

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
« ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ »



ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΜΨΕΩΣ ΛΕΠΤΩΝ
ΠΛΑΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΙΩΑΝΝΟΥ Γ. ΑΝΤΥΠΑ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : **ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ Ε. ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ**
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2013

*Στη σύζυγό μου Χαρούλα
και στον γιο μου Γρηγόρη*

Η ανά χειράς Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία με τίτλο « Θερμομηχανικά προβλήματα κάμψεως λεπτών πλακών » εκπονήθηκε στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών το ακαδημαϊκό έτος 2012-2013.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνονται από τον γράφοντα στον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, κύριο Θεοτόκογλου Ευστάθιο, τόσο για την ανάθεση του εξαιρετικά ενδιαφέροντος θέματος, όσο και για τη συνεχή καθοδήγησή του καθ'όλη τη διάρκεια της επεξεργασίας της προαναφερθείσας διπλωματικής εργασίας. Επιπλέον, ευχαριστίες απευθύνονται στον διδάκτορα του ΕΜΠ κύριο Σταμπούλογλου Ιωάννη, του οποίου η εποικοδομητική συνεισφορά υπήρξε καταλυτική για την άρτια εκτέλεση και παρουσίαση της εργασίας.

Τέλος ευχαριστίες απευθύνονται και στην οικογένειά μου, η οποία όλον αυτόν τον καιρό με στήριξε και με ενθάρρυνε κατά τη διαδικασία εκπόνησεως της εργασίας.

«... Μηδέν τε ἔκ τοῦ μη ὄντος
γίγνεσθαι, μηδέ εἰς τό μη ὄν φθίρεσθαι...»
Δημόκριτος

Εισαγωγικό σημείωμα

Introductory Note

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Βασικές εξισώσεις της Μαθηματικής Θεωρίας της Θερμοελαστικότητας

1.1	Σχετικά προλεγόμενα	14
1.2	Μεταφορά Θερμότητας δι'αγωγής – Νόμος Fourier	15
1.3	Διαφορική εξίσωση Μεταφοράς Θερμότητας δι'αγωγής	15
1.4	Πεδίο τάσεων και Παραμορφώσεων. Εξισώσεις ισορροπίας και κινήσεως	19
	1.4.1 Καταστατικές εξισώσεις	19
	1.4.2 Εξισώσεις ισορροπίας και κινήσεως	22
1.5	Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις για στάσιμα (stationary) και ψευδοστατικά (quasistatic) προβλήματα.	
	Τροποποιημένες εξισώσεις Navier	24
1.6	Γενική λύση του προβλήματος της Θερμοελαστικότητας	26
1.7	Τροποποιημένο διαφορικό σύστημα Beltrami – Michell	28
1.8	Εξισώσεις των μετατοπίσεων για δυναμικά προβλήματα	29
1.9	Διατύπωση των εξισώσεων Navier μέσω των τάσεων	31
1.10	Επίπεδη Θερμοελαστικότητα	33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Θερμοελαστική ανάλυση λεπτών πλακών

2.1	Σχετικά προλεγόμενα	36
2.2	Γενική συμπεριφορά ορθογωνικών πλακών έναντι κάμψης. Υποθέσεις Kirchhoff . Θερμικές τάσεις στις πλάκες	37
2.3	Σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων και παραμορφώσεων – βυθίσεως	39
2.4	Καταστατικές εξισώσεις	41
2.5	Αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη λεπτών ορθογωνικών πλακών	42

2.6	Μεταβολή των τάσεων στο εσωτερικό της πλάκας . Εξισώσεις ισορροπίας αυτής.	44
2.7	Διέπουσα Διαφορική Εξίσωση Καμπτόμενης Πλάκας	46
2.8	Συνοριακές συνθήκες στηρίζεως του προβλήματος της θερμοελαστικής κάμψεως λεπτών ελαστικών πλακών	48
2.9	Σύνθετη καταπόνηση λεπτών ελαστικών πλακών υπό εγκάρσια κατανεμημένη επιφανειακή και αξονική φόρτιση. Θερμοελαστικός λυγισμός λεπτών ελαστικών πλακών. Σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων	53
2.10	Καταστατικές εξισώσεις της σύνθετης καταπόνησεως	55
2.11	Αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη της σύνθετης καταπόνησεως	56
2.12	Μεταβολή των τάσεων στο εσωτερικό της πλάκας . Εξισώσεις ισορροπίας αυτής. Διέπουσα διαφορική εξίσωση της σύνθετης καταπόνησεως.	58
2.13	Καμπτική συμπεριφορά λεπτής ορθογωνικής πλάκας υπό την επίδραση μη στατικού (non stationary) θερμικού πεδίου. Διέπουσα εξίσωση αυτής.	63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 :Προβλήματα θερμοελαστικής κάμψεως λεπτών πλακών– Εφαρμογές

3.1	Θερμοελαστική κάμψη λεπτής ορθογωνικής πλάκας πάχους h , απλά εδραζόμενης, υπό την επίδραση θερμικής φορτίσεως $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$	72
3.2	Θερμοελαστική ταλάντωση λεπτής καμπτόμενης ορθογωνικής πλάκας πάχους h , απλά εδραζόμενης, υπό την επίδραση περιοδικής θερμικής φορτίσεως $\Delta T = \Delta T(x, y, z, t)$	97
3.3	Συμπεράσματα – Μελλοντικές προοπτικές	122
Παράρτηματα		
Παράρτημα I:	Αριθμητικές εφαρμογές	126
Παράρτημα II:	Μαθηματικό Συμπλήρωμα	135
Βιβλιογραφία – Αναφορές		

Εισαγωγικό σημείωμα

Η Μηχανική των Συνεχών Μέσων είναι ένας ευρύτατος κλάδος των θετικών επιστημών ο οποίος παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Η έννοια του συνεχούς μέσου σε αντιδιαστολή με το διακριτό, εισήχθη για να παρακαμφθούν οι δυσκολίες, οι οποίες ανέκυπταν κατά τον προσδιορισμό της επιδράσεως στο εσωτερικό ενός σώματος εξαιτίας κάποιας εξωτερικής επεμβάσεως στην επιφάνεια αυτού. Μία εξωτερική επιφανειακή δράση διεισδύει στο εσωτερικό του και φθάνει στα μεμονωμένα δομικά στοιχεία του σώματος κατά διαφορετικό τρόπο.

Θεωρώντας το άτομο ως θεμελιώδες δομικό στοιχείο και λαμβάνοντας υπόψη τον μεγάλο αριθμό αυτών, τα οποία εμπεριέχονται σε ένα χώρο, γίνεται εμφανές ότι η προσπάθεια υπολογισμού των επιδράσεων των επιφανειακών δράσεων είναι δύσκολος, εάν όχι μάταιος. Έτσι το φυσικό σώμα είναι ικανό να παραμορφώνεται λόγω αλλαγών των αποστάσεων των ατόμων του, οι δε παραμορφώσεις αυτές πρέπει να έχουν μία ορισμένη μέγιστη τιμή. Είναι προφανές ότι η ιδέα να ληφθεί το άτομο ως το βασικό στοιχείο της ύλης οδηγεί σε ανυπερβλήτα προβλήματα για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων των σωμάτων τα οποία ευρίσκονται εις τη δράση εξωτερικών επιρροών.

Έτσι λαμβανομένης υπόψη της ανωτέρω δομής της ύλης φθάνουμε στην έννοια του συνεχούς μέσου η οποία και τίθεται ως βάση της θεμελιώσεως της Μηχανικής του Παραμορφωσίμου Στερεού και κατ'επέκταση της Θεωρίας της Ελαστικότητας, της οποίας αντικείμενο είναι ο προσδιορισμός των εσωτερικών δυνάμεων οι οποίες αναπτύσσονται εξαιτίας της προαναφερθείσας εξωτερικής επιδράσεως. Για τη Θεωρία της Ελαστικότητας τα σώματα συντίθεται από άμορφα υλικά στα οποία τα άτομα διατάσσονται τυχαία, χωρίς κάποιον συγκεκριμένο προσανατολισμό και επομένως είναι **ισότροπα**, δηλαδή παρουσιάζουν τις ίδιες ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις. Επιπλέον συμπεριφέρονται μακροσκοπικά και ως **ομογενή**, αφού παρουσιάζουν τις ίδιες ιδιότητες σε κάθε σημείο του χώρου τον οποίο αυτά καταλαμβάνουν. Ακόμη δε για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων λαμβάνεται ένας στοιχειώδης όγκος απείρως μικρός στον οποίο οι προκύπτουσες εσωτερικές δυνάμεις και μετατοπίσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων των εσωτερικών σημείων του ως άνω όγκου. Συνεπώς καταλήγουμε στην έννοια της **συνέχειας** του σώματος.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως αντικείμενο της Θεωρίας της Ελαστικότητας είναι ο υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων και των προκαλούμενων εξ'αυτών παραμορφώσεων, εξαιτίας της δράσεως επ'αυτών εξωτερικών φορτίων ή άλλων αιτίων, όπως θερμοκρασιακών

μεταβολών κ.α. Αποδεικνύεται πειραματικά ότι σε όλα τα σώματα και στην αρχή της φορτίσεώς τους, η σχέση μεταξύ των δυνάμεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων είναι γραμμική και μάλιστα εξαφανίζονται εάν απομακρυνθούν οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις. Όπως λοιπόν στην κλασσική θεωρία της Ελαστικότητας οι σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις αναπτυσσόμενες παραμορφώσεις με τις αντίστοιχες δυνάμεις, έτσι και στην περίπτωση της Θερμοελαστικότητας, οι παραμορφώσεις σχετίζονται με την μεταβολή της θερμοκρασίας **γραμμικά**. Συνεπώς στα πλαίσια πλέον της γραμμικής Θεωρίας της Θερμοελαστικότητας μελετάται η συμπεριφορά του σώματος ή του μέσου ως συνάρτηση της εφαρμοζόμενης θερμοκρασίας. Ουσιαστικά αναζητείται η συσχέτιση μεταξύ των αναπτυσσόμενων εσωτερικών δυνάμεων καθώς και των συνεπαγόμενων εξ'αυτών παραμορφώσεων εξαιτίας του εφαρμοζόμενου θερμικού φορτίου. Στην πραγματικότητα συνδέει τη μηχανική συνεχούς μέσου με τη θεωρία μεταφοράς θερμότητας μεταξύ του μέσου και του εκάστοτε περιβάλλοντός του.

Η ανάπτυξη του προβλήματος της Θεωρίας της Ελαστικότητας σε συνδυασμό με την επίδραση της θερμοκρασιακής μεταβολής λαμβάνοντας υπόψη και τα φαινόμενα συζεύξεως του θερμοκρασιακού και του παραμορφωσιακού πεδίου πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Jean-Marie-Constant Duhamel το 1837. Εν γένει το αντικείμενο της Μηχανικής των Συζευγμένων Πεδίων και ειδικότερα της γραμμικής θεωρίας της Θερμοελαστικότητας είναι σύγχρονο. Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της προαναφερθείσας θεωρίας αποτελεί και η μελέτη της καμπτικής συμπεριφοράς λεπτών πλακών από ομογενές και ισότροπο υλικό υπό την επίδραση στατικού και δυναμικού θερμικού πεδίου, η οποία και περιγράφεται ακολούθως.

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι να καταδείξει την επίδραση της θερμοκρασίας τόσο στη γενικότερη καμπτική συμπεριφορά μίας πλάκας πεπερασμένων διαστάσεων η οποία συντίθεται από ομογενές και ισότροπο ελαστικό υλικό, όσο και στο αναπτυσσόμενο τατικό και παραμορφωσιακό πεδίο, στα πλαίσια πάντοτε της γραμμικής θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων και των λεπτών πλακών υπό τις ισχύουσες υποθέσεις Kirchhoff, εξαιτίας της επίδρασης αυθαιρέτου τριδιάστατου στατικού και δυναμικού θερμικού πεδίου.

Έτσι στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται με περιεκτικό τρόπο τα βασικά σημεία της μαθηματικής θεωρίας της θερμοελαστικότητας, ξεκινώντας από το μηχανισμό μεταφοράς θερμότητας δι'αγωγής μέσω του νόμου Fourier και του νόμου θερμικής διαχύσεως συμφώνως πάντοτε υπό τις αντίστοιχες συνοριακές ή αρχικές συνθήκες **Ösizik** [14]. Εν συνεχεία διατυπώνονται οι σχέσεις οι οποίες χαρακτηρίζουν το πρόβλημα της θερμοελαστικότητας ήτοι οι καταστατικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων ή τροποποιημένες σχέσεις του Hooke, οι

αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας και κινήσεως για εξωτερική θερμική φόρτιση και δίνεται μία πρώτη λύση του προβλήματος μέσω της εφαρμογής του θερμοελαστικού δυναμικού των μετατοπίσεων υπό του Goodier. Επιπλέον διατυπώνονται οι εξισώσεις Navier καθώς και οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας και κινήσεως βάσει των τάσεων τόσο για στάσιμα (stationary) και ψευδοστατικά (quasistatic) προβλήματα όσο αντιστοιχώς και για δυναμικά [Hetnarski \[11\]](#), [Nowacki \[13\]](#). Τέλος παρουσιάζεται και το πρόβλημα της επίπεδης θερμοελαστικότητας, είτε εντάσεως είτε παραμορφώσεως, αφού μέσω της αναγωγής ενός προβλήματος της τριδιάστατης θερμοελαστικότητας σε πρόβλημα της διδιάστατης όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των πλακών, επιτυγχάνεται απλοποίηση στον υπολογισμό των αντίστοιχων πεδίων τάσεως και παραμορφώσεως [Hetnarski \[11\]](#).

Το δεύτερο κεφάλαιο αφιερώνεται στην ανάπτυξη της θεωρίας λεπτών πλακών στα πλαίσια των μικρών παραμορφώσεων δίδοντας αρχικά τον ορισμό μίας πλάκας, βασιζόμενος στα γεωμετρικά της χαρακτηριστικά, λαμβάνοντας πλέον υπόψη την ύπαρξη του θερμικού πεδίου. Έτσι προκύπτει η ανάλυση της γραμμικής θερμοελαστικής συμπεριφοράς καμπτόμενων πλακών, στα πλαίσια πάντοτε της ασύζευκτης θερμοελαστικότητας για **ομογενές , ισότροπο ελαστικό υλικό**. Παρατίθενται στη συνέχεια οι **υποθέσεις Kirchhoff** για το πρόβλημα της πλάκας, όπως αυτές διατυπώθηκαν στα πλαίσια της Θεωρίας της Ελαστικότητας [Βαλιάσης \[1\]](#), [Κατσικαδέλης \[4\]](#). Στη συνέχεια παρουσιάζεται η καμπτική συμπεριφορά ορθογωνικής πλάκας υπό την ταυτόχρονη επίδραση εξωτερικής επιφανειακής κατανεμημένης φορτίσεως και αυθαίρετου θερμικού πεδίου, ενώ παράλληλα εξάγονται οι σχέσεις οι οποίες δίδουν το τασικό και παραμορφωσιακό πεδίο συναρτήσει της κατακόρυφης παραμορφώσεως της μέσης επιφάνειας της πλάκας, το οποίο αναπτύσσεται στο εσωτερικό της πλάκας ως υπέρθεση δύο διαφορετικών καταστάσεων, της ισόθερμης και της εφαρμοζόμενης θερμικής φορτίσεως, τονίζοντας της αναλογία μεταξύ των ως άνω καταστάσεων, πάντοτε υπό τις εκάστοτε συνοριακές συνθήκες στηρίξεως της [Barron \[7\]](#), [Ugural \[17\]](#), [Ventsel \[18\]](#).

Επιπλέον κατ'αναλογία με τα παραπάνω παρουσιάζεται και το πρόβλημα της πλάκας υπό σύνθετη καταπόνηση και προσδιορίζονται οι αντίστοιχες εξισώσεις οι οποίες το περιγράφουν. Συνεπεία των προηγούμενων καταστρώνεται το πλέγμα των εξισώσεων το οποίο χαρακτηρίζει την συμπεριφορά της πλάκας υπό τις παραπάνω φορτίσεις και το οποίο περιλαμβάνει τη διέπουσα εξίσωση καμπτόμενης πλάκας για την εφαρμοζόμενη φόρτιση [Barron \[7\]](#), [Ugural \[17\]](#), [Ventsel \[18\]](#).

Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση της δυναμικής συμπεριφοράς της πλάκας υπό τυχαίο θερμικό πεδίο λαμβάνοντας υπόψη τους αδρανειακούς όρους οι οποίοι και αναπτύσσονται εξαιτίας της, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα σύζευξης του θερμοκρασιακού και του θερμικού πεδίου, διατυπώνοντας έτσι την εξίσωση κινήσεως της καμπτόμενης πλάκας, συνοδευόμενη από τις επιβαλλόμενες συνοριακές συνθήκες στηρίξεως αλλά και τις υπάρχουσες αρχικές [Leissa \[12\]](#), [Ventsel \[18\]](#).

Στο τρίτο κεφάλαιο το οποίο και κλείνει την παρούσα εργασία παρουσιάζονται δύο εφαρμογές της προηγηθείσης θεωρίας σε λεπτές ορθογωνικές πλάκες απλά εδραζόμενες, υπό την επίδραση στατικού αλλά και δυναμικού θερμικού πεδίου περιοδικής μορφής, βασιζόμενες στη μέθοδο επιλύσεως της διέπουσας διαφορικής εξίσωσης κατά Navier της θεωρίας της Ελαστικότητας, μέσω της αναπτύξεως σε διπλή σειρά Fourier τόσο της θερμικής ροπής κάμψεως όσο και της προκύπτουσας εξ' αυτής κατακόρυφης παραμορφώσεως της πλάκας [Leissa \[12\]](#), [Ventsel \[18\]](#). Εξάγονται έτσι συμπεράσματα αναφορικά με τη στατική και δυναμική συμπεριφορά της πλάκας για τις αυθαίρετες αυτές θερμικές φορτίσεις. Τέλος διατυπώνονται τα συμπεράσματα τα οποία αφορούν στο σύνολο της εργασίας και καταγράφονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα στην περιοχή των Συζευγμένων Πεδίων.

Introductory Note

The Mechanics of Continuous Media is a very broad branch of exact sciences which presents exceptional interesting. The concept of continuous medium in opposition to discrete, was introduced to overcome the difficulties which have arisen in determining the effect on the interior of a body due to an external intervention at its area. An outer surface activity penetrates and reaches inside of the isolated components of the body in different ways.

Considering the atom as the fundamental component and taking into account the large number of these, which are contained in a space, it becomes apparent that the attempt to determine the effects of surface actions is very difficult, if not futile. Thus the body is able to deform due to the changes in the distances of its atoms, and these deformations must have a certain maximum value. It is obvious that the concept of taking the atoms as the basic element of matter leads to insurmountable problems for the calculation of the internal forces of the bodies due to the actions of external influences.

Considering the above structure of matter we reach the concept of the continuum which is set as the base of the foundation of Mechanics of Deformable Solid Bodies and by extension of the Theory of Elasticity, whose object is to determine the internal forces that develop due to the above outer influence. In the Theory of Elasticity bodies composed of amorphous materials in which atoms are arranged at random position without any particular orientation and therefore are **isotropic** i.e. they reveal the same properties in all directions. Moreover macroscopically behave as **homogeneous**, since they present the same properties at each point of the space that they occupy. Furthermore for the calculation of internal forces one can obtain an infinitesimal volume wherein the resulting internal forces and displacements are continuous functions of the coordinates of the internal points of the above volume. Thus we arrive at the concept of the **continuity** of the body.

As it is mentioned previously, the subject of the Theory of Elasticity is the calculation of internal forces and deformations caused by them, because of the action on the bodies of external loads or other causes, such as temperature changes, etc. It is experimentally proved that all bodies at the beginning of loading, present a relation between the forces and the corresponding strains that is linear and disappears if the applied forces are removed. Therefore, as in the Classical Theory of Elasticity these relations that connect the developing deformations with the corresponding forces are linear, so as in the case of thermoelasticity the deformations

associated linearly with the temperature change. Thus in the bounds of the Linear Theory of Thermoelasticity the behavior of the body or the medium as a function of applied temperature is studied. Essentially the correlation between the developing internal forces and deformations due to thermal heating is sought. In fact Thermoelasticity connects the Continuum Mechanics and the theory of heat transfer between the medium and its respective environment.

The development of the problem of the Theory of Elasticity in combination with the effect of temperature change taking into account the coupling effects of the temperature and strain field was first held by Jean-Marie-Constant Duhamel in 1837. Generally the object of Mechanics of Coupled Fields and especially the Linear Theory of Thermoelasticity is modern. An interesting application of the above theory is the study of the flexural behavior of thin plates of homogeneous and isotropic material under the influence of static and dynamic thermal field, which is described below.

The purpose of this essay is to demonstrate the effect of temperature on both flexural behavior of a plate of finite dimensions, which is composed of a homogeneous and isotropic elastic material and the developing of stress and displacement field, within the bounds of the theories of small deformations and thin plates under the prevailing **Kirchhoff's hypotheses**, due to the influence of an arbitrary three-dimensional static and dynamic thermal field.

So in the first chapter are presented in a comprehensive way the key points of the mathematical theory of thermoelasticity, starting from the mechanism of heat transfer by conduction through Fourier's law and the law of thermal diffusion according to the corresponding boundary and initial conditions [Ösizik \[14\]](#). Then the relations which characterize the problem of Thermoelasticity are set out and these are the constitutional relations stress - strain relations or modified Hooke's laws, the corresponding equations of equilibrium and motion for external thermal load and a first solution to the problem of Thermoelasticity by implementing the Goodier's thermoelastic displacement potential is presented. Furthermore the Navier - Cauchy equations and the corresponding equations of equilibrium and movement through stresses for both stationary and quasistatic and dynamic problems are formulated [Hetnarski \[11\]](#), [Nowacki \[13\]](#). Finally the problem of plane Thermoelasticity either plane stress or plane strain is mentioned, since through the reduction of a three-dimensional problem of thermoelasticity in the two-dimensional problem, as is the case of plates, simplification in calculating the respective stress and strain field is achieved [Hetnarski \[11\]](#).

The second chapter is devoted to the development of the theory of thin plates under small deformations initially giving the definition of a thin plate, based on the geometric characteristics, taking into account the existence of the thermal field. Thus the analysis of linear thermoelastic plates under bending, in the bounds of uncoupled Thermoelasticity for homogeneous, isotropic elastic material is presented. Consequently the **Kirchhoff's hypotheses** are cited, as these formulated in the context of the Theory of Elasticity [Valiasis \[1\]](#), [Katsikadelis \[4\]](#). Then the flexural behavior of rectangular plate under the simultaneous influence of external surface and distributed loading and arbitrary thermal field is developed, while relations which give the stress and strain field as a function of transverse deflection of the midsurface of the plate are derived and which is developed within the plate as a superposition of two different states of isothermal and the applied thermal load, emphasizing the analogy between these two situations under the respective supporting boundary conditions [Barron \[7\]](#), [Ugural \[17\]](#), [Ventsel \[18\]](#).

In addition to the above the problem of a plate under combined lateral and direct loads and thermal field is also described and the corresponding equations that describe it are derived. Following the above the governing differential equation of flexural plate under this applied loading is formulated [Barron \[7\]](#), [Ugural \[17\]](#), [Ventsel \[18\]](#).

The chapter concludes with the presentation of the dynamic behavior of the plate under random thermal field taking into account the inertial terms which are growing and because of it, without taking into consideration the coupling effects of the temperature and strain field formulating the equation of motion of a flexural plate together with the imposed boundary supporting conditions as well with the initial [Leissa \[12\]](#), [Ventsel \[18\]](#).

In the third chapter, which closes the text, two applications of the preceding theory of simply supported thin rectangular plates are presented, under the influence of either static or dynamic thermal field of harmonic form, based on the Navier's method of solution are governing plate differential equation of the theory of elasticity, through the development in double Fourier series both thermal bending moment and the resultant transverse deflection of the plate [Leissa \[12\]](#), [Ventsel \[18\]](#). Thus conclusions regarding the static and dynamic behavior of the plate for these arbitrary thermal loadings are exported. Finally conclusions relating to the amount of work are formed and recommendations for future research in the area of coupled fields are recorded.

Κεφάλαιο 1: Βασικές εξισώσεις της Μαθηματικής Θεωρίας της Θερμοελαστικότητας

1.1 Σχετικά προλεγόμενα

Στη Θεωρία της Θερμοελαστικότητας το μέσο όπως και στην κλασική θεωρία της Ελαστικότητας θεωρείται ιδανικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο, το οποίο κατά την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων καθώς και του θερμικού πεδίου υφίσταται μετατοπίσεις, τόσο εξαιτίας της εξωτερικής φορτίσεως όσο και της θερμοκρασίας. Η θερμοκρασία είναι μια φυσική ποσότητα – μεταβλητή η οποία αποτελεί το μέτρο μέσω του οποίου προσδιορίζεται η θερμική κατάσταση των σωμάτων. Η θερμοκρασία του σώματος μπορεί να μεταβάλλεται λόγω της μεταφοράς θερμότητας από το γειτονικό του περιβάλλον, πιθανής δράσης πηγών θερμότητας αλλά και του ίδιου του φαινομένου της παραμορφώσεως. Θερμότητα ορίζεται ως η μορφή ενέργειας η οποία μεταφέρεται διαμέσου του ορίου ενός συστήματος συγκεκριμένης θερμοκρασίας προς ένα άλλο σύστημα ή στο περιβάλλον το οποίο βρίσκεται σε χαμηλότερη θερμοκρασία αποκλειστικά και μόνο εξαιτίας της θερμοκρασιακής αυτής διαφοράς. Πρέπει να σημειωθεί ότι το ίδιο το σύστημα δεν περικλείει θερμότητα.

Η μεταφορά θερμότητας πραγματοποιείται με τρεις διαφορετικούς μηχανισμούς : ο πρώτος αναφέρεται σε ακίνητο μέσο (στερεό , υγρό ή αέριο) και ονομάζεται **αγωγή**, ο δεύτερος αναφέρεται σε μετάδοση θερμότητας μεταξύ μιας στερεής επιφάνειας και ενός κινούμενου ρευστού και ονομάζεται **συναγωγή** και ο τρίτος μηχανισμός στηρίζεται στο γεγονός ότι κάθε σώμα πεπερασμένης θερμοκρασίας εκπέμπει **ακτινοβολία**. Έτσι μεταξύ δύο σωμάτων διαφορετικής θερμοκρασίας θα υπάρχει μεταφορά θερμότητας. Οι βασικοί νόμοι της Θερμοελαστικότητας περιλαμβάνουν κατά πλήρη αντιστοιχία με τη Γραμμική Θεωρία Ελαστικότητας τις εξισώσεις κινήσεως, τις εξισώσεις συμβιβαστού και τις καταστατικές εξισώσεις συνυπολογίζοντας και την μεταβολή της θερμοκρασίας. Στο παρόν κεφάλαιο εξάγονται οι βασικές εξισώσεις της Γραμμικής Θερμοελαστικότητας χρησιμοποιώντας τις γραμμικές σχέσεις οι οποίες συνδέουν την παραμόρφωση του μέσου με τις συνεπαγόμενες μετατοπίσεις. Ακόμη μελετάται το πρόβλημα της διδιάστατης Θερμοελαστικότητας είτε σε κατάσταση επίπεδης εντάσεως είτε παραμορφώσεως.

1.2 Μεταφορά Θερμότητας δι'αγωγής - Νόμος Fourier

Στην αγωγή πραγματοποιείται μεταφορά θερμότητας από ένα σύστημα υψηλότερης θερμοκρασίας σε ένα άλλο χαμηλότερης θερμοκρασίας, υπό την προϋπόθεση της φυσικής επαφής.

Θεωρούμε στον χώρο (x_r) ένα ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή B και περικλείεται από την επιφάνεια S . Ο χώρος (x_r) μπορεί να είναι το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x_1, x_2, x_3)$ ή κυλινδρικών ή σφαιρικών ή οποιωνδήποτε καμπυλόγραμμων εν γένει συντεταγμένων. Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $T = T(x_r, t)$ η οποία αποτελεί τη συνάρτηση της θερμοκρασίας στον χώρο (x_r) τη χρονική στιγμή t . Εξαιτίας της βαθμίδας (gradient) της θερμοκρασίας μεταξύ των σημείων του χώρου (x_r) πραγματοποιείται μεταφορά θερμότητας, δι' αγωγής ανά μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου, κατά τη διεύθυνση της μειούμενης θερμοκρασίας η οποία περιγράφεται διανυσματικά μέσω της σχέσεως :

$$q(x_r, t) = -k\nabla T = -k\text{grad}T \quad (1.2.1)$$

όπου η θετική ποσότητα k ονομάζεται συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του μέσου και ∇T η βαθμίδα της θερμοκρασίας με

$$\nabla T = \text{grad}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)$$

η οποία ως διάνυσμα κατευθύνεται προς τις θέσεις όπου αυξάνεται η θερμοκρασία T . Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη διαφορική μορφή του νόμου Fourier [14].

1.3 Διαφορική εξίσωση μεταφοράς θερμότητας δι'αγωγής

Προκειμένου να εξάγουμε την εξίσωση θερμικής διάχυσης στην περιοχή B θα θεωρήσουμε ένα τμήμα όγκου CV (Control Volume) του σώματος περικλειόμενο από την κλειστή και κατά τμήματα λεία επιφάνεια $S = \partial V$. Ο ρυθμός με τον οποίο η θερμότητα εισέρχεται μέσω του συνόρου $S = \partial V$ σε χρονικό διάστημα t θα δίνεται από τη σχέση:

$$q_{in} = -\iint_S \mathbf{q} \mathbf{n} dA = -\iint_{\partial V} \mathbf{q} \mathbf{n} dA = -\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = -\iiint_V \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}_r, \mathbf{t}) dV \quad (1.3-\alpha)$$

όπου \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $S = \partial V$ διευθυνόμενο προς το εξωτερικό αυτής.

Στην παραπάνω σχέση έγινε χρήση του **θεωρήματος Green – Gauss** (Παρ. II).

Ακόμη εάν στο μέσο θεωρήσουμε ότι υπάρχει και πηγή παραγωγής θερμότητας με ρυθμό q' τότε αυτός θα δίνεται από τη σχέση:

$$q' = \iiint_V g(x_r, t) dV \quad (1.3-\beta)$$

Τέλος ο ρυθμός \dot{E}_s με τον οποίο ενέργεια αποθηκεύεται στο μέσο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\dot{E}_s = \iiint_V \rho c \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t} dV \quad (1.3-\gamma)$$

όπου c ειδική θερμότητα του υλικού του μέσου.

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατηρήσεως της Ενέργειας στο παραπάνω στοιχείο ελέγχου θα έχουμε ότι :

$$q_{in} + q' = \dot{E}_s \quad \text{ή} \quad -\iiint_V \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}_r, \mathbf{t}) dV + \iiint_V g(x_r, t) dV = \iiint_V \rho c \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t} dV$$

ή

$$\iiint_V (-\nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}_r, \mathbf{t}) + g(x_r, t) - \rho c \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t}) dV = 0 \quad (1.3.1)$$

Επειδή το στοιχείο ελέγχου όγκου V είναι τυχαίο από την (1.3.1) προκύπτει ότι:

$$-\nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}_r, \mathbf{t}) + g(x_r, t) - \rho c \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.3.2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.3.2) την (1.2.1) προκύπτει ότι:

$$k\nabla^2 T + g(x_r, t) - \rho c \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T - \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t} = -\frac{g(x_r, t)}{k}$$

ή

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T(x_r, t)}{\partial t} = -\frac{Q}{a} \quad (1.3.3)$$

Χρησιμοποιώντας τη γραφή με χρήση δεικτών η (1.3.3) λαμβάνει την παρακάτω τελική μορφή:

$$T_{,kk} - \frac{1}{a} \dot{T} = -\frac{Q}{a} \quad (1.3.4)$$

όπου η ποσότητα $a = \frac{k}{\rho c}$ ονομάζεται θερμική διαχυτότητα και είναι ένα μέτρο της ταχύτητας με

την οποία η θερμότητα διαχέεται στο μέσο και $g(x_r, t) = Qc\rho$ [14].

Υπενθυμίζεται ότι:

$$T_{,i} = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad T_{,kk} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \quad \text{και} \quad \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Η διαφορική εξίσωση (1.3.4) είναι παραβολικού τύπου και η επίλυσή της μας δίνει την κατανομή της θερμοκρασίας στο μέσο σε κάθε θέση κάθε χρονική στιγμή, αφού τα θερμοκρασιακά πεδία είναι εν γένει μη μόνιμα. Στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση της θερμοκρασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου τότε το θερμοκρασιακό πεδίο είναι μόνιμο. Σ'αυτή την περίπτωση όπου

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

η εξίσωση (1.3.4) γίνεται:

$$T_{,kk} = -\frac{Q}{a} \quad (1.3.5)$$

η οποία αποτελεί μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση Poisson.

Εάν επιπλέον δεν υπάρχουν εσωτερικές πηγές παραγωγής θερμότητας η (1.3.5) μετασχηματίζεται στην διαφορική εξίσωση Laplace

$$T_{,kk} = 0 \quad (1.3.6)$$

Συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Από την εξίσωση (1.3.4) παρατηρούμε ότι το θερμοκρασιακό πεδίο είναι πλήρως ορισμένο, εφόσον είναι δεδομένες τόσο οι συνοριακές όσο και οι αρχικές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες απεικονίζουν την αλληλεπίδραση μεταξύ του μέσου και του περιβάλλοντός του κατά μήκος του συνόρου $S = \partial V$. Διακρίνουμε προς τούτο τριών ειδών συνοριακές συνθήκες για το παραπάνω πρόβλημα :

i) Συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή πρώτου είδους

Η θερμοκρασία είναι ορισμένη σε όλο το μήκος του συνόρου δηλαδή ισχύει για $t > t_0$ ότι:

$$T(x_r, t) = f(x_r, t)$$

όπου η $f(x_r, t)$ είναι εν γένει συνάρτηση της θέσεως και του χρόνου. Στην περίπτωση κατά την οποία $T(x_r, t) = 0$, τότε η συνοριακή συνθήκη ονομάζεται ομογενής συνοριακή συνθήκη πρώτου είδους.

ii) Συνοριακές συνθήκες Neumann ή δεύτερου είδους

Σύμφωνα με αυτή η κλίση της θερμοκρασίας, κατά την διεύθυνση του προς τα έξω μοναδιαίου κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στην επιφάνεια, είναι δεδομένη σε όλα τα σημεία του συνόρου και $\forall t > t_0$ περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση :

$$T_{,n} = \frac{\partial T}{\partial n} = f(x_r, t)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία

$$T_{,n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

η συνοριακή συνθήκη ονομάζεται ομογενής δεύτερου είδους και αντιστοιχεί στην περίπτωση θερμικά μονωμένου μέσου.

iii) Συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου

Η συγκεκριμένη αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων και περιγράφεται μαθηματικά από τις γενικές σχέσεις :

$$T(x_r, t) = f(x_r, t)$$

σε ένα τμήμα S_u του κατά τμήματα λείου συνόρου S

$$T_{,n} = \frac{\partial T}{\partial n} = g(x_r, t)$$

σε ένα άλλο τμήμα S_v του κατά τμήματα λείου συνόρου S , όπου $S = S_u \cup S_v$ και οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στα αντίστοιχα τμήματα του λείου συνόρου. Η παραπάνω συνοριακή συνθήκη εκφράζει την ελεύθερη ανταλλαγή θερμότητας με τον περιβάλλοντα χώρο.

Οι αρχικές συνθήκες σε αντιδιαστολή με τις συνοριακές δίνουν την κατανομή της θερμοκρασίας σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$, δηλαδή $T(x_r, t_0) = T$ όπου η T είναι συνάρτηση της θέσης μόνο.

Στην περίπτωση άπειρου μέσου όπου δεν υπάρχει σύνορο S οι συνοριακές συνθήκες αντικαθίστανται από την απαίτηση η συνάρτηση της θερμοκρασίας στο άπειρο να είναι φραγμένη. Τέλος στην περίπτωση μόνιμης αγωγής θερμότητας οι αρχικές συνθήκες δεν είναι απαραίτητες και η εξίσωση (1.3.5) μπορεί να επιλυθεί με τις συνοριακές συνθήκες και μόνο [14].

1.4 Πεδίο τάσεων και παραμορφώσεων. Εξισώσεις ισορροπίας και κινήσεως

1.4.1 Καταστατικές εξισώσεις

Η μεταβολή της θερμοκρασίας ενός σώματος έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη τάσεων και παραμορφώσεων εντός αυτού. Προς τούτο θεωρούμε ως T την αύξηση της θερμοκρασίας από την αρχική αφόρτιστη κατάσταση όπου $T = 0$. (Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε στην γενική περίπτωση ως θερμοκρασία αναφοράς την $T = T_0$ και την αύξηση της θερμοκρασίας $\Delta T = T - T_0$). Επιπλέον θεωρούμε ότι η αύξηση της θερμοκρασίας είναι μικρή ως εκ τούτου δεν επηρεάζει τις θερμομηχανικές ιδιότητες του υλικού του σώματος.

Για την εξαγωγή των εν λόγω εξισώσεων το μέσο θεωρείται *ιδανικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο* ως προς τις θερμομηχανικές του ιδιότητες. Ορίζουμε πάντοτε, κάνοντας χρήση της γραφής με τη βοήθεια των δεικτών, τις συνιστώσες του διανύσματος των μετατοπίσεων, τα στοιχεία του ταυυστή των παραμορφώσεων και τάσεων όπως παρακάτω :

- Μετατοπίσεις u_i
- Παραμορφώσεις ε_{ij}
- Τάσεις σ_{ij}

όπου $i, j = 1, 2, 3$

Η σχέση η οποία συνδέει τα στοιχεία του ταυυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\varepsilon}$ με τις συνιστώσες του διανύσματος των μετατοπίσεων \mathbf{u} είναι η παρακάτω :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.4.1.1)$$

όπου $i, j = 1, 2, 3$

Υπενθυμίζουμε τη συμμετρία του ταυυστή των παραμορφώσεων και των τάσεων αντίστοιχα με $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T$ και $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

Οι παραπάνω συνιστώσες των παραμορφώσεων δεν είναι αυθαίρετες και θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ji,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad (1.4.1.2)$$

με $i, j, k, l = 1, 2, 3$

Στην κλασική θεωρία της ελαστικότητας οι σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων με εκείνες των παραμορφώσεων αλλά και τις παραμορφώσεις με την μεταβολή της θερμοκρασίας είναι γραμμικές . Ισχύει δε στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας η αρχή της υπερθέσεως σύμφωνα με την οποία το συνολικό παραμορφωσιακό πεδίο το οποίο προκύπτει από την εφαρμογή εξωτερικών δράσεων αλλά και θερμικού πεδίου ισούται με το άθροισμα των αντίστοιχων συνεπαγόμενων παραμορφωσιακών πεδίων ήτοι :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}' \quad (1.4.1.3)$$

όπου ε_{ij}^0 οι συνιστώσες του ταυυστή των παραμορφώσεων λόγω αποκλειστικά και μόνο της αύξησας της θερμοκρασίας από $T_0 = 0$ έως $T > T_0$ και ε_{ij}' οι συνιστώσες του ταυυστή των παραμορφώσεων λόγω της οποιασδήποτε εξωτερικής φορτίσεως, όπου T_0 η θερμοκρασία αναφοράς στην αφόρτιστη και απαράμορφωτη κατάσταση

Ισχύει ότι:

$$\varepsilon_{ij}^0 = a_i (\Delta T) \delta_{ij} \quad (1.4.1.4)$$

όπου $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ το δέλτα του Kronecker και a_i ο συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής του

υλικού του μέσου ο οποίος ορίζεται ως η ανηγμένη μεταβολή του μήκους του στοιχείου κατά την αύξηση της θερμοκρασίας κατά ένα $^{\circ}C$ και $\Delta T = T - T_0$

Η σχέση (1.4.1.4) δείχνει ότι εξαιτίας της θερμοκρασιακής αύξησης αναπτύσσονται μόνο ορθές παραμορφώσεις πράγμα το οποίο οδηγεί σε διόγκωση το μέσο.

Τα στοιχεία του ταυυστή των παραμορφώσεων συνδέονται με εκείνα του ταυυστή των τάσεων μέσω των παρακάτω γραμμικών σχέσεων:

$$\varepsilon_{ij}' = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.4.1.5)$$

όπου μ το μέτρο διάτμησης του υλικού, σ_{kk} το ίχνος του ταυυστή των τάσεων $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ το ίχνος του ταυυστή των παραμορφώσεων και ν ο λόγος του Poisson. Τελικά η (1.4.1.5) σε συνδυασμό με την (1.4.1.3) μας δίνουν τις παρακάτω εξισώσεις οι οποίες καλούνται εξισώσεις Neumann – Duhamel [11], [13]

$$\varepsilon_{ij} = a_i T \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.4.1.6)$$

Τα ίχνη των ταυυστών συνδεονται μεταξύ του μέσω της σχέσεως :

$$\varepsilon_{kk} - 3a_i T = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk} \quad (1.4.1.7)$$

Οι ελαστικές σταθερές για ένα ισότροπο και ομογενές υλικό συνδέονται μεταξύ του και με τη σταθερά του Lamé λ και τον λόγο ν του Poisson μέσω των παρακάτω σχέσεων :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{και} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Από τις (1.4.1.6) και (1.4.1.7) και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτουν οι παρακάτω καταστατικές εξισώσεις της γραμμικής θερμοελαστικότητας [11], [13]

$$\varepsilon_{ij} = a_i T \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.4.1.8)$$

$$\varepsilon_{kk} - 3a_i T = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \quad (1.4.1.9)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + [\lambda \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu) a_i (\Delta T)] \delta_{ij} \quad (1.4.1.10)$$

Εάν στο σώμα έχουμε μόνο φόρτιση λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής από την (1.4.1.6) προκύπτει ότι :

$$\varepsilon_{ij} = a_i (\Delta T) \delta_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 \quad (1.4.1.11)$$

Οι παραπάνω προκύπτουσες ορθές παραμορφώσεις πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση συμβιβαστού (1.4.1.2), συνεπώς αντικαθιστώντας τις σ'αυτήν προκύπτει το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$T_{,ij} = 0 \quad \text{με} \quad i, j = 1, 2, 3$$

η οποία ικανοποιείται όταν η κατανομή της θερμοκρασίας είναι γραμμική [13].

1.4.2 Εξισώσεις ισορροπίας και κινήσεως

Το τασικό πεδίο σε ένα ελαστικό μέσο παρουσιάζει συνεχή κατανομή εντός αυτού και προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα εφαρμοζόμενα φορτία. Θεωρούμε ότι στο τμήμα όγκου του σώματος V περικλειόμενο από την κλειστή επιφάνεια S , εφαρμόζονται ελκυστές οι οποίοι είναι κατανεμημένοι επί της επιφάνειας του σώματος και παρίστανται ως $\mathbf{T}^{(n)}$ και καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου οι οποίες συμβολίζονται ως \mathbf{F} . Εάν το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση

ισορροπίας το άθροισμα των εφαρμοζόμενων φορτίων τα οποία ασκούνται στον θεωρούμενο όγκο ισούται με μηδέν. Η παραπάνω συνθήκη ισορροπίας περιγράφεται μαθηματικά ως ακολούθως :

$$\iiint_V \mathbf{F}dV + \iint_S \mathbf{T}^{(n)} ds = 0$$

ή με χρήση συνιστωσών

$$\iiint_V F_i dV + \iint_S T_i^{(n)} ds = 0$$

περαιτέρω η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως ακολούθως :

$$\iiint_V F_i dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j ds = 0$$

Εφαρμόζοντας το **θεώρημα Green-Gauss** (Παρ. ΙΙ) η προηγούμενη σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\iiint_V (F_i + \sigma_{ij,j}) dV = 0$$

επειδή ο όγκος ολοκληρώσεως είναι αυθαίρετος από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι :

$$F_i + \sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.4.2.1)$$

Οι (1.4.2.1) αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες αναλυτικά γράφονται ως :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.2.2)$$

Ενώ σε τανυστική μορφή είναι :

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1.4.2.3)$$

ενώ απο την εξίσωση μηδενισμού ροπών προκύπτει η συμμετρία του τανυστή των τάσεων ήτοι:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad [13].$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας συμπληρώνονται και από τις συνοριακές συνθήκες οι οποίες είναι της μορφής [13]

$$\sigma_{ij}n_j = g_i(x_r)$$

Στην αντίθετη περίπτωση κατά την οποία το θερμοκρασιακό πεδίο είναι μη μόνιμο τότε οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας τροποποιούνται συμπεριλαμβάνοντας και τον όρο $\rho\ddot{u}_i$, ο οποίος αντιστοιχεί στις αδρανειακές δυνάμεις στον θεωρούμενο όγκο V , μετασχηματιζόμενες πλέον σε εξισώσεις κινήσεως. Έτσι εν προκειμένω το τασικό καθώς και το παραμορφωσιακό πεδίο είναι συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Συνεπώς βάσει των προαναφερομένων οι εξισώσεις κινήσεως οι οποίες προκύπτουν έχουν την ακόλουθη μορφή [13]

$$F_i + \sigma_{ij,j} - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad (1.4.2.4)$$

όπου \ddot{u}_i η επιτάχυνση την οποία αποκτά το μέσο κατά τη διεύθυνση του x_i . Σ'αυτή την περίπτωση το πρόβλημα καθίσταται δυναμικό και οι εξισώσεις ισορροπίας συμπληρώνονται πέρα από τις συνοριακές συνθήκες με τις αρχικές συνθήκες $u_i = f_i(x_r, t)$ και $\dot{u}_i = h_i(x_r, t)$.

1.5 Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις για στάσιμα (stationary) και ψευδοστατικά (quasistatic) προβλήματα. Τροποποιημένες εξισώσεις Navier

Από τις εξισώσεις ισορροπίας

$$F_i + \sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.5.1)$$

Οι τάσεις μπορούν να εκφραστούν ως προς τις παραμορφώσεις και εκείνες με τη σειρά τους μέσω των μετατοπίσεων. Έτσι οι σχέσεις (1.4.1.10) βάσει των μετατοπίσεων λαμβάνουν την παρακάτω μορφή :

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + [\lambda u_{k,k} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_t(\Delta T)]\delta_{ij} \quad (1.5.2)$$

παραγωγίζοντας μερικώς τις (1.5.2) και αντικαθιστώντας το εξαγόμενο στις εξισώσεις ισορροπίας (1.5.1) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu)u_{k,ki} + F_i - (3\lambda + 2\mu)a_i T_i = 0 \quad (1.5.3)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (1.5.3) ονομάζονται *τροποποιημένες εξισώσεις Navier* και είναι εκφρασμένες σε όρους μετατοπίσεων κατά τις διευθύνσεις των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων [13].

Εάν στο σύνορο S οι συνιστώσες των ελκυστών των οιωνδήποτε επιφανειακών φορτίων είναι καθορισμένοι ως $T_i^{(n)}$, οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται, εκφράζονται μέσω της σχέσεως του Cauchy ως

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j \quad (1.5.4)$$

Εάν ωστόσο το πρόβλημα διατυπώνεται υπό τη μορφή των μετατοπίσεων η (1.5.4) συσχετίζεται με τις μετατοπίσεις μέσω των σχέσεων (1.5.2) λαμβάνοντας την παρακάτω μορφή :

$$T_i^{(n)} = \{\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + [\lambda u_{k,k} - (3\lambda + 2\mu)a_i(\Delta T)]\delta_{ij}\}n_j \quad (1.5.5)$$

Παρατηρούμε από τις σχέσεις (1.5.2) και (1.5.3) ότι το συνολικό πεδίο δυνάμεων το οποίο εφαρμόζεται στο σώμα προκύπτει ως επαλληλία φορτίσεων των F_i και της $-(3\lambda + 2\mu)a_i T_i$ θεωρώντας την θερμοκρασιακή φόρτιση ως καθολική δύναμη στις εξισώσεις ισορροπίας . Ακόμη από τη σχέση (1.5.5) οι ελκυστές των επιφανειακών φορτίσεων διαφοροποιούνται από $T_i^{(n)}$ σε $T_i^{(n)} + (3\lambda + 2\mu)a_i(\Delta T)n_i$. Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω θεώρηση το πρόβλημα της καθαρής θερμικής φορτίσεως λόγω της κλίσης του θερμοκρασιακού πεδίου μετασχηματίζεται σε πρόβλημα της κλασσικής θεωρίας της ελαστικότητας όπου πλέον οι καθολικές δυνάμεις αντικαθίστανται από τον όρο $(3\lambda + 2\mu)a_i T_i$, ενώ οι ελκυστές των επιφανειακών δυνάμεων ισοδυναμούν με τον όρο $(3\lambda + 2\mu)a_i(\Delta T)n_i$. Σ' αυτή την περίπτωση οι συνοριακές συνθήκες έχουν τη μορφή [13]

$$\sigma_{ij}n_j = 0$$

και για την περίπτωση των κινηματικών συνοριακών συνθηκών κατά μήκος του συνόρου τη μορφή :

$$u_i = g_i(x_r)$$

Με άλλα λόγια το πρόβλημα της καθαρής θερμικής φορτίσεως μπορεί να αντιμετωπιστεί ως πρόβλημα της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας όπου το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση

σταθερής ομοιόμορφης θερμοκρασίας, υπό την επίδραση πεδίου καθολικών δυνάμεων ισοδύναμου με την εφαρμογή υδροστατικής φορτίσεως υπό τη μορφή :

$$p = -(3\lambda + 2\mu)a_t(\Delta T)$$

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες με όρους ελιυστών δυνάμεων καθώς και οι θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες, ορίζουν πλήρως το πεδίο μετατοπίσεων και το θερμικό πεδίο. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η λύση των εξισώσεων Navier ικανοποιεί τόσο τις εξισώσεις συμβιβαστού των μετατοπίσεων όσο και τις καταστατικές σχέσεις. Συνεπώς αποτελεί μία πλήρη λύση του προβλήματος της θερμοελαστικότητας για απλά συνεκτικά μέσα.

1.6 Γενική λύση του προβλήματος της Θερμοελαστικότητας

Στην παρούσα παράγραφο θεωρούμε το πρόβλημα της καθαρής θερμικής φορτίσεως υπό την απουσία καθολικών δυνάμεων και ελιυστών επιφανειακών φορτίων. Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε προηγουμένως οι εξισώσεις Navier έχουν τη μορφή :

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} - (3\lambda + 2\mu) a_{t, i} T = 0 \quad (1.6.1)$$

όπου η κατανομή της θερμοκρασίας T θεωρείται δεδομένη από την εξίσωση θερμικής διάχυσης και στην παρούσα περίπτωση της στάσιμης καταστάσεως ανεξάρτητη του χρόνου t . Το παραπάνω σύστημα πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων είναι μη ομογενές και η πλήρης λύση τους προκύπτει ως το άθροισμα της γενικής λύσης u_i^s της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως και της μερικής λύσης u_i^T της μη ομογενούς ήτοι :

$$u_i = u_i^s + u_i^T \quad (1.6.2)$$

Η γενική λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων (1.6.1) προτάθηκε από τον Papkovitch υπό τη μορφή :

$$u_i^s = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k \Phi_k) - 4(1-\nu)\Phi_i \quad (1.6.3)$$

όπου η αρμονική συνάρτηση Φ_i προκύπτει από την επίλυση της εξισώσεως Laplace:

$$\nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (1.6.4)$$

Η συνάρτηση δυναμικού Φ είναι μια διανυσματική συνάρτηση.

Μία μερική λύση της (1.6.1) προτάθηκε από τον Goodier κάνοντας χρήση της βαθμωτής συναρτήσεως του θερμοελαστικού δυναμικού των μετατοπίσεων ψ , θεωρώντας ότι το πεδίο των μετατοπίσεων προκύπτει από τη συνάρτηση δυναμικού ψ μέσω της σχέσεως:

$$u_i^T = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (1.6.5)$$

αντικαθιστώντας την (1.6.5) στην (1.6.1) έχουμε ότι:

$$\mu \psi_{,ikk} + (\lambda + \mu) \psi_{,kki} - (3\lambda + 2\mu) a_i T_i = 0 \quad (1.6.6)$$

Ολοκληρώνοντας την (1.6.6) ως προς x_i προκύπτει ότι:

$$\nabla^2 \psi = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} a_i T_i \quad (1.6.7)$$

η αποτελεί διαφορική εξίσωση Poisson από τη λύση της οποίας προκύπτει η συνάρτηση δυναμικού ψ .

Συνδυάζοντας την (1.6.3) και την (1.6.5) η πλήρης λύση της (1.6.1) θα δίνεται ως:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi + x_k \Phi_k) - 4(1-\nu) \Phi_i \quad (1.6.8)$$

Η παραπάνω μέθοδος επιλύσεως ικανοποιεί όλες τις συνθήκες για απλά συνεκτικές περιοχές. Η βαθμωτή συνάρτηση ψ αντιπροσωπεύει μια μερική λύση στα προβλήματα της θερμοελαστικότητας. Έτσι γνωρίζοντας τη συνάρτηση δυναμικού ψ οι παραμορφώσεις και οι τάσεις θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \psi_{,ij} \quad (1.6.9)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu (\psi_{,ij} - \delta_{ij} \psi_{,kk}) \quad (1.6.10)$$

Για την επίλυση του προβλήματος της θερμοελαστικότητας μέσω του θερμοελαστικού δυναμικού των μετατοπίσεων θα πρέπει να εξασφαλίσουμε τη συνάρτηση δυναμικού ψ , αφού προηγουμένως έχει προσδιοριστεί η συνάρτηση της θερμοκρασίας από την εξίσωση θερμοικής διαχύσεως και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Τα πεδία των τάσεων και παραμορφώσεων τα οποία προκύπτουν από την παραπάνω μέθοδο εν γένει δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

του προβλήματος. Η πληρότητα της λύσεως του προβλήματος εξασφαλίζεται εάν στην παραπάνω μερική λύση προστεθεί η γενική λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων της ισόθερμης καταστάσεως. Επιπλέον οι σταθερές ολοκληρώσεως θα πρέπει να προσδιοριστούν κατά τέτοιο τρόπο ουτωςώστε η συνολική λύση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες [13].

1.7 Τροποποιημένο διαφορικό σύστημα Beltrami – Michell

Σε πολλές εφαρμογές της θερμοελαστικότητας και ειδικά σε εκείνες όπου οι συνοριακές συνθήκες δίνονται μέσω του ελκυστή των επιφανειακών δυνάμεων καθίσταται καταλληλότερη η έκφραση των εξισώσεων αυτής με όρους τάσεων. Οι παρακάτω εξαγόμενες σχέσεις αφορούν σε στάσιμα και ψευδοστάσιμα προβλήματα της θερμοελαστικότητας, απουσία καθολικών δυνάμεων.

Για την περίπτωση στάσιμου προβλήματος απουσία καθολικών δυνάμεων οι εξισώσεις Navier

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} - (3\lambda + 2\mu) a_t T_{,i} = 0 \quad (1.7.1)$$

δυνάμει των σχέσεων :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.7.2)$$

γράφονται ως :

$$\mu \varepsilon_{ij, kk} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{kk, ij} = (3\lambda + 2\mu) a_t T_{,ij} \quad (1.7.3)$$

αντικαθιστώντας στην (1.7.3) τις σχέσεις Neumann – Duhamel:

$$\varepsilon_{ij} = a_t T \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.7.4)$$

προκύπτει ότι:

$$\sigma_{ij, kk} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk, ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{ss, kk} + 2\mu a_t (T_{,ij} + \delta_{ij} T_{,kk}) = 0 \quad (1.7.5)$$

Η (1.7.5) εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συστολής σ'αυτήν μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$\sigma_{ss, kk} + \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} T_{,kk} = 0 \quad (1.7.6)$$

Αντικαθιστούμε εν συνεχεία την (1.7.6) στην (1.7.5) και προκύπτει ότι:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + 2\mu a_t (T_{,ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} T_{,kk}) = 0 \quad (1.7.7)$$

Εισάγοντας τον τελεστή Laplace στην (1.7.7) αυτή γράφεται:

$$\left[\sigma_{ij,ss} - 2\mu m (T_{,ij} - T_{,ss} \delta_{ij}) \right]_{,kk} = 0 \quad (1.7.8)$$

$$\text{όπου } m = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} a_t$$

Η παραπάνω διατύπωση μέσω των τάσεων εμπεριέχει ως αγνώστους τις έξι συνιστώσες του ταυνοστή των τάσεων, εν αντιθέσει με τη μετακινησιακή διατύπωση η οποία εμπεριέχει ως αγνώστους τις τρεις συνιστώσες των μετατοπίσεων. Το διαφορικό σύστημα των προηγουμένων εξισώσεων καλείται ως *τροποποιημένο διαφορικό σύστημα των Beltrami – Michell*. [11], [13].

1.8 Εξισώσεις των μετατοπίσεων για δυναμικά προβλήματα

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενες παραγράφους εάν οι μεταβολές της θερμοκρασίας πραγματοποιούνται με αργό τρόπο, τότε το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ψευδοστατικό, όπου οι αδρανειακοί όροι $\rho \ddot{u}_i$ μπορούν να αμεληθούν. Οι απότομες όμως μεταβολές της θερμοκρασίας καθιστούν το πρόβλημα δυναμικό με αποτέλεσμα τα φαινόμενα και κατ'επέκταση οι όροι αδράνειας να μην μπορούν να αγνοηθούν. Σ'αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις ισορροπίας μετασχηματίζονται σε εξισώσεις κινήσεως, ανάλογα και οι εξισώσεις Navier συμπεριλαμβάνοντας τους αδρανειακούς όρους, αμφότερες γράφονται ως παρακάτω:

$$F_i + \sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (1.8.1)$$

και

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = (3\lambda + 2\mu) a_t T_{,i} + \rho \ddot{u}_i \quad (1.8.2)$$

ή διανυσματικά:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = (3\lambda + 2\mu) a_t \nabla T + \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.8.3)$$

ή

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = (3\lambda + 2\mu) a_t \nabla T + \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.8.4)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αναπαράστασης του Helmholtz σύμφωνα με το οποίο κάθε λείο διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δύο διανυσματικών ποσοτήτων, της κλίσης ενός βαθμωτού πεδίου Φ και της στροφής ενός διανυσματικού πεδίου Ψ . Η προαναφερθείσα πρόταση περιγράφεται μαθηματικά με την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad (1.8.5)$$

όπου το βαθμωτό πεδίο Φ είναι αστροβίλο ($\nabla \times \Phi = 0$), ενώ το διανυσματικό πεδίο Ψ είναι σωληνοειδές ($\nabla \cdot \Psi = 0$).

Αντικαθιστώντας την (1.8.5) στην (1.8.4) προκύπτει ότι το σύστημα των εξισώσεων (1.8.4) ικανοποιείται όταν:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = mT \quad (1.8.6)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \mathbf{0} \quad (1.8.7)$$

$$\text{όπου } c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{ και } c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Η ποσότητα c_1 αναπαριστά την ταχύτητα διαδόσεως ενός κύματος πύεσεως (p- wave) το οποίο προκαλεί μόνο αλλαγή στον όγκο του στερεού και η οποία συνδέεται με την (1.8.6) όπου το πεδίο Φ είναι αστροβίλο. Η ποσότητα c_2 αντιστοιχεί στην ταχύτητα διαδόσεως ενός διατμητικού κύματος (s-wave) το οποίο δεν προκαλεί αλλαγή στον όγκο του στερεού. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση θερμοικής διαχύσεως

$$T_{,kk} - \frac{1}{a} \dot{T} = -\frac{Q}{a}$$

και απαλείφοντας τη θερμοκρασία από την (1.8.6) προκύπτει ότι:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = -\frac{Qm}{a} \quad (1.8.8)$$

και

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \mathbf{0} \quad (1.8.9)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τις εξισώσεις διαδόσεως θερμοελαστικών κυμάτων σε ένα μέσο. Σε ένα πεπερασμένο μέσο διαδίδονται και οι δυο τύποι κυμάτων, ενώ σε άπειρο μέσο μόνο τα κύματα πίεσεως [13].

1.9 Διατύπωση των εξισώσεων Navier μέσω των τάσεων

Οι εξισώσεις Navier λαμβάνοντας υπόψη τα αδρανειακά φαινόμενα έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} = (3\lambda + 2\mu) a_i T_{,i} + \rho \ddot{u}_i \quad (1.9.1)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων οι οποίες συνδέουν τις παραμορφώσεις με τις μετατοπίσεις

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.9.2)$$

η (1.8.1) γίνεται:

$$\mu \varepsilon_{ij, kk} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{kk, ij} - (3\lambda + 2\mu) a_i T_{,ij} = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij} \quad (1.9.3)$$

Από τις σχέσεις Neumann – Duhamel οι (1.9.3) μετασχηματίζονται στις παρακάτω:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij, kk} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk, ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{ss, kk} - 2(3\lambda + 2\mu) a_i T_{,ij} + [2\mu a_i T_{,kk} \delta_{ij} + 6(\lambda + \mu) a_i T_{,ij}] = \\ = \frac{1}{c_2^2} (\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\sigma}_{kk}) + 2\mu a_i \frac{\ddot{T}}{c_2^2} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συστολής η (1.9.4) προκύπτει ως:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{kk} + m(4\mu T_{,kk} - 3\rho \ddot{T}) = 0 \quad (1.9.5)$$

$$\text{όπου } m = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} a_i, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{ και } c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Δυνάμει της (1.9.5) η (1.9.4) μετασχηματίζεται στην τελική μορφή των εξισώσεων κινήσεως όπου απουσιάζουν οι καθολικές δυνάμεις:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{ij} - m \left[2\mu (T_{,ij} - T_{,ss} \delta_{ij}) + \rho \ddot{T} \delta_{ij} \right] \right\} = 0 \quad (1.9.6)$$

Στην περίπτωση στάσιμου προβλήματος μηδενίζονται οι όροι οι οποίοι εμπεριέχουν τον χρόνο και (1.8.6) τροποποιείται λαμβάνοντας την παρακάτω μορφή:

$$\left\{ \nabla^2 \sigma_{ij} - m \left[2\mu(T_{,ij} - T_{,ss} \delta_{ij}) \right] \right\}_{,kk} = 0 \quad (1.9.7)$$

Στη γενική περίπτωση εφαρμογής και καθολικών δυνάμεων η παραγωγή των εξισώσεων κινήσεως σε συνδυασμό με τις σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων μας δίνουν την παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki} + F_{i,j} + F_{j,i}) = \rho \ddot{\epsilon}_{ij} \quad (1.9.8)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο t τις σχέσεις Neumann – Duhamel θα έχουμε ότι:

$$\ddot{\epsilon}_{ij} = a_t \ddot{T} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} (\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \ddot{\sigma}_{kk} \delta_{ij}) \quad (1.9.9)$$

αντικαθιστώντας την (1.9.9) στην (1.9.8) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις κινήσεως εκφρασμένες ως προς τις τάσεις συμπεριλαμβάνοντας και τις καθολικές δυνάμεις:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki}) - \frac{\rho}{2\mu} (\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \ddot{\sigma}_{kk} \delta_{ij}) = -\frac{1}{2}(F_{i,j} + F_{j,i}) + \rho a_t \ddot{T} \delta_{ij} \quad (1.9.10)$$

ή

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \sigma_{kk,ij} + \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} (\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}) \ddot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu a_t (T_{,ij} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{ij} T_{,kk}) + \\ & - \frac{5\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu} \rho a_t \ddot{T} \delta_{ij} + F_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

$$\text{όπου } F_{ij} = F_{i,j} + F_{j,i} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} F_{mm} \delta_{ij} \quad (1.9.12)$$

Στην περίπτωση του ψευδοστατικού προβλήματος, όπου η μεταβολή της θερμοκρασίας πραγματοποιείται με αργό τρόπο η (1.9.4) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \sigma_{kk,ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{ij} \sigma_{mm,kk} + 2\mu a_t (T_{,kk} \delta_{ij} + T_{,ij}) = 0 \quad (1.9.13)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συστολής στην (1.9.13) έχουμε ότι:

$$\sigma_{mm,kk} = -\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} T_{,kk} \quad (1.9.14)$$

Αντικαθιστώντας την (1.9.14) στην (1.9.13) έχουμε τελικά ότι:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + 2\mu a_t (T_{,ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} T_{,kk}) = 0 \quad (1.9.15)$$

Οι σχέσεις (1.9.4) ή (1.9.11) αποτελούν ένα σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους τα στοιχεία του ταυυστή των τάσεων η επίλυση του οποίου μας δίνει το τασιικό πεδίο σε ένα σημείο του μέσου, υπό τη προϋπόθεση ότι αυτό ικανοποιεί τις εξισώσεις συμβιβαστού και τις εκάστοτε συνοριακές συνθήκες του προβλήματος [11].

1.10 Επίπεδη Θερμοελαστικότητα

Στην κλασική θεωρία ελαστικότητας πολλές περιπτώσεις προβλημάτων προσεγγίζονται καλώς ως προβλήματα της διδιάστατης ελαστικότητας, είτε ως προβλήματα επίπεδης εντάσεως είτε παραμορφώσεως. Έτσι και στη θεωρία της θερμοελαστικότητας πολλές περιπτώσεις βασίζονται στην παραπάνω θεώρηση λαμβάνοντας υπόψη τις αντίστοιχες παραδοχές. Για τις δύο καταστάσεις της επίπεδης θερμοελαστικότητας καταστρώνονται παρακάτω οι αντίστοιχες σχέσεις [11].

α) Επίπεδη ένταση

Στην περίπτωση της επίπεδης εντάσεως οι επίπεδες συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων είναι συναρτήσεις μόνο των x, y ενώ υπόλοιπες συνιστώσες ως προς την τρίτη διάσταση z είναι μηδενικές ήτοι:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y), \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}, \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.10.1)$$

Οπότε οι νόμοι του Hooke της κλασικής θεωρίας της ελαστικότητας λαμβανομένης υπόψη της θερμοκρασίας γίνονται:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + a_t (\Delta T) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + a_t (\Delta T) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{E} (\sigma_{xx} + \nu \sigma_{yy}) + a_t (\Delta T) \end{aligned} \quad (1.10.2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - a_t(1+\nu)(\Delta T)], \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - a_t(1+\nu)(\Delta T)] \quad (1.10.3)$$

Οι εξισώσεις κινήσεως γίνονται ως παρακάτω:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = \rho \ddot{u} \quad (1.10.4\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = \rho \ddot{v} \quad (1.10.4\beta)$$

Τέλος οι εξισώσεις κινήσεως με βάση τις μετατοπίσεις είναι:

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{E a_t}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x} + X = \rho \ddot{u} \quad (1.10.5)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{E a_t}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} + Y = \rho \ddot{v} \quad (1.10.6)$$

όπου X και Y είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου.

β) Επίπεδη παραμόρφωση

Στην κατάσταση επίπεδης παραμορφώσεως οι συνιστώσες u και v του διανύσματος της μετατοπίσεως είναι συναρτήσεις μόνο των x και y ενώ η τρίτη συνιστώσα του w μηδενίζεται.

Ισχύουν δηλαδή τα παρακάτω:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0 \text{ και } \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (1.10.7)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E a_t (\Delta T)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy} \right) + a_t(1+\nu)(\Delta T) \quad (1.10.8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{xx} \right) + a_t(1+\nu)(\Delta T)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

Αντιστοίχως οι εξισώσεις κινήσεως με όρους μετατοπίσεων για την κατάσταση επίπεδης παραμορφώσεως φαίνονται παρακάτω:

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{Ea_t}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} + X = \rho \ddot{u} \quad (1.10.9)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + G \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{Ea_t}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} + Y = \rho \ddot{v} \quad (1.10.10)$$

όπου X και Y είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου.

Συνοψίζοντας, συμφώνως με όσα αναπτύχθηκαν προηγουμένως, το πρόβλημα της ασύζευκτης Θερμοελαστικότητας ανάγεται, όπως ακριβώς και στην κλασσική θεωρία της Ελαστικότητας, στην επίλυση ενός συστήματος δεκαέξι εξισώσεων με δεκαέξι αγνώστους οι οποίοι είναι: η κατανομή της θερμοκρασίας, τα έξι στοιχεία του ταυυστή των τάσεων, τα έξι στοιχεία του ταυυστή των παραμορφώσεων και οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της μετατοπίσεως, υπό τις δεδομένες συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος, συνοριακές και ενδεχομένως αρχικές, οι οποίες είναι απαραίτητο να πληρούνται. Ανάλογα με τις ιδιαίτερες συνοριακές συνθήκες επιλέγεται και η αντίστοιχη διατύπωση του προβλήματος, είτε μέσω των τάσεων είτε μέσω των παραμορφώσεων. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η πληρότητα της κάθε λύσεως επιτυγχάνεται επιπροσθέτως με την ικανοποίηση των εξισώσεων συμβιβαστού οι οποίες αποτελούν την μαθηματική έκφραση της συνέχειας του μέσου.

Κεφάλαιο 2 : Θερμοελαστική ανάλυση λεπτών πλακών

2.1 Σχετικά προλεγόμενα

Οι λεπτές πλάκες χρησιμοποιούνται ως φέροντα δομικά στοιχεία σε πλήθος εφαρμογών του μηχανικού, από την μικροηλεκτρονική και την νανοτεχνολογία έως και τις συνήθεις κατασκευές του πολιτικού μηχανικού. Το πλεονέκτημά τους έγκειται στο συνδυασμό μικρού πάχους και μεγάλης αντοχής σε εγκάρσια ή συνεπίπεδα (μεμβρανικά) φορτία. Ωστόσο το λεπτό πάχος τους τις καθιστά ασταθείς υπό την επίδραση μεμβρανικών φορτίων. Το υλικό κατασκευής τους μπορεί να είναι το μέταλλο, το ωπλισμένο σκυρόδεμα και άλλα. Η πλάκα δύναται να έχει τυχούσα γεωμετρία, οι συνοριακές συνθήκες στηρίζεως της να αποτελούνται από διάφορα είδη καθώς και να φέρει φορτία τόσο εγκάρσια όσο και μεμβρανικά. Τα φορτία αυτά μπορεί να είναι συντηρητικά ή μη ή και συνδυασμός των παραπάνω.

Ως πλάκες ορίζονται οι επίπεδοι επιφανειακοί φορείς των οποίων η μία τους διάσταση είναι κατά πολύ μικρότερη εν συγκρίσει με τις υπόλοιπες δύο. Η μικρότερη αυτή διάσταση ορίζεται ως πάχος h της πλάκας. Όταν το πάχος της πλάκας είναι μικρότερο από το 10% της μικρότερης από τις άλλες δύο διαστάσεις ορίζεται ως λεπτή (h/L_1 όπου $L_1 = \min\{L_1, L_2\}$) ενώ στην αντίθετη περίπτωση ως παχιά. Το πάχος της πλάκας δύναται να είναι ενιαίο παντού ή μεταβλητό από σημείο σε σημείο. Η επιφάνεια η οποία διχοτομεί το πάχος ονομάζεται μέση επιφάνεια και είναι επίπεδη όταν η κατανομή του πάχους είναι συμμετρική ειατέρωθεν αυτής [1],[4].

Λόγω των γεωμετρικών της χαρακτηριστικών η πλάκα δύναται να φέρει φορτία τα οποία επιδρούν κάθετα στο επίπεδό της, αλλά και παράλληλα προς αυτό (συνεπίπεδα φορτία). Ταυτόχρονα το μικρό βάρος και η επίπεδη μορφή της, η οποία πρακτικά διατηρείται και για μεγάλες τιμές των εγκάρσιων φορτίων, καθιστά τη λεπτή πλάκα τη βέλτιστη λύση σε πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Έτσι οι λεπτές πλάκες χρησιμοποιούνται σήμερα στις κατασκευές του πολιτικού μηχανικού, στη ναυπηγική, στην αεροναυπηγική και εσχάτως στην επιστήμη της μικροηλεκτρονικής και της νανοτεχνολογίας. Το μικρό τους πάχος όμως, αποτελεί και σημαντικό τους μειονέκτημα, ιδιαίτερα στην περίπτωση της επίδρασης επ' αυτών μεμβρανικών συντηρητικών ή μη φορτίων, αφού εμφανίζουν φαινόμενα αστάθειας, τα οποία είναι ιδιαίτερα επικίνδυνα για τις κατασκευές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ασταθούς συμπεριφοράς είναι ο λυγισμός ο οποίος οφείλεται σε θλιπτικά μεμβρανικά φορτία.

Το υλικό από το οποίο αποτελείται η πλάκα θεωρείται ομογενές και ισότροπο. Επιπλέον η πλάκα φορτίζεται τόσο με εγκάρσια όσο και μεμβρανικά φορτία ενώ μπορεί να στηρίζεται συνοριακά μέσω διαφόρων τύπων στηρίξεως. Μελετάται το πρόβλημα των μικρών παραμορφώσεων εξαιτίας της κάμψης της πλάκας, οποία οφείλεται στην εφαρμογή εξωτερικής φορτίσεως υπό την ταυτόχρονη δράση θερμικού πεδίου καθώς και υπό τη σύγχρονη δράση καμπτικών και μεμβρανικών φορτίων.

2.2 Γενική συμπεριφορά ορθογωνικών πλακών έναντι κάμψης. Υποθέσεις Kirchhoff. Θερμικές τάσεις στις πλάκες

Στην Κλασική Θεωρία της Ελαστικότητας μελετάται η συμπεριφορά ελαστικών μέσων συμπεριλαμβανομένων και των πλακών, υπό την επίδραση καθολικών ή επιφανειακών δράσεων, ευρισκόμενα πάντοτε σε ισόθερμη κατάσταση και ως εκ τούτου η μεταβολή της θερμοκρασίας να μη λαμβάνεται υπόψη [1],[4]. Στην περίπτωση κατά την οποία μεταβάλλεται η θερμοκρασία, είτε αυξανόμενη είτε μειούμενη, το μέσο αντίστοιχα διαστέλλεται ή συστέλλεται. Η συνεπαγόμενη μεταβολή του όγκου, για τα περισσότερα υλικά, θεωρείται ως συνάρτηση της κατανομής της θερμοκρασίας. Στην περίπτωση μιας ομοιόμορφα θερμαινόμενης ελεύθερης πλάκας, από ομογενές και ισότροπο υλικό, εμφανίζονται μόνο ορθές παραμορφώσεις και όχι θερμικές τάσεις. Οι θερμικές τάσεις εμφανίζονται στις παρακάτω περιπτώσεις [17], [18].

α) Στην περίπτωση κατά την οποία η πλάκα υποβάλλεται σε μη ομοιόμορφο θερμικό πεδίο

β) Στην περίπτωση κατά την οποία η ελεύθερη μετατόπιση της πλάκας περιορίζεται εξαιτίας των επιβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών στηρίξεως αυτής, ακόμη και όταν υποβάλλεται σε ομοιόμορφη θερμική φόρτιση

γ) Στην περίπτωση κατά την οποία το υλικό από το οποίο συντίθεται η πλάκα εμφανίζει ανισοτροπία υπό ομοιόμορφη θερμική φόρτιση, όπως επί παραδειγματι όταν αυτό αποτελείται από επιμέρους στρώσεις διαφορετικών υλικών

Για τη μελέτη της συμπεριφοράς της πλάκας θεωρούμε απειροστό στοιχείο πλάκας διαστάσεων dx (παράλληλη προς τον άξονα x) και dy (παράλληλη στον άξονα y) σταθερού πάχους h (ιδέ Σχήμα 2.1), το οποίο ευρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία T_0 , οριζόμενη αυτή ως θερμοκρασία αναφοράς και το οποίο υποβάλλεται σε αύξηση της θερμοκρασίας σε T , μέσω της συναρτήσεως μεταβολής της θερμοκρασίας $\Delta T = \Delta T(x, y, z, t)$ εάν έχουμε μη στάσιμο πρόβλημα

ή $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$ εάν είναι στάσιμο. Στο απειροστό αυτό στοιχείο επιβάλλεται ταυτόχρονα και εγκάρσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο p ανά μονάδα επιφανείας κάθετο στο μέσο επίπεδο αυτής. Επιπλέον το θερμικό πεδίο $T = T(x, y, z)$ θεωρείται γνωστό από την επίλυση της εξίσωσης θερμικής διαχύσεως (Σχέση 1.3.4). Το μέσο επίπεδο ταυτίζεται με το συντεταγμένο επίπεδο Oxy ο δε άξονας των z κάθετος σε αυτό με τις θετικές τιμές των κατηγμένων να είναι προς τα κάτω.

Η μελέτη της απλής κάμψεως λεπτών πλακών με μικρά βέλη κάμψεως βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις Kirchhoff [1], [4] [17], [18]:

1. Το υλικό από το οποίο συντίθεται η πλάκα είναι ελαστικό, ομογενές και ισότροπο.
2. Η πλάκα είναι αρχικά επίπεδη.
3. Η κατακόρυφη μετατόπιση του μέσου επιπέδου είναι μικρή εν συγκρίσει με το πάχος της πλάκας και δεν ξεπερνά το $1/10$ του πάχους αυτής. Επομένως η κλίση της ελαστικής γραμμής των βυθίσεων της πλάκας είναι πολύ μικρή και ως εκ τούτου το τετράγωνο αυτής είναι αμελητέα ποσότητα συγκρινόμενη με τη μονάδα.
4. Στο μέσο επίπεδο δεν αναπτύσσεται ένταση κατά την κάμψη με αποτέλεσμα να παραμένει अपαραμόρφωτο υπό την επίδραση των εξωτερικών δράσεων.
5. Διατομές οι οποίες είναι αρχικά επίπεδες και κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας συνεχίζουν να παραμένουν επίπεδες και κάθετες και μετά την επιβολή της φορτίσεως. Συνεπώς οι διατμητικές παραμορφώσεις $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ θεωρούνται αμελητέες. Αμελητέα θεωρείται και η ορθή παραμόρφωση ε_{zz} .
6. Η ορθή τάση σ_{zz} σε ένα τυχαίο σημείο της υπό μελέτη πλάκας είναι μικρή εν σχέσει με τις υπόλοιπες τασικές παραμέτρους του τανυστή των τάσεων $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}\}$ και μπορεί να παραλειφθεί στις καταστατικές σχέσεις.
7. Η κατανομή της θερμοκρασίας κατά το πάχος της πλάκας είναι περιττή συνάρτηση της μεταβλητής z ούτως ώστε η μέση θερμοκρασία κατά μήκος μιας διατομής σε οποιαδήποτε θέση (x, y) να είναι ίση με τη θερμοκρασία του μέσου επιπέδου στην ίδια θέση.

Οι παραπάνω παραδοχές της κλασικής θεωρίας πλακών είναι γνωστές ως **υποθέσεις Kirchhoff** και εφαρμόζονται και στη θερμοελαστική ανάλυση καμπτόμενων πλακών [1], [4].

2.3 Σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων και παραμορφώσεων – βυθίσεως

Στο παρόν κεφάλαιο δε γίνεται χρήση της γραφής με βάση τους δείκτες, θεωρώντας το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπου οι άξονες x_i με $i=1,2,3$ ταυτίζονται με τους άξονες x, y, z των συντεταγμένων επιπέδων. Επιπλέον η συνάρτηση της κατανομής της θερμοκρασίας $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$ θεωρείται γνωστή από την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας δι' αγωγής. Ουσιαστικά το πρόβλημα μεταπίπτει σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές σε πρόβλημα διδιάστατης θερμοελαστικότητας.

Με βάση τα όσα αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο η παρουσία του θερμικού πεδίου προικαλεί ορθές παραμορφώσεις οι οποίες στο επίπεδο περιορίζονται στις παρακάτω:

$$\varepsilon_{xx}^0 = a_t(\Delta T), \varepsilon_{yy}^0 = a_t(\Delta T) \quad (2.3.1)$$

όπου ε_{xx}^0 και ε_{yy}^0 οι ορθές παραμορφώσεις λόγω της θερμοκρασιακής κατανομής, a_t ο συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής του υλικού ο οποίος για μικρές θερμοκρασίες είναι ανεξάρτητος αυτών και $\Delta T = T - T_0$. Επιπλέον στην θερμοελαστική κάμψη ορθογωνικών πλακών οι μεμβρανικές τάσεις οι οποίες θα αναπτύσσοντο αμελούνται [17].

Συμφώνως με την πέμπτη κατά σειράν υπόθεση οι εξισώσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων λαμβάνουν την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2 \text{ a-f})$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορίζονται και ως κινηματικές συνθήκες και συνδέονται με τη γεωμετρία της παραμορφώσεως.

Ολοκληρώνοντας την τέταρτη κατά σειρά σχέση προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y) \quad (2.3.3)$$

δηλαδή η βύθιση w της μέσης επιφάνειας της πλάκας είναι συνάρτηση μόνο των x και y . Από τις σχέσεις e και f ολοκληρώνοντας μερικώς ως προς z θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (2.3.4)$$

και

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \Rightarrow v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (2.3.5)$$

όμως από τις υποθέσεις Kirchhoff αφού το μέσο επίπεδο ($z=0$) είναι απαραμόρφωτο προκύπτει ότι:

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0 \quad (2.3.6)$$

οπότε οι (2.3.4) και (2.3.5) λόγω της (2.3.6) γίνονται:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{και} \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3.7)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.3.7) στις a, b και c των (2.3.2) λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις παραμορφώσεων – βυθίσεως:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3.8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.3.9)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3.10)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν τις παραμορφώσεις σε κάθε σημείο της πλάκας συναρτήσει της βυθίσεως w του μέσου επιπέδου αυτής [17].

Η καμπυλότητα της μέσης επιφάνειας είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας καμπυλότητάς της και ορίζεται ως ο λόγος της μεταβολής της γωνίας κλίσεως ανά μονάδα μήκους. Η γωνίες κλίσεως κατά τη διεύθυνση των συντεταγμένων αξόνων x, y θα δίδονται από τις σχέσεις:

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3.11)$$

Έτσι οι καμπυλότητες ως προς τους αντίστοιχους άξονες θα είναι:

$$k_x = \frac{1}{r_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3.12)$$

$$k_y = \frac{1}{r_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.3.13)$$

$$k_{xy} = \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3.14)$$

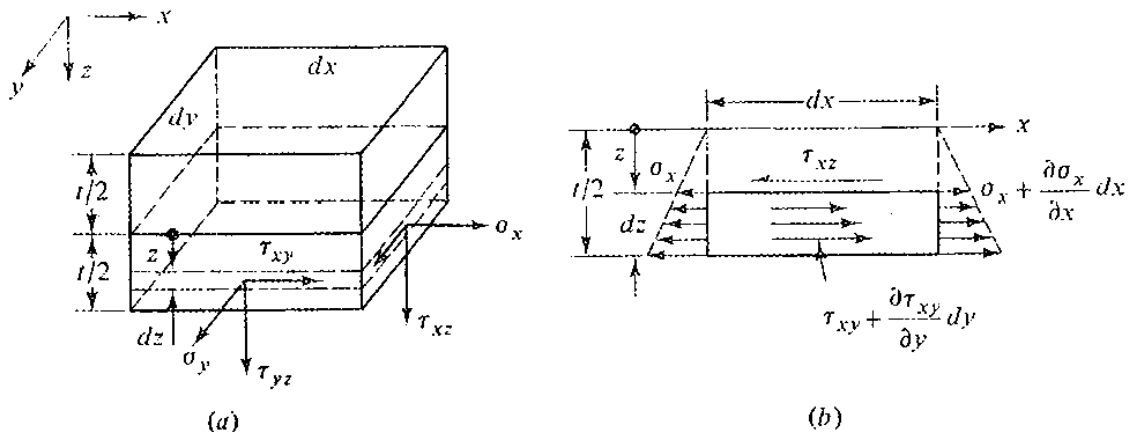
Οι καμπυλότητες υπόκεινται όπως οι παραμορφώσεις και οι τάσεις σε τανυστικό μετασχηματισμό δευτέρας τάξεως και συνεπώς αποτελούν συνιστώσες ενός τανυστή δευτέρας τάξεως. Το άθροισμα $k_x + k_y$ αποτελεί μία αναλλοίωτη του τανυστή καμπυλοτήτων και ονομάζεται μέση καμπυλότητα, ενώ η ποσότητα k_{xy} δίνει τη συστροφή του μέσου επιπέδου σχετικά με τους άξονες x, y .

2.4 Καταστατικές εξισώσεις

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο η συνολική παραμόρφωση ενός σημείου του στοιχείου της πλάκας θα δίδεται ως το άθροισμα των παραμορφώσεων εξαιτίας της εξωτερικά επιβαλλόμενης φορτίσεως και του θερμικού πεδίου (Κεφ.1,πργ.1.4,Σχέση 1.4.3) ως παρακάτω:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}' \quad \text{όπου } i = x, y \quad (2.4.1)$$

με ε_{ij}' οι παραμορφώσεις λόγω της εξωτερικής φορτίσεως και ε_{ij}^0 εκείνες λόγω της θερμικής φορτίσεως. Οι αναπτυσσόμενες στη διατομή τάσεις φαίνονται στο Σχήμα 2.4.1 [17]



Σχήμα 2.4.1: Οι αναπτυσσόμενες τάσεις στη διατομή

Από τις σχέσεις Neumann – Duhamel (Κεφ.1,Σχέση 1.4.6) τροποποιώντας τις για διδιάστατο πρόβλημα και κάνοντας χρήση της σχέσεως $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ προκύπτουν οι ακόλουθες τροποποιημένες σχέσεις του Hooke για τις παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) + a_t(\Delta T) \quad (2.4.2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) + a_t(\Delta T) \quad (2.4.3)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \quad (2.4.4)$$

Επιλύωντάς τις ως προς τις συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων θα έχουμε ότι:

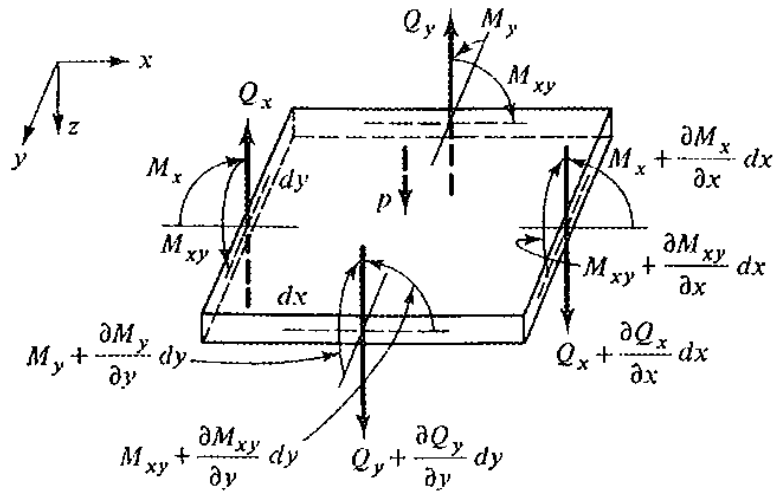
$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (2.4.5)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (2.4.6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (2.4.7)$$

2.5 Αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη λεπτών ορθογωνικών πλακών

Εξαιτίας του παραπάνω τασικού πεδίου στην πλάκα αναπτύσσονται ροπές κάμψης M_x, M_y και ροπές συστροφής M_{xy} όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.1, καθώς και θερμικές ροπές κάμψης M_T . Πέραν των παραπάνω καμπτικών ροπών αναπτύσσονται και τέμνουσες δυνάμεις Q_x και Q_y , εξαιτίας των διατμητικών τάσεων σ_{xz} και σ_{yz} , οι οποίες με βάση τις υποθέσεις Kirchhoff και τους νόμους του Hooke θα έπρεπε να είναι αμελητέες, πλην όμως επειδή οι εξ'αυτών προκύπτουσες τέμνουσες δυνάμεις είναι άμεσα συγκρίσιμες με την επιβαλλόμενη φόρτιση, δεν αμελούνται. Τα αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη στο εσωτερικό της πλάκας εμφανίζονται στο Σχήμα 2.5.1 το οποίο ακολουθεί [17]:



Σχήμα 2.5.1 : Εντατικά μεγέθη στο εσωτερικό ορθογωνικής πλάκας

Από τις σχέσεις (2.4.5),(2.4.6),(2.4.7) μέσω των (2.3.8),(2.3.9) και (2.3.10) προκύπτει η γραφή των τάσεων συναρτήσει της κατακόρυφης παραμορφώσεως w του μέσου επιπέδου της πλάκας

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ea_t(\Delta T)}{(1-\nu)} \quad (2.5.1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{Ea_t(\Delta T)}{(1-\nu)} \quad (2.5.2)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.5.3)$$

Παρατηρούμε από τις παραπάνω σχέσεις ότι το τασικό πεδίο κατανέμεται γραμμικώς κατά το πάχος της πλάκας.

Οι προκύπτουσες ροπές κάμψης M_x, M_y και ροπές συστροφής M_{xy} οι οποίες απορρέουν από την ύπαρξη του εγκάρσιου φορτίου θα δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \quad , \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz \quad , \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = M_{yx} \quad (2.5.4)$$

ενώ οι θερμικές ροπές κάμψεως θα είναι:

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_i E(\Delta T) z dz = a_i E \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z) z dz \quad (2.5.5)$$

Οι προηγούμενες εξισώσεις σε συνδυασμό με τις (2.5.1),(2.5.2),(2.5.3) δίδουν τις ακόλουθες σχέσεις για τα εντατικά μεγέθη:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ea_i(\Delta T)}{(1-\nu)} \right] z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] z dz$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ea_i(\Delta T)}{(1-\nu)} z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \quad (2.5.6)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{(1-\nu)} M_T \quad (2.5.7)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.5.8)$$

όπου $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ η δυσκαμψία της πλάκας..

2.6 Μεταβολή των τάσεων στο εσωτερικό της πλάκας . Εξισώσεις ισορροπίας αυτής

Έστω το στοιχείο πλάκας διαστάσεων $dx * dy$ του Σχήματος 2.5.1 το οποίο ανήκει σε μια λεπτή καμπτόμενη πλάκα η οποία φέρει φορτίο p . Τα εντατικά μεγέθη του στοιχείου σημειώνονται πάνω στις έδρες αυτού. Η μεταβολή των φορτίων από διατομή σε διατομή θεωρούμε ότι εκφράζεται από μια σειρά Taylor από την οποία λαμβάνονται προσεγγιστικά οι δύο πρώτοι όροι του αναπτύγματος. Οι εξισώσεις ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος της πλάκας θα είναι οι ακόλουθες [7], [17], [18] :

Εξίσωση μηδενισμού δυνάμεων ως προς τον άξονα των z

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow \left(-Q_y + Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(-Q_x + Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + p dx dy = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (2.6.1)$$

Εξίσωση μηδενισμού ροπών ως προς τον άξονα των x

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 \Rightarrow & -M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx dy - M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \\ & + p dx dy \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - Q_y dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx = 0 \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.6.2)$$

Εξίσωση μηδενισμού ροπών ως προς τον άξονα των y

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0 \Rightarrow & M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + Q_x dy dx + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dy dx dy + M_{xy} dx + \\ & + M_{xy} dx - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy dx - Q_x dy dx + p dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.6.3)$$

Από τις σχέσεις (2.6.2) και (2.6.3) δυνάμει των σχέσεων (2.5.6), (2.5.7) και (2.5.8) δίδουν τις τέμνουσες δυνάμεις για δεδομένη θερμοκρασιακή φόρτιση. Οι τέμνουσες δυνάμεις θα είναι:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x} - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

ή

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x}$$

από την οποία λαμβάνουμε ότι:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad (2.6.4)$$

ενώ η Q_y θα είναι:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial y} - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

ή

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial y}$$

από την οποία λαμβάνουμε ότι:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial y} \quad (2.6.5)$$

Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήσαμε τον τελεστή του Laplace $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

2.7 Διέπουσα Διαφορική Εξίσωση Καμπτόμενης Πλάκας

Από την εξίσωση ισορροπίας (2.6.1) με τη συνδρομή των σχέσεων (2.6.4) και (2.6.5) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) + p = 0$$

ει της οποίας λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (2.7.1)$$

Η (2.7.1) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση καμπτικής ισορροπίας λεπτής ορθογωνικής πλάκας υπό την επίδραση κατανεμημένου φορτίου p [17].

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί με βάση τη βύθιση $w = w(x, y)$ αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις των μεγεθών M_x, M_y και M_{xy} . Από τη (2.7.1) με τη βοήθεια των (2.5.6), (2.5.7) και (2.5.8) θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[-D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{(1-\nu)} M_T \right] + p = 0$$

ή

$$-D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \nu D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} - 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \nu D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} = -p$$

ή

$$-D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -p + \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right)$$

ή

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} - \frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad (2.7.2)$$

Η προηγούμενη διαφορική εξίσωση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση λεπτής καμπτόμενης πλάκας εκφρασμένη ως προς την κατακόρυφη παραμόρφωση του μέσου επιπέδου της. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στην παραπάνω σχέση το όλο πρόβλημα προκύπτει ως υπέρθεση στο πρόβλημα της κάμψης μιας λεπτής πλάκας εξαιτίας της φορτίσεως p και η θερμοκρασιακή επιρροή. Η κατακόρυφη παραμόρφωση w του μέσου επιπέδου προκύπτει από τη λύση της (2.7.2), οι δε σταθερές ολοκληρώσεώς της υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στηρίζεως του προβλήματος [17].

Εάν στην παραπάνω διαφορική εξίσωση θέσουμε την εξωτερική φόρτιση ίση με το μηδέν, ήτοι $p=0$, προκύπτει το αντίστοιχο πρόβλημα κάμψης πλακών υπό την επίδραση μόνο του θερμικού πεδίου. Σ' αυτή την περίπτωση η σχέση (2.7.2) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\nabla^4 w = -\frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad (2.7.2-\alpha)$$

η οποία αποτελεί τη *διέπουσα διαφορική εξίσωση καμπτόμενης πλάκας* υπό την δράση της θερμικής φορτίσεως [17].

Αντί της (2.7.2) η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως μπορούμε εναλλακτικώς να την ανάγουμε σε δύο εξισώσεις δευτέρας τάξεως ως ακολούθως:

Προσθέτοντας τις (2.5.6) και (2.5.7) κατά μέλη έχουμε ότι:

$$M_x + M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)}$$

ή

$$M_x + M_y = -D(1+\nu)\nabla^2 w - \frac{2M_T}{(1-\nu)}$$

η ποσότητα $M_x + M_y$ είναι μια αναλλοίωτη του τανυστή των ροπών [1].

Διαιρώντας τη σχέση η οποία προέκυψε με $1+\nu$ προκύπτει ότι η συνάρτηση ροπής (moment function) M θα είναι:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = -D\nabla^2 w - \frac{2M_T}{(1-\nu^2)} \quad (2.7.3)$$

όμως

$$\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{p}{D} - \frac{\nabla^2 M_T}{D(1-\nu)} \quad (2.7.4)$$

όπου $\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w)$ ο διαρμονικός τελεστής.

Από την (2.7.3) προκύπτει ότι:

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D} - \frac{2M_T}{D(1-\nu^2)} \quad (2.7.5)$$

Αντικαθιστώντας την (2.7.5) στην (2.7.4) έχουμε ότι:

$$\nabla^2 \left(M + \frac{M_T}{1+\nu} \right) = -p \quad (2.7.6)$$

Από την (2.7.6) γνωρίζοντας την κατανομή της θερμοκρασίας $M_T(x, y)$ και την φόρτιση p προσδιορίζουμε αρχικά την ποσότητα M και εν συνεχεία από την (2.7.5) τη συνάρτηση της ελαστικής επιφάνειας w της πλάκας [1].

2.8 Συνοριακές συνθήκες στηρίξεως του προβλήματος της θερμοελαστικής κάμψεως λεπτών ελαστικών πλακών

Η πλήρης λύση του προβλήματος της κάμψεως μιας πλάκας, θα πρέπει να πληρεί πέραν των εξισώσεων ισορροπίας και ένα σύνολο συνοριακών συνθηκών, σχετικών με τους επιβαλλόμενους συνδέσμους στηρίξεως και με τις συνθήκες φορτίσεως αυτής.

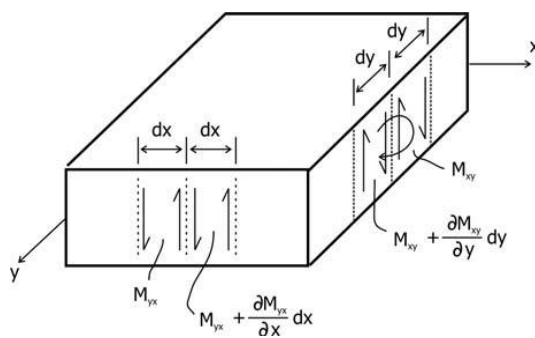
Οι συνοριακές συνθήκες αφορούν :

- Κατακόρυφες μετατοπίσεις και κλίσεις για την περίπτωση κατά την οποία τα μεγέθη αυτά μπορούν να προσδιορισθούν στο σύνορο της πλάκας, λόγω του τρόπου στηρίξεως της
- Φορτία και ροπές, για την περίπτωση στην οποία τα μεγέθη αυτά μπορούν να προσδιορισθούν στο σύνολο της πλάκας, λόγω του είδους φορτίσεώς της
- Συνδυασμός των δύο προηγούμενων

Για ένα σύνορο μιας πλάκας η διαφορική εξίσωση (2.7.2) μπορεί να ικανοποιήσει δύο μόνο συνοριακές συνθήκες σε ένα σύνορο. Στην περίπτωση όπου σε ένα σύνορο είναι γνωστά τα εντατικά μεγέθη ως προς τη μία ή την άλλη διεύθυνση, επειδή αυτά είναι τρία δεν μπορούν να γραφούν τρεις συνοριακές συνθήκες παρά μόνο δύο. Η αντινομία αυτή οφείλεται στις απλοποιητικές παραδοχές, οι οποίες οδήγησαν στην (2.7.2), παρακάμπτεται όμως με το τρόπο τον οποίο υπέδειξε ο Kirchhoff και ο οποίος βασίζεται στην αρχή *St. Venant*:

Η βασική διαφορά μεταξύ των συνοριακών συνθηκών της δοκού και της πλάκας οφείλεται στην ύπαρξη των ροπών συστροφής σ' αυτή. Οι ροπές συστροφής δύνανται να αντικατασταθούν από ζεύγη ισοδύναμων δυνάμεων. Μία τέτοια αντικατάσταση προκαλεί βέβαια διαφοροποίηση στις τάσεις και τις παραμορφώσεις, αλλά η διαφοροποίηση αυτή επηρεάζει μόνο την γειτονιά του συνόρου στην οποία πραγματοποιείται.

Κατόπιν των προαναφερομένων ας θεωρήσουμε την απλά στηριζόμενη πλάκα του Σχήματος (2.8.1) τις οποίες η πλευρές κατά τους άξονες x και y είναι αντίστοιχα a και b



Σχήμα 2.8.1 : Επίδραση ροπών συστροφής σε ελεύθερο άκρο πλάκας

Στην έδρα $x = a$ θεωρούμε δύο διαδοχικά στοιχεία πλάτους dy το κάθε ένα, στα οποία οι ροπές συστροφής αναλύονται σε ισοδύναμα στατικά φορτία ως εξής:

- Η ροπή συστροφής του στοιχείου 1 η οποία είναι $M_{xy} dy$ αντικαθίσταται από ένα ισοδύναμο ζεύγος δυνάμεων στο οποίο η κάθε δύναμη ισούται με M_{xy}

- Αντιστοίχως η ροπή του επομένου στοιχείου 2, $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy$ αντικαθίσταται και αυτή από ένα ισοδύναμο ζεύγος δυνάμεων με μέτρο $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$.

Στην απειροστή περιοχή του σχήματος (2.8.1) της έδρας στη θέση $x = a$ ενεργεί προς τα κάτω η δύναμη $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$, η οποία εάν προστεθεί στην τέμνουσα δύναμη Q_x μας δίδει την υποκατάστατη τέμνουσα δύναμη \bar{Q}_x σε ένα σύνορο παράλληλο με τον άξονα των y . Η \bar{Q}_x θα δίδεται από τη σχέση :

$$\bar{Q}_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \text{ή} \quad \bar{Q}_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x} - D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{ή}$$

$$\bar{Q}_x = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \bar{Q}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \right]$$

άρα

$$\bar{Q}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \right] \quad (2.8.1)$$

ομοίως η υποκατάστατη τέμνουσα δύναμη \bar{Q}_y ως προς έναν άξονα παράλληλο στον άξονα των x θα δίδεται από τη σχέση:

$$\bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\bar{Q}_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \right] \quad (2.8.2)$$

Στα γωνιακά σημεία της πλάκας αναπτύσσονται λόγω των ροπών συστροφής μοναχικές δυνάμεις, οι οποίες σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση θα είναι:

$$R_c = 2M_{xy} = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.8.3)$$

με φορά προς τα αρνητικά του άξονα των z , τείνοντας σε εκείνα τα σημεία να ανυψώσουν την πλάκα.

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση δίδονται οι συνοριακές συνθήκες για διάφορα είδη στηρίξεως

α) Πακτωμένο σύνορο στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-α)

Η βύθιση και η κλίση της είναι μηδέν ήτοι :

$$w|_{x=a} = 0 \text{ και } \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (2.8.4)$$

β) Απλά στηριζόμενο σύνορο στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-β)

Η βύθιση και η ροπή κάμψης μηδενίζονται

$$w|_{x=a} = 0 \text{ και } M_x|_{x=a} = 0 \quad (2.8.5)$$

Επειδή κατά μήκος του συνόρου στη θέση $x = a$ ισχύει $w|_{x=a} = 0$ έπεται ότι θα ισχύουν επίσης :

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Συνεπώς αντί της (2.8.5) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω συνθήκη:

$$w|_{x=a} = 0 \text{ και } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{M_T}{D(1-\nu)} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.8.6)$$

γ) Ελεύθερο άκρο στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-γ)

Σ'αυτή την περίπτωση η ροπή και υποκατάστατη τέμνουσα θα είναι μηδέν και θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$M_x|_{x=a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{M_T}{D(1-\nu)} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.8.7)$$

$$\overline{Q}_x \Big|_{x=a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \right] \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.8.8)$$

δ) *Ελαστική στήριξη στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-d)*

Σ'αυτή την περίπτωση ανάλογα με το είδος αυτής (μετακινησιακό ή στροφικό ελατήριο) διαμορφώνουμε και τις αντίστοιχες συνθήκες οι οποίες είναι οι παρακάτω:

- Μετακινησιακό ελατήριο

$$M_x \Big|_{x=a} = 0 \text{ και } \overline{Q}_x \Big|_{x=a} = -k_{sp} w \quad (2.8.9)$$

- Στροφικό ελατήριο

$$\overline{Q}_x \Big|_{x=a} = 0 \text{ και } M_x \Big|_{x=a} = k_\theta \omega_x = k_\theta \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.8.10)$$

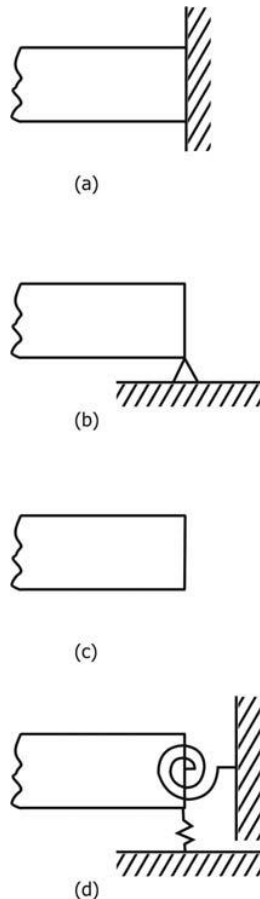
όπου k_{sp} και k_θ οι σταθερές των ελατηρίων σε (Nt/m) και (Nt/rad) αντίστοιχα.

ε) *Κυλιόμενο πακτωμένο σύνορο στη θέση $x = a$*

Για την κυλιόμενη πάκτωση ισχύει ότι η κλίση της βυθίσεως σε εκείνη της θέση μηδενίζεται όπως επίσης και η υποκατάστατη τέμνουσα έτσι προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \text{ και } \overline{Q}_x \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.8.11)$$

Στις προηγούμενες συνοριακές συνθήκες ,όπου κατά περίπτωση μηδενίζονται, ονομάζονται ομογενείς συνοριακές συνθήκες, στην αντίθετη περίπτωση, αλλά και στην περίπτωση όπου σε κάποιο άκρο της πλάκας εφαρμόζεται κάποια εξωτερική φόρτιση τότε οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες προκύπτουν, καλούνται μη ομογενείς [1], [4], [17], [18].



Σχήμα 2.8.2 : Διάφορα είδη στηρίξεως πλακών [4]

2.9 Σύνθετη καταπόνηση λεπτών ελαστικών πλακών υπό εγκάρσια κατανεμημένη και αξονική φόρτιση. Θερμοελαστικός λυγισμός λεπτών ελαστικών πλακών. Σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων.

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήθηκε η επίδραση της κατανεμημένης φορτίσεως στη συμπεριφορά έναντι κάμψεως μίας λεπτής ελαστικής, υπό την ταυτόχρονη δράση ενός αυθαίρετου στατικού θερμικού πεδίου $T=T(x,y,z)$, στα πλαίσια της θεωρίας μικρών παραμορφώσεων. Στην παρούσα παράγραφο θα διερευνηθεί η συμπεριφορά λεπτών ελαστικών πλακών, υπό την ταυτόχρονη επίδραση εγκάρσιας κατανεμημένης φορτίσεως, τυχαίας συνεπίπεδης φορτίσεως και αυθαίρετου θερμικού πεδίου. Η συνεπίπεδη αυτή φόρτιση καλείται επίσης ως μεμβρανική.

Η παρουσία των μεμβρανικών αυτών δυνάμεων οδηγεί στην ανάπτυξη τάσεων, ορθών και διατμητικών, στο μέσο επίπεδο της πλάκας.

Εξαιτίας αυτών η υπόθεση Kirchhoff περί του απαραμόρφωτου του μέσου επιπέδου παύει να ισχύει.

Συνεπώς, συμφώνως προς τις λοιπές υποθέσεις Kirchhoff (σελ.23) και βασιζόμενοι στην προηγηθείσα προσέγγιση σχετικά με το μέσο επίπεδο, οι κινηματικές σχέσεις οι οποίες συνδέονται με τη γεωμετρία της παραμορφώσεως για το στοιχείο πλάκας $dx * dy$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9.1 \text{ a-f})$$

επεξεργάζονται περαιτέρω ως ακολούθως:

Από τη (c) των παραπάνω σχέσεων προκύπτει ότι η βύθιση w είναι συνάρτηση των x, y ήτοι :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ή} \quad w = w(x, y) \quad (2.9.2)$$

Από τις σχέσεις (e) και (f) ολοκληρώνοντας μερικώς ως προς z προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ή} \quad u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (2.9.3)$$

και

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{ή} \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (2.9.4)$$

όπου $u_0(x, y)$ και $v_0(x, y)$ οι μετακινήσεις του ενός τυχαίου σημείου του μέσου επιπέδου της πλάκας για τις οποίες ισχύει ότι $u_0(x, y), v_0(x, y) \neq 0$. Οπότε οι κινηματικές σχέσεις (2.9.1) βάσει των (2.9.3) και (2.9.4) μετασχηματίζονται ως εξής :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.9.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.9.6)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.9.7)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίδουν τις παραμορφώσεις σε κάθε σημείο της πλάκας συναρτήσει της κατακόρυφης μετατοπίσεως w του μέσου επιπέδου. Σ' αυτές ο πρώτος όρος τους αντιστοιχούν στην παραμόρφωση του μέσου επιπέδου της πλάκας εξαιτίας της επιδράσεως των μεμβρανικών φορτίσεων [18].

2.10 Καταστατικές εξισώσεις της σύνθετης καταπονήσεως

Η συνολική παραμόρφωση του στοιχείου της πλάκας ορίζεται ως το άθροισμα των παραμορφώσεων εξαιτίας της εξωτερικής φορτίσεως και του θερμικού πεδίου αντίστοιχα ήτοι:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}' \quad \text{όπου } i = x, y \quad (2.10.1)$$

όπου ε_{ij}' οι παραμορφώσεις λόγω της εξωτερικής φορτίσεως και ε_{ij}^0 εκείνες λόγω της θερμικής φορτίσεως.

Οι καταστατικές σχέσεις Neumann – Duhamel για το επίπεδο πρόβλημα λαμβάνουν την μορφή

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) - (1+\nu) a_t (\Delta T) \right] \quad (2.10.2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) - (1+\nu) a_t (\Delta T) \right] \quad (2.10.3)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (2.10.4)$$

δυνάμει των (2.9.5),(2.9.6),(2.9.7) λαμβάνουν την εξής τροποποιημένη μορφή:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{a_t E (\Delta T)}{1-\nu} \quad (2.10.5)$$

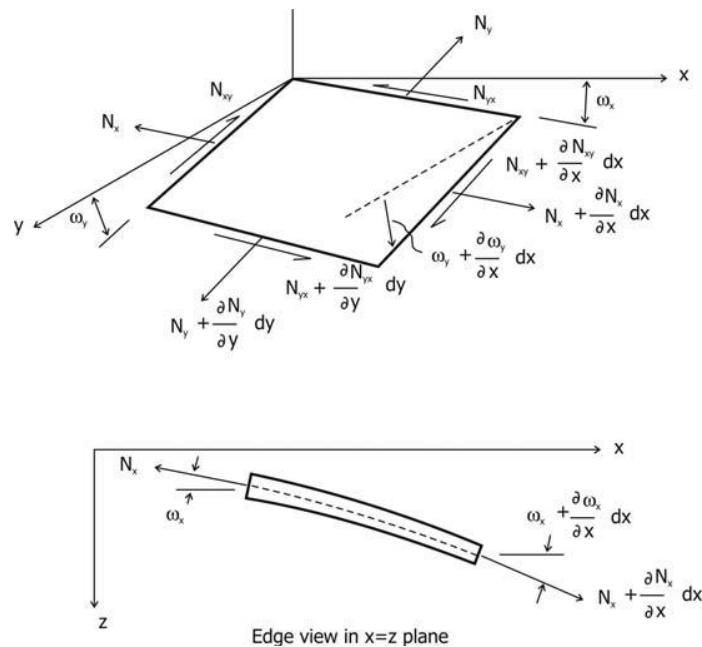
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{a_t E (\Delta T)}{1-\nu} \quad (2.10.6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - \frac{Ez}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.10.7)$$

Οι παραπάνω καταστατικές σχέσεις δίδουν τα στοιχεία του ταυυστή των τάσεων συναρτήσει των συνιστωσών των μετατοπίσεων της μέσης επιφάνειας, της κατακόρυφης μετατοπίσεως w και της θερμοκρασιακής φορτίσεως. Στις παραπάνω εξισώσεις οι πρώτοι όροι των δεξιών μελών αυτών αντιστοιχούν στις τάσεις οι οποίες αναπτύσσονται εξαιτίας της μεμβρανικής φορτίσεως, ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στις τάσεις οι οποίες αναπτύσσονται λόγω της κατανεμημένης φορτίσεως και ο τρίτος όπου εμφανίζεται τις τάσεις λόγω του θερμικού πεδίου. Η κατανομή δε αυτών λαμβάνει χώρα κατά το πάχος h της πλάκας [18].

2.11 Αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη της σύνθετης καταπονήσεως

Λόγω του άνωθεν τασικού πεδίου αναπτύσσονται, πέραν των προαναφερομένων σε προηγούμενες παραγράφους ροπών κάμψεως και ροπών συστροφής M_x, M_y, M_{xy} , συνεπίπεδα αξονικά μεμβρανικά εντατικά μεγέθη N_x, N_y και διατμητικά N_{xy} , όπως επίσης θερμικές ροπές κάμψεως M_T και θερμικές αξονικές δυνάμεις N_T , οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 2.11.1.



Σχήμα 2.11.1 : Μεμβρανικά εντατικά μεγέθη σε στοιχείο πλάκας [4]

Τα συνεπίπεδα αξονικά εντακτικά μεγέθη προκύπτουν ως ακολούθως:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(1)} \\ \sigma_{yy}^{(1)} \\ \sigma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} dz \quad (2.11.1)$$

όπου $\sigma_{ij}^{(1)}$ με $i, j = x, y$ οι τάσεις οι οποίες σχετίζονται με την παραμόρφωση του μέσου επιπέδου, ήτοι οι πρώτοι όροι των δεξιών μελών των σχέσεων (2.10.5), (2.10.6), (2.10.7). Κάνοντας χρήση συνεπώς των (2.10.5), (2.10.6) και (2.10.7) σε συνδυασμό με την (2.11.1) οι προαναφερθείσες μεμβρανικές δυνάμεις προκύπτουν ως παρακάτω:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^{(1)} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{N_T}{1-\nu} \quad (2.11.2)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}^{(1)} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{N_T}{1-\nu} \quad (2.11.3)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}^{(1)} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) dz = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (2.11.4)$$

Επίσης από την προηγηθείσα ανάλυση έναντι κάμψεως έχουν προκύψει και αντίστοιχες ροπές κάμψεως οι οποίες εκφράζονται μέσω των σχέσεων:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \quad (2.11.5)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{(1-\nu)} M_T \quad (2.11.6)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11.7)$$

όπου :

$$N_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_t E(\Delta T) dz \quad (2.11.8)$$

οι αναπτυσσόμενες αξονικές θερμικές δυνάμεις

ενώ

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_t E(\Delta T) z dz \quad (2.11.9)$$

οι θερμικές ροπές κάμψεως.

Οι δύο προηγούμενες εξισώσεις δίδουν τα εντατικά μεγέθη τα οποία αναπτύσσονται εξαιτίας του θερμικού πεδίου.

2.12 Μεταβολή των τάσεων στο εσωτερικό της πλάκας. Εξισώσεις ισορροπίας αυτής. Διέπουσα διαφορική εξίσωση της σύνθετης καταπόνησως [4].

Όπως προαναφέρθηκε κατά τη σύνθετη καταπόνηση η παραδοχή του απαράμορφωτου μέσου επιπέδου παύει να ισχύει. Ωστόσο η βύθιση είναι πολύ μικρή ούτως ώστε να τηρούνται οι υπόλοιπες των υποθέσεων Kirchhoff, αλλά και αρκετά μεγάλη με αποτέλεσμα οι προκύπτουσες μεμβρανικές δυνάμεις να είναι συγκρινόμενες ως προς το μέγεθός τους με τις τέμνουσες δυνάμεις Q_x, Q_y .

Για τη διερεύνηση της μεταβολής των τάσεων στο εσωτερικό της πλάκας θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα αυτής διαστάσεων dx και dy πάχους h , υπό την επίδραση των N_x, N_y, N_{xy} , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11.1. Οι παραπάνω αξονικές δυνάμεις είναι συναρτήσεις των x και y μόνο. Τα προκύπτοντα εντατικά μεγέθη λόγω της εγκάρσιας φορτίσεως p ανά μονάδα επιφανείας φαίνονται στο σχήμα 2.6.1. Τα εντατικά μεγέθη N_x, N_y, N_{xy} ανά μονάδα μήκους εξαιτίας της εφαρμοζόμενης αξονικής συνεπίπεδης φορτίσεως σε μια τυχαία διατομή της πλάκας συμπληρώνουν τα λοιπά προκύπτοντα εντατικά μεγέθη, τόσο τις ροπές κάμψεως και ροπές συστροφής M_x, M_y, M_{xy} , όσο και τις τέμνουσες δυνάμεις Q_x, Q_y . Για να προσδιορίσουμε τις επιπλέον αυτές δυνάμεις εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

Οι πρόσθετες συνιστώσες οι οποίες προκύπτουν από τις μεμβρανικές δυνάμεις είναι:

$$(-N_x \sin \omega_x) dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \sin \left(\omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx \right) dy \quad (2.12.1)$$

$$\text{όμως } \omega_x \text{ πολύ μικρή οπότε } \sin \omega_x \cong \omega_x \text{ ομοίως } \sin \left(\omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx \right) \cong \omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx \quad (2.12.2)$$

Η (2.12.1) εξαιτίας της (2.12.2) μορφοποιείται όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned}
& -N_x \omega_x + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx \right) dy = (-N_x \omega_x) dy + (-N_x \omega_x) dy + N_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx dy + \\
& + \omega_x \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right) (dx)^2 dy
\end{aligned}$$

αγνοώντας τους όρους ανωτέρας τάξεως ως αμελητέες ποσότητες δηλαδή $(dx)^2 dy \cong 0$ η προηγούμενη σχέση απλοποιείται στην:

$$N_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx dy + \omega_x \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy \quad (2.12.3)$$

όπου ω_x η κλίση της μετατοπίσεως w η οποία δίδεται από τη σχέση $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial x}$.

Επομένως η σχέση (2.12.3) μετασχηματίζεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy \quad (2.12.4)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο λαμβάνονται οι επιπλέον όροι οι οποίοι περιέχουν τις N_y, N_{xy} και $N_{yx} = N_{xy}$. Το τελικό άθροισμα των πρόσθετων όρων είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned}
& N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial N_y}{\partial y} dx dy + \\
& + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned} \quad (2.12.5)$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας του στοιχείου της πλάκας ως προς τους άξονες x, y προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.12.6)$$

Η (2.12.5) λόγω της (2.12.6) γράφεται:

$$N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

εάν στις εξισώσεις ισορροπίας κατά τον άξονα των z (ιδέ σχέση 2.6.1) προστεθεί και ο παραπάνω όρος τότε λαμβάνουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.12.7)$$

Από τις εξισώσεις μηδενισμού ροπών ως προς x, y (ιδέ σχέσεις 2.6.2, 2.6.3) παραγωγίζοντάς τις ως προς x, y αντίστοιχα εξάγεται ότι:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (2.12.8)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (2.12.9)$$

Η (2.12.7) με τη συνδρομή των δύο παραπάνω σχέσεων γίνεται:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.12.10)$$

όμως συνδυάζοντας την προηγούμενη εξίσωση με τις σχέσεις για τις ροπές κάμψεως και συστροφής ως συνάρτηση της βυθίσεως w

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

αυτή λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) + \\ & + p + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

ή

$$D \nabla^4 w = p + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T \quad (2.12.11)$$

παραπάνω έγινε χρήση του διαρμονικού τελεστή $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ και του τελεστή

Laplace $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Οι εξισώσεις (2.12.11) και (2.12.6) αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων το οποίο διέπει τη συμπεριφορά της πλάκας έναντι της σύνθετης καταπόνησεως.

Η εξίσωση συμβιβαστού για το επίπεδο πρόβλημα της ελαστικότητας

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.12.12)$$

σε συνδυασμό με τη μέση παραμόρφωση $\bar{\varepsilon}_{ij}$ η οποία ορίζεται ως

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{ij} dz \quad (2.12.13)$$

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{Eh} \int_{-h/2}^{h/2} [(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + a_t T] dz = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y + N_T) \quad (2.12.14)$$

$$\bar{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{Eh} \int_{-h/2}^{h/2} [(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + a_t T] dz = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x + N_T) \quad (2.12.15)$$

$$\bar{\varepsilon}_{xy} = \frac{1+\nu}{Eh} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \frac{1+\nu}{Eh} N_{xy} \quad (2.12.16)$$

όπου στις παραπάνω έγινε χρήση των (2.11.1), μετασχηματίζεται σε εξίσωση συμβιβαστού με βάση τις αξονικές δυνάμεις

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y + N_T) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x + N_T) \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1+\nu}{Eh} N_{xy} \right)$$

ή

$$\left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 N_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.12.17)$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας του στοιχείου της πλάκας, απουσία καθολικών δυνάμεων

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς x και τη δεύτερη ως προς y και προσθέτοντας τις προκύπτουσες κατά μέλη έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}$$

αντικαθιστώντας την προηγούμενη στην εξίσωση (2.12.17), αυτή λαμβάνει τη μορφή

$$\left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right) + (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 N_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_T}{\partial y^2} \right) = 0$$

ή

$$\left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 N_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_T}{\partial y^2}\right) = 0$$

ή

$$\nabla^2(N_x + N_y + N_T) = 0 \quad (2.12.18)$$

Εισάγοντας την τασιική συνάρτηση Airy F οι προκύπτουσες αξονικές δυνάμεις N_x, N_y, N_{xy} βάσει αυτής λαμβάνουν τη μορφή:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (2.12.19)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.12.20)$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.12.21)$$

Η (2.12.18) μετασχηματίζεται με όρους τασιικής συναρτήσεως

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + N_T \right) = 0 \Rightarrow \nabla^2 (\nabla^2 F + N_T) = 0$$

ή

$$\nabla^2 (\nabla^2 F + N_T) = 0$$

ή

$$\nabla^4 F + \nabla^2 N_T = 0 \quad (2.12.22)$$

Το παρακάτω σύστημα

$$D\nabla^4 w = p + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T$$

και

$$\nabla^4 F + \nabla^2 N_T = 0$$

αποτελούν με όρους τασιικής συναρτήσεως τις διέπουσες διαφορικές εξισώσεις της συμπεριφοράς της πλάκας έναντι της σύνθετης καταπονήσεως εξαιτίας της εγκάρσιας κατανεμημένης φορτίσεως p και της επιβαλλόμενης μεμβρανικής φορτίσεως.

Στην περίπτωση κατά την οποία στην υπό μελέτη πλάκα εφαρμόζεται μόνο θλιπτική φόρτιση, εμφανίζονται εξαιτίας της προαναφερθείσας θλιπτικής φορτίσεως, φαινόμενα αστάθειας με αποτέλεσμα η πλάκα να λυγίζει, όπως ακριβώς και στην περίπτωση δοκών ή στύλων. Ισχύει δε, όπως και στην περίπτωση των δοκών ή στύλων, ότι η συμπεριφορά των πλακών έναντι λυγισμού δεν

επηρεάζεται από την εξωτερικά επιβαλλόμενη φόρτιση. Η εξαγωγή της διέπουσας διαφορικής εξίσωσης έναντι λυγισμού προκύπτει εάν στη σχέση (2.12.11) θέσουμε $p=0$ και $M_T=0$ λαμβάνοντας έτσι την παρακάτω μορφή:

$$D\nabla^4 w = N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.12.23)$$

η οποία σε συνδυασμό με την

$$\nabla^4 F + \nabla^2 N_T = 0$$

αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων το οποίο περιγράφει το φαινόμενο του θερμοελαστικού λυγισμού σε λεπτές ορθογωνικές πλάκες.

Η εξίσωση (2.12.23) είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως με μερικές παραγώγους και μη σταθερούς συντελεστές η λύση της οποίας προκύπτει υπό τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Έν γένει ένα τέτοιο πρόβλημα από μαθηματικής απόψεως έχει τετριμμένη λύση τη $w=0$ η οποία αντιστοιχεί στην απαραμόρφωτη κατάσταση του μέσου επιπέδου της πλάκας. Ωστόσο όπως παρατηρούμε οι συντελεστές στη διέπουσα διαφορική εξίσωση (2.12.23) είναι μη σταθεροί και εξαρτώνται από τα μεγέθη των προκυπτουσών αξονικών εντατικών φορτίων, τα οποία με τη σειρά τους εξαρτώνται από την εξωτερικά εφαρμοζόμενη μεμβρανική φόρτιση. Ο κατάλληλος συνδυασμός φορτίσεως οδηγεί και σε μη τετριμμένη λύση της (2.12.23).

Η μικρότερη τιμή της εξωτερικής μεμβρανικής φορτίσεως η οποία οδηγεί και σε μη τετριμμένη λύση της (2.12.23) αντιστοιχεί στο *κρίσιμο φορτίο* ή *φορτίο λυγισμού*. Εάν επομένως η τιμή της μεμβρανικής δυνάμεως είναι μικρότερη από το κρίσιμο φορτίο η πλάκα μπορεί και ισορροπεί και σε παραμορφωμένη θέση. Αντιθέτως εάν το εφαρμοζόμενο μεμβρανικό φορτίο υπερβαίνει το κρίσιμο φορτίο τότε η ισορροπία της πλάκας είναι ασταθής με αποτέλεσμα αυτή να αστοχεί.

2.13 Καμπτική συμπεριφορά λεπτής ορθογωνικής πλάκας υπό την επίδραση μη στατικού (non stationary) θερμικού πεδίου. Διέπουσα εξίσωση αυτής [24].

Στις προηγούμενες παραγράφους αναπτύχθηκε η θεωρία για τη μελέτη της συμπεριφοράς λεπτής ορθογωνικής πλάκας πάχους h , συντιθέμενη από ομογενές και ισότροπο υλικό, έναντι κάμψεως και σύνθετης καταπονήσεως, με ταυτόχρονη επίδραση τυχαίου **στατικού** (stationary) θερμικού πεδίου και εξήχθησαν οι αντίστοιχες διέπουσες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες

περιέγραφαν τα παραπάνω αναφερόμενα προβλήματα, πάντα υπό την επιβολή συνοριακών συνθηκών στηρίζεως, αλλά και συνοριακών συνθηκών οι οποίες αφορούν στην εφαρμογή του αυθαίρετου θερμικού πεδίου.

Στην παρούσα παράγραφο περιγράφεται η συμπεριφορά λεπτής ορθογωνικής πλάκας πάχους h υπό την ταυτόχρονη επίδραση ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου p στην επιφάνεια της πλάκας και αυθαίρετου χρονομεταβαλλόμενου θερμικού πεδίου $\Delta T = \Delta T(x, y, z, t)$, καθώς επίσης προσδιορίζονται τα εντατικά μεγέθη και εξάγεται η αντίστοιχη εξίσωση κινήσεως αυτής. Εξαιτίας του παραπάνω θερμικού πεδίου θα ληφθούν υπόψιν στις εξισώσεις οι αδρανειακοί όροι οι οποίοι προκύπτουν.

Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους η ανάλυση της συμπεριφοράς της πλάκας πραγματοποιείται μέσω της διερευνήσεως της αποκρίσεως του μέσου επιπέδου ως προς την εγκάρσια παραμόρφωση αυτού, λαμβάνοντας υπόψιν τις **υποθέσεις Kirchhoff**. Επιπλέον το μέσο επίπεδο ταυτίζεται με το συντεταγμένο επίπεδο Oxy . Κατά σύμβαση η μετατοπίση της πλάκας θεωρείται θετική όταν κατευθύνεται προς τα αρνητικά του άξονα των z . Επιπροσθέτως χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες x, y, z η δε συνάρτηση της κατανομής της θερμοκρασίας $T = T(x, y, z, t)$ είναι δεδομένη ή δύναται να προσδιοριστεί από την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας δι'αγωγής (ιδέ Κεφ.1,πργ.1.3,σχέση 1.3.6) με τις κατάλληλες θερμικές συνοριακές συνθήκες. Ακόμη συμφώνως με τα όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, αναφορικά με τις υποθέσεις Kirchhoff, αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα επίπεδης ελαστικότητας για το οποίο ισχύει ότι:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (2.13.1)$$

Οι παραμορφώσεις για το επίπεδο πρόβλημα οι οποίες οφείλονται στο θερμικό πεδίο συνδέονται γραμμικά με τη θερμοκρασία μέσω των σχέσεων

$$\varepsilon_{xx}^0 = a_t(\Delta T), \varepsilon_{yy}^0 = a_t(\Delta T) \quad (2.13.2)$$

όπου a_t ο συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής του υλικού, ο οποίος για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας είναι ανεξάρτητος αυτής. Προκειμένου να εξάγουμε τη διαφορική εξίσωση η οποία διέπει τη δυναμική συμπεριφορά της πλάκας βασιζόμαστε στις υποθέσεις Kirchhoff (πργ.2.2) τόσο για το απαραμόρφωτο του μέσου επιπέδου όσο και για την επιδότητα των διατομών. Θα ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \text{ και } \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0\end{aligned}\quad (2.13.3 \text{ a-f})$$

Από τη σχέση (d) των οποίων ολοκληρώνοντάς την προκύπτει ότι :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y) \quad (2.13.4)$$

ενώ από τις (e) και (f) ολοκληρώνοντάς τις μερικώς ως προς z προκύπτουν αντίστοιχα ότι:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_o(x, y) \quad (2.13.5)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \Rightarrow v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_o(x, y) \quad (2.13.6)$$

απ'όπου $u_o(x, y) = v_o(x, y) = 0$ αφού το μέσο επίπεδο είναι απαραμόρφωτο.

Συνεπώς ισχύει ότι:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \text{ και } v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.13.7)$$

Επομένως οι ορθές παραμορφώσεις ε_{xx} , ε_{yy} και η διατμητική ε_{xy} θα λάβουν τη μορφή:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.13.8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.13.9)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.13.10)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν τις παραμορφώσεις σε κάθε σημείο της πλάκας συναρτήσει της βυθίσεως w του μέσου επιπέδου αυτής.

Επιπλέον μέσω της επαλληλίας των φορτίσεων ευρισκόμενοι στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας της θερμοελαστικότητας το συνολικό πεδίο παραμορφώσεων θα είναι:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}' \quad \text{όπου } i = x, y \quad (2.13.11)$$

με ε_{ij}' οι παραμορφώσεις λόγω της εξωτερικής φορτίσεως και ε_{ij}^0 εκείνες λόγω της θερμικής φορτίσεως.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Neumann – Duhamel (ιδέ Κεφ.1,πργ.1.4,σχ.1.4.6) για το διδιάστατο πρόβλημα όπου $i = x, y$ θα έχουμε ότι:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (2.13.12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (2.13.13)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (2.13.14)$$

οι παραπάνω σχέσεις γράφονται συναρτήσει της βυθίσεως w ως ακολούθως:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ea_t(\Delta T)}{(1-\nu)} \quad (2.13.15)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{Ea_t(\Delta T)}{(1-\nu)} \quad (2.13.16)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.13.17)$$

Εξαιτίας του προηγούμενου τασικού πεδίου αναπτύσσονται στις πλευρικές παρειές της πλάκας οι ροπές κάμψεως M_x, M_y , οι ροπές συστροφής $M_{xy} = M_{yx}$, οι τέμνουσες δυνάμεις Q_x, Q_y καθώς επίσης και οι θερμικές ροπές κάμψεως M_T . Τα προηγηθέντα μεγέθη δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = M_{yx} \quad (2.13.18)$$

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_t E(\Delta T) z dz = a_t E \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z) z dz \quad (2.13.19)$$

οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας του στοιχείου της πλάκας. Έτσι κατά τα λοιπά προκύπτουν τα εντατικά μεγέθη:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \quad (2.13.20)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \quad (2.13.21)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.13.22)$$

όπου $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ η δυσκαμψία της πλάκας

Οι εξισώσεις ισορροπίας κατά τον άξονα των z , εξαιτίας της υπάρξεως των αδρανειακών δυνάμεων $\rho h \ddot{w}$ μετασχηματίζονται σε εξισώσεις κινήσεως πλέον και λαμβάνουν την παρακάτω μορφή:

$$\Sigma F_z = \rho h \ddot{w} \Rightarrow -Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + p dx dy - \rho h \ddot{w} = 0$$

ή

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p - \rho h \ddot{w} = 0 \quad (2.13.23)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υλικού της πλάκας, h το ύψος αυτής και \ddot{w} η παράγωγος δευτέρας τάξεως ως προς το χρόνο t της κατακόρυφης παραμορφώσεως w του μέσου επιπέδου, ήτοι η επιτάχυνση αυτού. Αντίστοιχα κατά τα γνωστά οι εξισώσεις μηδενισμού ροπών ως προς τους άξονες x και y δίδουν:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 \Rightarrow -M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx dy - M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \\ + p dx dy \frac{dy}{2} - (\rho h \ddot{w}) dx dy \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - Q_y dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx = 0 \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (2.13.24)$$

ομοίως προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (2.13.25)$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εκ των δύο παραπάνω ως προς y , τη δεύτερη ως προς x , προσθέτοντας τα εξαγόμενα κατά μέλη και αντικαθιστώντας στην (2.13.23) λαμβάνουμε την παρακάτω έκφραση

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p - \rho h \ddot{w} = 0 \quad (2.13.26)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση κινήσεως λεπτών ορθογωνικών πλακών υπό την ταυτόχρονη επίδραση της εξωτερικής φορτίσεως p και του θερμικού πεδίου T .

Επίσης κατά τα γνωστά οι τέμνουσες δυνάμεις θα είναι:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad (2.13.27)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial y} \quad (2.13.28)$$

Εισάγοντας στην εξίσωση (2.13.26) τις (2.13.20), (2.13.21) και (2.13.22) δίδεται η παρακάτω έκφραση:

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) + p - \rho h \ddot{w} = 0$$

ή

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) + p - \rho h \ddot{w} = 0$$

ή

$$-D \nabla^4 w - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T + p - \rho h \ddot{w} = 0$$

ή

$$\nabla^4 w + \frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} - \frac{p}{D} = 0 \quad (2.13.29)$$

η οποία αποτελεί και τη διέπουσα διαφορική εξίσωση κινήσεως λεπτής ορθογωνικής πλάκας υπό την σύγχρονη δράση της εξωτερικής φορτίσεως και του χρονομεταβαλλόμενου θερμικού πεδίου.

Στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει μόνο η δράση του θερμικού πεδίου, η παραπάνω λαμβάνει τη μορφή:

$$\nabla^4 w + \frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = 0 \quad (2.13.30)$$

Η οποία είναι η διέπουσα διαφορική εξίσωση της συμπεριφοράς της πλάκας έναντι πεδίου θερμοκρασίας χρονικά μεταβαλλόμενου. Οι παραπάνω δύο εξισώσεις εάν συνδυαστούν κατά περίπτωση με την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας δι'αγωγής (χωρίς εσωτερικές πηγές θερμότητας) η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.13.31)$$

υπό τις αντίστοιχες συνοριακές και αρχικές συνθήκες, μπορούμε να προσδιορίσουμε αρχικά το πεδίο θερμοκρασίας από την (2.13.31) και εν συνεχεία τη συνάρτηση της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας από τη (2.13.30).

Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες στηρίζεως στην περίπτωση του δυναμικού προβλήματος μιας λεπτής ορθογωνικής πλάκας είναι ανεξάρτητες από το είδος της φορτίσεως, θερμικής ή άλλης, στατικής ή δυναμικής, συνεπώς εφαρμόζονται οι ίδιες συνοριακές συνθήκες οι οποίες αναφέρθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους της παρούσης εργασίας και μπορούν συνοψισθούν στις παρακάτω :

α) Πακτωμένο σύνορο στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-α)

Η βύθιση και η κλίση της είναι μηδέν ήτοι :

$$w|_{x=a} = 0 \text{ και } \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (2.13.32)$$

β) Απλά εδραζόμενο σύνορο στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-β)

Η βύθιση και η ροπή κάμψης μηδενίζονται

$$w|_{x=a} = 0 \text{ και } M_x|_{x=a} = 0 \quad (2.13.33)$$

Επειδή κατά μήκος του συνόρου στη θέση $x = a$ ισχύει $w|_{x=a} = 0$ έπεται ότι θα ισχύει

επίσης :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ άρα } -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{M_T}{D(1-\nu)} = 0$$

Συνεπώς αντί της (2.8.5) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω συνθήκη:

$$w|_{x=a} = 0 \text{ και } -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{M_T}{D(1-\nu)} \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.13.34)$$

γ) Ελεύθερο άκρο στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-ε)

Σ'αυτή την περίπτωση η ροπή και υποκατάστατη τέμνουσα θα είναι μηδέν και θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$M_x|_{x=a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{M_T}{D(1-\nu)} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.13.35)$$

$$\overline{Q}_x|_{x=a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \right] \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.30.36)$$

δ) Ελαστική στήριξη στη θέση $x = a$ (σχ.2.8.2-δ)

Σ'αυτή την περίπτωση ανάλογα με το είδος αυτής (μετακινησιακό ή στρωφικό ελατήριο) διαμορφώνουμε και τις αντίστοιχες συνθήκες οι οποίες είναι οι παρακάτω:

- Μετακινησιακό ελατήριο

$$M_x|_{x=a} = 0 \text{ και } \overline{Q}_x|_{x=a} = -k_{sp} w \quad (2.13.37)$$

- Στρωφικό ελατήριο

$$\overline{Q}_x|_{x=a} = 0 \text{ και } M_x|_{x=a} = k_\theta \omega_x = k_\theta \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.13.38)$$

όπου k_{sp} και k_θ οι σταθερές των ελατηρίων σε (Nt/m) και (Nt/rad) αντίστοιχα.

ε) Κυλιόμενο πακτωμένο σύνορο στη θέση $x = a$

Για την κυλιόμενη πάκτωση ισχύει ότι η κλίση της βυθίσεως σε εκείνη της θέση μηδενίζεται όπως επίσης και η υποκατάστατη τέμνουσα έτσι προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \text{ και } \overline{Q}_x|_{x=a} = 0 \quad (2.13.39)$$

Αρχικές συνθήκες

Για την περίπτωση της μη στατικής θερμικής φορτίσεως διατυπώνονται και αρχικές συνθήκες οι οποίες αφορούν στην κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας και είναι οι εξής :

$$w|_{t=0} = 0 \text{ και } \dot{w}|_{t=0} = 0$$

η κατακόρυφη παραμόρφωση και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του μέσου επιπέδου της πλάκας τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Συνοψίζοντας τα όσα αναφέρθηκαν στο παρόν κεφάλαιο το πρόβλημα του προσδιορισμού της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας « υποβιβάζεται » σε περίπτωση της επίπεδης ελαστικότητας και ανάγεται, δυνάμει των **υποθέσεων Kirchhoff**, στον υπολογισμό της κατακόρυφης παραμορφώσεως του μέσου επιπέδου της, θεωρώντας παράλληλα γραμμική μεταβολή των στοιχείων του ταυστή των παραμορφώσεων κατά το πάχος της πλάκας. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις **σχέσεις Neumann – Duhamel** για το διδιάστατο πρόβλημα της θερμοελαστικότητας προσδιορίζεται το τασικό πεδίο και τα συνεπαγόμενα εξ'αυτού εντατικά μεγέθη, καθώς και οι θερμικές ροπές κάμψεως ή οι αντίστοιχες αξονικές φορτίσεις. Τελικά εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων όπως και ροπών καταλήγουμε στη διατύπωση της διέπουσας διαφορικής εξίσωσης της πλάκας, τόσο για το **στατικό (stationary)** όσο και για το **δυναμικό (non stationary)** θερμικό πρόβλημα. Οι παραπάνω εξισώσεις σε συνδυασμό με την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας δι'αγωγής για το υπό εξέταση πρόβλημα και με τις ελάχιστες συνοριακές αλλά και αρχικές συνθήκες οι οποίες πρέπει να πληρούνται , ορίζουν το πλέγμα των σχέσεων το οποίο το χαρακτηρίζει.

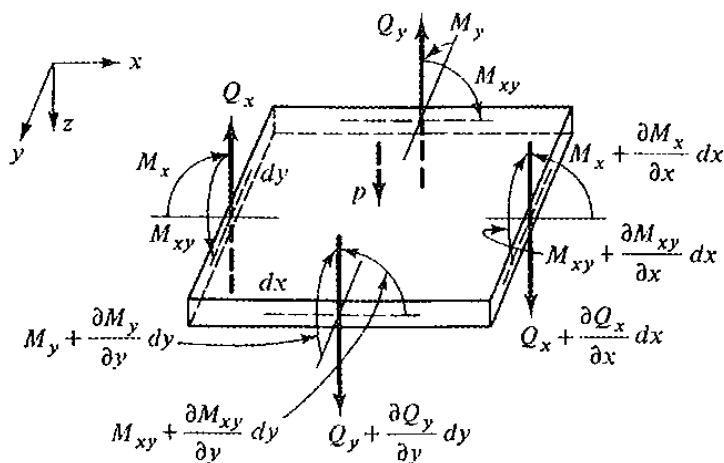
Κεφάλαιο 3 : Προβλήματα θερμοελαστικής κάμψης λεπτών πλακών

3.1 Θερμοελαστική κάμψη λεπτής ορθογωνικής πλάκας πάχους h , απλά εδραζόμενης, υπό την επίδραση θερμικής φορτίσεως $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$

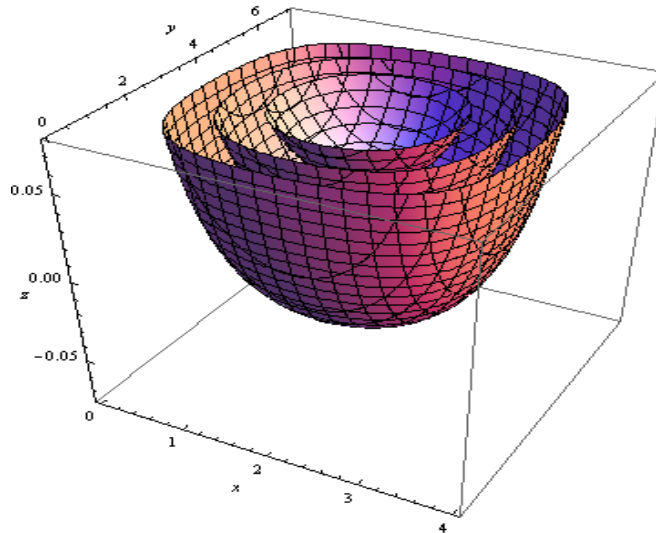
Στην παρούσα παράγραφο μελετάται η στατική συμπεριφορά έναντι θερμοελαστικής κάμψης λεπτής ορθογωνικής πλάκας διαστάσεων a και b κατά x και y αντίστοιχα (Σχήμα 3.1.1) απλά εδραζόμενης υπό την ταυτόχρονη επίδραση ομοιόμορφης εξωτερικής επιφανειακής φορτίσεως $p = p_0$ και στάσιμης (stationary) θερμικής φορτίσεως με κατανομή της μορφής $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$. Για την εξέταση του παραπάνω προβλήματος θεωρούμε ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται στο εσωτερικό της πλάκας μέσω της παρακάτω εκφράσεως:

$$\Delta T(x, y, z) = T_0 \left(\frac{2z}{h} + 1 \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (3.1.1)$$

όπου T_0 η θερμοκρασία αναφοράς στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ ο χώρος στον οποίο ορίζεται είναι το στερεό το οποίο περικλείεται από τα όρια της πλάκας ήτοι: $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2$. Η παραπάνω κατανομή της θερμοκρασίας για διάφορες τιμές των διαστάσεων της πλάκας στο εσωτερικό της πλάκας φαίνεται στο Σχήμα 3.1.2.



Σχήμα 3.1.1 : Απλά εδραζόμενη πλάκα



Σχήμα 3.1.2 : Κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό ορθογωνικής πλάκας με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$

Επιπλέον ως στατικό σύστημα η πλάκα φορτίζεται με ομοιόμορφη εξωτερική φόρτιση p_0 , έχει δυσκαμψία $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, συντίθεται από ομογενές και ισότροπο ελαστικό υλικό και στηρίζεται μέσω απλής εδράσεως και στις τέσσερις πλευρικές της έδρες. Το θερμοστατικό πρόβλημα περιγράφεται από τη διέπουσα διαφορική εξίσωση της καμπτόμενης πλάκας, υπό τις ανάλογες συνοριακές συνθήκες στηρίξεως, σε όρους της ελαστικής της επιφάνειας, ως ακολούθως:

$$D\nabla^4 w = p_0 - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T \quad \text{ή} \quad \nabla^4 w = \frac{p_0}{D} - \frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad (3.1.2)$$

όπου w η κατακορυφή παραμόρφωση της πλάκας, ν ο λόγος Poisson του υλικού και M_T η αναπτυσσόμενη ροπή κάμψεως εξαιτίας της θερμοκρασιακής φορτίσεως, καλούμενη ως θερμική ροπή κάμψεως. Οι συνοριακές συνθήκες στηρίξεως της πλάκας περιγράφονται μαθηματικά όπως παρακάτω:

- Απλή έδραση στις θέσεις $x=0, a$ με $w|_{x=0, a} = 0$ και $M_x|_{x=0, a} = 0$
- και
- Απλή έδραση στις θέσεις $y=0, b$ με $w|_{y=0, b} = 0$ και $M_y|_{y=0, b} = 0$
- (3.1.3)

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο πρέπει να επιλυθεί αποτελείται από το σύστημα των εξισώσεων (3.1.2) και (3.1.3) θεωρώντας ότι $p_0 = 0$ προσδιορίζοντας συγχρόνως το τασικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας και τα προκύπτοντα εξ'αυτού εντατικά μεγέθη.

Το τασικό πεδίο το οποίο αναπτύσσεται στο εσωτερικό της πλάκας εξαιτίας της εξωτερικής και της θερμοκρασιακής φορτίσεως δίδεται κατά τα γνωστά από τις τροποποιημένες σχέσεις του Hooke ως ακολούθως:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (3.1.4)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (3.1.5)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (3.1.6)$$

στις οποίες με βάση τις **υποθέσεις Kirchhoff**, τα στοιχεία του τανυστή των παραμορφώσεων δίδονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.7)$$

Λόγω των (3.1.7) οι (3.1.4),(3.1.5),(3.1.6) λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1+\nu)a_t \Delta T \right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ea_t \Delta T}{(1-\nu)} \quad (3.1.8)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (1+\nu)a_t \Delta T \right] = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{Ea_t \Delta T}{(1-\nu)} \quad (3.1.9)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.10)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις την έκφραση της θερμοκρασίας λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{a_t E T_0}{(1-\nu)} \left(\frac{2z}{h} + 1 \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.11)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{a_t E T_0}{(1-\nu)} \left(\frac{2z}{h} + 1 \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.12)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.13)$$

Ενώ τα προκύπτοντα εντατικά μεγέθη σε μια τυχαία διατομή της πλάκας θα δίδονται από τις γνωστές σχέσεις:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = M_{yx} \quad (3.1.14)$$

αντίστοιχα η θερμική ροπή κάμψεως θα είναι:

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_t E (\Delta T) z dz = a_t E \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z) z dz \quad (3.1.15)$$

Οι σχέσεις (3.1.14) και (3.1.15) λόγω των (3.1.11),(3.1.12),(3.1.13) τροποποιούνται όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz \right] - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E a_t T}{(1-\nu)} z dz \\ &\quad \dot{\eta} \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez^2}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz \right] - \frac{M_T}{(1-\nu)} \\ &\quad \dot{\eta} \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez^2}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz \right] - \frac{a_t E T_0}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\frac{2z}{h} + 1 \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right] z dz \\ &\quad \dot{\eta} \\ M_x &= \left[-\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{z^3}{3} dz \right]_{-h/2}^{h/2} - \frac{a_t E T_0}{1-\nu} \left[\left(\frac{2z^3}{3h} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right]_{-h/2}^{h/2} \\ &\quad \dot{\eta} \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{2a_t(1+\nu)T_0 D}{h} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

ομοίως η ροπή κάμψεως κατά τον άξονα y θα δίδεται από τη σχέση:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{2a_t(1+\nu)T_0 D}{h} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.17)$$

ενώ η ροπή συστροφής M_{xy} εκφράζεται μέσω της σχέσεως:

$$M_{,xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.18)$$

Αντίστοιχα εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων κατά τον άξονα z και μηδενισμού ροπών κατά τους άξονες x, y προκύπτουν οι γνωστές για τις τέμνουσες δυνάμεις Q_x και Q_y σχέσεις ήτοι:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad (3.1.19)$$

και

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial y} \quad (3.1.20)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (3.1.15) για τη θερμική ροπή κάμψεως, σε συνδυασμό με την έκφραση της θερμοκρασίας (3.1.1), προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$M_T = a_t E T_0 \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2z}{h} + 1 \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) z dz$$

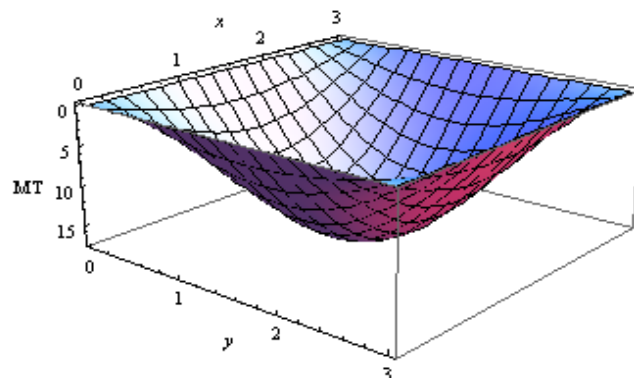
ή

$$M_T = a_t E T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2z}{h} + 1 \right) z dz$$

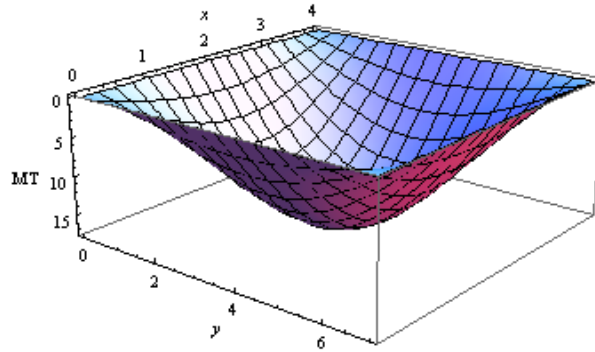
ή

$$M_T = \left(\frac{a_t E T_0 h^2}{6} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.21)$$

Η θερμική ροπή κάμψεως για διάφορες τιμές των μηκών των ακμών της πλάκας παρίσταται γραφικά στα ακόλουθα Σχήματα 3.1.2 και 3.1.3



Σχήμα 3.1.3 : Κατανομή της θερμικής ροπής κάμψεως στο εσωτερικό τετραγωνικής πλάκας



Σχήμα 3.1.4 : Κατανομή της θερμικής ροπής κάμψης στο εσωτερικό ορθογωνικής πλάκας με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$

Παραγωγίζοντας αντίστοιχα ως προς x και y την (3.1.21) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial M_T}{\partial x} = \left(\frac{a_t E T_0 h^2 \pi}{6a} \right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.22)$$

και

$$\frac{\partial M_T}{\partial y} = \left(\frac{a_t E T_0 h^2 \pi}{6b} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.23)$$

Βάσει των προαναφερομένων σχέσεων οι σχέσεις των τεμνουσών δυνάμεων (3.1.19) και (3.1.20) γίνονται:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{a_t E T_0 h^2 \pi}{6a} \right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.24)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{a_t E T_0 h^2 \pi}{6b} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.25)$$

Από την διέπουσα εξίσωση της πλάκας (3.1.2) για την περίπτωση της καθαρής θερμικής φορτίσεως δηλαδή για $p_0 = 0$ έχουμε ότι:

$$\nabla^4 w = -\frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad (3.1.26)$$

η οποία αποτελεί της διαφορική εξίσωση καμπτόμενης πλάκας υπό την επίδραση μόνο της στάσιμης θερμικής φορτίσεως, σε όρους της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας.

Ο τελεστής Laplace δρώντας επί της θερμικής ροπής κάμψεως δίδει την παρακάτω έκφραση:

$$\nabla^2 M_T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) M_T = - \left(\frac{a_i E T_0 h^2}{6} \right) \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) - \left(\frac{a_i E T_0 h^2}{6} \right) \left(\frac{\pi^2}{b^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$$

ή

$$\nabla^2 M_T = - \left(\frac{a_i E T_0 h^2 \pi^2}{6} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (3.1.27)$$

Η σχέση (3.1.26) λόγω της (3.1.27) γράφεται ως ακολούθως:

$$\nabla^4 w = - \frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T = \left(\frac{a_i E T_0 h^2 \pi^2}{6} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (3.1.28)$$

Η προηγούμενη εξίσωση (3.1.28) αποτελεί τη διέπουσα διαφορική εξίσωση της καμπτόμενης πλάκας για τη συγκεκριμένη τριδιάστατη θερμική φόρτιση. Όπως φαίνεται από τις προαναφερθείσες σχέσεις, πλην του τασικού πεδίου, παρόλο που η κατανομή της θερμοκρασίας είναι τριδιάστατη, εντούτοις λόγω του ορίσματος dz των σχέσεων, αλλά και της κατανομής των τάσεων κατά το πάχος της πλάκας, οι σχέσεις οι οποίες αναφέρονται στα προκύπτοντα εντατικά μεγέθη, όπως επίσης και στη θερμική ροπή κάμψεως μετασχηματίζονται σε σχέσεις του επιπέδου.

Η συνάρτηση της ροπής κάμψεως $M = M(x, y)$ η οποία ορίζεται ως το ίχνος του ταυστή των ροπών κάμψεως διηρημένο με την ποσότητα $1+\nu$ θα δίδεται από τη σχέση:

$$M = M(x, y) = \frac{M_x + M_y}{1+\nu}$$

ή

$$M = \frac{1}{1+\nu} \left[-D(1+\nu) \nabla^2 w - \frac{2M_T}{1-\nu} \right]$$

ή

$$M = - \left(D \nabla^2 w + \frac{2M_T}{1-\nu^2} \right) \quad (3.1.29)$$

Επιλύοντας την (3.1.29) ως προς $\nabla^2 w$ θα έχουμε ότι:

$$\nabla^2 w = -\left(\frac{M}{D} + \frac{2M_T}{D(1-\nu^2)}\right) \quad (3.1.30)$$

όμως η διέπουσα διαφορική εξίσωση (3.1.26) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w) = -\nabla^2\left(\frac{M}{D}\right) - \nabla^2\left(\frac{2M_T}{D(1-\nu^2)}\right) \quad (3.1.31)$$

Η σχέση (3.1.26) σε συνδυασμό με την (3.1.31) δίδει την ακόλουθη εξίσωση:

$$\nabla^2\left(M + \frac{M_T}{1+\nu}\right) = 0 \quad (3.1.32)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.1.30) και (3.1.32) αποτελεί το ισοδύναμο σύστημα το οποίο διέπει τη θερμοελαστική κάμψη των λεπτών ορθογωνικών πλακών.

Θέτοντας $\Phi(x, y) = M(x, y) + \frac{M_T(x, y)}{1+\nu}$ η (3.1.32) μετασχηματίζεται στην $\nabla^2\Phi = 0$ η

οποία αποτελεί μια διδιάστατη εξίσωση Laplace υπό τις ακόλουθες ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

- $\Phi(0, y) = M(0, y) + \frac{M_T(0, y)}{1+\nu} = 0$
- $\Phi(a, y) = M(a, y) + \frac{M_T(a, y)}{1+\nu} = 0$
- $\Phi(x, 0) = M(x, 0) + \frac{M_T(x, 0)}{1+\nu} = 0$
- $\Phi(x, b) = M(x, b) + \frac{M_T(x, b)}{1+\nu} = 0$

Το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών επιλύεται με τη βοήθεια της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών η οποία βασίζεται στην έκφραση της συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ ως γινόμενο δύο συναρτήσεων μίας μεταβλητής ήτοι:

$$\Phi(x, y) = f(x)g(y)$$

Συνεπώς η εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ ή $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$ δυνάμει της παραπάνω εκφράσεως της συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ λαμβάνει τη μορφή

$$g(y)\frac{d^2f}{dx^2} + f(x)\frac{d^2g}{dy^2} = 0 \quad \text{ή} \quad -g(y)\frac{d^2f}{dx^2} = f(x)\frac{d^2g}{dy^2}$$

Διαιρούμε την παραπάνω σχέση με το γινόμενο $f(x)g(y) \neq 0$ και προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}$$

Αφού κάθε συνάρτηση από τις f και g εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από μία μεταβλητή, τότε τα δύο μέλη της παραπάνω εξισώσεως για να είναι μεταξύ τους ίσα, θα πρέπει να ισούνται με την ίδια σταθερά, έστω αυτή λ , η οποία ονομάζεται σταθερά διαχωρισμού. Συνεπώς προκύπτουν τα παρακάτω δύο προβλήματα ιδιοτιμών υπό τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

Πρόβλημα ιδιοτιμών I

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda f = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(a) = 0$$

Πρόβλημα Ιδιοτιμών II

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \lambda g = 0$$

$$g(0) = 0$$

$$g(b) = 0$$

Για τη σταθερά διαχωρισμού διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Εάν $\lambda = 0$ τότε από το πρώτο πρόβλημα ιδιοτιμών προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = c_1 x + c_2$$

απ'όπου για $x=0, a$ οι σταθερές ολοκληρώσεως λαμβάνουν την τιμή $c_1 = c_2 = 0$ οπότε $f(x) = 0$ πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού $f(x) \neq 0$

- Εάν $\lambda = p^2 > 0$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει τη μορφή $f(x) = A \cosh px + B \sinh px$ από την οποία για $x=0, a$ λαμβάνουμε ότι $A = B = 0$ οπότε και πάλι $f(x) = 0$ πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού $f(x) \neq 0$

- Επομένως $\lambda = -p^2 < 0$ και η συνάρτηση έχει τη μορφή $f(x) = \Gamma \cos px + \Delta \sin px$ εκ της οποίας για $x=0, a$ έχουμε ότι: $f(0) = \Gamma = 0$ και $f(a) = \Delta \sin pa = 0$ όμως $\Delta \neq 0$ οπότε $\sin pa = 0$ ή

$$pa = m\pi \quad \text{ή} \quad p = \frac{m\pi}{a} \quad \text{συνεπώς} \quad \lambda = -p^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 < 0. \quad \text{Κατόπιν των παραπάνω η}$$

$$f(x) = \Delta_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο το δεύτερο πρόβλημα ιδιοτιμών γνωρίζοντας πλέον τη σταθερά διαχωρισμού έχει γενική λύση την $g(y) = \Gamma_1 \cosh py + \Delta_1 \sinh py$. Εν γένει μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών «Laplace» είναι και η

$$\Phi(x, y) = (A_1 \cos px + B_1 \sin px)(\Gamma_1 \cosh py + \Delta_1 \sinh px)$$

επειδή οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς προκύπτει ως λύση της εξίσωσης Laplace η τετριμμένη ήτοι:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = 0 \quad \dot{\eta} \quad \Phi(x, y) = 0 \quad \dot{\eta} \quad \Phi(x, y) = M(x, y) + \frac{M_T(x, y)}{1+\nu} = 0 \\ \dot{\eta} \\ M(x, y) = -\frac{M_T(x, y)}{1+\nu} \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.1.33) στην (3.1.30) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \nabla^2 w = -\left(\frac{M}{D} + \frac{2M_T}{D(1-\nu^2)}\right) \quad \dot{\eta} \quad \nabla^2 w = -\left(-\frac{M_T}{D(1+\nu)} + \frac{2M_T}{D(1-\nu^2)}\right) \\ \dot{\eta} \\ \nabla^2 w = -\frac{M_T}{D(1-\nu)} \quad \dot{\eta} \quad \nabla^2 w = -\frac{2a_t T_0(1+\nu)}{h} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Θέτοντας: $h(x, y) = -\frac{2a_t T_0(1+\nu)}{h} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = C_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ η σχέση

(3.1.34) λαμβάνει τη μορφή:

$$\nabla^2 w = h(x, y) \quad (3.1.35)$$

όπου $C_0 = -\frac{2a_t T_0(1+\nu)}{h}$

Όπως είναι προφανές από την εξίσωση (3.1.35) για την εύρεση της συναρτήσεως της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας, πρέπει να επιλυθεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών Poisson:

$$\begin{cases} \nabla^2 w = h(x, y) \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0 \\ w(0, y) = w(a, y) = 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση Poisson δύναται να επιλυθεί αναζητώντας λύση εκφρασμένη σε σειρά Fourier των ιδιοσυναρτήσεων της εξίσωσης Laplace, με άλλα λόγια αναζητούμε λύσεις οι οποίες συντίθεται από τις επιμέρους λύσεις του ακόλουθου προβλήματος ιδιοτιμών:

$$\begin{cases} \nabla^2 w = \lambda w \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0 \\ w(0, y) = w(a, y) = 0 \end{cases} \quad (3.1.36)$$

Για να επιλυθεί το παραπάνω πρόβλημα ιδιοτιμών γίνεται χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών θεωρώντας ότι η συνάρτηση της βυθίσεως w γράφεται ως το γινόμενο δύο συναρτήσεων μίας ανεξάρτητης μεταβλητής έκαστη ήτοι:

$$w(x, y) = w_1(x)w_2(y) \quad (3.1.37)$$

Αντικαθιστώντας την (3.1.37) στην (3.1.36) έχουμε ότι:

$$w_2 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + w_1 \frac{d^2 w_2}{dy^2} = \beta w_1 w_2$$

διαιρώντας με το γινόμενο $w_1 w_2 \neq 0$ η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{w_1} \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{1}{w_2} \frac{d^2 w_2}{dy^2} = \beta$$

ή

$$\frac{1}{w_1} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \beta - \frac{1}{w_2} \frac{d^2 w_2}{dy^2} = c \quad (3.1.38)$$

Με τον παραπάνω μετασχηματισμό μετατρέψαμε την εξίσωση Poisson σε εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Πλέον η (3.1.38) αποτελείται απο δύο επιμέρους προβλήματα ιδιοτιμών τα οποία φαίνονται παρακάτω:

$$\text{Πρόβλημα ιδιοτιμών III} \quad \begin{cases} \frac{d^2 w_1}{dx^2} - c w_1 = 0 \\ w_1(0) = 0 \\ w_1(a) = 0 \end{cases} \quad (3.1.39)$$

$$\text{Πρόβλημα ιδιοτιμών IV} \quad \begin{cases} \frac{d^2 w_2}{dy^2} - (\beta - c) w_2 = 0 \\ w_2(0) = 0 \\ w_2(b) = 0 \end{cases} \quad (3.1.40)$$

Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών υπ' αριθμ. III

Αρχικά θα πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για τη σταθερά c

Εάν $c = 0$ τότε από τις σχέσεις (3.1.39) έχουμε ότι:

$w_1(x) = c_1 x + c_2$ η οποία πρέπει να πληρεί τις συνοριακές συνθήκες δηλαδή $w_1(0) = 0$ ή $c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$ οπότε $c_2 = 0$ επίσης $w_1(a) = 0$ άρα $c_1 = 0$ συνεπώς σ' αυτή την περίπτωση $w_1(x) = 0$ η οποία και απορρίπτεται αφού $w_1 \neq 0$

Εάν $c = p^2 > 0$ τότε η γενική λύση η οποία επαληθεύει την (3.1.39) έχει τη μορφή:

$w_1(x) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}$ κάνοντας χρήση των ακόλουθων σχέσεων για τις υπερβολικές συναρτήσεις

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή :

$w_1(x) = A_1 \cosh px + A_2 \sinh px$ η οποία με τη σειρά της πρέπει να πληρεί τις ανάλογες συνοριακές συνθήκες $w_1(0) = 0$ και $w_1(a) = 0$ από τις οποίες προκύπτει ότι:

$w_1(x) = 0$ η οποία απορρίπτεται αφού $w_1 \neq 0$

Εν τέλει θα πρέπει $c = -p^2 < 0$ οπότε από τις σχέσεις (3.1.39) προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + p^2 w_1 = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι της μορφής $w_1(x) = C_3 e^{ipx} + C_4 e^{-ipx}$ κάνοντας χρήση του τύπου του Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, αυτή λαμβάνει τη μορφή:

$$w_1(x) = A_3 \cos px + A_4 \sin px$$

η οποία θα πρέπει να πληρεί τις συνοριακές συνθήκες $w_1(0) = 0$ και $w_1(a) = 0$ από τις οποίες προκύπτει ότι:

Για $w_1(0) = 0$ λαμβάνουμε ότι $A_3 = 0$ ενώ για $w_1(a) = 0$ προκύπτει ότι $A_4 \sin pa = 0$ ή $\sin pa = 0$ ή $pa = m\pi$ ή $p = \frac{m\pi}{a}$.

Επομένως η σταθερά διαχωρισμού $c = -p^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 < 0$

Άρα η γενική λύση του προηγούμενου προβλήματος είναι :

$$w_1(x) = A_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.1.41)$$

Γνωρίζοντας πλέον τη σταθερά διαχωρισμού την αντικαθιστούμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών υπ'αριθμ. IV και έτσι οι (3.1.40) γίνονται:

$$\begin{cases} \frac{d^2 w_2}{dy^2} - \left(\beta + \frac{m^2 \pi^2}{a^2}\right) w_2 = 0 \\ w_2(0) = 0 \\ w_2(b) = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \frac{d^2 w_2}{dy^2} - k w_2 = 0 \\ w_2(0) = 0 \\ w_2(b) = 0 \end{cases} \quad \text{όπου } k = \beta + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

Ακολουθώντας την προηγούμενη ανάπτυξη η γενική λύση για την $w_2(y)$ η οποία πληρεί τις παραπάνω εξισώσεις έχει τη μορφή

$$w_2(y) = B_{2n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.42)$$

Έτσι η γενική λύση η οποία ικανοποιεί τον πρόβλημα ιδιοτιμών (3.1.36) θα έχει τη μορφή διπλού ημιτονικού αθροίσματος Fourier ήτοι:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{4m} B_{2n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &\quad \text{ή} \\ w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

Η συνάρτηση $h(x, y)$ αναπτύσσεται σε διπλή ημιτονική σειρά Fourier ως ακολούθως:

$$h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.44)$$

όπου οι συντελεστές h_{mn} υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$h_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.45)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.1.43) και (3.1.44) στην (3.1.35) προκύπτει ότι:

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
&\quad \dot{\eta} \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
&\quad \dot{\eta} \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0 \\
&\quad \dot{\eta} \\
&\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[w_{mn} \left(-\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) - h_{mn} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0
\end{aligned}$$

η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε x, y , οπότε οι συντελεστές w_{mn} θα δίδονται από τη σχέση:

$$w_{mn} = -\frac{h_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2} \quad (3.1.46)$$

Από τη σχέση (3.1.45) θέτοντας $m=n=1$ προσδιορίζουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος της φορτίσεως:

$$h_{11} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h(x, y) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b C_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx dy$$

$\dot{\eta}$

$$h_{11} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b C_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dx dy \quad \dot{\eta} \quad h_{11} = \frac{4C_0}{ab} \int_0^a \left[\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \right] \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$\dot{\eta}$

$$h_{11} = \int_0^a \left[\int_0^b \frac{1 - \cos 2\frac{\pi y}{b}}{2} dy \right] \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$\dot{\eta}$

$$h_{11} = \frac{4C_0}{ab} \int_0^a \left[\frac{y}{2} - \frac{b}{4\pi} \sin \frac{2\pi y}{b} \right]_0^b \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$\dot{\eta}$

$$h_{mn} = \frac{4C_0}{ab} \frac{b}{2} \frac{a}{2} = C_0 \quad (3.1.47)$$

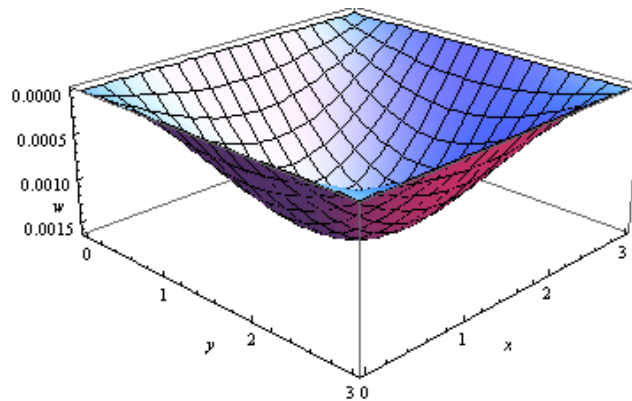
Επομένως η (3.1.46) εξαιτίας της (3.1.47) και για $m = n = 1$ δίδει την έκφραση:

$$w_{mn} = -\frac{h_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2} = -\frac{C_0}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2} = \frac{2a_i T_0(1+\nu)}{\pi^2 h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = w_0$$

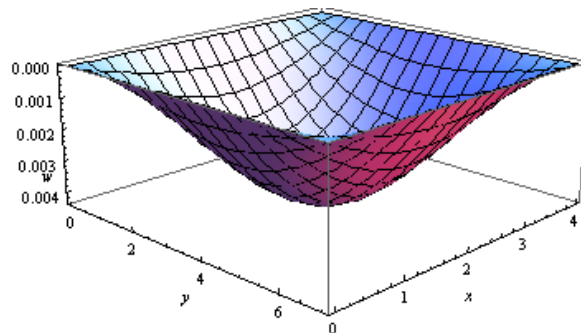
Συνεπώς η συνάρτηση της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας ισούται με:

$$w = w(x, y) = \frac{2a_i T_0(1+\nu)}{\pi^2 h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.48)$$

Η γραφική παράσταση της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας λόγω της θερμοκρασιακής φορτίσεως για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα φαίνεται στα Σχήματα 3.1.5 και 3.1.6 αντιστοίχως



Σχήμα 3.1.5 : Μορφή της ελαστικής επιφάνειας w τετραγωνικής πλάκας



Σχήμα 3.1.6 : Μορφή της ελαστικής επιφάνειας w ορθογωνικής πλάκας με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$

Οι προκύπτουσες ροπές κάμψως θα δίδονται από τις σχέσεις (3.1.16),(3.1.17),(3.1.18) με τη βοήθεια της σχέσεως (3.1.48) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left[w_0 \left(-\frac{\pi^2}{a^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) + \nu w_0 \left(-\frac{\pi^2}{b^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - \frac{M_T}{1-\nu} \\
 &\quad \dot{\eta} \\
 M_x &= D \left[\frac{2a_i T_0 (1+\nu)}{h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - \left(\frac{a_i E T_0 h^2}{6(1-\nu)} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\
 &\quad \dot{\eta} \\
 M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{2a_i T_0 (1+\nu)}{h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - \left(\frac{a_i E T_0 h^2}{6(1-\nu)} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\
 &\quad \dot{\eta} \\
 M_x &= -\frac{a_i E h^2 T_0}{6} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right] \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \tag{3.1.49}
 \end{aligned}$$

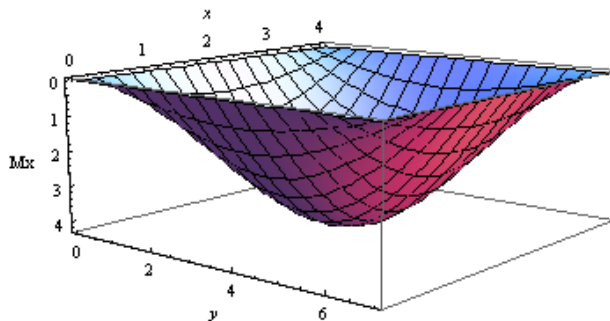
ομοίως

$$M_y = -\frac{a_i E h^2 T_0}{6} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{a} \right)^2}} \right] \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \tag{3.1.50}$$

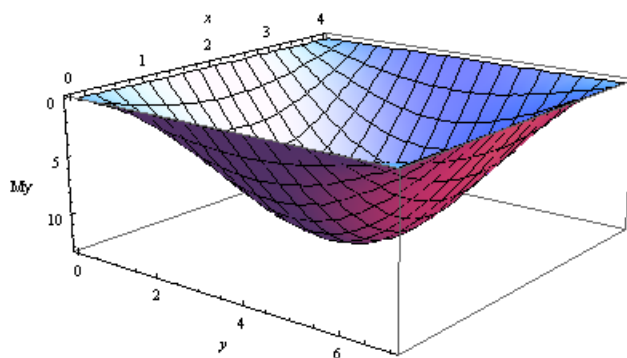
και οι ροπές συστρωφής

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{a_i T_0 (1+\nu)}{\pi^2 h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \frac{\pi^2}{ab} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\
 &\quad \dot{\eta} \\
 M_{xy} &= -\frac{a_i E T_0 h^2}{6 \left(\frac{b}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{a} \right)^2} \right)} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \tag{3.1.51}
 \end{aligned}$$

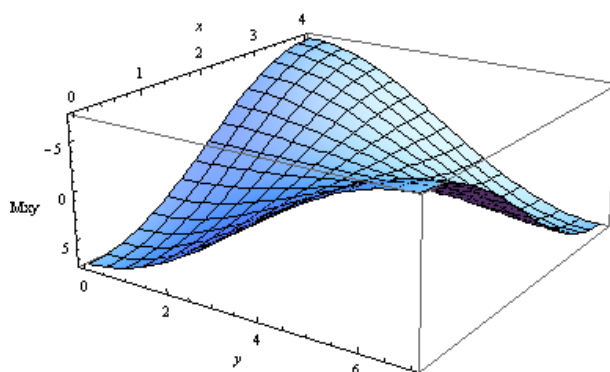
Τα διαγράμματα των ροπών κάμψης της πλάκας συναρτήσει του λόγου των ακμών της πλάκας (b/a) εξαιτίας της θερμοκρασιακής φορτίσεως φαίνονται αντιστοίχως στα Σχήματα 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9



Σχήμα 3.1.7 : Διάγραμμα ροπών κάμψης M_x για ορθογωνική πλάκα με λόγο πλευρών (b/a) = 1.75



Σχήμα 3.1.8 : Διάγραμμα ροπών κάμψης M_y για ορθογωνική πλάκα με λόγο πλευρών (b/a) = 1.75



Σχήμα 3.1.9 : Διάγραμμα ροπών συστροφής M_{xy} για ορθογωνική πλάκα με λόγο πλευρών (b/a) = 1.75

Αντίστοιχα οι τέμνουσες δυνάμεις θα δίδονται από τις σχέσεις:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial M_T}{\partial x}$$

ή

$$Q_x = D \frac{2a_t(1+\nu)T_0}{h} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{a_t E h^2 T_0 \pi}{6a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

ή

$$Q_x = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{2a_t(1+\nu)T_0}{h} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{a_t E h^2 T_0 \pi}{6a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

ή

$$Q_x = 0$$

ομοίως

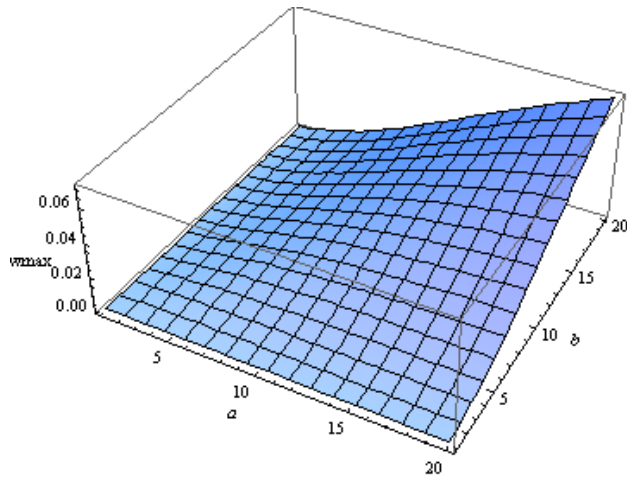
$$Q_y = 0$$

Η μέγιστη τιμή της βυθίσεως εμφανίζεται $w = w_{\max}$ της μέσης επιφάνειας της πλάκας εμφανίζεται όταν $\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = 1$ ή $\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi y}{b} = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ δηλαδή στη θέση

$(x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ η οποία αντιστοιχεί στο κέντρο της μέσης επιφάνειας της πλάκας. Η τιμή τότε θα είναι:

$$w = w_{\max} = \frac{2a_t T_0 (1+\nu)}{\pi^2 h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \quad (3.1.52)$$

Είναι προφανές ότι η μέγιστη τιμή της συναρτήσεως της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας για τη συγκεκριμένη θερμική φόρτιση μόνο, εξαρτάται από το ίδιο το υλικό μέσω του συντελεστή γραμμικής θερμικής διαστολής του a_t , όπως επίσης από τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού όπως ο λόγος του Poisson ν , αλλά και γραμμικά με τη θερμοκρασία αναφοράς. Επιπλέον είναι πρόδηλη η επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της πλάκας στο μέγεθος της βυθίσεως, αφού όπως διαπιστώνεται είναι αντιστρόφως ανάλογη αυτών. Η γραφική παράσταση της μέγιστης τιμής της κατακόρυφης παραμορφώσεως w_{\max} παραμετροποιημένη σχετικά με τα μήκη των πλευρών a, b της πλάκας εμφανίζεται στο Σχήμα 3.1.10



Σχήμα 3.1.10 : Μεταβολή της μέγιστης κατακόρυφης παραμορφώσεως ως συνάρτηση του λόγου των πλευρών (b/a)

Το τασικό πεδίο προσδιορίζεται από τις σχέσεις (3.1.11),(3.1.12),(3.1.13) οι οποίες σε συνδυασμό με την (3.1.48) λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{xx} = \frac{2a_t E T_0}{1-\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{h(1+(b/a)^2)} z - 1 \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.53)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2a_t E T_0}{1-\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{h(1+1/(b/a)^2)} z - 1 \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.54)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2a_t E T_0}{h[b/a + (b/a)^{-1}]} z \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3.1.55)$$

Η κατανομή των ορθών τάσεων σ_{xx} και σ_{yy} κατά το πάχος της πλάκας είναι γραμμική και εμφανίζει τη μέγιστη και ελάχιστη κατ'απόλυτη τιμή στις ακραίες έδρες της πλάκας για $z = -\frac{h}{2}$,

$z = \frac{h}{2}$ και για $(x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ και έχουν τιμή:

- Για $z = -\frac{h}{2}$ προκύπτει ότι: $\sigma_{xx}^{\max} = -\frac{2a_t E T_0}{1-\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{2(1+(b/a)^2)} + 1 \right]$ (3.1.56)

- Για $z = \frac{h}{2}$ προκύπτει ότι: $\sigma_{xx}^{\min} = \frac{2a_t ET_0}{1-\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{2(1+(b/a)^2)} - 1 \right]$ (3.1.57)

- Για $z = -\frac{h}{2}$ προκύπτει ότι: $\sigma_{yy}^{\max} = -\frac{2a_t ET_0}{1-\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{2(1+1/(b/a)^2)} + 1 \right]$ (3.1.58)

- Για $z = \frac{h}{2}$ προκύπτει ότι: $\sigma_{yy}^{\min} = \frac{2a_t ET_0}{1-\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{2(1+1/(b/a)^2)} - 1 \right]$ (3.1.59)

Αντίθετα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των διατμητικών τάσεων σ_{xy} εμφανίζονται πάλι στις ακραίες έδρες της πλάκας με τη διαφορά ότι αναπτύσσονται στις γωνίες του συνόρου ∂V το οποίο περικλείει την πλάκα έχουν δε μεγέθη τα οποία δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

- Για $z = -\frac{h}{2}$ προκύπτει ότι: $\sigma_{xy}^{\max} = \frac{a_t ET_0}{\left[b/a + (b/a)^{-1} \right]}$ (3.1.60)

- Για $z = \frac{h}{2}$ προκύπτει ότι: $\sigma_{xy}^{\min} = -\frac{a_t ET_0}{\left[b/a + (b/a)^{-1} \right]}$ (3.1.61)

Όπως φαίνεται από τις προηγούμενες σχέσεις η επίδραση του λόγου των πλευρών (b/a) στο τασικό πεδίο είναι σημαντική.

Υπολογισμός της κατακόρυφης παραμορφώσεως w λόγω της ομοιόμορφης κατανεμημένης επιφανειακής φορτίσεως $p = p_0$

Για τον προσδιορισμό της κατακόρυφης παραμορφώσεως λόγω της εξωτερικής φορτίσεως βασιζόμαστε στη λύση Navier σύμφωνα με την οποία τόσο η βύθιση όσο και η εξωτερική φόρτιση αναπτύσσονται αμφότερες σε διπλές ημιτονικές σειρές Fourier. Συνεπώς για την εξωτερική φόρτιση θα έχουμε για το ανάπτυγμά της ότι:

$$p = p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), m, n \in \mathbb{N} \quad (3.1.62)$$

όπου οι συντελεστές των τριγωνομετρικών πολυωνύμων ορίζονται ως:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.1.63)$$

Αντίστοιχα η κατακόρυφη παραμόρφωση αναπτύσσεται σε διπλή σειρά Fourier βάσει της σχέσεως:

$$w = w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.64)$$

Η παραπάνω έκφραση ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στηρίζεως της πλάκας αλλά και τη διέπουσα εξίσωση αυτής.

Από τη σχέση (3.1.63) οι συντελεστές p_{mn} υπολογίζονται ως παρακάτω:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx = \frac{4p_0}{ab} \int_0^a \left[\int_0^b \left(-\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right)' dy \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{4p_0 b}{ab\pi} \int_0^a (1 - \cos n\pi) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{4ap_0}{a\pi n m \pi} (1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi) = \\ &= \frac{4p_0}{\pi^2 n m} (1 - (-1)^n)(1 - (-1)^m) \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

με $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$

- Εάν $m, n = 2k$ δηλαδή άρτιοι τότε $p_{mn} = 0$ και $p_0 = 0$ πράγμα το οποίο είναι άτοπο και απορρίπτονται

$$- \text{Εάν } m, n = 2k + 1 \text{ δηλαδή περιττοί τότε } p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$$

Οπότε το εξωτερικό φορτίο έχει αναπτυχθεί σε διπλή ημιτονική σειρά Fourier ως ακολούθως:

$$p_0 = p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.66)$$

Επομένως η διέπουσα εξίσωση της πλάκας μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$\nabla^4 w = \frac{16p_0}{\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.67)$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης, δεύτερας, τρίτης και τετάρτης τάξεως x και y αντίστοιχα καθώς και τη μεικτή παράγωγο τετάρτης τάξεως

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις των μερικών παραγώγων στη διέπουσα εξίσωση της πλάκας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \\ &= \frac{16p_0}{\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{aligned}$$

ή

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[w_{mn} \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right] - \frac{16p_0}{\pi^2 D mn} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε x, y όποτε θα έχουμε ότι:

$$w_{mn} \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right] - \frac{16p_0}{\pi^2 D mn} = 0$$

ή

$$w_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 D mn} \frac{1}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} = \frac{p_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2}$$

Επομένως η συνάρτηση της κατακόρυφης παραμορφώσεως του μέσου επιπέδου θα δίδεται υπό μορφήν σειράς ως ακολούθως:

$$w = w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0}{D \pi^6 mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.1.68)$$

Η μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση w_{\max} εξαιτίας της εξωτερικής φορτίσεως, εντοπίζεται στο κέντρο της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας ήτοι για $(x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$:

$$w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi a/2}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi b/2}{b}\right)$$

ή

$$w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

ή

$$w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor (m+n)/2 \rfloor - 1}}{mn \left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.1.69)$$

Από την οποία για $m = n = 1$

$$w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.1.70)$$

Όπως παρατηρούμε από τις (3.1.52) και (3.1.69) η κατακόρυφη μετατόπιση w και στις δύο περιπτώσεις εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πλάκας. Συγκεκριμένα η μέγιστη τιμή της βυθίσεως επαυξάνεται με την αύξηση του λόγου των ακμών της πλάκας (b/a). Επιπροσθέτως ο υπολογισμός της μέγιστης βυθίσεως για συνήθη στοιχεία – συνήθεις κατασκευές των οποίων η κλίμακα μεγέθους των διαστάσεών τους είναι της τάξης του μέτρου μας οδηγεί σε τιμές οι οποίες είναι αμελητέες εν σχέσει με τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. Το ίδιο ισχύει και για στοιχεία πλάκων των οποίων η κλίμακα των διαστάσεών τους είναι της τάξης των χιλιοστών ή μερικών εκατοστών, όπως συμβαίνει σε μηχανολογικές ή αεροναυπηγικές κατασκευές.

Επιπλέον συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.1.52) και (3.1.69) οι μέγιστες τιμές της βυθίσεως είναι αντιστρόφως ανάλογες του πάχους του εκάστοτε στοιχείου πλάκας, με την μεν βύθιση εξαιτίας της εξωτερικής φορτίσεως να μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την τρίτη δύναμη του πάχους h^3 , ενώ για τη θερμική φόρτιση με την πρώτη δύναμη αυτού. Ουσιαστικά η επίδραση του θερμικού

φορτίου είναι δυσμενέστερη στην προκύπτουσα μέγιστη τιμή της βυθίσεως. Τέλος εάν στην περίπτωση της εξωτερικής επιφανειακής φορτίσεως υπερθέσουμε ένα θερμικό φορτίο η συνάρτηση της κατακόρυφης παραμορφώσεως θα προκύπτει ως το άθροισμα των επιμέρους συναρτήσεων της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας.

Συνεπώς στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνολική μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση θα προκύπτει από την επαλληλία των αντίστοιχων μέγιστων παραμορφώσεων. Από την παραπάνω θεωρητική ανάπτυξη είναι εμφανής η επίδραση της θερμοκρασίας αναφοράς και της κατανομής της θερμοκρασίας στον προσδιορισμό της μέγιστης τιμής της συναρτήσεως της ελαστικής επιφάνειας του υπό εξέταση στοιχείου. Προς επαλήθευση των προηγούμενων θεωρητικών συμπερασμάτων παρατίθεται στο Παράρτημα I μία αριθμητική εφαρμογή για διάφορα υλικά κατασκευής και διαφόρων γεωμετρικών χαρακτηριστικών.

Τέλος ένα γενικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από όλη την παραπάνω ανάπτυξη έγκειται στο γεγονός, ότι η θερμική φόρτιση η οποία επιδρά στην κατασκευή μπορεί να ληφθεί υπόψη ως υπερτιθέμενο μέγεθος λόγω της γραμμικότητας της θεωρίας θερμοελαστικότητας, όπως άλλωστε φαίνεται και από τη διέπουσα εξίσωση της πλάκας (3.1.2), όπου το θερμικό πεδίο εμφανίζεται στη σχέση μέσω του τελεστή Laplace ο οποίος δρα επί της « θερμικής ροπής ». Ουσιαστικά το πρόβλημα της καθαρής εφαρμογής της θερμικής φορτίσεως ανάγεται στην επίλυση ενός ανάλογου προβλήματος της γραμμικής θεωρίας της ελαστικότητας υπό την μόνη διαφορά ότι η φόρτιση η οποία εμφανίζεται σχετίζεται με την κατανομή της θερμοκρασίας. Συνεπώς το πρόβλημα της γραμμικής θερμοελαστικότητας στις πλάκες θεωρείται ότι προκύπτει ως επαλληλία

$$\text{στην εξωτερική φόρτιση } p_0 \text{ της φορτίσεως } p^* = -\frac{1}{(1-\nu)} \nabla^2 M_T .$$

Συμπερασματικά όπως φαίνεται και στην αριθμητική εφαρμογή (ιδέ Παράρτημα.I – Αριθμητικές Εφαρμογές) η επιρροή της θερμοκρασίας για το συγκεκριμένο θερμικό πεδίο, όταν αυτό δρα ανεξάρτητα, στην βύθιση της πλάκας είναι από αμελητέα έως μηδαμινή. Όμως οι προκύπτουσες κατά περίπτωση κατακόρυφες παραμορφώσεις εξαιτίας της θερμικής φορτίσεως είναι αρκετά σημαντικές εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες βυθίσεις της μέσης επιφάνειας της πλάκας συνεπεία της εξωτερικής φορτίσεως. Γενικότερα όπως φαίνεται από την σχέση (3.1.52) η μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση επηρεάζεται τόσο από τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού και συγκεκριμένα το λόγο του Poisson, το συντελεστή γραμμικής θερμικής διαστολής, το πάχος αυτής και τον λόγο των πλευρών (b/a). Συγκεκριμένα μεταβάλλεται υπερβολικά και αυξάνεται με αύξηση του λόγου των πλευρών (b/a).

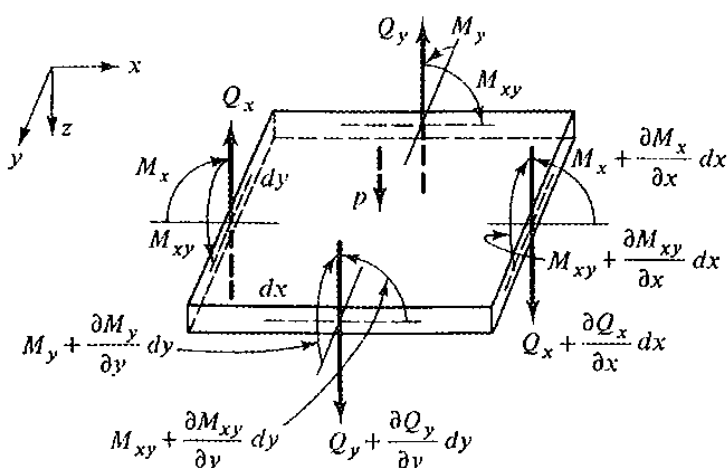
Τέλος ως γενικό συμπέρασμα αποτελεί το γεγονός ότι για να επιδράσει το θερμοκρασιακό πεδίο στη μετατόπιση της μέσης επιφάνειας της πλάκας θα πρέπει καταρχάς αυτό να παρουσιάζει και μεταβολή κατά τον άξονα z και μάλιστα να είναι περιττή συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής z .

3.2 Θερμοελαστική ταλάντωση λεπτής καμπτόμενης ορθογωνικής πλάκας πάχους h , απλά εδραζόμενης, υπό την επίδραση περιοδικής θερμικής φορτίσεως $\Delta T = \Delta T(x, y, z, t)$

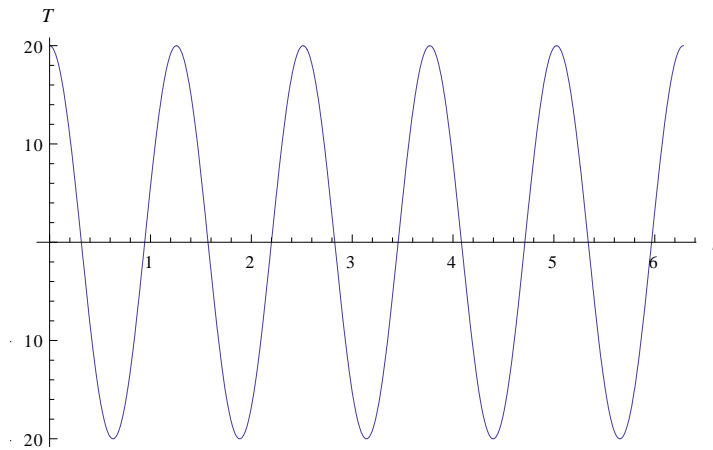
Στην παρούσα παράγραφο μελετάται η δυναμική συμπεριφορά έναντι θερμοελαστικής κάμψεως λεπτής ορθογωνικής πλάκας διαστάσεων a και b κατά x και y αντίστοιχα (Σχήμα 3.2.1), απλά εδραζόμενης, υπό την ταυτόχρονη επίδραση ομοιόμορφης εξωτερικής επιφανειακής φορτίσεως p και μη στάσιμης (non stationary) θερμικής φορτίσεως της μορφής $T = T(x, y, z, t)$. Για την εξέταση του παραπάνω προβλήματος υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται στο εσωτερικό της πλάκας μέσω της παρακάτω εκφράσεως:

$$\Delta T = \Delta T(x, y, z, t) = T_0 \left(\frac{2z}{h} \right) \left[\frac{x(a-x)y(b-y)}{a^2 b^2} \right] e^{i\omega_0 t} \quad (3.2.1)$$

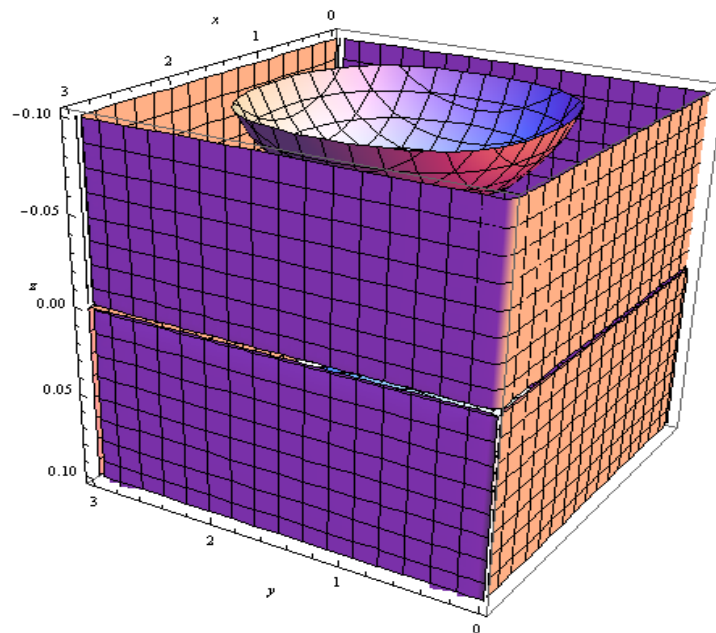
όπου T_0 η θερμοκρασία αναφοράς στην απαραμόρφωτη κατάσταση και ω_0 η κυκλική συχνότητα τη θερμικής φορτίσεως, ενώ ο χώρος στον οποίο ορίζεται είναι το στερεό το οποίο περικλείεται από τα όρια της πλάκας ήτοι: $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2$. Η παραπάνω μεταβολή της θερμοκρασίας με τον χρόνο αλλά και ως προς τον χώρο \mathbb{R}^3 , για τιμή θερμοκρασίας αναφοράς $T_0 = 20^\circ C$, διαστάσεις τετραγωνικής πλάκας $a = 3m$ και $b = 3m$, πάχους $h = 0.15m$ και κυκλικής συχνότητας $\omega_0 = 5 \text{ rad/sec}$, φαίνεται στα Σχήματα 3.2.2 και 3.2.3 αντίστοιχως.



Σχήμα 3.2.1 : Απλά εδραζόμενη πλάκα



Σχήμα 3.2.2: Μεταβολή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό της πλάκας συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 3.2.3: Κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό τετραγωνικής πλάκας

Επιπλέον ως στατικό σύστημα η πλάκα φορτίζεται με ομοιόμορφη εξωτερική φόρτιση p , έχει

δυσκαμψία $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, συντίθεται από ομογενές και ισότροπο ελαστικό υλικό και στηρίζεται

μέσω απλής εδράσεως και στις τέσσερις πλευρικές της έδρες.

Το δυναμικό θερμοελαστικό πρόβλημα περιγράφεται από τη διέπουσα διαφορική εξίσωση κινήσεως της καμπτόμενης πλάκας, υπό τις ανάλογες συνοριακές συνθήκες στηρίζεως, σε όρους βυθίσεως της ελαστικής της επιφάνειας, ως ακολούθως:

$$D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = p - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M_T \quad \text{ή} \quad \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = \frac{p}{D} - \frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad (3.2.2)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται η πλάκα, w η κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας, \ddot{w} η χρονική παράγωγος δευτέρας τάξεως της κατακόρυφης παραμορφώσεως της πλάκας ήτοι η επιτάχυνση την οποία αποκτά το κέντρο μάζας αυτής, ν ο λόγος Poisson του υλικού και M_T η αναπτυσσόμενη ροπή κάμψεως εξαιτίας της θερμοκρασιακής φορτίσεως, καλούμενη ως θερμική ροπή κάμψεως. Οι συνοριακές συνθήκες στηρίζεως της πλάκας περιγράφονται μαθηματικά όπως παρακάτω:

- Απλή έδραση στις θέσεις $x=0, a$ με $w|_{x=0,a} = 0$ και $M_x|_{x=0,a} = 0$
και (3.2.3)
- Απλή έδραση στις θέσεις $y=0, b$ με $w|_{y=0,b} = 0$ και $M_y|_{y=0,b} = 0$

Πέραν των παραπάνω συνοριακών συνθηκών, εξαιτίας της χρονικής εξαρτήσεως του προβλήματος θα πρέπει να διατυπωθούν και δύο αρχικές συνθήκες, οι οποίες περιγράφουν την κατάσταση τη χρονική στιγμή $t=0$. Θεωρώντας ότι η πλάκα τη χρονική στιγμή $t=0$ ευρίσκεται σε ηρεμία, διατυπώνονται οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες οι οποίες αφορούν την ελαστική επιφάνεια αυτής:

- $w(x, y, 0) = 0$ και $\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ (3.2.4)

Το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών το οποίο πρέπει να επιλυθεί αποτελείται από το σύστημα των εξισώσεων (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), θεωρώντας ότι $p=0$, προσδιορίζοντας συγχρόνως το τασικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας και τα προκύπτοντα εξ'αυτού εντατικά μεγέθη.

Το τασικό πεδίο το οποίο αναπτύσσεται στο εσωτερικό της πλάκας εξαιτίας της εξωτερικής και της θερμοκρασιακής φορτίσεως δίδεται κατά τα γνωστά από τις τροποποιημένες σχέσεις του Hooke ως ακολούθως:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (3.2.5)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (3.2.6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (3.2.7)$$

στις οποίες με βάση τις υποθέσεις Kirchhoff, οι συνιστώσες του τανυστή της παραμορφώσεως δίδονται συναρτήσει της βυθίσεως από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.8)$$

Λόγω των (3.2.8) οι (3.2.5),(3.2.6),(3.2.7) λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (3.2.9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (1+\nu)a_t(\Delta T) \right] \quad (3.2.10)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.11)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μετά από πράξεις λαμβάνουν τη μορφή :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z, t) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{a_t E(\Delta T)}{1-\nu} \quad (3.2.12)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z, t) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{a_t E(\Delta T)}{1-\nu} \quad (3.2.13)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.14)$$

Όπως είναι φανερό από τις προηγούμενες εξισώσεις το τασικό πεδίο το οποίο αναπτύσσεται σε μία αυθαίρετη διατομή της πλάκας χαρακτηρίζεται πλέον από χωροχρονική μεταβολή.

Ενώ τα προκύπτοντα εντατικά μεγέθη σε μια τυχαία διατομή της πλάκας θα δίδονται από τις γνωστές σχέσεις:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = M_{yx} \quad (3.2.15)$$

αντίστοιχα η θερμική ροπή κάμψεως θα είναι:

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_t E (\Delta T) z dz = a_t E \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z) z dz$$

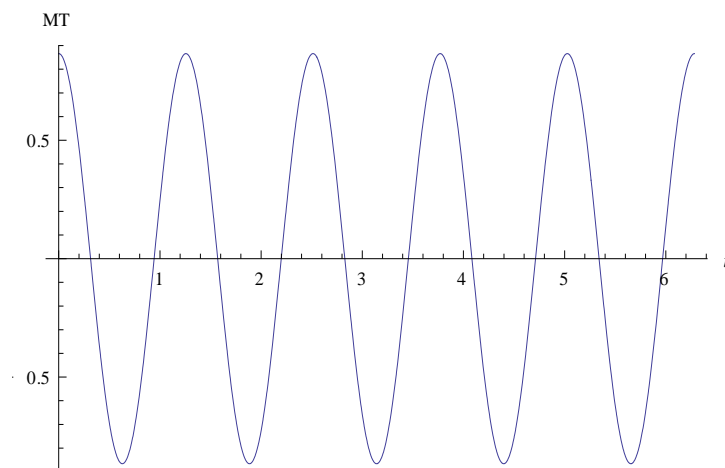
ή

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} a_t E T_0 \left(\frac{2z}{h} \right) \left[\frac{x(a-x)y(b-y)}{a^2 b^2} \right] e^{i\omega t} z dz$$

ή

$$M_T = M_T(x, y) = \frac{a_t E T_0 h^2}{6} \left[\frac{x(a-x)y(b-y)}{a^2 b^2} \right] e^{i\omega t} \quad (3.2.16)$$

Η γραφικές παραστάσεις της θερμικής ροπής κάμψεως ως συνάρτηση του χρόνου για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα διαστάσεων $a=3m$ και $b=3m$ και $a=5m$ και $b=7m$ αντιστοίχως, για πλάκες από σκυρόδεμα με χαρακτηριστικά $E=21000MPa, h=0.20m, \nu=0.30, \rho=2.50 \frac{tn}{m^3}, a_t=11*10^{-6} / ^\circ C$, φαίνεται στο Σχήμα 3.2.4.



Σχήμα 3.2.4 : Μεταβολή της θερμικής ροπής κάμψεως συναρτήσει του χρόνου

Οι σχέσεις (3.1.15) λόγω των (3.1.12),(3.1.13),(3.1.14) τροποποιούνται όπως παρακάτω:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz \right] - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ea_i(\Delta T)}{(1-\nu)} z dz$$

ή

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{Ez^2}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz \right] - \frac{M_T}{(1-\nu)}$$

ή

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \quad (3.2.17)$$

ομοίως η ροπή κάμψεως κατά τον άξονα y θα δίδεται από τη σχέση:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{M_T}{(1-\nu)} \quad (3.2.18)$$

ενώ η ροπή συστροφής M_{xy} εκφράζεται μέσω της σχέσεως:

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.19)$$

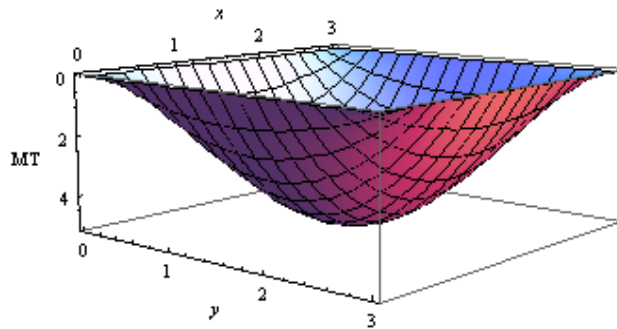
Αντίστοιχα εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων κατά τον άξονα z και μηδενισμού ροπών κατά τους άξονες x, y προκύπτουν οι γνωστές για τις τέμνουσες δυνάμεις Q_x και Q_y σχέσεις ήτοι:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{32a_i E T_0 h^2 e^{i\omega t}}{3\pi^5 (1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^3} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.20)$$

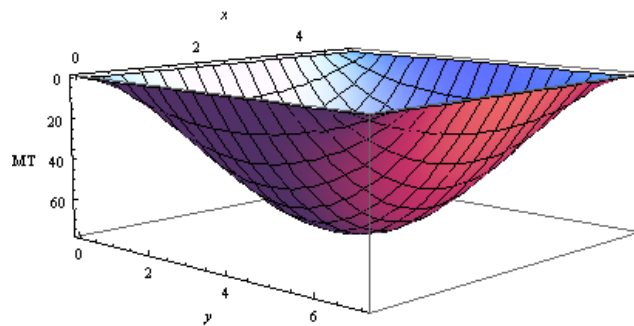
και

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{32a_i E T_0 h^2 e^{i\omega t}}{3\pi^5 (1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.21)$$

Η χωρική μεταβολή της θερμικής ροπής κάμψεως για διάφορες τιμές των μηκών των ακμών της πλάκας παρίσταται γραφικά στα παρακάτω Σχήματα 3.2.5 και 3.2.6, όπου στο γράφημα 3.2.5 εμφανίζεται η μεταβολή αυτής στο εσωτερικό τετραγωνικής πλάκας διαστάσεων $a = 3m$ και $b = 3m$ και ορθογωνικής διαστάσεων $a = 5m$ και $b = 7m$ αντιστοίχως.



Σχήμα 3.2.5: Χωρική κατανομή της θερμικής ροπής κάμψεως στο εσωτερικό τετραγωνικής πλάκας διαστάσεων $a = 3m$ και $b = 3m$



Σχήμα 3.2.6: Χωρική κατανομή της θερμικής ροπής κάμψεως στο εσωτερικό τετραγωνικής πλάκας διαστάσεων $a = 5m$ και $b = 7m$

Από τα παραπάνω γραφήματα είναι εμφανής η επίδραση της αυξήσεως των διαστάσεων επί της θερμικής ροπής κάμψεως η οποία κατ'ουσίαν φορτίζει την πλάκα και η οποία επίσης αυξάνεται.

Από την διέπουσα εξίσωση της πλάκας (3.2.2) για την περίπτωση της καθαρής θερμικής φορτίσεως δηλαδή για $p = 0$ έχουμε ότι:

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = -\frac{1}{D(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad (3.2.22)$$

η οποία αποτελεί της διαφορική εξίσωση καμπτόμενης πλάκας υπό την επίδραση μόνο του μη στάσιμου (non stationary) θερμικού πεδίου, σε όρους μετατοπίσεως της μέσης επιφανείας.

Η προηγούμενη εξίσωση (3.2.22) αποτελεί τη διέπουσα διαφορική εξίσωση κινήσεως της καμπτόμενης πλάκας για τη συγκεκριμένη τριδιάστατη θερμική φόρτιση. Όπως φαίνεται από τις προαναφερθείσες σχέσεις, πλην του τασιικού πεδίου, παρόλο που η κατανομή της θερμοκρασίας

είναι τριδιάστατη, εντούτοις λόγω του ορίσματος dz των σχέσεων, αλλά και της κατανομής των τάσεων κατά το πάχος της πλάκας, οι σχέσεις οι οποίες αναφέρονται στα προκύπτοντα εντατικά μεγέθη, όπως επίσης και στη θερμική ροπή κάμψως μετασχηματίζονται σε σχέσεις του επιπέδου.

Είναι προφανές από τη σχέση (3.2.22) το πρόβλημα της δυναμικής αποκρίσεως του στοιχείου της λεπτής ορθογωνικής πλάκας ανάγεται στην επίλυση ενός « ανάλογου » προβλήματος της θεωρίας ελαστικότητας, όπου η διεγείρουσα εξωτερική φόρτιση $p = p(x, y, t)$ αντικαθίσταται από τη φόρτιση $p(x, y, t) = p_0(x, y)e^{i\omega t} = p^*$, η οποία προκύπτει από τη δράση του τελεστή Laplace επί της θερμικής ροπής κάμψως. Επομένως το πρόβλημα το οποίο επιλύεται παρακάτω συντίθεται από τη διέπουσα διαφορική εξίσωση κινήσεως (3.2.22)

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = p^* \quad (3.2.23)$$

όπου $p_0(x, y)e^{i\omega t} = p^*$ με $p_0(x, y) = -\frac{1}{(1-\nu)} \nabla^2 M_T$ και τις αντίστοιχες συνοριακές και αρχικές συνθήκες (3.2.3) και (3.2.4)

- Απλή έδραση στις θέσεις $x=0, a$ με $w|_{x=0, a} = 0$ και $M_x|_{x=0, a} = 0$
- και
- Απλή έδραση στις θέσεις $y=0, b$ με $w|_{y=0, b} = 0$ και $M_y|_{y=0, b} = 0$

$$w(x, y, 0) = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος αρχικών – συνοριακών τιμών ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία.

Κατ' αρχάς επιλύεται το αντίστοιχο πρόβλημα της ελεύθερης καμπτικής ταλαντώσεως της πλάκας, προσδιορίζονται οι φυσικές συχνότητες ή ιδιοσυχνότητες (eigenfrequencies) ω_{mm} αυτής και εν συνεχεία οι σχετιζόμενες με αυτές ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) w_{mm} , οι οποίες καθορίζουν τις κανονικές μορφές ταλαντώσεως (natural or normal modes) της πλάκας. Το σύνολο δε των απείρων φυσικών συχνοτήτων ω_{mm} της υπό εξέταση πλάκας ονομάζεται φάσμα (spectrum) συχνοτήτων.

Επίλυση προβλήματος ελεύθερης καμπτικής ταλαντώσεως της πλάκας

Το αντίστοιχο πρόβλημα της ελεύθερης καμπτικής ταλαντώσεως της πλάκας προκύπτει από την (3.2.23) μηδενίζοντας κάθε είδους φορτίσεως, έτσι προκύπτει η παρακάτω διέπουσα διαφορική εξίσωση της ελεύθερης ταλαντώσεως της

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = 0 \quad (3.2.24)$$

Υποθέτουμε ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση επιδέχεται χωριζόμενη λύση της μορφής:

$$w(x, y, t) = \Gamma e^{i\omega t} w(x, y) \quad (3.2.25)$$

όπου ω η ιδιοσυχνότητα της πλάκας και Γ το πλάτος της ταλαντώσεως αυτής.

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.2.25) στην (3.2.24) προκύπτει ότι:

$$\nabla^4 w(x, y) \Gamma e^{i\omega t} - \frac{\rho h}{D} w(x, y) \omega^2 \Gamma e^{i\omega t} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^4 w(x, y) - \frac{\rho h \omega^2}{D} w(x, y) = 0$$

ή

$$\nabla^4 w(x, y) - k^4 w(x, y) = 0, \quad k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (3.2.26)$$

όπου $k = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}}$ η παράμετρος σχήματος.

Ουσιαστικά με τον χωρισμό των μεταβλητών από την εξίσωση (3.2.25) η εξίσωση της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας μετετρέπη σε εξίσωση μόνο του χωρικού μέρους αυτής. Η ποσότητα $w(x, y)$ στη σχέση (3.2.26) αποτελεί τη *συνάρτηση σχήματος* της πλάκας και είναι αδιάστατη.

Εφαρμόζοντας τη λύση Navier θεωρείται ότι η συνάρτηση σχήματος αναπτύσσεται κατά τα γνωστά σε διπλή σειρά Fourier ως ακολούθως:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση στην (3.2.26) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - k^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0 \\
& \quad \dot{\eta} \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0
\end{aligned}$$

Για να ισχύει για κάθε x, y η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} = 0$$

ή

$$\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\rho h \omega_{mn}^2}{D} = 0$$

ή

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.2.27)$$

Η παραπάνω σχέση δίνει τις φυσικές συχνότητες της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας συναρτήσει των m και n . Στην περίπτωση κατά την οποία $m = n = 1$ προκύπτει ότι:

$$\omega_{11} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

η οποία ονομάζεται **θεμελιώδης φυσική συχνότητα** ή **θεμελιώδης ιδιοτιμή (fundamental eigenvalue)** και αποτελεί τη μικρότερη τιμή από όλες τις τιμές των φυσικών συχνοτήτων. Ενώ η αντίστοιχη ιδιομορφή καλείται ως **θεμελιώδης ιδιομορφή (fundamental eigenfunction)**. Από τη σχέση (3.2.27) είναι εμφανής η εξάρτηση των φυσικών συχνοτήτων τόσο από τα γεωμετρικά αλλά και από τα μηχανικά χαρακτηριστικά της πλάκας όχι όμως και από την θερμοκρασία αναφοράς.

Επομένως η κατακόρυφη παραμόρφωση, η οποία περιγράφει τις μορφές της ελαστικής επιφάνειας για την ελεύθερη ταλάντωση της πλάκας συναρτήσει των φυσικών συχνοτήτων της ω_{mn} θα είναι:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \Gamma_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ή

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.28)$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι οι ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας οι οποίες αντιστοιχούν στις φυσικές συχνότητες ω_{mn} είναι της μορφής:

$$w_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.29)$$

Οι μορφές σχήματος της ελεύθερης ταλαντώσεως για τετραγωνική πλάκα και για διάφορα ζεύγη τιμών (m, n) φαίνονται στα Σχήματα 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10.

Επίλυση προβλήματος εξαναγκασμένης κινήσεως της πλάκας

Στη « φόρτιση » $p(x, y, t) = p_0(x, y)e^{i\omega_0 t} = p^*$, όπου $p_0(x, y) = -\frac{1}{(1-\nu)} \nabla^2 M_T$ η θερμική ροπή κάμφεως μπορεί να αναπτυχθεί σε μία διπλή σειρά Fourier συμφώνως με τη μέθοδο επιλύσεως κατά Navier, δυνάμει των ιδιοσυναρτήσεων της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας, όπως παρακάτω:

$$M_T = M_T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{T_{mn}}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.30)$$

Συνεπώς αναζητείται για την κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας, δεδομένου ότι εμφανίζεται ένα διαρμονικό πρόβλημα ιδιοτιμών, λύση της μορφής διπλής σειράς Fourier όπως παρακάτω:

$$w = w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}(t) w_{mn}(x, y) \quad \text{ή} \quad w = w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.31)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.2.30) και (3.2.31) στην (3.2.22) αυτή λαμβάνει τη μορφή:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}(t) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) =$$

$$= - \frac{1}{D(1-\nu)} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) M_{T_{mn}}(t) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) M_{T_{mn}}(t) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right]$$

ή

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_{mn}(t) \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\rho h}{D} \frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) =$$

$$= \frac{1}{D(1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 M_{T_{mn}}(t) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

ή

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_{mn}(t) \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\rho h}{D} \frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) +$$

$$- \frac{1}{D(1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 M_{T_{mn}}(t) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = 0$$

ή

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_{mn}(t) \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\rho h}{D} \frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} - \frac{1}{D(1-\nu)} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 M_{T_{mn}}(t) \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = 0$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση $\forall x, y$ θα πρέπει:

$$F_{mn}(t) \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\rho h}{D} \frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} - \frac{1}{D(1-\nu)} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 M_{T_{mn}}(t) = 0$$

ή

$$\frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} + F_{mn}(t) \omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h(1-\nu)} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 M_{T_{mn}}(t) \quad (3.2.32)$$

Όπου οι συντελεστές $M_{T_{mn}}(t)$ του αναπτύγματος της εξωτερικής φορτίσεως προσδιορίζονται από τη σχέση

$$M_{T_{mn}}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b M_T(x, y, t) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy$$

ή

$$M_{T_{mn}}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{a_i ET_0 h^2}{6a^2 b^2} [x(a-x)y(b-y)] e^{i\omega_y t} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

ή

$$M_{T_{mn}}(t) = \frac{4}{ab} \frac{a_i ET_0 h^2}{6a^2 b^2} e^{i\omega_y t} \int_0^a \int_0^b [x(a-x)y(b-y)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

ή

$$M_{T_{mn}}(t) = \frac{16a_i ET_0 h^2 e^{i\omega_y t}}{6m^3 n^3 \pi^6} (1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi))$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$M_{T_{mn}}(t) = \begin{cases} 0, m, n = 2k \\ \frac{32a_i ET_0 h^2 e^{i\omega_y t}}{3m^3 n^3 \pi^6}, m, n = 2k + 1 \end{cases}$$

Επειδή όμως η διεγείρουσα φόρτιση είναι διαφορετική από το μηδέν προκύπτει ότι:

$$M_{T_{mn}}(t) = \frac{32a_i ET_0 h^2 e^{i\omega_y t}}{3m^3 n^3 \pi^6} \text{ με } m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Επομένως η θερμική ροπή κάμψης αναπτύσσεται σε διπλή σειρά Fourier βάσει της σχέσεως:

$$M_T = \frac{32a_i ET_0 h^2 e^{i\omega_y t}}{3\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Συνεπώς η σχέση (3.2.32) με βάση την παραπάνω τιμή για τους συντελεστές $M_{T_{mn}}(t)$ λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} + F_{mn}(t)\omega_{mn}^2 = \frac{32a_i ET_0 h^2 e^{i\omega_y t}}{3\rho h a^2 b^2 \pi^4 (1-\nu)} \left(\frac{b^2}{mn^3} + \frac{a^2}{nm^3} \right) e^{i\omega_y t}$$

ή

$$\frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} + F_{mn}(t)\omega_{mn}^2 = \frac{32a_i ET_0 h^2}{3\rho h \pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) e^{i\omega_y t}$$

$$\frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2} + F_{mn}(t)\omega_{mn}^2 = F_{0(mn)} e^{i\omega_y t} \quad (3.2.33)$$

$$\text{όπου } F_{0(mn)} = \frac{32a_i ET_0 h}{3\rho \pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2)$$

Η (3.2.33) αποτελεί μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Επιπλέον δε για την παραπάνω διαφορική εξίσωση ισχύουν και οι αρχικές συνθήκες:

$$w(x, y, 0) = 0 \text{ και } \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Για την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος αρχικών τιμών εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στην (3.2.33) ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt, t \geq 0$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{F_{mn}(t)\} \omega_{mn}^2 = \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} \quad (3.2.34)$$

Από πίνακες για τους μετασχηματισμούς Laplace διαφόρων συναρτήσεων θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 F_{mn}(t)}{dt^2}\right\} = s^2 f_{mn}(s) - sF_{mn}(0) - F'_{mn}(0) \quad , \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dF_{mn}(t)}{dt}\right\} = sf(s) - F_{mn}(0) \quad ,$$

$$\mathcal{L}\{F_{mn}(t)\} = f_{mn}(s) \text{ και } \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (3.2.35)$$

όπου οι τιμές των αρχικών τιμών $F_{mn}(0)$ και $F'_{mn}(0)$ στη θέση $t=0$ προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες

$$w(x, y, 0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}(0) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$

και

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{dF_{mn}(t)}{dt} \right|_{t=0} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$

άρα

$$F_{mn}(0) = 0 \text{ και } \left. \frac{dF_{mn}(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.2.36)$$

Η (3.2.34) λόγω των (3.2.35) και (3.2.36) λαμβάνει τη μορφή:

$$s^2 f_{mn}(s) - sF_{mn}(0) - F'_{mn}(0) + (sf(s) - F_{mn}(0))\omega_{mn}^2 = \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

ή

$$s^2 f_{mn}(s) + \omega_{mn}^2 f_{mn}(s) = \frac{F_{0(mn)}s}{s^2 + \omega_0^2}$$

ή

$$f_{mn}(s) = \frac{F_{0(mn)}s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega_{mn}^2)} = T(s) \quad (3.2.37)$$

όπου $f_{mn}(s)$ η μετασχηματισμένη κατά Laplace της $F_{mn}(t)$ και

$$F_{0(mn)} = \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την $F_{mn}(t)$ θα προβούμε στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace επί της $f_{mn}(s)$ από τη σχέση (3.2.37). Προς τούτο, επειδή η $T(s)$ δίδεται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα της συνελίξεως $(h * g)(t)$ δύο συναρτήσεων.

Συμφώνως με την προαναφερθείσα ιδιότητα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace επί της (3.2.37) θα δίδεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = (h * g)(t)$$

όπου η συνέλιξη ορίζεται από τη σχέση:

$$(h * g)(t) = \int_0^t h(u)g(t-u)du, t \geq 0$$

με $H(s) = \frac{F_{0(mn)}}{s^2 + \omega_0^2}$, $G(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_{mn}^2}$ και $h(t), g(t)$ οι αντίστοιχες τους αντεστραμμένες κατά Laplace.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\{T(s)\} = (h * g)(t)$$

επίσης γνωρίζοντας ότι:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right\} = \frac{F_{0(mn)}}{s^2 + \omega_0^2} \text{ και } \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_{0(mn)}s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega_{mn}^2)} \right\} &= (h * g)(t) \\ \dot{\eta} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_{0(mn)}s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega_{mn}^2)} \right\} &= \int_0^t h(u)g(t-u)du \\ \dot{\eta} \\ L^{-1} \{T(s)\} &= \int_0^t \frac{F_{0(mn)} \sin(\omega_0 u)}{\omega_0} \cos(\omega_{mn}(t-u)) du = \frac{F_{0(mn)}}{\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0 u) \cos(\omega_{mn}(t-u)) du = \\ &= \frac{F_{0(mn)}}{\omega_0} \int_0^t \frac{1}{2} [\sin(\omega_0 u - \omega_{mn}(t-u)) + \sin(\omega_0 u + \omega_{mn}(t-u))] du = \\ &= \frac{F_{0(mn)}}{2\omega_0} \int_0^t [\sin((\omega_0 + \omega_{mn})u - \omega_{mn}t) + \sin((\omega_0 - \omega_{mn})u + \omega_{mn}t)] du = \\ &= \frac{F_{0(mn)}}{2\omega_0} \int_0^t \left[-\frac{1}{\omega_0 + \omega_{mn}} \cos((\omega_0 + \omega_{mn})u - \omega_{mn}t) - \frac{1}{\omega_0 - \omega_{mn}} \cos((\omega_0 - \omega_{mn})u + \omega_{mn}t) \right] du = \\ &= \frac{F_{0(mn)}}{2\omega_0} \left[-\frac{1}{\omega_0 + \omega_{mn}} \cos((\omega_0 + \omega_{mn})u - \omega_{mn}t) - \frac{1}{\omega_0 - \omega_{mn}} \cos((\omega_0 - \omega_{mn})u + \omega_{mn}t) \right]_0^t = \\ &= \frac{F_{0(mn)}}{2\omega_0} \left[-\frac{1}{\omega_0 + \omega_{mn}} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega_0 - \omega_{mn}} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0 + \omega_{mn}} \cos(\omega_{mn} t) + \frac{1}{\omega_0 - \omega_{mn}} \cos(\omega_{mn} t) \right] = \\ &= \frac{F_{0(mn)}}{2\omega_0} \left[-\frac{2\omega_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} + \frac{2\omega_0 \cos(\omega_{mn} t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] = F_{0(mn)} \left[\frac{\cos(\omega_{mn} t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} L^{-1} \{T(s)\} &= F_{mn}(t) = F_{0(mn)} \left[\frac{\cos(\omega_{mn} t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] \\ \dot{\eta} \\ F_{mn}(t) &= \frac{32a_t E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \left[\frac{\cos(\omega_{mn} t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] \end{aligned}$$

Επομένως η προς αναζήτηση συνάρτηση $F_{mn}(t)$ θα δίδεται από τη σχέση:

$$F_{mn}(t) = \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu)m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \left[\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_{mn} t)}{\omega_{mn}^2 - \omega_0^2} \right] \quad (3.2.38)$$

ή

$$F_{mn}(t) = W_{mn} [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_{mn} t)]$$

$$\text{όπου } W_{mn} = \frac{P_{0(mn)}}{\rho h (\omega_{mn}^2 - \omega_0^2)} \quad \text{και} \quad P_{0(mn)} = \frac{32a_i E T_0 h^2 (n^2 a^2 + m^2 b^2)}{3\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu)m^3 n^3}$$

Η συνάρτηση $F_{mn}(t)$ αντιστοιχεί στο χρονικό μέρος της κατακόρυφης παραμορφώσεως της πλάκας και το οποίο ισοδυναμεί με μία ταλάντωση.

Στην περίπτωση κατά την οποία οι χρονοεξαζωμένες μεταβολές της διεγέρσεως είναι πολύ αργές, η κυκλική συχνότητα της διεγείρουσας φορτίσεως ω_0 είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ω_{mn} και οι προκύπτουσες μετατοπίσεις θα αντιστοιχούν σε εκείνες οι οποίες προκύπτουν εξαιτίας της στατικής φορτίσεως, συνεπώς για την περίπτωση της στατικής φορτίσεως η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή:

$$W_{mn}^* = \frac{P_{0(mn)}}{\rho h \omega_{mn}^2}$$

Επομένως ο **παράγων δυναμικής φορτίσεως (dynamic load factor DLF)** για την περίπτωση της απλά στηριζόμενης πλάκας, οποίος εκφράζει το λόγο της μέγιστης δυναμικής προς την αντίστοιχη στατική παραμόρφωση, θα είναι :

$$DLF = \frac{W_{mn}}{W_{mn}^*} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_{mn}} \right)^2}$$

Τελικά η κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας συναρτήσει των φυσικών συχνοτήτων ω_{mn} της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας, θα δίδεται από τη σχέση (3.2.31) η οποία λόγω της (3.2.38) λαμβάνει τη μορφή:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu)m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \left[\frac{\cos(\omega_{mn} t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.39-a)$$

ή

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} [\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.39-b)$$

$$\text{με } \omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Από την εξίσωση (3.2.39) η μορφή της καμπτικής ταλαντώσεως της πλάκας αποτελεί ένα ημιτονοειδές κύμα κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x, y . Επιπλέον από τα παραπάνω είναι προφανές ότι οι φυσικές συχνότητες της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας εξαρτώνται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αλλά και από τις μηχανικές ιδιότητες αυτής, χωρίς ωστόσο να σχετίζονται με τη θερμοκρασία αναφοράς T_0 , η οποία επηρεάζει όμως το πλάτος της ως άνω καμπτικής ταλαντώσεως, εξαιτίας της διεγείρουσας φορτίσεως.

Για $m=n=1$ προκύπτει ότι $\omega_{11} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, η οποία αποτελεί τη μικρότερη τιμή των ιδιοσυχνοτήτων της πλάκας και καλείται ως θεμελιώδης φυσική συχνότητα και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση – ιδιομορφή ως θεμελιώδης.

Για $m, n > 1$ προκύπτουν διαφορετικές τιμές για τις φυσικές συχνότητες οι οποίες ονομάζονται συχνότητες ανώτερων αρμονικών (frequencies of higher harmonics). Ο γραμμικός συνδυασμός όλων των μορφών σχήματος δίνει τη παραμορφωμένη κατάσταση της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας, ουσιαστικά την απόκριση της πλάκας στην εφαρμοζόμενη δυναμική φόρτιση.

Στη σχέση (3.2.39-a) ο όρος

$$w_{mn}(x, y, t) = \frac{32a_i E T_0 h^2}{3\rho h \pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \left[\frac{\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

εντός του αθροίσματος αντιστοιχεί σε μία μορφή ταλαντώσεως. Η προαναφερθείσα μορφή ταλαντώσεως συναρτήσε του χρόνου φαίνεται στα Σχήματα 3.2.11 και 3.2.12 για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα αντίστοιχα με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$w_{mn}(t) = \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho \pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \left[\frac{1}{\omega_{mn}^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0t) - \frac{1}{\omega_{mn}^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_{mn}t) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ή

$$w_{mn}(x, y, t) = \frac{F_{0(mn)}}{\omega_{mn}^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \frac{F_{0(mn)}}{\omega_{mn}^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_{mn} t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.40)$$

Η μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας η οποία αποτελεί και το πλάτος της εξαναγκασμένης κινήσεως, εμφανίζεται στο κέντρο $(x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ αυτής και μεταβάλλεται περιοδικώς με το χρόνο μέσω της σχέσεως $[\cos(\omega_{mn} t) - \cos(\omega_0 t)]$. Το πλάτος της μορφής της ταλαντώσεως δίδεται από τη σχέση:

$$\frac{F_{0(mn)}}{\omega_{mn}^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ή

$$\frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu)(\omega_{mn}^2 - \omega_0^2)} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.40-a)$$

Η σχέση (3.2.40-a) η οποία δίδει το πλάτος της μορφής ταλαντώσεως της πλάκας δείχνει ότι αυτό δεν εξαρτάται από τον χρόνο, παρά μόνο από τη θέση και έχει διαφορετική τιμή για κάθε σημείο της αναφερόμενης πλάκας.

Η σχέση (3.2.39-a) κάνοντας χρήση της σχέσεως μετατροπής αθροίσματος – διαφοράς $\cos \theta - \cos \varphi = 2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi - \theta}{2}\right)$ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λαμβάνει τη μορφή:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \frac{2}{(\omega_0 + \omega_{mn})(\omega_0 - \omega_{mn})} \left[\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_{mn}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_{mn}}{2} t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ή

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_{0(mn)}}{(\omega_0 + \omega_{mn})(\omega_0 - \omega_{mn})} \left[\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_{mn}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_{mn}}{2} t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.41)$$

Στην περίπτωση κατά την οποίαν οι φυσικές συχνότητες της ταλαντώσεως είναι ίσες με τη συχνότητα της διεγείρουσας φορτίσεως $\omega_{mn} \cong \omega_0$ επέρχεται το φαινόμενο του συντονισμού. Έτσι η παραπάνω σχέση (3.2.41) λόγω της απροσδιοριστίας $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ η οποία εμφανίζεται στο άθροισμα και

κάνοντας χρήση της ιδιότητας των ορίων $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, τροποποιείται λαμβάνοντας τη μορφή:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{0(mn)} t}{(\omega_0 + \omega_{mn}) \frac{(\omega_0 - \omega_{mn}) t}{2}} \left[\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_{mn}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_{mn}}{2} t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ή

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \frac{t}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.42)$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως για κάθε μία τιμή της φυσικής συχνότητας ω_{mn} προκύπτει η αντίστοιχη μορφή ταλαντώσεως (vibration mode) της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας w_{mn} η οποία για την περίπτωση του συντονισμού δίδεται από την παρακάτω σχέση:

$$w_{mn} = \frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \frac{t}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.2.43)$$

Η παραπάνω σχέση (3.2.43) δίδει τη μορφή της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας για κάθε μία τιμή των ιδιοσυχνοτήτων της. Συνεπώς εάν κάποια από τις $\omega_{mn} = \omega_0$ η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μία εξαναγκασμένη ταλάντωση της οποίας το πλάτος μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο και μάλιστα αυξανόμενο μέχρι απειρισμού του για $t \rightarrow \infty$. Ουσιαστικά η ποσότητα $\left(\frac{32a_i E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu) m^3 n^3} (n^2 a^2 + m^2 b^2) t \right)$ στη σχέση (3.2.43) αποτελεί την περιβάλλουσα εντός της οποίας μεταβάλλεται ο όρος $\sin(\omega_{mn} t)$, ο οποίος και αντιστοιχεί στην ταλάντωση της πλάκας. Η μορφή της ταλαντώσεως για την περίπτωση του συντονισμού για ορθογωνική πλάκα με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$ και για $(m, n) = (1, 1)$ φαίνεται στο Σχήμα 3.2.13.

Επιπροσθέτως από την εξίσωση (3.2.40) ο πρώτος όρος ο οποίος εμπεριέχει και τη διάσταση του χρόνου μέσω του $\cos(\omega_0 t)$ αντιστοιχεί στη μερική λύση της (3.2.33). Η προαναφερθείσα εξίσωση αποτελείται από δύο διακριτούς όρους: τον όρο $\cos(\omega_0 t)$ ο οποίος αντιστοιχεί στην εξαναγκασμένη κίνηση εξαιτίας της διεγείρουσας φορτίσεως με συχνότητα ω_0 και τον όρο $\cos(\omega_{mn} t)$ ο οποίος αντιστοιχεί στην κίνηση της πλάκας με συχνότητα ω_{mn} η οποία αντιστοιχεί στη φυσική συχνότητα του συστήματος.

Ο πρώτος όρος $\cos(\omega_0 t)$ εκφράζει την **εξαναγκασμένη κίνηση ή ταλάντωση σταθεράς καταστάσεως (steady state vibration)** και ονομάζεται κατ'αυτόν τον τρόπο, επειδή η διεγείρουσα φόρτιση είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών. Ο δεύτερος όρος $\cos(\omega_{mn} t)$

εικφράζει την **μεταβατική ταλάντωση (transient vibration)** και ο οποίος σχετίζεται με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, ήτοι την αρχική κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας αλλά και την ταχύτητα αυτής και εμφανίζεται, όπως φαίνεται και παραπάνω, ακόμη και όταν οι αρχικές συνθήκες είναι ομογενείς δηλαδή ακόμη και όταν $w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0$. Ο τελευταίος χαρακτηρισμός ως μεταβατικής ταλαντώσεως προκύπτει από το γεγονός ότι η συγκεκριμένη κίνηση της πλάκας κατά την ελεύθερη ταλάντωσή της φθίνει με την πάροδο του χρόνου εξαιτίας των δυνάμεων αποσβέσεως οι οποίες εμφανίζονται σε κάθε πραγματικό σύστημα και οι οποίες ανθίστανται στην κίνηση, όπως η δύναμη τριβής...και μέσω των οποίων διαχέεται η ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος προς το περιβάλλον με αποτέλεσμα η πλάκα να ταλαντώνεται υπό την συχνότητα της διεγείρουσας φορτίσεως.

Αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη

Από τις σχέσεις (3.2.17), (3.2.18), (3.2.19) οι ροπές κάμψεις οι οποίες προκύπτουν έχουν τη μορφή :

$$M_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] - \frac{M_{T_{mn}}(t)}{1-\nu} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{mn} [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] - \frac{M_{T_{mn}}(t)}{1-\nu} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$M_{xy} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

όπου $A_{mn} = DW_{mn}\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right)$, $B_{mn} = DW_{mn}\pi^2 \left(\nu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$ και $D_{mn} = D(1-\nu)W_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab}$

Προκύπτων τασικό πεδίο

Το θερμοκρασιακό πεδίο αναπτύσσεται συμφώνως με τη μέθοδο Navier σε διπλή σειρά Fourier όπως παρακάτω :

$$\Delta T(x, y, z, t) = T_0 \left(\frac{2z}{h} \right) e^{i\omega_0 t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^6 m^3 n^3} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Οπότε το τασιικό πεδίο προκύπτει από τις σχέσεις (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14) ως ακολούθως :

$$\sigma_{xx}(x, y, z, t) = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{E}{1-\nu^2} W_{mn} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] + \frac{128a_i E T_0}{\pi^6 (1-\nu)} \frac{1}{m^3 n^3} \left(\frac{1}{h} \right) e^{i\omega_0 t} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z, t) = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{E}{1-\nu^2} W_{mn} \pi^2 \left(\nu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] + \frac{128a_i E T_0}{\pi^6 (1-\nu)} \frac{1}{m^3 n^3} \left(\frac{1}{h} \right) e^{i\omega_0 t} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\sigma_{xy}(x, y, z, t) = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E}{1+\nu} W_{mn} [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] \frac{mn\pi^2}{ab} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

ή

$$\sigma_{xx}(x, y, z, t) = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z, t) = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\sigma_{xy}(x, y, z, t) = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\text{όπου } E_{mn}(t) = \left[\frac{E}{1-\nu^2} W_{mn} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] + \frac{128a_i E T_0}{\pi^6 (1-\nu)} \frac{1}{m^3 n^3} \left(\frac{1}{h} \right) e^{i\omega_0 t} \right]$$

$$K_{mn}(t) = \left[\frac{E}{1-\nu^2} W_{mn} \pi^2 \left(\nu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))] + \frac{128a_i E T_0}{\pi^6 (1-\nu)} \frac{1}{m^3 n^3} \left(\frac{1}{h} \right) e^{i\omega_0 t} \right]$$

$$Q_{mn}(t) = \frac{E}{1+\nu} W_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab} [(\cos(\omega_{mn}t) - \cos(\omega_0t))]$$

Όπως είναι προφανές από τις παραπάνω σχέσεις οι μέγιστες τάσεις, ορθές και διατμητικές, εμφανίζονται στις άνω και κάτω έδρες της πλάκας για $z = \pm \frac{h}{2}$

Συμπερασματικά όπως και στην περίπτωση του στατικού προβλήματος, η εφαρμογή του δυναμικού φορτίου αντιμετωπίζεται ως υπέρθεση δύο διαφορετικών καταστάσεων, της εξωτερικής επιφανειακής φορτίσεως και της θερμικής, η οποία εμφανίζεται μέσω της δράσεως του τελεστή Laplace επί της θερμικής ροπής κάμψεως. Στην περίπτωση της καθαρής θερμικής φορτίσεως όπου $p=0$, η πλάκα ευρίσκεται εις την επιρροή της θερμικής φορτίσεως p^* και η οποία αντιμετωπίζεται ως μία εξωτερική επιφανειακή δυναμική φόρτιση.

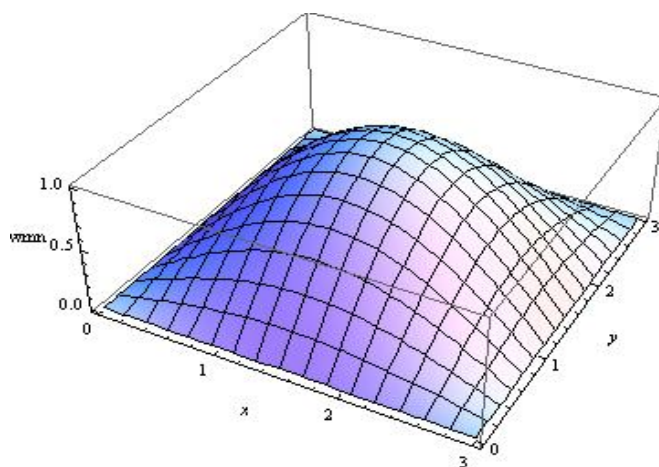
Ουσιαστικά εμφανίζεται μία **αναλογία** ανάμεσα στο ελαστικό και θερμοελαστικό πρόβλημα θεωρώντας αυτή ως μία εξωτερική επιφανειακή δράση. Για την περίπτωση της δυναμικής περιπτώσεως η επίλυση βασίζεται στη μέθοδο Navier της κλασσικής θεωρίας πλακών με

τη διαφορά ότι το εφαρμοζόμενο φορτίο εμφανίζεται υπό τη μορφή της θερμικής ροπής κάμψης χωροχρονικά μεταβαλλόμενης. Οι δε ιδιομορφές οι οποίες προκύπτουν εξαιτίας της ως άνω φορτίσεως, έχουν τη μορφή κύματος ως προς x και y . Για κάθε μία τιμή της φυσικής συχνότητας της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας, προκύπτει τόσο η αντίστοιχη μορφή σχήματος (mode shape), η οποία εμπεριέχοντας και το χρονικό μέρος αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση, της οποίας το πλάτος εξαρτάται από τη θερμοκρασία αναφοράς.

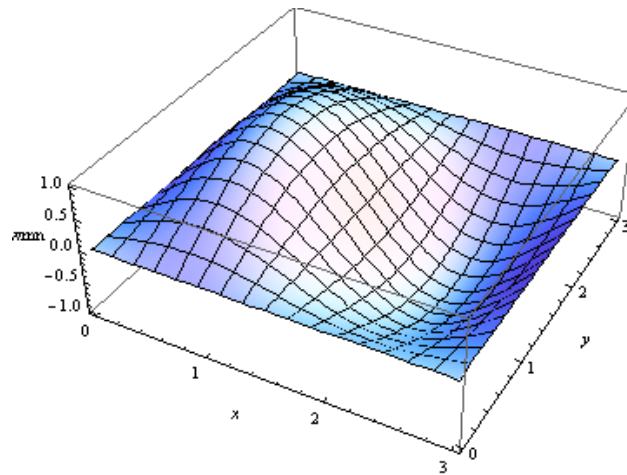
Η υπέρθεση των απείρων αυτών μορφών ταλαντώσεως της πλάκας δίδει την παραμορφωμένη επιφάνεια αυτής. Επίσης η μέγιστη τιμή της κατακόρυφης παραμορφώσεως της πλάκας εμφανίζεται στο κέντρο αυτής, μεταβάλλεται δε χρονικά. Τέλος στην περίπτωση κατά την οποία οποιαδήποτε από τις φυσικές συχνότητες της ταλαντώσεως γίνει ίση με την κυκλική συχνότητα της φορτίσεως επέρχεται το φαινόμενο του συντονισμού κατά το οποίο το πλάτος της ταλαντώσεως αυξάνεται έως απειρισμού του.

Στην πραγματικότητα το πρόβλημα τυγχάνει αντίστοιχης αντιμετώπισεως, όπως και στην περίπτωση της κλασικής δυναμικής αναλύσεως πλακών, λαμβάνοντας την πλάκα ως ένα μονοβάθμιο σύστημα, έχοντας μόνο έναν βαθμό ελευθερίας, ήτοι την κατακόρυφη παραμόρφωση αυτής, κάνοντας λόγο πλέον για **θερμοελαστικές ταλαντώσεις**, αφού η διεγείρουσα φόρτιση είναι η θερμική ροπή κάμψης.

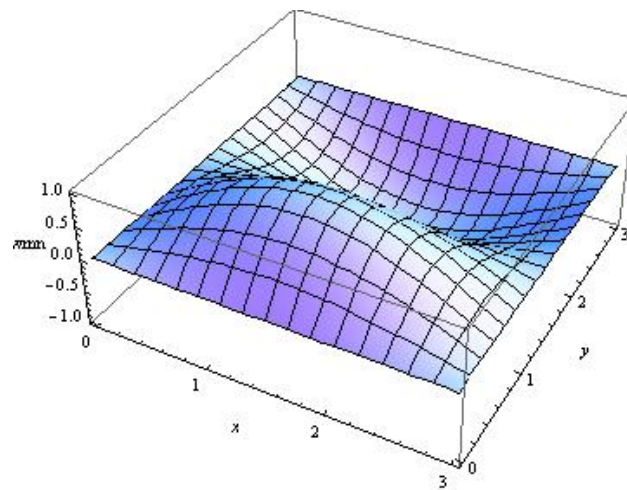
Στα ακόλουθα γραφήματα παριστάνονται οι ιδιομορφές της ελεύθερης ταλαντώσεως για τετραγωνική πλάκα καθώς και η χρονική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα, όπως επίσης και η χρονική μεταβολή για την περίπτωση του συντονισμού.



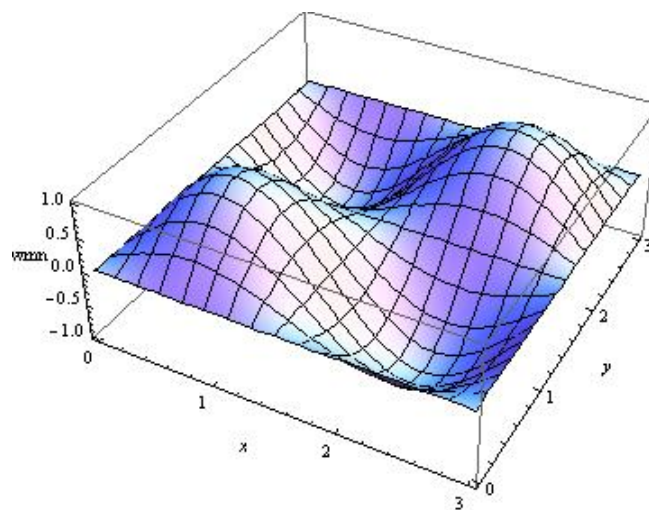
Σχήμα 3.2.7 : Θεμελιώδης ιδιομορφή της ελεύθερης ταλαντώσεως πλάκας για $(m, n) = (1, 1)$



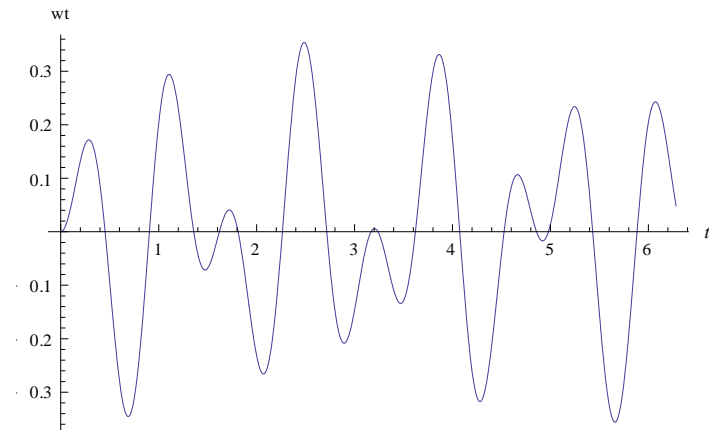
Σχήμα 3.2.8 : Ιδιομορφή της ελεύθερης ταλαντώσεως πλάκας για $(m, n) = (2, 1)$



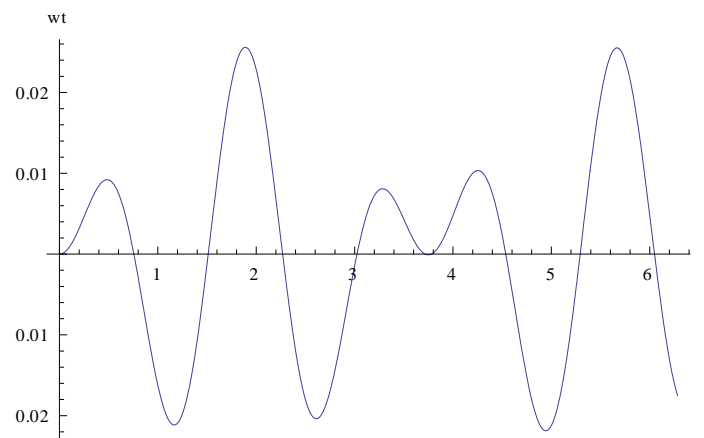
Σχήμα 3.2.9 : Ιδιομορφή της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας για $(m, n) = (1, 2)$



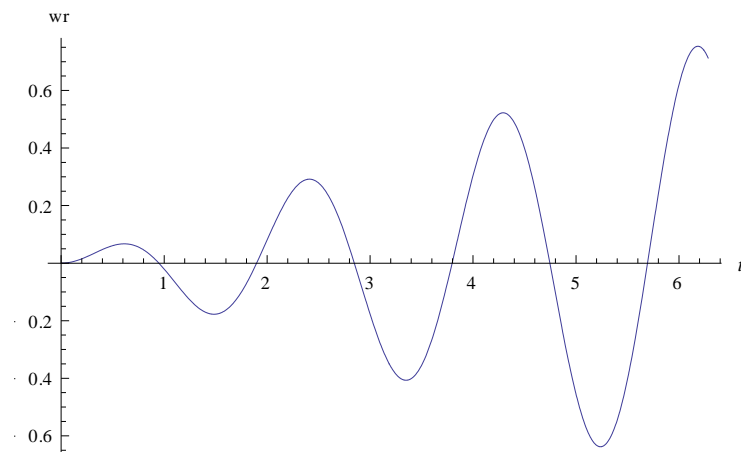
Σχήμα 3.2.10 : Ιδιομορφή της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας για $(m, n) = (2, 2)$



Σχήμα 3.2.11: Χρονική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας τετραγωνικής πλάκας για $(m, n) = (1, 1)$



Σχήμα 3.2.12 : Χρονική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας ορθογωνικής πλάκας με λόγο πλευρών $(b / a) = 1.75$ για $(m, n) = (1, 1)$



Σχήμα 3.2.13 : Χρονική μεταβολή για την περίπτωση του συντονισμού για ορθογωνική πλάκα με λόγο πλευρών $(b / a) = 1.75$ για $(m, n) = (1, 1)$

3.3 Συμπεράσματα – Μελλοντικές προοπτικές

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας ήταν η μελέτη της θερμοελαστικής κάμψεως ορθογωνικών πλακών. Εξήχθησαν οι σχέσεις για την κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας και των αναπτυσσόμενων εντατικών μεγεθών υπό την επίδραση αυθαίρετης στατικής και δυναμικής περιοδικής θερμικής φορτίσεως μέσω της λύσεως Navier της κλασικής θεωρίας πλακών και προέκυψαν τα ακόλουθα για την περίπτωση της ασύζευκτης Γραμμικής Θεωρίας της Θερμοελαστικότητας:

i) Το **πρώτο και γενικότερο συμπέρασμα** το οποίο προκύπτει και επί του οποίου έγκειται η πρωτοτυπία της παρούσας εργασίας είναι το γεγονός, ότι το τριδιάστατο πρόβλημα της κλασικής θεωρίας πλακών από ιδανικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο υλικό, στα πλαίσια της Γραμμικής Θεωρίας της Θερμοελαστικότητας, υπό τις διατυπωθείσες **υποθέσεις Kirchhoff** (Κεφ. 2, § 2.1) μεταπίπτει σε πρόβλημα της επίπεδης Ελαστικότητας αλλά και της Θερμοελαστικότητας, προσδιορίζοντας με τη βοήθεια των τροποποιημένων σχέσεων του Hooke, των εξισώσεων ισορροπίας και κινήσεως, των αναπτυσσόμενων ροπών κάμψεως και τεμνουσών δυνάμεων, αλλά και με την προκύπτουσα διέπουσα διαφορική εξίσωση της, την κατακόρυφη παραμόρφωση του μέσου επιπέδου της πλάκας η οποία ουσιαστικά αποδίδει τη συνάρτηση της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας σε δύο διαστάσεις και μέσω αυτής τις συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων και των τάσεων σε κάθε σημείο της πλάκας.

ii) Επιπλέον ένα **δεύτερο συμπέρασμα** το οποίο συνάγεται εκ της ας άνω εργασίας, είναι ότι η απόκριση της πλάκας στην εν λόγω στατική και δυναμική φόρτιση, λαμβάνεται ως υπέρθεση δύο διαφορετικών καταστάσεων, της εξωτερικής επιφανειακής φορτίσεως και της θερμικής, η οποία εμφανίζεται μέσω της δράσεως του τελεστή Laplace επί της αναπτυσσόμενης θερμικής ροπής κάμψεως. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για τις υπόλοιπες ποσότητες οι οποίες προσδιορίζονται στο παραπάνω κείμενο, όπως των στοιχείων του τανυστή των τάσεων και παραμορφώσεων. Ανάλογα τροποποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες (Κεφ. 2, § 2.8). Εμφανίζεται συνεπώς μία αναλογία μεταξύ των δύο καταστάσεων τόσο της ισόθερμης όσο και της θερμοκρασιακής φορτίσεως. Εφαρμόζουμε ουσιαστικά το **ελαστικό ανάλογο** της προκύπτουσας, εξαιτίας της θερμοκρασιακής, φορτίσεως.

iii) Εν συνεχεία το **τρίτο συμπέρασμα** το οποίο εξάγεται αλλά το οποίο αποτελεί και τη μεθοδολογία επί της οποίας στηρίχθηκε και όλη ανάπτυξη της εργασίας, είναι το ότι η εφαρμοζόμενη φόρτιση, στην περίπτωση του θερμοκρασιακού πεδίου, η οποία εμφανίζεται μέσω

της δράσεως του τελεστή Laplace επί της αναπτυσσόμενης θερμικής ροπής κάμφεως αναπτύχθηκε σε διπλή σειρά Fourier, δεδομένης της διαρμονικότητας του προβλήματος.

Η παραπάνω λύση η οποία προτάθηκε από τον Navier, για προβλήματα της κλασικής θεωρίας πλακών στα πλαίσια της Θεωρίας της Ελαστικότητας δίδει την κατακόρυφη παραμόρφωση της πλάκας ως μία συντόμως συγκλίνουσα διπλή ημιτονική σειρά. Η ως άνω μέθοδος ικανοποιεί τόσο τη διέπουσα διαφορική εξίσωση της πλάκας σε όρους κατακόρυφης παραμορφώσεως αυτής, όσο και τις τροποποιούμενες, εξαιτίας του θερμικού πεδίου, συνοριακές συνθήκες.

iv) Πέραν των προαναφερομένων, από το Κεφ. 3 της παρούσης, ως **τέταρτο ειδικό συμπέρασμα**, προκύπτει ότι εξαιτίας της συμμετρίας της φορτίσεως αλλά και της γεωμετρίας της πλάκας, η μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση της, στην περίπτωση της στατικής και δυναμικής φορτίσεως, εμφανίζεται στο κέντρο αυτής και εξαρτάται τόσο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πλάκας όσο και από τη θερμοκρασία αναφοράς στην απαραμόρφωτη κατάσταση και αυξάνεται όσο αυξάνονται οι διαστάσεις της πλάκας αλλά και η θερμοκρασία αναφοράς αντιστοίχως. Ακόμη το μέγεθος της κατακόρυφης παραμορφώσεως λόγω της θερμοκρασιακής φορτίσεως είναι αμελητέο συγκριτικά με το πάχος της πλάκας για τα συνήθη υλικά κατασκευών πλην όμως είναι πολλαπλασιώς μεγαλύτερο από τα αντίστοιχα μεγέθη εξαιτίας της εξωτερικής κατανεμημένης επιφανειακής φορτίσεως.

v) Επιπλέον εξειδικεύοντας στο πρόβλημα των θερμοελαστικών ταλαντώσεων αυτό αντιμετωπίζεται κατ' αναλογία με το αντίστοιχο δυναμικό πρόβλημα της Θεωρίας Ελαστικότητας. Στην περίπτωση της καθαρής θερμικής φορτίσεως όπου $p=0$, η πλάκα ευρίσκεται εις την επιρροή της θερμικής φορτίσεως p^* και η οποία αντιμετωπίζεται ως μία εξωτερική επιφανειακή δυναμική φόρτιση. Οι δε ιδιομορφές της πλάκας αποτελούν ημιτονοειδείς διαταραχές ως προς τους συντεταγμένους άξονες. Για κάθε μία από τις άπειρες φυσικές συχνότητες της πλάκας προκύπτει η αντίστοιχη ιδιομορφή της η οποία εμπεριέχοντας και το χρονικό μέρος αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση, της οποίας το πλάτος εξαρτάται από τη θερμοκρασία αναφοράς. Στις φυσικές συχνότητες της όπως είναι προφανές δεν εμπεριέχεται η θερμοκρασίας αναφοράς αλλά τα μηχανικά χαρακτηριστικά αυτής, ήτοι η δυσκαμψία της πλάκας και η ανηγμένη ανά μονάδα επιφάνειας μάζα της πλάκας. Ακόμη στην περίπτωση κατά την οποία κάποια από τις φυσικές συχνότητες της ταλαντώσεως ισούται με την κυκλική συχνότητα της διεγείρουσας φορτίσεως εμφανίζεται το φαινόμενο του συντονισμού το οποίο οδηγεί με την πάροδο του χρόνου σε γραμμική αύξηση του πλάτους της ταλαντώσεως.

vi) Τέλος η τελική μορφή της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω μορφών ταλαντώσεων και πιο συγκεκριμένα ως μία διπλή σειρά Fourier.

Μέσω της ανά χείρας μεταπτυχιακής εργασίας δημιουργούνται προοπτικές μελλοντικής εργασίας επί της γνωστής περιοχής της Θερμοελαστικότητας. Μία ενδιαφέρουσα προοπτική είναι η μελέτη της διαδόσεως θερμοελαστικών κυμάτων εντός πλακών πεπερασμένων ή άπειρων διαστάσεων, τυχούσας γεωμετρίας και υπό τυχαία θερμική φόρτιση, οι οποίες αποτελούνται από σύνθετα, ανισότροπα ή ιζωδοελαστικά υλικά εξετάζοντας παράλληλα τη διασπορά της θερμοελαστικής ενέργειας εντός του μέσου. Ακόμη ένα εξίσου ενδιαφέρον θέμα μελλοντικής έρευνας είναι και η μελέτη της επιδράσεως των όρων συζεύξεως του θερμικού και παραμορφωσιακού πεδίου στη δυναμική συμπεριφορά πλάκας πεπερασμένων διαστάσεων για την περίπτωση της ακαριαίας επιβολής θερμικής φορτίσεως. Πέραν των προηγούμενων ως αντικείμενο περαιτέρω μελλοντικής μελέτης, είναι η ευστάθεια πλάκας τυχούσας γεωμετρίας από σύνθετο ή άλλ υλικό υπό την επίδραση δυναμικής θερμικής φορτίσεως. Τέλος ένα σημείο το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον αναφορικά με πιθανή μελλοντική έρευνα είναι η μελέτη της συμπεριφοράς λεπτών πλακών υπό δυναμική θερμική φόρτιση στα πλαίσια θεωριών βαθμίδας θερμοελαστικότητας λαμβάνοντας υπόψη και τη μικροδομή του υλικού.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στατική παραμόρφωση λεπτής ορθογωνικής πλάκας πάχους h υπό την επίδραση θερμικού πεδίου $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$

Παρακάτω παρατίθεται μία αριθμητική εφαρμογή των αναφερομένων, στο κείμενο, σχέσεων για τη μέγιστη βύθιση της μέσης επιφάνειας της πλάκας για διάφορα υλικά όπως σκυρόδεμα, χάλυβας, αλουμίνιο και με διάφορα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Κατόπιν υπολογίζεται ξεχωριστά η μέγιστη βύθιση για ομοιόμορφη φόρτιση και για θερμική φόρτιση και εν συνεχεία συγκρίνουμε την επίδραση της θερμοκρασιακής κατανομής σε κάθε περίπτωση. Αρχικά προσδιορίζουμε τη βύθιση για δύο υλικά συνήθων κατασκευών όπως το σκυρόδεμα και ο χάλυβας των οποίων τα μηχανικά χαρακτηριστικά, ήτοι το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν είναι αντίστοιχα $E_c = 21000MPa$ και $\nu_c = 0.20$ και $E_s = 210000MPa$ και $\nu_s = 0.30$, οι δε συντελεστές γραμμικής θερμικής διαστολής είναι αντίστοιχα $a_t^c = 11 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$ και $a_t^s = 14 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$ και για αλουμίνιο με $E_a = 70000MPa$ και $\nu_a = 0.30$ και $a_t^a = 23 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$. Επίσης λαμβάνουμε τη διαφορά θερμοκρασίας $T_0 = 20^\circ C$. Για διαφορές τιμές των διαστάσεων $(a, b) = (3, 3), (a, b) = (4, 7), (a, b) = (5, 9)$ υπολογίζουμε τις μέγιστες τιμές της βυθίσεως υπό ομοιόμορφα κατανεμημένη επιφανειακή φόρτιση $p_0 = 3KN / m^2$. Το πάχος της πλάκας δίδεται ίσο με $h = 0.15m$.

Υπολογισμός της μέγιστης βυθίσεως εξαιτίας της εξωτερικής φορτίσεως

Από τη σχέση (3.1.69) αρχικά υπολογίζοντας τη μέγιστη βύθιση για κάθε μία περίπτωση υλικού, σκυροδέματος ή χάλυβα, μόνο από τον πρώτο όρο του αθροίσματος ήτοι για $m = n = 1$ για τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση και διάφορα ζεύγη διαστάσεων, προκύπτουν αντίστοιχα τα παρακάτω:

Σκυρόδεμα με $E_c = 21000MPa$ και $\nu_c = 0.20$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a, b) = (3, 3), w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2} \quad \text{αντικαθιστώντας τις}$$

τιμές των μεγεθών έχουμε:

$$w = w_{\max}^c = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 1000}{\frac{21000 \cdot 10^6 \cdot 0.15^3}{12(1-0.20^2)} \pi^6 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right]^2} = 0.000165m$$

με αντίστοιχη ακριβή τιμή η οποία υπολογίζεται από τους τρεις πρώτους όρους της συγκλίνουσας σειράς Fourier (3.1.69) ως $w = w_{\max}^c \cong 0.000161m$

Μέγιστη βύθιση για $(a,b) = (4,7)$, $w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2}$ αντικαθιστώντας τις

τιμές των μεγεθών έχουμε:

$$w = w_{\max}^c = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 1000}{\frac{21000 \cdot 10^6 \cdot 0.15^3}{12(1-0.20^2)} \pi^6 \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \right]^2} = 0.001134m$$

με αντίστοιχη ακριβή τιμή από τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος ως $w = w_{\max}^c \cong 0.001186m$

Μέγιστη βύθιση για $(a,b) = (5,9)$, $w = w_{\max} = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2}$ αντικαθιστώντας τις

τιμές των μεγεθών έχουμε:

$$w = w_{\max}^c = \frac{16p_0}{D\pi^6 \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 1000}{\frac{21000 \cdot 10^6 \cdot 0.15^3}{12(1-0.20^2)} \pi^6 \left[\left(\frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{9} \right)^2 \right]^2} = 0.00284m$$

με αντίστοιχη ακριβή τιμή από τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος ως $w = w_{\max}^c \cong 0.00290m$

Χάλυβας με $E_s = 210000MPa$ και $\nu_s = 0.30$

Κατά τον ίδιο τρόπο η μέγιστη βύθιση $w = w_{\max}^s$ για $(a,b) = (3,3)$ από τον πρώτο όρο του αθροίσματος της σχέσεως (3.1.69) θα είναι:

$w = w_{\max}^s = 1.55 \cdot 10^{-5}m$ ενώ η ακριβής τιμή από τους τρεις πρώτους όρους του αθροίσματος είναι $w = w_{\max}^s = 1.52 \cdot 10^{-5}m$

Επίσης για $(a,b) = (4,7)$ η μέγιστη βύθιση από τον πρώτο όρο θα είναι: $w = w_{\max}^s = 1.12 \cdot 10^{-4}m$

ενώ από τους τρεις όρους θα είναι: $w = w_{\max}^s = 1.10 \cdot 10^{-5}m$

Τέλος για $(a,b) = (5,9)$ η μέγιστη βύθιση από τον πρώτο όρο θα είναι: $w = w_{\max}^s = 2.81 \cdot 10^{-4} m$
 ενώ από τους τρεις όρους θα είναι: $w = w_{\max}^s = 2.75 \cdot 10^{-4} m$

Αλουμίνιο με $E_a = 70000 MPa$ και $\nu_a = 0.30$

Κατά τον ίδιο τρόπο η μέγιστη βύθιση $w = w_{\max}^a$ για $(a,b) = (3,3)$ από τον πρώτο όρο του αθροίσματος της σχέσεως (3.1.69) θα είναι:

$w = w_{\max}^a = 4.67 \cdot 10^{-5} m$ ενώ η ακριβής τιμή από τους τρεις πρώτους όρους του αθροίσματος είναι $w = w_{\max}^a = 4.61 \cdot 10^{-5} m$

Επίσης για $(a,b) = (4,7)$ η μέγιστη βύθιση από τον πρώτο όρο θα είναι: $w = w_{\max}^a = 3.36 \cdot 10^{-4} m$
 ενώ από τους τρεις όρους θα είναι: $w = w_{\max}^a = 3.25 \cdot 10^{-4} m$

Τέλος για $(a,b) = (5,9)$ η μέγιστη βύθιση από τον πρώτο όρο θα είναι: $w = w_{\max}^a = 8.43 \cdot 10^{-4} m$
 ενώ από τους τρεις όρους θα είναι: $w = w_{\max}^a = 8.10 \cdot 10^{-4} m$

Υπολογισμός της μέγιστης βυθίσεως εξαιτίας της τριδιάστατης θερμικής φορτίσεως

Η μέγιστη βύθιση η οποία προκύπτει αποκλειστικά και μόνο εξαιτίας του θερμικού πεδίου για τα τρία προαναφερόμενα υλικά και για τα δεδομένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πλάκας, προσδιορίζεται από τη σχέση (3.1.52) ήτοι:

$$w = w_{\max} = \frac{2a_i T_0 (1 + \nu)}{\pi^2 h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι:

Σκυρόδεμα με $E_c = 21000 MPa$ και $\nu_c = 0.20$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (3,3), w = w_{\max}^c = \frac{22 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1 + 0.20)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right)} = 1.60 \cdot 10^{-3} m$$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (4,7), w = w_{\max}^c = \frac{22 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1 + 0.20)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} \right)} = 4.30 \cdot 10^{-3} m$$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (5,9), w = w_{\max}^c = \frac{22 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.20)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} \right)} = 6.82 \cdot 10^{-3} m$$

Χάλυβας με $E_s = 210000 MPa$ και $\nu_s = 0.30$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (3,3), w = w_{\max}^s = \frac{28 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right)} = 2.22 \cdot 10^{-3} m$$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (4,7), w = w_{\max}^s = \frac{28 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} \right)} = 5.92 \cdot 10^{-3} m$$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (5,9), w = w_{\max}^s = \frac{28 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} \right)} = 9.40 \cdot 10^{-3} m$$

Αλουμίνιο με $E_a = 70000 MPa$ και $\nu_a = 0.30$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (3,3), w = w_{\max}^a = \frac{46 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right)} = 3.63 \cdot 10^{-3} m$$

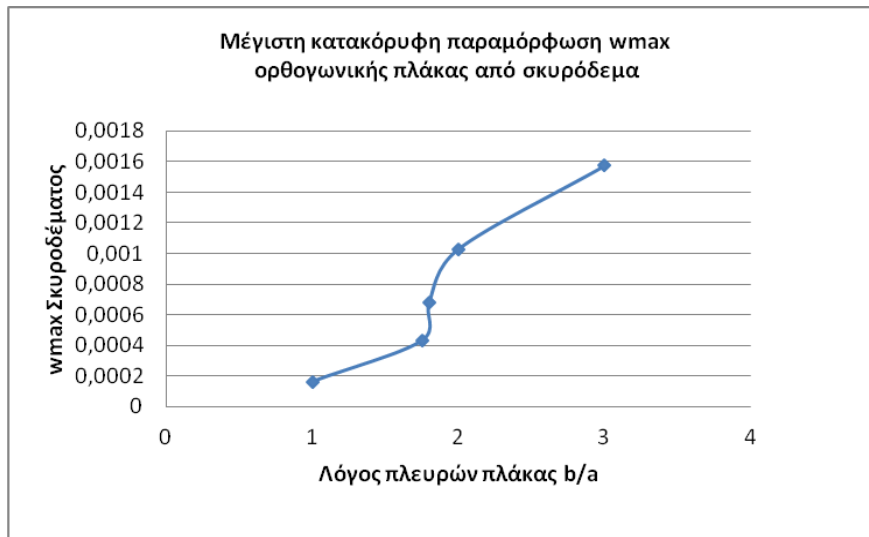
$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (4,7), w = w_{\max}^a = \frac{46 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} \right)} = 9.74 \cdot 10^{-3} m$$

$$\text{Μέγιστη βύθιση για } (a,b) = (5,9), w = w_{\max}^a = \frac{46 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.15 \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} \right)} = 1.54 \cdot 10^{-2} m$$

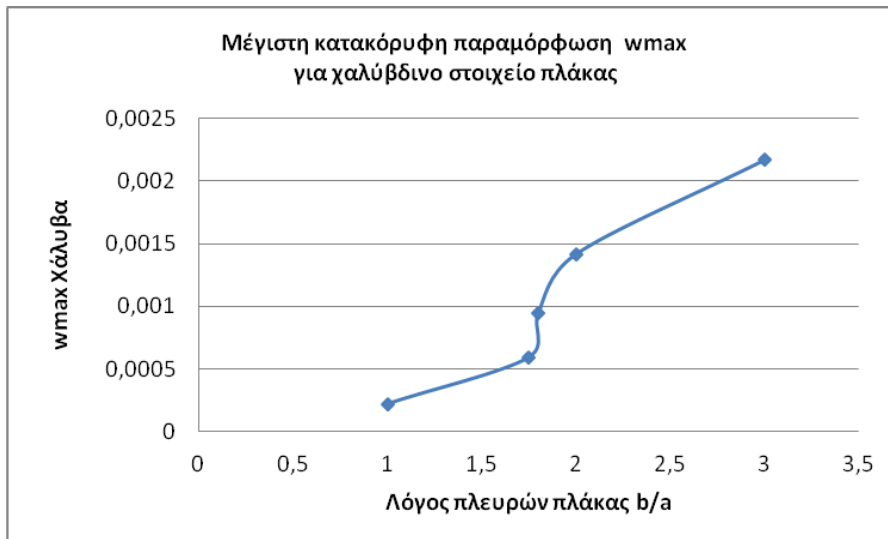
Επιπλέον για να γίνει εμφανής η επίδραση της τάξης μεγέθους των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της πλάκας, προσδιορίζονται για την περίπτωση στοιχείου πλάκας αλουμινίου διαστάσεων $a=150mm$ και $b=225mm$ και πάχους $h=10mm$ με τα ίδια μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, οι μέγιστη τιμή της βυθίσεως για την περίπτωση της θερμικής φορτίσεως. Προς τούτο αντικαθιστούμε στην (3.1.52) τις παραπάνω τιμές των διαστάσεων και εργαζόμενοι όπως προηγουμένως θα έχουμε ότι:

$$w = w_{\max} = \frac{2a_i T_0 (1+\nu)}{\pi^2 h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} = \frac{46 \cdot 10^{-6} \cdot 20 (1+0.30)}{\pi^2 \cdot 0.01 \left(\frac{1}{0.15^2} + \frac{1}{0.225^2} \right)} = 1.88 \cdot 10^{-4} m$$

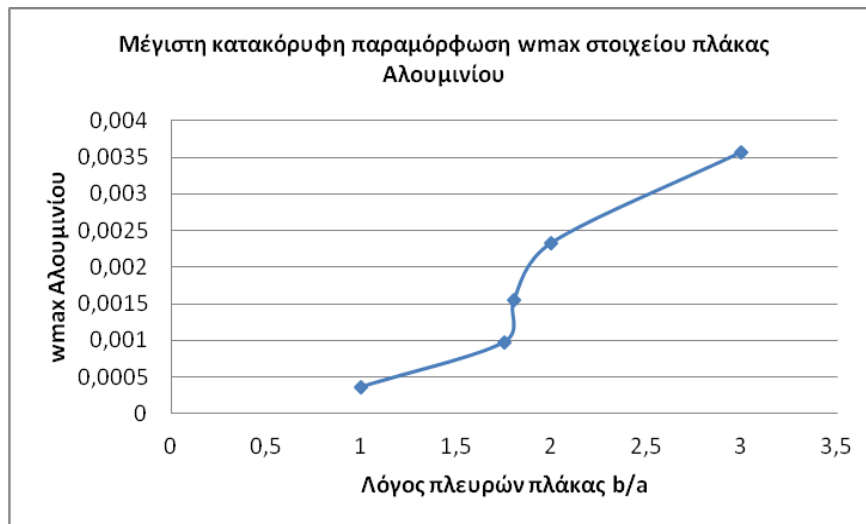
Παρατηρούμε ότι για πολύ μικρών διαστάσεων στοιχεία πλακών η υπολογισθείσα μέγιστη βύθιση λόγω της θερμοκρασιακής κατανομής είναι μηδαμινή για τις συνήθεις θερμοκρασιακές μεταβολές. Για τα παραπάνω υλικά από τα οποία συντίθεται η υπό μελέτη πλάκα προκύπτουν τα ακόλουθα γραφήματα της μέγιστης κατακόρυφης παραμορφώσεως αυτής ως συνάρτηση του λόγου (b/a) των πλευρών :



Σχήμα 1 : Μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση πλάκας από σκυρόδεμα



Σχήμα 2 : Μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση πλάκας από χάλυβα



Σχήμα 3 : Μέγιστη κατακόρυφη παραμόρφωση πλάκας από αλουμίνιο

Συμπερασματικά από την παραπάνω αριθμητική εφαρμογή η επιρροή της θερμοκρασίας για το συγκεκριμένο θερμικό πεδίο, όταν αυτό δρα ανεξάρτητα, στην βύθιση της πλάκας είναι από αμελητέα έως μηδαμινή. Όμως οι προκύπτουσες κατά περίπτωση κατακόρυφες παραμορφώσεις εξαιτίας της θερμικής φορτίσεως είναι αρκετά σημαντικές εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες βυθίσεις της μέσης επιφάνειας της πλάκας συνεπεία της εξωτερικής φορτίσεως. Ενδεικτικά κυμαίνονται από τέσσερεις έως και είκοσι φορές των αντίστοιχων βυθίσεων εξαιτίας της εξωτερικής κατανεμημένης επιφανειακής φορτίσεως. Γενικότερα όπως φαίνεται από την σχέση (3.1.52) η μέγιστη βύθιση επηρεάζεται τόσο από τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού και συγκεκριμένα το λόγο του Poisson, το συντελεστή γραμμικής θερμικής διαστολής, το πάχος αυτής και τον λόγο των πλευρών (b/a). Συγκεκριμένα μεταβάλλεται υπερβολικά και αυξάνεται με αύξηση του λόγου των πλευρών (b/a). Η επίδραση της θερμοκρασίας είναι ακόμη δυσμενέστερη στην περίπτωση της ανάπτυξης υψηλών θερμοκρασιών, όπως κατά την εκδήλωση μίας πυρκαϊάς, δεδομένης της ευθείας αναλογίας μεταξύ βυθίσεως και θερμοκρασίας.

Τέλος ως γενικό συμπέρασμα αποτελεί το γεγονός ότι για να επιδράσει το θερμοκρασιακό πεδίο στη βύθιση της μέσης επιφάνειας της πλάκας θα πρέπει καταρχάς αυτό να παρουσιάζει και μεταβολή κατά τον άξονα z και μάλιστα να είναι περιττή συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z .

2. Θερμοελαστική ταλάντωση λεπτής καμπτόμενης ορθογωνικής πλάκας πάχους h υπό την επίδραση περιοδικού θερμικού πεδίου

Παρακάτω παρατίθεται μία εφαρμογή η οποία αφορά στην περίπτωση της περιοδικής φορτίσεως επί ορθογωνικής πλάκας πάχους h και στην οποία προσδιορίζονται διάφορες ποσότητες για το συρρόδεμα το οποίο χρησιμοποιείται σε συνήθεις κατασκευές. Μεταξύ των ποσοτήτων οι οποίες υπολογίζονται είναι οι φυσικές συχνότητες της ελεύθερης ταλαντώσεως της πλάκας, καθώς και η συνάρτηση της ελαστικής επιφάνειάς της, καθώς και ο πρώτος όρος αυτής για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα. Προς τούτο θεωρούμε ότι η κυκλική συχνότητα της θερμοκρασιακής φορτίσεως είναι $\omega_0 = 5 \text{ rad/sec}$, το μέτρο ελαστικότητας του συρροδέματος και ο λόγος του Poisson ν είναι αντίστοιχα $E_c = 21000 \text{ MPa}$ και $\nu_c = 0.30$, ο δε συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής είναι $\alpha_t^c = 11 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{C}$. Επίσης λαμβάνουμε τη διαφορά θερμοκρασίας $T_0 = 20^\circ \text{C}$ και με τιμές των διαστάσεων $(a,b) = (3,3)$, $(a,b) = (4,7)$ και πάχος πλάκας $h = 0.20 \text{ m}$

Οι φυσικές συχνότητες της ελεύθερης ταλαντώσεως δίδονται από τη σχέση:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Για $(m,n) = (1,1)$ προκύπτει η θεμελιώδης φυσική συχνότητα για την τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα αντίστοιχα :

$$\omega_{mn} = 4.05\pi^2 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) = 8.88 \text{ rad/sec} \quad \text{και} \quad \omega_{mn} = 4.05\pi^2 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} \right) = 3.31 \text{ rad/sec}$$

Η μορφή του ταλαντώμενου σχήματος της πλάκας για κάθε ζεύγος τιμών (m,n) προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32\alpha_t E T_0 h}{3\rho\pi^4 a^2 b^2 (1-\nu)} (n^2 a^2 + m^2 b^2) \left[\frac{\cos(\omega_{mn} t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_{mn}^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

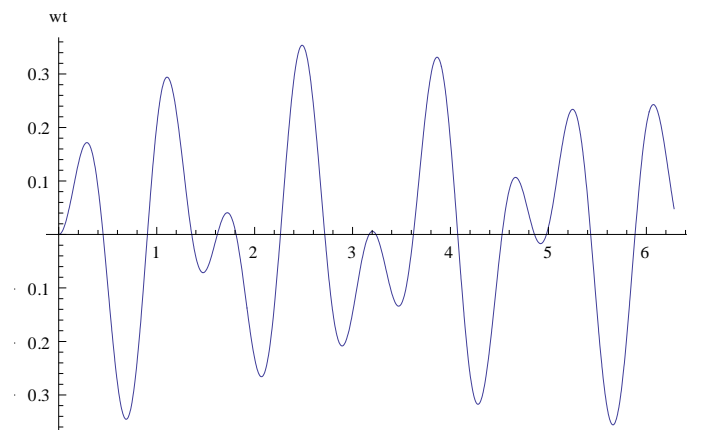
Έτσι για τετραγωνική πλάκα με $(a,b) = (3,3)$ και $(m,n) = (1,1)$ δίδεται ο πρώτος όρος του αθροίσματος ο οποίος δίδει και την ελαστική επιφάνεια της πλάκας :

$$w(x, y, t) = 0.178[\cos(5t) - \cos(8.88t)]\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{3}\right)$$

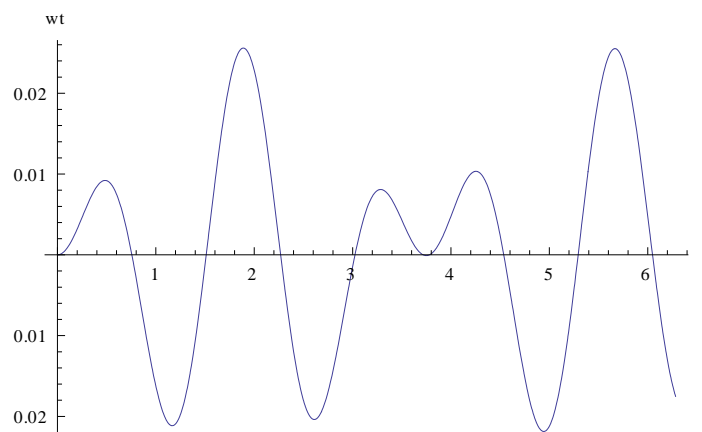
ενώ για ορθογωνική πλάκα με $(a,b) = (4,7)$ και $(m,n) = (1,1)$ είναι :

$$w(x, y, t) = 0.0128[\cos(3.31t) - \cos(5t)]\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{7}\right)$$

Η μεταβολή ως προς το χρόνο της ελαστικής επιφάνειας για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα φαίνεται αντίστοιχα στα ακόλουθα σχήματα:

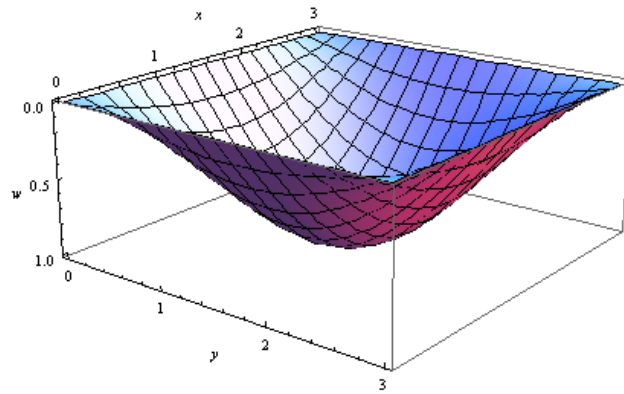


Σχήμα 1: Χρονική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας τετραγωνικής πλάκας για $(m,n) = (1,1)$

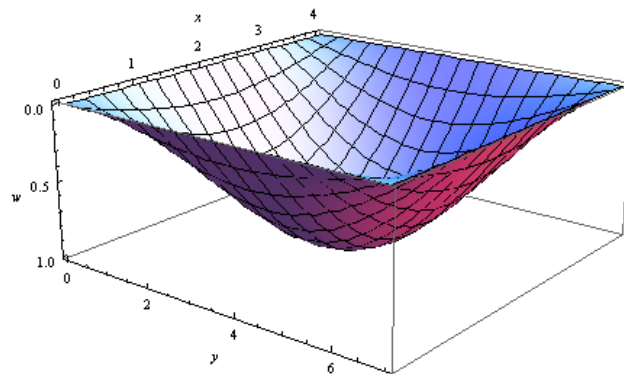


Σχήμα 2 : Χρονική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας ορθογωνικής πλάκας με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$ για $(m,n) = (1,1)$

Η χωρική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας για τετραγωνική και ορθογωνική πλάκα φαίνεται στα ακόλουθα σχήματα:



Σχήμα 3 : Χωρική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας για τετραγωνική πλάκα



Σχήμα 4 : Χωρική μεταβολή της ελαστικής επιφάνειας για ορθογωνική πλάκα με λόγο πλευρών $(b/a) = 1.75$

1. Μετασχηματισμός Laplace

Οι μετασχηματισμοί Laplace χρησιμοποιούνται ευρύτατα για τη λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες εμφανίζονται στην Μηχανική. Παρακάτω δίδεται ο ορισμός του μετασχηματισμού Laplace και ένας πίνακας μετασχηματισμού βασικών συναρτήσεων.

Ορισμός και ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Για μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$, η ποσότητα F η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

ονομάζεται μετασχηματισμένη κατά Laplace της $f(t)$. Η απεικόνιση \mathcal{L} η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε μία συνάρτηση f στην F ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace. Η ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του παραπάνω ολοκληρώματος είναι η συνάρτηση $f(t)$ να είναι τμηματικά λεία, επιπρόσθετα να είναι και εκθετικά φραγμένη ήτοι:

$$|f(t)| \leq Me^{at}, t > T$$

όπου M, a, T θετικές ποσότητες .

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει άμεσα ότι είναι γραμμικός τελεστής για τον οποίο ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s)$$

Επίσης προκύπτουν από τον παραπάνω ορισμό και οι σχέσεις μετασχηματισμού των χρονικών παραγώγων της $f(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= -f(0) + sF(s), \\ \mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} &= -\dot{f}(0) - sf(0) + s^2F(s), \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= -f^{(n-1)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^nF(s) \end{aligned} \quad (1-\alpha)$$

όπου ο εκθέτης (n) παριστάνει την παράγωγο n -οστής τάξεως της f ως προς τον χρόνο.

2. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Κατ'αντιστοιχία με τα παραπάνω ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, ο οποίος προκύπτει από τον υπολογισμό του παρακάτω μιγαδικού ολοκληρώματος Bromwich:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds \quad (2)$$

όπου γ είναι ένας πραγματικός αριθμός έτσι ώστε η διαδρομή του περιγράμματος του ολοκληρώματος να είναι η περιοχή σύγκλισης του $F(s)$. Επειδή η αντιστροφή της μετασχηματισμένης κατά Laplace είναι δυσχερής, η εύρεσή της βασίζεται σε πίνακες.

3. Συνέλιξη

Ορίζουμε ως συνέλιξη δύο κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων f και g στο διάστημα $[0, +\infty)$ τη συνάρτηση $f * g$ η οποία ορίζεται από την ισότητα:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du, t \geq 0 \quad (3)$$

4. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace και συνέλιξη

Εάν η f είναι συνεχής και η g κατά τμήματα συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, τότε ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t), t \geq 0 \quad (4)$$

Στον Πίνακα I δίδεται ο μετασχηματισμός Laplace μερικών βασικών συναρτήσεων

5. Θεώρημα Green – Gauss

Εάν S είναι μία κλειστή επιφάνεια και V η κλειστή στερεά περιοχή η οποία περικλείεται από την S , τότε για μία διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σε κάθε σημείο της V , η οποία είναι παραγωγίσιμη και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους επί της V , ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V (\mathbf{div} \mathbf{F}) dV \quad (5)$$

όπου \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S με θετική φορά την προς το εξωτερικό της ως άνω επιφάνειας.

6. Διανυσματικές συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών – Διαφορικοί τελεστές

Ορίζεται ως κλίση (*grad*) μίας βαθμωτής συναρτήσεως $F = F(x, y, z)$ και συμβολίζεται με $\mathbf{grad} \mathbf{F}$ ή ∇F το διάνυσμα:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} \quad (6)$$

Ορίζεται ως απόκλιση (\mathbf{div}) μίας διανυσματικής συναρτήσεως $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = U(x, y, z)\mathbf{i} + V(x, y, z)\mathbf{j} + W(x, y, z)\mathbf{k}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{div} \mathbf{F}$ ή $\nabla * \mathbf{F}$, η βαθμωτή ποσότητα:

$$\nabla * \mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \quad (7)$$

Ορίζεται ως στροφή \mathbf{rot} μίας διανυσματικής συναρτήσεως $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = U(x, y, z)\mathbf{i} + V(x, y, z)\mathbf{j} + W(x, y, z)\mathbf{k}$, το διάνυσμα:

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix} \quad (8)$$

Το σύμβολο

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

ονομάζεται διανυσματικός τελεστής ανάδελτα και έχει ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των διανυσμάτων. Επίσης ο τελεστής $\Delta = \nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ονομάζεται τελεστής του

Laplace, ενώ ο τελεστής $\Delta^2 = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ονομάζεται διαρμονικός τελεστής.

$f(t)$	$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
--------	---

NOTE: s is regarded as real here.

1. 1	$\frac{1}{s} \quad (s > 0)$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad (s > a)$
3. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$
4. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$
5. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > a)$
6. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > a)$
7. $t^n \quad (n = \text{positive integer})$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$
8. $t^p \quad (p > -1)$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (s > 0)$
9. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad (s > a)$
10. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad (s > a)$
11. $t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \quad (s > 0)$
12. $t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \quad (s > 0)$
13. $t \sinh at$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2} \quad (s > a)$

Πίνακας I (*): Μετασχηματισμός κατά Laplace ορισμένων βασικών συναρτήσεων

(*) : Ο Πίνακας I είναι δανεισμένος από το σύγγραμμα του Greenberg, M.D., « Advanced Engineering Mathematics », 2nd. Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1998.

Βιβλία

- [1]. Βαλιάσης, Ν.Θ., « Επιφανειακοί Φορτίς, Θεωρία και Μέθοδοι Επίλυσης », Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.
- [2]. Γδούτου, Ε.Ε., « Θεωρία Ελαστικότητας », Εκδ. Αδελφών Κυριακίδη Α.Ε., Θεσσαλονίκη, 1995.
- [3]. Γεωργιάδης, Χ.Γ., « Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών », Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 2003.
- [4]. Κατσιαδέλης, Ι.Θ., « Θεωρία Πλακών », Εκδ. Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1993.
- [5]. Arfken, G.B., « Mathematical Methods for Physicists, 6th Ed., Academic Press, Burlington, MA, 2005.
- [6]. Barber, J.R., « Elasticity », 2nd. Ed., Kluwer Academic Publishers, New York, 2004.
- [7]. Barron, R.F., « Design for Thermal Stresses », John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 2012.
- [8]. Boley, B.A., « Theory of Thermal Stresses », John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.
- [9]. Debnath, L., « Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers », Birkhäuser, Boston, 2007.
- [10]. Fung, Y.C., « Foundations of Solid Mechanics », Prentice – Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1965
- [11]. Hetnarski, R.B., « Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications », Springer Science+Business Media, B.V., 2009.
- [12]. Leissa, A.W., « Vibrations of Continuous Systems, McGraw-Hill, New York, 2011.
- [13]. Nowacki, W., « Thermoelasticity », P.W.N – Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1962.
- [14]. Özizik, N.M., « Heat Conduction », John Wiley and Sons, Inc., New York, 1993.
- [15]. Polyanin, A.D., « Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists », Chapman & Hall\CRC, Boca Raton, Florida, 2002

- [16]. Sadd, M.H., « Elasticity, Theory, Applications, and Numerics », 2nd Ed., Academic Press, Burlington, MA, 2009.
- [17]. Szilard, R., « Theories and Applications of Plate Analysis », John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.
- [18]. Ugural, A.C., « Stresses in Plates and Shells », McGraw-Hill, New York, 1981.
- [19]. Ventsel, E., « Thin Plates and Shells, Theory, Analysis, and Applications », Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

Αρθρα

- [20]. Abdul – Majeed, W.R., Jweeg, M.J., and Jameel A.N., « Restrained edge effect on the dynamics of thermoelastic plates under different end conditions », *Al-Khwarizmi Engineering Journal*, Vol. 8, No. 2, pp 1 -11, 2012
- [21]. Alisjahbana, S.W., « Dynamic response of clamped orthotropic plates to dynamic moving loads », *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C., Canada, August 1-6 , 2004, Paper No.3176
- [22]. Boley, B.A., and Barber, A.D., « Dynamic response of beams and plates to rapid heating », *J. Appl. Mechanics*, Vol.24, pp. 413-416, 1957.
- [23]. Choudhuri, S.K.R., « Thermoelastic vibrations of simply supported rectangular plate produced by temperatures prescribed on the faces », *J. Mech.of Continua and Math.Sciences*, Vol.2, No.4., pp. 749-754, 1970.
- [24]. Gupta, A.K., and Sharma P., « Study of thermal induced vibration of non-homogenous trapezoidal plate with varying thickness and density », *American J. of Comp. and Appl. Mathematics.*, Vol.2, pp. 265-275, 2012
- [25]. Ignczak J., and Nowacki W., « Transversal vibrations of a plate produced by heating », *Archiwum Mechaniki Stosowanej (Archives de Mechanique Appliquee)*, Vol.13, No.5, pp. 652-667, Warszawa, 1961.
- [26]. Libove, Ch., and Batdorf, S.B., « A general small deflection theory for flat sandwich plates », *National Advisory Commitee for Aeronautics*, Rep. 899.

- [27]. Liu, Yu., « Analyses of dynamic response and sound radiation of sandwich plate subjected to acoustic excitation under thermal environment », *13th. International Conference on Fracture*, June 16-21, 2013, Beijing, China.
- [28]. McFall A.L., Ariman T., and Lee, L.H.N., « Thermal analysis of plates with circular inclusions », University of Notre Dame, College of Engineering, Notre Dame , Indiana 46556, Feb.1973.
- [29]. Sokolnikoff, I.S., and Sokolnikoff, E.S., « Thermal stresses in elastic plates », *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol.35, pp.235-255, 1939.
- [30]. Xuefeng, S., Xiaoqing, Z., and Jinxiang Z., « Thermoelastic free vibration of clamped circular plate », *App. Math. and Mech.*, Eng. Ed., Vol.21, No.6, pp. 715-724, Shangai University, Shangai, China, June 2000.