

Ομάδα Επανακανονικοποίησης και Κβαντική Θεωρία  
Πεδίου: Μία Περίληψη

Ορφέας Άγις Καραχάλιος  
Επιτηρητής : Γιώργος Ζουπάνος

21/12/2010

## Περίληψη

Η κβαντική θεωρία πεδίου (ΚΒΘ) είναι ίσως η πιο επιτυχημένη θεωρία της φυσικής, καθώς οι προβλέψεις, που επιτρέπει, έχουν επιβεβαιωθεί με πρωτοφανή ακρίβεια από το πείραμα. Παρόλαυτα, η διατύπωση της περιείχε διάφορες μαθηματικές ακροβασίες, οι οποίες οδηγούσαν και σε προβλήματα ερμηνείας της θεωρίας.

Η ομάδα επανακανονικοποίησης (ΟΕ) προσφέρει όχι μόνο μια ερμηνεία του όλου μαθηματικού μηχανισμού, αλλά και, σημαντικότερα, μια νέα μεθοδολογία στο πρόβλημα της ΚΒΘ.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι μια συνοπτική παρουσίαση της ΚΒΘ και των μεθόδων της ΟΕ μέσω της μελέτης ενός απλού βαθμωτού πεδίου. Η θεωρία θα οριστεί σε  $d = 4 - \epsilon$  διαστάσεις. Η θεωρία θα γίνεται πεπερασμένη με εφαρμογή ενός άνω φράγματος στις ορμές (συχνότητες Fourier). Ο μετασχηματισμός της ΟΕ θα γίνει μέσω της βηματικής συνάρτησης. Θα περιγραφεί πώς θεωρίες με αυθαίρετα μεγάλο άνω φράγμα μπορούν να οριστούν καλά ως κατάλληλο όριο μιας θεωρίας με φραγμένα ολοκληρώματα πάνω στις ορμές.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Κβαντική Θεωρία Πεδίων</b>	<b>2</b>
1.1	Εισαγωγικά . . . . .	2
1.2	Κλασσική Θεωρία Πεδίων . . . . .	3
1.3	Κανονική Κβάντωση του Πεδίου . . . . .	6
1.4	Ολοκληρώματα Διαδρομών . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Ομάδα Επανακανονικοποίησης</b>	<b>24</b>
2.1	Ροπές,Γράφοι Feynmann και Μετασχηματισμοί Ανακλιμάκωσης . . . . .	24
2.2	Μερικές Παρατηρήσεις . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>44</b>
3.1	Στροφή Wick . . . . .	44
3.2	Μερικά Ολοκληρώματα Βρόγχων . . . . .	45

# Κεφάλαιο 1

## Κβαντική Θεωρία Πεδίων

### 1.1 Εισαγωγικά

Η κβαντική θεωρία πεδίου αποτελεί μια γενίκευση της κλασσικής κβαντομηχανικής. Στη περίπτωση της κλασσικής μηχανικής, μελετάται η κίνηση υλικών σημείων στο χώρο, θεωρώντας τις χωρικές συντεταγμένες  $q_i$  ως συναρτήσεις του χρόνου  $t$ . Όλη η πληροφορία για την εξέλιξη της κίνησης περιέχεται στη Λαγκρανζιανή  $L = L(q, \dot{q})$  με  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  και σε ορισμένες αρχικές συνθήκες.

Οι συντεταγμένες εξελίσσονται με βάση τις εξισώσεις *Euler-Lagrange*

$$q^i = q^i(t), t \in [a, b]$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Στη κβαντομηχανική η εξέλιξη των συντεταγμένων με το χρόνο είναι στοχαστική, δηλαδή δεν δίνεται πλέον από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Οι συντεταγμένες θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές. Τη βασική θέση τους παίρνει η κυματοσυνάρτηση  $\psi(q)$ , η οποία εξελίσσεται ντετερμινιστικά. Αυτή μπορεί να ερμηνευθεί ως η πυκνότητα πιθανότητας πραγματοποίησης (μέτρησης) των συντεταγμένων  $q$  σε μία πειραματική μέτρηση. Η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης δίνεται από μια τροχιά στο χώρο των κυματοσυναρτήσεων, παραμετροποιημένη με το χρόνο

$$\frac{d\psi(q; t)}{dt} = -iH\psi(q; t)$$

Ο τελεστής  $H$  είναι η χαμιλτονιανή του συστήματος και αντιστοιχεί στην ενέργεια του συστήματος. Όλα τα φυσικά μεγέθη, συμπεριλαμβανομένου των χωρικών συντεταγμένων, περιγράφονται από τελεστές, που δρουν πάνω στις κυματοσυναρτήσεις. Η όλη θεωρία έχει εξελιχθεί στην αφηρημένη θεωρία των χώρων *Hilbert*, απειροδιάστατων -εν γένει- διανυσματικών χώρων (εφοδιασμένοι με ορισμένες ιδιότητες [1]) και των γραμμικών μετασχηματισμών που ορίζονται πάνω τους. Θα χρησιμοποιήσω ορισμένες ιδέες από αυτό το φορμαλισμό, όσο αυτό είναι χρήσιμο.

Η ΚΒΘ εφαρμόζει ουσιαστικά τις τεχνικές της κβαντομηχανικής, με την ουσιώδη διαφορά ότι πλέον η τυχαία μεταβλητή  $q$  δεν ανήκει στον  $\mathbb{R}^n$  αλλά στον χώρο των συναρτήσεων ορισμένων πάνω στον  $\mathbb{R}^d$ . Είναι, δηλαδή, μια βαθμωτή συνάρτηση  $\phi(x)$ -πεδίο από εδώ και πέρα- ή ένα σύνολο αυτών. Αυτό επιβάλλει μια γνησίως διαφορετική αναπαράσταση του χώρου *Hilbert* από αυτή της κβαντομηχανικής. Αυτή εκφράζεται μέσω περίπλοκων μαθηματικών κατασκευών-χώροι μέτρου  $\mathcal{L}^2(\mathbb{F}, d\mu(\phi))$  ορισμένοι πάνω στα πεδία- και ο πλήρης φορμαλισμός [2] είναι περιορισμένης χρησιμότητας. Παρέχει όμως ένα πολύ σημαντικό εργαλείο, το ολοκλήρωμα διαδρομών (*Path/Functional Integral*). Επακόλουθα, η φυσική ερμηνεία του πεδίου είναι δύσκολη. Χονδρικά, έντονες εντοπισμένες μεταβολές του πεδίου από τη μέση τιμή του στο χώρο αντιπροσωπεύουν σωματίδια.

Αντίστοιχα με τη κλασσική μηχανική, υπάρχει και η κλασσική θεωρία πεδίου, που ασχολείται με την εξέλιξη πεδίων στο χρόνο. Μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστοιχη Λαγκρατζιανή  $L(\phi, \partial_j \phi)$ , που περιέχει όλη τη πληροφορία για την εξέλιξη του πεδίου.

## 1.2 Κλασσική Θεωρία Πεδίων

Η Λαγκρατζιανή πυκνότητα (Λαγκρατζιανή από εδώ και πέρα) του ελεύθερου σχετικιστικού πεδίου Klein-Gordon είναι

$$L = \int d^{d-1}x \mathcal{L}(x)$$

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

όπου υπονοείται ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^{d-1}$  ως πεδίο ολοκλήρωσης,  $V_s$ .

Οι εξισώσεις κίνησης για το πεδίο δίνονται μέσω του αξιωματος της ελάχιστης δράσης. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τη δράση

$$S(\phi; \phi_{initial}, \phi_{final}) \equiv \int_{i.time}^{f.time} dt L(t) = \int d^d x \mathcal{L}(x)$$

και απαιτούμε αυτή να παρουσιάζει ακρότατο για τη τροχιά του πεδίου  $\phi(t)$ . Η διαμόρφωση του πεδίου ορίζεται ως το σύνολο των τιμών του πεδίου για κάθε σημείο του χώρου, δηλαδή μια δεδομένη επιλογή του  $\phi$ .

Πέρνοντας το διαφορικό για τη δράση, με

$$\delta S(\phi; \delta\phi) = \int d^d x [\mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \partial_\mu \delta\phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)] \Rightarrow$$

$$\delta S = \int d^d x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \right] \Rightarrow$$

$$\delta S = \int d^d x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi + \int d^d x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right)$$

οπού ο δεύτερος όρος είναι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου. Ξεχωρίζουμε χρονική με χωρικές παραγώγους

$$\int d^d x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt \partial_0 \int d^{d-1}x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \delta\phi + \int dt \int d^{d-1}x \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \delta\phi \right)$$

όπου ο δεύτερος όρος, μέσω του θεωρήματος του Gauss, μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο του χωρικού όγκου  $V_s$ . Στο σημείο αυτό περιορίζουμε τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί το πεδίο και η μικρή μεταβολή  $\delta\phi$ , θεωρώντας περιοδικές αρχικές συνθήκες (μηδενικές στη πραγματικότητα, μιας και η μικρή μεταβολή πρέπει να μην επηρεάζει τις αρχικές συνθήκες του πεδίου) και ότι η μεταβολή μηδενίζεται αρκετά γρήγορα (κάτι που εξαρτάται από τη διάσταση του χώρου) για σημεία μακριά από την αρχή των αξόνων. Έτσι

$$\int d^{d-1}x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \delta\phi \Big|_{t_f} - \int d^{d-1}x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \delta\phi \Big|_{t_i} + \int dt \int_{\partial V_s} d\sigma(\vec{x}) n_j(\vec{x}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \delta\phi = 0$$

Όποτε το διαφορικό της δράσης είναι

$$\delta S(\phi; \delta\phi) = \int d^d x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi$$

Απαιτούμε αυτό να μηδενίζεται, ανεξάρτητα της μικρής μεταβολής, ώστε η δράση να παρουσιάζει ακρότατο. Για να κρίνουμε αν αυτό είναι ελάχιστο ή μέγιστο, πρέπει να υπολογίσουμε και το διαφορικό δεύτερης τάξης ως προς  $\phi$ . Κάτι τέτοιο όμως είναι έξω από τους στόχους μου και θα παραληφθεί. Καταλήγουμε έτσι στην εξίσωση *Euler-Lagrange*.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Συγκεκριμένα για το πεδίο *Klein-Gordon*

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (1.1)$$

Ένα βασικό ερώτημα για τέτοιες εξισώσεις είναι ποιοι μετασχηματισμοί, είτε στις συντεταγμένες είτε απευθείας στο πεδίο, αφήνουν την εξίσωση στην ίδια μορφή, οπότε και οι λύσεις της θα έχουν αντίστοιχα όμοια μορφή. Με τις λέξεις "ίδια μορφή", εννοούμε: έστω ένας (αντιστρέψιμος) μετασχηματισμός  $\Lambda$  στις συντεταγμένες,  $\Lambda x = x'$ . Τότε

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi(\Lambda^{-1}x') & (1.2) \\ \partial'_\mu &= \frac{\partial(\Lambda^{-1}x^{\nu'})}{\partial x^{\mu'}} * \frac{\partial}{\partial(\Lambda^{-1}x^{\nu'})} \\ (\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2)\phi'(x') &= 0 \end{aligned}$$

όπου συγκρίνοντας με την (1.1), βλέπουμε ότι είναι ίδιας μορφής. Όταν συμβαίνει αυτό, λέμε ότι η εξίσωση είναι **συνναλοίωτη** υπό αυτό το μετασχηματισμό, ο οποίος ξεχωρίζεται από άλλους δυνατούς μετασχηματισμούς με το όνομα **συμμετρία** (του δεδομένου φυσικού συστήματος). Αντίστοιχα μπορώ να ορίσω ένα μετασχηματισμό  $U$  πάνω στο πεδίο  $\phi' = U\phi$  έτσι ώστε

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] (U\phi)_{(x)} = 0$$

Η συμμετρία αυτή διαφέρει από τη προηγούμενη από το γεγονός ότι δεν επάγεται από μια συμμετρία του χώρου(ή χωροχρόνου) με μια σχέση όπως η (1.2). Τέτοιες συμμετρίες λέγονται εσωτερικές, ενώ οι πρώτες εξωτερικές. Σημειωτέων, το γεγονός ότι το πεδίο μετασχηματίζεται κατά την (1.2) το καθιστά βαθμωτό. Άλλα πεδία, τα οποία διαθέτουν περισσότερες συνιστώσες (συλλογές πεδίων) γίνεται να μετασχηματίζονται με άλλους νόμους.

Αφού αναφερόμαστε σε σχετικιστικά πεδία, οι συντεταγμένες  $x$  ανήκουν σε ένα χώρο Minkowski. Οι συμμετρίες αυτού του χώρου ανήκουν στην ομάδα *Lorentz*. Συμμετρία ενός χώρου είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί τη μετρική του χώρου, τις αποστάσεις, δηλαδή, μεταξύ των σημείων του. Επιπλέον, έχουμε και τις μετατοπίσεις τις κάθε συντεταγμένης  $x' = T_a(x) = x + a, a \in \mathbb{M}$ . Αυτές μαζί με την ομάδα *Lorentz* συναποτελούν την ομάδα *Poincare*. Η εσωτερική συμμετρία εδώ είναι απλά η αλλαγή του πρόσημου του  $\phi, \phi' = -\phi$ . Σύνολα πεδίων ή πιο περίπλοκες Λαγκρατζιανές μπορούν να οδηγήσουν σε πολυπλοκότερες συμμετρίες.

Ένας εναλλακτικός τρόπος να ορίσεις αν ένας μετασχηματισμός είναι συμμετρία του συστήματος είναι μέσω της δράσης. Αν η δράση μείνει αναλλοίωτη μετά τον μετασχηματισμό, τότε σε περίπτωση που βρισκόταν σε ακρότατο θα συνεχίσει να βρίσκεται σε ακρότατο. Άρα, αν  $S' = U^*S(\phi) = S(U\phi), S' = S$ , ο  $U$  είναι συμμετρία του συστήματος. Η δράση μένει αναλλοίωτη όταν και η Λαγκρατζιανή μένει αναλλοίωτη, πέρα από μία απόκλιση διανυσματικού πεδίου, όπως αυτή που εμφανίστηκε όταν μετέβαλα ελαφρώς το πεδίο. Υπονοείται ότι το πεδίο ικανοποιεί μια συγκεκριμένη κλάση συνοριακών και αρχικών συνθηκών, ώστε ο επιφανειακός όρος να εξαφανίζεται. Πιο ειδικά,

$$S' = \int d^d x' L'(\phi', \partial'_\mu \phi') = \int d^d x L(\phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu J^\mu(x) = S$$

συνήθως αρκεί να πάρουμε περιοδικές αρχικές συνθήκες και μηδενικές συνοριακές.

Γιατί μας απασχολούν οι συμμετρίες? Οι συμμετρίες μας διευκολύνουν να γνωρίζουμε τη μορφή της λύσης των εξισώσεων, αν και αυτό καθορίζεται και από τις αρχικές συνθήκες. Επιπλέον, κάθε συνεχής συμμετρία συνοδεύεται από ένα **διατηρούμενο ρεύμα**, σύμφωνα με το θεώρημα *Noether*. Διατηρούμενο ρεύμα είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο χώρο διαμόρφωσης του πεδίου, του οποίου η απόκλιση μηδενίζεται. Συγκεκριμένα, έστω η συμμετρία  $U$ , η οποία παραμετροποιείται με κάποιο συνέχη (διανυσματικό) δείκτη (*vector index*). Αν  $U(0) = \mathbb{I}$ , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μετασχηματισμό, που βρίσκεται κοντά στον ταυτοτικό.

$$\phi' = U(\epsilon^\mu)\phi = \phi + \epsilon^\mu(K_\mu\phi) + O(\|\epsilon\|^2)$$

$$\delta\phi = \epsilon^\mu(K_\mu\phi)$$

$$K_\mu = \left. \frac{\partial U(\epsilon)}{\partial \epsilon^\mu} \right|_{\epsilon=0}$$

Με  $\|\epsilon^\mu\| = \epsilon$ ,  $\epsilon^\mu$  μοναδιαίο. Αντίστοιχα, αναμένουμε να μετασχηματιστεί η Λαγκρατζιανή, το πολύ κατά μία απόκλιση.

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon\partial_\mu J^\mu \Rightarrow$$

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu J^\mu$$

για το διαφορικό της όμως ξέρουμε ότι

$$\delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi; \delta\phi, \delta\partial_\mu\phi) = \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right)$$

θεωρώντας ότι η  $\phi$  ικανοποιεί τις εξισώσεις E.L. και συγκρίνοντας τους δύο τύπους, βρίσκουμε

$$\epsilon\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \Rightarrow$$

$$\epsilon\partial_\mu J^\mu - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \epsilon^\nu(K_\nu\phi) \right) = 0$$

$$\partial_\mu \left[ \epsilon J^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \epsilon^\nu(K_\nu\phi) \right] = 0$$

θέτουμε

$$j_{\epsilon^\nu}^\mu = J^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \epsilon^\nu(K_\nu\phi) \quad (1.3)$$

οπότε αυτομάτως

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

το  $j^\mu$  είναι το διατηρούμενο ρεύμα, όπου έχουμε κρύψει το δείκτη  $\epsilon^\nu$ . Ο δείκτης του  $\epsilon^\mu$  δεν είναι ανάγκη να είναι Lorentz (μπορεί να είναι και εσωτερικός δείκτης), αλλά το μέτρο του θα είναι ανάλογο του  $\epsilon$  που εμφανίζεται στη μεταβολή της Λαγκρατζιανής. Μέσω του ρεύματος ορίζουμε και το διατηρούμενο φορτίο

$$\begin{aligned} \int d^{d-1}x \partial_\mu j^\mu &= 0 \Rightarrow \\ \partial_0 \int d^{d-1}x j^0 &= - \int d^{d-1}x \partial_i j^i \Rightarrow \\ Q \equiv \int d^{d-1}x j^0 &= \text{constant} \end{aligned}$$

είναι μια ποσότητα διατηρούμενη στο χρόνο, υποθέτοντας ότι το πεδίο μηδενίζεται αρκετά γρήγορα μακριά από την αρχή. Τέτοιες ποσότητες ονομάζονται ολοκληρώματα της κίνησης (*integrals of the motion*), και αποτελούν επιπλέον εξισώσεις που μας βοηθούν να επιλύσουμε την αρχική διαφορική εξίσωση.

Μια ειδική περίπτωση είναι η ενέργεια και η ορμή του πεδίου. Αυτά είναι τα διατηρούμενα φορτία για τις συμμετρίες μετατόπισης στο χωροχρόνο. Θέτουμε  $K_\mu = \partial_\mu$  στην 1.3 και επιλέγουμε  $\epsilon^\mu$  παράλληλο με ένα από τα διανύσματα βάσης του χώρου *Minkowski*. Η Λαγκρατζιανή είναι βαθμωτή συνάρτηση της θέσης, άρα μετασχηματίζεται όπως και το πεδίο

$$\begin{aligned} L'(x) &= L(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu L \\ J^\mu(\nu) &= \delta_\nu^\mu L \\ j^\mu(\nu) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - L \delta_\nu^\mu \\ T_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - L \delta_\nu^\mu \\ T_\nu^\mu &= \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - L \delta_\nu^\mu \end{aligned} \quad (1.4)$$

όπου τα τέσσερα ρεύματα συναποτελούν όλα μαζί τον ταυνοστή ενέργειας ορμής του πεδίου—όταν ο κινητικός όρος της Λαγκρατζιανής έχει τη συνήθη μορφή  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ .

Ορίζουμε τη συζυγή πυκνότητα ορμής του πεδίου

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$$

και ορίζουμε τη Χαμιλτονιανή (*Hamiltonian*) πυκνότητα

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}$$

και τη Χαμιλτονιάνη

$$H = \int d^{d-1} x \mathcal{H}$$

Εύκολα φαίνεται ότι

$$T_0^0 = \mathcal{H}$$

άρα η  $H$  είναι το διατηρούμενο φορτίο που συνδέεται με τις μετατοπίσεις στο χρόνο.

### 1.3 Κανονική Κβάντωση του Πεδίου

Ακολουθώντας τη μέθοδο της κβαντομηχανικής, αντιστοιχούμε στο παρατηρήσιμο μέγεθος  $\phi$  έναν τελεστή. Μια πλήρης ανάλυση των παρακάτω υπάρχει εδώ [3]. Για την ακρίβεια, καθώς πρόκειται για μια συλλογή σημείων  $\phi(x)$ <sup>1</sup>, αντιστοιχούμε σε κάθε ένα από αυτά ένα τελεστή. Επιπλέον ορίζουμε έναν χώρο *Hilbert*  $\mathbb{H}$ , του οποίου τα σημεία περιγράφουν πλήρως την κατάσταση του φυσικού συστήματος. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Dirac, ένα τέτοιο σημείο το γράφουμε  $|\psi\rangle$  ή εναλλακτικά  $\psi$  για απλότητα. Ο χώρος *Hilbert* διαθέτει ένα εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{αντιγραμμικό στο πρώτο όρισμα του}$$

μπορούμε να ορίσουμε τον δυικό  $\mathbb{H}^*$ <sup>2</sup>, με στοιχεία  $\psi^* = \langle \psi, \bullet \rangle$ . Αυτά συμβολίζονται ως  $\langle \psi |$ . Το εσωτερικό γινόμενο είναι απλά  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ . Ένα βασικό συμπέρασμα είναι ότι ο δυικός του χώρου *Hilbert* είναι ισόμορφος με αυτόν.

<sup>1</sup>Η μεταβλητή  $x$  θεωρούμε ότι είναι μόνο χωρική (τελεστής Schrodinger).

<sup>2</sup>Συγκεκριμένα, ο τοπολογικός δυικός του  $\mathbb{H}$  αποτελείται από τις συνεχείς γραμμικές μορφές, συνεχείς υπό την επαγόμενη από την νόρμα του  $\mathbb{H}$  έννοια της σύγκλισης.



Μπορούμε να χαλαρώσουμε την έννοια της σύγκλισης, επιλέγοντας έναν υποχώρο  $\mathbb{D}$  του  $\mathbb{H}$ , και βρίσκοντας τον δικό του ως προς το εσωτερικό γινόμενο. Το αποτέλεσμα είναι ένας χώρος  $\mathbb{D}^*$  που περιέχει τον  $\mathbb{H}$ , καθώς

$$\langle \psi, \psi_D \rangle, \psi \in \mathbb{H} \quad \text{and} \quad \psi_D \in \mathbb{D} \subset \mathbb{H}$$

προφανώς είναι πεπερασμένο. Ο χώρος αυτός είναι ο χώρος των **κατανομών** (*distributions*). Το κριτήριο για την επιλογή του  $\mathbb{D}$  είναι, στη περίπτωση που μας ενδιαφέρει, να ορίζεται πάνω σε κάθε στοιχείο του ο τελεστής  $\phi(x)$ , και επιπλέον να το επιστρέφει στον  $\mathbb{D}$  ή τουλάχιστον να ορίζεται μέχρι και κάποια δύναμη του τελεστή. Μπορούμε να ορίσουμε επίσης τον τελεστή της συζυγής πυκνότητας ορμής,  $\pi(x)$ , και με βάση αυτόν να ορίσουμε ένα αντίστοιχο υποχώρο. Στη τομή αυτών των δύο θα ορίζονται προφανώς και οι δύο. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη δράση του  $\phi(x)$  σε όλα τα στοιχεία του  $\mathbb{H}$

$$L\psi = \langle L^* \psi, \bullet \rangle = \langle \psi, L(\bullet) \rangle$$

Αυτά είναι θέματα που προκύπτουν και στη κλασική κβαντομηχανική<sup>3</sup>. Γιατί να υπάρχει πρόβλημα ορισμού των δύο αυτών τελεστών? Θέλουμε να επιβάλλουμε τη σχέση

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta^{d-1}(x - x') \quad (1.5)$$

Μια τέτοια σχέση είναι αδύνατη για φραγμένους τελεστές [4]. Αναγκαστικά θα είναι άφραχτοι και θα ορίζονται για ένα υποσύνολο του  $\mathbb{H}$ . Ένα τέτοιο είναι η τομή των δύο παραπάνω συνόλων. Το σύνολο αυτό θα πρέπει είναι πυκνό στον  $\mathbb{H}$  [3]. Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε τη Χαμιλτονιανή, όπως και στη κλασική κβαντομηχανική, μέσω της εξίσωσης Schrodinger

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -iH(|\psi(t)\rangle) \quad (1.6)$$

για μια τροχιά  $|\psi(t)\rangle$  στον  $\mathbb{H}$ .

Η Χαμιλτονιανή προκύπτει από την αντίστοιχη κλασική, θεωρώντας τα αντίστοιχα πεδία τελεστές. Εδώ να σημειώνεται ότι γινόμενα του τύπου  $\phi(x)\phi(x)$ , που προκύπτουν στην  $H$ , δεν είναι καλά ορισμένα, εξαιτίας της σχέσης (1.5). Αντικείμενα όπως

$$\mathfrak{M}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \psi | \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) | \psi \rangle$$

πρέπει να κατανοούνται ως κατανομές ως προς κάθε μία μεταβλητή στον χώρο των μιγαδικών συναρτήσεων πάνω στον  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Μπορούμε επομένως να γράψουμε τυπικά την  $H$ , αλλά αναμένουμε να χρειαστεί κάποιος επανορισμός της για να βγάλουν νόημα οι πράξεις. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να την ορίσουμε βάσει κάποιας διαμέρισης της μονάδας (*partition of unity*) του  $\mathbb{R}^{d-1}$  [5]. Τα παραπάνω είναι, κυρίως, τεχνικά θέματα. Μπορούμε να υποθέσουμε, ότι οι σχέσεις, που γράφουμε, μπορούν με κάποιον επανορισμό να γίνουν καλά ορισμένες. Όπου είναι αυτό χρήσιμο θα το κάνω.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα της χρονικής εξέλιξης των καταστάσεων του συστήματος, πρέπει ουσιαστικά να διαγωνοποιήσουμε την χαμιλτονιανή. Πρέπει να βρούμε δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα της. Γράφουμε την  $H$ .

$$H = \int d^{d-1}x \frac{1}{2} \left[ \pi(x)\pi(x) + \sum_j \partial_j \phi(x) \partial_j \phi(x) + m^2 \phi(x)\phi(x) \right]$$

<sup>3</sup>Εδώ πρέπει να γίνει μία διευκρίνιση: οι κατανομές θα αναφέρονται από εδώ και πέρα στο χώρο *Hilbert* των βαθμωτών συναρτήσεων του  $\mathbb{R}^d$ . Παράλληλα, υπάρχει και ο χώρος *Hilbert* των φυσικών καταστάσεων, στον οποίο δρουν οι τελεστές πεδίου, βάσει του οποίου μπορεί επίσης να οριστεί ένας άλλος χώρος κατανομών. Σε αυτόν αναφέρομαι παραπάνω

<sup>4</sup>Συγκεκριμένα αναφερόμαστε στις συναρτήσεις  $\phi(x)$  ως κατανομές με πεδίο τιμών τελεστές (*operator-valued distributions*).

εισάγουμε τους χρονοεξαρτημένους τελεστές ή τελεστές Heisenberg. Η λύση της εξίσωσης (1.6) γράφεται, δεδομένου της αρχικής συνθήκης  $|\psi\rangle_{(0)} = |\psi_0\rangle$

$$|\psi\rangle_{(t)} = e^{-itH} |\psi_0\rangle$$

Διάφορα φυσικά μεγέθη υπολογίζονται μέσω ποσοτήτων όπως  $\langle\psi_{1,(t)} | A(\phi) | \psi_{2,(t)}\rangle$ . Αντί να εξελίσσουμε χρονικά τις καταστάσεις, μπορούμε να μεταφέρουμε την εξέλιξη αυτή στους τελεστές.

$$\phi(t) = e^{itH} \phi e^{-itH}$$

ποίο από τα δύο εξελίσσουμε είναι αδιάφορο για τις ποσότητες αυτές

$$M(t) = \langle\psi_{1,(t)} | A(\phi) | \psi_{2,(t)}\rangle = \langle\psi_1 | A(\phi(t)) | \psi_2\rangle$$

μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε και τη παράγωγο ως προς τον χρόνο των νέων τελεστών. Εύκολα προκύπτει

$$\partial_0 \phi(t) = -i [\phi(t), H]$$

το οποίο ισχύει για κάθε τελεστή. Δεδομένου αυτής της σχέσης, της (1.5) και της χαμιλτονιανής Klein-Gordon, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\partial_0 \phi(t) = \pi(t)$$

$$[\partial_j \phi(x), \pi(x')] = i \partial_j \delta^{(d-1)}(x - x')$$

$$\partial_0^2 \phi(t) = \partial_0 \pi(t) = \sum_j \partial_j^2 \phi(t) - m^2 \phi(t)$$

όπου η τελευταία είναι η εξίσωση Klein-Gordon, αλλά για τους τελεστές. Έχουμε κρύψει τη χωρική εξάρτηση των τελεστών. Την επαναφέρουμε και αναπτύσσουμε σε Fourier-modes τον τελεστή πεδίου.

$$\phi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left( -p_0^2 + p_j^2 + m^2 \right) \left( a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right) = 0$$

το οποίο ικανοποιείται αυτόματα αν επανορίσουμε το  $a(p)$

$$a(p) = 2\pi a(p) \delta(p_0^2 - p_j^2 + m^2)$$

όποτε μερικοί χειρισμοί τις συνάρτησης δέλτα

$$\int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \delta(p_0^2 - B) A(p_0, B)$$

$$\int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} \left[ \int_{\sqrt{B+\epsilon}}^{+\infty} + \int_0^{\sqrt{B+\epsilon}} + \int_{-\sqrt{B+\epsilon}}^0 + \int_{-\infty}^{-\sqrt{B+\epsilon}} dp_0 (\delta(p_0^2 - B) A(p_0, B)) \right]$$

$$u = p_0^2 \Rightarrow p_0 = +\sqrt{u} \text{ or } p_0 = -\sqrt{u}$$

$$\int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^{B+\epsilon} \frac{du}{\sqrt{u}} \delta(u - B) A(\sqrt{u}, B)$$

υποθέτοντας  $A(p_0, B) = A(-p_0, B)$ . Ακριβέστερα, εδώ θα πρέπει να επανορίσουμε τις ορμές  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  και να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι  $a(p) = a^\dagger(-p)$  λόγω ερμιτιανότητας του  $\phi(x)$ . Έτσι γράφουμε τελικά

$$\phi(x) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right)$$

με  $p_0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Η συζυγής ορμή θα είναι

$$\pi(x) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} \left( a(\vec{p})e^{-ipx} - a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right)$$

όποτε η σχέση μετάθεσης των δύο τελεστών οδηγεί στη σχέση

$$\left[ a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}') \right] = (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.7)$$

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα είναι ανάλογο του απλού αρμονικού ταλαντωτή, μόνο πού στη περίπτωση μας έχουμε ένα συνεχές σύνολο αρμονικών ταλαντωτών. Αποδεικνύεται, λοιπόν, ότι οι  $a^\dagger(p)$ ,  $a(p)$  είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, που δημιουργούν καταστάσεις ορμής  $\vec{p}$  και ενέργειας  $E_p$ . Επιπλέον, θα υπάρχει μια ιδιοκατάσταση με την ελάχιστη ενέργεια,  $|0\rangle$ , την οποία θα μηδενίζει ο τελεστής καταστροφής. Αυτή είναι η θεμελιώδης κατάσταση, από την οποία παράγουμε όλες τις άλλες ιδιοκαταστάσεις με αλληλάλληλη εφαρμογή τελεστών δημιουργίας διάφορων ορμών. Η χαμιλτονιανή Klein-Gordon έχει μοναδική θεμελιώδη κατάσταση, κάτι το οποίο δεν ισχύει γενικά για τις χαμιλτονιανές. Έτσι η χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί, τελικά,

$$H = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} E_p \left[ a^\dagger(p)a(p) + [a(p), a^\dagger(p)] \right]$$

Ο δεύτερος όρος δεν ορίζεται καθώς η συνάρτηση δέλτα είναι μία γραμμική μορφή πάνω στον χώρο των συναρτήσεων του  $\mathbb{R}^{d-1}$ , που γράφεται για λόγους ευκολίας με όρισμα  $p$ . Κάτι τέτοιο μπορεί να αποφευχθεί με τους πιο προσεχτικούς χειρισμούς που ανέφερα παραπάνω. Ο όρος, όμως, εξακολουθεί να έχει συνέπειες ακόμη και αν οριστεί σωστά, καθότι συνεχίζει να είναι αυθαίρετος. Λέμε ότι χάνουμε τη προβλεψιμότητα της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος. Αυτό δεν μας επηρεάζει, καθώς μπορούμε να επανορίσουμε τη χαμιλτονιανή χωρίς αυτό τον όρο, και ταυτόχρονα να έχουμε την ίδια δυναμική για το σύστημα. Μετράμε δηλαδή όλες τις άλλες ενέργειες σε σχέση με την θεμελιώδη (και ουσιαστικά και την εξέλιξη των άλλων καταστάσεων στο χρόνο σε σχέση με τη θεμελιώδη).

Ορίζουμε τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις ορμής  $\mathbf{p}$

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_p} a^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$$

Τέτοιες καταστάσεις δεν ανήκουν στο χώρο *Hilbert* των φυσικών καταστάσεων, καθότι δεν ορίζεται η νόρμα τους (*improper vectors*). Είναι, παρόλαυτα, συγγενικά αντικείμενα με τις φυσικές καταστάσεις, με την έννοια ότι μπορεί να βρεθεί μια ακολουθία καταστάσεων που να βρίσκεται όσο κοντά θέλουμε σε αυτές. Η χρησιμότητα τους προκύπτει από το γεγονός ότι η δράση των  $a^\dagger$ ,  $a$  πάνω τους είναι πολύ απλή και μπορούμε να δημιουργήσουμε εντοπισμένα στο χώρο κυματοπακέτα από αυτές, ως γραμμικούς συνδυασμούς τους.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε όσα σωματίδια ίδιας ορμής θέλουμε στη παραπάνω κατάσταση και να δημιουργήσουμε έτσι πολυσωματιδιακές καταστάσεις, με ορισμένο αριθμό σωματιδίων. Έχουμε να κάνουμε λοιπόν με μπόζονια. Επιπλέον, η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων αυτών είναι σχετικώς τετριμμένη. Οι ιδιοκαταστάσεις της ορμής πολλαπλασιάζονται με μία φάση, ανάλογη της ενέργειας και τα κυματοπακέτα παρουσιάζουν μια αυξανόμενη με το χρόνο διασπορά. Δεδομένου ότι αυτές είναι ιδιοκαταστάσεις της χαμιλτονιανής, με διαφορετικές ιδιοτιμές, θα είναι ορθογώνιες μεταξύ

τους. Αυτό σημαίνει απλά ότι δεν υπάρχουν ούτε σκεδάσεις, ούτε παραγωγή σωματιδίων σε αυτή τη θεωρία.

Ας προσθέσουμε στη χαμιλτονιανή έναν όρο αλληλεπίδρασης(ή διαταραχή)  $\lambda\phi^4(x)$ . Η διαφορική εξίσωση για τον τελεστή πεδίου μεταβάλλεται, και η ακριβή λύση της δεν έχει βρεθεί. Επιπλέον, η χρονική εξέλιξη καταστάσεων, όπως ελεύθερων αρχικά κυματοπακέτων επιτρέπει φαινόμενα όπως η σκέδαση, είναι δηλαδή πιο ρεαλιστική.

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε καταστάσεις της αλληλεπιδρούσας θεωρίας οι οποίες είναι ασυμπτωτικά ελεύθερες. Με αυτό εννοούμε ότι αν  $H, H_0$  είναι η αλληλεπιδρούσα και η ελεύθερη χαμιλτονιανή αντίστοιχα, και αντίστοιχα για κατάλληλες καταστάσεις  $|\psi\rangle, |\psi_f\rangle$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-iHt} |\psi\rangle - e^{-iH_0 t} |\psi_f\rangle\| = 0$$

Η  $|\psi\rangle$  είναι μια ασυμπτωτικά ελεύθερη κατάσταση. Αν κάτι τέτοιο είναι δυνατό, εξαρτάται από την διαταραχή της χαμιλτονιανής. Γενικά στη ΚΒΘ, οι ελεύθερες καταστάσεις πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να ισχύει μια τέτοια σχέση. Αυτό είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι είναι αδύνατο να "σβήσουμε" την επιρροή της αλληλεπίδρασης πάνω σε ένα σωματίδιο, καθώς ακόμη και αν είναι μόνο του, αυτό θα αλληλεπιδρά με "δνητικά" σωματίδια. Ίσως είναι καλύτερο να πούμε, ότι η ίδια η έννοια του σωματιδίου δε περιγράφει καλά τη κατάσταση του συστήματος, καθώς αυτό είναι σύνθετο και αποτελείται από πολλά "μέρη", η χρονική εξέλιξη των οποίων είναι ισχυρά περιπλεγμένη.

Σε κάθε περίπτωση, δεχόμενοι κάποιες κατάλληλες "ελεύθερες" καταστάσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος σκέδασης από μια κατάσταση σε μια άλλη. Μια πλήρη ανάλυση του θέματος δίνεται εδώ [6]. Ξεκινάμε με κάποια κατάσταση στο μακρινό παρελθόν(in καταστάσεις) και την εξελίσσουμε στο μακρινό μέλλον(out καταστάσεις), έτσι ώστε να είναι αποδεκτή η αντικατάσταση της κατάστασης με την αντίστοιχη ελεύθερη. Τη παραπάνω δουλειά τη πραγματοποιεί ο τελεστής  $S$

$$\langle \psi_{2,out} | S | \psi_{1,in} \rangle$$

Ο τελεστής  $S$  ορίζεται ως συνάρτηση των τελεστών πεδίου. Συγκεκριμένα, επειδή δε γνωρίζουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης τους, εξελίσσουμε χρονικά τους τελεστές μόνο με την ελεύθερη χαμιλτονιανή("interaction picture"). Τελικά, ο  $S$  μπορεί να γραφεί

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} T \left( \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right)$$

όπου

$$H_I(t) = \int d^d x \lambda \phi^4(x)$$

$$T(\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)) = \sum_{\{t_i\}} u(t_{i_1} - t_{i_2}) \dots u(t_{i_{n-1}} - t_{i_n}) \phi(x_{i_1}) \phi(x_{i_2}) \dots \phi(x_{i_n})$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλες τις δυνατές διατάξεις των  $t_i$  ( $n!$  στο σύνολο) και  $u$  η βηματική συνάρτηση. Ο τελεστής  $T$  είναι ο τελεστής της χρονικής διάταξης(*time-ordering*). Στον ορισμό του  $S$ , ο  $T$  υπονοείται ότι περνάει μέσα από τα ολοκληρώματα, όταν το εκθετικό αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά.

Οποιοσδήποτε από τις καταστάσεις που περιέχουν σωματίδια μπορούν να παραχθούν από τη θεμελιώδη κατάσταση, είτε τις αλληλεπιδρούσας είτε ελεύθερης θεωρίας. Από τον ορισμό του  $S$  φαίνεται πια ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές του πεδίου στο κενό (vacuum expectation values-v.e.v.) διαφόρων τάξεων. Αυτές είναι της μορφής

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

Τα πεδία γράφονται συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, οπότε δεν έχουμε παρά να μετακινήσουμε δεξιά όλα τα  $a$  και αριστερά όλα τα  $a^\dagger$  για να εκφράσουμε το αποτέλεσμα συναρτήσεων  $c$ -αριθμών(*commuting numbers*). Μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή κανονικής διάταξης(*normal*

ordering) $\mathbb{N}$ , ο οποίος κάνει ακριβώς αυτό στο όρισμα του. Βέβαια, λόγω της (1.7), αναμένουμε σε κάθε μετάθεση να εμφανιστεί ένας όρος ανάλογος του δέλτα του Dirac. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E_p}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E_q}} \left( a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx} \right) \left( a(q)e^{-iqy} + a^\dagger(q)e^{iqy} \right) \Rightarrow \\ \phi(x)\phi(y) &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E_p}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E_q}} \left( a(p)a(q)e^{-ipx}e^{-iqy} + a(p)a^\dagger(q)e^{-ipx}e^{iqy} + \right. \\ &\quad \left. + a^\dagger(p)a(q)e^{ipx}e^{-iqy} + a^\dagger(p)a^\dagger(q)e^{ipx}e^{iqy} \right) \Rightarrow \\ \phi(x)\phi(y) &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E_p}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E_q}} \left[ (\text{other ordered terms}) + (2\pi)^{d-1} \cdot \delta^{(d-1)}(p-q)e^{-ip(x-y)} \right]\end{aligned}$$

η νεν αυτού είναι απλά

$$\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)}$$

κάνοντας μια μικρή παραδρομή, ως εξετάσουμε την εξής έκφραση

$$D(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i}{p^2 + m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (1.8)$$

πρόκειται για τη συνάρτηση Green του διαφορικού τελεστή της εξίσωσης Klein-Gordon ( $\partial_\mu \partial^\mu + m^2$ ) με κάποιες συνοριακές συνθήκες. Η έκφραση αυτή δεν είναι καλά ορισμένη, καθώς μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερα του ενός αποτελέσματα. Για να το δούμε καλύτερα αυτό, απομονώνουμε το ολοκλήρωμα πάνω στο  $p_0$

$$\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\mathbf{p}(x-y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{-i}{p_0^2 - \Delta} e^{-ip_0(x^0 - y^0)} \quad (1.9)$$

$$\Delta = \mathbf{p}^2 + m^2$$

για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα πάνω στο  $p_0$  καταφεύγουμε σε γνωστές τεχνικές της μιγαδικής ανάλυσης. Επεκτείνουμε το  $p_0$  σε μιγαδικές τιμές  $z$ , και υποθέτουμε μία κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο που αποφεύγει τους δύο πόλους της ολοκληρούμενης συνάρτησης  $-\sqrt{\Delta}, \sqrt{\Delta}$ . Η καμπύλη αποτελείται από ένα τμήμα που είναι ίδιο με την ολοκλήρωση κατά μήκος του πραγματικού άξονα, εκτός από δύο μικρά διαστήματα που περιέχουν τους πόλους, όπου η καμπύλη εισέρχεται στο μιγαδικό επίπεδο. Η καμπύλη είναι εκεί συνάρτηση ενός θετικού αριθμού  $\epsilon$ , έτσι ώστε όταν τείνει αυτός στο μηδέν, η καμπύλη να ταυτίζεται με τον πραγματικό άξονα παντού. Επιπλέον, η αρχή και το τέλος αυτής της ευθείας συνδέονται με ένα ημικύκλιο, η ακτίνα του οποίου τελικά θα τείνει στο άπειρο. Εξαιτίας του όρου  $\frac{1}{p_0^2 - \Delta}$ , η συνεισφορά αυτού του τελευταίου όρου τελικά είναι αμελητέα, αρκεί το εκθετικό να παραμένει φραγμένο. Το ημικύκλιο θα πρέπει να βρίσκεται στο άνω ή στο κάτω ημιεπίπεδο, ώστε να συμβαίνει αυτό. Συγκεκριμένα, κοιτώντας το όρισμα του εκθετικού  $-i(a+ib)(x^0 - y^0)$ , βλέπουμε ότι όταν  $x^0 - y^0 > 0$  τότε  $b < 0$  (κάτω ημιεπίπεδο) και όταν  $x^0 - y^0 < 0$  τότε  $b > 0$  (άνω ημιεπίπεδο). Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

$$\int_C dz \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

για μια ολόμορφη συνάρτηση  $f(z)$ , όταν στο εσωτερικό της  $C$  περιέχεται ο πόλος  $z_0$ .

Η ασάφεια στον ορισμό της 1.8 έγκειται στο πώς αποφεύγουμε τους πόλους. Αν είναι δηλαδή ο καθένας τους πάνω ή κάτω από το τμήμα της καμπύλης που προσομοιάζει τον πραγματικό άξονα. Συνολικά υπάρχουν τέσσερις τέτοιοι τρόποι, αλλά με μια ανάκλαση του χρόνου απεικονίζονται ο ένας στον

άλλο ανά δύο. Ουσιαστικά έχουμε τρεις συναρτήσεις Green, την καθυστερημένη(*retarded*), με τους πόλους κάτω από την καμπύλη, την προχωρημένη(*advanced*), με τους πόλους πάνω από τη καμπύλη, και την αιτιακή(*causal*), με τον ένα πόλο πάνω και τον άλλο πόλο κάτω. Η πρώτη μηδενίζεται για αρνητικούς χρόνους, η δεύτερη για θετικούς, ενώ η τρίτη για κανέναν. Ο τελευταίος ονομάζεται και διαδότης *Feynmann*,  $D_F(x, y)$  Ας υπολογίσουμε το (1.9) για τον θετικό πόλο κάτω και τον αρνητικό πόλο κάτω από τη καμπύλη

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_C \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{-i}{p_0-\sqrt{\Delta}} - \frac{-i}{p_0+\sqrt{\Delta}} \right) e^{-ip_0(x^0-y^0)} \Rightarrow \\ &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} e^{-i\sqrt{\Delta}(x^0-y^0)}, \text{ if } x^0 - y^0 > 0 \\ &= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} e^{i\sqrt{\Delta}(x^0-y^0)}, \text{ if } x^0 - y^0 < 0 \end{aligned}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο στο δεύτερο αποτέλεσμα αναιρείται λόγω της αρνητικής φοράς ολοκλήρωσης πάνω στην καμπύλη  $C$ . Παρατηρούμε, αμέσως μετά από μια αναστροφή του  $\mathbf{p}$ ,

$$D_F(x, y) = \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = G^{(2)}(x, y) \quad (1.10)$$

η οποία είναι μια πολύ βασική σχέση. Αυτοματοποιούμε αυτή την επιλογή ολοκλήρωσης γράφοντας

$$D_F(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

όπου οι πόλοι μετατοπίζονται όπως ακριβώς θέλουμε σε σχέση με τον πραγματικό άξονα. Υπάρχει ένα ζήτημα σύγκλισης του ολοκληρώματος, ανάλογα και με τον αριθμό των διαστάσεων, αλλά δε θα το ερευνήσουμε εδώ.

Το αντικείμενο αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς οι αναμενόμενες τιμές  $G^{(n)}$  οποιασδήποτε τάξης μπορούν να αναχθούν σε πράξεις μεταξύ διαδοτών Feynman. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του Θεωρήματος του Wick. Ορίζουμε το **contraction**

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = D_F(x, y)$$

όπου  $\phi^+$ ,  $\phi^-$  είναι αντίστοιχα το θετικό και αρνητικό ως προς τις συχνότητες Fourier μέρος του  $\phi$ . Το θεώρημα του Wick ισχυρίζεται ότι οι  $G^{(n)}$  είναι ίσες με το άθροισμα όλων των δυνατών contractions των πεδίων. Δηλαδή

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) | 0 \rangle &= \langle 0 | N[\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) + \\ &+ \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)} + (\text{all other possible contractions})] | 0 \rangle \end{aligned}$$

προφανώς επιζούν μόνο fully-contracted όροι. Από αυτό, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μόνο ροπές άρτιας τάξης είναι μη μηδενικές, καθώς τα πεδία γίνονται contracted ανά ζεύγη. Για παράδειγμα η ροπή τέταρτης τάξης θα είναι

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\ &= D_F(x_1, x_2)D_F(x_3, x_4) + D_F(x_1, x_3)D_F(x_2, x_4) + D_F(x_1, x_4)D_F(x_2, x_3) \end{aligned}$$

όπου όλα τα δυνατά contractions είναι εν γένει  $(2n-1) * (2n-3) * \dots * 3 * 1$  για  $2n$  πεδία.

Είναι δυνατόν σε αυτό το σημείο να κάνουμε υπολογισμούς με τη μήτρα σκέδασης. Για τους σκοπούς του παρόντος, όμως, είναι πιο εποικοδομητικό να προχωρήσουμε στον φορμαλισμό των Path-Integrals.

## 1.4 Ολοκληρώματα Διαδρομών

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μετάβασης ενός σωματιδίου μεταξύ δύο σημείων σε ορισμένο χρόνο. Έστω ότι το πλάτος πιθανότητας (ή μια κατάλληλα ορισμένη πυκνότητα αυτού) πραγματοποίησης μιας κλασσικής τροχιάς είναι  $e^{-iS(q)}$ ,  $S$  η δράση όπως ορίστηκε παραπάνω, με συνοριακές συνθήκες  $q_a$  και  $q_b$ . Το συνολικό πλάτος μετάβασης μεταξύ των δύο σημείων θα είναι το άθροισμα όλων των δυνατών τροχιών

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \sum_q (e^{iS(q; q_a, t_a; q_b, t_b)})$$

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \langle q_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | q_a \rangle$$

πρέπει να ορίσουμε μια αναπαράσταση αυτής της άθροισης. Ακολουθούμε την εξής μέθοδο. Επιλέγουμε μια συλλογή  $n + 1$  σημείων από το διάστημα  $[t_a, t_b]$  ( $t_0 = t_a, t_n = t_b$ ), που ισαπέχουν  $\Delta\tau = \frac{t_b - t_a}{n}$ . Επιπλέον, προσεγγίζουμε τη δράση μιας διαδρομής

$$S(q) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2(t) - V(q(t)) \right)$$

με

$$S_{\Delta\tau}(\{q_i\}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m}{2} \frac{(q_i - q_{i-1})^2}{\Delta\tau^2} - V(q_i + q_{i-1}) \right) \Delta\tau$$

$$q(t_i) = q_i$$

και αθροίζουμε πάνω σε όλες τις δυνατές διαδρομές ολοκληρώνοντας κατά κάθε  $q_i$

$$\langle q_b | q_a \rangle = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \int \frac{dq_i}{B} \right) \exp \left( i\Delta\tau \sum_{j=1}^n \left( \frac{m}{2} \frac{(q_j - q_{j-1})^2}{\Delta\tau^2} - V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right) \right) \right)$$

όπου  $B$  μια σταθερά που εξασφαλίζει τη σύγκλιση της έκφρασης στο όριο  $\Delta\tau \rightarrow 0$ . Σε αυτό το όριο ελπίζουμε να ανασύρουμε την αρχική ποσότητα. Ο υπολογισμός γίνεται επαγωγικά. Γράφουμε πιο απλά<sup>5</sup>

$$\int Dq e^{iS(q; q_a, q_b)}$$

Αν αρχικά το σύστημα είναι στην κατάσταση με κυματοσυνάρτηση  $\psi(q)$

$$\langle q_a | \psi \rangle = \int Dq \int dq_a e^{iS(q; q_a, q_b)} \psi(q_a)$$

και αντίστοιχα για τη τελική στιγμή.

Θεωρούμε πάλι την ίδια έκφραση, αλλά κάνουμε την αντικατάσταση  $t \rightarrow -i\tau$ , τη λεγόμενη στροφή Wick (*Wick rotation*, περισσότερα στο παράρτημα Α). Επιπλέον,  $q_M(t) = q(t) \rightarrow q(\tau) = q_M(i\tau)$ . Τότε γράφουμε τυπικά

$$\int Dq \exp \left[ i \int -id\tau \left( \frac{m}{2} \left( i \frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) \right) \right] \Rightarrow$$

$$\int Dq \exp \left[ - \int d\tau \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q) \right) \right] = \int Dq e^{S_E(q)}$$

<sup>5</sup> Το  $Dq$  αναπαριστά τον όρο  $\prod_i \frac{dq_i}{B}$  στο όριο που ο δείκτης γίνεται συνεχής, δεν αποτελεί όμως το μέτρο ολοκλήρωσης από μόνο του.

Αυτό ορίζει, με κατάλληλα επιλεγμένα σετ συναρτήσεων  $q(\tau)$ , ένα θετικά ορισμένο μέτρο <sup>6</sup> πάνω σε χώρο των πραγματικών συναρτήσεων πάνω στον  $\mathbb{R}$ . Είναι ενδιαφέρον ότι το εκθετικό με όρισμα  $-\int dt \frac{m}{2} \dot{q}^2$  είναι μέρος του μέτρου( περισσότερα στο παράρτημα Β).<sup>7</sup>

Δεδομένου αυτού του μέτρου, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συντεταγμένη  $q$  τυχαία μεταβλητή και να προχωρήσουμε στον υπολογισμό μέσων τιμών συναρτήσεων της

$$\langle f(q) \rangle = \frac{\int Dq e^{S_E(q)} f(q)}{\int Dq e^{S_E(q)}}$$

Μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχα για ένα πεδίο  $\phi(x)$  τέτοιες εκφράσεις. Υπάρχουν όμως ορισμένες επιπλοκές. Πρώτον, οι διαστάσεις είναι πάνω από μία και, δεύτερον, σε αυτή την περίπτωση δεν ενδιαφερόμαστε για μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων όπως οι  $|q_i\rangle$ , έστω  $|\phi_a\rangle$ , καθώς θέλουμε να υπολογίσουμε νενς. Θεωρούμε μια συλλογή σημείων του χώρου  $\{x_n\}$  και στιγμιότυπα του πεδίου  $\phi_i$ , συνοριακές συνθήκες  $\phi_a, \phi_b$ (συναρτήσεις μόνο του χώρου).

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \lim_{\Delta\tau, \Delta s \rightarrow 0} \prod_{i=1}^N \prod_n \int \frac{d\phi_{i,n}}{A} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{N-1} \sum_m \Delta\tau \Delta s^3 \frac{1}{2} \left( \frac{(\phi_{j,m} - \phi_{j-1,m})^2}{\Delta\tau^2} - \sum_e \frac{(\phi_{j,m} - \phi_{j,m-e})^2}{\Delta s^2} - m^2 \left( \frac{\phi_{i,n} + \phi_{i-1,n} + \sum_e \phi_{i,n+e}}{2d} \right)^2 \right) \right]$$

όπου

$$\phi_{0,m} = \phi_a(x_m)$$

$$\phi_{N,m} = \phi_b(x_m)$$

και τα  $n, e^8$  είναι διανυσματικοί δείκτες. Μπορούμε να γράψουμε κυματοσυναρτήσεις και σε αυτήν την περίπτωση <sup>9</sup>,  $\Psi(\phi)$  όποτε τυπικά

$$|\Psi\rangle = \int D\phi e^{\int d^{d-1}x (-(\partial_j\phi)^2 - m^2\phi^2)} \Psi(\phi) |\phi\rangle$$

οπού διαισθητικά μπορούμε να δούμε ότι ο φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων διαδρομής παρέχει μια αναπαράσταση του χώρου *Hilbert* της κανονικής κβάντωσης του πεδίου. Μπορούμε έτσι να εκφράσουμε και την θεμελιώδη κατάσταση  $O(\phi)$ , και να υπολογίσουμε όρους όπως

$$\langle 0 | e^{-iH(t_b-t_a)} | 0 \rangle$$

Σε κάθε περίπτωση, αποδεικνύεται ότι στο όριο που το χρονικό διάστημα  $t_b - t_a$  γίνεται αυθαίρετα μεγάλο να υπολογίσουμε νενς του τύπου

$$\langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle = \frac{\int D\phi e^{iS(\phi)} \phi(x_1)\phi(x_2)}{\int D\phi e^{iS(\phi)}}$$

Από εδώ και μπρος θα αναφερόμαστε στην ευκλείδεια δράση  $S_E$ , και ροπές του πεδίου ,όπως η παραπάνω, θα παίρνουν ως όρισμα μόνο χωροειδή τετραδιανύσματα. Σε αυτή την περίπτωση, τα αποτελέσματα αντιστοιχούνται μέσω της σχέσης  $\phi_M(x^0, \vec{x}) = \phi_E(-ix^0, \vec{x})$  Υποθέτουμε ότι είναι δυνατό

<sup>6</sup>Έτσι, εκφράσεις όπως  $\int Dq e^{iS(q; q_a, q_b)}$  έχουν νόημα μόνο ως ένα κατάλληλα επιλεγμένο όριο εκφράσεων όπως  $\int Dq e^{S_E(q)}$ .

<sup>7</sup>Σημειωτέον, οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να οριστούν για να έχει νόημα η έκφραση.

<sup>8</sup>Ο  $e$  τρέχει πάνω στους πλησιέστερους γείτονες στο πλέγμα.

<sup>9</sup>Το μέτρο ολοκλήρωσης εδώ αφορά συναρτήσεις του  $\mathbb{R}^{d-1}$



να επεκταθούν με κατάλληλο επανορισμό και στον υπόλοιπο χώρο *Minkowski*. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την δράση  $S(\phi)$

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \frac{1}{2} (-\partial_j \phi \partial_j \phi - m^2 \phi \cdot \phi) \\ &= \int d^d x \frac{1}{2} \phi (\partial_j \partial_j - m^2) \phi - \frac{1}{2} \int d^d x \partial_j (\phi \partial_j \phi) \\ &= \int d^d x \frac{1}{2} \phi (\partial_j \partial_j - m^2) \phi \\ &= \int d^d x \int d^d y \frac{1}{2} \phi(x) \delta^{(d)}(x-y) ((\partial_j \partial_j)_y - m^2) \phi(y) \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον πίνακα  $G$ , που δρα πάνω στις συναρτήσεις  $\phi$  με στοιχεία μήτρας

$$G(x, y) = -\delta^d(x-y) \left( (\partial_j \partial_j)_y - m^2 \right)$$

η δράση του είναι

$$(G\phi)(x) = \int d^d y G(x, y) \phi(y)$$

οπότε η δράση μπορεί να γραφτεί και

$$S = - \langle \phi, G\phi \rangle$$

η αφηρημένη γραφή μας βοήθα να δούμε εύκολα την εξής αντιστοιχία.<sup>10</sup> Έστω μια γκαουσιανή στατιστική κατανομή (ΓΚ), για τις τυχαίες μεταβλητές  $\{x_i\}$

$$F(0) = \int d^n x \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{i,j} x_j \right)$$

όπου  $A$  θετικά ορισμένος πίνακας. Ορίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση των ροπών

$$F(b) = \int d^n x \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{i,j} x_j + \sum_i b_i x_i \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_m} \rangle = \frac{1}{F(0)} \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_m}} F(b) \Big|_{b=0}$$

όπου  $\langle \bullet \rangle$  συμβολίζει τη μέση τιμή. Μπορούμε να ξαναγράψουμε τη κατανομή

$$F(b) = \int d\mu(x) \exp \left( -\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle \right) \quad (1.11)$$

θέτουμε  $x' = x + A^{-1}b$ <sup>11</sup>

$$F(b) = \int d\mu(x) e^{(-\frac{1}{2}(\langle x, Ax \rangle + \langle A^{-1}x, Ax \rangle + \langle x, AA^{-1}b \rangle + \langle A^{-1}b, AA^{-1}b \rangle) + \langle b, x \rangle + \langle b, A^{-1}x \rangle)} \Rightarrow$$

<sup>10</sup> $\langle \cdot, \cdot \rangle$  συμβολίζει τη παραπάνω σχέση, επισημαίνοντας ότι μπορεί να εκληφθεί ως μια διγραμμική μορφή

<sup>11</sup>  $Rd\mu(x) = d\mu(Rx) = d\mu(x)$  σε αυτή την περίπτωση

$$F(b) = e^{\langle b, A^{-1}b \rangle} F(0)$$

μια ροπή δευτέρας τάξης είναι

$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{1}{F(0)} \partial_i \partial_j F(b) \Big|_{b=0} = A_{i,j}^{-1}$$

και αποδεικνύεται ότι οι ροπές ανώτερης τάξης ακολουθούν το θεώρημα του Wick. Δηλαδή

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \rangle = \sum_{\text{over all possible pairs}} A_{k_1 k_2}^{-1} \dots A_{k_{n-1} k_n}^{-1}$$

επεκτείνοντας τα προηγούμενα, γράφουμε μία κατανομή που διαφέρει από τη ΓΚ κατά  $f(x)$ <sup>12</sup>

$$\begin{aligned} H(0) &= \int d\mu(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + f(x)\right) \Rightarrow \\ H(0) &= \int d\mu(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle\right) \cdot \exp(f(x)) \Rightarrow \\ H(0) &= \int d\mu(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle\right) \cdot \sum_n \left(\frac{f^n(x)}{n!}\right) \Rightarrow \\ H(0) &= \sum_n \frac{1}{n!} \int d\mu(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle\right) \cdot f^n(x) \Rightarrow \\ H(0) &= F(0) \sum_n \frac{1}{n!} \langle f^n(x) \rangle_0 \end{aligned}$$

όπου ο δείκτης 0 δείχνει ότι είναι οι ροπές της ΓΚ. Οι ροπές ανώτερης τάξης θα είναι

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \rangle &= \frac{1}{H(0)} \sum_n \frac{1}{n!} \int d\mu(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle\right) \cdot f^n(x) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \Rightarrow \\ \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \rangle &= \frac{F(0)}{H(0)} \sum_n \frac{1}{n!} \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} f^n(x) \rangle_0 \\ \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \rangle &= \frac{\sum_n \frac{1}{n!} \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} f^n(x) \rangle_0}{\sum_m \frac{1}{m!} \langle f^m(x) \rangle_0} \end{aligned}$$

Το πρόβλημα με τέτοιες αναπτύξεις είναι αν οι σειρές συγκλίνουν ή όχι. Αν, για παράδειγμα,  $f(x) = \lambda g(x)$ , με  $\lambda < 1$  και τις ροπές του  $g(x)$  να είναι φραγμένες, τότε το αποτέλεσμα θα είναι πεπερασμένο. Αυτό σε καμία περίπτωση δε καλύπτει όλες τις χρήσιμες αναπτύξεις σε δυναμοσειρά.

Ας γράψουμε το ανάλογο της (1.11) όταν οι τυχαίες μεταβλητές είναι πεδία.

$$Z_0(\eta) = \int d\mu(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \phi, G\phi \rangle + \langle \eta, \phi \rangle\right)$$

μας λείπει μόνο μια έννοια παραγώγισης, ώστε να μπορούμε να ακολουθήσουμε ακριβώς τα ίδια βήματα. Έστω μία συνάρτηση  $L(\eta)$ , όπου  $\eta$  είναι συνάρτηση πάνω στον  $\mathbb{R}^d$ , και μια μικρή μεταβολή<sup>13</sup>  $\zeta$ . Ορίζουμε το διαφορικό πρώτης τάξης του  $L$  [7]

$$\delta L(\eta; \zeta) = L(\eta + \zeta) - L(\eta) + \|\zeta\| \cdot \epsilon(\eta; \zeta)$$

<sup>12</sup>Η  $f(x)$  θα είναι αναλλοίωτη σχεδόν πάντα κάτω από κάποιες συμμετρίες και θα είναι βαθμωτό μέγεθος υπό αυτή την έννοια. Για παράδειγμα, εδώ θα μπορούσε η συμμετρία να είναι η  $O(n)$ .

<sup>13</sup>Η έννοια του μικρού θα δίνεται μέσω μιας νόρμας στο χώρο των συναρτήσεων του  $\mathbb{R}^d$ . Επιπλέον, θα επιμείνω στη χρήση μιας  $\zeta$  ομαλής συνάρτησης, έναντι της δέλτα κατανομής, καθώς ο ορισμός του  $L$  μπορεί να περιέχει και κάποια κατανομή, οπότε εύκολα οδηγούμαστε σε μη καλά ορισμένες εκφράσεις. Πολύ σημαντική σε όλα αυτά είναι η έννοια της σύγκλισης  $\rightarrow$ .

$$\epsilon(\eta; \zeta) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|\zeta\| \rightarrow 0$$

αποδεικνύεται ότι  $\delta L(\eta; \zeta)$  είναι γραμμικό ως προς το δεύτερο όρισμα του. Αναμένουμε λοιπόν να μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\delta L(\eta; \zeta) = \int d^d x F(\eta(x)) \zeta(x) = \langle F(\eta), \zeta \rangle$$

όπου  $F$  μπορεί να είναι και κατανομή. Ορίζουμε λοιπόν τη συναρτησιακή<sup>14</sup> παράγωγο

$$\frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)} \equiv F(\eta(x))$$

ή

$$\delta L(\eta; \zeta) = \int d^d x \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)} \zeta(x)$$

Είναι χρήσιμη γιατί κληρονομεί τις ιδιότητες της συνηθισμένης παραγώγου, όπως το κανόνα της αλυσίδας κ.ο.κ.

Μπορούμε να γράψουμε πλέον τα προηγούμενα αποτελέσματα και για τις στατιστικές κατανομές σε χώρους συναρτήσεων. Ορίζουμε τον αντίστροφο  $G^{-1}$  τελεστή-πίνακα του  $G$  και αντικαθιστούμε  $\phi' = \phi + G^{-1}\phi$ , όποτε καταλήγουμε

$$\begin{aligned} Z_0(\eta) &= \exp\left(\frac{1}{2} \langle \eta, G^{-1}\eta \rangle\right) \int d\mu(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \phi, G\phi \rangle\right) \\ Z_0(\eta) &= \exp\left(\frac{1}{2} \langle \eta, G^{-1}\eta \rangle\right) Z(0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

ο αντίστροφος του  $G$  υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p, q) &= \int d^d x \int d^d y e^{ipx} G(x, y) e^{-iqy} = \\ &= - \int d^d x \int d^d y e^{ipx} \delta^d(x - y) \left( (\partial_j \partial_j)_y - m^2 \right) e^{-iqy} = \\ &= - \int d^d x \int d^d y e^{ipx} \delta^d(x - y) (-q^2 - m^2) e^{-iqy} = \\ &= \int d^d x e^{ipx} (q^2 + m^2) e^{-iqx} = \\ &= (2\pi)^d \delta^d(p - q) (p^2 + m^2) \end{aligned}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} G * G^{-1} &= \mathbb{I} \\ \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} \tilde{G}(p, p') \tilde{G}^{-1}(p', q) &= (2\pi)^d \delta^d(p - q) \\ \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(p - q) (p^2 + m^2) \tilde{G}^{-1}(p', q) &= (2\pi)^d \delta^d(p - q) \\ (p^2 + m^2) \tilde{G}^{-1}(p, q) &= (2\pi)^d \delta^d(p - q) \\ G^{-1}(p, q) &= (2\pi)^d \delta^d(p - q) \frac{1}{p^2 + m^2} \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Πρόκειται για μια επέκταση της βαθμίδας  $\nabla_i f(x)$  και  $df(x, e) = \sum_i \nabla_i f \cdot e_i = \langle \nabla f, e \rangle$  για συνεχή δείκτη

όπου το τελευταίο βήμα γίνεται υπό ορισμένες συνθήκες<sup>15</sup>.

Σε κάθε περίπτωση, έχουμε τελικά

$$G^{-1}(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-ipx} (2\pi)^d \delta^d(p - q) \frac{1}{p^2 + m^2} e^{+iqy}$$

$$G^{-1}(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{-ip(x-y)}$$

Πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε ροπές της κατανομής. Ο κανόνας παραγωγίσισης του εκθετικού

$$L(\eta) = \exp \left( \int d^d x \phi(x) \eta(x) \right)$$

$$\begin{aligned} L(\eta + \zeta) &= \exp \left[ \int d^d x \phi(x) (\eta(x) + \zeta(x)) \right] \\ &= \exp \left[ \int d^d x \phi(x) \eta(x) \right] \cdot \exp \left[ \int d^d x \phi(x) \zeta(x) \right] \\ &= \exp \left[ \int d^d x \phi(x) \eta(x) \right] \sum_n \frac{1}{n!} \left( \int d^d x \phi(x) \zeta(x) \right)^n \\ &= \exp \left[ \int d^d x \phi(x) \eta(x) \right] + \exp \left[ \int d^d x \phi(x) (\eta(x) + \zeta(x)) \right] \left( \int d^d x \phi(x) \zeta(x) + \|\zeta\| \epsilon(\eta; \zeta) \right) \end{aligned}$$

$$\delta L(\eta; \zeta) = \exp \left[ \int d^d x \phi(x) \eta(x) \right] \left( \int d^d x \phi(x) \zeta(x) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)} = \exp \left[ \int d^d x \phi(x) \eta(x) \right] \phi(x) = L(\eta) \phi(x)$$

οπότε

$$\frac{\delta^n L(\eta)}{\delta (\eta(x_1) \eta(x_2) \dots \eta(x_n))} = L(\eta) \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)$$

έτσι

$$\frac{\delta^n Z(\eta)}{\delta (\eta(x_1) \eta(x_2) \dots \eta(x_n))} = \int d\mu(\phi) e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \phi(x) G(x, y) \phi(y)} \frac{\delta^n L(\eta)}{\delta (\eta(x_1) \eta(x_2) \dots \eta(x_n))} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^n Z(\eta)}{\delta (\eta(x_1) \eta(x_2) \dots \eta(x_n))} = Z(0) \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \rangle_0$$

και από την εξίσωση (1.12)

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \rangle_0 = \frac{\delta^n (\exp(\frac{1}{2} \langle \eta, G^{-1} \eta \rangle))}{\delta (\eta(x_1) \eta(x_2) \dots \eta(x_n))} \Big|_{\eta=0} \quad (1.13)$$

Ο κανόνας της αλυσίδας για functionals προκύπτει εύκολα<sup>16</sup>

$$G(\eta) = g(L(\eta))$$

<sup>15</sup>Η παραπάνω ισότητα είναι στην πραγματικότητα  $\eta \int_q (p^2 + m^2) G^{-1}(p, q) f(q) = \int_q (2\pi)^d \delta^d(p - q) f(q) \quad \forall f(q)$ ,  
όποτε αν προσθέσουμε στη παραπάνω λύση μια συνάρτηση  $R(p, q)$  θα απομένει  $\int_q (p^2 + m^2) R(p, q) f(q) = 0$ , υπάρχει  
λοιπόν μια απροσδιοριστία στον ορισμό του αντίστροφου. Μπορούμε να την αποφύγουμε περιορίζοντας κατάλληλα το πεδίο  
ορισμού  $\{f(q)\}$ .

<sup>16</sup> $G : (\text{some function space}) \rightarrow \mathbb{R}$ , ενώ  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , και  $g$  παραγωγίσιμη.

$$G(\eta + \zeta) = g(L(\eta + \zeta)) = g(L(\eta) + \delta L(\eta; \zeta) + O(\|\zeta\|^2))$$

$$G(\eta + \zeta) = g(L(\eta)) + \left. \frac{dg(L)}{dL} \right|_{L=L(\eta)} (\delta L(\eta; \zeta) + O(\|\zeta\|^2)) + O((\delta L)^2)$$

άρα

$$\delta G(\eta; \zeta) = \left. \frac{dg(L)}{dL} \right|_{L(\eta)} \delta L(\eta; \zeta)$$

$$\frac{\delta G(\eta)}{\delta \eta(x)} = \left. \frac{dg(L)}{dL} \right|_{L(\eta)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)}$$

και ο κανόνας παραγωγίσης γινομένου

$$H(\eta) = L(\eta)G(\eta) \Rightarrow$$

$$H(\eta + \zeta) = L(\eta + \zeta)G(\eta + \zeta) = (L(\eta) + \delta L(\eta; \zeta) + O(2)) (G(\eta) + \delta G(\eta; \zeta) + O(2)) \Rightarrow$$

$$H(\eta + \zeta) = L(\eta)G(\eta) + \delta L(\eta; \zeta)G(\eta) + L(\eta)\delta G(\eta; \zeta) + O(2)$$

$$\delta H(\eta; \zeta) = \delta L(\eta; \zeta)G(\eta) + L(\eta)\delta G(\eta; \zeta)$$

$$\frac{\delta H(\eta)}{\delta \eta(x)} = \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)} G(\eta) + L(\eta) \frac{\delta G(\eta)}{\delta \eta(x)}$$

Τέλος, η παράγωγος  $n$ -οστής δύναμης του  $L(\eta)$  προκύπτει μέσω του διωνυμικού αναπτύγματος

$$\begin{aligned} L^n(\eta + \zeta) &= (L(\eta) + \delta L(\eta; \zeta) + O(2))^n = \\ &= \sum_i^n \binom{n}{i} L^{n-i}(\eta) (\delta L(\eta; \zeta) + O(2))^i = \\ &= L^n(\eta) + nL^{n-1}(\eta)\delta L(\eta; \zeta) + O(2) \\ \delta L^n(\eta; \zeta) &= nL^{n-1}(\eta)\delta L(\eta; \zeta) \\ \frac{\delta L^n(\eta)}{\delta \eta(x)} &= nL^{n-1}(\eta) \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)} \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει και από το κανόνα αλυσίδας.

Με αυτές τις σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε παραγώγους ανώτερης τάξης όπως η (1.13). Έχουμε

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \eta(x) G^{-1}(x, y) \eta(y) \\ L(\eta + \zeta) &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y (\eta(x) G^{-1}(x, y) \eta(y) + \zeta(x) G^{-1}(x, y) \eta(x) + \eta(x) G^{-1}(x, y) \zeta(y) + \zeta(x) G^{-1}(x, y) \zeta(y)) \\ \delta L(\eta; \zeta) &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y (\eta(x) G^{-1}(x, y) \zeta(y) + \zeta(x) G^{-1}(x, y) \eta(y)) \\ \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x)} &= \frac{1}{2} \int d^d y \eta(y) (G^{-1}(x, y) + G^{-1}(y, x)) \end{aligned}$$

Για τα διαφορικά ανώτερης τάξης θα έχουμε  $\delta^n L(\eta; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^{17}$

$$\delta^2 L(\eta; \zeta_1, \zeta_2) = \delta L(\eta + \zeta_2; \zeta_1) - \delta L(\eta; \zeta_1) + O(\|\zeta_2\|^2)$$

<sup>17</sup>Κάθε διαφορικό είναι μία  $n$ -γραμμική μορφή, όπως και στη περίπτωση πεπερασμένων διαστάσεων. Για το αν τέτοιες εκφράσεις έχουν νόημα μπορούμε να απαντήσουμε μόνο όταν μας δοθεί η  $L(\eta)$

$$\delta^2 L(\eta; \zeta_1, \zeta_2) = \int d^d x_2 d^d x_1 \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_2) \eta(x_1)} \zeta_1(x_1) \zeta_2(x_2)$$

επαγωγικά έχουμε

$$\delta^n L(\eta; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \delta^{n-1} L(\eta + \zeta_n; \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) - \delta^{n-1} L(\eta; \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) + O(\|\zeta_n\|^2)$$

$$\delta^n L(\eta; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \int d^d x_n \dots d^d x_1 \frac{\delta^n L(\eta)}{\delta \eta(x_n) \dots \eta(x_2) \eta(x_1)} \zeta_1(x_1) \zeta_2(x_2) \dots \zeta_n(x_n)$$

όποτε για την  $L(\eta) = \frac{1}{2} \langle \eta, G^{-1} \eta \rangle$

$$\delta L(\eta + \zeta_2; \zeta_1) = \frac{1}{2} \int d^d x_2 d^d x_1 (\eta(x_2) + \zeta_2(x_2)) (G^{-1}(x_1, x_2) + G^{-1}(x_2, x_1) \zeta_1(x_1)) \Rightarrow$$

$$\delta^2 L(\eta; \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{2} \int d^d x_2 d^d x_1 \zeta_2(x_2) (G^{-1}(x_1, x_2) + G^{-1}(x_2, x_1)) \zeta_1(x_1)$$

$$\frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_2) \eta(x_1)} = \frac{1}{2} (G^{-1}(x_1, x_2) + G^{-1}(x_2, x_1))$$

όπου δεν έχει σημασία η σειρά παραγωγίσης. Επιπλέον, ο  $G^{-1}$  είναι συμμετρικός ως προς τις δύο μεταβλητές του<sup>18</sup>.

$$\frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_1) \eta(x_2)} = G^{-1}(x_1, x_2)$$

Παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης μηδενίζονται.

Ας υπολογίσουμε τη ροπή πρώτης τάξης

$$\langle \phi(x_1) \rangle = \left. \frac{\delta \exp(L(\eta))}{\delta \eta(x_1)} \right|_{\eta=0}$$

$$\langle \phi(x_1) \rangle = \left. \frac{d e^L}{d L} \right|_{L(\eta)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} \Big|_{\eta=0}$$

$$\langle \phi(x_1) \rangle = \exp(L(\eta)) \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} \Big|_{\eta=0}$$

$$\langle \phi(x_1) \rangle = \exp(L(\eta)) \left[ \frac{1}{2} \int d^d y \eta(y) (G^{-1}(x, y) + G^{-1}(y, x)) \right] \Big|_{\eta=0}$$

$$\langle \phi(x_1) \rangle = 0$$

Ας υπολογίσουμε τη ροπή δεύτερης τάξης

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \left. \frac{\delta^2 \exp\left(\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \eta(x) G^{-1}(x, y) \eta(y)\right)}{\delta \eta(x_1) \eta(x_2)} \right|_{\eta=0} \Rightarrow$$

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \left( \left. \frac{d e^L}{d L} \right|_{L(\eta)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} \right) \Big|_{\eta=0}$$

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \left( \left. \frac{d e^L}{d L} \right|_{L(\eta)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} + e^{L(\eta)} \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_2) \eta(x_1)} \right) \Big|_{\eta=0}$$

<sup>18</sup>Επειδή ο διαδότης είναι ο ευκλείδιος. Στη περίπτωση του χώρου Minkowski, θα είχαμε κάποια άλλη συνθήκη που θα απλοποιούσε πάλι το αποτέλεσμα.

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \exp L(\eta) \left( \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} + \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_2)\eta(x_1)} \right) \Big|_{\eta=0} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle &= \exp(L(\eta)) \left( \frac{1}{4} \int d^d y \eta(y) (G^{-1}(x_2, y) + G^{-1}(y, x_2)) \cdot \right. \\ &\quad \left. \int d^d y \eta(y) [G^{-1}(x_1, y) + G^{-1}(y, x_1)] + G^{-1}(x_1, x_2) \right) \Big|_{\eta=0} \\ &\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = G^{-1}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας από την (1.14), υπολογίζουμε τις ροπές τρίτης και τέταρτης τάξης

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \rangle &= \frac{\delta^3 \exp(L(\eta))}{\delta \eta(x_3)\eta(x_2)\eta(x_1)} \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta \eta(x_3)} \left( \exp L(\eta) \left( \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} + \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_2)\eta(x_1)} \right) \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= \exp L(\eta) \left( \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_3)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} + \sum_{\text{cycles of } \{i_j\}} \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_{i_3})\eta(x_{i_2})} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_{i_1})} \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= \exp L(\eta) \left( \text{trilinear term in } \eta + \text{linear terms in } \eta \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle &= \frac{\delta^4 \exp L(\eta)}{\delta \eta(x_4)\eta(x_3)\eta(x_2)\eta(x_1)} \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta \eta(x_4)} \left( \exp L(\eta) \left( \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_3)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\text{cycles of } \{i_j\}} \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_{i_3})\eta(x_{i_2})} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_{i_1})} \right) \right) \Big|_{\eta=0} = \\ &= \exp L(\eta) \left( \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_4)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_3)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta L(\eta)}{\delta \eta(x_1)} + \text{terms bilinear in } \eta \right) + \\ &\quad + \sum_{\text{all combinations in pairs of } \{i_j\}} \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_{i_1})\eta(x_{i_2})} \frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_{i_3})\eta(x_{i_4})} \Big|_{\eta=0} = \\ &= \sum_{\text{all combinations in pairs of } \{i_j\}} G^{-1}(x_{i_1}, x_{i_2}) G^{-1}(x_{i_3}, x_{i_4}) \end{aligned}$$

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle = G^{-1}(x_1, x_2)G^{-1}(x_3, x_4) + G^{-1}(x_1, x_3)G^{-1}(x_2, x_4) + G^{-1}(x_1, x_4)G^{-1}(x_2, x_3)$$

το οποίο πρόκειται για μια έκφανση του θεωρήματος του Wick.

Για ροπή αυθαίρετης τάξης, μπορούμε να δούμε ότι για  $\eta = 0$ , επιζούν μόνο όροι όπου όλοι οι δείκτες  $x_i$  έχουν συνδυαστεί<sup>19</sup> ανά δύο μεταξύ τους, καθώς είναι ανεξάρτητοι του  $\eta$ . Επιπλέον, θα προκύπτουν όλοι οι συνδυασμοί των ζευγαριών. Συγκεκριμένα, για τη παράγωγο  $n$  τάξης, θα έχουμε ένα άθροισμα

<sup>19</sup> Δύο δείκτες  $x_1, x_2$  συνδυάζονται όταν προκύπτουν όροι  $\frac{\delta^2 L(\eta)}{\delta \eta(x_1)\eta(x_2)}$

όρων  $\alpha_i$ , στο σύνολο τους  $M_n$  όπου πάντα θα προκύπτει ως κοινός παράγοντας το εκθετικό  $\exp L(\eta)$ . Έτσι γράφουμε

$$\Gamma_n = \exp L(\eta) \sum_{i=1}^{M_n} \alpha_i$$

Κάθε όρος  $\alpha_i$  θα είναι ένα γινόμενο  $N_i$  παραγόντων. Οι παράγοντες αυτοί θα είναι παράγωγοι είτε πρώτης ( $n_{1_i}$  στον αριθμό) είτε δεύτερης ( $n_{2_i}$  στον αριθμό) τάξης του  $L(\eta)$ , καθώς μεγαλύτερες τάξεις μηδενίζονται. Ισχύει ότι  $n_{1_i} + 2n_{2_i} = n$ , ενώ  $N_i = n_{1_i} + n_{2_i}$ . Έχουμε

- Σε κάθε παραγωγή  $\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}$ , θα προκύπτουν από τη παραγωγή του εκθετικού όλοι οι προηγούμενοι όροι επί τη νέα παράγωγο πρώτης τάξης του  $L(\eta)$  συν
- οι  $M_n$  όροι θα δίνουν ο καθένας  $n_{1_i}$  όρους, λόγω του κανόνα αλυσίδας και επειδή η παράγωγος τρίτης τάξης είναι μηδέν. Έτσι  $M_{n+1} = M_n + \sum_{i=1}^{M_n} n_{1_i}$

Επιπλέον

- για  $n$  περιττό,  $n_1$  είναι αναγκαστικά περιττός και  $n_1 \in \{1, 3, 5, \dots, n\}$  ενώ  $n_2 \in \{0, 2, 4, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ .
- για  $n$  ζυγό,  $n_1$  είναι αναγκαστικά ζυγός και  $n_1 \in \{0, 2, 4, \dots, n\}$  ενώ  $n_2 \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ .

όποτε για  $n$  περιττό, κάθε όρος του αθροίσματος θα έχει τουλάχιστον έναν παράγοντα που είναι παράγωγος πρώτης τάξης, όποτε και μηδενίζεται για  $\eta = 0$ . Με άλλα λόγια, οι ροπές περιττής τάξης μηδενίζονται.

Είναι σημαντικό ότι σε κάθε παραγωγή, προκύπτουν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των  $(n_{1_i}, n_{2_i})$  ώστε  $n = n_{1_i} + 2n_{2_i}$  και επιπλέον για κάθε δύο τέτοιους ακεραίους προκύπτουν όλοι οι συνδυασμοί<sup>20</sup> των  $\{\eta(x_i)\}$  ως προς την παραγωγή, τοποθετώντας τα  $\eta(x_i)$  σε  $n_1$  θέσεις και ανά ζευγάρια σε  $n_2$ . Σκιαγραφώ την επαγωγική απόδειξη:

- Έστω ότι ισχύει για  $n$ .
- Με την επόμενη παραγωγή, θα προκύψει από το εκθετικό  $\exp L(\eta)$  ένας παράγοντας  $\frac{\delta L(\eta)}{\delta\eta(x_n)}$  που πολλαπλασιάζει όλους τους προηγούμενους όρους, όποτε θα προκύψουν όλοι οι συνδυασμοί όπου το  $\eta(x_n)$  είναι μόνο του.
- Παραγωγίζοντας τη προηγούμενη παράσταση, το  $\eta(x_n)$  θα συνδυαστεί σε ζευγάρι με όλα τα υπόλοιπα  $\{x_i\}$  λόγω του κανόνα της αλυσίδας. Αφού πριν υπήρχαν όλα οι δυνατοί συνδυασμοί, και το  $\eta(x_n)$  συνδυάζεται με όλα τους δυνατούς τρόπους με τα υπόλοιπα, προκύπτουν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί για τους  $n + 1$  τάξης όρους, όταν το  $\eta(x_n)$  είναι σε ζευγάρι.
- έχουμε δείξει ήδη ότι τα παραπάνω ισχύουν για  $n = 2$ , άρα επαγωγικά προκύπτει το ζητούμενο.

Το συμπέρασμα είναι ότι οι ροπές περιττής τάξης μηδενίζονται, ενώ για τις άρτιες έχουμε

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \rangle = \sum_{\text{over all possible pairings of } \{x_i\}} G^{-1}(x_{i_1}, x_{i_2})G^{-1}(x_{i_3}, x_{i_4})\dots G^{-1}(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) \quad (1.15)$$

καθώς επιζούν μόνο οι όροι με  $n_1 = 0$ .

<sup>20</sup>Είναι στον αριθμό οι συνδυασμοί  $n$  αντικείμενων σε  $2n_2$  θέσεις επί τον αριθμό των δυνατών τρόπων να βάλεις  $2n_2$  αντικείμενα σε  $n_2$  ζεύγη,  $\binom{n}{2n_2} \cdot (2n_2 - 1)(2n_2 - 3)\dots \cdot 3 \cdot 1$ . Για  $n_2 = \frac{n}{2}$  είναι η περίπτωση που μας ενδιαφέρει.



Ακολουθούμε παρόμοια βήματα με την περίπτωση πεπερασμένων τυχαίων μεταβλητών για τις ροπές του πεδίου όταν αυτό ικανοποιεί μια Λαγκρατζιανή με διαταραχή. Έχουμε

$$\begin{aligned}
Z(0) &= \int d\mu(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \phi, G\phi \rangle + V(\phi)\right) \\
&= \int d\mu(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \phi, G\phi \rangle\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n(\phi) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mu(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \phi, G\phi \rangle\right) V^n(\phi) \\
&= Z_0(0) \sum_{i=0}^n \frac{1}{n!} \langle V^n(\phi) \rangle_0
\end{aligned}$$

όπου επαναφέρουμε το δείκτη 0, για να ξεχωρίσουμε τις δύο κατανομές.

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \rangle &= \frac{1}{Z(0)} \int d\mu(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \phi, G\phi \rangle + V(\phi)\right) \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n!} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)V^n(\phi) \rangle_0}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n!} \langle V^n(\phi) \rangle_0} \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Από εδώ και πέρα μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς<sup>21</sup>. Κάποια σχόλια:

- Τα παραπάνω ισχύουν για ευκλείδειες<sup>22</sup> δράσεις. Οι φανταστικές δράσεις της ΚΒΘ στοιχειωδών σωματιδίων δεν ορίζουν ένα χώρο πιθανότητας<sup>23</sup> και δεν επιθυμούμε κάτι τέτοιο, καθώς περιγράφουν την χρονική εξέλιξη ενός συστήματος. Οι διαφορετικές ιστορίες του πεδίου συμβάλλουν και οι σημαντικές συνεισφορές στις εκφράσεις  $\int d\mu(\phi)$  δίνονται από τις στάσιμες διαμορφώσεις του πεδίου, ενώ οι υπόλοιπες αποσβένονται μεταξύ τους<sup>24</sup>.
- Οι "ροπές" για φανταστικές δράσεις ορίζονται ως αναλυτικές επεκτάσεις των αποτελεσμάτων για ευκλείδεια πεδία. Συγκεκριμένα στα παραπάνω

$$\langle \phi_M(x_1)\phi_M(x_2)\dots\phi_M(x_n) \rangle = \langle \phi_E(-ix_1^0, \vec{x}_1)\phi_E(-ix_2^0, \vec{x}_2)\dots\phi_E(-ix_n^0, \vec{x}_n) \rangle \quad (1.17)$$

Επειδή τα πεδία είναι κατανομές του  $\mathbb{R}^d$ , οι παραπάνω εκφράσεις έχουν σίγουρα νόημα μόνο όταν τις ολοκληρώσουμε σε περιοχές του χωροχρόνου. Έτσι η έννοια της αναλυτικής επέκτασης εδώ συμφωνεί με αυτή του παραρτήματος 1.

- ειδικά για τη γεννήτρια συνάρτηση  $Z(\eta)$ , η τιμή της διαφέρει στις δύο περιπτώσεις δράσεων, και στην περίπτωση του χώρου Minkowski, ο υπολογισμός της είναι απαιτητικός. Δε μας απασχολεί το γεγονός εδώ, γιατί όπως βλέπουμε από την έκφραση (1.15), δεν υπολογίζουμε ποσότητες που την περιέχουν.

<sup>21</sup>Βέβαια, αν αυτές οι εκφράσεις συγκλίνουν είναι ανοιχτό ερώτημα. Εξαρτάται πάντα από τη συνάρτηση  $V(\phi)$ . Συνήθως θα είναι ομογενής συνάρτηση μιας επιπλέον παραμέτρου  $\lambda$ , της σταθεράς σύζευξης, η οποία θα θεωρείται μικρή, ενώ οι υπόλοιποι παράγοντες θα είναι τάξης μεγέθους  $\sim 1$  (δεδομένου μιας κλίμακας αναφοράς). Έτσι εξασφαλίζεται η σύγκλιση.

<sup>22</sup>Πραγματικές και αρνητικά (ή θετικά, είναι θέμα ορισμού) ορισμένες δράσεις.

<sup>23</sup>Δεν αποτελούν θετικά ορισμένα μέτρα στο χώρο συναρτήσεων των  $\phi$ , ώστε να οδηγούν σε μία έννοια όγκου υποσυνόλου του χώρου αυτού, όποτε και σε μια έννοια πιθανότητας.

<sup>24</sup>Η έννοια της στασιμότητας είναι σχετική. Πρέπει κανείς να δηλώσει σε τι μετράμε τη δράση και σε τι μετράμε το πραγματικό χωροχρόνο, ώστε να "αναδυθούν" τα διαστήματα στασιμότητας. Περισσότερα στο Παράρτημα 1.

## Κεφάλαιο 2

# Ομάδα Επανακανονικοποίησης

### 2.1 Ροπές, Γράφοι Feynmann και Μετασχηματισμοί Ανακλιμάκωσης

Έστω λοιπόν μια τυχαία μεταβλητή-πεδίο  $\psi(x)$  που με γεννήτρια συνάρτηση

$$Z(\eta) = \int d\mu(\phi) \exp \left( - \int d^d x (\partial_j \phi(x))^2 + m^2 \phi^2(x) + \lambda \phi^4(x) - \phi(x) \eta(x) \right)$$

Ας υπολογίσουμε τις μονάδες μέτρησης(μ.μ.) των μεγεθών που εμφανίζονται. Η δράση είναι αδιάστατη<sup>1</sup>. Ονομάζουμε τις μ.μ. του χώρου  $L$ . Από τον κινητικό όρο μέσα εξάγουμε τις μονάδες μέτρησης του πεδίου,  $[\phi] = L^{1-\frac{d}{2}}$ , ενώ  $[m] \equiv M = L^{-1}$ , ανεξάρτητα από τη διάσταση του χώρου, όπως περιμέναμε. Τέλος,  $[\lambda] = L^{d-4}$  για τη σταθερά σύζευξης. Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, θα αντικαταστήσουμε τη τυχαία μεταβλητή  $\psi$  με το μετασχηματισμό Fourier της  $\tilde{\phi}(q)$ .

$$\tilde{\phi}(q) = \int d^d x \phi(x) e^{-iqx}$$

$$\tilde{\phi}(q) = \overline{\tilde{\phi}(-q)}$$

ξεχνάμε το αρχικό πεδίο και γράφουμε το  $\tilde{\phi}(q)$  ως  $\phi(q)^2$ . Η γεννήτρια συνάρτηση γράφεται

$$Z(\eta) = \int d\mu(\phi) \exp \left( - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} ((q^2 + m^2)\phi(-q)\phi(q) - \phi(-q)\eta(q)) - \right. \\ \left. - \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_3}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_4}{(2\pi)^d} \lambda \phi(q_1)\phi(q_2)\phi(q_3)\phi(q_4) (2\pi)^d \delta^d(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right)$$

υιοθετώ τη σύμβαση του Wilson,  $\int_q \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$ . Ο αντίστροφος του  $G(p, q)$  είναι  $G^{-1}(p, q) = (2\pi)^d \delta^d(p+q) \frac{1}{q^2+m^2}$ , από εδώ και πέρα απλά  $G$ . Τα συμπεράσματα του κεφαλαίου 1.4 ισχύουν και εδώ, είναι θέμα της αντιστοίχισης  $x \rightarrow p^3$ . Ας υπολογίσουμε την ροπή δεύτερης τάξης για την αλληλεπιδρούσα θεωρία. Αυτό το κάνουμε διαταρακτικά, δηλαδή υπολογίζουμε τη ροπή ως δυναμοσειρά του  $\lambda$ , όπως προκύπτει φυσικά από την (1.16) για  $V(\phi) = - \int_{q_1} \int_{q_2} \int_{q_3} \int_{q_4} \lambda \phi(q_1)\phi(q_2)\phi(q_3)\phi(q_4) (2\pi)^d \delta^d(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$ . Έχουμε

$$\langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle = \frac{\langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 - \lambda \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \int_{4q} \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \delta \rangle_0 + O(\lambda^2)}{1 - \lambda \langle \int_{4q} \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \delta \rangle_0 + O(\lambda^2)}$$

<sup>1</sup> Ουσιαστικά μετριέται σε μονάδες  $\hbar$ . Στο S.I. θέτουμε  $\hbar = 1$ . Σιωπηρά έχουμε υποθέσει ότι  $c = 1$  σε αυτή την εργασία.

<sup>2</sup> Το όρισμα μας θυμίζει που αναφερόμαστε

<sup>3</sup> Το γεγονός ότι το πεδίο είναι πλέον μιγαδικό δε μας απασχολεί, καθώς η δράση συνεχίζει να είναι αρνητικά ορισμένη, χάρις τη συνθήκη που ισχύει για το  $\phi(p)$

γράφοντας με συντομία  $\phi(q_i) = \phi_i$ ,  $\int_{q_1} \int_{q_2} \dots \int q_n \equiv \int_{nq}$  και  $\delta \equiv (2\pi)^d \delta^d(q_1 + q_2 + \dots + q_n)$ . Ισχύει

$$\frac{1}{1+s} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots, \quad |s| < 1$$

κάνοντας αυτή τη σχετικά τολμηρή υπόθεση<sup>4</sup> για το παρονομαστή έχουμε  $s = -\int_{4q} \lambda \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \delta + O(\lambda^2)$

$$\begin{aligned} \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \rangle &= \left( \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \rangle_0 - \lambda \int_{4q} \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 \delta + O(\lambda^2) \right) * \\ &* \left( 1 + \lambda \int_{4q} \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 \delta + O(\lambda^2) + O(s^2) \right) = \\ &= \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \rangle_0 - \lambda \int_{4q} \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 \delta + \\ &+ \lambda \int_{4q} \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \rangle_0 \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 \delta + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$


Εδώ είναι που η έκφραση (1.15) δείχνει τη χρησιμότητα της. Προσέχουμε επιπλέον

$$\begin{aligned} \sum_{\text{all possible pairings of } \{p_i\}} G(p_{i_1}, p_{i_2}) \dots G(p_{i_{n-1}}, p_{i_n}) &= G(p_1, p_2) \cdot \sum_{\text{all possible pairings of } \{p_i\} - \{p_1, p_2\}} G(p_{i_1}, p_{i_2}) \dots G(p_{i_{n-3}}, p_{i_{n-2}}) + \\ &+ \sum_{\text{all possible pairings of } \{p_i\} \text{ except } (p_1, p_2)} G(p_{i_1}, p_{i_2}) \dots G(p_{i_{n-1}}, p_{i_n}) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_0 = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0 \langle \phi_3 \dots \phi_n \rangle_0 + (\text{all other pairings})$$

Για να δούμε τι σημαίνει για τη σχέση (2.1) αυτό, θα εισαγάγουμε τους γράφους<sup>5</sup> Feynmann στους υπολογισμούς μας. Αντιστοιχούμε στους όρους  $\phi(p_i)$ , των οποίων υπολογίζουμε τη μέση τιμή, μια γραμμή

 για κάθε όρο  $-\lambda \int_{4q} \delta \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4$  αντιστοιχούμε



η μέση τιμή σε σχέση με την γκαουσσισιανή κατανομή είναι

$$\langle \frac{p_1}{p_2} \text{ (cross) } \rangle = 3 \frac{p_1}{p_2} \text{ (loop) } + 3 \frac{p_1}{p_2} \text{ (infinity) }$$

όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα "διαδότη", εδώ  $G(p_1, p_2)$  καθώς κάνοντας τις πράξεις

$$\begin{aligned} \int_{4q} \delta \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 &= 3 \int_{4q} \delta \frac{1}{p_1^2 + m^2} \delta_{e11} \frac{1}{q_3^2 + m^2} \delta_{34} \frac{1}{p_2^2 + m^2} \delta_{e22} + \\ &+ 3(2\pi)^d \delta^d(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} \int_{4q} \delta \delta_{12} \frac{1}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_3^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>4</sup>Και όπως θα αποδειχθεί, λανθασμένη. Για να συγκλίνουν όλες αυτές οι εκφράσεις πρέπει να κάνουμε μια σημαντική αλλαγή. Έτσι οι πράξεις εδώ δε στερούνται νοήματος.

<sup>5</sup>Γράφος θα λέγεται οποιαδήποτε συλλογή διαγραμμάτων. Διαγράμματα θα είναι μόνο οι πλήρως συνδεδεμένοι γράφοι.

με  $\delta_{ij} \equiv (2\pi)^d \delta^d(q_i + q_j)$  με  $e$  να σημαδεύει τις "εξωτερικές ορμές",  $p_1, p_2$ . Ο πρώτος όρος γίνεται χάρις στις δέλτα

$$3(2\pi)^d \delta^d(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{p_2^2 + m^2} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2}$$

ενώ ο δεύτερος

$$3(2\pi)^d \delta^d(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} (2\pi)^d \delta^d(0) \left( \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \right)^2$$

το  $\delta(0)$  είναι αρκετά ανησυχητικό και υποδεικνύει ότι κάτι έχουμε κάνει λάθος. Πρόκειται για τα προβλήματα που αναφέραμε στο κεφάλαιο 1.3, και οφείλονται στον όρο  $\phi^2(x)$ . Ακριβώς επειδή τα πεδία είναι κατανομές, το γινόμενο τους δεν έχει νόημα. Ευτυχώς, δε χρειάζεται να επαυρίσουμε κάτι για τους σκοπούς μας. Όπως βλέπουμε παραπάνω, αυτός ο όρος θα εξουδετερωθεί από τον όρο που προήλθε από το παρονομαστή. Έτσι, το μέρος του υπολογισμού μας που μένει δεν θα επηρεαστεί από την οποία αλλαγή κάνουμε στην αρχική έκφραση. Επιλέγουμε έτσι να αδιαφορούμε για το συγκεκριμένο διάγραμμα και για τα όμοια του, που προκύπτουν σε ανώτερες τάξεις υπολογισμού. Πρόκειται για τα διαγράμματα-φουσαλίδες (*bubble-diagrams*), και έχουν να κάνουν με την κανονικοποίηση της κατανομής και την γεννήτρια συνάρτηση. Αν θέλαμε να υπολογίσουμε αυτές θα έπρεπε να πάρουμε κάποια βήματα (στη ΚΒΘ θα χρειαζόταν για τον υπολογισμό της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης).

Μπορούμε να δούμε ότι οποιοδήποτε τέτοιο διάγραμμα θα παρουσιάζεται τελικά στη μορφή  $(2\pi)^d \delta(0) * (\text{other terms})$ . Κάθε τέτοιο διάγραμμα "χτίζεται" από  $n$  όρους κόμβων

$$\langle V^n \rangle_C$$

κάθε κόμβος έχει 4 γραμμές. Κάθε κόμβος αντιστοιχεί μια συνάρτηση δέλτα  $(2\pi)^d \delta^d(\sum_{i=1}^4 p_{i1})$ , ενώ οι  $4n$  γραμμές θα συνδυαστούν σε  $2n$  διαδότες, που ο καθένας αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση δέλτα  $(2\pi)^d \delta^d(p_i + p_j)$ ,  $i \neq j$ . Κάθε συνάρτηση δέλτα μας δίνει μια αλγεβρική γραμμική εξίσωση για τους  $4n$  αγνώστους, συνολικά έχουμε  $3n$  τέτοιες. Ο βαθμός<sup>6</sup> απροσδιοριστίας είναι ίσος με τις γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις αυτού του συστήματος<sup>7</sup>. Αυτό εξαρτάται από το πως θα συνδυαστούν οι κόμβοι μεταξύ τους. Αν συγκεντρωθούμε σε μόνο πλήρως συνδεδεμένα (*fully connected*) διαγράμματα, ισχύει η γραμμικώς εξαρτημένη εξίσωση είναι μία. Έτσι ο βαθμός απροσδιοριστίας ενός γράφου είναι ίσος με τον αριθμό διαγραμμάτων-φουσαλίδες που περιέχει.

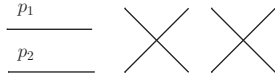
Μένει να αποδείξουμε ότι τέτοια διαγράμματα διαγράφονται και σε ανώτερες τάξεις διαταραχών. Ας επιστρέψουμε στο δεξί μέλος της (2.2) αλλά χωρίς να παραλείψουμε τους όρους  $O(2)$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^n(\phi) \rangle_0}{n!} \right) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle V^m(\phi) \rangle_0}{m!} \right)^n \right) = \\ & = \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^n(\phi) \rangle_0}{n!} + \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle V^m(\phi) \rangle_0}{n!} \right)^n \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^n(\phi) \rangle_0}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle V^m(\phi) \rangle_0}{m!} \right)^k \end{aligned} \quad (2.3)$$

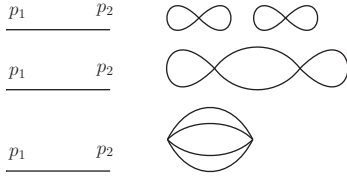
η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι ο όρος  $\langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^n(\phi) \rangle_0$ , δίνει απροσδιοριστίες όπως  $\delta(0)$  ακόμη και όταν τα  $p_i$  συνδυάζονται με "εσωτερικές" γραμμές, καθώς ακόμη και τότε προκύπτουν διαγράμματα-φουσαλίδες. Συγκεκριμένα, εδώ θα προκύψουν τέσσερα τέτοια διαγράμματα. Έχουμε τα εξής "τουβλάκια"

<sup>6</sup>Χαλαρή έννοια του βαθμού. Ουσιαστικά εννοώ πόσες φορές θα εμφανιστεί το  $\delta(0)$ .

<sup>7</sup>Οι ελάχιστες που πρέπει να αφαιρέσουμε για να είναι οι υπόλοιπες γραμμικώς ανεξάρτητες.



και παίρνουμε



όσον αφορά αυτά τουλάχιστον. Επιστρέφοντας στη (2.3), απομονώνουμε τους όρους δεύτερης τάξης ως προς  $\lambda$ , δηλαδή τους όρους που περιέχουν δύο δυνάμεις του  $V(\phi)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^2(\phi) \rangle_0 + \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 \left[ (-1)^1 \frac{1}{2} \langle V^2(\phi) \rangle_0 + (-1)^2 (\langle V(\phi) \rangle_0)^2 \right] + \\ & + \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V(\phi) \rangle_0 (-1)^1 \langle V(\phi) \rangle_0 = \\ & = \frac{1}{2} \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 \langle V^2(\phi) \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^2(\phi) \rangle_C + \frac{1}{2} 2 \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V(\phi) \rangle_C \langle V(\phi) \rangle_0 - \\ & - \frac{1}{2} \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 \langle V^2(\phi) \rangle_0 + \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 (\langle V(\phi) \rangle_0)^2 - \langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 (\langle V(\phi) \rangle_0)^2 - \\ & - \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V(\phi) \rangle_C \langle V(\phi) \rangle_0 = \\ & = \frac{1}{2} \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^2(\phi) \rangle_C \end{aligned}$$

Ο δείκτης  $C$  σημαίνει ότι σε αυτή τη μέση τιμή περιέχονται μόνο τα διαγράμματα που είναι πλήρως συνδεδεμένα (*Connected*) μεταξύ τους, δηλαδή ξεκινώντας από έναν διαδότη να μπορείς να καταλήξεις σε οποιονδήποτε άλλο κινούμενος πάνω στους υπόλοιπους διαδότες. Αυτά δεν περιέχουν απροσδιοριστίες του τύπου  $\delta(0)$  που είδαμε παραπάνω, αφού συνδέονται και εξωτερικές ορμές.

Παραπάνω, εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι

$$\langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^n(\phi) \rangle_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^i \rangle_C \langle V^{n-i} \rangle_0$$

επειδή στο άθροισμα περιέχονται όλα τα δυνατά ενδεχόμενα<sup>8</sup> για το πως θα συνδυαστούν τα  $\{p_i\}$ .

Έχουμε το αποτέλεσμα

$$\langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \phi(p_1)\phi(p_2)V^n(\phi) \rangle_C$$

ας δούμε το αποτέλεσμα πρώτης τάξης

$$\langle \phi(p_1)\phi(p_2)V(\phi) \rangle_C = -\lambda \cdot 12 \left( \text{diagram} \right)$$

<sup>8</sup> Απλά τα ομαδοποιούμε σε  $V(\phi)$ . Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας οφείλεται στους τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε από  $n$  αντικείμενα  $i$  αντικείμενα, χωρίς να μας νοιάζει η σειρά.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta^d(p_1 + p_2) \frac{1}{(p_1^2 + m^2)^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

περνάμε σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπου<sup>9</sup>  $\int d^d p = \int p^{d-1} dp \sin^{d-2} \theta_1 d\theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 d\theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} d\theta_{d-2} d\omega$ .  
Επιπλέον

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^m \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^m \theta d\theta = \\ &= \int_0^1 x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_1^0 x^m (-)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx, \quad \text{with } \theta = \arcsin x \\ &= 2 \int_0^1 x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt, \quad \text{with } x = \sqrt{t} \\ &= \int_0^1 t^{\frac{m+1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} = \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \end{aligned}$$

αν πάρουμε το γινόμενο δυο γειτονικών τέτοιων όρων

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+2}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2}+1)} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} &= \\ = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\frac{m+1}{2}\Gamma(\frac{m}{2})} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})} &= \\ = \sqrt{\pi}^2 \frac{\Gamma(\frac{m+2}{2})}{\frac{m+1}{2} \frac{m}{2} \Gamma(\frac{m}{2})} \end{aligned}$$

αν βάλουμε στη σειρά τους όρους από  $d-2$  έως 1 έχουμε

$$\sqrt{\pi}^{d-2} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\frac{d-2}{2} \frac{d-3}{2} \dots \frac{3}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}$$

ο παράγοντας στο παρονομαστή μπορεί να συγυρισθεί. Για  $d$  περιττό, κρατώντας μόνο τους όρους  $\frac{2n+1}{2}$ ,  
χάρη την ιδιότητα  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  και ξεκινώντας από το  $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2})$

$$\sqrt{\pi}^{d-2} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}) \cdot (\frac{d-1}{2}) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

όμως  $d$  περιττός,  $d-1$  άρτιος, τότε και  $\Gamma(\frac{d-1}{2}) = (\frac{d-1}{2})!$ , έτσι

$$\sqrt{\pi}^{d-2} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

<sup>9</sup>Θεωρούμενος ως ολοκληρωτικός τελεστής. Κάθε  $\theta$  παίρνει τιμές στο  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , ενώ το  $\omega$  στο  $[0, 2\pi]$  και το  $p$  στο  $[0, \infty]$

για  $d$  άρτιο ακολουθούμε αντίστοιχα βήματα. Ακόμη και για  $d$  θετικό πραγματικό, η παραπάνω διαδικασία γίνεται, χρησιμοποιώντας ακριβώς την ιδιότητα  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  και χωρίζοντας τους όρους με όρισμα "πλησιέστερα σε άρτιο ή περιττό". Πολλαπλασιάζοντας και με  $2\pi$  για τη γωνία  $\omega$

$$\Omega_d = 2\sqrt{\pi}^d \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

η οποία είναι και η στερεά γωνία στις  $d$  διαστάσεις. Το αποτέλεσμα αυτό, πάρα το ότι το ορίσαμε για μέσω  $d-1$  ολοκληρωμάτων πάνω στις αντίστοιχες συντεταγμένες, ορίζεται άμεσα και για πραγματικές διαστάσεις  $d$ . μπορούμε να δούμε αυτή την έκφραση αντίστροφα ως τον ορισμό της στερεάς γωνίας σε συνεχή αριθμό διαστάσεων<sup>10</sup>.

Για το ακτινικό μέρος έχουμε

$$\int_0^\infty p^{d-1} \frac{1}{p^2 + m^2} dp$$

αντικαθιστούμε πρώτα  $p = m \cdot q$

$$m^{d-2} \int_0^\infty q^{d-1} \frac{1}{q^2 + 1} dq$$

το οποίο θυμίζει την αναπαράσταση με ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ . Προσπαθώντας να φτιάξουμε το πεδίο ολοκλήρωσης, αλλάζουμε τη μεταβλητή πρώτα σε  $u = q^2$

$$\frac{1}{2} m^{d-2} \int_0^\infty u^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{u+1} du$$

και μετά σε  $1-t = \frac{1}{1+u} \Rightarrow u = \frac{t}{1-t}, du = \frac{1}{(1-t)^2} dt$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m^{d-2} \int_0^1 t^{\frac{d}{2}-1} (1-t)^{-\frac{d}{2}+1} (1-t)(1-t)^{-2} du = \\ & = \frac{1}{2} m^{d-2} \int_0^1 t^{\frac{d}{2}-1} (1-t)^{-\frac{d}{2}+1-1} = \frac{1}{2} m^{d-2} B\left(\frac{d}{2}, 1 - \frac{d}{2}\right) = \\ & = \frac{1}{2} m^{d-2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(1)} = \\ & = \frac{1}{2} m^{d-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

η  $\Gamma(x)$  έχει πόλους<sup>11</sup> στο 0 και σε κάθε αρνητικό ακέραιο. Το ολοκλήρωμα λοιπόν ορίζεται μόνο για  $d = 1$  ενώ για  $d \geq 2$  δεν ορίζεται, στο οποίο περιέχεται και η περίπτωση  $d = 4$  που μας ενδιαφέρει. Οι περισσότερες εκφράσεις, που εμφανίζονται παραπάνω, μοιάζει να στερούνται νοήματος. Ας υπολογίσουμε ξανά την παραπάνω έκφραση, χωρίς την βοήθεια των συναρτήσεων βήτα και γάμμα

$$\int_0^\infty p^{d-1} \frac{1}{p^2 + m^2} dp$$

$$m^{d-2} \int_0^\infty q^{d-1} \frac{1}{q^2 + 1} dq$$

θέτουμε  $u = q^2 + 1, dq = \frac{1}{2\sqrt{u-1}} du$

$$\frac{1}{2} m^{d-2} \int_1^\infty (\sqrt{u-1})^{d-1} \frac{1}{u} \frac{1}{\sqrt{u-1}} du$$

<sup>10</sup> Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει και γωνιακή εξάρτηση, η διαδικασία δεν είναι τόσο απλή. Παρόλαυτα, χάρις τη συνάρτηση  $\Gamma(x)$  μπορούμε να θεωρήσουμε και εκεί συνεχή αριθμό διαστάσεων.

<sup>11</sup> Θεωρούμενη ως συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$\frac{1}{2}m^{d-2} \int_1^\infty (\sqrt{u-1})^{d-2} \frac{1}{u} du$$

για  $d = 4$

$$\frac{1}{2}m^2 \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_1^{\frac{\Lambda^2}{m^2}+1} (u-1) \frac{1}{u} du$$

$$\frac{1}{2}m^2 \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \log \left( \frac{\Lambda}{m} + 1 \right) - 1 \right)$$

και γράφοντας μόνο την έκφραση χωρίς το όριο

$$\frac{1}{2}m^2 \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} - \log \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right)$$

Η έκφραση αποκλίνει ακόμη. Κρατώντας το  $\Lambda$  πεπερασμένο, αλλά αυθαίρετο, η έκφραση γίνεται επίσης πεπερασμένη και αυθαίρετη. Το  $\Lambda$  αντιπροσωπεύει ένα πάνω όριο στις ορμές. Στον  $\mathbb{R}^4$  είναι ο διαθέσιμος χώρος για τις ορμές είναι μία σφαίρα με ακτίνα  $\Lambda$ . Επιστρέφοντας στις εκφράσεις

$$\phi(x) = \int_{V_\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ipx} \tilde{\phi}(p)$$

$$\int d\mu(\phi) \exp(S(\phi))$$

μπορούμε να δούμε την επιβολή ενός πάνω ορίου στις ορμές ως το περιορισμό του πεδίου ολοκλήρωσης του  $\int d\mu(\phi)$  σε πεδία  $\phi(p)$  που μηδενίζονται<sup>12</sup> για  $\|p\| > \Lambda$ . Για τα πεδία στο πραγματικό χώρο, αυτό σημαίνει ότι περιοριζόμαστε σε πεδία που μεταβάλλονται σημαντικά μόνο για αποστάσεις μεγαλύτερες του  $\frac{1}{\Lambda}$ .

$$\phi_\Lambda(x_0 + \delta x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_\Lambda(p) e^{-px_0} e^{-ip\delta x}$$

$$\phi_\Lambda(x_0 + \delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_\Lambda(p) e^{-px_0} (p\delta x)^n$$

η ανάπτυξη είναι σε δυνάμεις του  $p\delta x$ , οπότε αν για παράδειγμα  $\delta x = \frac{1}{100\Lambda}$  και αφού  $\|p\| < \Lambda$ , βλέπουμε ότι η σειρά φθίνει ταχύτατα<sup>13</sup> για οποιαδήποτε επιλογή  $\Lambda$ . Από τη σκοπιά του πεδίου, σφαιρικές γειτονιές του  $x_0$  ακτίνας  $\sim \frac{1}{\Lambda}$ , είναι το ίδιο σημείο. Μοιάζει να έχουμε διακριτοποιήσει το χώρο. Μπορεί κανείς να ξεκινήσει κατευθείαν από εκεί<sup>14</sup>, δηλαδή ορίζοντας πρώτα ένα πλέγμα από σημεία  $x_n$ , οπότε το άνω φράγμα  $\Lambda$ , θα αντιστοιχεί στην αντιστροφή απόσταση των γειτονικών σημείων του πλέγματος  $\alpha$ .

Συνεχίζοντας αυτό το σκεπτικό<sup>15</sup>, ας πούμε ότι τα πεδία "αδιαφορούν" για αποστάσεις μικρότερες του  $\frac{1}{\Lambda}$ . Ας γράψουμε την έκφραση για τη ροπή κάποιας τάξης τάξης

$$\langle P(\phi) \rangle = \frac{\int d\mu(\phi) \exp(S(\phi)) P(\phi)}{\int d\mu(\phi) \exp(S(\phi))}$$

ας πούμε ότι ενδιαφερόμαστε για τις μέσες τιμές των πεδίων για μικρές ορμές<sup>16</sup> (αντίστοιχα για μεγάλους όγκους στο πραγματικό χώρο). Ακολουθούμε το μετασχηματισμό που περιγράφεται από τον Wilson[8]

<sup>12</sup>το σύνολο  $\Phi_\Lambda = \{\phi : \text{supp}(\phi) = \{p, \|p\| \leq \Lambda\}\}$ , ή ακριβέστερα, αφού τα  $\phi$  είναι κατανομές,  $\Phi_\Lambda = \{\phi : \text{supp}(\phi) = \{f : \text{supp}(f) = \{p, \|p\| \leq \Lambda\}\}\}$ .

<sup>13</sup>για όλα τα δυνατά  $\phi$ , και εδώ  $\frac{\delta\phi}{\phi} \sim 0.01$ , αρκεί οι υπόλοιποι συντελεστές να είναι χονδρικά τάξης μονάδα ή τουλάχιστον φραγμένοι.

<sup>14</sup>Παρόμοιοι χειρισμοί με αυτόν του ορισμού του Path Integral.

<sup>15</sup>Περιορίζοντας τα πεδία σε αυτά που δεν έχουν υψηλές Fourier-συνιστώσες, μπορούμε να συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τις δέλτα καθώς  $\int d^d x e^{-i(p_1+p_2)x} = (2\pi)^d \delta(p_1+p_2)$  αφού στο πραγματικό χώρο δεν έχουμε επιβάλλει κάποια αλλαγή

<sup>16</sup>Μικρές σε σχέση με τη κλίμακα  $\Lambda$



Θέτουμε<sup>17</sup>  $\Lambda = 1$ . Επιπλέον,  $m = \sqrt{r_0}\Lambda$ ,  $\lambda = u_0\Lambda^{4-d}$  και  $\phi = \phi_b\Lambda^{\frac{d}{2}-1}$ . Γράφουμε τα πεδία για  $0 < t < 1$ , αμελώντας τη νέα ετικέτα  $b$ ,

$$\begin{aligned}\phi(p) &= \phi_0(p) + \phi_1(p) \\ \phi_0(p) &= \begin{cases} \phi(p) & \text{if } \|(p)\| \leq (1-t) \\ 0 & \text{if } \|(p)\| > (1-t) \end{cases} \\ \phi_1(p) &= \begin{cases} 0 & \text{if } \|(p)\| \leq (1-t) \\ \phi(p) & \text{if } \|(p)\| > (1-t) \end{cases}\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στον ορισμό του ολοκληρώματος διαδρομής ως το όριο αριθμίσμων ολοκληρωμάτων πάνω σε  $\phi_n$  μεταβλητές, βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\int d\mu(\phi) \exp(S(\phi))P(\phi) = \int d\mu(\phi_0) \int d\mu(\phi_1) \exp(S(\phi_0, \phi_1))P(\phi_0)$$

έχουμε

$$\begin{aligned}S(\phi_0, \phi_1) &= - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (p^2 + r_0) (\phi_0(p)\phi_0(-p) + \phi_0(p)\phi_1(-p) + \phi_1(p)\phi_0(-p) + \phi_1(p)\phi_1(-p)) - \\ &\quad - \int_{4p} \delta \left( u_0 \phi_0(p_1)\phi_0(p_2)\phi(p_3)\phi_0(p_4) + 4\phi_1(p_1)\phi_0(p_2)\phi(p_3)\phi_0(p_4) + \right. \\ &\quad \left. + 6\phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_0(p_3)\phi_0(p_4) + 4\phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_1(p_3)\phi_0(p_4) + \phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_1(p_3)\phi_1(p_4) \right)\end{aligned}$$

όπου καταλήγουμε στο τελευταίο με απλή αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα<sup>18</sup>. Οι τετραγωνικοί όροι με μικτούς δείκτες μηδενίζονται από τον ορισμό των δύο συναρτήσεων  $\phi_0, \phi_1$ . Έτσι έχουμε

$$S(\phi_0, \phi_1) = S(\phi_0) + S_1(\phi_0, \phi_1)$$

$$\int d\mu(\phi_0) \exp(S(\phi_0))P(\phi_0) \int d\mu(\phi_1) \exp(S_1(\phi_0, \phi_1))$$

Προσπαθούμε να υπολογίσουμε το δεύτερο παράγοντα

$$\begin{aligned}\int d\mu(\phi_1) \exp(S_1(\phi_0, \phi_1)) &= \int d\mu(\phi_1) \exp \left( - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (p^2 + r_0) \phi_1(p)\phi_1(-p) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left( - \int_{4p} \delta u_0 (4\phi_1(p_1)\phi_0(p_2)\phi_0(p_3)\phi_0(p_4) + 6\phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_0(p_3)\phi_0(p_4) + \right. \\ &\quad \left. + 4\phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_1(p_3)\phi_0(p_4) + \phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_1(p_3)\phi_1(p_4) \right)\end{aligned}$$

Χρειαζόμαστε το διαδότη αυτής της κατανομής για να συνεχίσουμε τους υπολογισμούς μας. Αυτός είναι ο αντίστροφος του ολοκληρωτικού τελεστή στον τετραγωνικό όρο

$$G(p_1, p_2) = (2\pi)^d \delta^d(p_1 + p_2) \frac{\Theta(\|p_1\| - (1-t))}{p_1^2 + r_0}$$

όπου  $\Theta$  η βηματική κατανομή. Μπορούμε να γράψουμε χρησιμοποιώντας διαγράμματα

$$\int d\mu(\phi_1) \exp(S_{\text{free}}(\phi_1)) \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^n u_0^n}{n!} \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + 6 \begin{array}{c} \bullet \diagup \diagdown \\ \bullet \diagdown \diagup \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \diagup \diagdown \\ \bullet \diagdown \diagup \end{array} \right)^n$$

όπου τα  $X$  αντιπροσωπεύουν τους όρους στη δράση και οι τελείες πόσοι παράγοντες  $\phi_0$  υπάρχουν στον κάθε όρο<sup>19</sup>. Η παρένθεση μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια του πολύ-ωνύμικου αναπτύγμα-

<sup>17</sup>Μετράμε δηλαδή τις ορμές σε μονάδες  $\Lambda$

<sup>18</sup>Οι συντελεστές προκύπτουν από το διωνυμικό ανάπτυγμα  $(\phi_0 + \phi_1)^n$  και το γεγονός ότι οι ορμές είναι βουβές μεταβλητές εδώ.

<sup>19</sup>Εννοείται ότι ολοκληρώνουμε για κάθε γραμμή και η ολική ορμή διατηρείται μέσω της  $\delta$ .

τος (*multinomial*). Το αποτέλεσμα πρώτης τάξης είναι

$$\begin{aligned}
 -u_0 Z_0 \int_{4q} \delta < (4\phi_1(p_1)\phi_0(p_2)\phi_0(p_3)\phi_0(p_4) + 6\phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_0(p_3)\phi_0(p_4) + \\
 + 4\phi_1(p_1)\phi_1(p_2)\phi_1(p_3)\phi_0(p_4) + \phi(p_1)\phi_1(p_2)\phi_1(p_3)\phi_1(p_4)) >_0 = \\
 = -u_0 Z_0 \left( 3 \text{ (diagram)} + 6 \text{ (diagram)} \right)
 \end{aligned}$$

όπου οι τέσσερις κορυφές συνδυάζονται με τρεις τρόπους. Η τιμή των διαγραμμάτων είναι

$$\begin{aligned}
 \text{(diagram)} &= \int_{4p} (2\pi)^d \delta^d \left( \sum_{i=0}^4 p_i \right) \phi(p_1)\phi(p_2)(2\pi)^d \delta(p_3 + p_4) \frac{\Theta(\|p_3\| - (1-t))}{p_3 + r_0} = \\
 &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \phi(q)\phi(-q) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p + r_0}
 \end{aligned}$$

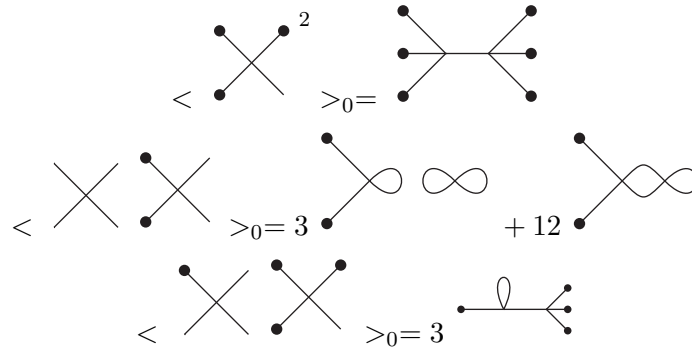
όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ανάμεσα στις δύο σφαίρες με ακτίνες 1 και  $1-t$ . Η τιμή του διαγράμματος φουσαλίδας συνεχίζει να είναι απροσδιόριστη<sup>20</sup> αλλά δεν μας ανησυχεί, για λόγους που θα δούμε σε λίγο. Για τη δεύτερη τάξη έχουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{u_0^2}{2} Z_0 < & \text{(diagram)}^2 + 16 \text{(diagram)}^2 + 36 \text{(diagram)}^2 + 16 \text{(diagram)}^2 + \\
 & 8 \text{(diagram)} \text{(diagram)} + 12 \text{(diagram)} \text{(diagram)} + 8 \text{(diagram)} \text{(diagram)} + \\
 & + 48 \text{(diagram)} \text{(diagram)} + 48 \text{(diagram)} \text{(diagram)} + \\
 & + 32 \text{(diagram)} \text{(diagram)} >_0
 \end{aligned}$$

Οι όροι με περιττό αριθμό τελείων μηδενίζονται. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 < \text{(diagram)}^2 >_0 = 9 \text{(diagram)}^2 + 12 \text{(diagram)}^2 + 24 \text{(diagram)} \\
 < \text{(diagram)}^2 >_0 = 6 \text{(diagram)} + 9 \text{(diagram)} \\
 < \text{(diagram)}^2 >_0 = \text{(diagram)} + 2 \text{(diagram)}
 \end{aligned}$$

<sup>20</sup> Αυτό γιατί η εισαγωγή του  $\Lambda$  έθεσε ένα κάτω όριο στις δυνατές αποστάσεις. Η απροσδιοριστία από τα διαγράμματα-φουσαλίδες οφείλεται στην αυθαίρετα μεγάλη έκταση του χώρου. Θα έπρεπε να εισάγουμε και εκεί ένα πάνω όριο στις αποστάσεις, ώστε να διακριτοποιηθεί και ο χώρος των ορμών.



Οργανώνουμε τα αποτελέσματα πρώτης και δεύτερης τάξης

$$Z_0^{-1} \left\{ -u_0 \left( 3 \text{ loop} \right) - u_0 \left( 6 \text{ loop} \right) + \frac{u_0^2}{2} \left( 3 \text{ loop} \right) + \frac{u_0^2}{2} \left( 6 \text{ loop} \right)^2 + 2 \frac{u_0^2}{2} \left( 6 \cdot 3 \text{ loop} \right) + \right. \\ \left. + \frac{u_0^2}{2} \left( 12 \text{ loop} \right) + \frac{u_0^2}{2} \left( 24 \text{ sunset} \right) + \frac{u_0^2}{2} \cdot 4^2 \cdot \left( 6 \text{ tadpole} \right) + \frac{u_0^2}{2} \cdot 4^2 \cdot \left( 9 \text{ tadpole} \right) + \right. \\ \left. + \frac{u_0^2}{2} \cdot 6^2 \cdot \left( 2 \text{ loop} \right) + \frac{u_0^2}{2} \cdot 4^2 \cdot \left( 6 \text{ loop} \right) + \frac{u_0^2}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \left( 12 \text{ loop} \right) + \frac{u_0^2}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left( 3 \text{ tadpole} \right) \right\}$$

Κάθε διάγραμμα εμφανίζεται με έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Αυτός καθορίζεται από το ίδιο το διάγραμμα (ο παράγοντας εντός της παρένθεσης) και από τους κόμβους (vertex) από τους οποίους προέκυψε (ο παράγοντας από το πολύ-ωνυμικό ανάπτυγμα). Τα διαγράμματα τα οποία προκύπτουν σε κάθε τάξη  $-n$  υπολογισμού μπορούν να διαχωριστούν σε δυο κατηγορίες: γνήσια  $n$ -τάξης διαγράμματα (fully connected) και διαγράμματα που είναι γινόμενα γνήσιων διαγραμμάτων προηγούμενων τάξεων (disconnected). Κάθε διάγραμμα εμφανίζεται πάντα με τον πολλαπλασιαστικό του παράγοντα, για τον οποίο έχουμε ήδη τον αλγόριθμο παραγωγής του

- Σχεδιάσε το διάγραμμα
- Βρες από ποιους κόμβους κατασκευάστηκε, για κάθε είδος κόμβου πολλαπλασίασε με το παράγοντα που εμφανίζεται μαζί του στην δράση, για  $n$  κόμβους πολλαπλασίασε με  $\frac{u_0^n}{n!}$
- Πολλαπλασίασε με τον αριθμό των τρόπων που συνδυάζονται τα "ελεύθερα πόδια" ώστε να προκύψει το διάγραμμα
- Πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα με τον πολυ-ωνυμικό παράγοντα που του αντιστοιχεί στην  $n$  τάξη  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$  με  $n_i$  οι φορές που εμφανίζεται ο κόμβος  $i$  και  $\sum_{i=0}^n n_i = n$ .

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_m = n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_m} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m}$$

Εξαιτίας αυτών των κανόνων, τα "γνήσια" διαγράμματα που προκύπτουν μπορούν να οργανωθούν σε δυναμοσειρά. Αυτό μπορούμε να το δούμε για τα γνήσια διαγράμματα πρώτης τάξης παραπάνω

$$Z_0^{-1} \left\{ -u_0 \left( 3 \text{ loop} \right) - u_0 \left( 6 \text{ loop} \right) + \frac{1}{2} \left( -u_0 \left( 3 \text{ loop} \right) - u_0 \left( 6 \text{ loop} \right) \right)^2 \right\}$$

η δύναμη της δυναμόσειρας στην οποία ανήκει ένα μη-γνήσιο διάγραμμα είναι ίση με τον αριθμό των γνήσιων διαγραμμάτων που περιέχει. Προκύπτει ότι η δυναμοσειρά αυτή είναι το εκθετικό των γνήσιων διαγραμμάτων<sup>21</sup>

$$\exp\left(\text{Όλα τα γνήσια διαγράμματα}\right) = \left(\text{Όλα τα μη γνήσια διαγράμματα}\right)$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *linked-cluster theorem*.

Έτσι το αρχικό

$$\int d\mu(\phi) \exp(S(\phi)P(\phi)) = \int d\mu(\phi_0) \exp(S(\phi_0))P(\phi_0) \int d\mu(\phi_1) \exp(S_1(\phi_0, \phi_1))$$

γίνεται

$$Z_{01} \int d\mu(\phi_0) \exp(S(\phi_0) + (\text{connected diagrams}))P(\phi_0)$$

στο πολλαπλασιαστικό παράγοντα έξω από το ολοκλήρωμα μπορούμε να βάλουμε και εκθετικό των διαγραμμάτων-φυσαλίδες. Έχουμε πλέον μια καινούργια δράση, με νέους όρους αλληλεπίδρασης και αλλαγμένους τους παλιούς. Συγκεκριμένα, μέχρι τάξης  $u_0^2$ , για

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \end{array} = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p^2 + r_0} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \phi_0(q)\phi_0(-q) b_{11}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) \int_{p_1} \int_{p_2} \frac{\Theta(\|p_1\| - (1-t))}{p_1^2 + r_0} \frac{\Theta(\|p_2\| - (1-t))}{p_2^2 + r_0} \frac{\Theta(\|q + p_1 + p_2\| - (1-t))}{(q + p_1 + p_2)^2 + r_0} = \\ = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \phi_0(q)\phi_0(-q) b_{21}(q)$$

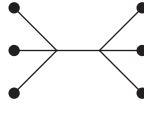
$$\begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) \frac{\Theta(\|q\| - (1-t))}{q^2 + r_0} b_{11}^2 = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) b_{a22}(q) b_{11}^2 = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) b_{22}(q)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \end{array} = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) \int_{p_1} \left( \frac{\Theta(\|p_1\| - (1-t))}{p_1^2 + r_0} \right)^2 \int_{p_2} \frac{\Theta(\|p_2\| - (1-t))}{p_2^2 + r_0} = \\ = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) b_{a23} b_{11} = \int_q \phi_0(q)\phi_0(-q) b_{23}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \end{array} = \int_{4q} \delta \phi_0(q_1)\phi_0(q_2)\phi_0(q_3)\phi_0(q_4) \int_p \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p^2 + r_0} \frac{\Theta(\|p - q_3 - q_4\| - (1-t))}{(p - q_3 - q_4)^2 + r_0} = \\ = \int_{4q} \delta \phi_0(q_1)\phi_0(q_2)\phi_0(q_3)\phi_0(q_4) c_{11}(q_3, q_4)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \end{array} = \int_{4q} \delta \phi_0(q_1)\phi_0(q_2)\phi_0(q_3)\phi_0(q_4) b_{11} b_{22}(q_1) = \int_{4q} \delta \phi_0(q_1)\phi_0(q_2)\phi_0(q_3)\phi_0(q_4) c_{22}(q_1)$$

<sup>21</sup> Εδώ στο διάγραμμα περιέχεται και ο πολλαπλασιαστικός του παράγοντας. Γενικά η ερμηνεία της λέξης θα είναι ελαστική, ανάλογα τη περίπτωση.



$$= \int_{6q} \delta \phi_0(q_1) \phi_0(q_2) \phi_0(q_3) \phi_0(q_4) \phi_0(q_5) \phi_0(q_6) \frac{\Theta(\|q_4 + q_5 + q_6\| - (1-t))}{(q_4 + q_5 + q_6)^2 + r_0} =$$

$$\int_{6q} \delta \phi_0(q_1) \phi_0(q_2) \phi_0(q_3) \phi_0(q_4) \phi_0(q_5) \phi_0(q_6) d_{21}(q_4, q_5, q_6)$$

όπου  $b, c, d$  αντιστοιχούν στις δυνάμεις του  $\phi_0$  και ο πρώτος δείκτης στη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Γράφουμε

$$\int d\mu(\phi) \exp \{S(\phi)\} P(\phi) = Z_{01} Z_{\text{bubbles}} \int d\mu(\phi_0) \exp \{S_t(\phi_0)\} =$$

$$= \int d\mu(\phi_0) \left\{ - \int_q \phi_0(q) \phi_0(-q) \left( q^2 + r_0 + u_0 6 b_{11} - \frac{u_0^2}{2} 96 b_{21}(q) - \frac{u_0^2}{2} 144 b_{22}(q) - \frac{u_0^2}{2} 144 b_{23} \right) - \right.$$

$$\left. - \int_{4q} \delta \phi_0^4 \left( u_0 - \frac{u_0^2}{2} 72 c_{11}(q_3, q_4) - \frac{u_0^2}{2} 96 c_{22}(q_1) \right) - \right.$$

$$\left. - \int_{6q} \delta \phi_0^6 \left( -\frac{u_0^2}{2} 16 d_{21}(q_4, q_5, q_6) + O(u_0^3) \right) \right\} P(\phi_0)$$

Έχουμε μια καινούργια στατιστική κατανομή για την καινούργια τυχαία μεταβλητή  $\phi_0$ , στην οποία έχει μεταβληθεί ο διαδότης, η σταθερά σύζευξης της  $\phi_0^4$  αλληλεπίδρασης ενώ εμφανίστηκαν και νέα είδη αλληλεπίδρασης  $\phi_0^6$ . Θέλουμε αυτή η νέα θεωρία να μοιάζει όσο το δυνατό περισσότερο με την αρχική, καθώς αυτό θα μας επέτρεπε να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς τις ίδιες τεχνικές για να υπολογίσουμε αναμενόμενες τιμές. Οι βασικές διαφορές υπάρχουν στον διαδότη και στο γεγονός ότι τα  $\int_q$  ολοκληρώματα εκτείνονται στην περιοχή  $\|q\| \leq (1-t)$ . Αλλάζουμε<sup>22</sup> τη μεταβλητή σε  $\hat{q} = \frac{q}{1-t}$  και ορίζουμε<sup>23</sup> τα νέα πεδία  $\zeta \phi(\hat{q}) = \phi_0((1-t)\hat{q})$

$$\int d\mu(\phi) \exp \left\{ - \int_q (1-t)^d \zeta^2 \phi^2 \left( (1-t)^2 \cdot q^2 + r_0 + f_2(q(1-t)) \right) - \int_{4q} \delta (1-t)^{3d} \zeta^4 \phi^4 (u_0 + f_4(q_1, q_2, q_3, q_4)) + \right.$$

$$\left. + \int_{6q} \delta \phi^6 f_6(q_1, q_2, \dots, q_6) \right\} + \left( \text{higher-order terms} \right)$$

οι  $f_2, f_4, f_6$  είναι συναρτήσεις που προκύπτουν από τα διαγράμματα και υπολογίζονται σε τάξεις του  $u_0, \epsilon$  και  $t$ . Θέλουμε ο διαδότης να έχει την ίδια εξάρτηση<sup>24</sup> από το  $q$ . Η  $f_2$  αναμένουμε<sup>25</sup> να αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά του  $q^2$ .

$$f_2(q) = f_{20} + q^2 f_{22} + f_{24} q^4 + O(q^6)$$

οι όροι  $f_{22}, f_{24}, \dots$  γνωρίζουμε ότι δέχονται συνεισφορές από διαγράμματα δεύτερης σε  $u_0^2$  τάξης και πάνω, ενώ ο σταθερός όρος ξεκινά από  $u_0$ . Θέλουμε

$$q^2 + r_t + f_2^*(q) = \zeta^2 (1-t)^d (q^2 (1-t)^2 + r_0 + f_2((1-t)q))$$

όπου  $f_2^*$  δεν περιέχει δύναμη  $q^2$ . Τότε,

$$\zeta = (1-t)^{-\frac{d}{2}-1} (1 + O(u_0^2))$$

<sup>22</sup> Προσοχή στις συναρτήσεις  $f$ , χρησιμοποιούνται καταχρηστικά τα ίδια σύμβολα πριν και μετά την αλλαγή μεταβλητής.

<sup>23</sup> όπου ο τελευταίος μετασχηματισμός επηρεάζει το μέτρο ολοκλήρωσης  $\int d\mu(\phi)$ , αλλά κάθε ποσότητα που υπολογίζουμε δεν εξαρτάται από αυτό, καθώς πάντα διαιρούμε με ο.

<sup>24</sup> Έτσι η κατανομή με βάση την οποία υπολογίζουμε εξακολουθεί να είναι γκαουσιανή.


<sup>25</sup> Αναμένουμε ο χώρος να είναι ισότροπος.

$$r_t = (1-t)^{-2} (r_0 + f_{20}) (1 + O(u_0^2))$$

Επιπλέον, για τον  $\phi^4$  όρο


$$\begin{aligned} u_t + f_4^*(\{q_i\}) &= \zeta^4 (1-t)^{3d} (u_0 + f_4(\{(1-t)q_i\})) \Rightarrow \\ u_t + f_4^*(\{q_i\}) &= (1-t)^{d-4} (u_0 + f_4(\{(1-t)q_i\})) \end{aligned}$$

από την προηγούμενη ανάλυση γνωρίζουμε ότι  $f_4$ , και επακόλουθα η  $f_4^*$ , είναι τάξης  $u_0^2$ , αφού μόνο διαγράμματα με δύο κόμβους και πάνω περιέχουν 4 "βούλες". Για να γίνω πιο συγκεκριμένος, προσεγγίζω τις συνεισφορές των διαγραμμάτων, αγνοώντας τις βούλες στα διαγράμματα



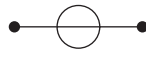
$$\rightarrow \frac{1}{(1-t)^2 + r_0} \int_p 1 = \frac{1}{(1-t)^2 + r_0} c_t$$

περνώντας το *supremum* της ολοκληρωτέας συνάρτησης, που συμφωνεί με το αποτέλεσμα του παραρτήματος<sup>26</sup>. Ορίζουμε<sup>27</sup>  $c_t = \int_{S_1^{d-1} - S_{1-t}^{d-1}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (2\pi)^d$  και έτσι




$$\rightarrow \frac{c_t}{(1-t)^2 + r_0}$$

Συνεχίζοντας στη δεύτερη τάξη  $u_0$

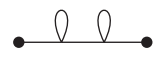


$$= \int_p \int_{p_1} \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p^2 + r + 0} \frac{\Theta(\|p_1\| - (1-t))}{p_1^2 + r + 0} \frac{\Theta(\|q + p + p_1\| - (1-t))}{(q + p + p_1)^2 + r + 0}$$

$$\rightarrow \frac{1}{((1-t)^2 + r_0)^3} c_t^2$$



$$\rightarrow \frac{1}{((1-t)^2 + r_0)^3} c_t^2$$



$$= \left( \int_p \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p^2 + r + 0} \right)^2 \frac{\Theta(\|q\| - (1-t))}{(q)^2 + r_0}$$

για τα διαγράμματα που προκύπτουν<sup>28</sup>. Έτσι έχουμε<sup>29</sup>

$$r_t = (1-t)^{-2} \left( r_0 + 6 u_0 \frac{c_t}{1 + r_0} + O(u_0^2) \right)$$

<sup>26</sup> Εκεί  $r_0^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{t}{1+r_0} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d}$  για μηδενική τάξη σε  $\epsilon$ , οπότε μπορούμε να παραλείψουμε και τον παράγοντα  $r_0^{-\frac{\epsilon}{2}} = 1 - \log r_0 \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)$ .

<sup>27</sup>  $S_R^d$  είναι η σφαίρα-d με ακτίνα R

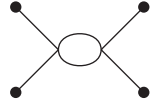
<sup>28</sup> Παίρνουμε πάλι τα *supremum* των κλασμάτων, οπότε τα ολοκληρώματα δίνουν  $c_t^2$ . Θα είναι σημαντικά στις επόμενες εφαρμογές του μετασχηματισμού που περιγράφεται εδώ.

<sup>29</sup> Παρακάτω χρησιμοποιείται διαδοχικά το q και ως διάνυσμα και ως μέτρο του αυτού διανύσματος.

Παρατηρούμε εδώ ότι η διαδικασία σε αυτό το στάδιο "καταπιέζει" τα διαγράμματα με πολλούς διαδότες, καθώς

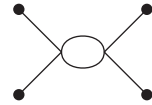
$$c_t = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^1 (1-t) dp p^{d-1} = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{1 - (1-t)^d}{d} \simeq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} t$$

αμελώντας όρους τάξης  $t^2$ , οπότε για  $t$  απειροστά μικρό ο παράγοντας  $c_t$  είναι επίσης απειροστός (όπως αναμένουμε ο όγκος ενός πολύ λεπτού κελύφους να είναι). Όμως σε περαιτέρω εφαρμογές του μετασχηματισμού κάθε τέτοιο διάγραμμα προκύπτει με περισσότερους τρόπους χάρις στους καινούργιους κόμβους. Αντίστοιχα για το  $u_t$



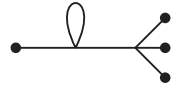
$$= \int_{(1-t)}^1 dp p^{d-1} \frac{1}{p^2 + r_0} \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{\Theta(\| \|p - (q_3, q_4)\| \| - ((1-t))\|)}{(p - (q_3 + q_4))^2 + r_0}$$

και εδώ θα αγνοήσουμε την εξάρτηση από τις εξωτερικές ορμές



$$\rightarrow \frac{1}{(1-t)^2 + r_0} \frac{1}{(1-t)^2 + r_0} c_t$$

Για το δεύτερο διάγραμμα έχουμε



$$\rightarrow \frac{c_t}{(1-t)^2 + r_0} \frac{\Theta(\|q_1\| - (1-t))}{q_1^2 + r_0}$$

η συνθήκη της βηματικής συνάρτησης ικανοποιείται μόνο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας  $(1-t)$ , και δεδομένου ότι εμφανίζεται μόνο εντός ολοκληρωμάτων και πρόκειται για σύνολο μηδενικού μέτρου ως προς το μέτρο *Lebesgue* του  $\mathbb{R}^d$ , ο όρος δεν συνεισφέρει. Έτσι

$$u_t = (1-t)^{1-\epsilon} \left( u_0 - 36 u_0^2 \frac{c_t}{(1+r_0)^2} + O(u_0^3) \right)$$

Αγνοώντας συστηματικά τις συνεισφορές τάξεις  $u_0^2$  και  $u_0^3$  στα  $r_0$  και  $u_0$  αντίστοιχα, έχουμε

$$r_{nt} = (1-t)^{-2} r_{(n-1)t} + 6u_{(n-1)t} c_t \frac{(1-t)^{-2}}{1 + r_{(n-1)t}}$$

$$u_{nt} = (1-t)^{-\epsilon} u_{(n-1)t} - 36u_{(n-1)t}^2 c_t \frac{(1-t)^{-\epsilon}}{((1-t)^2 + r_{(n-1)t})^2}$$

$$r_{2t} = (1-t)^{-4} r_0 + 6u_0 c_t \left[ \frac{(1-t)^{-4}}{(1-t)^2 + r_0} + \frac{(1-t)^{-\epsilon}}{(1-t)^4 + r_0} \right]$$

$$r_{3t} = (1-t)^{-6} r_0 + 6u_0 c_t \left[ \frac{(1-t)^{-6}}{(1-t)^2 + r_0} + \frac{(1-t)^{-2-\epsilon}}{(1-t)^4 + r_0} + \frac{(1-t)^{2-\epsilon}}{(1-t)^6 + r_0} \right]$$

$$r_{nt} = (1-t)^{-2n} r_0 + 6u_0 c_t \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1-t)^{-2(n-2i)-i\epsilon}}{(1-t)^{2(i+1)} + r_0} \right]$$

όπου συστηματικά αγνοούμε στο παρονομαστή τον όρο  $u_0$ , καθώς θα συνδυαζόταν με τον όρο  $u_0$  στον αριθμητή ώστε να δώσει συνεισφορές  $u_0^2$ . Αν πάρουμε το όριο  $n \rightarrow \infty$  όπου  $t = \frac{T}{n}$ , η ασυμπτωτική μορφή του τελευταίου όρου του αθροίσματος είναι

$$\frac{e^{-2T} e^{\epsilon T}}{e^{-2T} + r_0}$$

Μπορούμε να χωρίσουμε το άθροισμα σε δύο τμήματα, με κριτήριο  $i < \frac{n}{2}$  και  $i > \frac{n}{2}$ , και αντικαθιστούμε τους όρους του κάθε αθροίσματος με αυτή τις αντίστοιχες ακραίες περιπτώσεις. Θυμόμαστε ότι  $c_t = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{1-(1-t)^d}{d} \simeq \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} t$ , με  $t = \frac{T}{n}$

$$r(T) = e^{2T} r_0 + 6u_0 \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{T}{2} \left( \frac{e^{2T} e^{\epsilon T}}{e^{-2T} + r_0} + \frac{e^{-(2-\epsilon)T}}{e^{-2T} + r_0} \right) \quad (2.4)$$

αφού  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{T}{n}\right)^n = e^T$  ο αντίστοιχος τύπος για το  $u_{nt}$  είναι

$$u_{nt} = (1-t)^{-\epsilon} u_0 - 36u_0^2 c_t \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1-t)^{-(n+2i)\epsilon} (1-t)^{4i}}{((1-t)^{2(i+1)} + r_0)^2} \right]$$

όποτε

$$u(T) = e^{\epsilon T} u_0 - 36u_0^2 \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} T \frac{e^{-(4-3\epsilon)T}}{(e^{-2T} + r_0)^2} \quad (2.5)$$

Οι προσεγγίσεις αυτές είναι καλές μόνο όταν τα  $(r_0, u_0)$  είναι τέτοια ώστε το  $r(T)$  να αυξάνεται αυθαίρετα με το  $T$  ώστε να είναι κυρίαρχος όρος στο παρονομαστή  $(1-t)^{2n} + r_{nt}$ .

Πρέπει να διακρίνουμε ανάμεσα στις περιπτώσεις όπου τα  $u_0, r_0$  οδηγούν τελικά σε μεγάλα  $r$  και σε αυτά που οδηγούν σε μικρά. Εξετάζοντας τη δεύτερη περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι το  $r$  συγκλίνει σε μια τιμή  $\alpha$ , μικρή. Τότε οι αποσβεστική παράγοντες  $(1-t)^2$  δε θα εμφανίζονται στους καινούργιους όρους που παράγονται σε κάθε βήμα του μετασχηματισμού. Γράφουμε

$$r(T) \simeq e^{2T} r_0 + 6u_0 \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{T}{2} \frac{e^{2T} e^{\epsilon T}}{e^{-2T} + \alpha}$$

$$u(T) \simeq e^{\epsilon T} u_0 - 36u_0^2 \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} T \frac{e^{3\epsilon T}}{(e^{-2T} + \alpha)^2}$$

Βλέπουμε ότι ο πρώτος και ο δεύτερος όρος είναι συγκρίσιμοι για κάθε  $T$ . Σε αυτή τη περίπτωση, είναι δυνατό να βρούμε τιμές του  $u_0, r_0$  για τις οποίες ο μετασχηματισμός αφήνει πρακτικά αναλλοίωτα τα  $(r, u)$ . Λέμε αυτό το σημείο σταθερό σημείο (*fixed point*) του μετασχηματισμού. Συγκεκριμένα, υπάρχει μια καμπύλη  $(r(\beta), u(\beta))$ , όπου ξεκινώντας οπουδήποτε πάνω της καταλήγουμε σε αυτό το σημείο.

Οι κομβικές συναρτήσεις μεγαλύτερης τάξης θα πολλαπλασιάζονται με παράγοντες  $e^{aT}$  με  $a < 0$ , όποτε για αρκετά μεγάλο  $T$ , θα εξαφανίζονται. Έτσι δε θα εμφανίζονται στην δράση μετά από αρκετές επαναλήψεις. Αποσαφηνίζουμε εδώ τα αποτελέσματα μας. Μπορούμε να σκεφτούμε και δεύτερη επανάληψη του μετασχηματισμού. Ήδη διαθέτουμε τον αναδρομικό τύπο, σε τάξη  $u_0^2$ . Παρατηρούμε ότι κύριο ρόλο στην εξέλιξη των σταθερών  $r$  και  $u$  παίζει ο παράγοντας ανακλιμάκωσης  $(1-t)$ , και η "διάσταση" τους. Γράφουμε τη δράση

$$S = - \int_q \phi^2 v_2(nt; q) - \int_{4q} \delta \phi^4 v_4(nt; q_1, q_2, q_3, q_4) - \int_{6q} \delta \phi^6 v_6(nt; \{q_i\}_6) - \dots$$



οι συναρτήσεις  $v_l(nt; q)$  είναι οι συναρτήσεις κόμβων (*vertex functions*) και αντιστοιχούν η κάθε μία στην αλληλεπίδραση  $\phi^l$ . Το  $n$  αριθμεί πόσες φορές έχουμε επαναλάβει το μετασχηματισμό που περιγράψαμε παραπάνω. Ειδικότερα γράφουμε

$$v_2(T; q) = q^2 + r_T + f_2(T; q)$$

$$v_l(T; \{q\}_l) = u_l + f_l(T; \{q_i\}_l)$$

οι  $f_l$  μηδενίζονται για  $q_i = 0$  και η  $f_2$  επιπλέον δεν περιέχει τετραγωνικό όρο  $q^2$ . Επιπλέον έχουμε

$$\langle P(\phi) \rangle = \frac{\int d\mu(\phi) e^{S(\phi)} P(\phi)}{Z_0}$$

επιπλέον ορίζουμε το μήκος συσχετισμού  $\xi$

$$\Delta(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \int_p \int_{p_1} e^{-ipx_1} e^{-ip_1x_2} \langle \phi(p)\phi(p_1) \rangle = \int_p e^{-ip(x_1-x_2)} \Delta(p)$$

$$(2\pi)^d \delta^d(p+p_1) \Delta(p) = \langle \phi(p)\phi(p_1) \rangle = \frac{\int d\mu(\phi) e^{S(\phi)} \phi(p)\phi(p_1)}{Z_0}$$

$$\xi^2 = \frac{\int d^d x x^2 \Delta(x, 0)}{\int d^d x \Delta(x, 0)} = - \frac{\int_p \Delta(p) \int d^d x \frac{d^2}{dp^2} e^{-ipx}}{\int_p \Delta(p) \int d^d x e^{-ipx}} \Rightarrow$$

$$\xi^2 = - \frac{\int_p \Delta(p) \frac{d^2}{dp^2} (2\pi)^d \delta(p)}{\Delta(0)}$$

και αν  $\Delta(p)$ ,  $\frac{d\Delta(p)}{dp} \simeq 0$  ενώ  $\|p\| \rightarrow \Lambda$ , μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες τον αριθμητή δύο φορές

$$\xi^2 = - \frac{\left. \frac{d^2 \Delta(p)}{d^2 p} \right|_{p=0}}{\Delta(0)}$$

και επιπλέον,  $\frac{d^2 \Delta(p)}{d^2 p} \Big|_{p=0} = 2 \frac{d\Delta(p^2)}{dp^2} \Big|_{p=0}$

$$\xi^2 = -2 \frac{\left. \frac{d\Delta(p)}{dp^2} \right|_{p=0}}{\Delta(0)}$$

Αν δούμε την συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων  $\Delta$  ως μία στατιστική κατανομή για τη μεταβλητή  $x$ , και δεδομένου ότι  $\Delta(x) = \Delta(-x)$  άρα  $\langle x \rangle = 0$  βλέπουμε ότι το  $\xi$  είναι ενδεικτικό του μέχρι ποια απόσταση οι τιμές του πεδίου συσχετίζονται μεταξύ τους. Έτσι οι τιμές του πεδίου  $\phi(x)$  μεταξύ δύο σημείων  $x_1, x_2$  που απέχουν περισσότερο από  $\xi$  είναι πρακτικώς ανεξάρτητες. Υπολογίζουμε τη  $\Delta$

$$\Delta(p) = \text{---} + 12 \text{---} \text{---} - 32 \frac{1}{2} \text{---} \text{---} - 48 \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} - 144 \frac{1}{2} \text{---} \text{---} + O(v_4^3)$$

ο διαδότης είναι  $\frac{1}{p^2+r_t}$ .

$$\Delta(q) = \frac{1}{q^2 + r_t + f_2(t; q)} + \frac{1}{(q^2 + r_t + f_2(t; q))^2} \left[ 12 \int_p \frac{u_t + f_4(t; p, -p, q, -q)}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} \right]$$

$$-16 \int_p \int_{p_1} \frac{u_t + f_4(t; p, p_1, p + p_1 + q, -q)}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} \frac{u_t + f_4(t; -p, -p_1, -p - p_1 - q, q)}{p_1^2 + r_t + f_2(t; p_1)} \cdot \frac{1}{(p + p_1 + q)^2 + r_t + f_2(t; p + p_1 + q)} - \dots \Big]$$

$$\Delta(0) = \frac{1}{r_t} + \frac{1}{r_t^2} \left[ 12 \int_p \frac{u_t}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} - 16 \int_p \int_{p_1} \frac{u_t^2 + O(u_0^3)}{(p^2 + r_t + f_2(p, t))(p_1^2 + r_t + f_2(t; p_1))((p + p_1)^2 + r_t)} - \dots \right]$$

$$\frac{d\Delta(q)}{dq^2} = -\frac{1 + \frac{df_2}{dq^2}}{(q^2 + r_t + f_2(t; q))^2} - 2 \frac{1 + \frac{df_2}{dq^2}}{(q^2 + r_t + f_2(t; q))^3} \left[ 12 \int_p \frac{u_t + f_4(t; p, -p, q, -q)}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} - 16 \int_p \int_{p_1} \frac{u_t + f_4(t; p, p_1, p + p_1 + q, -q)}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} \frac{u_t + f_4(t; -p, -p_1, -p - p_1 - q, q)}{p_1^2 + r_t + f_2(t; p_1)} \cdot \frac{1}{(p + p_1 + q)^2 + r_t + f_2(t; p + p_1 + q)} - \dots \right]$$

όποτε

$$\left. \frac{d\Delta(q)}{dq^2} \right|_{q=0} = -\frac{1 + \frac{df_2(0)}{dq^2}}{r_t^2} - 2 \frac{1 + \frac{df_2(0)}{dq^2}}{r_t^3} \left[ 12 \int_p \frac{u_t + f_4(t; p, -p, 0, 0)}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} - 16 \int_p \int_{p_1} \frac{u_t + f_4(t; p, p_1, p + p_1, 0)}{p^2 + r_t + f_2(t; p)} \frac{u_t + f_4(t; -p, -p_1, -p - p_1, 0)}{p_1^2 + r_t + f_2(t; p_1)} \cdot \frac{1}{(p + p_1)^2 + r_t + f_2(t; p + p_1)} - \dots \right] + \dots$$

Οι  $f_2, f_4$  είναι τάξης  $u_0^2$ . Στη παραγωγή ως προς  $q^2$  θα δώσουν ένα σταθερό όρο τάξης  $u_0^2$  επίσης. Γράφουμε ενά πολύ απλό παράδειγμα σε τάξη  $u$

$$A = \int_p \frac{1}{p^2 + r}$$

$$\Delta(0) = \frac{1}{r} + 12 \frac{u}{r^2} A$$

$$\frac{d\Delta(0)}{dp^2} = -\frac{1}{r^2} - 24 \frac{u}{r^3} A$$

$$\xi^2 = 2 \frac{\frac{1}{r^2} + 24 \frac{u}{r^3} A}{\frac{1}{r} + 12 \frac{u}{r^2} A}$$

$$\xi^2 = \frac{2r + 24uA}{r^2 + 12uA}$$

Βλέπουμε ότι το  $\xi$  μετασχηματίζεται στις ανακλιμακώσεις χονδρικά σαν  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  δηλαδή σαν απόσταση του πραγματικού χώρου<sup>30</sup>. Όμως, επιλέγοντας<sup>31</sup> εδώ  $r = -12uA$ , μπορούμε να απειρίσουμε το μήκος συσχετισμού. Η καμπύλη αυτή  $(r(u), u)$  είναι ακριβώς η καμπύλη για την οποία οι μετασχηματισμοί ανακλιμακώσεως οδηγούν στο σταθερό σημείο του μετασχηματισμού.

<sup>30</sup> Αλλά ήδη βλέπουμε ότι αυτό μεταβάλλεται με τις διορθώσεις σε δυναμοσειρά του  $u$ .

<sup>31</sup> Αυτό οδηγεί σε τετραγωνικό όρο στη δράση με αντίθετο πρόσημο από τον  $\phi^4$ , οπότε θα έχουμε εκφυλισμένη κατάσταση κενού, άρα και σπάσιμο συμμετρίας. Σημειώνουμε ότι πρέπει  $u > 0$  σε κάθε περίπτωση, αλλιώς το εκθετικό  $e^{S(\phi)}$  κάθε άλλο παρά θα συγκλίνει για κάθε  $\phi$ .

Διαισθητικά, γνωρίζουμε ότι ένας μετασχηματισμός ανακλιμάκωσης μας πάει από μια θεωρία  $S$  σε μια  $S'$  που περιγράφουν το ίδιο φυσικό σύστημα. Το  $\xi$  είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του συστήματος, αλλά μετριέται σε διαφορετικές κλίμακες στις δύο θεωρίες. Αναγκαστικά πρέπει να μεταβληθεί κατά τον μετασχηματισμό. Αν όμως η θεωρία μας μένει αναλλοίωτη υπό τον ίδιο μετασχηματισμό, αναγκαστικά  $\xi = \xi' = a\xi$  για κάποιο  $a \neq 1$ , σχέση η οποία ικανοποιείται μόνο για  $\xi = 0$  ή  $\xi = \infty$ . Η καμπύλη αυτή θα ονομάζεται κρίσιμη καμπύλη<sup>32</sup>.

Γράφοντας ξανά τη δράση

$$S = - \int_q \phi^2(q^2 + r + f_2(q)) - \int_4 q \phi^4(u + f_4(q))$$

μπορούμε να επαναφέρουμε τις φυσικές μονάδες υπό τη συνθήκη  $m = \frac{1}{\xi}\Lambda$ . Οι αρχικές παράμετροι  $r_0(\beta), u_0(\beta)$  βρίσκονται εκτός της κρίσιμης καμπύλης, άρα  $\xi$  είναι πεπερασμένο. Έτσι  $q' = e^{-T}\Lambda q$

$$\phi_{ph} = \phi\zeta(T)\Lambda^{-1-\frac{d}{2}}$$

$$m^2 = r e^{-2T}\Lambda^2$$

$$u = \lambda e^{\epsilon T}\Lambda^{-\epsilon}$$

όπου  $\zeta(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^n(\frac{T}{n})$ . Επιπλέον, επανορίζουμε και τις συναρτήσεις  $f_2, f_4$ . Οι όροι, λόγω του ότι η δράση είναι τελικά αδιάστατη, αλληλοαναιρούνται<sup>33</sup> Συγκεκριμένα, πρέπει να γράψουμε  $\zeta^{-2}(T) = e^{-T(1+\frac{d}{2})} + \delta\zeta^2$

$$S = - \int_q \phi_{ph}^2(q^2 + m^2) - \int_{4q} \delta \phi^4(u) - (\text{Counter-terms})$$

Τα ολοκληρώματα είναι ακόμη πάνω στις σφαίρες  $S_{e^{-T}\Lambda}^d$ . Ας υποθέσουμε ότι στο σημείο  $u_0(b^*), r_0(b^*)$  βρισκόμαστε στη κρίσιμη καμπύλη. Κρατώντας το  $m$  σταθερό, στέλνουμε το  $b$  αυθαίρετα κοντά στο  $b^*$ . Τότε το  $\xi$  γίνεται αυθαίρετα μεγάλο, και αναγκαστικά το  $\Lambda$  το ακολουθεί, ώστε να μείνει σταθερό το  $m$ . Ταυτόχρονα πρέπει να στείλουμε και την παράμετρο  $T$  του μετασχηματισμού στο άπειρο, αλλιώς η θεωρία δε θα απομακρυνθεί ποτέ<sup>34</sup> από το σημείο  $r_0, u_0$  στο  $r_R, u_R$ . Αρκεί  $e^{-2T}\Lambda \rightarrow \infty$ , ώστε τα ολοκληρώματα να είναι άφραχτα, κάτι που μπορούμε να επιλέξουμε μέσω της παραμέτρου  $b$ . Σε αυτό το όριο, ανασύρουμε μια θεωρία χωρίς άνω φράγμα στις ορμές, αλλά με καλά ορισμένες ροπές. Λέμε ότι η θεωρία μας έχει επανακανονικοποιηθεί.

Πρακτικά, η παραπάνω διαδικασία μοντελοποιείται δύσκολα. Ακολουθείται αυτή η μέθοδος

$$S = - \int_q \phi_b^2(q^2 + m_b^2) - \int_{4q} \delta \phi_b^4(\lambda_b)$$

γράφουμε

$$\phi = \sqrt{Z}\phi_b$$

$$S = - \int_q Z \phi^2(q^2 + m_b^2) - \int_{4q} \delta Z^2 \phi^4(\lambda_b)$$

$$\delta Z = Z - 1$$

$$Z m_b^2 = m^2 + \delta m^2$$

$$Z^2 \lambda_b = \lambda + \delta \lambda$$

<sup>32</sup>Το σύστημα βρίσκεται σε αλλαγή φάσης. Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε  $r(\beta), u(\beta)$ , η παράμετρος  $\beta$  θα ήταν η θερμοκρασία του συστήματος και θα μετατόπιζε το σύστημα από την μετάβαση φάσης προς άλλες καταστάσεις.

<sup>33</sup>Επίτηδες δε γράφουμε ρητά το  $\zeta$ . Σε ανώτερες τάξεις γίνεται πολυπλοκότερο του  $e^{-T(1+\frac{d}{2})}$ .

<sup>34</sup>Σε αυτή τη περίπτωση θα μέναμε με τις άγνωστες παραμέτρους.

$$S = - \int_q \phi^2(q^2 + m^2) - \int_{4q} \delta\phi^4(\lambda_b) - \int_q \phi^2(\delta Z q^2 + \delta m^2) - \int_4 q \delta\phi^4 \delta\lambda$$

οι παράμετροι  $\lambda, m$  ορίζονται από το πείραμα. Οι νέοι παράμετροι επιλέγονται έτσι ώστε τα αποτελέσματα να είναι καλά ορισμένα και

$$\langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle \text{ εμφανίζει πόλο στο } p_1 = im$$

$$\frac{d \langle \phi(p_1), \phi(0) \rangle}{dp_1^2} = 1$$

σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών ως προς δυνάμεις του  $\lambda$ .

Η δεύτερη συνθήκη εξασφαλίζει ότι η κλίμακα αναφοράς παραμένει σταθερή ή, διαφορετικά, ότι ο παράγοντας του  $\phi$  στη δράση παραμένει ίσως με τη μονάδα. Η πρώτη συνθήκη αντιστοιχεί στο να κρατάμε τη μάζα σταθερή. Ποιοτικά το βλέπουμε αυτό από τον ελεύθερο διαδότη

$$\langle \phi(p_1)\phi(p_2) \rangle_0 = (2\pi)^d \delta(p_1 + p_2) \frac{Z}{p_1^2 + Zm^2} >$$

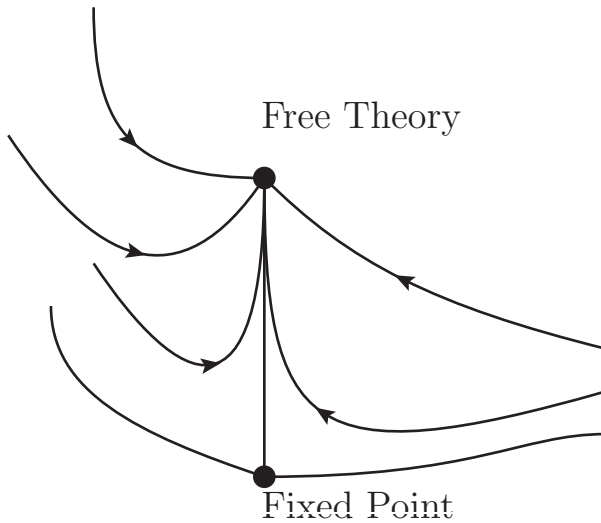
για κινητικό όρο  $Z\phi^2(q^2 + m^2)$ .

Υπολογίζοντας διαγράμματα, πρέπει να επιλέξουμε και μία μέθοδο ομαλοποίησης (*regularization*) των ολοκληρωμάτων, όπως ένα άνω φράγμα στις ορμές ή χρήση μη ακέραιων διαστάσεων (*dimensional regularization*).

## 2.2 Μερικές Παρατηρήσεις

Στη περίπτωση μας, η θεωρία μας ορίζεται αν δηλώσουμε δύο αριθμούς  $r_0, u_0$  σε μία κλίμακα  $\Lambda$ . Μπορούμε να σκεφτούμε τις παραμέτρους αυτές ως τις μικροσκοπικές παραμέτρους του προβλήματος<sup>35</sup>. Ας πούμε ότι το μοντέλο μας είναι ρεαλιστικό' αν γνωρίζαμε τη κλίμακα  $\Lambda$  και τα αντίστοιχα  $r, u$ , θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε σε υπολογισμούς. Μέχρι τώρα δεν έχει ανιχνευθεί κάποιο πάνω όριο στις ορμές, πάνω από το οποίο δεν έχει νόημα να θεωρούμε πειράματα. Αν όμως η κλίμακα αυτή βρίσκεται πολύ μακριά από τις μέχρι τώρα προσβάσιμες, είναι δυνατό η ενεργή θεωρία να επηρεάζεται σε όσο μικρό βαθμό θέλουμε από τη κλίμακα αυτή. Δηλαδή, θα μπορούμε να γράψουμε τα αποτελέσματα με σφάλμα  $O(\frac{m_R}{\Lambda})$ , όπου  $m_R$  είναι η κλίμακα αναφοράς μας, προσβάσιμη από το πείραμα.

Ένας τρόπος να μοντελοποιηθεί αυτό είναι με το μηχανισμό που περιγράψαμε. Δεδομένου ότι έχουμε δύο παραμέτρους, μπορούμε να απεικονίσουμε χονδρικά τις θεωρίες μας σε ένα επίπεδο. Οι καμπύλες υποδηλώνουν  $r(T), u(T)$



<sup>35</sup>Είναι οι ενεργοί όροι για πραγματικούς όγκους  $\sim \frac{1}{\Lambda^d}$

Από τους τύπους (2.4), (2.5) , βλέπουμε ότι το  $r$  γίνεται αυθαίρετα μεγάλο για αυθαίρετα πολλές επαναλήψεις του μετασχηματισμού ανακλιμάκωσης, εκτός από προσεχτικά επιλεγμένες τιμές του  $r_0$  . Αυτό αντιστοιχεί σε μηδενικό μήκος συσχετισμού, δηλαδή σε ελεύθερες θεωρίες, αφού οι τιμές του πεδίου μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του χώρου δεν αλληλοεπηρεάζονται<sup>36</sup>. Αντίθετα, οι θεωρίες πάνω στη κρίσιμη καμπύλη "πέφτουν" στο σταθερό σημείο του μετασχηματισμού και διαθέτουν άπειρο μήκος συσχετισμού, δηλαδή έχουμε θεωρίες που έχουν συμμετρία ανακλιμάκωσης και εν γένει δεν είναι υπολογίσιμες<sup>37</sup> καθώς πρέπει να υπολογίζουμε την συνεισφορά αλληλεπιδράσεων σε κάθε κλίμακα. Καθώς ο συνεχής χώρος μπορεί να τέμνεται επ'αόριστον και να παραμένει ίδιος, θα έχουμε να συνυπολογίσουμε άπειρες συνεισφορές πεπερασμένου μεγέθους.

Επομένως η θεωρία μας δεν βρίσκεται πάνω στη κρίσιμη καμπύλη, αν θέλουμε να είναι υπολογίσιμη. Σε περίπτωση που βρίσκεται μακριά της, ακολουθώντας τη διαδικασία που αναφέραμε, η εφαρμογή αυθαίρετα πολλών μετασχηματισμών θα μας στείλει στο ελεύθερο σημείο, οδηγώντας σε μια θεωρία χωρίς αλληλεπιδράσεις. Στη περίπτωση που βρισκόμαστε αυθαίρετα κοντά στην κρίσιμη καμπύλη, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό, αναμένουμε να περνάμε αυθαίρετα κοντά από το σταθερό σημείο. Αν ήμασταν πάνω στη καμπύλη, θα μέναμε για πάντα εκεί. Αναμένοντας μια συνεχή συμπεριφορά από το "χρόνο" παραμονής<sup>38</sup> στο σταθερό σημείο, αφού είμαστε αυθαίρετα κοντά στη καμπύλη, θα είμαστε αυθαίρετα πολύ χρόνο εκεί. Από οποιοδήποτε τέτοιο σημείο και να ξεκινήσουμε, θα φύγουμε από το στάσιμο σημείο προς το ελεύθερο πάνω στην ευθεία που τα ενώνει<sup>39</sup> Η παραμονή κοντά στο σταθερό σημείο έχει σβήσει την εξάρτηση από τη κλίμακα  $\Lambda$ .

Επιπλέον, στην περίπτωση μας, ακόμη και αν είχαμε αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερων δυνάμεων  $\phi^6, \phi^8, \dots$  δεν θα τις παρατηρούσαμε. Αν τις μελετούσαμε στη δικιά τους κλίμακα δε θα μπορούσαμε να κάνουμε υπολογισμούς, καθώς οδηγούν σε μεγάλες κβαντικές διακυμάνσεις σε μικρές κλίμακες. Χάρη τον μετασχηματισμό ανακλιμάκωσης, μπορούμε να βρούμε την επίδραση τους σε μεγαλύτερους πραγματικούς όγκους. Εκεί, ακριβώς επειδή διακυμαίνονται αυθαίρετα πολύ στις μικρές αποστάσεις, αυτοαναιρούνται στις μεγαλύτερες. Έτσι η μέθοδος αυτή δε κάνει διάκριση μεταξύ τέτοιων θεωριών και ομαλότερων<sup>40</sup>.

Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η μέθοδος αυτή είναι ΈΝΑ δυνατό μοντέλο. Η ύπαρξη μιας μετάβασης φάσης σε μεγάλες κλίμακες σίγουρα θα αργήσει να επιβεβαιωθεί και δεν είναι απαραίτητο ότι υπάρχει. Άλλα μοντέλα πιθανώς να περιγράφουν καλά το φυσικό σύστημα. Σε περίπτωση που υπάρχει μια μετάβαση φάσης, είναι ανοιχτό ερώτημα πως περιγράφεται η φυσική πάνω από αυτή.

<sup>36</sup> Και το ελεύθερο σημείο είναι σταθερό σημείο του μετασχηματισμού

<sup>37</sup> Όπως η αρχική μας θεωρία, μέχρι να επιβάλλουμε το άνω όριο, το οποίο εξορισμού σπάει την συμμετρία αυτή.

<sup>38</sup> Το εύρος του  $T(\epsilon)$  για το οποίο απέχουμε  $\epsilon$  από το σταθερό σημείο.

<sup>39</sup> Στη πραγματικότητα μια τέτοια ροή είναι αδύνατη, όμως είναι η ασυμπτωτική μιας οικογένειας καμπύλων μεταξύ σημείων κοντά στη κρίσιμη καμπύλη και του ελεύθερου σημείου.

<sup>40</sup> Το οποίο μπορεί να θεωρηθεί και μειονέκτημα.

## Κεφάλαιο 3

# Παραρτήματα

### 3.1 Στροφή Wick

Έστω μια συνάρτηση  $F(z)$  ορισμένη μέσω του τύπου

$$F(z) = \int_0^b dt f(z, t)$$

όπου  $f(z, t)$  είναι ολόμορφη ως προς  $t$  (ιδωμένη ως μιγαδική μεταβλητή) εκτός από κάποια σημεία, εξαρτώμενα από το  $z$ . Ορίζουμε επιπλέον την  $F_1(z)$

$$F_1(z) = \int_0^b dt i f(z, it)$$

η οποία γράφεται και

$$F_1(z) = \int_{i0}^{ib} d\tau f(z, \tau)$$

και τέλος το ολοκλήρωμα της  $f(z)$  στο μιγαδικό επίπεδο<sup>1</sup> πάνω στη καμπύλη  $C$ , δηλαδή κατά μήκος του πραγματικού άξονα από το  $0$  στο  $b$ , του τόξου κύκλου με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα  $b$  που ενώνει τα  $b + i0$  και  $0 + ib$  και τέλος κατά μήκος του φανταστικού άξονα, από το  $ib$  στο  $0$

$$I = \int_C dt f(z, t) = \int_0^b dt f(z, t) + \int_{arc} dw f(z, w) - \int_{i0}^{ib} d\tau f(z, \tau)$$

το οποίο μηδενίζεται από βασικό θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης<sup>2</sup>. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η  $f(z, w)$  τείνει στο μηδέν για  $w$  με αυθαίρετα μεγάλο μέτρο στο  $1o$  τεταρτημόριο. Τότε

$$\lim_{b \rightarrow \infty} I = 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b dt f(z, t) + \int_{arc} dw f(z, w) - \int_{i0}^{ib} d\tau f(z, \tau) = \int_0^\infty dt f(z, t) - \int_{i0}^{i\infty} d\tau f(z, \tau)$$

και χρησιμοποιώντας καταχρηστικά τα ίδια σύμβολα για τις  $F, F_1$  με  $b \rightarrow \infty$

$$F(z) - F_1(z) = 0 \Rightarrow F(z) = F_1(z)$$

<sup>1</sup>επιλέγουμε κατάλληλα το  $z$  ώστε να είναι η  $f(z)$  ολόμορφη στο κλειστό άνω δεξιά τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου

<sup>2</sup>Ολοκλήρωμα συνάρτησης σε κλειστή καμπύλη που περιέχεται σε πεδίο ολομορφίας της μηδενίζεται.

Είναι δυνατό η  $F(z)$  να μην ορίζεται για ορισμένα  $z$  για τα οποία η  $F_1(z)$  δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα, είναι δηλαδή αναλυτική ως προς  $z$ . Συνήθως, είναι δυνατό να βρεθεί μια απλή σχέση μεταξύ των δύο για τέτοια  $z$ . Σε αυτή την περίπτωση, η  $F_1(z)$  αποτελεί την αναλυτική επέκταση της  $F(z)$  σε αυτές τις τιμές του  $z$ . Βλέπουμε εδώ με ποια έννοια είναι "φανταστικός" ο χρόνος  $\tau$  του πρώτου κεφαλαίου, και πως είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε  $t \rightarrow \tau$ .

### 3.2 Μερικά Ολοκληρώματα Βρόγχων

Στο κεφάλαιο 2.1 βλέπουμε να εμφανίζονται ολοκληρώματα όπως<sup>3</sup>

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \end{array} = \int_p \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p^2 + r_0}$$

Ας το υπολογίσουμε. Υποθέτουμε ότι  $t$  είναι αυθαίρετα μικρό

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\Theta(\|p\| - (1-t))}{p^2 + r_0} = \int_{1-t}^1 dp p^{d-1} \frac{1}{p^2 + r_0} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d}$$

θέτουμε  $p = \sqrt{w}$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{(1-t)^2}^1 dw w^{\frac{d-2}{2}} \frac{1}{w + r_0}$$

και  $w = \acute{w} \cdot r_0$

$$\frac{1}{2} r_0^{\frac{d-2}{2}} \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw w^{\frac{d-2}{2}} \frac{1}{w + 1}$$

θεωρούμε ότι  $d = 4 - \epsilon$ , με  $\epsilon \ll 1$

$$\frac{1}{2} r_0^{1-\frac{\epsilon}{2}} \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw w^{1-\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{w + 1}$$

όμως

$$w^{1-\frac{\epsilon}{2}} = w \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \log w + \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{4} \log^2 w + O(\epsilon^3) \right)$$

για τη μηδενική τάξη σε  $\epsilon$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw \frac{w}{w + 1} &= w - \log(w + 1) \Big|_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} = \\ &= \frac{2t}{r_0} + \log \left( \frac{r_0 + (1-t)^2}{r_0 + 1} \right) \simeq 2t \frac{1}{r_0(r_0 + 1)} \end{aligned}$$

για τη πρώτη τάξη σε  $\epsilon$

$$\int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw \frac{w \log w}{w + 1} = (w - \log(w + 1)) \log w \Big|_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} - \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw \frac{w - \log(w + 1)}{w} =$$

<sup>3</sup>Στο πλαίσιο της παραγράφου αφαιρούμε από κάθε διάγραμμα το παράγοντα που καθορίζει που συνεισφέρει το διάγραμμα στη δράση.

$$= (w - \log(w + 1)) \log w - w \Big|_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} + \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw \frac{\log(w + 1)}{w}$$

στο τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής  $e^s = w + 1$ ,  $dw = e^s ds$ ,

$$\int_{\log(1+\frac{(1-t)^2}{r_0})}^{\log(1+\frac{1}{r_0})} ds \frac{se^s}{e^s - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\log(1+\frac{(1-t)^2}{r_0})}^{\log(1+\frac{1}{r_0})} \log(e^{s\beta} - 1) \Big|_{\beta=1}$$

$$\log(e^{s\beta} - 1) = \log(e^{s\beta}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-ns\beta}}{n}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{s^2}{2} \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-ns\beta}}{n^2 \beta} \right) \Big|_{\beta=1} \Big|_{\log(1+\frac{(1-t)^2}{r_0})}^{\log(1+\frac{1}{r_0})}$$

$$\frac{s^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n e^{-ns}}{n^2} + s \frac{(-1)^n e^{-ns}}{n} \right) \Big|_{\log(1+\frac{(1-t)^2}{r_0})}^{\log(1+\frac{1}{r_0})}$$

ο δεύτερος όρος στο άθροισμα είναι η δυναμοσειρά του λογαριθμικού γύρω από το 0

$$\log(1 + a) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n}$$

$$\frac{s^2}{2} + s \log(1 + e^{-s}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^{-s})^n}{n^2} \Big|_{\log(1+\frac{(1-t)^2}{r_0})}^{\log(1+\frac{1}{r_0})}$$

Η δεύτερη δυναμοσειρά ορίζει τον διλογάριθμο  $Li_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ .

Το αποτέλεσμα σε πρώτη τάξη  $t$  είναι

$$\frac{1}{r_0(r_0 + 1)} \log \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0}$$

Για τη δεύτερη τάξη πρέπει να υπολογίσουμε

$$\frac{\epsilon^2}{8} \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw \frac{w \log^2 w}{w + 1}$$

με παρόμοια βήματα

$$(w - \log(w + 1)) \log^2 w - 2w \Big|_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} + 2 \int_{\frac{(1-t)^2}{r_0}}^{\frac{1}{r_0}} dw \frac{\log(w + 1) \log(w)}{w}$$

όπου πρέπει να αναπτύξουμε και τους δύο λογάριθμους

$$(-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-w)^n (1-w)^m}{n m}$$



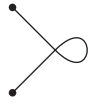
και επιπλέον να αναπτύξουμε το δεύτερο παράγοντα σε διωνυμικό. Το αποτέλεσμα, κρατώντας όρους τάξης  $t$  είναι

$$2t \log\left(1 + \frac{1}{r_0}\right) \log\left(\frac{1}{r_0}\right)$$

τελικά για τη δεύτερη τάξη έχουμε

$$\frac{\epsilon^2}{8} 2t \left( \frac{1}{r_0(r_0+1)} \log^2 \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} \log \frac{1}{r_0} - \frac{2}{r_0} \right)$$

Έτσι



$$= \frac{\Omega_{4-\epsilon}}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{2} r_0^{1-\frac{\epsilon}{2}} 2t \left\{ \frac{1}{r_0(1+r_0)} - \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{1}{r_0(1+r_0)} \log \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\epsilon^2}{8} \left( \frac{1}{r_0(1+r_0)} \log^2 \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} \log \frac{1}{r_0} - \frac{2}{r_0} \right) + O(\epsilon^3) \right\}$$

# Βιβλιογραφία

- [1] R.E.Edwards Functional Analysis:Theory and Applications p.90-91  
Dover 1995
- [2] James Glimm,Arthur Jaffe Quantum Physics: A Functional Integral Point of View  
Springer-Verlag 1987
- [3] R.F.Streater A.S.Wightman PCT,Spin and Statistics,and All That  
Princeton Paperbacks 4th edition 1989
- [4] Σ.Καδιανάκης Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές  
Έκδοση πρώτη ,Αθήνα 2009
- [5] P.Granger, E.Werner Quantum Fields as Operator Valued Distributions and Causality  
arXiv:math-ph/0612011v2
- [6] John R.Taylor, Scattering Theory:The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions  
John Wiley & Sons,Inc 1972
- [7] Bela A. Frigyik, Santosh Srivastava, Maya R.Gupta; An Introduction to Functional Derivatives  
University of Washington, Dept. of EE, UWEETR-2008-0001 January 2008
- [8] K.G.Wilson,J.Kogut The Renormalization Group and the  $\epsilon$  expansion  
Physics Reports C (1974), North Holland Publishing Company