

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



**ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΝ
ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

για τον Επιστημονικό Τίτλο του Διδάκτορα Μηχανικού υποβληθείσα στη
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ι. ΤΣΙΠΗΡΑ
Διπλωματούχου Πολιτικού Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Ιούλιος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



**ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΝ
ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

για τον Επιστημονικό Τίτλο του Διδάκτορα Μηχανικού υποβληθείσα στη
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ι. ΤΣΙΠΗΡΑ
Διπλωματούχου Πολιτικού Μηχανικού Ε.Μ.Π.

Εξεταστική επιτροπή:

Ε. Σαπουντζάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Β. Κουμούσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μ. Παπαδρακάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ι. Βάγιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Χ. Γαντές
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σ. Καραμάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής Παν. Θεσσαλίας

Κ. Σπηλιόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Ιούλιος 2013

Η παρούσα διατριβή χρηματοδοτήθηκε από τον Ειδικό Λογαριασμό
Κονδυλίων και Έρευνας του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου

Copyright © Βασίλειος Ι. Τσίππρας, 2013

Με επιφύλαξη κάθε νόμιμου δικαιώματος.

Στην οικογένειά μου

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Leonhard Euler

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Η Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή, αποτελούμενη από τους κ.κ. Ε. Σαπουντζάκη ως επιβλέποντα, Καθηγητή Ε.Μ.Π., Β. Κουμούση, Καθηγητή Ε.Μ.Π. και Μ. Παπαδρακάκη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., συγκροτήθηκε σύμφωνα με τις 22/05/2007 και 11/09/2007 αποφάσεις της Γενικής Συνέλευσης Ειδικής Σύθεσης της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. Η διατριβή χρηματοδοτήθηκε από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων και Έρευνας του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Μέσα από τις γραμμές αυτές επιθυμώ να ευχαριστήσω ειλικρινά το Δάσκαλό μου και επιβλέποντα της διατριβής κ. Ε. Σαπουντζάκη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., ο οποίος υπήρξε συμπαραστάτης σε όλη τη διάρκεια της προσπάθειας αυτής. Η επιστημονική και ηθική υποστήριξη του ήταν καθοριστική για την εκπόνηση και την τελική διαμόρφωση της εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνονται και στα άλλα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, κ.κ. Β. Κουμούση, Καθηγητή Ε.Μ.Π. και Μ. Παπαδρακάκη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την παρακολούθηση της ερευνητικής μου πορείας, καθώς και για τις συμβουλές και εύστοχες υποδείξεις τους που συνέβαλαν στην καλύτερη παρουσίαση της εργασίας αυτής. Επιθυμώ επίσης να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής κ.κ. Ι. Βάγια, Καθηγητή Ε.Μ.Π., Χ. Γαντέ Καθηγητή Ε.Μ.Π., Σ. Καραμάνο, Αναπληρωτή Καθηγητή Παν. Θεσσαλίας και Κ. Σπηλιόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. για το άριστο πνεύμα συνεργασίας που επέδειξαν. Επιπλέον, εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον Ε.Α.Κ.Ε. Ε.Μ.Π. για την ουσιαστική οικονομική υποστήριξη της προσπάθειάς μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες εκφράζονται προς το συνάδελφο Βασίλειο Μώκο για την επιστημονική συνεργασία μας και τις εποικοδομητικές επιστημονικές συζητήσεις μας. Επιθυμώ επίσης να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του Ε.Μ.Π. για τις εποικοδομητικές επιστημονικές συζητήσεις μας κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής και ιδιαίτερα τους Ιωάννη Ντουρακόπουλο, Ανδρέα Καμπίτση και Ιωάννη Δίκαρο, την κα. Φανή Κουβάκη για τη βοήθειά της, καθώς επίσης και τη Μαρία Μαυρογένη για την ηθική υποστήριξη της.

Τέλος, στους γονείς μου Ιωάννη και Βαρβάρα αναγνωρίζοντας το ιδιαίτερο ενδιαφέρον και κατανόησή τους καθώς και την πολύπλευρη υποστήριξη που μου προσέφεραν για την ολοκλήρωση αυτής της ερευνητικής συμβολής, αφιερώνεται το παρόν με ευγνωμοσύνη.

Περίληψη

Διδακτορική Διατριβή του Β.Ι. Τσίππια

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΝ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΕ ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελεί συμβολή στη μη γραμμική ανάλυση ράβδων υποβαλλόμενων σε στρεπτική φόρτιση. Συγκεκριμένα διατυπώνονται καινοτόμες θεωρίες στρέψης για τη διερεύνηση και επίλυση σειράς προβλημάτων που συναντώνται στην επιστήμη του μηχανικού. Τα προβλήματα αυτά είναι η μη γραμμική ελαστική στατική ή δυναμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με ή χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων και η μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη με ή χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Τα σχετικά μονοδιάστατα και διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών και αρχικών συνοριακών τιμών που μορφώνονται επιλύονται αριθμητικά εφαρμόζοντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, τη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης και την Πεδιακή Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων. Τα προβλήματα συνοριακών τιμών υπολογισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης διατυπώνονται λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη). Ως εκ τούτου δεν υπόκεινται στους περιορισμούς της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.

Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη στα εξεταζόμενα προβλήματα μέσω ολικής διατύπωσης Lagrange και της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Οι πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Κατά τη μελέτη της επιρροής δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, τοπική εξίσωση ισορροπίας (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες διατυπώνεται πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει κατάλληλα την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρέβλωση της ράβδου. Κατά τη μελέτη ράβδων σύνθετης διατομής, η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά διαθέτουν διαφορετικές ιδιότητες και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους, ενώ λαμβάνονται υπόψη φυσικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στις διεπιφάνειες των υλικών.

Βάσει των διαδικασιών που αναπτύσσονται, μελετώνται αντιπροσωπευτικά αριθμητικά παραδείγματα. Η ακρίβεια και η αξιοπιστία των προτεινόμενων μεθόδων επιβεβαιώνονται με υπάρχοντα αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα καθώς και με αποτελέσματα στερεών και κελυφωτών πεπερασμένων στοιχείων.

Abstract

PhD Dissertation by V.J. Tsipiras

CONTRIBUTION TO THE NONLINEAR ANALYSIS OF BARS SUBJECTED TO TORSIONAL LOADING

This PhD dissertation is a contribution to the nonlinear analysis of bars subjected to torsional loading. More specifically, novel torsion theories are formulated in order to investigate and solve problems encountered in engineering science. These problems are the nonlinear elastic static or dynamic analysis of bars under nonuniform torsion taking into account or ignoring secondary torsional moment deformation effects and the nonlinear inelastic static analysis of bars under uniform or nonuniform torsion taking into account or ignoring secondary torsional moment deformation effects. The relevant one-dimensional and two-dimensional boundary value and initial boundary value problems which are formulated are numerically solved employing the Boundary Element Method, the Analog Equation Method and the Domain Boundary Element Method. The boundary value problems, with which warping functions are determined, are formulated taking into account the local longitudinal equilibrium equation (along with the corresponding boundary condition). Thus, they are not subjected to the limitations of Thin Tube Theory.

The geometrical nonlinearity is taken into account in the examined problems through a Total Lagrangian formulation and the finite displacement - small strain theory, in which the transverse displacement components are expressed so as to be valid for large twisting rotations. Inelastic deformations are modelled through a distributed plasticity model exploiting three dimensional material constitutive laws. In the investigation of secondary torsional moment deformation effects, in order to accomplish through the stress field of the bar, with which global equilibrium equations are formulated, the satisfaction of a local equilibrium equation (along with the corresponding boundary condition) under linear elastic static conditions, a suitable displacement field for the description of the primary and the secondary warping of the bar is formulated. In the analysis of composite bars, the composite cross section consists of materials in contact, each of which can surround a finite number of inclusions. The materials have different properties and are perfectly bonded together, while natural boundary conditions at the interfaces between different material regions are taken into account.

On the basis of the developed analytical and numerical procedures, representative examples are studied. The accuracy and reliability of the proposed methods are confirmed through existing numerical and experimental results, as well as through results obtained from solid and shell finite element analyses.

Περιεχόμενα

Εκτενής Περίληψη	1
I. Εισαγωγή	7
I.1 Αντικείμενο Διδακτορικής Διατριβής και Κίνητρο	7
I.2 Θεωρία Ράβδου και Αριθμητικές Μέθοδοι	17
I.3 Διάρθρωση και Πρωτοτυπίες Διδακτορικής Διατριβής	22
1. Μη Γραμμική Ελαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου υπό Ανομοιόμορφη Στρέψη	29
1.1 Εισαγωγή	29
1.2 Διατύπωση του Προβλήματος	33
1.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις.....	34
1.2.2 Πρωτογενής και Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης	39
1.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες	46
1.2.4 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος	54
1.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	63
1.3.1 Για τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής	63
1.3.2 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τις Εγκάρσιες Μετατοπίσεις, τις Καμπτικές Στροφές και τις Καμπτικές Καμπυλότητες	67
1.3.3 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	70
1.3.4 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	72
1.3.5 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές	75
1.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα	83
1.4.1 Παράδειγμα 1	84
1.4.2 Παράδειγμα 2	85
1.4.3 Παράδειγμα 3	87
1.4.4 Παράδειγμα 4	90
1.4.5 Παράδειγμα 5	96
1.4.6 Παράδειγμα 6	99
1.5 Συμπεράσματα	101
2. Μη Γραμμική Ελαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου με Δευτερογενείς Διατμητικές Παραμορφώσεις	107
2.1 Εισαγωγή	107
2.2 Διατύπωση του Προβλήματος	111
2.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις.....	112
2.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση	

Στρέβλωση	116
2.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες	120
2.2.4 Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης	127
2.2.5 Εναλλακτική Διατύπωση του Προβλήματος	128
2.2.6 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος	131
2.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	135
2.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής και την Ανεξάρτητη Παράμετρο Στρέβλωσης	135
2.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	141
2.3.3 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	141
2.3.4 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές	141
2.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα	142
2.4.1 Παράδειγμα 1	142
2.4.2 Παράδειγμα 2	145
2.4.3 Παράδειγμα 3	147
2.4.4 Παράδειγμα 4	149
2.4.5 Παράδειγμα 5	150
2.4.6 Παράδειγμα 6	152
2.4.7 Παράδειγμα 7	154
2.4.8 Παράδειγμα 8	155
2.4.9 Παράδειγμα 9	156
2.4.10 Παράδειγμα 10	160
2.4.11 Παράδειγμα 11	162
2.5 Ποιοτική Ερμηνεία Επιρροής Δευτερογενών Διατμητικών Παραμορφώσεων	166
2.6 Συμπεράσματα	168
3. Μη Γραμμική Ελαστική Δυναμική Ανάλυση Ράβδου υπό Ανομοιόμορφη Στρέψη	171
3.1 Εισαγωγή	171
3.2 Διατύπωση του Προβλήματος	176
3.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις	176
3.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης	179
3.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Δυναμικής Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες, Αρχικές Συνθήκες	181
3.2.4 Απλοποιημένα Προβλήματα Αρχικών Συνοριακών Τιμών	185
3.2.5 Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης	188
3.2.6 Εναλλακτικές Διατυπώσεις του Προβλήματος	188
3.2.7 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος	191
3.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	195
3.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής και την Ανεξάρτητη Παράμετρο Στρέβλωσης	195
3.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	207
3.3.3 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	208
3.3.4 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές	210
3.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα	210

3.4.1 Παράδειγμα 1	210
3.4.2 Παράδειγμα 2	214
3.4.3 Παράδειγμα 3	218
3.4.4 Παράδειγμα 4	220
3.4.5 Παράδειγμα 5	223
3.4.6 Παράδειγμα 6	228
3.4.7 Παράδειγμα 7	231
3.4.8 Παράδειγμα 8	237
3.4.9 Παράδειγμα 9	240
3.4.10 Παράδειγμα 10	245
3.5 Συμπεράσματα	246
4. Μη Γραμμική Ελαστοπλαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου υπό Ομοιόμορφη Στρέψη	249
4.1 Εισαγωγή	249
4.2 Διατύπωση του Προβλήματος	252
4.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις.....	253
4.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης	258
4.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες	260
4.2.4 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος	264
4.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	269
4.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση και τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής	269
4.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	270
4.3.3 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές και τα Πλαστικά Μέρη των Εντατικών Μεγεθών	273
4.3.4 Προσαυξητικός - Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης του Προβλήματος	274
4.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα	280
4.4.1 Παράδειγμα 1	282
4.4.2 Παράδειγμα 2	283
4.4.3 Παράδειγμα 3	284
4.4.4 Παράδειγμα 4	291
4.4.5 Παράδειγμα 5	293
4.4.6 Παράδειγμα 6	295
4.4.7 Παράδειγμα 7	296
4.4.8 Παράδειγμα 8	297
4.4.9 Παράδειγμα 9	307
4.5 Συμπεράσματα	309
5. Μη Γραμμική Ελαστοπλαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου υπό Ανομοιόμορφη Στρέψη	313
5.1 Εισαγωγή	313
5.2 Διατύπωση του Προβλήματος	317
5.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις.....	317
5.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση	

Στρέβλωση	320
5.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες	322
5.2.4 Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης	327
5.2.5 Εναλλακτικές Διατυπώσεις του Προβλήματος	327
5.2.6 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος	331
5.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	335
5.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής και την Ανεξάρτητη Παράμετρο Στρέβλωσης	335
5.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	340
5.3.3 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης	341
5.3.4 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές και τα Πλαστικά Μέρη των Εντατικών Μεγεθών	341
5.3.5 Προσαυξητικός - Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης του Προβλήματος	342
5.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα	347
5.4.1 Παράδειγμα 1	347
5.4.2 Παράδειγμα 2	349
5.4.3 Παράδειγμα 3	350
5.4.4 Παράδειγμα 4	353
5.4.5 Παράδειγμα 5	354
5.4.6 Παράδειγμα 6	358
5.4.7 Παράδειγμα 7	360
5.5 Συμπεράσματα	363
6. Συμπεράσματα και Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα	365
6.1 Συμπεράσματα	365
6.2 Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα	366
Παράρτημα Π1: Η Άμεση BEM για τη Διδιάστατη Εξίσωση Poisson σε Σύνθετες Περιοχές	369
Π1.1 Εισαγωγή	369
Π1.2 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις	371
Π1.3 Αριθμητική επίλυση για την περίπτωση κατανεμημένης πηγής A	376
Π1.4 Αριθμητική επίλυση για την περίπτωση κατανεμημένης πηγής B	381
Παράρτημα Π2: Η AEM για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} και 4^{ης} Τάξης	387
Π2.1 Εισαγωγή	387
Π2.2 Βασικές Έννοιες της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης	388
Π2.3 Η AEM για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2 ^{ης} Τάξης	389
Π2.3.1 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	389
Π2.3.2 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων	395
Π2.4 Η AEM για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 4 ^{ης} Τάξης	396
Π2.4.1 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση	396
Π2.4.2 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων	405
Παράρτημα Π3: Η Πεδιακή BEM για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης}	

Τάξης	409
Π3.1 Εισαγωγή	409
Π3.2 Βασικές Έννοιες της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων	410
Π3.3 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης	411
Π3.4 Μέθοδος Προσέγγισης του Άγνωστου Μεγέθους	412
Παράρτημα Π4: Στοιχεία Μηχανικής Συνεχούς Μέσου	415
Π4.1 Θεωρία Παραμόρφωσης	415
Π4.1.1 Μετατοπίσεις	415
Π4.1.2 Παραμορφώσεις	416
Π4.1.2.1 Μεταβολή Μήκους Απειροστού Στοιχείου	417
Π4.1.2.2 Μεταβολή Κατεύθυνσης Απειροστού Στοιχείου	420
Π4.1.2.3 Μεταβολή Όγκου Απειροστού Στοιχείου	422
Π4.1.2.4 Μεταβολή Επιφάνειας Απειροστού Στοιχείου	423
Π4.1.2.5 Απειροστικός Τανυστής Παραμόρφωσης	424
Π4.2 Θεωρία Τάσης	425
Π4.2.1 Διάνυσμα Τάσης	425
Π4.2.2 Τανυστής Τάσης Cauchy	426
Π4.2.3 Εξισώσεις Ισοροπίας	427
Π4.2.4 1ος Τανυστής Τάσης Piola - Kirchhoff	429
Π4.2.5 Αρχή Δυνατών Έργων	431
Π4.2.6 2ος Τανυστής Τάσης Piola - Kirchhoff	434
Π4.2.7 Φυσική Σημασία των Τανυστών Τάσης	436
Π4.2.8 Τανυστής Τάσης Cauchy Μικρών Μετατοπίσεων	437
Παράρτημα Π5: Στοιχεία Θεωρίας Υπερελαστικότητας και Θεωρίας Κλασικής Πλαστικότητας	439
Π5.1 Εισαγωγή	439
Π5.2 Στοιχεία Θεωρίας Υπερελαστικότητας	440
Π5.3 Στοιχεία Θεωρίας Κλασικής Πλαστικότητας	445
Π5.3.1 Θεωρία Μικρών Μετατοπίσεων - Μικρών Παραμορφώσεων	445
Π5.3.2 Θεωρία Μεγάλων Μετατοπίσεων - Μικρών Παραμορφώσεων	451
Παράρτημα Π6: Απόδειξη Μηδενισμού Σταθερής Κατανομής Διατμητικών Παραμορφώσεων	453
Παράρτημα Π7: Απόδειξη Μοναδικότητας Δευτερογενούς Συνάρτησης Στρέβλωσης	455
Παράρτημα Π8: Προσέγγιση Παραγώγων Μονοδιάστατης Συνάρτησης με Πεπερασμένες Διαφορές	459
Π8.1 Εισαγωγή	459
Π8.2 Προσέγγιση Πρώτης και Δεύτερης Παραγώγου	459
Π8.2.1 Κεντρική Διαφορά	460
Π8.2.2 Εμπρόσθια Διαφορά	462
Π8.2.3 Οπίσθια Διαφορά	465
Π8.2.4 Προσέγγιση Πρώτης και Δεύτερης Παραγώγου σε Διάστημα Χωρισμένο σε Ίσες Αποστάσεις	468

Βιβλιογραφία	471
---------------------------	------------

Εκτενής Περίληψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή διερευνάται και επιλύεται σειρά προβλημάτων μη γραμμικής ανάλυσης στρεπτόμενων ράβδων ομογενούς ή σύνθετης διατομής που συναντώνται στην επιστήμη του μηχανικού. Τα προβλήματα αυτά είναι η μη γραμμική ελαστική στατική ή δυναμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με ή χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων και η μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη με ή χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.

Η επίλυση των εξεταζόμενων προβλημάτων βασίζεται στη διατύπωση καινοτόμων θεωριών στρέψης (torsion theories), με τις οποίες το πεδίο μετατοπίσεων και οι συνιστώσες των τανυστών παραμόρφωσης και τάσης διατυπώνονται ως άθροισμα γινομένων μονοδιάστατων και διδιάστατων συναρτήσεων. Η αναλυτική λύση των μονοδιάστατων και διδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών και αρχικών συνοριακών τιμών που μορφώνονται κατά κανόνα δεν είναι εφικτή. Ως εκ τούτου, τα προβλήματα αυτά επιλύονται αριθμητικά εφαρμόζοντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method (BEM)), τη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method (AEM)), που αποτελεί εξέλιξη της BEM και την Πεδιακή BEM (Domain BEM).

Η εργασία περιλαμβάνει ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, πέντε κύρια κεφάλαια, ένα έκτο τελικό κεφάλαιο, οκτώ παραρτήματα καθώς και ένα κεφάλαιο βιβλιογραφίας. Το εισαγωγικό κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο αντικείμενο, στο κίνητρο, στη διάρθρωση και στις πρωτοτυπίες της εργασίας, ενώ γίνεται αναφορά στην επίλυση προβλημάτων ραβδωτών κατασκευών με θεωρία δοκού και με εναλλακτικές μεθόδους. Καθένα από τα εξεταζόμενα προβλήματα αναλύεται στο αντίστοιχο κύριο κεφαλαίο. Κάθε κύριο κεφάλαιο αποτελείται από την εισαγωγή, τη διατύπωση του προβλήματος, τις ολοκληρωτικές εξισώσεις για την αριθμητική επίλυση, αντιπροσωπευτικά αριθμητικά αποτελέσματα και τα συμπεράσματα. Στην εισαγωγή κάθε κύριου κεφαλαίου περιέχεται η βιβλιογραφική επισκόπηση του ερευνητικού έργου (“State of the Art”) του αντίστοιχου εξεταζόμενου προβλήματος και παρουσιάζονται τα πρωτότυπα σχετικά στοιχεία της εργασίας. Στο τελικό κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κύρια συμπεράσματα και αναφέρεται σειρά θεμάτων και προβλημάτων τα οποία χρήζουν περαιτέρω έρευνας στο μέλλον. Στο πρώτο παράρτημα παρουσιάζεται η άμεση BEM για την επίλυση της διδιάστατης εξίσωσης Poisson σε σύνθετες περιοχές. Στο δεύτερο παράρτημα παρουσιάζεται η AEM για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης και τετάρτης τάξης, ενώ στο τρίτο παράρτημα παρουσιάζεται η Πεδιακή BEM για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Στα επόμενα πέντε παραρτήματα περιλαμβάνονται διάφορα άλλα στοιχεία που είναι απαραίτητα για την κατανόηση του περιεχομένου των κύριων κεφαλαίων της εργασίας. Τέλος, στο κεφάλαιο βιβλιογραφίας παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βιβλιογραφικές αναφορές της διατριβής.

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αγνοούνται φαινόμενα εγκάρσιας παραμορφωσιμότητας (distortion) των διατομών. Σε κάθε εξεταζόμενο πρόβλημα λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα μέσω ολικής διατύπωσης Lagrange και της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Επίσης, τα προβλήματα συνοριακών τιμών υπολογισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης διατυπώνονται λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη). Ως εκ τούτου δεν υπόκεινται στους περιορισμούς της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ). Βάσει των αναλυτικών και αριθμητικών διαδικασιών που αναπτύχθηκαν στην εργασία αυτή συντάχθηκε πλήθος προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή, με τη βοήθεια των οποίων μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά αριθμητικά παραδείγματα ιδιαίτερου πρακτικού ενδιαφέροντος, τα οποία καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής των προτεινόμενων μεθόδων. Οι αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάζονται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύονται αποτελεσματικές. Η ακρίβεια και αξιοπιστία των ληφθέντων αποτελεσμάτων επιβεβαιώνεται με υπάρχουσες αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις και πειραματικά αποτελέσματα, καθώς και με προσομοιώματα στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων. Η διατύπωση και επίλυση των προαναφερθέντων προβλημάτων είναι πλήρης, συστηματική, πρωτότυπη και συμβάλλει στην ρεαλιστικότερη προσέγγιση τους. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά μεγέθη του κάθε προβλήματος. Στα κεφάλαια 2, 3, 5 αναλύεται η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στα προβλήματα που εξετάζονται σε αυτά. Προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, τοπική εξίσωση ισορροπίας (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες διατυπώνεται πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει κατάλληλα την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρέβλωση της ράβδου. Επιπλέον, στο κεφάλαιο 1, 4 αναλύονται και ράβδοι σύνθετης διατομής. Η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά διαθέτουν διαφορετικές ιδιότητες και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους, ενώ η ομογενής ράβδος απλής ή πολλαπλής συνοχής προκύπτει ως μερική περίπτωση. Λαμβάνονται υπόψη φυσικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στις διεπιφάνειες των υλικών.

Στο κεφάλαιο 1 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας τέσσερα προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται τρία (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης και μία πλασματική συνάρτηση, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη στρεπτική στροφή, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών

εξισώσεων. Ποσοτικοποιείται η αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και γενικότερα προσδιορίζονται οι επιρροές της στην ελαστική στατική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Προκύπτει ότι στρεπτικά, αξονικά και καμπτοδιατμητικά κινηματικά και εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα σε ράβδους ασύμμετρης διατομής.

Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με **επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων**. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας τρία προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή (ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης) της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Με την προτεινόμενη αριθμητική μέθοδο αντιμετωπίζονται επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος». Ερμηνεύεται ποιοτικά το μέγεθος και η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, σε ράβδους ανοικτής και κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής και ποσοτικοποιούνται τα σφάλματα της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών στον υπολογισμό γεωμετρικών σταθερών και τασικών μεγεθών του προβλήματος.

Στο κεφάλαιο 3 αναπτύσσεται το **δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με ή χωρίς **επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων**. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Τα δυναμικά φαινόμενα λαμβάνονται υπόψη μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης μάζας. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών καθώς και δύο προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης, μορφώνεται μονοδιάστατο πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης, σε συνδυασμό με τη μέθοδο Petzold - Gear για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων. Προκύπτει ότι οι μεγάλες στρεπτικές στροφές επηρεάζουν αισθητά και σύνθετα τη θεμελιώδη ιδιοσυχρότητα της στρεπτικής στροφής ράβδων που έχουν υποστεί στρεπτικό λυγισμό και υπόκεινται σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Επίσης, η απόκριση τόσο των κινηματικών όσο και των εντατικών μεγεθών ράβδων που βρίσκονται στην

προλυγισμική περιοχή τους και που υπόκεινται σε πρωτεύον συντονισμό, παρουσιάζει χαρακτηριστικά διακροτήματος.

Στο κεφάλαιο 4 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστοπλαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος. Η ράβδος υποβάλλεται σε γενικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες καθώς και γενικές συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης, ενώ η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται σε κανένα σημείο. Οι πλαστικές παραμορφώσεις λαμβάνονται υπόψη και στο επίπεδο της διατομής ενώ προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές ολοκληρώνονται με τη βοήθεια αποδοτικής επαναληπτικής μεθόδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνεται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστοπλαστικότητας (διδιάστατο) πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων που απαιτεί και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, η οποία ωστόσο χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Επίσης, μορφώνεται μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση και τη στρεπτική στροφή της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της υβριδικής μεθόδου Powell. Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών και του συστήματος εξισώσεων πραγματοποιούνται στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου που βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου. Προκύπτει ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη και έχει ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης. Επίσης, οι συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης επηρεάζουν αισθητά τη συμπεριφορά ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη και αυξάνουν τη στρεπτική στιβαρότητα.

Στο κεφάλαιο 5 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστοπλαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με **επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων**. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Οι πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές ολοκληρώνονται με τη βοήθεια αποδοτικής επαναληπτικής μεθόδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια των θεωριών ελαστικότητας και ελαστοπλαστικότητας τρία προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστρόφι της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Η επίλυση του προβλήματος αυτού πραγματοποιείται στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου που βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου. Με την προτεινόμενη αριθμητική μέθοδο αντιμετωπίζονται επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού»

«κλειδώματος». Προκύπτει ότι οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις επηρεάζουν την εξέλιξη της πλαστικοποίησης και την τοπική συμπεριφορά ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Ωστόσο, δεν μεταβάλλουν αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητά τους.

Στο *Κεφάλαιο 6* συνοψίζονται τα **τελικά συμπεράσματα** που προέκυψαν από την παρούσα ερευνητική συμβολή και παρουσιάζονται κατευθύνσεις για **μελλοντική έρευνα**.

Η έρευνα που παρουσιάζεται στη διατριβή αυτή είναι πρωτότυπη. Τα κύρια στοιχεία πρωτοτυπίας συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- i. Αναλύονται κατά περίπτωση στατικά ή δυναμικά ομογενείς ή σύνθετες ελαστικές ή ελαστοπλαστικές ράβδοι διατομής τυχόντος ασύμμετρου ή διπλά συμμετρικού σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) υπό γεωμετρικά μη γραμμική ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη. Προσδιορίζονται οι επιρροές της γεωμετρικής και υλικής μη γραμμικότητας.
- ii. Τα εξεταζόμενα προβλήματα αναλύονται χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
- iii. Διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε ελαστικές ομογενείς ή σύνθετες στατικά ή δυναμικά καταπονούμενες ράβδους υπό γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη, αξιοποιώντας τοπική εξίσωση ισορροπίας.
- iv. Διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε ελαστοπλαστικές ομογενείς ή σύνθετες ράβδους υπό γεωμετρικά μη γραμμική ομοιόμορφη στρέψη, αξιοποιώντας τοπική εξίσωση ισορροπίας. Λαμβάνονται υπόψη φυσικές συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες και πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής.
- v. Το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις στατικής ή δυναμικής ισορροπίας ελαστικών ή ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, ικανοποιεί τοπική εξίσωση ισορροπίας υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες.
- vi. Προσδιορίζονται οι επιρροές δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων σε ελαστικές ή ελαστοπλαστικές ράβδους ανοικτής ή κλειστής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
- vii. Τα εξεταζόμενα προβλήματα επιλύονται αριθμητικά με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων (BEM, AEM, Πεδιακή BEM).

Τέλος, επισημαίνεται ότι από την ερευνητική προσπάθεια προέκυψαν δημοσιεύσεις σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά διεθνούς κυκλοφορίας, σε πρακτικά διεθνών και εθνικών συνεδρίων καθώς και κεφάλαια σε βιβλία που εκδόθηκαν από διεθνείς εκδοτικούς οίκους.

Κεφάλαιο I

Εισαγωγή

I.1 Αντικείμενο Διδακτορικής Διατριβής και Κίνητρο

Ράβδος καλείται το σώμα εκείνο του οποίου η μία διάσταση, που ονομάζεται μήκος, είναι αρκετά μεγαλύτερη συγκριτικά με τις υπόλοιπες δύο, που ορίζουν το επίπεδο της διατομής. Ραβδωτά στοιχεία χρησιμοποιούνται εκτενώς σε ποικίλους κλάδους της επιστήμης του μηχανικού (αεροναυπηγική, αεροδιαστημική, ναυπηγική, μηχανολογία, δομοστατική, μικροηλεκτρονική, νανοτεχνολογία κ.λ.π.) εξαιτίας της ιδιαίτερης γεωμετρίας τους, η οποία ανταποκρίνεται επιτυχώς στους στόχους λειτουργικότητας, ασφάλειας, οικονομικότητας και αισθητικής που τίθενται στον σχεδιασμό κατασκευών.

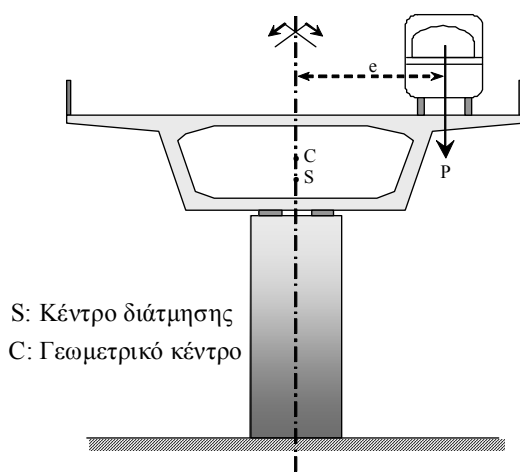
Σε πολλές ραβδωτές κατασκευές, το υλικό από το οποίο αποτελούνται είναι ισότροπο, δηλαδή εμφανίζει προς όλες τις χωρικές διευθύνσεις την ίδια καταστατική συμπεριφορά. Συνεπώς η μελέτη ισότροπων υλικών καλύπτει σημαντικό εύρος πρακτικών εφαρμογών. Εξάλλου, η ισότροπη συμπεριφορά είναι η απλούστερη από αυτές συναντώνται στα σύγχρονα υλικά των κατασκευών, συνεπώς η ανάλυσή της είναι απαραίτητη προτού διερευνηθούν πιο σύνθετα καταστατικά προσομοιώματα. Επιπρόσθετα, μία από τις σύγχρονες εξελίξεις στην τεχνολογία κατασκευών πολιτικού μηχανικού είναι η χρήση περισσότερων υλικών στο σχεδιασμό διάφορων δομικών στοιχείων. Έτσι, πέρα από ομογενή ραβδωτά στοιχεία τα οποία αποτελούνται από ένα υλικό, κατασκευάζονται οι λεγόμενοι σύμμικτοι φορείς που αποτελούνται από χάλυβα και σκυρόδεμα (π.χ. πλάκα από σιδηροπαγές σκυρόδεμα που υποστηρίζεται από μεταλλική ράβδο). Η χρήση περισσότερων υλικών έχει αυξηθεί τα τελευταία χρόνια καθώς επιτρέπει τον σχεδιασμό ασφαλέστερων και οικονομικότερων κατασκευών. Η μελέτη ράβδων σύνθετης διατομής που αποτελούνται από υλικά σε επαφή (που μπορεί να διαθέτουν και εγκλείσματα) κρίνεται επιτακτική καθώς υποστηρίζει και διευρύνει τη μοντέρνα τεχνολογία κατασκευών, όπου επιδιώκεται βελτίωση χαρακτηριστικών της κατασκευής όπως λόγος αντοχής προς ίδιο βάρος, λόγος στιβαρότητας προς ίδιο βάρος, πλαστιμότητα, οικονομία, αισθητική κ.λ.π.

Η σπουδαιότητα πολλών κατασκευών που είναι ραβδωτές ή υποστηρίζονται από ραβδωτά στοιχεία επιβάλλει την αξιόπιστη προσομοίωσή τους. Ίσως η σημαντικότερη θεωρία προσομοίωσης ραβδωτών στοιχείων (και γενικότερα στερεών σωμάτων) είναι η Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων και ειδικότερα η Μηχανική Συνεχούς Μέσου. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις κατασκευών πολιτικού μηχανικού που μπορούν να προσομοιωθούν αξιόπιστα στα πλαίσια της θεωρίας αυτής είναι τα ακόλουθα.

- Μεταλλικές κατασκευές και κατασκευές από αλουμίνιο (πριν το στάδιο θραύσης ή εμφάνισης ρωγμών).
- Κατασκευές από προεντεταμένο σκυρόδεμα (όταν σχεδιάζονται έτσι ώστε να μην ρηγματώνονται).

- Κατασκευές από σιδηροπαγές σκυρόδεμα οι οποίες βρίσκονται σε αρηγμάτωση κατάσταση (στάδιο I).
- Σύμμικτες κατασκευές από χάλυβα και σκυρόδεμα (πριν το στάδιο θραύσης ή εμφάνισης ρωγμών).

Επιπλέον, σημειώνεται ότι έχουν αναπτυχθεί ποικίλα αξιόπιστα προσομοιώματα που βασίζονται στις παραδοχές της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου και εφαρμόζονται σε κατασκευές που ρηγματώνονται.

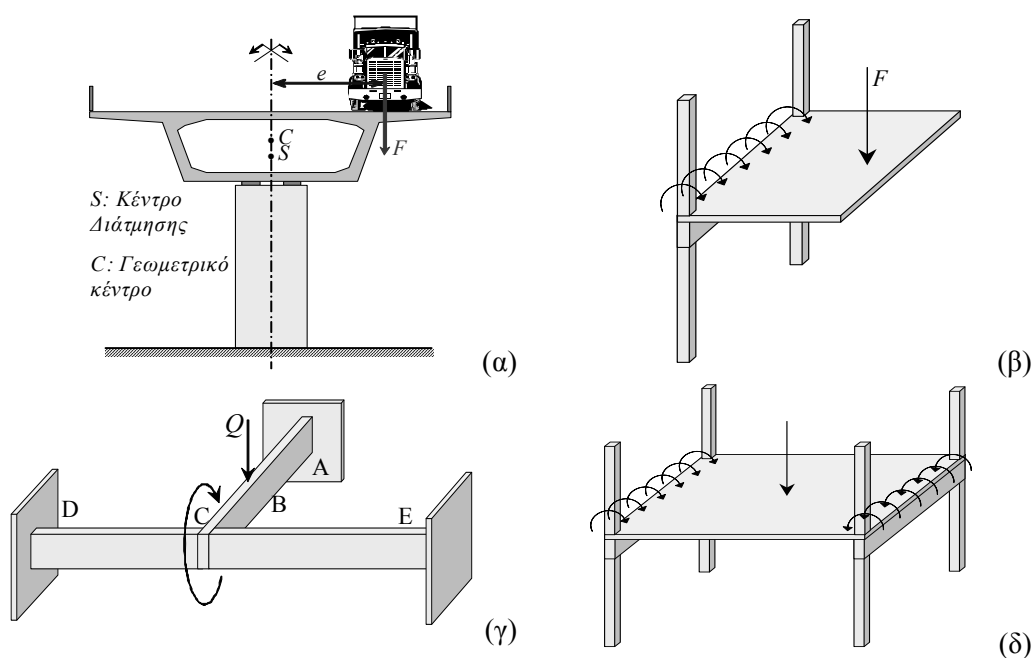


Σχήμα I.1. Ράβδος κιβωτιοειδούς διατομής υποβαλλόμενη σε έκκεντρη ως προς το κέντρο διάτμησης φόρτιση.

Μία από τις περιπτώσεις φόρτισης ραβδωτών στοιχείων είναι η στρεπτική. Στρέψη καλείται η φόρτιση εκείνη κατά την οποία οι δράσεις που ασκούνται στο επίπεδο κάποιας διατομής οδηγούν στην ανάπτυξη ροπής κατά τη διαμήκη διεύθυνση της ράβδου. Η ροπή αυτή καλείται στρεπτική. Πέραν της στρεπτικής φόρτισης που προκαλείται από δράσεις επί διατομής με μηδενική συνισταμένη δύναμη, η στρέψη στα ραβδωτά στοιχεία εμφανίζεται και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η εγκάρσια συνισταμένη δύναμη της εξωτερικής φόρτισης δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της ράβδου (Σχ.Ι.1) [Weber 1926, Trefftz 1935]. Αν και πολλές φορές η στρέψη συνδυάζεται με άλλες φορτίσεις όπως αξονική και καμπτική, εντούτοις σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα από αυτές. Εξάλλου, η διερεύνηση της αμιγούς στρεπτικής συμπεριφοράς ραβδωτών στοιχείων αποτελεί σημαντικό βήμα κατανόησης σύνθετων φαινομένων όπου συνδυάζονται διάφορες εντάσεις, όπως πλευρικός λυγισμός, στρεπτοκαμπτικός λυγισμός, εγκάρσια παραμόρφωση διατομών (distortion) ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής, καμπύλοι φορείς σε οριζόντιο επίπεδο υπό εγκάρσια ένταση κ.λ.π.

Αναφορικά με την κατηγοριοποίηση της στρέψης ως εντατική κατάσταση, διακρίνονται οι περιπτώσεις της άμεσης και της έμμεσης στρέψης. Η άμεση στρέψη καλείται και στρέψη ισορροπίας και προκύπτει όταν πρέπει να αναπτυχθεί στρεπτική ένταση σε ράβδο προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία της (Σχ.Ι.2α,β). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί κατάστρωμα φορέα γεφυροποιίας που είναι καμπύλο σε οριζόντιο επίπεδο. Στο κατάστρωμα αναπτύσσεται αναπόφευκτα στρεπτική ένταση προκειμένου να αναληφθούν έκκεντρα φορτία κυκλοφορίας ή ακόμα και το ίδιο βάρος του καταστρώματος (Σχ.Ι.2α). Η έμμεση στρέψη καλείται και στρέψη

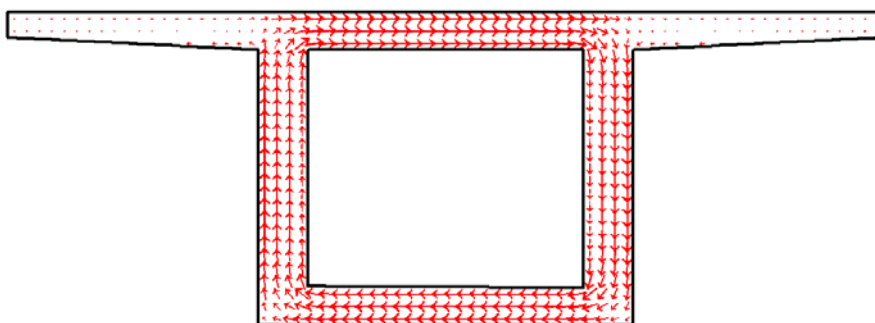
συμβιβαστού και προκύπτει όταν αναπτύσσεται δευτερογενώς στρεπτική ένταση σε ράβδο προκειμένου να εξασφαλιστεί το συμβιβαστό των στροφών μεταξύ της ράβδου και άλλων παρακείμενων στοιχείων (Σχ.Ι.2γ,δ). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί πλάκα υποβαλλόμενη σε εγκάρσια ένταση, η οποία υποστηρίζεται από ράβδους (Σχ.Ι.2δ). Εξαιτίας του συμβιβαστού των καμπτικών στροφών της πλάκας και των στρεπτικών στροφών των ράβδων, αναπτύσσεται έμμεση στρέψη στις τελευταίες. Στην έμμεση στρέψη, η ανάπτυξη στρεπτικής έντασης δεν είναι απαραίτητη προκειμένου να ικανοποιηθούν απαιτήσεις ισορροπίας. Έτσι π.χ. στο εξεταζόμενο παράδειγμα, αδυναμία ανάπτυξης στρεπτικής έντασης από τις ράβδους δεν οδηγεί κατ' ανάγκη σε αστοχία αφού οι ράβδοι θα υποστηρίξουν την πλάκα αναπτύσσοντας αποκλειστικά καμπτοδιατμητική ένταση. Καθίσταται σαφές ότι τουλάχιστον η περίπτωση της άμεσης στρέψης χρήζει ακριβούς προσομοίωσης και ανάλυσης, αφού ενδεχόμενη αδυναμία ανάπτυξης στρεπτικής έντασης μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία ή κατάρρευση την κατασκευή. Επιπλέον, η αξιόπιστη προσομοίωση της έμμεσης στρέψης οδηγεί σε ακριβέστερη ανάλυση της κατασκευής.



Σχήμα Ι.2. Άμεση (α, β) και έμμεση (γ, δ) στρέψη φορέων.

Αναφορικά με ζητήματα ευστάθειας, η στρέψη χαρακτηρίζεται ως παρεμποδιζόμενη (restrained), ελεύθερη (free) και αποσταθεροποιητική (destabilizing) [Trahair et al. 2008]. Η παρεμποδιζόμενη στρέψη προκύπτει όταν η ράβδος στην οποία οφείλεται η στρεπτική ένταση παρεμποδίζει την ανάπτυξη στρεπτικών παραμορφώσεων. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του Σχ.Ι.2γ, όπου εξαιτίας της μονολιθικότητας της σύνδεσης μεταξύ των ράβδων, η ράβδος ABC που προκαλεί στρέψη στη ράβδο DCE (εξαιτίας του συμβιβαστού των στροφών) ταυτόχρονα αντιστέκεται μέσω της καμπτικής στιβαρότητάς της στην ανάπτυξη στρεπτικών παραμορφώσεων. Η ελεύθερη στρέψη προκύπτει όταν η ράβδος στην οποία οφείλεται η στρεπτική ένταση δεν παρεμποδίζει την ανάπτυξη στρεπτικών παραμορφώσεων αλλά δεν επιτρέπει την ανάπτυξη πλευρικών μετατοπίσεων. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση ράβδων με διάταξη σαν αυτή του Σχ.Ι.2γ, αλλά με αρθρωτή αντί για

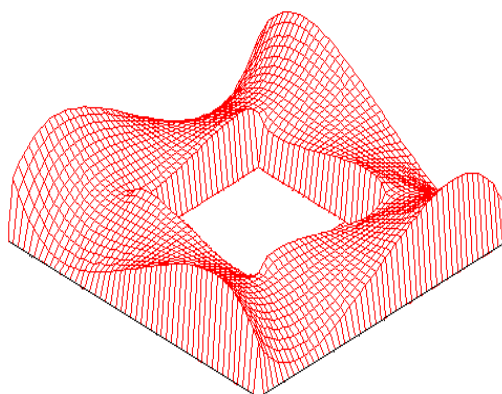
μονολιθική σύνδεση στο σημείο C. Συνήθως στην πράξη η αρθρωτή σύνδεση υλοποιείται ελαφρώς έκκεντρα ως προς τον άξονα της ράβδου DCE. Εξαιτίας της εκκεντρότητας αυτής, η ράβδος DCE αναπτύσσει στρεπτική ένταση χωρίς ωστόσο οι αναπτυσσόμενες στρεπτικές παραμορφώσεις να παρεμποδίζονται από τη ράβδο ABC. Ωστόσο, η ράβδος ABC αντιστέκεται μέσω της αξονικής στιβαρότητάς της στην πλευρική εκτροπή της στρεπτόμενης ράβδου. Η αποσταθεροποιητική στρέψη προκύπτει όταν η ράβδος στην οποία οφείλεται η στρεπτική ένταση δεν παρεμποδίζει ούτε την ανάπτυξη στρεπτικών παραμορφώσεων ούτε τις πλευρικές μετατοπίσεις. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του Σχ.Ι.2β, όπου ενδεχόμενος πλευρικός λυγισμός της στρεπτόμενης ράβδου αυξάνει τη στρέψη και την κάμψη εκτός επιπέδου [Trahair et al. 2008].



Σχήμα Ι.3. Διατμητικές τάσεις σε ράβδο κιβωτιοειδούς διατομής υπό στρεπτική φόρτιση.

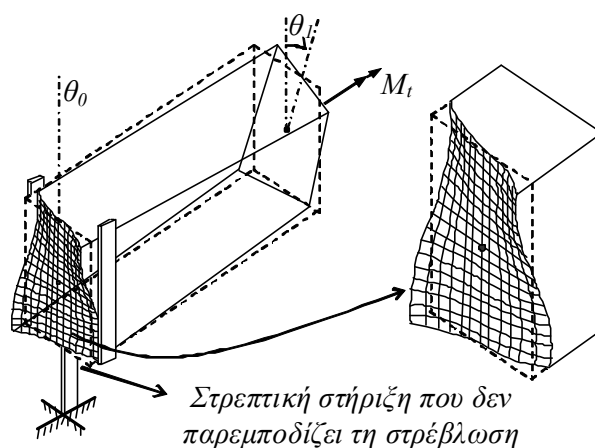
Προκειμένου να αναληφθεί στρεπτική φόρτιση από ράβδο και να εξασφαλιστεί η ισορροπία στρεπτικών ροπών, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις στο επίπεδο των διατομών (Σχ.Ι.3). Οι τάσεις αυτές συνδέονται με την ανάπτυξη διατμητικών παραμορφώσεων, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την πρόκληση στρεπτικών στροφών στις διατομές της ράβδου. Η ανάπτυξη της θεωρίας στρέψης ξεκίνησε πολύ παλιά από τον Coulomb [1784], ο οποίος μελέτησε στρεπτόμενες ράβδους κυκλικής διατομής και υπολόγισε τις αναπτυσσόμενες στρεπτικές στροφές συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου (τεχνική θεωρία στρέψης). Ο Coulomb διατύπωσε τη θεωρία του βασισμένος στην υπόθεση ότι στη ράβδο δεν αναπτύσσονται διαμήκεις μετατοπίσεις, δηλαδή η διατομή της ράβδου παραμένει επίπεδη κατά την παραμόρφωση. Σύντομα έγινε αντιληπτό ότι η θεωρία αυτή δεν προσομοιώνει αξιόπιστα ράβδους διατομής μη κυκλικού ή δακτυλιοειδούς σχήματος. Αργότερα, ο Saint Venant [1855] τροποποίησε κατάλληλα τη θεωρία Coulomb ώστε να ισχύει και για διατομές τυχόντος σχήματος. Απέδειξε ότι οι διατομές ράβδου μη κυκλικής (ή δακτυλιοειδούς) διατομής υποβαλλόμενες σε στρέψη, δεν παραμένουν επίπεδες κατά την παραμόρφωση. Η επιφάνεια της αρχικά επίπεδης διατομής γίνεται στρεβλή και το φαινόμενο αυτό καλείται στρεπτική στρέβλωση (torsional warping) ή απλά στρέβλωση (Σχ.Ι.4). Η στρέβλωση αναπτύσσεται προκειμένου οι σχετικές διατμητικές παραμορφώσεις να οδηγήσουν σε διατμητικές τάσεις, οι οποίες να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση, καθώς επίσης και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου περί μηδενικής επιφανειακής δράσης κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις αυτές, ο Saint Venant προσδιόρισε πρόβλημα συνοριακών τιμών με τη βοήθεια του οποίου είναι δυνατό να προσδιοριστεί η στρέβλωση. Αποδεικνύεται ότι οι προαναφερθείσες εξισώσεις ικανοποιούνται για μηδενική στρέβλωση μόνο στην

περίπτωση ράβδων κυκλικής ή δακτυλιοειδούς διατομής (όπου η θεωρία Coulomb είναι ακριβής).

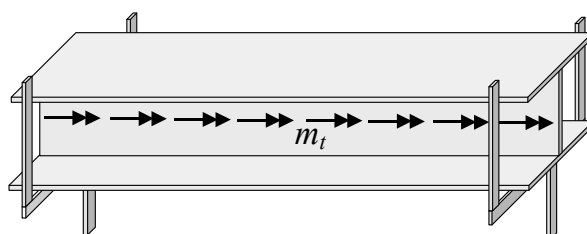


Σχήμα I.4. Στρεπτική στρέβλωση κοίλης τετραγωνικής διατομής.

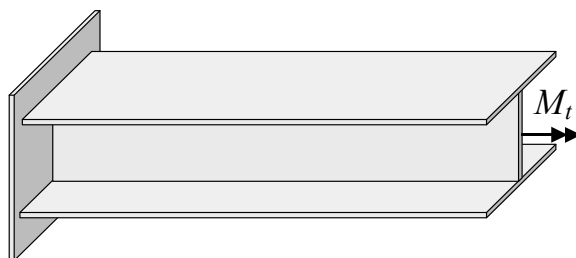
Αναφορικά με τη μεταβολή της στρέβλωσης κατά τη διαμήκη διεύθυνση της ράβδου η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη (uniform) και ανομοιόμορφη (nonuniform). Η ομοιόμορφη στρέψη προκύπτει όταν η στρέβλωση της ράβδου είναι σταθερή κατά τη διαμήκη διεύθυνσή της. Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, ο Saint Venant [1855] απέδειξε ότι ράβδος τυχούσας διατομής είναι υπό ομοιόμορφη στρέψη όταν επιβάλλονται δύο ισόποσες στρεπτικές ροπές στα άκρα της και η αναπτυσσόμενη στρέβλωση των διατομών δεν παρεμποδίζεται σε κανένα σημείο (Σχ.Ι.5). Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι η στρέβλωση είναι ανάλογη της ανά μονάδα μήκους γωνίας στροφής, η οποία καλείται συστροφή (twist) και είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου. Στη ράβδο ασκούνται αποκλειστικά διατμητικές τάσεις, οι οποίες καλούνται πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (primary shear stresses) ή τάσεις Saint Venant. Η ανομοιόμορφη στρέψη προκύπτει όταν η στρέβλωση της ράβδου δεν είναι σταθερή κατά τη διαμήκη διεύθυνσή της. Συνήθως στην πράξη το στρεπτικό φορτίο μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου ή/και η αναπτυσσόμενη στρέβλωση παρεμποδίζεται σε οποιοδήποτε σημείο της. Στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται ανομοιόμορφη στρέψη (Σχ.Ι.6), η οποία διερευνήθηκε για πρώτη φορά από τους Wagner [1929], Karpus [1937] και Marguerre [1940]. Άμεση συνέπεια της μεταβολής της στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου είναι η ανάπτυξη ορθών τάσεων κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Επειδή οι τάσεις αυτές μεταβάλλονται επίσης κατά μήκος της ράβδου, αναπτύσσονται επιπρόσθετες διατμητικές τάσεις προκειμένου να τις εξισορροπήσουν [Μώκος 2007]. Οι τάσεις αυτές καλούνται δευτερογενείς διατμητικές τάσεις (secondary shear stresses) ή διατμητικές τάσεις στρέβλωσης (warping shear stresses). Πέραν της εξισορρόπησης των ορθών τάσεων, οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις παραλαμβάνουν μέρος της στρεπτικής έντασης (δευτερογενής στρεπτική ροπή (secondary torsional moment)), με το υπόλοιπο μέρος της να παραλαμβάνεται από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (πρωτογενής στρεπτική ροπή (primary torsional moment)). Οι τάσεις αυτές συνυπάρχουν σε κάθε στρεπτόμενη ράβδο (υπό ανομοιόμορφη στρέψη), συνεπώς καθίσταται σαφής η σημασία διερεύνησης τόσο του πρωτογενούς όσο και του δευτερογενούς μηχανισμού ανάληψης δράσεων.



Σχήμα I.5. Ομοιόμορφη στρέψη ράβδου ορθογωνικής διατομής.



(α)

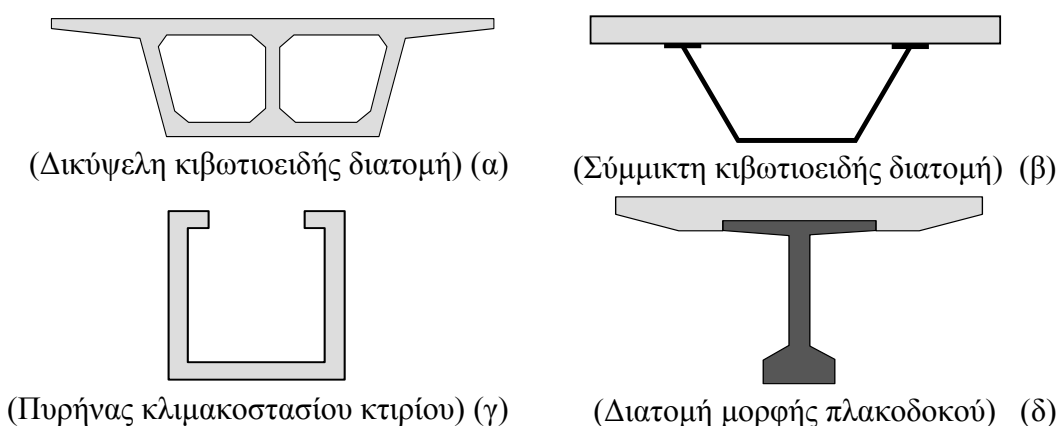


(β)

Σχήμα I.6. Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων διατομής I.

Οι ορθές τάσεις που προκύπτουν είτε λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης είτε λόγω μεταβολής της στρεπτικής φόρτισης κατά μήκος της ράβδου έχουν αυτοίσορροπούμενη κατανομή στο επίπεδο της διατομής, δηλαδή δίδουν μηδενική αξονική δύναμη και καμπτικές ροπές. Το γεγονός αυτό επιτρέπει, στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, τον προσδιορισμό του κέντρου συστροφής της διατομής [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b], δηλαδή του σημείου από το οποίο διέρχεται ο άξονας ως προς τον οποίο στρέφεται ράβδος υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Η στρόφη περί το κέντρο συστροφής πραγματοποιείται μόνο σε ράβδους που είναι ελεύθερες να μετατοπιστούν κατά την εγκάρσια έννοια και στις οποίες δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) συγκεκριμένος άξονας περιστροφής. Σε αντίθετη περίπτωση, οι ορθές τάσεις που προκύπτουν λόγω μεταβολής της στρέβλωσης έχουν ως αποτέλεσμα και την ανάπτυξη καμπτικής έντασης στην ράβδο (βλ. και [Roik 1978]). Επιπλέον, στην ομοιόμορφη στρέψη όπου δεν αναπτύσσονται ορθές τάσεις, στρόφη περί οποιουδήποτε διαμήκους άξονα οδηγεί στο ίδιο τασικό και παραμορφωσιακό πεδίο (βλ. και [Friemann 1993]).

Το εντατικό μέγεθος που ορίζεται από τις ορθές τάσεις καλείται δίρροπο στρέβλωσης (warping moment) ή δίρροπή (bimoment) και χαρακτηρίζεται ως «ανώτερο εντατικό μέγεθος» από τον Schardt [1966]. Εξαιτίας της ανάπτυξης στρέβλωσης και της εξισορρόπησης των ορθών από δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, είναι δυνατό να αναπτυχθούν στρεπτικά κινηματικά και εντατικά μεγέθη σε ράβδους που φορτίζονται κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Έτσι, επιφανειακές δράσεις που ασκούνται κατά τη διαμήκη διεύθυνση και δίδουν μη μηδενικό δίρροπο στρέβλωσης (στρεβλωτική φόρτιση) έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ανομοιόμορφης στρεπτικής συμπεριφοράς. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα ράβδου διατομής Z με ίσα πέλματα, της οποίας το ελεύθερο άκρο φορτίζεται στο γεωμετρικό κέντρο με συγκεντρωμένη αξονική δύναμη [Vlasov 1963, Σταυρίδης 2006], καθώς επίσης και ράβδου διατομής I, της οποίας το ελεύθερο άκρο φορτίζεται έκκεντρα με συγκεντρωμένη αξονική δύναμη [Roik 1978].



Σχήμα Ι.7. Διατομές μεγάλης (α,β) και μικρής (γ,δ) στρεπτικής στιβαρότητας.

Ράβδοι κλειστής κοίλης διατομής χαρακτηρίζονται από μικρή στρέβλωση και μεγάλη στρεπτική στιβαρότητα (Σχ.Ι.7α,β). Για το λόγο αυτό αποτελούν τη συνήθη σχεδιαστική λύση σε φορείς που καλούνται να παραλάβουν υψηλά στρεπτικά φορτία. Το φορτίο παραλαμβάνεται σχεδόν εξ' ολοκλήρου από τον πρωτογενή μηχανισμό ανάληψης δράσεων (ακόμα και στην περίπτωση ανομοιόμορφης στρέψης). Αντιθέτως, ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής είναι πιο ευαίσθητες στην ανάπτυξη στρεπτικών παραμορφώσεων (Σχ.Ι.7γ,δ) και ως εκ τούτου απαιτούν ακριβή προσομοίωση και ανάλυση. Ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που αποτελούνται από τουλάχιστον τρία τοιχώματα, τα οποία δεν συντρέχουν στο ίδιο σημείο (Σχ.Ι.7γ), αναπτύσσουν έντονη στρέβλωση και ως εκ τούτου το φορτίο παραλαμβάνεται και από τους δύο μηχανισμούς ανάληψης δράσεων (υπό την προϋπόθεση ότι η στρέβλωση μεταβάλλεται κατά τη διαμήκη διεύθυνση). Αντιθέτως, ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής των οποίων τα τοιχώματα συντρέχουν στο ίδιο σημείο (Σχ.Ι.7δ), αναπτύσσουν μικρή στρέβλωση και ως εκ τούτου το φορτίο παραλαμβάνεται κυρίως από τον πρωτογενή μηχανισμό (ακόμα και στην περίπτωση ανομοιόμορφης στρέψης). Σημειώνεται πάντως ότι σε κάθε περίπτωση η παρεμπόδιση της στρέβλωσης αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου, με το φαινόμενο αυτό να είναι φυσικά πιο αισθητό σε ράβδους που παρουσιάζουν έντονη στρέβλωση. Επίσης, πάντοτε τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης είναι εντονότερα σε κοντύτερες ράβδους [Ramm and Hofmann 1995, Μώκος 2007].

Ο Vlasov [1963], κατά τη μελέτη ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης αγνοώντας φαινόμενα εγκάρσια παραμορφωσιμότητας των διατομών (distortion), βασιζόμενος στην υπόθεση περί μηδενικών διατμητικών παραμορφώσεων στη μέση γραμμή των τοιχωμάτων της διατομής, απέδειξε ότι η στρέβλωση είναι ανάλογη της συστροφής. Με τη θεώρηση αυτή αγνοείται η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (που συνδέονται με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις) στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη θεωρώντας ότι η στρέβλωση της διατομής δεν είναι ανάλογη με τη συστροφή. Υιοθετώντας επιπρόσθετο κινηματικό μέγεθος που περιγράφει το μέγεθος της στρέβλωσης της διατομής, αποδεικνύεται ότι η προκύπτουσα θεωρία παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία 2ης τάξης καμπτόμενων δοκών Timoshenko [Roik and Sedlacek 1966, Rubin 2005, Murin and Kutis 2008]. Η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων προκύπτει παρόμοια με την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων σε δοκούς Timoshenko υπό καμπτοδιατμητική φόρτιση. Προκαλεί μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου, με το φαινόμενο να είναι εντονότερο σε κοντύτερες ράβδους. Η επιρροή τους αναμένεται να είναι πιο αισθητή σε ράβδους που είναι ευαίσθητες στην ανάπτυξη διατμητικών παραμορφώσεων. Χαρακτηριστικές είναι οι περιπτώσεις μη συμπαγών ράβδων που διαθέτουν κενά κατά μήκος τους καθώς και ράβδων από μοντέρνα υλικά που έχουν πολύ μικρό λόγο μέτρου ελαστικότητας προς μέτρο διάτμησης. Η στρεπτική στιβαρότητα μη κοντών ράβδων από ομογενές ισότροπο υλικό τόσο ανοικτής όσο και κλειστής λεπτότοιχης διατομής δεν επηρεάζεται αισθητά από τις δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις. Ωστόσο, τουλάχιστον στην περίπτωση ράβδων κλειστής λεπτότοιχης διατομής, το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι της ίδιας τάξης με αυτό των πρωτογενών [Massonnet 1983], συνεπώς οι παραμορφώσεις αυτές πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και να προσομοιώνονται αξιόπιστα.

Οι στρεπτικές στροφές που αναπτύσσονται στις διατομές ράβδων υπό στρέψη έχουν ως αποτέλεσμα την εγκάρσια μετατόπιση των υλικών σημείων τους επί κυκλικής τροχιάς. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα την παραμόρφωση των αρχικά ευθύγραμμων διαμήκων ινών της ράβδου. Οι ίνες αυτές αποκτούν ελικοειδή μορφή στην παραμορφωμένη διαμόρφωση [Attard 1986a, Trahair et al. 2008], η οποία είναι ακόμα πιο σύνθετη εάν ληφθεί υπόψη η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Οι παραμορφωμένες ίνες θα έχουν μεγαλύτερο μήκος συγκριτικά με την απαραμόρφωτη διαμόρφωση, εάν υποθεθεί ότι το μήκος της ράβδου είναι σταθερό. Ως εκ τούτου οι ίνες της ράβδου θα έχουν υποστεί εφελκυσμό. Ωστόσο εάν δεν ασκείται εφελκυστική αξονική δύναμη στη ράβδο, ο διαμήκης άξονας θα πρέπει να βραχυνθεί ούτως ώστε οι εξωτερικές ίνες, που μετατοπίζονται εγκάρσια περισσότερο από τις εσωτερικές, να βρίσκονται υπό εφελκυσμό και οι εσωτερικές υπό θλίψη, προκειμένου να αποκατασταθεί η ισορροπία αξονικών δυνάμεων. Το προκύπτον σύνθετο τασικό πεδίο που προκύπτει έχει ως αποτέλεσμα της αύξησης της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου [Attard 1986b, Trahair 2003, 2005, 2011]. Ο Young το 1807 (βλ. [Attard 1986b]) ανέλυσε για πρώτη φορά τη γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά στρεπτόμενων ράβδων κυκλικής διατομής και συσχέτισε την αξονική βράχυνση της ράβδου με μη γραμμικό όρο της συστροφής.

Στα πλαίσια της γεωμετρικά γραμμικής ανάλυσης, οι στρεπτικές στροφές θεωρούνται μικρές και οι ακριβείς κυκλικές τροχιές των υλικών σημείων αντικαθίστανται από τις αντίστοιχες χορδές τους. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα οι

διαμήκεις ίνες να παραμένουν ευθύγραμμες κατά την παραμόρφωση (εάν αγνοηθεί η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης), με αποτέλεσμα να αγνοείται η ελικοειδής μορφή τους. Επιπλέον, κατά τη γραμμική ανάλυση αγνοούνται οι μη γραμμικοί όροι των σχέσεων παραμορφώσεων - μετατοπίσεων της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου [Novozhilov 1953], ενώ η ισορροπία της ράβδου εξετάζεται στην απαραμόρφωτη διαμόρφωσή της. Προκειμένου να αναιρεθούν οι προσεγγίσεις αυτές, επιβάλλεται η διατύπωση κατάλληλης γεωμετρικά μη γραμμικής θεωρίας στρέψης, στην οποία να λαμβάνονται υπόψη (i) οι ακριβείς κυκλικές τροχιές των υλικών σημείων των διατομών της ράβδου, (ii) οι μη γραμμικοί όροι των σχέσεων παραμορφώσεων - μετατοπίσεων και (iii) η ισορροπία της ράβδου στην παραμορφωμένη διαμόρφωσή της. Επισημαίνεται ότι ράβδοι μικρής στρεπτικής στιβαρότητας ενδέχεται να αναπτύξουν μεγάλες στρεπτικές στροφές αρκετά πριν την εκδήλωση φαινομένων υλικής μη γραμμικότητας. Συνεπώς, τουλάχιστον σε αυτήν την περίπτωση είναι αναγκαία η γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση στρεπτόμενων ράβδων. Επιπλέον, η σύζευξη αξονικών και στρεπτικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών που προκύπτει εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας ράβδων υπό θλιπτική αξονική δύναμη. Στην περίπτωση αυτή καθίσταται σημαντική η μελέτη τόσο του φαινομένου του στρεπτικού λυγισμού [Chen and Trahair 1994, Szymczak 1980, Trahair 2012] όσο και της στρεπτικής μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ράβδων υπό θλιπτική αξονική δύναμη [Szymczak 1980, Trahair 2012]. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση ράβδων σταυροειδούς διατομής υπό αξονική θλιπτική δύναμη, οι οποίες κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις υφίστανται στρεπτικό αντί για καμπτικό λυγισμό [Chen and Trahair 1994].

Σε ράβδους μεγάλης ή μικρής στρεπτικής στιβαρότητας από όλκιμα υλικά, όταν η στρεπτική φόρτιση ξεπεράσει κάποιο όριο εκδηλώνονται φαινόμενα μερικής ή ολικής πλαστικοποίησης. Ράβδοι μικρής στρεπτικής στιβαρότητας ενδέχεται να πλαστικοποιηθούν μετά την εκδήλωση αισθητής γεωμετρικά μη γραμμικής συμπεριφοράς, συνεπώς καθίσταται σαφής η ανάγκη ταυτόχρονης διερεύνησης της υλικής και της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Επιπλέον, η εκδήλωση πλαστικής καταστατικής συμπεριφοράς συνδέεται με τη μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας. Συνεπώς, ράβδοι μεγαλύτερης στρεπτικής στιβαρότητας θα αναπτύξουν επίσης γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά, ύστερα από την πλαστικοποίησή τους. Ως εκ τούτου, και στην περίπτωση αυτή είναι χρήσιμη η διερεύνηση της αλληλεπίδρασης των δύο προαναφερθέντων μη γραμμικοτήτων. Η ελαστοπλαστική στρέψη ράβδων μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Nadai [1931] ο οποίος ανέλυσε ράβδους διατομής απλής συνοχής υπό ομοιόμορφη στρέψη αγνοώντας την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας.

Σύγχρονες κατασκευές πολιτικού μηχανικού σχεδιάζονται έτσι ώστε να εκδηλώσουν πλαστική καταστατική συμπεριφορά για ορισμένους τουλάχιστον συνδυασμούς φόρτισης (όπως π.χ. για σεισμικούς συνδυασμούς), συνεπώς η αξιόπιστη προσομοίωση και ανάλυση ελαστοπλαστικών στρεπτόμενων ράβδων καθίσταται αναγκαία στη φάση του σχεδιασμού. Εξάλλου, στην περίπτωση ακραίων τυχηματικών ή/και καταστροφικών δράσεων, είναι πιθανό να εκδηλωθούν μη γραμμικά φαινόμενα σε κατασκευές που έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να εκδηλώσουν αποκλειστικά γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Η μελέτη της συμπεριφοράς κατασκευών πέρα από τα όρια σχεδιασμού τους απαιτεί επίσης το συνυπολογισμό μη γραμμικών φαινομένων.

Σε ποικίλες εφαρμογές της επιστήμης του μηχανικού συναντάται η περίπτωση ράβδων που υπόκεινται σε δυναμικά φορτία, δηλαδή φορτία των οποίων το μέγεθος, η

διεύθυνση ή/και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Χαρακτηριστικά παραδείγματα δυναμικών φορτίων αποτελούν κινούμενα φορτία επί φορέων γεφυροποιίας και γερανογεφυρών, κρουστικά φορτία, σεισμικά δονήσεις και ανεμοπίεση. Ουσιαστικά όλα τα φορτία έχουν δυναμικό χαρακτήρα. Ωστόσο στην περίπτωση που ο χρόνος επιβολής τους επί της ράβδου είναι πολύ μεγαλύτερος της ιδιοπεριόδου της, τότε οι αναπτυσσόμενες αδρανειακές δυνάμεις είναι αμελητέες και τα φορτία αντιμετωπίζονται ως στατικά. Η δυναμική ανάλυση στρεπτόμενης ράβδου είναι απαιτητικότερη συγκριτικά με την αντίστοιχη στατική ανάλυση, αφού οι αναπτυσσόμενες αδρανειακές δυνάμεις αποτελούν μαζικές δράσεις οι οποίες πρέπει να συνυπολογιστούν μαζί με τις ασκούμενες (στατικές ή δυναμικές) δράσεις.

Χαρακτηριστικές εφαρμογές διάφορων κλάδων της επιστήμης του μηχανικού όπου ασκείται σε ραβδωτά στοιχεία στρεπτική φόρτιση αποκλειστικά ή σε συνδυασμό με άλλες φορτίσεις, είναι οι ακόλουθες.

- Ράβδοι υποβαλλόμενες σε έκκεντρη εγκάρσια ή/και αξονική στατική ή δυναμική φόρτιση.
- Πυρήνες κλιμακοστασίων και υποστυλώματα έκκεντρα τοποθετημένα στο εσωτερικό των πλακών κτιριακών κατασκευών υποβαλλόμενα σε σεισμική φόρτιση.
- Γερανογέφυρες και καταστρώματα φορέων γεφυροποιίας υποβαλλόμενα σε έκκεντρα κινούμενα (δυναμικά) φορτία.
- Ράβδοι και καταστρώματα φορέων γεφυροποιίας που έχουν καμπυλωθεί σε οριζόντιο επίπεδο υπό τη δράση του ίδιου βάρους.
- Καρίνες πλοίων υποβαλλόμενες σε δυναμικές δράσεις κυματισμών [Shama 2010].
- Εφαρμογές αεροδυναμικής όπου είναι σημαντική η ανάλυση της σύζευξης αξονικών και στρεπτικών μεγεθών εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας [Washizu 1975, Campanile and Thwariyah 2009].
- Εφαρμογές περιστρεφόμενων ράβδων όπου η ανάλυση θεωρώντας μεγάλες στρεπτικές στροφές είναι σημαντική εξαιτίας των σημαντικών φυγόκεντρων δυνάμεων [Friedmann et al. 2009].
- Εφαρμογές στη βιομηχανία αυτοκινήτου όπου χρησιμοποιούνται σε διάφορες περιπτώσεις ράβδοι υποβαλλόμενες σε στρέψη [Kroiss et al. 2011, Beerman 1980, Kobelev 2012].
- Εφαρμογές στην επιστήμη της αντοχής συγκρούσεων (crashworthiness) ελαστοπλαστικών ράβδων [Chen et al. 2001].
- Δυναμική στρεπτική ανάλυση στροφαλοφόρων αξόνων [Liu et al. 2012].
- Γεωμετρικά μη γραμμική δυναμική στρεπτική ανάλυση μικροπροβόλων που χρησιμοποιούνται στην Μικροσκοπία Ατομικών Δυνάμεων [Westra et al. 2012].
- Νανοσωλήνες άνθρακα υποβαλλόμενοι σε στρέψη όπου είναι σημαντική η ανάλυση της σύζευξης αξονικών και στρεπτικών μεγεθών εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας [Jeong et al. 2007].

Επιπλέον, επισημαίνεται ότι η αναφορά σύγχρονων κανονισμών έργων πολιτικού μηχανικού [Eurocode 3 - part 1.1 2005, AISC 360-05 2005] στην ανάλυση της στρέψης είναι σχετικά σύντομη, περιέχει ασάφειες καθώς και διάφορες απλοποιητικές παραδοχές. Από τα παραπάνω καθίσταται σαφής η ανάγκη διερεύνησης της συμπεριφοράς ράβδων που υποβάλλονται σε στρεπτική φόρτιση. Αν και στο παρελθόν πληθώρα ερευνητών έχει αναλύσει επιτυχώς τη στρεπτική συμπεριφορά ράβδων, εντούτοις ορισμένα ζητήματα, ιδίως μη γραμμικής συμπεριφοράς (υλικού και

γεωμετρίας), δεν έχουν ερευνηθεί επαρκώς. Η μη γραμμική ανάλυση ράβδου υπό στρεπτική φόρτιση αποτελεί *αντικείμενο μελέτης* της παρούσας διατριβής.

1.2 Θεωρία Δοκού και Αριθμητικές Μέθοδοι

Η προσομοίωση ράβδου υπό στρεπτική φόρτιση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας (ή ελαστοπλαστικότητας) που αποτελεί κλάδο της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου. Η θεωρία αυτή διατυπώνεται με τη βοήθεια 15 μερικών διαφορικών ή αλγεβρικών εξισώσεων (6 εξισώσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων, 6 καταστατικές εξισώσεις, 3 εξισώσεις ισορροπίας), οι οποίες υπόκεινται σε δοσμένες συνοριακές ή/και αρχικές συνθήκες. Η θεωρία έχει γενική ισχύ και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε στερεό σώμα. Με την επίλυση των εξισώσεων της προσδιορίζονται πλήρως σε κάθε υλικό σημείο του σώματος οι άγνωστοι του προβλήματος (3 συνιστώσες μετατοπίσεων, 6 συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης και 6 συνιστώσες του τανυστή τάσης).

Ωστόσο, οι αναλυτικές λύσεις των προαναφερθέντων εξισώσεων περιορίζονται σε εξαιρετικά απλές περιπτώσεις φόρτισης, γεωμετρίας, συνοριακών συνθηκών και συνήθως καλύπτουν μόνο την περίπτωση γραμμικής ελαστικής στατικής συμπεριφοράς. Έτσι, προκειμένου να απλοποιηθεί η περιγραφή του εξεταζόμενου προβλήματος, αξιοποιούμε την ιδιαίτερη γεωμετρία της ράβδου (η διαμήκης διάσταση είναι αρκετά μεγαλύτερη συγκριτικά με τις εγκάρσιες διαστάσεις). Βασιζόμενοι στην επιπρόσθετη γεωμετρική θεώρηση ότι οι ακραίες διατομές της ράβδου είναι κάθετες ως προς τη διαμήκη διεύθυνση, το πεδίο μετατοπίσεων και οι συνιστώσες των τανυστών παραμόρφωσης και τάσης διατυπώνονται ως άθροισμα γινομένων μονοδιάστατων και διδιάστατων συναρτήσεων. Οι μονοδιάστατες και διδιάστατες συναρτήσεις λαμβάνονται ως αποκλειστικά εξαρτώμενες από τη διαμήκη και τις εγκάρσιες συντεταγμένες της ράβδου, αντίστοιχα. Η προσέγγιση αυτή καλείται μέθοδος ημιδιακριτοποίησης (semidiscretization method) (βλ. και [Kantorovich and Krylov 1958]). Η συνηθέστερη ίσως εφαρμογή της ημιδιακριτοποίησης αποτελεί η δυναμική ανάλυση παραμορφώσιμων σωμάτων, όπου οι άγνωστες χωροχρονικές συναρτήσεις του προβλήματος διατυπώνονται ως άθροισμα γινομένων χρονικών και χωρικών συναρτήσεων. Ακολουθώντας την προαναφερθείσα προσέγγιση και χρησιμοποιώντας διάφορες μονοδιάστατες και διδιάστατες συναρτήσεις, μορφώνονται αντίστοιχα διάφορες *θεωρίες δοκού* (beam theories). Επισημαίνεται ότι με τον όρο *θεωρία δοκού* αναφερόμαστε στην διατύπωση θεωρίας τόσο για την περίπτωση στρεπτικής φόρτισης (*θεωρία στρέψης* (torsion theory)) όσο και για τις περιπτώσεις καμπτοδιαμητικής ή γενικής φόρτισης ράβδων. Θεωρίες δοκού έχουν μορφωθεί από πολύ παλιά (π.χ. θεωρία καμπτόμενων δοκών Bernoulli - Euler (1750), θεωρία στρέψης Coulomb (1784), θεωρία στρέψης Saint Venant (1855), θεωρία καμπτόμενων δοκών Timoshenko (1921)) και συνεχίζουν να αποτελούν ενεργό πεδίο έρευνας. Συνήθως στα πλαίσια θεωρίας δοκού δεν εξετάζεται η ικανοποίηση του συνόλου των εξισώσεων, των συνοριακών και των αρχικών συνθηκών της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας. Παρά όλα αυτά, στην επιστημονική βιβλιογραφία έχει παρουσιαστεί πληθώρα απλών ή πιο σύνθετων θεωριών δοκού, οι οποίες αποδεδειγμένα προσομοιώνουν αξιόπιστα ράβδους υπό διάφορες εντατικές καταστάσεις. Με την Ασυμπτωτική Μέθοδο Μεταβολών (variational-asymptotic method) [Berdichevsky 1979] προσδιορίστηκε ότι οι εξισώσεις της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας μπορούν να διασπαστούν αξιόπιστα σε

μονοδιάστατες (κατά μήκος της ράβδου) και διδιάστατες (στο επίπεδο της διατομής) εξισώσεις [Yu et al. 2012].

Στα πλαίσια θεωρίας δοκού, η εφαρμογή των εξισώσεων της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας ή ελαστοπλαστικότητας σε ασθενή ή ισχυρή μορφή καταλήγει στη μόρφωση συνήθων (ή μερικών) διαφορικών εξισώσεων ως προς τη διαμήκη συντεταγμένη (και τον χρόνο) που υπόκεινται σε συνοριακές (και αρχικές) συνθήκες, καθώς επίσης και μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις εγκάρσιες συντεταγμένες που υπόκεινται επίσης σε συνοριακές συνθήκες. Τα σχετικά μονοδιάστατα και διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών (ή αρχικών συνοριακών τιμών) που διατυπώνονται, μπορούν συνηθέστερα να μελετηθούν ανεξάρτητα μεταξύ τους, αυξάνοντας με τον τρόπο αυτό την αποδοτικότητα της μεθόδου.

Ωστόσο, η αναλυτική λύση τους κατά κανόνα δεν είναι εφικτή, ιδίως σε προβλήματα τυχούσας διατομής ή/και μη γραμμικής ανάλυσης. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε με την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων (προσεγγιστικών μεθόδων). Οι μέθοδοι αυτές γνώρισαν ευρεία ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια εξαιτίας της μεγάλης αύξησης της υπολογιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η οποία επέτρεψε την αξιόπιστη επίλυση μεγάλου εύρους πρακτικών προβλημάτων. Οι πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μέθοδοι είναι η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method (FDM)), η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method (FEM)) και η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method (BEM)). Ιστορική επισκόπηση των μεθόδων αυτών περιέχεται στην εργασία του Μώκου [2007]. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται η BEM για την επίλυση των διδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών και η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method (AEM)), που αποτελεί εξέλιξη της BEM, καθώς και η Πεδιακή BEM (Domain BEM) για την επίλυση των μονοδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών (και προβλημάτων αρχικών συνοριακών τιμών). Επισκόπηση των πλεονεκτημάτων της BEM περιέχονται στις εργασίες των Μώκου [2007] και Μπαμπούσκου [2011]. Με εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων, τα προβλήματα συνοριακών τιμών μετασχηματίζονται σε ισοδύναμα γραμμικά ή μη γραμμικά συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων. Αντίστοιχα, τα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών της δυναμικής ανάλυσης μετασχηματίζονται σε ισοδύναμα γραμμικά ή μη γραμμικά συστημάτων διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων. Οι λύσεις των συστημάτων αυτών προσδιορίζονται με εφαρμογή κατάλληλων αποδοτικών μεθόδων επίλυσης.

Οι διδιάστατες συναρτήσεις των θεωριών στρέψης που διατυπώθηκαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής είναι η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης [Μώκος 2007, Sapountzakis and Mokos 2003a,b]. Σε αντίθεση με τη θεωρία καμπτόμενων δοκών Euler - Bernoulli όπου οι αντίστοιχες συναρτήσεις προσδιορίζονται εύκολα αναλυτικά, τα προβλήματα συνοριακών τιμών από τα οποία προσδιορίζονται οι συναρτήσεις στρέβλωσης δέχονται αναλυτικές λύσεις μόνο σε απλές περιπτώσεις γεωμετρίας της διατομής. Το ίδιο ισχύει και για τις γεωμετρικές σταθερές που εξαρτώνται από τις συναρτήσεις αυτές και που υπεισέρχονται στα μονοδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών. Για την προσεγγιστική επίλυση των προβλημάτων αυτών και τον προσδιορισμό των σχετικών γεωμετρικών σταθερών έχει αναπτυχθεί, πέραν των άμεσων αριθμητικών μεθόδων, η Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ) ή θεωρία Vlasov [1963]. Η θεωρία αυτή εφαρμόζεται στη μελέτη ράβδων λεπτότοιχης διατομής και βασίζεται σε ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές, οι οποίες σχετίζονται με τη μεταβολή των άγνωστων μεγεθών κατά τη διεύθυνση του

πάχους των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή. Άμεσο αποτέλεσμα τούτου είναι η απλοποίηση του προβλήματος καθώς τα διάφορα άγνωστα μεγέθη εξετάζονται αποκλειστικά στη μέση γραμμή των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή. Η θεωρία αυτή ωστόσο έχει διάφορα μειονεκτήματα, τα κυριότερα των οποίων είναι τα ακόλουθα.

- Δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ράβδους τυχούσας διατομής.
- Η ακρίβειά της εξαρτάται από το πάχος των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή.
- Δεν είναι πάντοτε σαφή τα όρια αξιοπιστίας εφαρμογής της [Gruttmann et al. 1998a,b, Pilkey 2002, Wagner et al. 1999].
- Η μη εξέταση της μεταβολής τασικών μεγεθών κατά τη διεύθυνση του πάχους των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή έχει ως αποτέλεσμα την μη ορθή περιγραφή της μετάβασης από την ελαστική στην πλαστική συμπεριφορά, τουλάχιστον στην περίπτωση ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής ορθογωνικού σχήματος RHS [Ridley-Ellis et al. 2002].

Στην παρούσα διατριβή, με την χρήση της BEM για τον άμεσο αριθμητικό υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και των σχετικών γεωμετρικών σταθερών αποφεύγονται τα μειονεκτήματα της ΘΛΔ. Ως εκ τούτου επιτυγχάνεται ακριβέστερος υπολογισμός τόσο των μονοδιάστατων κινηματικών και εντατικών μεγεθών όσο και των τριδιάστατων μεγεθών της ράβδου (όπως π.χ. τα τασικά μεγέθη). Επίσης, καθίσταται δυνατή η διερεύνηση των ορίων αξιοπιστίας εφαρμογής της ΘΛΔ. Τέλος, υπογραμμίζεται ότι τα προβλήματα συνοριακών τιμών υπολογισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης διατυπώνονται λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη). Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται επίσης κατά τη μελέτη ράβδων σύνθετης διατομής να λαμβάνονται υπόψη φυσικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στις διεπιφάνειες των υλικών.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η αναλυτική λύση των εξισώσεων της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας (ή ελαστοπλαστικότητας) κατά κανόνα δεν είναι εφικτή. Αντί για τη διατύπωση κατάλληλης θεωρίας δοκού, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν άμεσα με οποιαδήποτε αποδοτική αριθμητική μέθοδο. Η πλέον διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων αυτών (ιδίως σε ό,τι αφορά στα εμπορικά λογισμικά επίλυσης προβλημάτων Μηχανικής Συνεχούς Μέσου) είναι η FEM. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ορισμένες (ή το σύνολο) από τις εξισώσεις της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας εκφράζονται σε ασθενή μορφή. Το εξεταζόμενο παραμορφώσιμο σώμα διακριτοποιείται σε τριδιάστατα στοιχεία πεπερασμένων διαστάσεων (στερεά πεπερασμένα στοιχεία (solid finite elements)), τα οποία συναρμολογούν μεταξύ τους σε διακριτές θέσεις - κόμβους. Σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται ορισμένα (ή το σύνολο) από τα άγνωστα μεγέθη του προβλήματος με απλές συναρτήσεις (συνήθως πολυωνυμικές), οι οποίες καλούνται συναρτήσεις σχήματος (shape functions). Σε αντίθεση με τις θεωρίες δοκού, στη μέθοδο αυτή τα άγνωστα μεγέθη δεν προσεγγίζονται από μονοδιάστατες και διδιάστατες συναρτήσεις. Αν και η FEM έχει γενικό χαρακτήρα και μπορεί να αναλύσει με μεγάλη αξιοπιστία οποιοδήποτε στερεό σώμα υπό οποιαδήποτε εντατική κατάσταση, στην παρούσα διατριβή επιλέγεται η διατύπωση κατάλληλων θεωριών στρέψης για τη διερεύνηση του αντικειμένου της (εδάφιο I.1). Οι κύριοι λόγοι είναι οι ακόλουθοι.

- Η FEM απαιτεί μεγαλύτερο ανθρώπινο και υπολογιστικό χρόνο στη φάση προεπεξεργασίας των δεδομένων εισόδου της ανάλυσης του προβλήματος. Παρά

την ύπαρξη αυτόματων αποδοτικών γεννητόρων διακριτοποιήσεων στερεών πεπερασμένων στοιχείων, η διαδικασία της προετοιμασίας της προσομοίωσης και της διακριτοποίησης της ράβδου είναι χρονικά δαπανηρότερη συγκριτικά με τη θεωρία στρέψης, όπου απαιτείται αποκλειστικά η διακριτοποίηση της διατομής και του διαμήκους άξονα της ράβδου. Επιπλέον, η επιβολή φόρτισης και συνοριακών συνθηκών είναι πιο επίπονη στη FEM.

- Η FEM απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο στη φάση επίλυσης των εξισώσεων του προβλήματος. Τούτο οφείλεται στο ότι το πλήθος των στοιχείων και των άγνωστων ποσοτήτων είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πλήθος που υπεισέρχεται στην αριθμητική επίλυση των μονοδιάστατων και διδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών της θεωρίας στρέψης. Εξάλλου, η ορθή προσομοίωση της στρέβλωσης ράβδων λεπτότοιχης διατομής, ενδέχεται να απαιτεί παραπάνω από ένα στερεό στοιχείο κατά τη διεύθυνση του πάχους των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή (βλ. και [Μάκος 2007]). Ως εκ τούτου, σε τέτοιες περιπτώσεις αυξάνεται το αναγκαίο πλήθος πεπερασμένων στοιχείων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Επιπλέον, ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται περαιτέρω όταν λαμβάνεται υπόψη η επιρροή γεωμετρικής και υλικής μη γραμμικότητας, καθώς στις περιπτώσεις αυτές απαιτείται η επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων.
- Σε αντίθεση με τη FEM, στα πλαίσια της θεωρίας στρέψης παρέχεται σε ορισμένες περιπτώσεις η δυνατότητα αριθμητικής επίλυσης ορισμένων προβλημάτων και η αποθήκευση των σχετικών αποτελεσμάτων, ώστε να χρησιμοποιηθούν μελλοντικά σε άλλα προβλήματα. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι η ανάλυση στρεπτόμενων ελαστικών ράβδων όπου είναι δυνατή η αποθήκευση των αποτελεσμάτων της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης καθώς και των γεωμετρικών σταθερών της διατομής της ράβδου. Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να δημοσιευτούν ή/και να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση ράβδων της ίδιας διατομής αλλά με διαφορετικό μήκος, συνοριακές συνθήκες ή/και φόρτιση.
- Η FEM απαιτεί μεγαλύτερο ανθρώπινο χρόνο στη φάση μετεπεξεργασίας των αποτελεσμάτων της επίλυσης του προβλήματος. Τα αποτελέσματά της αποτελούν τριδιάστατες συναρτήσεις, οι οποίες συχνά εποπτεύονται και αξιολογούνται με δυσκολία. Αντιθέτως στη θεωρία στρέψης (πέραν των τριδιάστατων κινηματικών και τασικών μεγεθών), υπολογίζονται άμεσα μονοδιάστατα κινηματικά και εντατικά μεγέθη, τα οποία προσφέρονται για γρήγορη αξιολόγηση. Εξάλλου, οι σύγχρονοι κανονισμοί που διέπουν την ανάλυση και το σχεδιασμό έργων πολιτικού μηχανικού συνήθως είναι διατυπωμένοι με βάση τη λογική των εντατικών μεγεθών.
- Η θεωρία στρέψης προσφέρεται στις περιπτώσεις που επιθυμείται γρήγορος προσδιορισμός της καθολικής συμπεριφοράς ράβδων. Στην περίπτωση που δεν είναι επιθυμητή η ανάλυση τοπικών φαινομένων (π.χ. μεταβολή κινηματικών και τασικών μεγεθών τοπικά κοντά σε θέσεις επιβολής συγκεντρωμένων φορτίων κ.λ.π.), η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων στα πλαίσια της FEM είναι δύσκολη.
- Η θεωρία στρέψης προσφέρεται στις περιπτώσεις όπου δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή ή δεν ενδιαφέρει η ακριβής θέση των φορτίων της ράβδου στο επίπεδο της διατομής.
- Η θεωρία στρέψης και η θεωρία δοκού γενικότερα προσφέρονται στις περιπτώσεις βελτιστοποίησης ραβδωτών κατασκευών που συναντώνται στη βιομηχανία αυτοκινήτου, ιδίως στις αρχικές φάσεις του σχεδιασμού (βλ. και [Kroiss et al. 2011]).

- Με την χρήση απλών και πιο σύνθετων θεωριών στρέψης και θεωριών δοκού γενικότερα για το ίδιο πρόβλημα, είναι δυνατή η γρήγορη αξιολόγηση της επιρροής διάφορων φαινομένων και ως εκ τούτου η γρήγορη λήψη αποφάσεων σε επίπεδο σχεδιασμού. Έτσι π.χ. με την ανάλυση στρεπτόμενης ράβδου κλειστής κοίλης διατομής με θεωρίες στρέψης που λαμβάνουν υπόψη ή αγνοούν φαινόμενα εγκάρσιας παραμορφωσιμότητας των διατομών (distortion), προκύπτει εύκολα η ανάγκη ή μη χρήσης εγκάρσιων νευρώσεων για την απομείωση των φαινομένων αυτών.
- Σε πολλές περιπτώσεις η διερεύνηση δύσκολων πρακτικών προβλημάτων της επιστήμης του μηχανικού απαιτεί αρχικά τη μελέτη σχετικών απλούστερων προβλημάτων [Emam 2002]. Έτσι π.χ. ακόμα κι αν οι ακραίες διατομές σώματος μεγάλου μήκους δεν είναι επακριβώς κάθετες στην διαμήκη διεύθυνσή του, η μελέτη της αντίστοιχης «τέλειας» ραβδόμορφης γεωμετρίας επιτρέπει την γρήγορη και αξιόπιστη ανάλυσή του. Επίσης, π.χ. ο προσδιορισμός της ποιοτικής συμπεριφοράς ράβδου μπορεί να γίνει ευκολότερα διερευνώντας μαθηματικά τις μονοδιάστατες εξισώσεις που προκύπτουν από τη θεωρία δοκού, συγκριτικά με τις τριδιάστατες εξισώσεις της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου.
- Εξαιτίας των προαναφερθέντων λόγων, η FEM δεν προσφέρεται για την ανάλυση ραβδωτών κατασκευών σε αρχικές φάσεις σχεδιασμού (βλ. και [Popescu and Hodges 1999]).
- Η θεωρία στρέψης και η θεωρία δοκού γενικότερα παραμένουν μέχρι και σήμερα η πιο δημοφιλής μέθοδος ανάλυσης ραβδωτών φορέων που συναντώνται σε έργα πολιτικού μηχανικού.

Αξίζει βέβαια να επισημανθεί ότι ο γενικός χαρακτήρας και η μεγάλη αξιοπιστία της FEM την καθιστούν πολύ χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του μηχανικού ή του ερευνητή (εάν φυσικά εφαρμοστεί ορθά), ο οποίος επιθυμεί να προσδιορίσει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που λαμβάνει από άλλες αριθμητικές μεθόδους. Ως εκ τούτου, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, η FEM αξιοποιείται για τον σκοπό αυτό.

Εναλλακτική μεθοδολογία ανάλυσης ράβδων λεπτότοιχης διατομής αποτελεί η θεωρία κελυφών. Η θεωρία κελυφών βασίζεται στην αξιοποίηση της ιδιαίτερης γεωμετρίας της λεπτότοιχης ράβδου (η διάσταση του πάχους των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη ράβδο είναι αρκετά μικρότερη συγκριτικά με τις άλλες δύο διαστάσεις). Το πεδίο μετατοπίσεων και οι συνιστώσες των τανυστών παραμόρφωσης και τάσης διατυπώνονται ως άθροισμα γινομένων μονοδιάστατων και διδιάστατων συναρτήσεων. Οι μονοδιάστατες και διδιάστατες συναρτήσεις λαμβάνονται ως αποκλειστικά εξαρτώμενες από τη συντεταγμένη κατά τη διεύθυνση του πάχους και τις επιφανειακές συντεταγμένες του πλακοειδούς στοιχείου, αντίστοιχα. Επειδή οι σχετικές εξισώσεις της θεωρίας αυτής κατά κανόνα δεν δέχονται αναλυτική λύση, χρησιμοποιούνται κι εδώ αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυσή τους. Η πλέον διαδεδομένη αριθμητική μέθοδος (ιδίως σε ό,τι αφορά στα εμπορικά λογισμικά που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων θεωρίας κελυφών) είναι η FEM. Το εξεταζόμενο επιφανειακό σώμα διακριτοποιείται σε διδιάστατα στοιχεία πεπερασμένων διαστάσεων (κελυφωτά πεπερασμένα στοιχεία (shell finite elements)), τα οποία συναρμολογούν μεταξύ τους σε διακριτές θέσεις - κόμβους. Με τη μέθοδο αυτή επιτυγχάνεται μείωση του ανθρώπινου και υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την ανάλυση ράβδων, συγκριτικά με τη FEM με χρήση στερεών πεπερασμένων στοιχείων. Τούτο οφείλεται στην ανάγκη διακριτοποίησης μόνο της μέσης γραμμής των τοιχωμάτων που συνθέτουν τη ράβδο λεπτότοιχης διατομής, η οποία οδηγεί σε

μικρότερο πλήθος άγνωστων μεγεθών και στοιχείων. Τα κύρια μειονεκτήματα της μεθόδου αυτής στην ανάλυση στρεπτόμενων ράβδων είναι τα ακόλουθα.

- Η προσομοίωση των τασικών μεγεθών του πρωτογενούς μηχανισμού ανάληψης δράσεων σε καμπύλες θέσεις συναρμογής πλακοειδών στοιχείων ράβδων λεπτότοιχης διατομής είναι δυσχερής. Η εφαρμογή προσομοιωμάτων που λαμβάνουν υπόψη τους μόνο τη γεωμετρία των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη λεπτότοιχη ράβδο οδηγεί σε σημαντική υποεκτίμηση της στρεπτικής στιβαρότητας του πρωτογενούς μηχανισμού ανάληψης δράσεων, τουλάχιστον σε πρότυπες μεταλλικές ράβδους ανοικτής διατομής I (βλ. και [Maljaars et al. 2004]).
- Δεν είναι δυνατή η ανάλυση ράβδων τυχούσας διατομής. Αν και έχουν διατυπωθεί θεωρίες κελυφών που λαμβάνουν υπόψη τους διατμητικές παραμορφώσεις και ως εκ τούτου είναι κατάλληλες για χονδρότοιχα κελύφη, εντούτοις διαθέτουν και αυτές όρια αξιόπιστης εφαρμογής.
- Ισχύουν κι εδώ τα όσα αναφέρθηκαν πρωτύτερα για την FEM με χρήση στερεών πεπερασμένων στοιχείων.

Τέλος, αξίζει βέβαια να επισημανθεί ότι η μεγάλη αξιοπιστία της FEM με χρήση κελυφωτών πεπερασμένων στοιχείων την καθιστούν πολύ χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του μηχανικού ή του ερευνητή (εάν φυσικά εφαρμοστεί ορθά), ο οποίος επιθυμεί να προσδιορίσει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων ράβδων λεπτότοιχης διατομής που λαμβάνει από άλλες αριθμητικές μεθόδους. Ως εκ τούτου, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, η προαναφερθείσα μέθοδος αξιοποιείται για τον σκοπό αυτό.

Ι.3 Διάρθρωση και Πρωτοτυπίες Διδακτορικής Διατριβής

Κύριος στόχος της παρούσας διατριβής δεν είναι η ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων αλλά η διατύπωση καινοτόμων θεωριών στρέψης για τη διερεύνηση και την επίλυση σειράς προβλημάτων μη γραμμικής ανάλυσης ράβδων ομογενούς ή σύνθετης διατομής που συναντώνται στην επιστήμη του μηχανικού. Τα προβλήματα αυτά είναι η μη γραμμική ελαστική στατική ή δυναμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με ή χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων και η μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη με ή χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.

Η εργασία περιλαμβάνει ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, πέντε κύρια κεφάλαια, ένα έκτο τελικό κεφάλαιο, οκτώ παραρτήματα καθώς και ένα κεφάλαιο βιβλιογραφίας. Το πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο αντικείμενο, στο κίνητρο, στη διάρθρωση και στις πρωτοτυπίες της εργασίας, ενώ γίνεται αναφορά στην επίλυση προβλημάτων ραβδωτών κατασκευών με θεωρία δοκού και με εναλλακτικές μεθόδους. Καθένα από τα εξεταζόμενα προβλήματα αναλύεται στο αντίστοιχο κύριο κεφαλαίο. Κάθε κύριο κεφάλαιο αποτελείται από την εισαγωγή, τη διατύπωση του προβλήματος, τις ολοκληρωτικές εξισώσεις για την αριθμητική επίλυση, αντιπροσωπευτικά αριθμητικά αποτελέσματα και τα συμπεράσματα. Στην εισαγωγή κάθε κύριου κεφαλαίου περιέχεται η βιβλιογραφική επισκόπηση του ερευνητικού έργου (“State of the Art”) του αντίστοιχου εξεταζόμενου προβλήματος και παρουσιάζονται τα πρωτότυπα σχετικά στοιχεία της εργασίας. Στο τελικό κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κύρια συμπεράσματα και αναφέρεται σειρά θεμάτων και προβλημάτων τα οποία χρήζουν περαιτέρω έρευνας στο μέλλον. Στα παραρτήματα περιλαμβάνονται στοιχεία που είναι απαραίτητα για την κατανόηση του περιεχομένου των κύριων κεφαλαίων της

εργασίας. Τέλος, στο κεφάλαιο βιβλιογραφίας παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βιβλιογραφικές αναφορές της διατριβής.

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αγνοούνται φαινόμενα εγκάρσια παραμορφωσιμότητας (distortion) των διατομών. Σε κάθε εξεταζόμενο πρόβλημα λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα μέσω ολικής διατύπωσης Lagrange και της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Επίσης, τα προβλήματα συνοριακών τιμών υπολογισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης διατυπώνονται λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη). Ως εκ τούτου δεν υπόκεινται στους περιορισμούς της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών. Βάσει των αναλυτικών και αριθμητικών διαδικασιών που αναπτύχθηκαν στην εργασία αυτή συντάχθηκε πλήθος προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή, με τη βοήθεια των οποίων μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά αριθμητικά παραδείγματα ιδιαίτερου πρακτικού ενδιαφέροντος, τα οποία καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής των προτεινόμενων μεθόδων. Οι αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάζονται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύονται αποτελεσματικές. Η ακρίβεια και αξιοπιστία των ληφθέντων αποτελεσμάτων επιβεβαιώνεται με υπάρχουσες αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις και πειραματικά αποτελέσματα, καθώς και με αποτελέσματα στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων από εμπορικό λογισμικό. Η διατύπωση και επίλυση των προαναφερθέντων προβλημάτων είναι πλήρης, συστηματική, πρωτότυπη και συμβάλλει στην ρεαλιστικότερη προσέγγισή τους. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά μεγέθη του κάθε προβλήματος. Στα κεφάλαια 2, 3, 5 αναλύεται η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στα προβλήματα που εξετάζονται σε αυτά. Προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, τοπική εξίσωση ισορροπίας (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες διατυπώνεται πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει κατάλληλα την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρέβλωση της ράβδου. Επιπλέον, στα κεφάλαια 1, 4 αναλύονται και ράβδοι σύνθετης διατομής. Η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά διαθέτουν διαφορετικές ιδιότητες και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους, ενώ η ομογενής ράβδος απλής ή πολλαπλής συνοχής προκύπτει ως μερική περίπτωση. Λαμβάνονται υπόψη φυσικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στις διεπιφάνειες των υλικών.

Στο κεφάλαιο I αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας τέσσερα προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται τρία (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης και μία πλασματική συνάρτηση, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Επίσης, μορφώνεται

(μονοδιάστατο) πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη στρεπτική στροφή, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Ποσοτικοποιείται η αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και γενικότερα προσδιορίζονται οι επιρροές της στην ελαστική στατική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Προκύπτει ότι στρεπτικά, αξονικά και καμπτοδιαμητικά κινηματικά και εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα σε ράβδους ασύμμετρης διατομής.

Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με **επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων**. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας τρία προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή (ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης) της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Με την προτεινόμενη αριθμητική μέθοδο αντιμετωπίζονται επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος». Ερμηνεύεται ποιοτικά η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτής και κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής και ποσοτικοποιούνται τα σφάλματα της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών στον υπολογισμό γεωμετρικών σταθερών και τασικών μεγεθών του προβλήματος.

Στο κεφάλαιο 3 αναπτύσσεται το **δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με ή χωρίς **επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων**. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Τα δυναμικά φαινόμενα λαμβάνονται υπόψη μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης μάζας. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών καθώς και δύο προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης, μορφώνεται μονοδιάστατο πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης, σε συνδυασμό με τη μέθοδο Petzold - Gear για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων. Προκύπτει ότι οι μεγάλες στρεπτικές στροφές επηρεάζουν αισθητά και σύνθετα τη θεμελιώδη ιδιοσυχρότητα της στρεπτικής στροφής ράβδων που έχουν υποστεί

στρεπτικό λυγισμό και υπόκεινται σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Επίσης, η απόκριση τόσο των κινηματικών όσο και των εντατικών μεγεθών ράβδων που βρίσκονται στην προλυγισμική περιοχή τους και που υπόκεινται σε πρωτεύον συντονισμό, παρουσιάζει χαρακτηριστικά διακροτήματος.

Στο κεφάλαιο 4 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστοπλαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος. Η ράβδος υποβάλλεται σε γενικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες καθώς και γενικές συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης, ενώ η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται σε κανένα σημείο. Οι πλαστικές παραμορφώσεις λαμβάνονται υπόψη και στο επίπεδο της διατομής ενώ προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές ολοκληρώνονται με τη βοήθεια αποδοτικής επαναληπτικής μεθόδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνεται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστοπλαστικότητας (διδιάστατο) πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων που απαιτεί και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, η οποία ωστόσο χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Επίσης, μορφώνεται μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση και τη στρεπτική στροφή της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της υβριδικής μεθόδου Powell. Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών και του συστήματος εξισώσεων πραγματοποιούνται στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου που βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου. Προκύπτει ότι η γεωμετρικά μη γραμμικότητα αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη και έχει ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης. Επίσης, οι συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης επηρεάζουν αισθητά τη συμπεριφορά ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη και αυξάνουν τη στρεπτική στιβαρότητα.

Στο κεφάλαιο 5 αναπτύσσεται το **στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστοπλαστικών ράβδων** σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος **με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων**. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Οι πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές ολοκληρώνονται με τη βοήθεια αποδοτικής επαναληπτικής μεθόδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια των θεωριών ελαστικότητας και ελαστοπλαστικότητας τρία προβλήματα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστρόφη της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Η επίλυση του προβλήματος αυτού πραγματοποιείται στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου που

βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου. Με την προτεινόμενη αριθμητική μέθοδο αντιμετωπίζονται επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος». Προκύπτει ότι οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις επηρεάζουν την εξέλιξη της πλαστικοποίησης και την τοπική συμπεριφορά ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Ωστόσο, δεν μεταβάλλουν αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα τους.

Στο κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα **τελικά συμπεράσματα** που προέκυψαν από την παρούσα ερευνητική συμβολή και παρουσιάζονται κατευθύνσεις για **μελλοντική έρευνα**.

Η διατριβή συμπληρώνεται με *οκτώ παραρτήματα*. Στο παράρτημα Π1 παρουσιάζεται η άμεση BEM για την επίλυση της διδιάστατης εξίσωσης Poisson σε σύνθετες περιοχές. Στο παράρτημα Π2 παρουσιάζεται η AEM για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης και τετάρτης τάξης, ενώ στο παράρτημα Π3 παρουσιάζεται η Πεδιακή BEM για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Το παράρτημα Π4 περιλαμβάνει βασικά στοιχεία της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου. Στο παράρτημα Π5 παρουσιάζονται στοιχεία της θεωρίας υπερελαστικότητας και θεωρίας κλασικής πλαστικότητας. Στο παράρτημα Π6 αποδεικνύεται ο μηδενισμός της σταθερής κατανομής διατμητικών παραμορφώσεων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα του κεφαλαίου 1, ενώ στο παράρτημα Π7 αποδεικνύεται η μοναδικότητα της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης που υπεισέρχεται στα προβλήματα των κεφαλαίων 2, 3 και 5. Τέλος, στο παράρτημα Π8 παρουσιάζεται η αριθμητική προσέγγιση πρώτης και δεύτερης παραγώγου συνεχούς μονοδιάστατης συνάρτησης με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων και οπίσθιων διαφορών. Τα παραρτήματα έχουν γραφεί με συνεπτυγμένο τρόπο έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να παρακολουθήσει την ανάπτυξη των κυρίων κεφαλαίων της εργασίας.

Τέλος, στο κεφάλαιο βιβλιογραφίας παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βιβλιογραφικές αναφορές της διατριβής οι οποίες φθάνουν μέχρι το χρόνο συγγραφής της. Οι εργασίες παρουσιάζονται αλφαβητικά και σε όλες γίνεται αναφορά μέσα στο κυρίως κείμενο της διατριβής.

Η έρευνα που παρουσιάζεται στη διατριβή αυτή είναι πρωτότυπη. Τα κύρια στοιχεία πρωτοτυπίας συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- i. Αναλύονται κατά περίπτωση στατικά ή δυναμικά ομογενείς ή σύνθετες ελαστικές ή ελαστοπλαστικές ράβδοι διατομής τυχόντος ασύμμετρου ή διπλά συμμετρικού σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) υπό γεωμετρικά μη γραμμική ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη. Προσδιορίζονται οι επιρροές της γεωμετρικής και υλικής μη γραμμικότητας.
- ii. Τα εξεταζόμενα προβλήματα αναλύονται χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
- iii. Διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε ελαστικές ομογενείς ή σύνθετες στατικά ή δυναμικά καταπονούμενες ράβδους υπό γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη, αξιοποιώντας τοπική εξίσωση ισορροπίας.
- iv. Διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε ελαστοπλαστικές ομογενείς ή σύνθετες ράβδους υπό γεωμετρικά μη γραμμική ομοιόμορφη στρέψη, αξιοποιώντας τοπική εξίσωση ισορροπίας. Λαμβάνονται υπόψη φυσικές συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες και πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής.

- v. Το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις στατικής ή δυναμικής ισορροπίας ελαστικών ή ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, ικανοποιεί τοπική εξίσωση ισορροπίας υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες.
- vi. Προσδιορίζονται οι επιρροές δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων σε ελαστικές ή ελαστοπλαστικές ράβδους ανοικτής ή κλειστής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
- vii. Τα εξεταζόμενα προβλήματα επιλύονται αριθμητικά με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων (BEM, AEM, Πεδιακή BEM).

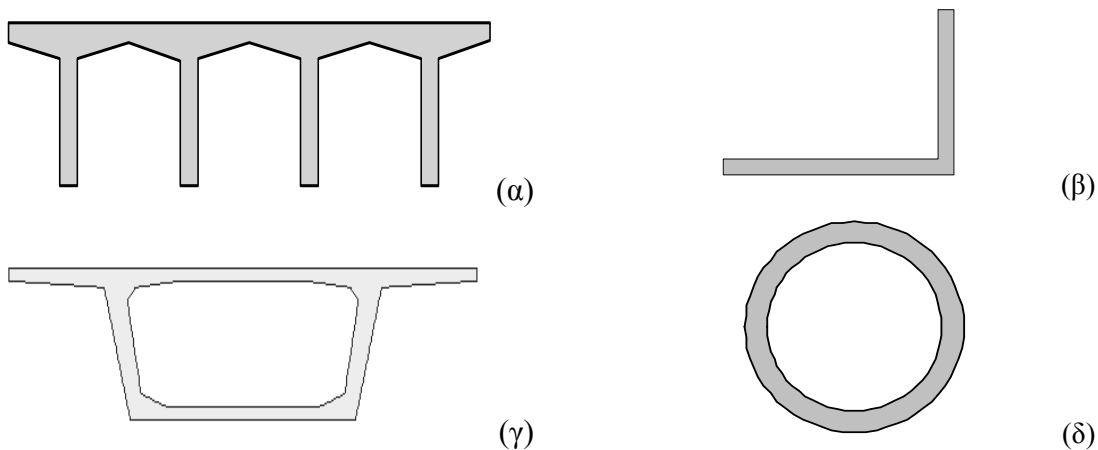
Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι από την ερευνητική προσπάθεια προέκυψαν δημοσιεύσεις σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά διεθνούς κυκλοφορίας, σε πρακτικά διεθνών και εθνικών συνεδρίων καθώς και κεφάλαια σε βιβλία που εκδόθηκαν από διεθνείς εκδοτικούς οίκους, τα οποία αναφέρονται στην εισαγωγή κάθε κύριου κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 1

Μη Γραμμική Ελαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου υπό Ανομοιόμορφη Στρέψη

1.1 Εισαγωγή

Σε ποικίλους κλάδους της επιστήμης του μηχανικού (αεροναυπηγική, αεροδιαστημική, ναυπηγική, μηχανολογία, δομοστατική κ.λ.π.), υιοθετούνται συχνά σχεδιαστικές λύσεις στις οποίες κυρίαρχο χαρακτηριστικό είναι η ελαχιστοποίηση του ίδιου βάρους της κατασκευής. Σε τέτοιες περιπτώσεις γίνεται συνήθως χρήση ραβδωτών στοιχείων ανοικτής ή κλειστής λεπτότοιχης διατομής (Σχ.1.1). Οι ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής συνήθως διαθέτουν πολύ μικρή στρεπτική στιβαρότητα με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεγάλων στρεπτικών στρωφών (γεωμετρική μη γραμμικότητα) αρκετά πριν την πλαστικοποίηση ινών της διατομής ή την πλαστική κατάρρευση του μέλους (μη γραμμικότητα υλικού). Στην περίπτωση αυτή, η χρήση του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης (βλ. εξ.(Π4.1.45-46) και της παραδοχής περί αντικατάστασης της κυκλικής τροχιάς οποιουδήποτε υλικού σημείου με την αντίστοιχη χορδή (γραμμική θεωρία στρέψης) είναι αμφίβολης αξιοπιστίας.



Σχήμα 1.1. Ανοικτές (α,β) και κλειστές (γ,δ) λεπτότοιχες διατομές ραβδωτών στοιχείων.

Άλλη σημαντική εξέλιξη στην τεχνολογία των κατασκευών είναι η χρήση περισσότερων υλικών στη μόρφωση ραβδωτών στοιχείων. Ο συνδυασμός των πλεονεκτημάτων των διαφορετικών υλικών οδηγεί σε βελτίωση χαρακτηριστικών της κατασκευής όπως λόγος αντοχής προς ίδιο βάρος, λόγος στιβαρότητας προς ίδιο βάρος, πυροπροστασία, πλαστιμότητα, αισθητική, οικονομία κ.λ.π. Η ανάπτυξη αξιόπιστων υπολογιστικών εργαλείων για την ανάλυση σύμμικτων φορέων κρίνεται επιτακτική εξαιτίας της σύνθετης συμπεριφοράς τέτοιων κατασκευών και του περιορισμένου

αριθμού των υπαρχόντων σχετικών λογισμικών, ιδίως για την περίπτωση στρεπτικής καταπόνησης.

Διατομές ράβδων που υποβάλλονται σε στρεπτική φόρτιση αναπτύσσουν διατμητικές τάσεις εντός του επιπέδου τους, οι οποίες συνδέονται με την ανάπτυξη διατμητικών παραμορφώσεων. Η ανάπτυξη στρεπτικής στροφής και η ταυτόχρονη απαίτηση ικανοποίησης της φυσικής συνοριακής συνθήκης στο σύνορο της διατομής έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη συμβιβαστών μετατοπίσεων κατά το διαμήκη άξονα της ράβδου με τις προαναφερθείσες παραμορφώσεις (στρέβλωση). Σημειώνεται ότι ράβδοι συμπαγούς ή κοίλης κυκλικής διατομής είναι οι μοναδικές που δεν στρεβλώνουν, εφόσον αφεθούν να στραφούν ελεύθερα και δεν επιβληθεί κατασκευαστικά κάποιος άξονας στροφής. Η γραμμική ελαστική ανάλυση τέτοιων ράβδων πραγματοποιείται με την τεχνική θεωρία στρέψης [Coulomb 1784].

Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής θεωρίας, στην περίπτωση επιβολής δύο ισόποσων στρεπτικών ροπών στα άκρα της ράβδου με ταυτόχρονη απαίτηση να μην παρεμποδίζεται η αναπτυσσόμενη στρέβλωση των διατομών, αποδεικνύεται ότι η στρέβλωση είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου και ανάλογη της ανά μονάδα μήκους γωνίας στροφής, που καλείται συστροφή (twist) [St. Venant 1855]. Στην περίπτωση αυτή η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη [Love 1944, Sokolnikoff 1956, Timoshenko and Goodier 1970], ενώ οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις καλούνται πρωτογενείς ή διατμητικές τάσεις Saint Venant. Ωστόσο, συνήθως η στρεπτική φόρτιση μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου ή/και η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης (π.χ. παρεμποδιζόμενη στρέβλωση διατομής από μετωπική εγκάρσια νεύρωση), με συνέπεια η στρέβλωση να μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου. Στην περίπτωση αυτή η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη ενώ στη ράβδο αναπτύσσονται επιπρόσθετα τόσο ορθές τάσεις (κατά την αξονική διεύθυνση) όσο και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις από τις οποίες παραλαμβάνεται μέρος του στρεπτικού φορτίου (το υπόλοιπο μέρος παραλαμβάνεται από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις που αντιστοιχούν στις διατμητικές τάσεις της ομοιόμορφης στρέψης). Οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις καλούνται και διατμητικές τάσεις στρέβλωσης και προκύπτουν από την απαίτηση εξισορρόπησης των προαναφερθεισών ορθών τάσεων [Μάκος 2007]. Οι ίδιοι χαρακτηρισμοί επεκτείνονται και στη μη γραμμική ελαστική θεωρία στρέψης, τονίζοντας ωστόσο ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάπτυξη επιπρόσθετων κινηματικών και τασικών μεγεθών.

Η μη γραμμική ελαστική συμπεριφορά ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη διερευνήθηκε για πρώτη φορά από τον Young το 1807 (βλ. [Attard 1986b]), ο οποίος μελέτησε την ομοιόμορφη στρέψη ράβδων κυκλικής διατομής και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το στρεπτικό φορτίο είναι ανάλογο της συστροφής θ'_x καθώς και

ανώτερου μη γραμμικού όρου $(\theta'_x)^3$, συσχέτισε δε τον ανώτερο αυτό όρο με αξονική βράχυνση της ράβδου. Στη γραμμική ελαστική θεωρία στρέψης, η παραδοχή της αντικατάστασης της κυκλικής τροχιάς οποιουδήποτε υλικού σημείου με την αντίστοιχη χορδή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι διαμήκεις ίνες της ράβδου παραμένουν ευθύγραμμες και μετά την παραμόρφωση (εάν υποθεθεί ότι η στρέβλωση είναι ομοιόμορφη). Η θεώρηση ωστόσο της ακριβούς κυκλικής τροχιάς στη γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία έχει ως αποτέλεσμα οι διαμήκεις ίνες να αποκτούν ελικοειδή μορφή στην παραμορφωμένη διαμόρφωση [Attard 1986b]. Η παραμορφωμένη ίνα θα έχει μεγαλύτερο μήκος συγκριτικά με την απαραμόρφωτη διαμόρφωση, εάν υποθεθεί ότι το μήκος του άξονα της ράβδου είναι σταθερό και ως εκ τούτου οι ίνες της ράβδου θα

έχουν υποστεί εφελκυσμό. Ωστόσο επειδή δεν ασκείται εφελκυστική αξονική δύναμη στη ράβδο, έπεται ότι ο διαμήκης άξονας θα πρέπει να βραχυνθεί ούτως ώστε οι εξωτερικές ίνες, που μετατοπίζονται εγκάρσια περισσότερο από τις εσωτερικές, να βρίσκονται υπό εφελκυσμό και οι εσωτερικές υπό θλίψη, προκειμένου να αποκατασταθεί η ισορροπία αξονικών δυνάμεων. Ακολουθώντας παρόμοιες θεωρήσεις, διαπιστώνεται ότι πέρα από την προαναφερθείσα σύζευξη στρεπτικών και αξονικών κινηματικών μεγεθών, ράβδοι μονοσυμμετρικής ή ασύμμετρης διατομής υποβαλλόμενες αποκλειστικά σε στρεπτικά φορτία αναπτύσσουν και εγκάρσιες (καμπτοδιατμητικές) μετατοπίσεις προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία καμπτικών ροπών και τεμνουσών δυνάμεων. Ο Weber [1921] επεξέτεινε την ανάλυση του Young σε ράβδους ορθογωνικής διατομής, ενώ οι Cullimore [1949], Ghobarah and Tso [1971], Woolcock and Trahair [1974] και Attard and Somervaille [1987] μελέτησαν το ίδιο φαινόμενο σε ράβδους ανοικτής λεπτότοιχης διατομής. Οι Ashwell [1951] και Gregory [1960a,b, 1961] διαπίστωσαν τη σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών κινηματικών μεγεθών σε ράβδους μονοσυμμετρικής ή ασύμμετρης ανοικτής λεπτότοιχης διατομής. Πιο λεπτομερής ανάλυση των ίδιων φαινομένων σε ράβδους ανοικτής λεπτότοιχης διατομής παρουσιάζεται στην εργασία του Attard [1986b]. Τέλος, οι Jiang and Henshall [2002] ανέπτυξαν τεχνική στερεών πεπερασμένων στοιχείων, η οποία προσφέρεται για την ανάλυση ράβδων τυχούσας διατομής.

Η γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη διερευνήθηκε σε ράβδους ανοικτής λεπτότοιχης διατομής πειραματικά και αριθμητικά από τους Tso and Ghobarah [1971] και Wekezer [1985] και στη συνέχεια αριθμητικά από άλλους ερευνητές όπως οι Attard [1986a], Ronagh and Bradford [1999], Trahair [2003, 2005] και Mohri et al. [2008]. Επισημαίνεται ότι η ανάγκη μελέτης της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης προκύπτει από το ότι η αύξηση της στιβαρότητας εξαιτίας της παρεμπόδισης της στρέβλωσης ενδεχομένως να μην είναι αρκετή ώστε να καθιστά αμελητέα την επιρροή της μη γραμμικότητας [Tso and Ghobarah 1971].

Τόσο στην ομοιόμορφη όσο και στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων συμμετρικής ή ασύμμετρης διατομής, η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί σε αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας [Attard 1986b, Trahair 2003, 2005, 2011]. Τούτο οφείλεται στο προαναφερθέν σύνθετο πεδίο εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων των ελικοειδών ινών της ράβδου της παραμορφωμένης διαμόρφωσης. Οι εφελκυστικές τάσεις των εξωτερικών ινών έχουν μεγαλύτερες τιμές και μοχλοβραχίονες από τις τάσεις των εσωτερικών ινών και τελικά διαθέτουν μεγαλύτερη συνεισφορά στη στρεπτική στιβαρότητα [Trahair 2011]. Η συγκεκριμένη αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας παρουσιάζει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα στη συμπεριφορά ραβδωτών στοιχείων στην οριακή κατάσταση αστοχίας. (i) Ραβδωτά στοιχεία υπό στρέψη δύναται να πλαστικοποιηθούν πλήρως [Farwell and Galambos 1969, Pi and Trahair 1995] και συνεπώς επιτρέπεται η χρήση μεθόδων πλαστικής ανάλυσης για τον καθορισμό της αντοχής τους [Trahair et al. 2001]. (ii) Η πλευρική μεταλυσμική συμπεριφορά ελαστικών ράβδων είναι τουλάχιστον μη ευαίσθητη σε ατέλειες [Woolcock and Trahair 1974, Trahair 1993]. (iii) Η αντοχή σε πλευρικό λυγισμό ράβδου που έχει καμφθεί ως προς τον ισχυρό άξονά της M_b δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την αντοχή εντός επιπέδου ως προς τον ασθενή άξονά της M_{sy} [Trahair 1997].

Στην προτεινόμενη μέθοδο, η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση και συνοριακές συνθήκες

λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα σύζευξη αξονικών, καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών κινηματικών μεγεθών που προκαλείται από τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Ωστόσο η αξονική και η καμπτοδιατμητική φόρτιση και συνοριακές συνθήκες δεν είναι γενικές και λαμβάνονται με τρόπο τέτοιο ώστε να μην αναπτύσσονται αξονικά και καμπτικά εντατικά μεγέθη στη ράβδο.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης). Το πρόβλημα αυτό επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) (Παράρτημα Π1), καθώς και τη Μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (AEM) (Παράρτημα Π2). Η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά αποτελούνται από διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Η ράβδος απλής ή πολλαπλής συνοχής προκύπτει ως μερική περίπτωση εξισώνοντας ή μηδενίζοντας αντίστοιχα τα μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης των υλικών. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη σε ολική διατύπωση Lagrange μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας τέσσερα προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία δεν υπόκεινται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov (Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ)). Συγκεκριμένα, μορφώνονται τρία (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης και μία πλασματική συνάρτηση, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη στρεπτική στροφή, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης που αποτελεί σύγχρονη εξέλιξη της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων.

Η ανάλυση της ράβδου είναι πλήρης. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά στρεπτικά μεγέθη, οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής συμπεριλαμβανομένων και των συντελεστών Wagner β_1 , β_2 , U_w , η πλασματική συνάρτηση που είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό της σταθεράς στρέβλωσης μέσω συνοριακών ολοκληρωμάτων, το κέντρο στρέψης κατά τη γραμμική ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, οι αναπτυσσόμενες πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, καθώς και οι ορθές τάσεις στο εσωτερικό ως επίσης και στο σύνορο. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Βάσει της αναλυτικής και αριθμητικής διαδικασίας συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Η ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων συγκρινόμενη με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις και υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα, καθώς και με προσομοιώματα στερεών (εξαεδρικών)

πεπερασμένων στοιχείων, είναι αξιοσημείωτη. Από την αναδρομή στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι η έρευνα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι πρωτότυπη. Τα πρωτότυπα στοιχεία της συνοψίζονται στα ακόλουθα.

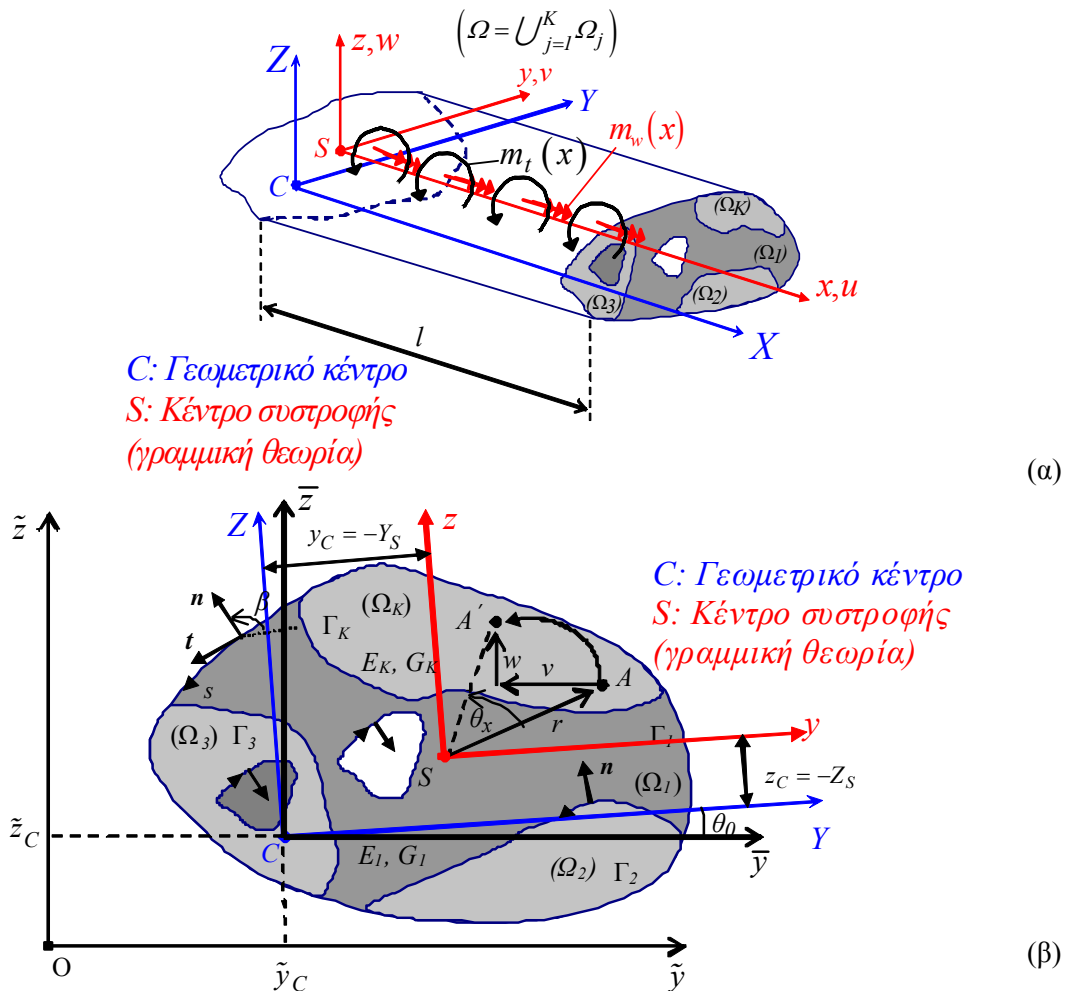
- i. Αναλύονται ομογενείς ή σύνθετες ράβδοι διατομής τυχόντος σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) υπό γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
- ii. Διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε ράβδους υπό γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη.
- iii. Επιλύεται αριθμητικά το εξεταζόμενο πρόβλημα με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Από την ερευνητική προσπάθεια που έγινε αναφορικά με τα θέματα που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο, προέκυψαν δημοσιεύσεις σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά διεθνούς κυκλοφορίας [Sapountzakis and Tsipiras 2009c, 2010a] και σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων [Sapountzakis and Tsipiras 2008d, 2009d].

1.2 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο μήκους l σύνθετης διατομής τυχόντος σχήματος αποτελούμενη από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων με διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας E_j και διάτμησης G_j , τα οποία καταλαμβάνουν τις περιοχές Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$) του επιπέδου \tilde{y}, \tilde{z} (Σχ.1.2). Τα υλικά της ράβδου θεωρούνται ότι είναι ομογενή, ισότροπα, συνεχή, γραμμικά υπερελαστικά (δηλαδή η ράβδος είναι κατά τμήματα συνεχής) και στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους (δηλαδή δεν υπάρχει δυνατότητα σχετικής ολίσθησης μεταξύ των υλικών), ενώ τα σύνορα τους είναι τμηματικά λεία (μπορούν δηλαδή να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών) και συμβολίζονται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) (Σχ.1.2β). Σημειώνεται, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το πρώτο υλικό με μέτρο ελαστικότητας E_1 και μέτρο διάτμησης G_1 θεωρείται ως υλικό αναφοράς. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση περί το διαμήκη άξονα της x (στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$) (Σχ.1.2α) ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Η ράβδος μπορεί να μετατοπίζεται ελεύθερα κατά την εγκάρσια έννοια και δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) συγκεκριμένος άξονας περιστροφής. Η μελέτη της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου κύριου καμπτικού συστήματος αναφοράς $Sxyz$ [Ντουρακόπουλος 2009, Sapountzakis and Dourakopoulos 2008, 2010], του οποίου ο διαμήκης άξονας Sx διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα διάτμησης) των διατομών κατά τη γραμμική ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b] (Σχ.1.2). Το αρχικό σημείο του άξονα Sx ($x = 0$) τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου (Σχ.1.2α), ενώ με $CXYZ$ συμβολίζεται το κύριο καμπτικό σύστημα αναφοράς, του οποίου ο διαμήκης άξονας CX διέρχεται από τα γεωμετρικά κέντρα των διατομών (Σχ.1.2). Σημειώνεται ότι, όπως θα φανεί παρακάτω (εδάφιο 1.2.3), σε αντίθεση με τη

γραμμική ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b], ο άξονας Sx δεν αποτελεί ακλόνητο άξονα περιστροφής των διατομών της ράβδου. Ωστόσο, η χρήση του σχετικού συστήματος αναφοράς $Sxyz$ στη μελέτη της ράβδου απλοποιεί σημαντικά τις εξισώσεις του προβλήματος χωρίς να αλλοιώνει τη γενικότητα αντιμετώπισης του προβλήματος.



Σχήμα 1.2. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) με σύνθετη διατομή τυχόντος σχήματος (β).

1.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

Υποθέτοντας ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται (δηλαδή δεν αναπτύσσονται εγκάρσιες παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής), θεωρώντας ότι τα υλικά σημεία της διατομής εκτελούν κυκλική τροχιά κατά την εγκάρσια διεύθυνση περί τον άξονα Sx , λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στρεπτικές στροφές των διατομών μπορούν να είναι μεγάλες και ότι τα υλικά της ράβδου είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους και προκειμένου να προσομοιωθούν τα κινηματικά φαινόμενα που έχουν αναφερθεί στο εδάφιο 1.1, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου δίδεται ως (βλ. και [Attard 1986a])

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \theta_Y(x)(z - z_C) - \theta_Z(x)(y - y_C) + \theta'_x(x)\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (1.2.1)$$

$$v(x, y, z) = v_S(x) - z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (1.2.2)$$

$$w(x, y, z) = w_S(x) + y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (1.2.3)$$

όπου u_m είναι «μέση» αξονική μετατόπιση της διατομής, η οποία γενικά δεν ισούται με τη μετατόπιση του σημείου S ή του γεωμετρικού κέντρου και θα εξηγηθεί αναλυτικά στα επόμενα (βλ. εξ.(1.2.28-29)), θ_Y και θ_Z είναι οι καμπτικές στροφές της διατομής περί τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα, θ_x είναι η γωνία στροφής περί τον άξονα Sx , θ'_x είναι η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους (συστροφή), v_S, w_S είναι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις του άξονα Sx , ϕ_S^P, ϕ_S^S είναι η πρωτογενής και η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο S , αντίστοιχα [Μώκος 2007, Sapountzakis and Mokos 2003b] και y_C, z_C είναι οι συντεταγμένες του γεωμετρικού κέντρου της διατομής, οι οποίες δίδονται ως

$$y_C = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} y d\Omega_j}{A} \quad z_C = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} z d\Omega_j}{A} \quad (1.2.4\alpha, \beta)$$

όπου A είναι το συνολικό ισοδύναμο εμβαδόν της διατομής που εκφράζεται ως

$$A = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \quad (1.2.5)$$

Στη σχέση (1.2.1) έχει υποθεθεί ότι οι καμπτικές στροφές της ράβδου είναι μικρές έως μέτριες [Attard 1986a], γεγονός που επιτρέπει την υιοθετηθείσα διατύπωση των σχετικών όρων. Επιπλέον είναι φανερό ότι οι στροφές θεωρούνται ότι γίνονται περί τους άξονες CY, CZ των γεωμετρικών κέντρων των διατομών. Οι συναρτήσεις στρέβλωσης εισάγονται προκειμένου να υπολογιστούν οι πρωτογενείς και οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ο προσδιορισμός τους θα παρουσιαστεί αναλυτικά στα επόμενα. Η πρωτογενής στρέβλωση της διατομής ($\theta'_x \phi_S^P$) λαμβάνεται ανάλογη με τη συστροφή θ'_x , γεγονός που οδηγεί στην αγνόηση των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Παρατηρείται τέλος ότι στο πεδίο μετατοπίσεων έχουν εισαχθεί συνολικά οκτώ άγνωστες ποσότητες (έξι συναρτήσεις της διαμήκους συντεταγμένης x , μία συνάρτηση των εγκάρσιων συντεταγμένων y, z και μία τριδιάστατη συνάρτηση), οι οποίες θα προσδιοριστούν από τις παραδοχές και τις διατιθέμενες εξισώσεις του προβλήματος

Η περιγραφή της παραμόρφωσης της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια του τανυστή παραμόρφωσης Green (βλ. εξ.(Π4.1.12-13)) που είναι κατάλληλος για τη διατύπωση προβλημάτων με γεωμετρική μη γραμμικότητα [Παπαδρακάκης 1998] (Παράρτημα Π4). Με θεώρηση μικρής «μέσης» αξονικής μετατόπισης, μικρής

πρωτογενούς και δευτερογενούς στρέβλωσης, μικρών καμπτικών στροφών και μικρών παραμορφώσεων, οι μη γραμμικοί όροι της διαμήκου μετατόπισης u των παραμορφώσεων Green μπορούν να αγνοηθούν (βλ. και [Ramm and Hoffmann 1995, Rothert and Gensichen 1987, Brush and Almroth 1975, Attard 1986a]), συνεπώς οι σχέσεις (Π4.1.12α-γ), (Π4.1.34) διαμορφώνονται ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.2.6\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1.2.6\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.2.6\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.2.6\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.2.6\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.2.6\sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων (εξ.(1.2.1-3)) στις παραπάνω σχέσεις, προκύπτουν οι συνιστώσες του ταυνοστή παραμόρφωσης Green ως

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx})_j &= u'_m + \theta'_Y (z - z_C) - \theta'_Z (y - y_C) + \theta''_x \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \\ &\quad - \theta'_x \left[y (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + z (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.2.7\alpha)$$

$$(\varepsilon_{yy})_j = 0 \quad (1.2.7\beta)$$

$$(\varepsilon_{zz})_j = 0 \quad (1.2.7\gamma)$$

$$(\gamma_{xy})_j = -\theta_Z + (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) + \underbrace{\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.7\delta)$$

$$(\gamma_{xz})_j = \theta_Y - (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + \underbrace{\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.7\epsilon)$$

$$(\gamma_{yz})_j = 0 \quad (1.2.7\sigma\tau)$$

όπου ο κάτω δεξιός δείκτης αναφέρεται στην περιοχή Ω_j όπου ορίζονται οι παραπάνω ποσότητες, ενώ στις σχέσεις (1.2.7δ,ε) διακρίνονται οι εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων που είναι πανομοιότυπες με αυτές της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001 Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b]. Επιπρόσθετα, παρατηρείται η ύπαρξη σταθερής κατανομής διατμητικών παραμορφώσεων, η οποία εξαρτάται από τις εγκάρσιες μετατοπίσεις και τις καμπτικές στροφές της διατομής. Προκειμένου να απαλειφθεί η κατανομή αυτή, εισάγεται ανάλογη κινηματική υπόθεση με τη θεωρία καμπτόμενων δοκών Bernoulli-Euler, σύμφωνα με την οποία οι διατομές της ράβδου **παραμένουν κάθετες στον άξονα Sx** κατά την παραμόρφωση, εάν δεν ληφθεί υπόψη η στρέβλωση της διατομής. Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται ότι (Παράρτημα Π6)

$$\theta_Y = v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x \quad (1.2.8\alpha)$$

$$\theta_Z = v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x \quad (1.2.8\beta)$$

συνεπώς μηδενίζεται η σταθερή κατανομή διατμητικών παραμορφώσεων των εξ.(1.2.5δ,ε). Στις εκφράσεις (1.2.8) μπορούμε να καταλήξουμε και με τη βοήθεια «στατικών» υποθέσεων (βλ. σχέσεις (1.2.32), παρακάτω). Σημειώνεται ότι στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγει και ο Attard [1986a] κατά τη μελέτη ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής στα πλαίσια της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών, χρησιμοποιώντας την παραδοχή ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις στη μέση επιφάνεια της λεπτότοιχης ράβδου είναι μηδενικές. Τονίζεται ότι η χρήση της κινηματικής υπόθεσης της θεωρίας καμπτόμενων δοκών Bernoulli-Euler, ότι οι διατομές της ράβδου **παραμένουν κάθετες στον άξονα CX των γεωμετρικών κέντρων των διατομών κατά την παραμόρφωση, δεν οδηγεί στο παραπάνω αποτέλεσμα** και ως εκ τούτου η σταθερή κατανομή διατμητικών παραμορφώσεων των εξ.(1.2.5δ,ε) δεν μηδενίζεται. Με τη βοήθεια των εκφράσεων (1.2.6), οι μη μηδενικές ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις απλοποιούνται ως

$$(\epsilon_{xx})_j = u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta'_x \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \quad (1.2.9\alpha)$$

$$(\gamma_{xy})_j = \underbrace{\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.9\beta)$$

$$(\gamma_{xz})_j = \underbrace{\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.9\gamma)$$

όπου ο τριδιάστατος όρος $(1/2)(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2$ της ορθής παραμόρφωσης καλείται “παραμόρφωση Wagner” [Pi and Trahair 1995], ενώ τα κ_Y , κ_Z εκφράζουν τις καμπτικές καμπυλότητες του άξονα των γεωμετρικών κέντρων και δίδονται ως

$$\kappa_Y = v_S'' \sin \theta_x - w_S'' \cos \theta_x \quad (1.2.10\alpha)$$

$$\kappa_Z = v_S'' \cos \theta_x + w_S'' \sin \theta_x \quad (1.2.10\beta)$$

Η περιγραφή του τασικού πεδίου της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff που είναι κατάλληλος για τη διατύπωση προβλημάτων με γεωμετρική μη γραμμικότητα [Παπαδρακάκης 1998] (Παράρτημα Π4). Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις και ότι τα υλικά της ράβδου είναι ομογενή, ισότροπα, συνεχή και γραμμικά υπερελαστικά, οι συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff δίδονται συναρτήσει των παραμορφώσεων Green από το γενικευμένο νόμο του Hooke (εξ.(Π5.2.17)). Με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.7), (1.2.9), οι σχέσεις αυτές διαμορφώνονται ως

$$(S_{xx})_j = E_j^* \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{1}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + (y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (1.2.11\alpha)$$

$$(S_{yy})_j = E_j^{**} \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{1}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + (y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (1.2.11\beta)$$

$$(S_{zz})_j = E_j^{**} \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta_x'' \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{1}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + (y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (1.2.11\gamma)$$

$$(S_{xy})_j = \underbrace{G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.11\delta)$$

$$(S_{xz})_j = \underbrace{G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.11\epsilon)$$

$$(S_{yz})_j = 0 \quad (1.2.11\sigma\tau)$$

όπου $E_j^* = E_j(1-\nu_j)/[(1+\nu_j)(1-2\nu_j)]$, $E_j^{**} = E_j\nu_j/[(1+\nu_j)(1-2\nu_j)]$, ενώ έχει αγνοηθεί η επιρροή της δευτερογενούς στρέβλωσης στις ορθές τάσεις. Οι συνιστώσες $(S_{xx})_j$, $(S_{xy})_j$, $(S_{xz})_j$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν για τη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας του προβλήματος, ενώ οι ορθές τάσεις $(S_{yy})_j$, $(S_{zz})_j$, οι οποίες δεν παράγουν έργο (αφού οι αντίστοιχες ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις $(\varepsilon_{yy})_j$, $(\varepsilon_{zz})_j$ είναι μηδενικές, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.2.7β,γ)), μπορούν να υπολογιστούν μετά τον προσδιορισμό των άγνωστων κινηματικών μεγεθών. Ωστόσο, γίνεται η παραδοχή ότι $(S_{yy})_j = (S_{zz})_j \approx 0$, τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την καθολική ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει επακριβώς στην περίπτωση μηδενικών λόγων Poisson $\nu_j = 0$. Επιπλέον, το E_j^* αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E_j , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που $\nu_j = 0$. Η παραδοχή αυτή υιοθετείται και στη Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών [Vlasov 1963], όπου διατυπώνεται η υπόθεση ότι τα τοιχώματα της διατομής βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσης και μέσω τούτου αποδεικνύεται ότι $E^* = E/(1-\nu^2) \Rightarrow E^* \approx E$ για τις συνήθεις τιμές λόγου Poisson που λαμβάνουν τα δομικά υλικά. Εξάλλου οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση θεωριών δοκού (βλ. [Armenakas 2006]). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff διαμορφώνονται τελικά ως

$$(S_{xx})_j = E_j \left\{ u'_m + \kappa_Y(z - z_C) - \kappa_Z(y - y_C) + \theta'_x \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (1.2.12\alpha)$$

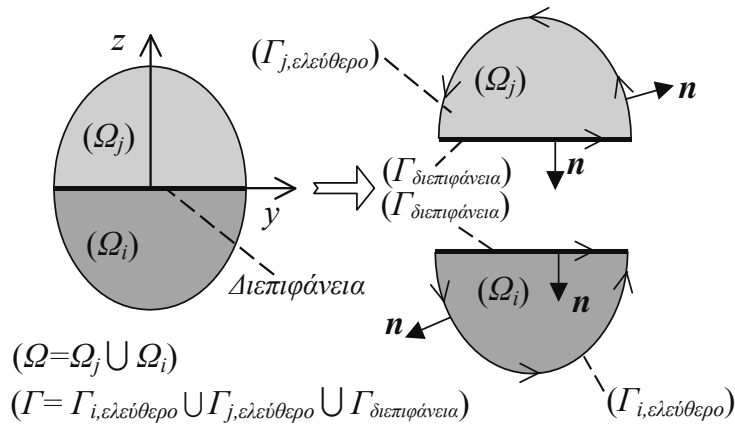
$$(S_{xy})_j = \underbrace{G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.12\beta)$$

$$(S_{xz})_j = \underbrace{G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)_j}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (1.2.12\gamma)$$

1.2.2 Πρωτογενής και Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης, οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S προσδιορίζονται με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά την αξονική διεύθυνση της ράβδου (εξ.(Π4.2.48α)). Στην παρούσα θεωρία, η εφαρμογή της μεθόδου αυτής

[Μώκος 2007, Sapountzakis and Mocos 2003a,b] είναι εξαιρετικά δυσχερές εξαιτίας των πολύ περισσότερων όρων που προκύπτουν. Η προσπάθεια να ικανοποιηθεί η προαναφερθείσα εξίσωση σε επίπεδο υλικού σημείου (εξ.(Π4.2.28α)) οδηγεί σε περίπλοκες εξισώσεις, οι οποίες δεν έχουν πρακτική αξία για την ανάπτυξη σχετικά απλής μη γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης που να αποτελεί επέκταση της αντίστοιχης γραμμικής. Συνεπώς, οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S προσδιορίζονται με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών που έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς από το Washizu [1975] για την επίλυση του προβλήματος της μη γραμμικής ελαστικής ομοιόμορφης στρέψης ομογενών ράβδων, όταν στη ράβδο ασκούνται αρχικές ορθές τάσεις κατά την αξονική διεύθυνση.



Σχήμα 1.3. Ορισμός συνόρων Γ_j , Γ_i σε σύνθετη διατομή.

Η Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange, αγνοώντας μαζικές δυνάμεις, γράφεται ως [Bathe 1996] (βλ. εξ.(Π4.2.47))

$$\begin{aligned} \iiint_V (S_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + S_{xy}\delta\gamma_{xy} + S_{xz}\delta\gamma_{xz}) dV &= \iint_F (t_x\delta u + t_y\delta v + t_z\delta w) dF \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^K \iint_{V_j} \left((S_{xx})_j (\delta\varepsilon_{xx})_j + (S_{xy})_j (\delta\gamma_{xy})_j + (S_{xz})_j (\delta\gamma_{xz})_j \right) dV_j & \\ = \iint_F (t_x\delta u + t_y\delta v + t_z\delta w) dF & \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

όπου στην παραπάνω σχέση παραλήφθηκαν οι όροι τάσεων που δεν παράγουν έργο, με $\delta(\cdot)$ συμβολίζονται δυνατές ποσότητες, V είναι ο όγκος της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση, F είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση συμπεριλαμβανομένων και των δύο ακραίων διατομών της και t_x , t_y , t_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας (αρχική διαμόρφωση) (βλ. Παράρτημα Π4). Αρχικά μελετούμε τους όρους της δυνατής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης. Οι σχετικοί όροι του δυνατού εσωτερικού έργου (αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης) δίδονται ως

$$\begin{aligned}
I_l^P &= \sum_{j=1}^K \iiint_{V_j} (S_{xx})_j \theta_x'' \delta\phi_S^P dV_j \\
&+ \sum_{j=1}^K \iiint_{V_j} \theta_x' \left((S_{xy})_j \left(\frac{\partial \delta\phi_S^P}{\partial y} \right)_j + (S_{xz})_j \left(\frac{\partial \delta\phi_S^P}{\partial z} \right)_j \right) dV_j \quad (1.2.14)
\end{aligned}$$

Ακολουθώντας την τεχνική του Washizu [1975], ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως προς x του πρώτου όρου της παραπάνω εξίσωσης δίδει

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^l \left[\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (\theta_x')' \left((S_{xx})_j \delta\phi_S^P \right) d\Omega_j \right] dx &= - \int_{x=0}^l \left[\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (\theta_x') \frac{\partial}{\partial x} \left((S_{xx})_j \theta_x'' \delta\phi_S^P \right) d\Omega_j \right] dx \\
&+ \theta_x'(l) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} S_{xx} \delta\phi_S^P d\Omega_j - \theta_x'(0) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} S_{xx} \delta\phi_S^P d\Omega_j \quad (1.2.15)
\end{aligned}$$

όπου Ω_{0j} , Ω_{lj} είναι τα χωρία Ω_j των ακραίων διατομών της ράβδου για $x=0$ και $x=l$, αντίστοιχα. Ολοκληρώνοντας κατάλληλα κατά παράγοντες ως προς y , z τον δεύτερο όρο της εξ.(1.2.14) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{x=0}^l \left[\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \theta_x' \left((S_{xy})_j \left(\frac{\partial \delta\phi_S^P}{\partial y} \right)_j + (S_{xz})_j \left(\frac{\partial \delta\phi_S^P}{\partial z} \right)_j \right) d\Omega_j \right] dx = \\
&\int_{x=0}^l \left[-\theta_x' \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left(\left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right)_j \right) \delta\phi_S^P d\Omega_j \right. \\
&\left. + \theta_x' \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(S_{xy})_j n_y + (S_{xz})_j n_z - \left((S_{xy})_i n_y + (S_{xz})_i n_z \right) \right] \delta\phi_S^P ds_j \right] dx \quad (1.2.16)
\end{aligned}$$

όπου $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$, με $\beta = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}$, δηλαδή β είναι η γωνία μεταξύ του άξονα y και του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στις παράπλευρες επιφάνειες των υλικών της ράβδου (Σχ.1.2β). Σημειώνεται ότι στις ελεύθερες επιφάνειες της ράβδου το Γ_j είναι το ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , ενώ στις διεπιφάνειες μεταξύ των υλικών της ράβδου το Γ_j είναι το κοινό σύνορο που διαχωρίζει τα χωρία Ω_j και Ω_i , όπου κινούμενοι στο κοινό σύνορο τα χωρία Ω_j και Ω_i βρίσκονται αριστερά και δεξιά του Γ_j , αντίστοιχα (Σχ.1.3). Στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο, στην παραπάνω σχέση τίθεται $(S_{xy})_i = (S_{xz})_i = 0$. Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες εκφράσεις στο δεξιό μέλος της εξ.(1.2.14) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
I_1^P = & \int_{x=0}^l \left[-\theta'_x \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left(\frac{\partial (S_{xx})_j}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right)_j \right) \delta\phi_S^P d\Omega_j \right. \\
& + \theta'_x \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(S_{xy})_j n_y + (S_{xz})_j n_z - \left((S_{xy})_i n_y + (S_{xz})_i n_z \right) \right] \delta\phi_S^P ds_j \left. \right] dx \\
& + \theta'_x(l) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} (S_{xx})_j \delta\phi_S^P d\Omega_j - \theta'_x(0) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} (S_{xx})_j \delta\phi_S^P d\Omega_j \quad (1.2.17)
\end{aligned}$$

Ομοίως ο όρος της δυνατής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης του δυνατού εξωτερικού έργου (δεξιό μέλος της σχέσης (1.2.13)) δίδεται ως

$$\begin{aligned}
I_2^P = & \int_F t_x \theta'_x \delta\phi_S^P dF \\
= & \theta'_x(0) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} t_x \delta\phi_S^P d\Omega_j + \theta'_x(l) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} t_x \delta\phi_S^P d\Omega_j + \int_{F_{lat}} t_x \theta'_x \delta\phi_S^P dF \quad (1.2.18)
\end{aligned}$$

όπου F_{lat} είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου ($F = F_{lat} \cup \sum_{j=1}^K \Omega_{0j} \cup \sum_{j=1}^K \Omega_{lj}$). Η

δυνατή μεταβολή της ϕ_S^P δεν είναι μηδενική καθώς δεν έχει καθοριστεί a priori και η συστροφή θ'_x εν γένει δεν ισούται με μηδέν κατά μήκος της ράβδου, συνεπώς από τις εξ.(1.2.17-18) προκύπτει η ακόλουθη τοπική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial (S_{xx})_j}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right)_j = 0 \text{ στο } \Omega_j, \forall x \in (0, l) \quad (1.2.19\alpha)$$

καθώς και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη

$$(S_{xy})_j n_y + (S_{xz})_j n_z = (S_{xy})_i n_y + (S_{xz})_i n_z \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in (0, l) \quad (1.2.19\beta)$$

όταν το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i , ενώ στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο η παραπάνω σχέση διαμορφώνεται ως

$$(S_{xy})_j n_y + (S_{xz})_j n_z = t_x \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in (0, l) \quad (1.2.19\gamma)$$

Οι εξισώσεις (1.2.19) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P . Από τους όρους των εξ.(1.2.17-18) που σχετίζονται με τα δύο άκρα της ράβδου προκύπτει επίσης και όρος - «υπόλοιπο»

$$I_{res}^P = -\theta'_x(l) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (t_x - (S_{xx})_j) \delta\phi_S^P d\Omega_j - \theta'_x(0) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} (t_x + (S_{xx})_j) \delta\phi_S^P d\Omega_j \quad (1.2.20)$$

ο οποίος, στα πλαίσια θεωρίας στρέψης, δεν είναι δυνατό γενικά να μηδενιστεί. Στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας ο συγκεκριμένος όρος αγνοείται, επισημαίνοντας ότι η ασυνέπεια λόγω αυτής της παραδοχής είναι «τοπική» και δεν επηρεάζει τη συνολική συμπεριφορά της ράβδου. Εξάλλου, για συγκεκριμένες περιπτώσεις συννοριακών συνθηκών, όπως π.χ. πλήρης παρεμπόδιση της στρέβλωσης (όπου ισχύει $\theta'_x = 0$ - βλ. σχέση (1.2.44β)) ή επιβολή εξωτερικής επιφανειακής δράσης $t_x = \pm (S_{xx})_j$, ο όρος I_{res}^P μηδενίζεται.

Εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία και για τους όρους της δυνατής δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, οι σχετικοί όροι του δυνατού εσωτερικού και εξωτερικού έργου δίδονται αντίστοιχα ως

$$\begin{aligned} I_l^S = & \int_{x=0}^l \left[-\sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left(\frac{\partial (S_{xx})_j}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right)_j \right) \delta\phi_S^S d\Omega_j \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(S_{xy})_j n_y + (S_{xz})_j n_z - \left((S_{xy})_i n_y + (S_{xz})_i n_z \right) \right] \delta\phi_S^S ds_j \right] dx \\ & + \theta'_x(l) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j \delta\phi_S^S d\Omega_j - \theta'_x(0) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} (S_{xx})_j \delta\phi_S^S d\Omega_j \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

$$I_2^S = \int_F t_x \theta'_x \delta\phi_S^S dF = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} t_x \delta\phi_S^S d\Omega_j + \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} t_x \delta\phi_S^S d\Omega_j + \int_{F_{lat}} t_x \delta\phi_S^S dF \quad (1.2.22)$$

Η δυνατή μεταβολή της ϕ_S^S επίσης δεν είναι μηδενική καθώς δεν έχει καθοριστεί α priori, συνεπώς από τις εξ.(1.2.21-22) προκύπτουν ορισμένες εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι ίδιες ακριβώς εξισώσεις που διατυπώθηκαν από την εξέταση των όρων της δυνατής ϕ_S^P (βλ. εξ.(1.2.19)) και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S . Όπως και στην προηγούμενη ανάλυση για τη ϕ_S^P , έτσι και στην περίπτωση της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, θα προκύψει ο παρακάτω όρος - «υπόλοιπο» στα δύο άκρα της ράβδου

$$I_{res}^S = -\theta'_x(l) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (t_x - (S_{xx})_j) \delta\phi_S^S d\Omega_j - \theta'_x(0) \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} (t_x + (S_{xx})_j) \delta\phi_S^S d\Omega_j \quad (1.2.23)$$

ο οποίος επίσης αγνοείται.

Συμπερασματικά, οι δύο συναρτήσεις στρέβλωσης που εισήχθησαν στο πεδίο μετατοπίσεων θα πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (1.2.19α) σε επίπεδο υλικού σημείου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (1.2.19β,γ). Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης από τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών

$$\left(\nabla^2 \phi_S^P\right)_j = 0 \text{ στο } \Omega_j \quad (1.2.24\alpha)$$

$$G_j \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j - G_i \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_i = (G_j - G_i)(zn_y - yn_z) \text{ στο } \Gamma_j \quad (1.2.24\beta)$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 \phi_S^S\right)_j = & -\frac{E_j}{G_j} \left\{ u_m'' + \kappa_Y'(z - z_C) - \kappa_Z'(y - y_C) + \theta_x''' \phi_S^P \right. \\ & - \theta_x''(y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) - \theta_x'(y_C \theta_Y' + z_C \theta_Z') \\ & \left. + \nu_S' \nu_S'' + w_S' w_S'' + (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \right\} \text{ στο } \Omega_j, \forall x \in [0, l] \end{aligned} \quad (1.2.25\alpha)$$

$$G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n}\right)_j - G_i \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n}\right)_i = 0 \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.25\beta)$$

ικανοποιεί τις εξ.(1.2.19), σημειώνοντας ότι οι εξ.(1.2.24β), (1.2.25β) ισχύουν όταν το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i , ενώ στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο διαμορφώνονται ως

$$\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j = zn_y - yn_z \text{ στο } \Gamma_j \quad (1.2.24\gamma)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n}\right)_j = \frac{t_x}{G_j} \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.25\gamma)$$

σημειώνοντας ότι η ισχύς των σχέσεων (1.2.25) επεκτάθηκε και στα άκρα της ράβδου. Στις παραπάνω σχέσεις, $\left(\nabla^2\right)_j = \left(\partial^2/\partial y^2\right)_j + \left(\partial^2/\partial z^2\right)_j$ είναι ο τελεστής Laplace και ο συμβολισμός $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_j = (\partial/\partial y)_j n_y + (\partial/\partial z)_j n_z$ δηλώνει την παράγωγο κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο Γ_j . Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι της πρωτογενούς και δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} μεταβάλλονται ασυνεχώς κατά μήκος των διεπιφανειών μεταξύ των υλικών της ράβδου. Επισημαίνεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών προσδιορισμού της ϕ_S^P (εξ.(1.2.24)) είναι πανομοιότυπο με αυτό της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and

Mokos 2001, 2003a,b], ενώ όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της διαφορικής εξίσωσης του αντίστοιχου προβλήματος της ϕ_S^S (εξ.(1.2.25α)), πλην του όρου $(E_j / G_j) \theta_x''' \phi_S^P$, οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και ως εκ τούτου δεν υπεισέρχονται στη γραμμική θεωρία. Τέλος, όπως θα γίνει αντιληπτό παρακάτω, η έκφραση του u'_m ως προς τα υπόλοιπα κινηματικά μεγέθη του προβλήματος (εξ.(1.2.50)) οδηγεί σε σημαντική απλοποίηση του δεξιού μέλους της διαφορικής εξίσωσης υπολογισμού της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης (1.2.25α) (βλ. εξ.(1.2.52)).

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών (1.2.24-25) είναι τύπου Neumann και επομένως οι συναρτήσεις στρέβλωσης θα προκύψουν συναρτήσεις αυθαίρετων σταθερών. Επιπλέον, οι μεταβλητές y, z υπεισέρχονται στη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος της ϕ_S^P , συνεπώς η λύση του θα εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων, γεγονός που αντανακλά ότι η θέση του σημείου S δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων (σε ράβδους ασύμμετρης διατομής). Προκειμένου να ευρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου S αλλά και να προσδιοριστεί μοναδική λύση για τη ϕ_S^P , ακολουθείται διαδικασία παρόμοια με αυτή της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b] (βλ. και εδάφιο 1.2.4). Έτσι, η προκύπτουσα πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης θα ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες ορθογωνικότητας

$$\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P d\Omega_j = 0 \quad \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P y d\Omega_j = 0 \quad \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P z d\Omega_j = 0 \quad (1.2.26\alpha, \beta, \gamma)$$

Προκειμένου να προσδιορισθεί μοναδική λύση για τη ϕ_S^S ακολουθείται επίσης διαδικασία παρόμοια με αυτή της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης [Μώκος 2007, Sapountzakis and Mokos 2003a,b] (βλ. και εδάφιο 1.2.4). Έτσι, η προκύπτουσα δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης θα ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^S d\Omega_j = 0 \quad (1.2.27)$$

Πλέον, στο σημείο αυτό μπορεί να δοθεί η φυσική σημασία της αξονικής μετατόπισης u_m . Έτσι, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1.2.1) με E_j / E_1 ($j = 1, 2, \dots, K$) K φορές, ολοκληρώνοντας την κάθε προκύπτουσα σχέση στο χωρίο Ω_j και προσθέτοντας κατά μέλη, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} u d\Omega_j &= u_m \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \\ &+ \theta_y \left[\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} z d\Omega_j - z_C \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta_Z \left[\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} y d\Omega_j - y_C \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \right] \\
& + \theta'_x \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P d\Omega_j + \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^S d\Omega_j \quad (1.2.28)
\end{aligned}$$

Από τις εκφράσεις (1.2.4-5), (1.2.26α), (1.2.27), η παραπάνω έκφραση δίδει

$$u_m = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} u d\Omega_j}{A} \quad (1.2.29)$$

από όπου καθίσταται εμφανές ότι η u_m είναι ισοδύναμη «μέση» αξονική μετατόπιση των διατομών της ράβδου, η οποία εν γένει δεν ταυτίζεται με την αξονική μετατόπιση ούτε του γεωμετρικού κέντρου ούτε του σημείου S της διατομής.

1.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισοροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

Οι εναπομείναντες τέσσερις κινηματικοί άγνωστοι του προβλήματος (u_m , v_S , w_S , θ_x) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισοροπίας, οι οποίες θα διατυπωθούν επίσης με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Για διευκόλυνση, ορίζονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$N = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j d\Omega_j \quad (1.2.30\alpha)$$

$$M_Y = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j (z - z_C) d\Omega_j \quad M_Z = - \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j (y - y_C) d\Omega_j \quad (1.2.30\beta,\gamma)$$

$$Q_y = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xy})_j d\Omega_j \quad Q_z = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xz})_j d\Omega_j \quad (1.2.30\delta,\epsilon)$$

$$M_t^P = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(S_{xy})_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) + (S_{xz})_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) \right] d\Omega_j \quad (1.2.30\sigma\tau)$$

$$M_w = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j \phi_S^P d\Omega_j \quad (1.2.30\zeta)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε αξονική δύναμη, καμπτικές ροπές, τέμνουσες δυνάμεις, πρωτογενή στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα, σημειώνοντας ότι στη βιβλιογραφία συχνά ο ορισμός (1.2.30ζ) εκφράζεται με αρνητικό πρόσημο, ενώ ο ορισμός (1.2.30στ) καταλήγει, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες και με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.24), στον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό (βλ. [Μώκος 2007])

$$M_t^P = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(S_{xy}^P)_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) + (S_{xz}^P)_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) \right] d\Omega_j \quad (1.2.31)$$

όπου $(S_{xy}^P)_j$, $(S_{xz}^P)_j$ είναι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο ορισμός των παραπάνω μεγεθών βασίζεται στο 2ο τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff, συνεπώς λαμβάνονται υπόψη οι στροφές που έχουν υποστεί τα (απειροστά) στοιχεία που απαρτίζουν τις διατομές της ράβδου κατά την παραμόρφωση [Bathe 1996] (βλ. εδάφιο Π4.2.7). Εξαιτίας της στρέβλωσης που παρουσιάζουν οι διατομές της ράβδου, συμπεραίνεται ότι οι συνιστώσες του συγκεκριμένου τανυστή τάσης που καταπονούν τα απειροστά στοιχεία δεν έχουν κοινή διεύθυνση. Συνεπώς τα εντατικά μεγέθη που ορίζονται μέσω των συνιστωσών αυτών δεν αντιστοιχούν σε επίπεδες διατομές στην παραμορφωμένη διαμόρφωση. Επιπρόσθετα, οι εκφράσεις (1.2.8) που έχουν υιοθετηθεί για τις καμπτικές στροφές θ_Y , θ_Z μπορούν εναλλακτικά να προκύψουν με τη βοήθεια των εκφράσεων των τεμνουσών δυνάμεων (1.2.30δ,ε). Πράγματι, εάν δεν ληφθεί υπόψη η δευτερογενής στρέβλωση των διατομών, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των διατμητικών παραμορφώσεων (1.2.7δ,ε) και τις αντίστοιχες καταστατικές σχέσεις (Π5.2.17δ,ε), οι σχέσεις (1.2.30δ,ε) γράφονται ως

$$Q_y = \left[\theta_Z - (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} G_j d\Omega_j + \theta'_x \sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) d\Omega_j \quad (1.2.32\alpha)$$

$$Q_z = \left[\theta_Y - (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) \right] \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} G_j d\Omega_j + \theta'_x \sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) d\Omega_j \quad (1.2.32\beta)$$

Υποθέτοντας ότι οι τέμνουσες δυνάμεις μηδενίζονται και λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνεισφορά της πρωτογενούς στρέβλωσης στις εκφράσεις των τεμνουσών δυνάμεων μηδενίζεται [Μώκος 2007], οι παραπάνω σχέσεις δίδουν επακριβώς τις εκφράσεις (1.2.8) των καμπτικών στροφών.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(1.2.12)) στις σχέσεις (1.2.30α,β,γ,στ,ζ), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = E_I A \left[u'_m + \frac{I}{2} \left((v'_S)^2 + (w'_S)^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right) - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) \right] \quad (1.2.33\alpha)$$

$$M_Y = E_I I_{YY} \left[\kappa_Y + \beta_2 (\theta'_x)^2 \right] \quad M_Z = E_I I_{ZZ} \left[\kappa_Z - \beta_1 (\theta'_x)^2 \right] \quad (1.2.33\beta,\gamma)$$

$$M_t^P = G_I I_t \theta'_x \quad M_w = E_I C_S \left[\theta_x'' + \frac{U_w}{2C_S} (\theta'_x)^2 \right] \quad (1.2.33\delta, \epsilon)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_P (πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο S), I_{YY} , I_{ZZ} (ροπές αδράνειας ως προς το γεωμετρικό κέντρο C), I_t (στρεπτική σταθερά), C_S (σταθερά στρέβλωσης) και β_1 , β_2 , U_w (συντελεστές Wagner [Ντουρακόπουλος 2009, Mohri et al. 2001]) δίδονται ως

$$I_P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (1.2.34\alpha)$$

$$I_{YY} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (z - z_C)^2 d\Omega_j \quad I_{ZZ} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y - y_C)^2 d\Omega_j \quad (1.2.34\beta, \gamma)$$

$$I_t = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_I} \iint_{\Omega_j} \left(y^2 + z^2 + y \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j - z \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right) d\Omega_j \quad (1.2.34\delta)$$

$$C_S = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (\phi_S^P)^2 d\Omega_j \quad (1.2.34\epsilon)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2I_{ZZ}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)(y - y_C) d\Omega_j \quad (1.2.34\sigma\tau)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2I_{YY}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)(z - z_C) d\Omega_j \quad (1.2.34\zeta)$$

$$U_w = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (1.2.34\eta)$$

Σημειώνεται ότι οι συντελεστές Wagner σχετίζονται με την ανάπτυξη ορθών τάσεων εξαιτίας των μεγάλων στρεπτικών στροφών και ποσοτικοποιούν τη μεταβολή των καμπτικών καμπυλοτήτων (συντελεστές β_1 , β_2) και της αντίστασης στρέβλωσης (συντελεστής U_w) σε ράβδους που υποβάλλονται σε στρεπτική φόρτιση [Attard 1986a,b]. Ένας από τους δύο συντελεστές β_1 , β_2 θα είναι μηδενικός στην περίπτωση που η διατομή διαθέτει έναν άξονα συμμετρίας, ενώ και οι δύο συντελεστές μηδενίζονται όταν η διατομή είναι διπλά συμμετρική [Attard 1986a,b]. Ο συντελεστής U_w είναι μη μηδενικός μόνο στην περίπτωση που η διατομή δεν διαθέτει άξονα συμμετρίας.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.2.33), (1.2.12), οι τάσεις δίδονται συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως

$$(S_{xx})_j = \frac{E_j}{E_1} \left\{ \frac{N}{A} - \frac{M_Z}{I_{ZZ}}(y - y_C) + \frac{M_Y}{I_{YY}}(z - z_C) + \frac{M_w}{C_S} \phi_S^P \right. \\ \left. + \frac{1}{2} E_1 (\theta'_x)^2 \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} - 2\beta_1(y - y_C) - 2\beta_2(z - z_C) - \frac{U_w}{C_S} \phi_S^P \right] \right\} \quad (1.2.35\alpha)$$

$$(S_{xy})_j = \frac{G_j}{G_1} \frac{M_t^P}{I_t} \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) + G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)_j \quad (1.2.35\beta)$$

$$(S_{xz})_j = \frac{G_j}{G_1} \frac{M_t^P}{I_t} \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) + G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)_j \quad (1.2.35\gamma)$$

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange (εξ.(1.2.13)) τις δυνατές μεταβολές της στρεπτικής στροφής θ_x (και των παραγώγων της) και με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.35) προσδιορίζεται διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange που περιγράφει την καθολική ισορροπία στρεπτικών δράσεων της ράβδου, η οποία μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x=0, l$ εκφράζεται ως

$$-Ny_C \theta_Z \theta'_x + Nz_C \theta_Y \theta'_x - M_Z \kappa_Y + M_Y \kappa_Z + \frac{d^2 M_w}{dx^2} \\ - \frac{d}{dx} \left[M_t^P + \frac{1}{2} E_1 I_n (\theta'_x)^3 + \Psi \theta'_x - Ny_C \theta_Y - Nz_C \theta_Z \right] = m_t(x) - m'_w(x) \quad (1.2.36)$$

$$\left[-(M_w)' + M_t^P + \frac{1}{2} E_1 I_n (\theta'_x)^3 + \Psi \theta'_x - Ny_C \theta_Y - Nz_C \theta_Z - m_w + \bar{M}_{t0} \right] \delta \theta_x(0) = 0 \quad (1.2.37\alpha)$$

$$\left[-(M_w)' + M_t^P + \frac{1}{2} E_1 I_n (\theta'_x)^3 + \Psi \theta'_x - Ny_C \theta_Y - Nz_C \theta_Z - m_w - \bar{M}_{tl} \right] \delta \theta_x(l) = 0 \quad (1.2.37\beta)$$

$$(M_w + \bar{M}_{w0}) \delta \theta'_x(0) = 0 \quad (M_w - \bar{M}_{wl}) \delta \theta'_x(l) = 0 \quad (1.2.37\gamma, \delta)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_n μπορεί να χαρακτηριστεί ως «στρεπτική σταθερά ανώτερης τάξης» [Attard 1986a] και δίδεται μαζί με την ποσότητα $\Psi = \Psi(x)$ ως

$$I_n = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} - 4\beta_1^2 I_{ZZ} - 4\beta_2^2 I_{YY} - \frac{U_w^2}{C_S} \quad (1.2.38\alpha)$$

$$\Psi = N \frac{I_P}{A} - 2M_Z \beta_1 + 2M_Y \beta_2 + M_w \frac{U_w}{C_S} \quad (1.2.38\beta)$$

όπου στη σχέση (1.2.38α) η γεωμετρική σταθερά I_{PP} (ροπή τέταρτης τάξης ως προς το σημείο S) δίδεται ως

$$I_{PP} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)^2 d\Omega_j \quad (1.2.38\gamma)$$

Επισημαίνεται ότι κατά την εξαγωγή των σχέσεων (1.2.36-37) προκύπτει ότι οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις δεν επηρεάζουν την καθολική ισορροπία της ράβδου. Ωστόσο υπολογίζονται κανονικά μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών των σχέσεων (1.2.25). Στην έκφραση (1.2.36) υπεισέρχονται τα μεγέθη m_t , m_w (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις κατά μήκος της ράβδου (βλ. Σχ.1.2α) και ορίζονται (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων) συναρτήσει του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ως

$$m_t(x) = \int_{\Gamma_{lat}} t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) ds \quad (1.2.39\alpha)$$

$$m_w(x) = \int_{\Gamma_{lat}} t_x \phi_S^P ds \quad (1.2.39\beta)$$

όπου Γ_{lat} είναι το ελεύθερο σύνορο της διατομής της ράβδου. Στις συνοριακές συνθήκες (1.2.37) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{M}_{t0} , \bar{M}_{tl} , \bar{M}_{w0} , \bar{M}_{wl} που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις ακραίες διατομές της ράβδου ως

$$\bar{M}_{t0} = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} \left[t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega_j \quad (1.2.40\alpha)$$

$$\bar{M}_{tl} = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} \left[t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega_j \quad (1.2.40\beta)$$

$$\bar{M}_{w0} = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} t_x \phi_S^P d\Omega_j \quad \bar{M}_{wl} = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} t_x \phi_S^P d\Omega_j \quad (1.2.40\gamma, \delta)$$

ή συναρτήσει των συνιστωσών του 1ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff (εξ.(Π4.2.23)) ως

$$\bar{M}_{t0} = - \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} \left[(P_{yx})_j (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + (P_{zx})_j (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega_j \quad (1.2.41\alpha)$$

$$\bar{M}_{tl} = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} \left[(P_{yx})_j (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + (P_{zx})_j (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega_j \quad (1.2.41\beta)$$

$$\bar{M}_{w0} = - \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} (P_{xx})_j \phi_S^P d\Omega_j \quad \bar{M}_{wl} = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} (P_{xx})_j \phi_S^P d\Omega_j \quad (1.2.41\gamma, \delta)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις διακρίνεται η επιρροή της θ_x , η οποία τροποποιεί ουσιαδώς τη γεωμετρικά μη γραμμική από τη γραμμική ανάλυση. Οι εκφράσεις (1.2.39α), (1.2.40α,β) παύουν να είναι γραμμικές και εξαρτώνται από τη μεταβολή των

μοχλοβραχιόνων των επιβαλλόμενων επιφανειακών δράσεων που οφείλεται στην γεωμετρική μη γραμμικότητα. Σημειώνεται ότι η επιρροή αυτή δεν εξετάζεται στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Επιπλέον, συμπεραίνεται ότι στρεπτικά, αξονικά και καμπτοδιαμητικά εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα και δεν μπορούν να μελετηθούν απομονωμένα όπως στη γραμμική ελαστική ανάλυση (βλ. εξ.(1.2.36), (1.2.37α,β)).

Από τις δυνατές μεταβολές των κινηματικών μεγεθών u_m , v_S , v'_S , w_S , w'_S στην εξ.(1.2.13) προσδιορίζονται, έπειτα από πράξεις, διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν την καθολική ισορροπία αξονικών, εγκάρσιων και καμπτικών δράσεων της ράβδου [Attard 1986a]. Οι εξισώσεις αυτές για μηδενικές εξωτερικά επιβαλλόμενες αξονικές και καμπτοδιαμητικές δράσεις και συγκεκριμένες αξονικές και καμπτοδιαμητικές συνοριακές συνθήκες που θα καθοριστούν παρακάτω (βλ. εξ.(1.2.48-49)), αποδεικνύεται εύκολα ότι οδηγούν στο μηδενισμό των αντίστοιχων εντατικών μεγεθών, δηλαδή ισχύει

$$N = 0 \quad M_Y = 0 \quad M_Z = 0 \quad (1.2.42)$$

Οι σχέσεις (1.2.42) ουσιαστικά αντιστοιχούν σε εξισώσεις ισορροπίας αξονικών και καμπτικών δράσεων, οι οποίες μαζί με την εξίσωση ισορροπίας στρεπτικών δράσεων (1.2.36) μορφώνουν σύστημα εξισώσεων που μπορεί να επιλυθεί ώστε να προσδιοριστούν τα εναπομείναντα άγνωστα κινηματικά μεγέθη u_m , v_S , w_S , θ_x . Εισάγοντας τις εκφράσεις (1.2.42) στις εξ.(1.2.36-37) και αναδιατυπώνοντας τις προκύπτουσες συνοριακές συνθήκες, μορφώνεται η παρακάτω κυρίαρχη διαφορική εξίσωση καθολικής ισορροπίας στρεπτικών δράσεων

$$E_I C_S \theta_x'''' - G_I I_t \theta_x'' - \frac{3}{2} E_I I_{n2} (\theta_x')^2 \theta_x'' = m_t - m'_w \quad (1.2.43)$$

που υπόκειται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \theta'_x = \beta_3 \quad (1.2.44\alpha,\beta)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_{n2} ορίζεται ως

$$I_{n2} = I_n + \frac{U_w^2}{C_S} \Rightarrow I_{n2} = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} - 4\beta_1^2 I_{ZZ} - 4\beta_2^2 I_{YY} \quad (1.2.45)$$

ενώ M_t , M_w είναι η στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου, αντίστοιχα και δίδονται ως

$$M_t = G_I I_t \theta'_x - E_I C_S \theta_x''' + \frac{1}{2} E_I I_{n2} (\theta'_x)^3 - m_w \quad M_w = E_I C_S \left[\theta_x'' + \frac{U_w}{2C_S} (\theta'_x)^2 \right] \quad (1.2.46\alpha,\beta)$$

Στις σχέσεις (1.2.44), α_i , β_i ($i=1,2,3$) είναι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες

συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (π.χ. πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις (1.2.44). Έτσι, π.χ. για στην περίπτωση της πάκτωσης, διχαλωτής στήριξης ή ελεύθερου άκρου τίθεται $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_1 = 1$ ή $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_1 = 1$ αντίστοιχα, ενώ σε περίπτωση επιβολής στρεπτικής ροπής \bar{M}_{ll} και δίρροπου στρέβλωσης \bar{M}_{wl} π.χ. στο δεξιό άκρο της ράβδου, τίθεται $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \bar{M}_{ll}$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = \bar{M}_{wl}$. Γενικά οι συνοριακές συνθήκες (1.2.44) είναι μη γραμμικές εξαιτίας των εκφράσεων (1.2.46) και (1.2.40α,β). Αγνοώντας όλους τους μη γραμμικούς όρους των εξ. (1.2.43), (1.2.46), προκύπτει επακριβώς το πρόβλημα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης.

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών του εξεταζόμενου προβλήματος (βλ. εξ. (1.2.43-44)) επιτρέπει τον προσδιορισμό της στρεπτικής στροφής θ_x . Ο υπολογισμός των εγκάρσιων μετατοπίσεων v_S , w_S βασίζεται στο σύστημα εξισώσεων (1.2.42β, γ) με το οποίο προσδιορίζονται οι παράγωγοι v_S'' , w_S'' με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.33β, γ), (1.2.10) ως

$$v_S'' = -(\theta_x')^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \quad w_S'' = (\theta_x')^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \quad (1.2.47\alpha, \beta)$$

Οι παράγωγοι v_S' , w_S' προκύπτουν με ολοκλήρωση των παραπάνω σχέσεων ως

$$v_S'(x) = \int_0^x \left[-(\theta_x')^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dt + v_S'(0) \quad (1.2.48\alpha)$$

$$w_S'(x) = \int_0^x \left[(\theta_x')^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dt + w_S'(0) \quad (1.2.48\beta)$$

ενώ οι εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S , w_S προκύπτουν με περαιτέρω ολοκλήρωση ως

$$v_S(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left[-(\theta_x')^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dm \right] dt + v_S'(0)x + v_S(0) \quad (1.2.49\alpha)$$

$$w_S(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left[(\theta_x')^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dm \right] dt + w_S'(0)x + w_S(0) \quad (1.2.49\beta)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις οι ποσότητες $v_S'(0)$, $v_S(0)$, $w_S'(0)$, $w_S(0)$ υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες εγκάρσιων μετατοπίσεων και καμπτικών στροφών. Είναι φανερό ότι οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να είναι γενικές αφού σε καθεμιά από τις εκφράσεις (1.2.49) υπεισέρχονται δύο αντί για τέσσερις συνοριακές ποσότητες. Έτσι, για την περίπτωση π.χ. πάκτωσης στο αριστερό άκρο της ράβδου, ισχύει $\theta_x(0) = 0, \theta_y(0) = 0, \theta_z(0) = 0 \Rightarrow v_S'(0) = w_S'(0) = 0$, $v_S(0) = w_S(0) = 0$ και στη συνέχεια οι σχέσεις (1.2.48-49) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστούν οι ποσότητες $v_S'(l)$, $w_S'(l)$, $v_S(l)$, $w_S(l)$ στο δεξιό άκρο της ράβδου. Παρατηρείται ότι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις είναι μη

μηδενικές και εξαρτώνται από τη στρεπτική στροφή θ_x καθώς και από τους συντελεστές Wagner β_1, β_2 . Είναι εμφανές ότι η αντικατάσταση των θ_x, v_S, w_S στις εκφράσεις (1.2.1-2) των εγκάρσιων μετατοπίσεων των υλικών σημείων της ράβδου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλες οι (διαμήκεις) ίνες της ράβδου μετατοπίζονται κατά την εγκάρσια έννοια. Κατά συνέπεια στη μη γραμμική ελαστική στρέψη δεν υπάρχει ακλόνητος άξονας περιστροφής της ράβδου, σε αντίθεση με τη γραμμική ελαστική θεωρία (βλ. και [Attard 1986b]).

Ο προσδιορισμός της μετατόπισης u_m βασίζεται στην εξ.(1.2.42α), η οποία με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.33α), (1.2.8) δίνει

$$u'_m = -\frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + \theta'_x \left[y_C (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + z_C (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \quad (1.2.50)$$

Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης λαμβάνεται

$$u_m(x) = \int_0^x \left\{ -\frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + \theta'_x \left[y_C (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x) + z_C (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x) \right] \right\} dt + u_m(0) \quad (1.2.51)$$

όπου η ποσότητα $u_m(0)$ υπολογίζεται από τις συνοριακές συνθήκες της αξονικής μετατόπισης. Είναι φανερό ότι οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να είναι γενικές αφού στην έκφραση (1.2.51) υπαισέρχεται μία αντί για δύο συνοριακές ποσότητες. Έτσι, για την περίπτωση π.χ. πάκτωσης στο αριστερό άκρο της ράβδου, ισχύει $u_m(0) = 0$ και στη συνέχεια η σχέση (1.2.51) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η ποσότητα $u_m(l)$ στο δεξιό άκρο της ράβδου. Παρατηρείται ότι η ισοδύναμη «μέση» αξονική μετατόπιση u_m είναι μη μηδενική. Διαπιστώνεται ότι οι διαμήκεις ίνες της ράβδου βραχύνονται (κατά μέσο όρο) [Attard 1986b], σε αντίθεση με τη γραμμική ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης όπου ισχύει $u_m = 0$. Επισημαίνεται επίσης ότι η διαφορική εξίσωση υπολογισμού της ϕ_S^S (1.2.25α) απλοποιείται σημαντικά, έπειτα από παραγωγή της εξ.(1.2.50) και αντικατάσταση του αποτελέσματος στην εξ.(1.2.25α), ως

$$\left(\nabla^2 \phi_S^S \right)_j = -\frac{E_j}{G_j} \left\{ \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] \theta'_x \theta''_x + \kappa'_Y (z - z_C) - \kappa'_Z (y - y_C) + \theta''_x \phi_S^P \right\} \quad \text{στο } \Omega_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.52)$$

ενώ παρόμοια απλοποίηση ισχύει και για την ορθή τάση S_{xx} (βλ. εξ.(1.2.12α)).

Στην ειδική περίπτωση όπου στη ράβδο ασκούνται αποκλειστικά δύο ισόποσες στρεπτικές ροπές στα άκρα της ενώ η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται,

αποδεικνύεται ότι για ράβδους διατομής με τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας ($U_w = 0$), η παράγωγος θ'_x είναι σταθερή κατά μήκος (ομοιόμορφη στρέψη) και προσδιορίζεται από την αλγεβρική εξίσωση 3ου βαθμού (βλ. εξ.(1.2.46α))

$$M_t = GI_t \theta'_x + \frac{I}{2} EI_{n2} (\theta'_x)^3 \quad (1.2.53)$$

ενώ η διαφορική εξίσωση υπολογισμού της ϕ_S^S (1.2.52) απλοποιείται περαιτέρω ως

$$\left(\nabla^2 \phi_S^S \right)_j = -\frac{E_j}{G_j} \left[\kappa'_Y (z - z_C) - \kappa'_Z (y - y_C) \right] \text{ στο } \Omega_j, \quad \forall x \in [0, l] \quad (1.2.54)$$

συμπεραίνοντας ότι προκύπτουν μη μηδενικές δευτερογενείς διατμητικές τάσεις παρά το ότι η ράβδος είναι υπό ομοιόμορφη στρέψη. Στην ειδική περίπτωση όπου η διατομή διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, οι τάσεις αυτές είναι μηδενικές. Επισημαίνεται τέλος ότι στην περίπτωση ράβδων ασύμμετρης διατομής, οι προαναφερθείσες συνθήκες δεν οδηγούν σε ομοιόμορφη στρέβλωση (κατά μήκος της ράβδου).

1.2.4 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στα προηγούμενα εδάφια, για την επίλυση του στατικού προβλήματος της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα.

1. Ορισμός αυθαίρετου δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ με αρχή στη διατομή του αριστερού άκρου της ράβδου. Υπολογισμός του συνολικού ισοδύναμου εμβαδού A της διατομής και των συντεταγμένων \tilde{y}_C, \tilde{z}_C του γεωμετρικού κέντρου C της διατομής ως

$$A = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \quad \tilde{y}_C = \frac{\tilde{S}_z}{A} \quad \tilde{z}_C = \frac{\tilde{S}_y}{A} \quad (1.2.55\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου \tilde{S}_y, \tilde{S}_z είναι οι στατικές ροπές κάμψης, οι οποίες δίδονται ως

$$\tilde{S}_z = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \tilde{y} d\Omega_j \quad \tilde{S}_y = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \tilde{z} d\Omega_j \quad (1.2.56\alpha, \beta)$$

2. Ορισμός συστήματος αναφοράς $C\overline{xy}\overline{z}$ με αρχή το γεωμετρικό κέντρο C στη διατομή του αριστερού άκρου της ράβδου εκτελώντας παράλληλη μετάθεση των αξόνων $O\tilde{y}, O\tilde{z}$. Υπολογισμός των καμπτικών ροπών αδράνειας και του γινομένου αδράνειας ως

$$\bar{I}_{yy} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\tilde{z} - \tilde{z}_C)^2 d\Omega_j \quad \bar{I}_{zz} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\tilde{y} - \tilde{y}_C)^2 d\Omega_j \quad (1.2.57\alpha, \beta)$$

$$\bar{I}_{yz} = - \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\tilde{y} - \tilde{y}_C)(\tilde{z} - \tilde{z}_C) d\Omega_j \quad (1.2.57\gamma)$$

και προσδιορισμός κύριου καμπτικού συστήματος αναφοράς $CXYZ$ με στροφή του συστήματος $C\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ κατά γωνία θ_0 στο επίπεδο της διατομής, η οποία προσδιορίζεται ως

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{2\bar{I}_{yz}}{\bar{I}_{yy} - \bar{I}_{zz}} \right) \quad (1.2.58)$$

Προσδιορισμός των εγκάρσιων συντεταγμένων τυχόντος σημείου της ράβδου ως προς το σύστημα αναφοράς $CXYZ$ ως

$$Y = (\tilde{y} - \tilde{y}_C) \cos \theta_0 + (\tilde{z} - \tilde{z}_C) \sin \theta_0 \quad (1.2.59\alpha)$$

$$Z = -(\tilde{y} - \tilde{y}_C) \sin \theta_0 + (\tilde{z} - \tilde{z}_C) \cos \theta_0 \quad (1.2.59\beta)$$

3. Υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_C^P(Y, Z)$. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\left(\nabla^2 \phi_C^P \right)_j = 0 \quad \text{στο } \Omega_j \quad (1.2.60\alpha)$$

$$G_j \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_i = (G_j - G_i)(Zn_Y - Yn_Z) \quad \text{στο } \Gamma_j \quad (1.2.60\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*, ως προς το σύστημα αναφοράς $CXYZ$, αφού οι συντεταγμένες του σημείου S δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές. Η παραπάνω συνοριακή συνθήκη ισχύει στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i . Στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , η συνοριακή συνθήκη διαμορφώνεται ως

$$\left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_j = (Zn_Y - Yn_Z) \quad \text{στο } \Gamma_j \quad (1.2.60\gamma)$$

4. Η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_j$ είναι γνωστή μόνο στις ελεύθερες παράπλευρες επιφάνειες

της σύνθετης ράβδου. Προφανώς, στις ομογενείς ράβδους η παράγωγος $\left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n}\right)_j$ είναι γνωστή σε όλα τα σύνορα. Στις διεπιφάνειες των σύνθετων ράβδων η παράγωγος $\left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n}\right)_j$ μπορεί να προσδιοριστεί επιλύοντας ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Dirichlet

$$\left(\nabla^2 \phi_C^P\right)_j = 0 \text{ στο } \Omega_j \quad (1.2.61\alpha)$$

$$\left(\phi_C^P\right)_j = \text{δεδομένη στο } \Gamma_j \quad (1.2.61\beta)$$

Τονίζεται ότι η γνώση της παραγώγου $\left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n}\right)_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των σταθερών R_C^P , R_Y^P , R_Z^P των εξ.(1.2.62γ,δ,ε) με επικαμπύλια ολοκληρώματα (βλ. εδάφιο 1.3.5). Επίσης, σημειώνεται ότι το πλήθος των προβλημάτων Dirichlet μπορεί να μειωθεί με εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (1.2.60β).

5. Υπολογισμός των καμπτικών ροπών αδράνειας και των πρωτογενών ροπών στρέβλωσης ως προς το σύστημα αναφοράς $CXYZ$ ως

$$I_{YY} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} Z^2 d\Omega_j \quad I_{ZZ} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} Y^2 d\Omega_j \quad (1.2.62\alpha,\beta)$$

$$R_C^P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P d\Omega_j \quad R_Y^P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P Y d\Omega_j \quad (1.2.62\gamma,\delta)$$

$$R_Z^P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P Z d\Omega_j \quad (1.2.62\epsilon)$$

6. Υπολογισμός ως προς το σύστημα $CXYZ$ των συντεταγμένων του σημείου S Y_S , Z_S και της σταθεράς c από την επίλυση των ακόλουθων εξισώσεων

$$A c = -R_C^P \quad I_{YY} Y_S = -R_Z^P \quad I_{ZZ} Z_S = R_Y^P \quad (1.2.63\alpha,\beta,\gamma)$$

7. Αναγωγή του συστήματος $CXYZ$ στο κύριο καμπτικό σύστημα αναφοράς $Sxyz$ με αρχή το σημείο S και υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^P(y, z)$ με τη βοήθεια των σχέσεων

$$y = Y - Y_S \quad z = Z - Z_S \quad (1.2.64\alpha,\beta)$$

$$\phi_S^P(y, z) = \phi_C^P(y + Y_S, z + Z_S) - (y + Y_S)Z_S + (z + Z_S)Y_S + c \quad (1.2.64\gamma)$$

8. Η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j$ είναι γνωστή μόνο στις ελεύθερες παράπλευρες επιφάνειες της σύνθετης ράβδου. Προφανώς, στις ομογενείς ράβδους η παράγωγος $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j$ είναι γνωστή σε όλα τα σύνορα. Στις διεπιφάνειες των σύνθετων ράβδων η παράγωγος $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j$ μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.64γ) ως

$$\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j = \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n}\right)_j - Z_S n_y + Y_S n_z \quad (1.2.65)$$

Τονίζεται ότι η γνώση της παραγώγου $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων $(S_{xn}^P)_j$ στις διεπιφάνειες και στον υπολογισμό των σταθερών C_S, U_w των εξ.(1.2.66ε,η).

9. Υπολογισμός ως προς το σύστημα αναφοράς $Sxyz$ των συντεταγμένων του γεωμετρικού κέντρου της διατομής y_C, z_C , της πολικής ροπής αδράνειας ως προς το S I_P , της στρεπτικής σταθεράς I_t , της σταθεράς στρέβλωσης C_S , των συντελεστών Wagner β_1, β_2, U_w , της ροπής τέταρτης τάξης ως προς το S I_{PP} και της γεωμετρικής σταθεράς I_{n2} μέσω των σχέσεων

$$y_C = -Y_S \quad z_C = -Z_S \quad (1.2.66\alpha, \beta)$$

$$I_P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (1.2.66\gamma)$$

$$I_t = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_1} \iint_{\Omega_j} \left[y^2 + z^2 + y \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j - z \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right] d\Omega_j \quad (1.2.66\delta)$$

$$C_S = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\phi_S^P)^2 d\Omega_j \quad (1.2.66\epsilon)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2I_{ZZ}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)(y - y_C) d\Omega_j \quad (1.2.66\sigma\tau)$$

$$\beta_2 = \frac{I}{2I_{YY}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)(z - z_C) d\Omega_j \quad (1.2.66\zeta)$$

$$U_w = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (1.2.66\eta)$$

$$I_{PP} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)^2 d\Omega_j \quad (1.2.66\theta)$$

$$I_{n2} = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} - 4\beta_1^2 I_{ZZ} - 4\beta_2^2 I_{YY} \quad (1.2.66\iota)$$

10. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης στρεπτικής ισορροπίας της ράβδου για τυχούσες συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$, υποκειμένης στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης, δηλαδή του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$E_I C_S \theta_x''' - G_I I_t \theta_x'' - \frac{3}{2} E_I I_{n2} (\theta_x')^2 \theta_x'' = m_t - m_w' \text{ στο εσωτερικό της ράβδου} \quad (1.2.67\alpha)$$

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \theta_x' = \beta_3 \text{ στα άκρα της ράβδου } x = 0, l \quad (1.2.67\beta, \gamma)$$

όπου

$$M_t = G_I I_t \theta_x' - E_I C_S \theta_x'' + \frac{1}{2} E_I I_{n2} (\theta_x')^3 - m_w \quad (1.2.68\alpha)$$

$$M_w = E_I C_S \left[\theta_x'' + \frac{U_w}{2C_S} (\theta_x')^2 \right] \quad (1.2.68\beta)$$

και υπολογισμός της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, των παραγώγων της καθώς και των αναπτυσσόμενων στρεπτικών και στρεβλωτικών εντατικών μεγεθών M_t , M_t^P , M_t^S , M_t^{nl} , M_w^l και M_w^{nl} μέσω των σχέσεων

$$M_t = M_t^P + M_t^S + M_t^{nl} - m_w \quad (1.2.69\alpha)$$

$$M_w = M_w^l + M_w^{nl} \quad (1.2.69\beta)$$

$$M_t^P = G_I I_t \theta_x' \quad M_t^S = -E_I C_S \theta_x'' \quad M_t^{nl} = \frac{1}{2} E_I I_{n2} (\theta_x')^3 \quad (1.2.69\gamma, \delta, \epsilon)$$

$$M_w^l = E_I C_S \theta_x'' \quad M_w^{nl} = \frac{1}{2} E_I U_w (\theta_x')^2 \quad (1.2.69\sigma\tau, \zeta)$$

11. Υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών u_m , v_S , w_S και των παραγώγων τους καθώς και των μεγεθών κ_Y , κ_Z , κ_Y' , κ_Z' , θ_Y , θ_Z μέσω των σχέσεων

$$v_S'' = -(\theta_x')^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \quad w_S'' = (\theta_x')^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \quad (1.2.70\alpha, \beta)$$

$$v_S'(x) = \int_0^x \left[-(\theta_x')^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dt + v_S'(0) \quad (1.2.71\alpha)$$

$$w_S'(x) = \int_0^x \left[(\theta_x')^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dt + w_S'(0) \quad (1.2.71\beta)$$

$$v_S(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left[-(\theta_x')^2 (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) \right] dm \right] dt + v_S'(0)x + v_S(0) \quad (1.2.72\alpha)$$

$$w_S(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \left[(\theta_x')^2 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \right] dm \right] dt + w_S'(0)x + w_S(0) \quad (1.2.72\beta)$$

$$v_S''' = -2\theta_x' \theta_x'' (\beta_2 \sin \theta_x - \beta_1 \cos \theta_x) - (\theta_x')^3 (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) \quad (1.2.73\alpha)$$

$$w_S''' = 2\theta_x' \theta_x'' (\beta_2 \cos \theta_x + \beta_1 \sin \theta_x) + (\theta_x')^3 (-\beta_2 \sin \theta_x + \beta_1 \cos \theta_x) \quad (1.2.73\beta)$$

$$u_m' = -\frac{I}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + \frac{I_P}{A} (\theta_x')^2 \right] \quad (1.2.74)$$

$$+ \theta_x' \left[y_C (v_S' \sin \theta_x - w_S' \cos \theta_x) + z_C (v_S' \cos \theta_x + w_S' \sin \theta_x) \right]$$

$$u_m(x) = \int_0^x \left\{ -\frac{I}{2} \left[(v_S')^2 + (w_S')^2 + \frac{I_P}{A} (\theta_x')^2 \right] + \theta_x' \left[y_C (v_S' \sin \theta_x - w_S' \cos \theta_x) + z_C (v_S' \cos \theta_x + w_S' \sin \theta_x) \right] \right\} dt + u_m(0) \quad (1.2.75)$$

$$\kappa_Y = v_S'' \sin \theta_x - w_S'' \cos \theta_x \quad \kappa_Z = v_S'' \cos \theta_x + w_S'' \sin \theta_x \quad (1.2.76\alpha, \beta)$$

$$\kappa_Y' = v_S''' \sin \theta_x - w_S''' \cos \theta_x + \theta_x' \kappa_Z \quad (1.2.77\alpha)$$

$$\kappa_Z' = v_S''' \cos \theta_x + w_S''' \sin \theta_x - \theta_x' \kappa_Y \quad (1.2.77\beta)$$

$$\theta_Y = v_S' \sin \theta_x - w_S' \cos \theta_x \quad \theta_Z = v_S' \cos \theta_x + w_S' \sin \theta_x \quad (1.2.78\alpha, \beta)$$

Οι ποσότητες $v_S'(0)$, $v_S(0)$, $w_S'(0)$, $w_S(0)$ προκύπτουν από τις καμπτοδιατμητικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου, ενώ η ποσότητα $u_m(0)$ από τις αξονικές συνοριακές συνθήκες. Οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες δεν είναι δυνατό να είναι γενικές.

12. Υπολογισμός της δευτερογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^S(x, y, z)$ σε κάθε διατομή της ράβδου. Η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών, ως πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Poisson

$$\left(\nabla^2 \widehat{\phi}_S^S \right)_j = -\frac{E_j}{G_j} \left\{ \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] \theta_x' \theta_x'' + \kappa_Y' (z - z_C) - \kappa_Z' (y - y_C) + \theta_x''' \phi_S^P \right\} \quad \text{στο } \Omega_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.79\alpha)$$

$$G_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_i = 0 \quad \text{στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.79\beta)$$

Η παραπάνω συνοριακή συνθήκη ισχύει στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i . Στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , η συνοριακή συνθήκη διαμορφώνεται ως

$$\left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j = \frac{t_x}{G_j} \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.79\gamma)$$

13. Η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της δευτερογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j$ είναι γνωστή μόνο στις ελεύθερες παράπλευρες επιφάνειες της σύνθετης ράβδου. Προφανώς, στις ομογενείς ράβδους η παράγωγος $\left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j$ είναι γνωστή σε όλα τα σύνορα. Στις διεπιφάνειες των σύνθετων ράβδων η παράγωγος $\left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j$ μπορεί να προσδιοριστεί επιλύοντας ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Dirichlet

$$\left(\nabla^2 \hat{\phi}_S^S \right)_j = -\frac{E_j}{G_j} \left\{ \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] \theta'_x \theta''_x \right. \quad \text{στο } \Omega_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.80\alpha)$$

$$\left. + \kappa'_Y (z - z_C) - \kappa'_Z (y - y_C) + \theta''_x \phi_S^P \right\}$$

$$\left(\hat{\phi}_S^S \right)_j = \text{δεδομένη στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (1.2.80\beta)$$

Τονίζεται ότι η γνώση της παραγώγου $\left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό της σταθεράς \hat{R}_S^S της εξ.(1.2.82) με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (βλ. εδάφιο 1.3.5). Επίσης, σημειώνεται ότι το πλήθος των προβλημάτων Dirichlet μπορεί να μειωθεί με εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (1.2.79β).

14. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^S(x, y, z)$ σε κάθε διατομή της ράβδου σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \hat{\phi}_S^S - \frac{I}{A} \hat{R}_S^S \quad (1.2.81)$$

όπου \widehat{R}_S^S είναι η δευτερογενής ροπή στρέβλωσης, η οποία ορίζεται ως

$$\widehat{R}_S^S = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \widehat{\phi}_S^S d\Omega_j \quad (1.2.82)$$

15. Η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\partial\phi_S^S / \partial n)_j$ (όπως και η αντίστοιχη παράγωγος της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης) είναι γνωστή μόνο στις ελεύθερες παράπλευρες επιφάνειες της σύνθετης ράβδου. Προφανώς, στις ομογενείς ράβδους η παράγωγος $(\partial\phi_S^S / \partial n)_j$ είναι γνωστή σε όλα τα σύνορα. Στις διεπιφάνειες των σύνθετων ράβδων η παράγωγος $(\partial\phi_S^S / \partial n)_j$ μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.81) ως

$$\left(\frac{\partial\phi_S^S}{\partial n} \right)_j = \left(\frac{\partial\widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j, \quad \forall x \in [0, l] \quad (1.2.83)$$

Τονίζεται ότι η γνώση της παραγώγου $(\partial\phi_S^S / \partial n)_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων $(S_{xn}^S)_j$ στις διεπιφάνειες.

16. Υπολογισμός των μη μηδενικών συνιστωσών ορθής τάσης, πρωτογενούς και δευτερογενούς διατμητικής τάσης του 2ου ταυστή τάσης Piola-Kirchhoff και των συνολικών διατμητικών τάσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις (βλ. και [Μώκος 2007])

Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xy}^P)_j = G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial\phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) \quad (1.2.84\alpha)$$

$$(S_{xz}^P)_j = G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial\phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) \quad (1.2.84\beta)$$

Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xy}^S)_j = G_j \left(\frac{\partial\phi_S^S}{\partial y} \right)_j \quad (S_{xz}^S)_j = G_j \left(\frac{\partial\phi_S^S}{\partial z} \right)_j \quad (1.2.84\gamma, \delta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_x)_j = \sqrt{\left((S_{xy}^P)_j + (S_{xy}^S)_j \right)^2 + \left((S_{xz}^P)_j + (S_{xz}^S)_j \right)^2} \quad (1.2.84\epsilon)$$

Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xn}^P)_j = G_j \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j + yn_z - zn_y \right) \quad (1.2.84\sigma\tau)$$

$$(S_{xt}^P)_j = G_j \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + yn_y + zn_z \right) \quad (1.2.84\zeta)$$

Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xn}^S)_j = G_j \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} \right)_j \quad (S_{xt}^S)_j = G_j \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (1.2.84\eta, \theta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_x)_j = \sqrt{\left((S_{xn}^P)_j + (S_{xn}^S)_j \right)^2 + \left((S_{xt}^P)_j + (S_{xt}^S)_j \right)^2} \quad (1.2.84\iota\alpha)$$

Ορθές τάσεις στο χωρίο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$) και στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xx})_j = E_j \left\{ u'_m + \kappa_Y (z - z_C) - \kappa_Z (y - y_C) + \theta'_x \phi_S^P - \theta'_x (y_C \theta_Y + z_C \theta_Z) + \frac{I}{2} \left[(v'_S)^2 + (w'_S)^2 + (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \right\} \quad (1.2.84\iota\beta)$$

17. Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \theta_Y(x)(z - z_C) - \theta_Z(x)(y - y_C) + \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (1.2.85\alpha)$$

$$v(x, y, z) = v_S(x) - z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (1.2.85\beta)$$

$$w(x, y, z) = w_S(x) + y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (1.2.85\gamma)$$

1.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

1.3.1 Για τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών αναφορικά με τη γωνία στρεπτικής στροφής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.2.43-44), επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης [Katsikadelis 1994, 2002b], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π2.4.1.

Έστω $\theta(x) = \theta_x(x)$ η ζητούμενη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.2.43-44). Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της ράβδου, δηλαδή στο διάστημα $(0, l)$, καθώς και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$, ισχύει

$$\frac{d^4 \theta(x)}{dx^4} = q(x) \quad (1.3.1)$$

όπου η ποσότητα $q(x)$ καλείται πλασματικό φορτίο. Η εξίσωση (1.3.1), που καλείται αναλογική εξίσωση, δηλώνει ότι η λύση του αρχικού προβλήματος (1.2.43-44) μπορεί να προκύψει από την επίλυση ανάλογου (υποκατάστατου) προβλήματος συνοριακών τιμών αναφορικά με τη γωνία στρεπτικής στροφής, όπου η εξεταζόμενη ράβδος έχει μοναδιαία αντίσταση στρέβλωσης και μηδενική αντίσταση στρέψης, υποβάλλεται σε πλασματικό φορτίο $q(x)$ και δεσμεύεται με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες. Το πλασματικό φορτίο $q(x)$ είναι άγνωστο. Ωστόσο, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ΑΕΜ. Έτσι, σύμφωνα με όσα έχουν παρουσιαστεί στο εδάφιο Π2.4.1, το διάστημα $(0, l)$ διαιρείται σε L στοιχεία, στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι το $q(x)$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε στοιχείο η οποία είναι ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (Σχ.Π2.1). Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.2.44), (1.2.46), το μη γραμμικό σύστημα των δ αλγεβρικών εξισώσεων (Π2.4.24) διαμορφώνεται για το εξεταζόμενο πρόβλημα ως

$$\mathbf{E} \mathbf{d} + \hat{\mathbf{D}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (1.3.2)$$

όπου

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx} \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{D}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{D}}_{1,nl} \\ \hat{\mathbf{D}}_{2,nl} \end{Bmatrix} \quad (1.3.3\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{Bmatrix} \alpha_3^0 + \alpha_1^0 m_w(0) \\ \alpha_3^l + \alpha_1^l m_w(l) \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{Bmatrix} \beta_3^0 \\ \beta_3^l \end{Bmatrix} \quad (1.3.3\delta,\epsilon)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \alpha_2^0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_1^0 G_1 I_t & 0 \\ 0 & \alpha_1^l G_1 I_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.4\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\mathbf{D}_{14} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^0 E_1 C_S & 0 \\ 0 & -\alpha_1^l E_1 C_S \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{D}}_{1,nl} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^0 \frac{1}{2} E_1 I_{n2} [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(1)]^3 \\ \alpha_1^l \frac{1}{2} E_1 I_{n2} [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(2)]^3 \end{Bmatrix} \quad (1.3.4\delta,\epsilon)$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \beta_2^0 & 0 \\ 0 & \beta_2^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{23} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 E_1 C_S & 0 \\ 0 & \beta_1^l E_1 C_S \end{bmatrix} \quad (1.3.5\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\mathbf{D}_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{D}}_{2,nl} = \begin{Bmatrix} \beta_1^0 \frac{1}{2} E_1 U_w [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(1)]^2 \\ \beta_1^l \frac{1}{2} E_1 U_w [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(2)]^2 \end{Bmatrix} \quad (1.3.5\delta,\epsilon)$$

με τον άνω δείκτη στους συντελεστές α_i , β_i ($i=1,2,3$) να δηλώνει τα άκρα της ράβδου $0,l$, ενώ οι πίνακες \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{E}_{11} , \mathbf{E}_{12} , \mathbf{E}_{13} , \mathbf{E}_{14} , \mathbf{E}_{21} , \mathbf{E}_{22} , \mathbf{E}_{23} και τα μητρώα στήλες \mathbf{q} , $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx}$ ορίζονται στο εδάφιο Π2.4.1. Σημειώνεται ότι στην έκφραση (1.3.3β) δίδεται το γενικευμένο μητρώο στήλη άγνωστων ποσοτήτων του προβλήματος \mathbf{d} το οποίο είναι διάστασης $(L+\delta) \times I$ και αποτελείται από L κομβικές τιμές του πλασματικού φορτίου (εξ.(Π2.4.20)) και δ συνοριακές ποσότητες (εξ.(Π2.4.11)).

Το τελικό βήμα της ΑΕΜ είναι η εφαρμογή της εξίσωσης (1.2.43) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία της ράβδου. Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (Π2.4.27-28), το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα L αλγεβρικών εξισώσεων

$$E_1 C_S \mathbf{q} - G_1 I_t \mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d} - \frac{3}{2} E_1 I_{n2} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d} = \mathbf{m}_t - \mathbf{m}'_w \quad (1.3.6)$$

όπου το σύμβολο $[\cdot]_{dg}$ δηλώνει διαγώνιο μητρώο $L \times L$ το οποίο περιέχει στη διαγώνιο του τα στοιχεία του μητρώου στήλη που περιέχεται στις αγκύλες και \mathbf{m}_t , \mathbf{m}'_w είναι μητρώα στήλες διάστασης $L \times I$ που περιλαμβάνουν τις τιμές της κατανεμημένης

εξωτερικά επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής και της παραγώγου του κατανεμημένου εξωτερικά επιβαλλόμενου δίρροπου στρέβλωσης, αντίστοιχα. Τα στοιχεία του μητρώου στήλη \mathbf{m}'_w υπολογίζονται με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8). Σημειώνεται ότι, η συγκεντρωμένη φόρτιση στο εσωτερικό της ράβδου μπορεί υπολογιστικά να αντιμετωπιστεί ως κατανεμημένη διαιρώντας την τιμή της με το μήκος του στοιχείου στο οποίο επιβάλλεται, αρκεί το μήκος των στοιχείων να είναι αρκετά μικρό [Μώκος 2007]. Οι σχέσεις (1.3.2), (1.3.6) αποτελούν μη γραμμικό σύστημα $L + \delta$ αλγεβρικών εξισώσεων ως προς $L + \delta$ αγνώστους, το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε τυπική μορφή και ως

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}(\mathbf{d}))\mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (1.3.7)$$

όπου \mathbf{K} είναι γενικευμένο γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(L + \delta) \times (L + \delta)$, \mathbf{K}_{nl} είναι γενικευμένο μη γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(L + \delta) \times (L + \delta)$ και \mathbf{p} είναι γενικευμένο μητρώο στήλη φόρτισης διάστασης $(L + \delta) \times 1$, τα οποία δίδονται ως

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ [\mathbf{E}_1 \mathbf{C}_S]_{dg,L} - G_1 I_t \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{K,nl} \\ -\frac{3}{2} E_1 I_{n2} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (1.3.8\alpha, \beta)$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \mathbf{m}_t - \mathbf{m}'_w \end{Bmatrix} \quad (1.3.8\gamma)$$

όπου $[\mathbf{E}_1 \mathbf{C}_S]_{dg,L}$ είναι μητρώο διάστασης $L \times (L + \delta)$ με μηδενικά στοιχεία εκτός των στοιχείων με $i = j$ ($i = 1, 2, \dots, L$) τα οποία ισούνται με $E_1 C_S$ και $\mathbf{D}_{K,nl}$ είναι μητρώο διάστασης $\delta \times (L + \delta)$ το οποίο προσδιορίζεται μέσω των σχέσεων (1.3.3γ), (1.3.4ε), (1.3.5ε) ως

$$\mathbf{D}_{K,nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{2K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

με

$$\mathbf{D}_{1K,nl} = \begin{bmatrix} \alpha_l^0 \frac{1}{2} E_l I_{n2} [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(1)]^2 & 0 \\ 0 & \alpha_l^l \frac{1}{2} E_l I_{n2} [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(2)]^2 \end{bmatrix} \quad (1.3.10\alpha)$$

$$\mathbf{D}_{2K,nl} = \begin{bmatrix} \beta_l^0 \frac{1}{2} E_l U_w \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(1) & 0 \\ 0 & \beta_l^l \frac{1}{2} E_l U_w \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}(2) \end{bmatrix} \quad (1.3.10\beta)$$

Στη συνέχεια, το σύστημα εξισώσεων (1.3.7) επιλύεται με την υβριδική μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων Powell [(Powell 1970a,b) χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού μητρώου [More et al. 1980] και προσδιορίζεται το μητρώο στήλη \mathbf{d} , οπότε λαμβάνονται οι τιμές του πλασματικού φορτίου στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου καθώς και η στρεπτική στρόφη και οι παράγωγοί της στο σύνορο. Αξίζει να σημειωθεί ότι γενικά η εξωτερική φόρτιση δεν έχει μοναδική τιμή αλλά εξαρτάται από «χρονική» παράμετρο λ , ως $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\lambda)$. Στην περίπτωση αυτή, η επίλυση του προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου (load control) [Crisfield 1991], σύμφωνα με την οποία επιλέγονται T τιμές της παραμέτρου λ_t ($t = 1, 2, \dots, T$), ενώ για $\lambda_0 = 0$ έχουμε την αρχική αφόρτιστη διαμόρφωση της ράβδου. Για κάθε τιμή λ_t επιλύεται με τη μέθοδο Powell το σύστημα εξισώσεων (1.3.7) για στάθμη φόρτισης $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\lambda_t)$. Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος, απαιτείται αρχική πρόβλεψη της τιμής του \mathbf{d} που ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (1.3.7) (για $\lambda = \lambda_t$). Η τιμή αυτή λαμβάνεται ίση με την τιμή του \mathbf{d} που προσδιορίστηκε για $\lambda = \lambda_{t-1}$ ($t = 2, 3, \dots, T$), ενώ για $t = 1$ τίθεται $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Επιπλέον, απαιτείται τιμή για την παράμετρο ανοχής (tolerance parameter) που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου, η οποία λαμβάνεται ίση με $tol = 10^{-7}$. Τέλος, σημειώνεται ότι οι τιμές και το πλήθος των τιμών λ_t προσδιορίζονται με βάση την ιστορία της φόρτισης και απαιτήσεις σύγκλισης της μεθόδου Powell.

Στη συνέχεια, με εφαρμογή των σχέσεων (Π2.4.27) λαμβάνεται η στρεπτική στρόφη καθώς και οι παράγωγοί της στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των μεγεθών αυτών μπορούν εύκολα να ευρεθούν και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π2.4.25-26), θέτοντας όπου ξ_i την τιμή του ξ . Τέλος, με τη βοήθεια των αποκτηθέντων μεγεθών, μπορούν να ευρεθούν τα εντατικά μεγέθη σε οποιοδήποτε σημείο του εσωτερικού ή του συνόρου της ράβδου (βλ. εξ.(1.2.68-69)).

1.3.2 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τις Εγκάρσιες Μετατοπίσεις, τις Καμπτικές Στροφές και τις Καμπτικές Καμπυλότητες

Ο υπολογισμός των μεγεθών $u_m(x)$, $v_S(x)$, $w_S(x)$, $\theta_Y(x)$, $\theta_Z(x)$, $\kappa_Y(x)$, $\kappa_Z(x)$ προϋποθέτει τον προσδιορισμό των μεγεθών θ_x , θ'_x , θ''_x (βλ. εδάφιο 1.3.1). Με τη βοήθεια της διακριτοποίησης της ράβδου που έχει υιοθετηθεί για τον υπολογισμό της στρεπτικής στροφής (βλ. εδάφιο 1.3.1), προσδιορίζονται τα μεγέθη v'_S , w'_S , v_S , w_S , u_m στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στην ακραία διατομή $x = \xi_j$. Ο προσδιορισμός βασίζεται στην υπόθεση ότι οι παράγωγοι v''_S , w''_S , v'_S , w'_S , u'_m λαμβάνουν έκαστη σταθερή τιμή σε κάθε στοιχείο της διακριτοποίησης, η οποία είναι ίση με αυτή στο κομβικό σημείο (μέσο του στοιχείου) (βλ. Σχ.Π2.1 και τα ολοκληρώματα των εξ.(1.2.48), (1.2.49), (1.2.51)). Σημειώνεται ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί χωρίς δυσκολία οποιαδήποτε άλλη κατανομή μεταβολής των προαναφερθέντων παραγώγων σε κάθε στοιχείο της διακριτοποίησης.

Αρχικά, προσδιορίζονται οι παράγωγοι των εγκάρσιων μετατοπίσεων v''_S , w''_S στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στις ακραίες διατομές $x = \xi_0, \xi_l$ εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.2.47) ως

$$v''_S(\xi_i) = -(\theta'_x(\xi_i))^2 (\beta_2 \sin \theta_x(\xi_i) - \beta_1 \cos \theta_x(\xi_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.11\alpha)$$

$$w''_S(\xi_i) = (\theta'_x(\xi_i))^2 (\beta_2 \cos \theta_x(\xi_i) + \beta_1 \sin \theta_x(\xi_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.11\beta)$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι παράγωγοι v'_S , w'_S στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στην ακραία διατομή $x = \xi_j$ ως

$$v'_S(\xi_i) = \begin{cases} v''_S(\xi_i) \frac{l_i}{2} + v'_S(\xi_0), & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [v''_S(\xi_j) l_j] + v''_S(\xi_i) \frac{l_i}{2} + v'_S(\xi_0), & i = 2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (1.3.12\alpha)$$

$$v'_S(\xi_l) = \sum_{j=1}^L [v''_S(\xi_j) l_j] + v'_S(\xi_0) \quad (1.3.12\beta)$$

$$w'_S(\xi_i) = \begin{cases} w''_S(\xi_i) \frac{l_i}{2} + w'_S(\xi_0), & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [w''_S(\xi_j) l_j] + w''_S(\xi_i) \frac{l_i}{2} + w'_S(\xi_0), & i = 2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (1.3.13\alpha)$$

$$w'_S(\xi_l) = \sum_{j=1}^L [w''_S(\xi_j) l_j] + w'_S(\xi_0) \quad (1.3.13\beta)$$

όπου l_j είναι το μήκος του στοιχείου Γ_j (βλ. Σχ.Π2.1). Στη συνέχεια, προσδιορίζονται αξιοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις οι μετατοπίσεις v_S , w_S στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στην ακραία διατομή ξ_l ως

$$v_S(\xi_i) = \begin{cases} v'_S(\xi_i)\frac{l_i}{2} + v'_S(\xi_0)\xi_i + v_S(\xi_0), & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [v'_S(\xi_j)l_j] + v'_S(\xi_i)\frac{l_i}{2} + v'_S(\xi_0)\xi_i + v_S(\xi_0), & i = 2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (1.3.14\alpha)$$

$$v_S(\xi_l) = \sum_{j=1}^L [v'_S(\xi_j)l_j] + v'_S(\xi_0)l + v_S(\xi_0) \quad (1.3.14\beta)$$

$$w_S(\xi_i) = \begin{cases} w'_S(\xi_i)\frac{l_i}{2} + w'_S(\xi_0)\xi_i + w_S(\xi_0), & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [w'_S(\xi_j)l_j] + w'_S(\xi_i)\frac{l_i}{2} + w'_S(\xi_0)\xi_i + w_S(\xi_0), & i = 2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (1.3.15\alpha)$$

$$w_S(\xi_l) = \sum_{j=1}^L [w'_S(\xi_j)l_j] + w'_S(\xi_0)l + w_S(\xi_0) \quad (1.3.15\beta)$$

Οι ποσότητες $v_S(\xi_0)$, $v'_S(\xi_0)$, $v_S(\xi_l)$, $v'_S(\xi_l)$, $w_S(\xi_0)$, $w'_S(\xi_0)$, $w_S(\xi_l)$, $w'_S(\xi_l)$ προσδιορίζονται από τα συστήματα εξισώσεων (1.3.12β), (1.3.14β) και (1.3.13β), (1.3.15β) σε συνδυασμό με τις καμπτοδιατμητικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου. Είναι φανερό ότι εξαιτίας της ισχύος των εξισώσεων (1.3.12β), (1.3.14β), (1.3.13β), (1.3.15β), οι καμπτοδιατμητικές συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα και πιο συγκεκριμένα είναι γνωστές τέσσερις (αντί για οκτώ) ανεξάρτητες συνθήκες. Ο υπολογισμός των παραγώγων v_S'' , w_S'' πραγματοποιείται μέσω των σχέσεων (1.2.73). Έτσι, στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στις ακραίες διατομές ξ_0 , ξ_l έχουμε

$$v_S'''(\xi_i) = -2\theta'_x(\xi_i)\theta''_x(\xi_i)(\beta_2 \sin \theta_x(\xi_i) - \beta_l \cos \theta_x(\xi_i)) - (\theta'_x(\xi_i))^3 (\beta_2 \cos \theta_x(\xi_i) + \beta_l \sin \theta_x(\xi_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.16\alpha)$$

$$w_S'''(\xi_i) = 2\theta'_x(\xi_i)\theta''_x(\xi_i)(\beta_2 \cos \theta_x(\xi_i) + \beta_l \sin \theta_x(\xi_i)) + (\theta'_x(\xi_i))^3 (-\beta_2 \sin \theta_x(\xi_i) + \beta_l \cos \theta_x(\xi_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.16\beta)$$

Μετά τον προσδιορισμό των παραγώγων v'_S , w'_S στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στις ακραίες διατομές $x = \xi_0, \xi_l$ μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο u'_m στα σημεία αυτά. Εφαρμόζοντας την σχέση (1.2.50), λαμβάνουμε

$$u'_m(\xi_i) = -\frac{I}{2} \left[(v'_S(\xi_i))^2 + (w'_S(\xi_i))^2 + \frac{I_P}{A} (\theta'_x(\xi_i))^2 \right] \\ + \theta'_x(\xi_i) \left[y_C (v'_S(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i) - w'_S(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i)) \right. \\ \left. + z_C (v'_S(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i) + w'_S(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i)) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.17)$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται αξιοποιώντας την παραπάνω σχέση η αξονική μετατόπιση u_m στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στην ακραία διατομή $x = \xi_l$ ως

$$u_m(\xi_i) = \begin{cases} u'_m(\xi_i) \frac{l_i}{2} + u_m(\xi_0), & i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [u'_m(\xi_j) l_j] + u'_m(\xi_i) \frac{l_i}{2} + u_m(\xi_0), & i = 2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (1.3.18\alpha)$$

$$u_m(\xi_l) = \sum_{j=1}^L [u'_m(\xi_j) l_j] + u_m(\xi_0) \quad (1.3.18\beta)$$

Οι ποσότητες $u_m(\xi_0)$, $u_m(\xi_l)$ προσδιορίζονται από την εξίσωση (1.3.18β) σε συνδυασμό με τις αξονικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου. Είναι φανερό ότι εξαιτίας της ισχύος της εξίσωσης (1.3.18β), οι αξονικές συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα και πιο συγκεκριμένα είναι γνωστή μία (αντί για δύο) ανεξάρτητη συνθήκη.

Ο προσδιορισμός των παραγώγων v'_S , w'_S στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στις ακραίες διατομές $x = \xi_0, \xi_l$ επιτρέπει επίσης τον υπολογισμό των καμπτικών στροφών θ_Y , θ_Z στα σημεία αυτά, σε συνδυασμό με τις καμπτικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.2.8), λαμβάνουμε

$$\theta_Y(\xi_i) = v'_S(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i) - w'_S(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.19\alpha)$$

$$\theta_Z(\xi_i) = v'_S(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i) + w'_S(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.19\beta)$$

Ο προσδιορισμός των παραγώγων v''_S , w''_S στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) και στις ακραίες διατομές $x = \xi_0, \xi_l$ επιτρέπει επίσης τον υπολογισμό των καμπτικών καμπυλοτήτων κ_Y , κ_Z στα σημεία αυτά. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.2.10), λαμβάνουμε

$$\kappa_Y(\xi_i) = v''_S(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i) - w''_S(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.20\alpha)$$

$$\kappa_Z(\xi_i) = v''_S(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i) + w''_S(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \quad (1.3.20\beta)$$

ενώ οι παράγωγοι κ'_Y , κ'_Z υπολογίζονται με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.77) ως

$$\begin{aligned} \kappa'_Y(\xi_i) &= v_S'''(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i) - w_S'''(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i) \\ &\quad + \theta'_x(\xi_i) \kappa_Z(\xi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \end{aligned} \quad (1.3.21\alpha)$$

$$\begin{aligned} \kappa'_Z(\xi_i) &= v_S'''(\xi_i) \cos \theta_x(\xi_i) + w_S'''(\xi_i) \sin \theta_x(\xi_i) \\ &\quad - \theta'_x(\xi_i) \kappa_Y(\xi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, L, l \end{aligned} \quad (1.3.21\beta)$$

Τέλος, ο υπολογισμός των μεγεθών u_m , v_S , w_S , θ_Y , θ_Z , κ_Y , κ_Z σε οποιοδήποτε άλλο σημείο κατά μήκος της ράβδου εκτός των ξ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, L, l$) μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα με την προαναφερθείσα διαδικασία, τροποποιώντας κατάλληλα τις παραπάνω εξισώσεις.

1.3.3 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(1.2.64γ) δίδει την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P (ως προς το σημείο S), εφόσον η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_C^P (ως προς το γεωμετρικό κέντρο C) έχει ήδη προσδιοριστεί. Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης ϕ_C^P επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (1.2.60) (βλ. εδάφιο 1.2.4) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαφορική εξίσωση του προβλήματος συνοριακών τιμών είναι εξίσωση Laplace, η ιδίμορφη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.9) για τη συνάρτηση ϕ_C^P διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \pi \left(\phi_C^P(p) \right)_j (G_j + G_k) = \\ \sum_{j=1}^K (G_j - G_i) \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_C^P(q) \right)_j \frac{\cos a}{r} - (Zn_Y - Yn_Z) \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

σημειώνοντας ότι η παραπάνω σχέση έχει εξαχθεί με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης του εξεταζόμενου προβλήματος συνοριακών τιμών. Χρησιμοποιώντας N ευθύγραμμα σταθερά συνοριακά στοιχεία για την προσέγγιση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000] για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και γράφοντας τη διακριτοποιημένη ολοκληρωτική εξίσωση (1.3.22) για τα N συνοριακά κομβικά σημεία p_i , προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$\left[A^P \right] \{ X^P \} = \{ B^P \} \quad (1.3.23)$$

από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες $\{ X^P \}$, όπου $\left[A^P \right]$ είναι τετραγωνικό $N \times N$ γνωστό μητρώο συντελεστών, ενώ $\{ B^P \}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών. Επειδή το πρόβλημα

συνοριακών τιμών είναι τύπου Neumann, το μητρώο $[A^P]$ είναι ιδιόμορφο και συνεπώς δεν αντιστρέφεται (βλ. εδάφιο Π1.1). Η ομαλοποίηση του μητρώου πραγματοποιείται με την τεχνική που περιγράφεται στις εργασίες των Lutz et al. [1998] και Aimi and Diligenti [2008] με την οποία μετασχηματίζεται καθολικά και όχι τοπικά το $[A^P]$ και η οποία παρουσιάζει μεγάλη αξιοπιστία. Εφόσον η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_C^P είναι γνωστή στα σύνορα της σύνθετης διατομής, η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P υπολογίζεται στα σύνορα της σύνθετης διατομής με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.64γ).

Η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\partial\phi_C^P/\partial n)_j$ είναι γνωστή μόνο στα ελεύθερα σύνορα. Οι τιμές της στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας (αριθμητικά) ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.6) (πρόβλημα Dirichlet), η οποία διατυπώνεται για τη ϕ_C^P ως

$$\pi(\phi_C^P(p))_j = \int_{\Gamma_j} \left[(\phi_C^P(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\phi_C^P(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \quad (1.3.24)$$

Η αριθμητική επίλυση βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000].

Γνωρίζοντας τις τιμές της $(\partial\phi_C^P/\partial n)_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής, οι τιμές της $(\partial\phi_S^P/\partial n)_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής υπολογίζονται με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.65). Κατόπιν, οι τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης καθώς και οι παράγωγοί της ως προς y και z σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω_j υπολογίζονται από τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.3.5), (Π1.3.12α), (Π1.3.12β), οι οποίες διατυπώνονται για τη ϕ_S^P ως

$$(\phi_S^P(P))_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\phi_S^P(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \quad (1.3.25)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_S^P(P)}{\partial y} \right)_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\phi_S^P(q))_j \frac{\cos(\omega-a)}{r^2} + \left(\frac{\phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \quad (1.3.26\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_S^P(P)}{\partial z} \right)_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\phi_S^P(q))_j \frac{\sin(\omega-a)}{r^2} + \left(\frac{\phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \quad (1.3.26\beta)$$

Ο αριθμητικός προσδιορισμός βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000].

Τέλος, η παράγωγος ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα t της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\partial\phi_S^P/\partial t$ στα σύνορα υπολογίζεται με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8), δεδομένου ότι η ϕ_S^P είναι γνωστή στα σύνορα.

1.3.4 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(1.2.81) δίνει τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (1.2.27)), εφόσον η δευτερογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^S$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (1.2.27)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Εφόσον οι ποσότητες $(\phi_S^P)_j$ και $(\partial\phi_S^P/\partial n)_j$ έχουν ήδη προσδιοριστεί στα σύνορα Γ_j (βλ. εδάφιο 1.3.3), ο αριθμητικός υπολογισμός της

συνάρτησης $\hat{\phi}_S^S$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (1.2.79) (βλ. εδάφιο 1.2.4) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσιακαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαφορική εξίσωση του εξεταζόμενου προβλήματος συνοριακών τιμών είναι εξίσωση Poisson και ότι το δεξιό μέλος της εξίσωσης f_j μπορεί να γραφεί ως

$$f_j = c_j m + c_j w \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad \text{με} \quad c_j = E_j / G_j,$$

$$m = \frac{I_P}{A} \theta'_x \theta''_x - \kappa'_Y (z - z_C) + \kappa'_Z (y - y_C) - \theta''_x \phi_S^P \quad (\nabla^2 m = 0, \quad \left(\frac{\partial m}{\partial n}\right)_j = \kappa'_Z n_y - \kappa'_Y n_z$$

$$- \theta''_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j) \text{ και } w = - (y^2 + z^2) \theta'_x \theta''_x \text{ (ισχύει } \nabla^2 W = w \text{ με } W = -\theta'_x \theta''_x (y^4 + z^4) / 12$$

καθώς και $\frac{\partial W}{\partial n} = -\theta'_x \theta''_x (y^3 n_y + z^3 n_z) / 3$), η ιδιόμορφη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.9) για τη συνάρτηση $\hat{\phi}_S^S$ διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \pi \left(\hat{\phi}_S^S(p) \right)_j (G_j + G_k) &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K \left(G_j \frac{E_j}{G_j} - G_i \frac{E_i}{G_i} \right) \int_{\Gamma_j} m(q) (2 \ln r - 1) r \cos \alpha ds_q \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[G_j \frac{E_j}{G_j} \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j - G_i \frac{E_i}{G_i} \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_i \right] (\ln r - 1) r^2 ds_q \\ &\quad + \pi (W(p))_j \left(G_j \frac{E_j}{G_j} + G_k \frac{E_k}{G_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^K \left(G_j \frac{E_j}{G_j} - G_i \frac{E_i}{G_i} \right) \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\
& + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(G_j - G_i) \left(\widehat{\phi}_S^S(q) \right)_j \frac{\cos a}{r} - \left[G_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S(q)}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q \\
\Rightarrow & \pi \left(\widehat{\phi}_S^S(p) \right)_j (G_j + G_k) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K (E_j - E_i) \int_{\Gamma_j} m(q) (2 \ln r - 1) r \cos a ds_q \\
& - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_i \right] (\ln r - 1) r^2 ds_q \\
& + \pi (W(p))_j (E_j + E_k) \\
& + \sum_{j=1}^K (E_j - E_i) \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\
& + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(G_j - G_i) \left(\widehat{\phi}_S^S(q) \right)_j \frac{\cos a}{r} - \left[G_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S(q)}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q \quad (1.3.27)
\end{aligned}$$

σημειώνοντας ότι στην παραπάνω εξίσωση τίθεται $G_j \left(\partial \widehat{\phi}_S^S / \partial n \right)_j - G_i \left(\partial \widehat{\phi}_S^S / \partial n \right)_i = 0$ εάν το σύνορο Γ_j αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j , Ω_i ή $\left(\partial \widehat{\phi}_S^S / \partial n \right)_j = t_x / G_j$ εάν το σύνορο Γ_j είναι ελεύθερο σύνορο. Χρησιμοποιώντας την υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση των N ευθύγραμμων σταθερών συνοριακών στοιχείων για την προσέγγιση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010] για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και γράφοντας τη διακριτοποιημένη ολοκληρωτική εξίσωση (1.3.27) για τα N συνοριακά κομβικά σημεία p_i , προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$[A^S] \{X^S\} = \{B^S\} + \{C^S\} \quad (1.3.28)$$

από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες $\{X^S\}$, όπου $[A^S]$ είναι τετραγωνικό $N \times N$ γνωστό μητρώο συντελεστών, ενώ $\{B^S\}$, $\{C^S\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών. Επειδή το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι τύπου Neumann, το μητρώο $[A^S]$ είναι ιδιόμορφο και συνεπώς δεν αντιστρέφεται (βλ. εδάφιο Π1.1). Η ομαλοποίηση του μητρώου πραγματοποιείται με την τεχνική που περιγράφεται στις εργασίες των Lutz et al. [1998] και Aimi and Diligenti [2008] με την οποία μετασχηματίζεται καθολικά και όχι τοπικά

το $[A^S]$ και η οποία παρουσιάζει μεγάλη αξιοπιστία. Εφόσον η δευτερογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^S$ είναι γνωστή στα σύνορα της σύνθετης διατομής, η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S υπολογίζεται στα σύνορα της σύνθετης διατομής με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.81).

Η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\partial\widehat{\phi}_S^S/\partial n)_j$ είναι γνωστή μόνο στα ελεύθερα σύνορα. Οι τιμές της στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας (αριθμητικά) ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.6) (πρόβλημα Dirichlet), η οποία διατυπώνεται για τη $\widehat{\phi}_S^S$ ως

$$\begin{aligned} \pi(\widehat{\phi}_S^S(p))_j &= \frac{1}{4} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left[m(q)(2 \ln r - 1) r \cos a - \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \\ &+ \pi \frac{E_j}{G_j} (W(p))_j + \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\widehat{\phi}_S^S(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Η αριθμητική επίλυση βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010].

Γνωρίζοντας τις τιμές των συναρτήσεων $(\widehat{\phi}_S^S)_j$ και $(\partial\widehat{\phi}_S^S/\partial n)_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής, οι τιμές των $(\phi_S^S)_j$ και $(\partial\phi_S^S/\partial n)_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής υπολογίζονται με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.81), (1.2.83). Κατόπιν, οι τιμές της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης καθώς και οι παράγωγοί της ως προς y και z σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω_j υπολογίζονται από τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.3.5), (Π1.3.12α), (Π1.3.12β), οι οποίες διατυπώνονται για τη ϕ_S^S ως

$$\begin{aligned} (\phi_S^S(P))_j &= \frac{1}{8\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left[m(q)(2 \ln r - 1) r \cos a - \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \\ &+ \frac{E_j}{G_j} (W(P))_j + \frac{1}{2\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_S^S(q) \right)_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \phi_S^S(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \quad (1.3.30)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_S^S(P)}{\partial y} \right)_j &= -\frac{1}{8\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} m(q) (2 \cos \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \cos \beta) ds_q \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (2 \ln r - 1) r \cos \omega ds_q + \frac{E_j}{G_j} \left(\frac{\partial W(P)}{\partial y} \right)_j \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} - \frac{\partial W(q)}{\partial n} \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_S^S(q) \right)_j \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \phi_S^S(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \end{aligned} \quad (1.3.31\alpha)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_S^S(P)}{\partial z} \right)_j &= -\frac{1}{8\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} m(q) (2 \sin \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \sin \beta) ds_q \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (2 \ln r - 1) r \sin \omega ds_q + \frac{E_j}{G_j} \left(\frac{\partial W(P)}{\partial z} \right)_j \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{E_j}{G_j} \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\sin(\omega - a)}{r^2} - \frac{\partial W(q)}{\partial n} \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_S^S(q) \right)_j \frac{\sin(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \phi_S^S(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \end{aligned} \quad (1.3.31\beta)$$

σημειώνοντας ότι στις εξ.(1.3.31α) και (1.3.31β) έχουμε $(\partial W/\partial y)_j = -\theta'_x \theta''_x y^3/3$ και $(\partial W/\partial z)_j = -\theta'_x \theta''_x z^3/3$, αντίστοιχα. Ο αριθμητικός προσδιορισμός βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010].

Τέλος, η παράγωγος ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{t} της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\partial \phi_S^S/\partial \mathbf{t}$ στα σύνορα υπολογίζεται με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8), δεδομένου ότι η ϕ_S^S είναι γνωστή στα σύνορα.

1.3.5 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές

Οι γεωμετρικές σταθερές οι οποίες υπεισέρχονται στο πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου μπορούν να υπολογιστούν με βάση τις αντίστοιχες σχέσεις που έχουν παρουσιαστεί στο εδάφιο 1.2.4. Ωστόσο, προκειμένου να διατηρηθεί ο αμιγώς συνοριακός χαρακτήρας της αριθμητικής μεθόδου

επίλυσης, μετατρέπουμε όλα τα πεδιακά ολοκληρώματα των σχέσεων αυτών σε συνοριακά. Έτσι, με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss, οι γεωμετρικές σταθερές $A, \tilde{S}_y, \tilde{S}_z, \bar{I}_{yy}, \bar{I}_{yz}, \bar{I}_{zz}, I_{YY}, I_{ZZ}, I_P, I_t, \beta_1, \beta_2, I_{PP}$ δίδονται ως

$$A = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{2} \iint_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{z}} \right) d\Omega_j \quad (1.3.32\alpha)$$

$$= \frac{1}{2E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{y} n_{\tilde{y}} + \tilde{z} n_{\tilde{z}}) ds$$

$$\tilde{S}_y = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \tilde{z} d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{2} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial (\tilde{z}^2)}{\partial \tilde{z}} d\Omega_j \quad (1.3.32\beta)$$

$$= \frac{1}{2E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \tilde{z}^2 n_{\tilde{z}} ds$$

$$\tilde{S}_z = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \tilde{y} d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{2} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial (\tilde{y}^2)}{\partial \tilde{y}} d\Omega_j \quad (1.3.32\gamma)$$

$$= \frac{1}{2E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \tilde{y}^2 n_{\tilde{y}} ds$$

$$\bar{I}_{yy} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\tilde{z} - \tilde{z}_C)^2 d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{3} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial ((\tilde{z} - \tilde{z}_C)^3)}{\partial \tilde{z}} d\Omega_j$$

$$= \frac{1}{3E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{z} - \tilde{z}_C)^3 n_{\tilde{z}} ds \quad (1.3.32\delta)$$

$$\bar{I}_{zz} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\tilde{y} - \tilde{y}_C)^2 d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{3} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial ((\tilde{y} - \tilde{y}_C)^3)}{\partial \tilde{y}} d\Omega_j \quad (1.3.32\epsilon)$$

$$= \frac{1}{3E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\tilde{y} - \tilde{y}_C)^3 n_{\tilde{y}} ds$$

$$\bar{I}_{yz} = - \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\tilde{y} - \tilde{y}_C) (\tilde{z} - \tilde{z}_C) d\Omega_j$$

$$= - \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{4} \iint_{\Omega_j} \left[\frac{\partial ((\tilde{y} - \tilde{y}_C)^2 (\tilde{z} - \tilde{z}_C))}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial ((\tilde{y} - \tilde{y}_C) (\tilde{z} - \tilde{z}_C)^2)}{\partial \tilde{z}} \right] d\Omega_j$$

$$= - \frac{1}{4E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(\tilde{y} - \tilde{y}_C)^2 (\tilde{z} - \tilde{z}_C) n_{\tilde{y}} + (\tilde{y} - \tilde{y}_C) (\tilde{z} - \tilde{z}_C)^2 n_{\tilde{z}} \right] ds \quad (1.3.32\sigma)$$

$$I_{YY} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} Z^2 d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{3} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial(Z^3)}{\partial Z} d\Omega_j \quad (1.3.32\zeta)$$

$$= \frac{1}{3E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) Z^3 n_Z ds$$

$$I_{ZZ} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} Y^2 d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{3} \iint_{\Omega_j} \frac{\partial(Y^3)}{\partial Y} d\Omega_j \quad (1.3.32\eta)$$

$$= \frac{1}{3E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) Y^3 n_Y ds$$

$$I_P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{1}{3} \iint_{\Omega_j} \left[\frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} \right] d\Omega_j \quad (1.3.32\theta)$$

$$= \frac{1}{3E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (y^3 n_y + z^3 n_z) ds$$

$$I_t = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_1} \iint_{\Omega_j} \left(y^2 + z^2 + y \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j - z \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right) d\Omega_j$$

$$= \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_1} \iint_{\Omega_j} \left[\frac{\partial(yz^2 - z\phi_S^P)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2z + y\phi_S^P)}{\partial z} \right] d\Omega_j$$

$$= \frac{1}{G_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (G_j - G_i) \left[(yz^2 - z\phi_S^P) n_y + (y^2z + y\phi_S^P) n_z \right] ds \quad (1.3.32\omega)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2I_{ZZ}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) (y - y_C) d\Omega_j$$

$$= \frac{1}{2I_{ZZ}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^3 + yz^2) d\Omega_j - \frac{1}{2I_{ZZ}} y_C \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) d\Omega_j$$

$$= \frac{1}{2I_{ZZ}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left[\frac{\partial(y^4/4)}{\partial y} + \frac{\partial(yz^3/3)}{\partial z} \right] d\Omega_j - \frac{1}{2I_{ZZ}} y_C I_P$$

$$= \frac{1}{2E_1 I_{ZZ}} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left(\frac{y^4}{4} n_y + \frac{yz^3}{3} n_z \right) ds - \frac{1}{2I_{ZZ}} y_C I_P \quad (1.3.32\iota\beta)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2I_{YY}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) (z - z_C) d\Omega_j$$

$$= \frac{1}{2I_{YY}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2z + z^3) d\Omega_j - \frac{1}{2I_{YY}} z_C \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) d\Omega_j$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I}{2I_{YY}} \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left[\frac{\partial(y^3 z/3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^4/4)}{\partial z} \right] d\Omega_j - \frac{I}{2I_{YY}} z_C I_P \\
&= \frac{I}{2E_1 I_{YY}} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left(\frac{y^3 z}{3} n_y + \frac{z^4}{4} n_z \right) ds - \frac{I}{2I_{YY}} z_C I_P \quad (1.3.32\gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{PP} &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)^2 d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (y^4 + z^4 + 2y^2 z^2) d\Omega_j \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{I}{5} \iint_{\Omega_j} \left(\frac{\partial(y^5)}{\partial y} + \frac{\partial(z^5)}{\partial z} \right) d\Omega_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \frac{I}{3} \iint_{\Omega_j} \left(\frac{\partial(y^3 z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 z^3)}{\partial z} \right) d\Omega_j \\
&= \frac{I}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[\left(\frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{3} y^3 z^2 \right) n_y + \left(\frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{3} y^2 z^3 \right) n_z \right] ds \quad (1.3.32\delta)
\end{aligned}$$

σημειώνοντας ότι η σταθερά I_t υπολογίζεται μετά τον προσδιορισμό της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P ενώ η σταθερά I_{n2} υπολογίζεται εφαρμόζοντας την εξ.(1.2.38α).

Επιπρόσθετα, με τη βοήθεια της δεύτερης ταυτότητας του Green (εξ.(Π1.2.1)) και του γεγονότος ότι η διαφορική εξίσωση προσδιορισμού της ϕ_C^P είναι εξίσωση Laplace, οι γεωμετρικές σταθερές R_C^P, R_Y^P, R_Z^P, U_w δίδονται ως

$$\begin{aligned}
R_C^P &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P 1 d\Omega_j \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\phi_C^P (\nabla^2 F_1)_j - F_1 (\nabla^2 \phi_C^P)_j \right) d\Omega_j \\
&= \frac{I}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \phi_C^P \frac{\partial F_1}{\partial n} - F_1 \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \quad (1.3.33\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_Y^P &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P Y d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\phi_C^P (\nabla^2 F_2)_j - F_2 (\nabla^2 \phi_C^P)_j \right) d\Omega_j \\
&= \frac{I}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \phi_C^P \frac{\partial F_2}{\partial n} - F_2 \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \quad (1.3.33\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_Z^P &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_C^P Z d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\phi_C^P (\nabla^2 F_3)_j - F_3 (\nabla^2 \phi_C^P)_j \right) d\Omega_j \\
&= \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \phi_C^P \frac{\partial F_3}{\partial n} - F_3 \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_C^P}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \quad (1.3.33\gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_w &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P (y^2 + z^2) d\Omega_j \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\phi_S^P (\nabla^2 F_4)_j - F_4 (\nabla^2 \phi_S^P)_j \right) d\Omega_j \\
&= \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \phi_S^P \frac{\partial F_4}{\partial n} - F_4 \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \quad (1.3.33\delta)
\end{aligned}$$

όπου οι βοηθητικές συναρτήσεις $F_1 = F_1(Y, Z)$, $F_2 = F_2(Y, Z)$, $F_3 = F_3(Y, Z)$, $F_4 = F_4(y, z)$ είναι ορισμένες και συνεχείς στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ και δίδονται ως

$$F_1 = \frac{Y^2 + Z^2}{4} \quad F_2 = \frac{Y(Y^2 + Z^2)}{8} \quad F_3 = \frac{Z(Y^2 + Z^2)}{8} \quad F_4 = \frac{y^4 + z^4}{12} \quad (1.3.34\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

ενώ οι παράγωγοι ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} των συναρτήσεων αυτών, οι οποίες υπεισέρχονται στις σχέσεις (1.3.33), εκφράζονται ως

$$\frac{\partial F_1}{\partial n} = \frac{1}{2} (Yn_Y + Zn_Z) \quad \frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{1}{4} \left(\frac{3Y^2 + Z^2}{2} n_Y + YZn_Z \right) \quad (1.3.35\alpha, \beta)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial n} = \frac{1}{4} \left(YZn_Y + \frac{Y^2 + 3Z^2}{2} n_Z \right) \quad \frac{\partial F_4}{\partial n} = \frac{1}{3} (y^3 n_y + z^3 n_z) \quad (1.3.35\gamma, \delta)$$

Σημειώνεται ότι οι σταθερές R_C^P, R_Y^P, R_Z^P και U_w υπολογίζονται μετά τον προσδιορισμό των συναρτήσεων ϕ_C^P και ϕ_S^P , αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός της σταθεράς \hat{R}_S^S βασίζεται στη δεύτερη ταυτότητα του Green (εξ.(Π1.2.1)) και το θεώρημα απόκλισης του Gauss και πραγματοποιείται ως

$$\begin{aligned}
\hat{R}_S^S &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \hat{\phi}_S^S d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \hat{\phi}_S^S I d\Omega_j \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\hat{\phi}_S^S (\nabla^2 F_5)_j - F_5 (\nabla^2 \hat{\phi}_S^S)_j \right) d\Omega_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} F_5 \left(\nabla^2 \widehat{\phi}_S^S \right)_j d\Omega_j \\
& = \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \widehat{\phi}_S^S \frac{\partial F_5}{\partial n} - F_5 \left[E_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \\
& + \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \left(-\frac{E_j}{G_j} \right) \iint_{\Omega_j} F_5 \left(-\frac{I_P}{A} \theta'_x \theta''_x - \kappa'_Y z_C + \kappa'_Z y_C \right) d\Omega_j \\
& + \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \left(-\frac{E_j}{G_j} \right) \iint_{\Omega_j} \left(F_6 \kappa'_Y + F_7 \kappa'_Z + F_5 \phi_S^P \theta''_x + F_8 \theta'_x \theta''_x \right) d\Omega_j \\
& = \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \widehat{\phi}_S^S \frac{\partial F_5}{\partial n} - F_5 \left[E_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \\
& - \left(-\frac{I_P}{A} \theta'_x \theta''_x - \kappa'_Y z_C + \kappa'_Z y_C \right) \frac{1}{12 E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left(\frac{E_j^2}{G_j} - \frac{E_i^2}{G_i} \right) \left(y^3 n_y + z^3 n_z \right) ds \\
& - \kappa'_Y \frac{1}{4 E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left(\frac{E_j^2}{G_j} - \frac{E_i^2}{G_i} \right) \left(\frac{y^3 z}{3} n_y + \frac{z^4}{4} n_z \right) ds \\
& + \kappa'_Z \frac{1}{4 E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left(\frac{E_j^2}{G_j} - \frac{E_i^2}{G_i} \right) \left(\frac{y^4}{4} n_y + \frac{y z^3}{3} n_z \right) ds \\
& - \theta''_x \frac{1}{4 E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ \left(\frac{E_j^2}{G_j} - \frac{E_i^2}{G_i} \right) \phi_S^P \frac{\partial F_4}{\partial n} - F_4 \left[\frac{E_j^2}{G_j} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j - \frac{E_i^2}{G_i} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \\
& - \theta'_x \theta''_x \frac{1}{4 E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left(\frac{E_j^2}{G_j} - \frac{E_i^2}{G_i} \right) \left[\left(\frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{3} y^3 z^2 \right) n_y + \left(\frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{3} y^2 z^3 \right) n_z \right] ds \quad (1.3.36)
\end{aligned}$$

όπου οι βοηθητικές συναρτήσεις $F_5 = F_5(y, z)$, $F_6 = F_6(y, z)$, $F_7 = F_7(y, z)$, $F_8 = F_8(y, z)$ είναι ορισμένες και συνεχείς στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ και δίδονται ως

$$F_5 = \frac{y^2 + z^2}{4} \quad F_6 = \frac{z(y^2 + z^2)}{4} \quad F_7 = \frac{-y(y^2 + z^2)}{4} \quad F_8 = \frac{(y^2 + z^2)^2}{4} \quad (1.3.37\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

ενώ η παράγωγος ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της συνάρτησης F_5 , η οποία υπεισέρχεται στη σχέση (1.3.36), εκφράζεται ως

$$\frac{\partial F_5}{\partial n} = \frac{1}{2} (y n_y + z n_z) \quad (1.3.38)$$

Σημειώνεται ότι οι συναρτήσεις F_4 , $\partial F_4/\partial n$, οι οποίες υπεισέρχονται στη σχέση (1.3.36), εκφράζονται με τη βοήθεια των σχέσεων (1.3.34δ), (1.3.35δ), ενώ η σταθερά \hat{R}_S^S υπολογίζεται μετά τον προσδιορισμό της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^S$.

Τέλος, προκειμένου να υπολογιστεί η σταθερά C_S , ορίζουμε πλασματική συνάρτηση $B = B(y, z)$, η οποία είναι συνεχής στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$, ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} B d\Omega_j = 0 \quad (1.3.39)$$

και εκφράζεται ως

$$B = \hat{B} - \frac{1}{A} \hat{R}_B \quad (1.3.40)$$

όπου $\hat{B} = \hat{B}(y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στα Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$), η οποία προσδιορίζεται από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\left(\nabla^2 \hat{B} \right)_j = \phi_S^P \text{ στο } \Omega_j \quad (1.3.41\alpha)$$

$$E_j \left(\frac{\partial \hat{B}}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \hat{B}}{\partial n} \right)_i = 0 \text{ στο } \Gamma_j \quad (1.3.41\beta)$$

ενώ \hat{R}_B είναι σταθερά η οποία δίδεται ως

$$\hat{R}_B = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \hat{B} d\Omega_j \quad (1.3.42)$$

Η ιδιόμορφη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματος συνοριακών τιμών (1.3.41) για τον υπολογισμό της συνάρτησης \hat{B} , σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στο εδάφιο Π1.3 (στη σχέση (Π1.3.9) τίθεται $c_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, K$), $m = \phi_S^P$, $w = 0$), διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \pi \left(\hat{B}(p) \right)_j (E_j + E_k) &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K (E_j - E_i) \int_{\Gamma_j} \phi_S^P(q) (2 \ln r - 1) r \cos \alpha ds_q \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_i \right] (\ln r - 1) r^2 ds_q \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(E_j - E_i) (\widehat{B}(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left[E_j \left(\frac{\partial \widehat{B}(q)}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \widehat{B}(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q \quad (1.3.43)$$

και με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης (1.3.41β) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \pi(\widehat{B}(p))_j (E_j + E_k) &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K (E_j - E_i) \int_{\Gamma_j} \phi_S^P(q) (2 \ln r - 1) r \cos a ds_q \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_i \right] (\ln r - 1) r^2 ds_q \\ &\quad + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\widehat{B}(q))_j \frac{\cos a}{r} ds_q \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Εφόσον έχει υπολογιστεί η συνάρτηση ϕ_S^P , χρησιμοποιώντας την υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση των N ευθύγραμμων σταθερών συνοριακών στοιχείων για την προσέγγιση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010] για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και γράφοντας τη διακριτοποιημένη ολοκληρωτική εξίσωση (1.3.44) για τα N συνοριακά κομβικά σημεία p_i , προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$\left[A^B \right] \{ X^B \} = \{ B^B \} + \{ C^B \} \quad (1.3.45)$$

από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες $\{ X^B \}$, όπου $\left[A^B \right]$ είναι τετραγωνικό $N \times N$ γνωστό μητρώο συντελεστών, ενώ $\{ B^B \}$, $\{ C^B \}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών. Επειδή το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι τύπου Neumann, το μητρώο $\left[A^B \right]$ είναι ιδιόμορφο και συνεπώς δεν αντιστρέφεται (βλ. εδάφιο Π1.1). Η ομαλοποίηση του μητρώου πραγματοποιείται με την τεχνική που περιγράφεται στις εργασίες των Lutz et al. [1998] και Aimi and Diligenti [2008] με την οποία μετασχηματίζεται καθολικά και όχι τοπικά το $\left[A^B \right]$ και η οποία παρουσιάζει μεγάλη αξιοπιστία. Εφόσον η συνάρτηση \widehat{B} είναι γνωστή στα σύνορα της σύνθετης διατομής, η πλασματική συνάρτηση B υπολογίζεται στα σύνορα της σύνθετης διατομής σύμφωνα με τη σχέση (1.3.40). Προκειμένου να διατηρηθεί ο αμιγώς συνοριακός χαρακτήρας της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης, το πεδιακό ολοκλήρωμα της σχέσης (1.3.42) μετατρέπεται σε συνοριακό με τη βοήθεια της δεύτερης ταυτότητας του Green (εξ.(Π1.2.1)) ως

$$\widehat{R}_B = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \widehat{B} d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \widehat{B} l d\Omega_j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\widehat{B} (\nabla^2 F_5)_j - F_5 (\nabla^2 \widehat{B})_j \right) d\Omega_j + \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} F_5 (\nabla^2 \widehat{B})_j d\Omega_j \\
&= \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ (E_j - E_i) \widehat{B} \frac{\partial F_5}{\partial n} - F_5 \left[E_j \left(\frac{\partial \widehat{B}}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \widehat{B}}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds + \frac{1}{4} U_w \\
&\xrightarrow{(1.3.41\beta)} \widehat{R}_B = \frac{1}{E_1} \left[\sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \widehat{B} \frac{\partial F_5}{\partial n} ds \right] + \frac{1}{4} U_w \tag{1.3.46}
\end{aligned}$$

Μετά τον προσδιορισμό της πλασματικής συνάρτησης B στα σύνορα της σύνθετης διατομής, η σταθερά C_S υπολογίζεται με τη βοήθεια της δεύτερης ταυτότητας του Green (εξ.(Π1.2.1)) και της εξ.(1.2.24α) ως

$$\begin{aligned}
C_S &= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} (\phi_S^P)^2 d\Omega_j = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P \phi_S^P d\Omega_j \\
&= \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \left(\phi_S^P (\nabla^2 B)_j - B (\nabla^2 \phi_S^P)_j \right) d\Omega_j \\
&= \frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left\{ \phi_S^P \left[E_j \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_i \right] - B \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_i \right] \right\} ds \\
&\xrightarrow{(1.3.41\beta)} C_S = -\frac{1}{E_1} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} B \left[E_j \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j - E_i \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_i \right] ds \tag{1.3.47}
\end{aligned}$$

Σημειώνεται τέλος ότι ο αριθμητικός προσδιορισμός των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που υπεισέρχονται στις σχέσεις υπολογισμού των σταθερών A , $\tilde{S}_y, \tilde{S}_z, \bar{I}_{yy}, \bar{I}_{yz}, \bar{I}_{zz}, I_{YY}, I_{ZZ}, I_P, R_C^P, R_Y^P, R_Z^P, I_t, C_S, \beta_1, \beta_2, U_w, I_{PP}, I_{n2}, \widehat{R}_S^S, \widehat{R}_B$ βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου και πραγματοποιείται με αναλυτική ολοκλήρωση.

1.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Με βάση την αναλυτική και αριθμητική διαδικασία που παρουσιάστηκε στα εδάφια 1.2, 1.3 αναφορικά με το πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον, προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου. Η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων ελέγχεται, όπου είναι εφικτό, με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις, οι οποίες στηρίζονται στις ίδιες παραδοχές του εξεταζόμενου προβλήματος (θεωρία στρέψης). Επιπλέον, προκειμένου να διερευνηθεί η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθοδολογίας, τα ληφθέντα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται

με άλλα, όπως αυτά προκύπτουν με χρήση στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και με υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα.

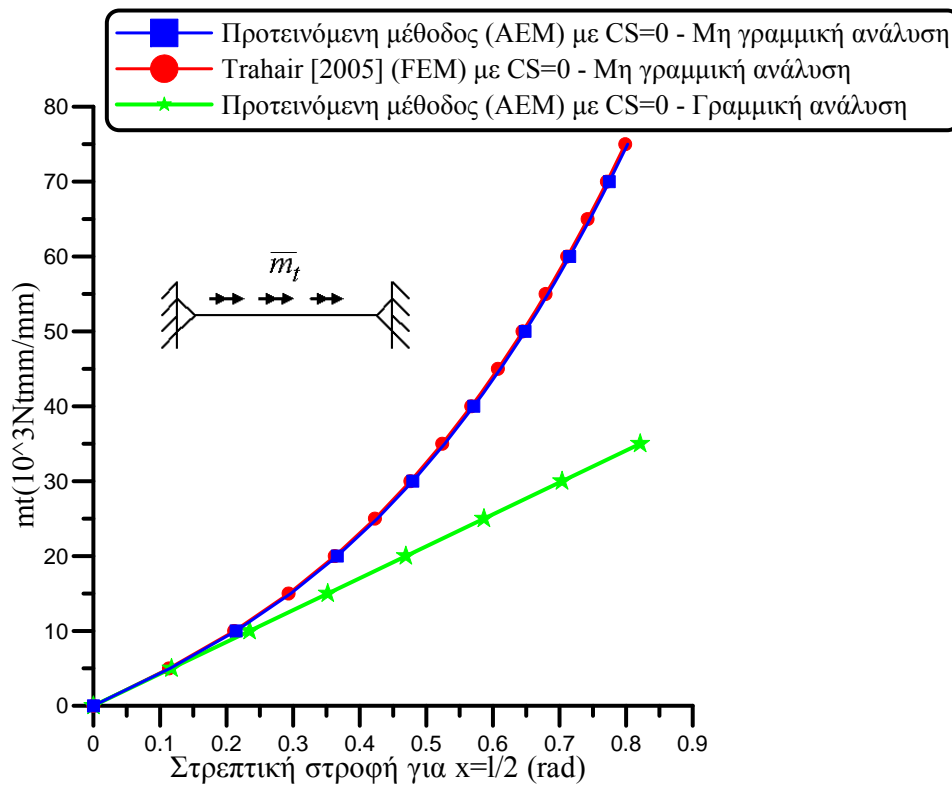
1.4.1 Παράδειγμα 1

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε ομογενείς ράβδους διπλά συμμετρικής διατομής, ως πρώτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ($E = 2.0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$) μήκους $l = 1.0 \text{ m}$ με λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή διαστάσεων $b \times h = 10 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανομημένη στρεπτική ροπή ανά μονάδα μήκους \bar{m}_t . Το ένα άκρο ($x = 0$) είναι άστρεπτο και αμετακίνητο και η στρέβλωση είναι ανεμπόδιστη ($\theta_x(0) = 0$, $M_w(0) = 0$, $u_m(0) = 0$, $v_S(0) = w_S(0) = 0$, $v_S'(0) = w_S'(0) = 0$), ενώ το άλλο άκρο ($x = l$) μπορεί να μετατοπιστεί κατά την αξονική διεύθυνση και υπόκειται σε απλή διχαλωτή στήριξη. Χρησιμοποιήθηκαν 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Στον Πίνακα 1.1 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο. Στο Σχ.1.4 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή θ_x στο μέσο της ράβδου συναρτήσει του επιβαλλόμενου στρεπτικού φορτίου m_t αγνοώντας τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης ($C_S = 0$) και λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Παρατηρείται αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται το αντίστοιχο μέγεθος που προκύπτει με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM), ($I_t = 6.6667 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $C_S = 0$, $I_{n2} = 1.7778 \times 10^{-8} \text{ m}^6$) [Trahair 2005] συμπεραίνοντας την εξαιρετική συμφωνία των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων. Τέλος, στον Πίνακα 1.2 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή για διάφορες τιμές φόρτισης που προκύπτει από την παρούσα μέθοδο λαμβάνοντας υπόψη την «πραγματική» τιμή της σταθεράς στρέβλωσης C_S (βλ. Πίνακα 1.1), συμπεραίνοντας ότι η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης είναι πολύ μικρή, το οποίο αποδίδεται στην γεωμετρία της διατομής.

Πίνακας 1.1. Γεωμετρικές σταθερές της ορθογωνικής διατομής του παραδείγματος 1.

$A \text{ (m}^2\text{)}$	2.0×10^{-3}	$y_C \text{ (m)}$	0
$I_{YY} \text{ (m}^4\text{)}$	6.6667×10^{-6}	$z_C \text{ (m)}$	0
$I_{ZZ} \text{ (m}^4\text{)}$	1.6667×10^{-8}	$I_t \text{ (m}^4\text{)}$	6.6488×10^{-8}
$I_P \text{ (m}^4\text{)}$	6.6833×10^{-6}	$C_S \text{ (m}^6\text{)}$	5.4995×10^{-11}
$I_{PP} \text{ (m}^6\text{)}$	4.0111×10^{-8}	$U_w \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\beta_1 \text{ (m)}$	0	$I_{n2} \text{ (m}^6\text{)}$	1.7778×10^{-8}
$\beta_2 \text{ (m)}$	0		



Σχήμα 1.4. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής για τη ράβδο του παραδείγματος 1.

Πίνακας 1.2. Στρεπτική στροφή θ_x στο μέσο της ράβδου του παραδείγματος 1 για διάφορες τιμές φόρτισης.

\bar{m}_t	$C_S = 5.4995 \times 10^{-11} m^6$	$C_S = 0$
10	0.2114	0.2142
20	0.3618	0.3661
30	0.4741	0.4798
40	0.5643	0.5712
50	0.6403	0.6483
60	0.7063	0.7153
70	0.7650	0.7748

1.4.2 Παράδειγμα 2

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε ομογενείς ράβδους μονοσυμμετρικής διατομής, ως δεύτερο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ($E = 8.966 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $G = 3.113 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$) μήκους $l = 177.8 \text{ mm}$ με διατομή γωνιακού με μήκος μέσης γραμμής πελμάτων $b = 14.61 \text{ mm}$ και πάχος $t = 0.9601 \text{ mm}$. Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t στο ένα άκρο της ($x=l$) που μπορεί να στρίβει και να

μετατοπίζεται ελεύθερα ενώ το άλλο άκρο της είναι άστρεπτο και αμετακίνητο κατά την εγκάρσια και αξονική διεύθυνση ($\theta_x(0)=0$, $u_m(0)=0$, $v_S(0)=w_S(0)=0$, $v_S'(0)=w_S'(0)=0$). Χρησιμοποιήθηκαν 400 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

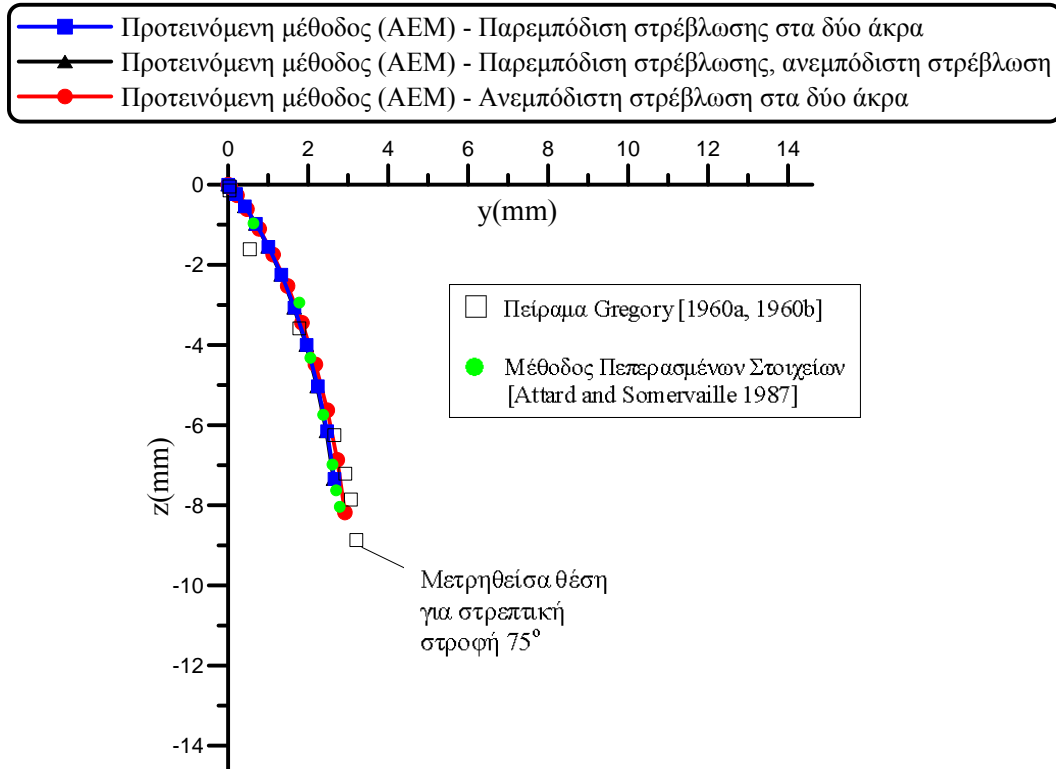
Πίνακας 1.3. Γεωμετρικές σταθερές της διατομής γωνιακού του παραδείγματος 2.

	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)	Attard and Sommerville [1987] (ΘΛΔ)
$A(mm^2)$	28.06	28.05
$I_{YY}(mm^4)$	999.2	998.0
$I_{ZZ}(mm^4)$	252.2	249.5
$I_p(mm^4)$	1991	1996
$I_{pp}(mm^6)$	2.544×10^5	2.556×10^5
$\beta_I(mm)$	-10.22	-10.33
$y_C(mm)$	5.135	5.165
$I_t(mm^4)$	8.766	8.620
$C_S(mm^6)$	152.154	-
$I_{n2}(mm^6)$	7.784×10^3	7.102×10^3

Στον Πίνακα 1.3 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής της προτεινόμενης μεθόδου συγκριτικά με τις αντίστοιχες των Attard and Sommerville [1987]. Επιπρόσθετα, στο Σχ.1.5 παρουσιάζεται η εγκάρσια μετατόπιση του σημείου τομής των μέσων γραμμών των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή ($x=l$) για τρεις περιπτώσεις στρεβλωτικών συνοριακών συνθηκών (ανεμπόδιστη στρέβλωση στα δύο άκρα, παρεμποδιζόμενη στρέβλωση στα δύο άκρα και παρεμποδιζόμενη στρέβλωση στο άκρο με $x=0$ και ανεμπόδιστη στρέβλωση στο άλλο άκρο) και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) [Attard and Sommerville 1987] (ανεμπόδιστη στρέβλωση στα δύο άκρα) καθώς και με τις μετρηθείσες τιμές από το πείραμα του Gregory [1960a,b]. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνεται τόσο η αξιοπιστία όσο και η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου ενώ παρατηρείται επίσης ότι η επιρροή των στρεβλωτικών συνοριακών συνθηκών δεν επηρεάζει σημαντικά τα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Επιπλέον, προκύπτει ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα προκαλεί εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S , w_S σε ράβδους μονοσυμμετρικής διατομής υπό στρεπτική φόρτιση.

Τέλος, στο Σχ.1.6 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή θ_x στο άκρο της ράβδου $x=l$ συναρτήσει του επιβαλλόμενου στρεπτικού φορτίου \bar{M}_t για τις προαναφερθείσες

τρεις περιπτώσεις στρεβλωτικών συνοριακών συνθηκών. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρείται αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας ενώ, όπως αναμενόταν, η στρεπτική στιβαρότητα αυξάνεται ελαφρώς με την παρεμπόδιση της στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου.



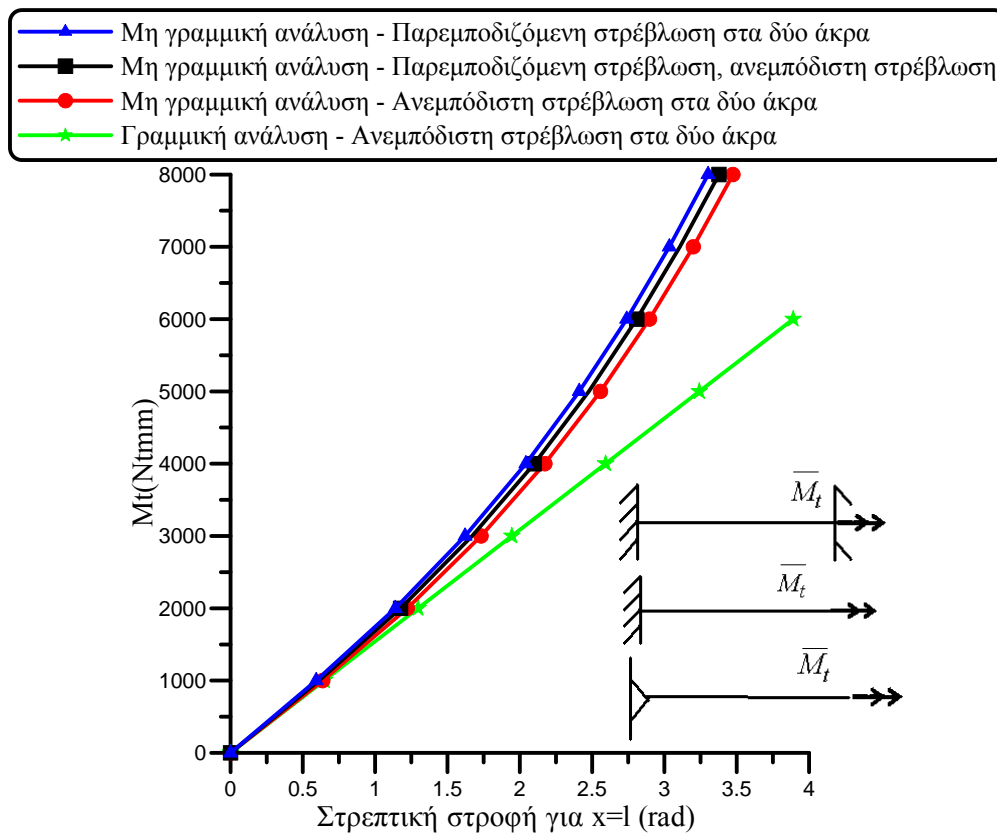
Σχήμα 1.5. Εγκάρσια μετατόπιση του σημείου τομής των μέσων γραμμών των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή της ράβδου του παραδείγματος 2 ($x=l$).

1.4.3 Παράδειγμα 3

Προκειμένου να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου στον προσδιορισμό της γεωμετρικά μη γραμμικής στρεπτικής συμπεριφοράς ράβδων ασύμμετρης διατομής, ως τρίτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$) μήκους $l = 1.0 \text{ m}$ με διατομή L του Σχ.1.7. Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t στο μέσο της, το ένα άκρο της ($x=0$) είναι πακτωμένο και το άλλο άκρο της είναι ελεύθερο να μετατοπιστεί εγκάρσια και αξονικά, να στρίψει καμπτικά, υπόκειται σε γραμμικά ελαστική στρεπτική στήριξη ($k_t = 200 \text{ kNm} / \text{rad}$) και η στρέβλωση είναι ανεμπόδιση. Χρησιμοποιήθηκαν 500 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Στον Πίνακα 1.4 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (θ είναι η στροφή του κύριου συστήματος συντεταγμένων που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο C της διατομής, όπως φαίνεται στο Σχ.1.7). Επιπρόσθετα, στο Σχ.1.8 απεικονίζεται η στρεπτική στροφή θ_x στο μέσο της ράβδου συναρτήσει του επιβαλλόμενου στρεπτικού φορτίου \bar{M}_t .

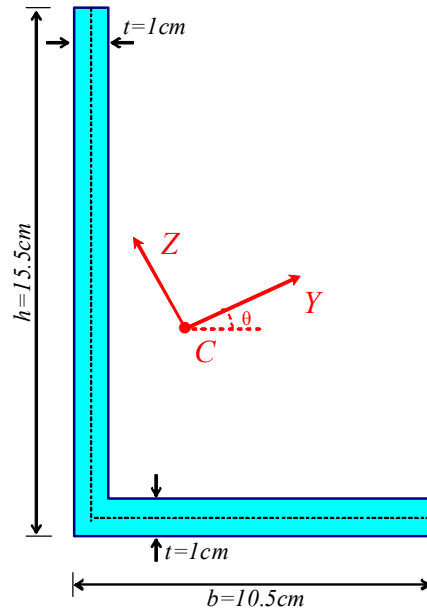
Διαπιστώνεται και πάλι η αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Στον Πίνακα 1.5 δίδονται οι ακρότατες τιμές της στρεπτικής στροφής θ_x και των παραγώγων της για στρεπτικό φορτίο $\bar{M}_t = 170kNm$, ενώ στους Πίνακες 1.6α, 1.6β απεικονίζεται η κατανομή και η ροή των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^P , S_x^S αντίστοιχα, στο πακτωμένο άκρο και σε σημείο λίγο πριν το μέσο της ράβδου ($x = (l/2)^-$) για στρεπτικό φορτίο $\bar{M}_t = 20kNm$. Στον Πίνακα 1.6γ παρουσιάζονται επίσης η κατανομή και η ροή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων $S_{x\ lin}^S$ που προκύπτουν αγνοώντας τους όρους της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην εξ.(1.2.52) (όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της πλην του όρου $\theta_x''' \phi_S^P$). Συμπεραίνεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου στον υπολογισμό τασικού πεδίου ράβδου υπό μη γραμμική ελαστική ανομοιόμορφη στρέψη ενώ καταδεικνύεται η σημασία διατήρησης των ορών της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στο πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.



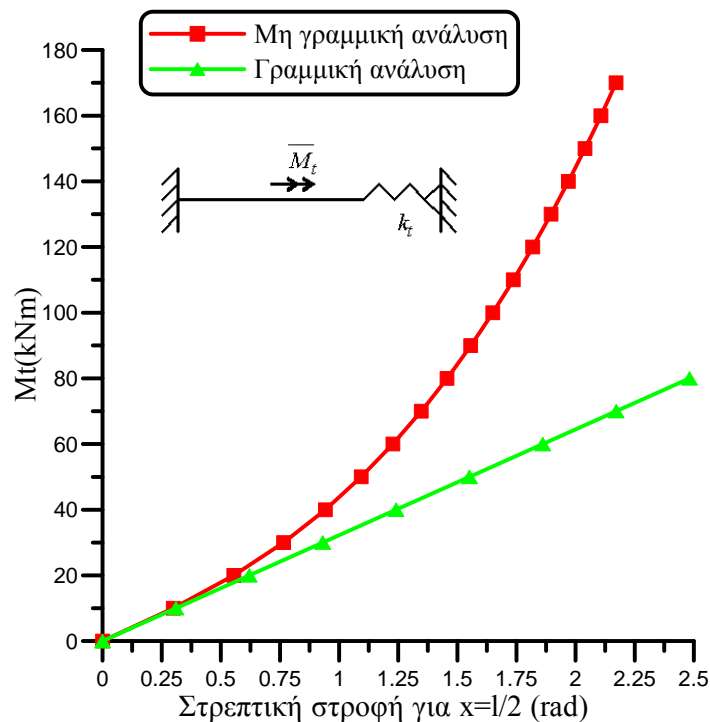
Σχήμα 1.6. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής για τη ράβδο του παραδείγματος 2.

Στα Σχ.1.9, 1.10 παρουσιάζονται τα στρεπτικά και στρεβλωτικά εντατικά μεγέθη κατά μήκος της ράβδου (βλ. εξ.(1.2.68-69)), αντίστοιχα, για στρεπτικό φορτίο $\bar{M}_t = 80kNm$ και καταδεικνύεται η σημασία του μη γραμμικού στρεπτικού εντατικού μεγέθους M_t^{nl} και του μη γραμμικού διρρόπου στρέβλωσης M_w^{nl} . Τέλος, στο Σχ.1.11

δίδονται οι εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S , w_S του σημείου S της διατομής (κέντρο στρέψης της γραμμικής ελαστικής θεωρίας στρέψης) και η στρεπτική στροφή θ_x της διατομής κατά μήκος της ράβδου για στρεπτικό φορτίο $\bar{M}_t = 80 \text{ kNm}$. Συμπεραίνεται ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα προκαλεί εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S , w_S σε ράβδους ασύμμετρης διατομής υπό στρεπτική φόρτιση.



Σχήμα 1.7. Διατομή L με ανισομήκη πέλματα του παραδείγματος 3.



Σχήμα 1.8. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής για τη ράβδο του παραδείγματος 3.

Πίνακας 1.4. Γεωμετρικές σταθερές της διατομής L του παραδείγματος 3.

$A (cm^2)$	25.000	$y_C (cm)$	3.662
$I_{YY} (cm^4)$	723.593	$z_C (cm)$	3.190
$I_{ZZ} (cm^4)$	132.198	$I_t (cm^4)$	8.390
$I_P (cm^4)$	1445.518	$C_S (cm^6)$	119.890
$I_{PP} (cm^6)$	168733.198	$U_w (cm^6)$	-38.340
$\beta_1 (cm)$	8.192	$I_{n2} (cm^6)$	5949.475
$\beta_2 (cm)$	3.887	$\theta (rad)$	0.430

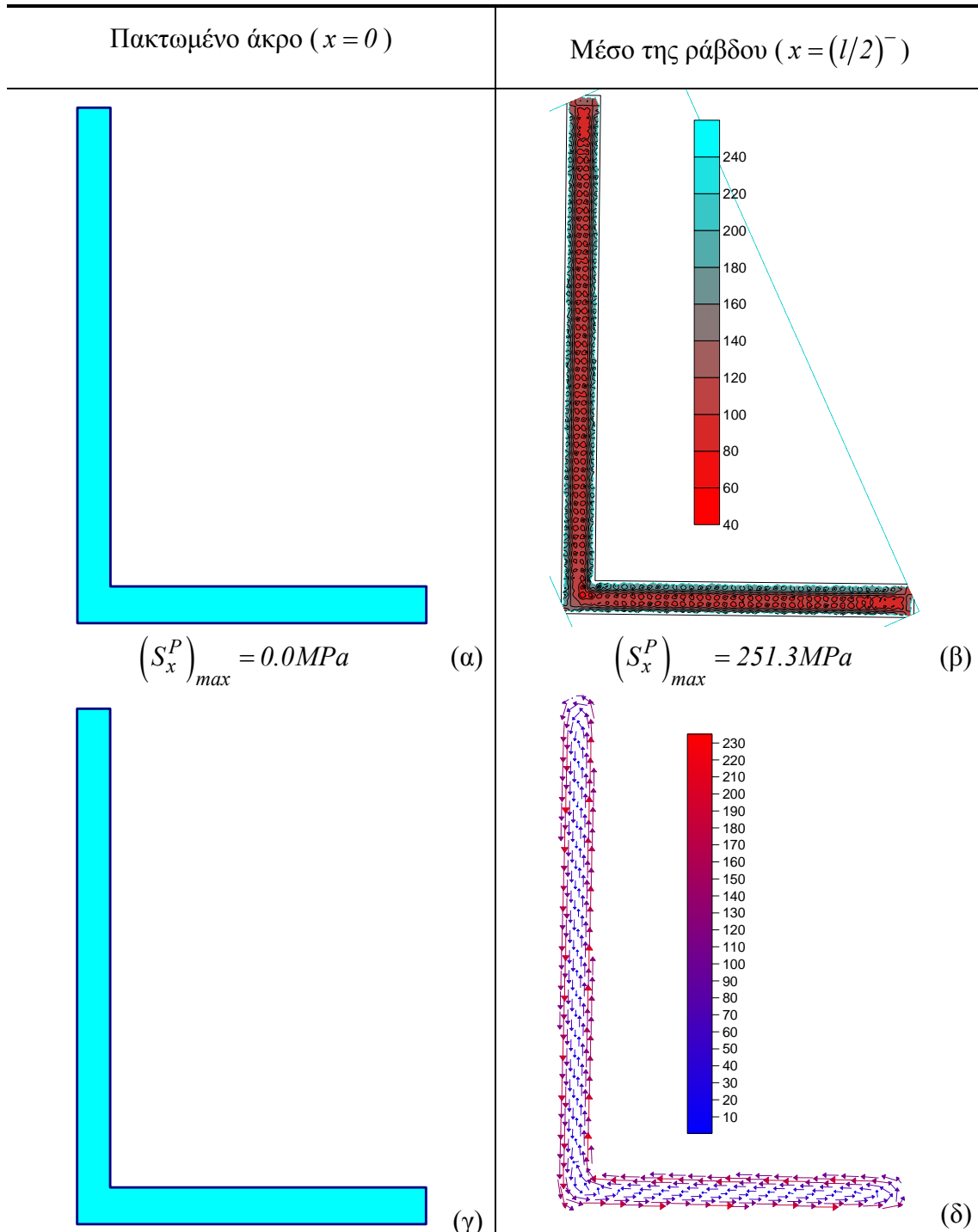
Πίνακας 1.5. Ακρότατες τιμές της στρεπτικής στροφής θ_x και των παραγώγων της κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 170kNm$).

	Μέγιστες τιμές	Ελάχιστες τιμές
$\theta_x (rad)$	2.1928	0.0000
$\theta'_x (rad / cm)$	0.0483	-0.0433
$\theta''_x (rad / cm^2)$	0.0162	-0.0130
$\theta'''_x (rad / cm^3)$	0.0026	-0.0041

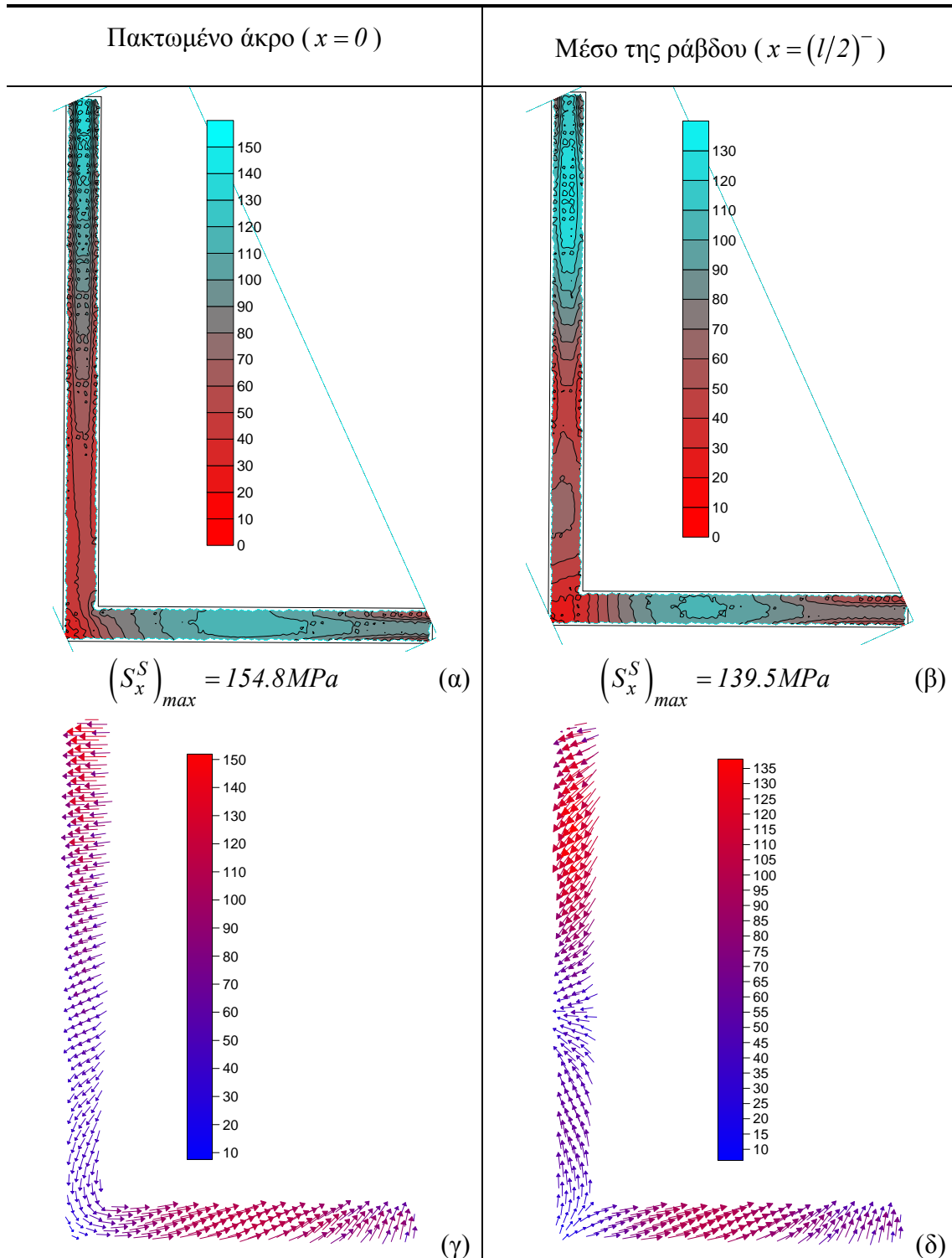
1.4.4 Παράδειγμα 4

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε σύνθετες ράβδους διπλά συμμετρικής διατομής, ως τέταρτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος σύνθετης διατομής με έγκλεισμα του Σχ.1.12 ($L = 30cm$, μητρικό υλικό ορθογωνικού σχήματος (υλικό αναφοράς) με $E_1 = 3.23184 \times 10^6 kN / m^2$, $G_1 = 1.3466 \times 10^6 kN / m^2$ και έγκλεισμα I με $E_2 = 2.1 \times 10^8 kN / m^2$, $G_2 = 8.75 \times 10^7 kN / m^2$) μήκους $l = 10m$ υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα καταναμημένη στρεπτική ροπή ανά μονάδα μήκους \bar{m}_t . Το ένα άκρο ($x = 0$) είναι πακτωμένο ενώ το άλλο άκρο ($x = l$) είναι άστρεπτο, η στρέβλωση παρεμποδίζεται ενώ μπορεί να μετατοπιστεί αξονικά. Χρησιμοποιήθηκαν 680 στοιχεία για τη διακριτοποίηση των συνόρων της διατομής και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

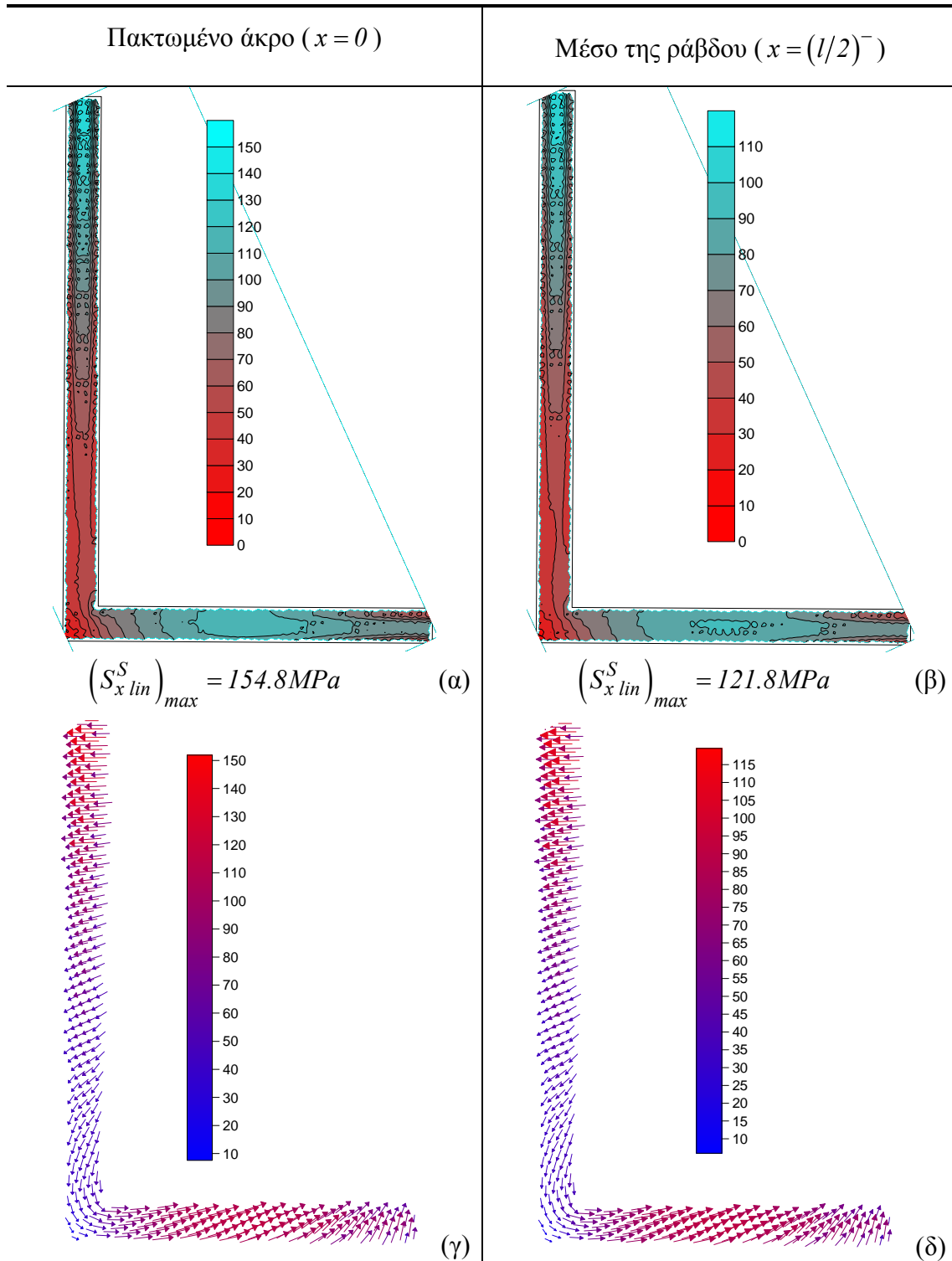
Πίνακας 1.6α. Κατανομή και ροή πρωτογενών διατμητικών τάσεων S_x^P στο άκρο ($x=0$) (α,γ) και το μέσο ($x=(l/2)^-$) (β,δ) της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 20kNm$).

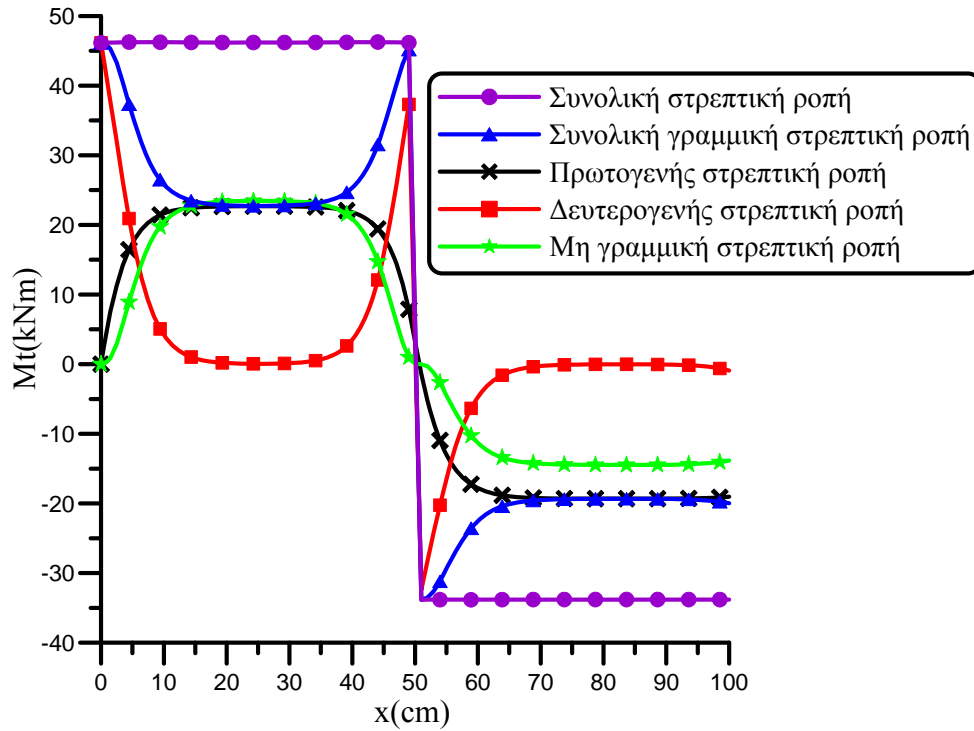


Πίνακας 1.6β. Κατανομή και ροή δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^S στο άκρο ($x=0$) (α,γ) και το μέσο ($x=(l/2)^-$) (β,δ) της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 20kNm$).

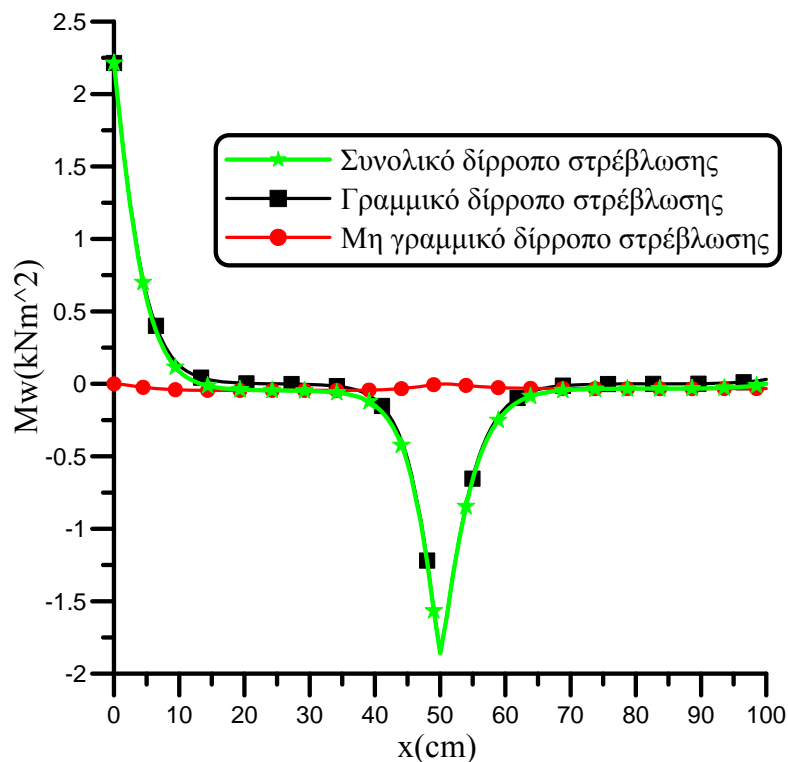


Πίνακας 1.6γ. Κατανομή και ροή δευτερογενών διατμητικών τάσεων $S_{x\ lin}^S$ στο άκρο ($x=0$) (α,γ) και το μέσο ($x=(l/2)^-$) (β,δ) της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 20\text{kNm}$).

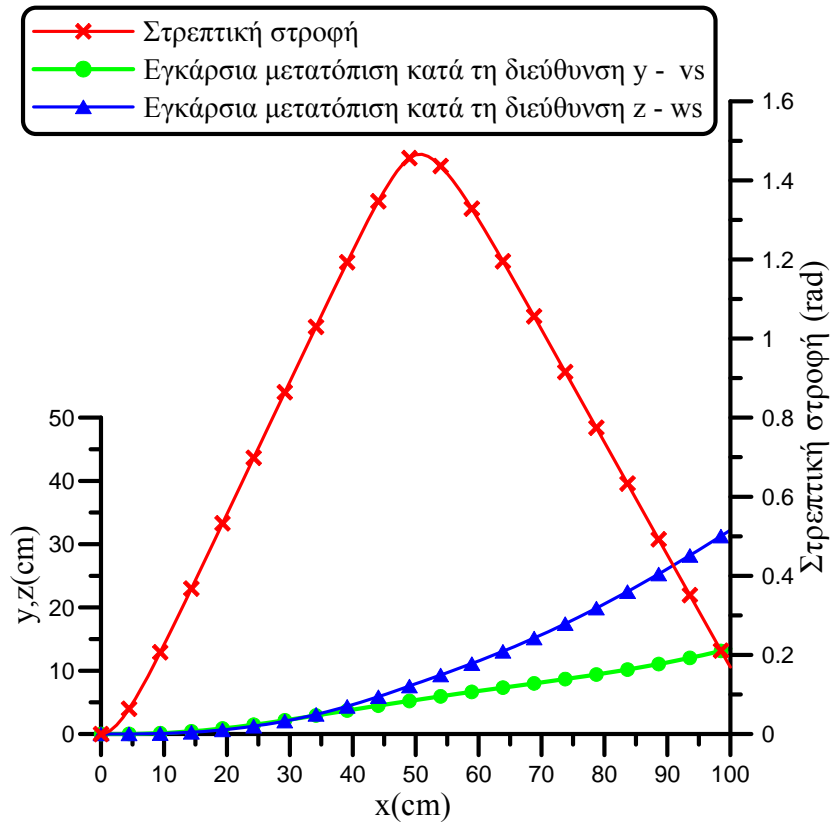




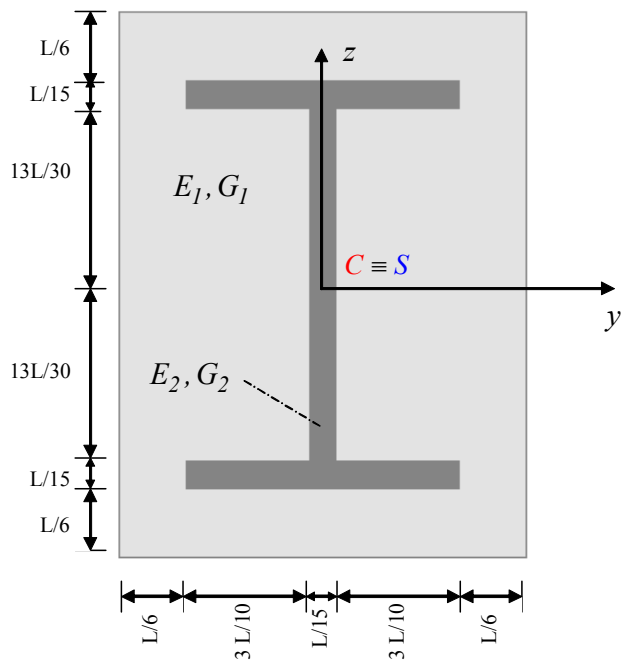
Σχήμα 1.9. Εντατικά μεγέθη στρέψης κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 80 \text{kNm}$).



Σχήμα 1.10. Εντατικά μεγέθη στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 80 \text{kNm}$).



Σχήμα 1.11. Εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S, w_S και στρεπτική στρέψη θ_x κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3 ($\bar{M}_t = 80kNm$).



Σχήμα 1.12. Σύνθετη διατομή με έγκλεισμα του παραδείγματος 4.

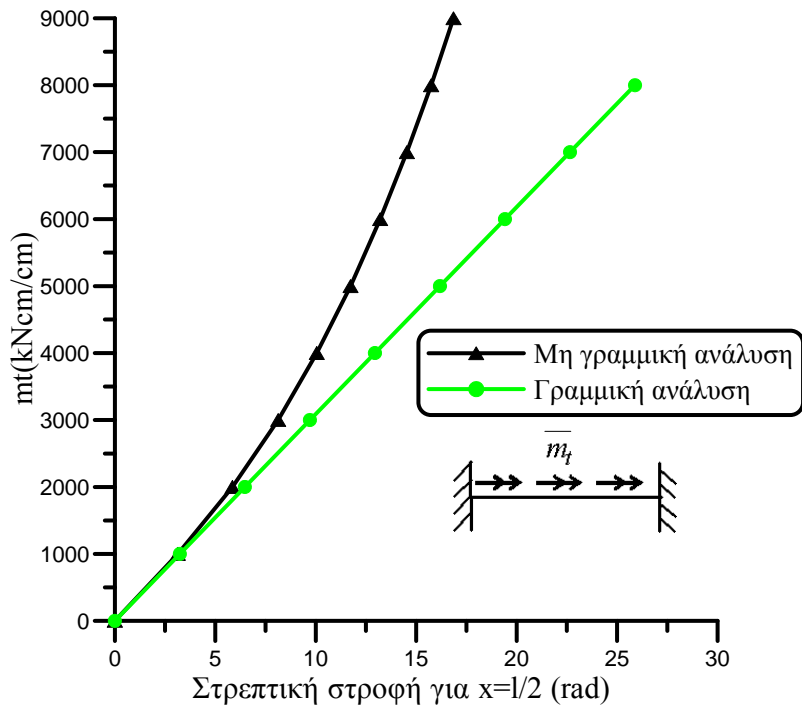
Στον Πίνακα 1.7 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο. Στο Σχ.1.13 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή θ_x στο μέσο της ράβδου συναρτήσει του επιβαλλόμενου στρεπτικού φορτίου \bar{m}_t όπου διακρίνεται η αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Τέλος, στο Σχ.1.14 απεικονίζεται η στρεπτική στροφή και η απόλυτη τιμή της «μέσης» αξονικής μετατόπισης της διατομής κατά μήκος της ράβδου για στρεπτικό φορτίο $\bar{m}_t = 4000 \text{ kNcm} / \text{cm}$, καθιστώντας εμφανή την υπερεκτίμηση της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης αναφορικά με τον υπολογισμό στρεπτικών στροφών καθώς και την ανάπτυξη αξονικής βράχυνσης σε ράβδους διπλά συμμετρικής διατομής.

1.4.5 Παράδειγμα 5

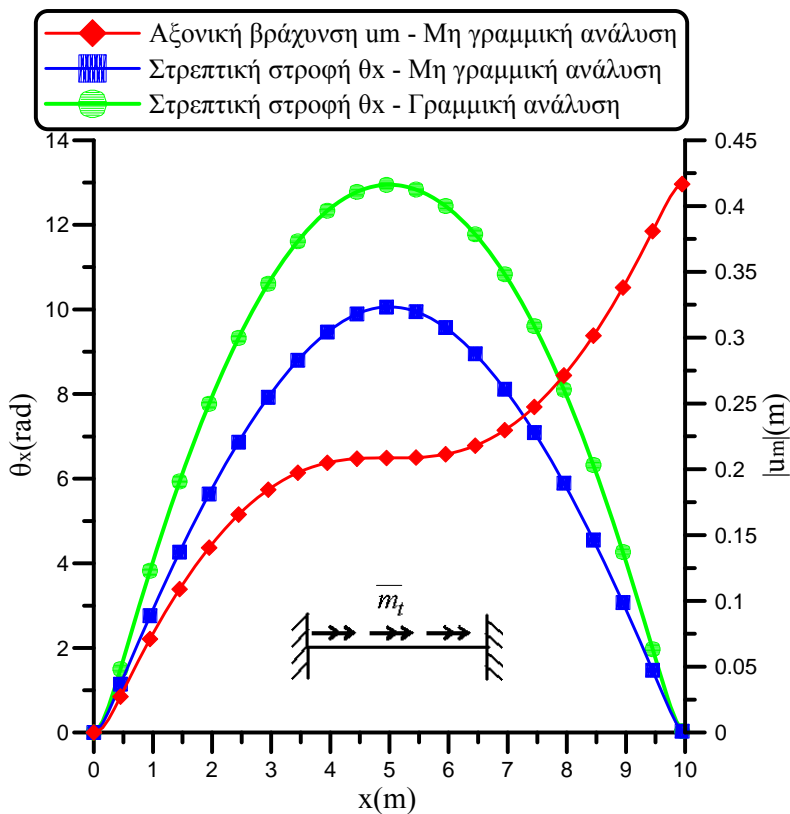
Προκειμένου να διερευνηθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου καθώς και η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε σύνθετες ράβδους μονοσυμμετρικής διατομής, ως πέμπτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος σύνθετης διατομής με υλικά σε επαφή του Σχ.1.15 ($L = 30 \text{ cm}$, ράβδος διατομής I με $E_I = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G_I = 8.75 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$ (υλικό αναφοράς) σε επαφή με ράβδο διατομής ορθογωνικού σχήματος με $E_2 = 3.23184 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G_2 = 1.3466 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$) μήκους $l = 3 \text{ m}$ υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t στο ένα άκρο της ($x = l$). Το ένα άκρο ($x = 0$) είναι άστρεπτο και αμετακίνητο κατά την εγκάρσια και αξονική διεύθυνση ($\theta_x(0) = 0$, $u_m(0) = 0$, $v_S(0) = w_S(0) = 0$, $v_S'(0) = w_S'(0) = 0$) ενώ το άλλο άκρο μπορεί να στρίβει και να μετατοπίζεται ελεύθερα. Χρησιμοποιήθηκαν 680 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Πίνακας 1.7. Γεωμετρικές σταθερές της σύνθετης διατομής του παραδείγματος 4.

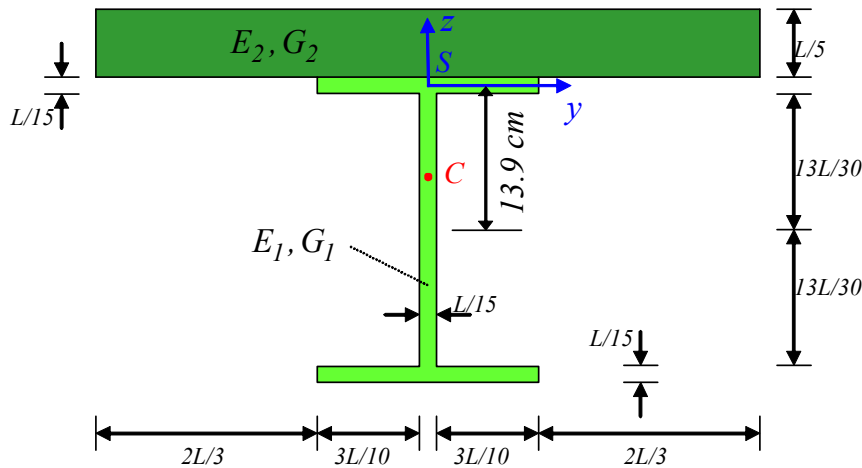
$A \text{ (m}^2\text{)}$	9.645×10^{-1}	$y_C \text{ (m)}$	0
$I_{YY} \text{ (m}^4\text{)}$	1.352×10^{-2}	$z_C \text{ (m)}$	0
$I_{ZZ} \text{ (m}^4\text{)}$	2.617×10^{-3}	$I_t \text{ (m}^4\text{)}$	2.669×10^{-3}
$I_P \text{ (m}^4\text{)}$	1.614×10^{-2}	$C_S \text{ (m}^6\text{)}$	3.389×10^{-5}
$I_{PP} \text{ (m}^6\text{)}$	3.695×10^{-4}	$U_w \text{ (m}^6\text{)}$	0
$\beta_1 \text{ (m)}$	0	$I_{n2} \text{ (m}^6\text{)}$	9.945×10^{-5}
$\beta_2 \text{ (m)}$	0		



Σχήμα 1.13. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής για τη σύνθετη ράβδο του παραδείγματος 4.



Σχήμα 1.14. Απόλυτη τιμή αξονικής μετατόπισης $|u_m|$ και στρεπτική στροφή θ_x κατά μήκος της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 4 ($\bar{m}_t = 4000 \text{ kNcm/cm}$).



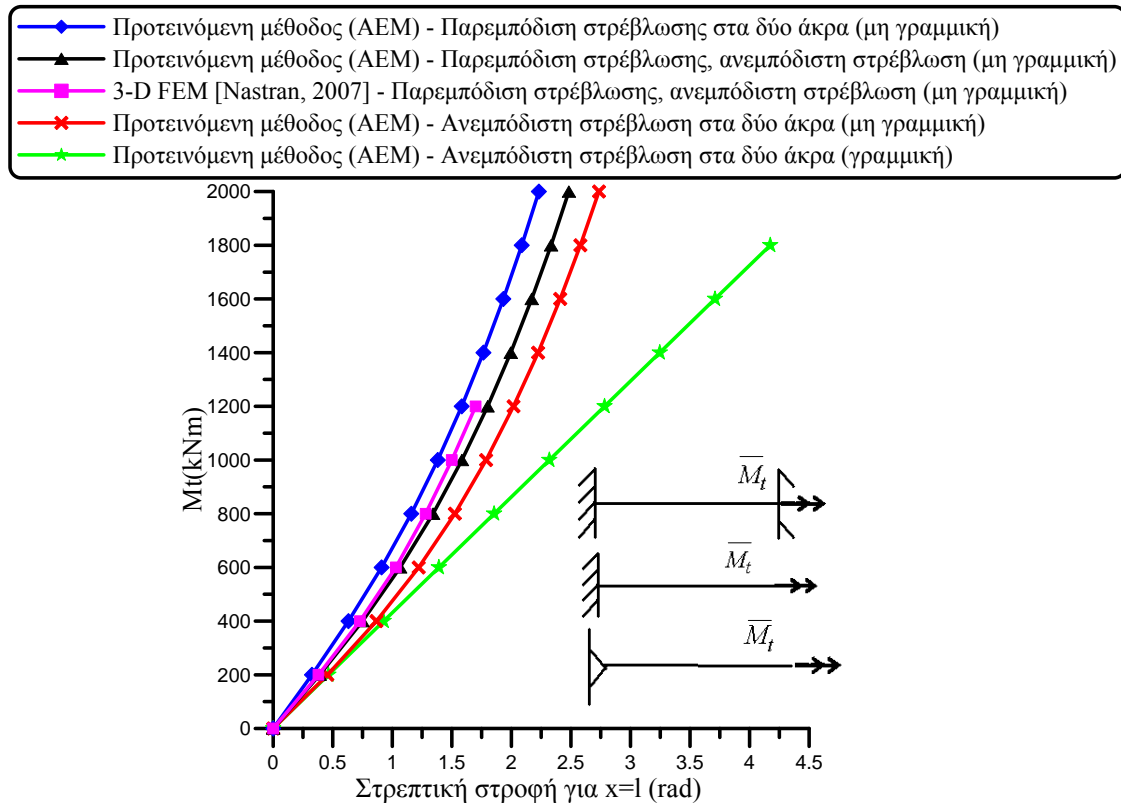
Σχήμα 1.15. Σύνθετη διατομή με υλικά σε επαφή του παραδείγματος 5.

Πίνακας 1.8. Γεωμετρικές σταθερές της σύνθετης διατομής του παραδείγματος 5.

$A (m^2)$	1.874×10^{-2}	$y_C (m)$	0
$I_{YY} (m^4)$	3.145×10^{-4}	$z_C (m)$	0
$I_{ZZ} (m^4)$	1.930×10^{-4}	$I_t (m^4)$	1.479×10^{-5}
$I_P (m^4)$	6.441×10^{-4}	$C_S (m^6)$	1.169×10^{-6}
$I_{PP} (m^6)$	4.167×10^{-5}	$U_w (m^6)$	0
$\beta_1 (m)$	0	$I_{n2} (m^6)$	1.030×10^{-5}
$\beta_2 (m)$	-8.565×10^{-2}		

Στον Πίνακα 1.8 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο. Στο Σχ.1.16 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή θ_x στο άκρο της ράβδου $x=l$ συναρτήσει του επιβαλλόμενου στρεπτικού φορτίου \bar{M}_t για τρεις περιπτώσεις στρεβλωτικών συνοριακών συνθηκών (ανεμπόδιστη στρέβλωση στα δύο άκρα, παρεμποδιζόμενη στρέβλωση στα δύο άκρα και παρεμποδιζόμενη στρέβλωση στο άκρο με $x=0$ και ανεμπόδιστη στρέβλωση στο άλλο άκρο). Συμπεραίνεται η αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας καθώς και η μικρή σημασία των στρεπτικών συνοριακών συνθηκών στην καθολική ανάλυση της ράβδου του συγκεκριμένου παραδείγματος. Επίσης, στο ίδιο σχήμα απεικονίζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν επιλύοντας τη ράβδο με τη βοήθεια 24600 στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007] για την περίπτωση παρεμποδιζόμενης στρέβλωσης στο άκρο με $x=0$ και ανεμπόδιστη στρέβλωσης στο άλλο άκρο. Η συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου είναι ικανοποιητική.

Τέλος, στο Σχ.1.17 παρουσιάζεται η εγκάρσια μετατόπιση του σημείου S της διατομής (με $x=l$) για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις στρεβλωτικών συνοριακών συνθηκών όπου διαπιστώνεται ότι σύνθετες ράβδοι μονοσυμμετρικής διατομής παρουσιάζουν εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S , w_S εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Παρατηρείται επίσης ότι η επιρροή των στρεβλωτικών συνοριακών συνθηκών δεν επηρεάζει σημαντικά τα συγκεκριμένα αποτελέσματα.

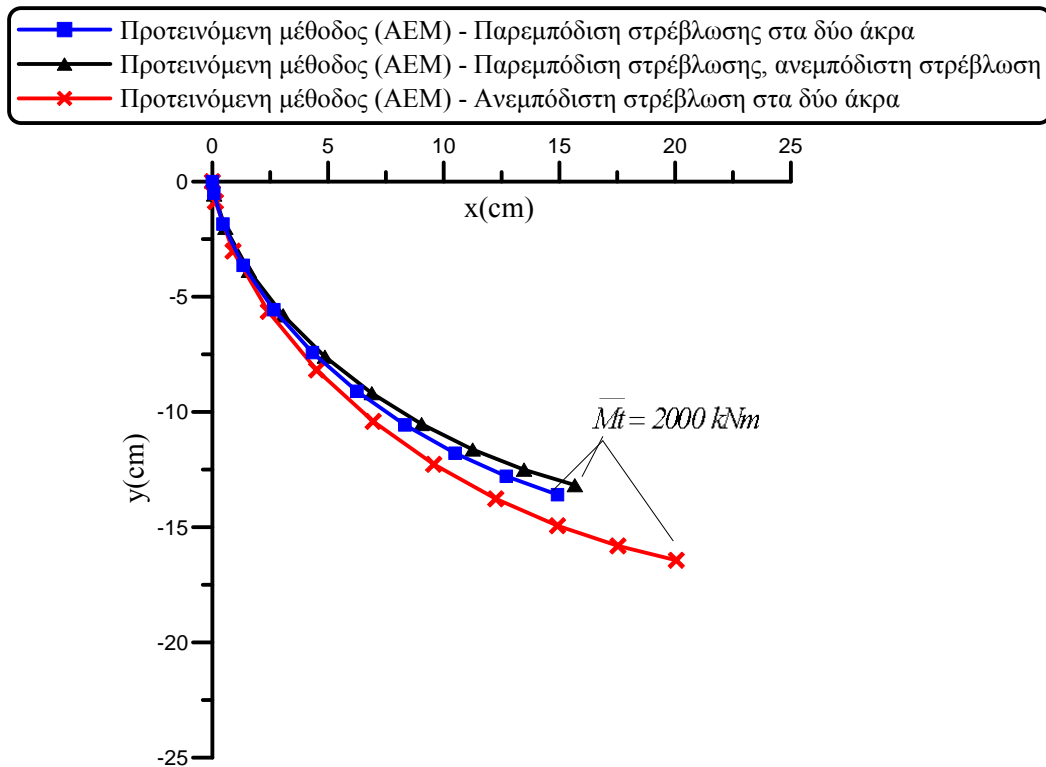


Σχήμα 1.16. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής για τη σύνθετη ράβδο του παραδείγματος 5.

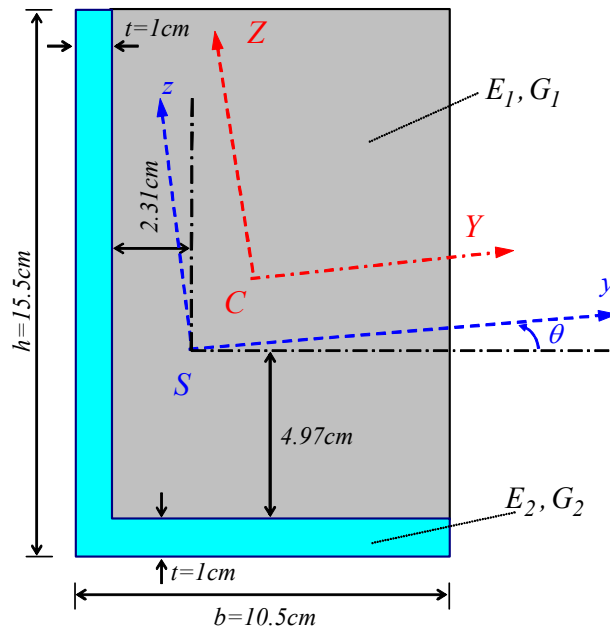
1.4.6 Παράδειγμα 6

Προκειμένου να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου στον προσδιορισμό της μη γραμμικής ελαστικής στρεπτικής συμπεριφοράς σύνθετων ράβδων ασύμμετρης διατομής, ως έκτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος σύνθετης διατομής με υλικά σε επαφή του Σχ.1.18 (ράβδος διατομής ορθογωνικού σχήματος με $E_1 = 2.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $G_1 = 1.1154 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ (υλικό αναφοράς) σε επαφή με ράβδο διατομής L με ανισομήκη πέλματα και $E_2 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G_2 = 8.077 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$) μήκους $l = 1 \text{ m}$ υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές \bar{M}_{t1} , \bar{M}_{t2} στα τρίτα του ανοίγματος. Το ένα άκρο της ράβδου ($x=0$) είναι πακτωμένο ενώ το άλλο άκρο ($x=l$) είναι ελεύθερο να μετατοπιστεί αξονικά και εγκάρσια, να στρίψει καμπτικά, υπόκειται σε γραμμικά ελαστική στρεπτική στήριξη ($k_t = 7000 \text{ kNm/rad}$) και η στρέβλωση παρεμποδίζεται. Χρησιμοποιήθηκαν

700 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής και 70 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.



Σχήμα 1.17. Μετατόπιση του σημείου S της διατομής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 5 ($x = l$).



Σχήμα 1.18. Σύνθετη διατομή με υλικά σε επαφή του παραδείγματος 6.

Στον Πίνακα 1.9 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (θ είναι η στροφή του κύριου συστήματος συντεταγμένων που διέρχεται από το σημείο S της διατομής, όπως φαίνεται στο Σχ.1.18). Στον Πίνακα 1.10 δίδονται οι ακρότατες τιμές της στρεπτικής στροφής θ_x και των παραγώγων της για στρεπτική φόρτιση $\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 4000kNm$, ενώ στα Σχ.1.19, 1.20 παρουσιάζονται τα στρεπτικά και στρεβλωτικά εντατικά μεγέθη κατά μήκος της ράβδου (βλ. εξ.(1.2.68-69)), αντίστοιχα, για στρεπτική φόρτιση $\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 20000kNm$, όπου καταδεικνύεται η σημασία του μη γραμμικού στρεπτικού εντατικού μεγέθους M_t^{nl} και του μη γραμμικού διρρόπου στρέβλωσης M_w^{nl} .

Πίνακας 1.9. Γεωμετρικές σταθερές της σύνθετης διατομής του παραδείγματος 6.

$A(m^2)$	3.188×10^{-2}	$y_C(m)$	6.602×10^{-3}
$I_{YY}(m^4)$	7.883×10^{-5}	$z_C(m)$	3.174×10^{-3}
$I_{ZZ}(m^4)$	3.421×10^{-5}	$I_t(m^4)$	6.800×10^{-5}
$I_P(m^4)$	1.148×10^{-4}	$C_S(m^6)$	1.053×10^{-8}
$I_{PP}(m^6)$	6.145×10^{-7}	$U_w(m^6)$	-5.651×10^{-9}
$\beta_1(m)$	1.895×10^{-2}	$I_{n2}(m^6)$	1.314×10^{-7}
$\beta_2(m)$	8.311×10^{-3}	$\theta(rad)$	1.821×10^{-1}

Τέλος, στο Σχ.1.21 δίδονται οι εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S, w_S του σημείου S της διατομής (κέντρο στρέψης της γραμμικής ελαστικής θεωρίας στρέψης) και η συστροφή θ'_x της διατομής κατά μήκος της ράβδου για στρεπτική φόρτιση $\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 4000kNm$. Διαπιστώνεται και πάλι η ανάπτυξη εγκάρσιων μετατοπίσεων v_S, w_S σε ράβδους ασύμμετρης διατομής υπό στρεπτική φόρτιση εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας καθώς και η αποτελεσματικότητα της μεθόδου στην ανάλυση σύνθετων ράβδων υπό μη γραμμική ελαστική ανομοιόμορφη στρέψη.

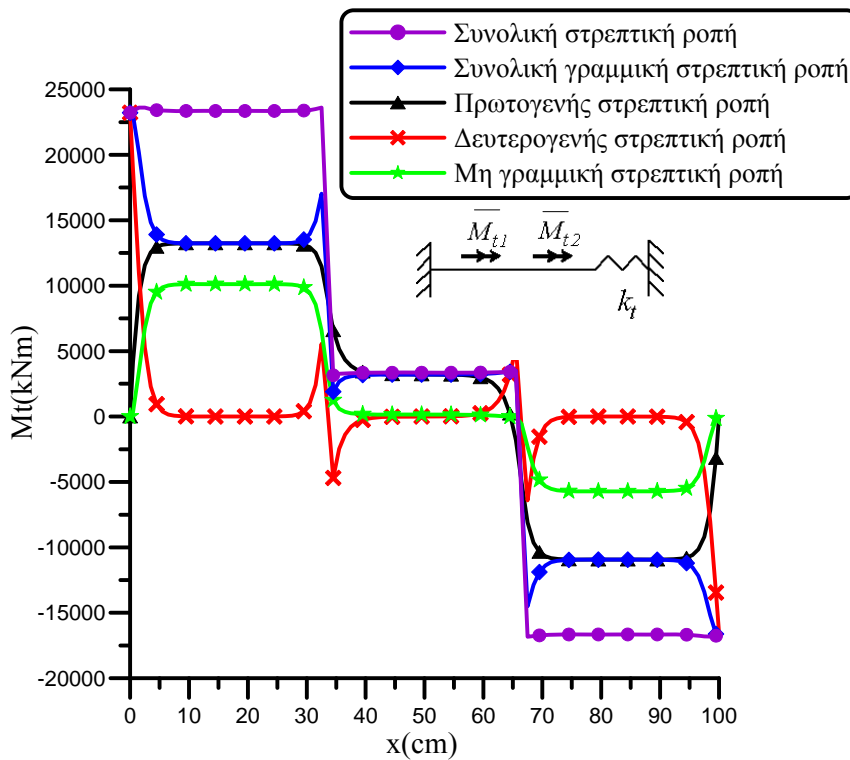
1.5 Συμπεράσματα

Στα προηγούμενα εδάφια διατυπώθηκε και επιλύθηκε αριθμητικά το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος. Τα **κύρια συμπεράσματα** που προκύπτουν από την προαναφερθείσα ανάλυση είναι τα ακόλουθα.

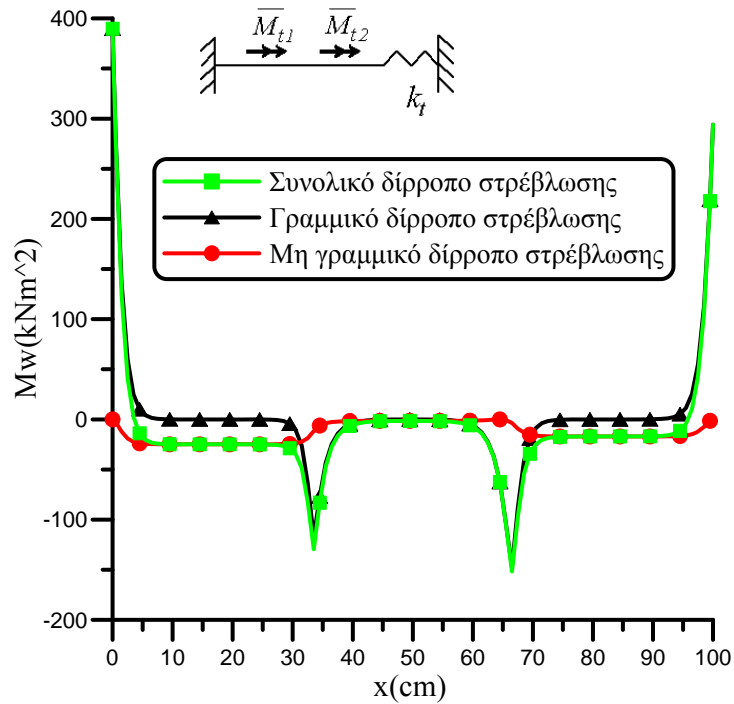
- Η ακρίβεια και η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνονται με υπάρχοντα αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα καθώς και με αποτελέσματα στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων από εμπορικό λογισμικό.

Πίνακας 1.10. Μέγιστες και ελάχιστες τιμές της στρεπτικής στροφής θ_x και των παραγώγων της κατά μήκος της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6 ($\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 4000\text{kNm}$).

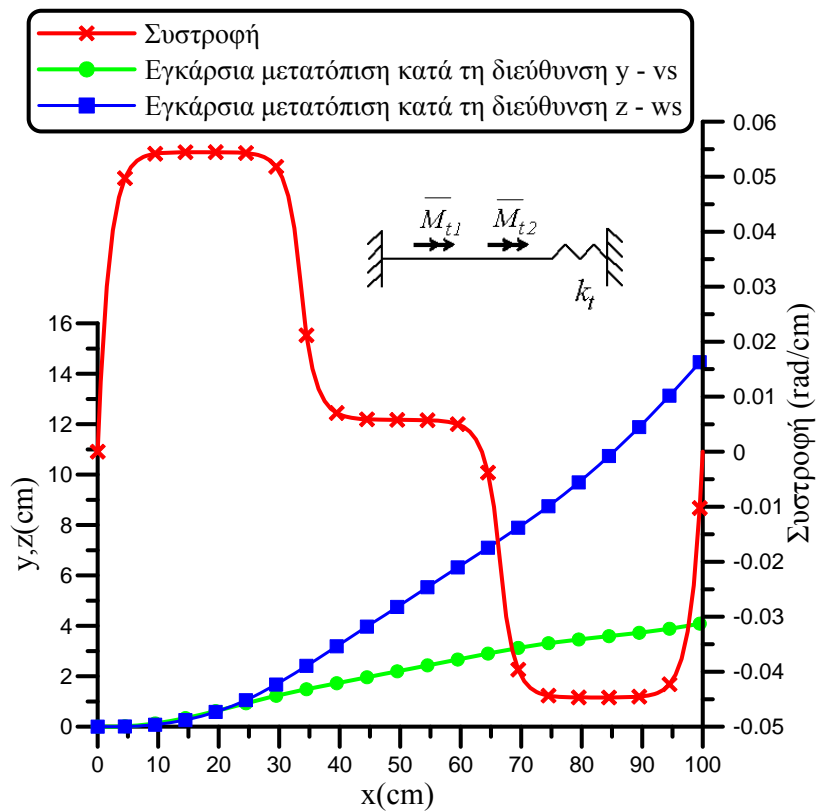
	Μέγιστες τιμές		Ελάχιστες τιμές	
	Γραμμική ανάλυση	Μη γραμμική ανάλυση	Γραμμική ανάλυση	Μη γραμμική ανάλυση
θ_x (rad)	1.9754	1.8927	0.0000	0.0000
θ'_x (rad / cm)	0.0580	0.0545	-0.0474	-0.0447
θ''_x (rad / cm ²)	0.0291	0.0288	-0.0117	-0.0114
θ'''_x (rad / cm ³)	0.0117	0.0115	-0.0143	-0.0144



Σχήμα 1.19. Εντατικά μεγέθη στρέψης κατά μήκος της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6 ($\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 20000\text{kNm}$).



Σχήμα 1.20. Εντατικά μεγέθη στρέβλωσης κατά μήκος της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6 ($\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 20000\text{kNm}$).



Σχήμα 1.21. Εγκάρσιες μετατοπίσεις v_S, w_S και συστροφή θ'_x κατά μήκος της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6 ($\bar{M}_{t1} = \bar{M}_{t2} = 4000\text{kNm}$).

- Η προτεινόμενη μέθοδος προσφέρει όλα τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, αφού απαιτεί μόνο συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και των γεωμετρικών σταθερών, συμπεριλαμβανομένων και των συντελεστών Wagner β_1, β_2, U_w , οι οποίοι είναι καθοριστικής σημασίας στη μη γραμμική ελαστική ανομοιόμορφη στρέψη ομογενών ή σύνθετων ράβδων.

Ειδικότερα, **οι επιρροές της γεωμετρικής μη γραμμικότητας** στην ελαστική στατική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη μπορούν να συνοψιστούν ως ακολούθως.

- Σύζευξη των στρεπτικών, αξονικών και καμπτοδιαμητικών εντατικών μεγεθών ακόμα και στην περίπτωση μηδενικών εξωτερικά επιβαλλόμενων αξονικών και καμπτοδιαμητικών δράσεων. Στη ράβδο δεν αναπτύσσεται αξονική και καμπτοδιαμητική ένταση αποκλειστικά στην περίπτωση συγκεκριμένων (κατάλληλων) αξονικών και καμπτοδιαμητικών συνοριακών συνθηκών στα άκρα της.
- Σύζευξη των στρεπτικών, αξονικών και καμπτοδιαμητικών κινηματικών μεγεθών. Οι διατομές της ράβδου παρουσιάζουν εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις ακόμα και στην περίπτωση όπου ασκούνται αποκλειστικά εξωτερικά επιβαλλόμενες στρεπτικές δράσεις. Κατά συνέπεια όλες οι διαμήκεις ίνες της ράβδου μετατοπίζονται με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ακλόνητος άξονας περιστροφής όπως στη γραμμική ελαστική θεωρία. Γενικά, οι διαμήκεις ίνες της ράβδου αλλάζουν μήκος (βράχυνση ή επιμήκυνση). Μόνο στην περίπτωση ράβδων διπλά συμμετρικής διατομής οι εγκάρσιες μετατοπίσεις είναι μηδενικές, ωστόσο η ράβδος υφίσταται αξονική βράχυνση (κατά μέσο όρο) εξαιτίας της σύζευξης αξονικών και στρεπτικών μετατοπίσεων.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων υπό στρεπτική καταπόνηση και τελικά βελτιώνει τη συμπεριφορά τους αναφορικά με την ανάληψη στρεπτικής φόρτισης.
- Η σχέση στρεπτικού εντατικού μεγέθους - στρεπτικών κινηματικών μεγεθών παύει να είναι γραμμική.
- Η σχέση δίρροπο στρέβλωσης - στρεπτικών κινηματικών μεγεθών παύει να είναι γραμμική. Το δίρροπο στρέβλωσης συσχετίζεται γραμμικά με τη δεύτερη παράγωγο της στρεπτικής στροφής μόνο στην περίπτωση που η διατομή διαθέτει τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας.
- Η μη γραμμική στρεπτική ροπή μπορεί να λάβει σημαντικές τιμές τοπικά κατά μήκος της ράβδου. Αντιθέτως, το μη γραμμικό δίρροπο στρέβλωσης μπορεί να αγνοηθεί στις περισσότερες περιπτώσεις.
- Οι εκφράσεις των εξωτερικά επιβαλλόμενων στρεπτικών δράσεων παύουν να είναι γραμμικές ως προς τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας. Στις εκφράσεις αυτές υπεισέρχεται και η στρεπτική στροφή και λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή των μοχλοβραχιόνων των επιβαλλόμενων επιφανειακών δράσεων.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάπτυξη επιπρόσθετων ορθών τάσεων, οι οποίες καταπονούν τη ράβδο πέραν των ορθών τάσεων που οφείλονται στην ανομοιόμορφη στρέβλωση.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάπτυξη επιπρόσθετων δευτερογενών διαμητικών τάσεων που καταπονούν τη ράβδο πέραν αυτών που εξισορροπούν τις ορθές τάσεις και που οφείλονται στην (ανομοιόμορφη) στρέβλωση.

- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην ανάπτυξη δευτερογενών διατμητικών τάσεων σε ράβδους μονοσυμμετρικής διατομής υπό ομοιόμορφη στρέψη.
- Το μέγεθος και η κατανομή στο επίπεδο της διατομής των δευτερογενών διατμητικών συνιστωσών τάσης του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff επηρεάζονται από τη γεωμετρική μη γραμμικότητα.
- Σε αντίθεση με τη γραμμική ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, η γεωμετρική μη γραμμικότητα προκαλεί ανομοιόμορφη στρέβλωση σε ράβδους ασύμμετρης διατομής στην περίπτωση όπου επιβάλλονται αποκλειστικά δύο ισόποσες στρεπτικές ροπές στα άκρα τους χωρίς να παρεμποδίζεται η στρέβλωσή τους.

Κεφάλαιο 2

Μη Γραμμική Ελαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου με Δευτερογενείς Διατμητικές Παραμορφώσεις

2.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μη γραμμική ελαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στη ράβδο υπολογίστηκαν μέσω κατάλληλα διατυπωμένου προβλήματος συνοριακών τιμών. Ωστόσο, οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις που σχετίζονται με τις τάσεις αυτές δεν ελήφθησαν υπόψη στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Στις ενότητες που ακολουθούν διερευνάται η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στη μη γραμμική ελαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη.

Στα πλαίσια της **γραμμικής ελαστικής ανάλυσης**, στην περίπτωση όπου η αναπτυσσόμενη στρέβλωση σε ράβδο υπό στρέψη μεταβάλλεται κατά τη διαμήκη διεύθυνση (ανομοιόμορφη στρέβλωση), η ράβδος καταπονείται τόσο από ορθές όσο και από δευτερογενείς διατμητικές τάσεις (εδάφιο 1.1). Ο Vlasov [1963], κατά τη μελέτη ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, βασίζομενος στην υπόθεση περί μηδενικών διατμητικών παραμορφώσεων στη μέση γραμμή των τοιχωμάτων της διατομής, απέδειξε ότι η στρέβλωση είναι ανάλογη της ανά μονάδα μήκους γωνίας στροφής θ'_x . Στο κεφ. 1, η θεώρηση αυτή υιοθετείται (για την πρωτογενή στρέβλωση) και στην ανάλυση ράβδων τυχούσας διατομής, με αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη με υιοθέτηση επιπρόσθετου κινηματικού μεγέθους (πρωτογενής συστροφή $(\theta_x^P)'$ ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης η_x), εκτός από τη γωνία στροφής θ_x , που να εκφράζει το μέγεθος της στρέβλωσης της διατομής, το οποίο πλέον δεν λαμβάνεται ίσο με τη συστροφή θ'_x (βλ. π.χ. [Roberts and Al-Ubaidi 2001, Back and Will 1998]). Σημειώνεται ότι η προκύπτουσα θεωρία παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία 2ης τάξης καμπτόμενων δοκών Timoshenko (στην περίπτωση σταθερής διατομής), με την πρωτογενή συστροφή να αντιστοιχεί στη γωνία καμπτικής στροφής της δοκού Timoshenko [Roik and Sedlacek 1966, Rubin 2005, Murín and Kutis 2008].

Προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, η διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά την αξονική διεύθυνση (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη), χρησιμοποιείται στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης σε καθολικό επίπεδο ώστε να διορθωθεί η δευτερογενής στρεπτική σταθερά [Roik and

Sedlacek 1966, Kraus 2007, Mokos and Sapountzakis 2011], καθώς και κατάλληλη κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων σε τοπικό επίπεδο [Rubin 2005, 2007, Mokos and Sapountzakis 2011]. Στη σχετική βιβλιογραφία, ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης και η σχετιζόμενη δευτερογενής στρεπτική σταθερά υπολογίζονται αριθμητικά με τη Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών [Roik and Sedlacek 1966, Laudiero and Savoia 1990, 1991, Kollár 2001a,b, Pavazza 2005, Rubin 2005, Kim and Kim 2005, Erkmén and Mohareb 2007, Minghini et al. 2007, Rubin 2007, Slivker 2007, Murín and Kutis 2008]. Εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης υπολογίζεται στη βιβλιογραφία αποκλειστικά με τη βοήθεια ενεργειακής μεθόδου. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε σύζευξη στρεπτικών και καμπτοδιατμητικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών. Ωστόσο, στην περίπτωση ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής, αποδεικνύεται ότι τα μεγέθη αυτά αποζευγνύονται και μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα [Slivker 2007, Minghini et al. 2007]. Στις παρακάτω ενότητες εξετάζονται αποκλειστικά ράβδοι τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής. Μόνο στις εργασίες των Kraus [2007] (FEM) και Mokos and Sapountzakis [2011] (BEM), όπου αναλύονται ράβδοι διπλά συμμετρικής διατομής, ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης υπολογίζεται χωρίς τις παραδοχές της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών. Στην πρώτη εργασία παρουσιάζονται οι τιμές του συντελεστή αυτού για μεγάλο πλήθος πρότυπων μεταλλικών ανοικτών διατομών I, ενώ στη δεύτερη μελετώνται έξι πρότυπες μεταλλικές ανοικτές διατομές I και μία μεταλλική κλειστή κοίλη ορθογωνική διατομή όπου καταδεικνύονται τα σφάλματα της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών. Επισημαίνεται ότι δεν υπάρχει εμπορικό λογισμικό με το οποίο να υπολογίζεται ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης.

Αναφορικά με την ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, το 1954 ο Benscoter [1954] ανέλυσε ράβδους πολυκύψελης διατομής χωρίς την χρήση στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης. Από τότε, μεγάλο πλήθος σχετικών εργασιών [Gunnlaugsson and Pedersen 1982, Waldron 1986, Chen and Blandford 1989, Simo and Vu-Quok 1991, Gendy et al. 1992, Shakourzadeh et al. 1995, Hu et al. 1996, Loughlan and Ata 1997, Back and Will 1998, Ferrero et al. 2001, Machado and Cortinez 2007, El Fatmi 2007a,b, Prokić and Lukic 2007, Vo and Lee 2009, Ahmed and Zahid 2012] δημοσιεύτηκαν στις οποίες επίσης δεν λαμβάνεται υπόψη ο συντελεστής αυτός. Σχετικά με το συνυπολογισμό του συντελεστή αυτού σε διάφορες διατυπώσεις του εξεταζόμενου προβλήματος, μπορεί να μελετηθεί η βιβλιογραφική επισκόπηση της εργασίας των Mokos and Sapountzakis [2011] καθώς και οι δημοσιεύσεις των Laudiero and Savoia [1990, 1991], Park et al. [1997], Kollár [2001a,b], Cortinez and Piovan [2002], Piovan and Cortinez [2005], Pavazza [2005], Erkmén and Mohareb [2007], Minghini et al. [2007], Senjanovic et al. [2009] και Wang et al. [2012]. Επιπλέον, ειδικές τεχνικές που βασίζονται είτε σε υβριδικά τασικά προσομοιώματα (hybrid stress models) [Tralli 1986], είτε στην χρήση μεγάλου πλήθους παραμέτρων στρέβλωσης [Giavotto et al. 1983, Stemple and Lee 1989, Prokić 1996, Ascione et al. 2000, Saade et al. 2004, Carrera et al. 2010, Yu et al. 2011, Carrera and Petrolo 2012, Vieira et al. 2012] έχουν επίσης προταθεί στη βιβλιογραφία, επισημαίνοντας ότι δεν απαιτείται σε αυτές η χρήση στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης.

Στη βιβλιογραφία επισημαίνεται ότι η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων είναι σημαντική ιδίως σε ράβδους κλειστής κοίλης διατομής [Rubin 2005, 2007, Murín and Kutis 2008, Mokos and Sapountzakis 2011] και ράβδους μικρού μήκους [Back and Will 1998]. Ο Massonnet [1983] παρουσίασε ποιοτική εξήγηση γιατί

οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις πρωτογενείς σε ράβδους κλειστής διατομής. Εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, παρουσίαση ποσοτικών αποτελεσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων λαμβάνοντας υπόψη στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης έχει επιτευχθεί αποκλειστικά στις εργασίες των Rubin [2005, 2007], Erkmen and Mohareb [2007], Murin and Kutis [2008] με τη Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών και των Mokos and Sapountzakis [2011] με τη BEM. Αναφορικά με τους κανονισμούς έργων πολιτικού μηχανικού, τόσο ο Ευρωπαϊκός Eurocode 3 - part 1.1 [2005] όσο και ο Αμερικάνικος AISC 360-05 [2005] που διέπουν μεταλλικές κτιριακές κατασκευές, επιτρέπουν απλοποιητικά την αγνόηση φαινομένων ανομοιόμορφης στρέβλωσης (και ως εκ τούτου και φαινομένων δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων) σε ράβδους κλειστής κοίλης διατομής. Τούτο αντανακλάται και στα εμπορικά λογισμικά όπου συνήθως λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης αλλά αγνοούνται οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις. Ωστόσο, πρόσφατα αριθμητικά [Rubin 2005, 2007, Murin and Kutis 2008, Mokos and Sapountzakis 2011] και πολύ πρόσφατα πειραματικά [Murin et al. 2012] ερευνητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν την ανάγκη συνυπολογισμού των προαναφερθέντων φαινομένων τουλάχιστον σε ράβδους κλειστής διατομής. Επιπρόσθετα, η προαναφερθείσα απλοποίηση του Eurocode 3 δεν συμπεριλαμβάνεται στον Eurocode 9 - part 1.1 (κτιριακές κατασκευές από αλουμίνιο) [2007a], ενώ στο part 1.3 του Eurocode 9 (κατασκευές ευαίσθητες σε κόπωση) [2007b] αναφέρεται ότι ράβδοι κλειστής κοίλης διατομής, οι οποίες είναι **επιρρεπείς σε στρέβλωση**, πρέπει να αναλύονται με ραβδωτά στοιχεία που να διαθέτουν τουλάχιστον επτά βαθμούς ελευθερίας συμπεριλαμβανομένης της στρέβλωσης.

Αναφορικά με τη **γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση** του εξεταζόμενου προβλήματος, ισχύουν τα όσα έχουν ειπωθεί στο εδάφιο 1.1. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων. Στις παρακάτω ενότητες μελετάται επιπρόσθετα και η περίπτωση τυχούσας αξονικής φόρτισης και συνοριακών συνθηκών, η οποία επιτρέπει την ανάλυση της στρεπτικής λυγισμικής και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ράβδου υπό αξονική και στρεπτική φόρτιση (βλ. [Szymczak 1980]). Ωστόσο, η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της ράβδου δεν εξετάζεται. Επειδή αναλύονται αποκλειστικά ράβδοι διπλά συμμετρικής διατομής, τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου είναι ακριβή (υπό την αίρεση ότι η αξονική φόρτιση και οι πλευρικές δεσμεύσεις της ράβδου είναι τέτοιες ώστε να μην προκαλείται καμπτικός ή στρεπτοκαμπτικός λυγισμός). Επιπλέον, το φαινόμενο του hockling [Stump 2000] (δημιουργία βρόχων αυτό-επαφής (self-contacting loops) σε ράβδους υπό αξονική και στρεπτική φόρτιση) δεν εξετάζεται εξαιτίας της μη ανάλυσης της καμπτοδιατμητικής συμπεριφοράς της ράβδου. Τέλος, η γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη λαμβάνοντας υπόψη δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις και θεωρώντας στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης είναι πολύ περιορισμένη ενώ υπόκειται στις παραδοχές της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών (βλ. π.χ. [Minghini et al. 2009]).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος απλής ή πολλαπλής συνοχής (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (ΔΔΠ). Το πρόβλημα αυτό επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) (Παράρτημα Π1), καθώς και την Πεδιακή Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Παράρτημα Π3). Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή

κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη σε ολική διατύπωση Lagrange μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, τοπική εξίσωση ισορροπίας (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές συνθήκες διατυπώνεται πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει κατάλληλα την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρέβλωση της ράβδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας τρία προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία δεν υπόκεινται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov (Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ)). Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή (ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης) της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχεται και η δευτερογενής στρεπτική σταθερά της οποίας ο αριθμητικός υπολογισμός απαιτεί και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής. Ωστόσο η διακριτοποίηση αυτή χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος και δεν αυξάνει το πλήθος των αγνώστων του προβλήματος.

Η ανάλυση της ράβδου είναι πλήρης. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά αξονικά και στρεπτικά μεγέθη, οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής συμπεριλαμβανομένης και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S , η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, οι αναπτυσσόμενες πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, καθώς και οι ορθές τάσεις στο εσωτερικό ως επίσης και στο σύνορο. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Βάσει της αναλυτικής και αριθμητικής διαδικασίας συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Η ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων συγκρινόμενη με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις καθώς και με προσομοιώματα κελυφωτών (τετραπλευρικών) και στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων, είναι αξιοσημείωτη. Από την αναδρομή στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι η έρευνα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι πρωτότυπη. Τα πρωτότυπα στοιχεία της συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- i. Διατυπώνεται το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος λαμβάνοντας υπόψη τοπική εξίσωση ισορροπίας (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές συνθήκες, χωρίς την εισαγωγή στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης. Αποδεικνύεται ότι η προτεινόμενη διατύπωση είναι

- ισοδύναμη με εναλλακτική διατύπωση που βασίζεται σε στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης που υπολογίζεται με ενεργειακή μέθοδο.
- ii. Αναλύονται ράβδοι διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) υπό γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
 - iii. Ποσοτικοποιείται η αξιοπιστία της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών στον υπολογισμό τασικών μεγεθών ράβδων κλειστής διατομής καθώς και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς και της σταθεράς στρέβλωσης ανοικτών ή κλειστών λεπτότοιχων διατομών.
 - iv. Παρουσιάζονται οι τιμές της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς και της σταθεράς στρέβλωσης μεγάλου πλήθους μεταλλικών ανοικτών ή κλειστών διπλά συμμετρικών διατομών.
 - v. Προσδιορίζεται συστηματικά μέσω της μελέτης ράβδων διάφορων μηκών η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτής ή κλειστής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Αποτιμάται η απλοποιητική παραδοχή του Eurocode 3 - part 1.1 [2005] ότι τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης (και ως εκ τούτου και οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις) μπορούν απλοποιητικά να αγνοούνται σε ράβδους κλειστής κοίλης διατομής.
 - vi. Διερευνώνται οι συνέπειες αγνόησης του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης σε ράβδους ανοικτής ή κλειστής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
 - vii. Μελετάται η στρεπτική μεταλυγισμική συμπεριφορά ράβδου λαμβάνοντας υπόψη δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις.
 - viii. Επιλύεται αριθμητικά το εξεταζόμενο πρόβλημα με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Από την ερευνητική προσπάθεια που έγινε αναφορικά με τα θέματα που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο, προέκυψε δημοσίευση σε πρακτικά εθνικού συνεδρίου [Σαπουντζάκης, Τσίππρας και Μώκος 2011].

2.2 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο μήκους l διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά υπερελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E και διάτμησης G , το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή Ω του επιπέδου y, z (Σχ.2.1). Η περιοχή Ω μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό οπών και περιβάλλεται από τμηματικό λείο σύνορο (μπορεί δηλαδή να περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό γωνιών), το οποίο συμβολίζεται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) (Σχ.2.1β). Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση περί το διαμήκη άξονα της x (αξονικές δυνάμεις $n = n(x)$, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$) (Σχ.2.1α) ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Η ράβδος μπορεί να μετατοπίζεται ελεύθερα κατά την εγκάρσια έννοια και δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) συγκεκριμένος άξονας περιστροφής, ωστόσο η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της δεν εξετάζεται στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου. Η μελέτη της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$ του οποίου ο διαμήκης άξονας Sx διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα

διάτμησης) των διατομών. Επισημαίνεται ότι τα κέντρα συστροφής ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα των διατομών (Σχ.2.1) εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής. Το αρχικό σημείο του άξονα Sx ($x=0$) τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου (Σχ.2.1α).

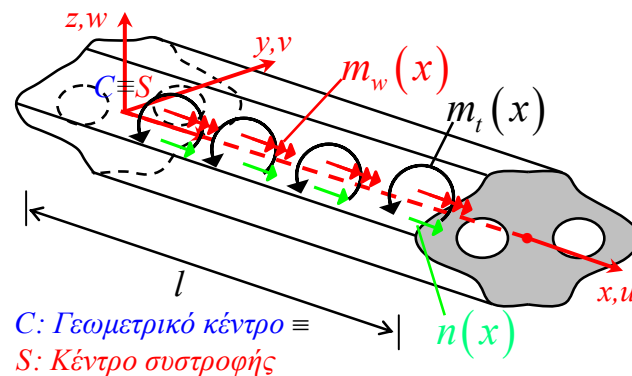
2.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

Υποθέτοντας ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται (δηλαδή δεν αναπτύσσονται εγκάρσιες παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής), θεωρώντας ότι τα υλικά σημεία της διατομής εκτελούν κυκλική τροχιά κατά την εγκάρσια διεύθυνση περί τον άξονα Sx , λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στρεπτικές στροφές των διατομών μπορούν να είναι μεγάλες και προκειμένου να αναλυθεί η επιρροή ΔΔΠ, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου δίδεται ως

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \eta_x(x) \phi_S^P(y, z) - (\eta_x(x) - \theta'_x(x)) [\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z)] \quad (2.2.1)$$

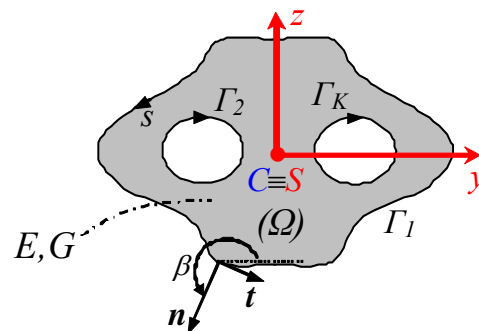
$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (2.2.2)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (2.2.3)$$



C : Γεωμετρικό κέντρο \equiv
 S : Κέντρο συστροφής

(α)



C : Γεωμετρικό κέντρο
 S : Κέντρο συστροφής

(β)

Σχήμα 2.1. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα αξονική και στρεπτική φόρτιση (α) με ομογενή διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (β).

όπου u_m είναι «μέση» αξονική μετατόπιση της διατομής, η οποία γενικά δεν ισούται με τη μετατόπιση του κέντρου συστροφής S και θα εξηγηθεί αναλυτικά στα επόμενα (βλ. εξ.(2.2.24-25)), η_x είναι ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης [El Fatmi 2007a,b, Simo and Vu-Quoc 1991], ϕ_S^P , ϕ_S^S είναι η πρωτογενής και η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο S , αντίστοιχα [Μώκος 2007, Sapountzakis and Mokos 2003a] και θ_x είναι η γωνία στροφής περί τον άξονα Sx .

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της εξ.(2.2.1) εκφράζουν την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρέβλωση, αντίστοιχα. Η παράμετρος η_x είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης x αποκλειστικά και περιγράφει το μέγεθος της πρωτογενούς στρέβλωσης σε κάποια διατομή, ενώ καλείται επίσης και ανεξάρτητη μεταβλητή στρέβλωσης [Wunderlich et al. 1986]. Ο χαρακτηρισμός «ανεξάρτητη» οφείλεται στο ότι δεν ισχύει η έκφραση $\eta_x = \theta'_x$ που έχει υιοθετηθεί στη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ (βλ. κεφ. 1 και [Vlasov 1963, Sapountzakis and Mokos 2003a, Μώκος 2007]). Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη μελέτη της επιρροής των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η φυσική σημασία της παραμέτρου η_x αναδεικνύεται από την εξέταση εναλλακτικής διατύπωσης του προβλήματος [Mokos and Sapountzakis 2011, Roberts and Al-Ubaidi 2001], στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, σύμφωνα με την οποία το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου καθώς και η στρεπτική στροφή της διατομής διασπώνται σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος ως

$$u = u^P + u^S \quad (2.2.4\alpha)$$

$$v = v^P + v^S \quad w = w^P + w^S \quad (2.2.4\beta,\gamma)$$

$$\theta_x = \theta_x^P + \theta_x^S \quad (2.2.4\delta)$$

όπου τα δύο αυτά μέρη προκύπτουν από τις πρωτογενείς και δευτερογενείς παραμορφώσεις, αντίστοιχα. Το πρωτογενές μέρος του πεδίου μετατοπίσεων λαμβάνεται ταυτόσημο με αυτό θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ [Μώκος 2007] ως

$$u^P(x, y, z) = (\theta_x^P)' \phi_S^P(y, z) \quad (2.2.5\alpha)$$

$$v^P(x, y, z) = -z\theta_x^P(x) \quad w^P(x, y, z) = y\theta_x^P(x) \quad (2.2.5\beta,\gamma)$$

ενώ το δευτερογενές μέρος δίδεται ως

$$u^S(x, y, z) = 0 \quad (2.2.6\alpha)$$

$$v^S(x, y, z) = -z\theta_x^S(x) \quad w^S(x, y, z) = y\theta_x^S(x) \quad (2.2.6\beta,\gamma)$$

Συγκρίνοντας τις δύο διατυπώσεις προκύπτει ότι η παράμετρος η_x ισούται με την πρωτογενή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της ράβδου (πρωτογενής συστροφή), δηλαδή

$$\eta_x = (\theta_x^P)' \quad (2.2.7)$$

Στα επόμενα απαλείφεται η δευτερογενής στρεπτική στροφή θέτοντας όπου $\theta_x^S = \theta_x - \theta_x^P$, καθώς η μόρφωση των συνοριακών συνθηκών της ράβδου είναι σημαντικά απλούστερη συγκριτικά με την εναλλακτική διατύπωση που βασίζεται στους κινηματικούς αγνώστους θ_x^P , θ_x^S . Τονίζεται ότι η προκύπτουσα διατύπωση είναι ταυτόσημη με τη διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (2.2.1-3), εξαιτίας της σχέσης (2.2.7).

Με θεώρηση μικρής «μέσης» αξονικής μετατόπισης, μικρής πρωτογενούς και δευτερογενούς στρέβλωσης και μικρών παραμορφώσεων, οι μη γραμμικοί όροι της διαμήκους μετατόπισης u των παραμορφώσεων Green μπορούν να αγνοηθούν (βλ. και [Ramm and Hoffmann 1995, Rothert and Gensichen 1987, Brush and Almroth 1975]), συνεπώς οι σχέσεις (Π4.1.12α-γ), (Π4.1.34) διαμορφώνονται ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.2.8\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.2.8\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.2.8\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.2.8\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.2.8\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.2.8\sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις του πεδίου μετατοπίσεων (εξ.(2.2.1-3)) στις παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.2.7), προκύπτουν οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green ως

$$\varepsilon_{xx} = u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P - \left((\theta_x^P)'' - \theta_x'' \right) (\phi_S^P + \phi_S^S) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \quad (2.2.9\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (2.2.9\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.2.9\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.9\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.9\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (2.2.9\sigma\tau)$$

όπου ο τριδιάστατος όρος $(1/2)(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2$ της ορθής παραμόρφωσης καλείται “παραμόρφωση Wagner” [Pi and Trahair 1995]. Επισημαίνεται ότι στη σχέση (2.2.9α) έχει παραληφθεί όρος που εξαρτάται από την παράγωγο (ως προς x) της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, καθώς αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι ανεξάρτητη της διαμήκουσ συντεταγμένης (βλ. εδάφιο 2.2.4). Επιπλέον, στις σχέσεις (2.2.9δ,ε) διακρίνονται οι εκφράσεις των πρωτογενών διατμητικών παραμορφώσεων που λαμβάνονται ως ταυτόσημες με τις αντίστοιχες εκφράσεις της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ [Μώκος 2007, Sapountzakis and Mocos 2003a]. Η φυσική σημασία της ποσότητας $(\theta_x^P)' - \theta'_x$ που περιγράφει το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων αναδεικνύεται από τη συγκριτική εξέταση της εναλλακτικής διατύπωσης του προβλήματος (σχέσεις (2.2.4-6)) στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, από όπου προκύπτει, με τη βοήθεια της σχέσης (2.2.4δ), ότι

$$(\theta_x^P)' - \theta'_x = -(\theta_x^S)' \quad (2.2.10)$$

Συμπερασματικά, η ποσότητα $(\theta_x^P)' - \theta'_x$ σχετίζεται με τη δευτερογενή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της ράβδου (δευτερογενής συστροφή).

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις και ότι το υλικό της ράβδου είναι ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά υπερελαστικό, οι συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff δίδονται συναρτήσει των παραμορφώσεων Green από το γενικευμένο νόμο του Hooke (εξ.(Π5.2.17)). Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.9), οι σχέσεις αυτές διαμορφώνονται ως

$$S_{xx} = E^* \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (2.2.11\alpha)$$

$$S_{yy} = E^{**} \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (2.2.11\beta)$$

$$S_{zz} = E^{**} \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (2.2.11\gamma)$$

$$S_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.11\delta)$$

$$S_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.11\epsilon)$$

$$S_{yz} = 0 \quad (2.2.11\sigma\tau)$$

όπου $E^* = E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$, $E^{**} = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$, ενώ έχει αγνοηθεί η επιρροή της δευτερογενούς στρέβλωσης στις ορθές τάσεις. Σε περίπτωση που δεν αγνοηθεί η συγκεκριμένη επιρροή, θα διατυπωθεί θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης (3rd order shear deformation theory [Wang et al. 2000]), η οποία είναι περισσότερο πολύπλοκη και απαιτεί τη χρήση τριών συνοριακών συνθηκών στρέψης (αντί για δύο) σε κάθε άκρο της ράβδου. Τέτοια θεωρία επιτρέπει την ανάλυση της επιρροής της διατμητικής υστέρησης (shear lag) σε ράβδο υπό ανομοιόμορφη στρέψη και δεν εξετάζεται στην παρούσα διατριβή. Οι συνιστώσες S_{yy} , S_{zz} δεν παράγουν έργο (αφού οι αντίστοιχες ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις ε_{yy} , ε_{zz} είναι μηδενικές, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2.4β,γ)) και γίνεται η παραδοχή ότι $S_{yy} = S_{zz} \approx 0$, ενώ επιπλέον το E^* αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E (βλ. εδάφιο 1.2.1). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff διαμορφώνονται τελικά ως

$$S_{xx} = E \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \quad (2.2.12\alpha)$$

$$S_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.12\beta)$$

$$S_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.12\gamma)$$

2.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S στη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ προσδιορίζονται με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά την αξονική διεύθυνση της ράβδου (εξ.(Π4.2.48α)). Στην παρούσα θεωρία, η εφαρμογή αυτής της μεθόδου [Μώκος 2007, Sapountzakis and MOKOS 2003a] είναι εξαιρετικά δυσχερής εξαιτίας των πολύ περισσότερων όρων που προκύπτουν. Η προσπάθεια να ικανοποιηθεί η προαναφερθείσα εξίσωση σε επίπεδο υλικού σημείου (εξ.(Π4.2.28α)) οδηγεί σε περίπλοκες εξισώσεις, οι οποίες δεν έχουν πρακτική αξία για την ανάπτυξη

σχετικά απλής μη γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ που να αποτελεί επέκταση της αντίστοιχης γραμμικής. Συνεπώς, οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S προσδιορίζονται με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών.

Η Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange, αγνοώντας μαζικές δυνάμεις, εκφράζεται ως [Bathe 1996] (βλ. εξ.(Π4.2.47))

$$\iiint_V (S_{xx}\delta\epsilon_{xx} + S_{xy}\delta\gamma_{xy} + S_{xz}\delta\gamma_{xz}) dV = \iint_F (t_x\delta u + t_y\delta v + t_z\delta w) dF \quad (2.2.13)$$

όπου στην παραπάνω σχέση παραλήφθηκαν οι όροι τάσεων που δεν παράγουν έργο, με $\delta(\cdot)$ συμβολίζονται δυνατές ποσότητες, V είναι ο όγκος της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση, F είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση συμπεριλαμβανομένων και των δύο ακραίων διατομών της και t_x , t_y , t_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας (αρχική διαμόρφωση) (βλ. Παράρτημα Π4). Αρχικά μελετούμε τους όρους της δυνατής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης. Οι σχετικοί όροι του δυνατού εσωτερικού έργου (αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης) δίδονται έπειτα από κάποιες πράξεις ως

$$I_1^P = \iiint_V S_{xx}\theta'_x \delta\phi_S^P dV + \iiint_V \theta'_x \left(S_{xy} \frac{\partial\delta\phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial\delta\phi_S^P}{\partial z} \right) dV \quad (2.2.14)$$

Παρατηρείται ότι λαμβάνεται ταυτόσημη έκφραση με την εξ.(1.2.14) (εάν στην τελευταία τεθεί $K = I$), συνεπώς θα ισχύει η σχέση (1.2.17), η οποία απλοποιείται ως

$$I_1^P = \int_{x=0}^l \left[-\theta'_x \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta\phi_S^P d\Omega + \theta'_x \int_{\Gamma} (S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) \delta\phi_S^P ds \right] dx \quad (2.2.15)$$

$$+ \theta'_x(l) \iint_{\Omega_l} S_{xx} \delta\phi_S^P d\Omega - \theta'_x(0) \iint_{\Omega_0} S_{xx} \delta\phi_S^P d\Omega$$

Ομοίως ο όρος της δυνατής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης του δυνατού εξωτερικού έργου (δεξιό μέλος της σχέσης (2.2.13)) δίδεται ως

$$I_2^P = \int_F t_x \theta'_x \delta\phi_S^P dF = \theta'_x(0) \iint_{\Omega_0} t_x \delta\phi_S^P d\Omega + \theta'_x(l) \iint_{\Omega_l} t_x \delta\phi_S^P d\Omega + \int_{F_{lat}} t_x \theta'_x \delta\phi_S^P dF \quad (2.2.16)$$

όπου F_{lat} είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου ($F = F_{lat} \cup \Omega_0 \cup \Omega_l$), συνεπώς λαμβάνεται ταυτόσημη έκφραση με την εξ.(1.2.18) (εάν στην τελευταία τεθεί $K = I$). Η δυνατή μεταβολή της ϕ_S^P δεν είναι μηδενική καθώς δεν έχει καθοριστεί a priori και η συστροφή θ'_x εν γένει δεν ισούται με μηδέν κατά μήκος της ράβδου, συνεπώς από τις εξ.(2.2.15-16) προκύπτει η ακόλουθη τοπική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (2.2.17\alpha)$$

καθώς και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη

$$S_{xy}n_y + S_{xz}n_z = t_x \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in (0, l) \quad (2.2.17\beta)$$

οι οποίες είναι ταυτόσημες με τις αντίστοιχες σχέσεις του εδαφίου 1.2.2. Οι εξισώσεις (2.2.17) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P . Από τους όρους των εξ.(2.2.15-16) που σχετίζονται με τα δύο άκρα της ράβδου προκύπτει επίσης και όρος - «υπόλοιπο», ο οποίος αγνοείται (βλ. κεφ. 1), επισημαίνοντας ότι η ασυνέπεια λόγω αυτής της παραδοχής είναι «τοπική» και δεν επηρεάζει τη συνολική συμπεριφορά της ράβδου.

Εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία και για τους όρους της δυνατής δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, οι σχετικοί όροι του δυνατού εσωτερικού και εξωτερικού έργου δίδονται αντίστοιχα ως

$$I_1^S = \int_{x=0}^l \left[\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta \phi_S^S d\Omega - \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \int_{\Gamma} (S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) \delta \phi_S^S ds \right] dx - \left((\theta_x^P)'(l) - \theta_x'(l) \right) \iint_{\Omega_l} S_{xx} \delta \phi_S^S d\Omega + \left((\theta_x^P)'(0) - \theta_x'(0) \right) \iint_{\Omega_0} S_{xx} \delta \phi_S^S d\Omega \quad (2.2.18)$$

$$I_2^S = - \int_F t_x \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \delta \phi_S^S dF = - \left((\theta_x^P)'(l) - \theta_x'(l) \right) \iint_{\Omega_l} t_x \delta \phi_S^S d\Omega - \left((\theta_x^P)'(0) - \theta_x'(0) \right) \iint_{\Omega_0} t_x \delta \phi_S^S d\Omega - \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \int_{F_{lat}} t_x \delta \phi_S^S dF \quad (2.2.19)$$

Η δυνατή μεταβολή της ϕ_S^S επίσης δεν είναι μηδενική καθώς δεν έχει καθοριστεί a priori και η ποσότητα $(\theta_x^P)' - \theta_x'$ εν γένει δεν ισούται με μηδέν κατά μήκος της ράβδου, συνεπώς από τις εξ.(2.2.18-19) προκύπτουν ορισμένες εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι ίδιες ακριβώς εξισώσεις που διατυπώθηκαν από την εξέταση των όρων της δυνατής ϕ_S^P (βλ. εξ.(2.2.17)) και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S . Όπως και στην προηγούμενη ανάλυση για τη ϕ_S^P , έτσι και στην περίπτωση της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, θα προκύψει ο παρακάτω όρος - «υπόλοιπο» στα δύο άκρα της ράβδου, ο οποίος επίσης αγνοείται (βλ. κεφ. 1). Τέλος, επισημαίνεται ότι αν θεωρήσουμε στη σχέση (2.2.9α) την παράγωγο (ως προς x) της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης που παραλήφθηκε, καταλήγουμε σε ταυτόσημα αποτελέσματα.

Συμπερασματικά, οι δύο συναρτήσεις στρέβλωσης που εισήχθησαν στο πεδίο μετατοπίσεων θα πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (2.2.17α) σε επίπεδο υλικού σημείου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (2.2.17β). Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης από τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.2.20\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = (zn_y - yn_z) \text{ στο } \Gamma_j \quad (2.2.20\beta)$$

$$G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \nabla^2 \phi_S^S - E \left[u_m'' + (\theta_x^P)''' \phi_S^P + (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \right] = 0$$

στο Ω , $\forall x \in [0, l]$ (2.2.21α)

$$-G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = t_x \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (2.2.21\beta)$$

ικανοποιεί τις εξ.(2.2.17), σημειώνοντας ότι η ισχύς των σχέσεων (2.2.21) επεκτάθηκε και στα άκρα της ράβδου. Στις παραπάνω σχέσεις, $\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ είναι ο τελεστής Laplace και ο συμβολισμός $\frac{\partial}{\partial n} = (\partial/\partial y)n_y + (\partial/\partial z)n_z$ δηλώνει την παράγωγο κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο Γ_j . Επισημαίνεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών προσδιορισμού της ϕ_S^P (εξ.(2.2.20)) είναι πανομοιότυπο με αυτό της θεωρίας ανομοιομορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ (γραμμική ελαστική ανάλυση) [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b], ενώ οι όροι Eu_m'' , $E(y^2 + z^2)\theta_x'\theta_x''$ του αντίστοιχου προβλήματος της ϕ_S^S (εξ.(2.2.21α)) οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Προκειμένου να απλοποιηθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών της ϕ_S^S , υιοθετείται η συνήθης παραδοχή περί αγνόησης της διαμήκους συνιστώσας του διανύσματος τάσης ($t_x \approx 0$), συνεπώς η σχέση (2.2.21β) διαμορφώνεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (2.2.22)$$

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών της ϕ_S^S μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά εάν ληφθεί υπόψη η καθολική εξίσωση ισορροπίας στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου (βλ. εδάφιο 2.2.3, εξ.(2.2.37γ)), ενώ επίσης αποδεικνύεται ότι η ϕ_S^S είναι διδιάστατη συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται αναλυτικά στο εδάφιο 2.2.4.

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών (2.2.20-22) είναι τύπου Neumann και επομένως οι συναρτήσεις στρέβλωσης θα προκύψουν συναρτήσεις αυθαίρετων σταθερών. Προκειμένου να προσδιοριστούν μοναδικές λύσεις για τις ϕ_S^P , ϕ_S^S

ακολουθείται διαδικασία παρόμοια με αυτή της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ [Μώκος 2007, Sapountzakis and MOKOS 2003a] (βλ. κεφ.1 και εδάφιο 2.2.6). Έτσι, οι προκύπτουσες συναρτήσεις στρέβλωσης θα ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες ορθογωνικότητας

$$\iint_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad \iint_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (2.2.23\alpha, \beta)$$

Πλέον, στο σημείο αυτό μπορεί να δοθεί η φυσική σημασία της αξονικής μετατόπισης u_m . Έτσι, ολοκληρώνοντας τη σχέση (2.2.1) στο χωρίο Ω , καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\iint_{\Omega} u d\Omega = u_m A + \theta'_x \iint_{\Omega} \phi_S^P d\Omega - \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \iint_{\Omega} \phi_S^S d\Omega \quad (2.2.24)$$

όπου $A = \iint_{\Omega} d\Omega$ είναι το εμβαδόν της διατομής. Από τις εκφράσεις (2.2.23α,β), η παραπάνω έκφραση δίδει

$$u_m = \frac{\iint_{\Omega} u d\Omega}{A} \quad (2.2.25)$$

από όπου καθίσταται εμφανές ότι η u_m είναι «μέση» αξονική μετατόπιση των διατομών της ράβδου, η οποία εν γένει δεν ταυτίζεται με την αξονική μετατόπιση του κέντρου συστροφής της διατομής.

2.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

Οι κινηματικοί άγνωστοι του προβλήματος που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη συντεταγμένη x ($u_m, \theta_x, (\theta_x^P)'$) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες θα διατυπωθούν επίσης με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Για διευκόλυνση, ορίζονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$N = \iint_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (2.2.26\alpha)$$

$$M_t^P = \iint_{\Omega} \left[S_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (2.2.26\beta)$$

$$M_t^S = \iint_{\Omega} \left(S_{xy} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (2.2.26\gamma)$$

$$M_w = \iint_{\Omega} S_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (2.2.26\delta)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε αξονική δύναμη, πρωτογενή και δευτερογενή στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα, σημειώνοντας ότι στη βιβλιογραφία συχνά ο ορισμός (2.2.26δ) εκφράζεται με αρνητικό πρόσημο, ενώ οι ορισμοί (2.2.26β,γ)

καταλήγουν, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.20), στους ακόλουθους εναλλακτικούς ορισμούς

$$M_t^P = \iint_{\Omega} \left[S_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (2.2.27\alpha)$$

$$M_t^S = \iint_{\Omega} \left(S_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} + S_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (2.2.27\alpha)$$

όπου S_{xy}^P , S_{xz}^P και S_{xy}^S , S_{xz}^S είναι οι πρωτογενείς και οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, αντίστοιχα. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα εντατικά μεγέθη που ορίζονται μέσω των συνιστωσών του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff δεν αντιστοιχούν σε επίπεδες διατομές στην παραμορφωμένη διαμόρφωση (βλ. κεφ. 1 και εδάφιο Π4.2.7).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(2.2.12)) στις σχέσεις (2.2.26), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EA \left[u'_m + \frac{I_P}{2A} (\theta'_x)^2 \right] \quad (2.2.28\alpha)$$

$$M_t^P = GI_t^P \theta'_x \quad M_t^S = -GI_t^S \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \quad (2.2.28\beta,\gamma)$$

$$M_w = EC_S (\theta_x^P)'' \quad (2.2.28\delta)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_P (πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο S), I_t^P (πρωτογενής στρεπτική σταθερά), I_t^S (δευτερογενής στρεπτική σταθερά) και C_S (σταθερά στρέβλωσης) δίδονται ως

$$I_P = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (2.2.29\alpha)$$

$$I_t^P = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.2.29\beta)$$

$$I_t^S = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (2.2.29\gamma)$$

$$C_S = \iint_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (2.2.29\delta)$$

Η πρωτογενής στρεπτική σταθερά είναι ταυτόσημη με τη στρεπτική σταθερά της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (βλ. σχέση (1.2.34)).

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.2.28), (2.2.12), οι τάσεις δίδονται συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως

$$S_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_w}{C_S} \phi_S^P + \frac{I}{2} E \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] (\theta'_x)^2 \quad (2.2.30\alpha)$$

$$S_{xy} = \frac{M_t^P}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (2.2.30\beta)$$

$$S_{xz} = \frac{M_t^P}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (2.2.30\gamma)$$

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange (εξ.(2.2.13)) τις δυνατές μεταβολές των μεγεθών u_m , θ_x , $(\theta_x^P)'$ (και των παραγώγων τους) και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.30) προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν την καθολική ισορροπία αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου, οι οποίες μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$ εκφράζονται ως

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) \quad (2.2.31\alpha)$$

$$\frac{dM_t^P}{dx} + \frac{dM_t^S}{dx} + \frac{d}{dx} \left[\frac{I}{2} EI_n (\theta'_x)^3 + N \frac{I_P}{A} \theta'_x \right] = -m_t(x) \quad (2.2.31\beta)$$

$$\frac{dM_w}{dx} + M_t^S = -m_w(x) \quad (2.2.31\gamma)$$

$$(N + \bar{N}_0) \delta u_m(0) = 0 \quad (N - \bar{N}_l) \delta u_m(l) = 0 \quad (2.2.32\alpha, \beta)$$

$$\left[M_t^P + M_t^S + \frac{I}{2} EI_n (\theta'_x)^3 + N \frac{I_P}{A} \theta'_x + \bar{M}_{t0} \right] \delta \theta_x(0) = 0 \quad (2.2.32\gamma)$$

$$\left[M_t^P + M_t^S + \frac{I}{2} EI_n (\theta'_x)^3 + N \frac{I_P}{A} \theta'_x - \bar{M}_{tl} \right] \delta \theta_x(l) = 0 \quad (2.2.32\delta)$$

$$(M_w + \bar{M}_{w0}) \delta (\theta_x^P)'(0) = 0 \quad (M_w - \bar{M}_{wl}) \delta (\theta_x^P)'(l) = 0 \quad (2.2.32\epsilon, \sigma\tau)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_n δίδεται ως

$$I_n = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} \quad (2.2.33\alpha)$$

ενώ στην παραπάνω σχέση η γεωμετρική σταθερά I_{PP} (ροπή τέταρτης τάξης ως προς το σημείο S) δίδεται ως

$$I_{PP} = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega \quad (2.2.33\beta)$$

Επισημαίνεται ότι κατά την εξαγωγή των σχέσεων (2.2.31-32) αγνοήθηκαν οι δυνατές μεταβολές της δευτερογενούς στρέβλωσης και των ορθών παραμορφώσεων λόγω δευτερογενούς στρέβλωσης προκειμένου να μην διατυπωθεί θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης [Wang et al. 2000] που είναι περισσότερο πολύπλοκη. Στις εκφράσεις (2.2.31) υπεισέρχονται τα μεγέθη n , m_t , m_w (αξονική δύναμη, στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις κατά μήκος της ράβδου (βλ. Σχ.2.1α) και ορίζονται (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων) συναρτήσει του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας μέσω των εκφράσεων (1.2.39α,β) και της σχέσης

$$n(x) = \int_{\Gamma} t_x ds \quad (2.2.34)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (2.2.32) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{N}_0 , \bar{N}_l , \bar{M}_{t0} , \bar{M}_{tl} , \bar{M}_{w0} , \bar{M}_{wl} που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (αξονική δύναμη, στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις ακραίες διατομές της ράβδου ως

$$\bar{N}_0 = \iint_{\Omega_0} t_x d\Omega \quad \bar{N}_l = \iint_{\Omega_l} t_x d\Omega \quad (2.2.35\alpha,\beta)$$

$$\bar{M}_{t0} = \iint_{\Omega_0} \left[t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega \quad (2.2.35\gamma)$$

$$\bar{M}_{tl} = \iint_{\Omega_l} \left[t_y (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega \quad (2.2.35\delta)$$

$$\bar{M}_{w0} = \iint_{\Omega_0} t_x \phi_S^P d\Omega \quad \bar{M}_{wl} = \iint_{\Omega_l} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (2.2.35\epsilon,\sigma\tau)$$

ή συναρτήσει των συνιστωσών του 1ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff (εξ.(Π4.2.23)) ως

$$\bar{N}_0 = -\iint_{\Omega_0} P_{xx} d\Omega \quad \bar{N}_l = \iint_{\Omega_l} P_{xx} d\Omega \quad (2.2.36\alpha,\beta)$$

$$\bar{M}_{t0} = -\iint_{\Omega_0} \left[P_{yx} (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + P_{zx} (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega \quad (2.2.36\gamma)$$

$$\bar{M}_{tl} = \iint_{\Omega_l} \left[P_{yx} (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + P_{zx} (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) \right] d\Omega \quad (2.2.36\delta)$$

$$\bar{M}_{w0} = -\iint_{\Omega_0} P_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad \bar{M}_{wl} = \iint_{\Omega_l} P_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (2.2.36\epsilon,\sigma\tau)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις διακρίνεται η επιρροή της θ_x , η οποία τροποποιεί ουσιαδώς τη γεωμετρικά μη γραμμική από τη γραμμική ανάλυση. Οι εκφράσεις (1.2.39α), (2.2.35γ,δ) παύουν να είναι γραμμικές και εξαρτώνται από τη μεταβολή των μοχλοβραχιόνων των επιβαλλόμενων επιφανειακών δράσεων που οφείλεται στην γεωμετρική μη γραμμικότητα. Σημειώνεται ότι η επιρροή αυτή δεν εξετάζεται στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Από τις εξ.(2.2.31β), (2.2.32γ,δ) συμπεραίνεται επίσης ότι αξονικά και στρεπτικά εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα και δεν μπορούν να μελετηθούν απομονωμένα όπως πραγματοποιείται στη γραμμική ελαστική ανάλυση.

Εισάγοντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (2.2.28) στις εξ.(2.2.31-32) και αναδιατυπώνοντας τις προκύπτουσες συνοριακές συνθήκες, μορφώνονται έπειτα από

πράξεις οι παρακάτω κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις καθολικής ισορροπίας αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων

$$EAu_m'' + EI_P\theta_x'\theta_x'' = -n(x) \quad (2.2.37\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' - GI_t^S(\theta_x^P)'' + \frac{3}{2}EI_{PP}(\theta_x')^2\theta_x'' + EI_Pu_m'\theta_x'' + EI_Pu_m''\theta_x' = -m_t(x) \quad (2.2.37\beta)$$

$$EC_S(\theta_x^P)''' - GI_t^S\left((\theta_x^P)' - \theta_x'\right) = -m_w(x) \quad (2.2.37\gamma)$$

που υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 (\theta_x^P)' = \bar{\beta}_3 \quad (2.2.38\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου N , M_w , M_t είναι η αξονική δύναμη, το δίρροπο στρέβλωσης και η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου αντίστοιχα, τα οποία δίδονται από τις σχέσεις (2.2.28α), (2.2.28δ) και

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S(\theta_x^P)' + \frac{1}{2}EI_{PP}(\theta_x')^3 + EI_Pu_m'\theta_x' \quad (2.2.39)$$

Στις σχέσεις (2.2.38), α_i , β_i , $\bar{\beta}_i$ ($i=1,2,3$) είναι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις (2.2.38) (βλ. και εδάφιο 1.2.3). Τέλος, επισημαίνεται ότι στη σχέση (2.2.37β) έχει παραληφθεί όρος που εξαρτάται από την παράγωγο (ως προς x) της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς, καθώς αποδεικνύεται ότι η σταθερά αυτή είναι ανεξάρτητη της διαμήκουσ συντεταγμένης (βλ. εδάφιο 2.2.4).

Παρατηρείται ότι στο πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(2.2.37-38) υπεισέρχεται η τρίτη παράγωγος της πρωτογενούς γωνίας στροφής, η οποία δυσκολεύει την αριθμητική επίλυσή του. Προκειμένου να αποφευχθεί ο συγκεκριμένος όρος, χρησιμοποιείται η ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης η_x , με τη βοήθεια της οποίας οι εξ.(2.2.37-39) εκφράζονται ως (βλ. εξ.(2.2.7))

$$EAu_m'' + EI_P\theta_x'\theta_x'' = -n(x) \quad (2.2.40\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' - GI_t^S\eta_x' + \frac{3}{2}EI_{PP}(\theta_x')^2\theta_x'' + EI_Pu_m'\theta_x'' + EI_Pu_m''\theta_x' = -m_t(x) \quad (2.2.40\beta)$$

$$EC_S\eta_x'' - GI_t^S(\eta_x - \theta_x') = -m_w(x) \quad (2.2.40\gamma)$$

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x = \bar{\beta}_3 \quad (2.2.41\alpha, \beta, \gamma)$$

$$M_t = G \left(I_t^P + I_t^S \right) \theta'_x - GI_t^S \eta_x + \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^3 + EI_{Pu'_m} \theta'_x \quad (2.2.42)$$

Παρατηρείται ότι στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2.2.40) περιέχονται μέχρι δεύτερης τάξης παράγωγοι, συνεπώς οι εξ.(2.2.40) έχουν περιέλθει σε κατάλληλη μορφή για αριθμητική επίλυση. Γενικά οι συνοριακές συνθήκες (2.2.41α,β) είναι μη γραμμικές εξαιτίας των εκφράσεων (2.2.28α), (2.2.42) και (2.2.35γ,δ). Αγνοώντας όλους τους μη γραμμικούς όρους των εξ.(2.2.28α), (2.2.42) και (2.2.40α,β), προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ, στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης. Διαπιστώνεται εύκολα ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η αξονική και η στρεπτική φόρτιση αποζευγνύονται, συνεπώς μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα. Επιπρόσθετα, το γεωμετρικά μη γραμμικό πρόβλημα ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής χωρίς επιρροή ΔΔΠ διατυπώνεται θέτοντας $\eta_x = \theta'_x$ στη σχέση (2.2.1) και ακολουθώντας τη διαδικασία του παρόντος εδαφίου. Οι διαφορικές εξισώσεις και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του σχετικού πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών δίδονται από τις σχέσεις (3.2.22) του κεφ. 3 εάν αγνοηθούν όλοι οι αδρανειακοί όροι, δηλαδή

$$EAu''_m + EI_P \theta'_x \theta''_x = -n \quad (2.2.43\alpha)$$

$$EC_S \theta''''_x - GI_t^P \theta''_x - \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^2 \theta''_x - EI_{Pu'_m} \theta''_x - EI_{Pu''_m} \theta'_x = m_t - m'_w \quad (2.2.43\beta)$$

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \theta'_x = \bar{\beta}_3 \quad (2.2.44\alpha,\beta,\gamma)$$

όπου οι δράσεις M_t , M_w στα άκρα της ράβδου εδώ δίδονται ως

$$M_t = GI_t^P \theta'_x - EC_S \theta''_x + \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^3 + EI_{Pu'_m} \theta'_x - m_w \quad (2.2.45\alpha)$$

$$M_w = EC_S \theta''_x \quad (2.2.45\beta)$$

Εάν επιπρόσθετα αγνοηθεί και η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, τότε αρκεί να τεθεί $C_S = 0$, $m_w = 0$ στις σχέσεις (2.2.43β), (2.2.45α). Στο σχετικό πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών που προκύπτει δεν υπεισέρχεται η συνοριακή συνθήκη στρέβλωσης (2.2.44γ).

Είναι δυνατό οι εξισώσεις (2.2.40β,γ) να συνδυαστούν ώστε να προκύψει πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών ως προς δύο μόνο κινηματικά μεγέθη του προβλήματος. Προκειμένου να συγκριθεί το πρόβλημα αυτό με το αντίστοιχο της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ (εξ.(2.2.43-44)), για τη διατύπωσή του επιλέγονται η αξονική μετατόπιση u_m και η στρεπτική στροφή θ_x . Έτσι, μετά από κατάλληλες παραγωγίσεις, συνδυάζοντας τις εξ. (2.2.40β,γ) μορφώνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{EC_S}{\kappa} \theta''''_x - GI_t^P \theta''_x - \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^2 \theta''_x - EI_{Pu'_m} \theta''_x - EI_{Pu''_m} \theta'_x$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \left[3EI_{PP} u_m''' \theta_x'' + 3EI_{PP} u_m'' \theta_x''' + EI_{PP} u_m' \theta_x'''' + EI_{PP} u_m'''' \theta_x' \right] \\
& + \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \left[3EI_{PP} (\theta_x'')^3 + 9EI_{PP} \theta_x' \theta_x'' \theta_x''' + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'''' \right] \\
& = m_t - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t'' - m_w'
\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

όπου κ είναι βοηθητική σταθερά που ορίζεται ως

$$\kappa = \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} \tag{2.2.47}$$

Μετά από παρόμοιους αλγεβρικούς συνδυασμούς εξισώσεων στα άκρα της ράβδου, οι συνοριακές ποσότητες των εξ.(2.2.41β,γ) εκφράζονται ως

$$\begin{aligned}
M_t = & GI_t^P \theta_x' - \frac{EC_S}{\kappa} \theta_x'' + \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta_x')^3 + EI_{PP} u_m' \theta_x' - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' - m_w \\
& - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \left[3EI_{PP} \theta_x' (\theta_x'')^2 + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x''' + 2EI_{PP} u_m'' \theta_x'' + EI_{PP} u_m' \theta_x'''' + EI_{PP} u_m'''' \theta_x' \right]
\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

$$\begin{aligned}
M_w = & \frac{EC_S \theta_x''}{\kappa} + \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t \\
& + \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \left[\frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' + EI_{PP} u_m'' \theta_x'' + EI_{PP} u_m' \theta_x'''' \right]
\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

$$\begin{aligned}
\eta_x = & \theta_x' + \frac{EC_S}{\kappa GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \theta_x'' + \frac{EC_S}{(GI_t^P)^2} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^2 m_t' + \frac{1}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_w \\
& + \frac{EC_S}{(GI_t^P)^2} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^2 \left[3EI_{PP} \theta_x' (\theta_x'')^2 + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x''' \right. \\
& \left. + 2EI_{PP} u_m'' \theta_x'' + EI_{PP} u_m' \theta_x'''' + EI_{PP} u_m'''' \theta_x' \right]
\end{aligned} \tag{2.2.50}$$

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και κατά μήκος της ράβδου χρησιμοποιώντας στον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών και της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης. Το προκύπτον πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών περιγράφεται από τις εξ.(2.2.40α), (2.2.46) και (2.2.41).

Πλέον, η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στην καθολική εξίσωση ισορροπίας ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη καθίσταται ευδιάκριτη. Στην περίπτωση όπου αγνοούνται οι παραμορφώσεις αυτές, αρκεί να τεθεί $\kappa = 1$ στις εξ.(2.2.46) και (2.2.48-50), οπότε και λαμβάνονται οι αντίστοιχες σχέσεις της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ (βλ.

εξ.(2.2.43β), (2.2.45)). Γενικά ισχύει $0 < \kappa < 1$ με την επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων να μεγεθύνεται όταν η σταθερά κ είναι μικρή. Κάτι τέτοιο ισχύει κυρίως σε κλειστές λεπτότοιχες διατομές, ενώ σε ανοικτές λεπτότοιχες διατομές συνήθως $\kappa \rightarrow 1$ με αποτέλεσμα οι ΔΔΠ να είναι αμελητέες (Murin and Kutis 2008, Rubin 2005, Mokos and Sapountzakis 2011).

2.2.4 Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της ϕ_S^S ορίστηκε στο εδάφιο 2.2.2 (εξ.(2.2.21α), (2.2.22)). Με τη βοήθεια της καθολικής στρεβλωτικής εξίσωσης ισορροπίας (εξ.(2.2.40γ)) και αγνοώντας την επιρροή του m_w , η εξ.(2.2.21α) διαμορφώνεται ως

$$G(\eta_x - \theta'_x) \left(\nabla^2 \phi_S^S - \frac{I_t^S}{C_S} \phi_S^P \right) - Eu_m'' - E(y^2 + z^2) \theta'_x \theta''_x = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \quad (2.2.51)$$

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω εξίσωση ισχύει ακόμα κι αν θεωρηθεί η εξάρτηση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς στον προσδιορισμό των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας της ράβδου. Επιπλέον, η αγνόηση του m_w είναι παρεμφερής της παραδοχής $t_x \approx 0$ που έχει υιοθετηθεί στο εδάφιο 2.2.2 (βλ. εξ.(2.2.22)). Προκειμένου να απλοποιηθεί ο υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, αγνοούνται στην εξ.(2.2.51) οι όροι που οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (Eu_m'' , $E(y^2 + z^2) \theta'_x \theta''_x$) (βλ. εδάφιο 2.2.2). Τούτο έχει ως αποτέλεσμα να παραβιάζεται μερικώς η τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά τη διαμήκη διεύθυνση στη μη γραμμική ελαστική ανάλυση, εντούτοις στο γραμμικό ελαστικό πρόβλημα η συγκεκριμένη εξίσωση ικανοποιείται πλήρως. Καθώς εν γένει ισχύει $\eta_x \neq \theta'_x$ κατά μήκος της ράβδου, η σχέση (2.2.51) διαμορφώνεται ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{I_t^S}{C_S} \phi_S^P \text{ στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \quad (2.2.52)$$

Επειδή η ϕ_S^P είναι συνάρτηση των y, z αποκλειστικά, η C_S είναι σταθερά και η I_t^S είναι συνάρτηση του x αποκλειστικά καθώς είναι διπλό ολοκλήρωμα που εξαρτάται από τη $\phi_S^S(x, y, z)$ (βλ. εξ.(2.2.29γ)), μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών των εξισώσεων (2.2.52), (2.2.22) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\phi_S^S = \frac{I_t^S}{C_S} \bar{\phi}_S^S \text{ στο } \Omega \cup \Gamma_j \quad (2.2.53)$$

όπου $\bar{\phi}_S^S = \bar{\phi}_S^S(y, z)$ είναι διδιάστατη δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, η οποία προσδιορίζεται από το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \bar{\phi}_S^S = \phi_S^P \text{ στο } \Omega \quad (2.2.54\alpha)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j \quad (2.2.54\beta)$$

Προκειμένου να προσδιοριστεί μοναδική $\bar{\phi}_S^S$ αλλά και να επαληθευτεί η συνθήκη (2.2.23β), απαιτούμε την ικανοποίηση της συνθήκης

$$\iint_{\Omega} \bar{\phi}_S^S d\Omega = 0 \quad (2.2.55)$$

Η δευτερογενής στρεπτική σταθερά I_t^S (εξ.(2.2.29γ)) εκφράζεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.2.53) ως

$$I_t^S = \left(\frac{I_t^S}{C_S} \right)^2 \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \bar{\phi}_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \Rightarrow I_t^S = \frac{(C_S)^2}{I_{\bar{\phi}}} \quad (2.2.56)$$

όπου $I_{\bar{\phi}}$ είναι βοηθητική σταθερά, η οποία δίδεται ως

$$I_{\bar{\phi}} = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \bar{\phi}_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (2.2.57)$$

Προκειμένου να διευκολυνθεί ο αριθμητικός υπολογισμός της $I_{\bar{\phi}}$, με κατάλληλη ολοκλήρωση κατά παράγοντες και εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.2.54) διατυπώνεται η ακόλουθη απλούστερη έκφραση

$$I_{\bar{\phi}} = -\iint_{\Omega} \phi_S^P \bar{\phi}_S^S d\Omega \quad (2.2.58)$$

Αποδεικνύεται μέσω της σχέσης (2.2.56) ότι η I_t^S είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x . Κατά συνέπεια, από τις εξ.(2.2.53), (2.2.56) αποδεικνύεται ότι η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S είναι διδιάστατη συνάρτηση και δεν εξαρτάται από τη διαμήκη συντεταγμένη x , όπως είχε αρχικά υποτεθεί (βλ. εξ.(2.2.1)). Τέλος, στο Παράρτημα Π7 αποδεικνύεται ότι η λύση (2.2.53) είναι μοναδική, συνεπώς δεν υπάρχει άλλη (διδιάστατη ή τριδιάστατη) δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης που να ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών των εξ.(2.2.21α), (2.2.22) πέρα από τη συνάρτηση που ορίζεται μέσω της εξ.(2.2.53).

2.2.5 Εναλλακτική Διατύπωση του Προβλήματος

Το πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά με τη βοήθεια του πεδίου μετατοπίσεων

(2.2.1-3) αγνοώντας τη δευτερογενή στρέβλωση. Στην περίπτωση αυτή, οι σχέσεις (2.2.1-3) εκφράζονται ως

$$u(x, y, z) = u_m(x) + (\theta_x^P)'(x) \phi_S^P(y, z) \quad (2.2.59)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (2.2.60)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (2.2.61)$$

όπου η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P προσδιορίζεται μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(2.2.20). Ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 2.2.1, οι μη μηδενικές συνιστώσες του παραμορφωσιακού πεδίου της ράβδου προσδιορίζονται ως

$$\varepsilon_{xx} = u_m' + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta_x')^2 \quad (2.2.62\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.62\beta)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.62\gamma)$$

ενώ οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου που παράγουν έργο εκφράζονται ως

$$S_{xx} = E \left[u_m' + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta_x')^2 \right] \quad (2.2.63\alpha)$$

$$S_{xy} = G \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + G \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.63\beta)$$

$$S_{xz} = G \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + G \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (2.2.63\gamma)$$

Τα εντατικά μεγέθη ορίζονται με τη βοήθεια των εξ.(2.2.26), με την εξαίρεση της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής η οποία ορίζεται ως

$$M_t^S = -\iint_{\Omega} \left(S_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (2.2.64)$$

ενώ εύκολα αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι η παραπάνω σχέση καταλήγει στον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό

$$M_t^S = -\iint_{\Omega} \left(S_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (2.2.65)$$

Τα εντατικά μεγέθη δίδονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών μέσω των σχέσεων (2.2.28). Στις σχέσεις αυτές υπεισέρχονται οι γεωμετρικές σταθερές που εκφράζονται μέσω των εξ.(2.2.29), με την εξαίρεση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S η οποία ορίζεται εδώ ως

$$I_t^S = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (2.2.66)$$

Αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες [Sapountzakis and Tsipiras 2010d] ότι η I_t^S γράφεται ως

$$I_t^S = I_P - I_t^P \quad (2.2.67)$$

Επιπρόσθετα, οι εξισώσεις (2.2.31-50), συμπεριλαμβανομένου και του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφει την καθολική ισορροπία αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου, ισχύουν επακριβώς εάν σε αυτές εισαχθεί η δευτερογενής στρεπτική σταθερά της εξ.(2.2.67).

Διαπιστώνεται εύκολα ότι οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου των εξ.(2.2.63) δεν ικανοποιούν την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (2.2.17) ακόμα και στην περίπτωση όπου αγνοηθούν οι όροι που οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Το ίδιο ισχύει και στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης της παρούσας εναλλακτικής διατύπωσης του προβλήματος. Τούτο οφείλεται στη μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. εξ.(2.2.63β,γ)), οι οποίες προέκυψαν από το πεδίο παραμορφώσεων (2.2.62) που είναι συμβιβαστό με το πεδίο μετατοπίσεων (2.2.59-61). Έτσι, προκειμένου να διορθωθούν οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου εξαιτίας της προαναφερθείσας μη ικανοποιητικής κατανομής, εισάγεται στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης k_x [Kraus 2007] στην έκφραση της I_t^S (εξ.(2.2.67)) ως

$$I_t^S = k_x (I_P - I_t^P) \quad (2.2.68)$$

επισημαίνοντας ότι παρόμοιος χειρισμός πραγματοποιείται και στη θεωρία καμπτόμενων δοκών Timoshenko [Timoshenko 1930]. Οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας διατυπώνονται με την παραπάνω έκφραση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς χωρίς να μεταβάλλεται η μορφή τους. Στη βιβλιογραφία έχει επίσης προταθεί

η ακόλουθη εναλλακτική έκφραση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς [Roik and Sedlacek 1966, Mokos and Sapountzakis 2011]

$$I_t^S = \kappa_x I_t^P \quad (2.2.69)$$

όπου κ_x είναι στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης. Στη βιβλιογραφία, τόσο ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης της εξ.(2.2.68) όσο και αυτός της εξ.(2.2.69) προσδιορίζονται με τη βοήθεια ενεργειακής μεθόδου [Roik and Sedlacek 1966, Laudiero and Savoia 1990, 1991 Kim and Kim 2005, Slivker 2007, Kraus 2007, Mokos and Sapountzakis 2011]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου που προκύπτει από την παραπάνω διατύπωση του προβλήματος εξισώνεται με την αντίστοιχη ακριβή έκφραση, η οποία προκύπτει από τις διατμητικές τάσεις των εξ.(2.2.85α-δ) (βλ. εδάφιο 2.2.6 και εξ.(2.2.12β,γ)). Οι συντελεστές k_x , κ_x προσδιορίζονται έπειτα από κάποιες πράξεις ως

$$k_x = \frac{(C_S)^2}{I_{\bar{\phi}} (I_P - I_t^P)} \quad (2.2.70)$$

$$\kappa_x = \frac{(C_S)^2}{I_{\bar{\phi}} I_t^P} \quad (2.2.71)$$

Τονίζεται ότι η ενεργειακή μέθοδος υπολογισμού των συντελεστών k_x , κ_x οδηγεί τελικά στην ίδια έκφραση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς (βλ. εξ.(2.2.56)). Τούτο δείχνει επιπρόσθετα ότι η χρήση της ενεργειακής μεθόδου για τον προσδιορισμό του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης οδηγεί σε ταυτόσημη διατύπωση του εξεταζόμενου προβλήματος με αυτή που έχει παρουσιαστεί στα εδάφια 2.2.1-2.2.4. Εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, η μόνη μέθοδος υπολογισμού του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία είναι η ενεργειακή.

Τέλος, στην περίπτωση που δεν διορθωθούν οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων, το πρόβλημα διατυπώνεται με βάση το συμβιβαστό πεδίο παραμορφώσεων (2.2.62). Σε αυτή την περίπτωση, στη σχέση (2.2.68) τίθεται $k_x = I$ οπότε η δευτερογενής στρεπτική σταθερά προσδιορίζεται μέσω της εξ.(2.2.67). Αξίζει να αναφερθεί ότι η συγκεκριμένη έκφραση της σταθεράς αυτής έχει χρησιμοποιηθεί από πλήθος ερευνητών (π.χ. για στατική και δυναμική ανάλυση στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης βλ. [El Fatmi 2007a,b, Back and Will 1998, Chen and Blandford 1989, Gendy et al. 1992, Shakourzadeh and Batoz 1995, Hu et al. 1996, Benscoter 1954], ενώ για γεωμετρικά μη γραμμική στατική και δυναμική ανάλυση βλ. [Machado and Cortinez 2007, Vo and Lee 2009, Simo and Vu-Quoc 1991]).

2.2.6 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στα προηγούμενα εδάφια, για την επίλυση του στατικού προβλήματος της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης

ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα.

1. Ορισμός αυθαίρετου δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$ με αρχή το κέντρο συστροφής S της διατομής του αριστερού άκρου της ράβδου. Το κέντρο συστροφής ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο και προσδιορίζεται ως το σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας της (διπλά συμμετρικής) διατομής.
2. Υπολογισμός της πρωτογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^P(y, z)$. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \widehat{\phi}_S^P = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.2.72\alpha)$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \text{ στο } \Gamma_j \quad (2.2.72\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*.

3. Υπολογισμός του εμβαδού A της διατομής και της πρωτογενούς ροπής στρέβλωσης \widehat{R}_S^P ως

$$A = \iint_{\Omega} d\Omega \quad \widehat{R}_S^P = \iint_{\Omega} \widehat{\phi}_S^P d\Omega \quad (2.2.73\alpha, \beta)$$

4. Υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^P(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^P = \widehat{\phi}_S^P - \frac{\widehat{R}_S^P}{A} \quad (2.2.74)$$

5. Υπολογισμός της δευτερογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^S(y, z)$. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \widehat{\phi}_S^S = \phi_S^P \text{ στο } \Omega \quad (2.2.75\alpha)$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j \quad (2.2.75\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Poisson*.

6. Υπολογισμός της δευτερογενούς ροπής στρέβλωσης \widehat{R}_S^S ως

$$\widehat{R}_S^S = \iint_{\Omega} \widehat{\phi}_S^S d\Omega \quad (2.2.76)$$

7. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\bar{\phi}_S^S(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\bar{\phi}_S^S = \hat{\phi}_S^S - \frac{\bar{R}_S^S}{A} \quad (2.2.77)$$

8. Υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας I_P , της ροπής τέταρτης τάξης I_{PP} , της σταθεράς I_n , της πρωτογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^P , της σταθεράς στρέβλωσης C_S , της βοηθητικής σταθεράς $I_{\bar{\phi}}$ και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S μέσω των σχέσεων

$$I_P = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad I_{PP} = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega \quad I_n = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} \quad (2.2.78\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_t^P = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad C_S = \iint_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (2.2.78\delta, \epsilon)$$

$$I_{\bar{\phi}} = -\iint_{\Omega} \phi_S^P \bar{\phi}_S^S d\Omega \quad I_t^S = \frac{(C_S)^2}{I_{\bar{\phi}}} \quad (2.2.78\sigma\tau, \zeta)$$

9. Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων αξονικής, στρεπτικής και στρεβλωτικής ισορροπίας της ράβδου για τυχούσες συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες αξονικές δυνάμεις $n = n(x)$, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$, υποκείμενων στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\left. \begin{aligned} EAu_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' &= -n(x) \\ G(I_t^P + I_t^S) \theta_x'' - GI_t^S \eta_x' + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' + EI_P u_m' \theta_x'' + EI_P u_m'' \theta_x' &= -m_t(x) \\ EC_S \eta_x'' - GI_t^S (\eta_x - \theta_x') &= -m_w(x) \end{aligned} \right\} \text{στο εσωτερικό της ράβδου} \quad (2.2.79\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 N + \alpha_2 u_m &= \alpha_3 \\ \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x &= \beta_3 \\ \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x &= \bar{\beta}_3 \end{aligned} \right\} \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, l \quad (2.2.79\beta)$$

όπου

$$N = EA \left[u_m' + \frac{I}{2A} (\theta_x')^2 \right] \quad (2.2.80\alpha)$$

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta'_x - GI_t^S\eta_x + \frac{1}{2}EI_{PP}(\theta'_x)^3 + EI_{Pu}'u'_m\theta'_x \quad (2.2.80\beta)$$

$$M_w = EC_S\eta'_x \quad (2.2.80\gamma)$$

και υπολογισμός της αξονικής μετατόπισης $u_m(x)$, της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης $\eta_x(x)$, των παραγώγων τους καθώς και των αναπτυσσόμενων αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών εντατικών μεγεθών N , N^l , N^{nl} , M_t , M_t^P , M_t^S , M_t^{nl} και M_w μέσω των σχέσεων

$$N = N^l + N^{nl} \quad (2.2.81\alpha)$$

$$N^l = EAu'_m \quad N^{nl} = \frac{1}{2}EI_P(\theta'_x)^2 \quad (2.2.81\beta,\gamma)$$

$$M_t = M_t^P + M_t^S + M_t^{nl} \quad (2.2.82\alpha)$$

$$M_t^P = GI_t^P\theta'_x \quad M_t^S = -GI_t^S(\eta_x - \theta'_x) \quad M_t^{nl} = \frac{1}{2}EI_{PP}(\theta'_x)^3 + EI_{Pu}'u'_m\theta'_x \quad (2.2.82\beta,\gamma,\delta)$$

$$M_w = EC_S\eta'_x \quad (2.2.83)$$

10. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^S(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \frac{I_t^S}{C_S}\bar{\phi}_S^S \quad (2.2.84)$$

11. Υπολογισμός των μη μηδενικών συνιστωσών ορθής τάσης, πρωτογενούς και δευτερογενούς διατμητικής τάσης του 2ου ταυσστή τάσης Piola-Kirchhoff και των συνολικών διατμητικών τάσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις (βλ. και [Μώκος 2007])

Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_{xy}^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad S_{xz}^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad (2.2.85\alpha,\beta)$$

Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_{xy}^S = -G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad S_{xz}^S = -G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (2.2.85\gamma,\delta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_x = \sqrt{\left(S_{xy}^P + S_{xy}^S\right)^2 + \left(S_{xz}^P + S_{xz}^S\right)^2} \quad (2.2.85\epsilon)$$

Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + yn_y + zn_z \right) \quad (2.2.85\sigma\tau)$$

Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x^S = -G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (2.2.85\zeta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x = S_x^P + S_x^S \quad (2.2.85\eta)$$

Ορθές τάσεις στο χωρίο Ω και στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_{xx} = E \left[u'_m + \eta'_x \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \quad (2.2.85\theta)$$

12. Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z, t) = u_m(x) + \eta_x(x) \phi_S^P(y, z) - (\eta_x(x) - \theta'_x(x)) \left[\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(y, z) \right] \quad (2.2.86\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (2.2.86\beta)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (2.2.86\gamma)$$

2.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

2.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής και την Ανεξάρτητη Παράμετρο Στρέβλωσης

Η αριθμητική επίλυση του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη γωνία στρεπτικής στροφής και την ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.2.40-41), επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π3.4.

Έστω $u_1(x) = u_m(x)$, $u_2(x) = \theta_x(x)$, $u_3(x) = \eta_x(x)$ η ζητούμενη λύση του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.2.40-41). Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο εσωτερικό της ράβδου, δηλαδή στο διάστημα $(0, l)$, καθώς και μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$, η σχέση (Π2.3.6) διαμορφώνεται για τις συναρτήσεις u_n ($n = 1, 2, 3$) ως

$$u_n(\xi) = \int_0^l \frac{d^2 u_n}{dx^2} A_2^u dx - \left[A_2^u \frac{du_n}{dx} - A_1^u u_n \right]_0^l \quad (n = 1, 2, 3) \quad (2.3.1\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου A_1^u , A_2^u είναι δισημειακοί πυρήνες που δίδονται από τις εξ.(Π2.3.7). Επειδή οι ποσότητες EA , $G(I_t^P + I_t^S)$ και EC_S δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή x , οι εξ.(2.3.1) μπορούν να γραφούν ως

$$EAu_1(\xi) = \int_0^l EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} A_2^u dx - EA \left[A_2^u \frac{du_1}{dx} - A_1^u u_1 \right]_0^l \quad (2.3.2\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = \int_0^l G(I_t^P + I_t^S) \frac{d^2 u_2}{dx^2} A_2^u dx - G(I_t^P + I_t^S) \left[A_2^u \frac{du_2}{dx} - A_1^u u_2 \right]_0^l \quad (2.3.2\beta)$$

$$EC_S u_3(\xi) = \int_0^l EC_S \frac{d^2 u_3}{dx^2} A_2^u dx - EC_S \left[A_2^u \frac{du_3}{dx} - A_1^u u_3 \right]_0^l \quad (2.3.2\gamma)$$

Επιλύοντας την εξ.(2.2.40α) ως προς EAu_m'' και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξ.(2.3.2α), την εξ.(2.2.40β) ως προς $G(I_t^P + I_t^S)\theta_x''$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξ.(2.3.2β) και την εξ.(2.2.40γ) ως προς $EC_S \eta_x''$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξ.(2.3.2γ), λαμβάνονται οι ακόλουθες ολοκληρωτικές εκφράσεις

$$EAu_1(\xi) = \int_0^l \left(-n - EI_P \frac{du_2}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) A_2^u dx - EA \left[A_2^u \frac{du_1}{dx} - A_1^u u_1 \right]_0^l \quad (2.3.3\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = \int_0^l \left(GI_t^S \frac{du_3}{dx} - \frac{3}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} - EI_P \frac{d^2 u_1}{dx^2} \frac{du_2}{dx} - m_t \right) A_2^u dx - G(I_t^P + I_t^S) \left[A_2^u \frac{du_2}{dx} - A_1^u u_2 \right]_0^l \quad (2.3.3\beta)$$

$$EC_S u_3(\xi) = \int_0^l \left(GI_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) - m_w \right) A_2^u dx - EC_S \left[A_2^u \frac{du_3}{dx} - A_1^u u_3 \right]_0^l \quad (2.3.3\gamma)$$

Μετά από κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά παράγοντες οι εκφράσεις (2.3.3α,β) διαμορφώνονται ως

$$EAu_1(\xi) = -\int_0^l nA_2^u dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI_P \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 A_1^u dx - \left[\left(\frac{1}{2} EI_P \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \right) A_2^u \right]_0^l - EA \left[A_2^u \frac{du_1}{dx} - A_1^u u_1 \right]_0^l \quad (2.3.4\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = -\int_0^l m_t A_2^u dx - \int_0^l \left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} \right) A_1^u dx + \left[\left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} \right) A_2^u \right]_0^l - G(I_t^P + I_t^S) \left[A_2^u \frac{du_2}{dx} - A_1^u u_2 \right]_0^l \quad (2.3.4\beta)$$

Με τη βοήθεια των εκφράσεων των εντατικών μεγεθών (2.2.28α), (2.2.42), (2.2.28δ), οι συνοριακοί όροι των σχέσεων (2.3.3γ), (2.3.4α,β) εκφράζονται απλούστερα ως

$$EAu_1(\xi) = -\int_0^l nA_2^u dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI_P \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 A_1^u dx - \left[A_2^u N - A_1^u EAu_1 \right]_0^l \quad (2.3.5\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = -\int_0^l m_t A_2^u dx - \int_0^l \left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} \right) A_1^u dx - \left[A_2^u M_t - A_1^u G(I_t^P + I_t^S)u_2 \right]_0^l \quad (2.3.5\beta)$$

$$EC_S u_3(\xi) = -\int_0^l m_w A_2^u dx + \int_0^l GI_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) A_2^u dx - \left[A_2^u M_w - EC_S A_1^u u_3 \right]_0^l \quad (2.3.5\gamma)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Στην περίπτωση που η επιρροή των ΔΔΠ είναι πολύ μικρή, τότε θα ισχύει $u_3 \approx u_2'$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης που βασίζονται σε πεδιακή προσέγγιση άγνωστων ποσοτήτων, όπως π.χ. η FEM, μπορεί να παρουσιάσουν φαινόμενα «διατμητικού κλειδώματος» (shear locking), εάν δεν ληφθεί ειδική μέριμνα [Zienkiewicz and Taylor 2005, Crisfield 1991]. Στο παρόν κεφάλαιο, το «**διατμητικό κλειδώμα**» αντιμετωπίζεται υιοθετώντας την ίδια τάξη προσέγγισης για τις ποσότητες u_3 , u_2' . Προκειμένου να υπεισέλθει ο όρος u_2' στην εξ.(2.3.5β), η εξίσωση αυτή παραγωγίζεται ως προς ξ δίδοντας

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2'(\xi) = \int_0^l m_t A_t^u dx + GI_t^S u_3(\xi) - \frac{I}{2} EI_{PP} [u_2'(\xi)]^3 - EI_P u_1'(\xi) u_2'(\xi) + [A_t^u M_t]_0^l \quad (2.3.6)$$

Επιπλέον, στην περίπτωση που η αξονική δύναμη είναι πολύ μικρή, τότε θα ισχύει $u_1' \approx -\frac{I}{2} \frac{I_P}{A} (u_2')^2$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης που βασίζονται σε πεδιακή προσέγγιση άγνωστων ποσοτήτων, όπως π.χ. η FEM, μπορεί να παρουσιάσουν φαινόμενα «μεμβρανικού κλειδώματος» (membrane locking), εάν δεν ληφθεί ειδική μέριμνα [Zienkiewicz and Taylor 2005, Crisfield 1991]. Στο παρόν κεφάλαιο, το «μεμβρανικό κλειδώμα» αντιμετωπίζεται με την εκμετάλλευση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.3.5α) που σχετίζεται με τη «μέση» αξονική μετατόπιση. Επειδή στις εξ.(2.3.5β), (2.3.6) υπεισέρχεται η παράγωγος u_1' , η ολοκληρωτική εξίσωση (2.3.5α) παραγωγίζεται ως προς ξ δίδοντας

$$EAu_1'(\xi) = \int_0^l n A_t^u dx - \frac{I}{2} EI_P [u_2'(\xi)]^2 + [A_t^u N]_0^l \quad (2.3.7)$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης, οι σχέσεις (2.3.5β), (2.3.6) εκφράζονται ως

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = -\int_0^l m_t A_t^u dx - \int_0^l \left(GI_t^S u_3 - \frac{I}{2} EI_n \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 \right) A_t^u dx + \frac{I_P}{A} \int_0^l \left(\frac{du_2}{dx} \int_0^l n A_t^u(t, x) dt \right) A_t^u(x, \xi) dx + \frac{I_P}{A} \int_0^l [A_t^u(t, x) N]_0^l \frac{du_2}{dx} A_t^u(x, \xi) dx - [A_t^u M_t - A_t^u G(I_t^P + I_t^S)u_2]_0^l \quad (2.3.8)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2'(\xi) = \int_0^l m_t A_t^u dx + GI_t^S u_3(\xi) - \frac{I}{2} EI_n [u_2'(\xi)]^3 - \frac{I_P}{A} u_2'(\xi) \left[\int_0^l n A_t^u dx + [A_t^u N]_0^l \right] + [A_t^u M_t]_0^l \quad (2.3.9)$$

Πλέον, συμπεραίνεται ότι οι ολοκληρωτικές σχέσεις (2.3.5α), (2.3.8), (2.3.5γ) και (2.3.9) έχουν περιέλθει σε κατάλληλη μορφή για να επιλυθεί αριθμητικά το πρόβλημα. Έτσι, σύμφωνα με όσα έχουν παρουσιαστεί στα εδάφια Π3.2, Π3.4, το διάστημα $(0, l)$ διαιρείται σε L στοιχεία στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι τα u_3 , u_2' έχουν γραμμική μεταβολή σε κάθε στοιχείο η οποία προσδιορίζεται από τους κόμβους στα άκρα του στοιχείου. Με τη μέθοδο αυτή αποφεύγεται η παραγωγή συναρτήσεων σχήματος και η χρήση πεπερασμένων διαφορών. Εφαρμόζοντας σε $L+1$ σημεία ταξιθεσίας ξ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, L+1$) τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.3.5γ), (2.3.9) καθώς

και στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_1 = 0, \xi = \xi_{L+1} = l$ τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.3.5α) και (2.3.8), προκύπτουν $2L+6$ εξισώσεις ως προς $2L+12$ αγνώστους (πρόκειται για τις τιμές των $(u'_2)_i, (u_3)_i$ ($i = 2, 3, \dots, L$) στα $L-1$ εσωτερικά κομβικά σημεία και τις συνοριακές τιμές των $(u'_2)_j, (u_1)_j, (u_2)_j, (u_3)_j, (N)_j, (M_t)_j, (M_w)_j$ ($j = 1, L+1$) στα άκρα της ράβδου $\xi_1 = 0, \xi_{L+1} = l$). Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις 6 συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου (βλ. εξ.(2.2.41)) μορφώνουν μη γραμμικό σύστημα $2L+12$ αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο εκφράζεται σε τυπική μορφή ως

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}(n, \mathbf{d}))\mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (2.3.10)$$

όπου \mathbf{d} είναι γενικευμένο μητρώο στήλη άγνωστων ποσοτήτων διαστάσεων $(2L+12) \times 1$, το οποίο εκφράζεται ως

$$\mathbf{d}^T = \left\{ (u'_2)_2, (u'_2)_3, \dots, (u'_2)_L, (u_3)_2, (u_3)_3, \dots, (u_3)_L, \right. \\ \left. (u'_2)_1, (u'_2)_{L+1}, (u_1)_1, (u_1)_{L+1}, (u_2)_1, (u_2)_{L+1}, (u_3)_1, (u_3)_{L+1}, \right. \\ \left. (N)_1, (N)_{L+1}, (M_t)_1, (M_t)_{L+1}, (M_w)_1, (M_w)_{L+1} \right\} \quad (2.3.11)$$

ενώ \mathbf{K} είναι γενικευμένο γνωστό γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(2L+12) \times (2L+12)$, \mathbf{K}_{nl} είναι γενικευμένο γνωστό μη γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(2L+12) \times (2L+12)$ και \mathbf{p} είναι γενικευμένο γνωστό μητρώο στήλη φόρτισης διάστασης $(2L+12) \times 1$. Στα μητρώα $\mathbf{K}, \mathbf{K}_{nl}$ υπεισέρχονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\Gamma_j} A_i^u(x, \xi_i) N_k dx, \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_i) N_k dx, \int_{\Gamma_j} A_i^u(x, \xi_i) (N_k)^2 dx, \int_{\Gamma_j} A_i^u(x, \xi_i) 2N_1 N_2 dx, \int_{\Gamma_j} A_i^u(x, \xi_i) (N_k)^3 dx, \int_{\Gamma_j} A_i^u(x, \xi_i) 3(N_1)^2 N_2 dx, \int_{\Gamma_j} A_i^u(x, \xi_i) 3N_1 (N_2)^2 dx$ ($i = 1, 2, 3, \dots, L+1, j = 1, 2, 3, \dots, L, k = 1, 2, N_k$ είναι οι συναρτήσεις σχήματος της γραμμικής προσέγγισης των u_3, u'_2) τα οποία υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση. Επιπλέον, στο μητρώο \mathbf{K}_{nl} υπεισέρχονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l \left(\frac{du_2}{dx} \int_0^l n A_1^u(t, x) dt \right) A_i^u(x, \xi) dx, \int_0^l n A_1^u dx$ το οποίο για τις συνήθεις κατανομές φόρτισης n υπολογίζεται επίσης χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση. Τέλος, στο μητρώο στήλη \mathbf{p} υπεισέρχονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l m_t A_1^u dx, \int_0^l n A_2^u dx, \int_0^l m_t A_2^u dx, \int_0^l m_w A_2^u dx$ τα οποία για τις συνήθεις κατανομές φόρτισης n, m_t, m_w υπολογίζονται επίσης χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση.

Στη συνέχεια, το σύστημα εξισώσεων (2.3.10) επιλύεται με την υβριδική μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων Powell [Powell 1970a,b] χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού

μητρώου [More et al. 1980] και προσδιορίζεται το μητρώο στήλη \mathbf{d} , οπότε λαμβάνονται οι τιμές των u'_2, u_3 στα $L-1$ εσωτερικά κομβικά σημεία καθώς και τις τιμές των $u'_2, u_1, u_2, u_3, N, M_t, M_w$ στα άκρα της ράβδου. Αξίζει να σημειωθεί ότι γενικά η εξωτερική φόρτιση δεν έχει μοναδική τιμή αλλά εξαρτάται από «χρονική» παράμετρο λ , ως $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\lambda)$. Στην περίπτωση αυτή, η επίλυση του προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου (load control) [Crisfield 1991], σύμφωνα με την οποία επιλέγονται T τιμές της παραμέτρου λ_t ($t=1,2,\dots,T$), ενώ για $\lambda_0=0$ έχουμε την αρχική αφόρτιστη διαμόρφωση της ράβδου. Για κάθε τιμή λ_t επιλύεται με τη μέθοδο Powell το σύστημα εξισώσεων (2.3.10) για στάθμη φόρτισης $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\lambda_t)$. Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος, απαιτείται αρχική πρόβλεψη της τιμής του \mathbf{d} που ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (2.3.10) (για $\lambda = \lambda_t$). Η τιμή αυτή λαμβάνεται ίση με την τιμή του \mathbf{d} που προσδιορίστηκε για $\lambda = \lambda_{t-1}$ ($t=2,3,\dots,T$), ενώ για $t=1$ τίθεται $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Επιπλέον, απαιτείται τιμή για την παράμετρο ανοχής (tolerance parameter) που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου, η οποία λαμβάνεται ίση με $tol = 10^{-7}$. Τέλος, σημειώνεται ότι οι τιμές και το πλήθος των τιμών λ_t προσδιορίζονται με βάση την ιστορία της φόρτισης και απαιτήσεις σύγκλισης της μεθόδου Powell.

Στη συνέχεια, με εφαρμογή των σχέσεων (2.3.5α), (2.3.8) και (2.3.7) προσδιορίζονται τα u_1, u_2, u'_1 στα $L-1$ εσωτερικά κομβικά σημεία. Στις σχέσεις αυτές υπεισέρχονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l n A_I^u dx$ καθώς και παρόμοια με αυτά των μητρώων $\mathbf{K}, \mathbf{K}_{nl}$, τα οποία υπολογίζονται επίσης με αναλυτική ολοκλήρωση. Επιπρόσθετα, το u'_3 υπολογίζεται στα $L+1$ σημεία ταξιθεσίας παραγωγίζοντας την εξ.(2.3.5γ) ως

$$EC_S u'_3(\xi) = \int_0^l m_w A_I^u dx - \int_0^l G I_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) A_I^u dx + \left[A_I^u M_w \right]_0^l \quad (2.3.12)$$

και εφαρμόζοντας την παραπάνω ολοκληρωτική παράσταση για $\xi = \xi_i$ ($i=1,2,3,\dots,L+1$). Στην παραπάνω παράσταση υπεισέρχονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l m_w A_I^u dx$ καθώς και παρόμοια με αυτά των μητρώων $\mathbf{K}, \mathbf{K}_{nl}$, τα οποία υπολογίζονται επίσης με αναλυτική ολοκλήρωση. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των κινηματικών μεγεθών u_1, u_2, u_3 μπορούν εύκολα να ευρεθούν και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο $\xi \in (0,l)$ πέραν των σημείων ταξιθεσίας, εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.3.5α), (2.3.8), (2.3.5γ) για την τιμή ξ του εξεταζόμενου σημείου. Επιπλέον, μπορούν εύκολα να ευρεθούν τα εντατικά μεγέθη σε οποιοδήποτε σημείο του εσωτερικού της ράβδου εφαρμόζοντας κατάλληλα τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.3.7), (2.3.9) και (2.3.12) (βλ. και εξ.(2.2.28α), (2.2.42), (2.2.28δ)). Οι παράγωγοι των κινηματικών μεγεθών u'_1, u'_2, u'_3 μπορούν να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου επιλύοντας το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (2.2.28α), (2.2.42),

(2.2.28δ), αφού αξιοποιηθούν οι τιμές των u_3 και των εντατικών μεγεθών για την εξεταζόμενη θέση.

2.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(2.2.74) δίδει την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23α)), εφόσον η πρωτογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^P$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23α)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^P$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (2.2.72) (βλ. εδάφιο 2.2.6) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Παρατηρείται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών της $\hat{\phi}_S^P$ είναι ταυτόσημο με αυτό που περιγράφεται από τις εξ.(1.2.24), εάν σε αυτές τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο αριθμητικός υπολογισμός της $\hat{\phi}_S^P$ (και των παραγώγων της) πραγματοποιείται ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 1.3.3.

2.3.3 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(2.2.77) δίδει τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης $\bar{\phi}_S^S$ (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.55)), εφόσον η δευτερογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^S$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.55)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Εφόσον η ϕ_S^P έχει ήδη προσδιοριστεί στο σύνορο Γ (βλ. εδάφιο 2.3.2), ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^S$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (2.2.75) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Παρατηρείται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών της $\hat{\phi}_S^S$ είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα συνοριακών τιμών της συνάρτησης \hat{B} που περιγράφεται από τις εξ.(1.3.41), εάν σε αυτές τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο αριθμητικός υπολογισμός της $\hat{\phi}_S^S$ (και των παραγώγων της) πραγματοποιείται ακολουθώντας τη διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης \hat{B} του εδαφίου 1.3.5. Κατόπιν, αφού υπολογιστούν οι γεωμετρικές σταθερές I_t^S, C_S (βλ. εδάφιο 2.3.4), η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S προσδιορίζεται εφαρμόζοντας την εξ.(2.2.84).

2.3.4 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές

Οι γεωμετρικές σταθερές οι οποίες υπεισέρχονται στο πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ μπορούν να υπολογιστούν με βάση τις αντίστοιχες σχέσεις που έχουν παρουσιαστεί στο εδάφιο 2.2.6. Ωστόσο μετατρέπουμε όλα τα πεδιακά ολοκληρώματα των σχέσεων αυτών σε συνοριακά, εκτός αυτού της σταθεράς $I_{\bar{\phi}}$. Παρατηρείται ότι η διαδικασία αυτή για τις σταθερές $A, \hat{R}_S^P, \hat{R}_S^S, I_P, I_{PP}, I_t^P, C_S$ είναι ταυτόσημη με τη διαδικασία των αντίστοιχων σταθερών που παρουσιάζεται στο εδάφιο 1.3.5, εάν στις σχετικές εξισώσεις τεθεί

$K = I$. Συνεπώς, ο υπολογισμός των σταθερών αυτών με συνοριακά ολοκληρώματα πραγματοποιείται ακολουθώντας την αντίστοιχη διαδικασία του εδαφίου 1.3.5. Σημειώνεται ότι ο αριθμητικός προσδιορισμός των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που υπεισέρχονται στις σχέσεις υπολογισμού των σταθερών αυτών βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου και πραγματοποιείται με αναλυτική ολοκλήρωση.

Ο υπολογισμός της σταθεράς $I_{\bar{\phi}}$ βασίζεται στο πεδιακό ολοκλήρωμα της σχέσης (2.2.58). Ο αριθμητικός προσδιορισμός του ολοκληρώματος αυτού βασίζεται σε πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής και πραγματοποιείται με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss αφού προσδιοριστούν οι συναρτήσεις στρέβλωσης $\phi_S^P, \bar{\phi}_S^S$. Υπογραμμίζεται ότι η πεδιακή διακριτοποίηση απαιτείται μόνο για τον υπολογισμό του συγκεκριμένου ολοκληρώματος και δεν αυξάνει το πλήθος των αγνώστων του προβλήματος. Συνεπώς δεν απαιτείται να υπάρχει ακριβής συναρμογή μεταξύ των επιφανειακών στοιχείων της διακριτοποίησης.

Τέλος, μετά τον υπολογισμό των προαναφερθεισών σταθερών, οι σταθερές I_n και I_t^S υπολογίζονται εφαρμόζοντας τις εξ. (2.2.33α) και (2.2.56), αντίστοιχα.

2.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Με βάση την αναλυτική και αριθμητική διαδικασία που παρουσιάστηκε στα εδάφια 2.2, 2.3 αναφορικά με το πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον, προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου. Η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων ελέγχεται, όπου είναι εφικτό, με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις, οι οποίες στηρίζονται στις ίδιες παραδοχές του εξεταζόμενου προβλήματος (θεωρία στρέψης). Επιπλέον, προκειμένου να διερευνηθεί η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθοδολογίας, τα ληφθέντα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με άλλα, όπως αυτά προκύπτουν με χρήση στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων.

2.4.1 Παράδειγμα 1

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να ποσοτικοποιηθούν τα σφάλματα της $\Theta\Lambda\Delta$ στον υπολογισμό στρεπτικών γεωμετρικών σταθερών ανοικτών διατομών, ως πρώτο παράδειγμα μελετήθηκε πλήθος πρότυπων μεταλλικών ανοικτών διατομών I. Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της κάθε διατομής, αντίστοιχα.

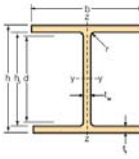
Στους Πίνακες 2.1α,β παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές I_t^S, C_S διάφορων διατομών IPE, HEA και HEB έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (BEM), τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) [Kraus 2007] και τη $\Theta\Lambda\Delta$ [Rubin 2005]. Οι τιμές $\varepsilon_{I_t^S}, \varepsilon_{C_S}$ των πινάκων αντιστοιχούν στην απόκλιση των σχετικών τιμών της $\Theta\Lambda\Delta$ από τις αντίστοιχες τιμές της BEM. Από τους πίνακες αυτούς συμπεραίνεται ότι:

Πίνακας 2.1α. Σταθερές I_t^S και C_S διατομών IPE και HEA του παραδείγματος 1.

Διατομή	$I_t^S (cm^4)$				$C_S (cm^6)$			
	BEM	FEM [Kraus 2007]	ΘΛΔ [Rubin 2005]	$\varepsilon_{I_t^S}$ (%)	BEM	FEM [Kraus 2007]	ΘΛΔ [Rubin 2005]	ε_{C_S} (%)
IPE100 (b/tf=9.6, h/tw=24.4)	126.90	126.9	116.16	8.46	342.13	342.1	351.38	2.70
IPE140 (b/tf=10.6, h/tw=29.8)	396.92	396.92	371.81	6.33	1950.7	1951	1981.4	1.57
IPE180 (b/tf=11.4, h/tw=34.0)	961.77	960.84	897.38	6.69	7322.3	7322	7431.2	1.49
IPE220 (b/tf=12.0, h/tw=37.3)	2028.3	2027.1	1873.74	7.62	22312	22310	22672	1.62
IPE270 (b/tf=13.2, h/tw=40.9)	4220.0	4218.1	3872.59	8.23	69474	69469	70578	1.59
IPE330 (b/tf=13.9, h/tw=44.0)	8512.5	8505.8	7777.24	8.64	196105	196090	199097	1.53
IPE400 (b/tf=13.3, h/tw=46.5)	16604.5	16589.3	15125.0	8.91	482936	482890	490048	1.47
HEA100(b/tf=12.5, h/tw=19.2)	276.67	276.65	258.13	6.70	2475.2	2475	2581.3	4.29
HEA140(b/tf=16.5, h/tw=24.2)	812.94	813.05	768.55	5.46	14728	14729	15064	2.28
HEA180(b/tf=18.9, h/tw=28.5)	1970.4	1969.9	1858.4	5.69	59009	59014	60211	2.04
HEA220(b/tf=20.0, h/tw=30.0)	4236.9	4232.9	3993.1	5.76	189597	189610	193266	1.94
HEA260(b/tf=20.8, h/tw=33.3)	8193.2	8189.3	7638.4	6.77	504942	504990	516352	2.26
HEA300(b/tf=21.4, h/tw=34.1)	14288.2	14277.1	13330.8	6.70	1.17460	1.17470	1.19977	2.14
HEA340(b/tf=18.2, h/tw=34.7)	21606.9	21595.0	20270.7	6.18	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\times 10^6$	1.91
HEA400(b/tf=15.8, h/tw=35.5)	34765.4	34737.3	32689.7	5.97	2.89357	2.89360	2.94208	1.68
HEA500(b/tf=13.0, h/tw=40.8)	66309.4	66267.3	62700.6	5.44	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\times 10^6$	1.32
HEA600(b/tf=12.0, h/tw=45.4)	105451	105385	99757.8	5.40	8.88007	8.87960	8.97820	1.11
HEA700(b/tf=11.1, h/tw=47.6)	156945	156827	148355	5.47	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\times 10^6$	0.96
HEA900(b/tf=10.0, h/tw=55.6)	295740	295712	277350	6.22	2.47526	2.47480	2.49615	0.84
					$\times 10^7$	$\times 10^7$	$\times 10^7$	

- Προκύπτει εξαιρετική συμφωνία μεταξύ των τιμών της BEM και αυτών της FEM [Kraus 2007], διαπιστώνοντας την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου. Η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων είναι 0.10% για τη I_t^S και 0.02% για τη σταθερά C_S .

Πίνακας 2.1β. Σταθερές I_t^S και C_S διατομών HEB του παραδείγματος 1.

Διατομή	$I_t^S (cm^4)$				$C_S (cm^6)$			
	BEM	FEM [Kraus 2007]	ΘΛΔ [Rubin 2005]	$\varepsilon_{I_t^S}$ (%)	BEM	FEM [Kraus 2007]	ΘΛΔ [Rubin 2005]	ε_{C_S} (%)
HEB100(b/tf=10.0, h/tw=16.7)	357.87	357.82	337.50	5.69	3232.3	3233	3375.0	4.42
HEB140(b/tf=11.7, h/tw=20.0)	1199.6	1198.9	1146.9	4.39	21965	21965	22479	2.34
HEB180(b/tf=12.9, h/tw=21.2)	3031.9	3029.4	2893.4	4.57	91722	91728	93746	2.21
HEB220(b/tf=13.8, h/tw=23.2)	6397.9	6394.8	6103.7	4.60	289496	289510	295418	2.05
HEB260(b/tf=14.9, h/tw=26.0)	11790.8	11797.4	11148.7	5.45	736243	736280	753651	2.36
 HEB300(b/tf=15.8, h/tw=27.3)	19843.4	19856.3	18753.2	5.49	1.65092	1.65100	1.68779	2.23
HEB340(b/tf=14.0, h/tw=28.3)	28779.9	28756.4	27262.6	5.27	2.40550	2.40560	2.45363	2.00
HEB400(b/tf=12.5, h/tw=29.6)	44745.2	44698.5	42412.8	5.21	3.75107	3.75110	3.81715	1.76
HEB500(b/tf=10.7, h/tw=34.5)	82009.4	81924.7	77974.4	4.92	6.92085	6.92070	7.01770	1.40
HEB600(b/tf=10.0, h/tw=38.7)	128204	128172	121838	4.97	1.08384	1.08380	1.09654	1.17
HEB700(b/tf=9.4, h/tw=41.2)	188055	187987	178490	5.09	1.59013	1.59000	1.60641	1.02
HEB900(b/tf=8.6, h/tw=48.6)	347707	347461	327348	5.86	2.92004	2.91960	2.94614	0.89

- Τα μέγιστα σφάλματα $\varepsilon_{I_t^S}$ και ε_{C_S} της ΘΛΔ προσεγγίζουν το 9% και 4.5%, αντίστοιχα.

- Το σφάλμα ε_{C_S} της ΘΛΔ εξαρτάται από το πάχος του κορμού και των πελμάτων της διατομής, ωστόσο δεν παρατηρείται κάτι ανάλογο για το σφάλμα $\varepsilon_{I_t^S}$. Επιπρόσθετα, το ε_{C_S} εξαρτάται και από το ύψος του κορμού.
- Σε όλες τις εξετασθείσες περιπτώσεις προκύπτει ότι $\varepsilon_{I_t^S} > \varepsilon_{C_S}$.

Επιπρόσθετα, στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζεται η βοηθητική σταθερά κ (βλ. εξ. (2.2.47)) των εξετασθεισών διατομών έτσι όπως προέκυψε από την προτεινόμενη μέθοδο. Σε όλες τις διατομές η σταθερά κ είναι πολύ κοντά στη μονάδα, συνεπώς αναμένεται η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων να είναι πολύ μικρή σε ράβδους ανοικτής διατομής. Παρατηρείται επίσης ότι η αύξηση του μήκους του κορμού και των πελμάτων (h, b αντίστοιχα) οδηγεί σε αύξηση του κ , ενώ για διατομές IPE, HEA και HEB με περίπου ίδιες διαστάσεις ισχύει $\kappa_{HEB} < \kappa_{HEA} < \kappa_{IPE}$.

Πίνακας 2.2. Βοηθητική σταθερά κ διατομών IPE, HEA, HEB του παραδείγματος 1.

Διατομή	κ	Διατομή	κ	Διατομή	κ
HEA100	0.981	HEB100	0.974	IPE100	0.991
HEA140	0.990	HEB140	0.983	IPE140	0.994
HEA180	0.992	HEB180	0.986	IPE180	0.995
HEA220	0.993	HEB220	0.988	IPE220	0.995
HEA260	0.993	HEB260	0.989	IPE270	0.996
HEA300	0.994	HEB300	0.990	IPE330	0.996
HEA340	0.994	HEB340	0.991	IPE400	0.997
HEA400	0.994	HEB400	0.992		
HEA500	0.995	HEB500	0.993		
HEA600	0.996	HEB600	0.995		
HEA700	0.996	HEB700	0.995		
HEA900	0.997	HEB900	0.996		

2.4.2 Παράδειγμα 2

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να ποσοτικοποιηθούν τα σφάλματα της ΘΛΔ στον υπολογισμό στρεπτικών γεωμετρικών σταθερών κλειστών διατομών, ως δεύτερο παράδειγμα μελετήθηκε πλήθος πρότυπων μεταλλικών κλειστών κοίλων διατομών ορθογωνικού και οβάλ σχήματος. Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της κάθε διατομής, αντίστοιχα.

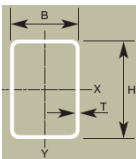

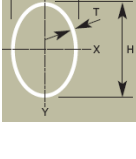
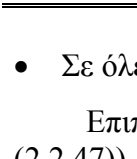
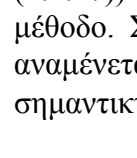


Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές I_t^S , C_S διάφορων διατομών RHS και OHS (βλ. [EN10210-2:2006 2006]) έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (BEM) και τη ΘΛΔ [Rubin 2007]. Στον ίδιο πίνακα εισάγεται και η γεωμετρική σταθερά C_S που προέκυψε από εμπορικό λογισμικό [Nastran 2007]

κάνοντας χρήση 800 τετραπλευρικών πεπερασμένων στοιχείων για την κάθε διατομή. Οι τιμές $\varepsilon_{I_t^S}$, ε_{C_S} του πίνακα αντιστοιχούν στην απόκλιση των σχετικών τιμών της

ΘΛΔ από τις αντίστοιχες τιμές της BEM. Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνεται ότι:

- Προκύπτει εξαιρετική συμφωνία μεταξύ των τιμών C_S της BEM και αυτών της FEM [Nastran 2007], διαπιστώνοντας την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου. Η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων είναι μόλις 2.13% για τις εξετασθείσες διατομές.
- Τα μέγιστα σφάλματα $\varepsilon_{I_t^S}$ και ε_{C_S} της ΘΛΔ προσεγγίζουν το 20% και 17%, αντίστοιχα (βλ. διατομή RHS60x40x5).
- Τα σφάλματα $\varepsilon_{I_t^S}$, ε_{C_S} της ΘΛΔ εξαρτώνται από το πάχος του κορμού και των πελμάτων της διατομής. Παρατηρείται ότι οι τιμές των $\varepsilon_{I_t^S}$, ε_{C_S} της διατομής RHS60x40x5, η οποία θεωρείται λεπτότοιχη ($b/t=8.0$, $h/t=12.0$), είναι υψηλές.

Πίνακας 2.3. Σταθερές I_t^S και C_S διατομών RHS και OHS του παραδείγματος 2.

Διατομή	I_t^S (cm ⁴)				C_S (cm ⁶)			
	BEM	FEM [Nastran 2007]	ΘΛΔ [Rubin 2007]	$\varepsilon_{I_t^S}$ (%)	BEM	FEM [Nastran 2007]	ΘΛΔ [Rubin 2007]	ε_{C_S} (%)
 RHS60x40x5 ($b/t=8.0$, $h/t=12.0$)	2.34	-	1.89	19.25	4.03	3.97	3.36	16.60
 RHS100x60x6.3 ($b/t=9.5$, $h/t=15.9$)	16.80	-	14.7	12.52	80.13	78.75	71.8	10.40
 RHS160x80x6.3 ($b/t=12.7$, $h/t=25.4$)	85.81	-	80.7	5.95	1005.85	1007.43	954	5.15
 RHS250x150x10 ($b/t=15.0$, $h/t=25.0$)	395.61	-	372	5.97	13183.8	13452	12525	5.00
 RHS450x250x8 ($b/t=31.3$, $h/t=56.3$)	2080.72	-	2019	2.97	228416	229843	225114	1.45
 OHS400x200x8 ($b/t=25.0$, $h/t=50.0$)	601.18	-	-	-	31371.1	31757.4	-	-
 OHS400x200x10 ($b/t=20.0$, $h/t=40.0$)	748.64	-	-	-	38407.7	38793.9	-	-
OHS400x200x12.5 ($b/t=16.0$, $h/t=32.0$)	933.73	-	-	-	46831.2	47848.6	-	-
OHS400x200x16 ($b/t=12.5$, $h/t=25.0$)	1200.26	-	-	-	58070.5	57698.0	-	-

- Σε όλες τις εξετασθείσες περιπτώσεις προκύπτει ότι $\varepsilon_{I_t^S} > \varepsilon_{C_S}$.

Επιπρόσθετα, στον Πίνακα 2.4 παρουσιάζεται η βοηθητική σταθερά κ (βλ. εξ. (2.2.47)) των εξετασθεισών διατομών έτσι όπως προέκυψε από την προτεινόμενη μέθοδο. Σε όλες τις διατομές η σταθερά κ είναι πολύ κοντά στο μηδέν, συνεπώς αναμένεται η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων να είναι πολύ σημαντική σε ράβδους κλειστής διατομής. Παρατηρείται επίσης ότι $\kappa_{RHS} \approx \kappa_{OHS}$, η

σταθερά κ των διατομών RHS εξαρτάται τόσο από το σχήμα όσο και από τις διαστάσεις της διατομής, ενώ η επιρροή των ΔΔΠ αυξάνει ελαφρώς στις πιο λεπτότοιχες οβάλ διατομές.

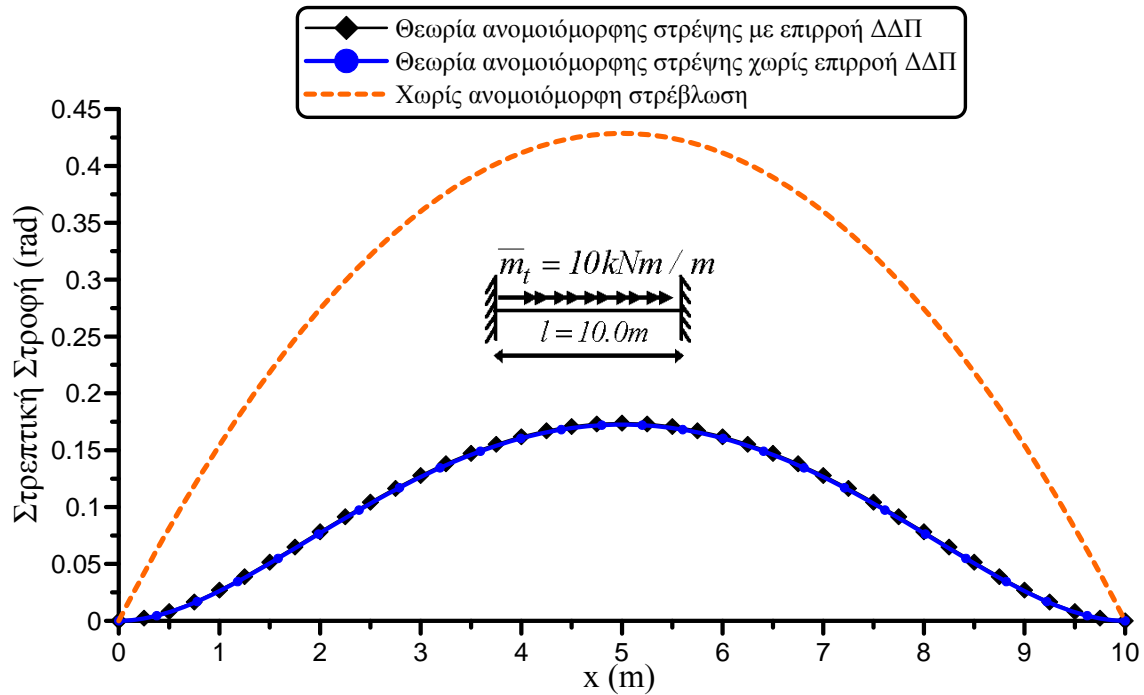
Πίνακας 2.4. Βοηθητική σταθερά κ διατομών RHS και OHS του παραδείγματος 2.

Διατομή	κ	Διατομή	κ
RHS 60x40x5	0.051	OHS 400x200x8	0.050
RHS 100x60x6.3	0.069	OHS 400x200x10	0.051
RHS 160x80x6.3	0.105	OHS 400x200x12.5	0.052
RHS 250x150x10	0.061	OHS 400x200x16	0.054
RHS 450x250x8	0.071		

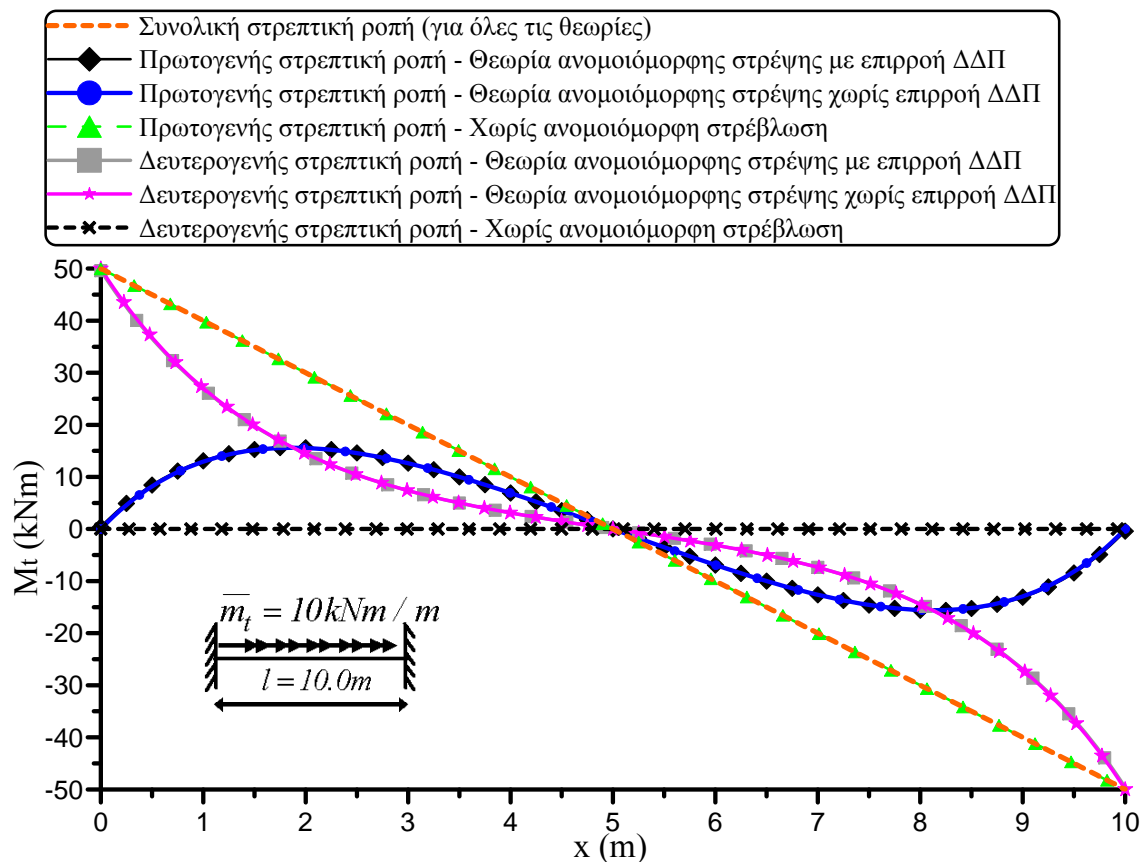
2.4.3 Παράδειγμα 3

Προκειμένου να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους ανοικτής διατομής, ως τρίτο παράδειγμα μελετήθηκε μεταλλική ράβδος ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$) μήκους $l = 10.0 \text{ m}$ με διατομή HEB400 ($I_t^P = 3.611 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, $I_t^S = 4.474 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $C_S = 3.751 \times 10^{-6} \text{ m}^6$) υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένη στρεπτική ροπή ανά μονάδα μήκους $\bar{m}_t = 10 \text{ kNm} / \text{m}$ και της οποίας τα δύο άκρα είναι πακτωμένα. Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα, καθώς και 40 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

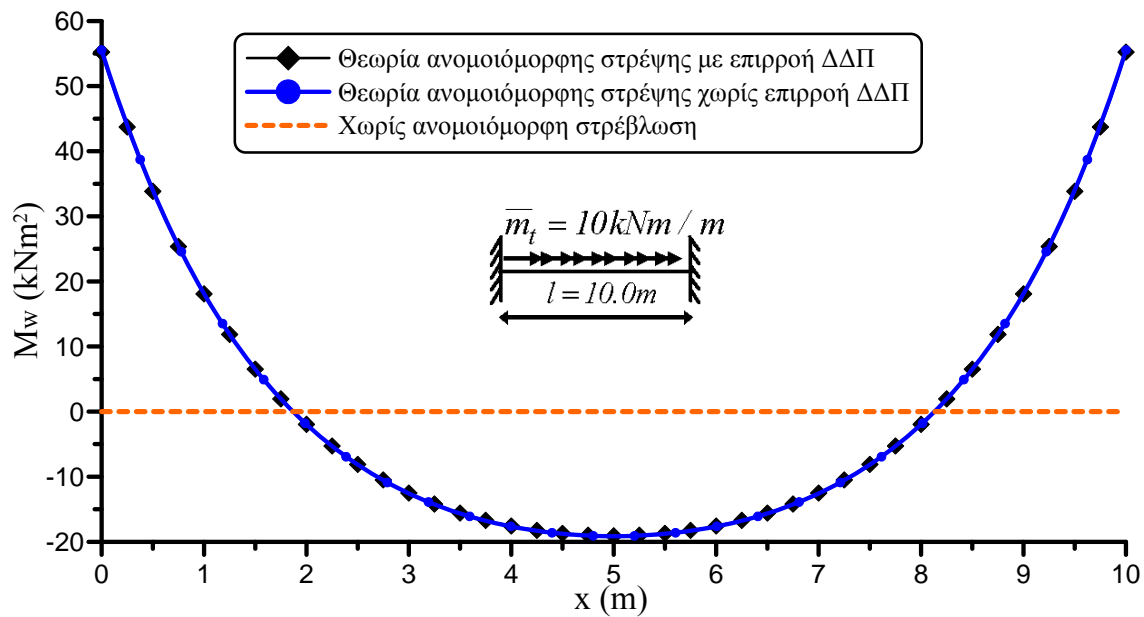
Στα Σχ.2.2, 2.3, 2.4 παρουσιάζονται χαρακτηριστικά κινηματικά και εντατικά μεγέθη κατά μήκος της ράβδου έτσι όπως προέκυψαν από τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ και αγνοώντας την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Παρατηρείται ότι η επιρροή των ΔΔΠ είναι αμελητέα στη στρεπτική στροφή και τα εντατικά μεγέθη της εξεταζόμενης ράβδου. Ωστόσο, αγνοώντας τις ορθές και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις (δηλαδή τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης) οδηγούμαστε σε σημαντική απόκλιση των προαναφερθέντων μεγεθών συγκριτικά με τις άλλες δύο θεωρίες. Συνεπώς, όπως αναμένονταν, επιβεβαιώνεται η αναγκαιότητα συνυπολογισμού των φαινομένων ανομοιόμορφης στρέβλωσης σε ράβδους ανοικτής λεπτότοιχης διατομής, όπως εξάλλου απαιτείται από τον Eurocode 3 - part 1.1 [2005]. Από τα Σχ.2.2, 2.3, 2.4 προκύπτει ότι η αγνόηση των φαινομένων αυτών οδηγεί σε (i) πολύ μικρότερη στρεπτική στιβαρότητα, (ii) ανακριβή προσομοίωση των στρεβλωτικών συντοριακών συνθηκών της ράβδου και σε (iii) αποτυχία να ληφθούν υπόψη οι πραγματικοί μηχανισμοί ανάληψης στρεπτικού φορτίου από τη ράβδο. Τέλος, από την ταύτιση των αποτελεσμάτων των θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ, συμπεραίνουμε επίσης ότι η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς το πρόβλημα του «διατμητικού κλειδώματος» και δεν εισάγεται στη ράβδο παρασιτική στιβαρότητα λόγω διάτμησης.



Σχήμα 2.2. Στρεπτική στροφή κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3.



Σχήμα 2.3. Πρωτογενής, δευτερογενής και συνολική στρεπτική ροπή κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3.



Σχήμα 2.4. Δίγραμμα στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 3.

2.4.4 Παράδειγμα 4

Προκειμένου να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους ανοικτής διατομής, ως τέταρτο παράδειγμα μελετήθηκαν μεταλλικές ράβδοι ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$) διαφόρων μηκών ($l = 5.0\text{m}$, 3.0m , 2.0m , 1.0m , 0.5m) με διατομή HEB100 ($I_t^P = 9.309 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $I_t^S = 3.579 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, $C_S = 3.232 \times 10^{-9} \text{ m}^6$). Το αριστερό άκρο των ράβδων είναι πακτωμένο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται στρεπτική ροπή $\bar{M}_t = 10 \text{ kNm}$ και η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα, καθώς και 40 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της κάθε ράβδου.

Στον Πίνακα 2.5 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών έτσι όπως προέκυψαν από τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ. Όπως αναμενόταν, οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις προκαλούν μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου κατ' αναλογία με την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων σε καμπτόμενες δοκούς Timoshenko. Το φαινόμενο αυτό είναι σημαντικότερο όσο μειώνεται το μήκος της ράβδου. Παρατηρείται επίσης ότι η διαφορά των κινηματικών και εντατικών μεγεθών μεταξύ των δύο θεωριών δεν ξεπερνά το 2.7% για όλα τα μήκη που εξετάστηκαν. Συνεπώς συμπεραίνεται ότι η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους ανοικτής διατομής είναι πολύ μικρή, γεγονός που διαπιστώνεται και στην πρόσφατη ερευνητική βιβλιογραφία [Rubin 2005, Murin and Kutis 2008, Mokos and Sapountzakis 2011]. Επίσης και πάλι προκύπτει ότι η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς το πρόβλημα του «διατμητικού κλειδώματος». Τέλος, η διαφορά του $\max M_t^S$ μεταξύ των δύο θεωριών προκύπτει ανεξάρτητη του μήκους της ράβδου ενώ η αντίστοιχη διαφορά του $\max M_w$ επηρεάζεται ελαφρώς από αυτό.

Πίνακας 2.5. Μέγιστες τιμές των M_w , M_t^S , θ_x των ράβδων του παραδείγματος 4.

Διατομή: HEB100	Ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς επιρροή ΔΔΠ			Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή ΔΔΠ		
	$max M_w$ (kNm^2)	$max M_t^S$ (kNm)	$max \theta_x$ (rad)	$max M_w$ (kNm^2)	$max M_t^S$ (kNm)	$max \theta_x$ (rad)
Μήκος ράβδου (m)						
5.0 (l/b=l/h=50.0)	3.005	10.000	6.250	2.966	9.743	6.256
3.0 (l/b=l/h=30.0)	3.005	10.000	3.590	2.966	9.743	3.596
2.0 (l/b=l/h=20.0)	3.005	10.000	2.260	2.966	9.743	2.266
1.0 (l/b=l/h=10.0)	2.997	10.000	9.314×10^{-1}	2.957	9.743	9.367×10^{-1}
0.5 (l/b=l/h=5.0)	2.797	10.000	2.931×10^{-1}	2.752	9.743	2.990×10^{-1}

2.4.5 Παράδειγμα 5

Προκειμένου να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους ανοικτής διατομής, ως πέμπτο παράδειγμα μελετήθηκαν μεταλλικές ράβδοι ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$) διαφόρων μηκών ($l = 10.0\text{m}$, 5.0m , 4.0m , 3.0m , 2.0m) με διατομή HEA300 ($I_t^P = 8.424 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, $I_t^S = 1.429 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $C_S = 1.174 \times 10^{-6} \text{ m}^6$) υποβαλλόμενες σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή $\bar{M}_t = 10 \text{ kNm}$ στο μέσο τους και των οποίων τα δύο άκρα είναι πακτωμένα. Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα, καθώς και 40 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της κάθε ράβδου.

Στους Πίνακες 2.6α,β παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών έτσι όπως προέκυψαν από τη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ και τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ λαμβάνοντας υπόψη ($k_x < 1$, $I_t^S = 1.429 \times 10^{-4} \text{ m}^4$) ή αγνοώντας ($k_x = 1$, $I_t^S = I_P - I_t^P = 2.448 \times 10^{-4} \text{ m}^4$) το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης k_x . Από τους πίνακες αυτούς συμπεραίνεται ότι:

- Η επιρροή των ΔΔΠ είναι σημαντικότερη στις συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες και συνθήκες φόρτισης συγκριτικά με αυτές του παραδείγματος 4, αναφορικά με τον υπολογισμό της στρεπτικής στρώσης. Παρατηρείται μέγιστη απόκλιση 21.05% μεταξύ των θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ, η οποία παρουσιάζεται στην κοντύτερη ράβδο με λόγο μήκους προς ύψος και λόγο μήκους προς πλάτος ίσους με 6.90 και 6.67, αντίστοιχα. Η αντίστοιχη απόκλιση για τη ράβδο μήκους 5.0m ισούται με 3.78% (λόγο μήκους προς ύψος και λόγο μήκους προς πλάτος ίσους με 16.67 και 17.24, αντίστοιχα).
- Παρατηρείται και πάλι ότι οι ΔΔΠ μειώνουν τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη και το φαινόμενο αυτό είναι μεγαλύτερο όσο μειώνεται το μήκος της ράβδου.
- Προκύπτει και πάλι ότι η διαφορά του $max M_t^S$ μεταξύ των θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ είναι πάρα πολύ μικρή (0.59%) και είναι ανεξάρτητη του μήκους της ράβδου.

- Προκύπτει και πάλι ότι η διαφορά του $\max M_w$ μεταξύ των θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ είναι πάρα πολύ μικρή ενώ επηρεάζεται ελαφρώς από το μήκος της ράβδου.

Πίνακας 2.6α. Μέγιστες τιμές των M_w , M_t^S , θ_x των ράβδων του παραδείγματος 5 με ή χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$.

Διατομή: HEA300	Ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$			Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ ($k_x < I$)		
	$\max M_w$ (kNm^2)	$\max M_t^S$ (kNm)	$\max \theta_x$ (rad)	$\max M_w$ (kNm^2)	$\max M_t^S$ (kNm)	$\max \theta_x$ (rad)
Μήκος ράβδου (m)						
10.0 (l/b=33.33, l/h=34.48)	8.235	5.000	1.254×10^{-1}	8.200	4.971	1.264×10^{-1}
5.0 (l/b=16.67, l/h=17.24)	5.484	5.000	2.252×10^{-2}	5.454	4.971	2.340×10^{-2}
4.0 (l/b=13.33, l/h=13.79)	4.586	5.000	1.217×10^{-2}	4.559	4.971	1.294×10^{-2}
3.0 (l/b=10.00, l/h=10.34)	3.567	5.000	5.368×10^{-2}	3.546	4.971	5.991×10^{-2}
2.0 (l/b=6.67, l/h=6.90)	2.444	5.000	1.644×10^{-3}	2.429	4.971	2.082×10^{-2}

Πίνακας 2.6β. Μέγιστες τιμές των M_w , M_t^S , θ_x των ράβδων του παραδείγματος 5, με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (με $k_x = I$).

Διατομή: HEA300	Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ ($k_x = I$)		
Μήκος ράβδου (m)	$\max M_w$ (kNm^2)	$\max M_t^S$ (kNm)	$\max \theta_x$ (rad)
10.0 (l/b=33.33, l/h=34.48)	8.215	4.983	1.260×10^{-1}
5.0 (l/b=16.67, l/h=17.24)	5.466	4.983	2.304×10^{-2}
4.0 (l/b=13.33, l/h=13.79)	4.570	4.983	1.262×10^{-2}
3.0 (l/b=10.00, l/h=10.34)	3.555	4.983	5.732×10^{-2}
2.0 (l/b=6.67, l/h=6.90)	2.435	4.983	1.900×10^{-3}

- Η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης ($k_x = I$) δεν επηρεάζει ουσιωδώς τα κινηματικά και εντατικά μεγέθη ράβδων ανοικτής διατομής. Η απόκλιση της $\max \theta_x$ μεταξύ των σχετικών θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης με

επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ εξαρτάται από το μήκος της ράβδου και φτάνει το 8.73% για την κοντύτερη ράβδο που εξετάστηκε.

- Η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης ($k_x = 1$) οδηγεί σε ελαφρά αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου συγκριτικά με τη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (με $k_x < 1$). Το φαινόμενο αυτό είναι εμφανέστερο στις κοντύτερες ράβδους.

2.4.6 Παράδειγμα 6

Προκειμένου να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η αξιοπιστία της $\Theta\Lambda\Delta$ στον προσδιορισμό τασικών μεγεθών ράβδων κλειστής διατομής, ως έκτο παράδειγμα μελετήθηκε κλειστή κοίλη λεπτότοιχη διατομή ορθογωνικού σχήματος (συνολικό ύψος $H = 0.62m$, συνολικό πλάτος $B = 0.42m$, πάχος κορμών και πελμάτων $t_w = t_f = 0.02m$) για τρεις περιπτώσεις εντατικών μεγεθών ((i)

$$M_w = -0.00420kNm^2, \text{ (ii) } M_t^P = 0.625kNm, \text{ (iii) } M_t^S = 0.0163kNm).$$

Στον Πίνακα 2.7 δίδονται οι στρεπτικές γεωμετρικές σταθερές της διατομής έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (χρήση 500 και 300 στοιχείων για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα) και τη $\Theta\Lambda\Delta$ [Rubin 2005]. Στον Πίνακα 2.8 παρουσιάζονται χαρακτηριστικά τασικά μεγέθη της προτεινόμενης μεθόδου συγκριτικά με αυτά της $\Theta\Lambda\Delta$ [Rubin 2005], ενώ στα Σχ.2.5, 2.6 απεικονίζονται η κατανομή ορθών τάσεων και οι ροές πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων της προτεινόμενης μεθόδου. Από τον Πίνακα 2.8 και τα Σχ.2.5, 2.6 συμπεραίνεται ότι:

- Παρόλο που η M_t^S (περίπτωση εντατικού μεγέθους (iii)) είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερη από τη M_t^P (περίπτωση εντατικού μεγέθους (ii)), οι πρωτογενείς και οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις είναι της ίδιας τάξης μεγέθους (βλ. και [Rubin 2005, Massonnet 1983]).

Πίνακας 2.7. Γεωμετρικές σταθερές της διατομής του παραδείγματος 6.

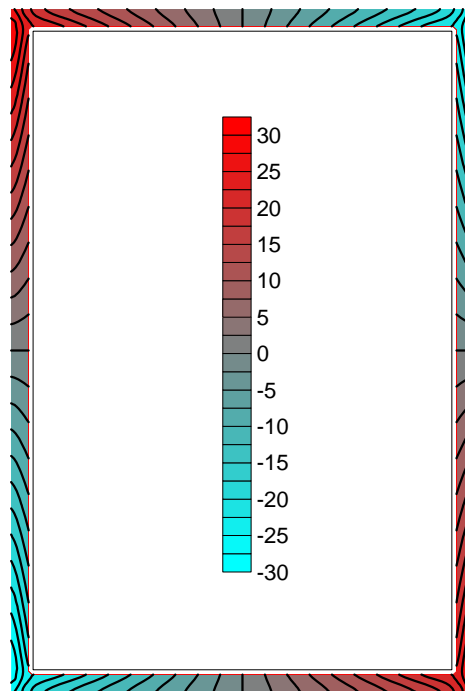
	Προτεινόμενη μέθοδος	$\Theta\Lambda\Delta$ [Rubin 2005]
$I_t^P (m^4)$	2.346×10^{-3}	2.304×10^{-3}
$I_t^S (m^4)$	8.595×10^{-5}	7.784×10^{-5}
$C_S (m^6)$	2.096×10^{-6}	1.920×10^{-6}

- Η μέγιστη τιμή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων παρουσιάζεται στο μέσο των πελμάτων, δηλαδή στη μικρότερη πλευρά της κοίλης ορθογωνικής διατομής.
- Στη μέση γραμμή των τοιχωμάτων που συνθέτουν τη λεπτότοιχη διατομή, η $\Theta\Lambda\Delta$ παρουσιάζει υψηλή ακρίβεια στον υπολογισμό πρωτογενών διατμητικών τάσεων, ενώ παρατηρείται απόκλιση 7.5% από την προτεινόμενη μέθοδο στον υπολογισμό μέγιστων τιμών ορθών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Η απόκλιση αυτή οφείλεται ενδεχομένως στην απόκλιση των γεωμετρικών σταθερών μεταξύ των δύο μεθόδων. Η μεγαλύτερη απόκλιση λαμβάνεται στην τιμή της δευτερογενούς

διατμητικής τάσης στη γωνία της διατομής και ενδεχομένως οφείλεται στην περίπλοκη ροή του τασικού πεδίου στη θέση αυτή (βλ. Σχ.2.6β).

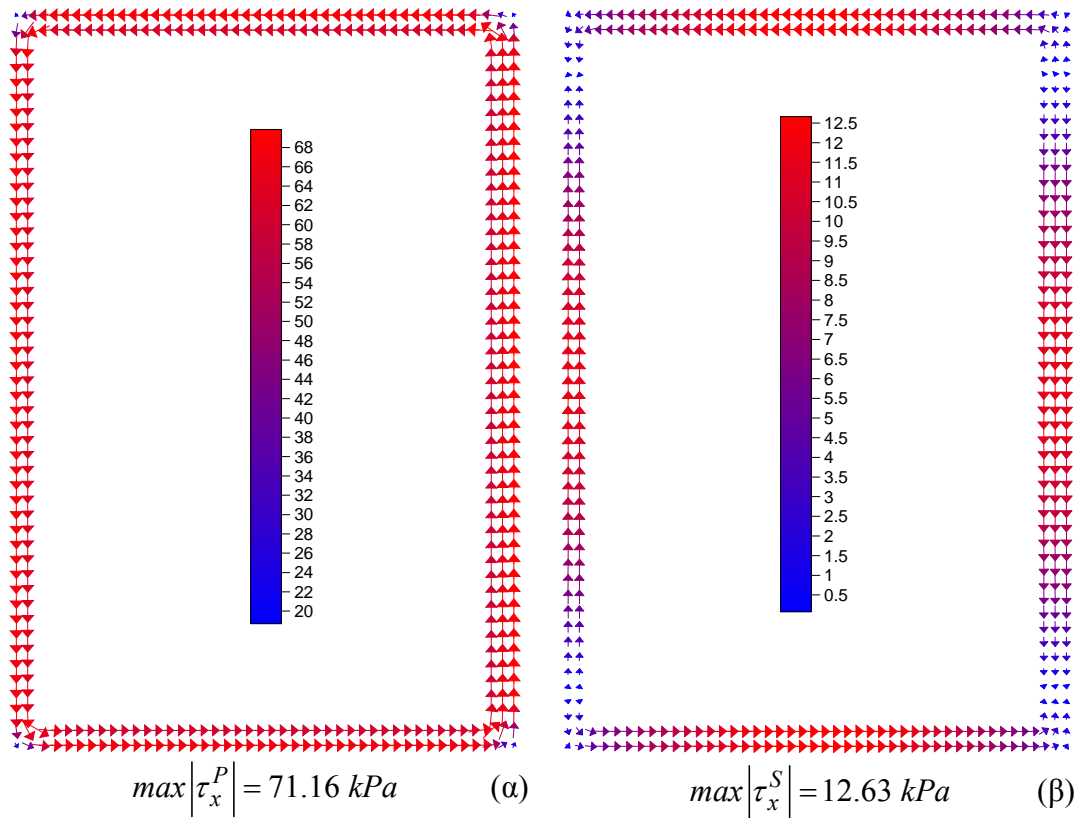
Πίνακας 2.8. Χαρακτηριστικά τασικά μεγέθη (kPa) της διατομής του παραδείγματος 6.

Περίπτωση εντατικού μεγέθους	Τασικά μεγέθη					
	Γωνία	Μέση γραμμική		Εξωτερικό σύνορο		
		Μέσο κορμού	Μέσο πέλματος	Γωνία	Μέσο κορμού	Μέσο πέλματος
(i) (σ_{xx}) Προτεινόμενη μέθοδος ΘΛΔ [Rubin 2005]	24.40	0	0	26.13	0	0
	26.25	0	0	-	-	-
(ii) (τ_x^P) Προτεινόμενη μέθοδος ΘΛΔ [Rubin 2005]	39.09	65.01	64.98	15.98	71.16	69.64
	-	65.10	65.10	-	-	-
(iii) (τ_x^S) Προτεινόμενη μέθοδος ΘΛΔ [Rubin 2005]	2.41	11.51	12.63	0.57	10.84	11.89
	3.40	11.89	13.58	-	-	-



$$\max|\sigma_{xx}| = 30.38 \text{ kPa}$$

Σχήμα 2.5. Κατανομή ορθών τάσεων (kPa) στη διατομή του παραδείγματος 6, για εντατικό μέγεθος $M_w = -0.00420 \text{ kNm}^2$.



Σχήμα 2.6. Ροή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων (kPa) στη διατομή του παραδείγματος 6, για εντατικά μεγέθη $M_t^P = 0.625 \text{ kNm}$ και $M_t^S = 0.0163 \text{ kNm}$, αντίστοιχα.

- Η ΘΛΔ αδυνατεί να προσομοιώσει τη μεταβολή του τασικού πεδίου κατά τη διεύθυνση του πάχους της λεπτότοιχης διατομής. Η μεταβολή αυτή είναι αισθητή (κυρίως στις ορθές τάσεις) παρά το γεγονός ότι η εξεταζόμενη διατομή είναι ιδιαίτερα λεπτότοιχη.
- Οι τιμές των ορθών και των πρωτογενών διατμητικών τάσεων είναι μεγαλύτερες στο εξωτερικό σύνορο της διατομής συγκριτικά με τις αντίστοιχες τιμές στη μέση γραμμή. Το αντίθετο παρατηρείται για τις τιμές των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.

2.4.7 Παράδειγμα 7

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους κλειστής διατομής, ως έβδομο παράδειγμα μελετήθηκε μεταλλική ράβδος ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$) μήκους $l = 5.0 \text{ m}$ με κλειστή κοίλη λεπτότοιχη διατομή ορθογωνικού σχήματος (συνολικό ύψος $H = 1.64 \text{ m}$, συνολικό πλάτος $B = 1.05 \text{ m}$, πάχος κορμών $t_w = 0.05 \text{ m}$ και πελμάτων $t_f = 0.04 \text{ m}$). Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται στρεπτική ροπή $\bar{M}_t = 32 \text{ kNm}$ και η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Υιοθετούνται οι στρεπτικές γεωμετρικές σταθερές που παρουσιάζονται στο σχετικό παράδειγμα της εργασίας των

Murín and Kutis [2008] ($I_t^P = 8.9824 \times 10^{-2} m^4$, $I_t^S = 1.107 \times 10^{-3} m^4$, $C_S = 1.93 \times 10^{-4} m^6$). Χρησιμοποιήθηκαν 31 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Στον Πίνακα 2.9 παρουσιάζονται τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών έτσι όπως προέκυψαν από τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ. Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνεται ότι η στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου δεν επηρεάζεται ουσιωδώς από τις ΔΔΠ, σε αντίθεση με τα εντατικά μεγέθη των οποίων οι σχετικές τιμές, σε ορισμένες περιπτώσεις διαφέρουν παραπάνω από μία τάξη μεγέθους. Στον ίδιο πίνακα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM [Murín and Kutis 2008]. Παρατηρείται εξαιρετική συμφωνία μεταξύ των αντίστοιχων κινηματικών και εντατικών μεγεθών της Πεδιακής BEM και της FEM, επιβεβαιώνοντας την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου.

Πίνακας 2.9. Μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών της ράβδου του παραδείγματος 7.

	Με ΔΔΠ				Χωρίς ΔΔΠ	
	$x = 0$		$x = l$		$x = 0$	$x = l$
	FEM [Murín and Kutis 2008]	Προτεινό- μενη μέθοδος - Πεδιακή BEM	FEM [Murín and Kutis 2008]	Προτεινό- μενη μέθοδος - Πεδιακή BEM	Προτεινόμενη μέθοδος - Πεδιακή BEM	
$M_t^P (Nm)$	31610.4	31610.2	31999.5	31999.5	0	32000.1
$M_t^S (Nm)$	389.6	389.6	0.5	0.5	32000.0	-0.1
$M_w (Nm^2)$	263.95	264.14	0	0	2397.12	0
$\theta_x (rad)$	0	0	2.20×10^{-5}	2.20×10^{-5}	0	2.17×10^{-5}
$\eta_x (m^{-1})^*$	0	0	4.40×10^{-6}	4.41×10^{-6}	0	4.41×10^{-6}

*Όταν αγνοούνται οι ΔΔΠ, τίθεται όπου $\eta_x = \theta'_x$.

2.4.8 Παράδειγμα 8

Προκειμένου να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους κλειστής διατομής, ως όγδοο παράδειγμα μελετήθηκε μεταλλική ράβδος ($E = 2.1 \times 10^8 kN / m^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 kN / m^2$) μήκους $l = 10.0m$ με διατομή RHS450x250x8 ($I_t^P = 2.708 \times 10^{-4} m^4$, $I_t^S = 2.081 \times 10^{-5} m^4$, $C_S = 2.284 \times 10^{-7} m^6$). Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται στρεπτική ροπή $\bar{M}_t = 10 kNm$ και η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα, καθώς και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Στον Πίνακα 2.10 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών έτσι όπως προέκυψαν από τις θεωρίες

ανομοιόμορφης στρέψης με ή χωρίς επιρροή ΔΔΠ και αγνοώντας την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνεται ότι:

- Σε όλες τις θεωρίες υπολογίζονται σχεδόν ταυτόσημα κινηματικά μεγέθη. Συνεπώς, η στρεπτική στιβαρότητα ράβδων κλειστής διατομής δεν επηρεάζεται ουσιαδώς από φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης και ΔΔΠ. Και πάλι παρατηρείται ότι οι ΔΔΠ μειώνουν ελαφρά τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
- Η μέγιστη τιμή της M_t^P είναι ταυτόσημη και στις τρεις περιπτώσεις. Ωστόσο, στο πακτωμένο άκρο, όπου η M_t^S και το M_w λαμβάνουν μέγιστες τιμές, τα αποτελέσματα διαφέρουν αισθητά. Παρατηρείται ότι η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ προβλέπει πολύ μεγάλες τιμές των $\max M_t^S$, $\max M_w$. Το $\max M_t^S$ οδηγεί στον προσδιορισμό μη ρεαλιστικών τιμών δευτερογενών διατμητικών τάσεων ενώ το $\max M_w$ οδηγεί σε πολύ μεγάλες τιμές ορθών τάσεων. Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, συμπεραίνεται ότι οι ΔΔΠ επηρεάζουν αισθητά τα εντατικά μεγέθη ράβδων κλειστής διατομής και συνεπώς δεν πρέπει να αγνοούνται στην ανάλυσή τους. Έτσι, προτείνεται να χρησιμοποιείται η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ στην ανάλυση τέτοιων ράβδων ή απλοποιητικά να αγνοείται η επιρροή τόσο των ΔΔΠ όσο και της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, όπως εξάλλου επιτρέπεται από τη σχετική οδηγία του Eurocode 3 - part 1.1 [2005].

Πίνακας 2.10. Μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών της ράβδου του παραδείγματος 8.

Μέγιστη τιμή μεγέθους	Χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης	Ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς επιρροή ΔΔΠ	Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή ΔΔΠ	Απόκλιση (%) μεταξύ ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς και με επιρροή ΔΔΠ
$\theta_x (rad)$	4.571×10^{-3}	4.551×10^{-3}	4.566×10^{-3}	0.33
$\theta'_x (rad / m)$	4.571×10^{-4}	4.571×10^{-4}	4.571×10^{-4}	0.00
$(\theta'_x)^P (rad / m)$	-	-	4.571×10^{-4}	-
$M_t^P (kNm)$	10	10	10	0.00
$M_t^S (kNm)$	0	10	7.133×10^{-1}	1301.98
$M_w (kNm^2)$	0	4.779×10^{-1}	1.257×10^{-1}	280.24

2.4.9 Παράδειγμα 9

Προκειμένου να διερευνηθεί στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης η επιρροή των ΔΔΠ σε ράβδους κλειστής διατομής, ως ένατο παράδειγμα μελετήθηκαν διάφορες μεταλλικοί ράβδοι ($E = 2.1 \times 10^8 kN / m^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 kN / m^2$) με διατομή (i) RHS 160x80x6.3 ($I_t^P = 7.230 \times 10^{-6} m^4$, $I_t^S = 8.581 \times 10^{-7} m^4$,

$C_S = 1.006 \times 10^{-9} m^6$), (ii) RHS 100x60x6.3 ($I_t^P = 2.250 \times 10^{-6} m^4$, $I_t^S = 1.680 \times 10^{-7} m^4$, $C_S = 8.013 \times 10^{-11} m^6$) και (iii) OHS 400x200x8 ($I_t^P = 1.151 \times 10^{-4} m^4$, $I_t^S = 6.012 \times 10^{-6} m^4$, $C_S = 3.137 \times 10^{-8} m^6$). Οι ράβδοι με διατομή RHS 160x80x6.3 έχουν μήκη $l = 10.0m, 5.0m, 3.0m, 2.0m, 1.0m, 0.5m$, το αριστερό τους άκρο είναι πακτωμένο ενώ στο δεξιό τους άκρο ασκείται στρεπτική ροπή $\bar{M}_t = 10kNm$ και η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Οι ράβδοι με διατομή RHS 100x60x6.3 έχουν μήκη $l = 10.0m, 5.0m, 3.0m, 2.0m, 1.0m, 0.5m$, στο μέσο τους ασκείται στρεπτική ροπή $\bar{M}_t = 10kNm$ και τα άκρα τους είναι πακτωμένα. Οι ράβδοι με διατομή OHS 400x200x8 έχουν μήκη $l = 10.0m, 5.0m, 3.0m, 2.0m$, ασκείται σε αυτές ομοιόμορφα κατανεμημένη στρεπτική ροπή $\bar{m}_t = 10kNm/m$ και τα άκρα τους είναι πακτωμένα. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της κάθε διατομής, αντίστοιχα, καθώς και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της κάθε ράβδου.

Στους Πίνακες 2.11, 2.12, 2.13 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών μεγεθών έτσι όπως προέκυψαν από τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ και αγνοώντας την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Από τους πίνακες αυτούς συμπεραίνεται ότι οι δύο θεωρίες προβλέπουν σχεδόν την ίδια στρεπτική στροφή.

Προκειμένου να προσδιοριστεί η αξιοπιστία της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ αλλά και να διερευνηθεί η αναγκαιότητα συνυπολογισμού του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης στο πρόβλημα, ορισμένες από τις ράβδους που εξετάστηκαν πιο πριν αναλύθηκαν με εμπορικό λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007]. Στον Πίνακα 2.14 διακρίνεται ο τύπος και το πλήθος των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι ράβδοι που μελετήθηκαν. Στο Σχ.2.7 απεικονίζεται η διακριτοποίηση του πακτωμένου αριστερού άκρου της ράβδου μήκους $l = 1.0m$ με διατομή RHS 160x80x6.3 που προσομοιώθηκε με κελυφωτά πεπερασμένα στοιχεία. Στον Πίνακα 2.15 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές της στρεπτικής στροφής έτσι όπως προέκυψαν αγνοώντας την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, από τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ λαμβάνοντας υπόψη ($k_x < 1$) ή αγνοώντας ($k_x = 1$) τον k_x και από τη FEM [Nastran 2007]. Στην περίπτωση όπου $k_x = 1$, ισχύει $I_t^S = I_P - I_t^P = 4.695 \times 10^{-6} m^4, 9.759 \times 10^{-7} m^4, 4.148 \times 10^{-5} m^4$ για τις ράβδους με διατομή RHS 160x80x6.3, RHS 100x60x6.3 και OHS 400x200x8, αντίστοιχα. Παρατηρείται αξιοσημείωτη συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ και της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων, ενώ η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης επηρεάζει αμελητέα τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων κλειστής διατομής.

Στον Πίνακα 2.16 δίδονται χαρακτηριστικά τασικά μεγέθη έτσι όπως προέκυψαν αγνοώντας την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, από τις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ λαμβάνοντας υπόψη ($k_x < 1$) ή αγνοώντας ($k_x = 1$, εφαρμογή των εξ.(2.2.30) για τον υπολογισμό των τασικών μεγεθών) τον k_x και από τη FEM [Nastran 2007]. Τα μεγέθη αυτά παρουσιάζονται σε σημείο του εξωτερικού συνόρου της ράβδου με $x = 0.03m, y = 0$ (βλ. Σχ.2.1β). Το σημείο αυτό διακρίνεται στο Σχ.2.8 όπου απεικονίζεται επίσης η κατανομή τάσεων Von Mises στο εξωτερικό σύνορο της περιοχής του πακτωμένου αριστερού άκρου της ράβδου μήκους

$l = 1.0m$ με διατομή RHS 160x80x6.3 που προσομοιώθηκε με κελυφωτά πεπερασμένα στοιχεία. Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνεται ότι:

- Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις είναι σχεδόν τις ίδιας τάξης μεγέθους με τις πρωτογενείς (βλ. επίσης τον Πίνακα 2.8, το Σχ.2.6 και τις εργασίες των Rubin [2005] και Massonnet [1983]).

Πίνακας 2.11. Μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών μεγεθών των ράβδων με διατομή RHS160x80x6.3 του παραδείγματος 9.

Μήκος ράβδου (m)	Μέγιστη τιμή μεγέθους	Χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης	Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή ΔΔΠ	Απόκλιση (%)
10.0 (l/b=125, l/h=62.5)	$\theta_x (rad)$	1.696×10^{-1}	1.695×10^{-1}	0.063
	$\theta'_x (rad / m)$	1.696×10^{-2}	1.696×10^{-2}	0.001
	$(\theta_x^P)' (rad / m)$	-	1.696×10^{-2}	-
5.0 (l/b=62.5, l/h=31.2)	$\theta_x (rad)$	8.481×10^{-2}	8.470×10^{-2}	0.124
	$\theta'_x (rad / m)$	1.696×10^{-2}	1.696×10^{-2}	0.001
	$(\theta_x^P)' (rad / m)$	-	1.696×10^{-2}	-
3.0 (l/b=37.5, l/h=18.8)	$\theta_x (rad)$	5.088×10^{-2}	5.078×10^{-2}	0.205
	$\theta'_x (rad / m)$	1.696×10^{-2}	1.696×10^{-2}	0.001
	$(\theta_x^P)' (rad / m)$	-	1.696×10^{-2}	-
2.0 (l/b=25.0, l/h=12.5)	$\theta_x (rad)$	3.392×10^{-2}	3.382×10^{-2}	0.308
	$\theta'_x (rad / m)$	1.696×10^{-2}	1.696×10^{-2}	0.001
	$(\theta_x^P)' (rad / m)$	-	1.696×10^{-2}	-
1.0 (l/b=12.5, l/h=6.25)	$\theta_x (rad)$	1.696×10^{-2}	1.686×10^{-2}	0.618
	$\theta'_x (rad / m)$	1.696×10^{-2}	1.696×10^{-2}	0.001
	$(\theta_x^P)' (rad / m)$	-	1.696×10^{-2}	-
0.5 (l/b=6.25, l/h=3.13)	$\theta_x (rad)$	8.481×10^{-3}	8.376×10^{-3}	1.243
	$\theta'_x (rad / m)$	1.696×10^{-2}	1.696×10^{-2}	0.004
	$(\theta_x^P)' (rad / m)$	-	1.695×10^{-2}	-

- Η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ (λαμβάνοντας υπόψη τον k_x) παρουσιάζει ικανοποιητική συμφωνία με τη FEM (προσομοιώσεις τόσο με κελυφωτά όσο και με στερεά πεπερασμένα στοιχεία) αναφορικά με τον

προσδιορισμό τάσεων Von Mises. Συνεπώς, καταδεικνύεται η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου.

Πίνακας 2.12. Μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών μεγεθών των ράβδων με διατομή RHS100x60x6.3 του παραδείγματος 9.

Μήκος ράβδου (m)	Μέγιστη τιμή μεγέθους	Χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης	Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή ΔΔΠ	Απόκλιση (%)
10.0 (l/b=166.67, l/h=100.0)	$\theta_x (rad)$	1.373×10^{-1}	1.374×10^{-1}	0.102
	$\theta'_x (rad / m)$	3.066×10^{-2}	2.751×10^{-2}	11.438
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.751×10^{-2}	-
5.0 (l/b=83.33, l/h=50.0)	$\theta_x (rad)$	6.863×10^{-2}	6.863×10^{-2}	0.007
	$\theta'_x (rad / m)$	3.066×10^{-2}	2.751×10^{-2}	11.438
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.751×10^{-2}	-
3.0 (l/b=50.0, l/h=30.0)	$\theta_x (rad)$	4.118×10^{-2}	4.113×10^{-2}	0.125
	$\theta'_x (rad / m)$	3.066×10^{-2}	2.751×10^{-2}	11.438
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.751×10^{-2}	-
2.0 (l/b=33.33, l/h=20.0)	$\theta_x (rad)$	2.745×10^{-2}	2.737×10^{-2}	0.293
	$\theta'_x (rad / m)$	3.066×10^{-2}	2.751×10^{-2}	11.438
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.751×10^{-2}	-
1.0 (l/b=16.67, l/h=10.0)	$\theta_x (rad)$	1.373×10^{-2}	1.362×10^{-2}	0.805
	$\theta'_x (rad / m)$	3.066×10^{-2}	2.751×10^{-2}	11.454
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.745×10^{-2}	-
0.5 (l/b=8.33, l/h=5.0)	$\theta_x (rad)$	6.863×10^{-2}	6.739×10^{-2}	1.844
	$\theta'_x (rad / m)$	3.066×10^{-2}	2.739×10^{-2}	11.944
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.572×10^{-2}	-

- Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, η αγνόηση της επιρροής της ανομοιόμορφης στρέβλωσης οδηγεί σε υποεκτίμηση των μέγιστων τιμών τάσεων Von Mises που προσδιορίζονται από τη FEM (προσομοιώσεις τόσο με κελυφωτά όσο και με στερεά πεπερασμένα στοιχεία). Στις ράβδους με διατομή RHS 160x80x6.3 ή RHS 100x60x6.3 παρουσιάζεται **σχετική απόκλιση 7%**, η οποία δεν επηρεάζεται σημαντικά από το μήκος της ράβδου, ενώ η σχετική απόκλιση στις

ράβδους με διατομή OHS 400x200x8 είναι μεγαλύτερη. Επιπρόσθετα, σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (λαμβάνοντας υπόψη τον k_x) οδηγεί σε συντηρητικές εκτιμήσεις των μέγιστων τιμών τάσεων Von Mises (που προσδιορίζονται από τη FEM).

Πίνακας 2.13. Μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών μεγεθών των ράβδων με διατομή OHS400x200x8 του παραδείγματος 9.

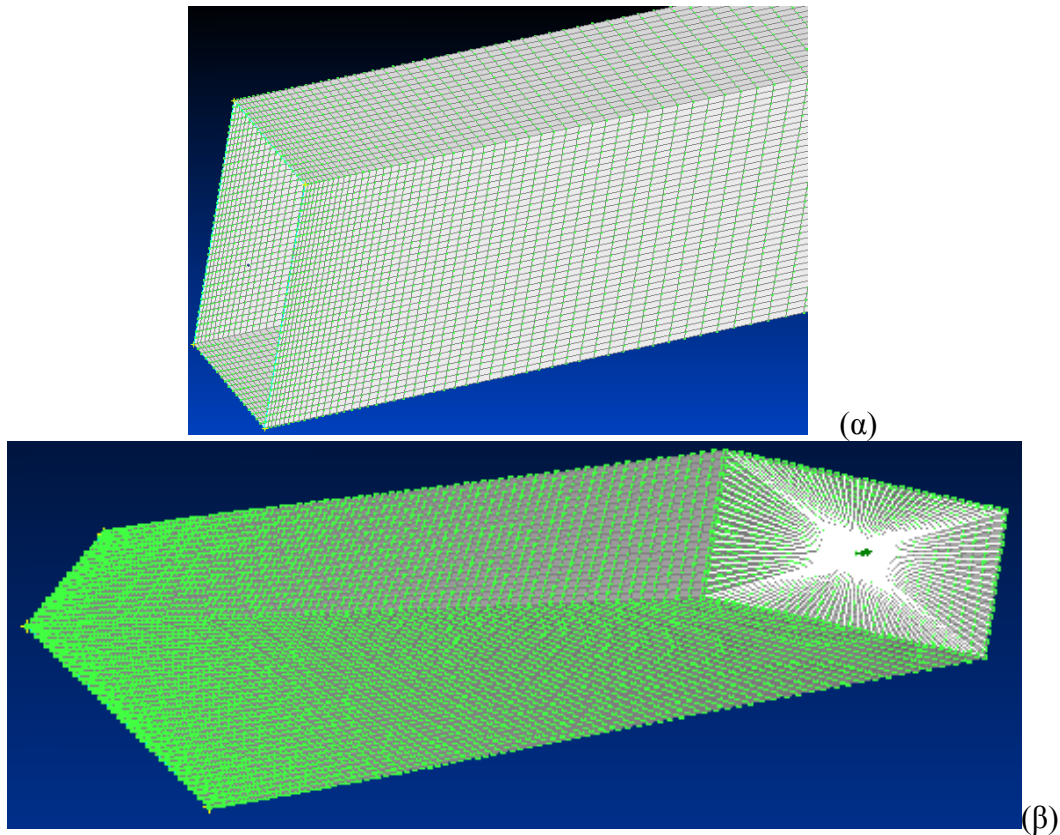
Μήκος ράβδου (m)	Μέγιστη τιμή μεγέθους	Χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης	Ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$	Απόκλιση (%)
10.0 (l/b=25, l/h=50.0)	θ_x (rad)	1.344×10^{-2}	1.341×10^{-2}	0.240
	θ'_x (rad / m)	5.370×10^{-3}	5.154×10^{-3}	4.190
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	4.772×10^{-3}	-
5.0 (l/b=12.5, l/h=25.0)	θ_x (rad)	3.360×10^{-3}	3.344×10^{-3}	0.478
	θ'_x (rad / m)	2.685×10^{-3}	2.555×10^{-3}	5.096
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	2.169×10^{-3}	-
3.0 (l/b=7.5, l/h=15.0)	θ_x (rad)	1.210×10^{-3}	1.200×10^{-3}	0.798
	θ'_x (rad / m)	1.611×10^{-3}	1.533×10^{-3}	5.097
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	1.160×10^{-3}	-
2.0 (l/b=5.0, l/h=12.5)	θ_x (rad)	5.376×10^{-4}	5.313×10^{-4}	1.200
	θ'_x (rad / m)	1.074×10^{-3}	1.022×10^{-3}	5.096
	$(\theta_x^P)'$ (rad / m)	-	6.739×10^{-4}	-

- Η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης ($k_x = 1$) υπερεκτιμά σημαντικά τις τιμές τάσεων Von Mises που προσδιορίζονται από τη FEM (προσομοιώσεις τόσο με κελυφωτά όσο και με στερεά πεπερασμένα στοιχεία). Τούτο καταδεικνύει την αναγκαιότητα συνυπολογισμού του k_x στον προσδιορισμό τασικών μεγεθών ράβδων κλειστής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη.

2.4.10 Παράδειγμα 10

Προκειμένου να διερευνηθούν φαινόμενα γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$, ως δέκατο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος με λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή του πρώτου παραδείγματος του κεφ. 1 (βλ. εδάφιο 1.4.1). Χρησιμοποιήθηκαν 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση τόσο του συνόρου όσο και της επιφάνειας της διατομής και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση

του άξονα της ράβδου (οι σταθερές A , I_P , I_{PP} , I_t^P , C_S παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1 του κεφ. 1, $I_t^S = 5.5156 \times 10^{-6} \text{ m}^4$).



Σχήμα 2.7. Διακριτοποίηση της περιοχής του πακτωμένου αριστερού άκρου της ράβδου μήκους $l = 1.0 \text{ m}$ με διατομή RHS 160x80x6.3 του παραδείγματος 9 (α) και παραμορφωμένη διαμόρφωση της ράβδου αυτής (β).

Πίνακας 2.14. Τύπος και πλήθος πεπερασμένων στοιχείων στις αναλύσεις με FEM του παραδείγματος 9.

Διατομή	Μήκος ράβδου (m)	Πλήθος στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων	Πλήθος κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων
RHS 160x80x6.3	5	23400	11200
	1	23400	11200
RHS 100x60x6.3	2	-	23200
	1	-	23200
OHS 400x200x8	5	-	19200

Στον Πίνακα 2.17 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή στο μέσο της ράβδου για διάφορες τιμές φόρτισης έτσι όπως προκύπτει από την παρούσα μέθοδο και τη θεωρία ανομοιομόρφους στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ (βλ. κεφ. 1). Συμπεραίνεται ότι η επιρροή των ΔΔΠ είναι αμελητέα γεγονός που αποδίδεται στη γεωμετρία της διατομής (η

βοηθητική σταθερά κ της διατομής ισούται με $\kappa = 0.988$, βλ. και [Mokos and Sarountzakis 2011]), ενώ η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος». Τέλος, όπως αναμενόταν, παρατηρείται αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας.

Πίνακας 2.15. Μέγιστη τιμή στρεπτικής στροφής των ράβδων του παραδείγματος 9.

Διατομή	Μήκος ράβδου (m)	$max \theta_x (rad)$				
		FEM - στερεά στοιχεία [Nastran 2007]	FEM - κελυφωτά στοιχεία [Nastran 2007]	Χωρίς επιρροή ανομ. στρέβλωσης	Ανομ. στρέψη με επιρροή ΔΔΠ ($k_x < 1$)	Ανομ. στρέψη με επιρροή ΔΔΠ ($k_x = 1$)
RHS 160x80x6.3	5	8.454×10^{-2}	8.663×10^{-2}	8.481×10^{-2}	8.470×10^{-2}	8.460×10^{-2}
	1	1.686×10^{-2}	1.727×10^{-2}	1.696×10^{-2}	1.686×10^{-2}	1.676×10^{-2}
RHS 100x60x6.3	2	-	2.822×10^{-2}	2.745×10^{-2}	2.737×10^{-2}	2.721×10^{-2}
	1	-	1.407×10^{-2}	1.373×10^{-2}	1.362×10^{-2}	1.346×10^{-2}
OHS 400x200x8	5	-	3.251×10^{-3}	3.360×10^{-3}	3.344×10^{-3}	3.323×10^{-3}

2.4.11 Παράδειγμα 11

Προκειμένου να διερευνηθεί η στρεπτική μεταλυγισμική συμπεριφορά ράβδων με επιρροή ΔΔΠ, ως ενδέκατο παράδειγμα μελετήθηκε μεταλλική ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G = 8.077 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$) ράβδος μήκους $l = 4.0 \text{ m}$ με διατομή I (συνολικό ύψος $H = 0.3 \text{ m}$, συνολικό πλάτος $B = 0.15 \text{ m}$, πάχος κορμού $t_w = 0.0071 \text{ m}$, πάχος πελμάτων $t_f = 0.0107 \text{ m}$, $A = 5.1881 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $I_t^P = 1.5283 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, $I_t^S = 5.6518 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $C_S = 1.2591 \times 10^{-7} \text{ m}^6$, $I_P = 8.6017 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I_{PP} = 1.8305 \times 10^{-6} \text{ m}^6$, $I_n = 4.0440 \times 10^{-7} \text{ m}^6$). Τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα ενώ η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αμετακίνητο κατά την αξονική διεύθυνση ($u_m(0) = 0$) ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται θλιπτικό αξονικό φορτίο \bar{N} . Χρησιμοποιήθηκαν 500 και 300 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα, καθώς και 50 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Για τις συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες, οι Mohri et al. [2001], υποθέτοντας ότι η στρεπτική στροφή της ράβδου ακολουθεί ημιτονική κατανομή κατά μήκος της ράβδου ($\theta_x = \theta_0 \sin(\pi x / l)$, όπου $\theta_0 = \theta_x(l/2)$) και αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ, προτείνουν την ακόλουθη αναλυτική έκφραση προσδιορισμού της στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου θ_0

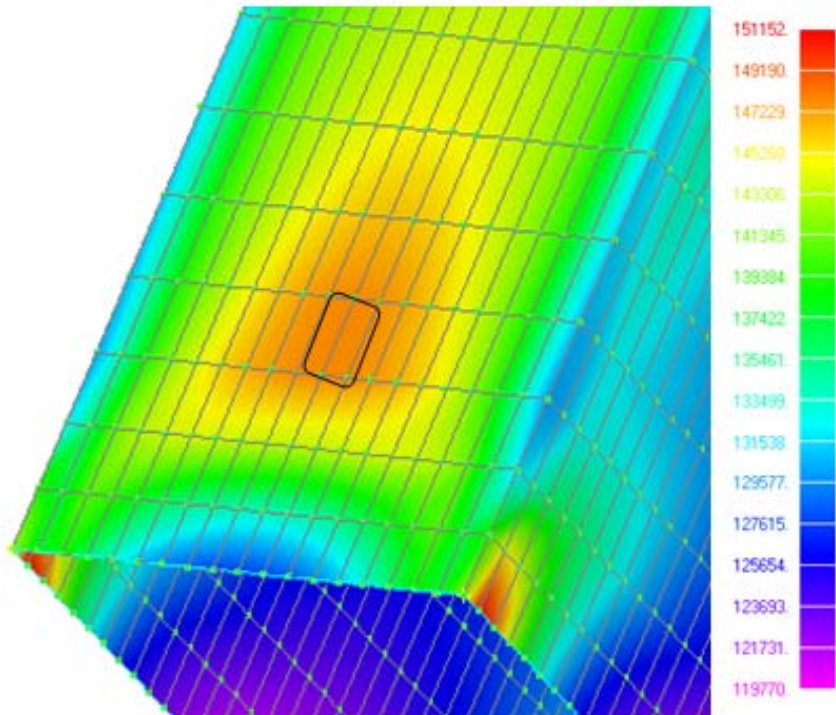
$$\theta_0(l/2) = \begin{cases} 0, & \text{προλογισμική περιοχή} \\ \pm \sqrt{\frac{8l^2}{3\pi^2} \frac{I_P}{EAI_n} (\bar{N} - \bar{N}_{cr,\theta})}, & \text{μεταλογισμική περιοχή} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

όπου $\bar{N}_{cr,\theta}$ είναι το φορτίο στρεπτικού λυγισμού, το οποίο δίδεται ως [Mohri et al. 2001]

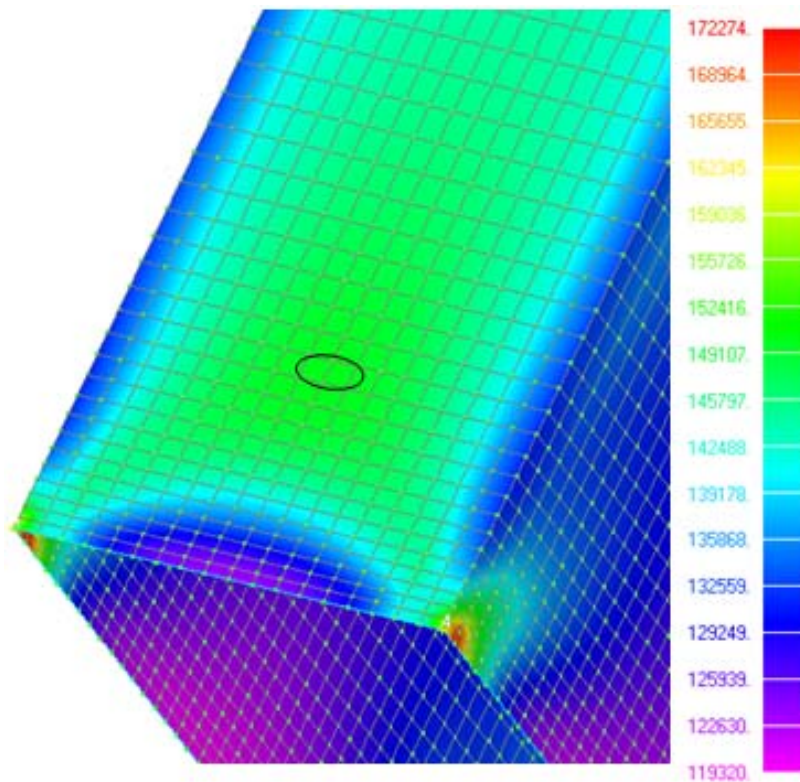
$$\bar{N}_{cr,\theta} = \frac{A}{I_P} \left(\frac{\pi^2 EC_S}{l^2} + GI_t^P \right) \quad (2.4.2)$$

Πίνακας 2.16. Χαρακτηριστικές τιμές τασικών μεγεθών των ράβδων του παραδείγματος 9.

Διατομή	Μήκος ράβδου (M)	Τάσεις (kPa)	Χωρίς επιρροή ανομ. στρέβλωσης	Ανομ. στρέψη με επιρροή ΔΔΠ ($k_x < 1$)	Ανομ. στρέψη με επιρροή ΔΔΠ ($k_x = 1$)	FEM - στερεά στοιχεία [Nastran 2007]	FEM - κελυφωτά στοιχεία [Nastran 2007]
RHS 160x80x6.3	5m	σ_{VM}	138637	155538	165782	146858	148357
		τ_x	80042	89799	95714	84772	85633
		τ_x^P	80042	76492	74339	-	-
	1m	σ_{VM}	138637	155646	167147	147234	148337
		τ_x	80042	89862	96502	84990	85623
		τ_x^P	80042	76469	74052	-	-
RHS 100x60x6.3	2m	σ_{VM}	162277	183174	213898	-	174285
		τ_x	93690	105756	123494	-	100621
		τ_x^P	93690	89933	83962	-	-
	1m	σ_{VM}	162277	183203	214553	-	174145
		τ_x	93690	105772	123872	-	100540
		τ_x^P	93690	99928	84690	-	-
OHS 400x200x8	5m	σ_{VM}	48516	56816	75979	-	54197
		τ_x	28011	32803	43864	-	31259
		τ_x^P	28011	26537	24663	-	-



(α)

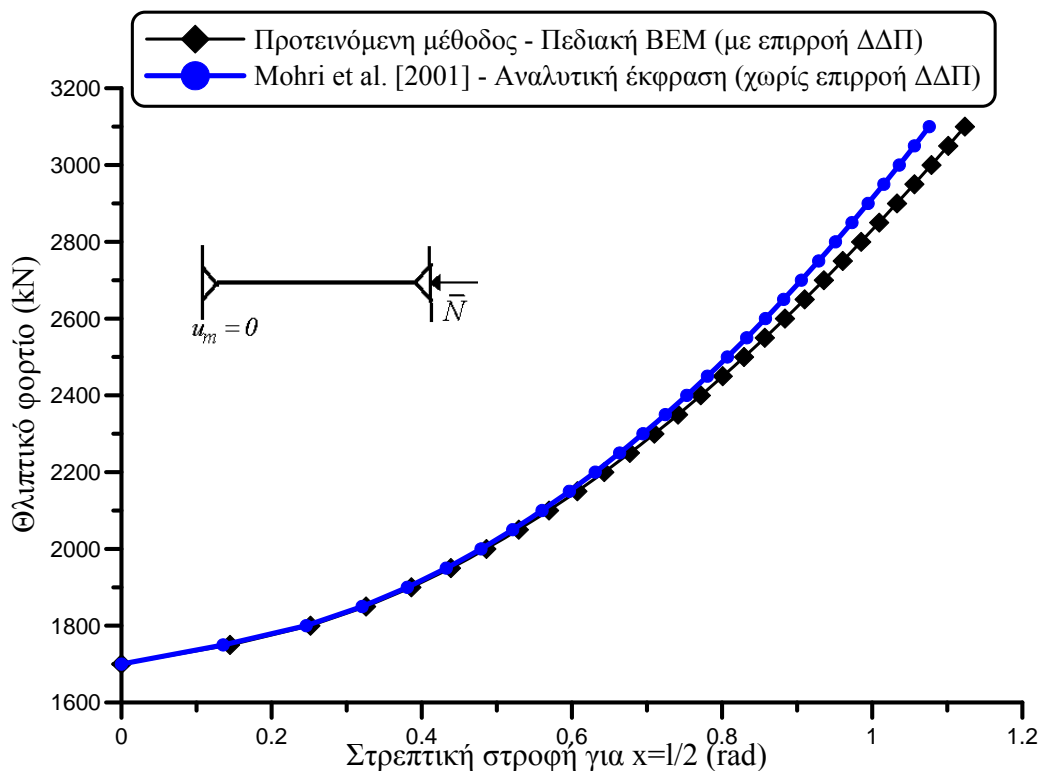


(β)

Σχήμα 2.8. Κατανομή (kPa) τάσεων Von Mises στο εξωτερικό σύνορο της περιοχής του πακτωμένου αριστερού άκρου της ράβδου διατομής RHS 160x80x6.3 με μήκος $l = 5.0m$ (α) και $l = 1.0m$ (β) του παραδείγματος 9.

Πίνακας 2.17. Στρεπτική στρόφι θ_x (rad) στο μέσο της ράβδου του παραδείγματος 10 για διάφορες τιμές φόρτισης.

m_t	Ανομ. στρέψη χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (κεφ. 1)	Ανομ. στρέψη με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$
10	0.2114	0.2086
20	0.3618	0.3582
30	0.4741	0.4703
40	0.5643	0.5606
50	0.6403	0.6366
60	0.7063	0.7027
70	0.7650	0.7614



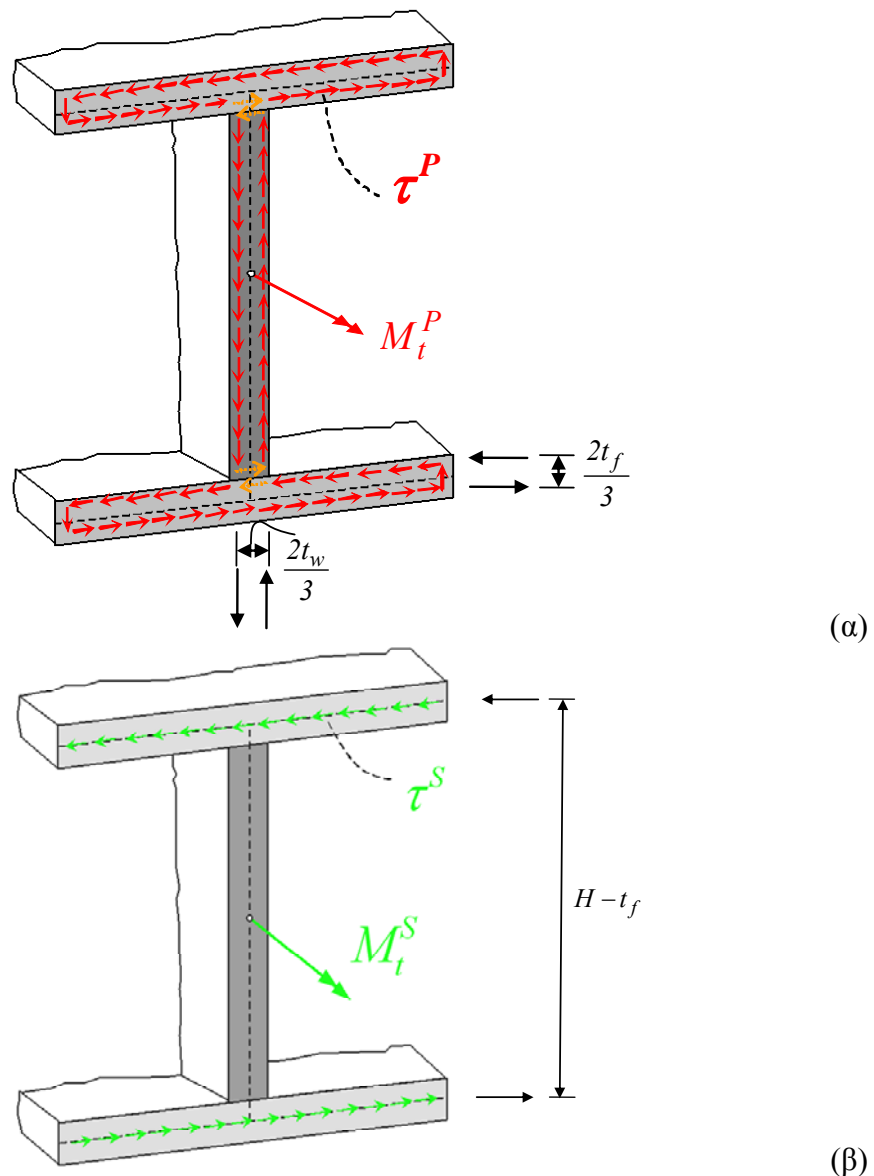
Σχήμα 2.9. Καμπύλη αξονικού φορτίου - στρεπτικής στρόφης στη μεταλυγισμική περιοχή για τη ράβδο του παραδείγματος 11.

Στο Σχ.2.9 παρουσιάζεται η στρεπτική στρόφι στο μέσο της ράβδου θ_0 συναρτήσει του θλιπτικού αξονικού φορτίου \bar{N} , έτσι όπως προέκυψε από την προτεινόμενη μέθοδο και από την αναλυτική έκφραση (2.4.1) στην οποία εφαρμόζονται οι γεωμετρικές σταθερές που αναφέρονται παραπάνω. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των δύο καμπύλων από την οποία συνάγεται έμμεσα αφενός η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου και αφετέρου η αμελητέα επιρροή των $\Delta\Delta\Pi$ στη συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογή. Η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των δύο καμπύλων για μεγαλύτερες στρεπτικές στρόφες αποδίδεται στο ότι η υπόθεση των Mohri et al. [2001] περί ημιτονικής κατανομής της στρεπτικής στρόφης ισχύει προσεγγιστικά. Διαπιστώνεται και πάλι ότι στην προτεινόμενη μέθοδο

αντιμετωπίζονται επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος». Τέλος, από τη μορφή των καμπυλών συμπεραίνεται ότι ο στρεπτικός μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας της ράβδου είναι ευσταθής.

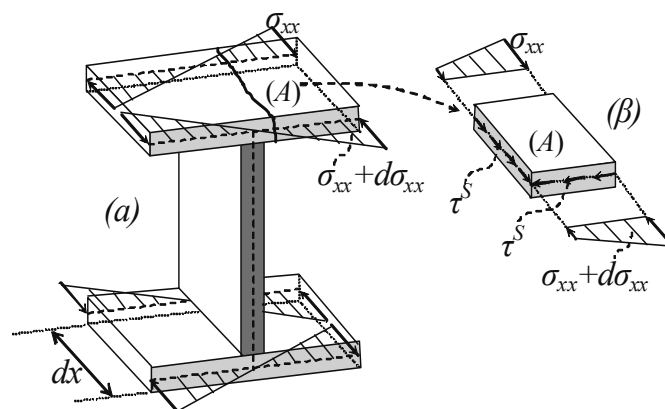
2.5 Ποιοτική Ερμηνεία Επιρροής Δευτερογενών Διατμητικών Παραμορφώσεων

Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτής και κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής μπορεί να ερμηνευθεί ποιοτικά ως ακολούθως.



Σχήμα 2.10. Κατανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων και οι αντίστοιχοι μοχλοβραχίονές τους σε διατομή I ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη.

- Η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων **ανοικτής λεπτότοιχης διατομής** είναι μικρή σε μη κοντές ράβδους και γενικά εξαρτάται από το μήκος της ράβδου. Το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι μικρότερο από αυτό των πρωτογενών. Η αγνόηση της ανομοιόμορφης στρέβλωσης οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα ακόμα και σε ράβδους σημαντικού μήκους (που παρουσιάζουν έντονη στρέβλωση). Προκειμένου να ερμηνευτούν ποιοτικά τα συμπεράσματα αυτά, εξετάζεται ράβδος διατομής I (βλ. Σχ.2.10) υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Στη ράβδο αναπτύσσονται πρωτογενείς διατμητικές τάσεις αυτοίσοροπούμενης κατανομής προκειμένου να αναληφθεί μέρος του στρεπτικού φορτίου (Σχ.2.10α). Παρατηρείται ότι εξαιτίας του σχήματος της διατομής, οι μοχλοβραχίονες των πρωτογενών διατμητικών τάσεων από τους οποίους προκύπτει τελικά η πρωτογενής στρεπτική ροπή είναι μικροί (Σχ.2.10α). Συνεπώς, ακόμα και μικρές τιμές πρωτογενούς στρεπτικής ροπής λαμβάνονται με ανάπτυξη υψηλών τιμών πρωτογενών διατμητικών τάσεων. Εξαιτίας της γεωμετρίας της διατομής, στη ράβδο αναπτύσσεται έντονη στρέβλωση. Οποιαδήποτε μεταβολή της στρέβλωσης αυτής κατά μήκος της ράβδου (ανομοιόμορφη στρέβλωση) λόγω συνωριακών συνθηκών ή/και μεταβαλλόμενης κατά μήκος φόρτισης επηρεάζει αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου και οδηγεί στην ανάπτυξη ορθών τάσεων (Σχ.2.11α). Συνεπώς, η αγνόηση των φαινομένων αυτών οδηγεί σε μη αμελητέα σφάλματα, τα οποία αποφεύγονται μόνο στη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης. Επειδή οι ορθές τάσεις επίσης μεταβάλλονται κατά μήκος της ράβδου, αναπτύσσονται δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκειμένου να ικανοποιηθεί η ισορροπία κατά τη διαμήκη διεύθυνση σε επίπεδο υλικού σημείου (Σχ.2.11β). Παρατηρείται ότι εξαιτίας του σχήματος της διατομής, οι μοχλοβραχίονες των δευτερογενών διατμητικών τάσεων από τους οποίους προκύπτει τελικά η δευτερογενής στρεπτική ροπή είναι μεγάλοι (Σχ.2.10β). Συνεπώς, ακόμα και μεγάλες τιμές δευτερογενούς στρεπτικής ροπής μπορούν να προκύψουν από μικρές τιμές δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Συμπερασματικά, το μήκος επί του οποίου «δρα» ο δευτερογενής μηχανισμός ανάληψης δράσεων είναι «μεγάλο», συνεπώς η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στη στρεπτική στιβαρότητα εξαρτάται από το μήκος της ράβδου και αυξάνεται όσο αυτό μειώνεται. Επίσης, το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι μικρό συγκριτικά με αυτό των πρωτογενών.



Σχήμα 2.11. Ορθές τάσεις (α) σε διατομή I ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη και εξισορρόπησή τους από δευτερογενείς διατμητικές τάσεις (β).

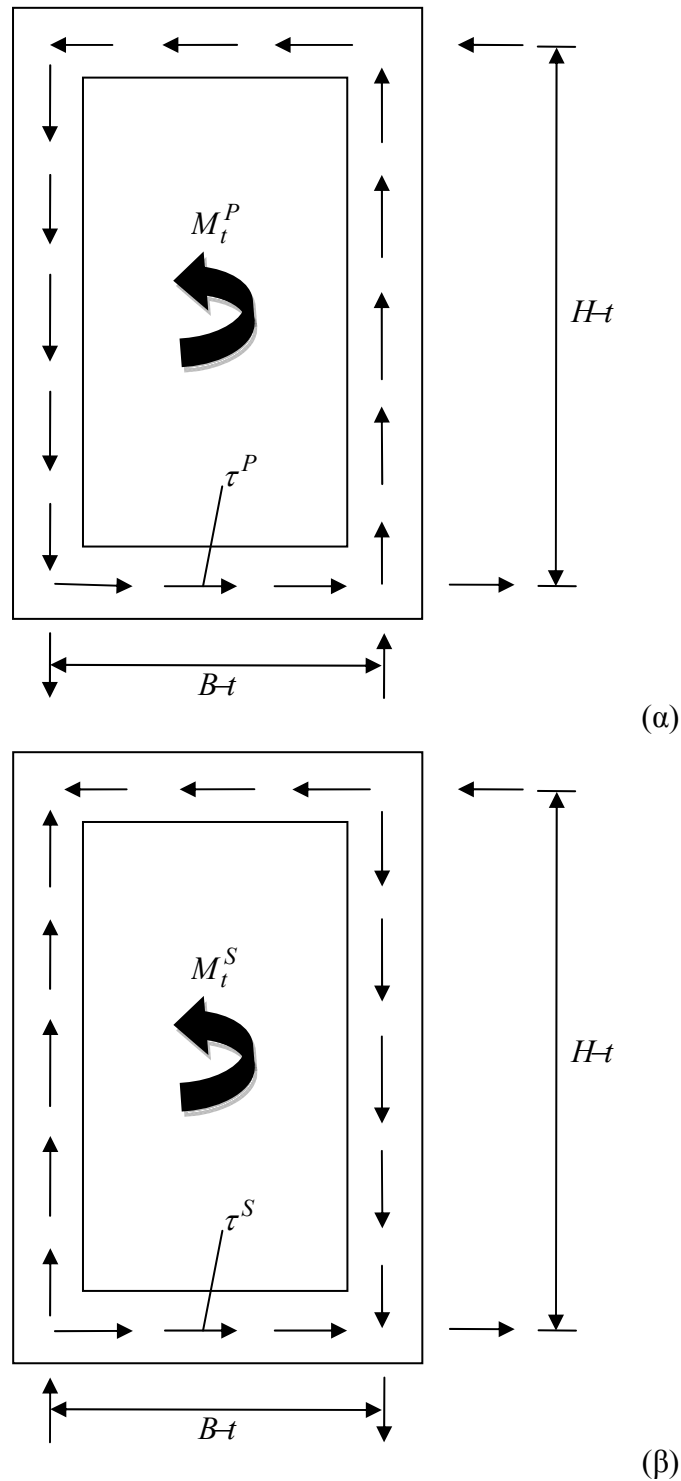
- Η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων **κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής** είναι αμελητέα. Ωστόσο, είναι πολύ σημαντική στον υπολογισμό εντατικών και τασικών μεγεθών, ανεξάρτητα από το μήκος της ράβδου. Η αγνόηση της ανομοιόμορφης στρέβλωσης δεν επηρεάζει ουσιωδώς τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Προκειμένου να ερμηνευτούν ποιοτικά τα συμπεράσματα αυτά, εξετάζεται ράβδος κλειστής κοίλης ορθογωνικής διατομής (βλ. Σχ.2.12) υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Στη ράβδο αναπτύσσονται πρωτογενείς διατμητικές τάσεις αυτοίσοροπούμενης κατανομής προκειμένου να αναληφθεί μέρος του στρεπτικού φορτίου (Σχ.2.12α, 2.6α). Παρατηρείται ότι εξαιτίας του σχήματος της διατομής, οι μοχλοβραχίονες των πρωτογενών διατμητικών τάσεων από τους οποίους προκύπτει τελικά η πρωτογενής στρεπτική ροπή είναι μεγάλοι (Σχ.2.12α). Συνεπώς, ακόμα και υψηλές τιμές πρωτογενούς στρεπτικής ροπής λαμβάνονται με ανάπτυξη μικρών τιμών πρωτογενών διατμητικών τάσεων. Εξαιτίας της γεωμετρίας της διατομής, στη ράβδο αναπτύσσεται μικρή στρέβλωση. Οποιαδήποτε μεταβολή της στρέβλωσης αυτής κατά μήκος της ράβδου (ανομοιόμορφη στρέβλωση) λόγω συνοριακών συνθηκών ή/και φόρτισης επηρεάζει αμελητέα τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Οι ορθές τάσεις που προκαλούνται από τη μεταβολή της στρέβλωσης (Σχ.2.5) επίσης μεταβάλλονται κατά μήκος της ράβδου, συνεπώς αναπτύσσονται δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκειμένου να ικανοποιηθεί η ισορροπία κατά τη διαμήκη διεύθυνση σε επίπεδο υλικού σημείου (Σχ.2.11β). Παρατηρείται ότι εξαιτίας του σχήματος της διατομής, η κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι τέτοια (Σχ.2.12β, 2.6β) που ακόμα και μικρές τιμές δευτερογενούς στρεπτικής ροπής λαμβάνονται με ανάπτυξη υψηλών τιμών των τάσεων αυτών. Συμπερασματικά, το μήκος επί του οποίου «δρα» ο δευτερογενής μηχανισμός ανάληψης δράσεων είναι «μικρό», συνεπώς η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στη στρεπτική στιβαρότητα είναι αμελητέα. Επίσης, το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτό των πρωτογενών.

2.6 Συμπεράσματα

Στα προηγούμενα εδάφια διατυπώθηκε και επιλύθηκε αριθμητικά το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Τα **κύρια συμπεράσματα** που προκύπτουν από την προαναφερθείσα ανάλυση είναι τα ακόλουθα.

- Η ακρίβεια και η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνονται με υπάρχοντα αριθμητικά αποτελέσματα καθώς και με αποτελέσματα στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων από εμπορικό λογισμικό.
- Η προτεινόμενη μέθοδος προσφέρει τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, αφού απαιτεί μόνο συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής της ράβδου για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και όλων των γεωμετρικών σταθερών πλην της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς. Για τη δευτερογενή στρεπτική σταθερά απαιτείται και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, ωστόσο

αυτή χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος και δεν αυξάνει το πλήθος των αγνώστων του προβλήματος.



Σχήμα 2.12. Κατανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων και οι αντίστοιχοι μοχλοβραχίονές τους σε κλειστή κοίλη ορθογωνική διατομή ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη.

- Η προτεινόμενη μέθοδος προσφέρεται για τον ακριβή υπολογισμό της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς, η οποία είναι καθοριστικής σημασίας στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.
- Η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος».
- Η Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών παρουσιάζει σφάλματα στον υπολογισμό γεωμετρικών σταθερών και τασικών μεγεθών του προβλήματος. Τα σφάλματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά στον υπολογισμό της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς κλειστών κοίλων διατομών ακόμα και στην περίπτωση λεπτότοιχων τοιχωμάτων.
- Η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων είναι μικρή στη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής (που παρουσιάζουν έντονη στρέβλωση) και αυξάνεται με τη μείωση του μήκους της ράβδου. Το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι μικρό συγκριτικά με αυτό των πρωτογενών.
- Η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων είναι αμελητέα στη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής. Ωστόσο, επηρεάζει ουσιαδώς εντατικά και τασικά μεγέθη τους, ανεξάρτητα από το μήκος της ράβδου. Το μέγεθος των δευτερογενών διατμητικών τάσεων είναι της ίδιας τάξης με αυτό των πρωτογενών.
- Η προτεινόμενη μεθοδολογία οδηγεί σε συντηρητικές εκτιμήσεις των μέγιστων τιμών τάσεων Von Mises σε ράβδους κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής που υπολογίζονται με τη βοήθεια στερεών και κελυφωτών πεπερασμένων στοιχείων. Αντιθέτως, η αγνόηση της επιρροής της ανομοιόμορφης στρέβλωσης (και ως εκ τούτου και των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων) οδηγεί σε υποεκτίμηση των συγκεκριμένων τασικών μεγεθών, ανεξαρτήτως του μήκους της ράβδου.
- Ο μη συνυπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης k_x στην ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων οδηγεί σε λιγότερο ακριβή αποτελέσματα, ιδίως στον υπολογισμό τασικών μεγεθών ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής.
- Οι επιρροές της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην ελαστική στατική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων είναι παρόμοιες με αυτές της αντίστοιχης ανάλυσης χωρίς επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (βλ. κεφ. 1).
- Ο στρεπτικός μεταλυστικός δρόμος ισορροπίας ράβδου υπό θλιπτικό αξονικό φορτίο είναι ευσταθής.

Κεφάλαιο 3

Μη Γραμμική Ελαστική Δυναμική Ανάλυση Ράβδου υπό Ανομοιόμορφη Στρέψη

3.1 Εισαγωγή

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μη γραμμική ελαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (ΔΔΠ). Στις ενότητες που ακολουθούν διερευνάται η μη γραμμική ελαστική δυναμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή ΔΔΠ.

Σε ποικίλους κλάδους της επιστήμης του μηχανικού (αεροναυπηγική, αεροδιαστημική, ναυπηγική, μηχανολογία, δομοστατική κ.λ.π.), συχνά συναντάται η καταπόνηση ράβδων με δυναμικά φορτία, δηλαδή φορτία των οποίων το μέγεθος, η διεύθυνση και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων φορτίων αποτελούν κίνηση μηχανών και μηχανικών μερών, κινούμενα φορτία επί φορέων γεφυροποιίας, γερανογεφυρών (κ.λ.π.), ωστικά φορτία οφειλόμενα σε εκρήξεις, κρουστικά φορτία, σεισμικά φορτία που προκαλούν μετατόπιση των στηρίξεων και φορτία που οφείλονται στη δράση του ανέμου ή θαλάσσιων κυματισμών. Ουσιαστικά όλα τα φορτία έχουν δυναμικό χαρακτήρα. Ωστόσο στην περίπτωση που ο χρόνος επιβολής τους επί της ράβδου είναι πολύ μεγαλύτερος της ιδιοπεριόδου της, τότε οι αναπτυσσόμενες αδρανειακές δυνάμεις (που εξαρτώνται από τις επιταχύνσεις των υλικών σημείων της ράβδου) είναι πάρα πολύ μικρές. Ως εκ τούτου, συνήθως στις περιπτώσεις αυτές οι αδρανειακές δυνάμεις αγνοούνται πλήρως με αποτέλεσμα τα επιβαλλόμενα φορτία να αντιμετωπίζονται ως στατικά. Ωστόσο όταν δεν γνωρίζουμε εξαρχής τον χαρακτήρα της φόρτισης ή οι αναπτυσσόμενες αδρανειακές δυνάμεις είναι μη αμελητέες, η λεπτομερής διερεύνηση των δυναμικών φαινομένων σε στρεπτικά καταπονούμενες ράβδους είναι απαραίτητη. Επισημαίνεται ότι η χρήση προσομοιωμάτων κατανεμημένης μάζας (distributed mass models) για τη δυναμική ανάλυση ραβδωτών στοιχείων είναι ακριβέστερη έναντι της χρήσης μονοβάθμιων ή πολυβάθμιων προσομοιωμάτων διακριτών μαζών (discrete mass models) [Clough and Penzien 1975].

Στη δυναμική ανάλυση η κίνηση της ράβδου χαρακτηρίζεται ως ταλάντωση. Είναι δυνατό αφόρτιστη ράβδος να υπόκειται σε ταλάντωση εάν εκτραπεί από την αρχική θέση ισορροπίας της και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερη ή/και υποβληθεί σε αρχική ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή η ταλάντωση χαρακτηρίζεται ως ελεύθερη, ενώ στην περίπτωση όπου ασκείται δυναμική φόρτιση η ταλάντωση χαρακτηρίζεται ως εξαναγκασμένη.

Συχνά η δυναμική ανάλυση στρεπτικά καταπονούμενων ράβδων είναι δυσμενέστερη συγκριτικά με την αντίστοιχη στατική ανάλυση αναφορικά με το μέγεθος των αναπτυσσόμενων κινηματικών μεγεθών. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση συντονισμού (resonance) κατά την οποία η συχνότητα ημιτονικής διεγείρουσας φόρτισης και η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της ράβδου διαφέρουν

καθόλου ή πολύ λίγο μεταξύ τους. Αναπτύσσονται τότε πολύ μεγάλα κινηματικά και εντατικά μεγέθη με αποτέλεσμα συνήθως να προκαλούνται σημαντικές βλάβες ή και κατάρρευση. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ο συνυπολογισμός της μεταβολής της γεωμετρίας και η θεώρηση της ισορροπίας της κατασκευής στην παραμορφωμένη διαμόρφωσή της (γεωμετρική μη γραμμικότητα) είναι απαραίτητες προϋποθέσεις για την αξιόπιστη δυναμική ανάλυση ραβδωτών στοιχείων. Εξάλλου, ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής συνήθως χαρακτηρίζονται από πολύ μικρή στρεπτική στιβαρότητα με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεγάλων στρεπτικών στροφών ακόμα και αν ο δυναμικός χαρακτήρας της φόρτισης είναι αμελητέος (εδάφιο 1.1). Σημειώνεται ότι όπως και στη στατική ανάλυση (εδάφιο 1.1), η γεωμετρική μη γραμμικότητα προκαλεί κι εδώ σύζευξη αξονικών, στρεπτικών και καμπτοδιαμητικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών. Ωστόσο στην περίπτωση ράβδων διπλά συμμετρικής διατομής, τα αξονικά και στρεπτικά μεγέθη μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα από τα καμπτοδιαμητικά μεγέθη (εδάφιο 1.1).

Στη γραμμική ελαστική δυναμική ανάλυση υπάρχει πληθώρα μεθόδων επίλυσης του προβλήματος, συμπεριλαμβανομένης της ιδιομορφικής ανάλυσης (modal analysis), και είναι δυνατό να ληφθούν αναλυτικές εκφράσεις απόκρισης της ράβδου. Ωστόσο στην περίπτωση μεγάλων στρεπτικών στροφών, η δυναμική συμπεριφορά της ράβδου είναι σημαντικά πιο σύνθετη και παρουσιάζονται διάφορα φαινόμενα που δεν συναντώνται σε γραμμικά δυναμικά συστήματα [Sina et al. 2012]. Στην περίπτωση αυτή ο χωρισμός των μεταβλητών σε χωρικές και χρονικές παύει να είναι ακριβής και η αναλυτική λύση του προβλήματος είναι αδύνατη ή θα περιορίζεται σε ειδικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών και φόρτισης.

Όπως αναφέρθηκε και στο εδάφιο 1.1, συνήθως στην πράξη η στρεπτική φόρτιση που ασκείται σε ράβδο μεταβάλλεται κατά μήκος της ή/και η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης. Στην περίπτωση αυτή η αναπτυσσόμενη στρέβλωση μεταβάλλεται κατά τη διαμήκη διεύθυνση και η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη. Πέρα από ορθές, αναπτύσσονται και δευτερογενείς διαμητικές τάσεις, οι οποίες εδώ εξισορροπούν, πέρα από τις ορθές τάσεις, και τις αδρανειακές δυνάμεις που αναπτύσσονται (εξαιτίας του δυναμικού χαρακτήρα της φόρτισης) σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Εξάλλου, όπως και στη στατική ανάλυση (εδάφιο 2.1), έτσι κι εδώ η επιρροή ΔΔΠ στην καθολική δυναμική ισορροπία της ράβδου μπορεί να ληφθεί υπόψη με υιοθέτηση επιπρόσθετου κινηματικού μεγέθους που να εκφράζει το μέγεθος της στρέβλωσης της διατομής, το οποίο πλέον δεν λαμβάνεται ίσο με τη συστροφή θ'_x .

Από την αναδρομή στην πρόσφατη συναφή διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη μη γραμμική ελαστική δυναμική ανάλυση ράβδων λαμβάνοντας υπόψη φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ. Πιο συγκεκριμένα, οι Rozmarynowski and Szymczak [1984] διερεύνησαν τις ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διπλά συμμετρικής διατομής με πλήρως αξονικά αμετακίνητα άκρα. Η λύση του προβλήματος δεν αναφέρεται στο πεδίο του χρόνου αλλά αποκλειστικά στα σημεία αντιστροφής της κίνησης της ράβδου, ενώ αγνοείται η επιρροή της αξονικής αδράνειας καθώς και ορισμένων όρων της καθολικής εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας της ράβδου που οφείλονται στη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Ο Crespo Da Silva [1988a,b] ανέλυσε συζευγμένες αξονικές, στρεπτικές και καμπτικές ταλαντώσεις ράβδων κλειστής λεπτότοιχης διατομής εστιάζοντας κυρίως στις καμπτικές ταλαντώσεις και αγνοώντας φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Οι Pai and Nayfeh [1990, 1991a,b] μελέτησαν επίσης συζευγμένες αξονικές, στρεπτικές

και καμπτικές ταλαντώσεις περιστρεφόμενων ράβδων κλειστής μεταλλικής ή σύνθετης διατομής εστιάζοντας κυρίως στις καμπτικές ταλαντώσεις και αγνοώντας φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Οι Di Egidio et al. [2003a,b] μελέτησαν στρεπτοκαμπτικές ταλαντώσεις ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής λαμβάνοντας υπόψη τόσο φαινόμενα εγκάρσιας παραμορφωσιμότητας όσο και στρέβλωσης των διατομών και αγνοώντας την επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας. Η ράβδος θεωρείται μη εκτατή κατά την αξονική έννοια (inextensible) συνεπώς δεν αναλύονται γενικές περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών. Οι Pai and Nayfeh [1994] παρουσίασαν γεωμετρικά ακριβές (geometrically exact) γεωμετρικά μη γραμμικό προσομοίωμα καμπύλου ραβδωτού στοιχείου για σύνθετα περύγια ρότορα χρησιμοποιώντας την έννοια των τοπικών τάσεων και παραμορφώσεων (local engineering stresses and strains) και λαμβάνοντας υπόψη τόσο φαινόμενα εγκάρσιας παραμορφωσιμότητας όσο και στρέβλωσης των διατομών. Επιλύεται αριθμητικά ελικοειδές ελατήριο, συνεπώς η σύζευξη αξονικών και στρεπτικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών δεν διερευνάται. Οι Antramov et al. [2009] μελέτησαν στρεπτοκαμπτικές ελεύθερες ταλαντώσεις περιστρεφόμενων ράβδων εφαρμόζοντας μη γραμμικές κανονικές μορφές (nonlinear normal modes) και προσεγγίζοντας τη συνάρτηση στρέβλωσης με άθροισμα τριών πολυωνυμικών όρων. Οι Sapountzakis and Dikaros [2011] μελέτησαν στρεπτοκαμπτικές ταλαντώσεις ράβδων τυχούσας διατομής εφαρμόζοντας προσεγγιστικές σχέσεις για την έκφραση των τριγωνομετρικών όρων του πεδίου μετατοπίσεων της ράβδου που σχετίζονται με τις μεγάλες στρεπτικές στροφές (βλ. [Mohri et al. 2004]). Πιο πρόσφατα, οι Sina et al. [2012] διερεύνησαν τις στρεπτικές ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής ορθογωνικού σχήματος εφαρμόζοντας μη γραμμικές κανονικές μορφές. Σχετικά με τον προσδιορισμό του τασικού πεδίου της ράβδου στο εξεταζόμενο πρόβλημα, εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας ο προσδιορισμός δευτερογενών διατμητικών τάσεων δεν έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία. Επίσης, η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM) δεν έχει χρησιμοποιηθεί στο εξεταζόμενο πρόβλημα με την εξαίρεση της εργασίας των Sapountzakis and Dikaros [2011].

Αναφορικά με τη δυναμική ανάλυση ράβδων (χωρίς επιρροή ΔΔΠ) που βρίσκονται στη μεταλυστική περιοχή τους, αν και οι καμπτικές ταλαντώσεις έχουν εξεταστεί ενδελεχώς τόσο αριθμητικά όσο και πειραματικά (βλ. π.χ. [Emam and Nayfeh 2004a,b, 2009, Nayfeh and Emam 2008]), δεν ισχύει το ίδιο για τις στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς επιρροή ΔΔΠ. Εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, μόνο οι Mohri et al. [2004] ασχολήθηκαν με τις γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που βρίσκονται στη στρεπτική μεταλυστική περιοχή τους αγνοώντας τη στρεβλωτική αδράνεια και παρουσίασαν αριθμητικά παραδείγματα ελεύθερα ταλαντούμενων ράβδων με διχαλωτές στρεπτικές στηρίξεις. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα υπεισέρχεται μόνο στη στατική ανάλυση της ράβδου από την οποία προσδιορίζεται η μεταλυστική θέση ισορροπίας της γύρω από την οποία πραγματοποιούνται ταλαντώσεις.

Αναφορικά με τη γραμμική ή μη γραμμική ελαστική δυναμική ανάλυση ράβδων λαμβάνοντας υπόψη φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ, διάφοροι ερευνητές έχουν ερευνήσει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές περιέχονται στο κεφ. 2. Χαρακτηριστικά εδώ αναφέρονται οι εργασίες των Laudiero and Savoia 1991, Kollár [2001b], Cortinez and Piovan [2002], Piovan and Cortinez [2005], Senjanovic et al. [2009], και Minghini et al. [2009] όπου αναλύονται ράβδοι λεπτότοιχης διατομής λαμβάνοντας υπόψη και στρεπτικό διορθωτικό

συντελεστή διάτμησης (βλ. κεφ. 2). Σε όποιες από τις αναλύσεις αυτές διερευνάται η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, αυτή λαμβάνεται υπόψη μόνο στη στατική ανάλυση της ράβδου από την οποία προσδιορίζεται η θέση ισορροπίας γύρω από την οποία πραγματοποιούνται ταλαντώσεις. Εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης υπολογίζεται στη βιβλιογραφία αποκλειστικά με τη βοήθεια ενεργειακής μεθόδου θεωρώντας πλήρως στατικές συνθήκες. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε σύζευξη στρεπτικών και καμπτοδιατμητικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών, ωστόσο στην περίπτωση ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής, αποδεικνύεται ότι τα μεγέθη αυτά αποζευγνύονται και μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα (εδάφιο 2.1). Επιπλέον, σημειώνεται ότι οι Simo and Vu-Quoc [1991] παρουσίασαν γεωμετρικά ακριβές πλήρως γεωμετρικά μη γραμμικό προσομοίωμα ραβδώτου στοιχείου τυχούσας διατομής (θεώρηση μικρών ή μεγάλων παραμορφώσεων) χωρίς να λαμβάνουν υπόψη στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης.

Στην προτεινόμενη μέθοδο, η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων ενώ η απόσβεση αγνοείται. Οι τριγωνομετρικοί όροι του πεδίου μετατοπίσεων της ράβδου που σχετίζονται με τις μεγάλες στρεπτικές στροφές διατηρούνται χωρίς να απλοποιούνται. Στις παρακάτω ενότητες μελετάται επιπρόσθετα και η περίπτωση επιβαλλόμενης θλιπτικής αξονικής δύναμης σε άκρο της ράβδου, η οποία επιτρέπει την στρεπτική δυναμική ανάλυση ράβδων που βρίσκονται στη στρεπτική μεταλυγισμική περιοχή τους. Ωστόσο, η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της ράβδου δεν εξετάζεται, ενώ μελετώνται ράβδοι διπλά συμμετρικής διατομής όπου η γεωμετρική μη γραμμικότητα και οι διατμητικές παραμορφώσεις δεν προκαλούν σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών μεγεθών (εδάφια 1.1, 2.1). Επιπλέον, για την περίπτωση όπου αγνοείται η επιρροή ΔΔΠ, διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις αναπτυσσόμενες δευτερογενείς διατμητικές τάσεις

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος απλής ή πολλαπλής συνοχής (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) (Παράρτημα Π1), καθώς και τη Μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (AEM) (Παράρτημα Π2). Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη σε ολική διατύπωση Lagrange μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Τα δυναμικά φαινόμενα λαμβάνονται υπόψη μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης μάζας. Προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας, τοπική εξίσωση ισορροπίας (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες διατυπώνεται πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει κατάλληλα την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρέβλωση της ράβδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών καθώς και δύο προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία δεν

υπόκεινται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov (Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ)). Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Επίσης, μορφώνεται μονοδιάστατο πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή (ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης) της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης που αποτελεί σύγχρονη εξέλιξη της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με τη μέθοδο Petzold - Gear για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων. Στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχεται και η δευτερογενής στρεπτική σταθερά, της οποίας ο αριθμητικός υπολογισμός απαιτεί και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής. Ωστόσο η διακριτοποίηση αυτή χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος και δεν αυξάνει το πλήθος των αγνώστων του προβλήματος. Για την ειδική περίπτωση ελεύθερων στρεπτικών ταλαντώσεων χωρίς επιρροή ΔΔΠ, διατυπώνεται επίσης μη γραμμικό γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών που σχετίζεται με τα σημεία αντιστροφής της κίνησης της ράβδου και το οποίο επιλύεται με την Τεχνική Άμεσης Επανάληψης.

Η ανάλυση της ράβδου είναι πλήρης. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά στρεπτικά μεγέθη, οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής συμπεριλαμβανομένης και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S , η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, οι αναπτυσσόμενες πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, καθώς και οι ορθές τάσεις στο εσωτερικό ως επίσης και στο σύνορο. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Βάσει της αναλυτικής και αριθμητικής διαδικασίας συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων συγκρινόμενη με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις είναι αξιοσημείωτη. Από την αναδρομή στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι η έρευνα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι πρωτότυπη. Τα πρωτότυπα στοιχεία της συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- i. Διατυπώνεται το δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος λαμβάνοντας υπόψη τοπική εξίσωση ισορροπίας (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές στατικές συνθήκες και χωρίς την εισαγωγή στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης.
- ii. Αναλύονται δυναμικά ράβδοι διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) υπό γεωμετρικά μη γραμμική ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
- iii. Μελετώνται γραμμικές και μη γραμμικές ελεύθερες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων που βρίσκονται στη στρεπτική μεταλυγισμική περιοχή τους καθώς και εξαναγκασμένες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων υπό συνθήκες πρωτεύοντος συντονισμού (primary resonance).
- iv. Για την ειδική περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ, διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις. Λαμβάνονται υπόψη όλοι οι αδρανειακοί όροι

του προβλήματος (αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική αδράνεια) μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης μάζας.

- v. Επιλύεται αριθμητικά το εξεταζόμενο πρόβλημα με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Από την ερευνητική προσπάθεια που έγινε αναφορικά με τα θέματα που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο, προέκυψαν δημοσιεύσεις σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά διεθνούς κυκλοφορίας [Sapountzakis and Tsipiras 2010b,c,d], σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων [Sapountzakis and Tsipiras 2009e,f, 2010e] καθώς και κεφάλαιο σε βιβλίο που εκδόθηκε από διεθνή εκδοτικό οίκο [Sapountzakis and Tsipiras 2010g].

3.2 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο μήκους l διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά υπερελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E και διάτμησης G και πυκνότητα ρ , το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή Ω του επιπέδου y, z (Σχ.3.1). Η περιοχή Ω μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό οπών και περιβάλλεται από τμηματικό λείο σύνορο (μπορεί δηλαδή να περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό γωνιών), το οποίο συμβολίζεται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) (Σχ.3.1β). Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη χρονικά εξαρτώμενη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση περί το διαμήκη άξονα της x (αξονικές δυνάμεις $n = n(x, t)$, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x, t)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x, t)$) (Σχ.3.1α) ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Η ράβδος μπορεί να μετατοπίζεται ελεύθερα κατά την εγκάρσια έννοια και δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) συγκεκριμένος άξονας περιστροφής, ωστόσο η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της δεν εξετάζεται στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου. Η μελέτη της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$, του οποίου ο διαμήκης άξονας Sx διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα διάτμησης) των διατομών. Επισημαίνεται ότι τα κέντρα συστροφής ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα και τα κέντρα βαρύτητας των διατομών (Σχ.3.1) εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής. Το αρχικό σημείο του άξονα Sx ($x = 0$) τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου (Σχ.3.1α).

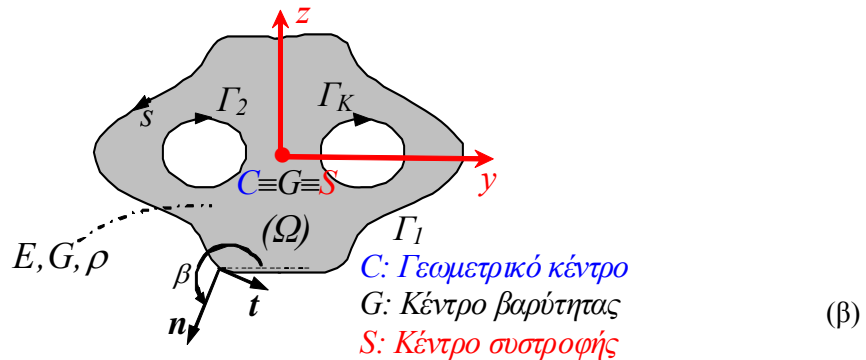
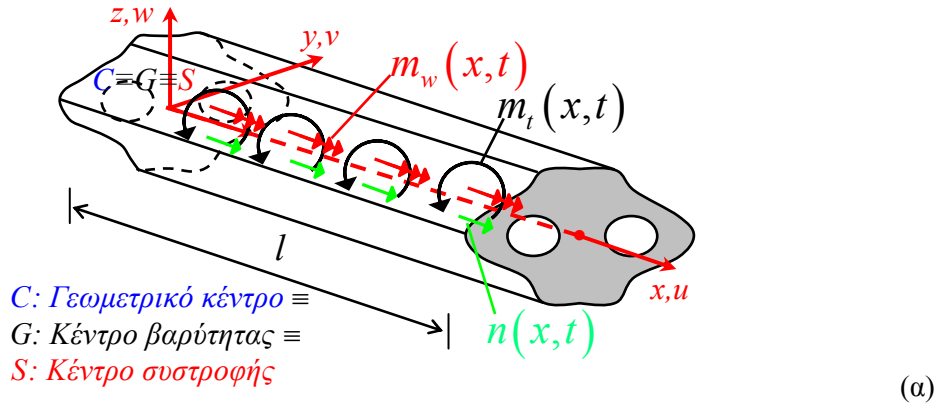
3.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

Υποθέτοντας ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται (δηλαδή δεν αναπτύσσονται εγκάρσιες παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής), θεωρώντας ότι τα υλικά σημεία της διατομής εκτελούν κυκλική τροχιά κατά την εγκάρσια διεύθυνση περί τον άξονα Sx , λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στρεπτικές στροφές των διατομών μπορούν να είναι μεγάλες και προκειμένου να αναλυθεί η επιρροή $\Delta\Delta\Pi$, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου δίδεται ως

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, t) + (\theta_x^P)'(x, t) \phi_S^P(y, z) - \left[(\theta_x^P)'(x, t) - \theta_x^l(x, t) \right] \left[\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z, t) \right] \quad (3.2.1)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \sin \theta_x(x, t) - y(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.2)$$

$$w(x, y, z, t) = y \sin \theta_x(x, t) - z(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.3)$$



Σχήμα 3.1. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα χρονικά εξαρτώμενη αξονική και στρεπτική φόρτιση (α) με ομογενή διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (β).

επισημαίνοντας ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με το πεδίο μετατοπίσεων (2.2.1-3) του κεφ. 2 όπου μελετάται το αντίστοιχο στατικό πρόβλημα, με τη διαφορά ότι οι κινηματικοί άγνωστοι μίας μεταβλητής και η ϕ_S^S έχουν ληφθεί εδώ ως χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις.

Με θεώρηση μικρής «μέσης» αξονικής μετατόπισης, μικρής πρωτογενούς και δευτερογενούς στρέβλωσης και μικρών παραμορφώσεων, οι μη γραμμικοί όροι της διαμήκου μετατόπισης u των παραμορφώσεων Green μπορούν να αγνοηθούν (βλ. και [Ramm and Hoffmann 1995, Rothert and Gensichen 1987, Brush and Almroth 1975]), συνεπώς ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 2.2.1 του κεφ. 2, προκύπτουν οι συνιστώσες του ταυστή παραμόρφωσης Green ως

$$\varepsilon_{xx} = u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P - \left((\theta_x^P)'' - \theta_x'' \right) (\phi_S^P + \phi_S^S) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \quad (3.2.4\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (3.2.4\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.2.4\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.4\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.4\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (3.2.4\sigma\tau)$$

Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με τις αντίστοιχες σχέσεις (2.2.9) του κεφ. 2.

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις και ότι το υλικό της ράβδου είναι ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά υπερελαστικό, οι συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff δίδονται συναρτήσει των παραμορφώσεων Green από το γενικευμένο νόμο του Hooke (εξ.(Π5.2.17)). Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.9), οι σχέσεις αυτές διαμορφώνονται ως

$$S_{xx} = E^* \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \right] \quad (3.2.5\alpha)$$

$$S_{yy} = E^{**} \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \right] \quad (3.2.5\beta)$$

$$S_{zz} = E^{**} \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \right] \quad (3.2.5\gamma)$$

$$S_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.5\delta)$$

$$S_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.5\epsilon)$$

$$S_{yz} = 0 \quad (3.2.5\sigma\tau)$$

όπου $E^* = E(1-\nu) / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, $E^{**} = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, ενώ έχει αγνοηθεί η επιρροή της δευτερογενούς στρέβλωσης στις ορθές τάσεις (βλ. εδάφιο 2.2.1). Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις είναι ταυτόσημες με τις αντίστοιχες σχέσεις (2.2.11) του κεφ. 2. Οι συνιστώσες S_{yy} , S_{zz} δεν παράγουν έργο (αφού οι αντίστοιχες

ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις ε_{yy} , ε_{zz} είναι μηδενικές, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2.4β,γ)) και γίνεται η παραδοχή ότι $S_{yy} = S_{zz} \approx 0$, ενώ επιπλέον το E^* αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E (βλ. εδάφιο 1.2.1). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff διαμορφώνονται τελικά ως

$$S_{xx} = E \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \right] \quad (3.2.6\alpha)$$

$$S_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.6\beta)$$

$$S_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.6\gamma)$$

επισημαίνοντας ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με τις αντίστοιχες σχέσεις (2.2.12) του κεφ. 2.

3.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Όπως και στο κεφ. 2, η προσπάθεια να ικανοποιηθεί η διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά την αξονική διεύθυνση της ράβδου οδηγεί σε περίπλοκες εξισώσεις, συνεπώς οι συναρτήσεις στρέβλωσης προσδιορίζονται με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Η Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange, αγνοώντας δυνάμεις απόσβεσης και το σύνολο των μαζικών δυνάμεων εκτός των αδρανειακών, εκφράζεται ως [Bathe 1996] (βλ. εξ.(Π4.2.47))

$$\begin{aligned} & \iiint_V (S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV + \iiint_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV = \\ & \iint_F (t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w) dF \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

όπου στην παραπάνω σχέση παραλήφθηκαν οι όροι τάσεων που δεν παράγουν έργο, με $\delta(\cdot)$ και (\cdot) συμβολίζονται δυνατές ποσότητες και παραγωγή ως προς τον χρόνο t , αντίστοιχα, V είναι ο όγκος της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση, F είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση συμπεριλαμβανομένων και των δύο ακραίων διατομών της και t_x , t_y , t_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας (αρχική διαμόρφωση) (βλ. Παράρτημα Π4). Μελετώντας τους όρους της δυνατής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης και εφαρμόζοντας την τεχνική του εδαφίου 2.2.2, προκύπτει έπειτα από κάποιες πράξεις η ακόλουθη τοπική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} - \rho \ddot{u} = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad \forall x \in (0, l) \quad (3.2.8\alpha)$$

καθώς και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη

$$S_{xy}n_y + S_{xz}n_z = t_x \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in (0, l) \quad (3.2.8\beta)$$

Μελετώντας τους όρους της δυνατής δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης και εφαρμόζοντας την τεχνική του εδαφίου 2.2.2, προκύπτουν έπειτα από κάποιες πράξεις και πάλι οι εξ.(3.2.8).

Συμπερασματικά, οι δύο συναρτήσεις στρέβλωσης που εισήχθησαν στο πεδίο μετατοπίσεων θα πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (3.2.8α) σε επίπεδο υλικού σημείου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (3.2.8β). Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης από τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \text{ στο } \Omega \quad (3.2.9\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = (zn_y - yn_z) \text{ στο } \Gamma_j \quad (3.2.9\beta)$$

$$G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \nabla^2 \phi_S^S - E \left[u_m'' + (\theta_x^P)''' \phi_S^P + (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \right] + \rho \left[\ddot{u}_m + (\ddot{\theta}_x^P)' \phi_S^P - \left((\ddot{\theta}_x^P)' - \ddot{\theta}_x' \right) (\phi_S^P + \phi_S^S) - \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \ddot{\phi}_S^S \right] = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.10\alpha)$$

$$-G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = t_x \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.10\beta)$$

ικανοποιεί τις εξ.(3.2.8), σημειώνοντας ότι η ισχύς των σχέσεων (3.2.10) επεκτάθηκε και στα άκρα της ράβδου. Στις παραπάνω σχέσεις, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ είναι ο τελεστής Laplace και ο συμβολισμός $\frac{\partial}{\partial n} = (\partial / \partial y) n_y + (\partial / \partial z) n_z$ δηλώνει την παράγωγο κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο Γ_j . Επισημαίνεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών προσδιορισμού της ϕ_S^P (εξ.(3.2.9)) είναι πανομοιότυπο με αυτό της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ (γραμμική ελαστική στατική ανάλυση) [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mocos 2001, 2003a,b], ενώ το αντίστοιχο πρόβλημα της ϕ_S^S (εξ.(3.2.10)) ταυτίζεται με αυτό της μη γραμμικής ελαστικής στατικής ανάλυσης (εξ.(2.2.21) του κεφ. 2) εάν αγνοηθούν οι αδρανειακοί όροι. Προκειμένου να απλοποιηθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών της ϕ_S^S , υιοθετείται η συνήθης παραδοχή περί αγνόησης της διαμήκους συνιστώσας του διανύσματος τάσης ($t_x \approx 0$), συνεπώς η σχέση (3.2.10β) διαμορφώνεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.11)$$

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών της ϕ_S^S μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά εάν ληφθεί υπόψη η καθολική εξίσωση δυναμικής ισορροπίας στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου (βλ. εδάφιο 3.2.3, εξ.(3.2.16γ)) και αγνοηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας καθώς και οι αδρανειακοί όροι της δευτερογενούς στρέβλωσης, ενώ αποδεικνύεται επίσης ότι η ϕ_S^S είναι διδιάστατη συνάρτηση (βλ. εδάφιο 3.2.5). Τέλος, προκειμένου να ευρεθούν μοναδικές λύσεις για τις εξ.(3.2.9) και (3.2.10), απαιτούμε οι ϕ_S^P , ϕ_S^S να ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνικότητας (2.2.23) του κεφ. 2.

3.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Δυναμικής Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες, Αρχικές Συνθήκες

Οι κινηματικοί άγνωστοι του προβλήματος που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη συντεταγμένη x (u_m , θ_x , $(\theta_x^P)'$) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας, οι οποίες θα διατυπωθούν επίσης με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Για διευκόλυνση, ορίζονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$N = \iint_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (3.2.12\alpha)$$

$$M_t^P = \iint_{\Omega} \left[S_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.2.12\beta)$$

$$M_t^S = \iint_{\Omega} \left(S_{xy} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.2.12\gamma)$$

$$M_w = \iint_{\Omega} S_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (3.2.12\delta)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε αξονική δύναμη, πρωτογενή και δευτερογενή στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα, σημειώνοντας ότι ταυτίζονται με τα αντίστοιχα μεγέθη του κεφ. 2 (εξ.2.2.26)).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(3.2.6)) στις σχέσεις (3.2.12), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EA \left[u'_m + \frac{I}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.13\alpha)$$

$$M_t^P = GI_t^P \theta'_x \quad M_t^S = -GI_t^S \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \quad (3.2.13\beta,\gamma)$$

$$M_w = EC_S (\theta_x^P)'' \quad (3.2.13\delta)$$

όπου $A = \iint_{\Omega} d\Omega$ είναι το εμβαδόν της διατομής και οι γεωμετρικές σταθερές I_P (πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο S), I_t^P (πρωτογενής στρεπτική σταθερά), I_t^S (δευτερογενής στρεπτική σταθερά) και C_S (σταθερά στρέβλωσης) δίδονται μέσω

των εξ.(2.2.29α,β,γ,δ), αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις εντατικών μεγεθών ταυτίζονται με τις αντίστοιχες σχέσεις (2.2.27) του κεφ. 2.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.2.13), (3.2.6), οι τάσεις εκφράζονται συναρτήσει των εντατικών μεγεθών μέσω των σχέσεων (2.2.30) του κεφ. 2. Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange (εξ.(3.2.7)) τις δυνατές μεταβολές των μεγεθών u_m , θ_x , $(\theta_x^P)'$ (και των παραγώγων τους) και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.30) προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν την καθολική δυναμική ισορροπία αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου, οι οποίες μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$ εκφράζονται ως

$$-\rho A \ddot{u}_m + \frac{dN}{dx} = -n(x, t) \quad (3.2.14\alpha)$$

$$-\rho I_P \ddot{\theta}_x + \frac{dM_t^P}{dx} + \frac{dM_t^S}{dx} + \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} EI_n (\theta_x')^3 + N \frac{I_P}{A} \theta_x' \right] = -m_t(x, t) \quad (3.2.14\beta)$$

$$-\rho C_S (\ddot{\theta}_x^P)' + \frac{dM_w}{dx} + M_t^S = -m_w(x, t) \quad (3.2.14\gamma)$$

$$(N + \bar{N}_0) \delta u_m(0) = 0 \quad (N - \bar{N}_l) \delta u_m(l) = 0 \quad (3.2.15\alpha, \beta)$$

$$\left[M_t^P + M_t^S + \frac{1}{2} EI_n (\theta_x')^3 + N \frac{I_P}{A} \theta_x' + \bar{M}_{t0} \right] \delta \theta_x(0) = 0 \quad (3.2.15\gamma)$$

$$\left[M_t^P + M_t^S + \frac{1}{2} EI_n (\theta_x')^3 + N \frac{I_P}{A} \theta_x' - \bar{M}_{tl} \right] \delta \theta_x(l) = 0 \quad (3.2.15\delta)$$

$$(M_w + \bar{M}_{w0}) \delta (\theta_x^P)'(0) = 0 \quad (M_w - \bar{M}_{wl}) \delta (\theta_x^P)'(l) = 0 \quad (3.2.15\epsilon, \sigma\tau)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_n δίδεται από τη σχέση (2.2.33α) του κεφ. 2. Επισημαίνεται ότι κατά την εξαγωγή των σχέσεων (3.2.14-15) αγνοήθηκαν οι δυνατές μεταβολές της δευτερογενούς στρέβλωσης και των ορθών παραμορφώσεων λόγω δευτερογενούς στρέβλωσης προκειμένου να μην διατυπωθεί θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης [Wang et al. 2000] που είναι περισσότερο πολύπλοκη (βλ. κεφ. 2). Στις εκφράσεις (3.2.14) υπεισέρχονται τα μεγέθη n , m_t , m_w (αξονική δύναμη, στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες χρονικά εξαρτώμενες δράσεις κατά μήκος της ράβδου (βλ. Σχ.3.1α) και ορίζονται (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων) συναρτήσει του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας μέσω των εκφράσεων (2.2.34) και (1.2.39α,β). Στις συνοριακές συνθήκες (2.2.32) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{N}_0 , \bar{N}_l , \bar{M}_{t0} , \bar{M}_{tl} , \bar{M}_{w0} , \bar{M}_{wl} που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (αξονική δύναμη, στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις ακραίες διατομές της ράβδου μέσω των εκφράσεων (2.2.35α,β,γ,δ,ε,στ), αντίστοιχα. Από τις εξ.(3.2.14β), (3.2.15γ,δ) συμπεραίνεται ότι αξονικά και στρεπτικά εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα και δεν μπορούν να μελετηθούν απομονωμένα όπως πραγματοποιείται στη γραμμική ελαστική ανάλυση.

Εισάγοντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (3.2.12) στις εξ.(3.2.14-15) και αναδιατυπώνοντας τις προκύπτουσες συνοριακές συνθήκες, μορφώνονται έπειτα από κάποιες πράξεις οι παρακάτω κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις καθολικής δυναμικής ισορροπίας αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων

$$-\rho A \ddot{u}_m + EA u_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' = -n(x, t) \quad (3.2.16\alpha)$$

$$\begin{aligned} & -\rho I_P \ddot{\theta}_x + G \left(I_t^P + I_t^S \right) \theta_x'' - GI_t^S \left(\theta_x^P \right)'' + \frac{3}{2} EI_{PP} \left(\theta_x' \right)^2 \theta_x'' + EI_P u_m' \theta_x'' + EI_P u_m'' \theta_x' \\ & = -m_t(x, t) \end{aligned} \quad (3.2.16\beta)$$

$$-\rho C_S \left(\dot{\theta}_x^P \right)' + EC_S \left(\theta_x^P \right)''' - GI_t^S \left(\left(\theta_x^P \right)' - \theta_x' \right) = -m_w(x, t) \quad (3.2.16\gamma)$$

που υπόκεινται στις αρχικές συνθήκες ($x \in (0, l)$)

$$u_m(x, 0) = \bar{u}_{m0}(x) \quad \dot{u}_m(x, 0) = \dot{\bar{u}}_{m0}(x) \quad (3.2.17\alpha, \beta)$$

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.2.17\gamma, \delta)$$

$$\left(\theta_x^P \right)'(x, 0) = \left(\bar{\theta}_{x0}^P \right)'(x) \quad \left(\dot{\theta}_x^P \right)'(x, 0) = \left(\dot{\bar{\theta}}_{x0}^P \right)'(x) \quad (3.2.17\epsilon, \sigma\tau)$$

καθώς και στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \left(\theta_x^P \right)' = \bar{\beta}_3 \quad (3.2.18\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου N , M_t , M_w είναι η αξονική δύναμη, η στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου αντίστοιχα, τα οποία δίδονται από τις σχέσεις (3.2.13α), (2.2.39) και (3.2.13δ), αντίστοιχα. Στις σχέσεις (3.2.18), α_i , β_i , $\bar{\beta}_i$ ($i = 1, 2, 3$) είναι χρονικά εξαρτώμενοι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις (3.2.18) (βλ. εδάφιο 1.2.3). Επίσης, γραμμική ιξώδης απόσβεση μπορεί να εισαχθεί στις παραπάνω σχέσεις χωρίς δυσκολία. Τέλος, επισημαίνεται ότι στη σχέση (3.2.16β) έχει παραληφθεί όρος που εξαρτάται από την παράγωγο (ως προς x) της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς, καθώς αποδεικνύεται ότι η σταθερά αυτή είναι ανεξάρτητη της διαμήκους συντεταγμένης (βλ. εδάφιο 3.2.5).

Παρατηρείται ότι στο πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.16-18) υπεισέρχεται η τρίτη παράγωγος της πρωτογενούς γωνίας στροφής, η οποία δυσκολεύει την αριθμητική επίλυσή του. Προκειμένου να αποφευχθεί ο συγκεκριμένος όρος, χρησιμοποιείται η ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης $\eta_x = \left(\theta_x^P \right)'$ (βλ. κεφ. 2), με τη βοήθεια της οποίας οι εξ.(3.2.16-18) εκφράζονται ως (βλ. εξ.(2.2.7))

$$-\rho A \ddot{u}_m + EA u_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' = -n(x, t) \quad (3.2.19\alpha)$$

$$-\rho I_P \ddot{\theta}_x + G \left(I_t^P + I_t^S \right) \theta_x'' - GI_t^S \eta_x' + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' + EI_P u_m' \theta_x'' + EI_P u_m'' \theta_x' = -m_t(x, t) \quad (3.2.19\beta)$$

$$-\rho C_S \dot{\eta}_x + EC_S \eta_x'' - GI_t^S (\eta_x - \theta_x') = -m_w(x, t) \quad (3.2.19\gamma)$$

$$u_m(x, 0) = \bar{u}_{m0}(x) \quad \dot{u}_m(x, 0) = \dot{\bar{u}}_{m0}(x) \quad (3.2.20\alpha, \beta)$$

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.2.20\gamma, \delta)$$

$$\eta_x(x, 0) = \bar{\eta}_{x0}(x) \quad \dot{\eta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\eta}}_{x0}(x) \quad (3.2.20\epsilon, \sigma\tau)$$

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x = \bar{\beta}_3 \quad (3.2.21\alpha, \beta, \gamma)$$

ενώ η σχέση (2.2.39) εκφράζεται μέσω της εξ.(2.2.42). Παρατηρείται ότι στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.2.19) περιέχονται μέχρι δεύτερης τάξης παράγωγοι, συνεπώς οι εξ.(3.2.19) έχουν περιέλθει σε κατάλληλη μορφή για αριθμητική επίλυση. Γενικά οι συνοριακές συνθήκες (3.2.21α,β) είναι μη γραμμικές εξαιτίας των εκφράσεων (3.2.13α), (2.2.42) και (2.2.35γ,δ). Αγνοώντας όλους τους μη γραμμικούς όρους των εξ.(3.2.13α), (2.2.42) και (3.2.19α,β), προκύπτει το πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ, στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής δυναμικής ανάλυσης. Διαπιστώνεται εύκολα ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η αξονική και η στρεπτική φόρτιση αποζευγνύονται, συνεπώς μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα. Επιπρόσθετα, το γεωμετρικά μη γραμμικό δυναμικό πρόβλημα ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής χωρίς επιρροή ΔΔΠ διατυπώνεται θέτοντας $(\theta_x^P)' = \theta_x'$ στη σχέση (3.2.1) και ακολουθώντας τη διαδικασία του παρόντος εδαφίου. Οι διαφορικές εξισώσεις και οι αντίστοιχες αρχικές και συνοριακές συνθήκες του σχετικού πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών δίδονται από τις σχέσεις

$$-\rho A \ddot{u}_m + EA u_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' = -n \quad (3.2.22\alpha)$$

$$\rho I_P \ddot{\theta}_x - \rho C_S \ddot{\theta}_x + EC_S \theta_x'''' - GI_t^P \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' - EI_P u_m' \theta_x'' - EI_P u_m'' \theta_x' = m_t - m_w' \quad (3.2.22\beta)$$

$$u_m(x, 0) = \bar{u}_{m0}(x) \quad \dot{u}_m(x, 0) = \dot{\bar{u}}_{m0}(x) \quad (3.2.23\alpha, \beta)$$

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.2.23\gamma, \delta)$$

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \theta_x' = \bar{\beta}_3 \quad (3.2.24\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου οι δράσεις M_t , M_w στα άκρα της ράβδου εδώ δίδονται ως

$$M_t = \rho C_S \ddot{\theta}'_x + GI_t^P \theta'_x - EC_S \theta_x''' + \frac{I}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^3 + EI_P u'_m \theta'_x - m_w \quad (3.2.25\alpha)$$

$$M_w = EC_S \theta_x'' \quad (3.2.25\beta)$$

Εάν επιπρόσθετα αγνοηθεί και η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, τότε αρκεί να τεθεί $C_S = 0$, $m_w = 0$ στις σχέσεις (3.2.22β), (3.2.25α). Στο σχετικό πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών που προκύπτει δεν υπεισέρχεται η συνοριακή συνθήκη στρέβλωσης (3.2.24γ).

3.2.4 Απλοποιημένα Προβλήματα Αρχικών Συνοριακών Τιμών

Είναι δυνατό τα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.19-21) και (3.2.22-24) να απλοποιηθούν σημαντικά αγνοώντας την επιρροή του όρου αξονικής αδράνειας $\rho A \ddot{u}_m$, όπως πραγματοποιείται συνήθως στη διατύπωση δυναμικών προβλημάτων θεωριών δοκού. Τα προκύπτοντα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών περιέχουν ως αγνώστους μόνο τα στρεπτικά κινηματικά μεγέθη. Επιπλέον, περαιτέρω απλοποίηση επιτυγχάνεται στη συνήθη περίπτωση όπου η αξονική δύναμη κατά μήκος της ράβδου n είναι μηδενική. Παρακάτω, η διαδικασία απλοποίησης περιγράφεται για δύο σετ αξονικών συνοριακών συνθηκών που συναντώνται συχνά στην πράξη (πλήρης αξονική παρεμπόδιση στα δύο άκρα της ράβδου και επιβολή αξονικής φόρτισης στο ένα άκρο της ράβδου).

Στην περίπτωση πλήρους αξονικής παρεμπόδισης στα δύο άκρα της ράβδου, οι αξονικές συνοριακές συνθήκες (3.2.21α) εκφράζονται ως

$$u_m(0,t) = 0 \quad u_m(l,t) = 0 \quad (3.2.26\alpha,\beta)$$

Εφαρμόζοντας τις προαναφερθέντες απλοποιήσεις, η εξ.(3.2.19α) γράφεται ως

$$u_m'' = -\frac{I_P}{A} \theta'_x \theta_x'' \quad (3.2.27)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ.(3.2.27) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.26), λαμβάνουμε

$$u'_m = -\frac{I}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 + \frac{\tilde{N}}{EA} \quad (3.2.28)$$

όπου \tilde{N} είναι χρονικά εξαρτώμενη σταθερή κατά μήκος της ράβδου εφελκυστική αξονική δύναμη που οφείλεται στη γεωμετρική μη γραμμικότητα και δίδεται ως

$$\tilde{N} = \frac{I}{2} \frac{EI_P}{l} \int_0^l (\theta'_x)^2 dx \quad (3.2.29)$$

Στην περίπτωση επιβολή αξονικής φόρτισης $\bar{N}(t)$ στο ένα άκρο της ράβδου (π.χ. στο δεξιό άκρο), οι αξονικές συνοριακές συνθήκες (3.2.21α) εκφράζονται ως

$$u_m(0,t) = 0 \quad N(l,t) = \bar{N}(t) \quad (3.2.30\alpha,\beta)$$

Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει ότι η εξ.(3.2.28) ισχύει ως έχει εάν τεθεί όπου $\tilde{N} = \bar{N}$.

Αντικαθιστώντας στην εξ.(3.2.19β) τις εκφράσεις των u'_m , u''_m από τις εξ.(3.2.27-28), οι διαφορικές εξισώσεις και οι αντίστοιχες αρχικές και συνοριακές συνθήκες του απλοποιημένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών δίδονται ως

$$-\rho I_P \ddot{\theta}_x + \left(GI_t^P + GI_t^S + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \theta'_x - GI_t^S \eta'_x + \frac{3}{2} EI_n (\theta'_x)^2 \theta''_x = -m_t \quad (3.2.31\alpha)$$

$$-\rho C_S \dot{\eta}_x + EC_S \eta''_x - GI_t^S (\eta_x - \theta'_x) = -m_w \quad (3.2.31\beta)$$

$$\theta_x(x,0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x,0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.2.32\alpha,\beta)$$

$$\eta_x(x,0) = \bar{\eta}_{x0}(x) \quad \dot{\eta}_x(x,0) = \dot{\bar{\eta}}_{x0}(x) \quad (3.2.32\gamma,\delta)$$

$$\beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x = \bar{\beta}_3 \quad (3.2.33\alpha,\beta)$$

όπου εδώ η στρεπτική ροπή M_t στα άκρα της ράβδου εκφράζεται, αντικαθιστώντας στην εξ.(2.2.42) τις εκφράσεις των u'_m , u''_m από τις εξ.(3.2.27-28), ως

$$M_t = \left(GI_t^P + GI_t^S + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \theta'_x - GI_t^S \eta_x + \frac{1}{2} EI_n (\theta'_x)^3 \quad (3.2.34)$$

Είναι δυνατό οι εξισώσεις (3.2.31α,β) να συνδυαστούν ώστε να προκύψει πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών ως προς ένα μόνο κινηματικό μέγεθος του προβλήματος. Για τη διατύπωσή του επιλέγεται η στρεπτική στροφή θ_x . Έτσι, μετά από κατάλληλες παραγωγίσεις, συνδυάζοντας τις εξ.(3.2.31α,β) μορφώνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} & \rho I_P \ddot{\theta}_x - \rho C_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{EI_P}{GI_t^S} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \theta''_x - \rho C_S \frac{EI_n}{GI_t^S} \left[3(\theta'_x)^2 \theta''_x + 6\theta'_x \theta''_x \theta'_x \right. \\ & \left. + 3\dot{\theta}'_x \theta'_x \theta''_x + \frac{3}{2} \ddot{\theta}'_x (\theta'_x)^2 \right] + EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \theta'''_x - \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \theta''_x \\ & - \frac{3}{2} EI_n (\theta'_x)^2 \theta''_x + EI_n \frac{EC_S}{GI_t^S} \left[3(\theta''_x)^3 + 9\theta'_x \theta''_x \theta'''_x + \frac{3}{2} (\theta'_x)^2 \theta''''_x \right] = m_t - m'_w \\ & + \frac{\rho C_S}{GI_t^S} \dot{m}_t - \frac{EC_S}{GI_t^S} m''_t \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

όπου έχει αγνοηθεί ο όρος ανώτερης τάξης $\rho C_S \left(\rho I_P / GI_t^S \right) \ddot{\theta}'_x$, ενώ κ είναι βοηθητική σταθερά η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης (2.2.47). Μετά από παρόμοιους

αλγεβρικούς συνδυασμούς εξισώσεων στα άκρα της ράβδου, οι συνοριακές ποσότητες των εξ.(3.2.33α,β) εκφράζονται ως

$$M_t = \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \theta'_x - EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \theta_x'' + \frac{1}{2} EI_n (\theta'_x)^3 - EC_S \frac{EI_n}{GI_t^S} \left[3\theta'_x (\theta_x'')^2 + \frac{3}{2} (\theta'_x)^2 \theta_x''' \right] - \frac{EC_S}{GI_t^S} m_t' + \frac{EC_S}{GI_t^S} \rho I_P \ddot{\theta}_x - m_w \quad (3.2.36)$$

$$M_w = EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \theta_x'' + EC_S \frac{EI_n}{GI_t^S} \left[\frac{3}{2} (\theta'_x)^2 \theta_x''' \right] + \frac{EC_S}{GI_t^S} m_t - \frac{EC_S}{GI_t^S} \rho I_P \ddot{\theta}_x \quad (3.2.37)$$

$$\eta_x = \theta'_x + \frac{EC_S}{GI_t^S} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \theta_x''' + \frac{EC_S}{GI_t^S} \frac{EI_n}{GI_t^S} \left[3\theta'_x (\theta_x'')^2 + \frac{3}{2} (\theta'_x)^2 \theta_x''' \right] + \frac{EC_S}{(GI_t^S)^2} m_t' - \frac{EC_S}{(GI_t^S)^2} \rho I_P \ddot{\theta}_x + \frac{m_w}{GI_t^S} \quad (3.2.38)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις έχει αγνοηθεί η επιρροή του όρου στρεβλωτικής αδράνειας $\rho C_S \dot{\eta}_x$. Σημειώνεται ότι οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και κατά μήκος της ράβδου χρησιμεύοντας στον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών και της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης. Το προκύπτον πεπλεγμένο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών περιγράφεται από τις εξ.(3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.33α,β).

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία είναι δυνατό να απλοποιηθεί και το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.22-24). Αντικαθιστώντας στην εξ.(3.2.22β) τις εκφράσεις των u_m' , u_m'' από τις εξ.(3.2.27-28), οι διαφορικές εξισώσεις και οι αντίστοιχες αρχικές και συνοριακές συνθήκες του απλοποιημένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών δίδονται ως

$$\rho I_P \ddot{\theta}_x - \rho C_S \ddot{\theta}_x + EC_S \theta_x''' - \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_n (\theta'_x)^2 \theta_x'' = m_t - m_w' \quad (3.2.39)$$

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.2.40\alpha, \beta)$$

$$\beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \theta_x' = \bar{\beta}_3 \quad (3.2.41\alpha, \beta)$$

όπου το δίρροπο στρέβλωσης M_w δίδεται από την εξ.(3.2.25β), ενώ η στρεπτική ροπή M_t εκφράζεται, αντικαθιστώντας στην εξ.(3.2.25α) την έκφραση του u_m' από την εξ.(3.2.28), ως

$$M_t = \rho C_S \ddot{\theta}_x + \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \theta'_x - EC_S \theta_x''' + \frac{1}{2} EI_n (\theta'_x)^3 - m_w \quad (3.2.42)$$

3.2.5 Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της ϕ_S^S ορίστηκε στο εδάφιο 3.2.2 (εξ.(3.2.10α), (3.2.11)). Με τη βοήθεια της καθολικής στρεβλωτικής εξίσωσης δυναμικής ισορροπίας (εξ.(3.2.19γ)) και αγνοώντας την επιρροή του m_w , η εξ.(3.2.10α) διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} & (-\rho\ddot{\eta}_x + E\eta_x'') \left(\frac{C_S}{I_t^S} \nabla^2 \phi_S^S - \rho \frac{C_S}{GI_t^S} \ddot{\phi}_S^S - \phi_S^P \right) - E \left[u_m'' + (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \right] \\ & + \rho \left[\ddot{u}_m - (\ddot{\eta}_x - \ddot{\theta}_x') (\phi_S^P + \phi_S^S) \right] = 0 \quad \text{στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Η αγνόηση του m_w είναι παρεμφερής της παραδοχής $t_x \approx 0$ που έχει υιοθετηθεί στο εδάφιο 3.2.2 (βλ. εξ.(3.2.11)). Προκειμένου να απλοποιηθεί ο υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, αγνοούνται στην εξ.(3.2.43) οι όροι που οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (Eu_m'' , $E(y^2 + z^2)\theta_x'\theta_x''$, $\rho\ddot{u}_m$) καθώς και οι αδρανειακοί όροι της δευτερογενούς στρέβλωσης ($-\ddot{\phi}_S^S \rho C_S / (GI_t^S)$, $\rho(\ddot{\eta}_x - \ddot{\theta}_x')(\phi_S^P + \phi_S^S)$) (βλ. εδάφιο 3.2.2). Τούτο έχει ως αποτέλεσμα να παραβιάζεται μερικώς η τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά τη διαμήκη διεύθυνση στη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση, εντούτοις στο γραμμικό πρόβλημα η συγκεκριμένη εξίσωση ικανοποιείται πλήρως εάν αγνοηθούν οι αδρανειακοί όροι της δευτερογενούς στρέβλωσης. Καθώς εν γένει ισχύει $\eta_x \neq \theta_x'$ κατά μήκος της ράβδου, προκύπτει από την καθολική στρεβλωτική εξίσωση δυναμικής ισορροπίας ότι $(-\rho\ddot{\eta}_x + E\eta_x'') \neq 0$. Συνεπώς, η σχέση (3.2.43) διαμορφώνεται ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{I_t^S}{C_S} \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.44)$$

επισημαίνοντας ότι η ίδια ακριβώς σχέση διατυπώθηκε και στο αντίστοιχο στατικό πρόβλημα (κεφ. 2, εξ.(2.2.52)). Προκύπτει ότι η ϕ_S^S και η σταθερά I_t^S προσδιορίζονται μέσω των εξ.(2.2.53) και (2.2.56), αντίστοιχα, ενώ αποδεικνύεται ότι η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης είναι διδιάστατη χρονικά ανεξάρτητη συνάρτηση. Στο Παράρτημα Π7 αποδεικνύεται ότι η λύση της εξ.(2.2.53) είναι μοναδική.

3.2.6 Εναλλακτικές Διατυπώσεις του Προβλήματος

Το δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά με τη βοήθεια του πεδίου μετατοπίσεων (3.2.1-3) αγνοώντας τη δευτερογενή στρέβλωση. Στην περίπτωση αυτή, οι σχέσεις (3.2.1-3) εκφράζονται ως

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, t) + (\theta_x^P)'(x, t) \phi_S^P(y, z) \quad (3.2.45)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \sin \theta_x(x, t) - y(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.46)$$

$$w(x, y, z, t) = y \sin \theta_x(x, t) - z(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.47)$$

όπου η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P προσδιορίζεται μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.9). Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με το πεδίο μετατοπίσεων (2.2.59-61) του κεφ. 2 όπου μελετάται το αντίστοιχο στατικό πρόβλημα. Ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 5.2.1, οι μη μηδενικές συνιστώσες του παραμορφωσιακού πεδίου της ράβδου προκύπτουν ταυτόσημες με τις αντίστοιχες εκφράσεις των εξ.(2.2.62), ενώ οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου που παράγουν έργο είναι επίσης ταυτόσημες με τις αντίστοιχες εκφράσεις των εξ.(2.2.63). Τα εντατικά μεγέθη ορίζονται με τη βοήθεια των εξ.(3.2.12), με την εξαίρεση της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής η οποία ορίζεται μέσω της εξ.(2.2.64). Τα εντατικά μεγέθη δίδονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών μέσω των σχέσεων (3.2.13). Στις σχέσεις αυτές υπεισέρχονται οι γεωμετρικές σταθερές που εκφράζονται μέσω των εξ.(2.2.29), με την εξαίρεση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S η οποία ορίζεται εδώ μέσω της εξ.(2.2.66) (βλ. εδάφιο 2.2.5). Επιπρόσθετα, οι εξισώσεις (3.2.14-42), συμπεριλαμβανομένου και του πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφει την καθολική δυναμική ισορροπία αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου, ισχύουν επακριβώς εάν σε αυτές εισαχθεί η δευτερογενής στρεπτική σταθερά της εξ.(2.2.67).

Διαπιστώνεται εύκολα ότι οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου των εξ.(2.2.63) δεν ικανοποιούν την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (3.2.8) ακόμα και στην περίπτωση όπου αγνοηθούν όλοι οι αδρανειακοί όροι και οι όροι που οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Το ίδιο ισχύει και στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής δυναμικής ανάλυσης της παρούσας εναλλακτικής διατύπωσης του προβλήματος. Τούτο οφείλεται στη μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. εξ.(2.2.63β,γ)), οι οποίες προέκυψαν από το πεδίο παραμορφώσεων (2.2.62) που είναι συμβιβαστό με το πεδίο μετατοπίσεων (3.2.45-47). Έτσι, προκειμένου να διορθωθούν οι καθολικές εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας της ράβδου εξαιτίας της προαναφερθείσας μη ικανοποιητικής κατανομής, εισάγεται στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης k_x [Kraus 2007] στην έκφραση της I_t^S (εξ.(2.2.67)), όπως διακρίνεται στην εξ.(2.2.68). Οι καθολικές εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας διατυπώνονται με την παραπάνω έκφραση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς χωρίς να μεταβάλλεται η μορφή τους. Στη βιβλιογραφία, ο συντελεστής k_x προσδιορίζεται με τη βοήθεια ενεργειακής μεθόδου (βλ. π.χ. Laudiero and Savoia [1991], Kollar [2001], Cortinez and Piovan [2002], Piovan and Cortinez [2005] και Minghini et al. [2009]). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου που προκύπτει από την παραπάνω διατύπωση του προβλήματος εξισώνεται με την αντίστοιχη ακριβή έκφραση, η οποία προκύπτει από τις διατμητικές τάσεις των εξ.(2.2.85α-δ) θεωρώντας πλήρως στατικές συνθήκες. Η διαδικασία αυτή είναι ταυτόσημη με αυτή του εδαφίου 2.2.5,

συνεπώς ο k_x δίδεται μέσω της εξ.(2.2.70). Τονίζεται ότι η ενεργειακή μέθοδος υπολογισμού του συντελεστή k_x θεωρώντας πλήρως στατικές συνθήκες οδηγεί τελικά στην ίδια έκφραση της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς που δίδεται από την εξ.(2.2.56). Τούτο δείχνει επιπρόσθετα ότι η χρήση της ενεργειακής μεθόδου για τον προσδιορισμό του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης οδηγεί σε ταυτόσημη διατύπωση του εξεταζόμενου προβλήματος με αυτή που έχει παρουσιαστεί στα εδάφια 3.2.1-3.2.5. Εξ' όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, η μόνη μέθοδος υπολογισμού του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία είναι η ενεργειακή.

Στην περίπτωση που δεν διορθωθούν οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων, το πρόβλημα διατυπώνεται με βάση το συμβιβαστό πεδίο παραμορφώσεων (2.2.62). Σε αυτή την περίπτωση, στη σχέση (2.2.68) τίθεται $k_x = 1$ οπότε η δευτερογενής στρεπτική σταθερά προσδιορίζεται μέσω της εξ.(2.2.67).

Όπως έχει προαναφερθεί, το γεωμετρικά μη γραμμικό δυναμικό πρόβλημα ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής **χωρίς επιρροή ΔΔΠ** διατυπώνεται θέτοντας $(\theta'_x)^P = \theta'_x$ στη σχέση (3.2.1), οπότε έπειτα από κάποιες πράξεις μορφώνονται οι εξ.(3.2.22-24). Με τη διατύπωση αυτή ωστόσο μηδενίζεται η δευτερογενής στρέβλωση της ράβδου και ως εκ τούτου προκύπτουν μηδενικές δευτερογενείς διατμητικές τάσεις με αποτέλεσμα να παραβιάζεται η τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας (3.2.8α). Ακολουθώντας τη λογική του κεφ. 1, είναι δυνατό να θεωρηθεί στη διατύπωση αυτή κατάλληλη δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης με την οποία να προσδιορίζονται δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που να ικανοποιούν την εξ.(3.2.8α) καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (3.2.8β). Έτσι, το εξεταζόμενο πρόβλημα χωρίς επιρροή ΔΔΠ διατυπώνεται μέσω του ακόλουθου πεδίου μετατοπίσεων

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, t) + \theta'_x(x, t)\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z, t) \quad (3.2.48)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \sin \theta_x(x, t) - y(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.49)$$

$$w(x, y, z, t) = y \sin \theta_x(x, t) - z(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.50)$$

επισημαίνοντας ότι το πεδίο αυτό ταυτίζεται με τις εξ.(1.2.1-3), εάν στις εξισώσεις αυτές αγνοηθούν τα καμπτοδιατμητικά κινηματικά μεγέθη. Ακολουθώντας τη διαδικασία του κεφ. 1, οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου που δεν παράγουν έργο προσδιορίζονται ως

$$S_{xx} = E \left[u'_m + \theta''_x \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.51\alpha)$$

$$S_{xy} = G \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right] \quad S_{xz} = G \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right] \quad (3.2.51\beta, \gamma)$$

ενώ η ϕ_S^S προκύπτει ότι προσδιορίζεται μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \left(-\frac{E}{G} u_m'' + \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) - \left(\frac{E}{G} \theta_x''' - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}_x' \right) \phi_S^P - \frac{E}{G} \theta_x' \theta_x'' (y^2 + z^2)$$

στο Ω , $\forall x \in [0, l]$ (3.2.52α)

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = \frac{t_x}{G} \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.52\beta)$$

Προκειμένου να ευρεθεί μοναδική λύση για τις εξ.(3.2.52), απαιτούμε κι εδώ η ϕ_S^S να ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23β). Υπογραμμίζεται ότι οι παραπάνω δευτερογενείς διατμητικές τάσεις αποδεικνύεται ότι δεν επηρεάζουν την καθολική δυναμική ισορροπία της ράβδου (εξ.(3.2.22-24)) (βλ. κεφ. 1). Ωστόσο υπολογίζονται κανονικά μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών των σχέσεων (3.2.52). Επισημαίνεται επίσης ότι όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της εξ.(3.2.52α), πλην του όρου $\left[(E/G) \theta_x''' - (\rho/G) \ddot{\theta}_x' \right] \phi_S^P$, οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και ως εκ τούτου δεν υπεισέρχονται στη γραμμική ανάλυση. Αξιοποιώντας την καθολική εξίσωση δυναμικής ισορροπίας αξονικών δράσεων του εξεταζόμενου προβλήματος (εξ.(3.2.22α) και αγνοώντας την επιρροή κατανεμημένων αξονικών δράσεων, το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών απλοποιείται ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = -\frac{E}{G} \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] \theta_x' \theta_x'' - \left(\frac{E}{G} \theta_x''' - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}_x' \right) \phi_S^P \text{ στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.53\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = \frac{t_x}{G} \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (3.2.53\beta)$$

Ομοίως κι εδώ όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της εξ.(3.2.53α), πλην του όρου $\left[(E/G) \theta_x''' - (\rho/G) \ddot{\theta}_x' \right] \phi_S^P$, οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και ως εκ τούτου δεν υπεισέρχονται στη γραμμική ανάλυση. Τέλος, στην περίπτωση που αγνοείται η επιρροή του όρου αξονικής αδράνειας στο εξεταζόμενο πρόβλημα (βλ. εξ.(3.2.39-41)), αντικαθιστώντας στην εξ.(3.2.52α) τις εκφράσεις των u_m' , u_m'' από τις εξ.(3.2.27-28), λαμβάνεται και πάλι το πρόβλημα συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.53) για την σχετική δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{red}$.

3.2.7 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στα προηγούμενα εδάφια, για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα.

1. Ορισμός αυθαίρετου δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς S_{xyz} με αρχή το κέντρο συστροφής S της διατομής του αριστερού άκρου της ράβδου. Το κέντρο συστροφής ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο και το κέντρο βαρύτητας και

προσδιορίζεται ως το σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας της (διπλά συμμετρικής) διατομής.

2. Υπολογισμός της πρωτογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^P(y, z)$ [Μώκος 2007]. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \hat{\phi}_S^P = 0 \text{ στο } \Omega \quad (3.2.54\alpha)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \text{ στο } \Gamma_j \quad (3.2.54\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*.

3. Υπολογισμός του εμβαδού A της διατομής και της πρωτογενούς ροπής στρέβλωσης \hat{R}_S^P [Μώκος 2007] ως

$$A = \iint_{\Omega} d\Omega \quad \hat{R}_S^P = \iint_{\Omega} \hat{\phi}_S^P d\Omega \quad (3.2.55\alpha, \beta)$$

4. Υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^P(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση [Μώκος 2007]

$$\phi_S^P = \hat{\phi}_S^P - \frac{\hat{R}_S^P}{A} \quad (3.2.56)$$

5. Υπολογισμός της δευτερογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^S(y, z)$ [Μώκος 2007]. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \hat{\phi}_S^S = \phi_S^P \text{ στο } \Omega \quad (3.2.57\alpha)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j \quad (3.2.57\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Poisson*.

6. Υπολογισμός της δευτερογενούς ροπής στρέβλωσης \hat{R}_S^S ως

$$\hat{R}_S^S = \iint_{\Omega} \hat{\phi}_S^S d\Omega \quad (3.2.58)$$

7. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\bar{\phi}_S^S(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση [Μώκος 2007]

$$\bar{\phi}_S^S = \widehat{\phi}_S^S - \frac{\widehat{R}_S^S}{A} \quad (3.2.59)$$

8. Υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας I_P , της ροπής τέταρτης τάξης I_{PP} , της σταθεράς I_n , της πρωτογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^P , της σταθεράς στρέβλωσης C_S , της βοηθητικής σταθεράς $I_{\bar{\phi}}$ και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S μέσω των σχέσεων

$$I_P = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad I_{PP} = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega \quad I_n = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} \quad (3.2.60\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_t^P = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad C_S = \iint_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.2.60\delta, \epsilon)$$

$$I_{\bar{\phi}} = -\iint_{\Omega} \phi_S^P \bar{\phi}_S^S d\Omega \quad I_t^S = \frac{(C_S)^2}{I_{\bar{\phi}}} \quad (3.2.60\sigma\tau, \zeta)$$

9. Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων αξονικής, στρεπτικής και στρεβλωτικής δυναμικής ισορροπίας της ράβδου για τυχούσες συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες χρονικά εξαρτώμενες αξονικές δυνάμεις $n = n(x, t)$, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x, t)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x, t)$, υποκείμενων στις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες καθώς και στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών

$$\left. \begin{aligned} -\rho A \ddot{u}_m + EA u_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' &= -n(x, t) \\ -\rho I_P \ddot{\theta}_x + G \left(I_t^P + I_t^S \right) \theta_x'' - GI_t^S \eta_x' + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' & \\ + EI_P u_m' \theta_x'' + EI_P u_m'' \theta_x' &= -m_t(x, t) \\ -\rho C_S \ddot{\eta}_x + EC_S \eta_x'' - GI_t^S (\eta_x - \theta_x') &= -m_w(x, t) \end{aligned} \right\} \text{στο εσωτερικό της ράβδου} \quad (3.2.61\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} u_m(x, 0) = \bar{u}_{m0}(x) \quad \dot{u}_m(x, 0) = \dot{\bar{u}}_{m0}(x) \\ \theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \\ \eta_x(x, 0) = \bar{\eta}_{x0}(x) \quad \dot{\eta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\eta}}_{x0}(x) \end{aligned} \right\} \text{στο εσωτερικό της ράβδου} \quad (3.2.61\beta)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 N + \alpha_2 u_m &= \alpha_3 \\ \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x &= \beta_3 \\ \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x &= \bar{\beta}_3 \end{aligned} \right\} \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, l \quad (3.2.61\gamma)$$

όπου

$$N = EA \left[u'_m + \frac{1}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.62\alpha)$$

$$M_t = G \left(I_t^P + I_t^S \right) \theta'_x - GI_t^S \eta_x + \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^3 + EI_P u'_m \theta'_x \quad (3.2.62\beta)$$

$$M_w = EC_S \eta'_x \quad (3.2.62\gamma)$$

και υπολογισμός της αξονικής μετατόπισης $u_m(x,t)$, της γωνίας στροφής $\theta_x(x,t)$, της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης $\eta_x(x,t)$, των παραγώγων τους καθώς και των αναπτυσσόμενων αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών εντατικών μεγεθών N , N^l , N^{nl} , M_t , M_t^P , M_t^S , M_t^{nl} και M_w μέσω των σχέσεων

$$N = N^l + N^{nl} \quad (3.2.63\alpha)$$

$$N^l = EA u'_m \quad N^{nl} = \frac{1}{2} EI_P (\theta'_x)^2 \quad (3.2.63\beta,\gamma)$$

$$M_t = M_t^P + M_t^S + M_t^{nl} \quad (3.2.64\alpha)$$

$$M_t^P = GI_t^P \theta'_x \quad M_t^S = -GI_t^S (\eta_x - \theta'_x) \quad M_t^{nl} = \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta'_x)^3 + EI_P u'_m \theta'_x \quad (3.2.64\beta,\gamma,\delta)$$

$$M_w = EC_S \eta'_x \quad (3.2.65)$$

10. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^S(y,z)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \frac{I_t^S}{C_S} \bar{\phi}_S^S \quad (3.2.66)$$

11. Υπολογισμός των μη μηδενικών συνιστωσών ορθής τάσης, πρωτογενούς και δευτερογενούς διατμητικής τάσης του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff και των συνολικών διατμητικών τάσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις (βλ. και [Μώκος 2007])

Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_{xy}^P = G \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad S_{xz}^P = G \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad (3.2.67\alpha,\beta)$$

Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_{xy}^S = -G (\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad S_{xz}^S = -G (\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.2.67\gamma,\delta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_x = \sqrt{\left(S_{xy}^P + S_{xy}^S\right)^2 + \left(S_{xz}^P + S_{xz}^S\right)^2} \quad (3.2.67\epsilon)$$

Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x^P = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y\eta_y + zn_z \right) \quad (3.2.67\sigma\tau)$$

Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x^S = -G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (3.2.67\zeta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x = S_x^P + S_x^S \quad (3.2.67\eta)$$

Ορθές τάσεις στο χωρίο Ω και στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_{xx} = E \left[u'_m + \eta'_x \phi_S^P + \frac{I}{2} (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.67\theta)$$

12. Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, t) + \eta_x(x, t) \phi_S^P(y, z) - (\eta_x(x, t) - \theta'_x(x, t)) \left[\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(y, z) \right] \quad (3.2.68\alpha)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \sin \theta_x(x, t) - y(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.68\beta)$$

$$w(x, y, z, t) = y \sin \theta_x(x, t) - z(1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.68\gamma)$$

3.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

3.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής και την Ανεξάρτητη Παράμετρο Στρέβλωσης

Η αριθμητική επίλυση του πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση και τη γωνία στρεπτικής στροφής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.2.22-24) (περίπτωση χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$),

επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης [Katsikadelis 1994, 2002b], όπως αυτή παρουσιάστηκε στα εδάφια Π2.3, Π2.4.

Έστω $u_1(x,t) = u_m(x,t)$, $u_2(x,t) = \theta_x(x,t)$ η ζητούμενη λύση του πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.2.22-24). Υποθέτοντας ότι η u_1 είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της ράβδου, δηλαδή στο διάστημα $(0,l)$, καθώς και μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στα άκρα της ράβδου $x=0,l$ και ότι η u_2 είναι συνεχής και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της ράβδου, καθώς και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στα άκρα της ράβδου, ισχύει

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = q_1(x,t) \quad \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = q_2(x,t) \quad (3.3.1\alpha,\beta)$$

όπου οι ποσότητες $q_1(x,t)$, $q_2(x,t)$ καλούνται πλασματικά φορτία. Οι εξισώσεις (3.3.1), που καλούνται αναλογικές εξισώσεις, δηλώνουν ότι η λύση του αρχικού προβλήματος (3.2.22-24) μπορεί να προκύψει από την επίλυση ανάλογου (υποκατάστατου) πεπλεγμένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση και με τη γωνία στρεπτικής στροφής, όπου η ράβδος υπόκειται στις ίδιες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Σημειώνεται ότι οι εξ.(3.3.1) είναι οιονεί στατικές, δηλαδή η μεταβλητή του χρόνου υπεισέρχεται σε αυτές ως παράμετρος. Τα πλασματικά φορτία είναι άγνωστα. Ωστόσο, μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την ΑΕΜ. Έτσι, σύμφωνα με όσα έχουν παρουσιαστεί στα εδάφια Π2.3.1, Π2.4.1, το διάστημα $(0,l)$ διαιρείται σε L στοιχεία στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι τα $q_1(x,t)$, $q_2(x,t)$ έχουν σταθερή τιμή (ως προς x) σε κάθε στοιχείο η οποία είναι ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (Σχ.Π2.1). Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.2.24) και (3.2.13α), (3.2.25α,β), προκύπτει από τις σχέσεις (Π2.3.18) και (Π2.4.24) μη γραμμικό σύστημα 12 διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων (Differential - Algebraic Equations (DAE)), το οποίο διαμορφώνεται για το εξεταζόμενο πρόβλημα ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^{in} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_1 \\ \ddot{\mathbf{d}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{nl}^u \\ \hat{\mathbf{D}}_{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha_3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \beta_3 \\ \bar{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.3.2)$$

όπου

$$\mathbf{E}^{in} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^{in} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.3\alpha)$$

$$\mathbf{E}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^u & \mathbf{E}_1^u & \mathbf{E}_2^u \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^u & \mathbf{D}_2^u \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_{1,x} \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{D}}_{nl}^u = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u \end{Bmatrix} \quad (3.3.3\beta,\gamma,\delta)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_{2,x} \\ \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} \\ \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{D}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{D}}_{1,nl} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.3.3\epsilon,\sigma\tau,\zeta)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{Bmatrix} \alpha_3^0 \\ \alpha_3^l \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{Bmatrix} \beta_3^0 + \beta_1^0 m_w(0,t) \\ \beta_3^l + \beta_1^l m_w(l,t) \end{Bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_3 = \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_3^0 \\ \bar{\beta}_3^l \end{Bmatrix} \quad (3.3.3\eta,\theta,\iota)$$

$$\mathbf{D}^{in} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \rho C_S & 0 \\ 0 & \beta_1^l \rho C_S \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{D}_1^u = \begin{bmatrix} \alpha_2^0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2^u = \begin{bmatrix} \alpha_1^0 EA & 0 \\ 0 & \alpha_1^l EA \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u = \begin{Bmatrix} \alpha_1^0 \frac{1}{2} EI_P [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)]^2 \\ \alpha_1^l \frac{1}{2} EI_P [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)]^2 \end{Bmatrix} \quad (3.3.5\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \beta_2^0 & 0 \\ 0 & \beta_2^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 GI_t^P & 0 \\ 0 & \beta_1^l GI_t^P \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.6\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\mathbf{D}_{14} = \begin{bmatrix} -\beta_1^0 EC_S & 0 \\ 0 & -\beta_1^l EC_S \end{bmatrix} \quad (3.3.6\delta)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{1,nl} = \begin{Bmatrix} \beta_1^0 \left[\frac{1}{2} EI_{PP} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)]^3 + EI_P \hat{\mathbf{u}}_{1,x}(1) \hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1) \right] \\ \beta_1^l \left[\frac{1}{2} EI_{PP} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)]^3 + EI_P \hat{\mathbf{u}}_{1,x}(2) \hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2) \right] \end{Bmatrix} \quad (3.3.6\epsilon)$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_2^0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_2^l \end{bmatrix} \quad (3.3.7\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{D}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1^0 EC_S & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_1^l EC_S \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.7\gamma,\delta)$$

με τον άνω ενδείκτη στους συντελεστές α_i , β_i , $\bar{\beta}_i$ ($i = 1, 2, 3$) να δηλώνει τα άκρα της ράβδου $0, l$, ενώ οι πίνακες \mathbf{F}^u , \mathbf{E}_1^u , \mathbf{E}_2^u , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{E}_{11} , \mathbf{E}_{12} , \mathbf{E}_{13} , \mathbf{E}_{14} , \mathbf{E}_{21} , \mathbf{E}_{22} , \mathbf{E}_{23} και τα μητρώα στήλες \mathbf{q}_1 , $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_{1,x}$, \mathbf{q}_2 , $\hat{\mathbf{u}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_{2,x}$, $\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}$, $\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}$ ορίζονται στα εδάφια Π2.3.1, Π2.4.1. Σημειώνεται ότι από τις εκφράσεις (3.3.3γ,στ) μορφώνεται το γενικευμένο μητρώο στήλη άγνωστων ποσοτήτων του προβλήματος $\mathbf{d}^T = [\mathbf{d}_1^T \ \mathbf{d}_2^T] = [\mathbf{q}_1^T \ \hat{\mathbf{u}}_1^T \ \hat{\mathbf{u}}_{1,x}^T \ \mathbf{q}_2^T \ \hat{\mathbf{u}}_2^T \ \hat{\mathbf{u}}_{2,x}^T \ \hat{\mathbf{u}}_{2,xx}^T \ \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}^T]$ το οποίο είναι διάστασης $(2L+12) \times 1$ και αποτελείται από L κομβικές τιμές των πλασματικών φορτίων (εξ.(Π2.3.14), (Π2.4.20)) και 12 συνοριακές ποσότητες (εξ.(Π2.3.12), (Π2.4.11)). Επιπλέον, για λόγους απλότητας δεν αναγράφεται η μεταβλητή του χρόνου στα χρονικά εξαρτώμενα μεγέθη των παραπάνω εξισώσεων.

Το τελικό βήμα της AEM είναι η εφαρμογή των εξισώσεων (3.2.22α,β) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία της ράβδου. Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (Π2.3.22-23), (Π2.4.27-28), το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα $2L$ διαφορικών εξισώσεων

$$-\rho A \mathbf{B}^u \ddot{\mathbf{d}}_1 + EA \mathbf{q}_1 + EI_P [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{q}_2 = -\mathbf{n} \quad (3.3.8\alpha)$$

$$\rho I_P \mathbf{B} \ddot{\mathbf{d}}_2 - \rho C_S \mathbf{B}_{,xx} \ddot{\mathbf{d}}_2 + EC_S \mathbf{q}_2 - GI_t^P \mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2 - EI_P [\mathbf{B}_{,x}^u \mathbf{d}_1]_{dg} \mathbf{q}_2 \quad (3.3.8\beta)$$

$$-EI_P [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{q}_1 - \frac{3}{2} EI_{PP} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2 = \mathbf{m}_t - \mathbf{m}'_w$$

όπου το σύμβολο $[\cdot]_{dg}$ δηλώνει διαγώνιο μητρώο $L \times L$ το οποίο περιέχει στη διαγώνιο του τα στοιχεία του μητρώου στήλη που περιέχεται στις αγκύλες και \mathbf{n} , \mathbf{m}_t , \mathbf{m}'_w είναι μητρώα στήλες διάστασης $L \times 1$ που περιλαμβάνουν τις τιμές της κατανεμημένης εξωτερικά επιβαλλόμενης αξονικής δύναμης, στρεπτικής ροπής και της παραγώγου του κατανεμημένου εξωτερικά επιβαλλόμενου δίρροπου στρέβλωσης, αντίστοιχα. Τα στοιχεία του μητρώου στήλη \mathbf{m}'_w υπολογίζονται με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8). Σημειώνεται ότι, η συγκεντρωμένη φόρτιση στο εσωτερικό της ράβδου μπορεί υπολογιστικά να αντιμετωπιστεί ως κατανεμημένη διαιρώντας την τιμή της με το μήκος του στοιχείου στο οποίο επιβάλλεται, αρκεί το μήκος των στοιχείων να είναι αρκετά μικρό [Μώκος 2007]. Οι σχέσεις (3.3.2), (3.3.8α,β) αποτελούν μη γραμμικό σύστημα $2L+12$ διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων (DAE) ως προς $2L+12$ αγνώστους, το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε τυπική μορφή και ως

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}) \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (3.3.9)$$

όπου \mathbf{M} είναι γενικευμένο γραμμικό μητρώο μάζας διαστάσεων $(2L+12) \times (2L+12)$, \mathbf{K} είναι γενικευμένο γραμμικό μητρώο στιβαρότητας $(2L+12) \times (2L+12)$, \mathbf{K}_{nl} είναι γενικευμένο μη γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(2L+12) \times (2L+12)$ και

\mathbf{p} είναι γενικευμένο μητρώο στήλη φόρτισης διάστασης $(2L+12) \times 1$ τα οποία δίδονται ως

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^{in} \\ -\rho A \mathbf{B}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho I_P \mathbf{B} - \rho C_S \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.10\alpha)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ [\mathbf{EA}]_{dg,L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{EC}_S]_{dg,L} - GI_t^P \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.10\beta)$$

$$\mathbf{K}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1K,nl} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{2K,nl} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg,L} \\ -[\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg,L} & -[\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x}^u \mathbf{d}_1]_{dg,L} & -\frac{3}{2} EI_{PP} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} & [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.10\gamma)$$

$$\mathbf{p}^T = \left[\mathbf{0}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_3^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \boldsymbol{\beta}_3^T \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_3^T \quad -\mathbf{n}^T \quad (\mathbf{m}_t - \mathbf{m}'_w)^T \right] \quad (3.3.10\delta)$$

όπου $[\mathbf{EA}]_{dg,L}$ και $[\mathbf{EC}_S]_{dg,L}$ είναι μητρώα διάστασης $L \times (L+8)$ με μηδενικά στοιχεία εκτός των στοιχείων με $i=j$ ($i=1,2,\dots,L$) τα οποία ισούνται με EA και EC_S , αντίστοιχα, $[\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg,L}$ και $[\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x}^u \mathbf{d}_1]_{dg,L}$ είναι μητρώα διάστασης $L \times (L+8)$ τα οποία δίδονται ως $[\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg,L} = [EI_P [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \quad \mathbf{0}]$ και $[\mathbf{EI}_P \mathbf{B}_{,x}^u \mathbf{d}_1]_{dg,L} = [EI_P [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_1]_{dg} \quad \mathbf{0}]$, αντίστοιχα, και $\mathbf{D}_{1K,nl}$, $\mathbf{D}_{2K,nl}$ είναι μητρώα διάστασης $4 \times (L+8)$ και $8 \times (L+8)$, αντίστοιχα, τα οποία προσδιορίζονται μέσω των σχέσεων (3.3.3δ,ζ), (3.3.5γ), (3.3.6ε) ως

$$\mathbf{D}_{1K,nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.11\alpha)$$

$$\mathbf{D}_{2K,nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.11\beta)$$

με

$$\mathbf{D}_{11K,nl} = \begin{bmatrix} \alpha_l^0 \frac{1}{2} EI_P \hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1) & 0 \\ 0 & \alpha_l^l \frac{1}{2} EI_P \hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2) \end{bmatrix} \quad (3.3.12\alpha)$$

$$\mathbf{D}_{21K,nl} = \begin{bmatrix} \beta_l^0 \left[\frac{1}{2} EI_{PP} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)]^2 + EI_P \hat{\mathbf{u}}_{1,x}(1) \right] & 0 \\ 0 & \beta_l^l \left[\frac{1}{2} EI_{PP} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)]^2 + EI_P \hat{\mathbf{u}}_{1,x}(2) \right] \end{bmatrix} \quad (3.3.12\beta)$$

Οι εξ.(Π2.3.22α), (Π2.4.27α) όταν συνδυαστούν με τις εξ.(3.2.23α,γ) προκύπτουν οι ακόλουθες $2L$ γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις για $t = 0$

$$\mathbf{B}^u \mathbf{d}_l(0) = \bar{\mathbf{u}}_{m0} \quad \mathbf{B} \mathbf{d}_2(0) = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{x0} \quad (3.3.13\alpha,\beta)$$

όπου $\bar{\mathbf{u}}_{m0}$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{x0}$ είναι μητρώα στήλες διάστασης $L \times 1$ τα οποία περιέχουν τις L κομβικές τιμές των \bar{u}_{m0} , $\bar{\theta}_{x0}$, αντίστοιχα. Από την επίλυση των συστημάτων εξισώσεων (3.3.13α,β) προσδιορίζονται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος $\mathbf{d}(0)^T = \left[\mathbf{d}_l(0)^T \quad \mathbf{d}_2(0)^T \right]$ αφού υπολογιστούν αρχικά οι συνοριακές ποσότητες $\hat{\mathbf{u}}_l$, $\hat{\mathbf{u}}_{l,x}$, $\hat{\mathbf{u}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_{2,x}$, $\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}$, $\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}$ αξιοποιώντας τις τιμές των \bar{u}_{m0} , $\bar{\theta}_{x0}$ και των παραγώγων τους στα άκρα της ράβδου. Επιπρόσθετα, οι εξ.(Π2.3.22α), (Π2.4.27α) όταν παραγωγιστούν ως προς τον χρόνο και συνδυαστούν με τις εξ.(3.2.23β,δ) προκύπτουν οι ακόλουθες $2L$ γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις για $t = 0$

$$\mathbf{B}^u \dot{\mathbf{d}}_l(0) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{m0} \quad \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}_2(0) = \dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{x0} \quad (3.3.14\alpha,\beta)$$

όπου $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{m0}$, $\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_{x0}$ είναι μητρώα στήλες διάστασης $L \times 1$ τα οποία περιέχουν τις L κομβικές τιμές των $\dot{\bar{u}}_{m0}$, $\dot{\bar{\theta}}_{x0}$, αντίστοιχα. Από την επίλυση των συστημάτων εξισώσεων (3.3.14α,β) προσδιορίζονται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος $\dot{\mathbf{d}}(0)^T = \left[\dot{\mathbf{d}}_l(0)^T \quad \dot{\mathbf{d}}_2(0)^T \right]$ αφού υπολογιστούν αρχικά οι συνοριακές ποσότητες $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_l$, $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{l,x}$, $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_2$, $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{2,x}$, $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{2,xx}$, $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{2,xxx}$ αξιοποιώντας τις τιμές των $\dot{\bar{u}}_{m0}$, $\dot{\bar{\theta}}_{x0}$ και των παραγώγων τους στα άκρα της ράβδου.

Οι αρχικές συνθήκες $\mathbf{d}(0)$, $\dot{\mathbf{d}}(0)$ και οι εξ.(3.3.9) μορφώνουν πρόβλημα αρχικών τιμών (initial value problem) διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο μπορεί να επιλυθεί με οποιαδήποτε αποδοτική μέθοδο επίλυσης. Στην παρούσα διατριβή

χρησιμοποιείται η μέθοδος Petzold - Gear [Brenan et al. 1989] αφού εισαχθούν $2L + 12$ νέες μεταβλητές ώστε να μειωθεί η τάξη του προβλήματος αρχικών τιμών [Bazant and Cedolin 1991] και παραγωγιστούν ως προς τον χρόνο οι πρώτες 12 σχέσεις του συστήματος εξισώσεων (3.3.9) ώστε να μορφωθεί ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών με δείκτη συστήματος ind (system index) ίσο με $ind = 1$ [Brenan et al. 1989]. Επισημαίνεται ότι η παραγωγή αυτή πραγματοποιείται και στην περίπτωση όπου ο όρος $\mathbf{E}^{in}\dot{\mathbf{d}}_2$ είναι μη μηδενικός, συνεπώς προκειμένου να αποφευχθεί η ύπαρξη χρονικής παραγωγού τρίτης τάξης, ο προκύπτων όρος αγνοείται. Χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού μητρώου, ενώ η τάξη των πεπερασμένων διαφορών, η παράμετρος ανοχής που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης και η επιλογή του πλήθους των χρονικών στιγμών καθορίζονται με βάση την ιστορία της φόρτισης και απαιτήσεις σύγκλισης της μεθόδου. Με την επίλυση προσδιορίζεται το μητρώο στήλη \mathbf{d} στις επιλεγείσες χρονικές στιγμές, οπότε λαμβάνονται οι τιμές των πλασματικών φορτίων στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου καθώς και η «μέση» αξονική μετατόπιση και η στρεπτική στροφή και οι παράγωγοί τους στο σύνορο. Επίσης, προσδιορίζονται τα μητρώα στήλες $\dot{\mathbf{d}}$, $\ddot{\mathbf{d}}$ στις επιλεγείσες χρονικές στιγμές, οπότε λαμβάνονται αντίστοιχα οι τιμές ταχυτήτων και επιταχύνσεων των προαναφερθέντων μεγεθών. Στη συνέχεια, με εφαρμογή των σχέσεων (Π2.3.22), (Π2.4.27) λαμβάνονται η «μέση» αξονική μετατόπιση και η στρεπτική στροφή καθώς και οι παράγωγοί τους στα L κομβικά σημεία του εσωτερικού της ράβδου. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των μεγεθών αυτών μπορούν εύκολα να ευρεθούν και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο $\xi \in (0,1)$ πέραν των κομβικών σημείων, εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές παραστάσεις (Π2.3.19-20), (Π2.4.25-26), για την τιμή ξ του εξεταζόμενου σημείου. Τέλος, με τη βοήθεια των αποκτηθέντων μεγεθών, μπορούν να ευρεθούν τα εντατικά μεγέθη σε οποιοδήποτε σημείο του εσωτερικού ή του συνόρου της ράβδου (βλ. εξ.(3.2.13α), (3.2.25)).

Η αριθμητική επίλυση του απλοποιημένου προβλήματος αρχικών συννοριακών τιμών αναφορικά με τη γωνία στρεπτικής στροφής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.23α,β) (**περίπτωση με επιρροή ΔΔΠ**), επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης [Katsikadelis 1994, 2002b], όπως αυτή παρουσιάστηκε στα εδάφια Π2.3, Π2.4 και ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω.

Έστω $u_2(x,t) = \theta_x(x,t)$ η ζητούμενη λύση του πεπλεγμένου απλοποιημένου προβλήματος αρχικών συννοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.23α,β). Υποθέτοντας ότι η u_2 είναι συνεχής και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της ράβδου, καθώς και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στα άκρα της ράβδου, ισχύει η εξ.(3.3.1β). Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω προκύπτει μη γραμμικό σύστημα $L + 8$ διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων ως προς $L + 8$ αγνώστους, το οποίο μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_2 + \mathbf{m}_{nl}(\mathbf{d}_2, \dot{\mathbf{d}}_2, \ddot{\mathbf{d}}_2) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl})\mathbf{d}_2 = \mathbf{p} \quad (3.3.15)$$

όπου \mathbf{M} είναι γενικευμένο γραμμικό μητρώο μάζας διαστάσεων $(L + 8) \times (L + 8)$, \mathbf{m}_{nl} είναι γενικευμένο μη γραμμικό μητρώο στήλη μάζας διαστάσεων $(L + 8) \times 1$, \mathbf{K} είναι

γενικευμένο γραμμικό μητρώο στιβαρότητας $(L + \delta) \times (L + \delta)$, \mathbf{K}_{nl} είναι γενικευμένο μη γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(L + \delta) \times (L + \delta)$ και \mathbf{p} είναι γενικευμένο μητρώο στήλη φόρτισης διάστασης $(L + \delta) \times 1$ τα οποία δίδονται ως

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{in} \\ \rho I_P \mathbf{B} - \rho C_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{EI_P}{GI_t^S} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.16\alpha)$$

$$\mathbf{m}_{nl}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -\rho C_S \frac{EI_n}{GI_t^S} \left\{ \begin{aligned} & 3 [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} \\ & + 6 [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} + 3 [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} \\ & + \frac{3}{2} [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \end{aligned} \right\}^T_{dg} \end{bmatrix} \quad (3.3.16\beta)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \left[\mathbf{E} C_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \right]_{dg,L} - \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.16\gamma)$$

$$\mathbf{K}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{K,nl} \\ \left[\begin{aligned} & \frac{3}{2} \mathbf{E} I_n \frac{\mathbf{E} C_S}{GI_t^S} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \\ & - \frac{3}{2} EI_n [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} \\ & + EI_n \frac{\mathbf{E} C_S}{GI_t^S} \left[3 [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} + 9 [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{B}_{,xxx} \right] \end{aligned} \right]_{dg,L} \end{bmatrix} \quad (3.3.16\delta)$$

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \beta_3^T & \bar{\beta}_3^T & \left(\mathbf{m}_t - \mathbf{m}'_w + \frac{\rho C_S}{GI_t^S} \ddot{\mathbf{m}}_t - \frac{\mathbf{E} C_S}{GI_t^S} \mathbf{m}''_t \right)^T \end{bmatrix} \quad (3.3.16\epsilon)$$

όπου το σύμβολο $\{\cdot\}_{dg}$ δηλώνει μητρώο στήλη το οποίο περιέχει τα διαγώνια στοιχεία

του τετραγωνικού μητρώου που περιέχεται στα άγκιστρα, $\left[\mathbf{E} C_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \right]_{dg,L}$

είναι μητρώο διάστασης $L \times (L + \delta)$ με μηδενικά στοιχεία εκτός των στοιχείων με $i = j$ ($i = 1, 2, \dots, L$) τα οποία ισούνται με $\mathbf{E} C_S \left[1 / \kappa + (I_P \tilde{N}) / (GI_t^S A) \right]$,

$\left[\left(3 \mathbf{E} C_S / (2 GI_t^S) \right) \mathbf{E} I_n [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \right]_{dg,L}$ είναι μητρώο διάστασης $L \times (L + \delta)$

το οποίο δίδεται ως

$$\left[\frac{3}{2} \mathbf{EI}_n \frac{EC_S}{GI_t^S} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \right]_{dg,L} = \left[\frac{3}{2} EI_n \frac{EC_S}{GI_t^S} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{0} \right] \quad (3.3.17)$$

β_3 , $\bar{\beta}_3$ είναι μητρώα στήλες διάστασης 2×1 τα οποία δίδονται ως

$$\beta_3 = \left\{ \begin{array}{l} \beta_3^0 + \beta_1^0 \left[\frac{EC_S}{GI_t^S} m_t'(0,t) + m_w(0,t) \right] \\ \beta_3^l + \beta_1^l \left[\frac{EC_S}{GI_t^S} m_t'(l,t) + m_w(l,t) \right] \end{array} \right\} \quad (3.3.18\alpha)$$

$$\bar{\beta}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_3^0 - \bar{\beta}_1^0 \frac{EC_S}{GI_t^S} m_t(0,t) - \bar{\beta}_2^0 \left[\frac{EC_S}{(GI_t^S)^2} m_t'(0,t) + \frac{m_w(0,t)}{GI_t^S} \right] \\ \bar{\beta}_3^l - \bar{\beta}_1^l \frac{EC_S}{GI_t^S} m_t(l,t) - \bar{\beta}_2^l \left[\frac{EC_S}{(GI_t^S)^2} m_t'(l,t) + \frac{m_w(l,t)}{GI_t^S} \right] \end{array} \right\} \quad (3.3.18\beta)$$

και \mathbf{E}^{in} , \mathbf{E} , $\mathbf{D}_{K,nl}$ είναι μητρώα διάστασης $8 \times (L+8)$, τα οποία προσδιορίζονται ως

$$\mathbf{E}^{in} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^{in} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2^{in} & \mathbf{D}_3^{in} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.19)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \quad (3.3.20)$$

$$\mathbf{D}_{K,nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{2K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.21)$$

με

$$\mathbf{D}_1^{in} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \frac{EC_S}{GI_t^S} \rho I_P & 0 \\ 0 & \beta_1^l \frac{EC_S}{GI_t^S} \rho I_P \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2^{in} = \begin{bmatrix} -\bar{\beta}_1^0 \frac{EC_S}{GI_t^S} \rho I_P & 0 \\ 0 & -\bar{\beta}_1^l \frac{EC_S}{GI_t^S} \rho I_P \end{bmatrix} \quad (3.3.22\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{D}_3^{in} = \begin{bmatrix} -\bar{\beta}_2^0 \frac{EC_S}{(GI_t^S)^2} \rho I_P & 0 \\ 0 & -\bar{\beta}_2^l \frac{EC_S}{(GI_t^S)^2} \rho I_P \end{bmatrix} \quad (3.3.22\gamma)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \beta_2^0 & 0 \\ 0 & \beta_2^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) & 0 \\ 0 & \beta_1^l \left(GI_t^P + \frac{I_P}{A} \tilde{N} \right) \end{bmatrix} \quad (3.3.23\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{14} = \begin{bmatrix} -\beta_1^0 EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) & 0 \\ 0 & -\beta_1^l EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \end{bmatrix} \quad (3.3.23\gamma,\delta)$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_2^0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_2^l \end{bmatrix} \quad (3.3.24\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{D}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1^0 EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_1^l EC_S \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \end{bmatrix} \quad (3.3.24\gamma)$$

$$\mathbf{D}_{24} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_2^0 \frac{EC_S}{GI_t^S} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_2^l \frac{EC_S}{GI_t^S} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{I_P}{GI_t^S A} \tilde{N} \right) \end{bmatrix} \quad (3.3.24\delta)$$

$$\mathbf{D}_{1K,nl} = \begin{bmatrix} D_{11K,nl} & 0 \\ 0 & D_{12K,nl} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{2K,nl} = \begin{bmatrix} D_{21K,nl} & 0 \\ 0 & D_{22K,nl} \end{bmatrix} \quad (3.3.25\alpha,\beta)$$

$$D_{11K,nl} = \beta_1^0 \left[\frac{1}{2} EI_n [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)]^2 - EC_S \frac{EI_n}{GI_t^S} \left(3[\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}(1)]^2 + \frac{3}{2} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)][\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}(1)] \right) \right] \quad (3.3.26\alpha)$$

$$D_{12K,nl} = \beta_1^l \left[\frac{1}{2} EI_n [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)]^2 - EC_S \frac{EI_n}{GI_t^S} \left(3[\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}(2)]^2 + \frac{3}{2} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)][\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}(2)] \right) \right]$$

(3.3.26β)

$$D_{21K,nl} = \bar{\beta}_1^0 \left[\frac{3}{2} EC_S \frac{EI_n}{GI_t^S} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)] [\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}(1)] \right] + \bar{\beta}_2^0 \left[\frac{EC_S}{GI_t^S} \frac{EI_n}{GI_t^S} \left[3 [\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}(1)]^2 + \frac{3}{2} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)] [\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}(1)] \right] \right] \quad (3.3.26\gamma)$$

$$D_{22K,nl} = \bar{\beta}_1^l \left[\frac{3}{2} EC_S \frac{EI_n}{GI_t^S} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)] [\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}(2)] \right] + \bar{\beta}_2^l \left[\frac{EC_S}{GI_t^S} \frac{EI_n}{GI_t^S} \left[3 [\hat{\mathbf{u}}_{2,xx}(2)]^2 + \frac{3}{2} [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)] [\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}(2)] \right] \right] \quad (3.3.26\delta)$$

Σημειώνεται ότι στις εξ.(3.3.16ε), (3.3.18α,β), οι παράγωγοι m'_i στα άκρα της ράβδου και τα στοιχεία του μητρώου στήλη \mathbf{m}''_i υπολογίζονται με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8).

Οι αρχικές συνθήκες $\mathbf{d}_2(0)$ (βλ. εξ.(3.3.13β)) και οι εξ.(3.3.15) μορφώνουν πρόβλημα αρχικών τιμών (initial value problem) διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο επιλύεται με τη μέθοδο Petzold - Gear ακολουθώντας τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Μετά την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών, οι παράγωγοι της «μέσης» αξονικής μετατόπισης μπορούν να υπολογιστούν εύκολα σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου αξιοποιώντας τις εξ.(3.2.27-29), (3.2.30β). Το ολοκλήρωμα της εξ.(3.2.29) υπολογίζεται με τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης που εφαρμόζεται στο εδάφιο 1.3.2 αξιοποιώντας την υπάρχουσα διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου. Αφού προσδιοριστεί η παράγωγος u'_m στα κομβικά σημεία της ράβδου, η μετατόπιση u_m υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.3.18) σε συνδυασμό με την εξ.(3.2.26α) (βλ. και εδάφιο 1.3.2). Τέλος, η ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης και τα εντατικά μεγέθη μπορούν να ευρεθούν εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3.2.38) και (3.2.29), (3.2.30β), (3.2.36-37), αντίστοιχα.

Η αριθμητική επίλυση του απλοποιημένου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών αναφορικά με τη γωνία στρεπτικής στροφής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.2.39-41) (περίπτωση χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$), επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης [Katsikadelis 1994, 2002b], όπως αυτή εφαρμόστηκε παραπάνω στην περίπτωση με επιρροή $\Delta\Delta\Pi$. Στην ειδική περίπτωση ελεύθερων ταλαντώσεων ($m_t = 0$, $m_w = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ και χρονικά ανεξάρτητοι συντελεστές α_i , β_i , $\bar{\beta}_i$ ($i = 1, 2, 3$)), μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν σημεία αντιστροφής της κίνησης, συνεπώς ορίζονται οι παρακάτω σχέσεις [Rozmarynowski and Szymczak 1984, Bhashyam and Prathap 1980]

$$\dot{u}_{2,max} = 0 \quad \ddot{u}_{2,max} = -\omega^2 u_{2,max} \quad (3.3.27\alpha,\beta)$$

όπου ο δείκτης max συμβολίζει τις θέσεις όπου πραγματοποιείται αντιστροφή της κίνησης και ω^2 είναι ποσότητα με χαρακτηριστικά ιδιοτιμής η οποία είναι ενδεικτική του μεγέθους της γεωμετρικής μη γραμμικότητας [Bhashyam and Prathap 1980,

Prathap and Varadan 1978]. Υπογραμμίζεται ότι το ω δεν αντιστοιχεί σε ιδιοσυχνότητα της κατασκευής καθώς η εξ.(3.2.39) δεν μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, ενώ για τον ίδιο λόγο η χρήση μοναδικής αρμονικής λύσης (όπως περιγράφεται από την εξ.(3.3.27β)) οδηγεί σε προσεγγιστική λύση του προβλήματος [Lewandowski 1994]. Αντικαθιστώντας την εξ.(3.3.27β) στην εξ.(3.2.39), χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, διατυπώνεται μη γραμμικό γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών ως

$$\left[\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}(\tilde{N}, \mathbf{d}_2) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{d}_2 = \mathbf{0} \quad (3.3.28)$$

όπου \mathbf{M} είναι γενικευμένο μητρώο μάζας διαστάσεων $(L+8) \times (L+8)$, \mathbf{K} είναι γενικευμένο γραμμικό μητρώο στιβαρότητας $(L+8) \times (L+8)$ και \mathbf{K}_{nl} είναι γενικευμένο μη γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(L+8) \times (L+8)$ τα οποία εκφράζονται ως

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{in} \\ \rho I_P \mathbf{B} - \rho C_S \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.29\alpha)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ [\mathbf{E} C_S]_{dg,L} - G I_t^P \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.29\beta)$$

$$\mathbf{K}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{K,nl} \\ -\frac{I_P}{A} \tilde{N} \mathbf{B}_{,xx} - \frac{3}{2} E I_n [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} [\mathbf{B}_{,x} \mathbf{d}_2]_{dg} \mathbf{B}_{,xx} \end{bmatrix} \quad (3.3.29\gamma)$$

όπου \mathbf{E}^{in} , \mathbf{E} , $\mathbf{D}_{K,nl}$ είναι μητρώα διάστασης $\delta \times (L+8)$ τα οποία προσδιορίζονται μέσω της εξ.(3.3.3α) και ως

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \quad (3.3.30)$$

$$\mathbf{D}_{K,nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1K,nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.31)$$

με

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \beta_2^0 & 0 \\ 0 & \beta_2^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 GI_t^P & 0 \\ 0 & \beta_1^l GI_t^P \end{bmatrix} \quad (3.3.32\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{14} = \begin{bmatrix} -\beta_1^0 EC_S & 0 \\ 0 & -\beta_1^l EC_S \end{bmatrix} \quad (3.3.32\gamma,\delta)$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_2^0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_2^l \end{bmatrix} \quad (3.3.33\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{D}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1^0 EC_S & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_1^l EC_S \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.33\gamma,\delta)$$

$$\mathbf{D}_{1K,nl} = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \left[\frac{I_P}{A} \tilde{N} + \frac{I}{2} EI_n [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(1)]^2 \right] & 0 \\ 0 & \beta_1^l \left[\frac{I_P}{A} \tilde{N} + \frac{I}{2} EI_n [\hat{\mathbf{u}}_{2,x}(2)]^2 \right] \end{bmatrix} \quad (3.3.34)$$

Το πρόβλημα της εξ.(3.3.28) επιλύεται επαναληπτικά με την Τεχνική Άμεσης Επανάληψης (Direct Iteration Technique (DIT)) [Bhashyam and Prathap 1980] εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο που περιέχεται στην εργασία των Rozmarzynowski and Szymczak [1984]. Ο αλγόριθμος αρχικοποιείται χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη ιδιομορφή \mathbf{d}_2^f του αντίστοιχου γεωμετρικά γραμμικού προβλήματος το οποίο μορφώνεται θέτοντας $\mathbf{K}_{nl} = \mathbf{0}$ στην εξ.(3.3.28). Η κανονικοποίηση της θεμελιώδους ιδιομορφής πραγματοποιείται ορίζοντας το μέγεθος της στρεπτικής στροφής $\bar{\theta}_{x0}$ σε επιλεγμένο κομβικό σημείο κατά μήκος της ράβδου. Στην περίπτωση πλήρους αξονικής παρεμπόδισης στα δύο άκρα της ράβδου, η αξονική δύναμη \tilde{N} (εξ.(3.2.29)) υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη μέσω της μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης που εφαρμόζεται στο εδάφιο 1.3.2 αξιοποιώντας την υπάρχουσα διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου. Επισημαίνεται ότι το μη γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών της εξ.(3.2.28) είναι ενδεικτικό της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και δεν παρέχει τη λύση του προβλήματος στο πεδίο του χρόνου. Οι προκύπτουσες ιδιοτιμές και ιδιομορφές εξαρτώνται από το μέγεθος των αρχικών συνθηκών. Σημειώνεται επίσης ότι οι ιδιοτιμές αυτές είναι θετικές εκτός από ορισμένες που λαμβάνουν άπειρη τιμή και οι οποίες αγνοούνται. Το πλήθος των ιδιοτιμών με άπειρη τιμή ταυτίζεται με το πλήθος των μηδενικών γραμμών του μητρώου μάζας \mathbf{M} . Τέλος, επισημαίνεται ότι με το πρόβλημα ιδιοτιμών της εξ.(3.2.28) μπορεί να μελετηθεί και η περίπτωση ελεύθερων συνοριακών συνθηκών όπου η ράβδος υπόκειται σε κίνηση στερεού σώματος.

3.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(3.2.56) δίδει την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23α)), εφόσον η πρωτογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^P$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23α)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^P$

επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (3.2.54) (βλ. εδάφιο 3.2.7) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Παρατηρείται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών της $\hat{\phi}_S^P$ είναι ταυτόσημο με αυτό που περιγράφεται από τις εξ.(1.2.24), εάν σε αυτές τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο αριθμητικός υπολογισμός της $\hat{\phi}_S^P$ (και των παραγώγων της) πραγματοποιείται ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 1.3.3.

3.3.3 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(3.2.59) δίδει τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης $\bar{\phi}_S^S$ (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.55)), εφόσον η δευτερογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^S$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.55)) έχει ήδη προσδιοριστεί (**περίπτωση με επιρροή ΔΔΠ**). Εφόσον η ϕ_S^P έχει ήδη προσδιοριστεί στο σύνορο Γ (βλ. εδάφιο 3.3.2), ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^S$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (3.2.57) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Παρατηρείται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών της $\hat{\phi}_S^S$ είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα συνοριακών τιμών της συνάρτησης \hat{B} που περιγράφεται από τις εξ.(1.3.41), εάν σε αυτές τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο αριθμητικός υπολογισμός της $\hat{\phi}_S^S$ (και των παραγώγων της) πραγματοποιείται ακολουθώντας τη διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης \hat{B} του εδαφίου 1.3.5. Κατόπιν, αφού υπολογιστούν οι γεωμετρικές σταθερές I_t^S , C_S (βλ. εδάφιο 3.3.4), η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S προσδιορίζεται εφαρμόζοντας την εξ.(3.2.66).

Στην **περίπτωση χωρίς επιρροή ΔΔΠ**, η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης προσδιορίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών των σχέσεων (3.2.53) (βλ. εδάφιο 3.2.6). Οι σχέσεις αυτές δίδουν τη ϕ_S^S (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23β)), εφόσον η αντίστοιχη δευτερογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^S$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23β)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Εφόσον η ϕ_S^P έχει ήδη προσδιοριστεί στο σύνορο Γ (βλ. εδάφιο 3.3.2), ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^S$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στα εδάφια Π1.3 και 1.3.4. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαφορική εξίσωση του εξεταζόμενου προβλήματος συνοριακών τιμών είναι εξίσωση Poisson και ότι το δεξιό μέλος της εξίσωσης f μπορεί να γραφεί ως $f = cm + cw$ με $c = I$,

$$m = \frac{E}{G} \frac{I_P}{A} \theta'_x \theta''_x - \left(\frac{E}{G} \theta''_x - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}'_x \right) \phi_S^P \quad (\nabla^2 m = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial n} = - \left(\frac{E}{G} \theta''_x - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}) \quad \text{και}$$

$$w = - \frac{E}{G} (y^2 + z^2) \theta'_x \theta''_x \quad (\text{ισχύει } \nabla^2 W = w \text{ με } W = - \frac{E}{G} \theta'_x \theta''_x (y^4 + z^4) / 12 \text{ καθώς και}$$

$\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{E}{G} \theta'_x \theta''_x (y^3 n_y + z^3 n_z) / 3$, η ιδιόμορφη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.6) για τη συνάρτηση $\widehat{\phi}_S^S$ διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \pi(\widehat{\phi}_S^S(p)) &= \frac{1}{4} c \int_{\Gamma} \left[m(q)(2 \ln r - 1) r \cos a - \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right) (\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \\ &\quad + \pi c(W(p)) + c \int_{\Gamma} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[\widehat{\phi}_S^S(q) \frac{\cos a}{r} - \frac{t_x(q)}{G} \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 1.3.4, μορφώνεται γραμμικό σύστημα εξισώσεων (βλ. εξ.(1.3.28)) από την επίλυση του οποίου λαμβάνονται οι άγνωστες κομβικές συνοριακές ποσότητες της $\widehat{\phi}_S^S$. Κατόπιν υπολογίζεται η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S στο σύνορο της διατομής με τη βοήθεια της σχέσης (1.2.81). Τέλος, γνωρίζοντας τις τιμές της ϕ_S^S στα κομβικά σημεία του συνόρου, οι τιμές της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης καθώς και οι παράγωγοί της ως προς y και z σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω υπολογίζονται από τις συνοριακές ολοκληρωτικές παραστάσεις (Π1.3.5), (Π1.3.12α), (Π1.3.12β), οι οποίες διατυπώνονται για τη ϕ_S^S ως

$$\begin{aligned} \phi_S^S(P) &= \frac{1}{8\pi} c \int_{\Gamma} \left[m(q)(2 \ln r - 1) r \cos a - \frac{\partial m(q)}{\partial n} (\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \\ &\quad + cW(P) + \frac{1}{2\pi} c \int_{\Gamma} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\phi_S^S(q) \frac{\cos a}{r} - \frac{t_x(q)}{G} \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_S^S(P)}{\partial y} &= -\frac{1}{8\pi} c \int_{\Gamma} m(q) (2 \cos \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \cos \beta) ds_q \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} c \int_{\Gamma} \frac{\partial m(q)}{\partial n} (2 \ln r - 1) r \cos \omega ds_q + c \frac{\partial W(P)}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} c \int_{\Gamma} \left[-W(q) \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} - \frac{\partial W(q)}{\partial n} \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\phi_S^S(q) \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \frac{t_x(q)}{G} \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \end{aligned} \quad (3.3.37\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S(P)}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi} c \int_{\Gamma} m(q) (2 \sin \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \sin \beta) ds_q$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{I}{8\pi} c \int_{\Gamma} \frac{\partial m(q)}{\partial n} (2 \ln r - 1) r \sin \omega ds_q + c \frac{\partial W(P)}{\partial z} \\
& + \frac{I}{2\pi} c \int_{\Gamma} \left[-W(q) \frac{\sin(\omega - a)}{r^2} - \frac{\partial W(q)}{\partial n} \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \\
& + \frac{I}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\phi_S^S(q) \frac{\sin(\omega - a)}{r^2} + \frac{t_x(q)}{G} \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \quad (3.3.37\beta)
\end{aligned}$$

σημειώνοντας ότι στις εξ.(3.3.37α) και (3.3.37β) έχουμε $\partial W/\partial y = -(E/G)\theta'_x \theta''_x y^3/3$ και $\partial W/\partial z = -(E/G)\theta'_x \theta''_x z^3/3$, αντίστοιχα. Επιπλέον, η παράγωγος ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{t} της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\partial \phi_S^S/\partial \mathbf{t})_j$ στα σύνορα υπολογίζεται με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8), δεδομένου ότι η ϕ_S^S είναι γνωστή στα σύνορα.

3.3.4 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές

Οι γεωμετρικές σταθερές οι οποίες υπεισέρχονται στο δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ υπολογίζονται ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 2.3.4 του κεφ. 2.

3.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Με βάση την αναλυτική και αριθμητική διαδικασία που παρουσιάστηκε στα εδάφια 3.2, 3.3 αναφορικά με το δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον, προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου. Η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων ελέγχεται, όπου είναι εφικτό, με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις, οι οποίες στηρίζονται στις ίδιες παραδοχές του εξεταζόμενου προβλήματος (θεωρία στρέψης). Σε όλα τα παραδείγματα χρησιμοποιήθηκαν 21 σταθερά στοιχεία για τη διακριτοποίηση των ράβδων κατά τη διαμήκη διεύθυνση, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

3.4.1 Παράδειγμα 1

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στις ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως πρώτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\rho = 8.002 \text{ kN sec}^2/\text{m}^4$) μήκους $l = 4.0\text{m}$ με λεπτότοιχη διατομή I συνολικού πλάτους $b = 0.20\text{m}$, συνολικού ύψους $h = 0.20\text{m}$, πάχους πελμάτων $t_f = 0.01\text{m}$ και πάχους κορμού $t_w = 0.01\text{m}$ ($A = 5.800 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $I_P = 5.434 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I_{PP} = 6.722 \times 10^{-7} \text{ m}^6$, $I_t^P = 2.080 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, $C_S = 1.200 \times 10^{-7} \text{ m}^6$, $I_n = 1.631 \times 10^{-7} \text{ m}^6$). Μελετήθηκαν

τέσσερις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών, χρησιμοποιήθηκαν 400 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής ενώ η επιρροή των ΔΔΠ και της αξονικής αδράνειας αμελείται.

Πίνακας 3.1. Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ω^f και αναπτυσσόμενη δύναμη \tilde{N} στη ράβδο του παραδείγματος 1 με διχαλωτές στρεπτικές στηρίξεις και πλήρως αξονικά αμετακίνητα άκρα (οι τιμές εντός των παρενθέσεων δηλώνουν το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση της μεθόδου χρησιμοποιώντας παράμετρο ανοχής $tol = 10^{-6}$).

	Προτεινόμενη μέθοδος (AEM)		Rozmarynowski and Szymczak [1984]
	$I_n \neq 0$	$I_n = 0$	$I_n = 0$
	ω^f (sec ⁻¹)		
Γραμμική ανάλυση	214.23	214.23	207.23
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.1 \text{ rad}$	215.04	214.78	207.83
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$	217.44	216.40	209.62
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$	348.86	313.77	-
	\tilde{N} (kN)		
Γραμμική ανάλυση	-	-	-
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.1 \text{ rad}$	17.60 (3)	17.60 (3)	19.43
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$	70.36 (3)	70.39 (3)	77.72
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$	3891.26 (5)	3959.63 (3)	-

Πίνακας 3.2. Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ω^f στη ράβδο του παραδείγματος 1 με διχαλωτές στρεπτικές στηρίξεις και εξωτερικά επιβαλλόμενη αξονική δύναμη (οι τιμές εντός των παρενθέσεων δηλώνουν το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση της μεθόδου χρησιμοποιώντας παράμετρο ανοχής $tol = 10^{-6}$).

	$\bar{N}(l,t)$ (kN)			
	1000	0	-1000	-4000
Γραμμική ανάλυση	243.25	214.23	180.62	-
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.1 \text{ rad}$	243.48 (2)	214.49 (2)	180.93 (2)	-*
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$	244.17 (3)	215.28 (3)	181.86 (3)	-*
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$	288.46 (5)	264.36 (5)	237.82 (5)	128.61 (6)

*Δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ισορροπία

Αρχικά διερευνάται η περίπτωση όπου τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα και πλήρως αξονικά αμετακίνητα, ενώ η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Στον Πίνακα 3.1

παρουσιάζεται η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ω^f και η αναπτυσσόμενη εφελκυστική αξονική δύναμη \tilde{N} έτσι όπως προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών της εξ.(3.3.28) αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα ή λαμβάνοντάς την υπόψη για τρία διαφορετικά μεγέθη κανονικοποιημένης αρχικής στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$. Στην περίπτωση της μη γραμμικής ανάλυσης, στις εξ.(3.3.28-34) αγνοείται ή λαμβάνεται υπόψη η επιρροή των όρων που εξαρτώνται από τη γεωμετρική σταθερά I_n . Στον ίδιο πίνακα εισάγονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη ΘΛΔ σε συνδυασμό με τη FEM αγνοώντας την επιρροή των όρων που εξαρτώνται από τη γεωμετρική σταθερά I_n [Rozmarynowski and Szymczak 1984]. Από την καλή συμφωνία των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της AEM και της FEM διαπιστώνεται έμμεσα η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η επιρροή των όρων που εξαρτώνται από τη γεωμετρική σταθερά I_n είναι σημαντική ιδίως για μεγαλύτερα πλάτη ταλάντωσης.

Πίνακας 3.3. Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ω^f και αναπτυσσόμενη δύναμη \tilde{N} στη ράβδο του παραδείγματος 1 με διχαλωτή στρεπτική στήριξη στο αριστερό άκρο, πάκτωση στο δεξιό άκρο και πλήρως αξονικά αμετακίνητα άκρα (οι τιμές εντός των παρενθέσεων δηλώνουν το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση της μεθόδου χρησιμοποιώντας παράμετρο ανοχής $tol = 10^{-6}$).

	Προτεινόμενη μέθοδος (AEM)		Rozmarynowski and Szymczak [1984]
	$I_n \neq 0$	$I_n = 0$	$I_n = 0$
	ω^f (sec ⁻¹)		
Γραμμική ανάλυση	285.21	285.21	279.53
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.1 \text{ rad}$	285.99	285.73	280.09
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$	288.32	287.26	281.77
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$	414.66	379.93	-
	\tilde{N} (kN)		
Γραμμική ανάλυση	-	-	-
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.1 \text{ rad}$	19.21 (3)	19.22 (3)	21.27
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$	76.73 (4)	76.82 (3)	85.03
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$	4067.54 (6)	4190.79 (6)	-

Στη συνέχεια διερευνάται η περίπτωση όπου τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα, η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται, το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αξονικά αμετακίνητο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται σταθερή αξονική δύναμη. Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζεται η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ω^f έτσι όπως προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών των εξ.(3.3.28) αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα ή λαμβάνοντάς την υπόψη για τρία διαφορετικά μεγέθη κανονικοποιημένης αρχικής

στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ και τέσσερις περιπτώσεις αξονικής φόρτισης (μία εφελκυστική, μία μηδενική και δύο θλιπτικές περιπτώσεις αξονικής δύναμης εκ των οποίων η τελευταία αντιστοιχεί σε στρεπτική μεταλυσμική διαμόρφωση). Καταδεικνύεται η αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθόδου ενώ σημειώνεται ότι για την περίπτωση της στρεπτικής μεταλυσμικής διαμόρφωσης, το μέγεθος της $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ δεν μπορεί να τυχόν αφού πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο μέγεθος της κατάστασης στατικής (στρεπτικής μεταλυσμικής) ισορροπίας.

Πίνακας 3.4. Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ω^f στη ράβδο του παραδείγματος 1 με διχαλωτή στρεπτική στήριξη στο αριστερό άκρο, πάκτωση στο δεξιό άκρο και εξωτερικά επιβαλλόμενη σταθερή αξονική δύναμη (οι τιμές εντός των παρενθέσεων δηλώνουν το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση της μεθόδου χρησιμοποιώντας παράμετρο ανοχής $tol = 10^{-6}$).

	$\bar{N}(l,t)(\text{kN})$			
	1000	0	-1000	-5230
Γραμμική ανάλυση	310.68	285.21	257.01	-
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.1 \text{ rad}$	310.92 (2)	285.48 (2)	257.32 (2)	-*
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$	311.64 (3)	286.29 (3)	258.23 (3)	14.35 (4)
$\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$	356.30 (5)	334.97 (6)	312.12 (6)	185.58 (7)

*Δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ισορροπία

Κατόπιν διερευνάται η περίπτωση όπου το αριστερό άκρο υποστηρίζεται από διχαλωτή στρεπτική στήριξη και το δεξιό άκρο είναι πακτωμένο. Στους Πίνακες 3.3, 3.4 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα μεγέθη των Πινάκων 3.1, 3.2 για τις περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών που μελετήθηκαν παραπάνω. Επιπλέον, στον Πίνακα 3.5 δίδονται οι τιμές της θεμελιώδους ιδιομορφής σε διάφορες χαρακτηριστικές θέσεις κατά μήκος της ράβδου για την περίπτωση πλήρως αξονικά αμετακίνητων άκρων, έτσι όπως προέκυψαν από τη ΘΛΔ σε συνδυασμό με τη FEM [Rozmarynowski and Szymczak 1984] και την προτεινόμενη μέθοδο αγνοώντας στις εξ.(3.3.28-34) την επιρροή των όρων που εξαρτώνται από τη γεωμετρική σταθερά I_n . Διαπιστώνεται και πάλι έμμεσα η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου καθώς επίσης και η αποδοτικότητά της.

Συνολικά, από τους Πίνακες 3.1-3.5 συμπεραίνεται ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα μεταβάλλει τις ιδιομορφές ταλάντωσης, οδηγεί στην ανάπτυξη εφελκυστικής αξονικής δύναμης στην περίπτωση αξονικά αμετακίνητων άκρων και αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα. Η αύξηση αυτή οδηγεί σε υψηλότερες τιμές

ιδιοσυχνοτήτων. Τέλος, επισημαίνεται ότι οι προαναφερθείσες επιρροές γίνονται μεγαλύτερες με την αύξηση του αρχικού πλάτους ταλάντωσης.

Πίνακας 3.5. Θεμελιώδης ιδιομορφή της στρεπτικής στροφής σε διάφορες χαρακτηριστικές θέσεις κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 1 με διχαλωτή στρεπτική στήριξη στο αριστερό άκρο, πάκτωση στο δεξιό άκρο και πλήρως αξονικά αμετακίνητα άκρα.

x/l	$\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ (rad)							
	Γραμμική ανάλυση		0.1		0.2		1.5	
	AEM ($I_n = 0$)	Rozmary- nowski and Szymczak [1984]	AEM ($I_n = 0$)	Rozmary- nowski and Szymczak [1984]	AEM ($I_n = 0$)	Rozmary- nowski and Szymczak [1984]	AEM ($I_n = 0$)	Rozma- rynowski and Szymczak [1984]
0	0	0	0	0	0	0	0	-
0.125	0.4629	0.4645	0.4627	0.4643	0.4624	0.4640	0.4444	-
0.25	0.8270	0.8295	0.8268	0.8294	0.8263	0.8288	0.8000	-
0.375	1.0171	1.0192	1.0169	1.0191	1.0166	1.0187	0.9971	-
0.5	1	1	1	1	1	1	1	-
0.625	0.7925	0.7912	0.7926	0.7913	0.7930	0.7917	0.8151	-
0.75	0.4689	0.4665	0.4691	0.4667	0.4696	0.4673	0.5013	-
0.875	0.1501	0.1485	0.1502	0.1486	0.1505	0.1490	0.1691	-
1	0	0	0	0	0	0	0	-

3.4.2 Παράδειγμα 2

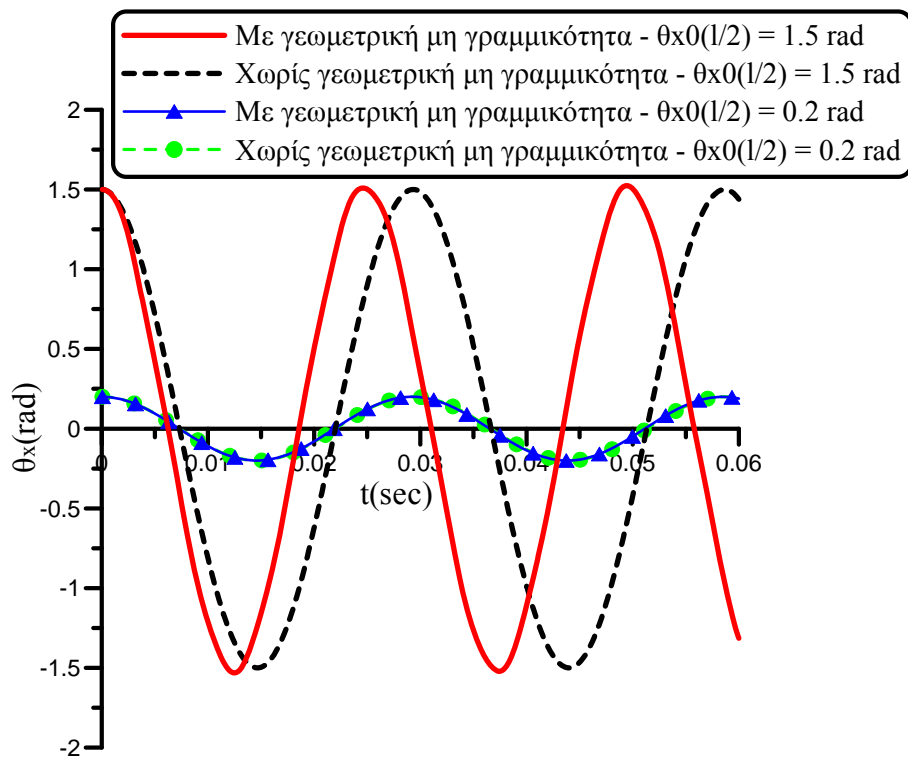
Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της αξονικής αδράνειας στις ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως δεύτερο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 1 για δύο περιπτώσεις αρχικών συνθηκών, αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ. Τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα, η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται, το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αξονικά αμετακίνητο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται σταθερή αξονική δύναμη $\bar{N}(l,t)$.

Επιλύονται τα προβλήματα αρχικών συντοκικών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.22-24) και (3.2.39-41) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της αξονικής αδράνειας, αντίστοιχα.

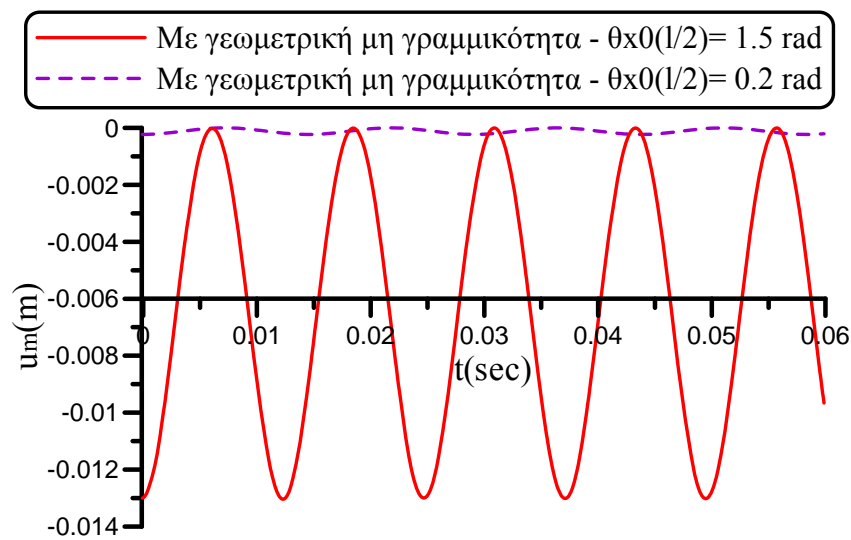
Αρχικά μελετάται η περίπτωση αρχικών συνθηκών όπου χρησιμοποιείται η θεμελιώδης ιδιομορφή της γεωμετρικά γραμμικής ανάλυσης ως αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(x)$, ενώ $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 0$ και η αξονική δύναμη στο δεξιό άκρο της ράβδου είναι μηδενική. Η κανονικοποίηση της θεμελιώδους ιδιομορφής πραγματοποιείται καθορίζοντας το μέγεθος της στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$. Στα Σχ.3.2, 3.3 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις χαρακτηριστικών κινηματικών (στρεπτική στροφή στο μέσο και «μέση» αξονική μετατόπιση στο δεξιό άκρο της ράβδου) και εντατικών (στρεπτική ροπή στο αριστερό άκρο της ράβδου) μεγεθών

αντίστοιχα, για δύο περιπτώσεις μεγεθών κανονικοποιημένης αρχικής στρεπτικής στροφής ($\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$, $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 0.2 \text{ rad}$) και δύο περιπτώσεις ανάλυσης (γραμμική και μη γραμμική αγνοώντας την επιρροή της αξονικής αδράνειας). Στα σχήματα αυτά καταδεικνύεται η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και του μεγέθους των αρχικών στρεπτικών στροφών τόσο στα κινηματικά όσο και στα εντατικά μεγέθη. Επιπλέον, υπολογίζεται από τα αποτελέσματα του Σχ.3.2α η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χρονικής απόκρισης της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ (περίπτωση μη γραμμικής ανάλυσης, $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.5 \text{ rad}$) χρησιμοποιώντας τους πρώτους πλήρεις κύκλους ταλάντωσης της ράβδου. Ο υπολογισμός βασίζεται στον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform (FFT)) χρησιμοποιώντας παράθυρο δεδομένων Hanning (Hanning data window) [Brigham 1988]. Η τιμή που προκύπτει είναι $\omega^f = 253.56 \text{ sec}^{-1}$, συνεπώς παρουσιάζεται απόκλιση 4.3% από την αντίστοιχη τιμή του Πίνακα 3.2 ($\omega^f = 264.36 \text{ sec}^{-1}$) και ως εκ τούτου, όπως προαναφέρθηκε, δεν πρέπει να συγχέονται οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών των εξ.(3.3.28) με τις ιδιοσυχνότητες της χρονικής απόκρισης της στρεπτικής στροφής της ράβδου. Σημειώνεται επίσης ότι η σημαντική διαφορά μεταξύ των χρονικών αποκρίσεων της στρεπτικής ροπής της γραμμικής και της μη γραμμικής ανάλυσης καθώς και η μικρή διαφορά στο πλάτος ταλάντωσης της στρεπτικής στροφής (η οποία δεν διακρίνεται ευκρινώς στο Σχ.3.2α) οφείλονται στο ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί σε ταλαντώσεις όπου συμμετέχουν ανώτερες ιδιοσυχνότητες [Sina et al. 2012]. Τέλος, διαπιστώνεται εύκολα από τα Σχ.3.2α,β ότι η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χρονικής απόκρισης της «μέσης» αξονικής μετατόπισης είναι διπλάσια από αυτή της στρεπτικής στροφής (βλ. και [Bhashyam and Prathap 1980, Prathap and Pandalai 1978]).

Στη συνέχεια διερευνάται η περίπτωση αρχικών συνθηκών όπου οι αρχικές στρεπτικές ταχύτητες έχουν σταθερή κατανομή ίση με $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 50 \text{ rad/sec}$, οι αρχικές «μέσες» αξονικές μετατοπίσεις δίδονται ως $\bar{u}_{m0}(x) = [\bar{N}(l,0)/(EA)]x$, ενώ $\bar{\theta}_{x0}(x) = 0$, $\dot{\bar{u}}_{m0}(x) = 0$ και η αξονική δύναμη στο δεξιό άκρο της ράβδου ισούται με $\bar{N}(l,t) = -3000 \text{ kN}$. Στα Σχ.3.4, 3.5 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις της στρεπτικής στροφής στο μέσο και της «μέσης» αξονικής μετατόπισης στο δεξιό άκρο της ράβδου για τρεις περιπτώσεις ανάλυσης (γραμμική και μη γραμμική λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της αξονικής αδράνειας). Επιβεβαιώνονται τα κύρια συμπεράσματα που εξήχθησαν από το παράδειγμα 1 και την προηγούμενη ανάλυση, ενώ διαπιστώνεται ότι η αξονική αδράνεια δεν επηρεάζει σημαντικά τα εξεταζόμενα κινηματικά μεγέθη. Επιπλέον, προκύπτει και πάλι ότι η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χρονικής απόκρισης της «μέσης» αξονικής μετατόπισης είναι διπλάσια από αυτή της στρεπτικής στροφής (βλ. και [Bhashyam and Prathap 1980, Prathap and Pandalai 1978]). Τέλος, στο Σχ.3.6 διακρίνεται η χρονική απόκριση της στρεπτικής ροπής στο αριστερό άκρο της ράβδου για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ανάλυσης, διαπιστώνοντας την χρονικά μεταβαλλόμενη επιρροή της αξονικής αδράνειας στο εξεταζόμενο εντατικό μέγεθος.

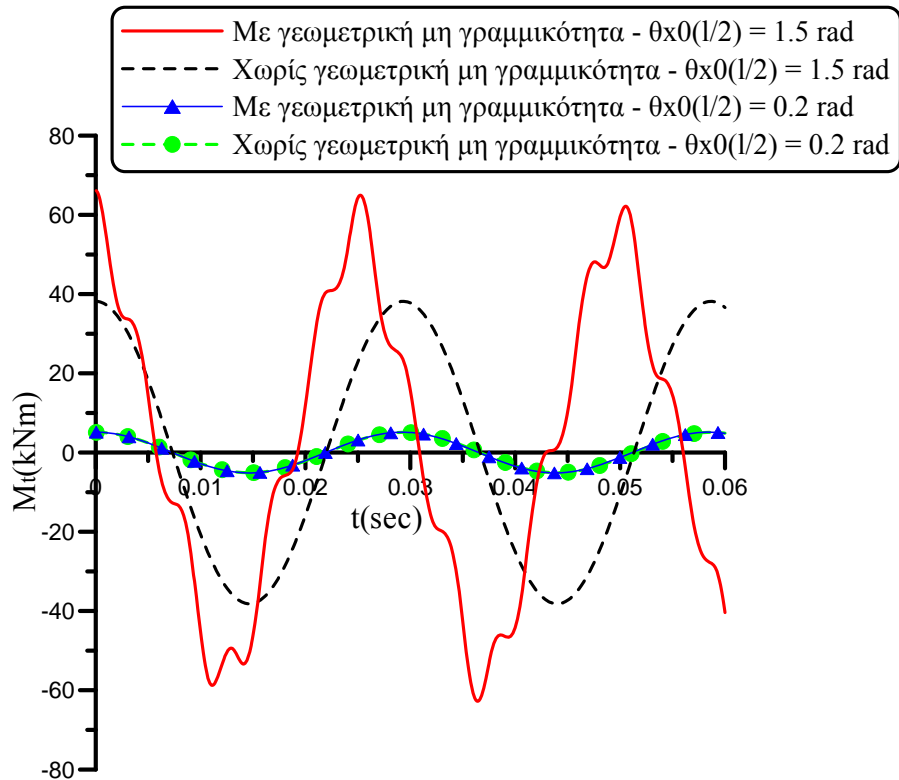


(α)

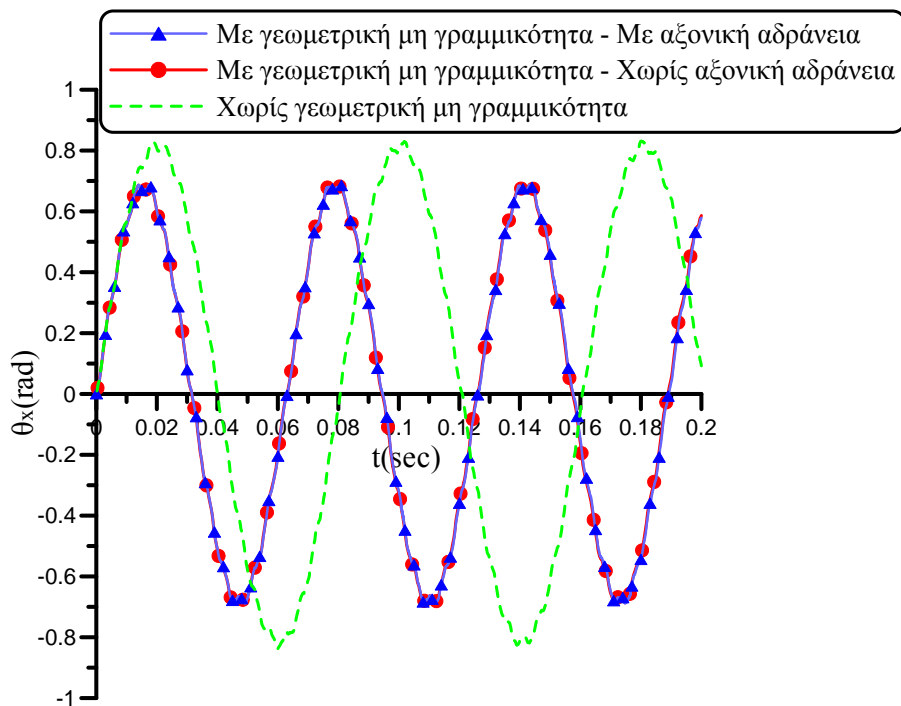


(β)

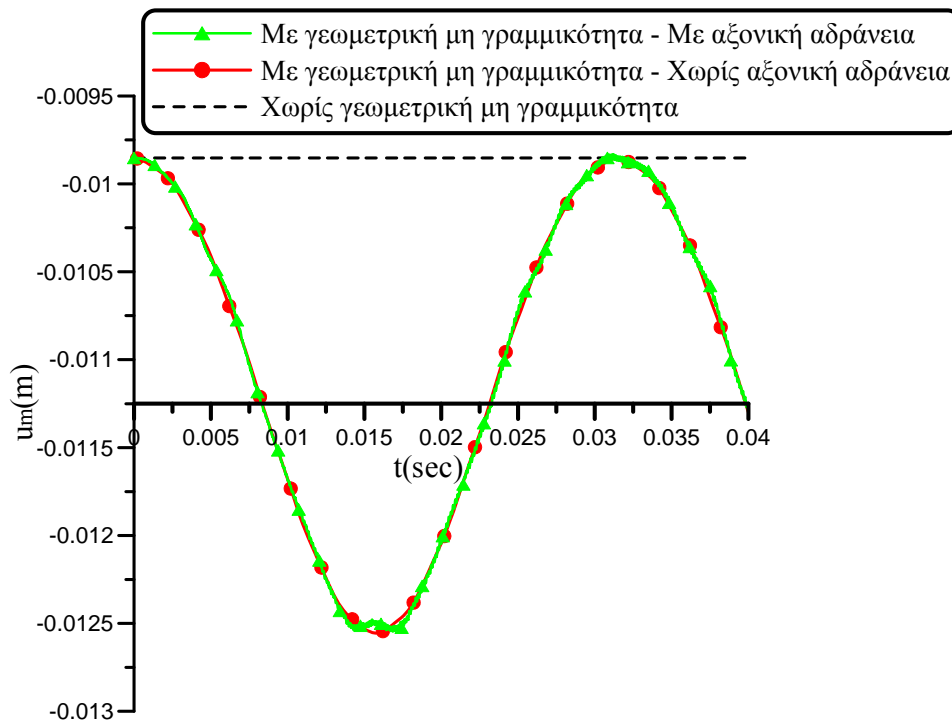
Σχήμα 3.2. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ (α) και αξονικής μετατόπισης $u_m(l, t)$ (β) της ράβδου του παραδείγματος 2 (περίπτωση αρχικών στρεπτικών στροφών $\bar{\theta}_{x0}(x)$).



Σχήμα 3.3. Χρονική απόκριση στρεπτικής ροπής $M_t(0,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 2 (περίπτωση αρχικών στρεπτικών στροφών $\bar{\theta}_{x0}(x)$).



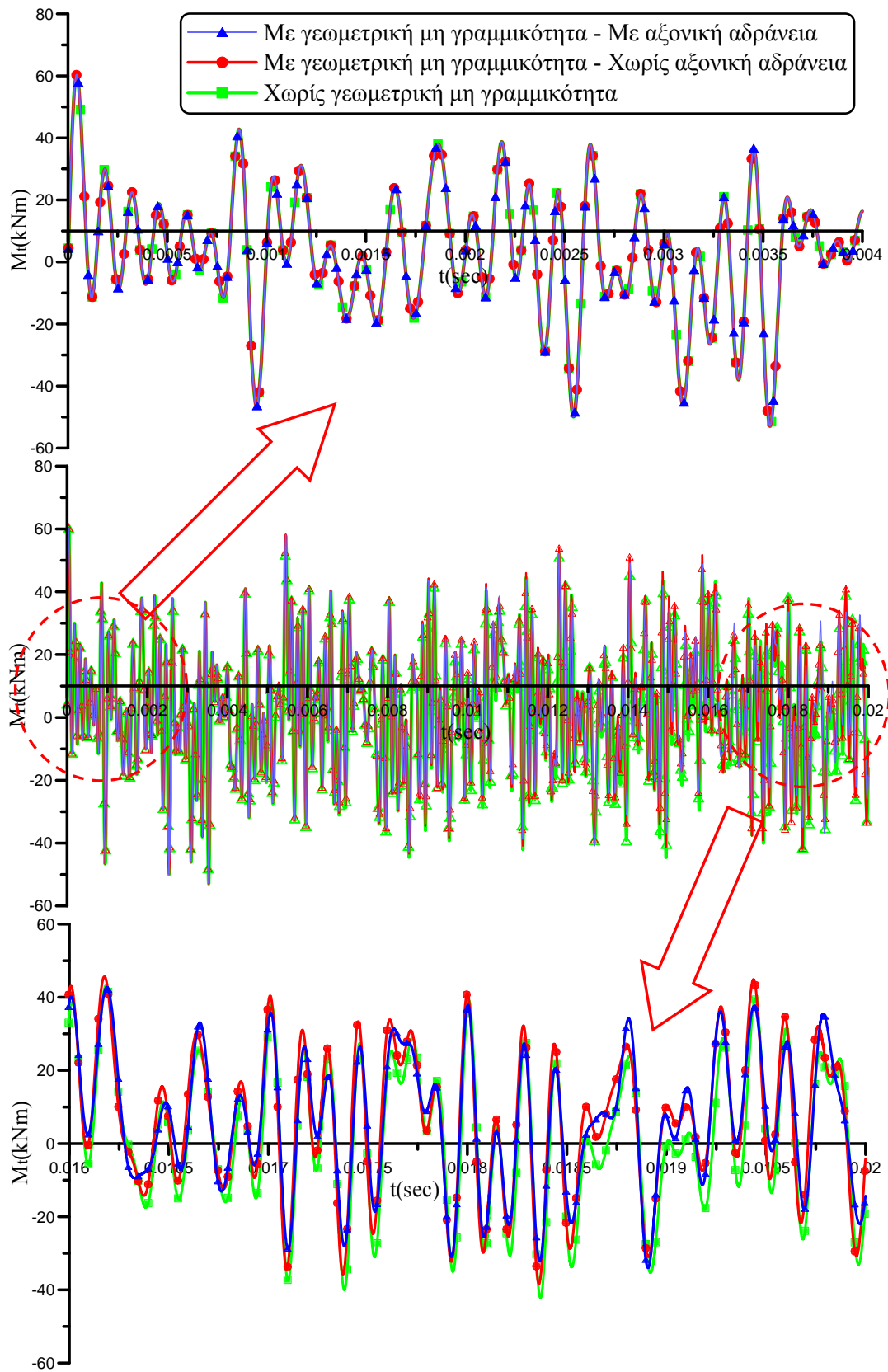
Σχήμα 3.4. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 2 (περίπτωση αρχικών στρεπτικών στροφών $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x)$).



Σχήμα 3.5. Χρονική απόκριση αξονικής μετατόπισης $u_m(l,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 2 (περίπτωση αρχικών στρεπτικών στροφών $\dot{\theta}_{x0}(x)$).

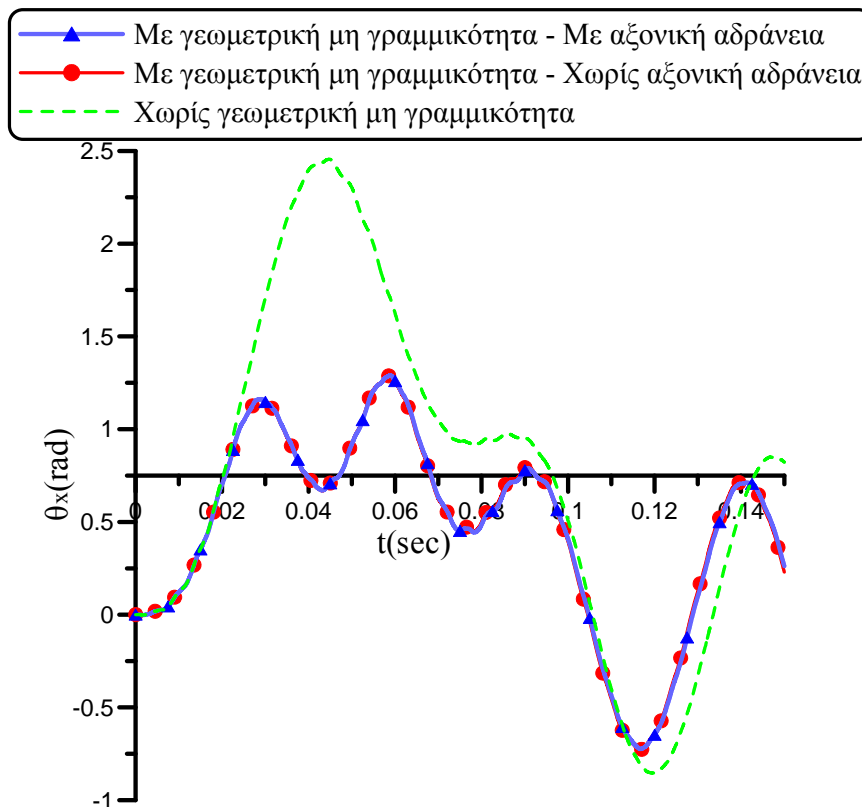
3.4.3 Παράδειγμα 3

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της αξονικής αδράνειας στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη και να διαπιστωθεί το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου, ως τρίτο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 1 αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ. Τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα, η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται, το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αξονικά αμετακίνητο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται σταθερή αξονική δύναμη $\bar{N}(l,t) = -2500 \text{ kN}$. Οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές εκτός από τις αρχικές «μέσες» αξονικές μετατοπίσεις, οι οποίες δίδονται ως $\bar{u}_{m0}(x) = [\bar{N}(l,0)/(EA)]x$. Η ράβδος υποβάλλεται σε κινούμενο φορτίο συγκεντρωμένης στρεπτικής ροπής σταθερής αριθμητικής τιμής $\bar{M}_t = 20.0 \text{ kNm}$. Το φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 40 \text{ m/sec}$ και τοποθετείται στο αριστερό άκρο της ράβδου την χρονική στιγμή $t = 0$, συνεπώς η ράβδος υποβάλλεται σε ελεύθερες ταλαντώσεις κατά το χρονικό διάστημα $t > 0.1 \text{ sec}$. Επιλύονται τα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ. (3.2.22-24) και (3.2.39-41) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της αξονικής αδράνειας, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.6. Χρονική απόκριση στρεπτικής ροπής $M_t(0,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 2 (περίπτωση αρχικών στρεπτικών στροφών $\ddot{\theta}_{x0}(x)$).

Στο Σχ.3.7 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση της στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου για τρεις περιπτώσεις ανάλυσης (γραμμική και μη γραμμική λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της αξονικής αδράνειας), καταδεικνύοντας τη σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ της μη γραμμικής και της γραμμικής ανάλυσης τόσο στη φάση της εξαναγκασμένης όσο και στη φάση της ελεύθερης ταλάντωσης. Στο Σχ.3.8 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση της «μέσης» αξονικής μετατόπισης στο δεξιό άκρο της ράβδου για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ανάλυσης. Από τα Σχ.3.7, 3.8 διαπιστώνεται και πάλι ότι η αξονική αδράνεια δεν επηρεάζει σημαντικά τα εξεταζόμενα κινηματικά μεγέθη. Τέλος, στον Πίνακα 3.6 δίδονται ακρότατες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών μεγεθών της ράβδου στο χρονικό διάστημα $0.0 \leq t \leq 0.15$ (sec) για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ανάλυσης, καταδεικνύοντας τη διαφορετική επιρροή της αξονικής αδράνειας σε αυτά.

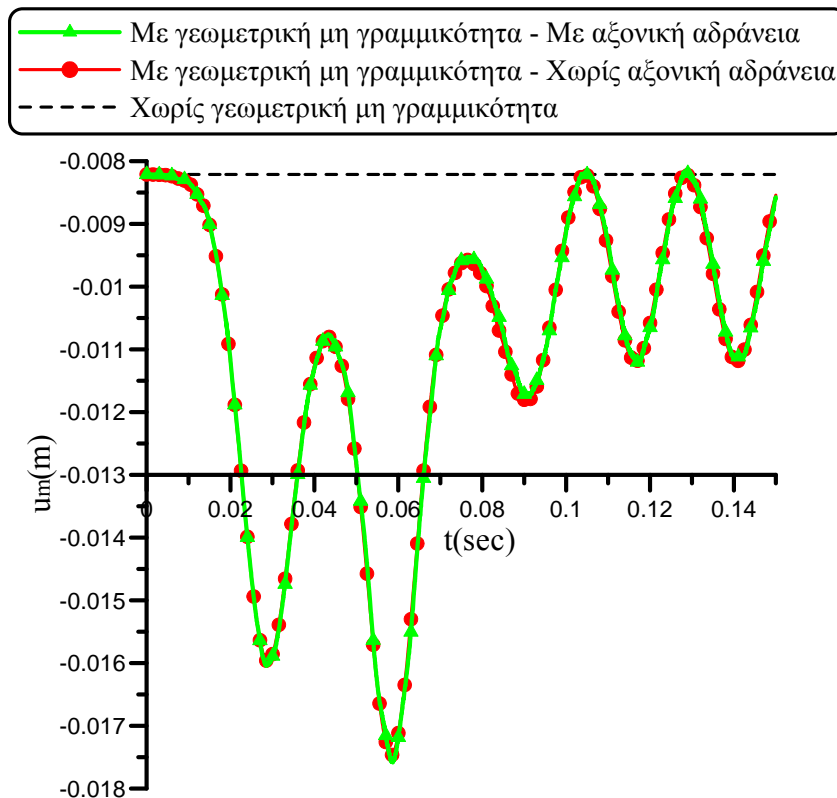


Σχήμα 3.7. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ της ράβδου του παραδείγματος 3.

3.4.4 Παράδειγμα 4

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή γεωμετρικά μη γραμμικών όρων στον υπολογισμό τασικών μεγεθών ελεύθερα ταλαντούμενων ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως τέταρτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ($E = 3.23184 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $G = 1.3466 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\rho = 2.5484 \text{ kN sec}^2/\text{m}^4$) μήκους $l = 40.0 \text{ m}$ με κοίλη χονδρότοιχη διατομή ορθογωνικού σχήματος του Σχ.3.9. Η ράβδος υποβάλλεται σε

σταθερή θλιπτική αξονική δύναμη $\bar{N}(l,t) = -100000kN$ στο δεξιό άκρο της και οι συνοριακές συνθήκες της διακρίνονται στο Σχ.3.9γ. Χρησιμοποιείται η θεμελιώδης ιδιομορφή της γεωμετρικά γραμμικής ανάλυσης ως αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(x)$, ενώ $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 0$. Η κανονικοποίηση της θεμελιώδους ιδιομορφής πραγματοποιείται καθορίζοντας το μέγεθος της στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου ως $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1.3rad$. Χρησιμοποιήθηκαν 700 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής, 41 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου ενώ η επιρροή των ΔΔΠ και της αξονικής αδράνειας αγνοείται. Επιλύεται το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.39-41) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 3.8. Χρονική απόκριση αξονικής μετατόπισης $u_m(l,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 3.

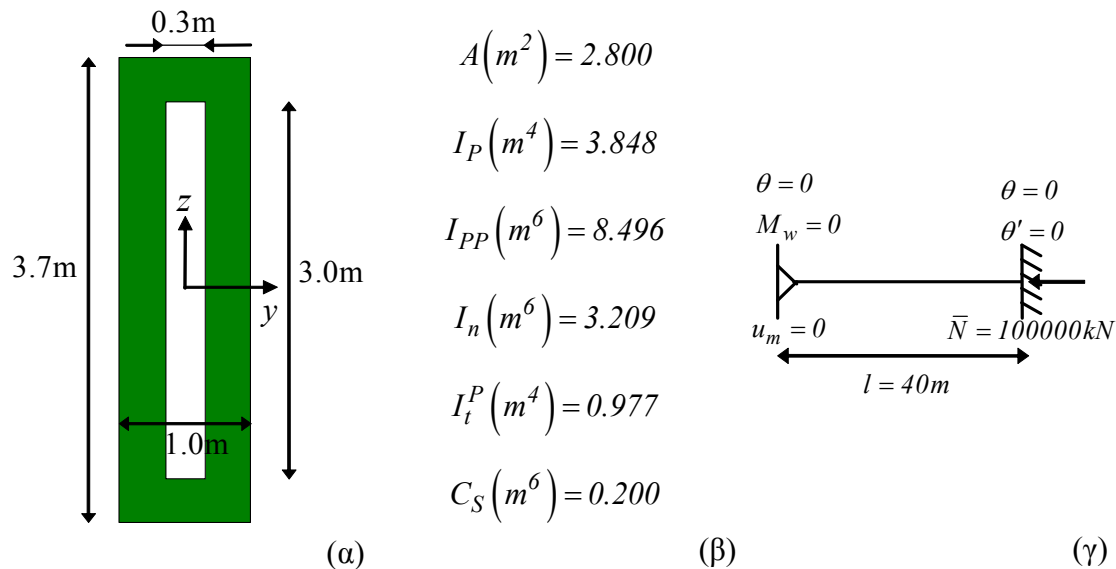
Στο Σχ.3.10 παρουσιάζονται οι ακρότατες τιμές της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{red}$ (που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.53)) κατά μήκος της ράβδου ($0.0 \leq x \leq 38.05 (m)$) για $t = 0.1353 sec$ που είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η στρεπτική στροφή στο μέσο της ράβδου γίνεται μέγιστη ($max \theta_x(l/2,t) = 1.305rad$ για $0.0 \leq t \leq 0.15 (sec)$). Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και οι αντίστοιχες τιμές της $\phi_S^S_{lin}$ που προκύπτουν αγνοώντας τους όρους της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην

εξ.(3.2.53α) (όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της πλην του όρου $\left[(E/G)\theta_x''' - (\rho/G)\ddot{\theta}_x' \right] \phi_S^P$). Επιπλέον, για την ίδια χρονική στιγμή ($t = 0.1353 \text{ sec}$), στο Σχ.3.11 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές των δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_x^S)_{red}$ (που προκύπτουν από τη $(\phi_S^S)_{red}$) και των $S_{x \text{ lin}}^S$ (που προκύπτουν από τη $\phi_{S \text{ lin}}^S$) κατά μήκος της ράβδου ($0.0 \leq x \leq 38.05 \text{ (m)}$), ενώ στον Πίνακα 3.7 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες τιμές των Σχ.3.10-11 για $38.05 \leq x \leq 40.0 \text{ (m)}$. Από τα Σχ.3.10-11 συμπεραίνεται ότι οι ακρότατες τιμές των $(\phi_S^S)_{red}$ και $\phi_{S \text{ lin}}^S$ διαφέρουν αισθητά μεταξύ τους για $0.0 \leq x \leq 38.05 \text{ (m)}$, ενώ το ίδιο ισχύει επίσης και για τις μέγιστες τιμές των $(S_x^S)_{red}$, $S_{x \text{ lin}}^S$. Αντιθέτως, από τον Πίνακα 3.7 διαπιστώνεται ότι κοντά στο πακτωμένο δεξιό άκρο η διαφορά μεταξύ των εξεταζόμενων μεγεθών σταδιακά μηδενίζεται. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο καθώς οι όροι του δεξιού μέλους της εξ.(3.2.53α) που σχετίζονται με τη γεωμετρική μη γραμμικότητα μηδενίζονται στο πακτωμένο δεξιό άκρο όπου η στρεβλωτική συνοριακή συνθήκη εκφράζεται ως $\theta_x'(l,t) = 0$. Επιπλέον, από το Σχ.3.10 και τον Πίνακα 3.7 παρατηρείται ότι η σχέση $|\min \phi_S^S| = \max \phi_S^S$ που ισχύει για τη $\phi_{S \text{ lin}}^S$ παύει να ισχύει για τη $(\phi_S^S)_{red}$.

Πίνακας 3.6. Ακρότατες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών μεγεθών της ράβδου του παραδείγματος 3 ($0.0 \leq t \leq 0.15 \text{ (sec)}$).

	Γραμμική ανάλυση	Μη γραμμική ανάλυση - Χωρίς αξονική αδράνεια	Μη γραμμική ανάλυση - Με αξονική αδράνεια
$\max \theta_x(l/2,t) \text{ (rad)}$	2.456	1.290	1.290
$\min \theta_x(l/2,t) \text{ (rad)}$	-8.549×10^{-1}	-7.294×10^{-1}	-7.244×10^{-1}
$\max \theta_x'(0,t) \text{ (rad / m)}$	1.970	9.818×10^{-1}	9.829×10^{-1}
$\min \theta_x'(0,t) \text{ (rad / m)}$	-6.844×10^{-1}	-5.688×10^{-1}	-5.645×10^{-1}
$\max \theta_x''(l/2,t) \text{ (rad / m}^2\text{)}$	6.315×10^{-1}	5.696×10^{-1}	5.304×10^{-1}
$\min \theta_x''(l/2,t) \text{ (rad / m}^2\text{)}$	-1.721	-9.919×10^{-1}	-1.000
$\max u_m(l,t) \text{ (m)}$	-8.210×10^{-3}	-8.210×10^{-3}	-8.159×10^{-3}
$\min u_m(l,t) \text{ (m)}$	-8.210×10^{-3}	-1.746×10^{-2}	-1.758×10^{-2}
$\max u_m'(l,t) \text{ (m / m)}$	-2.053×10^{-3}	-2.053×10^{-3}	-2.053×10^{-3}
$\min u_m'(l,t) \text{ (m / m)}$	-2.053×10^{-3}	-6.725×10^{-3}	-6.718×10^{-3}

Προκειμένου να διερευνηθεί η κατανομή των εξεταζόμενων μεγεθών στο επίπεδο της διατομής, στα Σχ.3.12α,β και 3.13α,β παρουσιάζονται οι κατανομές των $(\phi_S^S)_{red}$, $\phi_{S lin}^S$ και $(S_x^S)_{red}$, $S_{x lin}^S$ στη διατομή με $x = 34.6 \text{ m}$ ($t = 0.1353 \text{ sec}$), αντίστοιχα, διαπιστώνοντας την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου. Από τα σχήματα αυτά προκύπτει, όπως αναμένονταν, ότι τα εξεταζόμενα μεγέθη διαθέτουν σημειακή συμμετρία ως προς το κέντρο συστροφής S ενώ μόνο η $\phi_{S lin}^S$ είναι αντισυμμετρική ως προς τους άξονες Sy , Sz . Τέλος, στα Σχ.3.14α,β παρουσιάζονται οι ροές των $(S_x^S)_{red}$, $S_{x lin}^S$ στην ίδια διατομή και για την ίδια χρονική στιγμή καταδεικνύοντας τη σημαντική επιρροή των όρων της εξ.(3.2.53α) που σχετίζονται με τη γεωμετρική μη γραμμικότητα στη ροή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.



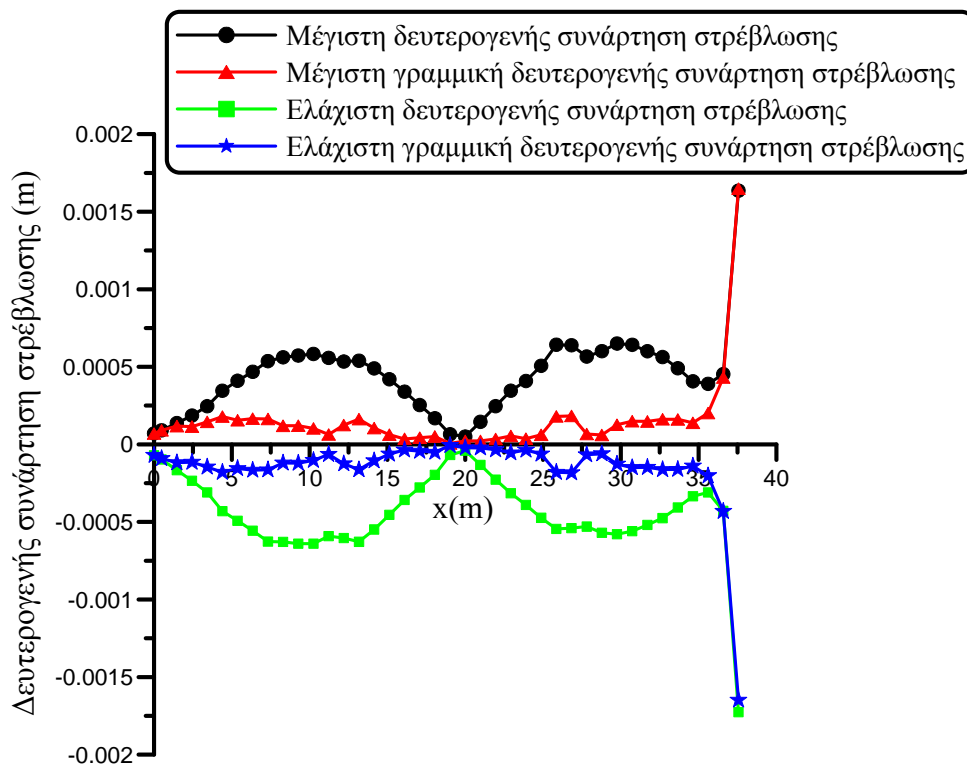
Σχήμα 3.9. Διατομή (α), γεωμετρικές σταθερές (β) και συνοριακές συνθήκες (γ) της ράβδου του παραδείγματος 4.

3.4.5 Παράδειγμα 5

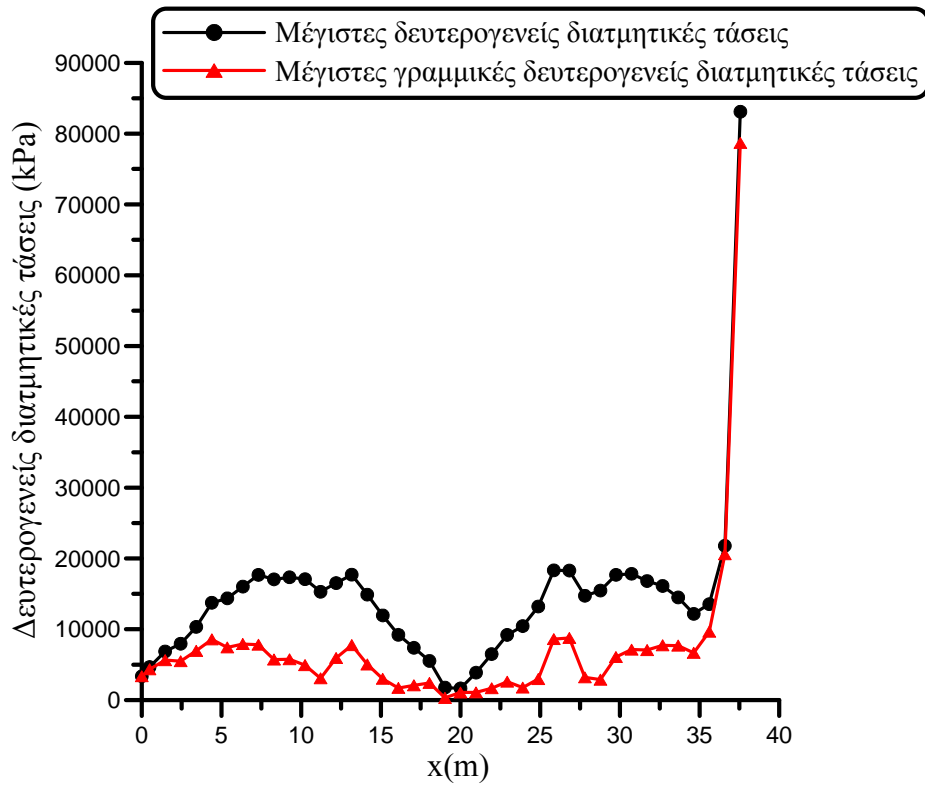
Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της αξονικής αδράνειας στον υπολογισμό τασικών μεγεθών ελεύθερα ταλαντούμενων ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως πέμπτο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 1, αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ. Τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα, η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται, το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αξονικά αμετακίνητο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται σταθερή αξονική δύναμη $\bar{N}(l,t) = -3000 \text{ kN}$. Όπως και σε μία από τις εξετασθείσες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών του παραδείγματος 2, οι αρχικές στρεπτικές ταχύτητες έχουν σταθερή κατανομή ίση με $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 50 \text{ rad/sec}$, οι αρχικές «μέσες» αξονικές μετατοπίσεις δίδονται ως $\bar{u}_{m0}(x) = [\bar{N}(l,0)/(EA)]x$, ενώ $\bar{\theta}_{x0}(x) = 0$, $\dot{\bar{u}}_{m0}(x) = 0$. Επιλύονται τα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.22-24) και (3.2.39-41) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο

του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της αξονικής αδράνειας, αντίστοιχα.

Στο Σχ.3.15 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις των ακρότατων τιμών των ϕ_S^S , $(\phi_S^S)_{red}$ (που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.53) για τα κινηματικά μεγέθη που λαμβάνονται από τις εξ.(3.2.22-24) και (3.2.39-41), αντίστοιχα) στη διατομή με $x = 1.05m$ για το χρονικό διάστημα $0.019 \leq t \leq 0.020 (sec)$. Επιπλέον, για την ίδια διατομή και χρονικό διάστημα, στο Σχ.3.16 διακρίνονται οι χρονικές αποκρίσεις των μέγιστων τιμών των δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^S , $(S_x^S)_{red}$ (που προκύπτουν από τη ϕ_S^S και $(\phi_S^S)_{red}$, αντίστοιχα). Από τα Σχ.3.15-16 συμπεραίνεται ότι η επιρροή της αξονικής αδράνειας τόσο στη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης όσο και στις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις είναι πιο αισθητή στις χρονικές στιγμές όπου παρουσιάζουν τοπικά ακρότατα. Τέλος, στο Σχ.3.17 παρουσιάζονται οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των ορθών τάσεων S_{xx} , $(S_{xx})_{red}$ ($x = 1.05m$, $0.019 \leq t \leq 0.020 (sec)$). Από τα Σχ.3.16-17 διαπιστώνεται ότι η αξονική αδράνεια δεν επηρεάζει σημαντικά τα τασικά μεγέθη της εξεταζόμενης ράβδου.



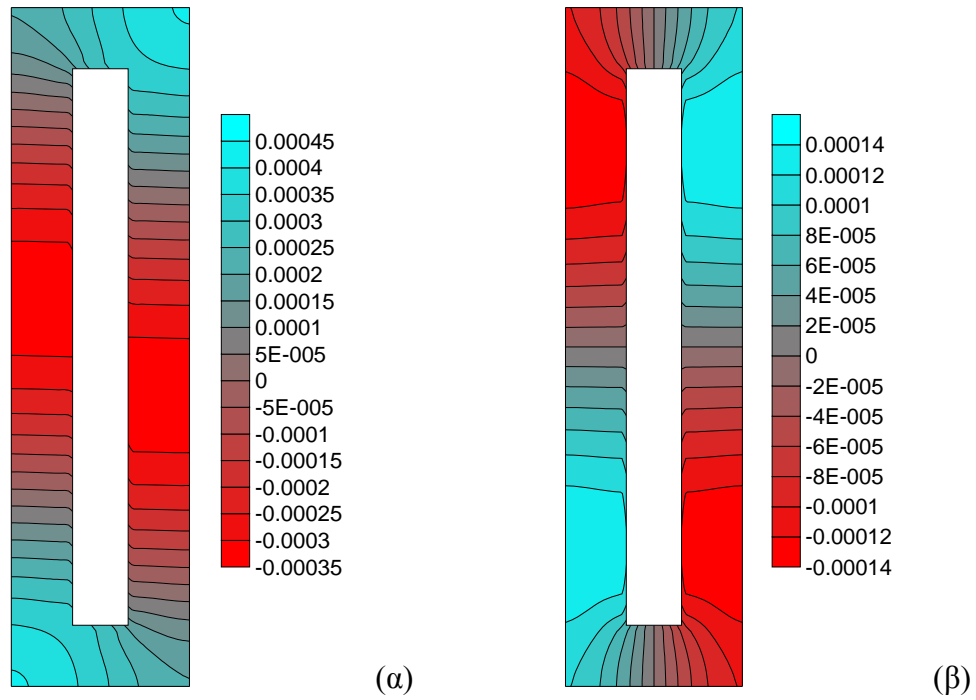
Σχήμα 3.10. Ακρότατες τιμές της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{red}$ και της $\phi_S^S_{lin}$ κατά μήκος της ράβδου ($0.0 \leq x \leq 38.05 (m)$) του παραδείγματος 4.



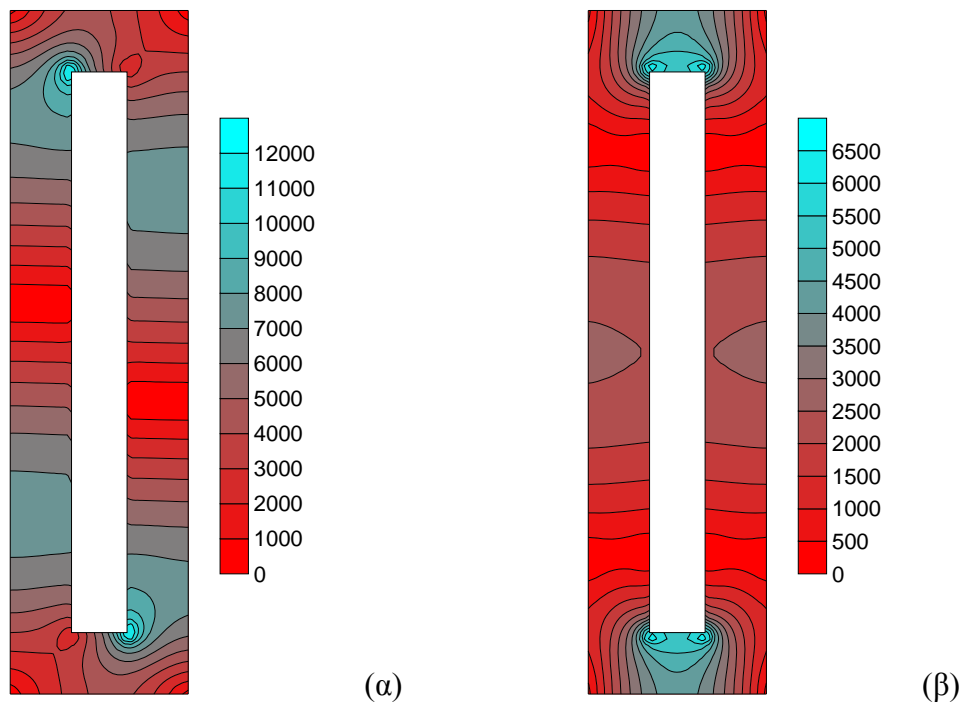
Σχήμα 3.11. Μέγιστες τιμές των δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_x^S)_{red}$ και των $S_{x lin}^S$ κατά μήκος της ράβδου ($0.0 \leq x \leq 38.05$ (m)) του παραδείγματος 4.

Πίνακας 3.7. Ακρότατες τιμές των $(\phi_S^S)_{red}$, $\phi_{S lin}^S$, $(S_x^S)_{red}$, $S_{x lin}^S$ στα κομβικά σημεία που βρίσκονται κοντά στο δεξιό άκρο της ράβδου του παραδείγματος 4.

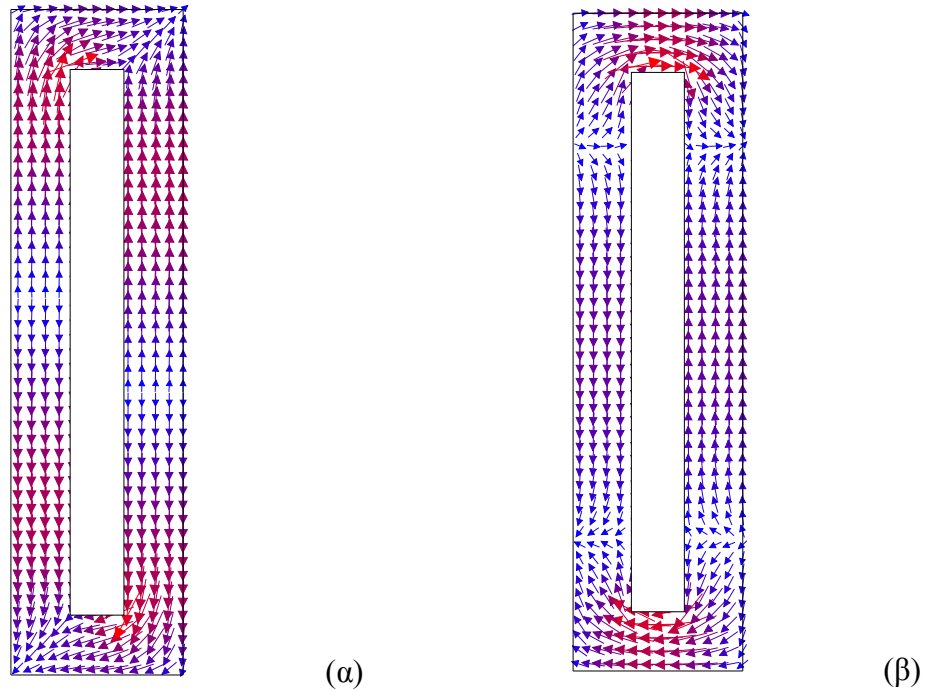
	Θέση x κομβικού σημείου (m)		
	38.5	39.5	40.0
$\max(\phi_S^S)_{red}$ (m)	7.555×10^{-3}	3.273×10^{-2}	5.398×10^{-2}
$\max \phi_{S lin}^S$ (m)	7.548×10^{-3}	3.301×10^{-2}	5.398×10^{-2}
$\min(\phi_S^S)_{red}$ (m)	-8.146×10^{-3}	-3.441×10^{-2}	-5.398×10^{-2}
$\min \phi_{S lin}^S$ (m)	-7.548×10^{-3}	-3.301×10^{-2}	-5.398×10^{-2}
$\max(S_x^S)_{red}$ (kPa)	3.893×10^5	1.658×10^6	2.576×10^6
$\max S_{x lin}^S$ (kPa)	3.603×10^5	1.575×10^6	2.576×10^6



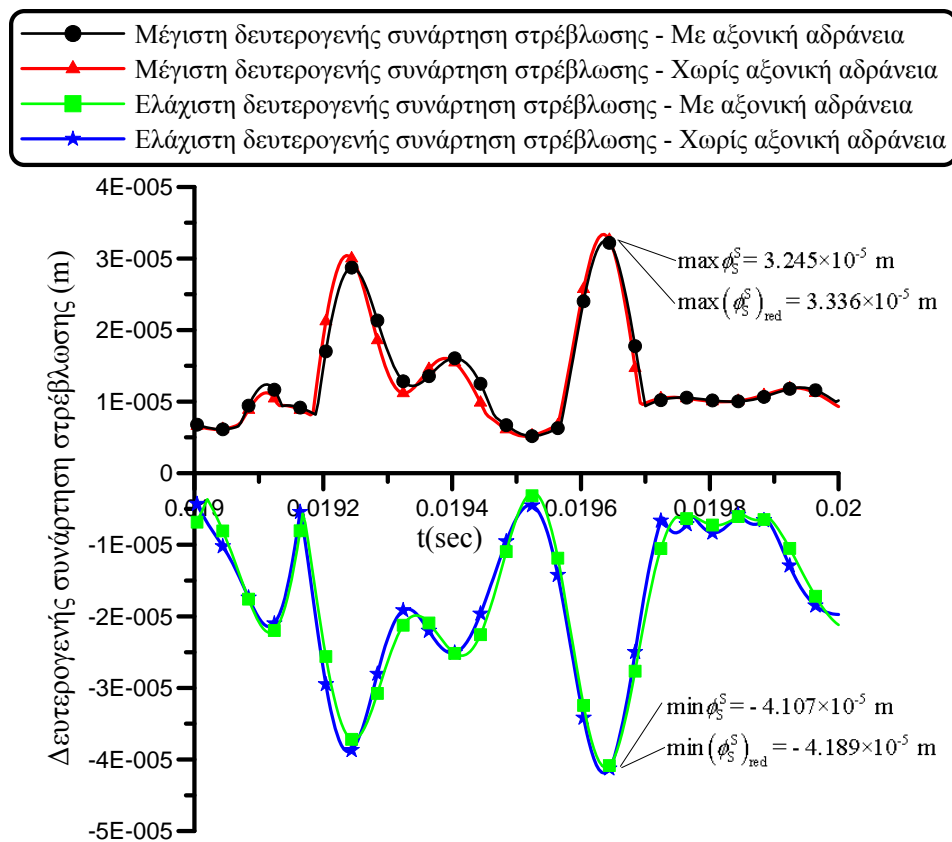
Σχήμα 3.12. Κατανομή (m) δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{red}$ (α) και $\phi_S^S_{lin}$ (β) στη διατομή με $x = 34.6$ m της ράβδου του παραδείγματος 4.



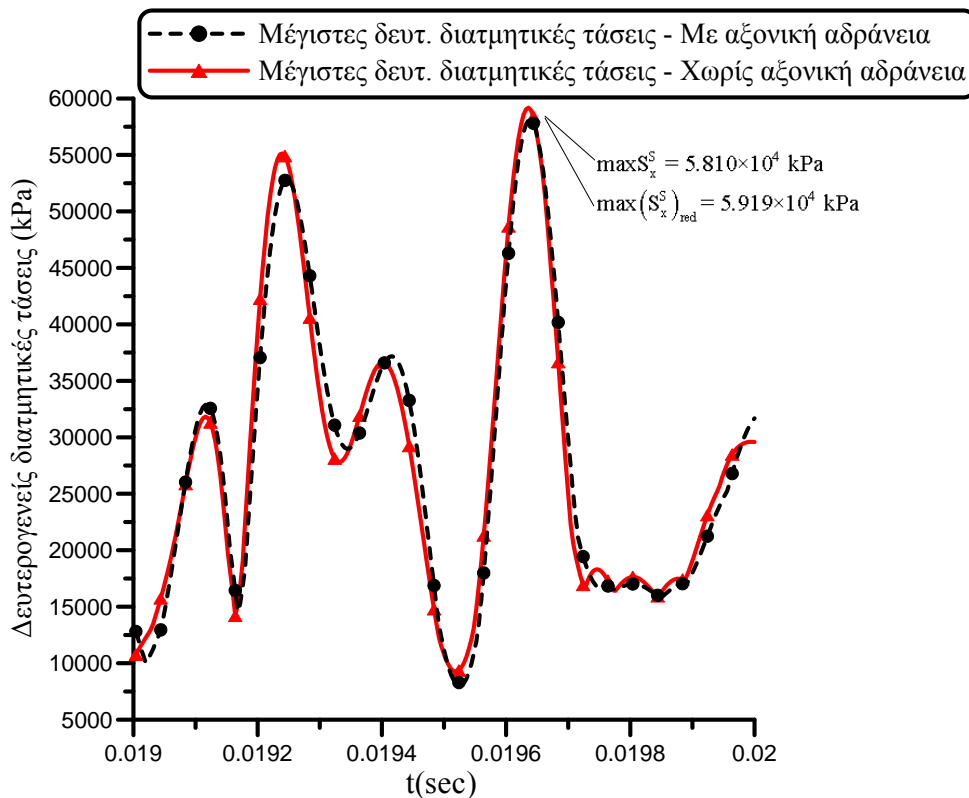
Σχήμα 3.13. Κατανομή (kPa) δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_x^S)_{red}$ (α) και $S_x^S_{lin}$ (β) στη διατομή με $x = 34.6$ m της ράβδου του παραδείγματος 4.



Σχήμα 3.14. Ροή δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_x^S)_{red}$ (α) και $S_x^S_{lin}$ (β) στη διατομή με $x = 34.6$ m της ράβδου του παραδείγματος 4.



Σχήμα 3.15. Χρονικές αποκρίσεις ακρότατων τιμών της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στη διατομή με $x = 1.05$ m της ράβδου του παραδείγματος 5.



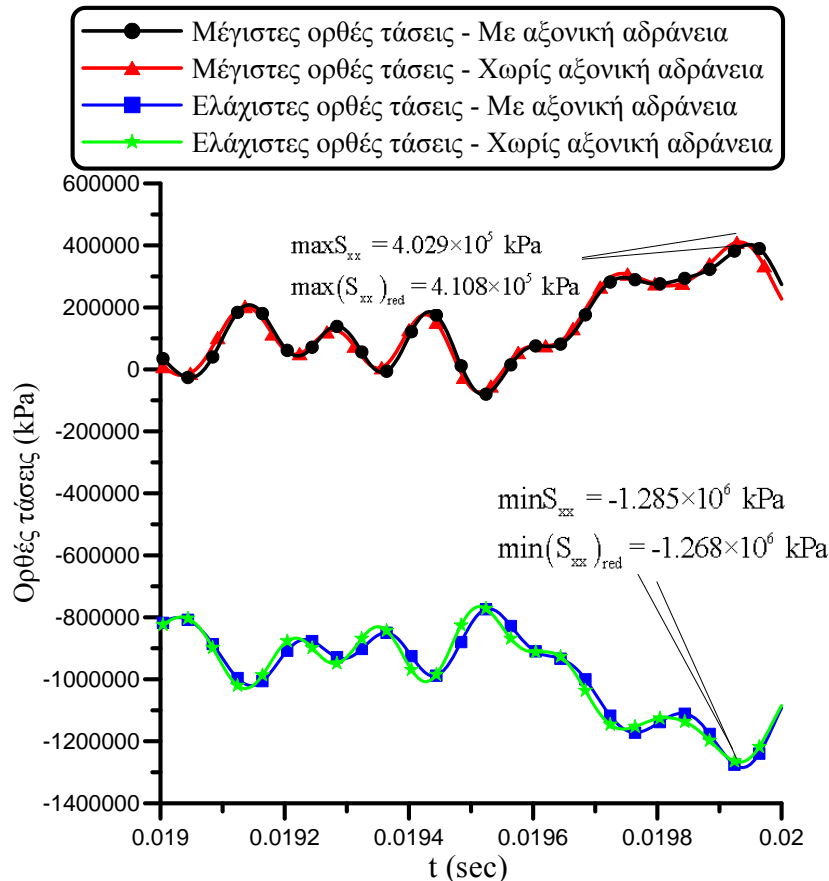
Σχήμα 3.16. Χρονικές αποκρίσεις μέγιστων τιμών των δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^S στη διατομή με $x = 1.05m$ της ράβδου του παραδείγματος 5.

3.4.6 Παράδειγμα 6

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή γεωμετρικά μη γραμμικών όρων στον υπολογισμό τασικών μεγεθών ταλαντούμενων ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως έκτο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 1, αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ. Οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες της ράβδου καθώς και η φόρτισή της ταυτίζονται με τα αντίστοιχα δεδομένα του παραδείγματος 3. Επιλύεται το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.22-24) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της αξονικής αδράνειας.

Στο Σχ.3.18 παρουσιάζεται η κατανομή της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S (που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(3.2.53)) καθώς και η κατανομή της $\phi_{S lin}^S$ (που προκύπτει αγνοώντας τους όρους της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην εξ.(3.2.53α)) στη διατομή με $x = 1.8m$, για $t = 0.0588 sec$ που είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η στρεπτική στροφή στο μέσο της ράβδου γίνεται μέγιστη ($max \theta_x(l/2, t) = 1.290 rad$, για $0.0 \leq t \leq 0.15 (sec)$). Διαπιστώνεται ότι οι κατανομές των ϕ_S^S , $\phi_{S lin}^S$ δεν διαφέρουν αισθητά μεταξύ τους ενώ και πάλι παρατηρείται ότι διαθέτουν σημειακή συμμετρία ως προς το κέντρο συστροφής S , ενώ μόνο η $\phi_{S lin}^S$ είναι αντισυμμετρική στην περιοχή

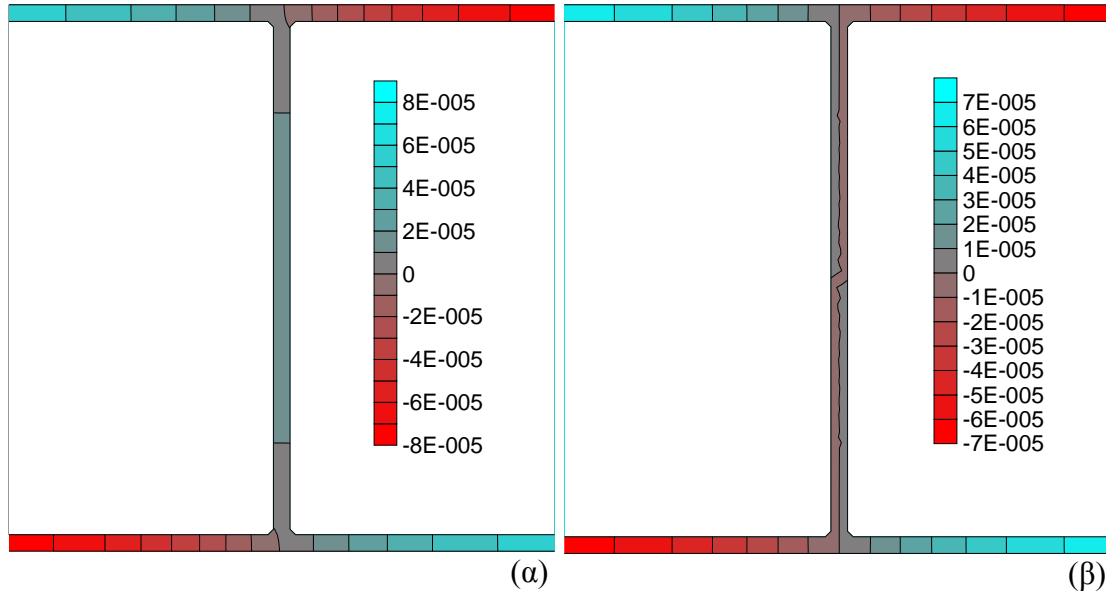
των πελμάτων. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η ϕ_S^S λαμβάνει αποκλειστικά θετικές τιμές στην περιοχή του κορμού σε αντίθεση με τη ϕ_S^{lin} . Στο Σχ.3.19 παρουσιάζεται η κατανομή της πρωτογενούς στρέβλωσης $\theta'_x \phi_S^P$ ($x = 1.8m$, $t = 0.0588 sec$). Από τη σύγκριση με το προηγούμενο σχήμα διαπιστώνεται ότι τα μεγέθη της πρωτογενούς και της δευτερογενούς στρέβλωσης διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους.



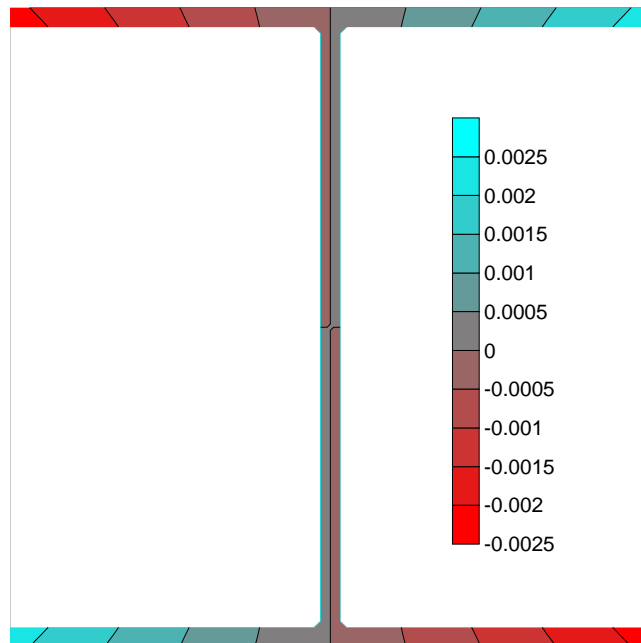
Σχήμα 3.17. Χρονικές αποκρίσεις ακρότατων τιμών των ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή με $x = 1.05m$ της ράβδου του παραδείγματος 5.

Στο Σχ.3.20 παρουσιάζονται οι κατανομές των δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^S (που προκύπτουν από τη ϕ_S^S) και των S_x^{lin} (που προκύπτουν από τη ϕ_S^{lin}) ($x = 1.8m$, $t = 0.0588 sec$), επιβεβαιώνοντας τα συμπεράσματα που προέκυψαν από το Σχ.3.13 του παραδείγματος 4. Στο Σχ.3.21 παρουσιάζονται οι ροές των S_x^S και των S_x^{lin} ($x = 1.8m$, $t = 0.0588 sec$), διαπιστώνοντας ότι διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους στην περιοχή του κορμού. Ελαφρά διαφορά παρατηρείται επίσης και στις συναρμογές πελμάτων - κορμού. Στα Σχ.3.22, 3.23 παρουσιάζονται οι κατανομές των πρωτογενών διατμητικών τάσεων S_x^P και των ορθών τάσεων S_{xx} ($x = 1.8m$, $t = 0.0588 sec$), αντίστοιχα. Από τα Σχ.3.20, 3.22 διαπιστώνεται ότι οι κατανομές των πρωτογενών και των δευτερογενών διατμητικών τάσεων διαφέρουν σημαντικά μεταξύ

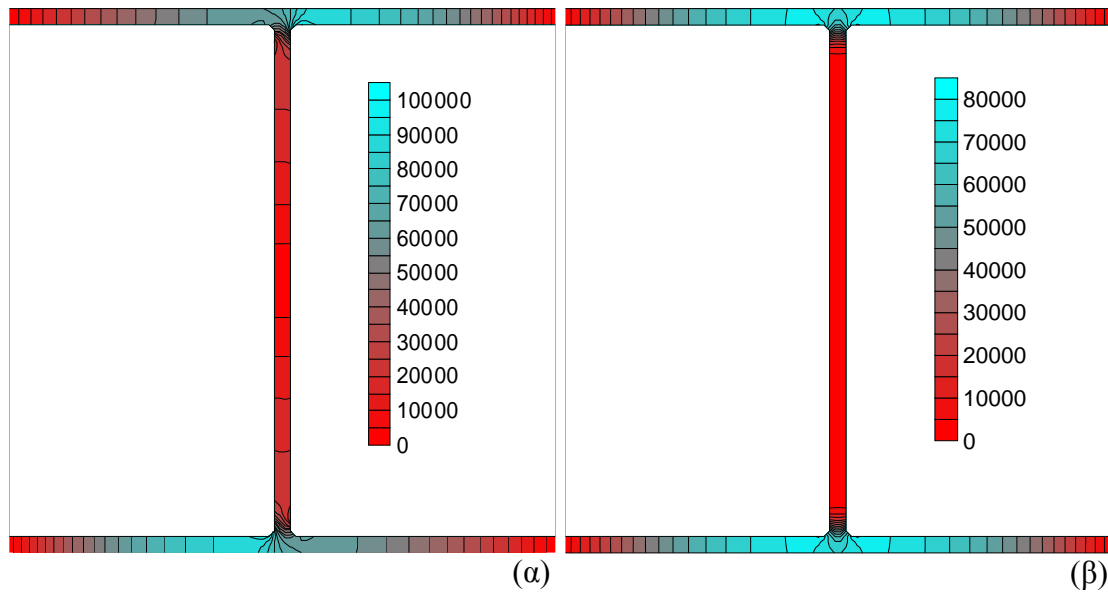
τους. Τέλος, στον Πίνακα 3.8 παρουσιάζονται οι ακρότατες τιμές χαρακτηριστικών μετατοπισιακών και τασικών μεγεθών ($x = 1.8\text{ m}$, $t = 0.0588\text{ sec}$) καταδεικνύοντας την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου. Από τη σύγκριση των μέγιστων τιμών των S_x^P , S_x^S , S_x μεταξύ τους, συμπεραίνεται ότι οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λαμβάνουν υψηλές τιμές και δεν πρέπει να αμελούνται στη γεωμετρικά μη γραμμική δυναμική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη.



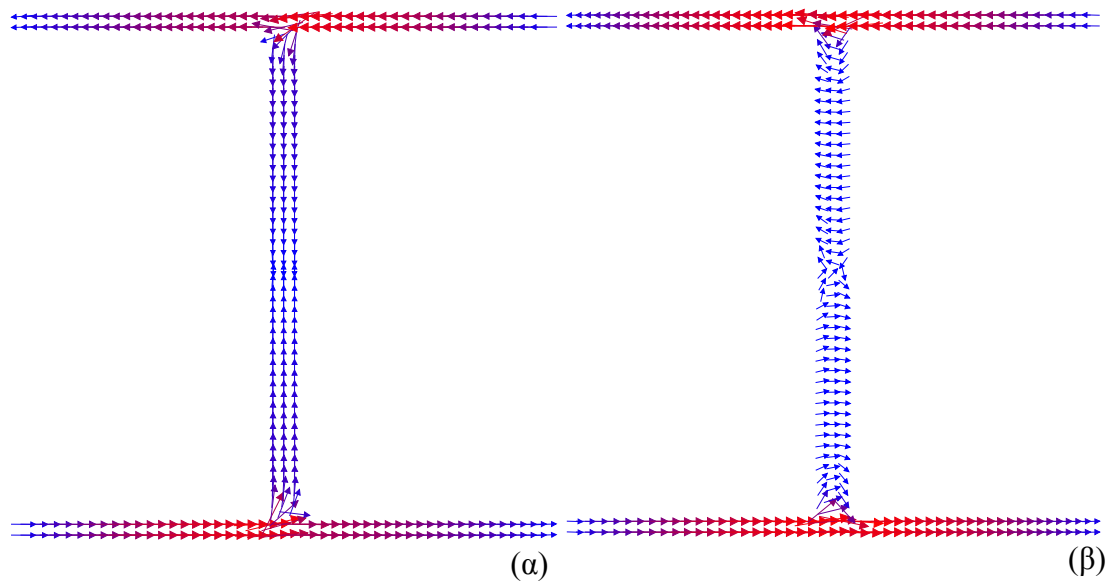
Σχήμα 3.18. Κατανομή (m) δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S (α) και $\phi_S^S_{lin}$ (β) στη διατομή με $x = 1.8\text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.



Σχήμα 3.19. Κατανομή (m) πρωτογενούς στρέβλωσης $\theta'_x \phi_S^P$ στη διατομή με $x = 1.8\text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.



Σχήμα 3.20. Κατανομή (kPa) δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^S (α) και $S_{x lin}^S$ (β) στη διατομή με $x = 1.8 \text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.

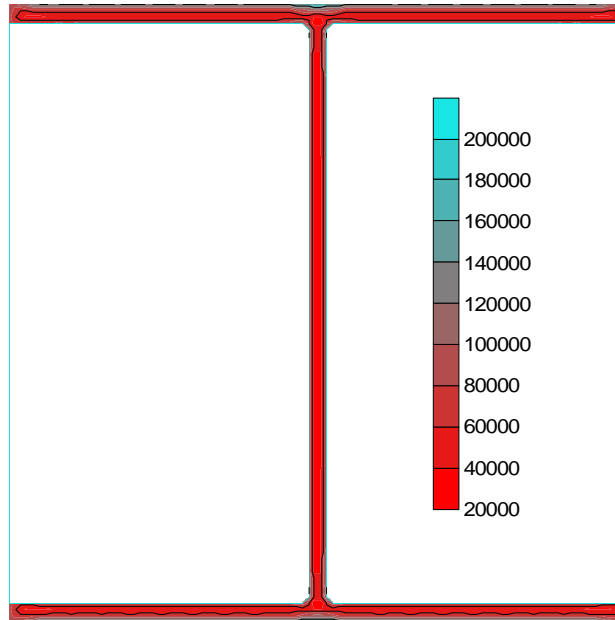


Σχήμα 3.21. Ροή δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_x^S (α) και $S_{x lin}^S$ (β) στη διατομή με $x = 1.8 \text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.

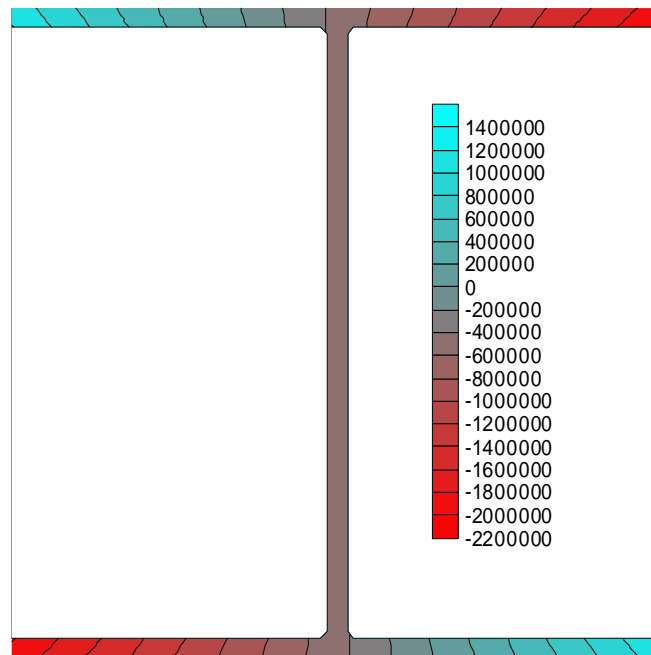
3.4.7 Παράδειγμα 7

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή των ΔΔΠ στις γραμμικές ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδων ανοικτής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως έβδομο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 1 ($I_t^S = 3.048 \times 10^{-4} \text{ m}^4$). Τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα, η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται, το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αξονικά αμετακίνητο ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται σταθερή θλιπτική αξονική δύναμη

$\bar{N}(l,t)$. Επιλύονται τα απλοποιημένα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.33α,β) και (3.2.39-41) για μηδενικά στρεπτικά και στρεβλωτικά φορτία ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή των ΔΔΠ, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.22. Κατανομή (kPa) πρωτογενών διατμητικών τάσεων S_x^P στη διατομή με $x = 1.8 \text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.



Σχήμα 3.23. Κατανομή (kPa) ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή με $x = 1.8 \text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.

Πίνακας 3.8. Ακρότατες τιμές χαρακτηριστικών μετατοπισιακών και τασικών μεγεθών στη διατομή με $x = 1.8 \text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 6.

$\max \theta'_x \phi_S^P (m)$	2.344×10^{-3}
$\min \theta'_x \phi_S^P (m)$	-2.344×10^{-3}
$\max \phi_S^S (m)$	5.330×10^{-5}
$\min \phi_S^S (m)$	-7.338×10^{-5}
$\max \phi_{S \text{ lin}}^S (m)$	6.823×10^{-5}
$\min \phi_{S \text{ lin}}^S (m)$	-6.823×10^{-5}
$\max S_x^S (MPa)$	96.971
$\max S_{x \text{ lin}}^S (MPa)$	81.106
$\max S_x^P (MPa)$	191.346
$\max S_x (MPa)$	244.468
$\max S_{xx} (MPa)$	1235.10
$\min S_{xx} (MPa)$	-2042.42

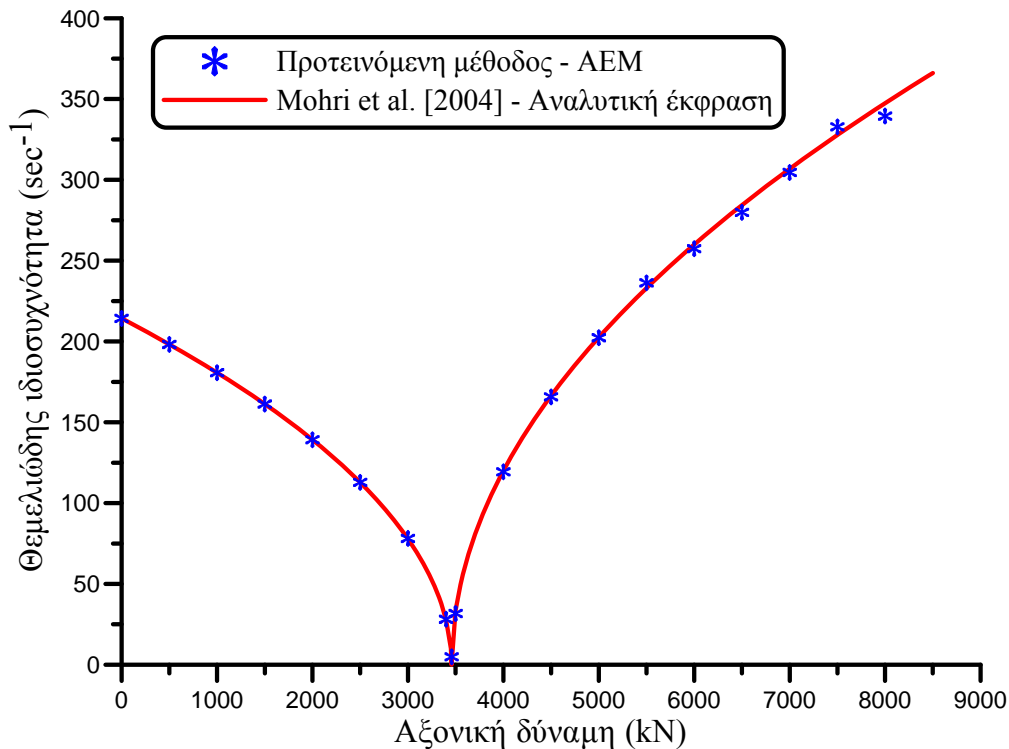
Διερευνάται η σχέση αξονικού φορτίου \bar{N} - (στρεπτικής) θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας ω_f της εξεταζόμενης ράβδου. Οι Mohri et al. [2004] πρότειναν αναλυτική σχέση αξονικού φορτίου - θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας αγνοώντας την επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας και των ΔΔΠ και υποθέτοντας ότι (i) η θεμελιώδης ιδιομορφή ταλάντωσης ακολουθεί ημιτονική κατανομή κατά μήκος της ράβδου ($\theta_x = \theta_0 \sin(\pi x / l)$, όπου $\theta_0 = \theta_x(l/2)$) τόσο στην προλυγισμική όσο και στη (στρεπτική) μεταλυγισμική περιοχή, (ii) η ράβδος ταλαντώνεται αρμονικά, (iii) πραγματοποιούνται γεωμετρικά γραμμικές ταλαντώσεις γύρω από στατική θέση ισορροπίας. Η σχέση αυτή εκφράζεται για την προλυγισμική και τη μεταλυγισμική περιοχή αντίστοιχα ως

$$\omega_f^2 = \omega_\theta^2 \left(1 - \frac{\bar{N}}{\bar{N}_{cr,\theta}} \right) \quad \omega_f^2 = 2\omega_\theta^2 \left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}_{cr,\theta}} - 1 \right) \quad (3.4.1\alpha,\beta)$$

όπου ω_θ είναι η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα για μηδενικό αξονικό φορτίο \bar{N} , η οποία δίδεται ως [Mohri et al. 2004]

$$\omega_\theta^2 = \frac{\pi^2}{\rho l^2 I_P} \left(\frac{\pi^2 E C_S}{l^2} + G I_t^P \right) \quad (3.4.2)$$

ενώ $\bar{N}_{cr,\theta}$ είναι το φορτίο στρεπτικού λυγισμού, το οποίο δίδεται από την εξ.(2.4.2) (βλ. κεφ. 2 και [Mohri et al. 2001]).



Σχήμα 3.24. Καμπύλη αξονικού φορτίου \bar{N} - θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας ω_f (εξ.(3.4.1)) [Mohri et al. 2004] και ζεύγη τιμών (\bar{N}, ω_f) της προτεινόμενης μεθόδου για τη ράβδο του παραδείγματος 7.

Με βάση την προτεινόμενη μέθοδο, προσδιορίζεται από τις εξ.(3.2.39-41) η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου για διάφορες τιμές αξονικού φορτίου \bar{N} . Από τα αποτελέσματα υπολογίζεται η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χρονικής απόκρισης της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ χρησιμοποιώντας τους πρώτους πλήρεις κύκλους ταλάντωσης της ράβδου. Ο υπολογισμός βασίζεται στον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform (FFT)) χρησιμοποιώντας παράθυρο δεδομένων Hanning [Brigham 1988]. Οι ελεύθερες ταλαντώσεις της ράβδου πραγματοποιούνται με τη θεμελιώδη ιδιομορφή της γραμμικής ανάλυσης ως αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(x)$, η οποία υπολογίζεται αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ, ενώ $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 0$. Η κατανομή της ιδιομορφής κατά μήκος της ράβδου αντιστοιχεί σε αυτή που υποτέθηκε από τους Mohri et al. [2004]. Η κανονικοποίηση της θεμελιώδους ιδιομορφής πραγματοποιείται καθορίζοντας το μέγεθος της στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$. Προκειμένου να πραγματοποιηθούν γραμμικές ταλαντώσεις, το μέγεθος του $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ λαμβάνεται παραπλήσιο του $\theta_0(l/2)$ που αντιστοιχεί στη στρεπτική στροφή στο μέσο της ράβδου στη στατική θέση ισορροπίας

της. Οι Mohri et al. [2001, 2004] πρότειναν την αναλυτική έκφραση (2.4.1) του κεφ. 2 για τον προσδιορισμό του $\theta_0(l/2)$.

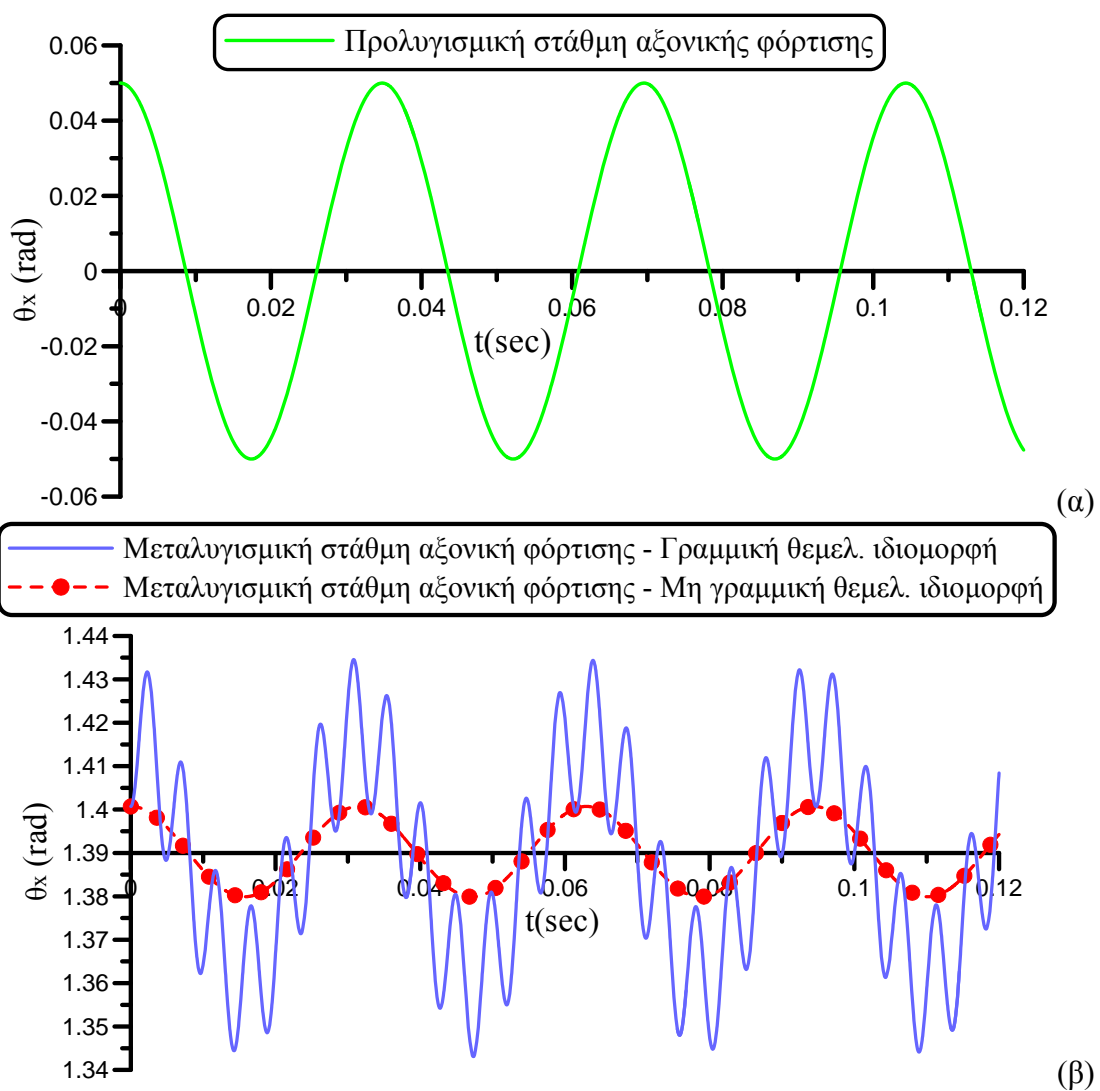
Πίνακας 3.9. Αξονικό φορτίο \bar{N} , στρεπτική στροφή $\theta_0(l/2)$ της στατικής θέσης ισορροπίας (εξ.(2.4.1)) και κανονικοποιημένη αρχική στρεπτική στροφή $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ της ράβδου του παραδείγματος 7.

$ \bar{N} (kN)$	$\theta_0(l/2)(rad)$	$\bar{\theta}_{x0}(l/2)(rad)$
0 - 3458	0.00	0.05
3500	0.22	0.27
4000	0.80	0.85
4500	1.11	1.16
5000	1.35	1.40
5500	1.55	1.60
6000	1.73	1.85
6500	1.90	2.00
7000	2.05	2.20
7500	2.19	2.35
8000	2.32	2.50

Στο Σχ.3.24 παρουσιάζεται η σχέση αξονικού φορτίου \bar{N} - (στρεπτικής) θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας ω_f έτσι όπως προέκυψε από τις εξ.(3.4.1) καθώς και ζεύγη τιμών (\bar{N}, ω_f) που προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ. Τα ζεύγη τιμών (\bar{N}, ω_f) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις τιμές $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9 όπου εισάγονται επίσης και οι αντίστοιχες τιμές του $\theta_0(l/2)$ έτσι όπως προέκυψαν από την εξ.(2.4.1). Από το Σχ.3.24 διαπιστώνεται έμμεσα η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου στον υπολογισμό της σχέσης $\bar{N} - \omega_f$ ράβδων που υπόκεινται σε γραμμικές ελεύθερες στρεπτικές ταλαντώσεις. Η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων στη μεταλυγισμική περιοχή συγκριτικά με την αντίστοιχη διαφορά στην προλυγισμική περιοχή αποδίδεται στο ότι οι προαναφερθείσες παραδοχές (i, ii) των Mohri et al. [2004] ισχύουν μόνο στην προλυγισμική περιοχή. Προκειμένου να διασαφηνιστεί περαιτέρω το ζήτημα αυτό, στα Σχ.3.25α,β παρουσιάζονται οι υπολογισθείσες χρονικές αποκρίσεις της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2,t)$ για προλυγισμική ($\bar{N} = -1000kN$) και μεταλυγισμική ($\bar{N} = -5000kN$) στάθμη αξονικής φόρτισης, αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι μόνο η ράβδος που έχει υποστεί λυγισμό πραγματοποιεί πολυσυχνοτικές (multifrequency) ταλαντώσεις. Στο Σχ.3.25β εισάγεται επίσης η χρονική απόκριση της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2,t)$ για μεταλυγισμική ($\bar{N} = -5000kN$) στάθμη αξονικής φόρτισης έτσι όπως προέκυψε χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη ιδιομορφή της γεωμετρικά μη γραμμικής ανάλυσης ως αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(x)$ και αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ (βλ. εξ.(3.3.28)), ενώ $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 0$. Σημειώνεται ότι η

πραγματοποίηση ελεύθερων ταλαντώσεων με τη θεμελιώδη ιδιομορφή της γεωμετρικά μη γραμμικής ανάλυσης ως αρχικές στρεπτικές στροφές δεν οδηγεί σε ταλαντώσεις όπου συμμετέχουν ανώτερες ιδιοσυχνότητες.

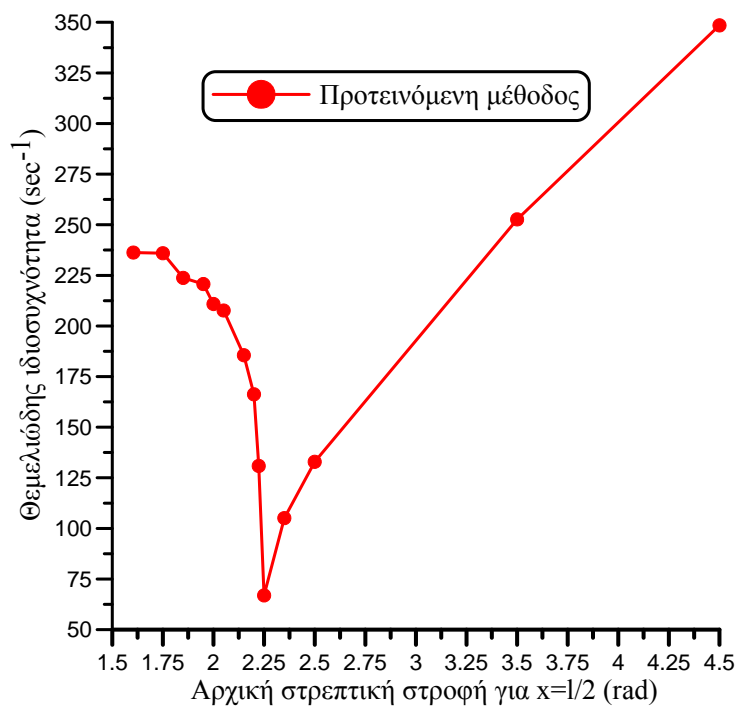
Τέλος, στον Πίνακα 3.10 συγκρίνονται τα υπολογισθέντα ζεύγη τιμών (\bar{N} , ω_f) για προλυγισμική ($\bar{N} = -1000kN$) και μεταλυγισμική ($\bar{N} = -5000kN$) στάθμη αξονικής φόρτισης με τα αντίστοιχα ζεύγη που προέκυψαν λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή ΔΔΠ και χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη ιδιομορφή της μη γραμμικής ή της γραμμικής ανάλυσης ως αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(x)$. Διαπιστώνεται ότι τόσο στην προλυγισμική όσο και στη μεταλυγισμική περιοχή, οι ΔΔΠ δεν επηρεάζουν τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που υπόκεινται σε γραμμικές ταλαντώσεις.



Σχήμα 3.25. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ της ράβδου του παραδείγματος 7 για προλυγισμική ($\bar{N} = -1000kN$) (α) και μεταλυγισμική ($\bar{N} = -5000kN$) (β) στάθμη αξονικής φόρτισης.

Πίνακας 3.10. Ζεύγη τιμών $\bar{N}(kN) - \omega_f(sec^{-1})$ της ράβδου του παραδείγματος 7.

$ \bar{N} (kN)$	$\omega_f(sec^{-1})$			
	$\bar{\theta}_{x0}(x)$ από γραμμική ανάλυση		$\bar{\theta}_{x0}(x)$ από μη γραμμική ανάλυση	
	Με $\Delta\Delta\Pi$	Χωρίς $\Delta\Delta\Pi$	Με $\Delta\Delta\Pi$	Χωρίς $\Delta\Delta\Pi$
1000	180.48	180.70	-	-
5000	199.77	199.46	199.98	199.67

Σχήμα 3.26. Ζεύγη τιμών $(\bar{\theta}_{x0}(l/2), \omega_f)$ της ράβδου του παραδείγματος 8.

3.4.8 Παράδειγμα 8

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στις ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδων που βρίσκονται στη (στρεπτική) μεταλυγισμική περιοχή τους, ως όγδοο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 7. Στο δεξιό άκρο της ράβδου ασκείται σταθερή θλιπτική αξονική δύναμη $\bar{N}(l,t) = -5500kN$ ($|\bar{N}| > |\bar{N}_{cr,\theta}|$). Επιλύονται τα απλοποιημένα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.33α,β) και (3.2.39-41) για μηδενικά στρεπτικά και στρεβλωτικά φορτία και για διάφορα μεγέθη κανονικοποιημένης αρχικής στρεπτικής στροφής στο μέσο της ράβδου $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή των $\Delta\Delta\Pi$, αντίστοιχα. Οι ελεύθερες ταλαντώσεις της ράβδου πραγματοποιούνται με τη θεμελιώδη ιδιομορφή της γεωμετρικά γραμμικής ανάλυσης

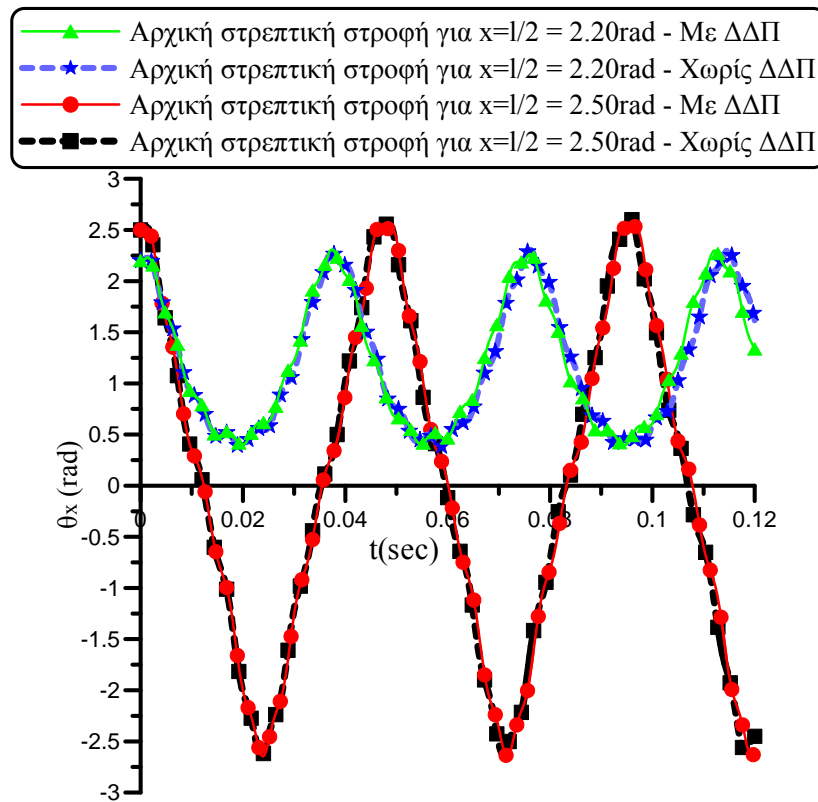
ως αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(x)$, η οποία υπολογίζεται αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ, ενώ $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x)=0$. Από τα αποτελέσματα υπολογίζεται η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χρονικής απόκρισης της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2,t)$ χρησιμοποιώντας τους πρώτους πλήρεις κύκλους ταλάντωσης της ράβδου. Ο υπολογισμός βασίζεται στον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform (FFT)) χρησιμοποιώντας παράθυρο δεδομένων Hanning [Brigham 1988].

Πίνακας 3.11. Κανονικοποιημένες αρχικές στρεπτικές στροφές $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ και θέσεις $\bar{\theta}_{x,m}(l/2)$ γύρω από τις οποίες ταλαντώνεται η ράβδος του παραδείγματος 8.

$\bar{\theta}_{x0}(l/2)(rad)$	$\bar{\theta}_{x,m}(l/2)(rad)$
1.60	1.60
1.75	1.60
1.85	1.58
1.95	1.55
2.00	1.53
2.05	1.50
2.15	1.41
2.20	1.34
2.22	1.23
2.25	0.00
2.35	0.00
2.50	0.00
3.50	0.00
4.50	0.00

Στο Σχ.3.26 παρουσιάζονται ζεύγη τιμών ($\bar{\theta}_{x0}(l/2)$, ω_f) για σημαντικό εύρος τιμών του $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ έτσι όπως προέκυψαν αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ, ενώ στον Πίνακα 3.11 δίδονται οι αντίστοιχες θέσεις $\bar{\theta}_{x,m}(l/2)$ γύρω από τις οποίες ταλαντώνεται η εξεταζόμενη ράβδος. Συμπεραίνεται ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα επηρεάζει σημαντικά τόσο τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2,t)$ όσο και τις θέσεις γύρω από τις οποίες ταλαντώνεται η ράβδος. Από τον Πίνακα 3.11 διαπιστώνεται ότι οι θέσεις αυτές μεταβάλλονται αναλόγως της στάθμης της αρχικής στρεπτικής στροφής $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$, ενώ για υψηλές τιμές της $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ ταυτίζονται με τη στατική θέση ισορροπίας της προλυγισμικής περιοχής ($\bar{\theta}_{x,m}(l/2)=0$). Από το Σχ.3.26 διαπιστώνεται επίσης ότι η σχέση $\bar{\theta}_{x0}(l/2) - \omega_f$ είναι σύνθετη και διαφέρει αισθητά από την αντίστοιχη σχέση της προλυγισμικής περιοχής. Στην προλυγισμική περιοχή, η αύξηση του $\bar{\theta}_{x0}(l/2)$ πάντα οδηγεί σε αύξηση της στρεπτικής στιβαρότητας και επακόλουθη αύξηση του ω_f (βλ. και

παραδείγματα 1, 2 καθώς και την εργασία των Rozmarynowski and Szymszak [1984] για την περίπτωση αξονικά αμετακίνητων άκρων και $I_n = 0$).

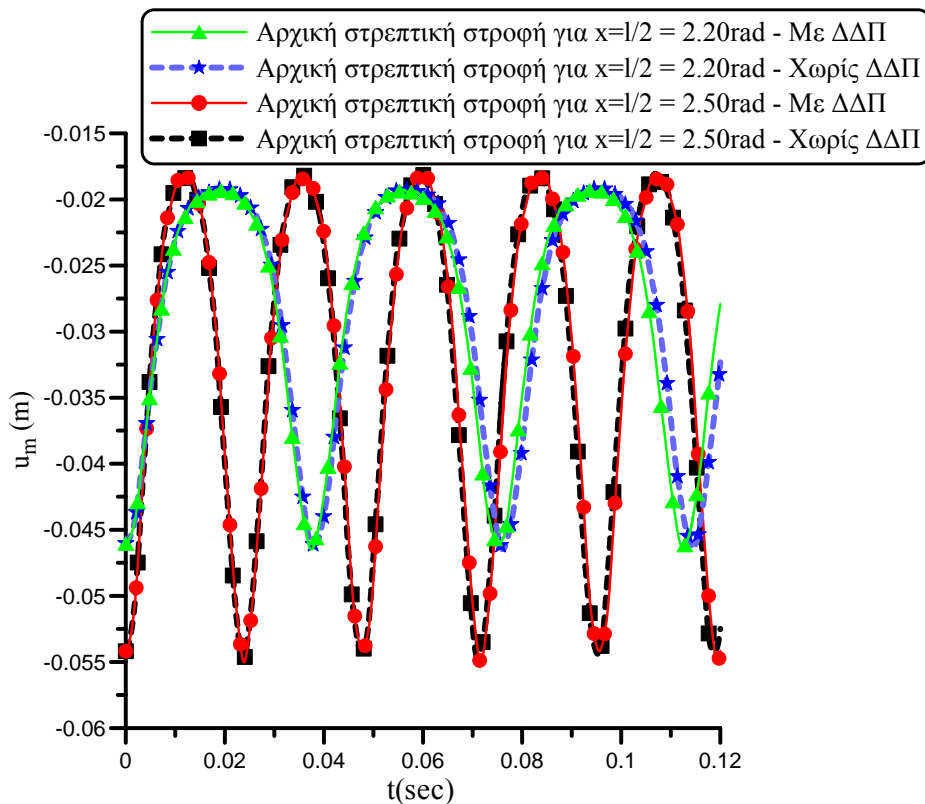


Σχήμα 3.27. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ της ράβδου του παραδείγματος δ.

Στα Σχ.3.27, 3.28 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ και της αξονικής μετατόπισης $u_m(l, t)$, αντίστοιχα, για δύο περιπτώσεις μεγεθών κανονικοποιημένης αρχικής στρεπτικής στροφής ($\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.20 \text{ rad}$, $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.50 \text{ rad}$) και δύο περιπτώσεις ανάλυσης (λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ). Από τα σχήματα αυτά επιβεβαιώνεται και πάλι (για την περίπτωση $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.50 \text{ rad}$) ότι η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της χρονικής απόκρισης της «μέσης» αξονικής μετατόπισης είναι διπλάσια από αυτή της στρεπτικής στροφής (βλ. [Bhashyam and Prathap 1980, Prathap and Pandalai 1978] και παράδειγμα 2). Ωστόσο, φαίνεται ότι κάτι τέτοιο παύει να ισχύει στη μεταλυγισμική περιοχή για θέσεις γύρω από τις οποίες ταλαντώνεται η ράβδος όπου $\bar{\theta}_{x,m}(l/2)(\text{rad}) \neq 0$ (βλ. περίπτωση $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.20 \text{ rad}$). Από τα ίδια σχήματα παρατηρείται επίσης ότι οι ΔΔΠ δεν επηρεάζουν σημαντικά τον υπολογισμό κινηματικών μεγεθών ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που υπόκεινται σε μη γραμμικές ελεύθερες ταλαντώσεις στη μεταλυγισμική περιοχή τους.

Στα Σχ.3.29, 3.30 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις της πρωτογενούς στρεπτικής ροπής M_t^P (πρώτοι δύο όροι της εξ.(3.2.36) συμπεριλαμβανομένης και της

στρεπτικής ροπής που προκαλείται από την αξονική φόρτιση), της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής M_t^S (επόμενοι δύο όροι της εξ.(3.2.36) συμπεριλαμβανομένης και της σχετικής συνεισφοράς της αξονικής φόρτισης), της μη γραμμικής στρεπτικής ροπής M_t^{nl} (άθροισμα των μη γραμμικών όρων της εξ.(3.2.36)) και της συνολικής στρεπτικής ροπής M_t λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή ΔΔΠ, για δύο περιπτώσεις μεγθών κανονικοποιημένης αρχικής στρεπτικής στροφής $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.20 \text{ rad}$ και $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.50 \text{ rad}$, αντίστοιχα). Τέλος, στον Πίνακα 3.12 παρουσιάζονται ακρότατες τιμές των κινηματικών και εντατικών μεγεθών που παρουσιάστηκαν στα Σχ.3.27-30, έτσι όπως προέκυψαν λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ ($0.0 \leq t \leq 0.12 \text{ (sec)}$, $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.20 \text{ rad}$). Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνεται ότι η επιρροή ΔΔΠ είναι αμελητέα στον υπολογισμό τόσο κινηματικών όσο και εντατικών μεγεθών ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που υπόκεινται σε μη γραμμικές ελεύθερες ταλαντώσεις στη μεταλυγισμική περιοχή τους.

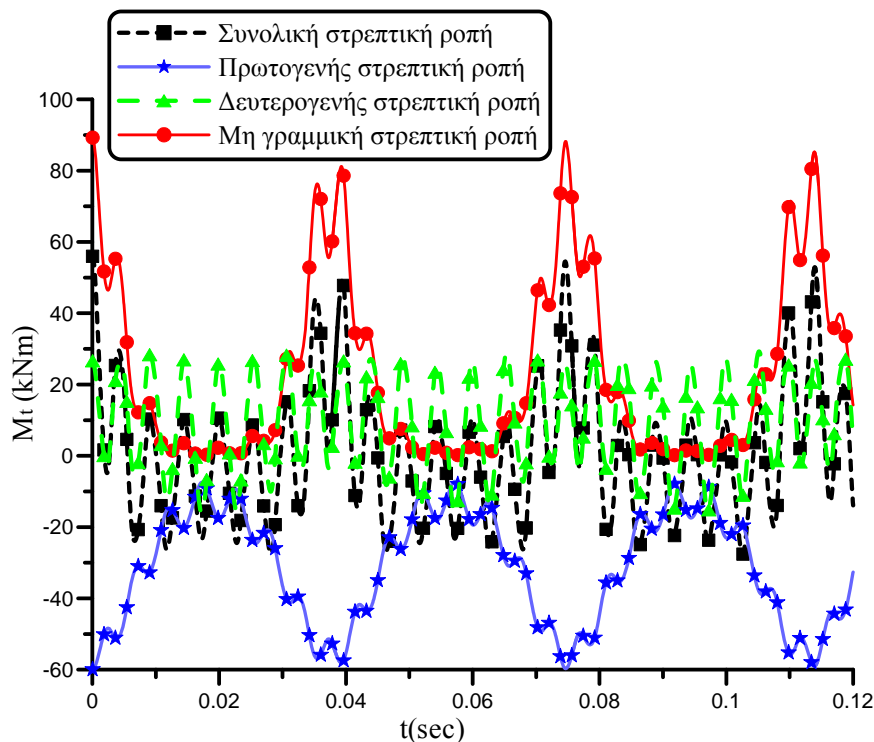


Σχήμα 3.28. Χρονική απόκριση αξονικής μετατόπισης $u_m(l,t)$ της ράβδου του παραδείγματος δ.

3.4.9 Παράδειγμα 9

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και των ΔΔΠ στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ράβδων ανοικτής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως ένατο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 7 στην προλυγισμική περιοχή της. Στο δεξιό άκρο της ράβδου ασκείται μηδενική αξονική δύναμη. Μελετάται η κατάσταση πρωτεύοντος συντονισμού (primary

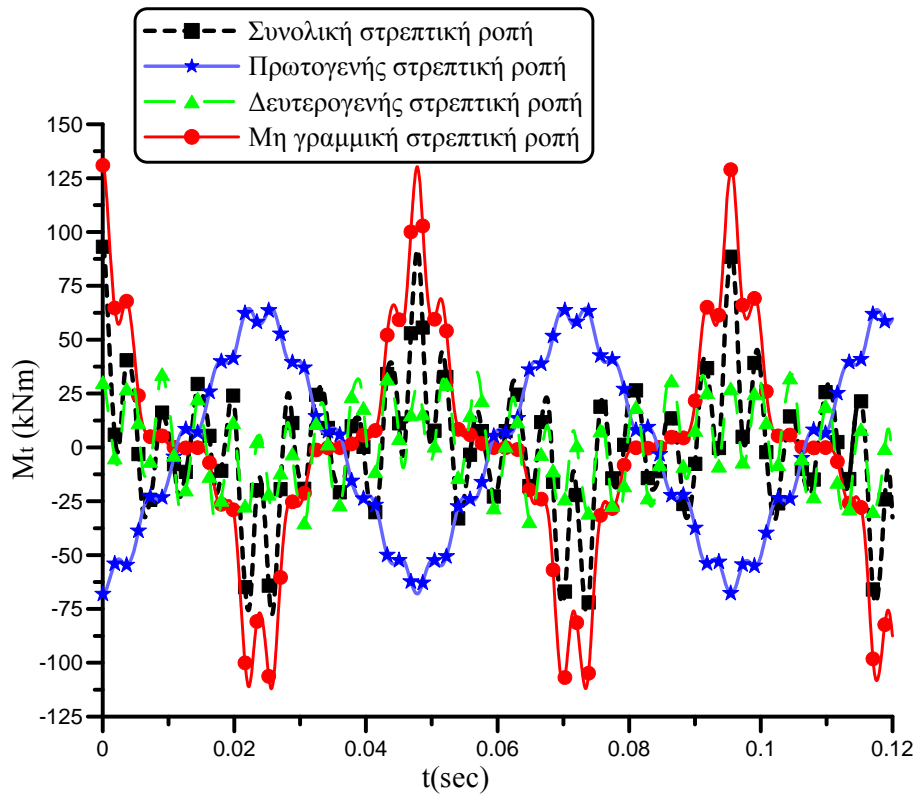
resonance) της ράβδου κατά την οποία ασκείται εξωτερικά επιβαλλόμενη συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή $\bar{M}_t(t)$ στο μέσο της, η οποία εκφράζεται ως $\bar{M}_t(t) = \bar{M}_{t0} \sin(\omega_{flin}t)$, με $\bar{M}_{t0} = 5kNm$ και $\omega_{flin} = 214.23 \text{ sec}^{-1}$. ω_{flin} είναι η (στρεπτική) θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της ράβδου χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$, έτσι όπως προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών της εξ.(3.3.28) αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Οι αρχικές συνθήκες της ράβδου είναι μηδενικές. Επιλύονται τα απλοποιημένα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.33α,β) και (3.2.39-41) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή των $\Delta\Delta\Pi$, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.29. Χρονικές αποκρίσεις χαρακτηριστικών εντατικών μεγεθών στρεπτικής ροπής στο αριστερό άκρο της ράβδου του παραδείγματος 8 ($\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.20 \text{ rad}$).

Στα Σχ.3.31-32 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2,t)$ (με ή χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$) αγνοώντας ή λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, αντίστοιχα. Όπως αναμένονταν, μόνο στη γραμμική ανάλυση (Σχ.3.31) η στρεπτική στροφή αυξάνεται με τον χρόνο. Το διακρότημα που παρατηρείται στη χρονική απόκριση της μη γραμμικής ανάλυσης (Σχ.3.32) μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι οι μεγάλες στρεπτικές στροφές αυξάνουν τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα της ράβδου ω_f (καθώς αυξάνεται η στρεπτική στιβαρότητά της). Συνεπώς, προκαλείται αποσυντονισμός μεταξύ της ω_f και της διεγείρουσας συχνότητας του εξωτερικού φορτίου (ω_{flin}). Αφού η $\theta_x(l/2,t)$

λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, το εύρος της ταλάντωσης μειώνεται με αποτέλεσμα να προκαλείται και πάλι συντονισμός μεταξύ ω_f και $\omega_{f,lin}$ λόγω αντιστροφής του προαναφερθέντος μηχανισμού (βλ. και τις εργασίες των Struble and Yionoulis [1962], Struble [1964], Parzygna and Pao [1978], Manevitch et al. [2011a,b,c], Monroe and Shaw [2012]).

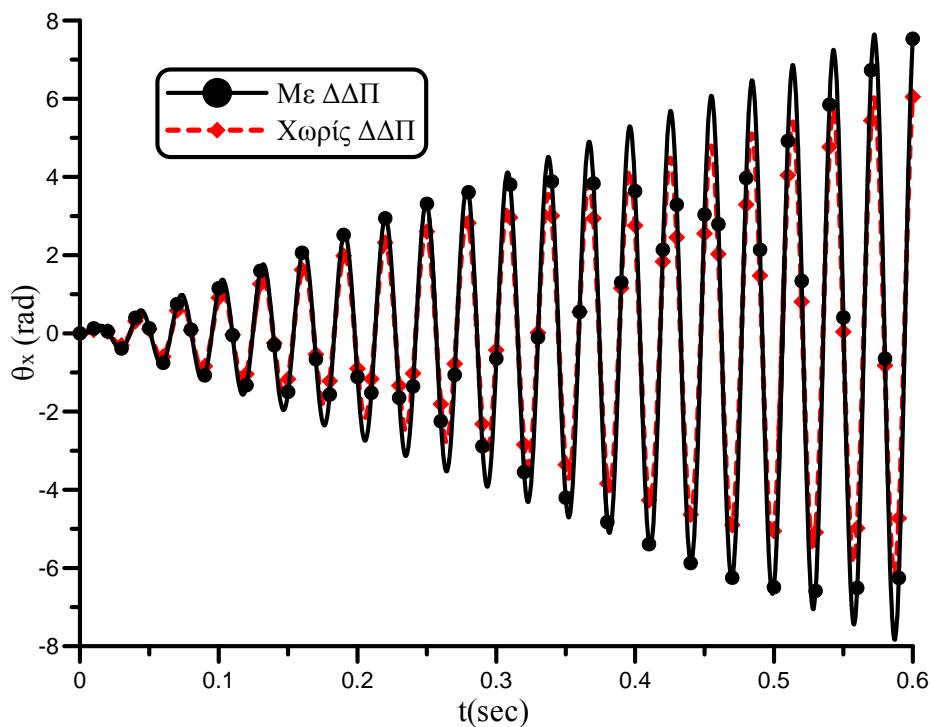


Σχήμα 3.30. Χρονικές αποκρίσεις χαρακτηριστικών εντατικών μεγεθών στρεπτικής ροπής στο αριστερό άκρο της ράβδου του παραδείγματος 8 ($\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.50 \text{ rad}$).

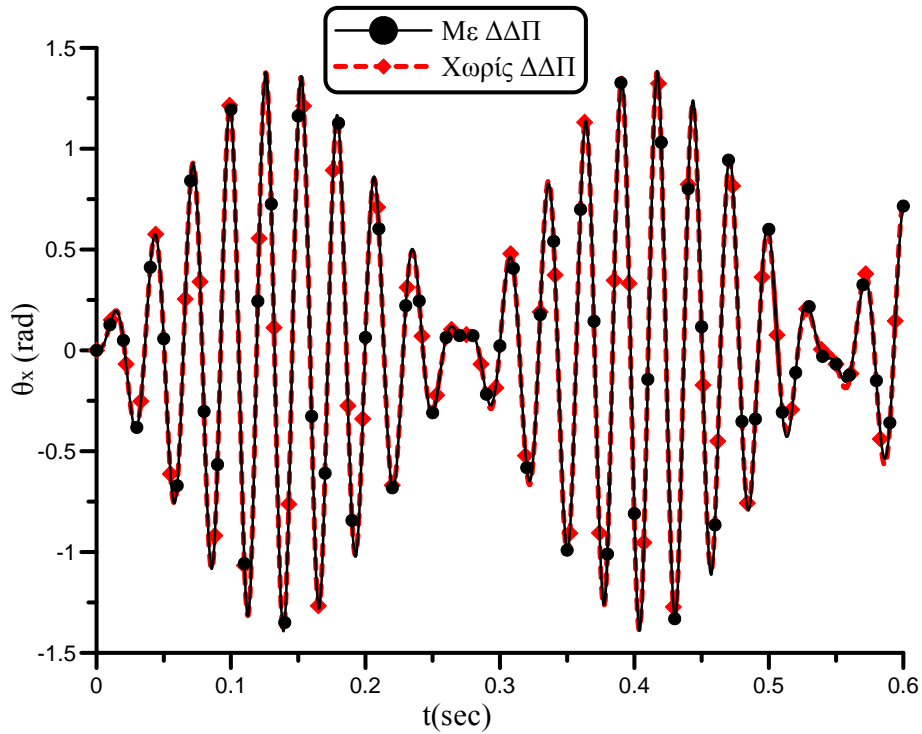
Επιπρόσθετα, στο Σχ.3.33 παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις της πρωτογενούς στρεπτικής ροπής M_t^P (πρώτος όρος της εξ.(3.2.36)), της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής M_t^S (τρίτος όρος της εξ.(3.2.36)), της μη γραμμικής στρεπτικής ροπής M_t^{nl} (άθροισμα των μη γραμμικών όρων της εξ.(3.2.36)) και της συνολικής στρεπτικής ροπής M_t λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και των ΔΔΠ. Τέλος, στον Πίνακα 3.12 παρουσιάζονται ακρότατες τιμές των κινηματικών και εντατικών μεγεθών που παρουσιάστηκαν στα Σχ.3.32-33 (μη γραμμική ανάλυση), έτσι όπως προέκυψαν λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ ($0.0 \leq t \leq 0.30 \text{ (sec)}$). Από τον πίνακα αυτό και το Σχ.3.32 συμπεραίνεται ότι η επιρροή ΔΔΠ είναι αμελητέα στον υπολογισμό τόσο κινηματικών όσο και εντατικών μεγεθών ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που υπόκεινται σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Πίνακας 3.12. Ακρότατες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών της ράβδου του παραδείγματος 8 ($0.0 \leq t \leq 0.12$ (sec), $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 2.20$ rad).

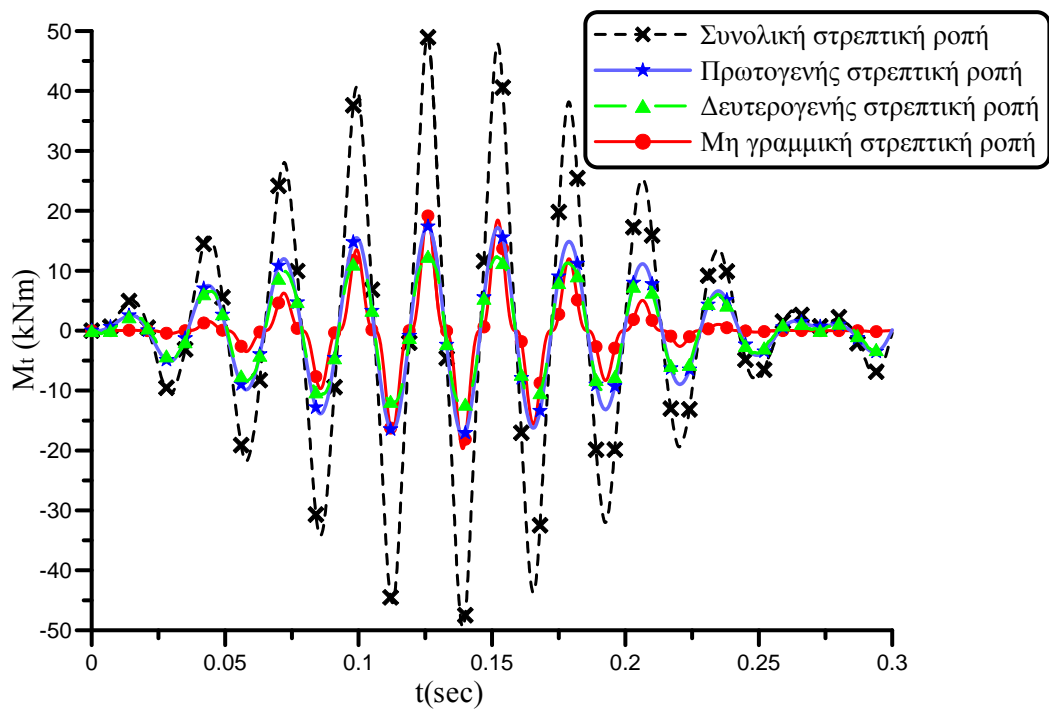
	Με ΔΔΠ	Χωρίς ΔΔΠ
$\max \theta_x(l/2)(rad)$	2.307	2.304
$\min \theta_x(l/2)(rad)$	0.393	0.373
$\max u_m(l)(m)$	-0.019	-0.019
$\min u_m(l)(m)$	-0.046	-0.046
$\max M_t^P(0)(kNm)$	-7.178	-6.796
$\min M_t^P(0)(kNm)$	-59.927	-59.927
$\max M_t^S(0)(kNm)$	29.277	28.775
$\min M_t^S(0)(kNm)$	-16.208	-15.697
$\max M_t^{nl}(0)(kNm)$	89.261	88.321
$\min M_t^{nl}(0)(kNm)$	0.144	0.129
$\max M_t(0)(kNm)$	55.993	55.266
$\min M_t(0)(kNm)$	-27.665	-26.828



Σχήμα 3.31. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ της ράβδου του παραδείγματος 9 (γραμμική ανάλυση).



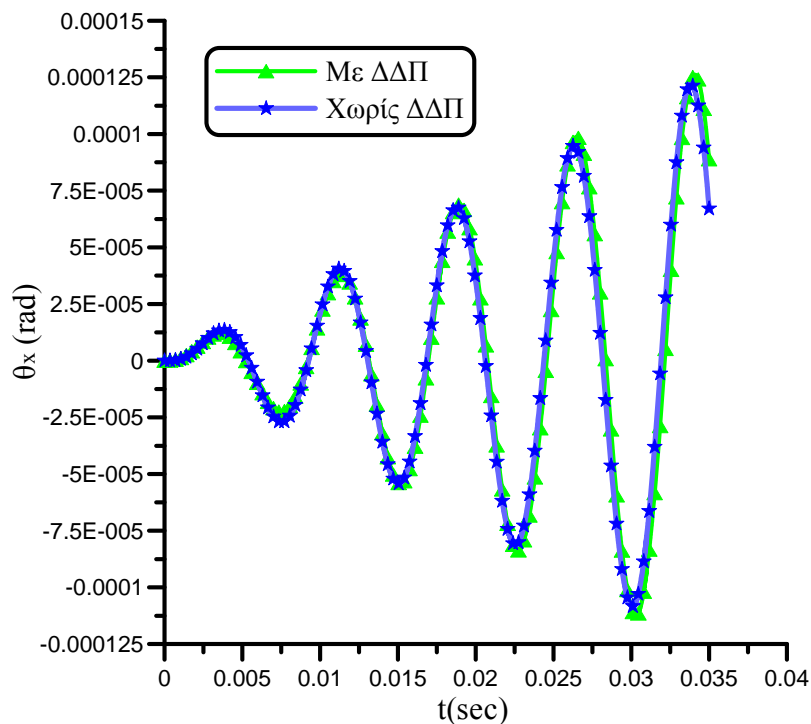
Σχήμα 3.32. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2, t)$ της ράβδου του παραδείγματος 9 (μη γραμμική ανάλυση).



Σχήμα 3.33. Χρονικές αποκρίσεις χαρακτηριστικών εντατικών μεγεθών στρεπτικής ροπής στο αριστερό άκρο της ράβδου του παραδείγματος 9 λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή ΔΔΠ (μη γραμμική ανάλυση).

Πίνακας 3.13. Ακρότατες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών της ράβδου του παραδείγματος 9 ($0.0 \leq t \leq 0.30$ (sec)).

	Με ΔΔΠ	Χωρίς ΔΔΠ
$\max \theta_x(l/2)(rad)$	1.378	1.376
$\min \theta_x(l/2)(rad)$	-1.393	-1.388
$\max M_t^P(0)(kNm)$	17.407	17.359
$\min M_t^P(0)(kNm)$	-17.555	-17.537
$\max M_t^S(0)(kNm)$	12.464	12.205
$\min M_t^S(0)(kNm)$	-12.318	-12.491
$\max M_t^{nl}(0)(kNm)$	19.199	18.887
$\min M_t^{nl}(0)(kNm)$	-19.690	-19.474
$\max M_t(0)(kNm)$	49.070	48.427
$\min M_t(0)(kNm)$	-49.545	-49.499



Σχήμα 3.34. Χρονική απόκριση στρεπτικής στροφής $\theta_x(l,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 10.

3.4.10 Παράδειγμα 10

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή των ΔΔΠ στις εξαναγκασμένες γραμμικές ταλαντώσεις ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως δέκατο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος του παραδείγματος 7 του κεφ. 2

($\rho = 8.002 \text{ kN sec}^2 / \text{m}^4$, $I_P = 1.322 \times 10^{-1} \text{ m}^4$). Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο ενώ το δεξιό άκρο της είναι ελεύθερο. Μελετάται η κατάσταση συντονισμού της ράβδου κατά την οποία ασκείται εξωτερικά επιβαλλόμενη καταναμεμημένη στρεπτική ροπή $\bar{m}_t(x, t)$ κατά μήκος της ράβδου ($0 < x < l$). Η ροπή $\bar{m}_t(x, t)$ έχει σταθερή κατανομή κατά τη διαμήκη διεύθυνση της ράβδου και δίδεται ως $\bar{m}_t(x, t) = \bar{m}_{t0} \sin(\omega_{flin} t)$, με $\bar{m}_{t0} = 5 \text{ kNm} / \text{m}$ και $\omega_{flin} = 835.793 \text{ sec}^{-1}$. ω_{flin} είναι η (στρεπτική) θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της ράβδου χωρίς επιρροή ΔΔΠ, έτσι όπως προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών της εξ.(3.3.28) αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Οι αρχικές συνθήκες της ράβδου είναι μηδενικές. Επιλύονται τα απλοποιημένα προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που περιγράφονται από τις εξ.(3.2.35), (3.2.32α,β), (3.2.33α,β) και (3.2.39-41) ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση της ράβδου στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή των ΔΔΠ, αντίστοιχα.

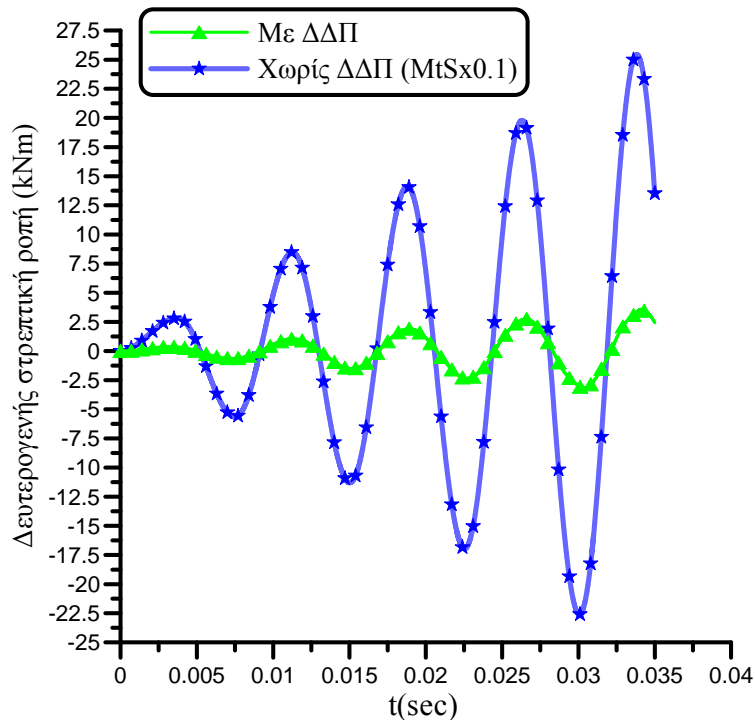
Στο Σχ.3.34 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l, t)$ λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ, καταδεικνύοντας την πολύ μικρή επιρροή των ΔΔΠ στα στρεπτικά κινηματικά μεγέθη και τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Επιπλέον, στο Σχ.3.35 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής $M_t^S(0, t)$ λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας (μέγεθος υπό κλίμακα $M_t^S(0, t) \times 0.1$) την επιρροή ΔΔΠ, διαπιστώνοντας την πολύ μεγάλη σημασία συνυπολογισμού των ΔΔΠ στην ανάλυση ταλαντούμενων ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, σε ό,τι αφορά στον προσδιορισμό εντατικών μεγεθών. Τέλος, στο Σχ.3.36 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση του διρρόπου στρέβλωσης $M_w(0, t)$ λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ, επιβεβαιώνοντας το συμπέρασμα που εξάχθηκε από το προηγούμενο σχήμα. Συνολικά, από τα Σχ.3.34-36 διαπιστώνεται ότι τα συμπεράσματα του παραδείγματος 7 του κεφ. 2 σχετικά με τη στατική ανάλυση ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη επεκτείνονται και στη γραμμική δυναμική ανάλυσή τους.

3.5 Συμπεράσματα

Στα προηγούμενα εδάφια διατυπώθηκε και επιλύθηκε αριθμητικά το δυναμικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Τα **κύρια συμπεράσματα** που προκύπτουν από την προαναφερθείσα ανάλυση είναι τα ακόλουθα.

- Η προτεινόμενη μέθοδος είναι ακριβής και προσφέρει τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, αφού απαιτεί μόνο συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής της ράβδου για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και όλων των γεωμετρικών σταθερών πλην της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς. Για τη δευτερογενή στρεπτική σταθερά απαιτείται και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, ωστόσο αυτή χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος και δεν αυξάνει το πλήθος των αγνώστων του προβλήματος.

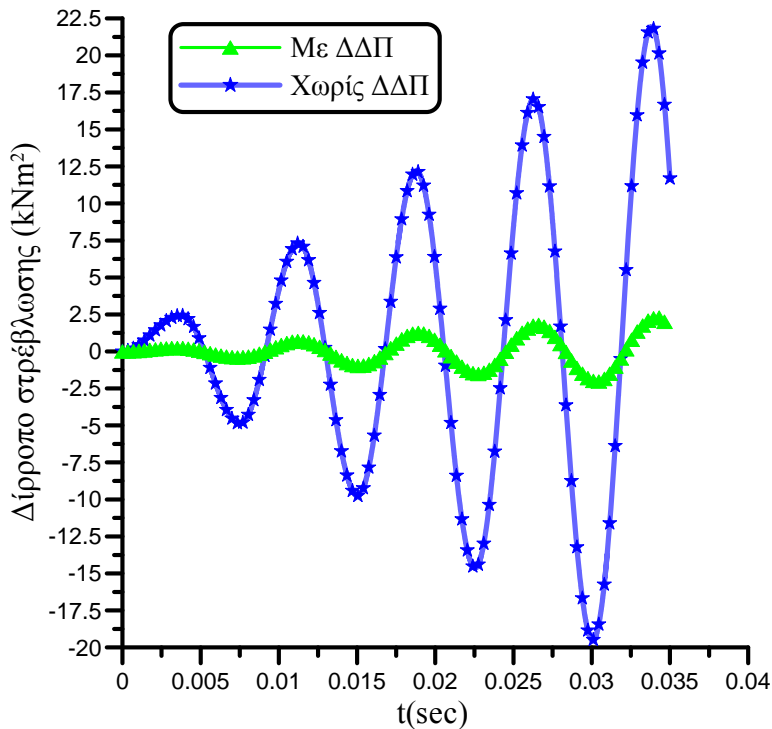
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί σε σύζευξη μεταξύ στρεπτικών και αξονικών κινηματικών καθώς και εντατικών μεγεθών. Επιπλέον, οδηγεί σε μεταβολή των ιδιομορφών ταλάντωσης.



Σχήμα 3.35. Χρονική απόκριση δευτερογενούς στρεπτικής ροπής $M_t^S(0,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 10.

- Οι μεγάλες στρεπτικές στροφές αυξάνουν τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων και ως εκ τούτου αυξάνεται η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα ταλάντωσής τους. Επιπλέον, για ειδικές περιπτώσεις αξονικών συντοριακών συνθηκών, οδηγούν στην ανάπτυξη εφελκυστικής αξονικής δύναμης που προκαλεί επίσης τα ίδια αποτελέσματα.
- Η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της μέσης αξονικής μετατόπισης είναι διπλάσια της αντίστοιχης ιδιοσυχνότητας της στρεπτικής στροφής.
- Η επιρροή της αξονικής αδράνειας είναι πολύ μικρή στα κινηματικά, εντατικά και τασικά μεγέθη που εξετάστηκαν.
- Οι μεγάλες στρεπτικές στροφές επηρεάζουν αισθητά και σύνθετα τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα της στρεπτικής στροφής ράβδων που έχουν υποστεί στρεπτικό λυγισμό και υπόκεινται σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Σε αντίθεση με τις ράβδους που βρίσκονται στην προλυγισμική περιοχή τους, η αύξηση του μεγέθους των αρχικών στρεπτικών στροφών δεν οδηγεί πάντα σε αύξηση της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας της στρεπτικής στροφής.
- Οι μεγάλες στρεπτικές στροφές επηρεάζουν αισθητά και σύνθετα τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα της μέσης αξονικής μετατόπισης ράβδων που έχουν υποστεί στρεπτικό λυγισμό και υπόκεινται σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Σε αντίθεση με τις ράβδους που βρίσκονται στην προλυγισμική περιοχή τους, η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της μέσης αξονικής μετατόπισης δεν είναι πάντα διπλάσια της αντίστοιχης ιδιοσυχνότητας της στρεπτικής στροφής.

- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα επηρεάζει σημαντικά τις θέσεις γύρω από τις οποίες ταλαντώνονται ράβδοι που έχουν υποστεί στρεπτικό λυγισμό και υπόκεινται σε ελεύθερες ταλαντώσεις.



Σχήμα 3.36. Χρονική απόκριση διρρόπου στρέβλωσης $M_w(0,t)$ της ράβδου του παραδείγματος 10.

- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα φράσσει τα κινηματικά μεγέθη ράβδων που βρίσκονται στην προλυγισμική περιοχή τους και που υπόκεινται σε πρωτεύον συντονισμό. Η απόκριση τόσο των κινηματικών όσο και των εντατικών μεγεθών παρουσιάζει χαρακτηριστικά διακροτήματος.
- Οι μεγάλες στρεπτικές στροφές και ο δυναμικός χαρακτήρας της φόρτισης επηρεάζουν το μέγεθος και την κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται σε στρεπτικά ταλαντούμενες ράβδους.
- Οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στρεπτικά ταλαντούμενων ράβδων λαμβάνουν υψηλές τιμές και ως εκ τούτου δεν πρέπει να θεωρούνται αμελητέες.
- Οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις μεταβάλλουν αμελητέα κινηματικά και εντατικά μεγέθη ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής που υπόκεινται σε ελεύθερες ή εξαναγκασμένες γραμμικές ή μη γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις.
- Οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις δεν μεταβάλλουν αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων κλειστής λεπτότοιχης διατομής που υπόκεινται σε γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις. Ωστόσο επηρεάζουν αισθητά τα εντατικά μεγέθη τους.

Κεφάλαιο 4

Μη Γραμμική Ελαστοπλαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου υπό Ομοιόμορφη Στρέψη

4.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η γεωμετρικά μη γραμμική στατική ανάλυση ομογενούς ή σύνθετης ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη θεωρώντας αποκλειστικά ελαστική καταστατική συμπεριφορά. Στις ενότητες που ακολουθούν διερευνάται η μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ομογενούς ή σύνθετης ράβδου υπό ομοιόμορφη στρέψη.

Ο σχεδιασμός έργων πολιτικού μηχανικού που βασίζεται αποκλειστικά στην ελαστική συμπεριφορά συνήθως είναι πολύ συντηρητικός εξαιτίας του ότι αγνοεί τη σημαντική αύξηση της αντοχής που οφείλεται στην ανακατανομή έντασης που παρουσιάζεται σε υπερστατικές κατασκευές όταν εισέλθουν στην πλαστική περιοχή τους. Επιπλέον, σε επίπεδο ραβδωτού στοιχείου παρουσιάζεται αύξηση της αντοχής κατά τη μετελαστική απόκρισή του εξαιτίας της διαφοράς μεταξύ αρχικής και πλήρους πλαστικοποίησης των διατομών του. Η σημασία διερεύνησης της ελαστοπλαστικής καταστατικής συμπεριφοράς (υλική μη γραμμικότητα) αναδεικνύεται μέσω της επισκόπησης της σύγχρονης μελετητικής πρακτικής φορέων πολιτικού μηχανικού, όπου σε πολλές περιπτώσεις λαμβάνεται υπόψη ανακατανομή έντασης λόγω πλαστικοποίησης σε επίπεδο (i) πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή, (ii) διατομής, (iii) ραβδωτού στοιχείου ή/και (iv) μέρους (ή ολόκληρης) της κατασκευής.

Πέραν της σημασίας της πλαστικότητας στον ασφαλή ή/και οικονομικά αποδοτικό σχεδιασμό έργων πολιτικού μηχανικού, η αξιόπιστη ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής από μη ψαθυρό υλικό στην οριακή κατάσταση αστοχίας της απαιτεί τη διερεύνηση της μετελαστικής συμπεριφοράς της. Οι πλαστικές παραμορφώσεις προκαλούν μείωση της στιβαρότητας της κατασκευής, η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη μεγάλων μετατοπίσεων. Συνεπώς, ο συνυπολογισμός της μεταβολής της γεωμετρίας και η θεώρηση της ισορροπίας της κατασκευής στην παραμορφωμένη διαμόρφωσή της (γεωμετρική μη γραμμικότητα) είναι απαραίτητες προϋποθέσεις για την αξιόπιστη προσομοίωση ραβδωτών στοιχείων στην οριακή κατάσταση αστοχίας. Εξάλλου, ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής συνήθως χαρακτηρίζονται από πολύ μικρή στρεπτική στιβαρότητα με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεγάλων στρεπτικών στροφών αρκετά πριν την αρχική πλαστικοποίηση (εδάφιο 1.1). Σε τέτοιες περιπτώσεις η αύξηση της φόρτισης ενδέχεται να οδηγήσει στην ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων μετά την εκδήλωση γεωμετρικά μη γραμμικής συμπεριφοράς. Ωστόσο κι εδώ οι πλαστικές παραμορφώσεις ενδέχεται να επηρεάζουν αισθητά την ανάλυση της ράβδου. Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι η αξιόπιστη προσομοίωση της αλληλεπίδρασης των δύο προαναφερθέντων μη γραμμικοτήτων είναι καθοριστική στην ανάλυση στρεπτικά καταπονούμενων ραβδωτών στοιχείων.

Όπως αναφέρθηκε και στο εδάφιο 1.1, στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής θεωρίας, σε ράβδο που ασκείται στρεπτική φόρτιση αποκλειστικά στα άκρα της και η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται, αποδεικνύεται ότι η στρέβλωση είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου και η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη. Αν και η ομοιόμορφη στρέψη συναντάται σπάνια στην πράξη, η διερεύνησή της αποτελεί το πρώτο βήμα κατανόησης της μη γραμμικής θεωρίας ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφ. 5). Εξάλλου, η πρωτογενής στρεπτική ροπή που υπεισέρχεται στη θεωρία ομοιόμορφης στρέψης αποτελεί αναπόσπαστο μηχανισμό ανάληψης δράσεων σε ανομοιόμορφα στρεπτικά καταπονούμενες ράβδους.

Αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει την ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρεπτική συμπεριφορά ράβδων, με πρωτοπόρο τον Nadai που ανέπτυξε τη μέθοδο “sand-heap analogy” για τον προσδιορισμό της πλήρους πλαστικής ροπής διατομών απλής συνοχής [Nadai 1931]. Η μεθοδός του διευρύνθηκε από τον Sadowsky [1941] για την ανάλυση πολλαπλά συνεκτικών διατομών. Ο Christopherson [1940] διερεύνησε την ελαστοπλαστική συμπεριφορά ράβδου διατομής I και αργότερα ο Nadai [1954] βασιζόμενος στα “sand-heap analogy” και “rooftop membrane analogy” πρότεινε προσεγγιστική επίλυση ομοιόμορφα στρεπτικά καταπονούμενων ράβδων με διατομή διαφόρων σχημάτων. Η αναλυτική λύση του εξεταζόμενου προβλήματος για ράβδους ελαστικού ιδεωδώς πλαστικού υλικού προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Sokolovsky [1946], ο οποίος παρουσίασε και επίλυση ράβδου ελλειπτικής διατομής, ενώ οι Smith and Sidebottom [1965] προσδιόρισαν την ελαστοπλαστική συμπεριφορά ράβδων ορθογωνικής διατομής. Αργότερα, οι Billingham et al. [1992] ανέπτυξαν το προσομοίωμα “mitre” με σκοπό τη μελέτη ράβδων λεπτότοιχης διατομής.

Εκτός από τις προαναφερθείσες εργασίες που βασίζονται σε αναλυτικές μεθόδους, αριθμητικές μέθοδοι έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί από τους Mendelson [1968], Yamada et al. [1972], Johnson [1973] και Itani [1979] για την επίλυση του προβλήματος. Οι Bathe and Chaudhary [1982] πρότειναν συναρτήσεις στρέβλωσης για την ανάλυση ράβδων ορθογωνικής διατομής ή διατομής που αποτελείται από πλακοειδή στοιχεία ορθογωνικού σχήματος. Οι Wagner and Gruttmann [2001] ανέπτυξαν ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία για την ανάλυση ράβδων τυχούσας διατομής με ακριβή ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων. Εξ’ όσων γνωρίζει ο συγγραφέας, η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM) έχει χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά από τους Kolodziej and Gorzelanczyk [2012], οι οποίοι βασίζονται στη Μέθοδο Θεμελιωδών Λύσεων (Method of Fundamental Solutions (MFS)) και σε ακτινικές συναρτήσεις σχήματος (radial basis functions (RBF)) για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος χωρίς την ανάγκη χρήσης πλέγματος διακριτοποίησης (meshless method) για την επιφάνεια της διατομής. Πέραν των παραπάνω εργασιών που ακολουθούν τη φιλοσοφία θεωριών στρέψης, οι May and Al-Shaarbaf [1989] χρησιμοποίησαν τυπικά τριδιάστατα 20-κομβικά ισοπαραμετρικά εξαεδρικά στοιχεία για την ανάλυση ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη.

Όλες οι προαναφερθείσες εργασίες περιορίζονται στη γεωμετρικά γραμμική ανάλυση ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη. Οι Baba and Kajita [1982] μελέτησαν με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων τη γεωμετρικά μη γραμμική ελαστοπλαστική ομοιόμορφη και ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής από ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό υλικό. Ωστόσο το πεδίο μετατοπίσεων στο οποίο βασίστηκαν δεν περιέχει όρο «μέσης» αξονικής μετατόπισης. Εξαιτίας της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, τα αξονικά και στρεπτικά κινηματικά μεγέθη είναι συζευγμένα τόσο σε ελαστικές (βλ. εδάφιο 1.1) όσο και σε ελαστοπλαστικές ράβδους. Συνεπώς, οι Baba

and Kajita προσομοιώνουν αποκλειστικά την περίπτωση πλήρους αξονικής παρεμπόδισης του εξεταζόμενου προβλήματος όπου στη ράβδο αναπτύσσεται εφελκυστική αξονική δύναμη εξαιτίας της προαναφερθείσας σύζευξης. Επιπρόσθετα, επισημαίνεται ότι τα προσομοιώματα που έχουν προταθεί από πολλούς ερευνητές για την ανάλυση ράβδων υπό μη γραμμική ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη (βλ. εδάφιο 5.1 του επόμενου κεφαλαίου) θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και στην ανάλυση του εξεταζόμενου προβλήματος. Ωστόσο, σε κανένα από τα προσομοιώματα αυτά (με την εξαίρεση του προαναφερθέντος προσομοιώματος των Baba and Kajita και όσων βασίζονται σε μεγάλο πλήθος τοπικών βαθμών ελευθερίας στρέβλωσης) δεν λαμβάνονται υπόψη πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής της ράβδου και η πλαστικοποίηση προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής του προβλήματος.

Στις παρακάτω ενότητες μελετώνται γενικές συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης, ενώ η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων. Η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά καθώς και φαινόμενα λυγισμού δεν εξετάζονται ενώ μελετώνται ράβδοι διπλά συμμετρικής διατομής όπου η γεωμετρική μη γραμμικότητα δεν προκαλεί σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών κινηματικών μεγεθών (εδάφιο 1.1).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστοπλαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος απλής ή πολλαπλής συνοχής (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης). Το πρόβλημα αυτό επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) (Παράρτημα Π1). Η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά είναι κλασικά ελαστοπλαστικά με ισότροπη κράτυνση και αποτελούνται από διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας, διάτμησης και κράτυνσης και διαφορετικές τάσεις διαρροής και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους, ενώ η ομογενής ράβδος απλής ή πολλαπλής συνοχής προκύπτει ως μερική περίπτωση. Η ράβδος υποβάλλεται σε γενικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες καθώς και γενικές συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης, ενώ η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται σε κανένα σημείο. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη σε ολική διατύπωση Lagrange μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Οι πλαστικές παραμορφώσεις λαμβάνονται υπόψη και στο επίπεδο της διατομής ενώ προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας (distributed plasticity model) χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές ολοκληρώνονται με τη βοήθεια αποδοτικής επαναληπτικής μεθόδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνεται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστοπλαστικότητας (διδιάστατο) πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης, το οποίο δεν υπόκειται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov (Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών). Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων που απαιτεί και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, η οποία ωστόσο χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Επίσης, μορφώνεται μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση και τη στρεπτική στροφή της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της υβριδικής μεθόδου Powell. Στο σύστημα αυτό υπεισέρχονται και πλαστικά

μέρη εντατικών μεγεθών, τα οποία προσδιορίζονται με τη βοήθεια της υπάρχουσας πεδιακής διακριτοποίησης. Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών και του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων πραγματοποιούνται στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου που βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου (load control).

Η ανάλυση της ράβδου είναι πλήρης. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά αξονικά και στρεπτικά μεγέθη, συμπεριλαμβανομένων και των πλαστικών μερών εντατικών μεγεθών, οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής, η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, οι αναπτυσσόμενες ορθές και διατμητικές τάσεις στο εσωτερικό ως επίσης και στο σύνορο. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Βάσει της αναλυτικής και αριθμητικής διαδικασίας συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων συγκρινόμενη με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις είναι αξιοσημείωτη. Από την αναδρομή στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι η έρευνα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι πρωτότυπη. Τα πρωτότυπα στοιχεία της συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- i. Αναλύονται ομογενείς ή σύνθετες ράβδοι διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) ισότροπα κρατυνόμενου υλικού υπό μη γραμμική ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη λαμβάνοντας υπόψη γενικές συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης, πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής και χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
- ii. Ποσοτικοποιείται η αξιοπιστία της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών στον προσδιορισμό της καθολικής συμπεριφοράς ράβδων υπό γραμμική ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη.
- iii. Επιλύεται αριθμητικά το εξεταζόμενο πρόβλημα με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Από την ερευνητική προσπάθεια που έγινε αναφορικά με τα θέματα που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο, προέκυψαν δημοσιεύσεις σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά διεθνούς κυκλοφορίας [Sapountzakis and Tsipiras 2008a, 2009a,b], σε πρακτικά διεθνών [Sapountzakis and Tsipiras 2007, 2008b,c] και εθνικού [Σαπουντζάκης και Τσίππρας 2008] συνεδρίου καθώς και κεφάλαιο σε βιβλίο που εκδόθηκε από διεθνή εκδοτικό οίκο [Sapountzakis and Tsipiras 2009g].

4.2 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο μήκους l σύνθετης διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος αποτελούμενη από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων με διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας E_j και διάτμησης G_j και τάσεις διαρροής $(\sigma_Y)_j$, τα οποία καταλαμβάνουν τις περιοχές Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$) του επιπέδου y, z (Σχ.4.1). Τα υλικά της ράβδου θεωρούνται ότι είναι συνεχή (δηλαδή η ράβδος είναι κατά τμήματα συνεχής), κλασικά ελαστοπλαστικά με ισότροπη κράτυνση (με μέτρο κράτυνσης h_j

(plastic modulus) και εφαπτομενικό μέτρο ελαστοπλαστικότητας (elastoplastic tangent modulus) $(E_t)_j$) [Crisfield 1991, Simo and Hughes 1998, Jirasek and Bazant 2002, Doltsinis 2010] χωρίς να εμφανίζουν βλάβη κατά την πλαστικοποίησή τους και στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους (δηλαδή δεν υπάρχει δυνατότητα σχετικής ολίσθησης μεταξύ των υλικών), ενώ τα σύνορα τους είναι τμηματικά λεία (μπορούν δηλαδή να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών) και συμβολίζονται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) (Σχ.4.1β). Σημειώνεται, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το πρώτο υλικό με μέτρο ελαστικότητας E_I και μέτρο διάτμησης G_I θεωρείται ως υλικό αναφοράς. Η ράβδος υποβάλλεται σε γενικές στρεπτικές συνοριακές συνθήκες καθώς και γενικές συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης (Σχ.4.1α), ενώ η αναπτυσσόμενη στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται σε κανένα σημείο. Η ράβδος μπορεί να μετατοπίζεται ελεύθερα κατά την εγκάρσια έννοια και δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) συγκεκριμένος άξονας περιστροφής, ωστόσο η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της δεν εξετάζεται στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου. Με αυτές τις συνθήκες η στρεπτική ένταση είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου. Η μελέτη της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$, του οποίου ο διαμήκης άξονας Sx διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα διάτμησης) των διατομών. Επισημαίνεται ότι τα κέντρα συστροφής ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα των διατομών (Σχ.4.1) εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής. Το αρχικό σημείο του άξονα Sx ($x = 0$) τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου (Σχ.4.1α).

4.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

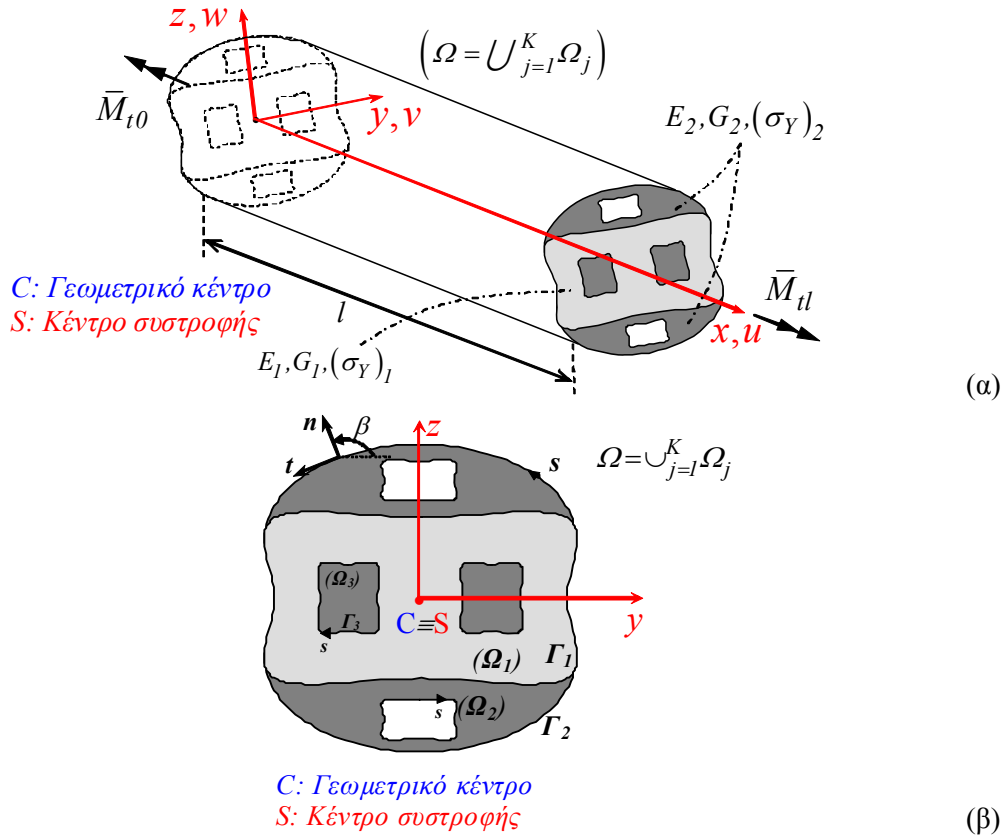
Υποθέτοντας ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται (δηλαδή δεν αναπτύσσονται εγκάρσιες παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής), θεωρώντας ότι τα υλικά σημεία της διατομής εκτελούν κυκλική τροχιά κατά την εγκάρσια διεύθυνση περί τον άξονα Sx , αξιοποιώντας τις συνθήκες φόρτισης της ράβδου, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στρεπτικές στροφές των διατομών μπορούν να είναι μεγάλες και ότι τα υλικά της ράβδου είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου δίδεται ως

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \theta'_x \phi_S^P(y, z) \quad (4.2.1)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (4.2.2)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (4.2.3)$$

όπου u_m είναι «μέση» αξονική μετατόπιση της διατομής, η οποία γενικά δεν ισούται με τη μετατόπιση του κέντρου συστροφής S και θα εξηγηθεί αναλυτικά στα επόμενα (βλ. εξ.(4.2.16-17)), ϕ_S^P είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο S [Μώκος 2007, Sapountzakis and Mocos 2003b, Baba and Kajita 1982] και θ_x είναι η γωνία στροφής περί τον άξονα Sx . Στη σχέση (4.2.1), η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους θ'_x και η ϕ_S^P δεν εξαρτώνται από τη διαμήκη συντεταγμένη x εξαιτίας του ότι η ράβδος είναι υπό ομοιόμορφη στρέψη (βλ. και εξ.(4.2.31)).



Σχήμα 4.1. Πρισματική ράβδος υπό σταθερή στρεπτική ένταση (α) με σύνθετη διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (β).

Με θεώρηση μικρής «μέσης» αξονικής μετατόπισης, μικρής στρέβλωσης και μικρών παραμορφώσεων, οι μη γραμμικοί όροι της διαμήκου μετατόπισης u των παραμορφώσεων Green μπορούν να αγνοηθούν (βλ. και [Ramm and Hoffmann 1995, Rothert and Gensichen 1987, Brush and Almroth 1975]), συνεπώς οι σχέσεις (Π4.1.12α-γ), (Π4.1.34) διαμορφώνονται ως

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.2.4\alpha)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.2.4\beta)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.2.4\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.2.4\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.2.4\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.2.4\sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις του πεδίου μετατοπίσεων (εξ.(4.2.1-3)) στις παραπάνω σχέσεις, προκύπτουν οι συνιστώσες του ταυυστή παραμόρφωσης Green ως

$$(\epsilon_{xx})_j = u'_m + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \quad (4.2.5\alpha)$$

$$(\epsilon_{yy})_j = 0 \quad (4.2.5\beta)$$

$$(\epsilon_{zz})_j = 0 \quad (4.2.5\gamma)$$

$$(\gamma_{xy})_j = \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) \quad (4.2.5\delta)$$

$$(\gamma_{xz})_j = \theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) \quad (4.2.5\epsilon)$$

$$(\gamma_{yz})_j = 0 \quad (4.2.5\sigma\tau)$$

όπου ο τριδιάστατος όρος $(1/2)(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2$ της ορθής παραμόρφωσης καλείται “παραμόρφωση Wagner” [Pi and Trahair 1995]. Στη σχέση (4.2.5α), η αξονική μετατόπιση ανά μονάδα μήκους u'_m δεν εξαρτάται από τη διαμήκη συντεταγμένη x εξαιτίας του ότι η ράβδος είναι υπό ομοιόμορφη στρέψη (βλ. και εξ.(4.2.31α)).

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις και ότι τα υλικά της ράβδου είναι συνεχή, κλασικά ελαστοπλαστικά χωρίς να βλάπτονται κατά την πλαστικοποίηση, οι συνιστώσες του 2ου ταυυστή τάσης Piola-Kirchhoff δίδονται συναρτήσει των παραμορφώσεων και πλαστικών παραμορφώσεων Green (βλ. σχέσεις (Π5.3.23), εδάφιο Π5.3.2 και [Bathe 1996, Gruttmann et al. 2000, Παπαδρακάκης 1998]). Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.5), οι σχέσεις (Π5.3.23) διαμορφώνονται ως

$$(S_{xx})_j = E_j^* \left[u'_m + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - (\epsilon_{xx}^{pl})_j \right] \quad (4.2.6\alpha)$$

$$(S_{yy})_j = E_j^{**} \left[u'_m + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - (\epsilon_{yy}^{pl})_j \right] \quad (4.2.6\beta)$$

$$(S_{zz})_j = E_j^{**} \left[u'_m + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - (\epsilon_{zz}^{pl})_j \right] \quad (4.2.6\gamma)$$

$$(S_{xy})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) - (\gamma_{xy}^{pl})_j \right] \quad (4.2.6\delta)$$

$$(S_{xz})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) - (\gamma_{xz}^{pl})_j \right] \quad (4.2.6\epsilon)$$

$$(S_{yz})_j = -G_j (\gamma_{xz}^{pl})_j \quad (4.2.6\sigma\tau)$$

όπου $E^* = E(1-\nu) / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, $E^{**} = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, σημειώνοντας ότι οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν με «χρονική» ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων (βλ. εξ.(Π5.3.4), εδάφιο Π5.3 και σχέσεις (4.2.8) παρακάτω). Οι συνιστώσες $(S_{yy})_j$, $(S_{zz})_j$, $(S_{yz})_j$ δεν παράγουν έργο (αφού οι αντίστοιχες ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις $(\epsilon_{yy})_j$, $(\epsilon_{zz})_j$, $(\epsilon_{yz})_j$ είναι μηδενικές, σύμφωνα με τις σχέσεις (4.2.5β,γ,στ)), ενώ γίνεται η παραδοχή ότι $(S_{yy})_j = (S_{zz})_j = (S_{yz})_j \approx 0$, τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή ισχύει επακριβώς στην ελαστική περιοχή της ράβδου για την περίπτωση μηδενικών λόγων Poisson $\nu_j = 0$. Επιπλέον, το E_j^* αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E_j , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που $\nu_j = 0$. Η παραδοχή αυτή υιοθετείται και στη Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (στα πλαίσια ελαστικής ανάλυσης ομογενούς ράβδου) [Vlasov 1963], όπου διατυπώνεται η υπόθεση ότι τα τοιχώματα της διατομής βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσης και μέσω τούτου αποδεικνύεται ότι $E^* = E / (1-\nu^2) \Rightarrow E^* \approx E$ για τις συνήθεις τιμές λόγου Poisson που λαμβάνουν τα δομικά υλικά. Εξάλλου οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση θεωριών δοκού (βλ. [Armenakas 2006]). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff διαμορφώνονται τελικά ως

$$(S_{xx})_j = E_j \left[u'_m + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - (\epsilon_{xx}^{pl})_j \right] \quad (4.2.7\alpha)$$

$$(S_{xy})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) - (\gamma_{xy}^{pl})_j \right] \quad (4.2.7\beta)$$

$$(S_{xz})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) - (\gamma_{xz}^{pl})_j \right] \quad (4.2.7\gamma)$$

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω διαδικασία προσδιορισμού των συνιστωσών τάσης ακολουθείται στην εργασία των Baba and Kajita [1982] όπου αγνοείται η κράτυνση. Επίσης, εάν στις παραπάνω εκφράσεις αγνοηθεί μία εκ των δύο συνιστωσών

διατμητικής παραμόρφωσης και τάσης, προκύπτει η διαδικασία προσδιορισμού των συνιστωσών τάσης που ακολουθείται στην εργασία των Chen and Trahair [1992].

Τονίζεται ότι προκειμένου να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις $(\varepsilon_{xx}^{pl})_j$, $(\gamma_{xy}^{pl})_j$, $(\gamma_{xz}^{pl})_j$, απαιτείται να είναι γνωστή η ιστορία φόρτισης της ράβδου (βλ. εδάφιο Π5.3 και [Bathe 1996]). Έτσι, θεωρούμε ότι τα κινηματικά, παραμορφωσιακά και τασικά μεγέθη αποτελούν συναρτήσεις «χρονικής» παραμέτρου και αξιοποιείται η διαφορική μορφή των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων (βλ. [Simo and Hughes 1998]). Οι σχετικές εκφράσεις των τασικών μεγεθών δίδονται ως

$$(dS_{xx})_j = E_j \left[du'_m + (y^2 + z^2) \theta'_x d\theta'_x - (d\varepsilon_{xx}^{pl})_j \right] \quad (4.2.8\alpha)$$

$$(dS_{xy})_j = G_j \left[d\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) + \theta'_x \left(\frac{\partial d\phi_S^P}{\partial y} \right)_j - (d\gamma_{xy}^{pl})_j \right] \quad (4.2.8\beta)$$

$$(dS_{xz})_j = G_j \left[d\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) + \theta'_x \left(\frac{\partial d\phi_S^P}{\partial z} \right)_j - (d\gamma_{xz}^{pl})_j \right] \quad (4.2.8\gamma)$$

όπου με το $d(\cdot)$ συμβολίζεται απειροστή μεταβολή του μεγέθους που βρίσκεται εντός της παρένθεσης ως προς την «χρονική» παράμετρο. Σημειώνεται ότι οι εξ.(4.2.7) προκύπτουν με ολοκλήρωση ως προς την «χρονική» παράμετρο των παραπάνω σχέσεων. Για να αποφανθούμε αν το υλικό έχει πλαστικοποιηθεί, χρησιμοποιείται συνάρτηση διαρροής (yield function) f της μορφής (βλ. εξ. (Π5.3.2, Π5.3.9-12))

$$f = \sqrt{(S_{xx})_j^2 + 3 \left((S_{xy})_j^2 + (S_{xz})_j^2 \right)} - (\sigma_Y)_j \quad (4.2.9)$$

με

$$(\sigma_Y)_j = \sigma_Y \left((\varepsilon_{eq}^{pl})_j \right) \quad (4.2.10)$$

όπου $(\varepsilon_{eq}^{pl})_j$ είναι η ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση (total equivalent plastic strain), η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης (Π5.3.13). Σημειώνεται ότι η τάση διαρροής $(\sigma_Y)_j$ προσδιορίζεται μέσω του νόμου ισότροπης κράτυνσης (βλ. εξ.(Π5.3.15)). Στην περίπτωση που $f < 0$ (εξ.(Π5.3.3α)), το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά και ισχύει

$$(d\varepsilon_{xx}^{pl})_j = 0 \quad (d\gamma_{xy}^{pl})_j = 0 \quad (d\gamma_{xz}^{pl})_j = 0 \quad (4.2.11\alpha,\beta,\gamma)$$

Εάν $f = 0$, τότε το υλικό διαρρέει πλαστικά και οι διαφορικές προσανζητικές πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω του ακόλουθου νόμου πλαστικής ροής (flow rule) (εξ.(Π5.3.5))

$$\left(d\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_j = d\lambda \frac{\partial f}{\partial (S_{xx})_j} \quad \left(d\gamma_{xy}^{pl}\right)_j = d\lambda \frac{\partial f}{\partial (S_{xy})_j} \quad \left(d\gamma_{xz}^{pl}\right)_j = d\lambda \frac{\partial f}{\partial (S_{xz})_j} \quad (4.2.12\alpha,\beta,\gamma)$$

όπου το $d\lambda$ είναι ο συντελεστής αναλογίας (proportionality factor). Ο υπολογισμός του $d\lambda$ βασίζεται στη μελέτη της «χρονικής» μεταβολής της συνάρτησης διαρροής df (βλ. εδάφιο Π5.3.1). Οι ολικές πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω των διαφορικών προσανζητικών πλαστικών παραμορφώσεων με «χρονική» ολοκλήρωση (βλ. εξ.(Π5.3.1β)). Τέλος, σημειώνεται ότι η περίπτωση $f > 0$ δεν αντιστοιχεί σε πραγματική εντατική κατάσταση του υλικού και είναι αδύνατο να συμβεί.

4.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης [Wagner and Gruttmann 2001] (βλ. και [Jirasek and Bazant 2002, Doltsinis 2010]), η συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P προσδιορίζεται με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά την αξονική διεύθυνση της ράβδου (εξ.(Π4.2.48α)). Στην παρούσα θεωρία, η εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι εξαιρετικά δυσχερής εξαιτίας των πολύ περισσότερων όρων που προκύπτουν. Η προσπάθεια να ικανοποιηθεί η προαναφερθείσα εξίσωση σε επίπεδο υλικού σημείου (εξ.(Π4.2.28α)) οδηγεί σε περίπλοκες εξισώσεις, οι οποίες δεν έχουν πρακτική αξία για την ανάπτυξη σχετικά απλής μη γραμμικής θεωρίας ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης που να αποτελεί επέκταση της αντίστοιχης γραμμικής. Συνεπώς, η συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P προσδιορίζεται με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών.

Η Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange, αγνοώντας μαζικές δυνάμεις, δίδεται από τη σχέση (1.2.13). Μελετώντας τους όρους της δυνατής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης και εφαρμόζοντας την τεχνική του εδαφίου 1.2.2, προκύπτει έπειτα από κάποιες πράξεις η ακόλουθη τοπική διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}\right)_j + \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial z}\right)_j = 0 \text{ στο } \Omega_j, \forall x \in (0, l) \quad (4.2.13\alpha)$$

καθώς και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη

$$\left(S_{xy}\right)_j n_y + \left(S_{xz}\right)_j n_z = \left(S_{xy}\right)_i n_y + \left(S_{xz}\right)_i n_z \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in (0, l) \quad (4.2.13\beta)$$

όταν το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i , ενώ στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο η παραπάνω σχέση διαμορφώνεται ως

$$\left(S_{xy}\right)_j n_y + \left(S_{xz}\right)_j n_z = 0 \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in (0, l) \quad (4.2.13\gamma)$$

Σημειώνεται ότι στις παραπάνω σχέσεις ισχύει $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$, με $\beta = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}$, δηλαδή β είναι η γωνία μεταξύ του άξονα y και του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στις παράπλευρες επιφάνειες των υλικών της ράβδου (Σχ.4.1β). Σημειώνεται ότι στις ελεύθερες επιφάνειες της ράβδου το Γ_j είναι το ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , ενώ στις διεπιφάνειες μεταξύ των υλικών της ράβδου το Γ_j είναι το κοινό σύνορο που διαχωρίζει τα χωρία Ω_j και Ω_i , όπου κινούμενοι στο κοινό σύνορο τα χωρία Ω_j και Ω_i βρίσκονται αριστερά και δεξιά του Γ_j , αντίστοιχα (Σχ.1.3).

Συμπερασματικά, η συνάρτηση στρέβλωσης που εισήχθη στο πεδίο μετατοπίσεων θα πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (4.2.13α) σε επίπεδο υλικού σημείου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (4.2.13β,γ). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των διατμητικών τάσεων (εξ.(4.2.7β,γ)) στις σχέσεις (4.2.13) προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\left(\nabla^2 \phi_S^P\right)_j = \frac{1}{\theta'_x} \left(\left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial y} \right)_j + \left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial z} \right)_j \right) \text{ στο } \Omega_j \quad (4.2.14\alpha)$$

$$G_j \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_i = (G_j - G_i)(zn_y - yn_z) \text{ στο } \Gamma_j \quad (4.2.14\beta)$$

$$+ \frac{1}{\theta'_x} \left(G_j \left(\gamma_{xn}^{pl} \right)_j - G_i \left(\gamma_{xn}^{pl} \right)_i \right)$$

σημειώνοντας ότι η εξ.(4.2.14β) ισχύει όταν το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i , ενώ στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο διαμορφώνεται ως

$$\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j = zn_y - yn_z + \frac{1}{\theta'_x} \left(\gamma_{xn}^{pl} \right)_j \text{ στο } \Gamma_j \quad (4.2.14\gamma)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $(\nabla^2)_j = (\partial^2/\partial y^2)_j + (\partial^2/\partial z^2)_j$ είναι ο τελεστής Laplace, ο

συμβολισμός $\left(\frac{\partial}{\partial n} \right)_j = (\partial/\partial y)_j n_y + (\partial/\partial z)_j n_z$ δηλώνει την παράγωγο κατά τη

διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο Γ_j , ενώ $\left(\gamma_{xn}^{pl} \right)_j = \left(\gamma_{xy}^{pl} \right)_j n_y + \left(\gamma_{xz}^{pl} \right)_j n_z$.

Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} μεταβάλλονται ασυνεχώς κατά μήκος των διεπιφανειών μεταξύ των υλικών της ράβδου. Τέλος, επισημαίνεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών προσδιορισμού της ϕ_S^P (εξ.(4.2.14)) είναι πανομοιότυπο με αυτό της γραμμικής

θεωρίας ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης [Wagner and Gruttmann 2001]. Εάν αγνοηθούν οι πλαστικές παραμορφώσεις στις εξ.(4.2.14), λαμβάνεται επακριβώς το πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης για την περίπτωση πλήρως ελαστικών συνθηκών (εξ.(1.2.24)). Στην περίπτωση αυτή, η πλαστικοποίηση της ράβδου προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής του προβλήματος u_m , θ_x . Επισημαίνεται ότι ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται σημαντικά με την προσομοίωση αυτή [Battini and Pacoste 2002] και ως εκ τούτου η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης για ελαστικές συνθήκες υιοθετείται συχνά στο πρόβλημα της ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. π.χ. κεφ. 5 και [Gruttmann et al. 2000], [Battini and Pacoste 2002], Nie and Zhong 2007)) όπου οι πλαστικές παραμορφώσεις γ_{xy}^{pl} , γ_{xz}^{pl} μεταβάλλονται κατά μήκος της ράβδου.

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.2.14) είναι τύπου Neumann και επομένως η συνάρτηση στρέβλωσης θα προκύψει συναρτήσει αυθαίρετης σταθεράς. Προκειμένου να προσδιοριστεί μοναδική λύση για τη ϕ_S^P ακολουθείται διαδικασία παρόμοια με αυτή του εδαφίου 2.2.3. Έτσι, η προκύπτουσα συνάρτηση στρέβλωσης θα ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P d\Omega_j = 0 \quad (4.2.15)$$

Πλέον, στο σημείο αυτό μπορεί να δοθεί η φυσική σημασία της αξονικής μετατόπισης u_m . Έτσι, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (4.2.1) με E_j/E_1 ($j = 1, 2, \dots, K$) K φορές, ολοκληρώνοντας την κάθε προκύπτουσα σχέση στο χωρίο Ω_j και προσθέτοντας κατά μέλη, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} u d\Omega_j = u_m \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j + \theta_x \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} \phi_S^P d\Omega_j \quad (4.2.16)$$

Από τις εκφράσεις (1.2.5) και (4.2.15), η παραπάνω έκφραση δίδει

$$u_m = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} u d\Omega_j}{A} \quad (4.2.17)$$

από όπου καθίσταται εμφανές ότι η u_m είναι ισοδύναμη «μέση» αξονική μετατόπιση των διατομών της ράβδου, η οποία εν γένει δεν ταυτίζεται με την αξονική μετατόπιση ούτε του κέντρου συστροφής της διατομής. Στην παραπάνω σχέση A είναι το συνολικό ισοδύναμο εμβαδόν της διατομής το οποίο ορίζεται μέσω της εξ.(1.2.5).

4.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

Οι κινηματικοί άγνωστοι του προβλήματος που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη συντεταγμένη x (u_m , θ_x) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, οι

οποίες θα διατυπωθούν επίσης με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Για διευκόλυνση, ορίζονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$N = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j d\Omega_j \quad (4.2.18\alpha)$$

$$M_t^P = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} \left[(S_{xy})_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) + (S_{xz})_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) \right] d\Omega_j \quad (4.2.18\beta)$$

$$M_R = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_j} (S_{xx})_j (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (4.2.18\gamma)$$

με τα N , M_t^P να αντιστοιχούν σε αξονική δύναμη και πρωτογενή στρεπτική ροπή, αντίστοιχα, ενώ το M_R είναι εντατικό μέγεθος ανώτερης τάξης που σχετίζεται με τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα παραπάνω εντατικά μεγέθη ορίζονται μέσω των συνιστωσών του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff, συνεπώς δεν αντιστοιχούν σε επίπεδες διατομές στην παραμορφωμένη διαμόρφωση (βλ. κεφ. 1 και Π4.2.7).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(4.2.7)) στις σχέσεις (4.2.18), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = E_I A \left[u'_m + \frac{I}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + N^{pl} \quad (4.2.19\alpha)$$

$$M_t^P = G_I I_t \theta'_x + M_t^{Ppl} \quad M_R = E_I I_P u'_m + \frac{I}{2} E_I I_{PP} (\theta'_x)^2 + M_R^{pl} \quad (4.2.19\beta,\gamma)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές I_P (πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο S) και I_{PP} (ροπή τέταρτης τάξης ως προς το σημείο S) δίδονται από τις σχέσεις (1.2.34α) και (1.2.38γ), αντίστοιχα, ενώ η στρεπτική σταθερά I_t δίδεται ως

$$I_t = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_I} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right)^2 \right] d\Omega_j \quad (4.2.20)$$

Υπογραμμίζεται ότι η αντίστοιχη σχέση ορισμού της στρεπτικής σταθεράς (1.2.34δ) του κεφ. 1 δεν ταυτίζεται με την εξ.(4.2.20) εξαιτίας των πλαστικών όρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της ϕ_S^P (εξ.(4.2.14)). Η στρεπτική σταθερά δεν εξαρτάται από τη διαμήκη συντεταγμένη x εξαιτίας του ότι η ϕ_S^P έχει ληφθεί ανεξάρτητη της συντεταγμένης x , καθώς η ράβδος είναι υπό ομοιόμορφη στρέψη (βλ. και εξ.(4.2.31)). Στις σχέσεις (4.2.19), οι ποσότητες N^{pl} ,

M_t^{Ppl} , M_R^{pl} είναι τα πλαστικά μέρη των αντίστοιχων εντατικών μεγεθών και ορίζονται ως

$$N^{pl} = -\sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\varepsilon_{xx}^{pl})_j d\Omega_j \quad (4.2.21\alpha)$$

$$M_t^{Ppl} = -\sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left[(\gamma_{xy}^{pl})_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) + (\gamma_{xz}^{pl})_j \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) \right] d\Omega_j \quad (4.2.21\beta)$$

$$M_R^{pl} = -\sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\varepsilon_{xx}^{pl})_j (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (4.2.21\gamma)$$

ενώ η σχέση (4.2.19γ) μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της σχέσης (4.2.19α) και ως

$$M_R = \frac{I}{2} E_I I_n (\theta'_x)^2 + \frac{I_P}{A} (N - N^{pl}) + M_R^{pl} \quad (4.2.22)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_n δίδεται από τη σχέση (2.2.33α).

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.2.19α,β), (4.2.7), οι τάσεις δίδονται συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως

$$(S_{xx})_j = \frac{E_j}{E_I} \left\{ \frac{N - N^{pl}}{A} + \frac{I}{2} E_I \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] (\theta'_x)^2 \right\} - E_j (\varepsilon_{xx}^{pl})_j \quad (4.2.23\alpha)$$

$$(S_{xy})_j = \frac{G_j}{G_I} \left[\frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t} \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) \right] - G_j (\gamma_{xy}^{pl})_j \quad (4.2.23\beta)$$

$$(S_{xz})_j = \frac{G_j}{G_I} \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t} \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) - G_j (\gamma_{xz}^{pl})_j \quad (4.2.23\gamma)$$

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange (εξ.(1.2.13)) τις δυνατές μεταβολές των μεγεθών u_m , θ_x (και των παραγώγων τους) και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.22-23) προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν την καθολική ισορροπία αξονικών και στρεπτικών δράσεων της ράβδου, οι οποίες μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x=0, l$ εκφράζονται ως

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (4.2.24\alpha)$$

$$\frac{dM_t^P}{dx} + \frac{d}{dx} (M_R \theta'_x) = 0 \quad (4.2.24\beta)$$

$$(N + \bar{N}_0) \delta u_m(0) = 0 \quad (N - \bar{N}_l) \delta u_m(l) = 0 \quad (4.2.25\alpha, \beta)$$

$$\left\{ M_t^P + M_R \theta'_x + \bar{M}_{t0} \right\} \delta \theta_x(0) = 0 \quad (4.2.25\gamma)$$

$$\left\{ M_t^P + M_R \theta'_x - \bar{M}_{tl} \right\} \delta \theta_x(l) = 0 \quad (4.2.25\delta)$$

όπου στις συνοριακές συνθήκες (4.2.25) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{N}_0 , \bar{N}_l , \bar{M}_{t0} , \bar{M}_{tl} που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (αξονική δύναμη και στρεπτική ροπή, αντίστοιχα) και ορίζονται στις ακραίες διατομές της ράβδου με βάση τις σχέσεις (1.2.40α,β) και ως

$$\bar{N}_0 = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} t_x d\Omega_j \quad \bar{N}_l = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} t_x d\Omega_j \quad (4.2.26\alpha, \beta)$$

ή συναρτήσει των συνιστωσών του 1ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff (εξ.(Π4.2.23)) με βάση τις σχέσεις (1.2.41α,β) και ως

$$\bar{N}_0 = - \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{0j}} (P_{xx})_j d\Omega_j \quad \bar{N}_l = \sum_{j=1}^K \iint_{\Omega_{lj}} (P_{xx})_j d\Omega_j \quad (4.2.27\alpha, \beta)$$

Από τις εξ.(4.2.24β), (4.2.25γ,δ) και (4.2.19γ) συμπεραίνεται ότι αξονικά και στρεπτικά εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα και δεν μπορούν να μελετηθούν απομονωμένα όπως πραγματοποιείται στη γραμμική ελαστική ανάλυση.

Εισάγοντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (4.2.19) στις εξ.(4.2.24-25) και αναδιατυπώνοντας τις προκύπτουσες συνοριακές συνθήκες, μορφώνονται έπειτα από κάποιες πράξεις οι παρακάτω κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις καθολικής ισορροπίας αξονικών και στρεπτικών δράσεων

$$E_1 A u_m'' + E_1 I_P \theta'_x \theta''_x + \frac{dN^{pl}}{dx} = 0 \quad (4.2.28\alpha)$$

$$G_1 I_t \theta''_x + \frac{3}{2} E_1 I_{PP} (\theta'_x)^2 \theta''_x + E_1 I_P u'_m \theta''_x + E_1 I_P u''_m \theta'_x + \frac{dM_t^{Ppl}}{dx} + \frac{dM_R^{pl}}{dx} \theta'_x + M_R^{pl} \theta''_x = 0 \quad (4.2.28\beta)$$

που υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad (4.2.29\alpha, \beta)$$

όπου N και M_t είναι η αξονική δύναμη και η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου αντίστοιχα, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις (4.2.19α) και

$$M_t = G_1 I_t \theta'_x + \frac{1}{2} E_1 I_{PP} (\theta'_x)^3 + E_1 I_P u'_m \theta'_x + M_t^{Ppl} + M_R^{pl} \theta'_x \quad (4.2.30)$$

Στις σχέσεις (4.2.29), α_i, β_i ($i=1,2,3$) είναι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες αξονικές και στρεπτικές συνοριακές συνθήκες. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις (4.2.29) (βλ. εδάφιο 1.2.3).

Από τις διαφορικές εξισώσεις καθολικής ισορροπίας (4.2.24) και την έκφραση (4.2.19α), διαπιστώνεται εύκολα ότι η αξονική δύναμη N και η στρεπτική ροπή M_t κατά μήκος της ράβδου είναι σταθερές. Συνεπώς, συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.19α), (4.2.30), λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορικές εξισώσεις καθολικής ισορροπίας και γνωρίζοντας ότι τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών εξαρτώνται από τις παραγώγους u'_m, θ'_x (αφού προκύπτουν από τις πλαστικές παραμορφώσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις [Simo and Hughes 1998] που αποτελούν συνάρτηση των u'_m, θ'_x (βλ. εξ.(4.2.5))), προκύπτει εύκολα ότι οι σχέσεις

$$u''_m = 0 \Rightarrow u'_m = \text{σταθ.} \Rightarrow u_m(x) = u_m(0) + u'_m x \Rightarrow u_m(l) = u_m(0) + u'_m l \quad (4.2.31\alpha)$$

$$\theta''_x = 0 \Rightarrow \theta'_x = \text{σταθ.} \Rightarrow \theta_x(x) = \theta_x(0) + \theta'_x x \Rightarrow \theta_x(l) = \theta_x(0) + \theta'_x l \quad (4.2.31\beta)$$

ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις του προβλήματος. Σημειώνεται ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν στο πεδίο μετατοπίσεων (4.2.1-3) θεωρηθεί ότι η στρέβλωση είναι ανομοιόμορφη και ακολουθηθεί η διαδικασία του παρόντος εδαφίου. Οι παραπάνω σχέσεις έχουν επίσης ως αποτέλεσμα τη μη εξάρτηση της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης από τη συντεταγμένη x . Οι εξ.(4.2.31α,β), (4.2.30), (4.2.19α) και οι συνοριακές συνθήκες (4.2.29α,β) αποτελούν μη γραμμικό σύστημα δ αλγεβρικών εξισώσεων ως προς δ αγνώστους που δεν αποτελούν συνάρτηση της συντεταγμένης x ($u_m(0), u_m(l), \theta_x(0), \theta_x(l), u'_m, \theta'_x, N, M_t$). Αγνοώντας όλους τους γεωμετρικά μη γραμμικούς όρους των εξισώσεων αυτών, προκύπτει επακριβώς το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων της γραμμικής θεωρίας ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης [Wagner and Gruttmann 2001].

4.2.4 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στα προηγούμενα εδάφια, για την επίλυση του στατικού προβλήματος της γεωμετρικά μη γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ελαστοπλαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα.

1. Ορισμός αυθαίρετου δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$ με αρχή το κέντρο συστροφής S της διατομής του αριστερού άκρου της ράβδου. Το κέντρο συστροφής ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο και προσδιορίζεται ως το σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας της (διπλά συμμετρικής) διατομής. Υπολογισμός του συνολικού ισοδύναμου εμβαδού A της διατομής ως

$$A = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_1} \iint_{\Omega_j} d\Omega_j \quad (4.2.32)$$

2. Υπολογισμός της πρωτογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^P(y, z)$ [Μώκος 2007]. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\left(\nabla^2 \widehat{\phi}_S^P\right)_j = \frac{1}{\theta'_x} \left(\left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial y}\right)_j + \left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial z}\right)_j \right) \text{ στο } \Omega_j \quad (4.2.33\alpha)$$

$$G_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j - G_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_i = (G_j - G_i)(zn_y - yn_z) \text{ στο } \Gamma_j \quad (4.2.33\beta)$$

$$+ \frac{1}{\theta'_x} \left(G_j (\gamma_{xn}^{pl})_j - G_i (\gamma_{xn}^{pl})_i \right)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Poisson*. Η παραπάνω συνοριακή συνθήκη ισχύει στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί κοινό σύνορο των χωρίων Ω_j και Ω_i . Στην περίπτωση που το Γ_j αποτελεί ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , η συνοριακή συνθήκη διαμορφώνεται ως

$$\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j = zn_y - yn_z + \frac{1}{\theta'_x} (\gamma_{xn}^{pl})_j \text{ στο } \Gamma_j \quad (4.2.33\gamma)$$

3. Η ποσότητα $\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{1}{\theta'_x} (\gamma_{xn}^{pl})_j$ που εξαρτάται από την παράγωγο ως προς το

κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της πρωτογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j$

είναι γνωστή μόνο στις ελεύθερες παράπλευρες επιφάνειες της σύνθετης ράβδου.

Προφανώς, στις ομογενείς ράβδους η ποσότητα $\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{1}{\theta'_x} (\gamma_{xn}^{pl})_j$ είναι

γνωστή σε όλα τα σύνορα. Στις διεπιφάνειες των σύνθετων ράβδων η ποσότητα

$\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{1}{\theta'_x} (\gamma_{xn}^{pl})_j$ μπορεί να προσδιοριστεί επιλύοντας ξεχωριστά για κάθε

χωρίο Ω_j το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Dirichlet (βλ. εδάφιο Π1.4)

$$\left(\nabla^2 \widehat{\phi}_S^P\right)_j = \frac{1}{\theta'_x} \left(\left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial y}\right)_j + \left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial z}\right)_j \right) \text{ στο } \Omega_j \quad (4.2.34\alpha)$$

$$\left(\widehat{\phi}_S^P\right)_j = \text{δεδομένη στο } \Gamma_j \quad (4.2.34\beta)$$

Τονίζεται ότι η γνώση της ποσότητας $\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x}(\gamma_{xn}^{pl})_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των σταθερών \widehat{R}_S^P και I_l (βλ. εξ.(4.2.35), (4.2.38γ), αντίστοιχα και εδάφιο 4.3.3). Επίσης, σημειώνεται ότι το πλήθος των προβλημάτων Dirichlet μπορεί να μειωθεί με εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (4.2.33β).

4. Υπολογισμός της πρωτογενούς ροπής στρέβλωσης \widehat{R}_S^P [Μώκος 2007] ως

$$\widehat{R}_S^P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_l} \iint_{\Omega_j} \widehat{\phi}_S^P d\Omega_j \quad (4.2.35)$$

5. Υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^P(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση [Μώκος 2007]

$$\phi_S^P = \widehat{\phi}_S^P - \frac{\widehat{R}_S^P}{A} \quad (4.2.36)$$

6. Η ποσότητα $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x}(\gamma_{xn}^{pl})_j$ που εξαρτάται από την παράγωγο ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j$ είναι γνωστή μόνο στις ελεύθερες παράπλευρες επιφάνειες της σύνθετης ράβδου. Προφανώς, στις ομογενείς ράβδους η ποσότητα $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x}(\gamma_{xn}^{pl})_j$ είναι γνωστή σε όλα τα σύνορα. Στις διεπιφάνειες των σύνθετων ράβδων η ποσότητα $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x}(\gamma_{xn}^{pl})_j$ μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της σχέσης (4.2.36) ως

$$\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x}(\gamma_{xn}^{pl})_j = \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x}(\gamma_{xn}^{pl})_j \quad (4.2.37)$$

Τονίζεται ότι η γνώση της ποσότητας $\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j - \frac{I}{\theta'_x} (\gamma_{xn}^{pl})_j$ είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων $(S_{xn})_j$ στις διεπιφάνειες.

7. Υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας I_P , της ροπής τέταρτης τάξης I_{PP} και της στρεπτικής σταθεράς I_t μέσω των σχέσεων

$$I_P = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad I_{PP} = \sum_{j=1}^K \frac{E_j}{E_I} \iint_{\Omega_j} (y^2 + z^2)^2 d\Omega_j \quad (4.2.38\alpha, \beta)$$

$$I_t = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_I} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right)^2 \right] d\Omega_j \quad (4.2.38\gamma)$$

8. Επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων αξονικής και στρεπτικής ισορροπίας της ράβδου υπό ομοιόμορφη στρέψη υποκείμενων στις πλέον γενικές αξονικές και στρεπτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του μη γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων

$$\left. \begin{aligned} u_m(l) &= u_m(0) + u'_m l \\ \theta_x(l) &= \theta_x(0) + \theta'_x l \\ N &= E_I A \left[u'_m + \frac{I}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + N^{pl} \\ M_t &= G_I I_t \theta'_x + \frac{I}{2} E_I I_{PP} (\theta'_x)^3 + E_I I_P u'_m \theta'_x + M_t^{Ppl} + M_R^{pl} \theta'_x \\ \alpha_1 N + \alpha_2 u_m &= \alpha_3 \\ \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x &= \beta_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, l \quad (4.2.39\alpha, \beta)$$

όπου

$$N^{pl} = - \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\varepsilon_{xx}^{pl})_j d\Omega_j \quad (4.2.40\alpha)$$

$$M_t^{Ppl} = - \sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left[(\gamma_{xy}^{pl})_j \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right] + (\gamma_{xz}^{pl})_j \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right] \right] d\Omega_j \quad (4.2.40\beta)$$

$$M_R^{pl} = - \sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} (\varepsilon_{xx}^{pl})_j (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (4.2.40\gamma)$$

και υπολογισμός της αξονικής μετατόπισης $u_m(x)$, της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, καθώς και των αναπτυσσόμενων αξονικών και στρεπτικών εντατικών μεγεθών

N , N^l , N^{nl} , M_t , M_t^{Pel} , M_R^{el} και M_t^{pl} με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.39α) και των εκφράσεων

$$N = N^l + N^{nl} + N^{pl} \quad (4.2.41\alpha)$$

$$N^l = E_I A u'_m \quad N^{nl} = \frac{I}{2} E_I I_P (\theta'_x)^2 \quad (4.2.41\beta, \gamma)$$

$$M_t = M_t^{Pel} + M_R^{el} \theta'_x + M_t^{pl} \quad M_t^{Pel} = G_I I_t \theta'_x \quad (4.2.42\alpha, \beta)$$

$$M_R^{el} = \frac{I}{2} E_I I_{PP} (\theta'_x)^2 + E_I I_P u'_m \quad M_t^{pl} = M_t^{Ppl} + M_R^{pl} \theta'_x \quad (4.2.42\gamma, \delta)$$

9. Υπολογισμός των μη μηδενικών συνιστωσών ορθής και διατμητικής τάσης του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff και των συνολικών διατμητικών τάσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις (βλ. και [Μώκος 2007])

Διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xy})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j - z \right) - (\gamma_{xy}^{pl})_j \right] \quad (4.2.43\alpha)$$

$$(S_{xz})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j + y \right) - (\gamma_{xz}^{pl})_j \right] \quad (4.2.43\beta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_x)_j = \sqrt{(S_{xy})_j^2 + (S_{xz})_j^2} \quad (4.2.43\gamma)$$

Διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xn})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right)_j + y n_z - z n_y \right) - (\gamma_{xn}^{pl})_j \right] \quad (4.2.43\delta)$$

$$(S_{xt})_j = G_j \left[\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y n_y + z n_z \right) - (\gamma_{xt}^{pl})_j \right] \quad (4.2.43\epsilon)$$

όπου $(\gamma_{xt}^{pl})_j = -(\gamma_{xy}^{pl})_j n_z + (\gamma_{xz}^{pl})_j n_y$.

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_x)_j = \sqrt{(S_{xn})_j^2 + (S_{xt})_j^2} \quad (4.2.43\sigma\tau)$$

Ορθές τάσεις στο χωρίο Ω και στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$(S_{xx})_j = E_j \left[u'_m + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - (\varepsilon_{xx}^{pl})_j \right] \quad (4.2.43\zeta)$$

Επισημαίνεται ότι για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων $(S_{xt})_j$ στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) απαιτείται ο προσδιορισμός των πλαστικών παραμορφώσεων $(\gamma_{xt}^{pl})_j$ (βλ. εδάφιο 4.3.2).

10. Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z) = u_m(x) + \theta'_x \phi_S^P(y, z) \quad (4.2.44\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (4.2.44\beta)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (4.2.44\gamma)$$

4.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

4.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση και τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής

Η αξονική μετατόπιση $u_m(x)$ και η γωνία στρεπτικής στροφής $\theta_x(x)$ προσδιορίζονται με εφαρμογή των σχέσεων (4.2.31) αφού υπολογιστούν αριθμητικά οι αλγεβρικές ποσότητες $u_m(0)$, $\theta_x(0)$, u'_m , θ'_x . Οι ποσότητες αυτές προσδιορίζονται μαζί με τις αλγεβρικές ποσότητες $u_m(l)$, $\theta_x(l)$, N , M_t από την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος δ αλγεβρικών εξισώσεων των σχέσεων (4.2.31α,β), (4.2.30), (4.2.19α) και (4.2.29α,β). Προκειμένου να καταστεί η επίλυση δυνατή, θα πρέπει να είναι γνωστή η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, γεγονός που επιτυγχάνεται μέσω προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου ο οποίος παρουσιάζεται στο εδάφιο 4.3.4. Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι μεγάλο εύρος πρακτικών εφαρμογών μπορεί να μελετηθεί εξετάζοντας την ειδική περίπτωση συνοριακών συνθηκών $u_m(0) = 0$, $\theta_x(0) = 0$, $N + \alpha_2(l)u_m(l) = \alpha_3(l) \Rightarrow N + \alpha_2(l)u'_m l = \alpha_3(l)$, $M_t = \bar{M}_{tl}$ (οι σχέσεις αυτές προκύπτουν θέτοντας $\alpha_1(0) = 0$, $\alpha_2(0) = 1$, $\alpha_3(0) = 0$, $\alpha_1(l) = 1$, $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = 1$, $\beta_3(0) = 0$, $\beta_1(l) = 1$, $\beta_2(l) = 0$, $\beta_3(l) = \bar{M}_{tl}$ στις εκφράσεις (4.2.29), βλ. και Σχ.4.1α). Στην περίπτωση αυτή, οι ποσότητες $u_m(0)$, $\theta_x(0)$, M_t προκύπτουν εύκολα από τις παραπάνω σχέσεις, οι παράγωγοι u'_m , θ'_x υπολογίζονται από την επίλυση του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος 2 αλγεβρικών εξισώσεων

$$N = E_I A \left[u'_m + \frac{1}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + N^{pl}$$

$$\Rightarrow \alpha_3(l) - \alpha_2(l) u'_m l = E_I A \left[u'_m + \frac{1}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + N^{pl} \quad (4.3.1)$$

$$M_t = G_I I_t \theta'_x + \frac{1}{2} E_I I_{PP} (\theta'_x)^3 + E_I I_P u'_m \theta'_x + M_t^{Ppl} + M_R^{pl} \theta'_x$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{tl} = G_I I_t \theta'_x + \frac{1}{2} E_I I_{PP} (\theta'_x)^3 + E_I I_P u'_m \theta'_x + M_t^{Ppl} + M_R^{pl} \theta'_x \quad (4.3.2)$$

ενώ τα μεγέθη $u_m(l)$, $\theta_x(l)$, N υπολογίζονται εύκολα μετά την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων, εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.2.31α,β) και τη σχέση $N + \alpha_2(l) u'_m l = \alpha_3(l)$, αντίστοιχα.

4.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(4.2.36) δίδει την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (4.2.15)), εφόσον η πρωτογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^P$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (4.2.15)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^P$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (4.2.33) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσιαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.4. Προκειμένου να καταστεί η επίλυση δυνατή, θα πρέπει να είναι γνωστό το δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης και της συνοριακής συνθήκης του προβλήματος συνοριακών τιμών, γεγονός που επιτυγχάνεται μέσω προσαναξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου ο οποίος παρουσιάζεται στο εδάφιο 4.3.4. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαφορική εξίσωση είναι εξίσωση Poisson και μπορεί να γραφεί ως $f_j = c(\partial g_j / \partial y + \partial h_j / \partial z)$ ($j = 1, 2, \dots, K$) με $c = l / \theta'_x$, $g_j = (\gamma_{xy}^{pl})_j$, $h_j = (\gamma_{xz}^{pl})_j$, η ιδιόμορφη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.4.8) για τη συνάρτηση $\hat{\phi}_S^P$ διατυπώνεται ως

$$\pi(\hat{\phi}_S^P(p))_j (G_j + G_k) = -\frac{1}{\theta'_x} \sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left[(\gamma_{xy}^{pl}(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} + (\gamma_{xz}^{pl}(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} \right] d\Omega_Q$$

$$+ \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(G_j - G_i) (\hat{\phi}_S^P(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left[G_j \left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \hat{\phi}_S^P(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q$$

$$- \frac{1}{\theta'_x} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[-G_j \left[(\gamma_{xy}^{pl}(q))_j n_y + (\gamma_{xz}^{pl}(q))_j n_z \right] \right] \ln r ds_q$$

$$- \frac{1}{\theta'_x} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[G_i \left[(\gamma_{xy}^{pl}(q))_i n_y + (\gamma_{xz}^{pl}(q))_i n_z \right] \right] \ln r ds_q$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi(\widehat{\phi}_S^P(p))_j (G_j + G_k) = & -\frac{I}{\theta'_x} \sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left[(\gamma_{xy}^{pl}(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} + (\gamma_{xz}^{pl}(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} \right] d\Omega_Q \\
& + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (G_j - G_i) (\widehat{\phi}_S^P(q))_j \frac{\cos a}{r} ds_q \\
& - \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[G_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r ds_q \\
& + \frac{I}{\theta'_x} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[G_j (\gamma_{xn}^{pl}(q))_j - G_i (\gamma_{xn}^{pl}(q))_i \right] \ln r ds_q
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

σημειώνοντας ότι στην παραπάνω εξίσωση τίθεται $G_j \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n} \right)_j - G_i \left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n} \right)_i - (I/\theta'_x) \left(G_j (\gamma_{xn}^{pl})_j - G_i (\gamma_{xn}^{pl})_i \right) = (G_j - G_i) (zn_y - yn_z)$ εάν το σύνορο Γ_j αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j, Ω_i ή $\left(\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n} \right)_j - (I/\theta'_x) (\gamma_{xn}^{pl})_j = zn_y - yn_z$ εάν το σύνορο Γ_j είναι ελεύθερο σύνορο. Χρησιμοποιώντας N ευθύγραμμα σταθερά συνοριακά στοιχεία για την προσέγγιση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, M σταθερά επιφανειακά στοιχεία με ευθύγραμμα σύνορα για την προσέγγιση των πεδιακών ολοκληρωμάτων, την τεχνική του Katsikadelis [1994] (βλ. και [Κατσικαδέλης 1999]) για τη μετατροπή των πεδιακών ολοκληρωμάτων σε συνοριακά πάνω στο σύνορο κάθε επιφανειακού στοιχείου, αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010] για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και γράφοντας τη διακριτοποιημένη ολοκληρωτική εξίσωση (4.3.3) για τα N συνοριακά κομβικά σημεία p_i , προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$[A]\{X\} = \{B\} + \{F\} \tag{4.3.4}$$

από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες $\{X\}$, όπου $[A]$ είναι τετραγωνικό $N \times N$ γνωστό μητρώο συντελεστών, ενώ $\{B\}$, $\{F\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών. Επειδή το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι τύπου Neumann, το μητρώο $[A]$ είναι ιδιόμορφο και συνεπώς δεν αντιστρέφεται (βλ. εδάφιο Π1.1). Η ομαλοποίηση του μητρώου πραγματοποιείται με την τεχνική που περιγράφεται στις εργασίες των Lutz et al. [1998] και Aimi and Diligenti [2008] με την οποία μετασχηματίζεται καθολικά και όχι τοπικά το $[A]$ και η οποία παρουσιάζει μεγάλη αξιοπιστία. Εφόσον η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^P$ είναι γνωστή στα σύνορα της σύνθετης διατομής, η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P υπολογίζεται στα σύνορα της σύνθετης διατομής με τη βοήθεια της σχέσης (4.2.36). Τονίζεται ότι οι κόμβοι των σταθερών επιφανειακών στοιχείων της διατομής αποτελούν σημεία ελέγχου (monitoring stations) στους οποίους είναι

απαραίτητος ο υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων. Οι πλαστικές παραμορφώσεις εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις [Simo and Hughes 1998] οι οποίες δίδονται συναρτήσει των παραγώνων της συνάρτησης στρέβλωσης στα σημεία αυτά (βλ. εξ.(4.2.5)). Συνεπώς, στα σημεία ελέγχου υπολογίζονται οι παράγωγοι $\partial\hat{\phi}_S^P/\partial y$, $\partial\hat{\phi}_S^P/\partial z$ (βλ. εξ.(4.3.7), παρακάτω).

Η ποσότητα $\left(\partial\hat{\phi}_S^P/\partial n\right)_j - (1/\theta'_x)\left(\gamma_{xn}^{pl}\right)_j$ είναι γνωστή μόνο στα ελεύθερα σύνορα.

Οι τιμές της στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας (αριθμητικά) ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.4.5) (πρόβλημα Dirichlet), η οποία διατυπώνεται για τη $\hat{\phi}_S^P$ ως

$$\begin{aligned} \pi\left(\hat{\phi}_S^P(p)\right)_j &= -\frac{1}{\theta'_x} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\gamma_{xy}^{pl}(Q)\right)_j \frac{\cos \omega}{r} + \left(\gamma_{xz}^{pl}(Q)\right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] d\Omega_Q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[\left(\hat{\phi}_S^P(q)\right)_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial\hat{\phi}_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - \frac{1}{\theta'_x} \left(\left(\gamma_{xy}^{pl}(q)\right)_j n_y + \left(\gamma_{xz}^{pl}(q)\right)_j n_z \right) \right) \ln r \right] ds_q \\ \Rightarrow \pi\left(\hat{\phi}_S^P(p)\right)_j &= -\frac{1}{\theta'_x} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\gamma_{xy}^{pl}(Q)\right)_j \frac{\cos \omega}{r} + \left(\gamma_{xz}^{pl}(Q)\right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] d\Omega_Q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[\left(\hat{\phi}_S^P(q)\right)_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial\hat{\phi}_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - \frac{1}{\theta'_x} \left(\gamma_{xn}^{pl}(q)\right)_j \right) \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Η αριθμητική επίλυση βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή και επιφανειακή διακριτοποίηση, την τεχνική του Katsikadelis [1994] για τη μετατροπή των πεδιακών ολοκληρωμάτων σε συνοριακά πάνω στο σύνορο κάθε επιφανειακού στοιχείου, την υπόθεση του σταθερού στοιχείου ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010].

Γνωρίζοντας τις τιμές της $\left(\partial\hat{\phi}_S^P/\partial n\right)_j - (1/\theta'_x)\left(\gamma_{xn}^{pl}\right)_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής, οι τιμές της $\left(\partial\hat{\phi}_S^P/\partial n\right)_j - (1/\theta'_x)\left(\gamma_{xn}^{pl}\right)_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής υπολογίζονται με τη βοήθεια της σχέσης (4.2.37). Κατόπιν, οι τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης καθώς και οι παράγωγοί της ως προς y και z σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω_j υπολογίζονται από τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.4.4), (Π1.4.11α), (Π1.4.11β), οι οποίες διατυπώνονται για τη $\hat{\phi}_S^P$ ως

$$\left(\hat{\phi}_S^P(P)\right)_j = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\theta'_x} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\gamma_{xy}^{pl}(Q)\right)_j \frac{\cos \omega}{r} + \left(\gamma_{xz}^{pl}(Q)\right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] d\Omega_Q$$

$$+ \frac{I}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_S^P(q) \right)_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - \frac{I}{\theta'_x} \left(\gamma_{xn}^{pl}(q) \right)_j \right) \ln r \right] ds_q \quad (4.3.6)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S^P(P)}{\partial y} \right)_j = -\frac{I}{2\pi} \frac{I}{\theta'_x} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\gamma_{xy}^{pl}(Q) \right)_j \frac{\cos 2\omega}{r^2} - \left(\gamma_{xz}^{pl}(Q) \right)_j \frac{\sin 2\omega}{r^2} \right] d\Omega_Q$$

$$+ \frac{I}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_S^P(q) \right)_j \frac{\cos(\omega-a)}{r^2} + \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - \frac{I}{\theta'_x} \left(\gamma_{xn}^{pl}(q) \right)_j \right) \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \quad (4.3.7\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S^P(P)}{\partial z} \right)_j = \frac{I}{2\pi} \frac{I}{\theta'_x} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\gamma_{xy}^{pl}(Q) \right)_j \frac{\sin 2\omega}{r^2} + \left(\gamma_{xz}^{pl}(Q) \right)_j \frac{\cos 2\omega}{r^2} \right] d\Omega_Q$$

$$+ \frac{I}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\left(\phi_S^P(q) \right)_j \frac{\sin(\omega-a)}{r^2} + \left(\left(\frac{\partial \phi_S^P(q)}{\partial n} \right)_j - \frac{I}{\theta'_x} \left(\gamma_{xn}^{pl}(q) \right)_j \right) \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \quad (4.3.7\beta)$$

Ο αριθμητικός προσδιορισμός βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή και επιφανειακή διακριτοποίηση, την τεχνική του Katsikadelis [1994] για τη μετατροπή των πεδιακών ολοκληρωμάτων σε συνοριακά πάνω στο σύνορο κάθε επιφανειακού στοιχείου, την υπόθεση του σταθερού στοιχείου ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται με αναλυτική ολοκλήρωση [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010].

Η παράγωγος ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{t} της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\partial \phi_S^P / \partial t$ στα σύνορα υπολογίζεται με τη βοήθεια κεντρικής, εμπρόσθιας ή οπίσθιας διαφοράς (Παράρτημα Π8), δεδομένου ότι η ϕ_S^P είναι γνωστή στα σύνορα.

Τέλος, σε περίπτωση που είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός της παραγώγου $\left(\partial \phi_S^P / \partial n \right)_j$ ή των τασικών μεγεθών $(S_{xt})_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων $\left(\gamma_{xn}^{pl} \right)_j$, $\left(\gamma_{xt}^{pl} \right)_j$. Για να υπολογιστούν οι παράγωγοι αυτοί, απαιτείται επιπλέον η θεώρηση σημείων ελέγχου (monitoring stations) στις θέσεις των κόμβων των σταθερών συνοριακών στοιχείων της διατομής. Μετά τον υπολογισμό των προαναφερθέντων πλαστικών παραμορφώσεων στους κόμβους αυτούς, προσδιορίζονται ακολούθως η παράγωγος $\left(\partial \phi_S^P / \partial n \right)_j$ ή οι τάσεις $(S_{xt})_j$ (βλ. σχέσεις (4.2.37) και (4.2.43ε), αντίστοιχα).

4.3.3 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές και τα Πλαστικά Μέρη των Εντατικών Μεγεθών

Οι γεωμετρικές σταθερές οι οποίες υπεισέρχονται στο πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης ράβδου μπορούν να υπολογιστούν με βάση τις αντίστοιχες σχέσεις που έχουν παρουσιαστεί στο εδάφιο 4.2.4. Ωστόσο μετατρέπουμε όλα τα πεδιακά ολοκληρώματα των σχέσεων αυτών σε συνοριακά, εκτός

αυτών των σταθερών \hat{R}_S^P , I_t . Παρατηρείται ότι η διαδικασία αυτή για τις σταθερές A, I_P, I_{PP} είναι ταυτόσημη με τη διαδικασία των αντίστοιχων σταθερών που παρουσιάζεται στο εδάφιο 1.3.5. Σημειώνεται ότι ο αριθμητικός προσδιορισμός των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που υπεισέρχονται στις σχέσεις υπολογισμού των σταθερών αυτών βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και πραγματοποιείται με αναλυτική ολοκλήρωση.

Ο υπολογισμός των σταθερών \hat{R}_S^P , I_t βασίζεται στα πεδιακά ολοκληρώματα των σχέσεων (4.2.35) και (4.2.20), αντίστοιχα. Τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών N^{pl} , M_t^{Ppl} , M_R^{pl} υπολογίζονται μέσω των πεδιακών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (4.2.21). Ο αριθμητικός προσδιορισμός των προαναφερθέντων ολοκληρωμάτων πραγματοποιείται μετά τον υπολογισμό των πλαστικών παραμορφώσεων, της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και των παραγώγων της (βλ. εδάφια 4.3.2, 4.3.4), βασίζεται στην υπάρχουσα πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου και πραγματοποιείται με αναλυτική ολοκλήρωση. Υπογραμμίζεται ότι η πεδιακή διακριτοποίηση απαιτείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, συνεπώς δεν απαιτείται να υπάρχει ακριβής συναρμογή μεταξύ των επιφανειακών στοιχείων της διακριτοποίησης.

4.3.4 Προσαυξητικός - Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης του Προβλήματος

Όπως προαναφέρθηκε, προκειμένου να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις της ράβδου, απαιτείται να είναι γνωστή η ιστορία φόρτισής της. Συνεπώς, τα μεγέθη \bar{M}_{II} , $\alpha_2(l)$, $\alpha_3(l)$ που υπεισέρχονται στο μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.3.1-2) (ή γενικά οι ποσότητες α_i , β_i ($i=1,2,3$) που υπεισέρχονται στο σύστημα εξισώσεων (4.2.31α,β), (4.2.30), (4.2.19α) και (4.2.29α,β)) ορίζονται συναρτήσει «χρονικής» παραμέτρου λ . Ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων αυτών και η επίλυση του εξεταζόμενου προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου (load control) [Crisfield 1991], σύμφωνα με την οποία επιλέγονται T τιμές της παραμέτρου λ_t ($t=1,2,\dots,T$) για τις οποίες υπολογίζονται αριθμητικά τα κινηματικά μεγέθη του προβλήματος (u_m , θ_x , ϕ_S^P). Για $\lambda_0=0$ έχουμε την αρχική αφόρτιστη διαμόρφωση της ράβδου.

Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενοι αλγόριθμοι υπολογισμού πλαστικών παραμορφώσεων της βιβλιογραφίας βασίζονται στην ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων (βλ. εξ.(4.2.8)) με χρήση των παραμορφώσεων (strain-driven algorithms) [Simo and Hughes 1998]. Στο εξεταζόμενο πρόβλημα εμφανίζεται σημαντική δυσχέρεια στην εφαρμογή τέτοιων αλγορίθμων, αφού οι παραμορφώσεις δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων αφού εξαρτώνται από την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης (βλ. εξ.(4.2.5), (4.2.8)), η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τις πλαστικές παραμορφώσεις (εξ.(4.2.14)). Ενδεχομένως, μέσω της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων, να είναι εφικτό να προσδιοριστούν οι διαφορικές προσαυξητικές παραμορφώσεις ώστε να μην συναρτώνται από τη διαφορική προσαυξητική συνάρτηση στρέβλωσης. Με τη μέθοδο αυτή μπορεί να καταστεί δυνατή η χρήση των προαναφερθέντων αλγορίθμων ολοκλήρωσης. Ωστόσο ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, οι σχέσεις υπολογισμού των κινηματικών μεγεθών μίας μεταβλητής του προβλήματος (u_m , θ_x) (εδάφιο 4.3.1)

παραμένουν συζευγμένες με τις αντίστοιχες σχέσεις της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης (εδάφιο 4.3.2), γεγονός που δεν είναι επιθυμητό για τη διατύπωση σχετικά απλής θεωρίας στρέψης. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα ζητήματα αυτά, υιοθετείται η παραδοχή των Baba and Kajita (1982) σύμφωνα με την οποία η συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P δεν μεταβάλλεται εντός του διαστήματος $[\lambda_t, \lambda_{t+1})$ ($t = 0, 1, 2, \dots, T-1$). Με την παραδοχή αυτή επιτυγχάνεται να πραγματοποιείται ο υπολογισμός της ϕ_S^P μόνο πριν από κάθε προσαυξητικό βήμα του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος.

Αρχικά, καθορίζονται τα M σημεία ελέγχου της διατομής στα οποία θα πραγματοποιείται υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων (βλ. εδάφιο 4.3.2) και επιλέγονται T τιμές της «χρονικής» παραμέτρου λ_t για τις οποίες υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών α_i, β_i ($i = 1, 2, 3$) στα άκρα της ράβδου. Οι τιμές και το πλήθος των λ_t προσδιορίζονται με βάση την ιστορία της φόρτισης και απαιτήσεις σύγκλισης του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος. Υπολογίζονται οι παράγωγοι $(\partial \phi_S^P / \partial y)_j, (\partial \phi_S^P / \partial z)_j$ ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 4.3.2 για μηδενικές πλαστικές παραμορφώσεις, ενώ σημειώνεται ότι οι τιμές αυτές ισχύουν για $\lambda_0 = 0$. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός της παραγώγου $(\partial \phi_S^P / \partial n)_j$ ή των τασικών μεγεθών $(S_{xt})_j$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής, θεωρούνται επιπλέον N σημεία ελέγχου στις θέσεις των κόμβων των σταθερών συνοριακών στοιχείων της διατομής (βλ. εδάφιο 4.3.2). Επιπλέον, προσδιορίζονται οι γεωμετρικές σταθερές A, I_P, I_{PP} καθώς και η σταθερά I_t με εφαρμογή των υπολογισθαισών παραγώγων της ϕ_S^P (βλ. εδάφιο 4.3.3).

Παρακάτω περιγράφεται ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος για τις μη γραμμικές εξισώσεις (4.3.1-2), εντούτοις η γενική περίπτωση του εδαφίου 4.3.1 αντιμετωπίζεται εύκολα με παρόμοιο τρόπο. Με $(\cdot)_t$ συμβολίζεται η τιμή μεγέθους που ισχύει για $\lambda = \lambda_t$. Ο αλγόριθμος βασίζεται στην υβριδική μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων Powell [Powell 1970a,b]. Χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού μητρώου [More et al. 1980]. Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος Powell, απαιτείται για κάθε προσαυξητικό βήμα $[\lambda_t, \lambda_{t+1})$ ($t = 0, 1, 2, \dots, T-1$) αρχική πρόβλεψη των τιμών των παραγώγων u'_m, θ'_x που να ικανοποιεί τις σχέσεις (4.3.1-2) για $\lambda = \lambda_{t+1}$. Οι τιμές αυτές λαμβάνονται ίσες με τις αντίστοιχες τιμές $(u'_m)_t, (\theta'_x)_t$ που προσδιορίστηκαν για $\lambda = \lambda_t$ ($t = 1, 2, \dots, T-1$), ενώ για $t = 0$ λαμβάνεται $(u'_m)_0 = 0, (\theta'_x)_0 = 0$. Επιπλέον, απαιτείται η τιμή της παραμέτρου ανοχής (tolerance parameter) που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου και η οποία λαμβάνεται ίση με $tol_{gl} = 10^{-7}$. Τα προσαυξητικά βήματα του αλγορίθμου εκτελούνται έως ότου αναληφθεί το σύνολο του φορτίου ($\lambda = \lambda_T$) ή υπάρξει αδυναμία σύγκλισης του αλγορίθμου. Για το τυχόν

διάστημα $[\lambda_t, \lambda_{t+1})$ ($t=0,1,2,\dots,T-1$), ο προσαυξητικός - επαναληπτικός αλγόριθμος περιέχει τα ακόλουθα βήματα:

- i. Βήμα ελαστικής πρόλεξης (elastic prediction step): Για κάθε σημείο ελέγχου της διατομής m ($m=1,2,\dots,M$): Υπολογισμός των ελαστικών προλέξεων των τάσεων $(S_{xx}^{Tr})_j$, $(S_{xy}^{Tr})_j$, $(S_{xz}^{Tr})_j$ [Παπαδρακάκης 1998] με εφαρμογή των σχέσεων (4.2.7α,δ,ε) και των παραγώγων της $(\phi_S^P)_t$ ως

$$\begin{aligned} (S_{xx}^{Tr})_j &= E_j \left[u'_m + \frac{I}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - \left((\varepsilon_{xx}^{pl})_j \right)_t \right] \\ \Rightarrow (S_{xx}^{Tr})_j &= \left((S_{xx})_j \right)_t + E_j \left[u'_m - (u'_m)_t + \frac{I}{2}(y^2 + z^2) \left[(\theta'_x)^2 - ((\theta'_x)_t)^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (4.3.8\alpha)$$

$$\begin{aligned} (S_{xy}^{Tr})_j &= G_j \left[\theta'_x \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right)_t \right) - z \right] - \left((\gamma_{xy}^{pl})_j \right)_t \\ \Rightarrow (S_{xy}^{Tr})_j &= \left((S_{xy})_j \right)_t + G_j (\theta'_x - (\theta'_x)_t) \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right)_t - z \right) \end{aligned} \quad (4.3.8\beta)$$

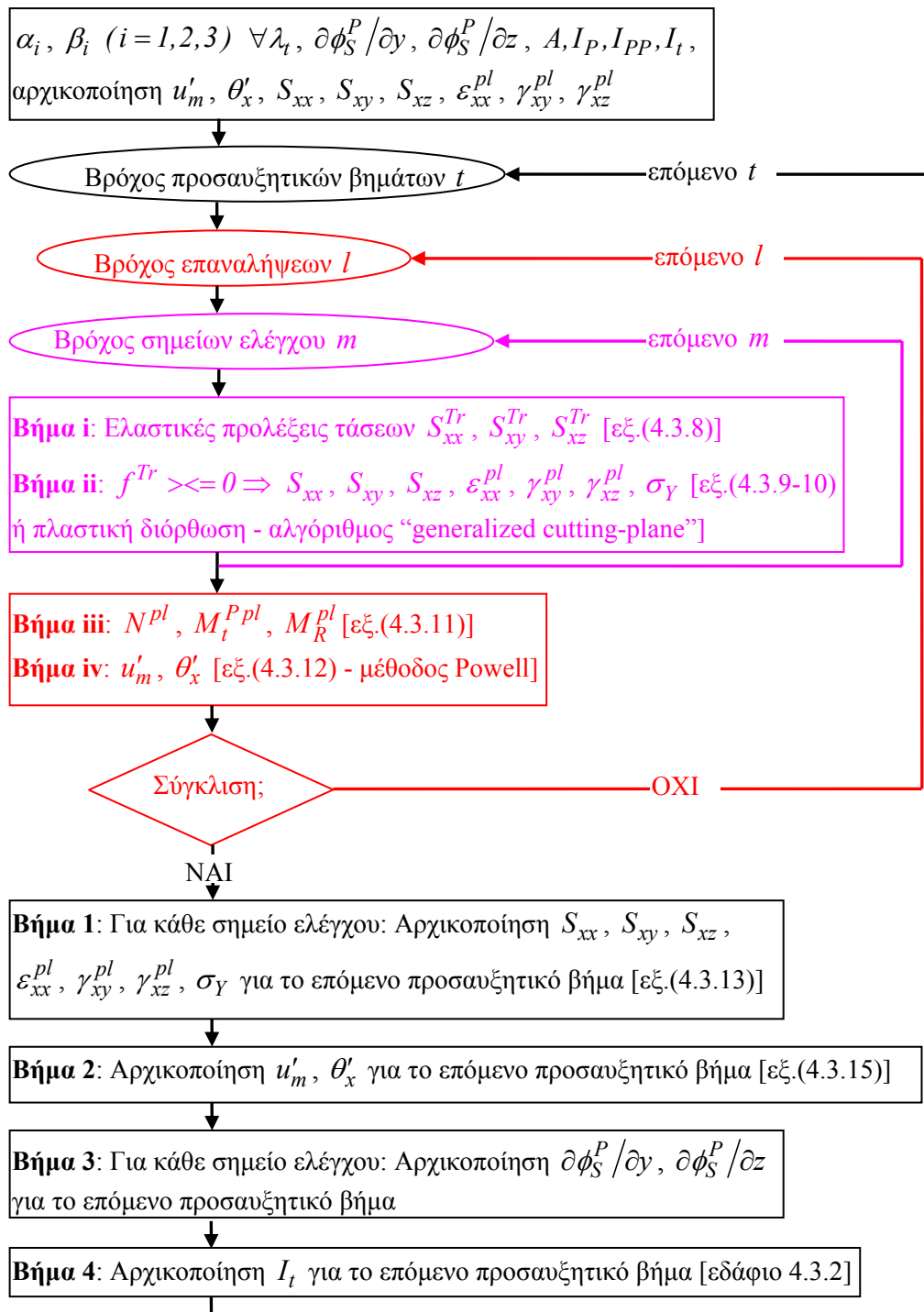
$$\begin{aligned} (S_{xz}^{Tr})_j &= G_j \left[\theta'_x \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j \right)_t \right) + y \right] - \left((\gamma_{xz}^{pl})_j \right)_t \\ \Rightarrow (S_{xz}^{Tr})_j &= \left((S_{xz})_j \right)_t + G_j (\theta'_x - (\theta'_x)_t) \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j \right)_t + y \right) \end{aligned} \quad (4.3.8\gamma)$$

όπου για $t=0$ οι τάσεις και πλαστικές παραμορφώσεις των παραπάνω σχέσεων είναι μηδενικές, ενώ όπως προαναφέρθηκε, οι παράγωγοι της ϕ_S^P προσδιορίζονται για μηδενικές πλαστικές παραμορφώσεις. Με τον προτεινόμενο υπολογισμό των ελαστικών προλέξεων εξασφαλίζεται ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις (βλ. βήμα (ii)) προσδιορίζονται με βάση τις προσαυξητικές παραμορφώσεις. Στη βιβλιογραφία η στρατηγική αυτή θεωρείται πιο αξιόπιστη συγκριτικά με τον αντίστοιχο προσδιορισμό με βάση επαναληπτικές παραμορφώσεις [Crisfield 1991, Dodds 1987].

- ii. Για κάθε σημείο ελέγχου της διατομής m ($m=1,2,\dots,M$): Υπολογισμός της συνάρτησης διαρροής f^{Tr} ως [Παπαδρακάκης 1998] (βλ. και εξ.(4.2.9))

$$f^{Tr} = \sqrt{\left((S_{xx}^{Tr})_j \right)^2 + 3 \left(\left((S_{xy}^{Tr})_j \right)^2 + \left((S_{xz}^{Tr})_j \right)^2 \right)} - \left((\sigma_Y)_j \right)_t \quad (4.3.9)$$

και έλεγχος επαλήθευσης του κριτηρίου διαρροής:



Σχήμα 4.2. Προσαυξητικός - επαναληπτικός αλγόριθμος του προβλήματος.

- Αν $f^{Tr} \leq 0$, τότε το κριτήριο διαρροής επαληθεύεται και το σημείο ελέγχου είναι ελαστικό, συνεπώς η ελαστική πρόλεξη είναι η τελική κατάσταση. Υπολογισμός των τάσεων, πλαστικών παραμορφώσεων και της τάσης διαρροής στο σημείο ελέγχου ως

$$(S_{xx})_j = (S_{xx}^{Tr})_j \quad (S_{xy})_j = (S_{xy}^{Tr})_j \quad (S_{xz})_j = (S_{xz}^{Tr})_j \quad (4.3.10\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\left(\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_j = \left(\left(\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_j\right)_t \quad \left(\gamma_{xy}^{pl}\right)_j = \left(\left(\gamma_{xy}^{pl}\right)_j\right)_t \quad \left(\gamma_{xz}^{pl}\right)_j = \left(\left(\gamma_{xz}^{pl}\right)_j\right)_t \quad (4.3.10\delta, \varepsilon, \sigma\tau)$$

$$(\sigma_Y)_j = \left(\left(\sigma_Y\right)_j\right)_t \quad (4.3.10\zeta)$$

- Αν $f^{Tr} > 0$, τότε το κριτήριο διαρροής παραβιάζεται, συνεπώς η ελαστική πρόλεξη δεν αποτελεί πραγματική εντατική κατάσταση και πρέπει να πραγματοποιηθεί επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής (βήμα πλαστικής διόρθωσης). Η ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων υλοποιείται με τον επαναληπτικό αλγόριθμο “generalized cutting-plane”, ο οποίος συγκλίνει γρήγορα και είναι απλός καθώς δεν απαιτεί διπλή παραγωγή της συνάρτησης διαρροής ως προς τις τάσεις [Ortiz and Simo 1986, Simo and Hughes 1998]. Η παράμετρος ανοχής που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου λαμβάνεται ίση με $tol_{loc} = 10^{-5}$. Μέσω του αλγορίθμου αυτού υπολογίζονται τα τασικά μεγέθη $(S_{xx})_j$, $(S_{xy})_j$, $(S_{xz})_j$, οι προσαυξητικές πλαστικές παραμορφώσεις και η τάση διαρροής $(\sigma_Y)_j$ στο σημείο ελέγχου αξιοποιώντας τις καταστατικές σχέσεις της κλασικής θεωρίας πλαστικότητας, το νόμο ισότροπης κράτυνσης κάθε υλικού της σύνθετης ράβδου και τα μεγέθη $(S_{xx}^{Tr})_j$, $(S_{xy}^{Tr})_j$, $(S_{xz}^{Tr})_j$, $\left(\left(S_{xx}\right)_j\right)_t$, $\left(\left(S_{xy}\right)_j\right)_t$, $\left(\left(S_{xz}\right)_j\right)_t$, $\left(\left(\sigma_Y\right)_j\right)_t$. Ακολουθώντας οι παραμορφώσεις αυτές προστίθενται στις πλαστικές παραμορφώσεις που ισχύουν για $\lambda = \lambda_t$ και λαμβάνονται οι ολικές πλαστικές παραμορφώσεις $\left(\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_j$, $\left(\gamma_{xy}^{pl}\right)_j$, $\left(\gamma_{xz}^{pl}\right)_j$.

- iii. Υπολογισμός των πλαστικών μερών των εντατικών μεγεθών N^{pl} , M_t^{Ppl} , M_R^{pl} εφαρμόζοντας τη διαδικασία του εδαφίου 4.3.3 και τις σχέσεις (4.2.21) ως

$$N^{pl} = -\sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} \left(\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_j d\Omega_j \quad (4.3.11\alpha)$$

$$M_t^{Ppl} = -\sum_{j=1}^K G_j \iint_{\Omega_j} \left[\left(\gamma_{xy}^{pl}\right)_j \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right)_t - z \right) + \left(\gamma_{xz}^{pl}\right)_j \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j \right)_t + y \right) \right] d\Omega_j \quad (4.3.11\beta)$$

$$M_R^{pl} = -\sum_{j=1}^K E_j \iint_{\Omega_j} \left(\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_j (y^2 + z^2) d\Omega_j \quad (4.3.11\gamma)$$

- iv. Υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών u'_m , θ'_x επιλύοντας το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.3.1-2) με τη μέθοδο Powell [Powell 1970a,b] και με χρήση της σταθεράς $(I_t)_t$ και των αποκτηθεισών τιμών των N^{pl} , M_t^{Ppl} , M_R^{pl} ως

$$(\alpha_3(l))_{t+1} - (\alpha_2(l))_{t+1} u'_m l = E_l A \left[u'_m + \frac{l}{2} \frac{I_P}{A} (\theta'_x)^2 \right] + N^{pl} \quad (4.3.12\alpha)$$

$$(\bar{M}_{il})_{t+1} = G_l (I_t)_t \theta'_x + \frac{l}{2} E_l I_{PP} (\theta'_x)^3 + E_l I_P u'_m \theta'_x + M_t^{Ppl} + M_R^{pl} \theta'_x \quad (4.3.12\beta)$$

Όπως προαναφέρθηκε, για $t=0$ η σταθερά $(I_t)_0$ προσδιορίζεται για μηδενικές πλαστικές παραμορφώσεις. Σε περίπτωση που η μέθοδος δεν συγκλίνει, τότε επιστροφή στο βήμα (i) ώστε να επαναυπολογιστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις, διαφορετικά τερματίζεται η επαναληπτική διαδικασία των βημάτων (i-iv) και εκτελούνται τα ακόλουθα βήματα, επισημαίνοντας ότι τα μεγέθη που υπολογίστηκαν στην τελευταία επανάληψη αντιστοιχούν στα ισχύοντα μεγέθη για $\lambda = \lambda_{t+1}$.

1. Για κάθε σημείο ελέγχου της διατομής m ($m=1,2,\dots,M$): Αρχικοποίηση των τάσεων, πλαστικών παραμορφώσεων και τάσης διαρροής για το επόμενο προσανζητικό βήμα $[\lambda_{t+1}, \lambda_{t+2})$ ($t=0,1,2,\dots,T-2$) ως

$$\left((S_{xx})_j \right)_{t+1} = (S_{xx})_j \quad \left((S_{xy})_j \right)_{t+1} = (S_{xy})_j \quad \left((S_{xz})_j \right)_{t+1} = (S_{xz})_j \quad (4.3.13\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\left((\varepsilon_{xx}^{pl})_j \right)_{t+1} = (\varepsilon_{xx}^{pl})_j \quad \left((\gamma_{xy}^{pl})_j \right)_{t+1} = (\gamma_{xy}^{pl})_j \quad \left((\gamma_{xz}^{pl})_j \right)_{t+1} = (\gamma_{xz}^{pl})_j \quad (4.3.13\delta,\varepsilon,\sigma\tau)$$

$$\left((\sigma_Y)_j \right)_{t+1} = (\sigma_Y)_j \quad (4.3.13\zeta)$$

2. Αρχικοποίηση των μεγεθών u'_m , θ'_x για το επόμενο προσανζητικό βήμα ως

$$(u'_m)_{t+1} = u'_m \quad (\theta'_x)_{t+1} = \theta'_x \quad (4.3.14\alpha,\beta)$$

Σε περίπτωση που είναι επιθυμητό, προσδιορίζεται επιπρόσθετα οποιοδήποτε κινηματικό ή εντατικό μέγεθος της ράβδου ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 4.3.1.

3. Για κάθε σημείο ελέγχου της διατομής m ($m=1,2,\dots,M$): Αρχικοποίηση των παραγώγων $\left((\partial\phi_S^P/\partial y)_j \right)_{t+1}$, $\left((\partial\phi_S^P/\partial z)_j \right)_{t+1}$ ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 4.3.2 και με αξιοποίηση των υπολογισθεισών τιμών των μεγεθών $(\theta'_x)_{t+1}$, $\left((\gamma_{xy}^{pl})_j \right)_{t+1}$, $\left((\gamma_{xz}^{pl})_j \right)_{t+1}$. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός

της παραγώγου $\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n}\right)_j\right)_{t+1}$ ή των τασικών μεγεθών $\left(\left(S_{xi}\right)_j\right)_{t+1}$ στα σύνορα της σύνθετης διατομής, εκτελούνται τα βήματα (i-ii) του αλγορίθμου ώστε να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις για $\lambda = \lambda_{t+1}$ στα N σημεία ελέγχου που βρίσκονται στις θέσεις των κόμβων των συνοριακών στοιχείων της διατομής και στη συνέχεια ακολουθεί η διαδικασία του εδαφίου 4.3.2. Επίσης, σε περίπτωση που είναι επιθυμητός ο προσδιορισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ή των παραγώγων της σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$) που δεν συμπίπτει με κάποιο σημείο ελέγχου m , εφαρμόζονται οι εξ.(4.3.6-7) αξιοποιώντας τις τιμές των μεγεθών $\left(\theta'_x\right)_{t+1}$, $\left(\left(\gamma_{xy}^{pl}\right)_j\right)_{t+1}$, $\left(\left(\gamma_{xz}^{pl}\right)_j\right)_{t+1}$. Για να προσδιοριστούν τασικά μεγέθη στα σημεία αυτά, εκτελούνται τα βήματα (i-ii) του αλγορίθμου ώστε να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις για $\lambda = \lambda_{t+1}$ στα ίδια σημεία και ακολούθως εφαρμόζονται οι εξ.(4.2.7).

4. Προσδιορισμός της σταθεράς $(I_t)_t$ αντικαθιστώντας τις υπολογισθείσες παραγώγους $\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}\right)_j\right)_{t+1}$, $\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}\right)_j\right)_{t+1}$ στην σχέση (4.2.20) ως

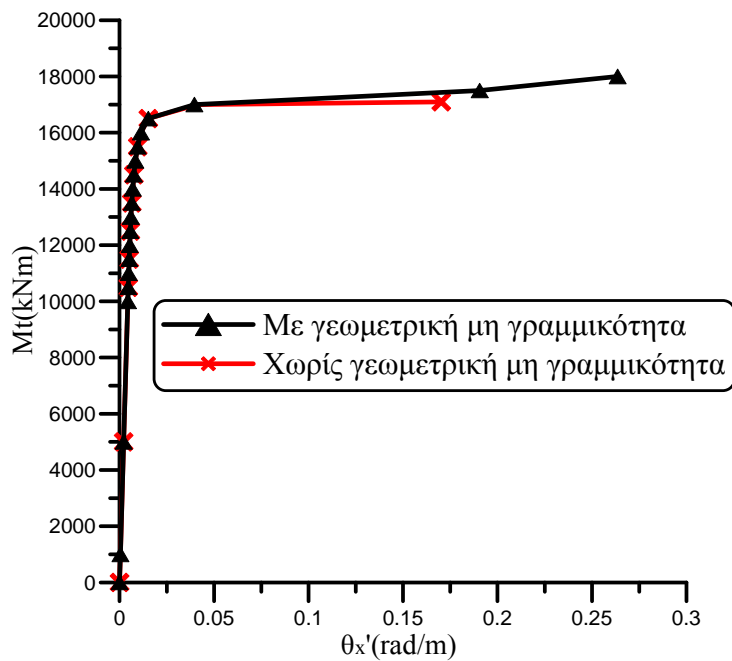
$$(I_t)_{t+1} = \sum_{j=1}^K \frac{G_j}{G_1} \iint_{\Omega_j} \left[\left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)_j \right)_{t+1} - z \right)^2 + \left(\left(\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)_j \right)_{t+1} + y \right)^2 \right] d\Omega_j \quad (4.3.15)$$

και ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 4.3.3.

Ο παραπάνω προσαυξητικός - επαναληπτικός αλγόριθμος συνοψίζεται στο Σχ.4.2. Τέλος, επισημαίνεται ότι με τον προτεινόμενο αλγόριθμο αποφεύγεται ο ρητός προσδιορισμός της προσαυξητικής μορφής των μη γραμμικών εξισώσεων (4.3.12) που είναι εκτενέστερη.

4.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Με βάση την αναλυτική και αριθμητική διαδικασία που παρουσιάστηκε στα εδάφια 4.2, 4.3 αναφορικά με το πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης ράβδου, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον, προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου. Η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων ελέγχεται, όπου είναι εφικτό, με υπάρχουσες αναλυτικές ή αριθμητικές λύσεις, οι οποίες στηρίζονται στις ίδιες παραδοχές του εξεταζόμενου προβλήματος (θεωρία στρέψης).



Σχήμα 4.3. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστροφής για τη ράβδο του παραδείγματος 1.

Πίνακας 4.1. Πλήρως πλαστική ροπή (kNm) και συντελεστής σχήματος της διατομής της ράβδου του παραδείγματος 1.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα			Με γεωμετρική μη γραμμικότητα
	Αναλυτική λύση (βλ. [Lublinter 1990])	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)	Ακρίβεια (%)	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)
M_t^u	17140.1	17100.0	0.23	17400.0
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	1.694	1.701	0.44	1.731

Πίνακας 4.2. Λόγοι $\theta'_x / (\theta'_x)^{el}$ και \bar{M}_{tl} / M_t^{el} για τη ράβδο του παραδείγματος 1 (γεωμετρικά γραμμική ανάλυση).

$\theta'_x / (\theta'_x)^{el}$	\bar{M}_{tl} / M_t^{el}	
	Αναλυτική λύση [Smith and Sidebottom 1965]	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)
1.00	1.00	1.00
1.13	1.10	1.11
1.50	1.33	1.35
1.90	1.50	1.49
2.73	1.60	1.60
3.40	1.63	1.64

4.4.1 Παράδειγμα 1

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η συνδυασμένη επιρροή υλικής και γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε δύστροπες ομογενείς ράβδους, ως πρώτο παράδειγμα μελετήθηκε ελαστική - ιδεωδώς πλαστική ράβδος ($E = 2.134 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_Y = 2.85 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, $h = 0$) χονδρότοιχης ορθογωνικής διατομής διαστάσεων $b \times a = 1.0 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ ($A = 5.000 \times 10^{-1} \text{ m}^2$, $(I_t)_0 = 2.859 \times 10^{-2} \text{ m}^4$, $I_P = 5.208 \times 10^{-2} \text{ m}^4$, $I_{PP} = 8.377 \times 10^{-3} \text{ m}^6$) υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και μηδενική αξονική δύναμη στο δεξιό της άκρο. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο ενώ χρησιμοποιήθηκαν 400 και 600 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα.

Στο Σχ.4.3 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_{II} αγνοώντας την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Διαπιστώνεται η μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της πλαστικοποίησης και η επακόλουθη πλαστική κατάρρευση της ράβδου. Στο ίδιο σχήμα εισάγεται και η καμπύλη $\bar{M}_{II} - \theta'_x$ λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας από όπου συμπεραίνεται η αμελητέα σημασία της στη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Επιπλέον, στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζεται η πλήρως πλαστική ροπή M_t^u και ο συντελεστής σχήματος της διατομής $\kappa = M_t^u / M_t^{el}$, έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (με ή χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας) και την αναλυτική λύση του προβλήματος (βλ. [Lubliner 1990] και [Nadai 1923]) (χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα). Επισημαίνεται ότι M_t^u είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο ή η ροπή για την οποία πλαστικοποιείται το σύνολο των σημείων ελέγχου της διατομής όταν αγνοείται ή λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα αντίστοιχα, ενώ M_t^{el} είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων. Από τον Πίνακα 4.1 διαπιστώνεται η εξαιρετική ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου και η μικρή σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας.

Στον Πίνακα 4.2 δίδονται οι λόγοι \bar{M}_{II} / M_t^{el} συναρτήσει των λόγων $\theta'_x / (\theta'_x)^{el}$ χωρίς την επιρροή μεγάλων στρεπτικών στρεφών, επισημαίνοντας ότι $(\theta'_x)^{el}$ είναι η συστροφή που προσδιορίζεται για στάθμη εξωτερικής φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^{el}$. Στον ίδιο πίνακα εισάγονται και οι αντίστοιχοι λόγοι που προκύπτουν από αναλυτική λύση του προβλήματος [Smith and Sidebottom 1965]. Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων διαπιστώνεται η εξαιρετική ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου, ενώ σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης έχουν ξεχθεί προσεγγιστικά από γράφημα που περιέχεται στην εργασία των Baba and Kajita [1982]. Τέλος, στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζεται για την περίπτωση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας η κατανομή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και της ορθής συνιστώσας του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff S_{xx} για διάφορες στάθμες εξωτερικής φόρτισης \bar{M}_{II} (ελαστική, πλήρως πλαστική της γεωμετρικά γραμμικής και της μη γραμμικής ανάλυσης). Παρατηρείται ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις επηρεάζουν αμελητέα την

κατανομή της ϕ_S^P στο επίπεδο της διατομής, ωστόσο είναι καθοριστικής σημασίας για τον υπολογισμό των ορθών τάσεων. Επιπλέον, το μέγεθος της ϕ_S^P επηρεάζεται από την εξέλιξη της πλαστικοποίησης. Σημειώνεται ότι οι ορθές τάσεις S_{xx} δεν έχουν κοινή διεύθυνση καθώς κατά τον υπολογισμό τους λαμβάνονται υπόψη οι στροφές που έχουν υποστεί τα (απειροστά) στοιχεία που απαρτίζουν τη διατομή κατά την παραμόρφωση [Bathe 1996, Παπαδρακάκης 1998].

4.4.2 Παράδειγμα 2

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η συνδυασμένη επιρροή υλικής και γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε ομογενείς ράβδους μικρής στρεπτικής στιβαρότητας, ως δεύτερο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος διατομής I συνολικού πλάτους $d = 1.0m$, συνολικού ύψους $h = 1.0m$, πάχους πελμάτων $t_f = 0.20m$ και πάχους κορμού $t_w = 0.15m$ ($A = 4.900 \times 10^{-1} m^2$, $(I_t)_0 = 5.870 \times 10^{-3} m^4$, $I_P = 1.015 \times 10^{-1} m^4$, $I_{PP} = 2.757 \times 10^{-2} m^6$) υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και μηδενική αξονική δύναμη στο δεξιό της άκρο. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο ενώ χρησιμοποιήθηκαν 500 και 700 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις υλικού ($E = 2.134 \times 10^8 kN / m^2$, $G = 8.0 \times 10^7 kN / m^2$, $\sigma_Y = 2.85 \times 10^5 kN / m^2$), ένα ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό ($h = 0$) και ένα ισότροπα κρατυνόμενο του οποίου η καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης παρουσιάζεται στο Σχ.4.4.

Στο Σχ.4.5 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_H με ή χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας, για τις δύο περιπτώσεις υλικού. Διαπιστώνεται η μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της πλαστικοποίησης της ράβδου καθώς και η επακόλουθη πλαστική κατάρρευση της ράβδου στην περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης για το ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό υλικό. Αντίθετα με το πρώτο παράδειγμα, εδώ η γεωμετρική μη γραμμικότητα παίζει σημαντικό ρόλο στη μετελαστική συμπεριφορά της ράβδου αφού αυξάνει αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα. Επιπλέον, στο Σχ.4.6 απεικονίζεται η συνεισφορά των διατμητικών (πρωτογενής στρεπτική ροπή M_t^P) και των ορθών (εντατικό μέγεθος Wagner $M_R \theta'_x$) συνιστωσών του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff στη συνολική στρεπτική ροπή που καταπονεί τη ράβδο για διάφορες τιμές της συστροφής (περίπτωση ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού). Διαπιστώνεται ότι οι τιμές του $M_R \theta'_x$ είναι αμελητέες στην ελαστική περιοχή, ενώ αυξάνονται χωρίς να λαμβάνουν κάποια μέγιστη τιμή μετά την αρχική πλαστικοποίηση. Το συγκεκριμένο εντατικό μέγεθος γίνεται πολύ μεγάλο (συγκρίσιμο με το M_t^P), συνεπώς οι ορθές εφελκυστικές τάσεις που ασκούνται στα άκρα των πελμάτων μπορεί να οδηγήσουν σε εφελκυστική θραύση, όπως παρατηρήθηκε πειραματικά από τους Farwell and Galambos [1969].

Στον Πίνακα 4.5 παρουσιάζεται για την περίπτωση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας η κατανομή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και των ορθών τάσεων S_{xx} για διάφορες στάθμες εξωτερικής φόρτισης \bar{M}_H (ελαστική, πλήρως πλαστική της γεωμετρικά γραμμικής και της μη γραμμικής ανάλυσης). Όπως και στο

προηγούμενο παράδειγμα, διαπιστώνεται ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις επηρεάζουν αμελητέα την κατανομή της ϕ_S^P στο επίπεδο της διατομής, ωστόσο είναι καθοριστικής σημασίας για τον υπολογισμό των ορθών τάσεων. Παρατηρείται επίσης ότι στην ελαστική στάθμη φόρτισης οι ορθές τάσεις εξαρτώνται αποκλειστικά από την απόσταση από το κέντρο συστροφής της διατομής. Η κατανομή των ορθών τάσεων μεταβάλλεται σημαντικά λόγω της πλαστικοποίησης ενώ στη μεγαλύτερη στάθμη φόρτισης, οι ορθές τάσεις λαμβάνουν πολύ υψηλές τιμές με το εντατικό μέγεθος Wagner να κυριαρχεί στη συμπεριφορά της ράβδου. Τέλος, στον Πίνακα 4.6 διακρίνονται για διάφορες ελαστοπλαστικές στάθμες φόρτισης η ροή διατμητικών τάσεων S_x και η αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης (γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση). Επισημαίνεται και πάλι ότι τόσο οι τάσεις S_{xx} όσο και η ροή τάσεων S_x των Πινάκων 4.5, 4.6 δεν έχουν κοινή διεύθυνση καθώς κατά τον υπολογισμό τους λαμβάνονται υπόψη οι στροφές που έχουν υποστεί τα (απειροστά) στοιχεία που απαρτίζουν τη διατομή κατά την παραμόρφωση [Bathe 1996, Παπαδρακάκης 1998].

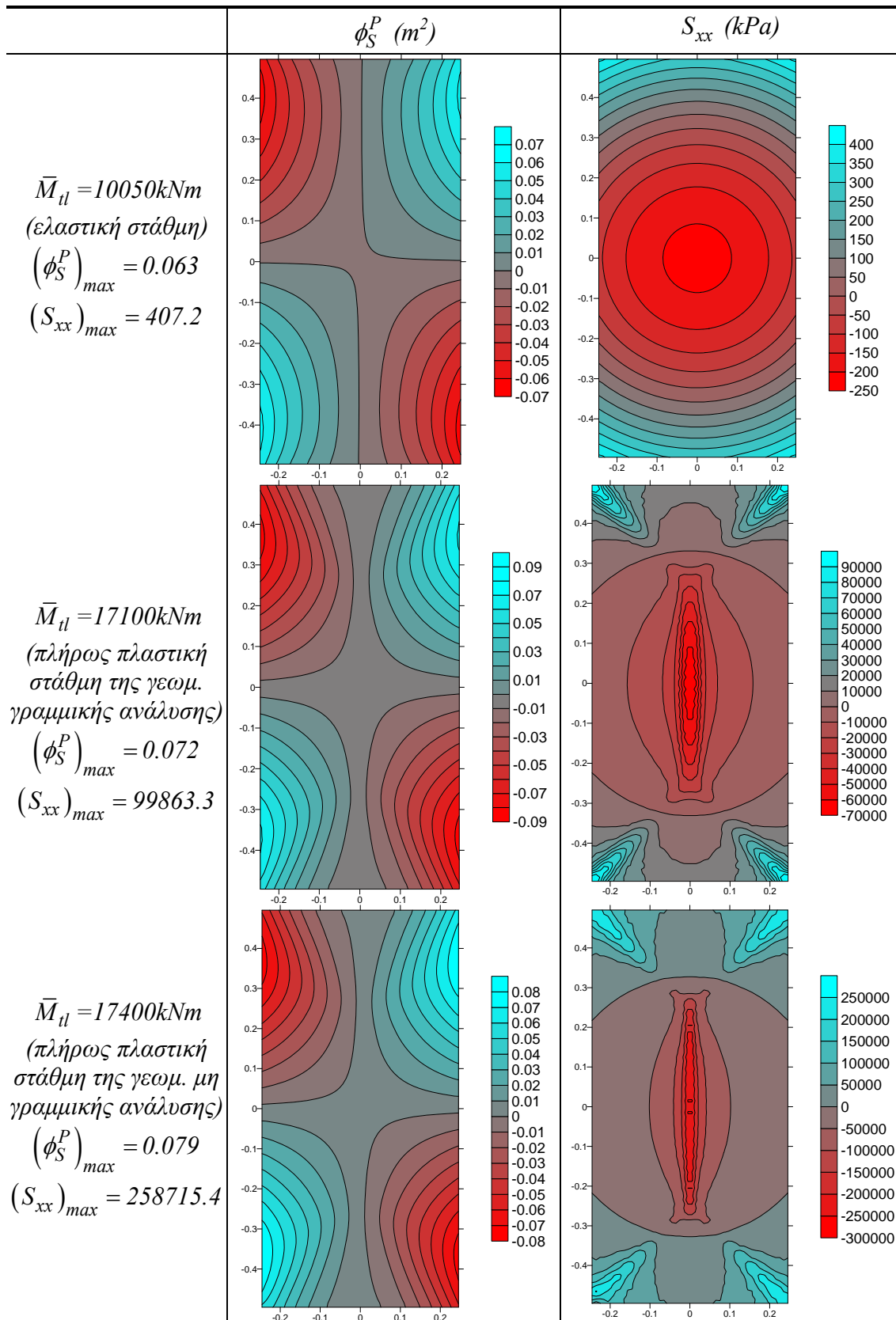
4.4.3 Παράδειγμα 3

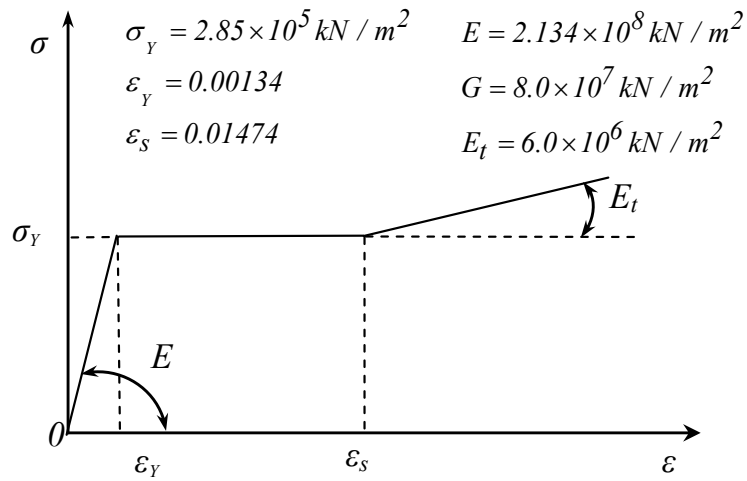
Προκειμένου να διαπιστωθεί το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθοδολογίας, ως τρίτο παράδειγμα μελετήθηκε ελαστική - ιδεωδώς πλαστική ($E = 2.0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_Y = 2.4 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, $h = 0$) ράβδος διατομής περίπλοκου σχήματος που διακρίνεται στο Σχ.4.7 ($A = 2.186 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, $(I_t)_0 = 2.223 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I_P = 1.432 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $I_{PP} = 1.463 \times 10^{-6} \text{ m}^6$), υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και μηδενική αξονική δύναμη στο δεξιό της άκρο. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο ενώ χρησιμοποιήθηκαν 700 και 900 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα.

Στο Σχ.4.8 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσεως του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_t με ή χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας, από όπου διαπιστώνεται η μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας εξαιτίας της πλαστικοποίησης της ράβδου καθώς και η επακόλουθη πλαστική κατάρρευση της ράβδου στην περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης. Όπως και στο δεύτερο παράδειγμα, η γεωμετρική μη γραμμικότητα επηρεάζει σημαντικά τη μετελαστική συμπεριφορά αυξάνοντας αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα και έχοντας ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης.

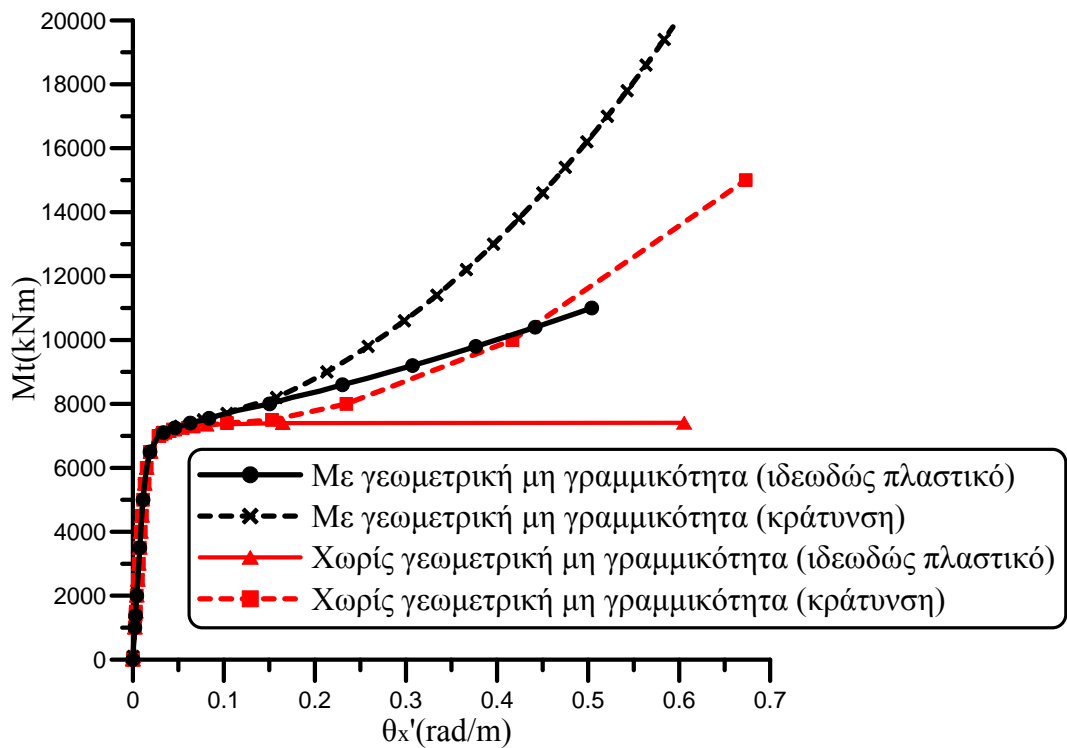
Στον Πίνακα 4.7 παρουσιάζεται η πλήρως πλαστική ροπή και ο συντελεστής σχήματος της διατομής, έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο (με ή χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας) και τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) [Wagner and Gruttmann 2001] (χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα). Επιβεβαιώνεται η πολύ καλή συμφωνία της προτεινόμενης μεθόδου με τη FEM καθώς και η μεγάλη σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Τέλος, στο Σχ.4.9 παρουσιάζεται η κατανομή των ορθών τάσεων S_{xx} για $M_t = 8000 \text{ kNm}$ (γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση). Επισημαίνεται ότι η διατομή της ράβδου είναι μονοσυμμετρική, συνεπώς δεν πληροί τον περιορισμό του εδαφίου 4.1 αναφορικά με το σχήμα της διατομής. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα την καταπόνηση της ράβδου από παρασιτικά καμπτικά εντατικά μεγέθη, τα οποία αγνοήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης.

Πίνακας 4.3. Κατανομή πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή της ράβδου του παραδείγματος 1.

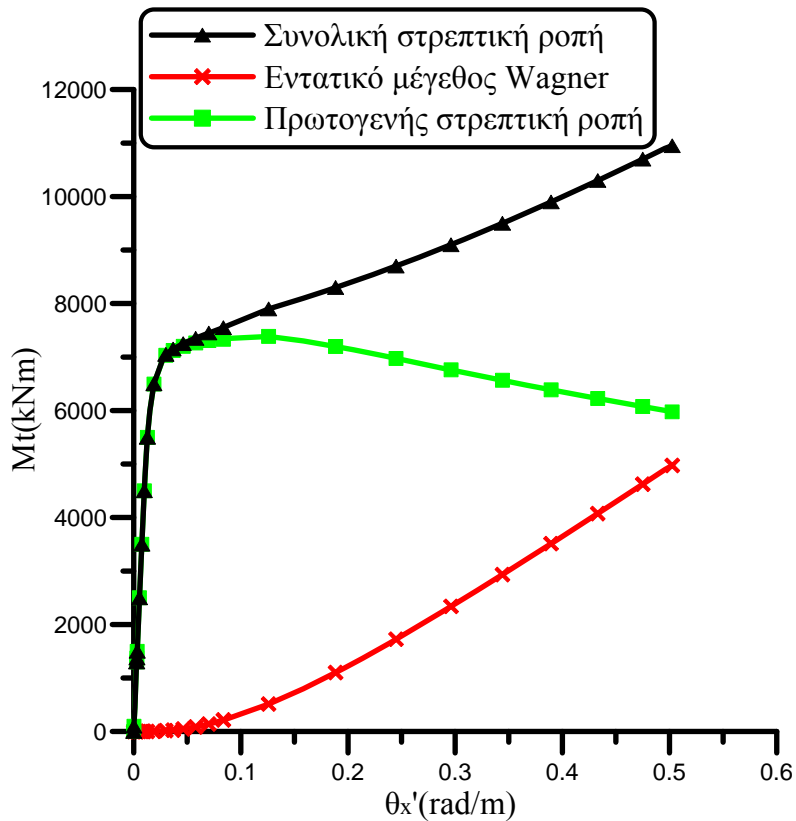




Σχήμα 4.4. Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης του ισότροπα κρατυνόμενου υλικού της ράβδου του παραδείγματος 2.



Σχήμα 4.5. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστροφής για δύο περιπτώσεις υλικών της ράβδου του παραδείγματος 2.

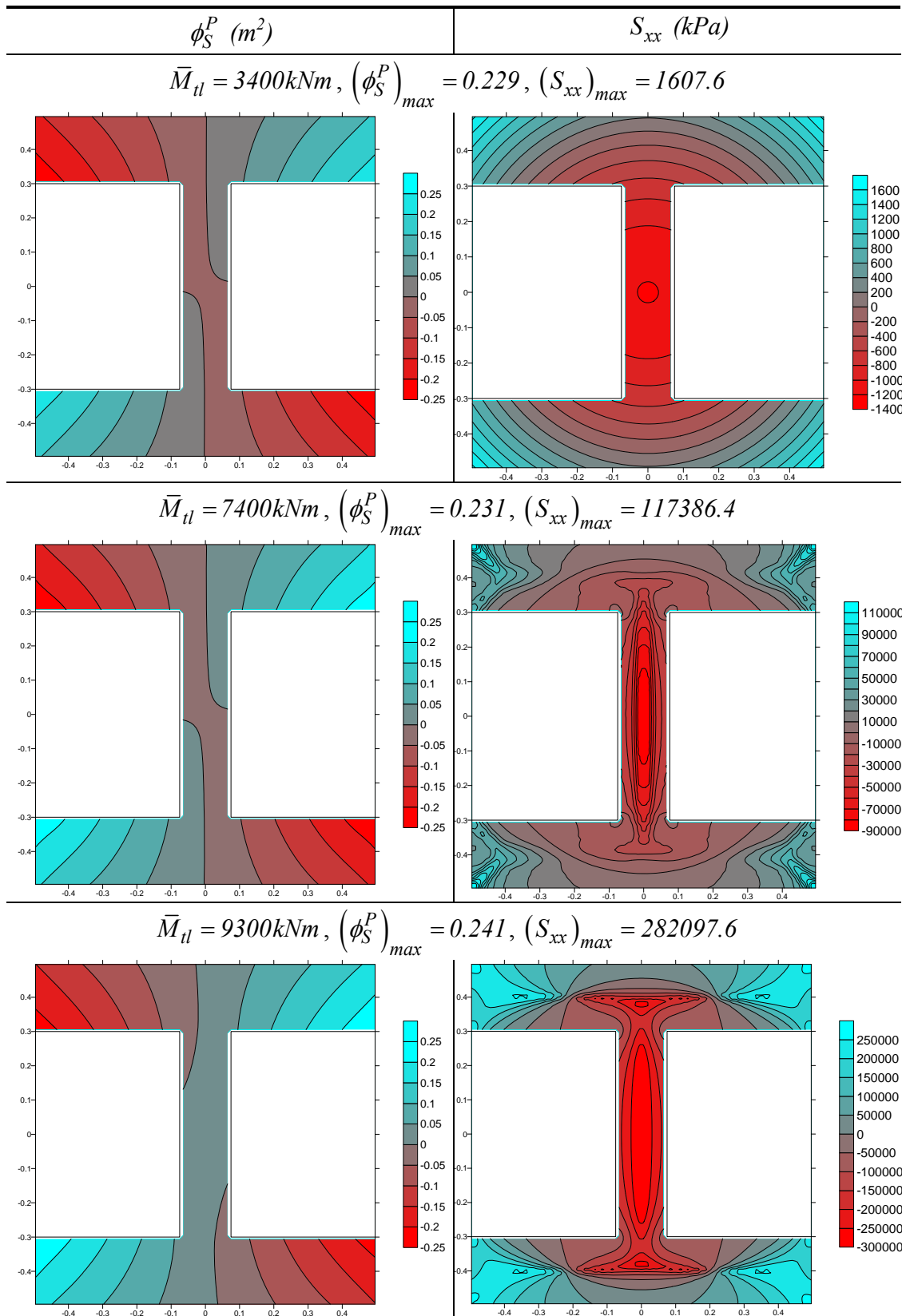


Σχήμα 4.6. Πρωτογενής στρεπτική ροπή και εντατικό μέγεθος Wagner για διάφορες τιμές της συστροφής της ράβδου του παραδείγματος 2 (περίπτωση ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού).

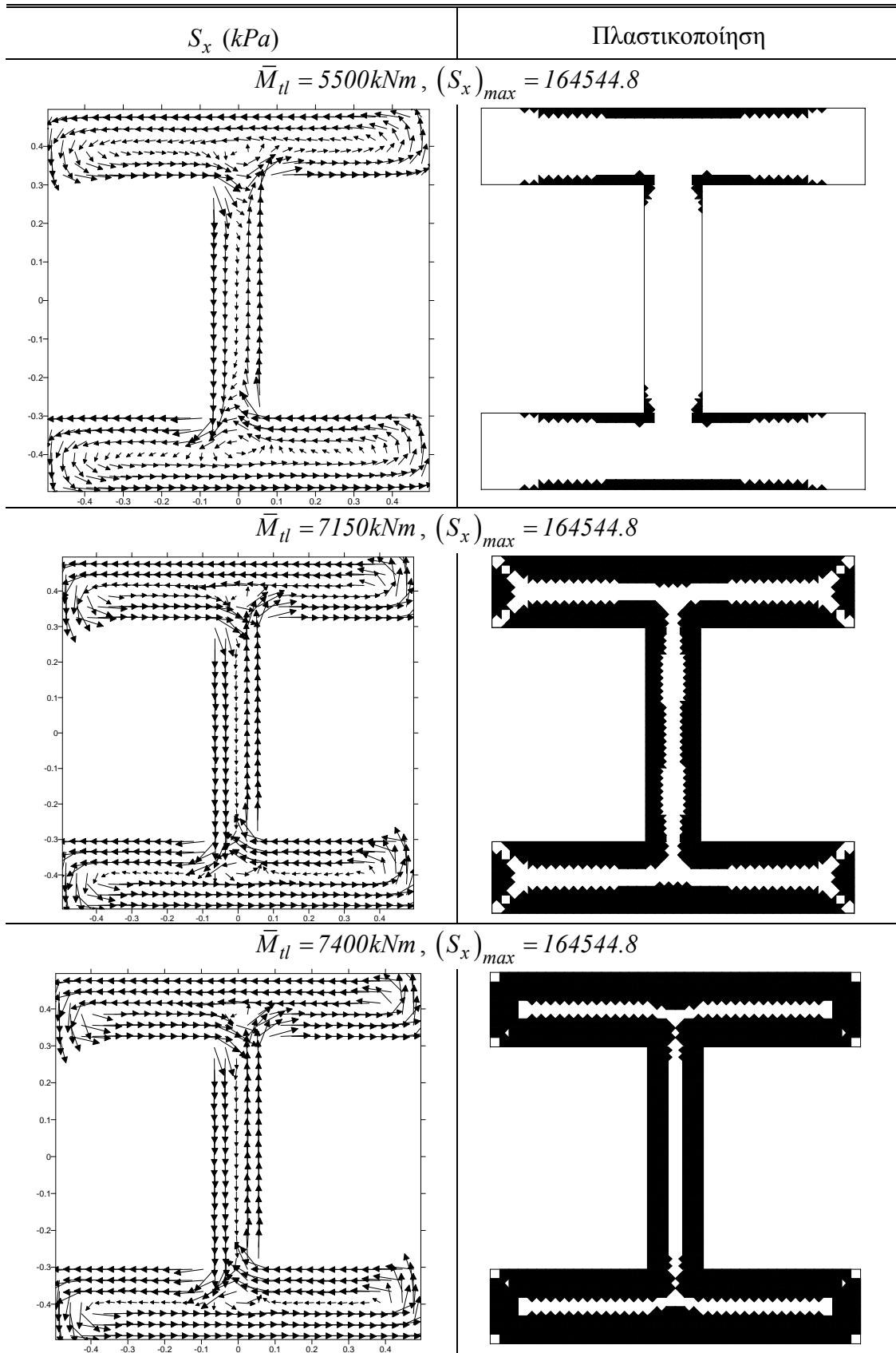
Πίνακας 4.4. Πλήρως πλαστική ροπή (kNm) και συντελεστής σχήματος της διατομής της ράβδου του παραδείγματος 2.

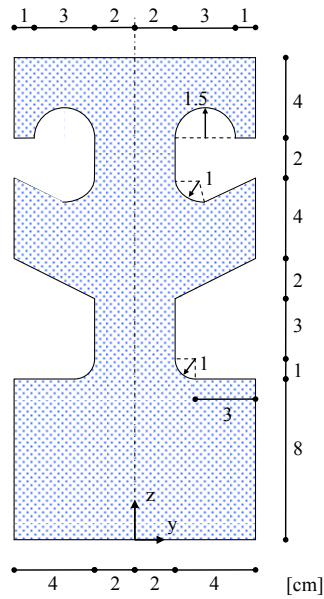
	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα			Με γεωμετρική μη γραμμικότητα
	Προσομοίωμα "mitre" [Billingham et al. 1992]	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)	Απόκλιση (%)	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)
M_t^u	7346.2	7411.0	0.88	9300.0
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	-	2.180	-	2.735

Πίνακας 4.5. Κατανομή πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή της ράβδου του παραδείγματος 2.

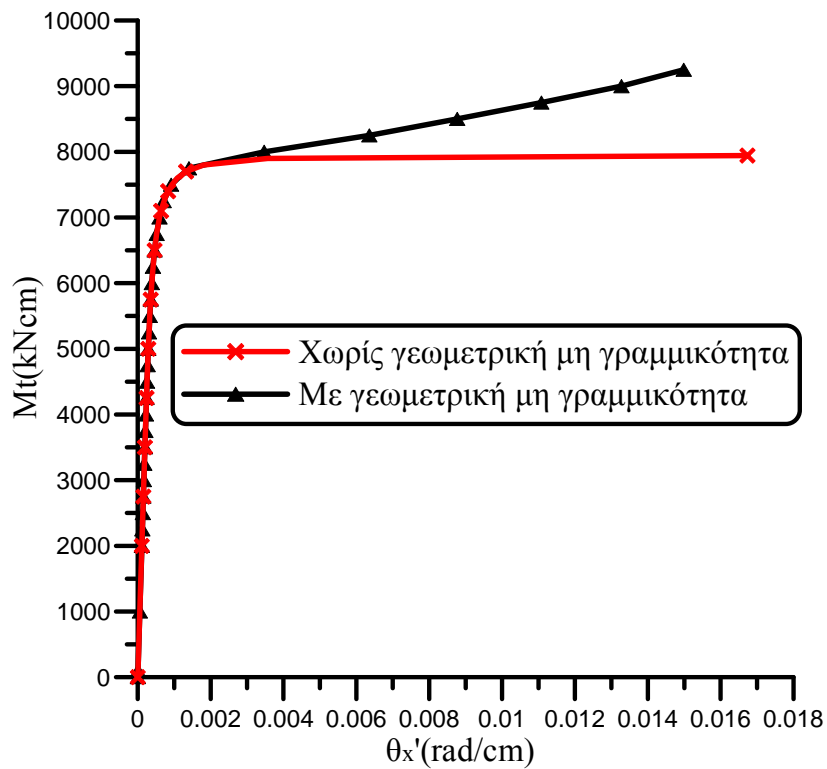


Πίνακας 4.6. Ροή διατμητικών τάσεων και αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης στη διατομή της ράβδου του παραδείγματος 2.





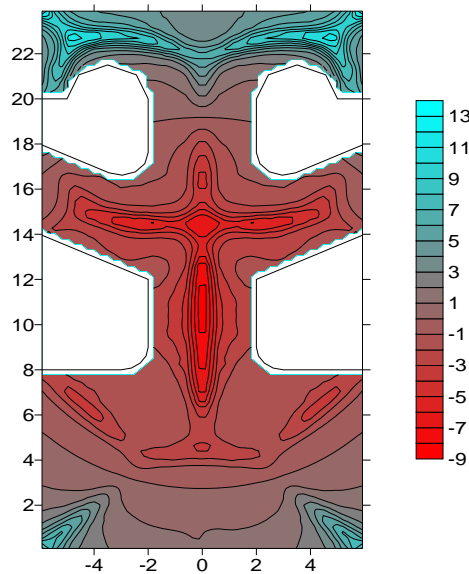
Σχήμα 4.7. Διατομή της ράβδου του παραδείγματος 3.



Σχήμα 4.8. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστρώσης για τη ράβδο του παραδείγματος 3.

Πίνακας 4.7. Πλήρως πλαστική ροπή και συντελεστής σχήματος της διατομής της ράβδου του παραδείγματος 3.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα			Με γεωμετρική μη γραμμικότητα
	FEM [Wagner and Gruttmann 2001]	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)	Απόκλιση (%)	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)
M_t^u	7714.9	7943.4	2.96	9000.0
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	2.728	2.626	3.74	2.975

Σχήμα 4.9. Κατανομή ορθών τάσεων S_{xx} (kPa) στη διατομή της ράβδου του παραδείγματος 3 ($(S_{xx})_{max} = 13.375$).

4.4.4 Παράδειγμα 4

Προκειμένου να ποσοτικοποιηθούν τα σφάλματα της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ) στην ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη, ως τέταρτο παράδειγμα μελετήθηκαν τρεις ελαστικές - ιδεωδώς πλαστικές ($E = 2.134 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 8.0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_Y = 2.85 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, $h = 0$) ράβδοι με διαφορετικές διατομές I κοινού εμβαδού $A = 0.49 \text{ m}^2$, υποβαλλόμενες σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και μηδενική αξονική δύναμη στο δεξιό τους άκρο. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο ενώ χρησιμοποιήθηκαν 500 και 700 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα. Η πρώτη διατομή έχει πλάτος πελμάτων $b_1 = b_2 = 0.85 \text{ m}$, καθαρό ύψος κορμού $b_3 = 0.35 \text{ m}$, πάχος πελμάτων $t_1 = t_2 = 0.25 \text{ m}$ και πάχος κορμού $t_3 = 0.1875 \text{ m}$ ($I_P = 1.801 \times 10^{-1} \text{ m}^4$, $I_{PP} = 8.474 \times 10^{-2} \text{ m}^6$), η δεύτερη διατομή έχει αντίστοιχες διαστάσεις $b_1 = b_2 = 1.00 \text{ m}$, $b_3 = 0.60 \text{ m}$, $t_1 = t_2 = 0.20 \text{ m}$, $t_3 = 0.15 \text{ m}$ (βλ. παράδειγμα

2), ενώ για την τρίτη διατομή έχουμε $b_1 = b_2 = 1.27\text{ m}$, $b_3 = 0.97\text{ m}$, $t_1 = t_2 = 0.15\text{ m}$, $t_3 = 0.1125\text{ m}$ ($I_P = 6.691 \times 10^{-2}\text{ m}^4$, $I_{PP} = 1.232 \times 10^{-2}\text{ m}^6$).

Στον Πίνακα 4.8 παρουσιάζεται η στρεπτική σταθερά $(I_t)_0$ έτσι όπως προέκυψε από την προτεινόμενη μέθοδο και τη ΘΛΔ [Βάγιας 2003]. Διαπιστώνεται αύξηση του σφάλματος της ΘΛΔ όσο αυξάνονται τα πάχη των πελμάτων και του κορμού. Επιπλέον παρατηρείται ότι στις δύο πρώτες διατομές η στρεπτική σταθερά που προκύπτει από τη ΘΛΔ είναι μεγαλύτερη αυτής της προτεινόμενης μεθόδου. Στον Πίνακα 4.9 παρουσιάζονται οι πλήρως πλαστικές ροπές M_t^u των διατομών χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας, έτσι όπως προέκυψαν από την προτεινόμενη μέθοδο και τις εκφράσεις

$$M_t^u = \frac{\sigma_Y}{2\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 (b_i t_i^2) \quad M_t^u = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \left[b_1 t_1^2 \left(1 - \frac{3t_1}{b_1} \right) + b_3 \frac{t_3^2}{2} + \frac{t_3^3}{6} \right] \quad (4.4.1,2)$$

Πίνακας 4.8. Στρεπτικές σταθερές $(I_t)_0$ ($\times 10^{-3}\text{ m}^4$) των διατομών των ράβδων του παραδείγματος 4.

	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)	ΘΛΔ [Βάγιας 2003]	Απόκλιση (%)
Διατομή 1	9.166	9.623	4.99
Διατομή 2	5.870	6.008	2.36
Διατομή 3	3.377	3.318	1.78

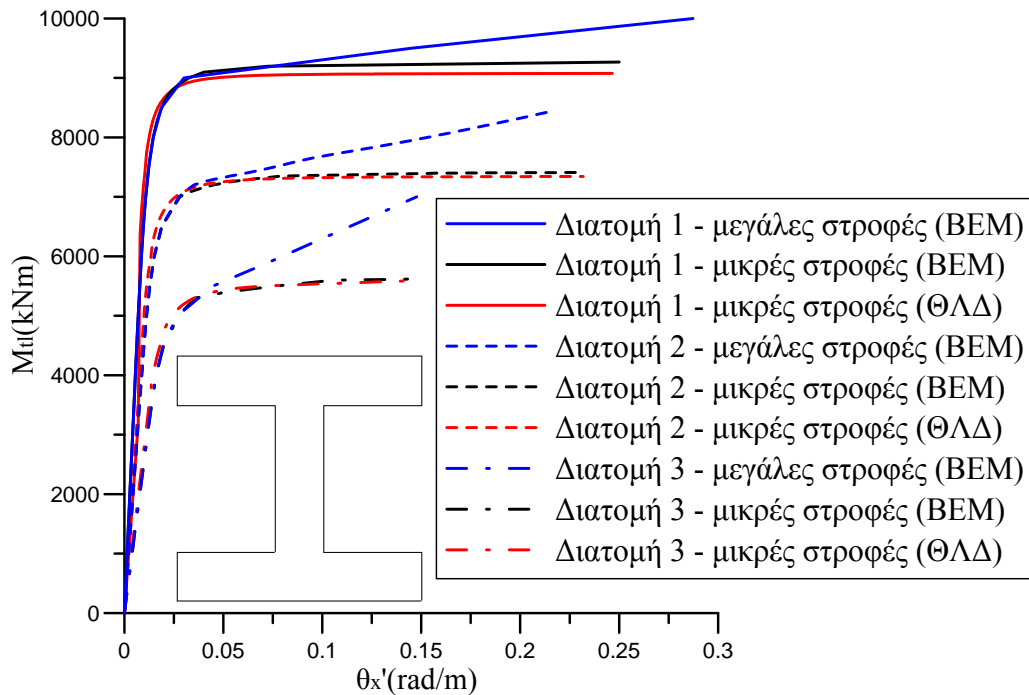
Πίνακας 4.9. Πλήρως πλαστικές ροπές M_t^u (kNm) των ράβδων του παραδείγματος 4.

	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM)	ΘΛΔ (εξ.(4.4.1))	ΘΛΔ (εξ.(4.4.2))
Διατομή 1	9291.1	9753.8	9077.6
Διατομή 2	7412.1	7346.2	7692.5
Διατομή 3	5621.9	5711.9	5565.8

που έχουν προταθεί από τους Βάγια [2003] και Billingham et al. [1992], αντίστοιχα και έχουν εξαχθεί με τη βοήθεια της ΘΛΔ. Συμπεραίνεται ότι τα αποτελέσματα της εξ.(4.4.2) είναι πιο κοντά στα αντίστοιχα της προτεινόμενης μεθόδου. Παρατηρείται ότι γενικά η εξίσωση αυτή δίδει πιο συντηρητικές εκτιμήσεις της M_t^u συγκριτικά με την εξ. (4.4.1).

Στο Σχ.4.10 παρουσιάζεται η συστροφή θ_x' συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_t των τριών ράβδων έτσι όπως προέκυψε από την προτεινόμενη μέθοδο (με ή χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα) και τη ΘΛΔ [Billingham et al. 1992] (χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα). Από τον υπολογισμό αυτό διαπιστώνεται ότι κατά την

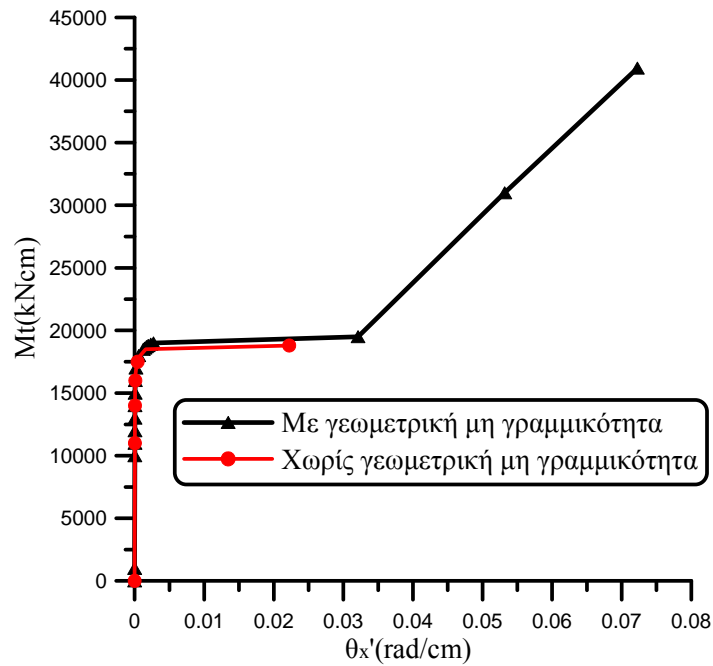
επέκταση της $\Theta\Lambda\Delta$ στην ανάλυση ελαστοπλαστικών ράβδων, η μέγιστη ροπή που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο χωρίς να αναπτυχθούν πλαστικές παραμορφώσεις υπερεκτιμάται, ενώ υποεκτιμάται η πλήρως πλαστική ροπή που μπορεί να αναληφθεί. Επίσης, από το Σχ.4.10 και πάλι προκύπτει ότι εξαιτίας των μεγάλων στρεπτικών στροφών ο μετελαστικός κλάδος $\bar{M}_{\theta} - \theta'_x$ δεν καταλήγει ασυμπτωτικά σε κάποια συγκεκριμένη τιμή. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο διακρίνεται ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα είναι εντονότερη στις ράβδους με πιο λεπτότοιχες διατομές.



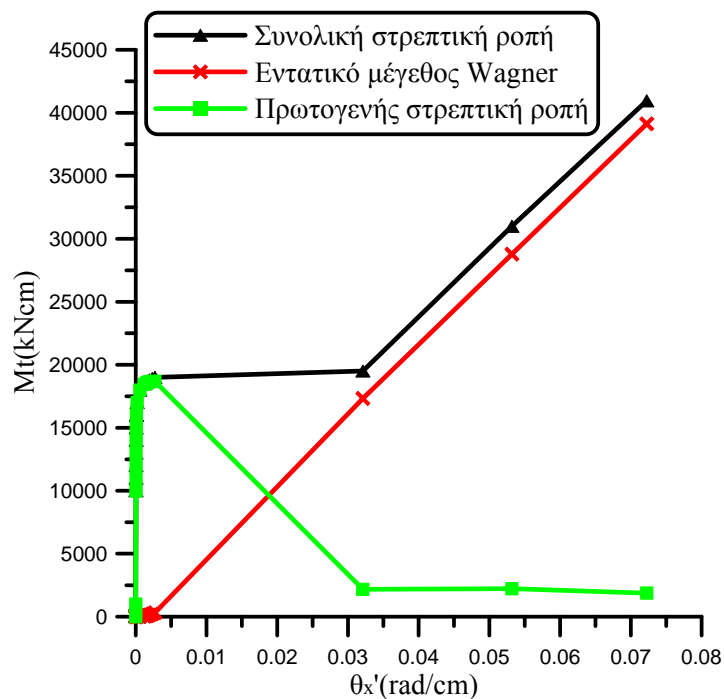
Σχήμα 4.10. Καμπύλες στρεπτικής ροπής - συστροφής για τις ράβδους του παραδείγματος 4.

4.4.5 Παράδειγμα 5

Προκειμένου να διερευνηθεί η συνδυασμένη επιρροή υλικής και γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε σύνθετες ράβδους, ως πέμπτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος σύνθετης διατομής με έγκλεισμα του Σχ.1.12 (βλ. κεφ. 1, $L=30cm$, ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό μητρικό σκυρόδεμα ορθογωνικού σχήματος (υλικό αναφοράς) με $E_1 = 3.23184 \times 10^7 kN/m^2$, $G_1 = 1.3466 \times 10^7 kN/m^2$, $(\sigma_Y)_1 = 2.0 \times 10^4 kN/m^2$, $h_1 = 0$ και ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό μεταλλικό έγκλεισμα I $E_2 = 2.1 \times 10^8 kN/m^2$, $G_2 = 8.75 \times 10^7 kN/m^2$, $(\sigma_Y)_2 = 2.85 \times 10^5 kN/m^2$, $h_2 = 0$), υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και μηδενική αξονική δύναμη στο δεξιό της άκρο ($A = 1.926 \times 10^{-1} m^2$, $(I_t)_0 = 2.249 \times 10^{-3} m^4$, $I_P = 3.672 \times 10^{-3} m^4$, $I_{PP} = 9.990 \times 10^{-5} m^6$). Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο ενώ χρησιμοποιήθηκαν 600 και 900 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα.



Σχήμα 4.11. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστρώφης της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 5.



Σχήμα 4.12. Πρωτογενής στρεπτική ροπή και εντατικό μέγεθος Wagner για διάφορες τιμές της συστρώφης της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 5.

Στο Σχ.4.11 παρουσιάζεται η συστρώφη θ_x' συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_H λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Διαπιστώνεται η μικρή σημασία των μεγάλων στρεπτικών στρωφών στη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου για μικρές τιμές της συστρώφης, η οποία

ωστόσο αυξάνεται αισθητά σε υψηλότερες τιμές. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, παρατηρείται ότι η ράβδος δεν οδηγείται σε πλαστική κατάρρευση όταν λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα. Επιπλέον, στο Σχ.4.12 απεικονίζεται η συνεισφορά των διατμητικών (πρωτογενής στρεπτική ροπή M_t^P) και των ορθών (εντατικό μέγεθος Wagner $M_R\theta'_x$) συνιστωσών του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff στη συνολική στρεπτική ροπή που καταπονεί τη ράβδο για διάφορες τιμές της συστροφής. Διαπιστώνεται ότι αρχικά το $M_R\theta'_x$ είναι αμελητέο, ενώ για υψηλότερες τιμές της συστροφής αποτελεί το κυρίαρχο εντατικό μέγεθος της ράβδου, το οποίο αυξάνεται χωρίς να λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Στον Πίνακα 4.10 παρουσιάζεται η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, η πλήρως πλαστική ροπή και ο συντελεστής σχήματος της διατομής, λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα.

Στον Πίνακα 4.11 παρουσιάζεται για την περίπτωση μεγάλων στρεπτικών στροφών η κατανομή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και της ορθής συνιστώσας του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff S_{xx} για διάφορες στάθμες εξωτερικής φόρτισης \bar{M}_H (ελαστική, ελαστοπλαστική και πλήρως πλαστική της γεωμετρικά μη γραμμικής ανάλυσης). Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τους Πίνακες 4.3, 4.5 του πρώτου και δεύτερου παραδείγματος, αντίστοιχα (ανάλυση ομογενών ράβδων). Τέλος, στον Πίνακα 4.12 διακρίνονται για διάφορες ελαστοπλαστικές στάθμες φόρτισης η ροή διατμητικών τάσεων S_x και η αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης (γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση).

Πίνακας 4.10. Μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων (kNcm), πλήρως πλαστική ροπή (kNcm) και συντελεστής σχήματος της διατομής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 5.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα	Με γεωμετρική μη γραμμικότητα	Απόκλιση (%)
M_t^{el}	10000	10000	0.00
M_t^u	18798	19500	3.73
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	1.8798	1.950	3.73

4.4.6 Παράδειγμα 6

Προκειμένου να διερευνηθεί η συνδυασμένη επιρροή υλικής και γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε σύνθετες ράβδους, ως έκτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος σύνθετης διατομής με υλικά σε επαφή του Σχ.4.13 ($L=30cm$, ράβδος διατομής I ισότροπα κρατυνόμενου μεταλλικού υλικού με $E_2 = 2.1 \times 10^8 kN/m^2$, $G_2 = 8.75 \times 10^7 kN/m^2$, $(\sigma_Y)_2 = 2.85 \times 10^5 kN/m^2$, $(E_t)_2 = 6.0 \times 10^6 kN/m^2$, μερικώς εγκιβωτισμένη σε υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και μηδενική αξονική δύναμη στο δεξιό της άκρο ($A = 1.326 \times 10^{-1} m^2$, $(I_t)_0 = 6.696 \times 10^{-4} m^4$, $I_P = 1.822 \times 10^{-3} m^4$,

$I_{PP} = 3.562 \times 10^{-5} m^6$). Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο ενώ χρησιμοποιήθηκαν 550 και 880 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα.

Στο Σχ.4.14 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_{II} λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Διαπιστώνεται η μεγάλη σημασία των μεγάλων στρεπτικών στροφών στη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Επιπλέον, στο Σχ.4.15 απεικονίζεται η συνεισφορά της πρωτογενούς στρεπτικής ροπής M_t^P και του εντατικού μεγέθους Wagner $M_R \theta'_x$ στη συνολική στρεπτική ροπή που καταπονεί τη ράβδο για διάφορες τιμές της συστροφής, από όπου διαπιστώνονται τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από το Σχ.4.6 του παραδείγματος 2 (ανάλυση ομογενούς ράβδου).

Στους Πίνακες 4.14α,β παρουσιάζεται για την περίπτωση μεγάλων στρεπτικών στροφών η κατανομή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και των ορθών τάσεων S_{xx} για διάφορες στάθμες εξωτερικής φόρτισης \bar{M}_{II} . Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τους Πίνακες 4.3, 4.5, 4.11 του πρώτου, δεύτερου και πέμπτου παραδείγματος, αντίστοιχα. Τέλος, στον Πίνακα 4.15 διακρίνονται για διάφορες ελαστοπλαστικές στάθμες φόρτισης η ροή διατμητικών τάσεων S_x και η αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης (γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση).

4.4.7 Παράδειγμα 7

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή γενικών συνοριακών συνθηκών αξονικής παρεμπόδισης στην ανάλυση ομογενών ράβδων υπό μη γραμμική ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη, ως έβδομο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος διατομής I του παραδείγματος 2 για την περίπτωση ισότροπα κρατυνόμενου υλικού του οποίου η καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης παρουσιάζεται στο Σχ.4.4. Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή στο δεξί της άκρο, το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο, ενώ χρησιμοποιήθηκαν 500 και 700 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις ελαστικής αξονικής παρεμπόδισης με $k_u = 0.1EA/l$ και $k_u = 0.01EA/l$ καθώς και πλήρης αξονική παρεμπόδιση για το δεξί άκρο της ράβδου.

Στο Σχ.4.16 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_{II} για τις τρεις περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται για λόγους σύγκρισης και οι καμπύλες $\bar{M}_{II} - \theta'_x$ της περίπτωσης της πλήρους αξονικής ελευθέρωσης που παρουσιάζονται στο Σχ.4.5 του παραδείγματος 2 με ή χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Διαπιστώνεται ότι η αξονική παρεμπόδιση παίζει σημαντικό ρόλο στη συμπεριφορά της ράβδου και αυξάνει σημαντικά τη στρεπτική στιβαρότητά της. Το φαινόμενο αυτό γίνεται πιο αισθητό όσο περισσότερο αυξάνει ο βαθμός αξονικής παρεμπόδισης. Τέλος, στον Πίνακα 4.16 παρουσιάζεται η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων M_t^{el} , η πλήρως πλαστική ροπή M_t^u , οι αντίστοιχες τιμές συστροφής θ'_x , το εντατικό μέγεθος Wagner $M_R \theta'_x$ για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^u$, η αναπτυσσόμενη (εφελκυστική) αξονική δύναμη N για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^u$ και

ο συντελεστής σχήματος της διατομής $\kappa = M_t^u / M_t^{el}$, έτσι όπως προέκυψαν για διάφορες περιπτώσεις ανάλυσης. Επισημαίνεται και πάλι ότι M_t^u είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο ή η ροπή για την οποία πλαστικοποιείται το σύνολο των σημείων ελέγχου της διατομής όταν αγνοείται ή λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα αντίστοιχα.

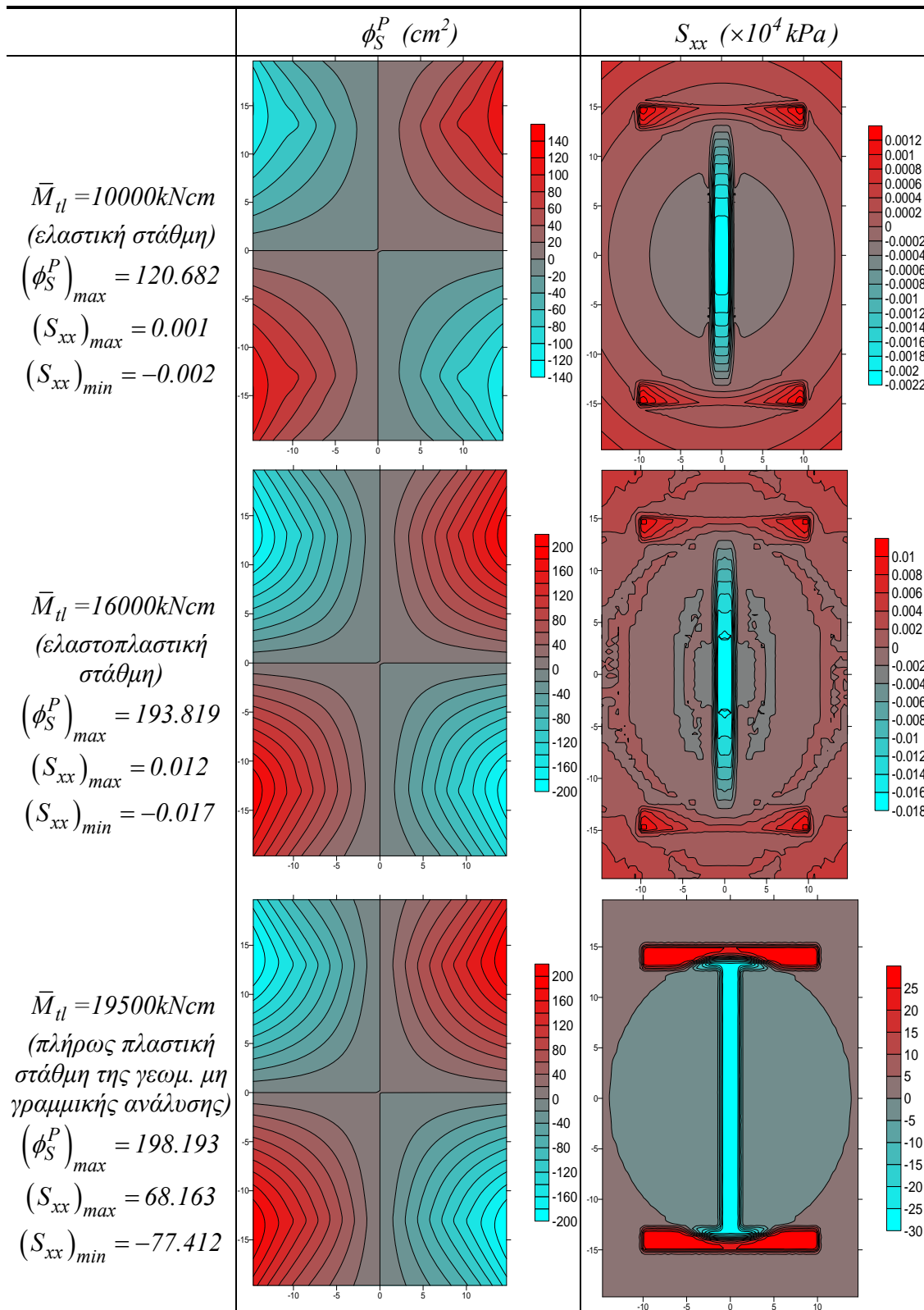
4.4.8 Παράδειγμα 8

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή γενικών συνοριακών συνθηκών αξονικής παρεμπόδισης στην ανάλυση σύνθετων ράβδων υπό μη γραμμική ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη, ως όγδοο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος σύνθετης διατομής με έγκλεισμα του παραδείγματος 5, υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή στο δεξιό της άκρο. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο, ενώ χρησιμοποιήθηκαν 600 και 900 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα. Μελετήθηκε περίπτωση ελαστικής αξονικής παρεμπόδισης με $k_u = 0.002E_1A/l$ καθώς και πλήρης αξονική παρεμπόδιση για το δεξιό άκρο της ράβδου.

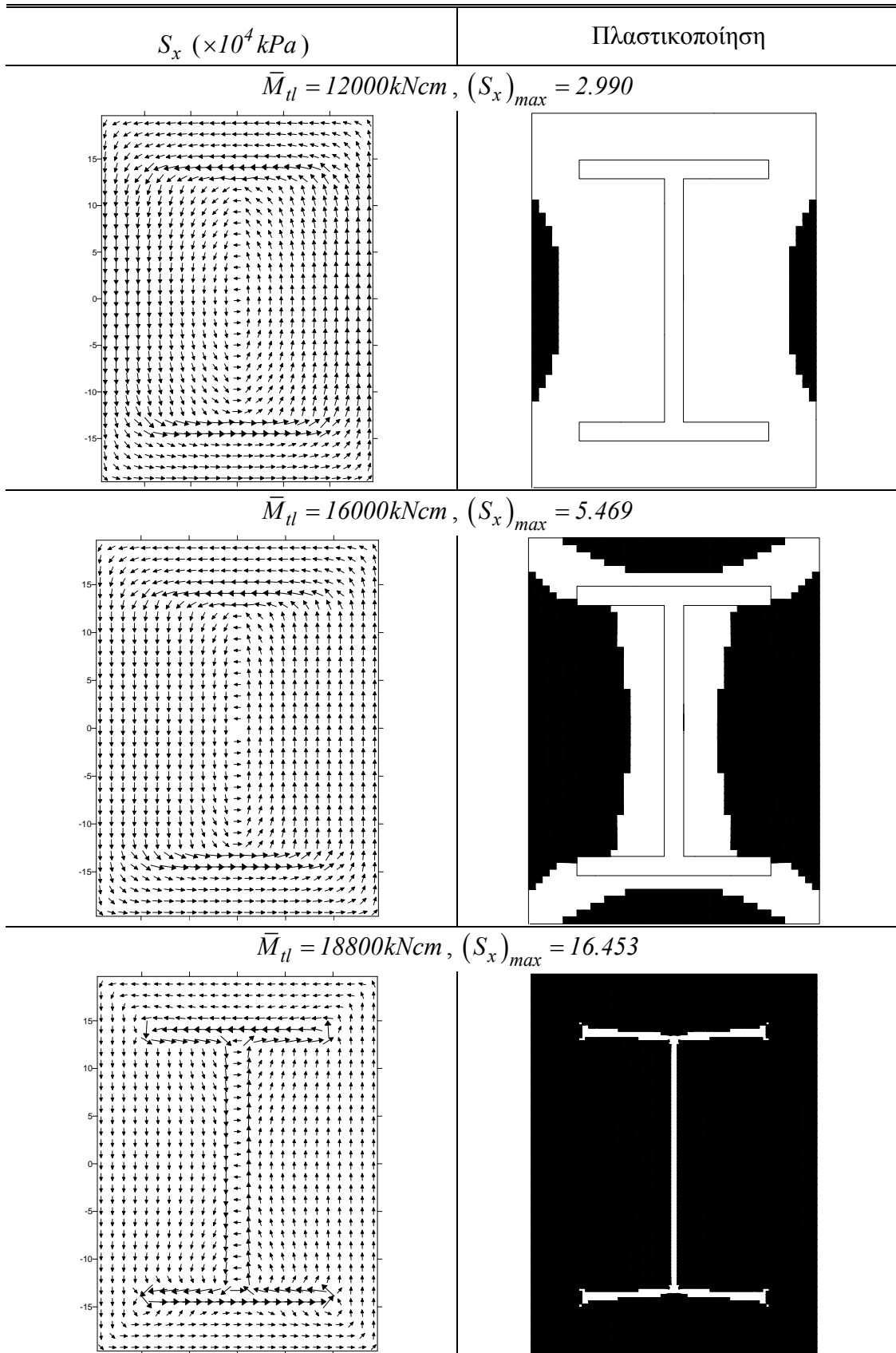
Στο Σχ.4.17 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_H για τις δύο περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται για λόγους σύγκρισης και οι καμπύλες $\bar{M}_H - \theta'_x$ της περίπτωσης της πλήρους αξονικής ελευθέρωσης που παρουσιάζονται στο Σχ.4.11 του παραδείγματος 5 με ή χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα. Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που διατυπώθηκαν με τη βοήθεια των Σχ.4.11, 4.16 των παραδειγμάτων 5 και 7, αντίστοιχα.

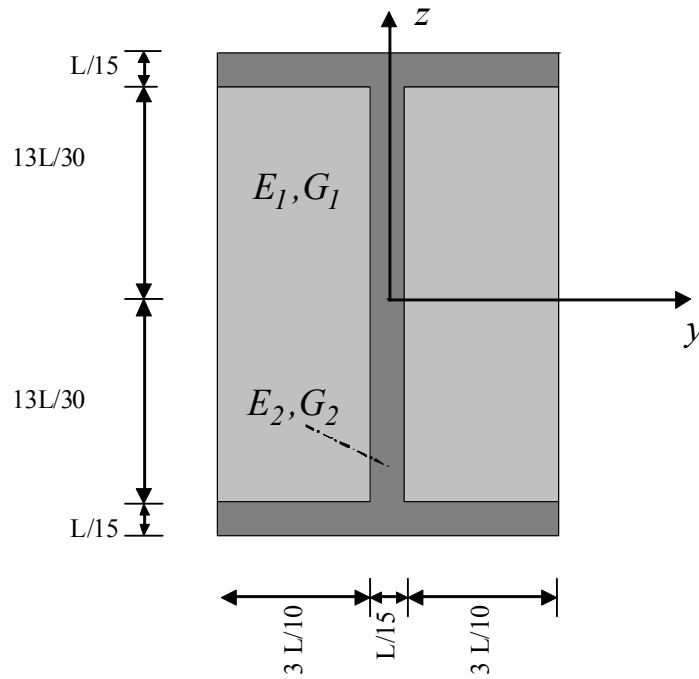
Στο Σχ.4.18 απεικονίζεται για την περίπτωση της πλήρους αξονικής παρεμπόδισης η συνεισφορά της πρωτογενούς στρεπτικής ροπής M_t^P και του εντατικού μεγέθους Wagner $M_R\theta'_x$ στη συνολική στρεπτική ροπή που καταπονεί τη ράβδο για διάφορες τιμές της συστροφής, σε συνδυασμό με την αναπτυσσόμενη (εφελκυστική) αξονική δύναμη N . Διαπιστώνεται ότι αρχικά το $M_R\theta'_x$ είναι αμελητέο, ενώ για υψηλότερες τιμές της συστροφής αποτελεί το κυρίαρχο στρεπτικό εντατικό μέγεθος της ράβδου. Τέλος, στον Πίνακα 4.17 παρουσιάζεται η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων M_t^{el} , η πλήρως πλαστική ροπή M_t^u , οι αντίστοιχες τιμές συστροφής θ'_x , το εντατικό μέγεθος Wagner $M_R\theta'_x$ για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_H = M_t^u$, η αξονική δύναμη N για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_H = M_t^u$ και ο συντελεστής σχήματος της διατομής $\kappa = M_t^u / M_t^{el}$, έτσι όπως προέκυψαν για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ανάλυσης. Διαπιστώνεται η σημαντική επιρροή της αξονικής συνοριακής συνθήκης στο μέγεθος της συστροφής $(\theta'_x)^u$ και της αξονικής δύναμης $(N)^u$ καθώς και η μικρή σημασία της στον προσδιορισμό της M_t^u .

Πίνακας 4.11. Κατανομή πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 5.

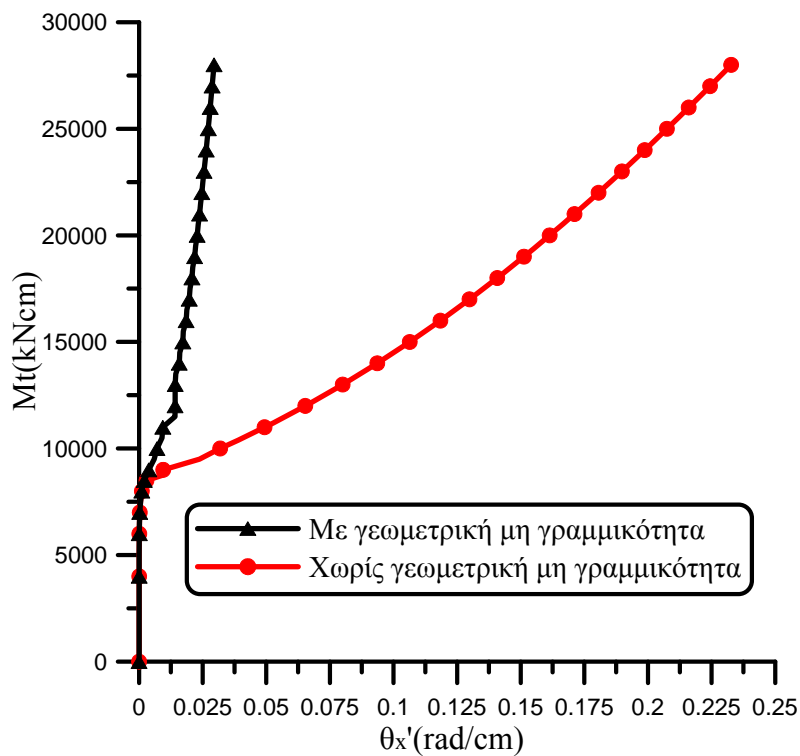


Πίνακας 4.12. Ροή διατμητικών τάσεων και αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 5.

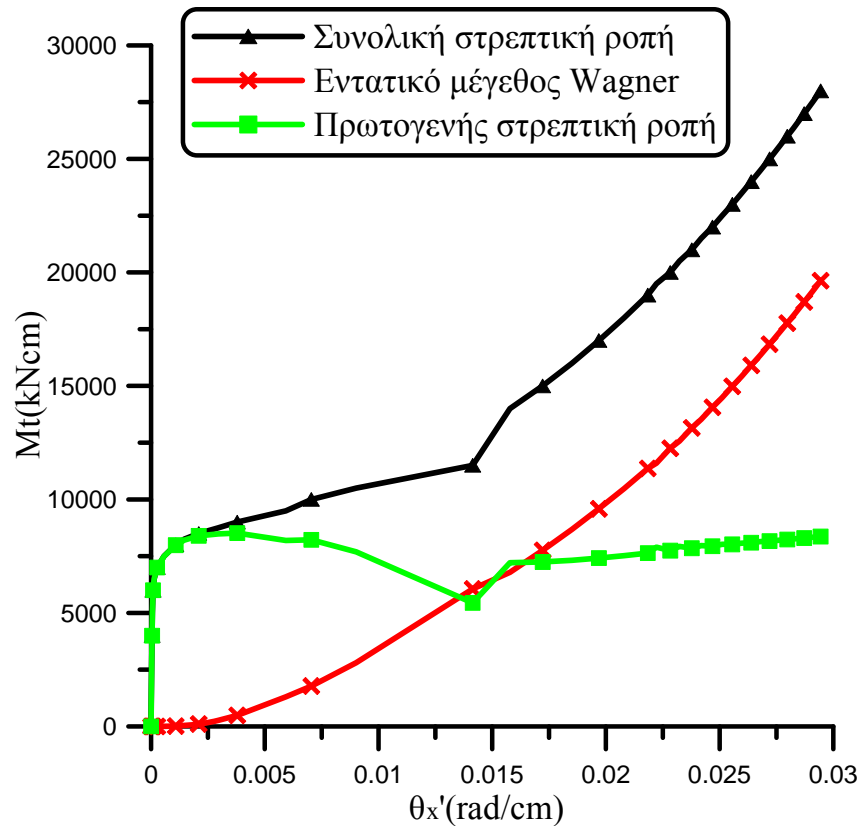




Σχήμα 4.13. Σύνθετη διατομή με υλικά σε επαφή του παραδείγματος β.



Σχήμα 4.14. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστροφής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος β.

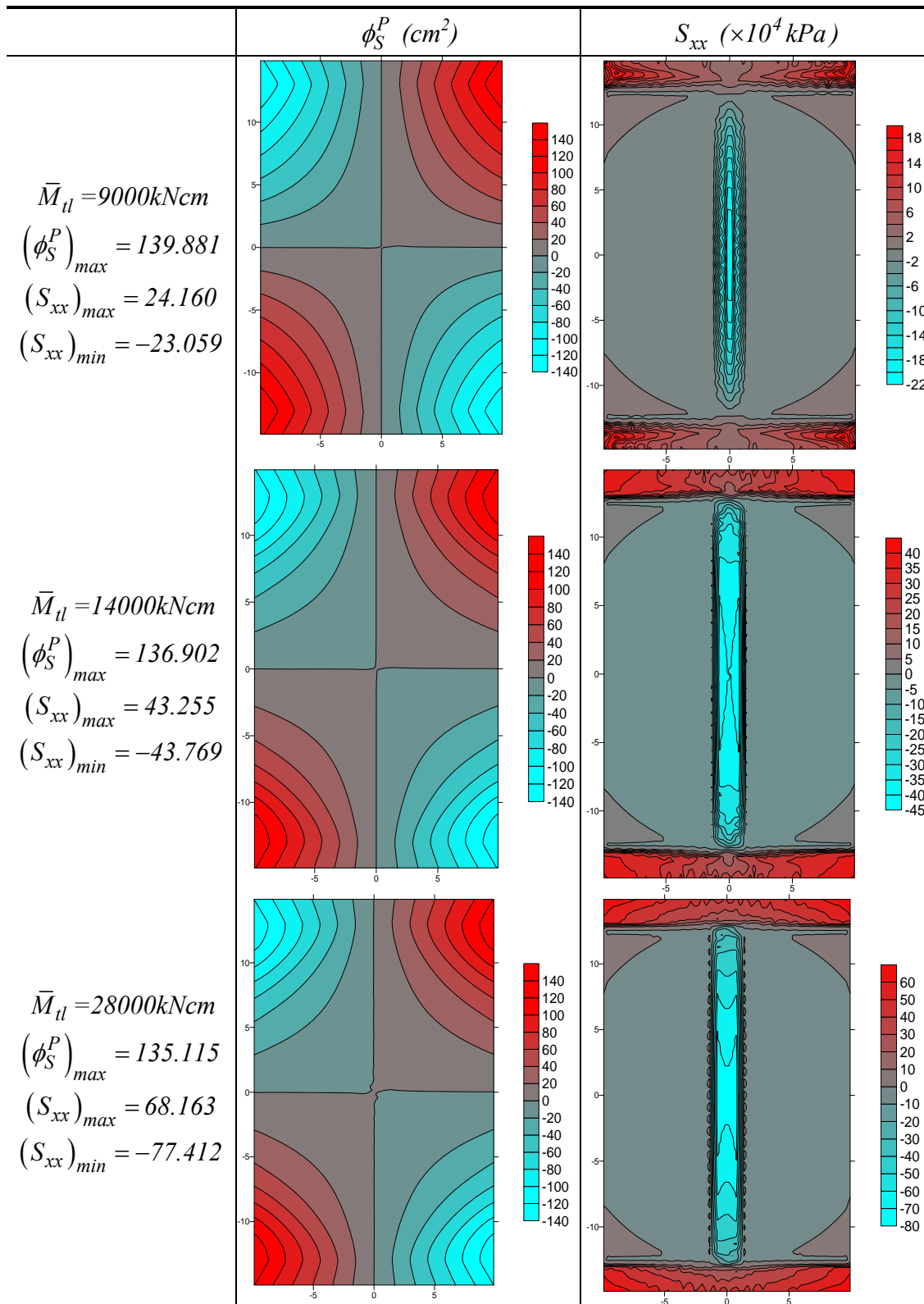


Σχήμα 4.15. Πρωτογενής στρεπτική ροπή και εντατικό μέγεθος Wagner για διάφορες τιμές της συστροφής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6.

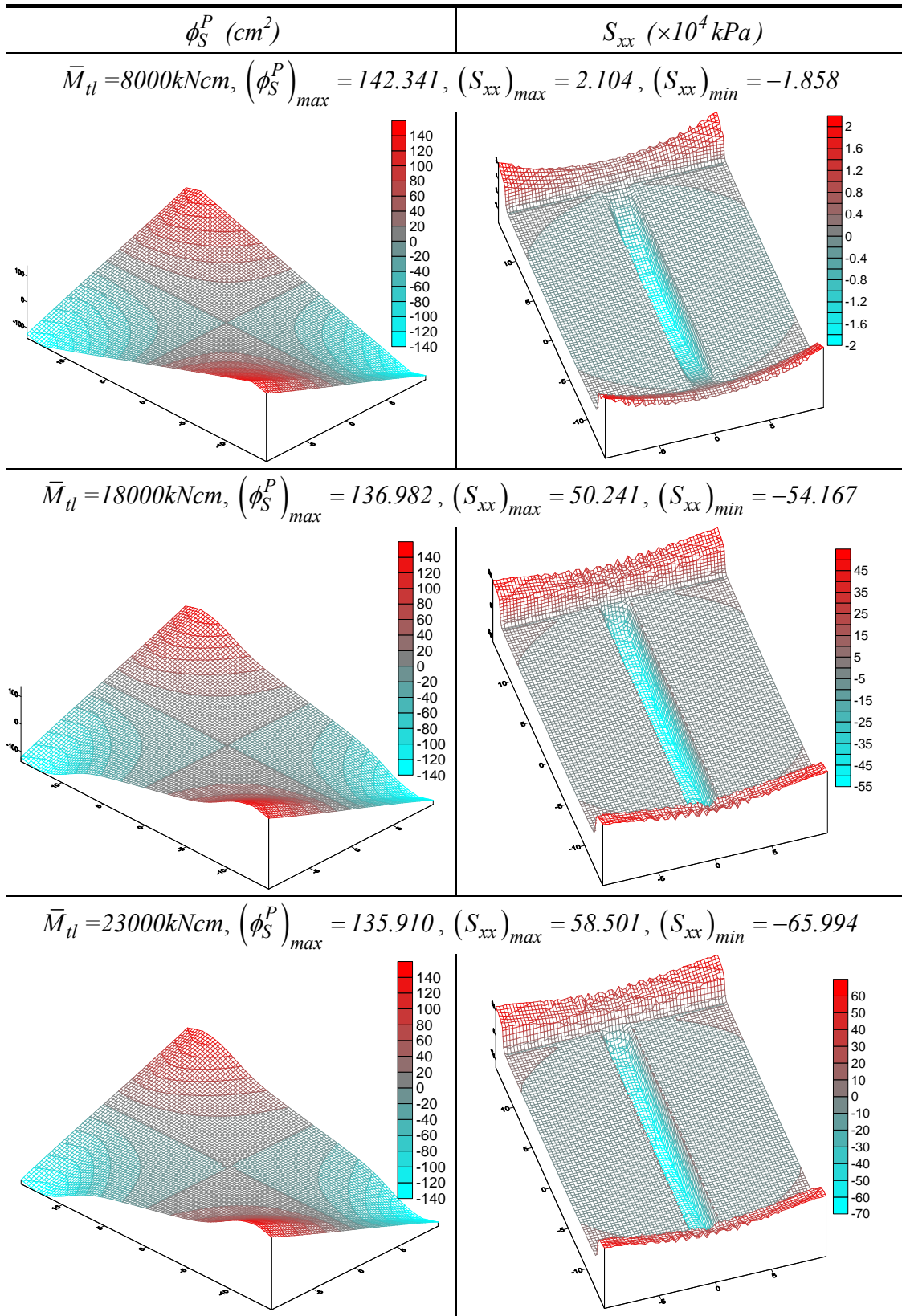
Πίνακας 4.13. Μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων ($kNcm$), πλήρως πλαστική ροπή ($kNcm$) και συντελεστής σχήματος της διατομής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα	Με γεωμετρική μη γραμμικότητα	Απόκλιση (%)
M_t^{el}	4120	4120	0.00
M_t^u	11500	14000	21.74
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	2.791	3.398	21.74

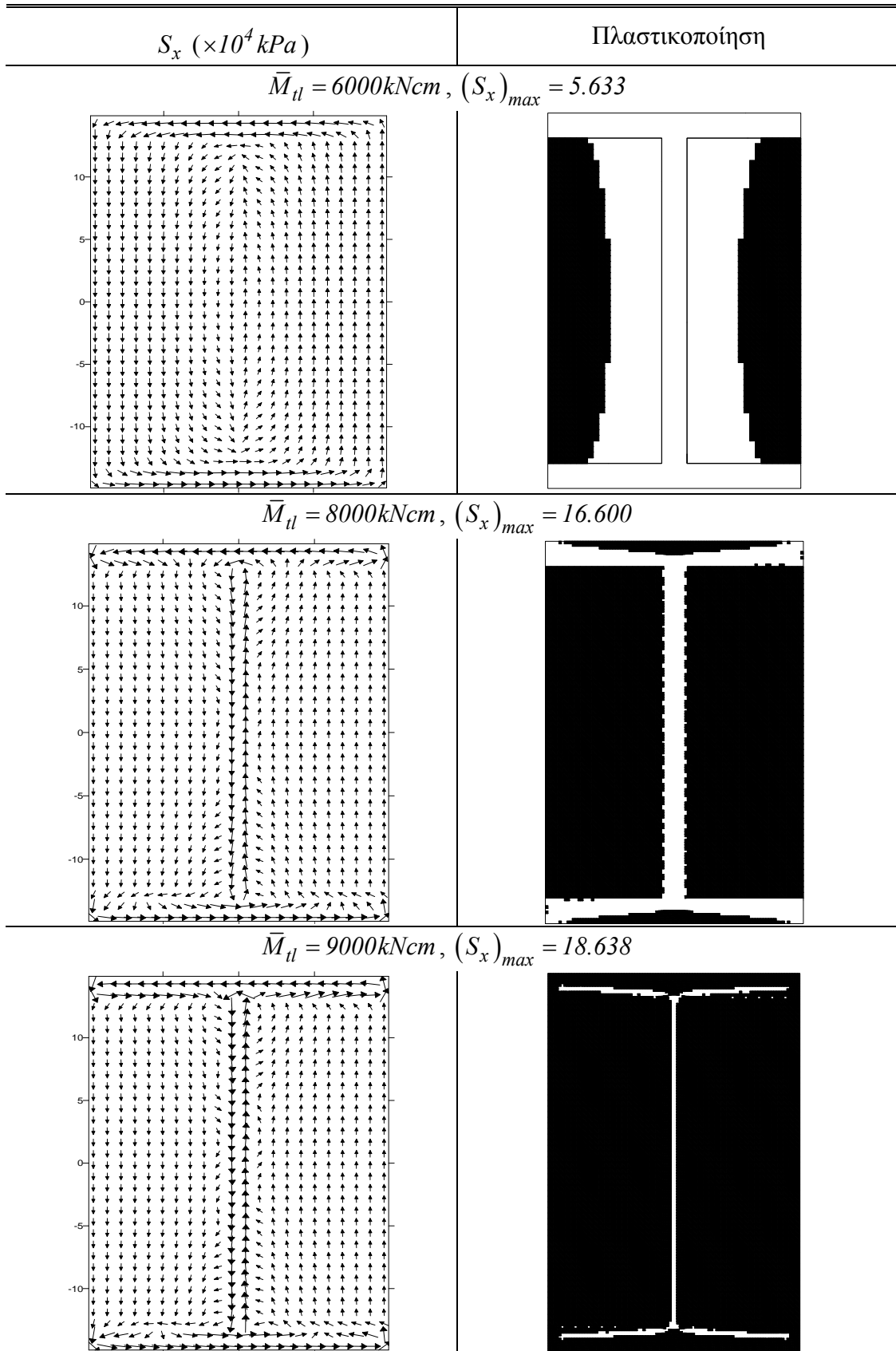
Πίνακας 4.14α. Κατανομή πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6.

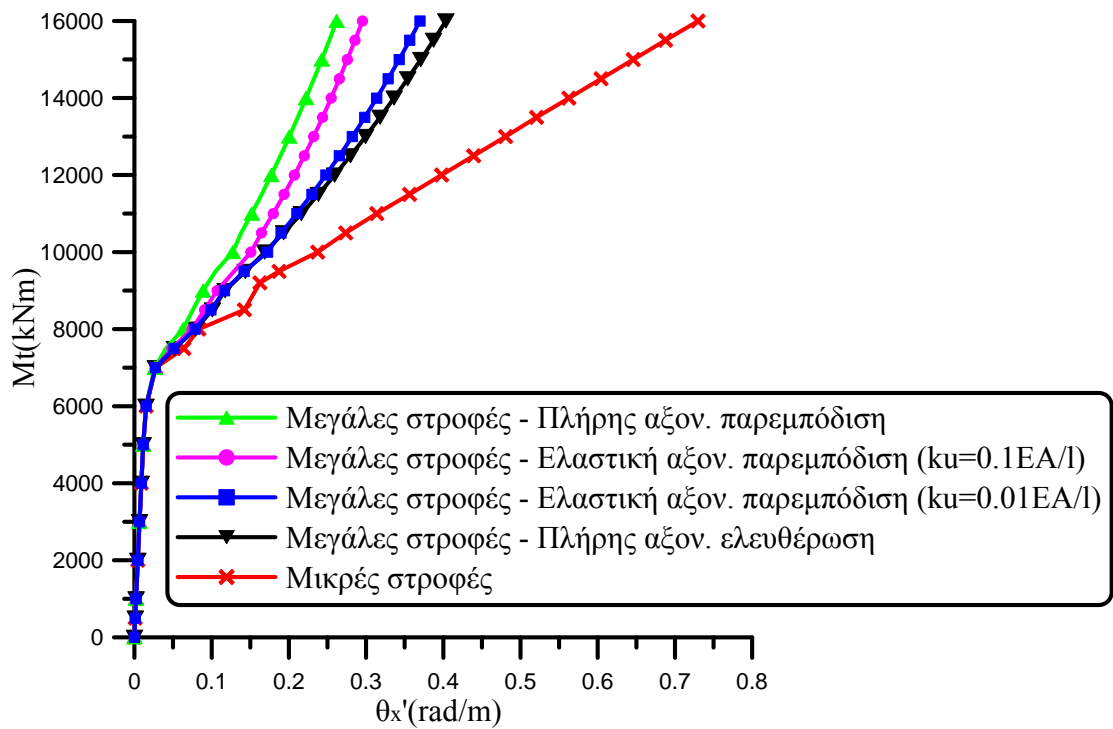


Πίνακας 4.14β. Τριδιάστατη απεικόνιση κατανομής πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6.



Πίνακας 4.15. Ροή διατμητικών τάσεων και αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 6.

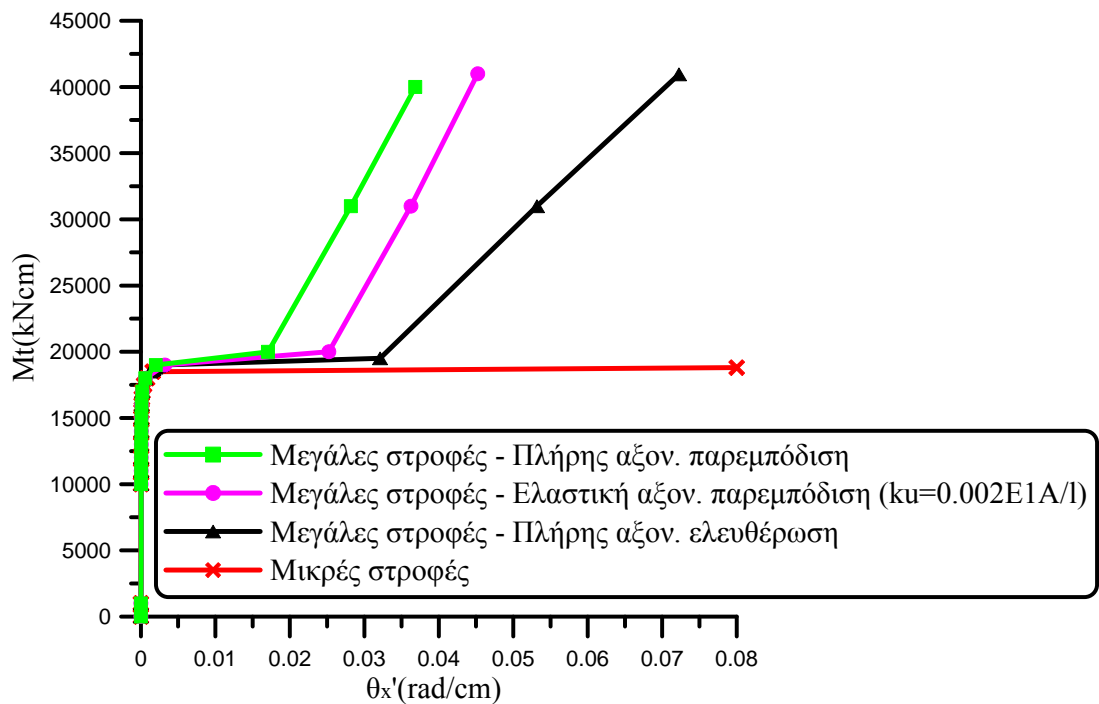




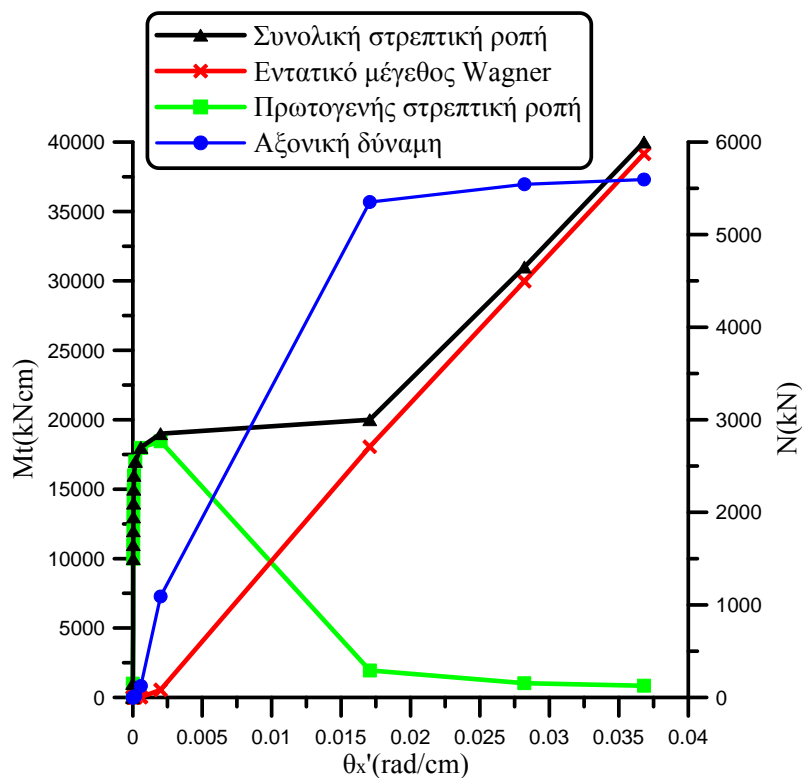
Σχήμα 4.16. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστροφής της ράβδου του παραδείγματος 7.

Πίνακας 4.16. Μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, πλήρως πλαστική ροπή, αντίστοιχες τιμές συστροφής, εντατικό μέγεθος Wagner για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^u$, αξονική δύναμη N για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^u$ και συντελεστής σχήματος της διατομής της ράβδου του παραδείγματος 7.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα	Με γεωμετρική μη γραμμικότητα		
		Πλήρης ελευθέρωση	$k_u = 0.01EA/l$	Πλήρης παρεμπόδιση
M_t^{el} (kNm)	3740	3740	3740	3740
$(\theta_x')^{el}$ ($\times 10^{-3}$ rad / m)	8.200	8.199	8.199	8.196
M_t^u (kNm)	9500	9700	9900	9900
$(\theta_x')^u$ (rad / m)	0.206	0.154	0.161	0.117
$(M_R \theta_x')^u$ (kNm)	-	1734	981	1690
$(N)^u$ (kN)	-	0	2661	55534
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	2.540	2.594	2.647	2.647



Σχήμα 4.17. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστροφής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 8.



Σχήμα 4.18. Πρωτογενής στρεπτική ροπή, εντατικό μέγεθος Wagner και αξονική δύναμη για διάφορες τιμές της συστροφής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 8 (περίπτωση πλήρους αξονικής παρεμπόδισης).

Πίνακας 4.17. Μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, πλήρως πλαστική ροπή, αντίστοιχες τιμές συστροφής, εντατικό μέγεθος Wagner για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^u$, αξονική δύναμη N για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{II} = M_t^u$ και συντελεστής σχήματος της διατομής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 8.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα	Με γεωμετρική μη γραμμικότητα		
		Πλήρης ελευθέρωση	$k_u = 0.002E_1A/l$	Πλήρης παρεμπόδιση
M_t^{el} (kNcm)	10000	10000	10000	10000
$(\theta'_x)^{el}$ ($\times 10^{-3}$ rad / cm)	0.0331	0.0331	0.0331	0.0331
M_t^u (kNcm)	18799	19500	19500	20000
$(\theta'_x)^u$ (rad / cm)	∞	0.0321	0.0245	0.0171
$(M_R\theta'_x)^u$ (kNcm)	-	17328	16194	18056
$(N)^u$ (kN)	-	0	660.79	5352.24
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	1.880	1.950	1.950	2.000

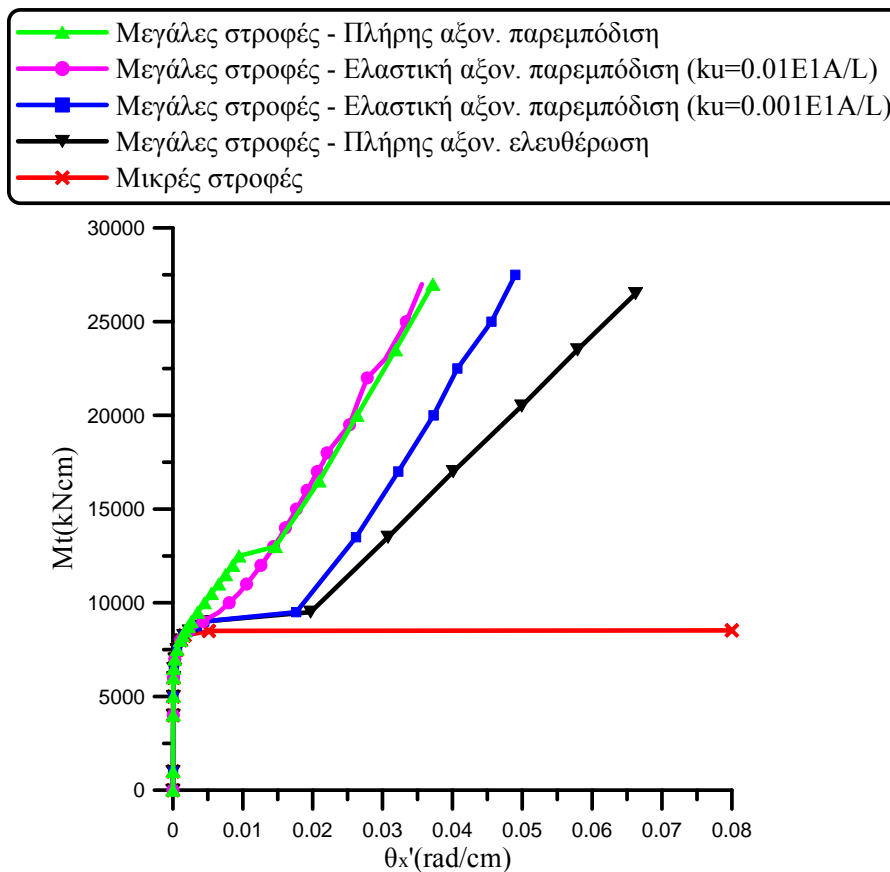
4.4.9 Παράδειγμα 9

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή γενικών συνοριακών συνθηκών αξονικής παρεμπόδισης στην ανάλυση σύνθετων ράβδων υπό μη γραμμική ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη αλλά και να διαπιστωθεί το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθοδολογίας, ως ένατο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος σύνθετης διατομής με υλικά σε επαφή του παραδείγματος 6, υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή στο δεξιό της άκρο, με τη διαφορά ότι το μεταλλικό υλικό λαμβάνεται ως ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό ($h_2 = 0$). Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι άστρεπτο και αμετακίνητο, ενώ χρησιμοποιήθηκαν 550 και 880 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και της επιφάνειας της διατομής, αντίστοιχα. Μελετήθηκε περίπτωση της πλήρους αξονικής ελευθέρωσης, δύο περιπτώσεις ελαστικής αξονικής παρεμπόδισης με $k_u = 0.01E_1A/l$ και $k_u = 0.001E_1A/l$ καθώς και πλήρης αξονική παρεμπόδιση για το δεξιό άκρο της ράβδου.

Στο Σχ.4.19 παρουσιάζεται η συστροφή θ'_x συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου \bar{M}_{II} για τις τρεις περιπτώσεις αξονικής παρεμπόδισης. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται για λόγους σύγκρισης και οι καμπύλες $\bar{M}_{II} - \theta'_x$ της περίπτωσης της πλήρους αξονικής ελευθέρωσης με ή χωρίς επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που διατυπώθηκαν με τη βοήθεια των Σχ.4.11, 4.16 των παραδειγμάτων 5 και 7, αντίστοιχα. Επιπλέον, στο Σχ.4.20 απεικονίζεται για την περίπτωση της πλήρους αξονικής παρεμπόδισης η συνεισφορά της πρωτογενούς στρεπτικής ροπής M_t^P και του εντατικού μεγέθους Wagner $M_R\theta'_x$ στη συνολική

στρεπτική ροπή που αναλαμβάνεται από τη ράβδο για διάφορες τιμές της συστροφής, σε συνδυασμό με την αναπτυσσόμενη (εφελκυστική) αξονική δύναμη N . Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που διατυπώθηκαν με τη βοήθεια του Σχ.4.18 του προηγούμενου παραδείγματος.

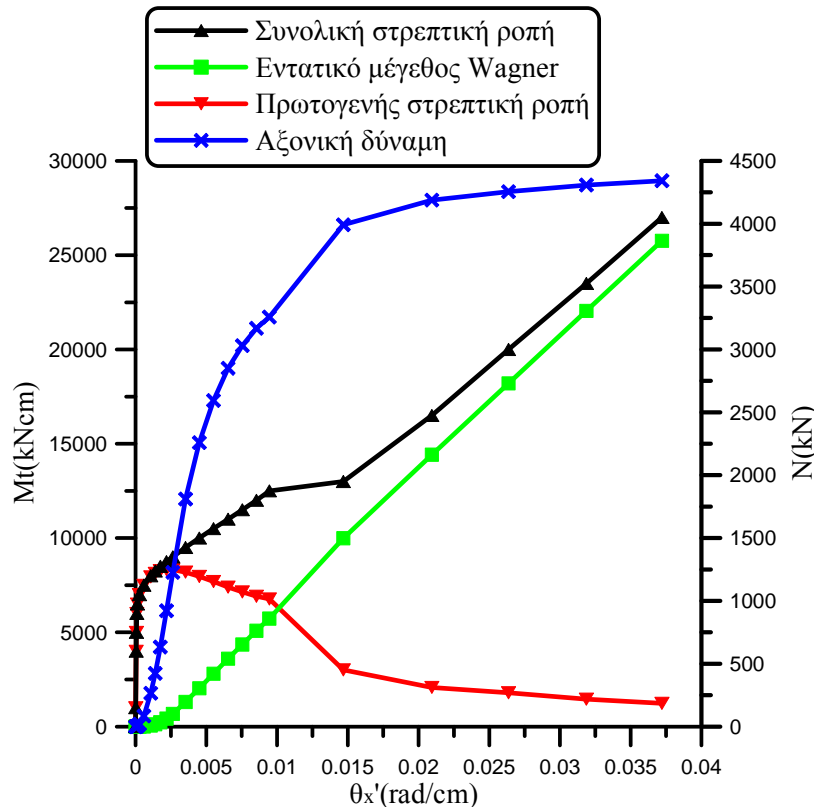
Στον Πίνακα 4.18 παρουσιάζεται για την περίπτωση της πλήρους αξονικής παρεμπόδισης η κατανομή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και των ορθών τάσεων S_{xx} για μία ελαστική και δύο μετελαστικές στάθμες εξωτερικής φόρτισης \bar{M}_H . Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τους Πίνακες 4.3, 4.5, 4.11 του πρώτου, δεύτερου και πέμπτου παραδείγματος, αντίστοιχα (ανάλυση ομογενών και σύνθετης ράβδου). Στον Πίνακα 4.19 διακρίνονται για διάφορες ελαστοπλαστικές στάθμες φόρτισης η ροή διατμητικών τάσεων S_x και η αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης (περίπτωση πλήρους αξονικής παρεμπόδισης).



Σχήμα 4.19. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - συστροφής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 9.

Τέλος στον Πίνακα 4.20 παρουσιάζεται η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων M_t^{el} , η πλήρως πλαστική ροπή M_t^u , οι αντίστοιχες τιμές συστροφής θ'_x , το εντατικό μέγεθος Wagner $M_R \theta'_x$ για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_H = M_t^u$, η αξονική δύναμη N για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_H = M_t^u$ και ο συντελεστής σχήματος της διατομής $\kappa = M_t^u / M_t^{el}$, έτσι όπως προέκυψαν για διάφορες

περιπτώσεις ανάλυσης. Διαπιστώνεται η σημαντική επιρροή της αξονικής συνοριακής συνθήκης στο μέγεθος της συστροφής $(\theta'_x)^u$, της πλήρως πλαστικής ροπής M_l^u και της αξονικής δύναμης $(N)^u$.



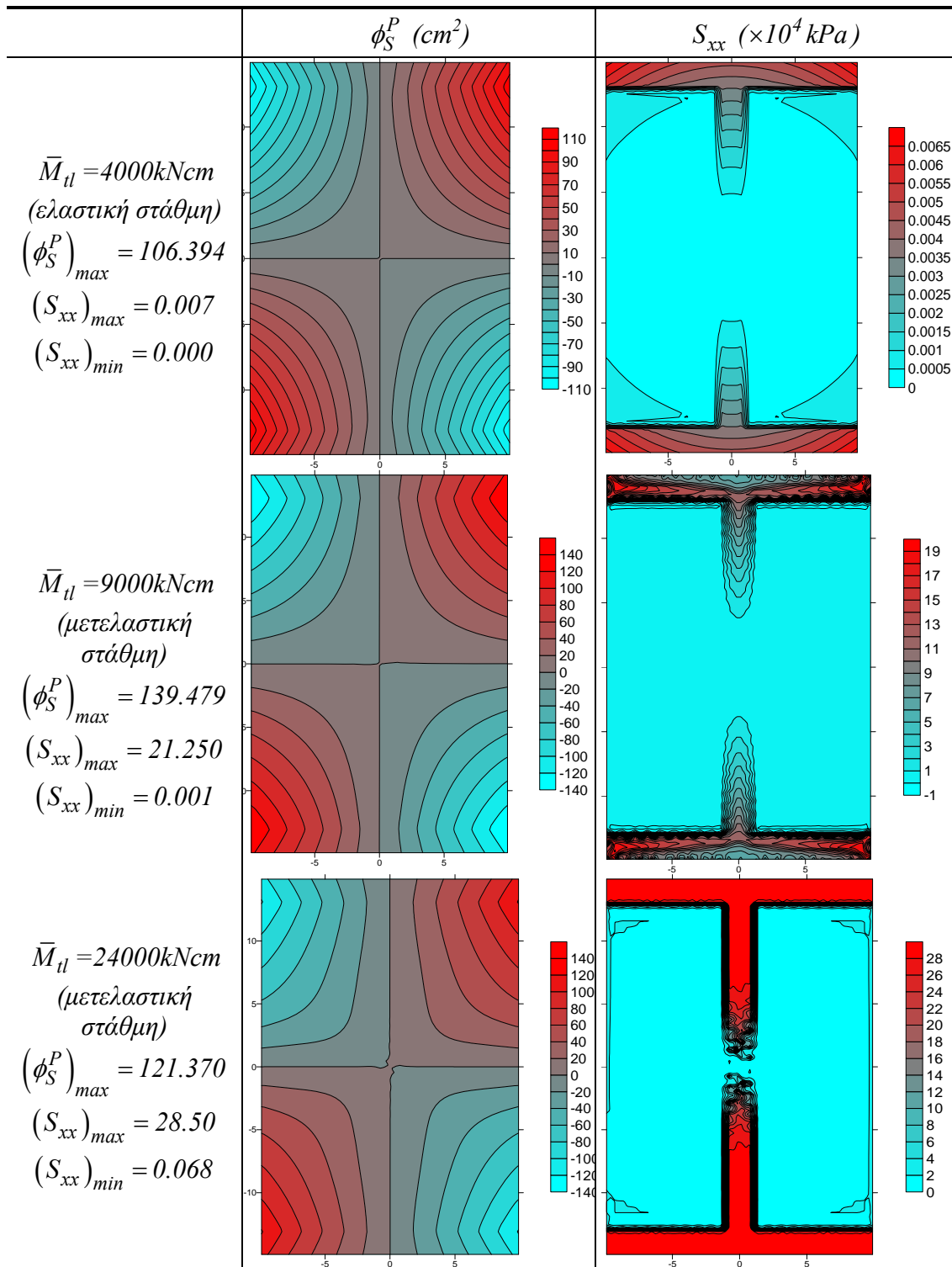
Σχήμα 4.20. Πρωτογενής στρεπτική ροπή, εντατικό μέγεθος Wagner και αξονική δύναμη για διάφορες τιμές της συστροφής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 9 (περίπτωση πλήρους αξονικής παρεμπόδισης).

4.5 Συμπεράσματα

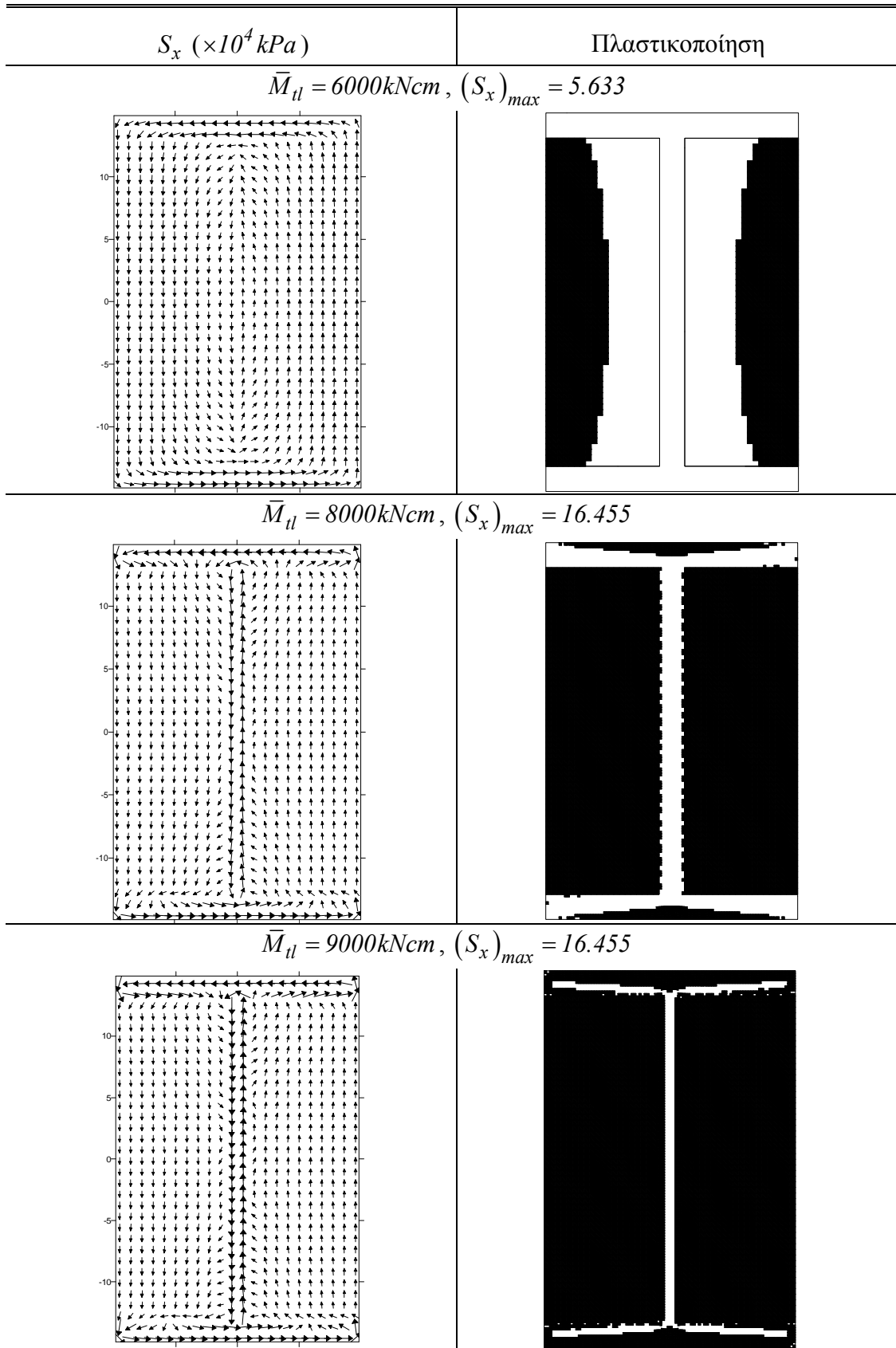
Στα προηγούμενα εδάφια διατυπώθηκε και επιλύθηκε αριθμητικά το στατικό πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης ομογενών ή σύνθετων ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος. Τα **κύρια συμπεράσματα** που προκύπτουν από την προαναφερθείσα ανάλυση είναι τα ακόλουθα.

- Η προτεινόμενη μέθοδος είναι ακριβής και προσφέρει τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, αφού η απαιτούμενη πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής της ράβδου χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.
- Η ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων μειώνει τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου και οδηγεί σε πλαστική κατάρρευση όταν αγνοείται η γεωμετρική μη γραμμικότητα.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα παίζει αμελητέο ρόλο στην ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη ράβδων υψηλής στρεπτικής στιβαρότητας. Αντιθέτως, είναι πολύ σημαντική στη συμπεριφορά ράβδων μικρής στρεπτικής στιβαρότητας.

Πίνακας 4.18. Κατανομή πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P και ορθών τάσεων S_{xx} στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 9.



Πίνακας 4.19. Ροή διατμητικών τάσεων και αντίστοιχη κατανομή πλαστικοποίησης στη διατομή της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 9.



Πίνακας 4.20. Μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, πλήρως πλαστική ροπή, αντίστοιχες τιμές συστροφής, εντατικό μέγεθος Wagner για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{tl} = M_t^u$, αξονική δύναμη N για στάθμη φόρτισης $\bar{M}_{tl} = M_t^u$ και συντελεστής σχήματος της διατομής της σύνθετης ράβδου του παραδείγματος 9.

	Χωρίς γεωμετρική μη γραμμικότητα	Με γεωμετρική μη γραμμικότητα		
		Πλήρης ελευθέρωση	$k_u = 0.001E_1A/l$	Πλήρης παρεμπόδιση
$M_t^{el} (kNcm)$	4120	4120	4120	4120
$(\theta'_x)^{el} (\times 10^{-3} \text{ rad/cm})$	0.0460	0.0460	0.0460	0.0460
$M_t^u (kNcm)$	8529	9500	9500	11000
$(\theta'_x)^u (\text{rad/cm})$	∞	0.0197	0.0176	0.0065
$(M_R \theta'_x)^u (kNcm)$	-	7378	6870	3604
$(N)^u (kN)$	-	0	107.31	2851.03
$\kappa = M_t^u / M_t^{el}$	2.070	2.306	2.306	2.670

- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη και έχει ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης.
- Η κατανομή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης δεν επηρεάζεται ουσιαδώς από τις πλαστικές παραμορφώσεις. Αντιθέτως, το μέγεθός της μεταβάλλεται σημαντικά σε ορισμένες περιπτώσεις από την εξέλιξη της πλαστικοποίησης.
- Η κατανομή και το μέγεθος της ορθής συνιστώσας του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff S_{xx} επηρεάζονται σημαντικά από την υλική και τη γεωμετρική μη γραμμικότητα καθώς και από τις συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης.
- Οι συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης επηρεάζουν αισθητά τη συμπεριφορά ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη και αυξάνουν τη στρεπτική στιβαρότητα. Η αύξηση αυτή εξαρτάται από το βαθμό αξονικής παρεμπόδισης της ράβδου.

Κεφάλαιο 5

Μη Γραμμική Ελαστοπλαστική Στατική Ανάλυση Ράβδου υπό Ανομοιόμορφη Στρέψη

5.1 Εισαγωγή

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ομοιόμορφη στρέψη, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μη γραμμική ελαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (ΔΔΠ). Στις ενότητες που ακολουθούν διερευνάται η μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή ΔΔΠ.

Όπως αναφέρθηκε και στο εδάφιο 1.1, συνήθως στην πράξη η στρεπτική φόρτιση που ασκείται σε ράβδο μεταβάλλεται κατά μήκος της και η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης. Στην περίπτωση αυτή η αναπτυσσόμενη στρέβλωση μεταβάλλεται κατά τη διαμήκη διεύθυνση και η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη. Στην ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη, ανακατανομή έντασης λόγω πλαστικοποίησης πραγματοποιείται τόσο σε επίπεδο διατομής (κεφ. 4) όσο και κατά μήκος της ράβδου. Στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία αναγνωρίζεται ότι τα προσομοιώματα κατανεμημένης πλαστικότητας (distributed plasticity models) προσομοιώνουν ακριβέστερα την πλαστική ανακατανομή έντασης κατά τη διαμήκη διεύθυνση [Nukala and White 2004, Teh and Clarke 1999, Saritas and Filippou 2009], συγκριτικά με προσομοιώματα συγκεντρωμένης πλαστικότητας [Orbison et al. 1982, Ngo-Huu et al. 2007] ή προσεγγίσεις που βασίζονται σε εντατικά μεγέθη [Attalla et al. 1994] που πλεονεκτούν από την σκοπιά μείωσης του υπολογιστικού χρόνου επίλυσης του προβλήματος.

Πέρα από ερευνητικές προσπάθειες όπου η ράβδος προσομοιώνεται με απαιτητικά από υπολογιστική σκοπιά στερεά [May and Al-Shaarbaf 1989] ή κελυφωτά [Bathe and Wiener 1983] πεπερασμένα στοιχεία, διάφοροι ερευνητές έχουν προτείνει ειδικά ραβδωτά στοιχεία για την ανάλυση ράβδων υπό ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη. Οι Gellin et al. [1983] διατύπωσαν προσομοίωμα κατανεμημένης πλαστικότητας για την ανάλυση ράβδων λεπτότοιχης διατομής. Οι Bathe and Wiener [1983] προσομοίωσαν με Ερμιτιανά και ισοπαραμετρικά πεπερασμένα ραβδωτά στοιχεία ράβδους λεπτότοιχης διατομής I, χρησιμοποιώντας ένα στοιχείο για το κάθε πέλμα και ένα στοιχείο για τον κορμό της ράβδου. Οι Izzuddin and Lloyd Smith [1996a,b] βασίστηκαν σε διατύπωση Euler και κυβικές συναρτήσεις σχήματος για την ανάλυση ράβδων λεπτότοιχης διατομής με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Οι Chen and Trahair [1992] και Pi and Trahair [1995] διατύπωσαν προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση ράβδων λεπτότοιχης διατομής I, βασιζόμενοι στο προσομοίωμα “mitre” [Billingham et al. 1992].

Οι προαναφερθείσες εργασίες αναφέρονται σε ράβδους λεπτότοιχης διατομής. Οι Battini and Pacoste [2002], Nukala and White [2004] και Alsafadie et al. [2010]

ανέπτυξαν προσομοιώματα που μπορούν να εφαρμοστούν σε ράβδους τυχούσας διατομής. Σε αυτά εισάγεται ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης για την έκφραση του μεγέθους της στρέβλωσης της διατομής. Η παράμετρος αυτή τελικά εξισώνεται με την γωνία στρεπτικής στροφής ανά μονάδα μήκους, συνεπώς αγνοούνται οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις. Οι Papachristidis et al. [2010] ανέπτυξαν στοιχείο δυνάμεων για την ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων τυχούσας διατομής και ραβδωτών κατασκευών χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Ο Triantafyllou [2011] παρουσίασε υστερητικό προσομοίωμα για την ανάλυση της ανομοιόμορφης στρεπτικής συμπεριφοράς ράβδων τυχούσας διατομής με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Στην εργασία των Baba and Kajita [1982] ακολουθείται γενικότερη προσέγγιση όπου στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής λαμβάνονται υπόψη πλαστικές παραμορφώσεις και στο επίπεδο της διατομής της ράβδου. Συνεπώς η πλαστικοποίηση δεν προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής του προβλήματος. Ωστόσο, στη βιβλιογραφία επισημαίνεται ότι η επίλυση του προβλήματος ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης λαμβάνοντας υπόψη πλαστικές παραμορφώσεις και στο επίπεδο της διατομής της ράβδου αυξάνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο επίλυσης [Battini and Pacoste 2002]. Απλή λύση στο ζήτημα αυτό προτείνεται από τους Chen and Trahair [1992] και Pi and Trahair [1995], οι οποίοι βασίζονται στο προσομοίωμα “mitre” [Billingham et al. 1992] για την περιγραφή της κατανομής των διατμητικών παραμορφώσεων στο επίπεδο της διατομής. Το προσομοίωμα αυτό βασίζεται στην κατανομή διατμητικών παραμορφώσεων που παρουσιάζεται σε ράβδους υπό ομοιόμορφη στρέψη κατά την φάση πλαστικής κατάρρευσης. Ωστόσο, η προσέγγιση αυτή περιορίζεται σε ράβδους λεπτότοιχης διατομής I, ενώ αναμένεται να είναι λιγότερο ακριβής στην ελαστική περιοχή της ράβδου και στις αρχικές φάσεις πλαστικοποίησής της.

Οι προαναφερθείσες εργασίες αναφέρονται στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων χωρίς επιρροή ΔΔΠ. Σε ορισμένες από τις εργασίες της διεθνούς βιβλιογραφίας, η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων και τάσεων λαμβάνεται υπόψη στο εξεταζόμενο πρόβλημα. Οι Wunderlich et al. [1986] ανέπτυξαν τεχνική δυναμοσειράς βασιζόμενοι σε προσαρμοστική διατύπωση Lagrange για την ανάλυση ράβδων λεπτότοιχης διατομής. Οι Nie and Zhong [2007] και οι Wang et al. [2010] μελέτησαν ράβδους λεπτότοιχης διατομής εφαρμόζοντας προσαρμοστική διατύπωση Lagrange και τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Οι Alsafadie et al. [2011] ανέλυσαν ράβδους λεπτότοιχης διατομής βασιζόμενοι σε μικτή προσέγγιση (mixed method) των αγνώστων του προβλήματος. Στην εργασία των Gruttmann et al. [2000] ακολουθείται γενικότερη προσέγγιση όπου προσομοιώνονται ράβδοι τυχούσας διατομής. Στις εργασίες αυτές χρησιμοποιούνται δύο κινηματικοί άγνωστοι μίας μεταβλητής για την προσομοίωση της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ. Ωστόσο δεν εισάγεται στην ανάλυση στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, ενώ οι προκύπτουσες κατανομές δευτερογενών διατμητικών τάσεων δεν ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά την αξονική διεύθυνση (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) ούτε υπό ελαστοπλαστικές ούτε υπό πλήρως ελαστικές (κεφ. 2) συνθήκες.

Επιπλέον, στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί εναλλακτικές μεθοδολογίες με τις οποίες προσομοιώνεται η ανομοιόμορφη στρεπτική συμπεριφορά με επιρροή ΔΔΠ χωρίς την ανάγκη εισαγωγής στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης. Στις εργασίες αυτές ωστόσο χρησιμοποιείται σημαντικό πλήθος συναρτήσεων για την

προσομοίωση της στρέβλωσης της ράβδου. Στην εργασία των Le Corvec and Filippou [2011] εισάγεται μεγάλο πλήθος τοπικών βαθμών ελευθερίας στρέβλωσης για την προσομοίωση φαινομένων όπως η ανομοιόμορφη στρέβλωση, πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής, διατμητική υστέρηση κλπ. Η μείωση του πλήθους των βαθμών ελευθερίας που υπεισέρχονται στη μεθοδολογία απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση ενώ δεν παρουσιάζεται παράδειγμα ράβδου χονδρότοιχης διατομής. Στην εργασία των Wackerfuß and Gruttmann [2009] αναλύονται ράβδοι χονδρότοιχης ορθογωνικής διατομής χρησιμοποιώντας πολυωνυμικές καθολικές συναρτήσεις στρέβλωσης ώστε να προσομοιωθούν ανώτερα φαινόμενα όπως πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής και πλευρική συστολή της διατομής. Επιπρόσθετα, οι ίδιοι ερευνητές [Wackerfuß and Gruttmann 2011] χρησιμοποίησαν τοπικές συναρτήσεις στρέβλωσης ώστε να προσομοιωθούν τα προαναφερθέντα φαινόμενα σε ράβδους μετρίως χονδρότοιχης διατομής τυχόντος σχήματος. Ωστόσο, δεν είναι δυνατό να προσομοιωθεί η περίπτωση στρεβλωτικής φόρτισης στο εσωτερικό ή στα άκρα της ράβδου.

Στην προτεινόμενη μέθοδο, οι πλαστικές παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής (κεφ. 4) δεν λαμβάνονται υπόψη και η πλαστικοποίηση προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής του προβλήματος. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων. Στις παρακάτω ενότητες μελετάται επιπρόσθετα και η περίπτωση τυχούσας αξονικής φόρτισης και συνοριακών συνθηκών, η οποία επιτρέπει την ανάλυση της στρεπτικής λυγισμικής και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ελαστοπλαστικής ράβδου υπό αξονική και στρεπτική φόρτιση. Ωστόσο, η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της ράβδου δεν εξετάζεται, ενώ μελετώνται ράβδοι διπλά συμμετρικής διατομής όπου η γεωμετρική μη γραμμικότητα και οι διατμητικές παραμορφώσεις δεν προκαλούν σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών μεγεθών (εδάφια 1.1, 2.1).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ομογενών ελαστοπλαστικών ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος απλής ή πολλαπλής συνοχής (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) (Παράρτημα Π1), καθώς και την Πεδιακή Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Παράρτημα Π3). Το υλικό της ράβδου είναι κλασικά ελαστοπλαστικό με ισότροπη κράτυνση. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση, ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα λαμβάνεται υπόψη σε ολική διατύπωση Lagrange μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων σύμφωνα με την οποία οι εγκάρσιες μετατοπίσεις εκφράζονται για μεγάλες στρεπτικές στροφές. Οι πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω προσομοιώματος κατανεμημένης πλαστικότητας (distributed plasticity model) χρησιμοποιώντας τριδιάστατες καταστατικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές ολοκληρώνονται με τη βοήθεια αποδοτικής επαναληπτικής μεθόδου. Προκειμένου να ικανοποιηθεί από το τασικό πεδίο της ράβδου με το οποίο μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, τοπική εξίσωση ισορροπίας (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές συνθήκες, διατυπώνεται πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει κατάλληλα την πρωτογενή

και τη δευτερογενή στρέβλωση της ράβδου. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με τη βοήθεια των θεωριών ελαστικότητας και ελαστοπλαστικότητας τρία προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία δεν υπόκεινται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov (Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (ΘΛΔ)). Συγκεκριμένα, μορφώνονται δύο (διδιάστατα) προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με την πρωτογενή και τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια “αμιγούς” Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Επίσης, μορφώνεται (μονοδιάστατο) πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη στρεπτική στροφή και την πρωτογενή συστροφή (ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης) της διατομής, το οποίο επιλύεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε συνδυασμό με την υβριδική μέθοδο Powell για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχεται και η δευτερογενής στρεπτική σταθερά και τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών. Ο αριθμητικός υπολογισμός τους απαιτεί και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, η οποία ωστόσο χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων. Η επίλυση του προβλήματος αυτού πραγματοποιείται στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου που βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου (load control).

Η ανάλυση της ράβδου είναι πλήρης. Υπολογίζονται όλα τα εντατικά, παραμορφωσιακά και κινηματικά αξονικά και στρεπτικά μεγέθη, συμπεριλαμβανομένων και των πλαστικών μερών εντατικών μεγεθών, οι γεωμετρικές σταθερές της διατομής συμπεριλαμβανομένης και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S , η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, οι αναπτυσσόμενες ορθές και διατμητικές τάσεις στο εσωτερικό ως επίσης και στο σύνορο. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Βάσει της αναλυτικής και αριθμητικής διαδικασίας συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον. Η ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων συγκρινόμενη με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις και υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα καθώς και με προσομοιώματα κελυφωτών (τετραπλευρικών) και στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων, είναι αξιοσημείωτη. Από την αναδρομή στη συναφή διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει ότι η έρευνα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι πρωτότυπη. Τα πρωτότυπα στοιχεία της συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- i. Διατυπώνεται το στατικό πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστοπλαστικών ράβδων τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος λαμβάνοντας υπόψη τοπική εξίσωση ισορροπίας (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη) υπό πλήρως γραμμικές ελαστικές συνθήκες και χωρίς την εισαγωγή στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης.
- ii. Αναλύονται ράβδοι διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (λεπτότοιχης - χονδρότοιχης) υπό μη γραμμική ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς να υιοθετούνται οι περιορισμοί της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών.
- iii. Προσδιορίζεται η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτής ή κλειστής διατομής υπό ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη.

- iv. Διερευνώνται οι συνέπειες αγνόησης του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης σε ράβδους ανοικτής ή κλειστής διατομής υπό ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη.
- v. Μελετάται η ελαστοπλαστική στρεπτική μεταλυγισμική συμπεριφορά ράβδου λαμβάνοντας υπόψη δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις.
- vi. Επιλύεται αριθμητικά το εξεταζόμενο πρόβλημα με τη βοήθεια συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Από την ερευνητική προσπάθεια που έγινε αναφορικά με τα θέματα που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο, προέκυψαν δημοσιεύσεις σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά διεθνούς κυκλοφορίας [Sapountzakis and Tsipiras 2011, Tsipiras and Sapountzakis 2012a] και σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων [Sapountzakis and Tsipiras 2010f, Tsipiras and Sapountzakis 2011, 2012b].

5.2 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο μήκους l διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος αποτελούμενη από συνεχές, κλασικά ελαστοπλαστικό υλικό με ισότροπη κράτυνση (με μέτρο κράτυνσης h και εφαπτομενικό μέτρο ελαστοπλαστικότητας E_t) [Crisfield 1991, Simo and Hughes 1998, Jirasek and Bazant 2002, Doltsinis 2010] χωρίς να εμφανίζει βλάβη κατά την πλαστικοποίησή του, με μέτρο ελαστικότητας E και διάτμησης G και τάση διαρροής σ_y , το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή Ω του επιπέδου y, z (Σχ.5.1). Η περιοχή Ω μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό οπών και περιβάλλεται από τμηματικό λείο σύνορο (μπορεί δηλαδή να περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό γωνιών), το οποίο συμβολίζεται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) (Σχ.5.1β). Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη αξονική, στρεπτική και στρεβλωτική φόρτιση περί το διαμήκη άξονα της x (αξονικές δυνάμεις $n = n(x)$, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$) (Σχ.5.1α) ενώ τα άκρα της υπόκεινται στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Η ράβδος μπορεί να μετατοπίζεται ελεύθερα κατά την εγκάρσια έννοια και δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) συγκεκριμένος άξονας περιστροφής, ωστόσο η καμπτοδιατμητική συμπεριφορά της δεν εξετάζεται στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου. Η μελέτη της ράβδου πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$, του οποίου ο διαμήκης άξονας Sx διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα διάτμησης) των διατομών. Επισημαίνεται ότι τα κέντρα συστροφής ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα των διατομών (Σχ.5.1) εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής. Το αρχικό σημείο του άξονα Sx ($x = 0$) τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου (Σχ.5.1α).

5.2.1 Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις

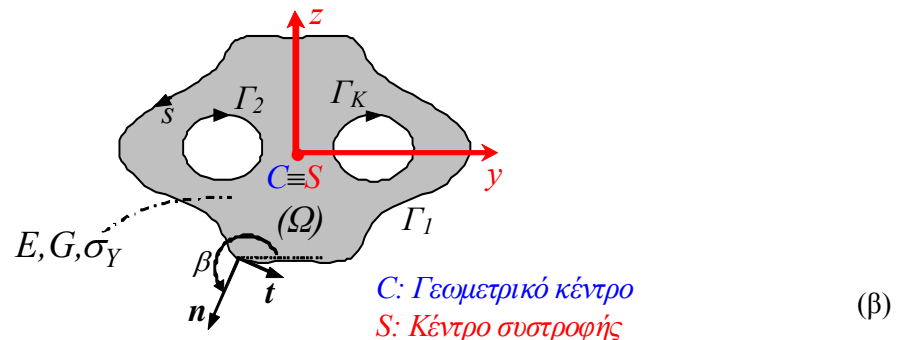
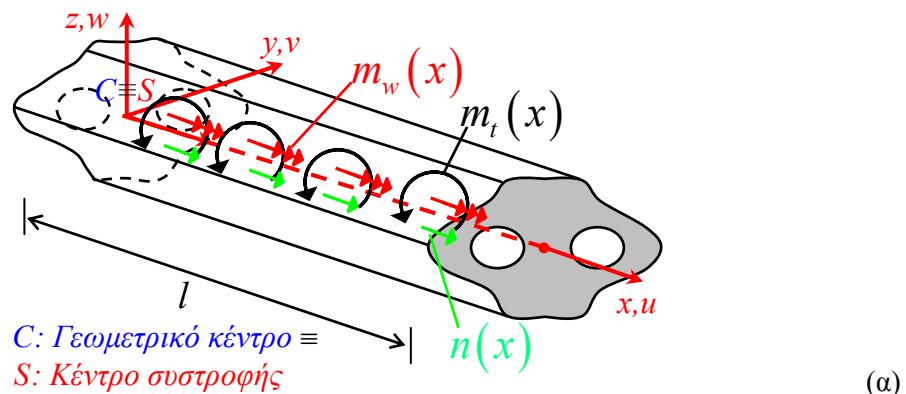
Υποθέτοντας ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται (δηλαδή δεν αναπτύσσονται εγκάρσιες παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής), θεωρώντας ότι τα υλικά σημεία της διατομής εκτελούν κυκλική τροχιά κατά την εγκάρσια διεύθυνση περί τον άξονα Sx , λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στρεπτικές στροφές των διατομών μπορούν να είναι

μεγάλες και προκειμένου να αναλυθεί η επιρροή των ΔΔΠ, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου δίδεται ως

$$u(x, y, z) = u_m(x) + (\theta_x^P)'(x) \phi_S^P(y, z) - \left((\theta_x^P)'(x) - \theta_x'(x) \right) \left[\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \right] \quad (5.2.1)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (5.2.2)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (5.2.3)$$



Σχήμα 5.1. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα αξονική και στρεπτική φόρτιση (α) με ομογενή διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος (β).

επισημαίνοντας ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με το πεδίο μετατοπίσεων (2.2.1-3) του κεφ. 2 όπου μελετάται το εξεταζόμενο πρόβλημα υπό ελαστικές συνθήκες. Επιπλέον, η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P λαμβάνεται ανεξάρτητη της διαμήκουσ συντεταγμένης x , καθώς όπως έχει προαναφερθεί, η πλαστικοποίηση της ράβδου προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής του προβλήματος ($u_m, \theta_x, (\theta_x^P)'$) (βλ. και εδάφια 5.2.2, 5.2.4).

Με θεώρηση μικρής «μέσης» αξονικής μετατόπισης, μικρής πρωτογενούς και δευτερογενούς στρέβλωσης και μικρών παραμορφώσεων, οι μη γραμμικοί όροι της διαμήκουσ μετατόπισης u των παραμορφώσεων Green μπορούν να αγνοηθούν (βλ. και [Ramm and Hoffmann 1995, Rothert and Gensichen 1987, Brush and Almroth 1975]),

συνεπώς ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 2.2.1, προκύπτουν οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green ως

$$\varepsilon_{xx} = u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P - \left((\theta_x^P)'' - \theta_x'' \right) (\phi_S^P + \phi_S^S) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 \quad (5.2.4\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (5.2.4\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (5.2.4\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.4\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.4\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (5.2.4\sigma\tau)$$

Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με τις αντίστοιχες σχέσεις (2.2.9) του κεφ. 2.

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις και ότι το υλικό της ράβδου είναι συνεχές, κλασικά ελαστοπλαστικό χωρίς να βλάπτεται κατά την πλαστικοποίηση, οι συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff δίδονται συναρτήσει των παραμορφώσεων και πλαστικών παραμορφώσεων Green (βλ. σχέσεις (Π5.3.23), εδάφιο Π5.3.2 και [Bathe 1996, Gruttmann et al. 2000, Παπαδρακάκης 1998]). Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.2.4), οι σχέσεις (Π5.3.23) διαμορφώνονται ως

$$S_{xx} = E^* \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 - \varepsilon_{xx}^{pl} \right] \quad (5.2.5\alpha)$$

$$S_{yy} = E^{**} \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 - \varepsilon_{yy}^{pl} \right] \quad (5.2.5\beta)$$

$$S_{zz} = E^{**} \left[u'_m + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x')^2 - \varepsilon_{zz}^{pl} \right] \quad (5.2.5\gamma)$$

$$S_{xy} = G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right) - G \gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.5\delta)$$

$$S_{xz} = G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) - G \gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.5\epsilon)$$

$$S_{yz} = -G \gamma_{yz}^{pl} \quad (5.2.5\sigma\tau)$$

όπου $E^* = E(1-\nu) / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, $E^{**} = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, σημειώνοντας ότι οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν με «χρονική» ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων (βλ. εξ.(Π5.3.4), εδάφιο Π5.3 και

σχέσεις (4.2.8)), ενώ έχει αγνοηθεί η επιρροή της δευτερογενούς στρέβλωσης στις ορθές τάσεις (βλ. εδάφιο 2.2.1). Οι συνιστώσες S_{yy} , S_{zz} , S_{yz} δεν παράγουν έργο (αφού οι αντίστοιχες ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{yz} είναι μηδενικές, σύμφωνα με τις σχέσεις (5.2.5β,γ,στ)) και γίνεται η παραδοχή ότι $S_{yy} = S_{zz} = S_{yz} \approx 0$, ενώ επιπλέον το E^* αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας E (βλ. εδάφιο 4.2.1). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του 2ου ταυυστή τάσης Piola-Kirchhoff διαμορφώνονται τελικά ως

$$S_{xx} = E \left[u'_m + (\theta'_x)^P \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - \varepsilon_{xx}^{pl} \right] \quad (5.2.6\alpha)$$

$$S_{xy} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \left((\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right) - G\gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.6\beta)$$

$$S_{xz} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \left((\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) - G\gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.6\gamma)$$

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω διαδικασία προσδιορισμού των συνιστωσών τάσης ακολουθείται στην εργασία των Baba and Kajita [1982] όπου αγνοείται η κράτνυση. Επίσης, εάν στις παραπάνω εκφράσεις αγνοηθεί μία εκ των δύο συνιστωσών διατμητικής παραμόρφωσης και τάσης, προκύπτει η διαδικασία προσδιορισμού των συνιστωσών τάσης που ακολουθείται στην εργασία των Chen and Trahair [1992].

Τονίζεται ότι προκειμένου να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις ε_{xx}^{pl} , γ_{xy}^{pl} , γ_{xz}^{pl} , απαιτείται να είναι γνωστή η ιστορία φόρτισης της ράβδου (βλ. εδάφιο Π5.3 και [Bathe 1996]). Έτσι, θεωρούμε ότι τα κινηματικά, παραμορφωσιακά και τασικά μεγέθη αποτελούν συναρτήσεις «χρονικής» παραμέτρου και αξιοποιείται η διαφορική μορφή των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων (βλ. εξ.(4.2.8) και [Simo and Hughes 1998]). Χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση διαρροής (βλ. εξ.(4.2.9)), το νόμο ισότροπης κράτνυσης του υλικού (βλ. εξ.(Π5.3.15)), το νόμο πλαστικής ροής (βλ. εξ.(4.2.12)) και μελετώντας την «χρονική» μεταβολή της συνάρτησης διαρροής (βλ. εδάφιο Π5.3.1) προσδιορίζονται οι προσανζητικές διαφορικές πλαστικές παραμορφώσεις. Οι ολικές πλαστικές παραμορφώσεις προσδιορίζονται μέσω των διαφορικών προσανζητικών πλαστικών παραμορφώσεων με «χρονική» ολοκλήρωση (βλ. εξ.(Π5.3.1β))

5.2.2 Τοπική Εξίσωση Ισορροπίας, Πρωτογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Ακολουθώντας την τεχνική του εδαφίου 2.2.3 του κεφ. 2 που βασίζεται στο λογισμό των μεταβολών για τον προσδιορισμό των ϕ_S^P , ϕ_S^S , προκύπτει η τοπική διαφορική εξίσωση (2.2.17α) και η συνοριακή συνθήκη (2.2.17β) και στο εξεταζόμενο πρόβλημα. Διαπιστώνεται εύκολα ότι ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης από τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \text{ στο } \Omega \quad (5.2.7\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = (zn_y - yn_z) \text{ στο } \Gamma_j \quad (5.2.7\beta)$$

$$G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \nabla^2 \phi_S^S - E \left[u_m'' + (\theta_x^P)''' \phi_S^P + (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \right] \text{ στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \quad (5.2.8\alpha)$$

$$+ G \left(\frac{\partial \gamma_{xy}^{pl}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}^{pl}}{\partial z} \right) + E \frac{\partial \varepsilon_{xx}^{pl}}{\partial x} = 0$$

$$-G \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = t_x + G \gamma_{xn}^{pl} \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (5.2.8\beta)$$

ικανοποιεί τις εξ.(2.2.17), σημειώνοντας ότι η ισχύς των σχέσεων (5.2.8) επεκτάθηκε και στα άκρα της ράβδου. Στις παραπάνω σχέσεις, $\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ είναι ο τελεστής Laplace, ο συμβολισμός $\frac{\partial}{\partial n} = (\partial/\partial y)n_y + (\partial/\partial z)n_z$ δηλώνει την παράγωγο κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο Γ_j , t_x είναι η διαμήκης συνιστώσα του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας (αρχική διαμόρφωση), ενώ $\gamma_{xn}^{pl} = \gamma_{xy}^{pl}n_y + \gamma_{xz}^{pl}n_z$. Επισημαίνεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών προσδιορισμού της ϕ_S^P (εξ.(5.2.7)) είναι πανομοιότυπο με αυτό της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή $\Delta\Pi$ (γραμμική ελαστική ανάλυση) [Μώκος 2007, Sapountzakis 2000, 2001, Sapountzakis and Mokos 2001, 2003a,b], ενώ το αντίστοιχο πρόβλημα της ϕ_S^S (εξ.(5.2.8)) ταυτίζεται με αυτό της μη γραμμικής ελαστικής ανάλυσης (εξ.(2.2.21)) εάν αγνοηθούν οι πλαστικές παραμορφώσεις. Προκειμένου να απλοποιηθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών της ϕ_S^S , υιοθετείται η συνήθης παραδοχή περί αγνόησης της διαμήκουσ συνιστώσας του διανύσματος τάσης ($t_x \approx 0$), συνεπώς η σχέση (5.2.8β) διαμορφώνεται ως

$$-\left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = \gamma_{xn}^{pl} \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \quad (5.2.9)$$

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών της ϕ_S^S μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά εάν ληφθεί υπόψη η καθολική εξίσωση ισορροπίας στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου (βλ. εξ.(5.2.20γ)) και ότι η πλαστικοποίηση της ράβδου προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω των κινηματικών αγνώστων μίας μεταβλητής του προβλήματος, ενώ αποδεικνύεται επίσης ότι η ϕ_S^S είναι διδιάστατη συνάρτηση (βλ. εδάφιο 5.2.4). Τέλος, προκειμένου να ευρεθούν μοναδικές λύσεις για τις εξ.(5.2.7) και (5.2.8), απαιτούμε οι ϕ_S^P , ϕ_S^S να ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνικότητας (2.2.23).

5.2.3 Εντατικά Μεγέθη, Καθολικές Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνοριακές Συνθήκες

Οι κινηματικοί άγνωστοι του προβλήματος που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη συντεταγμένη x ($u_m, \theta_x, (\theta_x^P)'$) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες θα διατυπωθούν επίσης με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Για διευκόλυνση, ορίζονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$N = \iint_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (5.2.10\alpha)$$

$$M_t^P = \iint_{\Omega} \left[S_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (5.2.10\beta)$$

$$M_t^S = \iint_{\Omega} \left(S_{xy} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.10\gamma)$$

$$M_w = \iint_{\Omega} S_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (5.2.10\delta)$$

$$M_R = \iint_{\Omega} S_{xx} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (5.2.10\epsilon)$$

με τα N, M_t^P, M_t^S, M_w να αντιστοιχούν σε αξονική δύναμη, πρωτογενή και δευτερογενή στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα, ενώ το M_R είναι εντατικό μέγεθος ανώτερης τάξης που σχετίζεται με τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Σημειώνεται ότι τα παραπάνω εντατικά μεγέθη ορίζονται μέσω των συνιστωσών του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff, συνεπώς δεν αντιστοιχούν σε επίπεδες διατομές στην παραμορφωμένη διαμόρφωση (βλ. κεφ. 1 και εδάφιο Π1.2.7), ενώ στη βιβλιογραφία συχνά ο ορισμός (5.2.10δ) εκφράζεται με αρνητικό πρόσημο.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(5.2.6)) στις σχέσεις (5.2.10), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EA \left[u_m' + \frac{1}{2} \frac{I_P}{A} (\theta_x')^2 \right] + N^{pl} \quad (5.2.11\alpha)$$

$$M_t^P = GI_t^P \theta_x' + M_t^{Ppl} \quad M_t^S = -GI_t^S \left((\theta_x^P)' - \theta_x' \right) + M_t^{Spl} \quad (5.2.11\beta,\gamma)$$

$$M_w = EC_S (\theta_x^P)'' + M_w^{pl} \quad (5.2.11\delta)$$

$$M_R = EI_P u_m' + \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 + M_R^{pl} \quad (5.2.11\epsilon)$$

όπου $A = \iint_{\Omega} d\Omega$ είναι το εμβαδόν της διατομής και οι γεωμετρικές σταθερές I_P (πολική ροπή αδράνειας ως προς το σημείο S), I_t^P (πρωτογενής στρεπτική σταθερά), I_t^S (δευτερογενής στρεπτική σταθερά), C_S (σταθερά στρέβλωσης) και I_{PP} (ροπή τέταρτης τάξης ως προς το σημείο S) δίδονται μέσω των εξ.(2.2.29α,β,γ,δ) και

(2.2.33β), αντίστοιχα. Στις παραπάνω σχέσεις, οι ποσότητες N^{pl} , M_t^{Ppl} , M_t^{Spl} , M_w^{pl} , M_R^{pl} είναι τα πλαστικά μέρη των αντίστοιχων εντατικών μεγεθών και ορίζονται ως

$$N^{pl} = -E \iint_{\Omega} \varepsilon_{xx}^{pl} d\Omega \quad (5.2.12\alpha)$$

$$M_t^{Ppl} = -G \iint_{\Omega} \left[\gamma_{xy}^{pl} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \gamma_{xz}^{pl} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (5.2.12\beta)$$

$$M_t^{Spl} = -G \iint_{\Omega} \left(\gamma_{xy}^{pl} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} + \gamma_{xz}^{pl} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.12\gamma)$$

$$M_w^{pl} = -E \iint_{\Omega} \left(\varepsilon_{xx}^{pl} \phi_S^P \right) d\Omega \quad (5.2.12\delta)$$

$$M_R^{pl} = -E \iint_{\Omega} \varepsilon_{xx}^{pl} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (5.2.12\epsilon)$$

ενώ η σχέση (5.2.11ε) μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της σχέσης (5.2.11α) και ως

$$M_R = \frac{I}{2} EI_n (\theta'_x)^2 + \frac{I_P}{A} (N - N^{pl}) + M_R^{pl} \quad (5.2.13)$$

όπου η γεωμετρική σταθερά I_n δίδεται από τη σχέση (2.2.33α). Σημειώνεται ότι η εξαγωγή των εκφράσεων (5.2.11β,γ) βασίζεται σε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και στην αξιοποίηση των σχέσεων (5.2.7).

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.2.11), (5.2.6), οι τάσεις δίδονται συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως

$$S_{xx} = \frac{N - N^{pl}}{A} + \frac{M_w - M_w^{pl}}{C_S} \phi_S^P + \frac{I}{2} E \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] (\theta'_x)^2 - E \varepsilon_{xx}^{pl} \quad (5.2.14\alpha)$$

$$S_{xy} = \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{M_t^S - M_t^{Spl}}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} - G \gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.14\beta)$$

$$S_{xz} = \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{M_t^S - M_t^{Spl}}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} - G \gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.14\gamma)$$

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων σε ολική διατύπωση Lagrange (εξ.(2.2.13)) τις δυνατές μεταβολές των μεγεθών u_m , θ_x , $(\theta_x^P)'$ (και των παραγώγων τους) και με τη βοήθεια των σχέσεων (5.2.14) προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν την καθολική ισορροπία αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων της ράβδου, οι οποίες μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$ εκφράζονται ως

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) \quad (5.2.15\alpha)$$

$$\frac{dM_t^P}{dx} + \frac{dM_t^S}{dx} + \frac{d}{dx}(M_R\theta'_x) = -m_t(x) \quad (5.2.15\beta)$$

$$\frac{dM_w}{dx} + M_t^S = -m_w(x) \quad (5.2.15\gamma)$$

$$(N + \bar{N}_0)\delta u_m(0) = 0 \quad (N - \bar{N}_l)\delta u_m(l) = 0 \quad (5.2.16\alpha,\beta)$$

$$\left[M_t^P + M_t^S + M_R\theta'_x + \bar{M}_{t0} \right] \delta\theta_x(0) = 0 \quad (5.2.16\gamma)$$

$$\left[M_t^P + M_t^S + M_R\theta'_x - \bar{M}_{tl} \right] \delta\theta_x(l) = 0 \quad (5.2.16\delta)$$

$$(M_w + \bar{M}_{w0})\delta(\theta'_x)'(0) = 0 \quad (M_w - \bar{M}_{wl})\delta(\theta'_x)'(l) = 0 \quad (5.2.16\epsilon,\sigma\tau)$$

Επισημαίνεται ότι κατά την εξαγωγή των σχέσεων (5.2.15-16) αγνοήθηκαν οι δυνατές μεταβολές της δευτερογενούς στρέβλωσης και των ορθών παραμορφώσεων λόγω δευτερογενούς στρέβλωσης προκειμένου να μην διατυπωθεί θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης [Wang et al. 2000] που είναι περισσότερο πολύπλοκη (βλ. κεφ. 2). Στις εκφράσεις (5.2.15) υπεισέρχονται τα μεγέθη n , m_t , m_w (αξονική δύναμη, στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις κατά μήκος της ράβδου (βλ. Σχ.5.1α) και ορίζονται (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων) συναρτήσει του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας μέσω των εκφράσεων (2.2.34) και (1.2.39α,β), αντίστοιχα. Στις συνοριακές συνθήκες (5.2.16) υπεισέρχονται τα μεγέθη \bar{N}_0 , \bar{N}_l , \bar{M}_{t0} , \bar{M}_{tl} , \bar{M}_{w0} , \bar{M}_{wl} που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (αξονική δύναμη, στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις ακραίες διατομές μέσω των εκφράσεων (2.2.35α,β,γ,δ,ε,στ), αντίστοιχα. Από τις εξ.(5.2.15β), (5.2.16γ,δ) και (5.2.16ε) συμπεραίνεται ότι αξονικά και στρεπτικά εντατικά μεγέθη είναι συζευγμένα και δεν μπορούν να μελετηθούν απομονωμένα όπως πραγματοποιείται στη γραμμική ελαστική ανάλυση.

Εισάγοντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (5.2.11) στις εξ.(5.2.15-16) και αναδιατυπώνοντας τις προκύπτουσες συνοριακές συνθήκες, μορφώνονται έπειτα από κάποιες πράξεις οι παρακάτω κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις καθολικής ισορροπίας αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων

$$EAu_m'' + EI_P\theta'_x\theta_x'' + \frac{dN^{pl}}{dx} = -n(x) \quad (5.2.17\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' - GI_t^S(\theta_x^P)'' + \frac{3}{2}EI_{PP}(\theta_x')^2\theta_x'' + EI_Pu_m'\theta_x'' + EI_Pu_m''\theta_x' + \frac{dM_t^{Ppl}}{dx} + \frac{dM_t^{Spl}}{dx} + \frac{dM_R^{pl}}{dx}\theta_x' + M_R^{pl}\theta_x'' = -m_t(x) \quad (5.2.17\beta)$$

$$EC_S(\theta_x^P)''' - GI_t^S\left((\theta_x^P)' - \theta_x'\right) + \frac{dM_w^{pl}}{dx} + M_t^{Spl} = -m_w(x) \quad (5.2.17\gamma)$$

που υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 (\theta_x^P)' = \bar{\beta}_3 \quad (5.2.18\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου N , M_w , M_t είναι η αξονική δύναμη, το δίρροπο στρέβλωσης και η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου αντίστοιχα, τα οποία δίδονται από τις σχέσεις (5.2.11α), (5.2.11δ) και

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S(\theta_x^P)' + \frac{1}{2}EI_{PP}(\theta_x')^3 + EI_P u_m' \theta_x' + M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl} \theta_x' \quad (5.2.19)$$

Στις σχέσεις (5.2.18), α_i , β_i , $\bar{\beta}_i$ ($i = 1, 2, 3$) είναι συντελεστές που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις (5.2.18) (βλ. εδάφιο 1.2.3). Τέλος, επισημαίνεται ότι στη σχέση (5.2.17β) έχει παραληφθεί όρος που εξαρτάται από την παράγωγο (ως προς x) της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς, καθώς αποδεικνύεται ότι η σταθερά αυτή είναι ανεξάρτητη της διαμήκουσ συντεταγμένης (βλ. εδάφιο 5.2.4).

Παρατηρείται ότι στο πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(5.2.17-18) υπεισέρχεται η τρίτη παράγωγος της πρωτογενούς γωνίας στροφής, η οποία δυσκολεύει την αριθμητική επίλυσή του. Προκειμένου να αποφευχθεί ο συγκεκριμένος όρος, χρησιμοποιείται η ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης $\eta_x = (\theta_x^P)'$ (βλ. κεφ. 2), με τη βοήθεια της οποίας οι εξ.(5.2.17-19) εκφράζονται ως (βλ. εξ.(2.2.7))

$$EAu_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' + \frac{dN^{pl}}{dx} = -n(x) \quad (5.2.20\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' - GI_t^S \eta_x' + \frac{3}{2}EI_{PP}(\theta_x')^2 \theta_x'' + EI_P u_m' \theta_x'' + EI_P u_m'' \theta_x' + \frac{dM_t^{Ppl}}{dx} + \frac{dM_t^{Spl}}{dx} + \frac{dM_R^{pl}}{dx} \theta_x' + M_R^{pl} \theta_x'' = -m_t(x) \quad (5.2.20\beta)$$

$$EC_S \eta_x'' - GI_t^S (\eta_x - \theta_x') + \frac{dM_w^{pl}}{dx} + M_t^{Spl} = -m_w(x) \quad (5.2.20\gamma)$$

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x = \bar{\beta}_3 \quad (5.2.21\alpha, \beta, \gamma)$$

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S \eta_x + \frac{1}{2}EI_{PP}(\theta_x')^3 + EI_P u_m' \theta_x' + M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl} \theta_x' \quad (5.2.22)$$

Παρατηρείται ότι στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων (5.2.20) περιέχονται μέχρι δεύτερης τάξης παράγωγοι, συνεπώς οι εξ.(5.2.20) έχουν περιέλθει σε κατάλληλη μορφή για αριθμητική επίλυση. Γενικά οι συνοριακές συνθήκες (5.2.21α,β) επηρεάζονται από τη γεωμετρική μη γραμμικότητα εξαιτίας των εκφράσεων (5.2.11α), (5.2.19) και (2.2.35γ,δ). Αγνοώντας όλους τους γεωμετρικά μη γραμμικούς όρους των εξ.(5.2.11α), (5.2.22) και (5.2.20α,β) (συμπεριλαμβανομένων και των όρων του M_R^{pl}), προκύπτει το πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή ΔΔΠ, στα πλαίσια της γραμμικής ελαστοπλαστικής ανάλυσης. Επιπρόσθετα, η μη γραμμική ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου διπλά συμμετρικής διατομής χωρίς επιρροή ΔΔΠ διατυπώνεται θέτοντας $(\theta_x^P)' = \theta_x'$ στη σχέση (5.2.1) και ακολουθώντας τη διαδικασία του παρόντος εδαφίου. Οι διαφορικές εξισώσεις και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του σχετικού πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών δίδονται από τις σχέσεις

$$EAu_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' + \frac{dN^{pl}}{dx} = -n \quad (5.2.23\alpha)$$

$$EC_S \theta_x'''' - GI_t^P \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' - EI_P u_m' \theta_x'' - EI_P u_m'' \theta_x' - \frac{dM_t^{Ppl}}{dx} + \frac{d^2 M_w^{pl}}{dx^2} - \frac{dM_R^{pl}}{dx} \theta_x' - M_R^{pl} \theta_x'' = m_t - m_w' \quad (5.2.23\beta)$$

$$\alpha_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \theta_x' = \bar{\beta}_3 \quad (5.2.24\alpha,\beta,\gamma)$$

όπου οι δράσεις M_t , M_w στα άκρα της ράβδου εδώ δίδονται ως

$$M_t = GI_t^P \theta_x' - EC_S \theta_x'' + \frac{1}{2} EI_{PP} (\theta_x')^3 + EI_P u_m' \theta_x' \quad (5.2.25\alpha)$$

$$+ M_t^{Ppl} - \frac{dM_w^{pl}}{dx} + M_R^{pl} \theta_x' - m_w$$

$$M_w = EC_S \theta_x'' + M_w^{pl} \quad (5.2.25\beta)$$

Αγνοώντας όλους τους γεωμετρικά μη γραμμικούς όρους των εξ.(5.2.11α), (5.2.25α) και (5.2.23α,β) (συμπεριλαμβανομένων και των όρων του M_R^{pl}), προκύπτει το πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ΔΔΠ, στα πλαίσια της γραμμικής ελαστοπλαστικής ανάλυσης.

Τέλος, εάν επιπρόσθετα αγνοηθεί και η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, τότε αρκεί να τεθεί $(\theta_x^P)' = \theta_x'$ στη σχέση (5.2.1), να αγνοηθούν οι ορθές παραμορφώσεις λόγω στρέβλωσης στη σχέση (5.2.4α) και να ακολουθηθεί η διαδικασία του παρόντος εδαφίου. Στο σχετικό πεπλεγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών που προκύπτει δεν υπεισέρχεται η συνοριακή συνθήκη στρέβλωσης (5.2.24γ),

ενώ οι σχέσεις (5.2.23β), (5.2.25α) ισχύουν ως έχουν εάν τεθεί σε αυτές $C_S = 0$, $M_w^{pl} = 0$, $m_w = 0$.

5.2.4 Δευτερογενής Συνάρτηση Στρέβλωσης

Διαπιστώνεται εύκολα από τις εξ.(5.2.8α), (5.2.9) αλλά και από τον ορισμό της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς (εξ.(2.2.29γ)) ότι η ϕ_S^S είναι πεπλεγμένη με τους κινηματικούς αγνώστους μίας μεταβλητής του προβλήματος και δίδεται συναρτήσει πλαστικών παραμορφώσεων, οι οποίες εξαρτώνται από την ιστορία φόρτισης της ράβδου. Προκειμένου να διατυπωθεί σχετικά απλή θεωρία στρέψης όπου οι κινηματικοί άγνωστοι μίας μεταβλητής είναι αποξενυμένοι από τις συναρτήσεις στρέβλωσης, η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης προσδιορίζεται θεωρώντας πλήρως γραμμικές ελαστικές συνθήκες. Το σφάλμα από την παραδοχή αυτή αναμένεται να αυξάνεται όσο εξελίσσεται η πλαστικοποίηση στο επίπεδο των διατομών της ράβδου. Έτσι, αγνοώντας τις πλαστικές παραμορφώσεις στις σχέσεις (5.2.8α), (5.2.9), τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών στην καθολική στρεβλωτική εξίσωση ισορροπίας (εξ.(5.2.20γ)) και ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 2.2.4, η ϕ_S^S δίδεται μέσω της έκφρασης (2.2.53) και αποδεικνύεται ότι είναι διδιάστατη συνάρτηση. Επιπρόσθετα, η δευτερογενής στρεπτική σταθερά I_t^S προκύπτει ανεξάρτητη της μεταβλητής x (βλ. εδάφιο 2.2.4). Στο Παράρτημα Π7 αποδεικνύεται ότι η λύση της εξ.(2.2.53) είναι μοναδική.

5.2.5 Εναλλακτικές Διατυπώσεις του Προβλήματος

Το πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά με τη βοήθεια του πεδίου μετατοπίσεων (5.2.1-3) αγνοώντας τη δευτερογενή στρέβλωση. Στην περίπτωση αυτή, οι σχέσεις (5.2.1-3) εκφράζονται ως

$$u(x, y, z) = u_m(x) + (\theta_x^P)'(x) \phi_S^P(y, z) \quad (5.2.26)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (5.2.27)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (5.2.28)$$

όπου η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P προσδιορίζεται μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξ.(5.2.7). Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω εκφράσεις ταυτίζονται με το πεδίο μετατοπίσεων (2.2.59-61) του κεφ. 2 όπου μελετάται το εξεταζόμενο πρόβλημα υπό πλήρως ελαστικές συνθήκες. Ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 5.2.1, οι μη μηδενικές συνιστώσες του παραμορφωσιακού πεδίου της ράβδου προκύπτουν ταυτόσημες με τις αντίστοιχες εκφράσεις των εξ.(2.2.62), ενώ οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου που παράγουν έργο διαμορφώνονται ως

$$S_{xx} = E \left[u_m' + (\theta_x^P)'' \phi_S^P + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\theta_x^P)' - \varepsilon_{xx}^{pl} \right] \quad (5.2.29\alpha)$$

$$S_{xy} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \left((\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - G\gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.29\beta)$$

$$S_{xz} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \left((\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - G\gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.29\gamma)$$

ή συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως

$$S_{xx} = \frac{N - N^{pl}}{A} + \frac{M_w - M_w^{pl}}{C_S} \phi_S^P + \frac{I}{2} E \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] (\theta'_x)^2 - E \varepsilon_{xx}^{pl} \quad (5.2.30\alpha)$$

$$S_{xy} = \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) - \frac{M_t^S - M_t^{Spl}}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - G\gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.30\beta)$$

$$S_{xz} = \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) - \frac{M_t^S - M_t^{Spl}}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - G\gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.30\gamma)$$

επισημαίνοντας ότι τα εντατικά μεγέθη των παραπάνω εξισώσεων ορίζονται με τη βοήθεια των αντίστοιχων σχέσεων του εδαφίου 5.2.3, με την εξαίρεση της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής M_t^S και του πλαστικού μέρους της M_t^{Spl} τα οποία ορίζονται αντίστοιχα ως

$$M_t^S = -\iint_{\Omega} \left(S_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.31)$$

$$M_t^{Spl} = G \iint_{\Omega} \left(\gamma_{xy}^{pl} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \gamma_{xz}^{pl} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.32)$$

Οι υπόλοιπες σχέσεις των εδαφίων (5.2.1-3) ισχύουν ως έχουν, με την εξαίρεση της έκφρασης της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S η οποία εδώ ορίζεται με βάση την εξ.(2.2.66) και αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι γράφεται ως (βλ. εδάφιο 2.2.5)

$$I_t^S = I_P - I_t^P \quad (5.2.33)$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου των εξ.(5.2.29) δεν ικανοποιούν την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (2.2.17) ακόμα και στην περίπτωση όπου θεωρηθούν πλήρως ελαστικές συνθήκες και αγνοηθούν οι όροι που οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Τούτο οφείλεται στους δεύτερους όρους των δεξιών μελών των σχέσεων (5.2.29β,γ), οι οποίοι αποτελούν μη ικανοποιητική κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων υπό πλήρως ελαστικές συνθήκες. Οι όροι αυτοί προέκυψαν από το πεδίο παραμορφώσεων (2.2.62) που είναι συμβιβαστό με το πεδίο μετατοπίσεων (5.2.26-28). Έτσι, προκειμένου να διορθωθούν οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου εξαιτίας της προαναφερθείσας μη ικανοποιητικής κατανομής,

εισάγεται στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης k_x [Kraus 2007] στο πεδίο παραμορφώσεων (εξ.(2.2.62)) ως

$$\varepsilon_{xx} = u'_m + (\theta'_x)^n \phi_S^P + \frac{I}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \quad (5.2.34\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \sqrt{k_x} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.34\beta)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \sqrt{k_x} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (5.2.34\gamma)$$

Το κίνητρο εισαγωγής του k_x στο πεδίο παραμορφώσεων της ράβδου αντί της εισαγωγής στις καταστατικές σχέσεις του υλικού ή στην έκφραση της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών (βλ. εδάφιο 2.2.5) είναι το γεγονός ότι οι συχνότερα χρησιμοποιούμενοι αλγόριθμοι υπολογισμού πλαστικών παραμορφώσεων της βιβλιογραφίας βασίζονται στην ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων με χρήση των παραμορφώσεων (strain-driven algorithms) [Simo and Hughes 1998]. Επιπλέον, η προτεινόμενη εναλλακτική διατύπωση είναι σύμφωνη με αυτή της εργασίας των Navarro et al. [2007]. Οι σχέσεις των εδαφίων (5.2.1-3, 5.2.5) ισχύουν ως έχουν με την εξαίρεση των εξ.(5.2.29-5.2.33) οι οποίες διαμορφώνονται με τη βοήθεια του μη συμβιβαστού πεδίου παραμορφώσεων (5.2.34) ως

$$S_{xx} = E \left[u'_m + (\theta_x^P)^n \phi_S^P + \frac{I}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - \varepsilon_{xx}^{pl} \right] \quad (5.2.35\alpha)$$

$$S_{xy} = G \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \sqrt{k_x} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - G \gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.35\beta)$$

$$S_{xz} = G \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \left((\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \sqrt{k_x} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - G \gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.35\gamma)$$

$$S_{xx} = \frac{N - N^{pl}}{A} + \frac{M_w - M_w^{pl}}{C_S} \phi_S^P + \frac{I}{2} E \left[(y^2 + z^2) - \frac{I_P}{A} \right] (\theta'_x)^2 - E \varepsilon_{xx}^{pl} \quad (5.2.36\alpha)$$

$$S_{xy} = \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) - \frac{M_t^S - M_t^{Spl}}{I_t^S} \sqrt{k_x} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - G \gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.36\beta)$$

$$S_{xz} = \frac{M_t^P - M_t^{Ppl}}{I_t^P} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) - \frac{M_t^S - M_t^{Spl}}{I_t^S} \sqrt{k_x} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - G \gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.36\gamma)$$

$$M_t^S = -\sqrt{k_x} \iint_{\Omega} \left(S_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.37)$$

$$M_t^{Spl} = G\sqrt{k_x} \iint_{\Omega} \left(\gamma_{xy}^{pl} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \gamma_{xz}^{pl} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.38)$$

$$I_t^S = k_x (I_P - I_t^P) \quad (5.2.39)$$

Ο διορθωτικός συντελεστής διάτμησης προσδιορίζεται με τη βοήθεια ενεργειακής μεθόδου (βλ. εδάφιο 2.2.5) θεωρώντας πλήρως ελαστικές συνθήκες. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή και χρησιμοποιώντας τις εξ.(5.2.34), ο k_x προκύπτει ότι δίδεται μέσω της εξ.(2.2.70), ενώ η σταθερά I_t^S (εξ.(5.2.39)) προκύπτει ταυτόσημη με την δευτερογενή στρεπτική σταθερά που υπεισέρχεται στο εδάφιο 5.2.1. Σημειώνεται ότι η μορφή της έκφρασης του k_x που εισάγεται στις εξ.(5.2.34β,γ) ($\sqrt{k_x}$) δικαιολογείται από την χρήση της προαναφερθείσας ενεργειακής μεθόδου. Διαπιστώνεται εύκολα ότι οι συνιστώσες του τασικού πεδίου της ράβδου των εξ.(5.2.35) επίσης δεν ικανοποιούν την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (εξ.(2.2.17)), ακόμα και στην περίπτωση όπου θεωρηθούν πλήρως ελαστικές συνθήκες και αγνοηθούν οι όροι που οφείλονται στην επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Ωστόσο, τονίζεται ότι οι προκύπτουσες καθολικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) είναι διορθωμένες και ταυτόσημες με τις αντίστοιχες εξισώσεις (5.2.17-18) του εδαφίου 5.2.3 υπό πλήρως ελαστικές συνθήκες. Επιπλέον, η παρούσα διατύπωση είναι υπολογιστικά αποδοτικότερη συγκριτικά με αυτή του εδαφίου 5.2.3 καθώς η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης απαιτείται μόνο για τον υπολογισμό του k_x (ο οποίος δεν μεταβάλλεται κατά την πλαστικοποίηση της ράβδου).

Στην περίπτωση που δεν διορθωθούν οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων υπό πλήρως ελαστικές συνθήκες, το πρόβλημα διατυπώνεται με βάση το συμβιβαστό πεδίο παραμορφώσεων (5.2.26-28). Σε αυτή την περίπτωση, στις σχέσεις (5.2.34-39) τίθεται $k_x = I$ οπότε και λαμβάνονται οι σχέσεις (2.2.62), (5.2.29-33). Αξίζει να αναφερθεί ότι η συγκεκριμένη διατύπωση έχει χρησιμοποιηθεί από διάφορους ερευνητές στην ανάλυση ελαστοπλαστικών ράβδων (π.χ. βλ. τις εργασίες των Wunderlich et al. [1986], Gruttmann et al. [2000], Nie and Zhong [2007], Wang et al. [2010], Alsafadie et al. [2011]). Κατά την ελαστική ανάλυση, η διατύπωση αυτή είναι ανάλογη με τη γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία 2ης τάξης καμπτόμενων δοκών Timoshenko κάνοντας χρήση σταθερής κατανομής διατμητικών παραμορφώσεων στο επίπεδο της διατομής χωρίς την εισαγωγή διορθωτικού συντελεστή διάτμησης, ενώ οι διατυπώσεις των εξ.(5.2.34-39) και του εδαφίου 5.2.3 είναι ανάλογες με την χρήση σταθερής και παραβολικής κατανομής διατμητικών παραμορφώσεων στο επίπεδο της διατομής, αντίστοιχα, εισάγοντας διορθωτικό συντελεστή διάτμησης.

Τέλος, το πρόβλημα της γραμμικής ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ για μηδενικές εξωτερικά επιβαλλόμενες αξονικές δράσεις, μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά με τη βοήθεια του πεδίου μετατοπίσεων

$$u(x, y, z) = \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z) + \theta''_x(x) \phi_S^S(y, z) \quad (5.2.40\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (5.2.40\beta)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (5.2.40\gamma)$$

όπου ϕ_S^S είναι δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης η οποία προσδιορίζεται μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών [Sapountzakis and Tsipiras 2011]

$$\nabla^2 \phi_S^S = -\frac{E}{G} \phi_S^P \text{ στο } \Omega \quad (5.2.41\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j \quad (5.2.41\beta)$$

Με βάση τη διατύπωση αυτή, η πλαστικοποίηση της ράβδου επίσης προσομοιώνεται αποκλειστικά μέσω του κινηματικού αγνώστου μίας μεταβλητής του προβλήματος (θ_x), ενώ στην περίπτωση πλήρως ελαστικών συνθηκών προκύπτει επακριβώς η καθολική εξίσωση ισορροπίας τετάρτου βαθμού (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) της θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (εξ.(1.2.43), (1.2.44) χωρίς τους μη γραμμικούς όρους). Στην περίπτωση ανάπτυξης πλαστικών παραμορφώσεων, προκύπτει επίσης καθολική εξίσωση ισορροπίας τετάρτου βαθμού με τη βοήθεια ορισμένων παραδοχών, οι οποίες υιοθετούνται προκειμένου διατυπωθεί σχετικά απλή θεωρία στρέψης που να μην απαιτεί θεώρηση και τρίτης συνοριακής συνθήκης στα άκρα της ράβδου [Sapountzakis and Tsipiras 2011]. Οι παραδοχές αυτές οδηγούν στη μόρφωση προσεγγιστικής καθολικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου, ωστόσο η διατύπωση είναι υπολογιστικά αποδοτική αφού δεν απαιτεί την θεώρηση πρόσθετου κινηματικού αγνώστου μίας μεταβλητής για την προσομοίωση της επιρροής των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Η διατύπωση αυτή και η αριθμητική αντιμετώπισή της παρουσιάζονται αναλυτικά στην εργασία των Sapountzakis and Tsipiras [2011].

5.2.6 Βήματα Επίλυσης του Προβλήματος

Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στα προηγούμενα εδάφια, για την επίλυση του στατικού προβλήματος της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα.

1. Ορισμός αυθαίρετου δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς $Sxyz$ με αρχή το κέντρο συστροφής S της διατομής του αριστερού άκρου της ράβδου. Το κέντρο συστροφής ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο και προσδιορίζεται ως το σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας της (διπλά συμμετρικής) διατομής.
2. Υπολογισμός της πρωτογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^P(y, z)$ [Μώκος 2007]. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \hat{\phi}_S^P = 0 \text{ στο } \Omega \quad (5.2.42\alpha)$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \text{ στο } \Gamma_j \quad (5.2.42\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Laplace*.

3. Υπολογισμός του εμβαδού A της διατομής και της πρωτογενούς ροπής στρέβλωσης \widehat{R}_S^P [Μώκος 2007] ως

$$A = \iint_{\Omega} d\Omega \quad \widehat{R}_S^P = \iint_{\Omega} \widehat{\phi}_S^P d\Omega \quad (5.2.43\alpha,\beta)$$

4. Υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^P(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση [Μώκος 2007]

$$\phi_S^P = \widehat{\phi}_S^P - \frac{\widehat{R}_S^P}{A} \quad (5.2.44)$$

5. Υπολογισμός της δευτερογενούς βασικής συνάρτησης στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^S(y, z)$ [Μώκος 2007]. Η συνάρτηση υπολογίζεται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \widehat{\phi}_S^S = \phi_S^P \text{ στο } \Omega \quad (5.2.45\alpha)$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma_j \quad (5.2.45\beta)$$

ως πρόβλημα *Neumann* για την εξίσωση *Poisson*.

6. Υπολογισμός της δευτερογενούς ροπής στρέβλωσης \widehat{R}_S^S [Μώκος 2007] ως

$$\widehat{R}_S^S = \iint_{\Omega} \widehat{\phi}_S^S d\Omega \quad (5.2.46)$$

7. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\overline{\phi}_S^S(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση [Μώκος 2007]

$$\overline{\phi}_S^S = \widehat{\phi}_S^S - \frac{\widehat{R}_S^S}{A} \quad (5.2.47)$$

8. Υπολογισμός της πολικής ροπής αδράνειας I_P , της ροπής τέταρτης τάξης I_{PP} , της σταθεράς I_n , της πρωτογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^P , της σταθεράς στρέβλωσης C_S , της βοηθητικής σταθεράς $I_{\overline{\phi}}$ και της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς I_t^S μέσω των σχέσεων

$$I_P = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad I_{PP} = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega \quad I_n = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} \quad (5.2.48\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_t^P = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad C_S = \iint_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (5.2.48\delta, \epsilon)$$

$$I_{\bar{\phi}} = -\iint_{\Omega} \phi_S^P \bar{\phi}_S^S d\Omega \quad I_t^S = \frac{(C_S)^2}{I_{\bar{\phi}}} \quad (5.2.48\sigma\tau, \zeta)$$

9. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^S(y, z)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi_S^S = \frac{I_t^S}{C_S} \bar{\phi}_S^S \quad (5.2.49)$$

10. Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων αξονικής, στρεπτικής και στρεβλωτικής ισορροπίας της ράβδου για τυχούσες συγκεντρωμένες ή καταναμημένες αξονικές δυνάμεις $n = n(x)$, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$, υποκειμένων στις πλέον γενικές αξονικές, στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\left. \begin{aligned} EAu_m'' + EI_P \theta_x' \theta_x'' + \frac{dN^{pl}}{dx} &= -n(x) \\ G(I_t^P + I_t^S) \theta_x'' - GI_t^S \eta_x' + \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' + EI_P u_m' \theta_x'' + EI_P u_m'' \theta_x' \\ + \frac{dM_t^{Ppl}}{dx} + \frac{dM_t^{Spl}}{dx} + \frac{dM_R^{pl}}{dx} \theta_x' + M_R^{pl} \theta_x'' &= -m_t(x) \\ EC_S \eta_x'' - GI_t^S (\eta_x - \theta_x') + \frac{dM_w^{pl}}{dx} + M_t^{Spl} &= -m_w(x) \end{aligned} \right\} \text{στο εσωτερικό της ράβδου} \quad (5.2.50\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 N + \alpha_2 u_m &= \alpha_3 \\ \beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x &= \beta_3 \\ \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \eta_x &= \bar{\beta}_3 \end{aligned} \right\} \text{στα άκρα της ράβδου } x = 0, l \quad (5.2.50\beta)$$

όπου

$$N = EA \left[u_m' + \frac{1}{2} \frac{I_P}{A} (\theta_x')^2 \right] + N^{pl} \quad (5.2.51\alpha)$$

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta'_x - GI_t^S\eta_x + \frac{1}{2}EI_{PP}(\theta'_x)^3 + EI_P u'_m \theta'_x \quad (5.2.51\beta)$$

$$+ M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl} \theta'_x$$

$$M_w = EC_S \eta'_x + M_w^{pl} \quad (5.2.51\gamma)$$

$$N^{pl} = -E \iint_{\Omega} \varepsilon_{xx}^{pl} d\Omega \quad (5.2.52\alpha)$$

$$M_t^{Ppl} = -G \int_{\Omega} \left[\gamma_{xy}^{pl} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \gamma_{xz}^{pl} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (5.2.52\beta)$$

$$M_t^{Spl} = -G \int_{\Omega} \left(\gamma_{xy}^{pl} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} + \gamma_{xz}^{pl} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.2.52\gamma)$$

$$M_w^{pl} = -E \int_{\Omega} \left(\varepsilon_{xx}^{pl} \phi_S^P \right) d\Omega \quad (5.2.52\delta)$$

$$M_R^{pl} = -E \int_{\Omega} \varepsilon_{xx}^{pl} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (5.2.52\epsilon)$$

και υπολογισμός της αξονικής μετατόπισης $u_m(x)$, της γωνίας στροφής $\theta_x(x)$, της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης $\eta_x(x)$, των παραγώγων τους καθώς και των αναπτυσσόμενων αξονικών, στρεπτικών και στρεβλωτικών εντατικών μεγεθών N , N^l , N^{nl} , M_t , M_t^{Pel} , M_t^{Sel} , M_R^{el} , M_t^{pl} και M_w μέσω των σχέσεων

$$N = N^l + N^{nl} + N^{pl} \quad (5.2.53\alpha)$$

$$N^l = EAu'_m \quad N^{nl} = \frac{1}{2}EI_P(\theta'_x)^2 \quad (5.2.53\beta,\gamma)$$

$$M_t = M_t^{Pel} + M_t^{Sel} + M_R^{el}\theta'_x + M_t^{pl} \quad (5.2.54\alpha)$$

$$M_t^{Pel} = GI_t^P\theta'_x \quad M_t^{Sel} = -GI_t^S(\eta_x - \theta'_x) \quad (5.2.54\beta,\gamma)$$

$$M_R^{el} = \frac{1}{2}E_I I_{PP}(\theta'_x)^2 + E_I I_P u'_m \quad M_t^{pl} = M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl}\theta'_x \quad (5.2.54\delta,\epsilon)$$

$$M_w = EC_S \eta'_x + M_w^{pl} \quad (5.2.55)$$

11. Υπολογισμός των μη μηδενικών συνιστωσών ορθής τάσης, πρωτογενούς και δευτερογενούς διατμητικής τάσης του 2ου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff και των συνολικών διατμητικών τάσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις (βλ. και [Μώκος 2007])

Διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_{xy} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) - G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} - G\gamma_{xy}^{pl} \quad (5.2.56\alpha)$$

$$S_{xz} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) - G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} - G\gamma_{xz}^{pl} \quad (5.2.56\beta)$$

Συνολικές διατμητικές τάσεις στο χωρίο Ω

$$S_x = \sqrt{(S_{xy})^2 + (S_{xz})^2} \quad (5.2.56\gamma)$$

Διατμητικές τάσεις στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_x = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + yn_y + zn_z \right) - G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} - G\gamma_{xt}^{pl} \quad (5.2.56\delta)$$

όπου $\gamma_{xt}^{pl} = -\gamma_{xy}^{pl}n_z + \gamma_{xz}^{pl}n_y$. Επισημαίνεται ότι για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων S_x στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) απαιτείται ο προσδιορισμός των συνοριακών πλαστικών παραμορφώσεων γ_{xt}^{pl} (βλ. εδάφιο 5.3.5).

Ορθές τάσεις στο χωρίο Ω και στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$)

$$S_{xx} = E \left[u'_m + \eta'_x \phi_S^P + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 - \varepsilon_{xx}^{pl} \right] \quad (5.2.56\epsilon)$$

12. Υπολογισμός των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της ράβδου σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u(x, y, z, t) = u_m(x) + \eta_x(x) \phi_S^P(y, z) - (\eta_x(x) - \theta'_x(x)) [\phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(y, z)] \quad (5.2.57\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z \sin \theta_x(x) - y(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (5.2.57\beta)$$

$$w(x, y, z) = y \sin \theta_x(x) - z(1 - \cos \theta_x(x)) \quad (5.2.57\gamma)$$

5.3 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

5.3.1 Για τη «Μέση» Αξονική Μετατόπιση, τη Γωνία Στρεπτικής Στροφής, και την Ανεξάρτητη Παράμετρο Στρέβλωσης

Η αριθμητική επίλυση του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών αναφορικά με τη «μέση» αξονική μετατόπιση, τη γωνία στρεπτικής στροφής και την ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.2.20-21), επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π3.3.

Έστω $u_1(x) = u_m(x)$, $u_2(x) = \theta_x(x)$, $u_3(x) = \eta_x(x)$ η ζητούμενη λύση του πεπλεγμένου προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.2.20-21). Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο εσωτερικό της ράβδου, δηλαδή στο διάστημα $(0, l)$, καθώς και μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$, η σχέση (Π2.3.6) διαμορφώνεται για τις συναρτήσεις u_n ($n = 1, 2, 3$) ως

$$u_n(\xi) = \int_0^l \frac{d^2 u_n}{dx^2} A_2^u dx - \left[A_2^u \frac{du_n}{dx} - A_1^u u_n \right]_0^l \quad (n = 1, 2, 3) \quad (5.3.1\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου A_1^u , A_2^u είναι δισημειακοί πυρήνες που δίδονται από τις εξ.(Π2.3.7). Επειδή οι ποσότητες EA , $G(I_t^P + I_t^S)$ και EC_S δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή x , οι εξ.(5.3.1) μπορούν να γραφούν ως

$$EAu_1(\xi) = \int_0^l EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} A_2^u dx - EA \left[A_2^u \frac{du_1}{dx} - A_1^u u_1 \right]_0^l \quad (5.3.2\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = \int_0^l G(I_t^P + I_t^S) \frac{d^2 u_2}{dx^2} A_2^u dx - G(I_t^P + I_t^S) \left[A_2^u \frac{du_2}{dx} - A_1^u u_2 \right]_0^l \quad (5.3.2\beta)$$

$$EC_S u_3(\xi) = \int_0^l EC_S \frac{d^2 u_3}{dx^2} A_2^u dx - EC_S \left[A_2^u \frac{du_3}{dx} - A_1^u u_3 \right]_0^l \quad (5.3.2\gamma)$$

Επιλύοντας την εξ.(5.2.20α) ως προς EAu_m'' και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξ.(5.3.2α), την εξ.(5.2.20β) ως προς $G(I_t^P + I_t^S)\theta_x''$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξ.(5.3.2β) και την εξ.(5.2.20γ) ως προς $EC_S \eta_x''$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξ.(5.3.2γ), λαμβάνονται οι ακόλουθες ολοκληρωτικές εκφράσεις

$$EAu_1(\xi) = \int_0^l \left(-n - EI_P \frac{du_2}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{dN^{pl}}{dx} \right) A_2^u dx - EA \left[A_2^u \frac{du_1}{dx} - A_1^u u_1 \right]_0^l \quad (5.3.3\alpha)$$

$$G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = \int_0^l \left(GI_t^S \frac{du_3}{dx} - \frac{3}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} - EI_P \frac{d^2 u_1}{dx^2} \frac{du_2}{dx} - \frac{dM_t^{Ppl}}{dx} - \frac{dM_t^{Spl}}{dx} - \frac{dM_R^{pl}}{dx} \theta'_x - M_R^{pl} \theta''_x - m_t \right) A_2^u dx - G(I_t^P + I_t^S) \left[A_2^u \frac{du_2}{dx} - A_1^u u_2 \right]_0^l \quad (5.3.3\beta)$$

$$EC_S u_3(\xi) = \int_0^l \left(GI_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) - \frac{dM_w^{pl}}{dx} - M_t^{Spl} - m_w \right) A_2^u dx$$

$$-EC_S \left[\Lambda_2^u \frac{du_3}{dx} - \Lambda_1^u u_3 \right]_0^l \quad (5.3.3\gamma)$$

Μετά από κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά παράγοντες οι εκφράσεις (5.3.3) διαμορφώνονται ως

$$\begin{aligned} EAu_1(\xi) = & -\int_0^l n \Lambda_2^u dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI_P \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \Lambda_1^u dx + \int_0^l N^{pl} \Lambda_1^u dx \\ & - \left[\left(N^{pl} + \frac{1}{2} EI_P \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \right) \Lambda_2^u \right]_0^l - EA \left[\Lambda_2^u \frac{du_1}{dx} - \Lambda_1^u u_1 \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.4\alpha)$$

$$\begin{aligned} G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = & -\int_0^l m_t \Lambda_2^u dx - \int_0^l \left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_1^u dx \\ & + \int_0^l \left(M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl} \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_1^u dx + \left[\left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_2^u \right]_0^l \\ & - \left[\left(M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl} \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_2^u \right]_0^l - G(I_t^P + I_t^S) \left[\Lambda_2^u \frac{du_2}{dx} - \Lambda_1^u u_2 \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.4\beta)$$

$$\begin{aligned} EC_S u_3(\xi) = & -\int_0^l m_w \Lambda_2^u dx + \int_0^l GI_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_2^u dx + \int_0^l M_w^{pl} \Lambda_1^u dx \\ & - \int_0^l M_t^{Spl} \Lambda_2^u dx - \left[M_w^{pl} \Lambda_2^u \right]_0^l - EC_S \left[\Lambda_2^u \frac{du_3}{dx} - \Lambda_1^u u_3 \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.4\gamma)$$

Με τη βοήθεια των εκφράσεων των εντατικών μεγεθών (5.2.11α), (5.2.22), (5.2.11δ), οι συνοριακοί όροι των παραπάνω σχέσεων εκφράζονται απλούστερα ως

$$\begin{aligned} EAu_1(\xi) = & -\int_0^l n \Lambda_2^u dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI_P \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \Lambda_1^u dx + \int_0^l N^{pl} \Lambda_1^u dx \\ & - \left[\Lambda_2^u N - \Lambda_1^u EAu_1 \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.5\alpha)$$

$$\begin{aligned} G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) = & -\int_0^l m_t \Lambda_2^u dx \\ & - \int_0^l \left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_{PP} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 - EI_P \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_1^u dx \\ & + \int_0^l \left(M_t^{Ppl} + M_t^{Spl} + M_R^{pl} \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_1^u dx - \left[\Lambda_2^u M_t - \Lambda_1^u G(I_t^P + I_t^S)u_2 \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.5\beta)$$

$$EC_S u_3(\xi) = -\int_0^l m_w \Lambda_2^u dx + \int_0^l GI_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) \Lambda_2^u dx$$

$$+ \int_0^l M_w^{pl} A_I^u dx - \int_0^l M_t^{S pl} A_2^u dx - \left[A_2^u M_w - EC_S A_I^u u_3 \right]_0^l \quad (5.3.5\gamma)$$

Τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών που υπεισέρχονται στις ολοκληρωτικές εκφράσεις (5.3.5) εξαρτώνται από τις παραγώγους u'_1 , u'_2 , u'_3 (αφού προκύπτουν από τις πλαστικές παραμορφώσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις [Simo and Hughes 1998] που αποτελούν συνάρτηση των u'_1 , u'_2 , u'_3 (βλ. εξ.(5.2.4))). Προκειμένου να υπεισέλθουν οι παράγωγοι αυτοί και στα αριστερά μέλη των σχέσεων (5.3.5), οι σχέσεις αυτές παραγωγίζονται ως προς ξ δίδοντας

$$EAu'_1(\xi) = \int_0^l n A_I^u dx - \frac{1}{2} EI_P [u'_2(\xi)]^2 - N^{pl}(\xi) + \left[A_I^u N \right]_0^l \quad (5.3.6\alpha)$$

$$\begin{aligned} G(I_t^P + I_t^S)u'_2(\xi) &= \int_0^l m_t A_I^u dx + GI_t^S u_3(\xi) - \frac{1}{2} EI_{PP} [u'_2(\xi)]^3 \\ &\quad - EI_P u'_1(\xi) u'_2(\xi) - M_t^{P pl}(\xi) - M_t^{S pl}(\xi) \\ &\quad - M_R^{pl}(\xi) u'_2(\xi) + \left[A_I^u M_t \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.6\beta)$$

$$\begin{aligned} EC_S u'_3(\xi) &= \int_0^l m_w A_I^u dx - \int_0^l GI_t^S \left(u_3 - \frac{du_2}{dx} \right) A_I^u dx \\ &\quad - M_w^{pl}(\xi) + \int_0^l M_t^{S pl} A_I^u dx + \left[A_I^u M_w \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.6\gamma)$$

Οι εξ.(5.3.5β), (5.3.6β) εκφράζονται με τη βοήθεια της σχέσης (5.3.6α) ως

$$\begin{aligned} G(I_t^P + I_t^S)u_2(\xi) &= - \int_0^l m_t A_2^u dx - \int_0^l \left(GI_t^S u_3 - \frac{1}{2} EI_n \left(\frac{du_2}{dx} \right)^3 \right) A_I^u dx \\ &\quad + \frac{I_P}{A} \int_0^l \left(\frac{du_2}{dx} \int_0^l n A_I^u(t, x) dt \right) A_I^u(x, \xi) dx + \frac{I_P}{A} \int_0^l \left[A_I^u(t, x) N \right]_0^l \frac{du_2}{dx} A_I^u(x, \xi) dx \\ &\quad + \int_0^l \left(M_t^{P pl} + M_t^{S pl} + \left(M_R^{pl} - \frac{I_P}{A} N^{pl} \right) \frac{du_2}{dx} \right) A_I^u dx \\ &\quad - \left[A_2^u M_t - A_I^u G(I_t^P + I_t^S)u_2 \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

$$\begin{aligned} G(I_t^P + I_t^S)u'_2(\xi) &= \int_0^l m_t A_I^u dx + GI_t^S u_3(\xi) - \frac{1}{2} EI_n [u'_2(\xi)]^3 \\ &\quad - \frac{I_P}{A} u'_2(\xi) \left[\int_0^l n A_I^u dx + \left[A_I^u N \right]_0^l \right] - M_t^{P pl}(\xi) - M_t^{S pl}(\xi) \\ &\quad - \left(M_R^{pl}(\xi) - \frac{I_P}{A} N^{pl}(\xi) \right) u'_2(\xi) + \left[A_I^u M_t \right]_0^l \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

επισημαίνοντας ότι με τις παραπάνω εκφράσεις αντιμετωπίζεται πιθανή εκδήλωση «μεμβρανικού κλειδώματος» (membrane locking) [Zienkiewicz and Taylor 2005, Crisfield 1991].

Επειδή τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών εξαρτώνται αποκλειστικά από τους αγνώστους u'_1, u'_2, u'_3, u_3 (αφού προκύπτουν από τις πλαστικές παραμορφώσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις που αποτελούν συνάρτηση των αγνώστων αυτών (βλ. εξ.(5.2.4)), συμπεραίνεται πλέον ότι οι ολοκληρωτικές σχέσεις (5.3.5α), (5.3.7), (5.3.5γ), (5.3.6α), (5.3.8) και (5.3.6γ) έχουν περιέλθει σε κατάλληλη μορφή για να επιλυθεί αριθμητικά το πρόβλημα. Έτσι, σύμφωνα με όσα έχουν παρουσιαστεί στα εδάφια Π3.2, Π3.3, το διάστημα $(0, l)$ διαιρείται σε L στοιχεία όπου εφαρμόζεται αριθμητική ολοκλήρωση Gauss (με L_{Gauss} πλήθος σημείων Gauss σε κάθε στοιχείο) στα ολοκληρώματα των προαναφερθεισών σχέσεων στα οποία υπεισέρχονται άγνωστα μεγέθη. Με τη μέθοδο αυτή αποφεύγεται η παραγωγή συναρτήσεων σχήματος και η χρήση πεπερασμένων διαφορών, ενώ αντιμετωπίζεται επιτυχώς το «**διατμητικό κλείδωμα**» (shear locking) [Zienkiewicz and Taylor 2005, Crisfield 1991]. Εφαρμόζοντας σε $L \times L_{Gauss}$ σημεία ταξιοθεσίας ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$) τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (5.3.6α), (5.3.8), (5.3.6γ) και (5.3.5γ), καθώς και στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0, \xi = \xi_{L \times L_{Gauss} + 1} = l$ τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (5.3.5α), (5.3.7) και (5.3.5γ), προκύπτουν $4L \times L_{Gauss} + 6$ εξισώσεις ως προς $4L \times L_{Gauss} + 12$ αγνώστους (πρόκειται για τις τιμές των $(u'_1)_i, (u'_2)_i, (u'_3)_i, (u_3)_i$ ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$) στα $L \times L_{Gauss}$ εσωτερικά κομβικά σημεία και τις συνοριακές τιμές των $u_1, u_2, u_3, N, M_t, M_w$ στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0, \xi = \xi_{L \times L_{Gauss} + 1} = l$). Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις 6 συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου (βλ. εξ.(5.2.21)) μορφώνουν μη γραμμικό σύστημα $4L \times L_{Gauss} + 12$ αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο εκφράζεται σε τυπική μορφή ως

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}(n, \mathbf{d}))\mathbf{d} + \mathbf{b}_{pl}(\mathbf{d}) = \mathbf{p} \quad (5.3.9)$$

όπου \mathbf{d} είναι γενικευμένο μητρώο στήλη άγνωστων ποσοτήτων διαστάσεων $(4L \times L_{Gauss} + 12) \times 1$ το οποίο εκφράζεται ως

$$\mathbf{d}^T = \left\{ \begin{array}{cccccccc} (u'_1)_1 & (u'_1)_2 & \dots & (u'_1)_{L \times L_{Gauss}} & (u'_2)_1 & (u'_2)_2 & \dots & (u'_2)_{L \times L_{Gauss}} \\ (u'_3)_1 & (u'_3)_2 & \dots & (u'_3)_{L \times L_{Gauss}} & (u_3)_1 & (u_3)_2 & \dots & (u_3)_{L \times L_{Gauss}} \\ (u_1)_0 & (u_1)_{L \times L_{Gauss} + 1} & (u_2)_1 & (u_2)_{L \times L_{Gauss} + 1} & (u_3)_1 & (u_3)_{L \times L_{Gauss} + 1} & & \\ (N)_1 & (N)_{L \times L_{Gauss} + 1} & (M_t)_1 & (M_t)_{L \times L_{Gauss} + 1} & (M_w)_1 & (M_w)_{L \times L_{Gauss} + 1} & & \end{array} \right\} \quad (5.3.10)$$

ενώ \mathbf{K} είναι γενικευμένο γνωστό γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(4L \times L_{Gauss} + 12) \times (4L \times L_{Gauss} + 12)$, \mathbf{K}_{nl} είναι γενικευμένο γνωστό γεωμετρικά μη γραμμικό μητρώο στιβαρότητας διαστάσεων $(4L \times L_{Gauss} + 12) \times (4L \times L_{Gauss} + 12)$, \mathbf{b}_{pl} είναι γενικευμένο γνωστό πλαστικό μητρώο στήλη στιβαρότητας διάστασης $(4L \times L_{Gauss} + 12) \times 1$ και \mathbf{p} είναι γενικευμένο γνωστό μητρώο στήλη φόρτισης

διάστασης $(4L \times L_{Gauss} + 12) \times 1$. Τα μητρώα \mathbf{K} , \mathbf{K}_{nl} και το μητρώο στήλη \mathbf{b}_p προσδιορίζονται εύκολα με εφαρμογή της προαναφερθείσας αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss, εκτός της περίπτωσης όπου το σημείο ταξιθεσίας βρίσκεται εντός του στοιχείου στο οποίο υπολογίζονται τα εξεταζόμενα ολοκληρώματα (βλ. εδάφιο Π3.3). Στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται ιδιομορφία στα ολοκληρώματα που εξαρτώνται από τον πυρήνα A_I^u . Η ομαλοποίησή τους πραγματοποιείται εφαρμόζοντας την τεχνική που παρουσιάζεται στην εργασία των Katsikadelis and Sapountzakis [1988] (βλ. εδάφιο Π3.3). Επιπλέον, στο μητρώο \mathbf{K}_{nl} υπεισέρχεται ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^l n A_I^u dx$ το οποίο για τις συνήθεις κατανομές φόρτισης n υπολογίζεται χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση. Τέλος, στο μητρώο στήλη \mathbf{p} υπεισέρχονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l n A_2^u dx$, $\int_0^l m_t A_2^u dx$, $\int_0^l m_w A_2^u dx$, $\int_0^l n A_1^u dx$, $\int_0^l m_t A_1^u dx$, $\int_0^l m_w A_1^u dx$ τα οποία για τις συνήθεις κατανομές φόρτισης n , m_t , m_w υπολογίζονται επίσης χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση.

Στη συνέχεια, το σύστημα εξισώσεων (5.3.10) επιλύεται, στα πλαίσια προσαυξητικού - επαναληπτικού αλγορίθμου (βλ. εδάφιο 5.3.5), με την υβριδική μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων Powell [Powell 1970a,b] και προσδιορίζεται το μητρώο στήλη \mathbf{d} , οπότε λαμβάνονται οι τιμές των u'_1 , u'_2 , u'_3 , u_3 στα $L \times L_{Gauss}$ εσωτερικά κομβικά σημεία καθώς και τις τιμές των u_1 , u_2 , u_3 , N , M_t , M_w στα άκρα της ράβδου. Χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού μητρώου [More et al. 1980] της μεθόδου. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των κινηματικών μεγεθών u_1 , u_2 , u_3 μπορούν εύκολα να ευρεθούν και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο $\xi \in (0,1)$ πέραν των σημείων ταξιθεσίας, εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (5.3.5α), (5.3.7), (5.3.5γ) για την τιμή ξ του εξεταζόμενου σημείου. Επιπλέον, μπορούν εύκολα να ευρεθούν τα εντατικά μεγέθη σε οποιοδήποτε σημείο του εσωτερικού της ράβδου εφαρμόζοντας κατάλληλα τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (5.3.6α), (5.3.8) και (5.3.6γ) (βλ. και εξ.(5.2.11α), (5.2.22), (5.2.11δ)). Οι παράγωγοι των κινηματικών μεγεθών u'_1 , u'_2 , u'_3 μπορούν να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου επιλύοντας το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (5.2.11α), (5.2.22), (5.2.11δ), αφού αξιοποιηθούν οι τιμές των u_3 και των εντατικών μεγεθών για την εξεταζόμενη θέση. Τέλος, σημειώνεται ότι το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου χωρίς επιρροή ΔΔΠ που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.2.23-24) επιλύεται αριθμητικά με ανάλογο τρόπο.

5.3.2 Για την Πρωτογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(5.2.44) δίδει την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23α)), εφόσον η πρωτογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\hat{\phi}_S^P$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23α)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\hat{\phi}_S^P$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (5.2.42) (βλ. εδάφιο 5.2.6) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Παρατηρείται ότι το πρόβλημα

συνοριακών τιμών της $\widehat{\phi}_S^P$ είναι ταυτόσημο με αυτό που περιγράφεται από τις εξ.(1.2.24), εάν σε αυτές τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο αριθμητικός υπολογισμός της $\widehat{\phi}_S^P$ (και των παραγώγων της) πραγματοποιείται ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 1.3.3.

5.3.3 Για τη Δευτερογενή Συνάρτηση Στρέβλωσης

Η εξ.(5.2.47) δίδει τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης $\overline{\phi}_S^S$ (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.55)), εφόσον η δευτερογενής βασική συνάρτηση στρέβλωσης $\widehat{\phi}_S^S$ (η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.55)) έχει ήδη προσδιοριστεί. Εφόσον η ϕ_S^P έχει ήδη προσδιοριστεί στο σύνορο Γ (βλ. εδάφιο 5.3.2), ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $\widehat{\phi}_S^S$ επιτυγχάνεται επιλύοντας αριθμητικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχέσεων (5.2.45) χρησιμοποιώντας την άμεση BEM [Κατσικαδέλης 1999], όπως αυτή παρουσιάστηκε στο εδάφιο Π1.3. Παρατηρείται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών της $\widehat{\phi}_S^S$ είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα συνοριακών τιμών της συνάρτησης \widehat{B} που περιγράφεται από τις εξ.(1.3.41), εάν σε αυτές τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο αριθμητικός υπολογισμός της $\widehat{\phi}_S^S$ (και των παραγώγων της) πραγματοποιείται ακολουθώντας τη διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης \widehat{B} του εδαφίου 1.3.5. Κατόπιν, αφού υπολογιστούν οι γεωμετρικές σταθερές I_t^S , C_S (βλ. εδάφιο 5.3.4), η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S προσδιορίζεται εφαρμόζοντας την εξ.(5.2.49).

5.3.4 Για τις Γεωμετρικές Σταθερές και τα Πλαστικά Μέρη των Εντατικών Μεγεθών

Οι γεωμετρικές σταθερές οι οποίες υπεισέρχονται στο πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ μπορούν να υπολογιστούν μέσω των σχετικών εκφράσεων του εδαφίου 5.2.6. Ωστόσο μετατρέπουμε όλα τα πεδιακά ολοκληρώματα των σχέσεων αυτών σε συνοριακά, εκτός αυτού της σταθεράς $I_{\overline{\phi}}$. Παρατηρείται ότι η διαδικασία αυτή για τις σταθερές

$A, \widehat{R}_S^P, \widehat{R}_S^S, I_P, I_{PP}, I_t^P, C_S$ είναι ταυτόσημη με τη διαδικασία των αντίστοιχων σταθερών που παρουσιάζεται στο εδάφιο 1.3.5, εάν στις σχετικές εξισώσεις τεθεί $K = I$. Συνεπώς, ο υπολογισμός των σταθερών αυτών με συνοριακά ολοκληρώματα πραγματοποιείται ακολουθώντας την αντίστοιχη διαδικασία του εδαφίου 1.3.5. Σημειώνεται ότι ο αριθμητικός προσδιορισμός των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που υπεισέρχονται στις σχέσεις υπολογισμού των σταθερών αυτών βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου και πραγματοποιείται με αναλυτική ολοκλήρωση.

Ο υπολογισμός της σταθεράς $I_{\overline{\phi}}$ βασίζεται στο πεδιακό ολοκλήρωμα της σχέσης (5.2.48στ). Ο αριθμητικός προσδιορισμός του ολοκληρώματος αυτού βασίζεται σε πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής και πραγματοποιείται με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Υπογραμμίζεται ότι η πεδιακή διακριτοποίηση απαιτείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, συνεπώς δεν απαιτείται να υπάρχει ακριβής

συναρμογή μεταξύ των επιφανειακών στοιχείων της διακριτοποίησης. Μετά τον υπολογισμό των προαναφερθεισών σταθερών, οι σταθερές I_n και I_t^S υπολογίζονται εφαρμόζοντας τις εξ. (5.2.48γ) και (5.2.48ζ), αντίστοιχα.

Τέλος, ο υπολογισμός των πλαστικών μερών των εντατικών μεγεθών N^{Pl} , M_t^{Ppl} , M_t^{Spl} , M_R^{Pl} , M_w^{Pl} υπολογίζονται μέσω των πεδιακών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (5.2.12). Ο αριθμητικός προσδιορισμός βασίζεται στην υπάρχουσα πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής και πραγματοποιείται με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss, επισημαίνοντας ότι τα σημεία Gauss των επιφανειακών στοιχείων της διατομής αποτελούν σημεία ελέγχου (monitoring stations) στα οποία είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων. Σημειώνεται ότι τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών που υπεισέρχονται στις εναλλακτικές διατυπώσεις του εξεταζόμενου προβλήματος (βλ. εδάφιο 5.2.5) υπολογίζονται αριθμητικά με ανάλογο τρόπο.

5.3.5 Προσαυξητικός - Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης του Προβλήματος

Όπως προαναφέρθηκε, προκειμένου να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις της ράβδου, απαιτείται να είναι γνωστή η ιστορία φόρτισής της. Συνεπώς, τα μεγέθη εξωτερικής φόρτισης (n , \mathbf{p}) που υπεισέρχονται στο μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (5.3.9), ορίζονται συναρτήσει «χρονικής» παραμέτρου λ . Ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων αυτών και η επίλυση του εξεταζόμενου προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο του έλεγχου φορτίου (load control) [Crisfield 1991], σύμφωνα με την οποία επιλέγονται T τιμές της παραμέτρου λ_t ($t = 1, 2, \dots, T$) για τις οποίες υπολογίζονται αριθμητικά τα κινηματικά μεγέθη μίας μεταβλητής του προβλήματος (u_m , θ_x , η_x). Για $\lambda_0 = 0$ έχουμε την αρχική αφόρτιστη διαμόρφωση της ράβδου.

Αρχικά, καθορίζονται οι $L \times L_{Gauss}$ διατομές ελέγχου (monitoring cross sections) της ράβδου και τα M σημεία ελέγχου της διατομής στα οποία θα πραγματοποιείται υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων (βλ. εδάφιο 5.3.4) και επιλέγονται T τιμές της «χρονικής» παραμέτρου λ_t για τις οποίες υπολογίζονται οι τιμές των μεγεθών εξωτερικής φόρτισης του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων (5.3.9). Οι διατομές ελέγχου ταυτίζονται με τα σημεία ταξιθεσίας ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$) της ράβδου (βλ. εδάφιο 5.3.1), ενώ οι τιμές και το πλήθος των λ_t προσδιορίζονται με βάση την ιστορία της φόρτισης και απαιτήσεις σύγκλισης του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος. Στη συνέχεια υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου της διατομής η πρωτογενής και η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S καθώς και οι παράγωγοί τους $\partial \phi_S^P / \partial y$, $\partial \phi_S^P / \partial z$, $\partial \phi_S^S / \partial y$, $\partial \phi_S^S / \partial z$ (βλ. εδάφια 5.3.2-3). Επιπλέον, προσδιορίζονται οι γεωμετρικές σταθερές A, I_P, I_n, I_t^P, C_S καθώς και η σταθερά I_t^S με εφαρμογή των υπολογισθεισών συναρτήσεων στρέβλωσης (βλ. εδάφιο 5.3.4).

Ο αλγόριθμος του προβλήματος βασίζεται στην υβριδική μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων Powell [Powell 1970a,b]. Χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού μητρώου [More et al. 1980]. Με $(\cdot)_t$ συμβολίζεται η τιμή μεγέθους που ισχύει για

$\lambda = \lambda_t$. Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος Powell, απαιτείται για κάθε προσauξητικό βήμα $[\lambda_t, \lambda_{t+1}]$ ($t=0, 1, 2, \dots, T-1$) αρχική πρόβλεψη της τιμής του γενικευμένου μητρώου στήλης άγνωστων ποσοτήτων \mathbf{d} που να ικανοποιεί την σχέση (5.3.9) για $\lambda = \lambda_{t+1}$. Η τιμή αυτή λαμβάνεται ίση με την αντίστοιχη τιμή $(\mathbf{d})_t$ που προσδιορίστηκε για $\lambda = \lambda_t$ ($t=1, 2, \dots, T-1$), ενώ για $t=0$ λαμβάνεται $(\mathbf{d})_0 = \mathbf{0}$. Επιπλέον, απαιτείται η τιμή της παραμέτρου ανοχής (tolerance parameter) που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου και η οποία λαμβάνεται ίση με $tol_{gl} = 10^{-7}$. Τα προσauξητικά βήματα του αλγορίθμου εκτελούνται έως ότου αναληφθεί το σύνολο του φορτίου ($\lambda = \lambda_T$) ή υπάρξει αδυναμία σύγκλισης του αλγορίθμου. Για το τυχόν διάστημα $[\lambda_t, \lambda_{t+1}]$ ($t=0, 1, 2, \dots, T-1$), ο προσauξητικός - επαναληπτικός αλγόριθμος περιέχει τα ακόλουθα βήματα:

- i. Βήμα ελαστικής πρόλεξης (elastic prediction step): Για κάθε σημείο ελέγχου m ($m=1, 2, \dots, M$) της i -οστής διατομής ελέγχου της ράβδου ($i=1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$): Υπολογισμός των ελαστικών προλέξεων των τάσεων S_{xx}^{Tr} , S_{xy}^{Tr} , S_{xz}^{Tr} [Παπαδρακάκης 1998] με εφαρμογή των σχέσεων (5.2.6) ως

$$S_{xx}^{Tr} = E \left[u'_m + \eta'_x \phi_S^P + \frac{I}{2} (y^2 + z^2) (\theta'_x)^2 - (\varepsilon_{xx}^{pl})_t \right]$$

$$\Rightarrow S_{xx}^{Tr} = (S_{xx})_t + E \left[u'_m - (u'_m)_t + \phi_S^P (\eta'_x - (\eta'_x)_t) + \frac{I}{2} (y^2 + z^2) \left[(\theta'_x)^2 - ((\theta'_x)_t)^2 \right] \right] \quad (5.3.11\alpha)$$

$$S_{xy}^{Tr} = G \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G (\eta_x - \theta'_x) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right) - G (\gamma_{xy}^{pl})_t$$

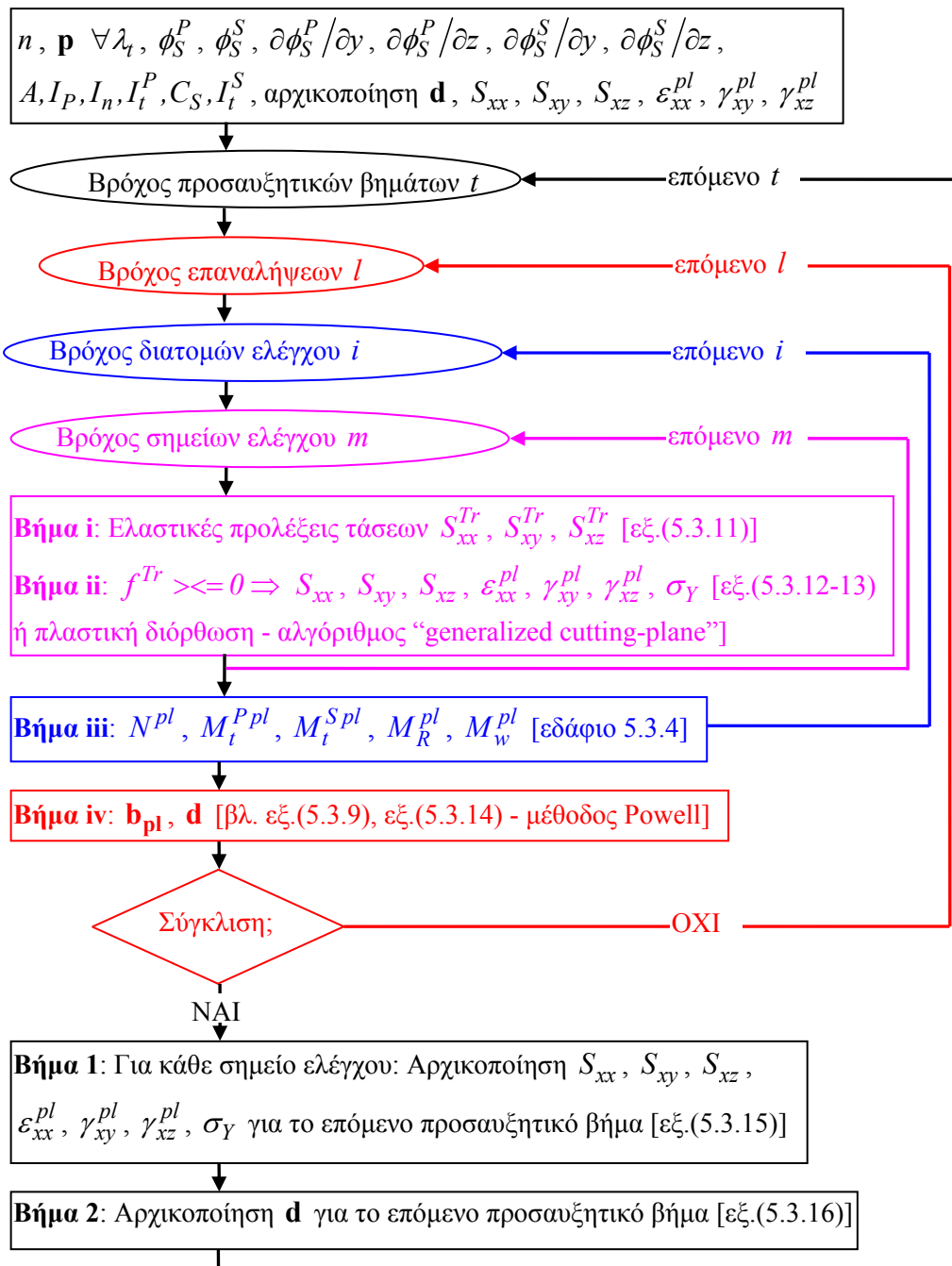
$$\Rightarrow S_{xy}^{Tr} = (S_{xy})_t + G (\theta'_x - (\theta'_x)_t) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \left[(\eta_x - \theta'_x) - ((\eta_x)_t - (\theta'_x)_t) \right] \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right) \quad (5.3.11\beta)$$

$$S_{xz}^{Tr} = G \theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G (\eta_x - \theta'_x) \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) - G (\gamma_{xz}^{pl})_t$$

$$\Rightarrow S_{xz}^{Tr} = (S_{xz})_t + G (\theta'_x - (\theta'_x)_t) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \left[(\eta_x - \theta'_x) - ((\eta_x)_t - (\theta'_x)_t) \right] \left(-\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right) \quad (5.3.11\gamma)$$

όπου για $t=0$ οι τάσεις και πλαστικές παραμορφώσεις των παραπάνω σχέσεων είναι μηδενικές. Με τον προτεινόμενο υπολογισμό των ελαστικών προλέξεων

εξασφαλίζεται ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις (βλ. βήμα (ii)) προσδιορίζονται με βάση τις προσαυξητικές παραμορφώσεις.



Σχήμα 5.2. Προσαυξητικός - επαναληπτικός αλγόριθμος του προβλήματος.

- ii. Για κάθε σημείο ελέγχου m ($m = 1, 2, \dots, M$) της i -οστής διατομής ελέγχου της ράβδου ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$): Υπολογισμός της συνάρτησης διαρροής f^{Tr} ως [Παπαδρακάκης 1998] (βλ. και εξ.(4.2.9))

$$f^{Tr} = \sqrt{\left(S_{xx}^{Tr}\right)^2 + 3\left(\left(S_{xy}^{Tr}\right)^2 + \left(S_{xz}^{Tr}\right)^2\right)} - (\sigma_Y)_t \quad (5.3.12)$$

και έλεγχος επαλήθευσης του κριτηρίου διαρροής:

- Αν $f^{Tr} \leq 0$, τότε το κριτήριο διαρροής επαληθεύεται και το σημείο ελέγχου είναι ελαστικό, συνεπώς η ελαστική πρόλεξη είναι η τελική κατάσταση. Υπολογισμός των τάσεων, πλαστικών παραμορφώσεων και της τάσης διαρροής στο σημείο ελέγχου ως

$$S_{xx} = S_{xx}^{Tr} \quad S_{xy} = S_{xy}^{Tr} \quad S_{xz} = S_{xz}^{Tr} \quad (5.3.13\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\varepsilon_{xx}^{pl} = \left(\varepsilon_{xx}^{pl}\right)_t \quad \gamma_{xy}^{pl} = \left(\gamma_{xy}^{pl}\right)_t \quad \gamma_{xz}^{pl} = \left(\gamma_{xz}^{pl}\right)_t \quad (5.3.13\delta, \varepsilon, \sigma\tau)$$

$$\sigma_Y = (\sigma_Y)_t \quad (5.3.13\zeta)$$

- Αν $f^{Tr} > 0$, τότε το κριτήριο διαρροής παραβιάζεται, συνεπώς η ελαστική πρόλεξη δεν αποτελεί πραγματική εντατική κατάσταση και πρέπει να πραγματοποιηθεί επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής (βήμα πλαστικής διόρθωσης). Η ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής των ελαστοπλαστικών καταστατικών σχέσεων υλοποιείται με τον επαναληπτικό αλγόριθμο “generalized cutting-plane” [Ortiz and Simo 1986, Simo and Hughes 1998]. Η παράμετρος ανοχής που υπεισέρχεται στο κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου λαμβάνεται ίση με $tol_{loc} = 10^{-5}$. Μέσω του αλγορίθμου αυτού υπολογίζονται τα τασικά μεγέθη S_{xx} , S_{xy} , S_{xz} , οι προσαναυξητικές πλαστικές παραμορφώσεις και η τάση διαρροής σ_Y στο σημείο ελέγχου αξιοποιώντας τις καταστατικές σχέσεις της κλασικής θεωρίας πλαστικότητας, το νόμο ισότροπης κράτνυσης κάθε υλικού της σύνθετης ράβδου και τα μεγέθη S_{xx}^{Tr} , S_{xy}^{Tr} , S_{xz}^{Tr} , $(S_{xx})_t$, $(S_{xy})_t$, $(S_{xz})_t$, $(\sigma_Y)_t$. Ακολούθως οι παραμορφώσεις αυτές προστίθενται στις πλαστικές παραμορφώσεις που ισχύουν για $\lambda = \lambda_t$ και λαμβάνονται οι ολικές πλαστικές παραμορφώσεις ε_{xx}^{pl} , γ_{xy}^{pl} , γ_{xz}^{pl} .
- iii. Για κάθε διατομή ελέγχου i της ράβδου ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$): Υπολογισμός των πλαστικών μερών των εντατικών μεγεθών N^{pl} , M_t^{Ppl} , M_t^{Spl} , M_R^{pl} , M_w^{pl} εφαρμόζοντας τη διαδικασία του εδαφίου 5.3.4.
- iv. Υπολογισμός του γενικευμένου πλαστικού μητρώου στήλη στιβαρότητας \mathbf{b}_{pl} (βλ. εξ.(5.3.9)) αξιοποιώντας τις αποκτηθείσες τιμές των N^{pl} , M_t^{Ppl} , M_t^{Spl} , M_R^{pl} , M_w^{pl} και ακολούθως, προσδιορισμός του γενικευμένου μητρώου στήλη άγνωστων ποσοτήτων \mathbf{d} επιλύοντας το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (5.3.9) με τη μέθοδο Powell [Powell 1970a,b] ως

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl} \left((n)_{t+1}, \mathbf{d} \right) \right) \mathbf{d} + \mathbf{b}_{pl}(\mathbf{d}) = (\mathbf{p})_{t+1} \quad (5.3.14)$$

Σε περίπτωση που η μέθοδος δεν συγκλίνει, τότε επιστροφή στο βήμα (i) ώστε να επαναυπολογιστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις, διαφορετικά τερματίζεται η επαναληπτική διαδικασία των βημάτων (i-iv) και εκτελούνται τα ακόλουθα βήματα, επισημαίνοντας ότι τα μεγέθη που υπολογίστηκαν στην τελευταία επανάληψη αντιστοιχούν στα ισχύοντα μεγέθη για $\lambda = \lambda_{t+1}$.

1. Για κάθε σημείο ελέγχου m ($m = 1, 2, \dots, M$) της i -οστής διατομής ελέγχου της ράβδου ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$): Αρχικοποίηση των τάσεων, πλαστικών παραμορφώσεων και τάσης διαρροής για το επόμενο προσαυξητικό βήμα $[\lambda_{t+1}, \lambda_{t+2})$ ($t = 0, 1, 2, \dots, T-2$) ως

$$(S_{xx})_{t+1} = S_{xx} \quad (S_{xy})_{t+1} = S_{xy} \quad (S_{xz})_{t+1} = S_{xz} \quad (5.3.15\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\left(\varepsilon_{xx}^{pl} \right)_{t+1} = \varepsilon_{xx}^{pl} \quad \left(\gamma_{xy}^{pl} \right)_{t+1} = \gamma_{xy}^{pl} \quad \left(\gamma_{xz}^{pl} \right)_{t+1} = \gamma_{xz}^{pl} \quad (\sigma_Y)_{t+1} = \sigma_Y \quad (5.3.15\delta, \varepsilon, \sigma\tau, \zeta)$$

2. Αρχικοποίηση του μητρώου στήλη \mathbf{d} για το επόμενο προσαυξητικό βήμα ως

$$(\mathbf{d})_{t+1} = \mathbf{d} \quad (5.3.16)$$

Σε περίπτωση που είναι επιθυμητό, προσδιορίζεται επιπρόσθετα οποιοδήποτε κινηματικό ή εντατικό μέγεθος σε οποιαδήποτε διατομή της ράβδου ακολουθώντας τη διαδικασία του εδαφίου 5.3.1 και αξιοποιώντας τις τιμές των μεγεθών εξωτερικής φόρτισης και του \mathbf{d} για $\lambda = \lambda_{t+1}$. Επίσης, σε περίπτωση που ζητείται η εύρεση τασικών μεγεθών S_x στο σύνορο της διατομής, εκτελούνται τα βήματα (i-ii) του αλγορίθμου ώστε να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις για $\lambda = \lambda_{t+1}$ στα N σημεία ελέγχου που βρίσκονται στις θέσεις των κόμβων των συνοριακών στοιχείων της διατομής (βλ. εδάφια 5.3.2, 1.3.3) και στη συνέχεια εφαρμόζεται η σχέση (5.2.56δ). Επίσης, εάν αναζητούνται τασικά μεγέθη σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω που δεν συμπίπτει με κάποιο σημείο ελέγχου m , εφαρμόζονται οι εξ.(5.2.6). Για τον σκοπό αυτό εκτελούνται τα βήματα (i-ii) του αλγορίθμου ώστε να προσδιοριστούν οι πλαστικές παραμορφώσεις για $\lambda = \lambda_{t+1}$ στο εξεταζόμενο σημείο. Τόσο για τα συνοριακά όσο και για τα εσωτερικά σημεία, ο υπολογισμός τασικών μεγεθών πραγματοποιείται αφού προσδιοριστούν τα αναγκαία κινηματικά μεγέθη στις διατομές όπου ανήκουν τα σημεία αυτά.

Ο παραπάνω προσαυξητικός - επαναληπτικός αλγόριθμος συνοψίζεται στο Σχ.5.2. Σημειώνεται ότι το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου χωρίς επιρροή $\Delta\Delta\Pi$ (βλ. εξ. (5.2.23-24)) καθώς και οι εναλλακτικές διατυπώσεις του εδαφίου 5.2.5 αντιμετωπίζονται αλγοριθμικά με ανάλογο τρόπο. Τέλος, επισημαίνεται ότι με τον προτεινόμενο αλγόριθμο αποφεύγεται ο ρητός προσδιορισμός της προσαυξητικής μορφής του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων (5.3.9) που είναι εκτενέστερη.

5.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Με βάση την αναλυτική και αριθμητική διαδικασία που παρουσιάστηκε στα εδάφια 5.2, 5.3 αναφορικά με το πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου με επιρροή ΔΔΠ, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με τη βοήθεια του προγράμματος αυτού μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον, προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου. Η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων ελέγχεται, όπου είναι εφικτό, με υπάρχουσες αριθμητικές λύσεις, οι οποίες στηρίζονται στις ίδιες παραδοχές του εξεταζόμενου προβλήματος (θεωρία στρέψης). Επιπλέον, προκειμένου να διερευνηθεί η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθοδολογίας, τα ληφθέντα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με άλλα, όπως αυτά προκύπτουν με χρήση στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και με υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα. Επισημαίνεται ότι στα παρακάτω, οι διατύπώσεις που βασίζονται στις εξ.(5.2.26-33) και εξ.(5.2.26-28), (5.2.34-39) χαρακτηρίζονται ως **προσομοιώματα Α** και **Β**, αντίστοιχα, ενώ η διατύπωση των εδαφίων 5.2.1-5.2.4 χαρακτηρίζεται ως **προσομοίωμα C**. Σε όλα τα προσομοιώματα χρησιμοποιήθηκε 1 σημείο Gauss ανά στοιχείο της διαμήκου διακριτοποίησης της ράβδου, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό. Τέλος, η διατύπωση που βασίζεται στις εξ.(5.2.40) χαρακτηρίζεται ως **προσομοίωμα D**.

5.4.1 Παράδειγμα 1

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή των ΔΔΠ στη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως πρώτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος μήκους $l = 1.93m$ με λεπτότοιχη διατομή I συνολικού πλάτους $b = 0.1509m$, συνολικού ύψους $h = 0.1524m$, πάχους πελμάτων $t_f = 0.0122m$ και πάχους κορμού $t_w = 0.0080m$ ($I_t^P = 2.001 \times 10^{-7} m^4$, $C_S = 3.429 \times 10^{-8} m^6$, $I_t^S = 1.525 \times 10^{-5} m^4$ (προσομοιώματα Β, C), $I_t^S = 2.632 \times 10^{-5} m^4$ (προσομοίωμα Α)). Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t στο μέσο της ενώ τα άκρα της είναι άστρεπτα ενώ η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Χρησιμοποιήθηκαν 64 τετραπλευρικά στοιχεία με 3×3 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και 500 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής, αντίστοιχα. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις υλικού ($E = 2.134 \times 10^8 kN/m^2$, $G = 8.0 \times 10^7 kN/m^2$, $\sigma_Y = 2.85 \times 10^5 kN/m^2$), ένα ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό ($h = 0$) και ένα ισότροπα κρατυνόμενο με $E_t = 6 \times 10^6 kN/m^2$, καθώς και διάφορες περιπτώσεις πλήθους στοιχείων για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Προκειμένου να καταδειχθούν χαρακτηριστικά σύγκλισης της προτεινόμενης μεθόδου, στους Πίνακες 5.1α,β παρουσιάζονται ζεύγη τιμών $\bar{M}_t - \theta_x(l/2)$, έτσι όπως προέκυψαν για διάφορες περιπτώσεις ανάλυσης και 3 περιπτώσεις πλήθους στοιχείων κατά μήκος της ράβδου (περίπτωση ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού). Το πρώτο ζεύγος τιμών ($\bar{M}_t = 1.00 kNm$) αναφέρεται σε ελαστική συμπεριφορά της ράβδου ενώ τα υπόλοιπα σε μετελαστική απόκριση. Από τον Πίνακα 5.1α προκύπτει ότι με την

χρήση 14 στοιχείων λαμβάνονται ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση όπου αγνοούνται οι ΔΔΠ, ενώ περισσότερα στοιχεία πρέπει να θεωρηθούν όταν λαμβάνονται υπόψη οι ΔΔΠ με το προσομοίωμα D. Από τον Πίνακα 5.1β συμπεραίνεται ότι τα χαρακτηριστικά σύγκλισης των προσομοιωμάτων B, C είναι παρόμοια και αποτελέσματα των πιο αδρών διακριτοποιήσεων συγκλίνουν σε αυτά της λεπτομερέστερης διακριτοποίησης (42 στοιχεία). Επιπλέον, η διαφοροποίηση μεταξύ των αποτελεσμάτων της πιο αδρούς διακριτοποίησης (14 στοιχεία) και της λεπτομερέστερης διακριτοποίησης αυξάνεται με την εξέλιξη της πλαστικοποίησης για υψηλότερες στάθμες φόρτισης.

Πίνακας 5.1α. Ζεύγη τιμών $\bar{M}_l - \theta_x(l/2)$ της ράβδου του παραδείγματος 1 με βάση το προσομοίωμα D και αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ (περίπτωση ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού).

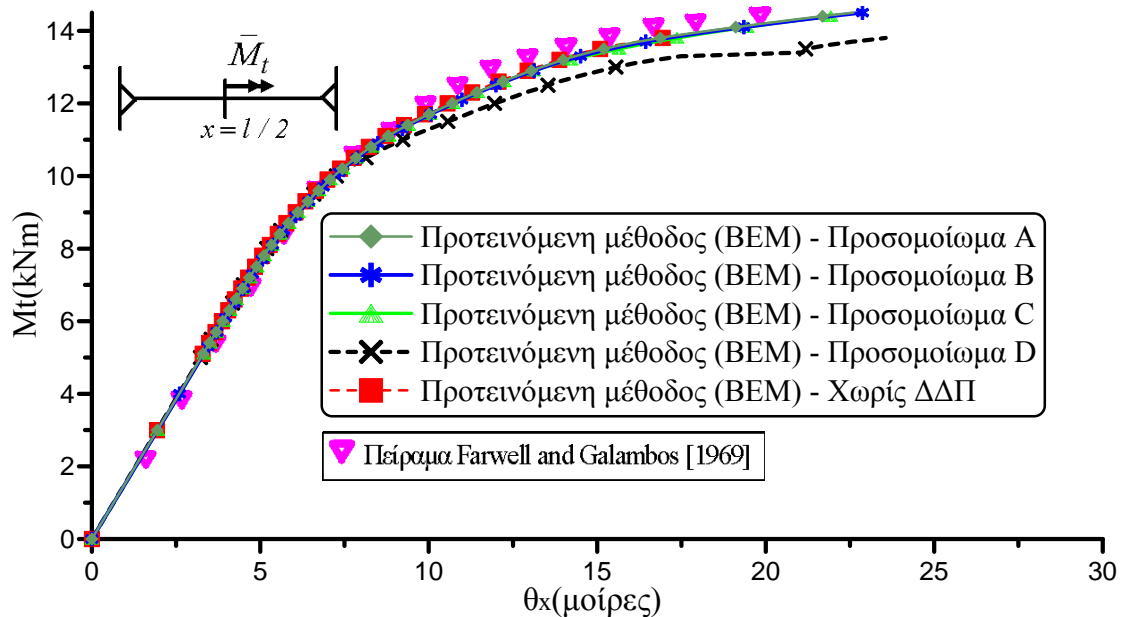
Πλήθος στοιχείων	Χωρίς επιρροή ΔΔΠ			Προσομοίωμα D		
	14	30	42	14	30	42
\bar{M}_l (kNm)	$\theta_x(l/2)$ (μοίρες)					
1.0	0.647	0.645	0.645	0.647	0.645	0.645
8.8	5.225	5.844	5.887	5.356	5.861	5.890
10.0	7.125	7.310	7.345	7.915	7.439	7.598
11.5	10.356	10.771	10.837	14.424	12.290	12.142

Πίνακας 5.1β. Ζεύγη τιμών $\bar{M}_l - \theta_x(l/2)$ της ράβδου του παραδείγματος 1 με βάση τα προσομοιώματα B, C (περίπτωση ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού).

Πλήθος στοιχείων	Προσομοίωμα B			Προσομοίωμα C		
	14	30	42	14	30	42
\bar{M}_l (kNm)	$\theta_x(l/2)$ (μοίρες)					
1.00	0.643	0.651	0.651	0.643	0.651	0.651
8.80	5.815	5.981	5.979	5.810	5.970	5.968
10.00	7.002	7.361	7.368	6.994	7.346	7.353
11.50	9.520	10.438	10.483	9.535	10.441	10.486
13.00	14.244	16.199	16.247	14.465	16.626	16.680

Στο Σχ.5.3 παρουσιάζεται η στροφή $\theta_x(l/2)$ συναρτήσει του φορτίου \bar{M}_l για την περίπτωση του ισότροπα κρατυνόμου υλικού, έτσι όπως προέκυψε από διάφορα προσομοιώματα της προτεινόμενης μεθόδου για τη λεπτομερέστερη διακριτοποίηση και από πειραματικά αποτελέσματα [Farwell and Galambos 1969]. Από τη σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα διαπιστώνεται η πολύ καλή αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου στον προσδιορισμό της καθολικής συμπεριφοράς της ράβδου. Παρατηρείται ότι η ανάλυση χωρίς την επιρροή ΔΔΠ και τα προσομοιώματα A, B, C είναι πιο στιβαρά από το προσομοίωμα D και συμφωνούν περισσότερο με τα αποτελέσματα αυτά. Από την πρακτική ταύτιση των αποτελεσμάτων με και χωρίς ΔΔΠ συμπεραίνεται

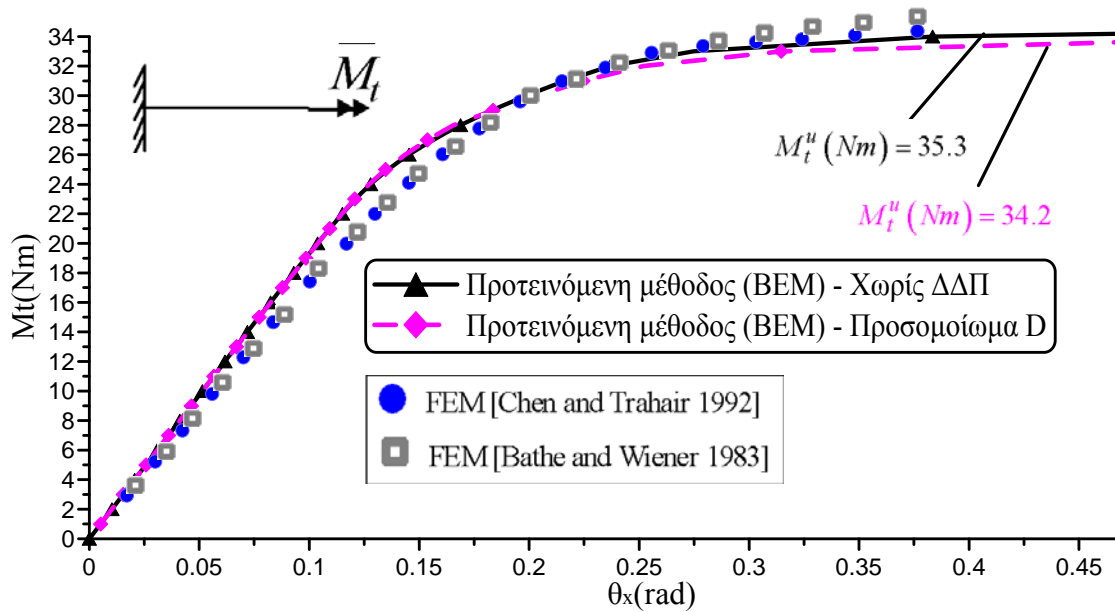
ότι ράβδοι ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη επηρεάζονται αμελητέα από τις ΔΔΠ. Επίσης, συνάγεται ότι η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς το πρόβλημα του «διατμητικού κλειδώματος» και δεν εισάγεται στη ράβδο παρασιτική στιβαρότητα λόγω διάτμησης. Τέλος, από τον Πίνακα 5.1β και το Σχ.5.3 προκύπτει ότι τα αποτελέσματα των προσομοιώματων A, B, C πρακτικά ταυτίζονται, καταδεικνύοντας ότι ο εμπλουτισμός του προσομοιώματος A με στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (προσομοίωμα B) και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης (προσομοίωμα C) επηρεάζει αμελητέα την καθολική ανάλυση ελαστοπλαστικών ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη.



Σχήμα 5.3. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στρώσης $\theta_x(l/2)$ της ράβδου του παραδείγματος 1 (περίπτωση ισότροπα κρατυνόμενου υλικού).

5.4.2 Παράδειγμα 2

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή των ΔΔΠ στη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως δεύτερο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού ($E = 2.0685 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $G = 7.9558 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_Y = 2.0685 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, $h = 0$) μήκους $l = 0.254 \text{ m}$ με λεπτότοιχη διατομή I συνολικού πλάτους $b = 0.0254 \text{ m}$, συνολικού ύψους $h = 0.02794 \text{ m}$, πάχους πελμάτων και κορμού $t_f = t_w = 0.00254 \text{ m}$ ($I_t^P = 4.317 \times 10^{-10} \text{ m}^4$, $C_S = 1.108 \times 10^{-12} \text{ m}^6$). Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t στο δεξιό άκρο της όπου η στρέβλωση είναι ανεμπόδιστη ενώ το αριστερό άκρο της είναι πακτωμένο. Χρησιμοποιήθηκαν 60 τετραπλευρικά στοιχεία με 3×3 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και 500 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής, αντίστοιχα, καθώς επίσης και 30 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.



Σχήμα 5.4. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής $\theta_x(l)$ της ράβδου του παραδείγματος 2.

Στο Σχ.5.4 παρουσιάζεται η στροφή $\theta_x(l)$ συναρτήσει του φορτίου \bar{M}_t , έτσι όπως προέκυψε από το προσομοίωμα D και αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) όπου αγνοούνται οι ΔΔΠ και που βασίζονται στη ΘΔΔ [Chen and Trahair 1992] καθώς και στην προσομοίωση με ένα ραβδωτό στοιχείο για τον κορμό και το κάθε πέλμα της διατομής [Bathe and Wiener 1983]. Διαπιστώνεται και πάλι πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των τεσσάρων καμπυλών, επιβεβαιώνοντας την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου. Παρατηρείται επίσης ότι οι ΔΔΠ μειώνουν ελαφρώς τη στρεπτική στιβαρότητα και το μέγιστο στρεπτικό φορτίο που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο.

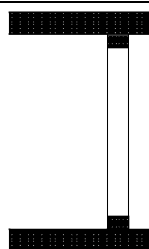
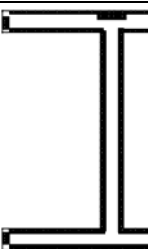
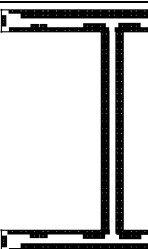
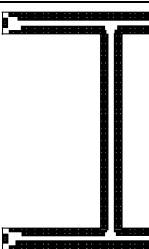
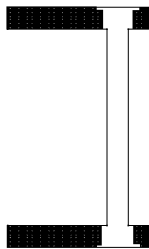
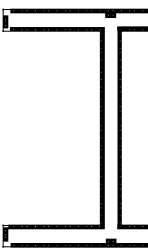
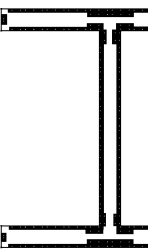
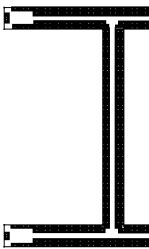
Τέλος, στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζεται η κατανομή πλαστικοποίησης σε διάφορες διατομές κατά μήκος της ράβδου για ελαστοπλαστική στάθμη φόρτισης ($\bar{M}_t = 31.0 Nm$), έτσι όπως προέκυψε από την προτεινόμενη μέθοδο με βάση το προσομοίωμα D και αγνοώντας τις ΔΔΠ. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι οι ΔΔΠ επηρεάζουν την κατανομή της πλαστικοποίησης ιδίως στο πακτωμένο άκρο. Επιπλέον, διαπιστώνεται καλή συμφωνία μεταξύ των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) (βλ. [Bathe and Wiener 1983]) και της προτεινόμενης μεθόδου όπου αγνοούνται οι ΔΔΠ.

5.4.3 Παράδειγμα 3

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή ΔΔΠ στη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων χονδρότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως τρίτο παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού ($E = 3.23184 \times 10^7 kN/m^2$, $G = 1.3466 \times 10^6 kN/m^2$, $\sigma_Y = 2.0 \times 10^4 kN/m^2$, $h = 0$) μήκους $l = 3.0m$ με χονδρότοιχη ορθογωνική διατομή διαστάσεων

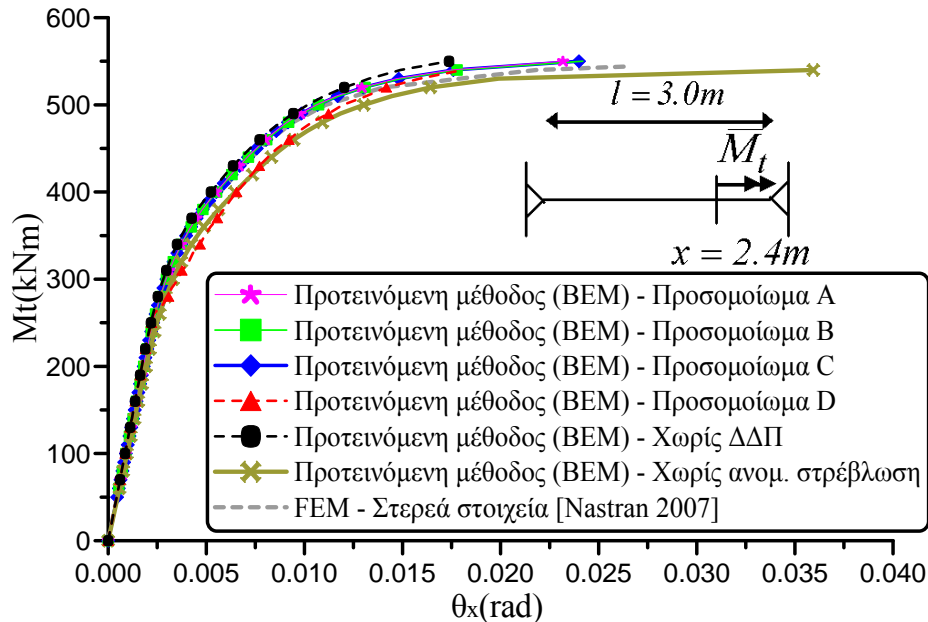
$b \times a = 0.60m \times 0.30m$ ($I_t^P = 3.705 \times 10^{-3} m^4$, $C_S = 1.482 \times 10^{-5} m^6$,
 $I_t^S = 2.110 \times 10^{-5} m^4$ (προσομοιώματα B, C), $I_t^S = 3.045 \times 10^{-5} m^4$ (προσομοίωμα A)).
 Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις φόρτισης κατά τις οποίες η ράβδος υποβάλλεται σε
 συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t κοντά στο δεξιό άκρο της (θέση φορτίου $x = 2.4m$
 για την πρώτη και $x = 2.8m$ για τη δεύτερη περίπτωση φόρτισης). Τα δύο άκρα της
 ράβδου είναι άστρεπτα ενώ η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Χρησιμοποιήθηκαν 72
 τετραπλευρικά στοιχεία με 3×3 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και
 400 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής,
 αντίστοιχα, καθώς επίσης και 40 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

Πίνακας 5.2. Κατανομή πλαστικοποίησης σε διάφορες διατομές κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 2 για $\bar{M}_t = 31.0 Nm$.

	$x = 0$	$x = l / 3$	$x = 2l / 3$	$x = l$
Προσομοίωμα D				
Χωρίς επιρροή ΔΔΠ				

Στο Σχ.5.5 παρουσιάζεται η στροφή θ_x για $x = 2.4m$ συναρτήσεως του φορτίου \bar{M}_t , έτσι όπως προέκυψε από τα προσομοιώματα A, B, C, D και αγνοώντας την επιρροή ΔΔΠ για την πρώτη περίπτωση φόρτισης. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM που προκύπτουν επιλύοντας τη ράβδο με τη βοήθεια 4320 στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007]. Παρατηρείται και πάλι ότι τα προσομοιώματα A, B, C είναι πιο στιβαρά από το προσομοίωμα D και συμφωνούν περισσότερο με τη FEM, ενώ από τη συμφωνία αυτή διαπιστώνεται η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου. Προκύπτει επίσης ότι οι ΔΔΠ μειώνουν ελαφρώς τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα των προσομοιωμάτων A, B, C πρακτικά ταυτίζονται, καταδεικνύοντας ότι ο εμπλουτισμός του προσομοιώματος A με στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (προσομοίωμα B) και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης (προσομοίωμα C) επηρεάζει αμελητέα τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Στο ίδιο σχήμα εισάγεται και η αντίστοιχη καμπύλη $\bar{M}_t - \theta_x$ που προκύπτει από την ανάλυση χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης, καταδεικνύοντας ότι η συγκεκριμένη επιρροή δεν είναι αμελητέα. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζεται η κατανομή της πρωτογενούς

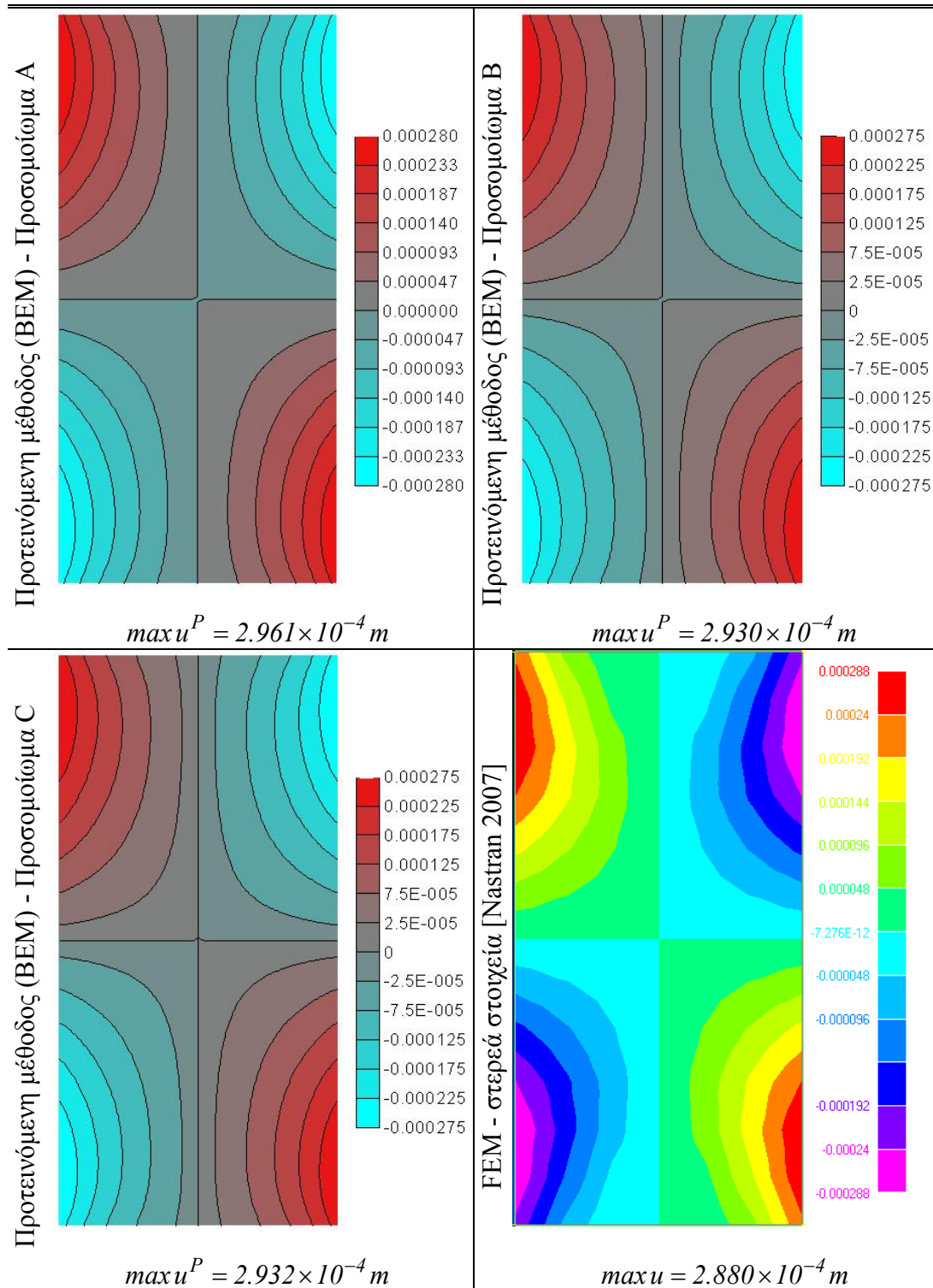
στρέβλωσης u^P ($u^P = \eta_x \phi_S^P$) στη διατομή του δεξιού άκρου της ράβδου για ελαστοπλαστική στάθμη φόρτισης ($\bar{M}_t = 400.0 \text{ kNm}$), έτσι όπως προέκυψε από τα προσομοιώματα A, B, C, ενώ στον ίδιο πίνακα εισάγονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM [Nastran 2007]. Παρατηρείται καλύτερη συμφωνία των προσομοιωμάτων B, C με τη FEM συγκριτικά με το προσομοίωμα A.



Σχήμα 5.5. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής θ_x για $x = 2.4 \text{ m}$ της ράβδου του παραδείγματος 3 (πρώτη περίπτωση φόρτισης).

Προκειμένου να αναδειχθεί περισσότερο ο ρόλος των $\Delta\Delta\Pi$, το στρεπτικό φορτίο τοποθετείται πιο κοντά στο δεξιό άκρο της ράβδου στη δεύτερη περίπτωση φόρτισης ($x = 2.8 \text{ m}$). Στο Σχ.5.6 παρουσιάζεται η στροφή θ_x για $x = 2.8 \text{ m}$ συναρτήσει του φορτίου \bar{M}_t , έτσι όπως προέκυψε από τα προσομοιώματα A, B, C, D και αγνοώντας την επιρροή $\Delta\Delta\Pi$. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM που προκύπτουν επιλύοντας τη ράβδο με τη βοήθεια 4320 στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007]. Παρατηρείται και πάλι πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των προσομοιωμάτων A, B, C, D και της FEM, καταδεικνύοντας την αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με τα αποτελέσματα χωρίς την επιρροή $\Delta\Delta\Pi$, διαπιστώνεται ότι η συγκεκριμένη επιρροή είναι πιο αισθητή στη παρούσα περίπτωση φόρτισης συγκριτικά με την προηγούμενη. Από το ίδιο σχήμα προκύπτει επίσης ότι τα προσομοιώματα B, C πρακτικά δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα, είναι ελαφρώς λιγότερο στιβαρά από το προσομοίωμα A ενώ συμφωνούν περισσότερο με τη FEM. Τέλος, στο ίδιο σχήμα εισάγεται και η αντίστοιχη καμπύλη $\bar{M}_t - \theta_x$ που προκύπτει από την ανάλυση χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης, καταδεικνύοντας ότι η συγκεκριμένη επιρροή δεν είναι αμελητέα και είναι σημαντικότερη στην παρούσα περίπτωση φόρτισης συγκριτικά με την προηγούμενη.

Πίνακας 5.3. Κατανομή πρωτογενούς στρέβλωσης στη διατομή του δεξιού άκρου της ράβδου του παραδείγματος 3 (πρώτη περίπτωση φόρτισης).



5.4.4 Παράδειγμα 4

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και να διερευνηθεί η επιρροή των ΔΔΠ στη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων κλειστής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως

τέταρτο παράδειγμα μελετήθηκε μεταλλική ράβδος μήκους $l = 2.0m$ με πρότυπη κοίλη διατομή ορθογωνικού σχήματος RHS 450x250x8 [EN10210-2:2006 2006] ($I_t^P = 2.708 \times 10^{-4} m^4$, $C_S = 2.284 \times 10^{-7} m^6$, $I_t^S = 2.081 \times 10^{-5} m^4$ (προσομοιώματα B, C), $I_t^S = 1.505 \times 10^{-4} m^4$ (προσομοίωμα A)). Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις φόρτισης κατά τις οποίες η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή \bar{M}_t (θέση φορτίου $x = l/2$ για την πρώτη και $x = 3l/4$ για τη δεύτερη περίπτωση φόρτισης). Τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα ενώ χρησιμοποιήθηκαν 106 τετραπλευρικά στοιχεία με 2×2 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και 680 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής, αντίστοιχα, καθώς επίσης και 36 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις υλικού ($E = 2.1 \times 10^8 kN/m^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 kN/m^2$, $\sigma_Y = 2.35 \times 10^5 kN/m^2$), ένα ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό ($h = 0$) και ένα ισότροπα κρατυνόμενο με $E_t = 6.0 \times 10^6 kN/m^2$.

Στο Σχ.5.7 παρουσιάζεται η στρόφη $\theta_x(l/2)$ συναρτήσει του φορτίου \bar{M}_t , έτσι όπως προέκυψε από τα προσομοιώματα A, B, C για την πρώτη περίπτωση φόρτισης (ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό υλικό). Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM που προκύπτουν επιλύοντας τη ράβδο με τη βοήθεια 4480 κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007]. Παρατηρείται καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και της FEM. Επιπλέον, από το ίδιο σχήμα συμπεραίνεται ότι ο εμπλουτισμός του προσομοιώματος A με διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (προσομοίωμα B) και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης (προσομοίωμα C) οδηγεί σε ελαφρώς πιο εύκαμπτη συμπεριφορά, ενώ η καλύτερη συμφωνία με τη FEM επιτυγχάνεται με το προσομοίωμα C.

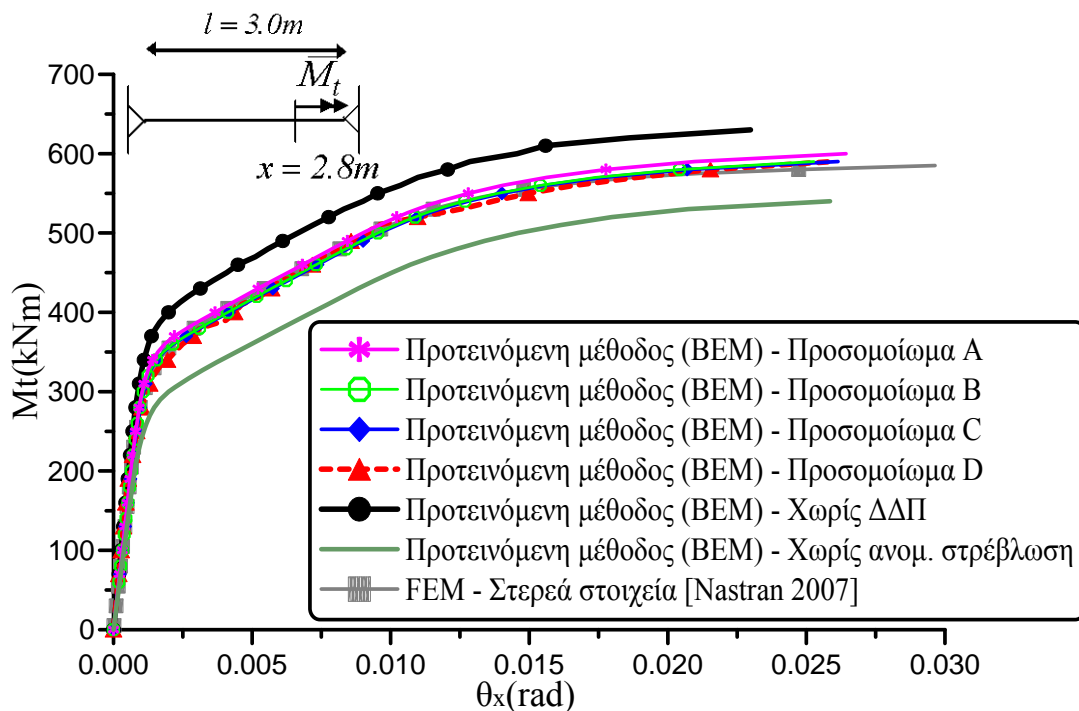
Προκειμένου να αναδειχθούν περισσότερο οι διαφορές μεταξύ των προσομοιωμάτων A, B, C, το στρεπτικό φορτίο τοποθετείται πιο κοντά στο δεξιό άκρο της ράβδου ($x = 3l/4$) και αναλύεται η περίπτωση του ισότροπα κρατυνόμενου υλικού. Στο Σχ.5.8 παρουσιάζεται η στρόφη θ_x για $x = 3l/4$ συναρτήσει του φορτίου \bar{M}_t , έτσι όπως προέκυψε από τα προαναφερθέντα προσομοιώματα. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM που προκύπτουν επιλύοντας τη ράβδο με τη βοήθεια 4480 κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007] καθώς και με τη βοήθεια 10600 στερεών (εξαεδρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007]. Επισημαίνεται ότι ο εμπλουτισμός του προσομοιώματος A με στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (προσομοίωμα B) και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης (προσομοίωμα C) οδηγεί σε πιο εύκαμπτη συμπεριφορά, ενώ η καλύτερη συμφωνία με τα αποτελέσματα της FEM επιτυγχάνεται με το προσομοίωμα C. Τέλος, στον Πίνακα 5.4 διακρίνεται για διάφορες ελαστοπλαστικές στάθμες φόρτισης η κατανομή πλαστικοποίησης σε διατομή κοντά στη θέση όπου ασκείται το στρεπτικό φορτίο ($x = 1.5625m$), έτσι όπως προέκυψε από τα προαναφερθέντα προσομοιώματα και την επίλυση με τα στερεά στοιχεία. Και πάλι συμπεραίνεται ότι η καλύτερη συμφωνία με τη FEM επιτυγχάνεται με το προσομοίωμα C.

5.4.5 Παράδειγμα 5

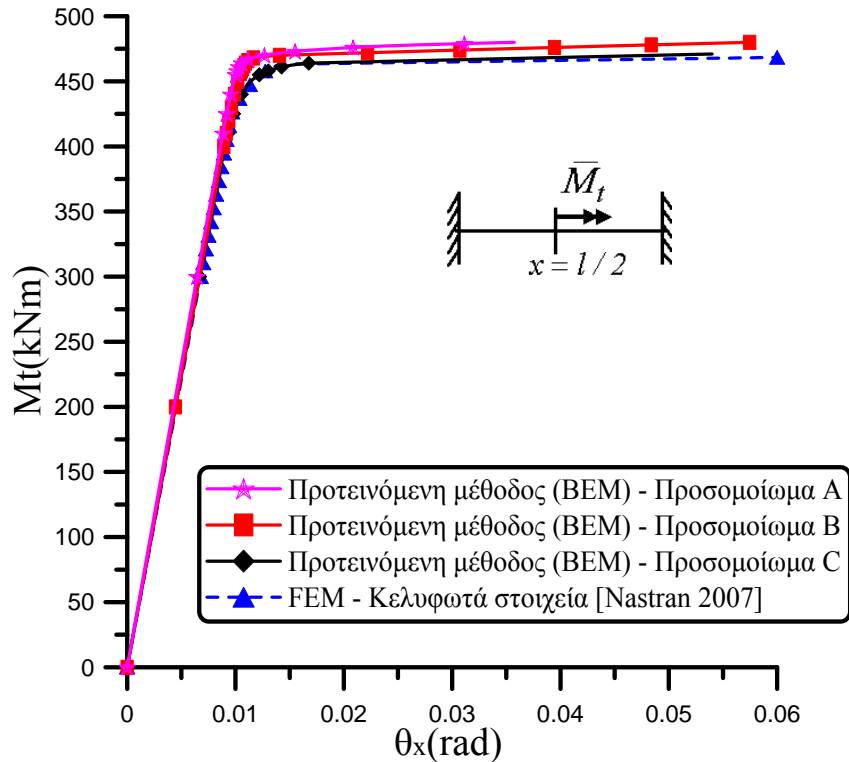
Προκειμένου να διαπιστωθεί το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου στη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως πέμπτο

παράδειγμα μελετήθηκε ράβδος μήκους $l=0.8m$ με πρότυπη κοίλη διατομή ελλειπτικού σχήματος OHS 200x100x12.5 [EN10210-2:2006 2006] ($I_t^P = 1.824 \times 10^{-5} m^4$, $C_S = 1.331 \times 10^{-9} m^6$, $I_t^S = 1.224 \times 10^{-6} m^4$ (προσομοίωμα B, C), $I_t^S = 7.502 \times 10^{-6} m^4$ (προσομοίωμα A)), υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένη στρεπτική ροπή m_t για $l/2 < x < l$. Το υλικό της ράβδου είναι μεταλλικό ($E = 2.1 \times 10^8 kN/m^2$, $G = 8.0769 \times 10^7 kN/m^2$, $\sigma_Y = 2.35 \times 10^5 kN/m^2$) με ισότροπα κρατυνόμενη συμπεριφορά και η καμπύλη τάσης - παραμόρφωσής του δίδεται στο Σχ.5.9. Τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα ενώ χρησιμοποιήθηκαν 56 τετραπλευρικά στοιχεία με 3×3 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και 750 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής, αντίστοιχα, καθώς επίσης και 36 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου.

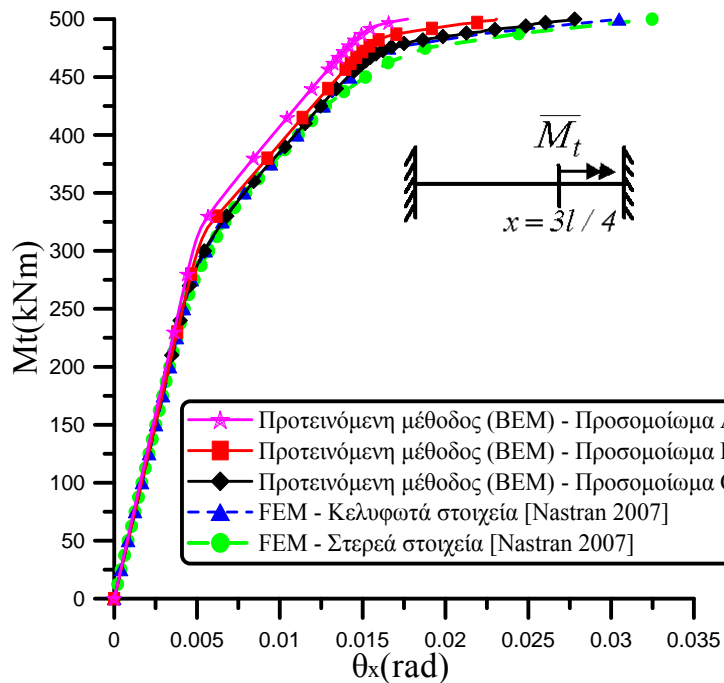
Στο Σχ.5.10 παρουσιάζεται η στρόφι θ_x για $x=3l/4$ συναρτήσει του φορτίου m_t , έτσι όπως προέκυψε από τα προσομοιώματα A, B, C και αγνοώντας την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Παρατηρείται ότι η ανομοιόμορφη στρέβλωση και οι ΔΔΠ επηρεάζουν ελαφρώς τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου. Στο ίδιο σχήμα εισάγονται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM που προέκυψαν επιλύοντας τη ράβδο με τη βοήθεια 8800 κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων [Nastran 2007]. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρείται καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και της FEM.



Σχήμα 5.6. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στρόφης θ_x για $x=2.8m$ της ράβδου του παραδείγματος 3 (δεύτερη περίπτωση φόρτισης).



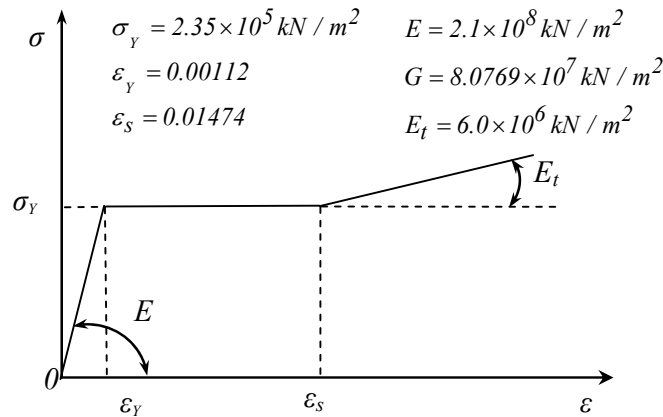
Σχήμα 5.7. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2)$ της ράβδου του παραδείγματος 4 (πρώτη περίπτωση φόρτισης, ελαστικό - ιδεωδώς πλαστικό υλικό).



Σχήμα 5.8. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής θ_x για $x = 3l/4$ της ράβδου του παραδείγματος 4 (δεύτερη περίπτωση φόρτισης, ισότροπα κρατυνόμενο υλικό).

Πίνακας 5.4. Κατανομή πλαστικοποίησης στο άνω δεξιό τεταρτημόριο της διατομής στη θέση $x = 1.5625m$ της ράβδου του παραδείγματος 4 (δεύτερη περίπτωση φόρτισης, ισότροπα κρατυνόμενο υλικό).

M_t (kNm)	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Προσομοίωμα A	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Προσομοίωμα B	Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Προσομοίωμα C	FEM - στερεά στοιχεία [Nastran 2007]
275.0				
287.5				
312.5				
325.0				



Σχήμα 5.9. Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης του ισότροπα κρατυνόμενου υλικού της ράβδου του παραδείγματος 5.

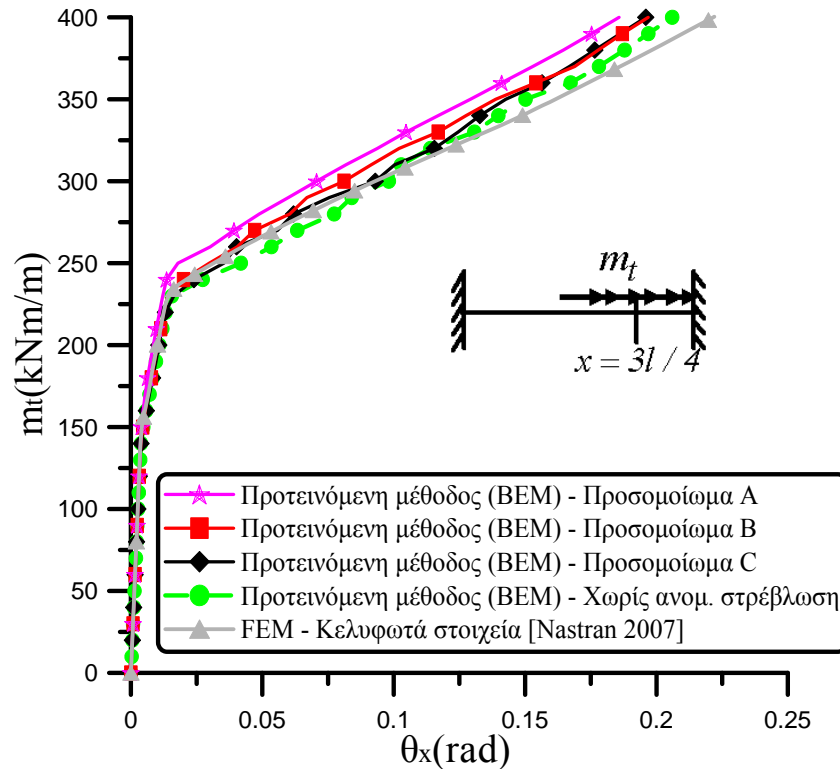
Στον Πίνακα 5.5 παρουσιάζονται οι τιμές του μέγιστου φορτίου που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων m_t^{el} , έτσι όπως προέκυψε για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ανάλυσης. Από τις τιμές αυτές υποδεικνύεται ότι η τοπική ελαστική και ελαστοπλαστική συμπεριφορά της ράβδου του αρχικού σταδίου πλαστικοποίησης επηρεάζεται αισθητά από την ανομοιόμορφη στρέβλωση και τις ΔΔΠ. Εξάλλου, η σημασία των επιρροών αυτών στην ελαστική ανάλυση ράβδων κλειστής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη έχει καταδειχθεί και στο εδάφιο 2.4 του κεφ. 2 καθώς και στην εργασία των Mokos and Sapountzakis [2011]. Επιπλέον, παρατηρείται ότι ο εμπλουτισμός του προσομοιώματος A με στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (προσομοίωμα B) και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης (προσομοίωμα C) οδηγεί σε σημαντικά διαφοροποιημένες τιμές φορτίου m_t^{el} . Επίσης, διαπιστώνεται και πάλι συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και της FEM. Τέλος, στους Πίνακες 5.6, 5.7, 5.8 παρουσιάζονται τιμές εντατικών μεγεθών και κατανομές ορθών τάσεων σ_{xx} και τάσεων Von Mises σ_{VM} στη διατομή του δεξιού άκρου της ράβδου για μία ελαστική και διάφορες ελαστοπλαστικές στάθμες φόρτισης, αντίστοιχα, έτσι όπως προέκυψαν από τα προσομοιώματα A, B, C. Επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που εξήγησαν με τη βοήθεια του Πίνακα 5.5, ενώ παρατηρείται ότι για όλα τα προσομοιώματα οι πλαστικές παραμορφώσεις δεν ξεκινούν στις θέσεις όπου οι ορθές τάσεις λαμβάνουν μέγιστη τιμή.

5.4.6 Παράδειγμα 6

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου στη μη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ως έκτο παράδειγμα μελετήθηκε η ράβδος διατομής I του παραδείγματος 1 ($A = 4.706 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $I_P = 2.653 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I_{PP} = 1.864 \times 10^{-6} \text{ m}^6$, $I_n = 3.686 \times 10^{-8} \text{ m}^6$) για την περίπτωση ελαστικού - ιδεωδώς πλαστικού υλικού. Χρησιμοποιήθηκαν 64 τετραπλευρικά στοιχεία με 3×3 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και 500 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής, αντίστοιχα, καθώς επίσης και 36 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις αξονικών συντοριακών συνθηκών, η περίπτωση A όπου τα δύο άκρα είναι αμετακίνητα κατά την αξονική

διεύθυνση και η περίπτωση B όπου το αριστερό άκρο είναι αμετακίνητο και το δεξιό άκρο μπορεί να μετακινηθεί ανεμπόδιστα κατά την αξονική διεύθυνση.

Στο Σχ.5.11 παρουσιάζεται η στροφή $\theta_x(l/2)$ συναρτήσει του φορτίου \bar{M}_t , έτσι όπως προέκυψε από το προσομοίωμα C για τις δύο περιπτώσεις αξονικών συντοριακών συνθηκών. Όπως και στη μη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων υπό ομοιόμορφη στρέψη (βλ. εδάφιο 4.4), παρατηρείται ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα παίζει σημαντικό ρόλο στη μετελαστική συμπεριφορά της ράβδου αφού αυξάνει αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα και έχει ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης. Επιπλέον, οι συντοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης επηρεάζουν αισθητά τη συμπεριφορά της ράβδου αυξάνοντας τη στρεπτική στιβαρότητά της, ιδίως για μεγαλύτερες τιμές στρεπτικής στροφής. Στο Σχ.5.11 εισάγονται επίσης και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της FEM [Pi and Trahair 1995] όπου αγνοείται η επιρροή ΔΔΠ και τα οποία βασίζονται στη ΘΛΔ καθώς και πειραματικά αποτελέσματα [Farwell and Galambos 1969]. Από την πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου και της FEM επιβεβαιώνεται η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου και συνάγεται έμμεσα η αμελητέα επιρροή των ΔΔΠ στη μη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Επιπρόσθετα, προκύπτει ότι η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος». Τέλος, από την καλή συμφωνία μεταξύ της περίπτωσης A αξονικών συντοριακών συνθηκών και των πειραματικών αποτελεσμάτων συνάγεται έμμεσα η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου καθώς και η εκτίμηση ότι στο πείραμα παρουσιάστηκαν συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης στα άκρα της ράβδου (βλ. [Pi and Trahair 1995]).



Σχήμα 5.10. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής θ_x για $x = 3l/4$ της ράβδου του παραδείγματος 5.

Πίνακας 5.5. Μέγιστο φορτίο που μπορεί να ασκηθεί χωρίς την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων για τη ράβδο του παραδείγματος 5.

	m_t^{el} (kNm / m)
Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Προσομοίωμα A	105
Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Προσομοίωμα B	119
Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Προσομοίωμα C	98
Προτεινόμενη μέθοδος (BEM) - Χωρίς ανομοιόμορφη στρέβλωση	125
FEM - κελυφωτά στοιχεία [Nastran 2007]	110

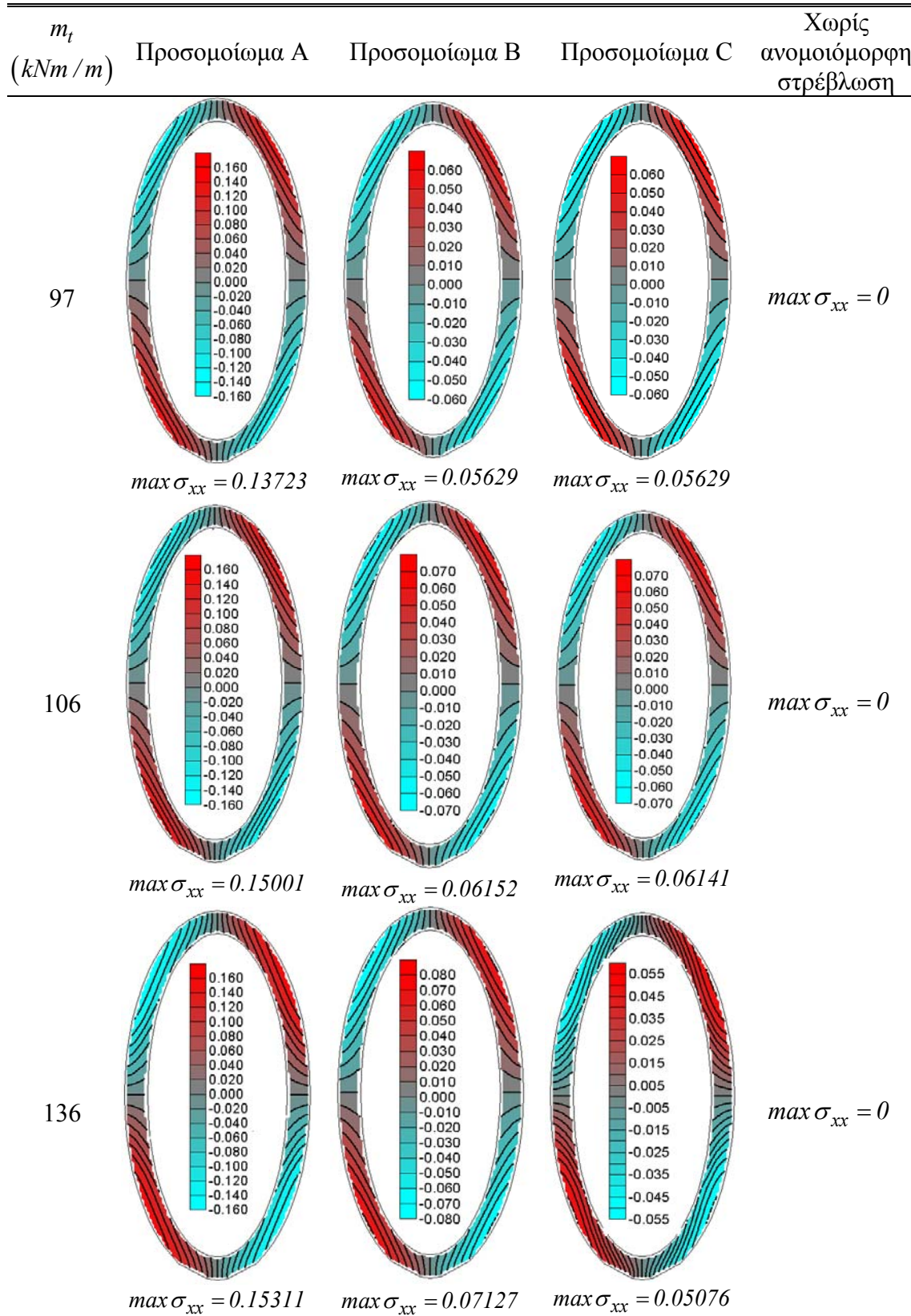
Πίνακας 5.6. Απόλυτες τιμές εντατικών μεγεθών M_t^P (kNm), M_t^S (kNm) και M_w ($\times 10^{-1}$ kNm²) στη διατομή του δεξιού άκρου της ράβδου του παραδείγματος 5.

m_t (kNm / m)	Προσομοίωμα A			Προσομοίωμα B			Προσομοίωμα C			Χωρίς ανομοιόμορφη στρέβλωση
	M_t^P	M_t^S	M_w	M_t^P	M_t^S	M_w	M_t^P	M_t^S	M_w	M_t^P
97	20.736	8.526	2.014	27.328	1.833	0.826	27.328	1.833	0.826	29.100
106	22.661	9.316	2.201	29.864	2.003	0.903	29.891	1.975	0.901	31.800
120	25.776	10.416	2.466	33.809	2.267	1.022	34.362	1.685	0.974	36.000
136	30.058	10.887	2.627	38.552	2.300	1.125	40.179	0.456	0.847	40.785

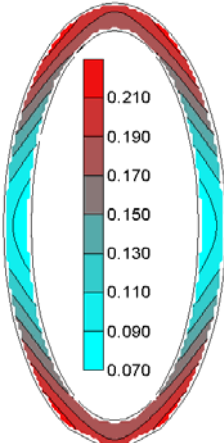
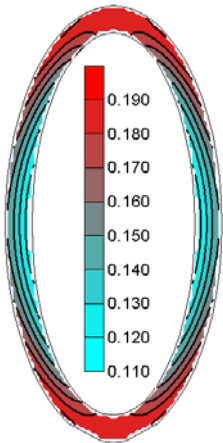
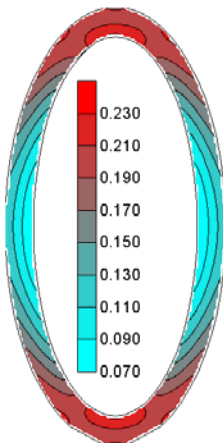
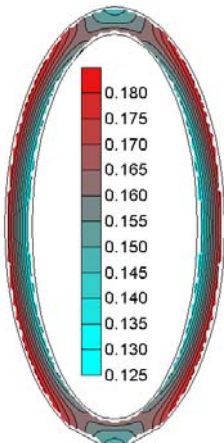
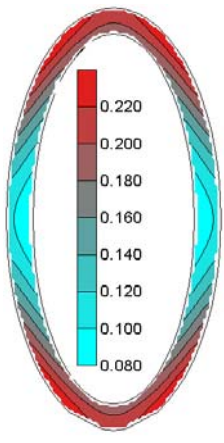
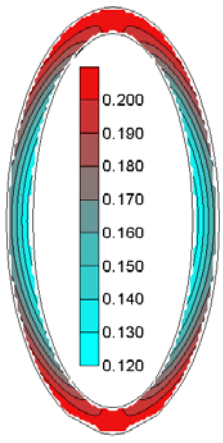
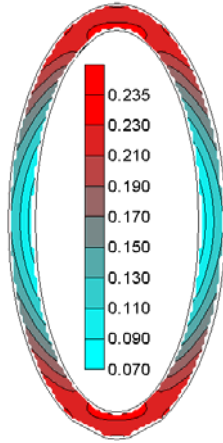
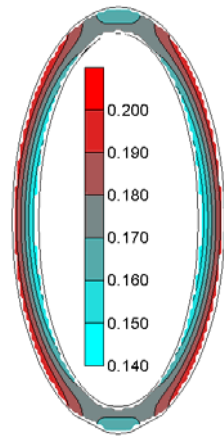
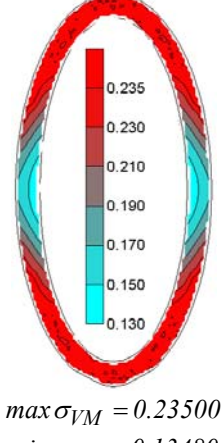
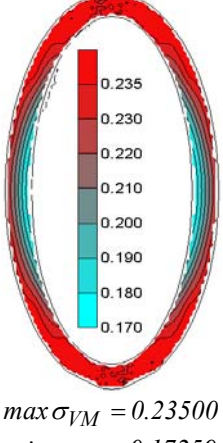
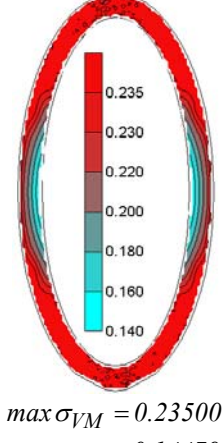
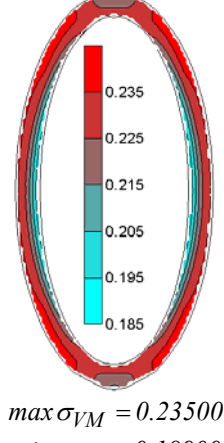
5.4.7 Παράδειγμα 7

Προκειμένου να διαπιστωθεί το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου στη μη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη και να διερευνηθεί η στρεπτική ελαστοπλαστική μεταλυγισμική συμπεριφορά ράβδων με επιρροή ΔΔΠ, ως έβδομο παράδειγμα μελετήθηκε ισότροπα κρατυνόμενη μεταλλική ράβδος ($E = 2.1 \times 10^8$ kN / m², $G = 8.077 \times 10^7$ kN / m², $\sigma_Y = 3.55 \times 10^5$ kN / m², $E_t = 6 \times 10^6$ kN / m²) μήκους $l = 8.0$ m με διατομή I συνολικού ύψους $H = 0.3$ m, συνολικού πλάτους $B = 0.15$ m, πάχους κορμού $t_w = 0.0071$ m, πάχους πελμάτων $t_f = 0.0107$ m (βλ. εδάφιο 2.4.11). Τα άκρα της ράβδου είναι άστρεπτα ενώ η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται. Το αριστερό άκρο της ράβδου είναι αμετακίνητο κατά την αξονική διεύθυνση ενώ στο δεξιό άκρο ασκείται θλιπτικό αξονικό φορτίο \bar{N} . Χρησιμοποιήθηκαν 68 τετραπλευρικά στοιχεία με 3×3 κανόνα ολοκλήρωσης Gauss για το κάθε στοιχείο και 500 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της επιφάνειας και του συνόρου της διατομής, αντίστοιχα, καθώς επίσης και 20 στοιχεία για τη διακριτοποίηση του άξονα της ράβδου με 2 σημεία Gauss για το κάθε στοιχείο.

Πίνακας 5.7. Κατανομή ορθών τάσεων σ_{xx} ($\times 10^3$ MPa) στη διατομή του δεξιού άκρου της ράβδου του παραδείγματος 5.



Πίνακας 5.8. Κατανομή τάσεων Von Mises σ_{VM} ($\times 10^3$ MPa) στη διατομή του δεξιού άκρου της ράβδου του παραδείγματος 5.

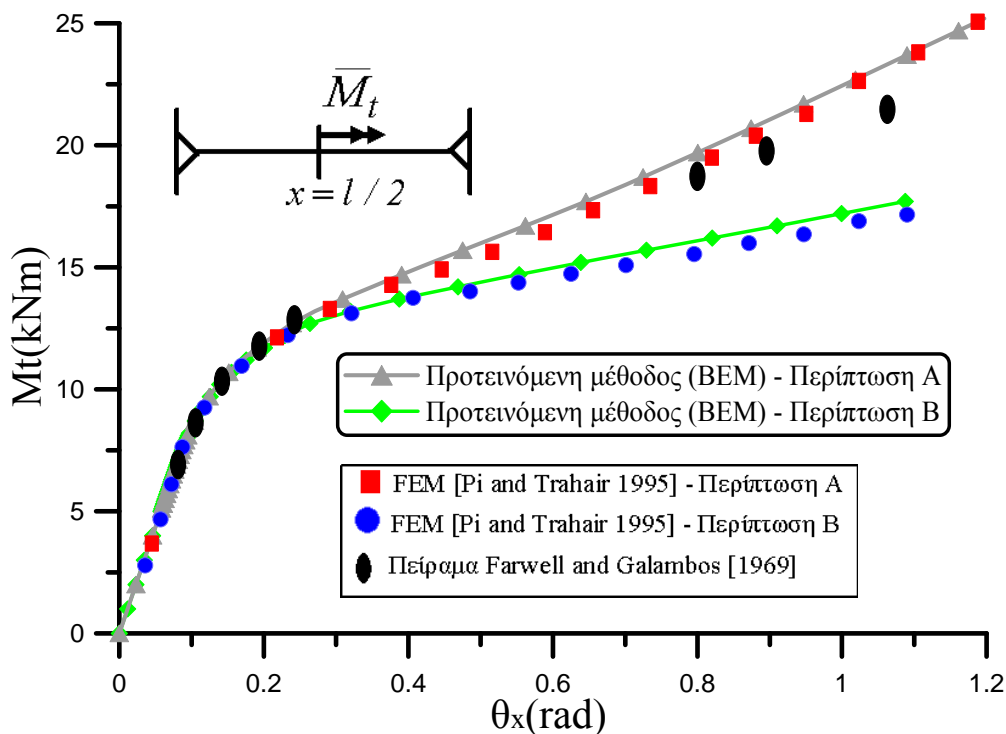
m_t (kNm/m)	Προσομοίωμα A	Προσομοίωμα B	Προσομοίωμα C	Χωρίς ανομοιόμ. στρέβλωση
97	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.21691$ $min \sigma_{VM} = 0.07659$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.19080$ $min \sigma_{VM} = 0.11421$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23085$ $min \sigma_{VM} = 0.07356$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.18158$ $min \sigma_{VM} = 0.13109$</p>
106	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23500$ $min \sigma_{VM} = 0.08372$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.20850$ $min \sigma_{VM} = 0.12481$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23500$ $min \sigma_{VM} = 0.08065$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.19843$ $min \sigma_{VM} = 0.14326$</p>
136	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23500$ $min \sigma_{VM} = 0.13480$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23500$ $min \sigma_{VM} = 0.17259$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23500$ $min \sigma_{VM} = 0.14479$</p>	 <p>$max \sigma_{VM} = 0.23500$ $min \sigma_{VM} = 0.18900$</p>

Στο Σχ.5.12 παρουσιάζεται η στρεπτική στροφή $\theta_x(l/2)$ συναρτήσει του θλιπτικού αξονικού φορτίου \bar{N} , έτσι όπως προέκυψε με βάση το προσομοίωμα C της προτεινόμενης μεθόδου αγνοώντας (βλ. εδάφιο 2.4.11) ή λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της πλαστικότητας. Παρατηρείται ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις επηρεάζουν τη μεταλυσμική συμπεριφορά της ράβδου μειώνοντας τη στιβαρότητα της.

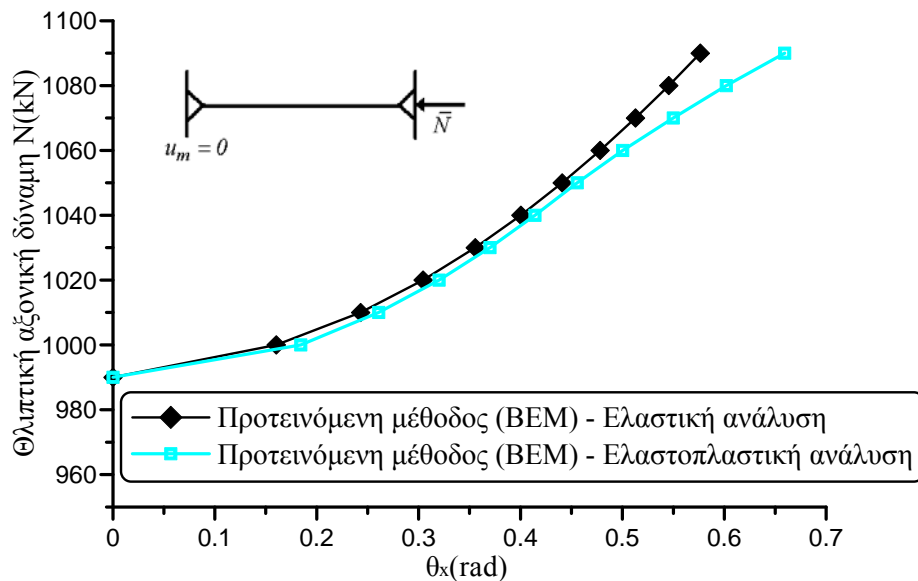
5.5 Συμπεράσματα

Στα προηγούμενα εδάφια διατυπώθηκε και επιλύθηκε αριθμητικά το στατικό πρόβλημα της μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου σταθερής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Τα **κύρια συμπεράσματα** που προκύπτουν από την προαναφερθείσα ανάλυση είναι τα ακόλουθα.

- Η ακρίβεια και η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνονται με υπάρχοντα αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα καθώς και με αποτελέσματα στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων από εμπορικό λογισμικό.
- Η προτεινόμενη μέθοδος προσφέρει τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, αφού η απαιτούμενη πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής της ράβδου χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.



Σχήμα 5.11. Καμπύλη στρεπτικής ροπής - στρεπτικής στροφής $\theta_x(l/2)$ της ράβδου του παραδείγματος 6 για δύο περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών.



Σχήμα 5.12. Καμπύλη αξονικού φορτίου - στρεπτικής στρώσης $\theta_x (l/2)$ στη μεταλυσιμική περιοχή για τη ράβδο του παραδείγματος 7.

- Η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος».
- Οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις μειώνουν τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων υπό ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη.
- Οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις δεν μεταβάλλουν αισθητά τη στρεπτική στιβαρότητα ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
- Οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις επηρεάζουν την εξέλιξη της πλαστικοποίησης και την τοπική συμπεριφορά ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
- Ο εμπλουτισμός του προσομοιώματος του συμβιβαστού πεδίου παραμορφώσεων (προσομοίωμα A) με στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (προσομοίωμα B) και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης (προσομοίωμα C) οδηγεί σε πιο εύκαμπτη συμπεριφορά και σε πιο αξιόπιστη προσομοίωση ράβδων υπό ελαστοπλαστική ανομοιόμορφη στρέψη, ιδίως στον προσδιορισμό κατανομών πλαστικοποίησης και τοπικής συμπεριφοράς.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα ελαστοπλαστικών ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη και έχει ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης.
- Οι συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης επηρεάζουν αισθητά τη συμπεριφορά ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη και αυξάνουν τη στρεπτική στιβαρότητα.
- Οι πλαστικές παραμορφώσεις επηρεάζουν τη στρεπτική μεταλυσιμική συμπεριφορά ράβδου μειώνοντας τη στρεπτική στιβαρότητά της.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα

6.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή διερευνάται και επιλύεται σειρά προβλημάτων μη γραμμικής ανάλυσης στρεπτόμενων ράβδων ομογενούς ή σύνθετης διατομής που συναντώνται στην επιστήμη του μηχανικού. Τα προβλήματα αυτά είναι τα ακόλουθα.

- Μη γραμμική ελαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη.
- Μη γραμμική ελαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.
- Μη γραμμική ελαστική δυναμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.
- Μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ομοιόμορφη στρέψη.
- Μη γραμμική ελαστοπλαστική στατική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.

Η επίλυση των εξεταζόμενων προβλημάτων βασίζεται στη διατύπωση καινοτόμων θεωριών ράβδου. Τα σχετικά μονοδιάστατα και διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών και αρχικών συνοριακών τιμών που μορφώνονται επιλύονται αριθμητικά εφαρμόζοντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method (BEM)), τη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method (AEM)) και την Πεδιακή BEM (Domain BEM). Τα κύρια συμπεράσματα της διατριβής συνοψίζονται στα ακόλουθα.

- Η ακρίβεια και η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνονται με υπάρχοντα αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα καθώς και με αποτελέσματα στερεών (εξαεδρικών) και κελυφωτών (τετραπλευρικών) πεπερασμένων στοιχείων από εμπορικό λογισμικό.
- Η προτεινόμενη μέθοδος προσφέρει τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, αφού απαιτεί μόνο συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και των γεωμετρικών σταθερών σε ορισμένα από τα προβλήματα που εξετάστηκαν. Στα υπόλοιπα προβλήματα απαιτείται και πεδιακή διακριτοποίηση της διατομής, ωστόσο αυτή χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.
- Η προτεινόμενη αριθμητική επίλυση αντιμετωπίζει επιτυχώς τα προβλήματα του «μεμβρανικού» και «διατμητικού» «κλειδώματος».
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στη σύζευξη των στρεπτικών, αξονικών και καμπτοδιατμητικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών. Στη ράβδο δεν αναπτύσσεται αξονική και καμπτοδιατμητική ένταση αποκλειστικά στην περίπτωση συγκεκριμένων (κατάλληλων) αξονικών και καμπτοδιατμητικών συνοριακών

συνθηκών στα άκρα της. Επίσης, οι διατομές της ράβδου παρουσιάζουν εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις ακόμα και στην περίπτωση όπου ασκούνται αποκλειστικά εξωτερικά επιβαλλόμενες στρεπτικές δράσεις. Μόνο στην περίπτωση ράβδων διπλά συμμετρικής διατομής οι εγκάρσιες μετατοπίσεις είναι μηδενικές, ωστόσο η ράβδος υφίσταται αξονική βράχυνση (κατά μέσο όρο) εξαιτίας της σύζευξης αξονικών και στρεπτικών μετατοπίσεων.

- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα αυξάνει τη στρεπτική στιβαρότητα ελαστικών ή ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη. Στην περίπτωση πλαστικής καταστατικής συμπεριφοράς έχει ως αποτέλεσμα τη μη πρόκληση πλαστικής κατάρρευσης. Οι συνοριακές συνθήκες αξονικής παρεμπόδισης επηρεάζουν αισθητά τη συμπεριφορά ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη στρέψη και αυξάνουν τη στρεπτική στιβαρότητα.
- Η ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων μειώνει τη στρεπτική στιβαρότητα της ράβδου και οδηγεί σε πλαστική κατάρρευση όταν αγνοείται η γεωμετρική μη γραμμικότητα.
- Η Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών παρουσιάζει σφάλματα στον υπολογισμό γεωμετρικών σταθερών και τασικών μεγθών ελαστικών ράβδων τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος υπό ανομοιόμορφη στρέψη με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Τα σφάλματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά στον υπολογισμό της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς κλειστών κοίλων διατομών ακόμα και στην περίπτωση λεπτότοιχων τοιχωμάτων.
- Οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις μειώνουν τη στρεπτική στιβαρότητα ελαστικών ή ελαστοπλαστικών ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη. Η επιρροή τους είναι μικρή στη στρεπτική στιβαρότητα ελαστικών ράβδων ανοικτής λεπτότοιχης διατομής (που παρουσιάζουν έντονη στρέβλωση) και αυξάνεται με τη μείωση του μήκους της ράβδου. Επιπλέον, η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων είναι αμελητέα στη στρεπτική στιβαρότητα ελαστικών ράβδων κλειστής κοίλης λεπτότοιχης διατομής. Ωστόσο, επηρεάζουν ουσιαστικά και τασικά μεγέθη τους, ανεξάρτητα από το μήκος της ράβδου.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα φράσσει τα κινηματικά μεγέθη ελαστικών ράβδων που βρίσκονται στην προλυγισμική περιοχή τους και που υπόκεινται σε πρωτεύον συντονισμό. Η απόκριση τόσο των κινηματικών όσο και των εντατικών μεγθών παρουσιάζει χαρακτηριστικά διακροτήματος.
- Οι μεγάλες στρεπτικές στροφές επηρεάζουν αισθητά και σύνθετα τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα της στρεπτικής στροφής ελαστικών ράβδων που έχουν υποστεί στρεπτικό λυγισμό και υπόκεινται σε ελεύθερες ταλαντώσεις.
- Ο στρεπτικός μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας ελαστικής ράβδου υπό θλιπτικό αξονικό φορτίο είναι ευσταθής. Επιπλέον, οι πλαστικές παραμορφώσεις επηρεάζουν τη στρεπτική μεταλυγισμική συμπεριφορά ράβδου μειώνοντας τη στρεπτική στιβαρότητά της.

6.2 Ιδέες για Μελλοντική Έρευνα

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελεί συμβολή στη μη γραμμική ανάλυση στρεπτόμενων ράβδων. Πιθανές κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας με σημαντικό επιστημονικό και πρακτικό ενδιαφέρον όπου μπορεί να αξιοποιηθεί η συμβολή αυτή συνοψίζονται στα ακόλουθα.

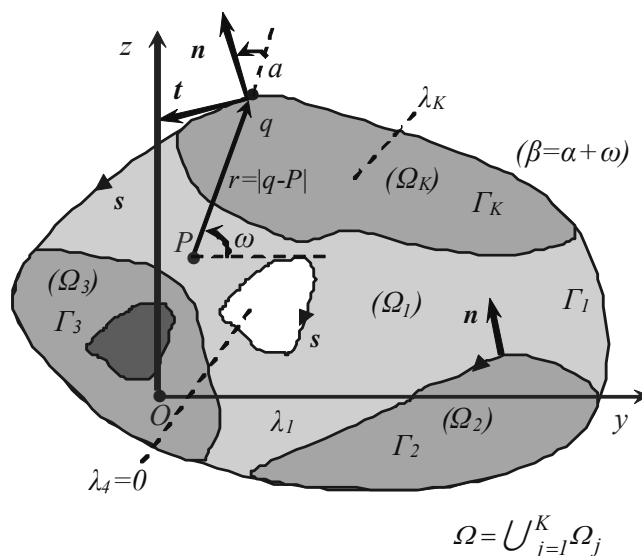
- Διερεύνηση της αλληλεπίδρασης στρεπτικών, αξονικών και καμπτοδιαμητικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών σε ράβδο υπό τυχούσα φόρτιση διατυπώνοντας καινοτόμες θεωρίες ράβδου που να μην υπόκεινται στη Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών και λαμβάνοντας υπόψη φαινόμενα γεωμετρικής και υλικής μη γραμμικότητας καθώς και την επιρροή διαμητικών παραμορφώσεων.
- Διερεύνηση της αλληλεπίδρασης στρεπτικών παραμορφώσεων και φαινομένων εγκάρσιας παραμόρφωσης (distortion) λαμβάνοντας υπόψη και την επιρροή δευτερογενών διαμητικών παραμορφώσεων.
- Διερεύνηση φαινομένων διαμητικής υστέρησης (shear lag) στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου.
- Μόρφωση ραβδωτού στοιχείου (beam element) όπου θα λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα που εξετάστηκαν στη διατριβή.
- Επέκταση των προβλημάτων που εξετάστηκαν στη διατριβή σε καμπύλες ράβδους οι οποίες σχεδόν πάντα καταπονούνται από στρεπτική φόρτιση.
- Διερεύνηση της μετάδοσης (στρεπτικής) στρέβλωσης (warping transmission) σε κόμβους ραβδωτών κατασκευών.
- Επέκταση των προβλημάτων που εξετάστηκαν στη διατριβή σε ράβδους μεταβλητής διατομής.
- Επέκταση των προβλημάτων που εξετάστηκαν στη διατριβή και ειδικότερα διερεύνηση της επιρροής δευτερογενών διαμητικών παραμορφώσεων σε ράβδους από σύνθετα υλικά (composite materials).
- Διερεύνηση της επιρροής δευτερογενών διαμητικών παραμορφώσεων σε ράβδους σύνθετης διατομής.

Παράρτημα Π1

Η Άμεση BEM για τη Διδιάστατη Εξίσωση Poisson σε Σύνθετες Περιοχές

Π1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η άμεση Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM) για προβλήματα μηχανικού που διέπονται από τη διδιάστατη εξίσωση δυναμικού σε σύνθετες περιοχές, δηλαδή για προβλήματα στα οποία οι φυσικές ιδιότητες του σώματος είναι κατά τμήματα συνεχείς. Έτσι για παράδειγμα, η σύνθετη ράβδος αποτελούμενη από υλικά σε επαφή με διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης υποβαλλόμενη σε στρεπτική φόρτιση αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση στην οποία απαιτείται επίλυση της εξίσωσης δυναμικού σε δύο διαστάσεις σε σύνθετες περιοχές [Muskhelishvili 1953]. Άλλη περίπτωση είναι η αγωγή θερμότητας σε σώμα, στο οποίο ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας είναι διαφορετικός σε δύο ή περισσότερες υποπεριοχές του.



Σχήμα Π1.1. Σύνθετη περιοχή τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω .

Θεωρούμε τη σύνθετη περιοχή του Σχ.Π1.1, η οποία αποτελείται από διάφορες (υπο)περιοχές σε επαφή κάθε μία από τις οποίες μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό άλλων περιοχών (εγκλείσματα), οι οποίες καταλαμβάνουν τα χωρία Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$) του επιπέδου y, z . Οι περιοχές έχουν διαφορετικές φυσικές ιδιότητες που περιγράφονται από τις σταθερές λ_j , ενώ τα σύνορα τους θεωρούνται τμηματικά

λεία (μπορούν δηλαδή να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών) και συμβολίζονται με Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$). Σημειώνεται ότι, το χωρίο απλής ή πολλαπλής συνοχής προκύπτει ως μερική περίπτωση εξισώνοντας ή μηδενίζοντας αντίστοιχα τις σταθερές λ_j . Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το οποίο θα αναπτυχθεί η BEM διατυπώνεται ως

$$(\nabla^2 \Phi)_j = f_j(y, z) \text{ στο } \Omega_j \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad (\text{Π1.1.1})$$

$$(\Phi)_j = (\bar{\Phi})_j \text{ στο } \Gamma_j^1 \quad (j = 1, 2, \dots, M-1, M) \quad (\text{Π1.1.2α})$$

$$\lambda_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - \lambda_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i = (\bar{\Phi}_n)_j \text{ στο } \Gamma_j^2 \quad (j = M, M+1, \dots, K) \quad (\text{Π1.1.2β})$$

όπου $\Gamma_j^1 \cup \Gamma_j^2 = \Gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots, K$) και $\Gamma_j^1 \cap \Gamma_j^2 = \{\emptyset\}$. Επίσης,

$(\nabla^2)_j \equiv \left(\partial^2 / \partial y^2 \right)_j + \left(\partial^2 / \partial z^2 \right)_j$ είναι ο αρμονικός τελεστής και

$(\partial / \partial n)_j \equiv n_y (\partial / \partial y)_j + n_z (\partial / \partial z)_j$ είναι τελεστής που δηλώνει παραγωγή ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} [Μώκος 2007], ενώ $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$ είναι τα συνημίτονα

κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στα σύνορα Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$), με $\beta = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}$, δηλαδή β είναι η γωνία μεταξύ του άξονα y και του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} (Σχ.Π1.1). Τονίζεται ότι το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} κατευθύνεται προς κοινή κατεύθυνση και είναι θετικό όταν κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου Ω_j . Στις ελεύθερες επιφάνειες το Γ_j είναι το ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω_j , ενώ στις διεπιφάνειες το Γ_j είναι το κοινό σύνορο που διαχωρίζει τα χωρία Ω_j και Ω_i , όπου κινούμενοι στο κοινό σύνορο τα χωρία Ω_j και Ω_i βρίσκονται αριστερά και δεξιά του Γ_j , αντίστοιχα. Τα λ_j και λ_i είναι οι σταθερές των χωρίων Ω_j και Ω_i , αντίστοιχα, ενώ στις ελεύθερες επιφάνειες η σταθερά $\lambda_i = 0$ (ελεύθερες επιφάνειες είναι και οι οπές). Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι της συνάρτησης $(\Phi)_j$ ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} μεταβάλλονται ασυνεχώς κατά μήκος των εσωτερικών συνόρων.

Η εξίσωση δυναμικού (Π1.1.1) είναι ελλειπτικού τύπου και για $f_j = 0$ είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace, ενώ για $f_j \neq 0$ είναι γνωστή ως εξίσωση Poisson. Η συνάρτηση f_j (και κατ' επέκταση οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της $(\Phi)_j$) ορίζεται και είναι συνεχής στο χωρίο Ω_j καθώς και στα ελεύθερα σύνορα αλλά δεν ορίζεται κατ' ανάγκη στις διεπιφάνειες. Η μερική διαφορική εξίσωση (Π1.1.1) είναι η κυρίαρχη εξίσωση στη θεωρία δυναμικού. Η λύσης της $(\Phi)_j = (\Phi(y, z))_j$ εκφράζει δυναμικό που οφείλεται σε κατανεμημένη πηγή $f_j(y, z)$ και περιγράφει τη συμπεριφορά πολλών φυσικών προβλημάτων. Η συνοριακή συνθήκη (Π1.1.2α)

αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ουσιώδης ή κινηματική και η συνθήκη (Π1.1.2β) ως φυσική. Η συνοριακή συνθήκη (Π1.1.2β) είναι συζευγμένη καθώς δεν είναι γνωστή η παράγωγος της συνάρτησης $(\Phi)_j$ ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} σε κάθε σύνορο

Γ_j^2 ($j = M, M+1, \dots, K$). Οι εξ.(Π1.1.2α,β) προκύπτουν από τη φυσική θεώρηση του εκάστοτε εξεταζόμενου προβλήματος, ενώ στα εσωτερικά κοινά σύνορα είναι γνωστές ως συνθήκες συνέχειας και εκφράζουν (απαιτούν) τη συνέχεια του δυναμικού και τη συνέχεια της ροής στις διεπιφάνειες, αντίστοιχα. Από την εξ.(Π1.1.2α) προκύπτει ότι η συνάρτηση $(\Phi)_j$ είναι συνεχής στο χωρίο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών των εξ.(Π1.1.1-2) είναι μικτού τύπου, καθώς σε τμήμα του συνόρου είναι γνωστή η $(\bar{\Phi})_j$ και στο υπόλοιπο η $(\bar{\Phi}_n)_j$. Επισημαίνεται ότι, κάποιο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι τύπου Dirichlet ή Neumann όταν σε όλα τα σύνορα του εξεταζόμενου χωρίου Ω είναι ορισμένη η συνάρτηση $(\bar{\Phi})_j$ ή η παράγωγος $(\bar{\Phi}_n)_j$, αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τη θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων στα προβλήματα συνοριακών τιμών τύπου Neumann στα οποία οι κυρίαρχες (δεσπόζουσες) μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι ελλειπτικού τύπου, η λύση δεν προσδιορίζεται μονοσήμαντα αλλά προκύπτει συναρτήσει αυθαίρετων σταθερών (στο πρόβλημα δυναμικού η σταθερά είναι μοναδική), υπογραμμίζοντας ωστόσο ότι στα μεγέθη στα οποία υπεισέρχονται παράγωγοι της λύσης, οι σταθερές αυτές δεν έχουν επιπτώσεις [Μώκος 2007]. Έτσι, κατά την υπολογιστική επίλυση των προβλημάτων αυτών απαιτείται να λαμβάνεται ειδική μέριμνα, καθώς το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια την εμφάνιση δυσχερειών κατά την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος (το μητρώο του συστήματος δεν αντιστρέφεται) [Strese 1984, Lutz et al. 1998, Katsikadelis 2002a, Aimi and Diligenti 2008]. Επομένως, το πρόβλημα Neumann όταν επιλύεται αριθμητικά, θα πρέπει να επιλύεται με μικτές συνοριακές συνθήκες δίδοντας στην εξεταζόμενη συνάρτηση σε οποιοδήποτε σημείο του συνόρου κάποια αυθαίρετη σταθερά ή με άλλες ειδικές τεχνικές [Strese 1984, Lutz et al. 1998, Aimi and Diligenti 2008]. Η λύση του προβλήματος προκύπτει συναρτήσει της σταθεράς αυτής, η οποία δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις συνοριακές συνθήκες αλλά από την φυσική θεώρηση του προβλήματος.

Π1.2 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης $(\Phi(y,z))_j$ ($j = 1, 2, \dots, K$) και των παραγώγων της επιτυγχάνεται με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM) [Katsikadelis 2002a]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, θεωρώντας ότι η συνάρτηση $(\Phi)_j$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης στο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$), εάν εφαρμόσουμε τη δεύτερη ταυτότητα του Green

$$\iint_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (\text{Π1.2.1})$$

για τις συναρτήσεις $u = (\Phi)_j$ και $v = \Psi$ και “αφήσουμε” το σημείο ταξιθεσίας $P \in \Omega_j$ να συμπέσει με σημείο p του συνόρου Γ_j του χωρίου Ω_j , δηλαδή $P \rightarrow p \in \Gamma_j$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(P))_j &= \iint_{\Omega_j} \ln r \left(\nabla^2 \Phi(Q) \right)_j d\Omega_Q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos \alpha}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.2.2})$$

με

$$\varepsilon : \varepsilon(P) = \begin{cases} 2\pi & \text{όταν } P \in \Omega_j \text{ (} P, \text{ εσωτερικό σημείο)} \\ \pi & \text{όταν } P \equiv p \in \Gamma_j \text{ (} P \equiv p, \text{ συνοριακό σημείο)} \\ 0 & \text{όταν } P \notin \Omega_j, p \notin \Gamma_j \text{ (} P, \text{ εξωτερικό σημείο)} \end{cases} \quad (\text{Π1.2.3})$$

και $\alpha = \hat{r} \cdot \mathbf{n}$ η γωνία μεταξύ της απόστασης r και του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} (Σχ.Π1.1). Σημειώνεται ότι το σύνоро Γ_j στη θέση του σημείου P θεωρείται λείο, δηλαδή ότι το σημείο P δεν είναι γωνιακό. Επίσης, $\Psi : \Psi(Q, P)$ είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης δυναμικού (γνωστή και ως συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου) που ορίζεται ως

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \ln r(Q, P) \quad Q, P \in \Omega_j \quad (\text{Π1.2.4})$$

και που αποτελεί μερική ιδιόμορφη λύση της εξίσωσης

$$\nabla^2 \Psi = \delta(Q - P) \quad (\text{Π1.2.5})$$

όπου $\delta(Q - P)$ η διδιάστατη συνάρτηση Dirac [Μώκος 2007], P το σημείο του χωρίου στο οποίο εφαρμόζεται η πηγή και το οποίο παραμένει “σταθερό” (σημείο ταξιθεσίας), Q το σημείο το οποίο “διατρέχει” το χωρίο, ενώ $r = |Q - P|$ η απόσταση μεταξύ των σημείων P, Q . Στις παρακάτω σχέσεις του παρόντος εδαφίου τα σημεία στο εσωτερικό του χωρίου Ω_j δηλώνονται με κεφαλαία γράμματα, δηλαδή $P, Q \in \Omega_j$, ενώ τα σημεία στο σύνоро Γ_j του χωρίου Ω_j δηλώνονται με μικρά γράμματα, δηλαδή $p, q \in \Gamma_j$. Χρησιμοποιώντας την εξ.(Π1.1.1) η ολοκληρωτική παράσταση (Π1.2.2) γράφεται ως

$$\varepsilon(\Phi(P))_j = \iint_{\Omega_j} (f(Q))_j \ln r \, d\Omega_Q + \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \quad (\text{Π1.2.6})$$

Με τη βοήθεια της εξ.(Π1.2.3), σε τυχόν εσωτερικό σημείο $P \in \Omega_j$ της σύνθετης διατομής η εξ.(Π1.2.6) δίδει

$$\begin{aligned} (\Phi(P))_j &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_j} (f(Q))_j \ln r \, d\Omega_Q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q, \quad P \in \Omega_j, q \in \Gamma_j \end{aligned} \quad (\text{Π1.2.7})$$

Οι τιμές της συνάρτησης $(\Phi(P))_j$ στο εσωτερικό του Ω_j μπορούν να υπολογιστούν από την παραπάνω ολοκληρωτική παράσταση εάν η συνάρτηση $(\Phi)_j$ και η παράγωγος $(\partial \Phi / \partial n)_j$ είναι γνωστές στα σύνορα Γ_j . Οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες $(\Phi)_j$ και $(\partial \Phi / \partial n)_j$ μπορούν να υπολογισθούν από την επίλυση συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης στο σύνορο Γ_j , η οποία εξάγεται εργαζόμενοι ως ακολούθως.

Θεωρούμε σημείο p του συνόρου Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$). Για σημείο q που ανήκει στο σύνορο Γ_j του χωρίου Ω_j , η εξ.(Π1.2.6) γράφεται (με τη βοήθεια της εξ.(Π1.2.3)) ως

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(p))_j &= \iint_{\Omega_j} (f(Q))_j \ln r \, d\Omega_Q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q, \quad q \in \Gamma_j \end{aligned} \quad (\text{Π1.2.8})$$

Ομοίως, για σημείο q που ανήκει σε τμήμα του συνόρου Γ_k του χωρίου Ω_k , το οποίο αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_k , η εξ.(Π1.2.6) γράφεται (με τη βοήθεια της εξ.(Π1.2.3)) ως

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(p))_j &= \iint_{\Omega_k} (f(Q))_k \ln r \, d\Omega_Q \\ &+ \int_{\Gamma_k} \left[-(\Phi(q))_k \frac{\cos a}{r} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_k \ln r \right] ds_q, \quad q \in \Gamma_k \end{aligned} \quad (\text{Π1.2.9})$$

Επιπλέον, για σημείο q που ανήκει στα σύνορα Γ_i ($i = 1, 2, \dots, K, i \neq k$) η εξ.(Π1.2.6) γράφεται (με τη βοήθεια της εξ.(Π1.2.3)) ως

$$\begin{aligned}
0 = & \iint_{\Omega_i} (f(Q))_i \ln r \, d\Omega_Q \\
& + \int_{\Gamma_i} \left[-(\Phi(q))_i \frac{\cos a}{r} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_i \ln r \right] ds_q, \quad q \in \Gamma_i
\end{aligned} \tag{Π1.2.10}$$

Σημειώνεται ότι το πρόσημο στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους των δύο τελευταίων ολοκληρωτικών εξισώσεων έχει αλλάξει, καθώς το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} κάθετο στο σύνορο είναι αρνητικό.

Πολλαπλασιάζοντας την εξ.(Π1.2.8) με λ_j , την εξ.(Π1.2.9) με λ_k και την εξ.(Π1.2.10) με λ_i ($i=1,2,\dots,K, i \neq k$), λαμβάνοντας υπόψη τη συνέχεια της $(\Phi)_j$ στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ και προσθέτοντας τις προκύπτουσες σχέσεις λαμβάνουμε την ακόλουθη ιδιόμορφη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση

$$\begin{aligned}
\pi(\Phi(p))_j (\lambda_j + \lambda_k) = & \sum_{j=1}^K \lambda_j \iint_{\Omega_j} (f(Q))_j \ln r \, d\Omega_Q \\
& + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(\lambda_j - \lambda_i) (\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left[\lambda_j \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - \lambda_i \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q
\end{aligned} \tag{Π1.2.11}$$

Τονίζεται ότι στην εξ.(Π1.2.11), p είναι το σημείο ταξιθεσίας ως προς το οποίο διατυπώνουμε την ολοκληρωτική εξίσωση και το οποίο ανήκει στο σύνορο Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) που αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_k , ενώ το σημείο q μεταβάλλεται κατά μήκος του συνόρου Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) που αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_i . Στην περίπτωση που το σύνορο Γ_j είναι ελεύθερο σύνορο θα έχουμε $\lambda_k = \lambda_i = 0$. Επίσης, στην εξ.(Π1.2.11) το σύνορο Γ_j διατρέχεται μόνο μία φορά, ενώ το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου Ω_j .

Η σχέση (Π1.2.11) αποτελεί σχέση συμβιβαστού μεταξύ των συνοριακών ποσοτήτων $(\Phi)_j$ και $\lambda_j (\partial \Phi / \partial n)_j - \lambda_i (\partial \Phi / \partial n)_i$. Τούτο σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του συνόρου μόνο μία εκ των ποσοτήτων $(\Phi)_j$ και $\lambda_j (\partial \Phi / \partial n)_j - \lambda_i (\partial \Phi / \partial n)_i$ είναι γνωστή (βλ. εξ.(Π1.1.2)). Προκειμένου να υπολογιστούν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες επιλύουμε αριθμητικά την εξ.(Π1.2.11), δεδομένου ότι η αναλυτική της επίλυση για χωρία τυχόντος σχήματος είναι πρακτικά αδύνατη. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στη συνέχεια του κεφαλαίου για δύο μερικές περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, στο εδάφιο Π1.3 παρουσιάζεται η περίπτωση όπου η κατανομημένη πηγή f_j του δεξιού μέλους της εξ.(Π1.1.1) γράφεται ως $f_j = c_j m + c_j w$ ($j=1,2,\dots,K$) (περίπτωση A), όπου $c_j \in R$ είναι σταθερά, $m = m(y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο

$\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$, η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και αρμονική στο Ω_j , δηλαδή ισχύει $(\nabla^2 m)_j = 0$ και $w = w(y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$, τέτοια ώστε να μπορεί να βρεθεί μερική λύση W της εξίσωσης Poisson $\nabla^2 W = w$ στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$, ενώ στο εδάφιο Π1.4 παρουσιάζεται η περίπτωση όπου η κατανομημένη πηγή f_j δίδεται ως $f_j = c(\partial g_j / \partial y + \partial h_j / \partial z)$ (περίπτωση Β), όπου $c \in R$ είναι σταθερά, $g_j = g_j(y, z)$, $h_j = h_j(y, z)$ είναι μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\Omega_j (j = 1, 2, \dots, K)$ και η $(\bar{\Phi}_n)_j$ εκφράζεται ως $(\bar{\Phi}_n)_j = (\bar{Z}_n)_j + c(\lambda_j(g_j n_y + h_j n_z) - \lambda_i(g_i n_y + h_i n_z))$, όπου $(\bar{Z}_n)_j$ είναι γνωστή συνάρτηση.

Με την αριθμητική επίλυση της εξ.(Π1.2.11) υπολογίζονται οι προαναφερθείσες άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Ωστόσο, η παράγωγος της συνάρτησης $(\Phi)_j$ ως προς το κάθετο διάνυσμα n , δηλαδή $(\partial \Phi / \partial n)_j$, είναι γνωστή μόνο στα ελεύθερα σύνορα και παραμένει άγνωστη στις διεπιφάνειες. Ο υπολογισμός της $(\partial \Phi / \partial n)_j$ στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών πραγματοποιείται επιλύοντας (αριθμητικά) ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.2.8) (πρόβλημα Dirichlet). Έτσι, με τη βοήθεια της εξ.(Π1.1.2β) και την αριθμητική επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης (Π1.2.8), χρησιμοποιώντας τις υπολογιζόμενες συνοριακές τιμές $(\Phi)_j$ που προέκυψαν από την επίλυση της εξ.(Π1.2.11), μπορούν να προσδιοριστούν όλες οι κομβικές συνοριακές ποσότητες $(\partial \Phi / \partial n)_j$ σε όλα τα χωρία Ω_j .

Γνωρίζοντας τις τιμές των συναρτήσεων $(\Phi)_j$ και $(\partial \Phi / \partial n)_j$ σε όλα τα σύνορα, οι τιμές της συνάρτησης $(\Phi)_j$ σε τυχόν εσωτερικό σημείο P του χωρίου Ω_j υπολογίζονται από την εξ.(Π1.2.7), ενώ οι παράγωγοι της $(\Phi)_j$ ως προς y και z επίσης σε τυχόν εσωτερικό σημείο P του Ω_j μπορούν να υπολογιστούν με απευθείας παραγωγή της εξ.(Π1.2.7). Έτσι, οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις των $(\partial \Phi / \partial y)_j$ και $(\partial \Phi / \partial z)_j$ διατυπώνονται ως

$$\left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial y} \right)_j = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_j} (f(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} d\Omega_Q + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos(\omega - \alpha)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \quad (\text{Π1.2.12}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial z} \right)_j &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_j} (f(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} d\Omega_Q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\sin(\omega - \alpha)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.2.12}\beta)$$

όπου $P \in \Omega_j$, $q \in \Gamma_j$, $r = |P - q|$, $\alpha = r \hat{\mathbf{n}}$ και $\omega = \hat{\mathbf{y}}r$.

Τέλος, η παράγωγος ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{t} της συνάρτησης $(\Phi)_j$, δηλαδή $\partial \Phi / \partial t$, στα σύνορα υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών (Παράρτημα Π8), δεδομένου ότι η $(\Phi)_j$ είναι γνωστή στο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$).

Π1.3 Αριθμητική επίλυση για την περίπτωση κατανεμημένης πηγής A

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση f_j γράφεται ως $f_j = c_j m + c_j w$ ($j = 1, 2, \dots, K$) (περίπτωση κατανεμημένης πηγής A), όπου $c_j \in \mathbb{R}$ είναι σταθερά, $m = m(y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ και αρμονική στο Ω_j ($(\nabla^2 m)_j = 0$) και $w = w(y, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$, τέτοια ώστε να μπορεί να βρεθεί μερική λύση W της εξίσωσης Poisson $\nabla^2 W = w$ στο $\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$, είναι δυνατή η διατήρηση του αμιγούς συνοριακού χαρακτήρα της BEM. Η ολοκληρωτική παράσταση (Π1.2.6) διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(P))_j &= c_j \iint_{\Omega_j} m \ln r d\Omega_Q + c_j \iint_{\Omega_j} w \ln r d\Omega_Q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos \alpha}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.1})$$

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα του Green που δίδεται από την εξ.(Π1.2.1) για τη συνάρτηση m και τη συνάρτηση U , που ορίζεται ως

$$U = \frac{1}{8\pi} r^2 (\ln r - 1) \quad (\text{Π1.3.2})$$

και η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 U = \Psi \quad (\text{Π1.3.3})$$

το πρώτο πεδιακό ολοκλήρωμα της εξ.(Π1.3.1) μετατρέπεται σε συνοριακό, δεδομένου ότι $(\nabla^2 m)_j = 0$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (Π1.2.4-5) και ότι

$\nabla^2 W = w$ και εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα του Green για το δεύτερο πεδιακό ολοκλήρωμα της εξ.(Π1.3.1), η ολοκληρωτική παράσταση (Π1.3.1) διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(P))_j &= \frac{1}{4}c_j \int_{\Gamma_j} \left[m(q)(2 \ln r - 1)r \cos a - \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \\ &+ \varepsilon c_j (W(P))_j + c_j \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.4})$$

ενώ οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.2.7-11) εκφράζονται ως

$$\begin{aligned} (\Phi(P))_j &= \frac{1}{8\pi}c_j \int_{\Gamma_j} \left[m(q)(2 \ln r - 1)r \cos a - \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \\ &+ c_j (W(P))_j + \frac{1}{2\pi}c_j \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q, \quad P \in \Omega_j, q \in \Gamma_j \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.5})$$

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(p))_j &= \frac{1}{4}c_j \int_{\Gamma_j} \left[m(q)(2 \ln r - 1)r \cos a - \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j (\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \\ &+ \pi c_j (W(p))_j + c_j \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q, \quad q \in \Gamma_j \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.6})$$

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(p))_j &= \frac{1}{4}c_k \int_{\Gamma_k} \left[-m(q)(2 \ln r - 1)r \cos a + \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_k (\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \\ &+ \pi c_k (W(p))_j + c_k \int_{\Gamma_k} \left[W(q) \frac{\cos a}{r} - \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\ &+ \int_{\Gamma_k} \left[-(\Phi(q))_k \frac{\cos a}{r} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_k \ln r \right] ds_q, \quad q \in \Gamma_k \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.7})$$

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{4} c_i \int_{\Gamma_i} \left[-m(q)(2 \ln r - 1) r \cos a + \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_i (\ln r - 1) r^2 \right] ds_q \\
 & + c_i \int_{\Gamma_i} \left[W(q) \frac{\cos a}{r} - \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\
 & + \int_{\Gamma_i} \left[-(\Phi(q))_i \frac{\cos a}{r} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_i \ln r \right] ds_q, \quad q \in \Gamma_i
 \end{aligned} \tag{Π1.3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \pi(\Phi(p))_j (\lambda_j + \lambda_k) = & \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K (\lambda_j c_j - \lambda_i c_i) \int_{\Gamma_j} m(q)(2 \ln r - 1) r \cos a ds_q \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[\lambda_j c_j \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_j - \lambda_i c_i \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n} \right)_i \right] (\ln r - 1) r^2 ds_q \\
 & + \pi(W(p))_j (\lambda_j c_j + \lambda_k c_k) \\
 & + \sum_{j=1}^K (\lambda_j c_j - \lambda_i c_i) \int_{\Gamma_j} \left[-W(q) \frac{\cos a}{r} + \frac{\partial W(q)}{\partial n} \ln r \right] ds_q \\
 & + \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(\lambda_j - \lambda_i) (\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left[\lambda_j \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - \lambda_i \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q
 \end{aligned} \tag{Π1.3.9}$$

Τονίζεται ότι στην εξ.(Π1.3.9) p είναι το σημείο ταξιθεσίας ως προς το οποίο διατυπώνουμε την ολοκληρωτική εξίσωση και το οποίο ανήκει στο σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) που αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_k , ενώ το σημείο q μεταβάλλεται κατά μήκος του συνόρου Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) που αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_i . Στην περίπτωση που το σύνορο Γ_j είναι ελεύθερο σύνορο θα έχουμε $\lambda_k = \lambda_i = 0$. Επίσης, στην εξ.(Π1.3.9) το σύνορο Γ_j διατρέχεται μόνο μία φορά, ενώ το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου Ω_j .

Η σχέση (Π1.3.9) αποτελεί σχέση συμβιβαστού μεταξύ των συνοριακών ποσοτήτων $(\Phi)_j$ και $\lambda_j (\partial \Phi / \partial n)_j - \lambda_i (\partial \Phi / \partial n)_i$. Τούτο σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του συνόρου μόνο μία εκ των ποσοτήτων $(\Phi)_j$ και $\lambda_j (\partial \Phi / \partial n)_j - \lambda_i (\partial \Phi / \partial n)_i$ είναι γνωστή (βλ. εξ.(Π1.1.2)). Προκειμένου να υπολογιστούν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες επιλύουμε αριθμητικά την εξ.(Π1.3.9), δεδομένου ότι η αναλυτική της επίλυση για χωρία τυχόντος σχήματος είναι πρακτικά αδύνατη. Έτσι για οποιαδήποτε γεωμετρία της σύνθετης περιοχής, διαιρούμε το σύνορο Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) σε N (συνοριακά) στοιχεία στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι οι ποσότητες m , $\lambda_j c_j (\partial m / \partial n)_j - \lambda_i c_i (\partial m / \partial n)_i$, W , $\frac{\partial W}{\partial n}$, $(\Phi)_j$ και $\lambda_j (\partial \Phi / \partial n)_j - \lambda_i (\partial \Phi / \partial n)_i$ έχουν

έκαστη σταθερή τιμή σε κάθε στοιχείο η οποία είναι ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (υπόθεση σταθερού στοιχείου). Γράφοντας τη διακριτοποιημένη ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.9) για τα N συνοριακά κομβικά σημεία p_i , προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$[H]\{\Phi\} = [G]\{\Phi_n\} + \{F\} \quad (\text{Π1.3.10})$$

όπου $[H], [G]$ είναι τετραγωνικά $N \times N$ γνωστά μητρώα συντελεστών, $\{\Phi\}, \{\Phi_n\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ που περιλαμβάνουν όλες τις διακριτοποιημένες συνοριακές ποσότητες (γνωστές και άγνωστες) $(\Phi)_j$ και $\lambda_j (\partial \Phi / \partial n)_j - \lambda_i (\partial \Phi / \partial n)_i$, αντίστοιχα, ενώ $\{F\}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών που περιλαμβάνει τις διακριτοποιημένες τιμές του δεξιού μέλους της εξ. (Π1.3.9) εκτός αυτών του τελευταίου επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Υπογραμμίζεται ότι στην ειδική περίπτωση της εξίσωσης Laplace ($f_j = 0$) το μητρώο στήλη $\{F\}$ μηδενίζεται. Υποθέτοντας επιπρόσθετα ότι στην περίπτωση μη ευθύγραμμου συνόρου, η γεωμετρία καμπύλων στοιχείων προσεγγίζεται με ευθύγραμμο τμήμα, οι συντελεστές (επιρροής) των συνοριακών ολοκληρωμάτων των μητρώων $[H], [G], \{F\}$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά τόσο στην περίπτωση ομαλής όσο και στην περίπτωση ιδιόμορφης συμπεριφοράς (βλ. [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al. 2010]) Επιπλέον, ο αναλυτικός προσδιορισμός των ολοκληρωμάτων αυτών αντιμετωπίζει επιτυχώς την «σχεδόν» ιδιόμορφη συμπεριφορά που είναι ενδεχόμενο να εμφανιστεί σε περίπτωση πολύ λεπτότοιχων χωρίων [Fratantonio and Rencis 2000]. Ακολουθώντας, αναδιατάσσοντας τα μητρώα $[H], \{\Phi\}$ και $[G], \{\Phi_n\}$ της σχέσης (Π1.3.10), όπου τα γνωστά μεγέθη μετακινούνται δεξιά και τα αντίστοιχα άγνωστα μεγέθη αριστερά, και εκτελώντας στη συνέχεια τον πολλαπλασιασμό των μητρώων στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της προκύπτουσας εξίσωσης λαμβάνουμε

$$[A]\{X\} = \{B\} + \{F\} \quad (\text{Π1.3.11})$$

όπου $[A]$ είναι τετραγωνικό $N \times N$ γνωστό μητρώο συντελεστών, $\{B\}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών και $\{X\}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση $N \times 1$ που περιλαμβάνει τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Τονίζεται ότι κατά τη μεταφορά των στηλών του μητρώου $[H]$ στο δεξιό μέλος και των αντίστοιχων στηλών του μητρώου $[G]$ στο αριστερό μέλος οι τιμές των στηλών αλλάζουν πρόσημο.

Με την αριθμητική επίλυση της εξ. (Π1.3.9) υπολογίζονται οι προαναφερθείσες άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Ωστόσο, η παράγωγος της συνάρτησης $(\Phi)_j$ ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} , δηλαδή $(\partial \Phi / \partial n)_j$, είναι γνωστή μόνο στα ελεύθερα σύνορα και παραμένει άγνωστη στις διεπιφάνειες. Ο υπολογισμός της $(\partial \Phi / \partial n)_j$ στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών πραγματοποιείται επιλύοντας (αριθμητικά) ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.3.6)

(πρόβλημα Dirichlet), με τη βοήθεια της υπάρχουσας συνοριακής διακριτοποίησης και της υπόθεσης του σταθερού στοιχείου. Έτσι, με τη βοήθεια της εξ.(Π1.1.2β) και την αριθμητική επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης (Π1.3.6), χρησιμοποιώντας τις υπολογιζόμενες συνοριακές τιμές $(\Phi)_j$ που προέκυψαν από την επίλυση της εξ.(Π1.3.9), μπορούν να προσδιοριστούν όλες οι κομβικές συνοριακές ποσότητες $(\partial\Phi/\partial n)_j$ σε όλα τα χωρία Ω_j .

Γνωρίζοντας τις τιμές των συναρτήσεων $(\Phi)_j$ και $(\partial\Phi/\partial n)_j$ σε όλα τα σύνορα, η τιμές της συνάρτησης $(\Phi)_j$ σε τυχόν εσωτερικό σημείο P του χωρίου Ω_j υπολογίζονται αριθμητικά από την εξ.(Π1.3.5) με τη βοήθεια της υπάρχουσας συνοριακής διακριτοποίησης και της υπόθεσης του σταθερού στοιχείου, ενώ οι παράγωγοι της $(\Phi)_j$ ως προς y και z επίσης σε τυχόν εσωτερικό σημείο P του Ω_j μπορούν να υπολογιστούν με απευθείας παραγωγή της εξ.(Π1.3.5). Έτσι, οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις των $(\partial\Phi/\partial y)_j$ και $(\partial\Phi/\partial z)_j$ διατυπώνονται ως

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi(P)}{\partial y}\right)_j &= -\frac{1}{8\pi}c_j \int_{\Gamma_j} m(q)(2\cos\omega\cos a + (2\ln r - 1)\cos\beta)ds_q \\ &+ \frac{1}{8\pi}c_j \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n}\right)_j (2\ln r - 1)r\cos\omega ds_q + c_j \left(\frac{\partial W(P)}{\partial y}\right)_j \\ &+ \frac{1}{2\pi}c_j \int_{\Gamma_j} \left[-W(q)\frac{\cos(\omega-a)}{r^2} - \frac{\partial W(q)}{\partial n}\frac{\cos\omega}{r}\right]ds_q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos(\omega-a)}{r^2} + \left(\frac{\partial\Phi(q)}{\partial n}\right)_j \frac{\cos\omega}{r}\right]ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.12}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi(P)}{\partial z}\right)_j &= -\frac{1}{8\pi}c_j \int_{\Gamma_j} m(q)(2\sin\omega\cos a + (2\ln r - 1)\sin\beta)ds_q \\ &+ \frac{1}{8\pi}c_j \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial m(q)}{\partial n}\right)_j (2\ln r - 1)r\sin\omega ds_q + c_j \left(\frac{\partial W(P)}{\partial z}\right)_j \\ &+ \frac{1}{2\pi}c_j \int_{\Gamma_j} \left[-W(q)\frac{\sin(\omega-a)}{r^2} - \frac{\partial W(q)}{\partial n}\frac{\sin\omega}{r}\right]ds_q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\sin(\omega-a)}{r^2} + \left(\frac{\partial\Phi(q)}{\partial n}\right)_j \frac{\sin\omega}{r}\right]ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.3.12}\beta)$$

όπου $P \in \Omega_j, q \in \Gamma_j, r = |P - q|, \alpha = \hat{r} \cdot \hat{n}, \omega = \hat{y} \cdot \hat{z}$. Ο αριθμητικός υπολογισμός των $(\partial \Phi / \partial y)_j$ και $(\partial \Phi / \partial z)_j$ βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου.

Π1.4 Αριθμητική επίλυση για την περίπτωση κατανεμημένης πηγής B

Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση f_j γράφεται ως $f_j = c(\partial g_j / \partial y + \partial h_j / \partial z)$ ($j = 1, 2, \dots, K$) (περίπτωση κατανεμημένης πηγής B), όπου $c \in R$ είναι σταθερά, $g_j = g_j(y, z), h_j = h_j(y, z)$ είναι μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο Ω_j ($j = 1, 2, \dots, K$) και η $(\bar{\Phi}_n)_j$ εκφράζεται ως $(\bar{\Phi}_n)_j = (\bar{Z}_n)_j + c(\lambda_j(g_j n_y + h_j n_z) - \lambda_i(g_i n_y + h_i n_z))$, όπου $(\bar{Z}_n)_j$ είναι γνωστή συνάρτηση, δεν είναι δυνατή η διατήρηση του αμιγούς συνοριακού χαρακτήρα της BEM. Ωστόσο μπορεί να αποφευχθεί ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων g_j, h_j . Η ολοκληρωτική παράσταση (Π1.2.6) διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(P))_j = & c \iint_{\Omega_j} \frac{\partial g_j(Q)}{\partial y} \ln r \, d\Omega_Q + c \iint_{\Omega_j} \frac{\partial h_j(Q)}{\partial z} \ln r \, d\Omega_Q \\ & + \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.4.1})$$

Προκειμένου να αποφευχθεί ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων $\partial g_j / \partial y, \partial h_j / \partial z$, η παραπάνω εξίσωση εκφράζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(P))_j = & -c \iint_{\Omega_j} (g(Q))_j \frac{\partial(\ln r)}{\partial y_Q} \, d\Omega_Q - c \iint_{\Omega_j} (h(Q))_j \frac{\partial(\ln r)}{\partial z_Q} \, d\Omega_Q \\ & + \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - c((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z) \right) \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.4.2})$$

και μετά από κάποιες πράξεις λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(P))_j = & -c \iint_{\Omega_j} (g(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} \, d\Omega_Q - c \iint_{\Omega_j} (h(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} \, d\Omega_Q \\ & + \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - c((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z) \right) \ln r \right] ds_q \end{aligned} \quad (\text{Π1.4.3})$$

ενώ οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.2.7-11) εκφράζονται ως

$$\begin{aligned}
 (\Phi(P))_j &= -\frac{1}{2\pi} c \iint_{\Omega_j} (g(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} d\Omega_Q - \frac{1}{2\pi} c \iint_{\Omega_j} (h(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} d\Omega_Q \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - c \left((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z \right) \right) \ln r \right] ds_q, \quad (\text{Π1.4.4})
 \end{aligned}$$

$$P \in \Omega_j, q \in \Gamma_j$$

$$\begin{aligned}
 \pi(\Phi(p))_j &= -c \iint_{\Omega_j} (g(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} d\Omega_Q - c \iint_{\Omega_j} (h(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} d\Omega_Q \\
 &+ \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - c \left((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z \right) \right) \ln r \right] ds_q, \quad (\text{Π1.4.5})
 \end{aligned}$$

$$q \in \Gamma_j$$

$$\begin{aligned}
 \pi(\Phi(p))_j &= -c \iint_{\Omega_k} (g(Q))_k \frac{\cos \omega}{r} d\Omega_Q - c \iint_{\Omega_k} (h(Q))_k \frac{\sin \omega}{r} d\Omega_Q \\
 &+ \int_{\Gamma_k} \left[-(\Phi(q))_k \frac{\cos a}{r} + \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_k - c \left((g(q))_k n_y + (h(q))_k n_z \right) \right) \ln r \right] ds_q, \quad (\text{Π1.4.6})
 \end{aligned}$$

$$q \in \Gamma_k$$

$$\begin{aligned}
 0 &= -c \iint_{\Omega_i} (g(Q))_i \frac{\cos \omega}{r} d\Omega_Q - c \iint_{\Omega_i} (h(Q))_i \frac{\sin \omega}{r} d\Omega_Q \\
 &+ \int_{\Gamma_i} \left[-(\Phi(q))_i \frac{\cos a}{r} + \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_i - c \left((g(q))_i n_y + (h(q))_i n_z \right) \right) \ln r \right] ds_q, \quad (\text{Π1.4.7})
 \end{aligned}$$

$$q \in \Gamma_i$$

$$\begin{aligned}
 \pi(\Phi(p))_j (\lambda_j + \lambda_k) &= -c \sum_{j=1}^K \lambda_j \iint_{\Omega_j} \left[(g(Q))_j \frac{\cos \omega}{r} + (h(Q))_j \frac{\sin \omega}{r} \right] d\Omega_Q \\
 &+ \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[(\lambda_j - \lambda_i) (\Phi(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left[\lambda_j \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_j - \lambda_i \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right)_i \right] \ln r \right] ds_q \quad (\text{Π1.4.8}) \\
 &- c \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left[-\lambda_j \left((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z \right) + \lambda_i \left((g(q))_i n_y + (h(q))_i n_z \right) \right] \ln r ds_q
 \end{aligned}$$

Τονίζεται ότι στην εξ.(Π1.4.8) p είναι το σημείο ταξιθεσίας ως προς το οποίο διατυπώνουμε την ολοκληρωτική εξίσωση και το οποίο ανήκει στο σύνορο Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) που αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_k , ενώ το σημείο q μεταβάλλεται κατά μήκος του συνόρου Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) που αποτελεί διεπιφάνεια μεταξύ των χωρίων Ω_j και Ω_i . Στην περίπτωση που το σύνορο Γ_j είναι ελεύθερο σύνορο θα έχουμε $\lambda_k = \lambda_i = 0$. Επίσης, στην εξ.(Π1.4.8) το σύνορο Γ_j

διατρέχεται μόνο μία φορά, ενώ το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου Ω_j .

Η σχέση (Π1.4.8) αποτελεί σχέση συμβιβαστού μεταξύ των συνοριακών ποσοτήτων $(\Phi)_j$ και $\lambda_j(\partial\Phi/\partial n)_j - \lambda_i(\partial\Phi/\partial n)_i$. Τούτο σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του συνόρου μόνο μία εκ των ποσοτήτων $(\Phi)_j$ και $\lambda_j(\partial\Phi/\partial n)_j - \lambda_i(\partial\Phi/\partial n)_i$ είναι γνωστή (βλ. εξ.(Π1.1.2)). Προκειμένου να υπολογιστούν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες επιλύουμε αριθμητικά την εξ.(Π1.4.8), δεδομένου ότι η αναλυτική της επίλυση για χωρία τυχόντος σχήματος είναι πρακτικά αδύνατη. Έτσι για οποιαδήποτε γεωμετρία της σύνθετης περιοχής και εκμεταλλευόμενοι την έκφραση της $(\bar{\Phi}_n)_j$, διαιρούμε το σύνορο Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) σε N (συνοριακά) στοιχεία και το χωρίο Ω_j ($j=1,2,\dots,K$) σε M (επιφανειακά) στοιχεία στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι οι ποσότητες $(\Phi)_j$, $\lambda_j(\partial\Phi/\partial n)_j - \lambda_i(\partial\Phi/\partial n)_i - c(\lambda_j(g_j n_y + h_j n_z) - \lambda_i(g_i n_y + h_i n_z))$ και g_j , h_j αντίστοιχα, έχουν έκαστη σταθερή τιμή σε κάθε στοιχείο η οποία είναι ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (υπόθεση σταθερού στοιχείου). Γράφοντας τη διακριτοποιημένη ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.4.8) για τα N συνοριακά κομβικά σημεία p_i , προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$[H]\{\Phi\} = [G]\{Z_n\} + \{F\} \tag{Π1.4.9}$$

όπου $[H], [G]$ είναι τετραγωνικά $N \times N$ γνωστά μητρώα συντελεστών, $\{\Phi\}, \{Z_n\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ που περιλαμβάνουν όλες τις διακριτοποιημένες συνοριακές ποσότητες (γνωστές και άγνωστες) $(\Phi)_j$ και $\lambda_j(\partial\Phi/\partial n)_j - \lambda_i(\partial\Phi/\partial n)_i - c(\lambda_j(g_j n_y + h_j n_z) - \lambda_i(g_i n_y + h_i n_z))$, αντίστοιχα, ενώ $\{F\}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών που περιλαμβάνει τις διακριτοποιημένες τιμές του δεξιού μέλους της εξ.(Π1.4.8) που σχετίζονται με τα πεδιακά ολοκληρώματα. Υπογραμμίζεται ότι στην ειδική περίπτωση της εξίσωσης Laplace ($f_j = 0$) το μητρώο στήλη $\{F\}$ μηδενίζεται, ενώ η πεδιακή διακριτοποίηση χρειάζεται μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, συνεπώς δεν απαιτείται να υπάρχει ακριβής συναρμογή μεταξύ των επιφανειακών στοιχείων της διακριτοποίησης ενώ δεν αυξάνει το πλήθος των αγνώστων του συστήματος (Π1.4.9). Τα πεδιακά ολοκληρώματα του μητρώου στήλη $\{F\}$ μετατρέπονται σε συνοριακά πάνω στο σύνορο κάθε επιφανειακού στοιχείου ακολουθώντας την τεχνική του Katsikadelis [1994] (βλ. και [Katsikadelis 2002a]). Υποθέτοντας επιπρόσθετα ότι τα επιφανειακά στοιχεία έχουν ευθύγραμμο σύνορα και ότι στην περίπτωση μη ευθύγραμμου συνόρου (διατομής), η γεωμετρία καμπύλων στοιχείων προσεγγίζεται με ευθύγραμμο τμήμα, οι συντελεστές (επιρροής) των συνοριακών ολοκληρωμάτων των μητρώων $[H], [G]$, $\{F\}$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά τόσο στην περίπτωση ομαλής όσο και στην περίπτωση ιδιόμορφης συμπεριφοράς (βλ. [Fratantonio and Rencis 2000, Ghadimi et al.

2010]) Επιπλέον, ο αναλυτικός προσδιορισμός των ολοκληρωμάτων αυτών αντιμετωπίζει επιτυχώς την «σχεδόν» ιδιόμορφη συμπεριφορά που είναι ενδεχόμενο να εμφανιστεί σε περίπτωση πολύ λεπτότοιχων χωρίων [Fratantonio and Rencis 2000]. Ακολουθώντας, αναδιατάσσοντας τα μητρώα $[H], \{\Phi\}$ και $[G], \{Z_n\}$ της σχέσης (Π1.4.9), όπου τα γνωστά μεγέθη μετακινούνται δεξιά και τα αντίστοιχα άγνωστα μεγέθη αριστερά, και εκτελώντας στη συνέχεια τον πολλαπλασιασμό των μητρώων στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της προκύπτουσας εξίσωσης λαμβάνουμε

$$[A]\{X\} = \{B\} + \{F\} \quad (\text{Π1.4.10})$$

όπου $[A]$ είναι τετραγωνικό $N \times N$ γνωστό μητρώο συντελεστών, $\{B\}$, $\{F\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών και $\{X\}$ είναι μητρώο στήλη με διάσταση $N \times 1$ που περιλαμβάνει τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Τονίζεται ότι κατά τη μεταφορά των στηλών του μητρώου $[H]$ στο δεξιό μέλος και των αντίστοιχων στηλών του μητρώου $[G]$ στο αριστερό μέλος οι τιμές των στηλών αλλάζουν πρόσημο.

Με την αριθμητική επίλυση της εξ.(Π1.4.8) υπολογίζονται οι προαναφερθείσες άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Ωστόσο, η ποσότητα $(\partial\Phi / \partial n)_j - c(g_j n_y + h_j n_z)$ είναι γνωστή μόνο στα ελεύθερα σύνορα και παραμένει άγνωστη στις διεπιφάνειες. Ο υπολογισμός της ποσότητας αυτής στα εσωτερικά σύνορα των διεπιφανειών πραγματοποιείται επιλύοντας (αριθμητικά) ξεχωριστά για κάθε χωρίο Ω_j τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.4.5) (πρόβλημα Dirichlet), με τη βοήθεια της υπάρχουσας συνοριακής και επιφανειακής διακριτοποίησης και της υπόθεσης του σταθερού στοιχείου. Τα πεδιακά ολοκληρώματα της έκφρασης (Π1.4.5) μετατρέπονται σε συνοριακά πάνω στο σύνορο κάθε επιφανειακού στοιχείου ακολουθώντας την τεχνική του Katsikadelis [1994] (βλ. και [Katsikadelis 2002a]). Έτσι, με τη βοήθεια της εξ.(Π1.1.2β) και την αριθμητική επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης (Π1.4.5), χρησιμοποιώντας τις υπολογιζόμενες συνοριακές τιμές $(\Phi)_j$ που προέκυψαν από την επίλυση της εξ.(Π1.4.8), μπορούν να προσδιοριστούν όλες οι κομβικές συνοριακές ποσότητες $(\partial\Phi / \partial n)_j - c(g_j n_y + h_j n_z)$ σε όλα τα χωρία Ω_j .

Γνωρίζοντας τις τιμές των συναρτήσεων $(\Phi)_j$ και $(\partial\Phi / \partial n)_j - c(g_j n_y + h_j n_z)$ σε όλα τα σύνορα, η τιμές της συνάρτησης $(\Phi)_j$ σε τυχόν εσωτερικό σημείο P του χωρίου Ω_j υπολογίζονται αριθμητικά από την εξ.(Π1.4.4) με τη βοήθεια της υπάρχουσας συνοριακής και επιφανειακής διακριτοποίησης και της υπόθεσης του σταθερού στοιχείου, ενώ οι παράγωγοι της $(\Phi)_j$ ως προς y και z επίσης σε τυχόν εσωτερικό σημείο P του Ω_j μπορούν να υπολογιστούν με απευθείας παραγωγή της εξ.(Π1.4.4). Έτσι, οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις των $(\partial\Phi / \partial y)_j$ και $(\partial\Phi / \partial z)_j$ διατυπώνονται ως

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial y}\right)_j &= -\frac{1}{2\pi}c \iint_{\Omega_j} (g(Q))_j \frac{\cos 2\omega}{r^2} d\Omega_Q + \frac{1}{2\pi}c \iint_{\Omega_j} (h(Q))_j \frac{\sin 2\omega}{r^2} d\Omega_Q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\cos(\omega-a)}{r^2} + \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n}\right)_j - c \left((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z \right) \right) \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \end{aligned} \tag{Π1.4.11α}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial z}\right)_j &= \frac{1}{2\pi}c \iint_{\Omega_j} (g(Q))_j \frac{\sin 2\omega}{r^2} d\Omega_Q + \frac{1}{2\pi}c \iint_{\Omega_j} (h(Q))_j \frac{\cos 2\omega}{r^2} d\Omega_Q \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \left[(\Phi(q))_j \frac{\sin(\omega-a)}{r^2} + \left(\left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n}\right)_j - c \left((g(q))_j n_y + (h(q))_j n_z \right) \right) \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \end{aligned} \tag{Π1.4.11β}$$

όπου $P \in \Omega_j, q \in \Gamma_j, r = |P - q|, \alpha = \hat{r}\hat{n}, \omega = \hat{y}\hat{r}$. Ο αριθμητικός υπολογισμός των $(\partial \Phi / \partial y)_j$ και $(\partial \Phi / \partial z)_j$ βασίζεται στην υπάρχουσα συνοριακή και επιφανειακή διακριτοποίηση και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου. Τα πεδικά ολοκληρώματα των παραπάνω εκφράσεων μετατρέπονται σε συνοριακά πάνω στο σύνορο κάθε επιφανειακού στοιχείου ακολουθώντας την τεχνική του Katsikadelis [1994] (βλ. και [Katsikadelis 2002a]).

Παράρτημα Π2

Η ΑΕΜ για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} και 4^{ης} Τάξης

Π2.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα διατριβή, ορισμένα από τα προβλήματα συνοριακών τιμών που διατυπώνονται επιλύονται αριθμητικά με εφαρμογή της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης (ΑΕΜ). Η μέθοδος αυτή, αναπτύχθηκε από τον Katsikadelis [1994, 2002b] και ανήκει στην οικογένεια Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων (ΒΕΜ). Η ΑΕΜ μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση γραμμικών ή μη γραμμικών, στατικών ή δυναμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές, που υπόκεινται σε γραμμικές ή μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες, αντιμετωπίζοντας τα μειονεκτήματα που παρουσιάζει η αμιγής ΒΕΜ.

Η ΒΕΜ σε αντίθεση με τις πεδιακού τύπου αριθμητικές μεθόδους, όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) και η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (FDM), οδηγεί μέσω των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων στην ανάγκη διακριτοποίησης μόνο του συνόρου, μειώνοντας έτσι κατά μία τάξη τη διάσταση του προβλήματος. Συνεπώς, η διαδικασία διακριτοποίησης απλοποιείται και το πλήθος των αγνώστων του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων μειώνεται σημαντικά. Ένα ακόμη σημαντικό πλεονέκτημα που παρουσιάζει η μέθοδος αφορά το γεγονός ότι αποφεύγονται οι προσεγγίσεις των συναρτήσεων πεδίου, οι οποίες μειώνουν σημαντικά την ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων της λύσης [Κατσικαδέλης 1999]. Τα βασικά μειονεκτήματα της ΒΕΜ εντοπίζονται στη δυσκολία ευρέσεως θεμελιώδους λύσης και στην αδυναμία διατύπωσης της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης στην περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων [Μπαμπούσκος 2011]. Συνεπώς η ΒΕΜ αδυνατεί να δώσει λύση σε αρκετά μη γραμμικά στατικά ή δυναμικά προβλήματα της επιστήμης του μηχανικού. Διάφορες μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση των μειονεκτημάτων της ΒΕΜ [Yu et al. 2010], ενώ από τις πλέον αποτελεσματικές είναι η Μέθοδος Δυικής Αμοιβαιότητας (Dual Reciprocity Method, DRM), η οποία διατυπώθηκε από τους Nardini and Brebbia [Partridge and Brebbia 1991] και η ΑΕΜ. Ωστόσο, προκειμένου να είναι δυνατή η εφαρμογή της DRM, πρέπει το εξεταζόμενο πρόβλημα να πληροί ορισμένους περιορισμούς [Katsikadelis 2002b], ενώ η ΑΕΜ μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς τους περιορισμούς αυτούς.

Η ΑΕΜ, βασίζεται στην αντικατάσταση του αρχικού γραμμικού ή μη γραμμικού διαφορικού τελεστή που ορίζει το αρχικό πρόβλημα από απλούστερο γραμμικό τελεστή που ορίζει υποκατάστατο πρόβλημα. Η πρακτική σημασία της αντικατάστασης αυτής γίνεται φανερή από το γεγονός ότι ως διαφορικός τελεστής για το υποκατάστατο πρόβλημα μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε τελεστής με γνωστή θεμελιώδη λύση. Στη συνέχεια το υποκατάστατο αυτό πρόβλημα λύνεται με χρήση της ΒΕΜ. Η αριθμητική υλοποίηση της ΑΕΜ περιλαμβάνει και πεδιακή διακριτοποίηση του χωρίου, αλλοιώνοντας τον αμιγή συνοριακό χαρακτήρα της μεθόδου. Ωστόσο, τονίζεται ότι η εν

λόγω πεδιακή διακριτοποίηση δεν έχει το χαρακτήρα της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, καθώς δεν χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου αλλά για τον υπολογισμό πεδιακών ολοκληρωμάτων όταν αυτά δεν είναι εφικτό να μετασχηματιστούν σε συνοριακά [Brebbia 2010]. Έτσι σε αντίθεση με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων δεν απαιτείται σύμπτωση των κόμβων των εσωτερικών στοιχείων ή ύπαρξη συνθηκών συνέχειας μεταξύ των στοιχείων. Παρ' όλα αυτά τα τελευταία χρόνια έχει διατυπωθεί πιο εξελιγμένη μορφή της ΑΕΜ, σύμφωνα με την οποία τα πεδιακά ολοκληρώματα αντικαθίστανται από κατάλληλα αθροίσματα όρων στα εσωτερικά κομβικά σημεία με χρήση ακτινικών συναρτήσεων βάσης (RBF) [Katsikadelis and Tsiatas 2003]. Στην περίπτωση αυτή όμως, παρόλο που η μέθοδος γίνεται αμιγώς συνοριακή, λόγω των RBFs εισάγονται άγνωστες παράμετροι, η βέλτιστη τιμή των οποίων δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί [Katsikadelis 2008, Μπαμπούσκος 2011]. Για το λόγο αυτό, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, η ΑΕΜ εφαρμόζεται με χρήση πεδιακής διακριτοποίησης. Σημειώνεται επίσης ότι πρόσφατα έχει αναπτυχθεί και η MAEM (Meshless Analog Equation Method), η οποία επεκτείνει την ΑΕΜ στην οικογένεια των μεθόδων που δεν απαιτούν διακριτοποίηση του χωρίου ή του συνόρου παρά μόνο την ύπαρξη κομβικών σημείων (meshless methods) [Katsikadelis 2009].

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα παρουσιαστεί η ΑΕΜ στη γενική της μορφή όπως αυτή εφαρμόζεται για την επίλυση μονοδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών, στα οποία οι κυρίαρχες εξισώσεις είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} και 4^{ης} τάξης, ενώ τα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος στο οποίο αναζητείται η λύση υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες. Σημειώνεται ότι τόσο οι κυρίαρχες εξισώσεις όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι δυνατόν να είναι μη γραμμικές.

Π2.2 Βασικές Έννοιες της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης

Η βασική ιδέα της ΑΕΜ, όπως περιγράφηκε παραπάνω, εκφράζεται με μαθηματικές σχέσεις ως ακολούθως: Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών [Κατσιακαδέλης 2010]

$$N(u) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{Π2.2.1}\alpha)$$

$$B(u) = \bar{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (\text{Π2.2.1}\beta)$$

όπου $N(\cdot)$, $B(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί διαφορικοί τελεστές με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές, $g(\mathbf{x})$ είναι γνωστή κατανομή πηγής ή εξωτερικού φορτίου και $u = u(\mathbf{x})$ είναι η λύση του προβλήματος. Έστω $N^*(\cdot)$ κάποιος άλλος γραμμικός ή μη γραμμικός διαφορικός τελεστής της ίδιας τάξης με τον N . Εάν εφαρμόσουμε τον τελεστή αυτόν στη συνάρτηση $u(\mathbf{x})$, προκύπτει η εξίσωση

$$N^*(u) = q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{Π2.2.2})$$

όπου $q(\mathbf{x})$ είναι άγνωστη συνάρτηση πηγής ή φορτίου, η οποία στο εξής θα ονομάζεται πλασματικό φορτίο. Η εξίσωση (Π2.2.2) ονομάζεται αναλογική εξίσωση του αρχικού προβλήματος. Η αναλογική εξίσωση (Π2.2.2) σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες (Π2.2.1β) μπορούν να δώσουν τη λύση του αρχικού προβλήματος (σχέσεις (Π2.2.1)), υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση του πλασματικού φορτίου $q(\mathbf{x})$ θα προσδιοριστεί προηγουμένως. Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί, έπειτα από προσέγγιση του πλασματικού φορτίου $q(\mathbf{x})$ στο χωρίο Ω , στη μόρφωση γραμμικού ή μη γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο στη συνέχεια επιλύεται. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών που ορίζεται από τις σχέσεις (Π2.2.2) και (Π2.2.1β) ονομάζεται ισοδύναμο ή υποκατάστατο πρόβλημα. Σημειώνεται ότι η αναλογική εξίσωση πρέπει να ορίζεται από διαφορικό τελεστή της ίδιας τάξης με τον αρχικό τελεστή προκειμένου να εξασφαλιστεί ο ίδιος αριθμός συνοριακών συνθηκών για το αρχικό και το υποκατάστατο πρόβλημα, αλλά και η συνέχεια της λύσης και των παραγώγων της μέχρι την τάξη που εμφανίζονται στον αρχικό τελεστή N [Μπαμπούσκος 2011]. Επίσης, η εξ.(Π2.2.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έχει και για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών των σχέσεων (Π2.2.1) όταν $u = u(\mathbf{x}, \mathbf{y}), g = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (με $\mathbf{y} \in \Omega$), $\bar{g} = \bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (με $\mathbf{y} \in \Gamma$). Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή της ΑΕΜ οδηγεί στη μόρφωση συστήματος διαφορικών εξισώσεων, του οποίου ο διαφορικός τελεστής και οι συνοριακές συνθήκες εξαρτώνται αποκλειστικά από το \mathbf{y} και το οποίο στη συνέχεια επιλύεται. Τέλος, υπογραμμίζεται ότι η ΑΕΜ μπορεί να εφαρμοστεί και στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών που διαθέτουν περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις u χρησιμοποιώντας την εξ.(Π2.2.2) τόσες φορές όσο είναι και το πλήθος των άγνωστων συναρτήσεων.

Π2.3 Η ΑΕΜ για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} Τάξης

Π2.3.1 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

Θεωρούμε το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right) = g(x), \quad x \in (0, l) \tag{Π2.3.1α}$$

$$a_1 B\left(u, \frac{du}{dx}\right) + a_2 u = a_3, \quad x = 0, l \tag{Π2.3.1β}$$

όπου $N(\cdot), B(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί μονοδιάστατοι τελεστές δεύτερης και πρώτης τάξης, αντίστοιχα, a_i ($i = 1, 2, 3$) είναι γνωστοί συντελεστές που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος, $g(x)$ είναι τυχαία κατανομημένο φορτίο ή πηγή στο εσωτερικό διάστημα $(0, l)$ και $u = u(x)$ είναι η συνάρτηση της λύσης, η οποία είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, l)$. Σύμφωνα με την ΑΕΜ, το υποκατάστατο πρόβλημα θα πρέπει να είναι επίσης δεύτερης τάξης και ως η απλούστερη αναλογική εξίσωση με γνωστή θεμελιώδη λύση, μπορεί να επιλεγεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = q''(x) \tag{Π2.3.2}$$

Από φυσικής άποψης, η εξίσωση (Π2.3.2) περιγράφει την αξονική καταπόνηση ράβδου με δυστένεια $EA=1$, η οποία υποβάλλεται στο άγνωστο πλασματικό φορτίο $q''(x)$. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στο εδάφιο Π2.2, η λύση της εξ.(Π2.3.1α) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξ.(Π2.3.2) με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (Π2.3.1β), εάν προσδιοριστεί το πλασματικό φορτίο $q''(x)$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως ακολούθως: Η ασθενής μορφή της αναλογικής εξίσωσης γράφεται ως [Μώκος 2007]

$$\int_0^l [u''(x) - q''(x)] u^*(x, \xi) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^l u''(x) u^*(x, \xi) dx - \int_0^l q''(x) u^*(x, \xi) dx = 0 \tag{Π2.3.3}$$

όπου ο συμβολισμός $(\cdot)'$ δηλώνει παραγωγή κατά x . Ως συνάρτηση u^* χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση για το μονοδιάστατο τελεστή Laplace, η οποία προκύπτει ως μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 u^*(x, \xi)}{dx^2} = \delta(x - \xi) \tag{Π2.3.4}$$

όπου $\delta(x - \xi)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε μία διάσταση [Μώκος 2007]. Η θεμελιώδης λύση u^* προκύπτει ως [Sapountzakis and Katsikadelis 2000, Μώκος 2007]

$$u^*(x, \xi) = \frac{1}{2} |r| \tag{Π2.3.5}$$

όπου $r = x - \xi$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων x και ξ , το σημείο ξ αποτελεί το σταθερό σημείο ταξιθεσίας ενώ το σημείο x διατρέχει το διάστημα $(0, l)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (Π2.3.3), αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Π2.3.2) και (Π2.3.5) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac [Μώκος 2007], προκύπτει

$$u(\xi) = \int_0^l A_2''(x, \xi) q''(x) dx - \left[-A_1''(x, \xi) u(x) + A_2''(x, \xi) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \tag{Π2.3.6}$$

Με $A_i''(r)$ ($i = 1, 2$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις [Μώκος 2007]

$$A_1^u(r) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} r \quad A_2^u(r) = \frac{1}{2} |r| \quad (\text{Π2.3.7α,β})$$

όπου sgn είναι η συνάρτηση signum, η οποία ορίζεται ως

$$\operatorname{sgn} r = \begin{cases} +1, & r > 0 \\ -1, & r < 0 \end{cases} \quad (\text{Π2.3.8})$$

για $r = 0$ η συνάρτηση signum δεν ορίζεται. Η σχέση (Π2.3.6) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της λύσης του προβλήματος συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και των συνοριακών ποσοτήτων. Προκειμένου να συσχετίσουμε τις συνοριακές ποσότητες με το πλασματικό φορτίο, εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική παράσταση (Π2.3.6) στα άκρα $0, l$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$\xi \rightarrow \xi_0 = 0^+ \quad (\text{Π2.3.9α})$$

$$\xi \rightarrow \xi_l = l^- \quad (\text{Π2.3.9β})$$

Συνεπώς λαμβάνουμε δύο συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις ως

$$u(0) = \int_0^l A_2^u(x, \xi_0) q^u(x) dx - \left[-A_1^u(x, \xi_0) u(x) + A_2^u(x, \xi_0) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.3.10α})$$

$$u(l) = \int_0^l A_2^u(x, \xi_l) q^u(x) dx - \left[-A_1^u(x, \xi_l) u(x) + A_2^u(x, \xi_l) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.3.10β})$$

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π2.3.10) μπορούν να διατυπωθούν σε μητρική μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^u & \mathbf{E}_2^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^u \quad (\text{Π2.3.11})$$

όπου

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u(0) \quad u(l)] \quad \hat{\mathbf{u}}_{,x}^T = [u'(0) \quad u'(l)] \quad (\text{Π2.3.12α,β})$$

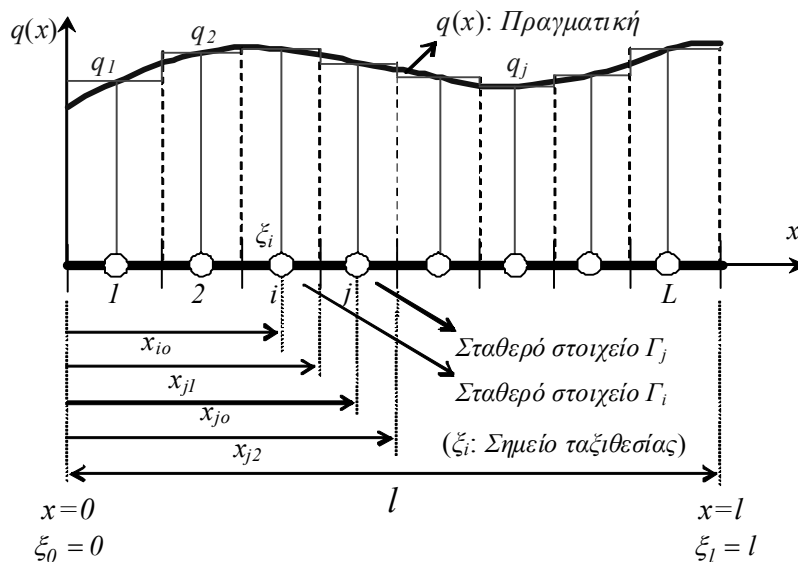
$$\mathbf{E}_1^u = \begin{bmatrix} A_1^u(0, \xi_0) + I & -A_1^u(l, \xi_0) \\ A_1^u(0, \xi_l) & -A_1^u(l, \xi_l) + I \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_2^u = \begin{bmatrix} -A_2^u(0, \xi_0) & A_2^u(l, \xi_0) \\ -A_2^u(0, \xi_l) & A_2^u(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.3.12γ,δ})$$

$$\mathbf{T}^u = \begin{Bmatrix} \int_0^l A_2^u(x, \xi_0) q^u(x) dx \\ \int_0^l A_2^u(x, \xi_l) q^u(x) dx \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.3.12ε})$$

Τα μητρώα των σχέσεων (Π2.3.12γ,δ) με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.3.7) γράφονται ως

$$\mathbf{E}_1^u = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_2^u = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.3.13}\alpha,\beta)$$

Οι εξισώσεις (Π2.3.11) και (Π2.3.1β) επαρκούν για την έκφραση των άγνωστων συνοριακών ποσοτήτων $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{u}}_{,x}$ συναρτήσει του πλασματικού φορτίου. Στη συνέχεια προχωρούμε στη διακριτοποίηση του διαστήματος $(0,l)$ και στην προσέγγιση του πλασματικού φορτίου στο διάστημα αυτό. Διαιρούμε το διάστημα σε L στοιχεία στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι το $q^u(x)$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε στοιχείο η οποία είναι ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (Σχ.Π2.1) (υπόθεση σταθερού στοιχείου). Με βάση την προαναφερθείσα υπόθεση, το μητρώο στήλη \mathbf{T}^u προσεγγίζεται ως



Σχήμα Π2.1. Διακριτοποίηση διαστήματος σε σταθερά στοιχεία.

$$\mathbf{T}^u \approx \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^L q_j^u \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L q_j^u \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_l) dx \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{T}^u = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11}^u & \hat{F}_{12}^u & \dots & \hat{F}_{1L}^u \\ \hat{F}_{21}^u & \hat{F}_{22}^u & \dots & \hat{F}_{2L}^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^u \\ q_2^u \\ \vdots \\ q_L^u \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{F}}^u \mathbf{q}^u \quad (\text{Π2.3.14})$$

όπου οι συντελεστές \hat{F}_{ij}^u ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, L$) ορίζονται ως

$$\hat{F}_{1j}^u = \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_0) dx \quad \hat{F}_{2j}^u = \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_l) dx \quad (\text{Π2.3.15}\alpha,\beta)$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις συνοριακές συνθήκες (Π2.3.1β) σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^u & \mathbf{D}_2^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} + \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_{,x}) = \boldsymbol{\alpha}_3^u \quad (\text{Π2.3.16})$$

όπου $\mathbf{D}_1^u, \mathbf{D}_2^u$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων 2×2 με γνωστούς συντελεστές τα οποία περιλαμβάνουν και τις τιμές των συντελεστών a_i ($i=1,2$) που παρουσιάζονται στις σχέσεις (Π2.3.1β), $\hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u = \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_{,x})$ είναι μητρώο στήλη διαστάσεων 2×1 το οποίο περιέχει τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις ίδιες σχέσεις και $\boldsymbol{\alpha}_3^u$ είναι γνωστό μητρώο στήλη διαστάσεων 2×1 το οποίο περιλαμβάνει τις τιμές των συντελεστών a_3 που υπεισέρχονται στις ίδιες σχέσεις. Συνολικά, οι εξισώσεις (Π2.3.11) και (Π2.3.16) γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^u & \mathbf{E}_2^u \\ \mathbf{D}_1^u & \mathbf{D}_2^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}^u \mathbf{q}^u \\ \boldsymbol{\alpha}_3^u \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.3.17})$$

ή εναλλακτικά ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}^u & \mathbf{E}_1^u & \mathbf{E}_2^u \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^u & \mathbf{D}_2^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^u \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} + \hat{\mathbf{D}}_{nl}^u = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^u \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}^u \mathbf{d}^u + \hat{\mathbf{D}}_{nl}^u = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^u \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.3.18})$$

όπου $\mathbf{F}^u = -\hat{\mathbf{F}}^u$, $\mathbf{E}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^u & \mathbf{E}_1^u & \mathbf{E}_2^u \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^u & \mathbf{D}_2^u \end{bmatrix}$, $(\hat{\mathbf{D}}_{nl}^u)^T = [\mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}^u]$, ενώ

$(\mathbf{d}^u)^T = [\mathbf{q}^u \quad \hat{\mathbf{u}} \quad \hat{\mathbf{u}}_{,x}]$ είναι γενικευμένο μητρώο στήλη άγνωστων ποσοτήτων διάστασης $(L+4) \times 1$. Το σύστημα εξισώσεων (Π2.3.17) ή (Π2.3.18) αποτελείται από 4 αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $L+4$ αγνώστους. Επομένως οι άγνωστοι του προβλήματος είναι υπεράριθμοι και χρειαζόμαστε L ακόμη εξισώσεις για τον προσδιορισμό τους.

Η λύση σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0, l)$ θα προκύψει από εφαρμογή της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης (Π2.3.6). Η σχέση αυτή, με χρήση της προαναφερθείσας διακριτοποίησης του διαστήματος $(0, l)$ και προσέγγισης του πλασματικού φορτίου με σταθερά στοιχεία (Σχ.Π2.1), μπορεί να γραφτεί στη θέση ξ_i του i στοιχείου ως (ισχύει $\xi_i \neq 0, l$)

$$u(\xi_i) = \sum_{j=1}^L q_j^u \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_i) dx - \left[-A_1^u(x, \xi_i)u(x) + A_2^u(x, \xi_i)u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.3.19})$$

Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να υπολογιστεί και η παράγωγος της λύσης. Αυτό επιτυγχάνεται με αναλυτική παραγωγή της ολοκληρωτικής παράστασης (Π2.3.6). Η διακριτοποιημένη έκφραση της παραγώγου στη θέση ξ_i προκύπτει ως

$$\frac{du(\xi_i)}{d\xi} = \sum_{j=1}^L q_j^u \int_{\Gamma_j} \frac{\partial A_2^u(x, \xi_i)}{\partial \xi} dx - \left[-\frac{\partial A_1^u(x, \xi_i)}{\partial \xi} u(x) + \frac{\partial A_2^u(x, \xi_i)}{\partial \xi} u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.3.20})$$

όπου

$$\frac{\partial A_1^u(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \text{για } x = 0, l \quad (\text{Π2.3.21α})$$

$$\frac{\partial A_2^u(x, \xi)}{\partial \xi} = -A_1^u(x, \xi) \quad \text{για } \forall x \in [0, l] \quad (\text{Π2.3.21β})$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (Π2.3.19) και (Π2.3.20) στα L σημεία ταξιθεσίας λαμβάνουμε

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^u \mathbf{q}^u + \mathbf{C}^u \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^u \mathbf{d}^u \quad (\text{Π2.3.22α})$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{A}_{,x}^u \mathbf{q}^u + \mathbf{C}_{,x}^u \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,x}^u \mathbf{d}^u \quad (\text{Π2.3.22β})$$

όπου

$$\mathbf{u}^T = [(u)_1 \quad (u)_2 \quad \dots \quad (u)_L] \quad \mathbf{u}_{,x}^T = [(u')_1 \quad (u')_2 \quad \dots \quad (u')_L] \quad (\text{Π2.3.23α,β})$$

είναι μητρώα στήλες διαστάσεων $L \times 1$ τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές της u και της παραγώγου της ως προς x στα L εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος του εξεταζόμενου διαστήματος. Τα \mathbf{A}^u , $\mathbf{A}_{,x}^u$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $L \times L$ των οποίων οι συντελεστές δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{ij}^u = \int_{\Gamma_j} A_2^u(x, \xi_i) dx \quad A_{ij,x}^u = -\int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi_i) dx \quad (\text{Π2.3.24α})$$

όπου $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, L$. Τα μητρώα \mathbf{C}^u , $\mathbf{C}_{,x}^u$ είναι διαστάσεων $L \times 4$ και ορίζονται ως

$$\mathbf{C}^u = \left[\begin{array}{cc|cc} A_2^u(0, \xi_1) & -A_1^u(0, \xi_1) & -A_2^u(l, \xi_1) & A_1^u(l, \xi_1) \\ A_2^u(0, \xi_2) & -A_1^u(0, \xi_2) & -A_2^u(l, \xi_2) & A_1^u(l, \xi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_2^u(0, \xi_L) & -A_1^u(0, \xi_L) & -A_2^u(l, \xi_L) & A_1^u(l, \xi_L) \end{array} \right] \quad (\text{Π2.3.25α})$$

$$\mathbf{C}_{,x}^u = \left[\begin{array}{cc|cc} -A_1^u(0, \xi_1) & 0 & A_1^u(l, \xi_1) & 0 \\ -A_1^u(0, \xi_2) & 0 & A_1^u(l, \xi_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_1^u(0, \xi_L) & 0 & A_1^u(l, \xi_L) & 0 \end{array} \right] \quad (\text{Π2.3.25β})$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.3.7) λαμβάνουμε

$$A_1^u(0, \xi_i) = -\frac{I}{2} \quad A_2^u(0, \xi_i) = \frac{I}{2} \xi_i \quad (\text{Π2.3.26α,β})$$

$$A_1^u(l, \xi_i) = \frac{I}{2} \quad A_2^u(l, \xi_i) = \frac{I}{2}(l - \xi_i) \quad (\text{Π2.3.26γ,δ})$$

όπου $\xi_i = x_{i0}$ οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ.Π2.1). Τα μητρώα \mathbf{B}^u , $\mathbf{B}_{,x}^u$ είναι διαστάσεων $L \times (L+4)$ και ορίζονται ως $\mathbf{B}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^u & \mathbf{C}^u \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_{,x}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{,x}^u & \mathbf{C}_{,x}^u \end{bmatrix}$.

Το τελικό βήμα της ΑΕΜ είναι η εφαρμογή της κυρίαρχης εξίσωσης (Π2.3.1) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του εξεταζόμενου διαστήματος και στη συνέχεια η αντικατάσταση των τιμών της u και της παραγώγου της u' στα L εσωτερικά σημεία, σύμφωνα με τις σχέσεις (Π2.3.22). Είναι προφανές ότι λόγω ισχύος της αναλογικής εξίσωσης (Π2.3.2), οι τιμές της δεύτερης παραγώγου u'' στα κομβικά σημεία ισούται με τις αντίστοιχες τιμές του μητρώου στήλη του πλασματικού φορτίου \mathbf{q}^u . Έτσι, προκύπτουν L επιπλέον αλγεβρικές εξισώσεις ως προς το άγνωστο μητρώο στήλη \mathbf{d}^u . Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις εξισώσεις (Π2.3.18) μορφώνουν σύστημα $L+4$ αλγεβρικών εξισώσεων με $L+4$ αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος αυτού, υπολογίζεται το πλασματικό φορτίο στα L εσωτερικά κομβικά σημεία καθώς και οι τιμές της u και της u' στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Στη συνέχεια, με χρήση των εξ.(Π2.3.22) λαμβάνουμε το μητρώο στήλη των τιμών της λύσης και της παραγώγου της στα L εσωτερικά κομβικά σημεία. Τέλος, υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των u , u' μπορούν εύκολα να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π2.3.19-20), θέτοντας όπου ξ_i την τιμή του ξ .

Π2.3.2 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

Ο προσδιορισμός των μητρώων \mathbf{F}^u , \mathbf{A}^u και $\mathbf{A}_{,x}^u$ (σχέσεις (Π2.3.18), (Π2.3.22)) επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που ορίζονται από τις σχέσεις

(Π2.3.15) και (Π2.3.24). Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία με εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss. Ωστόσο, στην συγκεκριμένη περίπτωση, λόγω των απλών εκφράσεων των πυρήνων, ενδείκνυται η αναλυτική ολοκλήρωση κατά μήκος του στοιχείου Γ_j , αποφεύγοντας έτσι το αριθμητικό σφάλμα και την αύξηση υπολογιστικού χρόνου. Με χρήση των σχέσεων (Π2.3.7) τα ολοκληρώματα των συντελεστών \hat{F}_{ij}^u ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, L$) (σχέσεις (Π2.3.15)) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως [Μώκος 2007]

$$\hat{F}_{1j}^u = \frac{I}{4} \left[x^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad \hat{F}_{2j}^u = -\frac{I}{4} \left[(l-x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (\text{Π2.3.27}\alpha,\beta)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} είναι οι συντεταγμένες των άκρων του στοιχείου Γ_j (Σχ.Π2.1). Επιπλέον, με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.3.7) οι συντελεστές A_{ij}^u ($i = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, L$) (σχέσεις (Π2.3.24)) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως [Μώκος 2007]

$$A_{ij}^u = -\frac{I}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (\text{Π2.3.28}\alpha)$$

$$A_{ij}^u = \frac{I}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (\text{Π2.3.28}\beta)$$

$$A_{ij}^u = -\frac{I}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{I}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (\text{Π2.3.28}\gamma)$$

$$A_{ij,x}^u = \frac{I}{2} \left[x \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (\text{Π2.3.28}\delta)$$

$$A_{ij,x}^u = -\frac{I}{2} \left[x \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (\text{Π2.3.28}\epsilon)$$

$$A_{ij,x}^u = 0 \quad (\text{Π2.3.28}\sigma\tau)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} και x_{j0} είναι οι συντεταγμένες των άκρων και του μέσου του στοιχείου Γ_j , αντίστοιχα, ενώ x_{i0} οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ.Π2.1).

Π2.4 Η ΑΕΜ για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 4^{ης} Τάξης

Π2.4.1 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις - Αριθμητική Επίλυση

Θεωρούμε το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N \left(\theta, \frac{d\theta}{dx}, \frac{d^2\theta}{dx^2}, \frac{d^3\theta}{dx^3}, \frac{d^4\theta}{dx^4} \right) = g(x), \quad x \in (0, l) \quad (\text{Π2.4.1}\alpha)$$

$$a_1 B_1 \left(\theta, \frac{d\theta}{dx}, \frac{d^2\theta}{dx^2}, \frac{d^3\theta}{dx^3} \right) + a_2 \theta = a_3, \quad x = 0, l \quad (\text{Π2.4.1}\beta)$$

$$\beta_1 B_2 \left(\theta, \frac{d\theta}{dx}, \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) + \beta_2 \frac{d\theta}{dx} = \beta_3, \quad x = 0, l \quad (\text{Π2.4.1}\gamma)$$

όπου $N(\cdot)$ είναι γραμμικός ή μη γραμμικός διαφορικός τελεστής τετάρτης τάξης. $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί τελεστές τρίτης και δεύτερης τάξης, αντίστοιχα, a_i , β_i ($i = 1, 2, 3$) είναι γνωστοί συντελεστές που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος, $g(x)$ είναι τυχαία κατανομημένο φορτίο ή πηγή ορισμένη στο διάστημα $(0, l)$ και $\theta = \theta(x)$ είναι η συνάρτηση της λύσης η οποία είναι συνεχής και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, l)$. Σύμφωνα με την ΑΕΜ το υποκατάστατο πρόβλημα θα πρέπει να είναι επίσης τετάρτης τάξης και ως η απλούστερη αναλογική εξίσωση με γνωστή θεμελιώδη λύση, μπορεί να επιλεγεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} = q(x) \quad (\text{Π2.4.2})$$

Από φυσικής άποψης, η εξίσωση (Π2.4.2) περιγράφει την καμπτική καταπόνηση ράβδου με δυσκαμψία $EI = 1$, η οποία υποβάλλεται στο άγνωστο πλασματικό φορτίο $q(x)$. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στο εδάφιο Π2.2, η λύση της εξ.(Π2.4.1α) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξ.(Π2.4.2) με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (Π2.4.1β,γ), εάν προσδιοριστεί το πλασματικό φορτίο $q(x)$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της ΒΕΜ ως ακολούθως: Η ασθενής μορφή της αναλογικής εξίσωσης γράφεται ως [Μώκος 2007]

$$\int_0^l [\theta''''(x) - q(x)] \theta^*(x, \xi) dx = 0 \Rightarrow \int_0^l \theta''''(x) \theta^*(x, \xi) dx - \int_0^l q(x) \theta^*(x, \xi) dx = 0 \quad (\text{Π2.4.3})$$

όπου ο συμβολισμός $(\cdot)'$ υποδηλώνει παραγωγή κατά x . Ως συνάρτηση θ^* χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση, η οποία προκύπτει ως μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^4\theta^*(x, \xi)}{dx^4} = \delta(x - \xi) \quad (\text{Π2.4.4})$$

όπου $\delta(x - \xi)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε μία διάσταση [Μώκος 2007]. Η θεμελιώδης λύση θ^* προκύπτει ως [Sapountzakis and Katsikadelis 2000, Μώκος 2007]

$$\theta^*(x, \xi) = \frac{I}{12} (|r|^3 - 3l|r|^2 + 2l^3) \quad (\text{Π2.4.5})$$

όπου $r = x - \xi$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων x , ξ , το σημείο ξ αποτελεί το σταθερό σημείο ταξιθεσίας ενώ το σημείο x διατρέχει το διάστημα $(0, l)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (Π2.4.3), αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Π2.4.2) και (Π2.4.5) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac [Μώκος 2007], προκύπτει

$$\theta(\xi) = \int_0^l A_4(x, \xi) q(x) dx - \left[-A_1(x, \xi)\theta(x) + A_2(x, \xi)\theta'(x) - A_3(x, \xi)\theta''(x) + A_4(x, \xi)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.6})$$

Με $A_i(r)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις [Μώκος 2007]

$$A_1(x, \xi) = \frac{I}{2} \operatorname{sgn} r \quad A_2(x, \xi) = \frac{I}{2} (|r| - l) \quad (\text{Π2.4.7α,β})$$

$$A_3(x, \xi) = \frac{I}{4} |r| (|r| - 2l) \operatorname{sgn} r \quad A_4(x, \xi) = \frac{I}{12} (|r|^3 - 3l|r|^2 + 2l^3) \quad (\text{Π2.4.7γ,δ})$$

όπου sgn είναι η συνάρτηση signum που ορίζεται από τη σχέση (Π2.3.8). Η σχέση (Π2.4.6) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της λύσης του προβλήματος συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και των συνοριακών ποσοτήτων. Προκειμένου να συσχετίσουμε τις συνοριακές ποσότητες με το πλασματικό φορτίο, εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική παράσταση (Π2.4.6) στα άκρα $0, l$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$\xi \rightarrow \xi_0 = 0^+ \quad (\text{Π2.4.8α})$$

$$\xi \rightarrow \xi_l = l^- \quad (\text{Π2.4.8β})$$

Οπότε λαμβάνουμε δύο συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις ως

$$\theta(0) = \int_0^l A_4(x, \xi_0) q(x) dx - \left[-A_1(x, \xi_0)\theta(x) + A_2(x, \xi_0)\theta'(x) - A_3(x, \xi_0)\theta''(x) + A_4(x, \xi_0)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.9α})$$

$$\theta(l) = \int_0^l A_4(x, \xi_l) q(x) dx - \left[-A_1(x, \xi_l)\theta(x) + A_2(x, \xi_l)\theta'(x) - A_3(x, \xi_l)\theta''(x) + A_4(x, \xi_l)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.9β})$$

Οι ολοκληρωτικές σχέσεις (Π2.4.9) μπορούν να διατυπωθούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$[\mathbf{E}_{11} \quad \mathbf{E}_{12} \quad \mathbf{E}_{13} \quad \mathbf{E}_{14}] \begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_{,x} \\ \hat{\theta}_{,xx} \\ \hat{\theta}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_l \quad (\text{Π2.4.10})$$

όπου

$$\hat{\theta}^T = [\theta(0) \quad \theta(l)] \quad \hat{\theta}_{,x}^T = [\theta'(0) \quad \theta'(l)] \quad (\text{Π2.4.11α,β})$$

$$\hat{\theta}_{,xx}^T = [\theta''(0) \quad \theta''(l)] \quad \hat{\theta}_{,xxx}^T = [\theta'''(0) \quad \theta'''(l)] \quad (\text{Π2.4.11γ,δ})$$

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} \Lambda_1(0, \xi_0) + l & -\Lambda_1(l, \xi_0) \\ \Lambda_1(0, \xi_l) & -\Lambda_1(l, \xi_l) + l \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} -\Lambda_2(0, \xi_0) & \Lambda_2(l, \xi_0) \\ -\Lambda_2(0, \xi_l) & \Lambda_2(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.11ε,στ})$$

$$\mathbf{E}_{13} = \begin{bmatrix} \Lambda_3(0, \xi_0) & -\Lambda_3(l, \xi_0) \\ \Lambda_3(0, \xi_l) & -\Lambda_3(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{14} = \begin{bmatrix} -\Lambda_4(0, \xi_0) & \Lambda_4(l, \xi_0) \\ -\Lambda_4(0, \xi_l) & \Lambda_4(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.11ζ,η})$$

$$\mathbf{T}_l = \begin{Bmatrix} \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_0) q(x) dx \\ \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_l) q(x) dx \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.4.11θ})$$

Τα μητρώα των σχέσεων (Π2.4.11ε-η) με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.4.7) γράφονται ως

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} l/2 & -l/2 \\ -l/2 & l/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} l/2 & 0 \\ 0 & -l/2 \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.12α,β})$$

$$\mathbf{E}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & l^2/4 \\ l^2/4 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{14} = \begin{bmatrix} -l^3/6 & 0 \\ 0 & l^3/6 \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.12γ,δ})$$

Οι εξισώσεις (Π2.4.10) και (Π2.4.1β,γ) δεν επαρκούν για την έκφραση των άγνωστων συνοριακών ποσοτήτων $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}_{,x}$, $\hat{\theta}_{,xx}$, $\hat{\theta}_{,xxx}$ συναρτήσει του πλασματικού φορτίου και χρειαζόμαστε μία επιπλέον εξίσωση σε κάθε άκρο του διαστήματος $(0, l)$. Οι εξισώσεις αυτές θα προκύψουν από την ολοκληρωτική παράσταση της παραγώγου της λύσης, η οποία, με παραγωγή της εξ.(Π2.4.6) ως προς ξ , δίδεται ως

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \int_0^l \frac{\partial \Lambda_4(x, \xi)}{\partial \xi} q(x) dx - \left[-\frac{\partial \Lambda_1(x, \xi)}{\partial \xi} \theta(x) + \frac{\partial \Lambda_2(x, \xi)}{\partial \xi} \theta'(x) - \frac{\partial \Lambda_3(x, \xi)}{\partial \xi} \theta''(x) + \frac{\partial \Lambda_4(x, \xi)}{\partial \xi} \theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.13})$$

όπου

$$\frac{\partial A_1(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \text{ για } x = 0, l \quad (\text{Π2.4.14}\alpha)$$

$$\frac{\partial A_2(x, \xi)}{\partial \xi} = -A_1(x, \xi) \text{ για } x = 0, l \quad (\text{Π2.4.14}\beta)$$

$$\frac{\partial A_3(x, \xi)}{\partial \xi} = -A_2(x, \xi) \text{ για } x = 0, l \quad (\text{Π2.4.14}\gamma)$$

$$\frac{\partial A_4(x, \xi)}{\partial \xi} = -A_3(x, \xi) \text{ για } \forall x \in [0, l] \quad (\text{Π2.4.14}\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Π2.4.14) και εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική παράσταση στα άκρα του διαστήματος $0, l$ ($\xi \rightarrow \xi_0 = 0^+, \xi \rightarrow \xi_l = l^-$) προκύπτουν οι παρακάτω συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(0)}{d\xi} &= -\int_0^l A_3(x, \xi_0) q(x) dx \\ &\quad - \left[-A_1(x, \xi_0) \theta'(x) + A_2(x, \xi_0) \theta''(x) - A_3(x, \xi_0) \theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (\text{Π2.4.15}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(l)}{d\xi} &= -\int_0^l A_3(x, \xi_l) q(x) dx \\ &\quad - \left[-A_1(x, \xi_l) \theta'(x) + A_2(x, \xi_l) \theta''(x) - A_3(x, \xi_l) \theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (\text{Π2.4.15}\beta)$$

Οι ολοκληρωτικές σχέσεις (Π2.4.15) μπορούν να διατυπωθούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_{,x} \\ \hat{\theta}_{,xx} \\ \hat{\theta}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \quad (\text{Π2.4.16})$$

όπου

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} A_1(0, \xi_0) + I & -A_1(l, \xi_0) \\ A_1(0, \xi_l) & -A_1(l, \xi_l) + I \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} -A_2(0, \xi_0) & A_2(l, \xi_0) \\ -A_2(0, \xi_l) & A_2(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.17}\alpha, \beta)$$

$$\mathbf{E}_{23} = \begin{bmatrix} A_3(0, \xi_0) & -A_3(l, \xi_0) \\ A_3(0, \xi_l) & -A_3(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{Bmatrix} -\int_0^l A_3(x, \xi_0) q(x) dx \\ -\int_0^l A_3(x, \xi_l) q(x) dx \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.4.17}\gamma, \delta)$$

Τα μητρώα των σχέσεων (Π2.4.17α-γ) με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.4.7) προκύπτουν ως

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & l^2/4 \\ l^2/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.18}\alpha,\beta,\gamma)$$

Οι σχέσεις (Π2.4.10) και (Π2.4.16) γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.4.19})$$

Οι εξισώσεις (Π2.4.19) και (Π2.4.1β,γ) επαρκούν για την έκφραση των άγνωστων συνοριακών ποσοτήτων $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx}$ συναρτήσεων του πλασματικού φορτίου. Στη συνέχεια, προχωρούμε στη διακριτοποίηση του διαστήματος $(0,l)$ και στην προσέγγιση του πλασματικού φορτίου στο διάστημα αυτό. Διαιρούμε το διάστημα σε L στοιχεία στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι το $q(x)$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε στοιχείο η οποία είναι ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (Σχ.Π2.1) (υπόθεση σταθερού στοιχείου). Με βάση την προαναφερθείσα υπόθεση, το μητρώο στήλη $\mathbf{T}^T = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2]$ προσεγγίζεται ως

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_l) dx \\ -\sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_0) dx \\ -\sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_l) dx \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \cdots & \hat{F}_{1L} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \cdots & \hat{F}_{2L} \\ \hat{F}_{31} & \hat{F}_{32} & \cdots & \hat{F}_{3L} \\ \hat{F}_{41} & \hat{F}_{42} & \cdots & \hat{F}_{4L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_L \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (\text{Π2.4.20})$$

όπου οι συντελεστές \hat{F}_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, L$) ορίζονται ως

$$\hat{F}_{1j} = \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_0) dx \quad \hat{F}_{2j} = \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_l) dx \quad (\text{Π2.4.21}\alpha,\beta)$$

$$\hat{F}_{3j} = -\int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_0) dx \quad \hat{F}_{4j} = -\int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_l) dx \quad (\text{Π2.4.21}\gamma,\delta)$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις συνοριακές συνθήκες (Π2.4.1β) σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx}) \\ \hat{\mathbf{D}}_{2,nl}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.4.22})$$

όπου $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{13}, \mathbf{D}_{14}, \mathbf{D}_{21}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{D}_{23}$ και \mathbf{D}_{24} είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων 2×2 με γνωστούς συντελεστές τα οποία περιλαμβάνουν και τις τιμές των συντελεστών a_i, β_i ($i=1,2$), που παρουσιάζονται στις σχέσεις (Π2.4.1β,γ), $\hat{\mathbf{D}}_{1,nl} = \hat{\mathbf{D}}_{1,nl}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx})$, $\hat{\mathbf{D}}_{2,nl} = \hat{\mathbf{D}}_{2,nl}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx})$ είναι μητρώα στήλες διαστάσεων 2×1 τα οποία περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις ίδιες σχέσεις και $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3$ είναι γνωστά μητρώα στήλες διαστάσεων 2×1 τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές των συντελεστών a_3, β_3 που παρουσιάζονται στις ίδιες σχέσεις. Συνολικά, οι εξισώσεις (Π2.4.19) και (Π2.4.22) γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{D}}_{1,nl} \\ \hat{\mathbf{D}}_{2,nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \mathbf{q} \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.4.23})$$

ή εναλλακτικά ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx} \end{Bmatrix} + \hat{\mathbf{D}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} \mathbf{d} + \hat{\mathbf{D}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Π2.4.24})$$

όπου $\mathbf{F}_1 = -\hat{\mathbf{F}}_1$, $\mathbf{F}_2 = -\hat{\mathbf{F}}_2$, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix}$,

$(\hat{\mathbf{D}}_{nl})^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \hat{\mathbf{D}}_{1,nl} \ \hat{\mathbf{D}}_{2,nl}]$, ενώ $\mathbf{d}^T = [\mathbf{q} \ \hat{\boldsymbol{\theta}} \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,x} \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,xxx}]$ είναι γενικευμένο μητρώο στήλη άγνωστων ποσοτήτων διάστασης $(L+\delta) \times 1$. Το σύστημα εξισώσεων (Π2.4.23) ή (Π2.4.24) αποτελείται από δ αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $L+\delta$

αγνώστους. Επομένως οι άγνωστοι του προβλήματος είναι υπεράριθμοι και χρειαζόμαστε L ακόμη εξισώσεις για τον προσδιορισμό τους.

Η λύση σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0, l)$ θα προκύψει από εφαρμογή της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης (Π2.4.6). Η σχέση αυτή, με χρήση της προαναφερθείσας διακριτοποίησης του διαστήματος $(0, l)$ και προσέγγισης του πλασματικού φορτίου με σταθερά στοιχεία (Σχ.Π2.1), μπορεί να γραφτεί στη θέση ξ_i του i στοιχείου ως (ισχύει $\xi_i \neq 0, l$)

$$\theta(\xi_i) = \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_i) dx - \left[-A_1(x, \xi_i)\theta(x) + A_2(x, \xi_i)\theta'(x) - A_3(x, \xi_i)\theta''(x) + A_4(x, \xi_i)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.25})$$

Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να υπολογιστούν και οι παράγωγοι της λύσης. Η πρώτη παράγωγος έχει ήδη προσδιοριστεί και δίδεται από τη σχέση (Π2.4.13). Παραγωγίζοντας αναλυτικά τη σχέση (Π2.4.13) προκύπτουν και οι υπόλοιπες δύο παράγωγοι. Τελικά, οι ζητούμενες διακριτοποιημένες εκφράσεις των παραγώγων της λύσης στη θέση ξ_i προκύπτουν ως [Μώκος 2007]

$$\frac{d\theta(\xi_i)}{d\xi} = - \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_i) dx - \left[-A_1(x, \xi_i)\theta'(x) + A_2(x, \xi_i)\theta''(x) - A_3(x, \xi_i)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.26α})$$

$$\frac{d^2\theta(\xi_i)}{d\xi^2} = \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_i) dx - \left[-A_1(x, \xi_i)\theta''(x) + A_2(x, \xi_i)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.26β})$$

$$\frac{d^3\theta(\xi_i)}{d\xi^3} = - \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Gamma_j} A_1(x, \xi_i) dx - \left[-A_1(x, \xi_i)\theta'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π2.4.26γ})$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (Π2.4.25) και (Π2.4.26) στα L σημεία ταξιθεσίας λαμβάνουμε

$$\theta = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_{,x} \\ \hat{\theta}_{,xx} \\ \hat{\theta}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad \theta_{,x} = \mathbf{A}_{,x}\mathbf{q} + \mathbf{C}_{,x} \begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_{,x} \\ \hat{\theta}_{,xx} \\ \hat{\theta}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,x}\mathbf{d} \quad (\text{Π2.4.27α,β})$$

$$\theta_{,xx} = \mathbf{A}_{,xx}\mathbf{q} + \mathbf{C}_{,xx} \begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_{,x} \\ \hat{\theta}_{,xx} \\ \hat{\theta}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,xx}\mathbf{d} \quad \theta_{,xxx} = \mathbf{A}_{,xxx}\mathbf{q} + \mathbf{C}_{,xxx} \begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_{,x} \\ \hat{\theta}_{,xx} \\ \hat{\theta}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,xxx}\mathbf{d} \quad (\text{Π2.4.27γ,δ})$$

όπου

$$\boldsymbol{\theta}^T = [(\theta)_1 \ (\theta)_2 \ \dots \ (\theta)_L] \quad \boldsymbol{\theta}_{,x}^T = [(\theta')_1 \ (\theta')_2 \ \dots \ (\theta')_L] \quad (\text{Π2.4.28}\alpha,\beta)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{,xx}^T = [(\theta'')_1 \ (\theta'')_2 \ \dots \ (\theta'')_L] \quad \boldsymbol{\theta}_{,xxx}^T = [(\theta''')_1 \ (\theta''')_2 \ \dots \ (\theta''')_L] \quad (\text{Π2.4.28}\gamma,\delta)$$

είναι μητρώα στήλες διαστάσεων $L \times 1$ τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές της u και των παραγώγων της ως προς x στα L εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος του εξεταζόμενου διαστήματος. Τα \mathbf{A} , $\mathbf{A}_{,x}$, $\mathbf{A}_{,xx}$, $\mathbf{A}_{,xxx}$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $L \times L$ των οποίων οι συντελεστές δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} A_4(x, \xi_i) dx \quad A_{ij,x} = -\int_{\Gamma_j} A_3(x, \xi_i) dx \quad (\text{Π2.4.29}\alpha,\beta)$$

$$A_{ij,xx} = \int_{\Gamma_j} A_2(x, \xi_i) dx \quad A_{ij,xxx} = -\int_{\Gamma_j} A_1(x, \xi_i) dx \quad (\text{Π2.4.29}\gamma,\delta)$$

όπου $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, L$. Τα μητρώα \mathbf{C} , $\mathbf{C}_{,x}$, $\mathbf{C}_{,xx}$, $\mathbf{C}_{,xxx}$ είναι διαστάσεων $L \times 8$ και ορίζονται ως

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_4(0, \xi_1) & -A_3(0, \xi_1) & A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & | & & & & \\ A_4(0, \xi_2) & -A_3(0, \xi_2) & A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & | & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & & & & \\ A_4(0, \xi_L) & -A_3(0, \xi_L) & A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & | & & & & \\ -A_4(l, \xi_1) & A_3(l, \xi_1) & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) & & & & & \\ -A_4(l, \xi_2) & A_3(l, \xi_2) & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ -A_4(l, \xi_L) & A_3(l, \xi_L) & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) & & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.30}\alpha)$$

$$\mathbf{C}_{,x} = \begin{bmatrix} -A_3(0, \xi_1) & A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & 0 & | & & & & \\ -A_3(0, \xi_2) & A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & 0 & | & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & & & & \\ -A_3(0, \xi_L) & A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & 0 & | & & & & \\ A_3(l, \xi_1) & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) & 0 & & & & & \\ A_3(l, \xi_2) & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ A_3(l, \xi_L) & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) & 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.30}\beta)$$

$$\mathbf{C}_{,xx} = \begin{bmatrix} A_2(0, \xi_1) & -A_1(0, \xi_1) & 0 & 0 & | & -A_2(l, \xi_1) & A_1(l, \xi_1) & 0 & 0 \\ A_2(0, \xi_2) & -A_1(0, \xi_2) & 0 & 0 & | & -A_2(l, \xi_2) & A_1(l, \xi_2) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_2(0, \xi_L) & -A_1(0, \xi_L) & 0 & 0 & | & -A_2(l, \xi_L) & A_1(l, \xi_L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Π2.4.30}\gamma)$$

$$\mathbf{C}_{,xxx} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -A_l(0, \xi_1) & 0 & 0 & 0 & A_l(l, \xi_1) & 0 & 0 & 0 \\ -A_l(0, \xi_2) & 0 & 0 & 0 & A_l(l, \xi_2) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_l(0, \xi_L) & 0 & 0 & 0 & A_l(l, \xi_L) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{Π2.4.30δ})$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.4.7) λαμβάνουμε

$$A_1(0, \xi_i) = -\frac{1}{2} \quad A_2(0, \xi_i) = \frac{1}{2}(\xi_i - l) \quad (\text{Π2.4.31α,β})$$

$$A_3(0, \xi_i) = -\frac{1}{4}\xi_i(\xi_i - 2l) \quad A_4(0, \xi_i) = \frac{1}{12}(\xi_i^3 - 3l\xi_i^2 + 2l^3) \quad (\text{Π2.4.31γ,δ})$$

$$A_1(l, \xi_i) = \frac{1}{2} \quad A_2(l, \xi_i) = -\frac{1}{2}\xi_i \quad (\text{Π2.4.31ε,στ})$$

$$A_3(l, \xi_i) = -\frac{1}{4}(l^2 - \xi_i^2) \quad A_4(l, \xi_i) = \frac{1}{12}((l - \xi_i)^3 - 3l(l - \xi_i)^2 + 2l^3) \quad (\text{Π2.4.31ζ,η})$$

όπου $\xi_i = x_{i0}$ οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ.Π2.1). Τα μητρώα \mathbf{B} , $\mathbf{B}_{,x}$, $\mathbf{B}_{,xx}$, $\mathbf{B}_{,xxx}$ είναι διαστάσεων $L \times (L + \delta)$ και ορίζονται ως $\mathbf{B} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{C}]$, $\mathbf{B}_{,x} = [\mathbf{A}_{,x} \quad \mathbf{C}_{,x}]$, $\mathbf{B}_{,xx} = [\mathbf{A}_{,xx} \quad \mathbf{C}_{,xx}]$, $\mathbf{B}_{,xxx} = [\mathbf{A}_{,xxx} \quad \mathbf{C}_{,xxx}]$.

Το τελικό βήμα της ΑΕΜ είναι η εφαρμογή της κυρίαρχης εξίσωσης (Π2.4.1) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του εξεταζόμενου διαστήματος και στη συνέχεια η αντικατάσταση των τιμών της θ και των παραγώγων της στα L εσωτερικά σημεία, σύμφωνα με τις σχέσεις (Π2.4.27). Είναι προφανές ότι λόγω ισχύος της αναλογικής εξίσωσης (Π2.4.2), οι τιμές της τετάρτης παραγώγου θ''' στα κομβικά σημεία ισούται με τις αντίστοιχες τιμές του μητρώου στήλη του πλασματικού φορτίου \mathbf{q} . Έτσι, προκύπτουν L επιπλέον αλγεβρικές εξισώσεις ως προς το άγνωστο μητρώο στήλη \mathbf{d} . Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις εξισώσεις (Π2.4.24) μορφώνουν σύστημα $L + \delta$ αλγεβρικών εξισώσεων με $L + \delta$ αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος αυτού, υπολογίζεται το πλασματικό φορτίο στα L εσωτερικά κομβικά σημεία καθώς και οι τιμές των θ , θ' , θ'' , θ''' στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Στη συνέχεια, με χρήση των εξ.(Π2.4.27) λαμβάνουμε το μητρώο στήλη των τιμών της λύσης και της παραγώγου της στα L εσωτερικά κομβικά σημεία. Τέλος, υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των θ , θ' , θ'' , θ''' μπορούν εύκολα να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π2.4.25-26), θέτοντας όπου ξ_i την τιμή του ξ .

Π2.4.2 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

Ο προσδιορισμός των μητρώων \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{A} , $\mathbf{A}_{,x}$, $\mathbf{A}_{,xx}$ και $\mathbf{A}_{,xxx}$ (σχέσεις (Π2.4.24), (Π2.3.27)) επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που ορίζονται από τις σχέσεις (Π2.4.21) και (Π2.4.29). Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία με εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss. Ωστόσο στην συγκεκριμένη περίπτωση, λόγω των απλών εκφράσεων των πυρήνων, ενδείκνυται

η αναλυτική ολοκλήρωση κατά μήκος του στοιχείου Γ_j , αποφεύγοντας έτσι το αριθμητικό σφάλμα και την αύξηση υπολογιστικού χρόνου. Με χρήση των σχέσεων (Π2.4.7) τα ολοκληρώματα των συντελεστών \hat{F}_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, L$) (σχέσεις (Π2.4.21)) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως [Μώκος 2007]

$$\hat{F}_{1j} = \frac{I}{12} \left[2l^3 x + \frac{I}{4} x^4 - lx^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (\text{Π2.4.32}\alpha)$$

$$\hat{F}_{2j} = \frac{I}{12} \left[2l^3 x - \frac{I}{4} (l-x)^4 + l(l-x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (\text{Π2.4.32}\beta)$$

$$\hat{F}_{3j} = -\frac{I}{4} \left[\frac{I}{3} x^3 - lx^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad \hat{F}_{4j} = -\frac{I}{4} \left[\frac{I}{3} (l-x)^3 - l(l-x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (\text{Π2.4.32}\gamma, \delta)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} είναι οι συντεταγμένες των άκρων του στοιχείου Γ_j (Σχ.Π2.1). Επιπλέον, με τη βοήθεια των σχέσεων (Π2.4.7) οι συντελεστές A_{ij} , $A_{ij,x}$, $A_{ij,xx}$ και $A_{ij,xxx}$ ($i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, L$) (σχέσεις (Π2.4.29)) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως [Μώκος 2007]

$$A_{ij} = \frac{I}{12} \left[2l^3 x - \frac{I}{4} (x_{i0} - x)^4 + l(x_{i0} - x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (\text{Π2.4.33}\alpha)$$

$$A_{ij} = \frac{I}{12} \left[2l^3 x + \frac{I}{4} (x - x_{i0})^4 - l(x - x_{i0})^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (\text{Π2.4.33}\beta)$$

$$A_{ij} = \frac{I}{12} \left[2l^3 x - \frac{I}{4} (x_{i0} - x)^4 + l(x_{i0} - x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{I}{12} \left[2l^3 x + \frac{I}{4} (x - x_{i0})^4 - l(x - x_{i0})^3 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (\text{Π2.4.33}\gamma)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{I}{4} \left[\frac{I}{3} (x_{i0} - x)^3 - l(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (\text{Π2.4.34}\alpha)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{I}{4} \left[\frac{I}{3} (x - x_{i0})^3 - l(x - x_{i0})^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (\text{Π2.4.34}\beta)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{I}{4} \left[\frac{I}{3} (x_{i0} - x)^3 - l(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} - \frac{I}{4} \left[\frac{I}{3} (x - x_{i0})^3 - l(x - x_{i0})^2 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (\text{Π2.4.34}\gamma)$$

$$A_{ij,xx} = -\frac{I}{2} \left[\frac{I}{2} (x_{i0} - x)^2 + lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (\text{Π2.4.35α})$$

$$A_{ij,xx} = \frac{I}{2} \left[\frac{I}{2} (x - x_{i0})^2 - lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (\text{Π2.4.35β})$$

$$A_{ij,xx} = -\frac{I}{2} \left[\frac{I}{2} (x_{i0} - x)^2 + lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{I}{2} \left[\frac{I}{2} (x - x_{i0})^2 - lx \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (\text{Π2.4.35γ})$$

$$A_{ij,xxx} = \frac{I}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (\text{Π2.4.36α})$$

$$A_{ij,xxx} = -\frac{I}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (\text{Π2.4.36β})$$

$$A_{ij,xxx} = 0, \quad i = j \quad (\text{Π2.4.36γ})$$

όπου x_{j1}, x_{j2} και x_{j0} είναι οι συντεταγμένες των άκρων και του μέσου του στοιχείου Γ_j , αντίστοιχα, ενώ x_{i0} οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ.Π2.1).

Παράρτημα Π3

Η Πεδιακή BEM για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} Τάξης

Π3.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα διατριβή, ορισμένα από τα προβλήματα συνοριακών τιμών που διατυπώνονται επιλύονται αριθμητικά με την Πεδιακή Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Domain BEM). Η μέθοδος αυτή ανήκει στην οικογένεια Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η Πεδιακή BEM μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση γραμμικών ή μη γραμμικών, στατικών ή δυναμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές, που υπόκεινται σε γραμμικές ή μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατό να επιλυθούν αριθμητικά προβλήματα συνοριακών τιμών των οποίων η θεμελιώδης λύση (fundamental solution) δεν είναι γνωστή. Καθώς η θεμελιώδης λύση δεν διατίθεται, σε τέτοια προβλήματα είναι αδύνατο να εφαρμοστεί «αμιγής» Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μέθοδος που να χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Η Πεδιακή BEM περιλαμβάνει και πεδιακή διακριτοποίηση του εξεταζόμενου χωρίου, πέρα από τη συνοριακή διακριτοποίηση.

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί διάφορες διατυπώσεις Πεδιακής BEM (π.χ. βλ. την εργασία των Ingber et al. [2001]). Στην παρούσα διατριβή ακολουθούνται οι διατυπώσεις των Sapountzakis and Katsikadelis [1992] (βλ. και [Katsikadelis and Sapountzakis 1988], [Katsikadelis et al. 1990], [Sapountzakis and Katsikadelis 1991], [Katsikadelis and Sapountzakis 1991]) και του Sapountzakis [2000] (βλ. και [Ingber et al. 2001]), αφού τροποποιηθούν κατάλληλα. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στην άμεση αριθμητική ολοκλήρωση των πεδιακών ολοκληρωμάτων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της Πεδιακής BEM. Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην αρχική προσέγγιση του άγνωστου μεγέθους που αναζητούμε με απλές συναρτήσεις σχήματος σε κάθε στοιχείο της πεδιακής διακριτοποίησης. Τα προκύπτοντα ολοκληρώματα περιέχουν αποκλειστικά γνωστά μεγέθη και μπορούν να υπολογιστούν είτε αριθμητικά είτε αναλυτικά, σημειώνοντας ότι στην παρούσα διατριβή ακολουθείται αναλυτικός προσδιορισμός.

Η πρώτη μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου είναι δυσχερές να εκφραστεί ρητά το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Μια τέτοια περίπτωση είναι η εξέταση της συμπεριφοράς ελαστοπλαστικών σωμάτων, όπου τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών μπορούν να υπολογιστούν σε πεπερασμένο αριθμό σημείων κατά μήκος της ράβδου, ωστόσο προσδιορίζονται δυσχερώς σε κλειστή μορφή συναρτήσεων των άγνωστων μεγεθών σε κάθε σημείο. Η δεύτερη μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ρητά προσδιορισμένο ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Μια τέτοια περίπτωση είναι η εξέταση γεωμετρικά μη γραμμικής συμπεριφοράς ελαστικών σωμάτων. Συνεπώς, στην παρούσα διατριβή η

πρώτη μέθοδος εφαρμόζεται στο πρόβλημα της μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστοπλαστικών ράβδων με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (κεφ. 5), ενώ η δεύτερη μέθοδος εφαρμόζεται στο πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστικών ράβδων με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (κεφ. 2). Παρακάτω, οι δύο μέθοδοι παρουσιάζονται για την περίπτωση συνήθους διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης, σημειώνοντας ότι η εφαρμογή τους σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 4^{ης} τάξης είναι ανάλογη, όπως επίσης και σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τα οποία περιέχουν μέχρι 2^{ης} ή 4^{ης} τάξης παραγώγους.

Οι δύο μέθοδοι περιέχουν άγνωστες ποσότητες και στο εσωτερικό του εξεταζόμενου χωρίου. Μπορούν να εφαρμοστούν δύο τεχνικές υπολογισμού των αγνώστων αυτών [Ingber et al. 2001]. Αναφορικά με την πρώτη τεχνική, οι άγνωστοι αυτοί υπολογίζονται επαναληπτικά αφού υιοθετηθεί κάποια αρχική εκτίμηση για τον υπολογισμό τους. Η τεχνική αυτή απαιτεί επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος ακόμα και στην περίπτωση γραμμικών προβλημάτων ενώ η σύγκλιση δεν είναι εγγυημένη [Ingber et al. 2001]. Αναφορικά με τη δεύτερη τεχνική, εφαρμόζεται η μέθοδος της ταξιθεσίας (collocation method) σύμφωνα με την οποία οι ολοκληρωτικές εξισώσεις του προβλήματος εκφράζονται στις θέσεις των αγνωστων ποσοτήτων στο εσωτερικό του χωρίου. Έτσι είναι δυνατό να μορφωθεί σύστημα εξισώσεων με ίσο πλήθος αγνωστων ποσοτήτων και διατιθέμενων εξισώσεων. Η τεχνική αυτή υιοθετείται στην παρούσα διατριβή και απαιτεί επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος μόνο στην περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων.

Π3.2 Βασικές Έννοιες της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων

Θεωρούμε το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{dN(x, u, u')}{dx} = g(x), \quad x \in (0, l) \quad (\text{Π3.2.1}\alpha)$$

$$a_1 \left(\frac{du}{dx} - N(x, u, u') \right) + a_2 u = a_3, \quad x = 0, l \quad (\text{Π3.2.1}\beta)$$

όπου ο συμβολισμός $(\cdot)'$ δηλώνει παραγωγή κατά x , $N(\cdot)$ είναι γραμμικός ή μη γραμμικός μονοδιάστατος τελεστής πρώτης τάξης, a_i ($i = 1, 2, 3$) είναι γνωστοί συντελεστές που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος, $g(x)$ είναι τυχαία κατανομημένο φορτίο ή πηγή στο εσωτερικό διάστημα $(0, l)$ και $u = u(x)$ είναι η συνάρτηση της λύσης, η οποία είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, l)$. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει συχνά στις εφαρμογές που εξετάζονται. Λαμβάνοντας υπόψη τις εξ.(Π2.3.2), (Π3.2.1α), η εξ.(Π2.3.6) εκφράζεται εδώ ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2''(x, \xi) [N'(x, u, u') + g(x)] dx - \left[-A_1''(x, \xi) u(x) + A_2''(x, \xi) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π3.2.2})$$

όπου A_1^u , A_2^u είναι δισημειακοί πυρήνες που δίδονται από τις εξ.(Π2.3.7). Μετά από κατάλληλη ολοκλήρωση κατά παράγοντες η παραπάνω έκφραση διαμορφώνεται ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2^u(x, \xi) g(x) dx - \int_0^l A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx + \left[A_2^u(x, \xi) N(x, u, u') \right]_{x=0}^{x=l} - \left[-A_1^u(x, \xi) u(x) + A_2^u(x, \xi) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π3.2.3})$$

Παραγωγίζοντας ως προς ξ την παραπάνω εξίσωση, λαμβάνουμε

$$u'(\xi) = -\int_0^l A_1^u(x, \xi) g(x) dx + N(\xi, u, u') + \left[A_1^u(x, \xi) \left[u'(x) - N(x, u, u') \right] \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π3.2.4})$$

Στη συνέχεια προχωρούμε στη διακριτοποίηση του διαστήματος $(0, l)$, διαιρώντας το διάστημα αυτό σε L στοιχεία. Οι σχέσεις (Π3.2.3-4) διατυπώνονται ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2^u(x, \xi) g(x) dx - \sum_{j=1}^L \int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx - \left[-A_1^u(x, \xi) u(x) + A_2^u(x, \xi) (u'(x) - N(x, u, u')) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π3.2.5})$$

$$u'(\xi) = -\int_0^l A_1^u(x, \xi) g(x) dx + N(\xi, u, u') + \left[A_1^u(x, \xi) \left[u'(x) - N(x, u, u') \right] \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π3.2.6})$$

Π3.3 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Όπως προαναφέρθηκε, η παρούσα μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου είναι δυσχερές να εκφραστεί ρητά το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Τα ολοκληρώματα $\int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx$ ($j = 1, 2, \dots, L$) της εξ.(Π3.2.5) προσδιορίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss (με L_{Gauss} πλήθος σημείων Gauss σε κάθε στοιχείο) ως

$$\int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx = \sum_{k=1}^{L_{Gauss}} A_1^u(x_{jk}, \xi) N(x_{jk}, u_{jk}, u'_{jk}) w_k \quad (\text{Π3.3.1})$$

όπου w_k ($k = 1, 2, \dots, L_{Gauss}$) είναι γνωστά βάρη της μεθόδου Gauss, ενώ x_{jk} ($k = 1, 2, \dots, L_{Gauss}$) είναι γνωστά σημεία Gauss τα οποία βρίσκονται επί του στοιχείου j ($j = 1, 2, \dots, L$). Η εξ.(Π3.2.5) διαμορφώνεται με βάση την παραπάνω σχέση ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2^u(x, \xi) g(x) dx - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L_{Gauss}} A_1^u(x_{jk}, \xi) N(x_{jk}, u_{jk}, u'_{jk}) w_k$$

$$-\left[-A_1''(x, \xi)u(x) + A_2''(x, \xi)(u'(x) - N(x, u, u'))\right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π3.3.2})$$

Εφαρμόζοντας σε $L \times L_{Gauss}$ σημεία ταξιθεσίας $\xi_i = x_{jk}$ ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$, $j = 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, L_{Gauss}$) τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π3.3.2), (Π3.2.6) καθώς και στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0$, $\xi = \xi_{L \times L_{Gauss} + 1} = l$ την ολοκληρωτική εξίσωση (Π3.3.2), προκύπτουν $2L \times L_{Gauss} + 2$ εξισώσεις ως προς $2L \times L_{Gauss} + 4$ αγνώστους (πρόκειται για τις τιμές των u'_i , u_i ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$) στα $L \times L_{Gauss}$ εσωτερικά κομβικά σημεία και τις συνοριακές τιμές των u , $u' - N(x, u, u')$ ($j = 1, L + 1$) στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0$, $\xi = \xi_{L \times L_{Gauss} + 1} = l$). Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις 2 συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου (βλ. εξ.(Π3.2.1β)) μορφώνουν σύστημα $2L \times L_{Gauss} + 4$ αλγεβρικών εξισώσεων με $2L \times L_{Gauss} + 4$ αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος αυτού, υπολογίζονται οι τιμές των u' , u στα $L \times L_{Gauss}$ εσωτερικά κομβικά σημεία καθώς και οι τιμές της u και $u' - N(x, u, u')$ στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των u , u' μπορούν εύκολα να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π3.3.2), (Π3.2.6) αντίστοιχα, για την εξεταζόμενη τιμή του ξ . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l A_1''(x, \xi)g(x)dx$, $\int_0^l A_2''(x, \xi)g(x)dx$ που υπεισέρχονται στο σύστημα εξισώσεων υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση για τις συνήθεις συναρτήσεις $g(x)$. Τέλος, στην περίπτωση που το σημείο ταξιθεσίας ξ_i βρίσκεται εντός του στοιχείου j , παρουσιάζεται ιδιομορφία στον υπολογισμό του ολοκληρώματος της εξ.(Π3.3.1) (βλ. εξ.(Π2.3.7α), (Π2.3.8)). Η ομαλοποίησή του πραγματοποιείται εφαρμόζοντας την τεχνική που παρουσιάζεται στην εργασία των Katsikadelis and Sapountzakis [1988]. Έτσι, το ολοκλήρωμα της εξ.(Π3.3.1) γράφεται ως

$$\int_{\Gamma_j} A_1''(x, \xi_i)N(x, u, u')dx = \int_{\Gamma_j} A_1''(x, \xi_i)(N(x, u, u') - N(\xi_i, u_i, u'_i))dx + N(\xi_i, u_i, u'_i) \int_{\Gamma_j} A_1''(x, \xi_i)dx \quad (\text{Π3.3.3})$$

Καθώς η ποσότητα $A_1''(x, \xi_i)(N(x, u, u') - N(\xi_i, u_i, u'_i))$ του πρώτου ολοκληρώματος της παραπάνω σχέσης έχει πεπερασμένη τιμή, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ομαλό και μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Το δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης υπολογίζεται εύκολα αναλυτικά.

Π3.4 Μέθοδος Προσέγγισης του Άγνωστου Μεγέθους

Όπως προαναφέρθηκε, η παρούσα μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ρητά προσδιορισμένο ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Υιοθετείται η υπόθεση ότι το άγνωστο

μέγεθος u μεταβάλλεται εντός του κάθε στοιχείου j με βάση συγκεκριμένο νόμο (π.χ. γραμμική, παραβολική, κυβική κατανομή κ.λ.π.). Με βάση το νόμο αυτό, υπολογίζεται εύκολα η μεταβολή εντός του κάθε στοιχείου j της παραγώγου u' . Ο ρητός προσδιορισμός του προβλήματος συνοριακών τιμών ως προς τα u, u' σε κάθε σημείο του χωρίου επιτρέπει τον προσδιορισμό των ολοκληρωμάτων $\int_{\Gamma_j} A_j''(x, \xi) N(x, u, u') dx$ ($j = 1, 2, \dots, L$) της εξ.(Π3.2.5) συναρτήσεων των άγνωστων κομβικών ποσοτήτων του νόμου μεταβολής του u . Τα ολοκληρώματα που υπεισέρχονται στις προκύπτουσες εκφράσεις υπολογίζονται στην παρούσα διατριβή αναλυτικά χωρίς δυσκολία.

Εφαρμόζοντας σε L σημεία ταξιθεσίας ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π3.2.5-6) καθώς και στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0, \xi = \xi_{L+1} = l$ την ολοκληρωτική εξίσωση (Π3.2.5), προκύπτουν $2L + 2$ εξισώσεις ως προς $2L + 4$ αγνώστους (πρόκειται για τις κομβικές ποσότητες του νόμου μεταβολής του u στα L κομβικά σημεία και τις συνοριακές τιμές των $u_j, u'_j - N(x_j, u_j, u'_j)$ ($j = 1, L + 1$) στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0, \xi = \xi_{L+1} = l$). Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις 2 συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου (βλ. εξ.(Π3.2.1β)) μορφώνουν σύστημα $2L + 4$ αλγεβρικών εξισώσεων με $2L + 4$ αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος αυτού, υπολογίζονται οι τιμές των κομβικών ποσοτήτων του νόμου μεταβολής του u στα L κομβικά σημεία καθώς και οι τιμές της u και $u' - N(x, u, u')$ στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των u, u' μπορούν εύκολα να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π3.2.5), (Π3.2.6) αντίστοιχα, για την εξεταζόμενη την τιμή του ξ . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l A_1''(x, \xi) g(x) dx, \int_0^l A_2''(x, \xi) g(x) dx$ που υπεισέρχονται στο σύστημα εξισώσεων υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση για τις συνήθεις συναρτήσεις $g(x)$. Τέλος, επισημαίνεται ότι οι θέσεις των σημείων ταξιθεσίας προσδιορίζονται με βάση τις θέσεις των κομβικών σημείων του νόμου μεταβολής του u , ενώ σε περίπτωση που ο τελεστής N έχει ειδική μορφή (π.χ. δεν εξαρτάται από το u αλλά μόνο από το u'), δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν και οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π3.2.5-6) για την επίλυση του προβλήματος.

Παράρτημα Π4

Στοιχεία Μηχανικής Συνεχούς Μέσου

Π4.1 Θεωρία Παραμόρφωσης

Π4.1.1 Μετατοπίσεις

Θεωρούμε παραμορφώσιμο σώμα, το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$ καταλαμβάνει την περιοχή Q του χώρου. Στη γενική περίπτωση ο χώρος είναι τριδιάστατος. Θεωρούμε επίσης σταθερό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$. Η αρχική θέση τυχόντος σημείου P του σώματος περιγράφεται από τις χωρικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3 . Σε τυχούσα χρονική στιγμή t , η θέση του σώματος μεταβάλλεται με αποτέλεσμα να καταλαμβάνει πλέον την περιοχή Q' . Η τελική θέση του σημείου P συμβολίζεται με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Οι συντεταγμένες της τελικής θέσης του P δίδονται ως

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t) \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t) \quad \xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{Π4.1.1}\alpha, \beta, \gamma)$$

Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις χωρικές συντεταγμένες και τον χρόνο. Η φυσική σημασία της υπόθεσης αυτής είναι ότι στο παραμορφώσιμο σώμα δεν αναπτύσσονται ρωγμές σε καμία χρονική στιγμή. Επιπλέον, απαιτούμε να υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του P και του P' , δηλαδή η μετατόπιση του σώματος να είναι μονοσήμαντη. Τούτο σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις συντεταγμένες της τελικής θέσης ως ανεξάρτητες συντεταγμένες του χώρου και να εκφράσουμε τις συντεταγμένες της αρχικής θέσης ως

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (\text{Π4.1.2}\alpha, \beta, \gamma)$$

Η περιγραφή των σχέσεων (Π4.1.1) καλείται περιγραφή Lagrange, ενώ η περιγραφή των σχέσεων (Π4.1.2) καλείται περιγραφή Euler. Με την περιγραφή Lagrange εστιάζουμε σε συγκεκριμένο υλικό σημείο $P(x_1, x_2, x_3)$ του σώματος και μελετούμε τη μετατόπιση του ως προς το χρόνο. Με την περιγραφή Euler εστιάζουμε σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και μελετούμε τα υλικά σημεία που διέρχονται από το σημείο αυτό σε κάθε χρονική στιγμή t .

Στην περίπτωση που μελετούμε τη θέση του σώματος σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t , τότε οι παραπάνω σχέσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Η μετατόπιση του σημείου P ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{Π4.1.3})$$

όπου $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν τους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 του συστήματος αναφοράς, αντίστοιχα, ενώ u_1, u_2, u_3 είναι οι συνιστώσες της μετατόπισης οι οποίες ορίζονται ως

$$u_1 = \xi_1 - x_1 \quad u_2 = \xi_2 - x_2 \quad u_3 = \xi_3 - x_3 \quad (\text{Π4.1.4α,β,γ})$$

Το διάνυσμα \mathbf{u} μπορεί να συμβολιστεί απλά και ως $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Είναι προφανές ότι $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ και ότι οι συνιστώσες u_1, u_2, u_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις συντεταγμένες του χώρου. Το πεδίο μετατοπίσεων δεν μπορεί να είναι αυθαίρετο. Προκειμένου να ισχύει η αντιστοιχία 1-1 μεταξύ των P και P' , αποδεικνύεται ότι πρέπει να ισχύει

$$J = |\mathbf{X}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{Π4.1.5})$$

όπου \mathbf{X} είναι μητρώο διαστάσεων 3×3 το οποίο καλείται διανυσματική κλίση ή βαθμίδα παραμόρφωσης (deformation gradient), ενώ J είναι η ορίζουσα του \mathbf{X} . Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην αρχική του θέση, ισχύει $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$. Συνεπώς, προκύπτει εύκολα ότι

$$J(t = 0) = I \quad (\text{Π4.1.6})$$

Επειδή η J πρέπει να είναι συνεχής και ως προς το χρόνο, από τις (Π4.1.5), (Π4.1.6) προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει

$$J > 0, \forall t \geq 0 \quad (\text{Π4.1.7})$$

Η εξ.(Π4.1.7) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των P και P' για κάθε χρονική στιγμή της παραμόρφωσης/μετατόπισης του σώματος.

Π4.1.2 Παραμορφώσεις

Στην περίπτωση των απολύτως στερεών (απαραμόρφωτων) σωμάτων, ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων κάθε υλικού σημείου αρκεί πλήρως για την περιγραφή της κίνησής του. Σε παραμορφώσιμο σώμα ωστόσο, οι μετατοπίσεις δεν αρκούν για την περιγραφή της τελικής διαμόρφωσής του. Ακόμα κι αν είναι γνωστές οι θέσεις όλων των υλικών σημείων στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, είναι αναγκαίο

να προσδιοριστούν και οι σχετικές θέσεις τους προκειμένου να αποκτηθεί σαφής εικόνα της παραμόρφωσης του σώματος. Επομένως είναι αναγκαία η μελέτη των μεταβολών των μηκών και των γωνιών που έχουν υποστεί τα διάφορα στοιχεία του σώματος. Στη γενική περίπτωση, το σώμα θα υποστεί τόσο μεταβολές μηκών όσο και μεταβολές γωνιών. Η ανάλυση διευκολύνεται αν θεωρηθούν πολύ μικρά (απειροστά) στοιχεία αντί για στοιχεία πεπερασμένου μήκους.

Π4.1.2.1 Μεταβολή Μήκους Απειροστού Στοιχείου

Θεωρούμε το απειροστό στοιχείο PA του αρχικά απαραμόρφωτου σώματος, μήκους ds . Το P έχει συντεταγμένες $P(x_1, x_2, x_3)$ ενώ το A έχει συντεταγμένες $A(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Για το μήκος ds ισχύει

$$ds = \sqrt{(x_1 + dx_1 - x_1)^2 + (x_2 + dx_2 - x_2)^2 + (x_3 + dx_3 - x_3)^2} \quad (\text{Π4.1.8})$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

Μετά την παραμόρφωση, το PA βρίσκεται σε νέα θέση $P'A'$, όπου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Στη γενική περίπτωση θα έχουμε τόσο μεταβολή του μήκους όσο και μεταβολή της κατεύθυνσης του PA . Το παραμορφωμένο στοιχείο $P'A'$ θα έχει μήκος

$$ds' = \sqrt{(\xi_1 + d\xi_1 - \xi_1)^2 + (\xi_2 + d\xi_2 - \xi_2)^2 + (\xi_3 + d\xi_3 - \xi_3)^2} \quad (\text{Π4.1.9})$$

$$\Rightarrow ds'^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (Π4.1.2), (Π4.1.4), λαμβάνουμε

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{Π4.1.10α})$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{Π4.1.10β})$$

$$d\xi_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \quad (\text{Π4.1.10γ})$$

Έπειτα από κάποιες πράξεις προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}(ds'^2 - ds^2) = \varepsilon_{11}dx_1^2 + \varepsilon_{22}dx_2^2 + \varepsilon_{33}dx_3^2 \quad (\text{Π4.1.11})$$

$$+ 2\varepsilon_{12}dx_1dx_2 + 2\varepsilon_{13}dx_1dx_3 + 2\varepsilon_{23}dx_2dx_3$$

όπου στην παραπάνω σχέση οι ποσότητες ε_{ij} ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$) καλούνται τροπές (strains) και ορίζονται ως

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (\text{Π4.1.12α})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (\text{Π4.1.12β})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (\text{Π4.1.12γ})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (\text{Π4.1.12δ})$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (\text{Π4.1.12ε})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (\text{Π4.1.12στ})$$

Ο τανυστής παραμόρφωσης Green εκφράζεται ως

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Π4.1.13})$$

όπου ε_{ij} ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$) είναι οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green, οι οποίες ορίζονται μέσω των εξ.(Π4.1.12). Οι συνιστώσες ε_{21} , ε_{31} , ε_{32} ορίζονται από τις εξ.(Π4.1.12δ-στ) με αντιστροφή των δεικτών και ισχύει

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} \quad (\text{Π4.1.14α,β,γ})$$

επομένως

$$\left[\boldsymbol{\varepsilon}^G \right]^T = \boldsymbol{\varepsilon}^G \quad (\text{Π4.1.15})$$

δηλαδή ο τανυστής παραμόρφωσης Green είναι συμμετρικός.

Ως μέτρο μεταβολής μήκους του PA (magnification factor of the extension of line element PA) ορίζεται η ποσότητα

$$MF_A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] \quad (\text{Π4.1.16})$$

Με χρήση των συνημίτονων κατεύθυνσης του στοιχείου PA n_1, n_2, n_3 ($n_1 = dx_1 / ds$, $n_2 = dx_2 / ds$, $n_3 = dx_3 / ds$) και διαιρώντας με ds^2 και τα δύο μέλη της εξ.(Π4.1.11), προσδιορίζεται το MF_A συναρτήσει των τροπών ως

$$MF_A = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{22}n_2^2 + \varepsilon_{33}n_3^2 + 2\varepsilon_{12}n_1n_2 + 2\varepsilon_{13}n_1n_3 + 2\varepsilon_{23}n_2n_3 \quad (\text{Π4.1.17})$$

Για τη σχετική μεταβολή μήκους του PA e_A που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε, ισχύει

$$e_A = \frac{ds' - ds}{ds} \Rightarrow ds' = (1 + e_A) ds \quad (\text{Π4.1.18})$$

Το MF_A συσχετίζεται εύκολα με το e_A ως

$$\begin{aligned} MF_A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{ds'^2 - ds^2}{ds^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + e_A)^2 ds^2 - ds^2}{ds^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(1 + e_A)^2 - 1 \right] \Rightarrow e_A = \sqrt{1 + 2MF_A} - 1 \end{aligned} \quad (\text{Π4.1.19})$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν με κάποιους περιορισμούς. Επειδή το μήκος του στοιχείου δεν μπορεί να μηδενιστεί, θα πρέπει $ds' > 0$, επομένως οι εξ.(Π4.1.18-19) ισχύουν με τους περιορισμούς $e_A > -1$ και $MF_A > -(1/2)$, αντίστοιχα.

Η εξ.(Π4.1.19) μπορεί να αναπτυχθεί σε ανάπτυγμα Taylor ως

$$e_A = MF_A - \frac{1}{2} MF_A^2 + \dots \quad (\text{Π4.1.20})$$

Με τη βοήθεια της εξ.(Π4.1.20) είναι δυνατό να αποδοθεί φυσική σημασία στο μέτρο μεταβολής μήκους. Για $MF_A \ll 1$, ισχύει $e_A \approx MF_A$, δηλαδή το MF_A ισούται περίπου με τη σχετική μεταβολή μήκους της (τυχούσας) ίνας PA . Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική, προσδιορίζεται και η φυσική σημασία των τροπών που έχουν οριστεί μέσω των εξ.(Π4.1.12α-γ). Παρατηρείται ότι αν στην απαραμόρφωτη διαμόρφωση θεωρηθεί ίνα με κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_1 , ισχύει $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η εξ.(Π4.1.17) δίδει $MF_{Ax1} = \varepsilon_{11}n_1^2 \Rightarrow MF_{Ax1} = \varepsilon_{11}$, ενώ από την εξ.(Π4.1.20) λαμβάνουμε

$$e_{Ax1} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^2 + \dots \quad (\text{Π4.1.21})$$

Υποθέτοντας ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, θα έχουμε $\varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow (\varepsilon_{11})^2 \approx 0$, επομένως η εξ.(Π4.1.21) δίδει

$$e_{Ax1} \approx \varepsilon_{11} \quad (\text{Π4.1.22})$$

Συμπεραίνεται ότι η παραμόρφωση ε_{ii} ($i=1,2,3$) ισούται περίπου με τη μεταβολή μήκους απειροστής ίνας που αρχικά έχει κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_i . Οι τροπές ε_{ii} ($i=1,2,3$) καλούνται ορθές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές μήκους των ινών του σώματος που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

Π4.1.2.2 Μεταβολή Κατεύθυνσης Απειροστού Στοιχείου

Η χωρική κατεύθυνση της ίνας PA πριν την παραμόρφωση προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}_A = n_{A1}\mathbf{i} + n_{A2}\mathbf{j} + n_{A3}\mathbf{k} \quad (\text{Π4.1.23})$$

όπου στο παρόν εδάφιο τα συνημίτονα κατεύθυνσης συμβολίζονται με n_{A1} , n_{A2} , n_{A3} (ισχύει $n_{A1} = dx_1 / ds$, $n_{A2} = dx_2 / ds$, $n_{A3} = dx_3 / ds$) και τα μοναδιαία διανύσματα με \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Στην παραμορφωμένη διαμόρφωση το στοιχείο βρίσκεται στη νέα θέση $P'A'$, με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Η νέα χωρική κατεύθυνση του στοιχείου προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}'_A = n'_{A1}\mathbf{i} + n'_{A2}\mathbf{j} + n'_{A3}\mathbf{k} \quad (\text{Π4.1.24})$$

όπου $n'_{A1} = d\xi_1 / ds'$, $n'_{A2} = d\xi_2 / ds'$, $n'_{A3} = d\xi_3 / ds'$. Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε

$$n'_{Ai} = \frac{d\xi_i}{ds} \frac{ds}{ds'}, \quad i=1,2,3 \quad (\text{Π4.1.25})$$

Από τις εξ.(Π4.1.10) προκύπτει ότι

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) n_{A1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_{A2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} n_{A3} \quad (\text{Π4.1.26α})$$

$$\frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_{A1} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) n_{A2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} n_{A3} \quad (\text{Π4.1.26β})$$

$$\frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} n_{A1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} n_{A2} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) n_{A3}$$

$$(Π4.1.26γ)$$

Επιπλέον, η εξ.(1.1.18) δίδει

$$\begin{aligned} ds' = (1 + e_A) ds &\Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + e_A} \xrightarrow{\text{εξ.}(Π4.1.19)} \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2MF_A} - 1} \\ &\Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} \end{aligned} \quad (Π4.1.27)$$

Με τη βοήθεια των εξ.(Π4.1.26-27) προσδιορίζονται τα συνημίτονα κατεύθυνσης της τελικής θέσης συναρτήσει των μετατοπίσεων και των αρχικών (γνωστών) συνημίτονων κατεύθυνσης ως

$$n'_{A1} = \frac{1 + \partial u_1 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A1} + \frac{\partial u_1 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A2} + \frac{\partial u_1 / \partial x_3}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A3} \quad (Π4.1.28α)$$

$$n'_{A2} = \frac{\partial u_2 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A1} + \frac{1 + \partial u_2 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A2} + \frac{\partial u_2 / \partial x_3}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A3} \quad (Π4.1.28β)$$

$$n'_{A3} = \frac{\partial u_3 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A1} + \frac{\partial u_3 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A2} + \frac{1 + \partial u_3 / \partial x_3}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A3} \quad (Π4.1.28γ)$$

Η φυσική σημασία των τροπών ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} προσδιορίζεται μελετώντας τη μεταβολή της γωνίας που υφίστανται 2 στοιχεία PA , PB . Έστω θ , η γωνία που σχηματίζουν αρχικά τα στοιχεία, και θ' η τελική γωνία που σχηματίζουν τα στοιχεία $P'A'$, $P'B'$. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων \mathbf{n}'_A και \mathbf{n}'_B που ορίζουν την κατεύθυνση των $P'A'$ και $P'B'$, αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_A \cdot \mathbf{n}'_B &= \|\mathbf{n}'_A\| \|\mathbf{n}'_B\| \cos \theta' = 1 \cdot 1 \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \mathbf{n}'_A \cdot \mathbf{n}'_B \\ &\Rightarrow \cos \theta' = n'_{A1}n'_{B1} + n'_{A2}n'_{B2} + n'_{A3}n'_{B3} \end{aligned} \quad (Π4.1.29)$$

όπου με \cdot συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Για να απλοποιηθεί το πρόβλημα θεωρούμε την ακόλουθη υποπερίπτωση. Θεωρούμε ότι τα PA , PB να κατευθύνονται προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι ισχύει $(n_{A1}, n_{A2}, n_{A3}) = (1, 0, 0)$, $(n_{B1}, n_{B2}, n_{B3}) = (0, 1, 0)$, $MF_A = \varepsilon_{11}$, $MF_B = \varepsilon_{22}$, ενώ προφανώς για την αρχική γωνία θ , ισχύει $\theta = \pi / 2$. Οι εξ.(Π4.1.28) δίδουν

$$n'_{A1} = \frac{1 + \partial u_1 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}} \quad n'_{B1} = \frac{\partial u_1 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (Π4.1.30α,β)$$

$$n'_{A2} = \frac{\partial u_2 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}} \quad n'_{B2} = \frac{1 + \partial u_2 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (Π4.1.30γ,δ)$$

$$n'_{A3} = \frac{\partial u_3 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}} \quad n'_{B3} = \frac{\partial u_3 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (Π4.1.30ε,στ)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω μεγέθη στην εξ.(Π4.1.29) και εκτελώντας τις πράξεις, λαμβάνουμε

$$\cos \theta' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}} \quad (\text{Π4.1.31})$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της τροπής ε_{12} (βλ. εξ.(Π4.1.12δ)), τελικά προκύπτει ότι

$$\cos \theta' = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}} \quad (\text{Π4.1.32})$$

Επομένως αν υποθέσουμε ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, ισχύουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις.

- οι ορθές παραμορφώσεις είναι μικρές, επομένως $\varepsilon_{11} \ll 1$, $\varepsilon_{22} \ll 1$ και θα ισχύει $1/\sqrt{1+2\varepsilon_{11}} \approx 1$, $1/\sqrt{1+2\varepsilon_{22}} \approx 1$ (βλ. εξ.(Π4.1.19-21)).
- οι γωνίες στροφής μεταξύ των δύο στοιχείων είναι μικρές, επομένως $\sin \theta' \approx \theta'$. Όμως ισχύει $\cos \theta' = \sin((\pi/2) - \theta')$, άρα $\cos \theta' \approx (\pi/2) - \theta' \Rightarrow \cos \theta' \approx \theta - \theta'$, αφού έχει ληφθεί ότι η αρχική γωνία ισούται με $\pi/2$.

Η εξ.(Π4.1.32) γράφεται ως

$$\theta - \theta' \approx 2\varepsilon_{12} \quad (\text{Π4.1.33})$$

Η φυσική σημασία της τροπής ε_{12} είναι ότι ισούται περίπου με το μισό της μεταβολής της κάθετης γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 . Με παρόμοια συλλογιστική μπορεί γενικά να αποδειχθεί ότι το διπλάσιο της τροπής ε_{ij} ($i=1,2,3$, $j=1,2,3$ με $i \neq j$) ισούται περίπου με τη μεταβολή της (κάθετης) γωνίας μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες Ox_i και Ox_j . Ορίζουμε ως

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3 \quad \text{με } i \neq j \quad (\text{Π4.1.34})$$

Οι ποσότητες γ_{ij} καλούνται διαμητικές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές των (κάθετων) γωνιών μεταξύ των ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

Π4.1.2.3 Μεταβολή Όγκου Απειροστού Στοιχείου

Όπως θα φανεί στη συνέχεια είναι χρήσιμο να προσδιοριστεί η αλλαγή όγκου και επιφάνειας που υφίστανται κατά την παραμόρφωση τα απειροστά στοιχεία του σώματος. Θεωρούμε κυβικό στοιχείο του σώματος πριν την παραμόρφωση με πλευρές παράλληλες ως προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 . Προφανώς το στοιχείο θα έχει όγκο

$dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Για να προσδιοριστεί ο όγκος dV' του στοιχείου μετά την παραμόρφωση, εξετάζονται οι μεταβολές που έχουν υποστεί οι ακμές του. Η πλευρά $\mathbf{OA} = (dx_1, 0, 0)$ μετατρέπεται στην πλευρά $\mathbf{O'A'}$ για την οποία ισχύει

$$\mathbf{O'A'} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} dx_1 \right) \quad (\text{Π4.1.35α})$$

Η παραπάνω σχέση προέκυψε με εφαρμογή των εξ.(Π4.1.9) που συνδέουν τις προβολές του στοιχείου στους 3 άξονες του συστήματος αναφοράς πριν και μετά την παραμόρφωση. Εξετάζοντας και τις άλλες 2 ακμές που ορίζουν τον κύβο, λαμβάνουμε αντίστοιχα για τις πλευρές $\mathbf{OB} = (0, dx_2, 0)$ και $\mathbf{OG} = (0, 0, dx_3)$ τις σχέσεις

$$\mathbf{O'B'} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \quad (\text{Π4.1.35β})$$

$$\mathbf{O'G'} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} dx_3, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} dx_3, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \quad (\text{Π4.1.35γ})$$

Με βάση γνωστή ταυτότητα της αναλυτικής γεωμετρίας, ο όγκος dV' του παραλληλεπίπεδου στην παραμορφωμένη διαμόρφωση δίδεται ως

$$dV' = \mathbf{O'A'} \cdot (\mathbf{O'B'} \times \mathbf{O'G'}) \quad (\text{Π4.1.36})$$

όπου με \times συμβολίζεται το εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Εκτελώντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$dV' = J dV \quad (\text{Π4.1.37})$$

όπου J είναι η ορίζουσα της βαθμίδας της παραμόρφωσης που έχει οριστεί μέσω της εξ.(Π4.1.5).

Π4.1.2.4 Μεταβολή Επιφάνειας Απειροστού Στοιχείου

Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού dA πριν την παραμόρφωση και το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} επί αυτής. Έστω ότι η επιφάνεια θα έχει νέο εμβαδόν dA' με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}' επί αυτής μετά την παραμόρφωση. Προκειμένου να συσχετιστεί η παραμορφωμένη επιφάνεια με την αρχική θα προσδιορίσουμε την αλλαγή του όγκου που υφίσταται στοιχείο που ορίζεται από την εξεταζόμενη επιφάνεια και τυχαίο απειροστό διάνυσμα $\mathbf{n}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Ο όγκος του στοιχείου πριν την παραμόρφωση ισούται με

$$dV = \mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \quad (\text{Π4.1.38})$$

Μετά την παραμόρφωση μεταβάλλονται γενικά τόσο το \mathbf{n}_1 όσο και τα χαρακτηριστικά (εμβαδόν, προσανατολισμός) της επιφάνειας. Ο όγκος του νέου στοιχείου ισούται με

$$dV' = \mathbf{n}'_1 \cdot (dA' \mathbf{n}') \quad (\text{Π4.1.39})$$

όπου $\mathbf{n}'_1 = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ είναι το διάνυσμα \mathbf{n}_1 στην παραμορφωμένη διαμόρφωση. Με τη βοήθεια των εξ.(Π4.1.5), (Π4.1.10) συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα της παραμόρφωσης \mathbf{X} έχει την ιδιότητα να συνδέει το (τυχόν) διάνυσμα πριν την παραμόρφωση με το διάνυσμα μετά την παραμόρφωση. Πιο συγκεκριμένα ισχύει

$$\mathbf{n}'_1 = \mathbf{X} \mathbf{n}_1 \quad (\text{Π4.1.40})$$

Από την εξ.(Π4.1.37) λαμβάνεται ότι

$$\begin{aligned} dV' = JdV \Rightarrow \mathbf{n}'_1 \cdot (dA' \mathbf{n}') &= J \mathbf{n}_1 \cdot (dA \mathbf{n}_1) \xrightarrow{\text{εξ. (Π4.1.40)}} \\ \Rightarrow \mathbf{X} \mathbf{n}_1 \cdot (dA' \mathbf{n}') &= J \mathbf{n}_1 \cdot (dA \mathbf{n}_1) \end{aligned} \quad (\text{Π4.1.41})$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{n}_1 , τελικά προκύπτει ότι

$$dA' \mathbf{n}' = J [\mathbf{X}]^{-T} (dA \mathbf{n}) \quad (\text{Π4.1.42})$$

Παρατηρείται ότι η ο υπολογισμός της βαθμίδας παραμόρφωσης αρκεί για τον προσδιορισμό της εξεταζόμενης επιφάνειας στην παραμορφωμένη διαμόρφωση.

Π4.1.2.5 Απειροστικός Τανυστής Παραμόρφωσης

Στα εδάφια Π4.1.2.1-2 δόθηκε η φυσική σημασία του τανυστή παραμόρφωσης Green, η οποία προκύπτει με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Με βάση την υπόθεση αυτή είναι δυνατό να αγνοηθούν οι μη γραμμικοί όροι των συνιστωσών του τανυστή αυτού σε όλες τις σχέσεις που υπεισέρχονται, δηλαδή ισχύει

$$\varepsilon_{ij} \ll 1 \quad \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \approx 0, \quad \forall i, j, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{Π4.1.43,44})$$

Εναλλακτική παραδοχή με την οποία περιορίζεται περισσότερο η κλάση των προβλημάτων που μπορούν να διερευνηθούν αποτελεσματικά είναι η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Με βάση την υπόθεση αυτή, οι μη γραμμικοί όροι των μετατοπίσεων που υπεισέρχονται στις σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων (Π4.1.12) θεωρούνται πολύ μικροί και κατά συνέπεια μπορούν να αγνοηθούν. Ως εκ τούτου, προκύπτουν γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων, οι οποίες εκφράζονται ως

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{Π4.1.45}\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (\text{Π4.1.45}\delta, \varepsilon)$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (\text{Π4.1.45στ})$$

Ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης (infinitesimal strain tensor) σε περιγραφή κατά Lagrange εκφράζεται ως

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Π4.1.46})$$

όπου οι συνιστώσες ε_{ij} ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$) λαμβάνονται από τις εξ. (Π4.1.45).

Αν τυχόν στοιχείο υποβληθεί σε στροφή στερεού σώματος και χρησιμοποιηθεί ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης, θα υπολογιστεί μη μηδενική παραμόρφωση. Αυτό το αποτέλεσμα είναι φυσικά λανθασμένο αφού οποιαδήποτε κίνηση (μετατόπιση ή στροφή) στερεού σώματος δεν προκαλεί παραμόρφωση. Συμπερασματικά, ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση που η αρχική και η τελική διαμόρφωση του σώματος διαφέρουν ελάχιστα. Επομένως, αν σε σώμα ισχύει η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων εξασφαλίζεται ότι και οι παραμορφώσεις θα είναι μικρές. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Κάτι τέτοιο καθίσταται σαφές από το παραπάνω παράδειγμα της στροφής στερεού σώματος, όπου η αρχική και η τελική διαμόρφωση διαφέρουν αισθητά αλλά η παραμόρφωση του στοιχείου (μεταβολές μηκών και γωνιών) είναι μηδενική.

Π4.2 Θεωρία Τάσης

Π4.2.1 Διάνυσμα Τάσης

Εδώ και στα παρακάτω εδάφια, η χρονική στιγμή στην οποία αναφέρονται τα διάφορα μεγέθη συμβολίζεται με χρήση άνω αριστερού δείκτη. Έτσι π.χ. ο συμβολισμός ${}^I\varepsilon$ δηλώνει τον τανυστή παραμόρφωσης την χρονική στιγμή $t = t_I$.

Θεωρούμε σώμα Q την (τυχούσα) χρονική στιγμή $t = t_I$, επί του οποίου ασκούνται ορισμένες δράσεις. Θεωρούμε επίσης τυχούσα τομή, η οποία χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα Q_1 , Q_2 καθώς επίσης και στοιχειώδη επιφάνεια $d^I A$ σε σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ επί της τομής, με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ${}^I \mathbf{n}$ για το τμήμα Q_1 και $-{}^I \mathbf{n}$ για το τμήμα Q_2 . Ορίζουμε ως διάνυσμα τάσης ή ελκυστή (traction vector) ${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n})$, που αντιστοιχεί στο διάνυσμα ${}^I \mathbf{n}$ και στο σημείο P , το διανυσματικό μέγεθος

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = \lim_{d^I A \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}}{d^I A} \quad (\text{Π4.2.1})$$

όπου $d^I \mathbf{p}$ είναι η συνιστάμενη (επιφανειακή) δύναμη που ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d^I A$.

Από την Νευτώνεια Αρχή Δράσης - Αντίδρασης, η δύναμη που ασκείται στο Q_1 (επί της d^1A , στο σημείο P) θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκείται στο Q_2 . Επομένως από τον ορισμό της εξ.(Π4.2.1) έπεται κατευθείαν ότι

$${}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) = -{}^1\mathbf{t}(-{}^1\mathbf{n}) \quad (\text{Π4.2.2})$$

Η παραπάνω βασική σχέση είναι γνωστή ως Αρχή του Cauchy.

Από τον παραπάνω ορισμό καθίσταται σαφές ότι ο ελκυστής δεν αποτελεί διανυσματικό πεδίο με την κλασική έννοια, αφού σε κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το σώμα δεν αντιστοιχίζεται μοναδικός ελκυστής. Για να προσδιοριστεί ο ελκυστής πρέπει να δοθούν τόσο το σημείο στο οποίο αναφέρεται όσο και το κάθετο διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας που διέρχεται από αυτό. Συνεπώς, σε σημείο του σώματος μπορούν να οριστούν άπειροι ελκυστές, καθένας από τους οποίους θα αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένη προσανατολισμένη στοιχειώδη επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο.

Εκτός από τις επιφανειακές δυνάμεις (traction forces) που υπεισέρχονται στον ορισμό του διανύσματος τάσης, πολλές φορές στα σώματα ασκούνται και μαζικές δυνάμεις (body forces), δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται απευθείας πάνω στους «κόκκους» του σώματος. Τέτοιες δυνάμεις δεν μπορούν να «εμφανιστούν» στη διεπιφάνεια κάποιας τομής στο σώμα, ενώ χαρακτηρίζονται ως δυνάμεις πεδίου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μαζικής δύναμης είναι το ίδιο βάρος του σώματος. Θεωρώντας στοιχειώδη όγκο d^1V σε σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ του σώματος, ορίζεται ως μαζική δύναμη ανά μονάδα όγκου η ποσότητα

$${}^1\mathbf{f} = \lim_{d^1V \rightarrow 0} \frac{d^1\mathbf{p}_f}{d^1V} \quad (\text{Π4.2.3})$$

όπου $d^1\mathbf{p}_f$ είναι η συνισταμένη των μαζικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχειώδη όγκο d^1V . Παρατηρείται ότι το ${}^1\mathbf{f}$ αποτελεί διανυσματικό πεδίο, σε αντίθεση με τον ελκυστή ${}^1\mathbf{t}$.

Π4.2.2 Τανυστής Τάσης Cauchy

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αναφοράς με τη βοήθεια του οποίου περιγράφεται η κίνηση είναι σταθερό και δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια d^1A κάθετη στον άξονα Ox_1 . Προφανώς ισχύει ${}^1\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, όπου \mathbf{e}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τον άξονα Ox_1 . Ως ${}^1\sigma_{1j}$, $j = 1, 2, 3$ ορίζονται οι συνιστώσες του ελκυστή ${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1)$, δηλαδή ισχύει

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = ({}^1\sigma_{11}, {}^1\sigma_{12}, {}^1\sigma_{13}) \quad (\text{Π4.2.4})$$

Γενικεύοντας, θεωρούνται και οι συνιστώσες των ελκυστών που αντιστοιχούν και στους άλλους 2 άξονες του συστήματος αναφοράς. Έτσι, λαμβάνουμε

$${}^l\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = {}^l\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + {}^l\sigma_{12}\mathbf{e}_2 + {}^l\sigma_{13}\mathbf{e}_3 \quad (\text{Π4.2.5α})$$

$${}^l\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) = {}^l\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + {}^l\sigma_{22}\mathbf{e}_2 + {}^l\sigma_{23}\mathbf{e}_3 \quad (\text{Π4.2.5β})$$

$${}^l\mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = {}^l\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + {}^l\sigma_{32}\mathbf{e}_2 + {}^l\sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (\text{Π4.2.5γ})$$

Ο τανυστής πραγματικής τάσης ή τανυστής τάσης Cauchy (true or Cauchy stress tensor) ${}^l\boldsymbol{\sigma}$ εκφράζεται ως

$${}^l\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Π4.2.6})$$

όπου για εποπτικούς λόγους παραλείπεται εδώ και παρακάτω ο χρονικός δείκτης από τις συνιστώσες σ_{ij} . Συμπερασματικά η συνιστώσα σ_{ij} , $i=1,2,3$, $j=1,2,3$ του εξεταζόμενου τανυστή ορίζεται ως το πηλίκο της στοιχειώδους δύναμης που δρα κατά τη κατά την κατεύθυνση του Ox_j διά τη στοιχειώδη επιφάνεια d^lA με (μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα \mathbf{e}_i . Σημειώνεται ότι σε κάθε σημείο του σώματος αντιστοιχεί μοναδικός τανυστής τάσης Cauchy (σε δεδομένη χρονική στιγμή).

Π4.2.3 Εξισώσεις Ισορροπίας

Πριν συνεχιστεί η περιγραφή των υπόλοιπων τανυστών τάσης που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή, είναι απαραίτητο να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των ήδη ορισθέντων ελκυστών και του τανυστή τάσης Cauchy.

Για να συσχετιστεί ο (τυχόν) ελκυστής ${}^l\mathbf{t}({}^l\mathbf{n})$ με τις συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy ${}^l\boldsymbol{\sigma}$, εξετάζεται η ισορροπία στοιχειώδους τετραέδρου, το οποίο διαθέτει για πλευρές τις στοιχειώδεις επιφάνειες που είναι κάθετες στα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 και ${}^l\mathbf{n}$. Υποθέτοντας ότι οι συνθήκες είναι ψευδοστατικές, δηλαδή οι αδρανειακές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν και αμελώντας τους όρους των μαζικών δυνάμεων που είναι μικρότερης τάξης από τους αντίστοιχους όρους των επιφανειακών δυνάμεων, λαμβάνονται οι ακόλουθες σχέσεις ισορροπίας

$${}^l t_1 = \sigma_{11} {}^l n_1 + \sigma_{21} {}^l n_2 + \sigma_{31} {}^l n_3 \quad (\text{Π4.2.7α})$$

$${}^l t_2 = \sigma_{12} {}^l n_1 + \sigma_{22} {}^l n_2 + \sigma_{32} {}^l n_3 \quad (\text{Π4.2.7β})$$

$${}^l t_3 = \sigma_{13} {}^l n_1 + \sigma_{23} {}^l n_2 + \sigma_{33} {}^l n_3 \quad (\text{Π4.2.7γ})$$

με ${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = ({}^I t_1, {}^I t_2, {}^I t_3)$ και ${}^I \mathbf{n} = ({}^I n_1, {}^I n_2, {}^I n_3)$. Οι εξ.(Π4.2.7) μπορούν να διατυπωθούν συνοπτικότερα με διανυσματική γραφή ως

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T {}^I \mathbf{n} \quad (\text{Π4.2.8})$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα φανεί παρακάτω είναι χρήσιμες στην διατύπωση συνοριακών συνθηκών προβλημάτων Μηχανικής Συνεχούς Μέσου.

Αποκόπτεται τυχόν όγκος ${}^I V$ από το σώμα (στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, την χρονική στιγμή $t = t_I$), που περικλείεται από την επιφάνεια ${}^I A = \partial {}^I V$. Ισορροπία λαμβάνεται όταν η συνισταμένη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται επί του ${}^I V$ μηδενίζονται, εάν θεωρηθούν ψευδοστατικές συνθήκες. Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων γράφεται συναρτήσεως των ελκυστών ${}^I \mathbf{t}$ (που ασκούνται στην ${}^I A$) και των ανηγμένων μαζικών δυνάμεων ${}^I \mathbf{f}$ (που ασκούνται στον ${}^I V$) ως

$$\iint_{{}^I A} {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) d{}^I A + \iiint_{{}^I V} {}^I \mathbf{f} d{}^I V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.9})$$

Με τη βοήθεια της εξ.(Π4.2.8), η παραπάνω εξίσωση ισορροπίας εκφράζεται ως

$$\iint_{{}^I A} [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T {}^I \mathbf{n} d{}^I A + \iiint_{{}^I V} {}^I \mathbf{f} d{}^I V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.10})$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss (Gauss divergence theorem), το επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξ.(Π4.2.10) μετατρέπεται σε τριπλό, οπότε η εξ.(Π4.2.10) δίδει

$$\iiint_{{}^I V} \text{div} \left([{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \right) d{}^I V + \iiint_{{}^I V} {}^I \mathbf{f} d{}^I V = \mathbf{0} \Rightarrow \iiint_{{}^I V} \left[\text{div} \left([{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \right) + {}^I \mathbf{f} \right] d{}^I V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.11})$$

όπου $\text{div}(\cdot)$ είναι η απόκλιση (divergence) του διανυσματικού πεδίου ή του τανυστή 2ης τάξης που βρίσκεται εντός της παρένθεσης. Στην περίπτωση διανυσματικού πεδίου,

ισχύει $\text{div}(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \partial(\cdot)_i / \partial x_i$ ενώ στην περίπτωση τανυστή 2ης τάξης ισχύει

$\text{div}(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\partial(\cdot)_{ij} / \partial x_j \right) \mathbf{e}_i$. Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε όγκο

${}^I V$, προκύπτει ότι

$$\text{div} \left([{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \right) + {}^I \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.12})$$

Οι εξ.(Π4.2.12) αποτελούν τις κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε ισχυρή μορφή. Αναλυτικά οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \xi_3} + {}^1 f_1 = 0 \quad (\text{Π4.2.13}\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \xi_3} + {}^1 f_2 = 0 \quad (\text{Π4.2.13}\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_3} + {}^1 f_3 = 0 \quad (\text{Π4.2.13}\gamma)$$

Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι στις παραπάνω εξισώσεις είναι ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση της χρονικής στιγμής που εξετάζεται (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3) και όχι ως προς την αρχική διαμόρφωση (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3). Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εξαχθούν εναλλακτικά, εάν εξεταστεί η ισορροπία στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου που ορίζεται από τους άξονες του συστήματος αναφοράς και με μήκη πλευρών $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$.

Η εξίσωση ισορροπίας των ροπών ως προς τυχαίο σημείο K διατυπώνεται ως

$$\iint_{{}^1 A} {}^1 \mathbf{t}({}^1 \mathbf{n}) \times \mathbf{K} \mathbf{E} d{}^1 A + \iiint_{{}^1 V} {}^1 \mathbf{f} \times \mathbf{K} \mathbf{B} d{}^1 V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.14})$$

όπου $E \in {}^1 A$ σημείο που διατρέχει το επιφανειακό σύνορο του όγκου και $B \in {}^1 V$ σημείο που διατρέχει τον όγκο ${}^1 V$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τις εξ.(Π4.2.9-13), η εξ.(Π4.2.14) έπειτα από κάποιες πράξεις καταλήγει στην παρακάτω σχέση

$${}^1 \boldsymbol{\sigma} = [{}^1 \boldsymbol{\sigma}]^T \quad (\text{Π4.2.15})$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι ο τανυστής τάσης Cauchy είναι συμμετρικός. Αναλυτικά θα έχουμε

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (\text{Π4.2.16}\alpha, \beta, \gamma)$$

συμπεραίνοντας ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων περιορίζονται από εννιά σε έξι.

Π4.2.4 1ος Τανυστής Τάσης Piola - Kirchhoff

Ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff αναπτύχθηκε στην προσπάθεια να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας του σώματος συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης $t = 0$. Η εξίσωση ισορροπίας για την τρέχουσα διαμόρφωση $t = t_1$ (Π4.2.9) δίδει

$$\iint_{{}^1 A} {}^1 \mathbf{t}({}^1 \mathbf{n}) d{}^1 A + \iiint_{{}^1 V} {}^1 \mathbf{f} d{}^1 V = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_{{}^0 A} {}^1 \mathbf{t} \frac{d{}^1 A}{d{}^0 A} d{}^0 A + \iiint_{{}^0 V} {}^1 \mathbf{f} \frac{d{}^1 V}{d{}^0 V} d{}^0 V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.17})$$

Για να διευκολυνθεί η ανάλυση ορίζονται δύο επιπλέον μεγέθη. Πρόκειται για τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})$ και το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου ${}^I_0\mathbf{f}$ τα οποία ορίζονται ως

$${}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = \lim_{d^0A \rightarrow 0} \frac{d^I\mathbf{p}}{d^0A} \quad {}^I_0\mathbf{f} = \lim_{d^0V \rightarrow 0} \frac{d^I\mathbf{p}_f}{d^0V} \quad (\text{Π4.2.18}\alpha,\beta)$$

σημειώνοντας ότι ο κάτω αριστερός δείκτης συμβολίζει τη διαμόρφωση ως προς την οποία εκφράζεται το κάθε μέγεθος. Στην περίπτωση ταύτισης του πάνω αριστερού και κάτω αριστερού δείκτη, ο τελευταίος παραλείπεται. Από τους ορισμούς των σχέσεων (Π4.2.1) και (Π4.2.18α) προκύπτει η ακόλουθη βασική ιδιότητα

$${}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})d^0A = {}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n})d^IA \Rightarrow {}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = {}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n})\frac{d^IA}{d^0A} \quad (\text{Π4.2.19}\alpha)$$

Επίσης από τους ορισμούς των σχέσεων (Π4.2.3) και (Π4.2.18β) λαμβάνουμε

$${}^I_0\mathbf{f} = {}^I\mathbf{f}\frac{d^IV}{d^0V} \Rightarrow {}^I_0\mathbf{f} = J^I\mathbf{f} \quad (\text{Π4.2.19}\beta)$$

αφού από την εξ.(Π4.1.27) έχουμε ότι $d^IV = Jd^0V$. Η εξίσωση ισορροπίας (Π4.2.17) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$\iint_{{}^0A} {}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})d^0A + \iiint_{{}^0V} {}^I_0\mathbf{f}d^0V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.20})$$

Η σχέση (Π4.2.19α) γράφεται ως (βλ. εξ.(Π4.2.8))

$${}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = {}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n})\frac{d^IA}{d^0A} \Rightarrow {}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = [{}^I\boldsymbol{\sigma}]^T {}^I\mathbf{n}\frac{d^IA}{d^0A} \quad (\text{Π4.2.21})$$

και με τη βοήθεια της εξ.(Π4.1.42) που συνδέει την απαραμόρφωτη με την παραμορφωμένη επιφάνεια τελικά λαμβάνουμε

$${}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = J[{}^I\boldsymbol{\sigma}]^T [{}^I\mathbf{X}]^{-T} {}^0\mathbf{n} \Rightarrow {}^I_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = J^I\boldsymbol{\sigma} [{}^I\mathbf{X}]^{-T} {}^0\mathbf{n} \quad (\text{Π4.2.22})$$

αφού ο τανυστής τάσης Cauchy είναι συμμετρικός.

Ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff ${}^I_0\mathbf{P}$ εκφράζεται ως

$${}^I_0\mathbf{P} = J^I\boldsymbol{\sigma} [{}^I\mathbf{X}]^{-T} \quad (\text{Π4.2.23})$$

Από την εξ.(Π4.2.22) είναι φανερό ότι ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff συνδέει το κάθετο διάνυσμα ${}^0\mathbf{n}$ της (τυχούσας) απαραμόρφωτης επιφάνειας d^0A με τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^1\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})$, δηλαδή ισχύει

$${}^1\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = {}^1\mathbf{P}^0\mathbf{n} \quad (\text{Π4.2.24})$$

Η εξίσωση ισορροπίας (Π4.2.20) γράφεται συναρτήσσει του τανυστή ${}^1\mathbf{P}$ ως

$$\iint_{{}^0A} {}^1\mathbf{P}^0\mathbf{n} d^0A + \iiint_{{}^0V} {}^1\mathbf{f} d^0V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.25})$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης Gauss λαμβάνουμε

$$\iiint_{{}^0V} \text{div}\left({}^1\mathbf{P}\right) d^0V + \iiint_{{}^0V} {}^1\mathbf{f} d^0V = \mathbf{0} \Rightarrow \iiint_{{}^0V} \left[\text{div}\left({}^1\mathbf{P}\right) + {}^1\mathbf{f} \right] d^0V = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.26})$$

Επειδή η ισορροπία ισχύει ανεξαρτήτως του όγκου 0V που εξετάζεται, προκύπτει η τελική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας σε διαφορική μορφή ως

$$\text{div}\left({}^1\mathbf{P}\right) + {}^1\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\text{Π4.2.27})$$

Αναλυτικά η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως (παραλείπονται για εποπτικούς λόγους εδώ και παρακάτω οι αριστεροί δείκτες στις συνιστώσες του τανυστή ${}^1\mathbf{P}$)

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{13}}{\partial x_3} + {}^1f_1 = 0 \quad (\text{Π4.2.28α})$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_3} + {}^1f_2 = 0 \quad (\text{Π4.2.28β})$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{33}}{\partial x_3} + {}^1f_3 = 0 \quad (\text{Π4.2.28γ})$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται ότι με τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης ή με άλλα λόγια να χρησιμοποιήσουμε περιγραφή Lagrange. Επίσης από την εξ.(Π4.2.23) καθίσταται σαφές ότι ο συγκεκριμένος τανυστής (σε αντίθεση με τον τανυστή τάσης Cauchy) δεν είναι κατ' ανάγκην συμμετρικός αφού αποτελεί γινόμενο συμμετρικού τανυστή και της βαθμίδας παραμόρφωσης η οποία δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρική.

Π4.2.5 Αρχή Δυνατών Έργων

Προτού οριστεί ο 2ο τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff που είναι χρήσιμος στη μελέτη της γεωμετρικά μη γραμμικής συμπεριφοράς παραμορφώσιμων σωμάτων, διατυπώνεται η Αρχή Δυνατών Έργων που αποτελεί τη βάση της αριθμητικής επίλυσης

πολλών προβλημάτων της μηχανικής. Η Αρχή Δυνατών Έργων αποτελεί εναλλακτική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας που διέπουν τη συμπεριφορά των σωμάτων. Το βασικό πλεονέκτημά της έναντι των εξισώσεων ισορροπίας που έχουν ήδη διατυπωθεί είναι ότι πρόκειται για βαθμωτή εξίσωση, σε αντίθεση με τις εξισώσεις που έχουμε ήδη εξετάσει οι οποίες είναι σε διανυσματική μορφή.

Θεωρούμε σώμα στην παραμορφωμένη διαμόρφωσή του την χρονική στιγμή $t = t_I$. Για τυχόν όγκο ${}^I V$ που αποκόπτουμε από το σώμα, έχουμε ήδη διατυπώσει την εξίσωση ισορροπίας σε ολοκληρωτική μορφή (βλ. εξ. (Π4.2.21)). Θεωρώντας τυχόν πεδίο μετατοπίσεων για την τρέχουσα διαμόρφωση του εξεταζόμενου σώματος $\delta {}^I \mathbf{r}$

$$\delta {}^I \mathbf{r} = (\delta {}^I u_1, \delta {}^I u_2, \delta {}^I u_3) \quad (\text{Π4.2.29})$$

το οποίο ωστόσο σέβεται τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, τότε λαμβάνεται η ασθενής μορφή της διανυσματικής εξίσωσης ισορροπίας (Π4.2.12)

$$\iiint_{{}^I V} \left[\text{div} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) + {}^I \mathbf{f} \right] \cdot \delta {}^I \mathbf{r} d {}^I V = 0 \quad (\text{Π4.2.30})$$

όπου το σύμβολο $\delta(\cdot)$ συμβολίζει τον τελεστή δ του λογισμού των μεταβολών (calculus of variations). Υπογραμμίζεται ότι η σχέση (Π4.2.30) είναι βαθμωτή καθώς εντός του ολοκληρώματος έχουμε εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\text{div} \left({}^I \boldsymbol{\sigma} \delta {}^I \mathbf{r} \right) = \left[\text{div} \left({}^I \boldsymbol{\sigma} \right) \right]^T \delta {}^I \mathbf{r} + \text{tr} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^I \nabla \delta {}^I \mathbf{r} \right) \quad (\text{Π4.2.31})$$

η εξ.(Π4.2.30) μετασχηματίζεται ως

$$\begin{aligned} \iiint_{{}^I V} \left\{ \text{div} \left({}^I \boldsymbol{\sigma} \delta {}^I \mathbf{r} \right) - \text{tr} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^I \nabla \delta {}^I \mathbf{r} \right) + {}^I \mathbf{f} \cdot \delta {}^I \mathbf{r} \right\} d {}^I V &= 0 \\ \Rightarrow \iiint_{{}^I V} \left\{ \text{div} \left({}^I \boldsymbol{\sigma} \delta {}^I \mathbf{r} \right) + {}^I \mathbf{f} \cdot \delta {}^I \mathbf{r} \right\} d {}^I V &= \iiint_{{}^I V} \text{tr} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^I \nabla \delta {}^I \mathbf{r} \right) d {}^I V \end{aligned} \quad (\text{Π4.2.32})$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, $\text{tr}(\cdot)$ είναι το ίχνος (trace) του τετραγωνικού μητρώου που βρίσκεται εντός των παρενθέσεων, το οποίο ορίζεται ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του μητρώου αυτού. Επίσης, ${}^I \nabla \delta {}^I \mathbf{r}$ είναι η διανυσματική κλίση του διανυσματικού πεδίου $\delta {}^I \mathbf{r}$ η οποία ορίζεται παρακάτω μέσω της εξ.(Π4.2.34). Αξιοποιώντας το θεώρημα απόκλισης Gauss για το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτει ότι

$$\iint_{{}^I A} \left[\left({}^I \boldsymbol{\sigma} {}^I \mathbf{n} \right) \cdot \delta {}^I \mathbf{r} \right] d {}^I A + \iiint_{{}^I V} \left({}^I \mathbf{f} \cdot \delta {}^I \mathbf{r} \right) d {}^I V = \iiint_{{}^I V} \text{tr} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^I \nabla \delta {}^I \mathbf{r} \right) d {}^I V \quad (\text{Π4.2.33α})$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί εναλλακτικά, με χρήση της σχέσης (Π4.2.8), ως

$$\iint_{A} \left[{}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) \cdot \delta^1\mathbf{r} \right] d^1A + \iiint_{V} ({}^1\mathbf{f} \cdot \delta^1\mathbf{r}) d^1V = \iiint_{V} \text{tr} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^1\nabla \delta^1\mathbf{r} \right) d^1V \quad (\text{Π4.2.33}\beta)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (η οποία καλείται εξίσωση χωρικού δυνατού έργου (spatial virtual work equation)), το αριστερό μέλος καλείται χωρικό δυνατό εξωτερικό έργο (spatial external virtual work) και συμβολίζεται με δ^1W_{ext} ενώ το δεξιό μέλος καλείται χωρικό δυνατό εσωτερικό έργο (spatial internal virtual work) και συμβολίζεται με δ^1W_{int} . Η ορολογία αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι ποσότητες που υπεισέρχονται στα διάφορα ολοκληρώματα είναι έργα επιφανειακών και μαζικών δράσεων ανηγμένες ως προς τις επιφάνειες και τους όγκους επί των οποίων ασκούνται, αντίστοιχα. Ο όρος «χωρικό» χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι τα έργα εκφράζονται συναρτήσει της τρέχουσας διαμόρφωσης, στην οποία χρησιμοποιούνται οι χωρικές μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3 (περιγραφή Euler).

Η ποσότητα ${}^1\nabla \delta^1\mathbf{r}$ εκφράζεται αναλυτικά ως

$${}^1\nabla \delta^1\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^1\delta u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial^1\delta u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial^1\delta u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial^1\delta u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial^1\delta u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial^1\delta u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial^1\delta u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial^1\delta u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial^1\delta u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (\text{Π4.2.34})$$

Παρατηρείται ότι η ποσότητα αυτή εκφράζεται επίσης συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της τρέχουσας και όχι της αρχικής διαμόρφωσης. Εκτελώντας τις πράξεις στο δεξιό μέλος της εξ.(Π4.2.33β) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα συμμετρίας $\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T = {}^1\boldsymbol{\sigma}$ (βλ. εξ.(Π4.2.15)), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^1\nabla \delta^1\mathbf{r} \right) &= \sigma_{11} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_2} + \sigma_{33} \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_3} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_1} \right) \\ &+ \sigma_{13} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_1} \right) + \sigma_{23} \left(\frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{Π4.2.35})$$

όπου στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης παραλήφθηκαν οι αριστεροί ενδείκτες. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\delta^1W_{int} = \iiint_{V} \text{tr} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \delta^1\boldsymbol{\varepsilon} \right) d^1V \quad (\text{Π4.2.36})$$

όπου

$${}^I \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (\text{Π4.2.37})$$

είναι ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης εκτεφρασμένος ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση $t = t_1$. Το ζεύγος ${}^I \boldsymbol{\sigma}$, ${}^I \boldsymbol{\varepsilon}$ καλείται συζυγές ως προς το έργο (work conjugate) αναφορικά με τον (παραμορφωμένο) όγκο του σώματος της τρέχουσας διαμόρφωσης.

Π4.2.6 2ος Τανυστής Τάσης Piola - Kirchhoff

Για να εκφραστεί το δυνατό εσωτερικό έργο συναρτήσει των μεταβλητών θέσης x_1, x_2, x_3 της αρχικής διαμόρφωσης, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff που έχει ήδη οριστεί. Πράγματι, εκκινώντας από την Αρχή Δυνατών Έργων της σχέσης (Π4.2.33β) και εκτελώντας παρόμοιους μετασχηματισμούς με αυτούς του εδαφίου Π4.2.4, καταλήγουμε στην ακόλουθη αναδιατύπωση της Αρχής Δυνατών Έργων

$$\iint_{\partial A} [{}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) \cdot \delta {}^I \mathbf{r}] d^0 A + \iiint_{\partial V} ({}^I \mathbf{f} \cdot \delta {}^I \mathbf{r}) d^0 V = \iiint_{\partial V} tr \left(\left[\begin{smallmatrix} I \\ \partial \end{smallmatrix} \mathbf{P} \right]^T \delta {}^I \mathbf{X} \right) d^0 V \quad (\text{Π4.2.38})$$

Το $\delta {}^I W_{\text{int}}$ πλέον εκφράζεται ως προς την αρχική διαμόρφωση, δηλαδή ισχύει

$$\delta {}^I W_{\text{int}} = \iiint_{\partial V} tr \left(\left[\begin{smallmatrix} I \\ \partial \end{smallmatrix} \mathbf{P} \right]^T \delta {}^I \mathbf{X} \right) d^0 V \quad (\text{Π4.2.39})$$

Παρατηρείται ότι ο τανυστής $\begin{smallmatrix} I \\ \partial \end{smallmatrix} \mathbf{P}$ μαζί με τη βαθμίδα παραμόρφωσης ${}^I \mathbf{X}$ αποτελούν συζυγές ζεύγος.

Ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff επινοήθηκε στην προσπάθεια να ευρεθεί ο συζυγής τανυστής τάσης του τανυστή παραμόρφωσης Green ${}^I \boldsymbol{\varepsilon}^G$. Ο τανυστής παραμόρφωσης Green έχει σημαντική φυσική σημασία (εκφράζει τις σχετικές μεταβολές μηκών και γωνιών των ινών του σώματος (βλ. εδάφια Π4.1.2.1-2)) και για το λόγο αυτό είναι πιο πλεονεκτικό να εκφραστεί το δυνατό εσωτερικό έργο συναρτήσει του τανυστή παραμόρφωσης Green αντί της βαθμίδας παραμόρφωσης. Εξάλλου, οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων συνήθως εκφράζονται με τον συγκεκριμένο τανυστή παραμόρφωσης (τουλάχιστον στην περίπτωση της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων, βλ. και Παράρτημα Π8), γεγονός που καθιστά απαραίτητη

την εύρεση του συζυγούς ζεύγους του. Για να οριστεί ο 2ο τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff, αρχικά ορίζεται διάνυσμα «ψευδοδύναμης» $d^0 \mathbf{p}$, με το οποίο αντιστοιχίζεται η τρέχουσα ασκούμενη δύναμη $d^I \mathbf{p}$ στην αρχική διαμόρφωση ως ακολούθως

$$d^0 \mathbf{p} = \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} d^I \mathbf{p} \quad (\text{Π4.2.40})$$

Από τις σχέσεις (Π4.2.24) και (Π4.2.18α) προκύπτει άμεσα ότι

$$d^0 \mathbf{p} = \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} {}^I \mathbf{P}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (\text{Π4.2.41α})$$

ενώ από τον ορισμό του ${}^I \mathbf{P}$ (βλ. σχέση (Π4.2.23)) έχουμε

$$d^0 \mathbf{p} = \left\{ J \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} {}^I \boldsymbol{\sigma} \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-T} \right\} {}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (\text{Π4.2.41β})$$

Πλέον, είναι δυνατό να οριστεί ο 2ο τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff ${}^I \mathbf{S}$ ως το μέγεθος που συνδέει την απαραμόρφωτη επιφάνεια ${}^0 \mathbf{n} d^0 A$ με την «ψευδοδύναμη» $d^0 \mathbf{p}$. Από την παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$${}^I \mathbf{S} = J \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} {}^I \boldsymbol{\sigma} \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-T} \quad (\text{Π4.2.42α})$$

ή

$${}^I \mathbf{S} = \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} {}^I \mathbf{P} \quad (\text{Π4.2.42β})$$

Από την σχέση (Π4.2.42α) συμπεραίνεται ότι ο τανυστής ${}^I \mathbf{S}$ είναι συμμετρικός (σε αντίθεση με τον ${}^I \mathbf{P}$), δηλαδή ισχύει

$$\left[{}^I \mathbf{S} \right]^T = {}^I \mathbf{S} \quad (\text{Π4.2.43})$$

Εκκινώντας από τη διατύπωση της εξ.(Π4.2.39) για το δυνατό εσωτερικό έργο και αξιοποιώντας την ιδιότητα (βλ. εξ.(Π4.1.5), (1.1.12))

$$\left[{}^I \boldsymbol{\varepsilon}^G \right] = \frac{I}{2} \left(\left[{}^I \mathbf{X} \right]^T {}^I \mathbf{X} - \mathbf{I} \right) \quad (\text{Π4.2.44})$$

όπου

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Π4.2.45})$$

καταλήγουμε έπειτα από πράξεις στην ακόλουθη έκφραση για το δυνατό εσωτερικό έργο

$$\delta^1 W_{\text{int}} = \iiint_{o_V} \text{tr} \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{S} \right]^T \delta \begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \right) d^0 V \quad (\text{Π4.2.46})$$

Συνεπώς, οι τανυστές $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{S}$, $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}}$ αποτελούν συζυγές ζεύγος, ενώ η Αρχή Δυνατών Έργων διατυπώνεται συναρτήσει των τανυστών αυτών ως

$$\iint_{o_A} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{t} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{smallmatrix} \right) \cdot \delta \begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{r} \right] d^0 A + \iiint_{o_V} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{f} \cdot \delta \begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{r} \right) d^0 V = \iiint_{o_V} \text{tr} \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{S} \right]^T \delta \begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \right) d^0 V \quad (\text{Π4.2.47})$$

Στην παραπάνω σχέση απαιτείται προσοχή να μην εκφραστεί λανθασμένα το δυνατό εξωτερικό έργο συναρτήσει του $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{S}$. Ο ελκυστής $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{t} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{smallmatrix} \right)$ που υπεισέρχεται στο $\delta^1 W_{\text{ext}}$ συσχετίζεται με τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{P}$ και όχι με τον τανυστή $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \mathbf{S}$, όπως εξάλλου υποδεικνύει και η σχέση (Π4.2.24).

Π4.2.7 Φυσική Σημασία των Τανυστών Τάσης

Ο τανυστής τάσης Cauchy αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε παραμορφωμένες επιφάνειες της τρέχουσας διαμόρφωσης. Για παράδειγμα, η συνιστώσα $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} \sigma_{11}$ του τανυστή είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας $d^1 A$, η οποία είναι κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της τρέχουσας διαμόρφωσης, διαιρεμένη με το εμβαδόν της $d^1 A$.

Ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Για παράδειγμα, η συνιστώσα $\begin{smallmatrix} 1 \\ \delta \end{smallmatrix} P_{11}$ του τανυστή είναι η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη ως προς τον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, η οποία ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d^1 A$, διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας $d^0 A$. Η αρχική επιφάνεια $d^0 A$ είναι πάντα κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια $d^1 A$ δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα αυτόν.

Ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Η διαφορά με τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff έγκειται στο ότι η ανάλυση της τρέχουσας δύναμης σε συνιστώσες γίνεται ως προς διαφορετικό σύστημα αναφοράς.

Έτσι για παράδειγμα, η συνιστώσα ${}^1_0S_{11}$ του τανυστή είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας d^1A διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας d^0A . Η αρχική επιφάνεια είναι απαραίτητος κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια d^1A δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα.

Συμπερασματικά, ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff «παρακολουθεί» τις στροφές (στροφή στερεού σώματος και διατμητικές παραμορφώσεις) που υφίσταται κατά την παραμόρφωση το υπό εξέταση στοιχείο όγκου, ενώ ο τανυστής τάσης Cauchy και ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff ορίζονται πάντα με βάση τους άξονες του συστήματος αναφοράς της εκάστοτε διαμόρφωσης. Η συγκεκριμένη ιδιότητα του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff τον καθιστά πολύ χρήσιμο εργαλείο στην ανάλυση μη γραμμικών προβλημάτων της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου. Τέλος, επισημαίνεται ότι μέσω των σχέσεων (4.2.23) και (4.2.42α) μπορούν να προσδιοριστεί ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff και ο τανυστής τάσης Cauchy, εάν είναι γνωστός ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff και η βαθμίδα παραμόρφωσης.

Π4.2.8 Τανυστής Τάσης Cauchy Μικρών Μετατοπίσεων

Σε όλες τις εκφράσεις των εξισώσεων ισορροπίας που έχουν εξαχθεί δεν έχει διατυπωθεί καμία υπόθεση σχετικά με το μέγεθος των μετατοπίσεων ή των παραμορφώσεων. Στην περίπτωση που οι μετατοπίσεις είναι μικρές, η διαφορά μεταξύ της αρχικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3) και της τελικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3) θεωρείται πολύ μικρή, συνεπώς ο τανυστής τάσης Cauchy μπορεί να εισαχθεί στις εξισώσεις ισορροπίας εκπεφρασμένος ως προς την αρχική διαμόρφωση. Έτσι, οι σχέσεις (Π4.2.13) γράφονται για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ως

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + {}_0f_1 = 0 \quad (\text{Π4.2.48}\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + {}_0f_2 = 0 \quad (\text{Π4.2.48}\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + {}_0f_3 = 0 \quad (\text{Π4.2.48}\gamma)$$

ενώ οι σχετικές συνοριακές συνθήκες (βλ. εξ.(Π4.2.7)) διαμορφώνονται εδώ ως

$${}_0t_1 = \sigma_{11} {}_0n_1 + \sigma_{21} {}_0n_2 + \sigma_{31} {}_0n_3 \quad (\text{Π4.2.49}\alpha)$$

$${}_0t_2 = \sigma_{12} {}_0n_1 + \sigma_{22} {}_0n_2 + \sigma_{32} {}_0n_3 \quad (\text{Π4.2.49}\beta)$$

$${}_0t_3 = \sigma_{13} {}_0n_1 + \sigma_{23} {}_0n_2 + \sigma_{33} {}_0n_3 \quad (\text{Π4.2.49}\gamma)$$

Η παραγωγή των συνιστωσών του τανυστή τάσης Cauchy πραγματοποιείται πλέον ως προς γνωστές μεταβλητές θέσης και όχι ως προς άγνωστες μεταβλητές της τρέχουσας διαμόρφωσης, γεγονός που συνιστά σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας. Ο τανυστής τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων και ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης (βλ. εξ.(Π4.1.45-46)) αποτελούν συζυγές ζεύγος.

Παράρτημα Π5

Στοιχεία Θεωρίας Υπερελαστικότητας και Θεωρίας Κλασικής Πλαστικότητας

Π5.1 Εισαγωγή

Στο Παράρτημα Π4 όπου παρουσιάστηκαν στοιχεία Μηχανικής Συνεχούς Μέσου διατυπώθηκαν οι ακόλουθες εξισώσεις.

- 6 εξισώσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων (εξ.(Π4.1.12) για τον τανυστή παραμόρφωσης Green ή εξ.(Π4.1.45) για τον απειροστικό τανυστή παραμόρφωσης)
- 3 διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (εξ.(Π4.2.28) για τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff ή εξ.(Π4.2.48) για τον τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων)

Οι εξισώσεις αυτές ορίζονται στο σύνολο του όγκου που καταλαμβάνει το σώμα (τόσο στην αρχική όσο και σε οποιαδήποτε διαμόρφωση που εξετάζουμε) ενώ στο σύνορο του σώματος ισχύουν ορισμένες συνοριακές συνθήκες οι οποίες μπορεί να είναι οι ακόλουθες.

- κινηματικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να δίδονται οι μετατοπίσεις ή οι παραμορφώσεις σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου.
- φυσικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να δίδονται οι (επιφανειακές) δράσεις που ασκούνται σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου.
- μικτές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να υπάρχει δεδομένη συσχέτιση μεταξύ δράσεων και παραμορφώσεων (ή μετατοπίσεων) σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου.

Προκειμένου να επιλυθεί οποιοδήποτε πρόβλημα της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου, πρέπει να προσδιοριστούν για κάθε χρονική στιγμή t και σε κάθε σημείο του σώματος τα ακόλουθα.

- 3 συνιστώσες μετατοπίσεων u_1, u_2, u_3
- 6 ανεξάρτητες συνιστώσες π.χ. του τανυστή παραμόρφωσης Green $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$
- 6 ανεξάρτητες συνιστώσες π.χ. του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12} = S_{21}, S_{13} = S_{31}, S_{23} = S_{32}$. Επισημαίνεται εδώ ότι προσδιορίζοντας το πεδίο μετατοπίσεων είναι δυνατό να υπολογιστεί η βαθμίδα παραμόρφωσης $[\mathbf{X}]$ (βλ. Παράρτημα Π4). Υπολογίζοντας τις συνιστώσες κάποιου τανυστή τάσης είναι δυνατό να προσδιορίσουμε οποιονδήποτε άλλο τανυστή τάσης εφαρμόζοντας τις σχέσεις (Π4.2.23), (Π4.2.42α) όπου υπεισέρχεται η βαθμίδα παραμόρφωσης.

Συνολικά υπάρχουν 15 άγνωστες ποσότητες ενώ διατίθενται 9 εξισώσεις, επομένως δεν είναι δυνατό να λυθεί το πρόβλημα, το οποίο παραμένει αόριστο. Η αοριστία αίρεται εάν θεωρηθούν 6 επιπλέον εξισώσεις (που συνδέουν τα άγνωστα

μεγέθη μεταξύ τους). Στο Παράρτημα Π4 εξετάζονται ξεχωριστά οι παραμορφώσεις σώματος και οι δράσεις που ασκούνται σε αυτό. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση του προβλήματος, αφού η ανάλυση της παραμόρφωσης βασίζεται αποκλειστικά σε γεωμετρικές θεωρήσεις ενώ αυτή των τάσεων στους θεμελιώδεις νόμους της Νευτώνειας Μηχανικής. Ωστόσο από φυσική διαίσθηση καθίσταται αντιληπτό ότι οι δράσεις και οι παραμορφώσεις δεν είναι ανεξάρτητες αλλά συνδέονται μεταξύ τους. Είναι αδύνατο να παραμορφωθεί κάποιο σώμα χωρίς να ασκηθεί επάνω του κάποια δράση. Επιπρόσθετα, είναι γνωστό ότι υπάρχει πολύ μεγάλη ποικιλία στον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνονται τα διάφορα υλικά στις επιβαλλόμενες δράσεις.

Η ακριβής θεωρητική αντιμετώπιση του προσδιορισμού των σχέσεων τάσεων - παραμορφώσεων θα απαιτούσε τη μελέτη των ιδιοτήτων του υλικού σε μοριακό επίπεδο. Κάτι τέτοιο ωστόσο είναι εξαιρετικά δυσχερές. Έτσι αναπτύχθηκαν φαινομενολογικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων όπου η συμπεριφορά του υλικού εξετάζεται σε μακροσκοπική κλίμακα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση βασίζεται αφενός σε αξιωματικές θεωρήσεις και μαθηματικές απλοποιήσεις, αφετέρου στην πειραματική διερεύνηση των ιδιοτήτων του υλικού. Επιπλέον, γενικά η επιβολή δράσεων σε οποιοδήποτε σώμα θα προκαλέσει και μεταβολή θερμοκρασίας εκτός από παραμορφώσεις και αντιστρόφως. Στην παρούσα διατριβή εξετάζονται μόνο καταστατικές σχέσεις στα πλαίσια ισόθερων μεταβολών, δηλαδή οι δράσεις και οι παραμορφώσεις θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Παρακάτω παρουσιάζονται στοιχεία καταστατικής συμπεριφοράς υπερελαστικών και κλασικά πλαστικών υλικών, τα οποία μελετώνται στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.

Π5.2 Στοιχεία Θεωρίας Υπερελαστικότητας

Εξετάζουμε την παραμόρφωση που υφίσταται απειροστό στοιχείο σώματος κατά τη μετάβαση από την αρχική στην τελική διαμόρφωσή του. Το υλικό του στοιχείου καλείται (ιδεατά) ελαστικό (ideally elastic) όταν η ενέργεια που απαιτείται για την παραμόρφωση του είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάβαση από την αρχική (παραμορφωσιακή) διαμόρφωση στην τελική. Άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού είναι οι ακόλουθες.

- Αφού οι δράσεις εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις, έπεται ότι και οι δράσεις είναι ανεξάρτητες από τη μετάβαση από την αρχική στην τελική διαμόρφωση. Επομένως οι δράσεις εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμορφώσεις της διαμόρφωσης που εξετάζεται και είναι ανεξάρτητες από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μηδενικό. Ως αποτέλεσμα, αν σώμα φορτιστεί και στη συνέχεια αποφορτιστεί, το σώμα θα επιστρέψει στην ίδια ακριβώς κατάσταση που βρισκόταν πριν τη φόρτιση ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο θα συμβεί η αποφόρτιση.

Υπάρχουν διάφορες κλάσεις ελαστικών υλικών όπως υπερελαστικά, υποελαστικά, βισκοελαστικά κ.λπ. Στην παρούσα διατριβή εξετάζεται μόνο η υπερελαστική καταστατική συμπεριφορά. Ελαστικό υλικό χαρακτηρίζεται ως **υπερελαστικό** (hyperelastic) ή Green - ελαστικό (Green - elastic) όταν υπάρχει συνάρτηση $F = F\left({}^t\varepsilon_{11}, {}^t\varepsilon_{22}, {}^t\varepsilon_{33}, {}^t\varepsilon_{21} = {}^t\varepsilon_{12}, {}^t\varepsilon_{31} = {}^t\varepsilon_{13}, {}^t\varepsilon_{32} = {}^t\varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right)$ που εξαρτάται από τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green (Παράρτημα Π4) και τις

μεταβλητές θέσης της αρχικής διαμόρφωσης (x_1, x_2, x_3) , τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$d''W = F\left({}^t\varepsilon_{11}, {}^t\varepsilon_{22}, {}^t\varepsilon_{33}, {}^t\varepsilon_{12}, {}^t\varepsilon_{13}, {}^t\varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right)d'{}^0V \quad (\text{Π5.2.1})$$

όπου $d'{}^0V = d'x_1 d'x_2 d'x_3$ είναι ο όγκος του εξεταζόμενου απειροστού στοιχείου στην αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση, ${}^t\varepsilon_{ij}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$) είναι οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green (εξ.(Π4.1.12)), $d''W$ είναι η συνολική ενέργεια (έργο) που απαιτείται για την (ισόθερμη) παραμόρφωση του στοιχειώδους όγκου $d'{}^0V$ του στοιχείου, ενώ οι αριστεροί δείκτες των διαφορών μεγεθών επεξηγούνται στα εδάφια Π4.2.1, Π4.2.4. Η συνάρτηση F καλείται συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης ή τροπικής ενέργειας ανά μονάδα αρχικού όγκου (strain energy function per unit initial volume). Στην περίπτωση που η F λαμβάνει τη μορφή

$$F = F\left({}^t\varepsilon_{11}, {}^t\varepsilon_{22}, {}^t\varepsilon_{33}, {}^t\varepsilon_{12}, {}^t\varepsilon_{13}, {}^t\varepsilon_{23}\right) \quad (\text{Π5.2.2})$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών θέσης, τότε το υλικό καλείται ομογενές (homogeneous). Στην παρούσα διατριβή εξετάζονται αποκλειστικά ομογενή ή κατά τμήματα ομογενή σώματα. Υπογραμμίζεται ότι η μορφή της συνάρτησης F παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής όπου εξετάζεται η παραμόρφωση του σώματος, αφού ο χρόνος εισάγεται μόνο έμμεσα στην εξ.(Π5.2.1) ή στην εξ.(Π5.2.2) μέσω των συνιστωσών της παραμόρφωσης.

Από την εξ.(Π4.2.46) έχει προκύψει ότι ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff και ο τανυστής παραμόρφωσης Green είναι συζυγείς ως προς το έργο. Επομένως, για απειροστή μεταβολή $d(\cdot)$ ως προς το χρόνο των παραμορφωσιακών μεγεθών ισχύει

$$d(d''W) = \left({}^tS_{11}d'{}^t\varepsilon_{11} + {}^tS_{22}d'{}^t\varepsilon_{22} + \dots + {}^tS_{23}d'{}^t\varepsilon_{23} + {}^tS_{32}d'{}^t\varepsilon_{32}\right)d'{}^0V \quad (\text{Π5.2.3})$$

Από την εξ.(Π5.2.2), με διαφορίση ως προς $d(\cdot)$ προκύπτει ότι

$$d(d''W) = \left(\frac{\partial F}{\partial {}^t\varepsilon_{11}}d'{}^t\varepsilon_{11} + \frac{\partial F}{\partial {}^t\varepsilon_{22}}d'{}^t\varepsilon_{22} + \dots + \frac{\partial F}{\partial {}^t\varepsilon_{23}}d'{}^t\varepsilon_{23} + \frac{\partial F}{\partial {}^t\varepsilon_{32}}d'{}^t\varepsilon_{32}\right)d'{}^0V \quad (\text{Π5.2.4})$$

επομένως από τις εξ.(Π5.2.3-4) έπεται ότι

$${}^tS_{ij} = \frac{\partial F}{\partial {}^t\varepsilon_{ij}}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{Π5.2.5α-στ})$$

Οι 6 σχέσεις (Π5.2.5α-στ) είναι οι καταστατικές σχέσεις υπερελαστικού υλικού. Παρατηρείται ότι ο καθορισμός της συνάρτησης F αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό

των καταστατικών σχέσεων, με τις οποίες καθίσταται δυνατό να επιλυθεί το πρόβλημα της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας (15 άγνωστοι με 15 διατιθέμενες εξισώσεις).

Προκειμένου να επιλεγθεί κατάλληλη μορφή της F , αρχικά εξετάζεται η πλέον γενική περίπτωση ανάπτυξής της σε δυναμοσειρά ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές της ως ακολούθως

$$F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(A_{ij} \, {}^t\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(B_{ijkl} \, {}^t\varepsilon_{ij} \, {}^t\varepsilon_{kl} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \left(C_{ijklmn} \, {}^t\varepsilon_{ij} \, {}^t\varepsilon_{kl} \, {}^t\varepsilon_{mn} \right) + \dots \quad (\text{Π5.2.6})$$

όπου A_{ij} , B_{ijkl} , C_{ijklmn} , ... ($i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$) είναι σταθεροί συντελεστές. Από την εξ.(Π5.2.6) παραλήφθηκαν αρνητικές δυνάμεις συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης, αφού για ${}^t\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ θα λαμβάναμε $d^tW \rightarrow \infty$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν έχει φυσικό νόημα. Ο σταθερός όρος παραλήφθηκε επίσης, αφού κατά τη μερική παραγωγή των εξ.(Π5.2.5) θα απαλειφθεί, επομένως δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό των τάσεων ενδιαφέρον. Αντικαθιστώντας την εξ.(Π5.2.6) στις εξ.(Π5.2.5), προκύπτει ότι

$${}^tS_{rs} = A + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} \, {}^t\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} \, {}^t\varepsilon_{ij} \, {}^t\varepsilon_{kl} \right) + \dots, \quad \forall r, s = 1, 2, 3 \quad (\text{Π5.2.7})$$

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση όπου στην απαραμόρφωτη διαμόρφωση δεν υπάρχει αρχική ένταση, για την εξ.(Π5.2.7) θα πρέπει να ισχύει

$$A = 0 \quad (\text{Π5.2.8})$$

συνεπώς η συγκεκριμένη σχέση θα γραφεί ως

$${}^tS_{rs} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} \, {}^t\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} \, {}^t\varepsilon_{ij} \, {}^t\varepsilon_{kl} \right) + \dots, \quad \forall r, s = 1, 2, 3 \quad (\text{Π5.2.9})$$

Με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, ισχύει ${}^t\varepsilon_{ij} \ll 1$, $\forall i, j = 1, 2, 3$, επομένως οι μη γραμμικοί όροι της εξ.(Π5.2.9) που περιέχουν γινόμενα δύο ή περισσότερων συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης μπορούν να αγνοηθούν. Συνεπώς προκύπτει η ακόλουθη γραμμική σχέση τάσεων - παραμορφώσεων

$${}^t_0\mathbf{S} = \mathbf{D}^{el} \, {}^t_0\boldsymbol{\varepsilon}^G \quad (\text{Π5.2.10})$$

όπου στην παραπάνω σχέση υιοθετήθηκε μητρικός - διανυσματικός συμβολισμός με $\left({}^t_0\mathbf{S} \right)^T = \left({}^tS_{11}, {}^tS_{22}, {}^tS_{33}, {}^tS_{12}, {}^tS_{13}, {}^tS_{23} \right)$ να είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff,

$(\mathbf{t}_0 \boldsymbol{\varepsilon}^G)^T = (\mathbf{t}_0 \varepsilon_{11}, \mathbf{t}_0 \varepsilon_{22}, \mathbf{t}_0 \varepsilon_{33}, \mathbf{t}_0 \gamma_{12} = 2 \mathbf{t}_0 \varepsilon_{12}, \mathbf{t}_0 \gamma_{13} = 2 \mathbf{t}_0 \varepsilon_{13}, \mathbf{t}_0 \gamma_{23} = 2 \mathbf{t}_0 \varepsilon_{23})$ να είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green και που συμπεριλαμβάνει τις διατμητικές παραμορφώσεις $\mathbf{t}_0 \gamma_{12}, \mathbf{t}_0 \gamma_{13}, \mathbf{t}_0 \gamma_{23}$ και \mathbf{D}^e να είναι καταστατικό μητρώο σταθερών συντελεστών k_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) διαστάσεων 6×6 . Οι ποσότητες k_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) καλούνται ελαστικές σταθερές. Ο παραπάνω θεμελιώδης καταστατικός νόμος είναι γνωστός ως γενικευμένος νόμος του Hooke (generalized Hooke's law). Στην περίπτωση που υιοθετηθεί η επιπρόσθετη υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων, τότε ο νόμος του Hooke μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Π5.2.11})$$

όπου $(\boldsymbol{\sigma})^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων (εδάφιο Π4.2.8) και $(\boldsymbol{\varepsilon})^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}, \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}, \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης (εδάφιο Π4.1.2.5).

Γενικά το καταστατικό μητρώο \mathbf{D}^{el} περιέχει $6 \times 6 = 36$ ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές k_{ij} που πρέπει να προσδιοριστούν. Ωστόσο, συνήθως τα περισσότερα υλικά διαθέτουν διευθύνσεις συμμετρίας ως προς τις οποίες οι ελαστικές σταθερές να παραμένουν αμετάβλητες. Έτσι στην πλέον γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχει καμία συμμετρία, τα υλικά χαρακτηρίζονται ως ανισότροπα (anisotropic). Υλικά με 3 επίπεδα συμμετρίας χαρακτηρίζονται ως ορθότροπα (orthotropic), ενώ στην περίπτωση όπου η μηχανική συμπεριφορά είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις το υλικό χαρακτηρίζεται ως ισότροπο (isotropic). Η ύπαρξη διευθύνσεων συμμετρίας οδηγεί σε συσχετίσεις των ελαστικών σταθερών μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μειώνεται ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών k_{ij} .

Στην παρούσα διατριβή μελετάται αποκλειστικά η ισότροπη υπερελαστική καταστατική συμπεριφορά. Με στοιχειώδεις γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, αποδεικνύεται διαδοχικά για την περίπτωση αυτή ότι για το μητρώο \mathbf{D}^{el} ισχύουν τα ακόλουθα.

- Παραμένει αμετάβλητο σε οποιαδήποτε στροφή του συστήματος αναφοράς
- Είναι συμμετρικό, δηλαδή ισχύει

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{Π5.2.12})$$

- Υπάρχουν μόνο 2 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Το μητρώο δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathbf{D}^{el} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{Π5.2.13})$$

Θέτοντας

$$k_{12} = \lambda \quad k_{11} - k_{12} = 2\mu \quad (\text{Π5.2.14α,β})$$

λαμβάνονται οι (ανεξάρτητες) σταθερές του Lamé λ , μ (Lamé constants). Οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων μπορούν να αντιστραφούν και να ληφθούν οι ακόλουθες εξισώσεις συσχέτισης παραμορφωσιακών συναρτησει τασικών μεγεθών

$${}^t\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[{}^tS_{11} - \nu ({}^tS_{22} + {}^tS_{33}) \right] \quad (\text{Π5.2.15α})$$

$${}^t\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[{}^tS_{22} - \nu ({}^tS_{11} + {}^tS_{33}) \right] \quad (\text{Π5.2.15β})$$

$${}^t\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[{}^tS_{33} - \nu ({}^tS_{11} + {}^tS_{22}) \right] \quad (\text{Π5.2.15γ})$$

$$2 {}^t\varepsilon_{12} = {}^t\gamma_{12} = \frac{1}{G} {}^tS_{12} \quad 2 {}^t\varepsilon_{13} = {}^t\gamma_{13} = \frac{1}{G} {}^tS_{13} \quad 2 {}^t\varepsilon_{23} = {}^t\gamma_{23} = \frac{1}{G} {}^tS_{23} \quad (\text{Π5.2.15δ,ε,στ})$$

όπου $E = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$ είναι το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young (elastic modulus, Young's modulus), $G = \mu$ είναι το μέτρο διάτμησης (shear modulus) και $\nu = \lambda / [2(\lambda + \mu)]$ είναι ο λόγος του Poisson (Poisson's ratio). Οι σταθερές E, G, ν δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται μέσω της σχέσης

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{Π5.2.16})$$

Χρησιμοποιώντας τις σταθερές E, G, ν , οι σχέσεις (Π5.2.15) μπορούν να γραφούν και αντίστροφα ως

$${}^tS_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) {}^t\varepsilon_{11} + \nu ({}^t\varepsilon_{22} + {}^t\varepsilon_{33}) \right] \quad (\text{Π5.2.17α})$$

$${}^t S_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) {}^t \varepsilon_{22} + \nu ({}^t \varepsilon_{11} + {}^t \varepsilon_{33}) \right] \quad (\text{Π5.2.17}\beta)$$

$${}^t S_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) {}^t \varepsilon_{33} + \nu ({}^t \varepsilon_{11} + {}^t \varepsilon_{22}) \right] \quad (\text{Π5.2.17}\gamma)$$

$${}^t S_{12} = 2G {}^t \varepsilon_{12} = G {}^t \gamma_{12} \quad {}^t S_{13} = 2G {}^t \varepsilon_{13} = G {}^t \gamma_{13} \quad {}^t S_{23} = 2G {}^t \varepsilon_{23} = G {}^t \gamma_{23} \quad (\text{Π5.2.17}\delta, \varepsilon, \sigma)$$

Π5.3 Στοιχεία Θεωρίας Κλασικής Πλαστικότητας

Εξετάζουμε την παραμόρφωση που υφίσταται απειροστό στοιχείο σώματος κατά τη μετάβαση από την αρχική στην τελική διαμόρφωσή του. Το υλικό του στοιχείου καλείται **ελαστοπλαστικό** (elastoplastic, inelastic) όταν το έργο παραμόρφωσης εξαρτάται από τον τρόπο μετάβασης από την αρχική παραμορφωσιακή κατάσταση του στην τελική. Άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού είναι οι ακόλουθες.

- Οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων δεν είναι αμφιμονοσήμαντες όπως στην περίπτωση της ελαστικότητας (εδάφιο Π5.2), αλλά εξαρτώνται από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μη μηδενικό. Ως αποτέλεσμα, αν σώμα φορτιστεί και στη συνέχεια αποφορτιστεί, το σώμα δεν θα επιστρέψει στην ίδια ακριβώς παραμορφωσιακή κατάσταση που βρισκόταν πριν τη φόρτιση και θα αναπτύξει παραμένουσες (μόνιμες) πλαστικές παραμορφώσεις.

Όταν τα τασικά μεγέθη καθορίζονται αποκλειστικά από παραμορφωσιακά μεγέθη και την ιστορία της φόρτισης, τότε αναφερόμαστε σε ελαστοπλαστική θεωρία ανεξάρτητη του ρυθμού (ταχύτητας) παραμόρφωσης (rate - independent elastoplasticity). Αν η συμπεριφορά του υλικού εξαρτάται και από το ρυθμό της παραμόρφωσης ως προς τον χρόνο τότε αναφερόμαστε σε ελαστοπλαστική θεωρία εξαρτώμενη από το ρυθμό παραμόρφωσης (rate - dependent elastoplasticity, viscoplasticity). Στην παρούσα διατριβή μελετάται μόνο η πρώτη περίπτωση ελαστοπλαστικής καταστατικής συμπεριφοράς.

Π5.3.1 Θεωρία Μικρών Μετατοπίσεων - Μικρών Παραμορφώσεων

Ιστορικά η θεωρία κλασικής πλαστικότητας (ανεξάρτητη του ρυθμού των παραμορφώσεων) αναπτύχθηκε με στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων. Συνεπώς, στο παρόν εδάφιο χρησιμοποιούνται ο τανυστής τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων (εδάφιο Π4.2.8) και ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης. Η θεωρία βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές.

1. Τα συνολικά παραμορφωσιακά μεγέθη του εξεταζόμενου απειροστού στοιχείου μεταξύ 2 χρονικών στιγμών t_I , $t = t_I + dt$ ισούνται με το άθροισμα των ελαστικών (αναστρέψιμων) και ανελαστικών (μη αναστρέψιμων) παραμορφωσιακών μεγεθών, δηλαδή ισχύει

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon^{pl} \quad (\text{Π5.3.1}\alpha)$$

όπου με το $d(\cdot)$ συμβολίζεται απειροστή μεταβολή του μεγέθους που βρίσκεται εντός της παρένθεσης ως προς τον χρόνο. Επισημαίνεται ότι δεν αποτελεί συμβολισμό ολικού διαφορικού αλλά μόνο μεταβολή ως προς το χρόνο. Επίσης, $d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{33}, d\gamma_{12}, d\gamma_{13}, d\gamma_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης και που συμπεριλαμβάνει τις διατμητικές παραμορφώσεις, σημειώνοντας ότι η παραμόρφωση πραγματοποιείται μεταξύ 2 χρονικών στιγμών t_1 , $t = t_1 + dt$.

$d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = (d\varepsilon_{11}^{el}, d\varepsilon_{22}^{el}, d\varepsilon_{33}^{el}, d\gamma_{12}^{el}, d\gamma_{13}^{el}, d\gamma_{23}^{el})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από το ελαστικό μέρος των συνιστωσών του $d\boldsymbol{\varepsilon}$ και $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = (d\varepsilon_{11}^{pl}, d\varepsilon_{22}^{pl}, d\varepsilon_{33}^{pl}, d\gamma_{12}^{pl}, d\gamma_{13}^{pl}, d\gamma_{23}^{pl})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από το πλαστικό μέρος των συνιστωσών του $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Τέλος, σημειώνεται ότι εξαιτίας της ισχύος της εξ.(Π5.3.1α), με απλή χρονική ολοκλήρωση προκύπτει ότι αντίστοιχη σχέση ισχύει και για πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Έτσι, λαμβάνοντας $t_1 = 0$ (αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση) προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \int_0^t d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (\text{Π5.3.1}\beta)$$

όπου τα $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = (\varepsilon_{11}^{el}, \varepsilon_{22}^{el}, \varepsilon_{33}^{el}, \gamma_{12}^{el}, \gamma_{13}^{el}, \gamma_{23}^{el})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = (\varepsilon_{11}^{pl}, \varepsilon_{22}^{pl}, \varepsilon_{33}^{pl}, \gamma_{12}^{pl}, \gamma_{13}^{pl}, \gamma_{23}^{pl})$ περιέχουν ολικά συνολικά, ελαστικά και πλαστικά παραμορφωσιακά μεγέθη, αντίστοιχα, τα οποία πραγματοποιούνται μεταξύ της αρχικής και της τρέχουσας χρονικής στιγμής.

2. Οι τάσεις προσδιορίζονται με βάση το νόμο του Hooke (εξ.(Π5.2.11)) με τη θεμελιώδη διαφορά ότι η συσχέτιση γίνεται με τις αναστρέψιμες (ελαστικές) παραμορφώσεις και όχι με τις ολικές.
3. Το υλικό δεν παρουσιάζει βλάβη (ζημιά) κατά την πλαστική διαρροή (plastic flow), δηλαδή οι καταστατικές σχέσεις τάσεων - ελαστικών παραμορφώσεων παραμένουν αμετάβλητες και δεν εξαρτώνται από την εξέλιξη ή τη στάθμη των πλαστικών παραμορφώσεων.

Για να αποφανθούμε αν το υλικό έχει υποστεί πλαστική διαρροή (πλαστικοποίηση), χρησιμοποιείται συνάρτηση f της μορφής

$$f = f(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}(\mathbf{q}), \sigma_y(\mathbf{q})) \quad (\text{Π5.3.2})$$

η οποία καλείται συνάρτηση διαρροής (yield function). Στην παραπάνω σχέση \mathbf{q} είναι διάνυσμα εσωτερικών μεταβλητών (internal variables) του υλικού που καθορίζει όλες τις καταστατικές παραμέτρους που περιγράφουν την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του, \mathbf{a} είναι διάνυσμα καταστατικών παραμέτρων που περιγράφουν τη «μεταφορά» της επιφάνειας διαρροής σε νέα θέση χωρίς όμως αλλαγή του σχήματος ή του μεγέθους της (για ορισμό της επιφάνειας διαρροής βλέπε παρακάτω εξ.(Π5.3.3β)) και σ_y είναι καταστατική παράμετρος που ορίζει την τάση κατά την οποία το υλικό διαρρέει σε πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Το διάνυσμα \mathbf{a} συνήθως είναι μη μηδενικό κατά

την ανακυκλική φόρτιση και προσδιορίζεται από τον νόμο κινηματικής κράτυνσης (kinematic hardening law). Η μεταβολή του σ_y περιγράφει την ομοιόμορφη επέκταση ή συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής και προσδιορίζεται από τον νόμο ισότροπης κράτυνσης (isotropic hardening law). Στην παρούσα διατριβή θεωρούμε ότι το υλικό δεν παρουσιάζει κινηματική κράτυνση, συνεπώς το \mathbf{a} δεν υπεισέρχεται στη συνάρτηση διαρροής.

Το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά όταν ισχύει

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) < 0 \quad (\text{Π5.3.3α})$$

και διαρρέει πλαστικά εάν

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0 \quad (\text{Π5.3.3β})$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί επιφάνεια στο χώρο των τάσεων και καλείται επιφάνεια διαρροής ή κριτήριο διαρροής (yield surface, yield criterion). Υπογραμμίζεται ότι η περίπτωση $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) > 0$ δεν αντιστοιχεί σε πραγματική εντατική κατάσταση του υλικού και είναι αδύνατο να συμβεί. Θεωρούμε την περίπτωση όπου έχει πραγματοποιηθεί πλαστική διαρροή (δηλαδή ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0$) και αναζητούμε την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση του εξεταζόμενου απειροστού στοιχείου για απειροστή προσαύξηση (ως προς το χρόνο) των ολικών παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}$, η οποία θεωρείται εκ των προτέρων γνωστή. Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές 2 και 3, οι σχέσεις προσαυξητικών τάσεων - παραμορφώσεων εκφράζονται ως

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \xrightarrow{\text{εξ. (Π5.3.1)}} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (\text{Π5.3.4})$$

όπου $d\boldsymbol{\sigma} = (d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{33}, d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων που ισχύουν σε 2 χρονικές στιγμές t_1 , $t = t_1 + dt$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι είναι αδύνατο να προσδιοριστούν οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων αν δεν καθοριστούν με οποιονδήποτε τρόπο οι πλαστικοί όροι $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται από το ακόλουθο νόμο πλαστικής ροής (flow rule), ο οποίος είναι γνωστός και ως εξισώσεις των Prandtl - Reuss

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{Π5.3.5})$$

όπου $d\lambda$ είναι βαθμωτό μέγεθος που καλείται συντελεστής αναλογίας (proportionality factor) και $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \right)$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από την παραγωγή της συνάρτησης διαρροής f ως προς τις συνιστώσες

του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}$. Ο νόμος αυτός δηλώνει ότι το διάνυσμα των πλαστικών παραμορφώσεων είναι παράλληλο με το διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Το $d\lambda$ δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί από το κριτήριο διαρροής και μόνο αλλά είναι αναγκαία η μελέτη της χρονικής μεταβολής της συνάρτησης διαρροής. Με διαφορίση (ως προς το χρόνο) της συνάρτησης διαρροής f λαμβάνουμε

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \quad (\text{Π5.3.6})$$

όπου με « \cdot » συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Διακρίνονται οι ακόλουθες 3 περιπτώσεις.

- Εάν $df > 0$, τότε στη νέα χρονική στιγμή $t_1 + dt$ θα ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) > 0$, αφού για την χρονική στιγμή t_1 έχει ληφθεί ότι $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0$. Η περίπτωση είναι αδύνατο να ισχύει αφού έρχεται σε αντίθεση με τον περιορισμό $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) \leq 0$.
- Εάν $df < 0$, τότε στη νέα χρονική στιγμή $t_1 + dt$ θα ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) < 0$, επομένως το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά και ως εκ τούτου οι πλαστικοί όροι θα μηδενίζονται, οπότε προκύπτει ότι

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}} = \mathbf{0} \xrightarrow{\text{εξ. (Π5.3.5)}} d\lambda = 0 \quad (\text{Π5.3.7})$$

Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως ελαστική αποφόρτιση (elastic unloading).

- Εάν $df = 0$, τότε διακρίνονται οι ακόλουθες υποπεριπτώσεις.
 1. Εάν $d\lambda = 0$, τότε από την εξ. (Π5.3.5) έπεται ότι $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}} = \mathbf{0}$, δηλαδή οι πλαστικές παραμορφώσεις δεν αυξάνονται. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως ουδέτερη φόρτιση (neutral loading).
 2. Εάν $d\lambda > 0$, τότε $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}} \neq \mathbf{0}$, δηλαδή έχουμε συνέχιση της πλαστικής διαρροής. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως πλαστική φόρτιση (plastic loading). Αναγκαία συνθήκη για να έχουμε πλαστική φόρτιση είναι η ισχύς της σχέσης $df = 0$, η οποία καλείται και νόμος της συνέπειας (consistency condition)

Η τιμή του $d\lambda$ έχει προσδιοριστεί σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από την πλαστική φόρτιση. Για την περίπτωση αυτή, η εξ. (Π5.3.6) δίδει με τη βοήθεια της εξ. (Π5.3.4)

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{D}^{\text{el}} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{\text{el}} d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \xrightarrow{\text{εξ. (Π5.3.5)}} \\ \Rightarrow df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{\text{el}} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{\text{el}} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \end{aligned} \quad (\text{Π5.3.8})$$

Προκειμένου να συνεχιστεί η παρούσα ανάλυση, είναι αναγκαίο να θεωρηθεί συγκεκριμένος νόμος μεταβολής της τάσης διαρροής σ_y (νόμος ισότροπης κράτυνσης) καθώς και συγκεκριμένο κριτήριο διαρροής. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται το κριτήριο διαρροής Von Mises, το οποίο δίδεται ως

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = \sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\mathbf{q}) \quad (\text{Π5.3.9})$$

όπου σ_e είναι η δρώσα τάση (effective stress) στην περίπτωση της πλέον γενικής τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης, η οποία δίδεται ως

$$\sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 \right] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (\text{Π5.3.10})$$

Θεωρούμε επίσης ότι η τάση διαρροής σ_y εξαρτάται αποκλειστικά από την ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση (total equivalent plastic strain) ε_{eq}^{pl} , η οποία θα είναι η μοναδική εσωτερική μεταβλητή του υλικού. Συνεπώς, λαμβάνουμε

$$\mathbf{q} = (\varepsilon_{eq}^{pl}) \quad \sigma_y = \sigma_y(\varepsilon_{eq}^{pl}) \quad (\text{Π5.3.11,12})$$

Η ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ε_{eq}^{pl} ορίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{eq}^{pl} = \int_0^t d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (\text{Π5.3.13})$$

όπου $d\varepsilon_{eq}^{pl}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ο οποίος ορίζεται ως

$$d\varepsilon_{eq}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(d\varepsilon_{xx}^{pl})^2 + (d\varepsilon_{yy}^{pl})^2 + (d\varepsilon_{zz}^{pl})^2 + \frac{1}{2} \left((d\gamma_{12}^{pl})^2 + (d\gamma_{13}^{pl})^2 + (d\gamma_{23}^{pl})^2 \right) \right]} \quad (\text{Π5.3.14})$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon_{eq}^{pl}) \Rightarrow d\sigma_y = h(\varepsilon_{eq}^{pl}) d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (\text{Π5.3.15})$$

όπου $h(\varepsilon_{eq}^{pl})$ είναι η παράγωγος της τάσης διαρροής ως προς ε_{eq}^{pl} , η οποία καλείται μέτρο κράτυνσης (plastic modulus). Σημειώνεται ότι το μέτρο κράτυνσης $h(\varepsilon_{eq}^{pl})$ αποτελεί χαρακτηριστική καταστατική ιδιότητα του υλικού. Στην περίπτωση που $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) = \text{σταθ.}$, το σ_y μεταβάλλεται γραμμικά και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως γραμμικός ισότροπος νόμος κράτυνσης. Η περίπτωση αυτή είναι και η απλούστερη. Για $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) > 0$ έχουμε επέκταση της επιφάνειας διαρροής και η περίπτωση αυτή

χαρακτηρίζεται ως κράτυνση (hardening), για $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) < 0$ έχουμε συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως χαλάρωση (softening), ενώ για $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) = 0$ η επιφάνεια διαρροής δεν μεταβάλλεται και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως ελαστική - ιδεατά πλαστική (elastic - perfectly plastic).

Για να υπολογιστεί το άγνωστο μέγεθος $d\sigma_y$ της εξ.(Π5.3.8), πρέπει να προσδιοριστεί ο ρυθμός μεταβολής $d\varepsilon_{eq}^{pl}$. Από τις εξ.(Π5.3.9-10), προκύπτουν έπειτα από κάποιες πράξεις οι ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\sigma_{11} - (1/2)(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{\sigma_e} \quad (\text{Π5.3.16}\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\sigma_{22} - (1/2)(\sigma_{11} + \sigma_{33})}{\sigma_e} \quad (\text{Π5.3.16}\beta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} = \frac{\sigma_{33} - (1/2)(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_e} \quad (\text{Π5.3.16}\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} = 3 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_e} \quad (\text{Π5.3.16}\delta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} = 3 \frac{\sigma_{13}}{\sigma_e} \quad (\text{Π5.3.16}\epsilon)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} = 3 \frac{\sigma_{23}}{\sigma_e} \quad (\text{Π5.3.16}\sigma\tau)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (Π5.3.5), (Π5.3.16), η εξ.(Π5.3.14) δίδει έπειτα από κάποιες πράξεις

$$d\varepsilon_{eq}^{pl} = d\lambda \quad (\text{Π5.3.17})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\partial f / \partial \sigma_y = -1$ (βλέπε εξ.(Π5.3.9)), η εξ.(Π5.3.8), με τη βοήθεια της εξ.(Π5.3.17), γράφεται ως

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - h(\varepsilon_{eq}^{pl}) d\lambda \\ \Rightarrow df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} \right) - \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + h \right] d\lambda \end{aligned} \quad (\text{Π5.3.18})$$

Επειδή εξετάζεται η περίπτωση της πλαστικής φόρτισης, έχει ήδη εξαχθεί ότι $df = 0$, συνεπώς η εξ.(Π5.3.18) επιτρέπει τον προσδιορισμό του $d\lambda$ ως ακολούθως

$$d\lambda = \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \right] / \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + h \right] \quad (\text{Π5.3.19})$$

Μετά τον υπολογισμό του $d\lambda$ συναρτήσει των απειροστών ολικών προσανζητικών παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}$, είναι πλέον δυνατό να προσδιοριστεί πλήρως το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο. Αντικαθιστώντας την εξ.(Π5.3.5) στην εξ.(Π5.3.4) προκύπτει

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el}d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el}d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{Π5.3.20})$$

Το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο \mathbf{D}^{el-pl} προκύπτει αντικαθιστώντας την τιμή του $d\lambda$ από την εξ.(Π5.3.19) στην εξ.(Π5.3.20). Τελικά λαμβάνουμε

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el-pl}d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Π5.3.21})$$

όπου

$$\mathbf{D}^{el-pl} = \mathbf{D}^{el} - \frac{\mathbf{D}^{el} \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\left[\mathbf{D}^{el} \right] \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right]}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + h} \quad (\text{Π5.3.22})$$

Τέλος, επισημαίνεται ότι η ελαστοπλαστική καταστατική συμπεριφορά μπορεί να εκφραστεί για πεπερασμένο χρονικό διάστημα ολοκληρώνοντας χρονικά την εξ.(Π5.3.4). Αξιοποιώντας την εξ.(Π5.3.1β) και λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα παραδοχή 3, προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (\text{Π5.3.23})$$

Π5.3.2 Θεωρία Μεγάλων Μετατοπίσεων - Μικρών Παραμορφώσεων

Στην περίπτωση υπερελαστικού υλικού (εδάφιο Π5.2) έχουμε εξάγει ότι η αντικατάσταση του τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων με τον 2ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff και του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης με τον τανυστή παραμόρφωσης Green αρκεί για να προσδιοριστούν πλήρως οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων, όταν ισχύει η υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων. Στην κλασική πλαστικότητα, στα πλαίσια της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων ισχύει παρόμοια επέκταση με αυτήν της θεωρίας ελαστικότητας. Σε όλες τις σχέσεις που έχουν εξαχθεί, αρκεί η παραπάνω αντικατάσταση των τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων για να προσδιοριστεί πλήρως η συμπεριφορά του ελαστοπλαστικού υλικού (βλ. και [Bathe 1996, Gruttmann et al. 2000, Παπαδρακάκης 1998]).

Παράρτημα Π6

Απόδειξη Μηδενισμού Σταθερής Κατανομής Διατμητικών Παραμορφώσεων

Στο παρόν παράρτημα αποδεικνύεται ο μηδενισμός της σταθερής κατανομής διατμητικών παραμορφώσεων που υπεισέρχεται στη μη γραμμική ανάλυση ράβδου υπό ανομοιομόρφη στρέψη (κεφ. 1). Η κατανομή αυτή δίδεται ως (βλ. εξ.(1.2.7δ,ε) και εδάφιο 1.2)

$$(\gamma_{xy})_j = -\theta_Z + (v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x), \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (\text{Π6.1}\alpha)$$

$$(\gamma_{xz})_j = \theta_Y - (v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x), \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (\text{Π6.1}\beta)$$

Η κατανομή μηδενίζεται εάν εισαχθεί ανάλογη κινηματική υπόθεση με τη θεωρία καμπτόμενων ράβδων Bernoulli-Euler, σύμφωνα με την οποία οι διατομές της ράβδου παραμένουν κάθετες στον άξονα Sx . Αρχικά, αγνοείται προς στιγμήν η συμβολή της στρέβλωσης στο πεδίο μετατοπίσεων (1.2.1-3). Διαπιστώνεται εύκολα ότι στην παραμορφωμένη διαμόρφωση οι διατομές της ράβδου παραμένουν επίπεδες. Τυχόν σημείο του επιπέδου της τυχούσας διατομής x έχει διάνυσμα θέσης \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x + u, y + v, z + w) \\ &= (x + u_m + \theta_Y (z - z_C) - \theta_Z (y - y_C), y + v_S - z \sin \theta_x - y(1 - \cos \theta_x), \\ &\quad z + w_S + y \sin \theta_x - z(1 - \cos \theta_x)) \end{aligned} \quad (\text{Π6.2})$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}_{\text{pl}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C(x)$, όπου $\mathbf{r}_C(x)$ είναι το διάνυσμα θέσης του άξονα των γεωμετρικών κέντρων στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, κείται πάντοτε επί του επιπέδου της διατομής x στην παραμορφωμένη διαμόρφωση. Το \mathbf{r}_{pl} εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{pl}} &= (\theta_Y (z - z_C) - \theta_Z (y - y_C), (y - y_C) \cos \theta_x - (z - z_C) \sin \theta_x, \\ &\quad (y - y_C) \sin \theta_x + (z - z_C) \cos \theta_x) \end{aligned} \quad (\text{Π6.3})$$

Για τυχόν διάνυσμα $\mathbf{r}_n = (n_x, n_y, n_z)$ κάθετο στο επίπεδο της διατομής, προφανώς θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{r}_{pl} \cdot \mathbf{r}_n = 0 \quad (\text{Π6.4})$$

όπου με \cdot συμβολίζεται στην παραπάνω σχέση το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Επειδή η εξ.(Π6.4) πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε (y, z) της διατομής, αντικαθιστώντας στην σχέση αυτή την έκφραση του \mathbf{r}_{pl} από την εξ.(Π6.3), λαμβάνουμε

$$\mathbf{r}_n = (n_x, n_x(\theta_Y \sin \theta_x + \theta_Z \cos \theta_x), n_x(\theta_Z \sin \theta_x - \theta_Y \cos \theta_x)) \quad (\text{Π6.5})$$

Επιπρόσθετα, το εφαπτομενικό διάνυσμα στον άξονα των κέντρων συστροφής S (εδάφιο 1.2) αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι παράλληλο με το διάνυσμα $d\mathbf{r}_S / dx$, όπου με $\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_S(x)$ συμβολίζεται το διάνυσμα θέσης του συγκεκριμένου άξονα. Με στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι

$$\frac{d\mathbf{r}_S}{dx} = (1 + u'_m + y_C \theta'_Z - z_C \theta'_Y, v'_S, w'_S) \quad (\text{Π6.6})$$

Υποθέτοντας ότι η διατομή της ράβδου παραμένει κάθετη στον άξονα των κέντρων συστροφής S στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, έπεται ότι

$$\frac{d\mathbf{r}_S}{dx} \parallel \mathbf{r}_n \Rightarrow \mathbf{r}_n = \lambda \frac{d\mathbf{r}_S}{dx}, \text{ όπου } \lambda \in R \quad (\text{Π6.7})$$

Θεωρώντας μικρή «μέση» αξονική μετατόπιση και μικρές καμπτικές στροφές, προκύπτει ότι $1 + u'_m + y_C \theta'_Z - z_C \theta'_Y \approx 1$, συνεπώς από τις εξ.(Π6.5-7) λαμβάνουμε ότι $\lambda = n_x$. Αξιοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, από τις ίδιες σχέσεις συνεπάγεται ότι

$$\theta_Y = v'_S \sin \theta_x - w'_S \cos \theta_x \quad \theta_Z = v'_S \cos \theta_x + w'_S \sin \theta_x \quad (\text{Π6.8α,β})$$

συνεπώς λαμβάνονται επακριβώς οι κινηματικές σχέσεις (1.2.8). Αν ακολουθηθεί η παραπάνω μέθοδος και υποθεθεί ότι η διατομή της ράβδου παραμένει κάθετη στον άξονα CX των γεωμετρικών κέντρων στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, δεν εξάγονται οι παραπάνω εξισώσεις. Έτσι, στο εξεταζόμενο πρόβλημα και αγνοώντας προς στιγμή την επιρροή της στρέβλωσης, η υπόθεση της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Bernoulli-Euler ότι οι διατομές παραμένουν κατά την παραμόρφωση κάθετες στον άξονα των γεωμετρικών κέντρων της ράβδου μεταβάλλεται ως εξής: «**Διατομές παραμένουν κατά την παραμόρφωση κάθετες στον άξονα των κέντρων συστροφής της ράβδου (της γραμμικής ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης)**». Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Π6.8) στις εξ.(Π6.1) προκύπτει ότι η εξεταζόμενη κατανομή διατμητικών παραμορφώσεων μηδενίζεται.

Παράρτημα Π7

Απόδειξη Μοναδικότητας Δευτερογενούς Συνάρτησης Στρέβλωσης

Στο παρόν παράρτημα αποδεικνύεται η μοναδικότητα της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S που υπεισέρχεται στη μη γραμμική ανάλυση ράβδου με δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις (κεφ. 2). Η ϕ_S^S ικανοποιεί το πρόβλημα συννοριακών τιμών των εξ.(2.2.22), (2.2.52) και τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.23β). Στο εδάφιο 2.2.4 προσδιορίστηκε συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_S^S = \phi_{S1}^S$ που να ικανοποιεί τις προαναφερθείσες σχέσεις (βλ. εξ.(2.2.53)). Έστω ότι η ϕ_{S1}^S δεν είναι η μοναδική συνάρτηση που επαληθεύει τις εξ.(2.2.22), (2.2.52), (2.2.23β). Τότε θα υπάρξει συνάρτηση $\phi_{S2}^S \neq \phi_{S1}^S$ η οποία επίσης θα επαληθεύει τις εξισώσεις αυτές. Για τη συνάρτηση $\phi_{Sd}^S = \phi_{S2}^S - \phi_{S1}^S$ θα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} \phi_{Sd}^S = \phi_{S2}^S - \phi_{S1}^S &\Rightarrow \nabla^2 \phi_{Sd}^S = \nabla^2 \phi_{S2}^S - \nabla^2 \phi_{S1}^S \xrightarrow{\text{(εξ.(2.2.52))}} \\ \nabla^2 \phi_{Sd}^S &= \frac{(I_{t2}^S - I_{t1}^S)}{C_S} \phi_S^P \text{ στο } \Omega, \forall x \in [0, l] \end{aligned} \quad (\text{Π7.1})$$

$$\begin{aligned} \phi_{Sd}^S = \phi_{S2}^S - \phi_{S1}^S &\Rightarrow \frac{\partial \phi_{Sd}^S}{\partial n} = \frac{\partial \phi_{S2}^S}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{S1}^S}{\partial n} \xrightarrow{\text{(εξ.(2.2.22))}} \\ \frac{\partial \phi_{Sd}^S}{\partial n} &= 0 \text{ στο } \Gamma_j, \forall x \in [0, l] \end{aligned} \quad (\text{Π7.2})$$

$$\begin{aligned} \phi_{Sd}^S = \phi_{S2}^S - \phi_{S1}^S &\Rightarrow \iint_{\Omega} \phi_{Sd}^S d\Omega = \iint_{\Omega} \phi_{S2}^S d\Omega - \iint_{\Omega} \phi_{S1}^S d\Omega \xrightarrow{\text{(εξ.(2.2.23β))}} \\ \iint_{\Omega} \phi_{Sd}^S d\Omega &= 0, \forall x \in [0, l] \end{aligned} \quad (\text{Π7.3})$$

όπου στην εξ.(Π7.1) οι σταθερές I_{t1}^S, I_{t2}^S δίδονται ως (βλ. εξ.(2.2.29γ))

$$I_{t1}^S = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{S1}^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{S1}^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (\text{Π7.4α})$$

$$I_{t2}^S = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{S2}^S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{S2}^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (\text{Π7.4β})$$

ενώ $\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ είναι ο τελεστής Laplace. Οι παραπάνω σχέσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις εξ.(2.2.22), (2.2.52), διαμορφώνονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως

$$I_{t\ 1}^S = -\frac{I_{t\ 1}^S}{C_S} \iint_{\Omega} \phi_{S\ 1}^S \phi_{S\ 1}^P d\Omega \quad (\text{Π7.5α})$$

$$I_{t\ 2}^S = -\frac{I_{t\ 2}^S}{C_S} \iint_{\Omega} \phi_{S\ 2}^S \phi_{S\ 2}^P d\Omega \quad (\text{Π7.5β})$$

συνεπώς από τις εξ.(Π7.5) συνεπάγεται εύκολα ότι

$$\iint_{\Omega} \phi_{S\ 1}^S \phi_{S\ 1}^P d\Omega = -C_S \quad (\text{Π7.6α})$$

$$\iint_{\Omega} \phi_{S\ 2}^S \phi_{S\ 2}^P d\Omega = -C_S \quad (\text{Π7.6β})$$

Συσχετίζοντας τις παραπάνω εκφράσεις, προκύπτει ότι

$$\iint_{\Omega} \phi_{S\ 1}^S \phi_{S\ 2}^P d\Omega = \iint_{\Omega} \phi_{S\ 2}^S \phi_{S\ 1}^P d\Omega \quad (\text{Π7.7})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εξ.(2.2.52) μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως

$$\phi_{S\ 1}^P = \frac{C_S}{I_{t\ 1}^S} \nabla^2 \phi_{S\ 1}^S \quad (\text{Π7.8α})$$

και ως

$$\phi_{S\ 2}^P = \frac{C_S}{I_{t\ 2}^S} \nabla^2 \phi_{S\ 2}^S \quad (\text{Π7.8β})$$

η εξ.(Π7.7) διαμορφώνεται με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων ως

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \phi_{S\ 1}^S \frac{C_S}{I_{t\ 2}^S} \nabla^2 \phi_{S\ 2}^S d\Omega &= \iint_{\Omega} \phi_{S\ 2}^S \frac{C_S}{I_{t\ 1}^S} \nabla^2 \phi_{S\ 1}^S d\Omega \Rightarrow \\ \frac{I}{I_{t\ 2}^S} \iint_{\Omega} \phi_{S\ 1}^S \nabla^2 \phi_{S\ 2}^S d\Omega &= \frac{I}{I_{t\ 1}^S} \iint_{\Omega} \phi_{S\ 2}^S \nabla^2 \phi_{S\ 1}^S d\Omega \end{aligned} \quad (\text{Π7.9})$$

Τα ολοκληρώματα της παραπάνω εξίσωσης γράφονται, λαμβάνοντας υπόψη την εξ.(2.2.22), με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως

$$\iint_{\Omega} \phi_{S\ 1}^S \nabla^2 \phi_{S\ 2}^S d\Omega = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_{S\ 1}^S}{\partial y} \frac{\partial \phi_{S\ 2}^S}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{S\ 1}^S}{\partial z} \frac{\partial \phi_{S\ 2}^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (\text{Π7.10α})$$

$$\iint_{\Omega} \phi_{S_2}^S \nabla^2 \phi_{S_1}^S d\Omega = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_{S_2}^S}{\partial y} \frac{\partial \phi_{S_1}^S}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{S_2}^S}{\partial z} \frac{\partial \phi_{S_1}^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (\text{Π7.10}\beta)$$

Συμπεραίνεται εύκολα ότι τα ολοκληρώματα των εξ.(Π7.10α) ισούνται με αυτά των εξ.(Π7.10β). Επειδή τα ολοκληρώματα αυτά είναι μη μηδενικά (καθώς τα ολοκληρώματα των σχέσεων (Π7.6) είναι μη μηδενικά), η εξ.(Π7.9) απλοποιείται ως

$$\frac{I}{I_{t_2}^S} = \frac{I}{I_{t_1}^S} \Rightarrow I_{t_1}^S = I_{t_2}^S \quad (\text{Π7.11})$$

Η σχέση (Π7.1) απλοποιείται με τη βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης ως

$$\nabla^2 \phi_{S_d}^S = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad \forall x \in [0, l] \quad (\text{Π7.12})$$

Εξαιτίας της σχέσης (Π7.2), από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι

$$\phi_{S_d}^S = c(x) \quad (\text{Π7.13})$$

όπου c είναι συνάρτηση που εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεταβλητή x . Συνδυάζοντας τις σχέσεις (Π7.3), (Π7.13), προκύπτει ότι

$$\phi_{S_d}^S = 0 \Rightarrow \phi_{S_2}^S = \phi_{S_1}^S \quad (\text{Π7.14})$$

συνεπώς η αρχική υπόθεση ότι $\phi_{S_2}^S \neq \phi_{S_1}^S$ είναι ψευδής και άρα θα ισχύει η παραπάνω σχέση ισότητας των συναρτήσεων $\phi_{S_1}^S, \phi_{S_2}^S$. Συμπερασματικά, η συνάρτηση στρέβλωσης που ορίζεται στο κεφ. 2 είναι μοναδική.

Παράρτημα Π8

Προσέγγιση Παραγώγων Μονοδιάστατης Συνάρτησης με Πεπερασμένες Διαφορές

Π8.1 Εισαγωγή

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζεται η αριθμητική προσέγγιση πρώτης και δεύτερης παραγώγου συνεχούς μονοδιάστατης συνάρτησης. Οι προσεγγιστικές σχέσεις παραγωγίσης μορφώνονται με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor, με το οποίο μπορεί να καθοριστεί η ακρίβεια της προσέγγισης. Οι σχέσεις αυτές διατυπώνονται για σημεία εκατέρωθεν, εμπροσθεν ή όπισθεν κομβικού σημείου, τα οποία απέχουν ίσες ή άνισες αποστάσεις μεταξύ τους και είναι γνωστές ως κεντρικές, εμπρόσθιες ή οπίσθιες διαφορές, αντίστοιχα. Οι κεντρικές διαφορές χρησιμοποιούνται για εσωτερικά κομβικά σημεία, ενώ οι εμπρόσθιες για συνοριακά σημεία στην αρχή και οι οπίσθιες για συνοριακά σημεία στο πέρας. Τονίζεται ότι σημεία ασυνέχειας μιας συνάρτησης (όπως π.χ. γωνίες ή άλματα) θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως συνοριακά (ακραία).

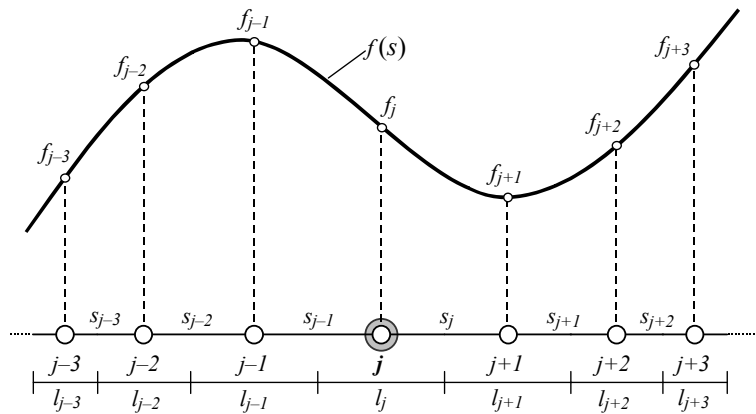
Π8.2 Προσέγγιση Πρώτης και Δεύτερης Παραγώγου

Θεωρούμε πραγματική συνεχή μονοδιάστατη συνάρτηση $f = f(s)$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα με κέντρο το σημείο s , η οποία έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξης n . Θεωρούμε επίσης πραγματικό αριθμό Δs , τέτοιον ώστε η τιμή $s + \Delta s$ της μεταβλητής s να ανήκει στο ανοικτό διάστημα στο οποίο είναι ορισμένη η συνάρτηση $f(s)$. Σύμφωνα με τον γενικό τύπο ανάπτυξης μονοδιάστατης συνάρτησης f σε σειρά Taylor θα ισχύει

$$f(s + \Delta s) = f(s) + \frac{1}{1!} \Delta s \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2!} \Delta s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{1}{3!} \Delta s^3 \frac{\partial^3 f}{\partial s^3} + \dots + \frac{1}{n!} \Delta s^n \frac{\partial^n f}{\partial s^n} + R_n \quad (\text{Π8.2.1})$$

όπου οι παράγωγοι της συνάρτησης f έχουν ληφθεί στο σημείο s , ενώ R_n είναι το υπολειπόμενο σφάλμα, το οποίο μειώνεται όσο αυξάνεται το πλήθος των όρων που λαμβάνονται υπόψη στη σειρά. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια των προσεγγιστικών σχέσεων παραγωγίσης αυξάνεται με τη μείωση των αποστάσεων μεταξύ των κομβικών σημείων, καθώς και με τη μείωση του υπολειπόμενου σφάλματος, δηλαδή με τη θεώρηση περισσότερων όρων στο ανάπτυγμα Taylor. Επίσης, τονίζεται ότι για να είναι η υπολογιζόμενη προσεγγιστική παράγωγος της συνάρτησης f «συνεχής» (δηλαδή για να απεικονίζουν οι τιμές της ομαλή καμπύλη χωρίς απότομες μεταβολές), θα πρέπει η

χρησιμοποιούμενη κεντρική, εμπρόσθια ή οπίσθια διαφορά να έχει της ίδιας τάξης υπολειπόμενο σφάλμα. Στην ακόλουθη ανάλυση, με j συμβολίζεται το σημείο s , με $j-1, j-2, j-3$ τα σημεία όπισθεν του σημείου s , με $j+1, j+2, j+3$ τα σημεία εμπροσθεν του σημείου s , με $f_{j-3}, f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}, f_{j+3}$ τις τιμές της συνάρτησης f στα αντίστοιχα σημεία και με $s_{j-3} = (l_{j-3} + l_{j-2})/2$, $s_{j-2} = (l_{j-2} + l_{j-1})/2$, $s_{j-1} = (l_{j-1} + l_j)/2$, $s_j = (l_j + l_{j+1})/2$, $s_{j+1} = (l_{j+1} + l_{j+2})/2$, $s_{j+2} = (l_{j+2} + l_{j+1})/2$ τις αντίστοιχες αποστάσεις μεταξύ των σημείων (Σχ.Π8.1)



Σχήμα Π8.1. Συνεχής μονοδιάστατη συνάρτηση $f = f(s)$.

Π8.2.1 Κεντρική Διαφορά

Για την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f με τη βοήθεια της κεντρικής διαφοράς, η σχέση (Π8.2.1) διατυπώνεται για τα σημεία $j+1$ και $j-1$ λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι 2^{ης} τάξης. Έτσι, έχουμε

$$f_{j+1} = f_j + s_j \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} s_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \tag{Π8.2.2}$$

$$f_{j-1} = f_j - s_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \tag{Π8.2.3}$$

και θέτοντας

$$a_{11} = \frac{1}{2} s_j^2 \quad a_{12} = s_j \tag{Π8.2.4α,β}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \quad a_{22} = -s_{j-1} \tag{Π8.2.4γ,δ}$$

$$b_1 = f_{j+1} - f_j \quad b_2 = f_{j-1} - f_j \tag{Π8.2.4ε,στ}$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\text{Π8.2.4ζ,η})$$

προκύπτει 2×2 γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [A] \{x\} = \{b\} \quad (\text{Π8.2.5})$$

από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{-s_j^2 f_{j-1} + (s_j^2 - s_{j-1}^2) f_j + s_{j-1}^2 f_{j+1}}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} + s_j)} \quad (\text{Π8.2.6})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2 \frac{s_j f_{j-1} - (s_{j-1} + s_j) f_j + s_{j-1} f_{j+1}}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} + s_j)} \quad (\text{Π8.2.7})$$

ή σε μητρική μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \lambda_l \begin{bmatrix} -s_j^2 & (s_j^2 - s_{j-1}^2) & s_{j-1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.8})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2 \lambda_l \begin{bmatrix} s_j & -(s_{j-1} + s_j) & s_{j-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.9})$$

όπου

$$\lambda_l = \frac{1}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} + s_j)} \quad (\text{Π8.2.10})$$

Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f προσεγγίζονται από τις σχέσεις

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{1}{2h} (-f_{j-1} + f_{j+1}) \quad (\text{Π8.2.11})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) \quad (\text{Π8.2.12})$$

ή σε μητρική μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.13})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.14})$$

με κοινό υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο.

Επισημαίνεται ότι η εξ.(Π8.2.13) μπορεί να προκύψει διατυπώνοντας την εξ.(Π8.2.1) για τα σημεία $j-1$ και $j+1$ λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους όρους μέχρι 1^{ης} τάξης (γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου).

Π8.2.2 Εμπρόσθια Διαφορά

Για την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f με τη βοήθεια της εμπρόσθιας διαφοράς, η σχέση (Π8.2.1) διατυπώνεται για τα σημεία $j+1$ και $j+2$ λαμβάνοντας υπόψη τους όρους μέχρι 2^{ης} τάξης. Έτσι, για το σημείο $j+1$ ισχύει η σχέση (Π8.2.2), ενώ για το σημείο $j+2$ έχουμε

$$f_{j+2} = f_j + (s_j + s_{j+1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2}(s_j + s_{j+1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j \quad (\text{Π8.2.15})$$

Ομοίως με τις εξ.(Π8.2.4), θέτουμε

$$a_{11} = \frac{1}{2}s_j^2 \quad a_{12} = s_j \quad (\text{Π8.2.16α,β})$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}(s_j + s_{j+1})^2 \quad a_{22} = (s_j + s_{j+1}) \quad (\text{Π8.2.16γ,δ})$$

$$b_1 = f_{j+1} - f_j \quad b_2 = f_{j+2} - f_j \quad (\text{Π8.2.16ε,στ})$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j \quad (\text{Π8.2.16ζ,η})$$

οπότε προκύπτει 2×2 γραμμικό σύστημα της μορφής της σχέσης (Π8.2.5), από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{-(2s_j s_{j+1} + s_{j+1}^2)f_j + (s_j + s_{j+1})^2 f_{j+1} - s_j^2 f_{j+2}}{s_j s_{j+1} (s_j + s_{j+1})} \quad (\text{Π8.2.17})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = 2 \frac{s_{j+1} f_j - (s_j + s_{j+1}) f_{j+1} + s_j f_{j+2}}{s_j s_{j+1} (s_j + s_{j+1})} \quad (\text{Π8.2.18})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \lambda_2 \begin{bmatrix} -(2s_j s_{j+1} + s_{j+1}^2) & (s_j + s_{j+1})^2 & -s_j^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.19})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = 2\lambda_2 \begin{bmatrix} s_{j+1} & -(s_j + s_{j+1}) & s_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.20})$$

όπου

$$\lambda_2 = \frac{1}{s_j s_{j+1} (s_j + s_{j+1})} \quad (\text{Π8.2.21})$$

Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f προσεγγίζονται από τις σχέσεις

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} (-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{Π8.2.22})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} (f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \quad (\text{Π8.2.23})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.24})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.25})$$

με υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 και h για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο, αντίστοιχα.

Υπογραμμίζεται ότι η πρώτη παράγωγος με τη βοήθεια της εμπρόσθιας διαφοράς μπορεί να προσεγγιστεί διατυπώνοντας την εξ.(Π8.2.1) για το σημείο $j+1$ λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους όρους μέχρι 1^{ης} τάξης (γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου). Έτσι, έχουμε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{s_j} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} \quad (\text{Π8.2.26})$$

με υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h .

Επίσης, για να μειώσουμε το υπολειπόμενο σφάλμα R_n για τη δεύτερη παράγωγο, διατυπώνουμε τη σχέση (Π8.2.1) για τα σημεία $j+1$, $j+2$ και $j+3$ λαμβάνοντας υπόψη τους όρους μέχρι 3^{ης} τάξης. Έτσι, έχουμε

$$f_{j+1} = f_j + s_j \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} s_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j + \frac{1}{6} s_j^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\text{Π8.2.27})$$

$$f_{j+2} = f_j + (s_j + s_{j+1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j + \frac{1}{6} (s_j + s_{j+1})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\text{Π8.2.28})$$

$$\begin{aligned} f_{j+2} = f_j + (s_j + s_{j+1} + s_{j+2}) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1} + s_{j+2})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j \\ + \frac{1}{6} (s_j + s_{j+1} + s_{j+2})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \end{aligned} \quad (\text{Π8.2.29})$$

και θέτοντας

$$a_{11} = \frac{1}{6} s_j^3 \quad a_{12} = \frac{1}{2} s_j^2 \quad a_{13} = s_j \quad (\text{Π8.2.30α,β,γ})$$

$$a_{21} = \frac{1}{6} (s_j + s_{j+1})^3 \quad a_{22} = \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1})^2 \quad a_{23} = (s_j + s_{j+1}) \quad (\text{Π8.2.30δ,ε,στ})$$

$$a_{31} = \frac{1}{6} (s_j + s_{j+1} + s_{j+2})^3 \quad a_{32} = \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1} + s_{j+2})^2 \quad a_{33} = (s_j + s_{j+1} + s_{j+2}) \quad (\text{Π8.2.30ζ,η,θ})$$

$$b_1 = f_{j+1} - f_j \quad b_2 = f_{j+2} - f_j \quad b_3 = f_{j+3} - f_j \quad (\text{Π8.2.30ια,ιβ,ιγ})$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\text{Π8.2.30ιδ,ιε,ιστ})$$

προκύπτει 3×3 γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \rightarrow [A]\{x\} = \{b\} \quad (\text{Π8.2.31})$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού προσδιορίζεται η προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου. Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η αναλυτική έκφραση της δεύτερης παραγώγου είναι απλή και γράφεται ως

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} (2f_j - 5f_{j+1} + 4f_{j+2} - f_{j+3}) \quad (\text{Π8.2.32})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} [2 \quad -5 \quad 4 \quad -1] \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \\ f_{j+3} \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.33})$$

με υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 .

Π8.2.3 Οπίσθια Διαφορά

Για την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f με τη βοήθεια της οπίσθιας διαφοράς, η σχέση (Π8.2.1) διατυπώνεται για τα σημεία $j-1$ και $j-2$ λαμβάνοντας υπόψη τους όρους μέχρι $2^{\text{ης}}$ τάξης. Έτσι, για το σημείο $j-1$ ισχύει η σχέση (Π8.2.3), ενώ για το σημείο $j-2$ έχουμε

$$f_{j-2} = f_j - (s_{j-2} + s_{j-1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} (s_{j-2} + s_{j-1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad (\text{Π8.2.34})$$

Ομοίως με τις εξ.(Π8.2.4), (Π8.2.16), θέτουμε

$$a_{11} = \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \quad a_{12} = -s_{j-1} \quad (\text{Π8.2.35α,β})$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}(s_{j-2} + s_{j-1})^2 \quad a_{22} = -(s_{j-2} + s_{j-1}) \quad (\text{Π8.2.35γ,δ})$$

$$b_1 = f_{j-1} - f_j \quad b_2 = f_{j-2} - f_j \quad (\text{Π8.2.35ε,στ})$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\text{Π8.2.35ζ,η})$$

οπότε προκύπτει 2×2 γραμμικό σύστημα της μορφής της σχέσης (Π8.2.5), από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{s_{j-1}^2 f_{j-2} - (s_{j-2} + s_{j-1})^2 f_{j-1} + (2s_{j-2}s_{j-1} + s_{j-2}^2) f_j}{s_{j-2}s_{j-1}(s_{j-2} + s_{j-1})} \quad (\text{Π8.2.36})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2 \frac{s_{j-1} f_{j-2} - (s_{j-2} + s_{j-1}) f_{j-1} + s_{j-2} f_j}{s_{j-2}s_{j-1}(s_{j-2} + s_{j-1})} \quad (\text{Π8.2.37})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \lambda_3 \begin{bmatrix} s_{j-1}^2 & -(s_{j-2} + s_{j-1})^2 & (2s_{j-2}s_{j-1} + s_{j-2}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.38})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2\lambda_3 \begin{bmatrix} s_{j-1} & -(s_{j-2} + s_{j-1}) & s_{j-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.39})$$

όπου

$$\lambda_3 = \frac{1}{s_{j-2}s_{j-1}(s_{j-2} + s_{j-1})} \quad (\text{Π8.2.40})$$

Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f προσεγγίζονται από τις σχέσεις

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{1}{2h} (f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j) \quad (\text{Π8.2.41})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} (f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j) \quad (\text{Π8.2.42})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.43})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.44})$$

με υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 και h για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο, αντίστοιχα.

Σημειώνεται ότι, η πρώτη παράγωγος με τη βοήθεια της οπίσθιας διαφοράς μπορεί να προσεγγιστεί διατυπώνοντας την εξ.(Π8.2.1) για το σημείο $j-1$ λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους όρους μέχρι $1^{\text{ης}}$ τάξης (γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου). Έτσι, έχουμε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{s_j} = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} \quad (\text{Π8.2.45})$$

με υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h .

Επίσης, για να μειώσουμε το υπολειπόμενο σφάλμα R_n για τη δεύτερη παράγωγο, η σχέση (Π8.2.1) διατυπώνεται για τα σημεία $j-1$, $j-2$ και $j-3$ λαμβάνοντας υπόψη τους όρους μέχρι $3^{\text{ης}}$ τάξης. Έτσι, έχουμε

$$f_{j-1} = f_j - s_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j - \frac{1}{6} s_{j-1}^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\text{Π8.2.46})$$

$$f_{j-2} = f_j - (s_{j-2} + s_{j-1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} (s_{j-2} + s_{j-1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j - \frac{1}{6} (s_{j-2} + s_{j-1})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\text{Π8.2.47})$$

$$f_{j-3} = f_j - (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j - \frac{1}{6} (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\text{Π8.2.48})$$

και θέτοντας

$$a_{11} = -\frac{1}{6}s_{j-1}^3 \quad a_{12} = \frac{1}{2}s_{j-1}^2 \quad a_{13} = -s_{j-1} \quad (\text{Π8.2.49}\alpha,\beta,\gamma)$$

$$a_{21} = -\frac{1}{6}(s_{j-2} + s_{j-1})^3 \quad a_{22} = +\frac{1}{2}(s_{j-2} + s_{j-1})^2 \quad a_{23} = -(s_{j-2} + s_{j-1}) \quad (\text{Π8.2.49}\delta,\epsilon,\sigma\tau)$$

$$a_{31} = -\frac{1}{6}(s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^3 \quad a_{32} = \frac{1}{2}(s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^2 \quad a_{33} = -(s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})$$

$$(\text{Π8.2.49}\zeta,\eta,\theta)$$

$$b_1 = f_{j-1} - f_j \quad b_2 = f_{j-2} - f_j \quad b_3 = f_{j-3} - f_j \quad (\text{Π8.2.49}\iota,\kappa,\lambda,\mu)$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j \quad x_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j \quad (\text{Π8.2.49}\nu,\xi,\omicron,\pi)$$

προκύπτει 3×3 γραμμικό σύστημα της μορφής της σχέσης (Π8.2.31). Από την επίλυση του συστήματος αυτού προσδιορίζεται η προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου. Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η αναλυτική έκφραση της δεύτερης παραγώγου είναι απλή και γράφεται ως

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2}(-f_{j-3} + 4f_{j-2} - 5f_{j-1} + 2f_j) \quad (\text{Π8.2.50})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

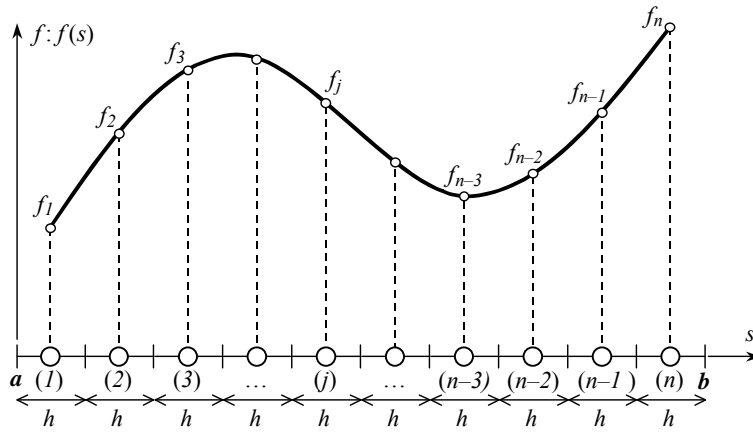
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-3} \\ f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\text{Π8.2.51})$$

με υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 .

Π8.2.4 Προσέγγιση Πρώτης και Δεύτερης Παραγώγου σε Διάστημα Χωρισμένο σε Ίσες Αποστάσεις

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, η πρώτη ($\partial f / \partial s = f'$) και δεύτερη ($\partial^2 f / \partial s^2 = f''$) παράγωγος συνεχούς μονοδιάστατης συνάρτησης $f = f(s)$, ορισμένη στο ανοικτό διάστημα (a, b) το οποίο είναι χωρισμένο σε n ίσες αποστάσεις h (Σχ.Π8.2), προσεγγίζεται από τις ακόλουθες μητρωϊκές σχέσεις αντίστοιχα

$f(s)$ στα n κομβικά σημεία. Σημειώνεται ότι οι σχέσεις (Π8.2.52) και (Π8.2.53) εξασφαλίζουν “συνεχείς” προσεγγιστικές παραγώγους, καθώς η μόρφωσή τους στηρίχτηκε σε πεπερασμένες διαφορές (κεντρικές, εμπρόσθιες, οπίσθιες) με ίδιο υπολειπόμενο της τάξης του h^2 .



Σχήμα Π8.2. Διακριτοποίηση συνάρτησης $f = f(s)$ σε n ίσες αποστάσεις h .

Βιβλιογραφία

- Ahmed M.N. and Zahid M.** (2012) “Constrained torsional analysis of multi-cell composite tapered beams”, *Composites Part B: Engineering*, 43, 1341-1345.
- Aimi A. and Diligenti M.** (2008) “Numerical integration schemes for Petrov-Galerkin infinite BEM”, *Applied Numerical Mathematics*, 58, 1084-1102.
- AISC 360-05** (2005) “*Specification for Structural Steel Buildings*”, American Institute of Steel Construction Inc.
- Alsafadie R., Hji aj M. and Battini J.-M.** (2010) “Corotational mixed finite element formulation for thin-walled beams with generic cross-section”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 3197-3212.
- Alsafadie R., Hji aj M. and Battini J.-M.** (2011) “Three-dimensional formulation of a mixed corotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation”, *Thin-Walled Structures* 49, 523-533.
- Armenakas A.E.** (2006) “*Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*”, Taylor & Francis Group, New York, USA.
- Ascione L., Feo L. and Mancusi G.** (2000) “On the statical behaviour of fibre-reinforced polymer thin-walled beams”, *Composites Part B: Engineering*, 31, 643-654.
- Ashwell D.G.** (1951) “The Axis of Distortion of a Twisted Prism”, *Philosophical Magazine*, 42, 820-832.
- Attalla M.R., Deierlein G.G. and McGuire W.** (1994) “Spread of Plasticity: Quasi-Plastic-Hinge Approach”, *Journal of Structural Engineering*, 120, 2451-2473.
- Attard M.M.** (1986a) “Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams”, *Thin-Walled Structures*, 4, 101-134.
- Attard M.M.** (1986b) “Nonlinear Shortening and Bending Effect Under Pure Torque of Thin-Walled Open Beams”, *Thin-Walled Structures*, 4, 165-177.
- Attard M.M. and Somerville I.J.** (1987) “Non-linear Analysis of Thin-walled Open Beams”, *Computers & Structures*, 25, 437-443.
- Avramov K.V., Galas O.S., Morachkovskii O.K. and Pierre C.** (2009) “Analysis of flexural-flexural-torsional nonlinear vibrations of twisted rotating beams with cross-sectional deplanation”, *Strength of Materials*, 41, 200-208.
- Baba S. and Kajita T.** (1982) “Plastic analysis of torsion of a prismatic beam”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 927-944.
- Back S.Y. and Will K.M.** (1998) “A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1173-1191.
- Bathe K.-J.** (1996) “*Finite element procedures*”, Prentice Hall, New Jersey, USA

- Bathe K.-J. and Chaudhary A.** (1982) “On the displacement formulation of torsion of shafts with rectangular cross-sections”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 565-1580.
- Bathe K.-J. and Wiener P.M.** (1983) “On elastic-plastic analysis of I-beams in bending and torsion”, *Computers & Structures*, 17, 711-718.
- Battini J.-M. and Pacoste C.** (2002) “Plastic instability of beam structures using co-rotational elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 5811-5831.
- Bazant Z.P. and Cedolin L.** (1991) “*Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*”, Oxford University Press, New York, USA.
- Beerman H.J.** (1980) “Warping torsion in commercial vehicle frames, taking into consideration flexible joints”, *International Journal of Vehicle Design*, 1, 397-414.
- Benscoter S.U.** (1954) “A theory of torsion bending for multicell beams”, *Journal of Applied Mechanics*, 21, 25-34.
- Berdichevsky V.L.** (1979) “Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 43, 664-687.
- Bhashyam G. and Prathap G.** (1980) “Galerkin finite element method for non-linear beam vibrations”, *Journal of Sound and Vibration* 72, 191-203.
- Bilinghurst A., Williams J.R.L., Chen G. and Trahair N.S.** (1992) “Inelastic uniform torsion of steel members”, *Computers & Structures*, 42, 887-894.
- Brebbia C.A.** (2010) “In praise of John Katsikadelis - A well deserved eulogy”, *Recent Developments in Boundary Element Methods A volume to honour John T. Katsikadelis*, ed. E.J. Sapountzakis, WIT PRESS, 1-15.
- Brenan K.E., Campbell S.L. and Petzold L.R.** (1989) “*Numerical Solution of Initial-value Problems in Differential-Algebraic Equations*”, North-Holland, Amsterdam, Netherlands.
- Brigham E.** (1988) “*Fast Fourier transform and its applications*”, Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Brush D.O. and Almroth B.O.** (1975) “*Buckling of bars, plates and shells*”, McGraw - Hill Book Co, New York, USA.
- Campanile L.F. and Thwapiah G.** (2009) “A non-linear theory of torsional divergence”, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223, 2707-2711.
- Carrera E., Giunta G., Nali P. and Petrolo M.** (2010) “Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries”, *Computers & Structures*, 88, 283-293.
- Carrera E. and Petrolo M.** (2012) “Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities”, *Meccanica*, 47, 537-556.
- Chen H. and Blandford G.E.** (1989) “A C0 finite element formulation for thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2239-2255.
- Chen G. and Trahair N.** (1992) “Inelastic nonuniform torsion of steel I-beams”, *Journal of Constructional Steel Research*, 23, 189-207.
- Chen G. and Trahair N.** (1994) “Inelastic torsional buckling strengths of cruciform columns”, *Engineering Structures*, 16, 83-80.

Chen W., Wierzbicki T., Breuer O. and Kristiansen K. (2001) “Torsional crushing of foam-filled thin-walled square columns”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 2297-2317.

Christopherson D.G. (1940), “A theoretical investigation of plastic torsion in an I-beam”, *Journal of Applied Mechanics*, 7, 1-4.

Clough R.W. and Penzien J. (1975) “*Dynamics of Structures*”, McGraw-Hill, New York, USA.

Cortinez V.H. and Piovan M.T. (2002) “Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability”, *Journal of Sound and Vibration*, 258, 701-723.

Coulomb C.A. (1784) “Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l’elasticite des files de metal”, *Mémoires de l’Academie Royal des Sciences*, 229-269.

Crespo Da Silva M.R.M. (1988a) “Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams--I. Formulation”, *International Journal of Solids and Structures*, 24, 1225-1234.

Crespo Da Silva M.R.M. (1988b) “Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams--II. Response analysis”, *International Journal of Solids and Structures*, 24, 1235-1242.

Crisfield M.A. (1991) “*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1: Essentials*”, John Wiley and Sons, New York, USA.

Cullimore M.S.G. (1949) “The Shortening Effect: A Nonlinear Feature of Pure Torsion”, *Research, Engineering Structures Supplement*, 153.

Di Egidio A., Luongo A. and Vestroni F. (2003a) “A non-linear model for the dynamics of open cross-section thin-walled beams--Part I: formulation”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38, 1067-1081.

Di Egidio A., Luongo A. and Vestroni F. (2003b) “A non-linear model for the dynamics of open cross-section thin-walled beams--Part II: forced motion”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38, 1083-1094.

Dodds R.H. (1987) “Numerical Techniques for Plasticity Computations in Finite Element Analysis”, *Computers & Structures*, 26, 767-779.

Doltsinis I. (2010) “*Elements of plasticity*”, WIT Press, Southampton, UK.

El Fatmi R. (2007a) “Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory”, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5912-5929.

El Fatmi R. (2007b) “Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part II: Analytical and numerical applications”, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5930-5952.

Emam S.A. (2002) “*A theoretical and experimental study of nonlinear dynamics of buckled beams*”, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA.

Emam S.A. and Nayfeh A.H. (2004a) “Nonlinear Responses of Buckled Beams to Subharmonic-Resonance Excitations”, *Nonlinear Dynamics*, 35, 105-122.

Emam S.A. and Nayfeh A.H. (2004b) “On the Nonlinear Dynamics of a Buckled Beam Subjected to a Primary-Resonance Excitation”, *Nonlinear Dynamics*, 35, 1-17.

- Emam S.A. and Nayfeh A.H.** (2009) “Postbuckling and free vibrations of composite beams”, *Composite Structures*, 88, 636-642.
- EN10210-2:2006** (2006) “Hot finished structural hollow sections of non-alloy and fine grain steels. Tolerances, dimensions and sectional properties”, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium.
- Erkmen R.E. and Mohareb M.** (2007) “Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 44, 1096-1108.
- Eurocode 3** (2005) “Design of Steel Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings”, European Committee for Standardization, EN 1993-1-1, Brussels, Belgium.
- Eurocode 9** (2007a) “Design of Aluminium Structures - Part 1-1: General Structural Rules”, European Committee for Standardization, EN 1999-1-1, Brussels, Belgium.
- Eurocode 9** (2007b) “Design of Aluminium Structures - Part 1-3: Structures Susceptible to Fatigue”, European Committee for Standardization, EN 1999-1-3, Brussels, Belgium.
- Farwell C.R.Jr. and Galambos T.V.** (1969) “Nonuniform torsion of steel beams in inelastic range”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 95, 2813-2829.
- Ferrero J.F., Barrau J.J., Segura J.M., Castanie B. and Sudre M.** (2001) “Torsion of thin-walled composite beams with midplane symmetry”, *Composite Structures*, 54, 111-120.
- Fratantonio M. and Rencis J.J.** (2000) “Exact boundary element integrations for two-dimensional Laplace equation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 325-342.
- Friemann H.** (1993) “Schub und Torsion in Gerade Stäben”, Werner-Verlag, Düsseldorf, Germany.
- Friedmann P.P., Glaz B. and Palacios R.** (2009) “A moderate deflection composite helicopter rotor blade model with an improved cross-sectional analysis”, *International Journal of Solids and Structures*, 46, 2186-2200.
- Gellin S., Lee G.C. and Chern, J.H.** (1983) “A finite element model for thin-walled members”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, 59-71.
- Gendy A.S., Saleeb A.F. and Chang T.Y.P.** (1992) “Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis”, *Computers & Structures*, 42, 531-550.
- Ghadimi P., Dashtimanesh A. and Hosseinzadeh H.** (2010) “Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration”, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 152-163.
- Ghobarah A.A. and Tso W.K.** (1971) “A Non-Linear Thin-Walled Beam Theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 13, 1025-1038.
- Giavotto V., Borri M., Mantegazza P., Ghiringelli G., Carmaschi V., Maffioli G.C. and Mussi F.** (1983) “Anisotropic beam theory and applications”, *Computers & Structures*, 16, 403-413.
- Gregory M.** (1960a) “A nonlinear bending effect when certain unsymmetrical sections are subjected to a pure torque”, *Australian Journal of Applied Science*, 11, 33-48.
- Gregory M.** (1960b) “The bending and shortening effect of pure torsion”, *Australian Journal of Applied Science*, 11, 209-216.

- Gregory M.** (1961) “Elastic torsion of members of thin-walled Open Cross-sections”, *Australian Journal of Applied Science*, 12, 174-193.
- Gruttmann F., Sauer R. and Wagner W.** (2000) “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 1675-1702.
- Gruttmann F., Wagner W. and Sauer R.** (1998a) “Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente”, *Bauingenieur*, 73, 138–143.
- Gruttmann F., Wagner W. and Sauer R.** (1998b) “Zur Berechnung der Schubspannungen aus Querkräften in Querschnitten Prismatischer Stäbe mit der Methode der Finiten Elemente”, *Bauingenieur*, 73, 485-490.
- Gunnlaugsson G.A. and Pedersen P.T.** (1982) “A finite element formulation for beams with thin walled cross-sections”, *Computers & Structures*, 15, 691-699.
- Hu Y., Jin X. and Chen B.** (1996) “A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections”, *Computers & Structures*, 61, 897-908.
- Ingber M.S., Mammoli A.A. and Brown M.J.** (2001) “A comparison of domain integral evaluation techniques for boundary element methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 417-432.
- Itani R.Y.** (1979) “Elasto-plastic torsion of axisymmetric bars”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 105, 1-12.
- Izzuddin B.A. and Lloyd Smith D.** (1996a) “Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames. I: Formulation and implementation”, *Journal of Structural Engineering*, 122, 905-913.
- Izzuddin B.A. and Lloyd Smith D.** (1996b) “Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames. II: Verification and application”, *Journal of Structural Engineering*, 122, 915-925.
- Jeong B.-W., Lim J.-K. and Sinnott S.B.** (2007) “Torsional stiffening of carbon nanotube systems”, *Applied Physics Letters*, 91, art. no. 093102.
- Jiang W.-G. and Henshall J.L.** (2002) “A coupling cross-section finite element model for torsion analysis of prismatic bars”, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 21, 513-522.
- Jirasek M. and Bazant Z.P.** (2002) “*Inelastic analysis of structures*”, John Wiley and Sons, Chichester, UK.
- Johnson A.F.** (1973) “Bending and torsion of anisotropic bars”, *International Journal of Solids and Structures*, 9, 527-551.
- Kantorovich L.V. and Krylov V.I.** (1958) “*Approximate Methods of Higher Analysis*”, Interscience publisher, New York, USA.
- Kappus R.** (1937) “Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich”, *Luftfahrtforschung*, 14, 444–457.
- Katsikadelis J.T.** (1994) “The Analog Equation Method: A Powerful BEM-Based Solution Technique for Solving Linear and Non-linear Engineering Problems”, *Boundary Element Method XVI*, 167-182.

- Katsikadelis J.T.** (2002a) “*Boundary Elements: Theory and Applications*”, Elsevier, Oxford, UK.
- Katsikadelis J.T.** (2002b) “The analog equation method. A boundary-only integral equation method for nonlinear static and dynamic problems in general bodies”, *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, 13-38.
- Katsikadelis J.T.** (2008) “A generalized Ritz Method for Partial Differential Equations in Domains of Arbitrary Geometry Using Global Shape Functions”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32, 353-367.
- Katsikadelis J.T.** (2009) “The meshless analog equation method: I. Solution of elliptic partial differential equations”, *Archive of Applied Mechanics*, 79, 557-578.
- Katsikadelis J.T. and Sapountzakis E.J.** (1988) “An approach to the vibration problem of homogeneous, non-homogeneous and composite membranes based on the boundary element method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 2439-2455.
- Katsikadelis J.T. and Sapountzakis E.J.** (1991) “A BEM solution to dynamic analysis of plates with variable thickness”, *Computational Mechanics*, 7, 369-379.
- Katsikadelis J.T., Sapountzakis E.J. and Zorba E.G.** (1990) “A BEM approach to static and dynamic analysis of plates with internal supports”, *Computational Mechanics*, 7, 31-40.
- Katsikadelis J.T. and Tsiatas G.C.** (2003) “Nonlinear dynamic analysis of heterogeneous orthotropic membranes by the analog equation method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 115-124.
- Kobelev V.V.** (2012) “Thin-walled rods with semi-open profile for semi-solid automotive suspension”, *International Journal of Automotive Technology*, 13, 231-245.
- Kim N. and Kim M.** (2005) “Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 43, 701-734.
- Kollár L.P.** (2001a) “Flexural-torsional buckling of open section composite columns with shear deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7525-7541.
- Kollár L.P.** (2001b) “Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7543-7558.
- Kolodziej J.A. and Gorzelańczyk P.** (2012) “Application of method of fundamental solutions for elasto-plastic torsion of prismatic rods”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 81-86.
- Kraus M.** (2007) “*Computerorientierte Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren gewalzter I-Profile*”, Festschrift Rolf Kindmann, Shaker Verlag, Aachen, Germany, 81-98.
- Kroiss M., Schneeweiß H. and Cremers L.** (2011) “Using ANSA for beams and shells FE concept models at BMW”, *Proc. of the 4th ANSA&μETA International Conference*, Thessaloniki, Greece, June 1-3.
- Laudiero F. and Savoia M.** (1990) “Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section”, *Thin-Walled Structures*, 10, 87-119.
- Laudiero F. and Savoia M.** (1991) “The shear strain influence on the dynamics of thin-walled beams”, *Thin-Walled Structures*, 11, 375-407.

- Le Corvec V. and Filippou F.C.** (2011) “Enhanced 3D Fiber Beam-Column Element With Warping Displacements”, *Proc. of the 3rd ECCOMAS Thematic Conf. on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Corfu, Greece, May 25-28.
- Lewandowski R.** (1994) “Non-Linear Free Vibrations of Beams By the Finite Element and Continuation Methods”, *Journal of Sound and Vibration*, 170, 577-593.
- Liu S., Li Y., He M., Wang B. and Liu B.** (2012) “Bifurcation and stability study in coupling nonlinear rotating machinery's system under the influence of time-varying stiffness”, *Proc. of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, art. no. 6358075, 1263-1268.
- Loughlan J. and Ata M.** (1997) “The constrained torsional characteristics of some carbon fibre composite box-beams”, *Thin-Walled Structures*, 28, 233-252.
- Love A.E.H.** (1944) “*Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”, Dover Publications, New York, USA.
- Lubliner J.** (2006) “*Plasticity Theory*”, Macmillan Publishing, New York, USA.
- Lutz E., Wenjing Y. and Mukherjee S.** (1998) “Elimination of rigid body modes from discretized boundary integral equations”, *International Journal of Solids and Structures*, 35, 4427-4436.
- Machado S.P. and Cortínez V.H.** (2007) “Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations”, *Engineering Structures*, 29, 372-382.
- Manevitch L.I., Kovaleva A.S., Manevitch E.L. and Shepelev D.S.** (2011a) “Limiting phase trajectories and non-stationary resonance oscillations of the Duffing oscillator. Part 1. A non-dissipative oscillator”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, 1089-1097.
- Manevitch L.I., Kovaleva A.S., Manevitch E.L. and Shepelev D.S.** (2011b) “Limiting phase trajectories and non-stationary resonance oscillations of the Duffing oscillator. Part 2. A dissipative oscillator”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, 1098-1105.
- Manevitch L.I., Kovaleva A.S. and Shepelev D.S.** (2011c) “Non-smooth approximations of the limiting phase trajectories for the Duffing oscillator near 1:1 resonance”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240, 1-12.
- Marguerre K.** (1940) “Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten”, *Bauingenieur*, 21, 317-322.
- Maljaars J., Stark J.W.B. and Steenbergen H.M.G.M.** (2004) “Buckling of coped steel beams and steel beam with partial endplates”, *HERON*, 49, 233-271.
- Massonnet C.E.** (1983) “A new approach (including shear lag) to elementary mechanics of materials”, *International Journal of Solids and Structures*, 19, 33-54.
- May I.M. and Al-Shaarbaf A.S.** (1989) “Elasto-plastic analysis of torsion using three-dimensional finite element model”, *Computers & Structures*, 33, 667-678.
- Mendelson A.** (1968) “Solution of elastoplastic torsion problem by boundary integral method”, *NASA technical note D-7872*, 1-18.

- Minghini F., Tullini N. and Laudiero F.** (2007) “Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72, 808-834.
- Minghini F., Tullini N. and Laudiero F.** (2009) “Vibration analysis with second-order effects of pultruded FRP frames using locking-free elements”, *Thin-Walled Structures*, 47, 136-150.
- Mohri F., Azrar L. and Potier-Ferry M.** (2001) “Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections”, *Thin-Walled Structures*, 39, 907-938.
- Mohri F., Azrar L. and Potier-Ferry M.** (2004) “Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections”, *Journal of Sound and Vibration*, 275, 434-446.
- Mohri F., Damil N. and Potier Ferry M.** (2008) “Large torsion finite element model for thin-walled beams”, *Computers & Structures*, 86, 671-683.
- Mokos V.G. and Sapountzakis E.J.** (2011) “Secondary torsional moment deformation effect by BEM”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 897-909.
- Monroe R.J. and Shaw S.W.** (2012) “On the transient response of forced nonlinear oscillators”, *Nonlinear Dynamics*, 67, 2609-2619.
- More J., Burton G. and Kenneth H.** (1980) “*User guide for MINPACK-1*”, Argonne National Labs Report ANL-80-74, Argonne, Illinois, USA.
- Murín J. and Kutis V.** (2008) “An effective finite element for torsion of constant cross-sections including warping with secondary torsion moment deformation effect”, *Engineering Structures*, 30, 2716-2723.
- Murín J., Sedlar T., Kralovic V., Goga V., Kalas A. and Aminbaghai M.** (2012) “Numerical Analysis and Measurement of Non-Uniform Torsion”, *Proc. of the 11th International Conference on Computational Structures Technology*, Dubrovnik, Croatia, 1-4 September, paper 11.
- Muskhelishvili N.I.** (1953) “*Some Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*”, P. Noordhoff, N. V., Groningen, Netherlands.
- Nadai A.** (1923) “Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 3, 442-454.
- Nadai A.** (1931) “*Plasticity*”, McGraw-Hill, New York, USA.
- Nastran** (2007) “*User Guide*”, Siemens PLM Software Inc.
- Navarro Gregori J., Miguel Sosa P., Fernández Prada M.A. and Filippou F.C.** (2007) “A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading”, *Engineering Structures*, 29, 3404-3419.
- Nayfeh A.H. and Emam S.A.** (2008) “Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams”, *Nonlinear Dynamics*, 54, 395-408.
- Ngo-Huu C., Kim S. and Oh J.** (2007) “Nonlinear analysis of space steel frames using fiber plastic hinge concept”, *Engineering Structures*, 29, 649-657.
- Nie G. and Zhong Z.** (2007) “The elasto-plastic and geometrically nonlinear finite element model of space beam considering restraint torsion”, *Key Engineering Materials*, 340-341 I, 335-340.

- Novozhilov V.V.** (1953) “*Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*”, General Publishing Company, Toronto, Canada.
- Nukala P. and White D.** (2004) “A mixed finite element for three-dimensional nonlinear analysis of steel frames”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 2507-2545.
- Orbison J.G., McGuire W. and Abel J.F.** (1982) “Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33, 557-573.
- Ortiz M. and Simo J.C.** (1986) “An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, 353-366.
- Papachristidis A., Fragiadakis M. and Papadrakakis M.** (2010) “A 3D fibre beam-column element with shear modelling for the inelastic analysis of steel structures”, *Computational Mechanics*, 45, 553-572.
- Pai P.F. and Nayfeh A.H.** (1990) “Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams--I. Equations of motion”, *Nonlinear Dynamics*, 1, 477-502.
- Pai P.F. and Nayfeh A.H.** (1991a) “Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams--II. flapwise excitations”, *Nonlinear Dynamics*, 2, 1-34.
- Pai P.F. and Nayfeh A.H.** (1991b) “Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams--III. Chordwise excitations”, *Nonlinear Dynamics*, 2, 137-156.
- Pai P.F. and Nayfeh A.H.** (1994) “A fully nonlinear theory of curved and twisted composite rotor blades accounting for warpings and three-dimensional stress effects”, *International Journal of Solids and Structures*, 31, 1309-1340
- Park S., Fujii D. and Fujitani Y.** (1997) “A finite element analysis of discontinuous thin-walled beams considering nonuniform shear warping deformation”, *Computers & Structures*, 65, 17-27.
- Partridge P.W. and Brebbia C.A.** (1991) “The dual reciprocity boundary element method for the eigenvalue analysis of Helmholtz problems”, *Advances in Engineering Software*, 13, 2-16.
- Parzygnat W.J. and Pao Y.H.** (1975) “Resonance phenomena in non-linear systems governed by the Duffing equation”, *Letters in Applied and Engineering Sciences*, 3, 109-118.
- Pavazza R.** (2005) “Torsion of thin-walled beams of open cross-section with influence of shear”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 1099-1122.
- Pi Y.L. and Trahair N.S.** (1994) “Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns. I: Theory”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 120, 2041-2061.
- Pi Y.L. and Trahair N.S.** (1995) “Inelastic torsion of steel I-beams”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 121, 609-620.
- Pilkey W.D.** (2002) “*Analysis and Design of Elastic Beams: Computational Methods*”, Wiley, New York, USA
- Piovan M.T. and Cortínez V.H.** (2005) “Transverse shear deformability in the dynamics of thin-walled composite beams: Consistency of different approaches”, *Journal of Sound and Vibration*, 285, 721-733.

- Popescu B. and Hodges D.H.** (1999) “Asymptotic treatment of the trapeze effect in finite element cross-sectional analysis of composite beams”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34, 709-721.
- Powell M.J.D.** (1970a) “A hybrid method for nonlinear equations”, Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Rabinowitz, ed., Gordon and Breach, 87-114.
- Powell M.J.D.** (1970b) “A Fortran subroutine for solving systems of Nonlinear algebraic equations”, Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Rabinowitz, ed., Gordon and Breach, 115-161.
- Prathap G. and Pandalai K.A.V.** (1978) “The role of median surface curvature in large amplitude flexural vibrations of thin shells”, *Journal of Sound and Vibration*, 60, 119-131.
- Prathap G. and Varadan T.K.** (1978) “The large amplitude vibration of hinged beams”, *Computers & Structures*, 9, 219-222.
- Prokić A.** (1996) “New warping function for thin-walled beams. I: Theory”, *Journal of Structural Engineering*, 122, 1437-1442.
- Prokic A.** (2006) “On fivefold coupled vibrations of Timoshenko thin-walled beams”, *Engineering Structures*, 28, 54-62.
- Prokic A. and Lukic D.** (2007) “Dynamic analysis of thin-walled closed-section beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 302, 962-980.
- Ramm E. and Hofmann T.J.** (1995) “*Stabtragwerke, Der Ingenieurbau*”, Ed.G. Mehlhorn, Band Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin.
- Ridley-Ellis D.J., Owen J.S. and Davies G.** (2002) “Theoretical and Measured Torsional Behaviour of Rectangular Hollow Sections”, *Proc. of the International Offshore and Polar Engineering Conference*, 12, 41-47.
- Roberts T.M. and Al-Ubaidi H.** (2001) “Influence of shear deformation on restrained torsional warping of pultruded FRP bars of open cross section”, *Thin-Walled Structures*, 39, 395-414.
- Roik K.H.** (1978) “*Vorlesungen über Stahlbau*”, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, Germany.
- Roik K. and Sedlacek G.** (1966) “Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen-Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes”, *Stahlbau*, 35, 43-52.
- Ronagh H.R. and Bradford M.A.** (1999) “Non-linear analysis of thin-walled members of open cross-section”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 535-552.
- Rothert H. and Gensichen V.** (1987) “*Nichtlineare Stabstatik*”, Springer-Verlag, Berlin.
- Rozmarynowski B. and Szymczak C.** (1984) “Non-linear free torsional vibrations of thin-walled beams with bisymmetric cross-section”, *Journal of Sound and Vibration*, 97, 145-152.
- Rubin H.** (2005) “Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern Mit Konstantem Querschnitt Unter Berücksichtigung Sekundärer Schubverformungen”, *Stahlbau*, 74, 826-842.
- Rubin H.** (2007) “Torsions-Querschnittswerte für rechteckige Hohlprofile nach EN 10210-2:2006 und EN 10219-2:2006”, *Stahlbau*, 76, 21-33.

- Saadé K., Espion B. and Warzée G.** (2004) “Non-uniform torsional behavior and stability of thin-walled elastic beams with arbitrary cross sections”, *Thin-Walled Structures*, 42, 857-881.
- Sadowsky M.A.** (1941) “An extension of the sand-heap analogy in plastic torsion applicable to cross sections having one or more holes”, *Journal of Applied Mechanics*, 8, 166-168.
- Saint-Venant A.** (1855) “Memoires sur la torsion des prismes”, *Memoires des Savants Etrangers. France*, XIV, 233-560.
- Sapountzakis E.J.** (2000) “Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method”, *Computers & Structures*, 77, 659-667.
- Sapountzakis E.J.** (2001) “Nonuniform torsion of multi-material composite bars by the boundary element method”, *Computers & Structures*, 79, 2805-2816.
- Sapountzakis E.J. and Dikaros I.C.** (2011) “Non-linear flexural-torsional dynamic analysis of beams of arbitrary cross section by BEM”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46, 782-794.
- Sapountzakis E.J. and Dourakopoulos J.A.** (2008) “Flexural - torsional buckling analysis of composite beams by BEM including shear deformation effect”, *Mechanics Research Communications*, 35, 497-516.
- Sapountzakis E.J. and Dourakopoulos J.A.** (2010) “Shear Deformation Effect in Flexural-torsional Buckling Analysis of Beams of arbitrary cross Section by BEM”, *Structural Engineering and Mechanics*, 35, 141-173.
- Sapountzakis E.J. and Katsikadelis J.T.** (1991) “Boundary element solution for plates of variable thickness”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 117, 1241-1256.
- Sapountzakis E.J. and Katsikadelis J.T.** (1992) “Unilaterally supported plates on elastic foundations by the boundary element method”, *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 59, 580-586.
- Sapountzakis E.J. and Katsikadelis J.T.** (2000) “Analysis of Plates Reinforced with Beams”, *Computational Mechanics*, 26, 66-74.
- Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.** (2001) “Nonuniform Torsion of Composite Bars by Boundary Element Method”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 127, 945-953.
- Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.** (2003a) “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion by BEM”, *Computational Mechanics*, 30, 131-142.
- Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.** (2003b) “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion of Composite Bars by BEM”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 4337-4353.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2007) “Nonlinear Inelastic Uniform Torsion of Bars by BEM”, *Proc. of the 8th HSTAM International Congress on Mechanics*, Patras, Greece, 12-14 July, 145-152.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2008a) “Nonlinear Inelastic Uniform Torsion of Bars by BEM”, *Computational Mechanics*, 42, 77-94.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2008b) “Nonlinear Inelastic Uniform Torsion of Composite Bars by BEM”, *Proc. of the 6th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Thessaloniki, Greece, 19-21 June, paper 1207, 29.

- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2008c) “Effect of Axial Restraint in Composite Bars under Nonlinear Inelastic Uniform Torsion by BEM”, *Proc. of the 8th World Congress on Computational Mechanics*, Venice, Italy, 30 June - 4 July, paper 397, 223.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2008d) “Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion of Bars of Arbitrary Cross Section Using the Boundary Element Method”, *Proc. of the 9th International Conference on Computational Structures Technology*, Athens, Greece, 2-5 September, paper 145.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009a) “Nonlinear Inelastic Uniform Torsion of Composite Bars by BEM”, *Computers & Structures*, 87, 151-166.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009b) “Effect of Axial Restraint in Composite Bars under Nonlinear Inelastic Uniform Torsion by BEM”, *Engineering Structures*, 31, 1190-1203.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009c) “Composite Bars of Arbitrary Cross Section in Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion by BEM”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 135, 12, 1354-1367.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009d) “Composite Bars of Arbitrary Cross-Section in Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion by BEM”, *Proc. of the 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics*, Rhodes, Greece, 22-24 June, paper SE128, 132.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009e) “Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Bars by BEM”, *Proc. of the ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Rhodes, Greece, 22-24 June, paper CD143, 27.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009f) “Warping Shear Stresses in Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Bars by BEM”, *Proc. of the 10th International Conference on Boundary Element Techniques*, Athens, Greece, 22-24 July, 69-79.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2009g) “A BEM Solution to the Nonlinear Inelastic Uniform Torsion Problem of Composite Bars”, *Recent Advances in Boundary Element Methods, A Volume to Honor Professor Dimitri Beskos, Manolis G. and Polyzos D. (eds.)*, Springer-Verlag, Chapter 26, 399-414, ISBN 978-1-4020-9709-6.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2010a) “Non-linear Elastic Non-uniform Torsion of Bars of Arbitrary Cross-Section by BEM”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45, 63-74.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2010b) “Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Bars by the Boundary Element Method”, *Journal of Sound and Vibration*, 329, 1853-1874.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2010c) “Warping Shear Stresses in Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Bars by BEM”, *Engineering Structures*, 32, 741-752.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2010d) “Shear Deformable Bars of Doubly Symmetrical Cross Section Under Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations - Application to Torsional Postbuckling Configurations and Primary Resonance Excitations”, *Nonlinear Dynamics*, 62, 967-987.
- Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.** (2010e) “Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Shear Deformable Bars - Application to Torsional Postbuckling

Configurations”, *Proc. of the 11th International Conference on Boundary Element Techniques*, Berlin, Germany, 12-14 July, 482-489.

Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J. (2010f) “Inelastic Nonuniform Torsion of Bars Using the Boundary Element Method”, *Proc. of the 10th International Conference on Computational Structures Technology*, Valencia, Spain, 14-17 September, paper 294.

Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J. (2010g) “*Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Shear Deformable Bars - Application to Torsional Postbuckling Configurations and Primary Resonance Excitations*”, Recent Developments in Boundary Element Methods, A Volume to Honor Professor John T. Katsikadelis, Sapountzakis E. (ed.), WIT Press, Chapter 13, 171-184, ISBN 978-1-84564-492-5.

Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J. (2011) “Inelastic Nonuniform Torsion of Bars of Doubly Symmetric Cross Section by BEM”, *Computers & Structures*, 89, 2388-2401.

Saritas A. and Filippou F.C. (2009) “Frame Element for Metallic Shear-Yielding Members under Cyclic Loading”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 135, 1115-1123.

Schardt R. (1966) “Eine Erweiterung der Technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke”, *Stahlbau*, 35, 161-171 and 384.

Senjanović I., Tomašević S. and Vladimir N. (2009) “An advanced theory of thin-walled girders with application to ship vibrations”, *Marine Structures*, 22, 387-437.

Shakourzadeh H., Guo Y.Q. and Batoz J.-L. (1995) “A torsion bending element for thin-walled beams with open and closed cross sections”, *Computers & Structures*, 55, 1045-1054.

Shama M. (2010) “*Torsion and shear stresses in ships*”, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Simo J.C., Hjelmstad K.D. and Taylor R.L. (1984) “Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42, 301-330.

Simo J.C. and Hughes T.J.R. (1998) “*Computational inelasticity*”, Springer-Verlag, New York, USA.

Simo J.C. and Vu-Quoc L. (1991) “A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 27, 371-393.

Sina S.A., Haddadpour H. and Navazi H.M. (2012) “Nonlinear free vibrations of thin-walled beams in torsion”, *Acta Mechanica*, 223, 2135-2151.

Slivker V. (2007) “*Mechanics of Structural Elements*”, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Smith J.O. and Sidebottom O.M. (1965) “*Inelastic behaviour of load carrying members*”, John Wiley & Sons, Inc. New York, USA.

Sokolnikoff I.S. (1956) “*Mathematical Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill, New York, USA.

Sokolovsky W.W. (1946) “*Theory of plasticity*”, Moscow, Russia.

Stemple A.D. and Lee S.W. (1989) “Finite element model for composite beams undergoing large deflection with arbitrary cross-sectional warping”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2143-2160.

- Strese H.** (1984) “Remarks concerning the boundary element method in potential theory”, *Applied Mathematical Modelling*, 8, 40-44.
- Struble R.A.** (1964) “A note on periodic solution of the Duffing equation”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 9, 498-501.
- Struble R.A. and Yionoulis S.M.** (1962) “General perturbational solution of the harmonically forced Duffing equation”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 9, 422-438.
- Stump D.M.** (2000) “The hocking of cables: a problem in shearable and extensible rods”, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 515-533.
- Szymczak C.** (1980) “Buckling and initial post-buckling behavior of thin-walled I columns”, *Computers & Structures*, 11, 481-487.
- Teh L. and Clarke M.** (1999) “Plastic-zone analysis of 3D steel frames using beam elements”, *Journal of Structural Engineering*, 125, 1328-1337.
- Timoshenko S.** (1930) “*Strength of Materials, Part 1: Elementary Theory and Problems*”, D. Van Nostrand Company Inc., New York, USA.
- Timoshenko S.P. and Goodier J.N.** (1970) “*Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill, New York, USA.
- Trahair N.S.** (1993) “*Flexural-torsional buckling of structures*”, Chapman & Hall, London, UK.
- Trahair N.S.** (1997) “Multiple design curves for beam lateral buckling”, *Proc., Int. Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*, Nagoya, Japan, 33-44.
- Trahair N.S.** (2003) “*Non-linear Elastic Non-uniform Torsion*”, Research Report No R828, Department of Civil Engineering, The University of Sydney, Australia.
- Trahair N.S.** (2005) “Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 131, 1135-1142.
- Trahair N.S.** (2011) “*Wagner's beam cycle*”, Research Report No R916, School of Civil Engineering, The University of Sydney, Australia.
- Trahair N.S.** (2012) “Strength design of cruciform steel columns”, *Engineering Structures*, 35, 307-313.
- Trahair N.S., Bradford M.A. and Nethercot D.A.** (2001) “*The behavior and design of steel structures to BS5950*”, 3rd Ed., Spon, London, UK
- Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A. and Gardner L.** (2008) “*The behavior and design of steel structures to EC3*”, 4rd Ed., Taylor and Francis, New York, USA.
- Tralli A.** (1986) “A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams”, *Computers & Structures*, 22, 649-658.
- Treffitz E.** (1935) “Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 15, 220-225.
- Triantafyllou S.P.** (2011) “*Hysteretic finite elements and macro-elements for nonlinear dynamics analysis of structures*”, PhD thesis, National Technical University of Athens, Athens, Greece.
- Tsipiras V.J. and Sapountzakis E.J.** (2011) “Secondary Torsional Moment Deformation Effect in Inelastic Nonuniform Torsion of Bars by BEM”, *Proc. of*

the IABEM 2011 Symposium of the International Association for Boundary Element Methods, Brescia, Italy, 5-8 September, 323-330.

Tsipiras V.J. and Sapountzakis E.J. (2012a) “Secondary Torsional Moment Deformation Effect in Inelastic Nonuniform Torsion of Bars of Doubly Symmetric Cross Section by BEM”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47, 68-84.

Tsipiras V.J. and Sapountzakis E.J. (2012b) “Nonlinear Inelastic Nonuniform Torsion of Bars including the Secondary Torsional Moment Deformation Effect”, *Proc. of the 11th International Conference on Computational Structures Technology*, Dubrovnik, Croatia, 4-7 September, paper 296.

Tso W.K. and Ghobarah A.A. (1971) “Non-linear non-uniform torsion of thin-walled beams”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 13, 1039-1047.

Vieira R.F., Virtuoso F.B.E. and Pereira E.B.R. (2012) “A higher order thin-walled beam model including warping and shear modes”, *International Journal of Mechanical Sciences* (article in press).

Vlasov V. (1963) “*Thin-walled elastic beams*”, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel.

Vo T.P. and Lee J. (2009) “Flexural-torsional coupled vibration and buckling of thin-walled open section composite beams using shear-deformable beam theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51, 631-641.

Wackerfuß J. and Gruttmann F. (2009) “A mixed hybrid finite beam element with an interface to arbitrary three-dimensional material models”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2053-206.

Wackerfuß J. and Gruttmann F. (2011) “A nonlinear Hu-Washizu variational formulation and related finite-element implementation for spatial beams with arbitrary moderate thick cross-sections”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, 1671-1690.

Wagner H. (1929) “*Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*”, Festschrift 25 Jahre Technische Hochschule Danzig.

Wagner W. and Gruttmann F. (2001) “Finite element analysis of Saint-Venant torsion problem with exact integration of the elastic-plastic constitutive equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 3831-3848.

Wagner W., Sauer R. and Gruttmann F. (1999) “Tafeln der Torsionskenngrößen von Walzprofilen unter Verwendung von FE-Diskretisierungen”, *Stahlbau*, 68, 102–111.

Waldron P. (1986) “Sectorial properties of straight thin-walled beams”, *Computers & Structures*, 24, 147-156.

Wang C.M., Reddy J.N. and Lee K.H. (2000) “*Shear deformable beams and plates*”, Elsevier, Oxford, UK.

Wang X., Yang Q. and Zhang Q. (2010) “A new beam element for analyzing geometrical and physical nonlinearity”, *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*, 26, 605-615.

Wang Z., Zhao J., Zhang D. and Gong J. (2012) “Restrained torsion of open thin-walled beams including shear deformation effects”, *Journal of Zhejiang University - Science A*, 13, 260-273.

- Washizu K.** (1975) “*Variational methods in elasticity and plasticity*”, Pergamon Press, Oxford, UK.
- Weber C.** (1921) “Die Lehre der Drehungsfestigkeit”, *Forscharb IngWes.*, 249, 60-62.
- Weber C.** (1926) “Übertragung des Drehmoments in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 6, 85–97.
- Wekezer J.W.** (1985) “Nonlinear torsion of thin-walled bars of variable, open cross-sections”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 27, 631-641.
- Westra H.J.R., Van der Zant H.S.J. and Venstra W.J.** (2012) “Modal interactions of flexural and torsional vibrations in a microcantilever”, *Ultramicroscopy*, 120, 41-47.
- Woolcock S.T. and Trahair N.S.** (1974) “Post-buckling Behavior of Determinate Beams”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 100 (EM2), 151-171.
- Wunderlich W., Obrecht H. and Schroedter V.** (1986) “Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 671-695.
- Yamada Y., Katagiri S. and Takatruka K.** (1972) “Elastic-plastic analysis of Saint-Venant torsion problem by a hybrid stress model”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, 193-207.
- Yu K.H., Kadarman A.H. and Djojodihardjo H.** (2010) “Development and implementation of some BEM variants - A critical review”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 884-899.
- Yu A.M., Yang J.W., Nie G.H. and Yang X.G.** (2011) “An improved model for naturally curved and twisted composite beams with closed thin-walled sections”, *Composite Structures*, 93, 2322-2329.
- Yu W., Hodges D.H. and Ho J.C.** (2012) “Variational asymptotic beam sectional analysis - An updated version”, *International Journal of Engineering Science* (article in press).
- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L.** (2005) “*The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*”, Elsevier, Amsterdam, Netherlands.
- Βάγιας Ι.Κ.** (2003) «*Σιδηρές Κατασκευές - Ανάλυση και Διαστασιολόγηση*», Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, Ελλάδα.
- Κατσιαδέλης Ι.Θ.** (1999) «*Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Μηχανικού - Θεωρία και εφαρμογές*», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, Ελλάδα.
- Κατσιαδέλης Ι.Θ.** (2010) «*Συνοριακά Στοιχεία Τομός II: Ανάλυση Πλακών*», ΕΜΠ, Αθήνα, Ελλάδα.
- Μπαμπούσκος Ν.Γ.** (2011) «*Ανάλυση και Βελτιστοποίηση Ελαστικών και Βισκοελαστικών Πλακών με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων*», Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, Ελλάδα.
- Μώκος Β.Γ.** (2007) «*Συμβολή στη Γενικευμένη Θεωρία Σύνθετων Ραβδωτών Φορέων με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων*», Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, Ελλάδα.

Ντουρακόπουλος Ι.Α. (2009) «Συμβολή στη Γραμμική και Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας - Στρεπτοκαμπτικός Λυγισμός Ράβδων Ομογενούς και Σύνθετης Διατομής», Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, Ελλάδα.

Παπαδρακάκης Μ. (1998) «Μη Γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία», ΕΜΠ, Αθήνα, Ελλάδα.

Σαπουντζάκης Ε.Ι. και Τσίππρας Β.Ι. (2008) «Αξιοπιστία Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών σε Ράβδους υπό Μη Γραμμική Ελαστοπλαστική Ομοιόμορφη Στρέψη», *Πρακτικά 6ο Εθνικού Συνεδρίου Μεταλλικών Κατασκευών*, Ιωάννινα, Ελλάδα, 2-4 Οκτωβρίου, τόμος ΙΙ, 451-458.

Σαπουντζάκης Ε.Ι., Τσίππρας Β.Ι. και Μώκος Β.Γ. (2011) «Επιρροή Δευτερογενών Στρεπτικών Παραμορφώσεων στην Ανάλυση Ράβδων Τυχούσας Διατομής», *Πρακτικά 7^ο Εθνικού Συνεδρίου Μεταλλικών Κατασκευών*, Βόλος, Ελλάδα, 29 Σεπτεμβρίου - 01 Οκτωβρίου, 280-287.

Σταυρίδης Λ.Σ. (2006) «Στατική των Δομικών Φορέων. Τόμος Β», Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, Ελλάδα.