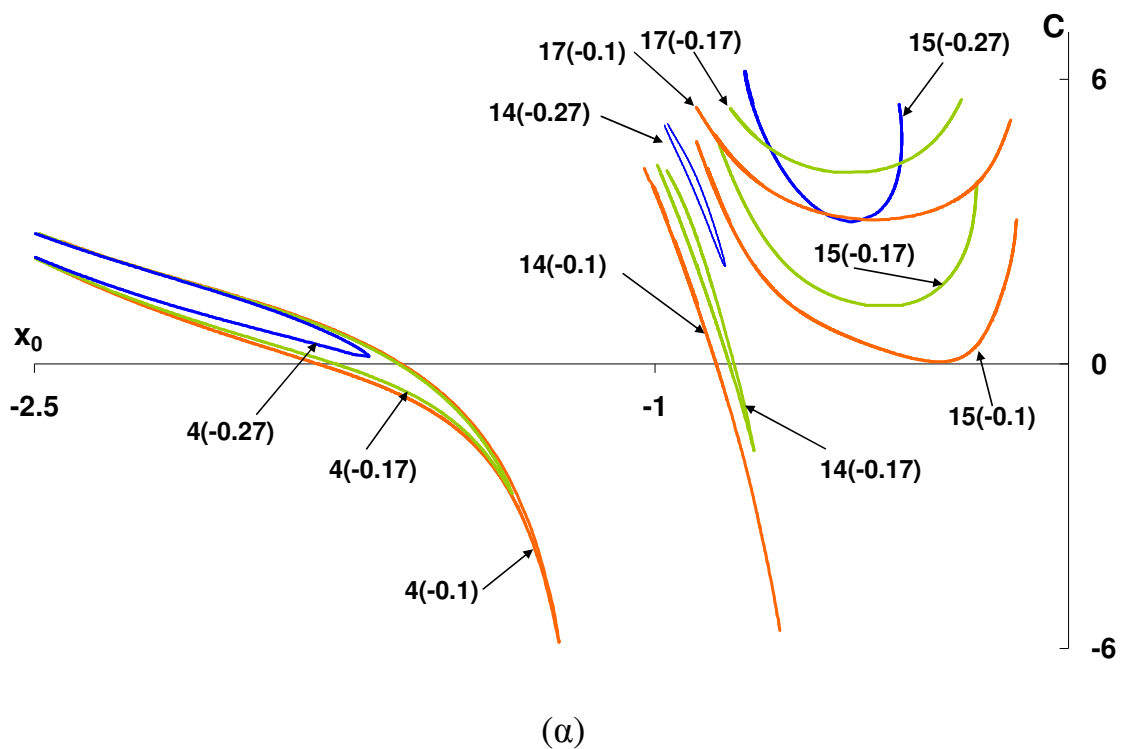
S14	3.771269963	-1.006444717	1.637117411	0.888839690	-1.817779949	2.281764047	U
	0.000000046	-0.851980217	2.545859374	0.649843365	-2.591397869	1.123956203	U
	-5.620004079	-0.697675324	3.494181519	0.322991563	-3.708623346	0.706604839	U
S15	4.689979938	-0.899725873	1.334471000	2.551698494	-2.024478907	3.412129696	U
	0.049999938	-0.298689331	2.876199548	1.447804944	-2.616410883	1.097552206	U
	3.039999975	-0.126066735	1.942218530	2.196783563	-2.113375024	2.203957694	U
S17	5.409989956	-0.899895508	1.029938149	1.949833601	-1.210844091	3.399430016	U
	3.049999980	-0.498078857	2.012135005	1.333925796	-2.179304287	1.319447671	U
	5.139969964	-0.140102672	1.623546336	1.869568896	-1.261065089	2.416147914	U

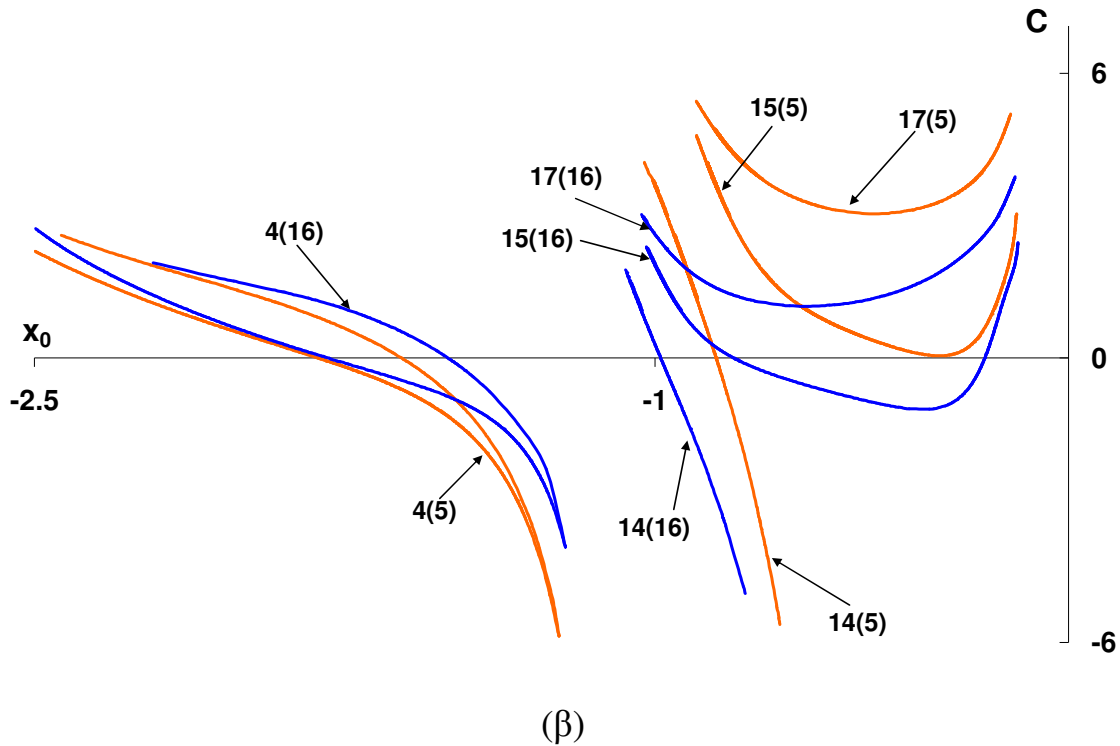
9.7.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$

(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0-C

Διατηρώντας την παράμετρο μάζας β σταθερή, παρατηρούμε ότι όταν αυξάνει η απόλυτη τιμή της e , η καμπύλη της οικογένειας $S4$ μετατοπίζεται αφενός μεν προς μεγαλύτερες τιμές της C , αφετέρου δε προς τα αριστερά του διαγράμματος, απομακρυνόμενη από τον άξονα των C . Όσον αφορά στην καμπύλη της $S14$, παρατηρούμε ότι για $\beta=5$, 16 και $e=-0.1$ εμφανίζεται ως μία συνεχής καμπύλη, ενώ για $\beta=5$ και $e=-0.17$, -0.27 αλλάζει η μορφή της και μετατρέπεται σε μία ανοιχτή «θηλιά» της οποίας τα δύο σκέλη αναπτύσσονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Είναι πολύ πιθανό και σε αυτή την περίπτωση να σχηματίζεται μία αυτοκλειόμενη καμπύλη (Σχήμα 9.35α-β). Για σταθερή τιμή της παραμέτρου β , όταν αυξάνεται η απόλυτη τιμή της e , μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της C και προς τα δεξιά του φασικού χώρου, ενώ ταυτόχρονα μειώνονται οι διαστάσεις της καμπύλης. Παρατηρούμε επίσης ότι για σχετικά μεγάλες απόλυτες τιμές της παραμέτρου e , οι χαρακτηριστικές των $S4$ και $S14$ αναπτύσσονται εξ ολοκλήρου σε θετικές τιμές των Ιακωβιανών σταθερών C .

Η S15 μετατοπίζεται προς τα άνω του διαγράμματος, ενώ το ακρότατό της απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων. Ομοια μετατόπιση υφίσταται και η καμπύλη της S17, η οποία όμως δεν εμφανίζεται για $\beta=5$ και $e=-0.27$ (Σχήμα 9.35α). Στη συνέχεια, διατηρώντας την τιμή της e σταθερή και αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου β , παρατηρούμε ότι η S4 μετατοπίζεται παράλληλα προς τα άνω και δεξιά, η S14 προς τα αριστερά, η S15 προς τα κάτω (χαμηλότερες τιμές C) και αριστερά με παράλληλη μικρή μετατόπιση του ακρότατού της και διεύρυνση του κοίλου τμήματός της και η S17 πραγματοποιεί μετατόπιση όμοια με αυτήν της S15 (Σχήμα 9.35β).





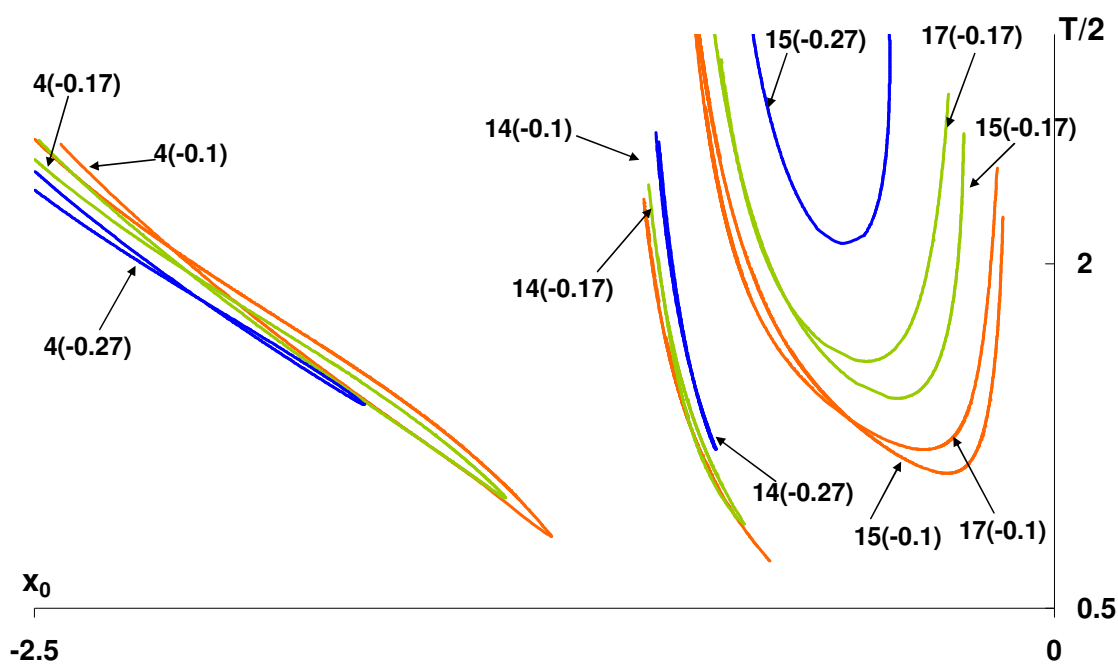
Σχήμα 9.35. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$

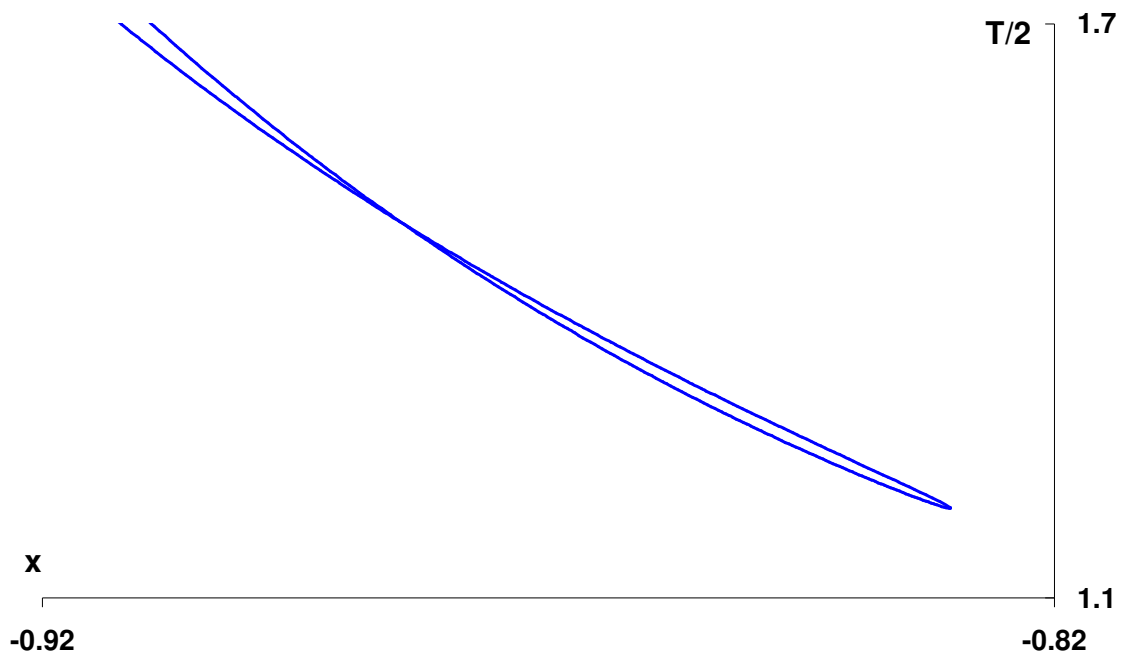
Οι καμπύλες που απεικονίζουν τη μεταβολή της ημιπεριόδου $T/2$ με την αρχική θέση x_0 , παρουσιάζουν ακρότατο, εκτός από τις περιπτώσεις της S14, όταν αυτή αναπτύσσεται ως συνεχής καμπύλη. Όταν η παράμετρος της μάζας β διατηρείται σταθερή και αυξάνει η απόλυτη τιμή της e , οι καμπύλες των S15 και S17 μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της ημιπεριόδου και ταυτόχρονα το ακρότατο τους μετατοπίζεται ελαφρά προς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές της x_0 . Στην καμπύλη $x_0-T/2$ της S4 σχηματίζεται βρόχος, ο οποίος με την αύξηση της απόλυτης τιμής της παραμέτρου e συρρικνώνεται και η καμπύλη μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές της x_0 , με τέτοιο τρόπο ώστε για την ίδια θέση x_0 η ημιπερίοδος να ελαττώνεται. Παρόμοιος βρόχος, σχηματίζεται και στην αντίστοιχη καμπύλη της S14 (στην περίπτωση που η S14 εμφανίζει δύο σκέλη), ο οποίος είναι δυσδιάκριτος και για αυτό τον λόγο παραθέτουμε στο Σχήμα 9.36β την καμπύλη $x_0-T/2$ της S14, για $\beta=5$ και $e=-0.27$. Σε αυτή τη περίπτωση όσο αυξάνεται η απόλυτη

τιμή της ϵ , ο βρόχος συρρικνώνεται και η καμπύλη μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της ημιπεριόδου για την ίδια τιμή της θέσης x_0 .

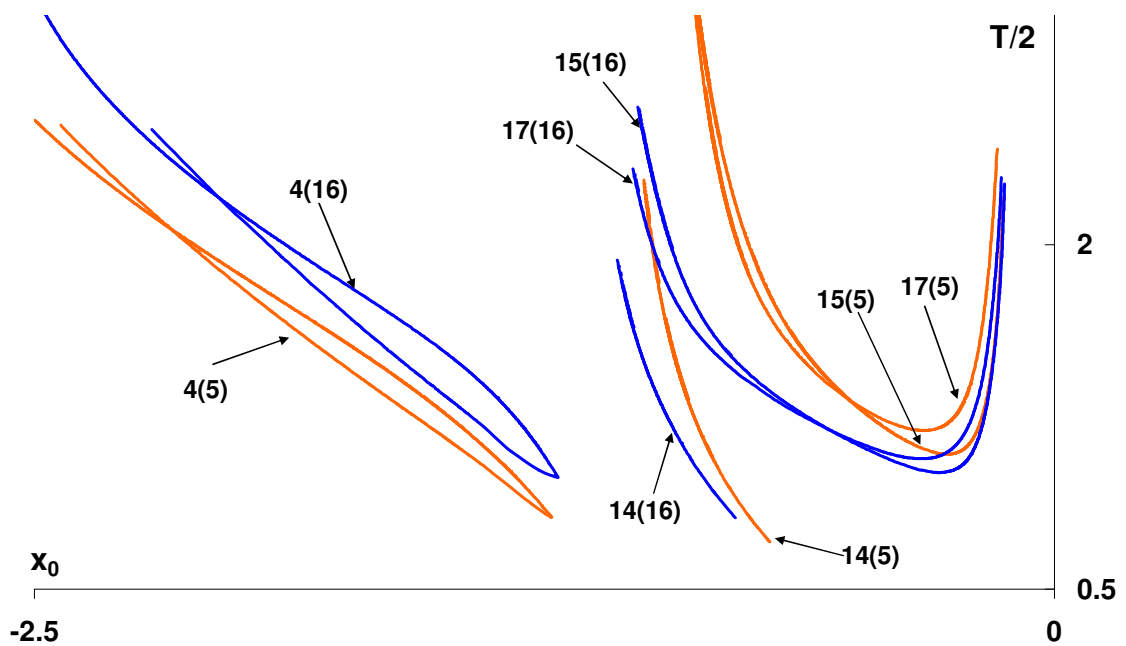
Όταν διατηρείται η παράμετρος ϵ σταθερή και αυξάνεται η β , για την ίδια τιμή της θέσης x_0 οι καμπύλες των S14, S15 και S17 μετατοπίζονται προς μικρότερες τιμές περιόδων, ενώ οι καμπύλες των S4 προς μεγαλύτερες. Όσον αφορά στα ακρότατά τους, στην S4 παραμένει σχεδόν στην ίδια τιμή του x_0 , ενώ στις οικογένειες S15 και S17 υπάρχει μια μικρή μετατόπιση προς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές του x_0 (Σχήμα 9.36γ).



(α)



(β)

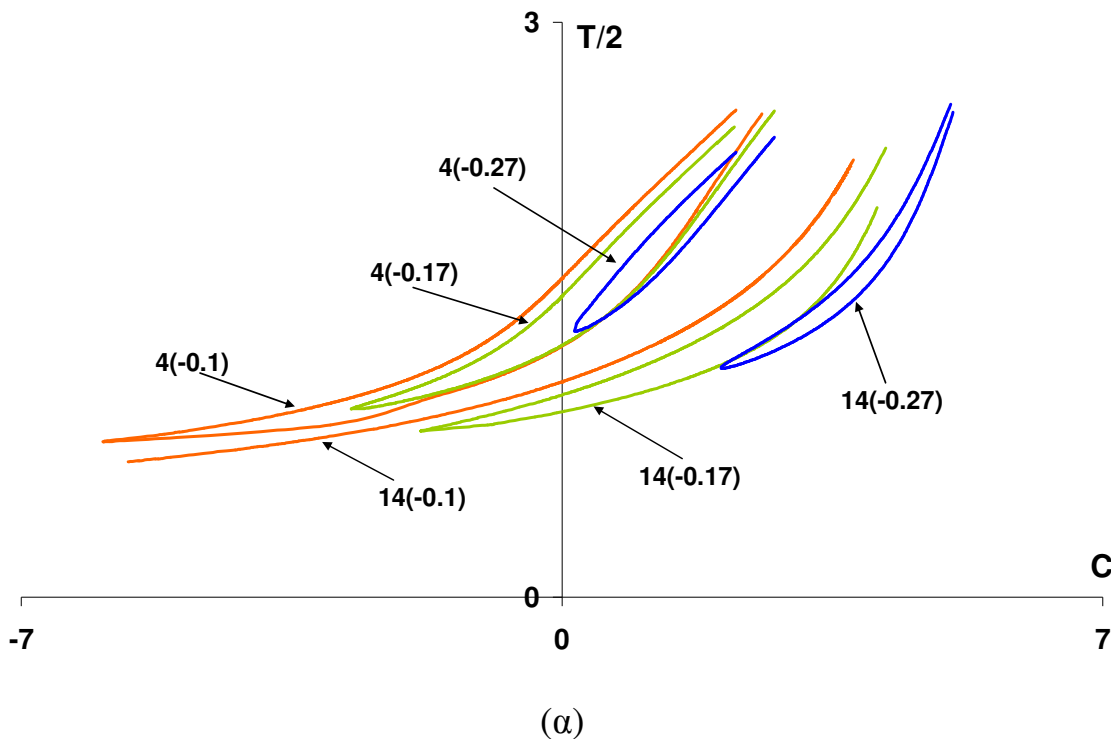


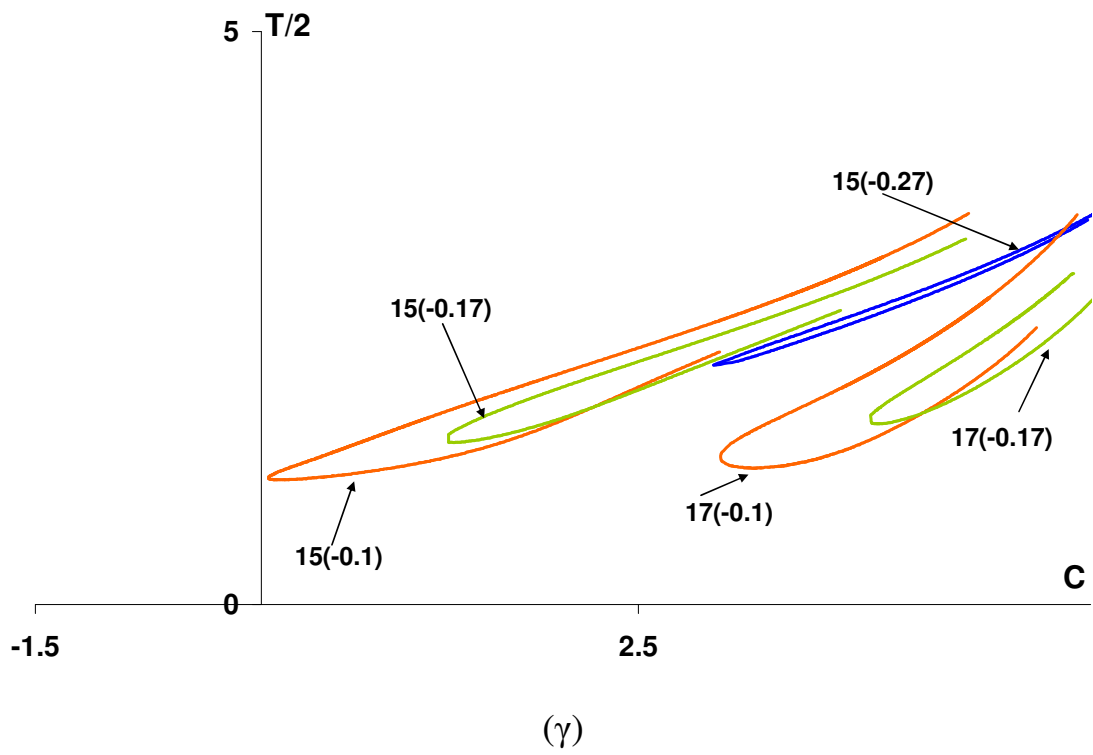
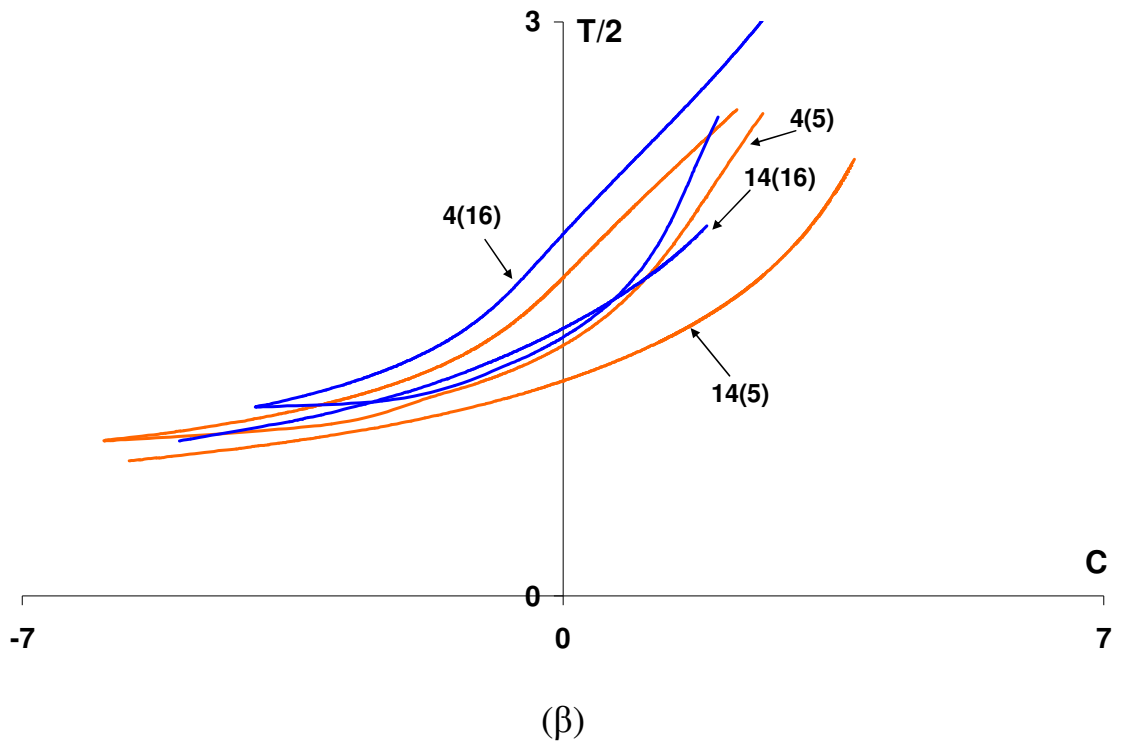
(γ)

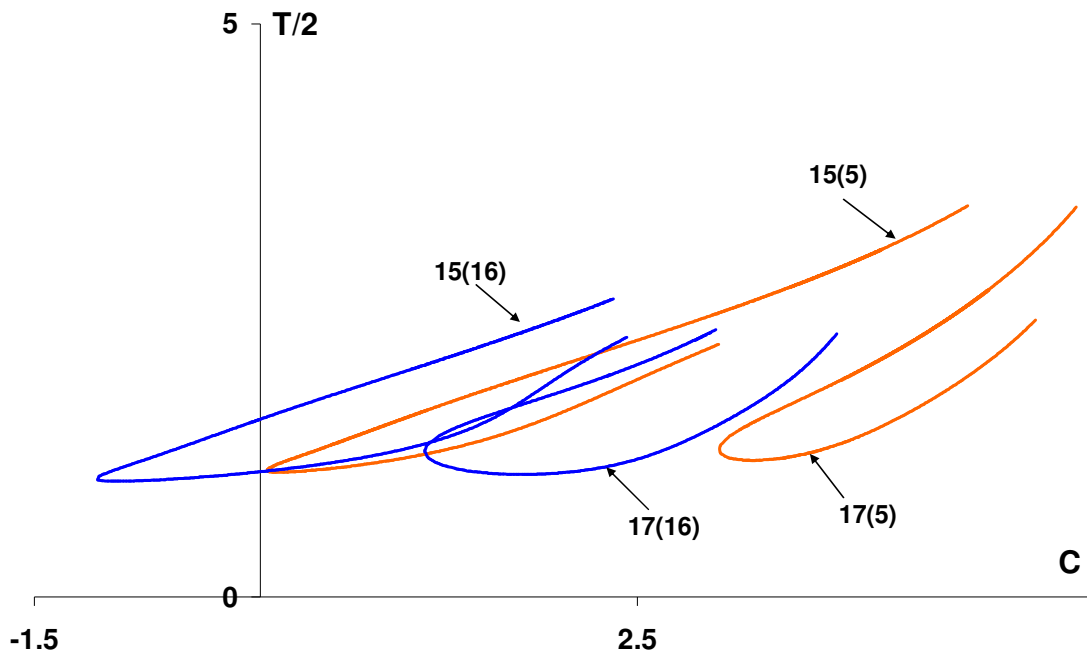
Σχήμα 9.36. (α) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$ με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) καμπύλη $x_0-T/2$ της S14 για $\beta=5$ και $e=-0.27$, (γ) παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$ με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2

Θεωρώντας και πάλι το β σταθερό, όταν αυξάνουμε την απόλυτη τιμή της e παρατηρούμε ότι οι καμπύλες C-T/2 όλων των οικογενειών της ομάδας F2 (Σχήματα 9.37α και 9.37γ) μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της C, ενώ το εύρος τιμών των ημιπεριόδων ελαττώνεται, με ελάχιστες τιμές οι οποίες αυξάνονται. Αν διατηρήσουμε την παράμετρο e σταθερή, η αύξηση της τιμής της β επιφέρει στις μεν S4, S14 μετατόπιση προς μεγαλύτερες ημιπεριόδους για την ίδια τιμή C, ενώ στις S15, S17 μετατόπιση προς μικρότερα C με ταυτόχρονη αύξηση των ημιπεριόδων για την ίδια τιμή της σταθεράς C (Σχήματα 9.37β και 9.37δ).





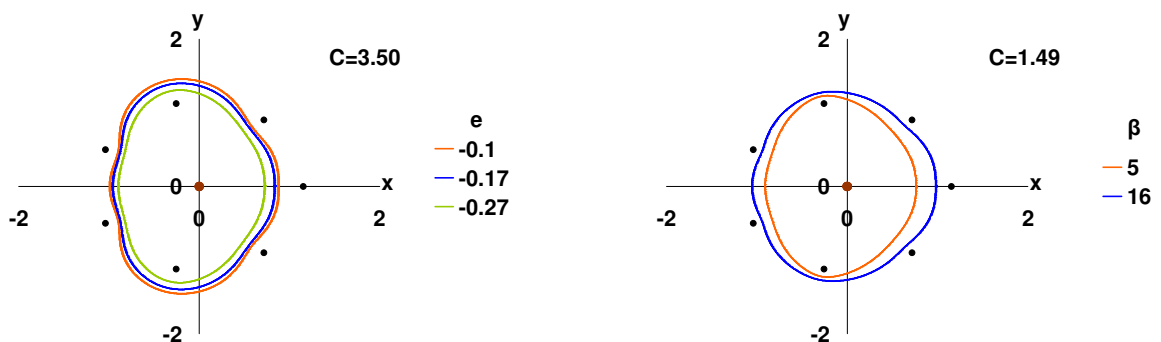


(δ)

Σχήμα 9.37. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C-T/2$: (α) και (γ) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) και (δ) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iv) Παραμετρική εξέλιξη των τροχιών

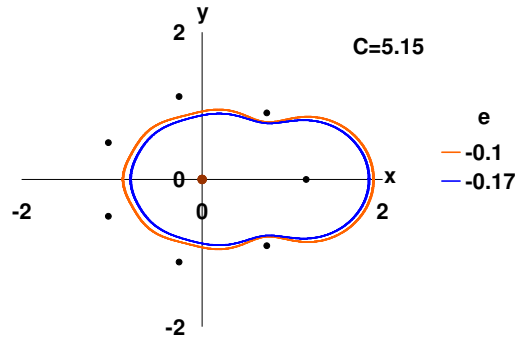
Όπως παρατηρούμε στα Σχήματα 9.38 και 9.39 αναφορικά με τις οικογένειες S14 και S17, τροχιές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της C και για την αυτή τιμή της παραμέτρου β , παρουσιάζουν συρρίκνωση καθώς αυξάνει κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e (Σχήματα 9.38α, 9.39α). Επίσης, όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β (για ίδια τιμή της e), οι τροχιές διευρύνονται (Σχήματα 9.38β, 9.39β). Παρόμοιες μεταβολές συμβαίνουν και στα υπόλοιπα μέλη-οικογένειες της ομάδας.



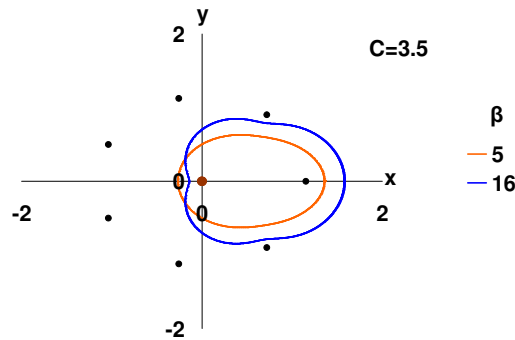
(α)

(β)

Σχήμα 9.38. Οικογένεια S14. Παραμετρική μεταβολή των τροχιών: (α) με την παράμετρο e για $C = 3.5$, (β) με την παράμετρο β για $C = 1.49$



(α)



(β)

Σχήμα 9.39. Οικογένεια S17. Παραμετρική μεταβολή των τροχιών: (α) με την παράμετρο e ($=-0.1, -0.17$) για $C = 5.15$, (β) με την παράμετρο β ($=5, 16$) για $C = 3.5$

9.8 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F3 (οικογένειες S9-S10-S13)

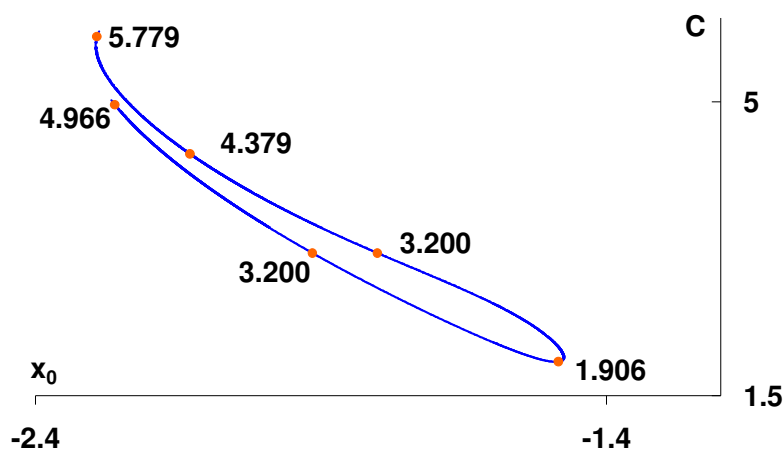
9.8.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0-C όπου $x_0 < 0$ (Σχήμα 9.23α). Από αυτές, οι οικογένειες S9 και S10 εξελίσσονται εξ ολοκλήρου στα θετικά C . Τέλος η S13 παρουσιάζει ομαλή εξέλιξη με μεγάλη κλίση ως προς τον άξονα των x_0 . Οι τροχιές και των τριών οικογενειών είναι ανάδρομες διαπλανητικού τύπου. Από αυτές, οι τροχιές της οικογένειας S9 διαγράφονται γύρω από το κεντρικό P_0 και τα περιφερειακά P_4, P_5

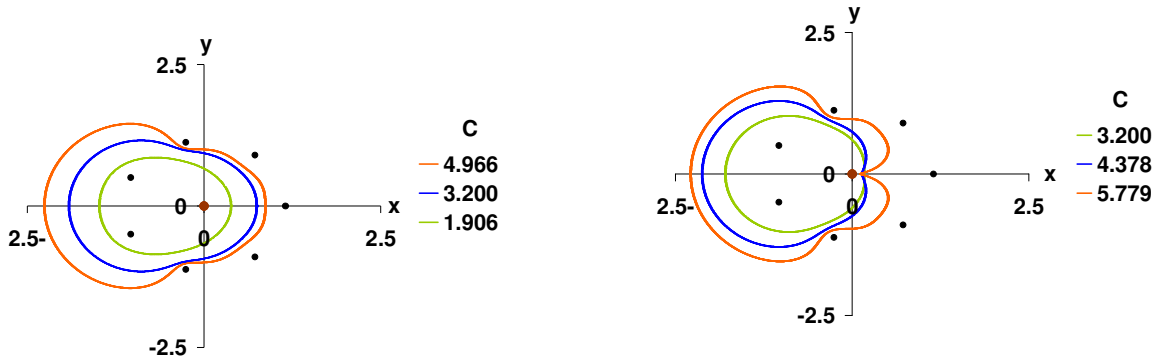
(Σχήματα 9.40β και γ) με ημιπεριόδους που κυμαίνονται από 1.24 (S) – 4.52 (L) (μικρές έως πολύ μεγάλες). Η χαρακτηριστική της οικογένειας σχηματίζει ανοιχτή «θηλιά», με τα ανοιχτά άκρα της να βρίσκονται στις υψηλότερες τιμές C της οικογένειας, ενώ είναι πιθανό να ενώνονται κι αυτά (αυτοκλειόμενη) (Σχήμα 9.40α). Οι τροχιές της οικογένειας S10 διαγράφονται γύρω από τα περιφερειακά P₄, P₅ (Σχήμα 9.41β και γ) οι δε ημιπεριόδοί τους μεταβάλλονται από 0.40 (VS) - 2.31(S). Η χαρακτηριστική της παρουσιάζει παρόμοια μορφή με την προηγούμενη οικογένεια, με τα άκρα της όμως να βρίσκονται στις χαμηλότερες τιμές C της οικογένειας. Ενδέχεται τα δύο σκέλη στο ανοιχτό άκρο τους να συνεχίσουν να εξελίσσονται ανεξάρτητα, προσεγγίζοντας ταυτόχρονα ασυμπτωτικά το ένα το άλλο. Τέλος οι τροχιές της S13 περικλείουν όλα τα primaries πλην των P₄, P₅ (Σχήμα 9.42) και οι ημιπεριόδοί τους παρουσιάζουν εύρος τιμών από 1.03 (S) έως 4.92 (L).

Οι τροχιές της οικογένειας S13 παρουσιάζουν μεγάλη αστάθεια, ενώ για αυτές των S9 (Σχήμα 9.40δ) και S10 (Σχήμα 9.41δ) στην περιοχή των ακροτάτων τους ως προς C, υπάρχει μία μικρή περιοχή ευσταθών τροχιών, όπως διακρίνουμε στα αντίστοιχα διαγράμματα (C-α). Να σημειώσουμε ότι στις δύο τελευταίες περιπτώσεις εμφανίζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές πρώτου και δεύτερου είδους.

Στον Πίνακα 9.9 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.

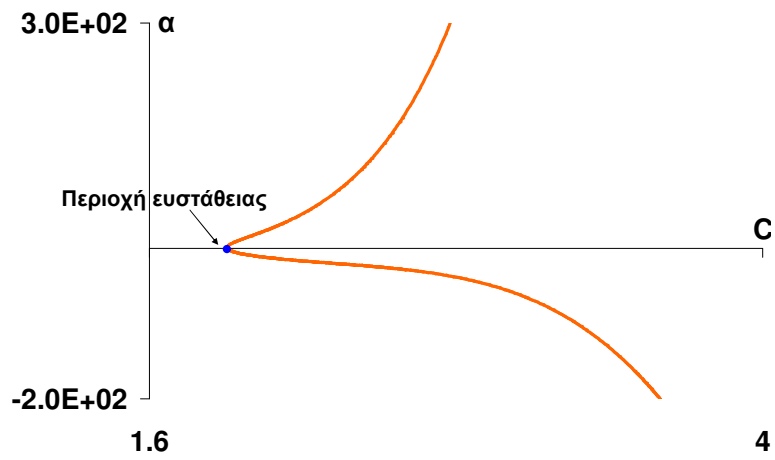


(α)



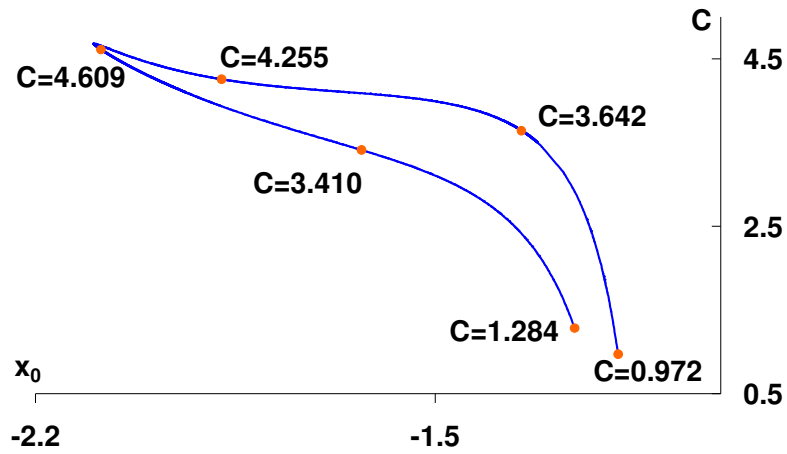
(β)

(γ)

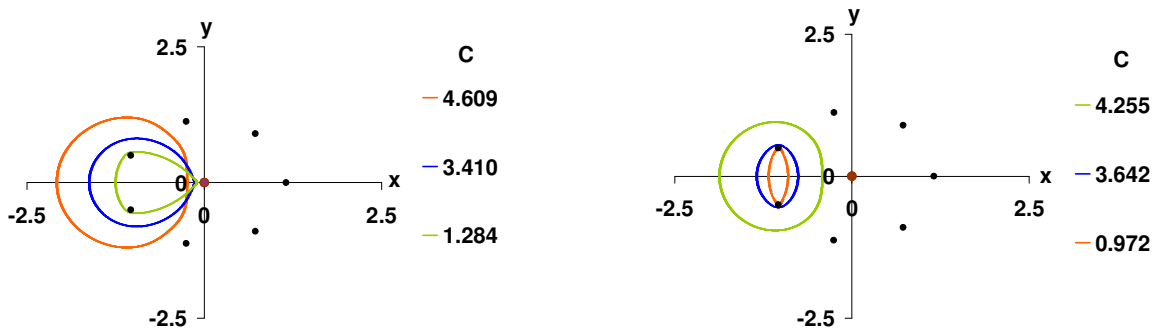


(δ)

Σχήμα 9.40. Οικογένεια S9. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες της τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (δ) διάγραμμα ευστάθειας C-α

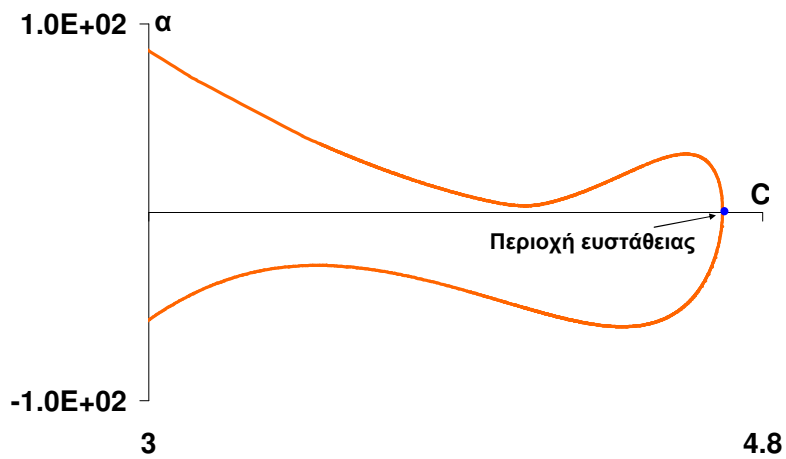


(α)



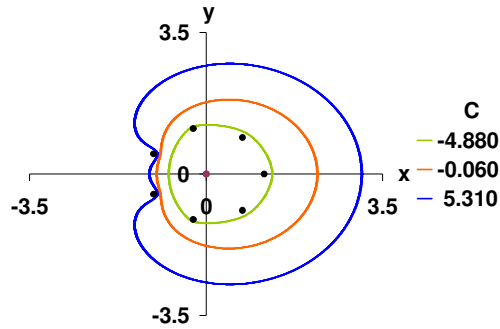
(β)

(γ)



(δ)

Σχήμα 9.41. Οικογένεια S10. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (δ) διάγραμμα ευστάθειας C-α



Σχήμα 9.42. Εξέλιξη των τροχιών της οικογένειας S13 κατά μήκος της χαρακτηριστικής

Πίνακας 9.9. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F3

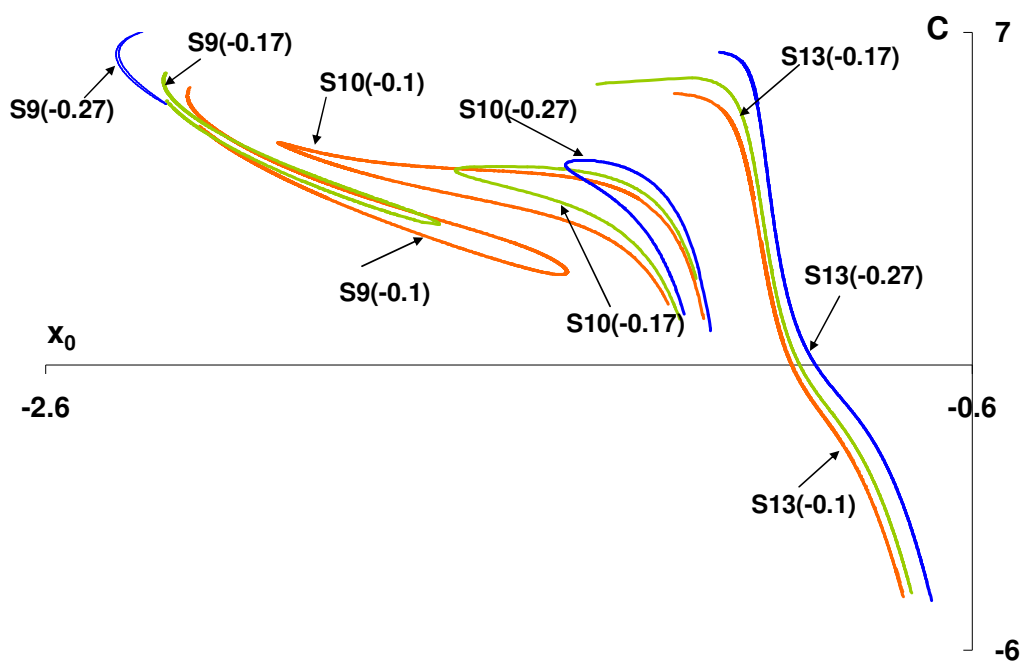
	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
S9	4.966179949	-2.261325017	1.652428608	0.861789281	-1.406305077	3.298957284	U
	3.199999982	-1.915255722	1.886266087	0.740798785	-1.866253296	2.092658325	U
	1.905919973	-1.484222595	2.088444506	0.378551401	-2.414640946	1.279813337	S
	3.199959987	-1.801427769	1.829782172	0.165969817	-2.329098518	1.680677361	U
	4.379229966	-2.129714725	1.706175746	0.138942867	-1.826126881	2.396049111	U
	5.779119703	-2.292455318	1.421947199	0.117773046	-0.420637076	4.304020474	U
S10	1.284019686	-1.255894750	2.246657490	-0.112523526	-1.993826058	0.704812973	U
	3.409969988	-1.628873535	1.710979287	-0.147516301	-2.168690794	1.309849182	U
	4.609209995	-2.085651070	1.599389837	-0.244538175	-2.029433199	2.259365660	U
	4.255099993	-1.874184448	1.555953970	-0.423858196	-1.789757133	1.744461448	U
	3.641989870	-1.349114654	1.625867790	-0.765837966	-1.697083388	0.684455227	U
	0.971992441	-1.179710937	2.324800554	-0.905049154	-2.344753004	0.400609963	U
S13	-4.880009442	-0.749083830	3.378625121	1.306295416	-3.623694140	1.030498269	U
	-0.000000020	-0.990402588	2.540679493	2.220828401	-2.753232971	2.083229318	U
	5.709999811	-1.243142032	0.793048462	3.035108011	-2.323717234	4.920601463	U

9.8.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0 -C, x_0 -T/2 και C-T/2

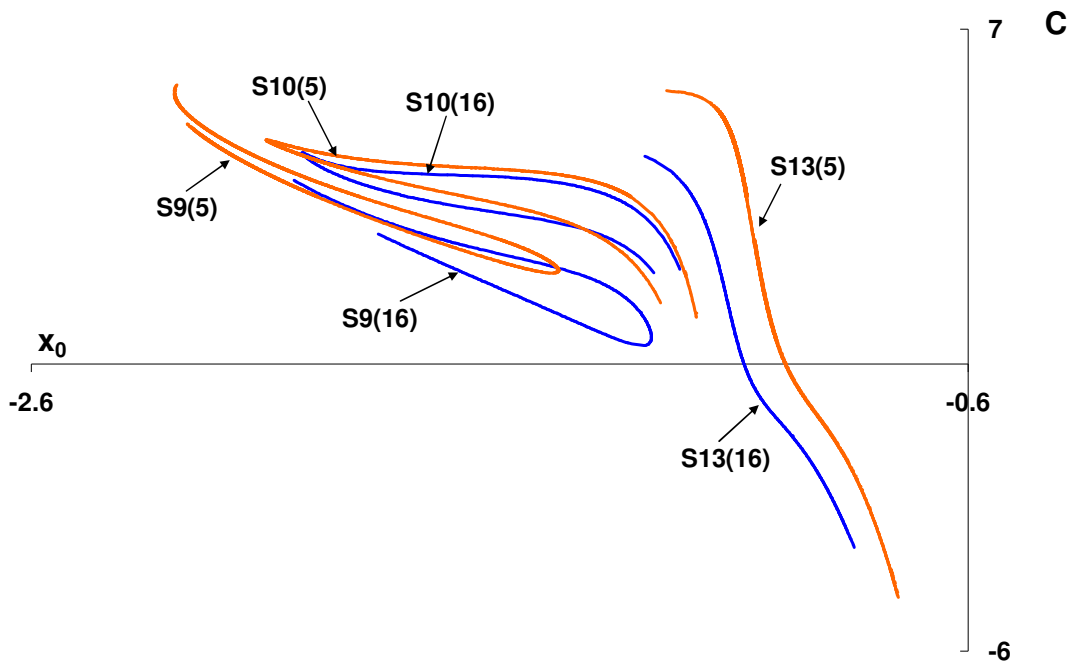
(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 -C

Αύξηση της απόλυτης τιμής της e με σταθερή τιμή της β , επιφέρει στην καμπύλη της S9 μετατόπιση προς τα αριστερά και άνω του διαγράμματος με ταυτόχρονη συρρίκνωση της θηλιάς, στην S10 μετατόπιση προς τα δεξιά με ταυτόχρονη διεύρυνση της θηλιάς, αλλά και με τέτοιο τρόπο ώστε το εύρος τιμών της σταθεράς C να παραμένει σχεδόν ίδιο, και τέλος στην S13 μετατόπιση προς τα δεξιά του διαγράμματος με τρόπο τέτοιο ώστε για την ίδια θέση x_0 , η τιμή της σταθεράς C να αυξάνεται (Σχήμα 9.43α).

Αύξηση της β με σταθερή τιμή της e , έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση της καμπύλης της S9 προς τα κάτω και δεξιά του φασικού χώρου, με ταυτόχρονη διεύρυνση της θηλιάς. Η αντίστοιχη καμπύλη της S10 μετατοπίζεται στο μεγαλύτερο μέρος της, ελαφρώς σε πιο μικρές τιμές της σταθεράς C και εξελίσσεται στο ίδιο σχεδόν διάστημα τιμών των θέσεων x_0 και τέλος για την καμπύλη της S13 παρατηρούμε μία μετατόπιση προς τα αριστερά του διαγράμματος με τρόπο τέτοιο ώστε για την ίδια θέση x_0 , η τιμή της σταθεράς C να ελαττώνεται (Σχήμα 9.43β).



(α)

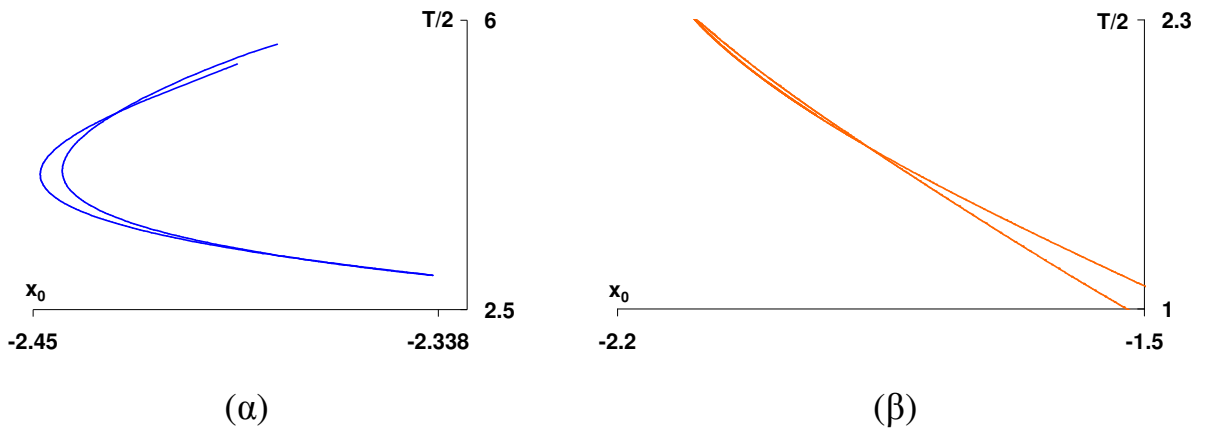


(β)

Σχήμα 9.43. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων: (α) με την παράμετρο ϵ για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $\epsilon=-0.1$

(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$

Στα διαγράμματα $x_0-T/2$ όπου παρουσιάζεται συνολικά η παραμετρική εξέλιξη των οικογενειών της ομάδας, δεν γίνονται αντιληπτές κάποιες λεπτομέρειες των καμπύλων αυτών. Έτσι στο Σχήμα 9.44α παρουσιάζουμε μόνη της την καμπύλη $x_0-T/2$ της S9, όπου ενδεικτικά επιλέξαμε την περίπτωση για $\beta=5$ και $\epsilon=-0.27$, ενώ στο Σχήμα 9.44β παρουσιάζουμε την αντίστοιχη καμπύλη της S10 για την περίπτωση με $\epsilon=-0.1$ και $\beta=5$. Και για τις δύο αυτές καμπύλες παρατηρούμε ότι τα δύο σκέλη τους τέμνονται και δημιουργούν βρόχους, την παραμετρική εξέλιξη των οποίων θα εξετάσουμε παρακάτω.

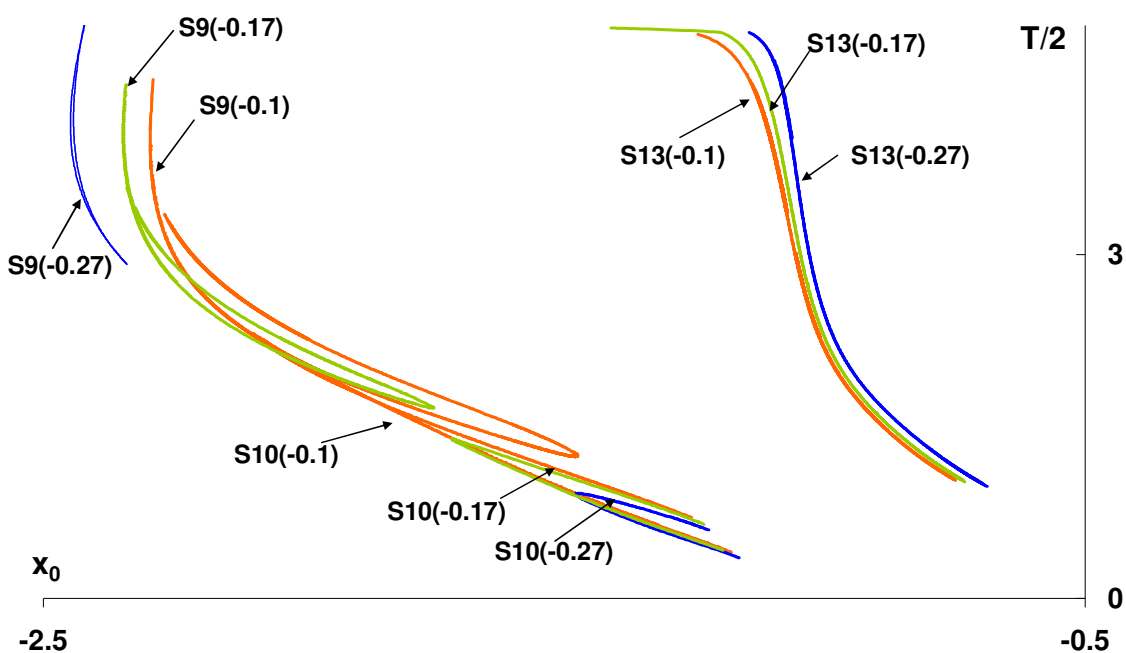


Σχήμα 9.44. Καμπύλες $x_0 - T/2$: (α) της οικογένειας S9 για $\beta=5$, $e=-0.27$ (β) της οικογένειας S10 για $\beta=5$, $e=-0.1$

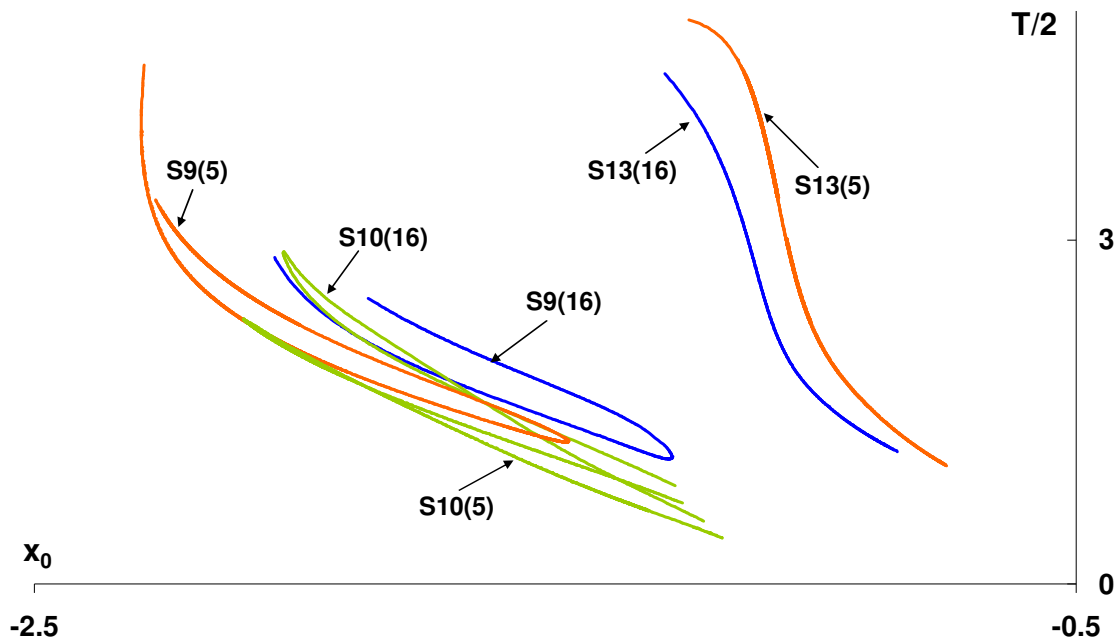
Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο μάζας β και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της παραμέτρου Manev e , παρατηρούμε ότι η καμπύλη $x_0 - T/2$ της οικογένειας S9, η οποία παρουσιάζει ακρότατο ακριβώς εκεί όπου παρουσιάζεται το ακρότατό της και στο αντίστοιχο διάγραμμα $x_0 - C$, εμφανίζει μία μετατόπιση προς τα αριστερά και άνω του διαγράμματος. Από τη μελέτη μας προέκυψε, ότι για μικρές τιμές της e (κατά απόλυτη τιμή), η καμπύλη $x_0 - T/2$ της S9 έχει τη μορφή ανοιχτής «θηλιάς», η οποία στην εξέλιξη της σχηματίζει βρόχο που συνεχώς συρρικνώνεται (Σχήμα 9.45α). Παρατηρούμε επίσης ότι όσο αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e , το εύρος τιμών της περιόδου της S9 μειώνεται με ελάχιστες και μέγιστες τιμές που αυξάνονται. Για την αντίστοιχη καμπύλη της S10 παρατηρούμε μία μετατόπιση προς τα κάτω και δεξιά του διαγράμματος, με το εύρος των τιμών της περιόδου να μειώνεται αλλά με ελάχιστες και μέγιστες τιμές που μειώνονται κι αυτές. Για μικρές τιμές της παραμέτρου e (κατά απόλυτη τιμή) η καμπύλη εμφανίζει ένα βρόχο, ο οποίος εξομαλύνεται και καταλήγει σε ανοιχτή «θηλιά», καθώς αυξάνεται η απόλυτη τιμή της παραμέτρου e . Τέλος για την S13, παρατηρούμε μία ελαφρά μετατόπιση προς τα δεξιά του διαγράμματος, με αποτέλεσμα να έχουμε για την ίδια θέση x_0 λίγο μεγαλύτερες τιμές περιόδου (Σχήμα 9.45α).

Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο Manev e και αυξάνοντας την παράμετρο β , παρατηρούμε ότι η καμπύλη $x_0 - T/2$ της οικογένειας S9, εμφανίζει μία μετατόπιση προς τα κάτω και δεξιά του διαγράμματος. Από τη μελέτη μας προέκυψε, ότι για

μικρές τιμές της παραμέτρου μάζας β η καμπύλη εμφανίζει ένα βρόχο, ο οποίος όσο αυξάνεται η τιμή της β , εξομαλύνεται και καταλήγει σε ανοιχτή «θηλιά» (Σχήμα 9.45β). Παρατηρούμε επίσης ότι όσο αυξάνεται η παράμετρος β , το εύρος τιμών της περιόδου της S9 μειώνεται με ελάχιστες και μέγιστες τιμές που μειώνονται κι αυτές. Για την αντίστοιχη καμπύλη της S10 παρατηρούμε μία μετατόπιση προς μεγαλύτερες τιμές της περιόδου (πράσινες καμπύλες του Σχήματος 9.45β). Από τη μελέτη μας προέκυψε, ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου μάζας β έχει τη μορφή ανοιχτής «θηλιάς», η οποία στην εξέλιξη της σχηματίζει βρόχο που συνεχώς διευρύνεται (Σχήμα 9.44α). Τέλος για τις αντίστοιχες καμπύλες της οικογένειας S13, παρατηρούμε ότι μετατοπίζονται προς την κάτω αριστερά περιοχή του διαγράμματος, με αποτέλεσμα να έχουμε για την ίδια θέση x_0 μικρότερες τιμές περιόδου, χωρίς ωστόσο να μεταβάλλεται σημαντικά το εύρος τιμών της (Σχήμα 9.45β).



(α)



(β)

Σχήμα 9.45. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C-T/2$

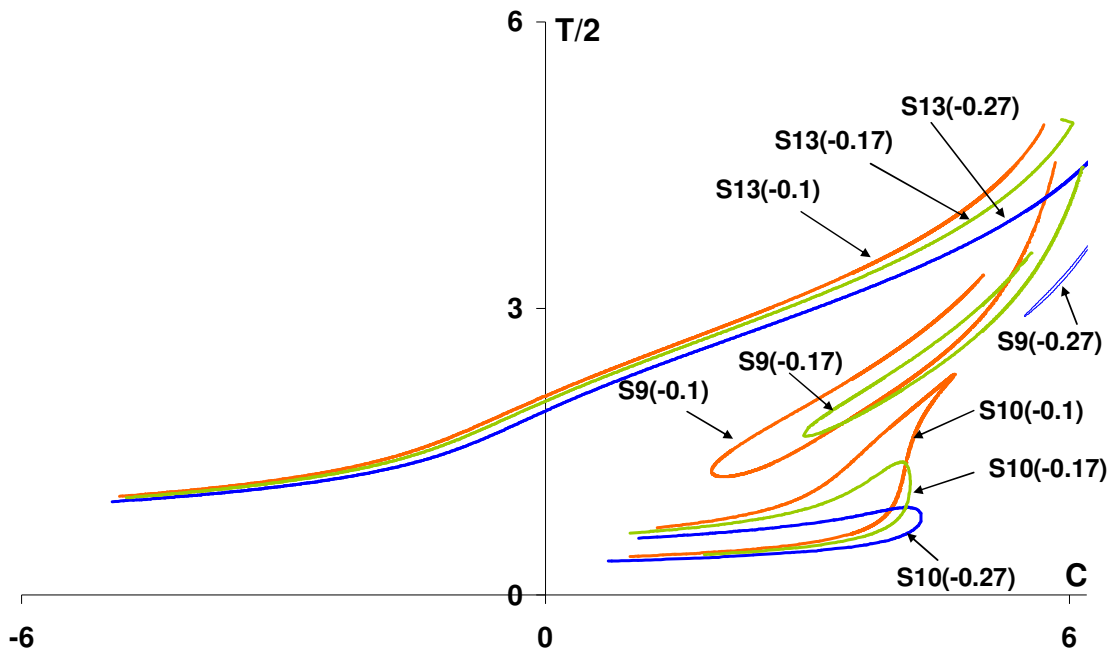
Μεταβάλλοντας την παράμετρο e και διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β , παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $C-T/2$ της οικογένειας $S9$, οι οποίες παρουσιάζουν ακρότατο ακριβώς εκεί που παρουσιάζεται το ακρότατο και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C , μετατοπίζονται προς τα άνω δεξιά του διαγράμματος $C-T/2$, με ταυτόχρονη στένωση της ανοιχτής «θηλιάς» που σχηματίζεται. Για σχετικά μεγάλες τιμές της παραμέτρου e (κατά απόλυτη τιμή) το ακρότατο τους έχει μετατοπισθεί σε αισθητά υψηλότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς, ενώ τόσο για την σταθερά C , όσο και για την ημιπερίοδο $T/2$, έχει μειωθεί αισθητά το εύρος των τιμών τους και κατ' επέκταση οι διαστάσεις της καμπύλης. Οι καμπύλες $C-T/2$ της οικογένειας $S10$, σχηματίζουν κι αυτές ανοιχτή «θηλιά», στα ανοιχτά άκρα της οποίας παρουσιάζεται μια ελαφρά μετατόπιση προς υψηλότερες τιμές της ημιπεριόδου $T/2$ για την ίδια τιμή της σταθεράς C , ενώ στην περιοχή του ακρότατου της θηλιάς η μετατόπιση αυτή γίνεται πολύ πιο έντονη.

Για τις αντίστοιχες καμπύλες της οικογένειας S13 παρατηρείται μία μικρή μετατόπιση προς μικρότερες τιμές της ημιπεριόδου, για την ίδια τιμή της σταθεράς C, ενώ οι τιμές τόσο της ημιπεριόδου, όσο και της C, δε μεταβάλλονται σημαντικά. Ειδικότερα για τα τμήματα των καμπύλων που αναπτύσσονται στις αρνητικές τιμές της C η μετατόπιση αυτή είναι ανεπαίσθητη, ενώ γίνεται εντονότερη στα τμήματα των καμπύλων που αναπτύσσονται στις θετικές τιμές της C (Σχήμα 9.46α).

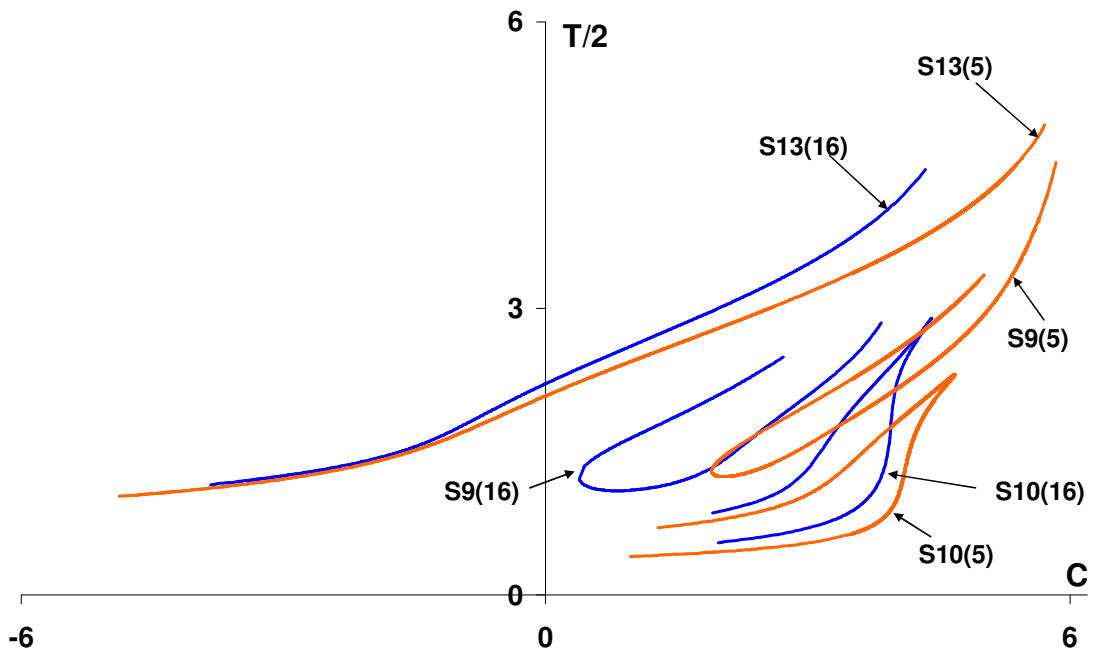
Διατηρώντας την παράμετρο e σταθερή και αυξάνοντας την παράμετρο β , παρατηρούμε ότι η καμπύλη C-T/2 της οικογένειας S9 μετατοπίζεται προς τα αριστερά του διαγράμματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπτύσσεται σε μικρότερες τιμές της C, ενώ η ημιπερίοδος ελαττώνεται αισθητά στη περιοχή των ανοιχτών άκρων της σχηματιζόμενης «θηλιάς» και λιγότερο κοντά στη περιοχή του ακρότατου της καμπύλης.

Οι καμπύλες της οικογένειας S10 μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της ημιπεριόδου για την ίδια τιμή της σταθεράς C και αυτή η μετατόπιση είναι εντονότερη στην περιοχή του ακρότατου της καμπύλης.

Για τις καμπύλες C-T/2 της οικογένεια S13 παρατηρούμε τη μετατόπισή τους προς μεγαλύτερες τιμές της ημιπεριόδου για την ίδια τιμή της σταθεράς C. Όπως και στον προηγούμενο τρόπο παραμετρικής μεταβολής, έτσι κι εδώ, για τα τμήματα των καμπύλων που αναπτύσσονται στις αρνητικές τιμές της C η μετατόπιση αυτή είναι ανεπαίσθητη, ενώ γίνεται εντονότερη στα τμήματα των καμπύλων που αναπτύσσονται στις θετικές τιμές της C (Σχήμα 9.46β).



(α)



(β)

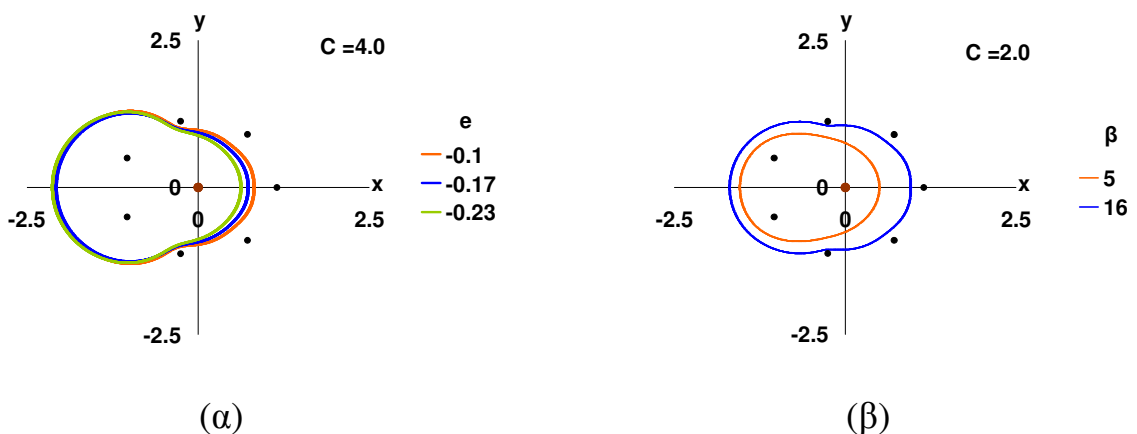
Σχήμα 9.46. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iv) Παραμετρική εξέλιξη των τροχιών

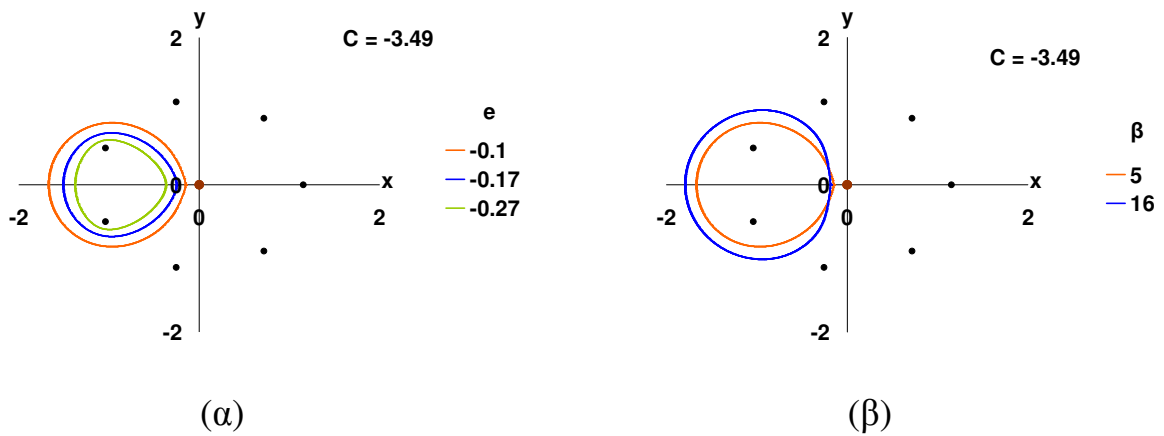
Μελετώντας την παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων x_0-C για σταθερή τιμή της παραμέτρου μάζας β όταν αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η τιμή της παραμέτρου

ε, παρατηρήσαμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες της οικογένειας S9 μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της σταθεράς C. Επειδή για σχετικά μεγάλες απόλυτες τιμές της παραμέτρου ε, η μετατόπιση αυτή είναι τόσο μεγάλη, ώστε να μην είναι δυνατή η απεικόνιση της παραμετρικής εξέλιξης ισοενεργειακών τροχιών, χρησιμοποιήσαμε επικουρικά την τιμή $e=-0.23$ αντί της $e=-0.27$ (Σχήμα 9.46α).

Όπως παρατηρούμε στα Σχήματα 9.47α και 9.48α αναφορικά με τις οικογένειες S9 και S10, τροχιές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της C και για την αυτή τιμή της παραμέτρου β, παρουσιάζουν συρρίκνωση όταν αυξάνει η απόλυτη τιμή της παραμέτρου ε. Αντίθετα όταν διατηρούμε την ε σταθερή και μεταβάλλουμε την παράμετρο β, τότε, αύξηση της β δημιουργεί διεύρυνση της τροχιάς (Σχήματα 9.47β και 9.48β). Παρόμοιες μεταβολές παρατηρούνται και στις τροχιές της οικογένειας S13.



Σχήμα 9.47. Οικογένεια S9. Παραμετρική μεταβολή των τροχιών: (α) με την παράμετρο ε για $C=4$, (β) με την παράμετρο β για $C=2.0$



Σχήμα 9.48. Οικογένεια S10. Παραμετρική μεταβολή των τροχιών: (α) με την παράμετρο e για $C=-3.49$, (β) με την παράμετρο β για $C=-3.49$

9.9 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F4 (οικογένειες S41-S43-S44-S45-S46)

9.9.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Πρόκειται για την ομάδα χαρακτηριστικών καμπύλων που συναντήσαμε και στη βαρυτική περίπτωση και η οποία εξελίσσεται μέσα στην περιοχή R_1 (παράγραφος 9.2.2.1 σχήμα 9.7). Υπενθυμίζουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0-C , όπου $x_0 < 0$, $C > 0$ και ότι οι τροχιές που προκύπτουν είναι ανάδρομες, διαπλανητικού τύπου. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των οικογενειών, είναι ότι σχηματίζουν πάντα άρτιο πλήθος βρόχων γύρω από αντίστοιχα περιφερειακά primaries, λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα των x_0 και ότι οι βρόχοι καθίστανται πιο κλειστοί όσο η σταθερά C αυξάνεται.

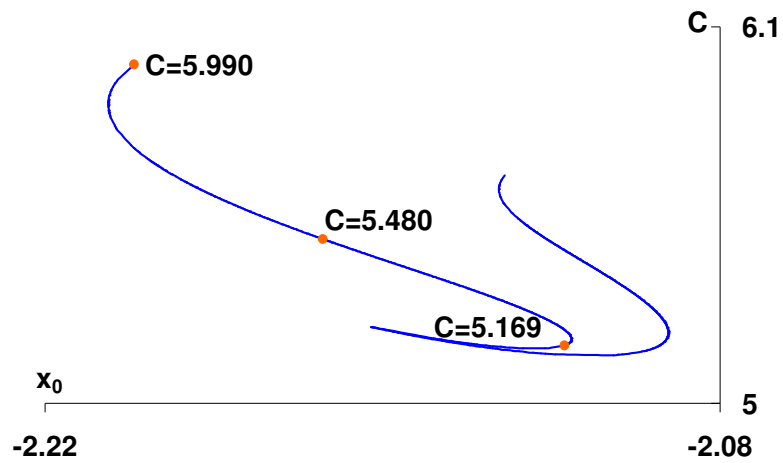
Για την ίδια παράμετρο μάζας β και μεταβάλλοντας την παράμετρο e , παρατηρούμε σημαντικές αλλαγές που συμβαίνουν στις οικογένειες αυτής της ομάδας. Έτσι, για $e = -0.1$ εμφανίζεται η οικογένεια S41, η οποία παύει να υφίσταται για $e = -0.17$ και $e = -0.27$. Αντίθετα, η οικογένεια S43 υπάρχει μεν για όλες τις τιμές της παραμέτρου e που μελετήσαμε, όμως ενώ για $e = -0.1$ εμφανίζεται ως μία απλή, ομαλή καμπύλη, για $e = -0.17$ και -0.27 συστρέφεται σχηματίζοντας μία ανοιχτή «θηλιά». Τέλος, οι οικογένειες S44, S45 και S46 εμφανίζονται σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάσαμε και μάλιστα παρουσιάζουν την ίδια μορφή.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η περίπτωση μεταβολής της παραμέτρου μάζας β όταν διατηρούμε σταθερή την τιμή της παραμέτρου $\text{Manev } e$ ($=-0.1$), όπου διαπιστώσαμε ότι για $\beta=16$, $e=-0.1$ έχουν χαθεί όλες οι οικογένειες εκτός από τις S41 και S46.

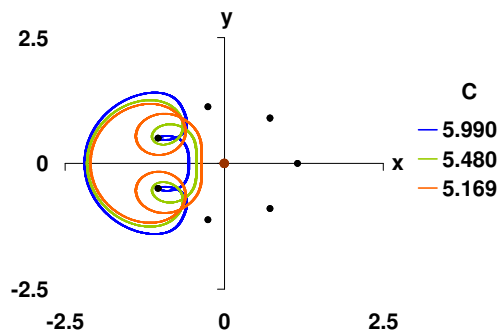
Για τη μελέτη της εξέλιξης των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης κάποιων οικογενειών αυτής της ομάδας, επιλέξαμε τις τιμές $\beta=5$, $e=-0.27$, εκτός από τις τροχιές της οικογένειας S41, όπου θεωρήσαμε τις τιμές $\beta=5$, $e=-0.1$, για τους λόγους που αναφέραμε προηγουμένως. Στα διαγράμματα όπου εξετάζεται η παραμετρική μεταβολή διάφορων χαρακτηριστικών μεγεθών των οικογενειών της ομάδας όταν η παράμετρος μάζας β παραμένει σταθερή, επιλέξαμε τις τιμές $e=-0.17$ και -0.27 .

Για λόγους ευκρίνειας των σχημάτων, στην ομάδα τροχιών F4 συμπεριλάβαμε μόνο τις οικογένειες S41, S43, S44, S45 και S46 (οι οποίες σημειωτέον εμφανίζονται και στη βαρυτική περίπτωση· βλέπε Πίνακα 9.1α) και παραλείψαμε σκόπιμα τις υπόλοιπες οικογένειες που εντοπίσαμε στην ίδια περιοχή. Σημειώνουμε επίσης ότι κάποιες οικογένειες της ομάδας αυτής, για διάφορα ζεύγη τιμών των παραμέτρων e και β , άλλοτε εμφανίζονται και άλλοτε όχι. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για $e=-0.1$ εμφανίζονται εκτός των όσων έχουμε αναφέρει έως τώρα και οι οικογένειες S43B, S44A και S44B, ενώ για $e=-0.27$ παύει να υπάρχει η S44B και υφίστανται όλες οι υπόλοιπες καθώς και δύο επιπλέον νέες οικογένειες που τις αναφέρουμε ως S43A και S45A.

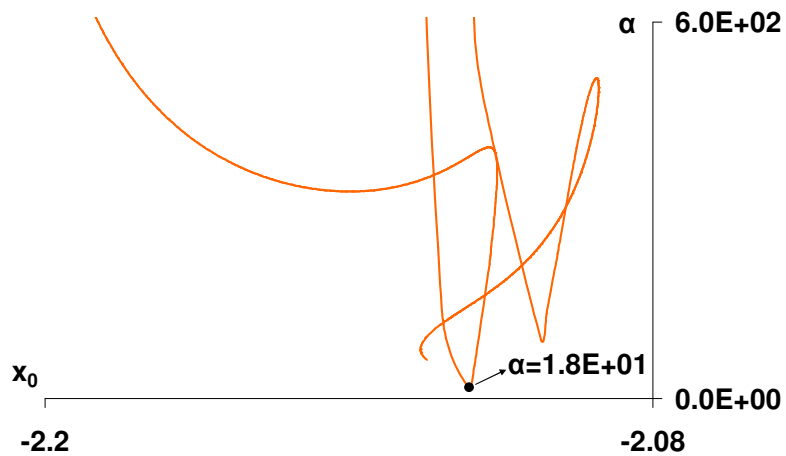
Οι τροχιές της οικογένειας S41 σχηματίζουν δύο βρόχους οι οποίοι περιβάλλουν τα primaries P_4 και P_5 ενώ τα υπόλοιπα primaries συμπεριλαμβανομένου και του κεντρικού παραμένουν εκτός τροχιάς. Παρατηρούμε ότι οι θέσεις των τροχιών αυτών κατά την διάρκεια όλης της περιόδου έχουν $x_0 < 0$ (Σχήμα 9.49β) και οι ημιπερίοδοι τους κυμαίνονται από 3.72 (M) μέχρι 5.84 (L). Τέλος, από το διάγραμμα ευστάθειας x_0 -α του Σχήματος 9.49γ διαπιστώνουμε την έντονα ασταθή συμπεριφορά τους.



(α)



(β)

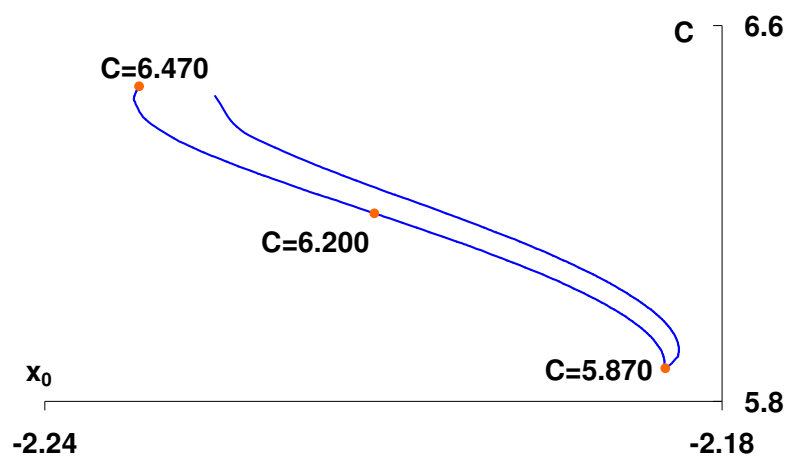


(γ)

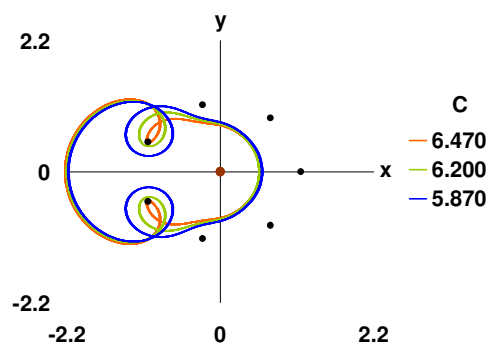
Σχήμα 9.49. Οικογένεια S41 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

- (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα,
 (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής,
 (γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

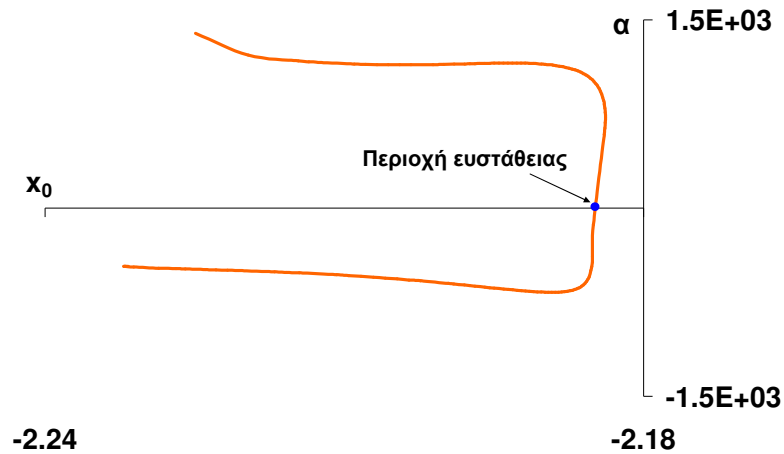
Οι τροχιές της οικογένειας S43 σχηματίζουν επίσης δύο βρόχους περί τα primaries P_4 και P_5 , όμως στην περίπτωση αυτή, το κεντρικό primary P_0 βρίσκεται στο εσωτερικό της τροχιάς (Σχήμα 9.50β). Οι ημιπερίοδοι αυτών των τροχιών μεταβάλλονται από 4.42 (L) μέχρι 4.75(L), ενώ από το διάγραμμα ευστάθειας x_0 -α αυτής της οικογένειας παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μικρή περιοχή αρχικών συνθηκών, κοντά στο ακρότατο της, από την οποία προκύπτουν ευσταθείς τροχιές, ενώ από το υπόλοιπο τμήμα της χαρακτηριστικής προκύπτουν ασταθείς τροχιές (Σχήμα 9.50γ).



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 9.50. Οικογένεια S43 για $\beta=5$, $e=-0.27$.

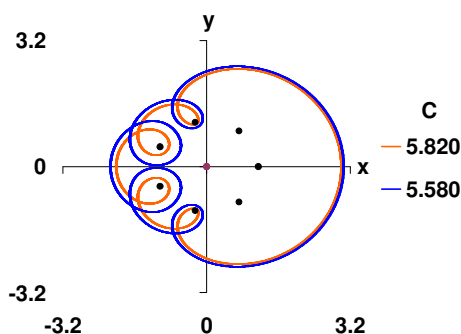
(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα,

(β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής,

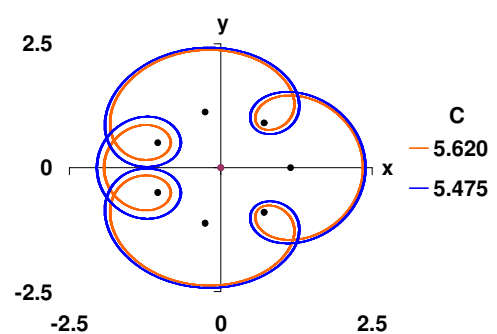
(γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Οι τροχιές της οικογένειας S44 είναι ασταθείς και σχηματίζουν τέσσερις βρόχους περί τα primaries P_3, P_4, P_5, P_6 , ενώ περικλείουν όλα τα υπόλοιπα (Σχήμα 9.51α). Οι ημιπερίοδοι τους κυμαίνονται από 6.52(L) μέχρι 8.41 (VL).

Η οικογένεια S45 αποτελείται από ασταθείς τροχιές που η κάθε μία σχηματίζει τέσσερις βρόχους περί τα primaries P_2, P_4, P_5 και P_7 . Εντός των τροχιών είναι όλα τα primaries του σχηματισμού (Σχήμα 9.51β) και οι ημιπερίοδοι τους μεταβάλλονται μεταξύ των τιμών 7.03 (L) και 8.50 (VL).



(α)



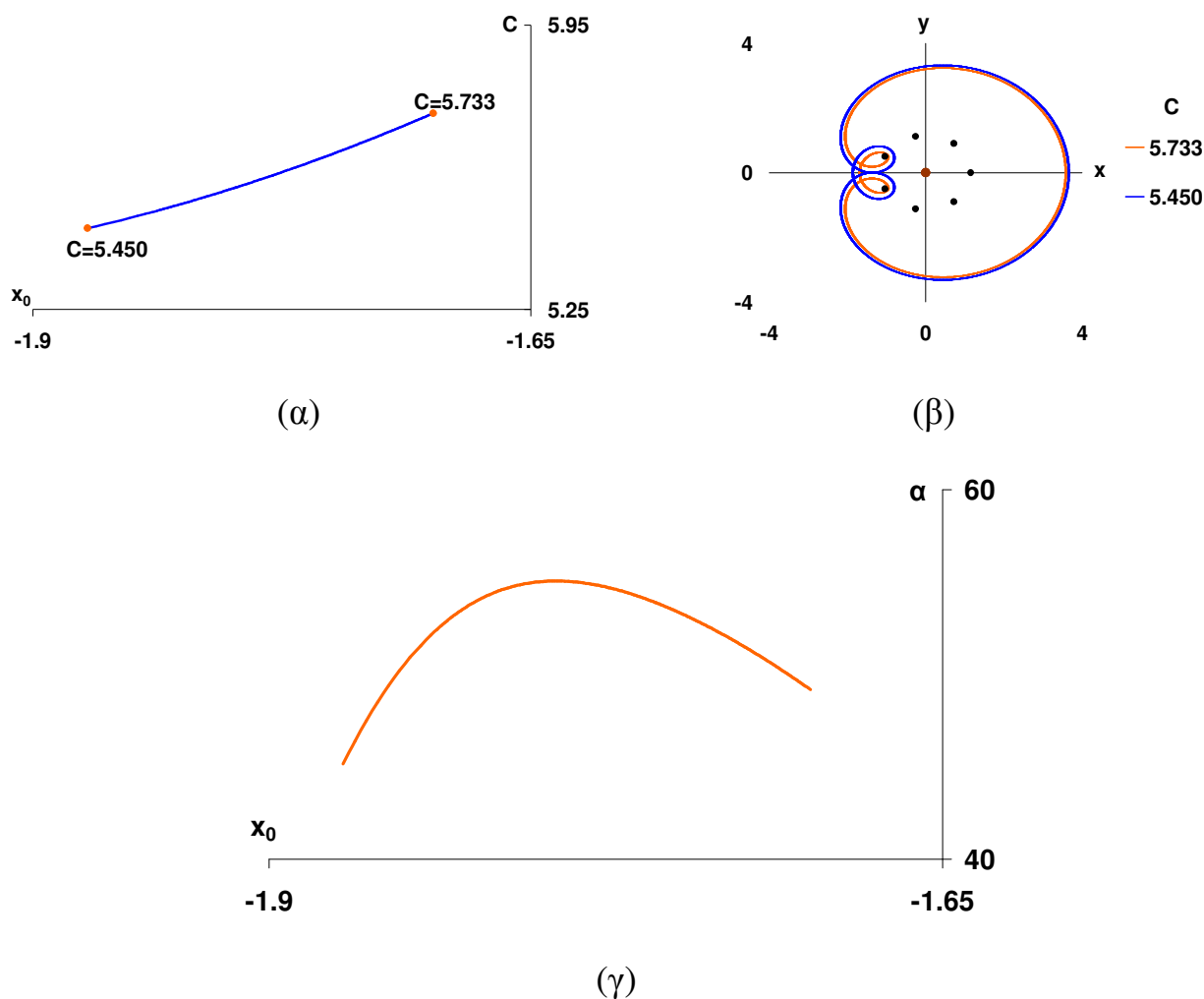
(β)

Σχήμα 9.51. Εξέλιξη για $\beta=5$, $e=-0.27$ των τροχιών των οικογενειών:

(α) S44, (β) S45

Κάθε τροχιά της οικογένειας S46 διαγράφει δύο βρόχους περί τα γειτονικά primaries P_4 και P_5 και ταυτόχρονα περικλείει όλα τα υπόλοιπα σώματα (Σχήμα 9.52β), με ημιπερίοδους που έχουν τιμές από 5.36 (L) μέχρι 5.96 (L). Από το διάγραμμα ευστάθειας x_0 -α (Σχήμα 9.52γ) διαπιστώνουμε τον ασταθή χαρακτήρα αυτών των τροχιών.

Στον Πίνακα 9.10 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας F4.



Σχήμα 9.52. Οικογένεια S46 για $\beta=5$, $e=-0.27$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα,

(β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής,

(γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Πίνακας 9.10. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F4

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S41(-0.1)	5.990088684	-2.201521790	1.230790308	-0.564278012	-0.935505484	4.676401913	U
	5.480149855	-2.162394070	1.380456757	-0.441488571	-1.372030230	4.040602665	U
	5.169169980	-2.112280838	1.439312239	-0.363399712	-1.633643395	4.743834109	U
	5.223009987	-2.152281400	1.460426872	-0.254377301	-1.854206030	5.841164105	U
	5.666113122	-2.124631989	1.268707932	-0.189678874	-1.789960391	3.725096437	U
S43(-0.27)	6.469955512	-2.231643463	1.343038524	0.554730252	-0.836737773	4.485472742	U
	6.199959697	-2.210788876	1.418954516	0.551746815	-0.981840003	4.418055286	U
	5.869979960	-2.185030228	1.506992763	0.592481201	-1.171189080	4.748471268	U
S44(-0.27)	6.019956014	-2.004855332	1.297473214	2.924350037	-2.242690446	6.523528247	U
	5.819980050	-2.025478678	1.388218547	2.992143944	-2.360749124	7.033906541	U
	5.579969910	-2.152720398	1.572769548	3.045066451	-2.467705875	8.408358036	U
S45(-0.27)	5.474969933	-2.053344204	1.527726143	2.384425405	-1.815531454	8.499113246	U
	5.620009839	-1.935515556	1.396102658	2.345320973	-1.738020909	7.602068900	U
	5.796999881	-1.871195351	1.290675308	2.301226961	-1.644078172	7.025671941	U
S46(-0.27)	5.449969971	-1.872574036	1.419492804	3.649046244	-3.140543349	5.958806444	U
	5.605019902	-1.765151331	1.312770450	3.606355752	-3.069517429	5.577364965	U
	5.733009715	-1.699074426	1.240424015	3.571817360	-3.010919151	5.368186644	U

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε συνοπτικά στις οικογένειες που δεν συμπεριλαμβάνονται στα διαγράμματα παραμετρικής εξέλιξης προκειμένου να καταστεί πληρέστερη η αποτύπωση των τροχιών της περιοχής. Οι χαρακτηριστικές

καμπύλες τους είναι απλές ομαλές καμπύλες, που αναπτύσσονται με πανομοιότυπο τρόπο και προσανατολισμό, όπως κι οι υπόλοιπες απλές καμπύλες της ομάδας (S44, S45, S46). Εξετάσαμε την εξέλιξη τους κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης τους για τις τιμές $\beta=5$, $e=-0.27$ εκτός της S44B που δεν εμφανίζεται για αυτές τις τιμές και την εξετάζουμε για $\beta=5$, $e=-0.1$.

Οι τροχιές της οικογένειας S43A σχηματίζουν δύο βρόχους οι οποίοι περιβάλλουν τα primaries P_4 και P_5 ενώ τα υπόλοιπα primaries εκτός του κεντρικού P_0 και του P_1 παραμένουν εκτός τροχιάς (Σχήμα 9.53α). Οι ημιπερίοδοι τους κυμαίνονται από 5.38 (L) – 6.37 (L).

Τα μέλη της οικογένειας S43B σχηματίζουν τέσσερις βρόχους περί τα primaries P_2 , P_4 , P_5 και P_7 , ενώ τα υπόλοιπα primaries εκτός του κεντρικού P_0 και του P_1 παραμένουν εκτός τροχιάς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση (Σχήμα 9.53β). Οι ημιπερίοδοι τους μεταβάλλονται από 6.50 (L) μέχρι 9.29(VL).

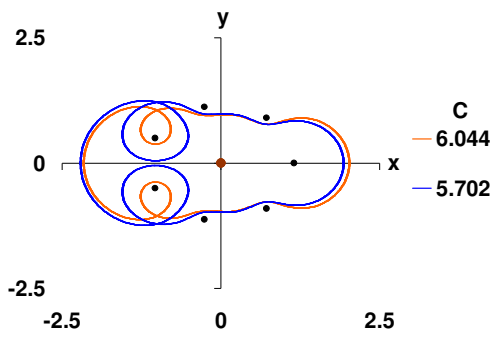
Οι τροχιές της οικογένειας S44A περικλείουν όλα τα primaries και μάλιστα σχηματίζουν βρόχους γύρω από όλα εκτός του P_1 (Σχήμα 9.53γ). Οι ημιπερίοδοι τους κυμαίνονται από 8.10(VL) μέχρι 11.15(VL).

Όσον αφορά στις τροχιές της οικογένειας S45A, παρατηρούμε ότι διαγράφουν δύο βρόχους γύρω από τα γειτονικά primaries P_4 και P_5 , αφήνοντας εκτός τροχιάς τα P_1 , P_2 , P_7 και περικλείοντας όλα τα υπόλοιπα (Σχήμα 9.53δ). Οι ημιπερίοδοι έχουν τιμές από 5.64 (L) μέχρι 5.89 (L).

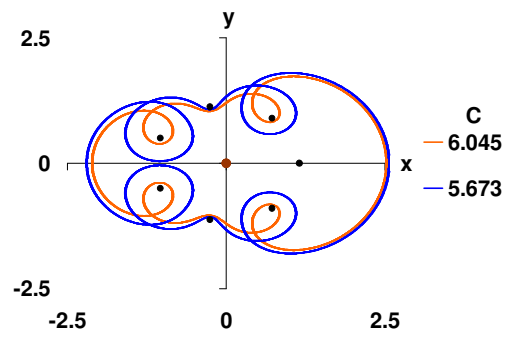
Τέλος για την οικογένεια S44B παρατηρούμε ότι αποτελείται από τροχιές οι οποίες σχηματίζουν δύο βρόχους περί τα primaries P_4 και P_5 . Εκτός τροχιάς παραμένουν τα primaries P_3 και P_6 , ενώ τα υπόλοιπα περικλείονται στην τροχιά (Σχήμα 9.53ε). Οι ημιπερίοδοι μεταβάλλονται μεταξύ των τιμών 6.29 (L) και 6.32 (L).

Από τη μελέτη της ευστάθειας των παραπάνω τροχιών, προέκυψε ότι πρόκειται για ασταθείς τροχιές εκτός της περίπτωσης της οικογένειας S43A, όπου ανιχνεύσαμε μια μικρή περιοχή ευσταθών τροχιών.

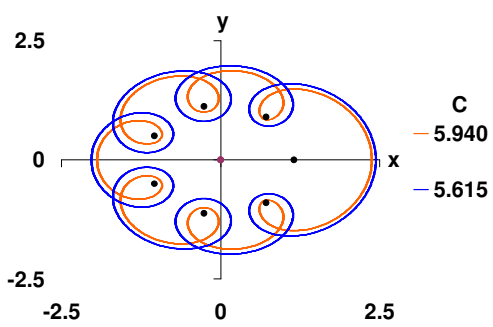
Στον Πίνακα 9.11 που ακολουθεί, παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών από κάθε οικογένεια που συμπληρώνουν τις οικογένειες της ομάδας F4.



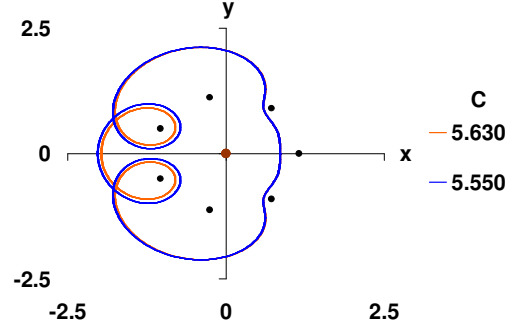
(α)



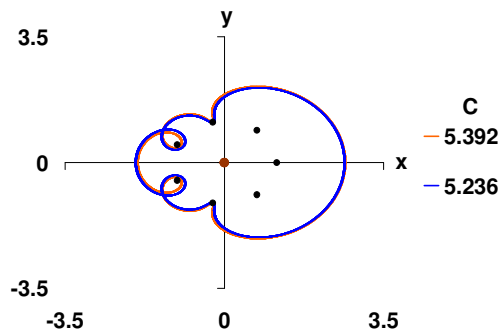
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Σχήμα 9.53. Εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος των χαρακτηριστικών των οικογενειών: (α) S43A, (β) S43B, (γ) S44A, (δ) S45A για $\beta=5$ και $e=-0.27$ και (ε) S44B, για $\beta=5$ και $e=-0.1$

Πίνακας 9.11. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών που συμπληρώνουν τις οικογένειες της ομάδας F4

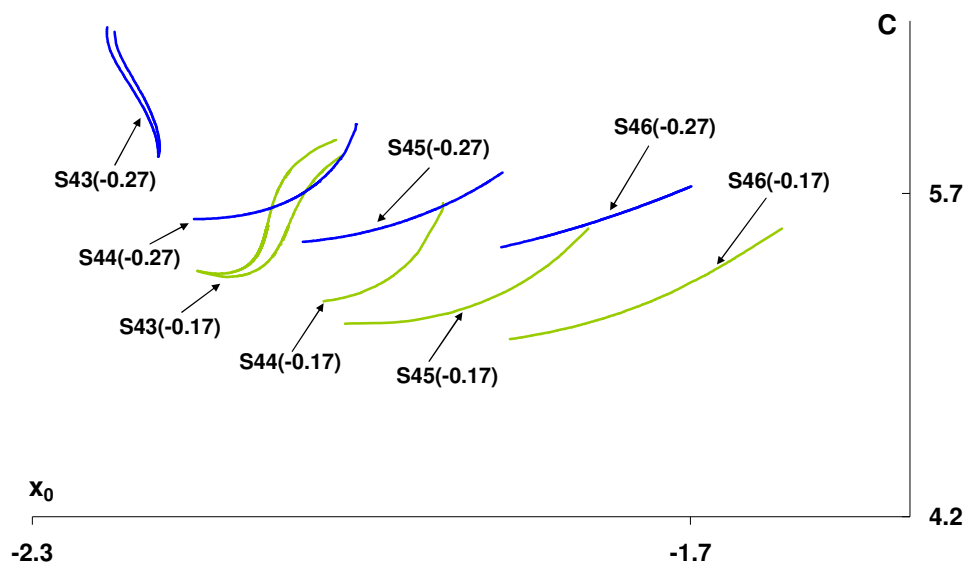
	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
S43A(-0.27)	5.701999931	-2.217846205	1.591110532	1.926112254	-1.383388308	6.369403485	U
	6.044979801	-2.166740037	1.430408643	2.015452860	-1.312925412	5.402324377	U
	6.284990210	-2.182407862	1.359698607	2.067763485	-1.261672855	5.417818367	U
S43B(-0.27)	5.667010017	-2.213012411	1.597729642	2.559715852	-1.936402155	9.289608366	U
	6.009979605	-2.121166153	1.400673312	2.518715088	-1.801958913	7.074467652	U
	6.360014040	-2.094816955	1.243568648	2.481406468	-1.660200986	6.504866808	U
S44A(-0.27)	5.574969864	-2.045718872	1.488870511	2.429637757	-1.831195147	11.150299602	U
	5.594019899	-2.049323841	1.485191593	2.437605246	-1.833741094	10.454664178	U
	6.009981051	-1.936631645	1.249453245	2.357579194	-1.634339047	8.100626489	U
S45A(-0.27)	5.549969940	-2.032086176	1.487122708	0.849086859	-1.565858273	5.891899835	U
	5.599969939	-1.995350258	1.443552002	0.848795478	-1.549249477	5.713117691	U
	5.629969932	-1.978549801	1.421314751	0.848651565	-1.539258550	5.638348061	U
S44B(-0.1)	5.201034775	-1.965534012	1.290865720	2.632152300	-1.982566545	6.291209299	U
	5.236160983	-1.956695480	1.269358183	2.633912593	-1.975639817	6.258722042	U
	5.447971550	-1.899218750	1.130149563	2.656178334	-1.946685677	6.316618917	U

9.9.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0 -C, x_0 -T/2 και C-T/2

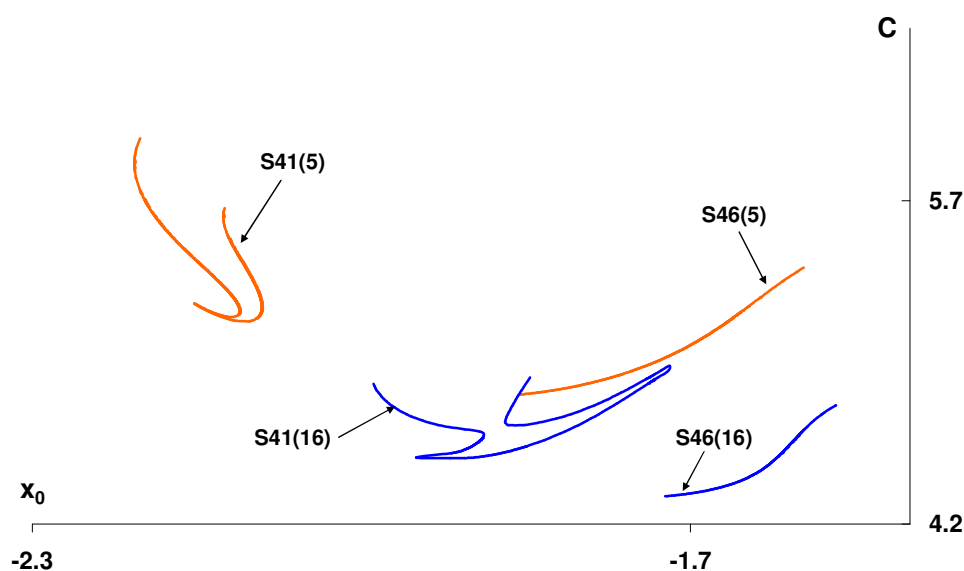
(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 -C

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου μάζας β ($=5$) και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της σταθεράς e , οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C και προς τα αριστερά του διαγράμματος x_0 -C. Αξιοσημείωτο είναι ότι η μετατόπιση αυτή λαμβάνει χώρα με σχετικά μεγάλο ρυθμό, ενώ για τις χαρακτηριστικές των οικογενειών S43 παρατηρούμε στένωση των «θηλιών» (Σχήμα 9.54α).

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου e ($=-0.1$) και μεταβάλλοντας αυξητικά την παράμετρο μάζας β , παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η β παράμετρος, οι χαρακτηριστικές καμπύλες μετατοπίζονται προς χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C . Αξιοσημείωτη είναι η μεταβολή της μορφής της χαρακτηριστικής καμπύλης της οικογένειας S41 (Σχήμα 9.54β).



(α)



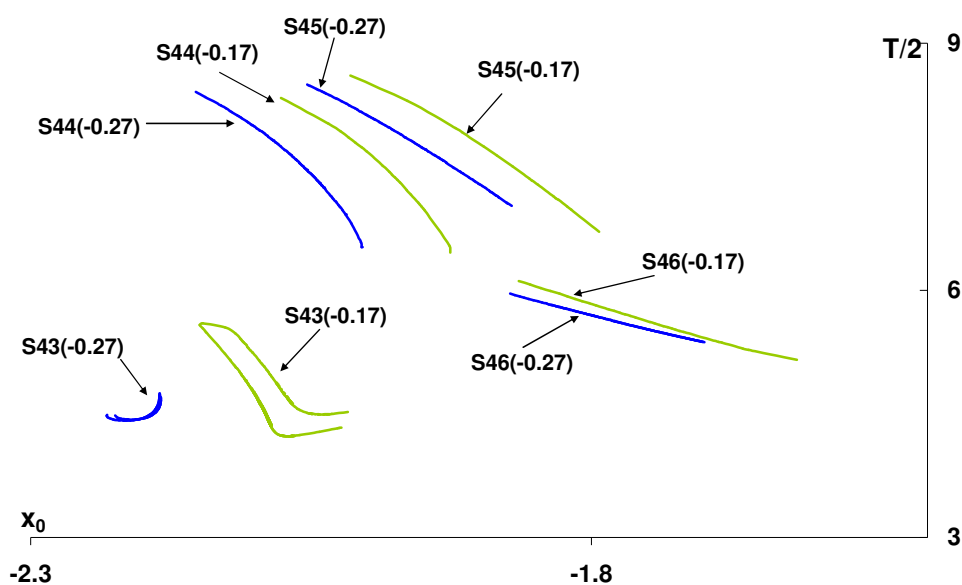
(β)

Σχήμα 9.54. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

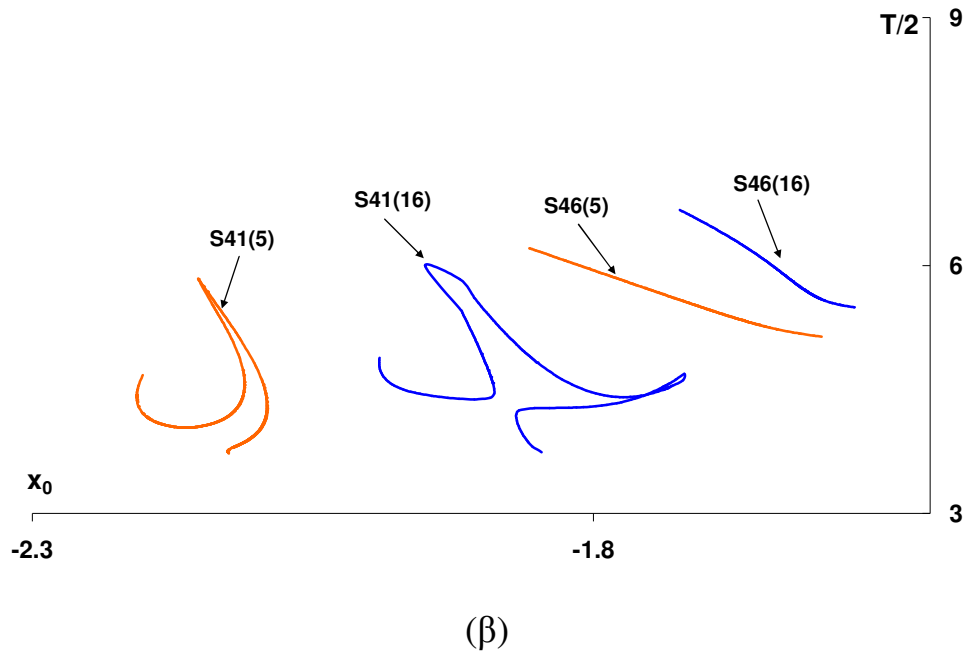
(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου μάζας β ($=5$) και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της σταθεράς e , οι τιμές των περιόδων είναι σχεδόν ίδιες αλλά για μικρότερες τιμές της x_0 . Ειδικά για την οικογένεια S43 παρατηρούμε ότι η περιοχή τιμών της περιόδου είναι πολύ στενή και μάλιστα έχει πολύ κοντινές τιμές για την ίδια τιμή x_0 των δύο διαφορετικών κλάδων της «θηλιάς», με αποτέλεσμα να μην είναι ευκρινή τα δύο μέρη της «θηλιάς» (Σχήμα 9.55α).

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου e ($=-0.1$) και αυξάνοντας την παράμετρο μάζας β , παρατηρούμε μία μετατόπιση των καμπύλων προς μεγαλύτερες τιμές της x_0 , ενώ για τη οικογένεια S46 είναι εμφανής παρουσιάζεται μία μικρή αύξηση των τιμών της περιόδου (Σχήμα 9.55β).



(α)

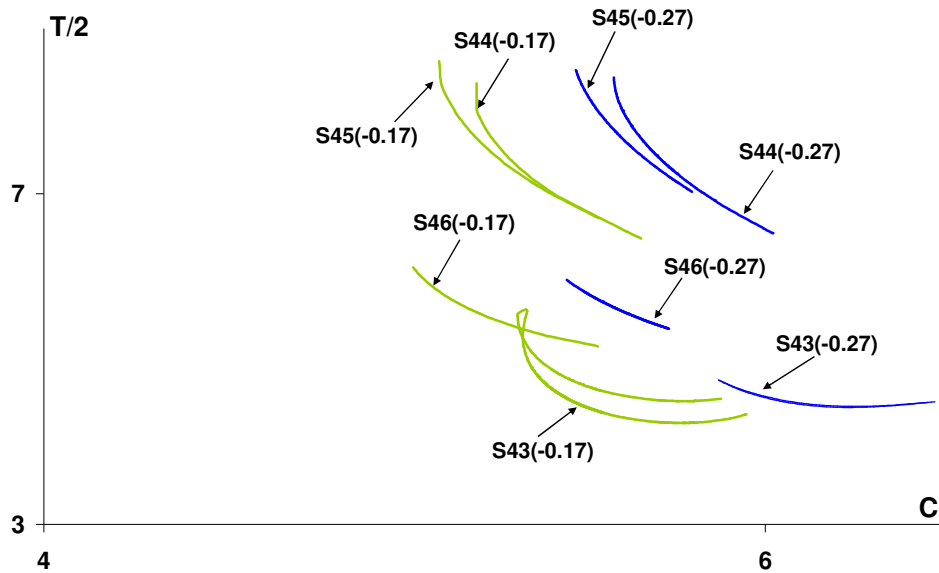


Σχήμα 9.55. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

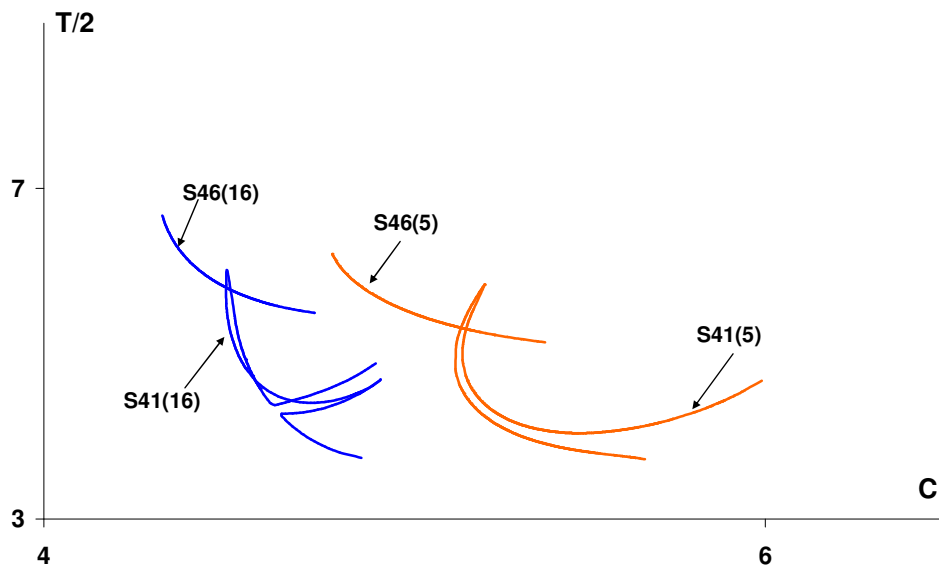
(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C-T/2$

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου μάζας β και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της σταθεράς e , παρατηρούμε τη μετατόπιση των οικογενειών προς μεγαλύτερες τιμές της σταθεράς C , ενώ το πεδίο τιμών των ημιπεριόδων έχει μεταβληθεί πολύ λίγο στις δύο περιπτώσεις. Όπως και πριν, στην οικογένεια $S43$ όσο αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e είναι τόσο πολύ κοντά οι τιμές των ημιπεριόδων για την ίδια τιμή της σταθεράς C , ώστε η υπάρχουσα μικρή θηλιά εξαφανίζεται (Σχήμα 9.56α).

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου e ($=-0.1$) και αυξάνοντας την παράμετρο μάζας β , παρατηρούμε μία μετατόπιση των οικογενειών προς μικρότερες τιμές της σταθεράς C , ενώ οι ημιπεριόδοι μεταβάλλονται πολύ λίγο (Σχήμα 9.56β).



(α)



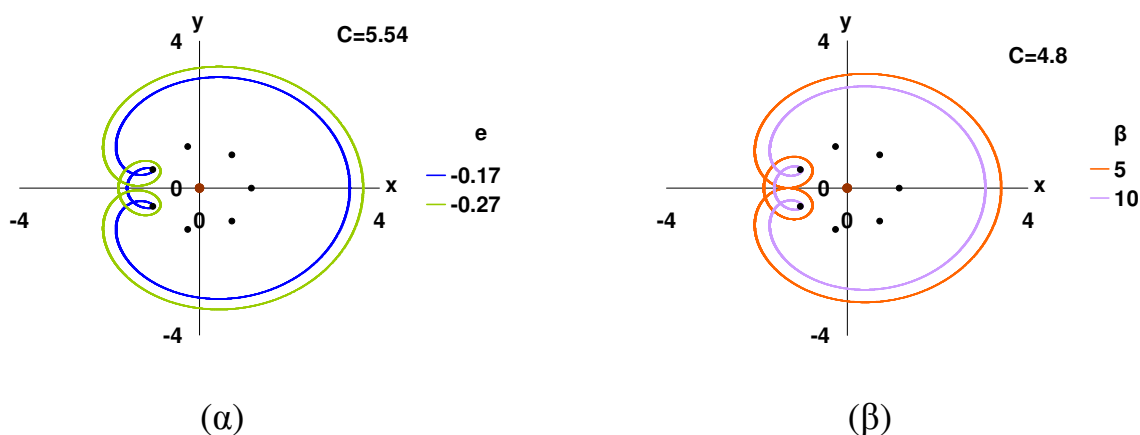
(β)

Σχήμα 9.56. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iv) Παραμετρική εξέλιξη των τροχιών

Τα αποτελέσματα από τη μελέτη της παραμετρικής μεταβολής των τροχιών εκτίθενται στο Σχήμα 9.57. Ειδικότερα, στο Σχήμα 9.57α παρατηρούμε ότι οι ισοενεργειακές τροχιές της οικογένειας S46, που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της παραμέτρου β , παρουσιάζουν συρρίκνωση καθώς μειώνεται κατά απόλυτη τιμή

η παράμετρος e . Όταν για την ίδια τιμή της e , αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου β , οι τροχιές της οικογένειας συρρικνώνονται επίσης (Σχήμα 9.57β).



Σχήμα 9.57. Οικογένεια S46. Παραμετρική μεταβολή των τροχιών: (α) με την παράμετρο e ($=-0.17, -0.27$) για $C=5.54$, (β) με την παράμετρο β ($=5, 10$) για $C=4.8$.

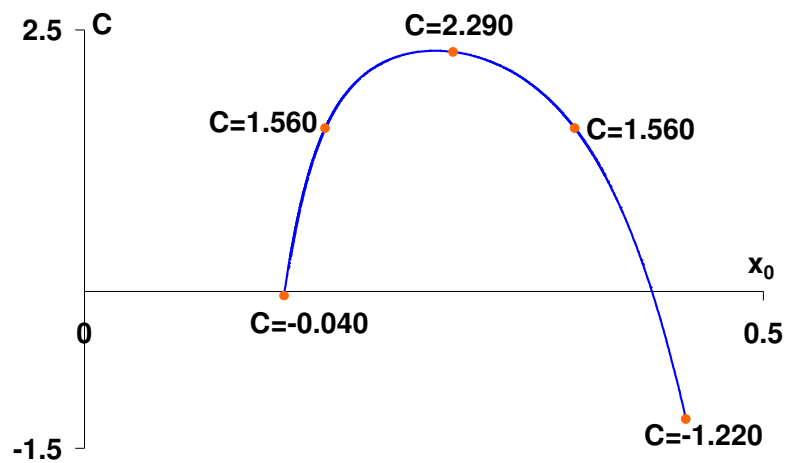
9.10 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F5 (οικογένειες S50-S51-S52)

9.10.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

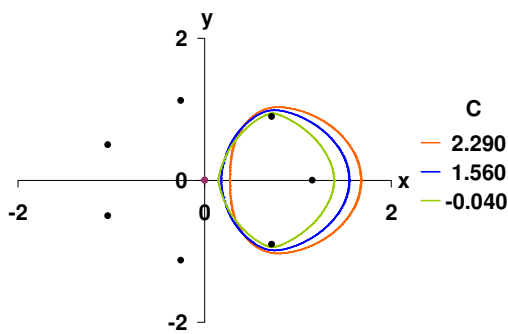
Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0 - C όπου $x_0 > 0$. Όλες οι τροχιές είναι ανάδρομες. Η οικογένεια S50 αποτελείται από διαπλανητικού τύπου τροχιές που διαγράφονται γύρω από τα primaries P_1, P_2 και P_7 (Σχήμα 9.58β) με ημιπεριόδους που κυμαίνονται από 0.71 (S) έως 1.29 (S). Σε μία μικρή περιοχή γύρω από το ακρότατο της χαρακτηριστικής αυτής της οικογένειας, εμφανίζονται ευσταθείς τροχιές, ενώ εκατέρωθεν αυτής της περιοχής οι τροχιές παρουσιάζουν αστάθεια και μάλιστα όσο ελαττώνεται η τιμή της σταθεράς C τόσο πιο μεγάλες τιμές λαμβάνει ο αντίστοιχος συντελεστής ευστάθειας (Σχήμα 9.58δ). Οι τροχιές της οικογένειας S51 είναι επίσης διαπλανητικού τύπου και διαγράφονται γύρω από τα primaries P_2 και P_7 (Σχήμα 9.59) με ημιπεριόδους 0.61 (S) – 1.16 (S), ενώ παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την ευστάθεια τους, με αυτήν των τροχιών της οικογένειας S51. Η οικογένεια S52 αποτελείται από τροχιές δορυφορικού τύπου με $C > 0$, που

διαγράφονται γύρω από το P_1 (Σχήμα 9.60β) με ημιπεριόδους 1.02 (S)- 2.39 (M) και χαρακτηρίζονται από αστάθεια φαίνεται στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0 -α του Σχήματος 9.60γ.

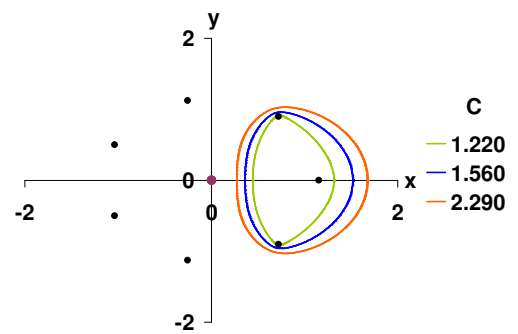
Σημειώνουμε στο σημείο αυτό, ότι οι οικογένειες S50, S51 και S52 δεν εμφανίζονται στις περιπτώσεις για $\beta=5$ και $e=-0.17$, -0.23 ή -0.27 . Τέλος, στον Πίνακα 9.12 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας F5.



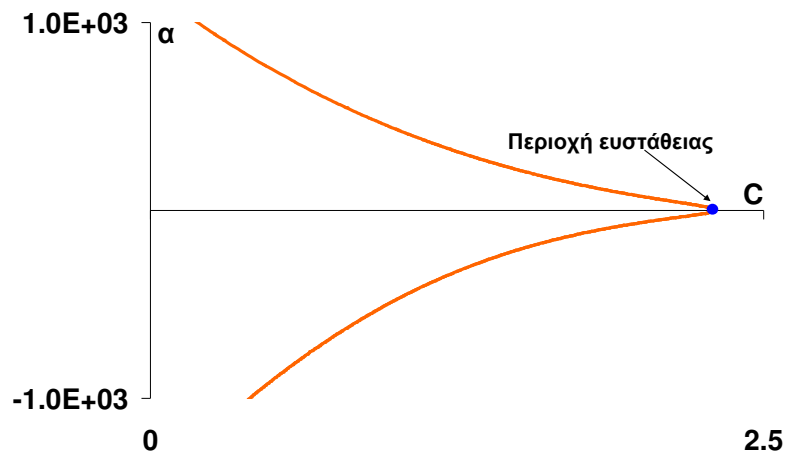
(α)



(β)

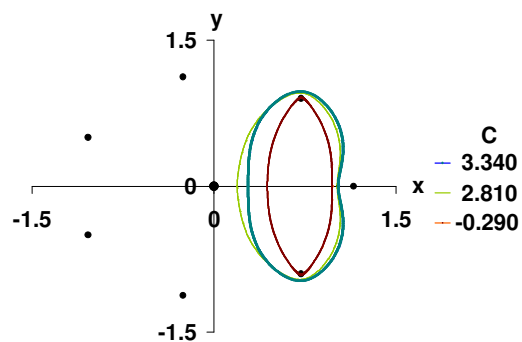


(γ)

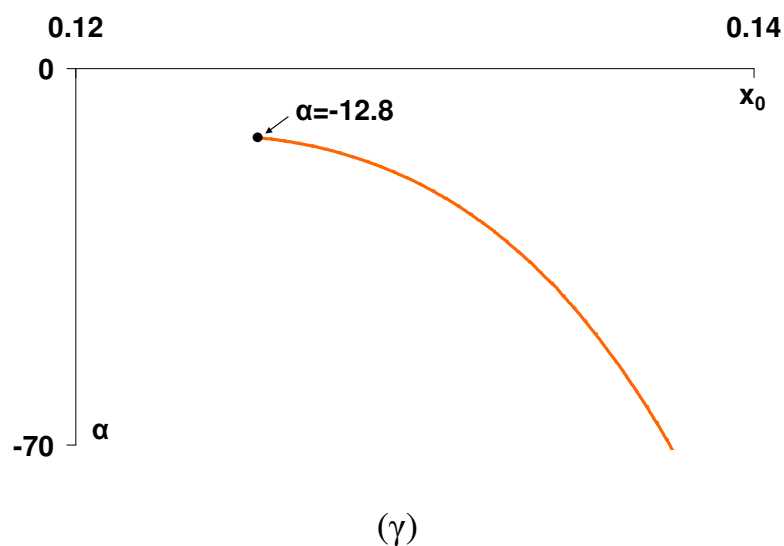
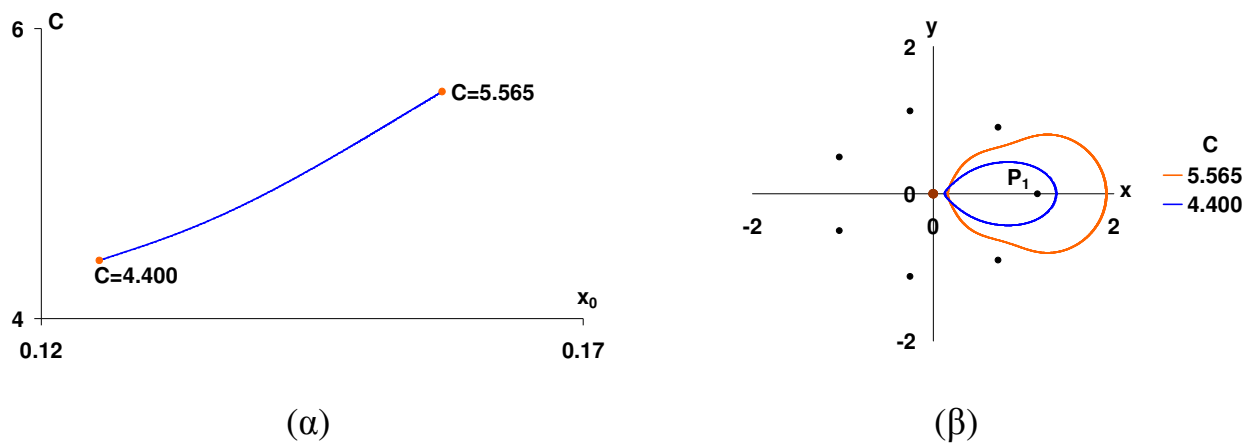


(δ)

Σχήμα 9.58. Οικογένεια S50. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (δ) διάγραμμα ευστάθειας C-α



Σχήμα 9.59. Οικογένεια S51. Εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής



Σχήμα 9.60. Οικογένεια S52. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Πίνακας 9.12. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F5

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S50	-0.039997267	0.147013047	2.851876884	1.384860244	-2.703141687	0.866455229	U
	1.559929870	0.177163455	2.687346319	1.547468645	-2.249574175	1.102101465	U
	2.289959952	0.271470886	2.499004746	1.672382247	-2.062443315	1.273301209	U
	1.559929869	0.361012098	2.509061719	1.516846536	-2.262248995	1.029475963	U
	-1.219996924	0.442904554	2.928898130	1.316295735	-3.047785036	0.717731635	U

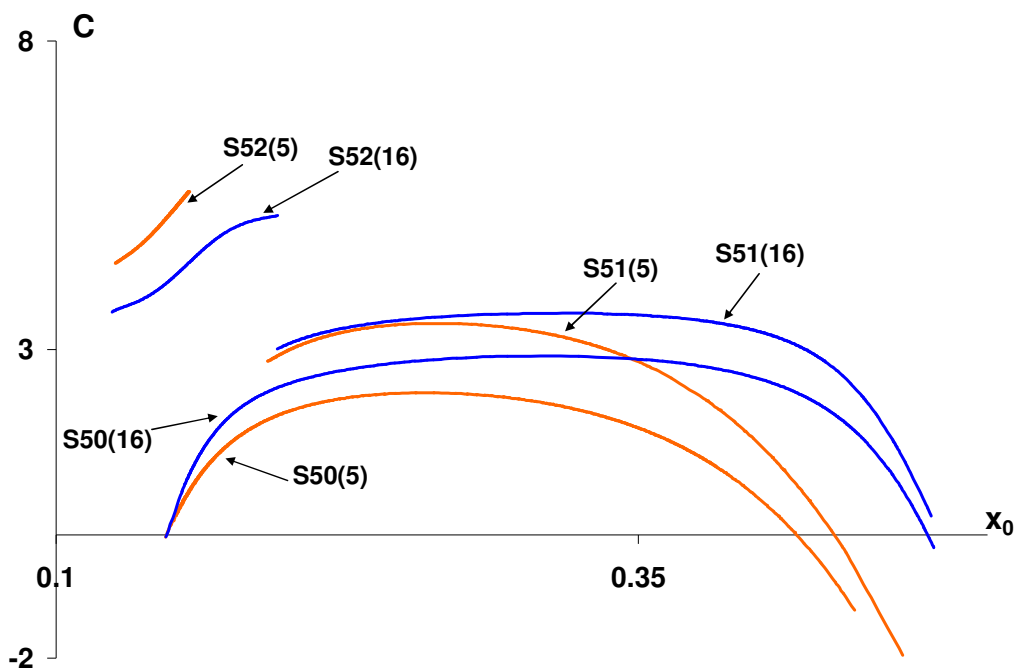
S51	2.809929782	0.190975974	2.462772397	1.016132314	-2.415369646	1.039810964	U
	1.559917547	0.399367065	2.458477736	0.990232291	-2.558086905	0.821455279	U
	-1.950087027	0.463536804	3.034255154	0.956352757	-3.094266259	0.617959263	U
S52	5.564979983	0.156988083	1.690821503	1.913238284	-1.113780264	2.392101291	U
	4.999979976	0.144185001	1.724352369	1.734811096	-1.253398387	1.748547477	U
	4.399939975	0.125366323	1.532887206	1.358703430	-1.761772408	1.014562089	U

9.10.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$

Στις παρακάτω παραμετρικές μεταβολές των καμπύλων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$ θα μελετήσουμε τις μεταβολές για σταθερή τιμή της παραμέτρου $e(=-0.1)$ και για $\beta=5, 16$.

(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0-C

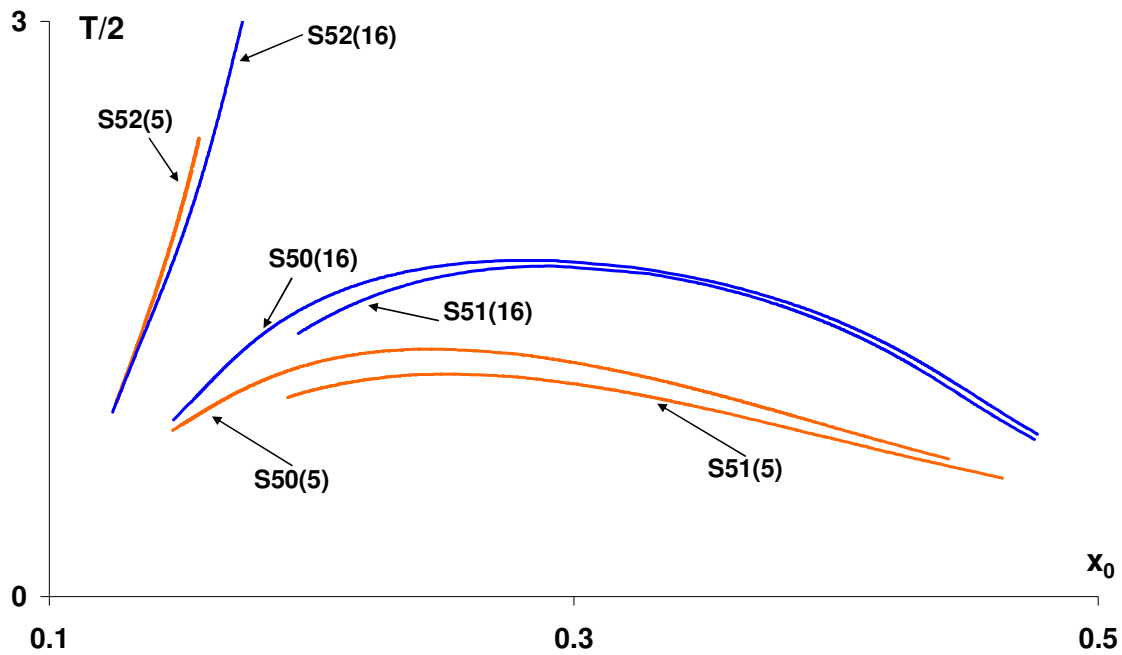
Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου e ($=-0.1$) και αυξάνοντας την παράμετρο μάζας β , παρατηρούμε μια μετατόπιση της οικογένειας S52 προς μικρότερες τιμές της σταθεράς C , ενώ το αντίθετο συμβαίνει για τις οικογένειες S50 και S51, των οποίων οι χαρακτηριστικές μετατοπίζονται προς υψηλότερες τιμές της σταθεράς C . Επιλέον παρατηρούμε ότι οι οικογένειες S50 και S51, παρουσιάζουν ακρότατο, το οποίο όσο αυξάνει η παράμετρος μάζας μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της x_0 (Σχήμα 9.62α).



Σχήμα 9.61. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 -C με την παράμετρο β , για $e=-0.1$

(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων x_0 -T/2

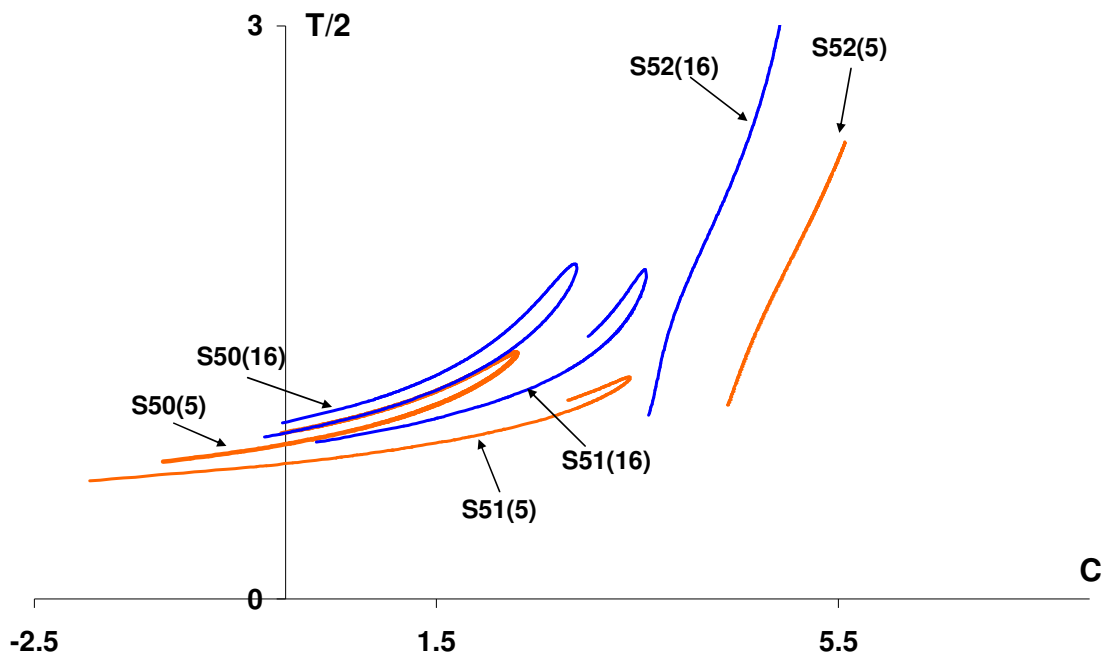
Καθώς η παράμετρος β αυξάνει, η καμπύλη x_0 -T/2 της οικογένειας S52, μετατοπίζεται ελαφρά προς τα δεξιά του διαγράμματος, με τέτοιο τρόπο ώστε για την ίδια θέση x_0 η ημιπερίοδος να ελαττώνεται. Η ελάττωση αυτή είναι εντονότερη όταν αυξάνεται η x_0 , καθόσον αρχικά εκκινούν με σχεδόν ίδιες τιμές ημιπεριόδου για την ίδια θέση x_0 . Όσον αφορά στις καμπύλες x_0 -T/2 των οικογενειών S50 και S51, αυτές παρουσιάζουν ακρότατο το οποίο μάλιστα μετατοπίζεται, όπως και οι ίδιες οι καμπύλες, προς μεγαλύτερες τιμές της ημιπεριόδου (Σχήμα 9.62β).



Σχήμα 9.62. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$ με την παράμετρο β , για $e=-0.1$.

(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C-T/2$

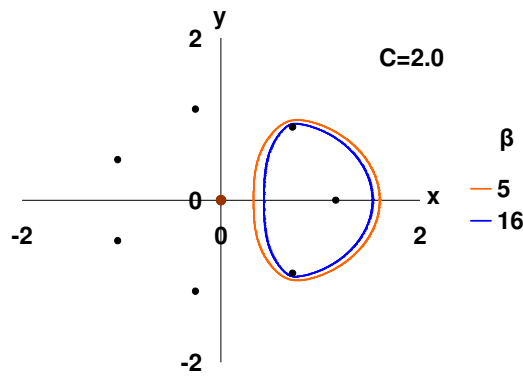
Αύξηση της παραμέτρου β , επιφέρει στην οικογένεια S52 μία μετατόπιση προς τα αριστερά του διαγράμματος $C-T/2$, γεγονός που σημαίνει ότι ίδιες τιμές περιόδου εμφανίζονται σε μικρότερες τιμές της σταθεράς C . Όσον αφορά στις αντίστοιχες καμπύλες των οικογενειών S50 και S51 παρατηρούμε μία μετατόπιση προς τα άνω και δεξιά του διαγράμματος $C-T/2$. Προφανώς καθώς αυξάνεται η παράμετρος μάζας β , για την ίδια τιμή της σταθεράς C η περίοδος παίρνει μεγαλύτερες τιμές (Σχήμα 9.62γ).



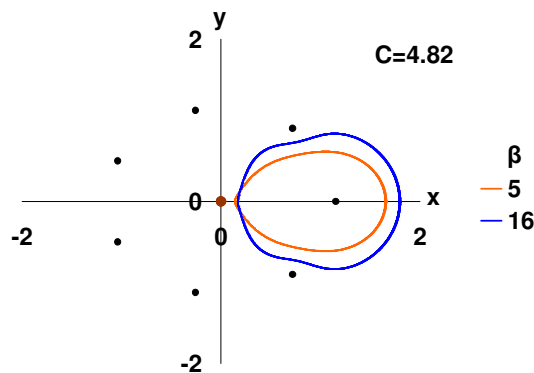
Σχήμα 9.63. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2 με την παράμετρο β , για $e=-0.1$

(iv) Παραμετρική εξέλιξη των τροχιών

Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 9.63 αναφορικά με την οικογένεια S50, τροχιές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της C και για την αυτή τιμή της παραμέτρου e , παρουσιάζουν συρρίκνωση καθώς αυξάνει η παράμετρος μάζας β . Αντιθέτως, από το Σχήμα 9.64 παρατηρούμε ότι όσον αφορά στην οικογένεια S52, οι τροχιές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της C και για την αυτή τιμή της παραμέτρου e , διευρύνονται καθώς αυξάνει η παράμετρος μάζας β .



(α)



(β)

Σχήμα 9.64. Παραμετρική μεταβολή των τροχιών με την παράμετρο μάζας β : (α) της οικογένειας S50 για $C=2.0$, (β) της οικογένειας S52 για $C=4.82$

9.11 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F6 (οικογένειες S68-S69-S72-S73)

9.11.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

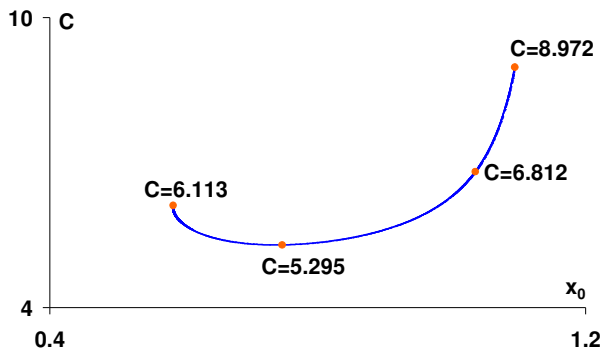
Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0-C όπου $x_0 > 0$. Οι χαρακτηριστικές των S68 και S69 δημιουργούν ανάμεσα τους ένα δίαυλο, ενώ για μεγάλες τιμές της σταθεράς C εξελίσσονται παρόμοια με τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας οι οποίες δημιουργούν την «καμινάδα» που βρίσκεται πάνω από τη θέση του P_1 (Σχήμα 9.68). Η οικογένεια S68 αποτελείται από ανάδρομες τροχιές δορυφορικού τύπου που διαγράφονται γύρω από το P_1 (Σχήμα 9.65β) με ημιπεριόδους που κυμαίνονται από 0.08(VS) έως 3.71(M), ενώ αυτές της οικογένειας S69 είναι ορθές δορυφορικού τύπου,

διαγράφονται γύρω από το primary P_1 και για κάποιες τιμές της C εμφανίζουν δύο βρόχους (Σχήμα 9.66α) με ημιπεριόδους μεταξύ των τιμών 0.11 (VS) – 1.54(S). Στα Σχήματα 9.65γ και 9.65δ που αφορούν στην ευστάθεια των τροχιών της S68, παρατηρούμε ότι από το τμήμα της χαρακτηριστικής που εξελίσσεται εντός της «καμινάδας» προκύπτουν ευσταθείς τροχιές, ενώ όσο πλησιάζουμε στην αρχή των αξόνων οι τροχιές αποκτούν ασταθή συμπεριφορά, με εξαίρεση μία μικρή περιοχή της χαρακτηριστικής όπου οι τροχιές είναι και πάλι ευσταθείς. Από τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει ότι παρουσιάζεται τρεις φορές εναλλαγή της ευστάθειας, για τιμές του ζεύγους (x_0, C) και του συντελεστή ευστάθειας α , που φαίνονται στα αντίστοιχα Σχήματα 9.65γ και 9.65δ. Για την οικογένεια S69 ανιχνεύσαμε μόνο ευσταθείς τροχιές.

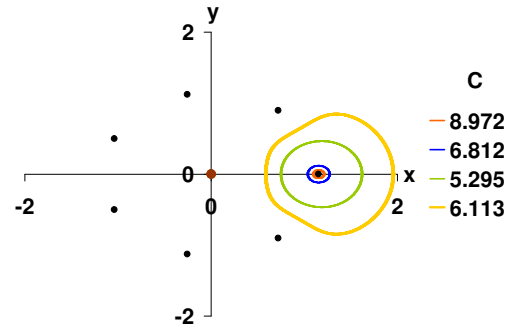
Οι τροχιές της οικογένειας S72 είναι ορθές, δορυφορικού τύπου, αναπτύσσονται γύρω από το primary P_1 (Σχήμα 9.66β) και έχουν ημιπεριόδους που κυμαίνονται μεταξύ 1.66(S) και 3.33(M). Τέλος, οι τροχιές της οικογένειας S73 έχουν νεφροειδή μορφή (kidney like), είναι ανάδρομες και διαγράφονται γύρω από σημείο ισορροπίας της ζώνης C_1 (Σχήμα 9.67β). Οι τιμές των ημιπεριόδων τους κυμαίνονται από 2.14 (S) μέχρι 4.33 (L).

Όσον αφορά στην ευστάθεια των τροχιών των οικογενειών S72 και S73, ανιχνεύσαμε μόνο ασταθείς τροχιές, εκτός από κάποιες μικρές περιοχές ευστάθειας στην περιοχή του ακροτάτου τους. Ειδικότερα για τις τροχιές της S73 παραθέτουμε το διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α , στο οποίο διακρίνουμε την μικρή περιοχή ευσταθών τροχιών (Σχήμα 9.67γ).

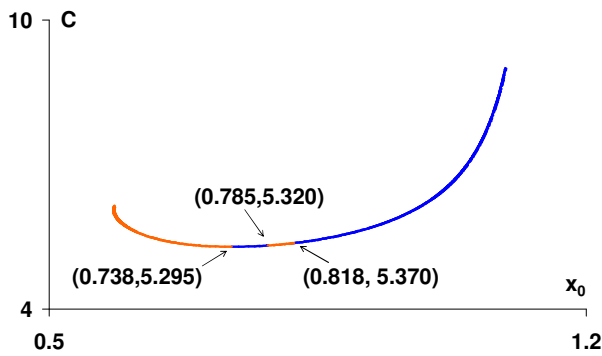
Στον Πίνακα 9.13 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



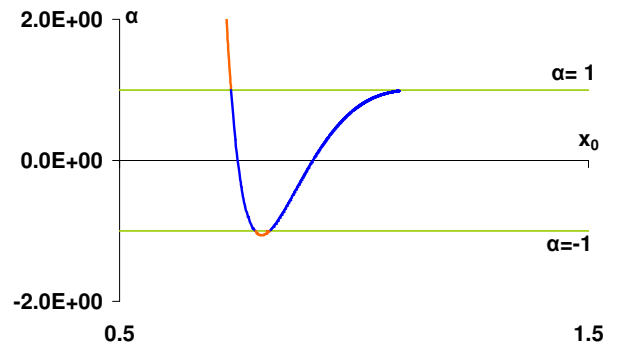
(α)



(β)

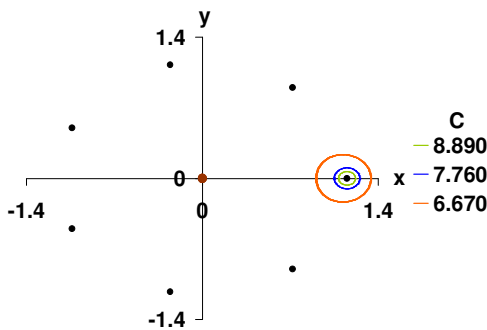


(γ)

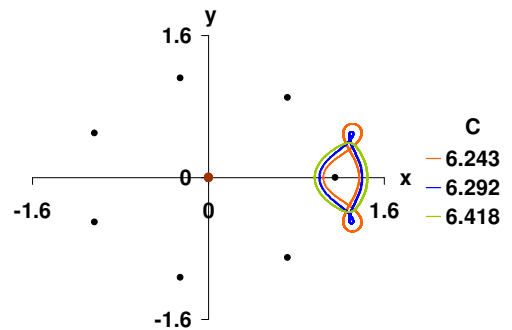


(δ)

Σχήμα 9.65. Οικογένεια S68. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

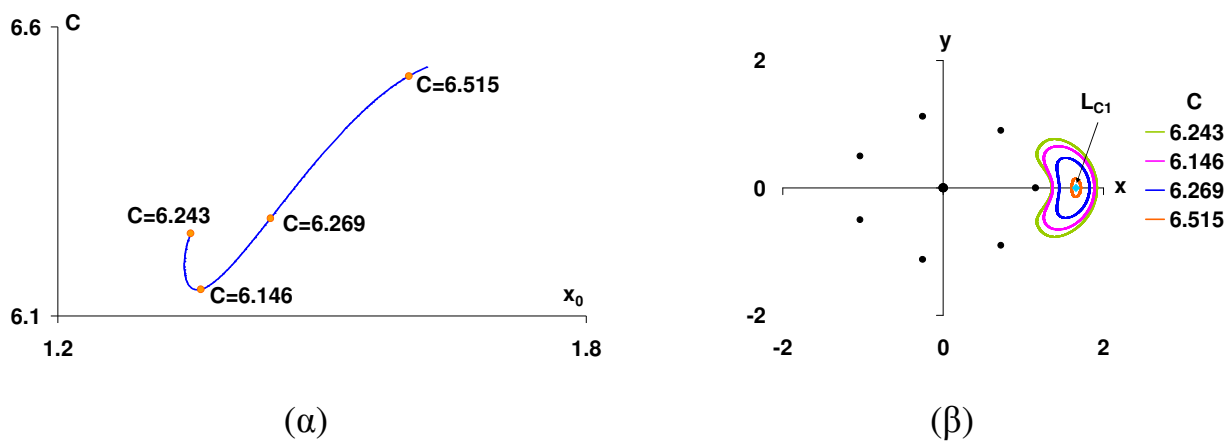


(α)



(β)

Σχήμα 9.66. Εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών: (α) S69, (β) S72



Σχήμα 9.67. Οικογένεια S73. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (γ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Πίνακας 9.13. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F6

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S68	8.971999489	1.094314743	2.082678957	1.210556326	-2.079043820	0.087812566	S
	6.812019919	1.035271851	1.546476857	1.270576955	-1.534035201	0.241207806	S
	5.294969996	0.746907227	1.179700202	1.616877489	-1.121235710	1.300320088	S
	6.113030000	0.584098827	0.848594679	1.951996216	-0.876061964	3.524630332	U

S69	8.979999722	1.218089477	1.838276571	1.086480106	-1.832528720	0.112786415	S
	7.400039945	1.274149719	1.284107709	1.028409107	-1.257952652	0.307057890	S
	6.689009990	1.342371368	1.000065209	0.913747592	-0.738410790	0.883278023	S
	6.626009991	1.307490723	1.265728515	0.846145778	-0.507176527	1.138384983	S
S72	6.242999972	1.368339973	1.079785560	1.043563737	-1.807178576	3.330450563	U
	6.464019994	1.461001617	0.614884265	0.966839213	-1.135054186	1.756520129	U
	6.500019977	1.527058899	0.395487888	1.041689501	-1.713414234	1.821299852	S
	6.428027443	1.504840881	0.527046383	1.114377166	-3.346640034	2.295198805	U
S73	6.242999996	1.350959172	1.159520292	1.910761449	-0.746959828	4.328303372	U
	6.146049997	1.362279083	1.149520507	1.883286033	-0.778926923	2.800068803	S
	6.269039999	1.441588448	0.808802757	1.820237229	-0.623846087	2.344964748	U
	6.515020000	1.598603489	0.219346983	1.711711523	-0.204520573	2.150619533	U

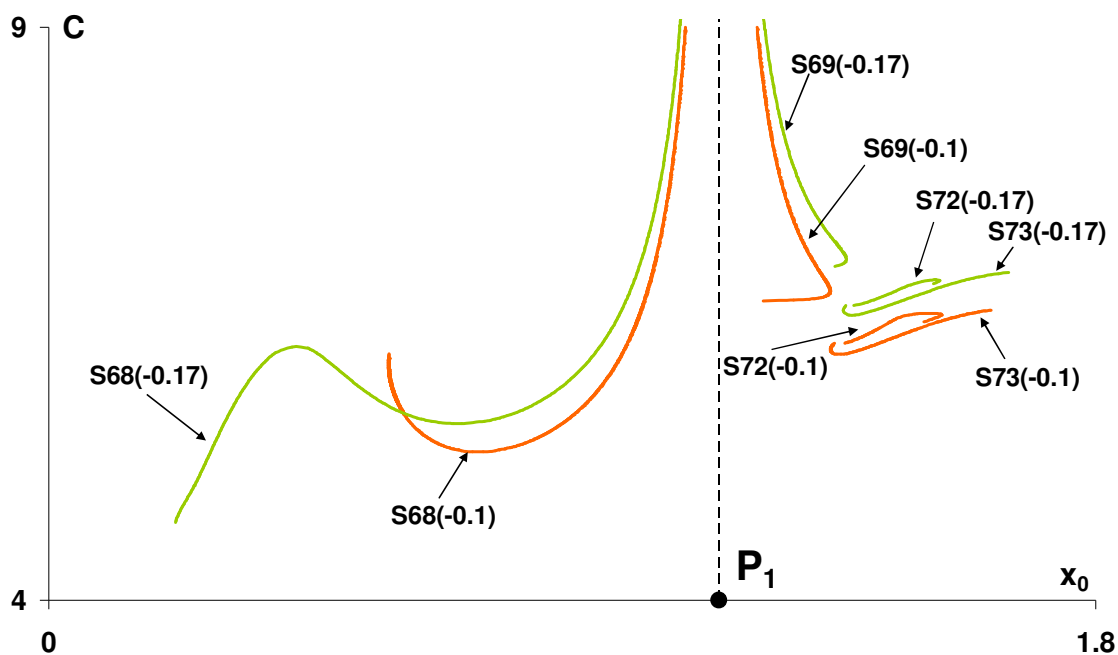
9.11.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0-C , $x_0-T/2$ και $C-T/2$

(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0-C

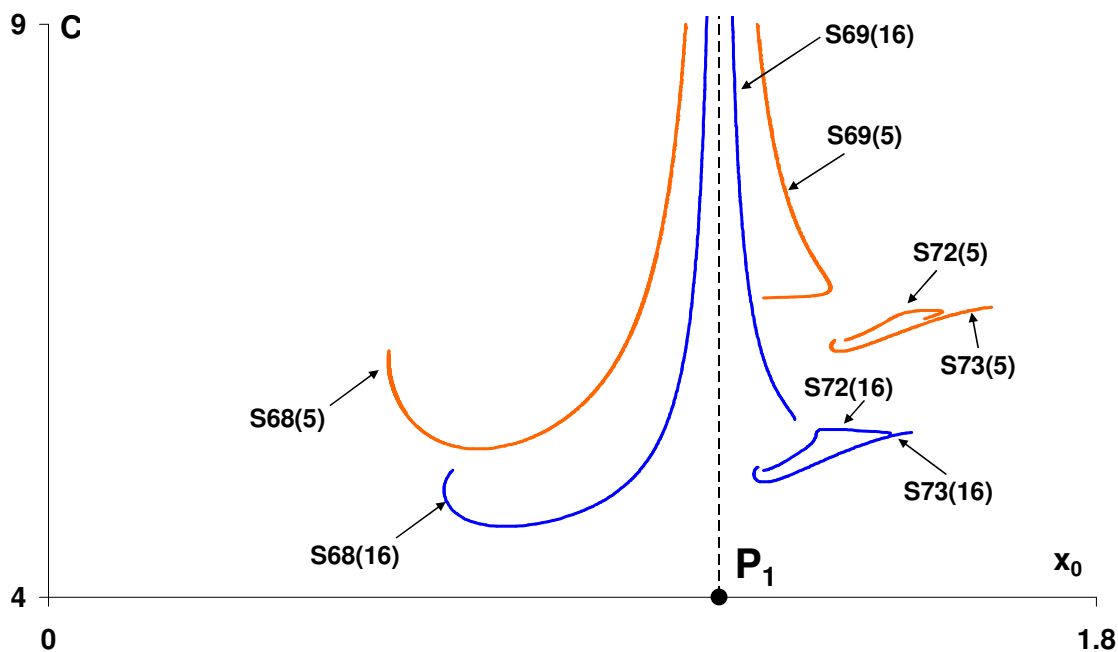
Αυξάνοντας κατά απόλυτη τιμή την παράμετρο e και διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β , παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστικές των $S68$ και $S69$ απομακρύνονται από την ασύμπτωτη που περνάει από το primary P_1 (με συνέπεια την διεύρυνση του διαύλου που σχηματίζουν ανάμεσά τους), ενώ ταυτόχρονα μετατοπίζονται προς υψηλότερες τιμές της σταθεράς C . Με παρόμοιο τρόπο εξελίσσονται και οι χαρακτηριστικές των οικογενειών $S72$ και $S73$, αφού κι αυτές μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της C και ταυτόχρονα απομακρύνονται από την ασύμπτωτη που διέρχεται από το primary P_1 (Σχήμα 9.68α).

Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β και αυξάνοντας την παράμετρο e , παρατηρούμε την προσέγγιση των χαρακτηριστικών των $S68$ και $S69$ στην ασύμπτωτη τους στη θέση του primary P_1 (άρα και τη συρρίκνωση του διαύλου που σχηματίζουν ανάμεσά τους), αλλά και την μετατόπιση τους προς χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C . Παρόμοια εξελίσσονται και οι χαρακτηριστικές των οικογενειών

S72 και S73, αφού κι αυτές μετατοπίζονται προς χαμηλότερες τιμές της C και ταυτόχρονα προσεγγίζουν την ασύμπτωτη που διέρχεται από το primary P_1 (Σχήμα 9.68β).



(α)



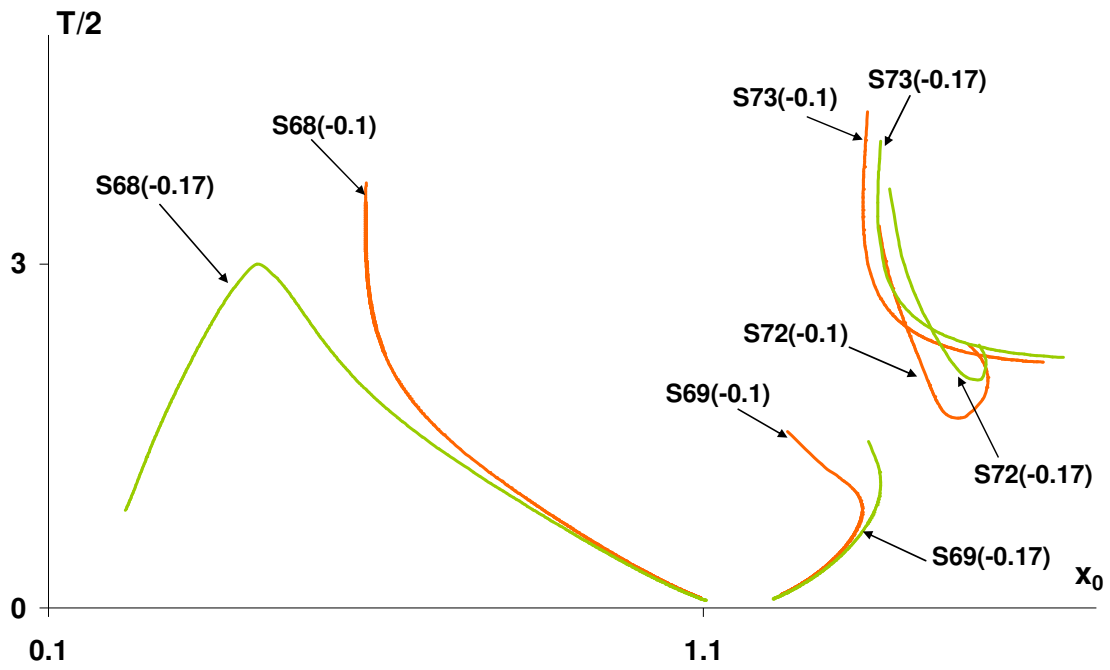
(β)

Σχήμα 9.68. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων: (α) με την παράμετρο ϵ για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $\epsilon=-0.1$

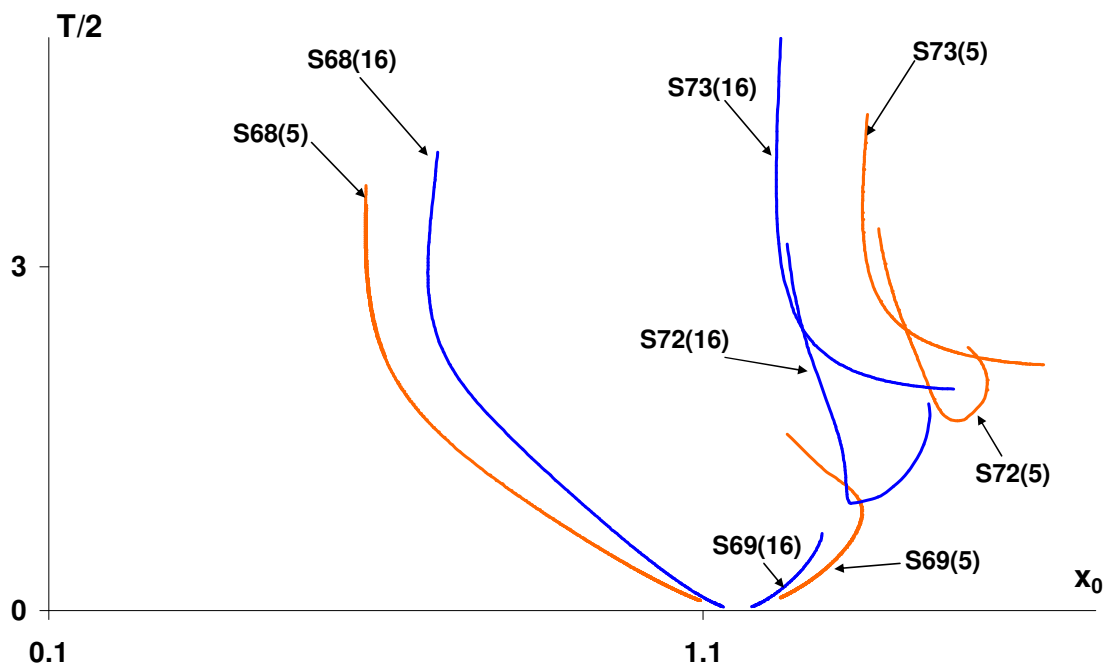
(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$

Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο μάζας $\beta (=5)$ και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της παραμέτρου $Manev$ e παρατηρούμε ότι η καμπύλη $x_0-T/2$ της οικογένειας S68, μετατοπίζεται προς χαμηλότερες τιμές της ημιπεριόδου για την ίδια θέση x_0 . Περαιτέρω μελέτη αυτής της καμπύλης έδειξε ότι από κάποια τιμή της e και έπειτα ($e < -0.13$) παρουσιάζεται ένα τοπικό μέγιστο το οποίο με την αύξηση της απόλυτης τιμής της e μετατοπίζεται σε χαμηλότερες τιμές της ημιπεριόδου και σε θέσεις x_0 μακρύτερα από το κεντρικό primary. Για την οικογένεια S69 παρατηρούμε παραπλήσιες τιμές ημιπεριόδου για θέσεις όμως που βρίσκονται πλησιέστερα στο κεντρικό primary. Οι αντίστοιχες καμπύλες των οικογενειών S72 και S73 μετατοπίζονται προς τα άνω και δεξιά του διαγράμματος ημιπεριόδου-αρχικής θέσης και η ημιπερίοδος λαμβάνει αισθητά μεγαλύτερες τιμές για τη ίδια θέση x_0 (Σχήμα 9.69α).

Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο $Manev$ e και αυξάνοντας την παράμετρο β , οι καμπύλες $x_0-T/2$ των οικογενειών S68 και S69 πλησιάζουν μεταξύ τους, η πρώτη απομακρυνόμενη από το κεντρικό primary και η δεύτερη πλησιάζοντας προς αυτό, λαμβάνοντας ταυτόχρονα παραπλήσιες τιμές περιόδου. Για τις αντίστοιχες καμπύλες των οικογενειών S72 και S73 παρατηρούμε μία μετατόπιση αυτών προς αισθητά μικρότερες τιμές της ημιπεριόδου και προς τα αριστερά του διαγράμματος (Σχήμα 9.69β).



(α)



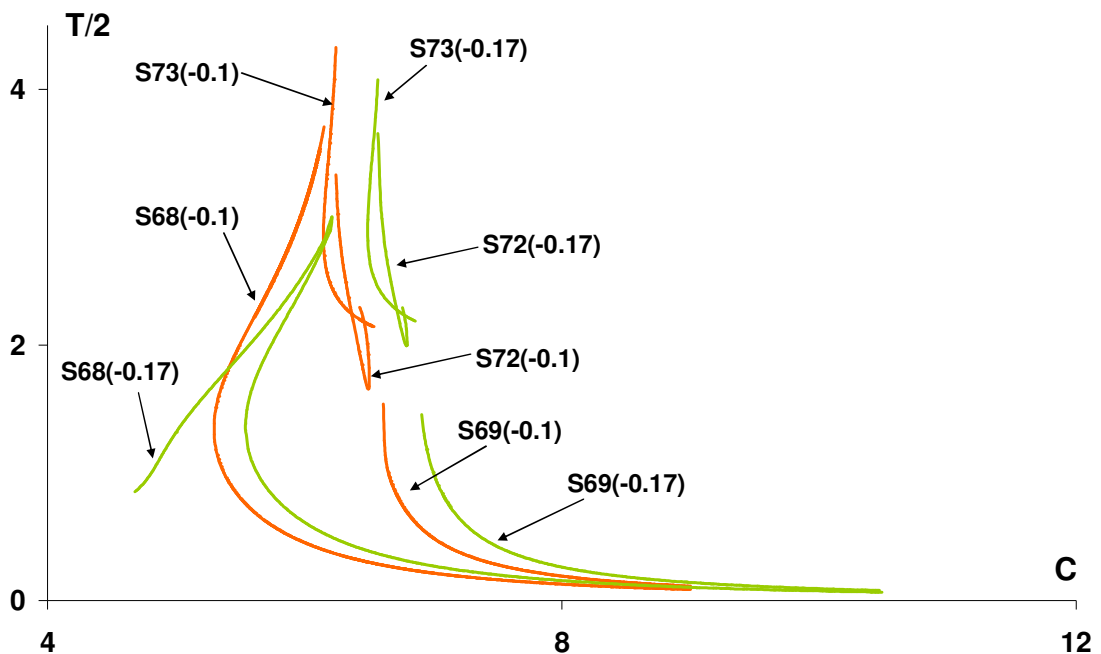
(β)

Σχήμα 9.69. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων x_0 - $T/2$: (α) με την παράμετρο ϵ για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $\epsilon=-0.1$

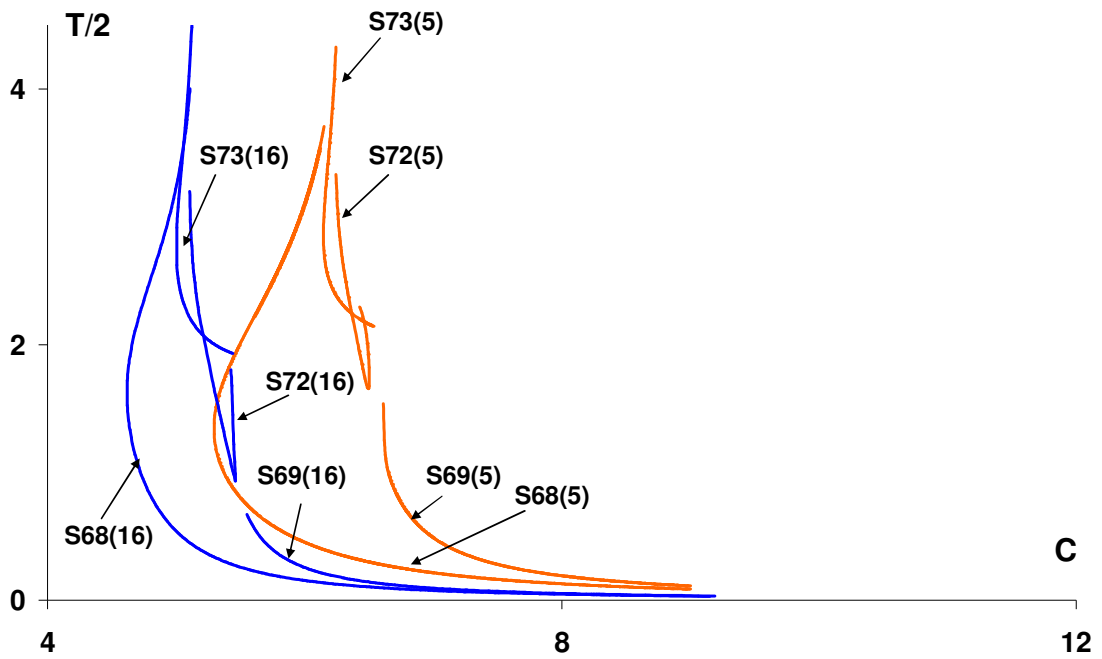
(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2

Αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της παραμέτρου $M_{\text{ανεν}} \epsilon$ και διατηρώντας σταθερή την παράμετρο μάζας β , παρατηρούμε ότι οι καμπύλες C-T/2 όλων των οικογενειών αυτής της ομάδας μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C (Σχήμα 9.70α).

Αντίθετα, διατηρώντας την παράμετρο ϵ σταθερή και αυξάνοντας την παράμετρο β , παρατηρούμε τη μετατόπιση όλων των καμπύλων προς μικρότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C (Σχήμα 9.70β).



(α)

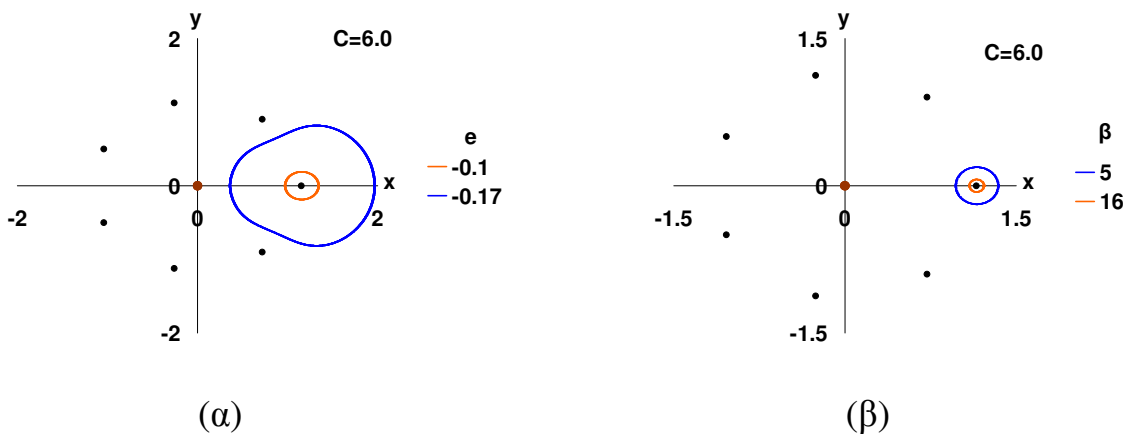


(β)

Σχήμα 9.70. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iv) Παραμετρική εξέλιξη των τροχιών

Όπως παρατηρούμε στα Σχήματα 9.71α και 9.71β που αφορούν στην οικογένεια S68, ισοενεργειακές τροχιές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή της παραμέτρου β , διευρύνονται καθώς αυξάνει κατά απόλυτη τιμή η παράμετρος e . Όμως, όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β (για ίδια τιμή της e), τότε οι ισοενεργειακές τροχιές της οικογένειας S68 συρρικνώνονται.



Σχήμα 9.71. Οικογένεια S68. Παραμετρική μεταβολή

ισοενεργειακών τροχιών για $C=6$: (α) με την παράμετρο e ,

(β) με την παράμετρο β

9.12 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F7 ("Fish-type" Families, S11-S12-S82-S84-S86-S87-S88)

9.12.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται στην περιοχή του διαγράμματος x_0 - C όπου $x_0 < 0$ και $C > 0$. Πρόκειται για ένα σχηματισμό καμπύλων όπου δύο από αυτές καθώς τέμνονται (S11 και S12), σχηματίζουν το περίγραμμα ενός «ψαριού» (Σχήμα 9.72α). Αυτός είναι και ο λόγος που τις αναφέρουμε ως οικογένειες «ψαριού» (fish-type families). Οι υπόλοιπες χαρακτηριστικές καμπύλες αναπτύσσονται στο μπροστινό και κάτω μέρος του σχηματισμού. Κάποιες από αυτές (S82 και S84) διακλαδίζονται με την καμπύλη της οικογένειας S11. Κάποιες άλλες (S86 και S87) αναπτύσσονται εξ ολοκλήρου εκτός του περιγράμματος του «ψαριού», ενώ υπάρχουν μερικές, όπως η S88, που αναπτύσσονται εντός αυτού χωρίς να έρχονται σε επαφή με κάποια άλλη χαρακτηριστική καμπύλη (Σχήμα 9.73β).

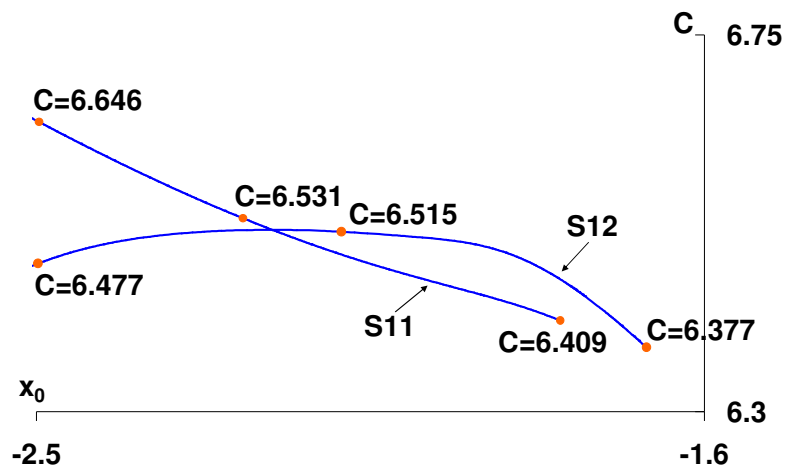
Όλες οι τροχιές αυτής της ομάδας είναι ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου, οι οποίες διαγράφονται έξω και γύρω από τον σχηματισμό των primaries (Σχήμα 9.72β, γ).

Όσον αφορά στην οικογένεια S11 και για τις περιπτώσεις που εξετάσαμε, παρατηρούμε ότι καθώς μειώνεται η απόλυτη τιμή της αρχικής θέσης x_0 , η ημιπερίοδος αυξάνεται από την τιμή 5.37(L) μέχρι την τιμή 12.26(EL) (τροχιές μεγάλης ή εξαιρετικά μεγάλης ημιπεριόδου), ενώ η ταχύτητα στην ημιπερίοδο μειώνεται. Τέλος, καθώς η τιμή της σταθεράς C μειώνεται, οι τροχιές συρρικνώνονται (Σχήμα 9.72β). Όσον αφορά στην οικογένεια S12, παρατηρούμε ότι καθώς μειώνεται η απόλυτη τιμή της αρχικής θέσης x_0 , η ημιπερίοδος των τροχιών μειώνεται και στο διάστημα τιμών που εξετάσαμε κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 6.37(L) και 8.0(L) (τροχιές μεγάλης ημιπεριόδου), ενώ ταυτόχρονα η ταχύτητα

στην ημιπερίοδο αυξάνεται (Σχήμα 9.72γ). Η ημιπερίοδος των τροχιών της S84 κυμαίνεται από την τιμή 10.91 (VL) μέχρι την τιμή 11.64 (VL), ενώ και για τις υπόλοιπες τροχιές που αναπτύσσονται στο μπροστινό και κάτω μέρος του «ψαριού», διαπιστώνουμε ότι είναι κι αυτές τροχιές πολύ μεγάλης ημιπεριόδου (VL).

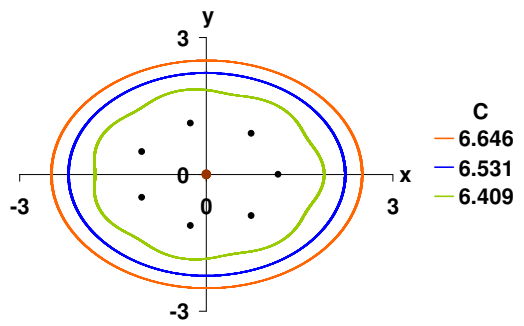
Στο Σχήμα 9.72δ παραθέτουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες των τεμνόμενων οικογενειών της ομάδας, όπου φαίνονται οι περιοχές από τις οποίες προκύπτουν ασταθείς και ευσταθείς τροχιές. Παρατηρούμε ότι από το μεγαλύτερο τμήμα της χαρακτηριστικής της S11 προκύπτουν ευσταθείς τροχιές, ενώ παρουσιάζεται εναλλαγή από ευστάθεια σε αστάθεια για το ζεύγος τιμών $C=6.429$, $x_0=1.859$, όπου ο συντελεστής ευστάθειας α παίρνει την τιμή -1 . Παρατηρούμε επίσης, ότι στο διάγραμμα ευστάθειας της S11 (Σχήμα 9.72ε), ο συντελεστής α παίρνει κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης την τιμή $+1$ τρεις φορές (κρίσιμες τροχιές πρώτου είδους), όσο είναι και το πλήθος των οικογενειών οι οποίες τέμνονται με αυτήν (S12, S82 και S84) (Σχήμα 9.72δ). Η S12 χαρακτηρίζεται από ευσταθείς τροχιές σε μία περιοχή εκατέρωθεν του ακρότατου που εμφανίζει, με το μεγαλύτερο τμήμα της να βρίσκεται δεξιά αυτού. Στο διάγραμμα ευστάθειας της S12 (Σχήμα 9.72στ) παρατηρούμε τις δύο εναλλαγές ευστάθειας, από τις οποίες προκύπτουν δύο κρίσιμες τροχιές, μία πρώτου είδους και μία δεύτερου είδους ($\alpha=-1$). Οι περιοχές από τις οποίες προκύπτουν ευσταθείς τροχιές για τις S82 και S84 είναι αυτές κοντά στη περιοχή που τέμνονται με την S11 και δεξιά αυτής (Σχήμα 9.72δ), ενώ για τις υπόλοιπες οικογένειες αυτής της ομάδας ανιχνεύθηκαν κάποιες ευσταθείς τροχιές στην περιοχή των ακροτάτων τους. Ενδεικτικά παραθέτουμε το διάγραμμα ευστάθειας της S84 (Σχήμα 9.72ζ).

Στον Πίνακα 9.14 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών τροχιών από κάποιες οικογένειες της ομάδας.



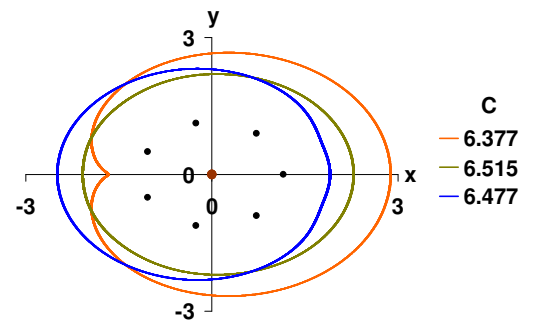
(α)

S11

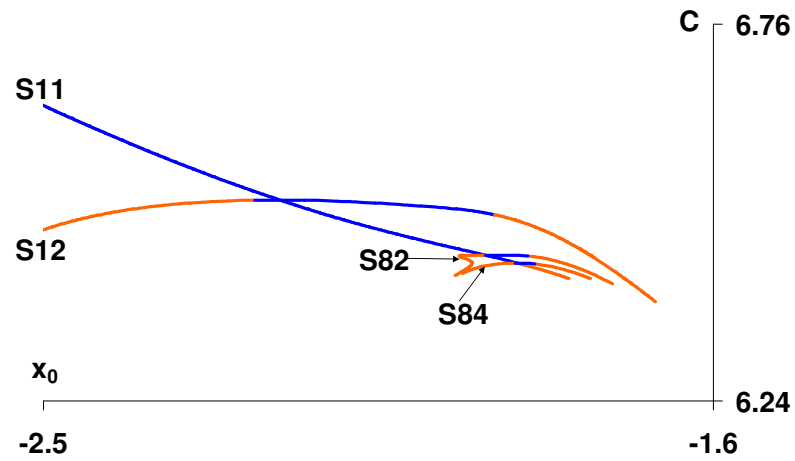


(β)

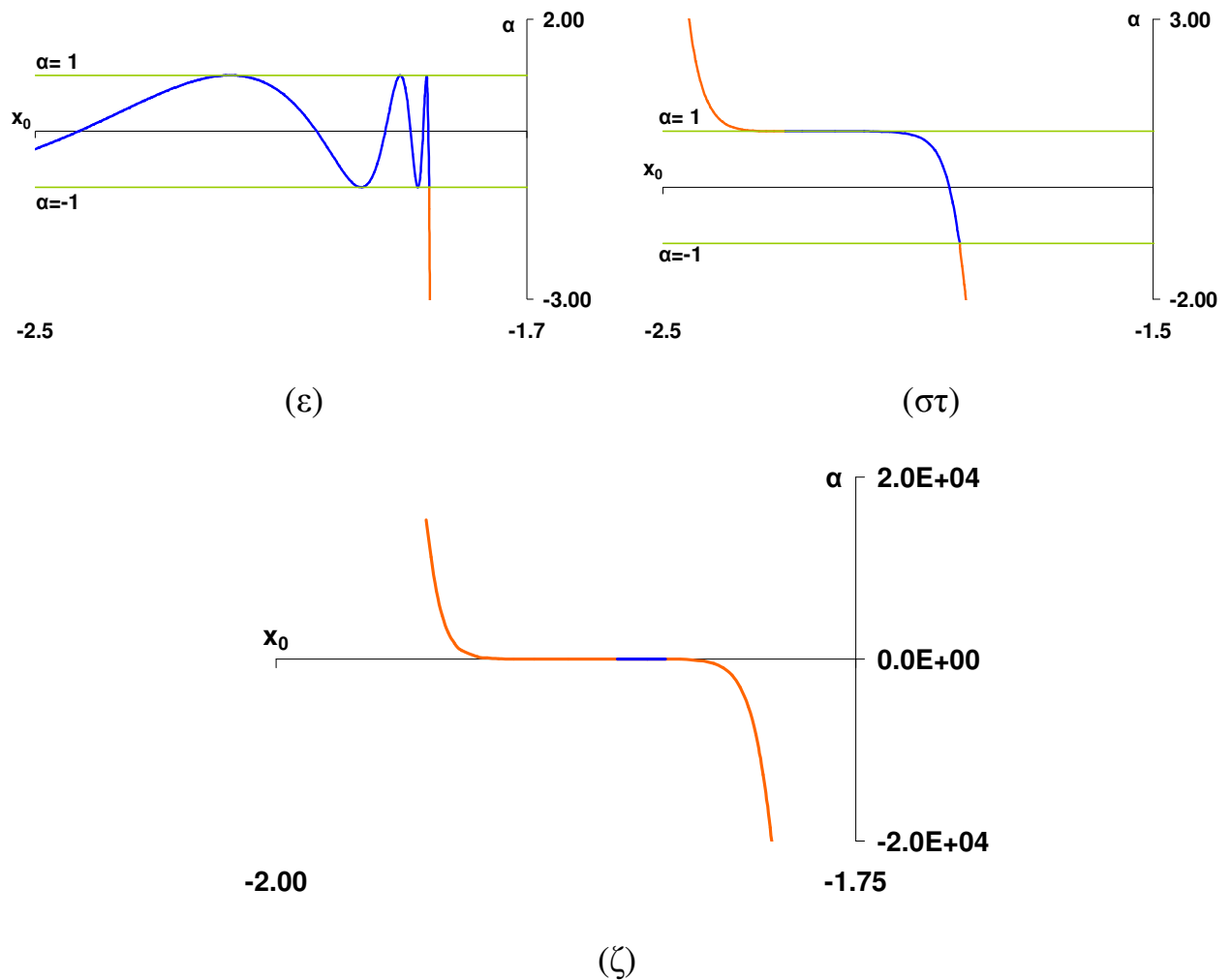
S12



(γ)



(δ)



Σχήμα 9.72. Οικογένειες S11 και S12. (α) Χαρακτηριστικές καμπύλες με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής της οικογένειας S11, (γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής της οικογένειας S12, (δ) χαρακτηριστική καμπύλη της S11- S12 και τμήματα ευστάθειας, (ε) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της S11, (στ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της S12, (ζ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της S84

Πίνακας 9.14. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών F7

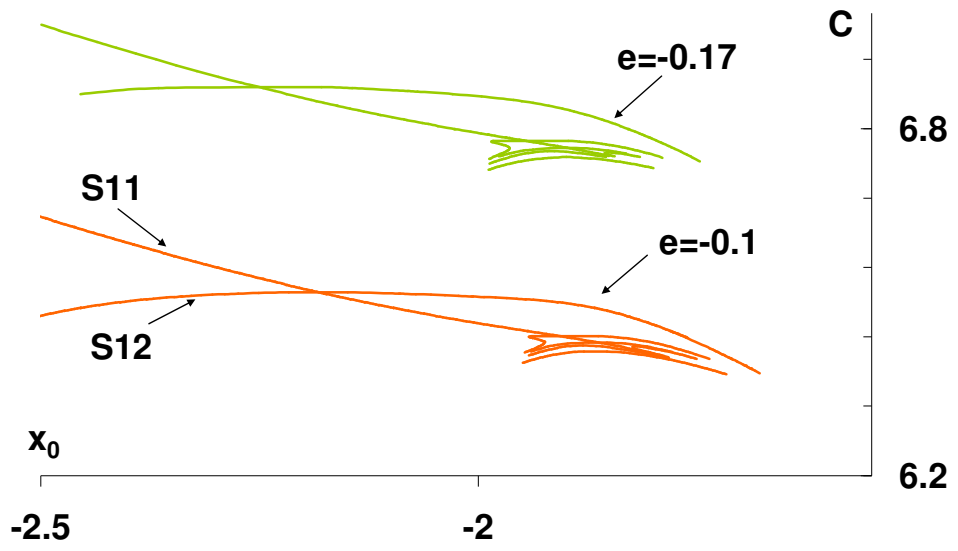
	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
S11	6.646060001	-2.496500000	1.382784130	2.497237678	-1.385862437	5.666425609	S
	6.531070001	-2.221643555	1.018377270	2.225072288	-1.030767869	6.817562957	S
	6.409000000	-1.794068301	0.356878687	1.885162839	-0.589015406	12.267208183	U
S12	6.477070002	-2.497852478	1.444475163	1.899314260	-0.550747291	7.302510620	U
	6.514990001	-2.089007812	0.813264795	2.278872182	-1.118939582	7.063435294	S
	6.377000002	-1.677958154	0.080638432	2.874624734	-1.973505460	6.371575075	U
S82	6.413000001	-1.946674176	0.642019985	2.098776736	-0.902113351	10.705175689	U
	6.441000000	-1.862751758	0.462073462	1.921667190	-0.616574130	10.015871534	S
	6.402000001	-1.735685189	0.223469196	1.862830621	-0.563539380	10.006700347	U
S84	6.415000000	-1.939454943	0.628019613	1.890807548	-0.592084727	11.647546298	U
	6.430000000	-1.852736523	0.453926668	1.916908768	-0.618278815	10.912881832	S
	6.409000000	-1.765407539	0.289896515	1.886677774	-0.591189856	11.571966416	U

9.12.2 Παραμετρική μεταβολή των τροχιών και των διαγραμμάτων x_0 -C, x_0 -T/2 και C-T/2

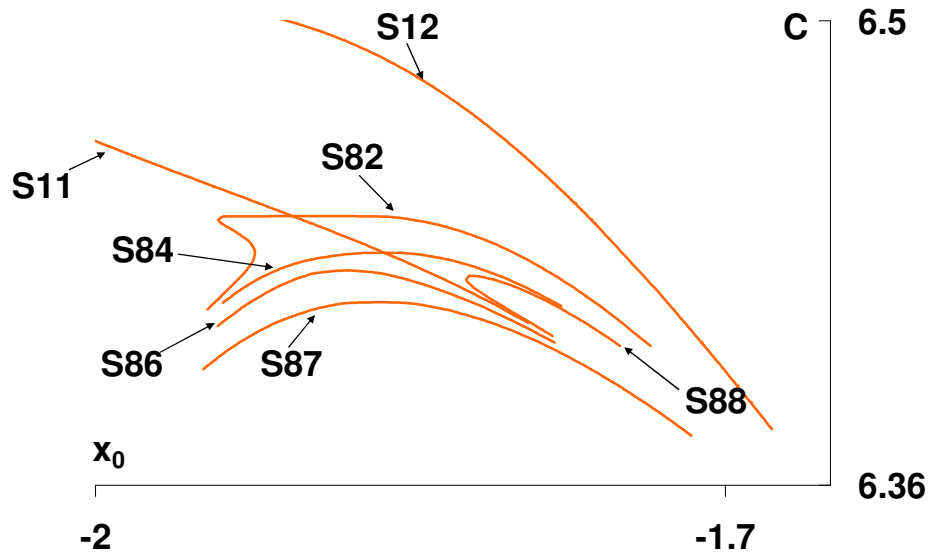
(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 -C

Αυξάνοντας κατά απόλυτη τιμή την παράμετρο e , με σταθερή την παράμετρο $\beta (=5)$, παρατηρούμε μία σχετική μεγάλη μετατόπιση τους προς υψηλότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C , αλλά και μία μικρή μετατόπιση προς τα αριστερά του διαγράμματος (Σχήμα 9.73α).

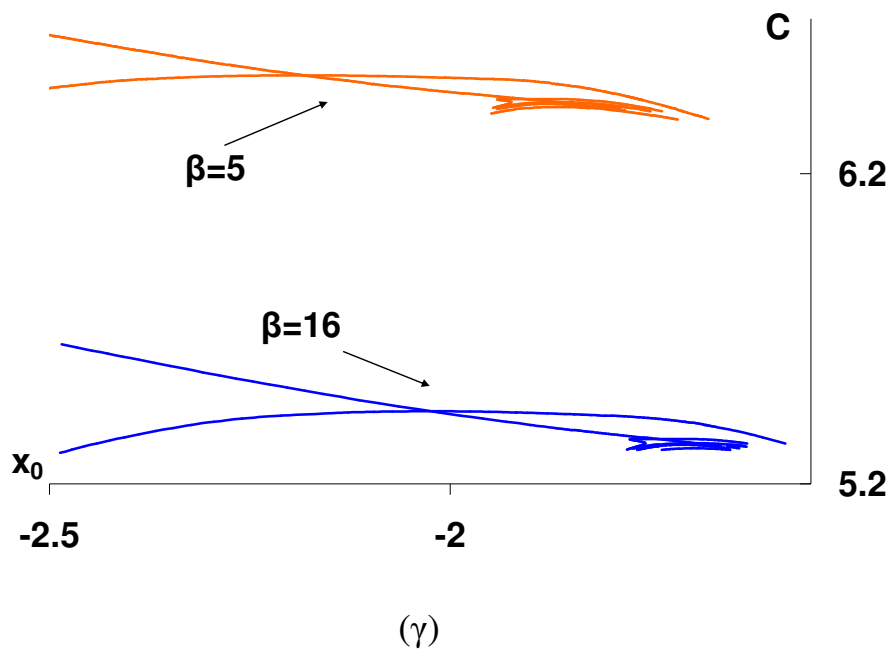
Αντίθετα, διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β και αυξάνοντας την παράμετρο e ($=-0.1$) παρατηρούμε μία σχετική μεγάλη μετατόπισή τους προς χαμηλότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C με ταυτόχρονη μικρή μετατόπιση προς τα δεξιά του διαγράμματος (Σχήμα 9.73γ).



(α)



(β)

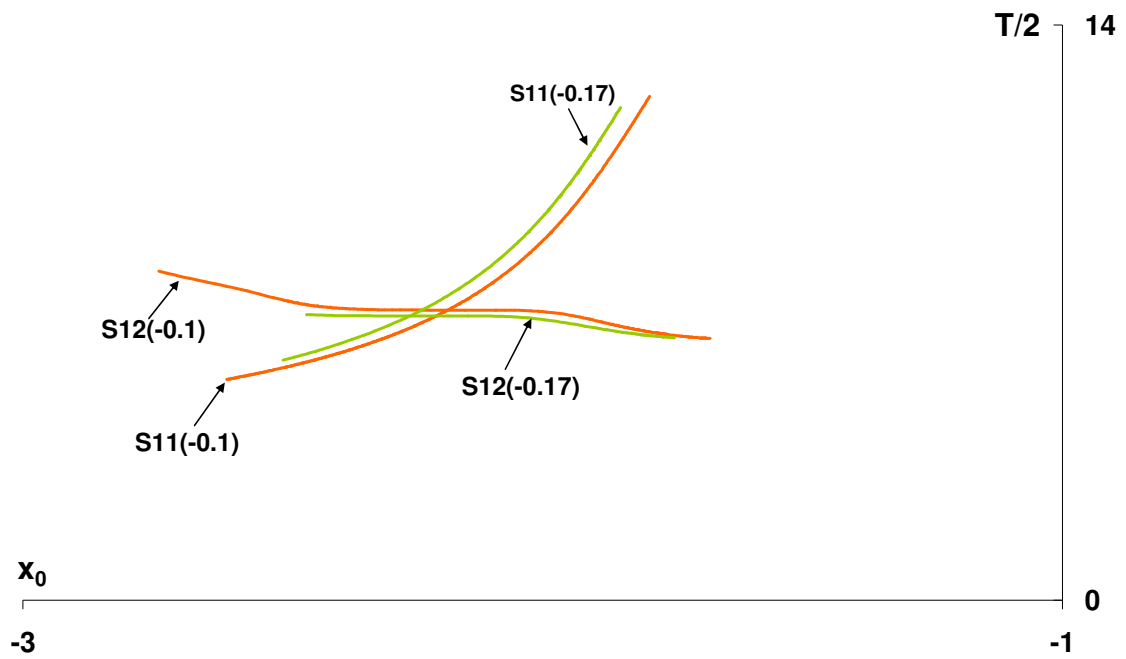


Σχήμα 9.73. (α) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων με την παράμετρο ϵ για $\beta=5$, (β) λεπτομέρεια για $\beta=5$ και $\epsilon=-0.1$ των χαρακτηριστικών καμπύλων που αναπτύσσονται στο μπροστινό και κάτω μέρος του σχηματισμού, (γ) παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων με την παράμετρο β για $\epsilon=-0.1$

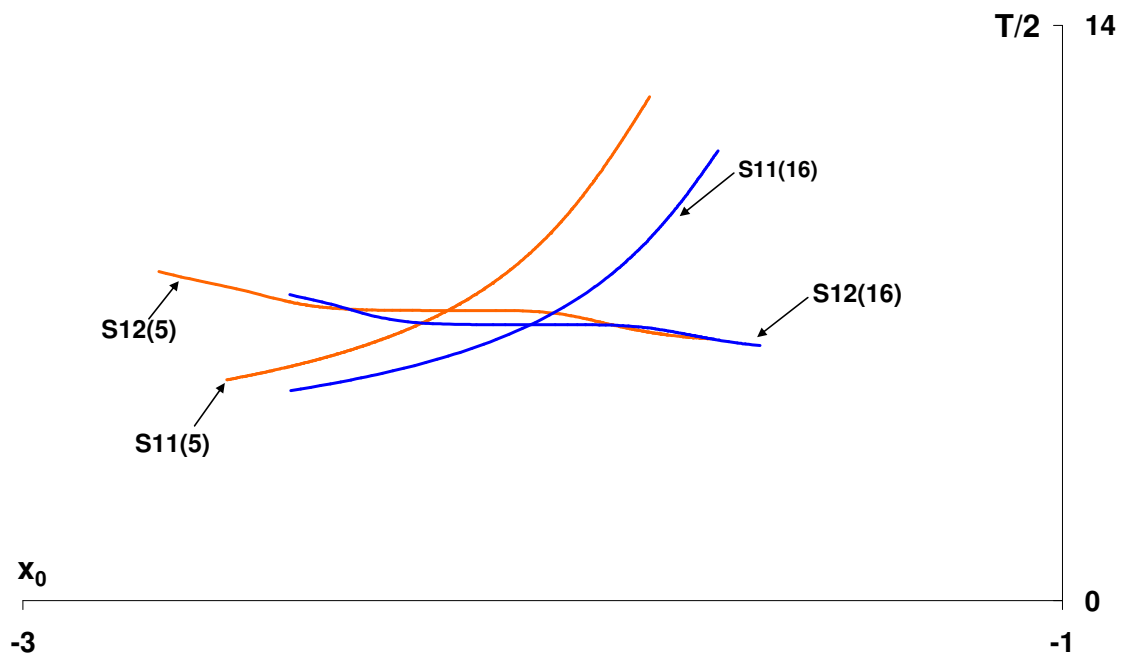
(ii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$

Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο μάζας $\beta(=5)$ και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της παραμέτρου Manev ϵ παρατηρούμε ότι η καμπύλη $x_0-T/2$ της οικογένειας S_{11} , μετατοπίζεται προς υψηλότερες τιμές της ημιπεριόδου για την ίδια θέση x_0 , ενώ αντίθετα η αντίστοιχη καμπύλη της οικογένειας S_{12} μετατοπίζεται προς χαμηλότερες τιμές της ημιπεριόδου για την ίδια θέση x_0 (Σχήμα 9.74α).

Αν τώρα διατηρήσουμε σταθερή την παράμετρο Manev $\epsilon(=-0.1)$ και αυξήσουμε την παράμετρο β , η καμπύλη $x_0-T/2$ της οικογένειας S_{11} μετατοπίζεται προς τα κάτω και αριστερά του διαγράμματος $x_0-T/2$, οπότε για την ίδια θέση x_0 η ημιπερίοδος ελαττώνεται. Όσον αφορά στις καμπύλες $x_0-T/2$ της οικογένειας S_{12} , δεν παρατηρούμε αξιοσημείωτη μεταβολή εκτός από μια μικρή μετατόπιση της καμπύλης προς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές της x_0 (Σχήμα 9.74β).



(α)



(β)

Σχήμα 9.74. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

(iii) Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C-T/2$

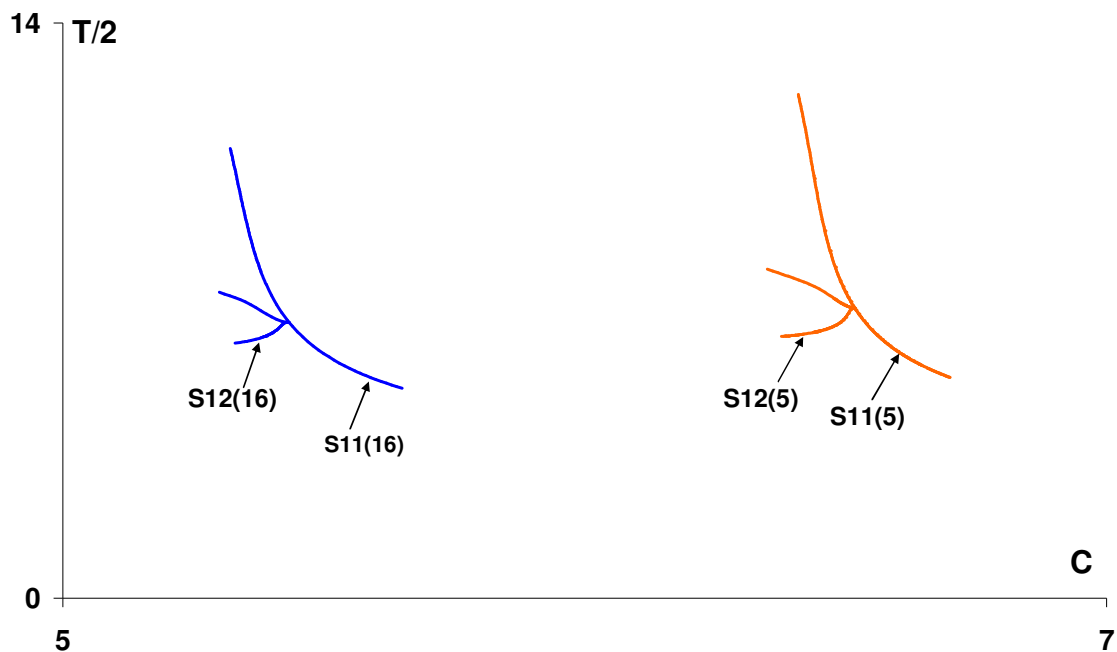
Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου μάζας $\beta (=5)$ και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της σταθεράς e , παρατηρούμε ότι οι καμπύλες των $C-T/2$ των

οικογενειών μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της σταθεράς C , ενώ το πεδίο τιμών των περιόδων μεταβάλλεται πολύ λίγο. Οι δύο καμπύλες $C-T/2$ έχουν ένα κοινό σημείο που αντιστοιχεί στο σημείο διακλάδωσης των αντίστοιχων χαρακτηριστικών καμπύλων στο φασικό χώρο (Σχήμα 9.75α).

Διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου e ($=-0.1$) και αυξάνοντας την παράμετρο μάζας β , παρατηρούμε μία μετατόπιση των οικογενειών προς αρκετά μικρότερες τιμές της σταθεράς C , που συνοδεύεται από μικρή μεταβολή του πεδίου τιμών των ημιπεριόδων (Σχήμα 9.75β).



(α)



(β)

Σχήμα 9.75. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων C-T/2: (α) με την παράμετρο e για $\beta=5$, (β) με την παράμετρο β για $e=-0.1$

9.13 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ F8 (Δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2)

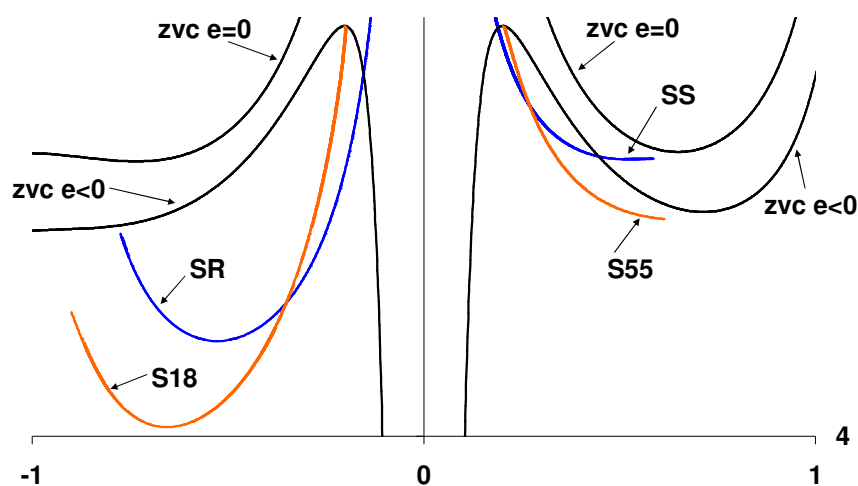
Σε αυτήν την ομάδα ανήκουν οι οικογένειες που εξελίσσονται στην περιοχή αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας» του διαγράμματος x_0 -C, όπου η σταθερά C λαμβάνει μόνο θετικές τιμές. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, στα ακρότατα των μηδενικών καμπύλων αυτής της περιοχής εμφανίζονται τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 (για $x_0 < 0$) και E_1 (για $x_0 > 0$), κάτω από τα οποία αναπτύσσονται δενδροειδείς κατανομές οικογενειών, των οποίων τη μορφή και τα χαρακτηριστικά τους θα μελετήσουμε παρακάτω.

9.13.1 Παραμετρική εξέλιξη των χαρακτηριστικών καμπύλων των κύριων οικογενειών S18 και S55 των δενδροειδών κατανομών στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 αντίστοιχα

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι στη βαρυτική περίπτωση ($e=0$), εντός της κεντρικής «καμινάδας» του διαγράμματος x_0 -C, τα σκέλη της οποίας εκτείνονται

στο άπειρο, αναπτύσσονταν δύο οικογένειες (SR και SS) οι οποίες θεωρητικά γεννώνται για $C \rightarrow \infty$ και οι οποίες για αρνητικές τιμές της παραμέτρου e συνεχίζουν να υπάρχουν, έχοντας όμως «εγκλωβιστεί» στην περιοχή της αναδίπλωσης.

Στο κοινό διάγραμμα x_0-C για $e=0$ και $e<0$ (Σχήμα 9.76), οι οικογένειες SR και SS της βαρυτικής περίπτωσης αντιστοιχούν στις οικογένειες S18 και S55, όπως τις ονομάσαμε στην περίπτωση των αρνητικών τιμών της παραμέτρου e . Και τα δύο ζεύγη των αντίστοιχων οικογενειών SR-S18 και SS-S55, αποτελούνται από πλανητικού τύπου τροχιές που διαγράφονται γύρω από το κεντρικό primary P_0 .

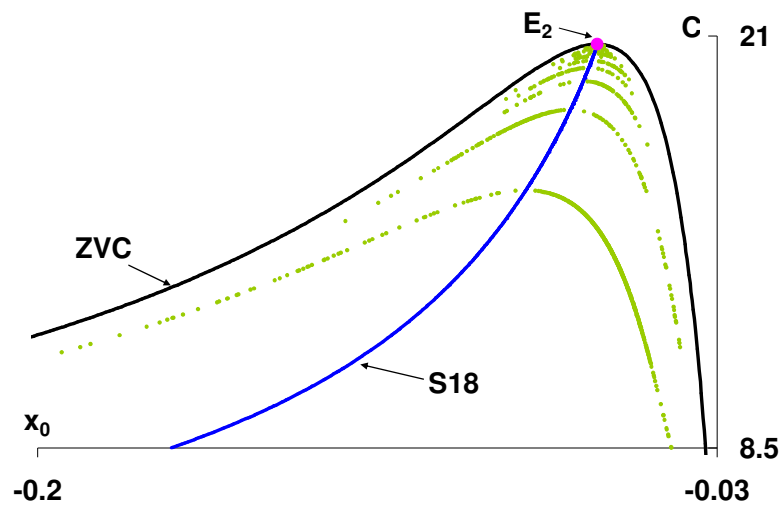


Σχήμα 9.76. Κοινό διάγραμμα x_0-C στην περιοχή αναδίπλωσης για $e=0$ και $e<0$ και οι χαρακτηριστικές των οικογενειών SR, SS (μπλε καμπύλες) και S18, S55 (κόκκινες καμπύλες) αντίστοιχα

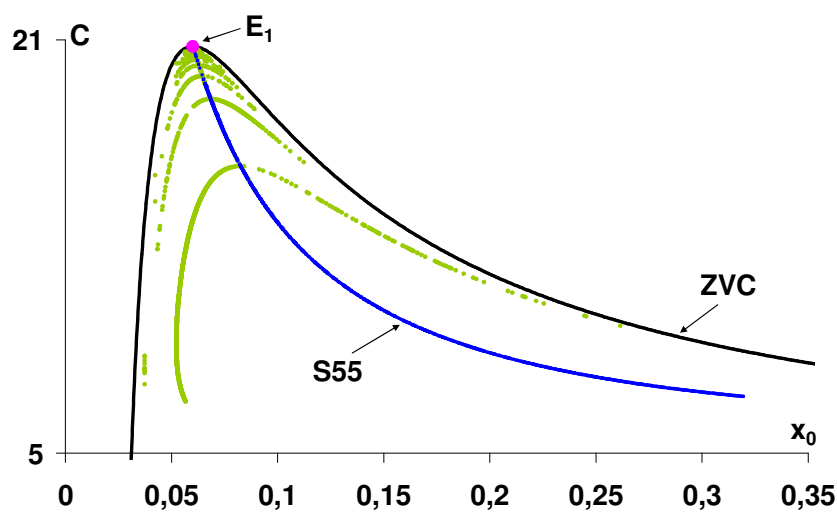
Οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών S18 και S55, αναπτύσσονται στην περιοχή των σημείων ισορροπίας E_2 και E_1 αντίστοιχα και κάτω από αυτά με τέτοιο τρόπο, ώστε ουσιαστικά να την διαχωρίζουν σε δύο μέρη (Σχήμα 9.77). Από διάφορα σημεία των S18 και S55 (τα οποία καθορίζονται από τις τιμές που παίρνει η παράμετρος ευστάθειας a) εκπορεύονται και εξελίσσονται εκατέρωθεν αυτών, άλλες οικογένειες, δημιουργώντας μία δενδροειδή κατανομή χαρακτηριστικών καμπύλων απλών περιοδικών τροχιών (Σχήματα 9.84 έως 9.89). Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο 10, όπου εξετάζουμε τις διπλές και τριπλές περιοδικές τροχιές,

παρόμοιες διακλαδώσεις εμφανίζονται και σε οικογένειες αυτών των πολλαπλοτήτων.

Αναζητώντας απλές περιοδικές τροχιές με τη μέθοδο Grid-Search στην περιοχή αναδίπλωσης για διάφορες τιμές των παραμέτρων β , ϵ και για $n=7$, παρατηρήσαμε ότι οι κύριες οικογένειες S18 και S55 εξελίσσονται με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά, αναλόγως των τιμών του ζεύγους των παραμέτρων (ϵ , β). Έτσι λ.χ για $\beta=5$ και $\epsilon \in [-0.03, 0)$, η S18 αποτελεί τον κεντρικό κορμό της δενδροειδούς κατανομής κάτω από το σημείο ισορροπίας E_2 (Σχήμα 9.77α), ενώ το ίδιο συμβαίνει και για την S55 στην αντίστοιχη περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας E_1 (Σχήμα 9.77β).



(α)



(β)

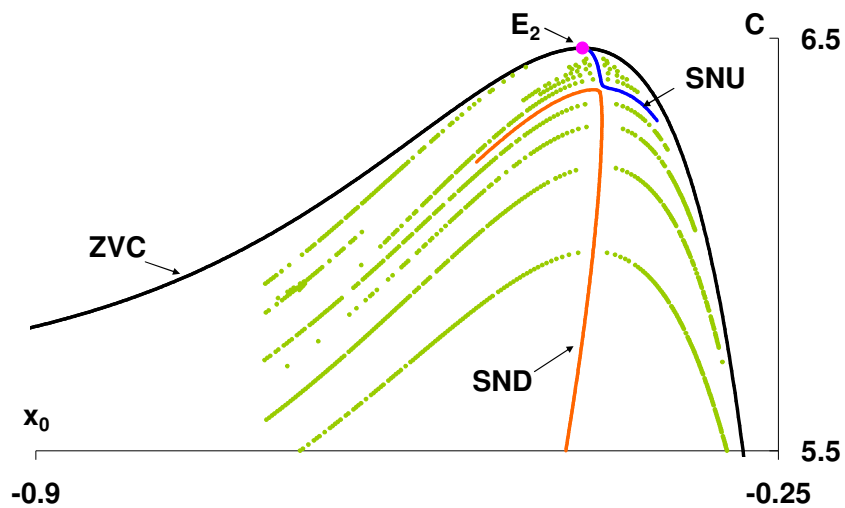
Σχήμα 9.77. Δενδροειδείς κατανομές οικογενειών: (α) στην περιοχή

κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 , όπου διακρίνεται με μπλε χρώμα η S18, (β) στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 , όπου διακρίνεται με μπλε χρώμα η S55, για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.03$

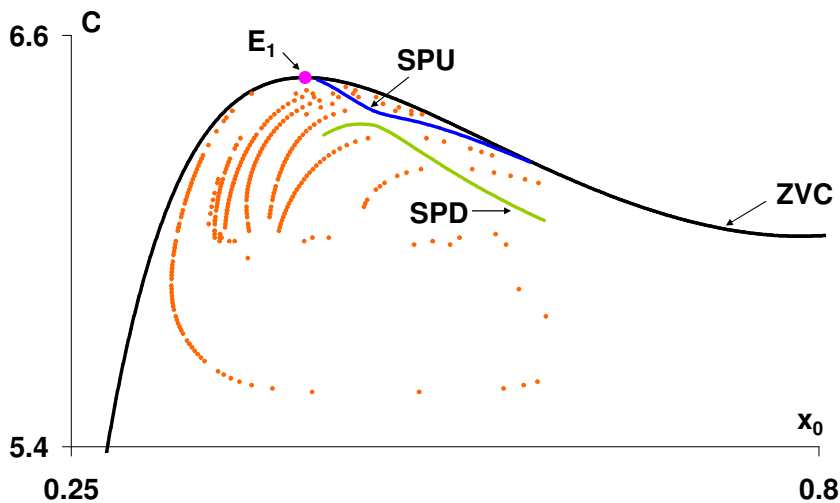
Αντίθετα, στην περίπτωση που $\beta=5$ και $e \in (-0.21, -0.03)$, οι δύο κύριες οικογένειες διασπώνται σε δύο κλάδους (άνω και κάτω κλάδος). Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάσαμε το σημείο διάσπασης της S18 είναι εκείνο από το οποίο πηγάζει η οικογένεια S25, της οποίας ο μεν δεξιός κλάδος S25R ενώνεται με τον άνω κλάδο (S18U) της S18 ώστε να αποτελέσουν την ενιαία πλέον οικογένεια SNU, ο δε αριστερός κλάδος S25L ενώνεται με τον κάτω κλάδο (S18D) της S18 ώστε να αποτελέσουν την ενιαία οικογένεια SND (Σχήματα 9.78α, 9.84β, 9.86β). Το ίδιο συμβαίνει και με την οικογένεια S55, της οποίας το σημείο διάσπασής της είναι εκείνο από το οποίο πηγάζει η οικογένεια S60 και της οποίας ο αριστερός κλάδος S60L ενώνεται με τον άνω κλάδο (S55U) της S55 για να αποτελέσουν την οικογένεια SPU, ενώ ο δεξιός κλάδος S60R ενώνεται με τον κάτω κλάδο (S55D) της S55 για να αποτελέσουν την οικογένεια SPD (Σχήματα 9.78β, 9.85β, 9.87β).

Από το διάγραμμα διακλαδώσεων του Σχήματος 9.22 προκύπτει ότι για $\beta=5$ και $e < -0.22$ παύουν να υφίστανται οι ζώνες E_1 και E_2 , συνεπώς και οι αντίστοιχες δενδροειδείς κατανομές. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση για $\beta=5$ και $e \in (-0.22, -0.21)$ όπου υφίσταται μόνο η ζώνη ισορροπίας E_2 οπότε θεωρητικά τουλάχιστον, υπάρχει μία μόνο δενδροειδής κατανομή στην περιοχή του σημείου ισορροπίας της ζώνης αυτής.

Εξετάζοντας την περίπτωση για $\nu=7$, $\beta=16$ και για διάφορες αρνητικές τιμές της παραμέτρου e , συναντήσαμε παρόμοια εξέλιξη των χαρακτηριστικών των οικογενειών S18 και S55. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για $\beta=16$ και $e=-0.1$, η S18 και η S55 δεν έχουν διαχωριστεί σε δύο κλάδους (Σχήματα 9.88α, 9.89α), ενώ για $\beta=16$ και $e=-0.2$ έχει επέλθει ο διαχωρισμός τους (Σχήμα 9.78).



(α)



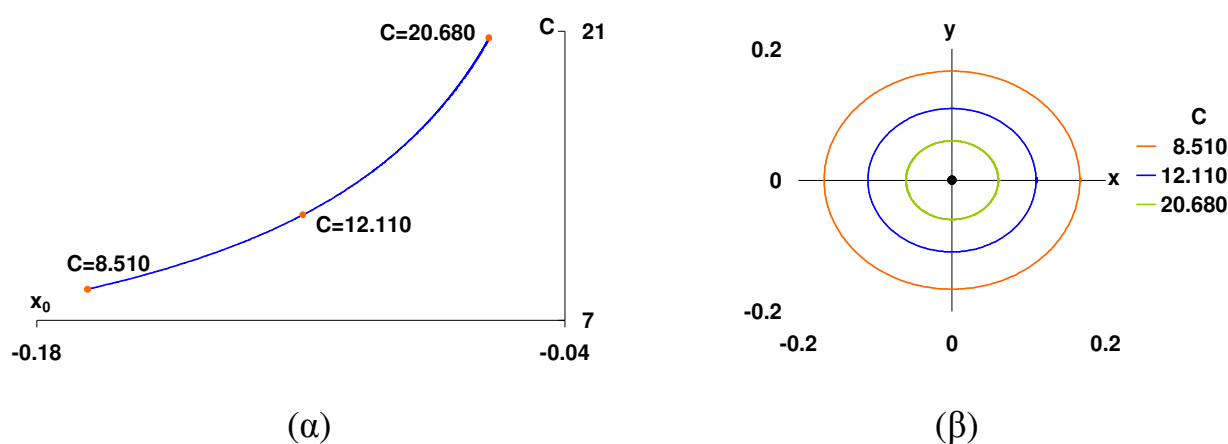
(β)

Σχήμα 9.78. Χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών για $\nu=7$, $\beta=16$ και $\epsilon=-0.2$: (α) SNU (S25R+S18U), SND (S25L+S18D) και (β) SPU (S60R+S55U), SPD (S60L+S55D)

Από την ερευνά μας, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για δεδομένη τιμή της παραμέτρου ν , όταν η παράμετρος μάζας β αυξάνεται, η απόλυτη τιμή της παραμέτρου ϵ στην οποία διαχωρίζονται οι κύριες οικογένειες S18 και S55 σε δύο μέρη, αυξάνεται επίσης, ενώ η τιμή της σταθεράς C του σημείου διάσπασης μειώνεται.

9.13.2 Εξέλιξη των τροχιών των κύριων οικογενειών των δένδροειδών κατανομών, κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης, στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 . Μελέτη ευστάθειας

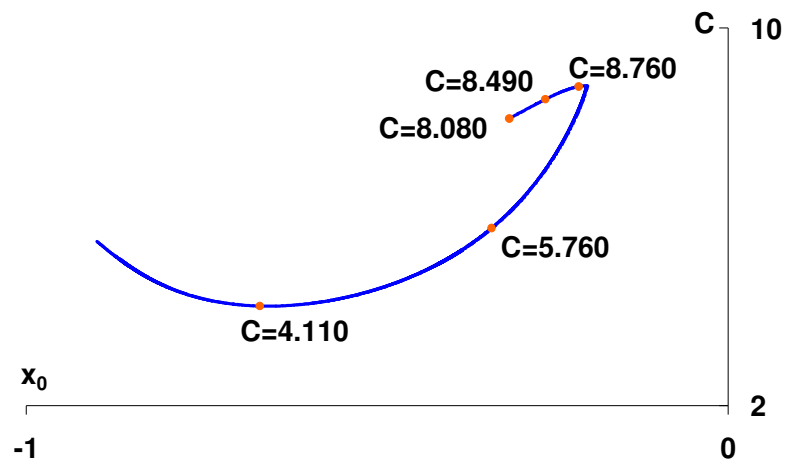
Από τη μελέτη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης της οικογένειας S18, όταν αυτή εξελίσσεται ως ενιαία και συνεχής καμπύλη, προκύπτουν ανάδρομες, σχεδόν κυκλικές τροχιές πλανητικού τύπου, που διαγράφονται γύρω από το κεντρικό primary P_0 και οι οποίες συρρικνώνονται καθώς η σταθερά C αυξάνεται (Σχήμα 9.79). Η ημιπερίοδος αυτών των τροχιών κυμαίνεται από 0.13(VS) έως 0.74(S).



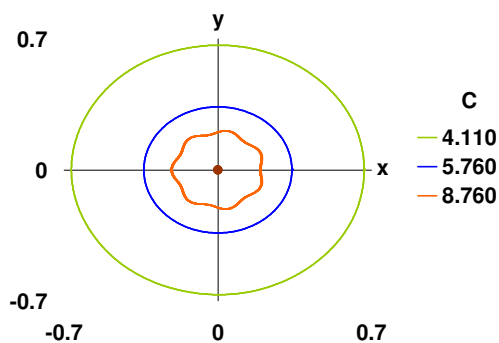
Σχήμα 9.79. Οικογένεια S18 για $\nu=7$, $\beta=5$, $e=-0.03$. (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

Στο Σχήμα 9.80 παρουσιάζουμε την εξέλιξη των τροχιών της ενιαίας οικογένειας SND (ενιαία οικογένεια που προέκυψε από τη συνένωση των κλάδων S18D και S25L), στην περίπτωση όπου η S18 έχει διαχωριστεί στους κλάδους S18U και S18D. Σχεδόν όμοια εξελίσσονται και οι τροχιές της ενιαίας οικογένειας SNU (ενιαία οικογένεια των S18U και S25R). Όπως είναι φυσικό και στις δύο αυτές οικογένειες, η εξέλιξη των τροχιών στα τμήματα που αποτελούσαν μέρος της S18, είναι πανομοιότυπη με αυτήν της S18, όταν αυτή αναπτυσσόταν ως μία συνεχής καμπύλη (Σχήμα 9.80β).

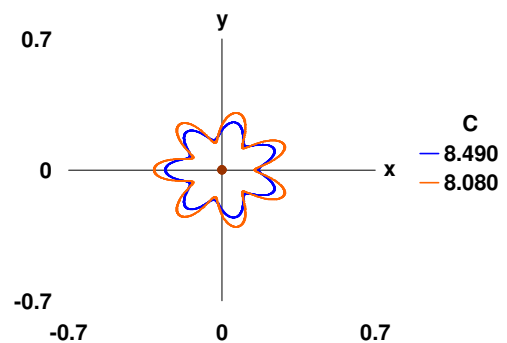
Η οικογένεια S25L χαρακτηρίζεται κι αυτή από ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου που διαγράφονται γύρω από το primary P_0 , οι οποίες, καθώς ελαττώνεται η τιμή της σταθεράς C , από σχεδόν κυκλικές αποκτούν το σχήμα «δαντέλας» με επτά κορυφές (Σχήμα 9.80γ). Πανομοιότυπη εξέλιξη έχουν και οι τροχιές της S25R, ιδιότητα η οποία αποτελεί κοινό χαρακτηριστικό όλων των όμοιων οικογενειών που πηγάζουν από το ίδιο σημείο της κυρίας οικογένειας και αναπτύσσονται εκατέρωθεν αυτής. Στη συνέχεια της μελέτης μας θα καταστεί σαφέστερος ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσονται οι τροχιές της οικογένειας S25 αλλά και των υπολοίπων οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής. Τέλος, η ημιπερίοδος των τροχιών της οικογένειας SND στο διάστημα που εξετάσαμε κυμαίνεται από 0.64 (S) – 2.53 (M).



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 9.80. Οικογένεια SND για $\beta=5$, $e=-0.1$. (α)

Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που

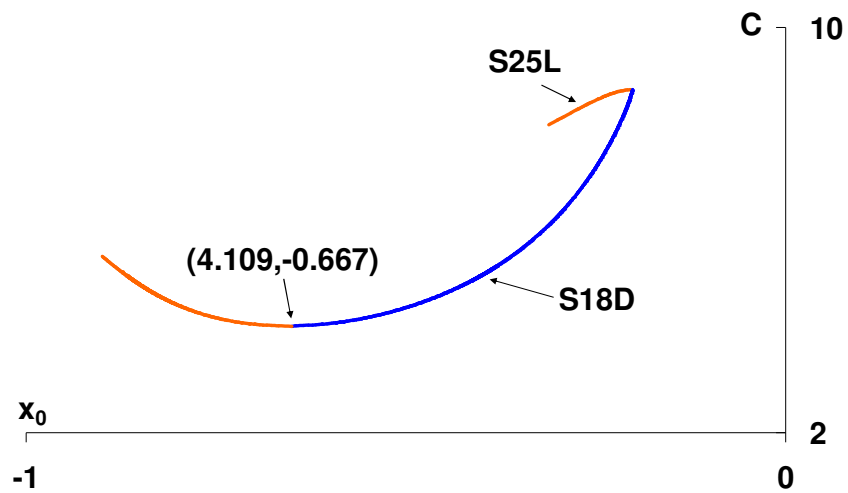
απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα, (β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

Από τη μελέτη της ευστάθειας της οικογένειας SND προκύπτει το Σχήμα 9.81α, όπου απεικονίζονται τα τμήματα της χαρακτηριστικής καμπύλης από τα οποία προκύπτουν οι ευσταθείς και ασταθείς τροχιές της οικογένειας. Να υπενθυμίσουμε ότι με μπλε χρώμα απεικονίζονται τα ευσταθή και με πορτοκαλί τα ασταθή τμήματα της. Παρατηρούμε ότι από τον κλάδο S25L, της ενιαίας οικογένειας SND προκύπτουν ασταθείς τροχιές, ενώ για υψηλές τιμές της σταθεράς C από τον κλάδο S18D προκύπτουν ευσταθείς τροχιές. Καθώς ελαττώνεται η σταθερά C, για το ζεύγος τιμών $(x_0, C) = (-0.667, 4.109)$ έχουμε αλλαγή από ευστάθεια σε αστάθεια ("ανταλλαγή των ευσταθειών") και από τις ασταθείς τροχιές που προκύπτουν παρατηρούμε ότι όσο περισσότερο απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων, τόσο μεγαλύτερη αστάθεια παρουσιάζουν.

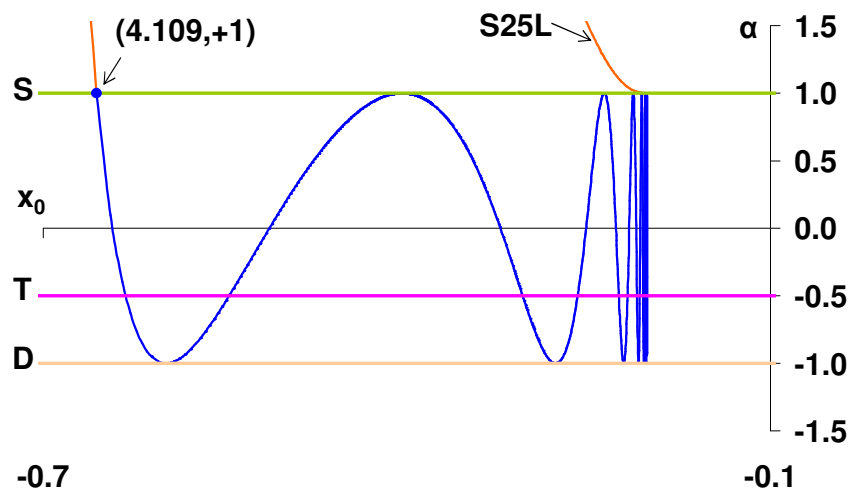
Στα διαγράμματα ευστάθειας x_0 -α που ακολουθούν (Σχήματα 9.81β και 9.81γ) εκτός των όσων αναφέραμε παραπάνω, είναι φανερό ότι παρουσιάζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές πρώτου και δευτέρου είδους, καθώς μας δίνεται επίσης η δυνατότητα, βάσει της θεωρίας, να απαριθμήσουμε τις οικογένειες που πηγάζουν από τον κεντρικό κλάδο της κατανομής, γνωρίζοντας ότι για $\alpha=+1$, η βασική οικογένεια τέμνεται με μία άλλη οικογένεια συμμετρικών περιοδικών τροχιών της ίδιας πολλαπλότητας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν 6 οικογένειες απλών περιοδικών τροχιών (S), οι οποίες τέμνονται με τον κεντρικό κλάδο, όσα είναι και τα σημεία τομής της ευθείας $\alpha=+1$ με την καμπύλη ευστάθειας. Να σημειώσουμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις λόγω του βήματος σάρωσης αλλά και λόγω της εγγύτητας αυτών των οικογενειών για υψηλές τιμές της C, ο αναμενόμενος αριθμός διακλαδιζόμενων οικογενειών δεν επαληθεύεται.

Τέλος, στα διαγράμματα ευστάθειας x_0 -α (Σχήμα 9.81β-γ) έχουμε σχεδιάσει εκτός της ευθείας $\alpha=+1$ και τις ευθείες για $\alpha=-0.5$ και $\alpha=-1$, θέλοντας να δείξουμε ότι από την κύρια οικογένεια πηγάζουν και συμμετρικές τροχιές διαφορετικής πολλαπλότητας. Έτσι τα σημεία τομής της καμπύλης ευστάθειας με την ευθεία

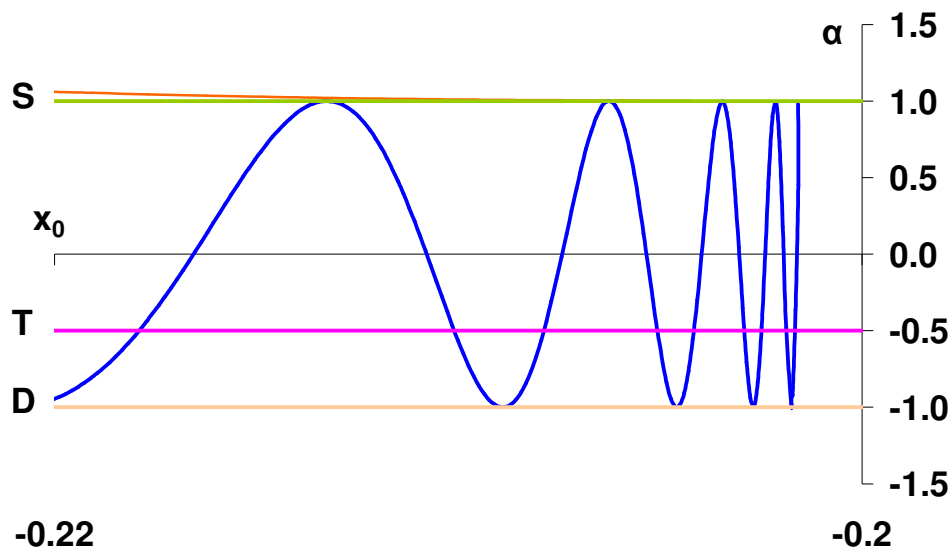
$\alpha = -0.5$ μας δείχνουν τις θέσεις x_0 από τις οποίες πηγάζουν τριπλές περιοδικές τροχιές (T), ενώ οι διπλές τροχιές (D) πηγάζουν από θέσεις x_0 που αντιστοιχούν στα σημεία τομής της καμπύλης ευστάθειας με την ευθεία $\alpha = -1$.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 9.81. Οικογένεια SND για $\beta=5$, $e=-0.1$.

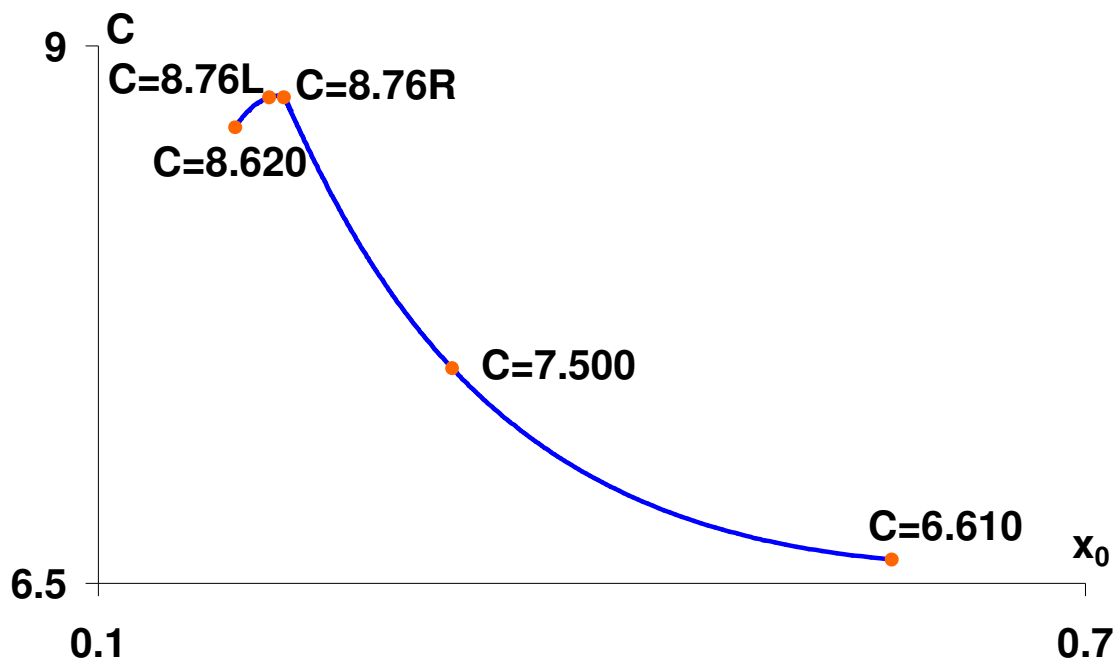
(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α ,

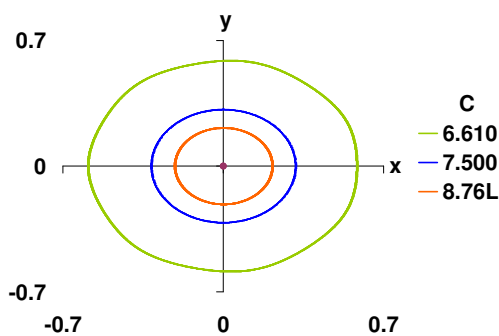
(γ) λεπτομέρεια διαγράμματος ευστάθειας x_0 - α

Από τη μελέτη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης της οικογένειας S55, όταν αυτή εξελίσσεται ως ενιαία και συνεχής καμπύλη, προκύπτουν ορθές τροχιές πλανητικού τύπου, σχεδόν κυκλικές, που διαγράφονται γύρω από το κεντρικό primary P_0 και οι οποίες συρρικνώνονται καθώς η σταθερά C αυξάνεται. Παρόμοια είναι η εξέλιξη των τροχιών των κλάδων της οικογένειας S55 μετά το διαχωρισμό της, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.82, όπου παρουσιάζουμε την χαρακτηριστική καμπύλη και τις αντίστοιχες τροχιές της SPD (ενιαία οικογένεια των S55D-S60L). Παρατηρούμε ότι οι «δαντελοειδείς» μορφές τροχιών (Σχήμα 9.82γ) που προκύπτουν από την χαρακτηριστική της S60L (αριστερός κλάδος της S60), έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών (επτά) με αυτούς της S25L. Να σημειώσουμε εδώ ότι και για οποιαδήποτε άλλο ζεύγος τιμών (e , β), όπου οι κύριες οικογένειες έχουν διαχωριστεί σε δύο κλάδους η καθεμία, οι οικογένειες της δενδροειδούς κατανομής που ενώνονται με τους διασπασμένους κλάδους αυτών των οικογενειών εμφανίζουν πάντα παρόμοιες τροχιές και αποτελούν σε κάθε

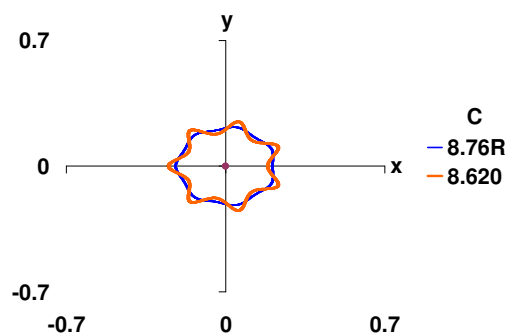
περίπτωση τις αντίστοιχες οικογένειες S60 και S25 της εκάστοτε δενδροειδούς κατανομής. Η ημιπερίοδος των τροχιών της οικογένειας SPD στο διάστημα που εξετάσαμε κυμαίνεται από 1.09(S) – 4.1(L).



(α)



(β)



(γ)

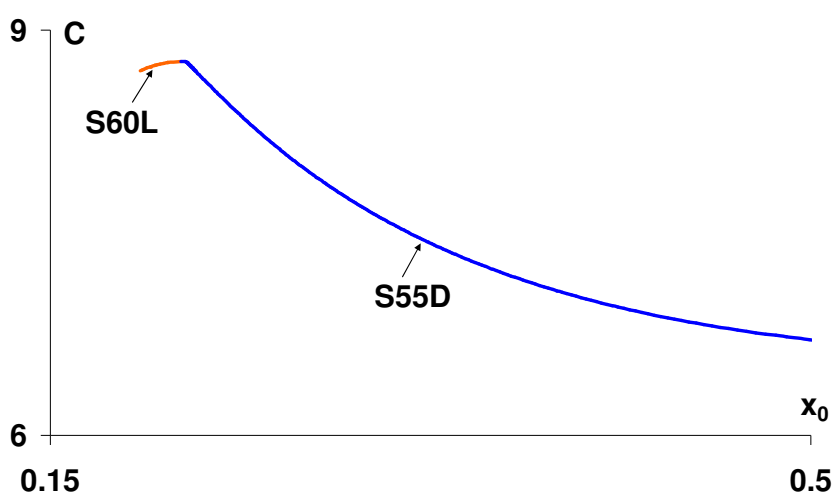
Σχήμα 9.82. Οικογένεια SPD για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα,

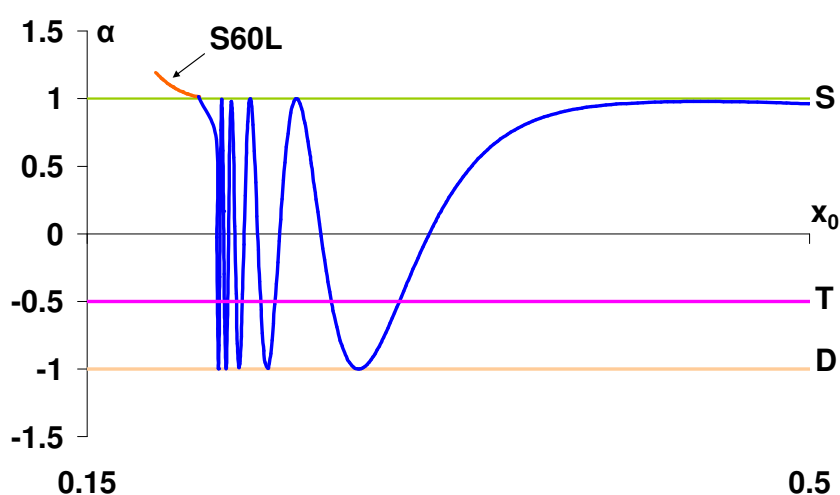
(β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής.

Τα σύμβολα L και R στις τιμές της ενέργειας επισημαίνουν τις ισοενεργειακές τροχιές αριστερά και δεξιά του ακρότατου της χαρακτηριστικής

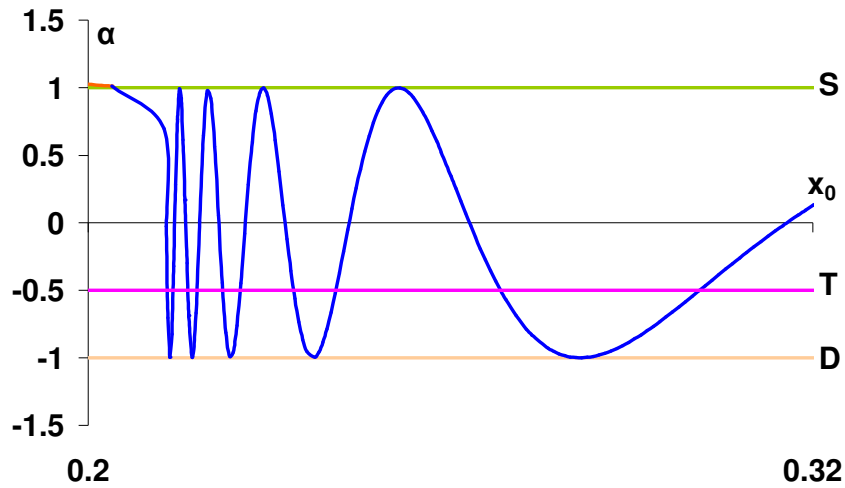
Όσον αφορά στη μελέτη της ευστάθειας των κλάδων S60L και S55D της ενιαίας οικογένειας SPD, χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα της έρευνάς μας, σχεδιάσαμε την χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας, με τέτοιο τρόπο ώστε να διακρίνονται τα ασταθή και ευσταθή τμήματα της. Έτσι διακρίνουμε τον ασταθή και ευσταθή χαρακτήρα των τροχιών της S60L και της S55D αντίστοιχα (Σχήμα 9.83α). Από τα διαγράμματα ευστάθειας x_0 -α της ενιαίας οικογένειας SPD που ακολουθούν (Σχήματα 9.83β και 9.83γ), προκύπτουν παρόμοια συμπεράσματα με αυτά που αναπτύξαμε για τα αντίστοιχα διαγράμματα ευστάθειας της οικογένειας SND.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 9.83. Οικογένεια SPD για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας $x_0-\alpha$,

(γ) λεπτομέρεια διαγράμματος ευστάθειας $x_0-\alpha$

Στον Πίνακα 9.15 που ακολουθεί παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών των οικογενειών SND και SPD για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$.

Πίνακας 9.15. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών SND και SPD για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
SND	8.079979869	-0.311796001	0.374129465	0.148685880	-0.279601944	2.257043363	U
	8.489989945	-0.260380109	0.357704179	0.164220110	-0.318586693	1.991999987	U
	8.759989997	-0.212876471	0.347166370	0.191228580	-0.340740489	1.846609566	U
	5.759979976	-0.337096252	1.505695487	0.337089956	-1.505864594	0.703296045	S
	4.109989990	-0.667350220	1.588424100	0.665897544	-1.608818527	1.310178417	U
SPD	6.609949999	0.582359741	0.476817276	-0.591856462	-0.423068394	4.100932494	S
	7.499969992	0.315078217	0.833541214	-0.315092774	-0.833301566	1.187718921	S
	8.759999999	0.212911247	0.347052270	-0.212958250	-0.346855567	1.928078050	S

	8.759989998	0.203952648	0.366380704	-0.221473582	-0.303714388	1.997336786	U
	8.619989978	0.183184259	0.462411019	-0.253827594	-0.212061255	2.081584124	U

9.13.3 Διαγράμματα των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 -C των οικογενειών των δενδροειδών κατανομών, στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 , για $v=7$ και διάφορες τιμές των παραμέτρων β και e

Στα επόμενα Σχήματα 9.84 - 9.89 παραθέτουμε τις κατανομές των οικογενειών στην περιοχή αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας» για $v=7$ και τα εξής ζεύγη τιμών των παραμέτρων (β , e):

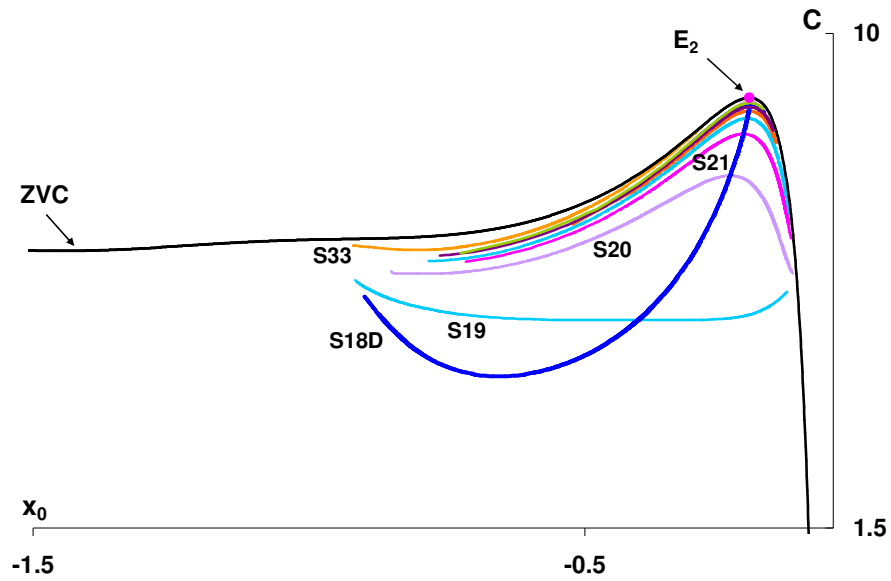
	β	e
$v=7$	5	- 0.1
	5	- 0.17
	16	- 0.1

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναλύσει σε προηγούμενα κεφάλαια, τα παραπάνω ζεύγη τιμών ανήκουν στις περιοχές I(7) και II(5) του διαγράμματος διακλαδώσεων (Σχήμα 3.11, Κεφ.3^ο), όπου υφίστανται οι ζώνες ισορροπίας E_1 και E_2 , ενώ για την περίπτωση για $\beta=5$, $e=-0.27$ που ανήκει στην περιοχή V(3) του ίδιου διαγράμματος απουσιάζουν. Ως εκ τούτου δεν υφίστανται σε αυτή την περίπτωση οι δενδροειδείς κατανομές των οικογενειών.

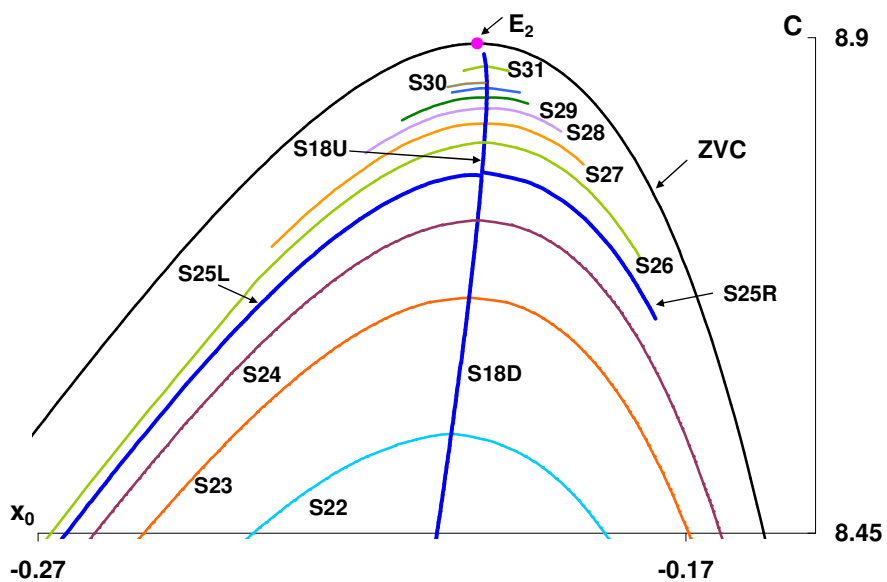
Σε κάθε σχήμα δίνεται μία συνολική εικόνα της κατανομής των χαρακτηριστικών και συμπληρώνεται από ένα σχήμα στο οποίο φαίνονται οι λεπτομέρειες της κατανομής αυτής. Σε κάθε περίπτωση ζεύγους τιμών των παραμέτρων β και e , παραθέτουμε αρχικά τις οικογένειες για $x_0 > 0$ και ακολούθως για $x_0 < 0$.

Επισημαίνουμε επίσης ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής παρουσιάζουν ακρότατο και σε αυτό το ακρότατο διακλαδίζονται από την κύρια οικογένεια της κατανομής, αποτελώντας έτσι ένα bifurcating point.

(i) Περίπτωση $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$ για $x_0 < 0$



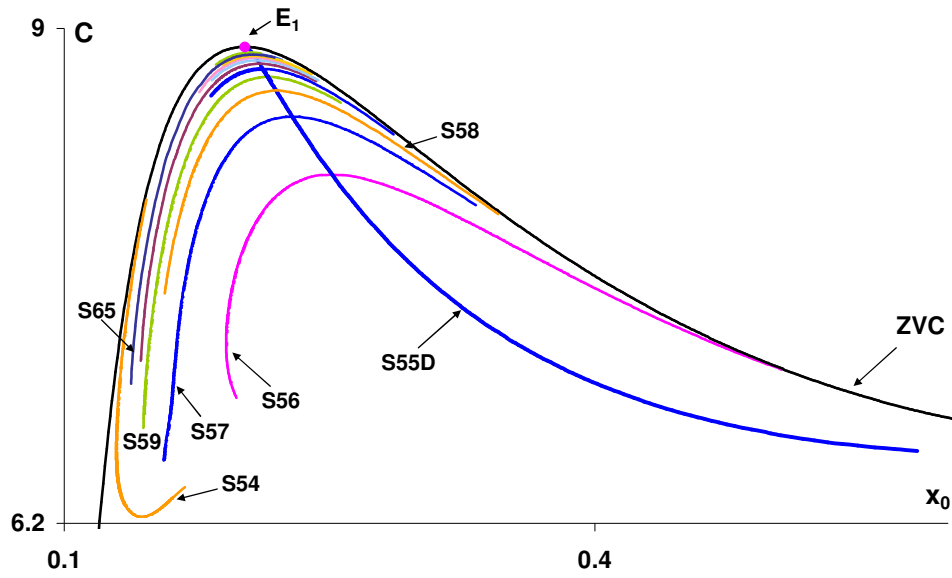
(α)



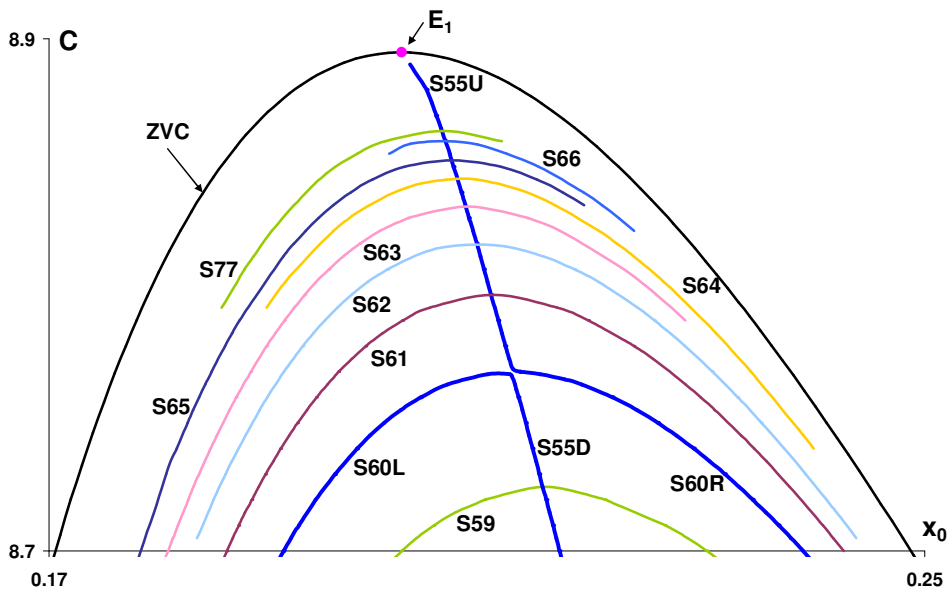
(β)

Σχήμα 9.84. (α) Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισοροπίας της ζώνης E_2 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$,
(β) λεπτομέρεια του διαγράμματος

(ii) Περίπτωση $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$ για $x_0 \geq 0$



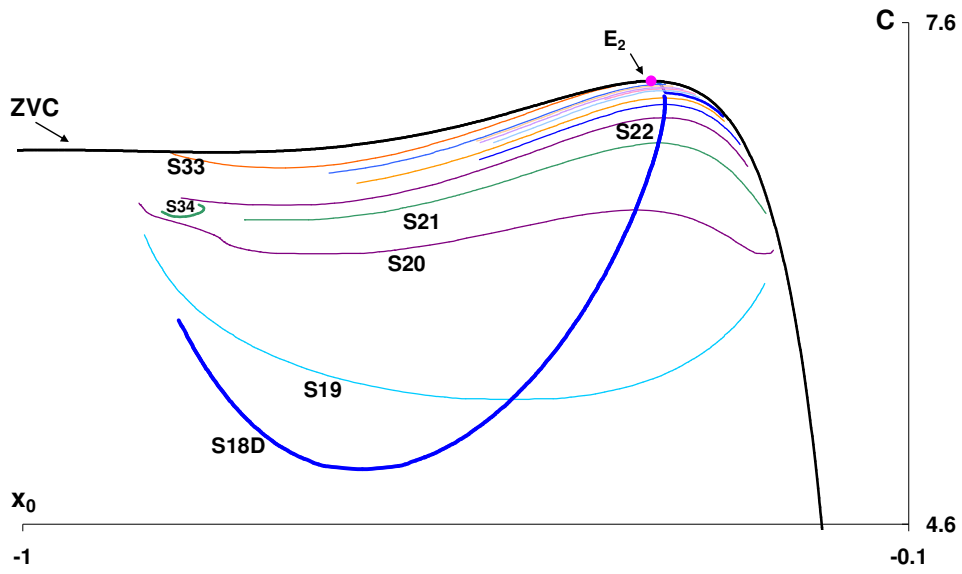
(α)



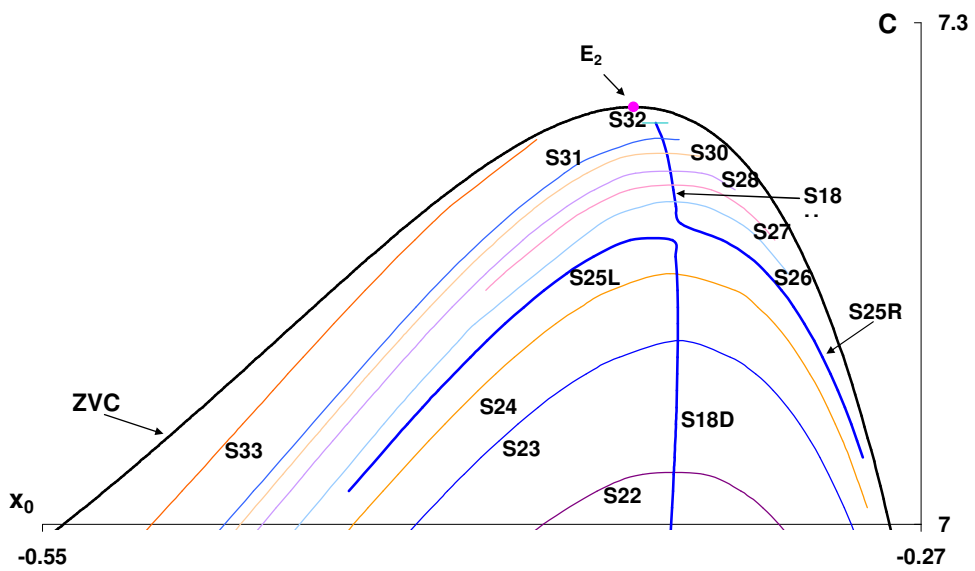
(β)

Σχήμα 9.85. (α) Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$,
(β) λεπτομέρεια του διαγράμματος

(iii) Περίπτωση $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.17$ για $x_0 < 0$



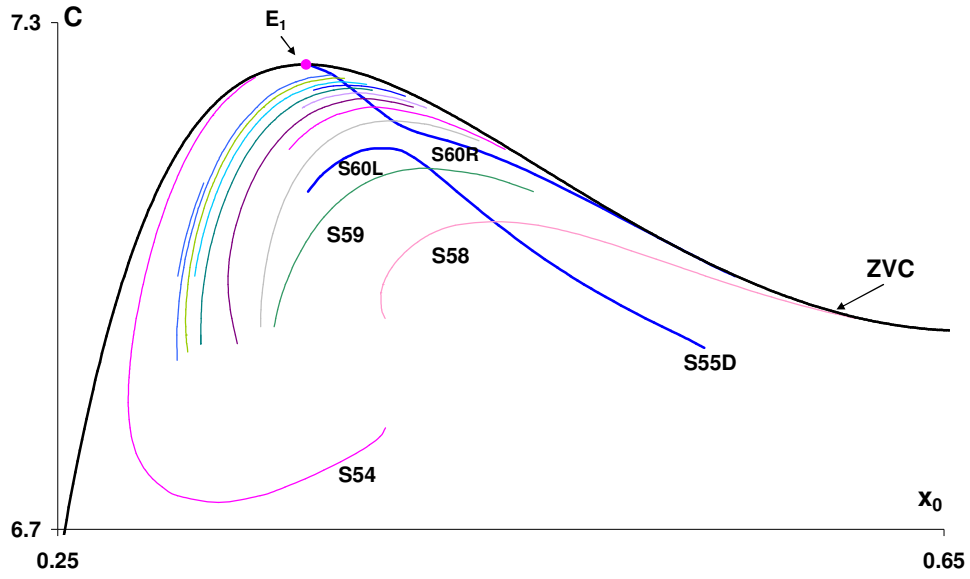
(α)



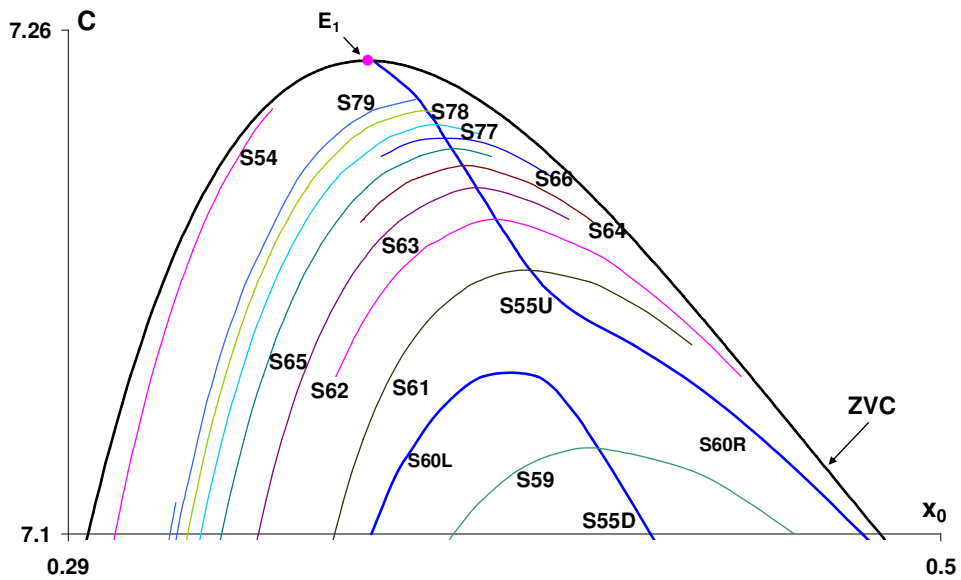
(β)

Σχήμα 9.86. (α) Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.17$,
(β) λεπτομέρεια του διαγράμματος

(iv) Περίπτωση $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.17$ για $x_0>0$



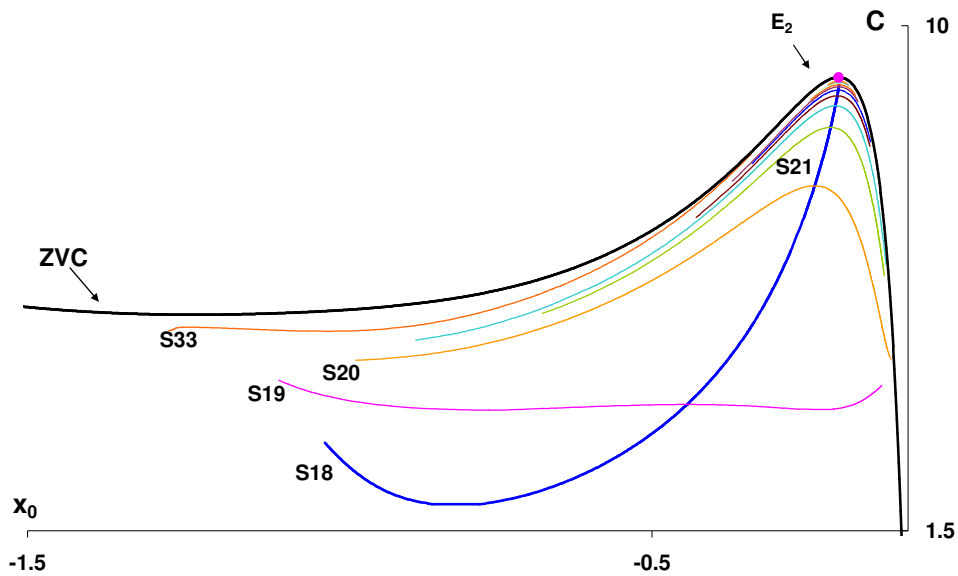
(α)



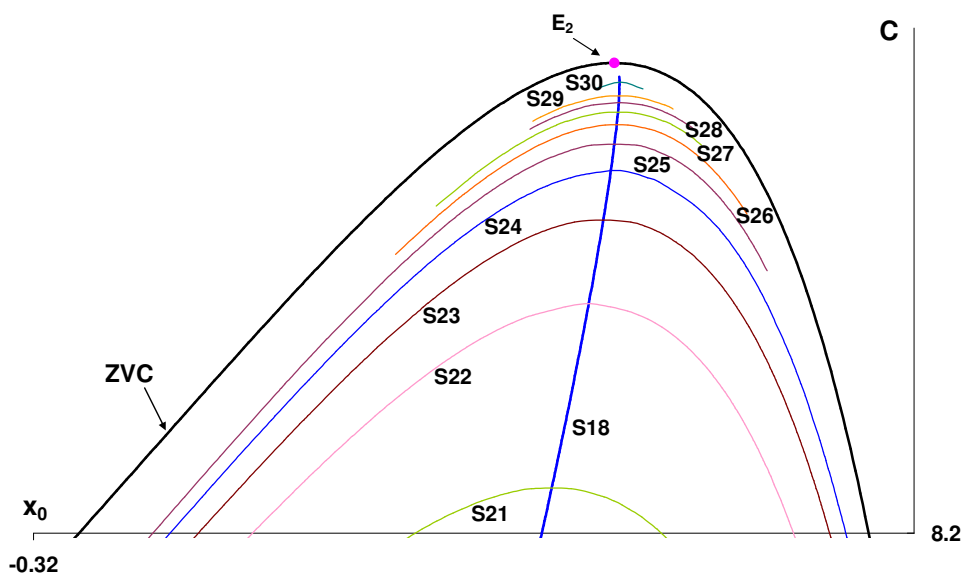
(β)

Σχήμα 9.87. (α) Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.17$,
(β) λεπτομέρεια του διαγράμματος

(v) Περίπτωση $\nu=7$, $\beta=16$ και $e=-0.1$ για $x_0 \leq 0$



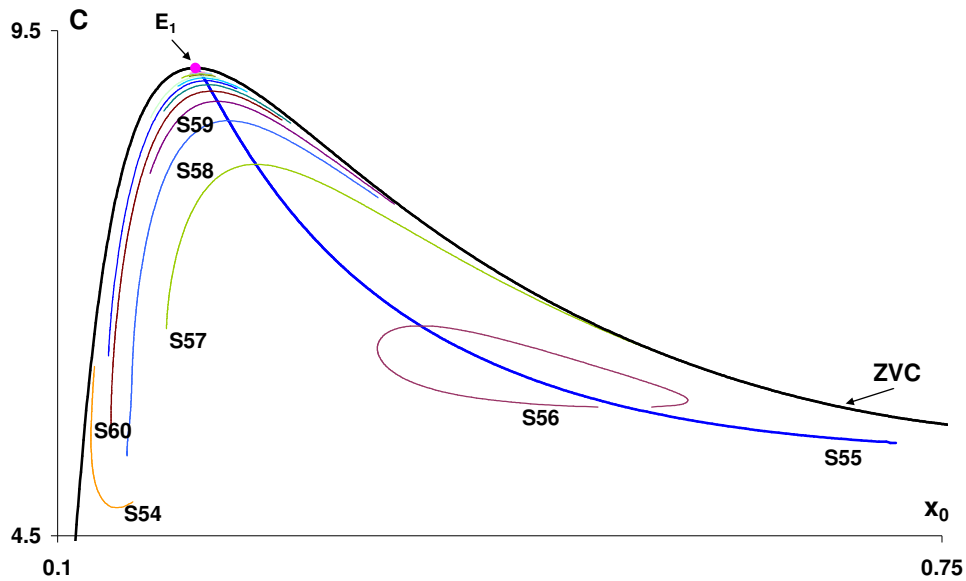
(α)



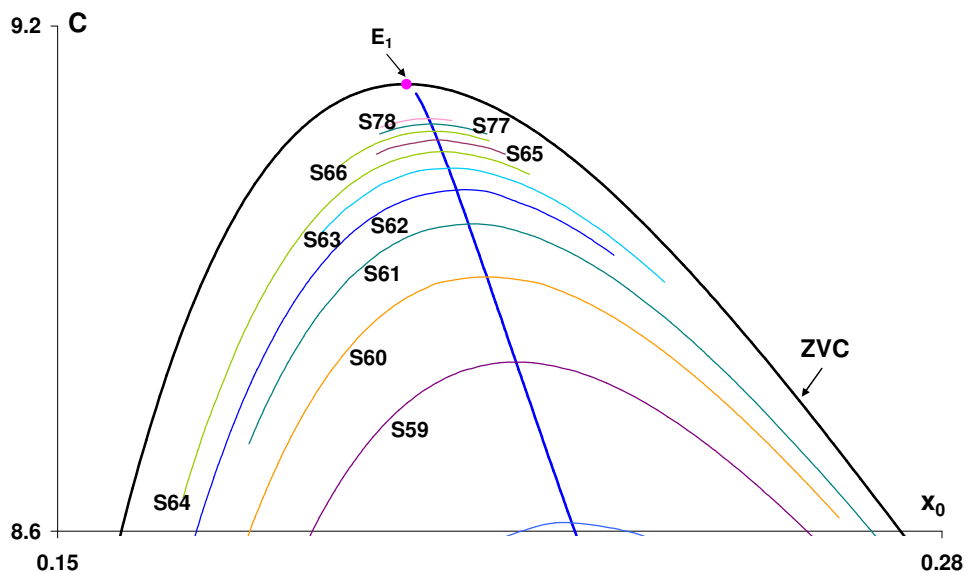
(β)

Σχήμα 9.88. (α) Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισοροπίας της ζώνης E_2 για $\nu=7$, $\beta=16$ και $e=-0.1$,
(β) λεπτομέρεια του διαγράμματος

(vi) Περίπτωση $\nu=7$, $\beta=16$ και $e=-0.1$ για $x_0>0$



(α)



(β)

Σχήμα 9.89. (α) Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 για $\nu=7$, $\beta=16$ και $e=-0.1$,
(β) λεπτομέρεια του διαγράμματος

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις εκτός των κύριων οικογενειών S18 και S55 που εμφανίζονται πάντα σε κάθε δένδροειδή κατανομή και των οποίων αναλύσαμε την παραμετρική εξέλιξη, άλλες δύο οικογένειες φαίνεται να έχουν συνεχή παρουσία και είναι εκείνες που πηγάζουν από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2 .

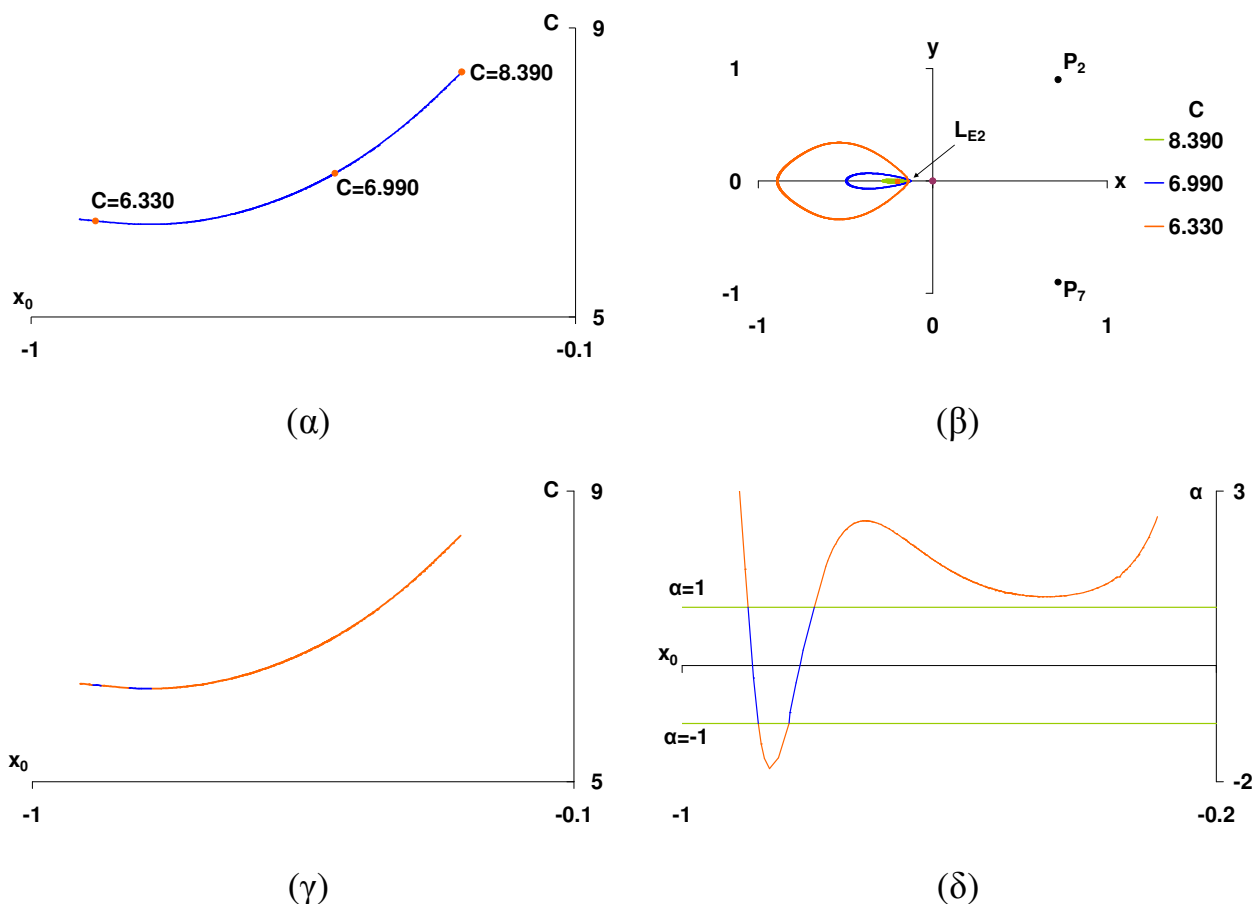
Πρόκειται για τις οικογένειες S33 (Σχήματα 9.84α, 9.86α και 9.88α) και S54 (Σχήματα 9.85α, 9.87α και 9.89α) που αναπτύσσονται για $x_0 < 0$ και $x_0 > 0$ αντίστοιχα και εξελίσσονται στο όριο της καμπύλης της μηδενικής ταχύτητας. Για αυτές τις οικογένειες τροχιών θα αναφερθούμε λεπτομερώς στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Επίσης να επισημάνουμε ότι για $\beta=5$ και $e=-0.17$ δεν εμφανίζονται οι οικογένειες S56 και S57 (Σχήμα 9.87α), ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση με $\beta=16$ και $e=-0.1$, όπου οι δύο κλάδοι της S56 καμπυλώνουν και τα άκρα τους στρέφονται και περατώνονται πολύ κοντά στην κύρια οικογένεια S55 (Σχήμα 9.89α).

9.13.4 Εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών S33 και S54 κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων. Μελέτη ευστάθειας

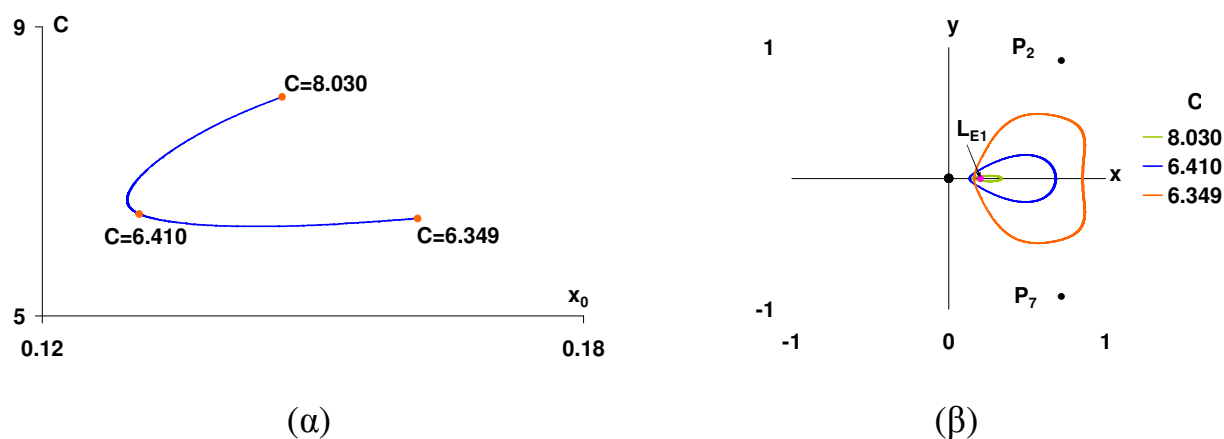
Η οικογένεια S33 χαρακτηρίζεται από ανάδρομες τροχιές που διαγράφονται γύρω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 , ενώ η οικογένεια S54 αποτελείται από ορθές τροχιές, οι οποίες διαγράφονται γύρω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 . Καθώς αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C , οι τροχιές των δύο αυτών οικογενειών συρρικνώνονται και τελικά εκφυλίζονται σε σημεία (Σχήμα 9.90β και 9.91β). Οι τροχιές της S33 εξελίσσονται έχοντας το σημείο ισορροπίας E_2 στο δεξιό τους άκρο, ενώ αυτές της S54 έχοντας το σημείο ισορροπίας E_1 στο αριστερό τους άκρο. Η ημιπερίοδος της οικογένειας S33 κυμαίνεται από 0.31(VS)–1.7 (S) και της οικογένειας S54 από 0.34(VS)–2.73(M). Από την οικογένεια S33 προκύπτουν ευσταθείς και ασταθείς τροχιές (Σχήμα 9.90γ), με συντελεστή ευστάθειας α ο οποίος λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-1.78, 3.71]$. Στο διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α παρουσιάζονται τέσσερα κρίσιμα σημεία, δύο για κάθε είδος (Σχήμα 9.90δ), ενώ στο Σχήμα 9.90γ φαίνονται τα ασταθή και ευσταθή τμήματα της χαρακτηριστικής καμπύλης. Τέσσερα κρίσιμα σημεία εμφανίζονται και στο διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της S54 (Σχήμα 9.91δ), ένα πρώτου είδους και τρία δεύτερου είδους. Σε αυτή την περίπτωση ο συντελεστής ευστάθειας α λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-148, 2.50]$, ενώ στο Σχήμα 9.91γ φαίνονται τα ασταθή και ευσταθή τμήματα της χαρακτηριστικής της καμπύλης.

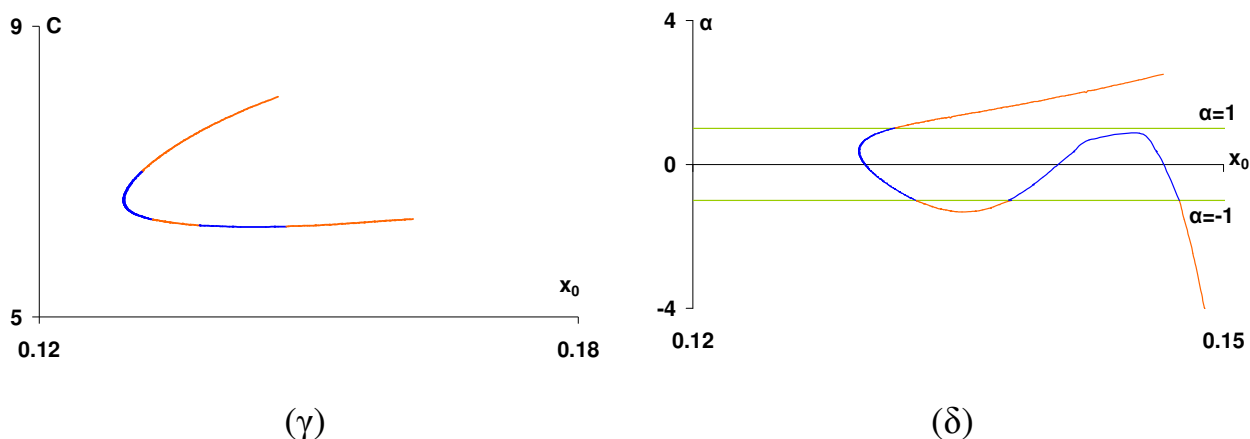
Στον Πίνακα 9.16 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών S33 και S54.



Σχήμα 9.90. Οικογένεια S33 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α





Σχήμα 9.91. Οικογένεια S54 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Πίνακας 9.16. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών S33 και S54 για $v=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S33	8.389989955	-0.288146106	0.124100354	-0.156520376	-0.145439591	0.305494549	U
	6.989949914	-0.497715773	0.332010490	-0.131255135	-0.487997960	0.528464141	U
	6.329999972	-0.893255760	0.376793843	-0.142772604	-1.256374800	1.526590230	S
S54	8.029989952	0.146596539	0.215349927	0.332743049	-0.173354235	0.343189850	U
	6.409999991	0.130749095	0.883721492	0.679275371	-0.526928796	0.861382830	S
	6.349029989	0.161621101	1.479235270	0.851405474	-0.743947627	2.185836274	U

9.13.5 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 < 0$)

Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικά την εξέλιξη των τροχιών κάποιων οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής για αρνητικές τιμές της αρχικής θέσης x_0 , καθώς με πανομοιότυπο τρόπο εξελίσσονται και οι υπόλοιπες. Τα μέλη όλων αυτών

των οικογενειών είναι ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου, γύρω από το κεντρικό primary P_0 και η περιγραφή της εξέλιξής τους, η οποία γίνεται παρακάτω, αντιστοιχεί στα Σχήματα 9.92 έως 9.94, όπου περιέχονται οι τροχιές των οικογενειών S22, S24 και S26.

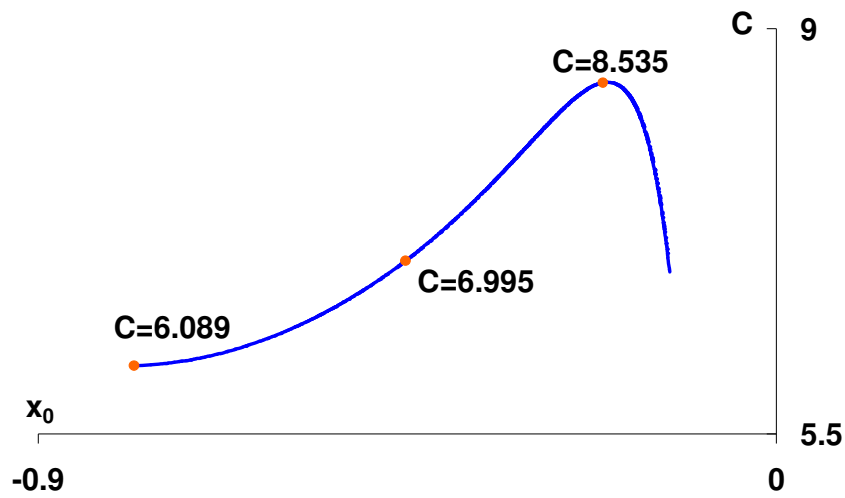
Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια, οι τροχιές τους έχουν τη μορφή «ροζέτας»⁸, που τα πέταλά της διασταυρώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργούνται μικροί βρόχοι οι οποίοι καταλήγουν σε κόγχες που «στρέφονται» προς το P_0 . Καθώς αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C οι τροχιές συρρικνώνονται, οι μικροί βρόχοι εξαλείφονται, ενώ οι κόγχες συνεχίζουν να υφίστανται. Σε ακόμη μεγαλύτερες τιμές της σταθεράς C και κοντά στο ακρότατο της οικογένειας, τα πέταλα της «ροζέτας» εξομαλύνονται, δίνοντας στις τροχιές μία μορφή πολυγώνου, με τόσες πλευρές όσες και το πλήθος των πετάλων της ροζέτας.

Όσον αφορά στον άλλο κλάδο της οικογένειας, η εξέλιξη της μορφής των τροχιών, ξεκινώντας από τις υψηλότερες τιμές της C , ακολουθεί την αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράψαμε προηγουμένως. Δηλαδή, αρχικά εμφανίζονται μορφές πολυγωνικών τροχιών που περιβάλλουν το P_0 και στη συνέχεια εξελίσσονται σε τροχιές που έχουν τη μορφή «ροζέτας».

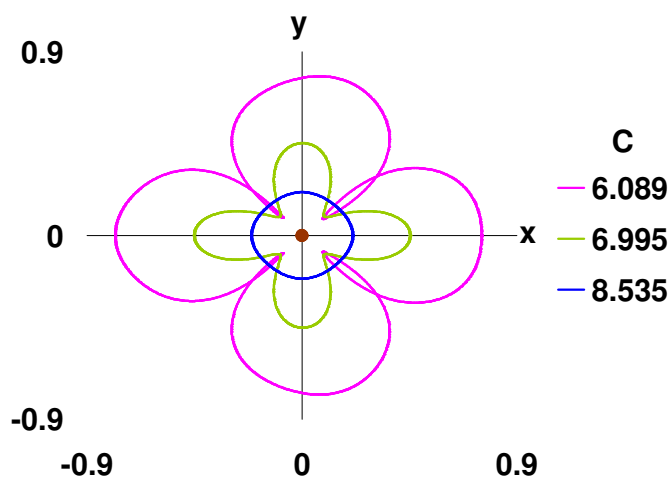
Όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των πετάλων της αντίστοιχης «ροζέτας». Έτσι για την οικογένεια S22 προκύπτουν «ροζέτες» με τέσσερις κορυφές (Σχήμα 9.92β), για την οικογένεια S24 με έξι κορυφές (Σχήμα 9.93β) και για την οικογένεια S26 με οκτώ κορυφές (Σχήμα 9.94β). Παρατηρούμε ότι από δύο διαδοχικές οικογένειες προκύπτουν τροχιές που διαφέρουν κατά μία κορυφή.

⁸ Η ροζέτα έχει το σχήμα λουλουδιού, που τα πέταλά του διασταυρώνονται με διάφορους τρόπους.

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας S22



(α)

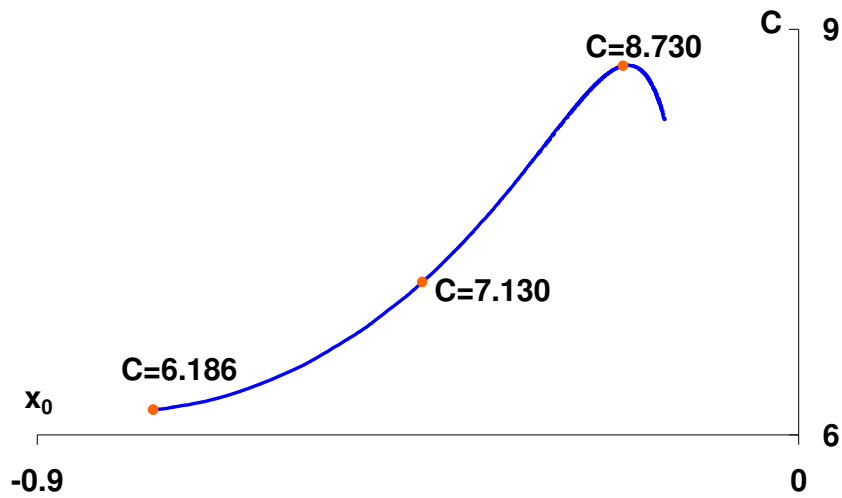


(β)

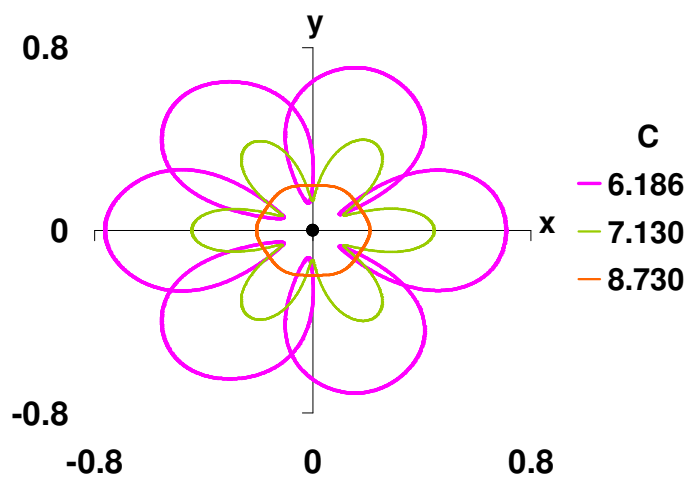
Σχήμα 9.92. Οικογένεια S22 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας S24



(α)

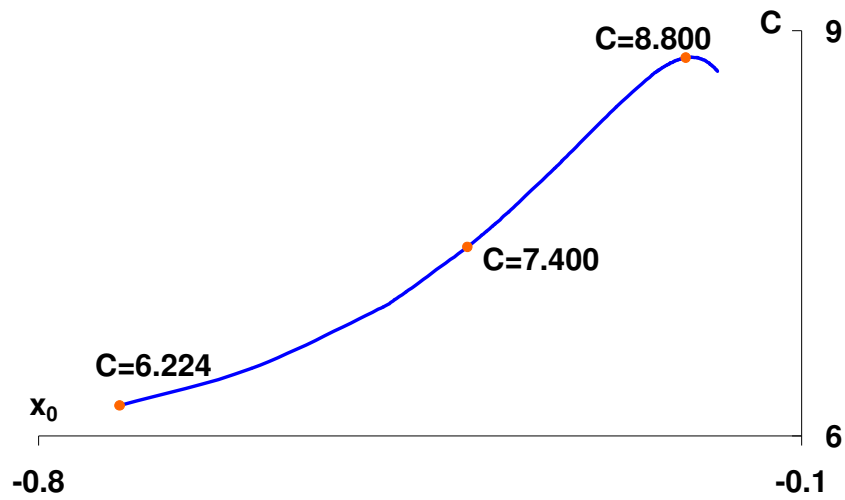


(β)

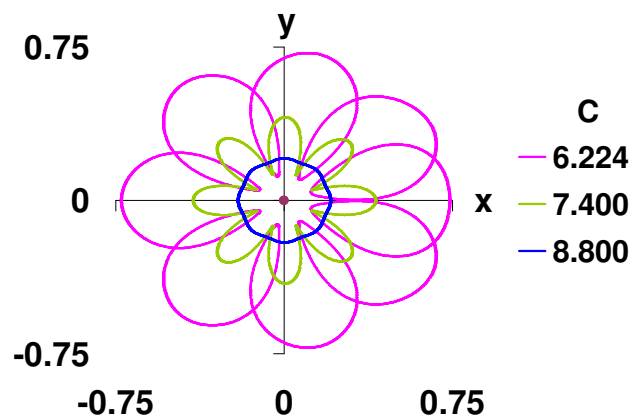
Σχήμα 9.93. Οικογένεια S24 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας S26



(α)



(β)

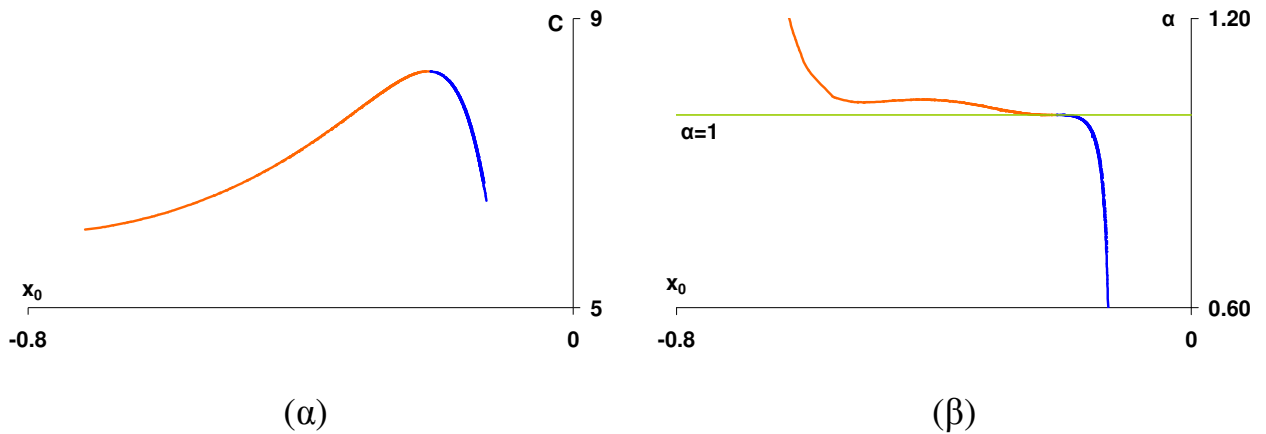
Σχήμα 9.94. Οικογένεια S26 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

9.13.6 Μελέτη ευστάθειας των τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 ($x_0 < 0$)

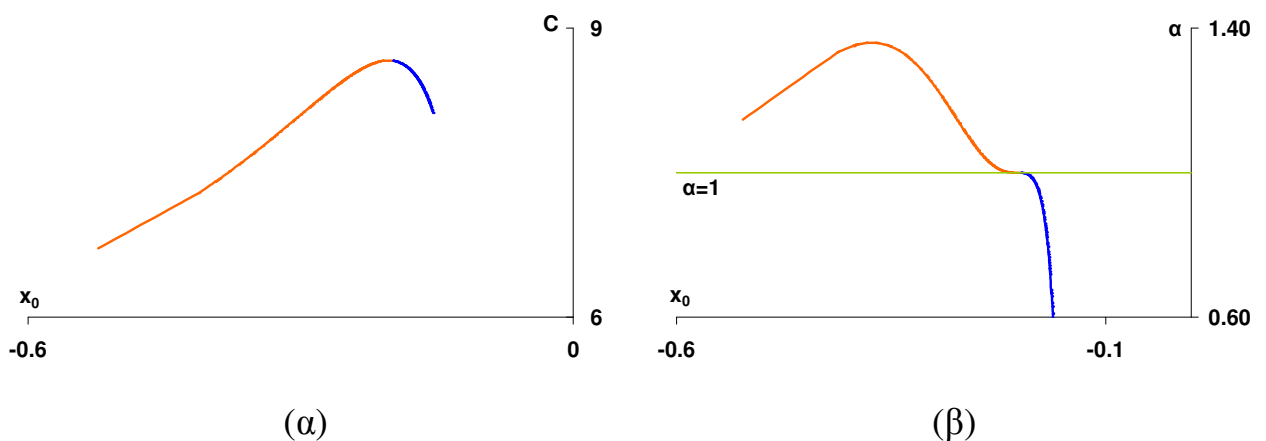
Για τις οικογένειες που πηγάζουν από τον κεντρικό κλάδο της δενδροειδούς κατανομής με $x_0 < 0$, μελετήσαμε ενδεικτικά την ευστάθεια των S21, S22, S23 και

S24. Έτσι στα Σχήματα 9.95, 9.96 και 9.97 που ακολουθούν, παρατηρούμε ότι αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζουν οι χαρακτηριστικές των S21, S22, S23 αντίστοιχα, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς. Επίσης παρουσιάζουν όλες ένα κρίσιμο σημείο πρώτου είδους, ενώ και οι ασταθείς τροχιές χαρακτηρίζονται από σχετικά μικρές τιμές του συντελεστή ευστάθειας α .



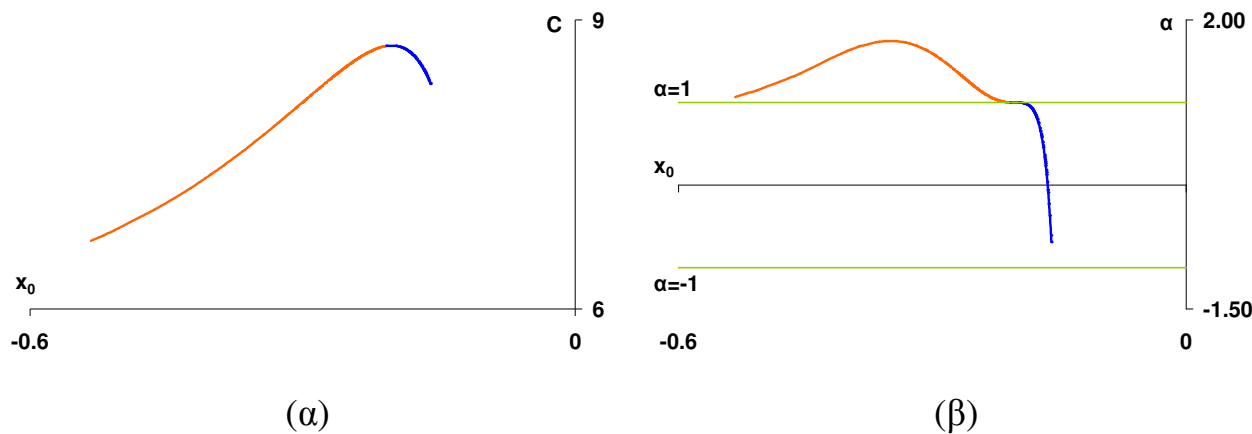
Σχήμα 9.95. Οικογένεια S21 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

- (α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,
 (β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α



Σχήμα 9.96. Οικογένεια S23 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

- (α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,
 (β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

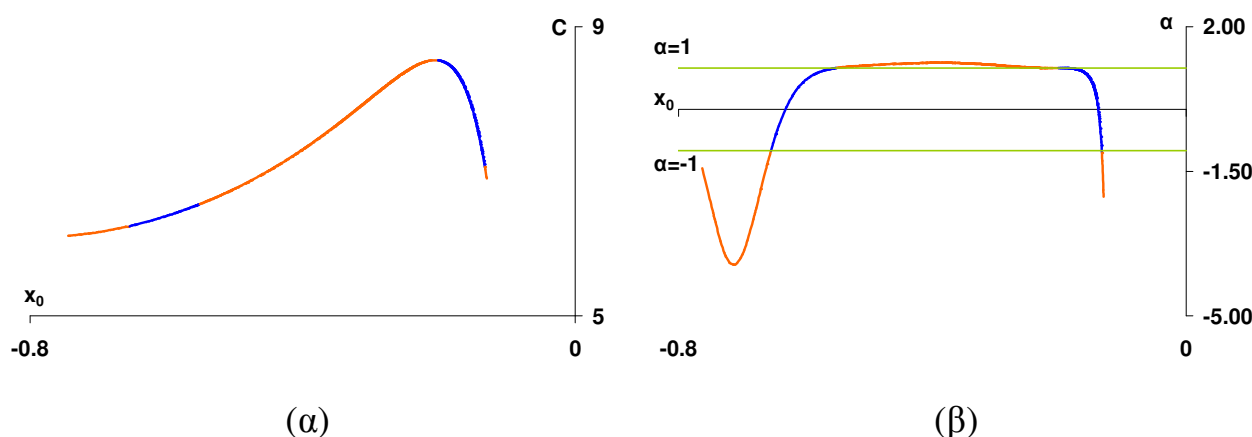


Σχήμα 9.97. Οικογένεια S24 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση της οικογένειας S22, η ευστάθεια της οποίας παρουσιάζει εν μέρει ίδια συμπεριφορά με τις προηγούμενες οικογένειες, Υπάρχουν όμως και εμφανείς διαφορές, οι οποίες εντοπίζονται στο γεγονός ότι παρουσιάζονται και τμήματα ευστάθειας αριστερά του ακροτάτου, αλλά και αστάθειας δεξιά αυτού (Σχήμα 9.98α). Αποτέλεσμα αυτού είναι να εμφανίζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές πρώτου και δεύτερου είδους, ενώ για τις ασταθείς τροχιές ο συντελεστής α εξακολουθεί να μην λαμβάνει μεγάλες τιμές (Σχήμα 9.98β).



Σχήμα 9.98. Οικογένεια S22 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Στον Πίνακα 9.17 που ακολουθεί, παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών S21, S22, S23, S24 και S26 της δένδροειδούς κατανομής κάτω από το σημείο ισορροπίας E_2 .

Πίνακας 9.17. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών S21, S22, S23, S24 και S26 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=-0.1$

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S21	6.171999731	-0.657774933	0.690629692	0.122215961	-0.524795148	2.300846606	U
	8.269979997	-0.209160156	0.786401636	0.217497833	-0.772622937	0.859882926	S
	6.674949889	-0.131028270	0.732518190	0.496507551	-0.661482570	1.584932686	S
S22	6.089029802	-0.783052002	0.649385987	0.752902971	-0.775969449	4.246400911	S
	6.994949830	-0.452202534	0.559217167	0.452744689	-0.560168067	1.875874135	U
	8.534989998	-0.211619751	0.590352894	0.211619140	-0.590368751	1.090054342	U
	8.534989998	-0.201173706	0.599576633	0.201172198	-0.599586412	1.090054521	S
	6.899949774	-0.130003175	0.484763830	0.129795008	-0.468064814	1.963760397	U
S23	6.714949661	-0.522517097	0.537360774	0.125412524	-0.197252212	2.782926083	U
	8.659989999	-0.197758270	0.481458461	0.209504229	-0.477312050	1.334805424	S
	8.119979924	-0.154117821	0.471027994	0.297369337	-0.461637804	1.563812354	S
S24	6.186019643	-0.76292528	0.58153225	0.707971693	-0.700083356	5.747549581	U
	7.129969712	-0.44483808	0.46390894	0.444248214	-0.470707831	2.74494451	U
	8.729989999	-0.1969221	0.40074753	0.196917202	-0.400750959	1.585702663	S
	8.334979927	-0.15915718	0.38039143	0.159146048	-0.380034731	1.774906049	S
S26	6.224019567	-0.725594028	0.577051789	0.737195315	-0.676049690	7.536645222	U
	7.399979719	-0.406415138	0.399592845	0.407005422	-0.397369157	3.315750519	U
	8.799999999	-0.196175989	0.298871550	0.196182618	-0.298908739	2.097631887	S
	8.699989975	-0.177078752	0.284410339	0.177085681	-0.284545304	2.155890925	S

9.13.7 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 > 0$)

Οι διαφορές που υπάρχουν και αφορούν στα χαρακτηριστικά και στην εξέλιξη των τροχιών που προκύπτουν από τις οικογένειες αυτής της δένδροειδούς κατανομής ($x_0 > 0$), σε σχέση με αυτές των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής που περιγράψαμε για $x_0 < 0$, είναι μικρές. Η βασικότερη από αυτές αφορά στο γεγονός ότι από αυτή την κατανομή προκύπτουν **ορθές** τροχιές πλανητικού τύπου γύρω από το κεντρικό primary P_0 . Η περιγραφή της εξέλιξης τους, η οποία γίνεται παρακάτω, αντιστοιχεί στα Σχήματα 9.99 έως 9.101, όπου απεικονίζονται δείγματα τροχιών των οικογενειών S59, S61 και S65.

Παρατηρούμε και εδώ ότι ξεκινώντας από τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια της κατανομής, οι τροχιές έχουν τη μορφή «ροζέτας», της οποίας τα πέταλα είναι επιμήκη και πιο λεπτά, σε σχέση με αυτά των αντίστοιχων τροχιών της δένδροειδούς κατανομής για $x_0 < 0$.

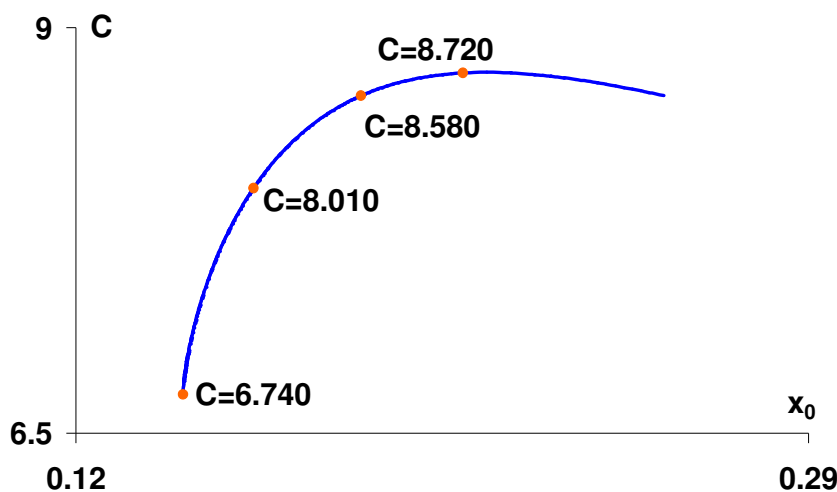
Όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C οι βρόχοι που αποτελούν τα πέταλα της «ροζέτας» συρρικνώνονται και τελικά εξαφανίζονται με αποτέλεσμα να δημιουργούνται τροχιές που έχουν τη μορφή αστεριού, με τόσες ακτίνες όσο ήταν και το πλήθος των πετάλων της ροζέτας. Όσο αυξάνεται περαιτέρω η τιμή της σταθεράς C , οι ακτίνες των αστεριών εξομαλύνονται με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία «δαντέλα», η οποία με τη σειρά της αποκτά πολυγωνική μορφή κοντά στο ενεργειακό ακρότατο C της οικογένειας.

Όσον αφορά στον άλλο κλάδο της οικογένειας και ξεκινώντας από τις υψηλότερες τιμές της C , η εξέλιξη της μορφής των τροχιών ακολουθεί ακριβώς την αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράψαμε μέχρι τώρα. Δηλαδή, αρχικά εμφανίζονται τροχιές πολυγωνικής μορφής οι οποίες καταλήγουν σε τροχιές με τη μορφή «ροζέτας».

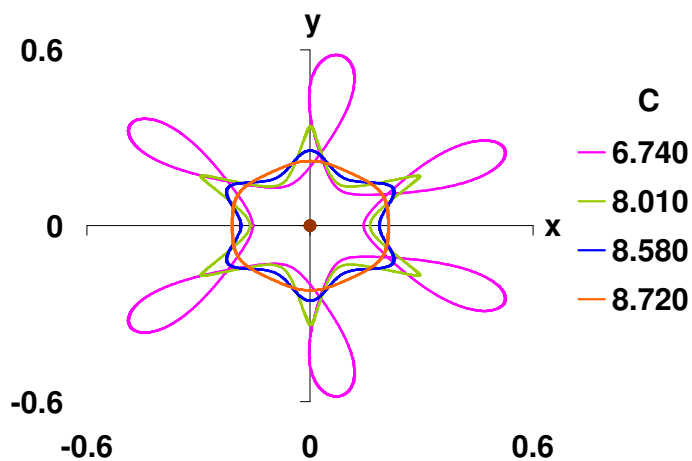
Όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των πετάλων (βρόχων) της αντίστοιχης «ροζέτας». Έτσι για την οικογένεια S59 προκύπτουν

τροχιές με έξι βρόχους (Σχήμα 9.99β), για την οικογένεια S61 οι τροχιές έχουν οχτώ βρόχους (Σχήμα 9.100β) και για την οικογένεια S65 οι βρόχοι είναι δώδεκα (Σχήμα 9.101β). Όπως και στην περίπτωση της δένδροειδούς κατανομής για $x_0 < 0$, **από δύο διαδοχικές οικογένειες προκύπτουν τροχιές που διαφέρουν κατά ένα βρόχο.**

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας S59



(α)

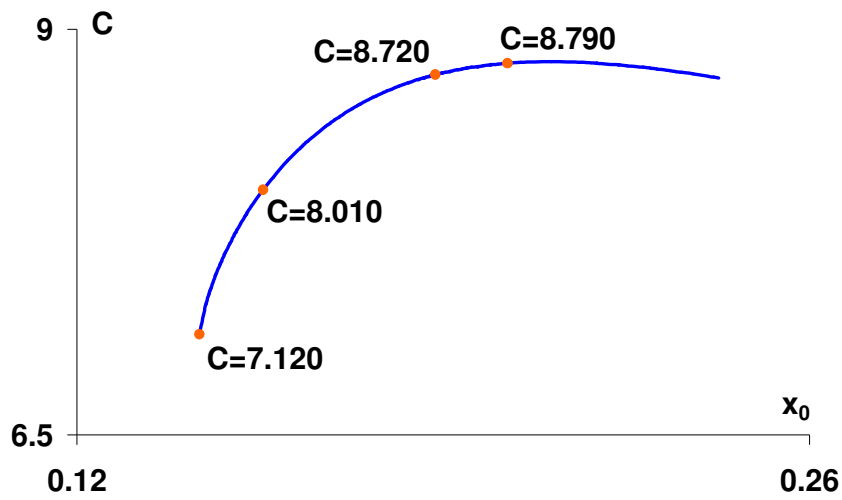


(β)

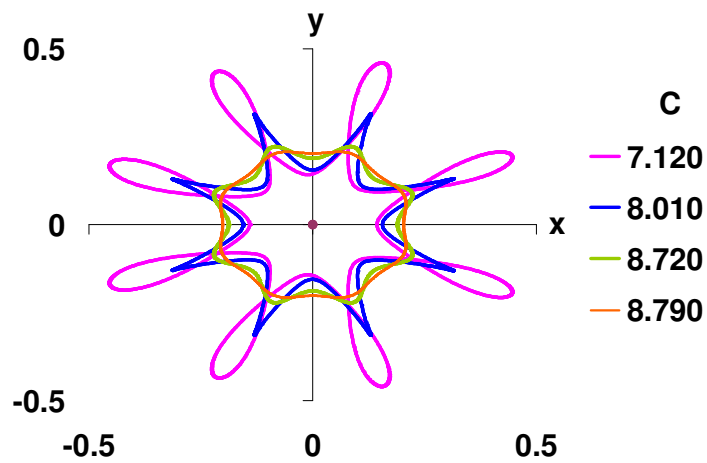
Σχήμα 9.99. Οικογένεια S59 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας S61



(α)

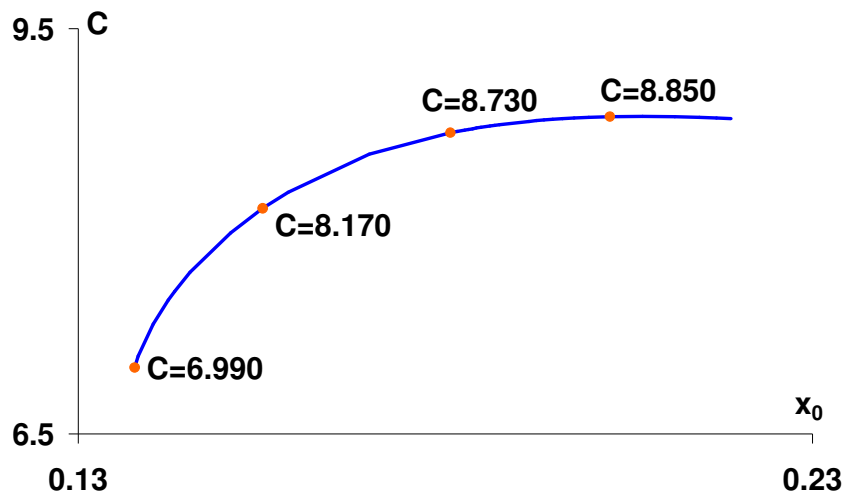


(β)

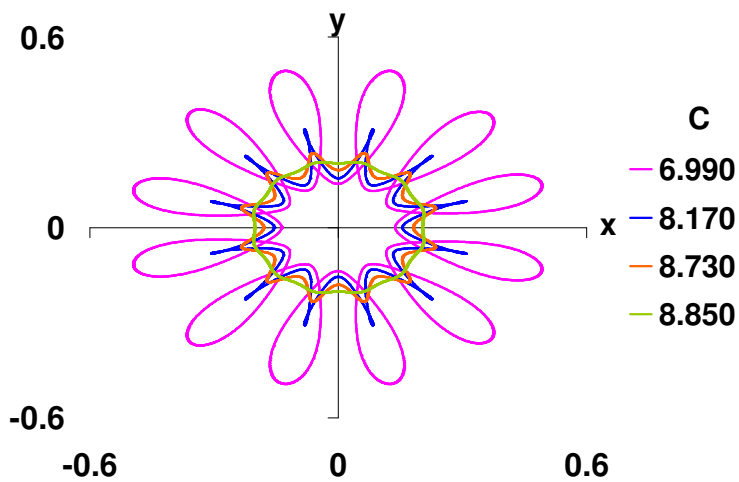
Σχήμα 9.100. Οικογένεια S61 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας S65



(α)



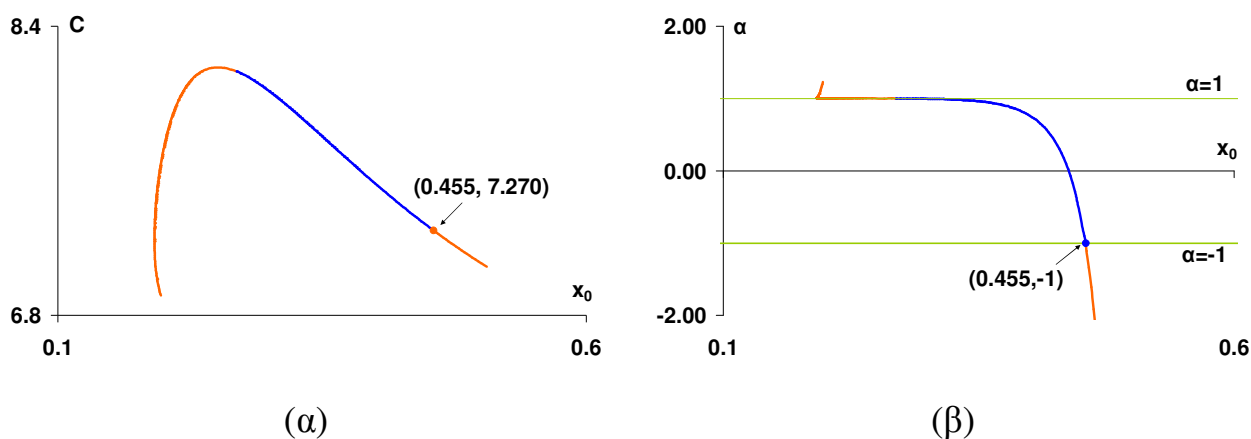
(β)

Σχήμα 9.101. Οικογένεια S65 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής

9.13.8 Μελέτη ευστάθειας των τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισοροπίας της ζώνης $E_1(x_0 > 0)$

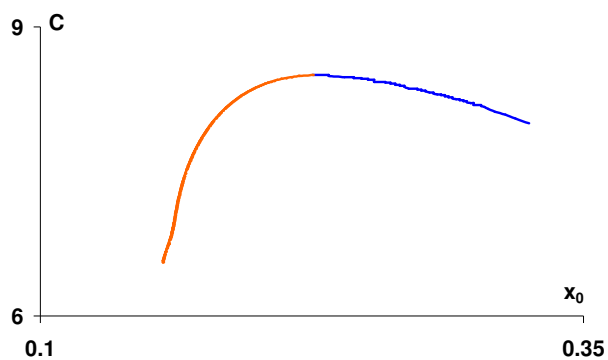
Για τις οικογένειες που πηγάζουν από τον κεντρικό κλάδο της δένδροειδούς κατανομής με $x_0 < 0$, μελετήσαμε ενδεικτικά την ευστάθεια των S56, S57, S59 και S61. Έτσι για την ευστάθεια της οικογένειας S56, παρατηρούμε στο Σχήμα 9.102α ότι αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζει η χαρακτηριστική της, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς, μέχρι την τιμή $(C, x_0) = (7.270, 0.455)$ όπου συμβαίνει αλλαγή ευστάθειας από ευσταθείς σε ασταθείς τροχιές, στο κρίσιμο σημείο $\alpha = -1$ (Σχήμα 9.102β).



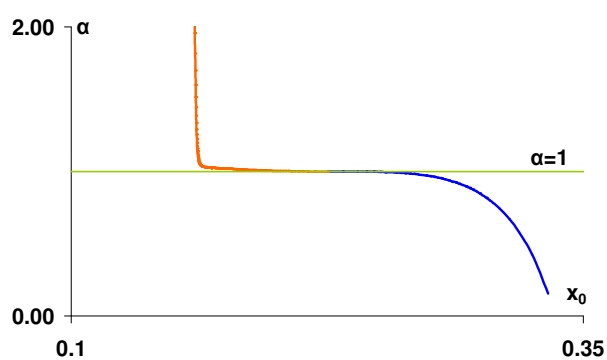
Σχήμα 9.102. Οικογένεια S56 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

- (α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,
 (β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Από την μελέτη της ευστάθειας των οικογενειών S57, S59 και S61 προέκυψαν τα Σχήματα 9.103α, 9.104α και 9.105α αντίστοιχα, από τα οποία παρατηρούμε ότι αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζει η χαρακτηριστική τους, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς. Παρουσιάζουν όλες ένα κρίσιμο σημείο πρώτου είδους, ενώ και οι ασταθείς τροχιές δεν χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές του συντελεστή ευστάθειας α (Σχήματα 9.103β, 9.104β και 9.105β).



(α)

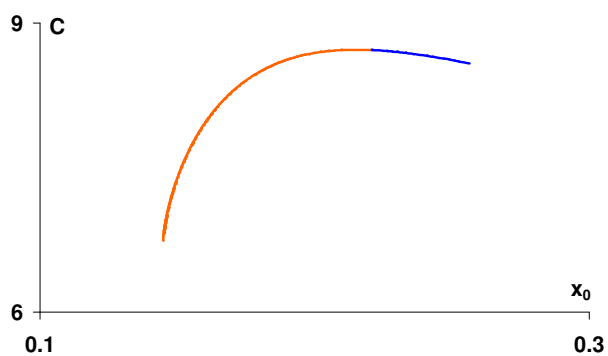


(β)

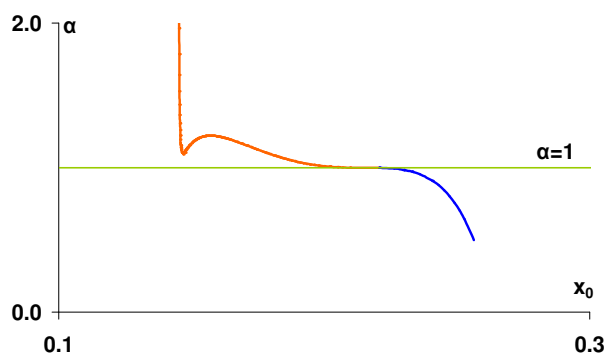
Σχήμα 9.103. Οικογένεια S57 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α



(α)

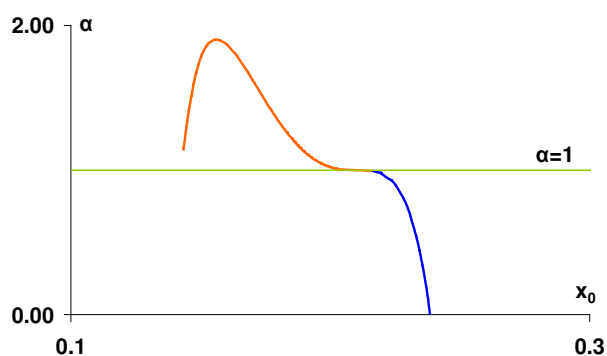
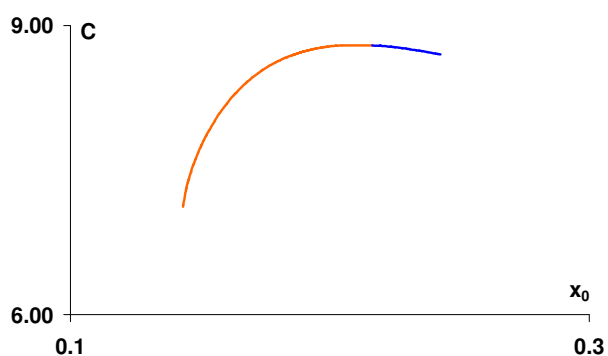


(β)

Σχήμα 9.104. Οικογένεια S59 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α



(α)

(β)

Σχήμα 9.105. Οικογένεια S61 για $\beta=5$, $e=-0.1$.

(α) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας,

(β) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

Στον Πίνακα 9.18 που ακολουθεί παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών S56, S57, S59, S61 και S65 της δένδροειδούς κατανομής κάτω από το σημείο ισορροπίας E_1 .

Πίνακας 9.18. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών S56, S57, S59, S61 και S65 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

	C	X₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
S56	7.209959984	0.191485888	1.291139963	-0.468925386	-0.129210878	1.712437558	U
	8.149979992	0.236226744	0.793076883	-0.269332953	-0.633387440	1.116710386	U
	8.149979993	0.269322067	0.633527339	-0.236219625	-0.793079178	1.116710520	S
	7.279959988	0.453288238	0.161534300	-0.190233930	-1.261893060	1.644394962	S
	7.069959988	0.505798874	0.077072520	-0.188929319	-1.340469581	1.872067479	U
S57	6.554999964	0.156347197	1.360652397	-0.183559058	-1.510438693	3.659155050	U
	8.499989997	0.225360840	0.579306440	-0.225365603	-0.579264391	1.278517183	U
	8.499989997	0.232713135	0.546537821	-0.232714890	-0.546498139	1.278517228	S
	7.999979977	0.332833627	0.243685543	-0.332748868	-0.244123235	1.518385424	S
S59	6.739989701	0.144836946	1.123464841	-0.144836945	-1.123464828	4.156045250	U
	8.009979929	0.161205224	0.719657019	-0.161329165	-0.721586467	2.196395634	U
	8.579989985	0.186148294	0.522212387	-0.186170339	-0.522325533	1.819408172	U

	8.719989998	0.209824555	0.408948066	-0.209836337	-0.408901098	1.744692975	U
	8.579989988	0.256437424	0.257945209	-0.256444444	-0.257717945	1.819408172	S
S61	7.119959733	0.143369906	0.903542580	-0.141399829	-0.849713636	4.219947542	U
	8.009979865	0.155552853	0.611617201	-0.155422362	-0.608553186	2.884350502	U
	8.719989987	0.188505924	0.380653791	-0.188487876	-0.380532906	2.297496776	U
	8.789999998	0.202288341	0.323479848	-0.202273702	-0.323460831	2.251486147	U
	8.699999983	0.242602086	0.200625701	-0.242584813	-0.200785180	2.310949050	S
S65	6.989969521	0.137697359	0.808977349	-0.136758076	-0.774465894	6.655561145	U
	8.169999813	0.155121846	0.449040669	-0.155097246	-0.448241157	4.036845334	U
	8.729999964	0.180701583	0.291031328	-0.180695923	-0.290940355	3.395151661	U
	8.849999999	0.211297018	0.185040500	-0.211292345	-0.185021719	3.281450072	S
	8.834999996	0.218895014	0.164511505	-0.218889966	-0.164499837	3.295284177	S

9.13.9 Γενικές παρατηρήσεις για τις οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής

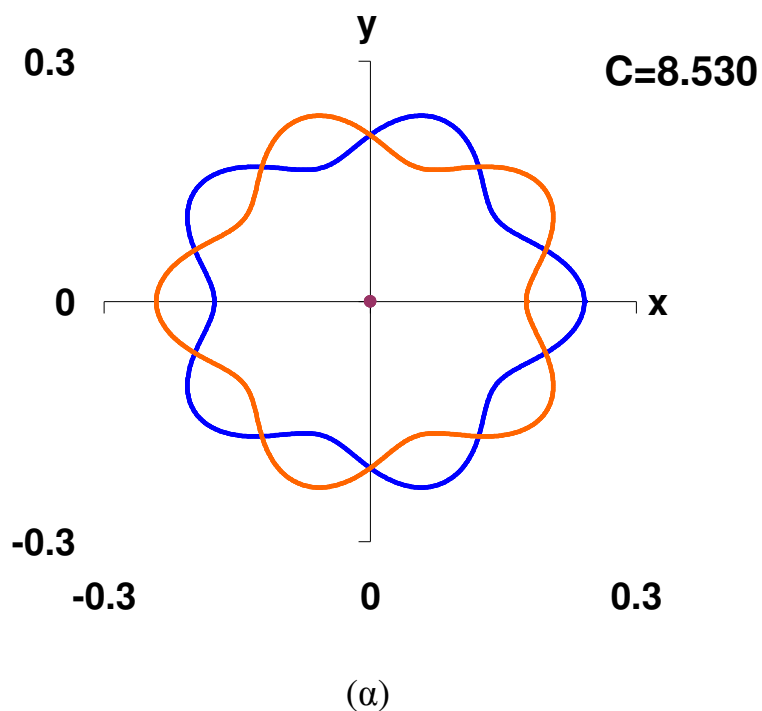
- ♦ Το πλήθος των πετάλων ή γενικότερα των κορυφών που παρουσιάζονται στις τροχιές των οικογενειών που διακλαδίζονται με τις κύριες οικογένειες αυτών των κατανομών, δεν σχετίζεται με το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων. Απόδειξη ότι υπάρχουν τροχιές με τρία, τέσσερα, κ.ο.κ. πέταλα, ενώ εμείς μελετήσαμε την περίπτωση για $n=7$.
- ♦ Για τιμές της σταθεράς C στην περιοχή του ακροτάτου της χαρακτηριστικής των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής και κατ' επέκταση κοντά στον κύριο κορμό της, οι τροχιές εμφανίζουν συμμετρία και ως προς τον άξονα y . Για αυτές τις τιμές της σταθεράς C οι τροχιές ως επί το πλείστον παρουσιάζουν εξομάλυνση των κορυφών τους, η οποία όμως καταστρέφεται

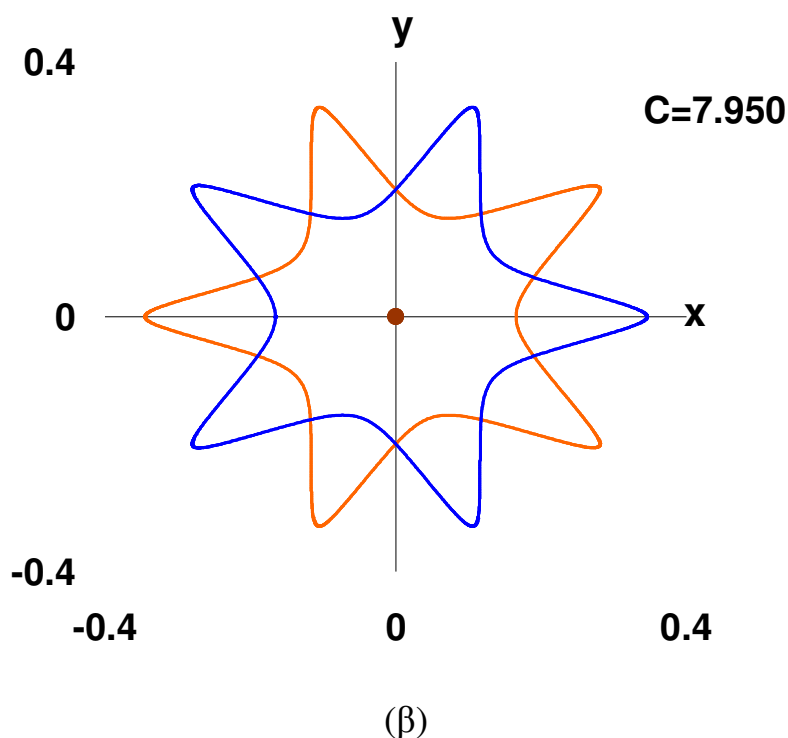
καθώς το C ελαττώνεται και μαζί της η συμμετρία των τροχιών ως προς τον άξονα y .

9.13.10 Συμμετρία των ισοενεργειακών τροχιών (ίδια τιμή της σταθεράς C) που ανήκουν στην ίδια οικογένεια της δένδροειδούς κατανομής

Ενδιαφέρον παρουσιάζεται όταν σχεδιάσουμε τροχιές της ίδιας οικογένειας που αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες κοντά στο ακρότατο της, βρίσκονται εκατέρωθεν της κεντρικής οικογένειας, και έχουν ίδια τιμή της σταθεράς C . Παρακάτω φαίνονται τα κοινά διαγράμματα τέτοιων τροχιών, όπου αναδεικνύεται η συμμετρία ως προς τους $2-p$ άξονες του γραφήματος που συνθέτουν και οι δύο μαζί, όπου p ο αριθμός των κορυφών κάθε τροχιάς. Η κάθε τροχιά προκύπτει από την άλλη με στροφή π/p . Η συμμετρία αυτή καταστρέφεται όταν ελαττώνεται η τιμή της σταθεράς C .

Το Σχήμα 9.106α δείχνει τροχιές της οικογένειας S_{23} με $C=8.35$ ($x_0 < 0$) όπου εμφανίζονται πέντε κορυφές, ενώ το Σχήμα 9.106β δείχνει τροχιές της οικογένειας S_{58} για $C=7.950$ ($x_0 > 0$) με πέντε κορυφές.



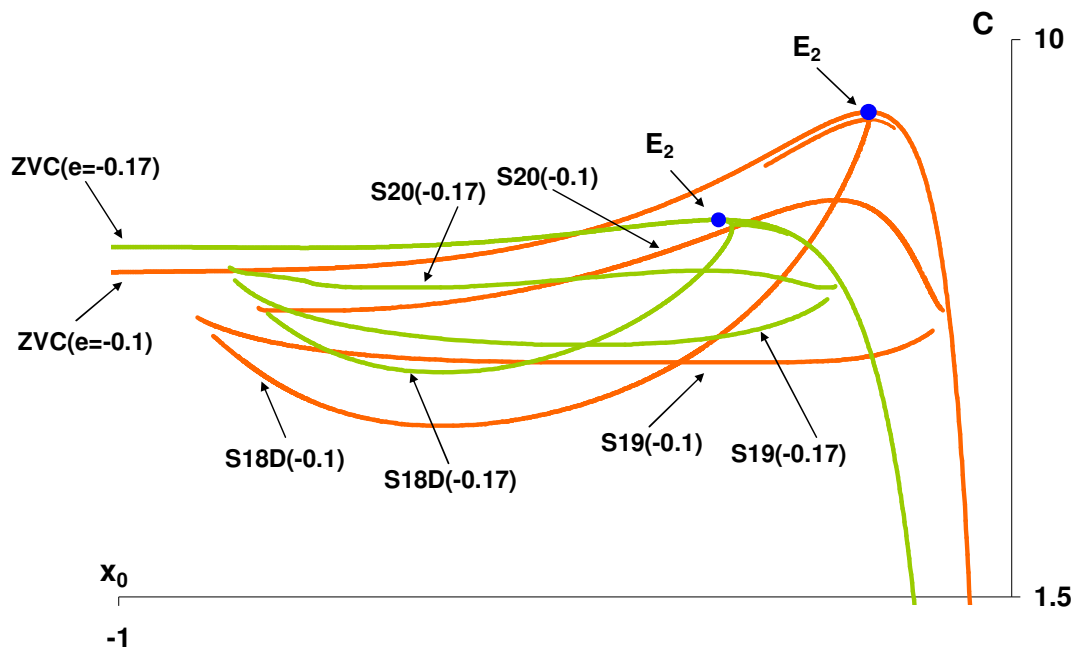


Σχήμα 9.106. Κοινά διαγράμματα ισοενεργειακών τροχιών για τις οικογένειες: (α) S23, (β) S58

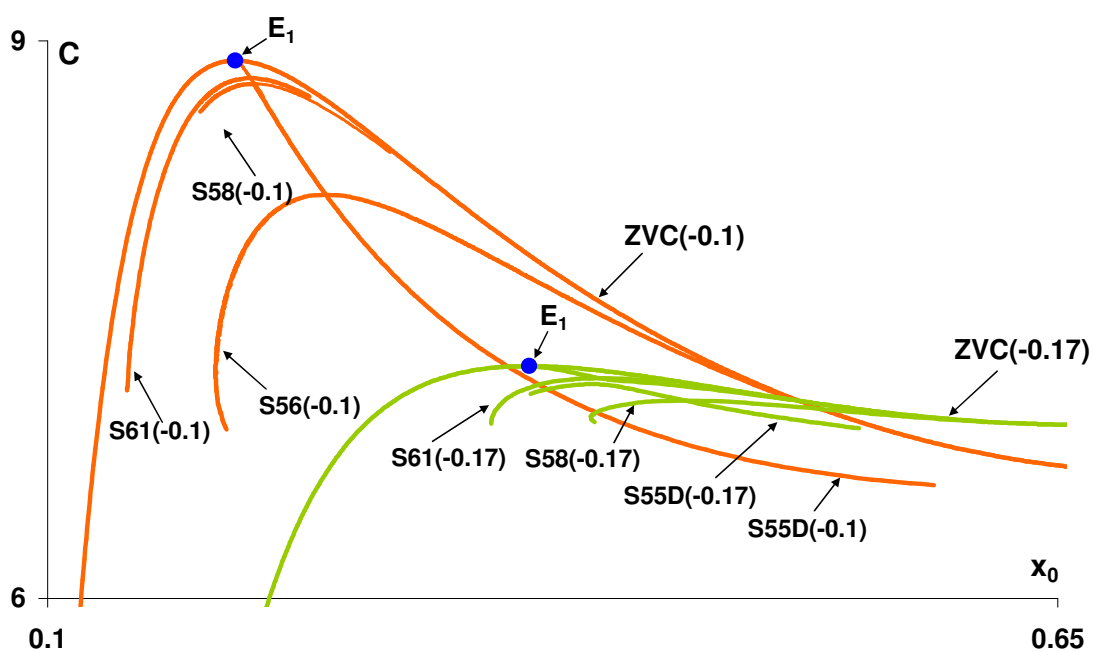
9.13.11 Παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων x_0-C και $x_0-T/2$ των οικογενειών των δένδροειδών κατανομών, στις περιοχές κάτω από τα σημεία ισοροπίας των ζωνών E_1 και E_2

(i) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0-C

Λαμβάνοντας υπόψη μας την παραμετρική εξέλιξη των διαγραμμάτων x_0-C αλλά και των θέσεων ισοροπίας, όπως αυτά αναπτύχθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια, είναι αναμενόμενο το ότι αυξάνοντας κατά απόλυτη τιμή την παράμετρο e και διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β , θα έχουμε μία μετατόπιση των χαρακτηριστικών καμπύλων προς χαμηλότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C (Σχήμα 9.107), της αυτής τάξης μεγέθους με αυτές της παραμετρικής εξέλιξης των διαγραμμάτων x_0-C (βλέπε Κεφάλαιο 5). Η μετατόπιση αυτή συχνά μας εμποδίζει να εξετάσουμε την παραμετρική μεταβολή των τροχιών για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου e , αφού δεν καθίσταται δυνατό να λάβουμε ίδιες τιμές της σταθεράς C για δύο όμοιες οικογένειες.



(α)

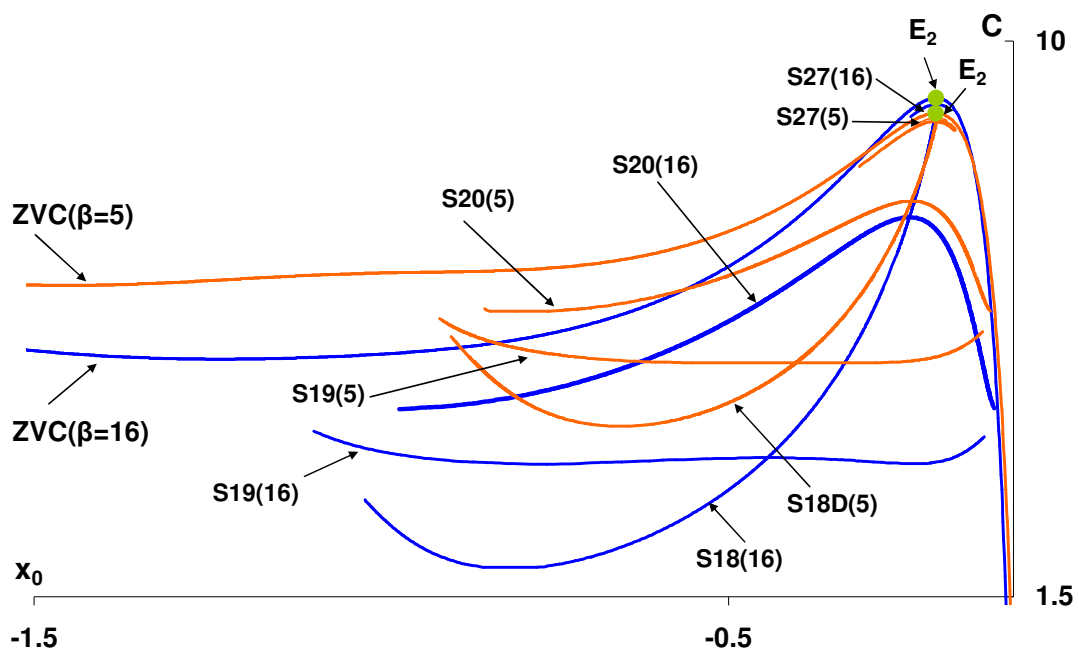


(β)

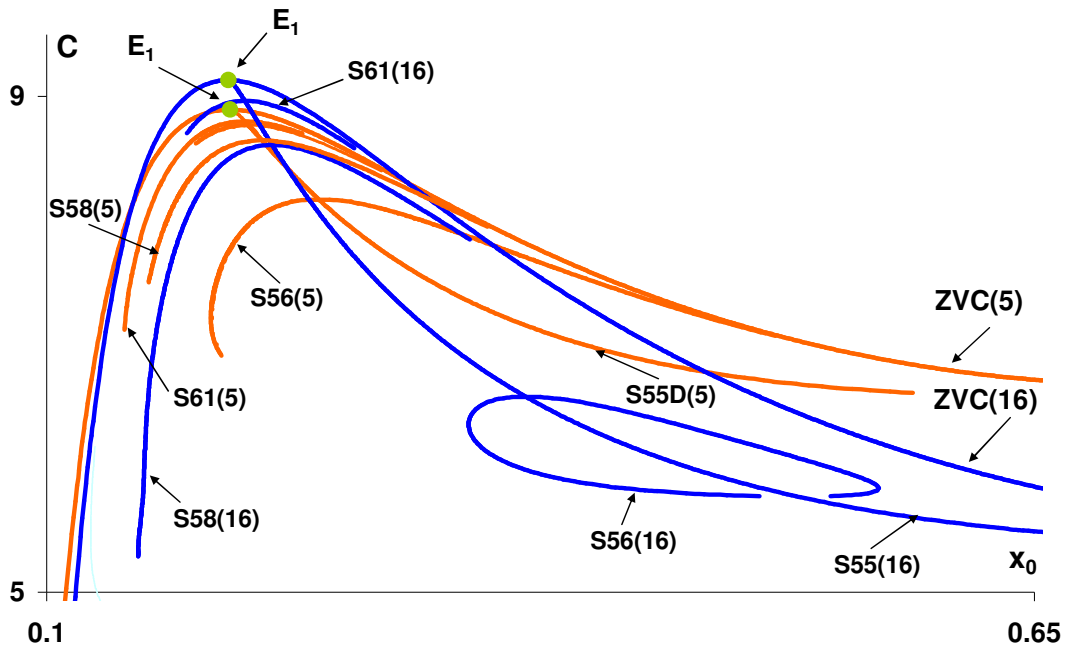
Σχήμα 9.107. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων των δενδροειδών κατανομών με την παράμετρο e ($e=-0.1, -0.17$) για $\beta=5$. (α) Όταν $x_0 < 0$ και (β) όταν $x_0 > 0$

Να υπενθυμίσουμε ότι για σταθερή τιμή της αρνητικής παραμέτρου e , όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου μάζας β , οι Ιακωβιανές σταθερές C_{E1} και C_{E2} των θέσεων ισορροπίας των αντίστοιχων ζωνών αυξάνονται και οι ενεργειακές στάθμες τους τείνουν να συσσωρευτούν σε μια μικρή περιοχή τιμών. Αυτό δείχνεται στο Σχήμα 9.108, όπου φαίνεται επίσης ότι αυτή η οριακή συσσώρευση προκαλεί μεταβολές στις σχετικές θέσεις των χαρακτηριστικών καμπύλων των οικογενειών για κάθε τιμή της παραμέτρου β , όχι όμως με τον ίδιο τρόπο για όλες.

Αυτό γίνεται εμφανές στο Σχήμα 9.108α παρατηρώντας τις θέσεις των χαρακτηριστικών της οικογένειας S27 καθώς και στο Σχήμα 9.108β παρατηρώντας τις αντίστοιχες θέσεις των χαρακτηριστικών της οικογένειας S61 για $e=-0.1$ και $\beta=5$ (μπλε καμπύλες) και $\beta=16$ (κόκκινες καμπύλες). Και για τις δύο αυτές οικογένειες παρατηρούμε ότι με την αύξηση της παραμέτρου β , οι χαρακτηριστικές τους μετατοπίζονται σε υψηλότερες τιμές της σταθεράς C , ενώ το αντίθετο συμβαίνει για οικογένειες που βρίσκονται στις χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες της περιοχής, όπως λ.χ. συμβαίνει για τις χαρακτηριστικές των οικογενειών S20 (Σχήμα 9.108α) και S58 (Σχήμα 9.108β) οι οποίες μετατοπίζονται σε χαμηλότερες τιμές ενέργειας. Προφανώς για πολύ μεγάλες τιμές της παραμέτρου μάζας β , οι ενεργειακές αποστάσεις μεταξύ ίδιων οικογενειών θα είναι πολύ μικρές.



(α)

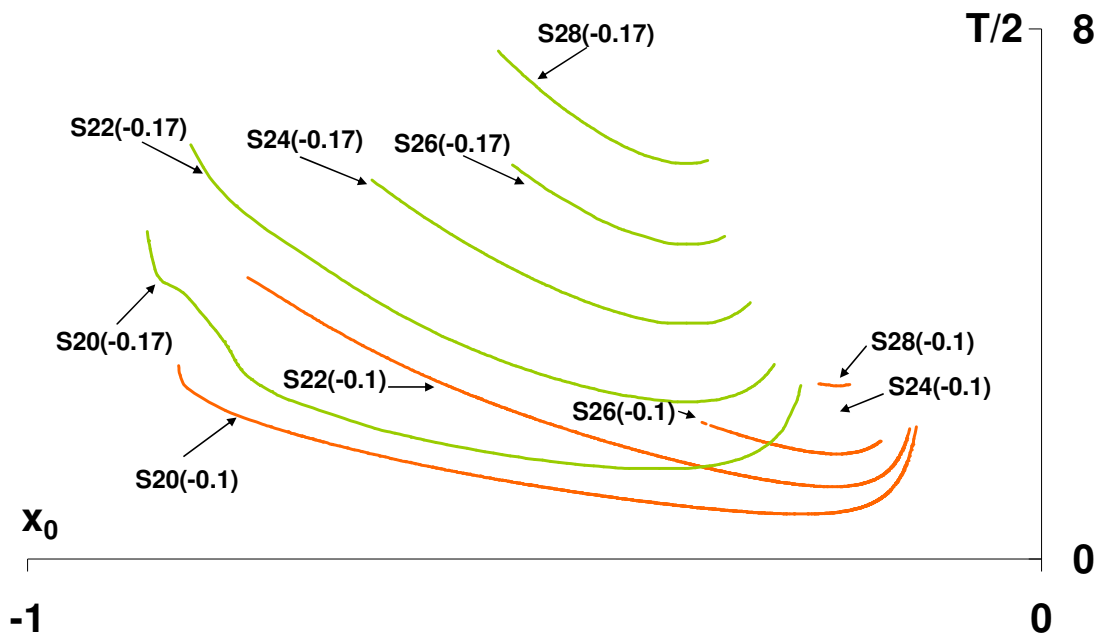


(β)

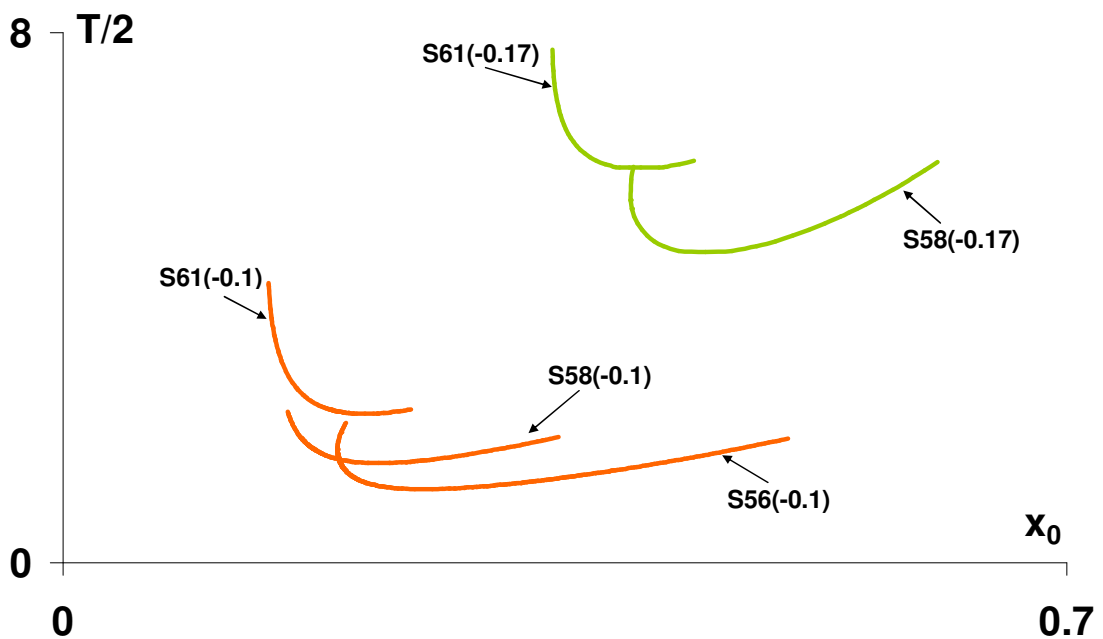
Σχήμα 9.108. Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων των δενδροειδών κατανομών με την παράμετρο $\beta (=5, 16)$ για $e = -0.1$. (α) Όταν $x_0 < 0$ και (β) όταν $x_0 > 0$

(ii) Παραμετρική μεταβολή των χαρακτηριστικών καμπύλων $x_0 - T/2$

Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο μάζας β και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της παραμέτρου Man_{ev} e , παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $x_0 - T/2$ των οικογενειών των δενδροειδών κατανομών, μετατοπίζονται προς μεγαλύτερες τιμές της περιόδου και μάλιστα όσο οι οικογένειες πλησιάζουν προς τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 και E_1 , τόσο πιο μεγάλη είναι η μετατόπιση προς υψηλότερες τιμές της περιόδου (Σχήμα 9.109).



(α)

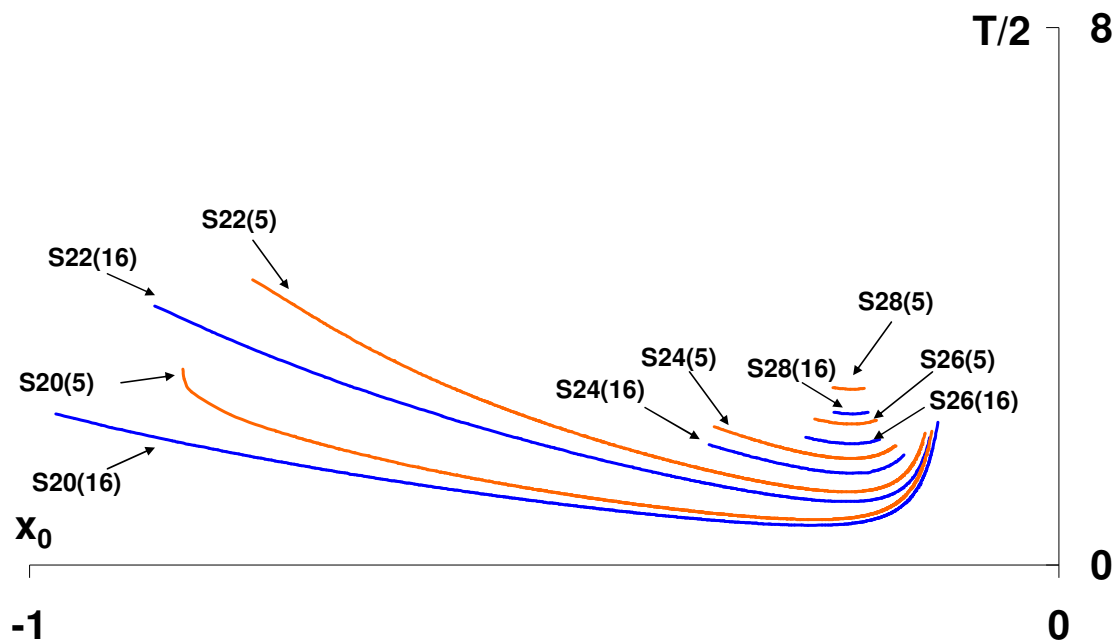


(β)

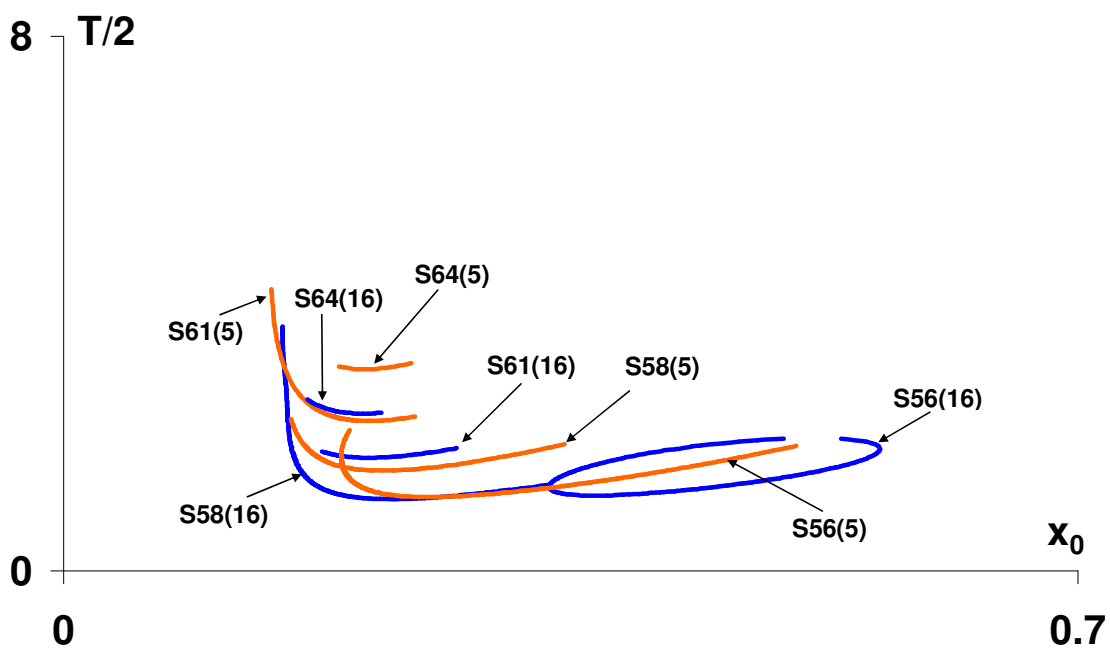
Σχήμα 9.109. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων x_0 - $T/2$ των δενδροειδών κατανομών με την παράμετρο e ($e=-0.1, -0.17$) για $\beta=5$. (α) Όταν $x_0 < 0$ και (β) όταν $x_0 > 0$

Αντίθετα, διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β και αυξάνοντας την παράμετρο e , παρατηρούμε ότι οι καμπύλες x_0 - $T/2$ της ομάδας αυτής,

μετατοπίζονται προς μικρότερες τιμές της περιόδου για την ίδια αρχική θέση x_0 . Αν και πρόκειται για μικρή μετατόπιση των καμπύλων προς χαμηλότερες τιμές της περιόδου και εδώ όσο οι οικογένειες πλησιάζουν προς τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 και E_1 , τόσο πιο μεγάλη είναι η μετατόπιση προς χαμηλότερες τιμές της περιόδου (Σχήμα 9.110).



(α)



(β)

Σχήμα 9.110. Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $x_0-T/2$ των δενδροειδών κατανομών με την παράμετρο β για $e=-0.1$. (α) Όταν $x_0 < 0$ και (β) όταν $x_0 > 0$

9.14 Οικογένειες που εξελίσσονται εντός της περιοχής R_0 του φασικού χώρου x_0-C , της περίπτωσης για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$. Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης

Όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας εξελίσσονται κοντά στη βάση της «καμινάδας» που δημιουργούν οι χαρακτηριστικές των S68 και S69, στην περιοχή R_0 του διαγράμματος x_0-C για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$ όπου $x_0 > 0$ και $C > 0$ (Σχήμα 9.23δ).

Στη μεγέθυνση της περιοχής R_0 που φαίνεται στο Σχήμα 9.111, διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για τρεις κύριες οικογένειες (S90, S91 και S92), εκ των οποίων οι δύο (S90 και S91) διακλαδίζονται και με άλλες οικογένειες απλών περιοδικών τροχιών, ενώ η τρίτη (S92) εξελίσσεται μόνη της χωρίς να έρχεται σε επαφή με τις υπόλοιπες, έχοντας μορφή «άγκιστρου» παρόμοια με αυτήν της S73. Συγκεκριμένα από την S90 πηγάζουν τρεις άλλες οικογένειες απλών περιοδικών τροχιών (S90A, S90B και S90G), ενώ από την S91 πηγάζει η S91A (Σχήματα 9.112α και 9.113α).

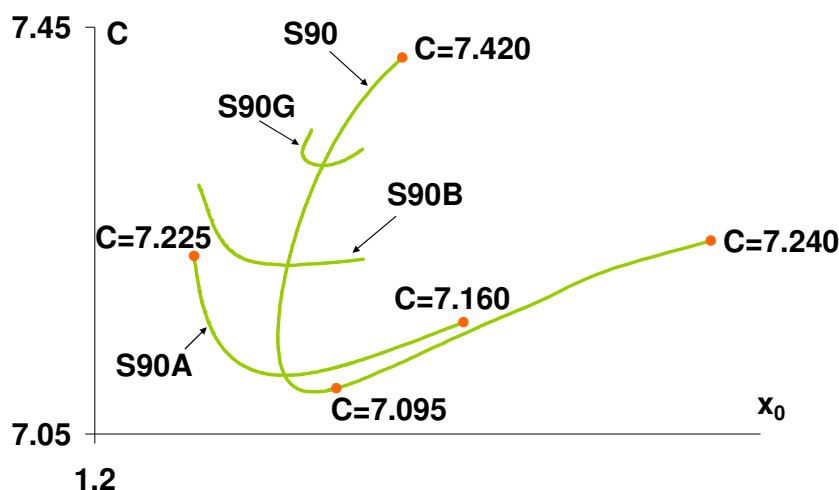


Σχήμα 9.111. Μεγέθυνση της περιοχής R_0 του διαγράμματος x_0-C για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$

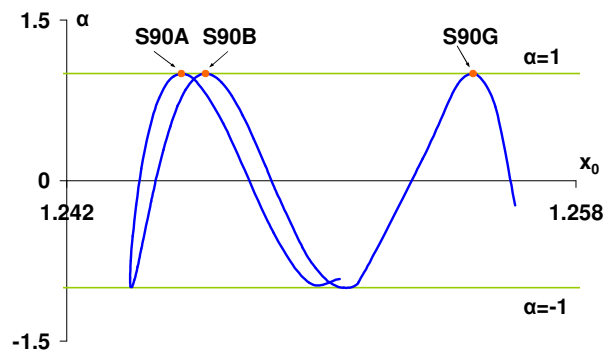
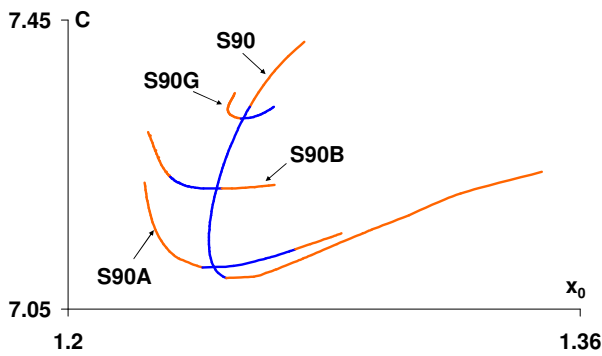
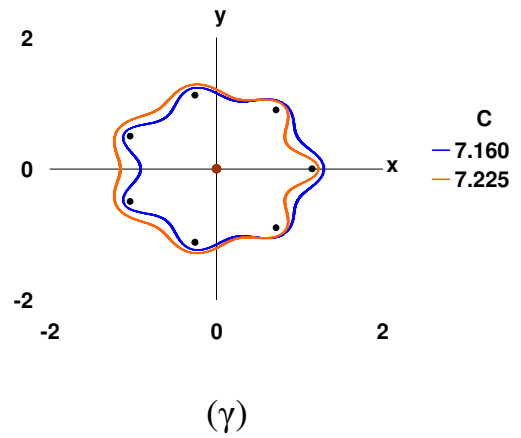
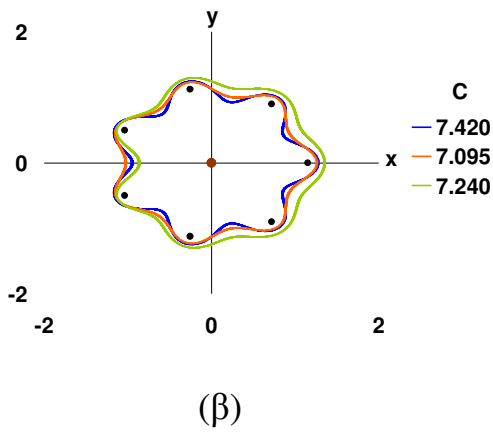
9.14.1 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης των οικογενειών (S90-S90A-S90B-S90G) και (S91-S91A). Ευστάθεια

Από τις κύριες οικογένειες S90 και S91 αλλά και από τις διακλαδώσεις αυτών (Σχήμα 9.112α και Σχήμα 9.113α), προκύπτουν ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου, όπου το μικρό σώμα κινείται εξ ολοκλήρου στο εξωτερικό του φανταστικού κύκλου των primaries (Σχήματα 9.112β,γ και 9.113β,γ). Για την S90 και τις τεμνόμενες με αυτήν οικογένειες, η ημιπερίοδος μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών 3.56 (M) και 5.43 (L), ενώ για τις τροχιές των S91- S91A, η ημιπερίοδος κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 2.21 (M) και 2.96 (M). Στο τελευταίο ζεύγος τροχιών, παρατηρήσαμε μεγάλη σχετικά διαφορά ανάμεσα στην τιμή της αρχικής ταχύτητας και σε αυτήν στην ημιπερίοδο.

Όσον αφορά στην ευστάθεια των τροχιών αυτής της ομάδας, στα Σχήματα 9.112δ και 9.113δ παραθέτουμε τις χαρακτηριστικές τους καμπύλες στις οποίες διακρίνονται τα τμήματα από τα οποία προκύπτουν οι ευσταθείς και ασταθείς τροχιές. Ειδικότερα για τις τροχιές της οικογένειας S90 στο Σχήμα 112ε παρουσιάζουμε το διάγραμμα ευστάθειας α - x_0 του ευσταθούς τμήματος της οικογένειας, από το οποίο επιβεβαιώνουμε την ύπαρξη των τριών οικογενειών απλών περιοδικών τροχιών που πηγάζουν από αυτήν.

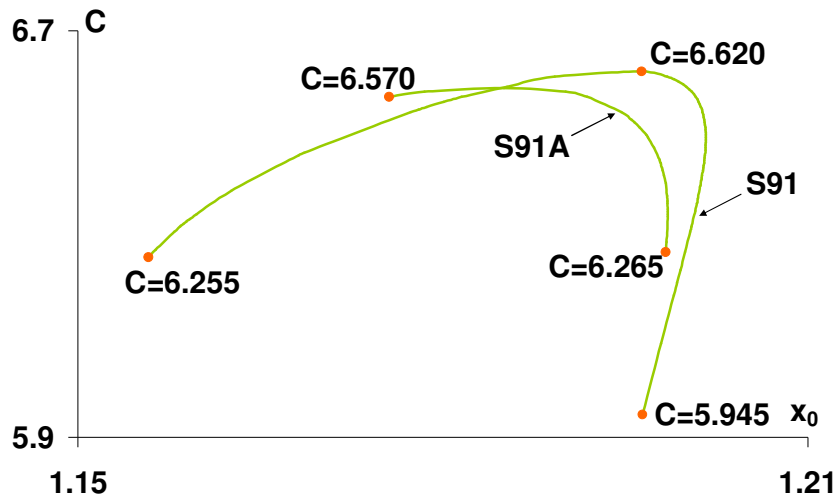


(α)

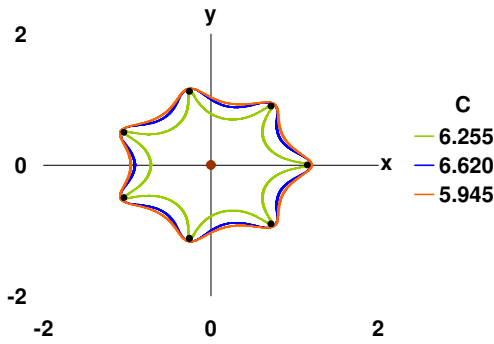


(β) (γ) (δ) (ε)

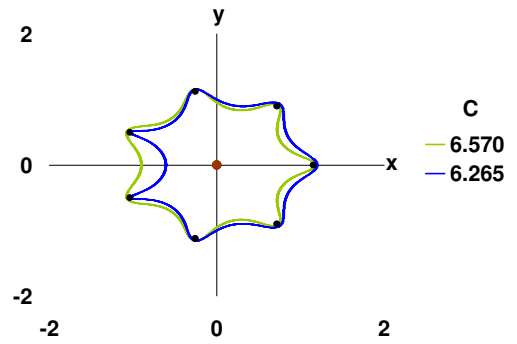
Σχήμα 9.112. Οικογένειες S90, S90A, S90B και S90G για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$. (α) Χαρακτηριστικές καμπύλες με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα, (β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικών, (δ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (ε) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της S90, με σημειωμένες τις θέσεις των τριών κρίσιμων περιοδικών τροχιών πρώτου είδους, που πηγάζουν από αυτήν



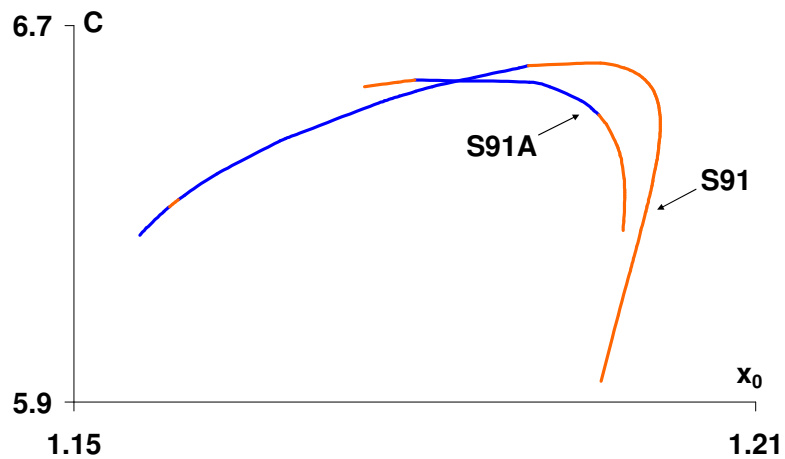
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 9.113. Οικογένειες S91 και S91A για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$.

(α) Χαρακτηριστικές καμπύλες με σημειωμένες τις τροχιές που

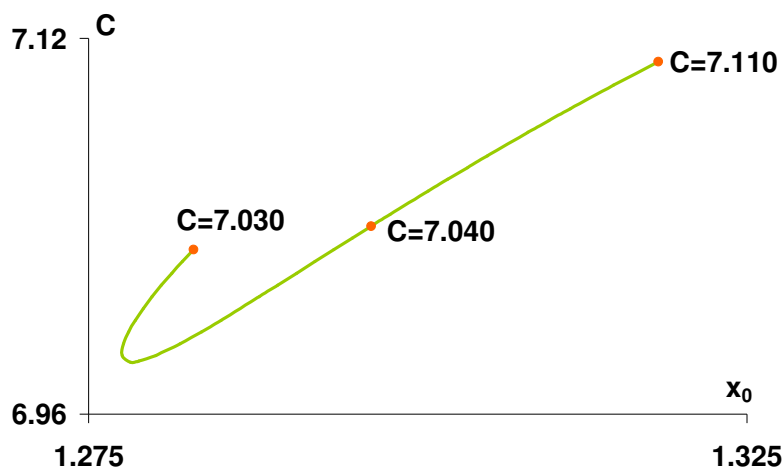
απεικονίζονται στα επόμενα σχήματα, (β)-(γ) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικών, (δ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας

9.14.2 Μορφή και εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης της οικογένειας S92. Ευστάθεια

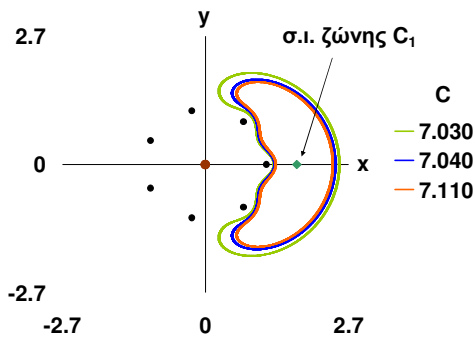
Οι τροχιές της οικογένειας S92, αν και δεν εκπορεύονται από κάποιο σημείο ασταθούς ισορροπίας, περικλείουν στο εσωτερικό τους το σημείο ισορροπίας της ζώνης C_1 και κανένα από τα primaries, ενώ τείνουν να εγκλωβίσουν με το εξωτερικό τους μέρος τα primaries P_1 , P_2 και P_7 (Σχήμα 9.114β). Παρουσιάζουν ασταθή συμπεριφορά, γεγονός το οποίο καθίσταται εμφανές από το αντίστοιχο διάγραμμα ευστάθειας x_0 -α του Σχήματος 9.114δ.

Στη συγκεκριμένη περιοχή του φασικού χώρου εντοπίσαμε και τροχιές όμοιας μορφής, που με το εξωτερικό τους μέρος τείνουν να εγκλωβίσουν εκτός των P_1 , P_2 , P_7 και τα P_3 και P_6 (Σχήμα 9.114γ).

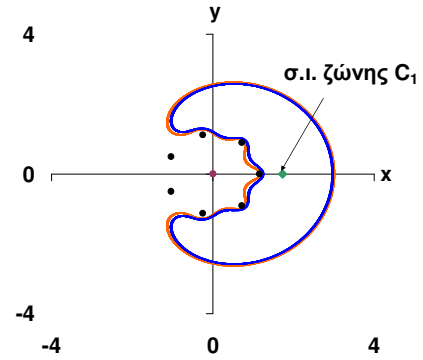
Στον Πίνακα 9.19 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της περιοχής R_0 .



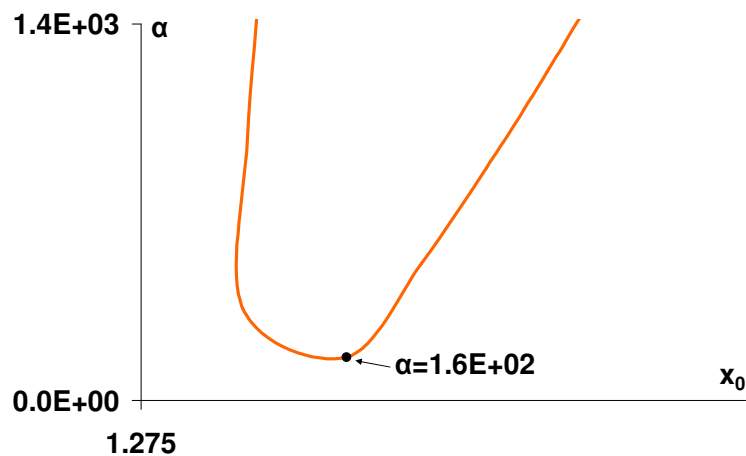
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 9.114. Οικογένεια S92 για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) μορφή τροχιών στην περιοχή της S92 και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α .

Πίνακας 9.19. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των απλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της περιοχής R_0 στο διάγραμμα x_0 - C , για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.27$

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
S92	7.419989804	1.273858466	1.877698096	-0.951830949	-0.339772111	5.429493336	U
	7.094989782	1.248495410	2.276418902	-1.005806833	-0.675026042	3.559590593	S
	7.239979868	1.348037927	1.348328020	-0.867789481	-0.492918582	4.715791192	U

S90A	7.224989851	1.223904626	2.693004833	-1.160458146	-0.521758785	4.410551599	U
	7.119019660	1.260927681	2.104034832	-0.961969756	-0.648492201	3.633704843	S
	7.159979789	1.288619238	1.800442810	-0.916990475	-0.597748701	3.864185961	U
S90B	7.294989829	1.224981959	2.656037021	-0.854233222	-0.420848195	4.953639715	U
	7.217009803	1.242325391	2.344895248	-0.957640369	-0.566442950	3.937047380	S
	7.222009747	1.264559229	2.035008351	-1.013293855	-0.573911269	3.980364588	U
S90G	7.329999741	1.264334908	2.011021661	-0.903924146	-0.423143229	4.614655554	S
	7.314999786	1.256979736	2.108116731	-0.946667214	-0.467036808	4.431701544	S
	7.348999796	1.252089093	2.167453856	-1.146321920	-0.398058169	4.897282213	U
S91	6.254870820	1.155797082	13.425214700	-0.724309020	-1.047826399	2.962214333	S
	6.319980599	1.158663867	9.885676891	-0.749901524	-1.028410361	2.905423436	U
	6.549978245	1.178661475	4.771681552	-0.851748833	-0.959210605	2.786173322	S
	6.619983228	1.196321289	3.642332517	-0.915504466	-0.946784028	2.751063204	U
	5.944957912	1.196380278	3.731326475	-0.963345950	-1.262980982	2.212101348	U
S91A	6.569988374	1.175578760	5.086078640	-0.904928613	-0.969391264	2.767990704	U
	6.539970527	1.194662329	3.727898668	-0.799609290	-0.940434211	2.752457022	S
	6.264904909	1.198314215	3.607327494	-0.612941827	-0.984414365	2.619997046	U
S92	7.029989966	1.282971564	1.888124854	2.518078641	-1.491512065	5.584146380	U
	7.039989977	1.296454124	1.766022572	2.444130577	-1.392850538	5.029313408	U
	7.109989985	1.318281624	1.579958007	2.394971018	-1.302758442	5.163991745	U

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ-ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

10.1 Εισαγωγή

- Όπως στην περίπτωση των απλών περιοδικών τροχιών, έτσι και στις διπλές και τριπλές περιοδικές τροχιές θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια διάκριση σε κατηγορίες (π.χ δορυφορικού ή διαπλανητικού τύπου, κ.λ.π, απλές ή πολλαπλά συμμετρικές, ορθές ή ανάδρομες).
- Επειδή, όσο αυξάνει η πολλαπλότητα της περιοδικής τροχιάς τόσο οι μορφές των τροχιών γίνονται συνθετότερες και οι πιθανότητες εγγύτατης προσέγγισης του μικρού σώματος με ένα ή περισσότερα primaries αυξάνουν, συχνά οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών εμφανίζουν μικρότερο μήκος στο διάγραμμα x_0-C από αυτό των απλών περιοδικών τροχιών (τηρώντας πάντα την αρχή του φυσικού τερματισμού του Strömberg).
- Όπως οι απλές, έτσι και οι πολλαπλά περιοδικές (διπλές και τριπλές) υπολογίσθηκαν για θετικές τιμές της αρχικής ταχύτητας $\dot{y}_0 > 0$.
- Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε για την εφαρμογή, χαρακτηρίζεται από τις τιμές των παραμέτρων $\nu=7$, $\beta=5$, $e=-0.1$, και συνεπώς βρίσκεται στην περιοχή II του διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος 9.22 του προηγούμενου κεφαλαίου, χαρακτηρίζεται δε από πέντε ζώνες ισορροπίας και αντίστοιχα πέντε ακρότατα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας του φασικού διαγράμματος x_0-C .
- Όπως και στη μελέτη των απλών περιοδικών τροχιών, έτσι και εδώ, έχοντας ως αποκλειστικό κριτήριο την «χωροταξική» τους κατανομή στο επίπεδο x_0-C ,

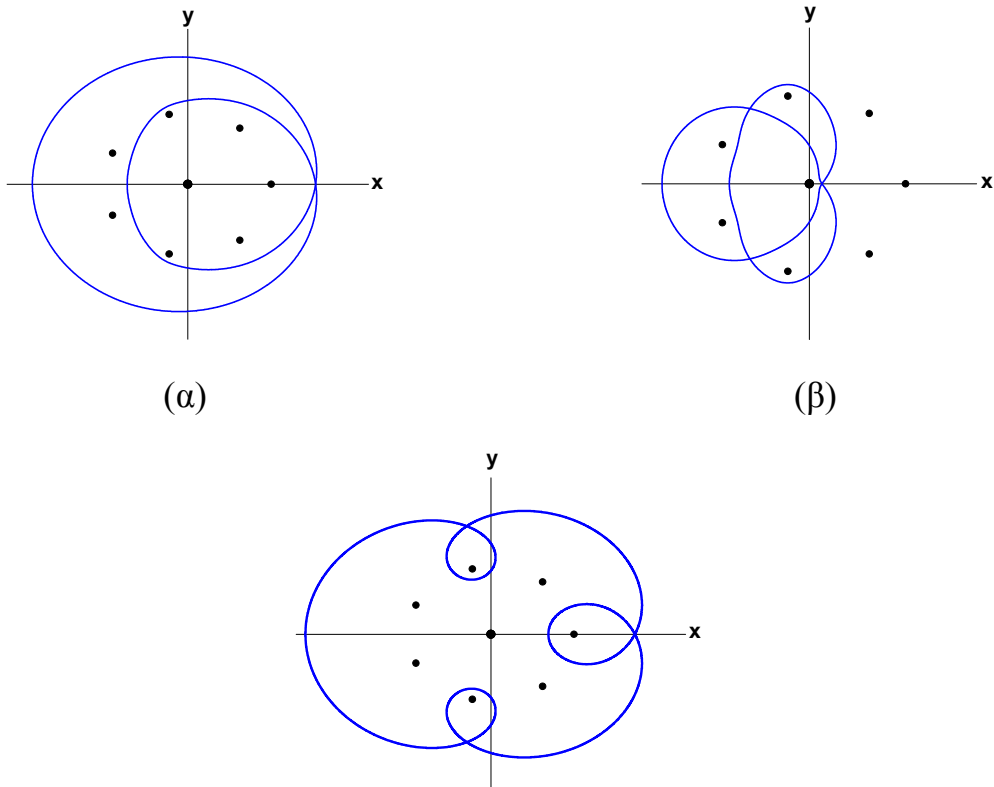
ομαδοποιήσαμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών που εμφανίζονται. Κάθε ομάδα των διπλών περιοδικών τροχιών χαρακτηρίζεται με το σύμβολο G, ενώ για κάθε ομάδα τριπλών περιοδικών τροχιών χρησιμοποιούμε το σύμβολο H. Για την διακριτοποίηση των ομάδων χρησιμοποιούμε συμπληρωματικά έναν αριθμό δίπλα στα σύμβολα G και H.

- Κατά τη μελέτη των διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών που έχουμε ομαδοποιήσει, εξετάζουμε την εξέλιξή τους, κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπύλων τους, καθώς επίσης σχεδιάζουμε και σχολιάζουμε τις αντίστοιχες καμπύλες $x_0-T/2$, $C-T/2$. Στα σχήματα στα οποία φαίνονται οι χαρακτηριστικές καμπύλες των μελών της κάθε ομάδας, έχουμε σημειώσει με έγχρωμες κουκίδες τις τροχιές οι οποίες ενδεικτικά σχεδιάζονται στο επίπεδο xy .
- Όσον αφορά στη μελέτη της ευστάθειας των τροχιών αυτών, στους πίνακες που παραθέτουμε με τις ενδεικτικές τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών τους, όπως και στις απλές περιοδικές τροχιές έτσι κι εδώ, στην τελευταία στήλη χαρακτηρίζουμε την ευστάθεια τους ως ευσταθή (S Stable) ή ως ασταθή (U Unstable). Όπου κρίνουμε σκόπιμο και για την πληρότητα της μελέτης μας, παραθέτουμε διαγράμματα ευστάθειας x_0-a ή και τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές καμπύλες όπου φαίνονται τα τμήματα από τα οποία προκύπτουν ευσταθείς ή ασταθείς τροχιές. Κατά κύριο λόγο διαγράμματα ευστάθειας χρησιμοποιούμε κατά τη μελέτη των τροχιών των οικογενειών που βρίσκονται στην περιοχή κάτω από τα σημεία ισορροπίας E_1 και E_2 (δενδροειδείς κατανομές).
- Η μελέτη της παραμετρικής μεταβολής των τροχιών της κατηγορίας αυτής εντάσσεται στο μελλοντικό σχεδιασμό της έρευνας των επιπλέον χαρακτηριστικών του δυναμικού αυτού συστήματος.

10.2 ΔΙΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

10.2.1 Γενικά χαρακτηριστικά των διπλών περιοδικών τροχιών και κατανομές των χαρακτηριστικών τους καμπύλων, για την περίπτωση που θα μελετηθεί, στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C

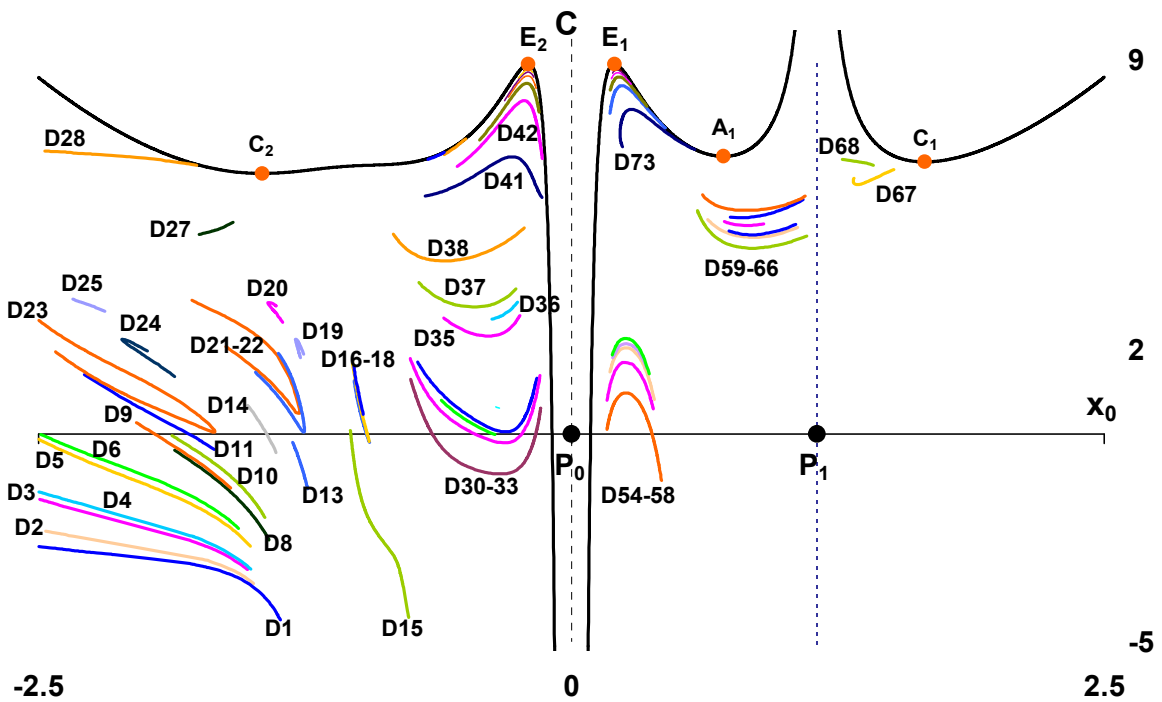
Οι διπλές περιοδικές τροχιές παρουσιάζουν δύο βασικούς βρόχους (loops) που σε κάποιες περιπτώσεις ο ένας (ο μεγαλύτερος) εγκλωβίζει πλήρως τον δεύτερο (μικρότερο) (nested loops) (Σχήμα 10.1α), ενώ σε κάποιες άλλες, ο ένας βρόχος επικαλύπτει μερικώς τον δεύτερο (Σχήμα 10.1β). Βέβαια, ενδέχεται κατά μήκος της τροχιάς να εμφανίζονται και άλλοι μικρότεροι δευτερεύοντες βρόχοι (Σχήμα 10.1γ). Στην περίπτωση αυτή υπάρχει άρτιο πλήθος δευτερευόντων βρόχων που βρίσκονται σε συμμετρική θέση ως προς τον άξονα συμμετρίας Ox . Σε σχέση με τις απλές περιοδικές τροχιές, οι διπλές περιοδικές τροχιές χαρακτηρίζονται γενικά από μεγαλύτερες περιόδους όπως είναι φυσικό, ενώ το ίδιο παρατηρείται με τις διαστάσεις τους (μέγιστη απόσταση δύο σημείων της τροχιάς).



(γ)

Σχήμα 10.1. Μορφές διπλών περιοδικών τροχιών. (α) nested loops, (β) βρόχοι διπλών περιοδικών τροχιών μερικώς επικαλυπτόμενοι, (γ) διπλή περιοδική τροχιά με δευτερεύοντες βρόχους

Στην παρούσα διατριβή, εξετάσαμε αναλυτικά τις συμμετρικές διπλές περιοδικές τροχιές για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$, ενώ στο Σχήμα 10.2 που ακολουθεί δίνουμε την κατανομή των οικογενειών αυτών στην περιοχή του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών x_0-C , που ορίζεται όπως και στην περίπτωση της αναζήτησης των απλών περιοδικών τροχιών, από τις τιμές, $x_0 \in [-2.5, 2.5]$ και $C \in [-6, 9]$.



Σχήμα 10.2. Χαρακτηριστικές καμπύλες οικογενειών διπλών περιοδικών τροχιών στο επίπεδο αρχικών συνθηκών x_0-C , για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

Στον Πίνακα 10.1 που ακολουθεί, αναφέρονται οι ομάδες των διπλών περιοδικών τροχιών που δημιουργήσαμε, καθώς και οι οικογένειες-μέλη που περιέχονται σε καθεμία από αυτές και των οποίων τα χαρακτηριστικά θα μελετήσουμε. Τέλος να σημειώσουμε ότι θα ερευνηθούν ξεχωριστά οι οικογένειες D28, D51, D52 και D67, που δεν περιέχονται σε κάποια ομάδα.

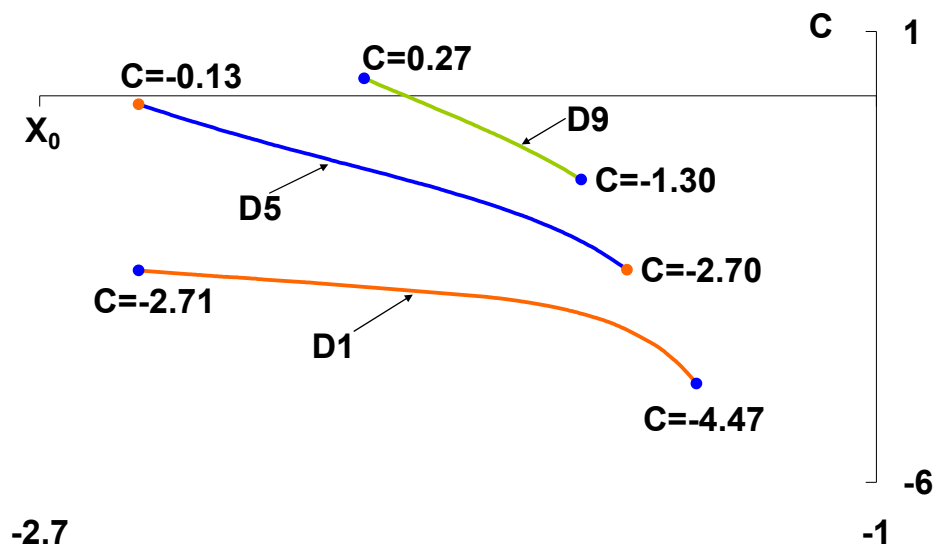
Πίνακας 10.1. Ομαδοποίηση οικογενειών διπλών περιοδικών τροχιών

ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ-ΜΕΛΗ
G1	D1-D5-D9
G2	D15-D21-D22-D24
G3	D30-D31-D33
G4	D54-D56-D59-D66
G5	Δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2

10.3 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G1 (οικογένειες D1-D5-D9)

10.3.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

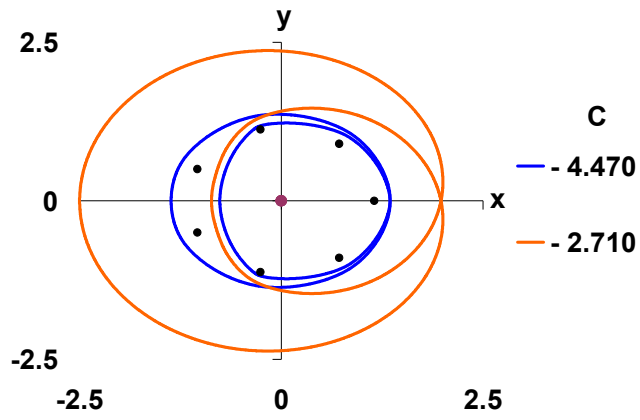
Από όλες τις χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας που παρουσιάζονται στο Σχήμα 10.3, προκύπτουν τροχιές ανάδρομες διαπλανητικού τύπου. Από αυτές, η χαρακτηριστική D1 αναπτύσσεται εξ ολοκλήρου στις αρνητικές τιμές των C και παρουσιάζει ακρότατο. Να επισημάνουμε εδώ ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες των διάφορων οικογενειών προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου Grid-Search και ενδεχομένως η ανάπτυξη κάποιων από τις καμπύλες να συνεχίζει είτε κατά το ένα άκρο, είτε και κατά το άλλο.



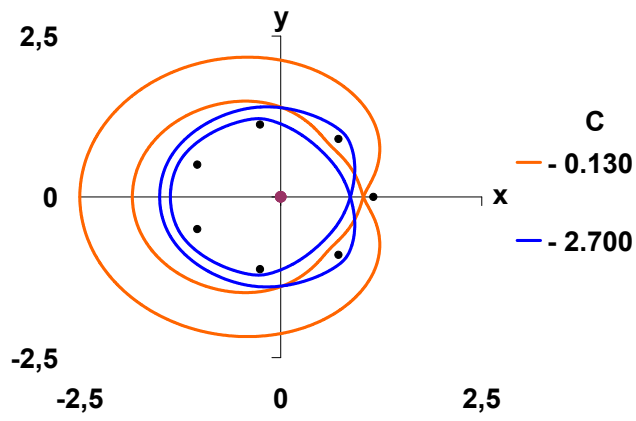
Σχήμα 10.3. Χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας οικογενειών G1, με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα 10.4

Οι τροχιές της οικογένειας D5 διαγράφονται έτσι ώστε να παραμένει έξω από αυτές το primary P_1 (Σχήμα 10.4β), ενώ οι τροχιές των οικογενειών D1 (Σχήμα 10.4α) και D9 (Σχήμα 10.4γ) περικλείουν όλα τα primaries.

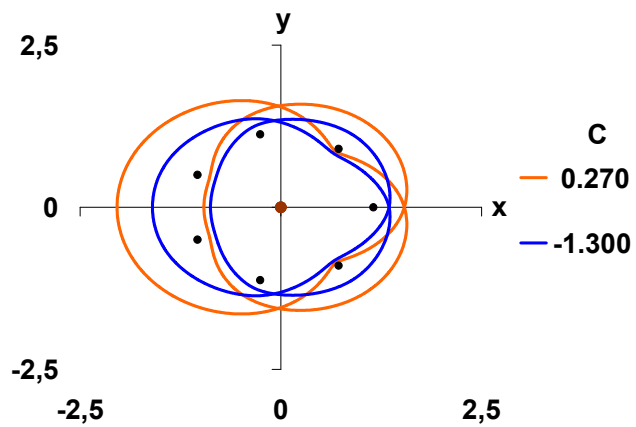
Τέλος, καθώς η σταθερά C ελαττώνεται, όλες οι τροχιές της ομάδας συρρικνώνονται και η ταχύτητα τους στην ημιπερίοδο ελαττώνεται. Στον Πίνακα 10.2 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 10.4. Εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της

χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) D1, (β) D5 και (γ) D9

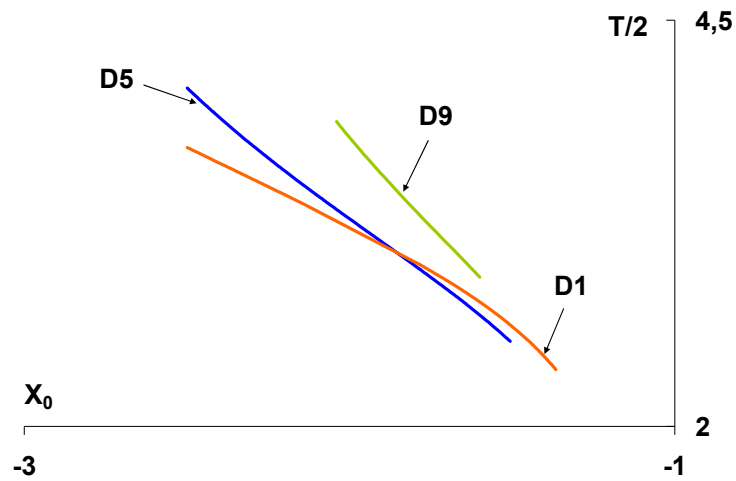
Πίνακας 10.2. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών G1

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
D1	-4.470027891	-1.365479063	3.278667780	-0.761442773	3.315920383	2.349023324	U
	-3.270000123	-1.661531387	3.104324152	-0.806549066	3.125404385	2.848416737	U
	-2.710000065	-2.498953037	3.358273096	-0.864627021	3.031183927	3.716174293	U
D5	-2.700003026	-1.506141559	2.995303359	-1.372186575	2.996249613	2.524548364	U
	-1.180000064	-2.015932846	2.857747961	-1.565003967	2.733941376	3.300637330	U
	-0.130000060	-2.498948820	2.949234009	-1.845040448	2.598489011	4.081930082	U
D9	-1.300007363	-1.599083866	2.759525065	-0.876077975	2.788447393	2.917845579	U
	-0.170000104	-1.902860868	2.627273554	-0.935275547	2.575833288	3.554695432	U
	0.270000030	-2.040105561	2.603329423	-0.958517674	2.488191871	3.875936822	U

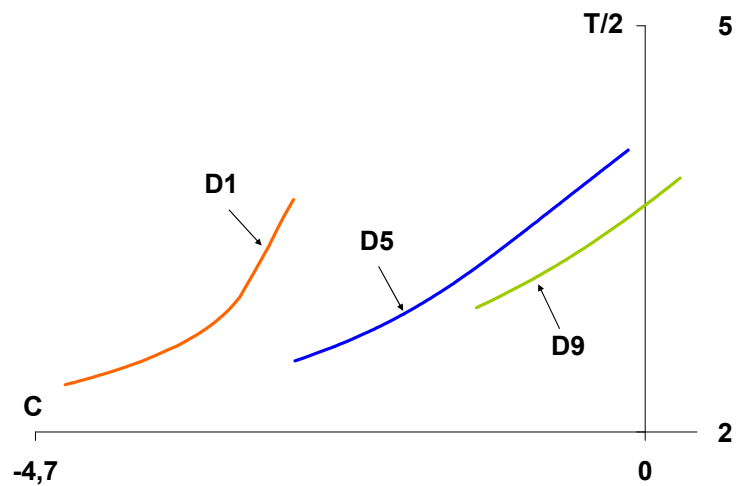
10.3.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών G1

Όσον αφορά στα διαγράμματα x_0 -T/2 παρατηρούμε ότι σε όλες τις οικογένειες της ομάδας, παρατηρούμε ότι η τιμή της περιόδου ελαττώνεται, όταν η τιμή της x_0 πλησιάζει στην αρχή των αξόνων (Σχήμα 10.5α), ενώ στα διάγραμμα C-T/2 παρατηρούμε ότι όταν αυξάνει η τιμή του C, αυξάνει η περίοδος (Σχήμα 10.5β).

Οι τροχιές της D1 χαρακτηρίζονται από ημιπεριόδους που κυμαίνονται από 2.35(M) έως 3.72(M), της D5 από ημιπεριόδους που κυμαίνονται από 2.52(M) έως 4.08(L) και τέλος της D9 από 2.92(M) έως 3.88(M).



(α)



(β)

Σχήμα 10.5. Καμπύλες (α) x_0 - $T/2$ και (β) C - $T/2$ των οικογενειών της ομάδας G1

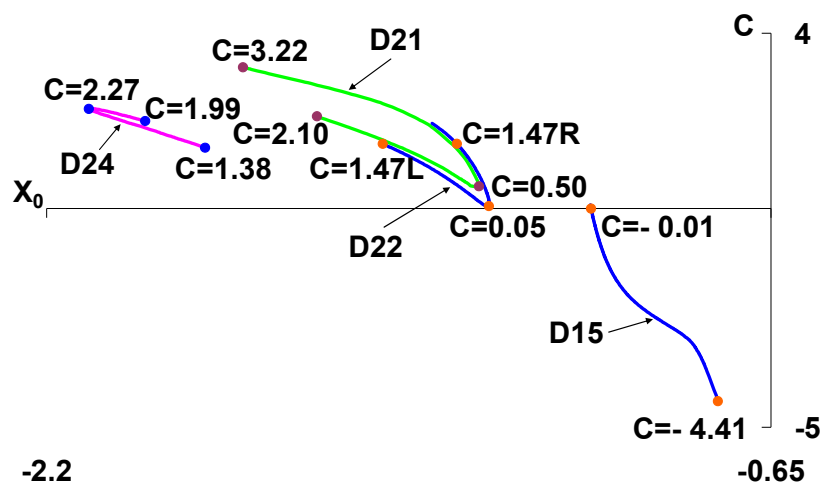
10.4 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G2 (οικογένειες D15-D21-D22-D24)

10.4.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Στο Σχήμα 10.6 παρατηρούμε την εξέλιξη των χαρακτηριστικών καμπύλων της ομάδας αυτής οι οποίες εκτός από την οικογένεια D15, αναπτύσσονται εξ ολοκλήρου στην περιοχή των θετικών τιμών της σταθεράς C . Οι χαρακτηριστικές των οικογενειών

D21 και D22 σχηματίζουν ανοιχτές «θηλιές» που σχεδόν ταυτίζονται, με τη δεύτερη να περικλείει την πρώτη. Αποτέλεσμα αυτής της εγγύτητας είναι για την ίδια τιμή της θέσης x_0 , να παίρνουν σχεδόν τις ίδιες τιμές για τη σταθερά C . Ανοιχτή «θηλιά» αλλά πολύ στενότερη από τις προηγούμενες και με αντίθετο προσανατολισμό, σχηματίζει η χαρακτηριστική της D24.

Και σε αυτή την ομάδα όλες οι τροχιές είναι ανάδρομες διαπλανητικού τύπου.

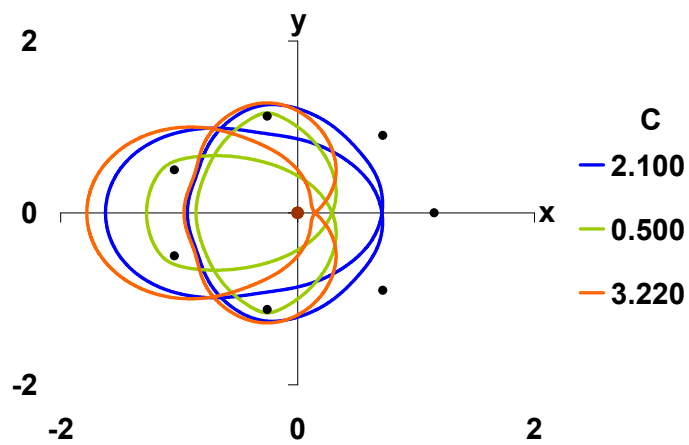
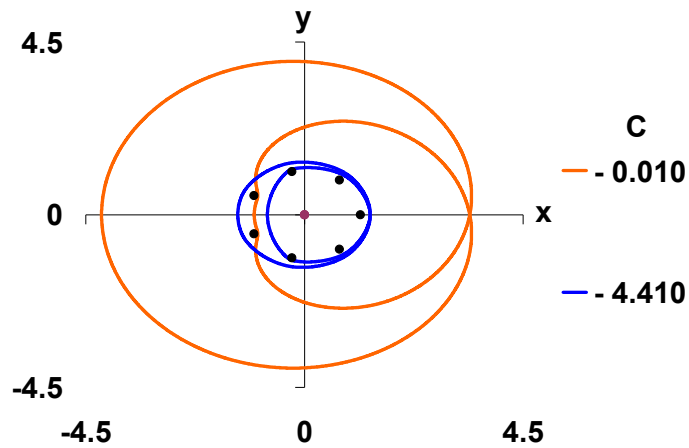


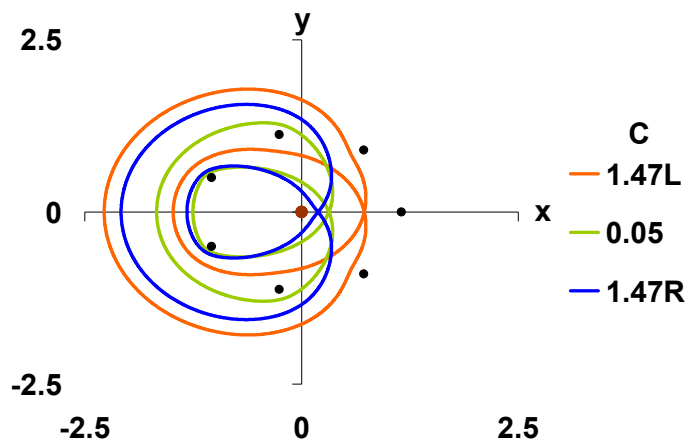
Σχήμα 10.6. Χαρακτηριστικές καμπύλες ομάδας οικογενειών G2, με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα 10.7

Οι τροχιές της οικογένειας D15 περικλείουν όλα τα primaries και συρρικνώνονται καθώς αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C (Σχήμα 10.7α). Οι τροχιές των D21- D22 δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους τα primaries P_1 , P_2 και P_7 και η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι στις τροχιές της D21 ο ένας βρόχος επικαλύπτει μερικώς τον δεύτερο (Σχήμα 10.7β), ενώ σε αυτές της D22 ο μεγαλύτερος βρόχος εγκλωβίζει πλήρως τον μικρότερο (Σχήμα 10.7γ). Και για τις δύο αυτές οικογένειες όταν η τιμή της σταθεράς C σε κάθε σκέλος τους μειώνεται, οι τροχιές τους συρρικνώνονται. Τέλος, οι τροχιές της οικογένειας D24 διαγράφονται με τέτοιο τρόπο ώστε να αφήνουν στο εξωτερικό

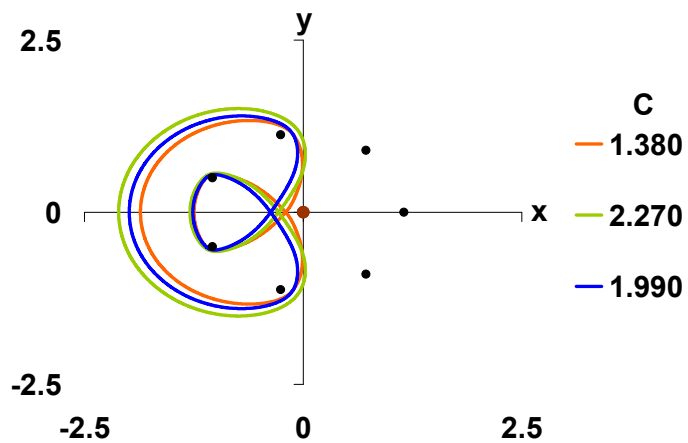
τους το κεντρικό σώμα P_0 και τα περιφερειακά primaries P_1 P_2 και P_7 (Σχήμα 10.7δ) και συρρικνώνονται όταν η τιμή της σταθεράς C μειώνεται και στα δύο σκέλη της.

Στον Πίνακα 10.3 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.





(γ)



(δ)

Σχήμα 10.7. Εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) D15, (β) D21, (γ) D22 και (δ) D24

Πίνακας 10.3. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών G2

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
D15	-4.410012166	-0.763281869	3.306652255	-1.371765435	3.269197132	2.363956946	U
	-1.000000048	-1.009466297	2.729594439	-3.838391090	4.150197074	5.065991637	U

	-0.010000067	-1.034943247	2.540413594	-4.174876343	4.336875164	5.480772669	U
D21	2.099999917	-1.621264525	2.057009455	-0.930780463	2.089410297	3.096920984	U
	0.500002549	-1.274748893	2.412638410	-0.856856820	2.445416193	1.942654043	U
	3.219979905	-1.779470772	1.814901967	-0.958207276	1.800325551	3.267054264	U
D22	1.469999953	-1.480641597	2.190210364	-2.276782397	2.505620323	3.607511854	U
	0.049999810	-1.253331577	2.506585749	-1.671846375	2.515383179	2.266255631	U
	1.469999889	-1.322175868	2.196980513	-2.081649601	2.384622453	2.865422323	U
D24	1.989997979	-1.988748905	2.220621531	-1.261690801	2.082826421	2.423916234	U
	2.269999800	-2.109657917	2.227877312	-1.294019942	2.010095878	2.691845760	U
	1.380000187	-1.860883614	2.295873781	-1.248441376	2.226166605	2.253126140	U

10.4.2 Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της ομάδας οικογενειών G2

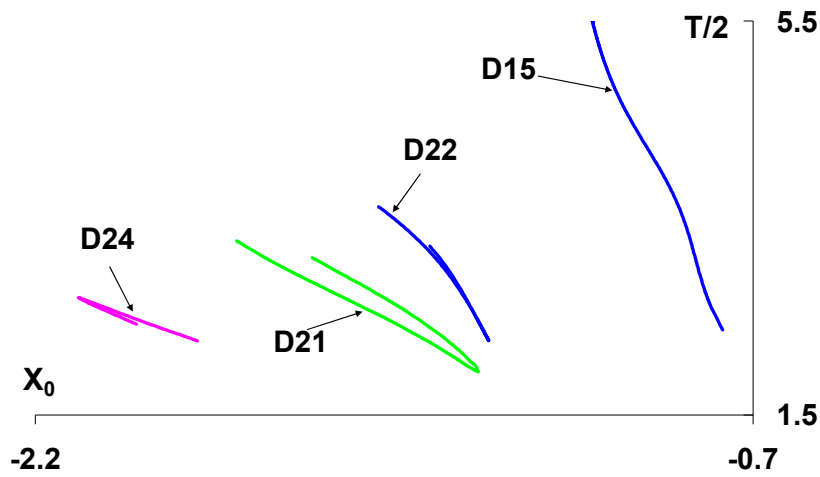
Για τις τροχιές της D15 η τιμή της περιόδου αυξάνεται καθώς το x_0 απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων (Σχήμα10.8α), ενώ όταν αυξάνει η τιμή της σταθεράς C, η περίοδος αυξάνει επίσης (Σχήμα10.8.β). Η ημιπερίοδος τους κυμαίνεται από 2.38(M) έως 5.48(L).

Αναφορικά με τις καμπύλες $x_0-T/2$ και $C-T/2$ των οικογενειών D21, D22 και D24, παρατηρούμε ότι εμφανίζουν ακρότατο και μάλιστα ακριβώς εκεί όπου παρουσιάζεται το ακρότατο και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C (Σχήμα 10.8).

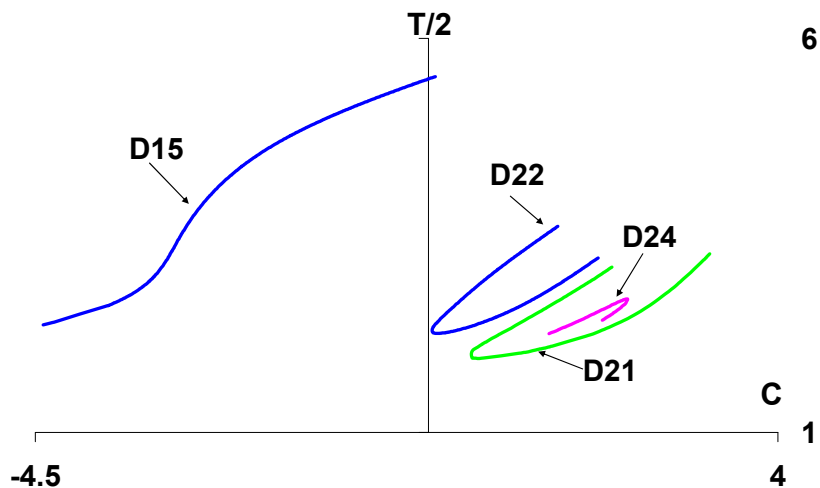
Για τις τροχιές των D21 και D22 στο διάγραμμα $x_0-T/2$, αριστερά του ακροτάτου, καθώς το x_0 πλησιάζει σε αυτό (και συνεπώς στην αρχή των αξόνων), η περίοδος ελαττώνεται. Το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακροτάτου όπου, καθώς το x_0 απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, η περίοδος αυξάνει (Σχήμα10.8.α). Στο διάγραμμα $C-T/2$ οι καμπύλες των D21 και D22 εμφανίζουν δύο σκέλη και η περίοδος αυξάνει και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C (Σχήμα10.8.β). Οι τροχιές των D21 και D22 χαρακτηρίζονται από μικρές και μεσαίες τιμές ημιπεριόδου και για την

μεν πρώτη κυμαίνονται ανάμεσα στις τιμές 1.94 (S) και 3.27 (M), ενώ για τη δεύτερη μεταξύ των τιμών 2.26 (M) έως 3.61 (M).

Όσον αφορά στην οικογένεια D24, παρατηρούμε στο διάγραμμα $x_0-T/2$, ότι δεξιά του ακροτάτου καθώς το x_0 απομακρύνεται από αυτό πλησιάζοντας προς την αρχή των αξόνων, η περίοδος ελαττώνεται, ενώ το ίδιο συμβαίνει και δεξιά του ακροτάτου (Σχήμα 10.8.β). Οι τιμές της ημιπεριόδου κυμαίνονται από 2.25(M) έως 2.69(M). Στο διάγραμμα C-T/2 η καμπύλη της D24 εμφανίζει δύο σκέλη και η περίοδος αυξάνει και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C (Σχήμα 10.8.β).



(α)



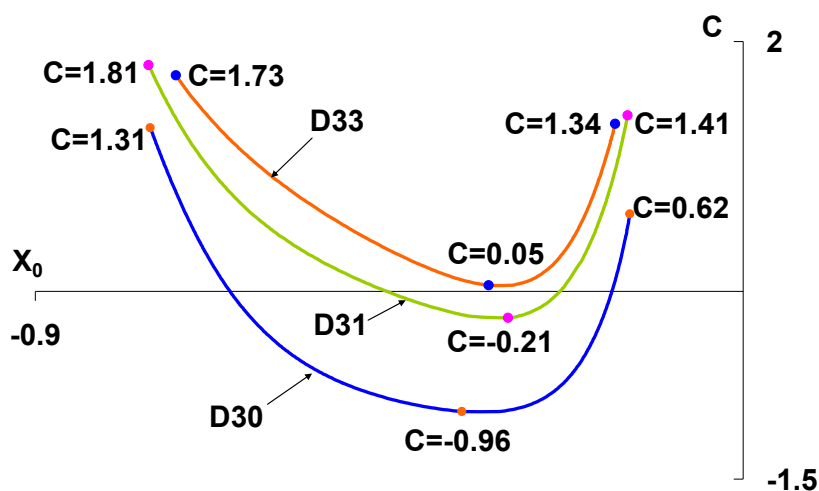
(β)

Σχήμα 10.8. Καμπύλες (α) $x_0-T/2$ και (β) $C-T/2$ των οικογενειών της ομάδας G2

10.5 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G3 (οικογένειες D30-D31-D33)

10.5.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Για τις χαρακτηριστικές καμπύλες αυτής της ομάδας παρατηρούμε ότι οι μεν οικογένειες D30 και D31 αναπτύσσουν ένα μέρος τους στα θετικά C και το υπόλοιπο στα αρνητικά, ενώ η οικογένεια D33 αναπτύσσεται εξ ολοκλήρου στις θετικές τιμές των C (Σχήμα 10.9). Σημειώνουμε επίσης ότι όλες οι χαρακτηριστικές παρουσιάζουν ακρότατο, ενώ όλες αποτελούνται από τροχιές ανάδρομες διαπλανητικού τύπου.



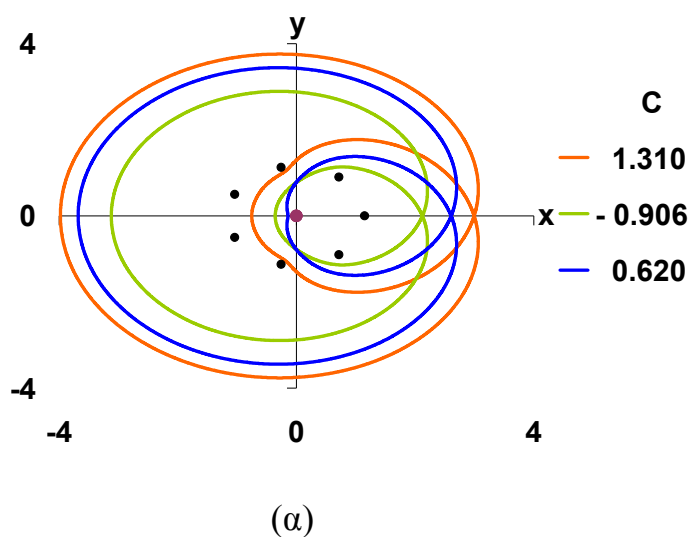
Σχήμα 10.9. Χαρακτηριστικές καμπύλες ομάδας οικογενειών G3, με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα 10.10

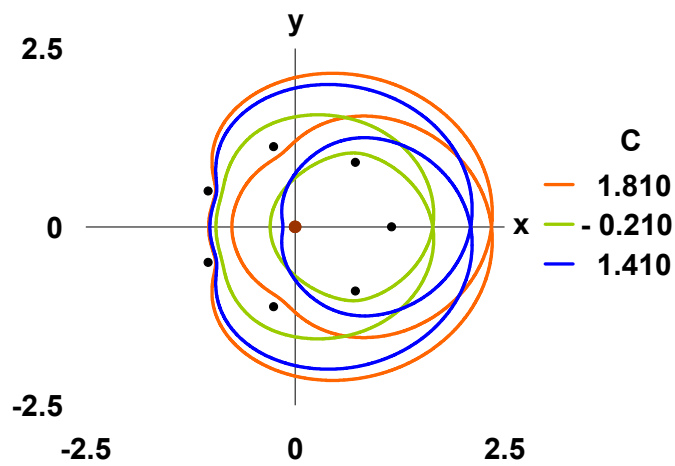
Όλες οι τροχιές της ομάδας αυτής διαγράφονται με τέτοιο τρόπο ώστε ο μικρότερος βρόχος τους να περικλείει τα primaries P_0 , P_1 , P_2 και P_7 και διαφοροποιούνται μόνο ως προς τον αριθμό και την ταυτότητα των primaries που περικλείει ο μεγάλος βρόχος τους (Σχήμα 10.10). Έτσι στις τροχιές της D30 ο μεγάλος βρόχος περικλείει όλα τα

primaries (Σχήμα 10.10α), σε αυτές της D31 εκτός του μεγάλου βρόχου παραμένουν τα P_4 και P_5 (Σχήμα 10.10β), ενώ τέλος στις τροχιές της D33 εκτός του μεγάλου βρόχου παραμένουν τα primaries P_3, P_4, P_5 και P_6 (Σχήμα 10.10γ).

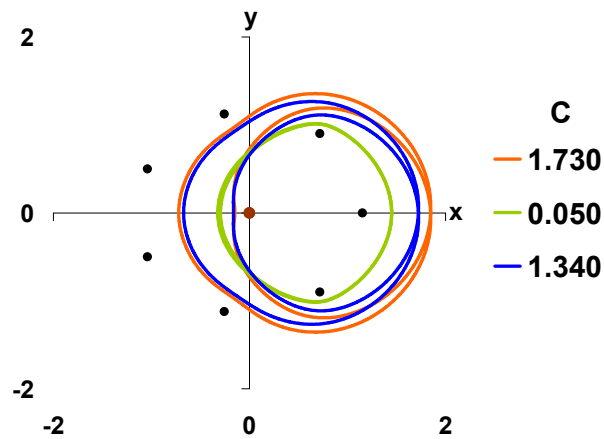
Για κάθε χαρακτηριστική, ξεκινώντας από το άκρο με τη μικρότερη τιμή της θέσης x_0 και πλησιάζοντας το ακρότατό της, οι τροχιές συρρικνώνονται, ενώ από το ακρότατο προς το άκρο με τη μεγαλύτερη τιμή της θέσης x_0 οι τροχιές διευρύνονται. Με άλλα λόγια αριστερά του ακροτάτου και καθώς η τιμή της σταθεράς C μειώνεται οι τροχιές συρρικνώνονται, ενώ δεξιά του ακροτάτου και καθώς η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται, οι τροχιές διευρύνονται.

Στον Πίνακα 10.4 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.





(β)



(γ)

Σχήμα 10.10. Εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) D30, (β) D31 και (γ) D38

Πίνακας 10.4. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών G3

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
D30	1.309999965	-0.753788506	2.285002209	-3.978373482	3.994372190	5.318206108	U
	-0.960000035	-0.357544678	2.973027838	-3.119874174	3.540773682	3.979158930	U

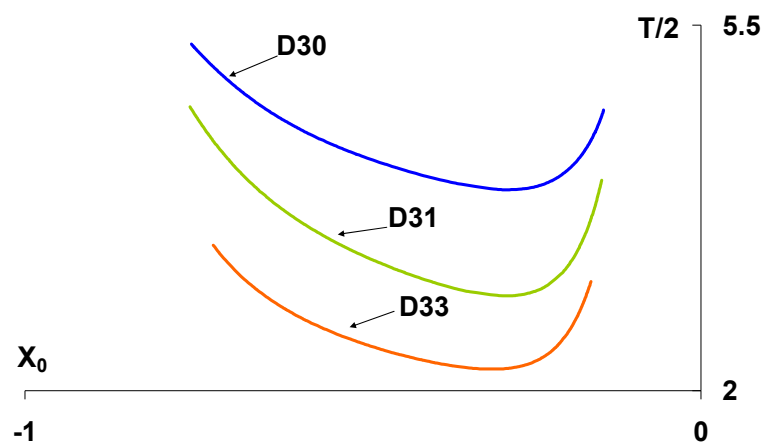
	0.619999934	-0.143995653	2.710142465	-3.679048476	3.804223327	4.686572767	U
D31	1.809995439	-0.755871925	2.172459842	-1.033266864	2.152721429	4.718386277	U
	-0.210000091	-0.298857563	2.920822120	-0.946546152	2.583234192	2.909899896	U
	1.409998280	-0.146951530	2.584711758	-1.018543214	2.244629125	4.014839441	U
D33	1.729999951	-0.721358187	2.198056243	-0.148583371	2.534619518	3.391851470	U
	0.049999872	-0.323423401	2.842576109	-0.295609589	2.880405363	2.208796945	U
	1.339999922	-0.162633606	2.686832522	-0.671666190	2.299185642	3.045541971	U

10.5.2 Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της ομάδας οικογενειών G3

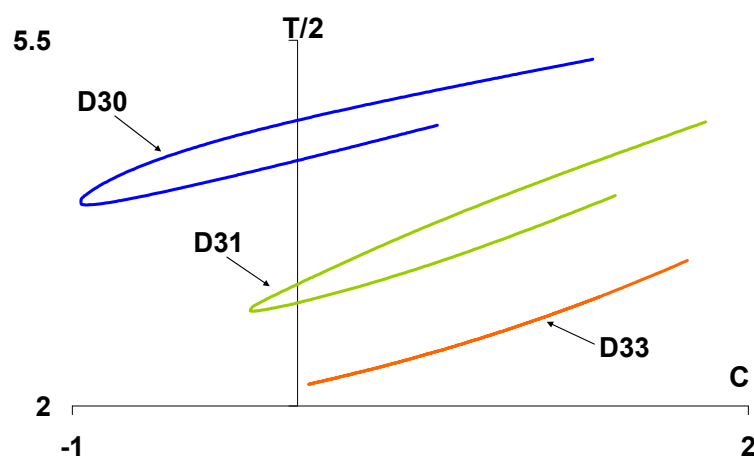
Αναφορικά με τις καμπύλες των οικογενειών της ομάδας, στο διάγραμμα $x_0-T/2$, αυτές εμφανίζουν ακρότατο (Σχήμα 10.11α). Αριστερά του ακροτάτου καθώς το x_0 πλησιάζει σε αυτό (και συνεπώς στην αρχή των αξόνων), η περίοδος ελαττώνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακροτάτου όπου, καθώς το x_0 πλησιάζει στην αρχή των αξόνων, η περίοδος αυξάνει.

Στο διάγραμμα $C-T/2$ οι καμπύλες των οικογενειών της ομάδας εμφανίζουν δύο σκέλη και η περίοδος αυξάνει και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C (Σχήμα 10.11β). Αξιοσημείωτο είναι ότι η καμπύλη $C-T/2$ της οικογένειας D33 αν και φαίνεται στο διάγραμμα ότι αποτελείται από μία καμπύλη, εν τούτοις πρόκειται για καμπύλη με δύο σκέλη. Το ίδιο συμβαίνει και με τις άλλες δύο οικογένειες. Όμως σε αυτή τη περίπτωση τα δύο σκέλη σχεδόν ταυτίζονται αφού για τις ίδιες τιμές της σταθεράς C , έχουν σχεδόν την ίδια περίοδο T .

Και οι τρεις τροχιές χαρακτηρίζονται από μεσαίες ή μεγάλες ημιπεριόδους (M ή L) και οι τιμές τους κυμαίνονται από 3.93 (M) έως 5.32 (L) για την D30, από 2.91(M) έως 4.01 (L) για την D31 και από 2.21 (M) έως 3.4(M) για την D33.



(α)



(β)

Σχήμα 10.11. Καμπύλες (α) x_0 - $T/2$ και (β) C - $T/2$ των οικογενειών της ομάδας G3

10.6. ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ D28

10.6.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης. Διαγράμματα x_0 - $T/2$ και C - $T/2$ της οικογένειας. Ευστάθεια

Η χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας D28 εξελίσσεται στην περιοχή των θετικών τιμών της σταθεράς C , περατώνεται πολύ κοντά στην καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (Σχήματα 10.2 και 10.12α) και αναπτύσσεται στην περιοχή όπου

αναπτύσσονται οι οικογένειες απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας F7 ("Fish-type" κατανομή οικογενειών), που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

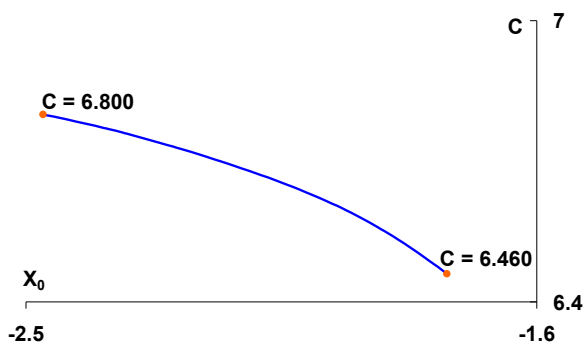
Πρόκειται για ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου, οι οποίες διαγράφονται έξω και γύρω από τον σχηματισμό των primaries (Σχήμα 10.12β) και οι οποίες συρρικνώνονται καθώς μειώνεται η τιμή της σταθεράς C , ενώ ταυτόχρονα αυξάνεται η τιμή της ταχύτητας στην ημιπερίοδο.

Οι καμπύλες $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της D28 παρουσιάζουν ακρότατα. Για την καμπύλη $x_0-T/2$ (Σχήμα 10.12γ) και αριστερά του ακροτάτου καθώς το x_0 πλησιάζει σε αυτό, η περίοδος αυξάνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακροτάτου όπου καθώς το x_0 πλησιάζει στην αρχή των αξόνων η περίοδος ελαττώνεται.

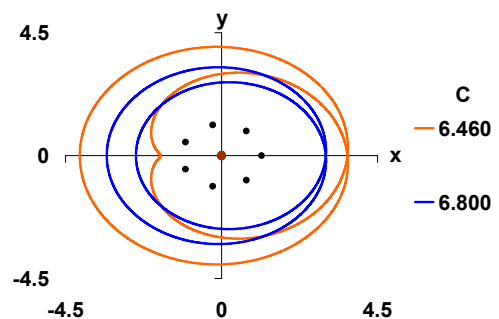
Για την καμπύλη $C-T/2$ (Σχήμα 10.12δ) αριστερά του ακροτάτου και καθώς η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται η περίοδος αυξάνεται, ενώ δεξιά αυτού η περίοδος ελαττώνεται καθώς συνεχίζει να αυξάνεται η τιμή της C . Τέλος οι τροχιές της D28 χαρακτηρίζονται από πολύ μεγάλες τιμές της ημιπεριόδου και κυμαίνονται από 9.63(VL) έως 9.78(VL).

Από τη μελέτη της ευστάθειας της D28 προκύπτει το διάγραμμα x_0 -α του Σχήματος 10.12ε, στο οποίο παρατηρούμε ότι παρουσιάζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές πρώτου και δεύτερου είδους, μία τον αριθμό για κάθε είδος.

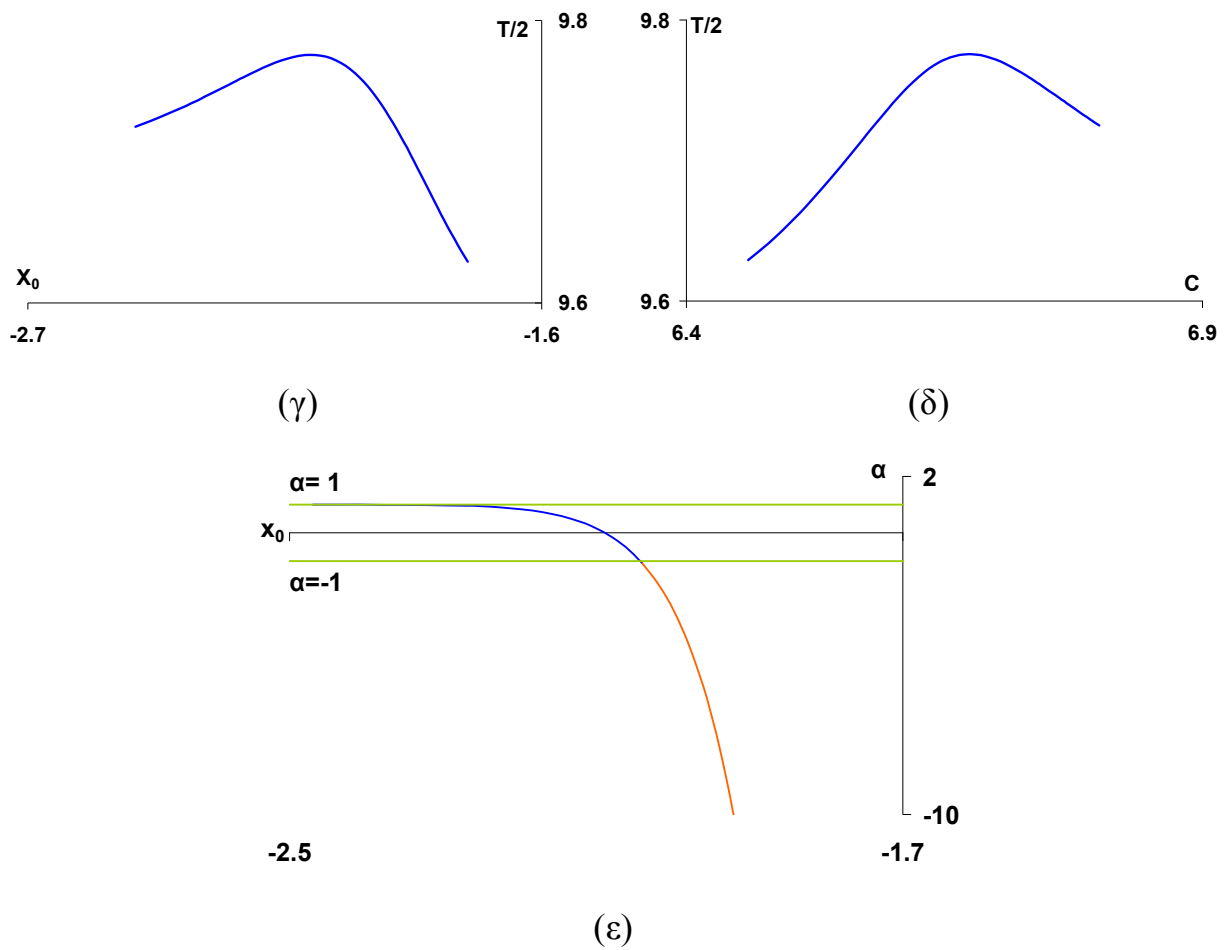
Στον Πίνακα 10.5 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(α)



(β)



Σχήμα 10.12. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D28.

- (α) Χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας,
 (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής
 καμπύλης, (γ) καμπύλη $x_0-T/2$ της οικογένειας, (δ) καμπύλη $C-T/2$
 της οικογένειας, (ε) διάγραμμα ευστάθειας $x_0-\alpha$

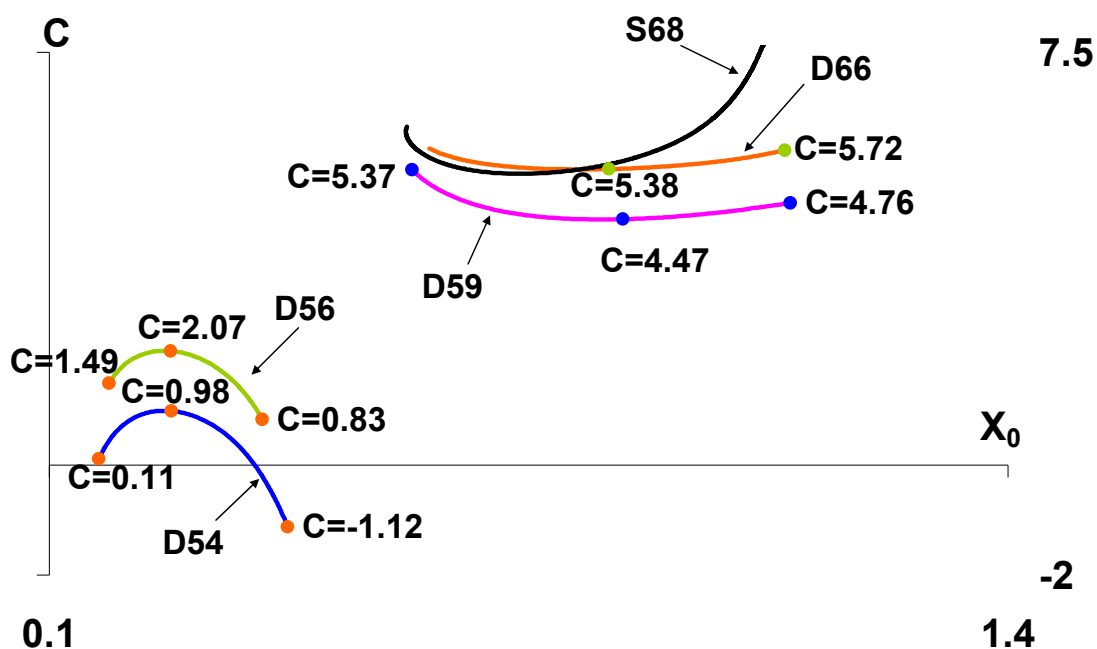
Πίνακας 10.5. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών της οικογένειας D28

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
D28	6.799950006	-2.469891113	1.285497968	-3.311696086	2.429206536	9.724859212	S
	6.639950006	-2.018768799	0.594787181	-3.764359008	3.008522007	9.767729764	U
	6.459990009	-1.758217342	0.150821563	-4.089586875	3.415053657	9.629297021	U

10.7 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ G4 (οικογένειες D54-D56-D59-D66)

10.7.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Για τις χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας αυτής παρατηρούμε ότι όλες αναπτύσσονται εξ ολοκλήρου στις θετικές τιμές των C (Σχήμα 10.13), εκτός της χαρακτηριστικής της D54 που αναπτύσσεται κατά ένα μέρος στα θετικά C και κατά ένα μέρος στα αρνητικά. Παρατηρούμε επίσης ότι όλες παρουσιάζουν ακρότατο και μάλιστα οι D54 και D56 μέγιστο, ενώ οι D59 και D66 ελάχιστο. Όλες οι τροχιές και αυτής της ομάδας είναι ανάδρομες διαπλανητικού τύπου εκτός από τις τροχιές της οικογένειας D66 που είναι ανάδρομες δορυφορικού τύπου περί το primary P_1 (Σχήμα 10.14δ). Τέλος, στο διάγραμμα x_0-C έχουμε σχεδιάσει και την χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας των απλών περιοδικών τροχιών S68, για να γίνει εμφανής η διακλάδωσή της με την οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D66. Ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο και από τη μελέτη της ευστάθειας της S68 μέσω του διαγράμματος x_0-a της S68 (Σχήμα 9.65δ), είχαμε αντιληφθεί την ύπαρξη της D66 αφού στο διάγραμμα αυτό υπήρχαν δύο κρίσιμες τροχιές δευτέρου είδους με $\alpha=-1$. Προφανώς τη δεύτερη οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών που πηγάζει από την S68 δεν κατέστη δυνατόν να την εντοπίσουμε, είτε λόγω του μεγέθους του βήματος κατά την σάρωση, είτε λόγω των μικρών διαστάσεων της. Να σημειώσουμε επίσης, ότι τόσο οι απλές περιοδικές τροχιές S68, όσο και οι διπλές D66, είναι ίδιου τύπου και περικλείουν μόνο το primary P_1 στο εσωτερικό τους.



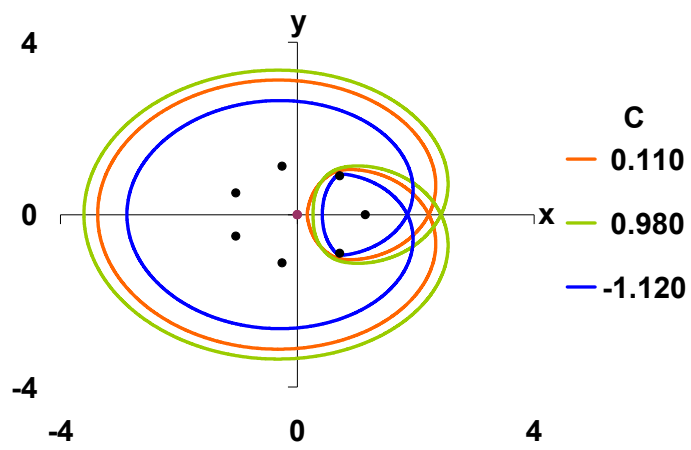
Σχήμα 10.13. Χαρακτηριστικές καμπύλες ομάδας οικογενειών G4 , με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα 10.14

Οι τροχιές των οικογενειών D54 και D56 διαγράφονται με τέτοιο τρόπο ώστε ο μικρότερος βρόχος τους να περικλείει τα primaries P_1 , P_2 και P_7 και ο μεγαλύτερος βρόχος στη μεν πρώτη να περικλείει όλα τα primaries (Σχήμα 10.14α), στη δε δεύτερη να μένουν εκτός του μεγάλου βρόχου τα primaries P_3 , P_4 , P_5 και P_6 (Σχήμα 10.14β). Αριστερά και δεξιά των ακρότατων, όταν η τιμή της σταθεράς C μειώνεται οι τροχιές συρρικνώνονται.

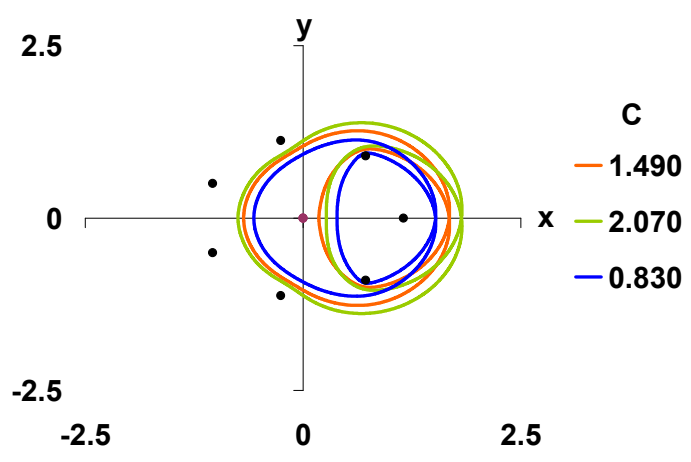
Στις τροχιές της οικογένειας D59 ο μικρότερος βρόχος τους διαγράφεται γύρω από το primary P_1 , ενώ ο μεγαλύτερος περικλείει όλα τα primaries (Σχήμα 10.14γ). Καθώς αυξάνεται η τιμή της θέσης x_0 , επέρχεται συρρίκνωση των τροχιών αυτών, η οποία είναι πιο εμφανής στο μικρό βρόχο της διπλής τροχιάς.

Τέλος, για τις δορυφορικές τροχιές της οικογένειας D66 παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν του ακρότατου και όταν η τιμή της σταθεράς C μειώνεται, οι τροχιές συρρικνώνονται (Σχήμα 10.14δ).

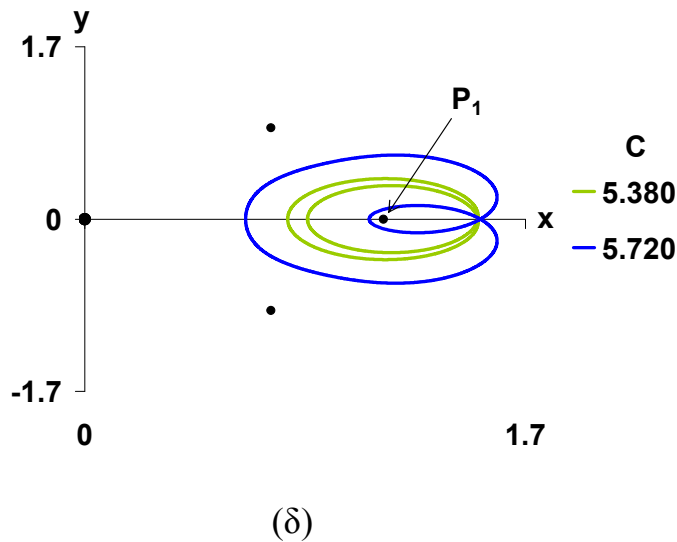
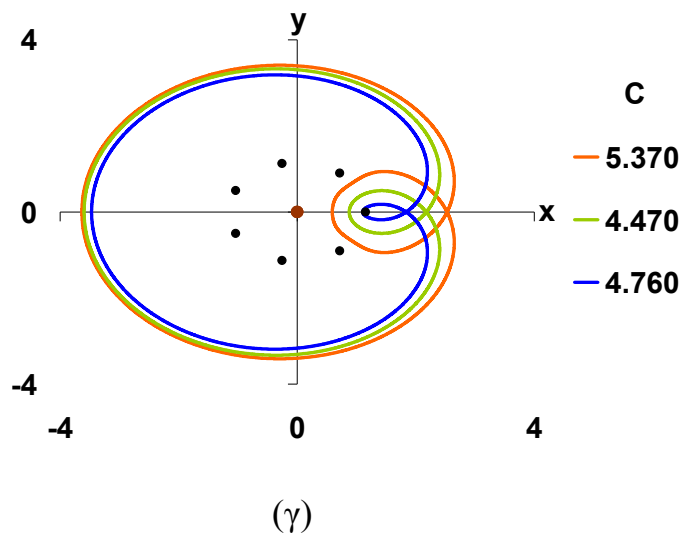
Στον Πίνακα 10.6 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(α)



(β)



Σχήμα 10.14. Εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) D54, (β) D56, (γ) D59 και (δ) D66

Πίνακας 10.6. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών G4

	C	\mathbf{x}_0	$\dot{\mathbf{y}}_0$	$\mathbf{x}_{T/2}$	$\dot{\mathbf{y}}_{T/2}$	T/2	Stability
D54	0.109999911	0.167327686	2.922093532	-3.373251228	3.601392528	4.088200245	U
	0.979999965	0.265670349	2.756603050	-3.604062164	3.687689097	4.43731019U9	U

	-1.119990654	0.423248184	2.929861311	-2.878006249	3.377420047	3.446235725	U
D56	1.489999870	0.180995877	2.706867325	-0.682722249	2.262672471	2.843785806	U
	2.069999934	0.264290703	2.553264674	-0.746906967	2.113514342	3.247402969	U
	0.830001874	0.388849302	2.615284446	-0.565249614	2.456088903	2.344300459	U
D59	5.369960000	0.591916431	1.202141952	-3.634656894	3.068695793	6.245244142	U
	4.469979993	0.877585498	1.595705153	-3.597072499	3.172048680	4.942985916	U
	4.759991123	1.104710159	3.214466779	-3.471217472	2.990214905	4.523027730	U
D66	5.749968627	0.615478376	1.008646433	1.106233930	3.109959353	2.563323089	U
	5.379999986	0.859050586	1.245996323	0.782567842	1.160097170	1.995785138	U
	5.669969926	1.079936638	2.453254336	0.629349066	1.036269643	2.423823632	S

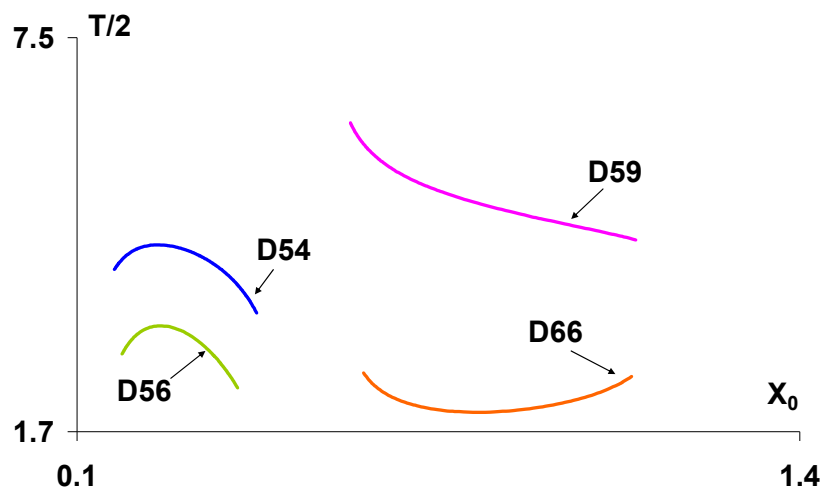
10.7.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών G4

Αναφορικά με τις καμπύλες των οικογενειών της ομάδας, στο διάγραμμα x_0 -T/2 όλες εκτός της οικογένειας D59 εμφανίζουν ακρότατο (Σχήμα 10.15α). Στις οικογένειες D54 και D56 δεξιά του ακρότατου καθώς η x_0 πλησιάζει σε αυτό, η περίοδος αυξάνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακρότατου, όπου καθώς η x_0 πλησιάζει στην αρχή των αξόνων η περίοδος ελαττώνεται. Για την καμπύλη x_0 -T/2 της D66 καθώς η τιμή της θέσης x_0 αυξάνεται, αριστερά του ακρότατου η περίοδος ελαττώνεται ενώ δεξιά αυτού η περίοδος αυξάνεται. Τέλος για την αντίστοιχη καμπύλη της οικογένειας D59 παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή της θέσης x_0 αυξάνεται η περίοδος ελαττώνεται.

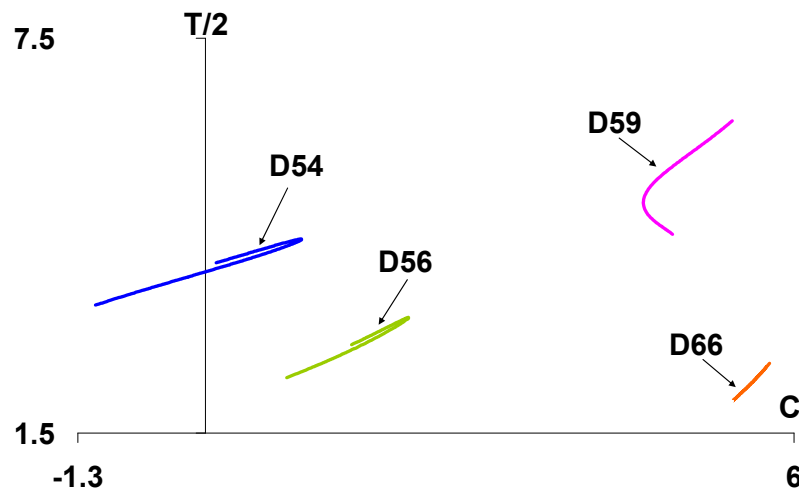
Στο διάγραμμα C-T/2 (Σχήμα 10.15β) οι καμπύλες των οικογενειών D54, D56 αλλά και της D66 εμφανίζουν δύο σκέλη, τα οποία είναι δυσδιάκριτα, ιδίως στην περίπτωση της D66 και η περίοδος αυξάνεται σε αυτά, όταν αυξάνεται η τιμή της C. Τέλος, η C-T/2 της D59 παρουσιάζει και αυτή δύο σκέλη με διαφορετικό προσανατολισμό όμως από τις προηγούμενες αντίστοιχες καμπύλες, όπου όταν αυξάνεται η τιμή της σταθεράς

C, στο μεν άνω σκέλος η περίοδος αυξάνεται, στο δε κάτω σκέλος η περίοδος μειώνεται.

Οι τροχιές χαρακτηρίζονται από μεσαίες ή μεγάλες ημιπεριόδους (M ή L) και οι τιμές τους κυμαίνονται από 3.44(M) έως 4.45(L) για την D54, από 2.34(M) έως 3.26(M) για την D56, από 4.52(L) έως 6.24(L) για την D59 και από 2.00(M) έως 2.56(M) για την D66.



(α)



(β)

Σχήμα 10.15. Καμπύλες (α) x_0 - $T/2$ και (β) C - $T/2$ των οικογενειών της ομάδας G4

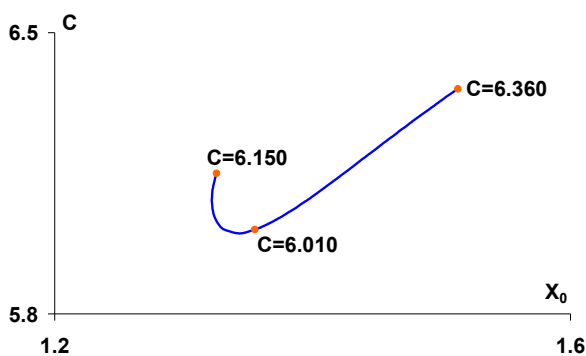
10.8 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ D67

10.8.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής της καμπύλης. Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της οικογένειας. Ευστάθεια

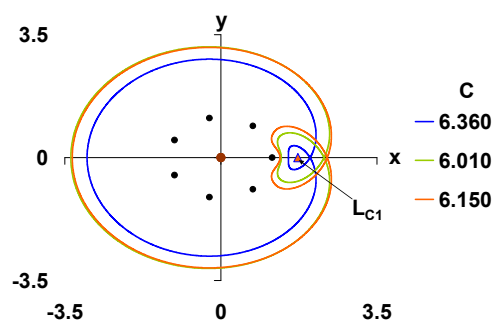
Η «αγκιστροειδής» χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας D67 (Σχήμα 10.16α) εξελίσσεται στην περιοχή των θετικών τιμών της σταθεράς C και περατώνεται στην περιοχή του σημείου ισορροπίας της ζώνης C_1 . Οι τροχιές που την αποτελούν είναι ανάδρομες, πλανητικού τύπου, διαγράφονται έξω και γύρω από τον σχηματισμό των primaries (Σχήμα 10.16β) και συρρικνώνονται καθώς αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C . Η συρρίκνωση αυτή είναι πιο έντονη στο μικρότερο βρόχο των τροχιών της οικογένειας, ο οποίος διαγράφεται γύρω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης C_1 .

Τα διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ παρουσιάζουν ακρότατα. Για την πρώτη καμπύλη (Σχήμα 10.16γ) και αριστερά του ακροτάτου καθώς το x_0 πλησιάζει σε αυτό, η περίοδος ελαττώνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακροτάτου όπου καθώς το x_0 απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, η περίοδος αυξάνεται. Για τη δεύτερη καμπύλη (Σχήμα 10.16δ) αριστερά και δεξιά του ακροτάτου, καθώς η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται η περίοδος αυξάνεται επίσης. Οι τιμές των ημιπεριόδων τους κυμαίνονται από 7.71 (L) μέχρι 6.64 (L).

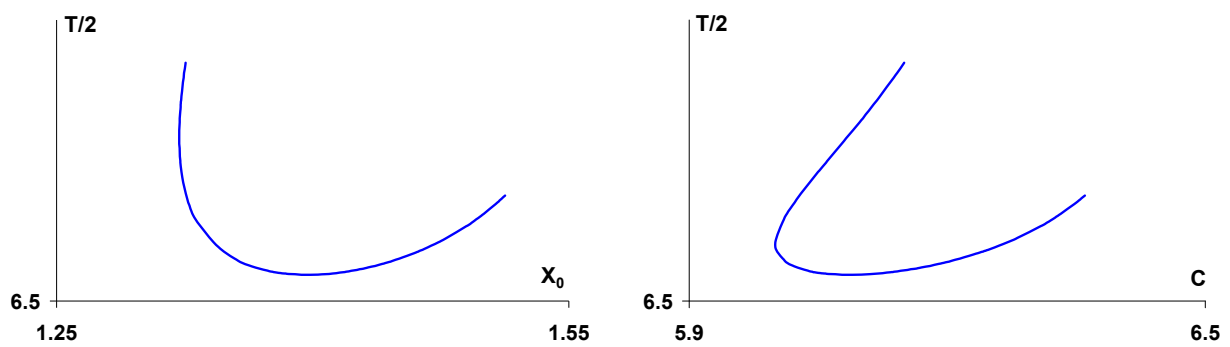
Στον Πίνακα 10.7 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(α)



(β)



(γ)

(δ)

Σχήμα 10.16. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D67.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) καμπύλη x_0 - $T/2$ της οικογένειας, (δ) καμπύλη C - $T/2$ της οικογένειας,

Πίνακας 10.7. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών της οικογένειας D67

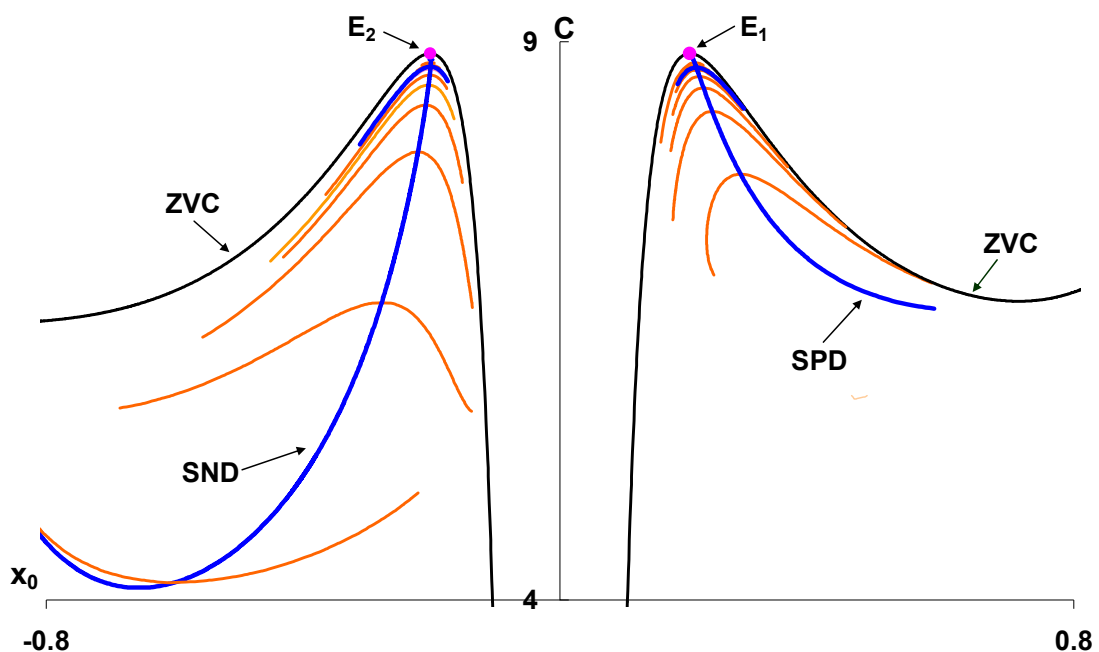
	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
D67	6.359990002	1.512691284	0.571879033	-2.999637348	2.134876066	7.062810244	U
	6.009980000	1.355208817	1.237213278	-3.364219835	2.648373817	6.720979200	U
	6.149979998	1.325566071	1.330391494	-0.100000000	2.584734958	7.771841230	U

10.9 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ G5 (δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισοροπίας των ζωνών E_1 και E_2)

Πρόκειται για την ομάδα τροχιών που εξελίσσεται στην περιοχή αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας», κάτω από τα σημεία ισοροπίας E_1 και E_2 και αποτελείται από οικογένειες που πηγάζουν από τις κύριες οικογένειες των απλών περιοδικών τροχιών της περιοχής, σχηματίζοντας πάλι μια δενδροειδή κατανομή. Άλλωστε από τη μελέτη της ευστάθειας αυτών των κύριων οικογενειών των απλών περιοδικών τροχιών και συγκεκριμένα από τα διαγράμματα ευστάθειας x_0 -α των SND και SPD που σχεδιάσαμε

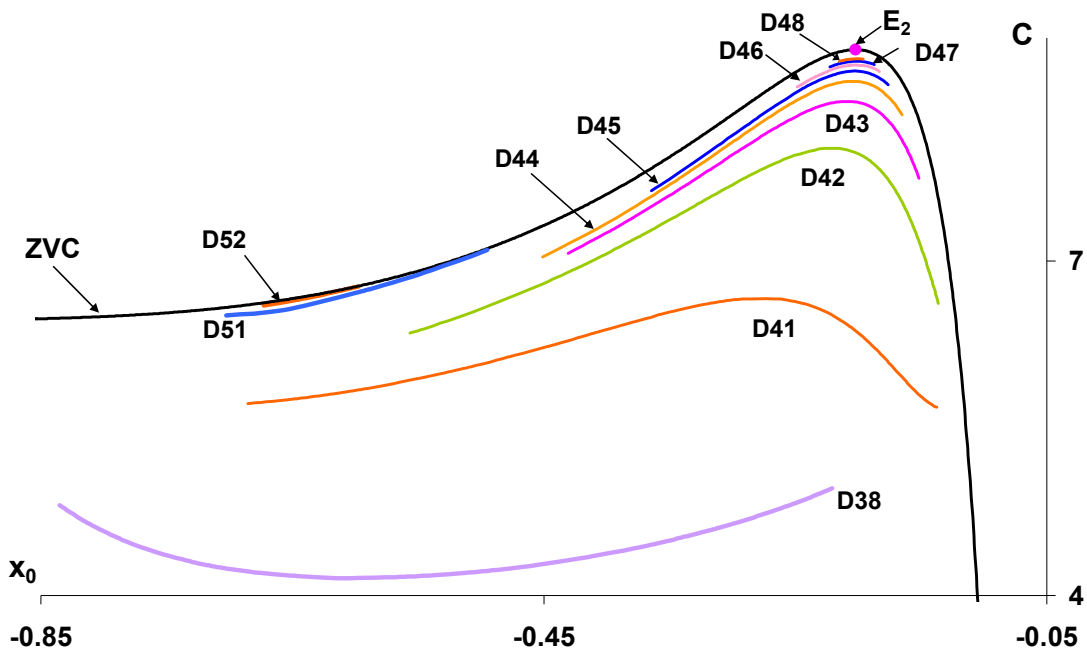
και σχολιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (§9.4.8.2 Σχήμα 9.81β-γ και Σχήμα 9.83β-γ αντίστοιχα), έγινε σαφής αναφορά στην ύπαρξη οικογενειών συμμετρικών διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών, που πηγάζουν από τον κεντρικό κορμό των απλών τροχιών των δένδροειδών κατανομών.

Στο Σχήμα 10.17 που ακολουθεί, φαίνεται η δένδροειδής κατανομή των διπλών περιοδικών τροχιών (πορτοκαλί καμπύλες), όπου για λόγους σαφέστερης αποτύπωσης της διάταξης των χαρακτηριστικών καμπύλων, έχουμε σχεδιάσει και τις κύριες οικογένειες των απλών περιοδικών τροχιών (μπλε καμπύλες). Να επισημάνουμε ότι όπως και στην περίπτωση των απλών περιοδικών τροχιών, έτσι κι εδώ οι χαρακτηριστικές καμπύλες αυτών των οικογενειών παρουσιάζουν ακρότατο και σε αυτό το ακρότατο διακλαδίζονται (bifurcating point) με τις κύριες οικογένειες των απλών περιοδικών τροχιών.



Σχήμα 10.17. Διάγραμμα των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 - C των διπλών περιοδικών τροχιών, των δένδροειδών κατανομών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2

10.9.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 < 0$). Μελέτη ευστάθειας
 Στο παρακάτω διάγραμμα x_0 - C του Σχήματος 10.18 παραθέτουμε λεπτομερέστερα την δένδροειδή κατανομή των οικογενειών των διπλών περιοδικών τροχιών για $x_0 < 0$. Να σημειώσουμε ότι στην περιοχή αναπτύσσονται άλλες δύο οικογένειες, οι οποίες όμως δεν αποτελούν μέρος της δένδροειδούς κατανομής και εξελίσσονται πολύ κοντά στην καμπύλη μηδενικής ταχύτητας. Σ' αυτές τις οικογένειες, οι οποίες έχουν τις διακριτικές ονομασίες D51 και D52, θα αναφερθούμε αργότερα πιο αναλυτικά.



Σχήμα 10.18. Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής των διπλών περιοδικών τροχιών, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 και οι οικογένειες D51 και D52

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ενδεικτικά την εξέλιξη κάποιων τροχιών της δένδροειδούς κατανομής κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπύλων τους, καθώς επίσης τις αντίστοιχες καμπύλες x_0 - $T/2$, C - $T/2$ και μεταβολής της παραμέτρου ευστάθειας. Κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των οικογενειών είναι ότι όλες οι

τροχιές που προκύπτουν από αυτές, είναι ανάδρομες, πλανητικού τύπου γύρω από το κεντρικό primary P_0 , τη μορφή των οποίων θα περιγράψουμε παρακάτω.

Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια, οι δύο βρόχοι των διπλών τροχιών σχηματίζουν «ροζέτες», τα πέταλα των οποίων διασταυρώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν γύρω από το κεντρικό primary P_0 ένα αστερί με περιττό πάντα αριθμό ακτινών, όσο και το πλήθος των πετάλων της κάθε ροζέτας (Σχήματα 10.19β, 10.20β, 10.21β).

Όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C , οι τροχιές συρρικνώνονται και οι δύο βρόχοι πλησιάζουν όλο και περισσότερο ο ένας με τον άλλον, με αποτέλεσμα να εξαλείφεται η μορφή του σχηματιζόμενου αστεριού περί του πρωτεύοντος σώματος P_0 . Τέλος, πλησιάζοντας στο ακρότατο κάθε οικογένειας οι τροχιές γίνονται σχεδόν κυκλικές, με τους δύο βρόχους σχεδόν να ταυτίζονται (Σχήματα 10.19β, 10.20β, 10.21β).

Συνεχίζοντας να διατρέχουμε τον άλλο κλάδο της χαρακτηριστικής της ίδιας οικογένειας και ξεκινώντας από τις υψηλότερες τιμές της C , η εξέλιξη της μορφής των τροχιών ακολουθεί την αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράψαμε μέχρι τώρα. Δηλαδή, αρχικά εμφανίζονται σχεδόν κυκλικές τροχιές περί του P_0 και καταλήγουν σε τροχιές με την μορφή της «ροζέτας».

Όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι διπλές περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των πετάλων της κάθε ροζέτας. Έτσι, για τις οικογένειες D41, D42 και D45 προκύπτουν τροχιές με τρία, πέντε και έντεκα πέταλα αντίστοιχα (Σχήματα 10.19β, 10.20β, 10.21β).

Για τις οικογένειες διπλών περιοδικών τροχιών που πηγάζουν από τον κεντρικό κλάδο της κατανομής των απλών περιοδικών τροχιών, μελετήσαμε την ευστάθεια των D41, D42 και D45. Έτσι, στα Σχήματα 10.19γ, 10.20γ και 10.21γ που ακολουθούν, παρατηρούμε ότι αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζουν οι χαρακτηριστικές των D41, D42 και D45 αντίστοιχα, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς. Επίσης παρουσιάζουν όλες ένα κρίσιμο σημείο πρώτου είδους

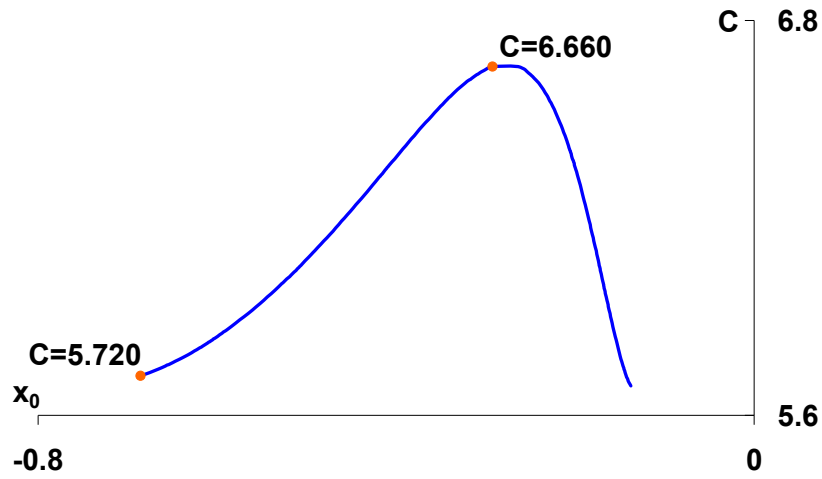
(Σχήματα 10.19δ, 10.20δ και 10.21δ), ενώ και οι ασταθείς τροχιές χαρακτηρίζονται από σχετικά μικρές τιμές του συντελεστή ευστάθειας α . Ενδεικτικά για την οικογένεια D41 οι ασταθείς τροχιές της χαρακτηρίζονται από τιμές του συντελεστή α , που κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1.000002 και 1.001243.

Στον Πίνακα 10.8 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών D41, D42 και D45.

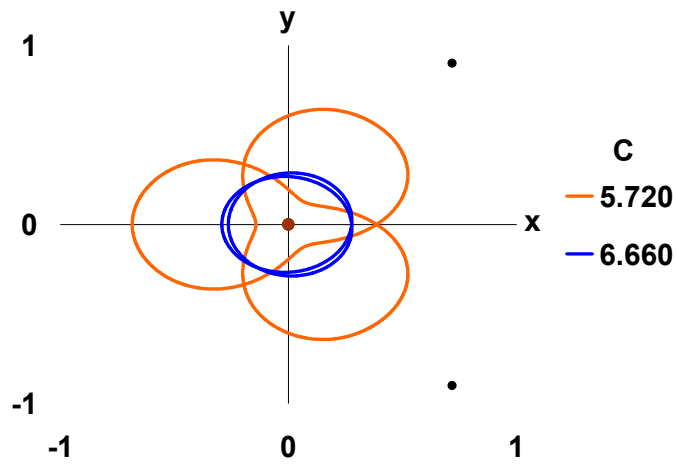
Πίνακας 10.8. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών D41, D42 και D45

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
D41	5.719969936	-0.685344284	0.941263476	-0.142795860	1.479731296	2.612988937	U
	6.659989963	-0.292106689	1.309308278	-0.263705716	1.390481350	1.294913938	U
	5.689969926	-0.137533291	1.394645455	-0.729274168	0.929141808	2.885347481	S
D42	6.354949744	-0.556619986	0.730454453	-0.129600195	0.865494804	3.082336344	U
	7.999979980	-0.232758568	0.893550484	-0.210456661	0.941278697	1.519223946	U
	6.619989839	-0.136193695	0.967474074	-0.488147785	0.721419951	2.618864547	S
D45	7.629979704	-0.364428719	0.448173810	-0.139804163	0.360856984	4.084553166	U
	8.699989997	-0.208205544	0.435846974	-0.197463780	0.437497104	2.919032465	U
	8.579989963	-0.176161139	0.437179734	-0.238427134	0.431226450	3.017818120	S

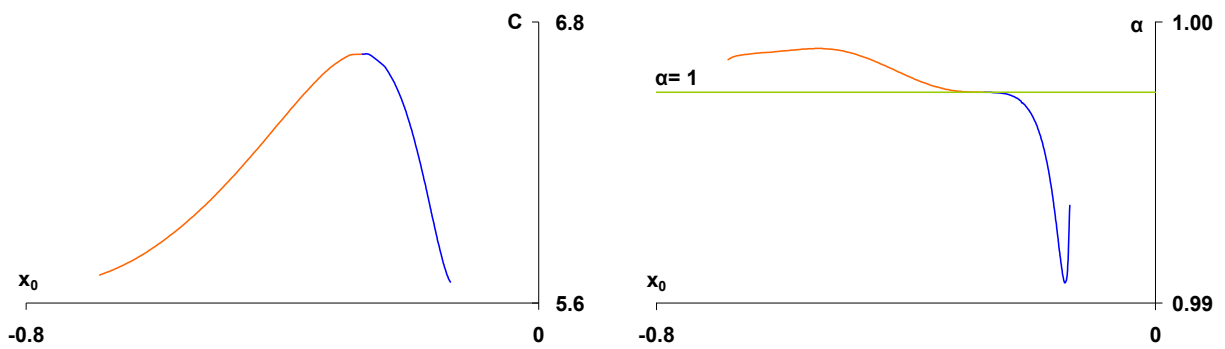
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας D41. Διαγράμματα ευστάθειας



(α)



(β)



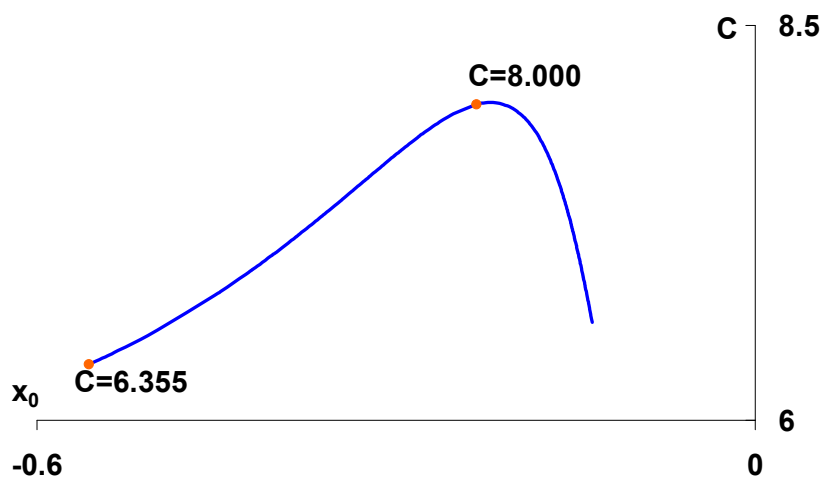
(γ)

(δ)

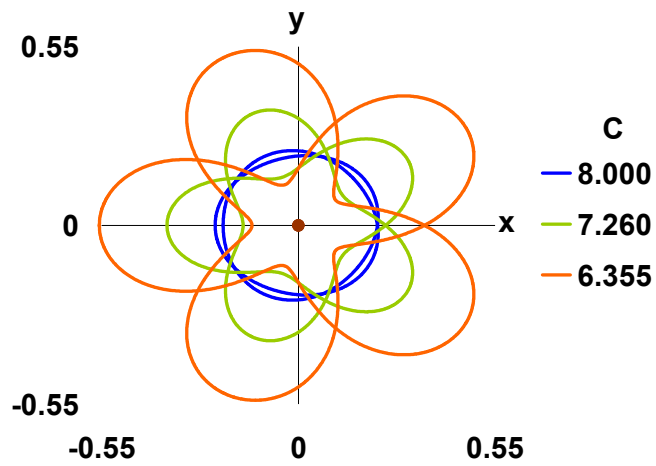
Σχήμα 10.19. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D41.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

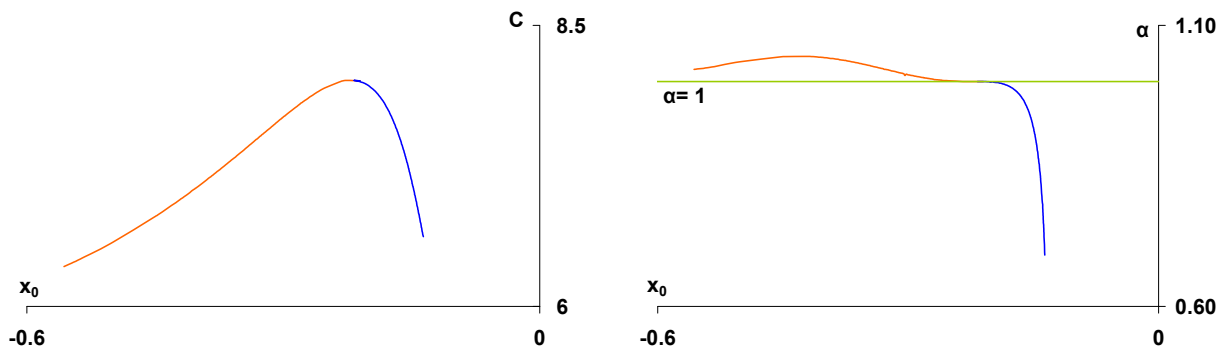
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας D42. Διαγράμματα ευστάθειας



(α)



(β)



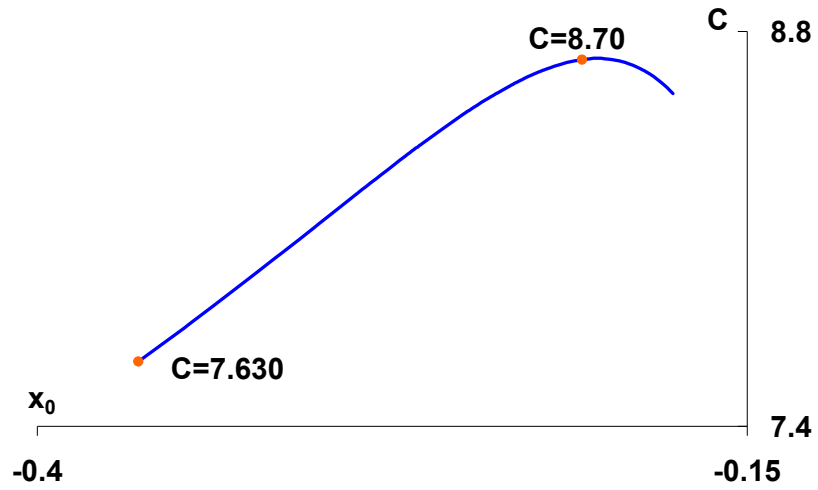
(γ)

(δ)

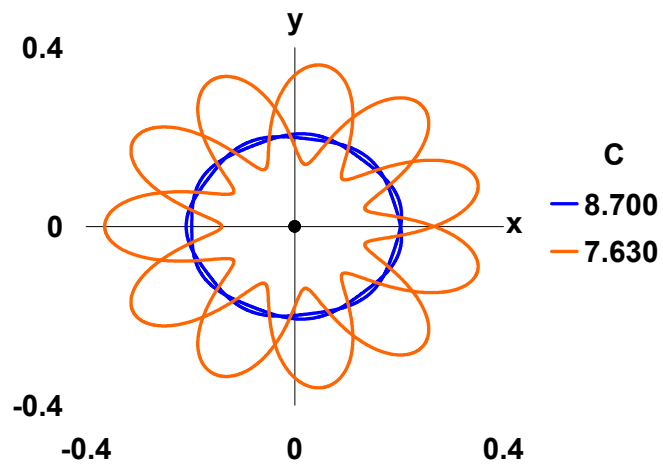
Σχήμα 10.20. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D42.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

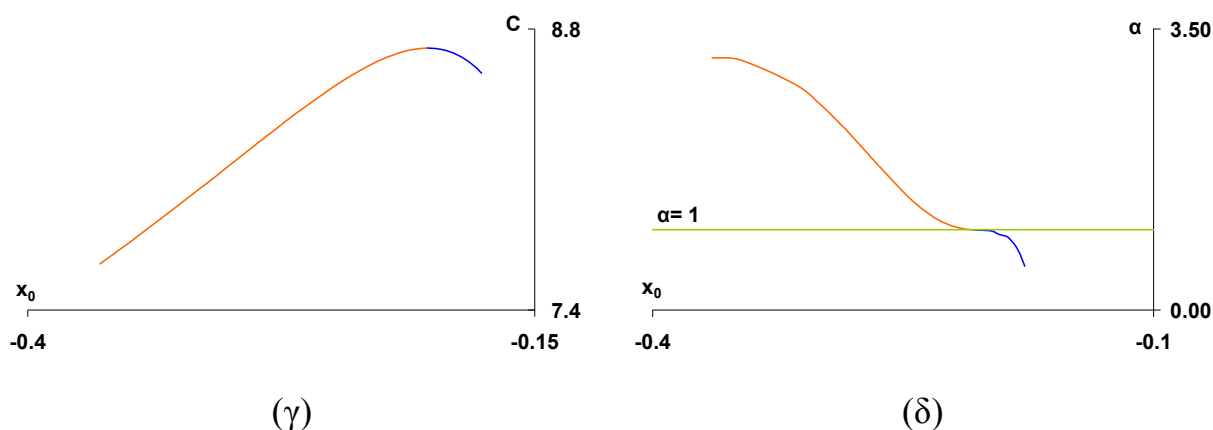
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας D45. Διαγράμματα ευστάθειας



(α)



(β)



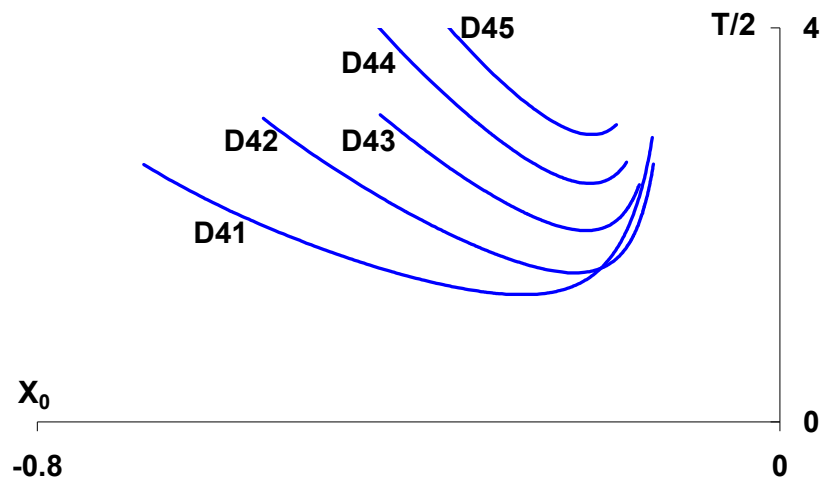
Σχήμα 10.21. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D45.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

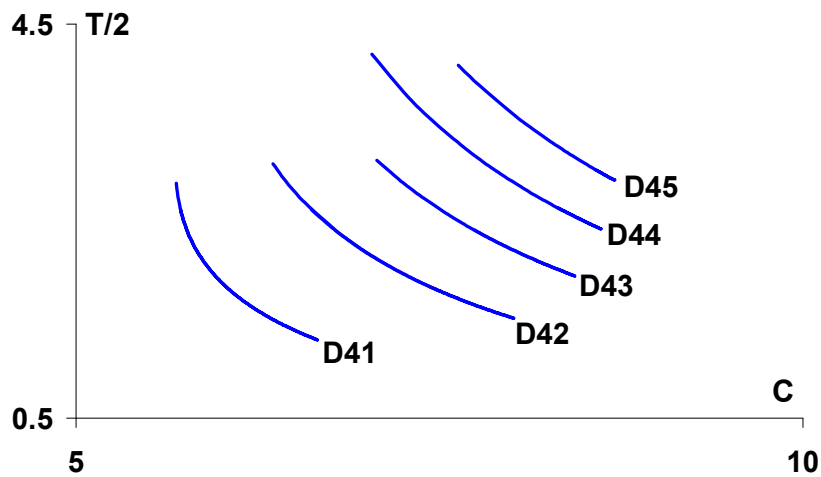
10.9.2 Διαγράμματα x_0 - $T/2$ και C - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_2(x_0 < 0)$

Τα διαγράμματα x_0 - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής εμφανίζουν ακρότατο (Σχήμα 10.22α) και μάλιστα ακριβώς εκεί όπου παρουσιάζεται το ακρότατο και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0 - C . Όταν η απόλυτη τιμή της θέσης x_0 μειώνεται πλησιάζοντας την αρχή των αξόνων, αριστερά του ακρότατου η περίοδος μειώνεται επίσης, ενώ δεξιά αυτού αυξάνεται.

Στο διάγραμμα C - $T/2$ (Σχήμα 10.22β) ύστερα από τη λεπτομερή μελέτη των καμπύλων αλλά και των αριθμητικών δεδομένων, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αυτές αποτελούνται από δύο σκέλη τα οποία σχεδόν ταυτίζονται, αφού για τις ίδιες τιμές της σταθεράς C αντιστοιχούν παραπλήσιες τιμές των περιόδων. Παρατηρούμε ότι η περίοδος τους ελαττώνεται και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C . Από τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει ότι το εύρος των τιμών των ημιπεριόδων των τροχιών αυτών των οικογενειών, κυμαίνεται από 1.3 (S) έως 8.0 (L).



(α)



(β)

Σχήμα 10.22. Διαγράμματα των καμπύλων: (α) x_0 - $T/2$ και (β) C - $T/2$, των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισοροπίας της ζώνης $E_2(x_0 < 0)$

10.10 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ D51 και D52

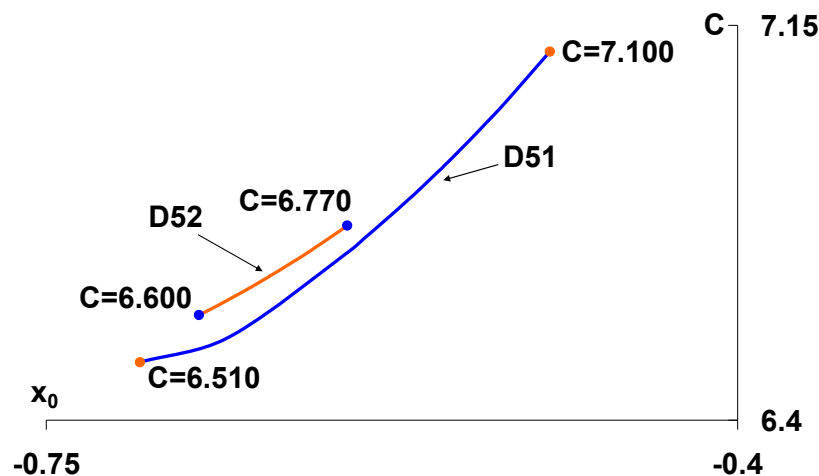
10.10.1 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών D51 και D52 βρίσκονται πολύ κοντά στην καμπύλη μηδενικής ταχύτητας και αναπτύσσονται

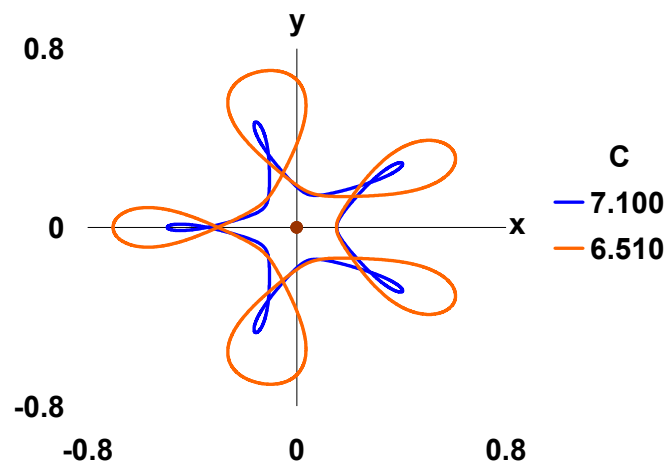
σχεδόν παράλληλα με αυτήν (Σχήμα 10.18, Σχήμα 10.23α). Και οι δύο οικογένειες αποτελούνται από ορθές τροχιές πλανητικού τύπου που διαγράφονται γύρω από το P_0 (Σχήμα 10.23β-γ).

Για τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C σε κάθε χαρακτηριστική, οι τροχιές έχουν την μορφή ροζέτας και συρρικνώνονται καθώς η σταθερά C αυξάνεται. Για μεγαλύτερες τιμές της C οι βρόχοι της κάθε ροζέτας μικραίνουν μέχρι να εξαλειφθούν. Επειδή οι καμπύλες εξελίσσονται κοντά στη καμπύλη μηδενικής ταχύτητας, ήταν δύσκολο κατά την σάρωση να μπορέσουμε να λάβουμε περισσότερες αρχικές συνθήκες τροχιών για αυτές τις οικογένειες. Εικάζουμε όμως ότι στο πέρας αυτών των χαρακτηριστικών θα προκύψουν τροχιές σχεδόν κυκλικές περί του πρωτεύοντος σώματος P_0 .

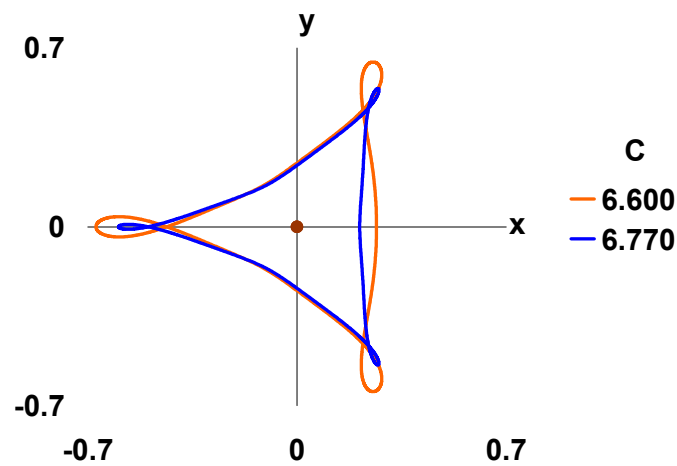
Στον Πίνακα 10.9 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 10.23. Οικογένειες διπλών περιοδικών τροχιών D51 και D52.

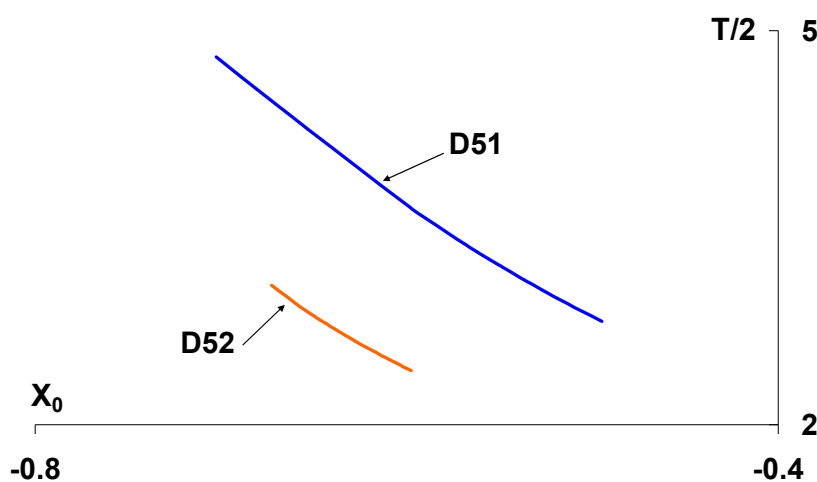
(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στα επόμενα σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών της D51 κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) εξέλιξη των τροχιών της D52 κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης,

Πίνακας 10.9. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών D51 και D52

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
D51	6.509989944	-0.702622011	0.270290299	0.151598806	1.323475944	4.799676366	U
	6.819999912	-0.566398552	0.197439763	0.151885410	1.204626467	3.354014376	U
	7.099959915	-0.495015512	0.106801459	0.152706411	1.094492787	2.786332899	U
D52	6.599989988	-0.672693334	0.157066840	0.265760536	1.406483219	3.062202553	U
	6.679989987	-0.634008576	0.114228358	0.228123793	1.463727109	2.687380141	U
	6.769989987	-0.597592843	0.066875654	0.209652166	1.455183121	2.410842608	U

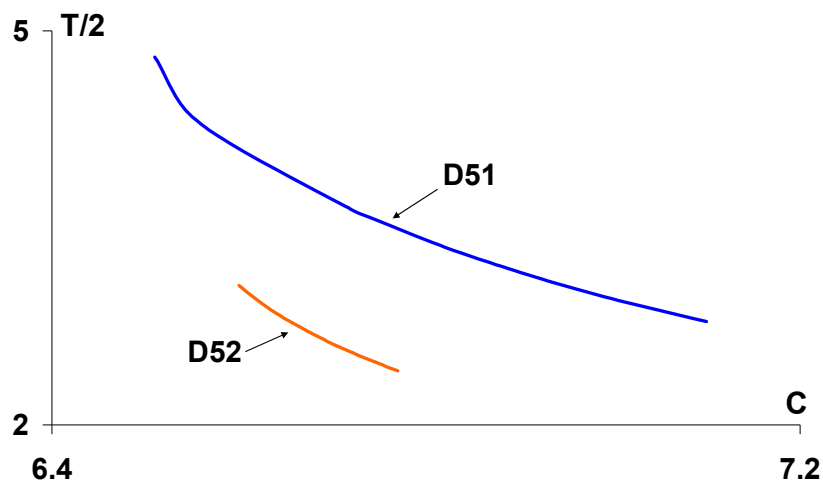
10.10.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 των οικογενειών D51 και D52

Στο διάγραμμα x_0 -T/2 (Σχήμα 10.24) παρατηρούμε και για τις δύο οικογένειες ότι όσο αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η x_0 , η περίοδος των τροχιών ελαττώνεται.



Σχήμα 10.24. Καμπύλες x_0 -T/2 των οικογενειών D51 και D52

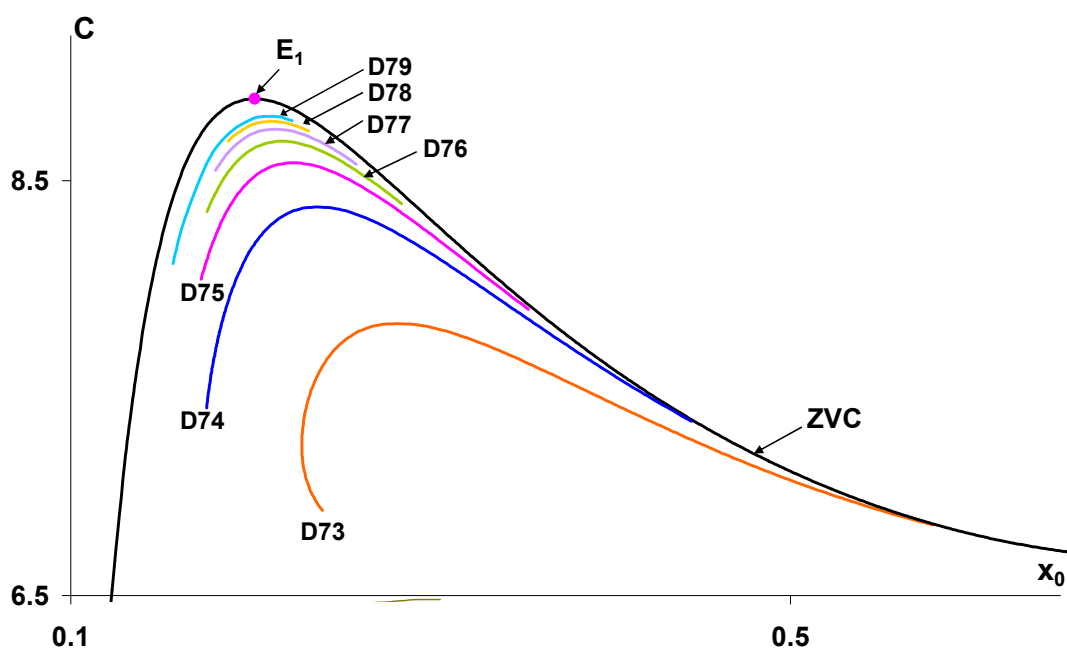
Ελάττωση της ημιπεριόδου των τροχιών παρατηρούμε και στο διάγραμμα C-T/2 (Σχήμα 10.25) όταν η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται. Η ημιπερίοδος της D51 κυμαίνεται από 2.78(M) έως 4.8(L) και της D52 από 2.41(M) έως 3.1(L).



(β)

Σχήμα 10.25. Καμπύλες C-T/2 των οικογενειών D51 και D52

10.11 Μορφή και εξέλιξη των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 > 0$). Μελέτη ευστάθειας
 Από την δενδροειδή κατανομή των οικογενειών κάτωθεν του σημείου ισορροπίας της ζώνης E_1 (Σχήμα 10.26), προκύπτουν ορθές τροχιές πλανητικού τύπου γύρω από το πρωτεύον primary P_0 . Τη μορφή και την εξέλιξη των τροχιών αυτών περιγράφουμε παρακάτω.



Σχήμα 10.26. Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής των διπλών περιοδικών τροχιών, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1

Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια της κατανομής και διατρέχοντας την χαρακτηριστική τους προς μεγαλύτερες τιμές της C , οι δύο βρόχοι των τροχιών σχηματίζουν ένα αστέρι, με περιττό αριθμό ακτινών (Σχήμα 10.27β, 10.28β, 10.29β).

Όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C οι δύο βρόχοι συρρικνώνονται, με αποτέλεσμα να εξομαλύνονται σταδιακά οι κορυφές των ακτινών των αστεριών, ώσπου πλησιάζοντας στο ακρότατο κάθε οικογένειας οι τροχιές να μετατρέπονται σε σχεδόν κυκλικές, με τους δύο βρόχους σχεδόν να ταυτίζονται (Σχήματα 10.27β, 10.28β, 10.29β).

Συνεχίζοντας στον άλλο κλάδο της χαρακτηριστικής της ίδιας οικογένειας και ξεκινώντας από τα υψηλότερες τιμές της C , η εξέλιξη της μορφής των τροχιών ακολουθεί την αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράψαμε μέχρι τώρα. Δηλαδή,

αρχικά εμφανίζονται σχεδόν κυκλικές τροχιές που περιβάλλουν το P_0 και καταλήγουν σε τροχιές με τη μορφή αστεριού.

Όπως και στην δένδροειδή κατανομή για $x_0 < 0$, έτσι κι εδώ όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι διπλές περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των ακτινών των αστεριών.

Έτσι για τις οικογένειες $D73$, $D74$ και $D79$ προκύπτουν τροχιές σε σχήμα αστεριού με πέντε, επτά και δεκαεπτά ακτίνες αντίστοιχα (Σχήμα 10.27β, 10.28β, 10.29β).

Από το Σχήμα 10.27γ που αφορά στην ευστάθεια της $D73$, παρατηρούμε ότι από το μεγαλύτερο τμήμα της χαρακτηριστικής που βρίσκεται αριστερά του ακροτάτου, προκύπτουν ασταθείς τροχιές, ενώ εντοπίστηκε και μία περιοχή ευσταθών τροχιών στις χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C αυτού του σκέλους. Αντιθέτως δεξιά του ακροτάτου, από το μεγαλύτερο τμήμα της χαρακτηριστικής προκύπτουν ευσταθείς τροχιές και στις χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C αυτού του σκέλους εντοπίστηκαν ασταθείς τροχιές. Έτσι υπάρχουν τρία κρίσιμα σημεία όπου λαμβάνει χώρα «εναλλαγή ευστάθειας». Δύο πρώτου είδους και ένα δευτέρου είδους (Σχήμα 10.27δ-ε).

Αξιοσημείωτη είναι η συμπεριφορά της ευστάθειας της οικογένειας τροχιών $D74$, όπου από το μεγαλύτερο τμήμα της χαρακτηριστικής της προκύπτουν ευσταθείς τροχιές, ενώ ασταθείς τροχιές εντοπίστηκαν στο δεξιό σκέλος της, στην περιοχή με τις χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C .

Για την οικογένεια $D79$ από τα διαγράμματα ευστάθειας παρατηρούμε ότι αριστερά του ακροτάτου της χαρακτηριστικής οι τροχιές είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς. Την ίδια συμπεριφορά διαπιστώσαμε ότι ακολουθούν και οι οικογένειες $D77$ και $D78$.

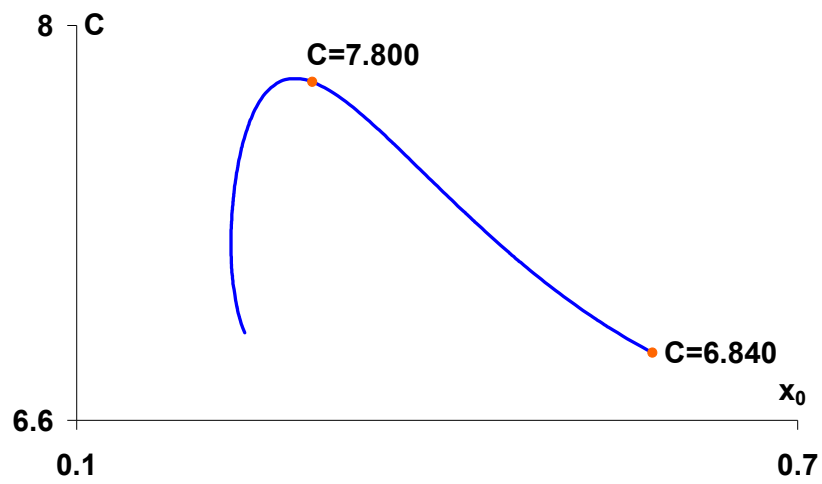
Τέλος, όπως και στις δένδροειδές κατανομές των απλών περιοδικών τροχιών, έτσι κι εδώ οι ασταθείς τροχιές χαρακτηρίζονται από μικρές σχετικά τιμές του συντελεστή ευστάθειας α .

Στον Πίνακα 10.10 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών $D73$, $D74$ και $D79$.

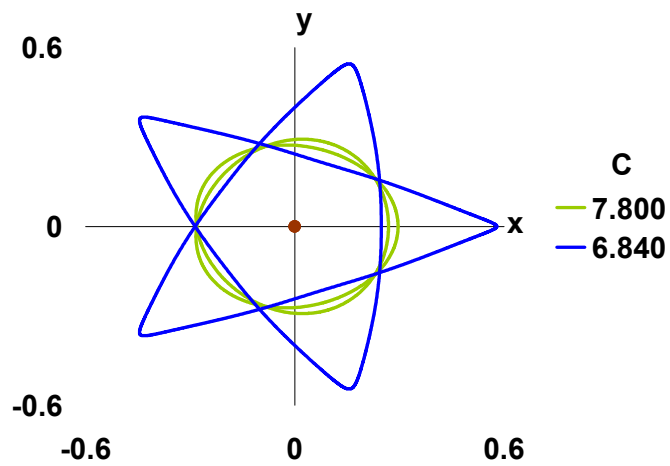
Πίνακας 10.10. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των διπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών D73, D74 και D79

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
D73	6.909999982	0.239830477	1.359225899	0.550154255	0.119593578	3.795271244	S
	7.589969980	0.238806261	1.083392338	0.361525262	0.511643314	2.438713001	U
	7.799969986	0.296155395	0.736653394	0.268777583	0.869190986	2.214240727	S
	6.839999981	0.579176890	0.071152010	0.248066893	1.365504140	4.080001038	U
D74	7.404959948	0.175510901	1.165732922	0.431625784	0.114303358	3.491823316	S
	8.349989990	0.254575897	0.556562569	0.222409374	0.706011850	2.381503717	S
	7.339959949	0.444862832	0.091799567	0.174775346	1.189722920	3.611046975	U
D79	8.099979761	0.156864834	0.566172615	0.327402260	0.018121018	5.924211789	U
	8.799999995	0.219037118	0.248095265	0.201190862	0.307407175	4.760665917	U
	8.789999991	0.223030213	0.236307269	0.197982246	0.319512051	4.774289372	S

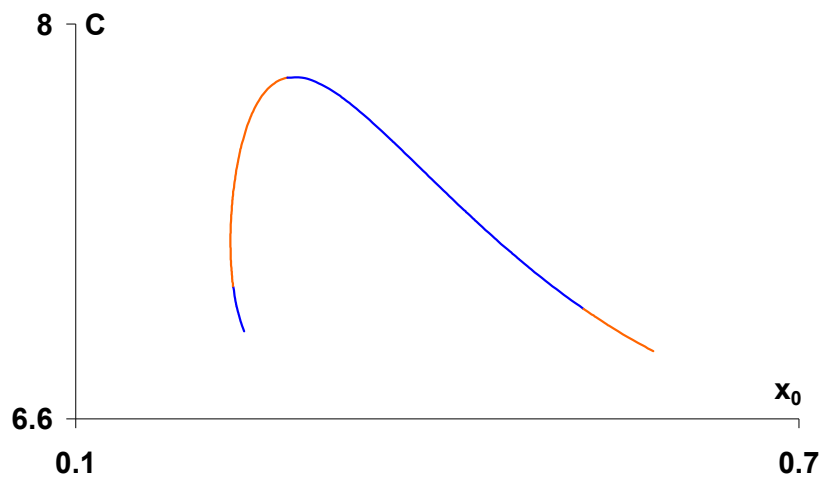
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας D73. Διαγράμματα ευστάθειας



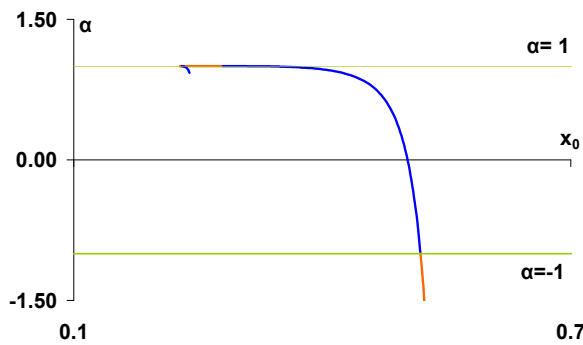
(α)



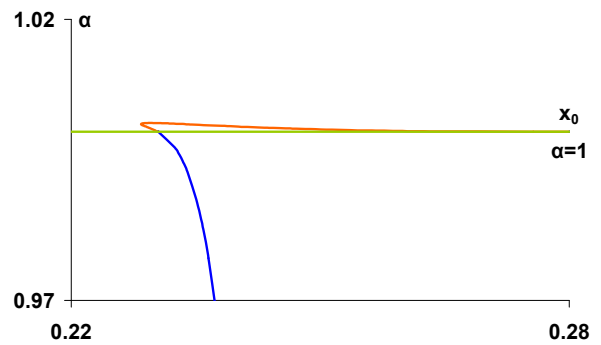
(β)



(γ)



(δ)

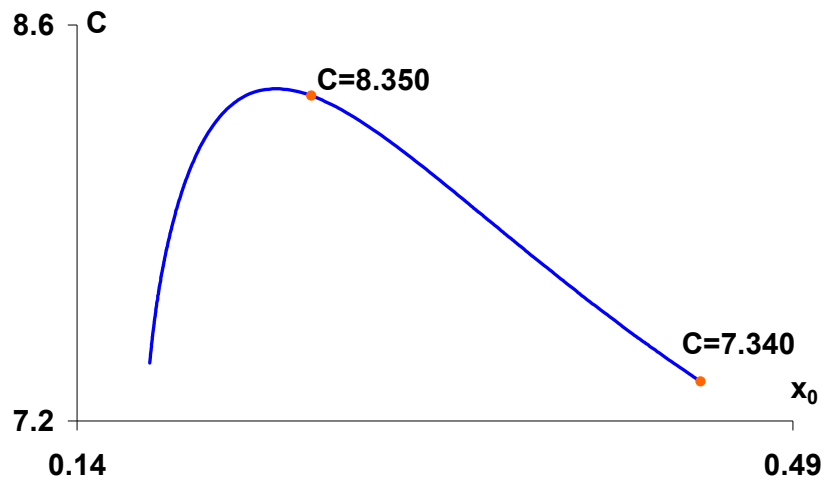


(ε)

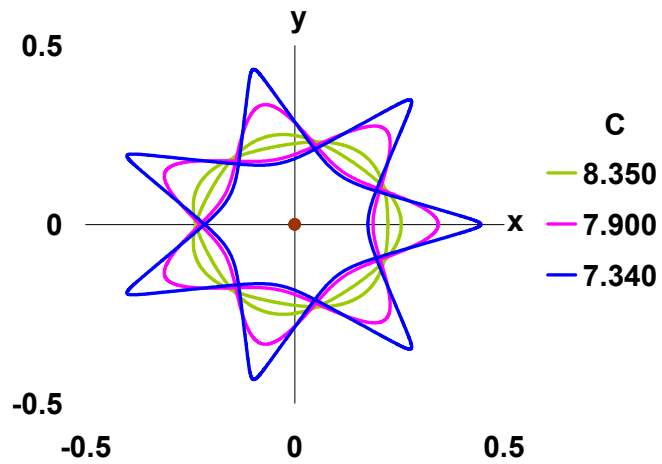
Σχήμα 10.27. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D73.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α , (ε) λεπτομέρεια διαγράμματος ευστάθειας x_0 - α

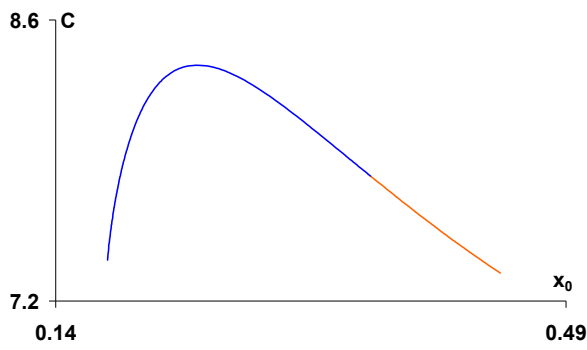
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας D74. Διαγράμματα ευστάθειας



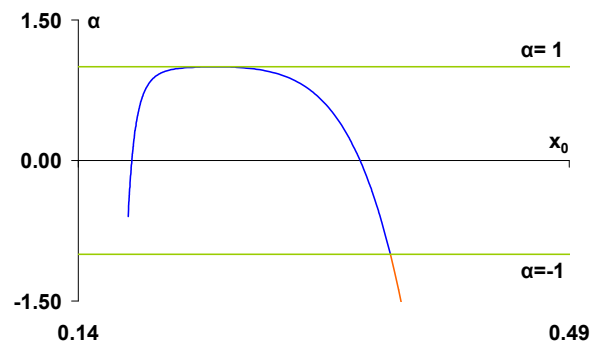
(α)



(β)



(γ)

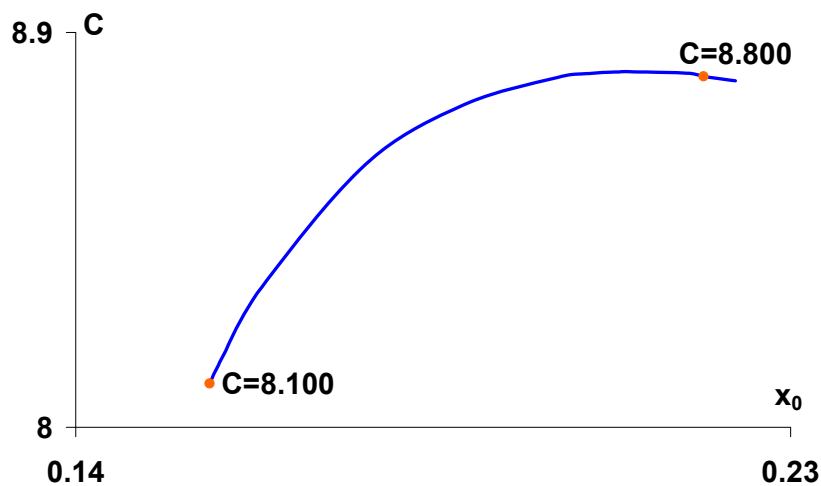


(δ)

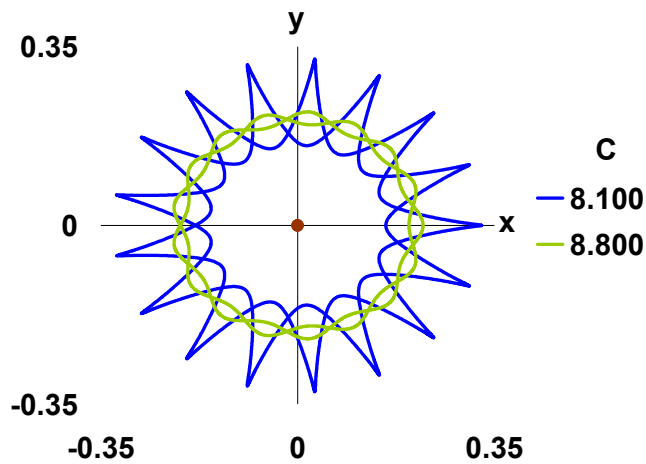
Σχήμα 10.28. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D74.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

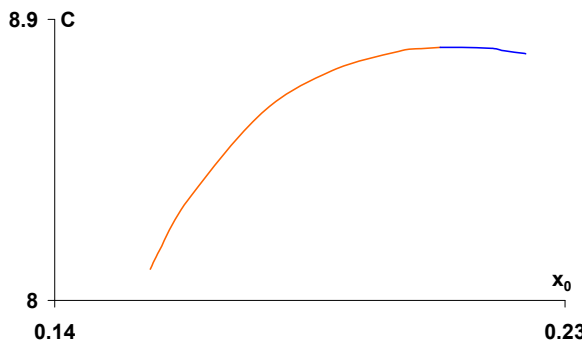
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας D79. Διαγράμματα ευστάθειας



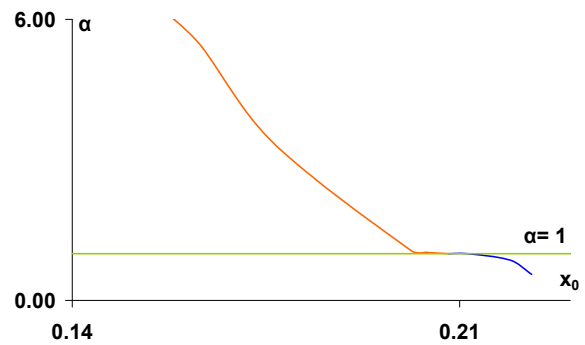
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 10.29. Οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D79.

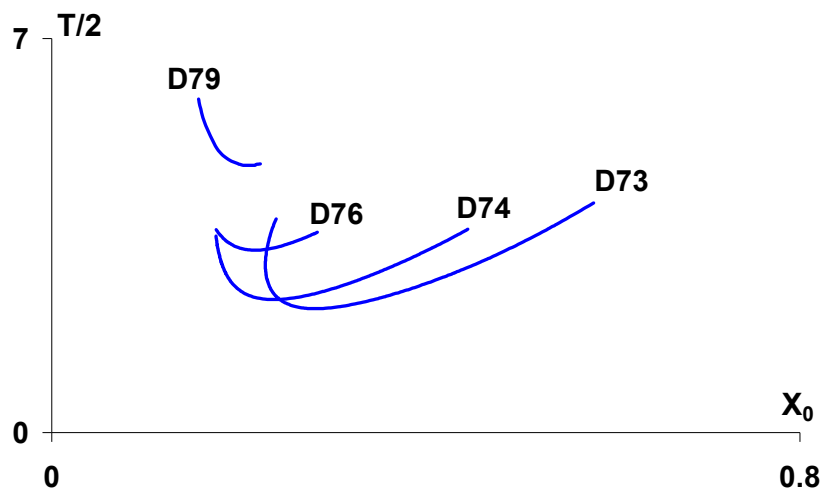
(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας, (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

10.11.1 Διαγράμματα x_0 - $T/2$ και C - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0 > 0)$

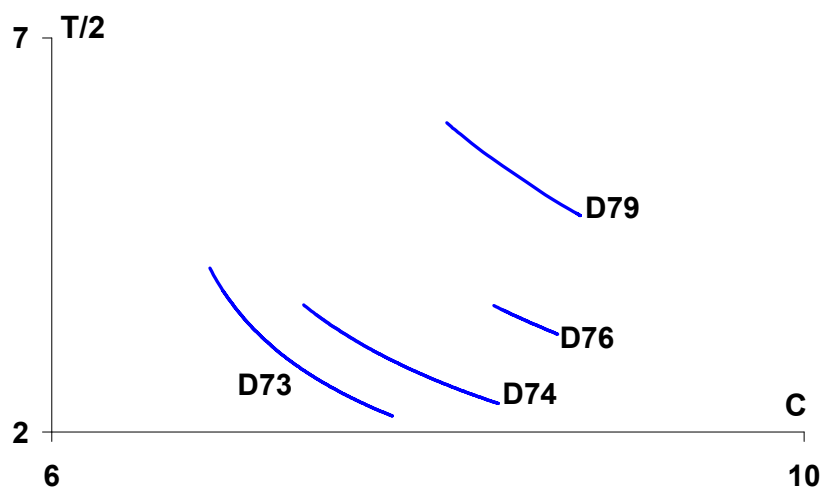
Όπως και στην περίπτωση για $x_0 < 0$, τα διαγράμματα x_0 - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής εμφανίζουν ακρότατο εκεί όπου εμφανίζεται αυτό και στο

αντίστοιχο διάγραμμα x_0 -C. Όταν η τιμή της θέσης x_0 αυξάνεται, αριστερά του ακρότατου η ημιπερίοδος μειώνεται, ενώ δεξιά αυτού αυξάνεται (Σχήμα 10.30α).

Από τη μελέτη των καμπύλων C-T/2 (Σχήμα 10.30β) προκύπτει ότι κι αυτές αποτελούνται από δύο σκέλη τα οποία σχεδόν ταυτίζονται. Η ημιπερίοδός τους ελαττώνεται και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C. Από τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει ότι το εύρος των τιμών των ημιπεριόδων των τροχιών αυτών των οικογενειών, κυμαίνεται από 2.21 (M) έως 7.0 (L).



(α)



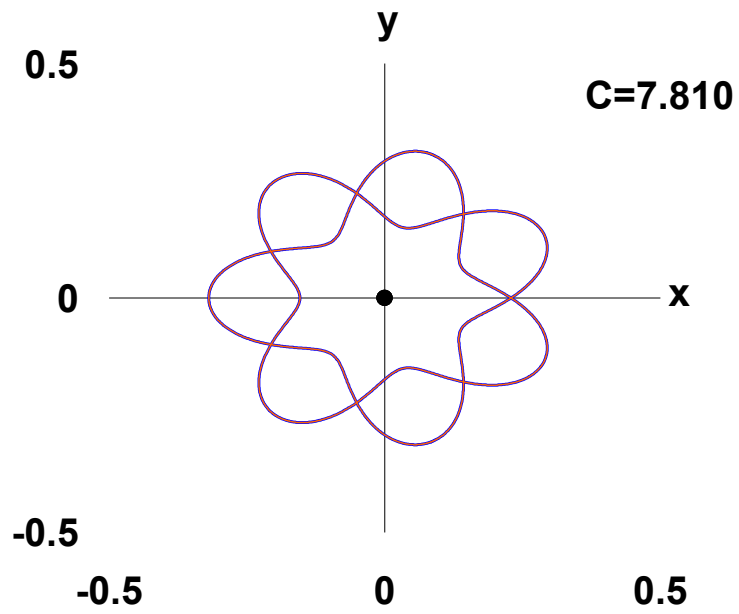
(β)

Σχήμα 10.30. Διαγράμματα των καμπύλων: (α) $x_0-T/2$ και (β) $C-T/2$, των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0>0)$

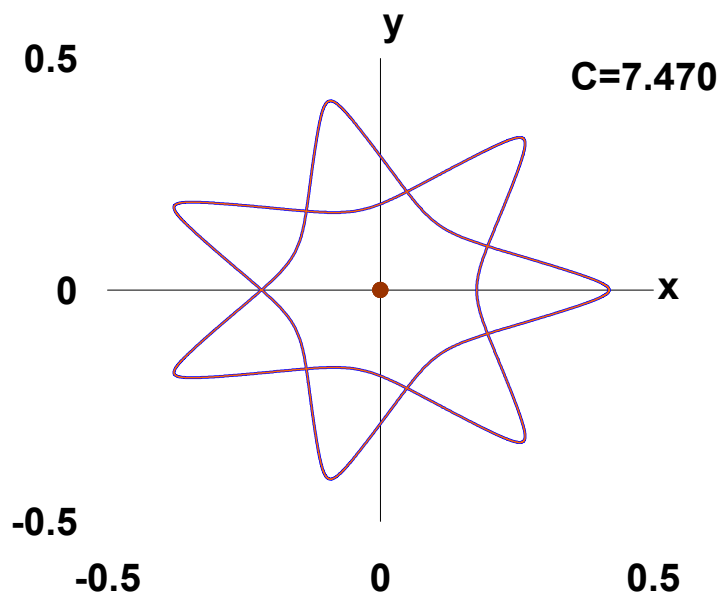
10.12 Συμμετρία των ισοενεργειακών τροχιών (ίδια τιμή της σταθεράς C) που ανήκουν στην ίδια οικογένεια της δένδροειδούς κατανομής

Όπως και στην περίπτωση των απλών περιοδικών τροχιών της δένδροειδούς κατανομής, σχεδιάσαμε τροχιές της ίδιας οικογένειας που αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες που έχουν την ίδια τιμή για την σταθερά C και βρίσκονται εκατέρωθεν της κεντρικής οικογένειας των απλών περιοδικών τροχιών.

Από τα κοινά διαγράμματα τέτοιων τροχιών, όπως της οικογένειας D43 (Σχήμα 10.31α) για $C=7.180$ ($x_0<0$) αλλά και της οικογένειας D74 (Σχήμα 10.31β) για $C=7.470$ ($x_0>0$) καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι τέτοιες τροχιές ταυτίζονται και μάλιστα δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την περιοχή των τιμών της σταθεράς C όπως στην περίπτωση των απλών περιοδικών τροχιών, αφού η ταύτιση επαληθεύεται για κάθε ζεύγος ισοενεργειακών τροχιών.



(α)



(β)

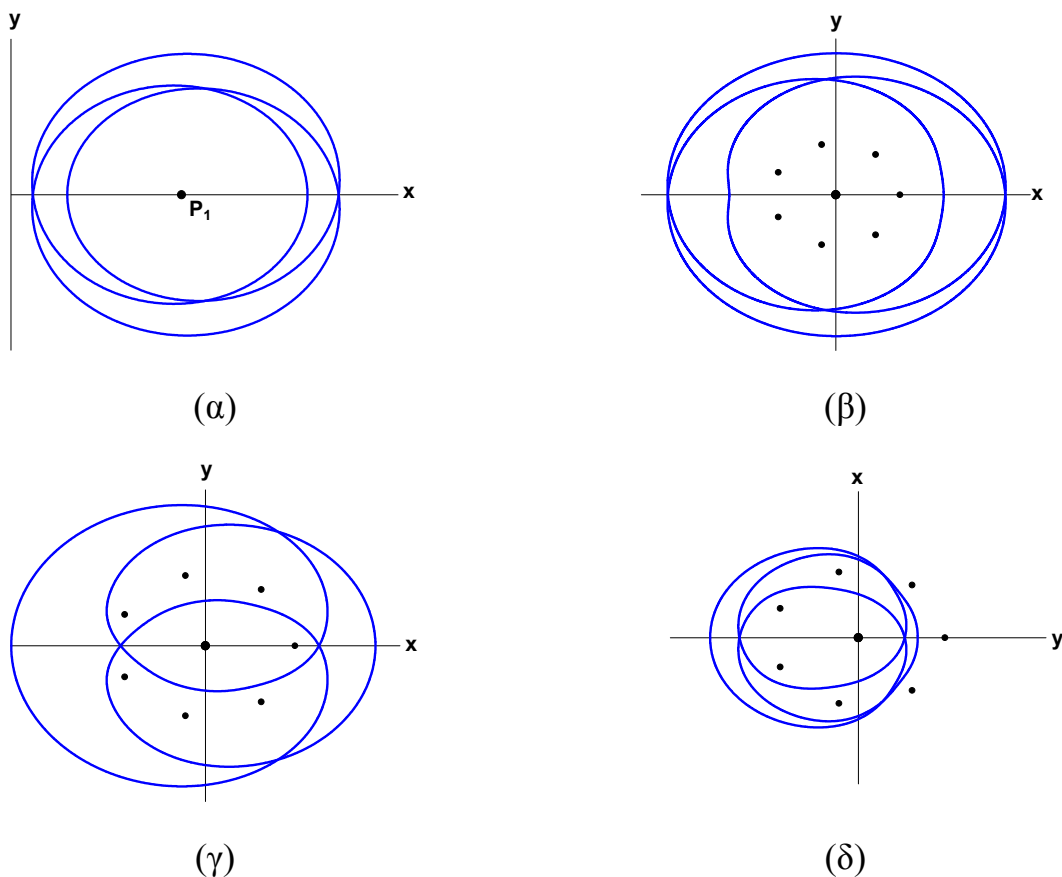
Σχήμα 10.31. Ισοενεργειακές τροχιές των οικογενειών:

(α) D43 και (β) D74

10.13 ΤΡΙΠΛΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

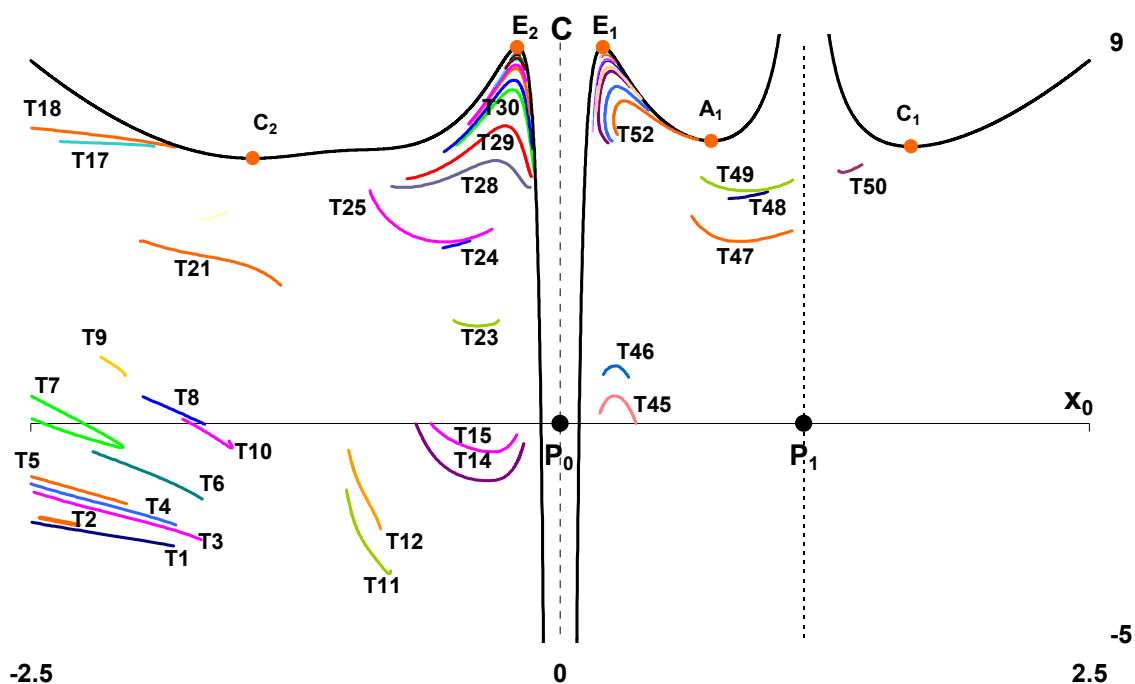
10.13.1 Γενικά χαρακτηριστικά των τριπλών περιοδικών τροχιών και κατανομές των χαρακτηριστικών τους καμπύλων, για την περίπτωση που θα μελετηθεί, στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C

Όπως ήδη αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού (§10.1), οι τριπλές περιοδικές τροχιές είναι συνθετότερες μορφές περιοδικών τροχιών και οι χαρακτηριστικές τους στο διάγραμμα x_0-C εμφανίζονται είτε ως αυτοτελείς καμπύλες, είτε ως διακλαδώσεις των οικογενειών απλών περιοδικών τροχιών (όπως λ.χ στην περιοχή της δένδροειδούς κατανομής των απλών περιοδικών τροχιών για την περίπτωση που $e < 0$). Αποτελούνται από τρεις κύριους βρόχους οι οποίοι περικλείουν από ένα (Σχήμα 10.32α) έως και όλα τα primaries. Στην τελευταία περίπτωση ανήκουν οι πλανητικού (Σχήμα 10.32β) και διαπλανητικού τύπου τριπλές περιοδικές τροχιές (Σχήμα 10.32γ-δ), με τις τελευταίες να αποτελούν τη συνηθέστερη μορφή τροχιών που συναντούμε. Οι τριπλές περιοδικές τροχιές χαρακτηρίζονται γενικά από μικρού μήκους χαρακτηριστικές καμπύλες σε σχέση με αυτές των απλών περιοδικών τροχιών, αφού οι πιθανότητες να περατωθούν σε τροχιές κρούσεις είναι αυξημένες σε σχέσεις με αυτές των απλών περιοδικών. Χαρακτηρίζονται επίσης από τιμές περιόδων μεγαλύτερες από αυτές των διπλών και πολύ μεγαλύτερες από αυτές των απλών. Τέλος είναι προφανές ότι η συνολική διαδρομή («διανυόμενο μήκος τροχιάς») στη διάρκεια μιας περιόδου είναι μεγαλύτερη από αυτήν των τροχιών μικρότερης πολλαπλότητας.



Σχήμα 10.32. Μορφές τριπλών περιοδικών τροχιών: (α) δορυφορικού τύπου τριπλή περιοδική τροχιά, (β) πλανητικού τύπου τριπλή περιοδική τροχιά (γ)-(δ) διαπλανητικού τύπου τριπλή περιοδική τροχιά

Όπως και στην περίπτωση των διπλών περιοδικών τροχιών, έτσι κι εδώ θα εξετάσαμε αναλυτικά τις συμμετρικές τριπλές περιοδικές τροχιές για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$. Στο Σχήμα 10.33 που ακολουθεί παρουσιάζουμε την κατανομή αυτών των οικογενειών στην περιοχή του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών x_0-C , που ορίζεται, όπως και στην περίπτωση της αναζήτησης των απλών-διπλών περιοδικών τροχιών, από τις τιμές, $x_0 \in [-2.5, 2.5]$ και $C \in [-6, 9]$.



Σχήμα 10.33. Χαρακτηριστικές καμπύλες οικογενειών τριπλών περιοδικών τροχιών στο επίπεδο αρχικών συνθηκών x_0 - C , για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

Στον Πίνακα 10.11 που ακολουθεί αναφέρονται οι ομάδες τριπλών περιοδικών τροχιών που δημιουργήσαμε, καθώς και οι οικογένειες-μέλη που περιέχονται σε καθεμία από αυτές και των οποίων τη δυναμική συμπεριφορά θα μελετήσουμε. Τέλος να σημειώσουμε ότι θα ερευνηθεί ξεχωριστά η οικογένεια τροχιών T50, που δεν συμπεριλαμβάνεται σε κάποια ομάδα.

Πίνακας 10.11. Ομαδοποίηση οικογενειών τριπλών περιοδικών τροχιών

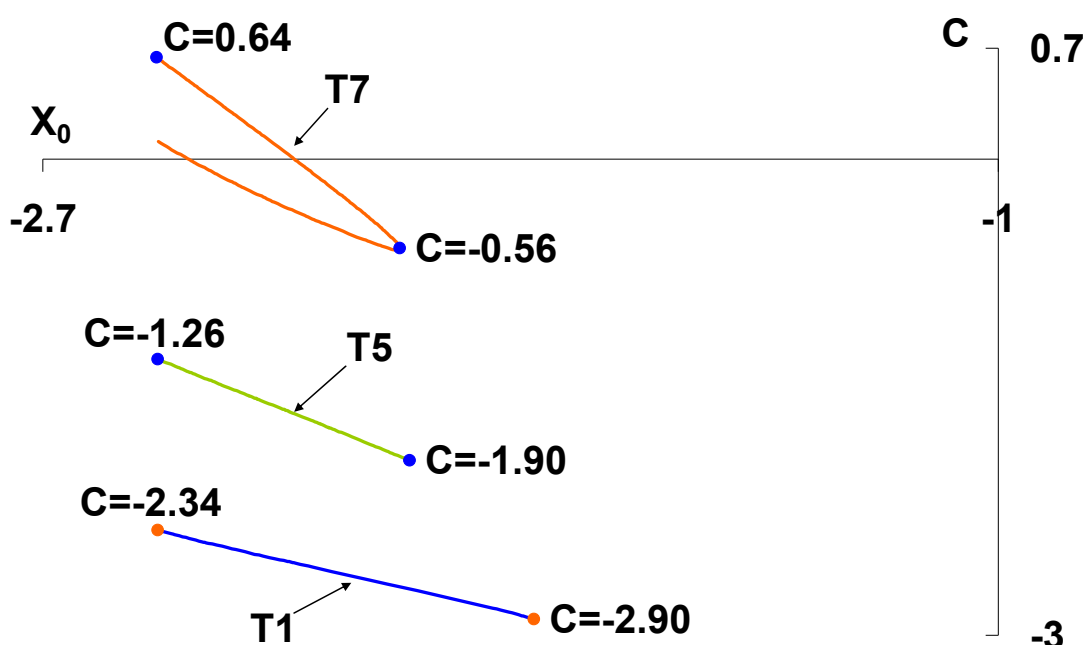
ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ	ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ-ΜΕΛΗ
H1	T1-T5-T7
H2	T12-T14 –T15
H3	T8-T10-T21
H4	T17-T18
H5	T45-T47-T49

H6	Δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E₁ και E₂
-----------	---

10.14 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H1 (οικογένειες T1-T5-T7)

10.14.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

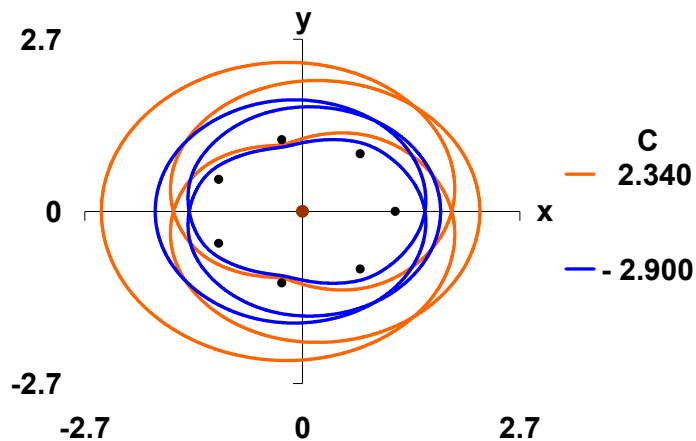
Με βάση τα αποτελέσματα που έχουμε συγκεντρώσει μέχρι στιγμής και για το τμήμα του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών που έχουμε ερευνήσει, οι μεν οικογένειες T1 και T5 της ομάδας φαίνονται να αναπτύσσονται στις αρνητικές τιμές των C, ενώ η οικογένεια T7 αναπτύσσεται και στις θετικές και στις αρνητικές τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C. Οι χαρακτηριστικές των T1 και T5 εξελίσσονται με σταθερή κλίση ως προς τον άξονα Ox_0 , ενώ αυτή της οικογένειας T7 έχει τη μορφή ανοιχτής «θηλιάς» και παρουσιάζει ακρότατο ως προς την C (Σχήμα 10.34).

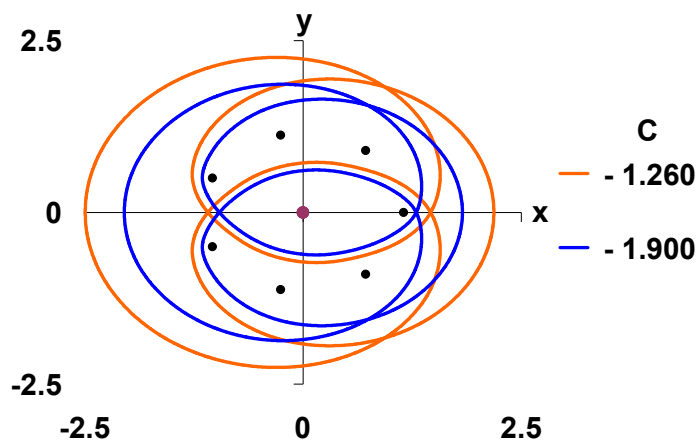


Σχήμα 10.34. Χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας οικογενειών H1, με

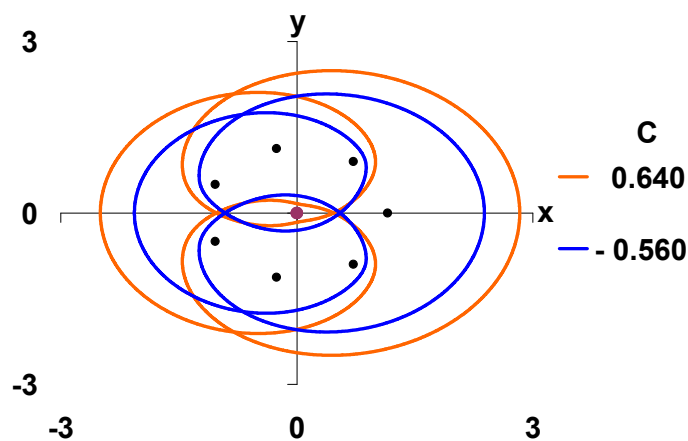
σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα 10.35

Όλες οι τροχιές αυτής της ομάδας είναι ανάδρομες, διαπλανητικού τύπου, και περικλείουν όλα τα primaries εντός των τριών βρόχων τους (Σχήμα 10.35). Ειδικά για τις τροχιές των T5 και T7, οι δύο μικρότεροι συμμετρικοί ως προς τον Ox_0 βρόχοι τους περικλείουν, η μεν πρώτη όλα τα primaries η δε δεύτερη όλα τα primaries εκτός του P_1 και στην κοινή περιοχή που σχηματίζουν εγκλωβίζουν, η μεν πρώτη το κεντρικό P_0 και το P_1 , η δε δεύτερη μόνο το P_0 . Στον Πίνακα 10.12 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.





(β)



(γ)

Σχήμα 10.35. Εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) T1, (β) T5 και (γ) T7

Πίνακας 10.12. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών H1

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
T1	-2.900000166	-1.826190828	3.080444374	1.715135382	-3.075493718	4.725419832	U
	-2.450000114	-2.369805599	3.243976545	2.090193349	-3.107099802	5.624099289	U

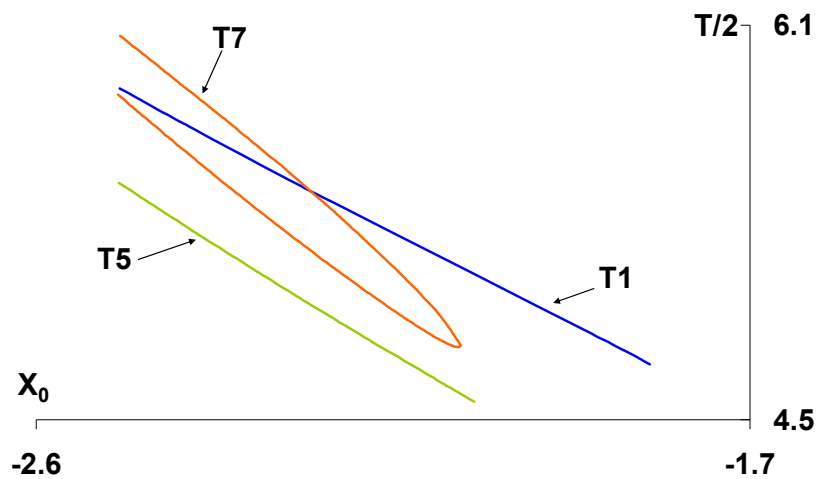
	-2.340000108	-2.494969082	3.300305419	2.202286888	-3.140556723	5.844064995	U
T5	-1.900000152	-2.047665478	2.994447380	1.825274660	-2.926586354	4.574081046	U
	-1.460000089	-2.355328209	3.079126492	2.061616555	-2.930953262	5.169419803	U
	-1.260000090	-2.495659738	3.132855453	2.185748970	-2.955183553	5.460711005	U
T7	0.639999935	-2.497030163	2.814298947	2.832136210	-3.069329832	5.819211792	U
	-0.560000097	-2.064792328	2.769730776	2.382962692	-2.947832208	4.801843208	U
	0.109999944	-2.494400763	2.905122990	2.819067189	-3.144334390	6.057061794	U

10.14.2 Διαγράμματα $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της ομάδας οικογενειών H1

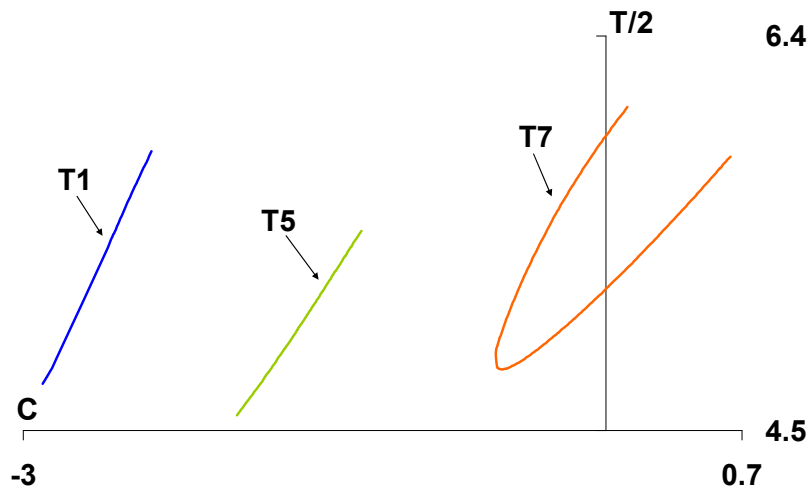
Για τις καμπύλες $x_0-T/2$ των T1 και T5 παρατηρούμε ότι η τιμή της περιόδου ελαττώνεται καθώς το x_0 πλησιάζει την αρχή των αξόνων. Η αντίστοιχη καμπύλη της T7 αποτελείται από δύο σκέλη και εμφανίζει ακρότατο στο σημείο που ενώνονται, εκεί ακριβώς που παρουσιάζεται το ακρότατο και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0-C . Η περίοδος αυξάνεται και στα δύο σκέλη όταν το x_0 απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 10.36α).

Για τις καμπύλες $C-T/2$ των T1 και T5 παρατηρούμε ότι η τιμή της περιόδου αυξάνεται όταν αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C, ενώ για την αντίστοιχη καμπύλη της T7, που αποτελείται από δύο σκέλη και εμφανίζει ακρότατο στο σημείο που ενώνονται, η περίοδος επίσης αυξάνεται και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C (Σχήμα 10.36β).

Όλες οι τροχιές της ομάδας χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές της ημιπεριόδου και για την T1 κυμαίνονται από 4.73 (L) έως 5.84 (L), για τις τροχιές της T5 από 4.57 (L) έως 5.46 (L) και της T7 από 4.80 (L) έως 6.06 (L).



(α)



(β)

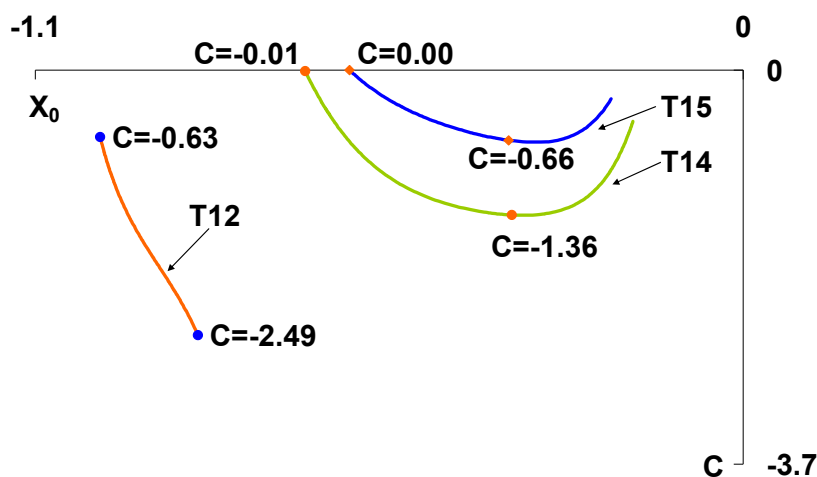
Σχήμα 10.36. Καμπύλες (α) x_0 - $T/2$ και (β) C - $T/2$ των οικογενειών της ομάδας H1

10.15 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H2 (οικογένειες T11-T12-T14)

10.15.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες αυτής της ομάδας αναπτύσσονται στις αρνητικές τιμές των C , χωρίς να αποκλείεται το ενδεχόμενο οι καμπύλες να συνεχίζουν την εξέλιξή τους και κατά τα δύο άκρα τους.

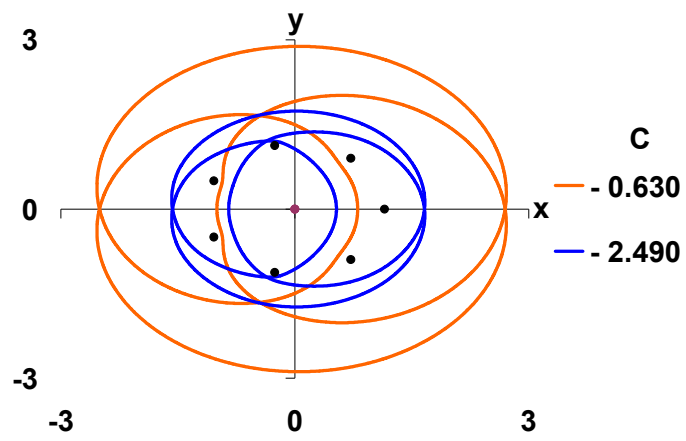
Παρατηρούμε ακόμη ότι οι χαρακτηριστικές των T14 και T15 παρουσιάζουν ακρότατο ως προς την C (Σχήμα 10.37).



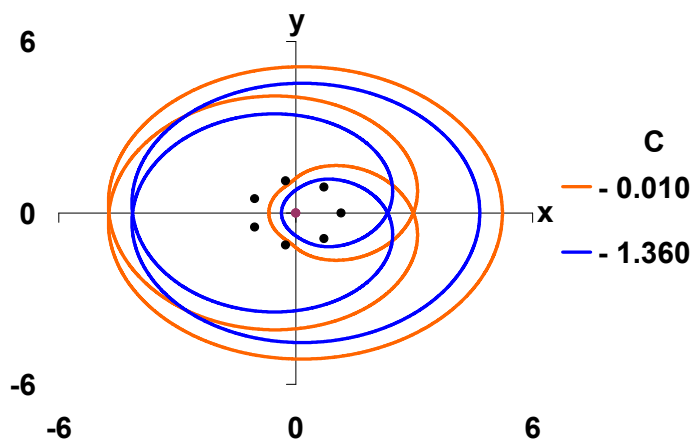
Σχήμα 10.37. Χαρακτηριστικές καμπύλες ομάδας οικογενειών H2, με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο Σχήμα 10.38

Όλες οι τροχιές της ομάδας είναι ανάδρομες, διαπλανητικού τύπου και ο μεγαλύτερος βρόχος τους περικλείει όλα τα primaries. Στην κοινή περιοχή που δημιουργούν οι δύο μικρότεροι βρόχοι της T12, περικλείονται τα P_0 , P_3 και P_6 (Σχήμα 10.38α), ενώ οι δύο μικρότεροι βρόχοι της T15 στην κοινή τους περιοχή περικλείουν το κεντρικό primary P_0 (Σχήμα 10.38γ). Για την τροχιά της T14 παρατηρούμε ότι ο μικρότερος βρόχος της περικλείει τα primaries, P_0 , P_1 , P_2 και P_7 (Σχήμα 10.38β). Όλες οι τροχιές της ομάδας αυτής συρρικνώνονται όταν η τιμή της σταθεράς C ελαττώνεται και ειδικότερα για την τροχιά της T12, διακρίνουμε ότι καταλήγουν σε τροχιές κρούσης με τα primaries P_3 και P_6 .

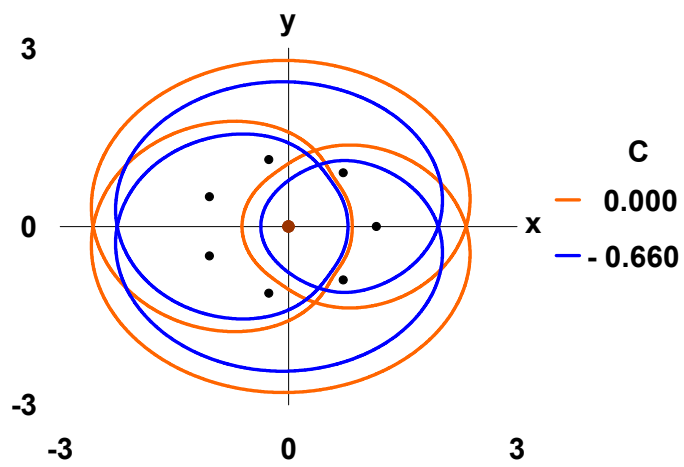
Στον Πίνακα 10.13 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(a)



(β)



(γ)

Σχήμα 10.38. Εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) T12, (β) T14 και (γ) T15

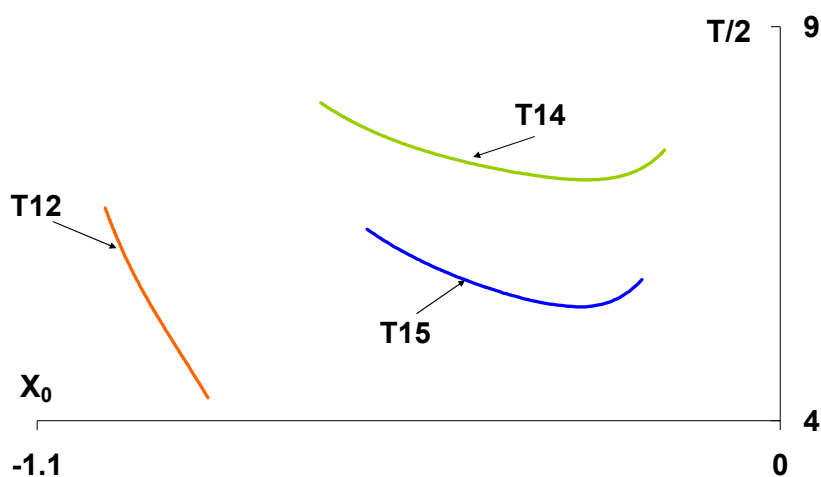
Πίνακας 10.13. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών H2

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
T12	-0.630000080	-0.999309052	2.661408535	0.806326269	-2.720292392	6.700962539	U
	-1.450000079	-0.947826771	2.812985819	0.694415027	-2.851249789	5.711106081	U
	-2.490001522	-0.847131812	2.995464178	0.534128635	-3.076481542	4.288659450	U
T14	-0.480000054	-0.171233192	3.031426221	4.952963127	-5.115031367	7.436942394	U
	-1.360000039	-0.359505127	3.037286747	4.663229414	-4.932510227	7.106890332	U
	-0.010000031	-0.680621063	2.573467559	5.234737306	-5.338699953	8.035273931	U
T15	-0.000000062	-0.611811730	2.596259601	0.836434419	-2.617350415	6.429501294	U
	-0.660000078	-0.364389965	2.913950470	0.779339082	-2.716799570	5.517087502	U
	-0.270000092	-0.205042430	3.027134960	0.814461436	-2.656851439	5.789363794	U

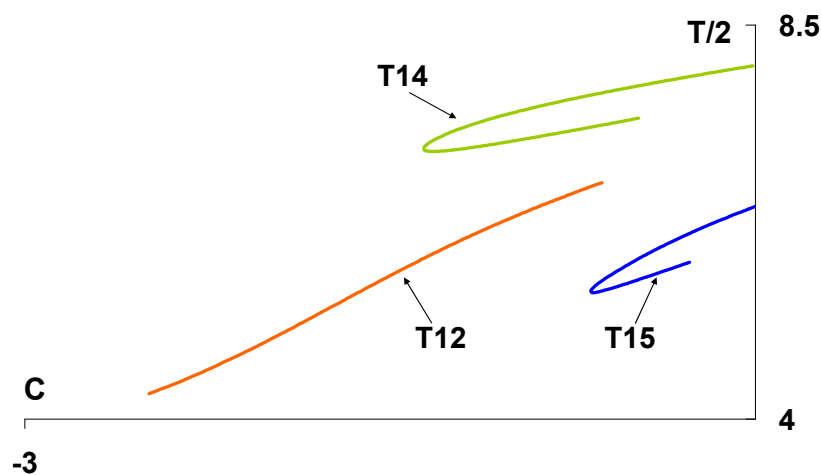
10.15.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H2

Στις καμπύλες x_0 -T/2 και C-T/2 των T14 και T15 παρουσιάζεται ακρότατο, στο σημείο όπου παρουσιάζεται το ακρότατο και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0 -C. Ειδικότερα, όταν το x_0 πλησιάζει την αρχή των αξόνων, στο διάγραμμα x_0 -T/2, αριστερά των ακρότατων η περίοδος ελαττώνεται, ενώ δεξιά αυτών αυξάνεται και για τις δύο οικογένειες (Σχήμα 10.39α). Στο αντίστοιχο διάγραμμα C-T/2 των δύο οικογενειών, όταν η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται, αυξάνονται οι τιμές της περιόδου και στα δύο σκέλη της καμπύλης τους (Σχήμα 10.39β). Από την καμπύλη x_0 -T/2 της T12, προκύπτει ότι όσο απομακρύνεται το x_0 από την αρχή των αξόνων, η περίοδος

αυξάνεται (Σχήμα 10.39α), ενώ παρατηρούμε επίσης αύξηση της περιόδου όταν η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται στο αντίστοιχο διάγραμμα $C-T/2$ της T12 (Σχήμα 10.39β). Όλες οι τροχιές της ομάδας χαρακτηρίζονται από μεγάλες και σε κάποιες περιπτώσεις, πολύ μεγάλες τιμές της ημιπεριόδου και για την T12 κυμαίνονται από 4.29 (L) έως 6.70 (L), για τις τροχιές της T14 από 7.05 (L) έως 8.04 (VL) και της T15 από 5.44 (L) έως 6.43 (L).



(α)



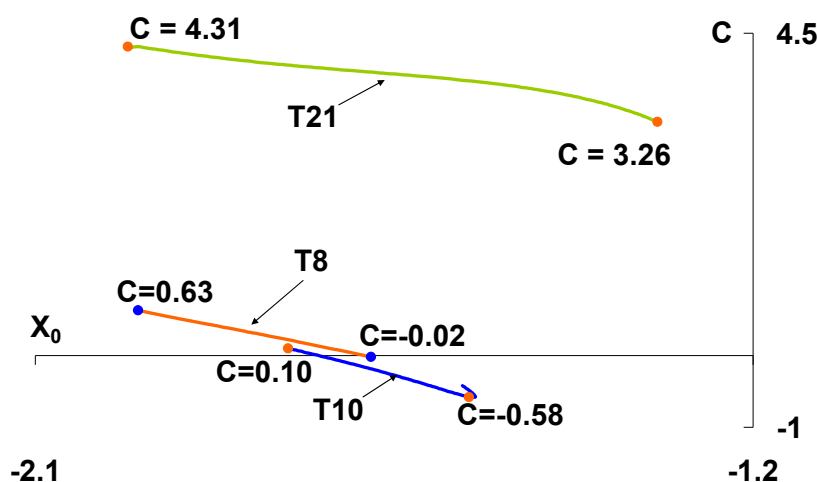
(β)

Σχήμα 10.39. Καμπύλες (α) $x_0-T/2$ και (β) $C-T/2$ των οικογενειών της ομάδας H2

10.16 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ H3 (οικογένειες T8-T10-T21)

10.16.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

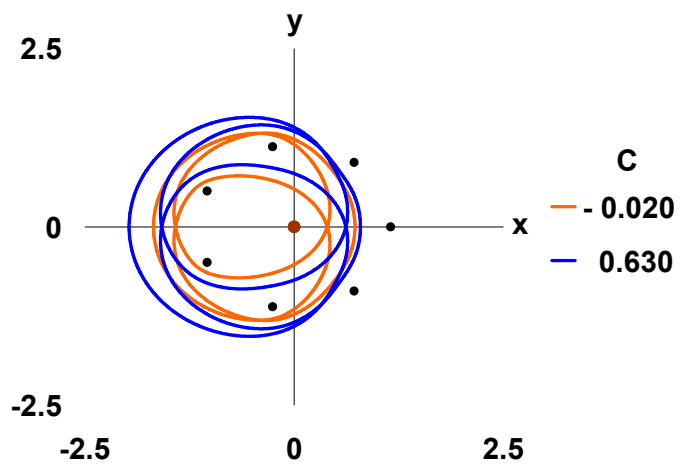
Από τις τρεις χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας αυτής, η T21 εξελίσσεται εξ ολοκλήρου σε θετικές τιμές της C , ενώ οι υπόλοιπες δύο τέμνουν τον άξονα Ox_0 . Να σημειώσουμε ότι η T10 στο κάτω άκρο της έχει τη μορφή «άγκιστρου» παρουσιάζοντας ακρότατο ως προς την C (Σχήμα 10.40).



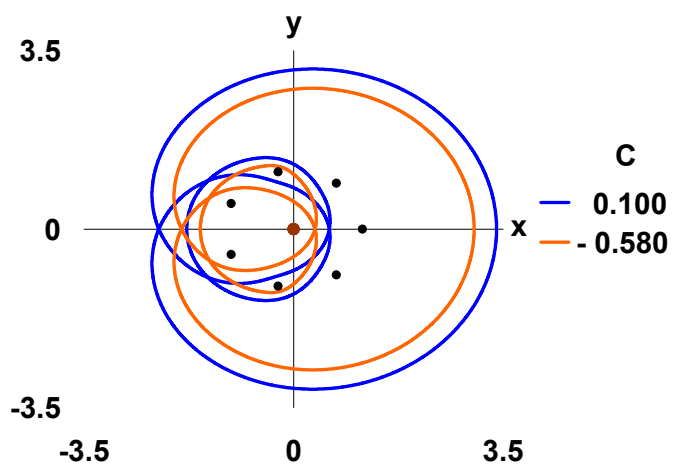
Σχήμα 10.40. Χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας οικογενειών H3, με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο Σχήμα 10.41

Και αυτές οι τροχιές είναι ανάδρομες, διαπλανητικού τύπου. Στις τροχιές των T10 και T21 ο μεγαλύτερος βρόχος τους περικλείει όλα τα primaries, ενώ σε αυτές της T8 παραμένουν εκτός τα primaries P_1 , P_2 και P_7 (Σχήμα 10.41α). Ο μικρότερος βρόχος της T10 περικλείει τα P_0 , P_4 και P_5 (Σχήμα 10.41β), ενώ και οι δύο μικρότεροι βρόχοι της T21 διαγράφονται γύρω από τα P_2 και P_7 primaries (Σχήμα 10.41γ). Όταν ελαττώνεται η τιμή της σταθεράς C οι τροχιές συρρικνώνονται και στην περίπτωση της T21 καταλήγουν σε τροχιά κρούσης με τα primaries P_2 και P_7 .

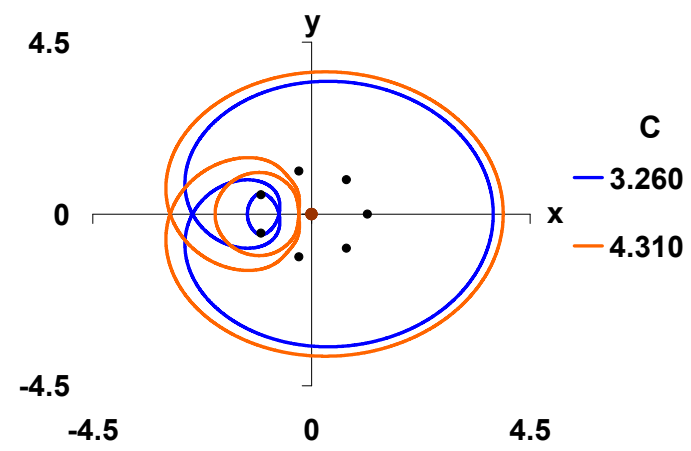
Στον Πίνακα 10.14 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 10.41. Εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) T8, (β) T10 και (γ) T21

Πίνακας 10.14. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών H3

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
T8	-0.020000186	-1.678951665	2.530721510	0.727300491	-2.587939838	3.856831862	U
	0.309999903	-1.824223610	2.505150488	0.761519117	-2.527657525	4.328288902	U
	0.629999918	-1.971000170	2.499969923	0.792296672	-2.472250806	4.773797110	U
T10	0.099999938	-1.782981831	2.533609962	3.390390770	-3.617677705	5.973937370	U
	-0.580000117	-1.555957474	2.621050615	3.016193427	-3.404051181	5.045310636	U
	-0.420000144	-1.564414776	2.591163597	3.041620091	-3.400737648	5.003282607	U
T21	3.259939945	-1.319810335	1.742948125	3.740424795	-3.501673459	5.552281844	U
	3.639939919	-1.434214058	1.620402251	3.850537184	-3.559910441	6.244285646	U
	4.309939990	-1.983801506	1.612322355	3.945947377	-3.565144494	7.967015258	U

10.16.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H3

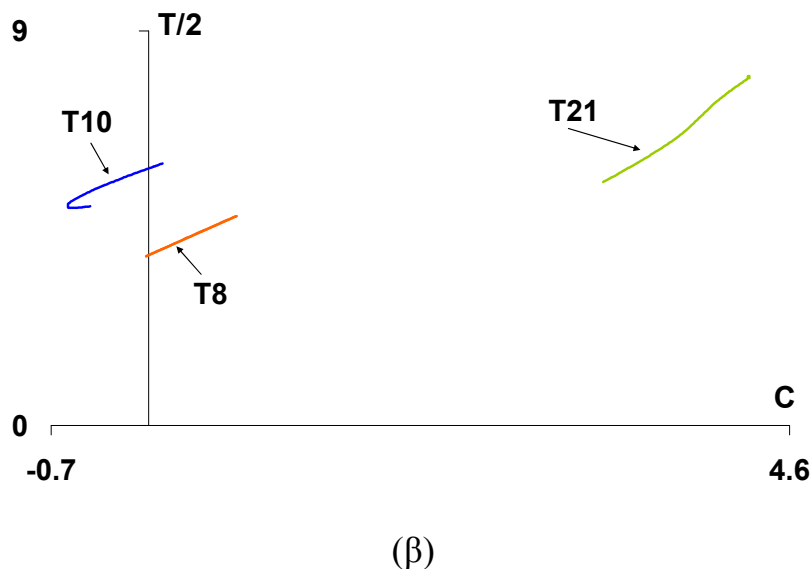
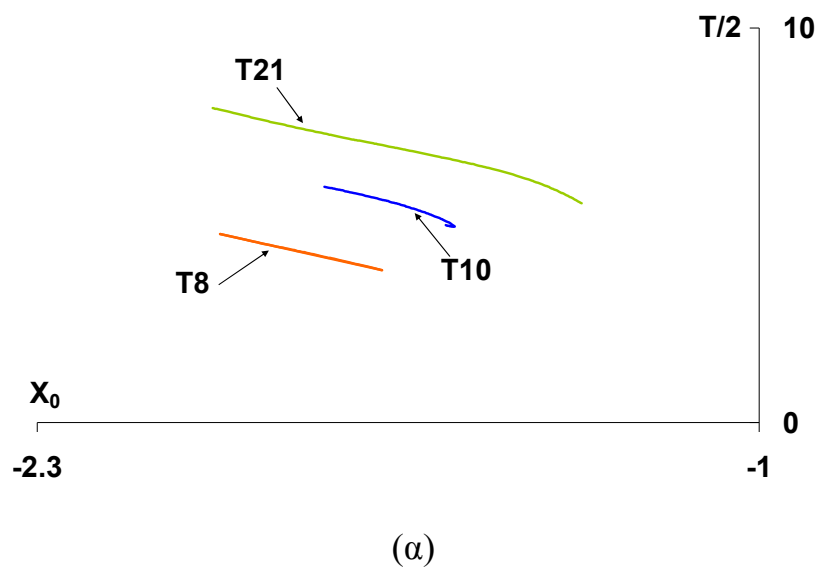
Από τις καμπύλες x_0 -T/2 των T8 και T21 παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η απόλυτη τιμή της αρχικής θέσης x_0 , η περίοδος αυξάνεται (Σχήμα 10.42α), ενώ από τις καμπύλες C-T/2 των ίδιων οικογενειών, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C η περίοδος τους επίσης αυξάνεται (Σχήμα 10.42β).

Στα διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 οι καμπύλες της T10, έχουν την μορφή «άγκιστρου» και αποτελούνται από δύο σκέλη, ενώ παρουσιάζουν ακρότατο, στο σημείο που παρουσιάζεται αυτό και στο διάγραμμα x_0 -C.

Στο πρώτο διάγραμμα η περίοδος αυξάνεται και στα δύο σκέλη της καμπύλης όταν απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 10.42α), ενώ στο δεύτερο

διάγραμμα όταν αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C , επίσης αυξάνεται η περίοδος και στα δύο σκέλη (Σχήμα 10.42β).

Το εύρος τιμών της ημιπεριόδου των T_8 και T_{10} είναι σχετικά μικρό, με τιμές ημιπεριόδου που κυμαίνονται για την T_8 , από 3.86 (M) έως 4.77 (L) και για την T_{10} , από 4.96 (L) έως 5.97 (L). Τέλος οι τροχιές της T_{21} χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές ημιπεριόδου που κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 5.00 (L) και 7.97 (L).

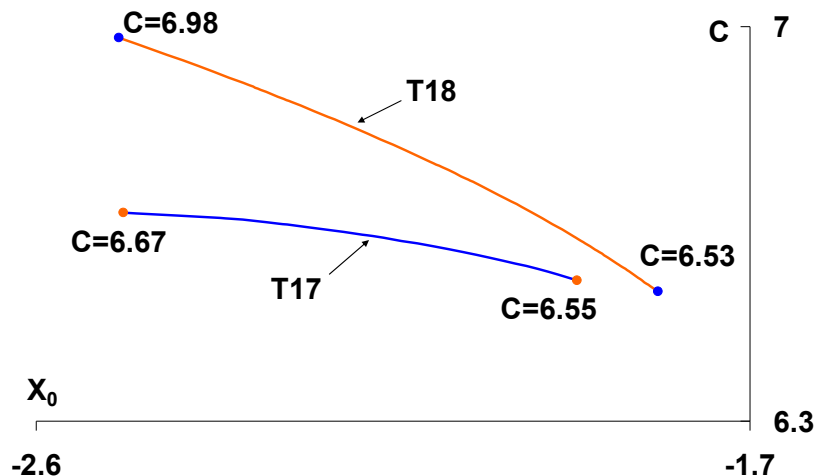


Σχήμα 10.42. Καμπύλες (α) x_0 - $T/2$ και (β) C - $T/2$ των οικογενειών της ομάδας H_3

10.17 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ Η4 (οικογένειες T17-T18)

10.17.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών T17 και T18 εξελίσσονται στην περιοχή των θετικών τιμών της σταθεράς C και περατώνεται πολύ κοντά στην καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (Σχήματα 10.33 και 10.43). Να σημειώσουμε ότι πρόκειται για οικογένειες που αναπτύσσονται στην περιοχή όπου συνυπάρχουν οι οικογένειες απλών περιοδικών τροχιών της ομάδας F7 ("Fish-type" κατανομή οικογενειών) και η οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D28.



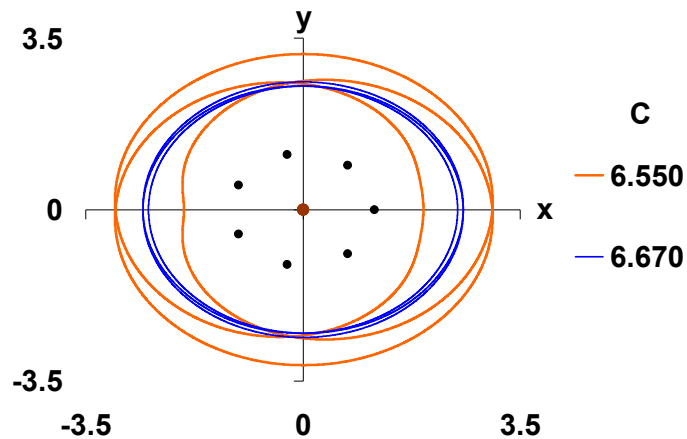
Σχήμα 10.43. Χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας οικογενειών Η4, με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο Σχήμα 10.44

Πρόκειται για ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου, οι οποίες διαγράφονται έξω και γύρω από τον σχηματισμό των primaries (Σχήμα 10.44) και χαρακτηρίζονται από εξαιρετικά μεγάλες τιμές της ημιπεριόδου. Οι τροχιές της T17 έχουν από τις μεγαλύτερες τιμές ημιπεριόδου σε σχέση με τις υπόλοιπες που συναντήσαμε έως τώρα και κυμαίνονται από 16.56(EL) έως 16.78(EL). Για την T18 η ημιπεριόδός τους κυμαίνεται από 12.77(EL) έως 12.82(EL). Να επισημάνουμε ότι ίδιας μορφής τροχιές

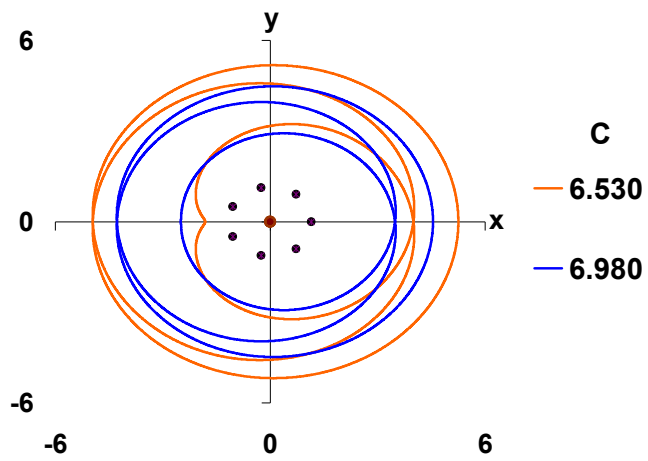
προκύπτουν και από τις αντίστοιχες ομάδες της περιοχής που αναφέραμε παραπάνω και η μόνη τους διαφορά περιορίζεται στον αριθμό των βρόχων που περικλείει κάθε φορά όλα τα primaries.

Από τη μελέτη της ευστάθειας των T17 και T18 προκύπτουν τα διαγράμματα ευστάθειας του Σχήματος 10.41γ και δ, όπου διακρίνουμε τα τμήματα των χαρακτηριστικών από τα οποία προκύπτουν ευσταθείς και ασταθείς τροχιές και διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές δευτέρου είδους ($\alpha=-1$).

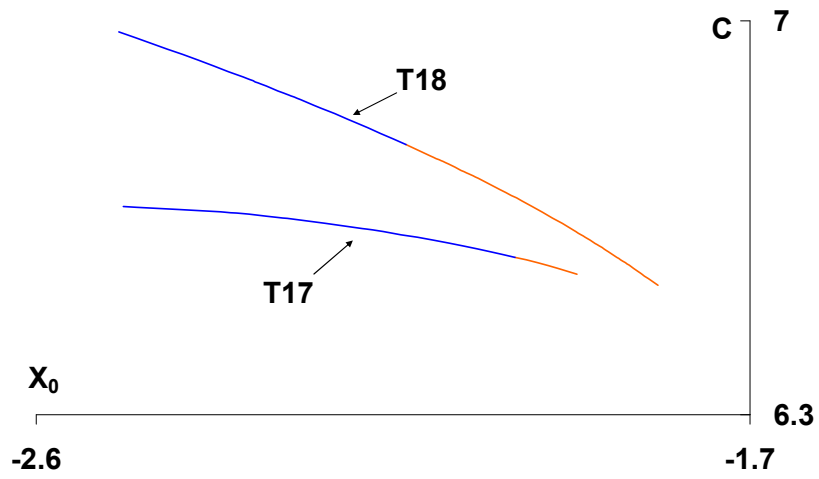
Στον Πίνακα 10.15 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



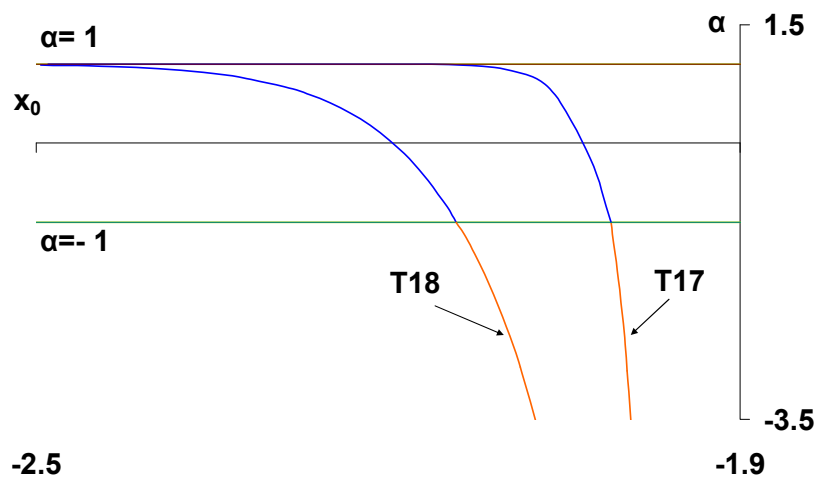
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 10.44. Διαγράμματα της ομάδας οικογενειών H4

(α) Εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής της οικογένειας T17, (β) εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής της οικογένειας T18, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας των οικογενειών T17-T18 και (δ) διαγράμματα ευστάθειας x_0 -α των οικογενειών T17 και T18

Πίνακας 10.15 Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών της οικογένειας H4

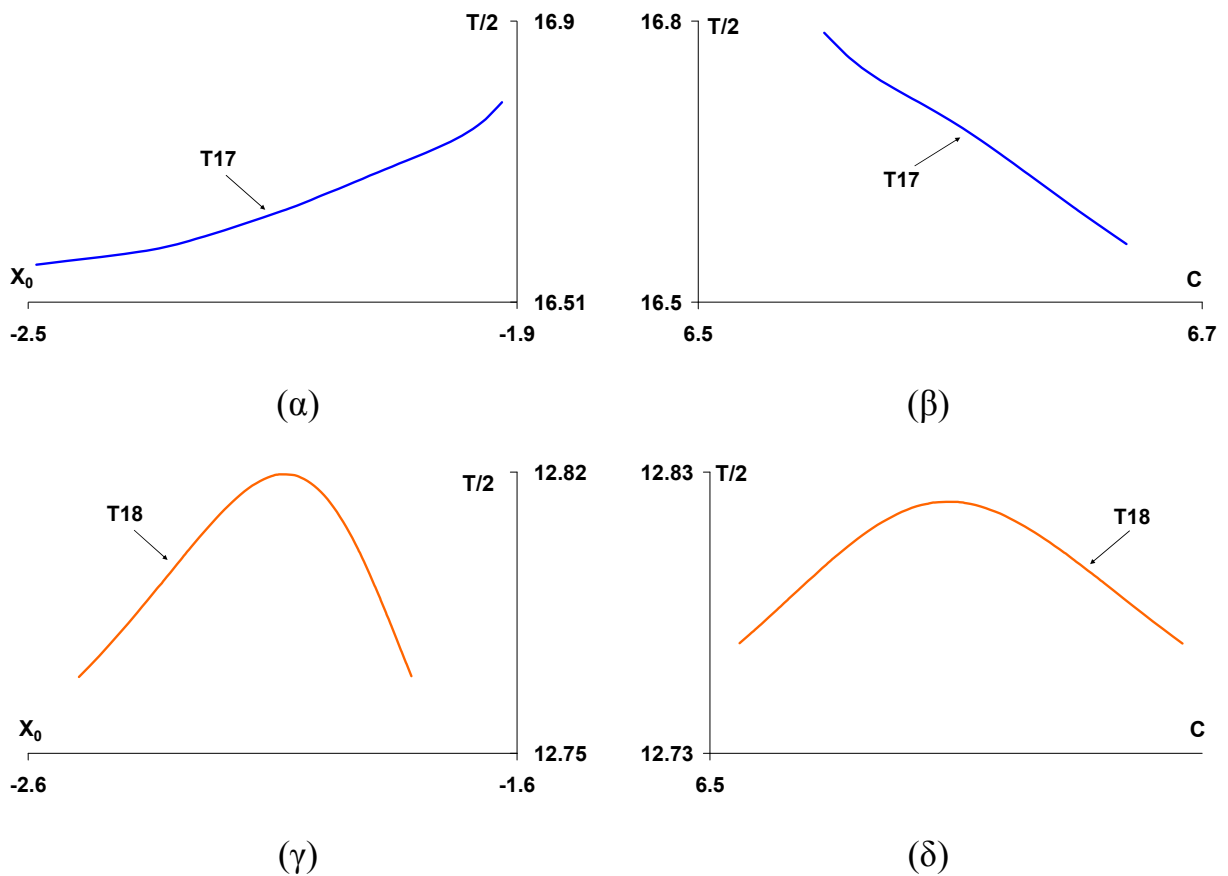
	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
T17	6.549990010	-1.918362591	0.463120592	1.940481864	-0.554489612	16.787344118	U
	6.609960008	-2.099553101	0.771605640	2.112046665	-0.807819756	16.676748199	S
	6.669960005	-2.490007813	1.364630395	2.490791592	-1.367855700	16.562059710	S
T18	6.529990014	-1.815871979	0.204238863	5.250447830	-4.703527703	12.769183609	U
	6.769960015	-2.117943024	0.697698604	4.913742767	-4.305331790	12.818239218	U
	6.979970014	-2.496106323	1.255628675	4.542424999	-3.861412630	12.768985324	S

10.17.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H4

Το εύρος τιμών της ημιπεριόδου και για τις δύο τροχιές είναι πολύ μικρό και αυτός είναι ο λόγος που στα διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 που θα ακολουθήσουν, κρίναμε σκόπιμο να τα παρουσιάσουμε ξεχωριστά για κάθε οικογένεια, ώστε να μην εξάγουμε λανθασμένα συμπεράσματα.

Στο διάγραμμα x_0 -T/2 της T17 (Σχήμα 10.45α) παρατηρούμε ότι καθώς το x_0 πλησιάζει την αρχή των αξόνων η περίοδος αυξάνεται, ενώ στο αντίστοιχο διάγραμμα C-T/2 (Σχήμα 10.45β) όταν η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται η περίοδος ελαττώνεται.

Οι καμπύλες $x_0-T/2$ και $C-T/2$ της T18 παρατηρούμε ότι παρουσιάζουν ακρότατο και ειδικότερα για την καμπύλη $x_0-T/2$ (Σχήμα 10.45γ), αριστερά του ακροτάτου όταν το x_0 πλησιάζει προς αυτό, η περίοδος αυξάνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακροτάτου, όπου καθώς το x_0 πλησιάζει στην αρχή των αξόνων η περίοδος ελαττώνεται. Για την αντίστοιχη καμπύλη $C-T/2$ (Σχήμα 10.45δ) αριστερά του ακροτάτου και καθώς η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται η περίοδος επίσης αυξάνεται, ενώ δεξιά αυτού η περίοδος ελαττώνεται καθώς συνεχίζει να αυξάνεται η τιμή της C .



Σχήμα 10. 45. Καμπύλες $x_0-T/2$ και $C-T/2$ των οικογενειών:

(α)-(β) T17 και (γ)-(δ) T18

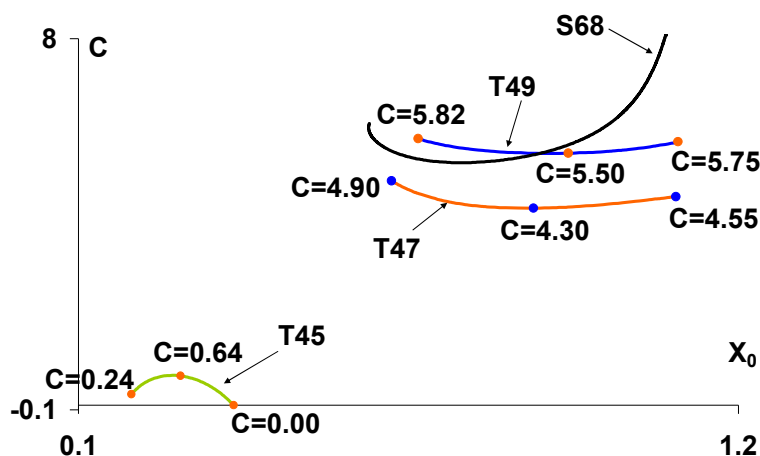
10.18 ΟΜΑΔΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ Η5 (οικογένειες T45-T47-T49)

10.18.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής τους καμπύλης. Ευστάθεια

Για τις χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών T47 και T49 παρατηρούμε ότι αναπτύσσονται εξ ολοκλήρου στις θετικές τιμές των C (Σχήμα 10.46), ενώ από τα αριθμητικά δεδομένα που έχουμε συγκεντρώσει, δεν αποκλείεται το ενδεχόμενο για την χαρακτηριστική της T45 να συνεχίζει την εξέλιξή της και κατά τα δύο άκρα της στις αρνητικές τιμές των C .

Όλες οι καμπύλες x_0 - C της ομάδας αυτής, παρουσιάζουν ακρότατο ως προς C και μάλιστα για την T47 και T49 ελάχιστο, ενώ για την T45 μέγιστο. Στο διάγραμμα x_0 - C (Σχήμα 10.46), παρατηρούμε ότι η T49 πηγάζει από την οικογένεια των απλών περιοδικών τροχιών S68, όπως ακριβώς συμβαίνει και με την διπλή τροχιά της οικογένειας D66. Να σημειώσουμε ότι από την S68, πηγάζει και η τριπλή περιοδική τροχιά T48, την οποία παραλείπουμε αφού η συμπεριφορά της δε διαφέρει σε τίποτα από αυτήν της T49.

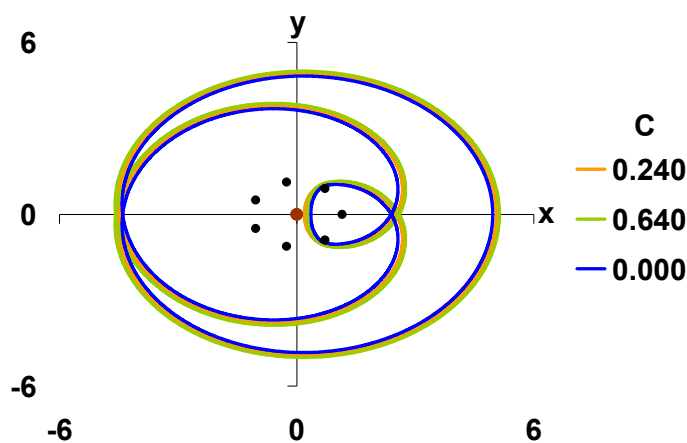
Όλες οι τροχίες και αυτής της ομάδας είναι ανάδρομες διαπλανητικού τύπου εκτός από τις τροχίες της οικογένειας T49 που είναι ανάδρομες δορυφορικού τύπου, περί του primary P_1 (Σχήμα 10.47γ).



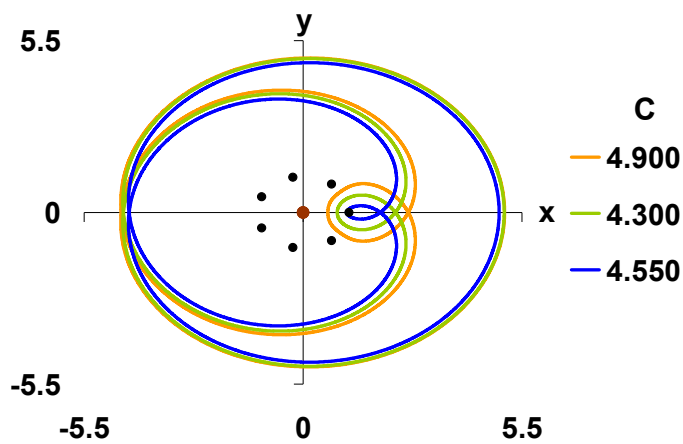
Σχήμα 10.46. Χαρακτηριστικές καμπύλες της ομάδας οικογενειών Η5, με σημειωμένες τις τροχίες που απεικονίζονται στο επόμενο Σχήμα 10.47

Οι μεγαλύτερος από τους τρεις βρόχους κάθε τροχιάς των T45 και T47 περικλείει όλα τα primaries, ενώ ο μικρότερος βρόχος τους, στη μεν πρώτη περικλείει τα P_1, P_2 και P_7 , στην δε δεύτερη μόνο το P_1 (Σχήμα 47α-β). Για την T45 εκατέρωθεν του ακρότατου, όταν η τιμή της σταθεράς C μειώνεται οι τροχιές συρρικνώνονται και καταλήγουν σε τροχιά κρούσης με τα P_2 και P_7 , ενώ για την T47 οι τροχιές συρρικνώνονται όσο αυξάνεται το x_0 και καταλήγουν σε τροχιά κρούσης με το P_1 . Για τις τροχιές της T49 παρατηρούμε ότι για τιμές των C στην περιοχή των άκρων, οι δύο μικρότεροι βρόχοι τους εγκλωβίζουν στην κοινή περιοχή που σχηματίζουν το P_1 και καθώς η σταθερά C μειώνεται διευρύνεται αυτή η περιοχή και συρρικνώνεται ο κύριος και μεγαλύτερος βρόχος της τριπλής τροχιάς. (Σχήμα 47γ). Τέλος παρατηρούμε ότι από τις οικογένειες διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών D66 και T49 αντίστοιχα, και από την οικογένεια απλών περιοδικών τροχιών S68 από την οποία πηγάζουν, προκύπτουν τροχιές ίδιου τύπου και η μόνη τους διαφορά είναι το πλήθος των βρόχων που περικλείουν το primary P_1 .

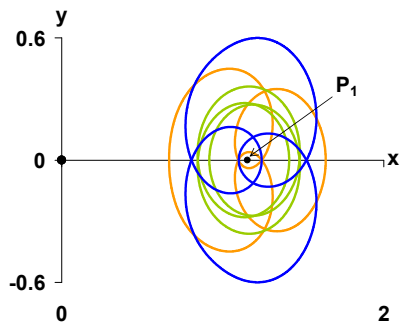
Στο Σχήμα 10.47δ έχουμε σχεδιάσει το διάγραμμα ευστάθειας x_0 -α της οικογένειας T49, στο οποίο διακρίνουμε δύο κρίσιμες περιοδικές τροχιές, μία για κάθε είδος.



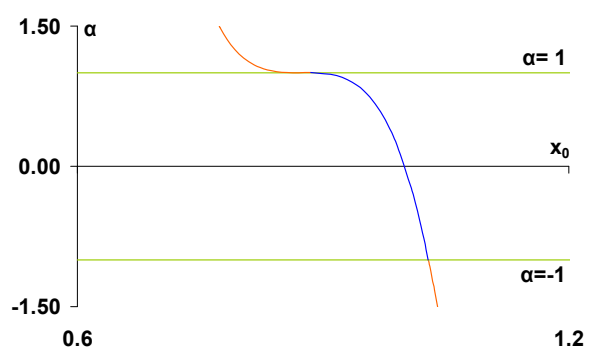
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 10.47. Εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής των οικογενειών: (α) T45, (β) T47, (γ) T49 και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α της οικογένειας T49

Στον Πίνακα 10.16 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.

Πίνακας 10.16. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών της ομάδας οικογενειών H5

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
T45	0.239959945	0.188137795	2.936525258	5.048036914	-5.135421274	7.457800910	U
	0.639959963	0.270128113	2.811628627	5.127308512	-5.173158154	7.599089405	U
	-0.000040111	0.358627207	2.805714060	4.960331286	-5.074928914	7.260614652	U
T47	4.899970003	0.621681942	1.362508394	5.063836612	-4.676403866	9.140750127	U
	4.299889995	0.858437744	1.621763975	5.053367182	-4.729192701	8.292025880	U
	4.549900296	1.096003860	3.000761102	4.926587361	-4.569385467	7.860192985	U
T49	5.820000523	0.666261246	0.936992069	1.639068486	-0.851189385	2.493051233	U
	5.499919965	0.916488648	1.324552932	1.412402240	-1.255716762	2.444490230	S
	5.749930145	1.099311117	2.886059012	1.241595138	-2.170275949	2.825911726	U

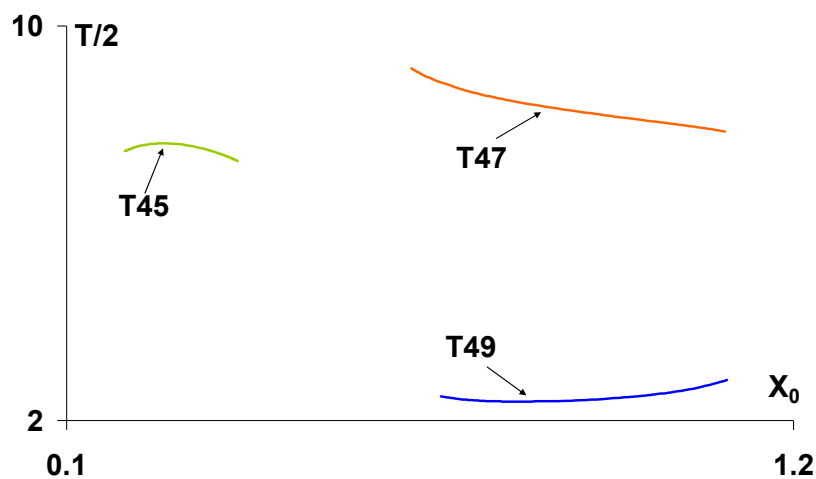
10.18.2 Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της ομάδας οικογενειών H5

Λόγω του μικρού εύρους τιμών των ημιπεριόδου των τροχιών, στα διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 που ακολουθούν, για κάποιες οικογένειες κρίναμε σκόπιμο να τα παρουσιάσουμε ξεχωριστά ως λεπτομέρεια των κύριων διαγραμμάτων, προς αποφυγή εσφαλμένων συμπερασμάτων.

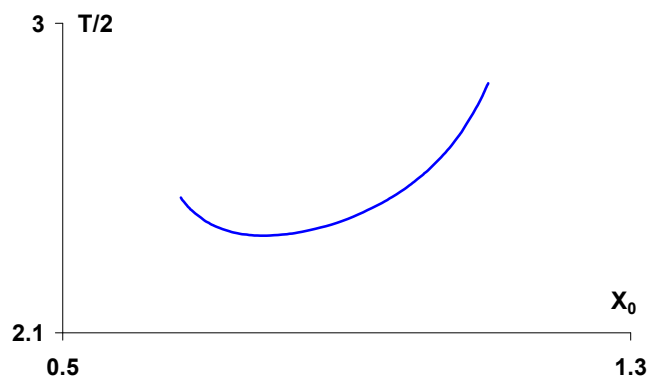
Οι τροχιές της T45 χαρακτηρίζονται από μεγάλες ημιπεριόδους που οι τιμές τους κυμαίνονται από 7.26 (L) έως 7.62 (L), της T47 από μεγάλες ή πολύ μεγάλες τιμές οι οποίες κυμαίνονται από 7.86 (L) έως 9.14 (VL) και τέλος λόγω της σχετικά μικρής διαδρομής του σώματος γύρω από το P₁, οι ημιπερίοδοι της T49 χαρακτηρίζονται από μεσαίες τιμές που κυμαίνονται από 2.38 (M) έως 2.82 (M).

Στο Σχήμα 10.48α, για την καμπύλη x_0 -T/2 της T45 παρατηρούμε ότι δεξιά του ακρότατου καθώς το x_0 πλησιάζει σε αυτό, η περίοδος αυξάνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακρότατου, όπου καθώς το x_0 πλησιάζει στην αρχή των αξόνων η περίοδος ελαττώνεται. Για την σχέση της θέσης x_0 με την περίοδο της T47, προκύπτει

ότι η περίοδος ελαττώνεται όταν απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων. Για να γίνει εμφανές το ακρότατο που παρουσιάζει η καμπύλη $x_0-T/2$ της T49, την σχεδιάσαμε μόνη της (Σχήμα 4.48β), οπότε γίνεται αντιληπτό ότι καθώς η τιμή της θέσης x_0 αυξάνεται, αριστερά του ακρότατου η περίοδος ελαττώνεται, ενώ δεξιά αυτού η περίοδος αυξάνεται.



(α)



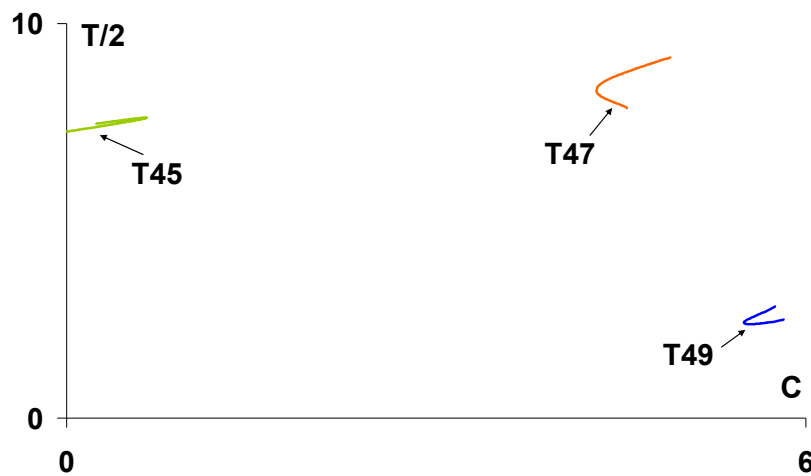
(β)

Σχήμα 10.48. Καμπύλες $x_0-T/2$ των οικογενειών της ομάδας H5:

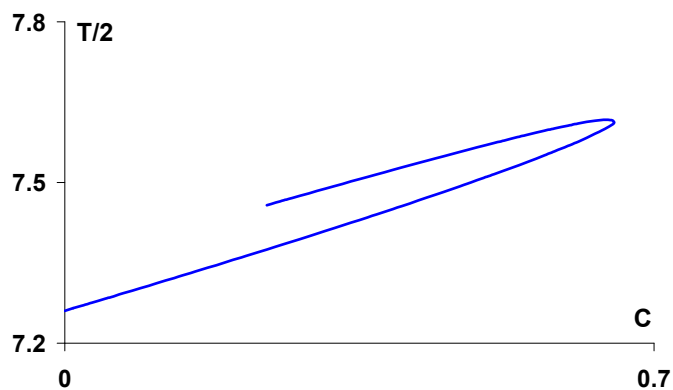
(α) Συνολικό διάγραμμα, (β) λεπτομέρεια για την T49

Στο διάγραμμα C-T/2 (Σχήμα 10.49α) οι καμπύλες όλων των οικογενειών εμφανίζουν δύο σκέλη. Για την περίπτωση της T45, επειδή αυτά είναι δυσδιάκριτα, στο Σχήμα 4.49β παραθέτουμε ξεχωριστά την καμπύλη της.

Για τις οικογένειες T45 και T49 η περίοδος και στα δύο σκέλη τους αυξάνεται, όταν αυξάνεται η τιμή της C. Τέλος, η C-T/2 της T47 όταν αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C, στο μεν άνω σκέλος η περίοδος αυξάνεται, στο δε κάτω σκέλος η περίοδος μειώνεται.



(α)



(β)

Σχήμα 10.49. Καμπύλες C-T/2 των οικογενειών της ομάδας H5:

(α) Συνολικό διάγραμμα, (β) λεπτομέρεια για την T45

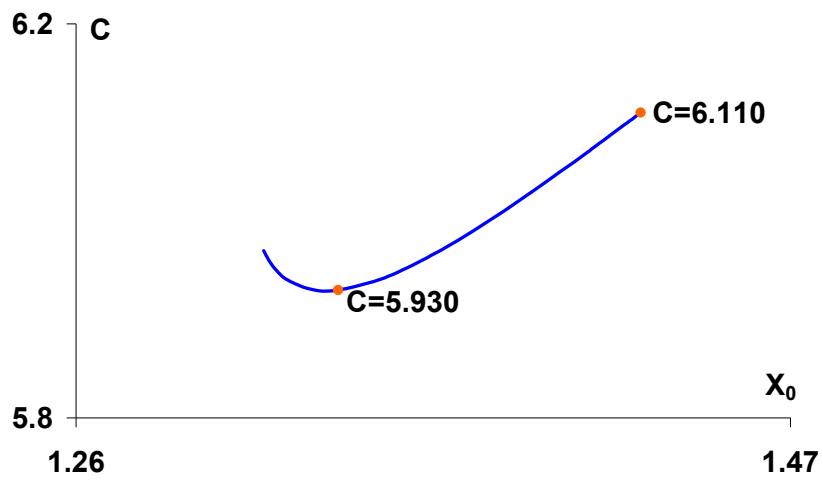
10.19 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ T50

10.19.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής της καμπύλης. Διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 της οικογένειας. Ευστάθεια

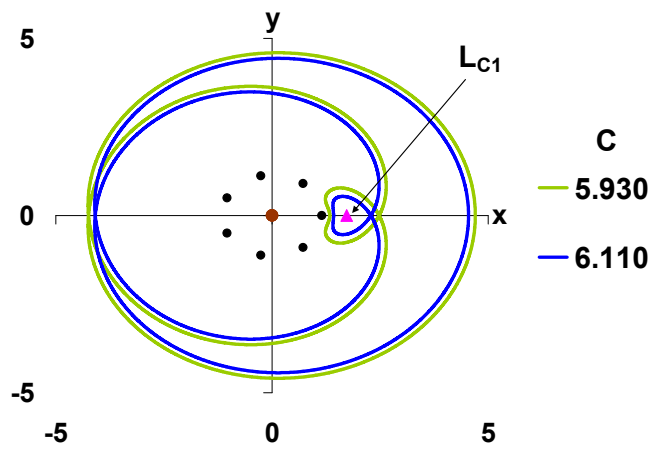
Η «αγκιστροειδής» χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας T50 (Σχήμα 10.50α) εξελίσσεται στην περιοχή των θετικών τιμών της σταθεράς C και περατώνεται στην περιοχή του σημείου ισορροπίας της ζώνης C₁. Οι τροχιές που την αποτελούν είναι ανάδρομες, πλανητικού τύπου, διαγράφονται έξω και γύρω από τον σχηματισμό των primaries (Σχήμα 10.50β) και συρρικνώνονται καθώς αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C. Η συρρίκνωση αυτή είναι πιο έντονη στο μικρότερο βρόχο των τροχιών της οικογένειας, ο οποίος διαγράφεται γύρω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης C₁. Να σημειώσουμε ότι η T50 εξελίσσεται πολύ κοντά στην οικογένεια διπλών περιοδικών τροχιών D67 και παρουσιάζουν την ίδια μορφή τροχιών και την ίδια δυναμική συμπεριφορά.

Τα διαγράμματα x_0 -T/2 και C-T/2 παρουσιάζουν ακρότατα. Για την πρώτη καμπύλη (Σχήμα 10.50γ) και αριστερά του ακροτάτου καθώς το x_0 πλησιάζει σε αυτό, η περίοδος ελαττώνεται, ενώ το αντίθετο συμβαίνει δεξιά του ακροτάτου, όπου καθώς το x_0 απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, η περίοδος αυξάνεται. Για τη δεύτερη καμπύλη (Σχήμα 10.50δ) αριστερά και δεξιά του ακροτάτου, καθώς η τιμή της σταθεράς C αυξάνεται η περίοδος αυξάνεται επίσης. Οι τιμές των ημιπεριόδων τους κυμαίνονται από 9.87 (VL) έως 10.32 (VL).

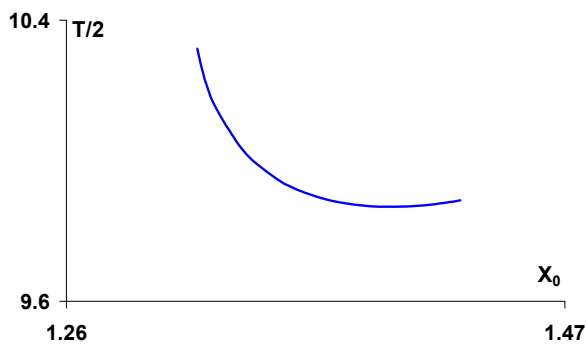
Στον Πίνακα 10.17 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών μερικών τροχιών από κάθε οικογένεια της ομάδας.



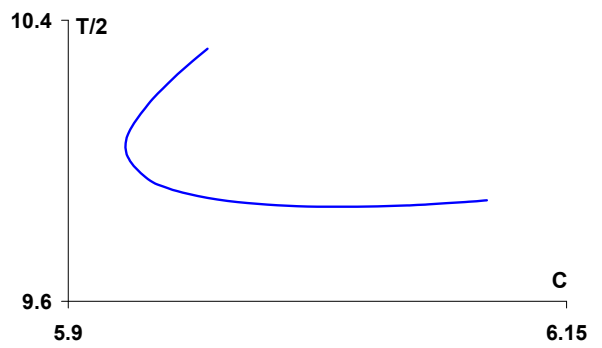
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 10.50. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T50.

- (α) Χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας,
(β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης,
(γ) καμπύλη $x_0-T/2$ της οικογένειας και (δ) καμπύλη $C-T/2$ της οικογένειας

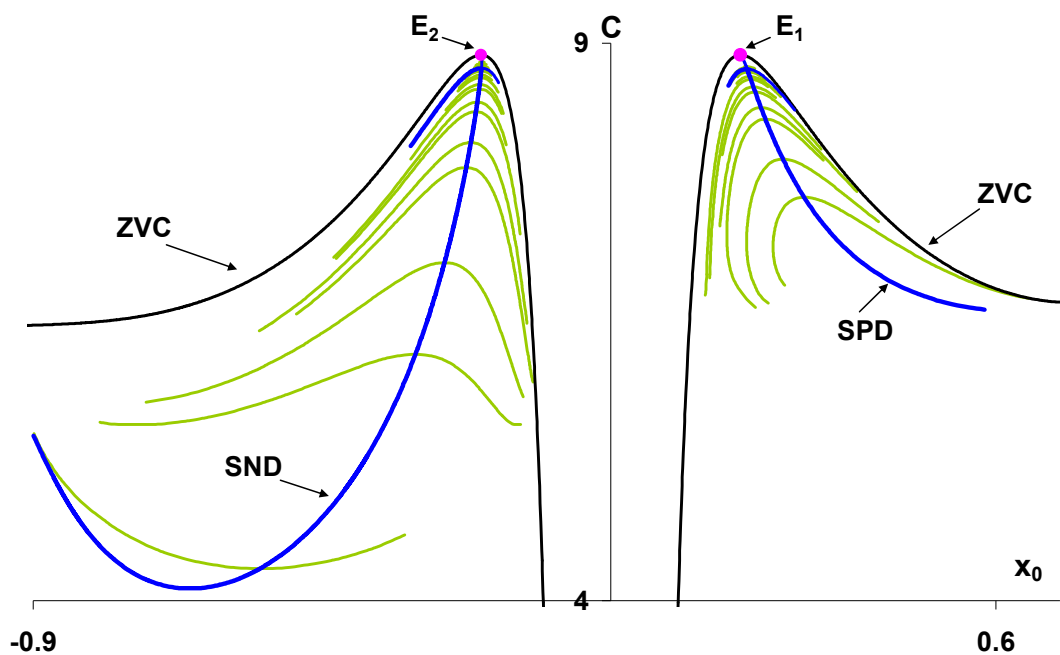
Πίνακας 10.17. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών της οικογένειας T50

	C	x_0	\dot{y}_0	$x_{T/2}$	$\dot{y}_{T/2}$	T/2	Stability
T50	5.969930002	1.315119862	1.455769008	4.707366278	-4.171537395	10.318853386	U
	5.929930003	1.337070801	1.351708049	4.702732972	-4.171250503	10.009952652	U
	6.109980007	1.426005180	0.943355708	4.545517417	-3.975894444	9.887529902	U

10.20 ΟΜΑΔΑ ΤΡΟΧΙΩΝ Η6 (Δενδροειδής κατανομή οικογενειών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2)

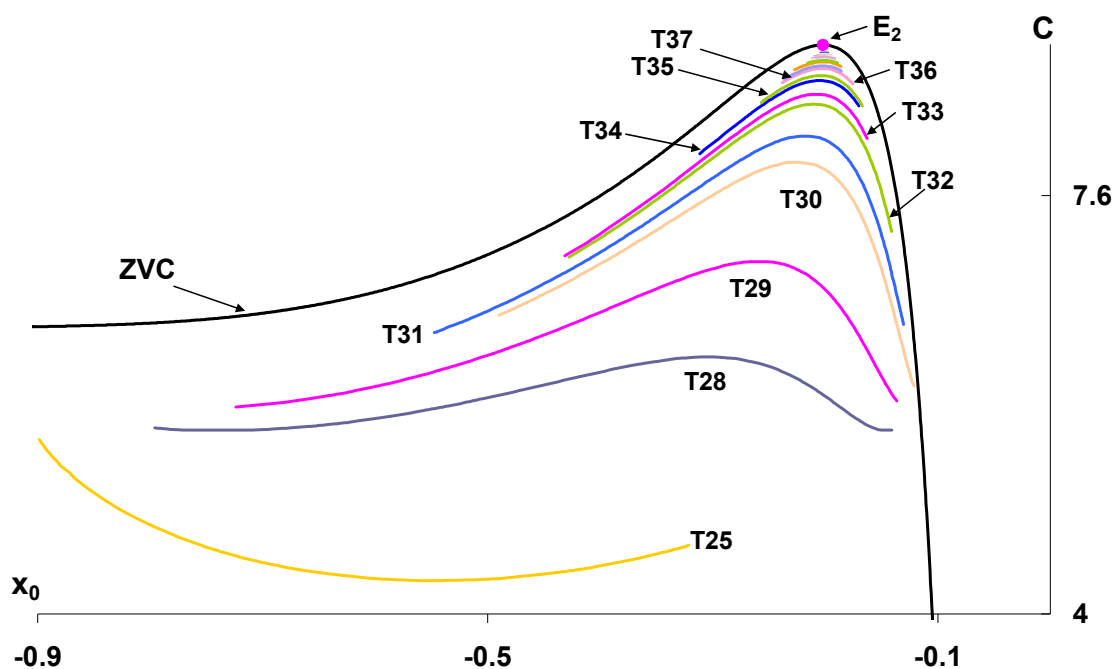
Σε αυτή την ομάδα ανήκουν οι οικογένειες των δενδροειδών κατανομών των τριπλών περιοδικών τροχιών οι οποίες, όπως οι απλές και οι διπλές τροχιές, πηγάζουν από τις κύριες οικογένειες των απλών περιοδικών τροχιών της περιοχής κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2

Από τα διαγράμματα ευστάθειας x_0 -α των απλών περιοδικών τροχιών SND και SPD που σχεδιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (Σχήμα 9.81β-γ και Σχήμα 9.83β-γ αντίστοιχα), έγινε αντιληπτή η ύπαρξη δενδροειδών κατανομών τριπλών περιοδικών τροχιών και στο Σχήμα 10.51 που ακολουθεί φαίνεται αυτή η κατανομή (πράσινες καμπύλες) αλλά και οι κύριες οικογένειες των απλών περιοδικών τροχιών (μπλε καμπύλες), από τις οποίες πηγάζουν.



Σχήμα 10.51. Διάγραμμα των χαρακτηριστικών καμπύλων x_0 - C των τριπλών περιοδικών τροχιών, των δενδροειδών κατανομών κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_1 και E_2

10.20.1 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_2 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 < 0$). Μελέτη ευστάθειας
 Στο διάγραμμα x_0 - C του παρακάτω Σχήματος 10.52 φαίνονται λεπτομερέστερα οι οικογένειες της δενδροειδούς κατανομής για την περίπτωση των τριπλών περιοδικών τροχιών.



Σχήμα 10.52. Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής των τριπλών περιοδικών τροχιών, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_2(x_0 < 0)$

Όπως στις δένδροειδείς κατανομές των απλών και διπλών περιοδικών τροχιών έτσι κι εδώ θα μελετήσουμε ενδεικτικά την εξέλιξη κάποιων τριπλών περιοδικών τροχιών κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπύλων τους, καθώς και τις αντίστοιχες καμπύλες $x_0-T/2$, $C-T/2$ και μεταβολής της παραμέτρου ευστάθειας.

Κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των οικογενειών είναι ότι όλες οι τροχιές που προκύπτουν από αυτές είναι ανάδρομες πλανητικού τύπου, γύρω από το κεντρικό primary P_0 , τη μορφή των οποίων θα περιγράψουμε παρακάτω.

Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια, οι τρεις βρόχοι των τριπλών τροχιών σχηματίζουν «ροζέτες», τα πέταλα των οποίων διασταυρώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν γύρω από το κεντρικό primary P_0 ένα αστέρι με τόσες ακτίνες όσο και το πλήθος των πετάλων της κάθε ροζέτας (Σχήμα 10.53β, 10.54β, 10.55β).

Όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C , οι τροχιές συρρικνώνονται και οι τρεις βρόχοι πλησιάζουν όλο και περισσότερο ο ένας τον άλλον, με αποτέλεσμα να εξαλείφεται η

μορφή του σχηματιζόμενου αστεριού περί του πρωτεύοντος σώματος P_0 . Τέλος, πλησιάζοντας στο ακρότατο κάθε οικογένειας οι τροχιές γίνονται σχεδόν κυκλικές, με τους τρεις βρόχους σχεδόν να ταυτίζονται (Σχήματα 10.53β, 10.54β, 10.55β). Συνεχίζοντας να διατρέχουμε τον άλλο κλάδο της χαρακτηριστικής της ίδιας οικογένειας και ξεκινώντας από τα υψηλότερες τιμές της C , η εξέλιξη της μορφής των τροχιών ακολουθεί την αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράψαμε μέχρι τώρα. Δηλαδή, αρχικά εμφανίζονται σχεδόν κυκλικές τροχιές περί του P_0 και καταλήγουν σε τροχιές με την μορφή της «ροζέτας».

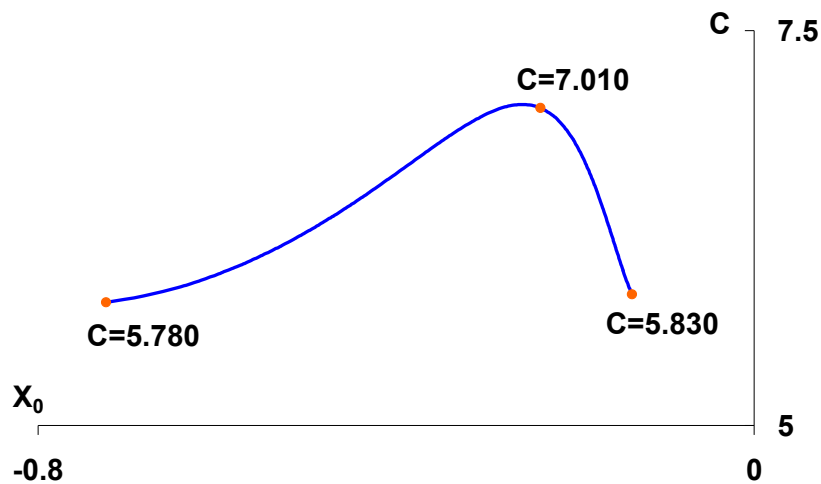
Παρατηρούμε ότι όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι τριπλές περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των ακτινών των πετάλων κάθε ροζέτας. Έτσι, για τις τροχιές των T29, T31 και T32 προκύπτουν τροχιές με μορφή ροζέτας που έχουν πέντε, οκτώ και δέκα πέταλα αντίστοιχα (Σχήματα 10.53β, 10.54β, 10.55β). Μελετώντας την ευστάθεια των οικογενειών T29, T31 και T32 παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά με αυτήν των αντιστοίχων οικογενειών των απλών και διπλών περιοδικών τροχιών της δενδροειδούς κατανομής, που εξελίσσονται κάτω από τη θέση ισορροπίας E_2 . Δηλαδή αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζουν οι χαρακτηριστικές, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς (Σχήματα 10.53γ, 10.54γ, 10.55γ). Επίσης άλλη μία ομοιότητα είναι ότι οι ασταθείς τροχιές χαρακτηρίζονται από μικρές τιμές του συντελεστή ευστάθειας α (Σχήματα 10.53δ, 10.54δ, 10.55δ), πολύ κοντά στη μονάδα, το οποίο είναι εμφανέστατο στην περίπτωση της οικογένειας T29, όπου για τις ασταθείς τροχιές ο συντελεστής α λαμβάνει τιμές από 1.000002 έως 1.00663.

Στον Πίνακα 10.18 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών T29, T31 και T32.

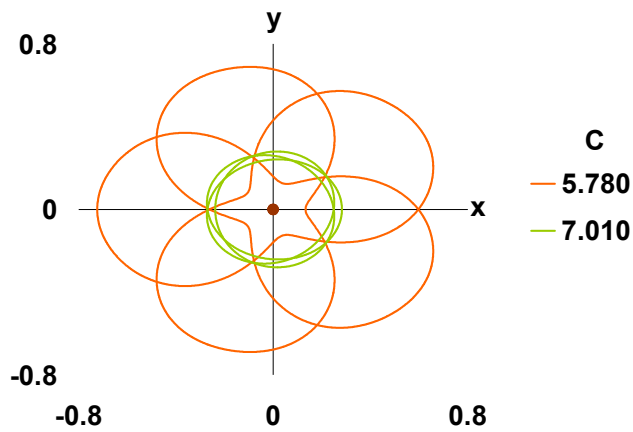
Πίνακας 10.18. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών T29, T31 και T32

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
T29	5.779929793	-0.723848530	0.882547657	0.132625161	-1.243080533	4.635142951	U
	7.009949940	-0.238607575	1.324731565	0.282501996	-1.199902424	1.951108922	S
	5.829929841	-0.136413272	1.318821349	0.661575707	-0.934072149	4.142680492	U
T31	6.419939676	-0.547804092	0.704629032	0.547887725	-0.714985183	4.802835662	U
	8.099979975	-0.230315132	0.843454143	0.230313986	-0.843476303	2.378630603	U
	6.489939654	-0.130632734	0.832097789	0.131065310	-0.851062207	4.590459836	S
T32	7.069959671	-0.427813419	0.605241541	0.426934472	-0.611287806	4.429633935	U
	8.379989987	-0.202757217	0.717352670	0.202758338	-0.717361505	2.805530908	S
	7.289959689	-0.141044592	0.730912001	0.141230948	-0.737286254	4.040159459	S

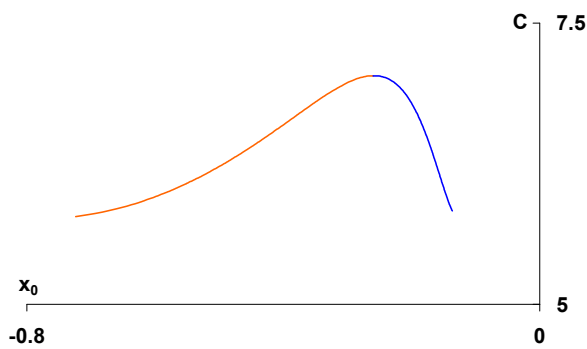
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας T29. Διαγράμματα ευστάθειας



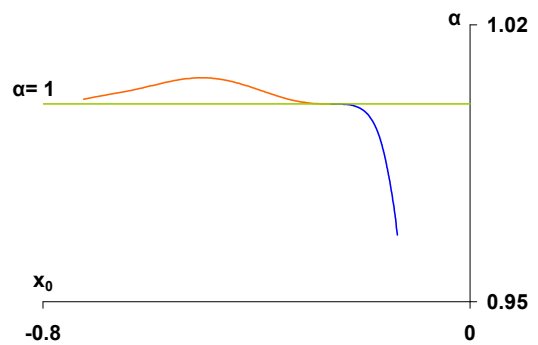
(α)



(β)



(γ)

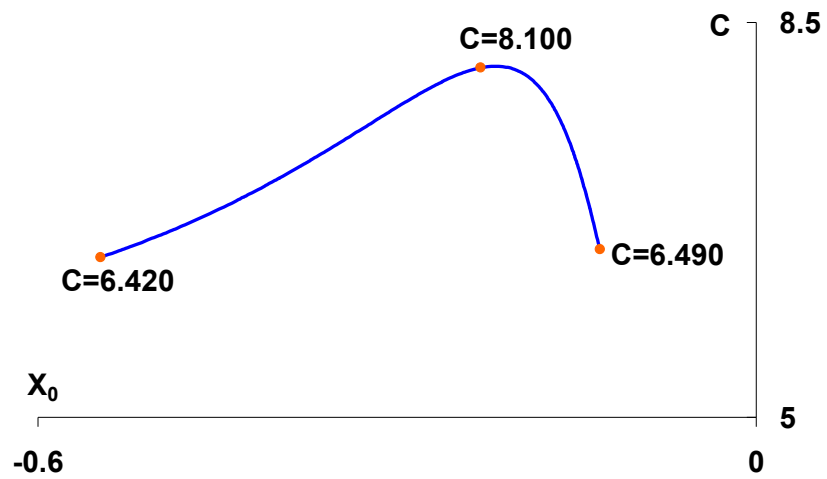


(δ)

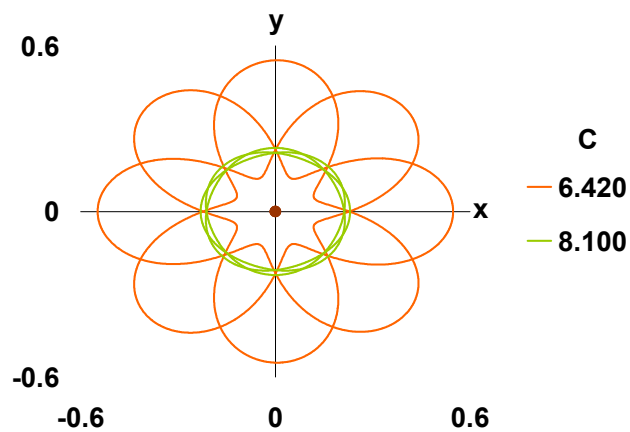
Σχήμα 10.53. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T29.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

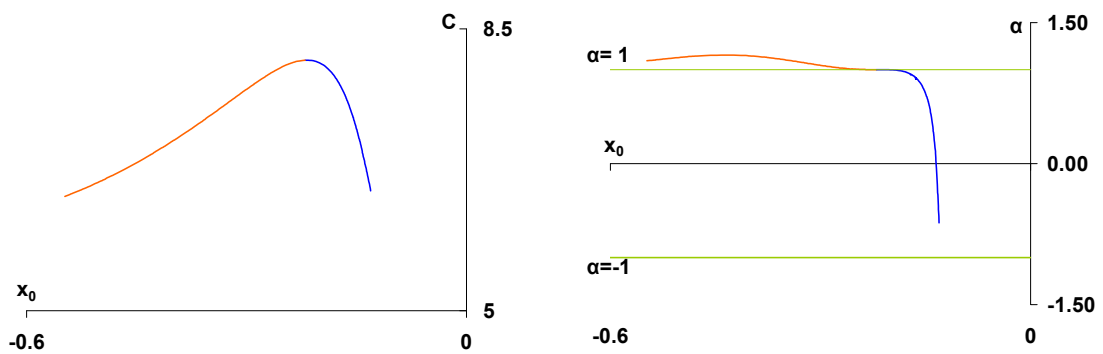
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας T31. Διαγράμματα ευστάθειας



(α)



(β)



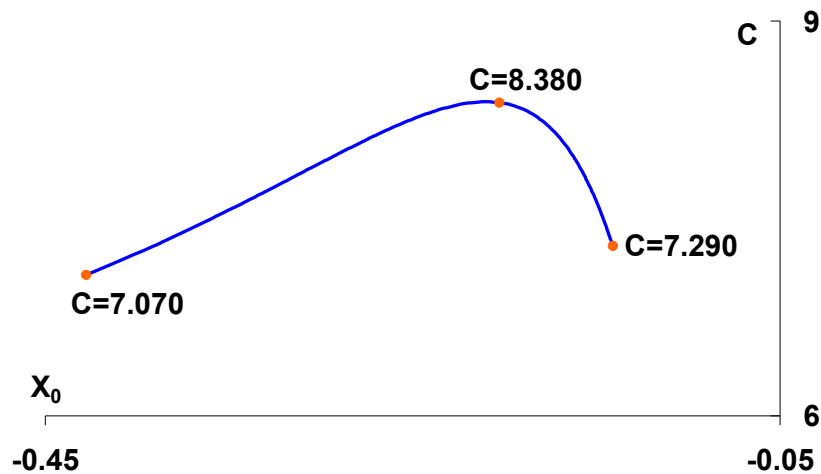
(γ)

(δ)

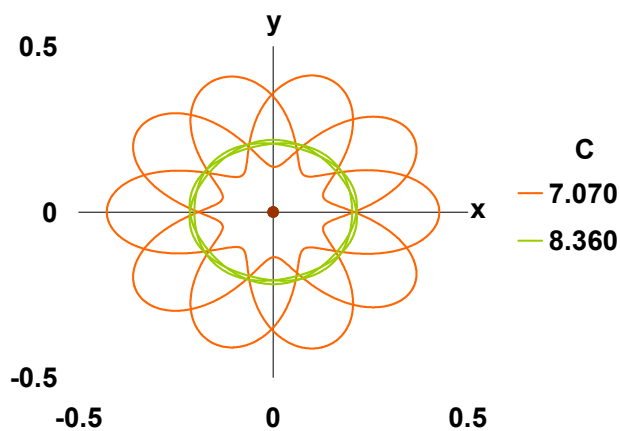
Σχήμα 10.54. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T31.

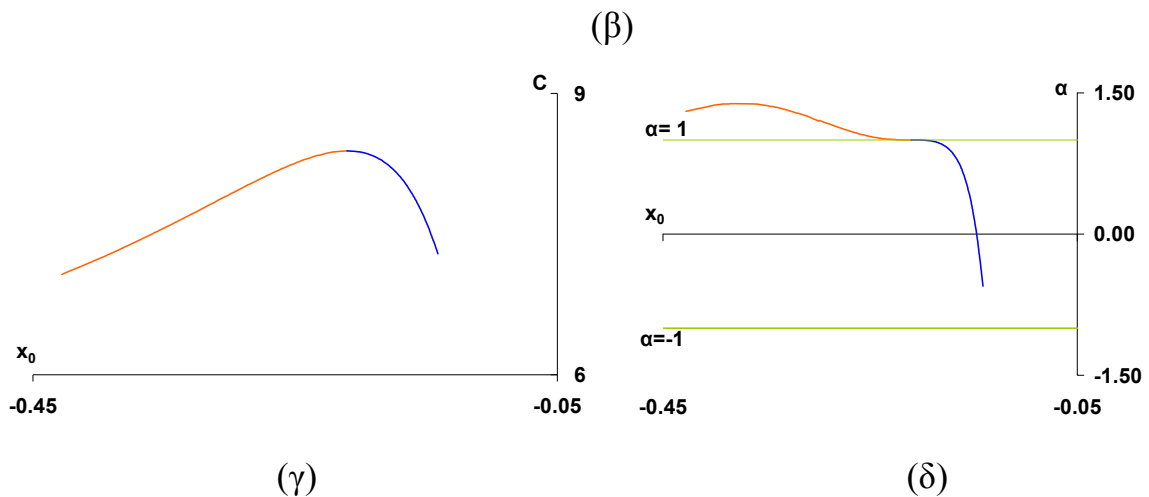
(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας T32. Διαγράμματα ευστάθειας



(α)



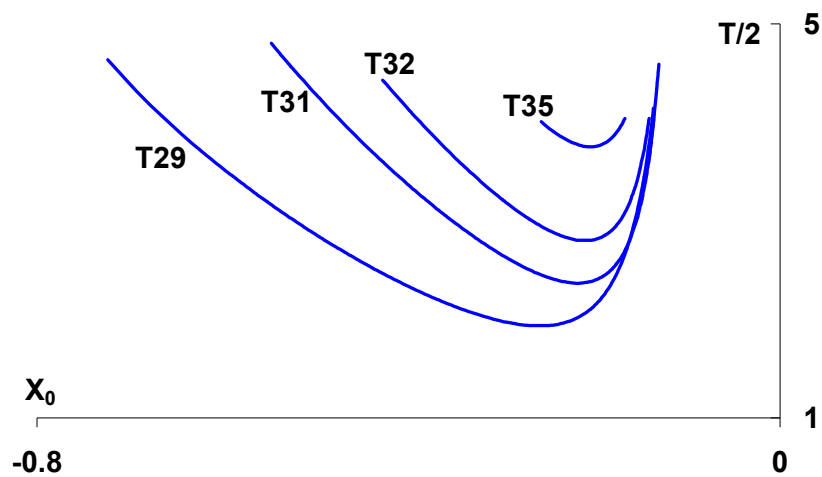


Σχήμα 10.55. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T32.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

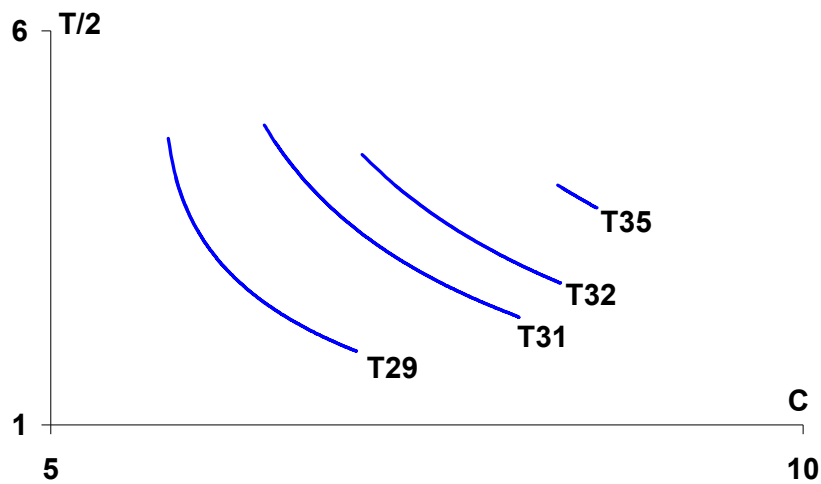
10.20.2 Διαγράμματα x_0 - $T/2$ και C - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_2(x_0 < 0)$

Τα διαγράμματα x_0 - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής εμφανίζουν ακρότατο (Σχήμα 10.56) και μάλιστα ακριβώς εκεί όπου παρουσιάζεται το ακρότατο και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0 - C για κάθε οικογένεια. Όταν η απόλυτη τιμή της θέσης x_0 μειώνεται, αριστερά του ακρότατου η περίοδος μειώνεται επίσης, ενώ δεξιά αυτού αυξάνεται.



Σχήμα 10.56. Διαγράμματα x_0 - $T/2$ των οικογενειών της δένδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_2(x_0 < 0)$

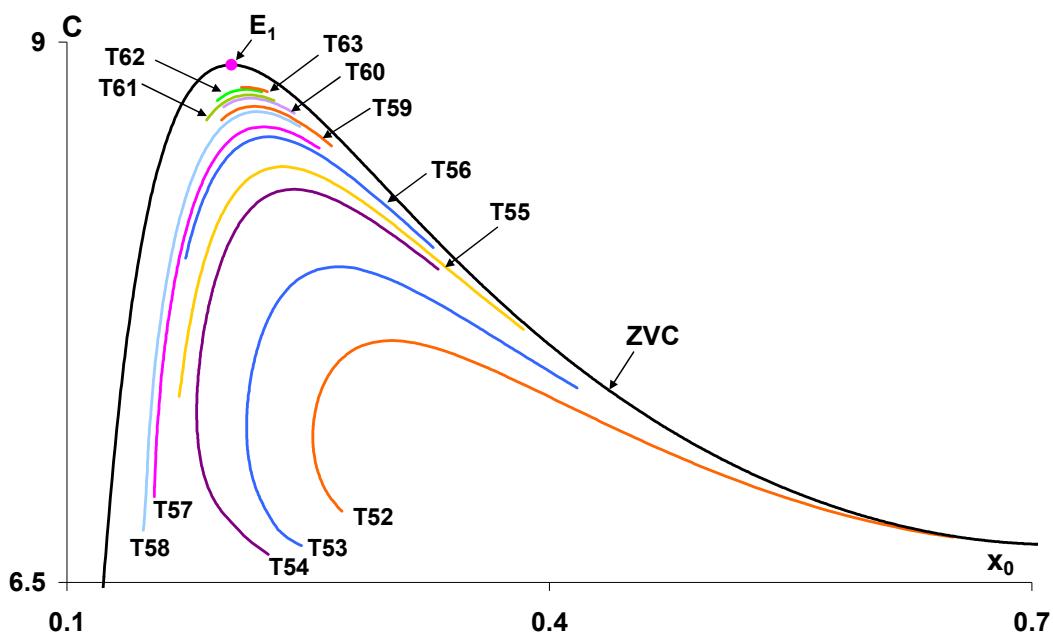
Στο διάγραμμα C- $T/2$ (Σχήμα 10.57) ύστερα από τη λεπτομερή μελέτη των καμπύλων αλλά και των αριθμητικών δεδομένων, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αυτές αποτελούνται από δύο σκέλη τα οποία σχεδόν ταυτίζονται αφού για τις ίδιες τιμές της σταθεράς C έχουν σχεδόν την ίδια περίοδο T. Παρατηρούμε ότι η περίοδος τους ελαττώνεται και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C. Από τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει ότι το εύρος των τιμών των ημιπεριόδων των τροχιών αυτών των οικογενειών, κυμαίνεται από 1.94 (S) έως 7.58 (L).



(β)

Σχήμα 10.57. Διαγράμματα C-T/2 των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_2(x_0 < 0)$

10.21 Μορφή και εξέλιξη των τριπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 , κατά μήκος των χαρακτηριστικών τους καμπύλων ($x_0 > 0$). Μελέτη ευστάθειας
 Από την δενδροειδή κατανομή των οικογενειών κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης E_1 (Σχήμα 10.58), προκύπτουν ορθές τροχιές πλανητικού τύπου γύρω από το πρωτεύον primary P_0 , η μορφή και η εξέλιξη των οποίων περιγράφεται παρακάτω.



Σχήμα 10.58. Οικογένειες της δένδροειδούς κατανομής των τριπλών περιοδικών τροχιών, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0 > 0)$

Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια της κατανομής και διατρέχοντας την χαρακτηριστική τους προς μεγαλύτερες τιμές της C , οι τρεις βρόχοι των τροχιών σχηματίζουν «ροζέτα», τα πέταλα της οποίας είναι λεπτά και επιμήκη. Αυτό είναι εμφανές στο Σχήμα 10.61β, όπου έχουμε σχεδιάσει τις τροχιές της οικογένειας $T58$ και λιγότερο εμφανές στο Σχήμα 10.59β, όπου έχουμε σχεδιάσει τις τροχιές της οικογένειας $T53$.

Όσο αυξάνεται η τιμή της σταθεράς C , οι τρεις βρόχοι συρρικνώνονται με αποτέλεσμα να εξαλείφεται η μορφή «ροζέτας» και να σχηματίζεται ένα αστέρι, με τόσες ακτίνες, όσα ήταν και τα πέταλά της. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές της σταθεράς C , οι ακτίνες των αστεριών εξομαλύνονται και δημιουργούν τροχιές που έχουν την μορφή «δαντέλας», ώσπου πλησιάζοντας στο ακρότατο κάθε οικογένειας οι τροχιές να μετατρέπονται σε σχεδόν κυκλικές, με τους τρεις βρόχους σχεδόν να ταυτίζονται (Σχήμα 10.59β, 10.60β, 10.61β).

Συνεχίζοντας να διατρέχουμε τον άλλο κλάδο της χαρακτηριστικής της ίδιας οικογένειας και ξεκινώντας από τα υψηλότερες τιμές της C , η εξέλιξη της μορφής των τροχιών ακολουθεί την αντίστροφη πορεία από αυτήν που περιγράψαμε μέχρι τώρα. Δηλαδή, αρχικά εμφανίζονται σχεδόν κυκλικές τροχιές περί του P_0 και καταλήγουν σε τροχιές με τη μορφή «ροζέτας», όπως περιγράφηκε πρωτότερα.

Όπως και στην δένδροειδή κατανομή για $x_0 < 0$, έτσι κι εδώ όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι τριπλές περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των ακτινών των αστεριών.

Έτσι για τις οικογένειες T53, T56 και T58 προκύπτουν τροχιές σε σχήμα αστεριού με οχτώ, δεκατρείς και δεκαέξι ακτίνες αντίστοιχα (Σχήμα 10.59β, 10.60β, 10.61β).

Από την μελέτη της ευστάθειας των οικογενειών T53 και T58 προέκυψαν τα Σχήματα 10.59γ και 10.61γ αντίστοιχα, από τα οποία παρατηρούμε ότι αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζει η χαρακτηριστική τους, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς. Και στις δύο παρουσιάζεται ένα κρίσιμο σημείο πρώτου είδους, ενώ και οι ασταθείς τροχιές τους, δεν χαρακτηρίζονται από μεγάλες τιμές του συντελεστή ευστάθειας α (Σχήματα 10.59δ και 10.61δ).

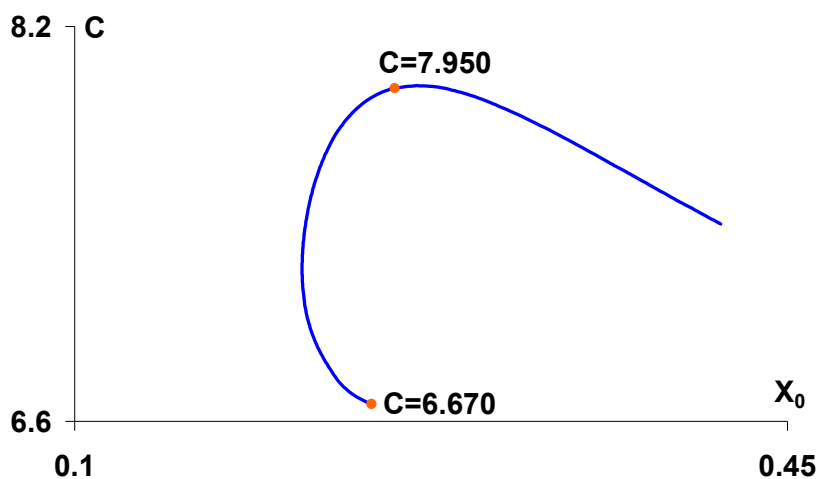
Για την περίπτωση της οικογένειας T56, η ευστάθεια της παρουσιάζει εν μέρει ίδια συμπεριφορά με τις προηγούμενες οικογένειες, με μία εμφανή διαφορά όμως, η οποία εντοπίζεται στο γεγονός ότι παρουσιάζονται και τμήματα αστάθειας δεξιά του ακροτάτου (Σχήμα 10.60γ). Αποτέλεσμα αυτού είναι να εμφανίζονται κρίσιμες περιοδικές τροχιές πρώτου και δεύτερου είδους, ενώ για τις ασταθείς τροχιές ο συντελεστής α εξακολουθεί να μην λαμβάνει μεγάλες τιμές (Σχήμα 10.60δ).

Στον Πίνακα 10.19 παραθέτουμε ενδεικτικά τις τιμές των βασικών μεγεθών των τροχιών των οικογενειών T53, T56 και T58.

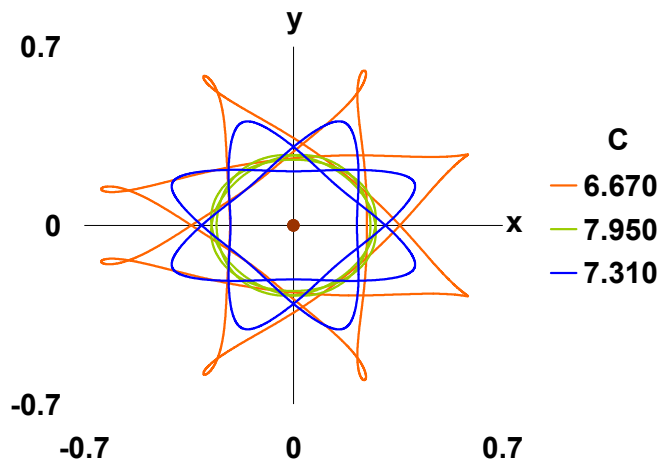
Πίνακας 10.19. Ενδεικτικές τιμές των μεγεθών των τριπλών περιοδικών τροχιών των οικογενειών T52, T53 και T56

	C	x₀	ẏ₀	x_{T/2}	ẏ_{T/2}	T/2	Stability
T53	6.669949970	0.245720558	1.431854430	-0.212383053	-1.487204534	7.890066989	U
	7.949979977	0.257158051	0.831494756	-0.257155727	-0.831463694	3.280899883	U
	7.399959966	0.417241641	0.313257768	-0.416865786	-0.313352623	4.226180432	S
T56	7.999989933	0.173751858	0.861986239	-0.335270609	-0.201765440	4.896149265	U
	8.549989989	0.215473587	0.568665721	-0.235955516	-0.480094627	4.062936495	U
	8.479989977	0.256612161	0.406553949	-0.201344629	-0.643845395	4.153738834	S
	8.049979918	0.327772910	0.217989853	-0.175450928	-0.844528772	4.807246536	U
T58	6.741009675	0.147506561	1.171237961	-0.156782498	-1.295101495	11.309211469	U
	8.669989995	0.210545410	0.464578531	-0.210552699	-0.464544604	4.752600349	U
	8.609989978	0.245001040	0.338916333	-0.245003749	-0.338818644	4.839472115	S

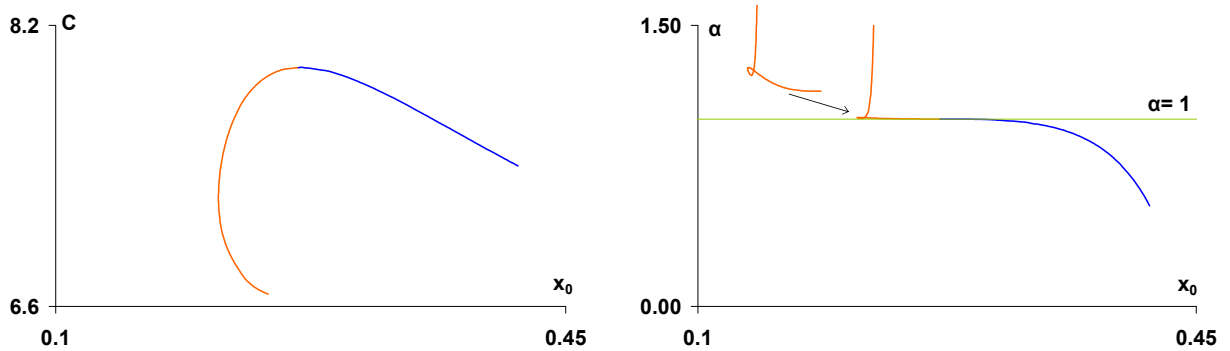
- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας T53. Διαγράμματα ευστάθειας



(α)



(β)



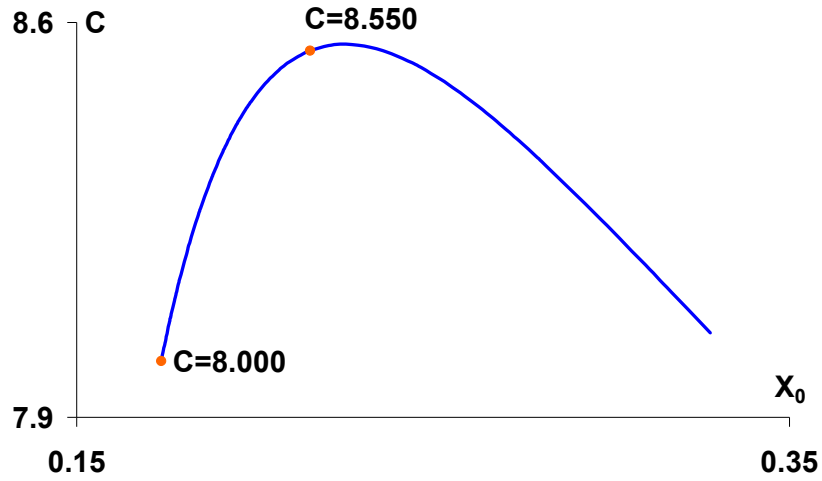
(γ)

(δ)

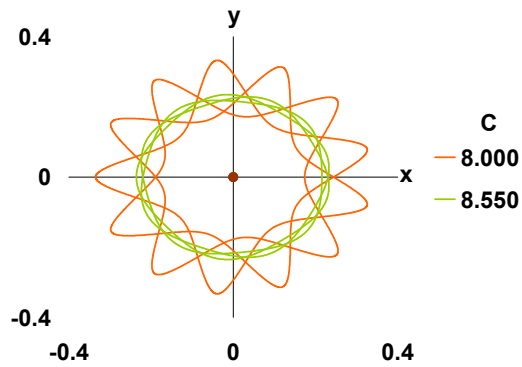
Σχήμα 10.59. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T53.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

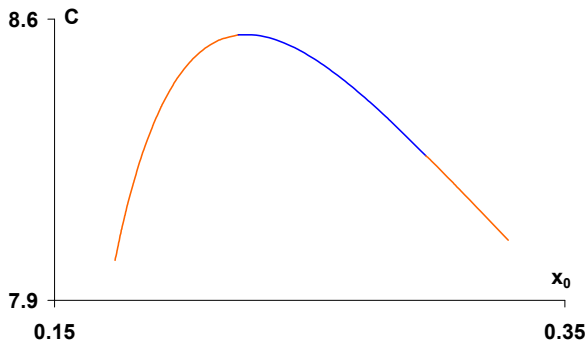
- Μορφή και εξέλιξη των τροχιών της οικογένειας T56 κατά μήκος της χαρακτηριστικής της καμπύλης. Διαγράμματα ευστάθειας



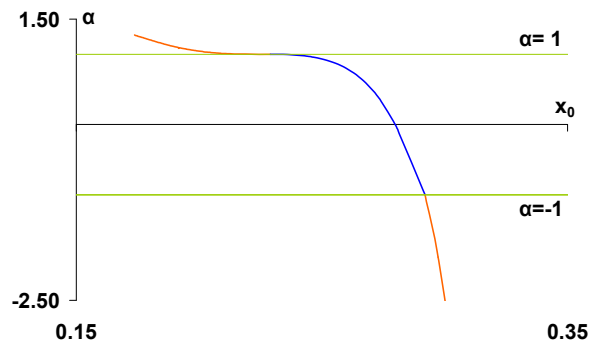
(α)



(β)



(γ)

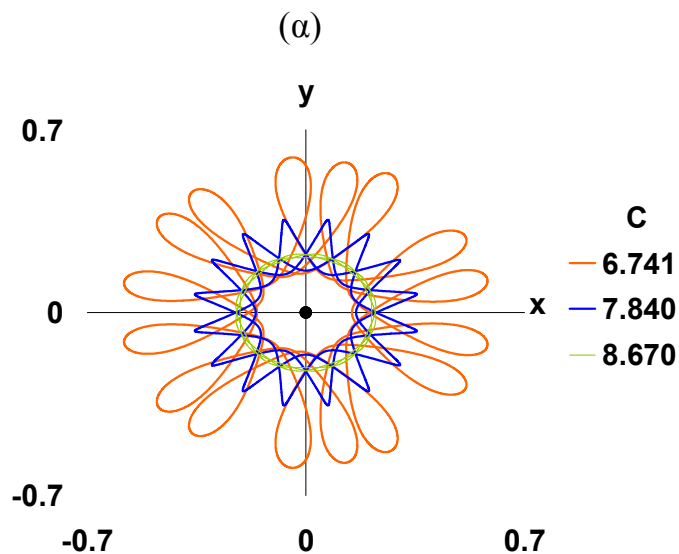
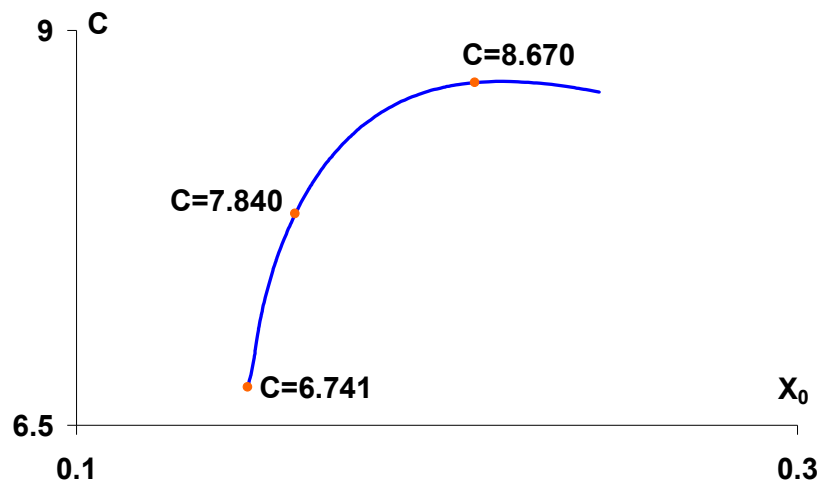


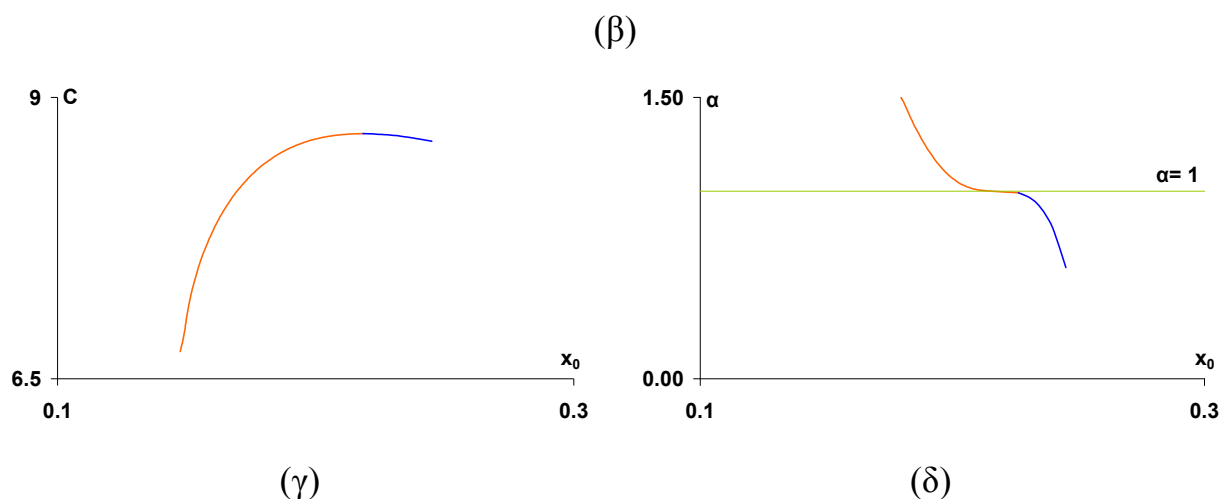
(δ)

Σχήμα 10.60. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T56.

- (α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

- Διαγράμματα της χαρακτηριστικής καμπύλης και των τροχιών της οικογένειας T58. Διαγράμματα ευστάθειας



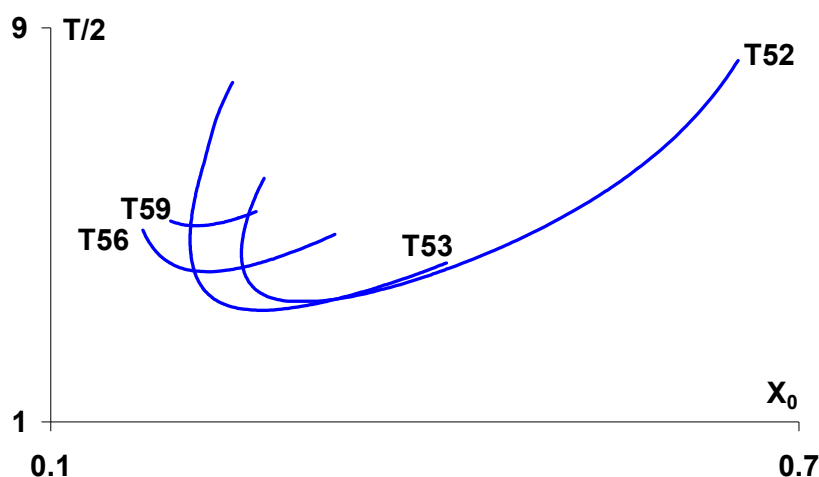


Σχήμα 10.61. Οικογένεια τριπλών περιοδικών τροχιών T58.

(α) Χαρακτηριστική καμπύλη με σημειωμένες τις τροχιές που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα, (β) εξέλιξη των τροχιών κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, (γ) χαρακτηριστική καμπύλη και τμήματα ευστάθειας και (δ) διάγραμμα ευστάθειας x_0 - α

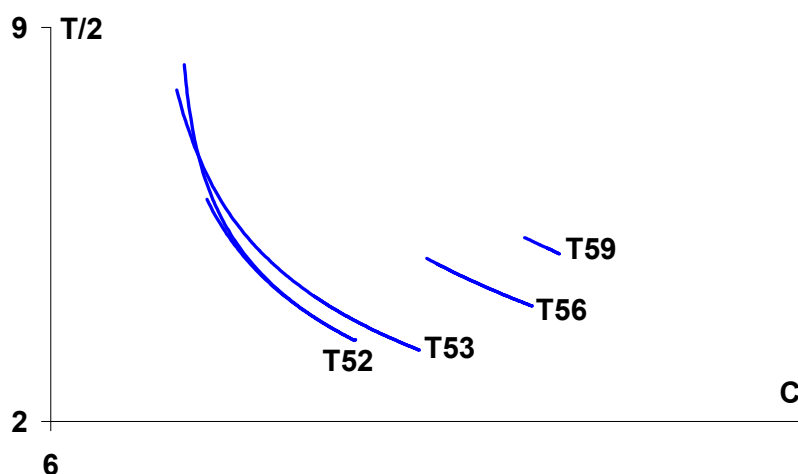
10.21.1 Διαγράμματα x_0 - $T/2$ και C - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0 > 0)$

Όπως και στην περίπτωση για $x_0 < 0$, τα διαγράμματα x_0 - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής εμφανίζουν ακρότατο εκεί όπου εμφανίζεται αυτό και στο αντίστοιχο διάγραμμα x_0 - C . Όταν η τιμή της θέσης x_0 αυξάνεται, αριστερά του ακρότατου η περίοδος μειώνεται, ενώ δεξιά αυτού αυξάνεται (Σχήμα 10.62).



Σχήμα 10.62. Διαγράμματα x_0 - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0 > 0)$

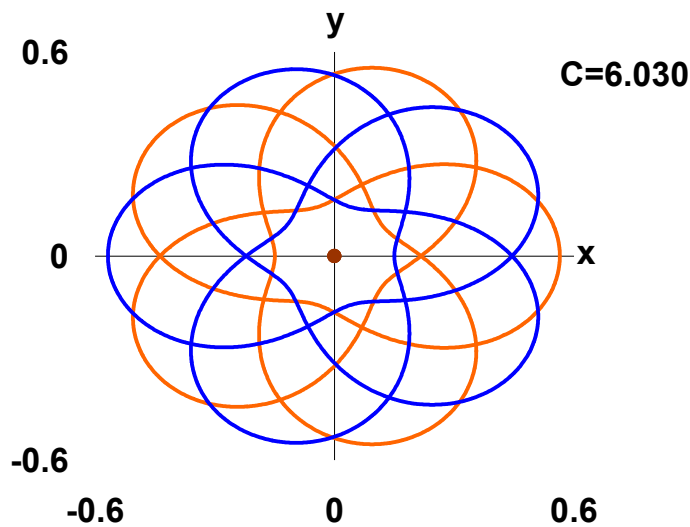
Από τη μελέτη των καμπύλων C - $T/2$ (Σχήμα 10.63) προκύπτει ότι αυτές αποτελούνται από δύο σκέλη τα οποία σχεδόν ταυτίζονται, αφού για τις ίδιες τιμές της σταθεράς C έχουν σχεδόν την ίδια περίοδο T . Η περίοδος τους ελαττώνεται και στα δύο σκέλη όταν αυξάνεται η τιμή της C . Από τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει ότι το εύρος των τιμών των ημιπεριόδων των τροχιών αυτών των οικογενειών, κυμαίνεται από 3.28 (M) έως 11.30 (VL).



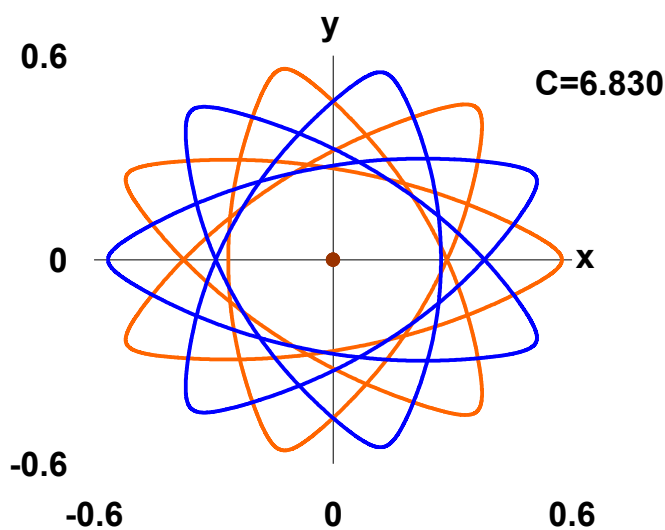
Σχήμα 10.63. Διαγράμματα C - $T/2$ των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής, στην περιοχή κάτω από το σημείο ισορροπίας της ζώνης $E_1(x_0 > 0)$

10.22 Συμμετρία των ισοενεργειακών τροχιών (ίδια τιμή της σταθεράς C) που ανήκουν στην ίδια οικογένεια της δένδροειδούς κατανομής

Όπως και στις απλές-διπλές περιοδικές τροχιές, σε αυτή τη παράγραφο εξετάζουμε την συμμετρία που παρουσιάζεται όταν σχεδιάσουμε τροχιές της ίδιας οικογένειας που αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες κοντά στο ακρότατο της, βρίσκονται εκατέρωθεν της κεντρικής οικογένειας των απλών περιοδικών τροχιών και έχουν ίδια τιμή της σταθεράς C. Παρακάτω φαίνονται τα κοινά διαγράμματα τέτοιων ισοενεργειακών τροχιών, μία από κάθε δένδροειδή κατανομή (για $x_0 < 0$ και $x_0 > 0$), της οικογένειας T29 για $C=6.030$ και της οικογένειας T52 για $C=6.830$ αντίστοιχα (Σχήμα 10.64). Από τα διαγράμματα αυτά αναδεικνύεται η συμμετρία τους ως προς τους 2-p άξονες του γραφήματος που συνθέτουν και οι δύο μαζί, όπου p ο αριθμός των κορυφών κάθε τροχιάς. Η κάθε τροχιά προκύπτει από την άλλη με στροφή π/p .



(α)



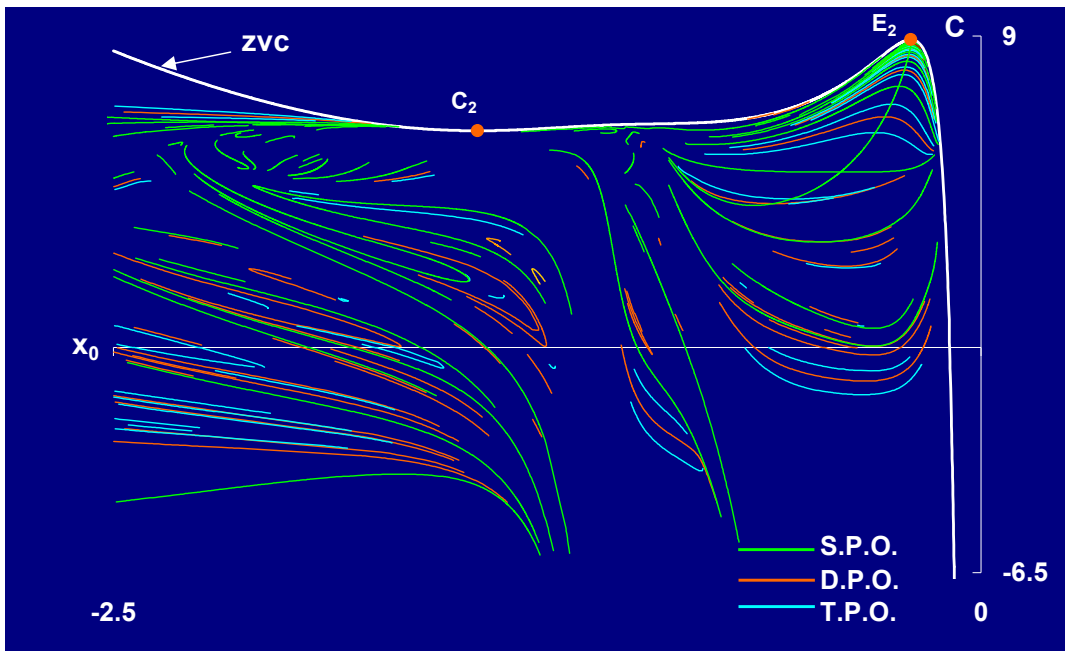
(β)

Σχήμα 10.64. Ισοενεργειακές τροχιές των οικογενειών:

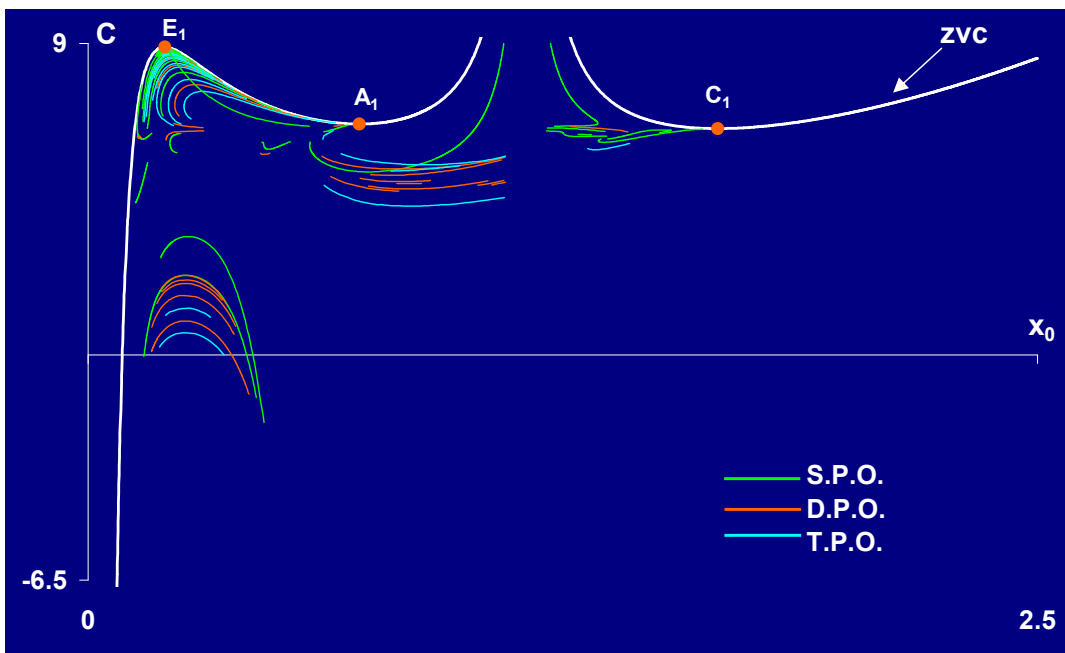
(α) T29 και (β) T52

10.23 Κοινό διάγραμμα κατανομής των χαρακτηριστικών καμπύλων των απλών, διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$

Τελειώνοντας τη μελέτη των περιοδικών τροχιών που εντοπίσαμε έως και πολλαπλότητας τρία, παραθέτουμε στο παρακάτω Σχήμα 10.65 την περιοχή του φασικού χώρου των αρχικών συνθηκών (x_0, C) που ορίζεται από τις τιμές, $x_0 \in [-2.5, 2.5]$ και $C \in [-6, 9]$ και αφορά στην περίπτωση για $\nu=7$, $\beta=5$ και $e=-0.1$, στον οποίο έχουμε σχεδιάσει τις παραπάνω τροχιές. Στο Σχήμα 10.65α φαίνεται η περιοχή του φασικού χώρου για $x_0 < 0$, ενώ στο Σχήμα 10.65β για $x_0 > 0$. Και στα δύο σχήματα διακρίνουμε τις διακλαδώσεις που προκύπτουν κάτω από τα σημεία ισοροπίας E_1 και E_2 αλλά κι άλλες διακλαδώσεις τροχιών διαφορετικής πολλαπλότητας, όπως για παράδειγμα οι οικογένειες που διακλαδίζονται με την S68 στην περιοχή κάτω από την «καμινάδα» που σχηματίζουν οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για $x_0 > 0$ (Σχήμα 10.65β).



(α)



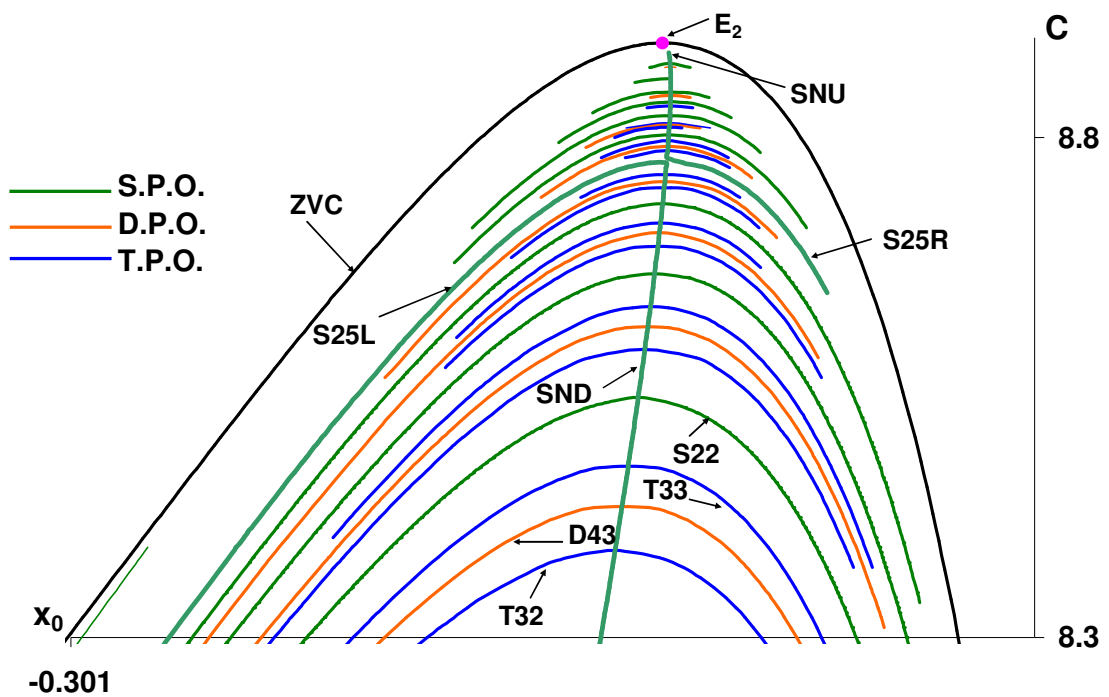
(β)

Σχήμα 10.65. Κοινό διάγραμμα κατανομής των απλών (πράσινο), διπλών (πορτοκαλί) και τριπλών (μπλε) περιοδικών τροχιών:

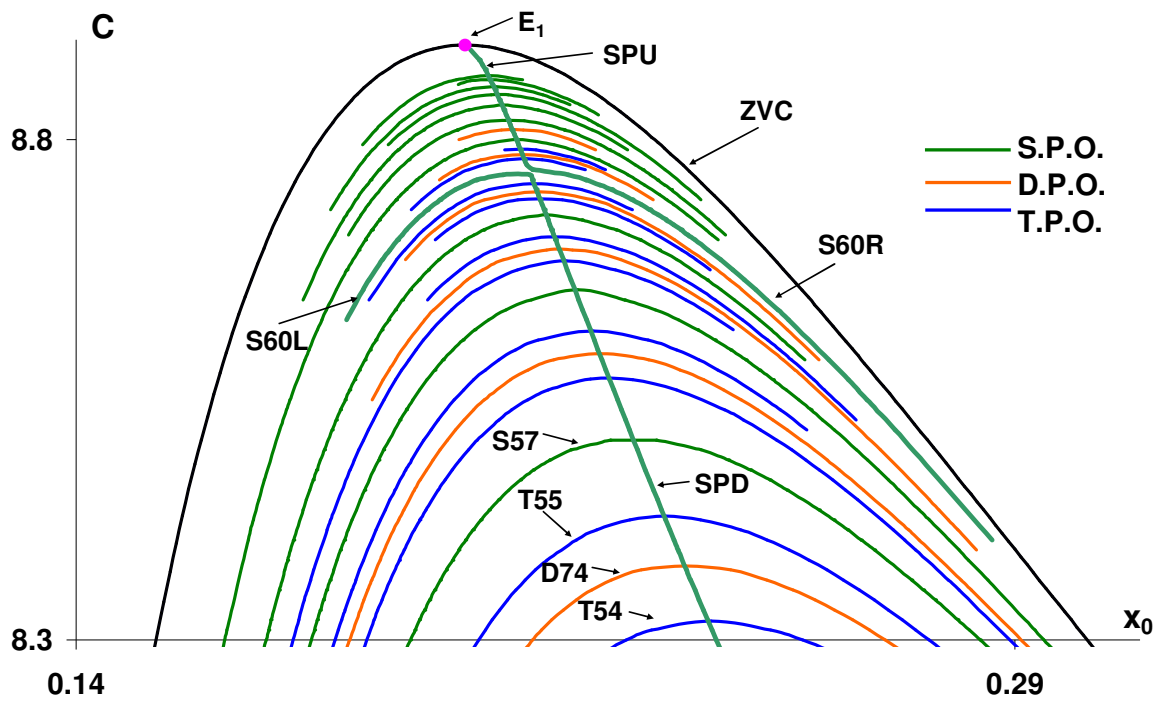
(α) για $x_0 < 0$ και (β) για $x_0 > 0$

Σε όλη την πορεία της μελέτης των διπλών και τριπλών περιοδικών τροχιών έγιναν περισσότερο αντιληπτό από κάθε άλλη περίπτωση οικογενειών, οι διακλαδώσεις τροχιών διαφορετικής πολλαπλότητας, στην περιοχή αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας».

Στα Σχήματα 10.66 που ακολουθούν και αφορούν στην περίπτωση με $\nu=7$, $\beta=5$ και $\epsilon=-0.1$, κρίναμε σκόπιμο να σχεδιάσουμε αυτές τις τροχιές σε μία ενδεικτική περιοχή, όπου αναπτύσσονται οι δενδροειδείς κατανομές, για να έχουμε ακόμα μια πιο σαφή εικόνα του τρόπου διακλάδωσης όλων των τροχιών.



(α)



(β)

Σχήμα 10.66. Λεπτομέρεια του κοινού διαγράμματος κατανομής των απλών (πράσινο), διπλών (πορτοκαλί) και τριπλών (μπλε) περιοδικών τροχιών, στην περιοχή κάτω από το σημεία ισοροπίας των ζωνών:

(α) $E_2(x_0 < 0)$ και (β) $E_1(x_0 > 0)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΣΥΝΟΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ-ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

11.1 Αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε τη δυναμική συμπεριφορά ενός μικρού σώματος που κινείται στο πεδίο δυνάμεων που σχηματίζουν N μεγάλα σώματα από τα οποία τα $n=N-1$ θεωρούνται ομογενή και σφαιρικά και βρίσκονται στις κορυφές ενός φανταστικού κανονικού n -γώνου δημιουργούν δε κλασικά νευτώνεια δυναμικά. Το N -οστό σώμα που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του πολυγώνου, που συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο του κανονικού πολυγώνου, δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev

$$V(r) = -k^2 M m \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right).$$
 Το δυναμικό αυτό μπορεί να περιγράψει κάποια ιδιαίτερα

φυσικά ή γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος, όπως την ομογενή εκπομπή ακτινοβολίας, τη θετική ή αρνητική πλάτυνσή (oblateness or prolateness) του κ.ο.κ. Τα μεγάλα σώματα θεωρούμε ότι κατά την κίνησή τους βρίσκονται πάντα σε σχετική ισορροπία μεταξύ τους (relative equilibrium), περιστρέφονται δε περί το κέντρο μάζας τους με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , που στις εφαρμογές τη θεωρούμε χάριν απλότητας ίση με τη μονάδα. Στη συνέχεια παραθέτουμε τα σημαντικότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μέχρι τώρα μελέτη του προβλήματος. Τα συμπεράσματα και ο σχολιασμός ομαδοποιούνται κατά ενότητα και κεφάλαιο ακολουθώντας τη δομή της διατριβής. Μαζί με τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος, κρίναμε ότι θα ήταν χρήσιμο για τους μελλοντικούς ερευνητές, αλλά και για την πληρότητα του κειμένου, να παραθέσουμε και τα βασικότερα συμπεράσματα που αφορούν στο κλασικό βαρυτικό δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων και τα οποία έχουν εξαχθεί από τη δεκαπενταετή και

πλέον μελέτη του προβλήματος. Στο τέλος εκθέτουμε ορισμένες σκέψεις που αφορούν σε μελλοντικές επεκτάσεις του προβλήματος, τροποποιήσεις του μοντέλου και πιθανές γενικεύσεις αυτού.

11.2 Γενικά χαρακτηριστικά του δακτυλιοειδούς προβλήματος των $N+1$ σωμάτων

11.2.1 Γενικά χαρακτηριστικά που αφορούν στο πρόβλημα του πολυγωνικού σχηματισμού των $N+1$ σωμάτων

- Τόσο ο σχηματισμός των primaries, όσο και το δυναμικό πεδίο παρουσιάζουν συμμετρία σε στροφές περί κατακόρυφο άξονα κατά γωνία $\theta=2\pi/ν$.
- Αν $ν=$ άρτιος ($ν=2κ$), τότε δύο αντιδιαμετρικές κορυφές ορίζουν έναν άξονα συμμετρίας. Επομένως ορίζονται $ν/2=κ$ άξονες συμμετρίας. Υπάρχουν όμως και άλλοι $ν/2=κ$ άξονες συμμετρίας που ενώνουν δύο αντιδιαμετρικά μέσα πλευρών (διευθύνσεις των διχοτόμων των επίκεντρων γωνιών, ή διευθύνσεις των αποστημάτων)
- Αν $ν=$ περιττός ($ν=2ρ+1$), τότε η μεσοκάθετη κάθε πλευράς διέρχεται από την απέναντι κορυφή και αποτελεί άξονα συμμετρίας του. Το πλήθος των αξόνων αυτών είναι $ν$.
- Αν ορίσουμε ως άξονα των x έναν άξονα συμμετρίας που συνδέει το κέντρο του $ν$ -γώνου με μία κορυφή του, τότε, ο κάθετος προς τον x άξονας y ,
 - ◆ όταν $ν=$ περιττός δεν αποτελεί άξονα συμμετρίας
 - ◆ όταν $ν=$ άρτιος $=2λ$ τότε είναι άξονας συμμετρίας. Στην περίπτωση αυτή, η διεύθυνσή του,
 - είτε θα διέρχεται από δύο αντιδιαμετρικές κορυφές του πολυγώνου όταν $λ=$ άρτιος ($λ=2, 4, 6, \dots$) (όπως συμβαίνει π.χ στις περιπτώσεις με $ν=4, 8, 12, 16, 32, \dots$ κ.ο.κ.)
 - είτε θα συμπίπτει με τη διεύθυνση της διχοτόμου της επίκεντρης γωνίας (ή του αποστήματος) όταν $λ=$ περιττός ($λ=1, 2, 3, \dots$) (όπως συμβαίνει π.χ. στις περιπτώσεις $ν=2, 6, 10, 14, \dots$ κ.ο.κ.).

- Υπάρχουν τόσες singularities, όσο το πλήθος N όλων των μεγάλων σωμάτων του σχηματισμού.
- Το πρόβλημα είναι αυτόνομο, αφού τόσο η συνάρτηση δυναμικού όσο και οι εξισώσεις κινήσεως δεν περιέχουν κατά τρόπο ρητό τον χρόνο.
- Ο σχηματισμός των μεγάλων σωμάτων χαρακτηρίζεται ως κεντρικός (central configuration) και μάλιστα τα μεγάλα σώματα διατηρούν σταθερές τις μεταξύ τους αποστάσεις (relative equilibria).
- Σχηματισμοί αυτής της μορφής είναι ασταθείς κάτω από ορισμένες συνθήκες των παραμέτρων για $v < 7$ για τα Νευτώνεια δυναμικά (Salo & Yoder (1988), Sheeres (1992), Vanderbei & Kolemen (2007)) και για $v \leq 6$ σε ορισμένα Μετα-Νευτώνεια δυναμικά (Arribas *et al.*, (2007)).
- Όσον αφορά στις επίπεδες κινήσεις του μικρού σώματος, γύρω από κάθε μεγάλο σώμα δημιουργείται μία "καμινοειδής" τριδιάστατη επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ στο χώρο, όπου ο τρίτος άξονας μετράει τις τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C .

11.3 Συμμετρία, παράμετροι, θέσεις ισορροπίας, καμπύλες και επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας, περιοχές επιτρεπτής επίπεδης κίνησης του μικρού σώματος

11.3.1 Συμμετρία και παράμετροι του προβλήματος

Όταν το δυναμικό τύπου Manev δημιουργείται από το κεντρικό σώμα, τότε:

- Η συμμετρία του σχηματισμού και του πεδίου δυνάμεων διατηρείται σε στροφές κατά γωνία $\theta=2\pi/n$ περί άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχηματισμού, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου e .
- Η συμμετρία του σχηματισμού και του δυναμικού πεδίου διατηρείται και ως προς όλους τους συνεπίπεδους με τον σχηματισμό, άξονες συμμετρίας.
- Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους:
 - Το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων. Πρόκειται για μεταβλητή που παίρνει θετικές ακέραιες τιμές >1 .

- Την παράμετρο μάζας $\beta = m_0/m$, που μπορεί να πάρει θετικές πραγματικές τιμές.
- Την παράμετρο ϵ , που εμφανίζεται στον διαταρακτικό όρο της συνάρτησης δυναμικού και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή σε ένα διάστημα (εδώ για τιμές $|e| < 0.2$).
- Σύμφωνα με τη διαδικασία αδιαστατοποίησης που ακολουθήθηκε, η αδιάστατη ακτίνα R του κύκλου των primaries επηρεάζεται μόνο από την παράμετρο ν , η δε μεταβολή της με την ν , παρουσιάζει μία κατά προσέγγιση γραμμική σχέση με αυτήν.
- Το πρόβλημα παρουσιάζει ένα Ιακωβιανού τύπου, ολοκλήρωμα της κίνησης.

11.3.2 Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για επίπεδες κινήσεις

- Όταν $\epsilon = 0$, τότε έχουμε το καθαρό βαρυτικό Νευτώνειο πρόβλημα. Οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας σχηματίζουν «καμινάδες» γύρω από κάθε primary. Οι «καμινάδες» των περιφερειακών primaries είναι όμοιες, ενώ αυτή γύρω από το κεντρικό σώμα είναι μεγαλύτερη όταν $\beta > 1$ ή μικρότερη όταν $\beta < 1$.
- Όταν $\epsilon > 0$, παρατηρείται παρόμοια εξέλιξη με μικρές αλλαγές γύρω από το κεντρικό σώμα. Όταν το β διατηρείται σταθερό και αυξάνεται η παράμετρος ϵ , τότε η κεντρική «καμινάδα» διευρύνεται (και αντίστροφα).
- Όταν $\epsilon < 0$, τότε παρατηρείται μία αναδίπλωση στην καμινάδα που σχηματίζεται γύρω από το κεντρικό σώμα, προς το εσωτερικό της.

11.3.3 Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας $C(x,y; \beta, \epsilon)$ για την επίπεδη κίνηση

Η μορφή των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας που οριοθετούν για κάθε τιμή της σταθεράς C , τις περιοχές της επιτρεπτής κίνησης του σωματιδίου, όπως και η εξέλιξή τους όταν μεταβάλλεται η σταθερά αυτή, καθορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων αφού οι τελευταίες επηρεάζουν άμεσα το πλήθος και τις τιμές της C των υπάρχουσών θέσεων ισορροπίας.

- Στη βαρυτική περίπτωση η εξέλιξη των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας όταν η σταθερά C είναι σχετικά μεγάλη, αποκαλύπτει κλειστές περιοχές παγίδευσης της κίνησης του σωματιδίου, οι οποίες περιβάλλουν τόσο το κεντρικό όσο και καθένα από τα περιφερειακά σώματα.
- Όταν $e > 0$ η εξέλιξη των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και των περιοχών επιτρεπτής κίνησης είναι παρόμοια με μόνη διαφορά μικρές αλλαγές στο μέγεθος των περιοχών αυτών.
- Όταν $e < 0$, συμβαίνουν σημαντικές αλλαγές στις περιοχές επιτρεπτής κίνησης κοντά και γύρω από το κεντρικό primary.
 - Η σημαντικότερη από αυτές οφείλεται στην “αναδίπλωση” της καμμοειδούς επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας που αναπτύσσεται γύρω από το κεντρικό primary και συμβαίνει μόλις η παράμετρος e καταστεί αρνητική.
 - Η αναδίπλωση αυτή πραγματοποιείται αρχικά σε εξόχως υψηλές τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς και το «χειλός» της μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές αυτής καθώς αυξάνει η απόλυτη τιμή της e .
 - Καθώς ελαττώνεται η τιμή της C δημιουργείται γύρω από το κεντρικό primary μία μικρή σχεδόν κυκλική περιοχή μέσα στην οποία η κίνηση είναι απαγορευμένη. Η περιοχή αυτή περιβάλλεται από μία άλλη στενή δακτυλιοειδή ζώνη όπου η κίνηση επιτρέπεται και αποτελεί περιοχή παγίδευσης του μικρού σώματος.

11.3.4 Θέσεις ισορροπίας

- Όταν $e=0$ (Νευτώνεια περίπτωση) :
 - Οι θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος κείνται όλες στο επίπεδο των primaries και ομαδοποιούνται σε πέντε (A_1, A_2, B, C_2, C_1) ή τρεις ομάδες (A_1, C_2, C_1) που τις ονομάζουμε ζώνες ισορροπίας (Kalvouridis, 1999a) και η κάθε μία αποτελείται από n δυναμικά ισοδύναμες θέσεις, δηλαδή θέσεις που

χαρακτηρίζονται από την ίδια Ιακωβιανή σταθερά και την ίδια κατάσταση ευστάθειας.

- Οι θέσεις κάθε ομάδας κατανέμονται πάνω σε φανταστικές περιφέρειες κύκλων, παρουσιάζουν την ίδια συμμετρία με αυτήν των περιφερειακών σωμάτων και έχουν προσανατολισμούς ως προς αυτά που χαρακτηρίζονται είτε ως «ομοιόθετοι» (ίδιος προσανατολισμός με τα primaries), είτε ως «ομογραφικοί» (προσανατολισμός σε στροφή $\theta=\pi/n$ ως προς τα primaries). Οι τρεις από τις ζώνες αυτές βρίσκονται στο εσωτερικό του φανταστικού κύκλου των περιφερειακών primaries (A_1, A_2, B), ενώ οι υπόλοιπες δύο (C_2, C_1) εκτός αυτού. Τα σημεία ισοροπίας που βρίσκονται πάνω στις ακτίνες που συνδέουν το κεντρικό με τα περιφερειακά (όπως αυτά των ζωνών A_1 και C_1), ονομάζονται συγγραμμικά. Τα σημεία που βρίσκονται μέσα στις τριγωνικές περιοχές που σχηματίζονται από το κεντρικό σώμα και δύο διαδοχικά περιφερειακά (όπως αυτά των ζωνών A_2, B και C_2), ονομάζονται τριγωνικά.
- Για κάθε τιμή της παραμέτρου v , η μετάβαση (bifurcation) από πέντε ζώνες σε τρεις συμβαίνει σε μία κρίσιμη τιμή της $\beta=l_v$ (Croustalloudi & Kalnouridis, 2003, 2007a). Η τιμή αυτή αυξάνει σχεδόν εκθετικά με την παράμετρο v .
- Βρέθηκε (Fakis *et al.*, 2013) ότι οι κρίσιμες τιμές l_v για διάφορα v προσδιορίζονται με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση από την πολυωνυμική σχέση:

$$l_v(v) = 0.0000418632v^4 + 0.018856v^3 - 0.0648675v^2 - 0.104225v + 0.40547 \quad \text{όπου } v=2, 3, 4, \dots$$

- Όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β τόσο οι ζώνες πλησιάζουν μεταξύ τους από διαφορετικές κατευθύνσεις προσεγγίζοντας τον φανταστικό κύκλο των primaries, ενώ παράλληλα η τιμή της Ιακωβιανής σταθεράς τους ελαττώνεται (Kalnouridis, 1999a). Επίσης, όσο μεγαλώνει το β τόσο οι απόλυτες διαφορές των Ιακωβιανών σταθερών τους C_w μικραίνουν, με αποτέλεσμα να

«επισπεύδονται» οι τοπολογικές αλλαγές, αφού τα C_w διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους και συνεπώς να συμβαίνουν σε στενότερες περιοχές τιμών της C .

- **Όταν $e > 0$,**
 - Όλες οι θέσεις ισορροπίας κείνται στο επίπεδο των primaries και ομαδοποιούνται και πάλι σε πέντε ή τρεις ομάδες (ζώνες ισορροπίας) όπως και στη βαρυτική περίπτωση με τη διαφορά ότι τώρα η μετάβαση από τις πέντε στις τρεις για κάθε τιμή του v πραγματοποιείται για ένα πλήθος τιμών-ζευγών (e, β) ο γεωμετρικός τόπος των οποίων είναι μία καμπύλη (καμπύλη διακλάδωσης) στο επίπεδο βe . Στο διάγραμμα αυτό, κάτω από την καμπύλη διακλάδωσης υπάρχουν πέντε ζώνες ισορροπίας, ενώ πάνω από αυτήν τρεις. Καθώς το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων v αυξάνει η καμπύλη διακλάδωσης μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου β .
 - Επίσης, όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου e , διατηρώντας την παράμετρο β σταθερή:
 - η τιμή της Ιακωβιανής σταθεράς C ελαττώνεται ελαφρά,
 - οι ακτίνες των ζωνών A_1 και C_2 αυξάνονται, ενώ αντίθετα η ακτίνα της ζώνης C_1 ελαττώνεται.
- **Όταν $e < 0$,** πολλές αλλαγές συμβαίνουν αναφορικά με τις θέσεις ισορροπίας.
 - Η ύπαρξη των θέσεων ισορροπίας (αλλά και του ορισμού του ίδιου του προβλήματος) προϋποθέτει ότι $\Delta > 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία τιμή της v , οι τιμές των δύο παραμέτρων β και e , μηδενίζουν την ποσότητα Δ , τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση. Τα ζεύγη (e, β) που μηδενίζουν την Δ για κάποιο v , βρίσκονται πάνω σε μία καμπύλη που ονομάζεται κρίσιμη καμπύλη $e_{cr} = e_{cr}(\beta)$. Όσο μεγαλύτερο είναι το v τόσο η καμπύλη αυτή μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες απόλυτες τιμές του e .
 - Στην περίπτωση που $\Delta > 0$, τότε εκτός των πέντε γνωστών ζωνών, εμφανίζονται δύο νέες ζώνες και δύο "εκτός επιπέδου" σημεία ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι για τους διάφορους συνδυασμούς τιμών των β και e , οι

ζώνες ισορροπίας στο επίπεδο των primaries, είναι επτά, πέντε ή τρεις. Στην προκειμένη περίπτωση το διάγραμμα διακλαδώσεων αποτελείται από τρεις καμπύλες που τέμνονται μεταξύ τους και διαχωρίζουν το επίπεδο $e\beta$ σε πέντε περιοχές (I-V). Σε κάθε μία από αυτές τις περιοχές εμφανίζεται διαφορετικός αριθμός ζωνών ή ίδιος αριθμός αλλά διαφορετικές ζώνες.

- Όσον αφορά στις "εκτός επιπέδου" και επί του άξονα z δύο θέσεις ισορροπίας:
 - αυτές βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς την αρχή εκατέρωθεν του επιπέδου των primaries.
 - Διατηρώντας τη β σταθερή, όσο η απόλυτη τιμή της e αυξάνει, τόσο οι θέσεις απομακρύνονται από την αρχή, ενώ η Ιακωβιανή τους σταθερά ελαττώνεται στην αρχή απότομα για να διατηρηθεί σχεδόν σταθερή στη συνέχεια.
 - Διατηρώντας την e σταθερή, όσο αυξάνεται η β , τόσο οι θέσεις απομακρύνονται από την αρχή αλλά κατά πολύ λίγο, ενώ για σχετικά μεγάλες τιμές της β οι αποστάσεις συσσωρεύονται σε μία οριακή τιμή η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\text{rad} \approx 2|e|$. Τέλος, παρατηρούμε την αύξηση των τιμών της Ιακωβιανής σταθεράς που αντιστοιχούν στα $L_{\pm z}$, καθώς αυξάνεται η παράμετρος μάζας β , ενώ και σε αυτή την περίπτωση για σχετικά μεγάλες τιμές της β οι καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί τείνουν σε μία οριακή τιμή της σταθεράς C_{Lz} .
- Όλες οι θέσεις ισορροπίας εντός και εκτός του επιπέδου των primaries είναι ασταθείς για κάθε τριάδα των παραμέτρων v , β και e .

11.3.5 Περιοχές επιτρεπτής κίνησης και περιοχές παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος

- Η εξέλιξη των περιοχών αυτών εξαρτάται από τις παραμέτρους β και e και συνεπώς από το πλήθος και τον τύπο των ζωνών ισορροπίας που υπάρχουν για το συγκεκριμένο ζεύγος (e, β) .
- Ο τρόπος της εξέλιξης αυτής εξαρτάται επίσης από τις Ιακωβιανές σταθερές C_w των υπάρχουσών ζωνών ισορροπίας και σχετίζεται άμεσα από την ακολουθία των τιμών αυτών.
- Στις τιμές $C=C_w$ συμβαίνουν διακλαδώσεις (bifurcations) στην τοπολογία των περιοχών επιτρεπτής κίνησης. Ως αποτέλεσμα, η εξέλιξη αυτών των περιοχών, καθώς και το πλήθος των περιοχών παγίδευσης της κίνησης του μικρού σώματος μπορεί να μεταβάλλονται στις τιμές αυτές.

11.4 Διαγράμματα $x-C$ και παραμετρική μεταβολή αυτών-Εστιακά σημεία και εστιακές καμπύλες

11.4.1 Διαγράμματα $C(x,y=0;v,\beta,e)$ και παραμετρική μεταβολή τους

Τα διαγράμματα αυτά αποτελούν τις τομές της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας με το επίπεδο $y=0$, και οι αντίστοιχες καμπύλες του διαγράμματος χαρακτηρίζονται από μηδενική ταχύτητα και ονομάζονται και αυτές καμπύλες μηδενικής ταχύτητας. Στο επίπεδο αυτό, όταν $e \geq 0$ εμφανίζονται διάυλοι στην περιοχή κάθε primary στο εσωτερικό των οποίων η κίνηση του σωματιδίου είναι επιτρεπτή, ενώ όταν $e < 0$ η αναστροφή της κεντρικής «καμινάδας» δημιουργεί κοντά στην ασύμπτωτη έναν πολύ στενό διάυλο στο εσωτερικό του οποίου η κίνηση του σωματιδίου είναι απαγορευμένη. Οι «ασύμπτωτες» των διαύλων αυτών διέρχονται από τις θέσεις των primaries.

11.4.2 Συμμετρία των καμπύλων των διαγραμμάτων $C(x,y=0;v,\beta,e)$

Όσον αφορά στη συμμετρία των καμπύλων των διαγραμμάτων,

- όταν το v είναι περιττός, τότε το διάγραμμα δεν είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα C , ενώ εμφανίζονται δύο διάυλοι, από τους οποίους ο ένας στην περιοχή του κεντρικού primary P_0 και ο δεύτερος στην περιοχή του σώματος P_1
- όταν το v είναι άρτιος, τότε το διάγραμμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα C , και εμφανίζονται τρεις διάυλοι, γύρω από το κεντρικό primary και γύρω από τα περιφερειακά σώματα P_1 και $P_{(v/2)+1}$.

11.4.3 Τοπικά ακρότατα των καμπύλων των διαγραμμάτων $C(x,y=0;v,\beta,e)$

Τα τοπικά ακρότατα των καμπύλων απεικονίζουν τις θέσεις ισορροπίας πάνω στον άξονα x . Ειδικότερα:

- όταν το v είναι περιττός, εμφανίζονται σημεία ισορροπίας, συγγραμμικά (collinear) και τριγωνικά (triangular), που αντιπροσωπεύουν όλες τις υπάρχουσες, για το συγκεκριμένο σετ παραμέτρων, ζώνες ισορροπίας.
- όταν το v είναι άρτιος, εμφανίζονται μόνο τα συγγραμμικά σημεία ισορροπίας.

11.4.4 Παραμετρική μεταβολή των καμπύλων $C=C(x)$

(i) Μεταβολή με την παράμετρο v

Όταν αυξάνει το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων v , τότε,

- η βάση της κεντρικής «καμινάδας» περί το P_0 διευρύνεται και μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές της C .
- οι περιφερειακές «καμινάδες» απομακρύνονται από το κέντρο (αρχή) και παράλληλα οι βάσεις τους διευρύνονται και μετατοπίζονται και αυτές προς μεγαλύτερες τιμές της C .

(ii) Μεταβολή με την παράμετρο β για δεδομένο v και σταθερό e

Διατηρώντας τις τιμές των παραμέτρων v και e σταθερές και εφόσον $e > 0$ οι καμπύλες παρουσιάζουν παρόμοια μορφή και εξέλιξη με αυτήν της βαρυτικής περίπτωσης.

Όταν όμως $e < 0$ εμφανίζονται σημαντικές διαφοροποιήσεις που οφείλονται στην «αναδίπλωση» προς το εσωτερικό της «καμινάδας» που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον σώμα.

- όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου μάζας β , παρατηρείται μία διεύρυνση του αναδιπλουμένου τμήματος της κεντρικής καμινάδας και μια στένωση της περιφερειακής καμινάδας. Ταυτόχρονα μετατοπίζονται οι βάσεις των διαύλων προς χαμηλότερες τιμές της C .
- η μετατόπιση αυτή δημιουργεί μία "συσσώρευση" των καμπύλων $C=C(x)$ προς κάποια οριακή θέση η οποία εξαρτάται από την τιμή της e .

(iii) Μεταβολή με την παράμετρο e για δεδομένο ν και σταθερό β

Διατηρώντας τα ν και β σταθερά, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(A) $e > 0$

Όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου e , τότε:

- παρατηρείται μία διεύρυνση της βάσης της κεντρικής καμινάδας με αντίστοιχη στένωση του περιφερειακού διαύλου.
- μετατοπίζονται οι βάσεις των καμινάδων προς χαμηλότερες τιμές της C .

(B) $e < 0$

Όταν η απόλυτη τιμή της e αυξάνει, τότε:

- το χείλος της αναδίπλωσης εξομαλύνεται και ταυτόχρονα μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C
- παρουσιάζεται μια διεύρυνση του ανεστραμμένου τμήματος της κεντρικής καμινάδας
- παρόμοια διεύρυνση παρατηρείται και στις περιφερειακές καμινάδες με παράλληλη μετατόπιση της βάσης τους, προς μεγαλύτερες τιμές της C .

11.5 Εστιακά σημεία και εστιακές καμπύλες

Τα εστιακά σημεία παρατηρήθηκαν στα διαγράμματα (x_0, C) της βαρυτικής περίπτωσης (μία παράμετρος) του δακτυλιοειδούς προβλήματος ως κοινά σημεία

τομής των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας που είχαν σχεδιασθεί για διάφορες τιμές της παραμέτρου β στην περιοχή του κεντρικού σώματος. Τα σημεία αυτά συμβολίσθηκαν με k και k' . Τα σημεία αυτά βρέθηκε ότι ανήκουν σε χωρική καμπύλη που αναπτύσσεται πάνω στην επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ και έχει κυματοειδή μορφή. Τα σημεία k και k' αποτελούν τα ακρότατα της καμπύλης αυτής η οποία παρουσιάζει την ίδια συμμετρία με αυτήν του σχηματισμού των σωμάτων. Η ιδιότητα αυτή εμφανίζεται και στην περίπτωση με κεντρικό δυναμικό τύπου Manev (δύο παράμετροι, β και e).

Τα γενικά χαρακτηριστικά των εστιακών καμπύλων είναι ότι:

- Παρατηρούνται στις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας που αναπτύσσονται γύρω από τα primaries εκείνα, στις εκφράσεις του δυναμικού των οποίων υπεισέρχονται οι παράμετροι
- Είναι δύο τύπων, όσες και οι παράμετροι που υπεισέρχονται στο δυναμικό του κεντρικού primary:
 - Εστιακές καμπύλες για σταθερή τιμή της β που περιγράφονται από συναρτήσεις ανεξάρτητες από την παράμετρο e .
 - Εστιακές καμπύλες για σταθερή τιμή της e που περιγράφονται από συναρτήσεις ανεξάρτητες από την παράμετρο β .
- Τα ακρότατα k αυτών των καμπύλων χαρακτηρίζονται ως συγγραμμικά και είναι n το πλήθος, ενώ τα k' χαρακτηρίζονται ως τριγωνικά και είναι και αυτά n το πλήθος.
- Όταν n είναι περιττός στον άξονα των x βρίσκεται ένα συγγραμμικό (θετικός ημιάξονας) και ένα τριγωνικό (αρνητικός ημιάξονας) εστιακό σημείο τα οποία δεν είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα C αφού έχουν διαφορετικές συντεταγμένες.
- Όταν n είναι άρτιος στον άξονα των x τα δύο εστιακά σημεία είναι συγγραμμικά και επομένως συμμετρικά ως προς τον άξονα των C . Στην περίπτωση αυτή τα

δύο k' εστιακά σημεία εμφανίζονται στις διευθύνσεις των διχοτόμων δηλαδή σε στροφές κατά γωνία π/n .

- Οι θέσεις των συγγραμμικών εστιακών σημείων είναι ομοιόθετες, ενώ των τριγωνικών ομογραφικές σε σχέση με τις θέσεις των primaries (εστραμμένες κατά γωνία π/n).

11.5.1 Σχέση συγγραμμικών-τριγωνικών εστιακών σημείων με τον άξονα y

- Αν $n=\text{άρτιος}=2\lambda$, τότε ο άξονας y είναι ένας επίπεδος άξονας συμμετρίας του πολυγωνικού σχηματισμού και μάλιστα ισχύει ότι :
 - Εφόσον $\lambda=\text{περιττός}$ ο άξονας y συμπίπτει με τη διεύθυνση των τριγωνικών σημείων k' .
 - Εφόσον $\lambda=\text{άρτιος}$ ο άξονας y συμπίπτει με τη διεύθυνση των συγγραμμικών εστιακών σημείων k .
- Αν $n=\text{περιττός}=2\lambda+1$, τότε ο άξονας y δεν είναι άξονας συμμετρίας, διχοτομεί όμως πάντα τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαδοχικές διευθύνσεις $k'-k$ που είναι εκατέρωθέν του, σε δύο ίσες γωνίες $\pi/(2n)$ η καθεμία. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι :
 - Εφόσον $\lambda=\text{περιττός}$ τότε δεξιά του άξονα y βρίσκεται η διεύθυνση k' και αριστερά του η διεύθυνση k .
 - Εφόσον $\lambda=\text{άρτιος}$, τότε δεξιά του άξονα y βρίσκεται η διεύθυνση k , και αριστερά του βρίσκεται η διεύθυνση k' .

Γενική παρατήρηση:

Οι διαφορές των ακραίων τιμών των x_k , $x_{k'}$ και C_k , $C_{k'}$ μειώνονται καθώς αυξάνει το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων n . Δηλαδή, όσο το n αυξάνει, οι τιμές των C_k , $C_{k'}$ τείνουν να εξισωθούν μετατοπιζόμενες ταυτόχρονα προς το επάνω τμήμα της κεντρικής "καμινάδας", ενώ οι απόλυτες τιμές των x_k και $x_{k'}$ τείνουν και αυτές να εξισωθούν απομακρυνόμενες όμως από την αρχή των αξόνων. Ως αποτέλεσμα αυτής της μεταβολής, η χωρική κυματοειδής εστιακή καμπύλη, καθώς αυξάνει το n να τείνει να

εξομαλυνθεί σε επίπεδη κυκλική καμπύλη της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα των C και της οποίας οι διαστάσεις αυξάνουν με το v .

11.5.2 Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος β παραμένει σταθερή-Η συνάρτηση F_β

Λαμβάνεται διατηρώντας το β σταθερό (για κάποια τιμή του v) έχει δε τη μορφή:

$$F_\beta(x; y_i, \beta) = \frac{r_0^2}{K - r_0\beta} \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} - 1 = 0$$

$$K = \frac{\Lambda + \beta M^2}{2M^3}$$

- Η συνάρτηση F_β είναι ανεξάρτητη του e και εκφράζει μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων ως προς β . Η αντίστοιχη εστιακή καμπύλη αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των ριζών της συνάρτησης F_β για διάφορες τιμές της y , με $-y_c \leq y \leq y_c$ και $\pm y_c$ οι οριακές τιμές της.
- Σε ένα πολυγωνικό σχηματισμό με περιτό v , τα εστιακά σημεία που εμφανίζονται ως ρίζες της συνάρτησης για διάφορες τιμές της y , είτε είναι δύο, είτε ένα (στις οριακές τιμές $y = y_c$).
- Για κάθε τιμή της β , τα εστιακά σημεία (για διάφορες τιμές της y) και τα αντίστοιχα C βρίσκονται πάνω στο τμήμα της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας που ορίζεται μεταξύ των δύο ισοενεργειακών σταθμών C_k^β και $C_{k'}^\beta$, ή στην κλειστή περιοχή του επιπέδου xy που ορίζεται από τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις τιμές αυτές της Ιακωβιανής σταθεράς.
- Όσο μεγαλώνει η τιμή της β , τόσο διευρύνεται η συνεχής εστιακή καμπύλη μετατοπιζόμενη προς χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C . Το αντίθετο συμβαίνει όταν τη τιμή του β ελαττώνεται. Και στις δύο περιπτώσεις, οι τιμές της μέσης

ενεργειακής στάθμης C_μ^β τείνουν συσσωρευόμενες προς μία οριακή τιμή $C_L \approx 5.64$ (κάτω όριο) για $\beta > 1000$ και $C_U \approx 8.621$ (άνω όριο), όταν $\beta \rightarrow 0$.

- Η εστιακή καμπύλη δεν μπορεί ποτέ να εκφυλισθεί σε σημείο αφού πρέπει $r_0 \neq 0$.

11.5.3 Εστιακά σημεία και εστιακή καμπύλη όταν η παράμετρος e παραμένει σταθερή-Η συνάρτηση F_e

Λαμβάνεται διατηρώντας την e σταθερή (για κάποια τιμή του v) έχει δε τη μορφή:

$$F_e(x; y_i, e) = \frac{M^2(1+2eM)}{\Lambda} \left(\frac{r_0^2}{r_0+e} \right) \sum_{i=1}^v \frac{1}{r_i} - 1 = 0$$

Τα εστιακά σημεία αυτού του τύπου είναι οι ρίζες της F_e . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$e=0$ ή $e>0$.** Παρουσιάζονται πάντα δύο εστιακά σημεία, τα οποία ανήκουν σε μία εστιακή καμπύλη, η οποία δεν εκφυλίζεται ποτέ σε σημείο ή δεν εξαφανίζεται.
- **$e<0$.** Παρουσιάζονται τέσσερα εστιακά σημεία τα οποία ανήκουν ανά δύο σε δύο εστιακές καμπύλες. Από αυτές η μία αναπτύσσεται στην εξωτερική επιφάνεια της κεντρικής καμινάδας, ενώ η δεύτερη αναπτύσσεται στην εσωτερική επιφάνεια του αναδιπλούμενου τμήματός της. Όταν $v \leq 25$, καθώς αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή η e , τα σημεία τομής γίνονται τρία, εκ των οποίων τα δύο βρίσκονται στον αριστερό κλάδο του διαγράμματος (αρνητικά x) και το τρίτο βρίσκεται στο δεξιό κλάδο (σημείο επαφής). Στη συνέχεια τα εμφανιζόμενα εστιακά σημεία γίνονται δύο (και τα δύο στον αριστερό κλάδο του διαγράμματος). Τέλος, για κάποια μεγαλύτερη απόλυτη τιμή του e εμφανίζεται ένα μόνο εστιακό σημείο στο αριστερό σκέλος του διαγράμματος (σημείο επαφής με τον άξονα x), ενώ για μεγαλύτερες απόλυτες τιμές του e δεν υπάρχουν εστιακά σημεία. Η μία από τις καμπύλες αυτές εμφανίζεται σε

υψηλότερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C , ενώ ή άλλη εμφανίζεται σε χαμηλότερες τιμές.

- Τα συγγραμμικά και τριγωνικά εστιακά σημεία της εξωτερικής καμπύλης τα ονομάζουμε k_{ex} και k'_{ex} , ενώ αυτά της εσωτερικής εστιακής καμπύλης k_{in} και k'_{in} αντίστοιχα. Τα μεν k_{in} σημεία βρίσκονται στις ίδιες διευθύνσεις με τα k_{ex} σημεία, ενώ τα k'_{in} είναι στις ίδιες διευθύνσεις με τα k'_{ex} . Τα k_{ex} , k'_{ex} σημεία εξελίσσονται στην επιφάνεια της κεντρικής καμινάδας μεταξύ των τιμών C_k^{ex} , $C_{k'}^{ex}$, ενώ τα k_{in} , k'_{in} σημεία εξελίσσονται στην επιφάνεια της αναδιπλούμενης περιοχής της κεντρικής καμινάδας, μεταξύ των αντίστοιχων τιμών C_k^{in} και $C_{k'}^{in}$. Αυτά τα ζεύγη τιμών των C δημιουργούν στο επίπεδο xy δύο ομόκεντρες κλειστές και πολύ στενές (αφού τα C_k^{ex} , $C_{k'}^{ex}$ όπως και τα C_k^{in} , $C_{k'}^{in}$ διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους) ζώνες μέσα στις οποίες εξελίσσονται οι προβολές των εστιακών καμπύλων στο επίπεδο xy .

11.5.4 Κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$ και $F_e = F_e(x)$

Στα διαγράμματα $x-F_\beta$ για σταθερή τιμή της παραμέτρου β και για διάφορες θετικές ή αρνητικές τιμές του συντελεστή M αν e ή και για $e=0$, παρουσιάζονται δύο κοινά σημεία διέλευσης των καμπύλων $F_\beta = F_\beta(x)$, ενώ το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση των καμπύλων $F_e = F_e(x)$ στα διαγράμματα $x-F_e$ για σταθερές τιμές του συντελεστή e (θετικές ή αρνητικές ή και για τη μηδενική τιμή) και για διάφορες τιμές της παραμέτρου μάζας β . Σε κάθε περίπτωση αυτά τα κοινά σημεία διέλευσης είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα τιμών των F_β ή F_e και οι τετμημένες τους βρίσκονται από την ίδια εξίσωση:

$$r_0 = \frac{1}{2M} \text{ όπου } r_0 = (x^2 + y_i^2)^{1/2}$$

με $x = x_{F_\beta}$ στην περίπτωση της F_β και $x = x_{F_e}$ στην περίπτωση της F_e .

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση τα κοινά σημεία διέλευσης βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας $r_0 = \frac{1}{2M}$, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις παραμέτρους e , β και εξαρτάται μόνο από την παράμετρο ν .

11.5.6 Επίδραση της παραμέτρου ν στη συνάρτηση F_β

Παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε σχηματισμό, καθώς μεταβάλλεται το β , η σταθερά C κινείται σε μία μικρή περιοχή τιμών, όπου για $\nu \leq 25$ η C αυξάνεται, ενώ για $\nu > 25$ ελαττώνεται.
- Όσο αυξάνεται ο αριθμός ν , η σταθερά C μετατοπίζεται προς υψηλότερες τιμές ενέργειας.
- Σε κάθε σχηματισμό οι αποστάσεις (τετμημένες x_μ^β) από το κεντρικό σώμα μεταβάλλονται εντός μιας στενής περιοχής τιμών και μάλιστα για $\nu \leq 25$ αυξάνονται, ενώ για $\nu > 25$ ελαττώνονται.
- Όσο αυξάνεται το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων, τόσο απομακρύνονται τα εστιακά σημεία από το κέντρο του σχηματισμού.

11.5.7 Επίδραση της παραμέτρου ν στη συνάρτηση F_e

Εξετάζοντας την περίπτωση με $e < 0$, παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε τιμή του ν , η καμπύλη με την υψηλότερη ενέργεια αναφέρεται στην εξωτερική εστιακή καμπύλη ενώ η άλλη στην εσωτερική.
- Επίσης, όσο αυξάνεται το πλήθος ν των περιφερειακών σωμάτων, τόσο αυξάνεται και το εύρος τιμών των Ιακωβιανών σταθερών μέσα στις οποίες εξελίσσονται οι δυο εστιακές καμπύλες. ενώ αυξάνεται και η αρχική ενεργειακή διαφορά τους.

- Προκύπτει ακόμη ότι ενώ για $v \leq 25$ οι δύο εστιακές καμπύλες τείνουν να ταυτιστούν σε κοινό επίπεδο, αφού μηδενίζεται η ενεργειακή τους διαφορά, αυτό δεν συμβαίνει για $v > 25$.
- Για κάθε τιμή του v , η καμπύλη με τη μεγαλύτερη μέση απόσταση από το κεντρικό primary αναφέρεται στην εξωτερική εστιακή καμπύλη ενώ η άλλη στην εσωτερική.
- Σε όλες τις περιπτώσεις τιμών v η εξωτερική καμπύλη έχει μεγαλύτερη μέση ακτίνα και ενώ για $v \leq 25$ τα εστιακά σημεία της εσωτερικής και εξωτερικής καμπύλης ταυτίζονται για κάποια τιμή του e , για $v > 25$ αυτά διατηρούν μια απόσταση μεταξύ τους που δεν μηδενίζεται παρά μόνο αυξομειώνεται ($v=27$).
- Όσο αυξάνεται το v , αυξάνεται και η αρχική διαφορά των μέσων ακτίνων των εστιακών καμπύλων.
- Διαπιστώθηκε επίσης ότι για δακτυλιοειδείς σχηματισμούς με $v \leq 25$, υπάρχει μία οριακή τιμή της παραμέτρου $e=e_{lim}$, όπου παύουν να υπάρχουν εστιακά σημεία (και συνεπώς εστιακές καμπύλες) και ότι όσο αυξάνεται το πλήθος v των περιφερειακών σωμάτων, αυξάνει κατά απόλυτη τιμή και η οριακή αυτή τιμή.

11.6 Ελκτικές περιοχές

11.6.1 Γενικά χαρακτηριστικά

Η μελέτη που έγινε στις ελκτικές περιοχές των θέσεων ισορροπίας στο βαρυτικό δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων από τους Croustalloudi & Kalvouridis (2004a, b, 2007a) οδήγησε στα παρακάτω γενικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες:

- Το σύνολο των αρχικών τιμών οι οποίες με τη βοήθεια μιας αριθμητικής μεθόδου οδηγούν στις θέσεις ισορροπίας που ανήκουν σε μία ζώνη ισορροπίας αποτελεί μια "ελκτική περιοχή (attracting domain)" ή "περιοχή σύγκλισης (region of convergence)" ή "ελκτική δεξαμενή (basin of attraction)".
- Μία τέτοια περιοχή αποτελείται συνήθως από ένα "συμπαγές" τμήμα ("compact") και από διάσπαρτα σημεία. Τα σημεία αυτά κατανέμονται στα όρια

των «συμπαγών» περιοχών που ανήκουν στην ίδια ζώνη ισορροπίας ή σε διαφορετικές ζώνες.

- Τα όρια των συμπαγών περιοχών δεν είναι σαφή και σε αρκετές περιπτώσεις έχουν μορφοκλασματική δομή.
- Στις «συμπαγείς» περιοχές όλα τα σημεία-μέλη του υποσυνόλου συγκλίνουν σε κάποια από τις θέσεις ισορροπίας της συγκεκριμένης ζώνης, παρουσιάζουν δε (εκτός από τα ασαφή περιγράμματα) ντετερμινιστική συμπεριφορά με την έννοια ότι μικρές μεταβολές των αρχικών τιμών που ανήκουν στις περιοχές αυτές, οδηγούν σε θέσεις ισορροπίας της ίδιας ζώνης (ίδια θέση ή άλλη θέση ισορροπίας της ίδιας ζώνης).
- Τα διάσπαρτα (ή μεμονωμένα) σημεία διαχέονται στα ασαφή όρια των «συμπαγών» περιοχών τόσο της συγκεκριμένης ζώνης όσο και άλλων ζωνών ισορροπίας.
- Οι ελκτικές περιοχές κάθε ζώνης παρουσιάζουν τα ίδια χαρακτηριστικά συμμετρίας με αυτά του σχηματισμού των primaries. Με άλλα λόγια υπάρχει ένα βασικό μοτίβο για κάθε ζώνη που επαναλαμβάνεται το ίδιο σε στροφή κατά γωνία $\theta=2\pi/\nu$.
- Οι παράμετροι του προβλήματος παίζουν καθοριστικό ρόλο στο πλήθος των υπάρχουσών ζωνών ισορροπίας και κατ' επέκταση στη διαμόρφωση των ελκτικών περιοχών. Στην περίπτωση του βαρυτικού προβλήματος όπου υπάρχει μόνο η παράμετρος της μάζας β , το πλήθος των ζωνών είναι πέντε ή τρεις ανάλογα με τον αν η β είναι μικρότερη (πέντε ζώνες) ή μεγαλύτερη (τρεις ζώνες) της κρίσιμης τιμής l_ν . Στη δεύτερη περίπτωση οι εξαφανιζόμενες ζώνες είναι οι A2 και B.
- Όταν η β αυξάνει παραμένοντας όμως κάτω από την κρίσιμη τιμή l_ν , τότε η συμπαγής περιοχή της B συρρικνώνεται, η ελκτική περιοχή της A2 ελαττώνεται σημαντικά, ενώ παρουσιάζεται μικρή μείωση και στις δύο άλλες ζώνες C2 και C1. Τις μειώσεις αυτές τις απορροφά η αύξηση της ελκτικής περιοχής της A1.

- Στην τιμή $\beta=l_v$ (μετάβαση από τις πέντε ζώνες στις τρεις), τα σημεία των εξαφανιζόμενων ζωνών εμπλουτίζουν τις ζώνες που απομένουν και κυρίως την ζώνη C2 η οποία παρουσιάζει απότομη αύξηση. Καθώς η β αυξάνει πέρα από την κρίσιμη τιμή, η ελκτική περιοχή της ζώνης A1 συνεχώς επεκτείνεται, ενώ η αντίστοιχη της ζώνης C1 ελαφρά περιορίζεται. Όσον αφορά στην ελκτική περιοχή της ζώνης C2, μετά από την απότομη αύξηση του πλήθους των σημείων της, ακολουθεί μία μείωση του πλήθους των σημείων της.
- Όσον αφορά στις κλάσεις βημάτων για την επίτευξη της σύγκλισης, οι περιοχές των ελκτικών περιοχών που παρουσιάζουν την ταχύτερη σύγκλιση (1-5 βήματα) βρίσκονται στα κεντρικά τμήματα των «συμπαγών» περιοχών και περιβάλλουν τις θέσεις ισοροπίας της αντίστοιχης ζώνης. Όμως παρατηρούνται και διάσπαρτα σημεία γρήγορης σύγκλισης είτε σε περιοχές οι οποίες περιβάλλουν τα «γρήγορα» αυτά τμήματα, είτε κοντά σε άλλες ζώνες ισοροπίας. Παρατηρήθηκε επίσης ότι σε όλες τις περιπτώσεις, η κλάση βημάτων 6-10 είναι η πυκνότερη και πιο εκτεταμένη.
- Σημαντικός είναι και ο ρόλος της χρησιμοποιούμενης αριθμητικής μεθόδου για τη μελέτη των ελκτικών περιοχών. Συγκριτικές μελέτες που έγιναν από τους Gousidou-Koutita & Kalvouridis (2008a,b, 2009) και αφορούσαν εκτός της Newton-Raphson και άλλες μεθόδους, όπως η μέθοδος Broyden και η τροποποιημένη μέθοδος Broyden, έδειξαν ότι η πρώτη συνέκλινε ταχύτερα και για πολύ περισσότερες αρχικές τιμές (x_0, y_0) , ενώ απέδιδε αποτελέσματα μεγαλύτερης ακρίβειας με το μικρότερο υπολογιστικό κόστος.

11.6.2 Ευαισθησία του αλγορίθμου στη μεταβολή των αρχικών τιμών

Όσον αφορά στην ευαισθησία της χρησιμοποιούμενης αριθμητικής μεθόδου αλλά και του ίδιου του δυναμικού συστήματος που εκφράζεται από τη μορφή της συνάρτησης δυναμικού, συναντούμε γενικά τις εξής περιπτώσεις κατά την πολύ μικρή μεταβολή των αρχικών συνθηκών:

- Ο αλγόριθμος συγκλίνει στην ίδια θέση ισορροπίας.
- Ο αλγόριθμος συγκλίνει σε διαφορετική θέση ισορροπίας της ίδιας ζώνης.
- Ο αλγόριθμος συγκλίνει σε κάποια θέση ισορροπίας διαφορετικής ζώνης.
- Ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει είτε επειδή από κάποιο βήμα κι έπειτα ταλαντώνεται μεταξύ των δύο τελευταίων προσεγγίσεων, είτε διότι οι υπολογιζόμενες τιμές συνεχώς απομακρύνονται.

11.6.3 Περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev

Στοιχεία της μελέτης περιλαμβάνονται στην εργασία Croustalloudi, *et al.*, 2013.

- Όταν η παράμετρος e είναι θετική, παρατηρούμε ότι η εξέλιξη των περιοχών είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της καθαρής Νευτώνειας περίπτωσης.
- Όμως όταν $e < 0$, παρατηρούνται σημαντικές διαφορές επειδή:
 - Εμφανίζονται δύο νέες ζώνες ισορροπίας στο επίπεδο των σωμάτων οι E1 και E2 με n θέσεις η κάθε μία που αναπτύσσονται στην περιοχή της αναδίπλωσης κοντά και γύρω από το κεντρικό primary,
 - Δύο εκτός επιπέδου σημεία L_{+z} , L_{-z} που κείνται πάνω στον άξονα Oz σε συμμετρικές θέσεις ως προς το επίπεδο xy (οι ελκτικές περιοχές των σημείων αυτών δεν θα εξετασθούν στην παρούσα διατριβή).
- Σε κάθε περίπτωση, οι ελκτικές περιοχές των ζωνών E1 και E2 είναι οι μικρότερες, ενώ αυτή της ζώνης C2 είναι η μεγαλύτερη.

11.7 Μελέτη των επιπέδων περιοδικών τροχιών (απλών και πολλαπλών)-Οικογένειες συμμετρικών τροχιών-Ευστάθεια

11.7.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος

Το πρόβλημα θα έχει λύση αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο παρακάτω συνθήκες:

- Οι τιμές των παραμέτρων n , β και e είναι τέτοιες ώστε η ποσότητα Δ να είναι πάντα θετική.

- Οι αρχικές τιμές των μεταβλητών είναι τέτοιες ώστε η κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν}}$ του μικρού σώματος να είναι: $E_{\text{κιν}} \geq 0$.

11.7.2 Ταξινόμηση των επίπεδων περιοδικών τροχιών

- Οι περιοδικές τροχιές μπορεί να είναι απλές ή πολλαπλά περιοδικές, ορθές (direct), ή ανάδρομες (retrograde).
- Οι απλές περιοδικές διακρίνονται σε τροχιές πλανητικού τύπου, (planetary-type orbits), τροχιές δορυφορικού τύπου (satellite-type orbits), τροχιές διαπλανητικού τύπου (interplanetary orbits) και τροχιές που διαγράφονται γύρω από ένα σημείο ισοροπίας (orbits around an equilibrium point).
- Οι n-πολλαπλές περιοδικές τροχιές αποτελούνται από n βασικούς βρόχους που είτε είναι εγκλωβισμένοι ο ένας μέσα στον άλλο, είτε επικαλύπτονται μερικά.
- Οι περιοδικές τροχιές διακρίνονται επίσης σε απλές συμμετρικές (ως προς τον άξονα x), διπλά συμμετρικές (συνήθως ως προς τους άξονες x, y) ή πολλαπλά συμμετρικές (ως προς τον άξονα x και ως προς άλλους άξονες συμμετρίας που συμπίπτουν με άξονες συμμετρίας του σχηματισμού, π.χ στα δέντρα). Μερικοί συγγραφείς θεωρούν ως μη συμμετρικές τις τροχιές οι οποίες δεν είναι μεν συμμετρικές ως προς τον θεωρούμενο άξονα (Ox), αλλά είναι συμμετρικές ως προς τον άλλο άξονα (Oy).

11.7.3 Γενικά συμπεράσματα από τη μελέτη των τροχιών

- Τα διαγράμματα x_0 -C της κατανομής των χαρακτηριστικών καμπύλων των συμμετρικών περιοδικών τροχιών περιττής πολλαπλότητας (απλές, τριπλές, κ.ο.κ.) που λαμβάνονται αν θεωρήσουμε ότι $\dot{y}_0 < 0$, συμπίπτουν ακριβώς με τα διαγράμματα $x_{T/2}$ -C των οικογενειών που λαμβάνονται θεωρώντας $\dot{y}_0 > 0$. Αυτό δεν συμβαίνει στις τροχιές άρτιας πολλαπλότητας.
- Η μεταβολή των παραμέτρων β και ϵ , έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της κατανομής των οικογενειών, καθώς κάποιες από αυτές παύουν να υπάρχουν, κάποιες μεταβάλουν την εξέλιξή τους και κάποιες άλλες γεννώνται. Όταν δεν

εμφανίζεται μία ζώνη ισορροπίας, τότε παύουν να υπάρχουν και οι χαρακτηριστικές των οικογενειών που εκπορεύονται από τα αντίστοιχα ακρότατα του διαγράμματος x_0-C .

- Όσον αφορά στη μεταβολή με την παράμετρο β των χαρακτηριστικών καμπύλων και των τροχιών, τα συμπεράσματα μπορούν να επεκταθούν μέχρι την τιμή $\beta=100$ λαμβάνοντας βέβαια υπόψιν ότι όσο αυξάνει η β , οι μεταβολές που παρατηρούνται ελαττώνονται, έτσι ώστε στο διάστημα τιμών $100 < \beta < 500$ να είναι εξαιρετικά μικρές, και να τείνουν να μηδενισθούν όταν $\beta > 500$. Η παρατήρηση αυτή αφορά τόσο στη βαρυτική όσο και στην περίπτωση Manev με $e > 0$ ή $e < 0$.
- Για τις οικογένειες απλών αλλά και πολλαπλών περιοδικών τροχιών οι οποίες εκπορεύονται από ασταθή σημεία ισορροπίας, παρατηρήσαμε ότι στις μεν απλές, οι τροχιές διαγράφονται γύρω από τα σημεία αυτά, στις δε πολλαπλές αυτό συμβαίνει με τον μικρότερο βρόχο από τον οποίο αποτελούνται (π.χ. οικογένειες S73, D67, T50).
- Η ανάλυση της ευστάθειας έδειξε ότι η κατάσταση της ευστάθειας (ή αστάθειας) των τροχιών που εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση ($e=0$ ή $>0 < 0$), δεν επηρεάζεται από τη μεταβολή των παραμέτρων ν , β και e του προβλήματος.

11.7.4 Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στη Νευτώνεια βαρυτική περίπτωση

- Οι παραμετρικές μεταβολές που παρατηρούνται για μία τιμή του ν , οφείλονται αποκλειστικά στη μεταβολή της παραμέτρου μάζας β . Ειδικότερα (Psarros & Kalnouridis, 2005), όταν η παράμετρος αυτή αυξάνει:
- Οι χαρακτηριστικές καμπύλες των οικογενειών μετακινούνται προς το νοητό κύκλο πάνω στον οποίο είναι κατανεμημένα τα περιφερειακά primaries.
- Οι χαρακτηριστικές καμπύλες συσσωρεύονται προς τη νοητή αυτή καμπύλη, με αποτέλεσμα οι μεταξύ τους αποστάσεις να ελαττώνονται.

- Οι καμπύλες των χαρακτηριστικών παρουσιάζουν μία κάμψη που είναι μεγαλύτερη σε αυτές που βρίσκονται εγγύτερα του κεντρικού primary.
- Οι περίοδοι των τροχιών που χαρακτηρίζονται από την ίδια σταθερά του Jacobi αυξάνουν ενώ οι απόλυτες τιμές των ταχυτήτων κατά την ημιπερίοδο $t = T / 2$ ελαττώνονται.
- Το τμήμα των τροχιών που διαγράφεται εκτός του κύκλου των περιφερειακών primaries συρρικνώνεται, ενώ το τμήμα που διαγράφεται μέσα στον δακτύλιο των περιφερειακών διευρύνεται, με αποτέλεσμα οι απλές περιοδικές να τείνουν να καταστούν σχεδόν κυκλικές. Παρόμοια τάση παρατηρείται και στους δύο (αντίστοιχα τρεις) βρόχους των διπλών (αντίστοιχα τριπλών) περιοδικών τροχιών.

11.7.5 Επίπεδες συμμετρικές περιοδικές κινήσεις στην περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e > 0$

- Η περίπτωση με $e > 0$ παρουσιάζει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με τη βαρυτική και δεν διαφοροποιούνται σημαντικά τα όσα συμπεράσματα έχουν εξαχθεί.

11.7.6 Επίπεδες συμμετρικές περιοδικές κινήσεις στην περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e < 0$

Γενικός κανόνας που αφορά στις παραμετρικές μεταβολές του προβλήματος

Κατά την παραμετρική μεταβολή των διαφόρων μεγεθών του δυναμικού προβλήματος διαπιστώσαμε ότι διατηρώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου μάζας β και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της e , τα λαμβανόμενα αποτελέσματα ήταν παρόμοια με αυτά της περίπτωσης εκείνης όπου διατηρώντας σταθερή την τιμή της e , μειώναμε την τιμή της σταθεράς β . Όμοια δυναμική συμπεριφορά

προέκυψε επίσης όταν διατηρώντας σταθερή την τιμή της e , αυξάναμε την τιμή της σταθεράς β , με αυτήν κατά την οποία για σταθερή τιμή της παραμέτρου β , μειώναμε την απόλυτη τιμή της e .

11.7.7 Επίπεδες συμμετρικές κινήσεις στην περιοχή αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας», στην περίπτωση όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Manev με $e < 0$

Όταν στα ακρότατα των μηδενικών καμπύλων της περιοχής αναδίπλωσης της κεντρικής «καμινάδας» του διαγράμματος x_0 - C , εμφανίζονται τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 (για $x_0 < 0$) και E_1 (για $x_0 > 0$), κάτω από αυτά αναπτύσσονται δενδροειδείς κατανομές οικογενειών, τα βασικά χαρακτηριστικά των οποίων αναφέρουμε παρακάτω:

- Για διάφορες τιμές των παραμέτρων β , e και για $v=7$, παρατηρήσαμε ότι οι κύριες οικογένειες των απλών συμμετρικών τροχιών που αποτελούν τον κεντρικό κορμό της κατανομής, εξελίσσονται με τρόπο που εξαρτάται από τις τιμές του ζεύγους των παραμέτρων (e, β) . Έτσι για κάποια ζεύγη τιμών (e, β) οι κύριες οικογένειες δενδροειδούς κατανομής κάτω από τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 και E_1 αντίστοιχα, εξελίσσονται με συνεχή και ενιαίο τρόπο, ενώ για κάποια άλλα ζεύγη τιμών, οι κύριες οικογένειες διασπώνται σε δύο κλάδους (άνω και κάτω κλάδος).
- Όταν η παράμετρος μάζας β αυξάνεται, η απόλυτη τιμή της παραμέτρου e στην οποία διαχωρίζονται οι κύριες οικογένειες σε δύο κλάδους, αυξάνεται επίσης, ενώ η τιμή της σταθεράς C του σημείου διάσπασης μειώνεται.
- Οι δενδροειδείς κατανομές για οικογένειες διαφορετικής πολλαπλότητας από της απλής, δεν εμφανίζουν κεντρικό κορμό αλλά πηγάζουν όλες από τον κεντρικό κορμό της δενδροειδούς κατανομής των απλών περιοδικών τροχιών.

- Όλες οι οικογένειες αυτής της κατανομής, απλής ή πολλαπλής περιοδικότητας, που πηγάζουν από τις κύριες οικογένειες της κατανομής, εμφανίζουν ακρότατο, το οποίο είναι και το σημείο από το οποίο πηγάζουν.
- Για $x_0 < 0$ από τα μέλη της δενδροειδούς κατανομής οικογενειών προκύπτουν ανάδρομες τροχιές πλανητικού τύπου, γύρω από το κεντρικό primary P_0 , ενώ για $x_0 > 0$ προκύπτουν ορθές τροχιές πλανητικού τύπου γύρω από το κεντρικό primary P_0 επίσης.
- Για τις μικρότερες τιμές της σταθεράς C για κάθε οικογένεια που πηγάζει από τις κύριες οικογένειες της κατανομής, οι τροχιές τους έχουν τη μορφή «ροζέτας», με διαφορετικό αριθμό πετάλων για κάθε διαφορετική οικογένεια. Όσο υψηλότερες είναι οι τιμές της σταθεράς C των σημείων από τα οποία πηγάζουν οι περιοδικές τροχιές (bifurcating points), τόσο αυξάνει και ο αριθμός των πετάλων της αντίστοιχης «ροζέτας». Το πλήθος των πετάλων ή γενικότερα των κορυφών που παρουσιάζονται στις τροχιές των οικογενειών που διακλαδίζονται με τις κύριες οικογένειες αυτών των κατανομών, δεν σχετίζεται με το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων.
- Για τις απλές συμμετρικές περιοδικές τροχιές παρατηρήσαμε ότι από δύο διαδοχικές οικογένειες προκύπτουν τροχιές που διαφέρουν κατά ένα βρόχο. Για διαφορετικής πολλαπλότητας τροχιές δεν μπορούμε να εξάγουμε το ίδιο συμπέρασμα.
- Διατηρώντας σταθερή την παράμετρο μάζας β και αυξάνοντας την απόλυτη τιμή της παραμέτρου $Manev \epsilon$, παρατηρούμε ότι οι περίοδοι των οικογενειών των δενδροειδών κατανομών αυξάνονται και μάλιστα όσο οι οικογένειες πλησιάζουν προς τα σημεία ισορροπίας των ζωνών E_2 και E_1 , τόσο είναι μεγαλύτερη η αύξηση που παρατηρείται. Το αντίθετο συμβαίνει, ακολουθώντας τον γενικό κανόνα της παραμετρικής μεταβολής του προβλήματος.
- Για τιμές της σταθεράς C στην περιοχή του ακρότατου της χαρακτηριστικής των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής και κατ'επέκταση και κοντά στο κύριο

κορμό της, οι περιττής πολλαπλότητας ισοενεργειακές συμμετρικές τροχιές εμφανίζουν συμμετρία και ως προς τον άξονα y , η οποία όμως καταστρέφεται καθώς το C ελαττώνεται και τα πέταλα έχουν εξομαλυνθεί. Για τις άρτιας πολλαπλότητας ισοενεργειακές τροχιές, παρατηρήσαμε ότι λαμβάνει χώρα η ταύτισή τους.

- Μελετώντας την ευστάθεια των οικογενειών της δενδροειδούς κατανομής που πηγάζουν από τις δύο κύριες οικογένειες των απλών συμμετρικών τροχιών και για τις περιπτώσεις των απλών, διπλών και τριπλών τροχιών που εξετάσαμε, παρατηρούμε εν γένει την ίδια συμπεριφορά. Κύριο χαρακτηριστικό της ευστάθειας τους, είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, αριστερά του ακρότατου που παρουσιάζουν οι χαρακτηριστικές, οι τροχιές που προκύπτουν είναι ασταθείς, ενώ δεξιά αυτού ευσταθείς. Επίσης άλλη μία ομοιότητα είναι ότι οι ασταθείς τροχιές χαρακτηρίζονται από μικρές τιμές του συντελεστή ευστάθειας α .

11.8 Προοπτικές για περαιτέρω έρευνα

11.8.1 Προοπτικές για το ίδιο μοντέλο

- Μελέτη των κατακόρυφα κρίσιμων σημείων των επίπεδων συμμετρικών περιοδικών τροχιών, από τα οποία εκπορεύονται οικογένειες τρισδιάστατων περιοδικών τροχιών(critical vertical orbits).
- Μελέτη των μη συμμετρικών ως προς τον άξονα x επίπεδων περιοδικών τροχιών.
- Regularization.
- Παραμετρική μεταβολή των πολλαπλά περιοδικών τροχιών.

11.8.2 Επεκτάσεις-γενικεύσεις του μοντέλου

- Θεώρηση ότι τα περιφερειακά primaries και το κεντρικό σώμα δημιουργούν δυναμικά τύπου Manev με διαφορετικές τιμές των παραμέτρων αλλά με διατήρηση της συμμετρίας του δημιουργούμενου πεδίου ως προς τον x-άξονα.
- Θεώρηση ότι το μικρό σώμα είναι τρισδιάστατο στερεό ή γυροστάτης.
- Εφαρμογή όλων των παραπάνω σε μοντέλα με άλλες μορφές Μετα-Νευτώνειων δυναμικών (Schwartzschild, Elipe-Arribas-Kalvouridis-Palacios, e.t.c).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

A.1 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ MATHEMATICA

A.1.1 Πρόγραμμα "Programm Fz", για το διάγραμμα z-Fz

```
"Programm Fz"  
n = 7;  
ppi = N[Pi, 15];  
bet = 5.  
eps = -0.1  
y = 0;  
x = 0;  
phi = ppi/n;  
psi = 2.*phi;  
s = (iota - 1.)*phi;  
lamda = Sin[phi]^2./Sin[s];  
Slamda = NSum[lamda, {iota, 2, n}];  
mi = 2.*Sin[phi];  
u[k_] := (1/mi)*Cos[(k - 1)*psi];  
v[k_] := (1/mi)*Sin[(k - 1)*psi];  
dist[k_] := Sqrt[((x - u[k])^2) + (y - v[k])^2 + (z^2)];  
r = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2];  
R = Sum[1./dist[k], {k, 1, n}];  
L = (bet/r^2)*(1./r + 2*eps/(r^2));  
F = R + L;  
Plot[F, {z, -5, 5}, PlotRange -> {-10, 110},  
Ticks -> {{-5, 0, 5}, {80}}, ImageSize -> 350,  
PlotStyle -> {Thickness[0.0035], Blue}, AxesLabel -> {"z", "Fz"},  
LabelStyle -> Directive[Bold, Black, 16],  
PerformanceGoal -> "Quality"]
```

A.2 ΘΕΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ PRIMARIES ΓΙΑ $\nu=7$ ΚΑΙ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ β ΚΑΙ e

- ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ xy
- ΤΙΜΗ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ C ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΘΕΣΗΣ rad
- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΘΕΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

A.2.1 ΘΕΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ e

$\beta=2$ και διάφορες θετικές τιμές του e							
$\beta=2$	$e= 0.0001$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.580801166	0.000000000	6.98027155	1.580801166	Unstable
			-0.985613482	± 1.235920058			Unstable
			0.351761295	± 1.541167193			Unstable
			1.424252629	± 0.685883937			Unstable
		B	-1.014778502	0.000000000	7.37666808	1.014743365	Unstable
			-0.632682189	± 0.793358269			Unstable
			0.225801605	± 0.989301639			Unstable
			0.914252176	± 0.440280656			Unstable
		A₂	-0.733963843	0.000000000	7.27903772	0.734114616	Unstable
			-0.457713011	± 0.573953891			Unstable
			0.163355844	± 0.715708836			Unstable
			0.661414411	± 0.318520402			Unstable
		A₁	0.649275241	0.000000000	7.39167351	0.649359365	Unstable
			0.404868881	± 0.507689643			Unstable
			-0.144496143	± 0.633078549			Unstable
			-0.585052617	± 0.281746371			Unstable
		C₁	1.743513169	0.000000000	7.22294432	1.743468029	Unstable
			1.087035015	± 1.363098963			Unstable
			-0.387958479	± 1.699756585			Unstable
			-1.570811125	± 0.756462645			Unstable
$\beta=2$	$e= 0.209$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.51601295	0.000000000	6.42547682	1.51601295	Unstable
			-0.945218687	± 1.185266593			Unstable
			0.337344563	± 1.478003353			Unstable
			1.365880463	± 0.657773384			Unstable
		A₁	0.710261225	0.000000000	6.93905229	0.710261225	Unstable
			0.442840586	± 0.555304622			Unstable
			-0.158048064	± 0.692453477			Unstable
			-0.639923292	± 0.308170713			Unstable
		C₁	1.701929602	0.000000000	6.69489764	1.701929602	Unstable
			1.061135678	± 1.330622201			Unstable
			-0.378715096	± 1.659258644			Unstable
			-1.533385664	± 0.738439419			Unstable

A.2.2 ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ e

$\beta=2$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e							
$\beta=2$	$e=-0.0001$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.580869609	0.000000000	6.98088046	1.580869609	Unstable
			-0.985656156	± 1.235973569			Unstable
			0.351776525	± 1.541233921			Unstable
			1.424314294	± 0.685913634			Unstable
		B	-1.014778502	0.000000000	7.3774155	1.014778502	Unstable
			-0.632704096	± 0.793385742			Unstable
			0.225809424	± 0.989335895			Unstable
			0.914283833	± 0.440295902			Unstable
		A₂	-0.733963843	0.000000000	7.2795969	0.733963843	Unstable
			-0.457619006	± 0.573836012			Unstable
			0.163322294	± 0.715561843			Unstable
			0.661278569	± 0.318454984			Unstable
		E₂	-0.000199999	0.000000000	3559.61239	0.00020000	Unstable
			-0.000126275	± 0.000155096			Unstable
			0.000042528	± 0.000195426			Unstable
			0.000179306	± 0.000088597			Unstable
		E₁	0.000199991	0.000000000	3559.61239	0.00020000	Unstable
			0.000123209	± 0.000157542			Unstable
			-0.000046352	± 0.000194555			Unstable
			-0.000181009	± 0.000085064			Unstable
		A₁	0.649275241	0.000000000	7.39212303	0.649275241	Unstable
			0.404816431	± 0.507623872			Unstable
			-0.144477424	± 0.632996534			Unstable
			-0.584976826	± 0.281710083			Unstable
		C₁	1.743513169	0.000000000	7.22352542	1.743513169	Unstable
			1.087062599	± 1.363133551			Unstable
			-0.387968323	± 1.699799621			Unstable
			-1.570851169	± 0.756482225			Unstable
$\beta=2$	$e=-0.05$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.598393844	0.000000000	7.13836310	1.598393844	Unstable
			-0.996582338	± 1.249674567			Unstable
			0.355676034	± 1.558318786			Unstable
			1.440103084	± 0.693517114			Unstable
		B	-1.022838246	0.000000000	7.57197553	1.022838246	Unstable
			-0.637729265	± 0.799687103			Unstable
			0.227602885	± 0.997193564			Unstable
			0.921545411	± 0.443792894			Unstable
		A₂	-0.69368939	0.000000000	7.41838529	0.69368939	Unstable
			-0.432508293	± 0.542348178			Unstable
			0.154360387	± 0.676297154			Unstable
			0.624992541	± 0.300980553			Unstable
		E₂	-0.100252791	0.000000000	11.9275863	0.100252849	Unstable
			-0.062422067	± 0.078448194			Unstable
			0.022413748	± 0.097715186			Unstable
			0.090371553	± 0.043400646			Unstable

		E₁	0.100252688	0.000000000	11.9275865	0.100252856	Unstable
			0.062363018	± 0.078495153			Unstable
			-0.022487279	± 0.097698298			Unstable
			-0.090404195	± 0.043332628			Unstable
		A₁	0.625257516	0.000000000	7.50317263	0.625257516	Unstable
			0.389841615	± 0.488846066			Unstable
			-0.139132988	± 0.609580981			Unstable
			-0.563337608	± 0.271288961			Unstable
		C₁	1.755158322	0.000000000	7.37392456	1.755158322	Unstable
			1.09432323	± 1.372237829			Unstable
			-0.390559617	± 1.711152805			Unstable
			-1.581343091	± 0.761534479			Unstable
β=2	e=-0.1	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.616909384	0.000000000	7.30814378	1.616909384	Unstable
			-1.008126589	± 1.264150599			Unstable
			0.359796129	± 1.576370103			Unstable
			1.456785009	± 0.701550706			Unstable
		B	-1.029768436	0.000000000	7.78441699	1.029768436	Unstable
			-0.642050168	± 0.805105343			Unstable
			0.229144997	± 1.003950000			Unstable
			0.927789296	± 0.446799791			Unstable
		A₂	-0.644152666	0.000000000	7.5515075	0.644152666	Unstable
			-0.401622647	± 0.503618811			Unstable
			0.143337433	± 0.628002418			Unstable
			0.580361496	± 0.279487372			Unstable
		E₂	-0.204316971	0.000000000	8.64206789	0.20431697	Unstable
			-0.127387668	± 0.159742938			Unstable
			0.045467151	± 0.199193781			Unstable
			0.184084276	± 0.088647637			Unstable
		E₁	0.204321537	0.000000000	8.64208994	0.204321537	Unstable
			0.12738687	± 0.159749416			Unstable
			-0.045472713	± 0.199197196			Unstable
			-0.184090414	± 0.088645417			Unstable
		A₁	0.59168225	0.000000000	7.60762989	0.59168225	Unstable
			0.368907765	± 0.462595877			Unstable
			-0.131661805	± 0.576847514			Unstable
			-0.533087346	± 0.256721184			Unstable
		C₁	1.767650498	0.000000000	7.5363172	1.767650498	Unstable
			1.102111971	± 1.382004879			Unstable
			-0.393339392	± 1.723331775			Unstable
			-1.592598155	± 0.766954627			Unstable
β=2	e=-0.17	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.644640229	0.000000000	7.56886094	1.644640229	Unstable
			-1.025416489	± 1.285831445			Unstable
			0.365966821	± 1.603405678			Unstable
			1.481769637	± 0.713582669			Unstable
		B	-1.038061644	0.000000000	8.11576706	1.038061644	Unstable
			-0.647220899	± 0.811589234			Unstable
			0.230990409	± 1.012035283			Unstable

			0.935261219	± 0.450398079			Unstable
		A₂	-0.503832026	0.000000000	7.68776734	0.503832026	Unstable
			-0.314134144	± 0.393911728			Unstable
			0.112113167	± 0.491199906			Unstable
			0.453936973	± 0.218604517			Unstable
		E₂	-0.412552119	0.000000000	7.69494645	0.412552119	Unstable
			-0.257222024	± 0.322546247			Unstable
			0.091801512	± 0.402208569			Unstable
			0.371696633	± 0.178999701			Unstable
		E₁	0.426361871	0.000000000	7.69867232	0.426361871	Unstable
			0.265832073	± 0.333343297			Unstable
			-0.094874708	± 0.415672028			Unstable
			-0.384138895	± 0.184991227			Unstable
		A₁	0.460491471	0.000000000	7.69816709	0.460491471	Unstable
			0.28711153	± 0.360026894			Unstable
			-0.10246926	± 0.448945927			Unstable
			-0.414888604	± 0.199799503			Unstable
		C₁	1.786717904	0.000000000	7.78618064	1.786717904	Unstable
			1.114000299	± 1.396912382			Unstable
			-0.397582296	± 1.741921119			Unstable
			-1.609777297	± 0.775227658			Unstable
$\beta=2$	e=-0.171	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.645673228	0.000000000	7.57872045	1.645673228	Unstable
			-1.026060554	± 1.286639077			Unstable
			0.366196685	± 1.604412778			Unstable
			1.482700337	± 0.714030874			Unstable
		B	-1.038332971	0.000000000	8.12841535	1.038332971	Unstable
			-0.647390068	± 0.811801366			Unstable
			0.231050785	± 1.012299804			Unstable
			0.935505676	± 0.450515803			Unstable
		A₂	-0.483739005	0.000000000	7.68832482	0.483739005	Unstable
			-0.301606346	± 0.378202375			Unstable
			0.107642054	± 0.471610658			Unstable
			0.435833789	± 0.209886478			Unstable
		E₂	-0.43491115	0.000000000	7.68941617	0.43491115	Unstable
			-0.271162662	± 0.340027233			Unstable
			0.096776852	± 0.424007016			Unstable
			0.391841418	± 0.188700851			Unstable
		C₁	1.787436386	0.000000000	7.79564115	1.787436386	Unstable
			1.114448266	± 1.397474113			Unstable
			-0.397742172	± 1.742621588			Unstable
			-1.610424627	± 0.775539396			Unstable
$\beta=2$	e=-0.17375	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.646190891	0.000000000	7.58366526	1.646190891	Unstable
			-1.026383311	± 1.287043802			Unstable
			0.366311876	± 1.604917462			Unstable
			1.483166735	± 0.714255476			Unstable
		B	-1.038468059	0.000000000	8.13476199	1.038468059	Unstable
			-0.647474295	± 0.811906981			Unstable
			0.231080844	± 1.012431505			Unstable

			0.935627386	± 0.450574416			Unstable
		C₁	1.787796653	0.000000000	7.80038616	1.787796653	Unstable
			1.114672888	± 1.397755782			Unstable
			-0.39782234	± 1.742972822			Unstable
			-1.610749217	± 0.775695709			Unstable

$\beta=5$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e							
$\beta=5$	$e = -0.0001$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.400310773	0.000000000	5.86557318	1.400310773	Unstable
			-0.873079554	± 1.094806993			Unstable
			0.31159841	± 1.365202070			Unstable
			1.261636404	± 0.607572089			Unstable
		E₂	-0.000200000	0.000000000	5240.66249	0.0002	Unstable
			-0.000124698	± 0.000156366			Unstable
			0.000044504	± 0.000194986			Unstable
			0.000180194	± 0.000086777			Unstable
		E₁	0.000200000	0.000000000	5240.66249	0.0002	Unstable
			0.000124698	± 0.000156366			Unstable
			-0.000044504	± 0.000194986			Unstable
			-0.000180194	± 0.000086777			Unstable
		A1	0.756279575	0.000000000	6.33337905	0.756279575	Unstable
			0.471532566	± 0.591283211			Unstable
			-0.168288101	± 0.737318052			Unstable
			-0.681384389	± 0.328137334			Unstable
		C1	1.629052255	0.000000000	6.16398474	1.629052255	Unstable
			1.015697409	± 1.273644386			Unstable
			-0.362498342	± 1.588208488			Unstable
			-1.467725434	± 0.706819143			Unstable
$\beta=5$	$e = -0.1$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.450683514	0.000000000	6.2650687	1.450683514	Unstable
			-0.904486447	± 1.134189986			Unstable
			0.322807398	± 1.414311861			Unstable
			1.307020676	± 0.629428003			Unstable
		E₂	-0.202197281	0.000000000	8.89462771	0.202197281	Unstable
			-0.126065978	± 0.158085767			Unstable
			0.044995583	± 0.197127213			Unstable
			0.18217455	± 0.087727839			Unstable
		E₁	0.20219887	0.000000000	8.89464031	0.202198871	Unstable
			0.126063149	± 0.158090055			Unstable
			-0.045000699	± 0.197127675			Unstable
			-0.182178101	± 0.087724127			Unstable
		A₁	0.714331915	0.000000000	6.67573526	0.714331915	Unstable
			0.44537862	± 0.558487215			Unstable
			-0.158953877	± 0.696422106			Unstable
			-0.643590856	± 0.309937101			Unstable
		C₁	1.658028516	0.000000000	6.54255709	1.658028516	Unstable
			1.033758058	± 1.296303528			Unstable

			-0.368953342	± 1.616456616			Unstable
			-1.493835337	± 0.719384839			Unstable
$\beta=5$	$e = -0.145$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.476458280	0.000000000	6.47818451	1.47645828	Unstable
			-0.920556752	± 1.154341509			Unstable
			0.328542823	± 1.439440400			Unstable
			1.330242938	± 0.640611255			Unstable
		B	-0.921564425	0.000000000	6.69581915	0.921564425	Unstable
			-0.574586065	± 0.720508045			Unstable
			0.205067343	± 0.898458888			Unstable
			0.830300852	± 0.399851828			Unstable
		A₂	-0.883277274	0.000000000	6.69564674	0.883277274	Unstable
			-0.550714416	± 0.690573946			Unstable
			0.196547652	± 0.861131676			Unstable
			0.795805321	± 0.383239656			Unstable
		E₂	-0.300445094	0.000000000	7.57776129	0.300445094	Unstable
			-0.187324247	± 0.234897597			Unstable
			0.066855586	± 0.292912248			Unstable
			0.270691797	± 0.130357991			Unstable
		E₁	0.300509188	0.000000000	7.57797952	0.300509188	Unstable
			0.187363340	± 0.234948400			Unstable
			-0.066870932	± 0.292974488			Unstable
			-0.270750025	± 0.130384799			Unstable
		A₁	0.683886977	0.000000000	6.84274643	0.683886977	Unstable
			0.426396505	± 0.534684410			Unstable
			-0.152179249	± 0.666740484			Unstable
			-0.616160919	± 0.296727349			Unstable
		C₁	1.673227853	0.000000000	6.74488039	1.673278526	Unstable
			1.043240436	± 1.308182265			Unstable
			-0.372328348	± 1.631276509			Unstable
			-1.507526277	± 0.725986205			Unstable
$\beta=5$	$e = -0.2$	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.511044616	0.000000000	6.77443428	1.511044616	Unstable
			-0.942120981	± 1.181382194			Unstable
			0.336239005	± 1.473159585			Unstable
			1.361404149	± 0.655617704			Unstable
		B	-0.993413701	0.000000000	7.02788625	0.993413701	Unstable
			-0.61938336	± 0.776682068			Unstable
			0.221055308	± 0.968506754			Unstable
			0.895034812	± 0.431026062			Unstable
		A₂	-0.719906076	0.000000000	6.97466639	0.719906076	Unstable
			-0.44885413	± 0.562845208			Unstable
			0.160194148	± 0.701856533			Unstable
			0.648612959	± 0.312355546			Unstable
		E₂	-0.452484367	0.000000000	7.07067301	0.452484367	Unstable
			-0.28211939	± 0.353766522			Unstable
			0.100687252	± 0.441139637			Unstable
			0.407674337	± 0.196325591			Unstable

		E₁	0.457419039	0.000000000	7.07519227	0.457419039	Unstable
			0.285195895	± 0.357624773			Unstable
			-0.101785586	± 0.445950526			Unstable
			-0.412120441	± 0.198466957			Unstable
		A₁	0.607876902	0.000000000	7.03713502	0.607876902	Unstable
			0.379004973	± 0.475257192			Unstable
			-0.135265446	± 0.592636134			Unstable
			-0.54767822	± 0.263747788			Unstable
		C₁	1.69428827	0.000000000	7.02668011	1.69428827	Unstable
			1.056371387	± 1.324647966			Unstable
			-0.377014738	± 1.651808896			Unstable
			-1.52650106	± 0.735123972			Unstable
β=5	e = -0.2105	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.521139685	0.000000000	6.86318879	1.521139685	Unstable
			-0.948415154	± 1.189274836			Unstable
			0.338485369	± 1.483001551			Unstable
			1.370499492	± 0.659997792			Unstable
		B	-1.002063995	0.000000000	7.12985871	1.002063995	Unstable
			-0.62477673	± 0.783445139			Unstable
			0.22298018	± 0.976940167			Unstable
			0.902828458	± 0.434779284			Unstable
		A₂	-0.656238607	0.000000000	7.04166163	0.656238607	Unstable
			-0.409158109	± 0.513067979			Unstable
			0.146026806	± 0.639785341			Unstable
			0.591250552	± 0.284731266			Unstable
		E₂	-0.523222338	0.000000000	7.05349952	0.523222338	Unstable
			-0.326223809	± 0.409071683			Unstable
			0.116427915	± 0.510104064			Unstable
			0.471407039	± 0.227017661			Unstable
		C₁	1.70054566	0.000000000	7.11124033	1.70054566	Unstable
			1.060272805	± 1.329540191			Unstable
			-0.378407139	± 1.657909488			Unstable
			-1.532138775	± 0.737838951			Unstable
β=5	e = -0.222	zone	x	y	C	rad	Stability
		C₂	-1.528042256	0.000000000	6.9244758	1.528042256	Unstable
			-0.952718838	± 1.194671483			Unstable
			0.340021335	± 1.489731059			Unstable
			1.376718493	± 0.662992704			Unstable
		B	-1.007108156	0.000000000	7.20076202	1.007108156	Unstable
			-0.627921714	± 0.787388823			Unstable
			0.224102611	± 0.981857861			Unstable
			0.90737309	± 0.436967864			Unstable
		C₁	1.704857568	0.000000000	7.16966853	1.704857568	Unstable
			1.062961235	± 1.332911378			Unstable
			-0.37936663	± 1.662113199			Unstable
			-1.53602367	± 0.739709816			Unstable

A.3 "ΕΚΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ" ΘΕΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ $L_{\pm z}$ ΓΙΑ $v=7$ ΚΑΙ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ β ΚΑΙ e ($e < 0$)

- ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ "ΕΚΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ"
- ΤΙΜΗ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ C ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΘΕΣΗΣ rad
- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΘΕΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

$\beta=2$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e						
	x	y	z	C	rad	Stability
e = -0.0001	0.0	0.0	± 0.000200000	3559.61239	0.000200000	Unstable
e = -0.01	0.0	0.0	± 0.019999634	40.1927854	0.019999634	Unstable
e = -0.05	0.0	0.0	± 0.099775862	11.9021752	0.099775862	Unstable
e = -0.1	0.0	0.0	± 0.196719389	8.53511098	0.196719389	Unstable
e = -0.17	0.0	0.0	± 0.318839935	7.33807281	0.318839935	Unstable
$\beta=5$ και διάφορες αρνητικές τιμές του e						
	x	y	z	C	rad	Stability
e = -0.0001	0.0	0.0	± 0.000200000	5240.66249	0.000200000	Unstable
e = -0.01	0.0	0.0	± 0.019999854	55.5803849	0.019999854	Unstable
e = -0.05	0.0	0.0	± 0.099909865	13.8422084	0.099909865	Unstable
e = -0.1	0.0	0.0	± 0.198636971	8.82903117	0.198636971	Unstable
e = -0.145	0.0	0.0	± 0.293798288	7.33421112	0.293798288	Unstable
e=-0.2	0.0	0.0	± 0.383153050	6.74278899	0.383153050	Unstable
$e = -0.05$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β						
	x	y	z	C	rad	Stability
$\beta=0.0$	0.0	0.0	± 0.000000002	8.06667617	0.000000040	Unstable
$\beta=0.05$	0.0	0.0	± 0.093172709	8.21671865	0.093172709	Unstable
$\beta=0.5$	0.0	0.0	± 0.099126438	9.48862338	0.099126438	Unstable
$\beta=1.0$	0.0	0.0	± 0.099555647	10.5214358	0.099555647	Unstable
$\beta=1.5$	0.0	0.0	± 0.099702028	11.2975895	0.099702028	Unstable
$\beta=2.0$	0.0	0.0	± 0.099775862	11.9021752	0.099775862	Unstable
$\beta=2.5$	0.0	0.0	± 0.099820371	12.3864174	0.099820371	Unstable
$\beta=3.0$	0.0	0.0	± 0.099850132	12.7829952	0.099850132	Unstable
$\beta=3.5$	0.0	0.0	± 0.099871433	13.1137378	0.099871433	Unstable
$\beta=4.0$	0.0	0.0	± 0.099887432	13.3937825	0.099887432	Unstable

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Β.1 Πρόγραμμα σχεδιασμού καμπύλων και επιφανειών μηδενικής ταχύτητας

```
ppi=N[Pi,15];
ni=7;
bet=2
epsi=-0.1
phi=ppi/ni;
psi=2.*phi;
s=(iota-1.)*phi;
lamda=Sin[phi]^2./Sin[s];
Slamda=NSum[lamda,{iota,2,ni}];
mi=2.*Sin[phi];
delta=mi*(Slamda+bet*mi^2+2.*bet*epsi*mi^3);
x1=(1./mi)*Cos[0.*psi];
y1=(1./mi)*Sin[0.*psi];
x2=(1./mi)*Cos[1.*psi];
y2=(1./mi)*Sin[1.*psi];
x3=(1./mi)*Cos[2.*psi];
y3=(1./mi)*Sin[2.*psi];
x4=(1./mi)*Cos[3.*psi];
y4=(1./mi)*Sin[3.*psi];
x5=(1./mi)*Cos[4.*psi];
y5=(1./mi)*Sin[4.*psi];
x6=(1./mi)*Cos[5.*psi];
y6=(1./mi)*Sin[5.*psi];
x7=(1./mi)*Cos[6.*psi];
y7=(1./mi)*Sin[6.*psi];
a=x^2+y^2;
b=(x-x1)^2+(y-y1)^2;
c=(x-x2)^2+(y-y2)^2;
d=(x-x3)^2+(y-y3)^2;
e=(x-x4)^2+(y-y4)^2;
f=(x-x5)^2+(y-y5)^2;
g=(x-x6)^2+(y-y6)^2;
h=(x-x7)^2+(y-y7)^2;
r0=Sqrt[a];
r1=Sqrt[b];
r2=Sqrt[c];
```

```

r3=Sqrt[d];
r4=Sqrt[e];
r5=Sqrt[f];
r6=Sqrt[g];
r7=Sqrt[h];
r=1./r1+1./r2+1./r3+1./r4+1./r5+1./r6+1./r7;
omega=2.*((x^2+y^2)/2.+(1./delta)*(bet*(1./r0+epsi/r0^2)+r));
Framed[ContourPlot[omega, {x, -1.85, 1.85}, {y, -1.85, 1.85}, Contours ->
60, PlotPoints -> 50,
Axes -> True, AxesStyle -> {{Thin}, {Thin}},
Frame -> {{True, False}, {True, False}}, AxesLabel -> {x, y},
LabelStyle -> Directive[Black, FontFamily -> "Times", Bold, 16],
ContourShading -> True, ColorFunction -> (ColorData["SolarColors"][#1]
&)]
ParametricPlot3D[{x, y, omega}, {x, -1.9, 1.9}, {y, -1.9, 1.9}, PlotPoints ->
50, Mesh -> False,
AxesLabel -> {"x", "y", "c"},
LabelStyle -> Directive[Black, FontFamily -> "Times", Bold,
16],MaxRecursion ->5,
BoundaryStyle -> Automatic,BoxStyle -> Directive[Dashed,Blue],
ColorFunction -> (ColorData["SolarColors"][#1] &)]

```

B.2 Πρόγραμμα σχεδιασμού περιοχών παγίδευσης στο επίπεδο xy

```

ppi=N[Pi,15];
ni=7;
bet=5.
epsi=0.1
Clear[y]
phi=ppi/ni;
psi=2.*phi;
s=(iota-1.)*phi;
lamda=Sin[phi]^2./Sin[s];
Slamda=NSum[lamda,{iota,2,ni}];
mi=2.*Sin[phi];
delta=mi*(Slamda+bet*mi^2+2.*bet*epsi*mi^3);
x1=(1./mi)*Cos[0.*psi];
y1=(1./mi)*Sin[0.*psi];
x2=(1./mi)*Cos[1.*psi];
y2=(1./mi)*Sin[1.*psi];
x3=(1./mi)*Cos[2.*psi];
y3=(1./mi)*Sin[2.*psi];
x4=(1./mi)*Cos[3.*psi];

```

```

y4=(1./mi)*Sin[3.*psi];
x5=(1./mi)*Cos[4.*psi];
y5=(1./mi)*Sin[4.*psi];
x6=(1./mi)*Cos[5.*psi];
y6=(1./mi)*Sin[5.*psi];
x7=(1./mi)*Cos[6.*psi];
y7=(1./mi)*Sin[6.*psi];
a=x^2+y^2;
b=(x-x1)^2+(y-y1)^2;
c=(x-x2)^2+(y-y2)^2;
d=(x-x3)^2+(y-y3)^2;
e=(x-x4)^2+(y-y4)^2;
f=(x-x5)^2+(y-y5)^2;
g=(x-x6)^2+(y-y6)^2;
h=(x-x7)^2+(y-y7)^2;
r0=Sqrt[a];
r1=Sqrt[b];
r2=Sqrt[c];
r3=Sqrt[d];
r4=Sqrt[e];
r5=Sqrt[f];
r6=Sqrt[g];
r7=Sqrt[h];
r=1./r1+1./r2+1./r3+1./r4+1./r5+1./r6+1./r7;
c=6.4
omega=2.*((x^2+y^2)/2.+(1./delta)*(bet*(1./r0+epsi/r0^2)+r));
L2=ContourPlot[omega, {x, -2.9, 2.9}, {y, -2.9, 2.9}, Contours -> {c},
PlotPoints -> 60,MaxRecursion->2,Axes -> True,AxesStyle ->
{{Thickness[0.001], Dashing[0.0009],
GrayLevel[0.7]}, {Thickness[0.001], Dashing[0.0009], GrayLevel[0.7]}},
AxesLabel -> {Style["x", Large, Bold, Black], Style["y", Large, Bold,
Black]},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, 14],ContourShading -> {{Green},
{White}}];
L4=ContourPlot[{omega == c},{x, -2.9, 2.9}, {y, -2.9, 2.9} ,
PlotPoints -> 50, Axes -> True,AxesLabel -> {Style["x", Large, Bold, Black],
Style["y", Large, Bold, Black]},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, 14],AxesStyle -> {{Thickness[0.001],
Dashing[0.0009],
GrayLevel[0.7]}, {Thickness[0.001], Dashing[0.0009], GrayLevel[0.7]}},
ContourStyle->{Blue,Thickness[0.003]}]
L5=Show[L2,L4]

```


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Γ.1 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ MATHEMATICA ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

Γ.1.1 Πρόγραμμα για τη σχεδίαση των διαγραμμάτων F_{β} - x

```
n = 7
ppi = N[Pi, 15];
bet = 2.0
eps = 0.1
y = 0;
phi = ppi/n;
psi = 2.*phi;
s = (iota - 1.)*phi;
lamda = Sin[phi]^2./Sin[s];
Slamda = NSum[lamda, {iota, 2, n}];
mi = 2.*Sin[phi];
u[k_] := (1/mi)*Cos[(k - 1)*psi];
v[k_] := (1/mi)*Sin[(k - 1)*psi];
dist[k_] := Sqrt[((x - u[k])^2) + (y - v[k])^2];
r = Sqrt[x^2 + y^2];
R = Sum[1./dist[k], {k, 1, n}];
MB = (Slamda + bet*mi^2)/(2*mi^3);
ZB = r + bet/r0 - MB/r^2;
ZB1 = (r^2/(MB - r*bet))*R - 1;
Plot[ZB1, {x, -5.0, 5.0}, Mesh -> False, PlotRange -> {{-2.5, 2.5}, {-20, 20}}]
```

Γ.1.2 Πρόγραμμα για τη σχεδίαση των διαγραμμάτων F_{ϵ} - x

```
n = 7;
ppi = N[Pi, 15];
bet = 2.
eps = 0.0
y = 0.;
phi = ppi/n;
psi = 2.*phi;
s = (iota - 1.)*phi;
lamda = Sin[phi]^2./Sin[s];
Slamda = NSum[lamda, {iota, 2, n}];
mi = 2.*Sin[phi];
u[k_] := (1/mi)*Cos[(k - 1)*psi];
v[k_] := (1/mi)*Sin[(k - 1)*psi];
dist[k_] := Sqrt[((x - u[k])^2) + (y - v[k])^2];
```

```
r = Sqrt[x^2 + y^2];  
R = Sum[1./dist[k], {k, 1, n}];  
ME = (mi^2 (1 + 2*eps*mi))/Slamda;  
Z = ((ME*r^2/(r + eps))*R) - 1;  
Plot[Z, {x, -0.8, 0.8}, Mesh -> False,  
AxesLabel -> {Style["x", Large, Bold, Blue], Style["Fe", Large, Bold, Blue]},  
LabelStyle -> Directive[Blue, Bold, 14], PlotRange -> {-1.5, 1.5}, Ticks -> None]
```


ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Πίνακας Γ1 Συντεταγμένες στο χώρο xyC των εστιακών σημείων για $v=7$, $\beta=2$
και διάφορες τιμές της e

Εστιακά σημεία στο χώρο xyC για $\beta=2$					
y	x	C	y	x	C
0	-0.48648	7.688334			
0	0.486113	7.699278			
0.05	-0.48386	7.689693	-0.05	-0.48386	7.689693
0.05	0.483581	7.697914	-0.05	0.483581	7.697914
0.1	-0.47593	7.693141	-0.1	-0.47593	7.693141
0.1	0.475882	7.694463	-0.1	0.475882	7.694463
0.15	-0.46247	7.697004	-0.15	-0.46247	7.697004
0.15	0.462698	7.690608	-0.15	0.462698	7.690608
0.2	-0.44307	7.699196	-0.2	-0.44307	7.699196
0.2	0.443465	7.688419	-0.2	0.443465	7.688419
0.25	-0.41694	7.698196	-0.25	-0.41694	7.698196
0.25	0.417288	7.689405	-0.25	0.417288	7.689405
0.3	-0.38272	7.694123	-0.3	-0.38272	7.694123
0.3	0.382748	7.693480	-0.3	0.382748	7.693481
0.35	-0.33783	7.689487	-0.35	-0.33783	7.689487
0.35	0.337407	7.698137	-0.35	0.337407	7.698137
0.4	-0.27685	7.688938	-0.4	-0.27685	7.688938
0.4	0.276272	7.698656	-0.4	0.276272	7.698656
0.45	-0.18415	7.696047	-0.45	-0.18415	7.696047
0.45	0.184547	7.691585	-0.45	0.184547	7.691585
0.48	-0.07697	7.698714	-0.48	-0.07697	7.698714
0.48	0.079045	7.688828	-0.48	0.079045	7.688828

Πίνακας Γ2 Συντεταγμένες x , C ($y=0$) των εστιακών σημείων για $v=7$, $e=0.001$,
 0.01 , 0.05 , 0.1 και διάφορες τιμές της παραμέτρου β

	x	C
$e = 0.001$	-0.369739129	8.422695957
	0.369634409	8.424972345
$e = 0.01$	-0.372659153	8.428515012
	0.372550105	8.430923603
$e = 0.05$	-0.383407786	8.450370680
	0.383281531	8.453324688
$e = 0.1$	-0.393331761	8.471159884
	0.393187796	8.474709198

Πίνακας Γ3 Συντεταγμένες x , C ($y=0$) των εστιακών σημείων, για $v=7$, $e = -0.01$, -0.05 , -0.1 , -0.118 , -0.118036 , -0.11804 , -0.11806 και διάφορες τιμές της παραμέτρου β

	x	C
$e=-0.01$	-0.365843500	8.415011233
	-0.010273340	8.066942041
	0.010273340	8.066942043
	0.365744328	8.417121015
$e=-0.05$	-0.347389614	8.379822983
	-0.058141408	8.075197470
	0.058141408	8.075197497
	0.347313375	8.381278108
$e=-0.1$	-0.301451008	8.300832895
	-0.147740224	8.121958000
	0.147740290	8.121961981
	0.301411199	8.301354903
$e=-0.118$	-0.237321689	8.210575664
	-0.229882252	8.201577609
	0.229954874	8.201750864
	0.237225300	8.210565292
$e=-0.118036$	-0.235803359	8.208720994
	-0.231421376	8.203420895
	0.233590087	8.206158078
$e=-0.11804$	-0.234285010	8.206866324
	-0.232960501	8.205264181
$e=-0.11806$	-0.233622755	8.206065253

Πίνακας Γ4 Συντεταγμένες εστιακών σημείων στο χώρο xyC για $v=7$, $e=-0.1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου β

y	x	C	y	x	C
0	-0.30145	8.300833			
0	-0.14774	8.121958			
0	0.14774	8.121962			
0	0.301411	8.301355			
0.02	-0.30078	8.300861	-0.02	-0.30078	8.300861
0.02	-0.14638	8.121959	-0.02	-0.14638	8.121959
0.02	0.14638	8.121961	-0.02	0.14638	8.121961
0.02	0.300749	8.301327	-0.02	0.300749	8.301327
0.04	-0.29878	8.300938	-0.04	-0.29878	8.300938

0.04	-0.14222	8.121961	-0.04	-0.14222	8.121961
0.04	0.142222	8.121959	-0.04	0.142222	8.121959
0.04	0.298753	8.30125	-0.04	0.298753	8.30125
0.06	-0.2954	8.30105	-0.06	-0.2954	8.30105
0.06	-0.13501	8.121962	-0.06	-0.13501	8.121962
0.06	0.135008	8.121958	-0.06	0.135008	8.121958
0.06	0.295396	8.301138	-0.06	0.295396	8.301138
0.08	-0.29061	8.301173	-0.08	-0.29061	8.301173
0.08	-0.12421	8.121961	-0.08	-0.12421	8.121961
0.08	0.124206	8.121959	-0.08	0.124206	8.121959
0.08	0.290628	8.301015	-0.08	0.290628	8.301015
0.1	-0.28435	8.30128	-0.1	-0.28435	8.30128
0.1	-0.10875	8.121959	-0.1	-0.10875	8.121959
0.1	0.108753	8.121961	-0.1	0.108753	8.121961
0.1	0.284375	8.300907	-0.1	0.284375	8.300908
0.12	-0.27649	8.301345	-0.12	-0.27649	8.301345
0.12	-0.08618	8.121958	-0.12	-0.08618	8.121958
0.12	0.086181	8.121962	-0.12	0.086181	8.121962
0.12	0.276536	8.300843	-0.12	0.276536	8.300843
0.14	-0.26693	8.301347	-0.14	-0.26693	8.301347
0.14	-0.04719	8.121961	-0.14	-0.04719	8.121961
0.14	0.047193	8.121958	-0.14	0.047193	8.121959
0.14	0.266969	8.30084	-0.14	0.266969	8.30084
0.16	-0.25544	8.30128	-0.16	-0.25544	8.30128
0.16	0.255479	8.300908	-0.16	0.255479	8.300908
0.18	-0.24178	8.301154	-0.18	-0.24178	8.301154
0.18	0.241792	8.301034	-0.18	0.241792	8.301034
0.2	-0.22553	8.301001	-0.2	-0.22553	8.301001
0.2	0.225514	8.301187	-0.2	0.225514	8.301187
0.22	-0.20608	8.300872	-0.22	-0.20608	8.300872
0.22	0.206035	8.301316	-0.22	0.206035	8.301316
0.24	-0.18241	8.300836	-0.24	-0.18241	8.300836
0.24	0.182343	8.301351	-0.24	0.182343	8.301351
0.26	-0.15254	8.300953	-0.26	-0.15254	8.300953
0.26	0.152493	8.301235	-0.26	0.152493	8.301235
0.28	-0.11116	8.301216	-0.28	-0.11116	8.301216
0.28	0.111653	8.300972	-0.28	0.111653	8.300972
0.3	-0.02921	8.301258	-0.3	-0.02921	8.301258
0.3	0.029467	8.300929	-0.3	0.029467	8.300929

Πίνακας Γ5 Συντεταγμένες x , C ($y=0$) των εστιακών σημείων για
 $\nu = 7, 11, 27$ και για διάφορες τιμές του β

$\nu=7$		
β	x	C
2	0.486113	7.699278
5	0.509106	7.063285
10	0.528688	6.588914
20	0.545981	6.214148
50	0.561664	5.905736
$\nu=11$		
β	x	C
2	0.792189	16.43545
5	0.809858	15.78151
10	0.827901	15.15897
20	0.846592	14.55822
50	0.866267	13.97032
$\nu=27$		
β	x	C
2	2.167223	77.95396
5	2.166093	78.02553
10	2.164571	78.12211
20	2.162411	78.25954
50	2.159109	78.47048

Πίνακας Γ6 Αριθμητικές τιμές των μέσων αποστάσεων x_{μ}^e και των μέσων
 Ιακωβιανών σταθερών C_{μ}^e των εστιακών σημείων, της εξωτερικής και εσωτερικής
 εστιακής καμπύλης, για $\nu=27$ και για διάφορες τιμές του e ($y=0$).

	x_{μ}^e	C_{μ}^e
-0.05000	0.051087081	78.02970976
	2.181319566	68.13675499
-0.10000	0.104435429	68.15267365
	2.181940675	78.03588949
-0.15000	0.160182403	68.18098606
	2.182622823	78.04267623
-0.20000	0.218474638	68.22337237
	2.183375327	78.05016646
-0.25000	0.279468417	68.28173921
	2.184209598	78.05847490
-0.30000	0.343329922	68.35825176
	2.185139644	78.06774252
-0.40000	0.480370294	68.57589129

	2.187361002	78.08990054
-0.50000	0.631115540	68.90028547
	2.190241314	78.11867971
-0.60000	0.797194147	69.36235344
	2.194119979	78.15752006
-0.70000	0.980212989	70.00150635
	2.199611910	78.21268454
-0.80000	1.181396511	70.86629685
	2.207946468	78.29678235
-0.90000	1.400543471	72.01014113
	2.221928564	78.43890060
-1.00000	1.632598665	73.46463211
	2.249168491	78.71954043
-1.10000	1.855478225	75.11561215
	2.313842354	79.40623861
-1.11000	1.875257668	75.27491837
	2.324421694	79.52136285
-1.12000	1.894270140	75.43008886
	2.336060821	79.64894542
-1.13000	1.912438459	75.58025635
	2.348836449	79.79011151
-1.14000	1.929694141	75.72460251
	2.362816304	79.94594609
-1.20000	2.012123342	76.43773272
	2.473838655	81.23580235

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alberti, A., Vidal, C.: 2007. *Dynamics of a particle in a gravitational field of a homogeneous annulus disk*. *Celest. Mech. Dyn.Astron.*, **98**, 75-93.
- Arribas, M., Elipe, A.: 2004. *Bifurcations and equilibria in the extended N-body problem*. *Mech. Res. Comm.* **31**, 1-8.
- Arribas, M., Elipe, A., Kalvouridis, T.J.: 2006. *Central configuration in the planar (n+1) body problem with generalized forces*. *Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, **28**, 1-8.
- Arribas, M., Elipe, A., Kalvouridis, T.J., Palacios, M.: 2007. *Homographic solutions in the planar (n+1) problem in a quasi-homogeneous potential*. *Celest. Mech. Dyn.Astron.*, **99**, No1, 1-12.
- Arribas, M., Elipe, A., Palacios, M.: 2008. *Linear stability of ring systems with generalized central forces*. *Astron. Astrophys.*, **489** (2), 819-824.
- Arribas, M., Elipe, A., Palacios, M.: 2009. *On the stability of the planar (n+1) ring body problem with quasi-homogeneous potentials*. XII Jornadas de Trabajo en Mecanica Celeste, 1-3 July 2009, Lalin, Galicia, Spain. Book of abstracts p. 21.
- Arribas, M., Elipe, A., Palacios, M.: 2010. *Linear stability in an extended ring system*. In *Mathematics and Astronomy: A joint long journey*, M.de Leon, D.M. de Diego and R.M. Ros, AIP Conf. Proceedings, **1283**, 128-136.
- Balsas, M.C., Guirao, J.L., Jimenez, E.S., Vera, J.A.: 2009. *Qualitative analysis of the phase flow of a Manev system in a rotating reference frame*. *International Journal of Computer Mathematics*, **8** (10), 1817-1830.
- Bang, D., Elmabsout, B.: 2004. *Restricted N+1-Body Problem: Existence and Stability of relative equilibria*". *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **89**, 305-318.
- Barbanis, B.: 1985. *Evolution of families of double- and triple-periodic orbits*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **36**, 257-271.
- Barrabes, E., Cors, J.M., Hall, G.R: 2010. *A limit case of the "ring problem": the planar circular restricted (1+N) body problem*. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **9** (2), 634-658.

- Barrio, R., Blesa, F., Serrano, S.: 2008. *Qualitative analysis of the $(N+1)$ -body ring problem*. Chaos, Solitons and Fractals **36**, 1067-1088.
- Barrio, R., Blesa, F., Serrano, S.: 2009. *Periodic, escape and chaotic orbits in the Copenhagen and the $(n+1)$ -body ring problems*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **14**, 2229-2238.
- Barrio, R., Blesa, F.: 2009. *Systematic search of symmetric periodic orbits in 2DOF Hamiltonian systems*. Chaos, Solitons and Fractals, **41**, 560-582.
- Bobylev, A.V., Dukes, P., Illner, R., Victory Jr, H.D.: 1997. *On Vlasov-Manev equations, I: Foundations, properties and non-global existence*. Journal of Statistical Physics, **88** (3-4), 885-911.
- Boccaletti, D., Pucacco, G.: *Theory of orbits*. Springer-Verlag Berlin, 2001.
- Bodenmann, S.: 2010. *The 18th-century battle over lunar motion*. Physics Today, URL: http://ptonline.aip.org/journals/doc/PHTOAD-ft/vol_63/iss_1
- Bountis, T., Papadakis, K.E.: 2009. *The stability of vertical motion in the N -body circular Sitnikov problem*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **104**, 205-225.
- Broucke, R.A., Elipe, A.: 2005. *The dynamics of orbits in a potential field of a solid circular ring*, Regular and chaotic dynamics, **10**, 1-15.
- Brumberg, V.A.: 1957. *Permanent configurations in the problem of four bodies and their stability*. Soviet Astron., **1**(1), 57-79.
- Casassayas, J., Llibre, J., Nunes, A.: 1994. *Central configurations for the planar $1+N$ body problem*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **60**, 273-288.
- Cattani, C., Prokopenya, A.: 2004. *On the solution of the homographic polygon configuration in the many body problem*. Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe I di Scienza Fis. Mat. e Nat., vol XLIII-LXXXII, CIA0401004 (2003-2004), 1-13.
- Cors, J. M., Llibre, J., Ollé, M.: 2004. *Central configurations of the planar co-orbital satellite problem*. Celest. Mech. Dyn. Astr. **89**, 319-342.
- Croustalloudi, M., Kalvouridis T. J.: 2003. *Study of the equilibrium zones in the ring-type systems*. In 'Recent Advances in Mechanics and the Related Fields', Markellos V., Katsiaris G., Hadjidemetriou J. (eds.) Patras, pp. 89-96.

- Croustalloudi, M., Kalvouridis T. J.: 2004a. *On the structure and evolution of the 'Basins of Attraction' in Ring-Type N-Body Formation*. In "Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems" G. Byrd, K. Kholshchevnikov, A. Myllari, I. Nikiforov and V. Orlov, (eds), ASP Conference Series, Vol **316**, 93-96.
- Croustalloudi M., Kalvouridis T.: 2004b. *Structure and parametric evolution of the Basins of attraction in the restricted three-body problem*. Vol. II, pp. 144-150, (7th National Congress on Mechanics, HSTAM, Chania, Greece).
- Croustalloudi M., Kalvouridis T.: 2007a. *Attracting Domains in Ring-Type N-Body Formations*. Planetary and Space Sci., **55**, No 1-2, 53-69.
- Croustalloudi, M., Kalvouridis, T.J. : 2007b. *Evolution and bifurcations of the regions of a small satellite's existing 3-D motions in a regular polygon dynamical system of $(v+1)$ bodies*. 10th Jornadas de Trabajo en Mecanica Celeste, Barcelona, Spain, vol.of abstr. pp.15-16.
- Croustalloudi, M., Kalvouridis, T.J. : 2007c. *Numerical investigation of particle periodic motions in a regular polygon configuration of $8+1$ bodies*. 8th HSTAM International Congress on Mechanics, Patras, July 12-14, 2007, Proceedings vol.II, 509-516.
- Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T.J. : 2008. *Periodic motions of a small body in the Newtonian field of a regular polygonal configuration of $v+1$ bodies*. Astrophys. Sp. Sci. **314**, 7-18.
- Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T.J.: 2011. *Regions of a satellite's motion in a Maxwell's ring system of N bodies*. Astrophys. Sp.Sci. **331**, 497-510.
- Croustalloudi, M.N., Fakis, D., Kalvouridis, T.J.: 2012. *Regions of convergence in a Maxwell ring-type N-body system where the central body creates a post-Newtonian potential field*. In honour of prof. M. Kontadakis, Thessaloniki, 1-12.
- Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T.J. : 2012. *Dynamics of a dual satellite system in the newtonian field of a regular polygon configuration of N big bodies : the $N+2$ ring problem*. (XIII Jornadas de Trabajo en Mecanica Celeste, Zaragoza, 18-19 June 2012).

- Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T.J. : 2014. *The regular polygon problem of $(N+2)$ bodies: a numerical investigation of the equilibrium states of the minor bodies* (submitted)(2014).
- Delgado, J., Diacu, F., Lacomba, E., Mingarelli, A., Mioc, V., Perez, E., Stoica, C.: 1996. *The global flow of the Manev problem*. J. Math. Phys., 37, No 6, 2748- 2761.
- Diacu, F.N.: 1993. *The planar isosceles problem for Maneff's gravitational law*. J. Math. Phys., **34**, No 12, 5671-5690.
- Diacu, F.N.: 2009. *How I discovered Manev*. Ομιλία που δόθηκε κατά τον εορτασμό της 125^{ης} επετείου από τη γέννηση του Georgi Manev, Sofia, Bulgaria, (12 Νοεμβρίου, 2009).
- Diacu, F., Perez-Chavela, E., Santoprete, M.: 2005. *Saari's conjecture of the N -body problem in the collinear case*. Trans.AMS, **357**, No 10, 4215-4223.
- Diacu, F., Fugiwara, T, Perez-Chavela, E., Santoprete, M.: 2008. *Saari's homographic conjecture of the three-body problem*. Trans. Amer. Math. Soc., **360**, No 12, 6447-6472.
- Diacu, F., Perez-Chavela, E.: 2011. *Homographic solutions of the curved 3-body problem*. J. Differ.Equations, **250**, 340-366
- Douskos, C.,N.: 2010. *Collinear equilibrium points of Hill's problem with radiation and oblateness and their fractal basins of attraction*. Astrophys. Space Sci. **326**, 263- 271.
- Δρης, Ε.: 2004. Σημειώσεις Κλασικής Δυναμικής. Αθήνα, Ε.Μ.Π., σελ 1-304.
- Dziobek, O.: 1900. *Ueber einen merkwurdiven fall des vielkorperproblems*. Astronomische Nachrichten, **152**, 33-46.
- Elipe, A., Arribas, M., Kalvouridis, T.J.: 2007. *Periodic solutions and their parametric evolution in the planar case of the $(n+ 1)$ ring problem with oblateness*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, **30**, No6, 1640-1648.
- Elmabsout, B. : 1988. *Sur l'existence de certaines configurations d' équilibre relative dans le problème des n corps*. Celest.Mech.Dyn.Astron., **41**, 131-151.
- Elmabsout, B.: 1996. *Nonlinear instability of some relative equilibrium configurations in the $(n+1)$ -body problem*. Rom. Astron. J., **6**, No1, 61-71.

- Euler, L.: 1764. *Considerationes de motu corporum coelestium*. Novi Commentari Academiae Scientiarum Imp. Petropolitanae, 11, 544-558. (Published in 1766. Opera Omnia, S. 2, **25**, 246-257).
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.: 2011. *On the dynamics of a small body in a post-Newtonian potential field created by a regular polygon formation of N bodies*. Proceedings of the 10th Conference of the Hellenic Astronomical Society (Ioannina, Greece, Sept.2011), 1-2, also Book of Abstracts, S3-4, p26.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J., Mavraganis, A. G.: 2013a. *Numerical investigation of the dynamics of a small body in a Maxwell ring-type N -body system where the central primary creates a Manev-type post-Newtonian potential field*. 10th HSTAM International Congress on Mechanics, Chania, Crete, 25-27 May, 2013.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.: 2013b. *Dynamics of a small body in a Maxwell ring-type N -body system with a spheroid central body*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **116**, No 3, 229-240.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.: 2013c. *On the dynamics of a small body under the influence of a Maxwell ring-type N -body system with a spheroidal central primary: Focal curves*. 11th Hellenic Astronomical Conference of the Hellenic Astronomical Society, Athens, 9-12 Sept. 2013.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.: 2014a. *On a property of the zero-velocity curves and surfaces in the regular polygon problem of $N+1$ bodies where the central body creates a Manev-type potential field*. (subm.).
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.: 2014b. *Focal points and focal curves: a property of the zero-velocity curves and surfaces in the regular polygon problem of $N+1$ bodies where the central primary creates a Manev-type potential*. XIV Jornadas de Trabajo en Mecanica Espacial, Ribadeo, Spain 17-19 July 2014.
- Gadomski, L.J.: 1998. *Jacobi integral in the restricted circular $(n+1)$ -body problem with homogeneous potential*. Rom. Astron. J., **8** (1), 21-25.
- Garcia-Azpeitia, C., Ize, J.: 2011. *Global bifurcation of planar and spatial periodic solutions in the restricted n -body problem*. Celest.Mech.Dyn.Astron. **110**, 217-237.

- Gidea, M., Llibre, J.: 2010. *Symmetric planar central configurations of five bodies: Euler plus two*. *Celest.Mech. Dyn.Astron.* **106**, 89-107.
- Glass, Kathryn: 1997. *Equilibrium configurations for a system of N particles in the plane*. *Physics Letters A*, **235**, 591-596
- Gousidou-Koutita, M., Kalvouridis, T.J.: 2008. *Numerical study of the attracting domains in a non-linear problem of Celestial Mechanics*. In: G. Akrivis, E. Gallopoulos, A. Hadjidimos, I. Kotsireas, D. Noutsos, M. Vrahatis (eds.) “Recent Approaches to Numerical Analysis: Theory, Methods and Applications”, pp.84-87.
- Gousidou-Koutita, M., Kalvouridis, T.J.: 2009. *On the efficiency of Newton and Broyden numerical methods in the investigation of the regular polygon problem of $(N+1)$ bodies*. *Applied Mathematics and Computation*, **212**, 100-112.
- Grebenikov, E.: 1997. *New exact solutions in the planar, symmetrical $(n+1)$ -body problem*. *Rom. Astron. J.*, **7**, 151-156.
- Grebenikov, E.: 1998. *Two new dynamical models in Celestial Mechanics*. *Rom. Astron. J.*, **8**, (No 1), 13-19.
- Hadjidemetriou, J.: 1984. *Periodic orbits*. *Celest.Mech. Dyn.Astron.* **34**, 379- 393.
- Hadjifotinou, K.G., Kalvouridis, T.J.: 2005. *Numerical investigation of periodic motion in the three-dimensional ring problem of N bodies*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**, No8, 2681-88
- Hadjifotinou, K.G., Kalvouridis, T.J., Gousidou-Koutita, M.: 2006. *Numerical study of the parametric evolution of bifurcations in the three-dimensional ring problem of N bodies*. *Mech. Res. Comm.*, **33**, 830-836.
- Hagihara, Y.: 1975. *Celestial Mechanics*. Vol. 2, Part 1, MIT Press, Cambridge, Mass.
- Haranas, I., Ragos, O.: 2011. *Yukawa-type effects in satellite dynamics*. *Astrophys. Sp.Sci.* **331** (1), 115-119.
- Haranas, I., Ragos, O., Mioc, V.: 2011. *Yukawa-type potential effects in the anomalistic period of celestial bodies*. *Astrophys. Sp.Sci.* **332** (1), 107-113.
- Haranas, I., Gkigkitzis, I.: 2012. *Basic thermodynamic parameters of a black hole resulting from a Yukawa type of correction to the metric*. *Astrophys. Sp.Sci.* **337**,

693-702.

Hénon, M.: 1965. *Exploration Numérique du Problème Restreint II*. Ann. Astrophys. **28** (6), 992-1007.

Hénon, M.: 1966. *Exploration Numérique du Problème Restreint IV – Masses Égales, Orbites non Périodiques*, Bull. Astron. (3) **1**, fasc. 2, 49.

Hénon, M. : 2003. *New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies*. Celest.Mech.Dyn.Astron. **85**, 223-246.

Hénon, M.: 2005. *Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of three bodies*. Celest.Mech.Dyn.Astron. **93**, 87-100.

Hénon, M., Guyot, M.: 1970. *Stability of periodic orbits in the restricted problem*, in G.E.O. Giacaglia (ed.) "Periodic orbits, Stability and Resonances", D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, pp349-374.

Kalvouridis, T. J.: 1999a. *A planar case of the $n+1$ body problem: the 'ring' problem*. Astrophys. Sp.Sci., **260** (3), 309-325.

Kalvouridis, T. J.: 1999b. *Periodic solutions in the ring problem*. Astrophys. Sp.Sci., **266** (4), 467-494.

Kalvouridis, T. J.: 1999c. *Motion of a small satellite in a planar multi-body surrounding*. Mech. Res.Com. **26**, No 4, 489-497.

Kalvouridis, T.J., 1999d. *The ring problem with radiation pressure*. Proceedings of the 8th European Astronomical Meeting JENAM 1999 of the European Astronomical Society held in Toulouse, September 1999, Vol. of abstracts, p. 266.

Kalvouridis, T.J., Tsogas, V.:1999. *Equilibrium states of a small tri-axial body in a planar ring configuration of N bodies*. In: Proceedings of the 4th Astronomical Conference, Samos 16-18 September 1999, pp 141-149, John Seimenis (ed.).

Kalvouridis, T.J., Tsogas, V.: 2002. *Rigid body dynamics in the restricted ring problem of $N+1$ bodies*, Astrophys. Sp. Sci. **282**, No 4, 751-765.

Καλβουρίδης Τηλέμαχος: 2001. *Προχωρημένη δυναμική συστημάτων υλικών σημείων και στερεών σωμάτων: Μεθοδολογία και εφαρμογές*. Σελ. 1-264, Ε.Μ.Π.

Kalvouridis, T. J.: 2001a. *Multiple periodic orbits in the ring problem: Families of triple periodic orbits*. Astrophys. Sp. Sci., **277**, No 4, 579-614.

- Kalvouridis, T. J.: 2001b. *Zero velocity surfaces in the three-dimensional ring problem of $N+1$ bodies*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **80**, 133-144.
- Kalvouridis, T.J.: 2001c. *The ring problem and its connection to some known problems of Celestial Dynamics*. 5th Hellenic Astronomical Conference, Crete, Sept. 2001, vol. of abstracts, p.2.
- Kalvouridis, T.J., Tsogas, V.: 2002. *Rigid body dynamics in the restricted ring problem of $N+1$ bodies*, *Astrophys. Sp. Sci.* **282**, No 4, 751-765.
- Kalvouridis, T.J.: 2003. *Retrograde orbits in ring configurations of N bodies*. *Astrophys. Sp. Sci.* **284**, No 3, 1013-1033.
- Kalvouridis, T. J.: 2004. *On a property of zero-velocity curves in N -body ring-type systems*. *Planetary and Space Science*, **52**, 909-914.
- Kalvouridis T., Croustalloudi M.: 2004. *Basins of attraction in the restricted four-body problem of Marañhao*. 13th European Astronomical Meeting JENAM 2004, Granada, Spain, vol. of abstracts, p. 166.
- Καλβουρίδης Τηλέμαχος: 2004. *Ειδικά Θέματα προχωρημένης Δυναμικής*, σελ.1-156, Ε.Μ.Π.
- Kalvouridis, T.J.: 2006. *Some versions of the regular polygon problem of $(n+1)$ bodies*. *Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, **30**, 79-94.
- Kalvouridis, T., Arribas, M., Elipe, A.: 2006a. *Dynamical properties of the restricted four-body problem with radiation pressure*. *Mech. Res. Comm.* **33**, No6, 811-817.
- Kalvouridis, T.J., Arribas, M., Elipe, A.: 2006b. *The photogravitational restricted four-body problem: an exploration to its dynamical properties*. In “Recent Advances in Astronomy and Astrophysics”, Solomos, N. (ed.), AIP Conference Proceedings, vol. 848, pp. 637-646.
- Kalvouridis, T.J., Arribas, M., Elipe, A.: 2007. *Parametric evolution of periodic orbits in the restricted four-body problem with radiation pressure*. *Planetary and Space Science*, **55**, No4, 475-493.
- Kalvouridis, T.J.: 2008a. *On a class of equilibria of a small rigid body in a Copenhagen configuration*. *Rom. Astron. J.*, **18**, No2, 167-179.

Kalvouridis, T.J.: 2008b. *Bifurcations in the evolution of zero-velocity surfaces in a photo-gravitational problem of 3+1 bodies*. In: Demos Tsahalis (ed.) “From Scientific Computing to Computational Engineering”, vol. I, pp.180-187 (3rd IC-SCCE, Athens).

Kalvouridis, T.J.: 2008c. *On some new aspects of the photo-gravitational Copenhagen problem*. *Astrophys.Sp. Sci.*, **317**, No 1-2, 107-117.

Kalvouridis, T.J.: 2008d. *On the topology of the regions of 3-D particle motions in annular configurations of N bodies with a central post-Newtonian potential*. In: G.Contopoulos, P.A. Patsis (eds.) “Chaos in Astronomy” *Astrophys. and Space Sci. Proceedings*, 357-362.

Kalvouridis, T.J.: 2008e. *Particle motions in Maxwell’s ring dynamical systems*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **102**, No 1-3, 191-206.

Kalvouridis, T.J., Hadjifotinou, K.G.: 2008. *Bifurcations from planar to three-dimensional periodic orbits in the photo-gravitational restricted four-body problem*. *Inter. J. of Bifurcation and Chaos* **18**, No2, 465-479.

Kalvouridis T., Croustalloudi M.: 2008. *On the formation of the attracting domains of the equilibrium positions in the restricted four-body problem*. In: Demos Tsahalis (ed.) “From Scientific Computing to Computational Engineering”, vol. I, pp. 505-512 (3rd IC-SCCE, Athens).

Kalvouridis, T.J., Bratsolis, E., Kazazakis, D.: 2008. *Radiation effect on a particle’s periodic orbits in a regular polygon configuration of N bodies*. *Earth, Moon and Planets*, **103**, No 3-4, 143-159.

Kalvouridis, T.J.: 2009a. *Chaotic and deterministic regions of convergence in the photo-gravitational regular polygon problem of (N+1) bodies*. 3rd International EPSMSO, Athens, Greece. Book of abstracts p. 12.

Kalvouridis, T.J.: 2009b. *Formation, evolution and parametric variation of Newton’s regions of convergence in some problems of Celestial Mechanics*. XII Jornadas de Trabajo en Mecanica Celeste, 1-3 July 2009, Lalin, Spain. Book of abstracts p. 33.

- Kalvouridis, T.J.: 2009c. *The Copenhagen case when the small body is a gyrostat*. 9th Conference of HelAsSoc. Book of abstracts p.35.
- Kalvouridis, T.J., Fakis, D, Gn.: 2010. *The five-body model of Ollöngren with a central Manev-type potential*. 9th HSTAM International Congress on Mechanics (Limassol-Cyprus, July 12-14, 2010).
- Kalvouridis, T.J. , Hadjifotinou, K.G.: 2011a. *Bifurcations from planar to three-dimensional periodic orbits in the ring problem of N bodies with a radiating central primary*. International Journal of Bifurcations and Chaos, **21**, No8, 2245-2260.
- Kalvouridis, T.J., Hadjifotinou, K.G.: 2011b. *Particle dynamics in a Maxwell's ring-type configuration with a radiating central primary*. Earth, Moon and Planets, **108**, No 1, 51-67.
- Kalvouridis, T.J., Kalvouridi, E.: 2011. *Formation and evolution of Newton's regions of convergence in some problems of Celestial Mechanics*. Monografias de la Real Acad.de Ciencias de Zaragoza, **35**, 53-71.
- Kalvouridis, T.J.: 2011. *The regular polygon $(N+1)$ -body problem: An overview*. In Albert.C.J.Luo, Jose Antonio Tenreiro Machado, Dumitru Baleanu (eds.) "Dynamical Systems and Methods", Springer Science +Business Media, LLC2011, pp. 135-150.
- Kellog, O.: 1929. *Foundations of potential theory*. New York: Dover Publ.Inc., pp.1-384.
- Koyre, A., Cohen, I.B.: 1972. *Isaac's Newton Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, vol 1*. Harvard University Press, Cambridge, MA, p.227.
- Κρουσταλλούδη, Μαρία: 2006. *Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μικρού σώματος στο Νευτώνειο πεδίο κανονικών πολυγωνικών σχηματισμών $(n+1)$ σωμάτων*. Διδακτορική Διατριβή, σελ. 1-223, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Lagrange, J.L.: 1772. *Essai sur le problème des trois corps*. 1873. Oeuvres, t.6, 229-324, Gauthier-Villars, Paris.

- Laplace, P.S. : 1789. *Sur quelques points du système du monde*. Memoires de l' Académie Royale des Sciences de Paris. (published in 1890. Oevres completes **11**, 553-558).
- Liu Wenzhong, Zhang Tongjie, and Xu Bin: 2005. *A concise numerical analysis on regular polygon solutions for kN -body problem*. Journal of Beijing Normal University (Natural Science), **41**(4), 386-388.
- Liouville, J.: 1842. *Sur un cas particulier du problème des trois corps*. Comptes Rendues, **14**, 503-506 (published in 1842, J. de Mathematiques Pures et Appliquees, **7**, 110-113)
- Llibre, J.: 1991. *On the number of central configurations in the N -body problem*. Celest.Mech.Dyn.Astron., **50**, 89-96.
- Llibre, J., Mello, L.F.: 2008. *New central configurations for the planar 5-body problem*. Celest. Mech. Dyn.Astron., **100**, 1-9.
- Llibre, J., Mello, L.F.: 2009. *Triple and quadruple nested central configurations for the planar n -body problem*. Physica D, **238**, 563-571.
- Llibre, J., Teruel, A.E., Valls, C., DeLa Fuente, A.: 2001. *Phase portraits of the two-body problem with Manev potential*. Journal of Physics A: Mathematical and General, **34** (9), 1919-1934.
- Llibre, J., Mello, L.F.: 2009. *Triple and quadruple nested central configurations for the planar n -body problem*. Physica D, **238**, 563-571.
- MacMillan, W.D., Bartky, W.: 1932. *Permanent configurations in the problem of four bodies*. Trans.Amer.Math.Soc., **34**, 838-875.
- Maneff, G.: 1924. *La gravitation et le principe de l' action et de la reaction*. C.R. Acad. Sci. Paris, **178**, 2159-2161.
- Maneff, G.: 1925. *Die gravitation und das prinzip von wirkung und gegenwirkung*. Z. Phys., **31**, 786-802.
- Maneff, G.: 1930a. *Le principe de la moindre action et la gravitation*. C.R. Acad. Sci. Paris, **190**, 963-965.
- Maneff, G.: 1930b. *La gravitation et l' energie au zero*. C.R. Acad. Sci. Paris, **190**, 1374-1377.

- Marañhao, D., Llibre, J.: 1999. *Ejection-collision orbits and invariant punctured tori in a restricted four-body problem*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **71**, 1-14.
- Markellos, V.V., Black, W. and Moran, P.E.: 1974. *A Grid Search for Families of Periodic Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **9**, 507.
- Markellos, V.V.: 1974. *Numerical investigation of the planar restricted three-body problem I. Periodic orbits of the second generation in the Sun-Jupiter system*. *Celest.Mech.Dyn.Astron.*, **9**, 365.
- Markellos, V.V., Papadakis, K.E. and Perdios, E.A.: 1997. *The plane restricted five-body problem*. 6th European Astronomical Meeting (JENAM 97), July 1997, Thessaloniki, Greece, vol. of abstracts p. 15.
- Markellos,v., Papadakis,K., Perdios, E., Douskos, C.: *The restricted five-body problem: Regions of motion, equilibrium points and related periodic orbits*. Proceedings of 4th GRACM Congress on Computational Mechanics, Patras, 27-29 June, 2002.
- Mavraganis, A.G., Kalvouridis, T.J.: 2007. *A proper choice of variables for the study of a satellite close approaches in a ring assembly of N bodies*. *Planetary and Space Science*, **55**, No4, 401-406.
- Maxwell, J. C.: 1890. *On the stability of the motion of Saturn's rings*. *Scientific Papers of James Clerk Maxwell*. Cambridge University Press, Cambridge, Vol. **1**, p. 228.
- McCord, C.: 2002. *Saari's conjecture for the planar three-body problem with equal masses*. Preprint.
- Meirovitch, L.: *Methods of Analytical Mechanics*. McGraw-Hill, 1970.
- Meyer, K.R., Schmidt, D.S., 1988. *Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem*. *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, **8**, 215-225.
- Mioc, V.: 1994. *Elliptic-type motion in Fock's gravitational field*. *Astron. Nachr.*, **315**, 175- 180.

- Mioc, V., Stoica, C.: 1995. *Discussion et résolution complète du problème des deux corps dans le champ gravitationnel de Maneff (I)*. C.R.Acad. Sci. Paris, **320**, ser.I, 645-648.
- Mioc, V., Stoica, C.: 1997. *On the Manev-type two-body problem*. Baltic Astronomy, **6**, 637-650.
- Mioc, V., Stavinschi, M.: 1998. *On the Schwarzschild-type polygonal $(n+1)$ -body problem and on the associated restricted problem*. Baltic Astronomy **7**, 637-651.
- Mioc, V., Stavinschi, M.: 1999a. *On Maxwell's $(n+1)$ -body problem in the Manev-type field and on the associated restricted problem*. Physica Scripta **60**, 483-490.
- Mioc, V., Stavinschi, M.: 1999b. *Nonlinear stability of equilibria of the Manev-type two-body problem*. Baltic Astronomy, **8**, 411-424.
- Mioc, V., Stavinschi, M.: 2000a. *Lagrange-Jacobi and Sundman relations in the Schwarzschild-De Sitter model*. Rom. Astron. J., **10** (1), 1-8.
- Mioc, V., Stavinschi, M.: 2000b. *On the simultaneous total collapse in the Schwarzschild-De Sitter field*. Rom. Astron. J., **10** (1), 1-5.
- Mioc, V.: 2004. *Symmetries of Mucket-Treder's two-body problem*. Hvar Obs.Bull. **28** (1), 167-179.
- Mioc, V., Perez-Chavela, E.: 2008. *The two-body problem under Fock's potential*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser.S, **1**(4), 611-620.
- Moeckel, R.: 1985. *Relative equilibria of the four-body problem*. Ergod. Th & Dynam. Sys., **5**, 417-435.
- Moeckel, R.: 2005. *A computer assisted proof of Saari's conjecture for the planar three-body problem*. Transactions of the AMS
- Moulton, F. R.: 1910. Ann.Math. **12**,1.
- Moulton, F. R.: 1914. *Introduction to Celestial Mechanics*. MacMillan, 2nd ed. 10th printing, 1958.
- Mücket, J.P., Treder, H.-J.:1977. *The perihelion advance according to post-Newtonian gravitational law with logarithmic correction term*. Astron.Nachr.,Bd.**298**, H.2, 65-67.

- Μυλωνάς, Κ.Μ.: 1978. *Μηχανική Ι, Κινηματική και Δυναμική του Υλικού Σημείου*, Εκδόσεις Αθανασόπουλος-Παπαδάκης-Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.
- Nezhinsky, E.M., Ollöngren, A.: 1992. *Models of patchy-structure galaxies*. *Astron Astrophys.* **266**, 140-144.
- Ollöngren, A.: 1988. *On a particular restricted five-body problem, an analysis with computer algebra*. *J. Symbolic Comput.*, **6**, 117-126.
- Ollöngren, A.: 1989. *On a restricted $(2n+3)$ -body problem*. *Celest.Mech.Dyn.Astron.*, 163-168.
- Palmore, J.: 1980. *Central configurations and relative equilibria in the n -body problem in E^4* . *Cel. Mech.*, **21**, 21-24.
- Παπαδάκης, Κ.: *Εισαγωγή στο Mathematica*, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2010.
- Papadakis, K.E., Kanavos, S.: 2007. *Numerical exploration of the photogravitational restricted five-body problem*. *Astrophys. Sp. Sci.*, **310**, 119-130.
- Papadakis, K.E.: 2009. *Asymptotic orbits in the $(N+1)$ -body ring problem*. *Astrophys. Sp. Sci.* **323**, 261-272.
- Παπαϊωάννου, Κ. *Μηχανική*, τόμος Ι, Αθήνα 1952.
- Peitgen, H., Jurgens, H., Saupe, D.: 1992. *Chaos and fractals*. Springer Verlag, New York.
- Perdios, E A., Markellos, V.V., Katsiaris, G.A.: 2003. *Moulton-Goudas periodic orbits in the restricted five-body problem*. In “Recent Advances in Mechanics and the Related Fields”, G.Katsiaris, V. Markellos, J. Hadjidemtriou (eds), in Honour of Professor C. L. Goudas, 57-63.
- Perdiou, A.E.: 2008. *Multiple periodic orbits in the Hill problem with oblate secondary*. *Earth, Moon and Planets*, **103**, 105-118.
- Perko, L.M., Walter, E.L.: 1986. *Proc.Amer.Math.Soc.*, **94**, 301.
- Perov, N.I., Medvedev, Yu. D.: 2008. *Central configurations of N bodies as models of secondary coorbital planets and planetary rings..* *Lunar and Planetary Science*, **39**, 1029pdf.
- Pinotsis, A. D.: 2005. *Evolution and stability of the theoretically predicted families*

- of periodic orbits in the N -body ring problem*. Astron.Astrophys., **432**, 713-729.
- Pinotsis, A.D.: 2010. *Periodic motions and their stability in a $N=v+1$ body Regular Polygonal Configuration*. Earth, Moon and Planets, **107** (2-4), 225-251.
- Poincaré, H.: 1892, 1893, 1899, *Les Méthods Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 Vols., Gauthier-Villars, Paris. Reprinted by Dover, New York, 1957.
- Psarros, F. E., Kalvouridis T. J.: 2005. *Impact of the mass parameter on particle dynamics in a ring configuration of N bodies*. Astrophys. Sp. Sci. **298**, 469-488.
- Roberts, G.: 2000. *Linear stability in the $1+N$ gon relative equilibrium*. World Scientific Monograph Series in Mathematics, **6**, 303-331.
- Roy, A: *Orbital Motion*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1979.
- Saari, D.: 1980. *On the role and the properties of n - body central configurations*. Celest.Mech.Dyn.Astron., **21**, 9-20.
- Saari, D.: 2005. *Collisions, Rings, and Other Newtonian N -Body Problems*. CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, No 104, pp. 1-238, American Mathematical Society.
- Saari, D.: 2006. *Central configurations-A problem for the twenty-first Century*. (lecture, pp.1-12).
- Salo, H., Yoder, C. F.: 1988. *The dynamics of co-orbital satellite systems*. Astron. Astrophys. **205**, 309-327.
- Scheeres, D.: 1992. *On symmetric central configurations with application to satellite motion about rings*. PhD Thesis. The University of Michigan.
- Scheeres, D.J., Vinh, N.X.: 1993. *The restricted $P+2$ body problem*. Acta Astronautica, **29**, No 4, 237-248.
- Sekiguchi, M.: 2004. *Bifurcation of central configuration in the $2N+1$ body problem*. Celest.Mech. Dyn.Astron. **90**, 355-360.
- Shiqing Zhang, Zhifu Xie: 2001. *Nested regular polygon solutions of $2N$ -body problem*. Physics Letters A, **281**, 149-154.
- Simo, C.: 1978. *Relative equilibrium solutions in the four body problem*. Celest.Mech.Dyn.Astron., **18**, 165-184.
- Smale, S.: 2000. *Mathematical problems for the next century*. In Mathematics:

- Frontiers and Perspectives, ed. V. Arnold, M. Atiyah, P.Lax, and B. Mazur, American. Math. Soc., 271-294.
- Stoica, C., Mioc, V.: 1996. *On the two-body problem in Maneff-type fields*. Bull.Astron. de Belgrade, **154**, 1-8.
- Szebehely, V.: *Theory of orbits*, Academic Press, 1967.
- Szenkovits, F., Stoica, C., Mioc, V.: 2004. *The Manev-type problems*.
- Tresaco, E., Elipe, A., Riaguas, A.: 2011. *Dynamics of a particle under the gravitational potential of a massive annulus: properties and equilibrium description*. Celest.Mech.Dyn.Astron. **111**, 431-447.
- Tresaco, E., Elipe, A., Riaguas, A.: 2012. *Computation of families of periodic orbits and bifurcations around a massive annulus*. Astrophys.Sp. Sci. **338**, 23-33.
- Tsogas, V., T.J.Kalvouridis, T.J., Mavraganis, A.G.: 2005. *Equilibrium states of a gyrostat satellite moving in the gravitational field of an annular configuration of N big bodies*. Acta Mechanica, **175**, No 1-4, 181-195.
- Vanderbei, R.J., Kolemen, E.: 2007. *Linear stability of ring systems*. Astron.J. **133**, 656-664.
- Von Hoerner, S.: 1963. Z.f.Ap. **50**, 184.
- Willerding, E.: 1986. *Theory of density waves in narrow planetary rings*. Astron. Astrophys. **161**, 403-407.
- Wintner, A.: 1947. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, N.J.

EXTENDED ABSTRACT

The N-body problem is one of the most important issues in Celestial Mechanics. In the relevant literature there are many particular cases for systems with $N > 3$. One of these cases is based upon a model where the $N-1$ of the bodies-members of the system are considered to have equal masses m and are located at the vertices of an imaginary regular polygon, while another body with different mass m_0 is located at the center of mass of the system. In the resultant force field created by the N big bodies, there is a very small body which moves without affecting the motion of the primaries. The initial statement of the problem was based on the assumption that all big bodies create Newtonian force fields.

Newton's theory dominated for many centuries, and still does, since it has been able to explain the motion of the bodies in a very simple way. However, some physical phenomena, such as the motion of the apsidal line of the Moon, which were already known at that time, could hardly be explained within this framework. Newton himself knew that his theory could not give a precise and convincing answer to this problem and for this reason he proposed in the "margin" of his famous and classic work *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Book I, Article IX, Proposition XLIV, Theorem XIV, Corollary 2) an improvement of his universal law of gravity, by inserting a corrective term of the form $1/r^2$. Many years later, Manev (1924) proposed a similar corrective term. This corrective term was adjusted by some authors to provide a justification for the perihelion advance of Mercury, or to explain some relativistic effects without using the theory of relativity. In 2004, an improved version of the gravitational ring (N+1)-body problem was presented by Arribas & Elife. It was based on the assumption that the central body of the primaries configuration is spheroid and the authors used the Manev-type potential to express the non-sphericity of the body. However, in this case the term was inserted only in the stage when the force function of the system was in its final form and not from the beginning of the process. A little later, Elife *et al.*, (2007) studied the periodic motions of the particle in the same dynamic system.

Here, we adopt the same model but the corrective term is taken into account from the start of the derivation process of the equations of motion of the small body, improving in this way the expression of the force function of the dynamic system. Although this small difference in the consideration of the problem does not create crucial changes to some of its dynamic aspects when the parameter measuring the oblateness is positive (oblate body), it may do so when this parameter is negative (prolate body).

Under these circumstances we consider that the central body creates a Manev-type

potential $V(r) = -k^2 M m \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right)$, where $A=1$ and $B=e\alpha$ with α being the side of the

regular polygon of the primaries configuration. The problem is characterized by three parameters, namely the number ν of the peripheral primaries, the mass parameter $\beta=m_0/m$ and a coefficient e which measures the contribution of the non-Newtonian term of the potential. Parameter ν is always a positive integer number; parameter β takes real positive values, while parameter e takes small real values (either negative or positive). Obviously, when $e=0$ then we obtain the pure gravitational case.

Besides the derivation of the dimensionless equations which describe the motion of the small body in a synodic coordinate system, we investigate the equilibrium locations, their stability and the effect of the above parameters on these features as well as, the zero-velocity curves and surfaces and their parametric evolution, the existing focal points and focal curves, the basins of attraction, the simple and multiple periodic orbits, their characteristic curves, their stability and their bifurcations for various values of the parameters β and e .

The structure of the present dissertation involves an Introduction, eleven chapters, bibliography and three appendices. Subsequently, we shall give a brief description of the contents of the 11 main chapters of the thesis:

Chapter 1. In the first part of this chapter we briefly refer to the basic principles of classic dynamics and the Newton's Law of Gravitation. We explain the notion of the potential and we give a classification of the various types of it from a mathematical

point of view. Then we make a short introduction to the general N-body problem by focusing our interest to regular polygon formations and models that have been proposed and investigated in the past regarding their central character. We explain the meaning of the homographic solutions and the conditions under which there are states of relative equilibria among the bodies-members of configuration. In the second part of the chapter we make an historical review of the physical problems that the classical Newtonian theory was not able to give convincing answers to, and we shortly describe the efforts of Newton himself as well as of his descendants to insert various corrective terms in the fundamental expression of the Universal Gravitational law in order that these problems could be solved in the frame of the classical theory. Attempts to insert various forms of "corrective terms" have been made before and after the appearance of the theory of relativity. Manev in 1924 proposed a corrective term to provide justification for the perihelion advance of Mercury and to explain some relativistic effects without using the theory of relativity. In the present thesis we assume that the central primary of a ring-type N-body configuration creates a Manev-type potential. In this improved model we shall investigate some dynamic aspects of the small body which moves in the resultant field created by the big bodies of the configuration.

Chapter 2. The first part of this chapter is dedicated to the description of the N+1 bodies ring problem and some general geometric characteristics. We formulate the problem in an inertial coordinate system $O\xi\eta\zeta$ where plane $O\xi\eta$ coincides with the plane of the primaries. Then we express the equations of particle motion in a synodic system $Oxyz$ located at the mass center of the primaries formation (Figure 1), the plane Oxy of which coincides with $O\xi\eta$ plane. We assume that the primaries are in relative equilibrium and rotate around the perpendicular axis $O\zeta \equiv Oz$ with constant angular velocity ω , here taken as unity. We take the line which connects the central primary P_0 with a peripheral one, let us say P_1 , as the x-axis of the synodic system. Finally we normalize the physical quantities to obtain a system of second order differential equations where all the quantities are dimensionless. From these equations we obtain a Jacobian-type integral of motion. Of great importance is Δ

quantity which appears in both the equations of motion and the Jacobian integral. This quantity depends on all three parameters ν , β and e and must always be positive, a fact that is reflected on all dynamic aspects of the system. In other words, in the case where $e < 0$, the values of e must satisfy the relation,

$$e > -\frac{\Lambda + \beta M^2}{2\beta M^3}$$

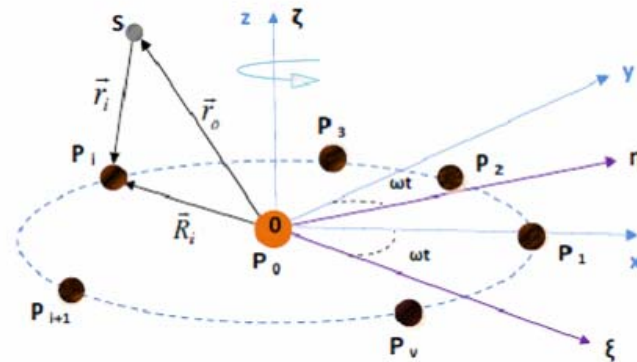


Figure 1. The configuration of the problem

Chapter 3. We numerically investigate the existing equilibrium locations of the particle for various values of the parameters. When $e \geq 0$ all these positions are located on the xy -plane and are distributed on either five or three equilibrium zones depending on the values of parameters e and β . More specifically, when $e=0$ (pure gravitational case) there is a critical value $\beta=l_\nu$, where a transition from five to three zones occurs. When $e > 0$, this change occurs for several pairs of the two parameters (β , e) the locus of which is a continuous curve whose exact form depends on the number ν of the peripheral primaries. The precise determination of this bifurcation curve is of great importance not only for the study of the equilibrium points but also in other areas of our investigation. We note that all the equilibria which belong to a particular zone are "dynamically equivalent" positions in the sense that they are characterized by the same Jacobian constant and have the same stability status. When $e < 0$, two new equilibrium zones which lie on the same plane Oxy , namely E_1 and E_2 , may appear. These locations evolve inside the circle of the peripheral primaries and very close to the central primary. The equilibria of E_1 zone lie on the

radii, where the equilibria that belong to A_1 and C_1 zones also appear (collinear equilibria), while those of E_2 zone lie on the same radii, where the equilibria of A_2 , B and C_2 are traced (triangular equilibria). The study of the existing equilibrium zones when $e < 0$ led us to construct a bifurcation diagram which consists of three bifurcation curves, BC_0 , BC_1 and BC_2 which intersect, converge or coincide in some parts of the diagram (e , β), this way dividing the whole area into five sub-regions. We have found that there are some general rules which determine the number and the type of the existing equilibrium zones in these sub-regions. These are summarized as follows:

- On the left side of BC_0 , B and A_2 zones appear.
- On the left side of BC_1 , E_1 and A_1 zones disappear.
- On the left side of BC_2 , A_2 and E_2 zones do not exist.

The bifurcation diagram, the exact form of which depends on v , is of great importance and constitutes the basis of any study related to the existence of the equilibrium points. When $e < 0$, in addition to the planar equilibria, two out-of-plane equilibria L_{-z} and L_{+z} appear on the z -axis of the synodic system and in symmetric positions with respect to the xy -plane. In any case, the locations of the existing equilibria, their linear stability and their parametric variations have exhaustively been studied. We have found that all these equilibria are unstable for any value of the three parameters v , β and e .

Chapter 4. By means of the Jacobian-type integral and by assuming particle motions on the xy -plane, we draw the networks of zero-velocity curves, which for each value of C , separate the regions of this plane where motion is permitted (positive kinetic energy) from those where this motion is forbidden (negative kinetic energy). By considering a third axis which counts the values of the Jacobian constant C , we obtain, for each zero-velocity diagram, a corresponding three-dimensional plot, called zero-velocity surface of particle planar motion. We observe that, in the zero-velocity surfaces, a folding of the central "chimney" towards its interior occurs immediately after e becomes negative and for very high values of the Jacobian constant C . This folding causes the appearance of the two new zones E_1

and E_2 and of the two out-of-plane equilibrium positions that we have mentioned before. As a consequence, when C decreases, the zero-velocity curves on the xy -plane which evolve near the central primary form a small, almost circular area inside which the motion of the particle is forbidden. This area is surrounded by a narrow, almost circular ring-type area where motion is both permitted and trapped. We also investigate with the Jacobian constant C the evolution of the permitted areas of motion and we study the parametric variation of this evolution. When $e < 0$ this evolution is affected and determined by the bifurcation curves of the respective bifurcation diagram.

Chapter 5. In this chapter we discuss a property of the zero-velocity curves and surfaces which characterizes the planar motion of a particle in a ring-type $(N+1)$ -body system where the central primary creates a Manev-type potential field. For a given v and by keeping one of the remaining two parameters, β or e (which are associated with the central primary) constant, we use the term "focal" points to denote the existing common intersection points of all superposed curves $C=C(x, y=y_C; v, \beta, e)$ drawn for various values of the third parameter. This means that the focal points are of two kinds; those obtained by keeping β constant and by varying parameter e and those obtained by applying the process vice versa. We first prove their existence and we provide relations for the exact computation of their coordinates. These points belong to three-dimensional wavy continuous curves in the xyC space, the focal curves, which present the same symmetry as the geometric configuration of the primaries and of the resultant force field (rotations through an angle $2\pi/v$ about an axis perpendicular to the plane of the primaries passing through the center of mass O). Therefore, for a particular v , two kinds of focal curves may exist; (1) those obtained when β is kept constant and parameter e varies and, (2) those obtained when e is kept constant and the mass parameter β varies. In the former case there is always one focal curve which is the locus of the non zero-roots of a function F_β that is independent of e , while in the latter case the focal points are the non-zero roots of a function F_e which is independent of β . Here we have two sub-cases; if $e \geq 0$ there is only one focal curve which evolves on and around the

central part of the zero-velocity surface. However, if $e < 0$, the existing focal curves develop on the external and the internal parts of the zero-velocity surface which surrounds the central primary. Their existence, size and evolution depend on the values of e and v .

Each focal curve has local minima and maxima regarding the Jacobian constant C . The maximum values C_k appear on the radii which connect the central primary to the peripheral ones (collinear or k focal points), while their minimum values $C_{k'}$ appear on the bisectors of the angles formed by the central and two consecutive primaries (triangular or k' focal points). The number of k and k' points, is equal to the number v of the peripheral primaries. The absolute differences of the coordinates between the minima and maxima get smaller as v increases. We also deal with the parametric variation of these points and curves and explain the mechanism of their evolution. Finally, we have discovered that functions F_β and F_e also have common intersection points which lie on circles the radii of which depend on the number v of the peripheral primaries.

Chapter 6. In this chapter we study the zero-velocity surfaces, that is, the surfaces which determine the regions of the permitted three-dimensional motion of the small body. If for a given triad (v, β, e) we change the value of the Jacobian constant C , then we observe changes of the zero-velocity surfaces which have to do with their shape and dimensions. Some surfaces may be closed and some others may be open. However, crucial spatial changes of the zero-velocity surfaces occur at the values of C which characterize the existing equilibrium zones (or the out-of plane points). All these changes have been studied by means of the diagrams C - β which are constructed for a given v and for a constant value of e . In such a diagram we plot the variation of C with the third parameter β for each existing equilibrium zone. Therefore we obtain as many curves as the number of the existing equilibrium zones (or out-of -plane points). These curves intersect in many points which are bifurcation points of the evolution of the zero-velocity surfaces in the sense that at the C -values of these points the aforementioned spatial changes take place. We have restricted our study to configurations with $v=7$ and we have studied several cases

with various values of ϵ and β in order to reveal and describe the complex evolution of the zero-velocity surfaces and therefore the regions of three-dimensional space where solutions may exist.

Chapter 7. Here we study the regions of convergence of the equilibrium positions of the small particle. The non-linear algebraic system, which results from the introduction of the necessary and sufficient conditions for equilibrium in the equations of particle motion, is solved numerically by using an algorithm, provided that an initial approximation is given. The iterative process stops at the desired target which is an equilibrium point. We can consider the process of the consecutive iterations as one, where the determination of successive approximating values-points forms a crooked path-line leading to the desired target, which is an equilibrium point. As a consequence, the set of the initial points that lead to the points of a particular equilibrium zone is called an "attracting domain" or "region of convergence" or "basin of attraction" (Croustalloudi & Kalvouridis, 2004, 2007; Kalvouridis, 2009). We shall use hereafter all three terms. We restrict our investigation to the planar equilibrium zones ($z=0$) and we apply the well-known Newton-Raphson's method by scanning both axes of plane Oxy in the intervals $x_0 \in [-2.5, 0) \cup (0, 2.5]$, $y_0 \in (0, 2.5]$ with steps $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0.005$. The converging initial pairs (x_0, y_0) are then divided into as many groups as the number of the existing equilibrium zones. At the same time, we record the number of the iterations (steps) required to find an equilibrium position with a predetermined accuracy (here 10^{-8}). The attracting domain of each zone presents, as it is expected, all the symmetry elements of the primaries arrangement. It generally consists of some "compact" parts, that is, areas all the points of which lead to the equilibrium positions of this particular zone and therefore exhibit a deterministic quality since small alterations in their values lead to the same target. There are also dispersed points that lie on the boundaries of the "compact" regions of the aforementioned or other zones. Therefore, these boundaries are not clearly defined and are characterized by a chaotic behavior in the sense that these points are very sensitive

to small alterations of their values, so that the prediction of their final destination becomes extremely difficult.

Chapter 8. This chapter is dedicated to the basic theory of the periodic orbits. We present the terminology used in the next two chapters and the general properties of the matrizant for this kind of solutions. Furthermore, we provide a short outline of the methods used in order to search and trace the periodic orbits which are symmetric with respect to the x-axis of the synodic coordinate system, and we briefly discuss both the methodology applied for the determination of the linear stability of the periodic orbits and the bifurcation theory concerning the characteristic curves of the families that these orbits form in the phase space of the initial conditions.

Chapter 9-10. In chapter 9 we numerically investigate the symmetric simple periodic orbits, while in chapter 10 the symmetric multiple (double and triple) periodic orbits. We have applied the methodology developed in the previous chapter to both the gravitational case and five different cases of parameters with $e < 0$ and more than 120 families have been found and examined in each of the aforementioned cases. The case of $e > 0$ displays the same quality characteristics as the gravitational one without any major differences in the outcoming results.

In each case we have investigated the evolution of the orbits along the characteristic curves, the parametric evolution of the diagrams x_0 -C, x_0 -T/2 and C-T/2, as well as the parametric variation of some dynamic characteristics, like the velocities at $t=0$ and $t=T/2$ etc. More specifically, with respect to the simple periodic orbits, we have investigated the behavior of the dynamic system when, for a constant value of parameter e we have varied the mass parameter β and vice versa.

All kinds of orbits have been calculated for positive values of the initial velocity ($\dot{y}_0 > 0$), while the variation of parameters β and e has resulted in a variation of family distribution, since some families cease to exist, some others change their evolution while others immerse.

In the process of parametric variation of the different quantities of the simple symmetric orbits of the dynamic problem, for $e < 0$, we have discovered that by

keeping the value of the mass parameter β constant while varying the absolute value of e , we obtain similar results to those obtained when we keep the negative value of e constant while decreasing the value of β . Moreover, when we increased the value of parameter β and kept the negative value of e constant, the same dynamic behaviour occurred as in the process of decreasing the absolute value of e while keeping parameter β constant.

Of great interest are the cases where for $e < 0$ the equilibrium points of E_2 (for $x_0 < 0$) and E_1 (for $x_0 > 0$) zones appear. From these points two main families of s.p.o. emanate, which bifurcate with many families of simple, double, triple or multiple p.o. For a certain value of e , each of the main families breaks into two branches. As e decreases, the two groups of families finally disappear.

We also investigate the linear stability by calculating the stability parameter α and by drawing the corresponding stability diagrams α - x_0 or α - C . Based upon these diagrams we have located the bifurcation points on the characteristic curves from which second generation families emanate.

Chapter 11. In the last chapter of the thesis we systematically summarize the rich conclusions and results obtained so far from the investigation of the dynamic properties of the small body in the considered configuration. The results are organized and coded in such a way as to give the reader just a faint idea of the hard work which is hidden behind the pages of this thesis. We close this chapter by exposing the future perspectives of the problem by either extending our study on the existing model or by improving it in various ways.

Furthermore, the thesis contains:

An extensive bibliography which gives the reader all the necessary information about the bibliographic sources which have been used in the present thesis and which could be useful for further study and three Appendices in which we give some of the codes and programs of Mathematica constructed throughout our study, as well as tables with numerical data and results obtained so far.

The text is enriched with more than 750 figures, plots and diagrams as well as, with 76 tables containing some indicative results.

By taking advantage of the rich experience acquired during the study of this particular problem, our future research will mainly focus on two scientific targets:

- To improve the particular model by considering that all the peripheral bodies create Manev-type potential fields that are characterized by the same e as the central body or by a different Manev parameter e . In the latter case the number of the parameters and the complexity of the model, obviously increase.
- To consider other types of potentials (Schwarzschild, Yukawa, etc.) which have been proposed in the past.