



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

---

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΟΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ  
ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΚΑΙ ΑΤΕΛΗ  
ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ COSSERAT

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γιάχου Σεβαστή

Επιβλέπων: Καττής Μαρίνος  
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

**Αθήνα, Μάιος 2014**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	2
ABSTRACT.....	3
<b>1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....</b>	<b>4</b>
ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	4
<b>2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....</b>	<b>6</b>
ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ COSSERAT .....	6
2.1 Οι εξισώσεις της 3D παραμόρφωσης .....	6
2.2 Οι εξισώσεις της 2D παραμόρφωσης .....	8
<b>3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....</b>	<b>14</b>
ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ.....	14
3.1 Διατύπωση του προβλήματος και συνοριακές συνθήκες .....	14
3.2 Οι εξισώσεις των ελαστικών πεδίων .....	16
3.3 Προσδιορισμός των άγνωστων σταθερών των ελαστικών πεδίων.....	17
<b>4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....</b>	<b>21</b>
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....	21
4.1 Μήτρα Cosserat- ανομοιογένεια Cauchy. ....	21
4.2 Μήτρα Cauchy- ανομοιογένεια Cosserat .....	28
4.3 Μήτρα Cosserat- ανομοιογένεια Cosserat.....	31
<b>5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....</b>	<b>34</b>
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	34
<b>6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>36</b>
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I: Μητρικά συστήματα.....	38
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II: Λογισμικά Προγράμματα .....	40

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια της ελαστικότητας Cosserat, μελετάται το αντιεπίπεδο ελαστικό πρόβλημα μιας ελαστικής ανομοιογένειας που είναι ένθετη σε μια ελαστική μήτρα, για τέλεια και ατελή διεπιφανειακή σύνδεση των δύο υλικών. Η ανομοιογένεια είναι κυλινδρικής μορφής με κυκλική διατομή, ενώ η μήτρα που την περιβάλλει έχει διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες από την ανομοιογένεια και εκτείνεται στο άπειρο. Στην παρούσα εργασία, για την προσομοίωση της ατελούς σύνδεσης των δύο υλικών εισάγεται ένα νέο μοντέλο που αποτελεί την επέκταση του ελατηριακού μοντέλου της κλασσικής ελαστικότητας, στην ελαστικότητα Cosserat. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η διεπιφανειακή σύνδεση των δύο υλικών περιγράφεται με ελατήρια δύναμης και ροπής που είναι διανεμημένα στην διεπιφάνεια και έχουν αμελητέο πάχος. Με βάση το μοντέλο της τέλει διεπιφάνειας, και το μοντέλο της ατελούς διεπιφάνειας που εισάχθηκε στην παρούσα εργασία, επιλύθηκαν τα σχετικά αντιεπίπεδα ελαστικά προβλήματα, για μια ομοιόμορφη φόρτιση διατμητικών τάσεων στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Με βάση τα ελαστικά πεδία που αποκτήθηκαν διερευνήθηκε η επίδραση των χαρακτηριστικών μηκών μικροδομής των δύο υλικών πάνω στην συγκέντρωση τάσης στην διεπιφάνεια. Για τους δύο τύπους διεπιφανειακών συνθηκών που προαναφέρθηκαν, δείχθηκε ότι η μέγιστη εφαπτομενική διατμητική τάση εμφανίζεται στην μήτρα για την περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας, και στην ανομοιογένεια, για την περίπτωση της σκληρής ανομοιογένειας. Η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων στην διεπιφάνεια αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση που τα δύο υλικά προσεγγίζουν την συμπεριφορά υλικών Cauchy. Με την αύξηση των χαρακτηριστικών μηκών μικροδομής των δύο υλικών, η συγκέντρωση των διεπιφανειακών τάσεων μειώνεται έχοντας ένα κάτω φράγμα, που αντιστοιχεί στο 60 % της παραπάνω μέγιστης συγκέντρωσης. Δείχθηκε επίσης ότι ο σχηματισμός μιας ελατηριακής διεπιφάνειας σε ένα διυλικό επιφέρει πάντα αύξηση της συγκέντρωσης των διεπιφανειακών τάσεων.

**ABSTRACT**

In the context of Cosserat elasticity, the anti-plane elasticity problem of a circular inhomogeneity embedded in an infinite matrix is studied for both perfect and imperfect interface bonding of the constituent materials. The inhomogeneity is a cylinder of circular cross-section, while the surrounding matrix is extended to infinity. In the current work, the imperfect interface bonding is simulated by introducing a new interface model, which constitutes the extension of the spring-type interfacial model of classical elasticity to Cosserat elasticity. According to this model, the interface bonding is described by force and couple springs of vanishing thickness distributed over the interface surface. Based on this model, the relative anti-plane elasticity problems are analyzed for a remote shear stress in the matrix. The elastic fields obtained are used to investigate the influence of the characteristic lengths of the constituent materials on the stress concentration in the vicinity of interface. The numerical results show that the maximum interface tangential shear stress appears in the matrix in the case of a soft interface, and in the inhomogeneity in the case of a hard interface. Also, the results show that the formation of a spring-type interface in a composite material consisting of Cosserat materials always increases the stress concentration in the vicinity of interface.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των ετερογενών υλικών στα πλαίσια της κλασσικής ελαστικότητας, έχουν εισαχθεί δύο μοντέλα για να προσομοιώσουν την διεπιφανειακή σύνδεση των επιμέρους συστατικών τους: το μοντέλο της ελατηριακής διεπιφάνειας και το μοντέλο της ελαστικής μεμβράνης. Το πρώτο μοντέλο περιγράφει την συμπεριφορά μιας ασθενούς διεπιφανειακής σύνδεσης των δύο υλικών, που επιτρέπει ένα άλμα στην μετατόπιση των συνδεόμενων επιφανειών. Οι εφαπτομενικές και ορθές συνιστώσες του άλματος μετατόπισης θεωρούνται ότι είναι ανάλογες των αντίστοιχων συνιστωσών των ελκυστών τάσεων στην διεπιφάνεια. Το δεύτερο μοντέλο περιγράφει μία ισχυρή διεπιφανειακή σύνδεση, που επιτυγχάνεται μέσω ενός μηχανισμού υλικών δεσμών που εμπλέκει μεμβρανικές τάσεις (δύναμη/μήκος). Σε ένα σημείο της διεπιφάνειας, οι μεμβρανικές τάσεις βρίσκονται στο εφαπτόμενο επίπεδο της διεπιφάνειας και είναι σε ισορροπία με τους διεπιφανειακούς ελκυστές τάσεων των συνδεόμενων υλικών. Οι εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν αποτελούν την επέκταση των εξισώσεων Young-Laplace της ρευστομηχανικής, στα στερεά σώματα. Στα πλαίσια της κλασσικής ελαστικότητας (Cauchy), τα δύο αυτά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς σε θραύση σύνθετων υλικών και για την εκτίμηση της επίδρασης των διεπιφανειών στις ισοδύναμες ελαστικές ιδιότητες των ετερογενών υλικών [14]-[17].

Στην παρούσα εργασία, το ελατηριακό μοντέλο διεπιφάνειας επεκτείνεται σε ετερογενή υλικά στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας Cosserat, όπως αυτή έχει θεμελιωθεί από τους αδελφούς Cosserat [1,2] και αναπτύχθηκε παραπέρα από μεταγενέστερους ερευνητές [3-13]. Στην επέκταση αυτή, η σύνδεση των δύο υλικών προσομοιώνεται με ελατήρια δύναμης και ροπής που έχουν αμελητέο πάχος και είναι συνεχώς διανεμημένα πάνω στην διεπιφάνεια. Όπως στην ελαστικότητα Cauchy, η μηχανική συμπεριφορά ενός διεπιφανειακού ελατηρίου δύναμης, περιγράφεται με ένα διεπιφανειακό άλμα μετατόπισης, του οποίου οι εφαπτομενικές και ορθές συνιστώσες είναι ανάλογες των

---

αντίστοιχων ελκυστών τάσεων της διεπιφάνειας. Η μηχανική συμπεριφορά ενός διεπιφανειακού ελατηρίου ροπής περιγράφεται από ένα άλμα της διεπιφανειακής περιστροφής, του οποίου οι εφαπτομενικές συνιστώσες είναι ανάλογες των αντίστοιχων διεπιφανειακών συνιστωσών του ελκυστή ζεύγους. Για μια τέτοια διεπιφάνεια, τόσο οι ελκυστές τάσεων όσο και οι ελκυστές ζεύγους τάσεων, θεωρούνται ότι είναι συνεχείς δια μέσω της διεπιφάνειας. Στην συνέχεια, το παραπάνω μοντέλο χρησιμοποιείται για την διερεύνηση της επίδρασης μιας ατελούς διεπιφάνειας στην συγκέντρωση τάσεων γύρω από μια κυκλική ανομοιογένεια που είναι ένθετη σε μια άπειρη μήτρα.

Η διπλωματική εργασία έχει την παρακάτω δομή. Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά οι εξισώσεις της 3D θεωρίας της ελαστικότητας Cosserat και η εξειδίκευσή τους στην περίπτωση της διδιάστατης παραμόρφωσης. Στο 3ο κεφάλαιο περιγράφεται και επιλύεται το αντιστάσιμο ελαστικό πρόβλημα μιας ελαστικής ανομοιογένειας που είναι ένθετη σε μια μήτρα, όταν η διεπιφανειακή σύνδεση προσομοιώνεται με τα δύο παραπάνω μοντέλα. Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται, με μορφή διαγραμμάτων, αριθμητικά αποτελέσματα στα οποία δείχνεται η επίδραση των διαφόρων μηχανικών παραμέτρων των υλικών πάνω στην τασική συγκέντρωση. Τέλος, η εργασία κλείνει με το 5ο κεφάλαιο, όπου παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Στα δύο παραρτήματα της εργασίας παρουσιάζονται τα μητρικά συστήματα που εμπλέκονται στις ελαστικές λύσεις, και τα λογισμικά προγράμματα που συντάχθηκαν για την απόκτηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ COSSERAT

#### 2.1 Οι εξισώσεις της 3D παραμόρφωσης

Στην ελαστικότητα Cosserat, η ένταση που αναπτύσσεται σε ένα στερεό σώμα περιγράφεται από τον τανυστή τάσης από δύναμη και από τον τανυστή τάσης από ροπή. Αναφορικά με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x_i$ , οι συνιστώσες του τανυστή τάσης από δύναμη θα δηλώνονται με  $\sigma_{ij}$  και του τανυστή τάσης από ροπή με  $\mu_{ji}$ . Οι τανυστές αυτοί είναι μη συμμετρικοί και ικανοποιούν τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0, \quad (2.1)$$

$$e_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0, \quad (2.2)$$

που εκφράζουν την ισορροπία ενός στοιχειώδους τμήματος του σώματος με όγκο  $dV$ . Στις σχέσεις αυτές, με  $X_i$  και  $Y_i$  δηλώνονται οι συνιστώσες των εξωτερικών δυνάμεων και ροπών ανά μονάδα όγκου που επενεργούν στο σώμα και με  $e_{ijk}$  ο γνωστός εναλλάκτης τανυστής.

Οι συνιστώσες της τάσης από δύναμη μπορούν να γραφτούν σαν το άθροισμα του συμμετρικού τους μέρους  $s_{ij}$  και του αντισυμμετρικού τους μέρους  $\tau_{ij}$  με τις σχέσεις

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}), \quad (2.3)$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}). \quad (2.4)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή από ροπή μπορούν να συντεθούν από τις συνιστώσες του ενός σφαιρικού του τανυστή  $\mu\delta_{ij}$  και ενός αποκλίνοντα τανυστή  $m_{ij}$  με τις σχέσεις

$$\mu_{ij} = \mu\delta_{ij} + m_{ij}, \mu = \frac{1}{3}\mu_{ii}, m_{ii} = 0. \quad (2.5)$$

Οι δύο εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να αναχθούν ισοδύναμα σε μια μόνο εξίσωση που εμπλέκει τις συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή τάσης από δύναμη, και του αποκλίνοντα τανυστή της τάσης από ροπή:

$$s_{mn,m} = \frac{1}{2}e_{imn}(m_{ji,jm} + Y_{i,m}) + X_n. \quad (2.6)$$

Η παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος περιγράφεται από τις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης  $u_i$  και τις συνιστώσες του διανύσματος περιστροφής  $\omega_i$ . Σε μια απλοποιημένη εκδοχή της ελαστικότητας Cosserat, που έχει υιοθετηθεί στην βιβλιογραφία, τα δύο αυτά διανύσματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά συνδέονται με την σχέση

$$\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j}, \quad (2.7)$$

όπως συμβαίνει στην κλασσική ελαστικότητα.

Δυο γεωμετρικές ποσότητες που περιγράφουν την παραμόρφωση του σώματος είναι ο τανυστής παραμόρφωσης και ο τανυστής καμπυλότητας, των οποίων οι καρτεσιανές συνιστώσες παρέχονται με τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (2.8)$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{i,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}u_{l,ki}. \quad (2.9)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις της απλοποιημένης αυτής εκδοχής είναι γραμμικές σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών του συμμετρικού τανυστή τάσης από δύναμη  $s_{ij}$  και των συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης  $\gamma_{ij}$ , και των συνιστωσών του αποκλίνοντα τανυστή τάσης από ροπή  $m_{ij}$  και των συνιστωσών του τανυστή καμπυλότητας. Οι σχέσεις αυτές παρέχονται με τις σχέσεις



$$s_{ji} = s_{ij} = 2G\gamma_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\gamma_{hh}\delta_{ij}, \quad (2.10)$$

$$m_{ji} = 4Gl^2\kappa_{ij} + 4Gl^2\eta\kappa_{ji}. \quad (2.11)$$

Στις σχέσεις αυτές,  $G$ ,  $\nu$  είναι το γνωστό μέτρο διάτμησης και ο γνωστός λόγος του Poisson, ενώ  $l$  και  $\eta$  είναι δύο νέες ποσότητες. Το  $l$  αποτελεί ένα χαρακτηριστικό μήκος που περιγράφει την μικροδομή του υλικού και το  $\eta$  μια αδιάστατη ποσότητα ( $-1 < \eta < 1$ ). Έτσι, προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση του 3D ελαστικού προβλήματος σε όρους των μετατοπίσεων.

Η διαφορική αυτή εξίσωση επιλύεται θεωρώντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες .

$$\bar{p}_l = \left[ s_{hl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{hkl}(m_{jk,j} - m_{(nn),k} + \rho Y_k) \right] n_h, \quad (2.12)$$

$$\bar{q}_h = m_{jh}n_j - m_{(nn)}n_h, \quad (2.13)$$

και

$$\frac{1}{2}[m_{(nn)+} - m_{(nn)-}] = \bar{Q}, \quad (2.14)$$

όπου

$$m_{jh}n_j n_h = m_{(nn)}, \quad (2.15)$$

(το  $n$  δεν είναι άθροισμα).

## 2.2 Οι εξισώσεις της 2D παραμόρφωσης

Θεωρούμε την ελαστική παραμόρφωση ενός στερεού σώματος που προέρχεται από ένα σύστημα δυνάμεων και ροπών, που είναι διανεμημένες στην εξωτερική του επιφάνεια και βρίσκονται σε ισορροπία. Στην περίπτωση που οι μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής  $x_3$ , όταν δηλαδή

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3 = u_1(x_2, x_3),$$

τότε η διαφορική εξίσωση του γενικού ελαστικού προβλήματος με άγνωστες ποσότητες τις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης, διασπάται σε δύο ανεξάρτητα συστήματα

διαφορικών εξισώσεων, που αντιστοιχούν σε δύο ασύζευκτες διδιάστατες ελαστικές παραμορφώσεις του σώματος. Το πρώτο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων έχει ως άγνωστες συναρτήσεις τις μετατοπίσεις  $u_1$ ,  $u_2$  και έχει την μορφή

$$\nabla^2 u_1 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x_1} - l^2 \nabla^4 u_1 = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 u_2 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x_2} - l^2 \nabla^4 u_2 = 0, \quad (2.17)$$

όπου

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (2.18)$$

Η διδιάστατη αυτή ελαστική παραμόρφωση του σώματος έχει ως διάνυσμα παραμόρφωσης το  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  και είναι γνωστή ως *συνεπίπεδη παραμόρφωση*. Το δεύτερο σύστημα περιλαμβάνει μία μόνο διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την συνιστώσα μετατόπισης  $u_3$  και έχει την μορφή

$$\nabla^2 u_3 - l^2 \nabla^4 u_3 = 0. \quad (2.19)$$

Η ελαστική παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος που περιγράφεται από την διαφορική αυτή εξίσωση, είναι γνωστή ως *αντιεπίπεδη παραμόρφωση*. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα μετατόπισης  $\mathbf{u} = (0, 0, u_3)$  είναι κάθετο στο επίπεδο των αξόνων  $x_1$  και  $x_2$  του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Οι υπόλοιπες εξισώσεις, που περιγράφουν τις παραπάνω παραμορφωσιακές καταστάσεις, παρουσιάζονται ξεχωριστά αμέσως παρακάτω.

### 2.2.1 Οι εξισώσεις της συνεπίπεδης παραμόρφωσης

Όπως προαναφέρθηκε, η συνεπίπεδη παραμόρφωση περιγράφεται από τις μετατοπίσεις  $u_1$ ,  $u_2$ , από τις οποίες παράγονται όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές πεδίου της διδιάστατης αυτής παραμόρφωσης. Οι μεταβλητές αυτές, ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$ , είναι :

*Παραμορφώσεις :*

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (2.20)$$

Περιστροφή :

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.21)$$

Κάμπτο-στρεπτικές παραμορφώσεις (καμπυλότητες) :

$$\kappa_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (2.22)$$

$$\kappa_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right), \quad (2.23)$$

Καταστατικές σχέσεις :

$$s_{11} = 2G\gamma_{11} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\gamma_{11} + \gamma_{22}), \quad (2.24)$$

$$s_{22} = 2G\gamma_{22} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\gamma_{11} + \gamma_{22}), \quad (2.25)$$

$$s_{12} = 2G\gamma_{12}, \quad (2.26)$$

και

$$m_{13} = 4Gl^2\kappa_{31}, \quad m_{31} = 4Gl^2\eta\kappa_{31}, \quad (2.27)$$

$$m_{23} = 4Gl^2\kappa_{32}, \quad m_{32} = 4Gl^2\eta\kappa_{32}. \quad (2.28)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ως προς το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, x_3)$  έχουν την μορφή :

Παραμορφώσεις :

$$\gamma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \gamma_{\theta\theta} = \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} \right), \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad (2.29)$$

Περιστροφή :

$$\omega_3 = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial\theta} \right), \quad (2.30)$$

Κάμπτο-στρεπτικές παραμορφώσεις (καμπυλότητες) :

$$\kappa_{r3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial r}, \quad (2.31)$$

$$\kappa_{\theta 3} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \theta}. \quad (2.32)$$

Καταστατικές σχέσεις :

$$s_{rr} = 2G\gamma_{rr} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta}), \quad (2.33)$$

$$s_{\theta\theta} = 2G\gamma_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta}), \quad (2.34)$$

$$s_{r\theta} = 2G\gamma_{r\theta}, \quad (2.35)$$

και

$$m_{r3} = 4Gl^2\kappa_{3r}, \quad m_{3r} = 4Gl^2\eta\kappa_{3r}, \quad (2.36)$$

$$m_{\theta 3} = 4Gl^2\kappa_{3\theta}, \quad m_{3\theta} = 4Gl^2\eta\kappa_{3\theta}. \quad (2.37)$$

## 2.2.2 Οι εξισώσεις της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης

Η αντιεπίπεδη παραμόρφωση περιγράφεται πλήρως από την μετατόπιση  $u_3$ , που είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.4). Από την μετατόπιση αυτή προσδιορίζονται όλες οι μεταβλητές πεδίου, που περιγράφουν την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος. Οι μεταβλητές αυτές, ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, είναι :

Παραμορφώσεις :

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad (2.38)$$

Περιστροφές :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (2.39)$$

Κάμπτο-στρεπτικές παραμορφώσεις :

$$\kappa_{11} = -\kappa_{22} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (2.40)$$

$$s_{13} = s_{31} = 2G\gamma_{13}, \quad (2.41)$$

$$s_{23} = s_{32} = 2G\gamma_{23}, \quad (2.42)$$

Καταστατικές σχέσεις :

$$m_{11} = 4Gl^2(1+\eta)\kappa_{11}, \quad (2.43)$$

$$m_{22} = 4Gl^2(1+\eta)\kappa_{22}, \quad (2.44)$$

$$m_{12} = 4Gl^2\kappa_{21} + 4Gl^2\eta\kappa_{12}, m_{21} = 4Gl^2\kappa_{12} + 4Gl^2\eta\kappa_{21}. \quad (2.45)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ως προς το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, x_3)$ , γράφονται:

Παραμορφώσεις :

$$\gamma_{\theta 3} = \gamma_{3\theta} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r3} = \gamma_{3r} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial r}, \quad (2.46)$$

Περιστροφές :

$$\omega_r = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}, \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial r}, \quad (2.47)$$

Κάμπτο-στρεπτικές παραμορφώσεις :

$$\kappa_{rr} = \frac{\partial \omega_r}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right), \quad (2.48)$$

$$\kappa_{r\theta} = \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}, \quad (2.49)$$

$$\kappa_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \frac{\varphi_\theta}{r} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_3}{\partial r}, \quad (2.50)$$

$$\kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_r}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right). \quad (2.51)$$

Καταστατικές σχέσεις :

$$s_{r3} = s_{3r} = 2G\gamma_{r3}, \quad (2.52)$$

$$s_{\theta 3} = s_{3\theta} = 2G\gamma_{\theta 3}, \quad (2.53)$$

και

$$m_{rr} = -m_{\theta\theta} = 4Gl^2(1 + \eta)\kappa_{rr}, \quad (2.54)$$

$$m_{r\theta} = 4\alpha\kappa_{r\theta} + 4\beta\kappa_{\theta r}, \quad m_{\theta r} = 4Gl^2\kappa_{\theta r} + 4Gl^2\eta\kappa_{r\theta}. \quad (2.55)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ

### 3.1 Διατύπωση του προβλήματος και συνοριακές συνθήκες

Θεωρούμε μια απείρως εκτεινόμενη μήτρα που περιέχει μια κυλινδρική ανομοιογένεια κυκλικής διατομής, που συνίστανται από ομογενή και ισότροπα ελαστικά υλικά Cosserat διαφορετικών μηχανικών ιδιοτήτων. Θα υποθέσουμε ότι τα δύο υλικά συνδέονται μεταξύ τους είτε με μια τέλεια σύνδεση που περιγράφεται με το μοντέλο της τέλει διεπιφάνειας, ή με μια ατελή σύνδεση που περιγράφεται με το μοντέλο της ελατηριακής διεπιφάνειας. Αναφορικά με ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$ , του οποίου ο άξονας  $x_3$  συμπίπτει με τον άξονα της κυλινδρικής ανομοιογένειας, το συνδεδεμένο σύστημα μήτρας-ανομοιογένειας βρίσκεται σε αντιδιαμητική ελαστική παραμόρφωση που προέρχεται από ομοιόμορφες διαμητικές τάσεις  $\sigma_{13}^\infty, \sigma_{23}^\infty$  που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Αμέσως παρακάτω, η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος αναλύεται ξεχωριστά για τους δύο τύπους διεπιφανειακής σύνδεσης που προαναφέρθηκαν με την επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων.

Για την περίπτωση της τέλει διεπιφάνειας, η μηχανική σύνδεση των δύο υλικών περιγράφεται με την συνέχεια των μετατοπίσεων και περιστροφών δια μέσου της διεπιφάνειας και με την συνέχεια των ενεργειακών συζυγών ποσοτήτων αυτών πάνω στην διεπιφάνεια. Αναφορικά με ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, x_3)$ , η συνέχεια των διεπιφανειακών μετατοπίσεων και περιστροφών εκφράζεται με τις σχέσεις,

$$u_3^M(R, \theta) = u_3^I(R, \theta), \quad (3.1)$$

$$\omega_{\theta}^M(R, \theta) = \omega_{\theta}^I(R, \theta). \quad (3.2)$$

Οι ποσότητες που είναι ενεργειακά συζυγείς των ποσοτήτων αυτών είναι η ανηγμένη διατμητική τάση από δύναμη  $\bar{s}_{r3}$  και οι τάσεις από ροπές  $m_{r\theta}$ . Με τον όρο ενεργειακά συζυγή μιας μετατόπισης ή περιστροφής περιγράφουμε τον τασικό όρο που είναι ο συντελεστής της μετατόπισης ή περιστροφής στην έκφραση της δυνατής ελαστικής ενέργειας σε ένα στοιχειώδες επιφανειακό στοιχείο.

Η συνέχεια των ποσοτήτων αυτών δια μέσου της διεπιφάνειας εκφράζεται με τις σχέσεις

$$\bar{s}_{r3}^M(R, \theta) = \bar{s}_{r3}^I(R, \theta), \quad (3.3)$$

$$m_{r\theta}^M(R, \theta) = m_{r\theta}^I(R, \theta). \quad (3.4)$$

Στην περίπτωση της ελατηριακής σύνδεσης, προκαλείται μια ασυνέχεια των μετατοπίσεων και περιστροφών δια μέσου της διεπιφάνειας, ενώ διατηρείται η συνέχεια των τασικών συζυγών τους. Έτσι, στην περίπτωση της ελατηριακής σύνδεσης, οι σχέσεις (3.3) και (3.4) αντικαθίστανται με τις

$$u_3^M(R, \theta) - u_3^I(R, \theta) = \frac{1}{N_u} \bar{s}_{r3}^M(R, \theta) = \frac{1}{N_u} \bar{s}_{r3}^I(R, \theta), \quad (3.5)$$

$$\omega_{\theta}^M(R, \theta) - \omega_{\theta}^I(R, \theta) = \frac{1}{N_{\omega}} m_{r\theta}^M(R, \theta) = \frac{1}{N_{\omega}} m_{r\theta}^I(R, \theta). \quad (3.6)$$

Στις σχέσεις αυτές  $N_u$  και  $N_{\omega}$  είναι ελατηριακές σταθερές. Για  $N_u, N_{\omega} \rightarrow \infty$ , οι παραπάνω εξισώσεις ανάγονται σε αυτές της τέλει διεπιφάνειας.



### 3.2 Οι εξισώσεις των ελαστικών πεδίων

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος, που παρέχεται από την εξίσωση (3.4), έχει την παρακάτω μορφή :

$$u_3(r, \theta) = [\alpha_1 r + \alpha_2 \frac{1}{r} + \alpha_3 K_1(\frac{r}{l}) + \alpha_4 I_1(\frac{r}{l})] \cos \theta + [\alpha'_1 r + \alpha'_2 \frac{1}{r} + \alpha'_3 K_1(\frac{r}{l}) + \alpha'_4 I_1(\frac{r}{l})] \sin \theta, \quad (3.7)$$

όπου  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  και  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$ , είναι σταθερές ποσότητες. Για το πρόβλημα που μελετάμε, θεωρούμε την παρακάτω ειδική μορφή της (3.7)

$$u_3^I = [A^I r + B^I I_1(\frac{r}{l_I})] \cos \theta + [C^I r + D^I I_1(\frac{r}{l_I})] \sin \theta, \quad (r \leq R) \quad (3.8)$$

για την ανομοιογένεια και την παρακάτω ειδική μορφή

$$u_3^M = [A^M r + B^M \frac{1}{r} + C^M K_1(\frac{r}{l_M})] \cos \theta + [D^M r + E^M \frac{1}{r} + F^M K_1(\frac{r}{l_M})] \sin \theta, \quad (r > R) \quad (3.9)$$

για τη μήτρα.

Από τις σχέσεις (3.1)-(3.4) και (3.8)-(3.9), προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις των τάσεων και των ροπών-τάσεων για την ανομοιογένεια

$$s_{r3}^I = \mu_I A^I \cos \theta + \mu_I C^I \sin \theta, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_{r3}^I &= [\mu_I A^I - \frac{a_I + \beta_I}{r^3} (2I_1 + \frac{r}{l_I} I_0(\frac{r}{l_I})) B^I] \cos \theta \\ &+ [\mu_I C^I - \frac{a_I + \beta_I}{r^3} (2I_1 - \frac{r}{l_I} I_0(\frac{r}{l_I})) D^I] \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} m_{r\theta}^I &= \left[ -2 \frac{a_I + \beta_I}{r^2} \left( \frac{\alpha_I r^2}{a_I + \beta_I} \frac{r^2}{l_I^2} I_1(\frac{r}{l_I}) + 2I_1(\frac{r}{l_I}) - \frac{r}{l_I} I_0(\frac{r}{l_I}) \right) B^I \right] \cos \theta \\ &+ \left[ -2 \frac{a_I + \beta_I}{r^2} \left( \frac{\alpha_I}{a_I + \beta_I} \frac{r^2}{l_I^2} I_1(\frac{r}{l_I}) + 2I_1(\frac{r}{l_I}) - \frac{r}{l_I} I_0(\frac{r}{l_I}) \right) D^I \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\omega_\theta^I = [-A^I r - B^I (\frac{r}{l_I} I_0(\frac{r}{l_I}) - I_1(\frac{r}{l_I}))] \cos \theta + [-C^I r - D^I (\frac{r}{l_I} I_0(\frac{r}{l_I}) - I_1(\frac{r}{l_I}))] \sin \theta, \quad (3.13)$$

οι παραπάνω σχέσεις για την μήτρα

$$s_{r3}^M = [\mu_M A^M - \mu_M B^M \frac{1}{r^2}] \cos \theta + [\mu_M D^M - \mu_M E^M \frac{1}{r^2}] \sin \theta, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_{r3}^M = & \left[ A^M \mu_M - \frac{1}{r^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{r^2} \right) B^M - \frac{a_M + \beta_M}{r^3} \left( 2K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) + \frac{r}{l_M} K_0\left(\frac{r}{l_M}\right) \right) C^M \right] \cos \theta \\ & + \left[ D^M \mu_M - \frac{1}{r^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{r^2} \right) E^M - \frac{a_M + \beta_M}{r^3} \left( 2K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) + \frac{r}{l_M} K_0\left(\frac{r}{l_M}\right) \right) F^M \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} m_{r\theta}^M = & \left[ -4 \frac{a_M + \beta_M}{r^3} B^M - 2 \frac{a_M + \beta_M}{r^2} \left( \frac{\alpha_M}{a_M + \beta_M} \frac{r^2}{l_M^2} K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) + 2K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) + \frac{r}{l_M} K_0\left(\frac{r}{l_M}\right) \right) C^M \right] \cos \theta \\ & + \left[ -4 \frac{a_M + \beta_M}{r^3} E^M - 2 \frac{a_M + \beta_M}{r^2} \left( -\frac{\alpha_M}{a_M + \beta_M} \frac{r^2}{l_M^2} K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) + 2K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) + \frac{r}{l_M} K_0\left(\frac{r}{l_M}\right) \right) F^M \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \omega_\theta^M = & [-A^M r + B^M \frac{1}{r} + C^M \left( \frac{r}{l_M} K_0\left(\frac{r}{l_M}\right) + K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) \right)] \cos \theta \\ & + [-D^M r + E^M \frac{1}{r} + F^M \left( \frac{r}{l_M} K_0\left(\frac{r}{l_M}\right) + K_1\left(\frac{r}{l_M}\right) \right)] \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Στις παραπάνω σχέσεις,  $I_0(r/l_k)$ ,  $I_1(r/l_k)$  είναι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους μηδενικής και πρώτης τάξης, αντίστοιχα, ενώ  $K_0(r/l_k)$ ,  $K_1(r/l_k)$  είναι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους μηδενικής και πρώτης τάξης, αντίστοιχα ( $k=I, M$ ). Τα  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  είναι ελαστικές σταθερές που παρέχονται από τις σχέσεις

$$a_k = 4G_k l_k^2, \quad \beta_k = 4\eta_k G_k l_k^2.$$

Στα ελαστικά πεδία των δύο υλικών που παρέχονται από τις σχέσεις (3.11)-(3.13) και (3.15)-(3.17) υπαισέρχονται δέκα ελαστικές σταθερές, που θα πρέπει να προσδιορισθούν. Οι σταθερές αυτές προσδιορίζονται παρακάτω χρησιμοποιώντας τις συνθήκες που επικρατούν στην διεπιφάνεια, και τις συνοριακές συνθήκες στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας.

### 3.3 Προσδιορισμός των άγνωστων σταθερών των ελαστικών πεδίων

Στο άπειρο σύνορο της μήτρας θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες

$$s_{3r}^\infty \cong s_{13}^\infty \cos \theta + t_{23}^\infty \sin \theta, \quad \text{οταν } r \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Παίρνοντας υπόψιν την (3.14), η παραπάνω σχέση ικανοποιείται όταν

$$A^M = \frac{t_{13}^\infty}{\mu_M}, \quad D^M = \frac{t_{23}^\infty}{\mu_M}.$$

Οι υπόλοιπες οκτώ σταθερές θα υπολογισθούν από τις διεπιφανειακές συνθήκες, ξεχωριστά για τα δύο μοντέλα διεπιφάνειας που θεωρούνται.

### 3.3.1 Τέλεια Διεπιφάνεια

Στην περίπτωση της τέλει διεπιφάνειας, θα πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις (3.1)-(3.4). Απαιτώντας την ικανοποίηση των σχέσεων αυτών πάνω στην διεπιφάνεια ( $r = R$ ), προκύπτουν οι παρακάτω οκτώ γραμμικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των ισάριθμων αγνώστων σταθερών:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \right) B^M - \frac{a_M + \beta_M}{R^3} \left( 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right) C^M \\ & - \mu_I A^I + \frac{a_I + \beta_I}{R^3} \left( 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) B^I = -A^M \mu_M, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & -4 \frac{a_M + \beta_M}{R^3} B^M - 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \left( \frac{\alpha_M R^2}{(a_M + \beta_M) l_M^2} K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \right) \left( \frac{R}{l_M} \right) C^M \\ & + 2 \frac{a_I + \beta_I}{R^2} \left( \frac{\alpha_I R^2}{(a_I + \beta_I) l_I^2} I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) + 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) B^I = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$+ \frac{1}{R} B^M + \left( \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right) C^M + R A^I + \left( \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) - I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) B^I = R A^M, \quad (3.21)$$

$$+ \frac{1}{R} B^M + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) C^M - R A^I - I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) B^I = -R A^M, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \right) E^M - \frac{a_M + \beta_M}{R^3} \left( 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right) F^M \\ & - \mu_I C^I + \frac{a_I + \beta_I}{R^3} \left( 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) D^I = -D^M \mu_M, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \frac{a_M + \beta_M}{R^3} E^M - 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \left( \frac{\alpha_M R^2}{(a_M + \beta_M) l_M^2} K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) + 2K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) + \frac{R}{l_M} K_0\left(\frac{R}{l_M}\right) \right) F^M \\
 & + 2 \frac{a_I + \beta_I}{R^2} \left( \frac{\alpha_I R^2}{(a_I + \beta_I) l_I^2} I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) + 2I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) - \frac{R}{l_I} I_0\left(\frac{R}{l_I}\right) \right) D^I = 0,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{R} E^M + \left( \frac{R}{l_M} K_0\left(\frac{R}{l_M}\right) + K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) \right) F^M + RC^I + \left( \frac{R}{l_I} I_0\left(\frac{R}{l_I}\right) - I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) \right) D^I = RD^M, \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{R} E^M + K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) F^M - RC^I - I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) D^I = -RD^M. \tag{3.26}$$

Το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων μπορεί να γραφτεί στην μητρική μορφή

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{3.27}$$

όπου οι πίνακες  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B}$  παρουσιάζονται στο Παράρτημα ΙΙ.

### 3.3.2 Ελατηριακή Διεπιφάνεια

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται οι οκτώ άγνωστες σταθερές για την περίπτωση της ελατηριακής διεπιφάνειας. Η ικανοποίηση των διεπιφανειακών συνθηκών (3.3)-(3.6), παρέχει τις παρακάτω οκτώ αλγεβρικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{R^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \right) B^M - \frac{a_M + \beta_M}{R^3} \left( 2K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) + \frac{R}{l_M} K_0\left(\frac{R}{l_M}\right) \right) C^M \\
 & -\mu_I A^I + \frac{a_I + \beta_I}{R^3} \left( 2I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) - \frac{R}{l_I} I_0\left(\frac{R}{l_I}\right) \right) B^I = -A^M \mu_M,
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \frac{a_M + \beta_M}{R^3} B^M - 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \left( \frac{\alpha_M R^2}{(a_M + \beta_M) l_M^2} K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + 2 K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \right) \left( \frac{R}{l_M} \right) C^M \\
 & + 2 \frac{a_I + \beta_I}{R^2} \left( \frac{\alpha_I R^2 I_1}{(a_I + \beta_I) l_I^2} \left( \frac{R}{l_I} \right) + 2 I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) B^I = 0,
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{R} B^M - \left( \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right) C^M + R A^I - \left[ \left( 2 \frac{\alpha_I + \beta_I}{R N_\omega l_I} - \frac{R}{l_I} \right) I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) + \left( 1 - \frac{2 \alpha_I}{N_\omega l_I^2} \right) I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right] B^I = R A^M, \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{R} B^M + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) C^M - \left( R + \frac{\mu_I}{N_u} \right) A^I + \left[ \left( 2 \frac{\alpha_I + \beta_I}{N_u R^3} - 1 \right) I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{\alpha_I + \beta_I}{N_u R^2} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right] B^I = -R A^M, \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{R^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \right) E^M - \frac{a_M + \beta_M}{R^3} \left( 2 K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right) F^M \\
 & - \mu_I C^I + \frac{a_I + \beta_I}{R^3} \left( 2 I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) D^I = -D^M \mu_M,
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \frac{a_M + \beta_M}{R^3} E^M - 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \left( \frac{\alpha_M R^2}{(a_M + \beta_M) l_M^2} K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + 2 K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \right) \left( \frac{R}{l_M} \right) F^M \\
 & + 2 \frac{a_I + \beta_I}{R^2} \left( \frac{\alpha_I R^2}{(a_I + \beta_I) l_I^2} I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) + 2 I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right) D^I = 0,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{R} E^M - \left( \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right) F^M + R C^I - \left[ \left( 2 \frac{\alpha_I + \beta_I}{R N_\omega l_I} - \frac{R}{l_I} \right) I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) + \left( 1 - \frac{2 \alpha_I}{N_\omega l_I^2} \right) I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right] D^I = R D^M, \tag{3.34}$$

$$\frac{1}{R} E^M + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) F^M - \left( R + \frac{\mu_I}{N_u} \right) C^I + \left[ \left( 2 \frac{\alpha_I + \beta_I}{N_u R^3} - 1 \right) I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{\alpha_I + \beta_I}{N_u R^2} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right] D^I = -R D^M \tag{3.35}$$

Όπως στην τέλεια διεπιφάνεια, το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων μπορεί να γραφτεί στην μητρική μορφή

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}, \tag{3.36}$$

όπου οι πίνακες  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B}$  παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ι2.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

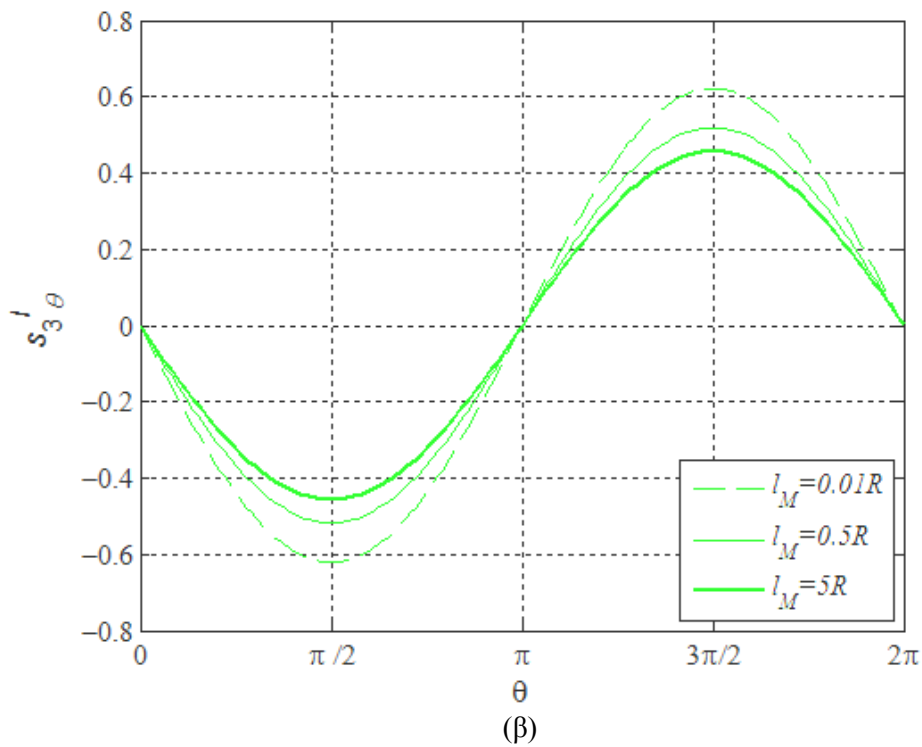
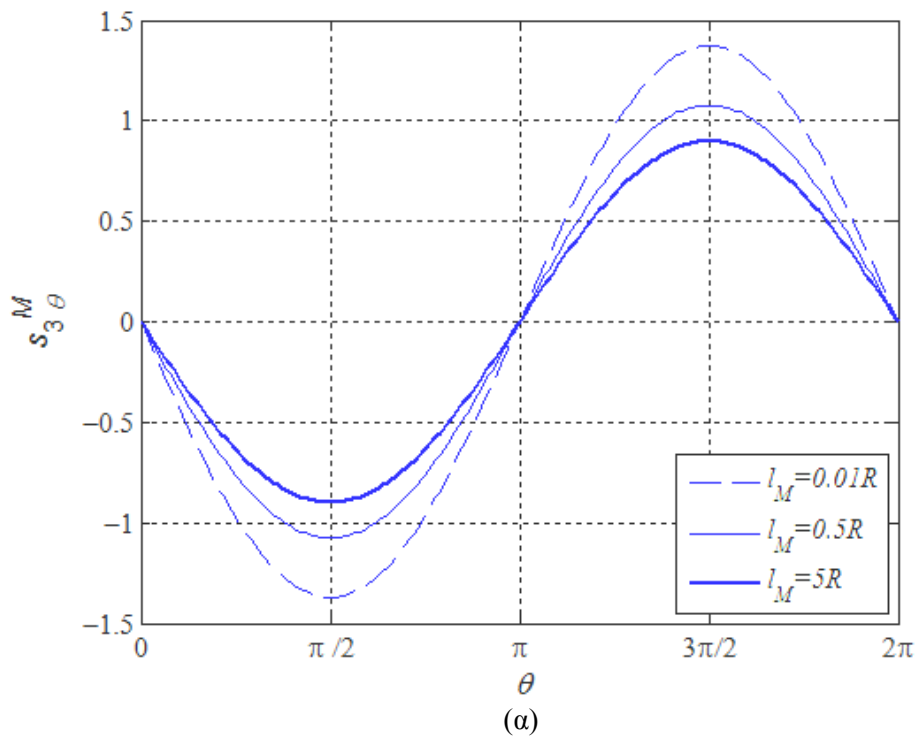
Στο κεφάλαιο αυτό, τα αναλυτικά αποτελέσματα, που προέκυψαν προηγουμένα για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας, θα χρησιμοποιηθούν για την διερεύνηση της επίδρασης των διαφόρων ελαστικών παραμέτρων των δύο ελαστικών υλικών πάνω στον συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων γύρω από την διεπιφάνεια. Για το αριθμητικό προσδιορισμό των τασικών πεδίων στο σύστημα, χρησιμοποιήθηκαν τα λογισμικά προγράμματα Antiplane Elasticity-perfect και Antiplane Elasticity-spring, που συντάχθηκαν για τον σκοπό αυτό και παρατίθενται στο Παράρτημα II της εργασίας.

#### 4.1 Μήτρα Cosserat- ανομοιογένεια Cauchy.

Στα Σχήματα (4.1)-(4.2) δείχνονται οι μεταβολές των κανονικοποιημένων διεπιφανειακών τάσεων  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$  και  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας, όταν η μήτρα φορτίζεται μονοαξονικά στο άπειρο με την διατμητική τάση  $s_{13}^\infty$ . Τα αποτελέσματα αυτά έχουν παραχθεί για μήτρα από υλικό Cosserat και για μια μαλακή ανομοιογένεια ( $\mu_M / \mu_1 = 2$ ), που προσεγγίζει την συμπεριφορά υλικού Cauchy ( $l_I = 0.01R$ ). Οι μεταβολές των τάσεων προσδιορίστηκαν για  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$ ,  $n_I = n_M = 0.5$  και για ελατηριακές σταθερές  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$  και  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ . Επειδή στην ελαστικότητα Cosserat δεν ισχύει η συμμετρική ιδιότητα στις διατμητικές τάσεις ( $s_{3\theta} \neq s_{\theta 3}$ ), στο Σχήμα (4.2) παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις διεπιφανειακές τάσεις  $s_{3\theta}^M$  και  $s_{\theta 3}^I$ . Παρατηρούμε ότι οι διεπιφανειακές τάσεις  $s_{\theta 3}$  είναι μεγαλύτερες από τις τάσεις  $s_{3\theta}$ .

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μέγιστη διατμητική τάση, που εμφανίζεται στην μήτρα στις θέσεις  $\theta = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$ , μειώνεται με την αύξηση του χαρακτηριστικού μήκους

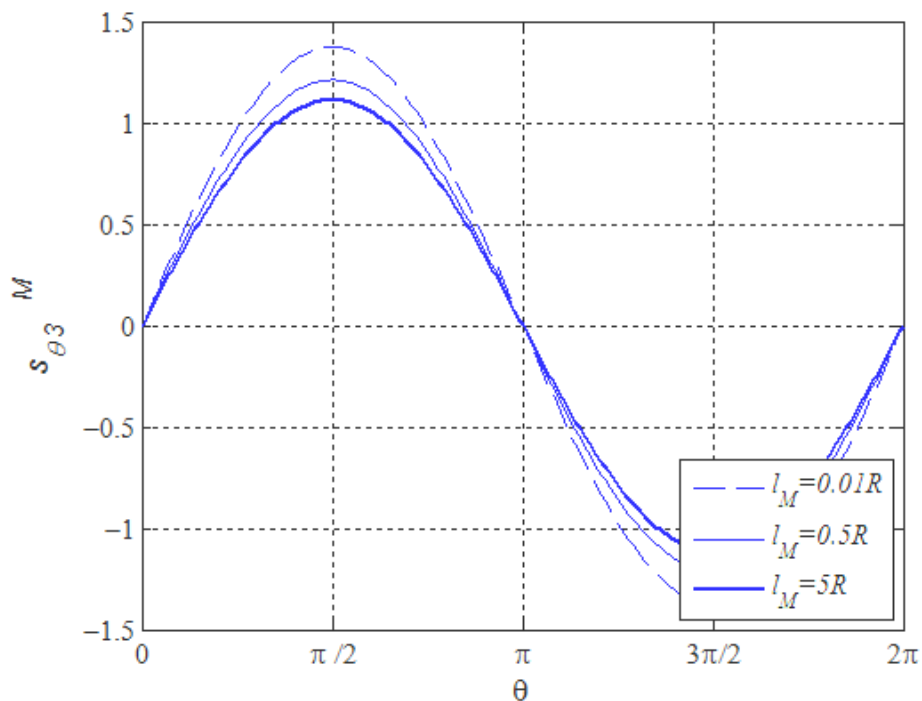
της μήτρας. Η μείωση αυτή φθάνει μέχρι το ποσοστό του 40 % της μέγιστης εφαπτομενικής τάσης που παρατηρείται στην περίπτωση που η μήτρα είναι και αυτή από υλικό Cauchy.



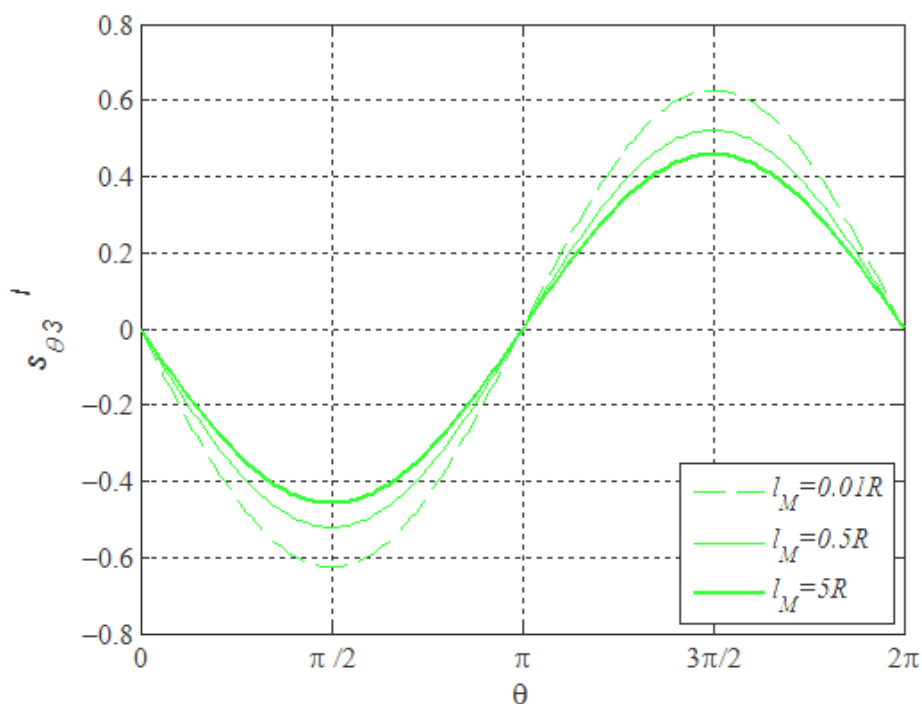
**Σχήμα 4.1** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cosserat /ανομοιογένεια Cauchy, όταν  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$

(  $\mu_M / \mu_1 = 2$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$  ).





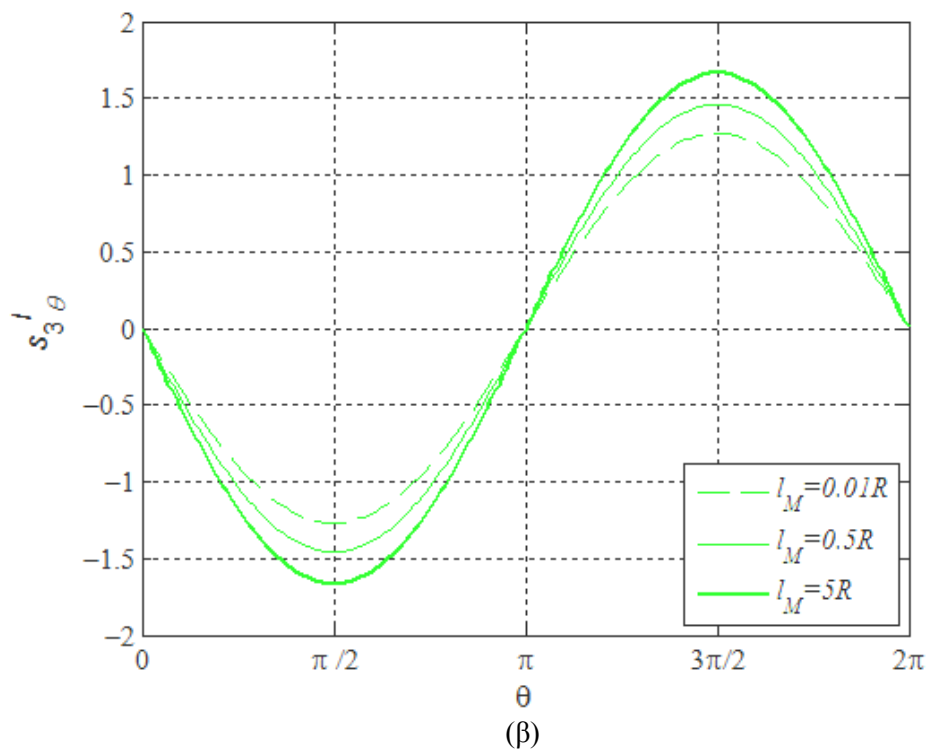
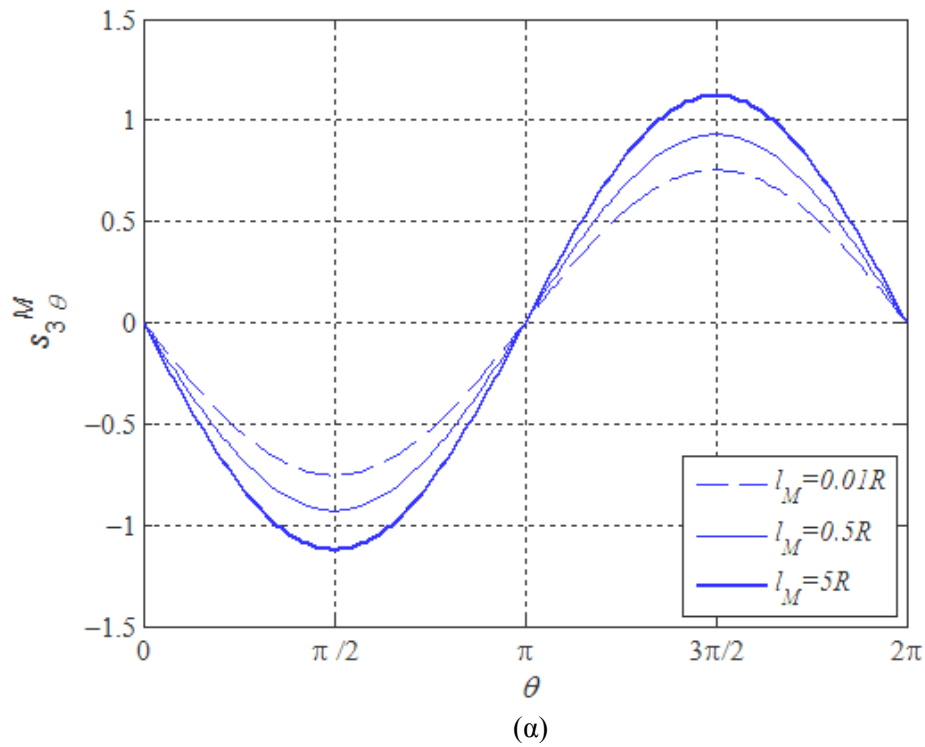
(α)



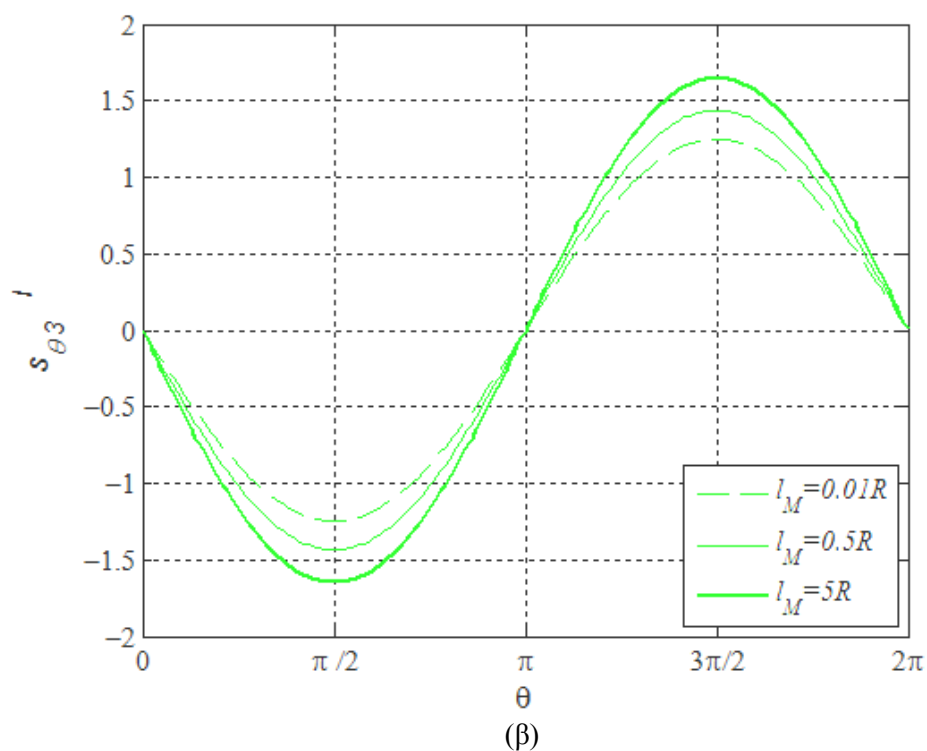
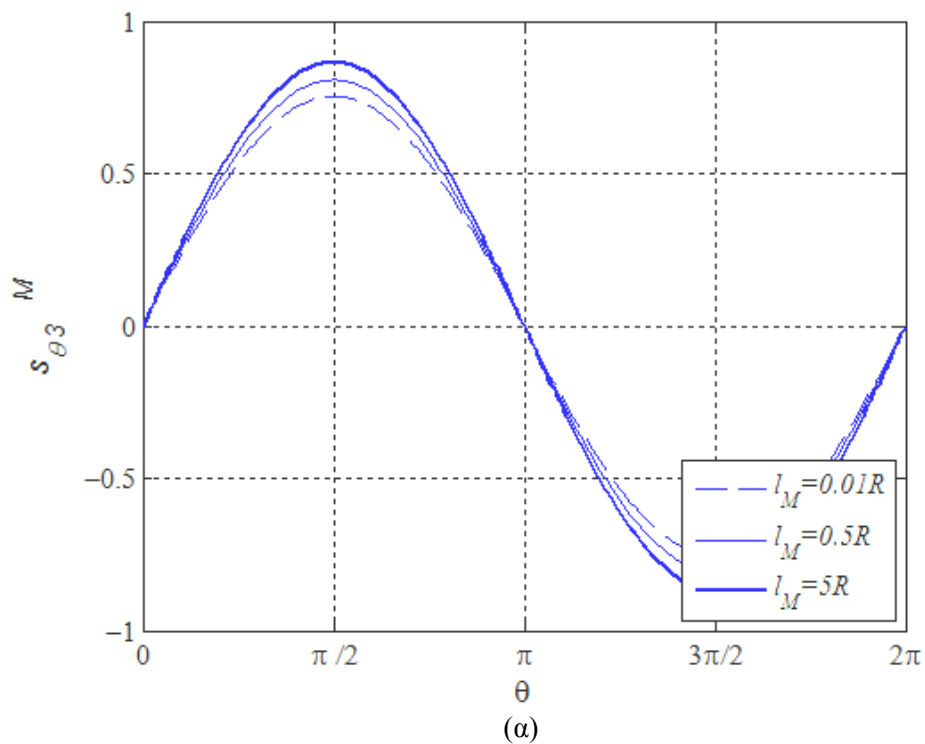
(β)

**Σχήμα 4.2** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{\theta 3}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{\theta 3}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cosserat /ανομοιογένεια Cauchy, όταν  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$  ( $\mu_M / \mu_1 = 2$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$ ).

Τα Σχήματα (4.3)-(4.4) παρέχουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση μιας σκληρής ανομοιογένειας ( $\mu_M / \mu_I = 0.5$ ). Στην περίπτωση αυτή, η μέγιστη εφαπτομενική τάση εμφανίζεται στην ανομοιογένεια.



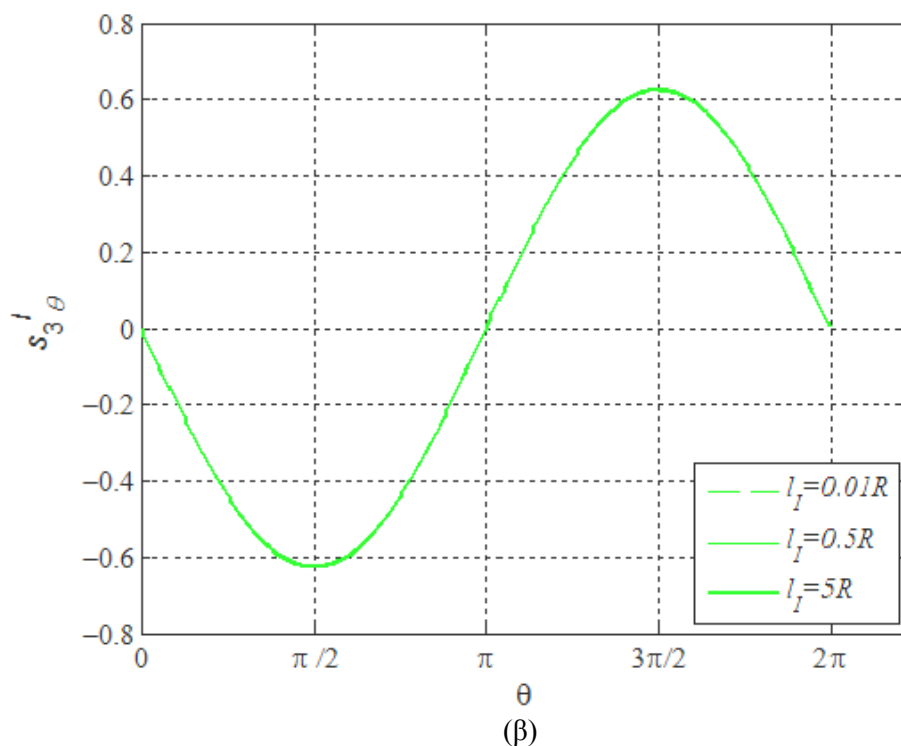
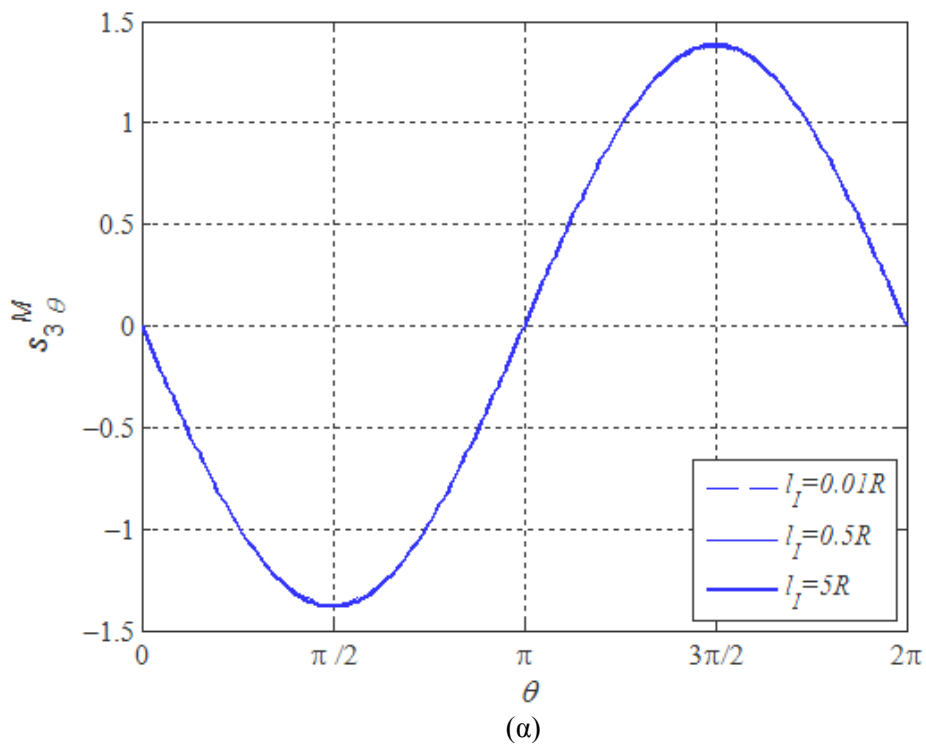
**Σχήμα 4.3** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cosserat /ανομοιογένεια Cauchy, όταν  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$   
 ( $\mu_M / \mu_1 = 0.5$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$ ).



**Σχήμα 4.4** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{\theta 3}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{\theta 3}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cosserat /ανομοιογένεια Cauchy, όταν  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$   
 ( $\mu_M / \mu_1 = 0.5$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$ ).

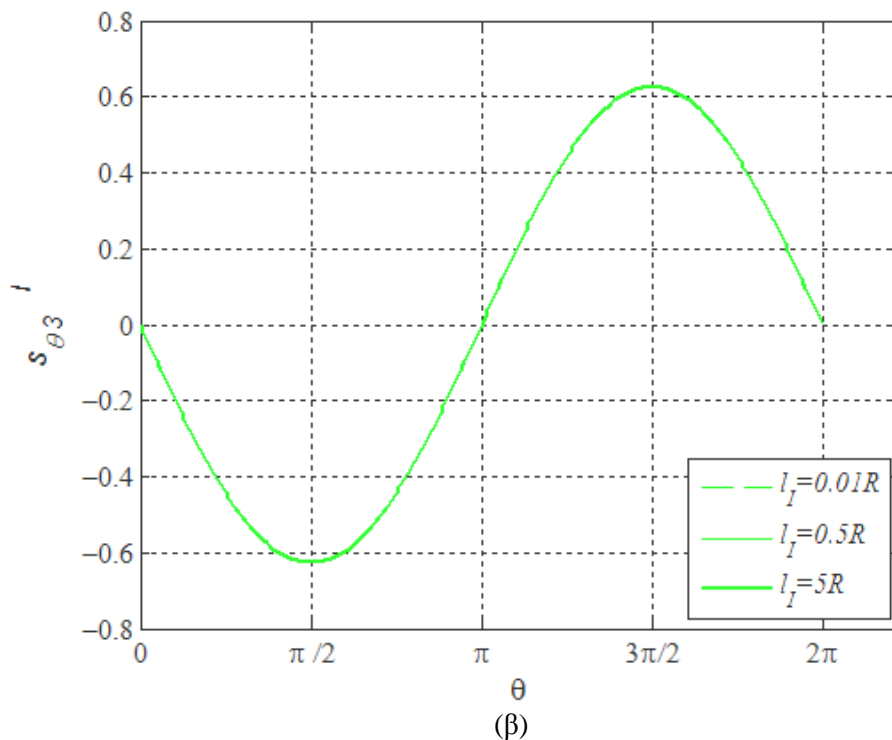
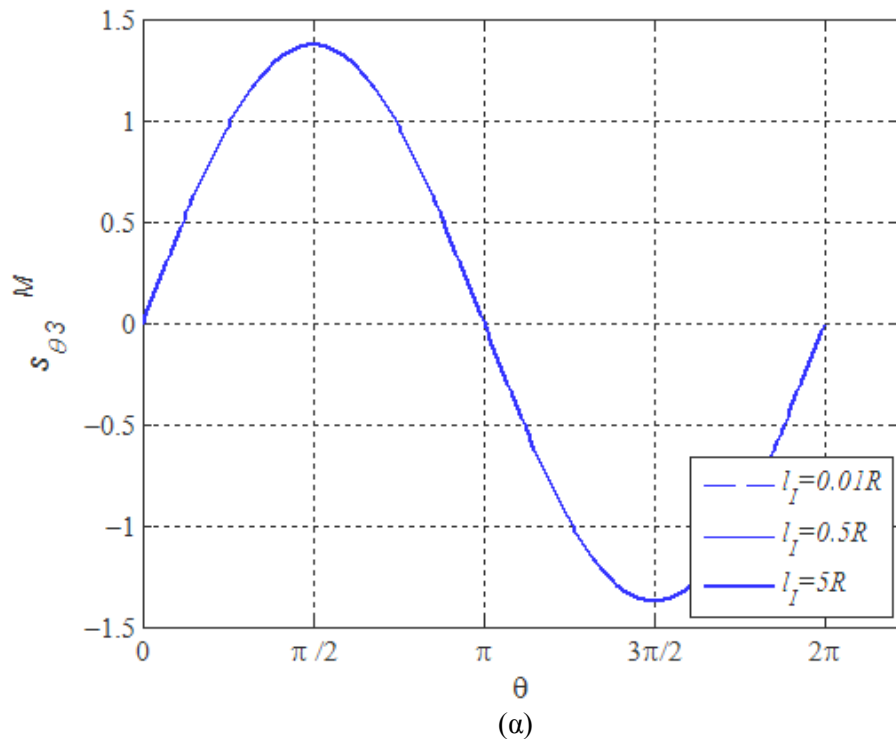
## 4.2 Μήτρα Cauchy- ανομοιογένεια Cosserat

Στα Σχήματα (4.5)-(4.6) δείχνονται οι μεταβολές των κανονικοποιημένων διεπιφανειακών τάσεων  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  και  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας, όταν η μήτρα φορτίζεται μονοαξονικά στο άπειρο με την διατμητική τάση  $s_{13}^\infty$ . Τα αποτελέσματα αυτά έχουν παραχθεί για μήτρα από υλικό Cauchy ( $l_M = 0.01R$ ) και για μια μαλακή ανομοιογένεια ( $\mu_M / \mu_1 = 2$ ), που προσεγγίζει την συμπεριφορά υλικού Cosserat. Οι μεταβολές των τάσεων προσδιορίστηκαν για  $l_I / R = 0.01, 0.5, 5$ ,  $n_I = n_M = 0.5$  και για ελατηριακές σταθερές  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$  και  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ . Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μέγιστη διεπιφανειακή διατμητική τάση, της μήτρας και της “μαλακής” ανομοιογένειας, δεν επηρεάζονται σχεδόν καθόλου από το μέγεθος του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού Cosserat της ανομοιογένειας. Τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν και για την περίπτωση της “σκληρής” ανομοιογένειας.



**Σχήμα 4.5** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cauchy /ανομοιογένεια Cosserat, όταν  $l_I / R = 0.01, 0.5, 5$  .

(  $\mu_M / \mu_1 = 2$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$  ).



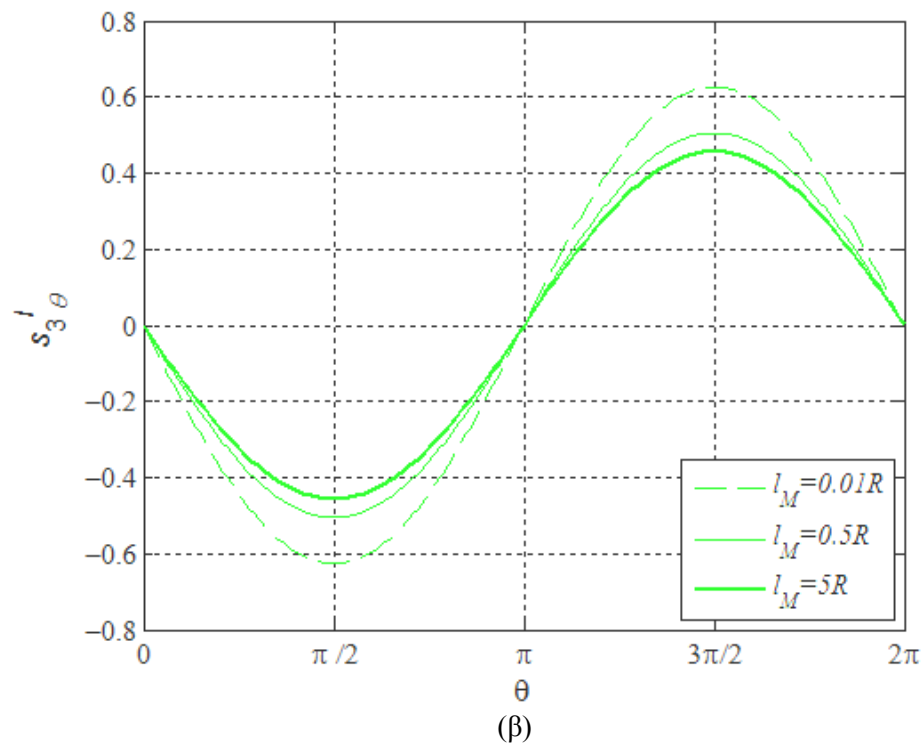
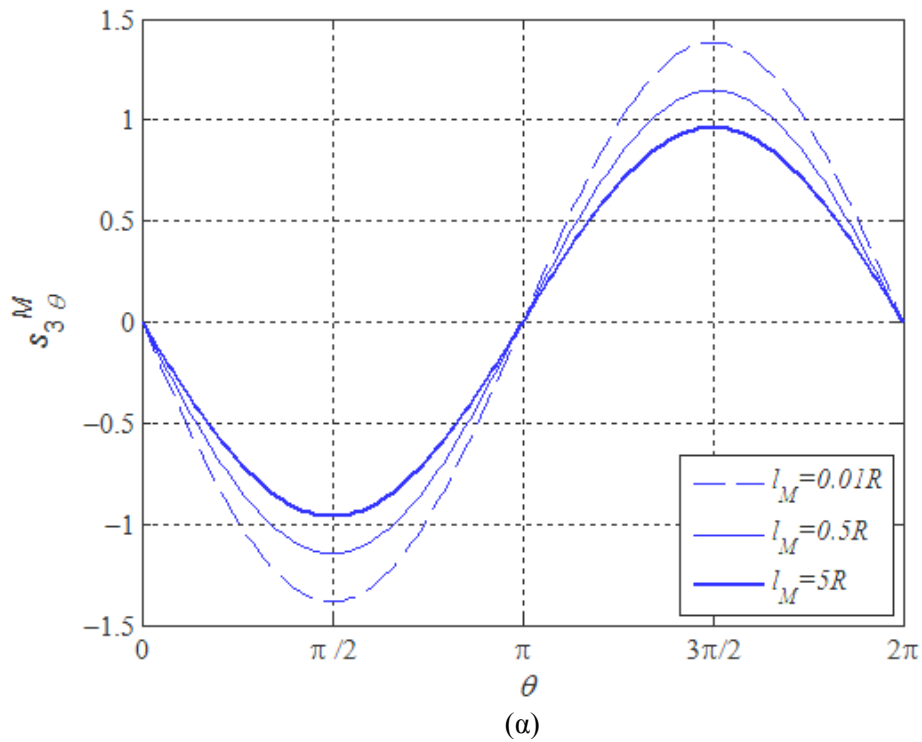
**Σχήμα 4.6** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** κατά μήκος

της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cauchy /ανομοιογένεια Cosserat, όταν  $l_I / R = 0.01, 0.5, 5$  .  
 $(\mu_M / \mu_1 = 2, \mu_1 / (RN_u) = 0.1, R\mu_1 / N_\omega = 0.5, n_1 = n_M = 0.5)$ .

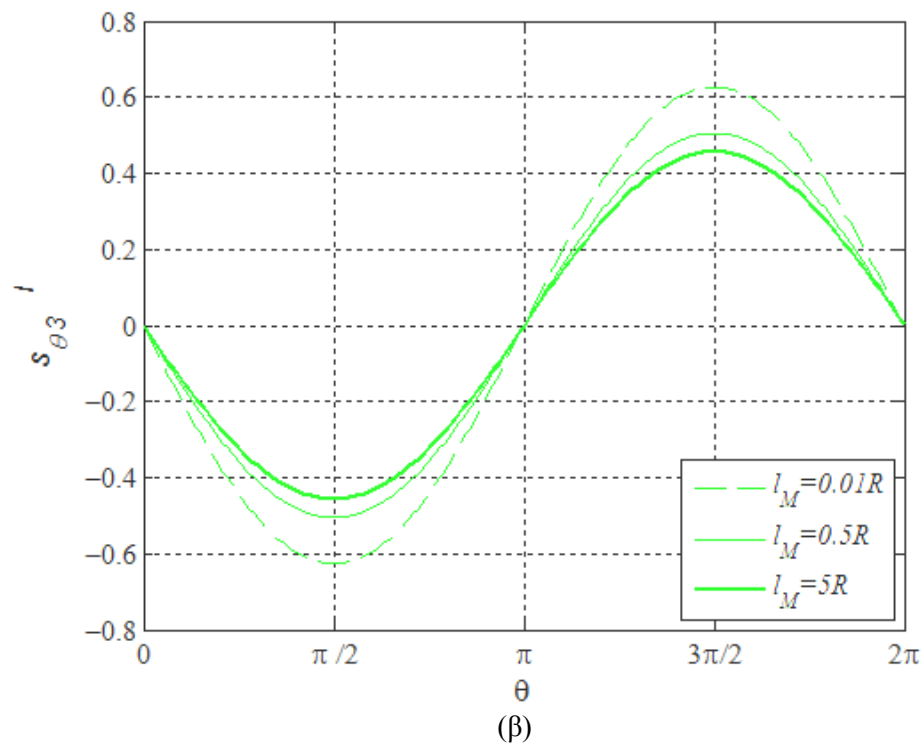
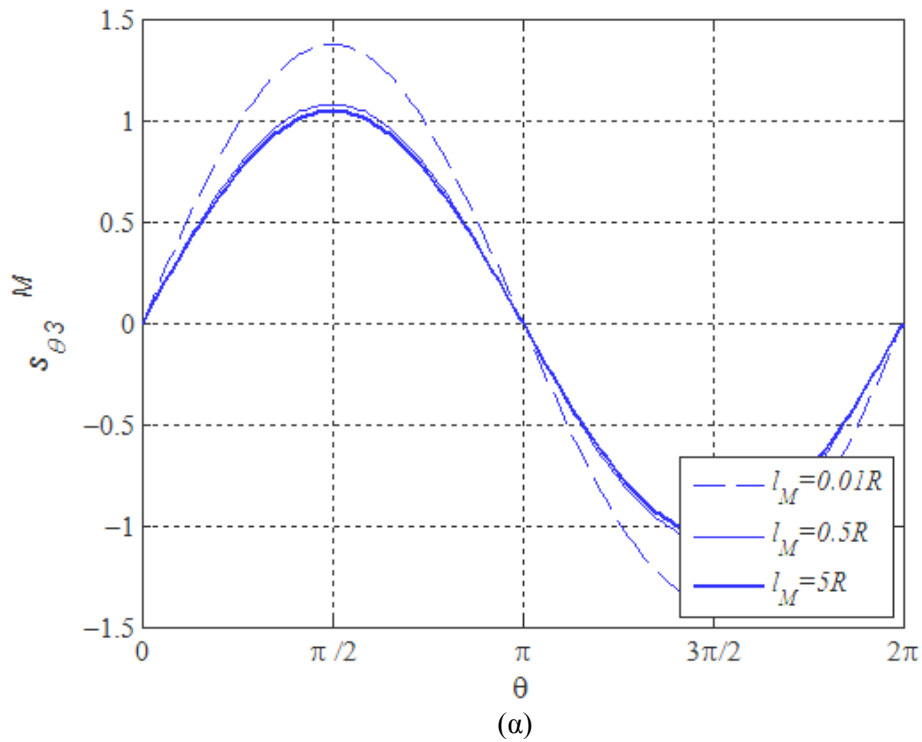
### 4.3 Μήτρα Cosserat- ανομοιογένεια Cosserat

Στα Σχήματα (4.7)-(4.8) δείχνονται οι μεταβολές των κανονικοποιημένων διεπιφανειακών τάσεων  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  και  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας, όταν η μήτρα φορτίζεται μονοαξονικά στο άπειρο με την διατμητική τάση  $s_{13}^\infty$ . Τα αποτελέσματα αυτά έχουν παραχθεί για μήτρα από υλικό Cosserat και για μια μαλακή ανομοιογένεια ( $\mu_M / \mu_1 = 2$ ), επίσης, από υλικό Cosserat. Οι μεταβολές των τάσεων προσδιορίστηκαν για σταθερή τιμή του χαρακτηριστικού μήκους της ανομοιογένειας  $l_I = 5R$  και για διάφορες τιμές του χαρακτηριστικού μήκους της μήτρας  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$ ,  $n_I = n_M = 0.5$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$  και  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ . Η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζεται στην μήτρα στις θέσεις  $\theta = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$  και μειώνεται με την αύξηση του χαρακτηριστικού μήκους της μήτρας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για την περίπτωση ανομοιογένειας Cosserat, η μέγιστη διεπιφανειακή διατμητική τάση αυξάνεται συγκρινόμενη με αυτήν που προκύπτει για ανομοιογένεια Cauchy, όταν οι άλλες παράμετροι παραμένουν σταθεροί.





**Σχήμα 4.7** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{3\theta}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{3\theta}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cosserat /ανομοιογένεια Cosserat, όταν  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$  .  
 ( $\mu_M / \mu_1 = 2$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$ ).



**Σχήμα 4.8** Η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων  $s_{\theta 3}^M / s_{13}^\infty$ ,  $s_{\theta 3}^I / s_{13}^\infty$  κατά μήκος της διεπιφάνειας για τον συνδυασμό μήτρα Cosserat /ανομοιογένεια Cosserat, όταν  $l_M / R = 0.01, 0.5, 5$  .  
 (  $\mu_M / \mu_1 = 2$ ,  $\mu_1 / (RN_u) = 0.1$ ,  $R\mu_1 / N_\omega = 0.5$ ,  $n_1 = n_M = 0.5$  ).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή, στα πλαίσια της ελαστικότητας Cosserat, επιλύθηκε το αντεπίπεδο πρόβλημα μιας κυκλικής ανομοιογένειας που βρίσκεται ένθετη σε μια άπειρη ελαστική μήτρα, για τέλεια και ατελή διεπιφανειακή σύνδεση των δύο υλικών. Η ατελής διεπιφανειακή σύνδεση προσομοιώθηκε με μία συνεχή διανομή διεπιφανειακών ελατηρίων δύναμης και ροπής. Η συμπεριφορά των ελατηρίων δύναμης περιγράφεται από μια γραμμική σχέση μεταξύ της ασυνέχειας των αντεπίπεδων μετατοπίσεων που δημιουργείται στις συνδεόμενες επιφάνειες, και της ανηγμένης διατμητικής διεπιφανειακής τάσης που αναπτύσσεται στην διεπιφάνεια. Αντίστοιχα, η συμπεριφορά των ελατηρίων ροπής περιγράφεται από μία σχέση μεταξύ της ασυνέχειας των περιστροφών των δύο συνδεόμενων επιφανειών και της διεπιφανειακής εφαπτομενικής τάσης από ροπή. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, σε μια θέση της διεπιφάνειας, τόσο οι ανηγμένες τάσεις από ροπή, όσο και οι ανηγμένες τάσεις από δύναμη, παραμένουν συνεχείς δια μέσου της διεπιφάνειας.

Στην ανάλυση του αντεπίπεδου ελαστικού συστήματος μήτρα/ανομοιογένεια, η φόρτιση που θεωρήθηκε ήταν μια ομοιόμορφη διατμητική τάση στο άπειρο σύνορο της μήτρας, οι δε λύσεις των σχετικών ελαστικών προβλημάτων για τα δύο διεπιφανειακά μοντέλα σύνδεσης προέκυψαν σε κλειστή μορφή. Η ορθότητα των λύσεων αυτών διερευνήθηκε αριθμητικά με τον έλεγχο ικανοποίησης των σχετικών συνοριακών και διεπιφανειακών συνθηκών των αντίστοιχων ελαστικών προβλημάτων.

Με βάση τα ελαστικά πεδία που αποκτήθηκαν διερευνήθηκε παραμετρικά η εντατική κατάσταση του συστήματος κοντά στην περιοχή της διεπιφάνειας. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι τα τασικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα είναι εξαρτώμενα από τις διαστάσεις της ανομοιογένειας. Όταν η μήτρα και η ανομοιογένεια είναι από υλικά Cosserat και η μήτρα έχει μεγαλύτερο μέτρο διάτμησης από την ανομοιογένεια, τότε η μέγιστη διεπιφανειακή τάση με ή χωρίς ελατηριακή σύνδεση

---

εμφανίζεται στην μήτρα. Στην περίπτωση που το μέτρο διάτμησης της μήτρας είναι μικρότερο από αυτό της ανομοιογένειας, η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζεται στην ανομοιογένεια.

Η μέγιστη διεπιφανειακή διατμητική τάση, είτε αυτή παρουσιάζεται στην μήτρα είτε στην ανομοιογένεια, επηρεάζεται δραστικά μόνο από το χαρακτηριστικό μήκος Cosserat της μήτρας. Με την αύξηση του μήκους αυτού, η μέγιστη διατμητική τάση μειώνεται σημαντικά στην περίπτωση της “μαλακής” ανομοιογένειας, ενώ αυξάνεται, στην περίπτωση “σκληρής” ανομοιογένειας. Αν η μήτρα είναι από υλικό Cauchy και η ανομοιογένεια από υλικό Cosserat, τότε το χαρακτηριστικό μήκος της ανομοιογένειας δεν επηρεάζει την μέγιστη διεπιφανειακή διατμητική τάση που αναπτύσσεται στα δύο υλικά.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] Cosserat, E., Cosserat, F. (1896): Sur la théorie de l'élasticité. *Ann. Toulouse* 10, 1–116.
- [2] Cosserat, E., Cosserat, F. (1909): Théorie des corps déformables. *Herman et Fils*, Paris.
- [3] Voigt, W., 1887. Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle. *Abhandl. Ges. Wiss. Göttingen* 34, 3–51.
- [4] Aero, E.L., Kuvshinskii, E.V. (1961): Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Sov. Phys. Solid State* 2(7), 1272–1281.
- [5] Ariman, T. (1967): On the stress around a circular hole in micropolar elasticity. *Acta Mech.* 3, 216–229.
- [6] Eringen, A.C. (1966): Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.* 15(6), 909–923.
- [7] Gurtin, M.E., Murdoch, A.I. (1975): A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 57, 291–323.
- [8] Mindlin, R.D. (1951): Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 18, 31–38.
- [9] Mindlin, R.D., (1963). Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp. Mech.* 3, 1–7.
- [10] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F. (1962): Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 415–448.
- [11] Nowacki, W. (1986): *Theory of Asymmetric Elasticity*. Pergamon-Press, Oxford.
- [12] Toupin, R.A. (1962): Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 385–414.
- [13] Toupin, R.A. (1964): Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 85–112.
- [14] Povstenko, Y.Z. (1993). Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. *J. Mech. Phys. Solids* 41, 1499–1514.
- [15] Weitsman, Y., (1965). Couple-stress effects on stress concentration around a cylindrical inclusion in a field of uniaxial tension. *J. Appl. Mech.* 32, 424–428.

- [16] Hartranft, R.J., Sih, G.C., (1965). The effect of couple stresses on the stress concentration of a circular inclusion. *J. Appl. Mech.* 32, 429–431.
- [17] Lubarda, V.A., (1997). Energy analysis of edge dislocation arrays near bimaterial interfaces. *Int. J. Solids Struct.* 34, 1053–1073.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: Μητρικά συστήματα

### Ι.1 Μητρικό σύστημα : τέλεια διεπιφάνεια

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}, \quad X = [A^M, B^M, A^I, B^I]^T, \quad B = \left[ -t_{13}, 0, \frac{Rt_{13}}{\mu_m}, -\frac{Rt_{13}}{\mu_m} \right]^T$$

όπου

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{R^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \right),$$

$$\alpha_{12} = -\frac{a_M + \beta_M}{R^3} \left( 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right),$$

$$\alpha_{13} = -\mu_I$$

$$\alpha_{14} = \frac{a_I + \beta_I}{R^3} \left( 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right),$$

$$\alpha_{21} = -4 \frac{a_M + \beta_M}{R^3},$$

$$\alpha_{22} = -2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \left[ \frac{\alpha_M R^2}{(a_M + \beta_M) l_M^2} K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right],$$

$$\alpha_{23} = 0,$$

$$\alpha_{24} = 2 \frac{a_I + \beta_I}{R^2} \left[ \frac{\alpha_I R^2}{(a_I + \beta_I) l_I^2} I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) + 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right],$$

$$\alpha_{31} = \frac{1}{R},$$

$$\alpha_{32} = \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) + K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right),$$

$$\alpha_{33} = R,$$

$$\alpha_{34} = \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) - I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right),$$

$$\alpha_{41} = \frac{1}{R},$$

$$\alpha_{42} = K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right),$$

$$\alpha_{43} = -R,$$

$$\alpha_{44} = -I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right).$$

## Ι.2 Μητρικό σύστημα : ελατηριακή διεπιφάνεια

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}, \quad X = [A^M, B^M, A^I, B^I]^T, \quad B = \left[ -t_{13}, 0, \frac{Rt_{13}}{\mu_m}, -\frac{Rt_{13}}{\mu_m} \right]^T$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\frac{1}{R^2} \left( \mu_M + 2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \right), \\ \alpha_{12} &= -\frac{a_M + \beta_M}{R^3} \left( 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right), \\ \alpha_{13} &= -\mu_I, \\ \alpha_{14} &= \frac{a_I + \beta_I}{R^3} \left( 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right), \\ \alpha_{21} &= -4 \frac{a_M + \beta_M}{R^3}, \\ \alpha_{22} &= -2 \frac{a_M + \beta_M}{R^2} \left[ \frac{\alpha_M R^2}{(a_M + \beta_M) l_M^2} K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + 2K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right) + \frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) \right], \\ \alpha_{23} &= 0, \\ \alpha_{24} &= 2 \frac{a_I + \beta_I}{R^2} \left[ \frac{\alpha_I R^2}{(a_I + \beta_I) l_I^2} I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) + 2I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{R}{l_I} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right], \\ \alpha_{31} &= \frac{1}{R}, \\ \alpha_{32} &= -\frac{R}{l_M} K_0 \left( \frac{R}{l_M} \right) - K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right), \\ \alpha_{33} &= R, \\ \alpha_{34} &= -\left[ \left( 2 \frac{(a_I + \beta_I)}{RN_\omega l_I} - \frac{R}{l_I} \right) I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) + \left( 1 - \frac{2\alpha_I}{N_\omega l_I^2} \right) I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right], \\ \alpha_{41} &= \frac{1}{R}, \\ \alpha_{42} &= K_1 \left( \frac{R}{l_M} \right), \\ \alpha_{43} &= -\left( R + \frac{\mu_I}{N_u} \right), \\ \alpha_{44} &= \left[ \left( 2 \frac{\alpha_I + \beta_I}{N_u R^3} - 1 \right) I_1 \left( \frac{R}{l_I} \right) - \frac{\alpha_I + \beta_I}{N_u R^2} I_0 \left( \frac{R}{l_I} \right) \right]. \end{aligned}$$



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II: Λογισμικά Προγράμματα

### II.1 Πρόγραμμα Antiplane Elasticity-perfect

```

function [ Bm,Cm,Ai,Bi ] = Evi3(Mi,Mm,R,Li,Lm,am,ai,bm,bi )
I0=besseli(0,R/Li);
I1=besseli(1,R/Li);
K0=besselk(0,R/Lm);
K1=besselk(1,R/Lm);

pp1 = - Mm/R^2 - 2*( am+bm )/R^4;
pp2 = - ( am+bm )/R^3 * ( 2*K1+R/Lm*K0 );
pp3 = ( ai+bi )/R^3 * ( 2*I1-R/Li*I0 );
pp4= -2*(am+bm)/R^2 * ( am*R^2*K1/ (am+bm)* Lm^2 + 2*K1+ R/Lm *
K0 );
pp5= 2*(ai+ bi) /R^2 *( ai*R^2*I1 / (ai+ bi)* Li^2 + 2*I1 - R/Li
*I0 );
pp6= R*K0/Lm + K1;
pp7= I1 -R*I0 /Li ;

A=[pp1,pp2,-Mi,pp3;
- 4 *(am + bm)/R^3,pp4,0,pp5;
1/R,pp6,R,-pp7
1/R,K1,-R,-I1];

t13=1;
B=[-t13, 0, t13*R /Mm, -t13*R /Mm];
x=A\B.';
Bm=x(1);
Cm=x(2);
Ai=x(3);
Bi=x(4);
end

function [ y ] = S3r( t13,u )
y=t13*cos(u);
end

function [ur,mr,m,w] = t3rM2(Mm,u,Bm,Lm,am,bm,Cm,Am,RR)
%r=1:50:1000000000;
t13=1;
Am=t13/Mm;
count=1;
for R=RR:0.1:100
K0=besselk(0,R/Lm);
K1=besselk(1,R/Lm);
w(count,:)= ( Mm*Am - ( Mm/R^2 + 2*( am+bm ) /R^4 ) *Bm ...
- ( am+bm )/R^3*( 2*K1+R/Lm*K0 ) *Cm ) *cos(u);
x1=(-(4*am+4*bm)/R^3 *Bm...
```

```

-2*(am+bm)/R^2*(am*R^2*K1/(am+bm)*Lm^2 + 2*K1 + R/Lm
*K0)*Cm ) *cos(u);
y=x1;
m(count,:)=y;
z=( -Am*R +Bm/R + ( R*K0/Lm +K1 ) *Cm ) *cos(u);
mr(count,:)=z;
p=( Am*R + Bm/R +Cm*K1) *cos(u);
ur(count,:)=p;
count=count+1;
end
end

```

```

function [ui,mi,m,w] = t3rI2(Mi,Li,u,Ai,Bi,ai,bi,RR)
t13=1;
format long g
k=0;
for R=0:0.01:RR
k=k+1;
I0=besseli(0,R/Li);
I1=besseli(1,R/Li);

y = ( Mi*Ai - ( ai+bi )/R^3 * ( 2*I1 - R/Li*I0 ) *Bi ) *cos(u);
w(k,:)=y;
q = ( -2*(ai+bi)/R^2 * ( ai*R^2*I1 / (ai+bi)* Li^2 + 2*I1-
R/Li*I0 ) *Bi ) *cos(u);
m(k,:)=q;
z=( -Ai*R + ( I1 - R*I0/Li ) *Bi ) *cos(u);
mi(k,:)=z;
p=( Ai*R + Bi*I1 ) *cos(u);
ui(k,:) = p;
end
end

```

```

function [] = testPlot3( Mm,u,Mi,Li,Lm,am,bm,ai,bi,RR)
[ Bm,Cm,Ai,Bi ] = Evi3( Mi,Mm,RR,Li,Lm,am,ai,bm,bi )
t13=1;
Am=t13/Mm;
[urm,mrrm,murum,term]=t3rM2(Mm,u,Bm,Lm,am,bm,Cm,Am,RR);
[urI,mrrI,muruI,teri]=t3rI2( Mi,Li,u,Ai,Bi,ai,bi,RR);
count=1;
for i=RR:0.1:100
ser(count,:)=S3r2( t13,u );
count=count+1;
end
flig=1;
for i=0:0.01:RR;
ser2(fl原因,:)=S3r2( t13,u );
flig=flig+1;
end
r1=RR:0.1:100;
r2=0:0.01:RR;
%%
figure
plot(r2,teri,'b',r1,term,'g')

```

```

axis([0 100 0 2])
grid on
%%
figure(2)
plot(r2,muruI,'b',r1,murum,'g')
grid on
%%
figure(3)
plot(r2,mrrI,'b',r1,mrrm,'g')
grid on
%%
figure(4)
plot(r2,urI,'b',r1,urm,'g')
grid on
%%
end

function [ Em,Fm,Ci,Di ] = Evi4(Mi,Mm,R,Li,Lm,am,ai,bm,bi )
I0=besseli(0,R/Li);
I1=besseli(1,R/Li);
K0=besselk(0,R/Lm);
K1=besselk(1,R/Lm);

pp1 = Mm/R^2 + 2*( am+bm )/R^4;
pp2 = - ( am+bm )/R^3 * ( 2*K1+R/Lm*K0 );
pp3 = -( ai+bi )/R^3 * ( R/Li*I0-2*I1 );
pp4= -2*(am+bm)/R^2 * ( - ( am*R^2*K1/ (am+bm)* Lm^2 ) + 2*K1+
R/Lm * K0 );
pp5= 2*(ai+ bi) /R^2 * ( ai*R^2*I1 / (ai+ bi)* Li^2 + 2*I1 - R/Li
*I0 );
pp6= R*K0/Lm + K1;
pp7= -(I1 -R*I0 /Li) ;

A=[-pp1,pp2,-Mi,pp3;
- 4 *(am + bm)/R^3,pp4,0,pp5;
1/R,pp6,R,pp7
1/R,K1,-R,-I1];

t23=2;
B=[-t23,0,t23*R /Mm, -t23*R /Mm];
x=A\B.';

Em=x(1);
Fm=x(2);
Ci=x(3);
Di=x(4);
end

function [ y ] = S3r( t23,u )

y=t23*sin(u);

```

```

end
function [ur,mr,m,w] = t3rM3 (Mm,u,Em,Lm,am,bm,Fm,Dm,RR)
%r=1:50:1000000000;
t23=2;
Dm=t23/Mm;

count=1;

for R=RR:0.1:100

    K0=besselk(0,R/Lm);
    K1=besselk(1,R/Lm);

    w(count,:)= ( Mm*Dm - ( Mm/R^2 + 2*( am+bm ) /R^4 ) *Em
...
                - ( am+bm )/R^3*( 2*K1+R/Lm*K0 ) *Fm
)*sin(u);

    x1=(-(4*am+4*bm)/R^3 *Em...
        -2*(am+bm)/R^2 *( - ( am*R^2*K1/(am+bm)*Lm^2 ) + 2*K1
+ R/Lm *K0 ) *Fm ) *sin(u);

    y=x1;

    m(count,:)=y;

    z=( -Dm*R +Em/R + ( R*K0/Lm +K1 ) *Fm ) *sin(u);

    mr(count,:)=z;

    p=( Dm*R + Em/R + Fm*K1 ) *sin(u);

    ur(count,:)=p;

    count=count+1;

end

end

function [ui,mi,m,w] = t3rI3 (Mi,Li,u,Ci,Di,ai,bi,RR )

    t23=2;

format long g

k=0;
for R=0:0.01:RR
    k=k+1;
    I0=besseli(0,R/Li);
    I1=besseli(1,R/Li);

```

```

y = ( Mi*Ci + ( ai+bi )/R^3 * (R/Li*I0 - 2*I1 )*Di )*sin(u);

w(k,:)=y;

q = ( -2*(ai+bi)/R^2 *( ai*R^2*I1 / (ai+bi)* Li^2 + 2*I1-
R/Li*I0 )*Di )*sin(u);

m(k,:)=q;

z=( -Ci*R + ( I1 - R*I0/Li )*Di ) *sin(u);

mi(k,:)=z;

p=( Ci*R + Di*I1 )*sin(u);

ui(k,:) = p;
end

end

function [] = testPlot4( Mm,u,Mi,Li,Lm,am,bm,ai,bi,RR)

[ Em,Fm,Ci,Di ] = Evi4( Mi,Mm,RR,Li,Lm,am,ai,bm,bi )

t23=1;
Am=t23/Mm;
[urm,mrrm,murum,term]=t3rM3( Mm,u,Em,Lm,am,bm,Fm,Am,RR);
[urI,mrrI,muruI,teri]=t3rI3( Mi,Li,u,Ci,Di,ai,bi,RR);

count=1;
for i=RR:0.1:100
    ser(count,:)=S3r( t23,u );
    count=count+1;
end
flig=1;
for i=0:0.01:RR;
    ser2(flign,:)=S3r( t23,u );
    flig=flig+1;
end

r1=RR:0.1:100;
r2=0:0.01:RR;

%%
figure
plot(r2,teri,'b',r1,term,'g')
axis([0 100 0 2])
grid on
%%
figure(2)
plot(r2,muruI,'b',r1,murum,'g')
grid on

```

```

%%
figure(3)
plot(r2,mrrI,'b',r1,mrrm,'g')
grid on
%%
figure(4)
plot(r2,urI,'b',r1,urm,'g')
grid on

end

```

## II.2 Πρόγραμμα Antiplane Elasticity-springs

```

function [ Bm,Cm,Ai,Bi ] = Evi5(Mi,Mm,R,Li,Lm,n,Nf,Nu)
close all
am=4*Mm*Lm^2;
bm=4*Mm*Lm^2*n;
ai=4*Mm*Li^2;
bi=4*Mm*Li^2*n;

I0=besseli(0,R/Li);
I1=besseli(1,R/Li);
K0=besselk(0,R/Lm);
K1=besselk(1,R/Lm);

pp1 = - Mm/R^2 - 2*(am+bm)/R^4;
pp2 = -(am+bm)/R^3*(2*K1+R/Lm*K0);
pp3 = (ai+bi)/R^3*(2*I1-R/Li*I0);
pp4 = -2*(am+bm)/R^2*(am*R^2*K1/((am+bm)*Lm^2)+2*K1+R/Lm*K0);
pp5 = 2*(ai+bi)/R^2*(ai*R^2*I1/(ai+bi)*Li^2+2*I1-R/Li*I0);
pp6 = -R*K0/Lm - K1;
pp7=I0*(2*(ai+bi)/(R*Nf*Li)-R/Li)-I1*(-1+2*ai/(Nf*Li^2)+
4*(ai+bi)/(Nf*R^2));
pp8 = I1*(2*(ai+bi)/(Nu*R^3)-1)-I0*(ai+bi)/(Nu*R^2);

A= [pp1,pp2,-Mi,pp3;
- 4*(am+bm)/R^3,pp4,0,pp5;
1/R,pp6,R,-pp7;
1/R,K1,-(R+Mi/Nu),pp8]
t13=1;
B=[-t13,0,t13*R/Mm,-t13*R/Mm]
x=A\B.';
Bm=x(1)
Cm=x(2)
Ai=x(3)
Bi=x(4)

end
function [ur,mr,m,w] = t3rM5(Mm,u,Bm,Lm,n,Cm,Am,RR)
t13=1;
Am=t13/Mm;
am=4*Mm*Lm^2;
bm=4*Mm*Lm^2*n;
count=1;

```

```

for R=RR:0.1:100
    K0=besselk(0,R/Lm);
    K1=besselk(1,R/Lm);
    w(count,:)= (Mm*Am- (Mm/R^2+2*(am+bm)/R^4)*Bm ...
                - (am+bm)/R^3*(2*K1+R/Lm*K0)*Cm)*cos(u)
    x1=(-(4*am+4*bm)/R^3 *Bm...
        -2*(am+bm)/R^2*(am*R^2*K1/((am+bm)*Lm^2)+2*K1+R/Lm
        *K0)*Cm ) *cos(u);

    y=x1;

    m(count,:)=y;

    z=( -Am*R +Bm/R - ( R*K0/Lm +K1 ) *Cm ) *cos(u);

    mr(count,:)=z;

    p=( Am*R + Bm/R +Cm*K1)*cos(u);

    ur(count,:)=p;

    count=count+1;
end

end

function [ui,mi,m,w] = t3rI5(Mi,Li,u,Ai,Bi,n,RR )

    t13=1;

    ai=4*Mm*Li^2;
    bi=4*Mm*Li^2*n;

    format long g

    k=0;
    for R=0:0.01:RR
        k=k+1;
        I0=besseli(0,R/Li);
        I1=besseli(1,R/Li);

        y = ( Mi *Ai - ( ai+bi ) /R^3 * ( 2*I1 - R/Li*I0 ) *Bi ) *cos(u);

        w(k,:)=y;

        q = ( -2*(ai+bi)/R^2 *( ai*R^2*I1 / ((ai+bi)* Li^2) + 2*I1-
        R/Li*I0 ) *Bi ) *cos(u);

        m(k,:)=q;

        z=( -Ai *R - ( -I1 +R*I0/Li ) *Bi ) *cos(u);

        mi(k,:)=z;
    end
end

```

```

p=( Ai*R + Bi*I1 )*cos(u);

ui(k,:) = p;
end
end

function [] = testPlot5( Mm,u,Mi,Li,Lm,am,bm,ai,bi,Nf,Nu,RR)

[ Bm,Cm,Ai,Bi ] = Evi5(Mi,Mm,RR,Li,Lm,am,ai,bm,bi,Nf,Nu);

t13=1;
Am=t13/Mm;
[urm,mrrm,murum,term]=t3rM5(Mm,u,Bm,Lm,am,bm,Cm,Am,RR);
[urI,mrrI,muruI,teri]=t3rI5(Mi,Li,u,Ai,Bi,ai,bi,RR);

count=1;
for i=RR:0.1:100
    ser(count,:)=S3r5(t13,u);
    count=count+1;
end
flig=1;
for i=0:0.01:RR;
    ser2(flign,:)=S3r5(t13,u);
    flig=flig+1;
end

r1=RR:0.1:100;
r2=0:0.01:RR;

%%
figure
plot(r2,teri,'b',r1,term,'g')
axis([0 100 0 2])
xlabel('R');
ylabel('t3r');
grid on
%%
figure(2)
plot(r2,muruI,'b',r1,murum,'g')
xlabel('R');
ylabel('mru');
grid on
%%
figure(3)
plot(r2,mrrI,'b',r1,mrrm,'g')
%axis([0 10 0 2])
xlabel('R');
ylabel('fu');
grid on
%%
figure(4)

```



```

plot(r2,urI,'b',r1,urm,'g')
%axis([0 10 0 2])
xlabel('R');
ylabel('u3');
grid on

end

function [ t3um,tu3m ] = M(Mm,Lm,Bm,Cm, r, U )

t13=1;
Am=t13/Mm;

K1=besselk(1,r/Lm);
count=0;
for u=U;
    count=count + 1;
    t3um(count,:)= -Mm*( Am+ Bm/r^2 + 2*Cm*K1 /r ) * sin(u);

    x1 = -Mm*( -Am-(Bm/r^2))*sin(u);
    y=x1;
    tu3m(count,:)=y;

end
end

function [ t3ui,tu3i ] = M1( Mi,Li,Ai,Bi,r,U )

k=0;
for u=U
    k=k+1;

    I1=besseli(1,r/Li);

    y = -Mi*(Ai+ ((2*Bi*I1)/r) )*sin(u);

    t3ui(k,:)=y;

    q =-Mi*Ai*sin(u);

    tu3i(k,:)=q;
end
end

function [] = testplott( Mm,Mi,Li,Lm,n,Nf,Nu,RR )
u=0:pi/100:2*pi;
for k = 1:length( Lm )
    [ Bm, Cm, Ai, Bi ] = Evi5( Mi,Mm,RR, Li, Lm(k), n, Nf, Nu );

    [t3um(k,:),tu3m(k,:)] = M(Mm,Lm(k),Bm,Cm, RR, u);
    [t3ui(k,:),tu3i(k,:)] = M1( Mi,Li,Ai,Bi,RR, u );
end
end

```

%%

```

figure
set(0,'DefaultAxesColorOrder',[0 0 0],...
     'DefaultAxesLineStyleOrder','--|-|-|:');
h=plot(u,t3um(1:end,:), 'b');
set(h(3),'LineWidth',2);
xlabel('\it \theta','FontSize',14 );
ylabel('\it s}_{3 \it \theta}^{\it M}','FontSize',14);
xlim([0, 2*pi])
set(gca,'XTick',0:pi/2:2*pi);
set(gca,'XTickLabel',{'0','p /2','p','3p/2','2p'},...
     'fontname','symbol','fontsize',12);
hleg = legend('l_M=0.01R','l_M=0.5R','l_M=5R',...
             'Location','SouthEast');
set(hleg,'FontAngle','italic','fontname','times')
grid on

```

```

figure
h=plot(u,t3ui(1:end,:), 'g');
set(h(3),'LineWidth',2);
xlabel('\theta\bf','FontSize',14 );
ylabel('\it s}_{3 \it \theta}^{\it I}','FontSize',14);
xlim([0, 2*pi])
set(gca,'XTick',0:pi/2:2*pi);
set(gca,'XTickLabel',{'0','p /2','p','3p/2','2p'},...
     'fontname','symbol','fontsize',12);
hleg = legend('l_M=0.01R','l_M=0.5R','l_M=5R',...
             'Location','SouthEast');
set(hleg,'FontAngle','italic','fontname','times')
grid on

```

```

figure
h=plot(u,tu3m(1:end,:), 'b');
set(h(3),'LineWidth',2);
xlabel('\theta\bf','FontSize',14 );
ylabel('\it s}_{\it \theta 3} ^{\it M}','FontSize',14);

xlim([0, 2*pi])
set(gca,'XTick',0:pi/2:2*pi);
set(gca,'XTickLabel',{'0','p /2','p','3p/2','2p'},...
     'fontname','symbol','fontsize',12);
hleg = legend('l_M=0.01R','l_M=0.5R','l_M=5R',...
             'Location','SouthEast');
set(hleg,'FontAngle','italic','fontname','times')
grid on

```

```

figure
h=plot(u,tu3i(1:end,:), 'g');

```

```

set(h(3), 'LineWidth', 2);
xlabel('\theta\bf', 'FontSize', 14 );
ylabel('\it s_{\it\theta 3}^{\it I}', 'FontSize', 14);

xlim([0, 2*pi])
set(gca, 'XTick', 0:pi/2:2*pi);
set(gca, 'XTickLabel', {'0', 'p /2', 'p', '3p/2', '2p'}, ...
    'fontname', 'symbol', 'fontsize', 12);
hleg = legend('l_M=0.01R', 'l_M=0.5R', 'l_M=5R', ...
    'Location', 'SouthEast');
set(hleg, 'FontAngle', 'italic', 'fontname', 'times')
grid on

end

function [] = testplott3( Mm, Mi, Li, Lm, n, Nf, Nu, RR )
u=0:pi/100:2*pi;
for k = 1:length( Li )
    [ Bm, Cm, Ai, Bi ] = Evi5( Mi, Mm, RR, Li(k), Lm, n, Nf, Nu );

    [t3um(k,:), tu3m(k,:)] = M(Mm, Lm, Bm, Cm, RR, u);
    [t3ui(k,:), tu3i(k,:)] = M1( Mi, Li(k), Ai, Bi, RR, u );
end

%%
figure
set(0, 'DefaultAxesColorOrder', [0 0 0], ...
    'DefaultAxesLineStyleOrder', '--|-|-|:');
h=plot(u, t3um(1:end,:), 'b');
set(h(3), 'LineWidth', 2);
xlabel('\it \theta', 'FontSize', 14 );
ylabel('\it s_{3 \it\theta}^{\it M}', 'FontSize', 14);
xlim([0, 2*pi])
set(gca, 'XTick', 0:pi/2:2*pi);
set(gca, 'XTickLabel', {'0', 'p /2', 'p', '3p/2', '2p'}, ...
    'fontname', 'symbol', 'fontsize', 12);
hleg = legend('l_I=0.01R', 'l_I=0.5R', 'l_I=5R', ...
    'Location', 'SouthEast')
set(hleg, 'FontAngle', 'italic', 'fontname', 'times')
grid on

figure
h=plot(u, t3ui(1:end,:), 'g');
set(h(3), 'LineWidth', 2);
xlabel('\theta\bf', 'FontSize', 14 );
ylabel('\it s_{3 \it\theta}^{\it I}', 'FontSize', 14);
set(gca, 'XTick', 0:pi/2:2*pi);
set(gca, 'XTickLabel', {'0', 'p /2', 'p', '3p/2', '2p'}, ...

```

```

        'fontname', 'symbol', 'fontsize', 12);
hleg = legend('l_I=0.01R', 'l_I=0.5R', 'l_I=5R', ...
            'Location', 'SouthEast');
set(hleg, 'FontAngle', 'italic', 'fontname', 'times')
grid on

figure
h=plot(u, tu3m(1:end,:), 'b');
set(h(3), 'LineWidth', 2);
xlabel('\theta\bf', 'FontSize', 14 );
ylabel('{\it s}_{\it\theta 3} ^{ \it M}', 'FontSize', 14);
set(gca, 'XTick', 0:pi/2:2*pi);
set(gca, 'XTickLabel', {'0', 'p /2', 'p', '3p/2', '2p'}, ...
        'fontname', 'symbol', 'fontsize', 12);
hleg = legend('l_I=0.01R', 'l_I=0.5R', 'l_I=5R', ...
            'Location', 'SouthEast')
set(hleg, 'FontAngle', 'italic', 'fontname', 'times')
grid on

figure
h=plot(u, tu3i(1:end,:), 'g');
set(h(3), 'LineWidth', 2);
xlabel('\theta\bf', 'FontSize', 14 );
set(gca, 'XTick', 0:pi/2:2*pi);
set(gca, 'XTickLabel', {'0', 'p /2', 'p', '3p/2', '2p'}, ...
        'fontname', 'symbol', 'fontsize', 12);
hleg = legend('l_I=0.01R', 'l_I=0.5R', 'l_I=5R', ...
            'Location', 'SouthEast')
set(hleg, 'FontAngle', 'italic', 'fontname', 'times')
grid on

```

end