

# Μελέτη Κίνησης Αδρανειακών Σωματιδίων σε Ισότροπη Τυρβώδη Ροή Ασυμπίεστου Ρευστού

Μομφερράτος Γιώργος

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τομέας Φυσικής  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων καθηγητής: Αθανασούλης Γεράσιμος  
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μάρτιος 2011



## Περίληψη

Η κίνηση αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε ομογενές τυρβώδες πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού αποτελεί ένα φυσικό φαινόμενο εξαιρετικής σημασίας για ένα πλήθος εφαρμογών προερχόμενων τόσο από την φύση όσο και την τεχνολογία. Παραδείγματα αποτελούν ο σχηματισμός νεφών, η δυναμική του πλανητών και η βελτιστοποίηση της καύσης σε κινητήρες Diesel. Λόγω πεπερασμένης μάζας και μεγέθους, οι τροχιές των αδρανειακών σωματιδίων διαφέρουν σημαντικά από αυτές των σωματιδίων Lagrange, τα οποία είναι άμαζα και κινούνται πάντα εφαπτομενικά στο πεδίο ταχύτητας. Μια ομοιόμορφη κατανομή σωματιδίων Lagrange κινούμενων σε ασυμπίεστη ροή παραμένει για πάντα ομοιόμορφη, ενώ στην περίπτωση αδρανειακών σωματιδίων εμφανίζονται έντονες ανομοιογένειες. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως ομαδοποίηση και η κατανόησή είναι απαραίτητη για την επίλυση πολλών προβλημάτων, καθώς επηρεάζει άμεσα τον ρυθμό συγκρούσεων μεταξύ των σωματιδίων. Σε αντίθεση με τα σωματίδια Lagrange, τα αδρανειακά σωματίδια χαρακτηρίζονται από μη-συντηρητική δυναμική. Μετά από μια επισκόπηση της κίνησης ασυμπίεστου ρευστού, της μετάβασης σε τυρβώδη ροή και της θεωρίας ομογενούς τυρβώδους ροής, θα παρουσιάσουμε την πιθανοθεωρητική και ντετερμινιστική θεωρία της κίνησης αδρανειακών σωματιδίων.



# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
<b>1 Κίνηση ασυμπίεστου ρευστού</b>	<b>7</b>
1.1 Κινηματική . . . . .	7
1.1.1 Η συνθήκη συνέχειας . . . . .	7
1.1.2 Το πεδίο στροβιλότητας . . . . .	9
1.1.3 Κινηματική ανάλυση του πεδίου ταχυτήτων . . . . .	11
1.2 Δυναμική . . . . .	13
1.2.1 Η εξίσωση Navier–Stokes . . . . .	13
1.2.2 Ενέργεια, Ενστροφία, Ελικότητα . . . . .	20
1.3 Ύπαρξη και ομαλότητα της λύσης . . . . .	26
<b>2 Μετάβαση σε τυρβώδη ροή</b>	<b>29</b>
2.1 Υδροδυναμική ευστάθεια . . . . .	29
2.2 Σενάρια μετάβασης . . . . .	31
2.2.1 Ημιπεριοδική ροή . . . . .	33
2.2.2 Παράξενοι ελκυστές . . . . .	36
2.2.3 Διπλασιασμός περιόδου . . . . .	40
2.2.4 Διαλειπτική μετάβαση . . . . .	49
<b>3 Ομογενής τυρβώδης ροή</b>	<b>53</b>
3.1 Μαθηματική περιγραφή τυρβώδους ροής . . . . .	53
3.1.1 Στατιστική υδροδυναμική . . . . .	53
3.1.2 Στατιστικές συμμετρίες . . . . .	55
3.1.3 Τανυστές συσχέτισης και φάσματος . . . . .	56
3.2 Δυναμική ομογενούς τύρβης . . . . .	62
3.2.1 Δυναμικές εξισώσεις . . . . .	62
3.2.2 Το ολοκλήρωμα του Loitsiankyi . . . . .	65
3.3 Ισότροπη τύρβη . . . . .	69
3.3.1 Τανυστές συσχέτισης και φάσματος . . . . .	69
3.3.2 Ο τανυστής της ροπής τρίτης τάξης και δύο σημείων . . . . .	73
3.3.3 Δυναμικές εξισώσεις . . . . .	75
<b>4 Αδρανειακά σωματίδια</b>	<b>77</b>
4.1 Η εξίσωση κίνησης . . . . .	77
4.2 Αριθμητική προσομοίωση κίνησης αδρανειακών σωματιδίων . . . . .	83
4.2.1 Αριθμητική Μέθοδος . . . . .	83
4.2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα . . . . .	85
4.3 Ντετερμινιστική θεωρία ομαδοποίησης . . . . .	87

4.3.1	Τοπική δυναμική ανάλυση . . . . .	87
4.3.2	Μη-συντηρητική δυναμική . . . . .	90
4.3.3	Η περίπτωση κίνησης σε δύο διαστάσεις . . . . .	93
4.4	Στατιστική θεωρία ομαδοποίησης . . . . .	94
4.4.1	Εκθετική αύξηση των ροπών της συγκέντρωσης . . . . .	95
4.4.2	Χωρικές ιδιότητες της συγκέντρωσης . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>103</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>105</b>

# Εισαγωγή

Η κίνηση αιωρημάτων σκόνης, σταγονιδίων, φυσαλίδων ή μικρών σωματιδίων άλλου είδους μέσα σε τυρβώδες πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού διαδραματίζει πρωταγωνιστικό ρόλο σε πληθώρα προβλημάτων προερχόμενων τόσο από την φύση όσο και από την βιομηχανία. Το μέγεθος των σωματιδίων που αποτελούν το αιώρημα δεν μπορεί να αμεληθεί, ενώ η πυκνότητά τους είναι γενικά διαφορετική από αυτή του ρευστού που τα περιβάλλει. Κάθε πρότυπο που περιγράφει την κίνηση των σωματιδίων αυτών πρέπει να λαμβάνει υπόψιν τα αδρανειακά φαινόμενα που συνεπάγονται από το πεπερασμένο του μεγέθους τους και της μάζας τους. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι δεν μπορούν να προτυποποιηθούν ως ιδεατά, άμαζα σωματίδια Lagrange.

Τα *αδρανειακά* αυτά σωματίδια αλληλεπιδρούν με την ροή μέσω της συνεκτικής οπισθέλκουσας Stokes και συνεπώς, ανάλογα με τον λόγο πυκνοτήτων σωματιδίου–ρευστού, η κίνησή τους είτε καθυστερεί, είτε προτρέχει σε σχέση με αυτή των σωματιδίων Lagrange, τα οποία ακολουθούν εφαπτομενικά το πεδίο ταχύτητας. Η δυναμική των σωματιδίων Lagrange περιγράφεται από ένα συντηρητικό δυναμικό σύστημα όταν η φέρουσα ροή είναι ασυμπίεστη (επειδή το στοιχείο όγκου διατηρείται), ενώ τα αδρανειακά σωματίδια χαρακτηρίζονται από μη–συντηρητική (dissipative) δυναμική. Ενώ μια ομοιόμορφη αρχική κατανομή σωματιδίων Lagrange σε ασυμπίεστη ροή παραμένει για πάντα ομοιόμορφη, η χωρική κατανομή των αδρανειακών σωματιδίων αναπτύσσει έντονες ανομοιογένειες.

Το φαινόμενο αυτό, το οποίο αποκαλείται ομαδοποίηση (clustering) ή προτιμησιακή συγκέντρωση (preferential concentration) είναι άμεσα συνυφασμένο με την παρουσία περιοχών με πολύ υψηλή ή πολύ χαμηλή συγκέντρωση σωματιδίων. Η ποσοτική πρόβλεψη της ομαδοποίησης είναι ιδιαίτερα σημαντική για πολλές φυσικές και βιομηχανικές εφαρμογές. Μερικές ενδεικτικές περιπτώσεις αποτελούν η βελτιστοποίηση της διαδικασίας καύσης σε μηχανές εσωτερικής καύσης Diesel [25], η αύξηση του μεγέθους των σταγονιδίων και η δημιουργία σταγόνων βροχής στα σύννεφα [61, 28], η δημιουργία πλανητοειδών κατά τα αρχικά στάδια της εξέλιξης του ηλιακού συστήματος [75, 20], προβλήματα συνύπαρξης μεταξύ διαφορετικών ειδών πλαγκτόν [69, 46], καθώς και πληθώρα άλλων περιβαλλοντικών προβλημάτων [66]. Στις εφαρμογές αυτές η εκτίμηση του ρυθμού των συγκρούσεων μεταξύ των σωματιδίων είναι κεντρικής σημασίας. Η πρώτη απόπειρα υπολογισμού αυτής της ποσότητας έγινε από τον Taylor το 1921 [71], όπου χρησιμοποιήθηκε η θεωρία διάχυσης. Οι χρονικές κλίμακες που υπολογίζει κανείς με χρήση τέτοιων παραδοσιακών μεθόδων είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από αυτές που παρατηρούνται σε πειράματα ή αριθμητικές προσομοιώσεις [70]. Η κατανόηση του φαινομένου της ομαδοποίησης και πιο συγκεκριμένα των δομών μικρής κλίμακας της συνάρτησης συγκέντρωσης των σωματιδίων είναι αναμφίβολα πολύ σημαντική στην προσπάθεια ταυτοποίησης και ποσοτικοποίησης των μηχανισμών που ευθύνονται για την δραστική μείωση των χρονικών κλιμάκων.

Το πρώτο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας αποτελεί μια παρουσίαση της κινηματικής και δυναμικής ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού. Όσον αφορά την κινηματική, ξεκινώντας από την συνθήκη συνέχειας, η οποία στην περίπτωση κίνησης ασυμπίεστου ρευστού δεν αποτελεί μια δυναμική εξίσωση αλλά μια κινηματική συνθήκη, στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες του πεδίου στροβιλότητας λόγω του κεντρικού ρόλου που αυτό παίζει στην θεωρία τυρβώδους ροής. Το κομ-

μάτι της δυναμικής ξεκινά με την παραγωγή της θεμελιώδους δυναμικής εξίσωσης, της εξίσωσης Navier–Stokes, ενώ η επόμενη παράγραφος είναι αφιερωμένη σε τρεις σημαντικές ποσότητες, οι οποίες στο όριο μηδενικής συνεκτικότητας αποτελούν ολοκληρώματα της κίνησης: την ενέργεια, την ενστροφία και την ελικότητα. Το πρώτο κεφάλαιο κλείνει με μια συνοπτική ανασκόπηση της μαθηματικής θεωρίας της εξίσωσης Navier–Stokes, με έμφαση σε θέματα ύπαρξης και ομαλότητας της λύσης.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην περιγραφή της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Μετά από μια σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας υδροδυναμικής ευστάθειας, παρουσιάζονται εκτενώς τα τέσσερα διαφορετικά σενάρια που έχουν προταθεί για την περιγραφή της διαδικασίας μετάβασης. Αυτά είναι το σενάριο Landau–Hopf, το σενάριο Ruelle–Takens, το σενάριο Feigenbaum και το σενάριο Pomeau–Manneville.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η κλασική θεωρία πλήρως ανεπτυγμένης ομογενούς τυρβώδους ροής ασυμπίεστου ρευστού. Γενικά περιοριζόμαστε σε ακριβή αποτελέσματα και έτσι το μεγάλο πλήθος των προσεγγιστικών και ημιεμπειρικών θεωριών δεν συμπεριλαμβάνεται σε αυτό το κεφάλαιο. Η ανάπτυξη ξεκινά με την μαθηματική περιγραφή του τυρβώδους ταχύτητας, τις στατιστικές συμμετρίες και τους ταυιστές συσχέτισης και φάσματος. Στη συνέχεια, περνώντας στην δυναμική της τύρβης, παρουσιάζουμε τις βασικές δυναμικές εξισώσεις για τις ροπές του πεδίου ταχύτητας και ένα σημαντικό ακριβές αποτέλεσμα, το αναλλοίωτο ολοκλήρωμα του Loitsiankyi.

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην μελέτη της κίνησης αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε τυρβώδες πεδίο ροής. Ξεκινά με μια αναλυτική παραγωγή της θεμελιώδους εξίσωσης κίνησης, η οποία στην συνέχεια απλοποιείται σύμφωνα με τις συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Στην συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά αριθμητικά αποτελέσματα από προσομοιώσεις κίνησης βαρέων αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε ισότροπο τυρβώδες πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού. Οι προσομοιώσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν με χρήση κώδικα ο οποίος αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εργασίας. Στην συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται αναλυτικά τόσο η ντετερμινιστική όσο και η πιθανοθεωρητική περιγραφή και εξήγηση του φαινομένου της ομαδοποίησης. Η εργασία κλείνει με σύντομα συμπεράσματα και εκτενείς βιβλιογραφικές παραπομπές.



# Κεφάλαιο 1

## Κίνηση ασυμπίεστου ρευστού

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε την κίνηση ασυμπίεστου ρευστού από κινηματική και δυναμική άποψη. Η κίνηση ενός ασυμπίεστου ρευστού συνεχούς μέσου στον χώρο  $\mathbb{R}^3$  περιγράφεται πλήρως από τα ακόλουθα δεδομένα:

1. Το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$
2. Το τανυστικό πεδίο τάσεων  $\sigma_{ij} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$   $i, j = 1, 2, 3$
3. Το διανυσματικό πεδίο εξωτερικών δυνάμεων  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , με μηδενική απόκλιση:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

4. Την πυκνότητα  $\rho$ , σταθερή βαθμωτή ποσότητα.

Πάνω σε αυτά τα δεδομένα θα βασιστεί η ανάπτυξη των επόμενων ενοτήτων.

### 1.1 Κινηματική

Στην παρούσα σύντομη ενότητα θα εκτεθούν ορισμένα στοιχειώδη κινηματικά αποτελέσματα τα οποία αφορούν την κίνηση ασυμπίεστου ρευστού σε τρεις διαστάσεις. Για μια εκτενέστερη παρουσίαση της κινηματικής ασυμπίεστου ρευστού, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο σύγγραμμα [1].

#### 1.1.1 Η συνθήκη συνέχειας

Στην περιγραφή κατά Lagrange, η κίνηση ενός ασυμπίεστου ρευστού συνεχούς μέσου στον χώρο  $\mathbb{R}^3$  περιγράφεται από μια απεικόνιση

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t) \quad (1.1)$$

Η παραπάνω απεικόνιση προσδιορίζει την θέση  $\mathbf{X}$  που καταλαμβάνει την χρονική στιγμή  $t$  ένα στοιχείο ρευστού το οποίο την χρονική στιγμή  $t = 0$  εβρίσκετο στην θέση  $\mathbf{X}_0$ . Η μεταβλητή  $\mathbf{X}_0$  προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο την ταυτότητα του στοιχείου.

Για να είναι καλά ορισμένη η κίνηση του ρευστού, η απεικόνιση αυτή πρέπει να είναι αντιστρέψιμη. Κάθε στοιχείο ρευστού πρέπει να έχει ένα μοναδικό σημείο εκκίνησης. Σύμφωνα με το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης, ικανή και αναγκαία συνθήκη για αυτό είναι η ορίζουσα της Ιακωβιανής μήτρας της απεικόνισης (1.1) να είναι παντού διάφορη του μηδενός:

$$J = \det \left( \frac{\partial X_i}{\partial X_{0j}} \right) \neq 0 \quad (1.2)$$

Στην περιγραφή κατά Euler, η κίνηση του ρευστού περιγράφεται από το πεδίο ταχυτήτων

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

το οποίο εκφράζει την ταχύτητα του στοιχείου ρευστού που βρίσκεται στην θέση  $\mathbf{x}$  την χρονική στιγμή  $t$ .

Η ταχύτητα στην περιγραφή κατά Lagrange ορίζεται ως:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$$

συνεπώς οι δύο εναλλακτικές περιγραφές συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t), t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η ολική παράγωγος μίας συνάρτησης  $f = f(\mathbf{x}, t)$  είναι:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f \end{aligned}$$

Στην υδροδυναμική, ο νόμος διατήρησης της μάζας συνεπάγεται μια κινηματική συνθήκη για το πεδίο ταχύτητας. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον νόμο διατήρησης της μάζας, θεωρούμε έναν όγκο απλής συνοχής  $V \subset \mathbb{R}^3$  με ομαλό σύνορο  $S = \partial V$ . Η ποσότητα της μάζας που περιέχεται στον όγκο  $V$  είναι ίση με

$$m = \int_V \rho \, dV$$

Εφόσον  $\rho = c$  η ποσότητα  $m$  δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = 0$$

Η ποσότητα μάζας που εισέρχεται στον όγκο  $V$  ισούται με

$$f_m = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

όπου  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $S$  με κατεύθυνση από την  $S$  στο  $\mathbb{R}^3 - V$ . Λόγω διατήρησης της μάζας, η ροή μάζας  $f_m$  είναι ίση με  $\partial m / \partial t$ . Υποθέτοντας ότι  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^1(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3) \forall t \in \mathbb{R}^+$ , εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης, οπότε η προηγούμενη έκφραση γίνεται:

$$f_m = -\rho \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV = \frac{\partial m}{\partial t} = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι ο όγκος  $V$  είναι αυθαίρετος, παίρνουμε την εξίσωση συνέχειας:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.3)$$

Στην περιγραφή κατά Lagrange, η σχετική μεταβολή ενός στοιχείου όγκου κατά την απεικόνιση (1.1) εκφράζεται από την τιμή της ορίζουσας της Ιακωβιανής μήτρας της. Επομένως η συνθήκη συνέχειας γράφεται σε αυτή την περίπτωση:

$$\det \left( \frac{\partial X_i}{\partial X_{0j}} \right) = 1$$

### 1.1.2 Το πεδίο στροβιλότητας

Όπως θα δείξουμε παρακάτω, η περιστροφική συνιστώσα της κίνησης συνδέεται με το πεδίο στροβιλότητας  $\omega(\mathbf{x})$ , το οποίο ορίζεται ως:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad \omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

όπου  $\epsilon_{ijk}$  ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τρίτης τάξης με  $\epsilon_{ijk} = 1$  για  $\{i, j, k\}$  άρτια μετάθεση των  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\epsilon_{ijk} = 1$  για  $\{i, j, k\}$  περιττή μετάθεση των  $\{1, 2, 3\}$  και  $\epsilon_{ijk} = 0$  για όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Για να βρούμε την έκφραση που δίνει το πεδίο ταχυτήτων συναρτήσει της στροβιλότητας, θεωρούμε την έκφραση:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \omega)_i &= (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u})_i \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \epsilon_{kmn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ \nabla \times \omega &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned}$$

όπου  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker με  $\delta_{ij} = 1$  για  $i = j$  και  $\delta_{ij} = 0$  για  $i \neq j$ , ενώ χρησιμοποιήθηκε η τανυστική ταυτότητα  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$ . Από την συνθήκη συνέχειας έχουμε  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  οπότε καταλήγουμε σε μια εξίσωση Poisson:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \omega \quad (1.5)$$

Θεωρούμε την παρακάτω περίπτωση της εξίσωσης Poisson:

$$\nabla^2 G = 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

με  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  την συνάρτηση δέλτα του Dirac και με πεδίο ορισμού της  $G$  ολόκληρο τον χώρο  $\mathbb{R}^3$ . Η εξίσωση αυτή έχει ως λύση την συνάρτηση Green:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Πράγματι, γράφοντας την λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες, με  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ :

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = 0, \quad r \neq 0$$

Ενώ στο όριο  $r \rightarrow 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned}\nabla^2 G &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1/(r+h) - 1/r}{h} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{r+h} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \lim_{h' \rightarrow 0} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r+h')/(r+h'+h) - r/(r+h)}{h'} \right) \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ h, h' \rightarrow 0}} \frac{h}{r^2(r+h)(r+h+h')}\end{aligned}$$

Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση, ολοκληρώνοντας σε όλο τον χώρο:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(r) \nabla^2 G 4\pi r^2 dr &= 4\pi \int_0^\infty f(r) \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h}{(r+h)(r+h+h')} dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty f(r) \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{1}{h+h'} dr = 4\pi f(0)\end{aligned}$$

Επομένως όντως  $\nabla^2 G = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  και η  $G$  είναι η συνάρτηση Green της εξίσωσης Poisson. Θέτοντας το αριστερό της μέλος ίσο με  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ , η λύση της εξίσωσης (1.5) γράφεται:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) dV$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον τελεστή της λαπλασιανής στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) dV \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

και η εξίσωση (1.5) ικανοποιείται ταυτοτικά. Επομένως το πεδίο ταχυτήτων εκφράζεται συναρτήσει της στροβιλότητας μέσω της έκφρασης:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) d^3 \mathbf{x}' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla' \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) d^3 \mathbf{x}'\end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\begin{aligned}G \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x'_j} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial (G \omega_k)}{\partial x'_j} - \epsilon_{ijk} \omega_k \frac{\partial G}{\partial x'_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_j} (\epsilon_{ijk} G \omega_k) - \epsilon_{ijk} \omega_k \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x'_j}\end{aligned}$$

Όμως

$$\frac{\partial r}{\partial x'_j} = -\frac{\partial r}{\partial x_j}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x'_j} G &= \frac{\partial}{\partial x'_j} (\epsilon_{ijk} \omega_k G) + \epsilon_{ijk} \omega_k \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x'_j} (\epsilon_{ijk} \omega_k G) + \epsilon_{ijk} \omega_k \frac{\partial G}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x'_j} - \epsilon_{ikj} \omega_k \frac{\partial G}{\partial x_j} \\
\nabla' \omega \cdot G &= \nabla' \cdot \mathbf{A} - \omega \times \nabla G, \quad A_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k G
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla' \times \omega \cdot G \, d^3 \mathbf{x}' \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla' \cdot \mathbf{A} \, d^3 \mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \times \nabla G \, d^3 \mathbf{x}' \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \times \nabla G \, d^3 \mathbf{x}'
\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι  $|\omega| = o(|\mathbf{x}|)$  το επιφανειακό ολοκλήρωμα έχει μηδενική συνεισφορά, οπότε η τελική έκφραση για το πεδίο ταχύτητας είναι:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \, d^3 \mathbf{x}' \quad (1.6)$$

Η έκφραση αυτή είναι γνωστή ως νόμος Biot–Savart. Παρατηρούμε ότι η εξάρτηση του πεδίου ταχυτήτων από το πεδίο στροβιλότητας είναι μη-τοπική. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την έκφραση:

$$\begin{aligned}
(\omega(\mathbf{x}', t) \times \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))_i &= \epsilon_{ikj} \omega_k(\mathbf{x}', t) \frac{\partial}{\partial x_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\
&= -\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \omega_k(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) \\
\omega(\mathbf{x}', t) \times \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\nabla \times (\omega(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi} \frac{\omega(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, d^3 \mathbf{x}'$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το διανυσματικό δυναμικό της ταχύτητας συναρτήσει της στροβιλότητας.

### 1.1.3 Κινηματική ανάλυση του πεδίου ταχυτήτων

Έστω ότι την στιγμή  $t_0$  η συνάρτηση  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$  είναι αναλυτική στην ανοικτή σφαίρα  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$  με κέντρο το σημείο  $\mathbf{x}_0$  και ακτίνα  $\delta > 0$ . Τότε η κίνηση του ρευστού μπορεί να αναλυθεί τοπικά γύρω από το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  σε τρεις συνιστώσες. Αναπτύσσοντας την  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$  σε σειρά Taylor γύρω από το  $\mathbf{x}_0$ , παίρνουμε:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{r} + O(\mathbf{r}^2) \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

Η κλίση του πεδίου ταχυτήτων  $\nabla \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u})(\mathbf{x}_0, t_0)$  μπορεί να αναλυθεί σε ένα αντισυμμετρικό και ένα συμμετρικό κομμάτι:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \Omega_{ij} + S_{ij}$$

όπου

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Συνεπώς

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$$

Ο τανυστής  $\Omega_{ij}$  είναι αντισυμμετρικός και εκφράζει την περιστροφική συνιστώσα της κίνησης. Ο τανυστής  $S_{ij}$  είναι συμμετρικός, ονομάζεται τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης και αντιστοιχεί στην παραμορφωτική συνιστώσα της κίνησης. Τέλος το διάνυσμα  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$  αντιπροσωπεύει την μεταφορική συνιστώσα της κίνησης.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \epsilon_{knm} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \epsilon_{kmn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \omega_k \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} r_j &= \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \omega_k r_j \\ \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

Επομένως όταν  $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$  η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο  $\mathbf{x}$  δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0, t_0) \times \mathbf{r}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το ρευστό εκτελεί τοπικά περιστροφική κίνηση στερεού σώματος με γωνιακή ταχύτητα  $\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}|$  και άξονα περιστροφής  $\zeta = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$ . Συνεπώς η περιστροφική συνιστώσα της κίνησης περιγράφεται πλήρως από το πεδίο της στροβιλότητας  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ .

Αντίστοιχα για πλήρως παραμορφωτική κίνηση χωρίς περιστροφή έχουμε  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$  και το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από την έκφραση:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$$

Ο τανυστής  $S_{ij}$ , ως συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης, μπορεί να τεθεί σε διαγώνια μορφή μετά από κατάλληλη στροφή του συστήματος αξόνων, η οποία αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό κάθε διανύσματος με έναν πίνακα  $\mathbf{A}$ . Ο πίνακας  $\mathbf{A}$ , είναι ορθογώνιος:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ .

Στο αρχικό σύστημα αξόνων έχουμε:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$$

συνεπώς στο νέο σύστημα:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{r}' \\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{r}' \\ &= \mathbf{diag}(s_1, s_2, s_3) \cdot \mathbf{r}'\end{aligned}$$

με  $s_1, s_2, s_3$  τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{S}$ .

Θεωρούμε ένα σφαιρικό στοιχείο όγκου με κέντρο το  $\mathbf{x}_0$  και ακτίνα  $\delta_1 < \delta$ . Έστω  $\mathbf{n}'_i$  τα διανύσματα βάσης στο νέο σύστημά συντεταγμένων. Το διάνυσμα  $\delta_1 \mathbf{n}'_i$  θα υποστεί παραμόρφωση από την διαφορά ταχύτητας στα άκρα του:

$$\begin{aligned}\delta l_i &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{diag}(s_1, s_2, s_3) \cdot \mathbf{n}'_i \delta_1 dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} s_i \delta_1 dt = s_i \delta_1 \Delta t + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

Επομένως στην περίπτωση πλήρως παραμορφωτικής κίνησης το σφαιρικό στοιχείο ακτίνας  $\delta_1$  μετασχηματίζεται μετά το πέρασ χρόνιού διαστήματος  $\Delta t$  σε ελλειψοειδές με κύριους άξονες μήκους  $l_i = \delta_1(1 + s_i)\Delta t$ .

Στην γενική περίπτωση η κίνηση του ρευστού αποτελεί σύνθεση μεταφοράς κατά  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)\Delta t + O(\Delta t^2)$ , περιστροφής κατά  $\omega(\mathbf{x}_0, t_0)$  και παραμόρφωσης σφαιρικού στοιχείου όγκου σε ελλειψοειδές με κύριους άξονες οι οποίοι ταυτίζονται με αυτούς του ταυστή  $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, t_0)$  σε διεύθυνση ενώ τα μήκη τους είναι επίσης ανάλογα ως προς αυτούς.

## 1.2 Δυναμική

Έχοντας ολοκληρώσει την παρουσίαση των βασικών κινηματικών αποτελεσμάτων που αφορούν στην κίνηση ασυμπίεστου ρευστού στον χώρο  $\mathbb{R}^3$ , σε αυτή την ενότητα ακολουθεί η στοιχειώδης δυναμική θεωρία. Σημείο αφετηρίας είναι η εξίσωση Navier–Stokes η οποία περιγράφει πλήρως την δυναμική ασυμπίεστου ρευστού και μαζί με την κινηματική συνθήκη συνέχειας συνθέτει ένα πλήρες σύστημα εξισώσεων από το οποίο είναι δυνατόν, τουλάχιστον σε κάποιες περιπτώσεις, να υπολογιστεί το πεδίο ταχυτήτων ως συνάρτηση του χρόνου από κατάλληλα αρχικά δεδομένα.

### 1.2.1 Η εξίσωση Navier–Stokes

Σε αυτή την υποενότητα παρουσιάζεται μια παραγωγή της εξίσωσης Navier–Stokes από τον νόμο διατήρησης της ορμής ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες βασικές της ιδιότητες. Στη συνέχεια ακολουθεί μια σύντομη συζήτηση για τον ρόλο των πεδίων πίεσης και στροβιλότητας στην δυναμική ασυμπίεστου ρευστού.

Οι δυναμική εξίσωση που διέπει την κίνηση ασυμπίεστου ρευστού είναι η εξίσωση Navier–Stokes, η οποία προκύπτει από εφαρμογή του νόμου διατήρησης της ορμής σε ένα αυθαίρετο χωρίο απλής συνοχής  $V$  με ομαλό σύνορο  $\partial V$ . Η ποσότητα της ορμής που περιέχεται στον όγκο  $V$  είναι ίση με

$$M(t) = \int_V \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV$$

Υποθέτοντας ακόμα ότι  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , ο ρυθμός μεταβολής της παραπάνω ποσότητας είναι:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_V \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV$$

Η ποσότητα ορμής που μεταφέρεται μέσα στον όγκο  $V$  από την κίνηση του ρευστού είναι:

$$\mathbf{f}_M = \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Με την ίδια υπόθεση όπως και στην παραγωγή της εξίσωσης συνέχειας, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης, παίρνοντας:

$$\mathbf{f}_M = \rho \int_S \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) d^3 \mathbf{x}, \quad f_{M_i} = \rho \int_S \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του Stokes, ο τανυστής των τάσεων μπορεί να αναλυθεί σε ένα ισότροπο και ένα ανισότροπο κομμάτι,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad \tau_{ii}(\mathbf{x}, t) = 0$$

όπου

1.  $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = p(\mathbf{x}, t)$  το βαθμωτό πεδίο της πίεσης
2.  $\tau_{ij} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  το τανυστικό πεδίο των διατμητικών τάσεων το οποίο έχει μηδενικό ίχνος:

$$\text{tr}(\tau) = \tau_{ii} = 0$$

Η επιφανειακή δύναμη που ασκείται στο ρευστό επί της επιφάνειας  $S$  είναι:

$$F_{S_i} = \int_S \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j dS = \int_S (-p(\mathbf{x}, t) \delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{x}, t)) n_j dS$$

Υποθέτοντας ότι  $p(\mathbf{x}, t)$ ,  $\tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ,  $i, j = 1, 2, 3 \in C^1(\mathbb{R}^3) \forall t \in \mathbb{R}^+$  εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης παίρνοντας:

$$\begin{aligned} F_{S_i} &= \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \\ &= \int_V \left( -\frac{\partial (p \delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \\ &= \int_V \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \\ \mathbf{F}_S &= \int_V (-\nabla p + \nabla \cdot \tau) dV \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ , και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι ο όγκος  $V$  είναι αυθαίρετος, προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση διατήρησης της ορμής:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \mathbf{f} \quad (1.7)$$

Οι δύο εξισώσεις (1.3) (1.7) περιέχουν τα τρία άγνωστα πεδία  $p, \mathbf{u}, \tau$ . Συνεπώς προκειμένου να κλείσει το σύστημα πρέπει να εισάγουμε μια καταστατική εξίσωση που να συνδέει τα πεδία αυτά μεταξύ τους. Η απλούστερη δυνατή υπόθεση είναι αυτή του Νευτώνειου ρευστού. Στην περίπτωση αυτή η τασική κατάσταση του ρευστού χαρακτηρίζεται πλήρως από το πεδίο της πίεσης και τον τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης. Πιο συγκεκριμένα, ο τανυστής διατμητικών τάσεων είναι ανάλογος με τον τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης,

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$$



όπου  $\mu$  η σταθερά της δυναμικής συνεκτικότητας. Παρατηρούμε ότι λόγω της (1.3),

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = S_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

και επομένως η Νευτώνεια σχέση μεταξύ  $\tau_{ij}$  και  $S_{ij}$  είναι συνεπής με την απαίτηση  $\text{tr}(\tau) = 0$  για τον τανυστή διατμητικών τάσεων. Η απόκλιση του τανυστή των διατμητικών τάσεων υπολογίζεται, με την βοήθεια της (1.3):

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \tau)_i &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right) = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ \nabla \cdot \tau &= \mu \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned}$$

όπου υποθέσαμε ότι  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3) \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Ακόμα, αναπτύσσοντας την απόκλιση  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$  και χρησιμοποιώντας την (1.3) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_i &= \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \\ &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned}$$

επομένως αντικαθιστώντας στην (1.7) και διαιρώντας με  $\rho$  παίρνουμε την εξίσωση Navier–Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.8)$$

όπου  $\nu = \mu/\rho$  ο συντελεστής κινηματικής συνεκτικότητας ενώ επαναορίζουμε την πίεση ως  $p = p/\rho$  και την εξωτερική δύναμη ως  $\mathbf{f} = \mathbf{f}/\rho$ .

Μία ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης Navier–Stokes, η οποία προκύπτει αν δεν αναπτύξουμε την απόκλιση  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$  είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + f_i \quad (1.9)$$

Θέτοντάς την συνεκτικότητα ίση με μηδέν στην (1.8) παίρνουμε την εξίσωση Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \quad (1.10)$$

Η εξίσωση Navier–Stokes είναι μια μη-γραμμική παραβολική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για το πεδίο ταχυτήτων. Ο μη-γραμμικός όρος  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  είναι δευτέρου βαθμού ως προς την ταχύτητα και από φυσική άποψη προέρχεται από την μεταφορά ορμής με την κίνηση του ρευστού. Ο γραμμικός όρος  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$  είναι όρος διάχυσης ο οποίος προέρχεται από την Νευτώνεια υπόθεση για τις διατμητικές τάσεις. Όπως θα φανεί παρακάτω, ο όρος  $-\nabla p$  εξασφαλίζει την συνθήκη (1.3).

Το όριο της εξίσωσης (1.8) για  $\nu \rightarrow 0$  είναι ιδιαίτερα ιδιόμορφο, καθώς η παραβολική εξίσωση Navier-Stokes μεταπίπτει στην υπερβολική εξίσωση Euler. Όπως θα αναφερθεί σε επόμενη ενότητα, υπάρχουν εμπειρικές ενδείξεις ότι ο συνεκτικός όρος δεν μπορεί να αγνοηθεί στο όριο  $\nu \rightarrow 0$ .

Προκειμένου να αδιαστατοποιήσουμε την εξίσωση Navier-Stokes, θεωρούμε μια κλίμακα μήκους  $L$ , μια κλίμακα ταχύτητας  $U$  και μια χρονική κλίμακα χρόνου  $T = L/U$  και εφαρμόζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς κλίμακας:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \frac{t}{T} = \frac{Ut}{L}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}, \\ \mathbf{u} &\rightarrow \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p \rightarrow \frac{p}{U^2}, \quad \mathbf{f} \rightarrow \frac{\mathbf{f}L}{U^2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Επομένως  $\partial/\partial t \rightarrow L/U \partial/\partial t$ ,  $\nabla \rightarrow L \nabla$  και η (1.8) γράφεται:

$$\frac{L}{U^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{L}{U^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{L}{U^2} \nabla p + \frac{\nu L^2}{U} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{L}{U^2} \mathbf{f}$$

ή τελικά

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.12)$$

με  $Re$  τον αριθμό Reynolds,

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.13)$$

ο οποίος εκφράζει τον λόγο των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Η εξίσωση (1.12) εκφράζει τον νόμο δυναμικής ομοιότητας της υδροδυναμικής. Δυο διαφορετικές περιπτώσεις ροής είναι δυναμικά όμοιες, δηλαδή είναι δυνατόν να ταυτιστούν μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών κλίμακας αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο αριθμό Reynolds.

Αν θέσουμε  $\mathbf{f} = 0$ , η εξίσωση Navier-Stokes στον χώρο  $\mathbb{R}^3$  διαθέτει τις ακόλουθες συμμετρίες:

1. Χρονικές μεταθέσεις:  $t \rightarrow t + t'$
2. Χωρικές μεταθέσεις:  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$
3. Στροφές:  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{\Lambda} \in \text{SO}(3)$
4. Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου:  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{U}t$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$
5. Ομοτιμία:  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$
6. Μετασχηματισμοί κλίμακας:  $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ ,  $t \rightarrow \lambda^{1-h} t$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \lambda^h \mathbf{u}$ ,  $h = -1$ . Στο όριο  $\nu \rightarrow 0$  η παράμετρος  $h$  μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Η τιμή  $h = -1$  είναι η μοναδική επιτρεπτή τιμή για  $\nu \neq 0$ , καθώς αφήνει τον αριθμό Reynolds αναλλοίωτο.

Οι εξισώσεις (1.3) και (1.8) είναι επαρκείς για την επίλυση ως προς τα πεδία  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$ . Παρ' όλα αυτά, παρατηρούμε ότι η πίεση  $p$  δεν εμφανίζεται στην μορφή  $\partial p/\partial t$ . Η εξίσωση (1.3), η οποία δεν περιέχει χρονική παράγωγο δεν αποτελεί μια δυναμική εξίσωση για την πίεση αλλά μια κινηματική συνθήκη για την ταχύτητα.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\nabla \cdot (\cdot) = \partial(\cdot)/\partial x_i$  στην (1.9), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 (u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_i} + \nu \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_k^2} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 (u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} + \frac{\partial^2 (u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} &= -\nabla^2 p + \nu \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial x_k^2} + \nabla \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+$  και ακόμα ότι την χρονική στιγμή  $t = 0$  το πεδίο ταχυτήτων ικανοποιεί την (1.3):  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Αν το πεδίο της πίεσης ικανοποιεί την εξίσωση Poisson:

$$\nabla^2 p = -\frac{\partial^2(u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.14)$$

έχουμε  $\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})/\partial t = 0$  και το πεδίο ταχυτήτων ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας για κάθε  $t$ .

Η εξίσωση (1.14) αποτελεί ένα ελλειπτικό πρόβλημα για το πεδίο της πίεσης το οποίο έπεται από την κινηματική συνθήκη συνέχειας. Συνεπώς, η πίεση δεν είναι ανεξάρτητη δυναμική μεταβλητή αλλά συνάρτηση του πεδίου ταχύτητας, με την κλίση της στο δεξιό μέλος της εξίσωσης Navier–Stokes να εξασφαλίζει την ικανοποίηση της εξίσωσης συνέχειας.

Όπως είδαμε στην υποενότητα 1.1.2, η λύση της (1.14) γράφεται:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{r(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}', \quad r(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2(u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Η ολοκληρωτική μορφή της λύσης αναδεικνύει την μη-τοπικότητα των δυνάμεων πίεσης, η οποία είναι αποτέλεσμα της ικανοποίησης της κινηματικής συνθήκης συνέχειας: σε κάθε χρονική στιγμή το πεδίο της πίεσης σε κάθε σημείο εξαρτάται από το πεδίο ταχυτήτων σε όλο τον χώρο. Η μη-τοπικότητα της παραπάνω λύσης αντιστοιχεί σε φυσικό επίπεδο σε άπειρη ταχύτητα διάδοσης διαταραχών πίεσης. Ο απειρισμός της ηχητικής ταχύτητας  $c = \partial p / \partial \rho$  οφείλεται στην μηδενική συμπίεσιμότητα του ρευστού.

Επιστρέφοντας στον ορισμό της στροβιλότητας (1.4) θεωρούμε το διανυσματικό γινόμενο:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})_i &= \epsilon_{ijk} \omega_j u_k \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} u_k \\ &= (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) \frac{\partial u_m}{\partial x_n} u_k \\ &= u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} u_k^2 \right) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.8) προκύπτει μία ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης Navier-Stokes, η οποία περιέχει ρητά το πεδίο στροβιλότητας:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left( p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.15)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\nabla \times (\cdot)$  στην (1.8), μπορούμε να λάβουμε μια δυναμική εξίσωση για

την στροβιλότητα. Ο μη-γραμμικός όρος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \epsilon_{ijk} u_m \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_m} \\
&= -\epsilon_{kji} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + u_m \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \\
&= -\epsilon_{kjm} \delta_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + u_m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_m} \\
&= -\epsilon_{kjm} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \delta_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + u_m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_m} \\
&= -\omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_m}
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.8) προκύπτει:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f} \quad (1.16)$$

Παρατηρούμε ότι η στροβιλότητα υπακούει μια αυστηρά τοπική μερική διαφορική εξίσωση, καθώς η κλίση της πίεσης είναι απύσασα. Η μη-τοπικότητα της εξίσωσης Navier–Stokes έχει μεταφερθεί στην εξάρτηση του πεδίου ταχυτήτων από το πεδίο στροβιλότητας (1.6).

Ο όρος  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  αναπαριστά την παραμόρφωση του πεδίου στροβιλότητας από την κλίση του πεδίου ταχυτήτων (vortex stretching). Ο όρος αυτός είναι μηδενικός για δισδιάστατη ροή καθώς σε αυτή την περίπτωση  $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{n}_3$  και συνεπώς

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \omega_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = 0 \quad (1.17)$$

Η παραμόρφωση του πεδίου στροβιλότητας αποτελεί τον πιο σημαντικό μηχανισμό αλληλεπίδρασης μεταξύ διαφορετικών χωρικών κλιμάκων, ο οποίος είναι παρών μόνο σε τρισδιάστατη ροή. Για τον λόγο αυτό, η προσέγγιση ενός τρισδιάστατου πεδίου ροής από ένα δισδιάστατο είναι πολλές φορές ανεπαρκής.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών χωρικών κλιμάκων, η οποία χαρακτηρίζει την εξίσωση Navier–Stokes και οφείλεται στην παρουσία τετραγωνικού μη-γραμμικού όρου μπορεί να φανεί καθαρότερα στον χώρο Fourier. Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $u_i$ ,  $p \in L^2(\mathbb{R})$ , και ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier αυτών:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{x} \quad (1.18)$$

καθώς και τον αντίστροφο του:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k} \quad (1.19)$$

Αντίστοιχα ορίζεται και ο μετασχηματισμός Fourier του πεδίου της πίεσης. Λαμβάνοντας υπόψιν

ότι  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$  προκύπτει η παρακάτω ιδιότητα συμμετρίας:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(-\mathbf{k})^* &= \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})^* d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x})^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

Οι τελεστές της διαφορίσης και της ολοκλήρωσης στον φασματικό χώρο αντιστοιχούν σε αλγεβρικές διαδικασίες, όπως μπορούμε να δείξουμε παραγωγίζοντας την (1.19):

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} ik_i \tilde{u}_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} = \mathcal{F}^{-1}\{ik_i \tilde{u}_j\}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\} = ik_i \tilde{u}_j$$

και αντίστροφα

$$\mathcal{F}\left\{\int u(x_i) dx_i\right\} = \frac{\tilde{u}(x_i)}{ik_i}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  στην εξίσωση (1.9) προκύπτει, μετά από την αντικατάσταση  $\partial(\cdot)/\partial x_i \rightarrow ik_i(\cdot)$ :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + ik_m \mathcal{F}\{u_m u_i\} = -ik_i \tilde{p} - \nu k_a^2 \tilde{u}_i \quad (1.20)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της (1.3) δίνει:

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.21)$$

συνεπώς το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{u}}$  είναι κάθετο στο  $\mathbf{k}$ . Αντιθέτως, ο όρος  $k_i \tilde{p} = (\mathbf{k}\tilde{p})_i$  είναι παράλληλος με το  $\mathbf{k}$ . Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της (1.14), προκύπτει:

$$\tilde{p} = \mathcal{F}\{p\} = -\frac{k_m k_j}{k_\alpha^2} \mathcal{F}\{u_m u_j\} \quad (1.22)$$

Παρατηρούμε ότι, μέσω του μετασχηματισμού Fourier το ελλειπτικό πρόβλημα (1.14) εκφράζεται σε τοπική αλγεβρική μορφή.

Αντικαθιστώντας στην (1.20) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + ik_m \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_\alpha^2}\right) \mathcal{F}\{u_m u_j\} = -\nu k_a^2 \tilde{u}_i \quad (1.23)$$

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής

$$\mathcal{F}^{-1} \mathcal{P} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_\alpha^2} \right) \mathcal{F}\{\cdot\} \right\}$$

προβάλλει το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in W = C^2(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)^3$  στον υπόχωρο  $V = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in W, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$ , καθώς

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathcal{P}\tilde{\mathbf{u}}) &= k_i P_{ij} \tilde{u}_j \\ &= k_i \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_\alpha^2}\right) \tilde{u}_j \\ &= \left(k_j - \frac{k_i^2 k_j}{k_\alpha^2}\right) \tilde{u}_j = (k_j - k_j) \tilde{u}_j = 0\end{aligned}$$

Το γεγονός αυτό καθιστά σαφή τον ρόλο της κλίσης της πίεσης στην επιβολή της συνθήκης  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Η κλίση της πίεσης επιβάλλει μηδενική απόκλιση στον μη-γραμμικό όρο  $\mathcal{F}\{u_m u_j\}$ , έτσι ώστε αν  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$  από την (1.23) προκύπτει  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ .

Αναπτύσσοντας τον μη-γραμμικό όρο  $\mathcal{F}\{u_m u_j\}$  λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{u_m u_j\} &= \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{u}_m\} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{u}_j\}\} \\ &= \int \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{u}_m(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{u}_j(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{q} \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \iiint e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \tilde{u}_m(\mathbf{p}) \tilde{u}_j(\mathbf{q}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \tilde{u}_m(\mathbf{p}) \tilde{u}_j(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \end{aligned}$$

Τελικά ο μη-γραμμικός όρος δίνεται από την σχέση:

$$N_{mj}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q}} \tilde{u}_m(\mathbf{p}) \tilde{u}_j(\mathbf{q}) d^3\mathbf{q} \quad (1.24)$$

Η παραπάνω μορφή του μη-γραμμικού όρου αναδεικνύει την αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών χωρικών κλιμάκων. Η αλληλεπίδραση αυτή λαμβάνει χώρα μέσω τριάδων κυματανυσμάτων για τα οποία ισχύει  $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ . Σημειώνουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν δίνει καμία πληροφορία ούτε για την διεύθυνση ούτε για την τοπικότητα ή μη της μεταφοράς ενέργειας στον φασματικό χώρο.

Η τελική μορφή της εξίσωσης Navier–Stokes στον χώρο Fourier είναι:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + ik_m (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_\alpha^2}) N_{mj}(\mathbf{k}) = -\nu k_\alpha^2 \tilde{u}_i \quad (1.25)$$

### 1.2.2 Ενέργεια, Ενστροφία, Ελικότητα

Σε αυτή την υποενότητα θα παράγουμε από την εξίσωση Navier–Stokes δυναμικές εξισώσεις για τρεις σημαντικές ποσότητες: την κινητική ενέργεια, την ενστροφία και την ελικότητα. Όπως θα δείξουμε παρακάτω, οι ποσότητες αυτές αποτελούν υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις ολοκληρώματα της κίνησης ασυμπίεστου ρευστού.

Περνώντας στην εξέταση της κινητικής ενέργειας του ρευστού, πολλαπλασιάζουμε την (1.15) εσωτερικά με  $\mathbf{u}$  και ο μη-γραμμικός όρος μηδενίζεται:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

Θέτοντας  $q = p + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (1.3), ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} &= q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial (q u_i)}{\partial x_i} = \nabla \cdot (q \mathbf{u}) \end{aligned}$$

ενώ για τον συνεκτικό όρο λαμβάνουμε, χρησιμοποιώντας πάλι την (1.3):

$$\begin{aligned}
u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} &= u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\
&= u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right)}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)
\end{aligned}$$

Ακόμα, σύμφωνα πάντα με την (1.3) παίρνουμε για τον δεύτερο όρο της παραπάνω έκφρασης:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} u_k \right) \\
&= \frac{\partial^2 (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k} = -\nabla^2 p
\end{aligned}$$

λόγω της (1.14).

Συνθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε μια εξίσωση για την κινητική ενέργεια  $e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$ :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} (p + e)) = -\nu \nabla^2 p + \nu \nabla^2 e - \epsilon \quad (1.26)$$

Οι όροι  $\nu \nabla^2 p$ ,  $\nu \nabla^2 e$  εκφράζουν την διάχυση της κινητικής ενέργειας λόγω συνεκτικότητας ενώ ο μη-αρνητικά ορισμένος όρος

$$\epsilon = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

εκφράζει τον ρυθμό μετατροπής της κινητικής ενέργειας σε θερμότητα μέσω των συνεκτικών δυνάμεων (energy dissipation rate). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\
&= \nu (\Omega_{ij} + S_{ij}) 2S_{ij} \\
&= 2\nu \Omega_{ij} S_{ij} + 2\nu S_{ij} S_{ij} \\
&= 2\nu S_{ij} S_{ij}
\end{aligned}$$

καθώς το γινόμενο του αντισυμμετρικού τανυστή  $\Omega_{ij}$  με τον συμμετρικό τανυστή  $S_{ij}$  είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνεπώς ο ρυθμός υποβάθμισης της κινητικής ενέργειας  $\epsilon$  γράφεται ως:

$$\epsilon = 2\nu S_{ij} S_{ij} = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.27)$$

Η εξίσωση ενέργειας μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(p + e)) &= -\nu \nabla \cdot (\nabla p) + \nu \nabla \cdot (\nabla e) - \epsilon \\
\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_e &= -\epsilon, \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{u}(p + e) + \nu(\nabla p - \nabla e)
\end{aligned}$$

Θεωρώντας την μέση τιμή της παραπάνω εξίσωσης σε μια σφαίρα  $B(r)$  ακτίνας  $r$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} e \, dV \right) &= \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} \frac{\partial e}{\partial t} \, dV \\ &= -\frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} \nabla \cdot \mathbf{f}_e \, dV - \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} \epsilon \, dV \end{aligned}$$

Περνώντας στο όριο για  $r \rightarrow \infty$ , προκύπτει για τον χωρικό μέσο όρο της ενέργειας:

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} \nabla \cdot \mathbf{f}_e \, dV - \bar{\epsilon}$$

όπου

$$\bar{a} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} a \, dV$$

ο χωρικός μέσος όρος της ποσότητας  $a$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους παίρνουμε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} \nabla \cdot \mathbf{f}_e \, dV = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(r)|} \int_{\partial B(r)} \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση  $|\mathbf{f}_e|$  είναι φραγμένη, έστω  $M$  η μέγιστη τιμή της. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(r)|} \int_{\partial B(r)} \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{n} \, dS \right| &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(r)|} \int_{\partial B(r)} |\mathbf{f}_e| \, dS \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\partial B(r)|}{|B(r)|} M \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} M = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{3M}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Συνεπώς, η τελική μορφή της εξίσωσης για τον χωρικό μέσο όρο της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = -\bar{\epsilon} \quad (1.29)$$

Λόγω του μη-αρνητικά ορισμένου όρου  $\epsilon$ , ο χωρικός μέσος όρος της κινητικής ενέργειας είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.

Στην περίπτωση της εξίσωσης Euler ( $\nu = 0$ ), ο όρος πηγής  $\epsilon$ , ο οποίος προέρχεται από τους συνεκτικούς όρους, είναι απών:

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = 0$$

Επομένως η μέση κινητική ενέργεια είναι μια σταθερά της κίνησης για την εξίσωση Euler, αλλά όχι για την εξίσωση Navier-Stokes. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια πολύ σημαντική διαφορά ανάμεσα στην συνεκτική και την μη-συνεκτική ροή.

Μία ιδιαίτερα σημαντική ποσότητα στην κίνηση ασυμπίεστου ρευστού είναι η ενστροφία (enstrophy), η οποία ορίζεται ως ο χωρικός μέσος όρος του τετραγώνου του πεδίου στροβιλότητας:

$$\bar{e}_\omega = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V e_\omega \, dV \quad e_\omega = \frac{1}{2} \omega^2 \quad (1.30)$$



Πολλαπλασιάζοντας την (1.16) εσωτερικά με  $\omega$ , και χρησιμοποιώντας την (1.3) παίρνουμε από τους μη-γραμμικούς όρους:

$$\begin{aligned}
\omega \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega) - \omega \cdot ((\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}) &= \omega_i u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= u_j \frac{\partial (\frac{1}{2}\omega_i^2)}{\partial x_j} - \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial (u_j e_\omega)}{\partial x_j} - e_\omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial (u_j e_\omega)}{\partial x_j} - \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \nabla \cdot (\mathbf{u} e_\omega) - s_\omega
\end{aligned}$$

Από τον συνεκτικό όρο της (1.16) παίρνουμε, χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα  $\partial \omega_i / \partial x_i = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$

$$\begin{aligned}
\omega_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k^2} &= \omega_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} \\
&= \omega_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \omega_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \omega_i \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial (\frac{1}{2}\omega_i^2)}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \omega_i \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right) \\
\omega \cdot \nu \nabla^2 \omega &= \nabla \cdot (\nu \nabla e_\omega + \nu \omega \cdot \nabla \omega) - \epsilon_\omega
\end{aligned}$$

Ο ταυστής  $\partial \omega_i / \partial x_k$  μπορεί να αναλυθεί σε ένα αντισυμμετρικό και ένα συμμετρικό κομμάτι:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} = A_{ij} + B_{ij}$$

με

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right)$$

Επομένως ο όρος  $\epsilon_\omega$  μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}
s_\omega &= \nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right) \\
&= \nu (A_{ij} + B_{ij}) 2B_{ij} = 2\nu B_{ij} B_{ij}
\end{aligned}$$

Μετασχηματίζοντας και τους υπόλοιπους όρους της (1.16) με προφανή τρόπο και θέτοντας  $\mathbf{f} = 0$ , παίρνουμε:

$$\frac{\partial e_\omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_\omega = s_\omega - \epsilon_\omega \quad \mathbf{f}_\omega = \mathbf{u} e_\omega - \nu \nabla e_\omega - \nu \omega \cdot \nabla \omega \quad (1.31)$$

με

$$\epsilon_\omega = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.32)$$

τον μη-αρνητικά ορισμένο ρυθμό απώλειας της ενστροφίας, ο οποίος προέρχεται από τους συνεκτικούς όρους και

$$s_\omega = \omega_j \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.33)$$

τον ρυθμό παραγωγής ενστροφίας, ο οποίος οφείλεται στην παραμόρφωση του πεδίου στροβιλότητας από την κλίση του πεδίου ταχυτήτων.

Μετασχηματίζοντας τον όρο

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla \omega &= \omega_i \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial(\omega_i \omega_k)}{\partial x_i} - \omega_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial(\omega_i \omega_k)}{\partial x_i} \end{aligned}$$

η εξίσωση (1.31) μπορεί να γραφεί την ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{\partial e_\omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e_\omega = \nu \frac{\partial^2(\omega_i \omega_k)}{\partial x_i \partial x_k} + \nu \nabla^2 e_\omega - \epsilon_\omega \quad (1.34)$$

όπου και φαίνεται ρητά ότι πρόκειται για μια εξίσωση μεταφοράςδιάχυσης.

Παίρνοντας τον χωρικό μέσο όρο της (1.31), και υποθέτοντας ότι η συνάρτηση  $|\mathbf{f}_\omega|$  είναι φραγμένη, η απόκλιση της δίνει μηδενική συνεισφορά (1.28), επομένως:

$$\frac{\partial \bar{e}_\omega}{\partial t} = \bar{s}_\omega - \bar{\epsilon}_\omega$$

Για δισδιάστατη μη-συνεκτική ροή ο όρος πηγής  $s_\omega$  είναι ταυτοτικά μηδέν (1.17), ενώ ο όρος  $\epsilon_\omega$  είναι απών, επομένως

$$\frac{\partial \bar{e}_\omega}{\partial t} = 0$$

Βλέπουμε ότι η απουσία του όρου παραμόρφωσης του πεδίου στροβιλότητας σε δύο διαστάσεις εισάγει μια καινούργια σταθερά της κίνησης για την εξίσωση Euler, την ενστροφή. Το γεγονός αυτό υπογραμμίζει την σημασία του όρου αυτού για την τρισδιάστατη εξίσωση Navier–Stokes.

Η ελικότητα (helicity) ορίζεται ως ο χωρικός μέσος όρος του εσωτερικού γινομένου του πεδίου στροβιλότητας με το πεδίο ταχύτητας:

$$\bar{h}_\omega = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V h_\omega dV \quad h_\omega = \omega \cdot \mathbf{u} \quad (1.35)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.16) εσωτερικά με  $\mathbf{u}$ , λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.3) και επιπλέον την διανυσματική ταυτότητα  $\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ , λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega) - \mathbf{u} \cdot ((\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= u_i u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= u_i \frac{\partial(u_j \omega_i)}{\partial x_j} - u_i \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial(\frac{1}{2} u_i^2)}{\partial x_j} \\ &= u_i \frac{\partial(u_j \omega_i)}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial e}{\partial x_j} \\ &= u_i \frac{\partial(u_j \omega_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\omega_j e)}{\partial x_j} + e \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \\ &= u_i \frac{\partial(u_j \omega_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\omega_j e)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Ενώ από τον συνεκτικό όρο εύκολα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial h_\omega}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η (1.16) δίνει:

$$u_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial (u_j \omega_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\omega_j e - \nu \frac{\partial h_\omega}{\partial x_j}) = -\nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.36)$$

Αντίστοιχα ο μη-γραμμικός όρος της (1.10) πολλαπλασιαζόμενος εσωτερικά με  $\omega$  δίνει, με την βοήθεια της (1.3):

$$\begin{aligned} \omega \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \omega_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= u_j \frac{\partial (\omega_i u_i)}{\partial x_j} - u_j u_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \\ &= u_j \frac{\partial h_\omega}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial (\omega_i u_j)}{\partial x_j} + u_i \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= u_j \frac{\partial h_\omega}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial (\omega_i u_j)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (u_j h_\omega)}{\partial x_j} - h_\omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial (\omega_i u_j)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (u_j h_\omega)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial (\omega_i u_j)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Ενώ από τον συνεκτικό όρο παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \omega_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial h_\omega}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Συνεπώς από την εξίσωση (1.8) προκύπτει:

$$\omega_i \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial (\omega_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j h_\omega - \nu \omega_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = -\nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.37)$$

Προσθέτοντας τις (1.36) και (1.37) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial h_\omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_h = \epsilon_h \quad \mathbf{f}_h = \mathbf{u} h_\omega - \omega e - 2\nu \nabla h_\omega \quad (1.38)$$

όπου

$$\epsilon_h = 2\nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.39)$$

ο ρυθμός απώλειας της ελικότητας ο οποίος προέρχεται από τους συνεκτικούς όρους. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{\partial h_\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (h_\omega - \omega e) = 2\nu \nabla^2 h_\omega - \epsilon_h \quad (1.40)$$

όπου και φαίνεται ρητά ότι πρόκειται για μια εξίσωση μεταφοράς διάχυσης.

Με τον ίδιο ακριβώς συλλογισμό όπως στην περίπτωση των εξισώσεων μέσης ενέργειας και ενστροφίας, συνεισφορά του όρου  $\nabla \cdot \mathbf{f}_h$  στην εξίσωση της ελικότητας είναι μηδενική (1.28).

$$\frac{\partial \bar{h}_\omega}{\partial t} = -\bar{\epsilon}_\omega$$

Στην περίπτωση της εξίσωσης Euler έχουμε  $\nu = 0$  και ο όρος  $\epsilon_\omega$  είναι απών, επομένως:

$$\frac{\partial \bar{h}_\omega}{\partial t} = 0$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η κίνηση μη-συνεκτικού ασυμπίεστου ρευστού κατέχει μια ακόμα σταθερά της κίνησης εκτός από την μέση ενέργεια, την μέση ελικότητα. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ της κίνησης ενός ατριβούς και ενός συνεκτικού ασυμπίεστου ρευστού, καθώς στην πρώτη περίπτωση η διατήρηση της ελικότητας αποτελεί έναν επιπλέον περιορισμό τον οποίο το πεδίο ταχύτητας οφείλει να ικανοποιεί.

### 1.3 Ύπαρξη και ομαλότητα της λύσης

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης Navier–Stokes από μαθηματική άποψη. Λόγω έλλειψης χώρου θα περιοριστούμε σε απλή αναφορά κάποιων σημαντικών θεωρημάτων και ποιοτική συζήτηση επί των συνεπειών τους παραπέμποντας στην σχετική βιβλιογραφία για αποδείξεις.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η εξίσωση Navier–Stokes είναι μια μη-γραμμική παραβολική εξίσωση δεύτερης τάξης με τετραγωνική μη-γραμμικότητα. Περιέχει δύο όρους οι οποίοι καθιστούν την αναλυτική και αριθμητική μελέτη της εξαιρετικά δύσκολη. Ο πρώτος είναι ο μη-γραμμικός όρος  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  ο οποίος σε μαθηματικό επίπεδο δυσχεραίνει την εφαρμογή των εργαλείων της κλασσικής θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε φυσικό επίπεδο προέρχεται από την μεταφορά ορμής με την κίνηση του ρευστού και εκφράζει, όπως ήδη αναφέρθηκε σχετικά με την (1.16) (vortex stretching) και την (1.25) (energy cascade), την αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών χωρικών κλιμάκων. Ο δεύτερος όρος είναι η κλίση της πίεσης, η οποία εμπλέκει το ελλειπτικό πρόβλημα (1.14), του οποίου η μη-τοπικότητα αποτελεί μια πρόσθετη πηγή αναλυτικών και αριθμητικών δυσκολιών.

Από ιστορική άποψη σημείο αφετηρίας για την μαθηματική θεωρία των εξισώσεων Navier–Stokes αποτελούν τα κλασσικά άρθρα των J. Leray [51] και E. Hopf [42] όπου και αποδεικνύεται η ύπαρξη και μοναδικότητα ομαλής ισχυρής λύσης για κάποιο χρονικό διάστημα  $(0, t^*)$  το οποίο εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Αποδεικνύεται επίσης η δυνατότητα περαιτέρω επέκτασης της λύσης ως λιγότερο ομαλής και όχι απαραίτητα μοναδικής ασθενούς λύσης. Σύμφωνα με την εικασία του Leray [51] το πεδίο ροής πραγματικά χάνει την ομαλότητα σε μεγάλους αριθμούς Reynolds και έτσι το φαινόμενο της μετάβασης σε τυρβώδη ροή συνδέεται άρρηκτα με την κατάρρευση της ομαλής λύσης. Η εικασία αυτή προσφέρει μια πολύ ενδιαφέρουσα εξήγηση για την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή αλλά η σχέση της με την φυσική πραγματικότητα δεν έχει γίνει σαφής μέχρι σήμερα.

Οι επεκτάσεις της ομαλής λύσης πέραν του  $t^*$  είναι γνωστές στην βιβλιογραφία ως ασθενείς λύσεις Leray–Hopf και αποτελούν αντικείμενο μελέτης στα ιδιαίτερα σημαντικά άρθρα [64], [10], τα οποία και γενικεύουν τα κλασσικά αποτελέσματα των [51] και [42]. Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιστορική αναδρομή των εξελίξεων στο πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας μπορεί να βρεθεί στο άρθρο [72].

Κατά την παραγωγή της εξίσωσης Navier–Stokes υποθέσαμε συνολικά ότι  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3) \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^1(\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι παρακάτω ερώτημα παραμένει αναπάντητο:

### Ύπαρξη και ομαλότητα λύσεων των εξισώσεων Navier–Stokes

Δοθέντος ενός αρχικού πεδίου  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$  με συμπαγή φορέα και για το οποίο ισχύει  $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ , να βρεθεί αν το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ομαλή λύση  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \nu > 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ανοικτό και για  $\nu = 0$  (εξίσωση Euler).

Στην περίπτωση  $\nu > 0$  το ερώτημα έχει απαντηθεί θετικά για ροή σε δύο διαστάσεις καθώς εκεί είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μοναδική ομαλή λύση [47]. Σε τρεις διαστάσεις είναι γνωστό ότι αν υπάρχει ομαλή λύση τότε είναι και μοναδική, ενώ αν η ομαλότητα της λύσης χαθεί, παραβιάζεται εν γένει και η μοναδικότητα της. Η τελευταία περίπτωση προφανώς θα απαξίωνε πλήρως την εξίσωση Navier–Stokes ως μαθηματικό μοντέλο κίνησης ασυμπίεστου ρευστού.

Έστω και αν το πρόβλημα παραμένει στην γενικότητά του ανοικτό, υπάρχει, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, πλήθος μερικών ή/και τοπικών αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, είναι γνωστό [14] ότι αν

$$\int_0^T \omega^2 dt < \infty$$

τότε  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3)$ .

Η παρουσία τοπικού (στο χρόνο) θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας [16] μαζί με κάποιο κατάλληλο a priori φράγμα (το οποίο δεν έχει βρεθεί μέχρι σήμερα) θα σήμαινε ότι η τοπική ομαλή λύση μπορεί να συνεχιστεί σε όλο το  $\mathbb{R}^+$ . Για την εξίσωση Euler έχει αποδειχθεί [6] ότι είτε η λύση παραμένει ομαλή  $\forall t \in \mathbb{R}^+$  είτε έχουμε απειρισμό της  $L^2$  νόρμας της στροβιλότητας:

$$\lim_{t \rightarrow t_b} \|\omega(\mathbf{x}, t)\|_{L^2} = \infty$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση Navier–Stokes αναφέρουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις από αριθμητικά πειράματα [44] ότι

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\epsilon} = - \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} > 0$$

Ανατρέχοντας στον ορισμό (1.27) παρατηρούμε ότι αν αυτό ισχύει, τουλάχιστον μία από τις παραγώγους  $\partial u_i / \partial x_j$  απειρίζεται σε κάποιο σύνολο  $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ . Έχει αποδειχθεί [65] ότι αν  $\nu > 0$  η διάσταση Hausdorff του συνόλου  $S_\nu$  δεν υπερβαίνει τον αριθμό δύο. Επομένως το πεδίο ταχυτήτων είναι συνεχές παντού έκτος από ένα σύνολο διάστασης  $\leq 2$ , όπου πιθανώς να εμφανίζει ασυνέχεια άλματος. Προφανώς δεν είναι γνωστό αν το σύνολο  $S_\nu$  είναι κενό.

Στην περίπτωση  $\nu = 0$  είδαμε στην παράγραφο 1.2.2 ότι για ομαλές λύσεις της εξίσωσης Euler η ενέργεια διατηρείται. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ομαλές λύσεις μπορεί να μην υπάρχουν σε κάποιες περιπτώσεις. Σύμφωνα με την εικασία του Onsager [58], η οποία τελικά αποδείχθηκε στο άρθρο [15] οι ασθενείς λύσεις της εξίσωσης Euler, οι οποίες ορίζονται σε όλο το  $\mathbb{R}^+$ , διατηρούν την ενέργεια αν και μόνο αν το πεδίο ταχυτήτων είναι Hölder συνεχές με εκθέτη  $> \frac{1}{3}$ :

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)| = C|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha, \quad \alpha > \frac{1}{3}$$

ενώ αντίθετα  $\partial \bar{\epsilon} / \partial t < 0$  αν  $\alpha \leq \frac{1}{3}$ . Η εικασία του Onsager φανερώνει ότι μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της τυρβώδους ροής, η απώλεια κινητικής ενέργειας, χαρακτηρίζεται υπό προϋποθέσεις τις ασθενείς λύσεις της εξίσωσης Euler. Συνεπώς η μελέτη των λύσεων αυτών μπορεί να συμβάλει

αποφασιστικά στην προσπάθεια κατανόησης της συμπεριφοράς των λύσεων της εξίσωσης Navier–Stokes στο όριο  $Re \rightarrow \infty$ .

Ολοκληρώνοντας την σύντομη επισκόπηση των μαθηματικών αποτελεσμάτων για τις εξισώσεις Navier–Stokes και Euler, αναφέρουμε ότι η απάντηση του ερωτήματος περί ύπαρξης και ομαλότητας των λύσεων, αν και θα βοηθήσει σημαντικά, δεν πρόκειται να λύσει από μόνη της όλα τα ανοικτά θέματα. Το πρόβλημα της διδιάστατης τυρβώδους ροής αποτελεί ένα παράδειγμα προβλήματος το οποίο κάθε άλλο παρά ‘έκλεισε’ μετά την απόκτηση θεωρήματος ύπαρξης και ομαλότητας.

Αποτελέσματα περί ύπαρξης και ομαλότητας, καθώς και η γενικότερη μαθηματική θεωρία των εξισώσεων Navier–Stokes σε τρεις διαστάσεις αναπτύσσονται στις μονογραφίες [73], [16], [35].

## Κεφάλαιο 2

# Μετάβαση σε τυρβώδη ροή

### 2.1 Υδροδυναμική ευστάθεια

Στο προηγούμενο κεφάλαιο θεωρήσαμε την ροή ασυμπίεστου ρευστού στον χώρο  $\mathbb{R}^3$  υπό την επίδραση εξωτερικής πεδιακής δύναμης. Η θεώρηση αυτή δεν είναι πάντα επαρκής καθώς οι ροές που συναντάμε στην φύση συνήθως περιλαμβάνουν αλληλεπίδραση με στερεά όρια. Είναι γνωστό ότι στην επιφάνεια στερεού ορίου ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης για το πεδίο ταχυτήτων:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_S = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

όπου  $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$  η ταχύτητα του σημείου  $\mathbf{x}$  της επιφάνειας  $S$  την χρονική στιγμή  $t$ .

Όπως είναι γνωστό από την στοιχειώδη υδροδυναμική, σε πολλές περιπτώσεις υπάρχουν στάσιμες λύσεις της εξίσωσης Navier–Stokes με την οριακή συνθήκη (2.1) οι οποίες μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή αναλυτική μορφή και τυπικά ισχύουν για κάθε αριθμό Reynolds:

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 = -\nabla p_0 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_0 \quad (2.2)$$

Όμως, εκτός από την ικανοποίηση των (2.2),(2.1) καθώς και της εξίσωσης συνέχειας (1.3), οι λύσεις αυτές πρέπει να είναι και ευσταθείς προκειμένου να παρατηρηθούν στην φύση, καθώς υπό πραγματικές συνθήκες διαταράσσονται συνεχώς από απρόβλεπτα εξωτερικά αίτια.

Θεωρώντας το πεδίο ταχυτήτων ως άθροισμα της στάσιμης λύσης  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  και μιας διαταραχής  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$  με  $|\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)| \ll |\mathbf{u}_0(\mathbf{x})|$  και  $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$  αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1.8), παίρνοντας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 = \\ -\nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 + \nabla p_0 - \nu \nabla^2 \mathbf{u}_0) = \\ -\nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 \end{aligned}$$

Παραλείποντας τον όρο  $(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 = O(\mathbf{u}_1^2)$ , και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2) παίρνουμε μια εξίσωση για την διαταραχή:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 = -\nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 \quad (2.3)$$

ενώ η (1.3) δίνει:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

Η εξίσωση (2.3) είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση με συντελεστές οι οποίοι εξαρτώνται από το  $\mathbf{x}$  αλλά όχι από το  $t$ . Συνεπώς η λύση μπορεί να αναπαρασταθεί ως τριγωνομετρική

σειρά:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) e^{-in\omega_1 t} \\ p_1(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\mathbf{x}) e^{-in\omega_1 t} \\ \omega_1 = \omega_1(Re) &\in \mathbb{C}, \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{-n}^* \in \mathbb{C}^3, b_n = b_{-n}^* \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Εισάγοντας έναν όρο της σειράς στην εξίσωση (2.3), προκύπτει ένα πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{a}_n + (\mathbf{a}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + \nabla b_n - \nu \nabla^2 \mathbf{a}_n = in\omega_1 \mathbf{a}_n$$

Ο υπολογισμός της σχέσης  $\omega_1 = \omega_1(Re)$  από την παραπάνω εξίσωση ιδιοτιμών για μια δεδομένη κατάσταση ροής αποτελεί τον σκοπό της γραμμικής θεωρίας υδροδυναμικής ευστάθειας. Για  $Re \sim 1$ ,  $\Im(\omega_1) < 0$  και η ροή είναι ευσταθής, καθώς όλοι οι τρόποι  $\mathbf{a}_n$  τείνουν στο μηδέν. Λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες, μπορεί κανείς να υπολογίσει τον κρίσιμο αριθμό Reynolds  $Re_{cr}$ , ο οποίος είναι εκείνος ο αριθμός Reynolds για τον οποίο η ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  περνά τον φανταστικό άξονα. Στην πράξη οι υπολογισμοί είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι και απαιτείται ειδική αντιμετώπιση ανάλογα με τα γεωμετρικά και κινηματικά χαρακτηριστικά των στερεών ορίων. Εκτεταμένα παραδείγματα υπολογισμών μπορούν να βρεθούν στα [22],[19],[12] και δεν θα αναπαραχθούν εδώ.

Η γραμμική θεωρία υδροδυναμικής ευστάθειας αδυνατεί να περιγράψει την συμπεριφορά των τρόπων  $\mathbf{a}_n e^{-in\omega_1 t}$  στην περίπτωση διαταραχής πεπερασμένου πλάτους  $\mathbf{u}_1 \sim \mathbf{u}_0$ , η οποία είναι και αυτή που συναντάται στην φύση. Αν εμφανίζονται αστάθειες για απειροστές διαταραχές, αυτές παραμένουν και για πεπερασμένες, αλλά όχι και αντιστρόφως. Υπάρχουν σημαντικές περιπτώσεις, για παράδειγμα η δισδιάστατη ροή Couette, οι οποίες είναι ευσταθείς ως προς απειροστές διαταραχές για κάθε  $Re$  ενώ στο πείραμα παρατηρείται απώλεια ευστάθειας σε συγκεκριμένο αριθμό Reynolds. Ακόμα, η γραμμική θεώρηση μας δίνει μεν τον κρίσιμο αριθμό Reynolds για τον οποίο η ροή γίνεται ασταθής σε απειροστή διαταραχή, αλλά δεν μας παρέχει καμία πληροφορία για την δυναμική της διαταραχής για  $Re > Re_{cr}$  όπου το πλάτος της διαταραχής είναι πλέον πεπερασμένο.

Ακολουθώντας τον Landau [49], θεωρούμε τον τρόπο  $\sim e^{-i\omega_1 t}$  στην γειτονιά  $Re \sim Re_{cr}$  με  $\omega_1 = \omega + i\gamma$ . Για  $Re < Re_{cr}$  έχουμε  $\gamma < 0$ , ενώ για  $0 < Re - Re_{cr} \ll 1$  ισχύει  $0 < \gamma \ll \omega$ . Το κομμάτι της διαταραχής  $\mathbf{u}_1$  που αντιστοιχεί σε αυτό τον τρόπο είναι της μορφής:

$$\mathbf{u}_1 = A(t) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad A(t) = C e^{\gamma t} e^{-i\omega t}$$

Η παραπάνω έκφραση για το πλάτος  $A(t)$  ισχύει μόνο για ένα μικρό χρονικό διάστημα για το οποίο το πλάτος  $|A(t)|$ , το οποίο αυξάνει εκθετικά, παραμένει πολύ μικρότερο του πλάτους της αδιατάρακτης ροής  $|\mathbf{u}_0|$ . Στην πράξη όμως το πλάτος  $|A(t)|$  δεν αυξάνει απεριόριστα, αλλά τείνει σε μια πεπερασμένη τιμή. Για  $|Re - Re_{cr}| \ll 1$  η τιμή αυτή είναι μικρή και μπορεί να υπολογιστεί στα πλαίσια ασθενώς μη-γραμμικής προσέγγισης. Για  $t \ll 1$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση για το πλάτος και να πάρουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\langle |A|^2 \rangle}{dt} = 2\gamma \langle |A|^2 \rangle$$

όπου

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |A(\tau)|^2 d\tau \quad (2.4)$$

και επιλέγουμε τη σταθερά  $T$  τέτοια ώστε:  $2\pi/\omega \ll T \ll \gamma^{-1}$ .



Το αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης αποτελεί τον πρώτο μη-μηδενικό όρο ενός αναπτύγματος Taylor σε δυνάμεις των  $A, A^*$ . Καθώς προχωρά ο χρόνος και το πλάτος  $|A|$  αυξάνει, πρέπει να λάβουμε υπόψιν περισσότερους όρους. Θεωρώντας έναν τυχαίο όρο τρίτης τάξης, παρατηρούμε ότι:

$$\langle |A|^2 A^* \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T C^3 |A|^2 A e^{3\gamma t} e^{i\omega t} d\tau \simeq 0 \quad (2.5)$$

καθώς  $2\pi/\omega \ll T$ . Συνεπώς σε προσέγγιση τέταρτης τάξης:

$$\frac{d\langle |A|^2 \rangle}{dt} = 2\gamma \langle |A|^2 \rangle - \alpha \langle |A|^4 \rangle$$

όπου  $\alpha$  η σταθερά του Landau.

Θέλοντας να μελετήσουμε την περίπτωση όπου το πλάτος της διαταραχής τείνει σε πεπερασμένη τιμή, επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση  $\alpha > 0$ . Εφόσον  $|A|^2 = C e^{\gamma t}$  και  $\gamma \ll T$ ,  $\langle |A|^2 \rangle \sim |A|^2$  και αντίστοιχα  $\langle |A|^4 \rangle \sim |A|^4$ . Με αυτές τις παραδοχές, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$|A(t)|^2 = \frac{2\gamma}{\alpha - e^{-2\gamma(t-c)}}$$

με  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Επομένως το πλάτος  $|A|$  τείνει στην τιμή  $\sqrt{2\gamma/\alpha}$ .

Η ποσότητα  $\gamma$  είναι συνάρτηση της διαφοράς  $Re - Re_{cr}$ . Αναπτύσσοντάς την σε σειρά Taylor και παραλείποντας όρους δεύτερης τάξης και άνω, φτάνουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα για την μεταβολή του πλάτους της διαταραχής λίγο μετά την πρώτη εμφάνιση αστάθειας:

$$|A|_{max} \propto \sqrt{Re - Re_{cr}} \quad (2.6)$$

Κλείνοντας, αναφέρουμε ότι πέρα από την κλασσική γραμμική θεωρία υδροδυναμικής ευστάθειας έχει αναπτυχθεί εκτεταμένη μη-γραμμική θεωρία, με αφετηρία την συνεισφορά του Landau. Η θεωρία αυτή επιχειρεί να περιγράψει λεπτομερέστερα την δυναμική της διαταραχής χωρίς την παράλειψη του μη-γραμμικού όρου και έχει δώσει απαντήσεις σε πολλά προβλήματα στα οποία η γραμμική θεωρία έχει αποτύχει. Μια διεξοδική ανάπτυξη της μη-γραμμικής θεωρίας μπορεί να βρεθεί στο σύγγραμμα [22] καθώς και στο [19].

## 2.2 Σενάρια μετάβασης

Η διαδικασία μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή έχει ως σημείο αφετηρίας την αστάθεια των λύσεων της (2.2). Για την ποιοτική περιγραφή της μετάβασης είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας του χώρου των φάσεων. Ονομάζουμε χώρο των φάσεων το σύνολο  $V = \{\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in C_0^2(\mathbb{R}^3), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$ , όπου  $C_0^2(\mathbb{R}^3)$  ο χώρος των δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμων διανυσματικών συναρτήσεων  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με συμπαγή φορέα.

Έστω ότι για κάθε αρχική συνθήκη  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in V$  η λύση της εξίσωσης Navier–Stokes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  υπάρχει και παραμένει στο  $V \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Σε αυτή την εικόνα μια στάσιμη λύση αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου  $V$ , το οποίο ονομάζεται σταθερό σημείο ενώ μια περιοδική λύση αντιστοιχεί σε μια κλειστή καμπύλη στον χώρο  $V$ , η οποία ονομάζεται οριακός κύκλος.

Οι έννοιες του σταθερού σημείου και του οριακού κύκλου αποτελούν παραδείγματα της γενικότερης έννοιας του ελκυστή. Ελκυστή ονομάζουμε ένα σύνολο  $A$  στο οποίο κινείται η λύση στο όριο  $t \rightarrow \infty$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), A) = 0$  όπου με  $d(\mathbf{u}, A)$  συμβολίζουμε την ελάχιστη απόσταση του σημείου  $\mathbf{u}$  από το σύνολο  $A$ :  $d(\mathbf{u}, A) = \inf_{\mathbf{v} \in A} d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Το σύνολο των σημείων  $\mathbf{u}_0$  τα οποία ως αρχικές συνθήκες παράγουν τροχιές οι οποίες οδηγούνται πάνω στον  $A$  ονομάζεται βάση του ελκυστή.  $A$ . Αξίζει να αναφερθεί ότι για μια συγκεκριμένη περίπτωση συνοριακών συνθηκών μπορεί να υπάρχει πληθώρα ελκυστών ο καθένας με την δική του βάση.

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds, σε κάποια τιμή  $Re = Re_1$  η ιδιοσυχνότητα  $\omega$  περνά τον φανταστικό άξονα και η ροή μεταπίπτει από στάσιμη σε περιοδική. Η διαδικασία αυτή αποτελεί μια περίπτωση τοπικής διακλάδωσης και στην εικόνα του χώρου των φάσεων αντιστοιχεί σε μετάπτωση ενός σταθερού σημείου σε οριακό κύκλο.

Μπορούμε να εξετάσουμε την ευστάθεια της περιοδικής ροής με τις μεθόδους της προηγούμενης παραγράφου. Τώρα η αδιατάρακτη ροή είναι η  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$  με συχνότητα  $\omega_1$ . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Navier–Stokes την συνάρτηση  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ , όπου  $|\mathbf{u}_2| \ll |\mathbf{u}_1|$ , λαμβάνοντας υπόψιν την (2.3) και αγνοώντας τον όρο  $(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2 = O(\mathbf{u}_2^2)$  λαμβάνουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση για την διαταραχή

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 = -\nabla p_2 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_2 \quad (2.7)$$

με την διαφορά ότι τώρα οι συντελεστές είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με περίοδο  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Για τον λόγο αυτό θεωρούμε το ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) \mathbf{b}_n(\mathbf{x}) e^{-in\omega_2 t} & \omega_2 \in \mathbb{R}, \quad a_n = a_{-n}^*, \quad \mathbf{b}_n = \mathbf{b}_{-n}^* \\ p_2(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) d_n(\mathbf{x}) e^{-in\omega_2 t} & c_n = c_{-n}^*, \quad d_n = d_{-n}^* \end{aligned}$$

με  $a_n, c_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο  $T_1$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_2} \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) e^{im\omega_2 t} dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{b}_n(\mathbf{x}) \int_0^{T_2} a_n(t) e^{i(m-n)\omega_2 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{b}_n(\mathbf{x}) I_{nm} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Όμως

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \int_0^{T_2} a_n(t) e^{i(m-n)\omega_2 t} dt \\ &= \int_0^{T_2} a_n(t + T_1) e^{i(m-n)\omega_2 t} dt \\ &= \int_0^{T_2} a_n(t') e^{i(m-n)\omega_2 t'} e^{i(n-m)\omega_2 T_1} dt' = e^{i(m-n)\omega_2 T_1} I_{nm} \end{aligned}$$

Συνεπώς στην περίπτωση  $n \neq m$ ,  $I_{nm} = 0$  ενώ στην περίπτωση  $n = m$

$$I_{nn} = \int_0^{T_2} a_n(t) dt = 1$$

μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση των συναρτήσεων  $a_n$ . Επομένως  $I_{nm} = \delta_{nm}$  και από την (2.8) παίρνουμε:

$$\mathbf{b}_m(\mathbf{x}) = \int_0^{T_2} \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) e^{im\omega_2 t} dt$$

Εισάγοντας έναν όρο της σειράς (2.2) στην εξίσωση (2.7) και θέτοντας  $a_n(t) \mathbf{b}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_n(\mathbf{x}, t)$ , προκύπτει το παρακάτω χρονοεξαρτημένο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_n}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{h}_n + (\mathbf{h}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 + c_n \nabla d_n - \nu \nabla^2 \mathbf{h}_n = in\omega_2 \mathbf{h}_n \quad (2.9)$$

από το οποίο προκύπτει η ιδιοτιμή  $\omega_2 = \omega_2(Re)$ .

Μετά από το πέρασ μιας περιόδου  $T_1$ , κάθε τρόπος πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό  $\mu^n$ :

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t + T_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu^n a_n(t) \mathbf{b}_n(\mathbf{x}) e^{-in\omega_2 t}, \quad \mu = e^{-i\omega_2 T_1}$$

Η περιοδική ροή γίνεται ασταθής όταν ο πολλαπλασιαστής  $\mu$  διασχίσει τον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο. Η φύση της διακλάδωσης εξαρτάται εν γένει από το σημείο στο οποίο θα συμβεί αυτό το πέρασμα.

### 2.2.1 Ημιπεριοδική ροή

Ακολουθώντας τις εργασίες των L.D. Landau [48] και E. Hopf [41], θεωρούμε την περίπτωση όπου ο πολλαπλασιαστής διασχίζει τον μοναδιαίο κύκλο μέσω του σημείου  $\mu = \exp(2\pi\alpha i)$  με  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  άρρητο αριθμό, επομένως και με  $\Im(\mu) \neq 0$ .

$$\mu = \exp(i\omega_2 T_1) = \exp(\mp 2\pi\alpha i)$$

επομένως η διαταραχή έχει συχνότητα  $\omega_2 = \alpha 2\pi/T_1 = \alpha\omega_1$  και η ροή αποκτά έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας. Προφανώς οι συχνότητες  $\omega_1, \omega_2$  είναι ρητά ανεξάρτητες, δηλαδή δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί  $p_1, p_2$  τέτοιοι ώστε  $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0$ , επομένως η κίνηση δεν είναι πλέον περιοδική.

Από γεωμετρική άποψη η διακλάδωση αντιστοιχεί σε μετάπτωση του οριακού κύκλου  $\mathbb{T}_1 = [0, 2\pi]$  συχνότητας  $\omega_1$  σε δισδιάστατο τόρο  $\mathbb{T}_2 = [0, 2\pi]^2$  με γεννήτορα τον κύκλο  $T_1$ . Κατά την κίνηση στον τόρο  $T_2$  η συχνότητα  $\omega_1$  αντιστοιχεί στην αξιμουθιακή γωνία πάνω στο επίπεδο του γεννήτορα, ενώ η συχνότητα  $\omega_2$  αντιστοιχεί στην τοροειδή γωνία γύρω από τον γεννήτορα.

Η παραπάνω ανάλυση αυτή μπορεί να επεκταθεί χωρίς καμία αλλαγή και για επόμενες διακλαδώσεις όπου και προκύπτει μετάβαση από τόρο διάστασης  $d$  σε τόρο διάστασης  $d + 1$ . Μπορεί κανείς να δείξει [34] ότι αν οι συχνότητες  $\omega_i$ ,  $i \leq N$  είναι ρητά ανεξάρτητες τότε το σύνολο των σημείων της τροχιάς είναι πυκνό στον τόρο  $\mathbb{T}_N$ , συνεπώς στην πάροδο του χρόνου το σύστημα επιστρέφει αυθαίρετα κοντά σε οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης πάνω στον τόρο. Για τον λόγο αυτό η κίνηση που αποτελείται από υπέρθεση περιοδικών συνιστωσών με ρητά ανεξάρτητες συχνότητες ονομάζεται ημιπεριοδική κίνηση. (quasiperiodic motion)

Σύμφωνα με το σενάριο Landau–Hopf ο παραπάνω μηχανισμός είναι υπεύθυνος για την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds η ροή περνά από διαδοχικές διακλαδώσεις οι οποίες γεννούν μια ακολουθία ρητά ανεξάρτητων συχνοτήτων  $\omega_i$  με την κίνηση να εξελίσσεται πάνω σε τόρο διάστασης  $N$ . Ο απαιτούμενος χρόνος για την επιστροφή της τροχιάς στην γειτονιά τυχόντος σημείου  $\mathbf{u}$  αυξάνει πολύ γρήγορα με το  $N$ , και έτσι η κίνηση γρήγορα χάνει κάθε ίχνοσ περιοδικότητας.

Το σενάριο Landau–Hopf βασίζεται σε πλήρως γραμμική θεώρηση της διαδικασίας μετάβασης. Καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνεται από την τιμή  $Re_i$  στην τιμή  $Re_{i+1}$  θεωρήσαμε ότι η αδιατάρακτη ροή  $\mathbf{u}_i$  δεν αλληλεπιδρά με την διαταραχή  $\mathbf{u}_{i+1}$ , καταλήγοντας σε μια σχετικά απλή εικόνα για την διακλάδωση. Στην πραγματικότητα φυσικά υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ των  $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}$  η οποία όπως θα δείξουμε είναι ικανή να σταματήσει την ακολουθία διακλαδώσεων.

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την απλή περίπτωση  $i = 1$ . Στην περίπτωση αυτή είναι λογικό να υποθέσουμε ότι για  $Re - Re_2 \ll 1$  η αδιατάρακτη ροή  $\mathbf{u}_1$  έχει αναπτυχθεί πλήρως ενώ η διαταραχή  $\mathbf{u}_2$  παραμένει μικρή. Συνεπώς η μεταβολή του πλάτους της διαταραχής  $\mathbf{u}_1$  μπορεί να αγνοηθεί στην γειτονιά του  $Re_2$ , ενώ για τον χρονικό συντελεστή ενός όρου του αναπτύγματος (2.2), στον οποίο θα αναφερόμαστε ως  $a_2(t)$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$a_2(t) = |a_2(t)| e^{i\phi_2(t)} \quad (2.10)$$

Κατά την εξέλιξη της ποσότητας  $a_2(t)$  σε διακριτά χρονικά βήματα μήκους  $T_1$ , αυτή πολλαπλασιάζεται με τον πολλαπλασιαστή  $\mu$ :

$$\begin{aligned} a_2(t + \tau T_1) &= \mu^\tau a_2(t) = e^{\log(\mu)\tau} a_2(t) \\ |a_2(t + \tau T_1)| &= e^{\Re(\log(\mu))\tau} |a_2(t)| \quad \mu = |\mu| \exp(-2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}) \end{aligned}$$

Για  $Re - Re_2 \ll 1$  το πλάτος της διαταραχής αυξάνει με αργό ρυθμό επομένως  $|\mu| - 1 \ll 1$  και μπορούμε να αναπτύξουμε τον λογάριθμο σε σειρά Taylor:

$$\begin{aligned} \log(\mu) &= \log(|\mu| \exp(-2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1})) \\ &= \log(|\mu|) - 2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ &= \log(1 + (|\mu| - 1)) - 2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(|\mu| - 1)^{n+1}}{n+1} - 2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} \end{aligned}$$

συνεπώς σε προσέγγιση πρώτης τάξης

$$\log(|\mu|) = |\mu| - 1 - 2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.11)$$

Επομένως για  $Re - Re_2 \ll 1$  έχουμε  $T_1 \ll \Re(\log(\mu))^{-1}$  και η μεταβολή του πλάτους  $|a_2|$  κατά το χρονικό διάστημα  $T_1$  είναι αμελητέα, γεγονός που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την μεταβλητή  $\tau$  ως συνεχή:

$$a_2(\tau) = a_2(0) e^{\log(\mu)\tau}$$

επομένως

$$\frac{da_2}{d\tau} = a_2 \log(\mu) \quad (2.12)$$

Το δεξιό μέλος της (2.12) αποτελεί τον πρώτο όρο ενός αναπτύγματος Taylor σε δυνάμεις των  $a_2, a_2^*$ . Καθώς απομακρυνόμαστε από τον αριθμό Reynolds  $Re_2$  και το πλάτος  $|a_2|$  αυξάνει, πρέπει να λάβουμε υπόψιν και επόμενους όρους. Η συνεισφορά του όρου δεύτερης τάξης  $|a_2|^2$  θα αγνοηθεί σε σχέση με αυτή του τρίτου, καθώς δεν περιέχει την φάση  $\phi_2(t)$  την οποία και θέλουμε να μελετήσουμε. Με αυτή την παραδοχή, καταλήγουμε στην παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{da_2}{d\tau} = a_2 \log(\mu) - \beta_2 a_2 |a_2|^2 \quad (2.13)$$

όπου  $\beta_2$  μιγαδική παράμετρος η οποία εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds. Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση όπου το πλάτος  $|a_2|$  τείνει σε πεπερασμένη τιμή, θεωρούμε  $\Re(\beta_2), \Im(\beta_2) > 0$ .

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.13) με  $a_2^*$  και λαμβάνοντας υπόψιν το ανάπτυγμα (2.11) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d|a_2|^2}{d\tau} = |a_2|^2 ((|\mu| - 1) - 2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}) + \beta_2 |a_2|^4$$

Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζουμε την συζυγή της (2.13) με  $a_2$  παίρνοντας:

$$\frac{1}{2} \frac{d|a_2|^2}{d\tau} = |a_2|^2 ((|\mu| - 1) + 2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}) + \beta_2^* |a_2|^4$$

Προσθέτοντάς τις δύο παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε μια εξίσωση για το πλάτος:

$$\frac{1}{2} \frac{d|a_2|^2}{d\tau} = |a_2|^2(|\mu| - 1) + \Re(\beta_2)|a_2|^4$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύση

$$|a_2(\tau)|^2 = \frac{|\mu| - 1}{\Re(\beta_2) - e^{2\tau(1-|\mu|)+(|\mu|-1)c}}$$

με  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Συνεπώς αφού  $|\mu| > 1$

$$|a_2^\infty|^2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} |a_2(\tau)|^2 = \frac{|\mu| - 1}{\Re(\beta_2)} \ll 1 \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.13) την σχέση (2.10) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d(|a_2|e^{-i\phi_2})}{dt} &= \\ -i|a_2|e^{-i\phi_2} \frac{d\phi_2}{d\tau} + e^{-i\phi_2} \frac{d|a_2|}{d\tau} &= |a_2|e^{-i\phi_2} \log(\mu) - \beta_2|a_2|^3 a_2 e^{-i3\phi_2} \\ \frac{d\phi_2}{d\tau} + \frac{i}{|a_2|} \frac{d|a_2|}{d\tau} &= i(|\mu| - 1) + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} - i\beta_2|a_2|^2 e^{-i2\phi_2} \end{aligned}$$

Θεωρώντας χρόνους αρκετά μεγάλους ώστε το πλάτος  $|a_2|$  να έχει την σταθερή τιμή (2.14)

$$\frac{d\phi_2}{d\tau} = i(|\mu| - 1) + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} - i\beta_2|a_2^\infty|^2 e^{-i2\phi_2}$$

Αντίστοιχα, από την συζυγή της (2.13) παίρνουμε:

$$\frac{d\phi_2}{d\tau} = -i(|\mu| - 1) + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} + i\beta_2^*|a_2^\infty|^2 e^{i2\phi_2}$$

άρα, προσθέτοντας κατά μέλη:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{d\tau} &= 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} + \Phi(\phi_2) \\ \Phi(\phi_2) &= 2|a_2^\infty|^2 \Im(\beta_2) \cos(2\phi_2) \\ |\Phi(\phi_2)| &\leq 2|a_2^\infty|^2 \Im(\beta_2) \ll 1 \end{aligned}$$

Έστω  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  τέτοιοι ώστε  $\omega_2/\omega_1 = m_2/m_1 + \Delta/2\pi$ ,  $\Delta \ll 1$ . Τότε η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d\phi_2}{d\tau} = 2\pi \frac{m_2}{m_1} + \Delta + \Phi(\phi_2)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε διακριτές χρονικές στιγμές  $\bar{\tau}_\tau = m_1\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{N}$ . Κατά την μετάβαση από την χρονική στιγμή  $\bar{\tau}_\tau$  στην  $\bar{\tau}_{\tau+1}$  ο όρος  $2\pi \frac{m_2}{m_1}$  πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα  $\Delta\bar{\tau} = m_1$  δίνοντας αποτέλεσμα  $2\pi m_2$  το οποίο μπορεί να αγνοηθεί ως ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . Έτσι το δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι  $\ll 1$  και μπορούμε να θεωρήσουμε την μεταβλητή  $\bar{\tau} = m_1\tau$  ως συνεχή:

$$\frac{1}{m_1} \frac{d\phi_2}{d\bar{\tau}} = \Delta + \Phi(\phi_2) \quad (2.15)$$

Οι φυσικοί αριθμοί  $m_1, m_2$  μπορούν να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε  $\Delta < 2|a_2^\infty|^2 \mathfrak{F}(\beta_2)$ , και τότε η εξίσωση

$$\Phi(\phi_2) = -\Delta$$

έχει τουλάχιστον δυο λύσεις στο  $[0, 2\pi]$  καθώς η  $\Phi(\phi_2)$  είναι περιοδική σε αυτό το διάστημα με πλάτος  $2|a_2^\infty|^2 \mathfrak{F}(\beta_2) > |\Delta|$ . Η μία λύση βρίσκεται σε σημείο όπου η  $\Phi(\phi_2)$  είναι αύξουσα και άλλη σε σημείο όπου είναι φθίνουσα. Στην τελευταία περίπτωση

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\tau}} = - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_2} \right| \phi_2 + O(\phi_2^2)$$

και επομένως η λύση είναι και ευσταθής.

Το γεγονός ότι το δεξιό μέλος της (2.15) είναι μηδέν για κάποιο  $\phi_2$  σημαίνει ότι η φάση είναι σταθερή τις χρονικές στιγμές  $\bar{\tau} = m_1 \tau = m_1 T_1$ , με την τροχιά να επαναλαμβάνεται μετά από  $m_1$  περιόδους. Συνεπώς η τροχιά αντί να επεκταθεί σε τρισδιάστατο τόρο  $\mathbb{T}_3$  περιορίζεται σε έναν οριακό κύκλο  $\mathbb{T}_1$  ο οποίος βρίσκεται πάνω στον τόρο  $\mathbb{T}_2$ .

Το παραπάνω φαινόμενο είναι γνωστό ως κλείδωμα συχνότητας (frequency locking) και είναι ικανό να διακόψει την αλληλουχία διακλαδώσεων. Επομένως το σενάριο Landau–Hopf δεν αποτελεί την τελική απάντηση όσον αφορά την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή, καθώς στηρίζεται στην υπόθεση ότι η αλληλουχία αυτή συνεχίζει επάοριστον μέχρι η τυρβώδης ροή να αναπτυχθεί πλήρως.

### 2.2.2 Παράξενοι ελκυστές

Ακολουθώντας τους συλλογισμούς που μας οδήγησαν στο σενάριο Landau–Hopf παρατηρούμε ότι κατά τα αρχικά στάδια της μετάβασης μόνο ένας μικρός αριθμός από την απειρία των βαθμών ελευθερίας που χαρακτηρίζουν την κίνηση ενός συνεχούς μέσου διαδραματίζει πρωταγωνιστικό ρόλο. Αν περιοριστούμε στην γραμμική θεώρηση όπου οι διαταραχές δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, μετά από μια ακολουθία  $N$  διακλαδώσεων η κίνηση λαμβάνει χώρα πάνω σε έναν  $N$ -διάστατο τόρο  $\mathbb{T}_N$ . Στην περίπτωση αυτή η κίνηση έχει  $N$  βαθμούς ελευθερίας και ο χώρος των φάσεων είναι ένας  $N$ -διάστατος φραγμένος υπόχωρος του συνόλου  $V$ .

Ο υπόχωρος αυτός μπορεί να έρθει σε αντιστοιχία με ένα φραγμένο σύνολο  $V \subset \mathbb{R}^N$ . Έστω ότι η ροή λαμβάνει χώρα σε πεπερασμένο χωρίο και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ως προς κάποια ορθογώνια βάση:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) \\ a_n(t) &= \int_V \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\ &\int_V \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) dV = |V| \delta_{nm} \end{aligned}$$

Κρατώντας μόνο τους  $N$  πρώτους όρους της σειράς, η κίνηση περιγράφεται από το ακόλουθο δυναμικό σύστημα:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

όπου  $\mathbf{a} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$  η τροχιά στον χώρο των φάσεων και  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  το διανυσματικό πεδίο του δυναμικού συστήματος, το οποίο και περιέχει όλη του την δυναμική. Το παραπάνω δυναμικό σύστημα αποτελεί μια  $N$ -διάστατη προβολή της εξίσωσης Navier–Stokes. Σε αυτή την αναπαράσταση

ο χωρικός μέσος όρος της κινητικής ενέργειας είναι

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= \frac{1}{|V|} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 d^3 \mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2|V|} \int_V \sum_{n=0}^{N-1} a_n(t) \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) \sum_{m=0}^{N-1} a_m(t) \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2|V|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_n(t) a_m(t) \int_V \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2|V|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_n(t) a_m(t) |V| \delta_{nm} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_n(t)^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a}^2
\end{aligned}$$

Έστω μια συλλογή (ensemble) συστημάτων το καθένα με μέση ενέργεια  $\bar{e}(t)$  κατανομημένα συνεχώς και ομοιόμορφα σε όλη την έκταση του χώρου των φάσεων. Το κάθε ένα από αυτά τα συστήματα αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου των φάσεων το οποίο κινείται με ταχύτητα  $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ . Ο ρυθμός μεταβολής της χωρικής μέσης τιμής της ενέργειας σε ένα σταθερό χωρίο απλής συνοχής  $V \subset \mathbb{R}^N$  με ομαλό σύνορο  $S = \partial V$  είναι:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \bar{e}(t) dV \right) = \int_S \bar{e}(t) \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$$

Όπου  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην  $S$  με διεύθυνση από την  $S$  στο  $\mathbb{R}^N - V$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης παίρνουμε:

$$\int_V \frac{d\bar{e}}{dt} dV = \int_V \bar{e}(t) \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{f} dV$$

και εφόσον το χωρίο  $V$  είναι αυθαίρετο:

$$\nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\bar{e}} \frac{d\bar{e}}{dt} < 0$$

καθώς για συνεκτική ροή ισχύει πάντα  $d\bar{e}/dt < 0$  (1.29).

Για να υπολογίσουμε την μεταβολή του στοιχείου όγκου στον χώρο των φάσεων, θεωρούμε ένα κινούμενο χωρίο  $V(t)$  το οποίο παρασύρεται από το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f}$ . Η μεταβολή του όγκου του ισούται με την συνολική μετατόπιση που υφίσταται το σύνορό του  $S(t)$  κατά την κίνηση με ταχύτητα  $d\mathbf{a}/dt = \mathbf{f}$ :

$$\frac{d|V|}{dt} = \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{f} dV < 0$$

Έτσι βρίσκουμε ότι για συνεκτική ροή το στοιχείο όγκου του χώρου των φάσεων συνεχώς συρρικνώνεται.

Οι συλλογισμοί της προηγούμενης παραγράφου βασίζονται στην υπόθεση ότι κάθε διακλάδωση γεννά μια νέα περιοδική συνιστώσα με συχνότητα  $\omega_i$  με την κίνηση να γίνεται ημιπεριοδική, γεγονός που μας υποδεικνύει ότι ο ελκυστής βρίσκεται αρχικά πάνω στην επιφάνεια ενός  $N$ -διάστατου τόρου. Η απλοποίηση της ροής μέσω κλειδώματος συχνότητας σίγουρα δεν αποτελεί τον μοναδικό τρόπο με τον οποίο μπορεί η μη-γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ των βαθμών ελευθερίας να αλλάξει την παραπάνω εικόνα, ενώ τίποτα δεν εγγυάται ότι αν αυτή ληφθεί υπόψιν ο ελκυστής θα συνεχίσει να έχει την απλή δομή της γραμμικής θεωρήσης.

Ο ελκυστής μπορεί να έχει εξαιρετικά πολύπλοκη δομή αν όλες οι διευθύνσεις πάνω σε αυτόν, εκτός από την ουδέτερη διεύθυνση της τροχιάς, είναι ασταθείς. Όπως παρατηρήθηκε αρχικά σε αριθμητικά πειράματα [52], υπάρχουν δυναμικά συστήματα των οποίων ο ελκυστής έχει την παραπάνω ιδιότητα. Η ιδιότητα αυτή μοιάζει αρχικά ασυμβίβαστη με την ιδιότητα του ελκυστή, η οποία θέλει τις τροχιές να τείνουν προς αυτόν. Όμως όταν το στοιχείο του όγκου στον χώρο των φάσεων συρρικνώνεται μονότονα, αναγκαστικά οι όποιες ασταθείς διευθύνσεις επί του ελκυστή συνυπάρχουν με ευσταθείς διευθύνσεις κάθετες σε αυτές, των οποίων η επίδραση στην μεταβολή του στοιχείου όγκου είναι μάλιστα και ισχυρότερη.

Το γεγονός αυτό προσδίδει στο σύστημα ιδιαίτερα πολύπλοκη δυναμική με τυχούσες τροχιές που βρίσκονται κοντά στον ελκυστή να συγκλίνουν προς αυτόν ως προς κάποιες διευθύνσεις ενώ παράλληλα αποκλίνουν μεταξύ τους ως προς τις υπόλοιπες. Μια καμπύλη στην οποία τείνουν οι τροχιές με τον παραπάνω τρόπο ονομάζεται σαγματική τροχιά και ο ελκυστής αποτελείται από το σύνολο των καμπυλών με αυτή την ιδιότητα. Η απόκλιση ως προς κάποιες διευθύνσεις έχει ως αποτέλεσμα ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες με δύο τροχιές οι οποίες εκκινούν από γειτονικά σημεία να απομακρύνονται σταδιακά έτσι ώστε τελικά να αποκτήσουν απόσταση συγκρίσιμη με την διάμετρο του ελκυστή. Ένας ελκυστής με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται παράξενος ελκυστής.

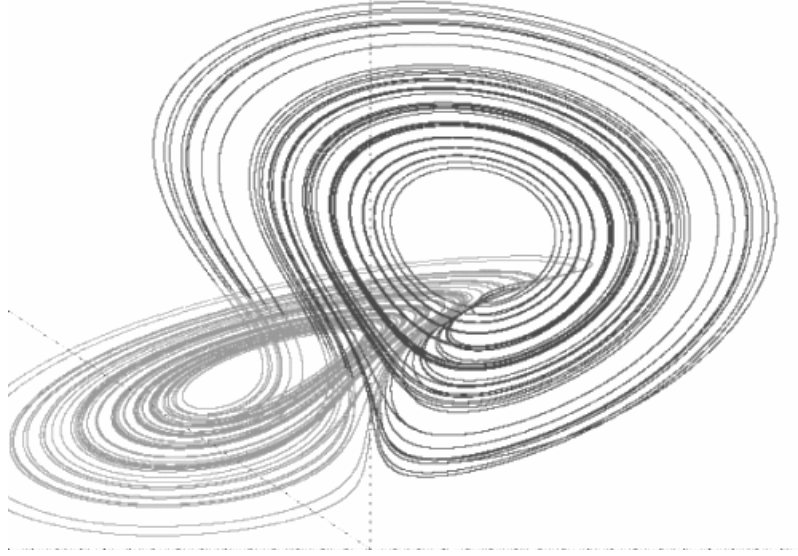
Συμφωνία με το σενάριο Ruelle-Takens [63], η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή οφείλεται σε σχηματισμό παράξενου ελκυστή πάνω σε  $N$ -διάστατο τόρο μετά από έναν μικρό αριθμό διακλαδώσεων. Ωστόσο, το γεγονός ότι οι τροχιές ενός ντετερμινιστικού δυναμικού συστήματος δεν είναι δυνατόν να τέμνονται απαγορεύει τον σχηματισμό παράξενου ελκυστή πάνω σε δισδιάστατο τόρο. Πάνω σε μια δισδιάστατη κλειστή επιφάνεια η παρουσία της διεύθυνσης της τροχιάς αφήνει περιθώριο για την ύπαρξη μόνο μίας ασταθούς διεύθυνσης, και στην περίπτωση αυτή αναγκαστικά κάποιες τροχιές θα τέμνονται. Αντίθετα, ο σχηματισμός παράξενου ελκυστή είναι δυνατός πάνω σε τόρο διάστασης  $N \geq 3$ , δηλαδή μετά από τρεις ή περισσότερες διακλαδώσεις [56].

Προκειμένου να μελετήσουμε ποιοτικά την γεωμετρική δομή του ελκυστή, ας περιοριστούμε στην απλούστερη περίπτωση  $N = 3$ . Στην περίπτωση αυτή σε κάθε σαγματική τροχιά αντιστοιχεί, εκτός από την ουδέτερη διεύθυνση της τροχιάς, μια ευσταθής και μια ασταθής διεύθυνση, με την συμπίεση κατά την ευσταθή διεύθυνση ισχυρότερη και το στοιχείο όγκου συνολικά να συρρικνώνεται. Εφόσον η συνολική ενέργεια είναι πεπερασμένη, ο ελκυστής περιέχεται σε ένα φραγμένο σύνολο. Αναγκαστικά η ασταθής και η ευσταθής διεύθυνση πρέπει να μεταβάλλονται συνεχώς κατά μήκος της τροχιάς με τέτοιο τρόπο ώστε η τροχιά να μη διαφεύγει έξω από αυτό. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα το στοιχείο όγκου να συμπιέζεται και να επιμηκύνεται συνεχώς ως προς μεταβαλλόμενες κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, παίρνοντας την μορφή δισδιάστατης επιφάνειας.

Αριθμητικά πειράματα υποδεικνύουν ότι σε πολλές περιπτώσεις στο όριο  $t \rightarrow \infty$  η επιφάνεια αυτή παίρνει την μορφή μιας δέσμης τροχιών η οποία καθώς προχωρά ο χρόνος περιελίσσεται γύρω από τον εαυτό της με πολύπλοκο τρόπο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια τυχούσα τομή του ελκυστή κάθετη στην διεύθυνση της τροχιάς να αποτελείται από απειρία εμφωλιασμένων στρωμάτων μηδενικής διατομής χωρισμένα από κενά (με τρόπο που θυμίζει μονοδιάστατο σύνολο Cantor) και συνδεδεμένα μεταξύ τους με ιδιαίτερα πολύπλοκο τρόπο. Τα στρώματα αυτά φέρουν τις σαγματικές τροχιές, με τις ευσταθείς διευθύνσεις από τα κενά προς τα στρώματα και τις ασταθείς επί των στρωμάτων. Το γεγονός ότι τα στρώματα είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους συνεπάγεται ότι με την πάροδο του χρόνου μια τυχούσα τροχιά περνά από όλα - η κίνηση είναι εργοδική. Λόγω της συνεχούς συρρίκνωσης του στοιχείου όγκου, ο όγκος του ελκυστή στον  $N$ -διάστατο χώρο είναι πάντα ίσος με μηδέν. Ένα γράφημα τυπικού παραδείγματος παράξενου ελκυστή φαίνεται στο σχήμα 2.1.

Ο ελκυστής έχει εν γένει μη-ακέραιη διάσταση Minkowski-Bouligand, η οποία και χαρακτηρίζει το πλήθος των ενεργών βαθμών ελευθερίας. Έστω  $N(\epsilon)$  ο ελάχιστος αριθμός κύβων ακμής  $\epsilon$  που





Σχήμα 2.1: Παράδειγμα παράξενου ελκυστή [52].

απαιτείται για την κάλυψη του ελκυστή. Υποθέτοντας ότι για κάποια σταθερά  $V > 0$  έχουμε:

$$N(\epsilon) \sim V\epsilon^{-D}$$

μπορούμε να ορίσουμε την διάσταση Minkowski–Bouligand ως το όριο:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} \quad (2.16)$$

Αν το παραπάνω όριο υπάρχει, ο ελκυστής έχει μη-μηδενικό όγκο  $V$  στον  $D$ -διάστατο χώρο [26].

Εφόσον η κίνηση πάνω στον ελκυστή είναι εργοδική, με κάθε τροχιά να περνά από όλα του τα σημεία σε βάθος χρόνου, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον ελκυστή μελετώντας μια συγκεκριμένη τροχιά για μεγάλο χρονικό διάστημα. Έστω  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0(t)$  η εξίσωση μιας τροχιάς. Η παραμόρφωση ενός σφαιρικού στοιχείου όγκου  $B$  ακολουθώντας την τροχιά προκύπτει από γραμμικοποίηση της εξίσωσης κίνησης του δυναμικού συστήματος ως προς την απόσταση από την τροχιά  $\xi = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0(t)$ :

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_0) = \mathbf{A} \cdot \xi + O(\xi^2), \quad \mathbf{A}(t) = (\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{f})_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0(t)}$$

Έστω  $S = \partial B$  η επιφάνεια του σφαιρικού στοιχείου και  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα από την  $S$  στο  $\mathbb{R}^3 - B$ . Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του σφαιρικού στοιχείου είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d|B|}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_B dB = \int_S A_{ij} \xi_j n_i dB \\ &= \int_B \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} \xi_j) dV = \int_B A_{ij} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} dV = \\ &= \int_B A_{ij} \delta_{ij} dV = |B| A_{ii}(t) \end{aligned}$$

Το σφαιρικό στοιχείο όγκου συμπιέζεται σε κάποιες διευθύνσεις και επιμηχύνεται σε άλλες, με αποτέλεσμα να γίνει ελλειψοειδές. Τόσο η διεύθυνση όσο και το μήκος των κυρίων αξόνων του

ελλειψοειδούς μεταβάλλονται συνεχώς. Έστω  $l_s(t)$   $1 \leq s \leq N$  τα μήκη των κυρίων αξόνων του ελλειψοειδούς. Οι εκθέτες Lyapunov ορίζονται ως:

$$L_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{l_s(t)}{l_s(0)}$$

Ένας από αυτούς (ο οποίος αντιστοιχεί στην διεύθυνση κατά μήκος της τροχιάς) είναι πάντα μηδενικός.

Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα του Oseledec [59], οι εκθέτες Lyapunov είναι καλά ορισμένοι για μια ευρεία κλάση δυναμικών συστημάτων και το άθροισμά τους ισούται με τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του ελλειψοειδούς κατά μήκος της τροχιάς.

$$\sum_{s=1}^N L_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{ii}(t) dt$$

Για ένα δυναμικό σύστημα το οποίο χαρακτηρίζεται από υποβάθμιση κινητικής ενέργειας σε θερμότητα, το παραπάνω άθροισμα είναι πάντα αρνητικό. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε την διάσταση του ελκυστή βάσει των εκθετών Lyapunov. Για τον σκοπό αυτό διατάσσουμε τους εκθέτες Lyapunov σε φθίνουσα σειρά  $L_n$ :  $L_n \geq L_{n+1}$  Έστω  $d$  ο φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει:

$$\sum_{n=1}^d L_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{d+1} L_n < 0$$

Η διάσταση Lyapunov ορίζεται ως [45]:

$$D_L = d + \frac{\sum_{n=1}^d L_n}{|L_{d+1}|}$$

Ο παραπάνω ορισμός δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις ασταθείς διευθύνσεις, με αποτέλεσμα η εκτίμηση που παρέχει για την διάσταση του ελκυστή να είναι μάλλον υψηλή. Παρόλα αυτά, προσφέρει μια δυνατότητα υπολογισμού της διάστασης του ελκυστή από πειραματικά ή αριθμητικά δεδομένα για την συμπεριφορά των τροχιών σε μεγάλους χρόνους.

Το σενάριο Ruelle-Takens αποτελεί ιστορικά την πρώτη αντιπρόταση στο σενάριο Landau-Hopf για την μαθηματική περιγραφή της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Επιχειρεί να περιγράψει την διαδικασία μετάβασης, καθώς και την χρονική πολυπλοκότητα της τυρβώδους ροής με την εισαγωγή της υπόθεσης σχηματισμού παράξενου ελκυστή μετά από έναν μικρό αριθμό διακλαδώσεων με πολλαπλασιαστές  $\mu$  οι οποίοι έχουν μη-μηδενικά φανταστικά μέρη. Η υπόθεση αυτή υποστηρίζεται ισχυρά από πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα, ενώ σε θεωρητική βάση δεν έχει διαψευστεί, ούτε όμως και αποδειχθεί, μέχρι σήμερα. Την βασικότερη αδυναμία του σεναρίου αυτού αποτελεί η έλλειψη ικανοποιητικής εξήγησης της μη-γραμμικής διαδικασίας σχηματισμού του παράξενου ελκυστή.

### 2.2.3 Διπλασιασμός περιόδου

Ας επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου κάποιος πολλαπλασιαστής περνά τον μοναδιαίο κύκλο μέσω του σημείου  $z = -1$ . Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει γέννηση νέας ανεξάρτητης συχνότητας:  $\mu_{1,2} = \exp(\mp i\omega_2 T_1) = \exp(2\pi i)$ , συνεπώς  $\omega_2 = \omega_1 = 2\pi/T_1$ . Έστω  $s$  η διεύθυνση ως προς την οποία εκδηλώνεται αστάθεια. Ένα στοιχείο όγκου στην περιοχή του ασταθούς οριακού κύκλου επιμηκύνεται συνεχώς ως προς την διεύθυνση  $s$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα με πάροδο του χρόνου η κίνηση του συστήματος να εξελίσσεται κατά προσέγγιση πάνω σε μια επιφάνεια  $\Sigma$  η οποία περιλαμβάνει την διεύθυνση της τροχιάς και την ασταθή διεύθυνση  $s$ .

Έστω μια επιφάνεια  $\sigma$  κάθετη στην διεύθυνση της τροχιάς. Η τροχιά τέμνει την επιφάνεια  $\sigma$  σε ένα σύνολο  $P$  το οποίο ονομάζεται τομή Poincaré. Τα διαδοχικά σημεία όπου η τροχιά συναντά το σύνολο  $P$  ορίζουν την απεικόνιση Poincaré:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, Re) \quad (2.17)$$

Στα πλαίσια της παραπάνω προσέγγισης μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $P \subset \Sigma \cap \sigma$  και συνεπώς η τομή Poincaré είναι μονοδιάστατο σύνολο, επομένως και η απεικόνιση Poincaré μπορεί να θεωρηθεί ως μονοδιάστατη:

$$x_{j+1} = f(x_j, Re) \quad (2.18)$$

Η παραπάνω απεικόνιση προσφέρει έναν τρόπο περιγραφής της κίνησης κοντά σε διακλάδωση. Ο οριακός κύκλος αντιστοιχεί σε ένα σταθερό σημείο  $x_* = f(x_*, Re)$ . Μετατοπίζοντας την μεταβλητή  $x$  έτσι ώστε  $x_* = 0$  βρίσκουμε:

$$x_{i+1} = f(x_i, Re) = \mu(Re)x_i + O(x_i^2) \simeq \mu(Re)x_i \quad \mu = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0}$$

Την στιγμή της διακλάδωσης έχουμε  $\mu(Re_1) = -1$  και σε κάθε πέρασμα από την τομή Poincaré η μεταβλητή  $x$  αλλάζει πρόσημο. Επομένως η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο  $2T_0$ , όπου  $T_0$ , η περίοδος του ασταθούς οριακού κύκλου. Για τον λόγο αυτό η συγκεκριμένη διακλάδωση ονομάζεται διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (period doubling bifurcation).

Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση κοντά στην διακλάδωση κρατώντας περισσότερους όρους στο ανάπτυγμα Taylor της (2.18):

$$\begin{aligned} x_{i+1} = f(x_i, Re) &= \frac{df}{dx}x_i + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}x_i^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3f}{dx^3}x_i^3 + O(x_i^4) \\ &= \mu(Re)x_i + ax_i^2 + bx_i^3 + O(x_i^4) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό κλίμακας  $x \rightarrow x/\sqrt{a}$  παίρνουμε, σε προσέγγιση τρίτης τάξης:

$$x_{i+1} = \mu(Re)x_i + x_i^2 + \beta x_i^3, \quad \beta = \frac{b}{a}$$

Ορίζοντας  $\Delta R = Re - Re_1$ , αναπτύσσουμε τον πρώτο όρο:

$$\mu(Re) = \mu(Re_1) + \alpha \Delta R + O(\Delta R^2),$$

όμως  $\mu(Re_1) = -1$  και καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds, ο πολλαπλασιαστής  $\mu$  μειώνεται. Συνεπώς  $\alpha < 0$  και σε προσέγγιση πρώτης τάξης:

$$\mu(Re) = \mu(Re_1) - |\alpha| \Delta R = -1 - \Delta R$$

όπου επαναορίσαμε την κλίμακα του αριθμού Reynolds σύμφωνα με τον μετασχηματισμό  $Re \rightarrow Re/|\alpha|$ .

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε την προσεγγιστική απεικόνιση:

$$x_{i+1} = -(1 + \Delta R)x_i + x_i^2 + \beta x_i^3$$

Θεωρούμε τώρα την σύνθετη απεικόνιση από το  $x_i$  στο  $x_{i+2}$ . Θέτοντας  $R = -(1 + \Delta R)$  παίρνουμε σε προσέγγιση τρίτης τάξης ως προς  $x_i$ :

$$\begin{aligned} x_{i+2} &= Rx_{i+1} + x_{i+1}^2 + \beta x_{i+1}^3 \\ &= R(Rx_i + x_i^2 + \beta x_i^3) + (Rx_i + x_i^2 + \beta x_i^3)^2 + \beta(Rx_i + x_i^2 + \beta x_i^3)^3 \\ &= R^2x_i + Rx_i^2 + R\beta x_i^3 + R^2x_i^2 + 2Rx_i^3 + R^3\beta x_i^3 + O(x_i^4) \\ &\simeq R^2x_i + R(R+1)x_i^2 + R(\beta+2+R^2\beta)x_i^3 \end{aligned}$$

Όμως για  $|Re - Re_1| \ll 1$ ,  $R \sim -1$ , επομένως

$$x_{i+2} = R^2 x_i - (\beta + 2 + R^2)x_i^3$$

Ακόμα στην ίδια περιοχή αριθμών Reynolds έχουμε:

$$\begin{aligned} R^2 &= (1 + Re - Re_1)^2 \\ &= (1 + \Delta R)^2 = 1 + 2\Delta R + \Delta R^2 \\ &\simeq 1 + 2(Re - Re_1) \end{aligned}$$

Επομένως

$$x_{i+2} = (1 + 2(Re - Re_1))x_i + (\beta + 3)x_i^3$$

όπου αγνοήσαμε την ποσότητα ανώτερης τάξης  $2\Delta R x_i^3$ .

Η παραπάνω απεικόνιση έχει πάντα το σταθερό σημείο  $x_* = 0$  το οποίο είναι και ευσταθές όταν  $Re < Re_1$ , με πολλαπλασιαστή

$$\mu = \left. \frac{dx_{i+2}}{dx_i} \right|_{x_i=0} = 1 - 2(Re - Re_1) < 1$$

Όταν  $Re > Re_1$  ο πολλαπλασιαστής περνά τον μοναδιαίο κύκλο και το σταθερό σημείο γίνεται ασταθές. Την θέση του παίρνουν τα δύο άλλα σταθερά σημεία, τα οποία γίνονται ευσταθή:

$$x_*^{(1,2)} = \pm \sqrt{\frac{2(Re - Re_1)}{\beta + 3}}$$

και η κίνηση περνά σε ευσταθή οριακό κύκλο με την διπλάσια περίοδο. Τα σταθερά σημεία της σύνθετης απεικόνισης απεικονίζονται το ένα στο άλλο υπό την αρχική απεικόνιση με συνέπεια η κίνηση να επαναλαμβάνεται μετά από δύο περιόδους  $T_0$ . Ο αρχικός οριακός κύκλος δεν εξαφανίζεται, αλλά παραμένει μια ασταθής λύση των εξισώσεων κίνησης.

Κοντά στην διακλάδωση, η κίνηση είναι σχεδόν περιοδική με περίοδο  $T_0$ : τα δύο σταθερά σημεία βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Η απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων αποτελεί ένα μέτρο του πλάτους των ταλαντώσεων με περίοδο  $2T_0$ . Όπως ακριβώς και στην περίπτωση της εμφάνισης αστάθειας σε περιοδική ροή (2.6), το πλάτος της δευτερεύουσας ροής αυξάνεται  $\propto \sqrt{Re - Re_1}$ .

Σύμφωνα με το σενάριο Feigenbaum [29], η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή έπεται μιας ακολουθίας διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε αύξοντες αριθμούς Reynolds  $Re_i$ . Τα διαστήματα  $Re_{i+1} - Re_i$  μικραίνουν με ρυθμό αρκετά ταχύ έτσι ώστε η ακολουθία  $Re_i$  έχει πεπερασμένο όριο, πέρα από το οποίο η περίοδος έχει απειριστεί και η ροή γίνεται τυρβώδης μέσω της εμφάνισης ενός παράξενου ελκυστή. Όπως θα δούμε παρακάτω, το σενάριο αυτό είναι ιδιαίτερα γενικό καθώς θέτει εξαιρετικά χαλαρούς περιορισμούς στην συνάρτηση  $f$  και επομένως ισχύει εν δυνάμει για μια ευρεία κλάση συστημάτων.

Ποίες είναι όμως οι ουσιώδεις ιδιότητες της συνάρτησης  $f$ , η οποία και περιγράφει όλη την δυναμική του συστήματος; Οπωσδήποτε πρόκειται για μια συνεχή συνάρτηση: οι γειτονικές τροχιές πρέπει να παραμένουν γειτονικές μετά το πέρασμα μιας περιόδου. Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι δυνατόν να είναι γραμμική, καθώς αποτελεί προβολή της μη-γραμμικής συνάρτησης  $\mathbf{f}$ . Ακόμα, πρέπει οπωσδήποτε σε κάποιο διάστημα γύρω από το μηδέν να έχει παράγωγο  $\mu = df/dx < -1$ , ειδάλλως δεν θα είναι ικανή να αναπαράγει το φαινόμενο των διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου. Από την άλλη μεριά, καθώς η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι φραγμένη, το πλάτος  $x_i$  πρέπει να κινείται σε ένα φραγμένο διάστημα  $I = (-|a|, b)$  το οποίο πρέπει να απεικονίζεται στον εαυτό του.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να ικανοποιηθούν μόνο από συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι ένα προς ένα. Η συνθήκη  $|df/dx| > 1$  σημαίνει ότι κάποιο διάστημα  $(-|c|, d) \subset I$  μεγειθύνεται κατά

την απεικόνιση με συνέπεια αυτή να μην μπορεί να απεικονίζει το  $I$  στον εαυτό του με μονοσήμαντο τρόπο.<sup>1</sup> Άρα η συνάρτηση  $f$ , όντας συνεχής, είναι αναγκαστικά μη-μονότονη. Η απλούστερη μη-μονότονη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση με ένα μοναδικό μέγιστο, κοντά στο οποίο ισχύει, σε προσέγγιση δεύτερης τάξης:

$$x_{i+1} = f(x_i, \lambda) = 1 - \lambda x_i^2 \quad (2.19)$$

Η παράμετρος  $\lambda$  είναι αύξουσα συνάρτηση του αριθμού Reynolds η μεταβλητή  $x$  έχει μετατοπιστεί έτσι ώστε ο σταθερός όρος να γίνει μονάδα. Επιλέγουμε ως πεδίο ορισμού της μεταβλητής  $x$  το διάστημα  $(-1, 1)$ , το οποίο απεικονίζεται στον εαυτό του για  $0 < \lambda < 2$ .

Η απεικόνιση (2.19) έχει ένα ευσταθές σταθερό σημείο για το οποίο ισχύει  $x_* = 1 - \lambda x_*^2$ , το οποίο γίνεται ασταθές όταν  $\mu = df/dx = -2\lambda x_* = -1$ . Από αυτές τις δύο εξισώσεις προκύπτει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  στην οποία συμβαίνει η πρώτη διακλάδωση:  $\Lambda_1 = 3/4$ . Οι επόμενες κρίσιμες τιμές μπορούν να βρεθούν με τον ακόλουθο προσεγγιστικό τρόπο: από την (2.19) παίρνουμε:

$$x_{i+2} = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_i^2 - \lambda^3 x_i^4 \simeq 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_i^2$$

όπου αγνοήσαμε τον όρο τέταρτης τάξης. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό κλίμακας:

$$x_i \rightarrow \frac{x_i}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{1 - \lambda}$$

ο οποίος φέρνει την σύνθετη απεικόνιση σε μορφή ίδια με την αρχική:

$$x_{i+2} = 1 - \lambda_1 x_i^2, \quad \lambda_1 = \phi(\lambda) = 2\lambda^2(\lambda - 1)$$

Εμφωλιάζοντας την παραπάνω απεικόνιση και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό κλίμακας με συντελεστή  $\alpha_i = 1/(1 - \lambda_i)$  σε κάθε βήμα, παίρνουμε μια ακολουθία απεικονίσεων:

$$x_{i+2^m} = 1 - \lambda_m x_i^2, \quad \lambda_m = \phi(\lambda_{m-1}), \quad \lambda_0 = \lambda$$

Τα σταθερά σημεία των παραπάνω απεικονίσεων αντιστοιχούν σε οριακούς κύκλους περιόδου  $2^m T_1$ . Λόγω της παράληψης του όρου τέταρτης τάξης στην σύνθετη απεικόνιση, δεν λαμβάνουμε καμία πληροφορία για τα σημεία τα οποία τους αποτελούν. Εφόσον όλες αυτές οι απεικονίσεις είναι της μορφής (2.19), οι οριακοί κύκλοι γίνονται ασταθείς για  $\lambda_m = \Lambda_1 = 3/4$ . Όμως  $\lambda_m = \phi^m(\lambda)$ ,  $\Lambda_1 = \phi^m(\Lambda_m)$ , και οι κρίσιμες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  μπορούν να βρεθούν από το σύστημα εξισώσεων:

$$\Lambda_1 = \phi(\Lambda_2), \quad \Lambda_2 = \phi(\Lambda_3), \quad \dots, \quad \Lambda_{m-1} = \phi(\Lambda_m)$$

Εφόσον  $d\phi/d\lambda > 1$  για  $\lambda \geq \Lambda_1$ ,  $d\phi^{-1}/d\lambda < 1$  και η ακολουθία  $\Lambda_m = \phi^{-1}(\Lambda_{m-1})$  τείνει μονότονα στο όριο  $\Lambda_\infty = \phi(\Lambda_\infty) = (1 + \sqrt{3})/2 = 1.37$ . Αντίστοιχα οι συντελεστές κλίμακας τείνουν στο όριο  $\alpha_\infty = 1/(1 - \Lambda_\infty) = -2.8$ .

Από την σχέση  $\Lambda_m = \phi(\Lambda_{m+1})$  παίρνουμε, για  $m \gg 1$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= \Lambda_{m+1} + \phi'(\Lambda_{m+1})(\Lambda_{m+1} - \Lambda_m) \\ &\simeq \Lambda_{m+1} + \phi'(\Lambda_{m+1})(\Lambda_{m+2} - \Lambda_{m+1}) \\ \Lambda_{m+2} - \Lambda_{m+1} &= (\Lambda_{m+1} - \Lambda_m)/\delta \end{aligned} \quad (2.20)$$

με  $\delta = d\phi/d\lambda > 1$ . Επομένως τα μήκη των διαστημάτων  $(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})$  μειώνονται γεωμετρικά. Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι μόνο προσεγγιστικά: οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων δεν μπορούν

<sup>1</sup>Το γεγονός αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με την ντετερμινιστική φύση του συστήματος, καθώς η συνάρτηση  $f: P \rightarrow P$  είναι πάντα ένα προς ένα, ανεξάρτητα αν η μονοδιάστατη προβολή της  $f$  δεν είναι.

να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή. Σύμφωνα με τους αριθμητικούς υπολογισμούς του Feigenbaum [30], οι ακριβείς τιμές είναι:

$$\delta = 4.6692\dots \quad \alpha = -2.5029\dots \quad \Lambda_\infty = 1.401\dots$$

Η σταθερά  $\delta$  είναι γνωστή ως σταθερά του Feigenbaum. Η σχετικά υψηλή τιμή της συνεπάγεται ταχύτατη σύγκλιση της ακολουθίας  $\Lambda_i$  με αποτέλεσμα η σχέση (2.20) να ισχύει σε πολύ καλή προσέγγιση μετά από έναν μικρό αριθμό διακλαδώσεων.

Εφόσον η παράμετρος  $\lambda$  είναι αύξουσα συνάρτηση του αριθμού Reynolds, οι ιδιότητες της ακολουθίας  $\Lambda_i$  ισχύουν και για την ακολουθία κρίσιμων αριθμών Reynolds  $Re_i$ . Η ακολουθία αυτή έχει πεπερασμένο όριο πέρα από το οποίο η κίνηση είναι πλήρως απεριοδική και η ροή έχει γίνει τυρβώδης, μετά από απειρία διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου.

Η παραπάνω προσέγγιση, η οποία αγνοεί δυνάμεις του  $x_i^2$  μεγαλύτερες από την πρώτη στις σύνθετες απεικονίσεις μας παρέχει μόνο την πληροφορία ότι για κάποιες τιμές του  $\lambda$  συμβαίνουν διακλαδώσεις. Αντίθετα, αδυνατεί να χαρακτηρίσει κατά οποιονδήποτε τρόπο τα στοιχεία ενός  $2^m$ -κύκλου. Τα σημεία αυτά απεικονίζονται με την σειρά το ένα στο άλλο κάτω από την αρχική απεικόνιση (2.19), με τον κύκλο να κλείνει μετά από  $2^m$  απεικονίσεις. Μπορεί να αποδειχθεί [29] ότι αποτελούν ευσταθή σταθερά σημεία της απεικόνισης  $f^{(2^m)}$ , με την παράγωγο  $dx_{i+2^m}/dx_i$  να έχει την ίδια τιμή σε κάθε ένα από αυτά και συνεπώς κάθε διακλάδωση να συμβαίνει ταυτόχρονα σε όλα.

Στην πραγματικότητα οι απεικονίσεις  $f^{(2^m)}$  είναι πολυώνυμα ως προς  $x_i^2$  των οποίων ο βαθμός διπλασιάζεται σε κάθε επανάληψη. Ο αριθμός των ακρότατων τους, τα οποία είναι σε θέσεις συμμετρικές ως προς το σημείο  $x_i = 0$  που παραμένει και αυτό ακρότατο, διπλασιάζεται επίσης. Εκτός από τις σταθερές  $\delta, \alpha$  και το όριο  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m$  έχει μορφή η οποία είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητη από τις λεπτομέρειες της αρχικής απεικόνισης  $f$ .

Ας εξετάσουμε την απεικόνιση  $f(x) = f(x, \lambda)$  για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , κανονικοποιημένη έτσι ώστε  $f(0) = 1$ . Θεωρούμε τώρα την σύνθετη απεικόνιση  $f_1(x) = f(f(x))$ , στην οποία εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό κλίμακας  $f_1 \rightarrow f_1/\alpha_0$ ,  $x \rightarrow x/\alpha_0$  με  $\alpha_0 = 1/f(1)$ :

$$f_1(x) = \alpha_0 f(f(x/\alpha_0))$$

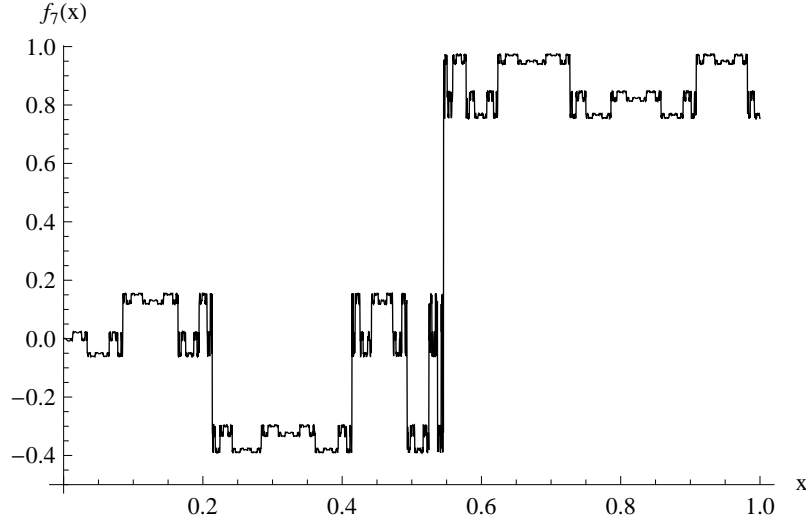
Παρατηρούμε ότι  $f_1(0) = 1$ , οπότε μπορούμε να επαναλάβουμε την διαδικασία σύνθεσης παίρνοντας μια ακολουθία απεικονίσεων  $f_m$ :

$$f_{m+1}(x) = \alpha_m f_m(f_m(x/\alpha_m)) = \mathcal{T}^m\{f_m\} \quad \alpha_m = \frac{1}{f_m(1)}$$

Αν η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο όριο  $g(x)$ , το όριο αυτό πρέπει να είναι σταθερό σημείο του τελεστή  $\mathcal{T} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{T}^m$ :

$$g(x) = \mathcal{T}\{g(x)\} = \alpha g(g(x/\alpha)) \quad \alpha = \frac{1}{g(1)}, \quad g(0) = 1 \quad (2.21)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει ως μοναδική λύση μια άρτια συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  [30], η οποία όμως δεν μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή. Πρόκειται για μια συνάρτηση με άπειρο αριθμό τοπικών ακρότατων. Στην πράξη αρκεί να υπολογίσει κανείς τον περιορισμό της στο  $(-1, 1)$ , καθώς μπορεί να συνεχιστεί έξω από αυτό με εφαρμογή του τελεστή  $\mathcal{T}$ . Σε κάθε εφαρμογή του τελεστή  $\mathcal{T}$  οι τιμές της συνάρτησης  $f_{m+1}$  στο διάστημα  $(-1, 1)$  προσδιορίζονται από τις τιμές της συνάρτησης  $f_m$  σε ένα υποδιάστημα του μήκους  $2/\alpha_m \simeq 2/\alpha$ . Συνεπώς στο όριο  $m \rightarrow \infty$  η συνάρτηση  $g$  στο  $(-1, 1)$ , και επομένως σε όλο το  $\mathbb{R}$ , εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές της συνάρτησης  $f$  στην γειτονιά του σημείου  $x = 0$ , όπου έχει το μέγιστό της. Το γεγονός αυτό προσδίδει γενικότητα



Σχήμα 2.2: Η συνάρτηση  $f_7(x)$  για  $\lambda = \Lambda_\infty$

στην θεωρία, καθώς αυτή ισχύει για μια ιδιαίτερα ευρεία κλάση συναρτήσεων  $f$  και επομένως για μια ευρεία κλάση δυναμικών συστημάτων.

Η συνάρτηση  $g$  για  $\lambda = \Lambda_\infty$  (σχήμα 2.2) περιγράφει την δομή του απειροδικού ελκυστή ο οποίος εμφανίζεται όταν μετά από μια ακολουθία άπειρων διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου. Ο συντελεστής  $\alpha$  εκφράζει την αλλαγή κλίμακας μετά από κάθε διακλάδωση. Η κλίμακα που αλλάζει είναι ουσιαστικά η απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων του οριακού κύκλου. Εφόσον  $\alpha \simeq -2.5029$  αυτή η αλλαγή κλίμακας είναι σμίκρυνση συνοδευόμενη από αντιστροφή. Το γεγονός ότι η συνάρτηση απεικόνισης είναι μη-γραμμική συνεπάγεται ουσιαστικά ότι η αλλαγή κλίμακας είναι εν γένει διαφορετική για κάθε σημείο.

Την στιγμή της διακλάδωσης, ( $\lambda = \Lambda_m$ ) κάθε στοιχείο του ασταθούς  $2^m$ -κύκλου χωρίζεται σε δύο σημεία, των οποίων η απόσταση αυξάνεται σταδιακά καθώς η παράμετρος  $\lambda$  αυξάνει. Κάθε στοιχείο του  $2^{m+1}$ -κύκλου ανήκει σε ένα από τα  $2^m$  ζεύγη και απεικονίζεται στο έτερο στοιχείο του ζεύγους μετά από  $2^m$  απεικονίσεις. Συνεπώς οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων κάθε ζεύγους αποτελούν ένα μέτρο του πλάτους της νέας ταλάντωσης με περίοδο  $2^{m+1}T_1$ .

Ας θεωρήσουμε τα στοιχεία του  $2^{m+1}$ -κύκλου στην σειρά με την οποία περνά από αυτά η τροχιά του συστήματος με την πάροδο του χρόνου, ξεκινώντας αυθαίρετα από κάποιο από αυτά:  $x_{m+1}(t + nT_0)$   $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq n \leq 2^{m+1} - 1$ . Η απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους σημείων είναι:

$$\xi_{m+1} = x_{m+1}(t) - x_{m+1}(t + T_m) \quad T_m = 2^m T_0 = \frac{1}{2} T_{m+1} \quad (2.22)$$

Η μεταβολή της απόστασης μεταξύ κάθε ζεύγους από διακλάδωση σε διακλάδωση προσδιορίζεται μέσω ενός συντελεστή κλίμακας  $\sigma_m(t)$ :

$$\frac{\xi_{m+1}(t)}{\xi_m(t)} = \sigma_m(t)$$

Προφανώς

$$\begin{aligned} \xi_{m+1}(t + T_m) &= x_{m+1}(t + T_m) - x_{m+1}(t + 2T_m) \\ &= x_{m+1}(t + T_m) - x_{m+1}(t + T_{m+1}) = -\xi_{m+1}(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \xi_m(t + T_m) &= x_m(t + T_m) - x_m(t + T_{m-1} + T_m) \\ &= x_m(t) - x_m(t + T_{m-1}) = \xi_m(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Επομένως

$$\sigma_m(t + T_m) = -\sigma_m(t) \quad (2.25)$$

Η συνάρτηση  $\sigma(t)$  είναι μια ιδιαίτερα πολύπλοκη συνάρτηση, αλλά μπορεί κανείς να δείξει [31] ότι για  $m \rightarrow \infty$  μπορεί να προσεγγιστεί από τις παρακάτω απλές εκφράσεις:

$$\sigma_m(t) = \alpha^{-1} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}T_m \quad (2.26)$$

$$= \alpha^{-2} \quad \frac{1}{2}T_m \leq t < T_m \quad (2.27)$$

μετά από κατάλληλη μετατόπιση της αρχής των χρόνων.

Οι τελευταίες σχέσεις μας επιτρέπουν να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για την μεταβολή του φάσματος συχνοτήτων της ροής μέσω των διακλάδωσεων. Κατά την κίνηση στον  $2^m$ -κύκλο το φάσμα περιέχει την βασική συχνότητα  $\omega_m = 2\pi/T_m$  και τις αρμονικές της  $k\omega_m$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Μετά την διακλάδωση η κίνηση αποκτά περίοδο  $T_{m+1} = 2T_m$  με αποτέλεσμα να εμφανίζονται εκτός από τις αρμονικές και οι υποαρμονικές της συχνότητας  $\omega_m$  οι οποίες είναι της μορφής  $\frac{1}{2}l\omega_m$ ,  $l = 1, 3, 5, \dots$ . Ας αναλύσουμε την τροχιά  $x_{m+1}(t)$  σε δύο συνιστώσες:

$$x_{m+1}(t) = \xi_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t),$$

με

$$\eta_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) + x_{m+1}(t + T_m)$$

Το φάσμα συχνοτήτων της  $\eta_{m+1}(t)$  δεν περιέχει τις υποαρμονικές, καθώς η συνάρτηση  $\eta_{m+1}$  είναι περιοδική με περίοδο  $T_m$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_{m+1}} \int_0^{T_{m+1}} \eta_{m+1}(t) e^{i\frac{1}{2}l\omega_m t} dt = \\ & \frac{1}{2T_m} \int_0^{2T_m} \eta_{m+1}(t) e^{i\pi l t / T_m} dt = \\ & \frac{1}{2T_m} \int_0^{T_m} \eta_{m+1}(t) e^{i\pi l t / T_m} dt + \frac{1}{2T_m} \int_{T_m}^{2T_m} \eta_{m+1}(t) e^{i\pi l t / T_m} dt = \\ & \frac{1}{2T_m} \int_0^{T_m} \eta_{m+1}(t) e^{i\pi l t / T_m} dt + \frac{1}{2T_m} \int_0^{T_m} \eta_{m+1}(t + T_m) e^{i\pi l} e^{i\pi l t / T_m} dt = \\ & \frac{1}{2T_m} \int_0^{T_m} (\eta_{m+1}(t) - \eta_{m+1}(t + T_m)) e^{i\pi l t / T_m} dt = 0 \end{aligned}$$

Επίσης, κατά την διακλάδωση μόνο η ποσότητα  $\xi_m$  μεταβάλλεται έντονα, με την ποσότητα  $\eta_m$  να παραμένει σχεδόν σταθερή: το μέσον του διαστήματος που συνδέει τα σημεία ενός ζεύγους είναι  $\eta_{m+1}/2$  και βρίσκεται πολύ κοντά στο μέσον του διαστήματος του αντίστοιχου ζεύγους του προηγούμενου κύκλου  $\eta_m$ . Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι η ισχύς των αρμονικών παραμένει περίπου σταθερή.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να δείξει το φάσμα συχνοτήτων της  $\xi_{m+1}$  περιέχει μόνο τις υποαρμονικές. Η συνολική ισχύς τους είναι:

$$\begin{aligned} I_{m+1} &= \frac{1}{T_{m+1}} \int_0^{T_{m+1}} \xi_{m+1}(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2T_m} \int_0^{2T_m} \sigma_m(t)^2 \xi_m(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \sigma_m(t)^2 \xi_m(t)^2 dt \end{aligned}$$



καθώς  $\xi_m(t + T_m) = \xi_m(t)$  (2.24),  $\sigma_m(t + T_m) = -\sigma_m(t)$  (2.25) και συνεπώς οι συναρτήσεις  $\xi_m(t)^2$  και  $\sigma_m(t)^2$  είναι περιοδικές με περίοδο  $T_m$ . Χρησιμοποιώντας την (2.25) και το γεγονός ότι  $\xi_m(t + T_m/2)^2 = \xi_m(t)^2$  (2.23) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} I_{m+1} &= \frac{1}{T_m} \left( \int_0^{T_m/2} \frac{1}{\alpha} \xi_m(t)^2 dt + \int_{T_m/2}^{T_m} \frac{1}{\alpha^2} \xi_m(t)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{T_m} \left( \frac{1}{\alpha} \int_0^{T_m/2} \xi_m(t)^2 dt + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{T_m/2} \xi_m(t + T_m/2)^2 dt \right) \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m/2} \xi_m(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{1}{T_m} \int_0^T \xi_m(t)^2 dt \\ &\simeq 10.8 I_m \end{aligned}$$

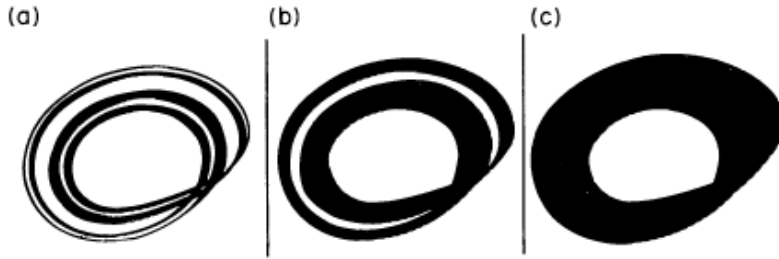
Επομένως σε κάθε διακλάδωση η ισχύς των υποαρμονικών αυξάνει κατά παράγοντα ανεξάρτητο του αριθμού των διακλαδώσεων που έχουν συμβεί [30].

Ας εξετάσουμε τώρα την δομή του ελκυστή για τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  πέρα από την τιμή  $\Lambda_\infty$ . Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, ο απεριοδικός ελκυστής χαρακτηρίζεται από σχεδόν μονοδιάστατη τομή Poincaré και θα υποθέσουμε ότι διατηρεί αυτή την δομή και για τιμές μεγαλύτερες του  $\Lambda_\infty$ . Κατά τον σχηματισμό του, ο απεριοδικός ελκυστής δεν είναι παράξενος ελκυστής με την έννοια που αυτός ορίστηκε στην ενότητα 2.2.2. Αντίθετα, αποτελεί έναν ευσταθή  $2^\infty$ -κύκλο, τα στοιχεία του οποίου σχηματίζουν ένα σύνολο Cantor στο διάστημα  $(-1, 1)$  με μηδενικό συνολικό μήκος και διάσταση Hausdorff ίση με 0.54 [38].

Όταν η παράμετρος  $\lambda$  ξεπεράσει οριακά την τιμή  $\Lambda$ , ο απεριοδικός ελκυστής μετασχηματίζεται σε παράξενο ελκυστή. Ο  $2^\infty$ -κύκλος γίνεται ασταθής και στα διάκενα ανάμεσα στα στοιχεία του σχηματίζεται μια ελκυστική δέσμη ασταθών τροχιών. Το σύνολο Cantor μετασχηματίζεται σε ένα σύνολο μη-μηδενικού συνολικού μήκους και ο ελκυστής αποκτά την μορφή δέσμης ασταθών τροχιών η οποία περιελίσσεται άπειρες φορές πριν κλείσει. Στην πραγματικότητα βέβαια η διατομή της δέσμης δεν είναι ένα απλό σύνολο διαστημάτων πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα αλλά έχει πολύπλοκη εγκάρσια Καντοριανή δομή με απειρία εμφωλιασμένων στρωμάτων.

Στην μονοδιάστατη προσέγγιση, για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda > \Lambda_\infty$  η τομή Poincaré αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο υποδιαστημάτων του  $(-1, 1)$ . Τα κενά ανάμεσα σε αυτά τα διαστήματα περιέχουν τα στοιχεία ασταθών κύκλων με περίοδο όχι μεγαλύτερη του  $2^m T_0$  για κάποιο  $m$ . Καθώς η παράμετρος  $\lambda$  αυξάνει, οι τροχιές που περιέχονται στα διαστήματα γίνονται όλο και πιο ασταθείς με αποτέλεσμα τα διαστήματα να επεκτείνονται απορροφώντας σταδιακά τα στοιχεία των ασταθών οριακών κύκλων  $2^m, 2^{m-1}, 2^{m-2}, \dots$ . Καθώς τα διαστήματα επεκτείνονται, συνενώνονται ανά ζεύγη με αποτέλεσμα ο αριθμός τους να υποδιπλασιάζεται. Συνεπώς η δέσμη που αναφέρθηκε παραπάνω έχει τώρα πεπερασμένο αριθμό περιελίξεων ο οποίος υποδιπλασιάζεται σταδιακά. Συμβαίνει επομένως μια ακολουθία αντίστροφων διακλαδώσεων οι οποίες απλοποιούν σταδιακά την γεωμετρική δομή του ελκυστή. Η απορρόφηση ενός ασταθούς οριακού κύκλου από τον παράξενο ελκυστή ονομάζεται διακλάδωση αντίστροφου διπλασιασμού (reverse doubling bifurcation). Στο σχήμα 2.3 φαίνονται σχηματικά οι δύο τελευταίες διακλαδώσεις αντίστροφου διπλασιασμού, οι οποίες δίνουν την τελική μορφή του ελκυστή, με την δέσμη ασταθών τροχιών να κλείνει μετά από μια περιέλιξη και την διατομή της να καταλαμβάνει πια όλο το διάστημα  $(-1, 1)$ .

Ας εξετάσουμε την ακολουθία  $\bar{\Lambda}_m$  των τιμών της παραμέτρου  $\lambda$  στις οποίες λαμβάνουν χώρα οι διακλαδώσεις αντίστροφου διπλασιασμού, διατεταγμένη σε φθίνουσα σειρά:  $\bar{\Lambda}_{m+1} < \bar{\Lambda}_m$ . Μόλις πριν την πρώτη σε αυτή τη σειρά διακλάδωση, η διατομή του ελκυστή αποτελείται από δυο διαστήματα τα οποία περικλείουν το σταθερό σημείο της απεικόνισης (2.19), δηλαδή το μοναδικό στοιχείο του



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση διακλαδώσεων αντίστροφου διπλασιασμού

ασταθούς οριακού  $2^0$ -κύκλου:

$$x_* = \frac{\sqrt{1+4\lambda} - 1}{2\lambda}$$

Η διακλάδωση λαμβάνει χώρα όταν η παράμετρος  $\lambda$  παίρνει την τιμή  $\bar{\Lambda}_1$ , για την οποία τα δυο διαστήματα συνενώνονται απορροφώντας το σημείο  $x_*$ . Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3-b, η τροχιά που βρίσκεται στο εξωτερικό όριο του ελκυστή περνά στο εσωτερικό όριο μετά από μια περιέλιξη και στο σύνορο του μεσοδιαστήματος μετά από άλλη μια. Συνεπώς η τιμή  $\lambda = \bar{\Lambda}_1$  προκύπτει από την συνθήκη  $x_{i+2} = x_*$ , όπου  $x_{i+2} = 1 - \lambda(1 - \lambda)$  είναι η τιμή της σύνθετης απεικόνισης στο σημείο  $x = 1$  το οποίο αντιστοιχεί στο εξωτερικό όριο του ελκυστή. Από τις δύο σχέσεις βρίσκουμε  $\bar{\Lambda}_1 = 1.543\dots$ . Οι τιμές των προηγούμενων διακλαδώσεων  $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3, \dots$  μπορούν να υπολογιστούν προσεγγιστικά από την αναδρομική σχέση που ισχύει μεταξύ των  $\bar{\Lambda}_m$ . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην περίπτωση των διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου, βρίσκουμε  $\bar{\Lambda}_m = \phi(\bar{\Lambda}_{m+1})$ . Εφόσον η συνάρτηση  $\phi$  είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις, το βασικό αποτέλεσμα για την ακολουθία των διαστημάτων μεταξύ των κρίσιμων τιμών του  $\lambda$  ισχύει και σε αυτή την περίπτωση:

$$\bar{\Lambda}_{m+1} - \bar{\Lambda}_{m+2} = (\bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda}_{m+1})/\delta \quad (2.28)$$

με  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\Lambda}_m = \Lambda_\infty$ . Επομένως πέρα από την τιμή  $\Lambda_\infty$  το σύστημα περνά από απειρία διακλαδώσεων αντίστροφου διπλασιασμού μέσα στο πεπερασμένο διάστημα  $(\Lambda_\infty, \bar{\Lambda}_1)$  πέρα από το οποίο η κίνηση λαμβάνει χώρα πάνω σε παράξενο ελκυστή με διατομή όλο το διάστημα  $(-1, 1)$ .

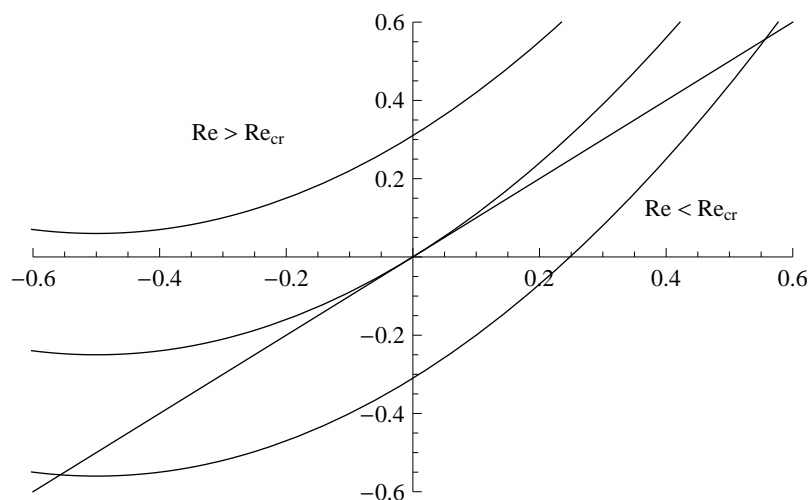
Ο σχηματισμός παράξενου ελκυστή για  $\lambda > \Lambda_\infty$  συνοδεύεται από μεταβολές στο φάσμα συχνότητων της κίνησης. Η κίνηση πάνω στον ελκυστή αντιπροσωπεύεται από μια συνεχή συνιστώσα στο φάσμα, της οποίας η ισχύς αυξάνεται με το πλάτος της διατομής του ελκυστή. Πάνω σε αυτή την συνιστώσα υπάρχουν διακριτές κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις συχνότητες των ασταθών οριακών κύκλων καθώς και στις αρμονικές και υποαρμονικές τους. Κατά τις αντίστροφες διακλαδώσεις, οι αντίστοιχες υποαρμονικές εξαφανίζονται με σειρά αντίστροφη με αυτή κατά την οποία εμφανίστηκαν κατά την ακολουθία διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου.

Το σενάριο Feigenbaum αποτελεί μια ενδιαφέρουσα πρόταση για την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή, η οποία υποστηρίζεται από πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα για πολλές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών. Το μεγάλο πλεονέκτημα του είναι η γενικότητά του, καθώς οι υπολογισμοί αυτής της παραγράφου ισχύουν για μια πολύ ευρεία κλάση μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η γενικότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση  $g$  (2.21) εξαρτάται μόνο από την συμπεριφορά της  $f$  στην γειτονιά του ακρότατού της. Ένα δεύτερο πλεονέκτημα αποτελεί το γεγονός ότι το σενάριο αυτό, σε αντίθεση με το σενάριο Ruelle-Takens, εξηγεί ικανοποιητικά την διαδικασία σχηματισμού παράξενου ελκυστή μέσω ακολουθίας διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου, παρέχοντας παράλληλα συγκεκριμένες προβλέψεις για το χρονικό φάσμα συχνότητων της ροής. Παρόλα αυτά, οι προβλέψεις αυτές δεν παρατηρούνται σε πολλά σημαντικά υδροδυναμικά συστήμα-

τα, γεγονός που υποδεικνύει ότι το σενάριο αυτό σίγουρα δεν αποτελεί την μοναδική απάντηση στο πρόβλημα της μετάβασης.

## 2.2.4 Διαλειπτική μετάβαση

Κλείνοντας, ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο πολλαπλασιαστής  $\mu$  περνά τον μοναδιαίο κύκλο μέσω του σημείου  $z = +1$ . Με τον ίδιο τρόπο όπως στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να περιγράψουμε την δυναμική του συστήματος προσεγγιστικά μέσω μιας μονοδιάστατης απεικόνισης  $x_{i+1} = f(x_i, Re)$  με  $\mu = df/dx$  η οποία για την κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds  $Re_{cr}$  εφάπτεται στην ευθεία  $x_{i+1} = x_i$  (Σχήμα 2.4). Ορίζοντας ως σημείο επαφής το  $x = 0$  αναπτύσσουμε την  $f$  γύρω από αυτό:



Σχήμα 2.4: Η απεικόνιση  $f(x, Re)$  κοντά σε διακλάδωση με  $\mu = 1$

$$\begin{aligned} x_{i+1} = f(x_i, Re) &\simeq f(0, Re) + x_i + \beta x_i^2 \\ &\simeq f(0, Re_{cr}) + \alpha(Re - Re_{cr}) + x_i + \beta x_i^2 \\ &= \alpha(Re - Re_{cr}) + x_i + \beta x_i^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $\alpha > 0$ . Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ευσταθές για  $Re < Re_{cr}$  σημαίνει στην περίπτωση αυτή ότι η παραβολή (2.29) τέμνει την ευθεία  $x_{i+1} = x_i$  σε δύο σημεία, επομένως είναι κυρτή και  $\beta > 0$ . Επαναορίζοντας κατάλληλα την μεταβλητή  $x$  και τον αριθμό Reynolds ώστε οι αντίστοιχοι συντελεστές να γίνουν μονάδα παίρνουμε την ακόλουθη προσεγγιστική απεικόνιση:

$$x_{i+1} = (Re - Re_{cr}) + x_i + x_i^2 \quad (2.30)$$

Η οποία ισχύει σε ένα διάστημα  $I = (-|a|, b)$ ,  $|a|, b \ll 1$ , τα σημεία του οποίου θεωρούμε ότι αντιστοιχούν σε στρωτή ροή. Όπως αναφέραμε παραπάνω, όταν  $Re < Re_{cr}$  η απεικόνιση έχει δύο σταθερά σημεία:

$$x_*^{1,2} = \mp \sqrt{Re_{cr} - Re}$$

Το σημείο  $x_*^1$  αντιστοιχεί σε ευσταθή στρωτή ροή, ενώ το σημείο  $x_*^2$  σε ασταθή. Όταν  $Re = Re_{cr}$  τα δύο σημεία συναντώνται στο σημείο επαφής της  $f$  με την ευθεία  $x_{i+1} = x_i$ , ενώ όταν  $Re > Re_{cr}$  εξαφανίζονται περνώντας στο μιγαδικό επίπεδο. Όταν η διαφορά  $Re - Re_{cr}$  είναι μικρή, η παραβολή (2.30) είναι πολύ κοντά στην ευθεία  $x_{i+1} = x_i$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για έναν εξαιρετικά

μεγάλο αριθμό επαναλήψεων της απεικόνισης  $f$  η μεταβλητή  $x$  να παραμένει στο  $I$  και συνεπώς η ροή να παραμένει στρωτή για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Σύμφωνα με το σενάριο Pomeau–Manneville [62], τα σημεία του συνόλου  $S = \mathbb{R} - I$  αντιστοιχούν σε τυρβώδη ροή. Οι τροχιές πάνω στο  $S$  είναι ασταθείς, όμως το σύνολο  $S$  δεν είναι ελκυστής: με την πάροδο του χρόνου το σύστημα επιστρέφει στο διάστημα  $I$  και η ροή ξαναγίνεται στρωτή. Όταν  $Re < Re_{cr}$  η τροχιά συγκλίνει στο ευσταθές σταθερό σημείο  $x_*^1$  και η ροή γίνεται στρωτή. Όταν όμως  $Re > Re_{cr}$  δεν υπάρχει σταθερό σημείο με αποτέλεσμα η τροχιά να κινείται με απρόβλεπτο τρόπο μεταξύ των συνόλων  $I$  και  $S$ . Το σενάριο αυτό αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση για την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή, με το φαινόμενο της διάλειψης<sup>2</sup> να παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο: χρονικά διαστήματα στρωτής και τυρβώδους ροής εναλλάσσονται με ακανόνιστο τρόπο.

Καθώς η φύση της διακλάδωσης μας παρέχει πληροφορία για την απεικόνιση  $f$  μόνο στο διάστημα  $I$ , η φύση των τροχιών πάνω στο σύνολο  $S$  παραμένει απροσδιόριστη, και επομένως δεν μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για την διάρκεια των χρονικών διαστημάτων όπου η ροή είναι τυρβώδης. Αντίθετα, η εξάρτηση του μήκους των διαστημάτων στρωτής ροής από την διαφορά  $Re - Re_{cr}$  για  $Re - Re_{cr} \ll 1$  μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι σε αυτή την περίπτωση το δεξιό μέλος της (2.30) είναι  $\ll 1$  όσο η τροχιά κινείται στο  $I$ . Επομένως η μεταβλητή  $i$  μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής και η (2.30) να γραφεί ως διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+\Delta i} - x_i}{\Delta i} &= (Re - Re_{cr}) + x_i^2 \quad \Delta i = 1 \\ \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{x_{i+\Delta i} - x_i}{\Delta i} &= (Re - Re_{cr}) + x_i^2 \\ \frac{dx}{dt} &= (Re - Re_{cr}) + x_i^2 \end{aligned}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$x(t) = \sqrt{Re - Re_{cr}} \tan(\sqrt{Re - Re_{cr}}(t + c))$$

Επομένως:

$$t(x) = c + \frac{1}{\sqrt{Re - Re_{cr}}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{Re - Re_{cr}}}\right)$$

με  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Αναπτύσσοντας την αντίστροφη εφαπτομένη σε σειρά Taylor και κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο:

$$t(x) = c + \frac{x}{Re - Re_{cr}} + O(x^3)$$

Ο απαιτούμενος χρόνος για να διασχίσει η τροχιά το διάστημα  $I$  είναι:

$$\tau = t(b) - t(-|a|) \propto \frac{1}{Re - Re_{cr}}$$

Μια από τις μεγαλύτερες αδυναμίες του σεναρίου Pomeau–Manneville αποτελεί το γεγονός ότι η φύση των τροχιών στο σύνολο  $S$  παραμένει απροσδιόριστη. Παρόλα αυτά, η διάλειψη είναι ένα φαινόμενο το οποίο παρατηρείται σε πολλά υδροδυναμικά συστήματα κατά την διαδικασία μετάβασης και το σενάριο αυτό προσφέρει μια εξήγηση του φαινομένου αυτού μέσω διακλάδωσης με πολλαπλασιαστή  $\mu = +1$ . Ωστόσο, σε αντίθεση με το σενάριο Feigenbaum προϋποθέτει ειδική μορφή της απεικόνισης  $f$  στο διάστημα  $S$ , η οποία μάλιστα παραμένει απροσδιόριστη, γεγονός το οποίο περιορίζει την γενικότητα των συλλογισμών.

<sup>2</sup>Η έννοια της διάλειψης στα πλαίσια του σεναρίου Pomeau–Manneville αφορά αποκλειστικά το πεδίο του χρόνου και δεν ταυτίζεται με την έννοια διάλειψης στην θεωρία της πλήρως ανεπτυγμένης τυρβώδους ροής η οποία αφορά χώρο και χρόνο.

Κλείνοντας το κεφάλαιο περί μετάβασης σε τυρβώδη ροή, αναφέρουμε ότι και τα τέσσερα διαφορετικά σενάρια που έχουν προταθεί μέχρι σήμερα επιχειρούν να περιγράψουν την μετάβαση σε τυρβώδη ροή αποκλειστικά στο χρονικό πεδίο, μέσω της ποιοτικής μελέτης τροχιών στον χώρο των φάσεων. Η τυρβώδης ροή όμως είναι ένα φαινόμενο το οποίο χαρακτηρίζεται τόσο από χρονική, όσο και από χωρική πολυπλοκότητα. Η χωρική πολυπλοκότητα αποτελεί μια ιδιότητα των λύσεων της εξίσωσης Navier–Stokes. Κάθε σημείο του χώρου των φάσεων μπορεί να αντιστοιχεί σε μια χωρικά πολύπλοκη λύση, αλλά η πολυπλοκότητα αυτή δεν μπορεί να μελετηθεί ποιοτικά, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιηθεί ρητά η εξίσωση Navier–Stokes, ως ιδιότητα της τροχιάς. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι το μοναδικό σενάριο που επιχειρεί να εξηγήσει, έστω και μόνο ποιοτικά, την χωρική πολυπλοκότητα της τυρβώδους είναι η εικασία του Leray [51], η οποία συνδέει την μετάβαση σε τυρβώδη ροή με την απώλεια ομαλότητας της λύσης.

Στο παρόν κεφάλαιο, από την εξίσωση (2.7) και μετά, η εξίσωση Navier–Stokes ουσιαστικά δεν χρησιμοποιήθηκε, παρά μόνο έγιναν κάποιες υποθέσεις για τις λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών (2.9) από όπου προέκυψαν οι πολλαπλασιαστές  $\mu$  οι οποίοι και καθορίζουν την φύση των διακλαδώσεων. Επομένως, τα αποτελέσματα από εκεί και πέρα δεν ισχύουν μόνο για υδροδυναμικά συστήματα αλλά για μια ευρεία κλάση μη–γραμμικών δυναμικών συστημάτων τα οποία παρουσιάζουν απώλεια κινητικής ενέργειας. Μια πλήρως μη–γραμμική θεωρία μετάβασης η οποία θα χρησιμοποιεί ουσιαστικά τις εξισώσεις Navier–Stokes αποτελεί ένα σημαντικό ανοικτό πρόβλημα άρρηκτα συνδεδεμένο με το πρόβλημα ύπαρξης και ομαλότητας των λύσεων. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του γενικότερου σημαντικότερου προβλήματος της χαοτικής συμπεριφοράς μερικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο και αποτελεί ένα από τα μέγιστα ανοικτά προβλήματα της θεωρίας μη–γραμμικών δυναμικών συστημάτων [67].



## Κεφάλαιο 3

# Ομογενής τυρβώδης ροή

Σύμφωνα με όλα τα σενάρια μετάβασης, για κάθε δεδομένη περίπτωση συνοριακών συνθηκών μια συνεκτική ροή περνά από μια ακολουθία διακλαδώσεων καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds. Μέσα από αυτές τις διακλαδώσεις η πολυπλοκότητα της ροής αυξάνεται, με όλο και μεγαλύτερο αριθμό βαθμών ελευθερίας να συμμετέχει στην κίνηση. Η θεωρία της πλήρως αναπτυγμένης τυρβώδους ροής επιχειρεί να περιγράψει την κίνηση του ρευστού σε πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds, όπου η ακολουθία των διακλαδώσεων έχει ολοκληρωθεί και η ροή χαρακτηρίζεται ως κίνηση πάνω σε ελκυστή μεγάλης διάστασης. Λόγω της ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες, η τυρβώδης ροή έχει την ιδιότητα να μην επαναλαμβάνεται σε μια ακολουθία πειραμάτων που διεξάγονται κάτω από πανομοιότυπες μακροσκοπικές συνθήκες. Αντίθετα, οι στατιστικές της ιδιότητες μπορούν γενικά να αναπαραχθούν. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι η ντετερμινιστική περιγραφή των προηγούμενων ενοτήτων πρέπει να εγκαταλειφθεί χάριν μιας πιθανοθεωρητικής περιγραφής.

### 3.1 Μαθηματική περιγραφή τυρβώδους ροής

#### 3.1.1 Στατιστική υδροδυναμική

Σε αυτή την παράγραφο θα σκιαγραφήσουμε την μαθηματική θεμελίωση της στατιστικής θεωρίας τυρβώδους ροής βασιζόμενοι στην εξίσωση Navier–Stokes ως δυναμικό σύστημα. Η έλλειψη θεωρήματος ύπαρξης και ομαλότητας των λύσεων της εξίσωσης Navier–Stokes καθώς και άλλα ανοικτά θέματα σχετικά με μέτρα πιθανότητας σε χώρους συναρτήσεων καθιστά την θεμελίωση αυτή ένα ανοικτό πρόβλημα. Συνεπώς, το επίπεδο μαθηματικής αυστηρότητας αυτής της ενότητας δεν είναι το υψηλότερο δυνατό, ενώ λόγω έλλειψης χώρου η ανάπτυξη θα είναι σύντομη. Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει πληρέστερες απόπειρες αυστηρής θεμελίωσης της στατιστικής θεωρίας της τυρβώδους ροής στις μονογραφίες [74], [32].

Η πιθανοθεωρητική περιγραφή της τυρβώδους ροής έχει ως αφετηρία την ντετερμινιστική εξίσωση Navier–Stokes (1.8) και την κινηματική συνθήκη συνέχειας (1.3). Δεν θα επιχειρήσουμε την πλήρη χωροχρονική πιθανοθεωρητική περιγραφή του πεδίου ταχυτήτων, αλλά θα περιοριστούμε στην πιθανοθεωρητική περιγραφή του πεδίου στον χώρο  $\mathbb{R}^3$  με τον χρόνο ως παράμετρο.

Έστω  $\Theta$  ο χώρος των  $C^2$  διανυσματικών πεδίων  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με απόκλιση  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Υποθέτουμε ότι η εξίσωση Navier–Stokes με αρχικά δεδομένα  $\mathbf{u}(0) \in \Theta$  έχει μοναδική λύση  $\mathbf{u}(t)$  η οποία παραμένει στον χώρο  $\Theta \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Η υπόθεση ύπαρξης ισχυρής λύσης δεν είναι ουσιώδης, καθώς μπορεί κανείς να εργαστεί με ασθενείς λύσεις προσεγγίζοντας τις κατά Galerkin [74].

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μοναδική ισχυρή λύση, η εξίσωση Navier–Stokes ορίζει μια μονοπαμετρική οικογένεια τελεστών  $\mathcal{G}_t$  με την ιδιότητα της ημιομάδας κάτω από την πράξη της σύνθεσης:  $\mathcal{G}_t \mathcal{G}_{t'} = \mathcal{G}_{t+t'}$ . Ο κάθε τελεστής  $\mathcal{G}_t$  απεικονίζει ένα στοιχείο  $\mathbf{u}(t_1)$  του χώρου  $\Theta$ , το οποίο αντιπρο-

σωπεί την κατάσταση του ρευστού την χρονική στιγμή  $t_1$ , στο στοιχείο  $\mathcal{G}_t \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_1 + t)$ , το οποίο αντιπροσωπεί την κατάσταση του ρευστού την χρονική στιγμή  $t_1 + t$

Θεωρούμε την κίνηση ενός ασυμπίεστου ρευστού στον χώρο  $\mathbb{R}^3$  ως ένα στοχαστικό πείραμα. Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  θεωρούμε ότι μπορεί να γίνει πλήρης μέτρηση του πεδίου ταχύτητας και το αποτέλεσμα αυτής είναι η έκβαση του πειράματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο χώρος  $\Theta$  αποτελεί τον δειγματικό χώρο του πειράματος και κάθε δειγματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί στην μορφή  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t; \theta)$ . Ο χρόνος έχει ρόλο παραμέτρου ενώ το στοχαστικό όρισμα  $\theta$  αντιστοιχεί σε εκείνη την αρχική συνθήκη από την οποία προέρχεται η λύση.

Εστω  $\mathcal{B}$  η  $\sigma$ -άλγεβρα των συνόλων Borel του χώρου  $\Theta$ . Θεωρούμε ότι την χρονική στιγμή  $t = 0$  έχουμε ως δεδομένο ένα μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}_0$  ορισμένο πάνω στην  $\mathcal{B}$  το οποίο χαρακτηρίζει πιθανοθεωρητικά τις αρχικές συνθήκες. Κάτω από την δράση της ημιομάδας  $\mathcal{G}_t$  στα στοιχεία του χώρου  $\Theta$  το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}_0$  απεικονίζεται σε ένα μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}_t$  το οποίο περιγράφει πλήρως τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά της ροής την χρονική στιγμή  $t$ . Το θεμελιώδες πρόβλημα της στατιστικής θεωρίας τυρβώδους ροής είναι το ακόλουθο:

*Δοθέντων των πλήρων πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών του πεδίου ταχύτητας την χρονική στιγμή  $t = 0$  στην μορφή του μέτρου πιθανότητας  $\mathcal{P}_0$ , να υπολογιστούν τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά του πεδίου ταχύτητας σε επόμενες χρονικές στιγμές.*

Μετά το πρωτοποριακό έργο του E. Hopf [43], η θεμελιώδης προσέγγιση του παραπάνω προβλήματος συνίσταται στον προσδιορισμό των πλήρων πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών του πεδίου ταχυτήτων σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί είτε μέσω του μέτρου πιθανότητας  $\mathcal{P}_t$  το οποίο υπακούει μια εξίσωση Liouville [32] είτε ισοδύναμα μέσω του χαρακτηριστικού συναρτησιακού

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{s}; t) &= E^\theta \left[ \exp \left( i \int \mathbf{u}(\mathbf{x}; \theta) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \right) \right] \\ &= \int \exp \left( i \int \mathbf{u}(\mathbf{x}; \theta) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \right) d\mathcal{P}_t \end{aligned}$$

το οποίο ικανοποιεί μια γραμμική εξίσωση συναρτησιακών παραγώγων γνωστή ως εξίσωση Hopf [55].

Η παραπάνω θεμελιώδης προσέγγιση συναντά μεγάλες αναλυτικές δυσκολίες. Για τον λόγο αυτό θα περιοριστούμε στην μελέτη προβολών πεπερασμένης διάστασης του μέτρου πιθανότητας  $\mathcal{P}_t$ . Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας  $n$  σημείων:

$$F_{\mathbf{u}_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{u}_{i_n}(\mathbf{x}_n)}(y_1, \dots, y_n; t) = \mathcal{P}_t \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \Theta \mid u_{i_1}(\mathbf{x}_1) \leq y_1, \dots, u_{i_n}(\mathbf{x}_n) \leq y_n \}$$

μας επιτρέπει να ορίσουμε την γενική  $m$ -οστή ροπή  $n$  σημείων μέσω ολοκληρώματος Stieltjes:

$$\begin{aligned} \langle u_{i_1}^{m_1}(\mathbf{x}_1) \dots u_{i_n}^{m_n}(\mathbf{x}_n) \rangle &= E^\theta [u_{i_1}^{m_1}(\mathbf{x}_1; \theta) \dots u_{i_n}^{m_n}(\mathbf{x}_n; \theta)] \\ &= \int y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} dF_{\mathbf{u}_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{u}_{i_n}(\mathbf{x}_n)}(y_1, \dots, y_n; t) \end{aligned}$$

όπου η τάξη της ροπής ορίζεται ως  $m = m_1 + \dots + m_n \geq n$ . Αν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι διαφορίσιμη ως προς όλα τα  $y_i$ , οι ροπές μπορούν να υπολογιστούν βάσει της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας:

$$\langle u_{i_1}^{m_1}(\mathbf{x}_1) \dots u_{i_n}^{m_n}(\mathbf{x}_n) \rangle = \int y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} p_{\mathbf{u}_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{u}_{i_n}(\mathbf{x}_n)}(y_1, \dots, y_n; t) dy_1 \dots dy_n$$

Παρατηρούμε ότι μια ροπή  $m$  τάξης και  $n$  σημείων είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση των  $n$  συντεταγμένων των σημείων. Από τον ορισμό είναι προφανές ότι κάτω από στροφές μετασχηματίζεται



ως ταυσιτής τάξης  $n$ . Ο ρόλος των ροπών του πεδίου ταχύτητας είναι κεντρικός καθώς αποτελούν μετρήσιμες ποσότητες. Από φυσική άποψη η αναμενόμενη τιμή  $E^\theta$  αντιστοιχεί σε μέσο όρο ως προς συλλογή (ensemble) ροών με μακροσκοπικά πανομοιότυπες εξωτερικές συνθήκες. Στην πράξη οι ροπές μετρώνται με την εισαγωγή κατάλληλων εργοδικών υποθέσεων οι οποίες επιτρέπουν την αντικατάσταση των μέσων όρων ως προς συλλογή με χωρικούς μέσους όρους ως προς ομογενείς διευθύνσεις ή χρονικούς μέσους όρους στην περίπτωση που υπάρχει στατιστική στασιμότητα.

### 3.1.2 Στατιστικές συμμετρίες

Ο υπολογισμός των ροπών του πεδίου ταχύτητας παραμένει στην γενική μορφή του ένα εξαιρετικά πολύπλοκο πρόβλημα. Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε τρεις παραδοχές οι οποίες επιτρέπουν την απλοποίηση του. Τις παραδοχές αυτές δικαιολογεί το γεγονός ότι οι συμμετρίες της εξίσωσης Navier–Stokes (υποενότητα 1.2.1), οι οποίες παρατηρούνται με την ντετερμινιστική έννοια μόνο σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, αφού σπάσουν αυθόρμητα μέσω διακλαδώσεων κατά την διαδικασία μετάβασης, αποκαθίστανται ως στατιστικές συμμετρίες σε πολύ υψηλούς αριθμούς Reynolds και μακριά από στερεά όρια [33].

Υποθέτουμε αρχικά ότι η τυρβώδης ροή είναι στατιστικά στάσιμη, δηλαδή για κάθε  $t > t_0$  το μέτρο πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτο κάτω από την δράση της ημιομάδας  $\mathcal{G}_t$ . Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε την μελέτη μεταβατικών φαινομένων και επικεντρωνόμαστε στις ασυμπτωτικές στατιστικές ιδιότητες του πεδίου ταχύτητας. Καθώς η τυρβώδης ροή συνεπάγεται συνεχή μετατροπή κινητικής ενέργειας σε θερμότητα, χρειαζόμαστε έναν μηχανισμό εισόδου ενέργειας στο σύστημα. Για τον σκοπό αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ντετερμινιστικό πεδίο δύναμης ανάλογο της ταχύτητας ή εναλλακτικά ένα στοχαστικό πεδίο με δεδομένα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά. Η εισαγωγή ενός στοχαστικού πεδίου δυνάμεων μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες για όλες τις εκβάσεις, με το στοχαστικό όρισμα να χαρακτηρίζει το πεδίο δυνάμεων.

Μια δεύτερη απλοποιητική παραδοχή είναι αυτή της στατιστικής ομογένειας. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, το μέτρο πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτο κάτω από την δράση της ομάδας μετασχηματισμών χωρικής μετάθεσης  $\mathcal{G}_{\mathbf{r}}$  οι οποίοι δρουν στα στοιχεία του χώρου  $\Theta$  σύμφωνα με τον ορισμό  $\mathcal{G}_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r})$  όπου  $\mathbf{r}$  αυθαίρετο διάνυσμα. Εφόσον το μέτρο πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτο, το ίδιο ισχύει και για κάθε ροπή. Από τον ορισμό της ροπής παρατηρούμε ότι στην περίπτωση στατιστικά ομογενούς τυρβώδους ροής, η ροπή ως ντετερμινιστική συνάρτηση μπορεί να εξαρτάται μόνο από την σχετική θέση των  $n$  σημείων:

$$\begin{aligned} \langle u_{i_1}^{m_1}(\mathbf{x}_1) \dots u_{i_n}^{m_n}(\mathbf{x}_n) \rangle &= \langle u_{i_1}^{m_1}(\mathbf{x}) u_{i_2}^{m_2}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) \dots u_{i_n}^{m_n}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{n-1}) \rangle \\ &= M(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στην μέση ταχύτητα (ροπή πρώτης τάξης) βρίσκουμε ότι αυτή πρέπει να είναι μια σταθερά:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ . Υποθέτοντας στασιμότητα βρίσκουμε ότι η σταθερά αυτή δεν μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο, συνεπώς στην περίπτωση αυτή μπορεί να απαλειφθεί μέσω ενός μετασχηματισμού Γαλιλαίου.

Μια τρίτη απλοποιητική παραδοχή η οποία επιφέρει δραστική απλοποίηση του προβλήματος είναι αυτή της στατιστικής ισοτροπίας. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, το μέτρο πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτο κάτω από την δράση τελεστών στροφής  $\mathcal{G}_{\mathbf{A}}$  οι οποίοι δρουν πάνω στα στοιχεία του χώρου  $\Theta$  σύμφωνα με τον ορισμό  $\mathcal{G}_{\mathbf{A}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{A} \in \text{SO}(3)$ . Συνήθως στον ορισμό της στατιστικής ισοτροπίας περιλαμβάνεται και το αναλλοίωτο του μέτρου πιθανότητας κάτω από ανακλάσεις  $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$  ως προς επίπεδο κάθετο στο αυθαίρετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$ . Στα παρακάτω θα υιοθετήσουμε και εμείς αυτή την παραδοχή. Η ομογένεια είναι αναγκαία συνθήκη για ισοτροπία, καθώς οποιαδήποτε ανομοιογενής διεύθυνση είναι ασύμβατη με το αναλλοίωτο των στατιστικών ιδιοτήτων ως προς στροφές γύρω από άξονα κάθετο σε αυτή. Δεν είναι όμως και ικανή, καθώς υπάρχουν κατάστασης ομογενούς μη-ισότροπης ροής, όπως για παράδειγμα η αξονοσυμμετρική ροή

η οποία έχει συμμετρία ως προς στροφές γύρω από έναν και μόνο άξονα, η ακόμα και ροές που είναι ομογενείς χωρίς να κατέχουν καμία άλλη στατιστική συμμετρία.

Η γενική μορφή μιας ροής  $m$  τάξης,  $n \leq m$  σημείων του πεδίου ταχύτητας είναι:

$$M(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \langle \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \dots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (3.1)$$

όπου  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  μοναδιαία διανύσματα και κάποια σημεία  $\mathbf{x}_n$  μπορεί να συμπίπτουν. Η ροπή αυτή εξαρτάται εν γένει από τα  $n - 1$  διανύσματα  $\mathbf{r}_n$  τα οποία περιγράφουν τις σχετικές θέσεις των  $n$  σημείων, τα  $n$  μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{a}_i$  που καθορίζουν τις προβολές του διανύσματος της ταχύτητας και το μέτρο πιθανότητας. Εφόσον το μέτρο πιθανότητας είναι αναλλοίωτο κάτω από στροφές και ανακλάσεις, η ροπή  $M$  μπορεί να εξαρτάται μόνο από ποσότητες οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τους ίδιους μετασχηματισμούς. Είναι βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας ομάδων [17] ότι οι ποσότητες αυτές είναι τα μέτρα των διανυσμάτων θέσης  $r_1, \dots, r_{n-1}$  καθώς και τα εσωτερικά γινόμενα των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_j$ ,  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_j$ . Η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού είναι ότι η ροπή μπορεί να εξαρτάται μόνο από τα μέτρα των ορισμάτων της και τις γωνίες μεταξύ τους, μεγέθη τα οποία προφανώς παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από στροφές και ανακλάσεις. Τα μέτρα  $|\mathbf{a}_i|$  μπορούν να αγνοηθούν καθώς είναι ταυτοτικά μονάδα. Τα τριπλά γινόμενα  $\epsilon_{ijk}(\hat{\mathbf{r}}_l)_i(\mathbf{a}_m)_j(\mathbf{a}_n)_k$  απορρίπτονται γιατί αλλάζουν πρόσημο κάτω από ανακλάσεις. Τα τετράγωνα η γινόμενα των τριπλών γινομένων είναι αναλλοίωτες ποσότητες αλλά μπορούν να εκφραστούν βάσει των μέτρων και των εσωτερικών γινομένων. Έχουμε λοιπόν:

$$M(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = M(r_1, \dots; \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2, \dots; \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \dots; \mathbf{a}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_1, \dots)$$

Όμως σύμφωνα με την (3.1) η ροπή είναι μια ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς τα  $\mathbf{a}_i$ . Συνεπώς θα είναι της μορφής:

$$M = \sum_k A_k(r_1, \dots; \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2, \dots) \times (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \dots (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{a}_n) \dots$$

όπου κάθε διάνυσμα  $\mathbf{a}_i$  εμφανίζεται μόνο μια φορά. Επομένως:

$$\langle u_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots u_{i_n}(\mathbf{x}_n) \rangle = \sum_k A_k(r_1, \dots; \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2, \dots) \times (\hat{\mathbf{r}}_1)_{i_1} (\hat{\mathbf{r}}_2)_{i_2} \dots \delta_{i_m i_n}$$

όπου η άθροιση είναι σε όλες τις δυνατές διαφορετικές κατανομές των δεικτών  $i_n$  στα διανύσματα  $\mathbf{r}_m$  η ανά ζεύγη σε δέλτα του Kronecker  $\delta_{ij}$ .

Στα επόμενα θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά ροές μέχρι και τρίτης τάξης μέχρι και σε δύο σημεία. Εύκολα προκύπτει ότι για ισότροπη τυρβώδη ροή έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\langle u_i(\mathbf{x}_1) u_i(\mathbf{x}_2) \rangle = A(r) \hat{\mathbf{r}}_i \quad (3.2)$$

$$\langle u_i(\mathbf{x}_1) u_j(\mathbf{x}_2) \rangle = A(r) \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j + B(r) \delta_{ij} \quad (3.3)$$

$$\langle u_i(\mathbf{x}_1) u_j(\mathbf{x}_1) u_k(\mathbf{x}_2) \rangle = A(r) \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k + B(r) \hat{\mathbf{r}}_i \delta_{jk} + C(r) \hat{\mathbf{r}}_j \delta_{ik} + D(r) \hat{\mathbf{r}}_k \delta_{ij} \quad (3.4)$$

όπου όλες οι συναρτήσεις  $A(r), B(r), \dots$  είναι άρτιες.

### 3.1.3 Τανυστές συσχέτισης και φάσματος

Η απλούστερη ροπή δύο σημείων του πεδίου ταχύτητας είναι ο τανυστής συσχέτισης

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Ο ταυιστής συσχέτισης παίζει κεντρικό ρόλο στην στατιστική θεωρία τυρβώδους ροής. Σε αυτή την υποενότητα θα εξετάσουμε τις ιδιότητες του ταυιστή συσχέτισης για ομογενή τυρβώδη ροή. Άμεση συνέπεια του ορισμού και της ομογένειας είναι η ταυτότητα:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ji}(-\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

ενώ η ανισότητα Cauchy-Schwartz συνεπάγεται:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) \leq (\langle u_i(\mathbf{x})^2 \rangle \langle u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})^2 \rangle)^{\frac{1}{2}} = (R_{ii}(0)R_{jj}(0))^{\frac{1}{2}}$$

όπου στην τελευταία ισότητα δεν υπάρχει άθροιση επαναλαμβανόμενων δεικτών. Επομένως θέτοντας  $j = i$ ,

$$R_{ii}(\mathbf{r}) \leq R_{ii}(0)$$

Αν το πεδίο ταχύτητας είναι συνεχές,

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} u_j(\mathbf{x}) [u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{h}) - u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})] = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} R_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - R_{ij}(\mathbf{x}) = 0$$

και ο ταυιστής συσχέτισης είναι συνεχής συνάρτηση του  $\mathbf{r}$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα του Cramér [18], το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Wiener-Khinchine στην περίπτωση στοχαστικών πεδίων, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο ταυιστής  $R_{ij}(\mathbf{r})$  ταυιστής συσχέτισης ενός ομογενούς στοχαστικού πεδίου είναι να μπορεί να εκφραστεί στην μορφή:

$$R_{ij}(\mathbf{k}) = \int \Phi_{ij}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (3.6)$$

όπου ο ταυιστής  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  είναι τέτοιος ώστε

$$\int |\Phi_{ij}(\mathbf{k})| d^3\mathbf{k} < \infty$$

και η τετραγωνική μορφή

$$\Phi = \Phi_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^*$$

να είναι μη-αρνητικά ορισμένη:

$$\Phi_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^* \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{C}^3$$

Στην θεωρία ομογενούς τυρβώδους ροής η ύπαρξη του ταυιστή συσχέτισης  $R_{ij}(\mathbf{r})$  αποτελεί υπόθεση. Το θεώρημα του Cramér εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ταυιστή  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  ο οποίος ορίζεται από την (3.6) και έχει τις δύο παραπάνω ιδιότητες.

Η πρώτη ιδιότητα μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int R_{ij}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.7)$$

από όπου προκύπτει ότι οι ταυιστές  $R_{ij}(\mathbf{r})$ ,  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  αποτελούν ζεύγος μετασχηματισμού Fourier. Από τις σχέσεις (3.5), (3.6) και το γεγονός ότι ο ταυιστής συσχέτισης  $R_{ij}(\mathbf{r})$  είναι πραγματικός, προκύπτει ότι ο ταυιστής ενεργειακού φάσματος είναι ερμιτιανός:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \Phi_{ji}(-\mathbf{k}) = \Phi_{ji}^*(\mathbf{k}) \quad (3.8)$$

Θέτοντας  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  στην σχέση (3.6) παίρνουμε:

$$R_{ij}(\mathbf{0}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \rangle = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad (3.9)$$

Ο ταυστής  $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) \rangle$  ονομάζεται ταυστής ενέργειας. Η γνώση του επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης κινητικής ενέργειας του ρευστού, καθώς και τον προσδιορισμό της κατανομής της στις διάφορες συνιστώσες της του διανύσματος της ταχύτητας. Επομένως, σύμφωνα με την τελευταία σχέση ο ταυστής  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  αντιπροσωπεύει πυκνότητα ενέργειας στον χώρο των κυματανυσμάτων. Για τον λόγο αυτό ονομάζεται ταυστής ενεργειακού φάσματος (energy spectrum tensor).

Σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας,

$$\left\langle u_i(\mathbf{x}_1) \frac{\partial u_j(\mathbf{x}_2)}{\partial (\mathbf{x}_2)_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_1)}{\partial (\mathbf{x}_1)_i} u_j(\mathbf{x}_2) \right\rangle = 0$$

Εφόσον  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ ,

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} = 0 \quad (3.10)$$

ενώ σύμφωνα με την σχέση (3.6), οι αντίστοιχες συνθήκες για τον ταυστή ενεργειακού φάσματος είναι:

$$k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.11)$$

Το γεγονός ότι η τετραγωνική μορφή  $\Phi$  είναι ερμιτιανή και μη-αρνητικά ορισμένη, μαζί με τις συνθήκες συνέχειας (3.11), επιβάλλει συγκεκριμένη μορφή στον ταυστή ενεργειακού φάσματος. Μπορεί κανείς να δείξει [36] ότι για κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να βρεθεί ένας μοναδιακός μετασχηματισμός:

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$$

τέτοιος ώστε η τετραγωνική μορφή να γράφεται σε διαγώνια μορφή:

$$\Phi(\mathbf{k}) = x_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) x_j^* = s_1 y_1 y_1^* + s_2 y_2 y_2^* + s_3 y_3 y_3^* \quad (3.12)$$

Εφόσον η  $\Phi$  είναι ερμιτιανή και μη-αρνητικά ορισμένη οι ιδιοτιμές  $s_i$  είναι πραγματικές μη-αρνητικές συναρτήσεις του  $\mathbf{k}$ . Το γεγονός αυτό έχει άμεση φυσική σημασία. Το ίχνος του ταυστή ενεργειακού φάσματος  $\Phi_{ii}(\mathbf{k}) = s_1 + s_2 + s_3$  είναι ποσότητα αναλλοίωτη κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς και σύμφωνα με την σχέση (3.9) αντιπροσωπεύει πυκνότητα ενέργειας στον χώρο των κυματανυσμάτων, επομένως πρέπει να είναι πραγματικό και μη-αρνητικό.

Η σχέση (3.12) ισχύει για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x}$ . Επιλέγοντας  $\mathbf{x} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ , η σχέση (3.11) επιβάλλει  $\Phi = 0$ . Εφόσον  $s_i \geq 0$ , κάθε όρος του δεξιού μέλους της (3.12) πρέπει να μηδενίζεται. Ο μετασχηματισμός  $\mathbf{U}$  είναι μοναδιακός επομένως διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο:  $y_i y_i^* = x_i x_i^* = k^2 \neq 0$ . Άρα τουλάχιστον μία από τις συνιστώσες  $y_i$  είναι μη-μηδενική. Επιλέγουμε αυθαίρετα  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$ . Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_1 &= U_{1i} x_i = U_{1i} k_i = 0 \\ y_2 &= U_{2i} x_i = U_{2i} k_i = 0 \end{aligned}$$

άρα τα διανύσματα  $U_{1i}, U_{2i}$ , τα οποία είναι ορθοκανονικά εφόσον ο πίνακας  $\mathbf{U}$  είναι μοναδιακός, είναι κάθετα στο  $\mathbf{k}$ .

Εφόσον  $s_3 = 0$ , στην περίπτωση όπου το  $\mathbf{x}$  δεν είναι παράλληλο στο  $\mathbf{k}$ , η γενική μορφή της  $\Phi$  είναι:

$$\Phi = s_1 y_1 y_1^* + s_2 y_2 y_2^* = x_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) x_j^*,$$

συνεπώς

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = a_i a_j^* + b_i b_j^*, \quad a_i = \frac{1}{\sqrt{s_1}} U_{1i}, \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{s_2}} U_{2i}$$

Λόγω της ορθογωνιότητας των  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{k}$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{a_i a_j^*}{a^2} + \frac{b_i b_j^*}{b^2} = 0$$

για να γράψουμε τον τανυστή ενεργειακού φάσματος στην μορφή:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = b^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + a_i a_j^* \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)$$

Η τελευταία σχέση είναι η γενική μορφή του τανυστή ενεργειακού φάσματος στην περίπτωση στατιστικής ομοιογένειας. Στην ισότροπη περίπτωση η τετραγωνική μορφή πρέπει να είναι συμμετρική στο επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα  $\mathbf{k}$ , επομένως  $s_1 = s_2$  και η τελευταία σχέση καταλήγει στην γενική μορφή ισότροπου τανυστή δεύτερης τάξης (3.3).

Η φυσική σημασία του τανυστή ενεργειακού φάσματος αναδεικνύεται μέσω ανάλυσης του πεδίου ταχύτητας κατά Fourier, η οποία προσφέρει έναν φυσικό τρόπο ταυτοποίησης των βαθμών ελευθερίας της τυρβώδους ροής. Επιχειρούμε να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier σύμφωνα με την σχέση<sup>1</sup>:

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{u}(\mathbf{x}; \theta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \quad (3.13)$$

όπου το στοχαστικό ολοκλήρωμα θεωρείται με την μέση τετραγωνική έννοια. Όμως για ένα ομογενές στοχαστικό πεδίο το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν ορίζεται με την κλασσική έννοια, καθώς η ποσότητα

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{L^1} = \int E^\theta[\|\mathbf{u}(\mathbf{x}; \theta)\|] d^3\mathbf{x}$$

δεν μπορεί να είναι φραγμένη. Πράγματι, κάτι τέτοιο θα απαιτούσε

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} E^\theta[\|\mathbf{u}(\mathbf{x}; \theta)\|] = 0$$

Το μόνο ομογενές πεδίο που ικανοποιεί αυτή την συνθήκη είναι το μηδενικό.

Ένας τρόπος να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο είναι να εργαστεί κανείς με περιοδικά πεδία περιόδου  $L$  και στις τρεις χωρικές διευθύνσεις, και σε κάποιο επόμενο στάδιο να θεωρήσει το όριο  $L \rightarrow \infty$ . Η επιλογή αυτή επιτρέπει την αναπαράσταση του πεδίου ταχύτητας μέσω τρισδιάστατης σειράς Fourier, αλλά εισάγει στο πρόβλημα την αυθαίρετη κλίμακα μήκους  $L$ , γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα. Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας θα θεωρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του πεδίου ταχύτητας ορίζεται μέσω της (3.13) σε κάποιον κατάλληλο χώρο στοχαστικών γενικευμένων συναρτήσεων. Η αντίστροφη της (3.13) είναι

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{u}(\mathbf{k}; \theta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \quad (3.14)$$

Η σχέση των συνιστωσών του πεδίου στον χώρο Fourier με τον τανυστή ενεργειακού φάσματος προκύπτει αν εξετάσουμε την ροπή:

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{k}) u_j(\mathbf{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}') \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \\ &= \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}') \end{aligned} \quad (3.15)$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η ροπή  $\langle u_i(\mathbf{k}) u_j^*(\mathbf{k}') \rangle$  είναι μη-μηδενική μόνο όταν τα κυματανύσματα  $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$  έχουν άθροισμα μηδέν. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί με τον ίδιο

<sup>1</sup> Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το πεδίο στον φυσικό χώρο και στον χώρο των κυματανυσμάτων

τρόπο για  $n$  αυθαίρετα κυματανύσματα. Συνεπώς για κυματανύσματα που δεν αθροίζονται στο μηδέν, τα αντίστοιχα πλάτη είναι μη-συσχετισμένα.

Η ποσότητα  $u_i(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  αντιπροσωπεύει την συνεισφορά στο πεδίο ταχύτητας  $u_i(\mathbf{x})$  από κυματανύσματα που ανήκουν σε έναν όγκο  $d^3\mathbf{k}$ . Λόγω απουσίας συσχέτισης των  $u_i(\mathbf{k})$ ,  $u_j(\mathbf{k}')$  όταν  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq \mathbf{0}$  η ροπή  $\langle u_i(\mathbf{k})u_j^*(\mathbf{k}') \rangle$  εκφράζει πυκνότητα ενέργειας στον χώρο των κυματανυσμάτων. Πράγματι, ο ταυστής ενέργειας γράφεται

$$\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) \rangle = \int \int \langle u_i(\mathbf{k})u_j(\mathbf{k}') \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$$

Η τελευταία έκφραση δίνει μια σχέση μεταξύ του ταυστή ενεργειακού φάσματος, ο οποίος αρχικά ορίστηκε ως ο μετασχηματισμός Fourier του ταυστή συσχέτισης, και των συνιστωσών Fourier του πεδίου ταχύτητας.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να έχει κανείς στην διάθεσή του ταυστές συσχέτισης και ενεργειακού φάσματος οι οποίοι να εξαρτώνται από βαθμωτή μεταβλητή. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι να ορίσουμε δύο νέους ταυστές  $S_{ij}(r)$  και  $\Psi_{ij}(k)$  ως τον μέσο όρο των ταυστών  $R_{ij}(\mathbf{r})$  και  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  σε μια σφαίρα ακτίνας  $r$  και  $k$  αντίστοιχα

$$S_{ij}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\mathbf{r}'|=r} R_{ij}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad \Psi_{ij}(k) = \int_{|\mathbf{k}'|=k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}' \quad (3.16)$$

Ο παράγοντας  $1/(4\pi r^2)$  δίνει στον ταυστή  $S_{ij}(r)$  την φυσική σημασία της μέσης συσχέτισης μεταξύ δύο σημείων που απέχουν ακτίνα  $r$ . Ο ταυστής  $\Psi_{ij}(k)$  αντιπροσωπεύει την συνολική συνεισφορά στον ταυστή ενεργειακού φάσματος από κυματανύσματα μήκους  $k$ .

Σύμφωνα με την (3.6),

$$S_{ij}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\mathbf{r}'|=r} \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi r^2} \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \int_{|\mathbf{r}'|=r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{k}$$

Το ολοκλήρωμα πάνω στην σφαίρα ακτίνας  $r$  υπολογίζεται εύκολα μετρώντας την αζιμουθιακή γωνία από τον άξονα που ορίζει το κυματόνυμα  $\mathbf{k}$ :

$$\int_{|\mathbf{r}'|=r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos(\theta)} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi r^2 \frac{\sin(kr)}{kr}$$

επομένως

$$S_{ij}(r) = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \frac{\sin(kr)}{kr} d^3\mathbf{k} = \int_0^\infty \Psi_{ij}(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \quad (3.17)$$

Βάσει της σχέσης (3.7) με αντίστοιχο υπολογισμό βρίσκουμε για τον ταυστή  $\Psi_{ij}(k)$ :

$$\Psi_{ij}(k) = \frac{k^2}{2\pi^2} \int R_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\sin(kr)}{kr} d^3\mathbf{r} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty S_{ij}(r) kr \sin(kr) dr$$

Κεντρικό ρόλο στην θεωρία τυρβώδους ροής κατέχει η συνάρτηση ενεργειακού φάσματος  $E(k)$ , η οποία ορίζεται ως

$$E(k) = \frac{1}{2} \Psi_{ii}(k) \quad (3.18)$$

Η συνάρτηση ενεργειακού φάσματος εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας στον χώρο των κυματαριθμών, όπως φαίνεται από την σχέση

$$\frac{1}{2} \langle u_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty E(k) dk$$

Η τιμή της συνάρτησης ενεργειακού φάσματος για τυχαίο κυματαριθμό  $k$  χαρακτηρίζει πλήρως την ενέργεια που αντιστοιχεί σε κίνηση με χαρακτηριστική κλίμακα μήκους  $2\pi/k$ .

Η κλασσική πειραματική διάταξη παραγωγής ομογενούς και ισότροπης τυρβώδους ροής αποτελείται από ένα πλέγμα ράβδων κάθετο σε ένα ρεύμα ρευστού. Έχει παρατηρηθεί ότι η τυρβώδης ροή μερικές χαρακτηριστικές διαμέτρους μετά το πλέγμα είναι σε πολύ καλή προσέγγιση ομογενής και ισότροπη. Συνήθως σε μια τέτοια πειραματική διάταξη έχει κανείς πρόσβαση όχι στην πλήρη χωροχρονική εικόνα του πεδίου ταχύτητας αλλά μόνο σε μια χρονοσειρά μιας συνιστώσας της ταχύτητας σε ένα σημείο. Μέσω της υπόθεσης Taylor, είναι δυνατόν η χρονοσειρά αυτή να θεωρηθεί ως εικόνα του πεδίου ταχύτητας στον χώρο, κατά την διεύθυνση της μέσης ροής. Σύμφωνα με την υπόθεση Taylor, οι τυρβώδεις διαταραχές μεταφέρονται με την μέση ροή χωρίς να αλλοιώνονται, και έτσι μπορεί κανείς να εφαρμόσει τον μετασχηματισμό  $t \rightarrow x/\langle \mathbf{u} \rangle$ . Μετά από μετασχηματισμό Fourier της χρονοσειράς λαμβάνει κανείς τον ακόλουθο ταυυστή:

$$\Theta_{ij}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int R_{ij}(r_1, 0, 0) e^{ik_1 r_1} dr_1 = \int \int \Phi_{ij}(k_1, k_2, k_3) dk_2 dk_3$$

Αν η διάταξη είναι τέτοια ώστε  $i = j = 1$ , πρόκειται για διάμηκες φάσμα ενώ στις περιπτώσεις  $i = j = 2, 3$  πρόκειται για εγκάρσιο φάσμα.

Η τυρβώδης ροή χαρακτηρίζεται από υψηλές διακυμάνσεις τις στροβιλότητας στον χώρο και τον χρόνο. Η απλούστερη ροπή που περιγράφει τις στατιστικές ιδιότητες του πεδίου στροβιλότητας στον χώρο είναι αυτή δεύτερης τάξης και δύο σημείων. Σύμφωνα με τον ορισμό (1.4), η ροπή αυτή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του ταυυστή συσχέτισης του πεδίου ταχύτητας:

$$\langle \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x}') \rangle = \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} \left\langle \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial u_q}{\partial x'_p} \right\rangle$$

Όμως σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ,

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$$

συνεπώς σύμφωνα με τον νόμο πολλαπλασιασμού οριζουσών,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_q \\ \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_q \\ \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{lj} & \delta_{lp} & \delta_{lq} \\ \delta_{mj} & \delta_{mp} & \delta_{mq} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{ij} \delta_{lp} \delta_{mq} + \delta_{ip} \delta_{lq} \delta_{mj} + \delta_{iq} \delta_{lj} \delta_{mp} - \delta_{ij} \delta_{lq} \delta_{mp} - \delta_{ip} \delta_{lj} \delta_{mq} - \delta_{iq} \delta_{lp} \delta_{mj} \end{aligned}$$

Επίσης

$$\left\langle \frac{\partial u_m(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial u_q(\mathbf{x}')}{\partial x'_p} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 (u_m(\mathbf{x}) u_q(\mathbf{x}'))}{\partial x_l \partial x'_p} \right\rangle = -\frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_p} \langle u_m(\mathbf{x}) u_q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = -\frac{\partial^2 R_{mq}(\mathbf{r})}{\partial r_l \partial r_p}$$

Επομένως ο η ροπή δεύτερης τάξης και δύο σημείων του πεδίου στροβιλότητας εκφράζεται συναρτήσει του ταυυστή συσχέτισης του πεδίου ταχύτητας ως

$$\langle \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x}') \rangle = -\delta_{ij} \nabla^2 R_{ll}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 R_{ll}(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j} + \nabla^2 R_{ji}(\mathbf{r}) \quad (3.19)$$

Θέτοντας  $i = j$  και  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$  προκύπτει η ακόλουθη έκφραση

$$\langle \omega(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = -\nabla^2 R_{ii}(\mathbf{r}) \quad (3.20)$$

Από τον υπολογισμό που οδήγησε στην τελευταία σχέση είναι φανερό ότι αυτή αποτελεί το πρώτο μέλος μίας οικογένειας αντίστοιχων σχέσεων για τις ποσότητες  $\nabla \times \omega$ ,  $\nabla \times \nabla \times \omega$ ,  $\dots$ , τις οποίες δεν θα αναπτύξουμε εδώ.

Από τις σχέσεις (3.19) και (3.6) μπορεί κανείς να εκφράσει τον φασματικό τανυστή της στροβιλότητας συναρτήσει του τανυστή ενεργειακού φάσματος

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij}k^2 - k_i k_j) \Phi_{ll}(\mathbf{k}) + k^2 \Phi_{ji}(\mathbf{k}) \quad (3.21)$$

Επομένως η φασματική πυκνότητα συνεισφορών στην συνολική στροβιλότητα είναι

$$\Omega_{ii}(\mathbf{k}) = k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \quad (3.22)$$

και αντίστοιχα το φάσμα της ενστροφίας εκφράζεται ως

$$E_\omega(k) = k^2 E(k)$$

## 3.2 Δυναμική ομογενούς τύρβης

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα κλασσικά αποτελέσματα που αφορούν στην δυναμική ομογενούς τυρβώδους ροής, χωρίς την υπόθεση στατιστικής ισοτροπίας. Η διατύπωση των δυναμικών εξισώσεων θα γίνει τόσο στον φυσικό, όσο και στον φασματικό χώρο.

### 3.2.1 Δυναμικές εξισώσεις

Η εξαγωγή της δυναμικής εξίσωσης στην οποία υπακούει ο τανυστής συσχέτισης δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία. Ξεκινώντας από την εξίσωση Navier–Stokes στην μορφή

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$$

την πολλαπλασιάζουμε επί  $u'_j = u_j(\mathbf{x}')$ . Στη συνέχεια γράφουμε την εξίσωση Navier–Stokes για το πεδίο  $u'_j$ , την πολλαπλασιάζουμε επί  $u_i$  και προσθέτουμε. Εφόσον οι μεταβλητές  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  είναι ανεξάρτητες, το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{\partial(u_i u'_j)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_k u'_j)}{\partial x_k} + \frac{\partial(u'_j u'_k u_i)}{\partial x'_k} = -\frac{\partial(p u'_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(p' u_i)}{\partial x'_j} + \nu \left( \frac{\partial^2(u_i u'_j)}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2(u'_j u_i)}{\partial x'_k{}^2} \right)$$

Θέτοντας  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$  και λαμβάνοντας μέση τιμή

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_i} \langle u_i u_k u'_j - u_i u'_k u'_j \rangle + \frac{\partial \langle p u'_j \rangle}{\partial r_i} - \frac{\partial \langle p' u_i \rangle}{\partial x_j} + 2\nu \frac{\partial^2 R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k^2}$$

όπου η πίεση μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ταχύτητας μέσω της (1.14). Εισάγουμε τον τανυστή της τρίτης ροπής δύο σημείων

$$S_{ijl}(\mathbf{r}) = \langle u_k(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) u_l(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (3.23)$$

και η δυναμική εξίσωση για τον τανυστή συσχέτισης γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial t} &= T_{ij}(\mathbf{r}) + P_{ij}(\mathbf{r}) + 2\nu \frac{\partial^2 R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k^2} \\ T_{ij}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r_i} (S_{ikj}(\mathbf{r}) - S_{jki}(-\mathbf{r})) \\ P_{ij}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial \langle p u'_j \rangle}{\partial r_i} - \frac{\partial \langle p' u_i \rangle}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.24)$$



Στην παραπάνω εξίσωση εμφανίζεται μια ροπή ανώτερης τάξης λόγω της τετραγωνικής μη-γραμμικότητας της εξίσωσης κίνησης, και έτσι η εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί χωρίς επιπλέον παραδοχές για την τρίτη ροπή. Γενικά αν εξάγει κανείς με τον ίδιο τρόπο από την εξίσωση Navier–Stokes την δυναμική εξίσωση της  $n$ -οστής ροπής, στο δεξί μέλος θα εμφανιστεί, λόγω του τετραγωνικού μη-γραμμικού όρου, μία  $n + 1$ -οστή ροπή. Το πρόβλημα εξαγωγής κλειστών εξισώσεων για ένα σύνολο ροπών με κατάλληλες παραδοχές ονομάζεται πρόβλημα κλειστότητας της στατιστικής θεωρίας τυρβώδους ροής.

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier της τελευταίας σχέσης βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}(\mathbf{k})}{\partial t} &= \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) + \Pi_{ij}(\mathbf{k}) + 2\nu k^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) &= \int T_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ \Pi_{ij}(\mathbf{k}) &= \int P_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}\end{aligned}\quad (3.25)$$

Η τελευταία εξίσωση δεν μας δίνει επαρκείς πληροφορίες για την δυναμική στον φασματικό χώρο. Προκειμένου να μελετήσουμε την ροή ενέργειας στον φασματικό χώρο, θεωρούμε την εξίσωση Navier–Stokes στον χώρο Fourier (1.25), την οποία επαναλαμβάνουμε εδώ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + ik_m P_{in}(\mathbf{k}) N_{mn}(\mathbf{k}) &= -\nu k^2 u_i \\ N_{mn}(\mathbf{k}) &= \int u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{p} - \mathbf{k}) d^3\mathbf{p} \\ P_{in}(\mathbf{k}) &= \delta_{in} - \frac{k_i k_n}{k^2}\end{aligned}$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση με τους δείκτες  $n$  και  $m$  εναλλασσόμενους και προσθέτοντας, λαμβάνουμε την παρακάτω συμμετρική μορφή

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{i}{2} \Pi_{imn}(\mathbf{k}) N_{mn}(\mathbf{k}) &= -\nu k^2 u_i \\ \Pi_{imn}(\mathbf{k}) &= k_m P_{in}(\mathbf{k}) + k_n P_{im}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

Προκειμένου να βρούμε την εξίσωση που υπακούει ο τανυστής ενεργειακού φάσματος, πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με  $u_j(\mathbf{k}')$ . Ακόμα γράφουμε την αντίστοιχη εξίσωση για το πλάτος  $u_j(\mathbf{k}')$  και την πολλαπλασιάζουμε επί  $u_i(\mathbf{k})$ . Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις και λαμβάνοντας μέση τιμή προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για την ροπή  $\langle u_i(\mathbf{k}) u_j(\mathbf{k}') \rangle$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle u_i(\mathbf{k}) u_j(\mathbf{k}') \rangle}{\partial t} + \nu(k^2 + k'^2) \langle u_i(\mathbf{k}) u_j(\mathbf{k}') \rangle \\ = -\frac{i}{2} \Pi_{imn}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q}} \langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_j(\mathbf{k}') \rangle d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \\ - \frac{i}{2} \Pi_{jmn}(\mathbf{k}') \int_{\mathbf{k}'=\mathbf{p}+\mathbf{q}} \langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}\end{aligned}$$

Όμως με υπολογισμό αντίστοιχο με αυτό της (3.15) μπορεί κανείς να δείξει ότι η τρίτη ροπή είναι ανάλογη μιας συνάρτησης δέλτα

$$\langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_j(\mathbf{k}) \rangle = \Theta_{mnj}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{k})$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το κυματόνισμα  $\mathbf{k}'$  και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.15), (3.8) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\Pi_{jmn}(-\mathbf{k}) = -\Pi_{jmn}(\mathbf{k})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{ij}(-\mathbf{k})}{\partial t} + 2\nu k^2 \Phi_{ij}(-\mathbf{k}) \\ = -\frac{i}{2} \Pi_{imn}(\mathbf{k}) \int \Theta_{mnj}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q} \\ + \frac{i}{2} \Pi_{jmn}(\mathbf{k}) \int \Theta_{mni}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q} \end{aligned}$$

Συνεπώς, θέτοντας  $\mathbf{k} = -\mathbf{k}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{ij}(\mathbf{k})}{\partial t} + 2\nu k^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ = -\frac{i}{2} (\Pi_{imn}(\mathbf{k}) + \Pi_{jmn}(\mathbf{k})) \int \Theta_{mnj}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) - \Theta_{mni}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q} \end{aligned}$$

Όμως σύμφωνα με τον ορισμό του ταυυστή  $\Theta_{mnj}$ ,

$$\Theta_{mnj}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = \Theta_{mnj}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{ij}(\mathbf{k})}{\partial t} + 2\nu k^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ = -\frac{i}{2} (\Pi_{imn}(\mathbf{k}) + \Pi_{jmn}(\mathbf{k})) \int \langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle^* - \langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q} \end{aligned}$$

Και συνεπώς το ίχνος του ταυυστή ενεργειακού φάσματος υπακούει στην ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{\partial \Phi_{ii}(-\mathbf{k})}{\partial t} + 2\nu k^2 \Phi_{ii}(-\mathbf{k}) = -\Pi_{imn}(\mathbf{k}) \int \Im[\langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle] d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q} \quad (3.26)$$

Ένα πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση είναι ότι οι όροι που αντιστοιχούν στην κλίση της πίεσης, οι οποίοι είναι της μορφής  $k_i k_m k_n / k^2 \langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle$  είναι ταυτοτικά μηδέν λόγω της συνθήκης συνέχειας  $k_i u_i(\mathbf{k}) = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις πίεσης δεν μπορούν να αλλάξουν το συνολικό ενεργειακό περιεχόμενο που σχετίζεται με το κυματόνισμα  $\mathbf{k}$ . Ο ρόλος τους συνεπώς περιορίζεται στην μεταβολή του ενεργειακού περιεχομένου των τριών συνιστωσών του πεδίου ταχύτητας. Στην πράξη οι δυνάμεις πίεσης επιφέρουν την εξίσωση του ενεργειακού περιεχομένου των τριών συνιστωσών, και συνεπώς επιταχύνουν την πορεία προς την ισοτροπία.

Μια πιο λεπτομερής αρχή διατήρησης προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι η τρίτη ροπή στο δεξί μέλος της (3.26) είναι, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μη-μηδενική μόνο για κυματόνισμα τέτοια ώστε  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ . Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιώντας την συνθήκη συνέχειας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \langle k_n u_n(\mathbf{q}) u_m(\mathbf{k}) u_m(\mathbf{p}) \rangle + \langle k_n u_n(\mathbf{p}) u_m(\mathbf{k}) u_m(\mathbf{q}) \rangle \\ + \langle p_n u_n(\mathbf{k}) u_m(\mathbf{p}) u_m(\mathbf{q}) \rangle + \langle p_n u_n(\mathbf{q}) u_m(\mathbf{p}) u_m(\mathbf{k}) \rangle \\ + \langle q_n u_n(\mathbf{p}) u_m(\mathbf{q}) u_m(\mathbf{k}) \rangle + \langle q_n u_n(\mathbf{k}) u_m(\mathbf{q}) u_m(\mathbf{p}) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Επίσης λόγω της συνθήκης συνέχειας

$$\Pi_{imn}(\mathbf{k}) \Im[\langle u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_i(\mathbf{k}) \rangle] = \Im[\langle k_m u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) u_n(\mathbf{k}) \rangle + \langle k_n u_n(\mathbf{q}) u_n(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{k}) \rangle] \quad (3.27)$$

Εστω  $\langle u_m(\mathbf{p})u_n(\mathbf{q})u_i(\mathbf{k}) \rangle = \mathcal{N}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})\delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q})$ . Οι δύο τελευταίες σχέσεις συνεπάγονται

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathcal{N}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) + \mathcal{N}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$$

Συνεπώς αλληλεπιδράσεις μεταξύ τριών κυματανυσμάτων με μηδενικό άθροισμα διατηρούν την ενέργεια. Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{N}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})\delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{3} \int (\mathcal{N}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathcal{N}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) + \mathcal{N}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{p}))\delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

Προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για το ίχνος του τανυστή ενεργειακού φάσματος

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_{ii}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = -2\nu \int k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$$

στην οποία οι μη-γραμμικοί όροι δεν συμμετέχουν. Συνεπώς η συνολική επίδραση των μη-γραμμικών όρων είναι τέτοια ώστε η συνολική κινητική ενέργεια να διατηρείται. Ο όρος στο δεξί μέλος αντιπροσωπεύει την μετατροπή κινητικής ενέργειας σε θερμότητα και είναι ανάλογος, λόγω της (3.22), με την ενστροφία. Ο παράγοντας  $k^2$  στο δεξί μέλος συνεπάγεται ότι στους υψηλούς κυματαριθμούς υπάρχει υψηλή απώλεια ενέργειας. Αν υποθέσουμε ότι η δράση των μη-γραμμικών όρων είναι τέτοια ώστε να απλώνει την πυκνότητα ενέργειας στον φασματικό χώρο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ύπαρξης ροής ενέργειας από τους μικρούς στους μεγάλους κυματαριθμούς, όπου και μετατρέπεται σε θερμότητα.

### 3.2.2 Το ολοκλήρωμα του Loitsiankyi

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του τανυστή ενεργειακού φάσματος για  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  στην περίπτωση τυρβώδους ροής η οποία φθίνει ελεύθερα, χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Όλες οι στατιστικές ποσότητες που εμφανίζονται είναι συνεπώς συναρτήσεις του χρόνου. Για λόγους συντομίας το χρονικό όρισμα παραλείπεται.

Η συνθήκη συνέχειας καθώς και το γεγονός ότι ο τανυστής ενεργειακού φάσματος είναι θετικά ορισμένος του επιβάλλουν συγκεκριμένη μορφή για  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ . Θα υποθέσουμε ότι ο τανυστής ενεργειακού φάσματος μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από το 0

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = C_{ij} + k_l C_{ijl} + k_l k_m C_{ijlm} + O(k^3)$$

Η συνθήκη συνέχειας (3.11) επιβάλλει

$$k_i C_{ij} + k_i k_l C_{ijl} + k_i k_l k_m C_{ijlm} + O(k^4) = 0$$

Επομένως αναγκαστικά

$$C_{ij} = 0$$

Εφόσον ο τανυστής ενεργειακού φάσματος είναι θετικά ορισμένος, η έκφραση

$$x_i x_j^* k_l C_{ijl}$$

πρέπει να είναι θετική στο όριο  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ . Εφόσον αλλάζει πρόσημο με το κυματόνισμα  $\mathbf{k}$ , αναγκαστικά  $C_{ijl} = 0$ . Επομένως η τελική έκφραση για τον τανυστή ενεργειακού φάσματος είναι

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_l k_m C_{ijlm} + O(k^3) \quad (3.28)$$

Η συνθήκη συνέχειας επιβάλλει

$$k_i k_l k_m C_{ijlm} + O(k^4) = 0, \quad k_j k_l k_m C_{ijlm} + O(k^4) = 0$$

Μεταθέτοντας τους βωβούς δείκτες και αθροίζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις βρίσκουμε ότι ο συντελεστής  $C_{ijlm}$  ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\sum_{(i,l,m)} C_{ijlm} = \sum_{(j,l,m)} C_{ijlm} = 0$$

όπου η άθροιση είναι πάνω σε όλες τις μεταθέσεις των δεικτών που αναγράφονται στην παρένθεση. Η τελευταία σχέση συνεπάγεται  $C_{ijlm} = 0, i = j = l = m$ . Η φυσική σημασία αυτού του αποτελέσματος είναι ότι η ενέργεια μιας συνιστώσας της ταχύτητας δεν μπορεί να μεταβάλλεται σε διεύθυνση παράλληλα σε αυτή. Αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι διαμήκη κύματα δεν επιτρέπονται σε ασυμπίεστο ρευστό.

Από την σχέση (3.16) βρίσκουμε

$$\Psi_{ij}(\mathbf{k}) = C_{ijlm} \int_{\mathbf{k}'=|\mathbf{k}|} k'_l k'_m d^3 \mathbf{k} + O(k^6) = 4\pi C_{ijlm} k_l k_m k^2 + O(k^5) = \frac{4\pi}{3} C_{ijll} k^4 + O(k^5)$$

Και σύμφωνα με την σχέση (3.18), η συνάρτηση ενεργειακού φάσματος είναι ίση με

$$E(k) = \frac{2\pi}{3} C_{iill} k^4 + O(k^5)$$

Με καθαρά κινηματικά επιχειρήματα μπορεί λοιπόν κανείς να δείξει ότι ο τανυστής ενεργειακού φάσματος είναι δευτέρου βαθμού για  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ . Περνώντας στην μελέτη της δυναμικής του, θεωρούμε τον μετασχηματισμό Fourier της τρίτης ροπής δύο σημείων (3.23)

$$Y_{ikj}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}$$

Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό έχουμε, θέτοντας  $u'_i = u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ ,

$$\begin{aligned} \langle u_i u_k u'_j \rangle &= \int Y_{ikj}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} \\ \langle u_i u'_k u'_j \rangle &= \int Y_{jki}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} = \int Y_{jki}(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (3.24),(3.25),

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = ik_k (Y_{ikj}(\mathbf{k}) - Y_{jki}(-\mathbf{k})) \quad (3.29)$$

Αναπτύσσουμε τον τανυστή της τρίτης ροπής σε σειρά Taylor,

$$Y_{ikj}(\mathbf{k}) = Y_{ikj} + k_l Y_{ikjl} + O(k^2) \quad (3.30)$$

Η συνθήκη συνέχειας επιβάλλει

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i u_k u'_j \rangle = 0 \quad k_j Y_{ikj}(\mathbf{k}) = 0$$

και συνεπώς οι συντελεστές της σειράς Taylor είναι τέτοιοι ώστε

$$Y_{ikj} = 0, \quad Y_{ikjl} + Y_{iklj} = 0 \quad (3.31)$$

Επομένως η μορφή του τανυστή  $\Gamma_{ij}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  είναι

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = ik_k k_l (Y_{ikjl} + Y_{jkil})$$

Ξαναγράφοντας την τελευταία σχέση με τους βωβούς δείκτες  $m, l$  μετατεθείς και αθροίζοντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = k_m k_l \Gamma_{ijml} + O(k^3) \quad \Gamma_{ijml} = \frac{i}{2} \sum_{(i,j)} \sum_{(m,l)} Y_{imjl} \quad (3.32)$$

όπου τα αθροίσματα είναι πάνω σε όλες τις μεταθέσεις των δεικτών που βρίσκονται εντός των παρενθέσεων.

Περνώντας στις δυνάμεις που προέρχονται από την πίεση, ορίζουμε το διάνυσμα  $\Theta_i(\mathbf{k})$ ,

$$\langle pu'_i \rangle = \int \Theta_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$$

Βάσει του ορισμού

$$\langle p'u_i \rangle = \int \Theta_i(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$$

συνεπώς από την (3.24),

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = i(k_i \Theta_j(\mathbf{k}) - k_j \Theta_i(-\mathbf{k}))$$

Αναπτύσσουμε το διάνυσμα  $\Theta_i(\mathbf{k})$  σε σειρά Taylor,

$$\Theta_i(\mathbf{k}) = \Theta_i + k_l \Theta_{il} + O(k^2) \quad (3.33)$$

Και σε αυτή την περίπτωση λόγω συνέχειας

$$k_i \Theta_i(\mathbf{k}) = 0$$

και οι συντελεστές του αναπτύγματος είναι τέτοιοι ώστε

$$\Theta_i = 0, \quad \Theta_{il} + \Theta_{li} = 0 \quad (3.34)$$

Επομένως

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = ik_l (k_i \Theta_{jl} + k_j \Theta_{il}) = ik_l k_m (\delta_{im} \Theta_{jl} + \delta_{jm} \Theta_{il})$$

λόγω της αντισυμμετρίας τανυστή του  $\Theta_{ij}$ . Ξαναγράφοντας την τελευταία σχέση με τους βωβούς δείκτες  $m, l$  μετατεθείς και αθροίζοντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = k_l k_m \Pi_{ijlm} + O(k^3), \quad \Pi_{ijlm} = \frac{i}{2} \sum_{(ij)} \sum_{(l,m)} \delta_{im} \Theta_{jl} \quad (3.35)$$

Προκειμένου να βρούμε την συνεισφορά του αθροίσματος  $\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) + \Pi_{ij}(\mathbf{k})$  για  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  επιστρέφουμε στην εξίσωση Poisson (1.14) την οποία ικανοποιεί το πεδίο της πίεσης. Από αυτή την εξίσωση βρίσκουμε

$$\nabla^2 \langle pu'_j \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \langle u_i u_k u'_j \rangle, \quad k^2 \Theta_j(\mathbf{k}) = -k_i k_j Y_{ikj}(\mathbf{k})$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα (3.30), (3.33) βρίσκουμε ότι οι κατώτατης τάξης μη-μηδενικοί συντελεστές πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση

$$k_i k_k k_l (\delta_{ik} \Theta_{jl} + Y_{ikjl}) = 0$$

Μεταθέτοντας τους βωβούς δείκτες και αθροίζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις βρίσκουμε ότι αυτή η σχέση αληθεύει για όλα τα  $\mathbf{k}$  μόνο αν

$$\sum_{(i,k,l)} \delta_{ik} \Theta_{jl} + Y_{ikjl} = 0 \quad (3.36)$$

Όμως βάσει του ορισμού του ο τανυστής  $Y_{iljm}$  είναι συμμετρικός ως προς τους δείκτες  $i, l$ . Ο τανυστής  $\delta_{il}$  είναι επίσης συμμετρικός οπότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$\sum_{(k,l)} \delta_{lk} \Theta_{ji} + Y_{lkji} + \sum_{(k,l)} \delta_{ik} \Theta_{jl} + Y_{ikjl} = 0$$

Από τις σχέσεις (3.32), (3.35) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijlm} + \Pi_{ijlm} &= \sum_{(i,j)} \sum_{(l,m)} Y_{iljm} + \delta_{il} \Theta_{jm} \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{(i,j)} \sum_{(l,m)} Y_{mlji} + \delta_{ml} \Theta_{ji} \end{aligned}$$

Όμως λόγω των σχέσεων (3.31), (3.34),

$$\sum_{(i,j)} Y_{mlji} + \delta_{ml} \Theta_{ji} = 0$$

και επομένως

$$\Gamma_{ijlm} + \Pi_{ijlm} = 0$$

Ανατρέχοντας στην δυναμική εξίσωση για τον τανυστή ενεργειακού φάσματος (3.26), παρατηρούμε ότι για  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  το δεξί μέλος είναι, λόγω της σχέσης (3.28),  $O(k^2)$ . Μόλις δείξαμε ότι το άθροισμα των όρων που προέρχονται από αδράνειάς δυνάμεις και δυνάμεις πίεσης είναι  $O(k^3)$  ενώ προφανώς η συνεισφορά του συνεκτικού όρου είναι  $O(k^4)$ . Συνεπώς σε προσέγγιση δεύτερης τάξης ως προς  $k$ ,

$$\frac{dC_{ijlm}}{dt} = 0, \quad C_{ijlm} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{ij}(\mathbf{k})}{\partial k_l \partial k_m} \right|_{\mathbf{k}=0}$$

Επιστρέφοντας στην σχέση ορισμού του τανυστή ενεργειακού φάσματος (3.6), παρατηρούμε ότι το αναλλοίωτο του συντελεστή  $C_{ijlm}$  συνεπάγεται το αναλλοίωτο του ακόλουθου ολοκληρώματος

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi^3} \int r_l r_m R_{ij}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

το οποίο είναι γνωστό ως ολοκλήρωμα του Loitsianky.

Η φυσική σημασία του παραπάνω αποτελέσματος είναι ότι όταν μια ομογενής τυρβώδης ροή φθίνει ελεύθερη από εξωτερικές δυνάμεις, οι μεγάλες κλίμακες διατηρούνται στην μορφή που επιβλήθηκε από τις συνθήκες γένεσης της τύρβης για χρονικό διάστημα κατά πολύ μακρύτερο της χαρακτηριστικής χρονικής κλίμακας της κίνησης, ενώ οι μικρότερες κλίμακες φθίνουν γρήγορα. Αυτό που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι η διαπίστωση της 'μονιμότητας των μεγάλων δινών', όπως αποκαλείται αυτό το φαινόμενο, από τον Leonardo da Vinci λίγο μετά το 1500 αποτελεί την πρώτη καταγεγραμμένη επιστημονική παρατήρηση για την τύρβη, η οποία και συνοδεύτηκε από εντυπωσιακά σχίτσα [33].

### 3.3 Ισότροπη τύρβη

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε κινηματικές και δυναμικές σχέσεις που ισχύουν στην περίπτωση της ισότροπης τυρβώδους ροής. Η υπόθεση στατιστικής ισοτροπίας απλοποιεί αρκετά την κινηματική του προβλήματος. Παρόλα αυτά, λόγω της μη-γραμμικότητας των εξισώσεων κίνησης, το πλήθος των αποτελεσμάτων παραμένει περιορισμένο.

#### 3.3.1 Τανυστές συσχέτισης και φάσματος

Στην περίπτωση της ισότροπης τύρβης, ο τανυστής συσχέτισης  $R_{ij}(\mathbf{r})$  έχει την μορφή (3.3)

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = F(r)r_i r_j + G(r)\delta_{ij} \quad (3.37)$$

όπου  $F(r), G(r)$  άρτιες συναρτήσεις του  $r$ . Από την συνθήκη συνέχειας (3.10) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} = r_j \left( 4F(r) + r \frac{dF(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dG(r)}{dr} \right) = 0$$

για κάθε τιμή του  $\mathbf{r}$ , επομένως οι συναρτήσεις  $F(r), G(r)$  ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση

$$4F(r) + r \frac{dF(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dG(r)}{dr} = 0 \quad (3.38)$$

από την οποία προκύπτει ότι για τον πλήρη προσδιορισμό του τανυστή συσχέτισης αρκεί μόνο μια βαθμωτή συνάρτηση. Παρόλα αυτά, για λόγους που έχουν να κάνουν με τεχνικές μέτρησης, εισάγουμε δύο νέες βαθμωτές συναρτήσεις

$$f(r) = \frac{\langle u_p(\mathbf{x})u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{\langle u_p^2 \rangle}, \quad g(r) = \frac{\langle u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{\langle u_n^2 \rangle}, \quad (3.39)$$

όπου  $u_p = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ ,  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}$ . Η συνάρτηση  $f(r)$  ονομάζεται διαμήκης συνάρτηση συσχέτισης και η συνάρτηση  $g(r)$  διαμήκης συνάρτηση συσχέτισης. Λόγω ισοτροπίας, η επιλογή του διανύσματος  $\mathbf{n}$  μπορεί να γίνει ελεύθερα, αρκεί φυσικά να είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\mathbf{r}$ . Παρατηρούμε επίσης ότι  $\langle u_p(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = 0$  καθώς το πρόσημο της ροής αυτής μπορεί να αντιστραφεί μετά από στροφή κατά  $\pi$  γύρω από τον άξονα του διανύσματος  $\mathbf{r}$ .

Από την σχέση (3.37) βρίσκουμε

$$\langle u_p(\mathbf{x})u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = r^2 F(r) + G(r) = u^2 f(r), \quad \langle u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = G(r) = u^2 g(r) \quad (3.40)$$

όπου  $u^2 = \langle u_n^2 \rangle = \langle u_p^2 \rangle$  η μέση τετραγωνική τιμή μίας οποιασδήποτε συνιστώσας της ταχύτητας. Σύμφωνα με τις (3.37), (3.40), ο τανυστής συσχέτισης εκφράζεται συναρτήσει των  $f(r), g(r)$  ως

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = u^2 \left( \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r)\delta_{ij} \right) \quad (3.41)$$

ενώ η σχέση (3.38) γράφεται

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2} r f'(r) \quad (3.42)$$

Από τους ορισμούς (3.39) βρίσκουμε ότι

$$f(0) = g(0) = 1$$

ενώ η ανισότητα Cauchy–Schwartz συνεπάγεται

$$f(r) \leq 1, \quad g(r) \leq 1$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις  $f(r), g(r)$  μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Taylor γύρω από το  $r = 0$ , η συμπεριφορά της  $f(r)$  κοντά στο μέγιστο είναι

$$f(r) = 1 + \frac{1}{2}f''(0)r^2 + O(r^4)$$

Ορίζουμε την μικροκλίμακα Taylor  $\lambda$  μέσω της σχέσης

$$f''(0) = -\frac{1}{\lambda^2}$$

έτσι ώστε κοντά στο  $r = 0$  έχουμε, σύμφωνα με την (3.42)

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2}, \quad g(r) = 1 - \frac{r^2}{\lambda^2}$$

Η φυσική σημασία της μικροκλίμακας Taylor έγκειται στο γεγονός ότι είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του λόγου της συνολικής ενέργειας προς την συνολική ενστροφία της κίνησης. Σύμφωνα με την σχέση (3.42) έχουμε

$$g''(0) = 2f''(0)$$

ενώ γενικά ο τελεστής της λαπλασιανής γράφεται

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$$

συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f'(r)}{r} = f''(0)$$

η σχέση (3.41) δίνει

$$\nabla^2 R_{ii}(\mathbf{r}) = 15u^2 f''(0)$$

Συνεπώς λόγω της (3.20)

$$\lambda^2 = \frac{15u^2}{\langle \omega^2 \rangle} \quad (3.43)$$

Το γεγονός ότι όπως προαναφέρθηκε η σχέση (3.20) είναι η πρώτη μιας οικογένειας αντίστοιχων σχέσεων για τα μεγέθη  $\nabla \times \omega, \nabla \times \nabla \times \omega, \dots$  συνεπάγεται ότι οι συντελεστές του  $n$ -οστού όρου στις δυναμοσειρές των συναρτήσεων  $f(r), g(r)$  ως προς  $r^2$  είναι ανάλογοι της μέσης τιμής του τετραγώνου της ποσότητας  $[\nabla \times]^n \omega$ .

Ο πειραματικός προσδιορισμός της μικροκλίμακας Taylor μπορεί να γίνει είτε απευθείας από τις συναρτήσεις συσχέτισης είτε εναλλακτικά ανατρέχοντας στον ορισμό (3.39) της συνάρτησης  $g(r)$ :

$$f''(0) = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\langle u_p(\mathbf{x}) \partial^2 u_p(\mathbf{x}') / \partial^2 x'_p \rangle}{u^2} = \frac{\langle u_p(\mathbf{x}) \partial^2 u_p(\mathbf{x}) / \partial^2 x_p \rangle}{u^2} = -\frac{\langle (\partial u_p(\mathbf{x}) / \partial x_p)^2 \rangle}{u^2}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω ομοιογένειας. Επομένως

$$\lambda^2 = \frac{\langle u_1^2 \rangle}{\langle (\partial u_1 / \partial x_1)^2 \rangle}$$

όπου λόγω ισοτροπίας ο δείκτης 1 μπορεί να αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε διεύθυνση στον χώρο. Η τελευταία σχέση προσφέρεται για πειραματικό προσδιορισμό της μικροκλίμακας Taylor, καθώς η διεύθυνση 1, μπορεί να ληφθεί παράλληλα στην μέση ροή.



Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις  $r^m f(r)$ ,  $r^m g(r)$  φθίνουν για  $r \rightarrow \infty$  με τέτοιο τρόπο ώστε τα σχετικά ολοκληρώματα να υπάρχουν, από την σχέση (3.42) βρίσκουμε, μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_0^\infty r^m g(r) dr = \frac{1-m}{2} \int_0^\infty r^m f(r) dr, \quad m \geq 0$$

Για  $m = 0$ , οι χωρικές κλίμακες  $L_p = \int_0^\infty f(r) dr$  και  $L_n = \int_0^\infty g(r) dr = 1/2 L_p$  ονομάζονται διαμήκης και εγκάρσια εξωτερική κλίμακα και χαρακτηρίζουν την έκταση εκείνη κατά την οποία το πεδίο ταχύτητας εμφανίζει σημαντικές συσχετίσεις. Εφόσον πρόκειται για κλίμακες ίδιας τάξης μεγέθους, επιλέγουμε την διαμήκη κλίμακα ως το θεμελιώδες μέγεθος της εξωτερικής κλίμακας της τύρβης

$$L = \int_0^\infty f(r) dr \quad (3.44)$$

Για  $m = 1$  έχουμε  $\int_0^\infty r g(r) dr = 0$  ενώ για  $m > 1$  οι ροπές των συναρτήσεων  $f(r)$ ,  $g(r)$  έχουν αντίθετο πρόσημο. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι για μεγάλες τιμές του  $r$ , υποθέτοντας ότι η συνάρτηση  $f(r)$  είναι θετική όπως προκύπτει και από πειραματικές μετρήσεις, η συνάρτηση  $g(r)$  είναι αρνητική.

Στην περίπτωση ισότροπης τύρβης ο ταυιστής ενεργειακού φάσματος είναι ένας ισότροπος ταυιστής δεύτερης τάξης

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)k_i k_j + B(k)\delta_{ij}$$

όπου  $A(k), B(k)$  άρτιες συναρτήσεις του  $k$ . Λόγω της συνθήκης συνέχειας (3.11)

$$B(k) = -k^2 A(k)$$

και ο ταυιστής ενεργειακού φάσματος είναι εξαρτάται από μια βαθμωτή συνάρτηση του κυματαριθμού (μέτρου του κυματανύσματος). Η φασματική πυκνότητα συνεισφοράς στην ενέργεια της κίνησης είναι

$$\frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} (k^2 A(k) + 3B(k)) = -k^2 A(k)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (3.18) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο ταυιστής ενεργειακού φάσματος στην περίπτωση ισότροπης τύρβης δεν εξαρτάται από την διεύθυνση στον χώρο των κυματανυσμάτων,

$$E(k) = 4\pi k^2 \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = -4\pi k^4 A(k) \quad (3.45)$$

Επιλέγοντας την συνάρτηση ενεργειακού φάσματος ως την μοναδική βαθμωτή συνάρτηση που χαρακτηρίζει τον ταυιστή  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ , αυτός γράφεται

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \quad (3.46)$$

ενώ από την (3.21) ο ταυιστής του φάσματος της ενστροφίας γράφεται

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = k^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k})$$

Η σχέση που συνδέει την βαθμωτή συνάρτηση  $E(k)$  με τον ταυιστή συσχέτισης προκύπτει εύκολα από τις (3.46), (3.7), θέτοντας  $i = j$  και αθροίζοντας:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{2\pi k^2} = \frac{1}{8\pi^3} \int R_{ii}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (3.47)$$

Όμως σύμφωνα με τις σχέσεις (3.41), (1.3),

$$R_{ii}(\mathbf{r}) = u^2(f(r) + 2g(r)) = u^2(3f(r) + r f'(r)) = 2R(r) \quad (3.48)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον παραπάνω ορισμό της συνάρτησης  $R(r)$  και με υπολογισμούς αντίστοιχους με αυτούς που οδήγησαν στις σχέσεις (3.17), (3.1.3) από τις (3.47), (3.6), (3.7) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(r)kr \sin(kr) dr \\ R(r) &= \int_0^{\infty} E(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \end{aligned} \quad (3.49)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι πανομοιότυπες με τις (3.17), (3.1.3) οι οποίες ισχύουν γενικά για ομογενή τύρβη και συνδέουν τους ταυιστές συσχέτισης και φάσματος με τους αντίστοιχους ταυιστές που προκύπτουν μέσω λήψης γωνιακού μέσου όρου. Όταν η τύρβη είναι ισότροπη, η διαδικασία λήψης γωνιακού μέσου όρου δεν είναι αναγκαία καθώς οι καμία στατιστική ποσότητα δεν εξαρτάται από τις γωνίες.

Οι απευθείας σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων  $f(r)$ ,  $E(k)$  προκύπτουν αντικαθιστώντας την σχέση (3.48) στις (3.49) μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u^2 f(r) k^2 r^2 \left( \frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right) dr \\ u^2 f(r) &= \int_0^{\infty} E(k) k^{-2} r^{-2} \left( \frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right) dk \end{aligned} \quad (3.50)$$

Από την πρώτη σχέση (3.49) μπορεί κανείς να εκφράσει τις ροπές της συνάρτησης  $R(r)$  συναρτήσει των παραγώγων της συνάρτησης  $E(k)$  στο σημείο  $k = 0$

$$\frac{\partial^{2m} E(k)}{\partial k^{2m}} = \frac{4m}{\pi} (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} r^{2m} R(r) dr \quad (3.51)$$

όπου οι ροπές περιττής τάξης είναι μηδενικές καθώς η συνάρτηση  $R(r)$  είναι άρτια.

Αντικαθιστώντας την σχέση ορισμού της συνάρτησης  $R(r)$  (3.48) και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες προκύπτει για τις ροπές της συνάρτησης  $f(r)$ ,

$$\frac{\partial^{2m} E(k)}{\partial k^{2m}} = \frac{4m}{\pi} (m-1) (-1)^m \int_0^{\infty} r^{2m} f(r) dr \quad (3.52)$$

Η σχέση μεταξύ της εξωτερικής κλίμακας (3.44) και της συνάρτησης  $E(k)$  προκύπτει με ολοκλήρωση της δεύτερης σχέσης (3.49), με την βοήθεια της σχέσης (3.48),

$$L = \int_0^{\infty} f(r) dr = \frac{1}{u^2} \int_0^{\infty} R(r) dr = \frac{\pi}{2u^2} \int_0^{\infty} k^{-1} E(k) dk \quad (3.53)$$

Από την σχέση (3.52) βρίσκουμε ότι ο συντελεστής του όρου ανάλογου του  $k^4$  στην σειρά Taylor της συνάρτησης  $E(k)$  είναι,

$$C = \frac{3}{\pi} u^2 \int_0^{\infty} r^4 f(r) dr$$

Συγκρίνοντας με τις σχέσεις (3.28) και (3.46) βρίσκουμε για τους συντελεστές  $C_{ijklm}$ ,

$$C_{ijklm} = \frac{C}{4\pi} (\delta_{ij}\delta_{lm} - \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jl})$$

Από τις σχέσεις (3.49), (3.48) προκύπτει η σχέση μεταξύ των παραγώγων των συναρτήσεων  $R(r)$  και  $f(r)$  στο  $r = 0$  και των ροπών της συνάρτησης  $E(k)$ ,

$$\frac{\partial^{2m} R(r)}{\partial r^{2m}} = \frac{1}{2}(2m+3)u^2 \frac{\partial^{2m} f(r)}{\partial r^{2m}} = \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^\infty k^{2m} E(k) dk$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει για την μικροκλίμακα Taylor,

$$-f''(0) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{15u^2} \int_0^\infty k^2 E(k) dk = \frac{1}{5} \frac{\int_0^\infty k^2 E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}$$

### 3.3.2 Ο ταυιστής της ροπής τρίτης τάξης και δύο σημείων

Περνώντας στην μελέτη των ροπών πρώτης και τρίτης τάξης, παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την σχέση (3.2) η γενική μορφή μιας ροπής πρώτης τάξης, για παράδειγμα του διανύσματος  $Q_i(r) = \langle p(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ , το οποίο στην περίπτωση ισότροπης τύρβης εξαρτάται μόνο από το μέτρο του διανύσματος  $r$ , είναι

$$Q_i(r) = A(r)r_i$$

Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη συνέχειας (3.10) επιβάλλει

$$\frac{\partial Q_i(r)}{\partial r_i} = 3A(r) + r \frac{\partial A(r)}{\partial r} = 0$$

Η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση η οποία να παραμένει πεπερασμένη στο  $r = 0$ . Αν λοιπόν αποκλείσουμε την περίπτωση ιδιόμορφης συμπεριφοράς στο όριο  $r \rightarrow 0$ , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ροπές πρώτης τάξης δύο σημείων είναι ταυτοτικά μηδέν στην ισότροπη τύρβη.

Οι ροπές τρίτης τάξης παίζουν σημαντικό ρόλο στην θεωρία της τύρβης, καθώς εμφανίζονται ως όροι μεταφοράς ενέργειας προς μικρότερες κλίμακες, όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.26). Από την εξίσωση (3.24), η οποία είναι γραμμένη στον πραγματικό χώρο, παρατηρούμε ότι κεντρικό ρόλο παίζει η ροπή τρίτης τάξης και δύο σημείων, η οποία μπορεί γενικά να γραφεί στην μορφή

$$S_{ijl}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})u_l(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Σύμφωνα με την σχέση (3.4), στην περίπτωση ισότροπης τύρβης ο ταυιστής  $S_{ijl}(\mathbf{r})$  έχει την ακόλουθη μορφή

$$S_{ijl}(\mathbf{r}) = A(r)r_i r_j r_l + B(r)(r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}) + D(r)r_l \delta_{ij}$$

λόγω της συμμετρίας ως προς τους δείκτες  $i$  και  $j$ . Η συνθήκη συνέχειας (3.10) επιβάλλει,

$$\frac{\partial S_{ijl}(\mathbf{r})}{\partial r_l} = \left( 5A(r) + r \frac{\partial A(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial B(r)}{\partial r} \right) r_i r_j + \left( 2B(r) + 3D(r) + r \frac{\partial D(r)}{\partial r} \right) \delta_{ij} = 0$$

για οποιαδήποτε τιμή του διανύσματος  $\mathbf{r}$ , επομένως οι συναρτήσεις  $A(r), B(r), D(r)$  συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} 5A(r) + r \frac{\partial A(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial B(r)}{\partial r} &= 0 \\ 2B(r) + 3D(r) + r \frac{\partial D(r)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Μία ακόμα σχέση προκύπτει από το γεγονός ότι η ποσότητα  $S_{iil}(r)$ , ως ροπή πρώτης τάξης και δύο σημείων είναι ταυτοτικά μηδέν

$$r^2 A(r) + 2B(r) + 3D(r) = 0$$

Από αυτή την σχέση και την δεύτερη των (3.54) βρίσκουμε

$$A(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial D(r)}{\partial r} \quad B(r) = -\frac{3}{2}D(r) - \frac{1}{2}r \frac{\partial D(r)}{\partial r}$$

Επομένως στην περίπτωση ισότροπης τύρβης ο τανυστής  $S_{ijl}(\mathbf{r})$  εξαρτάται από μία μοναδική βαθμωτή συνάρτηση.

Από τις πιθανές ροπές τρίτης τάξης και δύο σημείων, αυτές που μπορούν πιο εύκολα να μετρηθούν είναι αυτές όπου οι σχετικές συνιστώσες είναι είτε κάθετες, είτε παράλληλες στο διάνυσμα  $\mathbf{r}$ . Στην περίπτωση ισότροπης τύρβης οι τρεις ανεξάρτητες ροπές που συνήθως μετρώνται είναι

$$\begin{aligned} u^3 k(r) &= \langle u_p^2(\mathbf{x})u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{r_i r_j r_l}{r^3} S_{ijl}(\mathbf{r}) = r(r^2 A(r) + 2B(r) + D(r)) = -2rD(r) \\ u^3 h(r) &= \langle u_n^2(\mathbf{x})u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{n_i n_j r_l}{r} S_{ijl}(\mathbf{r}) = rD(r) \\ u^3 q(r) &= \langle u_p(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x})u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{r_i n_j n_l}{r} S_{ijl}(\mathbf{r}) = rB(r) = -\frac{3}{2}rD(r) - \frac{1}{2}r^2 \frac{\partial D(r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.55)$$

όπου  $\mathbf{n}$  ένα διάνυσμα κάθετο στο  $\mathbf{r}$  και ορίσαμε την ταχύτητα  $u^2 = \frac{1}{3}u_i u_i$ . Από τις τρεις παραπάνω συναρτήσεις αυτή που μπορεί να μετρηθεί πιο εύκολα είναι η πρώτη, καθώς είναι η μοναδική που δεν περιέχει κάποια εγκάρσια συνιστώσα. Ο τανυστής  $S_{ijl}(\mathbf{r})$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της  $k(r)$  ως

$$S_{ijl}(\mathbf{r}) = u^3 \left[ \left( \frac{k(r) - rk'(r)}{2r^3} \right) r_i r_j r_l + \left( \frac{2k(r) + rk'(r)}{4r} \right) (r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}) - \frac{k(r)}{2r} r_l \delta_{ij} \right] \quad (3.56)$$

Εφόσον οι συναρτήσεις  $A(r), B(r), D(r)$  είναι άρτιες, από τις σχέσεις (3.55) προκύπτει ότι οι συναρτήσεις  $k(r), h(r), q(r)$  είναι περιττές. Ακόμα, οι συναρτήσεις  $k(r), h(r), q(r)$  είναι  $O(r^3)$  για  $r \rightarrow 0$  καθώς αν επιλέξουμε το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  παράλληλο στον  $x_1$ -άξονα,

$$u^3 \frac{dk(r)}{dr} \Big|_{r=0} = \left\langle u_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1(\mathbf{x})^2}{\partial x_1} \right\rangle = \frac{1}{3} \left\langle \frac{\partial u_1(\mathbf{x})^3}{\partial x_1} \right\rangle = 0$$

λόγω ομοιογένειας.

Ο μετασχηματισμός Fourier του τανυστή  $S_{ijl}(\mathbf{r})$ , ο οποίος ορίζεται ως

$$Y_{ijl}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int S_{ijl}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (3.57)$$

έχει την ίδια μορφή (3.4) με τους δείκτες  $i$  και  $j$  συμμετρικούς, ενώ λόγω συνέχειας (3.54) πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη

$$k_l Y_{ijl}(k) = 0$$

επομένως η γενική έκφραση του τανυστή  $Y_{ijl}(\mathbf{k})$  είναι

$$Y_{ijl}(\mathbf{k}) = iY(k) \left( k_i k_j k_l - \frac{1}{2}k^2 k_i \delta_{jl} - \frac{1}{2}k^2 k_j \delta_{il} \right) \quad (3.58)$$

όπου  $U(k)$  αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση. Η σχέση που συνδέει την συνάρτηση  $Y(k)$  με την συνάρτηση  $k(r)$  μπορεί να βρεθεί από την σχέση (3.56) Αν θέσουμε  $i = l$  και αθροίσουμε σε όλες τις τιμές του δείκτη  $i$ ,

$$S_{iji}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}u^3 \left( \frac{dk(r)}{dr} + \frac{4}{r}k(r) \right) r_j = \frac{1}{2}K(r)r_j \quad (3.59)$$

Ενώ η σχέση (3.57) δίνει

$$\begin{aligned}
Y_{iji}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{16\pi^3} \int K(r) r_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\
&= \frac{i}{16\pi^3} \frac{\partial}{\partial k_j} \left( \int K(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \right) \\
&= \frac{i}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial k_j} \left( \int K(r) r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} d^3\mathbf{r} \right) \\
&= -\frac{i}{4\pi^2} \frac{k_j}{k^2} \left( \int \frac{\partial(r^3 K(r))}{\partial r} \frac{\sin(kr)}{kr} d^3\mathbf{r} \right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς συγκρίνοντας με την σχέση (3.58) βρίσκουμε

$$Y(k) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{k^6} \int_0^\infty \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) K(r) kr \sin(kr) dr$$

Η αντίστροφη της τελευταίας σχέσης είναι

$$\left( r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) K(r) = 8\pi \int_0^\infty k^6 Y(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk$$

### 3.3.3 Δυναμικές εξισώσεις

Η υπόθεση στατιστικής ισοτροπίας επιφέρει σημαντική απλοποίηση στις δυναμικές εξισώσεις (3.24) και (3.25) οι οποίες περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του ταυυστή συσχέτισης και του ταυυστή ενεργειακού φάσματος αντίστοιχα, καθώς κάθε μια από αυτές τις ταυυστικές εξισώσεις μετασχηματίζεται σε μια βαθμωτή εξίσωση. Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.41) και (3.42) ο ταυυστής συσχέτισης  $R_{ij}(\mathbf{r})$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της διαμήκουσ συνάρτησης συσχέτισης  $f(r)$  με τον ακόλουθο τρόπο

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = u^2 \left( -\frac{1}{2} f'(r) r_i r_j + \left( f + \frac{1}{2} r f'(r) \right) \delta_{ij} \right)$$

Δείξαμε ακόμα στην προηγούμενη ενότητα ότι η ροπή πρώτης τάξης και δύο σημείων  $\langle p(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle$  είναι στην περίπτωση ισότροπης τύρβης ταυτοτικά μηδέν λόγω συνέχειας, επομένως ο όρος  $P_{ij}(\mathbf{r})$  της (3.24) δεν συνεισφέρει. Το γεγονός αυτό είναι σε συνέπεια με το γεγονός ότι οι δυνάμεις πίεσης γενικά οδηγούν την ροή προς την ισοτροπία.

Αντίστοιχα ο όρος μη-γραμμικής μεταφοράς ενέργειας

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_i} (S_{ikj}(\mathbf{r}) - S_{jki}(-\mathbf{r}))$$

μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της βαθμωτής συνάρτησης  $k(r)$ . Επομένως στην περίπτωση ισότροπης τύρβης η εξίσωση (3.24) μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση μεταξύ των βαθμωτών συναρτήσεων  $f(r), k(r)$ . Προκειμένου να παράγουμε αυτή την εξίσωση, θέτουμε στην εξίσωση (3.24)  $i = j$  και αθροίζουμε. Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.41) και (3.42) έχουμε

$$R_{ii}(\mathbf{r}) = u^2 (3f(r) + r f'(r)) = 2R(r)$$

ενώ εκφράζοντας τον τελεστή Laplace συναρτήσει του  $r$  βρίσκουμε

$$\nabla^2 R_{ii}(\mathbf{r}) = 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)$$

Επίσης, λόγω της σχέσης (3.59)

$$\begin{aligned} T_{ii}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r_l} (S_{ili}(\mathbf{r}) - S_{ili}(-\mathbf{r})) \\ &= \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) K(r), \quad K(r) = u^3 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) k(r) \end{aligned}$$

Συνεπώς στην περίπτωση ισότροπης τύρβης η ζητούμενη δυναμική εξίσωση είναι

$$\frac{\partial R(r)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) K(r) + 2\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)$$

Αντικαθιστώντας τους ορισμούς των συναρτήσεων  $R(r)$  και  $K(r)$  μπορούμε, μετά από κάπως μακροσκελή αλλά άμεσο υπολογισμό που παραλείπουμε εδώ, να εκφράσουμε την τελευταία εξίσωση ως σχέση μεταξύ των συναρτήσεων  $f(r)$  και  $k(r)$

$$\frac{\partial(u^2 f(r))}{\partial t} = u^3 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) k(r) + 2\nu u^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \right) f(r) \quad (3.60)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση Karman–Howarth. Παίρνοντας το όριο  $r \rightarrow 0$  λαμβάνουμε για τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας

$$-\epsilon = \frac{d\left(\frac{3}{2}u^2\right)}{dt} = 15\nu u^2 f''(0) = -\frac{15\nu u^2}{\lambda^2}$$

Τελευταία σχέση μας επιτρέπει να εκφράσουμε την μικροκλίμακα Taylor συναρτήσει του ρυθμού απώλειας ενέργειας  $\epsilon$

$$\lambda^2 = \frac{15\nu u^2}{\epsilon}$$

συγκρίνοντας με την σχέση (3.43) βρίσκουμε

$$\epsilon = \nu \langle \omega^2 \rangle$$

Η αντίστοιχη φασματική δυναμική εξίσωση προκύπτει από την σχέση (3.25) θέτοντας  $i = j$  και αθροίζοντας

$$\frac{\partial \Phi_{ii}(\mathbf{k})}{\partial t} = \Gamma_{ii}(\mathbf{k}) - 2\nu k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k})$$

Σύμφωνα με την σχέση (3.45)

$$\Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{2\pi k^2}$$

ενώ σύμφωνα με τις σχέσεις (3.29) και (3.58)

$$\Gamma_{ii}(\mathbf{k}) = 2k^4 Y(k)$$

συνεπώς η δυναμική εξίσωση στην οποία υπακούει η συνάρτηση ενεργειακού φάσματος είναι

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T(k) - 2\nu k^2 E(k)$$

όπου ο όρος  $T(k)$  αντιπροσωπεύει την μεταφορά ενέργειας λόγω των μη-γραμμικών όρων και εκφράζεται συναρτήσει της συνάρτησης  $Y(k)$  ως

$$T(k) = 4\pi k^6 Y(k)$$

## Κεφάλαιο 4

# Αδρανειακά σωματίδια

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την κίνηση αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε ισότροπο τυρβώδες πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού. Τα αδρανειακά σωματίδια διαφοροποιούνται από τα άμαζα σωματίδια Lagrange τα οποία ακολουθούν ακριβώς τις γραμμές ροής. Λόγω της πεπερασμένης μάζας τους, τα αδρανειακά σωματίδια αποκλίνουν από τις γραμμές ροής, γεγονός που οδηγεί σε εξαιρετικά ενδιαφέροντα δυναμικά χαρακτηριστικά.

### 4.1 Η εξίσωση κίνησης

Η διατύπωση της πλήρους εξίσωσης κίνησης ενός σφαιρικού ομογενούς μη-παραμορφώσιμου σωματιδίου μέσα σε ένα μη-ομογενές πεδίο ροής αποτελεί μια μη-τετριμμένη διαδικασία, η οποία πραγματοποιήθηκε από τους Maxey και Riley [54] μετά από πληθώρα προσπαθειών από άλλους ερευνητές οι οποίες είχαν μόνο μερική επιτυχία. Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε την παραγωγή της εξίσωσης των Maxey–Riley από πρώτες αρχές. Καθώς πρόκειται για μια πολύπλοκη ολοκληρω-διαφορική εξίσωση, στην συνέχεια θα εκτιμήσουμε την τάξη μεγέθους των διαφόρων όρων που εμφανίζονται σε αυτή, προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα πρακτικό μοντέλο κίνησης αδρανειακού σωματιδίου σε τυρβώδες πεδίο ροής.

Θεωρούμε μια ομογενή μη-παραμορφώσιμη σφαίρα ακτίνας  $a$  το κέντρο της οποίας κινείται σε τροχιά  $\mathbf{Y}(t)$  μέσα σε δοθέν πεδίο ροής. Έστω ότι αν απουσίαζε η σφαίρα το πεδίο ροής θα ήταν  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Η παρουσία του σωματιδίου προκαλεί διαταραχή η οποία οδηγεί σε ένα νέο πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Για το νέο αυτό πεδίο, η εξισώσεις ορμής και συνέχειας

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

όπου  $\rho, \mu$  η πυκνότητα και η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού και  $g$  η βαρυτική επιτάχυνση. Οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{Y}(t)) \quad \mathbf{x} \in S$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad |\mathbf{x} - \mathbf{Y}(t)| \rightarrow \infty$$

όπου  $\mathbf{V}(t) = d\mathbf{Y}(t)/dt$  η ταχύτητα,  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  η γωνιακή ταχύτητα και  $S$  η επιφάνεια της σφαίρας. Ο ταυστής των τάσεων δίνεται από την σχέση

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

συνεπώς η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι

$$m_p \frac{dV_i}{dt} = m_p g_i + \int_S \sigma_{ij} n_j dS$$

όπου  $m_p$  η μάζα του σωματιδίου και  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας  $S$  και με φορά προς τα έξω.

Η επίλυση του προβλήματος διευκολύνεται αν περάσουμε σε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του σωματιδίου. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του μετασχηματισμού

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{Y}(t)$$

$$t = t$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}(t)$$

ο οποίος οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες

$$\rho \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \right) = \rho \left( g_i - \frac{dV_i}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_j \partial z_j}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial z_i} = 0$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{z}, \quad |\mathbf{z}| = a$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}(t), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty$$

ενώ ο τανυστής των τάσεων εκφράζεται ως

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial w_i}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j}{\partial z_i} \right)$$

Προκειμένου να εκμεταλλευτούμε την παρουσία μικρών παραμέτρων στο πρόβλημα, αναλύουμε το πεδίο  $\mathbf{w}$  ως άθροισμα δύο πεδίων  $\mathbf{w}^{(0)}$  και  $\mathbf{w}^{(1)}$ . Το πεδίο  $\mathbf{w}^{(0)}$  αποτελεί την αδιατάρακτη ροή που προκύπτει χωρίς την εφαρμογή της συνθήκης μη-ολίσθησης στην επιφάνεια του σωματιδίου, ενώ το πεδίο  $\mathbf{w}^{(1)}$  αποτελεί την διαταραχή που προκαλείται από την παρουσία του σωματιδίου.

$$\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{u} - \mathbf{V}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το αδιατάρακτο πεδίο ροής ικανοποιεί την εξίσωση ορμής

$$\rho \left( \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t} + w_j^{(0)} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} \right) = \rho \left( g_i - \frac{dV_i}{dt} \right) - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(0)}}{\partial z_j \partial z_j} \quad (4.1)$$

συνεπώς η εξίσωση ορμής για το συνολικό πεδίο δίνει την ακόλουθη εξίσωση για το πεδίο διαταραχής

$$\rho \left( \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial t} + w_j^{(0)} \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_j} + w_j^{(1)} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} + w_j^{(1)} \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_j} \right) = \rho \left( g_i - \frac{dV_i}{dt} \right) - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(1)}}{\partial z_j \partial z_j} \quad (4.2)$$

Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης συνέχειας, το κάθε πεδίο την ικανοποιεί χωριστά

$$\frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_i} = 0$$

$$\frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_i} = 0$$



Έστω  $W_0$  η χαρακτηριστική κλίμακα της διαφοράς ταχύτητας  $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$  μεταξύ του σωματιδίου και της ροής. Ορίζοντας τον σχετικό αριθμό Reynolds ως  $R = aW_0/\nu$ , και υποθέτοντας ότι  $|\mathbf{w}^{(0)}| \sim |\mathbf{w}^{(1)}|$  διαστατική ανάλυση της εξίσωσης (4.2) δείχνει ότι για  $R \ll 1$  οι αδρανειακοί όροι μπορούν να αγνοηθούν, συνεπώς το πρόβλημα υπολογισμού του πεδίου  $w^{(1)}$  ανάγεται σε πρόβλημα μη-μόνιμης ροής Stokes

$$\rho \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(1)}}{\partial z_j^2} \quad (4.3)$$

εφόσον

$$\frac{aW_0}{\nu} \ll 1, \quad \frac{a^2 U_0}{\nu L} \ll 1 \quad (4.4)$$

όπου  $U_0, L$  χαρακτηριστικές κλίμακες ταχύτητας και μήκους της αδιατάρακτης ροής. Η δεύτερη συνθήκη προκύπτει από τον τρίτο όρο του αριστερού μέλους της (4.2). Οι συνοριακές συνθήκες για το πεδίο διαταραχής είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{z}, t) &= -(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}(t)) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{z}, & \mathbf{z} \in S \\ \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{z}, t) &\rightarrow \mathbf{0} & |\mathbf{z}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ο υπολογισμός της συνολικής δύναμης ανάγεται στον υπολογισμό της επιφανειακής τάσης που οφείλεται στο συνολικό πεδίο  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{w}^{(1)}$ . Η συνεισφορά του όρου  $\mathbf{w}^{(1)}$  δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή χωρίς την παραδοχές (4.4), οι οποίες οδηγούν σε μη-μόνιμο πρόβλημα Stokes. Η συνεισφορά του όρου  $\mathbf{w}^{(0)}$  αντίθετα μπορεί να υπολογιστεί στην γενική περίπτωση, καθώς η συνολική δύναμη είναι ίση με

$$F_i^{(0)} = \int_S \left( -p^{(0)} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j^{(0)}}{\partial z_i} \right) \right) n_j dS$$

Με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης η τελευταία έκφραση μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα στον όγκο του σφαιρικού σωματιδίου και να προσεγγιστεί ως

$$F_i^{(0)} \simeq \frac{4}{3} \pi a^3 \left( -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(0)}}{\partial z_j \partial z_j} \right)$$

Η παραπάνω προσέγγιση συνεπάγεται ότι η κλίση της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη μέσα στον όγκο της σφαίρας ενώ το πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{w}^{(0)}$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor

$$w_i^{(0)}(\mathbf{z}, t) = w_i^{(0)}(\mathbf{0}, t) + z_j \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} + \frac{1}{2} z_j z_k \frac{\partial^2 w_i^{(0)}}{\partial z_j \partial z_k}$$

γύρω από το σημείο  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Η εγκυρότητα της προσέγγισης απαιτεί η ακτίνα του σωματιδίου να είναι μικρή σε σχέση με την χαρακτηριστική χωρική κλίμακα μεταβολής του αδιατάρακτου πεδίου

$$\frac{a}{L} \ll 1 \quad (4.6)$$

Με χρήση της εξίσωσης (4.1), η συνολική δύναμη λόγω της αδιατάρακτης ροής γράφεται

$$F_i^{(0)} = -m_F g_i + m_F \left( \frac{dV_i}{dt} + \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t} + w_j^{(0)} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} \right)$$

Επιστρέφοντας στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων και το πεδίο αδιατάρακτης ροής  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , προκύπτει η ακόλουθη έκφραση

$$F_i^{(0)} = -m_F g_i + m_F \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{Y}(t)}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι

$$m_p \frac{dV_i}{dt} = (m_p - m_F) g_i + m_F \frac{Du_i}{Dt} \Big|_{\mathbf{Y}(t)} + F_i^{(1)} \quad (4.7)$$

όπου ο όρος  $\mathbf{F}^{(1)}$  αντιστοιχεί στις δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο σωματίδιο από το πεδίο διαταραχής  $\mathbf{w}^{(1)}$ . Η μοναδική παραδοχή κατά την παραγωγή της παραπάνω εξίσωσης κίνησης είναι η ανισότητα (4.6). Η δύναμη  $\mathbf{F}^{(1)}$  πρέπει να υπολογιστεί από την λύση του μη-μόνιμου προβλήματος Stokes (4.3),(4.5), η εγκυρότητα του οποίου απαιτεί την ισχύ των συνθηκών (4.4). Η έκφραση για την δύναμη που οφείλεται στο πεδίο διαταραχής είναι

$$F_i^{(1)} = \int_S \left( -p^{(1)} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j^{(1)}}{\partial z_i} \right) \right) n_j dS$$

Για τον υπολογισμό της δύναμης  $\mathbf{F}^{(1)}$  δεν απαιτείται λεπτομερής γνώση του πεδίου διαταραχής  $\mathbf{w}^{(1)}$ . Η επίλυση του προβλήματος (4.3) μπορεί να παρακαμφθεί με χρήση μιας σχέσης συμμετρίας μεταξύ χρονικών μετασχηματισμών Laplace

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Έστω δύο μη-μόνιμα πεδία ροής Stokes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  και  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ , όπου η μεταβλητή  $\mathbf{x}$  λαμβάνει τιμές σε έναν όγκο  $V$  ο οποίος περιβάλλεται από ομαλή επιφάνεια  $S$ . Τα πεδία  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$  ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0 \\ \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρώντας το ολοκλήρωμα

$$\int_V \left( \hat{u}_i \frac{\partial \hat{\sigma}'_{ij}}{\partial x_j} - \hat{u}'_i \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \right) dV$$

μέσω του θεωρήματος της απόκλισης λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\int_S (\hat{u}_i \hat{\sigma}'_{ij} - \hat{u}'_i \hat{\sigma}_{ij}) n_j dS = \int_V \rho [u_i(\mathbf{x}, 0) \hat{u}'_i(\mathbf{x}, s) - u'_i(\mathbf{x}, 0) \hat{u}_i(\mathbf{x}, s)] dV \quad (4.8)$$

όπου  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $S$ . Στην τελευταία ισότητα αναλύσαμε τον ταυστή  $\partial u_i / \partial x_j$  σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό τμήμα, ενώ λάβαμε υπόψιν την συμμετρία του ταυστή  $\sigma_{ij}$  και την εξίσωση συνέχειας.

Υποθέτοντας ότι τα πεδία  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  τείνουν στο μηδέν μακριά από το σωματίδιο, η επιφάνεια  $S$  στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι η επιφάνεια του σωματιδίου. Επιβάλλουμε στο πεδίο  $\mathbf{u}'$  τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}'| &\rightarrow 0, & |\mathbf{x}| &\rightarrow \infty \\ \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, s) &= (1, 0, 0), & |\mathbf{x}| &= a \\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) &= 0, & t &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

με την αρχή των αξόνων στο κέντρο του σωματιδίου. Το πεδίο  $\mathbf{u}'$  αντιστοιχεί στην ροή που προκαλείται από σφαίρα ακτίνας  $a$  με κέντρο την αρχή των αξόνων και ταχύτητα  $\mathbf{V}' = (\delta(t), 0, 0)$ . Η σχέση συμμετρίας (4.8) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο από το πεδίο διαταραχής

$$\hat{F}_i = \int_S \hat{\sigma}_{ij} n_j dS = \int_S \hat{u}_i \hat{\sigma}'_{ij} n_j dS + \int_V \rho u_i(\mathbf{x}, 0) \hat{u}'_i(\mathbf{x}, s) dV \quad (4.10)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τρίτη από τις συνθήκες (4.9).

Το πεδίο  $\mathbf{u}'$  μπορεί να υπολογιστεί με προσαρμογή της μη-μόνιμης λύσης Stokes του Burgers [9]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}' &= (\mathbf{e}^{(1)} \cdot \nabla) \nabla \hat{\psi} - \mathbf{e}^{(1)} \nabla^2 \hat{\psi}, & \mathbf{e}^{(1)} &= (1, 0, 0) \\ \hat{\psi}(r, s) &= \frac{Q_1}{\rho s r} + \frac{Q_2}{r} e^{-\lambda r} & r = |\mathbf{x}|, \lambda^2 = \frac{\rho s}{\mu}, \Re(\lambda) > 0 \end{aligned}$$

Οι συνοριακές συνθήκες (4.9) επιβάλλουν

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3}{2} a \mu (1 + \lambda a) + \frac{1}{2} a^3 r s \\ Q_2 &= -\frac{3}{2} \frac{a \mu}{\rho s} e^{\lambda a} \\ \hat{\sigma}'_{ij} n_j &= -\frac{1}{2} a \rho s x_i x_j \frac{e_j^{(1)}}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{a} (1 + \lambda a) e_i^{(1)}, & r &= a \end{aligned}$$

Για ένα πεδίο ροής  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  το οποίο είναι παντού μηδενικό, ενώ στην επιφάνεια του σωματιδίου έχει την μορφή

$$\hat{u}_i(\mathbf{x}, s) = \hat{A}_i + \hat{B}_{ij} x_j + \frac{1}{2} \hat{C}_{ijk} x_j x_k \quad (4.11)$$

στο πεδίο Laplace, η συνολική δύναμη είναι, σύμφωνα με την σχέση (4.10)

$$\hat{F}_i = -\hat{A}_i \left( 6\pi a \mu (1 + \lambda a) + \frac{1}{2} m_{FS} \right) - a^2 \left( (\hat{C}_{ijj} + 2\hat{C}_{jji}) \pi \mu a (1 + \lambda a) + \frac{1}{20} m_{FS} \hat{C}_{ijj} \right) \quad (4.12)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να εκφραστεί στο πεδίο του χρόνου μετά από αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Συγκρίνοντας τις συνοριακές συνθήκες (4.5) και (4.11) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} A_i &= V_i(t) - u_i(\mathbf{Y}(t), t) \\ C_{ijk} &= -\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_k} \end{aligned}$$

Η πλήρης εξίσωση κίνησης είναι, ανατρέχοντας στην (4.7)

$$\begin{aligned} m_p \frac{dV_i}{dt} &= (m_p - m_F)g_i + m_F \frac{Du_i}{Dt} \Big|_{\mathbf{Y}(t)} - \frac{1}{2}m_F \frac{d}{dt} \left\{ V_i(t) - u_i(\mathbf{Y}(t), t) - \frac{1}{10}a^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{Y}(t)} \right\} \\ &\quad - 6\pi a \mu \left\{ V_i(t) - u_i(\mathbf{Y}(t), t) - \frac{1}{6}a^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{Y}(t)} \right\} \\ &\quad - 6\pi a^2 \mu \int_0^t \left( \frac{\frac{d}{d\tau} \left\{ V_i(t) - u_i(\mathbf{Y}(t), t) - \frac{1}{6}a^2 \nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{Y}(\tau)} \right\}}{[\pi\nu(t-\tau)]^{\frac{1}{2}}} \right) d\tau \end{aligned}$$

όπου ο ολοκληρωτικός όρος προκύπτει από την παρουσία όρων  $\sim la$  στην σχέση (4.12). Η σχέση αυτή παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία των Maxey και Riley [54].

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύει η παραπάνω εξίσωση κίνησης είναι εκφράζονται από τις ανισότητες (4.4) και (4.6). Οι δύο αυτές συνθήκες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση της τάξης μεγέθους των διαφόρων όρων του δεξιού μέλους. Για τον σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να εισάγουμε την σχετική ταχύτητα ρευστού-σωματιδίου

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{Y}(t), t)$$

Συναρτήσει της σχετικής ταχύτητας  $\mathbf{W}$ , η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$\begin{aligned} \left( m_p + \frac{1}{2}m_F \right) \frac{dW_i}{dt} + 6\pi a^2 \mu \int_0^t \frac{dW_i}{d\tau} (\pi\nu(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}) d\tau + 6\pi a \mu W_i &= \\ - m_p \frac{du_i}{dt} + m_F \frac{Du_i}{Dt} + (m_p - m_F)g_i + a^3 \pi \mu \nabla^2 u_i & \\ + \frac{1}{20} a^2 \pi \mu \frac{d}{dt} (\nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{Y}(t)}) + \pi \mu a^4 \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\nabla^2 u_i \Big|_{\mathbf{Y}(\tau)}) & \end{aligned}$$

Οι όροι που βρίσκονται στο δεξιό μέλος μπορούν να θεωρηθούν ως όροι πηγής για την σχετική ταχύτητα. Οι δύο πρώτοι όροι του δεξιού μέλους είναι  $O(U_0^2/L)$ , συνεπώς η συνεισφορά στην σχετική ταχύτητα λόγω της αδράνειας του σωματιδίου (πρώτος όρος) είναι  $O((m_p/m_F)(a^2 U_0/\nu L)U_0)$ , ενώ η συνεισφορά λόγω της αδράνειας του ρευστού είναι  $O((m_F/m_p)(a^2 U_0/\nu L)U_0)$ . Για τις δύο εκτιμήσεις χρησιμοποιήσαμε την χρονική κλίμακα  $\tau = a^2/\nu$ . Λόγω της δεύτερης εκ των συνθηκών (4.4),  $a^2 U_0/\nu L$ . Παρόλα αυτά, ο πρώτος όρος είναι μη-αμελητέος για βαριά σωματίδια με  $m_p/m_F \gg 1$ , ενώ ο δεύτερος όρος είναι μη-αμελητέος για ελαφριά σωματίδια με  $m_p/m_F \gg 1$ . Ο τρίτος όρος είναι γενικά μη-αμελητέος αλλά στα πλαίσια της παρούσης εργασίας δεν θα ληφθεί υπόψιν, καθώς δεν θα συμπεριλάβουμε στην ανάλυση μας την επίδραση της βαρύτητας στην κίνηση των σωματιδίων. Οι υπόλοιποι όροι του αριστερού μέλους είναι  $O(a^2 U_0/L^2)$  και συνεπώς αμελητέοι λόγω της συνθήκης (4.6). Περνώντας στους όρους του αριστερού μέλους της εξίσωσης, παρατηρούμε ότι ο όρος  $m_F dW_i/dt$  είναι  $O(a^2 U_0/L\nu)$  ενώ ο ολοκληρωτικός όρος είναι  $O((a^2 U_0/L\nu)^{1/2})$ , συνεπώς και οι δύο μπορούν να αγνοηθούν βάσει των συνθηκών (4.4).

Σύμφωνα με τις παραπάνω εκτιμήσεις τάξης μεγέθους, η εξίσωση κίνησης ενός βαρέος ( $m_p/m_F \gg 1$ ) αδρανειακού σωματιδίου ουσιαστικά εκφράζει την ισορροπία μεταξύ της σχετικής επιτάχυνσης και της οπισθέλκουσας Stokes

$$\left( m_p + \frac{1}{2}m_F \right) \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{3}{2}m_F \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -6\pi a \mu (\mathbf{u}(\mathbf{Y}(t), t) - \mathbf{V}(t))$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση  $Du_i/Dt \simeq du_i/dt$ , μια προσέγγιση που εισάγει σφάλμα δεύτερης τάξης ως προς  $W_0$ . Εισάγοντας την πυκνότητα του σωματιδίου  $\rho_p = 3m_p/4\pi a^3$  και την πυκνότητα του ρευστού  $\rho_F = 3m_F/4\pi a^3 = \mu/\nu$ , η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\tau_p} (\mathbf{u}(\mathbf{Y}(t), t) - \mathbf{V}(t)) \quad (4.13)$$

όπου

$$\beta = \frac{3\rho_F}{\rho_F + 2\rho_p}, \quad \tau_p = \frac{a^2}{3\nu\beta},$$

ο παράγοντας σχετικής πυκνότητας  $\eta$  χρονική κλίμακα Stokes, χαρακτηριστική της κίνησης του σωματιδίου.

Η εξίσωση (4.13) θα αποτελέσει την βάση της ανάλυσης της κίνησης βαρέων αδρανειακών σωματιδίων σε ισότροπη τυρβώδη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Στην περίπτωση αυτή οι σχετικές κλίμακες μήκους και ταχύτητας που εμφανίζονται στις συνθήκες (4.4) και (4.6) είναι οι μικροκλίμακες Kolmogorov

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad u = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

όπου  $\epsilon$  ο μέσος ρυθμός μετατροπής κινητικής ενέργειας σε θερμότητα. Αδιαστατοποιώντας τον χρόνο με την χρονική κλίμακα  $\tau_\eta$ , η εξίσωση (4.13) γράφεται

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{St}(\mathbf{u}(\mathbf{Y}(t), t) - \mathbf{V}(t)), \quad St = \frac{\tau_p}{\tau_\eta} \quad (4.14)$$

Ο αδιάστατος αριθμός  $St$  ονομάζεται αριθμός Stokes και εκφράζει τον λόγο του χρόνου απόκρισης των σωματιδίων και της χαρακτηριστικής χρονικής κλίμακας της φέρουσας ροής. Ο αριθμός Stokes, ο παράγοντας σχετικής πυκνότητας  $\beta$  και το αριθμός Reynolds της φέρουσας ροής αποτελούν τις δυναμικές παραμέτρους του προβλήματος.

Συναρτήσει των μικροκλιμάκων Kolmogorov οι συνθήκες ισχύος της (4.13) γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{a}{\eta} &\ll 1 \\ \frac{aW_0}{\nu} &= O\left(\frac{a}{\eta} \frac{W_0}{u}\right) \ll 1 \\ \frac{a^2U_0}{\eta\nu} &= O\left(\frac{a^2}{\eta^2}\right) \ll 1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Παρατηρούμε ότι για την ισχύ της εξίσωσης (4.13) στην περίπτωση κίνησης μέσα σε πεδίο ισότροπης τύρβης αρκεί η ακτίνα του σωματιδίου να είναι πολύ μικρότερη από την μικροκλίμακα  $\eta$  και η σχετική ταχύτητα να είναι πολύ μικρότερη από την μικροκλίμακα  $u$ .

## 4.2 Αριθμητική προσομοίωση κίνησης αδρανειακών σωματιδίων

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα αριθμητικών προσομοιώσεων κίνησης βαρέων αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε ισότροπη τυρβώδη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Στην περίπτωση βαρέων σωματιδίων ( $\rho_p \gg \rho_F$ ) ο συντελεστής  $\beta$  στο αριστερό μέλος της (4.14) τείνει στο μηδέν, οπότε η εξίσωση κίνησης παίρνει την ακόλουθη απλοποιημένη μορφή

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{St}(\mathbf{u}(\mathbf{Y}(t), t) - \mathbf{V}(t)) \quad (4.16)$$

### 4.2.1 Αριθμητική Μέθοδος

Η αριθμητική επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (4.16) δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Παρόλα αυτά, ο υπολογισμός του τυρβώδους πεδίου ροής που οδηγεί την κίνηση των σωματιδίων

αποτελεί ένα μη-τετριμμένο πρόβλημα. Αυτή η υποεπινότητα αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση της ψευδοφασματικής μεθόδου την οποία και επιλέξαμε για τον υπολογισμό του τυρβώδους πεδίου ρής.

Η ψευδοφασματική μέθοδος βασίζεται στην προσέγγιση του πεδίου ταχύτητας με τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Το πεδίο ταχύτητας ορίζεται πάνω σε ένα τρισδιάστατο καρτεσιανό πλέγμα  $N \times N \times N$  σημείων:

$$C_{\mathbf{x}} = \left\{ \frac{2\pi\mathbf{n}}{N}, 0 \leq n_i < N, i = 1, 2, 3 \right\}$$

και είναι περιοδικό ως προς και τις τρεις χωρικές διευθύνσεις. Στην συνέχεια το διακριτό πεδίο ταχύτητας αναπτύσσεται σε τριγωνομετρικό πολυώνυμο με χρήση γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform - FFT):

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N^3} \sum_{\mathbf{x} \in C_{\mathbf{x}}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in C_{\mathbf{k}}} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad C_{\mathbf{k}} = \left\{ -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1 \right\}^3$$

Έχοντας με αυτό τον τρόπο περάσει στον χώρο των κυματαριθμών, οι διαφορικοί τελεστές που μας ενδιαφέρουν αντιστοιχούν σε απλές αλγεβρικές πράξεις

$$\nabla \rightarrow -i\mathbf{k}, \nabla^2 \rightarrow -k^2, \dots$$

γεγονός που μας επιτρέπει να γράψουμε την εξίσωση Navier-Stokes (1.8) στον χώρο Fourier με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) u_i(\mathbf{k}) = ik_m P_{ij}(\mathbf{k}) U_{jm}(\mathbf{k}) \quad (4.17)$$

Ο προβολικός τελεστής

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

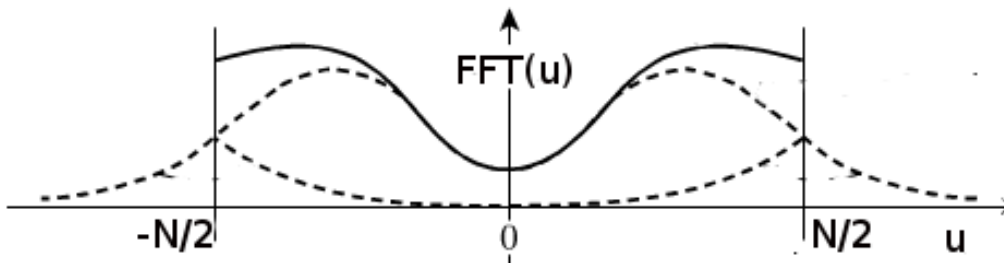
φροντίζει για την ικανοποίηση της εξίσωσης συνέχειας (1.3). Στον χώρο Fourier, οι μη-γραμμικοί της εξίσωσης Navier-Stokes γράφονται

$$U_{jm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N^3} \sum_{\substack{\mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q} \\ \mathbf{p}, \mathbf{q} \in C_{\mathbf{k}}}} u_j(\mathbf{p}) u_m(\mathbf{q}) \quad (4.18)$$

Η παραπάνω σχέση επιτρέπει τον υπολογισμό της χρονικής παραγώγου του πεδίου ταχύτητας και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.17). Ως εδώ έχουμε περιγράψει την φασματική αριθμητική μέθοδο, η οποία έχει το σημαντικό μειονέκτημα ότι ο υπολογισμός του αθροίσματος συνέλιξης (4.18) απαιτεί  $O(N^6)$  αριθμητικές πράξεις, γεγονός που καθιστά την μέθοδο αυτή μη-πρακτική.

Η ψευδοφασματική μέθοδος αποφεύγει το χρονοβόρο άθροισμα (4.18) επιστρέφοντας στον φυσικό χώρο με έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και υπολογίζοντας εκεί, με πολύ χαμηλό κόστος τους μη-γραμμικούς όρους. Έπειτα με έναν ευθύ μετασχηματισμό Fourier οι μη-γραμμικοί όροι εκφράζονται στον χώρο Fourier, επιτρέποντας την ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.17). Το κόστος της διαδικασίας αυτής είναι  $O(N^3 \log N)$ .

Η μόνη επιπλοκή που παρουσιάζεται κατά την εφαρμογή της ψευδοφασματικής μεθόδου έχει να κάνει με το φαινόμενο του aliasing. Το φαινόμενο αυτό πηγάζει από την διακριτότητα του πλέγματος και οδηγεί σε σημαντικό αριθμητικό σφάλμα. Συνοπτικά, συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν σε κυματαριθμούς εκτός πλέγματος απεικονίζονται, λόγω της διακριτότητας εντός



πλέγματος προκαλώντας σημαντικό σφάλμα. Η εικόνα σε μία διάσταση φαίνεται στο σχήμα 4.2.1, ενώ η γενίκευση σε τρεις διαστάσεις είναι προφανής.

Για την αφαίρεση του σφάλματος που οφείλεται σε aliasing ακολουθήσαμε την μέθοδο των Paterson και Orszag [60]. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει την διατήρηση κατά την διάρκεια του υπολογισμού μόνο ενός μέρους των κυματανυσμάτων, συγκεκριμένα αυτών που ικανοποιούν την συνθήκη:

$$|\mathbf{k}| > \frac{\sqrt{2}}{3} N \simeq 0.47N$$

Στην περίπτωση τρισδιάστατου υπολογισμού, η παραπάνω συνθήκη σημαίνει ότι μόνο το  $\sim 45\%$  των τρόπων παραμένει ενεργό κατά την διάρκεια του υπολογισμού. Τέλος, η μέθοδος αυτή απαιτεί τον υπολογισμό των μη-γραμμικών όρων σε δύο διαφορετικά πλέγματα μετατοπισμένα μεταξύ τους κατά  $\Delta x/2$ .

Υπολογίζοντας με αυτό τον τρόπο τους μη-γραμμικούς όρους, οι εξισώσεις (4.16) και (4.17) ολοκληρώνονται με χρήση της αριθμητικής μεθόδου Runge-Kutta τέταρτης τάξης.

Η υλοποίηση του υπολογιστικού κώδικα έγινε σε γλώσσα Fortran 2003 με χρήση παραλληλοποίησης OpenMP και MPI. Όσον αφορά την προσομοίωση ισότροπης τυρβώδους ροής ασυμπίεστου ρευστού, ο κώδικας έχει ελεγχθεί με επιτυχία έναντι άλλων αριθμητικών και θεωρητικών αποτελεσμάτων.

#### 4.2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε αποτέλεσμά από αριθμητικά πειράματα κίνησης βαρέων αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε ισότροπο τυρβώδες πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού. Οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων (4.16) και του πεδίου ροής (4.17) ολοκληρώθηκαν αριθμητικά με την μέθοδο που περιγράψαμε στην προηγούμενη υποενότητα.

Πραγματοποιήθηκαν τρία συνολικά αριθμητικά πειράματα. Οι βασικές παράμετροι φαίνονται στον πίνακα 4.1. Όπως φαίνεται από τον πίνακα, το πεδίο ροής έχει όμοιες παραμέτρους και στις τρεις περιπτώσεις, ενώ η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των τριών πειραμάτων είναι ο αριθμός Stokes, ο οποίος μεταβάλλεται σε ένα εύρος δύο τάξεων μεγέθους.

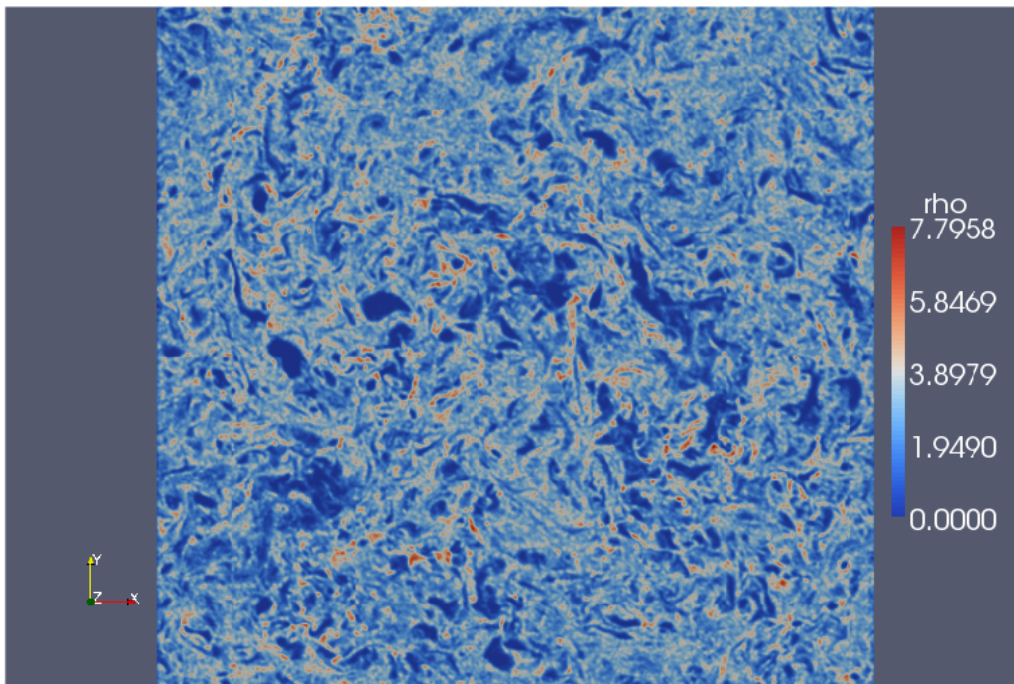
Στις εικόνες 4.1, 4.2 και 4.3 φαίνεται μια δισδιάστατη τομή της συγκέντρωσης των αδρανειακών σωματιδίων. Και στις τρεις περιπτώσεις οι αρχικές συνθήκες είναι μια πλήρως ομοιογενής κατανομή σωματιδίων. Ο χρόνος που έχει παρέλθει είναι ίσος με 10s και για τα τρία στιγμιότυπα.

Το φαινόμενο της ομαδοποίησης κάνει αισθητή την παρουσία του και για τις τρεις τιμές του αριθμού Stokes. Υπάρχουν ωστόσο σημαντικές ποιοτικές διαφορές. Στην περίπτωση της εικόνας 4.1, ο αριθμός Stokes είναι πολύ μικρός, επομένως θα περίμενε κανείς η δυναμική των αδρανειακών σωματιδίων να είναι πολύ κοντά σε αυτήν των ιδεατών σωματιδίων Lagrange. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται, καθώς από την εικόνα 4.1 είναι εμφανής η έντονη τάση ομαδοποίησης των αδρανειακών σωματιδίων. Η ομαδοποίηση είναι μια ιδιότητα που δεν χαρακτηρίζει τα ιδεατά σωματίδια

Κωδικός	$N$	$R_\lambda$	$R$	$L$	$\nu \times 10^3$	$\lambda$	$\eta \times 10^3$	$N_P \times 10^{-6}$	$St$
1	512	224	2055	1.39	0.38	0.15	5.17	134.2	0.1
2	512	224	2055	1.39	0.38	0.15	5.17	134.2	1.0
3	512	224	2055	1.39	0.38	0.15	5.17	134.2	10.0

Πίνακας 4.1: Παράμετροι αριθμητικών πειραμάτων.  $N$ : αριθμός κόμβων πλέγματος ανά χωρική διάσταση.  $R_\lambda$ : αριθμός Reynolds βασισμένος στην μικροκλίμακα Taylor.  $R$ : αριθμός Reynolds βασισμένος στην ολοκληρωτική κλίμακα μήκους.  $L$ : ολοκληρωτική κλίμακα μήκους.  $\nu$ : κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.  $\lambda$ : μικροκλίμακα Taylor.  $\eta$ : μικροκλίμακα Kolmogorov.  $N_P$ : αριθμός σωματιδίων.  $St$ : αριθμός Stokes.

Lagrange, καθώς σε αυτή την περίπτωση μια κατανομή σωματιδίων αρχικά ομοιόμορφη παραμένει ομοιόμορφη και στο μέλλον. Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό των δομών ομαδοποίησης που εμφανίζονται είναι ότι η χαρακτηριστική διάμετρος τους είναι τάξης μεγέθους ίσης με αυτήν της μικροκλίμακας Kolmogorov.

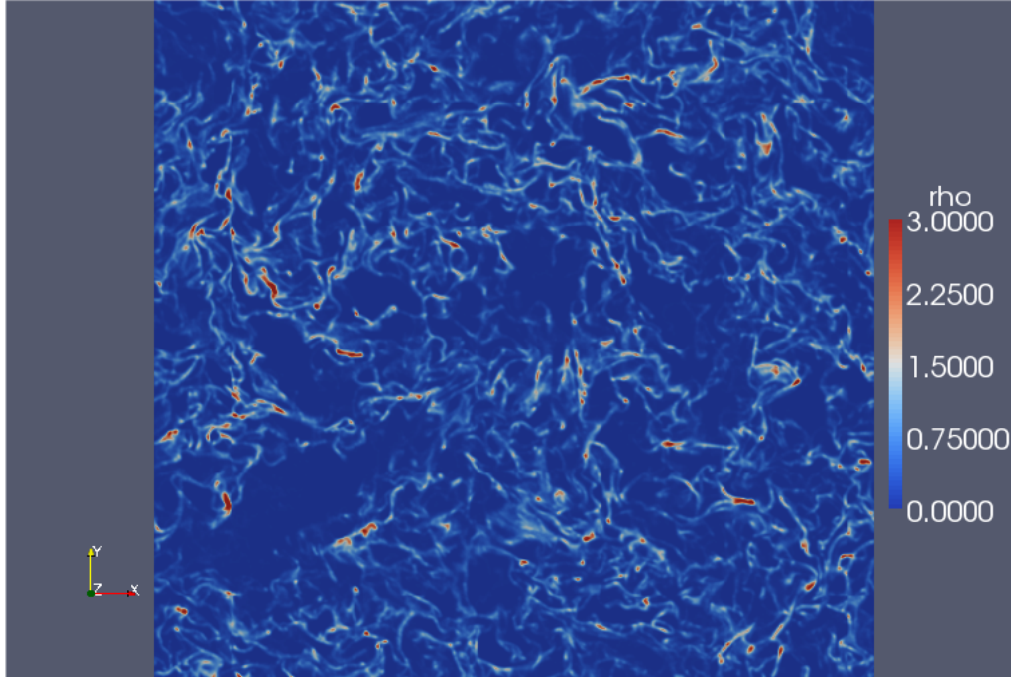


Σχήμα 4.1: Πυκνότητα σωματιδίων,  $St = 0.1$

Στην περίπτωση της εικόνας 4.2, έχουμε μια ενδιάμεση τιμή του αριθμού Stokes. Και πάλι παρατηρείται σχηματισμός δομών ομαδοποίησης σε τάξη μεγέθους μικροκλίμακας Kolmogorov, αν και αυτή την φορά οι δομές είναι κάπως ασθενέστερες. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.3, μπορούμε να πούμε ότι ο συγκεκριμένος αριθμός Stokes βρίσκεται κάτω από το κατώφλι της ομαδοποίησης, ενώ η εξασθένιση των δομών μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι βρίσκεται αρκετά κοντά σε αυτό.

Η εικόνα 4.3 παρουσιάζει μια πολύ σημαντική ποιοτική διαφορά. Εφόσον δεν παρατηρείται σημαντική παρουσία δομών ομαδοποίησης με χαρακτηριστικές διαμέτρους της τάξης της μικροκλίμακας Kolmogorov, ο συγκεκριμένος αριθμός Stokes βρίσκεται πάνω από το κατώφλι ομαδοποίησης. Αυτή





Σχήμα 4.2: Πυκνότητα σωματιδίων,  $St = 1.0$

τη φορά οι δομές ομαδοποίησης έχουν μεγαλύτερες χαρακτηριστικές διαμέτρους, οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα στην ολοκληρωτική κλίμακα  $L$  και την μικροκλίμακα Kolmogorov. Το φαινόμενο αυτό απαντάται στην βιβλιογραφία ως *inertial range clustering*. Μέχρι σήμερα δεν υπάρχει ικανοποιητική θεωρία περιγραφής ή πρόβλεψης του φαινομένου αυτού.

### 4.3 Ντετερμινιστική θεωρία ομαδοποίησης

Η εξίσωση (4.13) αποτελεί ένα μη-συντηρητικό δυναμικό σύστημα. Χρησιμοποιώντας εργαλεία από την θεωρία δυναμικών συστημάτων θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα τα γενικά χαρακτηριστικά της κίνησης αδρανειακών σωματιδίων, ακολουθώντας την εργασία του J. Bec [7]. Από αυτή την ανάλυση προκύπτει ότι τα αδρανειακά σωματίδια έχουν υπό προϋποθέσεις την τάση να συγκεντρώνονται σε ιδιόμορφα σύνολα μη-ακέραιας διάστασης.

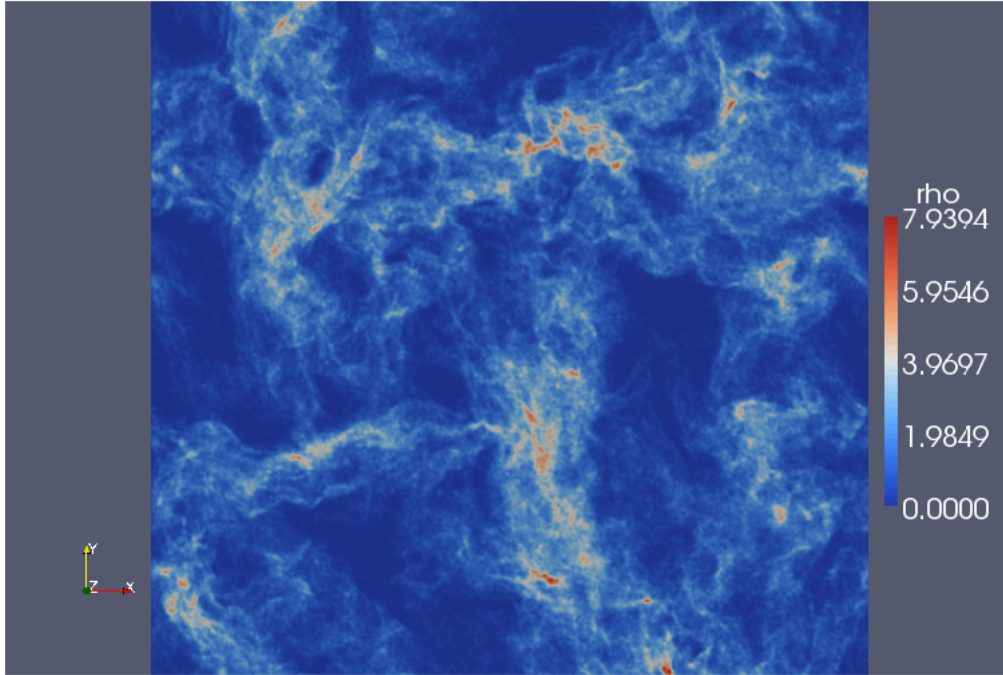
#### 4.3.1 Τοπική δυναμική ανάλυση

Η εξίσωση (4.13) περιγράφει την εξέλιξη ενός μη-αυτόνομου δυναμικού συστήματος σε έναν χώρο φάσεων διάστασης  $2d$ , όπου  $d = 2$  ή  $3$  η διάσταση του φυσικού χώρου όπου λαμβάνει χώρα η κίνηση. Για την περαιτέρω ανάλυση εξυπηρετεί η εισαγωγή της συνταχύτητας (covelocity)

$$\mathbf{V}_c(t) = \mathbf{V}(t) - \beta \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$$

Συναρτήσε της συνταχύτητας, η εξίσωση (4.14) γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \beta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}_c \\ \dot{\mathbf{V}}_c &= \frac{1}{St} [(1 - \beta) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}_c] \end{aligned} \quad (4.19)$$



Σχήμα 4.3: Πυκνότητα σωματιδίων,  $St = 10.0$

Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{V}_c(0) &= (1 - \beta)\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, 0) + \alpha\mathbf{w}_0\end{aligned}$$

όπου  $\alpha = W_0/U_0$  η παράμετρος σχετικής ταχύτητας και  $\mathbf{w}_0$  η αδιάστατη διαφορά ταχύτητας μεταξύ ρευστού και σωματιδίου την χρονική στιγμή  $t = 0$ .

Το δυναμικό σύστημα (4.19) είναι μη-αυτόνομο και μη-συντηρητικό με χώρο φάσεων διάστασης  $2d$ , όπου  $d = 2$  ή  $3$  η διάσταση του φυσικού χώρου όπου λαμβάνει χώρα η κίνηση. Πράγματι, η απόκλιση του  $2d$ -διάστατου διανύσματος του δεξιού μέλους της (4.19) ως προς τις μεταβλητές φάσης  $(\mathbf{X}, \mathbf{V}_c)$  είναι αρνητική

$$\nabla_{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_c)} \cdot \text{rhs} = -\frac{d}{St} \quad (4.20)$$

Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι κατά την χρονική εξέλιξη του δυναμικού συστήματος (4.19), κάθε στοιχείο όγκου στον χώρο των φάσεων συστέλλεται ομοιόμορφα.

Ο φυσικός μηχανισμός που ευθύνεται για το φαινόμενο της ομαδοποίησης μπορεί να αναδειχθεί μέσω της μελέτης της χρονικής εξέλιξης της απόστασης δύο γειτονικών σημείων στον χώρο των φάσεων

$$\mathbf{R} = (\delta\mathbf{X}, \delta\mathbf{V}_c)$$

Εφόσον η ακτίνα των αδρανειακών σωματιδίων είναι μικρότερη από την μικροκλίμακα Kolmogorov (4.15), μπορούμε να θεωρήσουμε το πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{u}$  ομαλό [33]. Στην περίπτωση αυτή, η κλίση του πεδίου ταχύτητας είναι φραγμένη και οι διαφορές στην τιμή της ταχύτητας μεταξύ δύο γειτονικών σημείων είναι ανάλογη της απόστασής τους. Συνεπώς η απόσταση  $\mathbf{R}(t)$  ικανοποιεί την ακόλουθη

εξίσωση, η οποία προκύπτει από γραμμικοποίηση της (4.19)

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathcal{M}_t \mathbf{R} \quad \mathcal{M}_t = \begin{bmatrix} \beta\sigma(t) & \mathcal{I}_d \\ \frac{1-\beta}{St}\sigma(t) & -\frac{1}{St}\mathcal{I}_d \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

όπου  $\sigma(t)$  ο ταυστής ρυθμού παραμόρφωσης της φέρουσας ροής,  $\sigma_{ij} = \partial u_i(\mathbf{X}(t), t)/\partial x_j$  και  $\mathcal{I}_d$  ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων  $d \times d$ .

Είναι δυνατόν να συμπεράνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της κίνησης των αδρανειακών σωματιδίων αναλύοντας την ευστάθεια του συστήματος (4.21). Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathcal{M}_t$  εξαρτώνται από την τοπική δομή της φέρουσας ροής. Πράγματι, εύκολα μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι ο πίνακας  $\mathcal{M}_t$  αποτελεί λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\mathcal{M}_t^2 + \left( \frac{1}{St}\mathcal{I}_{2d} - \beta\boldsymbol{\Sigma}_t \right) \mathcal{M}_t - \frac{1}{St}\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{0}_{2d} \quad (4.22)$$

όπου  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  είναι ο ακόλουθος πίνακας διάστασης  $2d \times 2d$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \begin{bmatrix} \sigma(t) & \mathbf{0}_d \\ \mathbf{0}_d & \sigma(t) \end{bmatrix}$$

και  $\mathbf{0}_d$  είναι ο μηδενικός πίνακας διάστασης  $d \times d$ . Επομένως σε κάθε ιδιοτιμή  $\gamma$  του ταυστή ρυθμού παραμόρφωσης  $\sigma(t)$  αντιστοιχούν δύο ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathcal{M}_t$ , οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + \left( \frac{1}{St} - \beta\gamma \right) x - \frac{1}{St} = 0 \quad (4.23)$$

Το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του πίνακα  $\mathcal{M}_t$  προσδιορίζει την ευστάθεια του συστήματος (4.21), συνεπώς αυτή εξαρτάται από την τοπική δομή της φέρουσας ροής μέσω των ιδιοτιμών του ταυστή ρυθμού παραμόρφωσης.

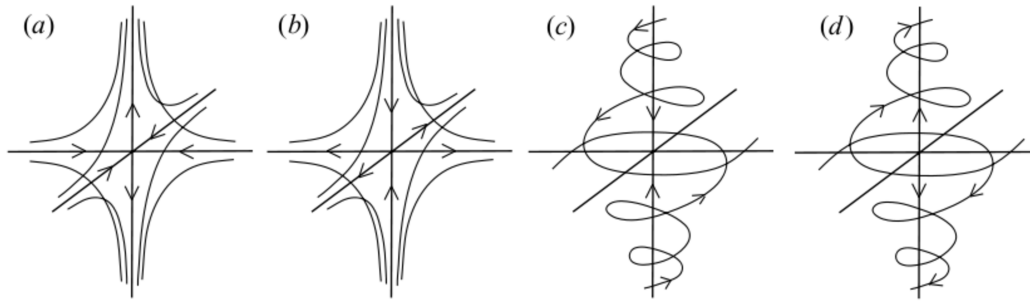
Ας εξετάσουμε τις συνέπειες αυτής της εξάρτησης στην περίπτωση που ο φυσικός χώρος που λαμβάνει χώρα η κίνηση των σωματιδίων είναι δισδιάστατος. Ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου Okubo–Weiss [57, 76],

$$Q = \det \sigma(t)$$

το χωρικό πεδίο ορισμού ενός δισδιάστατου πεδίου ταχύτητας ασυμπίεστου ρευστού χωρίζεται σε υπερβολικές περιοχές, όπου  $Q > 0$  και ο ταυστής ρυθμού παραμόρφωσης έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές και σε ελλειπτικές περιοχές, όπου  $Q < 0$  και οι δύο ιδιοτιμές του ταυστή ρυθμού παραμόρφωσης είναι φανταστικές. Οι υπερβολικές περιοχές χαρακτηρίζονται από υψηλές τιμές της στροβιλότητας, ενώ στις ελλειπτικές περιοχές επικρατεί η διάτμηση.

Από την εξίσωση (4.23) προκύπτει ότι στις υπερβολικές περιοχές ο πίνακας  $\mathcal{M}_t$  έχει τρεις ευσταθείς και μία ασταθή ιδιοδιεύθυνση στον τετραδιάστατο χώρο των φάσεων. Στις ελλειπτικές περιοχές, υπάρχουν δύο περιπτώσεις: αν  $\beta < 1$  (τα σωματίδια είναι πυκνότερα από το ρευστό), ο πίνακας  $\mathcal{M}_t$  έχει δύο ευσταθείς και δύο ασταθείς ιδιοδιευθύνσεις, ενώ αν  $\beta > 1$  (το ρευστό είναι πυκνότερο από τα σωματίδια) και οι τέσσερις διευθύνσεις είναι ευσταθείς. Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι στην περίπτωση κίνησης σε δύο διαστάσεις, τα βαριά σωματίδια αποφεύγουν τα κέντρα των δινών και τείνουν να συγκεντρωθούν στις περιοχές όπου επικρατεί η διάτμηση. Αντίθετα, τα ελαφριά σωματίδια τείνουν να συγκεντρωθούν στα κέντρα των δινών.

Όταν η κίνηση λαμβάνει χώρα σε τρεις διαστάσεις, υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές τοπικές δομές της φέρουσας ροής, οι οποίες φαίνονται σχηματικά στο σχήμα 4.4. Η διάκριση ανάμεσα σε ελλειπτικές και υπερβολικές περιοχές επεκτείνεται και στις τρεις διαστάσεις. Ελλειπτικές είναι οι περιοχές όπου υπάρχουν δύο συζηγείς μιγαδικές ιδιοτιμές ((c) και (d) στο σχήμα 4.4) ενώ υπερβολικές ονομάζονται οι περιοχές όπου όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές ((a) και (b) στο



Σχήμα 4.4: Τοπική δομή της φέρουσας ροής σε τρεις διαστάσεις. Διακρίνονται τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με την φύση των τριών ιδιοτιμών του ταυστή ρυθμού παραμόρφωσης  $\sigma_{ij}(t)$ : (a) Δύο είναι αρνητικές και μία θετική. (b) Δύο είναι θετικές και μία αρνητική. Δύο ιδιοτιμές είναι μιγαδικές συζυγείς ενώ η τρίτη είναι: (c) Αρνητική. (d) Θετική.

σχήμα 4.4). Όπως είναι φανερό από το σχήμα, και σε αυτή την περίπτωση στις ελλειπτικές περιοχές επικρατεί γενικά η στροβιλοειδής κίνηση, ενώ στις υπερβολικές επικρατεί η διάτμηση.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευστάθειας του συστήματος (4.21) συνοψίζονται ως εξής

- Υπερβολικές περιοχές (a,b): Η τοπική δυναμική των σωματιδίων έχει πέντε ευσταθείς και μία ασταθή ιδιοδιεύθυνση στην περίπτωση (a), και τέσσερις ευσταθείς και δύο ασταθείς ιδιοδιευθύνσεις στην περίπτωση (b).
- Ελλειπτικές περιοχές (c,d): Υπάρχει γενικά τουλάχιστον μία ασταθής ιδιοδιεύθυνση. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση (c) για ελαφριά σωματίδια ( $\beta > 1$ ): σε αυτή την περίπτωση και οι έξι ιδιοδιευθύνσεις είναι ευσταθείς.

Συνεπώς, η τρισδιάστατη περίπτωση είναι ποιοτικά όμοια με την δισδιάστατη, καθώς η τοπική ανάλυση συνιστά ότι σωματίδια ελαφρότερα από το φέρον ρευστό τείνουν να συγκεντρωθούν στις ελλειπτικές περιοχές (περιοχές στροβιλότητας), ενώ σωματίδια βαρύτερα από το φέρον ρευστό τείνουν να απομακρυνθούν από αυτές και επομένως να συγκεντρωθούν στις υπερβολικές περιοχές (περιοχές διάτμησης). Η παραπάνω ανάλυση είναι ικανή να αναπαράγει ένα ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό της κίνησης αδρανειακών σωματιδίων το οποίο παίζει κεντρικό ρόλο στην φαινομενολογική κατανόηση του φαινομένου της ομαδοποίησης. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τους Squires και Eaton [68], η εμφάνιση ανομοιογένειας στην χωρική συγκέντρωση των αδρανειακών σωματιδίων οφείλεται στην παρουσία οργανωμένων δομών στροβιλότητας στην φέρουσα ροή. Οι τελευταίες είναι υπεύθυνες για την ντετερμινιστική κίνηση των σωματιδίων κατά την οποία η αδράνεια που τα χαρακτηρίζει επηρεάζει την σχετική τους κίνηση ως προς την φέρουσα ροή. Παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι τα βαρέα σωματίδια απωθούνται εκτός των δινών ενώ τα ελαφρά τείνουν να συγκεντρωθούν στα κέντρα τους, όπως ακριβώς προβλέπει η παραπάνω τοπική ανάλυση ευστάθειας.

### 4.3.2 Μη-συντηρητική δυναμική

Στην προηγούμενη χρησιμοποιώντας τοπική ανάλυση ευστάθειας καταλήξαμε σε έναν χαρακτηρισμό των μηχανισμών που διαμορφώνουν το αρχικό στάδιο της διαδικασίας ομαδοποίησης. Πέρα από το στάδιο αυτό, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ανομοιογενειών της χωρικής συγκέντρωσης των σωματιδίων υπαγορεύονται από τον μη-συντηρητικό χαρακτήρα της δυναμικής.

Η χρονική εξέλιξη της απόστασης  $\mathbf{R}(t)$  μεταξύ δύο απειροστά κοντινών σημείων στον χώρο των φάσεων μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης Green  $\mathcal{J}_t$  του γραμμικοποιημένου συστήματος

(4.21)

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{J}_t \mathbf{R}(0), \quad \mathcal{J}_t = \mathcal{T} \exp \int_0^t \mathcal{M}_\tau d\tau \quad (4.24)$$

όπου  $\mathcal{T} \exp$  είναι το χρονολογικό εκθετικό πινάκων, το οποίο ορίζεται ως

$$\mathcal{T} \exp \int_0^t \mathbf{A}_\tau d\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \exp(\varepsilon \mathbf{A}_{t_N}) \exp(\varepsilon \mathbf{A}_{t_{N-1}}) \cdots \exp(\varepsilon \mathbf{A}_{t_0}) \}, \quad t_j = j\varepsilon, j = 0, \dots, N, \varepsilon = \frac{t}{N}$$

Ο πίνακας  $\mathcal{J}_t^T \mathcal{J}_t$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, επομένως οι ιδιοτιμές του  $\nu_j(t)$  μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$\nu_j = e^{2\mu_j(t)t}, \quad j = 1, \dots, 2d, \mu_j(t) \in \mathbb{R}$$

Οι συναρτήσεις  $\mu_j(t)$  αποτελούν τους εκθέτες Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (finite-time Lyapunov exponents) και γενικά διατάσσονται σε μη-φθίνουσα σειρά  $\mu_1(t) \geq \mu_2(t) \dots \geq \mu_{2d}(t)$ . Αποτελούν μέτρο της χρονικής εξέλιξης απειροστών στοιχείων όγκου στον χώρο των φάσεων. Ο εκθέτης  $\mu_1$  εκφράζει την εκθετικό ρυθμό αύξησης της απόστασης μεταξύ δύο απειροστά κοντινών σημείων, το άθροισμα εκθετών  $\mu_1 + \mu_2$  τον αντίστοιχο ρυθμό αύξησης της τριγωνικής επιφάνειας που ορίζεται από τροχιές οι οποίες ξεκινούν από τρία απειροστά κοντινά σημεία, και ούτω καθεξής. Το άθροισμα των  $2d$  εκθετών  $\mu_j$  ελέγχει την χρονική εξέλιξη των  $2d$ -διάστατων στοιχείων όγκου στον χώρο των φάσεων, και εκφράζεται συναρτήσει του ίχνους του πίνακα Green  $\mathcal{J}_t$  [11]. Μπορεί κανείς να δείξει [7] ότι

$$\sum_{j=1}^{2d} \mu_j = -\frac{d}{St}$$

σε συμφωνία με την σχέση (4.20).

Η τοπική δυναμική σε μεγάλους χρόνους προσδιορίζεται από την σύγκλιση των εκθετών πεπερασμένου χρόνου  $\mu_j(t)$  στους κλασσικούς εκθέτες Lyapunov

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_j(t)$$

σύμφωνα με το πολλαπλασιαστικό εργοδικό θεώρημα του Oseledets [59, 11]. Το θεώρημα αυτό εγγυάται την σύγκλιση σε εκθέτες Lyapunov ανεξάρτητους τόσο από την συγκεκριμένη δειγματική περίπτωση της στοχαστικής φέρουσας ροής όσο και από την συγκεκριμένη τροχιά  $\mathbf{X}(t)$  γύρω από την οποία γίνεται η γραμμικοποίηση, υπό την προϋπόθεσή ότι η δυναμική του συστήματος χαρακτηρίζεται από εργοδικότητα [23].

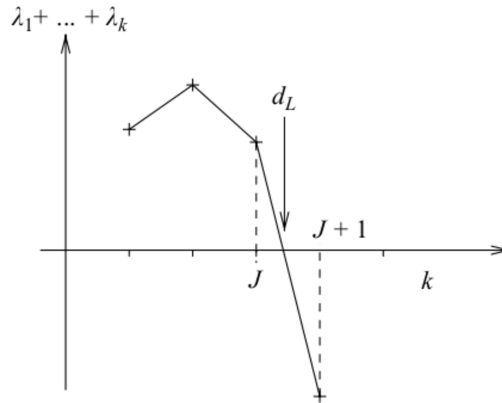
Οι εκθέτες Lyapunov συνδέονται άμεσα με πολλά θεμελιώδη χαρακτηριστικά της δυναμικής του συστήματος. Για παράδειγμα, όταν ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov  $\lambda_1$  είναι αρνητικός, η ευστάθεια του συστήματος είναι εγγυημένη και όλες οι τροχιές συγκλίνουν μεταξύ τους. Αυτό οδηγεί σε μια κάπως εκφυλισμένη στατιστικά στάσιμη κατάσταση όπου όλα τα σωματίδια συγκεντρώνονται σε διακριτά σημεία του χώρου, η θέση των οποίων εξαρτάται γενικά από τον χρόνο. Όταν όμως ο μέγιστος εκθέτης είναι θετικός, η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη. Η δυναμική του συστήματος γίνεται χαοτική, εμφανίζοντας ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Η ευστάθεια είναι εγγυημένη μόνο αν το αρχικό διάνυσμα απόστασης  $\mathbf{R}(0)$  είναι ορθογώνιο στον υπόχωρο που ορίζουν οι ιδιοδιευθύνσεις που αντιστοιχούν σε θετικούς εκθέτες Lyapunov [23].

Όταν  $\lambda_1 > 0$ , η ασυμπτωτική δυναμική παρουσιάζει πλουσιότερα χαρακτηριστικά, τα οποία προκύπτουν από την σύγκλιση των τροχιών των σωματιδίων σε πολύπλοκες δυναμικές δομές οι οποίες ονομάζονται ελκυστές (βλέπε υποενότητα 2.2.2). Στην παρούσα περίπτωση οι ελκυστές αποτελούν εν γένει δυναμικά εξελισσόμενα σύνολα κλασματικής διάστασης, ενώ έχουν στοχαστική φύση λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα της φέρουσας ροής. Γενικά χαρακτηρίζονται από την διάσταση Hausdorff  $d_H$ , η οποία σε μη-παθολογικές περιπτώσεις συμπίπτει με την διάσταση Minkowski–Bouligand

(2.16). Από φυσική άποψη, η εμφάνιση ελκυστών μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα συναγωνισμού μεταξύ φαινομένων διαστολής και συστολής του στοιχείου όγκου του χώρου των φάσεων ως προς ορθογώνιες διευθύνσεις, ακολουθώντας την ροή του δυναμικού συστήματος. Συνεπώς οι γεωμετρικές ιδιότητες των ελκυστών είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τους εκθέτες Lyapunov. Οι θετικοί εκθέτες  $\mu_j$  είναι υπεύθυνοι για την διαστολή ως προς τις αντίστοιχες ιδιοδιευθύνσεις, ενώ οι αρνητικοί οδηγούν σε συστολή ως προς άλλες και επομένως σε 'δίπλωμα' (folding). Ακολουθώντας αυτόν τον συλλογισμό, οι Kaplan και Yorke [45] πρότειναν την εκτίμηση της διάστασης Hausdorff του ελκυστή από την διάσταση Lyapunov, η οποία ορίζεται ως

$$d_L = J - \frac{\sum_{i=1}^J \lambda_i}{\lambda_{J+1}}, \quad \sum_{i=1}^J \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{J+1} \lambda_i < 0 \quad (4.25)$$

Ο αριθμός αυτός μπορεί να ερμηνευθεί ως η διάσταση εκείνων των στοιχείων του χώρου των φάσεων των οποίων ο όγκος παραμένει σταθερός κατά την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι το άθροισμα των  $n$  μεγαλύτερων εκθετών Lyapunov ισούται με τον εκθετικό ρυθμό μεταβολής του  $n$ -διάστατου στοιχείου όγκου. Η διάσταση Lyapunov  $d_L$  προκύπτει από γραμμική παρεμβολή του παραπάνω αθροίσματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5. Οι Douady και



Σχήμα 4.5: Η διάσταση Lyapunov  $d_L$  προκύπτει από γραμμική παρεμβολή του εκθετικού ρυθμού μεταβολής του όγκου ενός  $k$ -διάστατου στοιχείου του χώρου των φάσεων.

Oesterle [21] έδειξαν ότι η διάσταση Lyapunov αποτελεί αυστηρό άνω όριο για την διάσταση Hausdorff του ελκυστή.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ασυμπτωτική ( $t \rightarrow \infty$ ) δυναμική των αδρανειακών σωματιδίων χαρακτηρίζεται από την σύγκλισή τους σε ελκυστές, οι οποίοι είναι εν γένει υποσύνολα του χώρου των φάσεων με κλασματική διάσταση. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι οι ανομοιογένειες που παρατηρούνται στην χωρική κατανομή της συγκέντρωσης των σωματιδίων είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την γεωμετρική δομή των ελκυστών, ή ακριβέστερα με την γεωμετρική δομή των συνόλων που προκύπτουν μετά από προβολή των ελκυστών από τον χώρο των φάσεων διάστασης  $2d$  στον φυσικό χώρο διάστασης  $d$ .

Σύμφωνα με την θεωρία συνόλων κλασματικής διάστασης [27], όταν η διάσταση Hausdorff  $d_H$  του ελκυστή είναι μικρότερη από την διάσταση του χώρου πάνω στον οποίο γίνεται η προβολή (σε αυτή την περίπτωση  $d$ ), η διάσταση της προβολής παραμένει ίση με  $d_H$ . Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ομαδοποίηση, καθώς στον φυσικό χώρο τα σωματίδια τείνουν να συγκεντρωθούν σε ένα σύνολο με διάσταση  $d_H < d$ . Στην περίπτωση όμως που ισχύει  $d_H > d$ , η προβολή έχει διάσταση  $d$ , και τα σωματίδια εμφανίζουν ομοιογενή χωρική κατανομή.

Χρησιμοποιώντας την διάσταση Lyapunov  $d_L$  ως αυστηρό άνω όριο για την διάσταση Hausdorff  $d_H$ , παρατηρούμε ότι η συνθήκη  $d_L < d$  αποτελεί ικανή συνθήκη για την σύγκλιση των σωματιδίων σε υποσύνολο του φυσικού χώρου με κλασματική διάσταση. Σύμφωνα με τον ορισμό της διάστασης Lyapunov (4.25), η τελευταία συνθήκη γράφεται

$$\sum_{j=1}^d \lambda_j < 0$$

Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του πρόσημου του αθροίσματος των  $d$  μεγαλύτερων εκθετών Lyapunov. Η απάντηση απαιτεί στην γενική περίπτωση αριθμητική επίλυση του συστήματος (4.21) και ακολούθως εκτίμηση των εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου.

### 4.3.3 Η περίπτωση κίνησης σε δύο διαστάσεις

Όταν ο φυσικός χώρος είναι διδιάστατος. ( $d = 2$ ) και τα σωματίδια είναι βαρύτερα από το φέρον ρευστό ( $\beta < 1$ ), είναι δυνατόν να προβλέψει κανείς την παρουσία ενός ανώτερου ορίου για τον αριθμό Stokes, πέρα από το οποίο δεν παρατηρείται ομαδοποίηση. Προκειμένου να εκτιμήσουμε το άθροισμα των  $d$  μεγαλύτερων εκθετών Lyapunov, θεωρούμε τους βοηθητικούς εκθέτες  $\kappa_j$  οι οποίοι ορίζονται ως

$$\kappa_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \alpha_j(t) \quad (4.26)$$

όπου  $\alpha_j(t)$  είναι οι, μιγαδικές εν γένει, ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathcal{J}_t$  που ορίστηκε στην (4.24). Θα αποκαλούμε τους εκθέτες  $\kappa_j$  εκθέτες ευστάθειας. Αν και δεν υπάρχει το αντίστοιχο του πολλαπλασιαστικού εργοδικού θεωρήματος του Oseledec για τους μιγαδικούς αυτούς εκθέτες, υπάρχουν ενδείξεις ότι το όριο (4.26) υπάρχει και μάλιστα δεν εξαρτάται ούτε από την δειγματική συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το στοχαστικό πεδίο ροής, ούτε από την τροχιά γύρω από την οποία γίνεται η γραμμικοποίηση [37]. Γενικά τα πραγματικά μέρη των εκθετών ευστάθειας διαφέρουν από τους κλασσικούς εκθέτες Lyapunov, αλλά μπορεί κανείς να εξάγει ανισότητες μεταξύ των δύο αυτών συνόλων εκθετών χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Browne [53]. Παρακάτω θα χρειαστούμε επίσης τους εκθέτες διάτμησης  $\eta_j$ , οι οποίοι ορίζονται ως εξής

$$\eta_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta_j(t)$$

όπου  $\beta_j$  οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \exp \int_0^t \sigma(\tau) d\tau$$

διάστασης  $d \times d$ .

Ας επικεντρωθούμε τώρα στην περίπτωση κίνησης βαρέων ( $\beta < 1$ ) αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε διδιάστατο πεδίο ροής. Σύμφωνα με την παραπάνω τοπική ανάλυση (υποενότητα 4.3.1), τα βαριά σωματίδια τείνουν να συγκεντρωθούν στις υπερβολικές περιοχές όπου η στροβιλότητα επικρατεί επί της διάτμησης. Οι ιδιοτιμές που χαρακτηρίζουν την τοπική δυναμική των αδρανειακών σωματιδίων εκφράζονται συναρτήσει των ιδιοτιμών του ταυυστή ρυθμού παραμόρφωσης μέσω της σχέσης (4.22).

Υποθέτουμε ότι η ίδια δευτεροβάθμια σχέση μας επιτρέπει να εκφράσουμε, έστω προσεγγιστικά μόνο, τους εκθέτες ευστάθειας  $\kappa_j$  συναρτήσει των εκθετών διάτμησης  $\eta_j$ <sup>1</sup>. Εφόσον τα σωματίδια

<sup>1</sup>Η υπόθεση αυτή θα ήταν ακριβής αν μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τα χρονολογικά εκθετικά με κανονικά εκθετικά πινάκων. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν ισχύει παρά μόνο για  $d = 1$ , επομένως η σχέση είναι προσεγγιστική.

τείνουν να συγκεντρωθούν σε υπερβολικές περιοχές, οι ιδιοτιμές  $\eta_j$  μπορούν να θεωρηθούν πραγματικοί αριθμοί. Για κίνηση σε δύο διαστάσεις, υπάρχουν μόνο δύο εκθέτες διάτμησης, οι οποίες λόγω της εξίσωσης συνέχειας έχουν μηδενικό άθροισμα.

$$\eta_1 = \eta \quad \eta_2 = -\eta$$

Με αυτές της υποθέσεις, η σχέση (4.22) δίνει την ακόλουθη ικανή συνθήκη για εμφάνιση ομαδοποίησης

$$St \leq \frac{1}{\beta^2 \eta} (\beta - 2 + 2\sqrt{1 - \beta - \beta^2}) \quad (4.27)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο εκθέτης διάτμησης  $\eta$  υπολογίζεται ακολουθώντας την τροχιά του αδρανειακού σωματιδίου και όχι την τροχιά του λαγκρανζιανού στοιχείου ρευστού. Εφόσον τα βαρέα σωματίδια παραμένουν στις υπερβολικές περιοχές του πεδίου ροής για μακρά χρονικά διαστήματα, ο εκθέτης διάτμησης  $\eta$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$\eta \geq \lambda_f \frac{L}{U}$$

όπου  $\lambda_f$  ο, μοναδικός εφόσον βρισκόμαστε σε δύο διαστάσεις, θετικός εκθέτης Lyapunov που χαρακτηρίζει την δυναμική του σωματιδίου και  $L, U$  χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους και ταχύτητας της φέρουσας ροής. Επομένως η συνθήκη (4.28) γράφεται

$$St \leq \frac{U}{\beta^2 \lambda_f L} (\beta - 2 + 2\sqrt{1 - \beta + \beta^2}) \quad (4.28)$$

Η τελευταία συνθήκη, αν και εξήχθη μέσω ευρετικών συλλογισμών, υποδεικνύει ότι το φαινόμενο της ομαδοποίησης παρατηρείται ήδη σε μικρούς αριθμούς Stokes, παρόλο που στην περίπτωση αυτή η συνεκτική οπισθέλκουσα Stokes είναι πολύ ισχυρή και επομένως η τροχιές των αδρανειακών σωματιδίων παραμένουν πολύ κοντά στις αντίστοιχες των λαγκρανζιανών ιδεατών σωματιδίων. Η παρατήρηση αυτή είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα των Balkovsky, Falkovich και Fouillon [2, 3], βλέπε επόμενη ενότητα.

Η ανισότητα (4.28) προβλέπει επίσης ότι για τιμές του αριθμού Stokes αρκετά μεγάλες, δεν παρατηρείται ομαδοποίηση. Η μορφή του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.19) δείχνει ότι όσο αυξάνει ο αριθμός Stokes, τόσο μειώνεται η επιρροή της φέρουσας ροής στην κίνηση των αδρανειακών σωματιδίων. Στο όριο  $St \rightarrow \infty$  η κίνησή τους γίνεται αμιγώς βαλλιστική και επομένως η κατανομή του στον χώρο παραμένει ομοιόμορφη, σε συμφωνία με την ανισότητα (4.28).

Εφαρμογή του παραπάνω συλλογισμού στην περίπτωση ελαφριών ( $\beta > 1$ ) αδρανειακών σωματιδίων, στον οποίων η δυναμική κυριαρχούν οι υπερβολικές περιοχές του πεδίου ροής, προβλέπει συγκέντρωση στα κέντρα των δινών (ομαδοποίηση σε σύνολα διάστασης  $d_H = 0$ ). Αριθμητικές προσομοιώσεις ωστόσο δείχνουν ότι αυτό συμβαίνει μόνο για κάποια διαστήματα των τιμών των παραμέτρων  $\beta, St$ , ενώ για άλλα παρατηρείται είτε ομαδοποίηση σε σύνολα κλασματικής διάστασης, είτε ομοιογενής κατανομή στον χώρο. Η ασυμφωνία αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι ο ταχυστής ρυθμού παραμόρφωσης έχει μιγαδικές ιδιοτιμές στις υπερβολικές περιοχές, και επομένως η εκτίμηση των εκθετών ευστάθειας δεν είναι έγκυρη.

## 4.4 Στατιστική θεωρία ομαδοποίησης

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το πεδίο συγκέντρωσης αδρανειακών σωματιδίων μέσα σε ισότροπη τυρβώδη ροή ως στοχαστικό πεδίο, ακολουθώντας τους Balkovsky, Falkovich και Fouillon [2, 3]. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρονική εξέλιξη των ροπών του πεδίου συγκέντρωσης, η οποία υποδεικνύει ότι η δυναμική των αδρανειακών σωματιδίων οδηγεί σε ομαδοποίηση, σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της ντετερμινιστικής ανάλυσης της προηγούμενης ενότητας.



#### 4.4.1 Εκθετική αύξηση των ροπών της συγκέντρωσης

Στην εξίσωση κίνησης (4.13), η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα για την παράγωγο στο δεξί μέλος υπαγορεύεται από τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής. Στην περίπτωση ισότροπης τύρβης η σχετική κλίμακα είναι η μικροκλίμακα Kolmogorov

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\eta^2}{\nu}$$

Εφόσον  $a/\eta \ll 1$ ,  $\tau_p/\tau_\eta = O(a^2/\eta^2) \ll 1$ . Η τελευταία σχέση προσφέρει μια μικρή παράμετρο βάσει της οποίας η εξίσωση (4.13) μπορεί να λυθεί διαταρακτικά. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης η εξίσωση κίνησης δίνει  $|\Delta \mathbf{V}| \gg |\mathbf{V} - \mathbf{u}|$ , δηλαδή ο χρόνος χαλάρωσης του σωματιδίου  $\tau_p$  είναι τόσο μικρότερος από την μικροκλίμακα Kolmogorov  $\tau_\eta$  που το σωματίδιο προσαρμόζεται ακαριαία στις μεταβολές του πεδίου ροής. Αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση του σωματιδίου  $d\mathbf{V}/dt$  μπορεί να θεωρηθεί ίση με την επιτάχυνση του ρευστού  $D\mathbf{u}/Dt$  και συνεπώς η λύση της (4.13) γράφεται

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{u} + (\beta - 1)\tau_p \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

Θεωρούμε συνεχή κατανομή αδρανειακών σωματιδίων η οποία χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση συγκέντρωσης  $n(\mathbf{x}, t)$ , η οποία εκφράζει τον αριθμό σωματιδίων ανά μονάδα όγκου και το πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Σύμφωνα με την τελευταία σχέση το πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{v}$  σχετίζεται με το πεδίο  $\mathbf{u}$  μέσω της σχέσης

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\beta - 1)\tau_p \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right)$$

Παίρνοντας την απόκλιση του πεδίου  $\mathbf{v}$  και λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση συνέχειας,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = (\beta - 1)\tau_p \nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \neq 0$$

προκύπτει ότι το πεδίο ταχύτητας των αδρανειακών σωματιδίων χαρακτηρίζεται από συμπίεστικότητα. Το γεγονός αυτό έχει σημαντικές συνέπειες στις στατιστικές ιδιότητες του πεδίου συγκέντρωσης.

Εκτός από την απόκριση στο μακροσκοπικό πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{u}$ , τα αδρανειακά σωματίδια λόγω του μικρού μεγέθους τους συμμετέχουν παράλληλα σε κίνηση Brown, η οποία είναι αποτέλεσμα των κρούσεων με τα μόρια του ρευστού. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι η συγκέντρωση  $n(\mathbf{x}, t)$  ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση μεταφοράς-διάχυσης

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}n) - \kappa \nabla^2 n = 0$$

όπου ο τελευταίος όρος εκφράζει την διάχυση λόγω κίνησης Brown.

Σύμφωνα με την θεωρία της ροής Stokes, το κάθε σωματίδιο παράγει ένα πεδίο διαταραχής το οποίο φθίνει αντίστροφα με την απόσταση από το σωματίδιο [4]

$$u'(r) \propto \frac{a}{r}$$

Για να είναι το πεδίο διαταραχής αμελητέο, πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη

$$\int_0^\infty \frac{an(r)}{r} d^3\mathbf{r} \simeq \int_0^\eta \frac{an(r)}{r} d^3\mathbf{r} \simeq a\eta^2 n \ll 1$$

όπου  $n$  αντιπροσωπευτική τιμή της συγκέντρωσης. Η συνθήκη αυτή είναι πιο περιοριστική από την συνθήκη  $na^3 \ll 1$ , η οποία προκύπτει από την απαίτηση μέσης απόστασης  $n^{-\frac{1}{3}}$  πολύ μεγαλύτερης από την ακτίνα, αγνοώντας το πεδίο διαταραχής. Αν η συνθήκη  $\langle n \rangle a\eta^2 \ll 1$  ικανοποιείται, το πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{v}$  είναι ανεξάρτητο από την συγκέντρωση  $n$ .

Όταν το πεδίο ροής  $\mathbf{u}$  χαρακτηρίζεται από στατιστική στασιμότητα, το πεδίο  $\mathbf{v}$  πρέπει να θεωρηθεί ως στοχαστικό πεδίο με στάσιμες στατιστικές ιδιότητες. Η εξέλιξη μιας αυθαίρετης αρχικής συνάρτησης συγκέντρωσης σύμφωνα με την εξίσωση (4.4.1) οδηγεί σε μια σταθερή στο χρόνο κατάσταση της συνάρτησης συγκέντρωσης. Αναλύοντας την αρχική συνθήκη

$$n(\mathbf{x}, 0) = n_0 + \delta n(\mathbf{x}), \quad n_0 = \frac{1}{V} \int_V n(\mathbf{x}, 0) d^3 \mathbf{x}$$

και εισάγοντας την συνάρτηση Green της εξίσωσης (4.4.1), η λύση γράφεται

$$n(\mathbf{x}, t) = n_0 \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) d^3 \mathbf{x}' + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \delta n(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

Αν αγνοήσουμε την επίδραση της διάχυσης ( $\kappa = 0$ ), ο φορέας της συνάρτησης Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  ως προς την μεταβλητή  $\mathbf{x}'$  είναι η λαγκρανζιανή τροχιά η οποία περνά από το σημείο  $\mathbf{x}$  την χρονική στιγμή  $t$ . Για  $\kappa \neq 0$ , λόγω της διάχυσης η συνάρτηση Green είναι μη-μηδενική σε μια περιοχή γύρω από την λαγκρανζιανή τροχιά. Με την πάροδο του χρόνου η περιοχή αυτή αυξάνει υπό την συνδυασμένη επίδραση διάχυσης και μεταφοράς. Όσο παραμένει μικρότερη από το χαρακτηριστικό μήκος συσχέτισης της διαταραχής, η διαταραχή  $\delta n(\mathbf{x}')$  μπορεί να περάσει έξω από το ολοκλήρωμα, και έτσι οι στατιστικές ιδιότητες της συγκέντρωσης εξαρτώνται από τον λόγο  $\delta n/n_0$ .

Σε μεγαλύτερους χρόνους ο φορέας της συνάρτησης Green γίνεται πολύ μεγαλύτερος από το χαρακτηριστικό μήκος συσχέτισης της διαταραχής, με αποτέλεσμα το δεύτερο ολοκλήρωμα να αποτελεί άθροισμα όρων μη-συσχετισμένων οι οποίοι σε μεγάλο βαθμό αλληλοαναιρούνται. Στην περίπτωση αυτή οι στατιστικές ιδιότητες της συγκέντρωσης προκύπτουν από τον πρώτο όρο, συνεπώς οι αρχικές ανομοιογένειες της συγκέντρωσης δεν συνεισφέρουν στην στάσιμη κατάσταση. Για τον λόγο αυτό θα θεωρήσουμε παρακάτω ομοιόμορφη αρχική συνθήκη για την συγκέντρωση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι  $n_0 = 1$ .

Η διάχυση λόγω κίνησης Brown οδηγεί στην πλειοψηφία των περιπτώσεων σε συντελεστή διάχυσης  $\kappa \ll \nu$ . Διαισθητικά περιμένει κανείς ότι η διάχυση δεν παίζει καθοριστικό ρόλο μέχρι η κλίση του πεδίου ταχύτητας να δημιουργήσει αρκετά μικρές δομές ανομοιογένειας. Η περίπτωση όπου η επίδραση της διάχυσης μπορεί να αγνοηθεί καλείται ιδεατή περίπτωση.

Για να υπολογίσει κανείς την τιμή της συγκέντρωσης σε ένα σημείο, έστω  $n(\mathbf{x}_1, t_1)$  είναι απαραίτητο να καταμετρήσει όλα τα σωματίδια τα οποία καταλήγουν σε έναν μικρό όγκο (αλλά αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει επαρκή αριθμό σωματιδίων) γύρω από το σημείο  $(\mathbf{x}_1, t_1)$ , και ύστερα διαιρέσει το πλήθος τους με τον όγκο αυτό. Για τον σκοπό αυτό πρέπει να ακολουθηθεί τις τροχιές όλων των σωματιδίων προς τα πίσω στο χρόνο μέχρι την στιγμή  $t = 0$ , λαμβάνοντας υπόψιν ότι τα σωματίδια εκτελούν συνδυασμένη λαγκρανζιανή κίνηση και κίνηση Brown.

Λόγω της κίνησης Brown, η χαρακτηριστική διάσταση του όγκου που καταλαμβάνουν τα σωματίδια αυξάνει σύμφωνα με την σχέση  $l^2(t) = \kappa(t_1 - t)$ . Η κλίση του πεδίου ταχύτητας  $\lambda$  εισάγει έναν δεύτερο ανεξάρτητο μηχανισμό μεταβολής της χαρακτηριστικής διάστασης σύμφωνα με την σχέση  $\dot{l}(t) = \lambda l(t)$ , ο οποίος επικρατεί επί της διάχυσης για  $l \gtrsim \eta_d = \sqrt{\kappa/\lambda}$ . Συνήθως ο αριθμός Schmidt  $\nu/\kappa$  είναι πολύ μεγάλος, επομένως η κλίμακα διάχυσης  $\eta_d$  είναι πολύ μικρότερη από την μικροκλίμακα Kolmogorov  $\eta \sim \sqrt{\nu/\lambda}$ .

Καθώς ακολουθεί κανείς τα σωματίδια προς τα πίσω στο χρόνο, η επίδραση της διάχυσης γίνεται όλο και μικρότερη. Υπό την επίδραση της κλίσης της ταχύτητας, ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει η χαρακτηριστική κλίμακα  $l(t)$  την κλίμακα διάχυσης  $\eta_d$  είναι  $O(1/\lambda)$ . Σε χρόνους μεγαλύτερους από αυτόν, ο ρόλος της διάχυσης είναι η δημιουργία ενός όγκου χαρακτηριστικής διάστασης  $\eta_d$ , μέσα στον οποίο είναι αδύνατον να ξεχωρίσουμε τα σωματίδια λόγω της αβεβαιότητας που προκύπτει από την κίνηση Brown. Με αυτό τον τρόπο, η διάχυση εισάγει την μικρότερη κλίμακα του προβλήματος.

Στην ιδεατή περίπτωση, πρέπει κανείς να ακολουθήσει τα σωματίδια που βρίσκονται σε έναν απειροστό όγκο, αλλά στην περίπτωση μη-μηδενικού συντελεστή διάχυσης ο όγκος αυτός δεν μπορεί να είναι μικρότερος από  $\eta_d^3$ . μικρότερη Η ελάχιστη κλίμακα χονδροποίησης (coarse-graining) του προβλήματος είναι η μέση απόσταση μεταξύ των σωματιδίων,  $n^{-1/3}$ . Επειδή η κλίμακα διάχυσης  $\eta_d$  μπορεί να είναι μικρότερη από αυτήν, επαναορίζουμε την κλίμακα  $\eta_d$  ως την μέγιστη εκ των  $\sqrt{\kappa/\lambda}$ ,  $n^{-1/3}$ .

Συνοψίζοντας, η συγκέντρωση  $n(\mathbf{x}_1, t_1)$  υπολογίζεται επιλέγοντας έναν όγκο με χαρακτηριστική διάσταση  $\eta_d$  γύρω από το σημείο  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  και, εφόσον  $n(\mathbf{x}, 0) = 1$ , υπολογίζοντας την σχετική μεταβολή του όγκου αυτού πηγαινόντας προς τα πίσω στο χρόνο. Σημειώνουμε ότι σε ένα στοχαστικό πεδίο ροής η κλίση της ταχύτητας  $\lambda$  και συνεπώς η κλίμακα διάχυσης  $\eta_d$  αποτελούν ποσότητες που παρουσιάζουν διακυμάνσεις. Θα αγνοήσουμε τις διακυμάνσεις αυτές καθώς δεν επηρεάζουν την σχέση της συγκέντρωσης με τις βασικές παραμέτρους, δηλαδή τον χρόνο στην μη-μόνιμη κατάσταση και τους αριθμούς Reynolds και Schmidt στην μόνιμη κατάσταση [13].

Για χρόνους  $t \lesssim \lambda^{-1} \ln(\eta/\eta_d)$  η χαρακτηριστική διάσταση του  $\eta_d$ -όγκου (δηλαδή του όγκου που την χρονική στιγμή  $t = t_1$  απεικονίζεται σε όγκο διάστασης  $\eta_d$  γύρω από το σημείο  $\mathbf{x}_1$ ) παραμένει μικρότερη από την κλίμακα  $\eta$ . Αυτό σημαίνει ότι η εξέλιξη λαμβάνει χώρα σε πεδίο ταχύτητας με ομοιόμορφη κλίση. Η σχετική μεταβολή του όγκου είναι η ίδια με αυτή ενός απειροστού όγκου, επομένως η συγκέντρωση συμπεριφέρεται όπως στην ιδεατή περίπτωση.

Περνώντας σε περιγραφή κατά Lagrange, η εξίσωση (4.4.1) γράφεται πλέον ως συνήθης διαφορική εξίσωση

$$\frac{dn}{dt} = -n(\nabla \cdot \mathbf{v})|_{\mathbf{Y}(t)}$$

όπου η παράγωγος στο αριστερό μέλος λαμβάνεται ακολουθώντας την τροχιά του σωματιδίου. Το δεξί μέλος είναι στοχαστική συνάρτηση του χρόνου. Εάν το πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{u}$  χαρακτηρίζεται από πεπερασμένους χρόνους συσχέτισης, το ίδιο ισχύει γενικά και για την ποσότητα  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})$ . Έστω  $\tau$  ο αυτός ο χρόνος συσχέτισης. Για  $t \gg \tau$ , ο λογάριθμος της συγκέντρωσης

$$X(t) = \ln \left( \frac{n(t)}{n(0)} \right) = - \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{v} dt'$$

μπορεί να προσεγγιστεί από άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού τυχαίων μεταβλητών. Σύμφωνα με το θεώρημα των μεγάλων αποκλίσεων (large deviations theorem) [24], η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει την μορφή

$$\mathcal{P}(X) \propto \exp \left( -ts \left( \frac{X}{t} \right) \right)$$

όπου  $s$ , γνωστή ως συνάρτηση Cramér είναι μη-αρνητική και κυρτή.

Για να υπολογίσουμε τις ροπές της συνάρτησης συγκέντρωσης στο σύστημα αναφοράς Euler, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την συνεισφορά του κάθε σωματιδίου με έναν παράγοντα ανάλογο του όγκου του στοιχείου Lagrange από το οποίο αντιπροσωπεύεται. Καθώς ο παράγοντας αυτός είναι αντίστροφος της συγκέντρωσης, οι ροπές δίνονται από την σχέση

$$\langle n^\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle \propto \int \exp \left( (\alpha - 1)X - ts \left( \frac{X}{t} \right) \right) dX$$

Για χρόνους αρκετά μεγάλους, το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με προσέγγιση σταθερού σημείου [8]. Το στάσιμο σημείο  $Q_\alpha$  προκύπτει από την συνθήκη  $s'(X_\alpha/t) = \alpha - 1$ , η οποία συνεπάγεται  $X_\alpha \propto t$ . Συνεπώς οι ροπές της συγκέντρωσης μεταβάλλονται εν γένει εκθετικά

$$\langle n^\alpha(t) \rangle \propto \exp(-\gamma(\alpha)t)$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιτρέπει τον προσδιορισμό των βασικών ιδιοτήτων της χρονικής εξέλιξης των ροπών.

Ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων αποτελεί διατηρούμενη ποσότητα, επομένως  $\gamma(1) = 0$ . Είναι επίσης προφανές ότι  $\gamma(0) = 0$ . Λόγω της ανισότητας Hölder

$$\langle n^\alpha(t) \rangle \langle n^\beta(t) \rangle \leq \langle n^{\alpha+\beta}(t) \rangle$$

από όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση  $\gamma(\alpha)$  είναι κυρτή. Επειδή μηδενίζεται για  $\alpha = 0, 1$ , είναι αναγκαστικά θετική για  $0 < \alpha < 1$  και αρνητική στην υπόλοιπη ευθεία. Αυτό σημαίνει ότι οι ροπές χαμηλής τάξης φθίνουν, ενώ οι ροπές υψηλής τάξης καθώς και οι αρνητικές ροπές αυξάνουν εκθετικά. Ο ρυθμός μείωσης είναι

$$\frac{\langle \log |n| \rangle}{t} = - \left. \frac{d\gamma(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} < 0$$

συνεπώς η συγκέντρωση φθίνει σχεδόν σε όλο το χώρο. Εφόσον η μέση συγκέντρωση  $\langle n \rangle$  διατηρείται, η συγκέντρωση αναγκαστικά σημειώνει μεγάλη αύξηση σε όλο και μικρότερες περιοχές, γεγονός που δικαιολογεί την αύξηση των ροπών υψηλής τάξης.

Παρατηρούμε ότι η παρουσία συμπίεστικότητας στο πεδίο ταχύτητας των αδρανειακών σωματιδίων μας οδηγεί στο γενικό συμπέρασμα ότι, τουλάχιστον για χρόνους όπου η διάχυση είναι αμελητέα, τα σωματίδια τείνουν να ομαδοποιηθούν σε μικρές περιοχές υψηλής συγκέντρωσης. Η συμπεριφορά αυτή είναι χαρακτηριστική των αδρανειακών σωματιδίων και δεν εμφανίζεται στην περίπτωση των ιδεατών σωματιδίων Lagrange κινούμενων σε ασυμπίεστο πεδίο ταχύτητας<sup>2</sup>, τα οποία είναι άμαζα και ακολουθούν ακριβώς τις γραμμές ροής.

Το πεπερασμένο μέγεθος  $\eta_d$  του όγκου χονδροποίησης αρχίζει να έχει επίδραση σε χρόνους  $t \gtrsim t_i = \lambda^{-1} \ln(\eta/\eta_d)$ . Πράγματι, εφόσον τα σωματίδια απομακρύνονται βαδίζοντας πίσω στο χρόνο, η χαρακτηριστική διάσταση του όγκου, ο οποίος διαστέλλεται εκθετικά λόγω της κλίσης της ταχύτητας, είναι μεγαλύτερη από την κλίμακα διάχυσης  $\eta_d$  την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Συνεπώς σωματίδια τα οποία προέρχονται από διαφορετικούς χονδροποιημένους όγκους έρχονται καταλήγουν στην ίδια περιοχή την χρονική στιγμή  $t \simeq t_i$ . Η χρονική κλίμακα  $t_i$  σηματοδοτεί το τέλος του χρονικού διαστήματος όπου μπορεί να εφαρμοστεί η ιδεατή ανάλυση.

#### 4.4.2 Χωρικές ιδιότητες της συγκέντρωσης

##### Γενικές Ιδιότητες

Στην υποενότητα 4.3.2 η διάσταση Lyapunov χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της παρουσίας ομαδοποίησης σε σύνολα κλασματικής διάστασης. Η διάσταση αυτή είναι παραπάνω από ένα άνω όριο για την διάσταση Hausdorff του ελκυστή· παρέχει επίσης ουσιώδη πληροφορία για τις μικρές κλίμακας χωρικές ιδιότητες της κατανομής των σωματιδίων. Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποτελέσματα πάνω σε αυτές τις γραμμές, ακολουθώντας την εργασία [7].

Έστω αρχική κατανομή στον χώρο των φάσεων  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$  της οποίας η προβολή στον χώρο των συντεταγμένων είναι ομοιόμορφη, ενώ προβολή στον χώρο των συνταυτήτων δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφη. Για δεδομένο χρόνο  $t$  αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να βρισκόμαστε στην ασυμπτωτική περιοχή, η πυκνότητα στον χώρο των φάσεων  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  είναι ιδιόμορφη· ο φορέας της είναι ακριβώς ο στοχαστικός δυναμικός ελκυστής πάνω στον οποίο συγκλίνουν όλες οι τροχιές. Η ασυμπτωτική αυτή συχνότητα είναι το στοχαστικό ανάλογο του μέτρου Sinai–Ruelle–Bowen (SRB measure) από την θεωρία ντετερμινιστικών δυναμικών συστημάτων [23, 77].

<sup>2</sup>Στην περίπτωση κίνησης ιδεατών σωματιδίων Lagrange μέσα σε συμπίεστο πεδίο ταχύτητας υπάρχει ομαδοποίηση.

Η κατανομή της πυκνότητας πάνω στον ελκυστή μπορεί να χαρακτηριστεί από τον αριθμό των σωματιδίων που περιέχεται σε μικρές σφαίρες ακτίνας  $r$  με κέντρα πάνω στον ελκυστή. Η απαίτηση το κέντρο της σφαίρας να είναι πάνω στον ελκυστή μπορεί να ικανοποιηθεί αν αυτό ακολουθήσει την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος (4.19) για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Ας εισάγουμε τον αριθμό των σωματιδίων που περιέχεται σε μια σφαίρα ακτίνας  $r$  κέντρο της οποίας ακολουθεί την τροχιά  $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t))$

$$m_r(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t) = \int_{|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \leq r^2} f(\mathbf{X}(t) + \mathbf{x}, \mathbf{V}_c(t) + \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$$

Σημειώνουμε ότι οι μεταβλητές  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{v}$  είναι αδιάστατες, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ευκλείδεια νόρμα στον χώρο των φάσεων.

Κάτω από γενικές υποθέσεις περί μη-εκφυλισμένου χαρακτήρα της στοχαστικής ροής στον χώρο των φάσεων που ορίζεται από την δυναμική του συστήματος (4.19), οι Ledrappier και Young έδειξαν ότι στο όριο  $r \rightarrow 0$ ,  $m_r \propto r^{d_L}$  [50]. Πιο συγκεκριμένα, για σχεδόν όλες τις τροχιές

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln m_r(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t)}{\ln r} = d_L \quad (4.29)$$

Αν το όριο υπάρχει, είναι ίσο με την διάσταση πληροφορίας της πυκνότητας στάσιμης κατάστασης  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Η διάσταση πληροφορίας ορίζεται ως η διάσταση Hausdorff του μικρότερου συνόλου  $S$  με μη-μηδενική μάζα

$$M = \int_S f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} \neq 0$$

Η διάσταση Lyapunov είναι λοιπόν ίση με την διάσταση πληροφορίας, μια σχέση η οποία προτάθηκε από τους Kaplan και Yorke [45] και αποδείχθηκε από τους Ledrappier και Young [50] για την περίπτωση μέτρων SRB. Φυσικά, για μια σφαίρα πεπερασμένης ακτίνας  $r$ , η σχέση  $m_r \propto r^{d_L}$  δεν ισχύει ακριβώς, και ο εκθέτης παρουσιάζει διακυμάνσεις. Οι διακυμάνσεις αυτές μπορούν να χαρακτηριστούν μέσω της εξέτασης των ροπών τάξης  $n$  του αριθμού των σωματιδίων, οι οποίες για μικρές ακτίνες  $r$  μεταβάλλονται ως

$$\langle m_r^n(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t) \rangle \propto r^{\xi_n}, \quad r \ll L \quad (4.30)$$

όπου οι αγκύλες  $\langle \cdot \rangle$  αντιπροσωπεύουν μέσο όρο ως προς συλλογή φερόντων ροών. Οι εκθέτες  $\xi_n$  σχετίζονται με το φάσμα διαστάσεων του ελκυστή  $D_n$  [39, 40]

$$\xi_n = nD_{n+1} \quad (4.31)$$

Το αποτέλεσμα των Ledrappier και Young συνεπάγεται ότι

$$\left. \frac{d\xi_n}{dn} \right|_{n=0} = d_L$$

Υπάρχει ένα ακόμα ακριβές αποτέλεσμα το οποίο σχετίζει τους εκθέτες  $\xi_n$  με την γραμμικοποιημένη δυναμική του συστήματος (4.19). Οι Baxendale και Stroock [5] έδειξαν ότι ο πρώτος εκθέτης  $\xi_1$  ικανοποιεί την σχέση

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \langle |\mathbf{R}(t)|^{-\xi_1} \rangle = 0$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{R}(t)$  αντιπροσωπεύει την απόσταση στον χώρο των φάσεων μεταξύ δύο τροχιών οι οποίες εκκινούν από απειροστά κοντινά σημεία.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή των σωματιδίων έχει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας (self-similarity),

$$f(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{v}, t) = \lambda^\kappa f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

οι ροπές ικανοποιούν την σχέση

$$m_{\lambda r}^n(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t) = \lambda^{n+\kappa} m_r^n(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t)$$

από την οποία έπεται ότι

$$\xi_n = nd_L$$

Λόγω της ανισότητας Hölder

$$m_r^{a+b}(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t) \leq m_r^a(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t) + m_r^b(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t)$$

η συνάρτηση  $n \rightarrow \xi_n$  είναι κυρτή. Επομένως ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εξαρτώνται οι εκθέτες  $\xi_n$  από την μεταβλητή  $n$  με μη-γραμμικό τρόπο είναι ο εκθέτης  $\xi_1$  να είναι μικρότερος από την διάσταση Lyapunov

$$\xi_1 < d_L$$

Η μη-γραμμική αυτή εξάρτηση αποκαλείται ανώμαλη κλιμάκωση (anomalous scaling), καθώς δεν μπορεί να προβλεφθεί μέσω διαστατικής ανάλυσης. Συνεπάγεται ότι η κατανομή των σωματιδίων παρουσιάζει διαλειπτικά χαρακτηριστικά και πιο συγκεκριμένα ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δεν είναι κανονική. Σύμφωνα με τον πολυκλασματικό φορμαλισμό (multifractal formalism) [33] η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του αριθμού των σωματιδίων  $m_r(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t), t)$  που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας  $r$ , με κέντρο το σημείο  $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}_c(t))$  μπορεί να προσεγγιστεί από την ακόλουθη έκφραση

$$p_r(m) = \frac{C}{m \ln r} \exp \left\{ (\ln r) \left[ 2d - D \left( r, \frac{\ln m}{\ln r} \right) \right] \right\} \quad (4.32)$$

Η σχέση (4.30) συνεπάγεται ότι στο όριο  $r \rightarrow 0$  με  $\ln m / \ln r = h$  σταθερό, η συνάρτηση  $D(r, h)$  έχει όριο μια συνάρτηση  $D_0(h)$ . Οι εκθέτες  $\xi_n$  συνδέονται με αυτή την συνάρτηση μέσω του μετασχηματισμού Legendre

$$\xi_n = 2d + \inf_h [hn - D_0(h)]$$

Η συνάρτηση  $D_0(h)$  είναι γνωστή ως το πολυκλασματικό φάσμα (multifractal spectrum) του στοχαστικού δυναμικού ελκυστή. Αν ερμηνεύσουμε την σχέση (4.32) στην βάση της θεωρίας μεγάλων αποκλίσεων ( Large deviations theory), η ποσότητα  $2d - D_0(h)$  ταυτίζεται με την συνάρτηση Cramér (βλ. ενότητα 4.4.1). Η ποσότητα  $D_0(h)$  μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως η διάσταση Hausdorff εκείνου του υποσυνόλου του χώρου των φάσεων πάνω στο οποίο ισχύει

$$m_r(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \propto r^h$$

Η ερμηνεία αυτή σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα των Ledrappier και Young (4.29), συνεπάγεται ότι το μέγιστο της συνάρτησης  $D_0(h)$  είναι ίσο με  $2d$  και λαμβάνει χώρα για  $h = d_L$ . Η γνώση της συνάρτησης  $D_0(h)$  παρέχει μια πολύ λεπτομερή περιγραφή των μικρών κλιμάκων της κατανομής των σωματιδίων.

### Κατανομή των θέσεων των σωματιδίων για χαμηλούς αριθμούς Stokes

Σε πολλές εφαρμογές, όπως αυτές που απαιτούν την εισαγωγή αλληλεπιδράσεων (συγκρούσεις, χημικές αντιδράσεις) μεταξύ των σωματιδίων, ο χαρακτηρισμός της κατανομής των σωματιδίων στον  $d$ -διάστατο φυσικό χώρο είναι πιο σημαντικός από τον χαρακτηρισμό στον πλήρη  $2d$ -διάστατο χώρο των φάσεων. Για να υπολογίσει κανείς την κατανομή  $n(\mathbf{x}, t)$  στον φυσικό χώρο πρέπει να ολοκληρώσει την πλήρη κατανομή  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  ως προς τις συνταχύτητες  $\mathbf{v}$ . Σύμφωνα με την υποενότητα 4.3.3, όταν η διάσταση Hausdorff του ελκυστή είναι μικρότερη από  $d$ , η κατανομή  $n(\mathbf{x}, t)$  είναι ιδιόμορφη με φορέα την προβολή του ελκυστή στον φυσικό χώρο.

Προκειμένου να διερευνήσουμε την κατανομή των σωματιδίων, θεωρούμε μία μικρή σφαίρα ακτίνας  $r$  με κέντρο σημείο  $\mathbf{x}$  το οποίο δεν συμπίπτει αναγκαστικά με την θέση κάποιου σωματιδίου και επομένως δεν βρίσκεται απαραίτητα πάνω στην προβολή του ελκυστή. Ο αριθμός των σωματιδίων που περιέχεται σε αυτή την σφαίρα είναι

$$\bar{m}_r(\mathbf{x}, t) = \int_{|\mathbf{y}| \leq r} n(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{y} = \int_{|\mathbf{y}| \leq r} d^3\mathbf{y} \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

Όπως και στην περίπτωση της πλήρους κατανομής στον χώρο των φάσεων, οι ροπές της ποσότητας  $\bar{m}_r$  αναμένεται να εμφανίζει ανώμαλη κλιμάκωση. Ο πολυκλασματικός φορμαλισμός που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη υποενοότητα οδηγεί στον ορισμό ενός πολυκλασματικού φάσματος  $\bar{D}_0(h)$  το οποίο χαρακτηρίζει τις διακυμάνσεις του αριθμού σωματιδίων  $\bar{m}_r$ . Η συσχέτιση της κατανομής της ποσότητας  $\bar{m}_r$  με την κατανομή της ποσότητας  $m_r$  απαιτεί ολοκλήρωση ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις συνταχύτητες. Συνεπώς, η συσχέτιση αυτή δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς πλήρη γνώση των γεωμετρικών ιδιοτήτων μικρής κλίμακας του ελκυστή στις διευθύνσεις του χώρου των φάσεων που αντιστοιχούν στις συνταχύτητες. Είναι προφανές ότι οι μεταβλητές θέσης και συνταχύτητας κατέχουν διαφορετικούς ρόλους στην δυναμική των σωματιδίων, επομένως η δυναμική στον χώρο των φάσεων δεν είναι ισότροπη. Το γεγονός αυτό δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τυπικά αποτελέσματα από την θεωρία συνόλων κλασματικής διάστασης όταν ολοκληρώνουμε ως προς τις μεταβλητές συνταχύτητας.

Η κατάσταση ωστόσο απλοποιείται σημαντικά αν περιοριστούμε από την γενική περίπτωση στην περίπτωση πολύ μικρού αριθμού Stokes,  $St \ll 1$ . Η πυκνότητα των σωματιδίων στον χώρο των θέσεων μπορεί σε αυτή την περίπτωση να υπολογισθεί μετά από εξέταση της πυκνότητας στον χώρο των φάσεων σε ενδιάμεσες χωρικές κλίμακες. Πράγματι, σύμφωνα με την δεύτερη εξίσωση εκ των σχέσεων (4.19), οι συνταχύτητες των σωματιδίων που χαρακτηρίζονται από χαμηλό αριθμό Stokes βρίσκονται εντός αποστάσεως της τάξης  $St$  από το σύνολο του χώρου των φάσεων που ορίζεται από την σχέση

$$M = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (1 - \beta)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\}$$

Επομένως για χωρικές κλίμακες τέτοιες ώστε  $St \ll r/L \ll 1$ , όπου  $L$  η ολοκληρωτική κλίμακα μήκους της φέρουσας ροής, ο αριθμός σωματιδίων στον χώρο των θέσεων  $\bar{m}_r$  προέρχεται από σωματίδια τα οποία περιέχονται σε έναν όγκο διαστάσεων  $r$  με κέντρο στο σύνολο  $M$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε τους σχετικούς εκθέτες  $\zeta_n$  για αυτή την ενδιάμεση περιοχή χωρικών κλιμάκων

$$\langle \bar{m}_r^n \rangle \propto r^{\zeta_n}, \quad St \ll \frac{r}{L} \ll 1.$$

Είναι δυνατόν να συσχετίσει κανείς τους εκθέτες  $\zeta_n$  με τους εκθέτες  $\xi_n$ , οι οποίοι χαρακτηρίζουν την κατανομή στον πλήρη χώρο των φάσεων, λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι η ποσότητα  $\bar{m}_r$  δεν υπολογίζεται αναγκαστικά πάνω στον ελκυστή, σε αντίθεση με την ποσότητα  $m_r$ . Είδαμε στην ενότητα 4.3 ότι για μικρούς αριθμούς Stokes, τα σωματίδια βρίσκονται πάνω σε υποσύνολα του χώρου των θέσεων με κλασματική διάσταση ίση με αυτή του ελκυστή στον πλήρη χώρο των φάσεων. Συνεπώς η πιθανότητα μια σφαίρα ακτίνας  $r$  να έχει κοινά σημεία με κάποιο από αυτά τα υποσύνολα του χώρου των θέσεων είναι

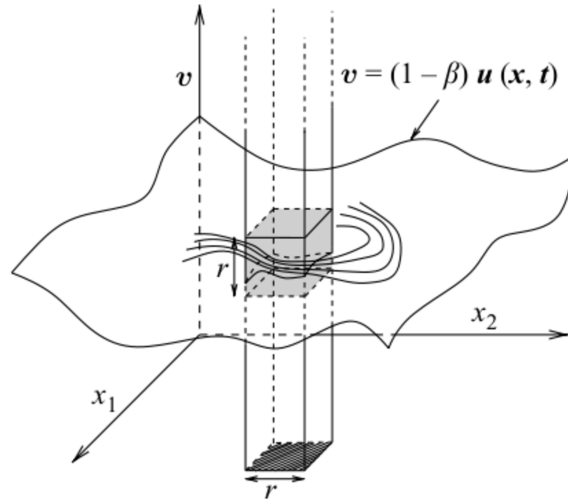
$$P(r) \propto r^{d-d_H}$$

όπου  $d_H$  η διάσταση Hausdorff του ελκυστή. Μέσα στα εν λόγω υποσύνολα, έχουμε προφανώς

$$\langle m_r^n \rangle \propto r^{\xi_n}$$

επομένως

$$\zeta_n = d - d_H + \xi_n \quad (4.33)$$



Σχήμα 4.6: Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του αριθμού των σωματιδίων στον χώρο των θέσεων  $\bar{n}_r$  στην περίπτωση πολύ μικρού αριθμού Stokes. Απεικονίζεται η περίπτωση ροής σε δισδιάστατο φυσικό χώρο, ενώ οι δύο συνιστώσες του διανύσματος της συνταχύτητας απεικονίζονται ως μία μεταβλητή.

Η σχέση των (4.29) των Ledrappier και Young μεταξύ της διάστασης πληροφορίας και της διάστασης Lyapunov συνεπάγεται ότι  $d\zeta_n/dn|_{n=0} = d_L$ . Επιπλέον, το γεγονός ότι  $\xi_0 = 0$  μαζί με την σχέση (4.33) συνεπάγεται ότι  $\zeta_0 = d - d_H$ . Η διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων συνεπάγεται ότι ο μέσος αριθμός σωματιδίων που περιέχονται σε μια σφαίρα ακτίνας  $r$  στον χώρο των θέσεων είναι ανάλογος του όγκου της,  $r^d$ . Επομένως  $\zeta_1 = d$  και  $\xi_1 = d_H$ . Αξίζει να σημειώσουμε ότι λόγω της κυρτότητας της συνάρτησης  $n \rightarrow \xi_n$ , η οποία έπεται από την ανισότητα Hölder, ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ομαδοποίησης (δηλαδή μη-γραμμικής σχέσης μεταξύ  $n$  και  $\zeta_n$ ) είναι η διάσταση Hausdorff του ελκυστή να είναι μικρότερη από την διάσταση Lyapunov,  $d_H < d_L$ , και φυσικά ο αριθμός Stokes να είναι μικρότερος από την κρίσιμη τιμή που προσδιορίστηκε στην ενότητα 4.3.



## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα

Το φαινόμενο της τύρβης, στο οποίο είναι αφιερωμένο ένα μεγάλο μέρος της παρούσης εργασίας αποτελεί ένα ιδιαίζον φυσικό πρόβλημα. Ενώ οι βασικοί φυσικοί νόμοι που διέπουν την κίνηση των ρευστών είναι γνωστοί εδώ και σχεδόν δύο αιώνες, η κατανόηση των φαινομένων που απορρέουν από αυτούς παραμένει μέχρι και σήμερα ελλιπής. Τόσο το πρόβλημα της πλήρως ανεπτυγμένης τυρβώδους ροής ασυμπίεστου ρευστού όσο και αυτό της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή έχουν αντισταθεί με επιτυχία στις επιθέσεις πολλών κορυφαίων φυσικών και μαθηματικών. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι ίσως πολλές δυσκολίες του φυσικού προβλήματος είναι αλληλένδετες με την απουσία θεωρήματος ύπαρξης και ομαλότητας των λύσεων της εξίσωσης Navier–Stokes. Η εγγενής δυσκολία του προβλήματος δεν μας επέτρεψε τίποτα παραπάνω από το να παρουσιάσουμε μια επισκόπηση του καλά εδραιωμένου μέρους της θεωρίας της τύρβης.

Η κίνηση αδρανειακών σωματιδίων σε τυρβώδες πεδίο ροής επίσης αποτελεί ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο φαινόμενο, όπως μπορεί κανείς να δει από τα πεδία συγκέντρωσης σωματιδίων που υπολογίστηκαν αριθμητικά (παράγραφος 4.2.2). Κεντρικό ρόλο για πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα ο σχηματισμός βροχής στα σύννεφα, παίζει το φαινόμενο της ομαδοποίησης.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της παραγράφου 4.2.2 υποδεικνύουν ότι η τάση των σωματιδίων για σχηματισμό δομών ομαδοποίησης παραμένει ιδιαίτερα ισχυρή στο όριο μηδενικού αριθμού Stokes. Αυτό το αποτέλεσμα είναι μη–τετριμμένο, καθώς εύκολα μπορεί να υποθέσει κανείς ότι εφόσον το όριο  $St \rightarrow 0$  αντιστοιχεί σε ιδεατά σωματίδια Lagrange τα οποία δεν χαρακτηρίζονται από τάση ομαδοποίησης, το ίδιο θα έπρεπε να συμβαίνει και με τα αδρανειακά σωματίδια που χαρακτηρίζονται από πολύ αριθμό Stokes. Όμως τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι αυτό δεν ισχύει, και επομένως το όριο  $St \rightarrow 0$  είναι από αυτή την άποψη ιδιόμορφο, καθώς υπάρχει ασυνέχεια στην ποιοτική συμπεριφορά των σωματιδίων.

Στην περίπτωση ενδιαμέσου αριθμού Stokes ( $St = 1$ ) η τάση για ομαδοποίηση παραμένει, αν και είναι εμφανώς ασθενέστερη. Όταν ο αριθμός Stokes αυξάνεται περαιτέρω ( $St = 10$ ), δεν παρατηρείται πλέον σχηματισμός δομών ομαδοποίησης με χαρακτηριστικές διαμέτρους συγκρίσιμες με την μικροκλίμακα Kolmogorov. Αντίθετα, οι χαρακτηριστικές διαμέτροι των δομών ομαδοποίησης που εμφανίζονται είναι κάπου ανάμεσα στην μικροκλίμακα Kolmogorov και της ολοκληρωτικής κλίμακας. Με αυτό τον τρόπο τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την ύπαρξη κατωφλιού ως προς τον αριθμό Stokes, όσον αφορά τον σχηματισμό δομών ομαδοποίησης με χαρακτηριστικές διαμέτρους συγκρίσιμες με την μικροκλίμακα Kolmogorov.



# Βιβλιογραφία

- [1] Aris, R.: *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, 1989.
- [2] Balkovsky, E., G. Falkovich, και A. Fouxon: *Clustering of inertial particles in turbulent flows*. Arxiv preprint chao-dyn/9912027, 1999.
- [3] Balkovsky, E., G. Falkovich, και A. Fouxon: *Intermittent distribution of inertial particles in turbulent flows*. Physical Review Letters, 86(13):2790–2793, 2001, ISSN 1079-7114.
- [4] Batchelor, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] Baxendale, PH και DW Stroock: *Large deviations and stochastic flows of diffeomorphisms*. Probability Theory and Related Fields, 80(2):169–215, 1988, ISSN 0178-8051.
- [6] Beale, J. T., T. Kato, και A. Majda: *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-d euler equations*. Communications in Mathematical Physics, 94(1):61–66, 1984.
- [7] Bec, J.: *Multifractal concentrations of inertial particles in smooth random flows*. Journal of Fluid Mechanics, 528:255–277, 2005, ISSN 0022-1120.
- [8] Bender, C.M. και S.A. Orszag: *Advanced mathematical methods for scientists and engineers: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Verlag, 1999, ISBN 0387989315.
- [9] Burgers, JM: *Second report on viscosity and plasticity*. Academy of Sciences, Amsterdam, σελίδα 129, 1938.
- [10] Caffarelli, L., R. Kohn, και L. Nirenberg: *Partial regularity of suitable weak solutions of the navier-stokes equations*. Communications in Pure and Applied Mathematics, 35:771–831, 1982.
- [11] Cencini, M., F. Cecconi, και A. Vulpiani: *Chaos: from simple models to complex systems*. World Scientific Pub Co Inc, 2009, ISBN 9814277657.
- [12] Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, 1981.
- [13] Chertkov, M., I. Kolokolov, και M. Vergassola: *Inverse cascade and intermittency of passive scalar in one-dimensional smooth flow*. Physical Review E, 56(5):5483–5499, 1997, ISSN 1550-2376.
- [14] Constantin, P.: *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*. Στο Engquist, Björn και Wilfried Schmid (επιμελητές): *Mathematics unlimited: 2001 and beyond*. Springer, 2001.

- [15] Constantin, P., W. E. and E. S. Titi: *Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of euler's equation*. Communications in Mathematical Physics, 165(1):207–209, 1994.
- [16] Constantin, P. και C. Foias: *Navier-Stokes Equations*. University Of Chicago Press, 1989.
- [17] Cornwell, JF: *Group theory in physics: an introduction*. Academic Press, 1997.
- [18] Cramér, H.: *On the theory of stationary random processes*. Annals of Mathematics, 41(1):215–230, 1940.
- [19] Criminale, W. O., T. L. Jackson, και R. D. Joslin: *Theory and Computation of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2003.
- [20] Cuzzi, J.N., R.C. Hogan, J.M. Paque, και A.R. Dobrovolskis: *Size-selective concentration of chondrules and other small particles in protoplanetary nebula turbulence*. The Astrophysical Journal, 546:496, 2001.
- [21] Douady, A. και J. Oesterle: *Dimension de Hausdorff des attracteurs*. CR Acad. Sci. Paris, 290:1135–1138, 1980.
- [22] Drazin, P. G. και W. H. Reid: *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2004.
- [23] Eckmann, J.P. και D. Ruelle: *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Reviews of modern physics, 57(3):617–656, 1985, ISSN 1539-0756.
- [24] Ellis, R.: *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. Springer Verlag, 2005, ISBN 3540290591.
- [25] Elperin, T., N. Kleorin, M.A. Liberman, V.S. Lvov, A. Pomyalov, και I. Rogachevskii: *Clustering of fuel droplets and quality of spray in diesel engines*. Arxiv preprint nlin.CD/0305017, 2003.
- [26] Falconer, K.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Willey, 2003.
- [27] Falconer, K.J.: *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press, 1986, ISBN 0521337054.
- [28] Falkovich, G., A. Fouxon, και M. Stepanov: *Statistics of turbulence-induced fluctuations of particle concentration*. Στο *Sedimentation and sediment transport: proceedings of the symposium held in Monte Verità, Switzerland, from September 2nd-to September 6th, 2002*, σελίδα 155. Springer Netherlands, 2003, ISBN 1402012667.
- [29] Feigenbaum, M.: *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. Journal of Statistical Physics, 19(1):25–52, 1978.
- [30] Feigenbaum, M.: *The universal metric properties of nonlinear transformations*. Journal of Statistical Physics, 21(6):669–706, 1979.
- [31] Feigenbaum, M.: *Universal behavior in nonlinear systems*. Los Alamos Science, 1:4, 1980.
- [32] Foias, C., O. Manley, R. Rosa, και R. Temam: *Navier-Stokes equations and turbulence*. Cambridge University Press, 2001.
- [33] Frisch, U.: *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.

- [34] Gallavotti, G.: *The Elements of Mechanics*. Springer, 1983.
- [35] Gallavotti, G.: *Foundations of Fluid Mechanics*. Springer, 2002.
- [36] Gel'fand, I.M.: *Lectures on linear algebra*. Dover Publications, 1989.
- [37] Goldhirsch, I., P.L. Sulem, και S.A. Orszag: *Stability and Lyapunov stability of dynamical systems: A differential approach and a numerical method*. Physica D Nonlinear Phenomena, 27:311–337, 1987, ISSN 0167-2789.
- [38] Grassberger, P.: *On the hausdorff dimension of fractal attractors*. Journal of Statistical Physics, 26(1):173–179, 1980.
- [39] Grassberger, P.: *Generalized dimensions of strange attractors*. Physics Letters A, 97(6):227–230, 1983, ISSN 0375-9601.
- [40] Hentschel, HGE και I. Procaccia: *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 8(3):435–444, 1983, ISSN 0167-2789.
- [41] Hopf, E.: *A mathematical example displaying the features of turbulence*. Communications in Pure and Applied Mathematics, 1:303–322, 1948.
- [42] Hopf, E.: *Über die anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen grundgleichungen*. Mathematische Nachrichten, 4:213–231, 1951.
- [43] Hopf, E.: *Statistical hydrodynamics and functional calculus*. Journal of Rational Mechanics and Analysis, 1(1):87–123, 1952.
- [44] Kaneda, Yukio, Takashi Ishihara, Mitsuo Yokokawa, Kenichi Itakura, και Atsuya Uno: *Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box*. Physics of Fluids, 15(L), 2003.
- [45] Kaplan, J.L. και J.A Yorke: *Chaotic behavior of multidimensional difference equations*. Στο Peitgen, H. O. και H. O. Walter (επιμελητές): *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, τόμος 730 του *Lecture Notes in Mathematics*, σελίδα 204. Springer, 1979.
- [46] Károlyi, G., Á. Péntek, I. Scheuring, T. Tél, και Z. Toroczkai: *Chaotic flow: the physics of species coexistence*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 97(25):13661, 2000.
- [47] Ladyzhenskaya, O.: *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach, 1963.
- [48] Landau, L. D.: *On the nature of turbulence*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 44:339–342, 1944.
- [49] Landau, L. D. και E. M. Lifschitz: *Fluid Mechanics*. Course of Theoretical Physics, Volume VI. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [50] Ledrappier, F. και L.S. Young: *Dimension formula for random transformations*. Communications in Mathematical Physics, 117(4):529–548, 1988, ISSN 0010-3616.

- [51] Leray, J.: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Mathematica, 63(1):193–248, 1934. English translation available at: <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/leray.shtml>.
- [52] Lorenz, E. N.: *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of Atmospheric Sciences, 20:130–141, 1963.
- [53] Marcus, M. και H. Minc: *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Dover Publications, 1992, ISBN 048667102X.
- [54] Maxey, M.R. και J.J. Riley: *Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow*. Physics of Fluids, 26:883, 1983.
- [55] Monin, A. S. και A. M. Yaglom: *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, τόμος II. MIT Press, 1975.
- [56] Newhouse, S., D. Ruelle, και F. Takens: *Occurrence of strange axiom-a attractors near quasi periodic flows on  $t_m, m \geq 3$* . Communications in Mathematical Physics, 64(1):35–40, 1978.
- [57] Okubo, A.: *Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences*. Στο *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, τόμος 17, σελίδες 445–454. Elsevier, 1970.
- [58] Onsager, L.: *Statistical hydrodynamics*. Nuovo Cimento (Supplemento), 6:279, 1949.
- [59] Oseledets, V. I: *A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Transactions of the Moscow Mathematical Society, 19:197, 1968.
- [60] Patterson, G. S και S. A. Orszag: *Spectral calculations of isotropic turbulence: Efficient removal of aliasing interactions*. Physics of Fluids, 14:2538, 1971.
- [61] Pinsky, MB και AP Khain: *Turbulence effects on droplet growth and size distribution in clouds—A review*. Journal of Aerosol Science, 28(7):1177–1214, 1997, ISSN 0021-8502.
- [62] Pomeau, Y και P. Manneville: *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*. Communications in Mathematical Physics, 74(2):189–197, 1980.
- [63] Ruelle, D. και F. Takens: *On the nature of turbulence*. Communications in Mathematical Physics, 20(3):167–192, 1971.
- [64] Scheffer, V.: *Partial regularity of solutions to the navier-stokes equations*. Pacific Journal of Mathematics, 66(2):535–552, 1976.
- [65] Scheffer, V.: *Hausdorff measure and the navier-stokes equations*. Communications in Mathematical Physics, 55(2):97–112, 1977.
- [66] Seinfeld, JH: *Atmospheric Chemistry and Physics of Air Pollution, vol. 219*. John Wiley and Sons, 1986.
- [67] Sinai, Y. G.: *Chaos theory yesterday, today and tomorrow*. Journal of Statistical Physics, 138(1):2–7, 2010.
- [68] Squires, K.D. και J.K. Eaton: *Measurements of particle dispersion obtained from direct numerical simulations of isotropic turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 226:1–35, 1991, ISSN 0022-1120.

- [69] Squires, K.D. και H. Yamazaki: *Preferential concentration of marine particles in isotropic turbulence*. Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers, 42(11-12):1989–2004, 1995, ISSN 0967-0637.
- [70] Sundaram, S. και L.R. Collins: *Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Part 1. Direct numerical simulations*. Journal of Fluid Mechanics, 335:75–109, 1997, ISSN 0022-1120.
- [71] Taylor, GI: *Diffusion by continuous movements*. Proceedings of the London Mathematical Society, 20:196–212, 1921.
- [72] Temam, R.: *Some developments on navier-stokes equations in the second half of the 20th century*. Στο Pier, J. P. (επιμελητής): *Développement des Mathématiques au cours de la seconde moitié du XXème siècle*. Birkhauser, 1999.
- [73] Temam, R.: *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. American Mathematical Society, 2001.
- [74] Vishik, M.I. και A.V. Fursikov: *Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [75] Weidenschilling, SJ: *Can Gravitational Instability Form Planetesimals?* Icarus, 116(2):433–435, 1995, ISSN 0019-1035.
- [76] Weiss, J.: *The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 48(2-3):273–294, 1991, ISSN 0167-2789.
- [77] Young, L.S.: *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?* Journal of Statistical Physics, 108(5):733–754, 2002, ISSN 0022-4715.