



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΠΜΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Μεταπτυχιακή εργασία
της ΚΟΥΤΣΙΟΥΜΠΑ Γ. ΔΗΜΗΤΡΑΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΤΑ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ

Επιβλέπων

Ανδριανόπουλος Π. Νίκος, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα, Μάρτιος 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης	1-5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ανισότροπα υλικά	
2.1. Κρυσταλλογραφία	6-7
2.2. Είδη ανισοτροπίας – Τα επτά συστήματα κρυστάλλου	8-13
2.3. Συμμετρία κατά περιπτώσεις	14-21
2.4. Ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης	22-30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Μηδενισμός του 3^{ου} όρου	31-37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Συμπεράσματα	38 - 39
Βιβλιογραφία	40 - 41

Κεφάλαιο 1

Η ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Κάθε υλικό το οποίο καταπονείται υπό μία εντατική κατάσταση $[\sigma_{ij}]$ αναπτύσσει παραμορφώσεις $[\varepsilon_{ij}]$. Λόγω της φόρτισης, αποθηκεύεται στο υλικό ένα ποσό ενέργειας ίσο με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων το οποίο δαπανάται για την δημιουργία παραμόρφωσης. Η ενέργεια αυτή, εφόσον το υλικό αναπτύσσει αποκλειστικά ελαστικές παραμορφώσεις, επανακτάται εις το ακέραιο εφόσον απομακρυνθούν τα εξωτερικά φορτία και καλείται ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης T .

Έτσι, σε ένα υλικό που υπακούει τον νόμο του Hooke ($\sigma = E \cdot \varepsilon$) ορίζεται εύκολα ένα μέγεθος ενέργειας που ονομάζεται ελαστικό δυναμικό ή πυκνότητα ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων και συμβολίζεται με T . Αν κάνουμε ένα υποθετικό πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού και ασκήσουμε σε ένα υλικό τάση (σ) (η οποία βέβαια δεν θα αναγκάσει το υλικό να αστοχήσει) τότε θα παρατηρήσουμε σε αυτό μία παραμόρφωση (ε).

Ως πυκνότητα ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων ή ελαστικό δυναμικό, ορίζουμε το μέγεθος

$$T = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1.1.1)$$

το οποίο έχει διαστάσεις

ενέργειας όπως φαίνεται και από τον ορισμό.

Για μικρές παραμορφώσεις και ισόθερμες ή αδιαβατικές μεταβολές, η παραπάνω καταστατική εξίσωση ισοδυναμεί με τον νόμο του Hooke, ο οποίος σε γενικευμένη μορφή δίνεται από τον τύπο

$$\sigma = C \varepsilon \quad (1.1.4)$$

$$\text{ή σε γραφή με δείκτες } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.1.5)$$

Δηλαδή, ο τανυστής C είναι τετάρτης τάξεως άρα έχει 81 συντελεστές και ονομάζεται και τανυστής ελαστικότητας. Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής C αντιστρέφεται, δηλαδή υπάρχει S μη-μηδενικός τανυστής

$$C_{ijmn} S_{nmkl} = S_{ijmn} C_{nmkl} = I_{ijkl} \quad (1.1.6)$$

όπου I είναι το μοναδιαίο στοιχείο του χώρου των τανυστών τέταρτης τάξεως. Ο τανυστής S ονομάζεται και τανυστής ενδόσεως. Με βάση αυτά, αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$2T = \sigma \varepsilon = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad 2T = \sigma S \sigma = \varepsilon C \varepsilon \quad 2T = S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (1.1.7)$$

οι οποίες συνδέουν τα μεγέθη τάση, παραμόρφωση, ελαστικό δυναμικό, τανυστή ελαστικότητας και τανυστή ενδόσεως. Όπως αποδείχθηκε από τον Sokolnikoff ισχύει ότι:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1.1.8)$$

Άρα οι τανυστές (δευτέρας τάξεως) της τάσης και της παραμόρφωσης αποτελούνται από 6 ανεξάρτητες ποσότητες (αντί για 9) και από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι και οι τανυστές ελαστικότητας και ενδόσεως αποτελούνται από 36 ανεξάρτητες ποσότητες (αντί για 81).

Επιπλέον, από το θερμοδυναμικό αξίωμα που απαιτεί την παραγωγή μηδενικού έργου σε κλειστό κύκλο φορτίσεως αποδεικνύεται περαιτέρω ότι οι δύο αυτοί τανυστές (ο C και S) αποτελούνται τελικά από 21 ανεξάρτητες ποσότητες.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο για την ενέργεια T είναι ο διαχωρισμός της σε διογκωτική ενέργεια και στροφική ενέργεια. Στην φύση και βάσει της ευκλείδειας γεωμετρίας, υπάρχουν μόνον δύο τρόποι για να αλλάξει το σχήμα ενός στοιχειώδους κύβου με, έστω, απειροστές διαστάσεις $\{dx, dx, dx\}$.

Ο ένας τρόπος είναι να αλλάξει ο όγκος του και από στοιχειώδης κύβος διαστάσεων $\{dx, dx, dx\}$ να γίνει στοιχειώδης κύβος διαστάσεων $\{(dx+da), (dx+da), (dx+da)\}$ χρησιμοποιώντας, βέβαια, και την κατάλληλη φόρτιση που απλά θα του μεγαλώσει τον όγκο (δύσκολο να υπολογιστεί. σε κάποιες περιπτώσεις τουλάχιστον πάντα υπάρχει μια τέτοια φόρτιση). Για αυτό είναι υπεύθυνη η συνιστώσα της διογκωτικής ενέργειας T_V , δηλαδή σε αλλαγή όγκου, και μόνον όγκου, έχουμε την συνθήκη $T_d = 0$, δηλαδή στην αλλαγή όγκου ισχύει:

Μόνο αλλαγή
όγκου

$$T_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = T = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = T_V + 0 = T_V \quad (1.1.10)$$

Όπου $T_V =$ Αλλαγή όγκου

Ένας άλλος τρόπος για να αλλάξεις το σχήμα ενός στοιχειώδους κύβου είναι να του αλλάξεις τις γωνίες που έχει. Ο αφόρτιστος κύβος έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 90° μοίρες ενώ μετά την επιβολή κάποιου τασικού πεδίου ο κύβος αποκτά τυχαίες γωνίες ηον κυμαίνονται από 0° μοίρες έως 180° μοίρες. Αλλά η αλλαγή γωνιών μπορεί να αφορά και οποιαδήποτε άλλη γωνία π.χ. σε μια πλευρά του κύβου παίρνουμε τις διαγωνίους της και σχηματίζονται 4 τρίγωνα. Κάθε αλλαγή στις γωνίες που σχηματίζονται από τις διαγωνίους συνιστά αλλαγή σχήματος. Και εδώ πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι σε κάποια είδη ανισοτροπίας υλικών είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί μία τέτοια φορτίση, αλλά πάντα υπάρχει. Για αλλαγή γωνιών και μόνον γωνιών είναι υπεύθυνη η συνιστώσα της στροφικής ενέργειας T_d οπότε εύκολα προκύπτει $T_V = 0$, δηλαδή για αλλαγή γωνιών:

Μόνο αλλαγή
σχήματος

$$T_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = T = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = 0 + T_D = T_D \quad (1.1.11)$$

Όπου $T_D =$ Αλλαγή σχήματος

Ειδικά για τα ισότροπα υλικά ισχύουν τα εξής:

Ένα σημαντικό σημείο και άξιο αναφοράς στην ελαστική ενέργεια είναι ο τρόπος που μπορεί να υπολογιστεί η κάθε μια συνιστώσα T_v και T_D . Η μεθοδολογία -απόδειξη είναι η ακόλουθη:

Έστω ένα τασικό πεδίο $\sigma_{ij} = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx}]$ το οποίο

ασκείται σε ένα στοιχειώδη κύβο από κάποιο υλικό με γνωστές μηχανικές ιδιότητες.

Το τασικό αυτό πεδίο προκαλεί μία παραμόρφωση η οποία εκφράζεται μαθηματικά με το παραμορφωσιακό πεδίο ...

$$e_{ij} = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx}]$$

--

Θέτουμε ως

$$\overline{\varepsilon_{ij}} = [\varepsilon_m \varepsilon_m \varepsilon_m \ 0 \ 0 \ 0]$$

όπου συμβολίζουμε ως ε_m την ποσότητα .. $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3}$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής $\overline{\varepsilon_{ij}}$ είναι σφαιρικός τανυστής, δηλαδή περιέχει εκείνα τα

στοιχεία του τανυστή των τάσεων σ_{ij} που προκαλούν στο σώμα μόνον αλλαγή όγκου.

Εν συνεχεία, ορίζουμε ως ... $e_{ij} = [(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_m) (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_m) (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_m) \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx}]$ Εξ ορισμού, ο τανυστής

e_{ij} περιέχει μόνον τάσεις που αλλάζουν το γεωμετρικό σχήμα (δηλαδή τις γωνίες) του

στοιχειώδους κύβου που θεωρήσαμε.

Εύκολα φαίνεται ότι ισχύει ... $e_{ij} = \overline{\varepsilon_{ij}} + e_{ij}$

Έχοντας αυτό υπ' όψιν και από την σχέση προκύπτει ότι ισχύει

$$T = 1/2 \sigma_{ij} e_{ij} = 1/2 \sigma_{ij} (\overline{\varepsilon_{ij}} + e_{ij}) = 1/2 \sigma_{ij} \overline{\varepsilon_{ij}} + 1/2 \sigma_{ij} e_{ij} = T_v + T_D \quad (1.1.12)$$

Έχουμε καταφέρει λοιπόν, διαχωρίζοντας τον τανυστή των παραμορφώσεων σε άθροισμα ενός

σφαιρικού $\overline{\varepsilon_{ij}}$ και ενός αποκλίνοντος e_{ij} τανυστή παραμορφώσεων, να διαχωρίσουμε την

ελαστική ενέργεια (πυκνότητα ενέργειας παραμορφώσεων) σε δύο ανεξάρτητα τμήματα:

α) ένα υπεύθυνο για την αλλαγή του όγκου T_v και

β) ένα υπεύθυνο για την αλλαγή του σχήματος (των γωνιών) T_D

Έτσι, από το νόμο του Hooke συμπεραίνουμε ότι η ελαστική ενέργεια T δίνεται

$$T = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 1/2 \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} = 1/2 \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Στην περίπτωση ισοτροπίας, η ενέργεια T μπορεί να παρουσιαστεί υπό μορφή ποσού της ενέργειας που συνδέεται με την αλλαγή του όγκου $T(\sigma I)$ και την αλλαγή του σχήματος $T(s)$ συγκεκριμένα :

$$T = T(\sigma I) + T(s) = \frac{1}{2K} \sigma^2 + \frac{1}{4G} s s \quad (1.1.13)$$

Όπου

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{and} \quad s = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}$$

Όταν μια αυθαίρετη ανισοτροπία εξετάζεται, η ανάλυση στα συνθετικά της ενέργειας στα μέρη που συνδέονται με την αλλαγή του όγκου $T(\sigma I)$ και την αλλαγή της μορφής $T(s)$ είναι αδύνατη.

Από εξίσωση (1.1.13) ακολουθεί αυτό για την ανισοτροπία.

$$2T(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} \bar{S} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^2 \bar{I} \bar{S} \bar{I} + s \bar{S} \bar{s} + 2 \sigma \bar{I} \bar{S} \bar{s}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \text{ με αντικατάσταση η εξίσωση γράφεται}$$

$$\text{όπου} \quad \text{ο τρίτος όρος είναι} \quad 2 \sigma \bar{I} \bar{S} \bar{s}, \neq 0 \quad (1.1.14)$$

$\bar{\sigma}$ ο τανυστής των τάσεων και σ η υδροστατική πίεση

Κάποιοι υποστηρίζουν ότι στα ανισότροπα υλικά, ο διαχωρισμός της ενέργειας σε έναν όρο υπεύθυνο για την αλλαγή όγκου και έναν για την αλλαγή σχήματος δεν είναι εφικτός.

Κεφάλαιο 2

ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΑ ΥΛΙΚΑ

2.1 ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΓΡΑΦΙΑ

Η κρυσταλλογραφία είναι η επιστήμη του καθορισμού της ρύθμισης των ατόμων μέσα σε οποιαδήποτε στερεά δομή, συμπεριλαμβανομένου και τους πολύτιμους λίθους. Όλοι οι πολύτιμοι λίθοι είναι κρυστάλλινες δομές που γίνονται από το μίγμα διαφορετικών στοιχειωδών ενώσεων, και η μορφή ενός κρυστάλλου είναι βασισμένη στην ατομική δομή αυτών των στοιχειωδών δομικών μονάδων.

Τα άτομα μέσα σε ένα μέταλλευμα τακτοποιούνται σε ένα καθορισμένο γεωμετρικό σχέδιο αποκαλούμενο, δομή, η οποία θα καθορίζει την κρυσταλλική δομή.

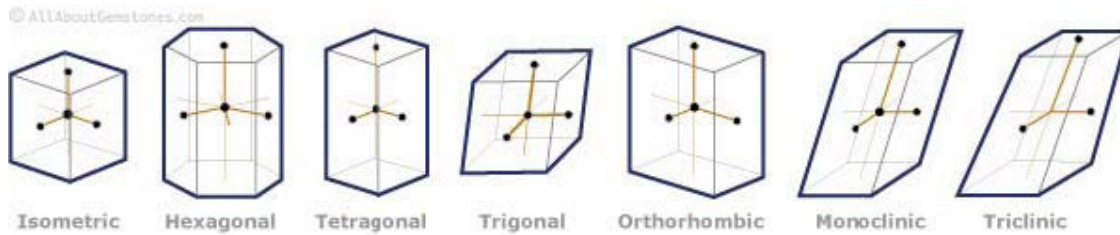
Η συνταγή ή το μίγμα αυτών των ενώσεων γίνεται το σχεδιάγραμμα για το πώς το κρύσταλλο θα αυξηθεί. Το σχέδιο αύξησης ενός κρυστάλλου είναι γνωστό σε εμάς ως κρυσταλλικές συνήθειες.



Μεμονωμένα συστήματα κρυστάλλου και το αξονικό σύστημα

Το σύστημα κρυστάλλου είναι μια ομαδοποίηση των δομών κρυστάλλου που είναι ταξινομημένες σύμφωνα με τον αξονικό σύστημα που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ατομική δομή του δικτυωτού πλέγματός τους.

Το δικτυωτό πλέγμα ενός κρυστάλλου είναι ένα τρισδιάστατο δίκτυο των ατόμων που τακτοποιούνται σε ένα συμμετρικό σχέδιο.



Κάθε σύστημα κρυστάλλου αποτελείται από ένα σύνολο τριών κρυσταλλογραφικών αξόνων (a,b and c) σε μια ιδιαίτερη γεωμετρική ρύθμιση. Τα επτά μοναδικά συστήματα κρυστάλλου, που απαριθμούνται κατά σειρά μείωσης της συμμετρίας, είναι: 1. Ισομετρικό σύστημα, 2. Εξαγωνικό σύστημα, 3. Τετραγωνικό σύστημα, 4.Τριγωνικό σύστημα 5. Ορθορομβικό σύστημα, 6. Μονοκλινές σύστημα, 7. Τρικλινές σύστημα

Δικτυωτά πλέγματα Bravais

Τα πλέγματα Bravais περιγράφουν το γεωμετρικό κανονισμό των μεμονωμένων σημείων του πλέγματος μέσα σε κάθε ένα από τα επτά συστήματα κρυστάλλων.

Υπάρχουν δεκατέσσερα πλέγματα Bravais που είναι ευδιάκριτα το ένα από το άλλο από την συμμετρία που περιέχουν, και όλα τα κρυστάλλινα μεταλλεύματα ταιριάζουν σε έναν από αυτούς τους μοναδικούς δεκατέσσερεις κανονισμούς.

Το μοναδιαίο κελί

Το μοναδιαίο κελί είναι η μικρότερη διαιρετή μονάδα, ενός δεδομένου μεταλλεύματος με συμμετρικά χαρακτηριστικά που είναι μοναδικά σε κάθε κρυσταλλική δομή. Η δομή του μοναδιαίου κελιού είναι ο διακανονισμός των ατόμων του χώρου (μοτίβο), τα οποία είναι στοιβαγμένα σε ένα τρισδιάστατο διάστημα για να διαμορφώσουν το κρύσταλλο. Η δομή του μοναδιαίου κελιού απαρτίζεται από μοναδικές περαμέτρους του δικτυωτού πλέγματος, το μήκος από τα άκρα του κελιού και από τα άκρα μεταξύ τους. Οι θέσεις των ατόμων μέσα στο μονάδα-κελί περιγράφονται από το σύνολο ατομικών θέσεων (x_i, y_i, z_i) μετρημένες από το δεδομένο δικτυωτό πλέγμα.

2.2 ΕΙΔΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΑΣ – ΤΑ ΕΠΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΥ

Με βάση την κρυσταλλογραφία (και προφανώς την ευκλείδεια γεωμετρία) αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 7 βασικοί ανεξάρτητοι τρόποι δόμησης ενός κρυστάλλου, δηλαδή 7 είδη ανισοτροπίας. Αναλυτικότερα, τα 7 είδη ανισοτροπίας είναι τα εξής:

1. Κυβική ανισοτροπία

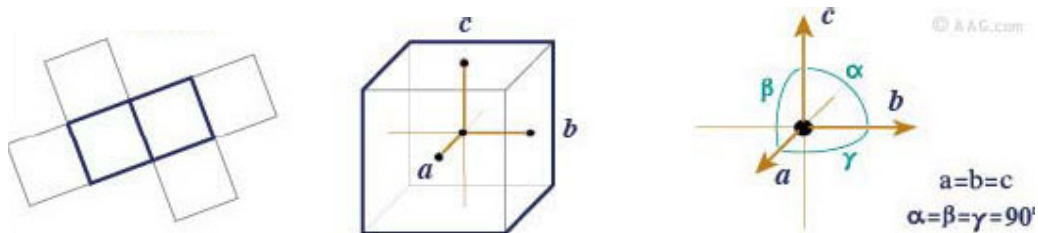
Το κυβικό σύστημα είναι γνωστό και ως ισομετρικό σύστημα.

Το κυβικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τη συνολική συμμετρία του, έχει τρεις κρυσταλλογραφικούς άξονες που είναι όλοι κάθετοι ο ένας στο άλλο και έχουν ίδια μήκη (μέτρο διανύσματος).

Δηλαδή, όπως φαίνεται και στο σχήμα

γωνίες $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

μήκη μοναδιαίων διανυσμάτων κυψελίδας $a_0 = b_0 = c_0$



2. Τετραγωνική ανισοτροπία

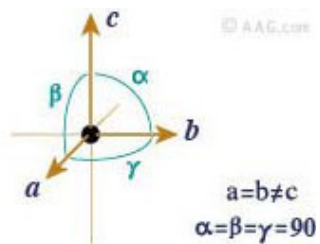
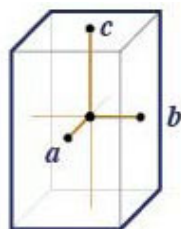
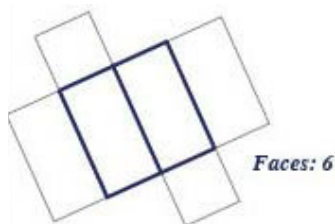
Το τετραγωνικό σύστημα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τετραγωνική βάση.

Αποτελείται από τρεις άξονες δύο ίσους και έναν άνισο κάθετο μεταξύ τους.

Δηλαδή όταν

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$$

$$a_0 = b_0 \neq c_0$$



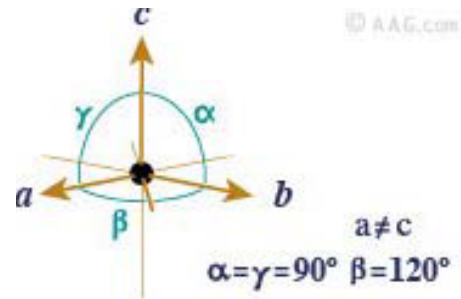
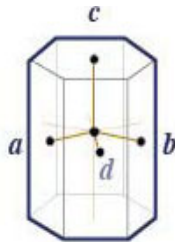
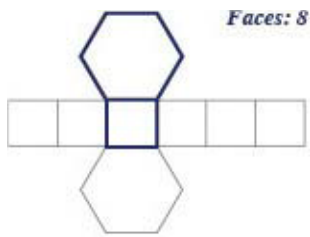
3. Εξαγωνική ανισοτροπία

Το εξαγωνικό σύστημα έχει τέσσερις κρυσταλλογραφικούς άξονες τρεις ίσους οριζόντιους (a, b και d) άξονες τοποθετημένους ανά 120° και ένα κάθετο (c) άξονα που μπορεί να είναι κοντύτερος ή μακρύτερος από τους οριζόντιους άξονες.

Δηλαδή όταν

$$\alpha_1 = 90^\circ, \gamma = 90^\circ, \beta = 120^\circ$$

$$a_0 = b_0 \neq c_0$$



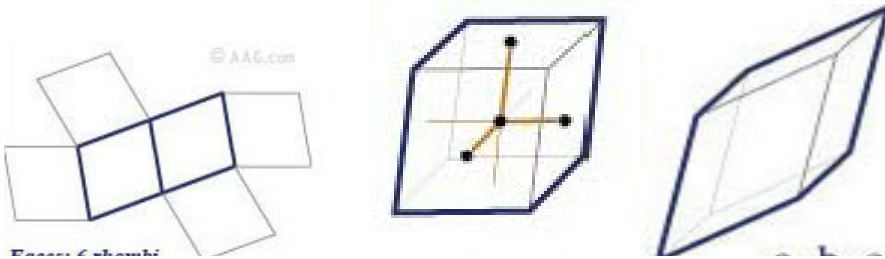
4. Τριγωνική ανισοτροπία

Το τριγωνικό σύστημα έχει τρεις ίσους άξονες στο ίδιο επίπεδο τοποθετημένους ανά 120° και έναν τέταρτο άξονα κάθετο σε αυτούς και άνισο.

Δηλαδή όταν

$$\alpha_1 = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

$$a_0 = b_0 \neq c_0$$



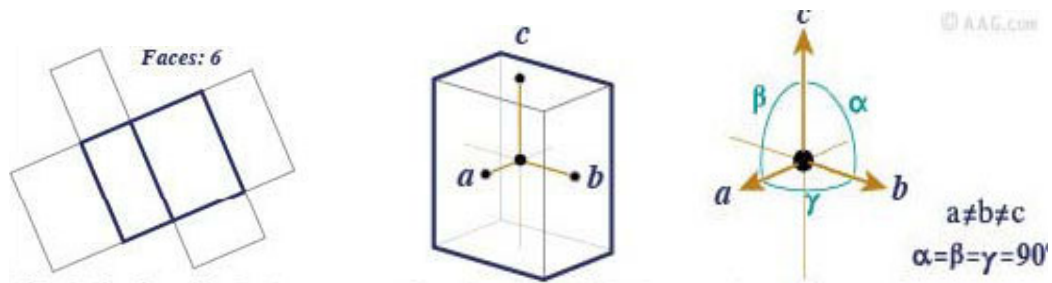
5. Ορθορομβική ανισοτροπία

Το ορθορομβικό σύστημα έχει τρεις κάθετους άξονες όλοι με διαφορετικά μήκη.

Δηλαδή όταν

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$$

$$a_0 \neq b_0 \neq c_0$$



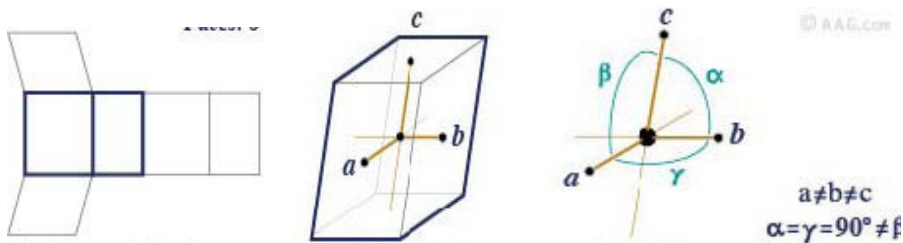
6. Μονοκλινης ανισοτροπία

Κρύσταλλοι που σχηματίζονται με τρεις άνισους κρυσταλλογραφικούς άξονες. Οι (a) και (c) κρυσταλλογραφικοί άξονες σχηματίζουν μια μη-ορθή γωνία και ο (b) άξονας είναι κάθετος στους a και c .

Δηλαδή όταν

$$\alpha = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ, \gamma = 90^\circ$$

$$a_0 \neq b_0 \neq c_0$$



7. Τρικλινής ανισοτροπία

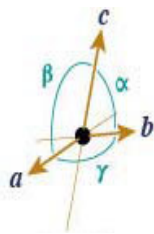
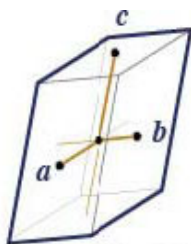
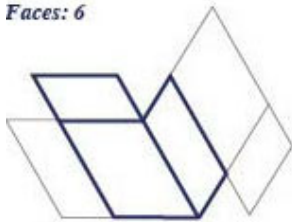
Κρύσταλλοι που σχηματίζονται με τρεις άνισους κρυσταλλογραφικούς άξονες και άνισες γωνίες.

Δηλαδή όταν

$$\alpha \neq 90^\circ, \beta \neq 90^\circ, \gamma \neq 90^\circ$$

$$a_0 \neq b_0 \neq c_0$$

Faces: 6



© AAC.com

$$a \neq b \neq c$$
$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90$$

2.3 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΤΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Ισχύει ο γενικευμένος νόμος του Hooke, όπως προαναφέραμε στο κεφ.1

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Όπου $C = [C_{ijkl}]$ ο τανυστής 4ης τάξεως των ελαστικών σταθερών

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Όπου $S = [S_{ijkl}]$ ο τανυστής ενδόσεως 4ης τάξεως

Ο οποίος σε μητρική γραφή δίνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2321} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1331} & C_{1321} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3221} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3121} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2321} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1331} & C_{1321} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3221} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3121} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}$$

Οι τανυστές ελαστικών σταθερών C_{ijkl} και ενδόσεως S_{ijkl} είναι αντίστροφοι, δηλαδή ισχύει

ότι :

$$C_{ijkl} S_{klmn} = S_{ijkl} C_{klmn} = I_{ijmn}$$

Οι τανυστές C_{ijkl} και S_{ijkl} αποτελούνται από 81 συνιστώσες. Δεν είναι όμως όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Εξηγούμε αναλυτικά το γιατί παρακάτω :

A. Οι τανυστές των τάσεων $\underline{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ και $\underline{\epsilon} = [\epsilon_{ij}]$ είναι συμμετρικοί, δηλ. ισχύουν τα εξής

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} &\longrightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} & C_{ijkl} = C_{ijlk} \\ \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} &\longrightarrow S_{ijkl} = S_{jikl} & S_{ijkl} = S_{ijlk} \end{aligned}$$

οπότε ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών μειώνεται σε 36.

B. Βάσει του αξιώματος της θερμοδυναμικής, το οποίο απαιτεί την παραγωγή μηδενικού έργου υπό ενός ελαστικού μέσου σε κλειστό δρόμο φόρτισης, προκύπτει ότι

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

$$S_{ijkl} = S_{klij}$$

οπότε ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών μειώνεται σε 21.

Άρα στη γενικότερη περίπτωση ανισοτροπίας έχω 21 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Εφαρμόζοντας τις ανωτέρω συμμετρίες, μπορώ να ξαναγράψω (συστολή τανυστών) το γενικευμένο νόμο του Hooke ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

και αντίστοιχα

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1113} & S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2213} & S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3313} & S_{3312} \\ S_{1123} & S_{2223} & S_{3323} & S_{2323} & S_{2313} & S_{2312} \\ S_{1113} & S_{2213} & S_{3313} & S_{2313} & S_{1313} & S_{1312} \\ S_{1112} & S_{2212} & S_{3312} & S_{2312} & S_{1312} & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Για περαιτέρω ευκολία, θα χρησιμοποιήσω το συμβολισμό του Voigt (1910). Αντικαθιστώ στα ανωτέρω όπου :

$$\begin{array}{ll} 11 \rightarrow 1 & \\ 22 \rightarrow 2 & \\ 33 \rightarrow 3 & \\ 23 \text{ ή } 32 \rightarrow 4 & \\ 13 \text{ ή } 31 \rightarrow 5 & \\ 12 \text{ ή } 21 \rightarrow 6 & \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{lll} \sigma_{11} = \sigma_1, & \sigma_{22} = \sigma_2, & \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_4, & \sigma_{13} = \sigma_5, & \sigma_{12} = \sigma_6 \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, & \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, & \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4, & 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5, & 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \end{array}$$

οπότε η έκφραση του γενικευμένου νόμου του Hooke απλοποιείται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

όπου επίσης έχω αντικαταστήσει τα εξής:

$$s_{mn}, \text{ όταν } m \text{ ή } n < 3$$

$$C_{ijkl} = c_{nm} \quad \text{και} \quad S_{ijkl} \rightarrow 1/2s_{mn}, \text{ όταν } m \text{ ή } n < 3$$

$$1/4s_{mn}, \text{ όταν } m \text{ ή } n > 3$$

Σε προηγούμενη παράγραφο μιλήσαμε για κρυσταλλογραφία και πως οι 7 διαφορετικές κρυσταλλικές δομές καθορίζουν 7 ανεξάρτητα είδη ανισοτροπίας. Αρκετά χρόνια πριν (1885) ο Neumann είχε διατυπώσει την ακόλουθη αρχή, με βάση την οποία προκύπτουν περαιτέρω συμμετρίες κατά περίπτωση ανισοτροπίας:

Αρχή του Neumann: Κάθε συμμετρία στη μικροδομή ενός υλικού συνεπάγεται αντίστοιχης μορφής συμμετρία και στην καταστατική σχέση που περιγράφει τη συμπεριφορά του υλικού.

Με βάση λοιπόν την παραπάνω αρχή, η μορφή του μητρώου ενδόσεως διαμορφώνεται κατά περίπτωση ως εξής:

Τρικλινές Κρυσταλλικό Σύστημα

Πρόκειται για τη γενικότερη περίπτωση ανισοτρόπου υλικού, για την οποία δεν υπάρχει καμία περαιτέρω συμμετρία στη μικροδομή, συνεπώς ούτε στις ελαστικές σταθερές

$$S1 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

21 ανεξάρτητες ποσότητες

Μονοκλινές κρυσταλλικό σύστημα

το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S2 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

13 ανεξάρτητες ποσότητες

Ορθορομβικό κρυσταλλικό σύστημα

το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S3 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

9 ανεξάρτητες ποσότητες

Τριγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

Υπάρχουν 2 υποκατηγορίες:

α.) Το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S4 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & -s_{15} & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & s_{15} & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & s_{15} \\ & & & & s_{44} & s_{14} \\ & & & & & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$$

7 ανεξάρτητες ποσότητες

β.) το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S5 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & s_{14} \\ & & & & & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$$

6 ανεξάρτητες ποσότητες

Τετραγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

Κι εδώ υπάρχουν 2 υποκατηγορίες:

α.) το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S_6 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{16} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

7 ανεξάρτητες ποσότητες

β.) το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S_7 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

6 ανεξάρτητες ποσότητες

Εξαγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S_8 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$$

6 ανεξάρτητες ποσότητες

Κυβικό κρυσταλλικό σύστημα

το μητρώο ενδόσεως διαμορφώνεται ως εξής

$$S_9 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{44} \end{bmatrix}$$

3 ανεξάρτητες ποσότητες

2.4 ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ο νόμος του Hooke περιγράφει τη συμπεριφορά του υλικού μέσα στην γραμμική ελαστική περιοχή.

Όπως προαναφέραμε στο κεφ.1, από το νόμο του Hooke συμπεραίνουμε ότι η ελαστική ενέργεια T δίνεται από τη σχέση:

$$T = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 1/2 \sigma S \quad \sigma = 1/2 \varepsilon C \varepsilon \quad (2.4.1)$$

Στην περίπτωση ισοτροπίας, η ενέργεια T μπορεί να παρουσιαστεί υπό μορφή ποσού της ενέργειας που συνδέεται με την αλλαγή του όγκου $T(\sigma I)$ και την αλλαγή του σχήματος $T(s)$ συγκεκριμένα:

$$T = T(\sigma) = T(\sigma I) + T(s) = \frac{1}{2K} \sigma^2 + \frac{1}{4G} ss \quad (2.4.2)$$

Όπου

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \quad \text{και} \quad s = \sigma - \sigma I$$

Ο Μ.Τ. HUBER, στον καθορισμό του κριτηρίου για τα ισότροπα υλικά, υπέθεσε ότι μόνο η στροφική ενέργεια είναι υπεύθυνη για τη δημιουργία πλαστικών παραμορφώσεων, δηλ. μόνο το μέρος $T(s)$. Το ίδιο υπέθεσαν και οι MISES και HENCKY.

Η οριακή συνθήκη

$$\frac{1}{h} T(s) \leq 1, \quad \text{όπου} \quad h = \frac{K^2}{2G} \quad (2.4.3)$$

$$\text{Είναι ισοδύναμη με} \quad ss = 2k^2 \quad (2.4.4)$$

και είναι καλά - γνωστός ως όρος Huber-Mises-Hencky. Είναι ένας από τους πολύ συχνά εφαρμοσμένους όρους για την ισοτροπία.

Όταν μια αυθαίρετη ανισοτροπία εξετάζεται, ο διαχωρισμός της ενέργειας στα μέρη που συνδέονται με την αλλαγή του όγκου $T(\sigma I)$ και την αλλαγή του σχήματος $T(\sigma)$ είναι αδύνατος.

Από εξίσωση (2.4.1) ακολουθεί αυτό για την ανισοτροπία.

$$2T(\sigma) = \bar{\sigma} \bar{S} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^2 \bar{I} \bar{S} \bar{I} + \bar{\sigma} \bar{S} \bar{s} + 2 \sigma \bar{I} \bar{S} \bar{s},$$

όπου ο τρίτος όρος είναι $2 \sigma \bar{I} \bar{S} \bar{s}, \neq 0$ (2.4.5)

$\bar{\sigma}$ ο τανυστής των τάσεων και σ η υδροστατική πίεση

Υποστηρίζουν ότι η ανάλυση της ενέργειας σε $T(\sigma I)$ αλλαγή όγκου και $T(s)$ αλλαγή σχήματος δεν είναι δυνατή.

Στην διεθνή βιβλιογραφία μπορούμε να βρούμε πολλές προσπάθειες να επιτεθεί μια τέτοια ανάλυση.

Ο W. BURZYNSKI, στη διδακτορική διατριβή του, διατύπωσε την υπόθεση ότι δεν υπάρχει κανένας φυσικός λόγος ενάντια στην ανάλυση της ελαστικής ενέργειας σε αυτά τα δύο συστατικά $T(\sigma I)$ και $T(s)$ (2.4.2) και στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών.

Η υπόθεση Burzynski είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (2.4.5) υπό την προϋπόθεση ότι ο τρίτος όρος $\sigma \bar{I} \bar{S} \bar{s} = 0$ (2.4.7)

Αυτό σημαίνει ότι όλοι τα ανισότροπα υλικά είναι ως προς τον όγκο ισοτροπικά.

Πράγματι, ο διαχωρισμός του τανυστή των τάσεων σε υδροστατικό και αποκλίνοντα εκτός από τα ισότροπα υλικά, ισχύει και για τα κυβικά ανισότροπα υλικά, αφού ο τρίτος όρος της εξίσωσης (2.4.5) μηδενίζεται αλγεβρικά.

Ας δούμε αναλυτικά τη μορφή του 3^{ου} όρου για κάθε τύπο ανισοτροπίας. Για τα επόμενα ισχύουν τα εξής.

Ο 3^{ος} όρος = $2\sigma \bar{I} \bar{S} \bar{s},$

όπου $\bar{s} = \sigma - p \bar{I},$

και $\sigma = p$ υδροστατική πίεση και ισχύει $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

$$p\bar{I} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

όπου $\bar{s} = \sigma - p\bar{I}$,

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{3} \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Α.Κυβικό κρυσταλλικό σύστημα

αντικαθιστώντας στην εξίσωση του τρίτου όρου $q_9 = 2p^T S_9 s$,

όπου S_9 , όπως προαναφέρθηκε ο τανυστής ενδόσεως του κυβικού κρυσταλλικού μέσου. Τα στοιχεία του μητρώου αυτού είναι πραγματικοί αριθμοί, καθότι αποτελούν το αποτέλεσμα των φυσικών μετρήσεων των ελαστικών χαρακτηριστικών του ελαστικού μέσου.

$$S_9 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica,

$$q_9 = \left\{ \left\{ \left(s_{11} \left(\frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} \right) + 2s_{12} \left(\frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} \right) \right) \left(\frac{2\sigma_1}{3} - \frac{\sigma_2}{3} - \frac{\sigma_3}{3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(s_{11} \left(\frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} \right) + 2s_{12} \left(\frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} \right) \right) \left(-\frac{\sigma_1}{3} + 2\frac{\sigma_2}{3} - \frac{\sigma_3}{3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 3s_{12} \left(\frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} \right) \left(-\frac{\sigma_1}{3} - \frac{\sigma_2}{3} + 2\frac{\sigma_3}{3} \right) \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned} q_9 &= 2 \left([s_{11}p + 2s_{12}p](\sigma_1 - p) + [s_{11}p + 2s_{12}p](\sigma_2 - p) + 3s_{12}p(\sigma_3 - p) \right) = \\ &= 2 \left((s_{11} + 2s_{12})p(\sigma_1 - p) + [s_{11}p + 2s_{12}p](\sigma_2 - p) + 3s_{12}p(\sigma_3 - p) \right) = \\ &= 2(s_{11} + 2s_{12})p(\sigma_1 - p + \sigma_2 - p + \sigma_3 - p) = \\ &= 2(s_{11} + 2s_{12})p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3p) = 0 \end{aligned}$$

Αφού $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3p = 0$, ισχύει $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Για τα υπόλοιπα ανισότροπα υλικά θα πρέπει να ισχύουν κάποιες επιπλέον σχέσεις μεταξύ των ελαστικών σταθερών για να μηδενίζεται ο τρίτος όρος.

Έτσι έχουμε,

Β.Τρικλινές Κρυσταλλικό Σύστημα

αντικαθιστώντας στην εξίσωση του τρίτου όρου $q_1 = 2p_1^T S_1 s$, όπου

$$S_1 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica,

$$q_1 = \frac{2}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (s_{13} \sigma_1 - s_{22} \sigma_1 - 2 s_{23} \sigma_1 - s_{33} \sigma_1 - 2 s_{13} \sigma_2 + 2 s_{22} \sigma_2 + s_{23} \sigma_2 - s_{33} \sigma_2 + s_{12} (\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \sigma_3) + s_{11} (2 \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + (s_{13} - s_{22} + s_{23} + 2 s_{33}) \sigma_3 + 3 ((s_{14} + s_{24} + s_{34}) \sigma_4 + (s_{15} + s_{25} + s_{35}) \sigma_5 + (s_{16} + s_{26} + s_{36}) \sigma_6)$$

Για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Αρα θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

Γ. Μονοκλινές κρυσταλλικό σύστημα

$$S2 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει, με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica,

$$q_2 = 2 p_1^T \cdot S_2 \cdot s =$$
$$2/9 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (s_{13} \sigma_1 - s_{22} \sigma_1 - 2 s_{23} \sigma_1 - s_{33} \sigma_1 - 2 s_{13} \sigma_2 + 2 s_{22} \sigma_2 + s_{23} \sigma_2 - s_{33} \sigma_2 + s_{12} (\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \sigma_3) + s_{11} (2 \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + (s_{13} - s_{22} + s_{23} + 2 s_{33}) \sigma_3 + 3 (s_{16} + s_{26} + s_{36}) \sigma_6)$$

Για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Αρα θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

Δ. Ορθορομβικό κρυσταλλικό σύστημα

$$S3 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει,

$$q_3 = 2 p_1^T \cdot S_3 \cdot s =$$
$$2/9 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (s_{13} \sigma_1 - s_{22} \sigma_1 - 2 s_{23} \sigma_1 - s_{33} \sigma_1 - 2 s_{13} \sigma_2 + 2 s_{22} \sigma_2 + s_{23} \sigma_2 - s_{33} \sigma_2 + s_{12} (\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \sigma_3) + s_{11} (2 \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + (s_{13} - s_{22} + s_{23} + 2 s_{33}) \sigma_3)$$

Για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Αρα θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

Ε. Τριγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

$$S4 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & -s_{15} & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & s_{15} & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & s_{15} \\ & & & & s_{44} & s_{14} \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix}$$

Προκύπτει,

$$q4 = 2 p1^T \cdot S4 \cdot s$$

$$2/9 (s_{11}+s_{12}-s_{13}-s_{33}) (\sigma_1+\sigma_2-2 \sigma_3) (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

Για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Αρα $s_{11}+s_{12}-s_{13}-s_{33}=0$, θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

$$S5 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & s_{14} \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix}$$

Προκύπτει,

$$q5 = 2 p1^T \cdot S5 \cdot s$$

$$2/9 (s_{11}+s_{12}-s_{13}-s_{33}) (\sigma_1+\sigma_2-2 \sigma_3) (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

Ομοίως για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Αρα $s_{11}+s_{12}-s_{13}-s_{33}=0$, θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

Z.Τετραγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

$$S_6 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{16} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει,

$$q_6 = 2 p_1^T \cdot S_6 \cdot s$$

$$= 2/9 (s_{11} + s_{12} - s_{13} - s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \sigma_3) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Ομοίως για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Άρα $s_{11} + s_{12} - s_{13} - s_{33} = 0$, θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

$$S_7 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}$$

Προκύπτει,

$$q_7 = 2 p_1^T \cdot S_7 \cdot s$$

$$2/9 (s_{11} + s_{12} - s_{13} - s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \sigma_3) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Ομοίως για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Άρα $s_{11} + s_{12} - s_{13} - s_{33} = 0$, θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

Η. Εξαγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

$$S_8 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix}$$

Προκύπτει,

$$q_8 = 2 p_1^T \cdot S_8 \cdot s$$

$$2/9 (s_{11}+s_{12}-s_{13}-s_{33}) (\sigma_1+\sigma_2-2\sigma_3) (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

Ομοίως για να μηδενίζεται ο 3^{ος} όρος θα πρέπει η παραπάνω παράσταση να μηδενίζεται.

Άρα $s_{11}+s_{12}-s_{13}-s_{33}=0$, θα πρέπει να ισχύουν ειδικές συνθήκες ανάμεσα στα s_{ij} .

Κεφάλαιο 3

ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ 3^{ΟΥ} ΟΡΟΥ

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να μηδενιστεί ο τρίτος όρος για κάθε τάξη ανισοτροπίας –εκτός της κυβικής είναι η εξής:

Αρχικά, βρίσκουμε τις τάσεις που προκαλούν καθαρή αλλαγή όγκου

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί $\sigma = S^{-1} * \varepsilon$ και ισοδυναμεί με το $S * \sigma = \varepsilon$. Εν συνεχεία λύνουμε το σύστημα $\sigma_1 * S * (\sigma - \sigma_1) = 0$ ως προς k . Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση.

Βρίσκοντας πλέον την τιμή του k , μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Αφού υπολογίσουμε την τιμή του k για κάθε περίπτωση, γνωρίζουμε πλέον πλήρως τον τανυστή

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

οπότε και υπολογίζουμε πλήρως και τον τανυστή $\sigma = S^{-1} * \varepsilon$ που προκαλεί την παραμόρφωση. Ο τανυστής σ είναι αυτός που προκαλεί την καθαρή αλλαγή όγκου στο υλικό. Άρα ο τανυστής $\sigma_d = \sigma - \sigma_p$, προκαλεί την αλλαγή σχήματος.

Με αυτή τη διαδικασία επιτυγχάνουμε να εκφράσουμε τον τυχαίο τανυστή των τάσεων σ ως άθροισμα δύο τανυστών $\sigma_p + \sigma_d$, έναν υπευθυνο για την αλλαγή όγκου και έναν για την αλλαγή σχήματος.

Επειδή πλέον η παρουσίαση και συνεπώς και η ανάγνωση τόσων αποτελεσμάτων καθίσταται ολοένα και πιο δύσχρηστη, θα παρουσιάσουμε από εδώ και στο εξής μόνο τις εκφράσεις που αφορούν τους τανυστές κατά περίπτωση.

Να σημειώσουμε επίσης ότι η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για το **τρικλινές κρυσταλλικό σύστημα** είναι πρακτικά αδύνατη (οι αναλυτικοί τύποι για αυτές τις περιπτώσεις απαιτούν διψήφιο αριθμό σελίδων) και γι αυτό παραλείπεται.

Τα αποτελέσματα που μπορούμε να παρουσιάσουμε είναι τα ακόλουθα:

Μονοκλινές κρυσταλλικό σύστημα

$$\sigma_{\pi} = \{ -((s_2^6 s_{33} + s_{12} s_{26} s_{36} - 2 s_{23} s_{26} s_{36} - s_{12} s_{36}^2 + s_{22} s_{36}^2 + s_{16} (-s_{26} s_{33} - s_{22} s_{36} + s_{23} (s_{26} + s_{36}))) + (-s_{12} s_{23} + s_{23}^2 + s_{12} s_{33} - s_{22} s_{33}) s_{66} + s_{13} \}$$

$$\begin{aligned}
& (s_{26} (-s_{26}+s_{36})+(s_{22}-s_{23}) s_{66})) (-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3))/(2 s_{16} s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+s_{26}^2 (s_{11}-2 s_{13}+s_{33})+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})-2 (s_{16} \\
& (s_{13}+s_{22}-s_{23})+(s_{11}-s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{12} (s_{16}+s_{26})) s_{36}+(s_{11}-2 s_{12}+s_{22}) \\
& s_{36}^2+(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}- \\
& s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33}) s_{66}), -((s_{16}^2 (-s_{23}+s_{33})+s_{16} (-s_{26} s_{33}+s_{13} (s_{26}-2 \\
& s_{36})+(s_{12}+s_{23}) s_{36})+s_{36} (s_{13} s_{26}-s_{12} s_{36}+s_{11} (-s_{26}+s_{36}))+(-s_{13} (s_{12}- \\
& s_{13}+s_{23})+s_{11} (s_{23}-s_{33})+s_{12} s_{33}) s_{66}) (-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3))/(2 s_{16} s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+s_{26}^2 (s_{11}-2 s_{13}+s_{33})+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})-2 (s_{16} \\
& (s_{13}+s_{22}-s_{23})+(s_{11}-s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{12} (s_{16}+s_{26})) s_{36}+(s_{11}-2 s_{12}+s_{22}) \\
& s_{36}^2+(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}- \\
& s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33}) s_{66}), -((s_{16}^2 (s_{22}-s_{23})+s_{26} (-s_{13} s_{26}+s_{11} (s_{26}- \\
& s_{36})+s_{12} s_{36})+s_{16} ((s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{22} s_{36}+s_{12} (-2 s_{26}+s_{36}))+ (s_{12}^2-s_{11} \\
& s_{22}+s_{13} s_{22}+s_{11} s_{23}-s_{12} (s_{13}+s_{23})) s_{66}) (-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3))/(2 s_{16} s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+s_{26}^2 (s_{11}-2 s_{13}+s_{33})+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})-2 (s_{16} \\
& (s_{13}+s_{22}-s_{23})+(s_{11}-s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{12} (s_{16}+s_{26})) s_{36}+(s_{11}-2 s_{12}+s_{22}) \\
& s_{36}^2+(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}- \\
& s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33}) s_{66}), 0, 0, -((s_{16} s_{23}^2+s_{13}^2 s_{26}+s_{11} s_{23} s_{26}-s_{16} s_{22} \\
& s_{33}-s_{11} s_{26} s_{33}+s_{12}^2 s_{36}+s_{11} (-s_{22}+s_{23}) s_{36}+s_{13} (s_{16} (s_{22}-s_{23})- \\
& (s_{12}+s_{23}) s_{26}+(-s_{12}+s_{22}) s_{36})+s_{12} (-s_{16} s_{23}+s_{16} s_{33}+s_{26} s_{33}-s_{23} \\
& s_{36})) (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3))/(-2 s_{13} s_{26}^2+s_{26}^2 s_{33}+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})+2 s_{12} s_{26} \\
& s_{36}+2 s_{13} s_{26} s_{36}-2 s_{23} s_{26} s_{36}-2 s_{12} s_{36}^2+s_{22} s_{36}^2+2 s_{16} (s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+(s_{12}-s_{13}-s_{22}+s_{23}) s_{36})+(s_{12}^2+s_{13}^2+2 s_{13} s_{22}-2 s_{13} \\
& s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-s_{22} s_{33}) s_{66}+s_{11} ((s_{26}-s_{36})^2-(s_{22}-2 \\
& s_{23}+s_{33}) s_{66}))}
\end{aligned}$$

$\sigma\delta=\sigma-\sigma\pi=$

$$\begin{aligned}
& \sigma_1+((s_{26}^2 s_{33}+s_{12} s_{26} s_{36}-2 s_{23} s_{26} s_{36}-s_{12} s_{36}^2+s_{22} s_{36}^2+s_{16} (-s_{26} \\
& s_{33}-s_{22} s_{36}+s_{23} (s_{26}+s_{36}))+(-s_{12} s_{23}+s_{23}^2+s_{12} s_{33}-s_{22} s_{33}) s_{66}+s_{13} \\
& (s_{26} (-s_{26}+s_{36})+(s_{22}-s_{23}) s_{66})) (-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3))/(2 s_{16} s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+s_{26}^2 (s_{11}-2 s_{13}+s_{33})+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})-2 (s_{16} \\
& (s_{13}+s_{22}-s_{23})+(s_{11}-s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{12} (s_{16}+s_{26})) s_{36}+(s_{11}-2 s_{12}+s_{22}) \\
& s_{36}^2+(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}- \\
& s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33}) s_{66}), \sigma_2+((s_{16}^2 (-s_{23}+s_{33})+s_{16} (-s_{26} s_{33}+s_{13} (s_{26}- \\
& 2 s_{36})+(s_{12}+s_{23}) s_{36})+s_{36} (s_{13} s_{26}-s_{12} s_{36}+s_{11} (-s_{26}+s_{36}))+(-s_{13} \\
& (s_{12}-s_{13}+s_{23})+s_{11} (s_{23}-s_{33})+s_{12} s_{33}) s_{66}) (-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3))/(2 s_{16} s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+s_{26}^2 (s_{11}-2 s_{13}+s_{33})+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})-2 (s_{16} \\
& (s_{13}+s_{22}-s_{23})+(s_{11}-s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{12} (s_{16}+s_{26})) s_{36}+(s_{11}-2 s_{12}+s_{22}) \\
& s_{36}^2+(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}- \\
& s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33}) s_{66}), ((s_{16}^2 (s_{22}-s_{23})+s_{26} (-s_{13} s_{26}+s_{11} (s_{26}- \\
& s_{36})+s_{12} s_{36})+s_{16} ((s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{22} s_{36}+s_{12} (-2 s_{26}+s_{36}))+ (s_{12}^2-s_{11} \\
& s_{22}+s_{13} s_{22}+s_{11} s_{23}-s_{12} (s_{13}+s_{23})) s_{66}) (-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3))/(2 s_{16} s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+s_{26}^2 (s_{11}-2 s_{13}+s_{33})+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})-2 (s_{16} \\
& (s_{13}+s_{22}-s_{23})+(s_{11}-s_{13}+s_{23}) s_{26}-s_{12} (s_{16}+s_{26})) s_{36}+(s_{11}-2 s_{12}+s_{22}) \\
& s_{36}^2+(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}- \\
& s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33}) s_{66})+\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, ((s_{16} s_{23}^2+s_{13}^2 s_{26}+s_{11} s_{23} s_{26}-s_{16} \\
& s_{22} s_{33}-s_{11} s_{26} s_{33}+s_{12}^2 s_{36}+s_{11} (-s_{22}+s_{23}) s_{36}+s_{13} (s_{16} (s_{22}-s_{23})- \\
& (s_{12}+s_{23}) s_{26}+(-s_{12}+s_{22}) s_{36})+s_{12} (-s_{16} s_{23}+s_{16} s_{33}+s_{26} s_{33}-s_{23} \\
& s_{36})) (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3))/(-2 s_{13} s_{26}^2+s_{26}^2 s_{33}+s_{16}^2 (s_{22}-2 s_{23}+s_{33})+2 s_{12} s_{26} \\
& s_{36}+2 s_{13} s_{26} s_{36}-2 s_{23} s_{26} s_{36}-2 s_{12} s_{36}^2+s_{22} s_{36}^2+2 s_{16} (s_{26} (- \\
& s_{12}+s_{13}+s_{23}-s_{33})+(s_{12}-s_{13}-s_{22}+s_{23}) s_{36})+(s_{12}^2+s_{13}^2+2 s_{13} s_{22}-2 s_{13} \\
& s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-s_{22} s_{33}) s_{66}+s_{11} ((s_{26}-s_{36})^2-(s_{22}-2 \\
& s_{23}+s_{33}) s_{66}))+\sigma_6}
\end{aligned}$$

Ορθορομβικό κρυσταλλικό σύστημα

$$\sigma\pi = \left\{ \left(\frac{s_{13} (s_{22}-s_{23})+s_{23}^2-s_{22} s_{33}+s_{12} (-s_{23}+s_{33})}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33})}, \left(\frac{-s_{13} (s_{12}-s_{13}+s_{23})+s_{11} (s_{23}-s_{33})+s_{12} s_{33}}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33})}, \left(\frac{(s_{12}^2+s_{13} s_{22}-s_{12} (s_{13}+s_{23})+s_{11} (-s_{22}+s_{23}))}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33})}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\sigma\delta = \sigma - \sigma\pi = \left\{ \sigma_1 + \left(\frac{-s_{23}^2+s_{13} (-s_{22}+s_{23})+s_{12} (s_{23}-s_{33})+s_{22} s_{33}}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33})}, \sigma_2 + \left(\frac{(s_{13} (s_{12}-s_{13}+s_{23})-s_{12} s_{33}+s_{11} (-s_{23}+s_{33}))}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33})}, \sigma_3 - \left(\frac{(s_{12}^2+s_{13} s_{22}-s_{12} (s_{13}+s_{23})+s_{11} (-s_{22}+s_{23}))}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{12}^2+s_{13}^2-s_{11} s_{22}+2 s_{13} (s_{22}-s_{23})+2 s_{11} s_{23}+s_{23}^2-2 s_{12} (s_{13}+s_{23}-s_{33})-(s_{11}+s_{22}) s_{33})}, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right\}$$

Τριγωνικό κρυσταλλικό 7-σύστημα

$$\sigma\pi = \left\{ \left(\frac{(-s_{13}+s_{33}) (s_1+s_2+s_3)}{(s_{11}+s_{12}-4 s_{13}+2 s_{33})}, \left(\frac{-s_{13}+s_{33}}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{11}+s_{12}-4 s_{13}+2 s_{33})}, \left(\frac{(s_{11}+s_{12}-2 s_{13})}{(s_1+s_2+s_3)/(s_{11}+s_{12}-4 s_{13}+2 s_{33})}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\sigma\delta = \sigma - \sigma\pi = \left\{ \sigma_1 + \frac{(s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_2 + \frac{(s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_3 - \frac{(s_{11} + s_{12} - 2s_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right\}$$

Τριγωνικό κρυσταλλικό 6-σύστημα

$$\sigma\pi = \left\{ \frac{((-s_{13} + s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \frac{((-s_{13} + s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \frac{((s_{11} + s_{12} - 2s_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\sigma\delta = \sigma - \sigma\pi = \left\{ \sigma_1 + \frac{(s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_2 + \frac{(s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_3 - \frac{(s_{11} + s_{12} - 2s_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right\}$$

Τετραγωνικό κρυσταλλικό -7 σύστημα

$$\sigma\pi = \left\{ \frac{((-s_{13} + s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \frac{((-s_{13} + s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \frac{((s_{11} + s_{12} - 2s_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\sigma\delta = \sigma - \sigma\pi =$$

$$\{\sigma_1 + ((s_{13} - s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), \sigma_2 + ((s_{13} - s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), \sigma_3 - ((s_{11} + s_{12} - 2 s_{13}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$$

Τετραγωνικό κρυσταλλικό -6 σύστημα

$$\sigma_{\pi} = \{((-s_{13} + s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), ((-s_{13} + s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), ((s_{11} + s_{12} - 2 s_{13}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), 0, 0, 0\}$$

$$\sigma_{\delta} = \sigma - \sigma_{\pi} = \{\sigma_1 + ((s_{13} - s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), \sigma_2 + ((s_{13} - s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), \sigma_3 - ((s_{11} + s_{12} - 2 s_{13}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$$

Εξαγωνικό κρυσταλλικό σύστημα

$$\sigma_{\pi} = \{((-s_{13} + s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), ((-s_{13} + s_{33}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), ((s_{11} + s_{12} - 2 s_{13}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) / (s_{11} + s_{12} - 4 s_{13} + 2 s_{33}), 0, 0, 0\}$$

$$\sigma\delta = \sigma - \sigma\pi = \left\{ \sigma_1 + \frac{(s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_2 + \frac{(s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_3 - \frac{(s_{11} + s_{12} - 2s_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{(s_{11} + s_{12} - 4s_{13} + 2s_{33})}, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right\}$$

Κεφάλαιο 4

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο διαχωρισμός της ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων είναι πολύ σημαντικός για την επιστήμη της μηχανικής των υλικών.

Στην παρούσα εργασία είδαμε ότι στην περίπτωση των ισότροπων και κυβικά ανισότροπων υλικών είναι πάντοτε εφικτός ο διαχωρισμός της ενέργειας σε ένα τμήμα που συνδέεται με την αλλαγή όγκου και σε ένα άλλο τμήμα που συνδέεται με την αλλαγή σχήματος. Αυτό επιτυγχάνεται γράφοντας τον τανυστή των τάσεων ως άθροισμα ενός υδροστατικού και ενός αποκλίνοντος τανυστή. Η επιβολή υδροστατικής πίεσης προκαλεί μόνο αλλαγή όγκου ενώ η επιβολή του αποκλίνοντος τανυστή τάσεων προκαλεί μόνο αλλαγή σχήματος. Για τις υπόλοιπες τάξεις ανισοτροπίας όμως ένας τέτοιος διαχωρισμός του τανυστή των τάσεων δεν έχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Αντί αυτού προκύπτει και ένας τρίτος όρος ενέργειας μεικτής φύσεως. Σκοπός μας ήταν να διερευνήσουμε πότε μηδενίζεται αυτός ο τρίτος όρος. Με τον διαχωρισμό του τανυστή των τάσεων σε έναν υδροστατικό και έναν αποκλίνοντα είδαμε ότι για να μηδενισθεί ο τρίτος όρος θα πρέπει οι ελαστικές σταθερές του υλικού να ικανοποιούν κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες που δεν προκύπτουν με φυσικό τρόπο. Συμπεράναμε λοιπόν ότι θα πρέπει να διαχωρίσουμε με κάποιον άλλο τρόπο των τανυστή των τάσεων ούτως ώστε να μηδενισθεί ο τρίτος όρος. Απαιτήσαμε λοιπόν, ένα κομμάτι του τανυστή των τάσεων να προκαλεί ομοιόθετη αλλαγή όγκου και το υπόλοιπο αλλαγή σχήματος.

Με βάση αυτή τη λογική εισάγετε μια γεωμετρική παράμετρος κ , η οποία δηλώνει το μέγεθος της αλλαγής όγκου (αλλαγή μηκών), η οποία υπολογίζεται σε κάθε περίπτωση ανισοτροπίας ακριβώς όταν ικανοποιείται η συνθήκη μηδενισμού του 3^{ου} όρου. Καταφέραμε δηλαδή με αυτόν τον τρόπο να μηδενίσουμε τον 3^ο όρο της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης και να υπολογίσουμε για κάθε τύπο

ανισοτροπίας έναν μαθηματικό τύπο που μας δίνει την ενέργεια αλλαγής όγκου και την ενέργεια αλλαγής σχήματος. Πιστεύουμε ότι αυτή η προσέγγιση δίνει έναν νέο τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος του μηδενισμού του 3 ου όρου και επιπλέον διαφαίνεται ότι θα πρέπει να εγκαταλειφθεί η ιδέα του διαχωρισμού του τανυστή των τάσεων σε έναν υδροστατικό και έναν αποκλίνοντα στην περίπτωση των ανισοτρόπων υλικών.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1 Mechanics of the Continuous Media L.E.Malvern, Prentice-Hall, 1969
- 2 Continuum Mechanics Y.C.Fung Prentice-Hall , 1977
- 3 Vector and Tensor Analysis A.I. Borisenko & I.E. Tarapov, 1979 Dover Publications
- 4 Foundations of NonLinear Theory of Elasticity V.V. Novozhilov
- 5 Mathematical Foundations of Elasticity J.E. Marsden & T.J.R. Hughes Dover Publications
- 6 Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου Ι.Φ. Δαφαλιάς Σημειώσεις του Μεταπτυχιακού Κύκλου Σπουδών
- 7 Σημειώσεις Θεωρίας Τελεστών Σ.Καρανάσιος, Αθήνα 2006
- 8 Τεχνική Μηχανική Π.Α.Βυθούνης, Αθήνα 2006
- 9 Πειραματική Αντοχή Υλικών Ν.Ανδριανόπουλος & Ε. Κυριαζή & Κ. Λιακόπουλος, 1991 Εκδόσεις Συμεών
- 10 Ειδικά κεφάλαια Σύνθετων Υλικών, Γ. Τσαμασφύρος & Γ. Καντεράκης Εκδόσεις Ε.Μ.Π. 2004
- 11 Ανελαστική Συμπεριφορά Υλικών (Ιξωδοελαστικότητα- Πλαστικότητα), Ε.Κόντου & Γ. Σπάθης, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2001
- 12 Η Φασματική Ανάλυση του Τανυστού Ενδόσεως του Ανισοτρόπου Μέσου, Δ.Π. Σοκόλης, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., 2002

- 13 Γενικευμένα Κριτήρια Αστοχίας Αρχικώς Ανισοτρόπων Ελαστικών Μέσων με ιδιαίτερη έμφαση στα Σύνθετα Υλικά Θ.Π.Φιλιππίδης, Διδακτορική Διατριβή,Ε.Μ.Π,1989
- 14 Γενίκευση του T-Κριτηρίου πέραν της Γραμμικής Ελαστικής Μηχανικής των Θραύσεων,Β.Κ.Μπουλουγούρης, Διδακτορική Διατριβή,Ε.Μ.Π,2005
- 15 Ψηφιακή Επεξεργασία εικόνας στην Μηχανική των Θραύσεων,Ε.Π.Σταύρου, Διπλωματική Διατριβή,Ε.Μ.Π,2006

Άρθρα (Papers)

Hyperelasticity , ANSYS Documentation

On the separation of elastic strain energy in the general case of anisotropy; a direct approach , N.P.Andrianopoulos & V.C. Boulougouris & A.P. Iliopoulos

Evaluation of elastic strain energy of spheroidal inclusions with uniform volumetric and shear eigenstrains , H.J. Bohm & F.D. Fischer & G. Reisner

Energy based limit conditions..., K. Kowalczyk & J. Ostrowska-Maciejewska

Elastic energy decomposition and limit criteria, J. Rychlewski

Mathematical theory of elasticity, I.S. Sokolnikoff

Spectral decomposition of the elasticity tensor, S. Sutcliffe

Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, R. von Mises

What does the spectral theorem say? , P.R.Halmos

Spectral decomposition of a 4th order tensor, P.J.Basser & S.Pajevic

Singular values and the spectral theorem, K.Hoechsmann

Notes and examples of matrix topics, P.J.Salzman

Matrices and Tensors, Mathematica Documentation

Crystallography of Gemstones: The Crystal System