Μαρκου Γεωργιος

Χωροι Lebesgue με βαρη και εφαρμογες

Ο μεγιστικος τελεστης των Hardy-Littlewood

Μεταπτυχιακη Εργασια

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα εφαρμοσμένων μαθηματικών και φυσικών επιστημών

Αθήνα 5 Μαρτίου 2014

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Ν. Γιαννακάκης

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Β. Κανελλόπουλος

Γ. Σμυρλής

Στην μνήμη του Θοδωρή!

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι διανυσματικοί χώροι L^p, οι οποίοι είναι γνωστοί και ως χώροι Lebesgue, πήραν το όνομά τους από τον γάλλο μαθηματικό Henri Lebesgue. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι ο πρώτος μαθηματικός που εισήγαγε τους χώρους L^p ήταν ο Frigyes Riesz το 1910. Από το έτος αυτό μέχρι και τις μέρες μας, οι χώροι αυτοί έχουν απασχολήσει πολλούς επιστήμονες σε διάφορα πεδία, όπως της φυσικής, της στατιστικής, των οικονομικών, της μηχανικής και φυσικά της συναρτησιακής ανάλυσης.

Στην εργασία αυτή, θα ασχοληθούμε με έναν τελεστή, που είναι γνωστός ως ο μεγιστικός τελεστής των Hardy- Littlewood. Ο τελεστής αυτός είναι ορισμένος πάνω στους χώρους L^p. Αρχικά, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να δείξουμε ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στους κλασικούς χώρους Lebesgue. Στην συνέχεια, θα ορίσουμε μια κατηγορία διανυσματικών χώρων, που ονομάζονται χώροι Lebesgue με βάρη. Οι χώροι αυτοί είναι εφοδιασμένοι με πολλές σημαντικές ιδιότητες, ειδικά αν τα βάρη, που όπως θα δούμε δεν είναι τίποτε άλλο από συναρτήσεις, ανήκουν σε μια σημαντική κλάση, που εισήγαγε ο Muckenhoupt το 1972, και είναι γνωστή ως κλάση βαρών A_p. Όπως και οι κλασικοί χώροι Lebesgue έτσι και οι χώροι Lebesgue με βάρη βρίσκουν τεράστια εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία. Τέλος, θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε όλη την πληροφορία για τον μεγιστικό τελεστή των Hardy- Littlewood, από τους κλασικούς χώρους Lebesgue στους χώρους Lebesgue με βάρη. Δηλαδή, θα αναζητήσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο μεγιστικός τελεστής να είναι φραγμένος στους χώρους Lebesgue με βάρη. Τα αποτελέσματα που θα εξάγουμε στην πορεία είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακά.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγήτη της διπλωματικής μου εργασίας, κύριο Νικόλαο Γιαννακάκη, για την πολύτιμη βοήθειά του, για τον χρόνο που στερήθηκε από τα ερευνητικά και ακαδημαϊκά του καθήκοντα καθώς και για τις γνώσεις που μου μετέδωσε καθόλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Εθνικό Μετσόβιο πολυτεχνείο.

Γ. Μάρκου, Αθήνα 2014.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

Στην εργασία αυτή, θα περιγράψουμε και θα ορίσουμε τους χώρους Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq +\infty$ με βάρη, οι οποίοι είναι πολύ χρήσιμοι, διότι αρκετές φορές μπορούμε να συναντήσουμε τελεστές, που δεν μπορούν να είναι φραγμένοι στους κλασικούς χώρους Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq +\infty$, ωστόσο κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί στους χώρους Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq +\infty$ με βάρη. Στόχος αυτής της εργασίας είναι να δούμε την συμπεριφορά τελεστών στους κλασικούς χώρους και στην συνέχεια στους χώρους με βάρη. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τον μεγιστικό τελεστή M των Hardy- Littlewood και θα βρούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα βάρη, ώστε ο συγκεκριμένος τελεστής να είναι φραγμένος στους χώρους Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq +\infty$ με βάρη.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες, και θα αποδείξουμε κάποια βασικά αποτελέσματα, τα οποία θα μας βοηθήσουν στην συνέχεια. Ξεκίναμε με κάποιες υπενθυμίσεις.

- Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ τον $n-$διάστατο Ευκλείδιο χώρο. Η νόρμα ενός σημείου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

- Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο. Τότε συμβολίζουμε με:

  (i) E^o, το εσωτερικό του συνόλου E,

  (ii) ∂E, το σύνορο του συνόλου E,

  (iii) E^c, το συμπλήρωμα του συνόλου E,

  (iv) $\overline{E}$, την κλειστότητα του συνόλου E,

  (v) $diam E$, την διάμετρο του συνόλου E

  (vi) $dist\,(E, A)$, την απόσταση του συνόλου E από το σύνολο A, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

  (vii) και με $|E|$ το μέτρο Lebesgue του συνόλου E, αν το σύνολο E είναι μετρήσιμο.

- Το σύνολο
$$B_r(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \alpha| < r\}$$
είναι η ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο α και ακτίνα r. Θυμίζουμε ότι, αν $m > 0$ τότε $mB_r(\alpha) = B_{mr}(\alpha)$.

Ορισμός 1.0.1. *Ορίζουμε τον ανοικτό κύβο να είναι το σύνολο*

$$Q = Q(x,l) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| < l \right\}.$$

Με $l(Q)$ συμβολίζουμε το μήκος των πλευρών του κύβου, συνεπώς έχουμε

$$|Q| = l(Q)^n$$

και

$$diam(Q) = l(Q)\sqrt{n}.$$

Για $\alpha > 0$ συμβολίζουμε με $\alpha Q = \alpha Q(x,l)$ τον κύβο που έχει το ίδιο κέντρο με τον $Q = Q(x,l)$ αλλά πλευρές α φορές τις πλευρές του $Q = Q(x,l)$.

Ορισμός 1.0.2. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ και f μια συνάρτηση τοπικά ολοκληρώσιμη. Τότε η μέση τιμή της f πάνω στο σύνολο E δίνεται από*

$$\frac{1}{|E|} \int_E f \, dx,$$

όπου με $|E|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue του συνόλου E.

Ορισμός 1.0.3. *Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $0 \leq k \leq +\infty$. Τότε με $C^k(\Omega)$ συμβολίζουμε το σύνολο των $k-$φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων πάνω στο Ω. Με $C^k_c(\Omega)$ συμβολίζουμε το σύνολο των $k-$φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων, οι οποίες έχουν τον φορέα τους μέσα στο σύνολο Ω.*

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι, ο φορέας μιας συνάρτησης $u \in C(\Omega)$ είναι το σύνολο
$$suppu = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Ορισμός 1.0.4. *Έστω (X, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, όχι αναγκαστικά μετρήσιμη. Ένας πραγματικός αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ καλείται άνω φράγμα για την συνάρτηση f, αν $f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in X$, δηλαδή αν το σύνολο*
$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset.$$

Το α καλείται ουσιώδες άνω φράγμα αν το σύνολο

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

περιέχεται σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, που είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι $f(x) \leq \alpha$ σχεδόν παντού στο X. Τότε με τον ίδιο τρόπο που ορίζουμε το supremum της f να είναι το μικρότερο άνω φράγμα, έτσι ορίζεται και το ουσιώδες supremum ή essential supremum να είναι το μικρότερο ουσιώδες άνω φράγμα. Δηλαδή, το essential supremum της συνάρτησης f ορίζεται ως

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\},$$

αν το σύνολο $\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\}$ *των ουσιωδών άνω φραγμάτων είναι μη κενό και* $esssupf = +\infty$ *αλλιώς.*

Παρόμοια ορίζεται και το ουσιώδες infimum ή essential infimum. Δηλαδή,

$$\operatorname{ess\,inf} f = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) < \alpha\}) = 0\},$$

αν το σύνολο των ουσιωδών κάτω φραγμάτων $\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) < \alpha\}) = 0\}$ *είναι μη κενό και* $essinff = -\infty$ *αλλιώς.*

Παράδειγμα 1.0.5. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} 5 & , x = 1 \\ -4 & , x = -1 \\ 2 & , \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}.$$

Τότε παρατηρούμε ότι $\sup f = 5$, $\inf f = -4$ *και* $essinff = esssupf = 2$.

Ορισμός 1.0.6. *Έστω* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ένας χώρος μέτρου. Για* $1 \leq p < +\infty$ *ορίζουμε το σύνολο* $L^p(X,\mu)$ *να είναι το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων* $f : X \to \mathbb{R}$, *για τις οποίες ισχύει ότι*

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu < +\infty.$$

Δηλαδή,

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \quad \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta, \quad \int_X |f(x)|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Εφοδιάζουμε τον διανυσματικό χώρο $L^p(X,\mu)$ *με την νόρμα*

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(X,\mu).$$

Στην περίπτωση που $p = +\infty$ *ορίζουμε το σύνολο* $L^\infty(X,\mu)$ *να είναι όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις* $f : X \to \mathbb{R}$ *για τις οποίες ισχύει ότι* $|f(x)| \leq M$ *σχεδόν παντού στον* X. *Εφοδιάζουμε τον διανυσματικό χώρο* $L^\infty(X,\mu)$ *με την νόρμα*

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \operatorname{ess\,sup}|f|.$$

Θεώρημα 1.0.7. *Ο χώρος* $L^p(X,\mu)$, *με* $1 \leq p < +\infty$ *είναι ένας γραμμικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^p(X,\mu)$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\int_X |\alpha f(x)|^p \, d\mu = |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, d\mu < +\infty.$$

και

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p \, d\mu &\leq \int_X (|f(x)| + |g(x)|)^p \, d\mu \\ &\leq \int_X (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \, d\mu \\ &= 2^p \int_X \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \, d\mu \\ &\leq 2^p \int_X (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \, d\mu \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Άρα ο $L^p(X,\mu)$ είναι ένας γραμμικός χώρος. □

Ορισμός 1.0.8. *Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$ θα καλείται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_X$. Ισοδύναμα, ο γραμμικός χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$ θα καλείται χώρος Banach αν κάθε ακολουθία Cauchy έχει όριο που ανήκει στον X.*

Θεώρημα 1.0.9. *Ο χώρος $L^p(X,\mu)$ είναι χώρος Banach για $1 \leq p \leq +\infty$*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα αρχικά για $p = 1$, αφού στην περίπτωση που $1 < p < +\infty$ η απόδειξη είναι παρόμοια και έπειτα θα το δείξουμε για $p = +\infty$. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Έστω $p = 1$ και έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(X,\mu)$ μια ακολουθία Cauchy. Αυτό σημαίνει ότι, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall n, m \geq n_0$ ισχύει

$$\|f_m - f_n\|_{L^1(X,\mu)} < \epsilon.$$

Διαλέγοντας μία υπακολουθία $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1(X,\mu)} < 2^{-k}.$$

Έστω

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^{j} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|.$$

Τότε η S_j είναι μετρήσιμη, μη αρνητική και μάλιστα $S_{j+1} \geq S_j, \quad \forall j$. Έτσι, αν

$$S(x) = \lim_{j\to+\infty} S_j(x) \in [0, +\infty],$$

τότε από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_X S\,d\mu &= \lim_{j\to+\infty} \int_X S_j\,d\mu \\
&= \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} \int_X \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| d\mu \\
&= \lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1(X,\mu)} \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Άρα $S \in L^1(X,\mu)$ και συνεπώς $S < +\infty$ σχεδόν παντού. Μπορούμε να ορίσουμε

$$f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right).$$

Πράγματι, μόλις επαληθεύσαμε ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει απολύτως σχεδόν για κάθε $x \in X$. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} f_{n_j}(x) \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Επίσης,

$$\left|f(x) - f_{n_j}(x)\right| \leq \sum_{k=j}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|.$$

Όμως το παραπάνω άθροισμα κυριαρχείται από το $S \in L^1(X,\mu)$. Συνεπώς, $\left|f - f_{n_j}\right| \in L^1(X,\mu)$ και έτσι $f \in L^1(X,\mu)$, διότι

$$|f| \leq \left|f_{n_j}\right| + \left|f - f_{n_j}\right|.$$

Επιπλέον, η συνάρτηση $\left|f - f_{n_j}\right|$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης άρα παρατηρούμε ότι

$$\lim_{j\to+\infty} \int_X \left|f - f_{n_j}\right| \, d\mu = 0.$$

Συνοψίζοντας μέχρι στιγμής, δοθέντος μιας ακολουθίας Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(X,\mu)$ έχουμε κατασκευάσει μια συνάρτηση $f \in L^1(X,\mu)$ με $\|f_{n_j} - f\|_{L^1(X,\mu)} \to 0$. Η απόδειξη αυτής της περίπτωσης έχει τελειώσει, κάθως υπενθυμίζουμε ότι αν μια ακολουθία Cauchy έχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει, τότε όλη η ακολουθία συγκλίνει.

- Έστω ότι $p = +\infty$ και έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(X,\mu)$ μια ακολουθία Cauchy. Έπεται ότι

$$|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty(X,\mu)} \quad \text{σχεδόν παντού}$$

και άρα $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού, όπου η f είναι μετρήσιμη και ουσιωδώς φραγμένη. Έστω $\epsilon > 0$ και $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|f_m(x) - f_n(x)\|_{L^\infty(X,\mu)} < \epsilon \quad \forall n,m \geq N(\epsilon)$. Αφού

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

ισχύει σχεδόν για κάθε $x \in X$, έπεται ότι

$$\|f - f_n\|_{L^\infty(X,\mu)} < \epsilon \quad \forall n \geq N(\epsilon).$$

Άρα για $\epsilon \to 0$ έχουμε

$$\|f - f_n\|_{L^\infty(X,\mu)} \to 0.$$

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ορισμός 1.0.10. *Έστω Ω ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε το σύνολο $L^1_{loc}(\Omega)$ να είναι όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες πάνω σε κάθε συμπαγές υπασύνολο K του Ω. Δηλαδή, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, αν και μόνο αν, για κάθε $K \subseteq \Omega$ συμπαγές ισχύει*

$$\int_K |u| \, dx < +\infty.$$

Τότε λέμε ότι η συνάρτηση u είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση 1.0.11. *Παρατηρούμε ότι* $L^1_{loc}(\Omega) \nsubseteq L^1(\Omega)$. *Το αντίστροφο ισχύει. Πράγματι, έστω* $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ *και έστω* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *με* $u(x) = \frac{1}{x}$. *Τότε* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *αλλά* $u \notin L^1(\Omega)$, *αφού*

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια του βάρους (weight) καθώς και τους χώρους Lebesgue με βάρη (weighted Lebesgue spaces).

Ορισμός 1.0.12. *Έστω* $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Το* w *θα καλείται βάρος (weight) αν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση και αν* $w(x) > 0$ *σχεδόν παντού στον* $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.0.13. *Κάθε βάρος* w *δίνει υπόσταση σε ένα μέτρο πάνω στα μετρήσιμα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^n$, *μέσω της ολοκλήρωσης. Το συγκεκριμένο μέτρο το συμβολίζουμε επίσης με* w. *Έτσι, λοιπον, για το μετρήσιμο* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *έχουμε*

$$w(E) = \int_E w(x)\, dx.$$

Ορισμός 1.0.14. *Έστω* w *ένα βάρος στον* $\mathbb{R}^n$. *Για* $1 \leq p < +\infty$ *ορίζουμε ως* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *τον γραμμικό χώρο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *έτσι, ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\, dx < +\infty.$$

Ο χώρος $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *είναι εφοδιασμένος με την νόρμα*

$$\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p_w(\mathbb{R}^n).$$

Στην περίπτωση που το $p = \infty$ *τότε η νόρμα του* $L^\infty_w(\mathbb{R}^n)$ *είναι η*

$$\|f\|_{L^\infty_w(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{\lambda : w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f| > \lambda\}\right) = 0\right\}.$$

Παρατήρηση 1.0.15.

- *Όταν* $p = +\infty$ *τότε* $L^\infty_w(\mathbb{R}^n) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Πράγματι, έστω* w *ένα βάρος στον* $\mathbb{R}^n$. *Αφού εξ' ορισμού το* $w > 0$ *σχεδόν παντού στον* $\mathbb{R}^n$, *τότε παρατηρούμε ότι αν* E *είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$

  $$0 = w(E) = \int_E w(x)\, dx \Leftrightarrow |E| = 0.$$

  Συνεπώς,

  $$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty_w} &= \inf\left\{\lambda : w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f| > \lambda\}\right) = 0\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda : |\{x \in \mathbb{R}^n : |f| > \lambda\}| = 0\right\} \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

- *Αν στο Θεώρημα 1.0.9 ορίσουμε* $d\mu = w(x)dx$ *τότε παρατηρούμε ότι χώρος* $L^p_w(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, w)$ *είναι ένας χώρος Banach.*

1.1 Ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood

Αυτό που θα μας απασχολήσει στην εργασία αυτή, είναι **ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood**, ο οποίος είναι και η κύρια εφαρμογή όλων των αποτελεσμάτων μας. Για όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν, παραπέμπουμε στα [1], [4], [5] και [7]. Ας δούμε αρχικά πως ορίζεται αυτός ο τελεστής.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood ορίζεται ως εξής:*

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy,$$

όπου το supremum ελέγχεται πάνω σε κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$ που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες και με $x \in Q$.

Στην συνέχεια θα δώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του μεγιστικού τελεστή των Hardy-Littlewood. Επίσης θα αναλύσουμε την συμπεριφορά του τελεστή στους χώρους L^p, για $1 \le p \le \infty$. Είναι πολύ σημαντικό να δούμε την συμπεριφορά αυτή στους κλασικούς χώρους Lebesgue καθώς αυτό θα μας βοηθήσει αρκετά, ειδικά όταν θα προσπαθήσουμε να περάσουμε τα αποτελέσματα μας στους χώρους Lebesgue με βάρη L^p_w, για $1 \le p \le +\infty$.

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) $M(f+g)(x) \le Mf(x) + Mg(x)$

(ii) $M(\alpha f)(x) = |\alpha| \, Mf(x)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $Q \subset \mathbb{R}^n$ με $x \in Q$. Τότε με χρήση της τριγωνικής ανισότητας έχουμε

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) + g(y)| \, dy \le \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y)| \, dy.$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) + g(y)| \, dy$$

είναι άνω φραγμένη από την ποσότητα

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y)| \, dy.$$

Άρα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) + g(y)| \, dy \right\} &\le \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y)| \, dy \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy \right\} + \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y)| \, dy \right\}. \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο ότι

$$M(f+g)(x) \le Mf(x) + Mg(x).$$

(ii) Έχουμε

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |\alpha f(y)|\, dy = |\alpha|\, \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy.$$

Αν λοιπόν πάρουμε το supremum και στα δύο μέλη έχουμε ότι

$$M(\alpha f)(x) = |\alpha|\, Mf(x)$$

□

Θεώρημα 1.1.3. *Αν $f \in C(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$|f(x)| \leq Mf(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{όταν} \quad |x - y| < \delta.$$

Από το παραπάνω, την τριγωνική ανισότητα καθώς και από το γεγονός ότι $\frac{1}{|Q|}\int_Q 1\, dy = 1$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy - |f(x)|\right| &= \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy - |f(x)|\, \frac{1}{|Q|}\int_Q 1\, dy\right| \\
&= \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q (|f(y)| - |f(x)|)\, dy\right| \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(y)| - |f(x)||\, dy \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f(x)|\, dy \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

όταν $diam(Q) = \sqrt{n} l(Q) < \delta$. Έτσι,

$$|f(x)| = \lim_{Q \ni x, l(Q) \to 0} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy = Mf(x).$$

□

Ορισμός 1.1.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση f θα καλείται κάτω ημισυνεχής (lower semicontinuous) αν το σύνολο*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\} = f^{-1}((\lambda, +\infty])$$

είναι ανοικτό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.1.5. *Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι, αν η συνάρτηση f είναι κάτω ημισυνεχής τότε είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση 1.1.6. *Η συνάρτηση Mf είναι κάτω ημισυνεχής και άρα μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Έστω $x \in E_\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κύβος Q με $x \in Q$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy > \lambda.$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$Mf(z) \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy > \lambda, \quad \forall z \in Q.$$

Άρα $Q \subset E_\lambda$. Δηλαδή το σύνολο E_λ είναι ανοικτό.

□

Θεώρημα 1.1.7. *Αν $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ τότε $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και ισχύει*

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy \leq \|f\|_\infty \frac{1}{|Q|}\int_Q 1\, dy = \|f\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

□

Λήμμα 1.1.8. *Έστω E ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $0 < p < +\infty$ ισχύει*

$$\int_E |f(x)|^p\, dx = p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}\, |\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}|\, d\lambda.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E(x) p \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1}\, d\lambda\, dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}}(x)\, dx\, d\lambda \\
&= p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}\, |\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}|\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ορισμός 1.1.9. *Έστω T ένας τελεστής. Ο T θα καλείται* ***ασθενούς τύπου (weak type) (p,p)*** *, $1 \leq p < +\infty$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη από τις συναρτήσεις $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_{L^p}^p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Ορισμός 1.1.10. *Έστω T ένας τελεστής. Ο T θα καλείται* ***ισχυρού τύπου (strong type) (p,p)*** *, $1 \leq p \leq +\infty$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη από τις συναρτήσεις $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε*

$$\|Tf(x)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Πρόταση 1.1.11 (Ανισότητα Chebyshev)**.** *Έστω $f : E \to [-\infty, +\infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση, όπου το σύνολο E είναι μετρήσιμο. Αν $\lambda > 0$ τότε*

$$|\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda}\int_E |f(x)|\, dx.$$

Απόδειξη. Επειδή το E_λ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E και επειδή για κάθε $x \in E_\lambda$ ισχύει $|f(x)| > \lambda$ έχουμε ότι

$$\int_E |f(x)|\, dx \geq \int_{E_\lambda} |f(x)|\, dx \geq \int_{E_\lambda} \lambda\, dx = \lambda\, |E_\lambda| \Rightarrow |E_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}\int_E |f(x)|\, dx.$$

□

Πρόταση 1.1.12. *Έστω T ένας τελεστής, ο οποίος είναι ισχυρού τύπου (p,p). Τότε ο T είναι ασθενούς τύπου (p,p).*

Απόδειξη. Έστω T ένας τελεστής ισχυρού τύπου (p,p). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\|Tf(x)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση καθώς και την ανισότητα Chebyshev παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| &\overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\, dx \\ &\overset{\text{strong (p,p)}}{\leq} \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx. \end{aligned}$$

Άρα βλέπουμε ότι η συνθήκη ισχυρού τύπου (p,p) συνεπάγεται την συνθήκη ασθενούς τύπου (p,p). □

Διατυπώνουμε τώρα ένα Θεώρημα, χωρίς απόδειξη, καθώς η απόδειξη του είναι εκτός ορίων αυτής της εργασίας. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **Κάλυψη Vitali (Vitali Covering)** και είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε ακριβώς παρακάτω, όπου και θα αποδείξουμε ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι αθενούς τύπου $(1,1)$.

Θεώρημα 1.1.13 (Vitali Covering)**.** *Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια κύβων Q τέτοια, ώστε*

$$diam\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q\right) < +\infty.$$

Τότε υπάρχει αριθμήσιμο το πλήθος ξένων ανά δύο κύβων $Q_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \dots$ τέτοια, ώστε

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5Q_i.$$

Θεώρημα 1.1.14 (Hardy-Littlewood I). *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε ο Mf είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ισχύει*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{5^n}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Έτσι αν $x \in E_\lambda$ τότε υπάρχει κύβος Q_x με $x \in Q_x$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} |f(y)|\, dy > \lambda. \tag{1.1}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Έστω ότι το Q_x καλύπτει το σύνολο E_λ, δηλαδή έχουμε μια κατάσταση $E_\lambda \subset Q_x$. Τότε με χρήση της σχέσης (1.1) το αποτέλεσμα είναι άμεσο αφού

  $$|E_\lambda| \leq |Q_x| \leq \frac{1}{\lambda}\int_{Q_x} |f(y)|\, dy \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \leq \frac{5^n}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

  Όμως η περίπτωση δεν είναι μια συνηθισμένη κατάσταση, έτσι λοιπόν είναι αναγκαίο να εξετάσουμε και την ακόλουθη περίπτωση.

- Έστω ότι το Q_x δεν καλύπτει το σύνολο E_λ. Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Vitali. Όμως, για να γίνει η χρήση αυτού του Θεωρήματος υπάρχει μια τεχνική δυσκολία. Δεν ξέρουμε αν το σύνολο E_λ είναι φραγμένο. Αυτή δυσκολία αντιμετωπίζεται με το να κοιτάξουμε πρώτα το σύνολο

  $$E_\lambda \bigcap B(0,k).$$

  Έστω $\mathcal{F}$ να είναι μια συλλογή κύβων Q που ικανοποιούν την σχέση (1.1), και έστω $q \in E_\lambda \bigcap B(0,k)$. Τώρα παρατηρούμε ότι για κάθε $Q \in \mathcal{F}$ ισχύει

  $$l(Q)^n = |Q| < \frac{1}{\lambda}\int_Q |f(y)|\, dy \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda},$$

  και έτσι

  $$l(Q) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

  Συνεπώς,

  $$diam\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q\right) < \infty.$$

  Τώρα ικανοποιούνται όλες οι προυποθέσεις του Θεωρήματος Vitali και άρα υπάρχει αριθμήσιμο το πλήθος ξένων ανά δύο κύβων $Q_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \ldots$ τέτοια, ώστε

  $$\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5Q_i.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|E_\lambda \bigcap B(0,k)\right| &\leq \left|\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |5Q_i| \\
&= 5^n \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \\
&\overset{(1.1)}{\leq} \frac{5^n}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |f(y)|\, dy \\
&\overset{Q_i \text{ ξένοι}}{=} \frac{5^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i} |f(y)|\, dy \\
&\leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Τώρα για $k \to \infty$ έχουμε

$$|E_\lambda| = \lim_{k\to\infty} \left|E_\lambda \bigcap B(0,k)\right| \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Παρατήρηση 1.1.15. *Παρατηρούμε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε ο $Mf(x) < \infty$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έχουμε*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) = \infty\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_{L^1} \to 0$$

καθώς $\lambda \to \infty$.

Ορισμός 1.1.16. *Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ αν η f γράφεται ως*

$$f = g + h, \quad \text{όπου} \quad g \in L^1(\mathbb{R}^n),\, h \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Ορισμός 1.1.17. *Ένας τελεστής*

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n) \to \{\text{μετρήσιμες συναρτήσεις}\}$$

θα καλείται ***υποπροσθετικός (subaddictive)*** *αν*

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)| \quad \text{σχεδόν παντού στον} \quad \mathbb{R}^n.$$

Παρατήρηση 1.1.18. *Ο μεγιστικός τελεστής M είναι υποπροσθετικός. Πράγματι από το Θεώρημα 1.1.2 (i) έχουμε ότι*

$$|M(f+g)(x)| \leq |M(f)(x) + Mg(x)| \leq |Mf(x)| + |Mg(x)|.$$

Λήμμα 1.1.19. *Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Τότε ισχύει ότι*

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n).$$

Απόδειξη. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και έστω $\lambda > 0$. Χωρίζουμε την συνάρτηση f ως εξής $f = f_1 + f_2$,όπου

$$f_1(x) = f\mathcal{X}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda \\ 0, & |f(x)| > \lambda \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = f\mathcal{X}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \lambda \\ 0, & |f(x)| \leq \lambda \end{cases} .$$

Θα δείξουμε ότι $f_1 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και $f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^q \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{q-p} \, |f_1(x)|^p \, dx \\ &\overset{|f_1|\leq\lambda}{\leq} \lambda^{q-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p \, dx \\ &\overset{|f_1|\leq|f|}{\leq} \lambda^{q-p} \|f\|_{L^p}^p \\ &< \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{1-p} \, |f_2(x)|^p \, dx \\ &\overset{|f_2|>\lambda \text{ ή } f_2=0}{\leq} \lambda^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p \, dx \\ &\overset{|f_2|\leq|f|}{\leq} \lambda^{1-p} \|f\|_{L^p}^p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Συνοψίζοντας, μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood είναι ασθενούς τύπου (1,1) και ότι είναι ισχυρού τύπου (q,q), όταν $q = \infty$. Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό μας ενδιαφέρει να δούμε αν ο τελεστής M είναι ισχυρού τύπου (p,p), όταν $1 < p < \infty$. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα πολύ βασικό Θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως **Θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz (Marcinkiewicz interpolation theorem)**. Το θεώρημα αυτό, θα μας εξασφαλίσει το επιθυμητό αποτέλεσμα, όχι μόνο στους κλασικούς χώρους Lebesgue, όπου ασχολούμαστε σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά και στους χώρους Lebesgue με βάρη $L^p_w(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Το Θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz είναι ένα πολύ ισχυρό αποτέλεσμα, διότι μας λέει ότι εάν έχουμε ένα τελεστή, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου (1,1) και ταυτόχρονα ισχυρού τύπου (q,q), όταν $q = \infty$ και ασθενούς τύπου (q,q), όταν $q < \infty$, τότε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι θα είναι και ισχυρού τύπου (p,p), όταν $1 < p < q$. Παραπέμπουμε για μια αναλυτική μελέτη της απόδειξης στο [2]. Συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.1.20 (Marcinkiewicz interpolation theorem)**.** *Έστω $1 < q \leq \infty$ και έστω $T : L^1(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n) \to \{μετρήσιμες\ συναρτήσεις\}$ ένας τελεστής. Για τον T υποθέτουμε τα ακόλουθα.*

(i) *Ο T είναι υποπροσθετικός,*

(ii) *ο T είναι ασθενούς τύπου (1,1),*

(iii) *ο T είναι ισχυρού τύπου (q,q), όταν $q = \infty$ και ασθενούς τύπου (q,q), όταν $q < \infty$.*

Τότε ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p), $1 < p < q$ και ισχύει

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Έστω $q < \infty$. Έστω επίσης $\lambda > 0$ και μια συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Από το Λήμμα 1.1.19 μπορούμε να γράψουμε την f σαν $f = f_1 + f_2$, όπου

$$f_1(x) = f\mathcal{X}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda \\ 0, & |f(x)| > \lambda \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = f\mathcal{X}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \lambda \\ 0, & |f(x)| \leq \lambda \end{cases}.$$

Μάλιστα ισχύει ότι $f_1 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και $f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Σύμφωνα με την υποπροσθετικότητα του τελεστή T έχουμε

$$|Tf| = |T(f_1 + f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2| \quad \text{σχεδόν παντού στον} \quad \mathbb{R}^n.$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\quad + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \frac{C_1}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^q}\|f_1\|_{L^q}^q + \frac{C_2}{\frac{\lambda}{2}}\|f_2\|_{L^1} \\ &\leq \frac{2^q C_1}{\lambda^q}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}} |f(x)|^q \, dx \\ &\quad + \frac{2C_2}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 1.1.8 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \, d\lambda \\ &\leq 2^q C_1 p \int_0^\infty \lambda^{p-q-1} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}} |f(x)|^q \, dx d\lambda \\ &\quad + 2pC_2 \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)| \, dx d\lambda. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Fubini έχουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{p-q-1} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\lambda\}} |f(x)|^q \, dx d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \int_{|f(x)|}^\infty \lambda^{p-q-1} \, d\lambda dx \\ &= \frac{1}{p-q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \, |f(x)|^{p-q} \, dx \\ &= \frac{1}{p-q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\, dx d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-2}\, d\lambda dx \\
&= \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1}\, |f(x)|\, dx \\
&= \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p}\, dx.
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\, dx \\
&\leq \frac{2^q pC_1}{p-q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx + \frac{2pC_2}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \\
&= p\left(\frac{2^q C_1}{p-q} + \frac{2C_2}{p-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \\
&= C\|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}
$$

- Έστω $q=\infty$. Υποθέτουμε ότι

$$
\|Tg\|_{L^\infty} \leq C_2\|g\|_{L^\infty} \quad \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^n).
$$

Έστω επίσης $\lambda>0$ και μια συνάρτηση $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Από το Λήμμα 1.1.19 μπορούμε να γράψουμε ξανά την f σαν $f=f_1+f_2$, όπου

$$
f_1(x) = f\mathcal{X}_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq\frac{\lambda}{2C_2}\right\}}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)|\leq \frac{\lambda}{2C_2} \\ 0, & |f(x)| > \frac{\lambda}{2C_2} \end{cases}
$$

και

$$
f_2(x) = f\mathcal{X}_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\frac{\lambda}{2C_2}\right\}}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \frac{\lambda}{2C_2} \\ 0, & |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2C_2} \end{cases}.
$$

Μάλιστα ισχύει ότι $f_1\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $f_2\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε σχεδόν παντού ότι

$$
|Tf_1| \leq \|Tf_1\|_{L^\infty} \leq C_2\|f_1\|_{L^\infty} \leq C_2\frac{\lambda}{2C_2} = \frac{\lambda}{2}.
$$

Έτσι έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
|\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf(x)|>\lambda\}| &\leq \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\
&\quad + \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\
&\overset{\text{weak }(1,1)}{\leq} \frac{C_1}{\frac{\lambda}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} |f_2|\, dx \\
&= \frac{2C_1}{\lambda}\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\frac{\lambda}{2C_2}\right\}} |f(x)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Από το Λήμμα 1.1.8 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx &= p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}\right| d\lambda \\ &\leq 2C_1 p \int_0^{\infty} \lambda^{p-2} \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2C_2}\right\}} |f(x)| \, dx d\lambda \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} 2^p C_2^{p-1} C_1 \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx.\end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε ότι

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

□

Πρέπει να αναφέρουμε ότι το Θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz έχει μια πιο γενική μορφή που είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 1.1.21 (Marcinkiewicz interpolation theorem). *Έστω $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ και έστω $T : L^{p_1}(X,\mu) + L^{p_2}(X,\mu) \to \{\text{μετρήσιμες συναρτήσεις}\}$ ένας τελεστής. Για τον T υποθέτουμε τα ακόλουθα.*

(i) *Ο T είναι υποπροσθετικός,*

(ii) *ο T είναι ασθενούς τύπου (p_1, p_1),*

(iii) *ο T είναι ισχυρού τύπου (p_2, p_2), όταν $p_2 = \infty$ και ασθενούς τύπου (p_2, p_2), όταν $p_2 < \infty$.*

Τότε ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p), $p_1 < p < p_2$ και ισχύει

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε τον στοχό του κεφαλαίου αυτού.

Θεώρημα 1.1.22 (Hardy-Littlewood II). *Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, τότε ο $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και υπάρχει σταθερά $C = C(n,p)$ τέτοια ώστε*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Δηλαδή, ο τελεστής M είναι ισχυρού τύπου (p,p).

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι ο τελεστής M είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ότι είναι ισχυρού τύπου (∞,∞). Επίσης είναι και υποπροσθετικός. Συνεπώς ο M ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος παρεμβολής του Marcinkiewicz, άρα έχουμε ότι υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 < p \leq \infty.$$

Δηλαδή, ο τελεστής M είναι φραγμένος στους κλασικούς χωρους L^p, για $1 < p \leq +\infty$. □

Κεφάλαιο 2

Η θεωρία των Calderon-Zygmund

Το 1952 οι A.P. Calderon και A. Zygmund ανακάλυψαν μια απλή αλλά πολύ ισχυρή μέθοδο, η οποία έγινε ευρέως γνωστή ως **Διάσπαση (decomposition) Calderon- Zygmund**. Για όλα τα παρακάτω αποτελέσματα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [1], [2], [4], και [5].

Ορισμός 2.0.23. *Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το σύνολο $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$ που είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^n$, των οποίων οι συντεταγμένες είναι ακέραια πολλαπλάσια του 2^{-k}. Με D_k θα συμβολίζουμε την συλλογή των κύβων που καθορίζονται από το Λ_k, δηλαδή είναι οι κύβοι που έχουν μήκος πλευρών 2^{-k} και κορυφές στο Λ_k. Οι κύβοι που ανήκουν στο $D = \bigcup_{-\infty}^{\infty} D_k$ θα ονομάζονται **δυαδικοί κύβοι.***

Παρατήρηση 2.0.24.
- *Παρατηρούμε ότι αν $Q, R \in D$ και $|R| \leq |Q|$, τότε είτε $R \subset Q$ είτε $Q^o \bigcap R^o = \emptyset$.*
- *Κάθε $Q \in D_k$ είναι ένωση 2^n κύβων του D_{K+1}, που είναι ξένοι ανά δύο.*

Θεώρημα 2.0.25 (Lebesgue density theorem)**.** *Αν $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, τότε*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy = f(x), \quad \text{σχεδόν παντού στον} \quad \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 2.0.26 (Local Calderon-Zygmund decomposition)**.** *Έστω $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ ένας δυαδικός κύβος και έστω $f \in L^1(Q_0)$. Αν*

$$\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f(x)| \, dx \leq \lambda,$$

τότε υπάρχει μια συλλογή δυαδικών κύβων

$$F_\lambda = \{Q_j : j = 1, 2, \ldots\}$$

τέτοια ώστε

(i)
$$Q_j \bigcap Q_k = \emptyset \quad \text{για} \quad j \neq k,$$

(ii)
$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx \leq 2^n\lambda \quad \textit{για} \quad j=1,2,\ldots,$$

(iii) *και*
$$|f(x)| \leq \lambda \quad \textit{σχεδόν παντού στο} \quad Q_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Απόδειξη. Καταρχάς πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $Q_0 \notin F_\lambda$ λόγω τις υποθέσής μας. Ξεκινάμε με το να να χωρίσουμε τον δυαδικό κύβο Q_0 σε 2^n δυαδικούς κύβους. Τότε για να κατασκευάσουμε το σύνολο F_λ επιλέγουμε εκείνους τους κύβους για τους οποίους ισχύει ότι
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx > \lambda.$$

Παρατηρούμε ότι το (i) ισχύει γιατί χρησιμοποιούμε δυαδικούς κύβους, και λόγω της εκτίμησης
$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx &\leq \frac{|Q_0|}{|Q|}\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(x)|\,dx \\
&\leq 2^n\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(x)|\,dx \\
&\leq 2^n\lambda,
\end{aligned}$$

ισχύει και το (ii). Για τους κύβους που δεν επιλέξαμε, δηλαδη για τους κύβους R τους οποίους ισχύει
$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x)|\,dx \leq \lambda,$$
συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία. Με τον τρόπο αυτό το (ii) θα ισχύει για όλους τους κύβους που επιλέγουμε σε κάθε βήμα. Από την άλλη μεριά σύμφωνα με το θεώρημα 2.0.26 έχουμε
$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|\,dx \overset{Q_k \text{ δεν επιλέχθηκε}}{\leq} \lambda,$$

σχεδόν παντού στον $Q_0 \setminus \bigcup_{Q\in F_\lambda} Q$.

□

Τώρα θα αποδείξουμε μια πιο γενική μορφή του παραπάνω θεωρήματος, που αφορά όλο τον $\mathbb{R}^n$. Η ιδέα της απόδειξης είναι όμοια, όμως εφόσον δουλέυουμε σε όλο τον $\mathbb{R}^n$ δεν έχουμε έναν αρχικό κύβο Q_0.

Θεώρημα 2.0.27 (Global Calderon-Zygmund decomposition)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχει μια συλλογή δυαδικών κύβων*
$$F_\lambda = \{Q_j : j=1,2,\ldots\}$$

τέτοια ώστε

(i)
$$Q_j \bigcap Q_k = \emptyset \quad \textit{για} \quad j \neq k,$$

(ii)

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \leq 2^n\lambda \quad \textit{για} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

(iii) *και*

$$|f(x)| \leq \lambda \quad \textit{σχεδόν παντού στο} \quad \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε μια συλλογή δυαδικών κύβων $F_\lambda \subset D$, οι οποίοι είναι όσο το δυνατόν μεγάλοι τέτοιοι ώστε

$$\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx. \tag{2.1}$$

Με λίγα λόγια, $Q \in F_\lambda$ αν ισχύουν τα παρακάτω

- $Q \in D_k$ για κάποιο k,
- αν ισχύει η (2.1)
- και για όλους τους μεγαλύτερους δυαδικούς κύβους K με $Q \subset K$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|\,dx \leq \lambda.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αυτοί οι μεγαλύτεροι κύβοι K, αν ισχύει η 3.9 για τον Q, διότι

$$\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|\,dx \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{|K|} \to 0,$$

καθώς $|K| \to \infty$. Καθώς οι κύβοι που ανήκουν στο F_λ είναι μεγιστικοί, έπεται ότι δεν τέμνονται, διότι σε αντίθετη περίπτωση ο μικρότερος κύβος θα περιέχεται σε έναν μεγαλύτερο, αφού είναι δυαδικοί και έτσι θα μπορούσαμε να τον αντικαταστήσουμε από τον μεγαλύτερο κύβο. Τώρα αν $Q \in F_\lambda$ και $Q \subset K$ τότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx &\leq \frac{|K|}{|Q|}\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|\,dx \\ &\leq 2^n \frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|\,dx \\ &\leq 2^n\lambda,\end{aligned}$$

άρα ισχύει και το (ii). Από την άλλη μεριά σύμφωνα με το θεώρημα 2.0.26 έχουμε

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \overset{Q_k \text{ δεν επιλέχθηκε}}{\leq} \lambda,$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{Q\in F_\lambda} Q$. □

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε όλα τα παραπάνω, με τον μεγιστικό τελεστή των Hardy- Littlewood. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.0.28. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω*

$$F_\lambda = \{Q_j : j = 1, 2, \ldots\}$$

να είναι η διάσπαση Calderon-Zygmund για την συνάρτηση f του θεωρήματος 2.0.27. Τότε

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j.$$

Απόδειξη. Η διάσπαση Calderon-Zygmund δίνει, όπως είδαμε, φράγματα για την μέση τιμή της συνάρτησης f. Στόχος μας είναι να περάσουμε από τις μέσες τιμές στον μεγιστικό τελεστή. Για τον σκοπό αυτό, έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j$ και έστω $Q \subset \mathbb{R}^n$ ένας όχι κατ΄ ανάγκη δυαδικός κύβος τέτοιος ώστε $x \in Q$. Αν επιλέξουμε k τέτοιο ώστε να ισχύει

$$2^{-(k+1)} \leq l(Q) < 2^{-k},$$

τότε υπαρχουν το πολύ 2^n δυαδικοί κύβοι $R_1, R_2, \ldots, R_l \in D_k$ τέτοιοι ώστε

$$R_m \bigcap Q \neq \emptyset, \quad m = 1, 2, \ldots, l.$$

Επειδή R_m και Q τέμνονται, τότε $Q \subset 3R_m$. Από την άλλη μερια ο R_m δεν περιέχεται σε κανέναν από τους $Q_j \in F_\lambda$. Πράγματι, αν όχι τότε $x \in Q \subset 3R_m \subset 3Q_j$, που είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j$. Εφόσον $R_m \notin F_\lambda$ έπεται ότι

$$\frac{1}{|R_m|} \int_{R_m} |f(x)|\, dx \leq \lambda, \quad m = 1, 2, \ldots, l.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy &= \frac{1}{|Q|} \sum_{m=1}^{l} \int_{R_m \bigcap Q} |f(y)|\, dy \\
&\leq \sum_{m=1}^{l} \frac{|R_m|}{|Q|} \frac{1}{|R_m|} \int_{R_m} |f(y)|\, dy \\
&\leq l2^n\lambda \\
&\leq 4^n\lambda.
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \leq 4^n\lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j.$$

Άρα

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \leq 4^n\lambda\} \Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j.$$

Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Λήμμα 2.0.29. *Έστω* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *και έστω*

$$F_\lambda = \{Q_j : j = 1, 2, \ldots\}$$

να είναι η διάσπαση Calderon-Zygmund για την συνάρτηση f *του θεωρήματος 2.0.27. Τότε*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}.$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $Q_j \in F_\lambda$ τότε

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y)| \, dy > \lambda$$

και έτσι

$$Mf(x) > \lambda, \quad \forall x \in Q_j.$$

Άρα

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}.$$

□

Η θεωρία καθώς και τα αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα στην συνέχεια, διότι τα φράγματα που προκύπτουν από την διάσπαση Calderon- Zygmund για τον μεγιστικό τελεστή, θα μας εξασφαλίσουν ότι ο τελεστής θα είναι ασθενούς τύπου (p, p) στους χώρους με βάρη L^p_w, για $1 \leq p < +\infty$.

Κεφάλαιο 3

Η κλάση βαρών A_p (Muckenhoupt weights)

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα προσπαθήσουμε να δούμε την συμπεριφορά του μεγιστικού τελεστή των Hardy-Littlewood στους χώρους με βάρη $L^p_w(\mathbb{R}^n)$. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ καλείται βάρος (weight) αν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση και αν $w(x) > 0$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. Επίσης, κάθε βάρος w δίνει υπόσταση σε ένα μέτρο πάνω στα μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, μέσω της ολοκλήρωσης. Το συγκεκριμένο μέτρο το συμβολίζουμε επίσης με w. Έτσι, λοιπον, για το μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$w(E) = \int_E w(x)\,dx.$$

Έστω w ένα βάρος στον $\mathbb{R}^n$. Για $1 \leq p < +\infty$ ορίζουμε ως $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ τον γραμμικό χώρο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έτσι, ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\,dx < +\infty.$$

Ο χώρος $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ είναι εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p_w(\mathbb{R}^n).$$

Στην περίπτωση που το $p = \infty$ τότε η νόρμα του $L^\infty_w(\mathbb{R}^n)$ είναι η

$$\|f\|_{L^\infty_w(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{\lambda : w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f| > \lambda\}\right) = 0\right\}.$$

Συγκεκριμένα, θέλουμε να δείξουμε ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στους χώρους με βάρη. Όμως, όπως θα παρατηρήσουμε και στην πορεία, αυτό δεν μπορεί να επιτευχθεί γενικά για οποιαδήποτε συνάρτηση αποτελεί βάρος. Μόνο μία συγκεκριμένη οικογένεια από βάρη μπορεί να μας δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η οικογένεια αυτή είναι γνωστή ως **Η κλάση βαρών** A_p. Αυτή την κλάση την εισήγαγε ο Muckenhoupt το 1972, και όπως θα δούμε τα βάρη που ανήκουν σε αυτή την κλάση είναι ακριβώς εκείνα για τα οποία ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στους χώρους $L^p_w(\mathbb{R}^n)$, για $1 < p \leq \infty$ και ότι είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$, όταν $p = 1$.

Ορισμός 3.0.30 (Muckenhoupt 1972). *Έστω $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα βάρος. Αν $p = 1$, τότε το $w \in A_1$ αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\int_Q w(x)\,dx \leq C \operatorname{ess}\inf_{y\in Q} w(y), \quad \forall Q \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Αν $1 < p < \infty$, τότε το $w \in A_p$ αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} \leq C, \quad \forall Q \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Το infimum όλων των σταθερών C που ικανοποιούν τις 3.1 και 3.2 καλείται η A_p σταθερά του w. Με $A_p(w)$, $1 \leq p > \infty$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των A_p- βαρών. Πολλές φορές τα παραπάνω βάρη τα συναντάμε και ως Muckenhoupt weights.

Παράδειγμα 3.0.31. *Η συνάρτηση $w(x) = |x|^\alpha$ ανήκει στην κλάση A_p, αν και μόνο αν , $-n < \alpha < 0$, αν $p = 1$ και $-n < \alpha < n(p-1)$, αν $p > 1$. Πράγματι, αν $n = 1$, $p > 1$ και $Q = [0, 1]$ τότε*

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^\alpha\ dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,(x)\,dx\right)^{p-1} &= \int_0^1 |x|^\alpha\ dx \left(\int_0^1 |x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,(x)\,dx\right)^{p-1} \\ &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 \left(\left[\frac{x^{-\frac{\alpha}{p-1}+1}}{-\frac{\alpha}{p-1}+1}\right]_0^1\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για να συγκλίνουν τα τελευταία ολοκληρώματα, θα πρέπει

$$\alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$$

και

$$-\frac{\alpha}{p-1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha < p - 1.$$

Συνεπώς, θα πρέπει $-1 < \alpha < p - 1$.

Παράδειγμα 3.0.32. *Η συνάρτηση $w(x) = e^{\lambda\phi(x)}$ ανήκει στην κλάση A_2, με $\phi(x) \in W^{n,1}(\Omega)$ και λ κατάλληλα μικρό, όπου*

$$W^{n,1}(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega) : D^\alpha u \in L^1(\Omega), \quad \text{για κάθε} \quad |\alpha| \leq n\right\}.$$

Τα βάρη της κλάσης A_p έχουν πάρα πολλές ιδιότητες και μπορούν να βρεθούν στα [1], [3], [4], [7], [8], [9] και [10]. Οι πιο σημαντικές από αυτές παρουσιάζονται παρακάτω.

3.1 Ιδιότητες της κλάσης A_p

Πρόταση 3.1.1. *Έστω w ένα βάρος τέτοιο, ώστε $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. Αν C είναι η A_p σταθερά του w τότε ισχύει ότι $C \geq 1$.*

Απόδειξη. Έστω $Q \subset \mathbb{R}^n$. Τότε παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |Q| = \int_Q 1\,dx &= \int_Q w^{\frac{1}{p}}(x) w^{-\frac{1}{p}}(x)\,dx \\ &\overset{\text{Holder}}{\leq} \left(\int_Q w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Q w^{-\frac{p'}{p}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στην p έχουμε

$$|Q|^p \leq \left(\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1},$$

και άρα

$$1 \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1}. \tag{3.3}$$

Όμως $w \in A_p$ δηλαδή

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} \leq C,$$

συνεπώς $C \leq 1$. □

Παρατήρηση 3.1.2. *Παρατηρούμε ότι η σχέση 3.3 είναι συνέπεια της ανισότητας Holder. Από την άλλη μεριά, αν δούμε την A_p συνθήκη έχουμε ότι η ανισότητα έχει αντιστραφεί. Γι΄ αυτό λέμε ότι η A_p είναι μια αντίστροφη ανισότητα Holder. Το γεγονός αυτό θα το δούμε παρακάτω πιο αναλυτικά, διότι είναι μια πάρα πολύ σημαντική ιδιότητα των A_p- βαρών.*

Πρόταση 3.1.3. *Έστω $1 < p < \infty$. Και έστω p' ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Τότε $w \in A_p$, αν και μόνο αν, $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $w \in A_p$ και έστω A η A_p σταθερά του w. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} &\leq A \\ \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\right)^{-\frac{1}{p'-1}}\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} &\leq A \\ \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\right)^{-\frac{1}{p'-1}}\,dx\right)^{p'-1} &\leq A^{p'-1}. \end{aligned}$$

Άρα $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$.

($\Leftarrow$) Έστω $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ και έστω C η $A_{p'}$ σταθερά του $w^{-\frac{1}{p-1}}$. Τότε

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\right)^{-\frac{1}{p'-1}}\,dx\right)^{p'-1} &\leq C \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)^{p'-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right) &\leq C \\ \Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} &\leq C^{p-1}. \end{aligned}$$

Άρα $w \in A_p$. Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 3.1.4. *Αν $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ τότε $w^\alpha \in A_p$, για $0 < \alpha < 1$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q w^\alpha\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} &\overset{Holder}{\leq} \frac{|Q|^{(1-\alpha)p}}{|Q|^p}\left(\int_Q w\,dx\right)^\alpha \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{\alpha(p-1)} \\
&\overset{w\in A_p}{\leq} |Q|^{-\alpha p}\,C^\alpha.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $w^\alpha \in A_p$. □

Θεώρημα 3.1.5. *Ισχύει ότι $A_p(w) \subset A_q(w)$, για $1 \leq p < q$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $w \in A_p$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q 1\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} \\
&\overset{\text{Holder}}{\leq} \left(\frac{1}{|Q|}\right)^{q-1}\left(\int_Q \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{q-1}\frac{q-1}{p-1}}\,dx\right)^{(q-1)\frac{p-1}{q-1}} \\
&\quad \left(\int_Q dx\right)^{(q-1)(1-\frac{p-1}{q-1})} \\
&= \frac{|Q|^{(q-1)(1-\frac{p-1}{q-1})}}{|Q|^{q-1}}\left(\left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \\
&= \frac{1}{|Q|^{p-1}}\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \\
&\overset{w\in A_p}{\leq} C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Άρα καταλήγουμε ότι

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} \leq C.$$

  Δηλαδή $w \in A_q$ και συνεπώς ισχύει $A_p(w) \subset A_q(w)$, για $1 < p < q$.

- Έστω $p = 1$ έστω $w \in A_1$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} &\leq \operatorname*{ess\,sup}_Q \frac{1}{w} \\
&= \frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_Q w} \\
&\overset{w\in A_1}{\leq} C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1}\leq C.$$

Δηλαδή $w\in A_q$ και συνεπώς ισχύει $A_p(w)\subset A_q(w)$, για $1=p<q$

Σε κάθε περίπτωση δείξαμε ότι $A_p(w)\subset A_q(w)$, για $1\leq p<q$. □

Το επόμενο θεώρημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι μας εξασφαλίζει ότι η μέση τιμή μια συνάρτησης $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ δεν μπορεί να υπερβαίνει την νόρμα της f στους χώρους με βάρη, όταν τα βάρη ανήκουν στην κλάση A_p, για $1\leq p<\infty$. Στην πραγματικότητα, οι συνέπειες του αποτελέσματος αυτού είναι βαθύτερες, γιατί θα μας επιτρέψει να ορίσουμε τα μέτρα διπλασιασμού, με την βοήθεια των οποίων θα εξάγουμε πολύ σημαντικές πληροφορίες για τον μεγιστικό τελεστή στους χώρους με βάρη.

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω $1\leq p<\infty$ και έστω w ένα βάρος. Τότε $w\in A_p$, αν και μόνο αν,*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx\right)^p\leq\frac{C}{w(Q)}\int_Q |f(x)|^p\,w(x)\,dx,\tag{3.4}$$

για κάθε $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε κύβο $Q\subset\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Έστω $1<p<\infty$.

  (⇒) Έστω $w\in A_p$. Τότε παρατηρούμε ότι για $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,w^{\frac{1}{p}}(x)w^{-\frac{1}{p}}(x)\,dx\\ &\overset{\text{Holder}}{\leq} \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q |f(x)|^p\,w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q\left(\frac{1}{w(x)}\right)^{-\frac{p'}{p}}dx\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

  Υψώνουμε εις την p και τα δύο μέλη και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\frac{p}{p'}=p-1$ και $\frac{p'}{p}=-\frac{1}{p-1}$. Τότε

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx\right)^p\leq\frac{1}{|Q|^p}\int_Q |f(x)|^p\,w(x)\,dx\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\right)^{p-1}.$$

  Πολλαπλασιάζουμε τώρα και τα δύο μέλη με $w(Q)$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}w(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx\right)^p &\leq \frac{1}{|Q|^p}\left(\int_Q |f(x)|^p\,w(x)\,dx\right)\\ &\quad\left(\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1}\\ &\overset{w\in A_p}{\leq} C\frac{|Q|^p}{|Q|^p}\int_Q |f(x)|^p\,w(x)\,dx.\end{aligned}$$

  Τελικά παρατηρούμε την σχεση 3.4.

($\Leftarrow$) Έστω τώρα ότι ισχύει η 3.4 για κάθε $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι $w \in A_p$. Χρησιμοποιούμε στην 3.4 για $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$w(Q) = \int_Q w(x)\,dx.$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^p &\leq C\int_Q w^{-\frac{p}{p-1}}(x)w(x)\,dx \\
&= C\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx \\
\Rightarrow \frac{1}{|Q|^p}\int_Q w(x)\,dx \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} &\leq C \\
\Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} &\leq C.
\end{aligned}$$

Άρα $w \in A_p$. Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην αρχή, υποθέσαμε ότι $w^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Αν αυτό δεν ισχύει μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $f = (w+\epsilon)^{-\frac{1}{p-1}}$ στην απόδειξη. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα και στο τέλος αφήνουμε το $\epsilon \to 0$. Τότε αφού $w > 0$ σχεδόν παντού έχουμε ότι $w^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

- Έστω ότι $p = 1$.

  ($\Rightarrow$) Έστω ότι $w \in A_1$, δηλαδή το w ικανοποιεί την σχέση 3.1. Τότε

$$\begin{aligned}
w(Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,w(Q)\,dx \\
&\overset{w\in A_1}{\leq} C\int_Q |f(x)| \operatorname*{ess\,inf}_{y\in Q}\,dx \\
&\leq C\int_Q |f(x)|\,w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

  ($\Leftarrow$) Έστω τώρα ότι ισχύει η 3.4 για $p = 1$. Τότε παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $f = \mathcal{X}_E$, όπου $E \subset Q$ μετρήσιμο, τότε

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq \frac{C}{w(Q)}w(E) \Rightarrow \frac{w(Q)}{|Q|} \leq C\frac{w(E)}{|E|}. \tag{3.5}$$

  Θυμίζουμε ότι

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} w(x) = \sup\{m \in \mathbb{R} : w(x) \geq m \quad \text{σχεδόν παντού στο} \quad Q\}.$$

  Ορίζουμε το σύνολο

$$E_\epsilon = \{x \in Q : w(x) \leq \operatorname*{ess\,inf}_{y\in Q} w(y) + \epsilon\}.$$

  Βλέπουμε ότι $E_\epsilon \subset Q$. Κάνοντας χρήση της 3.5 για τα E_ϵ και Q, παίρνουμε

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C\frac{w(E_\epsilon)}{|E_\epsilon|} = \frac{C}{|E_\epsilon|}\int_{E_\epsilon} w(x)\,dx \leq C(\operatorname*{ess\,inf}_{y\in Q} w(y) + \epsilon).$$

  Για $\epsilon \to 0$ έχουμε ότι $w \in A_1$.

Και η απόδειξη έφτασε στο τέλος της. □

Παρατήρηση 3.1.7. *Στην προηγούμενη απόδειξη κάναμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Συγκεκριμένα, αν ισχύει η 3.4 για κάθε $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$, τότε για $f = \mathcal{X}_E$, όπου $E \subset Q$ μετρήσιμο έχουμε*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{X}_E\,dx\right)^p \leq \frac{C}{w(Q)}\int_Q \mathcal{X}_E^p w(x)\,dx \Rightarrow w(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^p \leq Cw(E).$$

Επιπλέον, αν θέσουμε $Q = 2Q$ και $E = Q$, τότε $Q \subset 2Q$ και ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
w(2Q)\left(\frac{|Q|}{|2Q|}\right)^p &\leq Cw(Q)\\
w(2Q)\left(\frac{1}{2^n}\right)^p &\leq Cw(Q)\\
w(2Q)2^{-np} &\leq Cw(Q)\\
w(2Q) &\leq 2^{np}Cw(Q)\\
w(2Q) &\leq \mathcal{C}w(Q).
\end{aligned}$$

Μέτρα για τα οποία ισχύει η τελευταία σχέση καλούνται ***μέτρα διπλασιασμού (doubling measures)****. Συνεπώς, τα βάρη $w \in A_p$ δημιουργουν μέτρα, μέσω της ολοκλήρωσης πάνω στα μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και μάλιστα αυτά τα μέτρα είναι μέτρα διπλασιασμού. Πιο γενικά ισχύει το ακόλουθο.*

Λήμμα 3.1.8. *Έστω $w \in A_p$. Τότε για κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda > 1$ ισχύει*

$$w(\lambda Q) \leq \mathcal{C}w(Q). \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Αφού $w \in A_p$ τότε ισχύει η 3.4 για κάθε $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$. Άρα για $f = \mathcal{X}_Q$, όπου $Q \subset \lambda Q$ έχουμε

$$\left(\frac{1}{|\lambda Q|}\int_{\lambda Q} \mathcal{X}_Q\,dx\right)^p \leq \frac{C}{w(\lambda Q)}\int_{\lambda Q} \mathcal{X}_Q^p w(x)\,dx \Rightarrow w(\lambda Q)\left(\frac{|Q|}{|\lambda Q|}\right)^p \leq Cw(Q).$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
w(\lambda Q)\left(\frac{|Q|}{|\lambda Q|}\right)^p &\leq Cw(Q)\\
w(\lambda Q)\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)^p &\leq Cw(Q)\\
w(\lambda Q)\lambda^{-np} &\leq Cw(Q)\\
w(\lambda Q) &\leq \lambda^{np}Cw(Q)\\
w(\lambda Q) &\leq \mathcal{C}w(Q).
\end{aligned}$$

□

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα πολύ σημαντικό και βαθύ αποτέλεσμα, που είναι γνωστό ως το **Λήμμα του Gehring (Gehring's lemma)**. Δεν θα δώσουμε την απόδειξη αυτού, καθώς είναι ιδιαίτερα μακροσκελής και είναι πέρα από τα όρια αυτής της εργασίας. Η απόδειξη για το επόμενο λήμμα μπορεί να μελετηθεί στο [11].

Λήμμα 3.1.9 (Gehring's lemma)**.** *Έστω ότι για $1 < p < \infty$ υπάρχει $C \geq 1$ τέτοιο ώστε*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \, dx,$$

για όλους τους κύβους $Q \subset \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $q > p$ τέτοιο ώστε

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \, dx,$$

για όλους τους κύβους $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Θα δείξουμε τώρα, ίσως την πιο σημαντική ιδιότητα που έχουν τα βάρη της κλάσης A_p. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε την **αντίστροφη ανισότητα Holder (Reverse Holder inequality)**, που γενικά μας λέει ότι ένα βάρος $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ είναι 'περισσότερο' ολοκληρώσιμο από ότι φαίνεται αρχικά.

Θεώρημα 3.1.10 (Reverse Holder inequality)**.** *Έστω $w \in A_p$, $1 < p < \infty$. Τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta} \, dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w \, dx \tag{3.7}$$

για κάθε $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Αφού $w \in A_p$ έχουμε ότι ισχύει η σχέση 3.2

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\, dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\, dx\right)^{p-1} \leq C.$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f > 0$ η ανισότητα Cauchy-Schwarz δίνει

$$\begin{aligned} |Q| = \int_Q dx &= \int_Q f^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}} \, dx \\ &\leq \left(\int_Q f \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q f^{-1} \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

και έτσι παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f \, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f^{-1} \, dx\right) \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f \, dx\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f^{-1} \, dx\right)^{p-1} \geq 1$$

Θέτουμε $f = w^{\frac{1}{p-1}}$ και παίρνουμε

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{p-1}} \, dx\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx\right)^{p-1}. \tag{3.8}$$

Από 3.2 και 3.8 παίρνουμε

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w \, dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx\right)^{p-1} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{p-1}} \, dx\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx\right)^{p-1}.$$

Άρα

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1},$$

ή αν επικαλεστούμε την $f = w^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow f^{p-1} = w$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f^{p-1}\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q f\,dx.$$

Τώρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p > 2$, διότι σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.4 έχουμε ότι $A_p(w) \subset A_q(w)$, για $1 \leq p < q$ και σύμφωνα με αυτή την υπόθεση $p > 2 \Rightarrow p-1 > 1$. Από το Λήμμα του Gehring υπάρχει $q > p-1$ τέτοιο ώστε

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx$$

ή αν επικαλεστούμε ξανά την $f = w^{\frac{1}{p-1}}$ και υψώνοντας την τελευταία σχέση στην $p-1$ παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{q}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}} \leq \left(C\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \tag{3.9}$$

Το δεύτερο μέλος της 3.9 μπορεί να εκτιμηθεί, κάνοντας χρήσης της ανισότητας Holder για

$$\frac{1}{p-1} + \frac{1}{\frac{p-1}{p-2}} = 1.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} &\leq \frac{1}{|Q|^{p-1}}\left(\int_Q w\,dx\right)\left(\int_Q dx\right)^{p-2}\\ &= \frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\end{aligned}$$

Τότε η 3.9 γίνεται

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{q}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx.$$

Αν διαλέξουμε δ τέτοιο ώστε

$$1+\delta = \frac{q}{p-1},$$

τότε καταλήγουμε

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\,dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w\,dx.$$

$\square$

Η αντίστροφη ανισότητα Holder έχει γενικά πάρα πολλές σημαντικές συνέπειες. Μία από αυτές είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.11. *Έστω $w \in A_p$, $1 < p < \infty$. Τότε $w \in A_{p-\epsilon}$, για κάποιο $\epsilon > 0$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.3 ξέρουμε ότι αφού $w \in A_p$ τότε $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Τότε το $w^{-\frac{1}{p-1}}$ θα ικανοποιεί την αντίστροφη ανισότητα Holder 3.7.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} &\leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx \\
\Rightarrow \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}} &\leq \left(C\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \\
\Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}} &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\left(C\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Διαλέγουμε $\epsilon > 0$ έτσι ώστε

$$\frac{p-1}{1+\delta} = (p-\epsilon) - 1.$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι $\epsilon = p - 1 - \frac{p-1}{1+\delta} > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{(p-\epsilon)-1}}\,dx\right)^{(p-\epsilon)-1} &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\left(C\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \\
&\leq C^{p-1}C = C^p.
\end{aligned}$$

Τελικά, $w \in A_{p-\epsilon}$, για κάποιο $\epsilon > 0$. □

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιότητες της κλάσης A_p είναι πολλές περισσότερες, όμως επιλέξαμε να παρουσιάσουμε τις πιο σημαντικές από αυτές, για να μας βοηθήσουν να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα της εργασίας αυτής.

3.2 Ο μεγιστικός τελεστής στους χώρους $L^p_w(\mathbb{R}^n)$

Βαδίζοντας προς τελός, μας απασχολεί να δώσουμε μια απάντηση στο παρακάτω βασικό ερώτημα.

Πρόβλημα 3.2.1. *Έστω $1 < p < \infty$. Για ποια βάρη $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει ότι*

$$\|Mf\|^p_{L^p_w} \leq C\|Mf\|^p_{L^p_w}, \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n); \tag{3.10}$$

Με λίγα λόγια, αναζητούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο μεγιστικός τελεστής να είναι φραγμένος στους χώρους Lebesgue με βάρη.

Θυμίζουμε επίσης ότι, αν $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ τότε ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood ορίζεται ως εξής:

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy,$$

όπου το supremum ελέγχεται πάνω σε κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$ που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες και με $x \in Q$.

Πριν προχωρήσουμε διατυπώνουμε ξανά κάποιους ορισμούς του Κεφαλαίου 1, μόνο που αυτή την φορά είναι προσαρμοσμένοι για τους χώρους με βάρη $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός 3.2.2. *Έστω T ένας τελεστής. Ο T θα καλείται* ***ασθενούς τύπου με βάρος (weighted weak type) (p,p)*** *, $1 \le p < +\infty$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη από τις συναρτήσεις $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\}\right) \le \frac{C}{\lambda^p}\|f\|^p_{L^p_w}, \quad \forall f \in L^p_w(\mathbb{R}^n).$$

Ορισμός 3.2.3. *Έστω T ένας τελεστής. Ο T θα καλείται* ***ισχυρού τύπου με βάρος (weighted strong type) (p,p)*** *, $1 \le p \le +\infty$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη από τις συναρτήσεις $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε*

$$\|Tf(x)\|_{L^p_w} \le C\|f\|_{L^p_w}, \quad \forall f \in L^p_w(\mathbb{R}^n).$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση 3.10 συνεπάγεται τον ασθενή τύπο με βάρος (p,p). Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} w(x)\,dx &\le \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}} \left(\frac{Mf(x)}{\lambda}\right)^p w(x)\,dx \\
&\le \frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, w(x)\,dx \\
&\overset{3.10}{\le} \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε για να αποδείξουμε ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στους χώρους με βάρη, είναι παρόμοια με αυτά του κεφαλαίου 1. Θυμίζουμε ότι το κύριο αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο 1, για να δείξουμε ότι ο τελεστής είναι φραγμένος στους κλασικούς χώρους Lebesgue ήταν το θέωρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz. Συνεπώς είναι λογικό να περιμένουμε, ότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα, μπορεί να μας δώσει την απάντηση που επιθυμούμε στους χώρους με βάρη. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό, ότι για την εφαρμογή του θεωρήματος βασική υπόθεση είναι ότι για $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$, ο μεγιστικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου με βάρος (p_1,p_1) και ισχυρού τύπου με βάρος (p_2,p_2), όταν $p_2 = +\infty$ και ασθενούς τύπου με βάρος (p_2,p_2), όταν $p_2 < +\infty$. Άρα είναι λογικό, να ερευνήσουμε πρώτα τον ασθενή τύπο με βάρος (p,p) για τον μεγιστικό τελεστή. Τα επόμενα δύο αποτελέσματα μπορούν να μελετηθούν εκτενέστερα στο [2].

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και $1 \le p < \infty$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $w \in A_p$

(ii) $w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \le \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\,dx, \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Θα κάνουμε χρήση της διάσπασης Calderon-Zygmund του κεφαλαίου 2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω

$$F_\lambda = \{Q_j : j = 1, 2, \ldots\}$$

να είναι η διάσπαση Calderon-Zygmund για την f στο ύψος λ. Τότε από το Λήμμα 2.0.28 έχουμε ότι

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 3Q_j.$$

Άρα

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} w(3Q_j).$$

Επίσης από το Λήμμα 3.18 έχουμε

$$\begin{aligned} w(3Q_j) \leq C_1 w(Q_j) & \overset{\text{Θεώρημα 3.1.6}}{\leq} C_1 C_2 \left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\, dx\right)^{-p} \int_{Q_j} |f(x)|^p\, w(x)\, dx \\ & \overset{Q_j \in F_\lambda}{\leq} \frac{C}{\lambda^p}\int_{Q_j} |f(x)|^p\, w(x)\, dx. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εκτίμηση έχουμε

$$\begin{aligned} w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\}\right) & \leq \sum_{j-1}^{\infty} w(3Q_j) \\ & \leq \frac{C}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j} |f(x)|^p\, w(x)\, dx \\ & \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\, dx. \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε το $4^n\lambda$ με το λ παίρνουμε το ζητούμενο. Όμως στην διατύπωση του θεωρήματος έχουμε ότι $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και εμείς υποθέσαμε ότι $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Μπορούμε να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό θεωρώντας

$$f_i = f\mathcal{X}_{B(0,i)}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

και να περάσουμε στο όριο $i \to \infty$ με την βοήθεια του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης του Lebesgue. Για να είμαστε ακριβής, κάνοντας την ίδια διαδικασία όπως παραπάνω για τα f_i παίρνουμε

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_i(x) > 4^n\lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f_i(x)|^p\, w(x)\, dx.$$

Τώρα αφού

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_i(x) > 4^n\lambda\}$$

και σύμφωνα με τις ιδιότητες του μέτρου έχουμε

$$\begin{aligned} w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 4^n\lambda\}\right) & = \lim_{i\to\infty} w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_i(x) > 4^n\lambda\}\right) \\ & \leq \lim_{i\to\infty}\frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f_i(x)|^p\, w(x)\, dx \\ & = \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\, dx. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Θα δείξουμε ότι αν ισχύει

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)\, dx, \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

τότε ισχύει και η 3.4, δηλαδή

$$\left(\frac{1}{|Q|} |f(x)| \, dx\right)^p \leq \frac{C}{w(Q)} \int_Q |f(x)|^p \, w(x)\, dx, \quad \text{για κάθε κύβο} \quad Q \subset \mathbb{R}^n.$$

Έστω λοιπόν ένας κύβος Q και $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Αν $\int_Q |f(x)| \, dx = 0$ ή $\int_Q |f(x)| \, w(x)\, dx = \infty$ δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\frac{1}{|Q|} |f(x)| \, dx > \lambda > 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$Mf(x) > \lambda > 0, \quad \forall x \in Q.$$

Με άλλα λόγια ισχύει ότι

$$Q \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \Rightarrow w(Q) \leq w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)\, dx.$$

Αν αντικαταστήσουμε την f από την $f\mathcal{X}_Q$ τότε

$$w(Q) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_Q |f(x)|^p \, w(x)\, dx,$$

και από τον ορισμό του λ καταλήγουμε

$$\left(\frac{1}{|Q|} |f(x)| \, dx\right)^p \leq \frac{C}{w(Q)} \int_Q |f(x)|^p \, w(x)\, dx.$$

Δηλαδή ικανοποιείται η σχέση 3.4. Από το θεώρημα 3.1.6 έχουμε ότι $w \in A_p$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Άρα το τελευταίο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι αν ένα βάρος $w \in A_p$, τότε ο μεγιστικός τελεστής των Hardy- Littlewood θα είναι ασθενούς τύπου με βάρος (p,p). Σύμφωνα με αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να δώσουμε μια απάντηση στο βασικό μας ερώτημα, που είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 3.2.5 (Muchenhoupt 1972)**.** *Έστω $1 < p < \infty$. Τότε υπάρχει $C > 0$ τέτοιο, ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)\, dx, \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

αν και μόνο αν, $w \in A_p$.

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι ισχυρού τύπου με βάρος (p,p). Τότε έχουμε δείξει ότι θα είναι και ασθενούς τύπου με βάρος (p,p). Από το προηγούμενο θεώρημα όμως έχουμε ότι τότε $w \in A_p$.

($\Leftarrow$) Έστω $w \in A_p$. Παρατηρούμε ότι αν $p = \infty$ τότε

$$\|Mf\|_{L^\infty_w} = \|Mf\|_{L^\infty} \overset{\text{Θεώρημα 1.1.7}}{\leq} \|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty_w}.$$

Δηλαδή ο μεγιστικός τελεστής είναι ισχυρού τύπου με βάρος (∞, ∞). Από την άλλη μεριά, αφού $w \in A_p$ από το πόρισμα 3.1.11 υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $w \in A_{p-\epsilon}$. Σύμφωνα όμως με το προηγούμενο θεώρημα 3.2.4 ο μεγιστικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου με βάρος $(p-\epsilon, p-\epsilon)$. Θυμίζουμε επίσης ότι ο τελεστής M είναι υποπροσθετικός, δηλαδή

$$|M(f+g)(x)| \leq |Mf(x)| + |Mg(x)| \quad \text{σχεδόν παντού στον} \quad \mathbb{R}^n.$$

Άρα ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του θεωρημάτος παρεμβολής του Marcinkiewicz, συνεπώς ο μεγιστικός τελεστής είναι ισχυρού τύπου (p,p), $p - \epsilon < p < \infty$ και ισχύει

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

που είναι το ζητούμενο.

□

Παρατηρώντας την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος αυτής της εργασίας, αξίζει να σημειώσουμε και να αναλύσουμε κάποια βασικά γεγονότα. Η πιο σημαντική ιδιότητα της κλάσης A_p, όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι η αντίστροφη ανισότητα Holder 3.7. Αυτό φαίνεται και στην τελευταία απόδειξη καθώς η αντίστροφη ανισότητα Holder είναι αυτή που μας επιτρέπει να εξάγουμε την πληροφορία ότι αν $w \in A_p$ τότε $w \in A_{p-\epsilon}$ και επεκτείνοντας αυτό, ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου με βάρος $(p-\epsilon, p-\epsilon)$. Τέλος, βλέπουμε ότι όπως και στους κλασικούς χώρους Lebesgue έτσι και στους χώρους Lebesgue με βάρη, το βασικό εργαλείο με την βοήθεια του οποίου καταλήγουμε στο επιθυμητό σημείο, είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz.

Συνοψίζοντας, στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε τον μεγιστικό τελεστή Hardy-Littlewood και βασισμένοι σε κάποια σημαντικά αποτελεματα δείξαμε ότι ο τελεστής αυτός είναι φραγμένος στους κλασικούς χώρους Lebesgue. Στην συνέχεια θέλαμε να μεταφέρουμε αυτό το αποτέλεσμα στους χωρους Lebesgue με βάρη. Έτσι αναρωτηθήκαμε αν για οποιαδήποτε συνάρτηση αποτελεί ένα βάρος, ο μεγιστικός τελεστής θα εξακολουθεί να είναι φραγμένος στον χώρο Lebesgue που επάγεται από το συγκεκριμένο βάρος. Η απάντηση, όπως είδαμε, είναι αρνητική. Μόνο τα βάρη που ανήκουν στην κλάση A_p, για $1 < p \leq +\infty$ μπορούν να μας εφοδιάσουν με ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να έχουμε μια καταφατική απάντηση στο ερώτημά μας. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η μεταφορά αποτελεσμάτων από τους κλασικούς χώρους Lebesgue στους χώρους Lebesgue με βάρη δεν είναι μια προφανής διαδικασία. Χρειάζεται να χτίσουμε μια αρκετά μεγάλη θεωρία, στην οποία πρέπει να βασιστούμε για να εξάγουμε τις πληροφορίες που θέλουμε.

Βιβλιογραφία

[1] A. Torchinsky, *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic press, INC., NY, 1986.

[2] J. Garcia-Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, notes of mathematics, VOL. 104, North Holland.

[3] D.D. Haroske, *Sobolev spaces with Muckenhoupt weights, singularities and inequalities*, Georgian Mathematical Journal, VOL. 15, 2008.

[4] E.M. Stein, *Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, New Jersey, 1993.

[5] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[6] S. Skoller, *Notes on L^p and sobolev spaces*, University of California, USA.

[7] J. Duoandikoetxea, *Weights for maximal functions and singular integrals.*

[8] D.V. Cruz-Uribe, J.M. Martell and C. Perez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de FRancia*, Birkhausen, 1979.

[9] A.C. Cavalheiro, *Weighted Sobolev spaces and degenerate elliptic equations*, Bol. Soc. Paran. Mat. , Vol. 26, 2008.

[10] T. Kilpelainen, *Weighted sobolev spaces and capacity*, University of Jyvaskyla, Vol. 19, 1994.

[11] M. Milman, *A note on Gehring's lemma*, Florida Atlantic University, Vol. 21, 1996.