Μιγαδικά Μέτρα και Εφαρμογές

Δήμητρα Μάρκου

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Τομέας Μαθηματικών

11/02/2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικές Έννοιες **7**

1.1 Θετικά Μέτρα 7

1.1.1 σ-άλγεβρα 7

1.1.2 θετικά μέτρα και μετρήσιμες συναρτήσεις 9

1.1.3 ολοκλήρωμα Lebesgue και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις 11

1.1.4 Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz 20

1.2 Προσημασμένα Μέτρα 29

2 Μιγαδικά Μέτρα **31**

2.1 Κύμανση Μέτρου 31

2.2 Θεώρημα Radon-Nikodym 36

2.3 Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz 43

3 Εφαρμογές **47**

3.1 Κατασκευή συναρτήσεων που αναπαριστάνονται από δυναμοσειρές . 47

3.2 Εφαρμογή στην Ανάλυση Fourier 51

3.2.1 Μετασχηματισμός Fourier 51

3.2.2 Μιγαδικά Μέτρα 52

Πρόλογος

Στο κεφάλαιο 1 δίνονται βασικές έννοιες και ορισμοί που αφορούν χώρους θετικού μέτρου και χώρους προσημασμένου μέτρου.

Το κεφάλαιο 2 αναφέρεται σε χώρους μιγαδικού μέτρου. Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz και ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της θεωρίας μέτρου, Θεώρημα Radon-Nikodym.

Τέλος, παραθέτουμε δύο εφαρμογές των μιγαδικών μέτρων: Έναν τρόπο κατασκευής συναρτήσεων που αναπαριστάνονται από δυναμοσειρές και μια εφαρμογή τους στην Ανάλυση Fourier.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ.Ι.Σαραντόπουλο για τη βοήθειά του. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ.Ν.Γιαννακάκη και κ.Γ.Σμυρλή για το χρόνο που διέθεσαν.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1 Θετικά Μέτρα

1.1.1 σ-άλγεβρα

Ορισμός 1.1.1 *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X καλείται **άλγεβρα (υποσυνόλων του X)** αν ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $X \in \mathcal{A}$
2. *Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c(= X - A) \in \mathcal{A}$*
3. *Αν $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{A}$, τότε $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$, όπου I πεπερασμένο σύνολο.*

*Αν η σχέση (3) ισχύει και για I απείρως αριθμήσιμο, τότε η $\mathcal{A}$ καλείται **σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του X)**.*
*Ένα ζεύγος $(X, \mathcal{A})$, όπου X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X, καλείται **μετρήσιμος χώρος** και ένα $A \in \mathcal{A}$ καλείται **μετρήσιμο σύνολο**.*

Παρατηρήσεις 1.1.1

1. *Στον παραπάνω ορισμό η απαίτηση (1) μπορεί να αντικατασταθεί από την*
   (α) *$\emptyset \in \mathcal{A}$ ή την*
   (β) *Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή οικογένεια.*
2. *Εύκολα αποδεικνύεται ότι έπειτα από αριθμήσιμο το πλήθος συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συνόλων προκύπτουν μετρήσιμα σύνολα.*

Παραθέτουμε ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα σ-άλγεβρας, τη σ-άλγεβρα Borel.

Υπενθυμίζονται οι παρακάτω ορισμοι:

Ορισμός 1.1.2 *Έστω X μη κενό σύνολο. Μία οικογένεια τ υποσυνόλων του X καλείται **τοπολογία** αν ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $\emptyset \in \tau$
2. *Αν* $N \in \mathbb{N}$ *και* $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \tau$, *τότε* $\cap_{i=1}^N A_i \in \tau$.
3. *Αν* I *αυθαίρετο σύνολο και* $A_i \in \tau$ *για κάθε* $i \in I$, *τότε* $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$.

Το ζεύγος (X, τ) *καλείται **τοπολογικός χώρος** και τα υποσύνολα του X που ανήκουν στην τ καλούνται **ανοικτά του X** (ως προς την τοπολογία τ).*

Πρόταση 1.1.1 *Έστω X μη κενό σύνολο και C κλάση υποσυνόλων του X. Υπάρχει η ελάχιστη (με την έννοια του εγκλεισμού) σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X που περιέχει την κλάση $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ καλείται **παραγόμενη σ-άλγεβρα** από τη C και συμβολικά γράφουμε $\mathcal{A} = \sigma(C)$.*

Απόδειξη Αρχικά θα δείξουμε ότι η τομή μιας μη κενής κλάσης σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, έστω σύνολο I και $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X. Θα δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{A} = \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ αποτελεί σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Πράγματι, $X \in \mathcal{A}$, αφού $X \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$. Έπειτα, αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A \in \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$. Αφού για κάθε $i \in I$ η $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, ισχύει ότι $A^c \in \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$. Οπότε $A^c \in \mathcal{A}$. Τέλος, έστω J αριθμήσιμο σύνολο και $\{A_j : j \in J\} \subset \mathcal{A}$. Τότε $\{A_j : j \in J\} \subset \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$, οπότε $\cup_{j\in J} A_j \in \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$. Ισοδύναμα, $\cup_{j\in J} A_j \in \mathcal{A}$.Άρα η $\mathcal{A}$ αποτελεί σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.
Θεωρούμε την οικογένεια

$$\left\{\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{M} \text{ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X}, C \subset \mathcal{M}\right\}$$

Η παραπάνω οικογένεια είναι μη κενή αφού περιέχει το $\mathcal{P}(X)$. Το σύνολο

$$\cap\left\{\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)) : \mathcal{M} \text{ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X}, C \subset \mathcal{M}\right\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X, περιέχει την κλάση C και είναι προφανώς η ελάχιστη με αυτές τις ιδιότητες.

□

Ορισμός 1.1.3 *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\tau)$ καλείται **σ-άλγεβρα Borel** υποσυνόλων του X και συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$. Είναι δηλαδή η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X που περιέχει τα ανοικτά του ως προς την τοπολογία τ. Ένα $A \in \mathcal{B}(X)$ καλείται **σύνολο Borel** του X.*

1.1.2 Θετικά μέτρα και μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 1.1.4 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ καλείται **θετικό μέτρο** αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$, *όπου I αριθμήσμο σύνολο και τα $(A_i)i \in I$ ξένα ανά δύο.*

*Αν η (2) ισχύει μόνο για I πεπερασμένο, τότε το μ καλείται **πεπερασμενα προσθετικό μέτρο** και μπορεί να οριστεί και σε μία άλγεβρα. Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$, όπου $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ θετικό μέτρο σε αυτόν καλείται **χώρος θετικού μέτρου**.*

Ορισμός 1.1.5 *Ένα θετικό μέτρο μ ορισμένο σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ καλείται*

- ***πεπερασμένο**, αν $\mu(X) < +\infty$*
- ***σ-πεπερασμένο**, αν $X = \cup_{i\in I} A_i$, όπου I αριθμήσιμο σύνολο και για κάθε $i \in I$ ισχύει $A_i \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_i) < +\infty$.*

*Τότε ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται **χώρος πεπερασμένου θετικού μέτρου** και **χώρος σ-πεπερασμένου θετικού μέτρου** αντίστοιχα.*

Σημειώνουμε τώρα κάποια γνωρίσματα του θετικού μέτρου.

Πρόταση 1.1.2 *(μονοτονία του θετικού μέτρου) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου. Αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subset B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$. Αν, επιπλέον, $\mu(A) < +\infty$, τότε $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Απόδειξη Έχουμε $B = A \cup (B - A)$. Τα $A, B - A$ είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα οπότε $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Αφού $\mu(B - A) \geq 0)$, έπεται ότι $\mu(B) \geq \mu(A)$. Αν, επιπλέον, $\mu(A) < +\infty$, τότε $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

□

Πρόταση 1.1.3 *(σ-υποπροσθετικότητα του θετικού μέτρου ή ανισότητα Boole) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου. Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Απόδειξη Έστω $B_n = A_n - \cup_{i<n} A_i$, για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε ότι $B_n \in \mathcal{A}$ και $B_n \subset A_n$. Από την πρόταση 1.1.2 έχουμε ότι $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επίσης, τα $B_n, n = 1, 2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο και $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Επομένως

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.1.4 *(συνέχεια του θετικού μέτρου) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου.*

1. *Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*
2. *Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $\mu(A_1) < \infty$, τότε $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Απόδειξη

1. Έστω $B_1 = A_1$ και $B_n = A_n - A_{n-1}$ για $n \geq 2$. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει $B_n \in \mathcal{A}$, τα $B_n, n = 1, 2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\cup_{k=1}^{n} B_k = A_n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επομένως

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

2. Θέτουμε $C_1 = A_1$ και $C_n = A_1 - A_n$,για κάθε $n = 2, 3, \ldots$. Τότε η $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 - \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Από το (1) έπεται ότι

$$\mu(\,\cup_{n=1}^{\infty}\, C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n),$$

δηλαδή

$$\mu(A_1 - \cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n).$$

Αφού $\mu(A_1) < \infty$, από την πρόταση 1.1.4 έπεται ότι

$$\mu(A_1 - \cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

και

$$\mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n).$$

Επομένως

$$\mu(A_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty}) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Δηλαδή,

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

□

Ορισμός 1.1.6 *Έστω $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι. Μία συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ καλείται $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-**μετρήσιμη** αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ το $f^{-1}(B) \Big(= \{x \in X : f(x) \in B\}\Big) \in \mathcal{A}$. Αν $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$, δηλαδή η $\mathcal{B}$ είναι η σ-άλγεβρα Borel του Y (ως προς μια τοπολογία τ), τότε η f καλείται **Borel μετρήσιμη συνάρτηση**.*

1.1.3 ολοκλήρωμα Lebesgue και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Αρχικά θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών συναρτήσεων.

Ορισμός 1.1.7 *Έστω X μη κενό σύνολο. Μία συνάρτηση $\sigma : X \to \mathbb{C}$ καλείτα **απλή** αν το σύνολο τιμών της, $s(X)$, είναι πεπερασμένο.*

Παρατηρήσεις 1.1.2 *Αν $s(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$, όπου $N \in \mathbb{N}$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτησή μας γράφεται ως $\sigma = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$, όπου $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ για καθε $i \in \{1, 2, \ldots .N\}$. Αυτή η παράσταση λέγεται **κανονική μορφή** της σ. Εύκολα, επίσης, βλέπουμε ότι η σ είναι μετρήσιμη συνάρτηση αν και μόνο αν το A_i είναι μετρήσιμο σύνολο για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots .N\}$.*

Ορισμός 1.1.8 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f : X \to [0, +\infty)$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i}$ η κανονική της μορφή, τότε ορίζεται το **ολοκλήρωμα Lebesgue της f (ως προς μ)** να είναι ο αριθμός*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i)$$

*εφόσον είναι πεπερασμένο. Αν $\sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i) = \infty$, λέμε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς μ δεν υπάρχει. Επίσης, αν στο πιο πάνω άθροισμα εμφανιστεί ο όρος $0 \cdot (+\infty)$, τότε ορίζουμε $0 \cdot (+\infty) = 0$. Αν $E \in \mathcal{A}$, το **ολοκλήρωμα Lebesgue της f (ως προς μ) στο E** ορίζεται ως*

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i \cap E)$$

Πρόταση 1.1.5 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου, $f, g : X \to [0, +\infty)$ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις και $a \geq 0$. Ισχύουν τα εξής:*

1. $\int afd\mu = a\int fd\mu$
2. $\int(f+g)d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$
3. *Αν* $f \leq g$, *τότε* $\int fd\mu \leq \int gd\mu$

Απόδειξη Έστω $f = \sum_{i=1}^{N} a_i\chi_{A_i}$ και $g = \sum_{j=1}^{M} \beta_j\chi_{B_j}$, όπου $N, M \in \mathbb{N}, a_i \geq 0$, για κάθε $i = 1, \ldots, N, \beta_j \geq 0$. για κάθε $j = 1, \ldots, M$, τα $A_i, i = 1, \ldots, N$ καθώς και τα $B_j, j = 1, \ldots, M$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα και $\cup_{i=1}^{N} = A_i = \cup_{j=1}^{M} B_j = X$.

1.
$$\begin{aligned}
\int afd\mu &= \int \sum_{i=1}^{N} aa_i\chi_{A_i}d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{N} aa_i\mu(A_i) \\
&= a\int fd\mu.
\end{aligned}$$

2. Έχουμε $f+g = \sum_{i,j}(a_i+\beta_j)\chi_{A_i\cap B_j}$ και τα $A_i \cap B_j$ είνα ξένα μεταξύ τους. Άρα
$$\begin{aligned}
\int(f+g)d\mu &= \sum_{i,j}(a_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i,j} a_i\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{i,j}\beta_j\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i} a_i\sum_{j}\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j}\beta_j\sum_{j}\mu(A_i\cup B_j) \\
&= \sum_{i} a_i\mu(A_i) + \sum_{j}\beta_j\mu(B_j) \\
&= \int fd\mu + \int gd\mu.
\end{aligned}$$

3. Η $g-f$ είναι απλή και ισχύει $g-f \geq 0$. Από το (2) έχουμε
$$\int gd\mu = \int(g-f)d\mu + \int fd\mu$$
και επειδή $\int(g-f)d\mu \geq 0$, έπεται ότι $\int fd\mu \leq \int gd\mu$.

□

Ορισμός 1.1.9 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Το* ***ολοκλήρωμα Lebesgue της f (ως προς μ)*** *ορίζεται ως εξής:*

$$\int f d\mu = \sup\Big\{ \int s d\mu : s \text{ απλή}, \ 0 \le s \le f \Big\}$$

Αν $E \in \mathcal{A}$, το ***ολοκλήρωμα Lebesgue της f (ως προς μ) στο E*** *ορίζεται ως*

$$\int_E f d\mu = \int f \cdot \chi_E d\mu.$$

Παρατηρήσεις 1.1.3 *Αν η f είναι απλή, τότε ο ορισμός αυτός συμπίπτει με τον ορισμό 1.1.8 διότι από την προηγούμενη πρόταση η μεγαλύτερη απλή συνάρτηση s με $0 \le s \le f$ είναι η s=f η οποία και θα δώσει τη μέγιστη τιμή στο $\int s d\mu$. Επίσης, είναι σαφές ότι $\int f d\mu \in [0, +\infty]$.*

Πρόταση 1.1.6 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου, $f, g : X \to [0, +\infty]$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις, $A, B \in \mathcal{A}$ και $a \ge 0$. Τότε*

1. *$\int af d\mu = a \int f d\mu$*
2. *Αν $f \le g$, τότε $\int f d\mu \le \int g d\mu$*
3. *Αν $A \subset B$, τότε $\int_A f d\mu \le \int_B g d\mu$*
4. *Αν $\mu(A) = 0$ ή αν f=0 στο A, τότε $\int_A f d\mu = 0$*

Απόδειξη

1. Αν α=0, τότε προφανώς ισχύει. Αν $a > 0$, τότε από την πρόταση 1.1.5 , το (1),

$$\begin{aligned}\int af d\mu &= \sup\Big\{ \int s d\mu : s \text{ απλη}, \ 0 \le s \le af \Big\} \\ &= a \sup \int \Big\{ \frac{1}{a} s d\mu : s \text{ απλη}, \ 0 \le \frac{1}{a} \cdot s \le f \Big\} \\ &= a \sup\Big\{ \int t d\mu : t \text{ απλη}, \ 0 \le t \le f \Big\} \\ &= a \int f d\mu.\end{aligned}$$

2. Αν $f \le g$, τότε για κάθε απλή συνάρτηση $s \ge 0$ με $s \le f$ έχουμε $s \le g$. Άρα από τον ορισμό 1.1.9 έπεται το ζητούμενο.
3. Αν $A \subset B$, τότε $f \cdot \chi_A \le f \cdot \chi_B$ και από το (2), $\int f \cdot \chi_A d\mu \le \int f \cdot \chi_B d\mu$, δηλαδή $\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu$.

4. Αν μ(A)=0, τότε για κάθε απλή συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f\chi_A$ έχουμε $\int s d\mu = 0$. Άρα $\int f \cdot \chi_A d\mu = 0$, δηλαδή $\int_A f d\mu = 0$. Αν $f = 0$ στο A, τότε $f \cdot \chi_A = 0$ στο X και άρα $\int_A f d\mu = \int f \cdot \chi_A d\mu = 0$.

□

Θεώρημα 1.1.1 *(Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n = 1, 2, \ldots$ αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (δηλαδή $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$) και $f = \lim_n f_n$. Τότε*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε το επόμενο

Λήμμα 1.1.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $s : X \to [0, +\infty]$ απλή συνάρτηση. Θέτουμε $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με $\nu(A) = \int_A s d\mu$. Τότε το ν είναι θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.*

Απόδειξη Έστω $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ όπου $n \in \mathbb{N}$, τα $A_i, i = 1, \ldots, n$ είναι ξένα ανά δυο μετρήσιμα σύνολα και $a_i \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ακολουθία $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathcal{A}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\nu(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) &= \int_{\cup_{m=1}^{\infty} B_m} s d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap \cup_{m=1}^{\infty} B_m) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(\cup_{m=1}^{\infty} (A_i \cap B_m)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap B_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \nu(B_m).
\end{aligned}$$

Επιπλέον, $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = 0$. Άρα το ν είναι θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1 Εφόσον η f είναι αύξουσα, ορίζεται η συνάρτηση $f = \lim_n f_n$, $f : X \to [0, \infty]$ και είναι μετρήσιμη αφού οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots$ είναι μετρήσιμες (βλ. [3], πρόταση 5.10). Άρα ορίζεται το $\int f d\mu$. Επίσης, αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ οπότε $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$. Συνεπώς, υπάρχει το $\lim_n \int f_n$ και $\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Θέτουμε $a = \lim_n \int f_n d\mu$. Μένει να δείξουμε ότι $a \geq \int f d\mu$. Έστω s απλή με $0 \leq s \leq f$ και $\vartheta \in (0, 1)$.

Θέτουμε

$$A_n = [f_n \geq \vartheta s], n = 1, 2, \ldots$$

Τότε $A_n \in \mathcal{A}$ (αφού οι f_n και s είναι μετρήσιμες), η A_n είναι αύξουσα (αφού η f_n είναι αύξουσα) και $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ (διότι για κάθε $x \in X$. αν $f(x) = 0$, τότε $s(x) = 0$ οπότε $x \in A_1$ ενώ αν $f(x) > 0$, τότε $\vartheta \cdot s(x) < f(x)$ και άρα υπάρχει n ώστε $\vartheta \cdot s(x) < f_n(x)$, οπότε $x \in A_n$). Θέτουμε

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] \text{ με } \nu(A) = \int_A s d\mu.$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι το ν είναι θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Έχουμε

$$\vartheta \cdot \nu(A_n) = \vartheta \cdot \int_{A_n} s d\mu = \int \vartheta \cdot s \cdot \chi_{A_n} d\mu \leq \int f_n \chi_{A_n} d\mu \leq \int f_n d\mu,$$

και παίρνοντας το όριο όταν $n \to +\infty$,

$$\vartheta \cdot \nu(X) \leq a, \text{ δηλαδη } \vartheta \int s d\mu \leq a.$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\vartheta \in (0, 1)$ και κάθε απλή συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$. Παίρνοντας το όριο όταν $\vartheta \to 1$ έχουμε $\int s d\mu \leq a$. Τέλος, παίρνοντας το supremum για όλες τις απλές συναρτήσεις s με $0 \leq s \leq f$, έπεται ότι $\int f d\mu \leq a$.

□

Πόρισμα 1.1.1 *(Θεώρημα Beppo-Levi) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου, $f_n : X \to [0, +\infty], n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Τότε*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα 1.1.2 *(Λήμμα Fatou) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f_n : X \to [0, +\infty], n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$$

Πόρισμα 1.1.3 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $\nu = \nu(f, \mu) : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, με $\nu(A) = \int_A f d\mu$. Τότε*

1. *Το ν είναι θετικό μέτρο.*

2. *Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$, τότε $\nu(A) = 0$.*

3. *Αν $g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $\int g d\nu = \int g f d\mu$.*

Παρατηρήσεις 1.1.4 1. *Συχνά συμβολίζουμε $d\nu = f d\mu$ και αυτό σημαίνει οτι $\int g d\nu = \int g f d\mu$, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, +\infty]$.*

2. *Στο αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος,το οποίο καλείται θεώρημα Radon- Nikodym, θα αναφερθούμε σε επόμενη παράγραφο. Αποτελεί ένα πολύ σημα- ντικό αποτέλεσμα της θεωρίας μέτρου.*

Ορισμός 1.1.10 *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος θετικού μέτρου και* $f : X \to [0, +\infty]$ *Borel με- τρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε* $\nu = \nu(f, \mu) : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *με* $\nu(A) = \int_A f d\mu$*. Το* ν *λέγεται* ***αόριστο ολοκλήρωμα*** *της* f *ως προς* μ*.*

Ορισμός 1.1.11 *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος θετικού μέτρου και* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε* $f^+ = f \vee 0 \ (= \max\{f, 0\})$ *και* $f^- = (-f) \vee 0 \ (= \max\{-f, 0\})$*. Αν ένα τουλάχιστον από τα* $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ *είναι πεπερασμένο, ορίζουμε το* ***ολοκλήρωμα Lebesgue της*** f ***(ως προς*** μ ***)*** *ως*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

διαφορετικά λέμε ότι δεν ορίζεται.
Αν $E \in \mathcal{A}$*, τότε ορίζουμε* $\int_E f d\mu = \int f \cdot \chi_E d\mu$*.*
Αν $\int f^+ d\mu < +\infty$ *και* $\int f^- d\mu < +\infty$*, τότε η* f *καλείται* ***(Lebesgue) ολοκληρώσιμη ως προς*** μ *. Το συνολο των (Lebesgue) ολοκληρώσιμων (ως προς* μ*) συναρτήσεων με πραγματικές τιμές συμβολίζεται με* $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$*.*

Παρατηρήσεις 1.1.5 *Η* f *καλείται (Lebesgue) ολοκληρώσιμη (ως προς* μ *) αν* $\int |f| d\mu < +\infty$*. Το* $\int |f| d\mu$ *ορίζεται γιατί η* f *είναι θετική Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Το σύνολο των (Lebesgue) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (ως προς* μ *) συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές συμβολίζεται με* $L^1(\mu)$*.*

Ορισμός 1.1.12 *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος θετικού μέτρου και* $f : X \to \mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση,* $f = u + iv$*. Ορίζουμε το* ***ολοκλήρωμα Lebesgue της*** f ***(ως προς*** μ***)*** *ως*

$$\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu.$$

Αν $E \in \mathcal{A}$*, τότε ορίζουμε* $\int_E f d\mu = \int f \cdot \chi_E d\mu$*.*

Παρατηρήσεις 1.1.6 *Τα* $\int u d\mu, \int v d\mu$ *ορίζονται διότι οι* u, v *είναι Borel μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις μικρότερες από την* f*.*

Πρόταση 1.1.7 *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος θετικού μέτρου,* $f, g \in L^1(\mu)$ *και* $a, \beta \in \mathbb{C}$*. Τότε*

1. $af + \beta g \in L^1(\mu)$
2. $\int (af + \beta g) d\mu = a \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$

Πρόταση 1.1.8 *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος θετικού μέτρου και* $f, g \in L^1(\mu)$ *με* $f \leq g$*. Τότε* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

Πρόταση 1.1.9 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f \in L^1(\mu)$. Τότε $\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$.*

Πρόταση 1.1.10 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f, g \in L^1(\mu)$.*

1. *Αν $f = g$, μ-σχεδόν παντού, τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

2. *Αν $f = 0$, μ-σχεδόν παντού αν και μόνο αν $\int_A f d\mu = 0$.*

Θεώρημα 1.1.2 *(Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue) Έστω $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f = \lim_n f_n$. Έστω ότι υπάρχει $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Τοτε $f \in L^1(\mu), f_n \in L^1(\mu)$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και ισχύει ότι*

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης παραπέμπουμε στο [3].

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιους ορισμούς προκειμένου να διατυπώσουμε δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα: Το Θεώρημα Αναλυσης του Lebesgue και το Θεώρημα Radon-Nikodym.

Ορισμός 1.1.13 *Έστω μ, ρ θετικά μέτρα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι το ρ είναι **απόλυτα συνεχές** ως προς το μ και συμβολίζουμε $\rho \ll \mu$ αν $\rho(E) = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$.*

Ορισμός 1.1.14 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι **συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο** $A \in \mathcal{A}$ αν ισχύει $\mu(E) = \mu(A \cap E)$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ή, ισοδύναμα, αν $\mu(E) = 0$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $A \cap E = \emptyset$.*

Ορισμός 1.1.15 *Έστω μ_1, μ_2 θετικά μέτρα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι τα μ_1, μ_2 είναι **κάθετα** και συμβολίζουμε $\mu_1 \perp \mu_2$ αν το μ_1 είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$, το μ_2 είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο $B \in \mathcal{A}$ και τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.*

Θεώρημα 1.1.3 *(Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym) Έστω μ, ν θετικά πεπερασμένα μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Υπάρχουν δύο μοναδικά πεπερασμένα θετικά μέτρα ρ, τ στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε*

$$\nu = \rho + \tau, \quad \rho \ll \mu \quad \text{και} \quad \tau \perp \mu.$$

2. *Υπάρχει μοναδική μ–σχεδόν παντού συνάρτηση $h \in L^1_R(\mu)$, $h \geq 0$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A h d\mu,$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

*Το πρώτο σκέλος του παραπάνω θεωρήματος καλείται **Θεώρημα ανάλυσης του Lebesgue** (για θετικά πεπερασμένα μέτρα) και το ζεύγος (ρ, τ) καλείται **ανάλυση Lebesgue** του ν ως προς μ.*

*Το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος καλείται Θεώρημα Radon-Nikodym (για θετικά πεπερασμένα μέτρα) και η συνάρτηση h καλείται **Radon-Nikodym παράγωγος** του ν ως προς μ.*

Αρχικά θα δώσουμε ένα χρήσιμο για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος Λήμμα.

Λήμμα 1.1.1 *Έστω μ, ν θετικά πεπερασμένα μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Τότε συμβαίνει ακριβώς ένα από τα εξής:*

1. *$\mu \perp \nu$ ή*

2. *Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\varepsilon \cdot \mu(B) \leq \nu(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$.*

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος παραπέμπουμε στο [3].

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.3 Θεωρούμε το σύνολο συναρτήσεων

$$\mathcal{K} = \left\{ f : X \to [0, +\infty], f \text{ μετρήσιμη και } \int_A f d\mu \leq \nu(A) \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Ισχύουν τα εξής:

1. $\mathcal{K} \neq \emptyset$ (αφού $0 \in \mathcal{K}$).

2. Αν $f_1, f_2 \in \mathcal{K}$, τότε $f_1 \vee f_2$ $(= \max\{f_1, f_2\}) \in \mathcal{K}$.

   Πράγματι, για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\int_A f_1 \vee f_2 d\mu &= \int_{A \cap [f_1 \geq f_2]} f_1 d\mu + \int_{A \cap [f_1 < f_2]} f_2 d\mu \\
&\leq \nu(A \cap [f_1 \geq f_2]) + \nu(A \cap [f_1 < f_2]) \\
&= \nu(A).
\end{aligned}$$

3. Αν $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στο $\mathcal{K}$ και $h = \lim_{n\in\mathbb{N}} h_n$, τότε $h \in \mathcal{K}$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\int_A h_n d\mu \leq \nu(A)$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue, $\int_A hd\mu \leq \nu(A)$.

   Θέτουμε $a = \sup\left\{\int hd\mu : h \in \mathcal{K}\right\}$.

4. $a \leq \nu(X) < +\infty$ (διότι $\int fd\mu \leq \nu(X)$, για κάθε $f \in \mathcal{K}$).

5. Υπάρχει $h \in \mathcal{K}$ ώστε $\int hd\mu = a$.

   Πράγματι, από τον ορισμό του a και το (4) για κάθε n υπάρχει $f_n \in \mathcal{K}$ ώστε

$$\int f_n d\mu > a - 1/n.$$

   Από το (2) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f_1 είναι αύξουσα (αντικαθιστώντας την f_1 με την $f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n$). Από την (3) έπεται ότι η $h = \lim_n f_n$ ανήκει στο $\mathcal{K}$ και είναι σαφές ότι

$$\int hd\mu = a$$

   (αφού $a - 1/n \leq \int fd\mu \leq a$).
   Η συνάρτηση h μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Όμως, επειδή $\int hd\mu = a < +\infty$, ισχύει ότι

$$\mu\Big(\{x \in X : h(x) = +\infty\}\Big)=0$$

   (από [3], πόρισμα 8.14). Μπορούμε να αλλάξουμε τις τιμές της f σε αυτό το σύνολο ώστε η f να παίρνει μόνο πραγματικές μη αρνητικές τιμές.

   Άρα έχουμε ότι $h \in L^1(\mu)$.

   Ορίζουμε $\rho, \tau : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με

$$\rho(A) = \int_A hd\mu \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ και } \tau = \nu - \rho.$$

   Ειναι σαφές ότι τα ρ, τ είναι θετικά μέτρα (αφού $h \geq 0$ και $\rho(A) \leq \nu(A)$) και $\rho \ll \mu$ (πόρισμα 6.12, [3]).

   Θα δείξουμε ότι $\tau \perp \mu$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, (Λήμμα 10.11, [3]), υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\varepsilon\mu(B) \leq \tau(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f = h + \varepsilon\chi_A$. Τότε για κάθε $B \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_B f d\mu &= \int_B h d\mu + \varepsilon\mu(A \cap B) \\
&\leq \int_B h d\mu + \tau(A \cap B) \\
&= \int_{A\cap B} h d\mu + \int_{B-A} h d\mu \\
&= \tau(A \cap B) \\
&= \rho(A \cap B) + \int_{B-A} h d\mu + \tau(A \cap B) \\
&= \nu(A \cap B) + \int_{B-A} h d\mu \\
&\leq \nu(A \cap B) + \nu(B - A) \\
&= \nu(B).
\end{aligned}$$

Άρα, $f \in \mathcal{K}$ και

$$\int f d\mu = \int h d\mu + \varepsilon \cdot \mu(A) > \alpha,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον τρόπο που ορίστηκε το α. Συνεπώς, $\tau \perp \mu$.

Μένει να δειχθεί η μοναδικότητα των ρ, τ και f. Έστω ρ', τ' πεπερασμένα μέτρα ώστε $\rho' + \tau' = \nu$ $(= \tau + \rho)$, $\rho' \ll \mu$ και $\tau' \perp \mu$. Τότε $\tau - \tau' \equiv \rho - \rho'$, $\tau - \tau' \perp \mu$ και $\rho' - \rho \ll \mu$. Άρα $\tau - \tau' = \rho' - \rho = 0$. Επίσης, αν $h' \in L^1(\mu), h \geq 0$ και

$$\int_A h' d\mu = \rho(A) = \int_A h d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε $h' = h$ μ-σχεδόν παντού (πρόταση 6.20, [3]).

□

1.1.4 Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Θα αρχίσουμε με κάποιους τοπολογικούς ορισμούς:

Ορισμός 1.1.16 *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Ένα $E \subset X$ καλείται* ***κλειστό*** *αν το συμπλήρωμά του, $X - E$, είναι ανοικτό.*

Ορισμός 1.1.17 *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα $A \subset X$ καλείται* ***γειτονιά του x*** *αν ειναι ανοικτό και περιέχει το x.*

Ορισμός 1.1.18 *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Ένα $E \subset X$ καλείται **συμπαγές** αν για κάθε ανοικτό κάλυμμά του υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, αν $\mathcal{D}$ μία κλάση ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε η ένωσή τους να περιέχει το E, τότε η ένωση των συνόλων ενός πεπερασμένου υποσυνόλου της $\mathcal{D}$ περιέχει επίσης το E.*
*Ο τοπολογικός χώρος (X, τ) καλείται **συμπαγής** αν το X είναι συμπαγές σύνολο.*

Ορισμός 1.1.19 *Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) καλείται **τοπικά συμπαγής** αν σε κάθε σημείο του υπάρχει μια γειτονιά της οποίας η κλειστότητα είναι συμπαγές σύνολο. (Υπενθυμίζουμε ότι **κλειστότητα** ενός συνόλου τοπολογικού χώρου ορίζεται να είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που το περιέχει.)*

Ορισμός 1.1.20 *Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) καλείται **Hausdorff** αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ υπάρχουν $U_1, U_2 \in \tau$ με $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $x_1 \in U_1$ και $x_2 \in U_2$.*

Ορισμός 1.1.21 *Έστω X διανυσματικός χώρος. Καλούμε **γραμμικό συναρτησοειδές** μια γραμμική απεικόνιση $\Lambda : X \to \mathbb{C}$. Ισχύει, δηλαδή, ότι $\Lambda(ax + \beta y) = a\Lambda(x) + \beta\Lambda(y)$, για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $a, \beta \in \mathbb{C}$.*

Έστω $1 \leq p \leq +\infty$. Υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με $L^p(\mu)$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων f με μιγαδικές τιμές με $\|f\|^p < +\infty$, όπου $\|f\|_p = \left(\int |f|_p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, αν $1 \leq p < +\infty$ και $\|f\|_\infty = \inf\{\beta \in [0, +\infty] : \mu([|f| > \beta]) = 0\}$. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων f με πραγματικές τιμές με $\|f\|_p < +\infty$

Θεώρημα 1.1.4 *Έστω $1 \leq p < +\infty$, μ σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον X και Φ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^p(\mu)$. Υπάρχει μοναδική $g \in L^q(\mu)$, όπου $1 \leq q < +\infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ο q λέγεται **συζυγής εκθέτης** του p), ώστε*

$$\Phi(f) = \int fg d\mu, \ f \in L^p(\mu).$$

Επιπλέον,

$$\|\Phi\| = \|g\|_q.$$

Μ΄αλλα λόγια, ο $L^q(\mu)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^p(\mu)$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παραπέμπουμε στο [1].

Ορισμός 1.1.22 *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Συμβολιζουμε με $C_0(X)$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο (δηλαδη για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο K του X ώστε $|f(x)| < \varepsilon$, για κάθε $x \in X - K$) Επίσης, συμβολίζουμε με $C_c(X, \mathbb{C})$ το σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο.*

*Συμβολίζουμε με $C_c(X)$ ή $C_c(X,\mathbb{C})$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και με $C_c(X,\mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων στον $C_c(X)$. Υπενθυμίζουμε ότι **φορέας** μιας συνεχούς συνάρτησης καλείται το σύνολο $s(f) = suppf = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.*

Θεώρημα 1.1.5 *Έστω $1 \leq p \leq +\infty$. Το $C_c(X)$ είναι πυκνό στον $L^p(\mu)$, δηλαδή $\overline{C_c(X)} = L^p(\mu)$.*

Απόδειξη Έστω S το σύνολο όλων των μιγαδικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων στο X. Αν $s \in S$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $g \in C_c(X)$ ώστε $g(x) = s(x)$ στο X εκτός από ένα σύνολο μέτρου μικρότερου του ε και $|g| \leq \|s\|_\infty$ (από θεώρημα Lusin (παραπομπή στο [1])).
Συνεπώς,

$$\|g - s\|_p \leq \varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty.$$

Αφού το S είναι πυκνό στο $L_p(\mu)$, το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

□

Ορισμός 1.1.23 *Έστω (X,τ) τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff. Ένα θετικό μέτρο ορισμένο στο μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{B}(X))$ ονομάζεται μέτρο Borel.*

Ορισμός 1.1.24 *Έστω X χώρος Hausdorff, $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X ώστε $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ και μ θετικό μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$. Το μ καλείται **κανονικό** αν ισχύουν τα επόμενα:*

1. *$\mu(K) < +\infty$, για κάθε $K \subset X$ συμπαγές*
2. *$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ ανοικτό στο X, $A \subset U\}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$*
3. *$\mu(K) = \sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές στο X, $K \subset U\}$, για κάθε U ανοικτό στο X.*

*Η ιδιότητα (2) λέγεται **εξωτερική κανονικότητα** του μ και η (3) **εσωτερική κανονικότητα** του μ.*

Θεώρημα 1.1.6 *(Αναπαράστασης του Riesz). Έστω (X,τ) τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff και $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $C_c(X,\mathbb{R})$. Υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο Borel μ στον X ώστε*

$$\Lambda f = \int f d\mu, \text{ για κάθε } f \in C_c(X).$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα. Θα αρχίσουμε με το θεώρημα Καραθεοδωρή.

Ορισμός 1.1.25 *Έστω X ένα σύνολο. Μια συνολοσυνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0. + \infty]$ λέγεται* ***εξωτερικό μέτρο*** *αν ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $\varphi(\emptyset) = 0$,
2. *αν $A \subset B \subset X$, τότε $\varphi(A) \leq \phi(B)$ (μονοτονία) και*
3. *αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε $\varphi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα ή σ-υποπροσθετικότητα).*

Ορισμός 1.1.26 *Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Ένα σύνολο $B \subset X$ καλείται* ***φ-μετρήσιμο*** *αν*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A - B),$$

για κάθε $A \subset X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_\phi$ την οικογένεια όλων των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Ορισμός 1.1.27 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου. Ένα σύνολο $N \subset X$ καλείται $\mu-$* ***μηδενικό*** *αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $N \subset A$ και $\mu(A) = 0$.*
Ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται ***πλήρης χώρος*** *και το μ* ***πλήρες μέτρο*** *αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο N ανήκει στην $\mathcal{A}$ (και άρα $\mu(N) = 0$.)*

Θεώρημα 1.1.7 *(Θεώρημα Καραθεοδωρή) Έστω φ ένα εξωτερικό μέτρο στο X. Τότε η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός $\varphi|\mathcal{M}_\varphi$ του φ στη $\mathcal{M}(\varphi)$ είναι πλήρες μέτρο.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Καραθεοδωρή παραπέμπουμε στο [3].

Πρόταση 1.1.11 *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, K συμπαγές υποσύνολο του X και U ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $K \subset U$. Τότε υπάρχει $f \in C_c(X)$ ώστε $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ και $s(f) \subset U$.*

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης παραπέμπουμε στο [3].

Λήμμα 1.1.2 *Έστω X χώρος Hausdorff, K συμπαγές υποσύνολο του X και U_1, U_2 ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $K \subset U_1 \cup U_2$. Τότε υπάρχουν συμπαγή σύνολα K_1, K_2 ώστε $L = K_1 \cup K_2$, $K_1 \subset U_1$ και $K_2 \subset U_2$.*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος παραπάμπουμε στο [3].

Πρόταση 1.1.12 *Έστω X τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff, K συμπαγές υποσύνολο του X και $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $K \subset \cup_{i=1}^{n} U_i$. Τότε υπάρχουν $f_i \in C_c(X), i = 1, \ldots, n$, ώστε $s(f_i) \subset U_i, f_i \geq 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\sum_{i=1}^{n} f_i(X) = 1, \forall x \in K$.*

Απόδειξη Αποδεικνύουμε πρώτα την πρόταση για n=2. (Για n=1 η πρόταση είναι η πρόταση 1.1.11.) Από το λήμμα 1.1.2, υπάρχουν συμπαγή σύνολα K_1, K_2 ώστε $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset U_1$ και $K_2 \subset U_2$. Από την πρόταση 1.1.11, υπάρχουν $h_1, h_2 \in C_c(X)$ ώστε $\chi_{K_i} \leq \chi_{U_i}$ και $s(h_i) \subset U_i$ για ι=1,2. Θέτουμε

$$f_1 = h_1 \text{ και } f_2 = h_2 - (h_1 \wedge h_2).$$

Είναι φανερό ότι $f_1, f_2 \in C_c(X)$, $f_1 \geq 0$ και $f_2 \geq 0$. Επίσης,

$$f_1 + f_2 = h_1 + h_2 - (h_1 \wedge h_2) = h_1 \vee h_2,$$

άρα $f_1(x)+f_2(x) = 1$ για κάθε $x \in K$. Τέλος, $s(f_1) = s(h_1) \subset U_1$ και $s(f_2) = s(h_2-(h_1 \wedge h_2)) = \overline{\{x \in X : h_2(x) > h_1(x)\}} \subset s(h_2) \subset U_2$.

Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται επαγωγικά. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για n-1. Από τα παραπάνω, υπάρχουν $g_1, g_2 \in C_c(X)$ ώστε $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$, $g_1(x) + g_2(x) = 1$ για κάθε $x \in K$, $s(g_1) \subset \cup_{i=1}^{n-1} U_1$ και $s(g_2) \subset U_n$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν $h_1, \ldots, h_{n-1} \in C_c(X)$ ώστε $h_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $h_1(x) + \ldots + h_{n-1}(x) = 1$ για κάθε $x \in s(g_1)$ και $s(h_i) \subset U_i$ για $i = 1, \ldots, n-1$. Τότε οι συναρτήσεις

$$f_1 = h_1 g_1, f_2 = h_2 g_1, \ldots, f_{n-1} = h_{n-1} g_1 \text{ και } f_n = g_2$$

ικανοποιούν το συμπέρασμα, δηλαδή η πρόταση ισχύει για το n.

□

Λήμμα 1.1.3 *Αν μ είναι ένα κανονικό μέτρο Borel σε ένα τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff X, τότε*

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \sup\left\{ \int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_U \right\} \\ &= \sup\left\{ \int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_U, s(f) \subset U \right\} \end{aligned}$$

για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subset X$.

Απόδειξη Προφανώς $\int f d\mu \leq \mu(U)$ για κάθε $f \in C_c(X)$ με $0 \leq f \leq \chi_U$. Άρα αρκεί να δειχθεί ότι

$$\mu(U) \leq \sup\left\{ \int f d\mu : 0 \leq f \leq \chi_U, s(f) \subset U \right\}.$$

Έστω $\beta \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \beta < \mu(U)$ (αν $\mu(U) = 0$, η ανισότητα είναι προφανής). Από την εσωτερική κανονικότητα του μ υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $K \subset U$ ώστε $\mu(K) > \beta$.

Από την πρόταση 1.1.11, υπάρχει $f \in C_c(X)$ ώστε $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ και $s(f) \subset U$. Τότε $\int f d\mu \geq \mu(K) > \beta$ και άρα

$$\sup\left\{ \int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_U, s(f) \subset U \right\}.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε β με $0 \leq \beta < \mu(U)$, η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.6 Η μοναδικότητα του μ έπεται από το λήμμα 1.1.3. Πράγματι, αν μ, ν δύο κανονικά μέτρα Borel στο X ώστε $I(f) = \int f d\mu = \int f d\nu$ για κάθε $f \in C_c(X)$, τότε από το λήμμα έπεται ότι $\mu(U) = \nu(U)$ για κάθε ανοικτό σύνολο U και από την εξωτερική κανονικότητα των μ και ν έπεται ότι $\mu = \nu$.

Προχωράμε στην κατασκευή του μ. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ως εξής:

$$\varphi(U) == \sup\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \leq \chi(U), s(f) \subset U\}$$

για κάθε ανοικτό σύνολο U και επεκτείνουμε τη φ σε όλα τα υποσύνολα A του X θέτοντας

$$\varphi(A) = \inf\{\varphi(U) : U \text{ ανοικτό στο X}, A \subset U\}.$$

Αφού η φ είναι μονότονη συνολοσυνάρτηση στα ανοικτά σύνολα, έπεται ότι η φ είναι καλά ορισμένη στο $\mathcal{P}(X)$ (δηλαδή αν U ανοικτό σύνολο, τότε η φ δίνει την ίδια τιμή και στους δύο τύπους.)

Παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε ότι το μ είναι ένα κανονικό μέτρο Borel που ικανοποιεί το συμπέρασμα, τότε από το λήμμα 1.1.3 και την εξωτερική κανονικότητα του μ θα πρέπει $\mu = \varphi|\mathcal{B}(X)$. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το φ είναι εξωτερικό μέτρο και θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Καραθεοδωρή.

Στη συνέχεια της απόδειξης όταν γράφουμε $f \prec U$ θα εννοούμε ότι $f \in C_c(X)$, το U είναι ανοικτό σύνολο, $0 \leq f \leq \chi_U$ και $s(f) \subset U$. Η απόδειξη ότι το $\varphi|\mathcal{B}(X)$ είναι το ζητούμενο μέτρο θα γίνει σε τέσσερα βήματα:

1. Θα δείξουμε ότι το φ είναι εξωτερικό μέτρο.

Είναι φανερό ότι η φ είναι μονότονη συνολοσυνάρτηση. Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U_n ώστε $A \subset U_n$ και $\varphi(U_n) \leq \varphi(A_n) + \varepsilon/2^n$. Έστω $f \in C_c(X)$ με $f \prec \cup_{n=1}^{\infty} U_n$. Αφού το $s(f)$ είναι συμπαγές υπάρχει n_0 ώστε $s(f) \subset \cup_{n=1}^{n_0} U_n$. Από την πρόταση 1.1.12, υπάρχουν $f_1, \ldots, f_{n_0} \in C_c(X), f_n \geq 0$ για κάθε $n \in \{1, \ldots, n_0\}$ ώστε $\sum_{n=1}^{n_0} f_n = 1$ στο $s(f)$ και $f_n \prec U_n$ για κάθε $n \in \{1, \ldots, n_0\}$.

Τότε $f = \sum_{n=1}^{n_0} f_n f$ και άρα

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{n=1}^{n_0} I(f_n f) \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \varphi(U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \varphi(U_n). \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $f \in C_c(X)$, με $f \prec \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ έπεται ότι $\varphi(\cup_{n=1}^{\infty} U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(U_n)$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &\leq \varphi(\cup_{n=1}^{\infty} U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο,

$$\varphi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

2. Θα δείξουμε ότι κάθε σύνοό Borel του X είναι φ–μετρήσιμο (δηλαδη $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\varphi}$).

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\varphi(V) \geq \varphi(V \cap U) + \varphi(V \backslash U)$$

για κάθε δύο ανοικτά σύνολα U και V στο X. Πράγματι, αν $\varphi(V) = +\infty$ η ανισότητα είναι προφανής. Έστω ότι $\varphi(V) < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $f_1 \in C_c(X)$ ώστε $f_1 \prec V \cap U$ και $I(f_1) > \varphi(V \cap U) - \varepsilon/2$. Το $V \backslash s(f_1)$ είναι ανοικτό σύνολο άρα υπάρχει $f_2 \in C_c(X)$ ώστε $f_2 \prec V \backslash s(f_1)$ και $I(f_2) > \varphi(V \backslash s(f_1)) - \varepsilon/2$. Τότε $f_1 + f_2 \prec V$ (αφού οι f_1 και $s(f_2)$ έχουν ξένους φορείς) και άρα

$$\begin{aligned} \varphi(V) &\geq I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) \\ &\geq \varphi(V \cap U) + \varphi(V \backslash s(f_1)) - \varepsilon \\ &\geq \varphi(V \cap U) + \varphi(V \backslash U) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, έπεται ότι $\varphi(V) \geq \varphi(V \cap U) + \varphi(V \backslash U)$.

Για να αποδείξουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο U ανήκει στη $\mathcal{M}_\varphi$, δηλαδή ότι

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap U) + \varphi(A \backslash U)$$

για κάθε $A \subset X$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε ένα σύνολο ανοικτό $U \supset A$ ώστε $\varphi(V) \leq \varphi(A) + \varepsilon$. Τότε, χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\varphi(A) + \varepsilon &\geq \varphi(V)\\ &\geq \varphi(V \cap U) + \varphi(V \backslash U)\\ &\geq \varphi(A \cap U) + \varphi(A \backslash U).\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, έπεται ότι $\varphi(A) \geq \varphi(A \cap U) + \varphi(A \backslash U)$.
Από τα βήματα (1) και (2) και το Θεώρημα Καραθεοδωρή έπεται ότι το $\mu|\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο Borel στο X.

3. Θα δείξουμε ότι το μ είναι κανονικό μέτρο.

Η εξωτερική κανονικότητα του μ είναι άμεση από τον ορισμό του φ.
Παρατηρούμε ότι αν $f \in C_c(X)$ με $0 \leq f \leq 1$, τότε $I(f) \leq \mu(s(f))$. Πράγματι, για κάθε ανοικτό σύνολο U με $s(f) \subset U$ έχουμε $f \prec U$ και άρα $I(f) \leq \varphi(U)$. Επομένως $I(f) \leq \varphi(s(f)) = \mu(s(f))$. Αν το U είναι ανοικτό σύνολο, έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \varphi(U)\\ &= \sup\{I(f) : f \in C_c(X), f \prec U\}\\ &\leq \sup\{\mu(s(f)) : f \in C_c(X), f \prec U\}.\end{aligned}$$

Αφού το $s(f)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του U για κάθε $f \in C_c(X)$ με $f \prec U$, έπεται η εσωτερική κανονικότητα του μ.

Τέλος, $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές σύνολο K. Πράγματι, από την πρόταση 1.1.11 υπάρχει $f \in C_c(X)$ με $\chi_K \leq f$. Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$ και $U = \{x \in X : f(x) > 1 - \varepsilon\}$. Τότε το U είναι ανοικτό σύνολο, $K \subset U$ και για κάθε $g \in C_c(X)$ με $g \prec U$ έχουμε ότι $g \leq \frac{1}{1-\varepsilon} f$, άρα

$$\begin{aligned}\mu(K) &\leq \mu(U)\\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} I(f)\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 1.1.7 *Παρατηρούμε ότι παίρνοντας το όριο όταν $\varepsilon \to 0$ στην παραπάνω ανισότητα έπεται ότι ισχύει $\mu(K) \leq I(f)$ για κάθε συμπαγές σύνολο K και κάθε $f \in C_c(X)$ με $I(f) \leq f$.*

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.6

4. Θα δείξουμε ότι $I(f) = \int f d\mu$ για κάθε $f \in C_c(X)$.

Αφού η f είναι φραγμένη υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, ώστε $f(X) \subset (\alpha, \beta]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $y_i \in [\alpha, \beta], i = 0, 1, \ldots, n$, ώστε $y_0 = \alpha < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = \beta$ και $y_1 - y_{i-1} < \varepsilon$ για $i = 1, \ldots, n$. Θέτουμε $K = s(f)$ και

$$E_i = \{x \in X : y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$$

για $i = 1, \ldots, n$. Από την εξωτερική κανονικότητα του μ, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i, i = 1, \ldots, n$, ώστε $E_i \subset U_i, \mu(U_i) \leq \mu(E_i) + \varepsilon/n$ και $f(x) < y_i + \varepsilon$ για κάθε $x \in U_i$.Αφού $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$, από την πρόταση 1.1.12 υπάρχουν $f_i \in C_c(X), i = 1, \ldots, n$, ώστε $f_i \geq 0, s(f_i) \subset U_i$ και $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ για κάθε $x \in K$.

Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $\mu(K) \leq I\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)$ (αφού $\chi_K \leq \sum_{i=1}^n f_i$.) Επίσης παρατηρούμε ότι $f = \sum_{i=1}^n ff_i, ff_i \leq (y_i + \varepsilon) f_i$ και $\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$ (αφού $K = \cup_{i=1}^n E_i$ και τα $E_i, i = 1, \ldots, n$ είναι ξένα ανά δύο). Έχουμε

$$\begin{aligned}
I(f) &= \sum_{i=1}^n I(ff_i) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) I(f_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (|\alpha| + y_i + \varepsilon) I(f_i) - |\alpha| \sum_{i=1}^n I(f_i) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n (|\alpha| + y_i + \varepsilon)(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}) \right) - |\alpha| \mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|\alpha| + y_i + \varepsilon) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \mu(E_i) + 2\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|\alpha| + y_i + \varepsilon) \\
&\leq \int \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \chi_{E_i} d\mu + 2\varepsilon\mu(K) + \varepsilon(|\alpha| + \beta + \varepsilon) \\
&\leq \int f d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |\alpha| + \beta + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, έπεται ότι $I(f) \leq \int f d\mu$ για κάθε $f \in C_c(X)$. Εξάλλου, από τη γραμμικότητα του I έχουμε

$$-I(f) = I(-f) \leq \int (-f) d\mu = -\int f d\mu,$$

άρα $I(f) \geq \int f d\mu$. Επομένως $I(f) = \int f d\mu$ για κάθε $f \in C_c(X)$.

$\square$

1.2 Προσημασμένα Μέτρα

Ορισμός 1.2.1 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ καλείται* ***προσημασμένο (ή πραγματικό) μέτρο*** *αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$, *όπου I αριθμήσιμο σύνολο και τα $A_i, i \in I$ ξένα ανά δύο.*

Παρατηρήσεις 1.2.1 *Η σειρά στην ιδιότητα (2) του παραπάνω ορισμού συγκλίνει απολύτως επειδή προφανώς κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει.*

Ένα χρήσιμο για τη συνέχεια παράδειγμα προσημασμένου μέτρου είναι το εξής:

Παράδειγμα 1.2.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με $\nu(A) = \int_A f d\mu$. Το ν είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.*

Πρόταση 1.2.1 *(Συνέχεια του προσημασμένου μέτρου) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου.*

1. *Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*

2. *Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*

Ορισμός 1.2.2 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου και $A \in \mathcal{A}$. Το A λέγεται* ***θετικό σύνολο*** *αν για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ ισχύει $\mu(B) \geq 0$. Αντίστοιχα, το A λέγεται* ***αρνητικό σύνολο*** *αν για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ ισχύει $\mu(B) \leq 0$.*

Θεώρημα 1.2.1 *(Ανάλυσης Hahn) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Υπάρχουν $P, N \in \mathcal{A}$ μοναδικά $\mu-$σχεδόν παντού με $P \cap N = \emptyset$ ώστε $X = P \cup N$, το P θετικό και το N αρνητικό σύνολο. Το ζεύγος (P, N) καλείται* ***ανάλυση Hahn*** *του μ.*

Θεώρημα 1.2.2 *(Ανάλυσης Jordan) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Υπάρχουν θετικά πεπερασμένα μέτρα μ^+, μ^- μοναδικά $\mu-$σχεδόν παντού ώστε $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Το ζεύγος (μ^+, μ^-) καλείται* ***ανάλυση Jordan*** *του μ.*

Ορισμός 1.2.3 *Έστω μ θετικό μέτρο κα ρ προσημασμένο μέτρο σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι το ρ είναι* ***απόλυτα συνεχές*** *ως προς το μ και συμβολίζουμε $\rho \ll \mu$ αν $\rho(E) = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$.*

Ορισμός 1.2.4 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένο μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι* ***συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο*** *$A \in \mathcal{A}$ αν ισχύει $\mu(E) = \mu(A \cap E)$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ή, ισοδύναμα, αν $\mu(E) = 0$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $A \cap E = \emptyset$.*

Ορισμός 1.2.5 *Έστω μ_1, μ_2 προσημασμένα μέτρα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι το μ_1, μ_2 είναι* ***κάθετα*** *και συμβολίζουμε $\mu_1 \perp \mu_2$ αν το μ_1 είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο A, το μ_2 είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο B και τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.*

Πρόταση 1.2.2 *Έστω μ θετικό μέτρο και $\mathcal{n}, \mathcal{n}_1, \mathcal{n}_2$ προσημασμένα μέτρα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Αν $\mathcal{n}_1 \perp \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$, τότε $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2 \perp \mu$.*

2. *Αν $\mathcal{n}_1 \ll \mu$ και $\mathcal{n}_2 \ll \mu$, τότε $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2 \ll \mu$.*

3. *Αν $\mathcal{n}_1 \ll \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$, τότε $\mathcal{n}_1 \perp \mathcal{n}_2$.*

4. *Αν $\mathcal{n} \ll \mu$ και $\mathcal{n} \perp \mu$, τότε $\mathcal{n} = 0$.*

Απόδειξη

1. Έστω ότι $\mathcal{n}_1 \perp \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$. Υπάρχουν ξένα σύνολα A_1, B_1 ώστε το $\mathcal{n}_1$ να είναι συγκεντρωμένο στο A_1 και το μ στο B_1. Επίσης, υπάρχουν ξένα σύνολα A_2, B_2 ώστε το $\mathcal{n}_2$ να είναι συγκεντρωμένο στο A_2 και το μ στο B_2. Τότε το $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2$ θα είναι συγκεντρωμένο στο $A = A_1 \cup A_2$, το μ θα είναι συγκεντρωμένο στο $B = B_1 \cap B_2$ και $A \cap B = \emptyset$. Δηλαδή $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2 \perp \mu$.

2. Προφανές.

3. Έστω ότι $\mathcal{n}_1 \ll \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$. Εφόσον $\mathcal{n}_2 \perp \mu$, υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ στο οποίο το $\mathcal{n}_2$ είνα συγκεντρωμένο. Εφόσον $\mathcal{n}_1 \ll \mu$, ισχύει ότι $\mathcal{n}_1(E) = 0$, για κάθε $E \subset A$. Δηλαδή το $\mathcal{n}_1$ είναι συγκεντρωμένο στο συμπλήρωμα του . Άρα $\mathcal{n}_1 \perp \mathcal{n}_2$.

4. Έστω ότι $\mathcal{n} \ll \mu$ και $\mathcal{n} \perp \mu$. Απο την (3) έπεται ότι $\mathcal{n} \perp \mathcal{n}$. Συνεπώς $\mathcal{n} = 0$.

□

Κεφάλαιο 2

Μιγαδικά Μέτρα

2.1 Κύμανση Μέτρου

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ μετρήσιμος χώρος. Μία συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ καλείται* ***μιγαδικό μέτρο*** *στον $(X, \mathcal{A})$ αν ισχύουν οι παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ *για κάθε μετρήσιμη διαμέριση $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ του E, $E \in \mathcal{A}$, όπου η σειρά συγκλίνει. (Υπενθυμίζουμε ότι αν $E \in \mathcal{A}$, μία οικογένεια $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ συνόλων της $\mathcal{A}$ καλείται* ***μετρήσιμη διαμέριση*** *του E αν $E_i \cap E_j = 0$, για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$, με $i \neq j$ και $E = \cup_{i \in \mathbb{N}} E_i$).*

Για κάθε μιγαδικό μέτρο μ υπάρχει μοναδικό ζεύγος θετικών μέτρων (μ_1, μ_2) ώστε $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$. Το μ_1 καλείται **πραγματικό μέρος** του μ και το μ_2 **φανταστικό μέρος** του μ.

Παρατηρήσεις 2.1.1

1. *Η κλάση των προσημασμένων μέτρων είναι υποσύνολο της κλάσης των μιγαδικών μέτρων αφού κάθε προσημασμένο μέτρο μπορεί να θεωρηθεί μιγαδικό με μηδενικό φανταστικό μέρος. Επίσης, ένα θετικό μέτρο για να είναι μιγαδικό θα πρέπει να είναι πεπερασμένο.*

2. *Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ θα πρέπει να συγκλίνει απολύτως αφού θα πρέπει να συγκλίνει κάθε αναδιάταξή της. Αυτό συμβαίνει διότι η ένωση των $E_i, i \in \mathbb{N}$ δεν αλλάζει αν αλλάξει η σειρά τους.*

Ορισμός 2.1.2 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μιγαδικού μέτρου. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με $|\mu|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| : \{E_i, i \in \mathbb{N}\} \text{ μετρήσιμη διαμέριση του } E \right\}$, $E \in \mathcal{A}$. Η συνολοσυνάρτηση μ καλείται* ***κύμανση*** *του μιγαδικού μέτρου μ.*

Παρατηρήσεις 2.1.2 *Αν στον παραπάνω ορισμό το μ είναι θετικό μέτρο, τότε ισχύει ότι $|\mu| = \mu$.*

Για την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα το οποίο μας δίνει μια ανισότητα των μιγαδικών αριθμών αντίστοιχη της τριγωνικής ανισότητας για τους πραγματικούς αριθμούς.

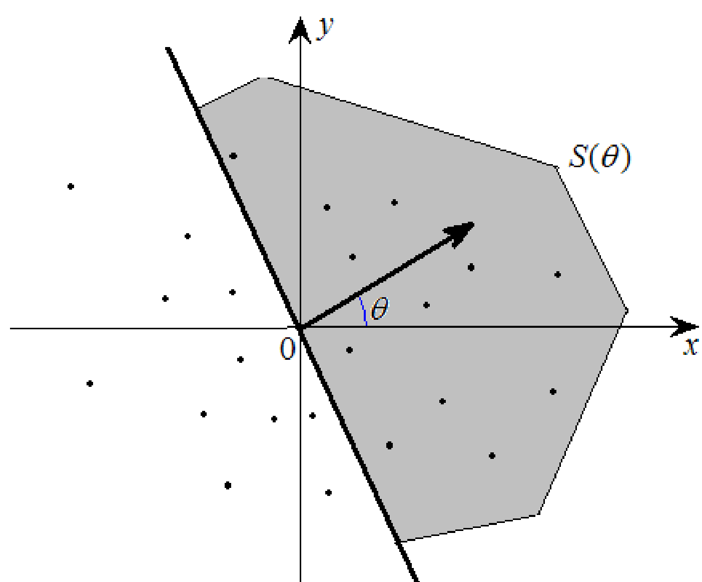
Λήμμα 2.1.1 *Έστω $N \in \mathbb{N}$ και $z_1, z_2, \ldots, z_N$ μιγαδικοί αριθμοί. Υπάρχει $\Delta \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ ώστε*

$$\left|\sum_{k\in\Delta} z_k\right| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} |z_k|$$

Απόδειξη Είναι $z_1 = |z_1|e^{i\vartheta_1}, z_2 = |z_2|e^{i\vartheta_2}, \ldots .z_N = |z_N|e^{i\vartheta_N}$ για κάποια $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N \in \mathbb{R}$ (υποθέτουμε ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_N$ είναι διάφορα του μηδενός).
Για $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, έστω

$$\Delta(\vartheta) := \Big\{k \in \{1, 2, \ldots, N\} : \cos(\vartheta_k - \vartheta) > 0\Big\} = \Big\{k \in \{1, 2, \ldots\} : -\tfrac{\pi}{2} + \vartheta < \vartheta_k < \tfrac{\pi}{2} + \vartheta\Big\}.$$

Το σύνολο $S(\vartheta) := \{z_k : k \in \Delta(\vartheta)\}$ αποτελείται από όλα εκείνα τα z_k που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $H(\vartheta) = \{z : \Re z e^{-i\vartheta} > 0\}$ (βλέπε το παρακάτω σχήμα).



Τότε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\in\Delta(\vartheta)} z_k\right| &= \left|\sum_{k\in\Delta(\vartheta)} e^{-i\vartheta} z_k\right| \\
&\geq \Re \sum_{k\in\Delta(\vartheta)} e^{-i\vartheta} z_k \\
&= \Re \sum_{k\in\Delta(\vartheta)} |z_k| e^{i(\vartheta_k-\vartheta)} \\
&= \sum_{k\in\Delta(\vartheta)} |z_k| \Re e^{i(\vartheta_k-\vartheta)} \\
&= \sum_{k\in\Delta(\vartheta)} |z_k| \cos(\vartheta-\vartheta_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\vartheta-\vartheta_k),
\end{aligned}$$

όπου

$$\cos^+(\vartheta-\vartheta_k) = \begin{cases} \cos(\vartheta-\vartheta_k), & \text{αν } \cos(\vartheta-\vartheta_k) > 0 \\ 0, & \text{αν } \cos(\vartheta-\vartheta_k) \leq 0 \end{cases}$$

Αν $f(\vartheta) := \sum_{k=1}^{N} \left|z_k\right| \cos^+(\vartheta-\vartheta_k)$, παίρνουμε το $\vartheta_0 \in [-\pi,\pi]$, έτσι ώστε

$$f(\vartheta_0) = \max_{\vartheta\in[-\pi,\pi]} f(\vartheta) = \max_{\vartheta\in[-\pi,\pi]} \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\vartheta-\vartheta_k).$$

Το $f(\vartheta_0)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη μέση τιμή της f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
f(\vartheta_0) &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)d\vartheta \\
&= \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\vartheta-\vartheta_k)d\vartheta.
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\vartheta-\vartheta_k)d\vartheta = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_k-\pi/2}^{\vartheta+\pi/2} \cos(\vartheta-\vartheta_k)d\vartheta.$$

Θέτουμε $t = \vartheta - \vartheta_0$, οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\vartheta-\vartheta_k)d\vartheta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt \\
&= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\left|\sum_{k\in\Delta(\vartheta_0)} z_k\right| \geq f(\vartheta_0) \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}|z_k|.$$

Άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει για $\Delta = \Delta(\vartheta_0)$.

□

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μιγαδικού μέτρου. Η κύμανση $|\mu|$ του μ είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

Απόδειξη Αρχικά θα αποδείξουμε ότι το μ είναι θετικό μέτρο. Είναι προφανές ότι $\mu(\emptyset) = 0$. Έστω $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$ και $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι $|\mu(A)| = \sum_{n=1}^{\infty}|\mu|(A_n)$.
Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $B_1, B_2, \ldots, B_m$ μετρήσιμη διαμέριση του A. Τότε για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ισχύει $B_k = \cup_{n=1}^{\infty}(B_k \cap A_n)$ και άρα

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}|\mu(B_k)| &= \sum_{k=1}^{m}|\mu(\cup_{n=1}^{\infty}(B_k \cap A_n))| \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_k \cap A_n)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(B_k \cap A_n)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}|\mu(B_k \cap A_n)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}|\mu|(A_n),
\end{aligned}$$

Αφού η $\{B_k \cap A_n : k = 1, \ldots, m\}$ είναι μετρήσιμη διαμέριση του A_n. Συνεπώς,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\mu|(A_n|.$$

Για την απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας,

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty}|\mu|(A_n),$$

παρατηρούμε ότι είναι προφανής αν $|\mu|(A) = +\infty$. Έστω, λοιπόν, ότι $|\mu|(A) < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε ότι $\mu(A_n) < +\infty$ και άρα υπάρχει μία μετρήσιμη διαμέριση $\{B_{n,k} : k = 1, \ldots, m_n\}$ του A_n ώστε

$$|\mu|(A_n) < \sum_{k=1}^{m_n}|\mu(B_{n,k})| + e/2^n.$$

Τότε για κάθε $j = 1, 2, \ldots$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{j} |\mu|(A_n) &< \sum_{n=1}^{j}\sum_{k=1}^{m_n} |\mu(B_{n,k})| + \varepsilon \\ &\leq |\mu|(A) + \varepsilon\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη μετρήσιμη διαμέριση

$$\{B_{n,k} : k = 1, \ldots, n, n = 1, \ldots, j\} \cup \{\textstyle\sum_{n=j+1}^{\infty} A_n\}$$

του A. Παίρνοντας το όριο όταν $j \to +\infty$, έπεται ότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \leq |\mu|(A) + \varepsilon$$

και αφού το ε είναι τυχαίο,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \leq |\mu|(A).$$

Μένει να δείξουμε ότι $|\mu|(X) < +\infty$. Έστω ότι υπάρχει σύνολο $E \in \mathcal{A}$ με $|\mu|(E) = +\infty$. Θέτουμε $t = \pi(1 + |\mu(E)|)$. Εφόσον $|\mu|(E) > t$, υπάρχει διαμέριση $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ του E ώστε

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$$

για κάποιο N. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1.1 με $z_t = \mu(E_t)$, $\forall t \in \{1, \ldots, N\}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υποσύνολο A του E (το A είναι η ένωση κάποιων από τα $\{E_i, i \in \{1, \ldots, N\}\}$) για το οποίο

$$|\mu(A)| > t/\pi > 1.$$

Θέτοντας $B = E - A$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|\mu(B)| &= |\mu(E) - \mu(A)| \\ &\geq |\mu(A)| - |\mu(E)| \\ &> t/\pi - |\mu(E)| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Έχουμε γράψει το E ώς ένωση δύο ξένων συνόλων A και B με $|\mu(A)| > 1$ και $|\mu(B)| > 1$. Προφανώς τουλάχιστον ένα από αυτά είναι $+\infty$.
Αν $|\mu|(X) = +\infty$, τοτε υπάρχουν A_1, B_1 ώστε $X = A_1 \cup B_1$, $|\mu(A_1)| > 1$ και $|\mu(B_1)| = +\infty$. Έπειτα, υπάρχουν A_2, B_2 ώστε $B_1 = A_2 \cup B_2$, $|\mu(A_2)| > 1$ και $|\mu(B_2)| = +\infty$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, έχουμε μία απείρως αριθμήσιμη οικογένεια $\{A_i, i = 1, 2, \ldots\}$ ξένων ανά δύο συνόλων με $|\mu(A_i)| > 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots\}$. Απο τη σ-προσθετικότητα του μ έχουμε ότι

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Η παραπάνω σειρά, όμως, δε συγκλίνει αφού το $\mu(A_i)$ δεν τείνει στο 0 καθώς το $i \to +\infty$. Λόγω αυτής της αντίφασης, συμπεραίνουμε ότι $|\mu|(X) < +\infty$.

□

Παρατηρήσεις 2.1.3 *Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μιγαδικού μέτρου, τότε για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X) < +\infty$. Συνεπώς κάθε μιγαδικό μέτρο είναι φραγμένο. Επίσης, αν για κάποιο μέτρο ισχύει ότι $|\mu|(X) < +\infty$, τότε λέμε ότι το μ είναι **φραγμένης κύμανσης**.*

Ορισμός 2.1.3 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Ορίζουμε $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$, το οποίο καλείται **θετική κύμανση** του μ και $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$, το οποίο καλείται **αρνητική κύμανση** του μ. (Με $|\mu|$ συμβολίζουμε την κύμανση του μ).*

Παρατηρήσεις 2.1.4 *Τα μ^+, μ^- στον παραπάνω ορισμό είναι θετικά μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Επιπλέον, είναι πεπερασμένα αφου, όπως μας εξασφαλίζει το Θεώρημα 2.1.1, $|\mu|(X) < +\infty$. Ισχύει, επίσης, ότι $\mu = \mu^+ - \mu^-$ και $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Αυτή η αναπαράσταση του μέτρου ως διαφορά δύο θετικών μέτρων είναι η ανάλυση Jordan του μ, την οποία είδαμε στο προηγούμενο καφάλαιο. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η ανάλυση Jordan έχει την **ελαχιστική ιδιότητα**, δηλαδή αν $\mu = \lambda - \nu$ όπου λ, ν θετικά μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, τότε $\lambda > \mu^+$ και $\nu > \mu^-$.*

2.2 Θεώρημα Radon-Nikodym

Αρχικά, δίνουμε κάποιους αναγκαίους ορισμούς και ιδιότητες με σκοπό να διατυπώσουμε Θεώρημα Lebesgue και το σπουδαιότερο, ίσως, θεώρημα της θεωρίας μέτρου, Θεώρημα Radon-Nikodym.

Ορισμός 2.2.1 *Έστω μ θετικό μέτρο και λ αυθαίρετο μέτρο σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι το λ είναι **απόλυτα συνεχές** ως προς το μ και συμβολίζουμε $\lambda \ll \mu$ αν $\lambda(E) = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$.*

Παρατηρήσεις 2.2.1 *Είναι φανερό οτι κάθε μέτρο είναι απόλυτα συνεχές ως προς την κύμανσή του.*

Ορισμός 2.2.2 *Έστω $(X.\mathcal{A}, \mu)$ χώρος αυθαίρετου μέτρου. Λέμε ότι το λ είναι **συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο** $A \in \mathcal{A}$ αν ισχύει $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ή, ισοδύναμα, αν $\lambda(E) = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $A \cap E = \emptyset$.*

Ορισμός 2.2.3 *Έστω λ_1, λ_2 αυθαίρετα μέτρα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι τα λ_1, λ_2 είναι **κάθετα** και συμβολίζουμε $\lambda_1 \perp \lambda_2$ αν το λ_1 είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο A, το λ_2 είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο B και τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.*

Στην επόμενη πρόταση δίνονται κάποιες ιδιότητες σχετικές με τους παραπάνω ορισμούς.

Πρόταση 2.2.1 *Έστω μ θετικό μέτρο και $\mathcal{n}, \mathcal{n}_1, \mathcal{n}_2$ αυθαίρετα μέτρα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Αν το $\mathcal{n}$ είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$, τότε και το $|\mathcal{n}|$ είναι συγκεντρωμένο στο A.*
2. *Αν $\mathcal{n}_1 \perp \mathcal{n}_2$, τότε $|\mathcal{n}_1| \perp |\mathcal{n}_2|$.*
3. *Αν $\mathcal{n}_1 \perp \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$, τότε $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2 \perp \mu$.*
4. *Αν $\mathcal{n}_1 \ll \mu$ και $\mathcal{n}_2 \ll \mu$, τότε $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2 \ll \mu$.*
5. *Αν $\mathcal{n} \ll \mu$, τότε $|\mathcal{n}| \ll \mu$.*
6. *Αν $\mathcal{n}_1 \ll \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$, τότε $\mathcal{n}_1 \perp \mathcal{n}_2$.*
7. *Αν $\mathcal{n} \ll \mu$ και $\mathcal{n} \perp \mu$, τότε $\mathcal{n} = 0$.*

Απόδειξη

1. Έστω ότι το $\mathcal{n}$ είναι συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο A. Έστω $E \in \mathcal{A}$ με $E \cap A = \emptyset$ και $\{E_j, j \in \mathbb{N}\}$ μια διαμέριση του E. Τότε $\mathcal{n}(E_j) = 0$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα $|\mathcal{n}|(E) = 0$.
2. Προκύπτει άμεσα από το 1.
3. Έστω ότι $\mathcal{n}_1 \perp \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$. Υπάρχουν ξένα σύνολα $A_1, B_1 \in \mathcal{A}$ ώστε το $\mathcal{n}_1$ να είναι συγκεντρωμένο στο A_1 κσι το μ στο B_1. Επίσης, υπάρχουν ξένα σύνολα $A_2, B_2 \in \mathcal{A}$ ώστε το $\mathcal{n}_2$ να είναι συγκεντρωμένο στο A_2 και το μ στο B_2. Τότε το $\mathcal{n}_1 + \mathcal{n}_2$ θα είναι συγκεντρωμένο στο $A = A_1 \cup A_2$, το μ θα είναι συγκεντρωμένο στο $B_1 \cap B_2$ και $A \cap B = \emptyset$.
4. Προφανές.
5. Έστω ότι $\mathcal{n} \ll \mu$ και $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$. Έστω $\{E_j, j \in \mathbb{N}\}$ μία διαμέριση του E. Τότε $\mu(E_j) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Εφόσον $\mathcal{n} \ll \mu$, ισχύει ότι $\mathcal{n}(E_j) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Έτσι, $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{n}(E_j)| = 0$. Άρα $|\mathcal{n}|(E) = 0$.
6. Έστω ότι $\mathcal{n}_1 \ll \mu$ και $\mathcal{n}_2 \perp \mu$. Εφόσον $\mathcal{n}_2 \perp \mu$, υπάρχει σύνολο A με $\mu(A) = 0$ στο οποίο το $\mathcal{n}_2$ είναι συγκεντρωμένο. Εφόσον $\mathcal{n}_1 \ll \mu$, ισχύει ότι $\mathcal{n}_1(E) = 0$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$. Δηλαδή το $\mathcal{n}_1$ είναι συγκεντρωμένο στο συμπλήρωμα του A. Άρα $\mathcal{n}_1 \perp \mathcal{n}_2$.
7. Έστω ότι $\mathcal{n} \ll \mu$ και $\mathcal{n} \perp \mu$. Από την 6 προκύπτει ότι $\mathcal{n} \perp \mathcal{n}$. Άρα $\mathcal{n} = 0$.

□

Το επόμενο Θεώρημα μας εξηγεί τον όρο ”συνέχεια” στον πιο πάνω ορισμό. Επίσης, η πρόταση 2 χρησιμοποιείται συχνά ως ορισμός της απόλυτης συνέχειας.

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω μ θετικό μέτρο και $\mathcal{Л}$ μιγαδικό μέτρο ορισμένα σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathcal{Л} \ll \mu$

2. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|\mathcal{Л}(E)| < \varepsilon$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \delta$.*

Απόδειξη Έστω ότι η (2) ισχύει και έστω $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$. Τότε $\mu(E) < \delta$, για κάθε $\delta > 0$. Οπότε $|\mathcal{Л}(E)| < \varepsilon$, για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα $\mathcal{Л}(E) = 0$, δηλαδή η (1) ισχύει.
Μένει να αποδείξουμε ότι η (1) συνεπάγεται τη (2). Υποθέτουμε ότι η (2) δεν ισχύει. Θα υπάρχει, λοιπόν, $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνόλων της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(E_n) < 1/2^n$ και $|\mathcal{Л}(E_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε $|\mathcal{Л}|(E_n) \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε

$$A_n = \cup_{i=n}^{\infty} E_i \text{ και } A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύε $\mu(A_n) < 2^{-n+1}$ και η ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.
Από Π ρόταση 1.1.4 έχουμε ότι $\mu(A) = 0$ και

$$|\mathcal{Л}|(A) = \lim_{n\to+\infty} |\mathcal{Л}|(A_n) \geq \varepsilon > 0,$$

αφού $|\mathcal{Л}|(A_n) \geq |\mathcal{Л}|(E_n)$.
Δείξαμε, λοιπόν, ότι το $|\mathcal{Л}|$ δεν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Από Πρόταση 2.2.1 (5) το $|\mathcal{Л}|$ δεν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ, δηλαδή η (1) δεν ισχύει, άτοπο.

□

Παρατηρήσεις 2.2.2 *Αν στο παραπάνω Θεώρημα το $\mathcal{Л}$ είναι θετικό μη πεπερασμένο μέτρο, τότε η ιδιότητα (1) δε συνεπάγεται τη (2). (Για την απόδειξη αυτού παραπέμπουμε στο [3],Παράδειγμα 10.26).*

Το λήμμα που ακολουθεί περιγράφει μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των σ-πεπερασμένων θετικών μέτρων.

Λήμμα 2.2.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου θετικού μέτρου. Υπάρχει συνάρτηση $w \in L^1(\mu)$, με $0 < w(x) < 1$, για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη Το μ είναι σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο, δηλαδή το σύνολο X γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων συνόλων πεπερασμένου μέτρου. Έστω, λοιπόν, ότι $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $X_n \in \mathcal{A}$ και $\mu(X_n) < +\infty$. Θέτουμε

$$w_n = \begin{cases} 2^{-n}/(1 + \mu(E_n)), & \text{αν } x \in E_n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση $w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ ικανοποιεί τις ζητούμενες απαιτήσεις.

□

Παρατηρήσεις 2.2.3 *Το παραπάνω λήμμα μας λέει ότι σε κάθε σ-πεπερασμένο μέτρο μ αντιστοιχεί ένα πεπερασμένο μετρο $d\tilde{\mu} = w\mu$ για το οποίο ισχύει ότι $\tilde{\mu}(A) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(A) = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι $w > 0$.*

Θεώρημα 2.2.2 *(Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym) Έστω μ σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο και λ μιγαδικό μέτρο σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Υπάρχει μοναδικό ζεύγος μιγαδικών μέτρων (ρ, τ) στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε*

$$\lambda = \rho + \tau, \quad \rho \ll \mu, \quad \text{και} \quad \tau \perp \mu \tag{2.1}$$

   *Το ζεύγος (ρ, τ) καλείται **ανάλυση Lebesgue** του λ ως προς μ.*

2. *Υπάρχει μοναδική $\mu-$σχεδόν παντού συνάρτηση $h \in L^1(\mu)$ ώστε*

$$\rho(E) = \int_E h d\mu, E \in \mathcal{A} \tag{2.2}$$

   *Η συνάρτηση h καλείται **Radon-Nikodym παράγωγος** του ρ ως προς μ.*

*Το πρώτο σκέλος του παραπάνω θεωρήματος καλείται **Θεώρημα Lebesgue** και το δεύτερο σκέλος καλείται **Θεώρημα Radon-Nikodym**.*

Για την απόδειξή τους χρειαζόμαστε το εξής:

Λήμμα 2.2.2 *Έστω Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου με $\mu(X) < +\infty$, $f \in L^1(\mu)$, S κλειστό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο και $A_E = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$, για κάθε $E \in \mathcal{A}$, με $\mu(E) > 0$. Τότε $f(x) \in S$ $\mu-$σχεδόν παντού στο X.*

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος παραπέμπουμε στο [1].

Περνάμε, λοιπόν, στην απόδειξη του θεωρήματος Lebesgue-Radon-Nikodym :

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2 Ας υποθέσουμε ότι το λ είναι φραγμένο θετικό μέτρο και έστω w η αντίστοιχη συνάρτηση στο μ του Λήμματος 2.2.1. Τότε το $d\varphi = d\lambda + w\mu$ είναι επίσης φραγμένο θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Ισχύει ότι

$$\int_X f d\varphi = \int_X f d\lambda + \int_X f w d\mu,$$

για κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση f.

Για κάθε $f \in L^2(\varphi)$ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \Big| \int_X f d\lambda \Big| &\leq \int_X |f| d\lambda \\ &\leq \int_X |f| d\varphi \\ &\leq \left\{ \int_X |f|^2 d\varphi \right\}^2 \{\varphi(X)\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Εφόσον $\varphi(X) < +\infty$, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$f \to \int_X f d\lambda$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^2(\varphi)$ και αφού ο $L^2(\varphi)$ είναι χώρος Hilbert, υπάρχει $g \in L^2(\varphi)$ ώστε

$$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi.$$

για κάθε $f \in L^2(\varphi)$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές σε έναν χώρο Hilbert δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο με κάποιο στοιχείο του χώρου. Συνεπώς, υπάρχει $g \in L^2(\varphi)$ ώστε

$$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi$$

για κάθε $f \in L^2(\varphi)$.

Παρατηρήσεις 2.2.4 *Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη του g οφείλεται στην πληρότητα του χώρου $L^2(\varphi)$.*

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.2 Στην πιο πάνω σχέση θέτουμε $f = \chi_E$, όπου $E \in \mathcal{A}$, με $\varphi(E) > 0$. Τότε $\int_X f d\lambda = \lambda(E)$ και αφού $0 \leq \lambda \leq \varphi$, έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1.$$

Οπότε από το Λήμμα 2.2.2 έχουμε ότι $g(x) \in [0, 1]$, φ–σχεδόν παντού. Μπορούμε, λοιπόν να υποθέσουμε ότι $0 \leq g(x) \leq 1$, για κάθε $x \in X$.
Έχουμε

$$\int_X (1 - g) f d\lambda = \int_E f g w d\mu.$$

Θέτουμε

$$A = \{x : 0 \le g(x) < 1\},\ B = \{x : g(x) = 1\}$$

και ορίζουμε μέτρα ρ και τ ως εξής:

$$\rho(E) = \mathcal{J}(A \cap E) \text{ και } \tau(E) = \mathcal{J}(B \cap E),$$

για κάθε $E \in \mathcal{A}$.

Για $f = \chi_E$ έχουμε ότι $\int_X (1-g) f d\mathcal{J} = 0$ και $\int_X fgw d\mu = \int w d\mu$. Αφού $w(x) > 0$ για όλα τα $x \in X$, έπεται ότι $\mu(B) = 0$. Συνεπώς $\tau \perp \mu$. Εφόσον το g είναι φραγμένο, η σχέση $\int_X (1-g) f d\mathcal{J} = \int_X f w d\mu$ ισχύει αν αντικαταστήσουμε το g με το

$$(1 + g + g^2 + \cdots + g^n) w d\mu,$$

για $n = 1, 2, \ldots$ και $E \in \mathcal{A}$. Η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\mathcal{J} = \int_E g(1 + g + g^2 + \cdots + g^n) w d\mu.$$

Για κάθε $x \in B$, $g(X) = 1$, οπότε $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Για κάθε $x \in \mathcal{A}$, $g^{n+1} \to 0$ μονότονα. Άρα

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\mathcal{J} \to \mathcal{J}(A \cap E) = \rho(E) \text{ καθώς } n \to +\infty.$$

Το $g(1 + g + g^2 + \cdots + g^n) w$ είναι αύξουσα και τείνει σε μία μη αρνητική συνάρτηση h.

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue, ισχύει ότι

$$\int_E g(1 + g + \cdots + g^n) w d\mu \to \int_E h d\mu \text{ καθώς το } n \to +\infty.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η σχέση 2.2 ισχύει για κάθε $E \in \mathcal{A}$. Παίρνοντας $E = X$, βλέπουμε ότι $h \in L^1(\mu)$, αφού $\rho(X) < +\infty$. Τέλος, η σχέση 2.2 μας δείχνει ότι $\rho \ll \mu$, οπότε για $\mathcal{J}$ θετικό μέτρο το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Αν το $\mathcal{J}$ είναι μιγαδικό μέτρο, τότε $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 i$, για κάποια θετικά μέτρα $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$. Ακολουθούμε, λοιπόν, την παραπάνω διαδικασία για τη θετική και την αρνητική κύμανση των $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$.

□

Παρατηρήσεις 2.2.5 *Στην περίπτωση που το $\mathcal{J}$ είναι θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιει το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος η οποία, ομως, δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αλλά είναι "τοπικά στον $L^1(\mu)$", δηλαδή αν $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ με $\mu(X_n) < +\infty$ και $\mathcal{J}(X_n) < +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\int_{X_n} h d\mu < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Ακολουθούν κάποιες συνέπειες του θεωρήματος Radon-Nikodym.

Θεώρημα 2.2.3 *(Πολική αναπαράσταση του μιγαδικού μέτρου) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μιγαδικού μέτρου. Υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση h ώστε*

$$|h(x)| = 1,$$

για κάθε $x \in X$ και

$$d\mu = hd|\mu|.$$

Η τελευταία ισότητα καλείται ***πολική αναπαράσταση ή πολική ανάλυση*** *του μ (σε αναλογία με τους μιγαδικούς αριθμούς οι οποίοι γράφονται ως γινόμενο του μέτρου τους και ενός μιγαδικού αριθμού με μέτρο τη μονάδα).*

Απόδειξη Προφανώς ισχύει ότι $|\mu| \ll \mu$ οπότε, από Θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει συνάρτηση $h \in L^1(|\mu|)$ ώστε $d\mu = hd|\mu|$.

Έστω $r > 0$, $A_r = \{x : |h(x)| < r\}$ και $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ μία διαμέριση του A_r.Τότε

$$\begin{aligned}\sum_j |\mu(E_j)| &= \sum_j \Big| \int_{E_j} hd|\mu| \Big| \\ &\leq \sum_j r|\mu|(E_j) \\ &= r|\mu|(A_r).\end{aligned}$$

Οπότε, $|\mu|(A_r)| \leq r|\mu|(A_r)$.

Αν $r < 1$, τότε $|\mu(A_r)| = 0$. Οπότε $|h| \geq 1$ $|\mu|$−σχεδόν παντού.

Αν $|\mu|(E) > 0$, τότε

$$\left| \tfrac{1}{|\mu|(E)} \int_E hd\mu \right| = \tfrac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.2 (με τον μοναδιαίο κύκλο στη θέση του S), συμπεραίνουμε ότι $|h| \leq 1$, $|\mu|$−σχεδόν παντού. Έστω $B = \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$. Όπως δείξαμε, $|\mu|(B) = 0$, οπότε αν ορίσουμε $h(x) = 1$, για κάθε $x \in B$, τότε η h είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

□

Έτσι, από το παραπάνω πόρισμα ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας συνάρτησης ως προς μιγαδικό μέτρο.

Ορισμός 2.2.4 *Έστω μ μιγαδικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, h η συνάρτηση του παραπάνω πορίσματος και f μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το* ***ολοκλήρωμα Lebesgue*** *της f ως προς μ ως εξής:*

$$\int f d\mu = \int fhd|\mu|.$$

Θεώρημα 2.2.4 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου, $g \in L^1(\mu)$ και*

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu,\ E \in \mathcal{A}.$$

Τότε

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu,\ E \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη Από το Θεώρημα 2.2.3, υπάρχει συνάρτηση h με απόλυτη τιμή 1 ώστε $d\lambda = g d\mu$. Συνεπώς,

$$h d\lambda = g d\mu.$$

Άρα

$$d\lambda = \bar{h} g d\mu.$$

Ας το συγκρίνουμε με το τρίτο σκέλος του πορίσματος 1.1.3 . Εφόσον $|\lambda| \geq 0$ και $\mu \geq 0$ έπεται ότι $\bar{h}g \geq 0$ μ–σχεδόν παντού. Έτσι, $\bar{h}g = |g|$ $|\mu|$–σχεδόν παντού.

□

2.3 Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Ορισμός 2.3.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μιγαδικού μέτρου. Το μ καλείται **κανονικό** αν η κύμανσή του, $|\mu|$, είναι κανονικό μέτρο.*

Θεώρημα 2.3.1 *(Αναπαράστασης του Riesz) Έστω (X, τ) τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff και $\Phi : X \to \mathbb{C}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $C_0(X)$. Υπάρχει μοναδικό κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel μ στον X ώστε*

$$\Phi f = \int f d\mu, f \in C_0(X) \tag{2.3}$$

Επιπλέον,

$$||\Phi|| = |\mu|(X) \tag{2.4}$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε πρώτα τη μοναδικότητα του ζητούμενου μέτρου. Έστω μ ένα κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel στον X ώστε $\int f d\mu = 0$, για κάθε $f \in C_0(X)$. Από το Θεώρημα 2.2.3 υπάρχει $h \in L^1(\mu)$, με $|h| = 1$, ώστε $d\mu = h d|\mu|$. Τότε για κάθε ακολουθία $(f_n)_{\in \mathbb{N}}$ στο $C_0(X)$ ισχύει ότι

$$|\mu|(X) = \int (\bar{h} - f_n) h d\mu \leq \int |\bar{h} - f_n| d\mu \tag{2.5}$$

και αφού ο $C_c(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^1(\mu)$ (από Θεώρημα 1.1.5) μπορούμε να επιλέξουμε την $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\int |\bar{h} - f_n| d\mu \to +\infty$ καθώς $n \to 0$. Οπότε $|\mu(X)| = 0$, άρα $\mu = 0$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η διαφορά δύο κανονικών μιγαδικών μέτρων Borel είναι κανονικό μέτρο. Συνεπώς, το πολυ ενα μέτρο μ ατιστοιχεί σε κάθε Φ.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι έχουμε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές Φ στον $C_0(X)$. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\|\Phi\| = 1$. Θα κατασκευάσουμε ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές Λ στον $C_c(X)$, ώστε

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|, f \in C_c(X), \tag{2.6}$$

όπου $\|\cdot\|$ η supremum νόρμα.

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για θετικα μέτρα (Θεώρημα 1.1.6) σε κάθε Λ αντιστοιχίζουμε ένα θετικό μέτρο Borel λ στον X ώστε $\Lambda f = \int f d\lambda$. Το μέτρο λ θα είναι κανονικό αν $\lambda(x) < +\infty$. Εφόσον

$$\lambda(X) = \sup\{\Lambda(f) : 0 \leq f < 1, f \in C_c(X)\} \tag{2.7}$$

και αφού $|\Lambda(f)| \leq 1$ αν $\|f\| \leq 1$, βλέπουμε ότι στην πραγματικότητα ισχύει $\lambda(X) \leq 1$. Από την (2.7) έπεται ότι

$$|\Phi(X)| \leq \Lambda(|f|) = \int |f| d\lambda = \|f\|_1, \ f \in C_c(X).$$

Η $\|\cdot\|_1$ αναφέρεται στο χώρο $L^1(\lambda)$. Το Φ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $C_c(X)$ με νόρμα το πολύ 1, ως προς την L^1−νόρμα στον $C_c(X)$. Υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^1(\lambda)$ που επεκτείνει το Φ (δηλαδή η νόρμα διατηρείται) κι έτσι, από το Θεώρημα 1.1.4 (για $p = 1$) έχουμε μοναδική Borel συνάρτηση g με $|g| \leq 1$, ώστε

$$|\Phi(f)| = \int f g d\lambda, f \in C_c(X). \tag{2.8}$$

Στην πιο πάνω ισότητα και τα δύο μέλη παριστάνουν ένα συνεχές συναρτησοειδές στον $C_0(X)$.Ο $C_c(X)$ είναι πυκνός στον $C_0(X)$. Οπότε, η (2.8) ισχύει για όλα τα $f \in C_0(X)$, κι έτσι έχουμε την αναπαράσταση του Φ με $\mu = g d\lambda$. Αφού $\|\Phi\| = 1$, από την (2.8) έχουμε ότι

$$\int |g| d\lambda \geq \sup\{|\Phi(f)| : f \in C_0(X), \|f\| \leq 1\} = 1.$$

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι $\lambda(X) \leq 1$ και ότι $|g| \leq 1$. Αυτό ισχύει μόνο αν $\lambda(X) = 1$ και $|g| = 1$ λ−σχεδόν παντού, Συνεπώς, $d|\mu| = |g| d\lambda = d\lambda$, από το Θεώρημα 2.2.4, και

$$|\mu|(X) = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|,$$

που σημαίνει ότι η 3.4 έχει αποδειχθεί.

Μένει να βρούμε ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές Λ που να ικανοποιεί την (2.7). Αν $f \in C_c^+(X)$ ($C_c^+(X)$ είναι η κλάση όλων των μη αρνητικών στοιχείων της $C_c(X)$), ορίζουμε

$$\Lambda(f) = \sup\{|\Phi(h)| : h \in C_c(X), |h| \leq f\}.$$

Τότε $\Lambda(f) \geq 0$, η Λ ικανοποιεί την 2.7, $0 \leq f_1 \leq f_2$ και $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$, αν c θετική σταθερά. Θα δείξουμε ότι

$$\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g),$$

για κάθε $f, g \in C_c^+(X)$. Έπειτα, θα επεκτείνουμε το Λ σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές στο $C_c(X)$.
Έστω $f, g \in C_c(X)$. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $h_1, h_2 \in C_c(X)$ ώστε $h_1 \leq f$, $h_2 \leq g$ και

$$\Lambda(f) \leq |\Phi(h_1)| + \varepsilon,\ \Lambda(g) \leq |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί a_i, $i = 1, 2$, με $|a_i| = 1$ έτσι ώστε $a_i\Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$, για $i = 1, 2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) + \Lambda(g) &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon \\
&= \Phi(ah_1 + ah_2) + 2\varepsilon \\
&\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \\
&\leq \Lambda(f+g) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

κι έτσι βλέπουμε ότι ισχύει $\Lambda(f+g) \geq \Lambda(f) + \Lambda(g)$.
Συνεχίζοντας, έστω $h \in C_c(X)$, υπό την προηπόθεση ότι $|h| \leq f + g$. Θέτουμε $V = \{x \in X : f(x) + g(x) > 0\}$ και ορίζουμε

$$h_1(x) = \tfrac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)},\ h_2(x) = \tfrac{g(x)h(x)}{g(x)+h(x)},\ \text{αν } x \in V \text{ και}$$
$$h_1(x) = h_2(x) = 0,\ \text{διαφορετικά.}$$

Προφανώς η h_1 είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in V$. Διαφορετικά, $h_1(x_0) = 0$. Εφόσον η h_1 είναι συνεχής, $|h_1(x)| \leq |h_2(x)|$, για όλα τα $x \in X$, έπεται ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της h_1. Συνεπώς, $h_1 \in C_c(X)$ και το ίδιο ισχύει και για την h_2.
Αφού $h_1 + h_2 = h$ και $h_1 \leq f$, $h_2 \leq g$, έχυμε ότι

$$\begin{aligned}
|\Phi(h)| &= |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \\
&\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \\
&\leq \Lambda(f) + \Lambda(g).
\end{aligned}$$

Άρα $\Lambda(f+g) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g)$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$.
Αν η f ειναι πραγματική συνάρτηση, $f \in C_c(X)$, τότε $2f^+ = |f| + f$, ώστε $f^+ \in C_c^+(X)$ και $f^- \in C_c^-(X)$ και εφόσον $f = f^+ - f^-$, θα ορίσουμε

$$\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-),\ f \in C_c(X),\ f \text{ πραγματική συνάρτηση}$$

και

$$\Lambda(u + iv) = \Lambda(u) + i\Lambda(v).$$

Άρα η επέκτασή μας αποτελεί γραμμικό συναρτησοειδές στον $C_c(X)$.

□

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές

3.1 Κατασκευή συναρτήσεων που αναπαριστάνονται από δυναμοσειρές

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $r > 0$ και $a \in \mathbb{C}$. Το σύνολο*

$$D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

*καλείται **ανοικτός κυκλικός δίσκος** στο a με ακτίνα r. Το σύνολο*

$$\bar{D}(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$$

*είναι η **κλειστότητά** του και το συνολο*

$$D'(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$$

*είναι ο **διάτρητος ανοικτός κυκλικός δίσκος** στο a με ακτίνα r.*

Ορισμός 3.1.2 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$, συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \Omega$. Αν το όριο*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

υπάρχει, τότε καλείται **παράγωγος της** f στο z_0. Αν η παράγωγος υπάρχει σε κάθε $z \in \Omega$, τότε η f καλείται **ολόμορφη (ή αναλυτική)** στο Ω. Το σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων στο Ω συμβολίζεται με $H(\Omega)$.

Θα δούμε λίγα πράγματα για δυναμοσειρές και συναρτήσεις που αναπαριστάνονται από αυτές.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι σε καθε δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

αντιστοιχεί ένας αριθμός $R \in [0, +\infty]$ ώστε η σειρά να συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο $\bar{D}(a; r)$ για κάθε $r < R$ και να αποκλίνει διαφορετικά. Η ακτίνα σύγκλισης R δίνεται απο το κριτηριο ρίζας

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}.$$

Ορισμός 3.1.3 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Η f καλείται **αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρά** αν για κάθε δίσκο $D(a; r) \subset \Omega$ υπάρχει σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ που συγκλίνει στο $f(z)$ για κάθε $z \in D(a; r)$.*

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Αν η f είναι αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρα στο Ω, τότε $f \in H(\Omega)$ και η f' είναι επίσης αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρά. Πιο συγκεκριμένα, αν*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in D(a; r), \tag{3.1}$$

τότε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}, z \in D(a; r). \tag{3.2}$$

Αποδειξη Αν η σειρά 3.1 συγκλίνει στο $D(a; r)$, το κριτήριο ρίζας μας δείχνει ότι και η σειρά 3.2 συγκλίνει στο $D(a; r)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θέτουμε $a = 0$ και συμβολίζουμε $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$, $z \in D(a; r)$. Έστω $w \in D(a; r)$ και επιλέγουμε ρ τέτοιο ώστε $|w| < \rho < r$.

Αν $z \neq w$, τότε έχουμε

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left| \frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1} \right|.$$

Για $n = 1$ η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες ισούται με 0 και για $n \geq 2$ ισούται με

$$(z-w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}.$$

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < \rho$, ισχύει ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1} \right| < \frac{n(n-1)}{2}\rho^{n-2}.$$

Συνεπώς,

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} n^2|c_n|\rho^{n-2}.$$

Εφόσον $\rho < r$, η παραπάνω σειρά συγκλίνει. Οπότε το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο 0 καθώς $z \to w$. Άρα $g(w) = f(w)$. Αυτό ισχύει για κάθε $z \in D(a;r)$, άρα $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$, $z \in D(a;r)$.

□

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Αν η f αναπαριστάνεται από δυναμοσειρά στο Ω, τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα, η f είναι ολόμορφη και η f είναι αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρές. Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα στην f', έχουμε ότι η f' είναι ολόμορφη και η f'' είναι αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρές. Συνεχίζοντας, μποροούμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα σε όλες τις παραγώγους της f. Προκύπτει, λοιπόν, το παρακάτω

Πόρισμα 3.1.1 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Αν η f είναι αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρά στο Ω, τότε υπάρχουν οι παράγωγοι της f όλων των τάξεων κάθε μία από τις οποίες είναι αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρά στο Ω. Επίσης, αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z \in D(a;r)$, τότε*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k},\ z \in D(a;r).$$

Φτάσαμε,λοιπόν, στο σημείο να διατυπώσουμε ένα θεώρημα το οποίο μας περιγράφει μία διαδικασία κατασκευής συναρτήσεων που αναπαριστάνονται από δυναμοσειρές.

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω μ μιγαδικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, $\varphi : X \to \mathbb{C}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση και $\Omega \subset \mathbb{C}$ με $\Omega \cap \varphi(X) = \emptyset$. Αν*

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z}, z \in \Omega, \tag{3.3}$$

τότε η f είναι αναπαριστανόμενη από δυναμοσειρά στο Ω.

Απόδειξη Έστω $D(a;r) \subset \Omega$. Επειδή $\Omega \cap \varphi(X) = \emptyset$, ισχύει και ότι $D(a;r) \cap \varphi(X) = \emptyset$, , οπότε $|\varphi(\zeta) - a| \geq r$, για κάθε $\zeta \in X$. Για κάθε $z \in D(a;r)$ και κάθε $\zeta \in X$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{z-a}{\varphi(z)-a}\right| \leq \frac{|z-a|}{r} < \frac{r}{r} = 1$$

Η γεωμετρική σειρά

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n)}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}} &= \frac{1}{\varphi(\zeta)-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\varphi(\zeta)-a}\right)^n\\ &= \frac{1}{\varphi(\zeta)-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\varphi(\zeta)-a}}\\ &= \frac{1}{\varphi(\zeta)-z}\end{aligned}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο X για κάθε $z\in D(a;r)$. Τότε

$$\begin{aligned}f(z) &= \int_X \frac{1}{\varphi(\zeta)-z}d\mu(\zeta)\\ &= \int_X\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}}d\mu(\zeta)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_X\frac{d\mu(\zeta)}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\end{aligned}$$

όπου $c_n=\int_X\frac{d\mu(\zeta)}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}}$, $n=0,1,2,\dots$.
Επίσης, από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|c_n| &\le \int_X\frac{|d\mu(\zeta)|}{|\varphi(\zeta)-a|^{n+1}}\\ &\le \frac{1}{r^{n+1}}\cdot\int_X|d\mu(\zeta)|\\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\cdot|\mu|(X),\end{aligned}$$

$n=0,1,2,\dots$.

□

3.2 Εφαρμογή στην Ανάλυση Fourier

3.2.1 Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 3.2.1 *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου το $\mathbb{T}$ συμβολίζει τον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Έστω*

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \text{ όπου } 0 < p < +\infty$$

και

$$\|f\|_\infty = \inf_{M>0}\left\{M : |\{e^{it} : |f(e^{it})| > M\}| = 0\right\},$$

*όπου το $|B|$ συμβολίζει το μέτρο Lebesgue του συνόλου B. Ορίζουμε τους **χώρους Lebesgue** $L^p(\mathbb{T}), 0 < p \leq +\infty$ ως εξής:*

$$L^p(\mathbb{T}) = \{f : \|f\|_p < +\infty\}.$$

Ορισμός 3.2.2 *Έστω ακολουθία μιγαδικών αριθμών $Z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$\|Z\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n|^p\right)^{1/p}, \ 0 < p < +\infty$$

και

$$\|Z\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|.$$

Για κάθε $0 < p \leq +\infty$ ορίζουμε τους χώρους ακολουθιών

$$l^p(\mathbb{Z}) = \{Z : \|Z\|_p < +\infty\}.$$

Ορισμός 3.2.3 *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το **n-οστό συντελεστή Fourier** της f ως εξής:*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt.$$

*Η ακολουθία $\hat{f} = (f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, καλείται **μετασχηματισμός Fourier** της f.*

Ορισμός 3.2.4 *Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Ορίζουμε τη **συνέλιξη** των f, g ως εξής:*

$$(f * g)(e^{it}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})d\tau$$

για όλα σχεδόν τα $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Παρατηρήσεις 3.2.1 *Στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να ορισουμε σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})d\tau$ διότι $\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})|d\tau < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Πράγματι, με χρηση του Θεωρήματος Fubini (παραπομπή [3]) έχουμε ότι*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})d\tau\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i(t-\tau)})|dt\right)d\tau$$
$$= \left(\int |f(e^{i\tau}|d\tau\right)\left(\int |g(e^{is}|ds\right)$$

Η τελευταία παράσταση είνα πεπερασμένη αφού $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Συνεπώς, $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})d\tau\right)dt < \infty$.

3.2.2 Μιγαδικά Μέτρα

Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ το σύνολο των μιγαδικών μέτρων Borel στο $\mathbb{T}$. Η κύμανση του $\mu \in \mathbb{M}$ αποτελεί νόρμα $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{T})$ στο χώρο $\mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ υπάρχει μέτρο Borel

$$d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} f(e^{it})dt.$$

Επειδή $\|\mu\| = \|f\|_1$, η αντιστοιχία αυτή αποτελεί εμφύτευση του $L^1(\mathbb{T})$ στον $\mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Ορισμός 3.2.5 *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το **n-οστό συντελεστη Fourier** του μ ως*

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(e^{it}).$$

*Η ακολουθία $\hat{\mu} = (\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **μετασχηματισμός Fourier** του μέτρου μ.*

Λήμμα 3.2.1 *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε $\hat{\mu} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ και*

$$\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|.$$

Συγκεκριμένα, για κάθε $f \in L^1$,

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(n)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(e^{it}) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |e^{int}| d|\mu|(e^{it}) \\ &= |\mu|(\mathbb{T}) \\ &= \|\mu\|. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι ειδική περίπτωση της πρώτης με $d\mu(e^{it}) = f(e^{it})dt/2\pi$. Σε αυτή την περίπτωση, $\hat{\mu}(n) = \hat{f}(n)$ και $\|\mu\| = \|f\|_1$.

□

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μία γραμμική απεικόνιση $\mathcal{M}(\mathbb{T}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ με νορμα το πολύ 1.

Συμβολίζουμε με $C(\mathbb{T})$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{T}$.

Ορισμός 3.2.6 *Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και $\Lambda : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ με*

$$\Lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i(t+\tau)}) d\mu(e^{it}) d\nu(e^{i\tau}), \ \varphi \in C(\mathbb{T}).$$

*Το Λ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στο $C(\mathbb{T})$ οπότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel το οποίο συμβολίζουμε με $\mu * \nu$ και καλούμε **συνέλιξη** των μ, ν ώστε*

$$\Lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{it}) d(\mu * \nu)(e^{it}), \ \varphi \in C(\mathbb{T}).$$

Επιπλέον,

$$\|\Lambda\| = \|\mu * \nu\|.$$

Έχουμε ορίσει το $\mu * \nu$ ώστε

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{it}) d(\mu * \nu)(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i(t+\tau)}) d\mu(e^{it}) d\nu(e^{i\tau}), \tag{3.4}$$

για κάθε $\varphi \in C(\mathbb{T})$ και ισχύει ότι

$$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \cdot \|\nu\|.$$

Παρατηρήσεις 3.2.2

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε*

$$\widehat{\mu * \nu}(n) = \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Ειδικότερα, αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Στην ισότητα 3.4 θέτουμε $\varphi(e^{it}) = e^{-int}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\mu * \nu}(n) &= \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d(\mu * \nu)(e^{it}) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} e^{-in(t+\tau)} d\mu(e^{it}) d\nu(e^{i\tau}) \\ &= \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(e^{it}) \times \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} d\nu(e^{i\tau}) \\ &= \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n).\end{aligned}$$

□

Το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει τη σημασία της ανάλυσης Fourier στη συνέλιξη, καθώς με χρήση του μετασχηματισμού Fourier μετατρέπουμε τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων στο γινόμενό τους.

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$. Έστω, επίσης,*

$$d\nu(e^{it}) = f(e^{it})dt.$$

Τότε το μέτρο $\mu * \nu$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και ισχύει ότι

$$d(\widehat{\mu * \nu})(e^{it}) = \Big(\int_{\mathbb{T}} f(e^{i(t+\tau)} d\mu(e^{i\tau}) \Big) dt.$$

Απόδειξη Σύμφωνα με την 3.4, για κάθε $\varphi \in C(\mathbb{T})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{it}) d(\mu * \nu)(e^{it}) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i(t+\tau)}) d\mu(e^{it}) d\nu(e^{i\tau}) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i(t+\tau)}) d\mu(e^{it}) f(e^{i\tau}) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{is}) \Big(\int_{\mathbb{T}} f(e^{i(s-t)}) d\mu(e^{it}) \Big) ds.\end{aligned}$$

Από τη μοναδικότητα που μας εξασφαλίζει το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, έχουμε ότι

$$d(\mu * \nu)(e^{is}) = \left(\int_{\mathbb{T}} f(e^{i(s-t)}) d\mu(e^{it}) \right) ds.$$

□

Πίνακας Συμβόλων

$\sigma(C)$	σελ.8	$D(a;r)$	σελ.47
$\mathcal{B}(X)$	σελ.8	$\bar{D}(a,r)$	σελ.47
$f^{-1}B$	σελ.11	$D'(a,r)$	σελ.47
$\nu(f,\mu)$	σελ.16	$H(\Omega)$	σελ.47
f^+, f^-	σελ.16	$\|f\|_p$	σελ.51
$L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$	σελ.16	$\|f\|_\infty$	σελ.51
$L^1(\mu)$	σελ.16	$L^p(\mathbb{T})$	σελ.51
$\rho \ll \mu$	σελ.17,29,36	$\|Z\|_p$	σελ.51
$\|\mu\|$	σελ. 31	$\|Z\|_\infty$	σελ.51
$\rho \perp \mu$	σελ.17,30,36	$l^p(\mathbb{Z})$	σελ.51
$f_1 \vee f_2$	σελ.18	$\hat{f}(n)$	σελ.51
$s(X)$	σελ.11	$f * g$	σελ.51
$C(\mathbb{T})$	σελ.52	$M(\mathbb{T})$	σελ.52
$C_c(X), C_c(X,\mathbb{C})$	σελ.22	$\hat{\mu}(n)$	σελ.51
$C_c(X,\mathbb{R})$	σελ.22	$\mu * \nu$	σελ.53
$s(f), suppf$	σελ.22	$L^\infty(\mathbb{T})$	σελ.51
$\mathcal{M}(\varphi)$	σελ.23	$\hat{f}$	σελ.51
$f \prec U$	σελ.25	$\hat{\mu}$	σελ.52
μ^+, μ^-	σελ.29,36	$L^p(\mu), L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$	σελ.21
$\mathbb{T}$	σελ.51		

Βιβλιογραφία

1. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, 1986
2. R.B Ash, Real Analysis and Probability, Academic Press, 1972
3. Γ.Κουμουλλής-Σ.Νεγραπόντης, Θεωρία Μέτρου, Εκδόσεις Συμμετρία, 1991
4. Ι. Σαραντόπουλος, Μια Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση με Παραδείγματα και Ασκήσεις, 2014
5. H. Bauer, Probability Theory and Elements of Measure Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1972
6. G.B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1999