

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

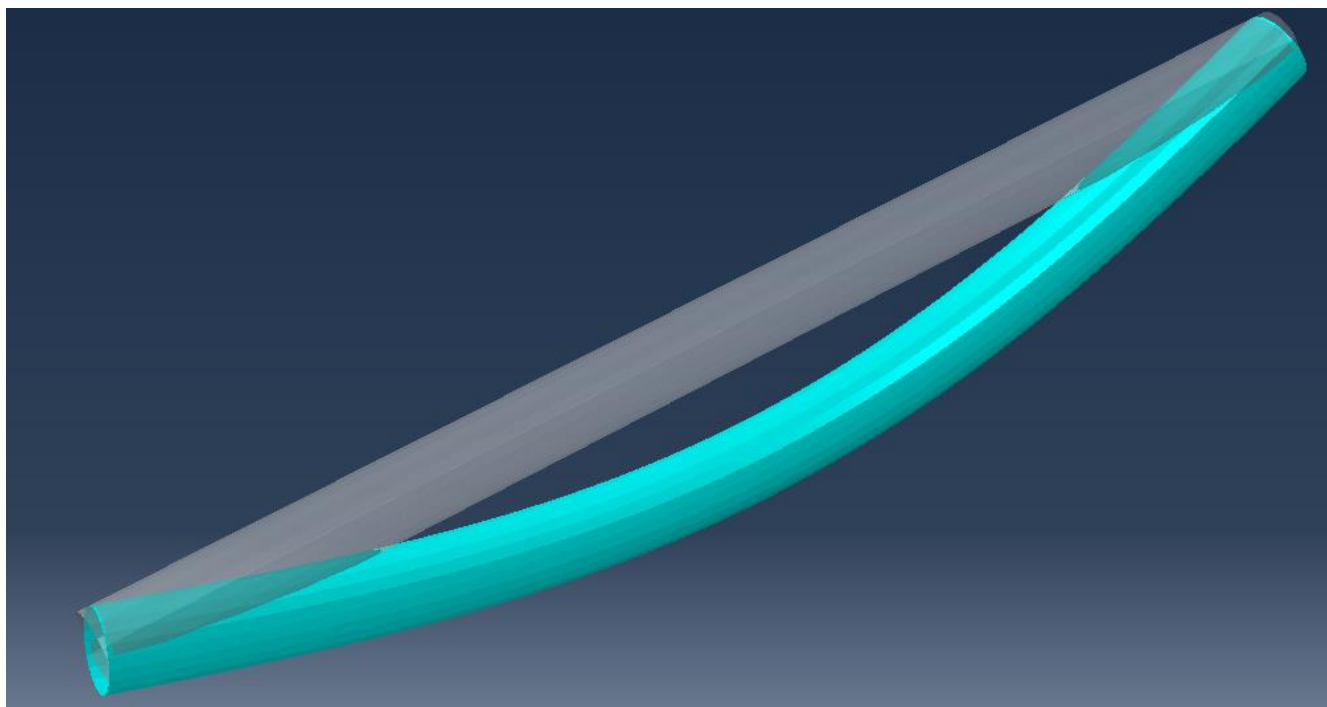


NATIONAL TECHNICAL
UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF CIVIL
ENGINEERING
STRUCTURAL ENGINEERING

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

Πλαστικός Λυγισμός Σιδηρών Ράβδων Σωληνωτής Διατομής



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Επιβλέπων : Τάσος Αβραάμ

Αθήνα Μάρτιος 2014

ΕΜΚ ΔΕ 2014/07

Ευχαριστίες

Επιθυμώ να ευχαριστήσω τα άτομα εκείνα, με την συμβολή των οποίων υλοποιήθηκε η παρούσα διπλωματική εργασία. Πρωτίστως, τον επιβλέποντα λέκτορα, κ. Τάσο Αβραάμ για την επιστημονική του προσφορά και τη γενικότερη επίβλεψη της εργασίας. Εκτός από τις εξειδικευμένες γνώσεις που μοιράστηκε μαζί μου, τον ευχαριστώ και για τον τρόπο σκέψης και οργάνωσης που μου μετέδωσε. Επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους μου και συμφοιτητές μου για την κατανόηση τους και την βοήθεια που μου προσέφεραν με τη σειρά τους.

Ανουσάκης Αντώνης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
1.1 Σύντομη περιγραφή της εργασίας.....	
1.2 Σκοπός της εργασίας.....	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	8
2.1 Βασικά θεωρητικά στοιχεία.....	
2.1.1 Λυγηρότητα.....	
2.1.2 Καμπύλη τάσεων -παραμορφώσεων.....	
2.2 Λυγισμός.....	
2.2.1 Καμπτικός λυγισμός.....	
2.2.2 Καμπτικός λυγισμός μεταλλικών δοκών.....	
2.2.3 Ατέλειες μεταλλικών δοκών.....	
2.2.4 Ανελαστικός λυγισμός.....	
2.3 Μέθοδοι ανάλυσης.....	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΕΞΑΓΩΓΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	18
3.1 Εξαγωγή Εξίσωσης βέλους αμφιτέριστης δοκού με αρχικά καμπυλωμένο διαμήκη άξονα.....	
3.2 Σχέση φορτίου-παραμόρφωσης.....	
3.2.1 Ελαστική Σχέση φορτίου-παραμόρφωσης.....	
3.2.2 Ανελαστική Σχέση Φορτίου Παραμόρφωσης.....	
3.3 Εξαγωγή τελικών εξισώσεων.....	
3.3.1 Εξαγωγή της απόστασης c-μέρους της κυκλικής μορφής της διατομής που παραλαμβάνει την θλίψη μετά τη διαρροή.....	
3.3.2 Εξαγωγή της απόστασης c-μέρους της κυκλικής δαχτυλιδοειδούς μορφής της διατομής που παραλαμβάνει την θλίψη μετά τη διαρροή....	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	48
4.1 Διαγράμματα για την επιρροή του πάχους (t) της διατομής.....	
4.2 Διαγράμματα για την επιρροή του αρχικού βέλους.....	
4.3 Διαγράμματα για την επιρροή της ποιότητας του χάλυβα	
4.4 Προβλέψεις Ευρωκώδικα.....	
4.4.1 Προσέγγιση του φαινομένου από τον EC3.....	
4.4.2 Αποτελέσματα από Abaqus και σύγκριση.....	
4.4.3 Εξαγωγή αποτελεσμάτων EC3.....	
4.4.3.1 Καμπύλες P_{cr} - $\delta t/L$	
4.4.3.2 Καμπύλες P_{cr} - λ	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ.....	102
5.1 Επιρροή αρχικού βέλους.....	
5.2 Ισοδύναμα αρχικά βέλη Ευρωκώδικα.....	
5.3 Διαφορά φορτίου πρώτης διαρροής με κρίσιμο φορτίο.....	

Πλαστικός λυγισμός σιδηρών ράβδων σωληνωτής διατομής

Ανουσάκης Α. . (επιβλέπων : Αβραάμ Τ.)

Περίληψη

Στη μηχανική με τον όρο “λυγισμός”, νοείται αστοχία λόγω απώλειας της ευστάθειας ενός φορέα που υπόκειται μόνο σε αυστηρά κεντρικό αξονικό φορτίο. Η ύπαρξη, ωστόσο, αρχικών ατελειών ή εκκεντρότητας του φορτίου, οδηγεί στην καμπιοθλιπτική καταπόνηση του μέλους. Έτσι, η κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής δεν είναι ομοιόμορφη, και η τάση στη δυσμενέστερη ίνα του μέλους, που είναι η ακραία θλιβόμενη της μεσαίας διατομής, μπορεί να φτάσει την τιμή της τάσης διαρροής πριν φτάσει η φόρτιση το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, οπότε και έχουμε πλαστικό λυγισμό.

Το φαινόμενο του πλαστικού λυγισμού εμφανίζεται περισσότερο σε ένα εύρος τιμών της λυγηρότητας των υποστυλωμάτων. Στη συγκεκριμένη εργασία επιλέξαμε διάφορες διατομές κλιμακωτά αυξανόμενης διαμέτρου, τις οποίες ελέγξαμε στο φαινόμενο του πλαστικού λυγισμού, αφού θεωρήσαμε σε αυτές διάφορες τιμές αρχικών βελών, επί του ισχυρού άξονα. Για να το κάνουμε αυτό, θέσαμε κάποιες παραδοχές και εν συνεχεία προσεγγίσαμε θεωρητικά την εκδήλωση του φαινομένου. Το επόμενο βήμα είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την προσέγγισή μας, με τις αντίστοιχες κρίσιμες τιμές που προκύπτουν από τον Ευρωπαϊκό Κανονισμό (EC3) και η επαλήθευση των αποτελεσμάτων από πρόγραμμα H/Y με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Abaqus). Τέλος, παρουσιάζονται διάφορες καμπύλες για τις υπό μελέτη διατομές, όπου φαίνεται η επίδραση της αλλαγής των γεωμετρικών τους στοιχείων, η ποιότητα χάλυβα, οι αρχικές ατέλειες κτλ, στην εκδήλωση του πλαστικού λυγισμού.

Το φαινόμενο του πλαστικού λυγισμού, χαρακτηρίζεται από μικρές τιμές του ποσοστού της διαφοράς ανάμεσα στο κρίσιμο φορτίο (πλαστικό) και του ελαστικού φορτίου (φορτίο πρώτης διαρροής) ως προς το δεύτερο. Οι τιμές αυτές της πλαστικής “υπεραντοχής” εξαρτώνται από τη διατομή και την ποιότητα του χάλυβα, αλλά ακόμη περισσότερο από τη λυγηρότητα του κάθε υποστυλώματος. Επίσης, είδαμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η αρχική ατέλεια (αρχικό βέλος κάμψης), τόσο μικρότερο είναι το κρίσιμο φορτίο και τόσο πιο μεγάλη η τελική παραμόρφωση του υποστυλώματος.

Inelastic buckling of steel beams tubular section

Anousakis. A (supervised by Avraam T.)

Abstract

In mechanics, the term "buckling" means failure due to loss of stability of a member, that is subject of strictly central axial load. The presence, however, of initial imperfections or load eccentricity leads to compressive and flexural loading of the member. Thus, the stress distribution on height of the section is not uniform, and the stress of the least favourable fiber of the member, which is the farther fiber under compression at the middle section of the member, can reach the value of the characteristic yield stress of the steel, before the load reaches the critical buckling load, so it appears the effect of inelastic buckling.

This effect appears more in a value range of the slenderness of the columns. In this particular thesis we chose various sections of increasing diameter, which we had them tested on the effect of inelastic buckling, since we considered different values of initial bending displacement, on the strong axis. To do that, we have some assumptions and then we approached theoretically the progress of the effect. The next step is the comparison of the theoretical results of our approach, with the corresponding critical values resulting by the Eurocodes. (EC3) and the verification of the results with the use of a PC program with finite elements analysis (Abaqus). Finally, are being presented some curves for the studied sections, where we can see the effects of the geometrical changes, steel quality, initial imperfections etc. at inelastic buckling.

The effect of inelastic buckling, characterized by small values of the percentage of the difference between the critical load (inelastic) and the elastic load (first failure) divided by the second. The values of this inelastic "overstrength", depend on the section and the quality of the steel, but even more on the slenderness of each column. We also noticed, that the bigger the initial imperfection (initial bending displacement), the less the critical load, and the bigger the final displacement of the column.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ξεκινώντας την παρούσα διπλωματική εργασία θα δωθεί μια σύντομη περιγραφή της, ώστε να αποκτήσει ο αναγνώστης μια πρώτη γενική εικόνα για τη μελέτη της, για τη συνέχεια.

1.1 Σύντομη Περιγραφή Εργασίας

Η αστάθεια των μελών από χάλυβα, είναι η μορφή αστοχίας που θα μας απασχολήσει σε αυτή τη μελέτη. Θα ελεγχουμε μια σειρά από ατελείς δοκούς υπό αξονική θλιπτική καταπόνηση σε λυγισμό. Πρόκειται για κοιλοδοκούς με αρχικώς καμπυλωμένο διαμήκη άξονα, δηλαδή με αρχικό βέλος κάμψης, τα οποία θα ελέγξουμε για την περίπτωση διαρροής μέρους της θλιβόμενης διατομής πριν την εκδήλωση της αστάθειας. (ανελαστικός λυγισμός).

Η πορεία που θα ακολουθηθεί είναι η ακόλουθη. Αρχικά θα εξάγουμε τις εξισώσεις του βέλους κάμψης (δ) ως προς την θλιπτική δύναμη (P) για τα 2 στάδια της ανάλυσης μας. α) από την εφαρμογή του φορτίου P , μέχρι τη στιγμή που η μέγιστη τάση στην ακραία ίνα της δυσμενέστερης διατομής θα γίνει ίση με την τάση διαρροής του υλικού β) από την εξίσωση των τάσεων (μέγιστη- τάση διαρροής) μέχρι την αστοχία λόγω ανελαστικού λυγισμού.

1.2 Σκοπός της Εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι κατ'αρχήν να υπολογίσουμε τα φορτία ανελαστικού λυγισμού (P_{cr}) αλλά και τα φορτία (P_y) που αντιστοιχούν στην διαρροή της πρώτης ίνας στην κρίσιμη διατομή του μέλους μας. Εν συνέχεια, θα συγκρίνουμε τα δύο αυτά φορτία ώστε να δούμε πόσο σύντομα μετά την πρώτη διαρροή αστοχεί το μέλος, αλλά θα δούμε και το πώς μεταβάλλεται η μεταξύ τους σχέση καθώς θα αλλάζει η πρότυπη διατομή (πχ. Διαστάσεις καθώς επίσης και από συμπαγής σε δαχτυλιδοειδούς διατομή), αλλά και αρχικό βέλος.

Έτσι θα μπορέσουμε να διαπιστώσουμε αν η αντοχή του μέλους μετά την πρώτη διαρροή είναι τέτοιου μεγέθους και τιμής, ώστε να μπορούμε να την λάβουμε υπόψη ή μπορούμε να την αγνοήσουμε (όπως προβλέπει και ο EC).

Τέλος στόχος μας είναι να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τις πράξεις μας, με εκείνα που θα προκύψουν από την επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τη βοήθεια του προγράμματος Abaqus.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1 Βασικά Θεωρητικά στοιχεία

2.1.1 Λυγηρότητα

Η **λυγηρότητα** (λ), είναι ένα μέγεθος που μας προσφέρει έναν τρόπο κατάταξης των δοκών. Πρόκειται για το λόγο του *ισοδύναμου μήκους λυγισμού* του μέλους, στο υπό θεώρηση επίπεδο λυγισμού, (L_{cr}) προς την *ακτίνα αδράνειας* (i), περί τον αντίστοιχο άξονα και υπολογιζόμενη χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της πλήρους διατομής:

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$$

Το *ισοδύναμο μήκος λυγισμού* L_{cr} , ενός θλιβόμενου μέλους μήκους L , είναι το μήκος ενός κατά τα άλλα ίδιου μέλους με αρθρωτά άκρα, το οποίο έχει την ίδια αντοχή σε λυγισμό, με αυτό. Προφανώς, για τις *αμφιαρθρωτές δοκούς* της εργασίας μας $L_{cr}=L$. Η *ακτίνα αδράνειας* (i) της διατομής είναι η τετραγωνική ρίζα του λόγου της ροπής αδράνειας της διατομής I , ως προς τον αντίστοιχο άξονα, προς το εμβαδόν A αυτής:

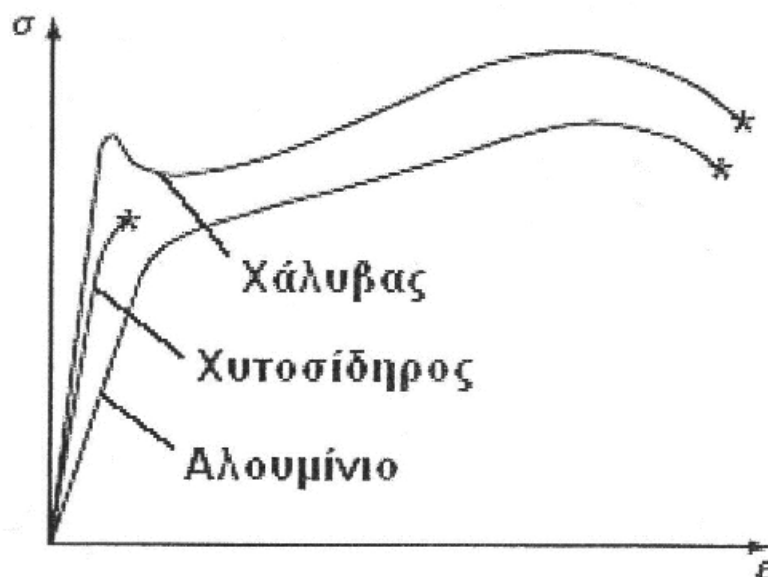
$$i = \left(\frac{I}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Κοντά μεταλλικά υποστυλώματα-δοκοί(στην εργασία μας),θεωρούνται αυτά με τιμές λυγηρότητας μικρότερες του 50. Για τιμές λυγηρότητας μεταξύ 50 και 150 θεωρούνται υποστυλώματα ενδιάμεσου μήκους, ενώ τέλος, τιμές μεγαλύτερες του 150 αντιστοιχούν σε υποστυλώματα-δοκούς μεγάλου μήκους.

2.1.2 Καμπύλη τάσεων -παραμορφώσεων

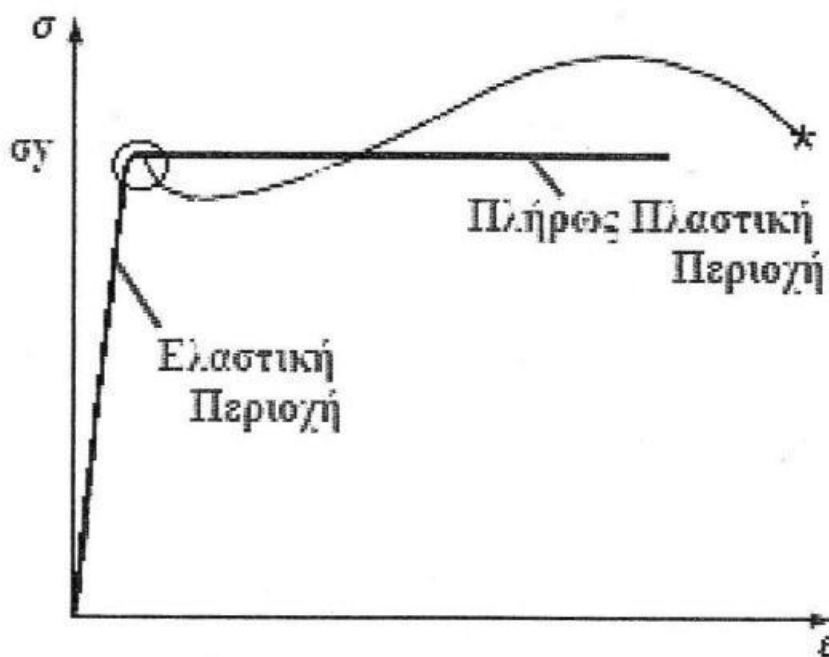
Οι καμπύλες τάσεων παραμορφώσεων είναι ένας γραφικός τρόπος να αποδοθούν οι μηχανικές ιδιότητες των υλικών, η γνώση δε της καμπύλης αυτής,την οποία την κατασκευάζουμε πειραματικά,είναι απαραίτητη για το υλικό του φορέα που κατασκευάζουμε-μελετάμε.Για τα ευρέως χρησιμοποιούμενα υλικά οι καμπύλες είναι γνωστές.Μερικές καμπύλες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.Ειδικά για τον χάλυβα ο οποίος είναι και το υλικό που εξετάζουμε στον φορέα μας,βλέπουμε οτι έχει ένα αρχικό γραμμικό τμήμα στο οποίο όσο αυξάνεται η τάση αυξάνεται και η παραμόρφωση αναλογικά.

Η κλίση στο τμήμα αυτό ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας E** και είναι προφανές ότι ισχύει $E = \sigma/\epsilon$. Η τιμή της τάσης στην οποία σταματάει η καμπύλη να είναι γραμμική, δηλαδή η τάση δεν είναι πια γραμμικά ανάλογη της παραμόρφωσης, ονομάζεται **όριο αναλογίας**. Η τιμή της τάσης στην οποία το υλικό αρχίζει να παρουσιάζει μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις (καμπυλώνει το διαγράμμα) είναι η **τάση λεγόμενη διαρροής σ_y** .



Σχήμα 2.1 καμπύλες τάσεων -παραμορφώσεων 3 συνηθισμένων υλικών

Κατά την μελέτη διαφόρων δομικών στοιχείων συνήθως γίνονται μερικές απολοποιητικές παραδοχές όσον αφορά την συμπεριφορά τους, κυρίως μετά την τάση διαρροής. Μια τέτοια απλοποίηση είναι η παραδοχή ελαστικού-ιδεωδώς πλαστικού υλικού. Η συμπεριφορά ενός τέτοιου υλικού φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα τάσεων -παραμορφώσεων η τάση διαρροής ταυτίζεται με το όριο αναλογίας.



Σχήμα 2.2 καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων χάλυβα με και χωρίς παραδοχή ελαστικού-ιδεωδώς πλαστικού υλικού

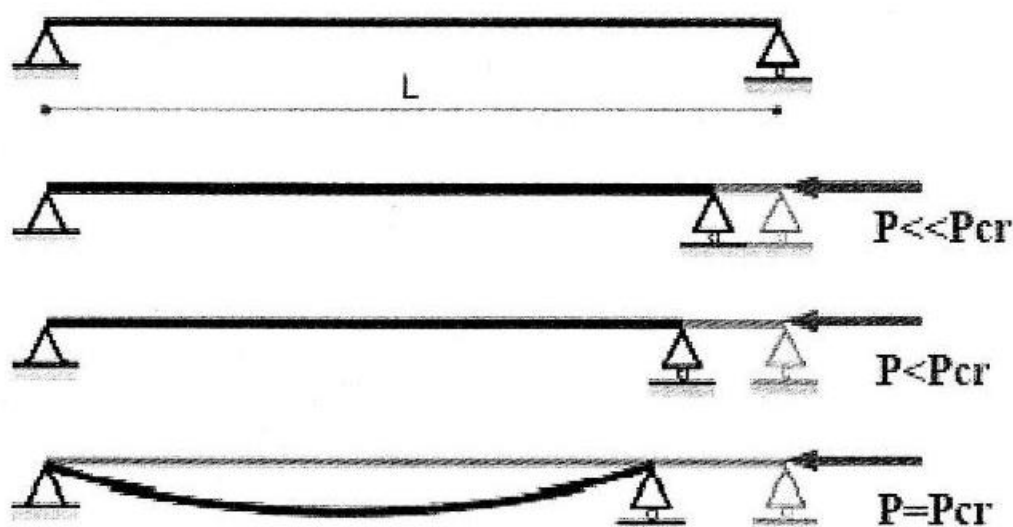
2.2 Λυγισμός

Σε ορισμένες περιπτώσεις καταπόνησης ενός μέλους, η αντοχή του δεν εξαρτάται-καθορίζεται από την αντοχή της κρίσιμης διατομής του, αλλά υφίσταται μια στάθμη εξωτερικής καταπόνησης για την οποία το μέλος χάνει την αρχική του θέση ισορροπίας και "γίνεται ικανό" να ισορροπεί σε μια γειτονική θέση ισορροπίας πέρα της αρχικής. Αυτό το φαινόμενο ονομάζουμε λυγισμό. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε κυρίως με τον καμπτικό λυγισμό καθώς αυτός είναι το αντικείμενο μελέτης της εργασίας μας και από την ανάλυσή του θα δούμε το πώς οι αρχικές ατέλειες ενός μεταλλικού μέλους επιδρούν στην αντοχή μιας κατασκευής.

2.2.1 Καμπτικός Λυγισμός

Από την Αντοχή Των Υλικών γνωρίζουμε ότι όταν μια ευθύγραμμη δοκός(πρισματική) φορτίζεται αξονικά με μια θλιπτική δύναμη, η αύξηση της δύναμης αυτής (φορτίσεως) μέχρις μιας ορισμένης τιμής, προκαλεί μια συνεχώς αυξανόμενη αξονική βράχυνση. Επίσης είναι γνωστό ότι όταν μια ελαστική ράβδος έχει λυγηρότητα μεγαλύτερη μιας ελάχιστης τιμής, η έντασή της βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής κι έτσι η βράχυνσή της είναι ανάλογη της φορτίσεως. Εάν η φόρτιση υπερβεί την προαναφερθείσα τιμή, τότε η ράβδος εγκαταλείπει την αρχικώς ευθύγραμμη καταστασή της και εισέρχεται σε μια ελαφρώς καμπυλωμένη θέση ισορροπίας λόγω

κάμψεως. Αυτό ονομάζεται ελαστικός καμπτικός λυγισμός. Η ράβδος ισορροπεί και στις 2 καταστάσεις. Ωστόσο μικρή αύξηση της φόρτισης πάνω από την κρίσιμη οδηγεί σε δυσανάλογη-μεγαλύτερη παραμόρφωση. Σε κάποια δε τιμή της φόρτισης αρχίζει η διαρροή του υλικού (στην ίνα που εντείνεται περισσότερο από την κάμψη), η οποία διαρροή μεγαλώνει όσο αυξάνεται η φόρτιση και οδηγεί σε **(πλαστικό) ανελαστικό λυγισμό**. Επειδή όμως για περαιτέρω αύξηση της φόρτισης πάνω από την λεγόμενη παραπάνω κρίσιμη τιμή, η μεταλυγισμική αντοχή της ράβδου είναι περιορισμένη, θεωρούμε ότι η κρίσιμη αυτή τιμή είναι ίση με την φέρουσα ικανότητα αξονικά θλιβόμενων ραβδών, με τρόπο τέτοιο ώστε η φόρτιση αυτή να αποτελεί κριτήριο σχεδιασμού και να ονομάζεται φορτίο λυγισμού.



Σχήμα 2.3 Μέλος υπό καμπτικό λυγισμό

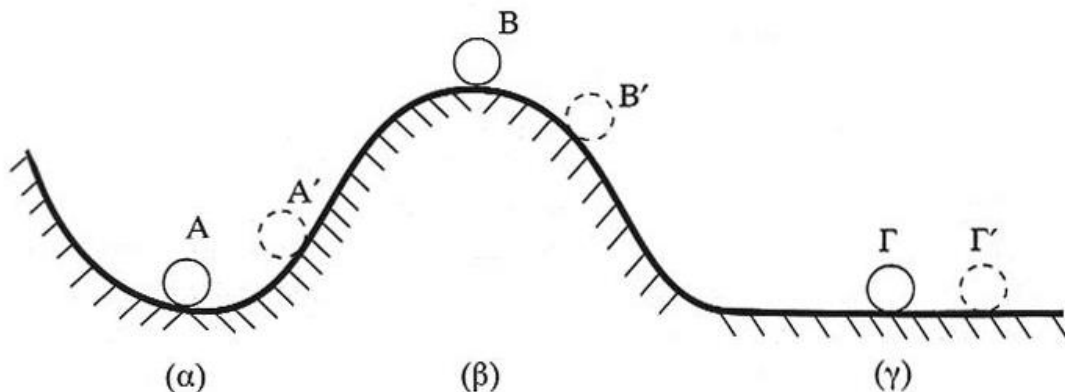
Με βάση τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η αστοχία λόγω ελαστικού λυγισμού δεν οφείλεται σε υπέρβαση τάσεων αλλά σε αστάθεια ισορροπίας του μέλους η οποία οδηγεί σε υπερβολική παραμόρφωση (συμβαίνει μετά το λυγισμό). Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η αύξηση της φέρουσας ικανότητας του μέλους (αποτροπή του λυγισμού), επιτυγχάνεται με αύξηση της ακαμψίας του, που οδηγεί σε αύξηση της κρίσιμης τάσης λυγισμού και μείωση των βελών κάμψης της παραμόρφωσης.

2.2.2 Καμπτικός Λυγισμός Μεταλλικών Δοκών

Θα εξετάσουμε δοκούς αξονικά φορτισμένες με δεσμευμένα άκρα. Όπως είδαμε πριν σε μια τέτοια δοκό θα έχουμε αστοχία λόγω ελαστικού λυγισμού όταν η δύναμη η οποία της ασκείται θα ξεπεράσει με συγκεκριμένη τιμή (κρίσιμη τιμή). Το φορτίο αυτό δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$P_E = \pi^2 EI / L^2 \quad (2-3)$$

Και ονομάζεται κρίσιμο φορτίο η φορτίο **Euler** (P_E), όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, I η ροπή αδράνειας της διατομής και L το μήκος της δοκού. Σε ιδανικές αμφιέριστες δοκούς το φορτίο μπορεί να ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή του P_{cr} ωστόσο τότε το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας. Θα κάνουμε εδώ μια αναφορά στο τι σημαίνει πρακτικά ευσταθής και ασταθής ισορροπία παραθέτοντας κάποια σχήματα από όπου θα γίνει καλύτερα αντιληπτό. Στο σχήμα μας παρουσιάζεται μια τελείως άκαμπτη σφαίρα σε 3 διαφορετικές θέσεις μια ομαλής επιφάνειας. Ενώ έχουμε ισορροπία και στις τρεις θέσεις, υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των καταστάσεων ισορροπίας. Στην A θέση αν μετακινήσουμε τη σφαίρα από την αρχική θέση ισορροπίας, όταν αφαιρέσουμε τη δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση, αυτή θα ξαναγυρίσει στην ίδια θέση. Τότε έχουμε ευσταθή ισορροπία. Στη θέση B αν μετακινηθεί η σφαίρα από την αρχική θέση ισορροπίας τότε μετά την αφαίρεση της δύναμης που προκάλεσε τη μετακίνηση όχι μόνο δεν επιστρέφει, αλλά απομακρύνεται συνεχώς από αυτή. Αυτή η μορφή ονομάζεται ασταθής ισορροπία. Τέλος στη θέση Γ η σφαίρα μετά από μικρή μετακίνηση ούτε επιστρέφει στην αρχική θέση, ούτε απομακρύνεται, αλλά παραμένει στη θέση την οποία μετακινήθηκε. Αυτή η μορφή ισορροπίας ονομάζεται ουδέτερη.



Σχήμα 2.4 Κύριες μορφές ισορροπίας

2.2.3 Ατέλειες Μεταλλικών Δοκών

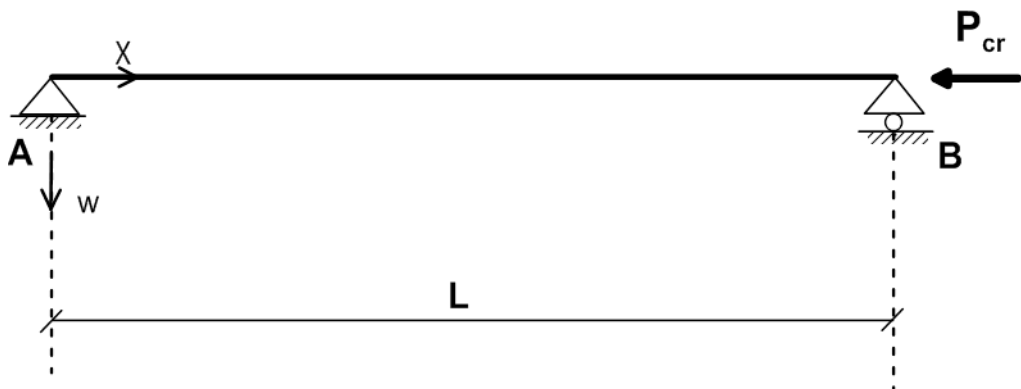
Ωστόσο στη συγκεκριμένη μελέτη οι δοκοί που θα εξετάσουμε θα έχουν και κάποιες αρχικές ατέλειες. Ας δώσουμε λοιπόν μια ένδειξη του τι εννοούμε όταν λέμε ατέλειες στην προκειμένη περίπτωση, στην αμφιέρειστη δοκό που μελετάμε.

Οι ατέλειες αυτές χωρίζονται σε 3 είδη.:

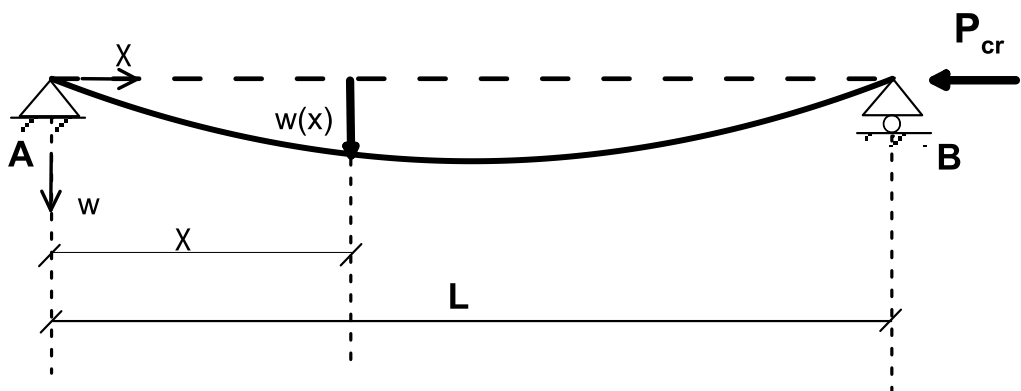
1^ο γεωμετρικής φύσης (geometrical), όπως έλλειψη ευθυγραμμίας

2^ο λόγω εκκεντρότητας της φόρτισης (loading eccentricity)

3^ο λόγω κατασκευαστικών ανωμαλιών (δομικές ατέλειες), πχ παραμένουσες τάσεις που δημιουργούνται στην αφορτιστή κατάσταση κατά τη διάρκεια έλασης, παραγωγής, συγκόλλησης, διανοίξης οπών κτλ, ανομοιογένεια υλικού κτλ.



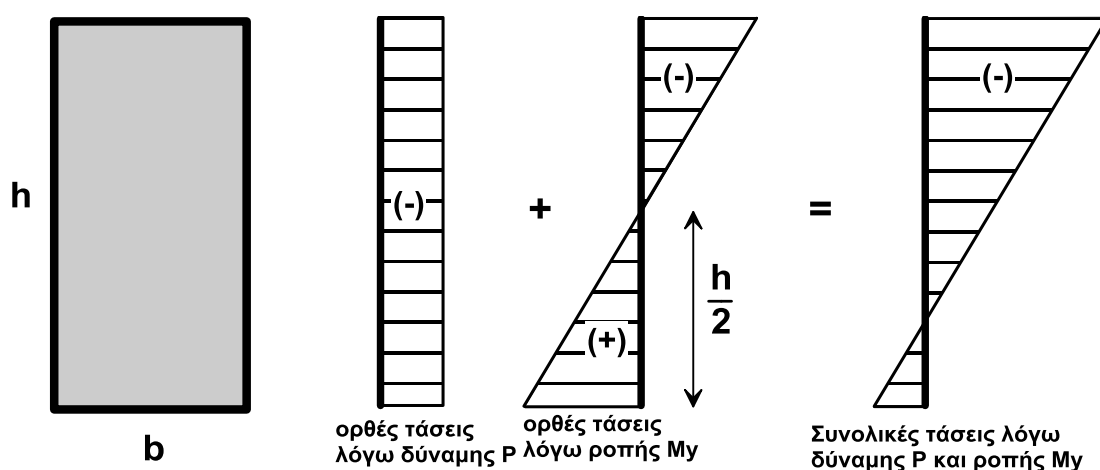
Σχήμα 2.5 Ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας



Σχήμα 2.6 Καμπυλωμένη μορφή ισορροπίας

2.2.4 Ανελαστικός Λυγισμός

Είδαμε λοιπόν ότι όταν ο φορέας λυγίζει αλλά καμία ίνα στη δυσμενέστερη διατομή του δεν καταπονείται από τάση μεγαλύτερη της τάσης διαρροής, ισορροπεί και το φαινόμενο αυτό λέγεται ελαστικός λυγισμός. Είναι ωστόσο περιπτώσεις όπου η μέγιστη τάση που καταπονεί την διατομή φτάνει την τάση διαρροής χωρίς το φορτίο να έχει πιάσει την κρίσιμη τιμή λυγισμού, οπότε και έχουμε **ανελαστικό** ή **πλαστικό λυγισμό**. Για να συμβεί αυτού του είδους ο λυγισμός πρέπει να έχουμε ανομοιόμορφη κατανομή τάσεων καθ' ύψος της διατομής (διαφορετικά ολόκληρη η διατομή θα καταπονείται από τάση σ_y και θα έχουμε τη δημιουργία πλαστικής αρθρωσης-αστοχία πριν το λυγισμό). Όταν έχουμε αρχικά καμπλωμένο άξονα της δοκού, εκκεντρότητα φορτίσης κτλ (βλ. ατέλειες ανω), η διατομή θα καταπονείται και από κάμψη αρχικά, θα έχουμε ανομοιόμορφη κατανομή τάσεων, οπότε μπορούμε να οδηγηθούμε σε τέτοιου είδους λυγισμό. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις κατανομές τάσεων λόγω ορθής δύναμης και λόγω κάμψης ξεχωριστά καθώς και το αποτέλεσμα της επίδρασης και των δύο μαζί και τη διαφορά, σε επίπεδο τάσεων, που προκαλεί η ύπαρξη καμπτικών ροπών λόγω ατελειών. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι υποστυλώματα και δοκοί με εκκεντρότητα και μέση λυγηρότητα έχουν κρίσιμο φορτίο κοντά στην τάση διαρροής. Επομένως, συνειδητοποιούμε πως υπάρχουν τιμές της λυγηρότητας (μέσες) για τις οποίες η διαρροή της ακραίας ίνας της κρίσιμης διατομής μπορεί και να "προλάβει" το λυγισμό. Στο υπόλοιπο εύρος των λυγηροτήτων, για πολύ μικρές τιμές, έχουμε αστοχία λόγω πλαστικοποίησης, πριν το λυγισμό, ενώ για μεγάλες τιμές, έχουμε ελαστικό λυγισμό όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο.



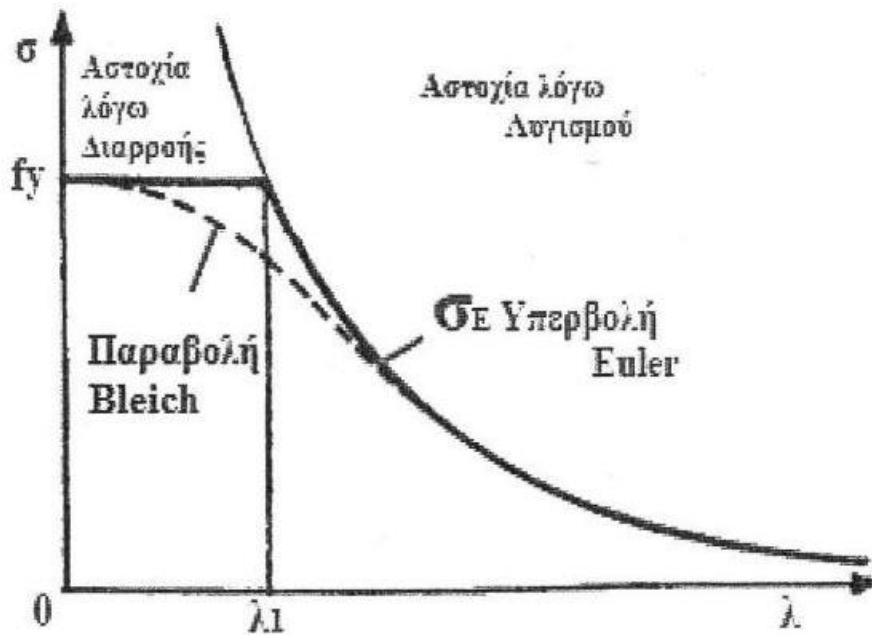
Σχήμα 2.7 Κατανομή ορθών τάσεων λόγω αξονικής δύναμης και καμπτικής ροπής καθ' ύψος ορθογωνικής διατομής.

Η υπερβολή του Euler (σχ.2.8), η οποία είναι η καμπύλη που δείχνει την κατανομή της τάσης Eulerως προς τη λυγηρότητα για ένα υποστυλώμα,

καταδεικνύει την επιρροή της λυγηρότητας στον τύπο αστοχίας του υποστυλώματος (με τη βοήθεια της ευθείας που αντιστοιχεί στην τάση διαρροής f_y , της ποιότητας χάλυβα που χρησιμοποιούμε). Η οριζόντια ευθεία σε συνδυασμό με την καμπύλη του Euler, δίνουν τις τάσεις αστοχίας για ένα ιδανικό υποστυλόμεμα, ενώ η τιμή της λυγηρότητας που αντιστοιχεί στην τομή αυτών ονομάζεται *χαρακτηριστική (ή οριακή) λυγηρότητα* (λ_1). Για λυγηρότητες μικρότερες της λ1 έχουμε αστοχία λόγω διαρροής, ενώ για μεγαλύτερες αυτής λόγω λυγισμού. Ένα πραγματικό υποστυλόμεμα, το οποίο όπως είπαμε έχει ατέλειες, παρουσιάζει μια σταδιακή μετάβαση από το οριζόντιο τμήμα στην υπερβολή, η οποία απεικονίζεται μέσω της παραβολής Bleich. Αυτή (η οποία διατυπώθηκε α. υποθέτωντας ότι όλες οι δυσμενείς επιπτώσεις των ατελειών των υποστυλωμάτων λαμβάνονται υπ' όψη μέσω ενός συντελεστή ασφαλείας και β. μέσω του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας E_t , της κλίσης δηλ. της καμπύλης (μέσης) τάσης -(μέσης) ανηγμένης παραμόρφωσης στην τιμή της κρίσιμης τάσης), φαίνεται στο σχήμα 2.8 με διακεκομμένη γραμμή και πρόκειται για έναν ημιεμπειρικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντοχή των υποστυλωμάτων σε ανελαστικό λυγισμό. Όπως παρατηρούμε από την παραβολή του Bleich το φαινόμενο του λυγισμού εκδηλώνεται, πρακτικά, για τιμές λυγηρότητας μικρότερες της χαρακτηριστικής. Επομένως, ανελαστικός λυγισμός σ' ένα υποστυλόμεμα, περιμένουμε να εκδηλωθεί για λυγηρότητες μεγαλύτερες του μισού της λ_1 , αλλά όπως είπαμε για όχι πολύ μεγάλες. Τέλος στο σημείο που αντιστοιχεί στην χαρακτηριστική λυγηρότητα ισχύει προφανώς:

$$\sigma_E = f_y \Rightarrow \frac{\pi^2 EI}{l^2 A^2} = f_y \Rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = f_y \text{ δηλ. } \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \text{ ή } \lambda_1 = 93.9\varepsilon \quad (2-4)$$

όπου $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$, με την τάση διαρροής f_y μετρημένη σε Mpa



Σχήμα 2.8 Υπερβολή Euler, Παραβολή Bleich και τρόποι αστοχίας υποστυλωμάτων και δοκών

2.3 Μέθοδοι ανάλυσης

Κλείνοντας το κεφάλαιο, θεωρούμε χρήσιμο να πούμε δυο λόγια για την ανάλυση των κατασκευών. Ο σχεδιασμός των κατασκευών έχει στόχο τον προσδιορισμό των εντατικών μεγεθών και των παραμορφώσεων των μελών του φορέα. Πλέον τα υπολογιστικά μέσα που διαθέτουμε, μας δίνουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε ακριβέστερες θεωρίες απ' ό,τι παλιότερα, για την ανάλυση φορέων. Αυτές πρέπει να είναι τόσο προσεγγιστικές όσο επιτρέπεται και τόσο ακριβείς όσο επιβάλλεται. Αυτό εξαρτάται κυρίως από τα γεωμετρικά και αδρανειακά δεδομένα του φορέα που μελετάμε και των μελών του και από το είδος και την ένταση της φόρτισης. Για κάθε χρησιμοποιούμενη θεωρία ανάλυσης κάνουμε ορισμένες βασικές παραδοχές, οι οποίες αυξάνουν όσο πιο απλουστευμένη είναι η θεωρία.

Η συμπεριφορά των κατασκευών επηρεάζεται από δύο μη γραμμικότητες. Τη μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού, λόγω διαρροής του χάλυβα και τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, λόγω μεγάλων μετατοπίσεων. Επίσης, αναφέραμε παραπάνω ότι οι

πραγματικές κατασκευές αποκλίνουν από την ιδανική συμπεριφορά λόγω ατελειών. Το αν θα λάβουμε υπόψη τις δύο μη γραμμικότητες και τις ατέλειες καθορίζει τη μέθοδο ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε. Έτσι, από άποψη υλικού η ανάλυση μπορεί να είναι ελαστική ή πλαστική, ενώ από

άποψη γεωμετρίας μπορεί να είναι 1^{ης} ή 2^{ης} τάξης, ανάλογα με το αν βασίζεται στη γεωμετρία του απαραμόρφωτου ή του παραμορφωμένου φορέα. Ο πίνακας 2.1 δείχνει συνοπτικά τις μεθόδους ανάλυσης και την ονομασία τους.

		Ατέλειες	Συμπεριφορά Υλικού	
			Γραμμική	Μη Γραμμική
Συμπεριφορά Γεωμετρίας	Γραμμική	ΟΧΙ	LA	MNA
	Μη Γραμμική	ΟΧΙ	GNA	GMNA
		ΝΑΙ	GNIA	GMNIA

Πίνακας 2.1 Μέθοδοι ανάλυσης φορέων

Όπου,

LA: Γραμμική Ελαστική Ανάλυση (Linear Analysis)

MNA : Πλαστική Ανάλυση (Materially non-Linear Analysis)

GNA : Γεωμετρικώς μη Γραμμική, Ελαστική Ανάλυση (Geometrically non-Linear Analysis)

GMNA : Γεωμετρικώς μη Γραμμική, Πλαστική Ανάλυση (Geometrically and materially non-Linear Analysis)

GNIA : Γεωμετρικώς μη Γραμμική, Ελαστική Ανάλυση με Αρχικές Ατέλειες (Geometrically non-Linear Analysis with Imperfections)

GMNIA : Γεωμετρικώς μη Γραμμική, Πλαστική Ανάλυση με Αρχικές Ατέλειες (Geometrically and Materially non-Linear Analysis with Imperfections)

Στην παρούσα εργασία, μελετούμε την προλυγισμική συμπεριφορά δοκών με αρχικές ατέλειες και λαμβάνουμε υπόψη τη γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα (με μικρές πάντως παραμορφώσεις). Ακόμα θεωρούμε διαρροή πριν το λυγισμό, δηλ. μη γραμμικότητα υλικού. Η ανάλυσή μας, λοιπόν, είναι *γεωμετρικώς γραμμική, πλαστική ανάλυση με αρχικές ατέλειες* -(πλαστική ανάλυση 2^{ης} τάξης).

Κεφάλαιο 3^ο: Εξαγωγή Εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε την πορεία μέσα από την οποία θα προκύψει η σχέση-μορφή του βέλους $w(x)$ μιας αμφιέριστης δοκού, βάσει των διαφορικών εξισώσεων που την διέπουν, τόσο όσο βρισκόμαστε στην ελαστική περιοχή, όσο και όταν βρεθούμε στην ανελαστική περιοχή, την εύρεση του μέρους της διατομής το οποίο κάθε φορά αναλαμβάνει τις θλιπτικές τάσεις (καταπονείται από θλίψη) καθώς και τη σχέση φορτίου-παραμόρφωσης για κάθε διατομή που θα χρησιμοποιήσουμε. Αρχικά θα αναλύσουμε μια ορθογωνική διατομή, εν συνεχεία θα επεξεργαστούμε μια συμπαγή διατομή κυκλικής μορφής, ώσπου να καταλήξουμε στην τελική μορφή της διατομής μας, η οποία θα είναι της μορφής σωληνωτής στρόγγυλης.

3.1 Εξαγωγή Εξίσωσης βέλους αμφιέριστης δοκού με αρχικά καμπλωμένο διαμήκη άξονα.

Ας θεωρήσουμε μια απλή αμφιέριστη δοκό, υπό εγκάρσια φόρτιση $q(x)$ και καταπονούμενη αξονικά από μια θλιπτική δύναμη P .

Για μηδενικό εγκάρσιο φορτίο $q(x)=0$, η Διαφορική Εξίσωση Ισορροπίας της είναι:

$$EIw(x)'''' + Pw'' = 0. \quad (3-1)$$

$\rightarrow w'''' + Pw''/EI = 0$. Θέτοντας $P/EI = \kappa^2$, οδηγούμαστε στην μορφή

$$w'''' + \kappa^2 w'' = 0 \quad (3-2)$$

Η (3-2) είναι ανεξάρτητη των συνοριακών συνθηκών και προκύπτει από την εξωτερική φόρτιση της δοκού ως εξής:

Η Τέμνουσα δύναμη δίνεται ως εξής: $V(x) = -EI w'''(x) - Pw'(x)$ και η παράγωγός της ως προς x δίνει το φορτίο $q(x) \rightarrow dV/dx = -q$ ($q=0$) $\rightarrow dV/dx = 0 \rightarrow -EIw''''(x) - Pw''(x) = 0$.

Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει λύση της μορφής $w(x) = A \sin \kappa x + B \cos \kappa x + Cx + \Delta$, όπου από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτουν οι συντελεστές.

Ειδικά για αμφιέριστη δοκό χωρίς εξωτερικό φορτίο η ζητούμενη σχέση μπορεί να προκύψει και από την συνθήκη ισορροπίας μεταξύ εσωτερικής ροπής και εξωτερικής ροπής. Πιο συγκεκριμένα...

$$M_{\text{εσωτ}} = -EIw''(x), M_{\text{εξ}} = Pw(x) \rightarrow -EIw''(x) = Pw(x) \rightarrow$$

$$EIw''(x) + Pw(x) = 0 \rightarrow w''(x) + \kappa^2 w(x) = 0. \text{ Όπου έχει λύση της μορφής } w(x) = A \sin \kappa x + B \cos \kappa x. \quad (3-3)$$

Από συνοριακές συνθήκες οι οποίες δίνουν μηδενικό βέλος στις θέσεις $x=0$ και $x=L$ προκύπτει : $w(0) = 0 \rightarrow A\sin 0 + B\cos 0 = 0$ άρα έχουμε ότι $B=0$.

Από $w(L) = 0 \rightarrow A\sin kL = 0$ κι έχουμε 2 πιθανές λύσεις.

A) $A=0$ όπου έτσι έχουμε ότι και το βέλος θα είναι μηδενικό για κάθε φορτίο και για κάθε $k(=\sqrt{P/EI})$ που μας οδηγεί σε ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας την οποία δε θέλουμε, είτε

B) $\sin kL=0$ απ'όπου παίρνουμε $kL=n\pi$ με $n=1,2,3,\dots$ με το μικρότερο φορτίο να προκύπτει για $n=1$.

Από $kL=n\pi$ αν το υψώσουμε στο τετράγωνο έχουμε $k^2L^2=n^2\pi^2$ το οποίο γράφεται $P/EI=\pi^2/L^2 * n^2$ όπου για $n =1$ καταλήγουμε στην κρίσιμη τιμή του φορτίου $P_{cr}=\pi^2EI/L^2 = P_E(\text{Euler})$, και η εξίσωση βέλους $w(x) = A\sin kx = A\sin \frac{\pi x}{L}$ (1^η κανονική μορφή λυγισμού). Στη θέση $x=L/2$ παίρνουμε το μέγιστο βέλος A το οποίο αν το ονομάσω (δ) θα γράψω την εξίσωση $w(x)$ (ή y) = $\delta \sin \frac{\pi x}{L}$ (3-4)

3.2 Σχέση φορτίου -παραμόρφωσης

3.2.1 Ελαστική Σχέση φορτίου-παραμόρφωσης

Για να καθορίσουμε τη σχέση μεταξύ του φορτίου P και της καμπυλότητας y'' , θα εξισώσουμε την εκφραση της εσωτερικής ροπής με εκείνη της εξωτερικής. Οπότε οδηγούμαστε στα εξής :

$M + Py = -EI y''(x)$ όπου αν η παραμόρφωση όπως είδαμε είναι της μορφής $y = \delta \sin(\pi x/L)$ τότε η καμπυλότητα μπορεί να γραφεί

$$y'' = -\frac{\delta \pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3-5)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην παραπάνω εξίσωση την μορφή της καμπυλότητας έχουμε $M + Py = EI \frac{\delta \pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$ η οποία μειώνεται σε

$M + P\delta = EI \frac{\delta \pi^2}{L^2}$ στη μέση της δοκού. Υποθέτουμε ότι η ροπή M συνδέεται με την δύναμη P με τη σχέση $e=M/P$, ξαναγράφοντας την εξίσωση $P(e+\delta) = \delta EI \pi^2/L^2 = \delta P_E$ και εν συνεχεία διαιρώντας και τα δύο μέλη με το ύψος της διατομής h , δύνανται κανείς να λάβει

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\frac{e}{h} * 1}{\frac{Pe}{P} - 1} \quad \text{ή} \quad \frac{\delta}{h} = \frac{\frac{e}{h} * 1}{\frac{\sigma E}{\sigma_0} - 1} \quad (3-6)$$

όπου $\sigma_E = P_E/bh$ είναι η τάση του Euler και $\sigma_0 = P/bh$ είναι η τάση λόγω αξονικού φορτίου.

Όσο η τάση παραμένει ελαστική, η παραπάνω σχέση δίνει τη σωστή σχέση μεταξύ φορτίου-παραμόρφωσης. Για να καθορίσουμε το φορτίο στο οποίο η παραπάνω σχέση κρίνεται μη-αληθής, βρίσκουμε την μέγιστη τάση σ_{max} και την εξισώνουμε με την τάση διαρροής σ_y

$\sigma_{max} = P/bh + \frac{M+P\delta}{bh^2/6}$ ή αντικαθιστώντας τη ροπή M με Pe και την τάση σ_0 με

$$P/bh, \text{ θα έχουμε την ακόλουθη σχέση } \sigma_{max} = \sigma_0 \left(1 + \frac{6(e+\delta)}{h} \right) \quad (3-7)$$

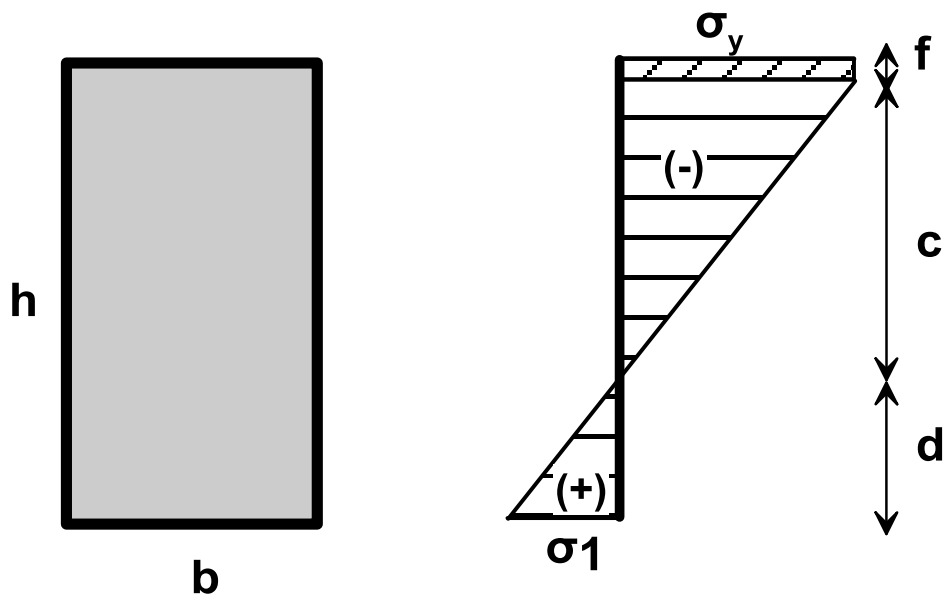
η οποία ισχύει για ορθογωνική διατομή.

3.2.2 Ανελαστική Σχέση Φορτίου-Παραμόρφωσης

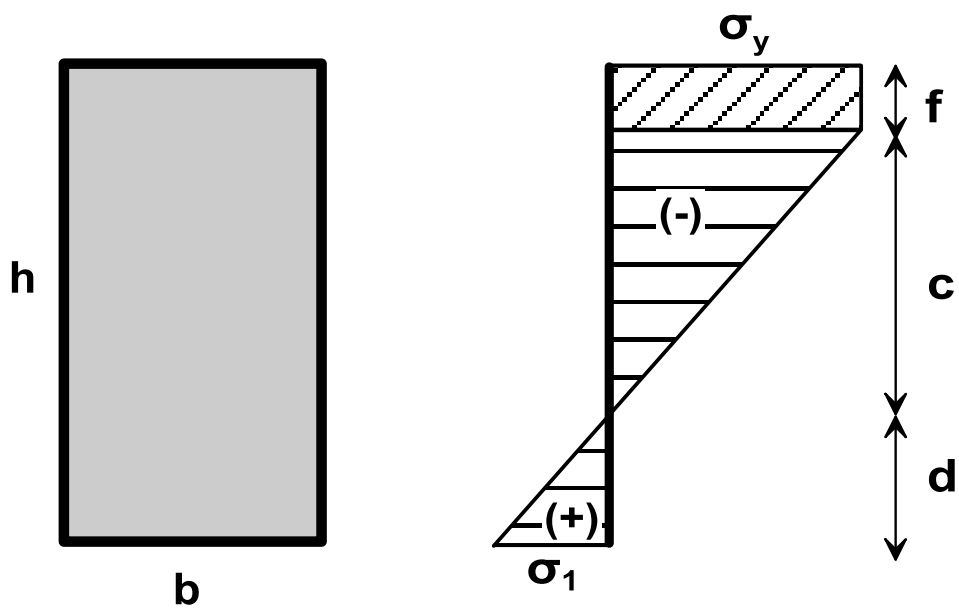
Όπως είπαμε και παραπάνω, από την στιγμή που διαρρέει η πρώτη ίνα της δυσμενέστερης διατομής της δοκού, δε μπορεί να αναλυθεί η συμπεριφορά της με βάση την έκφραση της εσωτερικής ροπής όπως την είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Κρίνεται αναγκαίο λοιπόν να εξάγουμε μια νέα σχέση καμπυλότητας-εσωτερικής ροπής.

Για την εξαγωγή της σχέσης αυτής, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την νέα κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής του φορέα μας. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η νέα κατανομή των τάσεων. Παρατηρούμε ότι η ακραία ίνα έχει διαρρεύσει και καθώς αυξάνουμε το φορτίο, η διαρροή αυτή επεκτείνεται σε μεγαλύτερο μέρος της διατομής μας.

Για διάφορες τιμές των φορτίων μπορεί να έχουμε διαρροή της θλιβόμενης ζώνης της διατομής μας ενώ για μεγαλύτερες τιμές φορτίων, έχουμε διαρροή και της εφελκυστικής ζώνης. Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη περίπτωση, δηλ φόρτιση κατά την οποία έχουμε διαρροή μόνο της θλιβόμενης ζώνης.



Σχήμα 3.2.1 Κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της δυσμενέστερης διατομής,αφότου έχει διαρρεύσει η ακραία ίνα της.



Σχήμα 3.2.2 Κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της δυσμενέστερης διατομής μετά την διαρροή της ακραίας ίνας,για αύξηση του φορτίου

Το κομμάτι της διατομής που λειτουργεί σε θλιψη (c) το υπολογίζουμε ως εξής.

Κατά τη διεύθυνση x (όπως φαίνεται και στο σχήμα) η δύναμη προκύπτει με πολλαπλασιασμό του εμβαδού της διατομής επί την αντίστοιχη μέση τάση της κατανομής

$$P = b \left(\sigma_y f + \sigma_y * \frac{c}{2} - \frac{\sigma_1 d}{2} \right) \quad (3-8)$$

Διαιρώντας με το εμβαδόν $A = bh$

$$\sigma_0 = \frac{1}{h} \left(\sigma_y f + \sigma_y * \frac{c}{2} - \frac{\sigma_1 d}{2} \right) \quad (3-9)$$

όπου σ_y είναι η τάση διαρροής, σ_1 είναι η εφελκυστική τάση που ασκείται (στο σχήμα μας) στην κατώ ακραία ίνα της διατομής μας και τα c, f, d οι αποστάσεις όπως φαίνονται στο σχήμα.

Η εσωτερική ροπή αποκτάται παίρνοντας τις επιμέρους ροπές που δίνει το διάγραμμα των τάσεων ως προς τον κεντροβαρικό άξονα. (πολλαπλασιασμός των επιμέρους δυνάμεων από το σημείο που ασκούνται με την απόσταση τους από το κέντρο βάρους της διατομής)

$$M = \left(\sigma_y f \left(\frac{h}{2} - \frac{f}{2} \right) + \sigma_y \frac{c}{2} \left(\frac{h}{2} - f - \frac{c}{3} \right) + \sigma_1 \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{d}{3} \right) \right) b, \quad (3-10)$$

ενώ έχουμε και την σχέση μεταξύ των c, f, d η οποία είναι ότι το άθροισμά τους μας δίνει το ύψος h της διατομής: $c + f + d = h$

Από αυτή τη στιγμή δυνάμεθα να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων ως προς τον άγνωστο c , όπου μετά από μερικούς αρκετά πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς, θα καταλήξουμε στη ζητούμενη έκφραση του.

Θα παραθέσουμε ένα μέρος των υπολογισμών σε αυτό το σημείο.

Αρχικά παίρνουμε την εξίσωση της δύναμης P και την προσωράμε ως εξής:

$$\frac{P}{b} = \sigma_y * f + \sigma_y * \frac{c}{2} - \sigma_y * \frac{d}{c} * \frac{d}{2}$$

Αφού η σ_1 από τη γραμμική σχέση (σχέση τριγώνων που είναι στο διάγραμμα των τάσεων) είναι ίση με $\sigma_y * \frac{d}{c}$

και από τη σχέση $f = h - d - c$ έχουμε:

$$\frac{P}{b} = \sigma_y h - \sigma_y d - \sigma_y c + \frac{\sigma_y c}{2} - \frac{\sigma_y d * d}{2c}$$

Που μετασχηματίζεται σε

$$\frac{P}{b} = \sigma y h - \frac{\sigma y c}{2} - \frac{\sigma y d(2c + d)}{2c}$$

ή

$$\frac{P}{b} = \sigma y \left(h - \frac{c}{2} \right) - \frac{\sigma y d(2c + d)}{2c}$$

Οπότε έχουμε:

$$2c * \left(\frac{P}{b\sigma y} \right) = 2ch - c^2 - 2cd - d^2$$

$$\rightarrow c^2 + 2dc + d^2 = 2c \left(h - \frac{P}{b\sigma y} \right)$$

$$\rightarrow \left(h - \frac{P}{b\sigma y} \right) 2c = (c + d)^2 \quad (3-11)$$

Έχουμε λοιπόν την πρώτη παράσταση. Την ίδια πορεία ακολουθούμε και με τη σχέση της ροπής κι παίρνουμε:

$$M = b \left(\sigma y f \left(\frac{h}{2} - \frac{f}{2} \right) + \frac{\sigma y c}{2} \left(\frac{h}{2} - f - \frac{c}{3} \right) + \frac{\sigma y d}{c} * \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{d}{3} \right) \right)$$

Κάνοντας κι εδώ μετατροπές εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες των αποστάσεων h,f,c,d και τις σχέσεις των τάσεων σ_1 και σ_y προχωράμε

$$M = b\sigma y \left((h - d - c) * \frac{(h-h+d+c)}{2} + \frac{c}{2} \frac{(3h-6f-2c)}{6} + \frac{d^2}{2c} * \frac{(3h-2d)}{6} \right)$$

$$\rightarrow \frac{M}{b\sigma y} = \left(\frac{(h-d-c)*(d+c)}{2} + \frac{c}{2} \left(\frac{3h-6h+6d+6c-2c}{6} \right) + d * \frac{d}{12c} (h + (2h - 2d)) \right)$$

$$\rightarrow \frac{M}{b\sigma y} = \frac{h(d+c)}{2} - \frac{(d+c)^2}{2} + \frac{c}{12} (-3h + 6d + 4c) + \frac{d^2 h}{12c} + d^2 * \frac{h-d}{6c}$$

$$\rightarrow \frac{M}{b\sigma y} = \left(-\frac{6(d+c)^2}{12} + \frac{6h}{12} (d + c) + \frac{1}{12} (-3hc + 6cd + 4c^2) + \frac{d^2 h}{12c} + \frac{2d^2 h}{12c} - \frac{2d^3}{12c} \right)$$

$$\rightarrow \frac{M}{b\sigma y} = \frac{1}{12c} (-6c(d+c)^2 + 6hc(d+c) + 6c^2d - 3hc^2 + 4c^3 + d^2h + 2d^2h - 2d^3)$$

Κάνοντας τις πράξεις στις παρενθέσεις, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και απαλείφοντας τους όρους που μπορούν να φύγουν καταλήγουμε στην επόμενη μορφή της ανωτέρας παράστασης :

$$\frac{M}{b\sigma y} = \frac{1}{12c} (-2c^3 - 2d^3 - 6c^2d - 6cd^2 + h(6cd + 3c^2 + 3d^2))$$

Την οποία αν την παρατηρήσουμε μπορεί να γραφεί σαν παράγοντες..

$$\frac{M}{b\sigma y} = \frac{1}{12c} (-2(c+d)^3 + 3h(c^2 + d^2 + 2cd))$$

$$\rightarrow \frac{M}{b\sigma y} = \frac{1}{12c} (-2(c+d)^3 + 3h(c+d)^2)$$

Συνεπώς η σχέση της ροπής δίνεται πλέον :

$$\mathbf{M} = \frac{b\sigma y}{12c} (\mathbf{3h(c+d)^2 - 2(c+d)^3}) \quad (3-12)$$

Έχοντας τις δύο αυτές σχέσεις μπορούμε πλέον να εισάγουμε τη δύναμη P στη σχέση της ροπής μέσω του κοινού τους όρου.Επι πλέον λαμβάνοντας υπόψη και τις σχέσεις $\frac{P}{b} = \sigma_o * h$ και τις παραλλαγές που μπορούν να γίνουν επ αυτές,πχ αν πολλαπλασιαστούν με τη ταση διαρροής σ_y κτλ,αντικαθιστώντας τη σχέση (3-11) στην σχέση (3-12) οδηγούμαστε στα εξής:

$$\frac{12M}{b\sigma_y} = \frac{1}{c} \left(3h^2 \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) 2c - 2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) 2c \left(\left(h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) 2c \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

Τα c απαλείφονται κι έχουμε

$$\rightarrow \frac{12M}{b\sigma_y} = 3h^2 * 2 \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) - 2 * 2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) * \left(2ch * \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

το οποίο μας δίνει στην συνέχεια ότι:

$$\frac{12M}{b\sigma_y} - 3h * 2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) = -2 * 2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) * c^{\frac{1}{2}} * \left(2h * \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow 3h * 2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) - \frac{12M}{b\sigma_y} = c^{\frac{1}{2}} * \left(2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) \right)^{\frac{1}{2}} * 2 * 2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right)$$

Συνεπώς αν λύσουμε ως προς τον άγνωστο c:

$$c^{\frac{1}{2}} = \frac{3h}{2 * \left(2h \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{3M}{b\sigma_y}}{h * \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) * \left(2h * \left(1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_y}\right) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-13)$$

Που εν συνεχεία θα γραφεί:

$$c^{\frac{1}{2}} = \frac{3h}{2 * \left(2h \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{3M}{bh\sigma y \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)}}{\left(2h \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rightarrow c^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3h}{2} - \frac{3M}{bh\sigma y \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)}}{\left(2h \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-14)$$

Απλοποιώντας τον αριθμητη λίγο ακόμα και κατα συνέπεια ολόκληρο το σύνθετο κλάσμα που έχει προκύψει έχουμε μια πιο "εύκολη" μορφή του αγνώστου μας:

$$c^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3h}{2} * \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right) - \frac{3M}{P} * \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)}{\left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right) * \left(2h * \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\frac{P}{bh} = \sigma o \rightarrow bh = P/\sigma o$, ώστε να εμφανίσουμε τον όρο $\frac{M}{P}$ στη σχέση, τον οποίο θέλαμε γιατί όπως ξέρουμε μας δίνει την εκκεντρότητα-αρχικό βέλος ανάλογα τι έχουμε και την επιπρόσθετη βύθιση.

Εν συνεχεία έχουμε:

$$c^{\frac{1}{2}} = \frac{3 \left(\frac{h}{2} * \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right) - \frac{M}{P} * \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)}{\left(2h \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)\right)^{\frac{1}{2}} * \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y}\right)}$$

Και πολλαπλασιάζοντας τους όρους με $\frac{\sigma y}{\sigma o}$ καταλήγουμε στην

$$c^{\frac{1}{2}} = \frac{3 \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right) - \frac{M}{P} \right)}{\left(2h \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y} \right) \right)^{\frac{1}{2}} * \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right)}$$

ή

$$c = \frac{9 \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right) - \frac{M}{P} \right)^2}{2h * \left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y} \right) * \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right)^2}$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι το $\left(1 - \frac{\sigma o}{\sigma y} \right)$ μπορεί να γραφεί ως $\frac{\sigma y - \sigma o}{\sigma y}$ όπου ο παρανομαστής σy αναπόφευκτα θα πολ/σει τον αριθμητή του σύνθετου κλάσματος και αν επιπρόσθετα πολ/σουμε και διαιρέσουμε τον παρανομαστή του σύνθετου κλάσματος με σo θα έχουμε:

$$c = \frac{9 \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right) - \frac{M}{P} \right)^2}{2h * \sigma o * \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right) * \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right)^2} * \sigma y \quad (3-15)$$

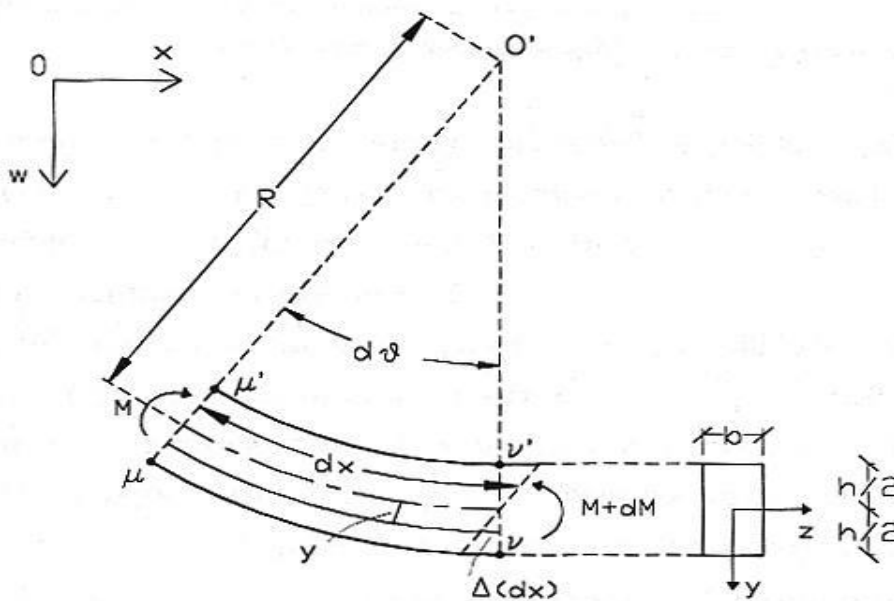
Καταλήξαμε λοιπόν ότι το c δίνεται συναρτήσει της εσωτερικής ροπής $M_{εσω}$, της δύναμης P του ύψους h της διατομής, της τάσης διαρροής και της τάσης λόγω αξονικού φορτίου, μέσω της σχέσης :

$$c = \frac{9 \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right) - \frac{M}{P} \right)^2}{2\sigma o h \left(\frac{\sigma y}{\sigma o} - 1 \right)^3} * \sigma y \quad (3-16)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει με κάποιο τρόπο να συνδέσουμε την καμπυλότητα του φορέα μας με την ροπή μας και με το μέρος της διατομής το οποίο αναλαμβάνει τη θλίψη, δηλαδή το c .

Έχουμε λοιπόν ότι, για ένα ενός καμπτόμενου στοιχείου, που απέχει απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα, έχει παραμόρφωση (ϵ) που συνδέεται με την καμπυλότητα (ρ) ως εξής.

Σχήμα 3.2.3 Παραμόρφωση καμπτόμενου στοιχείου



$$\epsilon_y = y/\rho \quad (3-17)$$

Αν το προσαρμόσουμε στο δικό μας στοιχείο η σχέση αυτή θα γραφεί

$$\epsilon_y = c/\rho \quad (3-18)$$

Είναι γνωστό ότι $\sigma_y = E\epsilon_y \rightarrow \epsilon_y = \sigma_y / E$

$$\text{Προκύπτει} \quad 1/\rho = \epsilon_y / c = \sigma_y / Ec \quad (3-19)$$

Το $1/\rho$ είναι όμως το y'' οπότε αν αντικαταστήσουμε στην έκφραση αυτή την μορφή του c που βρήκαμε προηγουμένως θα έχουμε

$$y'' = \frac{2\sigma_0 h (\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1)^3}{9E [\frac{h}{2} * (\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1) - M/P]^2} \quad (3-20)$$

Αυτή είναι η ανελαστική σχέση ροπής-καμπυλότητας που θα πρέπει να χρησιμοποιείται όταν η τάση έχει ξεπεράσει την οριακή της τιμή σ_0 ώστε η σ_{max} όπως είδαμε στα προηγούμενα να ισούται με την τάση διαρροής σ_y . Αν θεωρήσουμε ότι η εξίσωση του πρόσθετου βέλους είναι και σε αυτή την περίπτωση $y = \delta \sin \pi x / l$, όπως στην ελαστική, καθώς η αστοχία λόγω λυγισμού θα επέλθει αρκετά γρήγορα μετά τη διαρροή, η καμπυλότητα και η ροπή στο μέσο άνοιγμα της δοκού θα είναι αντίστοιχα

$$y''(l/2) = \delta \pi^2 / l^2 \quad (3-21)$$

και

$$M_{\epsilon\sigma}(l/2) = P(e + \delta) \quad (3-22)$$

Αντικατάσταση αυτών στην σχέση καμπυλότητας όπως γράφηκε παραπάνω οδηγεί στην έκφραση:

$$\delta \left[\frac{h}{2} * \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 \right) - e - \delta \right]^2 = \frac{2hl^2 \sigma_0}{9E\pi^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 \right)^3 \quad (3-23)$$

Η οποία μετά από λίγες πράξεις και εφόσον αντικαταστήσουμε την τάση Euler $\sigma_E = \pi^2 EI / Al^2 = \pi^2 E h^2 / 12l^2$ (για ορθογωνική διατομή υπενθυμίζουμε), δύναται να γραφεί σε μια πιο εύχρηστη μορφή:

$$\frac{\delta}{h} * \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 \right) - \frac{\delta}{h} - \frac{e}{h} \right]^2 = \frac{\sigma_0}{54\sigma_E} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 \right)^3 \quad (3-24)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει τη σχέση μεταξύ φορτίου-παραμόρφωσης σε ανελαστική κλίμακα, και μπορεί να χρησιμοποιείται από την στιγμή που η διατομή μας μπαίνει στην διαρροή μέχρι και την αστοχία, προϋποθέτοντας ότι η αστοχία συμβαίνει πριν η διαρροή να εξαπλωθεί και στο εφελκόμενο τμήμα της διατομής. Τώρα πια είναι εφικτό να πάρουμε μέσω των σχέσεων αυτών, ολόκληρη την καμπύλη φορτίου-παραμόρφωσης, από την έναρξη της φόρτισης μέχρι την αστοχία, για κάθε μέλος που υπόκειται στους παραπάνω περιορισμούς. Ο ελαστικός κλάδος θα δίνεται από τις ελαστικές εξισώσεις της προηγούμενης παραγράφου, και θα είναι γραμμικός ο κλάδος φορτίου-παραμόρφωσης, ενώ για το σημείο καμψής όπου η μέγιστη τάση εξισώνεται με την τάση διαρροής και περναμε στον ανελαστικό κλάδο, τη συνέχεια της καμπύλης την παίρνουμε από τις ανελαστικές σχέσεις αυτής της παραγράφου.

Είναι προφανές ότι στο σημείο καμπής και οι ελαστικές αλλά και οι ανελαστικές σχέσεις δίνουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. (δεν υπάρχει άλμα στην καμπύλη, είναι συνεχής).

Οι σχέσεις παρ' όλα αυτά που είδαμε παραπάνω, ισχύουν για την απλή ορθογωνική διατομή, η οποία για εμάς δεν αποτελεί την τελική μας μορφή διατομής, απλά ένα στάδιο ώστε να κατανοήσουμε την πορεία την οποία θα ακολουθήσουμε ώστε με παρόμοιο τρόπο να αποδείξουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για τον προσδιορισμό του τμήματος που αναλαμβάνει τη θλίψη c , σε διατομή κυκλικής και σωληνοειδούς μορφής.

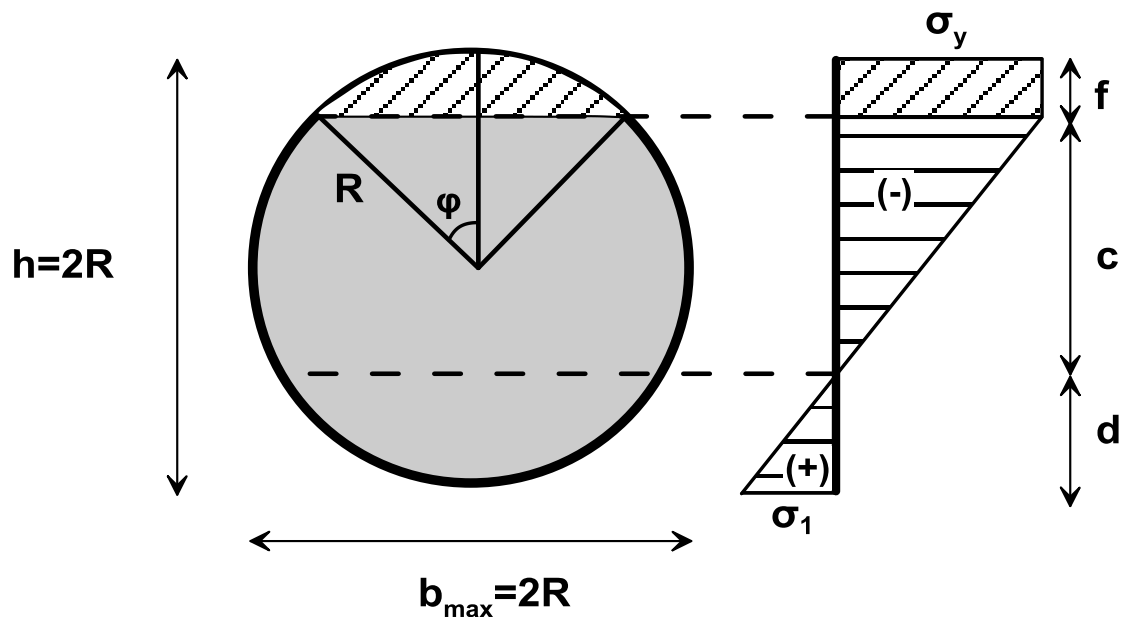
Η τακτική και η πορεία που θα ακολουθήσουμε είναι ίδια και στις 3 περιπτώσεις, απλά λόγω του ότι στις επόμενες διατομές μας το πλάτος b της διατομής μας θα μεταβάλλεται συνεχώς ανάλογα τη θέση που θα εξετάζουμε (σε αντίθεση με την ορθογωνική στην οποία το πλάτος παραμένει σταθερό καθ' ύψος), η διαφορά έγκειται κυρίως εκεί.

3.3 Εξαγωγή τελικών εξισώσεων

3.3.1. Εξαγωγή της απόστασης c -μέρους της κυκλικής μορφής της συμπαγούς διατομής που παραλαμβάνει την θλίψη μετά τη διαρροή.

Σε αυτή την παράγραφο θα ακολουθήσουμε ξανά την διαδικασία που ακολουθήσαμε όταν επιχειρήσαμε την απόδειξη της σχέσεως της απόστασης-μέρους της διατομής που αναλαμβάνει τη θλίψη, όταν έχουμε ήδη περάσει στην διαρροή της ακραίας ίνας της διατομής και καθώς η διαρροή επεκτείνεται. Παρ' όλο που η λογική της αποδείξεως είναι σαφώς η ίδια, η κύρια διαφορά με την περίπτωση της ορθογωνικής διατομής, έγκυται στο γεγονός ότι εδώ, στην κυκλική διατομή (υποθετική συμπαγής), έχουμε συνεχής μεταβολή του πλάτους b της διατομής σε κάθε θέση καθ' ύψος. Αυτό θα μας αναγκάσει στην θεώρηση άπειρων υπο-μερών της διατομής τα οποία θα δεχτούμε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος το οποίο θα συνδέσουμε με το ύψος του υπομέρους dz σε όλο το ύψος της διατομής h . Κρίνεται απαραίτητη η χρήση ολοκληρωμάτων για την διεκπεραίωση αυτής της ενέργειας, καθώς και εύρεση της εξίσωσης της ευθείας των τάσεων του διαγράμματος (το οποίο διατηρεί την ίδια μορφή ως πριν), με έλεγχο στις θέσεις όπου θετικές τάσεις (θλιπτικές) δίνουν αρνητική ροπή λόγω του ότι η εναλλαγή στο διαγραμμα από την θλιπτική τάση στην περιοχή των

εφελκυστικών, δεν γίνεται στο κέντρο βάρους της διατομής. Ας δούμε όμως ένα μέρος της διαδικασίας αυτής:



Αρχικά υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθείας των τάσεων:

Κατακόρυφος άξονας ο άξονας y και οριζόντιος ο x με αρχή των αξόνων από το κέντρο του κύκλου.

Θετικές είναι οι θλιπτικές τάσεις οπότε έχουμε:

$Y = ax + b$ η γενική μορφή της εξίσωσης ευθείας. Θα βρούμε τους συντελεστές από τα δύο σημεία που έχουμε σταθερά ότι περνάει $A(0; \sigma_x)$ και $B(-c + R \cos \varphi; 0)$.

Στη θέση $x=0$ έχουμε (σημείο A):

$$\sigma = 0 + b \quad (3-25)$$

Στη θέση $y=0$ (σημείο B) έχουμε:

$$0 = -(c - R \cos \varphi) a + b \quad (3-26)$$

Από την (3-25) έχω ότι $b = \sigma_x$ και αντικαθιστώντας στην (3-26) παίρνουμε :

$$\sigma = (c - R \cos \varphi) a \rightarrow a = \sigma / (c - R \cos \varphi) \quad (3-27)$$

Η τυχαία όμως τάση σ μπορεί να γραφεί σε σχέση με την τάση διαρροής σ_y , από την αναλογία του διαγράμματος ως εξής:

$$\sigma_y/c = \sigma/(c-R\cos\varphi) \rightarrow \sigma = \sigma_y - \sigma_y R\cos\varphi/c \quad (3-28)$$

οπότε η (3-25) μετασχηματίζεται στην

$$\beta = \sigma_y - \sigma_y R\cos\varphi/c$$

και η (3-26) στην

$$\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_y R\cos\varphi/c}{c - R\cos\varphi} \quad (3-29)$$

όπου μετά από μηδαιμένες πράξεις μετασχηματίζεται στην:

$$\alpha = \sigma_y/c \quad (3-30)$$

Τελικά η εξίσωση της τάσης στη γενική της μορφή καταλήγει να είναι η εξής:

$$\sigma = \frac{\sigma_y}{c} * z + \sigma_y - \sigma_y * \frac{R\cos\varphi}{c} \quad (3-31) \text{ όπου το } z \text{ κινείται καθ' ύψος της διατομής.}$$

Αφού έχουμε βρει την εξίσωση των τάσεων τώρα προχωράμε στον υπολογισμό της δύναμης P και της ροπής M .

Υπολογισμός Σχέσεως Δύναμης P

Για την δύναμη έχουμε:

$$P = \int_{-R}^R b(z)\sigma(z)dz \quad (3-32)$$

Όπου τη σχέση $b(z)$ την βρίσκουμε μέσω γεωμετρίας από την διατομή και είναι η εξής:

$$b(z) = 2\sqrt{R^2 - z^2} \quad (3-33)$$

Το κομμάτι της διατομής που έχει διαρρεύσει βρίσκεται εύκολα γεωμετρικώς από τις σχέσεις του εμβαδού του κυκλικού τομέα μείον το τρίγωνο που σχηματίζεται επί την τάση σ_y . Οπότε δεν το περιλαμβάνουμε στο ολοκλήρωμα κι έτσι μένει να υπολογίσουμε το:

$$P = 2 * \int_{-R}^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - z^2} * \left(\frac{\sigma_y}{c} * z + \sigma_y - \sigma_y * \frac{R\cos\varphi}{c} \right) dz$$

Αναλύοντας η έκφραση θα δίνεται

$$P = 2 \int_{-R}^{R \cos \varphi} \left(\frac{\sigma y}{c} * z * (R^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \sigma y (R^2 - z^2)^{0.5} - \frac{\sigma y R \cos \varphi}{c} * (R^2 - z^2)^{0.5} \right) dz$$

Το οποίο αν το γράψουμε ξεχωριστά ο κάθε παραγοντας μας δίνει:

$$2 \left[\frac{\sigma y}{c} * \left(-\frac{(R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + \sigma y \left(\frac{z(R^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{R^2}{2} * \sin^{(-1)} \frac{z}{R} \right) - \sigma y * \frac{R \cos \varphi}{c} * \left(\frac{z(R^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{R^2}{2} * \sin^{(-1)} \frac{z}{R} \right) \right]$$

Με το z απο $-R \rightarrow R \cos \varphi$.

Λαμβάνοντας τις τιμές του z σαν οριο ολοκλήρωσης έχουμε:

$$2 * \left(\frac{\sigma y}{c} * \left(-R^3 * \frac{\sin^3 \varphi}{3} - (0) \right) + \sigma y * \left(R^2 * \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} + \frac{R^2}{2} * \sin^{-1} \cos \varphi - \left(\frac{R^2}{2} \sin^{-1}(-1) \right) \right) - \frac{\sigma y R \cos \varphi}{c} * \left(R^2 * \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} + \frac{R^2}{2} * \sin^{-1} \cos \varphi - \left(\frac{R^2}{2} \sin^{-1}(-1) \right) \right) \right)$$

Λαμβάνοντας $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ και προσθέτωντας και το μέρος της δυναμης απο το τμημα που εχει διαρρεόσει : $\sigma y R^2 * \varphi - \sigma y R^2 * \cos \varphi * \sin \varphi$ παίρνουμε:

$$-2 \sigma y R^3 * \frac{\sin^3 \varphi}{3c} + \sigma y R^2 \cos \varphi \sin \varphi + \sigma y * R^2 * \sin^{-1} \cos \varphi - \sigma y R^2 * \sin^{-1}(-1) - \sigma y R^3 * \cos^2 \varphi * \frac{\sin \varphi}{c} - \sigma y R^3 * \cos \varphi * \frac{\sin^{-1}(\cos \varphi)}{c} + \sigma y R^3 * \cos \varphi * \frac{\sin^{-1}(-1)}{c} + \sigma y R^2 * \varphi - \sigma y R^2 * \cos \varphi \sin \varphi$$

Και καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση,

$$P = -\frac{2}{3} * \frac{\sigma y}{c} * R^3 \sin^3 \varphi + \sigma y * R^2 * \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) - \sigma y R^3 * \cos \varphi * \frac{\pi}{2c} - \frac{\sigma y}{c} * R^3 * \cos^2 \varphi * \sin \varphi - \frac{\sigma y}{c} * R^3 \cos \varphi \sin^{-1} \cos \varphi + \sigma y R^2 \sin^{-1} \cos \varphi$$

Παρατηρούμε οτι για γωνία $\varphi \leq \pi/2$, το $\sin^{-1} \cos \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, η παραπάνω σχέση μπορεί να μετατραπεί στην:

$$P = -\frac{2}{3} * \frac{\sigma y}{c} * R^3 \sin^3 \varphi + \sigma y * R^2 * \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) - \sigma y R^3 * \cos \varphi * \frac{\pi}{2c} - \frac{\sigma y}{c} * R^3 * \cos^2 \varphi * \sin \varphi - \frac{\sigma y}{c} * R^3 \cos \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \sigma y R^2 * \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\rightarrow P = -\frac{2}{3} * \frac{\sigma y}{c} * R^3 \sin^3 \varphi + \sigma y R^2 \varphi + \sigma y R^2 * \frac{\pi}{2} + \sigma y R^2 * \frac{\pi}{2} - \sigma y R^2 * \varphi - \sigma y R^3 * \cos \varphi * \frac{\pi}{2c} - \frac{\sigma y}{c} R^3 * \cos^2 \varphi * \sin \varphi - \frac{\sigma y}{c} * R^3 * \cos \varphi * \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma y}{c} * R^3 * \cos \varphi * \varphi$$

$$\rightarrow P = -\frac{\sigma y}{3c} * R^3 \sin \varphi * (3 \cos^2 \varphi + 2 * \sin^2 \varphi) - \frac{\sigma y}{2c} R^3 * \cos \varphi * 2\pi + \frac{\sigma y}{c} R^3 \cos \varphi * \varphi + \sigma y * \pi R^2$$

Τροποποιώντας την εξίσωση της δύναμης θα προσπαθήσουμε να την φέρουμε σε μια πιο "βολική" μορφή. Οπότε προχωρώντας σε περαιτέρω πράξεις συνεχίζουμε ως εξής:

$$P = -\frac{2\sigma y}{3c} R^3 \sin \varphi - \frac{\sigma y}{3c} R^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi - \frac{\sigma y}{c} \pi R^3 \cos \varphi + \frac{\sigma y}{c} R^3 \cos \varphi * \varphi + \pi R^2 \sigma y$$

Και

$$P = -\frac{2\sigma y}{3c} R^3 \sin \varphi - \frac{\sigma y}{3c} R^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\sigma y}{c} R^3 \cos \varphi * (\varphi - \pi) + \sigma y * \pi * R^2$$

Συνεχίζοντας λίγο ακόμη καταλήγουμε στη νέκφραση της δύναμης P σε πολύ ικανοποιητική μορφή. Πράγματι έχουμε:

$$(P - \pi * R^2 * \sigma y) * \frac{3c}{\sigma y * R^3} = -2 \sin \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \cos \varphi * (\varphi - \pi)$$

Και αν αλλάξουμε και γράψουμε το $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ τότε η σχέση γίνεται:

$$(P - \pi * R^2 * \sigma y) * \frac{3c}{\sigma y * R^3} = -3 \sin \varphi + \sin^3 \varphi + 3 \cos \varphi * (\varphi - \pi) \quad (3-34)$$

Για την ροπή έχουμε:

$$M = \int_{-R}^R z * b(z) * \sigma(z) dz \quad (3-35)$$

Οπου κι εδώ η σχέση του b(z) είναι η ίδια από πριν:

$$b(z) = 2\sqrt{R^2 - z^2} \quad (3-33)$$

Για το τμήμα που έχει ήδη διαρρέυσει, και εδώ, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που μένει αν από την όλη διατομή αφαιρέσουμε το τμήμα που και στον υπολογισμό της δύναμης βρέθηκε γεωμετρικά. Το μόνο που μένει να κάνουμε για το τμήμα αυτό, είναι να πολλαπλασιαστεί επί τον μοχλοβραχίονα του ως προς το κέντρο της διατομής.

Βέβαια, δεν θα υπήρχε προφανώς διαφορά ή διαφορετικό αποτέλεσμα από το να υπολογίζαμε το ολοκλήρωμα με το z να κινείται από -R έως R, αφού είναι και η σχέση των τάσεων γνωστή (και στο συγκεκριμένο τμήμα σταθερή ίση με σ_y). Απλά, είναι ένας εναλλακτικός τρόπος ώστε να χρησιμοποιηθεί και η γεωμετρία της διατομής χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει κάτι περαιτέρω.

Μένει να υπολογιστεί λοιπόν το ολοκλήρωμα:

$$M = 2 * \int_{-R}^{R \cos \varphi} z * \sqrt{R^2 - z^2} * \left(\frac{\sigma_y}{c} * z + \sigma_y - \sigma_y * \frac{R \cos \varphi}{c} \right) dz$$

Αναλύοντας τις παρενθέσεις έχουμε

$$M = 2 \int_{-R}^{R \cos \varphi} \left(\frac{\sigma_y}{c} * z^2 * (R^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \sigma_y * z * (R^2 - z^2)^{0.5} - \frac{\sigma_y R \cos \varphi}{c} * z * (R^2 - z^2)^{0.5} \right) dz$$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε επιμέρους παράγοντες ώστε να διευκολυνθεί η επίλυσή του. (ανά γινομενο).

Το πρώτο γινόμενο δίνει:

α)

$$\frac{2\sigma y}{c} * \left(-\frac{z(R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{R^2 z(R^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{R^4}{8} * \sin^{-1} \frac{z}{R} \right)$$

(με το z να κινείται απο -R έως Rcosφ)

$$= \frac{2\sigma y}{c} \left(-R \cos \varphi \left(\frac{(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{4} \right) + \frac{R^2 R \cos \varphi (R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}{8} + \frac{R^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \left(R * 0 - R^3 * 0 + \frac{R^4}{8} (\sin^{-1}(-1)) \right) \right)$$

Κάνοντας τις πράξεις και έχοντας υπόψην ότι $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, καταλήγουμε στην παράσταση:

$$\alpha) = \frac{2\sigma y}{c} * \left(-\frac{R \cos \varphi (R^3 \sin^3 \varphi)}{4} + \frac{R^3 \cos \varphi R \sin \varphi}{8} + \frac{R^4 \sin^{-1} \cos \varphi}{8} + \frac{R^4}{8} * \frac{\pi}{2} \right)$$

το δεύτερο γινόμενο δίνει:

β)

$$2\sigma y \left(-\frac{(R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_{-R}^{R \cos \varphi} = 2\sigma y \left(-\frac{(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{R(R^2 - (-R^2))^{\frac{3}{2}}}{3} \right)$$

Τελικά το δεύτερο γινόμενο δίνει:

$$-\frac{2\sigma y}{3}R^3 \sin^3 \varphi$$

Όμοια και το τρίτο:

$$\frac{2\sigma y R \cos \varphi}{c} * \frac{R^3 \sin^3 \varphi}{3} = \frac{2\sigma y}{3c} R^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi$$

Τώρα μπορούμε με αθροισή των επιμέρους παραστάσεων να βρούμε την σχέση της ροπής.(μην αμελώντας να προσθεσουμε στο παραπάνω άθροισμα και τη ροπή που δίνει το τμήμα που έχει διαρρεύσει).

Η ροπή προκύπτει λοιπόν ίση με:

$$M = -\frac{2\sigma y}{4c}R^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi + \frac{2\sigma y}{8c}R^4 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{2\sigma y}{8c}R^4 \sin^{-1} \cos \varphi + \frac{\sigma y}{8c}R^4 \pi - \frac{2\sigma y}{3}R^3 \sin^3 \varphi + \frac{2\sigma y}{3}R^3 \sin^3 \varphi + \frac{2\sigma y}{3c}R^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi$$

η οποία αν θεωρήσουμε ότι η γωνία μας φ κινείται στα όρια $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, οπότε το $\sin^{-1} \cos \varphi$ θα ισούται με $\frac{\pi}{2} - \varphi$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση στην ακόλουθη μορφή,

$$\rightarrow M = -\frac{\sigma y R^4}{2c} \sin^3 \varphi \cos \varphi + \frac{\sigma y R^4 \cos \varphi \sin \varphi}{4c} + \frac{\sigma y R^4}{4c} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{\sigma y R^4}{8c} \pi + \frac{2\sigma y R^4}{3c} \sin^3 \varphi \cos \varphi$$

$$\rightarrow M = \frac{\sigma y R^4}{6c} \sin^3 \varphi \cos \varphi + \frac{\sigma y R^4 \cos \varphi \sin \varphi}{4c} + \frac{\sigma y R^4}{8c} 2\pi - \frac{\sigma y R^4}{4c} \varphi$$

Η οποία γίνεται στη συνέχεια

$$M = \frac{\sigma y R^4}{4c} \cos\varphi \sin\varphi + \frac{\sigma y R^4 \sin^3 \varphi \cos\varphi}{6c} + \frac{\sigma y R^4}{4c} (\pi - \varphi) \quad (3-37)$$

και κάνοντας την παράσταση με κοινό παρονομαστή

$$M = \frac{3\sigma y R^4 \cos\varphi \sin\varphi + 2\sigma y R^4 \sin^3 \varphi \cos\varphi + 3\sigma y R^4 (\pi - \varphi)}{12c}$$

Τελικά η σχέση της ροπής θα γραφεί στην ακόλουθη μορφή, όπου θα μας γίνει πιο εύχρηστη για να μπορέσουμε να την συνδέσουμε και με την έκφραση της δύναμης P, ώστε να προκύψει το μέγεθος c που θέλαμε εξ' αρχής.

Γι αυτό το λόγο γράφουμε:

$$\frac{12cM}{\sigma y R^2} = 3R^2 \cos\varphi \sin\varphi + 2R^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin^2 \varphi + 3R^2 (\pi - \varphi) \quad (3-38)$$

Σε αυτό το σημείο, παρατηρώντας τα δεύτερη μέλη των παραστάσεων της δύναμης P και της ροπής M, προσπαθούμε να βρούμε τα κοινά τους σημεία, τα οποία θα καταστήσουν την σύνδεση των δύο μεγεθών ικανή. Έτσι μετά απο μερικούς ακόμη μετασχηματισμούς για να βρεθούν κοινές εκφράσεις καταλήγουμε στην σύνδεση τους ως εξής:

$$\left(\frac{P - \pi R^2 \sigma y}{3c}\right) * 3c * \cos\varphi = -\frac{12cM}{\sigma y R^2} + 3R^2 \sin^2 \varphi (\sin\varphi + \pi - \varphi) \quad (3-39)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις:*

$$A = \pi R^2, \frac{P}{\pi R^2} = \sigma_0 \rightarrow \frac{1}{P} = \frac{1}{\pi R^2 \sigma_0}, \text{ έχουμε,}$$

$$c = \frac{-\frac{12c}{R} \left(\frac{M}{P}\right) + \frac{3\sigma y R \sin^2 \varphi (\sin\varphi + \pi - \varphi)}{\pi \sigma_0}}{3 \left(1 - \frac{\sigma y}{\sigma_0}\right)} * \left(\frac{1}{\cos\varphi}\right) \quad (3-40)$$

Αυτα βέβαια γίνονται ώστε να ακολουθήσουμε στην πορεία την ίδια διαδικασία όπως και στην ορθογωνική και να προβούμε σε μια αριθμητική επίλυση στο τέλος.

Από την σύνδεση αυτή,θα μπορέσουμε να γράψουμε το c συναρτήσει των μεγεθών $\frac{M}{P}$ ($= \delta o + \delta$ ή $e + \delta$), σo , σy , και της γωνίας φ και στην συνέχεια αντικαθιστώντας το στη σχέση

$$1/\rho = \varepsilon y / c = \sigma y / Ec ,$$

και συνεχίζοντας όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο να βρούμε τη ανελαστική πια σχέση που συνδέει το τελικό βέλος δ_t με την δύναμη ή την τάση σ_0 που ασκείται στη διατομή και να προβούμε στην μόνωση των διαγραμμάτων P- δ που είναι και το τελικό ζητούμενο μας.

3.3.2 Εξαγωγή της απόστασης c-μέρους της κυκλικής δαχτυλιδιοειδούς μορφής της διατομής που παραλαμβάνει την θλίψη μετά τη διαρροή.

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε την συμπαγή κυκλική διατομή ενός φορέα. Στην πράξη όμως, στις μεταλλικές κατασκευές, δεν συναντώνται τέτοιου είδους διατομές. Οπότε δημιουργείται η ανάγκη να εξεταστεί η μορφή της κοιλοδοκού στρόγγυλης σωληνωτής διατομής, κατά την οποία εξέταση της, η προηγούμενη παράγραφος αποτελεί ένα σημαντικό βήμα και οδηγό στην προσπάθεια μας για την εξαγωγή των εξισώσεων που την διέπουν.

Πιο συγκεκριμένα:

Στην σωληνωτή μορφή της διατομής του φορέα μας θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις.

Η πρώτη είναι *η διαρροή να μην έχει ξεπεράσει το πάχος t της διατομής*, (δηλαδή να μην έχει εισχωρήσει γραφικά και στον εσωτερικό κύκλο),

Και η δεύτερη περίπτωση είναι εκείνη όπου *η διαρροή έχει εισχωρήσει και στον εσωτερικό κύκλο*.

Ας προχωρήσουμε στην επίλυση παραθέτοντας και μερικά γεωμετρικά στοιχεία τα οποία θα μας χρειαστούν στην συνέχεια.

Αρχικά το εμβαδόν της διατομής δίνεται από τον τύπο

$$A = \pi(R^2 - R_o^2) \quad (3-41)$$

Όπου R είναι η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου και R_o η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου αντίστοιχα. Το ίδιο συμβαίνει και με τις γωνίες όπου ϕ η γωνία που σχηματίζεται στον εξωτερικό κύκλο μέχρι την διαρροή και ϕ_o η ακτίνα αντίστοιχα του εσωτερικού.

Η ροπή αδρανείας της διατομής προκύπτει από τον τύπο

$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - R_o^4) \quad (3-42)$$

Είναι προφανές ότι για τις ακτίνες μια σχέση που τις συνδέει είναι $R = R_o + t$, όπου t είναι το πάχος.

Θα δώσουμε και μια σχέση για τις γωνίες η οποία θα τις συνδέει με τις ακτίνες και με το μέγεθος f , το οποίο φανερώνει το βάθος εισόδου της διαρροής στη διατομή.

Ισχύει:

$$\varphi = \arccos \frac{R-f}{R} \quad (3-43)$$

Και

$$\varphi_0 = \arccos \frac{R-f}{R_0} \quad (3-44)$$

με την συνθήκη ότι αν $f \leq t$ τότε $\varphi_0 = 0$.

Πριν ακόμα προχωρήσουμε στην επίλυση είναι χρήσιμο να δούμε και τι γίνεται με τον ελαστικό κλάδο, δηλαδή την πορεία φόρτισης μέχρι και την στιγμή της πρώτης διαρροής. Αν και από την ορθογωνική ακόμα διατομή έχει δοθεί μια ιδέα, εδώ θα παραθέσουμε πάλι τις σχέσεις που ισχύουν για τα νέα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής. Αρχικά πρέπει να βρούμε το φορτίο-τάση για το οποίο η τάση στη διατομή φτάνει την τιμή της διαρροής (σ_y) (προφανώς λόγω της ύπαρξης των ατελειών θα είναι $\sigma_0 < \sigma_y$). Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιείται η σχέση

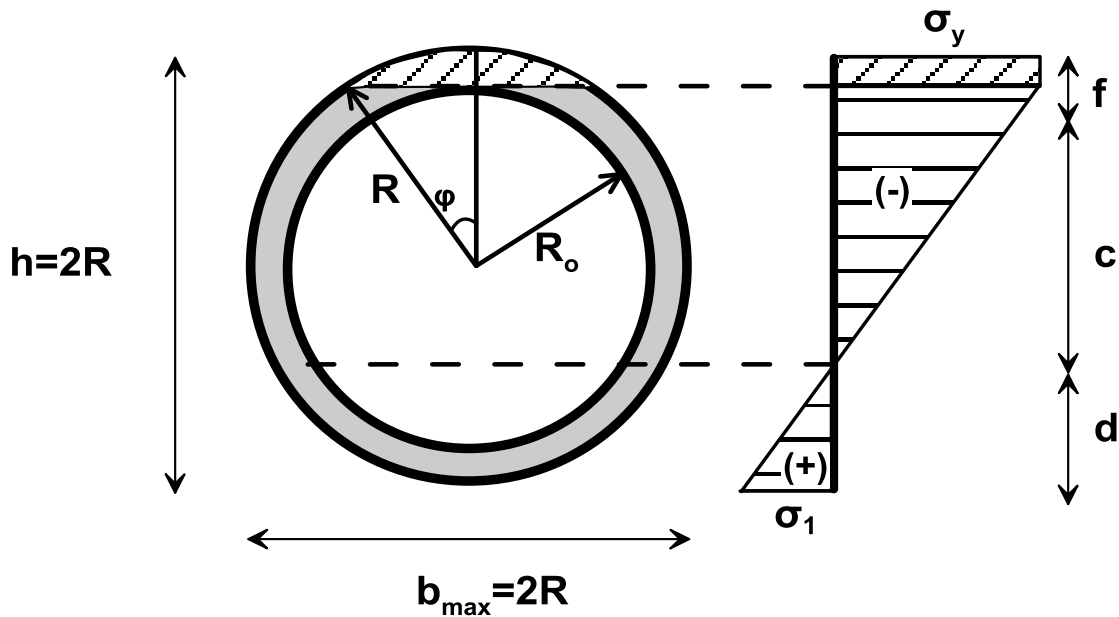
$$\sigma_{max} = \sigma_0 + P(e + \delta) * \frac{4R}{\pi * (R^2 - R_0^2)(R^2 + R_0^2)} \quad (3-45)$$

που δίνει την μέγιστη τάση στη δοκό, αλλά και η

$$\frac{\delta}{h} = \frac{e}{h} * \frac{1}{\frac{Pe}{P} - 1} \quad \text{ή} \quad \frac{\delta}{h} = \frac{e}{h} * \frac{1}{\frac{\sigma E}{\sigma_0} - 1} \quad (3-6)$$

που δίνει τη σχέση τελικού βέλους (δ) και θλιπτικού φορτίου (P) στις σωληνωτές στρογγυλές δοκούς όταν υπάρχει ροπή δεύτερης τάξης λόγω αρχικού βέλους δο. Να υπενθυμίσουμε ότι η ανωτέρω σχέση έχει ισχύ μέχρι η μέγιστη τάση στη δοκό να φτάσει την τάση διαρροής. Για την εξέταση παραιτέρω και έπειτα από το τέλος ισχύς της ελαστικής σχέσεως, χρειαζόμαστε νέες εξισώσεις που να περιγράφουν την συμπεριφορά της δοκού στην ανελαστική πλέον περιοχή. Ας δούμε λοιπόν την πορεία εύρεσης των σχέσεων αυτών.

1^η περίπτωση επίλυσης-διαρροή στον εξωτερικό κύκλο



Υπολογισμός δύναμης P

Πρακτικά σε αυτή την περίπτωση ο τύπος της δύναμης θα είναι ο ίδιος με αυτόν που προέκυψε από την επίλυση της συμπαγούς μείον το ολοκλήρωμα του εσωτερικού κύκλου που δίνει επιπρόσθετη δύναμη.

$$- \int_{-R_o}^{R_o} b(z)\sigma(z)dz$$

Είναι λοιπόν

$$P = -\frac{2}{3}\frac{\sigma_y}{c}R^3\sin\varphi - \frac{\sigma_y R^3 \cos^2 \varphi \sin\varphi}{3c} + \frac{3\sigma_y R^3 \cos\varphi(\varphi-\pi)}{3c} + \pi R^2 \sigma_y - \pi R_o^2 \sigma_y + \frac{3\pi R_o^2 \sigma_y R \cos\varphi}{3c} \quad (3-46)$$

$$\rightarrow \left(\frac{P - \pi(R^2 - R_o^2)\sigma_y}{\sigma_y R^3} \right) * 3c = -2\sin\varphi - \cos^2 \varphi \sin\varphi + 3\cos\varphi(\varphi - \pi) + \frac{3\pi R_o^2 \cos\varphi}{R^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{P - \pi(R^2 - Ro^2)\sigma y}{\sigma y R^3} \right) * 3c = -3\sin\varphi + \sin^3\varphi + 3(\varphi - \pi)\cos\varphi + 3\pi\cos\varphi \left(\frac{Ro}{R} \right)^2 \quad (3-47)$$

Υπολογισμός Ροπής M

Και στον υπολογισμό της ροπής η διαδικασία είναι η ίδια όπως και στον προσδιορισμό της δύναμης. Ο τύπος είναι ο ίδιος που προκύπτει από την ροπή της συμπαγούς κυκλικής διατομής εάν αφαιρέσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-Ro}^{Ro} z * b(z)\sigma(z)dz$$

Όμοια λοιπόν ως πριν θα έχουμε ότι η έκφραση της ροπής M δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M = \frac{3\sigma y R^4 \cos\varphi \sin\varphi + 2\sigma y R^4 \sin^3\varphi \cos\varphi + 3\sigma y R^4 (\pi - \varphi) - 3\sigma y Ro^4 \pi}{12c} \quad (3-48)$$

Η οποία μετασχηματίζεται στην επόμενη μορφή της, η οποία θα μας δώσει το δεύτερο μέλος εκφρασμένο σε σχέση με την προηγούμενη έκφραση της δύναμης.

$$\frac{12cM + 3\sigma y Ro^4 \pi}{\sigma y R^2} = 3R^2 \cos\varphi \sin\varphi + 2R^2 \sin^3\varphi \cos\varphi + 3R^2 (\pi - \varphi) \quad (3-49)$$

Συνεπώς έχοντας πλέον τις μορφές των παραστάσεων της δύναμης και της ροπής μπορούμε να προχωρήσουμε σε επιπρόσθετους μετασχηματισμούς και πράξεις ώστε να τις λύσουμε ως προς τον αγνώστο μας c. Χρησιμοποιώντας την άλγεβρα καταλήγουμε στα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\left(\frac{P - \pi(R^2 - Ro^2)\sigma y}{\sigma y R^3} * 3c - \frac{3\pi Ro^2}{R^2} \cos\varphi \right) * (R^2 \cos\varphi) = - \left(\frac{12cM + 3\sigma y Ro^4 \pi}{\sigma y R^2} \right) + 3R^2 \sin^2\varphi (\sin\varphi \cos\varphi + \pi - \varphi), \quad (3-50)$$

Όπου προχωρώντας τις πράξεις περαιτέρω θα καταλήξουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$\left(\frac{P}{R\sigma y} - \frac{\pi(R^2 - Ro^2)\sigma y}{\sigma y R}\right) * 3c * \cos\varphi = -\frac{12cM}{\sigma y R^2} - \frac{3\pi Ro^4}{R^2} + 3R^2 \sin^2 \varphi (\sin\varphi \cos\varphi + \pi - \varphi) + 3\pi Ro^2 \cos^2 \varphi$$

$$\rightarrow (P - \pi(R^2 - Ro^2)\sigma y) * 3c * \cos\varphi = -\frac{12cM}{R} - \frac{3\pi\sigma y Ro^4}{R} + 3R^3 \sigma y \sin^2 \varphi (\sin\varphi \cos\varphi + \pi - \varphi) + 3\pi\sigma y R * Ro^2 \cos^2 \varphi$$

Από την σχέση της τάσης που ασκείται

$$\frac{P}{\pi(R^2 - Ro^2)} = \sigma_0$$

Προκύπτει:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{\sigma_0 \pi (R^2 - Ro^2)}$$

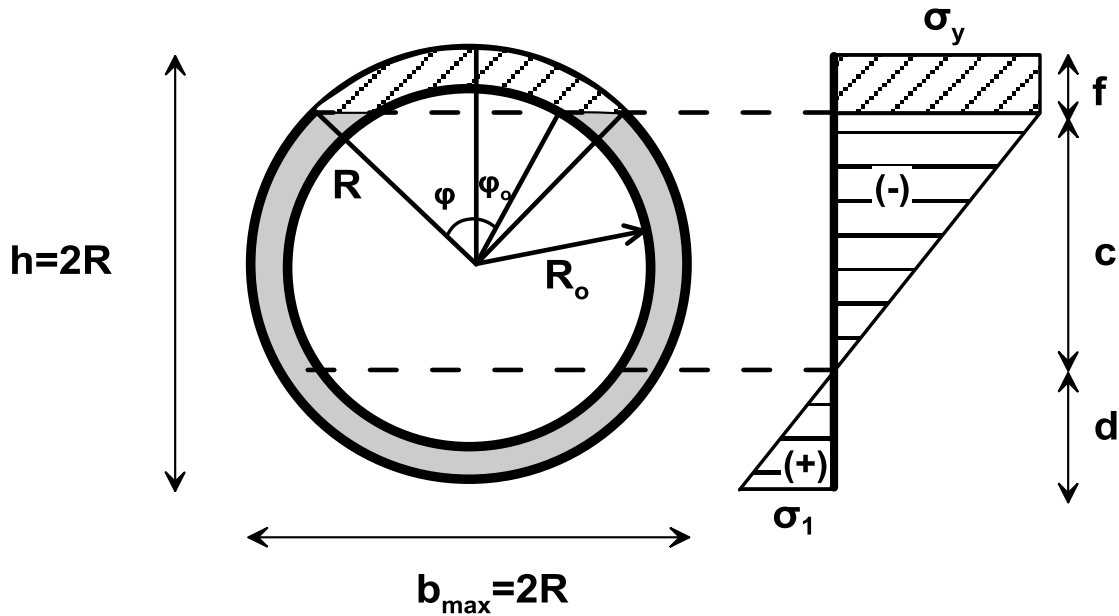
Άρα

$$\left(P - \frac{P\sigma_0}{\sigma y}\right) * 3c * \cos\varphi = -\frac{12cM}{R} - \frac{3\sigma y Ro^4}{R\sigma_0(R^2 - Ro^2)} + \frac{3R^3 \sin^2 \varphi (\sin\varphi \cos\varphi + \pi - \varphi)\sigma y}{\sigma_0 \pi (R^2 - Ro^2)} + \frac{3\sigma y R Ro^2 \cos^2 \varphi}{\sigma_0 (R^2 - Ro^2)}$$

Οπότε τελικά έχουμε:

$$3c \left(1 - \frac{\sigma y}{\sigma_0}\right) \cos\varphi = -\frac{12c}{R} * \left(\frac{M}{P}\right) - \frac{3\sigma y Ro^4}{R\sigma_0(R^2 - Ro^2)} + \frac{3R^3 \sin^3 \varphi (\sin\varphi \cos\varphi + \pi - \varphi)\sigma y}{\sigma_0 * \pi (R^2 - Ro^2)} + 3\sigma y R * \frac{Ro^2 \cos^2 \varphi}{\sigma_0 (R^2 - Ro^2)} \quad (3-51)$$

2η περίπτωση επίλυσης-διαρροή στον εσωτερικό κύκλο



Υπολογισμός δυνάμεως P

Σε αυτήν την περίπτωση η διαρροή έχει πρακτικά ξεπεράσει σε βάθος (z) το πάχος την διατομής μας κι έχει εισέλθει στον εσωτερικό κύκλο. Αυτό αντιμετωπίζεται ξανά ως την αρχική συμπαγή, αφαιρώντας αυτή τη φορά το μέρος του εσωτερικού κύκλου που έχει διαρρεύσει και το υπόλοιπο μέρος του το οποίο καταπονείται από τις τάσεις τις μικρότερες της τάσης διαρροής σ_y .

Δηλαδή αφαιρώντας τα εξής ολοκληρώματα:

$$\sigma_y * \int_{R \cos \varphi}^{R_o} b(z) dz$$

και

$$\int_{-R_o}^{R \cos \varphi} b(z) * \sigma(z) dz$$

Έχουμε λοιπόν ότι η δύναμη που ασκείται P μετά την εκτέλεση των πράξεων ισούνται με την παράσταση:

$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{2}{3} \frac{\sigma_y}{c} R^3 \sin \varphi - \frac{\sigma_y R^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{3c} + \frac{\sigma_y R^3 \cos \varphi (\varphi - \pi)}{c} + \pi R^2 \sigma_y - \\
 & \pi R_o^2 \sigma_y - \frac{2 \sigma_y (R_o^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{3c} + \frac{\sigma_y R^2 \cos^2 \varphi (R_o^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{c} + \\
 & \frac{\sigma_y R \cos \varphi R_o^2 \sin^{-1} \left(\frac{R \cos \varphi}{R_o} \right)}{c} + \frac{\sigma_y R \cos \varphi R_o^2 \pi}{2c} \quad (3-52)
 \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θα θυμηθούμε ότι λόγω γεωμετρίας της διατομής ισχύει για τις γωνίες φ και φ_0 ότι:

$$\varphi_0 = \arccos((R - f) / R_0) = \arccos(R \cos \varphi / R_0)$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι $\frac{R \cos \varphi}{R_0} = \cos \varphi_0$ όπου φ_0 η γωνία του εσωτερικού κύκλου. συνεπώς ο όρος $\sin^{-1} \left(\frac{R \cos \varphi}{R_0} \right)$ αν θεωρήσουμε πως $0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$

θα δώσει:

$$\sin^{-1} \left(\frac{R \cos \varphi}{R_0} \right) = \sin^{-1}(\cos \varphi_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \quad (3-53)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση θα μπορέσουμε να μεταχειριστούμε την παράσταση της δύναμης καλύτερα και να απαλείψουμε πιθανών και κάποιους όρους.

Προχωρώντας σε μερικές αλγεβρικές πράξεις και μετασχηματισμούς έχουμε ως αποτέλεσμα η παράσταση της φόρτισης να είναι η εξής:

$$(P - \pi(R^2 - R_0^2)\sigma_y) * \frac{c}{\sigma_y} = -\frac{2R^3 \sin \varphi}{3} - \frac{R^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{3} + R^3 \cos \varphi (\varphi - \pi) - \frac{2R_0^3 \sin^3 \varphi_0}{3} + R^2 \cos^2 \varphi R_0 \sin \varphi_0 + R \cos \varphi R_0^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{R \cos \varphi R_0^2 \pi}{2}$$

Την οποία στην συνέχεια την γράφουμε ως εξής

$$\left(\frac{P - \pi(R^2 - R_0^2)\sigma_y}{\sigma_y} \right) * c = \frac{R^3 \sin^3 \varphi}{3} - \frac{3R^3 \sin \varphi}{3} - \frac{2R_0^3 \sin \varphi_0}{3} + 2R_0^3 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + 3R_0^3 \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + \pi - \varphi_0) \quad (3-54)$$

Υπολογισμός Ροπής M

Σε πλήρη συνάφεια με τα προηγούμενα, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων για την εξαγωγή της εξίσωσης της ροπής μας δίνει την ακόλουθη έκφρασή της,

$$M = \frac{\sigma y R^4 \cos \varphi \sin \varphi}{4c} + \frac{\sigma y R^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi}{6c} + \frac{\sigma y R^4 (\pi - \varphi)}{4c} - \frac{2\sigma y R \cos \varphi (R o^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{3c} +$$

$$\frac{\sigma y R \cos \varphi (R o^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{2c} - \frac{R o^2 R \cos \varphi (R o^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \sigma y}{4c} - \frac{\sigma y R o^4 \sin^{-1} \left(\frac{R \cos \varphi}{R o} \right)}{4c} -$$

$$\frac{\sigma y R o^4 \pi}{8c}$$

Όπου με περαιτέρω αλγεβρικές πράξεις, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{12cM}{\sigma y} = 3R^4 \cos \varphi \sin \varphi + 2R^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi + 3R^4 (\pi - \varphi) - 2R o^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi -$$

$$3R o^4 \cos \varphi \sin \varphi - 3R o^4 (\pi - \varphi) \quad (3-55)$$

και καταλήγει στην,

$$\left(\frac{12cM}{\sigma y} - 3(\pi - \varphi)(R^4 - R o^4) \right) = R \cos \varphi (3R^3 \sin \varphi + 2R^3 \sin^3 \varphi - 3R o^3 \sin \varphi -$$

$$2R o^3 \sin^3 \varphi) \quad (3-56)$$

Έχοντας πλέον τις εκφράσεις των σχέσεων δυνάμεως-ροπής, μπορούμε να τις "συνδέσουμε" και να πάρουμε τη σχέση του μεγέθους c εκφρασμένο ως προς την δύναμη και την ροπή, το εμβαδό, τις ασκούμενες τάσεις-τάση διαρροής καθώς και με τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής (τις ακτίνες της διατομής R-Ro και τις γωνίες φ, φo). Κάνοντας επομένως τα αναφερθέντα θα καταλήξουμε στην επόμενη σχέση,

$$c * \left(\frac{12M}{\sigma y} + 3R \cos \varphi * \frac{P - \pi(R^2 - R o^2) \sigma y}{\sigma y} \right) = 3(\pi - \varphi)(R^4 - R o^4) +$$

$$R \cos \varphi (3R o^3 \cos \varphi (\pi - \varphi) - 7R o^3 \sin^3 \varphi + 3R^3 \sin^3 \varphi) \quad (3-57)$$

η οποία εν συνεχεία θα εισαχθεί στον τύπο της καμπυλότητας (βλ. Ορθογωνική διατομή), και θα προσδιορίζει κάθε φορά μέσω αριθμητικής μεθόδου την μέγιστη ασκούμενη τάση στη διατομή του φορέα μας από τη στιγμή που η κρίσιμη-μέγιστα καταπονούμενα διατομή του αυτή έχει περάσει στη διαρροή και βρίσκεται στην ανελαστική περιοχή, επιτρέποντας μας τελικά να διαμορφώσουμε τα διαγράμματα δυνάμεως-βέλους για οποιαδήποτε διατομή επιλέξουμε για τον φορέα μας.

Κεφάλαιο 4ο: Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε μερικές πρότυπες διατομές οι οποίες χρησιμοποιούνται στα συνήθη έργα τις οποίες θα ελέγξουμε σε αστοχία και θα παρουσιάσουμε σειρές διαγραμμάτων που θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε καλύτερα το φαινόμενο του πλαστικού λυγισμού.

4.1 Διαγράμματα για την επιρροή του πάχους (t) της διατομής

Θα ξεκινήσουμε με διαγράμματα, στα οποία θα φαίνεται η επιρροή του πάχους στην εξέλιξη του λυγισμού και του καμπτικού φορτίου για τις ίδιες ακτίνες ανά διατομή για μερικές διατομές κοιλοδοκών που έχουμε επιλέξει με ένα τυπικό μήκος $l=4m$ δοκοκαί αρχική ατέλεια $l/400 = 0.01m$. Τα διαγράμματα έχουν ως άξονες P φορτίο και $\delta t/l$ ανηγμένη παραμόρφωση. Κάτω από κάθε διάγραμμα θα δίνονται χαρακτηριστικές τιμές των δυο παραπάνω μεγεθών, καθώς και επιπλέον χρήσιμα στοιχεία για την δοκό όπως η λυγηρότητα.

Τα διαγράμματα ακολουθούν πίνακες με τα εξής στοιχεία :

δ_{el}/L : ανηγμένη παραμόρφωση τη στιγμή της διαρροής της πρώτης ίνας

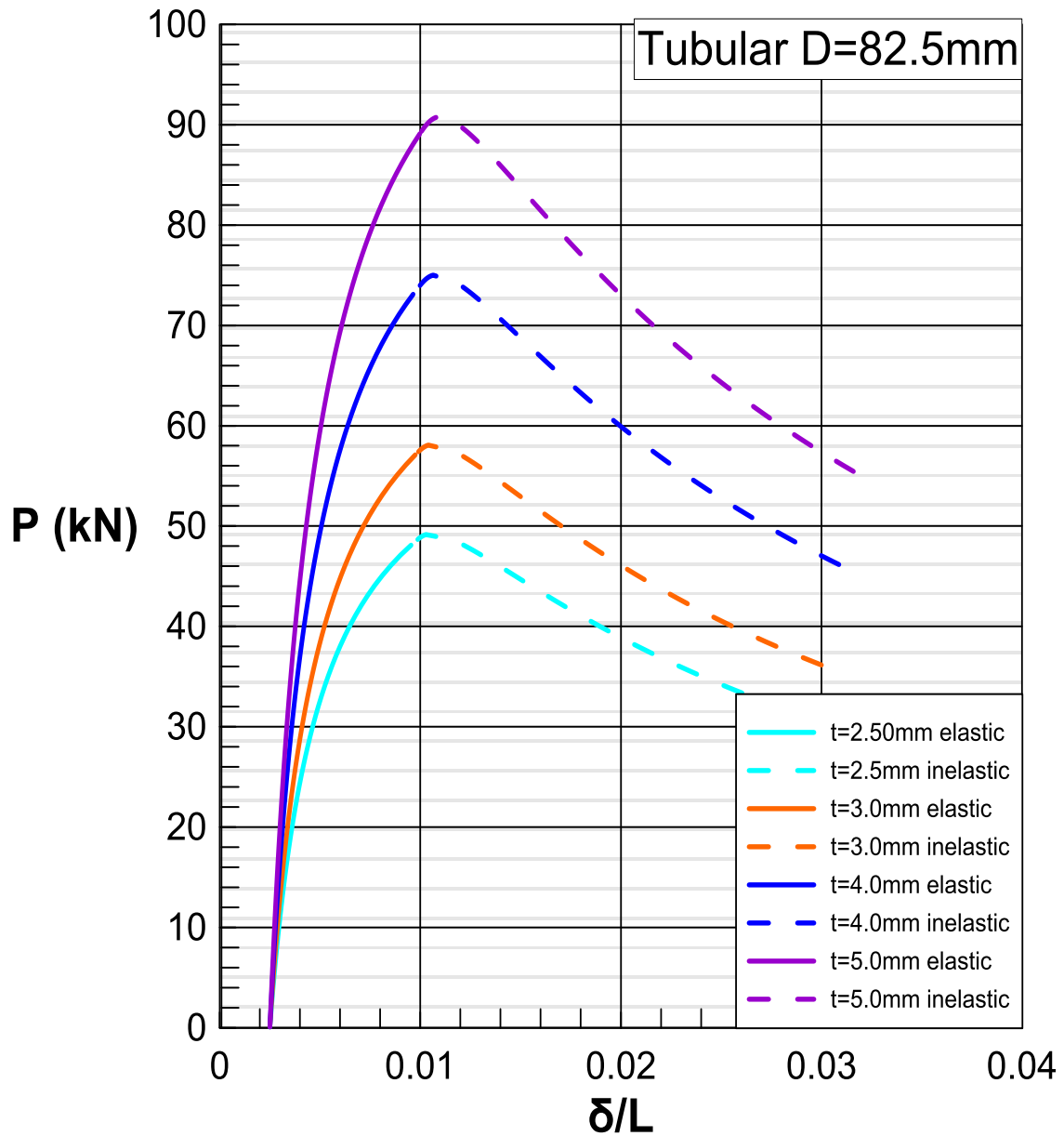
P_{el} : το αντίστοιχο φορτίο

δ_{in}/L : η ανηγμένη παραμόρφωση τη στιγμή της αστοχίας του υποστυλώματος

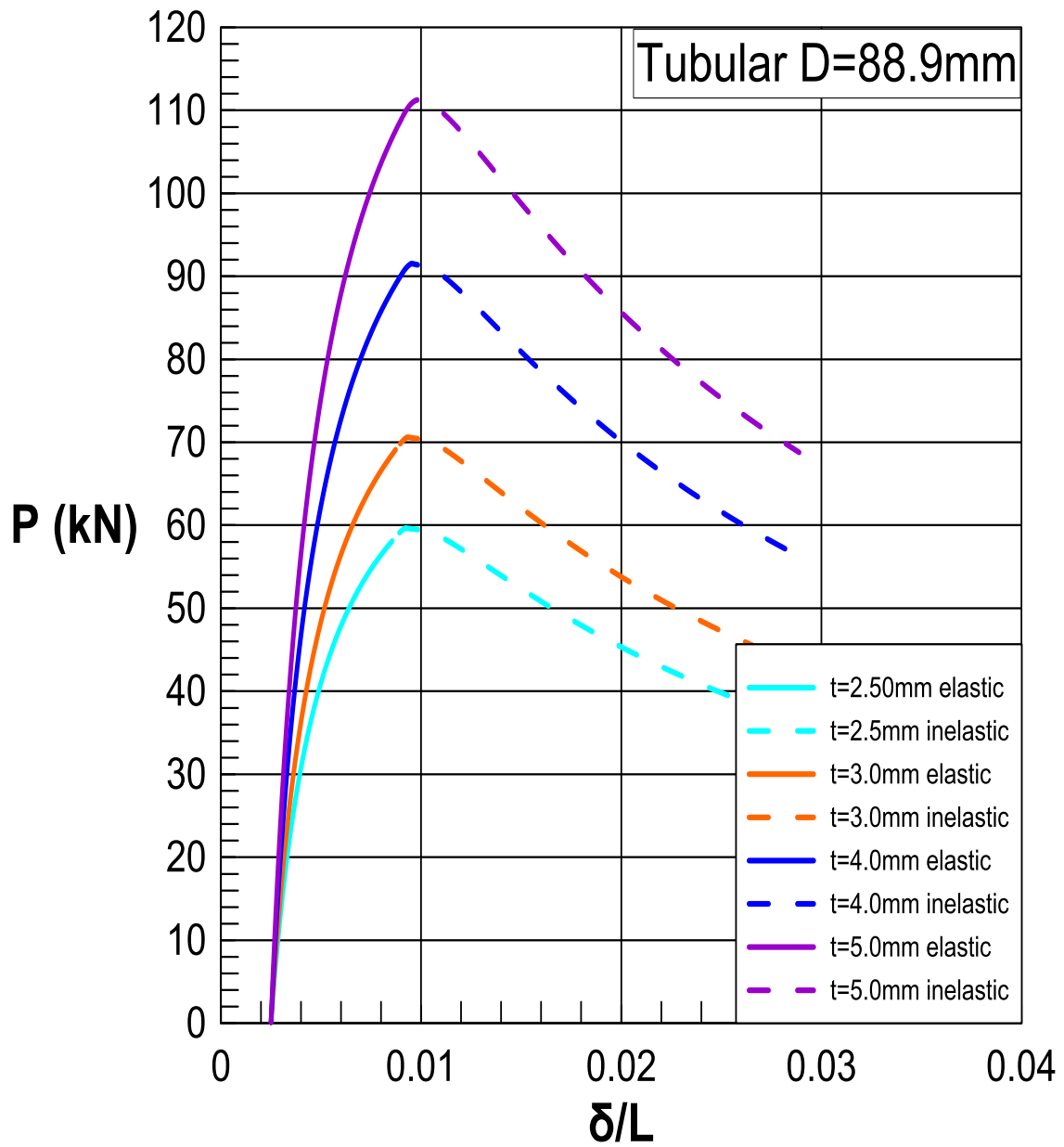
P_{in} : το κρίσιμο φορτίο (μέγιστο πλαστικό φορτίο που αντέχει ο φορέας)

δ_0/L : το αρχικό βέλος

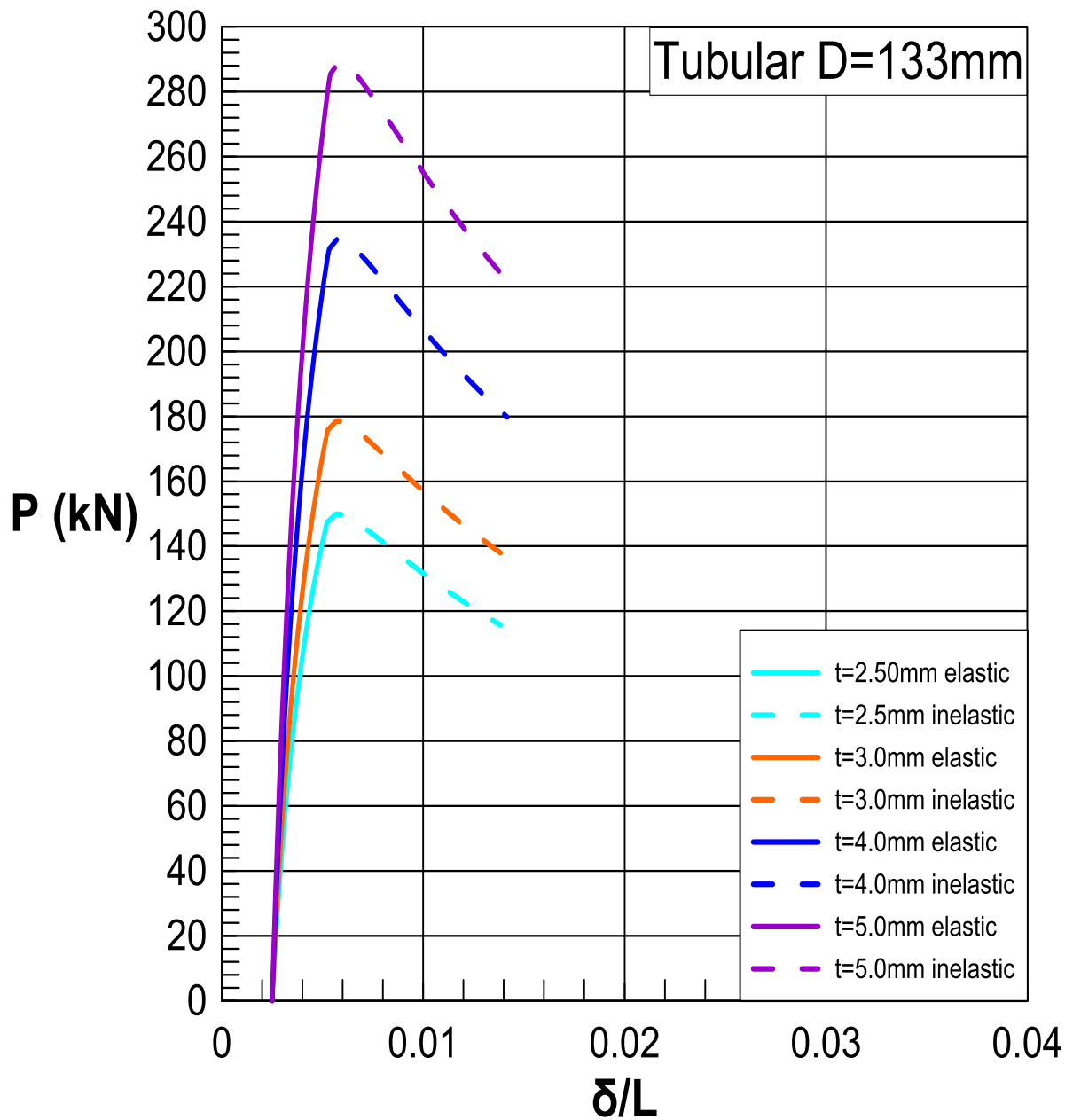
P_{en} : το κρίσιμο φορτίο αντοχής του μέλους βάσει κανονισμού (Nb,Rd)



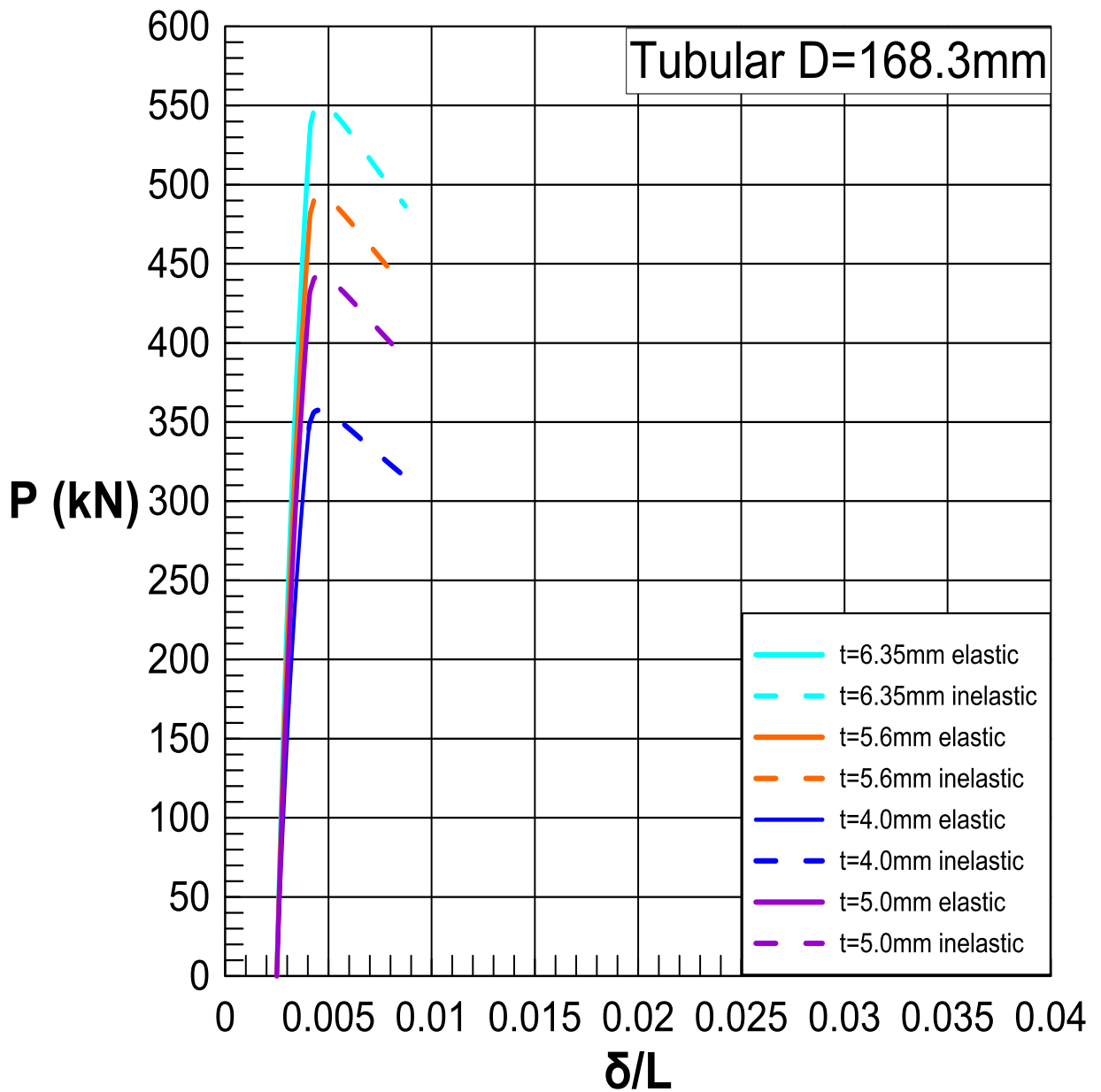
λ	t(mm)	Pel(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
141.3524	2.5	48.1	0.009542	49.15564	0.010288
142.2096	3	57.1	0.00975	58.07012	0.010405
143.9369	4	73.1	0.009643	75.00781	0.010645
145.6805	5	89.1	0.009978	90.79506	0.010979



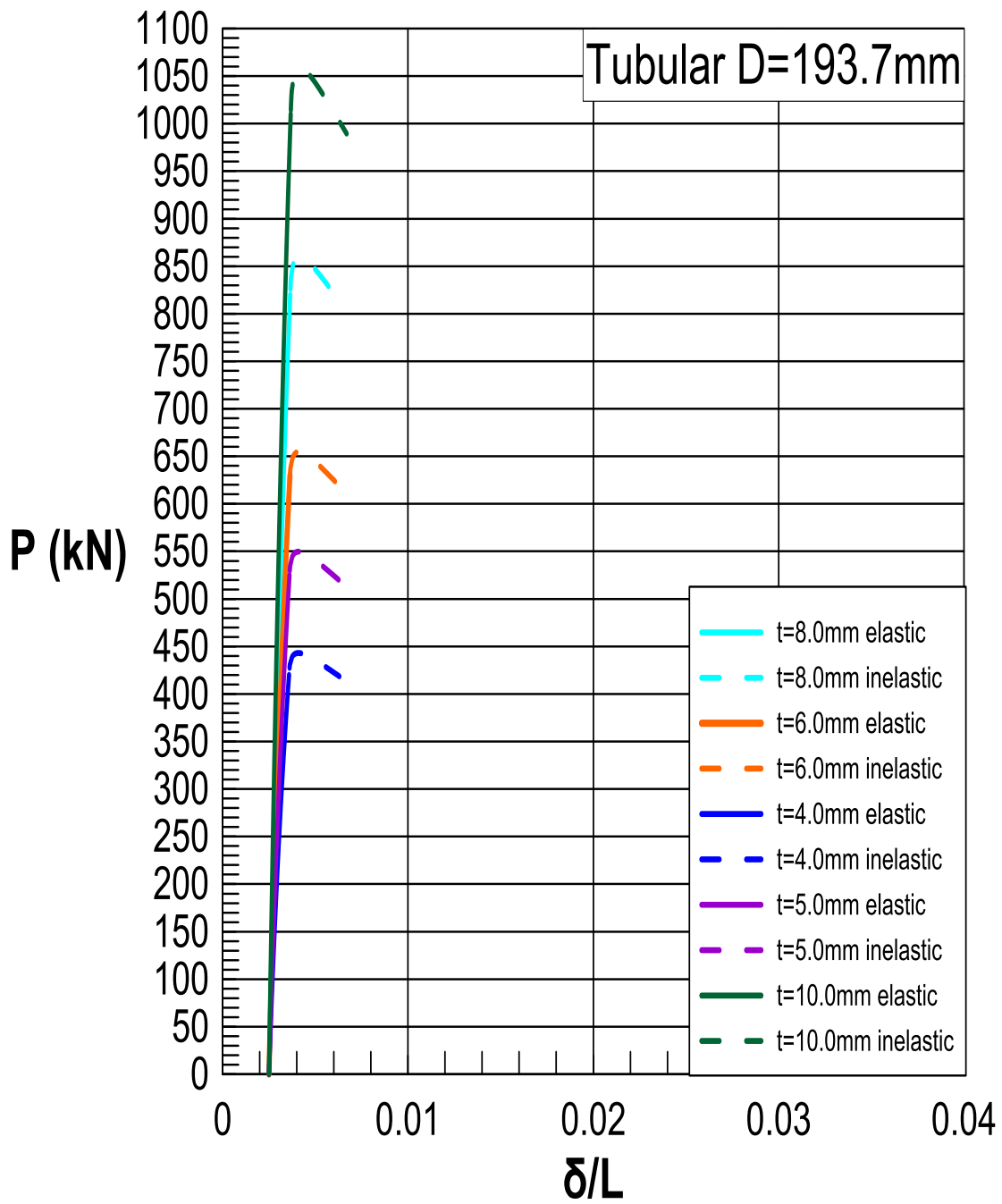
λ	t(mm)	P_{el} (KN)	δ_{el}/L	P_{in} (KN)	δ_{in}/L
130.8909	2.5	58.1	0.008554	59.66528	0.009213
131.6276	3	69.1	0.008726	70.61439	0.009314
133.1116	4	90.1	0.008992	91.54387	0.009522
134.6087	5	109.1	0.009049	111.2546	0.009809



λ	t(mm)	Pel(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
86.67918	2.5	146.1	0.005173	149.8896	0.005722
87.00536	3	173.1	0.005165	178.5621	0.005744
87.66103	4	228.1	0.005227	234.6118	0.005819
88.32099	5	280.1	0.005256	288.9452	0.005862



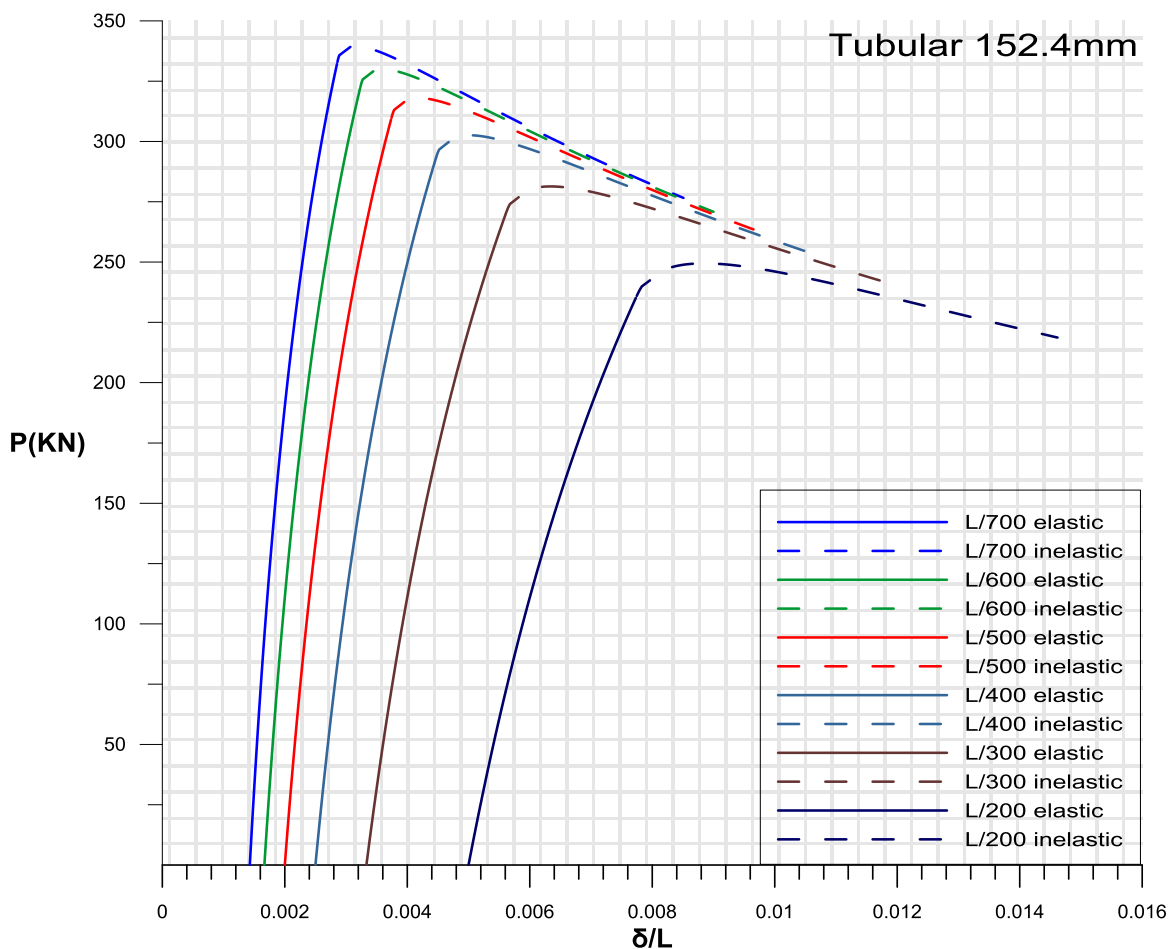
λ	t(mm)	PeI(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
68.96552	4	345.1	0.004046	357.541	0.004568
69.37662	5	427.1	0.004067	442.6833	0.004592
69.62431	5.6	475.1	0.004077	492.9562	0.004607
69.91423	6.35	530.1	0.004088	550.8388	0.004624



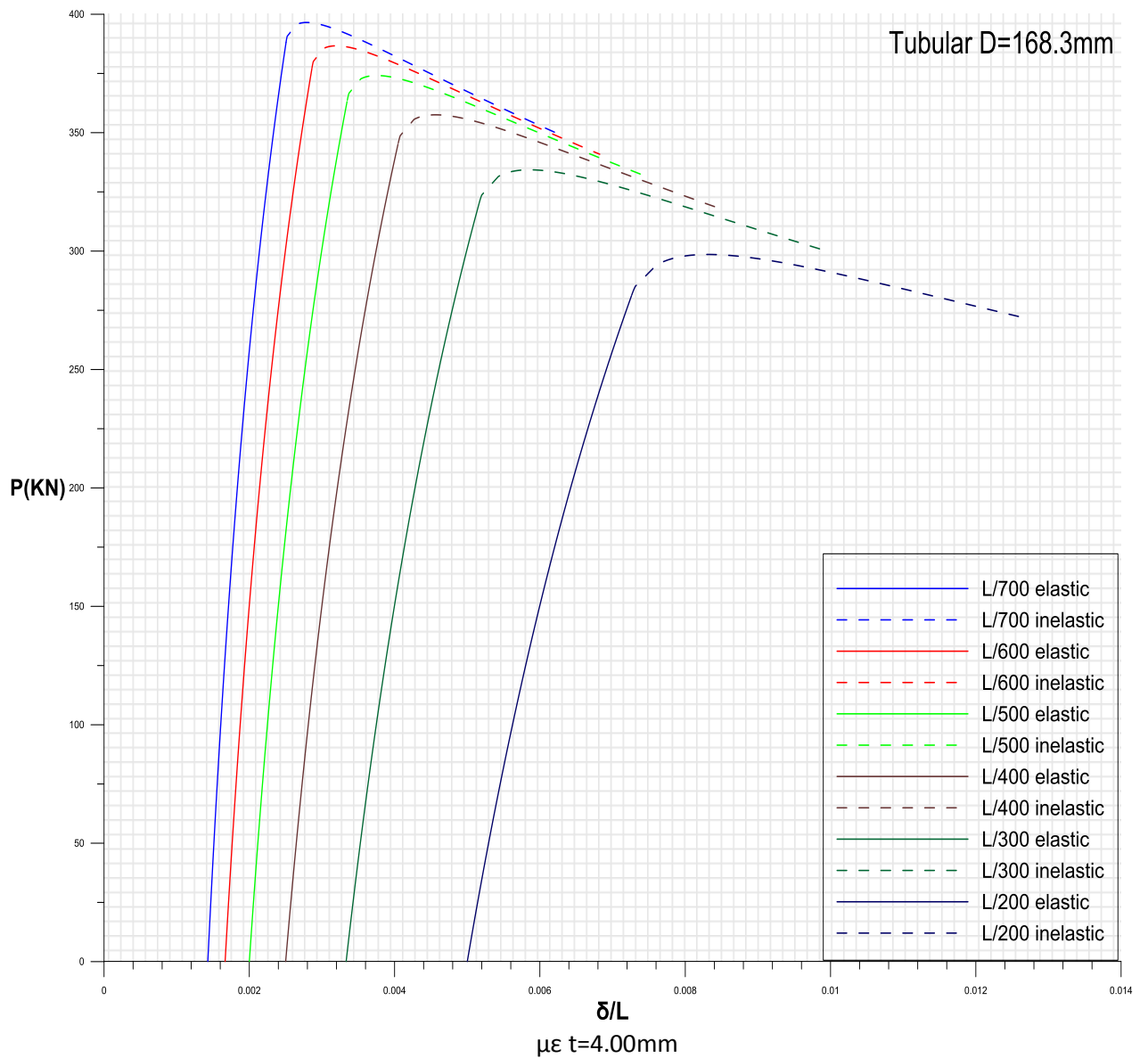
λ	t(mm)	PeI(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
59.62675	4	420.1	0.003583	443.0722	0.004088
59.93502	5	525.1	0.003608	549.7218	0.004105
60.24471	6	630.1	0.003633	654.726	0.004121
60.8682	8	820.1	0.003645	859.8037	0.004155
61.49691	10	1010.1	0.003673	1058.318	0.00419

4.2 Διαγράμματα για την επιρροή του αρχικού βέλους

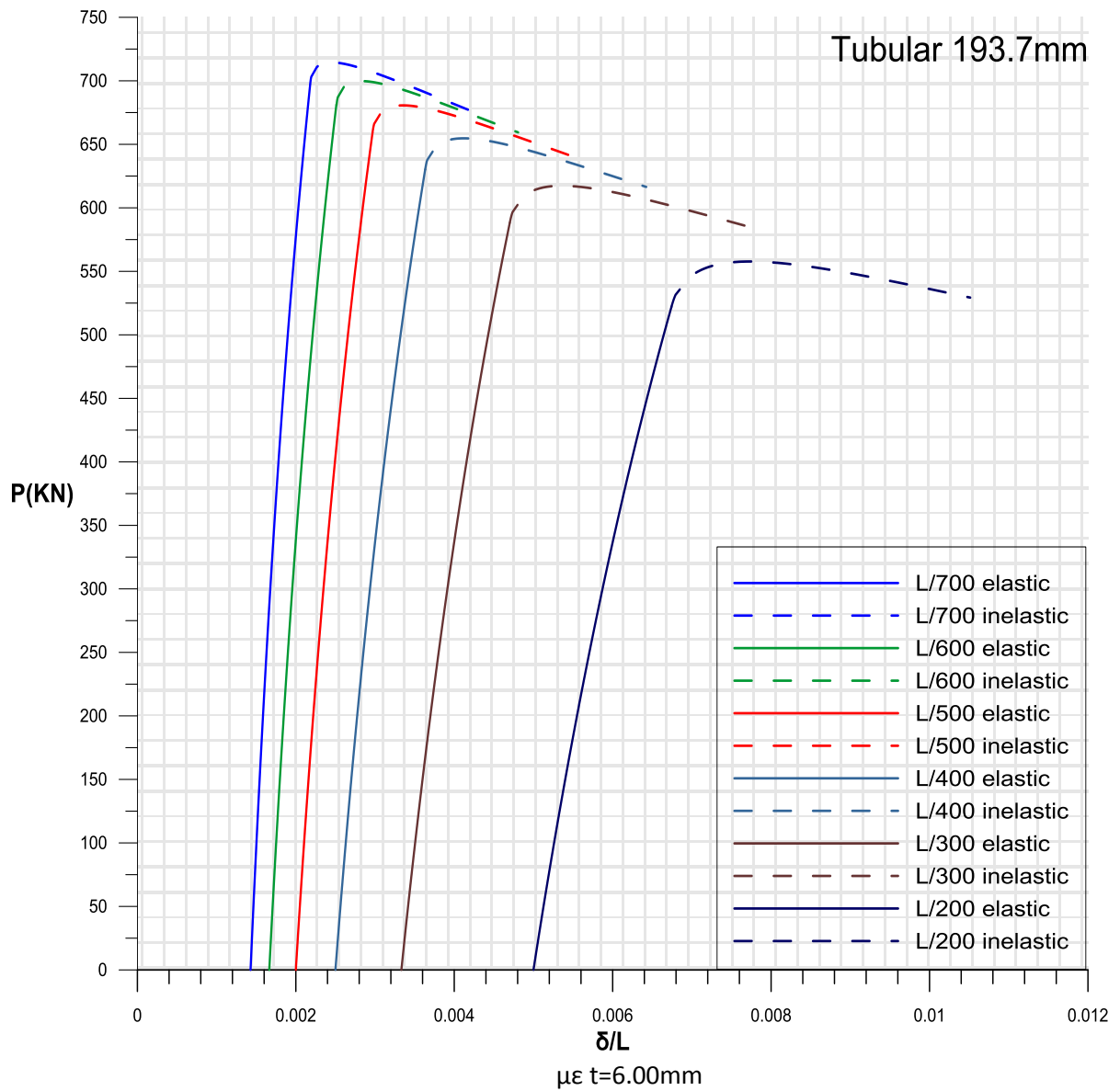
Στη σειρά των διαγραμμάτων που θα ακολουθήσει θα εξεταστεί η επιρροή των αρχικών ατελειών- αρχικού βέλους μια δοκού και πώς αυτό επηρεάζει την αντοχή της καθώς αυξάνονται. Έχουμε επιλέξει τις αρχικές ατέλειες-αρχικό βέλος L/700, L/600, L/500, L/400, L/300 και L/200 αντίστοιχα για ορισμένες διατομές της δοκού που εξετάζουμε. Να τονίσουμε εδώ ότι τα αρχικά βέλη της τάξης των L/300, L/200 δεν είναι συνήθη αλλά τα επιλέξαμε για να γίνει καλύτερα κατανοητό το φαινόμενο του πλαστικού λυγισμού. Συγκεκριμένα εδώ το μήκος της δοκού είναι L=4m και t=4mm



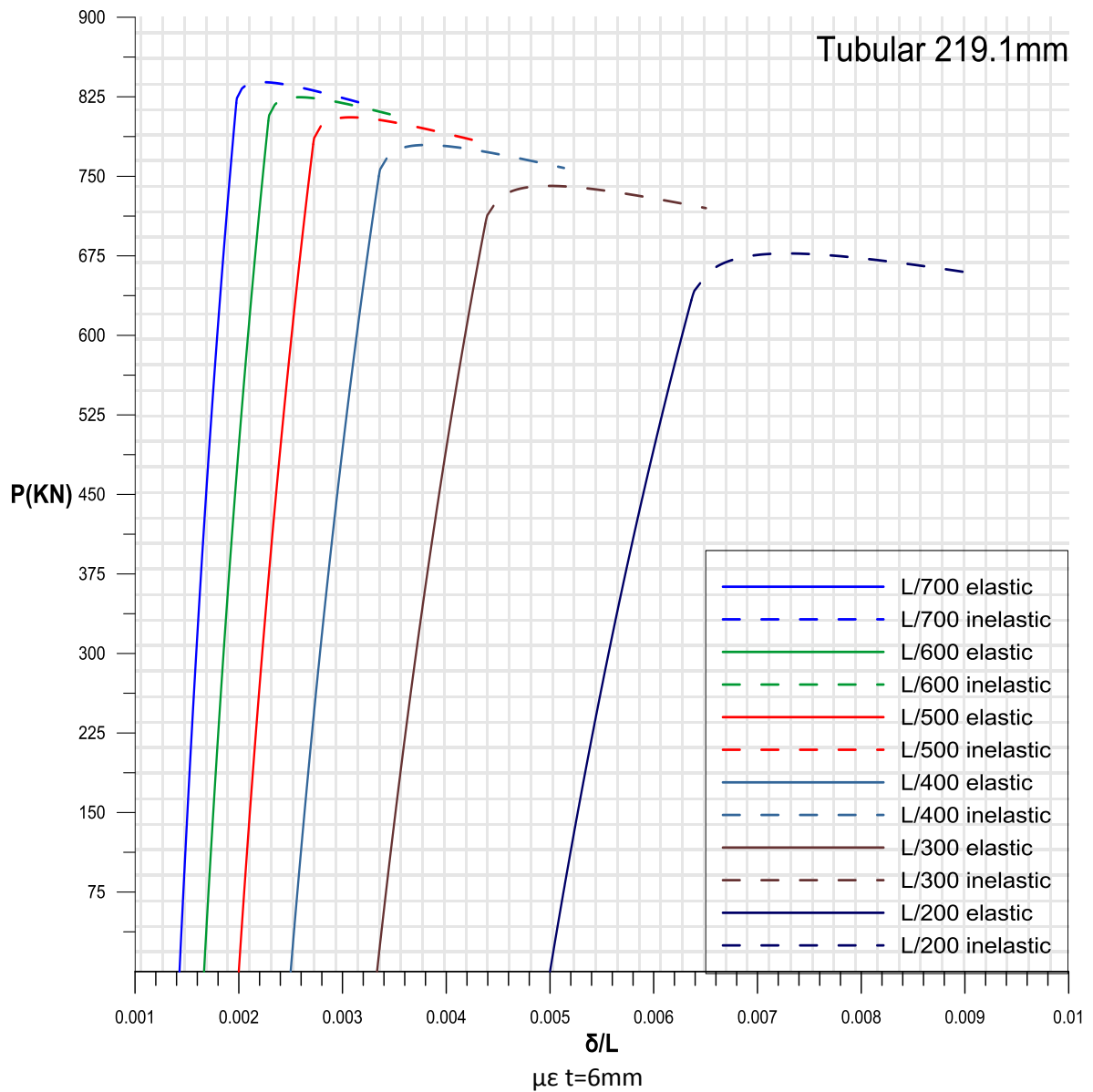
Αρχικό Βέλος	PeI	δeI/L	Pin	δin/L
L/700	332.1	0.002852	339.5322	0.003159
L/600	322.1	0.003227	330.068	0.003581
L/500	309.1	0.003735	318.0849	0.004171
L/400	293.1	0.004468	302.5994	0.005002
L/300	270.1	0.005609	281.3607	0.006347
L/200	235.1	0.007731	249.4553	0.008864



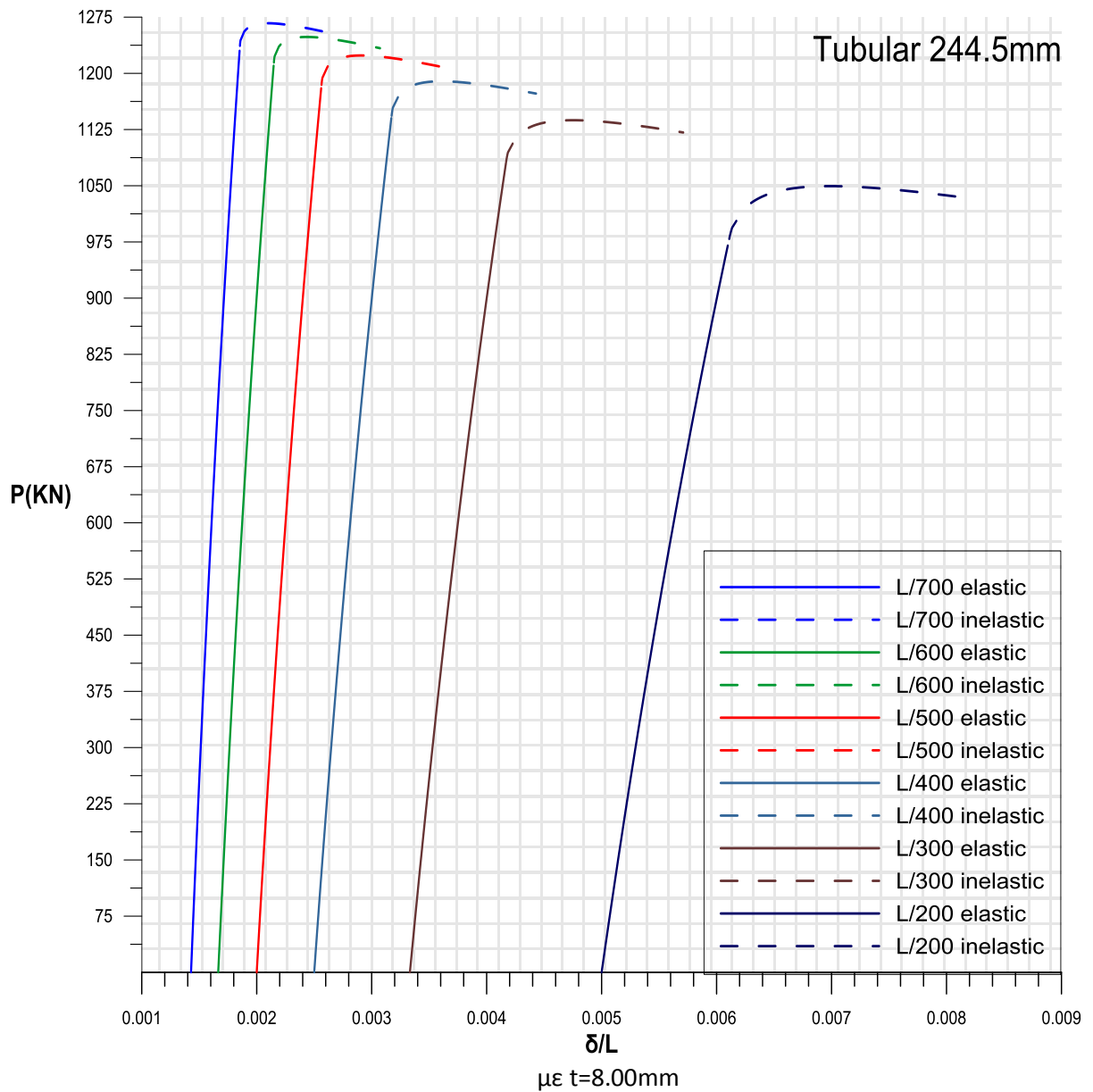
Αρχικό Βέλος	P_{el} (KN)	δ_{el}/L	P_{in} (KN)	δ_{in}/L
L/700	388.1	0.002505	396.5266	0.002793
L/600	377.1	0.002861	386.6739	0.003198
L/500	363.1	0.003345	374.1287	0.003762
L/400	345.1	0.004046	357.541	0.004568
L/300	320.1	0.005163	334.3155	0.005856
L/200	281.1	0.00726	298.5766	0.00833



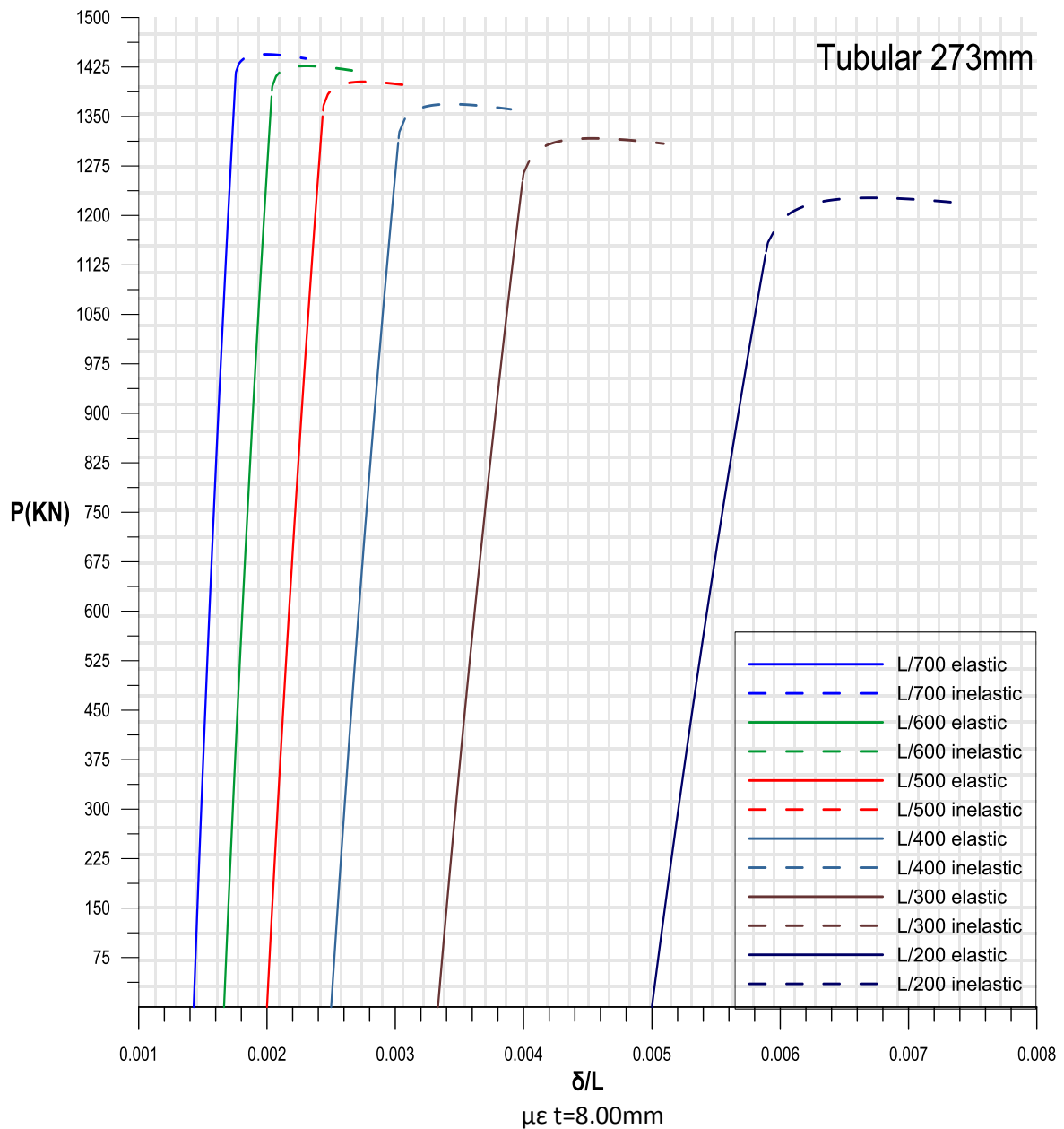
Αρχικό Βέλος	P_{el} (KN)	δ_{el}/L	P_{in} (KN)	δ_{in}/L
L/700	697.1	0.002181	714.4887	0.002456
L/600	681.1	0.002512	699.7721	0.002835
L/500	659.1	0.002968	680.6451	0.003353
L/400	630.1	0.003633	654.726	0.004121
L/300	588.1	0.004701	617.3607	0.005364
L/200	522.1	0.006742	557.7459	0.007749



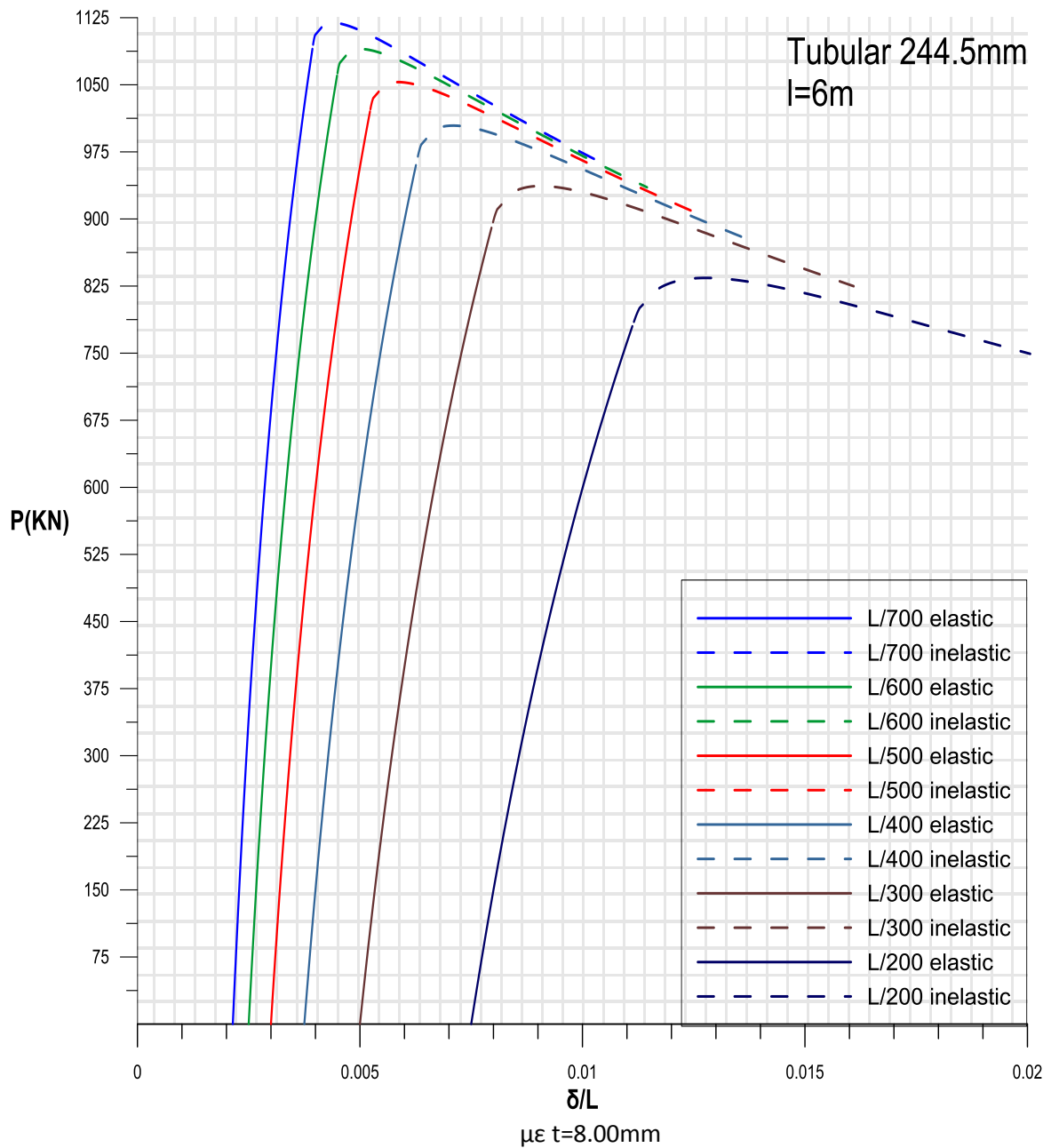
Αρχικό Βέλος	$P_{el}(\text{KN})$	δ_{el}/L	$P_{in}(\text{KN})$	δ_{in}/L
L/700	819.1	0.001976	838.7737	0.002231
L/600	802.1	0.002285	824.5792	0.002586
L/500	780.1	0.002717	805.6243	0.00308
L/400	750.1	0.00335	779.5368	0.003799
L/300	705.1	0.004376	740.9555	0.004993
L/200	633.1	0.006363	677.2513	0.007289



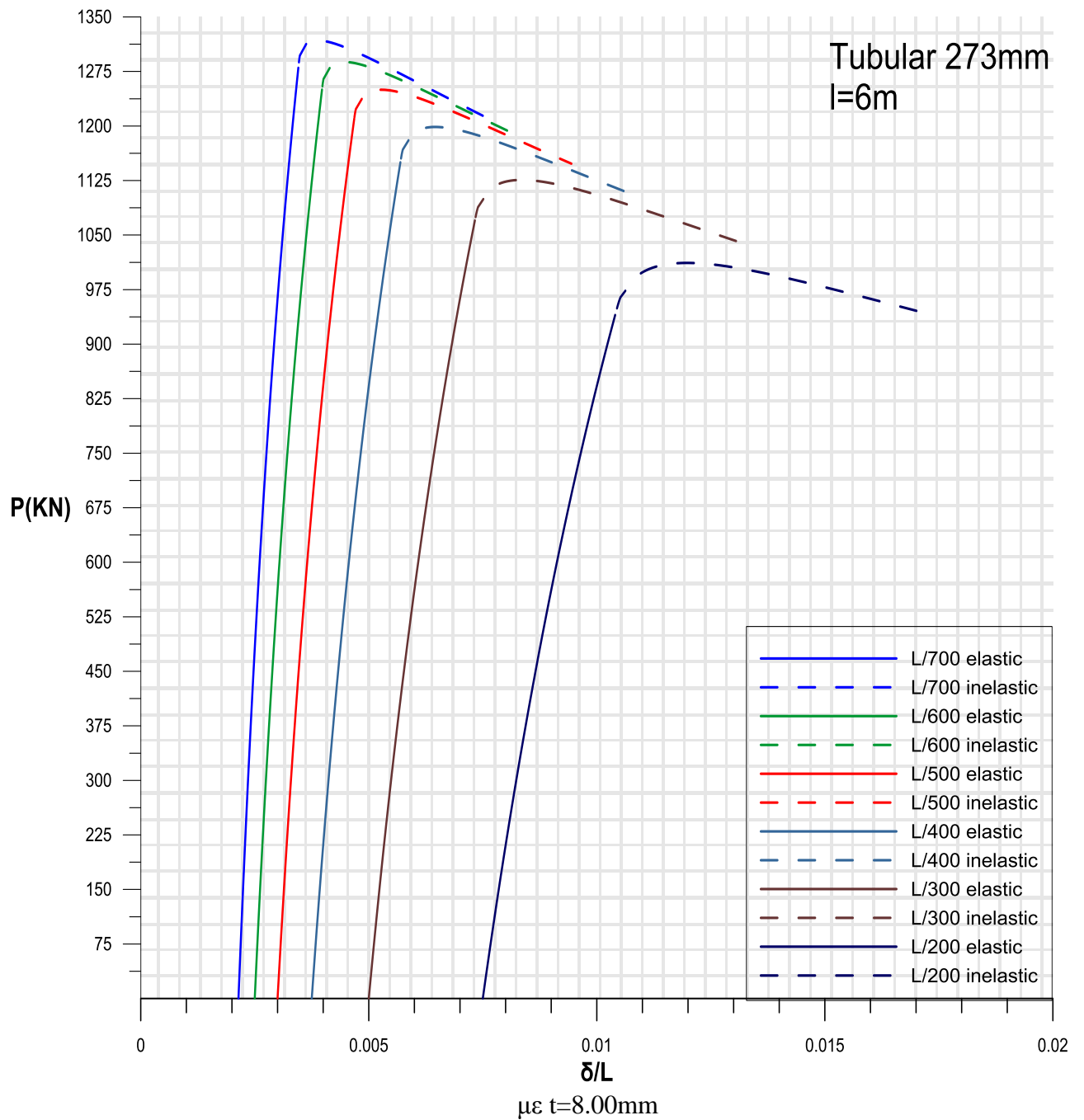
Αρχικό Βέλος	$P_{el}(\text{KN})$	δ_{el}/L	$P_{in}(\text{KN})$	δ_{in}/L
L/700	1230.1	0.001851	1266.865	0.002098
L/600	1210.1	0.002147	1248.552	0.002438
L/500	1180.1	0.002561	1223.837	0.002913
L/400	1140.1	0.003171	1189.36	0.003608
L/300	1080.1	0.004168	1137.426	0.004753
L/200	970.1	0.006098	1049.429	0.006976



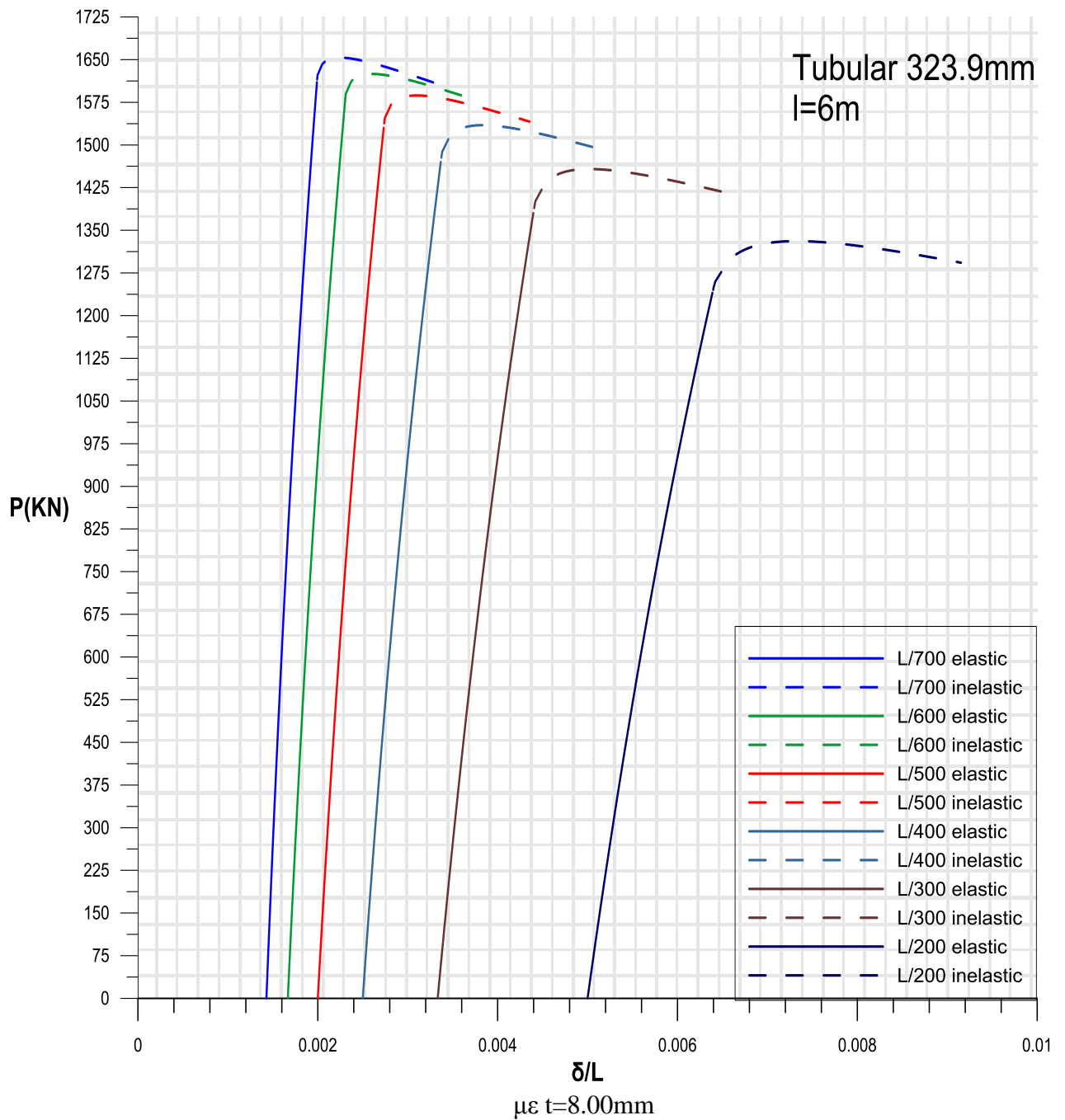
Αρχικό Βέλος	P_{el} (KN)	δ_{el}/L	P_{in} (KN)	δ_{in}/L
L/700	1410.1	0.001755	1444.263	0.001984
L/600	1380.1	0.002036	1426.635	0.00231
L/500	1350.1	0.002433	1402.627	0.002757
L/400	1310.1	0.003022	1368.726	0.003439
L/300	1250.1	0.003991	1316.806	0.004535
L/200	1140.1	0.005885	1226.613	0.006706



Αρχικό Βέλος	$P_{el}(KN)$	δ_{el}/L	$P_{in}(KN)$	δ_{in}/L
L/700	1090.1	0.003933	1119.328	0.004376
L/600	1060.1	0.004485	1090.014	0.00502
L/500	1020.1	0.005225	1052.989	0.005854
L/400	960.1	0.006259	1004.365	0.00711
L/300	890.1	0.007957	936.825	0.009065
L/200	780.1	0.011122	834.106	0.012804



Αρχικό Βέλος	$P_{el}(\text{KN})$	δ_{el}/L	$P_{in}(\text{KN})$	δ_{in}/L
L/700	1280.1	0.003456	1317.662	0.003889
L/600	1250.1	0.003975	1288.009	0.004476
L/500	1210.1	0.004682	1249.856	0.005272
L/400	1150.1	0.005694	1198.689	0.006448
L/300	1070.1	0.007327	1125.829	0.008341
L/200	940.1	0.010403	1011.686	0.01195



Αρχικό Βέλος	$P_{el}(\text{KN})$	δ_{el}/L	$P_{in}(\text{KN})$	δ_{in}/L
L/700	1610.1	0.002985	1653.42	0.003375
L/600	1580.1	0.003458	1624.738	0.003914
L/500	1530.1	0.004099	1586.943	0.004655
L/400	1470.1	0.005052	1534.748	0.005738
L/300	1380.1	0.006595	1457.654	0.007537
L/200	1240.1	0.009583	1330.945	0.010987

4.3 Διαγράμματα για την επιρροή της ποιότητας του χάλυβα

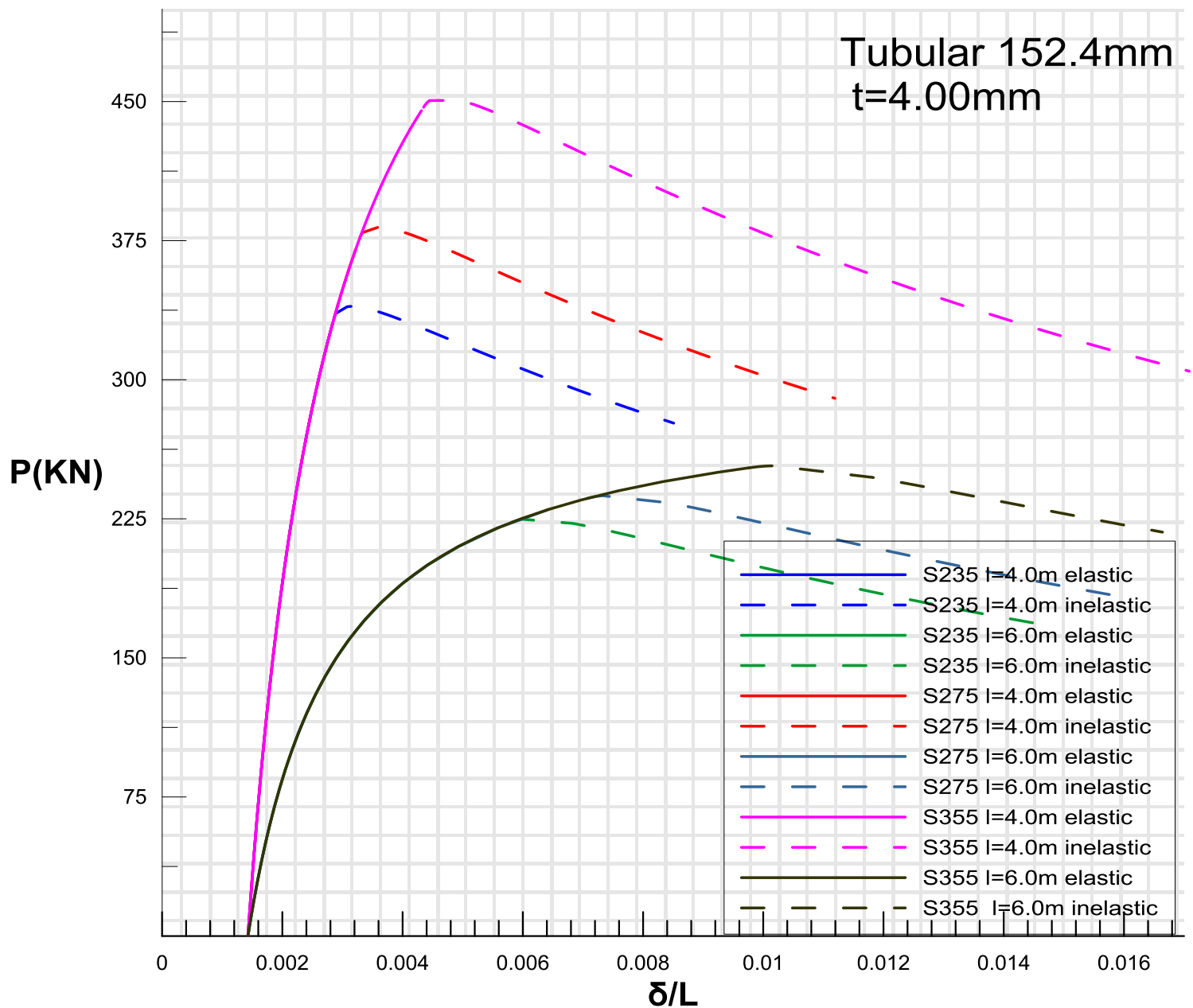
Αφού είδαμε τα διαγράμματα που μας δείχνουν την επιρροή της αρχικής ατέλειας, ταξινομημένα με βάση τη διατομή, το μήκος της δοκού και για μία ποιότητα του χάλυβα, (S235), θα παρουσιάσουμε κ διαγράμματα ανά διατομή για διαφορετικά μήκη δοκού και διαφορετικές ποιότητες χάλυβα όπου θα φαίνονται οι διαφορές που οφείλονται στην ποιότητα του χάλυβα. καθώς και η επιρροή του μήκους της δοκού η οποία επηρεάζει και την λυγηρότητα σαφώς. Επειδή, όπως είπαμε και νωρίτερα, αρχικά βέλη της τάξεως $L/300$, $L/200$ δεν συναντάμε στην πραγματικότητα, στα παρακάτω διαγράμματα εμφανίζονται τα αποτελέσματα μόνο για το αρχικό βέλος $L/700$, αφού είναι προφανές αν γινόταν η διαδικασία και για τα υπόλοιπα αρχικά βέλη $L/600$, $L/500$, $L/400$, ($L/300$ και $L/200$), τα αποτελέσματα που θα παίρναμε θα ήταν όμοια με τα προηγούμενα καθώς θα βλέπαμε πάλι την επιρροή των αρχικών ατελειών στην αντοχή της διατομής και του μέλους κάτι το οποίο πλέον κρίνεται γνωστό. Στα επόμενα διαγράμματα εύκολα παρατηρεί κανείς ότι ο ελαστικός «δρόμος» είναι ο ίδιος για κάθε ποιότητα χάλυβα και το μόνο που διαφέρει είναι το πότε διαρρέει η δκός. Κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο από τη θεωρία μας εφ' όσον προέκυψε ότι :

$$\delta = \frac{\delta_0}{\frac{P_E}{P} - 1}$$

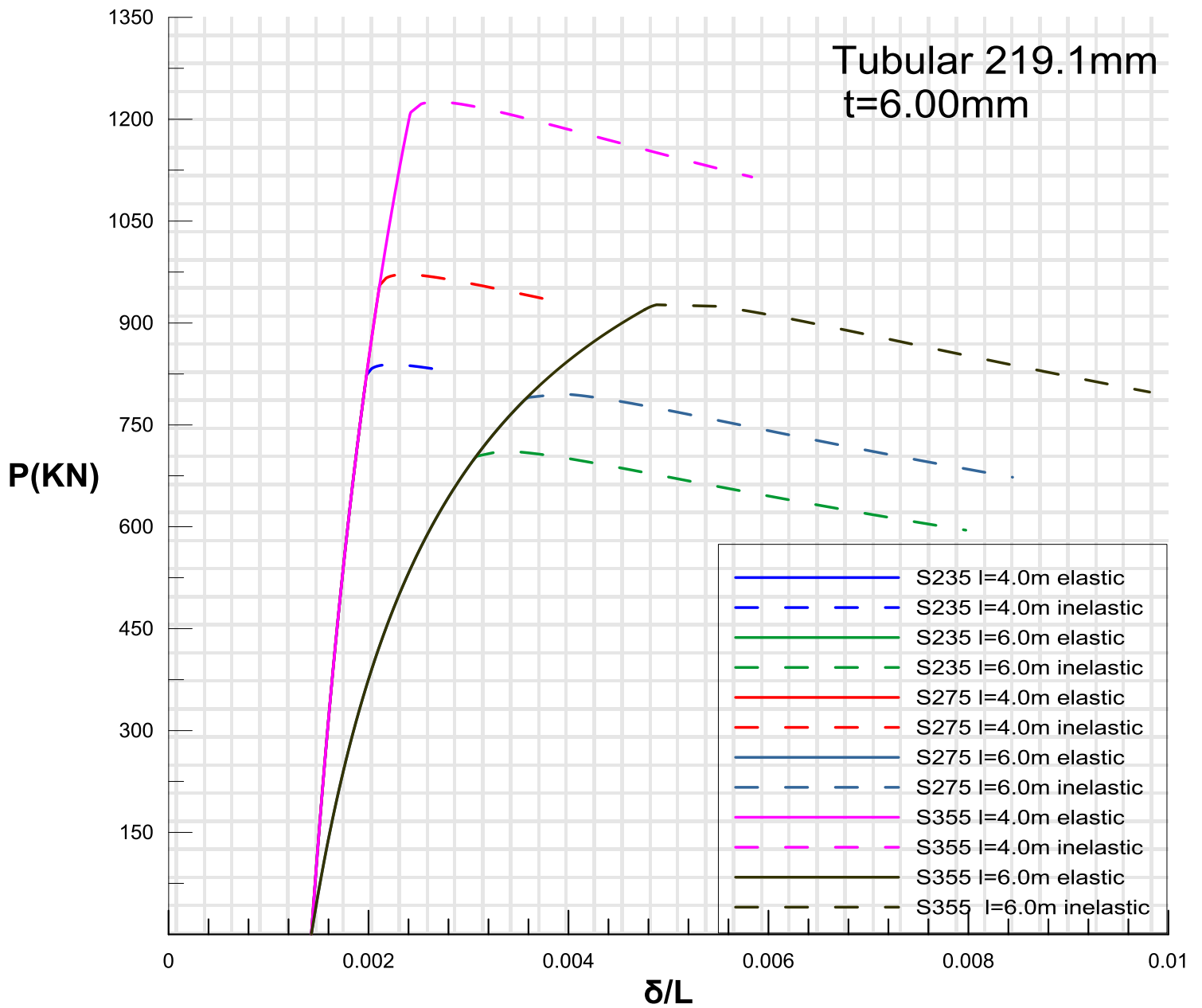
ή διαφορετικά

$$P_0 = P_E \left(1 - \frac{\frac{\delta_0}{L}}{\frac{\delta}{L}}\right)$$

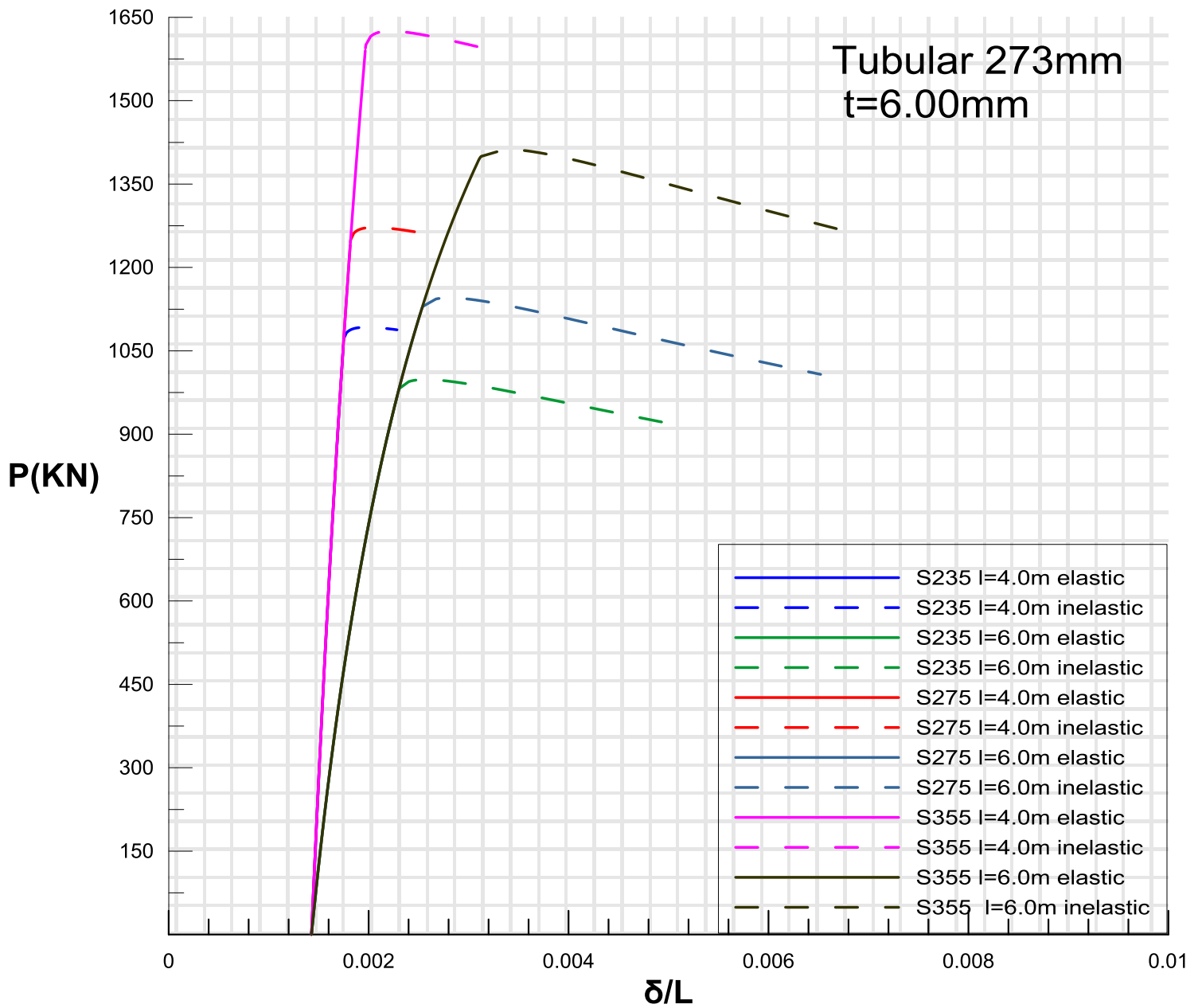
Και επειδή γνωρίζουμε ότι το φορτίο Euler είναι επίσης ανεξάρτητο της ποιότητας του χάλυβα (δηλ. της τάσης διαρροής), ο ελαστικός κλάδος είναι ίδιος για τις διαφορετικές ποιότητες του χάλυβα.



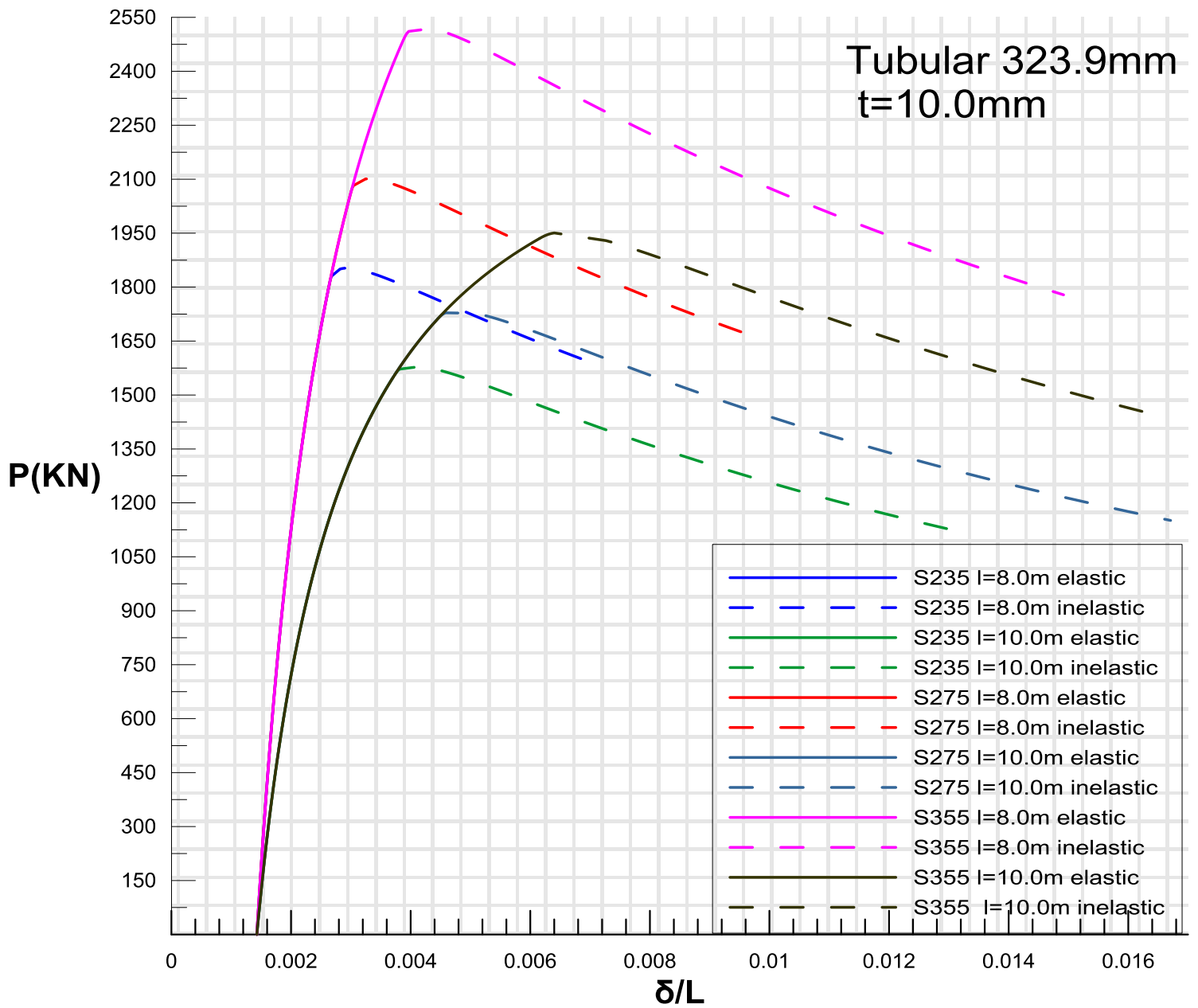
Αρχικό Βέλος	L	λ	S	Pel(KN)	δel/L	Pin(KN)	δin/L	(Pin-Pel)/Pel(%)
L/700	4m	76.2102	235	332.933	0.0029	339.532	0.0032	1.982111228
			275	376.115	0.0033	382.350	0.0036	1.657580202
			355	446.927	0.0043	450.6635	0.004956	0.836055173
L/700	6m	114.3154	235	223.070	0.0058	224.747	0.0060	0.751554362
			275	235.992	0.0071	237.452	0.0073	0.618382211
			355	252.526	0.009252	253.5614	0.010176	0.410125009



Αρχικό Βέλος	L	λ	S	Pel(KN)	δel/L	Pin(KN)	δin/L	(Pin-Pel)/Pel(%)
L/700	4m	53.07005	235	819.1026	0.001976	838.7737	0.002231	2.401545442
			275	950.3022	0.002105	971.4346	0.002368	2.223761887
			355	1202.58	0.002408	1225.524	0.002686	1.907866207
L/700	6m	79.60507	235	697.891	0.003047	711.124	0.003349	1.896144134
			275	783.6398	0.00354	795.5985	0.003927	1.526043884
			355	919.5189	0.00476	926.8236	0.004881	0.794398365



Αρχικό Βέλος	L	λ	S	Pel(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L	(Pin-Pel)/Pel(%)
L/700	4m	42.36275	235	1018.05	0.002641	1052.005	0.00299	3.335263094
			275	1185.368	0.002737	1222.733	0.003107	3.152237265
			355	1513.613	0.002946	1556.454	0.00334	2.830360834
L/700	6m	63.54412	235	976.6438	0.002297	998.3689	0.002573	2.224469863
			275	1123.233	0.002528	1145.409	0.002806	1.974321698
			355	1391.098	0.003095	1412.463	0.003383	1.535846646



Αρχικό Βέλος	L	λ	S	$P_{el}(KN)$	δ_{el}/L	$P_{in}(KN)$	δ_{in}/L	$(P_{in}-P_{el})/P_{el}(\%)$
L/700	8m	72.04824	235	1813.006	0.002648	1852.695	0.00294	2.189126174
			275	2062.009	0.002999	2100.969	0.003299	1.889383202
			355	2487.146	0.003878	2518.904	0.004347	1.276857962
L/700	10m	90.0603	235	1555.32	0.00373	1579.13	0.004171	1.530819216
			275	1711.407	0.004451	1728.432	0.004583	0.99478196
			355	1935.495	0.006157	1950.634	0.006401	0.782150363

4.4 Προβλέψεις Ευρωκώδικα

Μέχρι τώρα στην εργασία μας έχουμε ασχοληθεί με το φαινόμενο του ανελαστικού λυγισμού σε μεταλλικές δοκούς με αρχική ατέλεια (αρχικό βέλος). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι ατέλειες είναι πάντα παρούσες στα πραγματικά υποστυλώματα και δοκούς και επομένως ο ευρωπαϊκός κανονισμός αντιμετωπίζει την ύπαρξή τους.

4.4.1 Προσέγγιση του φαινομένου από τον EC3

Η αντιμετώπιση του ζητήματος των ατελειών των υποστυλωμάτων και των δοκών (στα πραγματικά υποστυλώματα, όπως έχουμε αναφέρει έχουμε διάφορα είδη ατελειών, εκτός του αρχικού βέλους), από τον κανονισμό γίνεται πειραματικά. Δηλαδή ο κανονισμός πήρε και εξέτασε μια σειρά από δοκούς (στις οποίες σαφώς υπήρχαν πολλών ειδών ατέλειες όπως γεωμετρικής φύσης, εκκεντρότητα φόρτισης κτλ.) κι έβγαλε κάποια αποτελέσματα τα οποία συνόψισε σε μια μεθοδολογία επίλυσης εύκολη και κατανοητή και προσδιόρισε το ελαστικό φορτίο αστοχίας της εκάστοτε δοκού.

Η συνθήκη αυτή είναι και απαίτηση του κανονισμού, δηλαδή η αστοχία επέρχεται όταν διαρρεύσει η πρώτη ίνα στη δυσμενή διατομή του μέλους. Επομένως αρκεί η σχέση αυτή για την περιγραφή της συμπεριφοράς της δοκού και δε χρειάζεται νέα σχέση για την ανελαστική περιοχή, όπως έγινε στην παρούσα μελέτη. Δηλαδή, η αντοχή σε λυγισμό βάσει κανονισμού, αντιστοιχεί στο φορτίο πρώτης διαρροής P_{el} και όχι στο κρίσιμο φορτίο ανελαστικού λυγισμού P_{in} ή P_{cr} .

Η διαφορά της προσέγγισης του κανονισμού βρίσκεται στη συνέχεια της διαδικασίας, όπου υπολογίζεται ένας μειωτικός συντελεστής χ , ο οποίος ονομάζεται μειωτικός συντελεστής λυγισμού, και πολλαπλασιάζει την αντοχή του μέλους σε θλίψη, δίνοντας με αυτόν τον τρόπο την αντοχή του μέλους σε λυγισμό $N_{b,Rd}$. Ο μειωτικός συντελεστής υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \lambda^2}} \quad \text{με } \chi \leq 1 \quad (4-1)$$

$$\text{Όπου } \Phi = 0.5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Afy}{Ncr}} = \frac{Lcr}{i} * \left(\frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad \text{για κατηγορία διατομών 1,2 και 3}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{Aeff * \frac{fy}{Ncr}} = \frac{Lcr}{i} * \sqrt{\frac{Aeff}{A}} \quad \text{για κατηγορία διατομής 4}$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{το φορτίο Euler}$$

Lcr το ισοδύναμο μήκος λυγισμού

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{η ακτίνα αδράνειας περί τον αντίστοιχο άξονα}$$

$$\lambda = \frac{Lcr}{i} \quad \text{η λυγηρότητα}$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{fy}} = 93.9\varepsilon \quad \text{η οριακή λυγηρότητα}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{fy}} \quad \text{fy σε } N/mm^2$$

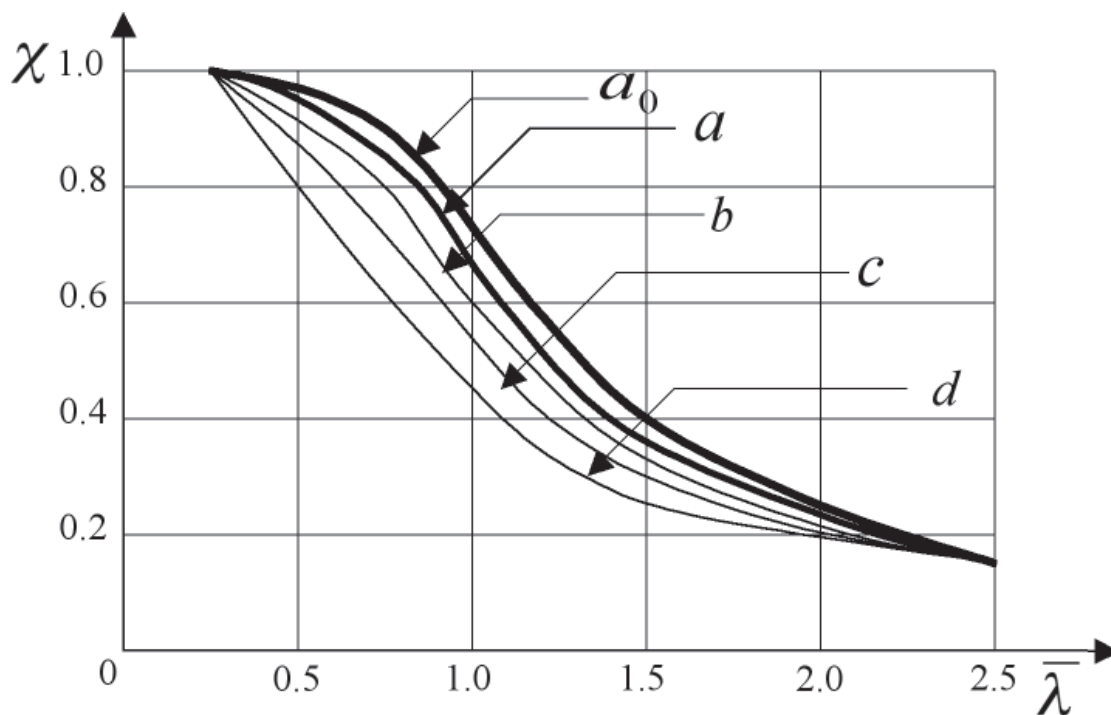
και ο συντελεστής α που υπολογίστηκε πειραματικά κι έχει τις ακόλουθες τιμές

Καμπύλη λυγισμού	ao	a	b	c	d
Συντελεστής ατελειών α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

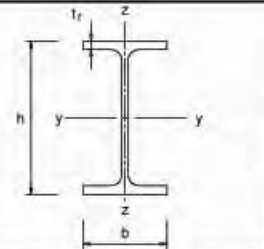
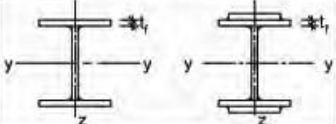
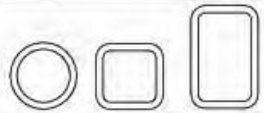
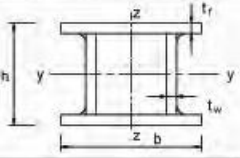
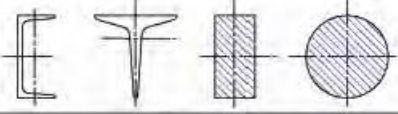

Από το 1960 και μετά, πραγματοποιήθηκε από την ECCS(European Convention of Constructional Steelworks) ένα διεθνές πειραματικό πρόγραμμα με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς των πρότυπων υποστυλωμάτων. Εκτελέστηκαν περισσότερες από 1000 δοκιμές λυγισμού σε διάφορους τύπους μελών, με διαφορετικές τιμές λυγηρότητας (μεταξύ 55 και 160). Ο συσχετισμός μεταξύ της πειραματικής αντοχής και της θεωρητικής ανάλυσης, έδειξε ότι είναι δυνατόν να σχεδιαστούν καμπύλες λυγισμού που περιέγραφαν την αντοχή σε θλίψη του υποστυλώματος ως συνάρτηση της ανηγμένης του λυγηρότητας.

Οι ατέλειες που λήφθηκαν υπόψη ήταν : μια γεωμετρική ατέλεια μισού ημιτονοειδούς κύματος με μέγεθος $L/1000$ και η επίδραση των παραμενουσών τάσεων ανάλογα με το κάθε είδος διατομής.

Προέκυψαν έτσι οι πέντε ευρωπαϊκές καμπύλες λογισμού, που δίνουν την τιμή του μειωτικού συντελεστή χ της αντοχής του υποστυλώματος ως συνάρτηση της ανηγμένης λυγηρότητας για διαφορετικούς τύπους διατομών. Ακολουθεί ο πίνακας με τις ευρωπαϊκές καμπύλες λογισμού και ο πίνακας κατηγοριοποίησης των διατομών στις αντίστοιχες καμπύλες.

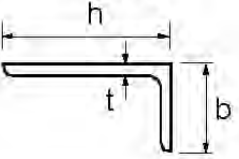
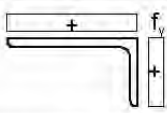
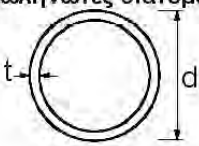


Σχήμα 4.1 Καμπύλες Λογισμού Ευρωπαϊκού Κανονισμού

Διατομή	Όρια	Λυγισμός περί τον άξονα	Καμπύλη λυγισμού	
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$ y-y z-z	a b	a ₀ a ₀
		$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$ y-y z-z	b c	a a
		$t_f \leq 100 \text{ mm}$ y-y z-z	b c	a a
		$t_f > 100 \text{ mm}$ y-y z-z	d d	c c
		$t_f \leq 40 \text{ mm}$ y-y z-z	b c	b c
		$t_f > 40 \text{ mm}$ y-y z-z	c d	c d
		Εν θερμώ έλαση	Κάθε	a a ₀
		Ψυχρή έλαση	Κάθε	c c
		Γενικά (εκτός των κετωτέρω)	Κάθε	b b
		Μεγάλα πάχη ραφής: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	Κάθε	c c
			Κάθε	c c
			Κάθε	b b

Σχήμα 4.2 Κατηγοριοποίηση διατομών στις καμπύλες λυγισμού

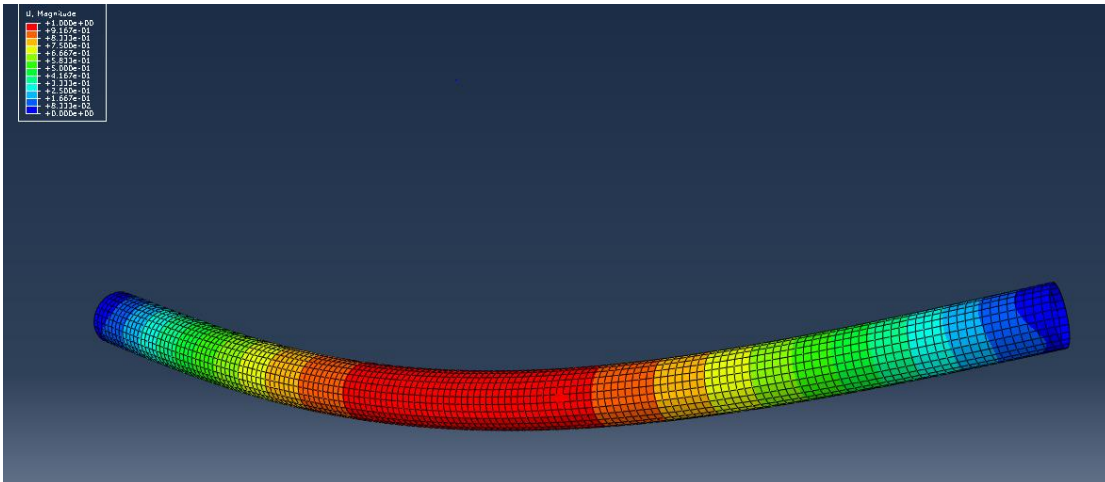
Όπως βλέπουμε εδώ η δική μας κατηγορία διατομής,δηλαδή η σωληνωτή κοίλη, θα είναι είτε α είτε α₀ για εν θερμώ έλαση,διαφορετικά για εν ψυχρώ έλαση θα είναι αντίστοιχα για όλες τις ποιότητες χάλυβα κατηγορίας c. Για μια ποιότητα χάλυβα S235 ωστόσο και θερμή έλαση θα έχουμε κατηγορία α. Επιπρόσθετα οι μέχρι τώρα διατομές που έχουμε επιλέξει με τα αντίστοιχα πάχη τους και διαμέτρους, οι οποίες ορισμένες από αυτές φαίνονται στα παραπάνω διαγράμματα, κατατάσσονται στην κατηγορία 1 της κατάταξης διατομών, η οποία επιτρέπει πλαστική ανάλυση.Για του λόγου το αληθές παραθέτουμε και τον επόμενο πίνακα όπου φαίνεται αναλυτικά το άνωθεν είπωθεν,καθώς και οι συνθήκες όπου καθορίζουν την κατάταξη μιας διατομής σε κάθε περίπτωση.

<p>Αναφορά επίσης στα “Προεξέχοντα πέλματα” (βλέπε φύλο 2 από 3)</p>		<p>Γωνιακά</p> 		<p>Δεν ισχύει για γωνιακά σε συνεχή επαφή με άλλα στοιχεία</p>		
Κατηγορία	Διατομή σε θλίψη					
Κατανομή τάσεων στη διατομή (θλίψη θετική)						
3	$h/t \leq 15\varepsilon: \frac{b+h}{2t} \leq 11,5\varepsilon$					
<p>Σωληνωτές διατομές</p> 						
Κατηγορία	Διατομή σε κάμψη και/ή θλίψη					
1	$d/t \leq 50\varepsilon^2$					
2	$50\varepsilon^2 < d/t \leq 90\varepsilon^2$					
3	$d/t > 90\varepsilon^2$					
ΣΗΜΕΙΩΣΗ Για $d/t > 90\varepsilon^2$ βλέπε EN 1993-1-6.						
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	f_y	235	275	355	420	460
	ε	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71
	ε^2	1,00	0,85	0,66	0,56	0,51

Σχήμα 4.3 Κατάταξη διατομών σε κατηγορίες 1,2 και 3

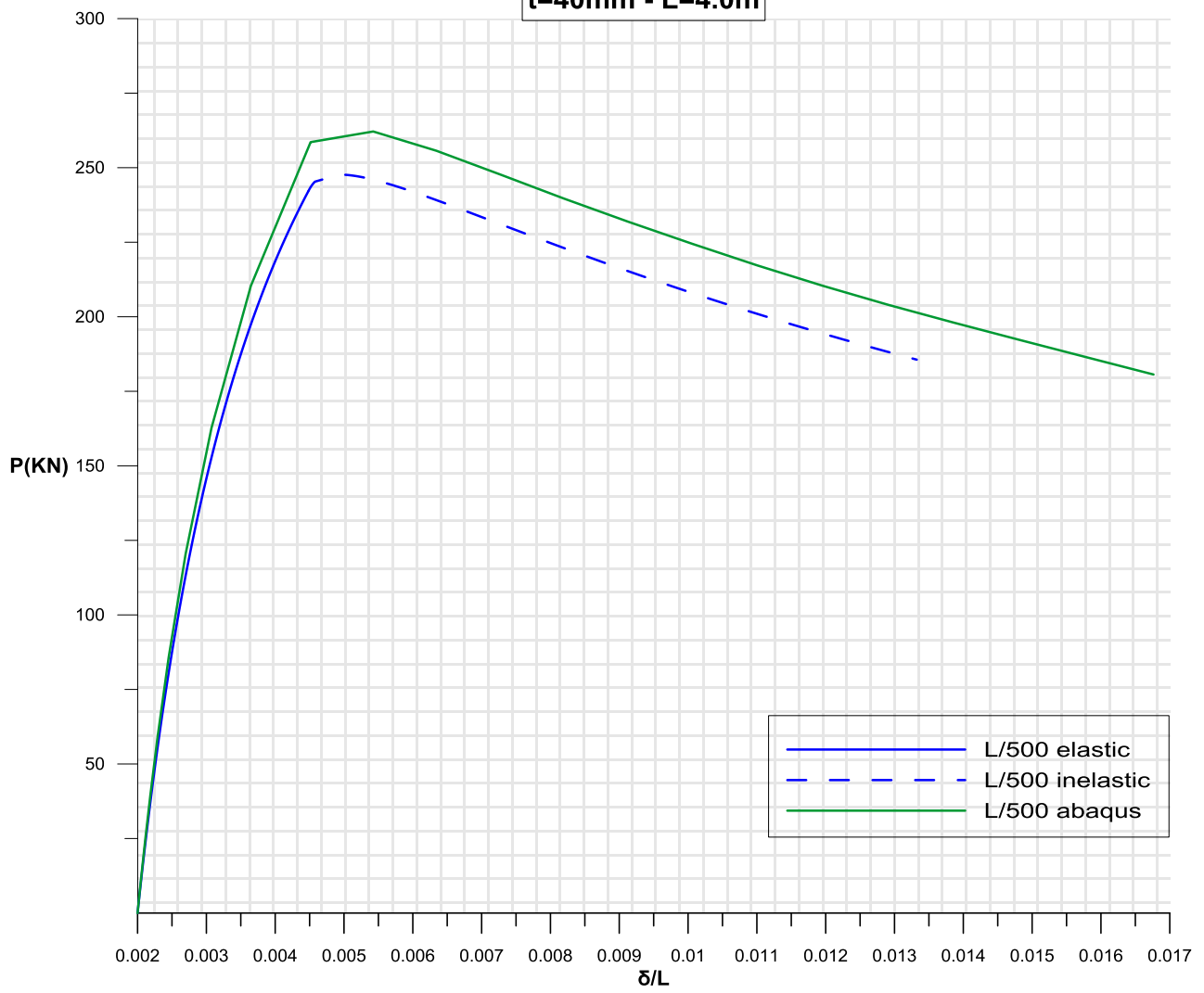
Στη συνέχεια της εργασίας μας θα παρουσιάσουμε μερικά διαγράμματα P-δ/L όπως προκύπτουν από τις σχέσεις και τους περιορισμούς του Ευρωκώδικα για επιλεγμένα αρχικά βέλη και διατομές, καθώς εν συνεχεία θα δούμε και τις διαφορές μεταξύ της θεωρητικής μας επίλυσης και της αντίστοιχης των κανονισμών.

4.4.2 Αποτελέσματα από Abaqus και σύγκριση

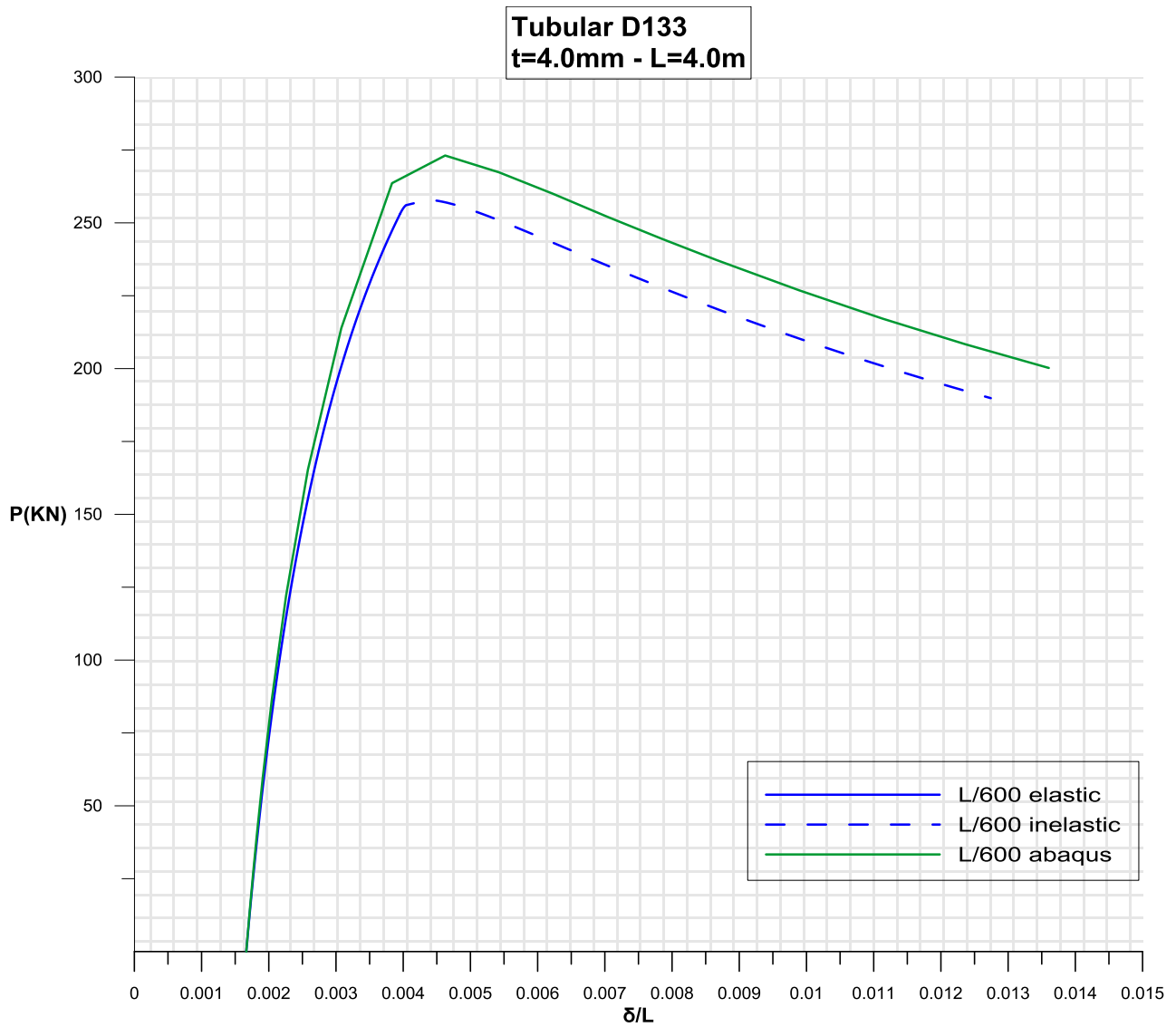


Πριν ωστόσο προχωρήσουμε στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων με οδηγό τις σχέσεις και τους περιορισμούς του Ευρωκώδικα, κρίνεται σκόπιμο αν όχι αναγκαίο, για την πορεία της επίλυσής μας, να δούμε αρχικά μια σύγκριση των δικών μας αποτελεσμάτων όπως προέκυψαν από τις ενέργειες μας, βάση της θεωρητικής μας προσέγγισης με λεπτομερείς τύπους, σε σχέση με τα αποτελέσματα που προήλθαν από την χρήση του υπολογιστικού προγράμματος Abaqus πεπερασμένου στοιχείων, το οποίο σαφώς χρησιμοποιεί κάποιες θα λέγαμε συναρτήσεις περισσότερο προσεγγιστικές. Ας παραθέσουμε λοιπόν για την καλύτερη ειοπτεία μερικά διαγράμματα για διάφορες διατομές και για διάφορα κριτήρια (διαφορές για αρχικές ατέλειες με ίδιο μήκος κτλ) όπου θα φαίνονται οι τυχόν διαφορές των δύο μέσων επίλυσης. Όπως κάναμε και στις προηγούμενες παραγράφους, τις επιλεγμένες διατομές, για μια συγκεκριμένη αρχική ατέλεια ένα μήκος δοκού και συγκεκριμένο πάχος, θα τις προβάλλουμε σε ένα διάγραμμα όπου θα φαίνεται ο δρόμος ισοροπίας βάσει προγράμματος και ο αντίστοιχος δρόμος βάσει της δικής μας πορείας.

**Tubular D133
t=40mm - L=4.0m**

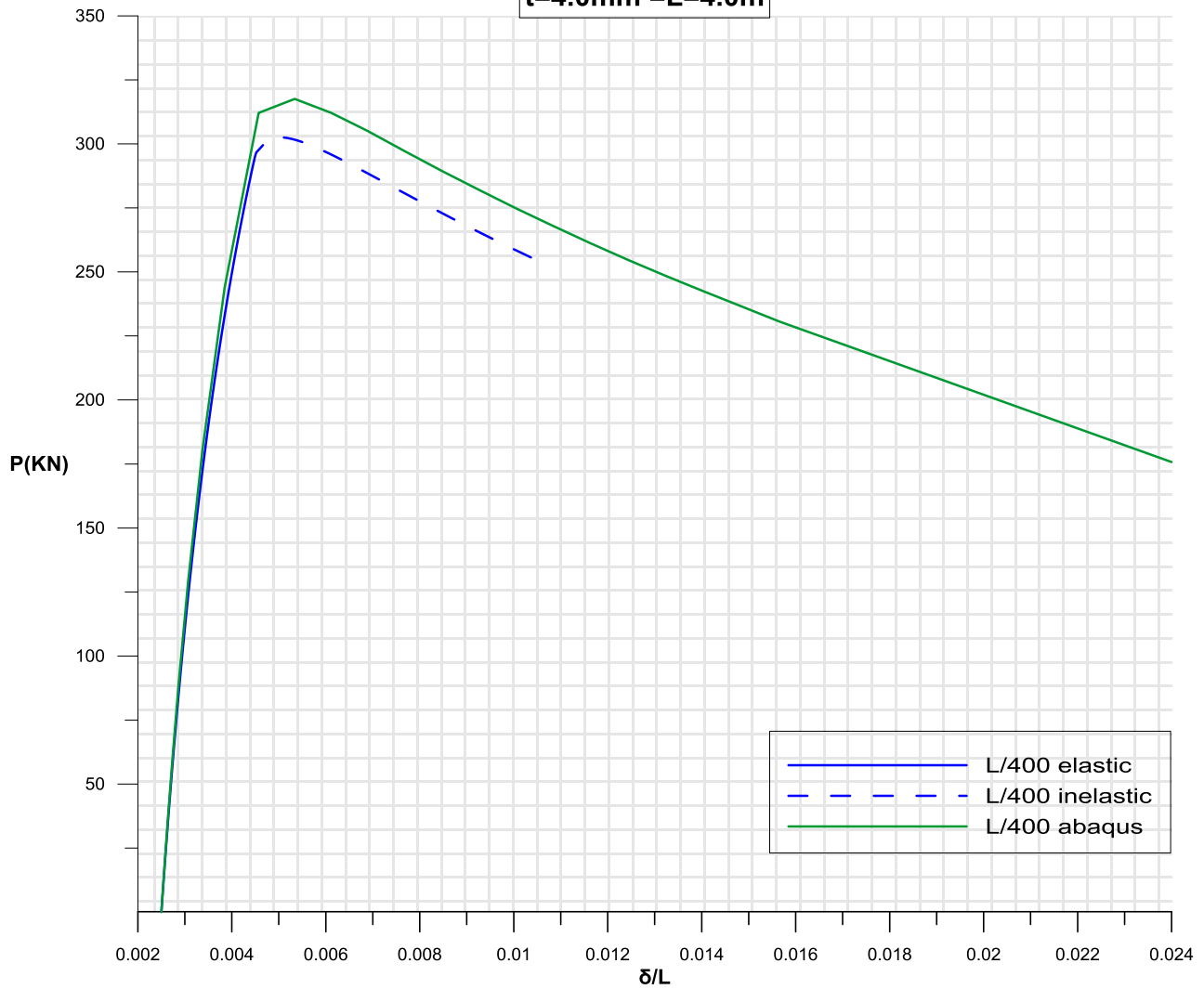


Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	t	λ	S	$P_{el}(KN)$	δ_{el}/L	$P_{in}(KN)$	δ_{in}/L
Abaqus	L/500	4m	4.00mm	87.66103	235	-	-	262.1393	0.005425
Θεωρ.Επίλ.	L/500	4m	4.00mm	87.66103	235	242.1	0.004481	247.6762	0.004934



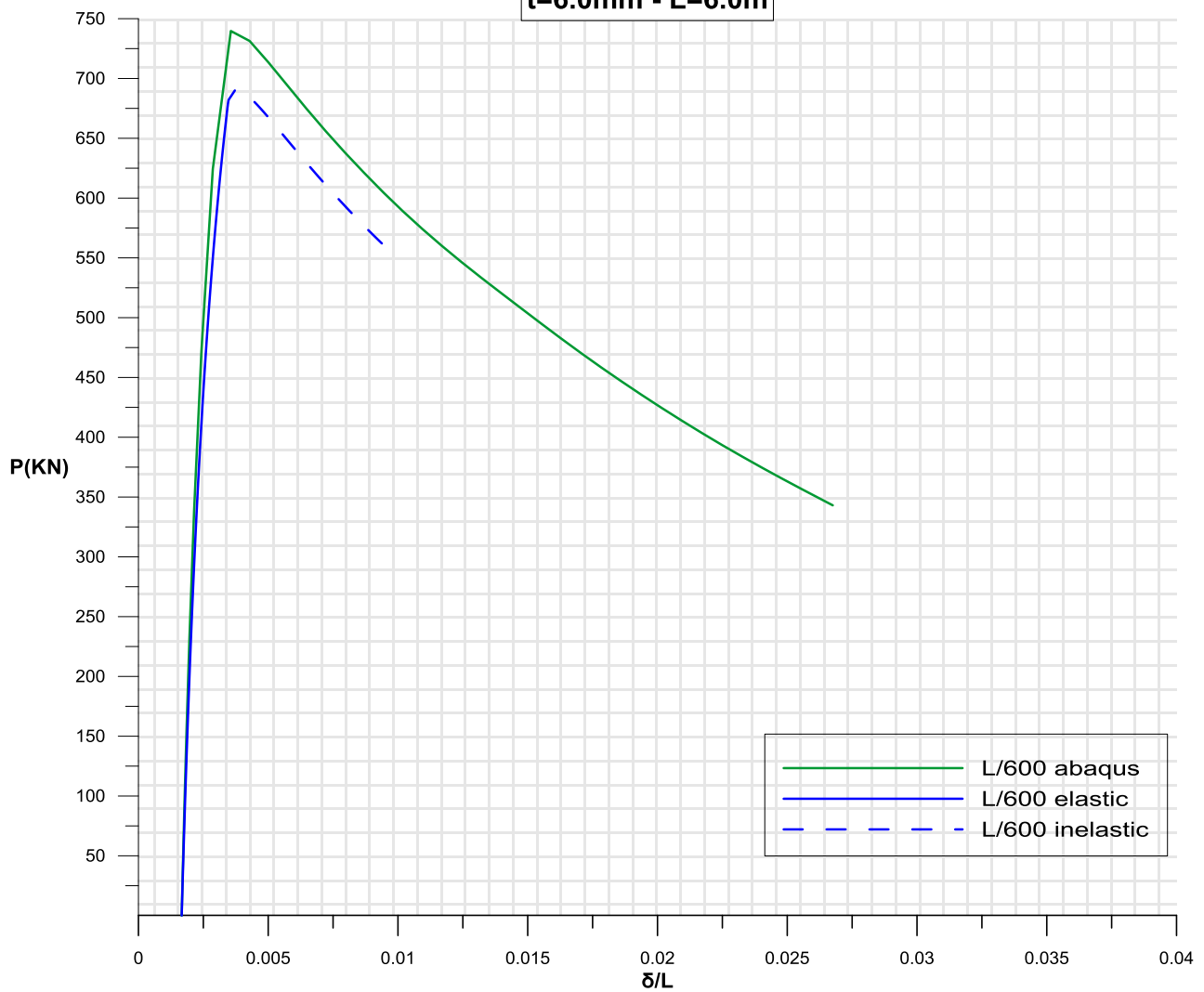
Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	t	λ	S	PeI(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
Abaqus	L/600	4m	4.00mm	87.66103	235	-	-	273.1005	0.004624
Θεωρ.Επίλ.	L/600	4m	4.00mm	87.66103	235	253.1	0.003954	257.9322	0.004373

Tubular D=152.4
t=4.0mm =L=4.0m



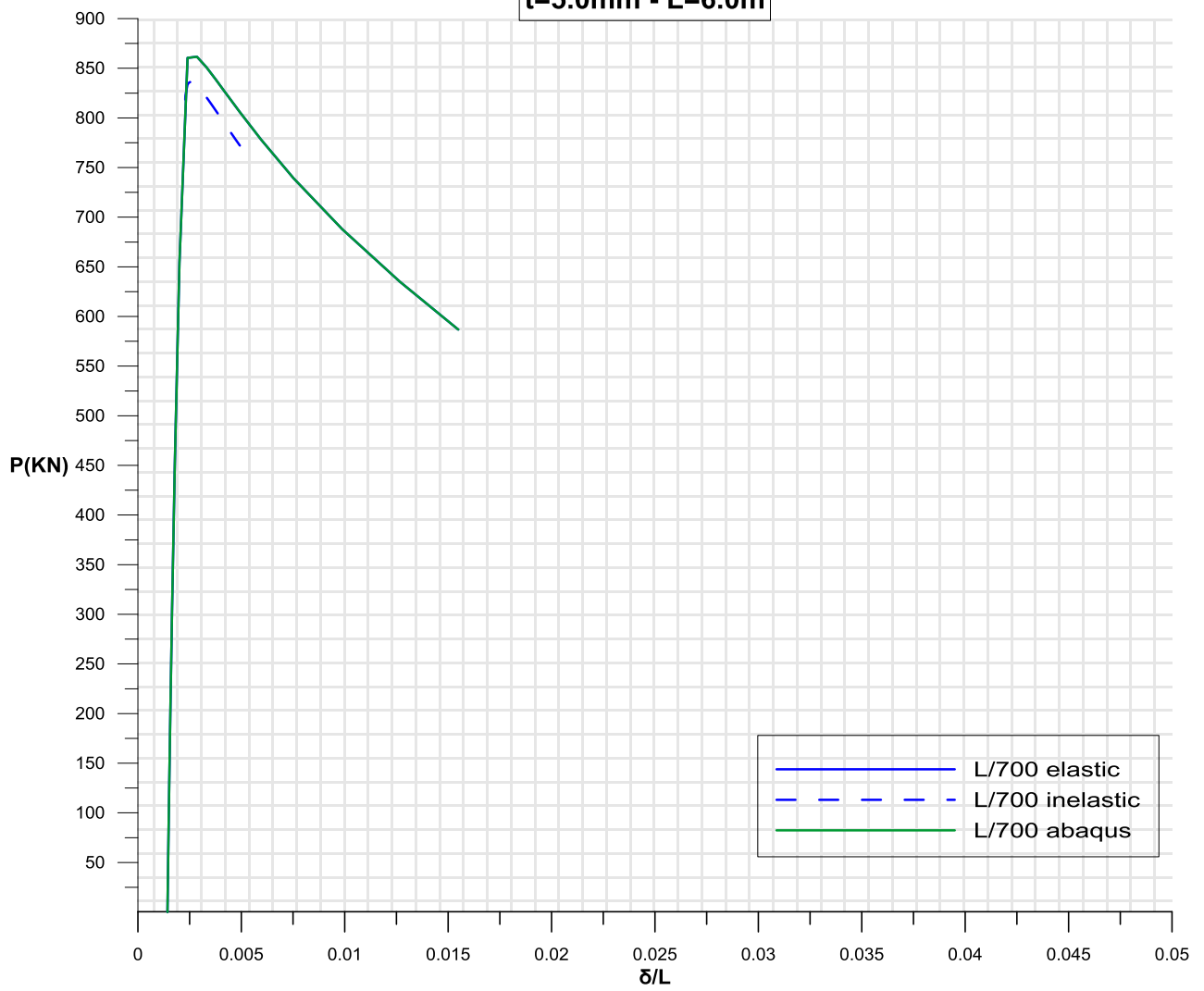
Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	t	λ	S	Pel(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
Abaqus	L/400	4m	4.00mm	76.21025	235	-	-	317.5746	0.005337
Θεωρ.Επίλ	L/400	4m	4.00mm	76.21025	235	293.1	0.004468	302.5994	0.005002

Tubular D=219.1
t=6.0mm - L=6.0m



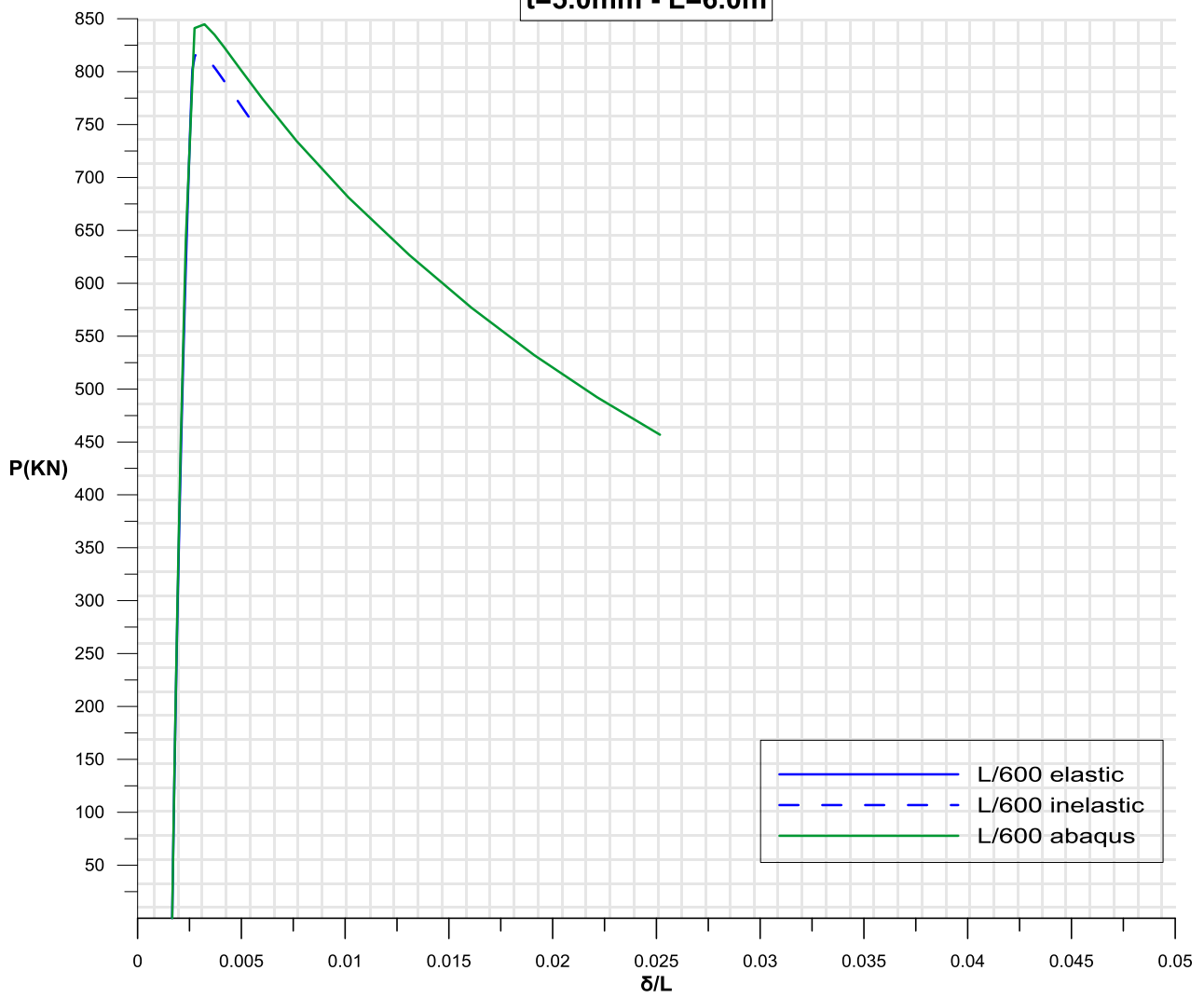
Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	t	λ	S	Pel(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
Abaqus	L/600	6m	6.00mm	79.60507	235	-	-	739.7332	0.00356
Θεωρ.Επίλ.	L/600	6m	6.00mm	79.60507	235	675.1	0.003428	690.3084	0.003779

Tubular D273
t=5.0mm - L=6.0m



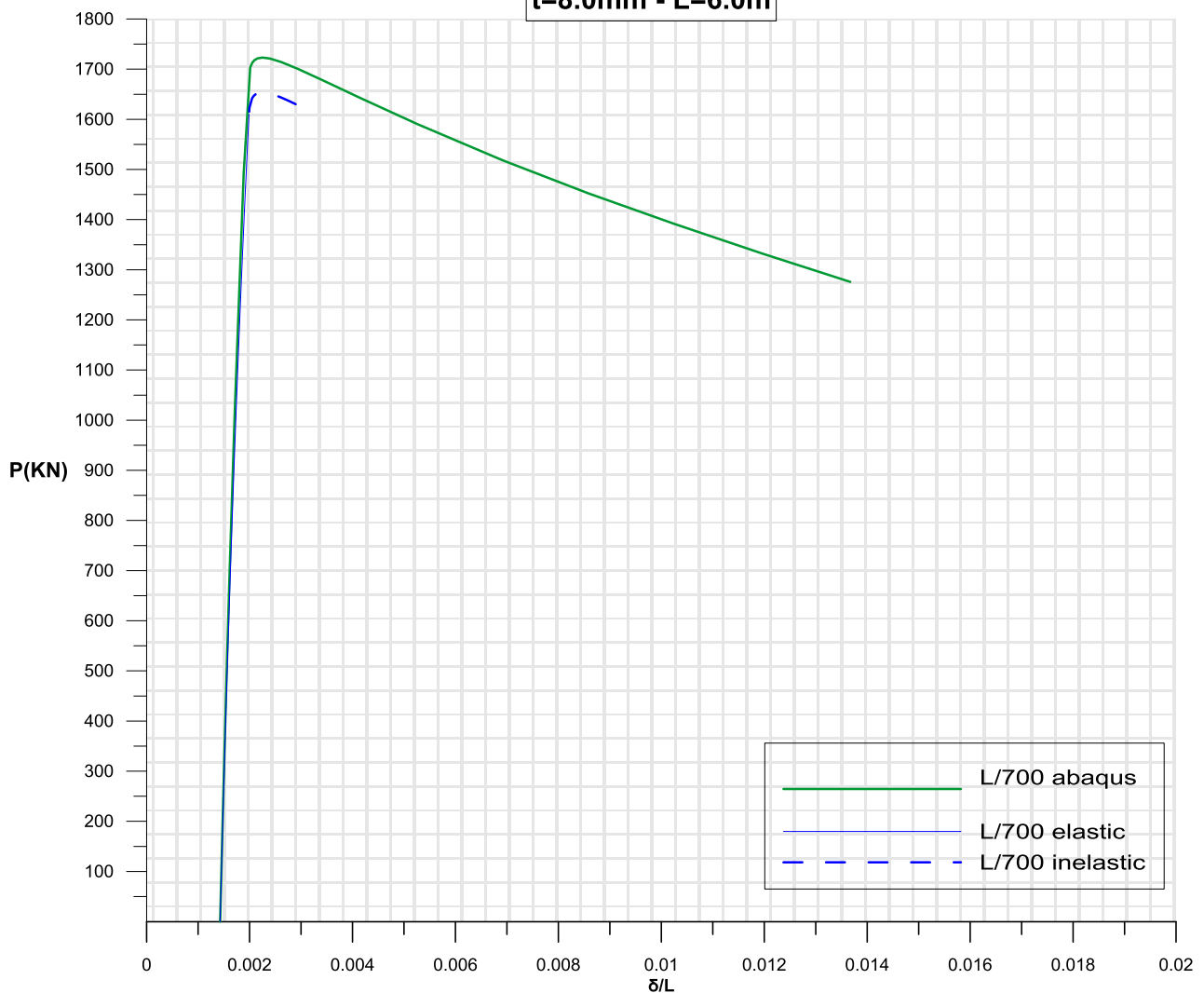
Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	t	λ	S	$P_{el}(KN)$	δ_{el}/L	$P_{in}(KN)$	δ_{in}/L
Abaqus	L/700	6m	5.00mm	63.31198	235	-	-	861.5874	0.002854
Θεωρ.Επίλ.	L/700	6m	5.00mm	63.31198	235	817.6	0.002288	836.1891	0.002563

Tubular D273
t=5.0mm - L=6.0m



Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	λ	t	S	Pel(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
Abaqus	L/600	6m	63.54412	5.00mm	235	-	-	844.7719	0.003223
Θεωρ.Επίλ.	L/600	6m	63.54412	5.00mm	235	797.6	0.002631	817.6643	0.002952

**Tubular D323.9
t=8.0mm - L=6.0m**



Επίλυση	Αρχικό Βέλος	L	t	λ	S	PeI(KN)	δ_{el}/L	Pin(KN)	δ_{in}/L
Abaqus	L/700	6m	8.00mm	53.70409	235	-	-	1723.081	0.002255
Θεωρ.Επίλ.	L/700	6m	8.00mm	53.70409	235	1610.1	0.00199	1653.42	0.00225

Όπως είδαμε, τα αποτελέσματα με χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Abaqus, μας δίνουν για τα ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά του φορέα, λίγο πιο “ανεβασμένες” καμπύλες, δηλαδή λίγο μεγαλύτερα φορτία αστοχίας. Το πόσο μεγαλύτερα είναι αυτά τα φορτία θα το δούμε παρακάτω.

4.4.3. Εξαγωγή αποτελεσμάτων EC3

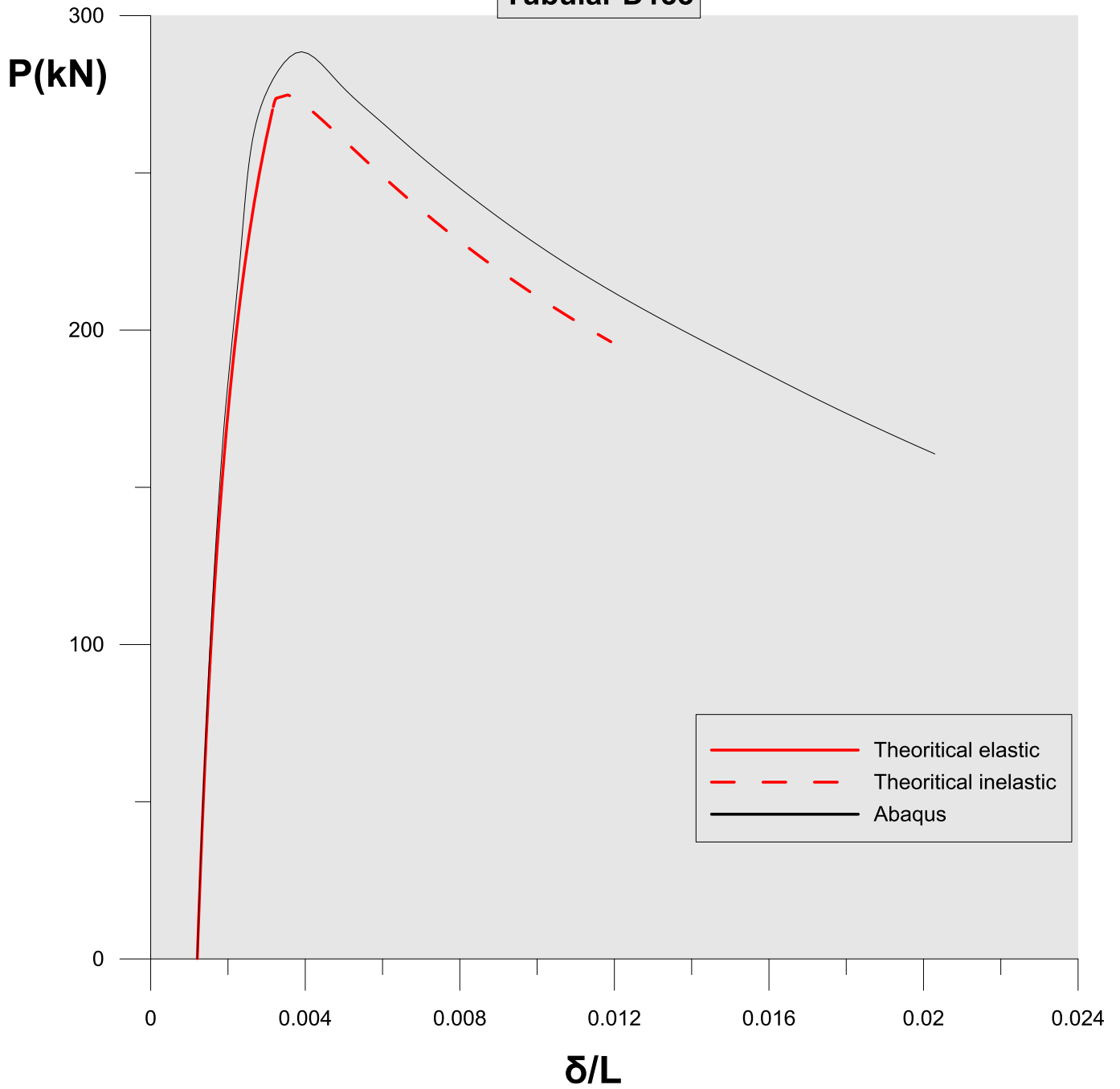
Στο σημείο αυτό θα ακολουθήσουμε την πορεία επίλυσης που προβλέπει ο κανονισμός για μια συγκεκριμένη διατομή του φορέα μας, ώστε να βρούμε το φορτίο αστοχίας που επιτρέπει ο κανονισμός. Στη συνέχεια πηγαίνοντας "αντίστροφα" την διαδικασία, θα βρούμε για ποια ισοδύναμη αρχική ατέλεια προβλέπεται αυτό το φορτίο (βάσει του συντελεστή α που προβέπει ο EC3 για τη συγκεκριμένη κατηγορία που εξετάζουμε), με στόχο να μπορέσουμε για τη συγκεκριμένη αυτή ατέλεια μέσω των δικών μας υπολογισμών και του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε να βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα όσο αφορά το πόσο κοντά και κατά πόσο ικανοποιητικές είναι οι λύσεις που προκύπτουν από τις δύο εφαρμογές σε σχέση με τον κανονισμό και εάν επιπλέον ο κανονισμός είναι σαφής και "επιτυχώς" περιορίζει την τιμή αστοχίας του φορτίου στη στιγμή που διαρρέει η πρώτη δυσμενέστερη ίνα (υπέρ της ασφαλείας), ή θα μπορούσε να αρθεί αυτός ο περιορισμός χωρίς όμως να καταργείται η ασφάλεια που επιζητούμε. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$\alpha = \overline{\delta\sigma} * \bar{h} * \frac{\lambda^2}{\bar{\lambda} - 0,2} \quad (4-2)$$

Όπου α είναι εδώ το 0,21, $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$, λ η λυγηρότητα, λ_1 η οριακή λυγηρότητα, $\bar{h} = \frac{R}{L}$ και $\overline{\delta\sigma} = \delta\sigma/L$ η ανηγμένη ατέλεια και θα λύσουμε την εξίσωση κάθε φορά ως προς το $\overline{\delta\sigma}$.

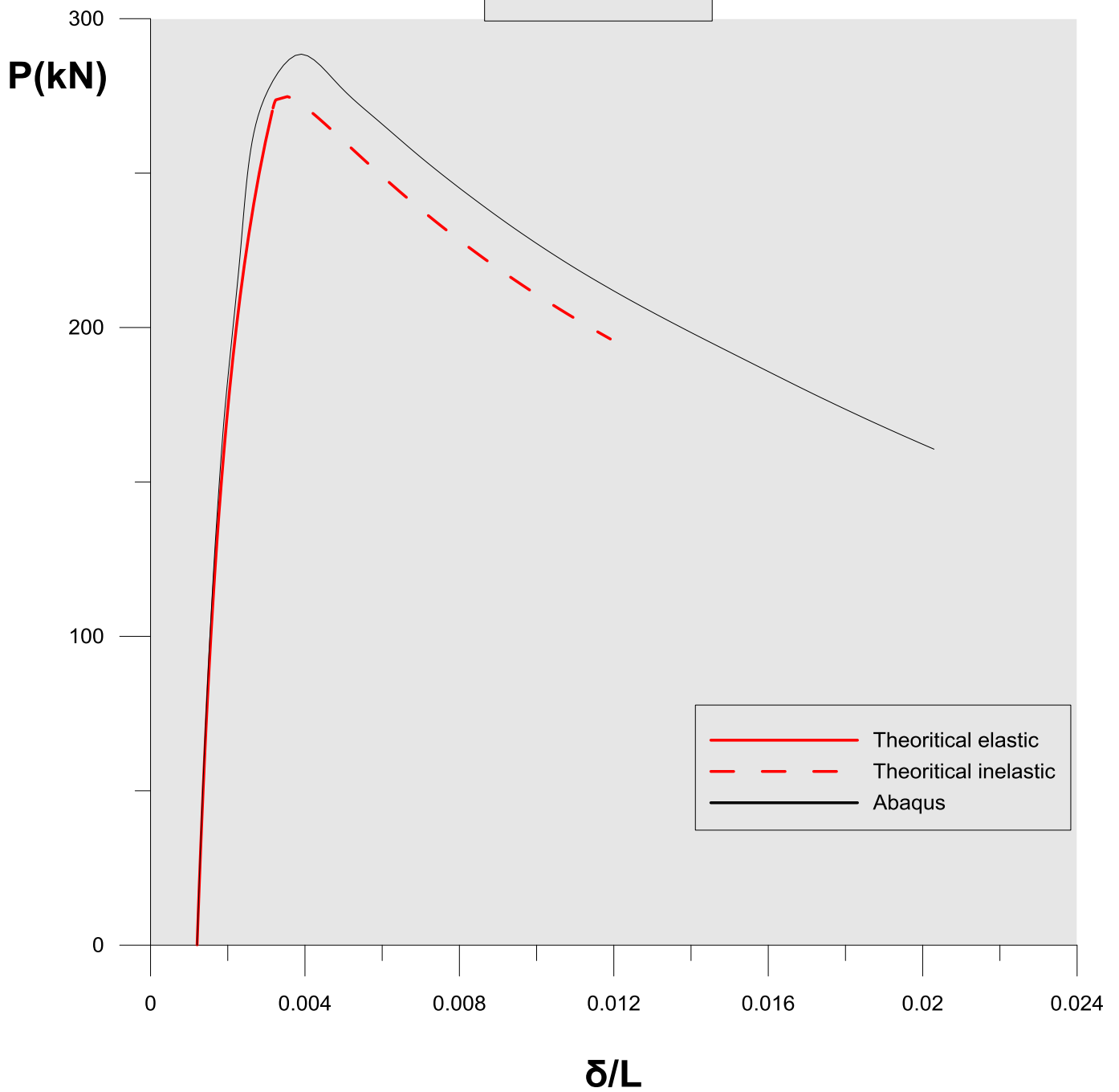
Έχουμε επιλέξει λοιπόν για το σκοπό αυτό έξι (6) διατομές κλιμακωτά αυξανόμενης διαμέτρου συνοδευόμενες από το αντίστοιχο διάγραμμα του δρόμου ισορροπίας βάση των δύο τρόπων επίλυσης και το κάθε διάγραμμα ακολουθείται από τον αντίστοιχο πίνακα όπου παρουσιάζεται το κρίσιμο φορτίο, το φορτίο που δίνει ο ευρωκώδικας και την διαφορά που δίνει η κάθε μέθοδος σε σχέση πάντα με τον ευρωκώδικα, καθώς φυσικά και από τις διαστάσεις και γενικά τα χαρακτηριστικά της κάθε επιλεγμένης διατομής.

Tubular D133



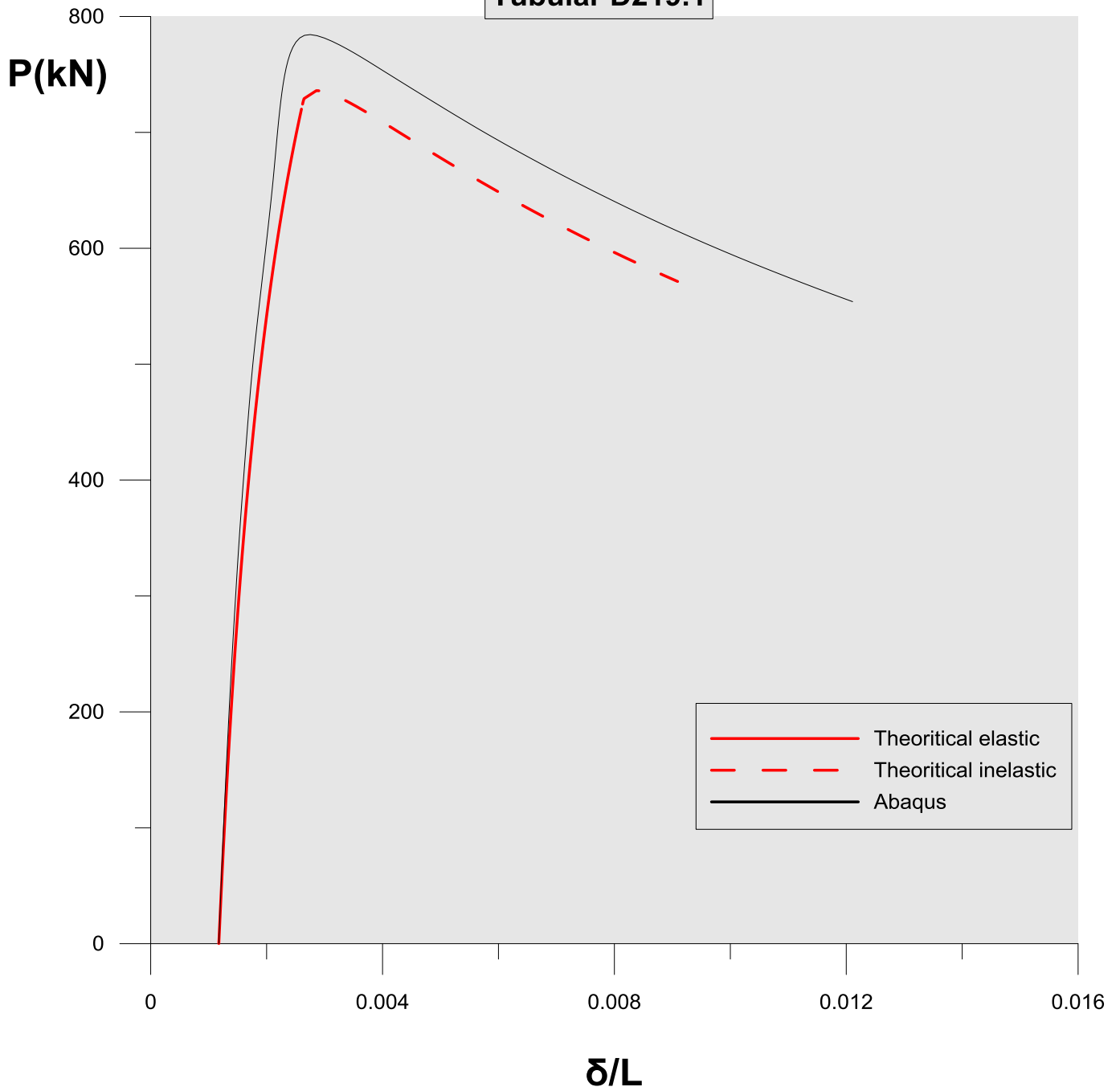
ΔΙΑΤΟΜΗ: Tubular 133											
	Αρχ.βέλος	L (m)	λ	S	R (mm)	R_o (mm)	t (mm)	P_{el} (kN)	P_{cr} (kN)	P_{EC3} (kN)	$(P_{cr}-P_{EC3})/P_{EC3}$ (%)
Θεωρ. Επίλυση	L/829.4645	4.00	87.661	235	66.5	62.5	4.0	270.474	274.778	270.474	1.59
Abaqus	L/829.4645	4.00	87.661	235	66.5	62.5	4.0	-	288.514	270.474	6.67

Tubular D152.4

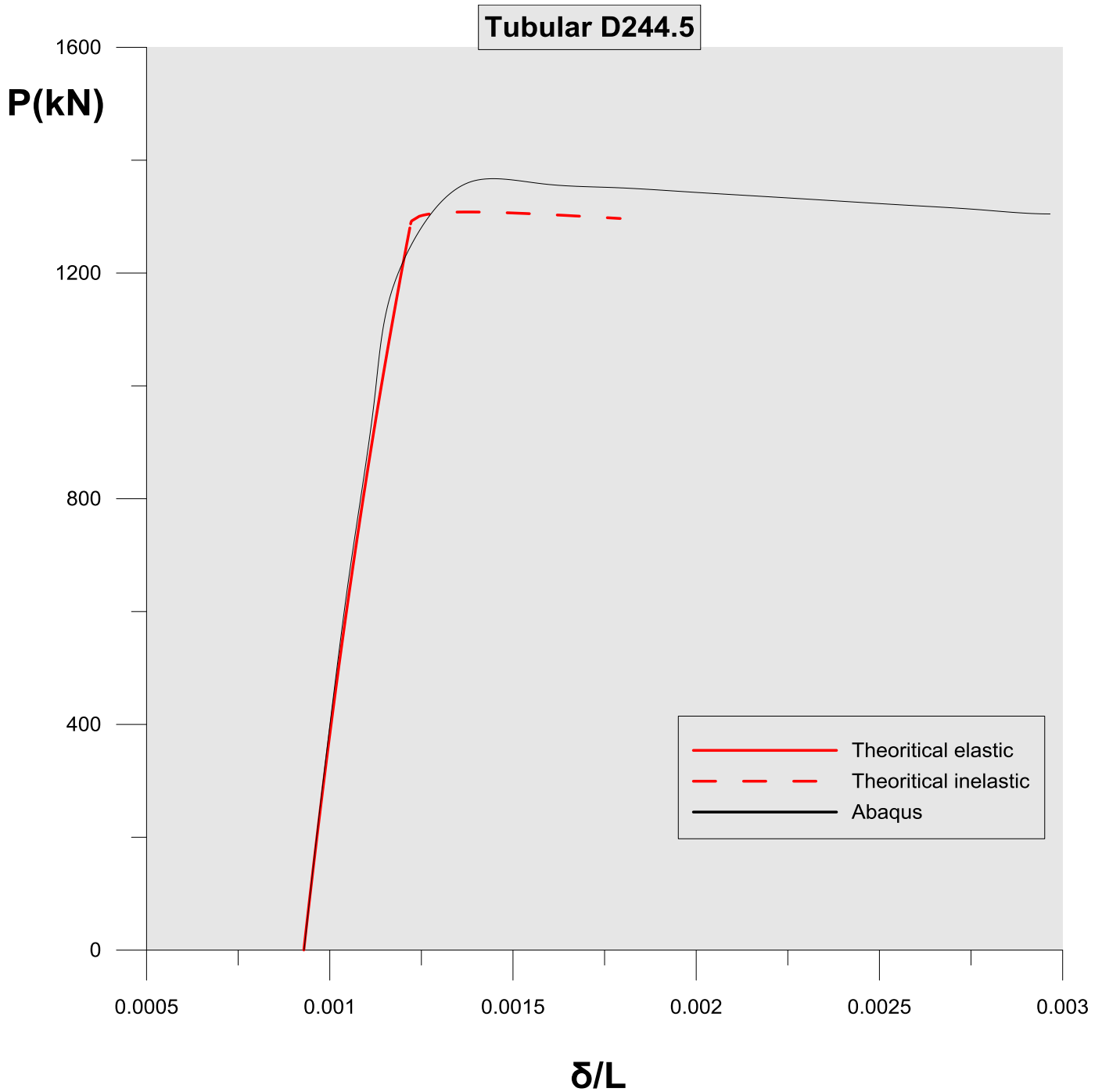


	ΔΙΑΤΟΜΗ: Tubular 152.4										
	Αρχ.βέλος	L (m)	λ	S	R (mm)	R_o (mm)	t (mm)	P_{el} (kN)	P_{cr} (kN)	P_{EC3} (kN)	$(P_{cr}-P_{EC3})/P_{EC3}$ (%)
Θεωρ. Επίλυση	L/861.6025	4.00	76.210	235	76.2	72.2	4.0	345.690	351.539	345.690	1.69
Abaqus	L/861.6025	4.00	76.210	235	76.2	72.2	4.0	-	365.851	345.690	5.83

Tubular D219.1

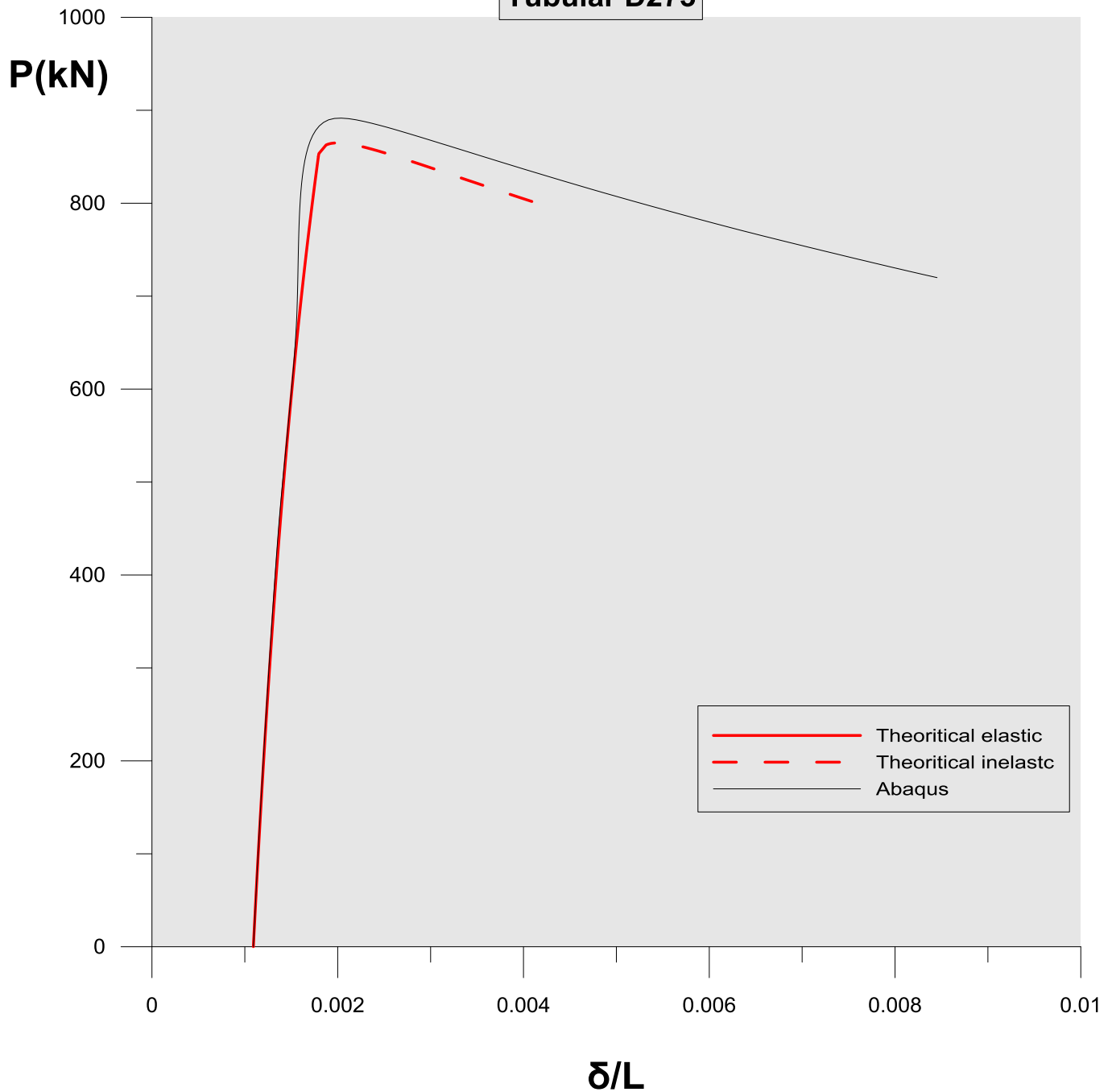


	ΔΙΑΤΟΜΗ: Tubular 219.1										
	Αρχ.βέλος	L (m)	λ	S	R (mm)	R _o (mm)	t (mm)	P _{el} (kN)	P _{cr} (kN)	P _{EC3} (kN)	(P _{cr} -P _{EC3})/P _{EC3} (%)
Θεωρ. Επίλυση	L/850.7164	6.00	79.605	235	109.55	103.55	6.0	723.707	735.984	723.707	1.70
Abaqus	L/850.7164	6.00	79.605	235	109.55	103.55	6.0	-	784.276	723.707	8.37



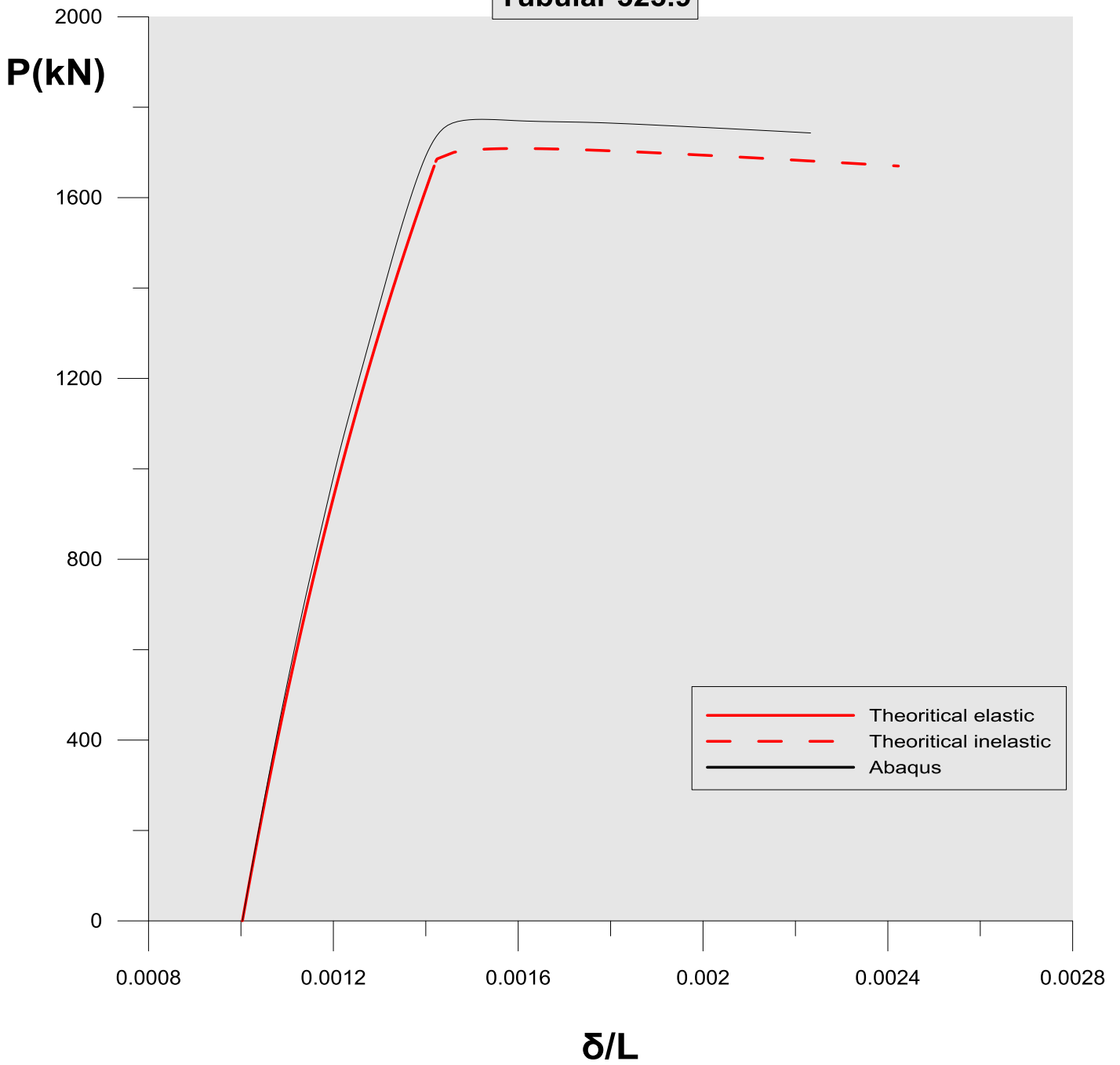
		ΔΙΑΤΟΜΗ: Tubular 244.5										
		Αρχ.βέλος	L (m)	λ	S	R (mm)	R_o (mm)	t (mm)	P_{el} (kN)	P_{cr} (kN)	P_{EC3} (kN)	$(P_{cr}-P_{EC3})/P_{EC3}$ (%)
Θεωρ. Επίλυση	L/1076.284	4.00	47.811	235	122.25	114.25	8.0	1286.402	1308.19	1286.402	1.69	
Abaqus	L/1076.284	4.00	47.811	235	122.25	114.25	8.0	-	1362.26	1286.402	5.90	

Tubular D273



	ΔΙΑΤΟΜΗ: Tubular 273										
	Αρχ.βέλος	L (m)	λ	S	R (mm)	R _o (mm)	t (mm)	P _{el} (kN)	P _{cr} (kN)	P _{EC3} (kN)	(P _{cr} -P _{EC3})/P _{EC3} (%)
Θεωρ. Επίλυση	L/915.8256	6.00	63.312	235	136.5	131.5	5.0	850.174	864.892	850.174	1.73
Abaqus	L/915.8256	6.00	63.312	235	136.5	131.5	5.0	-	890.597	850.174	4.75

Tubular 323.9

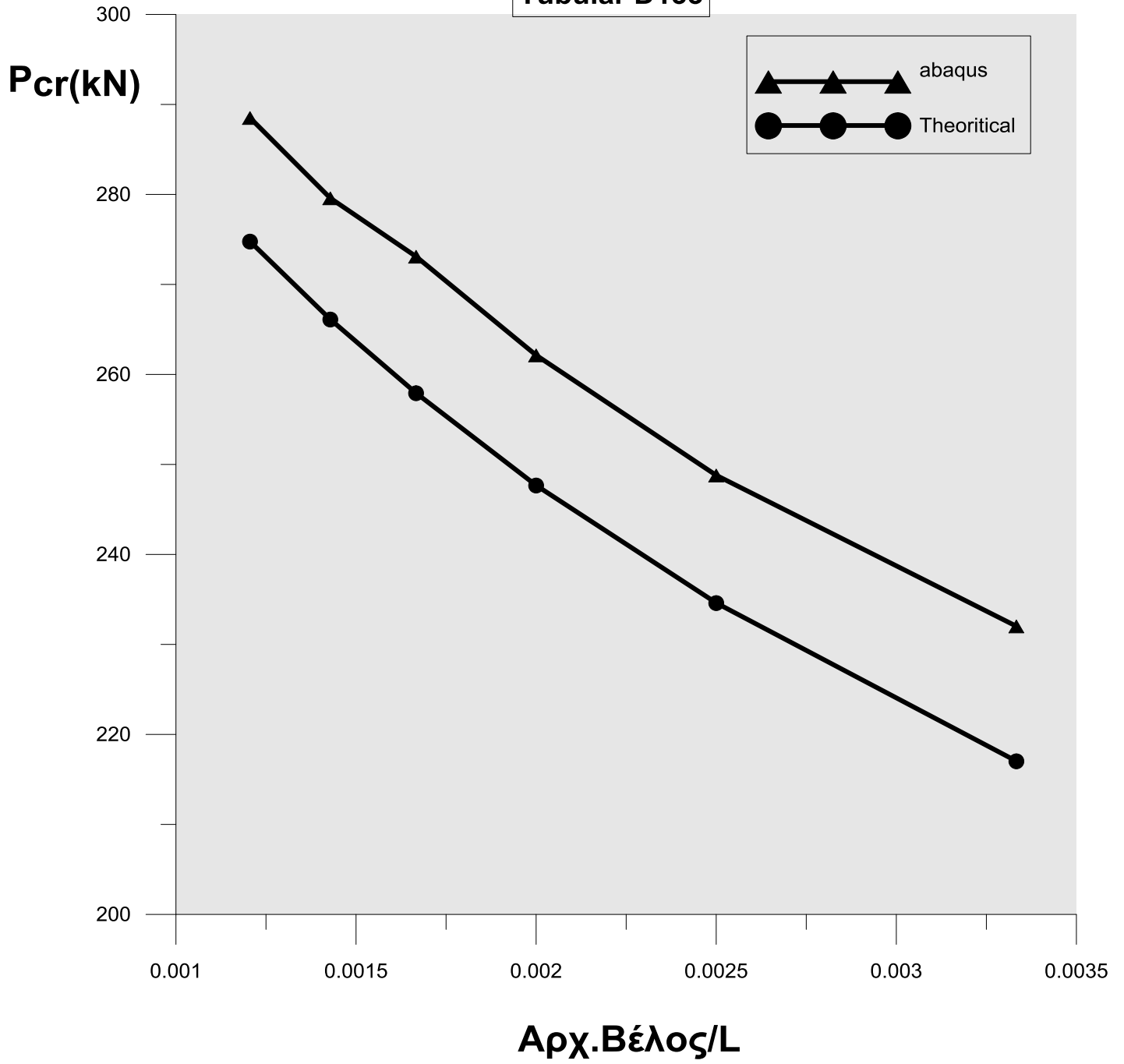


	ΔΙΑΤΟΜΗ: Tubular 323.9										
	Αρχ.βέλος	L (m)	λ	S	R (mm)	R _o (mm)	t (mm)	P _{el} (kN)	P _{cr} (kN)	P _{EC3} (kN)	(P _{cr} -P _{EC3})/P _{EC3} (%)
Θεωρ. Επίλυση	L/996.9145	6.00	53.704	235	161.95	153.95	8.0	1679.25	1708.69	1679.251	1.75
Abaqus	L/996.9145	6.00	53.704	235	161.95	153.95	8.0	-	1770.05	1679.251	5.41

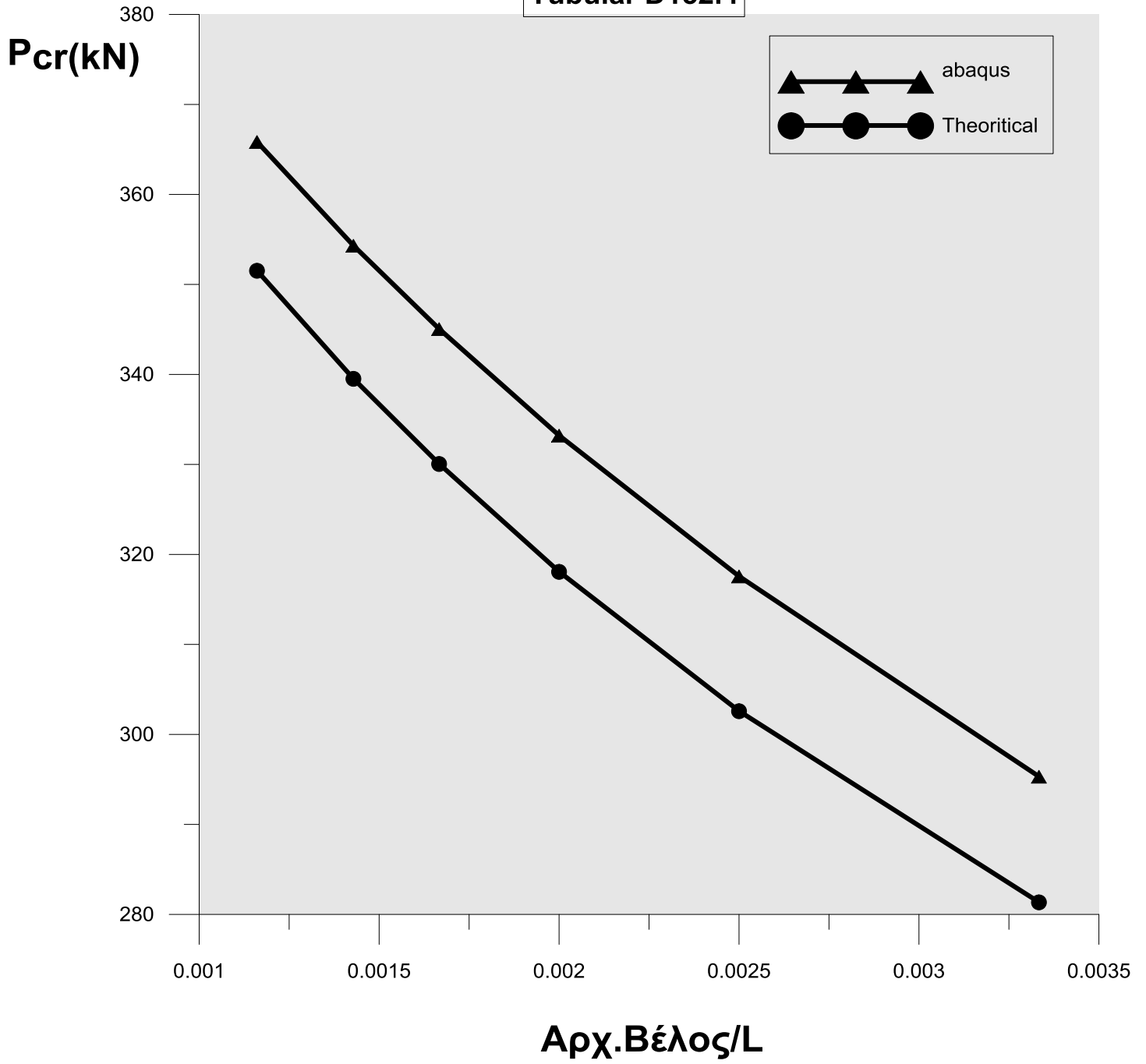
4.4.3.1 Καμπύλες Pcr-δτ/L

Όπως παρατηρήσαμε στα παραπάνω διαγράμματα αλλά και στους πίνακες που τα συνοδεύουν, είναι φανερό ότι ο κλάδος του δρόμου ισορροπίας με χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Abaqus δίνει για όλες τις διατομές υψηλότερα-μεγαλύτερα κρίσιμα φορτία. Δηλαδή φαίνεται ότι η διατομή μας αστοχεί υποβαλλόμενη σε μεγαλύτερη ένταση για τις συγκεκριμένες σταθές αρχικές ατέλειες του φορέα. Επιπρόσθετα γίνεται φανερό ότι η διαφορά των μέγιστων-κρίσιμων φορτίων μεταξύ προγράμματος και κανονισμού είναι κατά μέσο όρο της τάξεως του 6% σε αντίθεση με την θεωρητική μας επίλυση που είναι της τάξεως του 1.7% και φαίνεται να είναι σε συμφωνία με τον ευρωκώδικα και να τον επιβεβαιώνει πρακτικά στο να παίρνει ως μέγιστο φορτίο το φορτίο στο οποίο διαρρέει η πρώτη ίνα. Για να εξετάσουμε την αξιοπιστία πλέον του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ώστε να δούμε αν το παραπάνω γεγονός έτυχε να συμβεί για τις συγκεκριμένες ατέλειες του φορέα ή όχι, εξετάσαμε για τις ίδιες διατομές, για διάφορα αρχικά βέλη και με την ίδια καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων υλικού (ελαστικό-πλήρως πλαστικό), τα κρίσιμα φορτία που παίρνουμε από τις δύο επιλύσεις και τα παρουσιάσαμε σε διαγράμματα με άξονες τα "Pcr" και αντίστοιχα "αρχικό βέλος/L". Τα αποτελέσματα που πήραμε παρουσιάζονται παρακάτω.

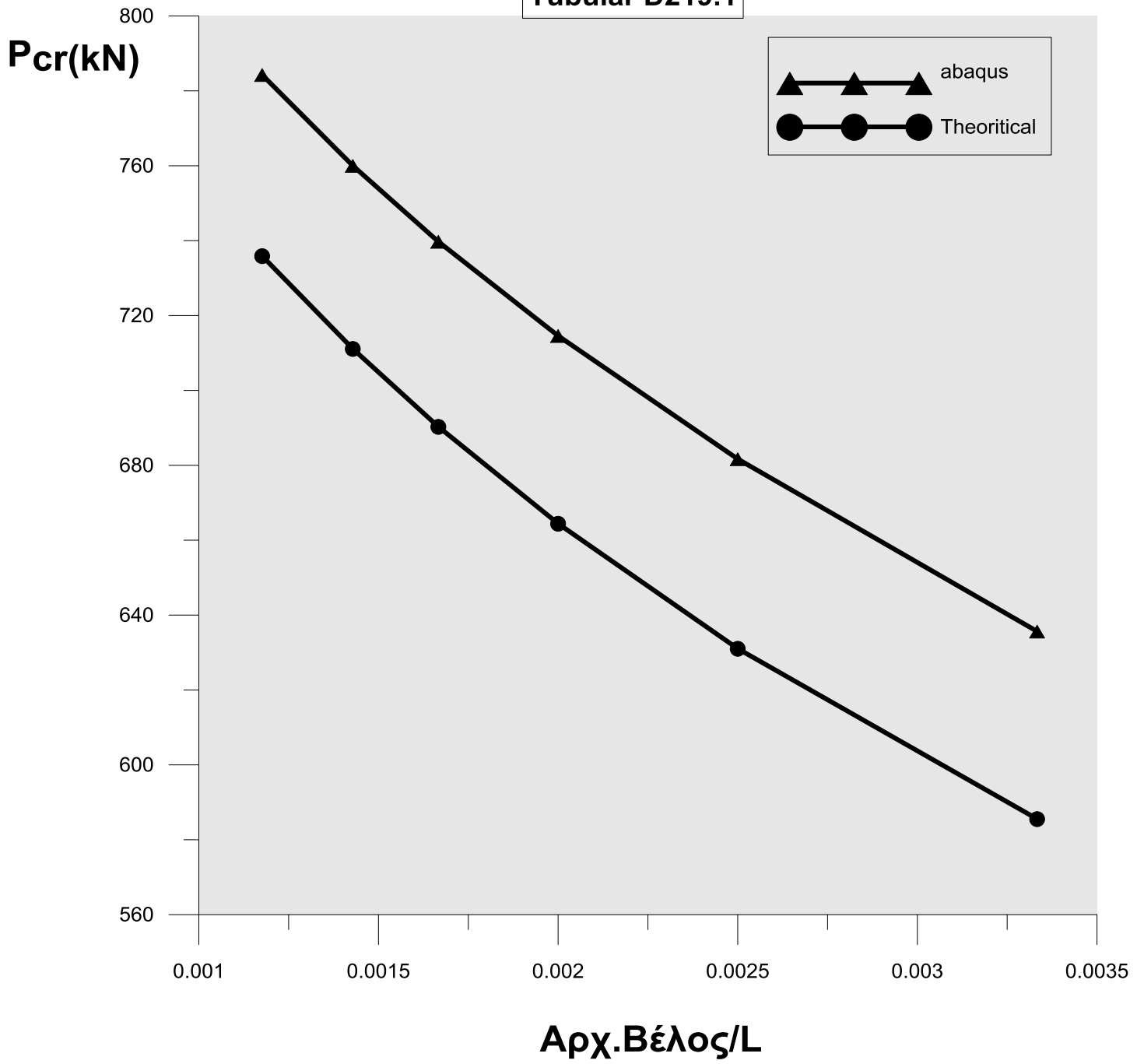
Tubular D133

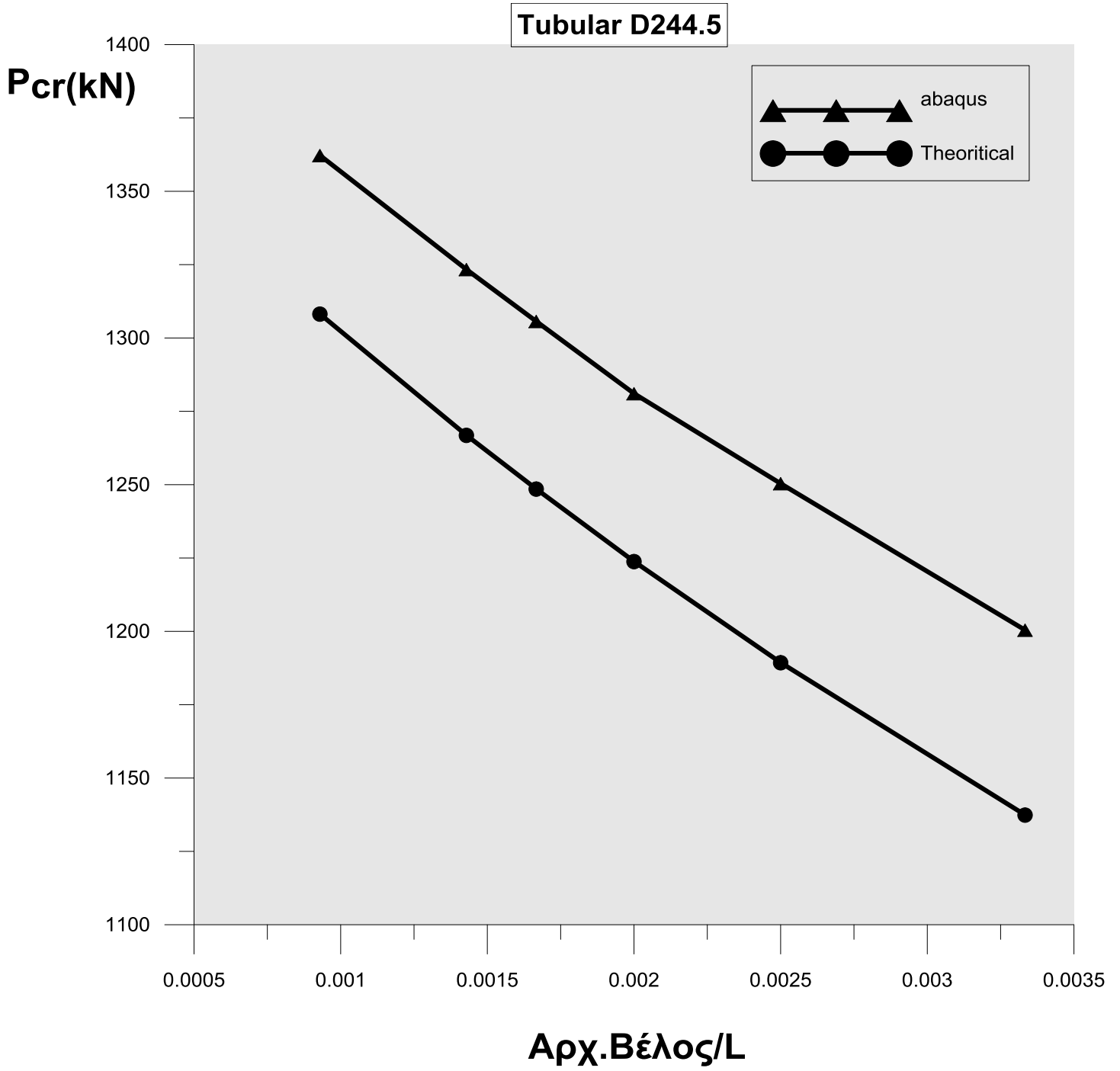


Tubular D152.4

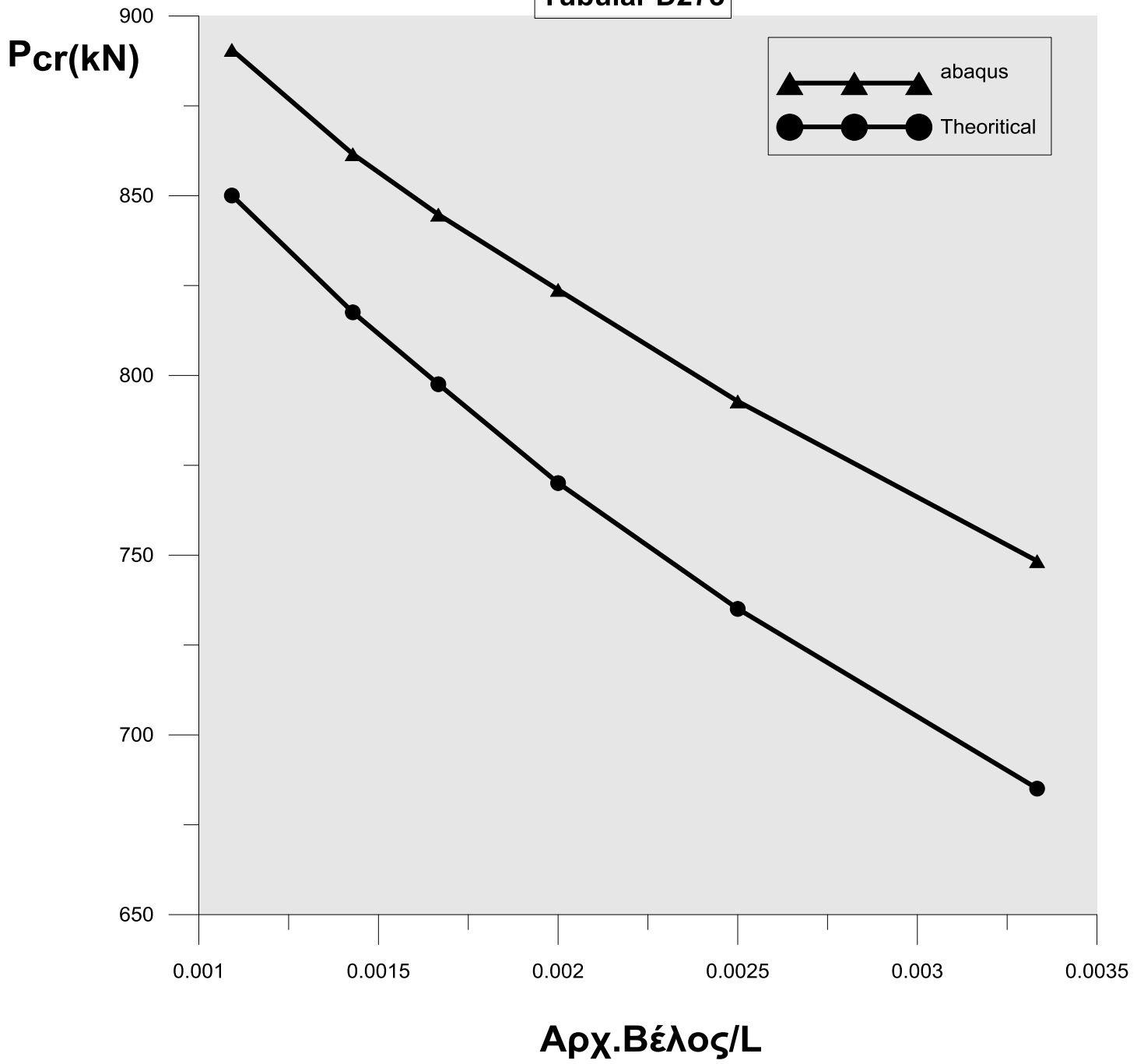


Tubular D219.1





Tubular D273



4.4.3.2 Καμπύλες Pcr-λ

Τέλος, παρουσιάζουμε μία σειρά διαγραμμάτων όπου για κάθε διατομή, με το ισοδύναμο αρχικό βέλος ($L/1000$ το οποίο κινείται στο πλαίσιο των ισοδύναμων αρχικών βελών που προκύπτουν από τον κανονισμό για τις ράβδους σωληνωτής διατομής), έχουμε τις καμπύλες λ -Pcr.

Να θυμηθούμε ότι η χαρακτηριστική ή οριακή λυγηρότητα εξαρτάται από την ποιότητα του χάλυβα και ισούται με :

$$\lambda_1 = 93,9 \varepsilon$$

Για χάλυβα S235, $\varepsilon = 1$, άρα $\lambda_1 = 93,9$

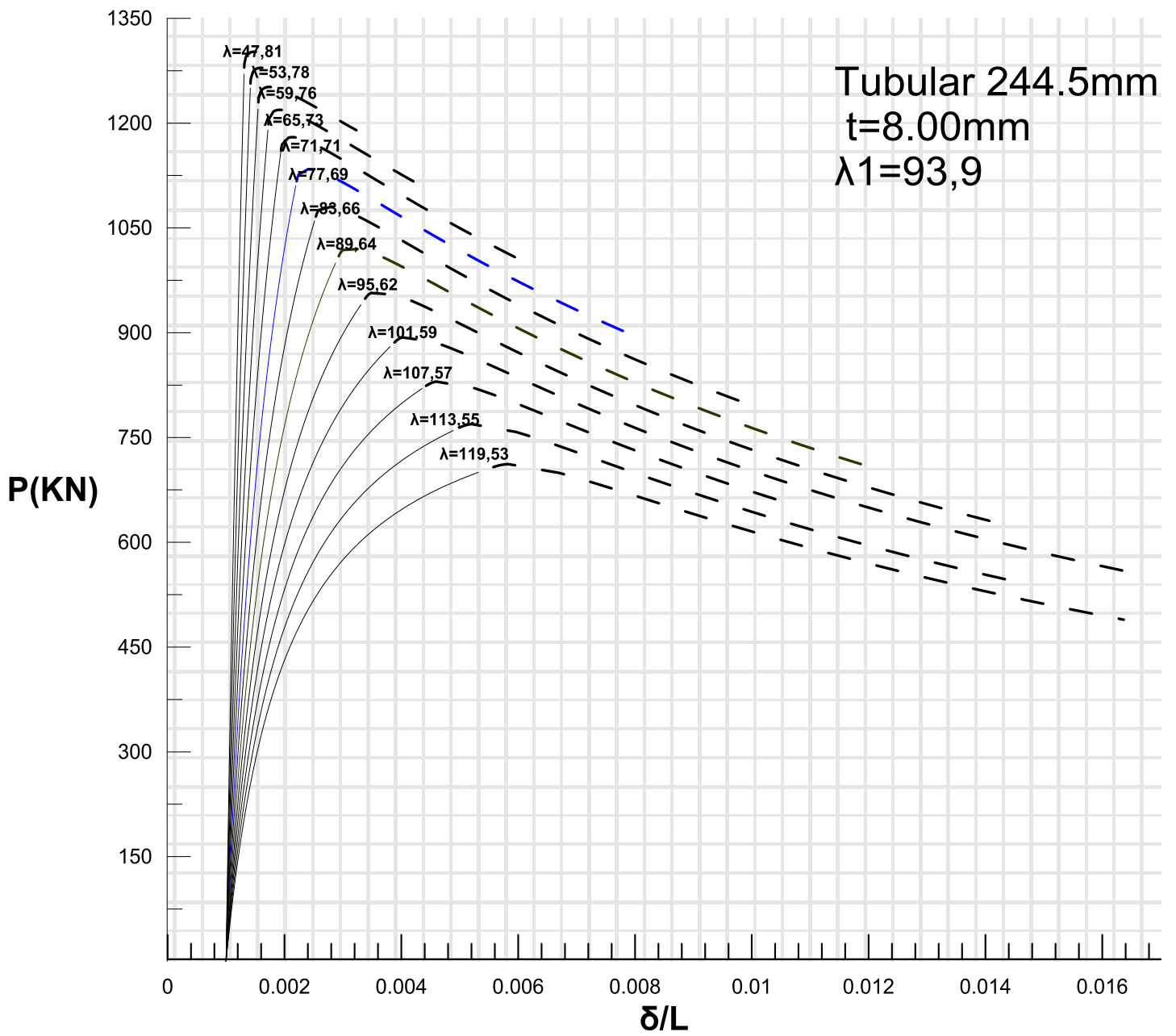
S275, $\varepsilon = 0,92$, άρα $\lambda_1 = 86,8$

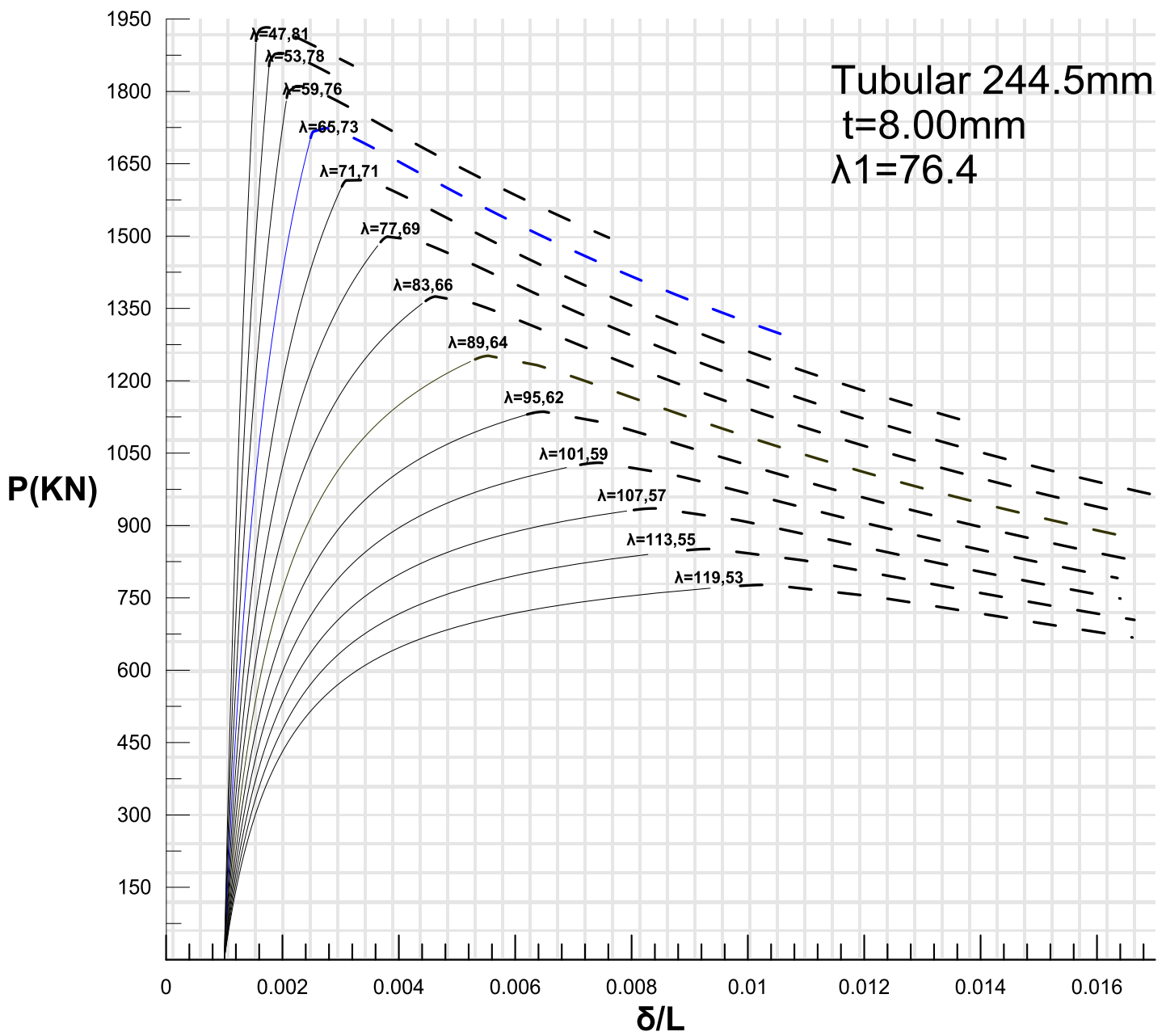
S355, $\varepsilon = 0,81$, άρα $\lambda_1 = 76,4$

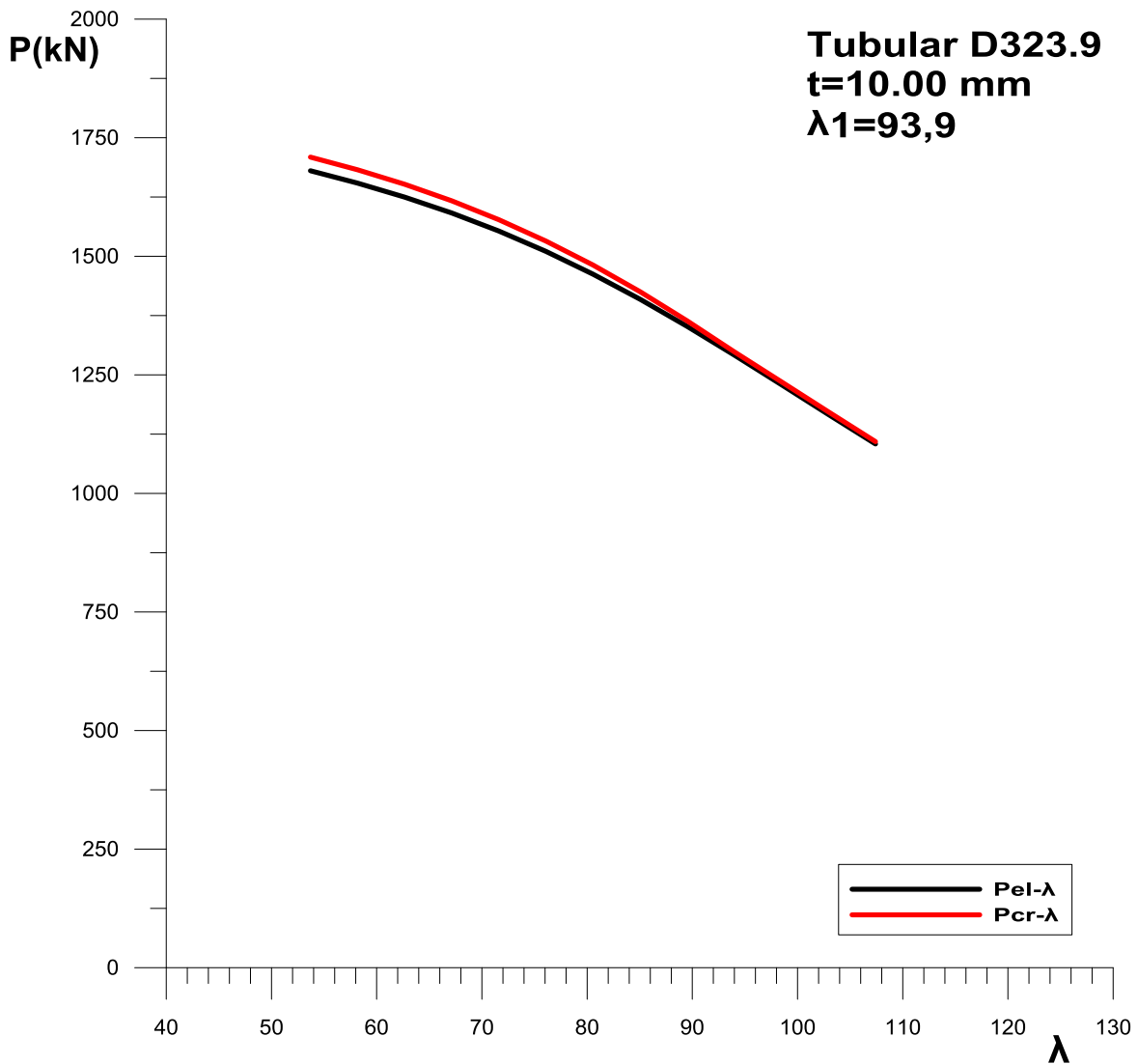
Και η καμπύλη Euler που προκύπτει :

$$\sigma_E = f_y \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = f_y \rightarrow f_y = \frac{\pi^2 E i^2}{L^2} \rightarrow f_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

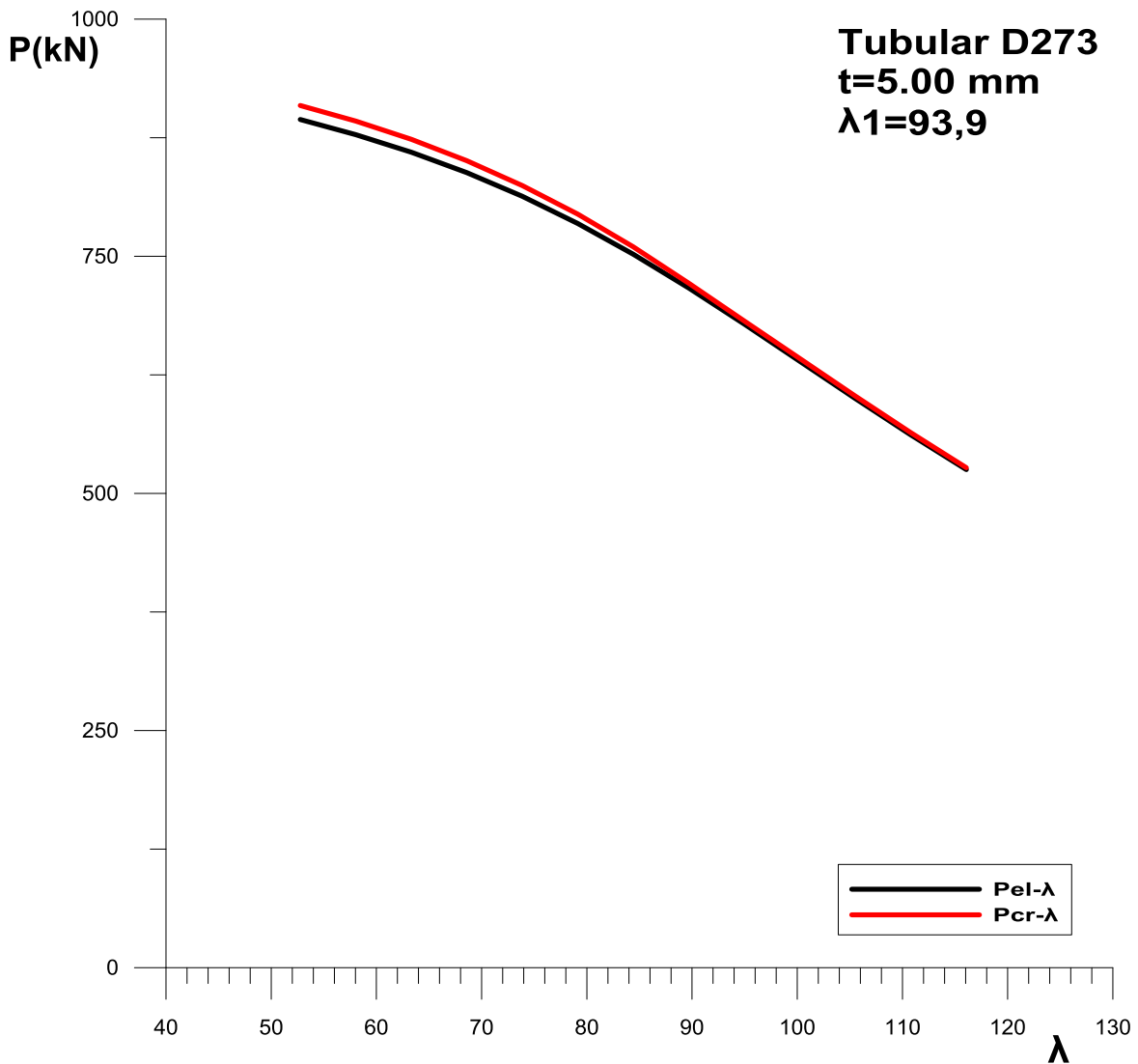
Οι πρώτες δύο καμπύλες παρουσιάζουν το πώς μεταβάλλεται η γραμμικότητα του ελαστικού κλάδου των μετατοπίσεων (δ) καθώς αυξάνεται η λυγηρότητα του φορέα. Εδώ εμφανίζονται δύο καμπύλες για μια συγκεκριμένη διατομή αλλά με αλλαγή της ποιότητας του χάλυβα (S235 και S355), επομένως και των οριακών λυγηροτήτων (λ_1). Στις επόμενες καμπύλες πλέον παρουσιάζουμε το φορτίο πρώτης διαρροής και το κρίσιμο φορτίο ανελαστικού λυγισμού όπως αυτό προκύπτει από τη θεωρητική προσέγγισή μας σε γράφημα με άξονες Pcr-λ.



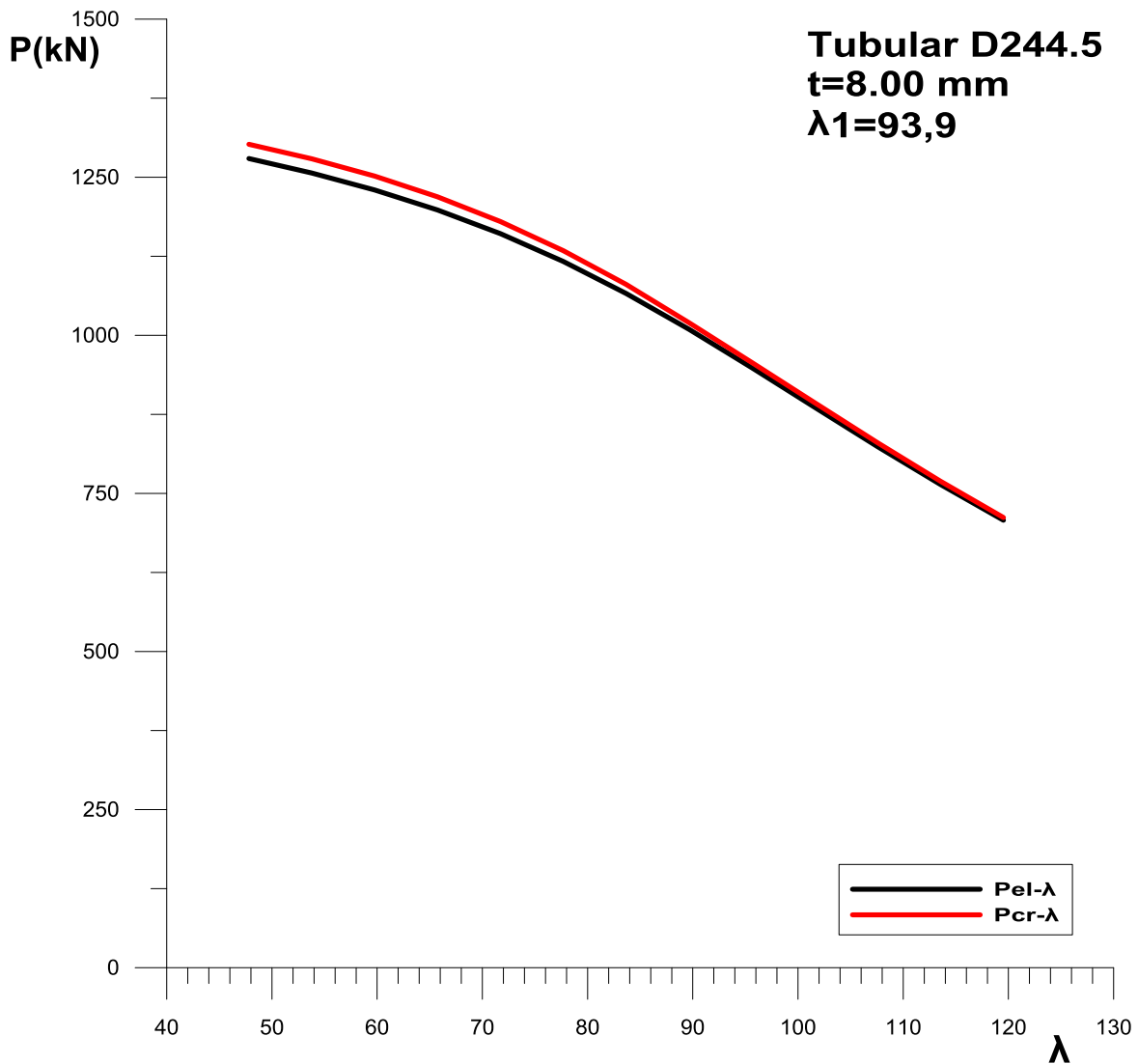




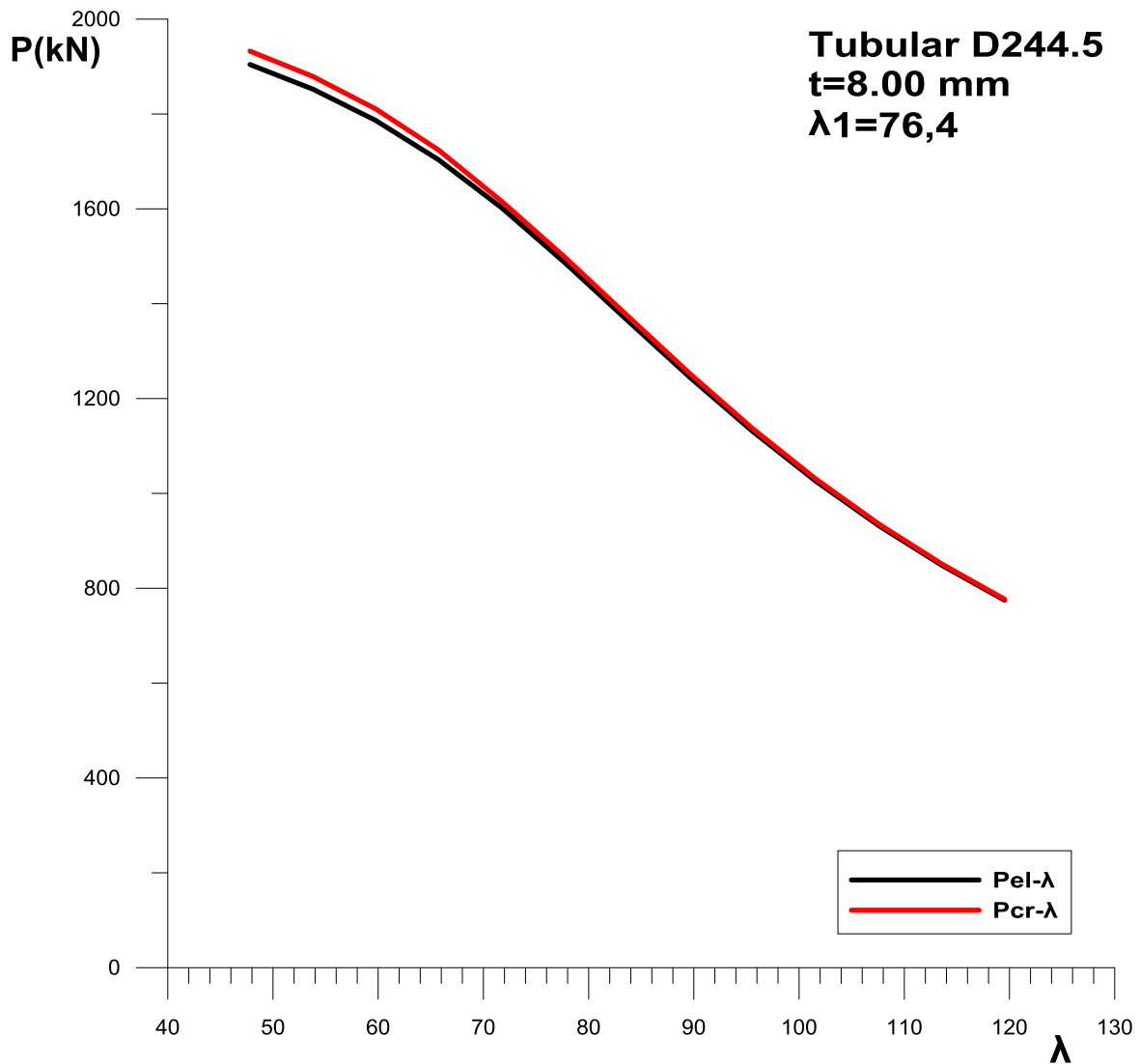
Pel	Pcr	λ	P_{Euler}	(Pcr-Pel)/Pel (%)
1680.347	1709.112	53.70409	5705.5	1.711814969
1654.29	1682.425	58.17944	4861.491	1.700685056
1624.796	1651.887	62.65478	4191.796	1.667344685
1591.311	1616.957	67.13012	3651.52	1.611608417
1553.311	1577.152	71.60546	3209.344	1.534891866
1510.386	1532.126	76.0808	2842.879	1.439378688
1462.366	1481.668	80.55614	2535.778	1.319894063
1409.441	1425.335	85.03148	2275.878	1.127676223
1352.238	1363.849	89.50682	2053.98	0.858701489
1291.797	1298.638	93.98217	1863.02	0.529517802
1229.431	1235.4	98.45751	1697.504	0.485574636
1166.516	1171.986	102.9328	1553.104	0.46892005
1104.306	1109.248	107.4082	1426.375	0.44754845



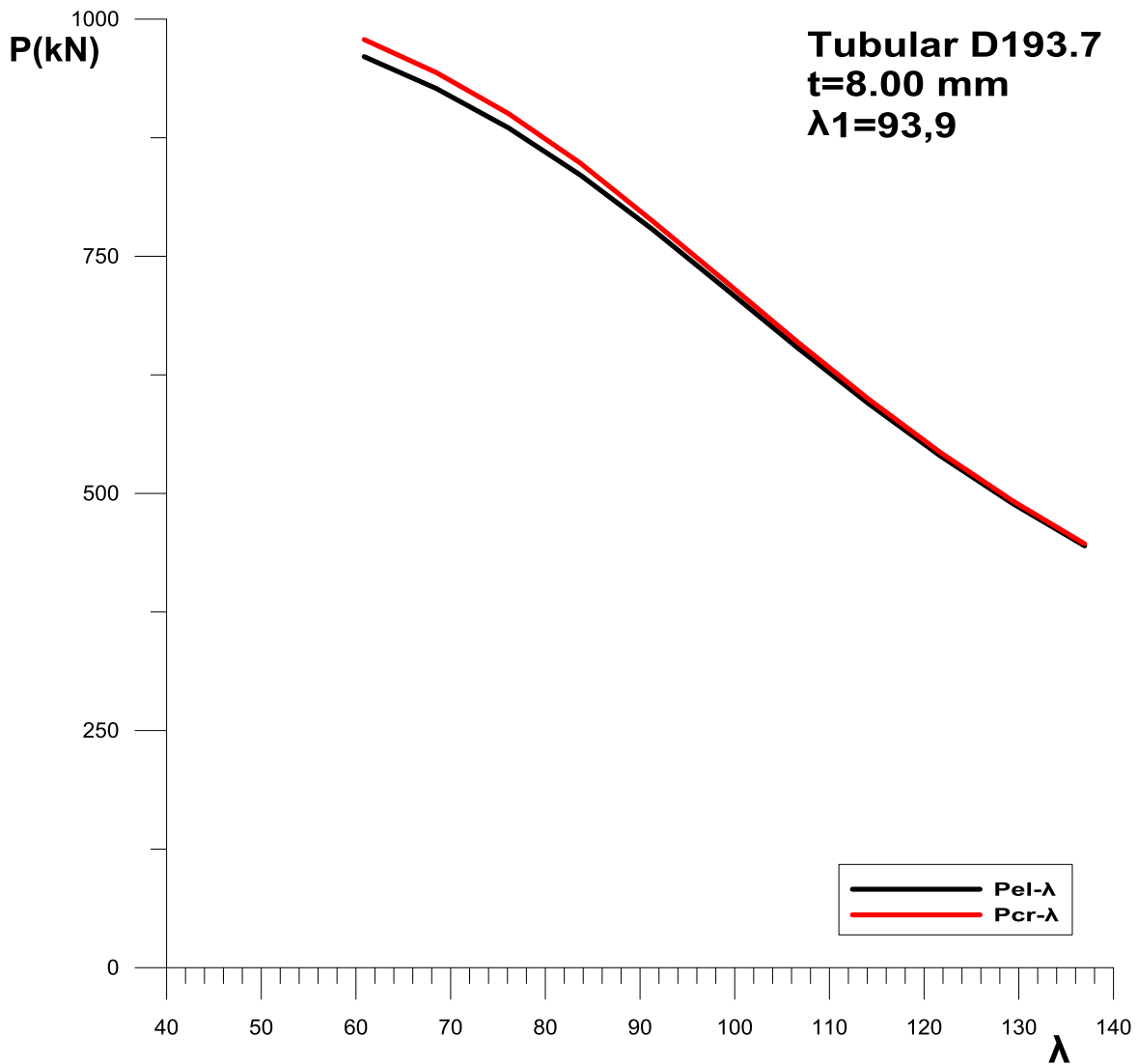
Pel	Pcr	λ	P _{Euler}	(Pcr-Pel)/Pel (%)
894.2102	908.9756	52.75998	3134.472	1.651230606
878.2217	892.5609	58.03598	2590.473	1.63275598
859.7125	873.3189	63.31198	2176.717	1.582662526
838.2007	850.7889	68.58798	1854.717	1.501807402
813.2441	824.5684	73.86397	1599.221	1.392480082
784.558	794.4244	79.13997	1393.099	1.257577045
752.1663	759.9434	84.41597	1224.403	1.033953488
716.523	721.5557	89.69197	1084.593	0.702370327
678.5119	681.7275	94.96797	967.4297	0.473917486
639.2877	642.2153	100.244	868.2749	0.457944724
600.0305	602.6331	105.52	783.6181	0.433746903
561.7379	564.0135	110.796	710.7647	0.405088192
525.1261	527.0952	116.072	647.6183	0.374978369



Pel	Pcr	λ	P_{Euler}	(Pcr-Pel)/Pel (%)
1279.588	1302.094	47.81075	5389.383	1.758868766
1256.693	1279.184	53.78709	4258.278	1.789665935
1229.892	1251.805	59.76343	3449.205	1.781722203
1198.242	1219.027	65.73977	2850.583	1.734654948
1160.792	1179.936	71.71612	2395.281	1.64921677
1116.809	1133.882	77.69246	2040.95	1.528671002
1066.137	1080.484	83.6688	1759.798	1.345775029
1009.534	1019.897	89.64515	1532.98	1.02658244
948.7392	956.9809	95.62149	1347.346	0.868700682
886.0908	893.3342	101.5978	1193.497	0.817450643
823.913	830.0872	107.5742	1064.569	0.749375721
764.0404	769.1973	113.5505	955.4584	0.674941285
707.6547	711.9101	119.5269	862.3012	0.601331581



Pel	Pcr	λ	P_{Euler}	(Pcr-Pel)/Pel (%)
1904.343	1932.563	47.81075	5389.383	1.481872167
1852.398	1879.146	53.78709	4258.278	1.443952318
1786.461	1810.698	59.76343	3449.205	1.356711992
1703.456	1723.979	65.73977	2850.583	1.204821086
1602.604	1616.133	71.71612	2395.281	0.844177771
1487.439	1498.86	77.69246	2040.95	0.767805271
1365.353	1374.859	83.6688	1759.798	0.696256057
1244.352	1251.86	89.64515	1532.98	0.603332476
1130.207	1135.962	95.62149	1347.346	0.509201318
1025.854	1030.201	101.5978	1193.497	0.423785326
932.1475	935.4757	107.5742	1064.569	0.357044676
848.777	851.3732	113.5505	955.4584	0.3058783
774.8955	776.9285	119.5269	862.3012	0.262366754



Pel	Pcr	λ	P _{Euler}	(Pcr-Pel)/Pel (%)
960.4779	978.4921	60.8682	2610.898	1.875548346
926.9125	943.7597	68.47672	2062.932	1.817560322
885.533	900.5651	76.08525	1670.975	1.697525367
835.7095	848.2695	83.69377	1380.971	1.502914952
778.4936	787.2842	91.3023	1160.399	1.129175142
716.8248	724.3935	98.91082	988.7424	1.055867216
654.4907	660.6242	106.5193	852.5381	0.937139975
594.6993	599.4766	114.1279	742.6554	0.80330865
539.397	543.0337	121.7364	652.7245	0.674212702
489.3875	492.1937	129.3449	578.1919	0.573404214
444.7343	446.902	136.9534	515.7329	0.487427091

Κεφάλαιο 5ο: Συμπεράσματα

5.1 : Επιρροή Αρχικού Βέλους

Όπως είδαμε στα διαγράμματα, και όπως ήταν αναμενόμενο από τη θεωρία, μεγαλύτερο αρχικό βέλος σημαίνει διαρροή σε μικρότερο φορτίο και με ακόμη μεγαλύτερο τελικό βέλος. Ωστόσο, όσο μεγαλύτερο το αρχικό βέλος, τόσο μεγαλύτερη και η διαφορά ανάμεσα στο φορτίο πρώτης διαρροής και στο κρίσιμο φορτίο του ανελαστικού λυγισμού.

5.2 : Ισοδύναμα Αρχικά Βέλη Ευρωκώδικα

Τα αρχικά βέλη τα οποία προτείνει ο Ευρωκώδικας ως ισοδύναμα, δεν είναι σταθερά, αλλά μεταβάλλονται ανάλογα με τη διατομή, τη λυγηρότητα και την ποιότητα του χάλυβα. Πιο συγκεκριμένα:

- Όσο μεγαλύτερη διατομή έχουμε, για ίδιο μήκος φορέα, ο EC3 μας δίνει ελαφρώς μικρότερο αρχικό βέλος.
- Η αύξηση της λυγηρότητας μας δίνει μεγαλύτερα αρχικά βέλη.
- Αλλαγή της ποιότητας του χάλυβα που συνεπάγεται αύξηση της τάσης διαρροής, μας επιτρέπει ακόμα μεγαλύτερα αρχικά βέλη.

Τέλος γίνεται φανερό ότι για τις κοίλοδοκούς που εξετάσαμε εμείς ο κανονισμός φαίνεται να δίνει γενικά μικρές ατέλειες (της τάξης του L/850 – L/1100), τις οποίες ατέλειες συναντάμε στο εμπόριο συνήθως. Αυτό μπορούμε να πούμε ότι συμβαίνει λόγω του ότι στις διατομές μορφής σωλήνα, δεν παρατηρούνται συγκεντρώσεις παραμενουσών τάσεων (σε αντίθεση πχ με τις διατομές I όπου εκεί ο κανονισμός "δίνει" μεγαλύτερο ισοδύναμο αρχικό βέλος).

5.3 : Διαφορά Φορτίου Πρώτης Διαρροής με Κρίσιμο Φορτίο

Και εδώ η διαφορά των φορτίων αναφοράς μεταβάλλεται ανάλογα με τη διατομή, τη λυγηρότητα και την ποιότητα του χάλυβα. Πιο συγκεκριμένα:

- αύξηση της λυγηρότητας συνεπάγεται μείωση της ποσοστιαίας διαφοράς πλαστικού-ελαστικού φορτίου με αντίστοιχα μεγάλες παραμορφώσεις και έντονα μη γραμμικό ελαστικό κλάδο.
- Η αύξηση δε της τάσης διαρροής του χάλυβα έχει εξίσου επιρροή στη διαφορά πλαστικού-ελαστικού φορτίου με τάση να την μικραίνει (επί της %), ενώ φαίνεται να μειώνει το βάθος εισροής της διαρροής στη διατομή.
- Επιπλέον, μεγάλη είναι η επιρροή της διατομής, όπου αύξηση των διαστάσεων μας δίνει μικρότερες διαφορές.

Τέλος όσο αφορά τα συγκριτικά αποτελέσματα μεταξύ της θεωρητικής πορείας που ακολουθήσαμε και του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Abaqus σε σχέση με τον κανονισμό, παρατηρούμε ότι:

- Στην θεωρητική μας επίλυση το φορτίο ανελαστικού λυγισμού είναι πολύ κοντά στο φορτίο πρώτης διαρροής που δίνει ο κανονισμός, με την απόκλιση να είναι της τάξεως του 1.5%-2%. Σε αντίθεση με την επί της % διαφορά των αποτελεσμάτων από το πρόγραμμα Abaqus που κυμαίνεται περίπου από 5.5% έως 7%.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Βάγιας Κ. Ιωάννης, 'Σιδηρές κατασκευές, ανάλυση και διαστασιολόγηση', Εκδόσεις Κλειδάριθμος 2003
2. Βάγιας Ι., Ερμόπουλος Ι., Ιωαννίδης Γ., 'Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα με βάση τα τελικά κείμενα των Ευρωκωδίκων', Εκδόσεις Κλειδάριθμος 2005
3. Bazant Z. P., Cedolin L., 'Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories', Dover Publications, Mineola, New York
4. Κουνάδης Ν. Αντώνιος, 'Τραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας', Εκδόσεις Συμεών 1997
5. Κουνάδης Ν. Αντώνιος, 'Σιδηρές Κατασκευές, Συμπεριφορά και Ανάλυσις, Τομος ΙΙ', Εκδόσεις Συμεών 1999
6. Timoshenko S. P., Gere J. M., 'Theory of elastic stability', McGraw-Hill, New York, 1961