



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΠΜΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Υπολογιστική Ανάλυση Διακλάδωσης της Δυναμικής Φλογών Διάχυσης με Ακτινοβολία

Μεταπτυχιακή Εργασία
του
Δημήτρη Μ. Μανιά

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Ι. Σιέττος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΠΜΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Υπολογιστική Ανάλυση Διακλάδωσης της Δυναμικής Φλογών
Διάχυσης με Ακτινοβολία

Δημήτρης Μ. Μανιάς

Μεταπτυχιακή εργασία

Επιβλέπων

Κωνσταντίνος Ι. Σιέττος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Κωνσταντίνος Ι. Σιέττος Δημήτρης Α. Γκούσης Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

*Στους γονείς μου, Μηνά και Γεωργία,
με αμέριστη αγάπη και σεβασμό.*

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, αναλύεται η δυναμική του μοντέλου που περιγράφει μια επίπεδη φλόγα διάχυσης με θερμικές απώλειες ακτινοβολίας, η οποία συμπεριλαμβάνει κινητική απλού βήματος για αριθμό *Lewis* ίσο με τη μονάδα. Κατασκευάζεται το ολοκληρωμένο διάγραμμα διακλάδωσης συναρτήσει του αριθμού *Damköhler*, το οποίο περιλαμβάνει και τους κλάδους των ταλαντευόμενων λύσεων. Βάσει αυτής της ανάλυσης, βρέθηκαν ομοκλινικές διακλαδώσεις, οι οποίες σηματοδοτούν την απότομη εξαφάνιση των μη γραμμικών ταλαντώσεων της φλόγας κοντά στην απόσβεσή της, το οποίο έχει παρατηρηθεί τόσο σε πειράματα όσο και σε πραγματικές διατάξεις καύσης.

Λέξεις κλειδιά φλόγες διάχυσης με ακτινοβολία, μη γραμμικές ταλαντώσεις, ανάλυση διακλαδώσεων, ομοκλινική διακλάδωση

Abstract

We analyse the dynamics of a model describing a planar diffusion flame with radiative heat losses incorporating a single step kinetic for *Lewis* number equal to one. We construct the full bifurcation diagram with respect to the *Damköhler* number including the branches of oscillating solutions. Based on this analysis we found, for the first time, homoclinic bifurcations that mark the abrupt disappearance of the nonlinear oscillations near extinction as reported in experiments.

keywords radiating diffusion flames, nonlinear oscillations, bifurcation analysis, homoclinic bifurcation

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία και σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των σπουδών μου στο Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Εφαρμοσμένης Μηχανικής της σχολής των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Ε.Μ.Π..

Το περιεχόμενο της εργασίας αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μελέτης της μη-γραμμικής δυναμικής προβλημάτων καύσης που εμφανίζονται όλο και συχνότερα, λόγω της ανάγκης για μελέτη των ιδιοτήτων των νέων καυσίμων και τη βελτίωση της λειτουργίας των κινητήρων που τα χρησιμοποιούν. Η χρήση αυτών των καυσίμων επιβάλλει ολοένα και περισσότερη μελέτη της συμπεριφοράς τους. Η εργασία, επίσης, αποτελεί αντικείμενο έρευνας, μίας εκ των πολλών, οι οποίες λαμβάνουν μέρος αυτή τη στιγμή τόσο στον τομέα Μηχανικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, όσο και σε αντίστοιχα άλλα ερευνητικά ιδρύματα σε όλον τον κόσμο.

Το θέμα της εργασίας, επίσης, προκάλεσε και το προσωπικό μου ενδιαφέρον, καθώς διαπραγματεύεται έναν από τους κλάδους των μαθηματικών ο οποίος εφαρμόζεται σε κάθε πρόβλημα που ανάγεται σε σύστημα εξισώσεων. Η μη-γραμμική δυναμική των συστημάτων, η θεωρία διακλαδώσεων και η υπολογιστική μηχανική των ρευστών αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη προβλημάτων, στα οποία οι κλασικές συμβατικές (γραμμικές) μέθοδοι αποτυγχάνουν. Συνεπώς, με εφαρμογή αυτών πάνω σε ένα από τα προβλήματα καύσης, μπόρεσα να δω τον τρόπο με τον οποίο μπορώ να αντιμετωπίζω τέτοια προβλήματα και επέκτεινα τις γνώσεις μου πάνω σε μεθόδους μελέτης μη-γραμμικών προβλημάτων.

Η εργασία αποτελεί, ουσιαστικά, την ανάλυση διακλάδωσης του μοντέλου και των αποτελεσμάτων που περιγράφονται στην εργασία των Kanousanakis et al.[1] πάνω στην περιγραφή των ασταθειών φλογών διάχυσης, της συσχέτισής τους με την εμφάνιση ομοκλινικών διακλαδώσεων στο σύστημα των εξισώσεων που τις περιγράφουν, καθώς και τον τρόπο επίλυσης αυτών μέσω αριθμητικών μεθόδων.

Η εργασία ξεκινάει με την Εισαγωγή, στην οποία αναφέρονται οι λόγοι μελέτης της παρούσας εργασίας, αναφέρονται ιστορικά οι μελέτες που έχουν γίνει μέχρι τώρα, το μοντέλο της μελέτης της εργασίας, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο θα γίνει η προσέγγιση στο πρόβλημα της μελέτης.

Στο Μαθηματικό Υπόβαθρο περιγράφεται ο κλάδος των δυναμικών συστημάτων, αναφέρονται έννοιες, όπως τα είδη της δυναμικής συμπεριφοράς, η ευστάθεια και τα είδη των σημείων ισορροπίας. Επίσης, γίνεται συνοπτική περιγραφή της θεωρίας διακλαδώσεων, εισάγονται οι έννοιές της, ενώ περιγράφονται τα σημαντικότερα είδη διακλαδώσεων, όπως η διακλάδωση Hopf-Andronon και η διακλάδωση ομοκλινικού βρόγχου. Τέλος αναφέρεται η συσχέτισή τους με την απόσβεση της φλόγας και με φαινόμενα χάους.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται αναφορά στις μηχανές εσωτερικής καύσης και στην ανάγκη για βελτίωση της λειτουργίας τους. Περιγράφεται ο κλάδος της υπολογιστικής μηχανικής των ρευστών ως εργαλείο προσέγγισης των προβλημάτων καύσης και εξάγονται οι

σχέσεις των προσεγγίσεων μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Τέλος, περιγράφονται διάφορες τεχνικές συνέχειας των παραμέτρων για που θα χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται αναλυτική περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς των φλογών. Αναφέρονται τα είδη της φλόγας, καθώς και ο διαχωρισμός τους σε προαναμεμειγμένες και σε φλόγες διάχυσης. Στη συνέχεια, αναφέρονται οι αστάθειες που παρουσιάζονται στις φλόγες διάχυσης, τα είδη των ασταθειών αυτών, ενώ συζητούνται οι μηχανισμοί έναρξης των ασταθειών, η μη-γραμμική συμπεριφορά τους και η ανάγκη για μελέτη μέσω μη-γραμμικής ανάλυσης.

Στο Κεφάλαιο 3 τοποθετείται το φυσικοχημικό πρόβλημα της μελέτης, κατασκευάζεται το μαθηματικό μοντέλο, ενώ περιγράφονται αναλυτικά οι αριθμητικές μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση, καθώς και η διαδικασία εύρεσης της προσεγγιστικής λύσης. Στη συνέχεια παρατίθενται δύο αριθμητικά παραδείγματα, ώστε να γίνει καλύτερη η κατανόηση του μοντέλου, καθώς και αντίστοιχα ολικά διαγράμματα διακλάδωσης, ενώ υπολογίζεται η θέση της ομοκλινικής διακλάδωσης και παρατίθεται η συμπεριφορά της φλόγας γύρω από αυτή. Τέλος, παρατίθενται τα συμπεράσματα, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Έγινε προσπάθεια να εξηγηθούν όλες οι έννοιες και διαδικασίες, τόσο αναλυτικά ώστε να γίνονται κατανοητές στον κάθε αναγνώστη. Σκοπός είναι, κάθε κεφάλαιο να είναι όσο τον δυνατόν αυτόνομο για να μη χρειάζεται ο αναγνώστης να παραπέμπεται, συνεχώς, με αναφορές σε προηγούμενα κεφάλαια. Η διαδικασία με την οποία προσεγγίζεται το πρόβλημα που παρουσιάζεται στη συγκεκριμένη εργασία, ελπίζω να αποτελέσει οδηγό για κάποιον, φοιτητή ή όχι, που θα έρθει αντιμέτωπος με παρόμοια θέματα και εύχομαι η όλη εργασία, γενικά, να αποτελέσει κίνητρο για κάποιον άλλο, ώστε να αγαπήσει και να ασχοληθεί με τον κλάδο των θετικών επιστημών και ειδικότερα με τη θεωρία διακλαδώσεων και την υπολογιστική μηχανική των ρευστών .

Αθήνα, Οκτώβριος 2013
Δημήτρης Μ. Μανιάς

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία θα ήταν πολύ δύσκολο να ολοκληρωθεί, χωρίς τη συμβολή κάποιων ανθρώπων, τους οποίους θεωρώ υποχρέωση να ευχαριστήσω.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κωνσταντίνο Σιέττο, καθηγητή μου σε μαθήματα του μεταπτυχιακού, αλλά και σε πολλά προπτυχιακά, τον οποίο εκτιμώ και σέβομαι, που μου πρότεινε το θέμα και δέχτηκε να επιβλέπει την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ, επίσης, για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε σε μένα και αυτή την εργασία, για την καθοδήγηση, το υλικό, τις συμβουλές και την υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Δημήτρη Γκούση και κ. Ευστάθιο Θεοτόκογλου -τους οποίους εκτιμώ και σέβομαι, εξίσου- για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή. Ευελπιστώ και σε περαιτέρω συνεργασία με όλους και τους εύχομαι τα καλύτερα στη ζωή τους.

Τελευταίους, αλλά πιο σημαντικούς, άφησα τους γονείς μου, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της ψυχής μου, για την όχι μόνο οικονομική, αλλά και κάθε είδους βοήθεια και συμπαράσταση που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου. Σε αυτούς λοιπόν, οφείλεται κατά ένα μέρος και η ύπαρξη της παρούσας εργασίας και ως επακόλουθο, τους αφιερώνεται με αμέριστη αγάπη και σεβασμό.

Αθήνα, Οκτώβριος 2013
Δημήτρης Μ. Μανιάς

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	iii
Πρόλογος	v
Ευχαριστίες	vii
Εισαγωγή	1
Μαθηματικό Υπόβαθρο	3
Δυναμική Συστημάτων	3
Βασικές Έννοιες	3
Είδη δυναμικής συμπεριφοράς	4
Ευστάθεια	5
Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και πολλαπλότητες	7
Είδη σημείων ισορροπίας	8
Θεωρία Διακλαδώσεων	11
Διακλάδωση σαγματικού κόμβου	12
Διακλάδωση Hopf-Andronov	14
Διακλάδωση ομοκλινούς βρόγχου - Ομοκλινική Διακλάδωση	16
Σχέχη μεταξύ ομοκλινικής και υποκρισίσιμης διακλάδωσης Hopf-Andronov	18
Μετάβαση στο Χάος	19
1 Θεωρία καύσης και υπολογιστική δυναμική των ρευστών	21
1.1 Μηχανές εσωτερικής καύσης	21
1.2 Βελτιστοποίηση της απόδοσης	22
1.2.1 Υπολογιστική Δυναμική των ρευστών	23
1.3 Μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	24
1.4 Η μέθοδος Newton και τεχνικές συνέχειας	29
1.4.1 Μέθοδος Newton	30
1.4.2 Μέθοδος φυσικής συνέχειας Euler-Newton (natural continuation)	30
1.4.3 Μέθοδος συνέχειας μέσω του μήκους τόξου της καμπύλης (arc length continuation)	32
2 Δυναμική των Φλογών	35
2.1 Σημαντικές Διαχωρίσεις Φαινομένων Καύσης	35
2.1.1 Προαναμεμειγμένη και Μη-προαναμεμειγμένη Καύση	35
2.1.2 Η Φλόγα Bunsen	36
2.1.3 Σπρωτή και Τυρβώδης Καύση	37

2.2	Φλόγες Διάχυσης	37
2.2.1	Το μοντέλο των Burke και Schumann	38
2.2.2	Το Φύλλο Αντίδρασης	40
2.3	Αστάθειες στις Φλόγες	41
2.3.1	Ταλαντώσεις των Φλογών Διάχυσης	42
2.3.2	Εξήγηση του μηχανισμού των φαινομένων ταλάντωσης	44
2.3.3	Έναρξη των ταλαντώσεων στις φλόγες διάχυσης	45
2.3.4	Μη γραμμικές Ταλαντώσεις στις Φλόγες Διάχυσης	46
2.4	Μελέτη μέσω μη-γραμμικής ανάλυσης	48
3	Το Μοντέλο της Φλόγας	51
3.1	Το φυσικοχημικό πρόβλημα	51
3.1.1	Το μαθηματικό μοντέλο	51
3.1.2	Το χημικό μοντέλο	52
3.1.3	Καταστατικές εξισώσεις και Συνοριακές Συνθήκες	53
3.2	Διακριτοποίηση	55
3.3	Χρησιμοποιούμενες μέθοδοι συνέχειας	56
3.3.1	Χρήση της μεθόδου Newton-Raphson	56
3.3.2	Συνέχιση με χρήση της μεθόδου Pseudo Arc-Length	57
3.4	Το διάγραμμα διακλάδωσης	59
3.4.1	Χαρακτηρισμός των κλάδων της λύσης και των σημείων διακλάδωσης	60
3.4.2	Κατασκευή του κλάδου οριακών κύκλων	61
3.5	Υπολογισμός της θέσης των ομοκλιτικών διακλαδώσεων	63
4	Συμπεράσματα	67
4.1	Μελλοντική έρευνα	68
	Βιβλιογραφία	71

Κατάλογος σχημάτων

1	Είδη ευστάθειας.	6
2	Είδη σημείων ισορροπίας.	8
3	Ταλαντωτής Van der Pol. Παράδειγμα ευσταθούς οριακού κύκλου.	9
4	Παράδειγμα ασταθούς οριακού κύκλου.	10
5	Διακλάδωση σαγματικού κόμβου.	13
6	Υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf-Andronov.	15
7	Ομοκλινική διακλάδωση.	17
8	Μετάβαση στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.	20
1.1	Κρίσιμα σημεία, στροφής και διακλάδωσης.	29
1.2	Η αποτυχία της μεθόδου Euler-Newton κοντά στο κρίσιμο σημείο.	31
1.3	Μέθοδος συνέχειας ψευδο-μήκους τόξου.	33
2.1	Η Φλόγα Bunsen.	36
2.2	Το μοντέλο φλόγας των Burke και Schumann.	38
2.3	Περιπτώσεις υπο-υπεραερισμένης φλόγας.	39
2.4	Η εξάρτηση της θερμοκρασίας της φλόγας από τον αριθμό <i>Damköhler</i>	41
2.5	Η καμπύλη <i>S</i> του ρυθμού καύσης της φλόγας.	46
3.1	Σχηματική απεικόνιση της μονοδιάστατης φλόγας διάχυσης μεταξύ δύο πορωδών τοιχωμάτων.	51
3.2	Γραφική ερμηνεία της μεθόδου Newton-Raphson.	56
3.3	Γραφική ερμηνεία της μεθόδου Pseudo-ArcLength.	57
3.4	Παραμετρική εξάρτηση της θερμοκρασίας στο $x = 0$ συναρτήσει του αριθμού <i>Damköhler</i> για $R = 0.2$ και $T_a = 1$	60
3.5	Έναρξη περιοδικών ταλαντώσεων κοντά στο σημείο της διακλάδωσης.	61
3.6	Ολικό διάγραμμα διακλάδωσης της θερμοκρασίας στο σημείο $x = 0$ συναρτήσει του αριθμού <i>Damköhler</i> για $R = 0.2$ και $T_a = 1$	62
3.7	Παραμετρική εξάρτηση της περιόδου των ταλαντώσεων συναρτήσει του αριθμού <i>Damköhler</i> για $R = 0.2$ και $T_a = 1$	62
3.8	Παραμετρική εξάρτηση της θερμοκρασίας στο $x = 0$ συναρτήσει του αριθμού <i>Damköhler</i> για $R = 0.233$ και $T_a = 1$	63
3.9	Πορτρέτα φάσης της θερμοκρασίας $T(0)$ του μείγματος ως προς το κλάσμα μάζας καυσίμου $Y_f(0)$ του μείγματος.	64
3.10	Εξέλιξη των ασταθών προφίλ θερμοκρασίας μόνιμης κατάστασης (κλάδος κόκκινης διακεκομμένης γραμμή μεταξύ των Hopf-Andronov σημείων στο Σχ. 3.8)	65

Εισαγωγή

Έχει προκύψει από πολλές πειραματικές εργασίες [2–6] ότι μπορούν να παρατηρηθούν αστάθειες και καταστάσεις ταλάντωσης στις φλόγες διάχυσης, ειδικά κοντά στην απόσβεσή τους [5]. Παραδείγματα ασταθειών στις φλόγες διάχυσης είναι οι λωρίδες φλόγας και οι παλλόμενες φλόγες, οι οποίες έχουν αναφερθεί σε πλήθος εφαρμογών, όπως είναι οι φλόγες του κεριού και οι φλόγες στους κινητήρες αεριώθησης (jet). Μια πρόσφατη έρευνα είναι αυτή του Matalon [7]. Πιο συγκεκριμένα, ταλαντώσεις παρατηρήθηκαν πειραματικά σε καύσιμα κατά τη διαδικασία υγροποίησης [2], σε κεριά και σε κρεμάμενες σταγόνες καύσιμου σε περιβάλλοντα μικροβαρύτητας [3, 4], σε φλόγες κινητήρων αεριώθησης [5], σε φλόγες ψεκασμού [6] και σε φλόγες πάνω από λιμνάζοντα καύσιμα [8, 9].

Ανεξάρτητα από τα πειραματικά στοιχεία μιας τέτοιας υπερβολικά μη γραμμικής δυναμικής συμπεριφοράς που συσχετίζεται με την αστάθεια θερμότητας-διάχυσης, οι φλόγες διάχυσης έχουν μελετηθεί, θεωρητικά, πολύ λιγότερο σε σχέση με τις προαναμεμειγμένες φλόγες. Ως εκ τούτου, απομένουν να διευκρινιστούν, ειδικότερα, η μη γραμμική δυναμική που ακολουθεί μετά την έναρξη των ασταθειών. Ένας λόγος είναι ότι σε όλα τα προαναφερθέντα πειράματα η δυναμική των ρευστών είναι, γενικά, μη τετριμμένη, με αποτέλεσμα η σύγκριση με τις θεωρητικές προβλέψεις να είναι πολύ δύσκολη [7]. Μια τέτοια δυσκολία έχει, πρόσφατα, παρακαμφθεί με την πειραματική παραδοχή της επίπεδης ατάνυκτης (unstrained) φλόγας διάχυσης [10], η οποία μπορεί, πλέον, να χρησιμοποιηθεί για να επαληθεύσει τις θεωρητικές και αριθμητικές προβλέψεις. Παρ' όλο που η πρώτη θεωρητική εργασία χρονολογείται από τους Burke και Schumann [11], μόνο προσφάτως έχει εφαρμοστεί γραμμική ανάλυση ευστάθειας από τους Cheatham και Matalon [12] και τον Kim et al. [13], προκειμένου να αναλυθούν οι παλλόμενες και οι κυψελώδεις αστάθειες στις φλόγες διάχυσης.

Τα τελευταία χρόνια, άλλες θεωρητικές [14–17] και αριθμητικές έρευνες [18] έχουν δείξει ότι, όμοια με τις προαναμεμειγμένες φλόγες, ο ανταγωνισμός μεταξύ της θερμικής διάχυσης και της διάχυσης της μάζας είναι, επίσης, υπεύθυνος για την εμφάνιση των ασταθειών στις φλόγες. Η πλειοψηφία αυτών των θεωρητικών μελετών βασίζεται στη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, η οποία είναι ικανή να προβλέψει την έναρξη των ασταθειών, αλλά, δεν μπορεί να δώσει πληροφορίες για τη μακροπρόθεσμη μη γραμμική δυναμική της φλόγας. Σε μερικές δημοσιεύσεις έχουν αναλυθεί θεωρητικά [16] και αριθμητικά [19–24] η μη γραμμική δυναμική των φλογών διάχυσης. Οι ογκομετρικές απώλειες θερμότητας είναι άλλος ένας λόγος για την ύπαρξη των παλλόμενων ασταθειών στις φλόγες διάχυσης. Οι φλόγες διάχυσης με απώλεια θερμότητας μελετήθηκαν, αρχικά, από τους Cheatham και Matalon [12] και τους Kukuck και Matalon [17], οι οποίοι ανέλυσαν τη μεταβολή της καμπύλης υστέρησης της μόνιμης κατάστασης, καθώς οι σχετικές παράμετροι αλλάζουν.

Παρακινούμενοι από τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα του Διαστημικού Λεωφορείου της NASA, σχετικά με την ταλαντευόμενη συμπεριφορά της καύσης σταγόνων [4], Οι Sohn et al. [22] ανέλυσαν ταλαντώσεις φλογών, οι οποίες ενεργοποιήθηκαν από την απώλεια ακτινοβολίας. Βρήκαν ότι οι απώλειες αυτές επιφέ-

ρουν ακόμα πιο πολύπλοκες δυναμικές, συμπεριλαμβανομένης της ύπαρξης οριακών κύκλων, δηλαδή ύπαρξη ταλαντευόμενων φλογών. Οι οριακοί κύκλοι προκύπτουν τόσο από υπερκρίσιμες, όσο και από υποκρίσιμες Hopf-Andronon διακλαδώσεις. Για το ίδιο μοντέλο, πραγματοποιήθηκε γραμμική ανάλυση ευστάθειας [25], καθιστώντας ικανό τον υπολογισμό του χάρτη ευστάθειας του συστήματος, συναρτήσε του αριθμού *Damköhler* του συντελεστή απελευθέρωσης θερμικής ακτινοβολίας. Αργότερα, ο Miklavcic [26] συμπέρανε ότι στο όριο μια πολύ μεγάλης θερμοκρασίας ενεργοποίησης, εμφανίζεται διπλασιασμός της περιόδου ταλάντωσης της φλόγας σε ένα περιορισμένο εύρος τιμών του αριθμού *Damköhler*. Οι Matalon και Metzener [27] μελέτησαν την επίδραση της θερμικής διαστολής στην ευστάθεια των επίπεδων ατάνυτων φλογών διάχυσης λαμβάνοντας υπόψιν τις διακυμάνσεις της πυκνότητας. Η υιοθέτηση μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών, σε συνδυασμό με τη μέθοδο της αμοιβαίας πληροφορίας, έθεσε τη βάση για μια περαιτέρω έρευνα πάνω στη μετάβαση στο χάος [28].

Πρόσφατα, οι Gotoda et al. [29] εφάρμοσαν μη γραμμικές μεθόδους πρόβλεψης για να προβλέψουν τη βραχυπρόθεσμη δυναμική της αστάθειας της φλόγας. Ως εκ τούτου, η μη γραμμική ανάλυση των κρίσιμων καταστάσεων για την έναρξη των ταλαντευόμενων φλογών, καθώς και των διακλαδώσεων, είναι πρωταρχικής σημασίας για την κατανόηση των κύριων φυσικών και χημικών μηχανισμών που εμπλέκονται στις αστάθειες θερμότητας - διάχυσης κοντά στη απόσβεση των φλογών. Παρ' όλα αυτά, ένας ολοκληρωμένος χαρακτηρισμός της μη γραμμικής δυναμικής των φλογών διάχυσης μπορεί να υπάρξει μόνο αν υπολογιστούν συστηματικά οι διακλαδώσεις και η αστάθεια των περιοχών ταλάντωσής τους.

Μέχρι στιγμής, μία τέτοια αριθμητική μελέτη λείπει από τη βιβλιογραφία των ασταθειών των φλογών διάχυσης. Επιπλέον, τα πειραματικά αποτελέσματα που δείχνουν ότι οι ταλαντώσεις των φλογών εξαφανίζονται απότομα με αποτέλεσμα η φλόγα να αποσβένει [5], προτείνουν ότι σε τόσο κρίσιμες συνθήκες μπορεί να προκύψουν τοπικές και ολικές διακλαδώσεις. Οι διακλαδώσεις των οριακών κύκλων μπορούν να υπολογιστούν αποτελεσματικά και συστηματικά, αν εφαρμοστεί η θεωρία διακλαδώσεων σε συνδυασμό με τεχνικές συνέχειας των παραμέτρων. Για αυτό το λόγο, η εφαρμογή των κλασικών αριθμητικών μεθόδων συνέχειας [30, 31] αποτελεί ένα ανεκτίμητο εργαλείο για συστήματα μικρής-μεσαίας κλίμακας.

Αυτή η εργασία στοχεύει στο να συνεισφέρει προς αυτήν την κατεύθυνση: δείχνοντας, δηλαδή, ότι, εφαρμόζοντας μια συστηματική προσέγγιση χαρακτηρισμού της ευστάθειας και των διακλαδώσεων των οριακών κύκλων, μπορούν να εξαχθούν πολλές περισσότερες πληροφορίες για τη δυναμική των φλογών διάχυσης κοντά στην απόσβεσή τους. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας μεθόδους που βασίζονται στις εργασίες [32–34], επιτεύχθηκε να κατασκευαστεί το ολοκληρωμένο διάγραμμα διακλαδώσεων, συμπεριλαμβανομένων των κλάδων των οριακών κύκλων. Το επιλεγμένο μοντέλο μελέτης είναι σχετικά εύκολο και περιγράφει τη δυναμική μιας επίπεδης φλόγας αντιροής, με θερμικές απώλειες ακτινοβολίας και αριθμό *Lewis* ίσο με μονάδα [22, 26]. Με το συστηματικό εντοπισμό των κλάδων των ταλαντευόμενων λύσεων, βρέθηκε η ακριβής θέση των ομοκλινικών διακλαδώσεων, οι οποίες σηματοδοτούν την απότομη εξαφάνιση των ταλαντευόμενων λύσεων και οδηγούν στην απόσβεση της φλόγας. Σύμφωνα με την εργασία [1], μέχρι στιγμής, αυτή είναι η πρώτη φορά όπου μια ολική διακλάδωση, όπως αυτή της ομοκλινικής, αναφέρεται στη βιβλιογραφία των φλογών διάχυσης. Τέλος, παρατίθενται ιδέες για το πως τα ευρήματα της εργασίας αυτής μπορούν να συσχετιστούν με πειραματικές παρατηρήσεις και πως τέτοιες αστάθειες μπορούν να εντοπιστούν πειραματικά.

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Δυναμική Συστημάτων¹

Στο φυσικό κόσμο, ο όρος *δυναμικό σύστημα* περιγράφει κάθε φυσικό φαινόμενο που εξελίσσεται με το χρόνο. Ένα φυσικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μεταβλητών, οπού το δυναμικό σύστημα είναι ένα φυσικό σύστημα, στο οποίο μία ή περισσότερες μεταβλητές μεταβάλλονται με το χρόνο. Τα περισσότερα φαινόμενα που παρατηρούμε στη φύση εξελίσσονται με το χρόνο, οπότε είναι φανερό ότι η μελέτη των δυναμικών συστημάτων είναι πολύ σημαντική.

Τα δυναμικά συστήματα μελετώνται συστηματικά από μαθηματικούς, φυσικούς και χημικούς εδώ και 150 χρόνια. Παρ' όλα αυτά, συχνά, αναφέρεται η θεωρία των δυναμικών συστημάτων ως ένα μοντέρνος κλάδος των φυσικών επιστημών. Αυτό συμβαίνει λόγω της 'ανακάλυψης' του παράξενου ή, αλλιώς, χαοτικού ελκυστή. Η χαοτική απόκριση είναι ένα είδος δυναμικής συμπεριφοράς που χαρακτηρίζεται από μεγάλη ευαισθησία του συστήματος στις αρχικές συνθήκες (δηλαδή, το σύστημα εξελίσσεται πολύ διαφορετικά αν αλλάξουν πολύ λίγο οι αρχικές καταστάσεις), μη προβλεπόμενη για μεγάλους μελλοντικούς χρόνους, αλλά που περιγράφεται από ντετερμινιστικούς νόμους.

Βασικές Έννοιες

Θεωρούμε ένα φυσικό σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)\end{aligned}\tag{1}$$

Προφανώς, η Εξ. (1), μπορεί να γραφεί με έναν πιο συμπαγή τρόπο,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})\tag{2}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$ και $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$. Στην Εξ. (2) η τελεία πάνω από το σύμβολο σημαίνει $\frac{d}{dt}$ και το έντονο σύμβολο παριστά ένα διάνυσμα. Το διάνυσμα \mathbf{x} το καλούμε *δυναμικές μεταβλητές*, το $\boldsymbol{\mu}$ *παραμέτρους* του συστήματος και t τον *χρόνο*. Σε ένα φυσικό σύστημα, το \mathbf{x} είναι οι μεταβλητές που παρατηρούμε πειραματικά, είτε άμεσα είτε μέσω μιας συνάρτησης απόκρισης. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ είναι οι παράμετροι του συστήματος και παραμένουν σταθερές.

¹Μέρος του κειμένου αποτελεί τμήμα από τα βιβλία *Δυναμικών Συστημάτων*[35–37].

Φυσικά, και ο χρόνος t είναι μία μεταβλητή, αλλά, εφόσον δεν μπορούμε να επεμβούμε στην εξέλιξή της τη θεωρούμε ανεξάρτητη μεταβλητή. Αν θεωρήσουμε ως παράδειγμα τη χρονική εξέλιξη μιας ομογενούς χημικής αντίδρασης, τότε, x είναι οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων ή των προϊόντων και μ μπορεί να είναι η θερμοκρασία, η πίεση ή ο όγκος.

Η Εξ. (2) συχνά, καλείται *συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ)*, *διανυσματικό πεδίο* ή απλά, *δυναμικό σύστημα*. Στην περίπτωση που το δεξιό σκέλος της Εξ. (2) είναι μία μη-γραμμική συνάρτηση, τότε, την καλούμε *μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα*. Ως διάσταση του δυναμικού συστήματος ορίζεται το πλήθος των δυναμικών μεταβλητών που απαιτούνται για να περιγράψουν το σύστημα. Στην περίπτωση της Εξ. (2) η διάσταση είναι n . Η Εξ. (2) μαζί με κάποιες αρχικές συνθήκες, συχνά καλείται *πρόβλημα αρχικών συνθηκών*. Τέλος, αν το δεξιό σκέλος της Εξ. (2) δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, τότε το δυναμικό σύστημα ονομάζεται *αυτόνομο*.

Δυναμικά συστήματα της μορφής της Εξ. (2) μπορούν να περιγράψουν εξελισσόμενες διαδικασίες με ειδικές ιδιότητες, οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σημασία στη Φυσικοχημεία. Αυτές οι ιδιότητες [38] είναι οι:

- *Ντετερμινιστικότητα*: Ολόκληρο το μέλλον και ολόκληρο το παρελθόν του συστήματος ορίζονται μονοσήμαντα από την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα στον παρόντα χρόνο. (Το σύστημα καλείται *ντετερμινιστικό*)
- *Πεπερασμένη Διάσταση*: Ο αριθμός των μεταβλητών που απαιτούνται για την περιγραφή του συστήματος είναι πεπερασμένος
- *Διαφορισιμότητα*: Η μεταβλητή της κατάστασης με το χρόνο περιγράφεται από διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Ο χώρος που ορίζεται από τις δυναμικές μεταβλητές ονομάζεται *χώρος των φάσεων* ή *χώρος των καταστάσεων*. Προφανώς, η διάσταση του χώρου αυτού είναι n . Η λύση της Εξ. (2) υπό ορισμένες αρχικές συνθήκες $x_0 \equiv x(t = t_0)$ γράφεται ως $x(t, t_0, x_0)$ και καλείται *τροχιά* ή *καμπύλη* στο χώρο των φάσεων που περνά από το σημείο x_0 για $t = t_0$. Το γράφημα $x(t, t_0, x_0)$ ως προς το t ονομάζεται *ολοκληρωμένη καμπύλη*. Τέλος, το σύνολο των σημείων του χώρου των φάσεων τα οποία ανήκουν σε μία τροχιά που περνά από το x_0 καλείται *τροχιά* που περνά από το x_0 .

Είδη δυναμικής συμπεριφοράς

Παρακάτω, παρατίθενται μερικοί ορισμοί διαφόρων ειδών δυναμικής συμπεριφοράς.

- **Σταθερό σημείο**. Σταθερό ή στατικό σημείο ενός δυναμικού συστήματος που περιγράφεται από την Εξ. (2) είναι ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο, ώστε

$$f(\bar{x}) = 0 \tag{3}$$

Από την Εξ. (3) παρατηρούμε ότι το σταθερό σημείο είναι μία λύση, η οποία δε μεταβάλλεται με το χρόνο. Τα σταθερά σημεία καλούνται επίσης *σημεία ισορροπίας* ή *στατικές καταστάσεις*. Υπάρχουν διαφορετικά είδη σταθερών καταστάσεων, τα οποία θα αναφερθούν παρακάτω.

- **Περιοδική λύση.** Μία περιοδική λύση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων της μορφής της Εξ. (2) είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$x(t + T) = x(t), \forall t \quad (4)$$

Η περίοδος της περιοδικής λύσης είναι η μικρότερη τιμή του T για την οποία ισχύει η Εξ. (4). Μια περιοδική λύση ενός συστήματος n -διαφορικών εξισώσεων σχηματίζει μια κλειστή καμπύλη στο n -διάστατο χώρο των φάσεων.

- **Οριακός κύκλος** Ας θεωρήσουμε την Εξ. (2) όπου $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Ο οριακός κύκλος ορίζεται ως μία απομονωμένη περιοδική τροχιά.
- **Χάος.** Το χάος αποτελεί μη περιοδική συμπεριφορά, ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες, οι οποίες αποδίδουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα για τα δυναμικά συστήματα, καθιστώντας, σε γενικές γραμμές, τη μακροπρόθεσμη πρόβλεψη αδύνατη.

Ευστάθεια

Ας θεωρήσουμε το αυτόνομο δυναμικό σύστημα Εξ. (2). Έστω $\bar{x}(t)$ μια λύση του συστήματος. Η λύση $\bar{x}(t)$ είναι *ευσταθής* αν άλλες λύσεις που βρίσκονται κοντά στο $\bar{x}(t)$ σε ένα δεδομένο χρόνο, παραμένουν κοντά στο $\bar{x}(t)$ για όλους τους επόμενους χρόνους. Η λύση θα είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής* αν γειτονικές λύσεις συγκλίνουν στη λύση $\bar{x}(t)$ όταν $t \rightarrow \infty$. Οι ορισμοί αυτοί μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως εξής [39]:

Ορισμός 0.0.1. (*Ευστάθεια Lyapunov*) Η λύση $\bar{x}(t)$ ονομάζεται *ευσταθής* (*ευσταθής κατά Lyapunov*) αν, για δεδομένο ϵ , υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon)$ έτσι ώστε, για κάθε άλλη λύση $y(t)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta, \text{ τότε } |\bar{x}(t) - y(t)| < \epsilon \text{ για } t > t_0.$$

Μια γεωμετρική ερμηνεία της ευστάθειας Lyapunov παρουσιάζεται στο Σχ. 1(α)².

Ορισμός 0.0.2. (*Ασυμπτωτική ευστάθεια*) Η λύση $\bar{x}(t)$ ονομάζεται *ασυμπτωτικά ευσταθής* (*ευσταθής κατά Lyapunov*) αν είναι ευσταθής κατά Lyapunov και αν υπάρχει σταθερή $\beta > 0$ έτσι, ώστε, αν $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \beta$, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$.

Μια γεωμετρική ερμηνεία της ασυμπτωτικής ευστάθειας παρουσιάζεται στο Σχ. 1(β). Τέλος, ένα σημείο ισορροπίας καλείται *ασταθές* όταν δεν είναι ευσταθές.

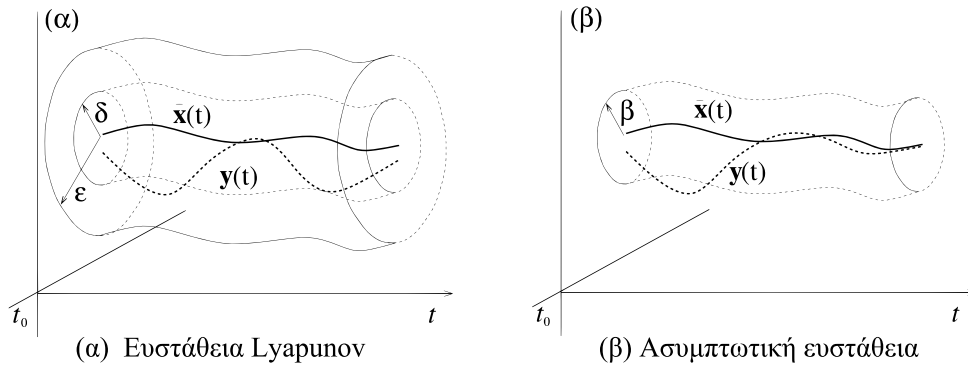
Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω ορισμό, η ευστάθεια αναφέρεται σε ένα σημείο ισορροπίας και, επομένως, αποτελεί μία ιδιότητα τοπικού χαρακτήρα. Αν κάποιος ενδιαφέρεται για την ολική συμπεριφορά του συστήματος, τις λύσεις για όλες τις αρχικές συνθήκες, τότε το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι ποιες τροχιές θα συγκλίνουν σε μία ευσταθή λύση και ποιες θα αποκλίνουν από αυτήν.

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = Ax \quad (5)$$

Είναι γνωστό πως το γραμμικό σύστημα (5) έχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας ($\bar{x} = 0$), η ευστάθεια του οποίου καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης A . Αν όλες

²Από το βιβλίο[35]



Σχήμα 1: Είδη ευστάθειας.

οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν έστω και μία ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σύστημα είναι ασταθές.

Σημείωση Στα γραμμικά συστήματα η περιοχή έλξης ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας είναι ολόκληρος ο χώρος των φάσεων: Όλες οι αρχικές συνθήκες δίνουν τροχιές οι οποίες πλησιάζουν την αρχή.

Σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα, σε ένα μη-γραμμικό σύστημα το πλήθος των σημείων ισορροπίας ποικίλλει. Ένα σύστημα μπορεί να έχει ένα, περισσότερα από ένα ή και καθόλου σημεία ισορροπίας. Επίσης, η περιοχή έλξης τους μπορεί να είναι περιορισμένη, οπότε η ύπαρξη ενός ευσταθούς σημείου ισορροπίας δεν εγγυάται και την ευστάθεια του συστήματος.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, στα μη-γραμμικά συστήματα, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια γύρω από ένα σημείο ισορροπίας \bar{x} εξετάζοντας την ευστάθεια στο αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα.

Ορίζοντας

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (6)$$

και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης από το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor γύρω από το $\bar{\mathbf{x}}$, τότε καταλήγουμε στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = J \Delta \mathbf{x} \quad (7)$$

όπου ο πίνακας J αποτελεί τον Ιακωβιανό πίνακα της f ως προς το \mathbf{x} επί του $\bar{\mathbf{x}}$ και ορίζεται ως:

$$J = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = f_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (8)$$

Η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $\bar{\mathbf{x}}$ καθορίζεται από την ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος βάσει των ιδιοτιμών του ιακωβιανού πίνακα J , όπως προηγουμένως. Πιο συγκεκριμένα:

- Εάν όλες οι ιδιοτιμές της $f_{\mathbf{x}}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας \mathbf{x} είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

- Εάν, τουλάχιστον μία ιδιοτιμή της ιακωβιανής του γραμμικοποιημένου συστήματος έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας \mathbf{x} είναι ασταθές.

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και πολλαπλότητες

Μέχρι στιγμής, έχουμε δείξει ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα (7) μπορεί να παρέχει χρήσιμες πληροφορίες, όσον αφορά την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος (2). Παρακάτω, θα δούμε πως τα ιδιοδιανύσματα του γραμμικοποιημένου συστήματος μπορούν να γενικευθούν και για την μη-γραμμική περίπτωση.

Είναι γνωστό ότι η απόκριση του γραμμικού συστήματος (5) για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, μπορεί να εκφραστεί με όρους του δεξιού (\mathbf{v}) και του αριστερού (\mathbf{w}) ιδιοδιανύσματος του πίνακα κατάστασης \mathbf{A} . Τα ιδιοδιανύσματα αυτά ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i\mathbf{v}_i & i &= 1, \dots, n \\ \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} &= \lambda_i\mathbf{w}_i^T & i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

Για απλούστευση, θεωρούμε ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει n ιδιοτιμές, διάφορες μεταξύ τους, τέτοιες ώστε για διαφορετικές ιδιοτιμές, το δεξιό και αριστερό ιδιοδιάνυσμα να είναι ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{v}_j = 0 \quad i \neq j \quad (10)$$

Η απόκριση του γραμμικού συστήματος για αρχική συνθήκη \mathbf{x}_0 , δίνεται:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}_0 \quad (11)$$

Θεωρώντας, τώρα, μια αρχική συνθήκη \mathbf{x}_0 , συγγραμμική με το δεξιό ιδιοδιάνυσμα \mathbf{v}_i , ($\mathbf{x}_0 = \alpha \mathbf{v}_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$) και αντικαθιστώντας την στη σχέση (11), με χρήση της (10), θα πάρουμε:

$$\mathbf{x}(t) = \alpha e^{\lambda_i t} (\mathbf{w}_i^T \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i = b \mathbf{v}_i, \quad b \in \mathbb{R} \quad (12)$$

Η σχέση (12) υποδηλώνει την *αναλλοίωτη* ιδιότητα του δεξιού ιδιοδιανύσματος. Επιπλέον, αν η ιδιοτιμή λ_i έχει αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε η τροχιά $\mathbf{x}(t)$ που δίνεται από τη σχέση (12) προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας, στην αρχή, αφού ο όρος $e^{\lambda_i t}$ τείνει στο μηδέν, καθώς $t \rightarrow \infty$. Αντίστοιχα, αν η ιδιοτιμή λ_i έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε η αντίστροφη τροχιά $\mathbf{x}(t)$ ξεκινάει από το σημείο ισορροπίας (για $t \rightarrow -\infty$).

Όλοι οι υπόχωροι που παράγονται από έναν αριθμό (δεξιών) ιδιοδιανυσμάτων έχουν την ίδια αναλλοίωτη ιδιότητα. Συγκεκριμένα, ο υπόχωρος που παράγεται από όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη, σχηματίζει τον *ευσταθή ιδιοχώρο* του γραμμικοποιημένου συστήματος. Όλες οι τροχές σε αυτόν τον υπόχωρο προσεγγίζουν την αρχή, καθώς $t \rightarrow \infty$. Ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με θετικά πραγματικά μέρη, σχηματίζει τον *ασταθή ιδιοχώρο*. Όλες οι τροχές σε αυτόν τον υπόχωρο προσεγγίζουν ξεκινούν την αρχή και απομακρύνονται καθώς $t \rightarrow \infty$. Τέλος, ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με μηδενικά πραγματικά μέρη, σχηματίζει τον *κεντρικό ιδιοχώρο* [40].

Σε ένα μη-γραμμικό σύστημα η αναλλοίωτη ιδιότητα των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοχώρων μεταφέρεται στο χώρο των φάσεων στις *αναλλοίωτες πολλαπλότητες* ίδιας διάστασης. Με τον όρο πολλαπλότητα εννοούμε μία λεία καμπύλη γραμμή, επιφάνεια ή υπερεπιφάνεια, χωρίς ιδιόμορφα σημεία. Η αναλλοίωτη πολλαπλότητα είναι ένας υπόχωρος του χώρου των φάσεων, τέτοιος, ώστε κάθε τροχιά που ξεκινάει από την πολλαπλότητα, να παραμένει σε αυτόν, συνεχώς.

Ο ευσταθής, ο ασταθής και ο κεντρικός ιδιοχώρος του γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας αντιστοιχούν στην ευσταθή, την ασταθή και τη κεντρική πολλαπλότητα του μη-γραμμικού συστήματος. Ακριβώς, όπως στην περίπτωση του ευσταθούς ιδιοχώρου, όλες οι τροχιές με αρχικές συνθήκες πάνω στην ευσταθή πολλαπλότητα, παραμένουν στην πολλαπλότητα, συνεχώς και, προσεγγίζουν το σημείο ισορροπίας καθώς $t \rightarrow \infty$. Ομοίως, όλες οι αντίστροφες τροχιές πάνω στην ασταθή πολλαπλότητα ξεκινάν από το σημείο ισορροπίας, δηλαδή, το πλησιάζουν καθώς $t \rightarrow -\infty$. Κοντά στο σημείο ισορροπίας οι τοπικές πολλαπλότητες εφάπτονται στους αντίστοιχους ιδιοχώρους του γραμμικοποιημένου συστήματος.

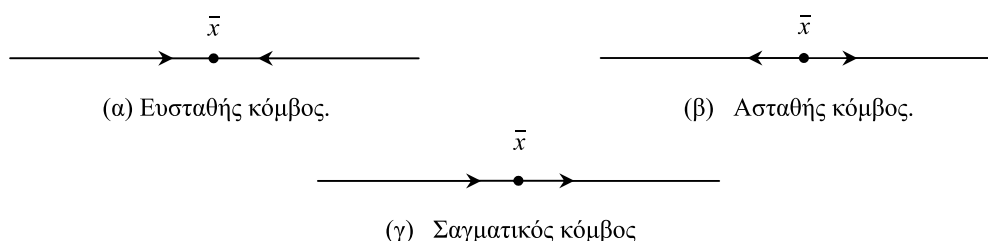
Οι πολλαπλότητες μπορούν είτε να διαφεύγουν στο άπειρο είτε να ενώνονται ομαλά (μια ευσταθής και μία ασταθής), είτε να οδηγούνται σε διαφορετικούς τόπους, είτε να τέμνονται. Στην τελευταία περίπτωση, μια πολλαπλότητα δεν μπορεί να τέμνει τον εαυτό της, ούτε και μία πολλαπλότητα ίδιας ευστάθειας, άλλου σταθερού σημείου. Έτσι, μια πολλαπλότητα μπορεί να τέμνει μόνο μία αντίθετης ευστάθειας πολλαπλότητα.

Όταν η ευσταθής πολλαπλότητα τέμνει την ασταθή πολλαπλότητα του ίδιου σταθερού σημείου, τότε το σημείο τομής ονομάζεται *ομοκλινικό σημείο*. Όταν η ευσταθής πολλαπλότητα τέμνει την ασταθή πολλαπλότητα διαφορετικού σταθερού σημείου, τότε το σημείο τομής ονομάζεται *ετεροκλινικό σημείο*. Όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω, ύπαρξη ομοκλινικών σημείων συνεπάγεται την εμφάνιση χάους στη γειτονιά στο σταθερού σημείου.

Είδη σημείων ισορροπίας

Τα ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος ονομάζονται *καταβόθρες* ή *ευσταθείς κόμβοι*. Αν όλες οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος, τότε τα ασταθή σημεία ισορροπίας καλούνται *πηγές* ή *ασταθείς κόμβοι*. Αν κάποιες ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος και όλες οι υπόλοιπες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε τα ασταθή σημεία ισορροπίας ονομάζονται *σαγματικά σημεία*.

Σημείωση Η γραμμικοποίηση δεν παρέχει καμία πληροφορία για την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας, όταν για το οποίο ο αντίστοιχος ιακωβιανός πίνακας έχει μία ή περισσότερες ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος.



Σχήμα 2: Είδη σημείων ισορροπίας.

Η ευστάθεια ενός τέτοιου σημείου (ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος) προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ευστάθειας: Αν για κάθε περιοχή κοντά στο σημείο ισορροπίας $\bar{x} = \mathbf{0}$ υπάρχουν αρχικές συνθήκες για τις οποίες οι τροχιές του συστήματος δεν είναι φραγμένες, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Αυτό το συγκεκριμένο είδος σημείου ισορροπίας ονομάζεται *σαγματικός κόμβος*.

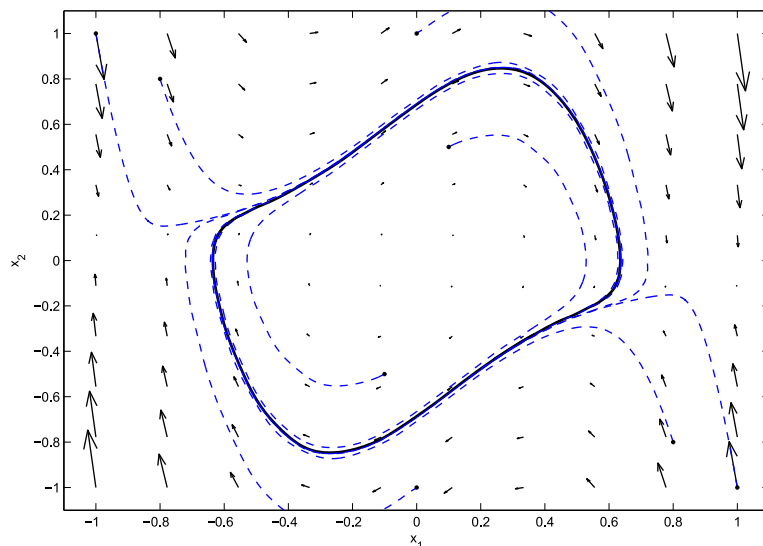
Για συστήματα πρώτης τάξης, τα τρία είδη σημείων ισορροπίας φαίνονται στο Σχήμα 2. Ο χώρος των φάσεων είναι η ευθεία γραμμή, ενώ, τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση των τροχιών [40]. Σε συστήματα πολλαπλών μεταβλητών, ένας σαγματικός κόμβος χαρακτηρίζεται από τον Ιακωβιανό πίνακα, ο οποίος έχει μία μηδενική ιδιοτιμή. Κοντά στο σαγματικό κόμβο υπάρχει μία κατεύθυνση στον χώρο των φάσεων, κατά μήκος της οποίας οι τροχιές συμπεριφέρονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 2(γ). Δηλαδή, από τη μια πλευρά του σημείου ισορροπίας να συγκλίνουν σε αυτόν, ενώ από την άλλη μεριά να αποκλίνουν.

Ένα άλλο ιδιαίτερο είδος σημείου ισορροπίας είναι το κέντρο. Το κέντρο είναι ένα σημείο ισορροπίας, το γραμμικοποιημένο σύστημα του οποίου χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών με μηδενικό πραγματικό μέρος. Συνεπώς, υπό την επίδραση του φανταστικού μέρους των ιδιοτιμών αυτών, όλες οι τροχιές σε μια περιοχή γύρω από αυτό είναι περιοδικές.

Γενικά, σε δυναμικά συστήματα προβλημάτων μηχανικής κάποιος πρέπει να εξετάσει ένας μεγάλο εύρος από σημεία, κάποια από τα οποία μπορεί να είναι ευσταθή, ενώ, κάποια άλλα ασταθή. Είναι, λοιπόν, αναπόφευκτο η ιδιαίτερη περίπτωση του σαγματικού κόμβου να υφίσταται ενδιάμεσα στις περιπτώσεις ευστάθειας και αστάθειας.

Για την περίπτωση του οριακού κύκλου, ο ορισμός της ευστάθειας είναι ανάλογος με αυτόν του σημείου ισορροπίας:

- Ένας οριακός κύκλος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, εάν όλες οι τροχιές που ξεκινάνε κοντά στον οριακό κύκλο πλησιάζουν σε αυτόν καθώς αυξάνεται ο χρόνος.
- Ένας οριακός κύκλος είναι ασταθής, εάν υπάρχουν τροχιές που ξεκινάνε κοντά στον οριακό κύκλο, οι οποίες απομακρύνονται από αυτόν καθώς αυξάνεται ο χρόνος.



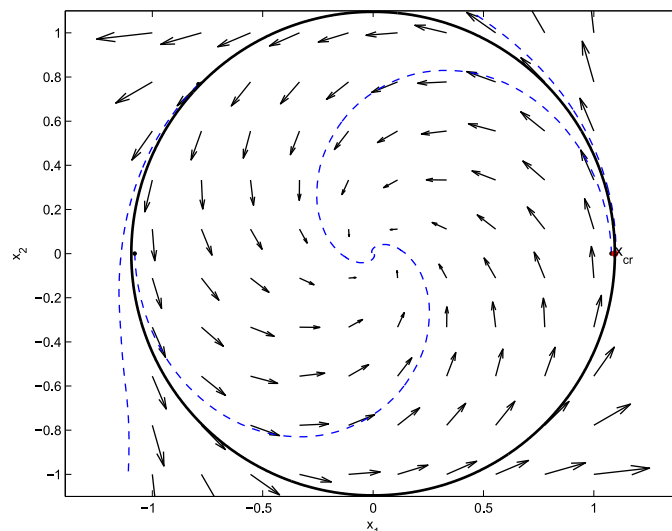
Σχήμα 3: Ταλαντωτής Van der Pol. Παράδειγμα ευσταθούς οριακού κύκλου.

Παράδειγμα ευσταθούς οριακού κύκλου

Μπορεί εύκολα να δειχθεί, χρησιμοποιώντας αριθμητική προσομοίωση, ότι όλες οι τροχιές που ξεκινάνε κοντά σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας, τελικά, καταλήγουν σε μία περιοδική ταλάντωση, η οποία φαίνεται στο Σχήμα 3 στο χώρο των φάσεων σαν μια κλειστή καμπύλη. Αφού η περιοδική λύση είναι απομονωμένη, τότε, είναι οριακός κύκλος. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, όλες οι τροχιές που ξεκινάνε είτε εξωτερικά, είτε εσωτερικά του οριακού κύκλου προσεγγίζουν την περιοδική λύση. Συνεπώς, ο οριακός κύκλος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα ασταθούς οριακού κύκλου

Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων. Οι τροχιές που ξεκινάνε από αρχικές συνθήκες μικρότερες από τις αρχικές συνθήκες του σημείου x_{cr} συγκλίνουν σπειροειδώς προς το σημείο ισορροπίας, ενώ, οι τροχιές των λύσεων με αρχικές συνθήκες μεγαλύτερες αυτών του κρίσιμου σημείου x_{cr} αποκλίνουν. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, από τις δύο τροχιές (με διακεκομμένη γραμμή) που ξεκινάνε κοντά στο κρίσιμο σημείο, η μία συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας και η άλλη που βρίσκεται λίγο πιο μακριά από το κρίσιμο σημείο αποκλίνει και απειρίζεται. Μεταξύ των δύο αυτών τροχιών μπορούμε να αναγνωρίσουμε έναν ασταθή οριακό κύκλο, ο οποίος φαίνεται με μαύρη έντονη γραμμή. Ο οριακός κύκλος διαχωρίζει τον χώρο των φάσεων σε δύο μέρη. Το εσωτερικό του οριακού κύκλου αποτελεί την περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας και ο ίδιος ο κύκλος αποτελεί το σύνορο της περιοχής έλξης. Κάθε τροχιά που ξεκινάει από τον οριακό κύκλο παραμένει σε αυτόν συνέχεια. Τέλος, όλος ο υπόλοιπος χώρος των φάσεων αποτελεί την ασταθή πολλαπλότητα.



Σχήμα 4: Παράδειγμα ασταθούς οριακού κύκλου.

Θεωρία Διακλαδώσεων

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, η δυναμική των διανυσματικών πεδίων είναι αρκετά περιορισμένη: όλες οι λύσεις είτε συγκλίνουν στα σημεία ισορροπίας, είτε απειρίζονται. Όμως, το ενδιαφέρον με τα δυναμικά συστήματα είναι η εξάρτησή τους από τις παραμέτρους. Η ποιοτική δομή της ροής μπορεί να αλλάξει καθώς οι παράμετροι μεταβάλλονται. Συγκεκριμένα [37], σταθερά σημεία μπορεί να δημιουργηθούν ή να εξαφανιστούν, ή μπορεί να αλλάξει η ευστάθειά τους. Αυτές οι ποιοτικές αλλαγές στη δυναμική ονομάζονται διακλαδώσεις και οι τιμές των παραμέτρων, στις οποίες υφίστανται διακλαδώσεις ονομάζονται σημεία διακλάδωσης.

Η θεωρία διακλαδώσεων εξετάζει πότε ένα μη γραμμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις ή από σύστημα διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων αλλάζει ριζικά την ποιοτική δομή και συμπεριφορά του για σχετικά μικρή μεταβολή των παραμέτρων του [41, 42].

Οι διακλαδώσεις αποτελούν ένα σημαντικό μέρος της επιστήμης, διότι παρέχουν μοντέλα για τις μεταβάσεις και τις αστάθειες των συστημάτων, καθώς οι παράμετροι μεταβάλλονται. Συνεπώς, μπορούμε να ξεκινήσουμε να περιγράψουμε τους τρόπους με τους οποίους ταλαντώσεις μπορεί να ξεκινούν και να σταματούν.

Τον όρο διακλάδωση, αρχικά, τον χρησιμοποίησε ο Poincare για να περιγράψει το διαχωρισμό των σημείων ισορροπίας σε μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων. Ο όρος αυτός προέρχεται από το γεγονός του ότι διαφορετικοί κλάδοι σημείων ισορροπίας τέμνονται μεταξύ τους, εξού και η ονομασία 'διακλάδωση'.

Αν θεωρήσουμε το σύστημα της Εξ. (2), τότε, τα σημεία ισορροπίας του συστήματος για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων μ , δίνονται από τις λύσεις της Εξ. (3), η οποία μπορεί να γραφτεί και ως

$$f(\bar{x}, \mu) = f_\mu(\bar{x}) = 0 \quad (13)$$

Καθώς το μ μεταβάλλεται, το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων³ συνεπάγεται ότι αυτά τα σημεία ισορροπίας περιγράφονται από ομαλές συναρτήσεις του μ μακριά από αυτά. Στα σημεία αυτά η Ιακωβιανή έχει μηδενική ιδιοτιμή. Συνεπώς, σε τέτοια σημεία η Ιακωβιανή είναι ιδιόμορφη, οπότε το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων δεν μπορεί να

³Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων: Έστω $F(x, y)$ μια C^1 -συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in S$. Υποθέτουμε ότι

(i) $F(x_0, y_0) = 0$ και

(ii) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Τότε, υπάρχουν $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ τέτοια ώστε στο ορθογώνιο $R = \{(x, y), |x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2\} \subseteq S$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

(α') $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \exists! y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) = 0$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει καλώς ορισμένη $y = f(x)$ που ικανοποιεί

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1).$$

(β') Έστω $y = f(x)$ η μοναδική συνάρτηση που ορίζεται στο (α'), τότε η συνάρτηση $f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \rightarrow (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ είναι συνεχής με συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

εφαρμοστεί. Το γράφημα κάθε μίας από αυτές τις συναρτήσεις αποτελεί έναν κλάδο ισορροπίας της Εξ. (2). Σε ένα σημείο ισορροπίας $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$, όπου η Ιακωβιανή έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, μπορεί να εμφανιστούν πολλοί κλάδοι ισορροπίας, οπότε, όπως αναφέραμε και πριν, το σημείο $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$ αποτελεί ένα σημείο διακλάδωσης.

Σε ευρύτερο πλαίσιο, ο ορισμός της διακλάδωσης περιέχει την έννοια της τοπολογικής ισοδυναμίας. Δηλαδή, παράγονται μεταβολές στην τοπολογική δομή μιας ροής, ενώ υπάρχουν πολλά άλλα είδη μεταβολών οι οποίες υφίστανται σε τοπολογικά ισοδύναμες κλάσεις ροών. Αν το πορτραίτο των φάσεων αλλάζει την τοπολογική δομή του καθώς μία παράμετρος μεταβάλλεται, τότε, λέμε ότι έχει συμβεί μία διακλάδωση. Τέτοια παραδείγματα περιλαμβάνουν μεταβολή στα παρακάτω ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος:

1. στο πλήθος των σημείων ισορροπίας
2. στο πλήθος των οριακών κύκλων
3. στην ευστάθεια των σημείων ισορροπίας ή των οριακών κύκλων
4. στην περίοδο των περιοδικών λύσεων
5. στις κλειστές τροχιές, γενικά ή σε ταυτίσεις σαγματικών σημείων

Ο χαρακτηρισμός των διακλαδώσεων είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων. Η θεωρία διακλαδώσεων παρέχει τη βάση για την ερμηνεία των παρατηρούμενων ποιοτικών αλλαγών των ελκυστών και άλλων οριακών καταστάσεων των δυναμικών συστημάτων. Οι διακλαδώσεις κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες. Στις τοπικές διακλαδώσεις, όπου μεταβάλλεται η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος σε 'σχετικά μικρή' περιοχή γύρω από τα σημεία ισορροπίας και στις ολικές διακλαδώσεις, όπου μεταβάλλεται η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος συνολικά, στο χώρο των φάσεων.

Στις επόμενες ενότητες αναφέρονται τρεις από τις πιο συνηθισμένες κατηγορίες διακλαδώσεων.

Διακλάδωση σαγματικού κόμβου

Ας θεωρήσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής της Εξ. (2) με σημείο ισορροπίας αυτό της Εξ. (13). Διακλάδωση σαγματικού κόμβου έχουμε όταν σε ένα σημείο συναντιούνται δύο κλάδοι ισορροπίας. Στη διακλάδωση αυτή το σημείο ισορροπίας γίνεται σαγματικός κόμβος, όπως λέει και το όνομά του. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σε αυτό το σημείο η Ιακωβιανή του συστήματος είναι ιδιόμορφη. Συνεπώς, οι απαραίτητες συνθήκες για μία διακλάδωση σαγματικού κόμβου δίνονται από την εξίσωση ισορροπίας (13) και από την ακόλουθη συνθήκη ιδιομορφίας:

$$\det(f_x(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu})) = 0 \quad (14)$$

Δεν είναι, όμως, όλα τα σημεία που ικανοποιούν αυτές τις απαραίτητες συνθήκες σημεία διακλάδωσης σαγματικού κόμβου. Για να φανεί η φύση των ικανών συνθηκών, θεωρούμε ένα βαθμωτό σύστημα. Για ένα τέτοιο σύστημα οι ικανές συνθήκες για διακλάδωση σαγματικού κόμβου είναι:

$$f(\bar{x}, \mu) = 0 \quad (15\alpha')$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (15\beta')$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \neq 0 \quad (15\gamma')$$

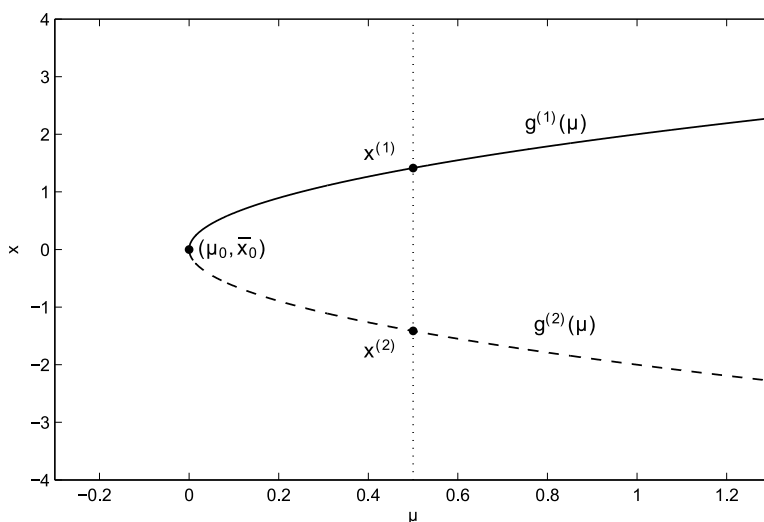
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0 \quad (15\delta')$$

Οι συνθήκες (15γ') και (15δ') συνήθως καλούνται *συνθήκες εγκαρσιότητας*. Η πρώτη (15γ') εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ομαλής τοπικής συνάρτησης $\mu = h(x)$ στο σημείο διακλάδωσης (μ_0, \bar{x}_0) . Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι ευσταθής πολλαπλότητα (15α') τέμνει την ευθεία $x = \bar{x}_0$ κάθετα. Η τελευταία συνθήκη (15δ') συνεπάγεται ότι η ευσταθής πολλαπλότητα παραμένει τοπικά στη μία μεριά της ευθείας $\mu = \mu_0$. Γενικά, για ένα μη-γραμμικό σύστημα πρώτου βαθμού:

Στη διακλάδωση σαγματικού κόμβου δύο σημεία ισορροπίας, ένα ευσταθές και ένα ασταθές, συγχωνεύονται και αφανίζονται.

Βλέποντάς το διαφορετικά, αν η παράμετρος μ γίνει μεγαλύτερη από την τιμή μ_0 και μειωθεί σιγά σιγά, τότε, στο σημείο διακλάδωσης θα εμφανιστούν ταυτόχρονα δύο σημεία ισορροπίας, ένα ευσταθές και ένα ασταθές. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να γενικευθεί για συστήματα με πολλαπλές μεταβλητές:

Στη διακλάδωση σαγματικού κόμβου δύο σημεία ισορροπίας συγχωνεύονται και αφανίζονται (ή εμφανίζονται ταυτόχρονα), όπως φαίνεται και στο Σχ. 5). Το ένα από τα σημεία ισορροπίας ($x^{(2)}$) έχει ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος, ενώ το άλλο ($x^{(1)}$) έχει ιδιοτιμή με αρνητικό πραγματικό μέρος, με αποτέλεσμα και τα δύο να μηδενίζονται στη διακλάδωση.



Σχήμα 5: Διακλάδωση σαγματικού κόμβου.

Αν όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του συστήματος αυτού (εκτός αυτής που μηδενίζεται στη διακλάδωση) έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, ο κλάδος $(g^{(1)}(\mu))$ του σημείου ισορροπίας $(x^{(1)})$ είναι ευσταθής και ο $(g^{(2)}(\mu))$ που φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή, ασταθής.

Σε συστήματα με πολλαπλές μεταβλητές, η διακλάδωση σαγματικού κόμβου είναι ένα σημείο ισορροπίας με μηδενική ιδιοτιμή και ικανοποιεί τις συνθήκες εγκαρσιότητας [43]. Η κεντρική πολλαπλότητα του σαγματικού κόμβου είναι μια καμπύλη στο n -διάστατο χώρο των φάσεων που εφάπτεται στο δεξί ιδιοδιάνυσμα της μηδενικής ιδιοτιμής. Η κεντρική πολλαπλότητα αποτελείται από μία ευσταθή και μία ασταθή πολλαπλότητα, οι οποίες διαχωρίζονται από ένα σημείο ισορροπίας, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2(γ).

Διακλάδωση Hopf-Andronov

Μέχρι τώρα είδαμε ότι μία διακλάδωση σαγματικού κόμβου χαρακτηρίζεται από μία μηδενική ιδιοτιμή και ότι η απόκριση του συστήματος στον σαγματικό κόμβο είναι μονότονη και η διακλάδωση συνοδεύεται από τροχιές που είναι απεριοδικές. Τώρα, θα συζητήσουμε για την εμφάνιση ταλαντευόμενης αστάθειας. Ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας μπορεί να μετατραπεί σε ασταθές αν ακολουθήσει μια μεταβολή της παραμέτρου του συστήματος, η οποία αναγκάζει ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος να περάσουν τον άξονα του φανταστικού μέρους στο μιγαδικό επίπεδο. Δηλαδή, όταν μηδενίζεται το πραγματικό τους μέρος και στη συνέχεια αλλάξει πρόσημο. Αυτού του είδους η ταλαντευόμενη αστάθεια συνδέεται στα μη-γραμμικά συστήματα με τη διακλάδωση Hopf-Andronov.

Οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη διακλάδωσης Hopf-Andronov είναι οι εξής τρεις:

1. Έστω ότι η διακλάδωση εμφανίζεται σε μία τιμή μ^* της παραμέτρου του συστήματος. Αφού αποτελεί λύση του συστήματος (2), τότε θα ισχύει η Εξ. (13):

$$f(\bar{x}, \mu^*) = 0$$

2. Η ιακωβιανή του συστήματος έχει ένα ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών $\lambda_{1,2} = \lambda(\mu^*)_{1,2} = \pm ib$, $b \in \mathbb{R}$, και καμία άλλη ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος μηδέν.

3. Ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial \text{Re} [\lambda(\mu^*)]}{\partial \mu} \neq 0$$

Τότε, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, γεννιέται ένας κλάδος οριακών κύκλων, ο οποίος έχει αρχική περίοδο $T = 2\pi/b$.

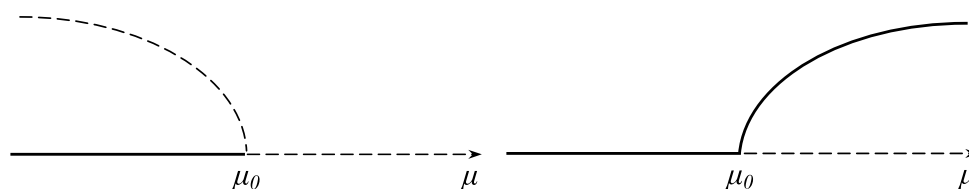
Σημείωση Τα περισσότερα σημεία ισορροπίας με καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές θα είναι σημεία διακλάδωσης Hopf-Andronov, αλλά, όμοια με την περίπτωση της διακλάδωσης σαγματικού κόμβου, μπορεί να υπάρχουν ιδιαίτερες περιπτώσεις, για τις οποίες το πραγματικό μέρος του κρίσιμου ζεύγους ιδιοτιμών να μην αλλάζει πρόσημο μετά τη μηδένισή του. Αυτά τα σημεία δεν είναι σημεία διακλάδωσης Hopf-Andronov. Επίσης, διακλαδώσεις Hopf-Andronov μπορούν να υφίστανται σε χώρους φάσεων οποιασδήποτε διάστασης $n \geq 2$.

Ενώ στη διακλάδωση σαγματικού κόμβου η περιοχή έλξης του ευσταθούς κλάδου συρρικνώνεται λόγω του ότι πλησιάζει στον ασταθή, ώσπου, τελικά, χάνεται όταν οι δύο κλάδοι συγχωνεύονται, στη διακλάδωση Hopf-Andronov η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας χάνεται μέσω της αλληλεπίδρασής της με έναν οριακό κύκλο. Έτσι, υπάρχουν δύο είδη διακλάδωσης Hopf-Andronov, οι οποίες εξαρτώνται από τη φύση αυτής της αλληλεπίδρασης:

- **Υπερκρίσιμη Διακλάδωση Hopf-Andronov.** Καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του συστήματος, ένας ευσταθής οριακός κύκλος δημιουργείται στη διακλάδωση και ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας μετατρέπεται σε ασταθές το οποίο προκαλεί ταλαντώσεις με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης. Οι ταλαντώσεις αυτές, τελικά, ελκύνονται από τον ευσταθή οριακό κύκλο, με αποτέλεσμα ο δεύτερος να αυξάνει σε πλάτος.
- **Υποκρίσιμη Διακλάδωση Hopf-Andronov.** Καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του συστήματος, ένας ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος υπήρχε πριν τη διακλάδωση, συρρικνώνεται και, τελικά, εξαφανίζεται, καθώς συγχωνεύεται με το σημείο ευσταθούς ισορροπίας που περιέβαλε, στη διακλάδωση. Μετά τη διακλάδωση, το σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές, με αποτέλεσμα λύσεις που υπήρχαν κοντά στη διακλάδωση να αναγκάζονται σε ταλαντώσεις με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης.

Ο τύπος αυτός της υποκρίσιμης διακλάδωσης είναι πιο "δραματικός" και δυνητικά πιο επικίνδυνος σε εφαρμογές μηχανικής. Μετά από αυτή τη διακλάδωση, οι τροχιές πρέπει να μεταπηδήσουν σε κάποιον απομακρυσμένο ελκυστή, ο οποίος μπορεί να είναι ένα σταθερό σημείο, ένας άλλος οριακός κύκλος, το άπειρο, ή, στην περίπτωση τριών ή περισσότερων διαστάσεων, ένας χαοτικός ελκυστής [37]. Περιπτώσεις υποκρίσιμων διακλαδώσεων Hopf-Andronov εμφανίζονται στη δυναμική των νευρικών κυττάρων [44], στον αεροελαστικό πτερυγισμό και σε άλλες δονήσεις των πτερυγίων αεροπλάνων [45–47].

Σημείωση Στην περίπτωση της υποκρίσιμης διακλάδωσης, όταν οι λύσεις αναγκάζονται σε ταλαντώσεις με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης, το σύστημα θα έχει, τότε, υποστεί *υστέρηση*: από τη στιγμή που έχουν ξεκινήσει ταλαντώσεις με μεγάλο πλάτος, δεν μπορούν να σταματήσουν αν γυρίσουμε σε προηγούμενη τιμή της παραμέτρου του συστήματος. Για την ακρίβεια, οι μεγάλες ταλαντώσεις θα επιμείνουν μέχρις ότου ένας ευσταθής και ένας ασταθής οριακός κύκλος συγκρουστούν και αφανιστούν. Αυτού του είδους καταστροφής των οριακών κύκλων μεγάλου πλάτους υφίσταται μέσω ενός άλλου τύπου διακλάδωσης, ο οποίος θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα.



(α) Υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf

(β) Υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf

Σχήμα 6: Υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf-Andronov.

Οι δύο τύποι της διακλάδωσης Hopf-Andronov παριστάνονται γραφικά στο Σχ. 6. Η ευθεία γραμμή αντιστοιχεί σε σημεία ισορροπίας, ενώ η καμπύλη αναπαριστά το πλάτος του οριακού κύκλου. Οι έντονες γραμμές αντιστοιχούν σε ευσταθή σημεία ισορροπίας (ή οριακό κύκλο), ενώ η διακεκομμένη γραμμή σε ασταθή σημεία (ή οριακό κύκλο). Σε κάθε γράφημα, η τετμημένη είναι η παράμετρος μ του συστήματος και μ_0 είναι η τιμή της διακλάδωσης. Η τεταγμένη αναπαριστά το πλάτος του οριακού κύκλου.

Στο Σχ. 6(α) το πλάτος του ασταθούς οριακού κύκλου φαίνεται να μειώνεται, καθώς η παράμετρος πλησιάζει την τιμή της διακλάδωσης. Στο σημείο διακλάδωσης ο οριακός κύκλος εξαφανίζεται και το σημείο ισορροπίας μετατρέπεται από ευσταθές σε ασταθές. Η περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας πριν τη διακλάδωση, φράσσεται από την ευσταθή πολλαπλότητα του ασταθούς οριακού κύκλου. Οι τροχιές μετά τη διακλάδωση είναι μη φραγμένες. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *σφοδρή απώλεια ευστάθειας* [48]. Η διακλάδωση ονομάζεται υποκρίσιμη, διότι ο κλάδος του οριακού κύκλου που προέρχεται από τη διακλάδωση κατευθύνεται προς τα αριστερά, δηλαδή, υφίσταται για μικρότερες τιμές της παραμέτρου.

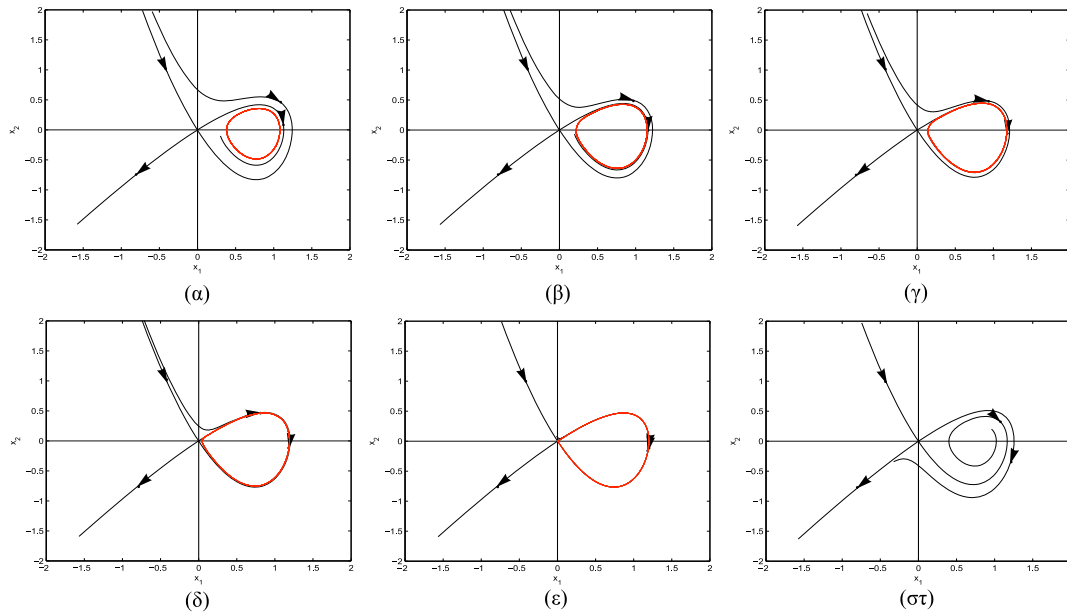
Η εξέλιξη της απόκρισης του συστήματος είναι περίπου διαφορετική για την περίπτωση της υπερκρίσιμης διακλάδωσης Hopf-Andronov, η οποία απεικονίζεται στο Σχ. 6(β). Πριν τη διακλάδωση δεν υπάρχει οριακός κύκλος που να φράσσει την περιοχή έλξης της ευσταθούς λύσης. Ο οριακός κύκλος δημιουργείται στο σημείο διακλάδωσης και είναι ευσταθής. Μετά τη διακλάδωση οι τροχιές που ξεκινούν κοντά στην ασταθή λύση ελκύνονται από την ευσταθή οριακό κύκλο, με αποτέλεσμα οι οποιεσδήποτε ταλαντώσεις να είναι φραγμένες. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *ήπια απώλεια ευστάθειας* [48]. Από μία γενική σκοπιά, αυτού του είδους η διακλάδωση προκαλεί ελάχιστη μεταβολή, αρχικά. Πράγματι, πριν τη διακλάδωση οι τροχιές συγκλίνουν στα ευσταθή σημεία ισορροπίας με ελαφρώς φθίνουσες, σταθερές ταλαντώσεις. Αμέσως μετά τη διακλάδωση οι ίδιες τροχιές ελκύνονται από τον ευσταθή, μικρού πλάτους οριακό κύκλο.

Δοθέντος ότι μια διακλάδωση Hopf-Andronov υφίσταται, πώς μπορούμε να πούμε αν είναι υπό ή υπέρ-κρίσιμη; Η γραμμικοποίηση δεν παρέχει κάποιον κανόνα διαχωρισμού: και στις δύο περιπτώσεις, ένα ζεύγος ιδιοτιμών κινείται από το αριστερό στο δεξί ημιπίπεδο των μιγαδικών. Παρότι, υπάρχει ένα αναλυτικό κριτήριο, η χρήση του είναι αρκετά δύσκολο να γίνει. Ο πιο γρήγορος τρόπος για μία τέτοια προσέγγιση είναι με χρήση υπολογιστή. Αν, για παράδειγμα, ένας οριακός κύκλος με μικρή έλξη εμφανιστεί αμέσως μετά αφότου ένα σταθερό σημείο γίνει ασταθές και, αν το πλάτος του αρχίσει να μηδενίζεται καθώς η παράμετρος αντιστρέφεται, τότε η διακλάδωση είναι υπερκρίσιμη. Διαφορετικά, είναι, πιθανότατα, υποκρίσιμη, οπότε, σε αυτή την περίπτωση, ο κοντινότερος ελκυστής μπορεί να βρίσκεται μακριά από το σταθερό σημείο και το σύστημα να παρουσιάσει υστέρηση καθώς η παράμετρος αντιστρέφεται.

Διακλάδωση ομοκλινούς βρόγχου - Ομοκλινική Διακλάδωση

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι με τους οποίους οριακοί κύκλοι δημιουργούνται και καταστέφονται. Η διακλάδωση Hopf-Andronov είναι η πιο διαδεδομένη, διότι οι υπόλοιποι είναι πιο δύσκολο να ανιχνευτούν, αφού εμπλέκουν μεγάλες περιοχές του χώρου των φάσεων, αντί για τη γειτονιά μόνο ενός απλού σταθερού σημείου. Έτσι, λοιπόν, κατ' αντιστοιχία με τις τοπικές διακλαδώσεις των προηγούμενων ενοτήτων, αυτές καλούνται ολικές διακλαδώσεις, όπως είχαμε αναφέρει στην αρχή του κεφαλαίου.

Σε ένα από αυτά τα σενάρια [37], έχουμε ότι μέρος του οριακού κύκλου (κόκκινη γραμμή στο Σχ. 7α) κινείται όλο και πιο κοντά σε ένα σαγματικό κόμβο. Στο σημείο της διακλάδωσης ο κύκλος εφάπτεται του σαγματικού κόμβου και μετατρέπεται σε μία απομονωμένη



Σχήμα 7: Ομοκλιτική διακλάδωση.

κλειστή καμπύλη που ονομάζεται *ομοκλιτική διακλάδωση*. Η διακλάδωση αυτή συμβαίνει για μία κρίσιμη τιμή μ_{cr} της παραμέτρου του συστήματος. Για τιμές μικρότερες από την μ_{cr} ο οριακός κύκλος περνάει κοντά από τον σαγματικό κόμβο και φράσσει την περιοχή έλξης (Σχ. 7α,β). Καθώς το μ αυξάνεται, ο οριακός κύκλος ελκύεται (Σχ. 7γ,δ) και, τελικά, στο μ_{cr} χτυπάει τον σαγματικό κόμβο (Σχ. 7ε), με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί η ομοκλιτική τροχιά. Για τιμές μεγαλύτερες του μ_{cr} η ένωση του σάγματος σπάει και ο βρόγχος καταστρέφεται (Σχ. 7στ).

Ας κοιτάξουμε το φαινόμενο από την αρχή, υποθέτοντας ότι ακόμα δεν υπάρχει οριακός κύκλος κοντά στην περιοχή αυτή. Το κλειδί σε αυτού του είδους τη διακλάδωση είναι η συμπεριφορά της ασταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας (σαγματικού κόμβου): ο ένας κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας του σαγματικού κόμβου ταυτίζεται με έναν κλάδο ευσταθούς πολλαπλότητάς του. Τότε, δημιουργείται ο ομοκλιτικός βρόγχος, ο οποίος περνάει από το σαγματικό κόμβο. Αυτός ο βρόγχος που αποτελείται από τις πολλαπλότητες του σαγματικού κόμβου, φράσσει την περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας.

Κατά τη διάρκεια αυτής της διακλάδωσης δημιουργείται ένας ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος, φράσσει την περιοχή έλξης του ευσταθούς κόμβου. Με περαιτέρω αύξηση της παραμέτρου, η ένωση του σάγματος θα σπάσει, ο βρόγχος θα καταστραφεί και ο οριακός κύκλος θα αρχίσει να συρρικνώνεται και να πλησιάζει το ευσταθές σημείο ισορροπίας, μέχρι όπου ο κύκλος να ταυτιστεί με το ευσταθές σημείο ισορροπίας που περιέβαλε (Σχ. 7στ).

Παρατήρηση Σε αυτήν την περίπτωση, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν ο οριακός κύκλος ταυτιστεί με το ευσταθές σημείο ισορροπίας το οποίο περιέβαλε, τότε θα δημιουργήσει, με την εξαφάνισή του, ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Αυτό το φαινόμενο είναι η περίπτωση της υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf-Andronov που περιγράψαμε παραπάνω. Στην επόμενη ενότητα θα μιλήσουμε περαιτέρω για αυτή τη σχέση των δύο διακλαδώσεων.

Για κάθε μία από τις διακλαδώσεις υπάρχουν χαρακτηριστικοί νόμοι κλιμάκωσης, οι οποίοι διέπουν το πλάτος και την περίοδο του οριακού κύκλου, καθώς η διακλάδωση προ-

σεγγίζεται. Για την περίπτωση της ομοκλιτικής διακλάδωσης, η κλιμάκωση της περιόδου καθορίζεται με την εκτίμηση του χρόνου που χρειάζεται η τροχιά για να περάσει από τον σαγματικό κόμβο. Σε χώρους φάσεων μεγαλύτερης διάστασης, οι αντίστοιχες διακλαδώσεις υπακούν στους ίδιους νόμους κλιμάκωσης:

1. Μπορεί να υφίστανται πολλές επιπλέον διακλαδώσεις ή οριακοί κύκλοι.
2. Η ομοκλιτική διακλάδωση είναι πολύ πιο ευαίσθητη για να αναλυθεί. Συχνά, δημιουργεί χαοτικές δυναμικές ως επακόλουθο [39, 40].

Εξετάζοντας την κλιμάκωση της περιόδου και του πλάτους των ταλαντώσεων κοντά σε αυτή τη διακλάδωση, μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για τις δυναμικές του συστήματος. Με αυτόν τον τρόπο, πιθανά μοντέλα μπορούν να προταθούν ή να απορριφθούν.

Σχέση μεταξύ ομοκλιτικής και υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf-Andronov

Όπως και παραπάνω, έχει παρατηρηθεί ότι υποκρίσιμες διακλαδώσεις Hopf-Andronov που εμφανίστηκαν, να συνοδεύονται από περιοδικές τροχιές, οι οποίες είναι σχεδόν ομοκλιτικές.

Η Hopf-ομοκλιτική διακλάδωση δεν συμβαίνει σε γενικές οικογένειες μιας μεταβλητής. Παρόλ' αυτά, τροχιές που προσεγγίζουν Hopf-ομοκλιτικές διακλαδώσεις, φαίνεται να έχουν παραχθεί από Hopf-Andronov διακλαδώσεις, ακόμα και σε περιπτώσεις που τα συστήματα δε βρίσκονται κοντά σε ομοκλιτικές διακλαδώσεις. σε οικογένειες πολλαπλών μεταβλητών. Εν ολίγοις, αυτό συμβαίνει από εγκάρσια ευστάθεια κατά μήκος της ευσταθούς πολλαπλότητας ενός σημείου ισορροπίας, το οποίο έχει (ελαφρώς) ασταθή πολλαπλότητα που έχει δημιουργηθεί από Hopf-Andronov διακλάδωση. Μεγάλες περιοχές του χώρου των φάσεων προσελκύονται στην περιοχή της ευσταθούς πολλαπλότητας και κινούνται παράλληλα με την ευσταθή πολλαπλότητα κοντά στο σημείο ισορροπίας, προτού απωθηθούν κατά μήκος της ασταθούς πολλαπλότητας.

Όταν το σύστημα βρίσκεται κοντά και σε ομοκλιτική και Hopf-Andronov διακλάδωση, είναι αναγκαίο να καθοριστούν περιοχές παραμέτρων που να καθορίζουν την επίδραση της εκάστοτε επικρατούσας διακλάδωσης, ώστε η μελέτη του συστήματος να γίνει με την αντίστοιχη κατάλληλη προσέγγιση, ώστε να καθοριστούν οι ταλαντώσεις των τροχιών με μεγάλη περίοδο. Ένα σύστημα πρέπει να βρίσκεται πολύ πιο κοντά σε μία ομοκλιτική διακλάδωση, παρά σε μία Hopf-Andronov, προκειμένου η ομοκλικότητα να παίξει σημαντικό ρόλο στην αύξηση της περιόδου της περιοδικής τροχιάς.

Η σύμπτωση της Hopf-Andronov και της ομοκλιτικής διακλάδωσης έχει αναλυθεί από τους Hirsch και Knobloch [49] και, Bosch και Simo [50], αλλά η φαινομενολογία στη δεύτερη περίπτωση είναι σημαντικά διαφορετική. Η περίπτωση της υποκρίσιμης διακλάδωσης, όπου το σημείο ισορροπίας γεννάει τον ασταθή οριακό κύκλο, μελετήθηκε αρχικά, από τον Belyakov [51] το 1974, ο οποίος απέδειξε ότι η ομοκλιτική τροχιά ενός σημείου ισορροπίας διακλαδώνεται σε δύο ομοκλιτικές τροχιές του γεννώμενου ασταθούς οριακού κύκλου, καθώς αυτή διαβαίνει τη Hopf-Andronov διακλάδωση. Το 1995 οι Deng και Sakamoto [52] επιβεβαίωσαν και επέκτειναν αυτήν την ανάλυση, ώστε να δώσουν μία περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος στη γειτονιά μιας δισδιάστατης παραμέτρου για μία Hopf-μονοκλιτική διακλάδωση. Έδωσαν μία εκτενή περιγραφή για την ύπαρξη χαοτικών και ομοκλιτικών τροχιών σε υποκρίσιμη Hopf-ομοκλιτική διακλάδωση.

Η εμφάνιση των ομοκλιτικών τροχιών που ξεκινούν ως συνέπεια υποκρίσιμης Hopf-Andronov διακλάδωσης, συμβαίνουν επειδή μεγάλες περιοχές του χώρου των φάσεων ενός συστήματος που υποβάλλεται σε μία υποκρίσιμη Hopf-ομοκλιτική διακλάδωση, ρέουν κοντά στην ευσταθή πολλαπλότητα του διακλαδιζόμενου σημείου ισορροπίας. Αυτό

το φαινόμενο είναι γενικό και εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές. Ο ελκυστής που εμφανίζεται κατόπιν της υποκρίσιμης Hopf-Andronov διακλάδωσης, είναι, συχνά, τροχιά με μεγάλη περίοδο, ενώ, αν έχει άμεση γειτνίαση με τη Hopf-ομοκλινική διακλάδωση, τότε είναι δυνατόν να υπάρξουν χαοτικοί ελκυστές τύπου Shilnikov [53, 54].

Γενικά, σε συστήματα που βρίσκονται σε χαμιλτονιανή μορφή, ο υπολογισμός μίας συνθήκης που να καθορίζει σε ποια, ακριβώς, τιμή της παραμέτρου του συστήματος θα εμφανιστεί ομοκλινική διακλάδωση και, περαιτέρω, χαοτικός ελκυστής, είναι αντικείμενο μελέτης του θεωρήματος Melnikov [55]. Συστήματα που δε βρίσκονται σε χαμιλτονιανή μορφή αποτελούν αντικείμενο έρευνας, διότι δεν υπάρχουν ευρέως γνωστές διαδικασίες εύρεσης της κρίσιμης αυτής τιμής της παραμέτρου για την οποία θα εμφανιστεί ομοκλινική διακλάδωση.

Μετάβαση στο Χάος

Μέχρι τώρα, έχουμε αναφέρει ότι οι ομοκλινικές τροχιές είναι ιδιαίτερες τροχιές που συνδέουν σημεία ισορροπίας, οι διακλαδώσεις των οποίων μπορεί να προκαλέσουν χάος ή περιοδικές τροχιές [40, 56]. Έτσι, οι ομοκλινικές τροχιές των δυναμικών συστημάτων είναι σημαντικές, διότι μπορεί να αποτελέσουν "κέντρα οργάνωσης" για τη δυναμική στην περιοχή που εμφανίζονται. Λόγω της ύπαρξής τους, κάποιος μπορεί, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, να συμπεράνει την ύπαρξη χάους κοντά στην περιοχή (π.χ. δυναμικές που σχετίζονται με το πέταλο του Smale [57]), ή συμπεριφορά διακλάδωσης των περιοδικών τροχιών.

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για τη μελέτη της επίδρασης των μεταβλητών σε μη γραμμικά συστήματα και τους τρόπους μετάβασής του στο χάος. Αναλυτικές τεχνικές, όπως η θεωρία διαταραχών πολλαπλής κλιμάκωσης και η μέθοδος του Melnikov, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη μη-γραμμικών φαινομένων και ομοκλινικών διακλαδώσεων, συγκεκριμένα.

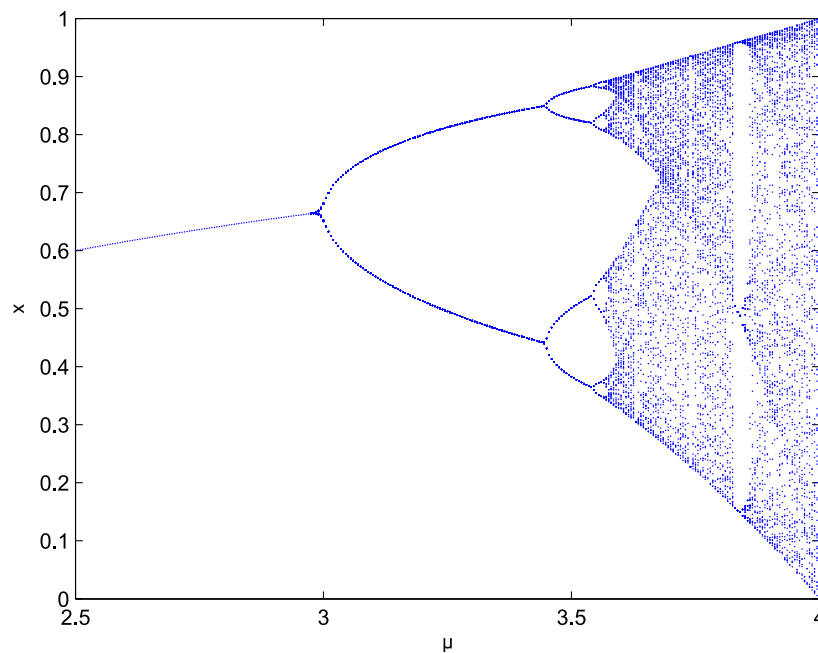
Στην κλασική βιβλιογραφία των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων, υπάρχουν τρία σενάρια που αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικούς τρόπους δημιουργίας διαδοχικών διακλαδώσεων, με τα οποία εμφανίζεται χαοτική συμπεριφορά:

1. Το Feigenbaum σενάριο, το οποίο αντιστοιχεί σε δημιουργία διαδοχικών διακλαδώσεων μέσω διπλασιασμού της περιόδου
2. Το Ruelle-Takens σενάριο, το οποίο εμπεριέχει την περαιτέρω διακλάδωση τριών διαδοχικών Hopf-Andronov διακλαδώσεων με την επακόλουθη καταστροφή του προκύπτοντος τρισδιάστατου τόρου.
3. Το Pomeau-Manneville σενάριο για μετάβαση στο χάος μέσω διαλείπουσας συμπεριφοράς⁴

Το Feigenbaum σενάριο είναι ένας μοναδικός τρόπος για τη μετάβαση στο χάος, σε μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι μία ευσταθής περιοδική λύση του συστήματος εξαφανίζεται, καθώς η παράμετρος μεταβάλλεται, αλλά αφήνει πίσω της ένα "ίχνος" της ύπαρξής της, με αποτέλεσμα οι τροχιές του συστήματος να αρχίζουν να ταλαντώνονται. Αυτές οι ταλαντώσεις είναι σχεδόν πανομοιότυπες με εκείνες της προηγούμενης ευσταθούς περιοδικής τροχιάς, αλλά κομμένες, κατά σημεία,

⁴Με τον όρο διαλείπουσα εννοούμε την ακανόνιστη εναλλαγή των φάσεων των φαινομενικά περιοδικών και χαοτικών δυναμικών είτε μέσω διακλάδωσης σαγματικού κόμβου, είτε μέσω υποκρίσιμης Hopf-Andronov διακλάδωσης, είτε μέσω αντίστροφης διακλάδωσης διπλασιασμού περιόδου.

σχηματίζοντας ανώμαλες χαοτικές διακυμάνσεις (Σχ. 8). Η πιθανότητα ύπαρξης ενός τέτοιου φαινομένου απεικονίζεται μόνο από μαθηματικά μοντέλα που διαπραγματεύονται απλές μονοδιάστατες απεικονίσεις και διαφορικές εξισώσεις.



Σχήμα 8: Μετάβαση στο χάος με διπλασιασμό της περιόδου.

Το Ruelle-Takens σενάριο μετάβασης στο χάος, καθώς και το Landau σενάριο που βασίζεται σε μία άπειρη ακολουθία Hopf-Andronov διακλαδώσεων, στηρίζονται στο αξίωμα ότι ένας τρισδιάστατος τόπος δημιουργείται, αναγκαστικά, κατά τη διάρκεια των εν λόγω μεταβάσεων διακλάδωσης.

Το Pomeau-Manneville σενάριο (το οποίο και περιέχει όλες τις έννοιες που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα) περιγράφει τρεις διαδρομές για διαλείπουσα, όπου ένα σχεδόν περιοδικό σύστημα παρουσιάζει διαστήματα με ακανόνιστες εκρήξεις χάους. Αυτές οι διαδρομές αντιστοιχούν στην προσέγγιση μιας διακλάδωσης σαγματικού κόμβου, μιας υποκρίσιμης Hopf-Andronov διακλάδωσης ή μιας αντίστροφης διακλάδωσης διπλασιασμού της περιόδου. Στις εμφανείς περιοδικές φάσεις, η συμπεριφορά είναι σχεδόν περιοδική και, σιγά-σιγά, παρασυρόμενη μακριά από την ασταθή περιοδική τροχιά. Τελικά, το σύστημα φτάνει αρκετά μακριά από την περιοδική τροχιά, με αποτέλεσμα να μην επηρεάζεται από χαοτικές δυναμικές στον υπόλοιπο χώρο των φάσεων, μέχρις ότου πλησιάσει την τροχιά ξανά και, επιστρέψει πάλι στην σχεδόν περιοδική συμπεριφορά. Αφού ο χρόνος που παρέμεινε κοντά στην περιοδική τροχιά εξαρτάται από το πόσο κοντά το σύστημα εισήλθε στη γειτονιά της, η διάρκεια της κάθε φάσης είναι απρόβλεπτη.

Διαλείπουσα συμπεριφορά παρατηρείται πιο συχνά σε προβλήματα ροής τυρβώδων ρευστών ή ρευστών κοντά στη μετάβαση σε τύρβη. Σε ιδιαίτερα τυρβώδεις ροές η διαλείπουσα φαίνεται στην ακανόνιστη διάχυση της κινητικής ενέργειας. Εμφανίζεται, επίσης στην ακανόνιστη εναλλαγή μεταξύ τυρβώδους και μη-τυρβώδους ρευστού που εμφανίζεται στους κινητήρες αεριώθησης, αλλά και σε άλλες τυρβώδεις ροές, ελεύθερες από διάτμηση. Στη ροή σωλήνων και σε άλλων έγκλειστων, διατμητικών ροών υπάρχουν ριπές διαλείπουσας που είναι κεντρικής σημασίας για τη διαδικασία της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Τέλος, διαλείπουσα συμπεριφορά έχεις, επίσης, αποδειχθεί πειραματικά σε ταλαντωτές κυκλωμάτων και σε χημικές αντιδράσεις.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία καύσης και υπολογιστική δυναμική των ρευστών

“Η καύση είναι η πιο σημαντική αντίδραση σε ολόκληρη την ανθρωπότητα. Η ύπαρξη όλων των ανθρώπων και των ζώων εξαρτάται από την καύση και τις πηγές ενέργειάς της. Η πρώτη πραγματική πρόοδος της ανθρωπότητας που αποτέλεσε τη διαφοροποίηση και εξέλιξη από τη μέχρι τότε “ανθρωπομορφική” ζωή του, εξαρτήθηκε από τον έλεγχο της φωτιάς ή, της καύσης, γενικότερα. Με πολλούς τρόπους, η περαιτέρω εξέλιξή μας εξαρτάται από όλο και πιο έξυπνη και αποτελεσματική διαχείριση της καύσης. Αρχικά, χρησιμοποιήθηκε για να δημιουργήσει μία τρεμάμενη φλόγα και λατρεύτηκε ως ο “Θεός Φωτιά”. Περαιτέρω εμπειρία και γνώση οδήγησαν σε πιο αποτελεσματικές χρήσεις της καύσης, ως πηγή θερμότητας και, σχετικά πρόσφατα, ως πηγή ισχύος στους κινητήρες εσωτερικής καύσης.”¹

Παρότι, η περίπτωση της τρεμάμενης φλόγας είναι γνωστή από τα αρχαία χρόνια, ακόμα μελετάμε αυτές τις “απλές” φλόγες διάχυσης και προσπαθούμε να καταλάβουμε τους μηχανισμούς που τις διέπουν. Η ενέργεια της καύσης χρησιμοποιείται κυρίως για να παράγει θερμότητα και ισχύ. Παραδείγματα αυτής της εφαρμογής είναι η οικιακή θέρμανση, πυροδότηση των βιομηχανικών κλιβάνων και η χρήση κινητήρων αυτοκινήτου και τουρμπίνων καυσίμου. Συνεπώς, η σχεδίαση και χρήση συσκευών θερμότητας και ισχύος, καθώς, επίσης, και κινητήρων συνδέεται στενά με το θέμα της αποδοτικής χρησιμοποίησης ενέργειας. Λόγω της σημασίας που έχουν τα οχήματα μεταφοράς ως μεγάλοι καταναλωτές καυσίμων προϊόντων πετρελαίου και συμβάλλοντας στην ατμοσφαιρική ρύπανση, υπήρξε εκτεταμένη ανάπτυξη από τις αρχές της δεκαετίας του 1970 για πιο αποτελεσματική και καθαρότερη καύση στους κινητήρες εσωτερικής καύσης των αυτοκινήτων.

1.1 Μηχανές εσωτερικής καύσης

Ο όρος μηχανή εσωτερικής καύσης αναφέρεται, συχνά, σε έναν κινητήρα του οποίου η καύση είναι διακεκομμένη, όπως είναι οι πιο γνωστοί τετράχρονοι και δίχρονοι κινητήρες, μαζί με άλλες παραλλαγές αυτών. Μία δεύτερη κατηγορία κινητήρων εσωτερικής καύσης χρησιμοποιεί συνεχόμενη καύση. Τέτοιοι κινητήρες είναι οι αεροστρόβιλοι (τουρμπίνες) και οι κινητήρες αερίωθησης, όπως και οι κινητήρες των πυραύλων, κάθε ένας από

¹Τμήμα της εισαγωγής του συμποσίου καύσης του 1928 [11].

τους οποίους αποτελεί κινητήρα εσωτερικής καύσης που χρησιμοποιεί σύστημα συνεχόμενης καύσης, όπου συμπίεση, καύση και εκτόνωση υφίστανται ταυτόχρονα, σε διαφορετικά μέρη του κινητήρα, με αποτέλεσμα αυτός να δίνει συνεχή ισχύ.

Οι κινητήρες εσωτερικής καύσης χρησιμοποιούνται λόγω της υψηλής τους απόδοσης και ευκολίας σαν πηγή ισχύος για κάθε είδους μέσου μεταφοράς - πλοία, υποβρύχια, τρένα, αυτοκίνητα - αλλά είναι απολύτως απαραίτητοι μόνο για αεροσκάφη και πηδαλιουχούμενα. Η ικανότητα απογείωσης ενός αεροπλάνου εξαρτάται από την ταχύτητά του μέσω του αέρα, η οποία, με τη σειρά της, εξαρτάται από την ισχύ του κινητήρα. Μέχρις ότου οι κινητήρες εσωτερικής καύσης να γίνουν διαθέσιμοι, με την ελάχιστη αναλογία βάρους ανά ιπποδύναμη που είχαν, το βάρος της μονάδας του κινητήρα υπερέβαινε την ανυψωτική ικανότητα του αεροπλάνου. Ακριβώς όπως έκανε ο κινητήρας εσωτερικής καύσης δυνατή τη δημιουργία του αεροπλάνου, έτσι και η περαιτέρω ανάπτυξη του αεροπλάνου εξαρτάται από ακόμα μικρότερους λόγους βάρους ανά ιπποδύναμη.

Η αποτελεσματικότητα των σημερινών αεροπλάνων είναι τόσο υψηλή, ώστε υπάρχει ελάχιστη δυνατότητα βελτίωσης προς αυτή την κατεύθυνση. Αλλά, αν το βάρος του κινητήρα και του καυσίμου μπορούσε να μειωθεί ή να αυξηθεί, αναλογικά, η ισχύς του, τότε θα μπορούσε να μεταφερθεί ακόμα περισσότερο "ωφέλιμο φορτίο". Ένας πρακτικός τρόπος για να μειωθεί το βάρος του κινητήρα ή να αυξηθεί η ισχύς και η αποτελεσματικότητά, είναι να αυξηθεί η αναλογία συμπίεσης. Αυτός ο λόγος συμπίεσης είναι περιορισμένος λόγω μιας ιδιαίτερης μορφής καύσης, γνωστής και ως κρουστική καύση ή καύση έκρηξης. Έχουν γίνει πολλές έρευνες και πειράματα πάνω στους μηχανισμούς καύσης στην προσπάθεια να υπολογιστεί η θερμοκρασία αυτανάφλεξης καυσίμων, ώστε να βρεθεί η πραγματική αιτία της καύσης έκρηξης των κινητήρων.

1.2 Βελτιστοποίηση της απόδοσης

Κατά συνέπεια, υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον για τον έλεγχο της καύσης. Ο στόχος είναι να βελτιστοποιηθεί η λειτουργία του καυστήρα, να παρακολουθηθεί η διαδικασία καύσης και να μειωθούν οι αστάθειες και οι σοβαρές επιπτώσεις τους. Σε άλλες περιπτώσεις, σκοπός είναι να επεκταθεί η περιοχή ευστάθειας, με το να μειωθούν τα επίπεδα των ταλαντώσεων που προκαλούνται από τη σύζευξη μεταξύ τρόπων συντονισμού και καύσης.

Για τις αεροστροβίλους, έχουν σχεδιαστεί καυστήρες προαναμεμειγμένου καυσίμου, οι οποίοι λειτουργούν σε θερμοκρασίες χαμηλότερες από εκείνες των συμβατών συστημάτων. Στους καυστήρες προαναμεμειγμένου καυσίμου που λειτουργούν κοντά στο όριο ευστάθειας, η φλόγα είναι ευαίσθητη στο να σβήσει, ενώ η φτωχή ικανότητα καύσης περιορίζει τη λειτουργία και οδηγεί σε ταλάντωση. Οι μηχανισμοί που οδηγούν σε αστάθεια είναι πολλοί, ενώ αρκετοί από αυτούς είναι ακόμα άγνωστοι, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει αξιόπιστη μέθοδος για να προβλεφθεί πιθανή εμφάνιση και τα χαρακτηριστικά των ασταθειών καύσης, χωρίς να μπει σε λειτουργία ο καυστήρας.

Πολλές προσπάθειες μοντελοποίησης έχουν γίνει, για να παράξουν ευλόγως απλουστευμένες λύσεις σε αυτό το δύσκολο πρόβλημα [58, 59]. Ένας αριθμός μηχανισμών ασταθειών καύσης, συμπεριλαμβανομένων των παραμετρικών, υδροδυναμικών και παλμικών ασταθειών και της περιοδικής απόσβεσης, έχουν μελετηθεί από τον Candel [60]. Οι καυστήρες στη βιομηχανία των αεροστροβίλων λειτουργούν σε σύστημα με τυρβώδη ροή. Η τυρβώδης καύση προκύπτει από την αλληλεπίδραση μεταξύ χημείας και στροβιλισμού [61]. Η καύση, ακόμα και χωρίς την ύπαρξη τύρβης, αποτελεί μία εγγενώς πολύπλοκη διαδικασία που περιλαμβάνει μεγάλες περιοχές χημικών χρονοκλιμάκων και κλιμάκων μήκους [62] και η ακριβής περιγραφή του στροβιλισμού είναι, πιθανώς, ένα από τα πιο

δύσκολα προβλήματα στους τομείς έρευνας της ρευστομηχανικής.

Ωστόσο, κάποια εικόνα μπορεί να αποκτηθεί σχετικά με τους μηχανισμούς ελέγχου της αστάθειας, με ανάπτυξη αναλυτικών και υπολογιστικών εργαλείων μοντελοποίησης. Ο σκοπός είναι να χρησιμοποιηθούν μοντέλα που να μπορούν να χειριστούν τις μη-γραμμικές εξισώσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω προβλήματα. Οι πιο απλές μέθοδοι αναπτύσσονται κάνοντας χρήση αριθμητικών προσεγγίσεων των όρων των παραγώγων των μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν και διέπουν τα προβλήματα αυτά. Άμεση αριθμητική επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων της μηχανικής των ρευστών συνιστά το πεδίο της *Υπολογιστικής Δυναμικής των ρευστών (CFD²)*. Η υπολογιστική δυναμική των ρευστών είναι το πιο δυνατό εργαλείο που, μαζί με τα πειράματα και τη θεωρία, μπορεί να παράξει πληροφορίες πολλαπλών κλιμάκων, οι οποίες δεν μπορούν να επιτευχθούν με καμία άλλη τεχνική. Υπάρχουν αρκετές πιθανές τεχνικές επίλυσης με CFD μεθόδους, οπότε, πρέπει να γίνει επιλογή της κατάλληλης τεχνικής που πρόκειται να εφαρμοστεί στην εκάστοτε έρευνα.

1.2.1 Υπολογιστική Δυναμική των ρευστών

Όπως είπαμε προηγουμένως, η υπολογιστική δυναμική των ρευστών αποτελεί κλάδο της μηχανικής των ρευστών, ο οποίος χρησιμοποιεί αριθμητικές μεθόδους και αλγόριθμους για να επιλύσει και να αναλύσει προβλήματα που εμπεριέχουν ροές ρευστών. Υπολογιστές χρησιμοποιούνται για να εκτελέσουν τους υπολογισμούς που χρειάζονται για να προσομοιώσουν την αλληλεπίδραση των ρευστών και αερίων με επιφάνειες, οι οποίες ορίζονται ως συνοριακές συνθήκες. Λόγω της φύσης των προβλημάτων χρίζεται αναγκαία η χρήση υπερυπολογιστών υψηλής ταχύτητας, ώστε να επιτευχθούν καλύτερες λύσεις.

Οι προσομοιώσεις μέσω CFD επιτρέπουν στους ερευνητές να κατανοήσουν της συμπεριφοράς της ροής και να ποσοτικοποιήσουν σημαντικές παραμέτρους ροής. Οι προσομοιώσεις μέσω CFD έχουν γίνει ένα πολύτιμο εργαλείο στο να βοηθήσουν τόσο στην ανάλυση, όσο και το σχεδιασμό των συστημάτων των ρευστών. Είναι σημαντικό να πούμε ότι η ακρίβεια των CFD προσομοιώσεων εξαρτάται σοβαρά από τις υποθέσεις που έχουν γίνει. Σε γενικές γραμμές, όσο λιγότερο περιοριστικές είναι οι υποθέσεις, τόσο πιο ακριβή θα είναι τα αποτελέσματα. Ωστόσο, οι υποθέσεις μπορούν να συνεισφέρουν σημαντική μείωση στο χρόνο που θα καταναλωθεί, χωρίς απώλεια της ακρίβειας της λύσης.

Η θεμελιώδης βάση όλων, σχεδόν, των CFD προβλημάτων είναι οι Navier-Stokes εξισώσεις, οι οποίες καθορίζουν κάθε μονοφασική (αέριο ή υγρό, αλλά όχι και τα δύο) ροή ρευστού. Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να απλοποιηθούν αν αμελήσουμε όρους που περιγράφουν συμπεριφορές ιξώδους, ώστε να δώσουν τις εξισώσεις Euler. Περαιτέρω απλοποίηση μπορεί να γίνει αν αμελήσουμε και τους όρους στροβιλότητας, ώστε να πάρουμε τις εξισώσεις δυναμικού. Τέλος, για μικρές διαταραχές σε υπερηχητικές και υποηχητικές ροές, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραμμικοποιηθούν και να δώσουν τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις δυναμικού.

Διακριτοποίηση

Όπως είπαμε προηγουμένως, βασική ιδέα είναι να μοντελοποιηθούν οι παράγωγοι που εμφανίζονται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις με αριθμητικές μεθόδους. Όταν χρησιμοποιείται αυτή η προσέγγιση, ολόκληρο το πεδίο ροής πρέπει να διακριτοποιηθεί, ώστε ο χώρος της μελέτης να οριστεί με όρους ενός πλέγματος (ευθεία, σε γραμμικά προβλήματα) από σημεία. Πρέπει να βρεθούν οι τιμές του πεδίου ροής σε κάθε σημείο του πλέγ-

²Computational Fluid Dynamics

ματος, οπότε, για κάθε σημείο του πλέγματος, γράφονται οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα σε διακριτοποιημένη μορφή. Η διακριτοποίηση των εξισώσεων έχει σαν αποτέλεσμα ένα σύστημα από αλγεβρικές εξισώσεις. Συνήθως, απαιτείται μεγάλος αριθμός σημείων διακριτοποίησης, ώστε να εξασφαλιστεί ακρίβεια των λεπτομερειών του πεδίου ροής, με αποτέλεσμα πολύ μεγάλου βαθμού σύστημα εξισώσεων.

Κατά τη διατύπωση της μαθηματικής αναπαράστασης ενός προβλήματος πεδίου ροής, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή τόσο στις εξισώσεις του μοντέλου, όσο και στις συνοριακές συνθήκες. οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να επιλεγούν σωστά. Λάθος εκτίμηση των συνοριακών συνθηκών θα οδηγήσει και ανακριβή λύση. Μία κατάλληλη διαδικασία απαιτεί:

- Μετατροπή καταστατικών διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρική μορφή.
- Καθορισμό συνοριακών συνθηκών.
- Καθορισμό συστήματος συντεταγμένων.

Αν αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται, τότε το μαθηματικό πρόβλημα θεωρείται καλώς τοποθετημένο και είναι έτοιμο προς επίλυση. Το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων λύνεται αριθμητικά, με τη βοήθεια ενός υπολογιστή, για κάθε σημείο του πλέγματος της διακριτοποίησης. Η επίλυση γίνεται επαναληπτικά, για τη μόνιμη κατάσταση η όχι των εξισώσεων. Στη συνέχεια η λύση υφίσταται επεξεργασία για να εξαχθούν οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν (π.χ. τιμές της θερμοκρασίας, της πίεσης).

Η διακριτοποίηση του χώρου παράγει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων για χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα ή ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για σταθερά προβλήματα. Γενικά, χρησιμοποιούνται έμμεσες μέθοδοι για την ολοκλήρωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, παράγοντας, έτσι, ένα σύστημα από μη-γραμμικές, συνήθως, αλγεβρικές εξισώσεις. Εφαρμόζοντας επαναληπτικές διαδικασίες τύπου Newton ή Picard, παράγεται ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων μπορεί να γίνει είτε να άμεσες μεθόδους είτε με έμμεσες.

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν προσεγγίσεις των παραγώγων μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, για να αντικατασταθούν οι συγκεκριμένοι όροι των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η χρήση μεθόδων πεπερασμένων διαφορών παράγει, λόγω της διακριτοποίησης, σύνολα διακριτών αριθμητικών προσεγγίσεων, συχνά, με την έννοια του χρονικού βήματος. Η επιτυχία των αριθμητικών μεθόδων των μερικών διαφορικών εξισώσεων απαιτεί τα φυσικά χαρακτηριστικά των εξισώσεων να αντικατοπτρίζονται στην αριθμητική προσέγγιση. Η επιλογή ενός συγκεκριμένου τύπου πεπερασμένων διαφορών εξαρτάται από τη φυσική του προβλήματος που μελετάται.

1.3 Μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών είναι αριθμητικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση των παραγώγων. Οι μέθοδοι αυτές αποτελούν τον πιο διαδεδομένο τρόπο διακριτοποίησης σε CFD προβλήματα.

Η πεπερασμένη διαφορά είναι μία τεχνική, με την οποία οι παράγωγοι των συναρτήσεων προσεγγίζονται από διαφορές των τιμών της συνάρτησης μεταξύ μιας δοσμένης

τιμής της μεταβλητής, έστω x_0 , και μιας μικρής αύξησης ($x_0 + h$). Για παράδειγμα, από τον ορισμό της παραγώγου:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.1)$$

μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του df/dx χρησιμοποιώντας προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.2)$$

για μικρή τιμή του h .

Πεπερασμένες διαφορές που βασίζονται σε ανάπτυγμα σειράς Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x_0 δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.3)$$

όπου $f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0}$ και $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Αν θεωρήσουμε $x = x_0 + h$, τότε $x - x_0 = h$ και η σειρά μπορεί να γραφεί:

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + O(h^3) \quad (1.4)$$

Όπου η έκφραση $O(h^3)$ αναπαριστά τους υπόλοιπους όρους της σειράς, οι οποίοι είναι μικρότεροι-ίσοι της τάξης του h^3 . Επειδή το h είναι μικρή ποσότητα, μπορούμε να γράψουμε $1 > h$ και $h > h^2 > h^3 > h^4 > \dots$. Συνεπώς, οι εναπομείναντες όροι της σειράς που αναπαρίστανται από την ποσότητα $O(h^3)$ παρέχουν το βαθμό του σφάλματος που δημιουργείται αν παραλείψουμε αυτή την ποσότητα κατά τη διάρκεια του υπολογισμού του $f(x_0 + h)$.

Από το ανάπτυγμα της σειράς της σχέσης (1.4) μπορούμε να πάρουμε την έκφραση της παραγώγου $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f''(x_0)}{2!} h + O(h^2) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + O(h). \quad (1.5)$$

Σε πρακτικές εφαρμογές των πεπερασμένων διαφορών, αντικαθιστούμε την πρώτη βαθμού παράγωγο df/dx στο $x = x_0$ με την έκφραση $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$, διαλέγοντας μία κατάλληλη τιμή για το h , υποδεικνύοντας ότι το σφάλμα στρογγύλευσης του υπολογισμού είναι της τάξης του h , δηλαδή, $O(h)$.

Μπροστά, πίσω και κεντρικές προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών για την πρώτη παράγωγο

Η προσέγγιση

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.6)$$

καλείται *μπροστά προσέγγιση διαφορών*, επειδή η παράγωγος βασίζεται στην τιμή $x = x_0$ και περιέχει τη συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο $x = x_0 + h$, το οποίο βρίσκεται μπροστά από το $x = x_0$ κατά μία αύξηση h .

Αν συμπεριλάβουμε τις τιμές της $f(x)$ στα σημεία $x = x_0 - h$ και $x = x_0$, τότε, η προσέγγιση γράφεται

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (1.7)$$

και καλείται *πίσω προσέγγιση διαφορών*. Η τάξη του σφάλματος είναι ακόμα $O(h)$.

Η *κεντρική προσέγγιση διαφορών* για τον όρο df/dx θα περιέχει τα σημεία $(x_0 - h, f(x_0 - h))$ και $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Για να βρούμε την έκφραση της προσέγγισης αυτής, καθώς και την τάξη του σφάλματος, χρησιμοποιούμε άλλη μία φορά το ανάπτυγμα Taylor. Αρχικά, γράφουμε την εξίσωση που αντιστοιχεί στην *μπροστά προσέγγιση διαφορών*:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + O(h^4). \quad (1.8)$$

Κατόπιν, γράφουμε την εξίσωση που αντιστοιχεί στην *πίσω προσέγγιση διαφορών*:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cdot f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + O(h^4). \quad (1.9)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (1.8) και (1.9), παίρνουμε

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2 \cdot f'(x_0) \cdot h + 1/3 \cdot f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + O(h^5). \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι h^2, h^4, \dots εξαφανίζονται. Συνεπώς, η τάξη των υπολοίπων όρων είναι $O(h^5)$. Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς $f'(x_0)$ θα πάρουμε την έκφραση της *κεντρικής προσέγγισης διαφορών*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2). \quad (1.11)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η προσέγγιση με *κεντρικές διαφορές* έχει σφάλμα τάξης $O(h^2)$, ενώ, οι άλλες δύο έχουν σφάλμα τάξης $O(h)$. Έτσι, το σφάλμα της χρήσης των *κεντρικών διαφορών* είναι το μικρότερο απ' όλα.

Μπροστά, πίσω και κεντρικές προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών για τη δεύτερη παράγωγο

Για να κατασκευάσουμε τη σχέση της προσέγγισης *κεντρικών διαφορών* για τη *δεύτερη παράγωγο*, θα ξεκινήσουμε με χρήση των αναπτυγμάτων των σχέσεων (1.8) και (1.9) με χρήση όρων μέχρι τάξης $O(h^5)$. Συνεπώς:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{1}{24} \cdot f^{(4)}(x_0) \cdot h^4 + O(h^5) \quad (1.12)$$

και

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cdot f^{(3)}(x_0) \cdot h^3 + \frac{1}{24} \cdot f^{(4)}(x_0) \cdot h^4 - O(h^5). \quad (1.13)$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις εξισώσεις (1.12) και (1.13) και λύνουμε ως προς $f''(x_0)$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x_0 + h) - 2 \cdot f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2). \quad (1.14)$$

Έτσι, οι εκφράσεις της δεύτερης παραγώγου των μπροστά και πίσω διαφορών δίνονται αντίστοιχα

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x_0 + 2 \cdot h) - 2 \cdot f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} + O(h) \quad (1.15)$$

και

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x_0) - 2 \cdot f(x_0 - h) + f(x_0 - 2 \cdot h)}{h^2} + O(h). \quad (1.16)$$

Συμβολισμός με χρήση δεικτών

Θεωρούμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \quad y(x_1) = y_1. \quad (1.17)$$

Χρησιμοποιώντας την μπροστά προσέγγιση διαφορών στον όρο dy/dx , θα πάρουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \quad (1.18)$$

Τότε, η διαφορική εξίσωση θα μετασχηματιστεί στην ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = g(x, y), \quad (1.19)$$

από την οποία,

$$y(x+h) = y(x) + hg(x, y)^3. \quad (1.20)$$

Αν υποθέσουμε ότι το εύρος τιμών (a, b) της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι γνωστό και, ότι χρησιμοποιούμε μια σταθερή τιμή βήματος $h = \Delta x$ για να μοιράσουμε το πεδίο σε $n - 1$ ίσα τμήματα. Θέτοντας $x_1 = a$ και $x_n = b$, τότε, παίρνουμε την τιμή του βήματος

$$\Delta x = (x_n - x_1)/(n - 1) = (b - a)/(n - 1). \quad (1.21)$$

Αφού ξέρουμε τη συνοριακή συνθήκη (x_1, y_1) μπορούμε να αρχίσουμε να λύνουμε ως προς y στο $x_2 = x_1 + h$, στη συνέχεια στο $x_3 = x_2 + h$ και ούτω καθ' εξής. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργούμε μία σειρά από σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, τα οποία αντιστοιχούν σε μία αριθμητική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Το μέχρι που θα τρέξει η μέθοδος καθορίζεται αρχικά, ή διαμορφώνεται κατά τη διάρκεια της επίλυσης.

Η επαναληπτική εξίσωση για την επίλυση του y δίνεται

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot g(x_i, y_i)^4, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (1.22)$$

³Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως *μπροστά μέθοδος Euler* για αριθμητική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού. Αν, αντίστοιχα, χρησιμοποιήσουμε κεντρικές ή πίσω πεπερασμένες διαφορές, θα πάρουμε και την αντίστοιχη μέθοδο Euler. Συνοπτικά οι προσεγγίσεις της 1ης και 2ης παραγώγου φαίνονται στον πίνακα 1.1.

⁴Επειδή η μέθοδος λύνει την εξίσωση $y_{i+1} = f(x_i, y_i, \Delta x)$, δηλαδή μία τιμή σε κάθε τρέξιμο, η μέθοδος καλείται *άμεση (explicit) μέθοδος*.

Αν ξαναγράψουμε τη σχέση (1.18) με όρους της σχέσης (1.22), θα πάρουμε την εξίσωση της παραγώγου με χρήση δεικτών

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (1.23)$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των δεικτών, μπορούμε να συνοψίσουμε τις μπροστά, κεντρικές και πίσω προσεγγίσεις της πρώτης και δεύτερης παραγώγου:

Πεπερασμένες διαφορές	Πρώτη παράγωγος	Δεύτερη παράγωγος
Μπροστά	$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$
Κεντρικές	$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x^2)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$
Πίσω	$\frac{dy}{dx} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_i - 2 \cdot y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$

Πίνακας 1.1: Πεπερασμένες διαφορές για την 1^η και 2^η παράγωγο

Άμεσες και έμμεσες μέθοδοι

Η ιδέα πίσω από την άμεση μέθοδο είναι να μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές όπως

$$y_{i+1} = f(x_i, y_i), \quad y_{i+2} = f(x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}), \quad \text{κοκ.} \quad (1.24)$$

Με άλλα λόγια, η λύση πραγματοποιείται με το να επιλύεται άμεσα, μία καινούρια άγνωστη τιμή στο διάνυσμα της λύσης, με χρήση όλων των υπολοίπων τιμών του διανύσματος. Από την άλλη, οι έμμεσες μέθοδοι συνεπάγονται ταυτόχρονη επίλυση των n γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και παρέχουν, κατευθείαν, τα στοιχεία του διανύσματος της λύσης. Συνοψίζοντας:

Άμεσες μέθοδοι

- Ικανές να πραγματοποιήσουν επίλυση (σε ένα σημείο) κατευθείαν, για όλες τις άγνωστες τιμές της διαμέρισης των πεπερασμένων διαφορών.
- Ευσταθείς για συγκεκριμένα, μόνο, μεγέθη χρονικού βήματος (ή πιθανότατα ποτέ ευσταθείς).

Η ευστάθεια μπορεί να ελεγχθεί με χρήση ανάλυσης Fourier ή von Neumann. Το μέγεθος του χρονικού βήματος καθορίζεται από τη συνθήκη Courant.

Έμμεσες μέθοδοι

- Δεν υπάρχει προσέγγιση άμεσης μεθόδου σε κάθε σημείο, μόνο ένα σύνολο ταυτόχρονων εξισώσεων, οι οποίες πρέπει να επιλυθούν σε όλο το εύρος του πλέγματος.
- Είναι ευσταθείς για οποιοδήποτε μέγεθος βήματος.

Οι έμμεσες μέθοδοι, παρ' ότι ευσταθείς, μπορεί να διαρκέσουν περισσότερο χρόνο από ότι οι άμεσες μέθοδοι, για να υπολογίσουν τη λύση. Για να επιταχύνουμε τους υπολογισμούς τους χρησιμοποιούμε επαναληπτικές μεθόδους. Οι επαναληπτικές μέθοδοι βελτιώνουν τη λύση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων, χρησιμοποιούν άμεση μέθοδο ή υπόθεση για την αρχική εκτίμηση της λύσης και είναι πολύ χρήσιμες για μεγάλα, αραιά συστήματα.

1.4 Η μέθοδος Newton και τεχνικές συνέχειας

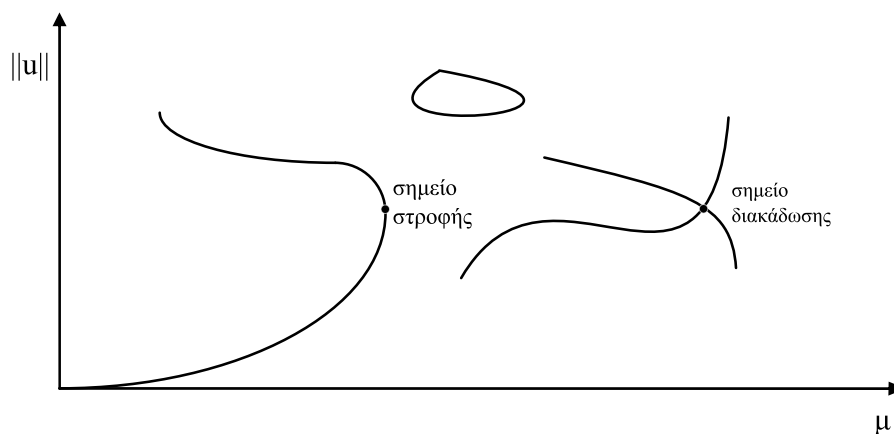
Οι επαναληπτικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν πάντοτε και τα κριτήρια σύγκλισης πρέπει να πληρούνται προτού εφαρμοστούν. Παρόλα αυτά, οι μέθοδοι αυτές είναι ιδανικές για πεπερασμένες διαφορές. Οι επαναληπτικές μέθοδοι ξεκινάνε από μία αρχική εκτίμηση της λύσης του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων, Κάθε επανάληψη ανανεώνει την εκάστοτε εκτίμηση, η οποία συγκλίνει στην ακριβή λύση, ενώ διαφορετικές μέθοδοι έχουν διαφορετικούς χρόνους σύγκλισης.

Πολλά προβλήματα υπολογιστικού ενδιαφέροντος, όπως αυτά της μηχανικής των ρευστών, μπορούν να γραφούν στη γενική μορφή

$$G(\mathbf{u}, \mu) = 0 \quad (1.25)$$

όπου $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ και $G : \mathbf{X} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{X}$ (Ο \mathbf{X} είναι χώρος Banach⁵)

Το \mathbf{u} αντιπροσωπεύει τη "λύση" (π.χ. πεδίο ροής, μετατοπίσεις, κλπ) και το μ μία πραγματική φυσική παράμετρο (π.χ. ο αριθμός Reynold's, φορτίο, κλπ). Οι εξισώσεις της μορφής (1.25) που καλούνται να λυθούν ονομάζονται μη-γραμμικά ελλειπτικά προβλήματα ιδιοτιμών. Απαιτούμαι να βρούμε λύσεις για κάποια διαστήματα της τιμής μ , δηλαδή τους "κλάδους λύσεων" ($\mathbf{u}(\mu), \mu$). Όταν ο τελεστής G είναι μη-γραμμικός στο \mathbf{u} και στο μ , συνήθως λύνεται αριθμητικά με κάποιου είδους μεθόδου Newton, οι οποίες εφαρμόζονται στο (1.25) για μία σταθερή τιμή της παραμέτρου μ και κάνουν χρήση της ιακωβιανής $G_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mu)$.



Σχήμα 1.1: Κρίσιμα σημεία, στροφής και διακλάδωσης.

Παρ' όλα αυτά, οι κλάδοι των λύσεων, συχνά, παρουσιάζουν κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες, αλλά και πολύπλοκες μη-γραμμικές συμπεριφορές διακλάδωσης, μεταξύ των οποίων

⁵Χώρος ή πλήρης χώρος Banach ονομάζεται ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με νόρμα που ικανοποιεί το γενικό κριτήριο Cauchy. Όλοι οι χώροι \mathbb{R}^n είναι χώροι Banach.

είναι και η ύπαρξη πολλαπλών λύσεων, η ύπαρξη *ιδιαζόντων ή κρίσιμων σημείων* (Σχ. 1.1), γνωστά ως *σημεία καμπής ή στροφής* (όπου ο κλάδος της λύσης κάμπτεται πίσω προς τον εαυτό του) και ως *σημεία διακλάδωσης* (όπου δύο ή περισσότεροι κλάδοι λύσεων τέμνονται μεταξύ τους).

Στη συνέχεια αναφέρονται μέθοδοι και τεχνικές συνέχεις για τον υπολογισμό των λύσεων της μορφής 1.25.

1.4.1 Μέθοδος Newton

Δοσμένης μιας τιμής του μ και μιας αρχικής εκτίμησης u^0 της λύσης $\mathbf{u}(\mu)$, χρησιμοποιείται η κλασική επαναληπτική μέθοδος Newton μέχρι τη σύγκλιση ($\|\delta u^i\| < \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$):

$$G_u^i \delta u^i = -G(u^i, \mu), \quad (1.26)$$

$$u^{(i+1)} = u^i + \delta u^i. \quad (1.27)$$

Η απλή αυτή διαδικασία χρησιμοποιείται, γενικά, για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων. Συγκλίνει τετραγωνικά, όταν αυτό, βέβαια, επιτυγχάνεται. Μπορεί, αντίθετα, να αποκλίνει όταν η αρχική εκτίμηση δεν είναι κοντά στην πραγματική λύση ή όταν για την τιμή του μ δεν υπάρχει λύση. Στην περίπτωση προβλημάτων με κρίσιμο σημείο $\mu = \mu^*$, για τιμές $\mu > \mu^*$ δεν υπάρχει κοντινή λύση και έτσι η μέθοδος αποκλίνει (Σχ. 1.2).

1.4.2 Μέθοδος φυσικής συνέχειας Euler-Newton (natural continuation)

Μία εύλογη διαδικασία για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία σύγκλισης, όπως επίσης και να καθοριστεί η εξάρτηση του \mathbf{u} από το μ είναι να ξεκινήσουμε από μία ήδη γνωστή λύση (u_0, μ_0) στην καμπύλη της λύσης, να τη χρησιμοποιήσουμε σαν την αρχική εκτίμηση της επαναληπτικής διαδικασίας Newton και να βρούμε τη λύση σε ένα γειτονικό σημείο στην καμπύλη της λύσης με μ κοντά στο μ_0 . Η διαδικασία μετά επαναλαμβάνεται. Μπορούμε να τη βελτιώσουμε με το να υπολογίσουμε την παράγωγο, u_μ (το εφαπτόμενο στην καμπύλη διάνυσμα), σε μία γνωστή λύση και να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε μία καλύτερη αρχική πρόβλεψη για την επόμενη τιμή του μ με τρόπο πρόβλεψης-διόρθωσης⁶. Η μέθοδος αυτή καλείται μέθοδος φυσικής συνέχειας, διότι αντιστοιχεί στο να παραμετροποιεί την καμπύλη της λύσης από το μ , δηλαδή, την παράμετρο που υπάρχει φυσικά στο πρόβλημα.

Διαδικασία της μεθόδου Euler-Newton. Δοθείσας μιας γνωστής λύσης (u_0, μ_0) , υπολογίζουμε τις λύσεις στις γειτονικές τιμές του μ ως εξής:

1. Πρώτα, υπολογίζουμε την εφαπτόμενη u_μ στο (u_0, μ_0) από τη σχέση

⁶ Λαμβάνοντας υπόψη ένα αρχικό σημείο στην μια καμπύλη λύσεων ενός αρχικού προβλήματος, μπορούμε επαναληπτικά να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα πρόβλεψης-διόρθωσης:

- Προγνώστης: Πρώτη προσέγγιση κατά μήκος της καμπύλης της λύσης, συνήθως προς την κατεύθυνση της εφαπτομένης. Διαφορετικοί προγνώστες μπορεί να προέρχονται μέσω αριθμητικών μεθόδων για το πρόβλημα αρχικών τιμών.
- Διορθωτής: Επαναληπτική προσέγγιση της λύσης του αρχικού συστήματος, π.χ. χρησιμοποιώντας μεθόδου τύπου Newton για να επαναφέρει τον προγνώστη πίσω στην καμπύλη της λύσης.

Μια αποτελεσματική μέθοδος πρόβλεψης-διόρθωσης αποτελείται από κατάλληλους συνδυασμούς των τεσσάρων πτυχών: προγνώστες, τοπική παραμετροποίηση της καμπύλης της λύσης, διορθωτές και έλεγχο του μεγέθους του βήματος.

$$G_u u_\mu = G_\mu$$

η οποία προκύπτει από τη σχέση (1.26) με παραγωγή της.

2. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε ένα βήμα πρόβλεψης τύπου Euler:

$$u^0 = u_0 + u_1(\mu - \mu_0)$$

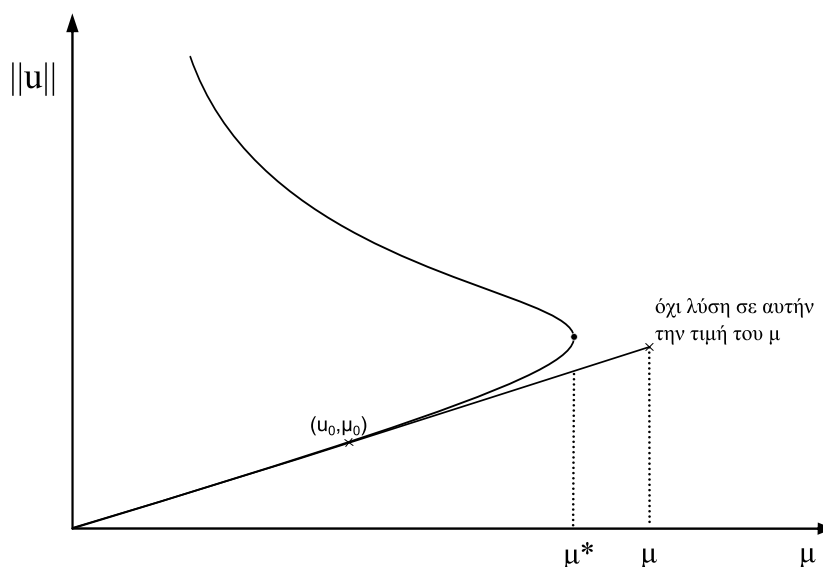
3. Χρησιμοποιούμε τη u^0 ως αρχική εκτίμηση στη μέθοδο Newton

$$G_u^i(u^{i+1} - u^i) = G(u^i, \mu)$$

μέχρι να συγκλίνει.

4. Χρησιμοποιούμε το σημείο $(u(\mu), \mu)$ ως καινούριο (u_0, μ_0) και επαναλαμβάνουμε το βήμα 1.

Σημείωση Ο υπολογισμός της παραγώγου u_μ δεν απαιτεί πολύ υπολογιστικό κόστος, γιατί συνήθως έχουμε την παραγοντοποίηση της ιακωβιανής G_u , η οποία έχει ήδη υπολογιστεί στο βήμα της Newton. Χρησιμοποιώντας μια τέτοια μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης μας επιτρέπει συχνά να λάβουμε ένα πολύ μεγαλύτερο βήμα μ και, έτσι να μειωθεί το συνολικό κόστος του να προσδιορίσουμε την εξάρτηση της u από το μ .



Σχήμα 1.2: Η αποτυχία της μεθόδου Euler-Newton κοντά στο κρίσιμο σημείο.

Δυστυχώς, αυτή η διαδικασία χρειάζεται κάποια τροποποίηση προκειμένου να χειριστεί γενικά μη-γραμμικά συστήματα, λόγω της πιθανότητας ύπαρξης μη-μοναδικής λύσης. Η μη-μοναδικότητα εκδηλώνεται συνήθως με τη μορφή της ύπαρξης κρίσιμου σημείου, όπου η ιακωβιανή G_u είναι ιδιάζουσα (Σχ. 1.1)). Η απευθείας εφαρμογή των μεθόδων τύπου Newton για τη λύση της (1.25) συναντά δυσκολίες κοντά στα κρίσιμα σημεία.

Οι δυσκολίες που συναντά μια διαδικασία φυσικής συνέχειας στα κρίσιμα σημεία είναι πολλές. Πρώτα από όλα, εφόσον η G_u είναι ιδιάζουσα στα σημεία αυτά, η μέθοδος Newton, στην καλύτερη περίπτωση, θα συγκλίνει γραμμικά, γεγονός που καθιστά πολύ πιο δαπανηρό τον υπολογισμό της λύσης. Επιπλέον, κοντά σε ένα οριακό σημείο, μπορεί να μην

υπάρχει μια λύση για μια δεδομένη τιμή του μ (Σχ. 1.2) και ως εκ τούτου οι επαναλήψεις να μην καταφέρουν να συγκλίνουν. Τέλος, χρειάζονται κάποιοι μηχανισμοί μεταπήδησης κλάδων σε ένα σημείο διακλάδωσης.

Για να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες, εφαρμόζονται μέθοδοι συνέχειας ακολουθούμενης διαδρομής. Αυτές οι μέθοδοι συνέχειας σχεδιάζονται για να συνεχίζουν να ακολουθούν τον κλάδο μετά τα σημεία στροφής και μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να αλλάζουν κλάδο στα σημεία της διακλάδωσης.

1.4.3 Μέθοδος συνέχειας μέσω του μήκους τόξου της καμπύλης (arc length continuation)

Στην μέθοδο συνέχειας μέσω της προσέγγισης του ψευδο-μήκους τόξου της καμπύλης (pseudo arc length) [63] δεν παραμετροποιούμε τη λύση u από το μ , αλλά παραμετροποιούμε τους κλάδους της λύσης χρησιμοποιώντας μία παράμετρο μήκους τόξου s , και καθορίζουμε πόσο μακριά κατά μήκος του τρέχοντος κλάδου της λύσης θέλουμε να προχωρήσουμε.

Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, ορίζουμε s την παράμετρο του μήκους τόξου, και θεωρούμε τη $u(s)$ και το $\mu(s)$ ως συναρτήσεις του s . Μπορούμε να υπολογίσουμε την εφαιπτομένη $[\dot{u}(s_0), \dot{\mu}(s_0)]$ (όπου οι κουκίδες υποδηλώνουν παραγωγή ως προς το s) από μία γνωστή λύση στο $s = s_0$ από τις ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$G_u \dot{u}_0 + \dot{\mu}_0 G_\mu = 0 \quad (1.28)$$

$$\|\dot{u}_0\|^2 + |\dot{\mu}_0|^2 - 1 = 0 \quad (1.29)$$

Η εξίσωση (1.28) λαμβάνεται από παραγωγή της $G(u, \mu)$ ως προς s και η εξίσωση (1.29) θέτει τη συνθήκη του μήκους τόξου. Θα μπορούσαμε θεωρητικά να φτιάξουμε την καμπύλη της λύσης με την ολοκλήρωση του αρχικού προβλήματος επιλύοντας τις (1.28), (1.29) ως προς $\dot{u}(s)$ και $\dot{\mu}(s)$. Αν και αυτή η διαδικασία υπόκειται στις συνήθεις αστάθειες που παρουσιάζονται στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών, μπορεί να είναι μια εξαιρετικά αποτελεσματική διαδικασία. Πράγματι, η μέθοδος συνέχειας μέσω του ψευδο-μήκους τόξου της καμπύλης μπορεί να θεωρηθεί ως μια μέθοδος για τη σταθεροποίηση της ολοκλήρωσης κατά Euler των (1.28), (1.29).

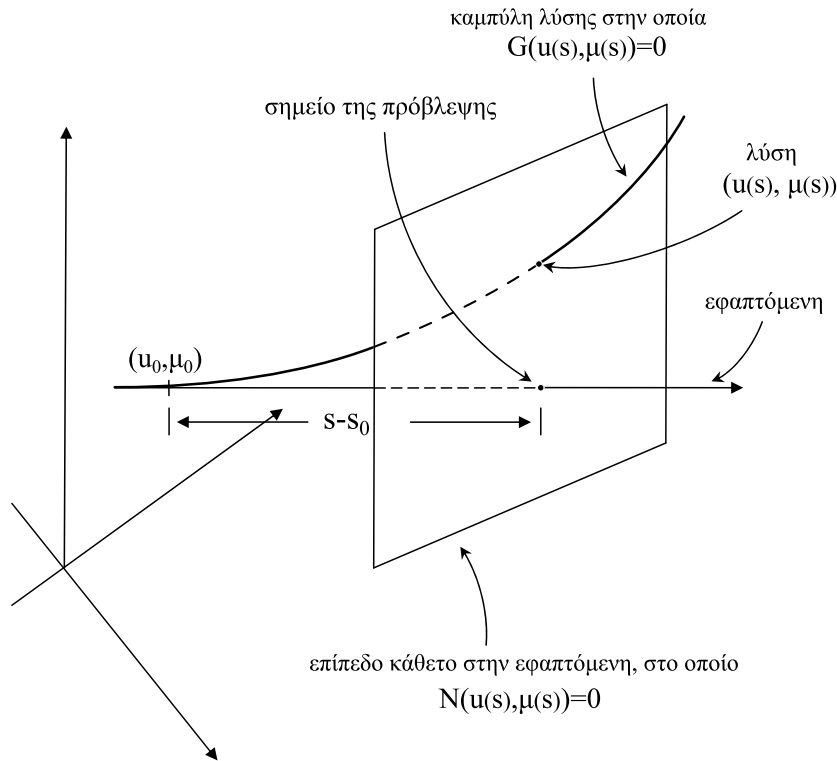
Στη μέθοδο συνέχειας μέσω του ψευδο-μήκους τόξου της καμπύλης προχωρούμε από το s_0 στο s κατά μήκος της εφαιπτομένης στον κλάδο της λύσης και απαιτούμε νέα λύση $u(s)$ και $\mu(s)$, τέτοια, ώστε να ικανοποιούν τη σχέση

$$N(u(s), \mu(s)) \equiv \dot{u}_0^T (u(s) - u(s_0)) + \dot{\mu}_0 (\mu(s) - \mu(s_0)) - (s - s_0) = 0 \quad (1.30)$$

Επιπλέον, απαιτούμε, βέβαια

$$G(u(s), \mu(s)) = 0. \quad (1.31)$$

Η εξίσωση (1.30) είναι η γραμμικοποίηση της εξίσωσης (3.11) και, όπως δείχνει, αναγκάζει τη νέα λύση να βρίσκεται σε ένα υπερεπίπεδο κάθετο προς το διάνυσμα της εφαιπτομένης της καμπύλης της λύσης στο s_0 και σε απόσταση $(s - s_0)$ από αυτό. Επίσης, η εξίσωση (3.11) απαιτεί τα $u(s)$ και $\mu(s)$ να βρίσκονται πάνω στην καμπύλη της πραγματικής λύσης (Σχ. 1.3).



Σχήμα 1.3: Μέθοδος συνέχειας ψευδο-μήκους τόξου.

Μπορούμε τώρα να λύσουμε το συζευγμένο σύστημα των εξισώσεων (1.30) και (3.11) ως προς $u(s)$ και $\mu(s)$, με δεδομένο μέγεθος βήματος $(s - s_0)$. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Newton, όπου θα πρέπει να λύσουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα σε κάθε επανάληψη:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_u & G_\mu \\ N_u^T & N_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G \\ N \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Προκειμένου να λυθεί το γραμμικό σύστημα (1.32) με άμεσες μεθόδους, αρκετές προσεγγίσεις είναι δυνατές. Μέθοδοι συνέχειας διαφόρων μορφών και επιπέδων πολυπλοκότητας έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιβλιογραφία προβλημάτων μηχανικής, ενώ διάφορες παραλλαγές έχουν εφαρμοστεί σε άλλα προβλήματα στην μηχανική των ρευστών. Η προσέγγιση που υιοθετείται για την επίλυση του **προβλήματος** της παρούσας εργασίας οφείλεται σε αυτήν του Keller [63, 64] και διαμορφώνεται, κατά ένα μέρος, σύμφωνα με τη μέθοδο της [34]. Το ίδιο πρόβλημα επιλύθηκε από τους Kanousakis et al.[1] με χρήση μιας τροποποιημένης προσέγγισης χρονικού βήματος ψευδο-μήκους τόξου [34] σε μία πρόσφατη έρευνα αριθμητικών μεθόδων σε πρόβλημα διακλάδωσης, που υπολόγιζε, πέραν των άλλων λύσεων, και την περίοδο των ταλαντευόμενων λύσεων (οριακών κύκλων).

Κεφάλαιο 2

Δυναμική των Φλογών

Η θεωρία έχει επηρεάσει πολύ την επιστήμη της καύσης και συνεχίζει να παίζει σημαντικό ρόλο στο εγγύς μέλλον. Οι πρόσφατες πρόοδοι στις πειραματικές μεθόδους, αλλά και στις υπολογιστικές ικανότητες, συμπεριλαμβανομένου της πρόσβασης σε υπολογιστές και τις δυνατότητες των αριθμητικών εργαλείων, παρέχουν στους επιστήμονες που μελετάνε την καύση επαρκείς πληροφορίες, οι οποίες χρειάζονται κατανόηση και ερμηνεία. Ουσιαστική κατανόηση επιτυγχάνεται με την κατασκευή απλοποιημένων μοντέλων, τα οποία διατηρούν τα κύρια χαρακτηριστικά των φαινομένων που εξετάζονται, και την αναζήτηση λύσεων, είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά, κατά τρόπο που καθιστά εμφανείς τις φυσικές αλληλεπιδράσεις που συμβαίνουν στις διάφορες περιοχές του πεδίου ροής και τις συνέπειες που αυτές έχουν στη συνολική διαδικασία.

Η μοντελοποίηση συστημάτων καύσης περιλαμβάνει ολόκληρο το φάσμα των δυσκολιών -που σχετίζονται με πολυσυστατικές ροές, μεταφορά θερμότητας και μάζας και χημικές αντιδράσεις, οι οποίες περιπλέκονται περαιτέρω, εξαιτίας ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών χημικών αντιδράσεων και της πολυδιάστατης και χρονικά εξαρτώμενης φύσης της ροής. Λόγω της πολυπλοκότητας και της εξαιρετικά μη-γραμμικής φύσης των εξισώσεων που διέπουν τα προβλήματα καύσης, γίνονται ταξινομήσεις και κατηγοριοποιήσεις των φαινομένων καύσης, ενώ εισάγονται, σχεδόν πάντοτε, απλουστεύσεις.

2.1 Σημαντικές Διαχωρίσεις Φαινομένων Καύσης

2.1.1 Προαναμεμειγμένη και Μη-προαναμεμειγμένη Καύση

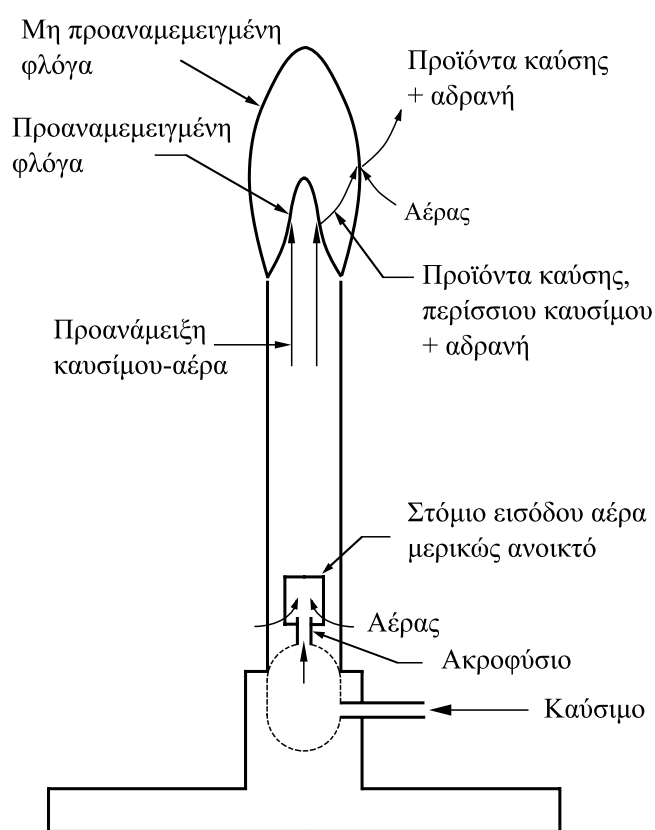
Αυτή είναι πιθανότατα η πιο σημαντική ταξινόμηση των φαινομένων καύσης. Γενικά, τα συστήματα καύσης αποτελούνται, συχνά, από δύο αντιδρώντα: το καύσιμο και τον οξειδωτή. Τα δύο αυτά αντιδρώντα πρέπει να έρθουν σε επαφή και να αναμειχθούν σε μοριακό επίπεδο, πριν η αντίδραση λάβει χώρα. Ως εκ τούτου, οι μηχανισμοί ανάμειξης αποτελούν ουσιώδη στοιχεία, τα οποία επηρεάζουν την καύση. Η απαίτηση της ικανότητας ανάμειξης συνεπάγεται, επίσης, ότι τουλάχιστον ένα από τα αντιδρώντα θα πρέπει να βρίσκεται είτε στην αέρια κατάσταση, είτε στην υγρή, προκειμένου τα μόριά του να μπορούν "εξαπλωθούν" γύρω από τα μόρια του άλλου αντιδρώντος.

Λόγω της σημασίας της ικανότητας μοριακής ανάμειξης, τα συστήματα καύσης συμπεριφέρονται εντελώς διαφορετικά, ανάλογα με το αν τα αντιδρώντα είναι αρχικά αναμειγμένα ή όχι. Σε ένα προαναμεμειγμένο σύστημα, τα αντιδρώντα είναι ήδη καλά αναμειγμένα προτού η αντίδραση αρχίσει. Ωστόσο, σε ένα μη-προαναμεμειγμένο σύστημα τα αντιδρώντα είναι, αρχικά, διαχωρισμένα και ενώνονται, μέσω της μοριακής διαδικασίας της διάχυσης και της χύδην (bulk) κίνησης αγωγιμότητας, σε μία κοινή περιοχή όπου

λαμβάνει μέρος ανάμειξη και στη συνέχεια αντίδραση. Η περίπτωση της μη προαναμεμειγμένη καύσης είναι, επίσης, γνωστή ως καύση διάχυσης, διότι η μετακίνηση μέσω διάχυσης είναι απαραίτητη για την πραγματοποίηση της ανάμειξης των αντιδρώντων στο μοριακό επίπεδο.

Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι με το να καλούμε ένα μη-προαναμεμειγμένο σύστημα, διαχυτικό, δεν συνεπάγεται ότι ένα προαναμεμειγμένο σύστημα, είναι μη-διαχυτικό. Η λέξη "διαχυτικό" υποδεικνύει μόνο την ανάγκη να έρθουν τα αντιδρώντα σε επαφή, μέσω αυτού του μηχανισμού μετακίνησης. Σε ένα προαναμεμειγμένο σύστημα, η διάχυση επίσης χρειάζεται για να μεταφέρει μείγμα προς -και τη θερμική ενέργεια και τα προϊόντα καύσης μακριά από- την περιοχή αντίδρασης, όπου τα αντιδρώντα καταναλώνονται και η θερμική ενέργεια και τα προϊόντα παράγονται.

2.1.2 Η Φλόγα Bunsen



Σχήμα 2.1: Η Φλόγα Bunsen.

Η Φλόγα Bunsen, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1, παρέχει μία απεικόνιση των δύο ειδών φλόγας: Καθώς το αέριο καύσιμο εκρέει από το ακροφύσιο, αέρας εισάγεται μέσω ενός προσαρμόσιμου στομίου και στη συνέχεια αναμειγνύεται με το καύσιμο, καθώς κινούνται κατά μήκος του σωλήνα-καυστήρα. Η μετέπειτα αντίδραση μεταξύ καύσιμου και οξυγόνου σε αυτό το μείγμα, αποτελεί μία προαναμεμειγμένη φλόγα. Υποθέτοντας ότι ο ρυθμός ροής του αέρα μπορεί να μεταβληθεί ελεγχόμενα, τότε η φλόγα που θα παραχθεί μπορεί να είναι είτε φλόγα πλούσια σε καύσιμο, είτε φλόγα φτωχή σε καύσιμο, ανάλογα με το κατά πόσον το οξυγόνο ή το καύσιμο μπορεί να καταναλωθεί τελείως.

Αν το μείγμα αυτό είναι φτωχό σε καύσιμο, τότε το πλεονάζον οξυγόνο θα παραμείνει ανέπαφο, καθώς θα περνάει μέσα από τη φλόγα και θα εξατμιστεί στο περιβάλλον.

Ωστόσο, αν το μείγμα είναι πλούσιο σε καύσιμο, τότε, το πλεονάζον καύσιμο, αφότου περάσει μέσα από την προαναμεμειγμένη φλόγα, μπορεί να αντιδράσει με το οξυγόνο του αέρα που το περιβάλλει. Αφού το οξυγόνο και το καύσιμο, είναι αρχικά διαχωρισμένα, πρέπει να μεταφερθούν σε μία κοινή περιοχή, όπου ανάμειξη και αντιδράσεις υφίστανται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μία μη-προαναμεμειγμένη φλόγα, στην οποία τα είδη του καυσίμου που εξέρχονται από την προαναμεμειγμένη φλόγα αντιδρούν σχεδόν τελείως με το οξυγόνο που εισέρχεται σε αυτήν. Το σύνολο αυτής της φλόγας αποτελείται από μία προαναμεμειγμένη και μία μη-προαναμεμειγμένη φλόγα. Τελικά, στην περίπτωση όπου το στόμιο εισόδου αέρα κλείσει τελείως, το μείγμα δεν περιέχει καθόλου οξυγόνο και, συνεπώς, υφίσταται μόνο μη-προαναμεμειγμένη φλόγα.

Είναι φανερό ότι κάποιος δε θα μπορούσε να βρει περιπτώσεις προαναμείξεων στη φύση, διότι θα είχαν αντιδράσει ήδη, ακόμα και αν είναι ελαφρώς αντιδραστικές. Από την άλλη, μη-προαναμεμειγμένα συστήματα αφθονούν. Όντως, με το οξυγόνο στον αέρα ως οξειδωτής, όλα τα υλικά που μπορούν να καούν στον αέρα λειτουργούν ως καύσιμα. Τέτοια παραδείγματα αποτελούν τα φυσικά καύσιμα, όπως το πετρέλαιο και ο γαιάνθρακας, τα υλικά κυτταρίνης, όπως το χαρτί και το ύφασμα, και μεταλλικά στοιχεία, όπως το αλουμίνιο και το μαγνήσιο.

2.1.3 Στρωτή και Τυρβώδης Καύση

Μία φλόγα χαρακτηρίζεται, επίσης, από τη φύση της ροής της, κατά πόσον είναι στρωτή ή τυρβώδης. Στη στρωτή ροή υπάρχουν ευδιάκριτες ροϊκές γραμμές για τη χύδην, κίνηση συναγωγής, ενώ στην τυρβώδη ροή, τέτοιες ροϊκές γραμμές δεν υπάρχουν, με αποτέλεσμα, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ροής, οι ποσότητες της ροής να διακυμαίνονται τυχαία στο χρόνο. Η ύπαρξη διαταραχής, γενικά, διευκολύνει τη διαδικασία ανάμειξης και, συνεπώς, έχει ιδιαίτερα μεγάλη επιρροή στα μη-προαναμεμειγμένα συστήματα, στα οποία η ανάμειξη των αντιδρώντων απαραίτητη. Η τελική ανάμειξη πριν η αντίδραση λάβει χώρα πρέπει και πάλι να συμβεί μέσω της διαδικασίας της μοριακής διάχυσης είτε η ροή είναι στρωτή, είτε τυρβώδης.

2.2 Φλόγες Διάχυσης

Όπως είπαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι φλόγες μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: στις φλόγες τύπου Bunsen, στις οποίες το καύσιμο και ο οξειδωτής προαναμειγνύονται προτού η ανάφλεξη λάβει χώρα και στις φλόγες όπου το καύσιμο και ο οξειδωτής συναντώνται τυχαία με αποτέλεσμα την καύση τους. Οι φλόγες με αυτό το χαρακτηριστικό ανήκουν στην κατηγορία των φλογών διάχυσης, αφού, όπως είπαμε και προηγουμένως, η διάχυση αποτελεί τον κύριο μηχανισμό που διέπει τη διαδικασία της καύσης.

Στην ευρεία έννοιά της, η φλόγα διάχυσης περιέχει ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων. Τέτοια είναι φλόγα ενός σπύρτου ή ενός κεριού που καίγεται στον αέρα, ένα φύλλο αλουμινίου που καίγεται σε υπερηχητική ροή αέρα, μία πυρκαγιά και η φλόγα μιας σταγόνας καυσίμου που καίγεται σε οξυγόνο σε κινητήρα πυραύλου ή αεριώθησης. Επίσης, στα προβλήματα αυτά συμπεριλαμβάνονται διαδικασίες που έχουν να κάνουν με ασταθή ροή, ροή υψηλής ταχύτητας και κινήσεις υπερβολικά τυρβώδεις.

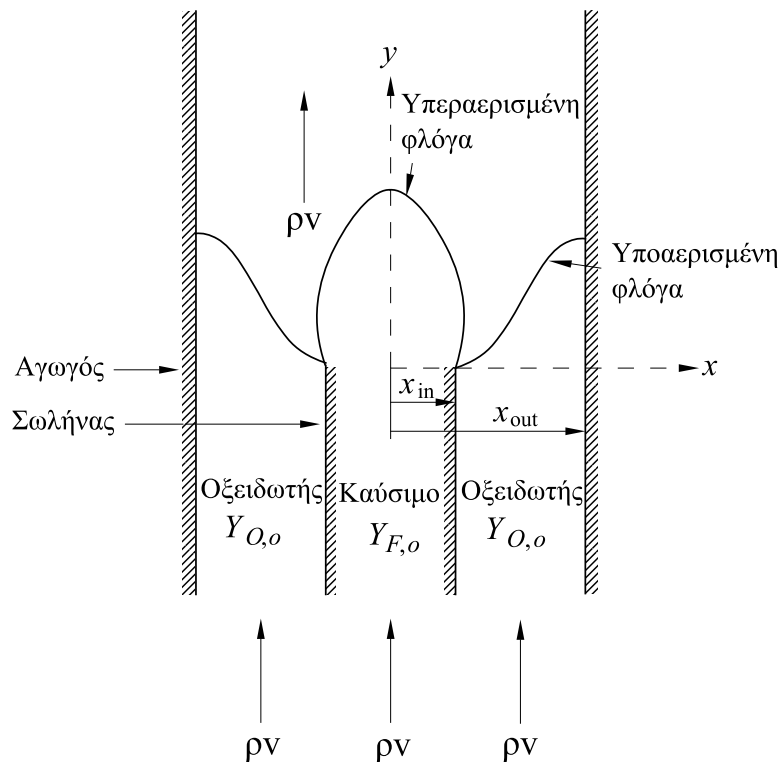
Σε μία πιο αυστηρή έννοια, η φλόγα διάχυσης μπορεί να ορισθεί ως μία μη - προαναμεμειγμένη, ημισταθερή, σχεδόν ισοβαρής φλόγα, στην οποία το μεγαλύτερο μέρος της αντίδρασης λαμβάνει χώρα σε μία στενή ζώνη, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί σαν μία επιφάνεια. Όταν το καύσιμο και ο οξειδωτής, από αρχικά διαχωρισμένα, έρθουν κοντά,

τότε ανάμειξη και αντίδραση θα λάβει χώρα, ταυτόχρονα, σε αυτή τη ζώνη αντίδρασης, η οποία ονομάζεται επιφάνεια φλόγας.

Αντίθετα με τις προαναμεμειγμένες φλόγες, οι φλόγες διάχυσης δεν έχουν χαρακτηριστική ταχύτητα. Ο ρυθμός καύσης καθορίζεται από το ρυθμό με τον οποίο το καύσιμο και ο οξειδωτής μεταφέρονται από αντίθετες μεριές με τις σωστές αναλογίες, προκειμένου να υποστούν χημική αντίδραση. Επίπεδες προαναμεμειγμένες φλόγες επιτυγχάνονται εύκολα στο εργαστήριο, σε μία ομοιόμορφη και προσεκτικά ελεγχόμενη ροή, αντίστοιχη με την ταχύτητα της στρωτής φλόγας. Από την άλλη, σταθερή επίπεδη φλόγα διάχυσης σε μονοδιάστατη διάταξη, με το καύσιμο να παρέχεται από τη μία μεριά κατά τη διεύθυνση του ρεύματος και τον οξειδωτή από την άλλη, αντίθετα προς το ρεύμα, δεν είναι εφικτή. Για να υπάρξει σταθερή φλόγα διάχυσης, πρέπει να μην υπάρχουν διακυμάνσεις στη ροή του καυσίμου κ του οξειδωτή προς τη φλόγα, πράγμα αδύνατον σε μονοδιάστατη ροή, διότι η επιφάνεια της ροής του καυσίμου πάνω στο άκρο πρέπει να παραμένει σταθερή.

Ένα μονοδιάστατο μοντέλο - η θαλαμωτή φλόγα διάχυσης - μπορεί να κατασκευαστεί, εάν ένα από τα αντιδρώντα παρέχεται σε πεπερασμένη θέση [65, 66]. Η πειραματική πραγματοποίηση μιας επίπεδης ατάνυκτης φλόγας διάχυσης, άνοιξε το δρόμο για τη μελλοντική εξερεύνηση των θεμελιωδών ερωτημάτων που σχετίζονται με τις φλόγες διάχυσης, και για την πειραματική επιβεβαίωση των θεωρητικών και αριθμητικών μοντέλων. Παρείχε, για πρώτη φορά, μια επαλήθευση των ασταθειών των φλογών, οι οποίες αρχικά βασίστηκαν στο μοντέλο της θαλαμωτής φλόγας διάχυσης [16, 17, 67].

2.2.1 Το μοντέλο των Burke και Schumann



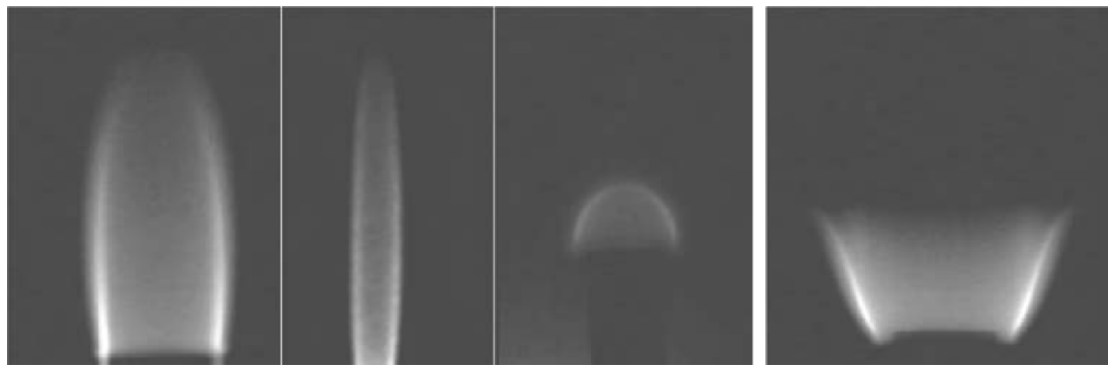
Σχήμα 2.2: Το μοντέλο φλόγας των Burke και Schumann.

Η πρώτη επιτυχημένη λεπτομερής ανάλυση προβλήματος φλόγας διάχυσης δόθηκε από τους Burke και Schumann το 1928 [11]. Η διάταξη που μελετήθηκε είναι η μόνιμη

κατάστασης ομοαξονική ροή ενός αέριου καυσίμου που εξέρχεται σε οξειδωτικό αέριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2¹. Καύσιμο (ή οξειδωτής) εξέρχεται μέσω ενός κυλινδρικού σωλήνα σε έναν ομόκεντρο κυλινδρικό αγωγό, μέσα στον οποίο ρέει ο οξειδωτής (ή το καύσιμο). Μία φλόγα επιτυγχάνεται στο στόμιο του σωλήνα και, είτε εξαπλώνεται μέχρι το τοίχωμα του αγωγού (περίπτωση υποαερισμένης φλόγας, Σχ. 2.3(β)), είτε συγκλίνει προς τον άξονα (περίπτωση υπεραερισμένης φλόγας Σχ. 2.3(α)).

Το ύψος της φλόγας², που καθορίζεται ως η παράλληλη με τον άξονα απόσταση από το στόμιο του σωλήνα μέχρι το σημείο στο οποίο η φλόγα φτάνει είτε το τοίχωμα του αγωγού είτε τον άξονα, είναι αναγκαίο για τον σχεδιασμό καυστήρων τέτοιου τύπου. Οι Burke και Schumann έβγαλαν αρκετά ακριβείς προβλέψεις για το ύψος και το σχήμα της φλόγας για στρωτή ροή, οι οποίες είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Είναι φανερό ότι η φλόγα αυτής της μορφής μπορεί να είναι κλειστή ή ανοιχτή στο πάνω άκρο της, ανάλογα με το λόγο της διαμέτρου του σωλήνα προς τη διάμετρο του αγωγού, τη συγκέντρωση του καυσίμου και του οξειδωτή μέσα στις αντίστοιχες ροές τους και, το στοιχειομετρικό λόγο της συγκέντρωσης του καυσίμου ως προς του οξειδωτή. Συνεπώς, για την περίπτωση που ο λόγος της παροχής του οξειδωτή είναι στοιχειομετρικά περισσότερος από αυτόν του καυσίμου, θα έχουμε την υπεραερισμένη (Σχ. 2.3(β)) φλόγα που περιγράψαμε προηγουμένως, διαφορετικά θα έχουμε υποαερισμένη φλόγα (Σχ. 2.3(α)).



(α)

(β)

(α) περιπτώσεις υπεραερισμένης φλόγας για διάφορες τιμές του λόγου των συγκεντώσεων Y_O/Y_F και (β) περίπτωση υποαερισμένης φλόγας

Σχήμα 2.3: Περιπτώσεις υπο-υπεραερισμένης φλόγας.

Επίσης, θεώρησαν ότι η αξονική μάζα ροής ρv κατά μήκος του αγωγού, παραμένει σταθερή. Εισήγαγαν, αποτελεσματικά, μία προσέγγιση σταθερής πυκνότητας, ώστε να αποσυνδέσουν τις υδροδυναμικές εξισώσεις από τις εξισώσεις μεταφοράς. Αυτή η διατύπωση της σταθερής πυκνότητας μπορεί συστηματικά να θεωρηθεί ως ένα ασυμπτωτικό όριο όταν η παράμετρος απελευθέρωσης θερμότητας είναι μικρή. Ωστόσο, σε πραγματικά συστήματα, η απελευθέρωση θερμότητας δεν είναι ποτέ μικρή και η πυκνότητα διαφέρει σημαντικά από σημείο σε σημείο στη φλόγα. Παρ' όλα αυτά, η προσέγγιση είναι χρήσιμη στο να διευκρινίσει κάποιες από τις περιπλοκές που συσχετίζονται με πτυχές θερμοτήτας-διάχυσης της καύσης.

¹Από το βιβλίο [68]

²Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή στο στόμιο του σωλήνα (y : απόσταση κατά μήκος του άξονα, x : απόσταση από τον άξονα). Υποθέτουμε την ακτίνα του εσωτερικού σωλήνα x_{in} και του εξωτερικού αγωγού x_{out} . Ως Y_O και Y_F ορίζονται οι συγκεντρώσεις του οξειδωτή και του καυσίμου, αντίστοιχα, ενώ οι συνθήκες στο $y = 0$ προσδιορίζονται με το δείκτη θ .

Η διάταξη της φλόγας διάχυσης των Burke και Schumann [11] έχει αποτελέσει μια βολική πλατφόρμα για τη μελέτη της συμπεριφοράς της καύσης σε στρωτές ροές με κοινή διεύθυνση. Από καθαρά θεωρητικής πλευράς, η έρευνα έχει καταβάλει προσπάθειες για να ξεφύγει από τις απλοποιημένες υποθέσεις της αρχικής ανάλυσης και προσπαθεί να παράσχει μία πιο ρεαλιστική περιγραφή της φυσικής του προβλήματος. Από την πειραματική σκοπιά, έχει διεξαχθεί έρευνα για να εξεταστούν τα λεπτομερή υδροδυναμικά/χημικά μοντέλα αυτών των φλογών, καθώς και για να συγκριθούν με τα θεωρητικά/αριθμητικά μοντέλα πρόβλεψης. Ωστόσο, όλες οι παραπάνω εργασίες θεωρούν μόνο αέρια καύσιμα και οξειδωτές.

2.2.2 Το Φύλλο Αντίδρασης

Στη μαθηματική περιγραφή του μοντέλου της φλόγας, οι Burke και Schumann εισήγαγαν το άπειρο όριο της γρήγορης χημείας. Υπέθεσαν ότι η χημική αντίδραση θα λάβει μέρος σε μία επιφάνεια-φύλλο, το φύλλο της αντίδρασης ή η στοιχειομετρική επιφάνεια, η οποία διαχωρίζει μία περιοχή που βρίσκεται το καύσιμο και όχι οξειδωτής, από μία άλλη που βρίσκεται οξειδωτής, αλλά όχι καύσιμο. Το καύσιμο και ο οξειδωτής ρέουν προς το φύλλο αυτό της αντίδρασης σε στοιχειομετρικές αναλογίες. Μία συνθήκη που, μαζί με την απαίτηση για πλήρη κατανάλωση των αντιδρώντων, καθορίζει το πεδίο της καύσης, συμπεριλαμβανομένου της θέσης του φύλλου της αντίδρασης ή της στοιχειομετρικής επιφάνειας. Η τελευταία, εξαρτάται από τις συγκεντρώσεις του καυσίμου και του οξειδωτή στα σύνορα, ή την αρχική σκληρότητα³ του μείγματος ϕ και από την ικανότητα διάχυσης των αντιδρώντων Le_F και Le_O ⁴. Επίσημα, η λύση των Burke και Schumann αντιστοιχεί στο όριο $Da^5 \rightarrow \infty$ που είναι ο αριθμός Damköhler [69, 70].

Μια σημαντική πρόοδος στην ανάλυση των φλογών διάχυσης οφείλεται στον Liñán [71], ο οποίος επανεξέτασε τη δομή της ζώνης αντίδρασης, στο πλαίσιο μιας φλόγας αντιροής, υποθέτοντας ότι τόσο ο αριθμός Damköhler, όσο και η παράμετρος ενέργειας ενεργοποίησης είναι μεγάλα, αλλά σχετίζονται σε ένα κατάλληλο όριο. Η δομή της ζώνης αντίδρασης, τότε θα εξαρτάται από το μειωμένο αριθμό Damköhler, δ , ο οποίος μετρά την ένταση της χημικής αντίδρασης, ή την αποχώρηση από τις συνθήκες ισορροπίας. Ολοκλήρωση κατά μήκος της ζώνης αντίδρασης δείχνει ότι η ισορροπία μεταξύ αντίδρασης-διάχυσης συντηρείται μόνο όταν $\delta \geq \delta_c$. Η κρίσιμη τιμή δ_c καθορίζει τη χαμηλότερη δυνατή τιμή του αριθμού Damköhler, Da_{ext} και αντιστοιχεί στην απόσβεση της φλόγας. Για τη φλόγα αντιροής ο αριθμός Da_{ext} καθορίζει το μέγιστο δυνατό ποσό παραμόρφωσης πάνω από το οποίο συμβαίνει η απόσβεση, ενώ για σφαιρική φλόγα καθορίζει τι κρίσιμο μέγεθος, κάτω από το οποίο θα συμβεί απόσβεση.

Στο Σχ. 2.4 φαίνεται το σχετικό τμήμα της καμπύλης S^6 που χαρακτηρίζει τη λύση, η οποία εκτείνεται από πλήρη καύση μέχρι κάτω στην απόσβεση, δηλαδή $Da_{ext} \leq Da < \infty$. Το σχήμα δείχνει την εξάρτηση της θερμοκρασίας της φλόγας T από το Da . Το σημείο στροφής $Da = Da_{ext}$ αντιστοιχεί την απόσβεση της φλόγας [7]. Το διακεκομμένο τμήμα αντιστοιχεί στην περιοχή όπου, ανάλογα με τους αριθμούς Lewis και την αρχική σκληρότητα του μείγματος, μπορεί να υπάρχει αστάθεια. Η κρίσιμη τιμή Da^* αποτελεί την οριακή μόνιμη κατάσταση. Καθώς $Da \rightarrow \infty$ η καμπύλη κινείται ασυμπτωτικά στη λύση

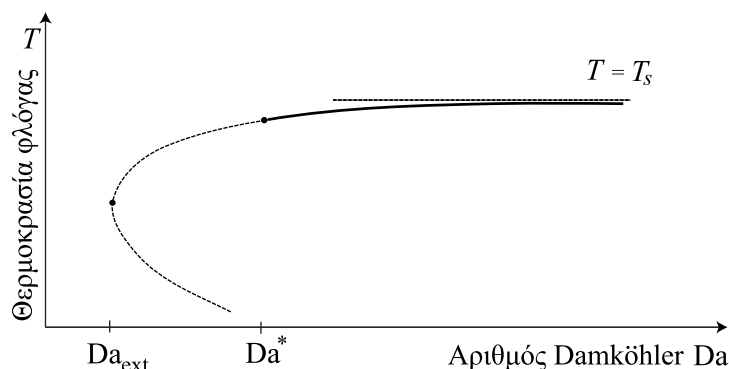
³Ορίζεται ως ο λόγος της μάζας καυσίμου προς τη μάζα οξειδωτή που παρέχεται από τις αντίστοιχες ροές τους, κανονικοποιημένες στις στοιχειομετρικές αναλογίες τους [10].

⁴Αριθμοί Lewis, οι οποίοι ορίζονται ως ο λόγος της θερμικής διάχυσης του κάθε αντιδρώντος προς τη μαζική διάχυσή του. Στις προαναμεμιγμένες φλόγες υπάρχει μόνο ένας αριθμός Le , ο οποίος αναφέρεται στη διάχυση του μείγματος.

⁵Ορίζεται ως ο λόγος του χρόνου διάχυσης προς το χρόνο της χημικής αντίδρασης.

⁶Βλέπε παράγραφο 2.3.3.

των Burke-Schumann, η οποία αντιστοιχεί στην πλήρη καύση με τη θερμοκρασία της φλόγας να είναι ίση με τη στοιχειομετρική θερμοκρασία T_s . Η ένταση της φλόγας ελαττώνεται, καθώς ο αριθμός Da μειώνεται. Ως συνέπεια, η θερμοκρασία της φλόγας πέφτει και υπάρχει σημαντική διαρροή μη καμμένων αντιδρώντων στη ζώνη της αντίδρασης. Η απόσβεση συμβαίνει όταν η διαρροή γίνει υπερβολική και η θερμοκρασία της φλόγας ελαττωθεί υπερβολικά.



Σχήμα 2.4: Η εξάρτηση της θερμοκρασίας της φλόγας από τον αριθμό *Damköhler*. (πάνω μέρος της καμπύλης S)

2.3 Αστάθειες στις Φλόγες

Μελέτες των ασταθειών φλογών έχουν γίνει σε προβλήματα που αφορούν προαναμεμειγμένη καύση, αλλά υπάρχουν ανεπαρκή πειραματικά στοιχεία για αστάθειες στις φλόγες διάχυσης. Η πρώτη γνωστή μελέτη έγινε από τους Gardside και Jackson [72], ο οποίος παρατήρησαν ότι η επιφάνεια μιας φλόγας κινητήρα αεριοποίησης υδρογόνου-αέρα, συχνά, αποτελείται από τριγωνικές κυψέλες, σε σχήμα πολυέδρου. Αργότερα, οι Dongworth και Melvin [73] παρατήρησαν ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες η ίσια βάση μιας φλόγας διάχυσης υδρογόνου-οξυγόνου ενός καυστήρα γίνεται κυψελώδης. Παρόμοιες παρατηρήσεις αναφέρθηκαν σε πρόσφατες μελέτες σε καυστήρα Wolfhard-Parker [74], σε καυστήρα αεριοποίησης [10, 75] και φλόγες διάχυσης αντιροής [76]. Ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των παρατηρήσεων είναι ότι η αστάθεια προκύπτει σε αρκετά υψηλές ταχύτητες ροής, ή σε συνθήκες κοντά στην απόσβεση της φλόγας. Μία άλλη ιδιαιτερότητα είναι ότι σχηματίζονται κυψέλες όταν έστω και ένας από τους αριθμούς *Lewis* είναι αρκετά μεγάλος.

Μέχρι σήμερα, οι αστάθειες των φλογών έχουν συσχετιστεί με τους αριθμούς *Lewis*, με χαμηλό Da και με απώλειες θερμότητας. Για παράδειγμα, εμφανίστηκαν αστάθειες σε φλόγες υδρογόνου-οξυγόνου αραιωμένες⁷ σε CO_2 , N_2 ή Ar , με αριθμό *Lewis* Le_F 0.33–0.35, αλλά όχι όταν διαλύθηκαν σε He , διότι ο αριθμός Le_F βρίσκεται κοντά στη μονάδα και ο Le_O είναι αρκετά μεγάλος. Ομοίως, αστάθειες σχηματίζονται σε φλόγες μεθανίου-αέρα αραιωμένες σε SF_6 , όπου Le_O , Le_F 0.4 – 0.5, αλλά όχι όταν διαλύθηκαν σε He ή N_2 , διότι οι αριθμοί *Lewis* είναι και πάλι κοντά ή μεγαλύτεροι της μονάδας. Η τάση των φλογών διάχυσης να σχηματίζουν κυψέλες αυξάνεται όταν μειώνεται η αρχική σκληρότητα του μίγματος.

Ένα άλλο είδος ασταθειών που εμφανίζεται σε μη-προαναμεμειγμένα συστήματα, είναι η αυθόρμητες ταλαντώσεις φλογών. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, ταλαντώ-

⁷Βλέπε παράγραφο 2.3.2.

σεις παρατηρήθηκαν σε καύσιμα κατά τη διαδικασία υγροποίησης [2], σε κεριά και σε κρεμάμενες σταγόνες καύσιμου σε περιβάλλοντα μικροβαρύτητας [3, 4], σε φλόγες κινητήρων αεριοποίησης [5], σε φλόγες ψεκασμού [6] και σε φλόγες πάνω από λιμνάζοντα καύσιμα [8, 9].

Η φύση των ταλαντώσεων σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις είναι περίπου διαφορετική: Η φλόγα των κρεμάμενων σταγόνων υφίσταται ακτινικές ταλαντώσεις και στους κινητήρες αεριοποίησης η φλόγα διαστέλλεται και συστέλλεται σαν σύνολο, κατά τη διάρκεια ενός κύκλου. Το άκρο της φλόγας κερύει σε περιβάλλον μικροβαρύτητας κινείται μπρος πίσω κατά μήκος της ημισφαιρικής επιφάνειάς της. Στην εξάπλωση της φλόγας οι ταλαντώσεις συμβαίνουν, κατά κύριο λόγο, κοντά στις άκρες και εξασθενίζουν καθώς ακολουθούν τη φλόγα διάχυσης.

Αν και οι κυψελώδεις δομές και οι ταλαντώσεις φλόγας είναι οι κυρίαρχες μορφές αστάθειας, μπορεί να υπάρχουν και άλλοι πιθανοί τρόποι ταλάντωσης, όπως οι ταλαντούμενες κυψελώδεις δομές, στις περιοχές μετάβασης μεταξύ των διαφόρων καταστάσεων ή για ακραίες τιμές των παραμέτρων. Πολλοί τρόποι ασταθειών έχουν αναφερθεί, για παράδειγμα, στις φλόγες διάχυσης αεριοποίησης σε μορφή μετακινούμενων ή περιστρεφόμενων κυψελών [10], ενώ, μακρές κυψέλες αναφέρθηκαν σε μια πρόσφατη μελέτη μη-προαναμεμειγμένης φλόγας σε σωλήνα [77].

Πράγματι, ταλαντώσεις παρατηρήθηκαν σε φλόγες αεριοποίησης, όταν σε ένα κλάσμα καυσίμου που εισήχθη σε μορφή υγρών σταγονιδίων, τα τελευταία εξήγαγαν θερμότητα λόγω της διαδικασίας αεριοποίησης κατά την εξάτμισή τους [6]. Υπό παρόμοιες συνθήκες, αλλά με την αντικατάσταση των σταγονιδίων από αναθυμιάσεις καυσίμου, η φλόγα ήταν σταθερή. Περαιτέρω πειστικές αποδείξεις του ρόλου της απώλειας θερμότητας έγιναν όταν σταγονίδια νερού εγχύθηκαν, αντί των σταγονιδίων καυσίμου, πράγμα που οδήγησε σε ταλαντώσεις παρόμοιας συχνότητας. Η επίδραση της θερμικής διαστολής στην ευστάθεια της επίπεδης φλόγας διάχυσης επίπεδου έχει εξεταστεί μόνο πρόσφατα από τους Metzener και Matalon [27].

Η υδροδυναμική που διέπει τα προαναφερθέντα πειράματα είναι, γενικά, μη τετριμμένη, συμπεριλαμβάνοντας πολυδιάστατες διατμητικές και τεταμένες ροές, οι οποίες παράγουν ανομοιομορφες συνθήκες πάνω στην επιφάνεια της φλόγας, με αποτέλεσμα να περιπλέκουν τη σύγκριση με τις θεωρητικές προβλέψεις. Η πρόσφατη επίτευξη υλοποίησης ατάνυκτης επίπεδης φλόγας διάχυσης παρέχει τη δυνατότητα της έρευνας των ασταθειών των φλογών στην απλούστερη μορφή τους.

2.3.1 Ταλαντώσεις των Φλογών Διάχυσης

Η έναρξη των ασταθειών θερμότητας-διάχυσης σε προαναμεμειγμένες φλόγες είναι επαρκώς κατανοητή. Ένα προαναμεμειγμένο σύστημα, πέραν της στοιχειομετρίας, εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό *Lewis*, *Le*. Η θεωρία προβλέπει [78, 79] ότι, όταν $Le = 1$, μία προαναμεμειγμένη φλόγα είναι σταθερή σε επιδράσεις θερμότητας-διάχυσης. Αστάθειες αναπτύσσονται μόνο όταν ο αριθμός *Le* είτε υπερβαίνει ή είναι κάτω από μια κρίσιμη τιμή. Μια κυψελώδης αστάθεια προβλέπεται όταν ο *Le* είναι επαρκώς μικρότερος από το 1, και μία αστάθεια που σχετίζεται με παλμικές κινήσεις ή/και η ανάπτυξη κυμάτων που ταξιδεύουν κατά μήκος του μετώπου της φλόγας προβλέπονται όταν ο *Le* είναι επαρκώς μεγαλύτερος από το 1. Ως εκ τούτου, αναμένεται ότι η διαφορά μεταξύ της ικανότητας διάχυσης του καυσίμου και των οξειδωτών αφενός, και μεταξύ μάζας και θερμότητας από την άλλη, παίζουν παρόμοιο ρόλο στην αυθόρμητη ανάπτυξη των κυψελών σε φλόγες διάχυσης.

Μια πλήρης θεωρία σχετικά με τη ευστάθεια των φλογών διάχυσης φαίνεται πιο περι-

πλοκή από ό,τι εκείνη των προαναμεμειγμένων φλογών. Αρχικά, όπως έχουμε αναφέρει, για μια φλόγα διάχυσης υπάρχουν δύο αριθμοί *Lewis* (ένας που συνδέεται με το καύσιμο, Le_F , και ένας με τον οξειδωτή, Le_O). Οι παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν από τους Chen et al [74] δείχνουν ότι, σε γενικές γραμμές, η ύπαρξη των κυψελωδών φλογών δεν περιορίζεται στην περίπτωση όπου $Le_F = Le_O$. Δεύτερον, σε αντίθεση με τις προαναμεμειγμένες φλόγες, η δομή της φλόγας διάχυσης ποικίλλει ανάλογα με τον αριθμό *Damköhler*, Da .

Για πολύ μεγάλο Da εμφανίζεται πλήρης καύση σε ένα απειροελάχιστο λεπτό φύλλο αντίδρασης και η διαδικασία καύσης είναι απόλυτα σταθερή, όπως προβλέπεται από τους Burke και Schumann [11], ενώ, για μέτριες τιμές του Da η καύση είναι ατελής και υπάρχει διαρροή του ενός ή και των δύο αντιδρώντων μέσα της ζώνης αντίδρασης. Τότε, η φλόγα είναι πιο επιρρεπής σε αστάθεια στην παρουσία απωλειών θερμότητας και αυθόρμητες ταλαντώσεις μπορεί να αναπτυχθούν για αριθμούς *Lewis* μεγαλύτερες από μία κρίσιμη τιμή.

Η αστάθεια εμφανίζεται για ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών του αριθμού *Damköhler* και/ή για ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών της συγκέντρωσης των οξειδωτών του περιβάλλοντος. Επιπλέον, η καύση δεν είναι δυνατή όταν το Da είναι πολύ χαμηλό. Είναι γνωστό ότι απόσβεση συμβαίνει σε ένα $Da = Da_{ext}$ όπου αναπτύσσεται υπερβολική διαρροή του ενός ή και των δύο αντιδρώντων. Ο αριθμός *Damköhler* είναι, συνεπώς, μια σημαντική παράμετρος που ελέγχει, μεταξύ άλλων, την έναρξη της ύπαρξης κυψελών.

Οι αναλύσεις της ευστάθειας των φλογών διάχυσης έχουν, κατά κύριο λόγο, χρησιμοποιήσει μία επίπεδη φλόγα ως αδιατάρακτη κατάσταση⁸. Παρότι τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν από διάφορους ερευνητές διαφέρουν ελάχιστα λόγω των συνοριακών συνθηκών, αυτές οι ελάχιστες διαφορές δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα σημαντικά. Τα πιο λεπτομερή αποτελέσματα λαμβάνονται με την υπόθεση του φύλλου αντίδρασης και την περαιτέρω υπόθεση ότι η πυκνότητα είναι σταθερή, προκειμένου να φιλτράρουν τις υδροδυναμικές διαταραχές. Το πρόβλημα ιδιοτιμών επιλύθηκε αριθμητικά [27] και, μαζί με τα αναλυτικά αποτελέσματα, προέκυψαν ολοκληρωμένα αποτελέσματα, τα οποία περιείχαν τις κρίσιμες συνθήκες για την έναρξη των ασταθειών και τον χαρακτηρισμό των προτύπων που είναι πιθανόν να παρατηρηθούν πέραν από το όριο αστάθειας. Η λύση των Burke και Schumann πλήρους καύσης είναι άνευ όρων ευσταθής. Εάν η επίπεδη φλόγα διαταραχθεί ελαφρά, η απαίτηση της πλήρους κατανάλωσης των αντιδρώντων αναγκάζει το φύλλο αντίδρασης να επιστρέψει στην επίπεδη μορφή, η οποία, για δεδομένες παραμέτρους, είναι η μόνη στοιχειομετρική επιφάνεια.

Αστάθειες μπορούν να υφίστανται μόνο όταν υπάρχει αισθητή διαρροή αντιδρώντων, ή όταν ο αριθμός *Damköhler* γίνει αρκετά μικρός (η διακεκομμένη περιοχή του Σχ. 2.4), δηλαδή, όταν βρίσκεται $Da_{ext} \leq Da < Da^*$. Η οριακή κατάσταση ευστάθειας Da^* και η φύση της αστάθειας όταν το Da μειωθεί κάτω από την τιμή Da^* , εξαρτάται από τη σύνθεση του μείγματος και την κινητικότητα των αντιδρώντων: Οι ταλαντώσεις ευνοούνται σε σχετικά πλούσιο μείγμα. Ταλαντώσεις σε θαλαμωτή φλόγα διάχυσης παρατηρήθηκαν πρόσφατα σε πλούσια μείγματα, έχοντας έναν από τους αριθμούς *Lewis* αρκετά μεγάλο. Οι θεωρητικές προβλέψεις για τις κρίσιμες συνθήκες, συμπεριλαμβανομένου της ταχύτητας ροής, της σκληρότητας του μείγματος και των αριθμών *Lewis* και *Damköhler* για την έναρξη των ασταθειών, βρίσκονται σε συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Ενώ, οι συνθήκες που αφορούν την έναρξη των ταλαντώσεων εμφανίζονται ανάλογες με άλλες πειραματικές παρατηρήσεις [5].

Είναι δυνατό να υπάρξει μια απλή, μηχανιστική εξήγηση για την ευστάθεια του φύλλου φλόγας των Burke και Schumann. Ωστόσο, είναι δύσκολο, σε γενικές γραμμές, να υπάρξει μια απλή μηχανιστική εξήγηση για την έναρξη της χρονοεξαρτώμενης αστά-

⁸Στις εργασίες [12-18, 25, 27]

θειας. Σημειωτέον ότι δεν υπάρχει ικανοποιητική εξήγηση για την αστάθεια των παλλόμενων προαναμεμειγμένων χρόνων, παρά το γεγονός ότι ανακαλύφθηκαν περισσότερο από είκοσι χρόνια πριν. Παρόλα αυτά, έχουν γίνει προσπάθειες για εύλογη περιγραφή για την ανάπτυξη των ταλαντώσεων. Η λύση των Burke και Schumann πλήρους καύσης ενός απείρως μεγάλου αριθμού *Damköhler* είναι άνευ όρων ευσταθής. Σε αυτή την περίπτωση, ο χρόνος παραμονής στη ζώνη της καύσης είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν της χημικής αντίδρασης και η πλήρης καύση αναγκαστικά λαμβάνει χώρα σε μία περιοχή όπου καύσιμο και οξειδωτής συναντώνται σε στοιχειμετρική αναλογία. Συνεπώς, ακόμα και όταν η φλόγα είναι ελαφρώς μετατοπισμένη, λόγω κάποιας διαταραχής, η πλήρης καύση πρέπει να επαναφέρει τη φλόγα, σχεδόν στιγμιαία, στην αρχική της θέση. Με τη μείωση του αριθμού *Damköhler*, η φλόγα διευρύνεται και ο χρόνος παραμονής της μειώνεται σε σχέση με το χρόνο της χημικής αντίδρασης.

Η φλόγα είναι τώρα πιο ευαίσθητη σε εξωτερικές διαταραχές. Ούσα μετατοπισμένη, η φυσική τάση της φλόγας είναι προς τα πίσω, ώστε να επαναφέρει τον εαυτό της κοντά στην αδιατάρακτη θέση. Ωστόσο, τόσο η απώλεια θερμότητας, όσο και αρκετά μεγάλοι αριθμοί *Lewis* προκαλούν μείωση της θερμοκρασίας της φλόγας, με αποτέλεσμα η τάση της φλόγας να είναι προς τα έξω. Αυτή η παλινδρομική κίνηση αποσβένει όταν οι αριθμοί *Lewis* βρίσκονται κάτω από τις κρίσιμες τιμές ή ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας στη φλόγα ενισχυθεί με άλλο τρόπο.

2.3.2 Εξήγηση του μηχανισμού των φαινομένων ταλάντωσης

Ο φυσικός μηχανισμός, με τον οποίο αστάθειες ταλάντωσης λαμβάνουν χώρα, κάτω από ισχυρές συνθήκες μεταφοράς θερμότητας, μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: Η υψηλή ταχύτητα ψύξης, που συνδέεται με την αυξημένη μεταφορά θερμότητας, μειώνει τη θερμοκρασία της φλόγας, προκαλώντας το ρυθμό αντίδρασης να μειωθεί εκθετικά. Αυτό με τη σειρά του επιβραδύνει την κατανάλωση των αντιδρώντων, επιτρέποντας στη μοριακή διάχυση επαρκή χρόνο για να αυξηθούν τοπικά οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων. Κατά συνέπεια, ο ρυθμός αντίδρασης και μεταφοράς θερμότητας να αυξηθούν πάλι, σχηματίζοντας έτσι έναν κύκλο ταλάντωσης. Οι αστάθειες ταλάντωσης, οι οποίες προκαλούνται λόγω του ότι η μεταφορά θερμότητας είναι ισχυρότερη από τη μεταφορά μάζας, μπορούν να αναλυθούν σε ένα πλαίσιο αστάθειας διάχυσης-θερμότητας, το οποίο έχει αναπτυχθεί για να εξηγήσει κάποια κυψελώδη μοτίβα που παρατηρήθηκαν σε προαναμεμειγμένες φλόγες με αριθμό *Lewis* μικρότερο της μονάδας. Αστάθεια ταλαντευόμενης φλόγας που συνδέεται με την υψηλή ταχύτητα μεταφοράς θερμότητας ανήκει στην κατηγορία των Turing ασταθειών [80].

Υπάρχουν πλήθος φυσικών μηχανισμών που ενισχύουν το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας σε σχέση με το ρυθμό μεταφοράς μάζας, όπως η αραιώση με ελαφρά αδρανή μόρια ή μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας. Η μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας έχει βρεθεί να είναι σημαντική σε μια σειρά από περιπτώσεις. Σε φλόγες που λαμβάνουν χώρα μέσα σε ροές πολλαπλών σωματιδίων ή σε φλόγες με πολύ καπνό η μεταφορά θερμότητας μπορεί να ενισχυθεί με ακτινοβολία σε ένα επίπεδο αρκετά ισχυρό, τέτοιο ώστε να εκκινήσει ταλαντευόμενη καύση [16, 81]. Ακόμα και σε φλόγες αερίων, η μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας βρίσκεται να είναι όλο και πιο πολύ σημαντική σε φλόγες κοντά στο όριο της ανάφλεξης σε συνθήκες μικροβαρύτητας, όπως έχει αντιμετωπιστεί σε προβλήματα σφαιρικών φλόγων [82], καθώς και σε απόσβεση χαμηλής διαστολής προαναμεμειγμένων φλογών και φλογών διάχυσης [83–85].

2.3.3 Έναρξη των ταλαντώσεων στις φλόγες διάχυσης

Μία φλόγα διάχυσης μπορεί να χαρακτηριστεί από την απόκριση του ρυθμού καύσης σε έναν κατάλληλα ορισμένο αριθμό *Damköhler*. Ανάλογα με τη συγκέντρωση των οξειδωτών στο περιβάλλον και τους αριθμούς *Lewis*, η απόκριση μπορεί να είναι σε σχήμα S ή μία μονότονη καμπύλη. Αν και η καμπύλη S εμφανίζει φαινόμενα ανάφλεξης και απόσβεσης, η μονοτονική καμπύλη δείχνει ότι υπάρχει μια σταδιακή μετάβαση από έντονη καύση σε μια σχεδόν κατεψυγμένη κατάσταση και το αντίστροφο. Εκτιμήσεις ευστάθειας δείχνουν ότι αυθόρμητες ταλαντώσεις αναπτύσσονται όταν ο αριθμός *Lewis* είναι αρκετά μεγάλος ή/και οι απώλειες θερμότητας είναι υπερβολικές.

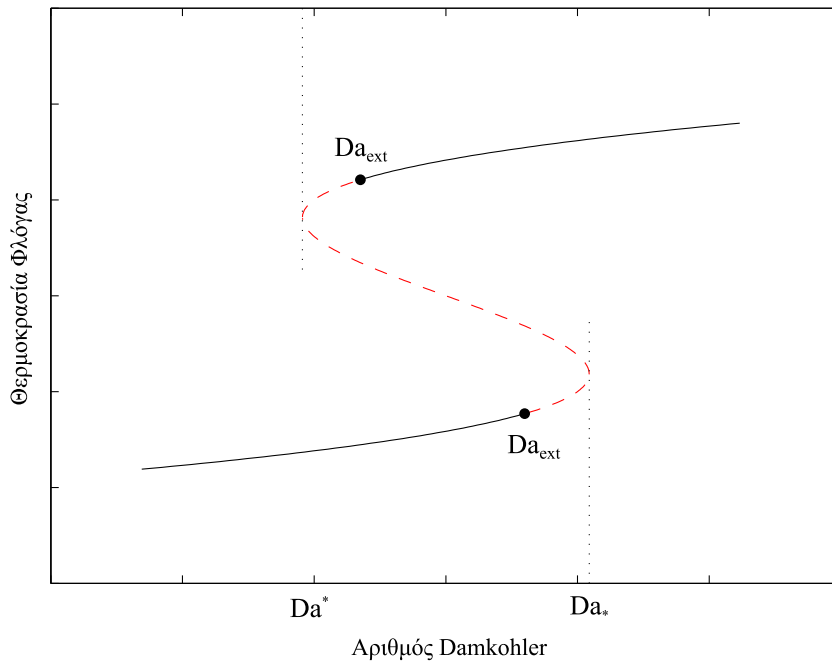
Αυτό υποδηλώνει ότι οι συνθήκες ανάφλεξης/απόσβεσης, που συνήθως συνδέονται με τα σημεία διακλάδωσης της καμπύλης S, πρέπει να τροποποιηθούν και να συνδεθούν με τα σημεία αλλαγής ευστάθειας. Για μια μονότονη καμπύλη απόκρισης, οι ταλαντώσεις οδηγούν σε απόσβεση, η οποία δεν μπορεί να προβλεφθεί διαφορετικά. Οι ταλαντώσεις κοντά στο όριο που προβλέφθηκαν είναι ποιοτικά παρόμοιες με εκείνες που παρατηρήθηκαν στο πείραμα φλόγας κεριού σε περιβάλλον μικροβαρύτητας και οι συχνότητες των ταλαντώσεων που προβλέφθηκαν είναι της ίδιας τάξης μεγέθους.

Η εξάρτηση του ρυθμού καύσης από τον αριθμό *Damköhler*, *Da*, έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά ανάλογα με την συγκέντρωση των οξειδωτών και των αριθμών *Lewis*. Σε περιβάλλον με μειωμένους οξειδωτές, η μετάβαση από την έντονη καύση σε μια κατάσταση χημείας σχεδόν κατάψυξης, εμφανίζεται σταδιακά. Αυτές οι μεταβατικές καταστάσεις, ωστόσο, δεν είναι πάντα σταθερές. Για αριθμούς *Lewis* ίσους με τη μονάδα διαπιστώθηκε ότι, χωρίς απώλειες θερμότητας, οι μεταβατικές καταστάσεις είναι πάντα σταθερές.

Ωστόσο, όταν οι απώλειες ακτινοβολίας γίνουν αρκετά μεγάλες, αστάθειες που συνδέονται με την ταλαντευόμενη καύση μπορεί να συμβούν. Αν για παράδειγμα μειωθεί ο αριθμός *Damköhler*, *Da*, τότε, μια σταδιακή μείωση του ρυθμού καύσης λαμβάνει χώρα και η φλόγα προσαρμόζεται αυτόματα, στη χαμηλότερη τιμή του *Da*. Κάτω από την κρίσιμη τιμή *Da*, αυθόρμητες ταλαντώσεις αναπτύσσονται με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος, οδηγώντας σε απόσβεση. Αυτές οι ταλαντώσεις είναι παρόμοιες με εκείνες που παρατηρήθηκαν στο πείραμα φλόγας κεριού που αναφέρθηκαν νωρίτερα, από την άποψη των συνθηκών έναρξης τους και της συχνότητάς τους. Για αριθμούς *Lewis* ανεξάρτητους της μονάδας, διαπιστώθηκε ότι οι ταλαντώσεις μπορεί να αναπτυχθούν ακόμη και χωρίς την απώλεια θερμότητας.

Αυτό που χαρακτηρίζει το S σχήμα στην καμπύλη είναι η απότομη αλλαγή από την έντονη καύση (που αντιπροσωπεύεται από τον άνω κλάδο της καμπύλης S) σε μια κατάσταση χημείας σχεδόν κατάψυξης (που αντιπροσωπεύεται από τον κάτω κλάδο της καμπύλης S) και αντίστροφα, η οποία συμβαίνει ως αποτέλεσμα της μείωσης ή της αύξησης του αριθμού *Damköhler*, αντίστοιχα. Τα σημεία στροφής της καμπύλης S (Σχ. 2.5) που αντιστοιχούν στα $Da = Da_*$ ή $Da = Da^*$ αποτελούν τα σημεία ανάφλεξης ή απόσβεσης. Πίσω από αυτή την περιγραφή είναι η υπόθεση ότι οι σταθερές καταστάσεις στο άνω κλάδο για $Da > Da^*$ και οι καταστάσεις του κάτω κλάδου για $Da < Da_*$, είναι ευσταθείς. Επιπλέον, πιστεύεται ότι ολόκληρο μεσαίος κλάδος αντιστοιχεί σε ασταθείς καταστάσεις που δεν μπορούν να υλοποιηθούν στην πράξη.

Εάν, ωστόσο, ορισμένες από τις καταστάσεις του άνω ή κάτω κλάδου κοντά τα σημεία στροφής είναι ασταθείς, οι αριθμοί *Damköhler* της ανάφλεξης, Da_{ing} , ή απόσβεσης, Da_{ext} , πρέπει να συνδέονται με τις τιμές που αντιστοιχούν στην εμφάνιση των ασταθειών και όχι με τα σημεία στροφής [12]. Ως εκ τούτου, σε αντίθεση με την περίπτωση στο Σχ. 2.4, μπορεί να ισχύει $Da_{ing} < Da_*$ ή/και $Da_{ext} > Da^*$ (Σχ. 2.5). Έχει αποδειχθεί ότι αυτή είναι η περίπτωση όπου ο αριθμός *Lewis* είναι αρκετά μεγαλύτερος της μονάδας ή/και οι απώλειες θερμότητας είναι σημαντικές. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί πλήρως ότι ο μεσαίος



Σχήμα 2.5: Η καμπύλη S του ρυθμού καύσης της φλόγας.

κλάδος της καμπύλης S είναι πάντα ασταθής.

Επιπλέον, έχει ήδη παρατηρηθεί ότι σε κυψελώδεις προαναμεμειγμένες φλόγες [86, 87], οι δομές λωρίδων φλόγας βρέθηκε να είναι σε θέση να επιβιώσουν για τιμή των αριθμών *Damköhler* πολύ μικρότερη από αυτής της απόσβεσης Da_{ext} . Δεδομένου ότι ο αριθμός *Damköhler* μειώνεται κάτω από τον κρίσιμο αριθμό Da^* που αντιστοιχεί στην έναρξης της κατάστασης αστάθειας, προκύπτουν διάφορα μοτίβα καύσης των λωρίδων φλόγας.

Δεδομένου ότι η ένταση της αντίδρασης στην περιοχή αντίδρασης των λωρίδων είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη της μονοδιάστατης φλόγας, τα μοτίβα λωρίδας μπορούν να ξεπεράσουν το μικρότερο χρόνο παραμονής των αντιδρώντων στη ζώνη της αντίδρασης, που επιβάλλονται από το μικρότερο αριθμό *Damköhler*. Με την περαιτέρω μείωση του αριθμού *Damköhler*, ο αριθμός των λωρίδων μειώνεται με αποτέλεσμα την απόσβεση των ασθενέστερων λωρίδων φλόγας. Ολόκληρη η φλόγα τελικά αποσβένει σε έναν αριθμό *Damköhler* πολύ μικρότερο από το στατικό αριθμό απόσβεσης Da_{ext} .

Ωστόσο, πρέπει να γίνει ακόμη πλήρως κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο διαφορετικοί κλάδοι της λύσης κάτω από το όριο σχετίζονται μεταξύ τους. Ένας αριθμός από αριθμητικά πειράματα διεξήχθησαν [20] για να προσδιοριστεί η έκβαση κάθε λύσης κάτω του ορίου στο χώρο του αριθμού *Damköhler*, αποδίδοντας έτσι μια βασική δομή διακλάδωσης των λωρίδων φλογών διάχυσης που σχηματίζονται σε ένα πρόβλημα αντιρροής, λόγω αστάθειας θερμότητας-διάχυσης. Το πρόβλημα της εύρεσης της δομής διακλάδωσης είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον σε συνδυασμό με τη δυναμική των άκρων της φλόγας.

2.3.4 Μη γραμμικές Ταλαντώσεις στις Φλόγες Διάχυσης

Η μη-γραμμικές συμπεριφορές που συσχετίζονται με αστάθειες διάχυσης-θερμότητας στις προαναμεμειγμένες φλόγες έχουν επανειλημμένα παρατηρηθεί και οι μηχανισμοί που τις διέπουν έχουν γίνει πλήρως κατανοητοί [88, 89]. Τα χαρακτηριστικά καύσης εξαρτώνται από τον αριθμό *Lewis*, Le . Όταν ο αριθμός Le είναι αρκετά μικρότερος της μονάδας, οι φλόγες μπορεί να εμφανίσουν χαοτική δομή, ενώ, όταν είναι αρκετά μεγαλύτερο

της μονάδας, το μέτωπο των φλογών μπορεί να υποβληθεί σε μη-γραμμικές ταλαντώσεις.

Πρόσφατα πειράματα σε φλόγες διάχυσης έχουν εντοπίσει μερικές συναρπαστικές μη-γραμμικές συμπεριφορές, ειδικά κοντά στο όριο της απόσβεσής τους⁹. Για παράδειγμα, λωρίδες φλόγας και μη-γραμμικές ταλαντώσεις έχουν αναφερθεί τόσο σε φλόγες υδρογόνου, όσο και σε φλόγες υδρογονάνθρακα/αέρα σε πειράματα που περιελάμβαναν μία ποικιλία διατάξεων, όπως φλόγες κεριού και φλόγες jet κινητήρων. Πολλά από τα χαρακτηριστικά που παρατηρήθηκαν σε αυτές τις φλόγες είναι όμοια με εκείνα που παρατηρήθηκαν στις προαναμεμειγμένες φλόγες, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο αριθμός *Lewis* είναι μία σημαντική παράμετρος που επηρεάζει τη δυναμική της φλόγας διάχυσης.

Ωστόσο, οι προαναμεμειγμένες φλόγες και οι φλόγες διάχυσης είναι διαφορετικές, και οι μη-γραμμικές συμπεριφορές των φλογών διάχυσης παρουσιάζουν τα δικά τους χαρακτηριστικά. Οι κυψελώδεις αστάθειες στις φλόγες διάχυσης χαρακτηρίζονται από τακτικές δομές από σταθερές λωρίδες, παρά από τις χαοτικές κυψελώδεις δομές στις προαναμεμειγμένες φλόγες. Περαιτέρω, η θέση του φύλλου της φλόγας στις φλόγες διάχυσης περιορίζεται μέσα σε μία κλειστή γειτονιά της στοιχειομετρικής επιφάνειας. Έτσι, οι παλμικές κινήσεις που αναφέρθηκαν στις φλόγες διάχυσης δεν αντιστοιχούν στη μετατόπιση της θέσης του φύλλου αντίδρασης, αλλά στις ταλαντώσεις της θερμοκρασίας ή άλλων σχετικών μεγεθών [15]. Ως εκ τούτου, είναι απαραίτητο να ανιχνευτούν μεταβολές των διανυσματικών ποσοτήτων, όπως η θερμοκρασία της φλόγας ή οι χημικές συγκεντρώσεις, προκειμένου να εντοπιστεί ταλαντευόμενη καύση. Παρά τη δυσκολία αυτή, ταλαντευόμενες αστάθειες στις φλόγες διάχυσης συμβαίνουν και ορισμένες από αυτές είναι ανιχνεύσιμες.

Οι παρατηρήσεις αυτές υποδηλώνουν ότι τα χαρακτηριστικά καύσης της φλόγας διάχυσης απαιτούν ξεχωριστή μαθηματική επεξεργασία. Σε σύγκριση με τις κατανοητές, πλέον, ταλαντώσεις των προαναμεμειγμένων φλογών, υπήρξαν σχετικά λίγες θεωρητικές έρευνες της δυναμικής των φλογών διάχυσης. Παρά το γεγονός ότι μια πρώιμη έρευνα διεξήχθη από τους Burke και Schumann [11] το 1928 και τους Kirkby και Schmitz [65] το 1966, όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, δεν ήταν μέχρι πρόσφατα που οι Cheatham και Matalon [12] και ο Kim et al. [13] μελέτησαν επίσημα της παλλόμενες και κυψελώδεις αστάθειες των φλογών διάχυσης, αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Για το ίδιο μοντέλο, πραγματοποιήθηκε γραμμική ανάλυση ευστάθειας [25], καθιστώντας ικανό τον υπολογισμό του χάρτη ευστάθειας του συστήματος, συναρτήσε του αριθμού *Damköhler* του συντελεστή απελευθέρωσης θερμικής ακτινοβολίας. Αργότερα, ο Miklavcic [26] συμπέρανε ότι στο όριο μια πολύ μεγάλης θερμοκρασίας ενεργοποίησης, εμφανίζεται διπλασιασμός της περιόδου ταλάντωσης της φλόγας σε ένα περιορισμένο εύρος τιμών του αριθμού *Damköhler*.

Η εργασία τους και οι επακόλουθες θεωρητικές [14–17] και αριθμητικές έρευνες [18] δείχνουν ότι, όπως και στις προαναμεμειγμένες φλόγες, ο ανταγωνισμός μεταξύ της θερμικής διάχυσης του μείγματος και της μαζικής διάχυσης των αντιδρώντων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των ασταθειών της φλόγας. Όταν η φλόγα βρίσκεται κοντά στην απόσβεσή της και ταυτόχρονα οι αριθμοί *Lewis* που αναφέρονται στο καύσιμο και τον οξειδωτή, Le_F και Le_O , είναι αρκετά μικρότεροι της μονάδας, η φλόγα εμφανίζει κυψελώδη αστάθεια, ενώ όταν Le_F και Le_O είναι αρκετά μεγαλύτεροι της μονάδας, η φλόγα εμφανίζει παλλόμενη αστάθεια.

Ενώ η γραμμικές αναλύσεις ευστάθειας που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις θεωρητικές μελέτες [12–17] είναι σε θέση να προβλέψουν την εμφάνιση της αστάθειας και να αποκαλύψουν μερικά ενδιαφέροντα φαινόμενα σχετικά με την μη-γραμμική εξέλιξη των ασταθειών της φλόγας, οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτές τις μελέτες ήταν πολύ

⁹Στις εργασίες [2, 4, 5, 10, 74, 76].

περιορισμένες. Η επακόλουθη συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί από μη-γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Ωστόσο, η μη-γραμμική ανάλυση ευστάθειας της δυναμικής των φλογών είναι πολύ πιο περίπλοκη στις φλόγες διάχυσης από τις προαναμεμειγμένες φλόγες, λόγω κάποιων τεχνικών δυσκολιών στην ανάλυση της δομής της ζώνης αντίδρασης. Ως εκ τούτου, μέχρι τώρα, μόνο μία θεωρητική [16, 90] και μερικές αριθμητικές [19–24] εργασίες έχουν ασχοληθεί με τη μη-γραμμική δυναμική των φλογών διάχυσης.

2.4 Μελέτη μέσω μη-γραμμικής ανάλυσης

Μέχρι σήμερα, μη-γραμμικές αναλύσεις, οι οποίες μπορούν να μας καθοδηγήσουν στο να αναγνωρίσουμε πλήρως τις συνέπειες των ασταθειών ταλάντωσης, είναι εξαιρετικά περιορισμένες. Ένα από τα αξιοσημείωτα αποτελέσματα μη-γραμμικής ανάλυσης, αν και σπάνια, είναι η ανάλυση των Joulín και Sivashinsky [91], από την οποία προέκυψε μια μη-γραμμική εξίσωση εξέλιξης κοντά στην απόσβεση για μη αδιαβατικές επίπεδες προαναμεμειγμένες φλόγες στην περιοχή των παλλόμενων ασταθειών. Από τη μη-γραμμική εξίσωση εξέλιξης, διαπίστωσαν ότι ο χαρακτήρας διακλάδωσης της αστάθειας είναι **υποκρίσιμος** και η μη-γραμμική συνέπεια της παλλόμενη αστάθειας είναι μερικοί κύκλοι καύσης αυξανόμενης ταλάντωσης που ακολουθούνται από σβήσιμο της φλόγας.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση του Pearlman [92] δείχνουν ότι ένα μη-γραμμικό αποτέλεσμα της ταλαντευόμενης αστάθειας δεν είναι κατ' ανάγκην η απόσβεση της φλόγας, αλλά μπορεί να είναι συνεχώς διατηρητέα πολυδιάστατα μοτίβα ταλάντωσης. Ωστόσο, δεν είναι ακόμα σαφές ποιο μη γραμμικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί σε κάθε μοτίβο της ταλαντευόμενης αστάθειας.

Για να εξετάσει την εξέλιξη πέρα από το όριο αστάθειας, ο Cheatham [90] πραγματοποίησε ανάλυση διακλάδωσης και οδηγήθηκε είτε σε περιοδικές λύσεις πεπερασμένου πλάτους που αντιστοιχούν σε διαρκείς ταλαντώσεις, ή σε μη φραγμένες λύσεις που αντιστοιχούν σε πρόωρη απόσβεση ή καύση εκτόνωσης. Η εξάρτηση αυτών των αποτελεσμάτων σχετικά με τις παραμέτρους συζητήθηκε στην εργασία [24]. Συγκεκριμένα, ο Cheatham βρήκε μια εξίσωση εξέλιξης για το πλάτος της διαταραχής σε φλόγα σταγονιδίου χρησιμοποιώντας μία ασθενώς μη-γραμμική θεωρία, και παρείχε ένα διάγραμμα απεικόνισης διαφόρων πιθανών συμπεριφορών μακράς διαρκείας. Προσδιορίστηκαν τρεις πιθανοί τρόποι ταλάντωσης της φλόγας:

- Η διαταραχή μπορεί να αποσβεστεί.
- Η διαταραχή μπορεί να γίνει απεριόριστη σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.
- Η διαταραχή μπορεί να προσεγγίσει ένα σταθερό πλάτος.

Οι Lee και Kim [15] εξέτασαν αριθμητικά τη μη-γραμμική δυναμική των λωρίδων φλογών διάχυσης, οι οποίες σχηματίζονται σε πεδίο αντιροής με αριθμούς *Lewis* αρκετά μικρότερους της μονάδας. Τα αποτελέσματα τους δείχνουν ότι η δομή της δισδιάστατης λωρίδας φλόγας είναι σε θέση να επιβιώσει για αριθμούς *Damköhler* σημαντικά κάτω από το στατικό αριθμό *Damköhler*, Da_{ext} μονοδιάστατης δομής φλόγας, λόγω της ενισχυμένης έντασης της αντίδρασης στα τμήματά της από την υπερβολική διάχυση των αντιδρώντων. Επίσης, είχε προβλεφθεί **υστέρηση**.

Ένα από τα πιο πειστικά πειραματικά αποτελέσματα ελήφθη σε πείραμα φλόγας σταγονιδίου, επί του Διαστημικού Λεωφορείου, στο οποίο καταγράφηκαν οκτώ κύκλοι ταλάντωσης των φύλλων αντίδρασης πριν από την απόσβεση [4]. Παρακινούμενοι από αυτά

τα πειραματικά αποτελέσματα της ταλαντευόμενης συμπεριφοράς, Οι Sohn et al. [22] ανέλυσαν ταλαντώσεις φλογών, οι οποίες ενεργοποιήθηκαν από την απώλεια ακτινοβολίας. Βρήκαν ότι οι απώλειες αυτές επιφέρουν ακόμα πιο πολύπλοκες δυναμικές, συμπεριλαμβανομένης της ύπαρξης **οριακών κύκλων**, δηλαδή ύπαρξη ταλαντευόμενων φλογών. Οι οριακοί κύκλοι προκύπτουν τόσο από υπερκρίσιμες, όσο και από υποκρίσιμες Hopf-Anderson διακλαδώσεις.

Οι αριθμοί *Lewis* θεωρήθηκαν αρκετά μεγαλύτεροι από τη μονάδα, και η εργασία τους έδειξε ότι η ταλάντωση της φλόγας ενισχύθηκε όταν ο αρχικός αριθμός *Damköhler*, Da ήταν μικρότερος από τον αριθμό διακλάδωσης Da^* . Από την άλλη πλευρά, όταν $Da > Da^*$, η ταλάντωση υφίστατο απόσβεση, εκτός κι αν η διαταραχή του αρχικού αριθμού *Damköhler* ήταν επαρκώς μεγάλη, στην οποία περίπτωση μια υποκρίσιμη διακλάδωση στις αυξανόμενες ταλαντώσεις έλαβε χώρα. Τέλος, καμία συμπεριφορά οριακού κύκλου δεν προβλέφθηκε στην απουσία θερμικής απώλειας ακτινοβολίας.

Πρόσφατα, Οι Gotoda et al. [29] εφάρμοσαν μη γραμμικές μεθόδους πρόβλεψης για να προβλέψουν τη βραχυπρόθεσμη δυναμική της αστάθειας της φλόγας. Ως εκ τούτου, η μη γραμμική ανάλυση των κρίσιμων καταστάσεων για την έναρξη των ταλαντευόμενων φλογών, καθώς και των διακλαδώσεων, είναι πρωταρχικής σημασίας για την κατανόηση των κύριων φυσικών και χημικών μηχανισμών που εμπλέκονται στις αστάθειες θερμότητας - διάχυσης κοντά στη απόσβεση των φλογών. Παρ' όλα αυτά, ένας ολοκληρωμένος χαρακτηρισμός της μη γραμμικής δυναμικής των φλογών διάχυσης μπορεί να υπάρξει μόνο αν υπολογιστούν συστηματικά οι διακλαδώσεις και η αστάθεια των περιοχών ταλάντωσής τους.

Επιπλέον, τα πειραματικά αποτελέσματα που δείχνουν ότι οι ταλαντώσεις των φλογών εξαφανίζονται απότομα με αποτέλεσμα η φλόγα να αποσβένει [5], προτείνουν ότι σε τόσο κρίσιμες συνθήκες μπορεί να προκύψουν τοπικές και ολικές διακλαδώσεις. Συνεπώς, μία μη-γραμμική ανάλυση ευστάθειας κοντά στα σημεία της διακλάδωσης χρειάζεται, προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές οι λεπτομέρειες των χαρακτηριστικών καύσης σε έναν ευρύτερο χώρο των παραμέτρων. Οι διακλαδώσεις των οριακών κύκλων μπορούν να υπολογιστούν αποτελεσματικά και συστηματικά, αν εφαρμοστεί η θεωρία διακλαδώσεων σε συνδυασμό με τεχνικές συνέχειας.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται αριθμητική ανάλυση σε ένα σύστημα, πανομοιότυπο με εκείνο των εργασιών [21, 22, 26]. Το επιλεγμένο μοντέλο μελέτης είναι σχετικά εύκολο και περιγράφει τη δυναμική μιας επίπεδης φλόγας αντιρροής, με θερμικές απώλειες ακτινοβολίας και αριθμούς *Lewis* ίσους με μονάδα. Εφαρμόζοντας μια συστηματική προσέγγιση χαρακτηρισμού της ευστάθειας και των διακλαδώσεων των οριακών κύκλων, μπορούν να εξαχθούν πολλές περισσότερες πληροφορίες για τη δυναμική των φλογών διάχυσης κοντά στην απόσβεσή τους. Θα κατασκευαστεί το ολοκληρωμένο διάγραμμα διακλαδώσεων, συμπεριλαμβανομένων των κλάδων των οριακών κύκλων. Τέλος, με το συστηματικό εντοπισμό των κλάδων των ταλαντευόμενων λύσεων, θα βρεθεί η ακριβής θέση των ομοκλινικών διακλαδώσεων, οι οποίες σηματοδοτούν την απότομη εξαφάνιση των ταλαντευόμενων λύσεων και οδηγούν στην απόσβεση της φλόγας.

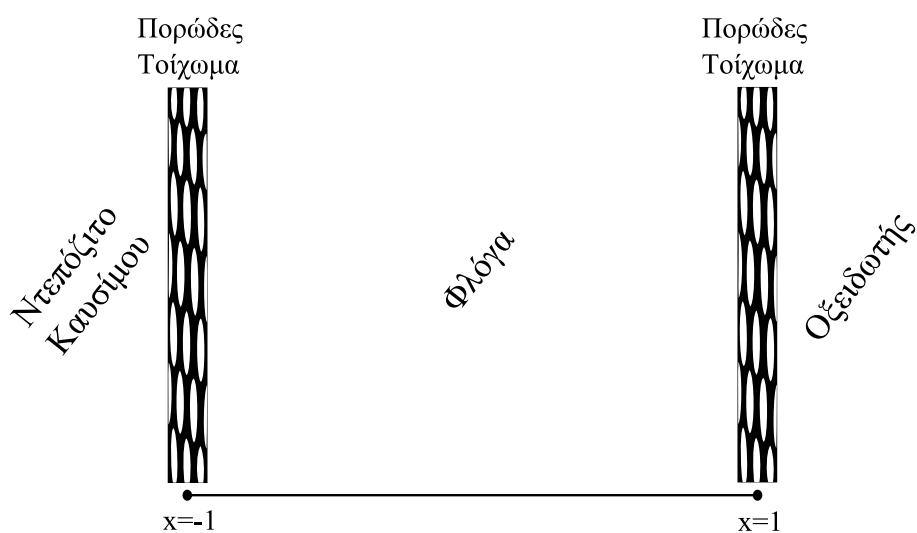
Κεφάλαιο 3

Το Μοντέλο της Φλόγας

3.1 Το φυσικοχημικό πρόβλημα

3.1.1 Το μαθηματικό μοντέλο

Η αριθμητική ανάλυση θα εκτελεστεί σε μία μονοδιάστατη φλόγα διάχυσης που ενσωματώνει την επίδραση της απώλειας θερμότητας ακτινοβολίας, η οποία φαίνεται σχηματικά στο Σχ. 3.1. Σε αυτή τη διαμόρφωση της φλόγας, οι συγκεντρώσεις καυσίμου και οξειδωτή διατηρούνται σταθερές μέσω πορώδων τοιχωμάτων τοποθετημένων ο ένας απέναντι στον άλλο. Καύσιμο ρέει από ένα μεγάλο ντεπόζιτο που βρίσκεται πίσω από ένα πορώδες τοίχωμα στα αριστερά και ο οξειδωτής διαχέεται από ελεύθερη ροή μέσα από το πορώδες τοίχωμα στα δεξιά. Τα αντιδρώντα του αερίου φθάνουν στη ζώνη φλόγας μόνο με μοριακή διάχυση, χωρίς να επιβάλλεται χύδην ροή. Το μοντέλο υποθέτει σταθερή πυκνότητα, μολονότι οι επιδράσεις που οφείλονται σε θερμική διαστολή μπορεί να είναι σχετικές, ακόμη και στην απουσία της χύδην ροής.



Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση της μονοδιάστατης φλόγας διάχυσης μεταξύ δύο πορώδων τοιχωμάτων.

Υποθέτοντας ότι οι πορώδεις πλάκες επεκτείνονται απεριόριστα στις κατευθύνσεις ορθογώνια προς την διεύθυνση x , το πρόβλημα ανάγεται σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα στο επίπεδο της x -συντεταγμένης. Αυτή η διαμόρφωση της φλόγας είναι ιδιαίτερα ελκυστική, διότι παρέχει το απλούστερο μαθηματικό μοντέλο χωρίς να χάσει κανένα από τα

βασικά φυσικά χαρακτηριστικά της παλλόμενης αστάθειας της φλόγας που προκαλείται από την απώλεια θερμότητας ακτινοβολίας.

Προκειμένου να απλουστευθεί το πρόβλημα, γίνονται οι ακόλουθες προσεγγίσεις / παραδοχές:

- Όλες οι μοριακές ιδιότητες, το μέσο μοριακό βάρος και η πυκνότητα θεωρούνται σταθερά.
- Η ικανότητα διάχυσης θερμικής ενέργειας, του καυσίμου και του οξειδωτή, θεωρείται ότι είναι η ίδια και συμβολίζεται με D , ενώ θεωρείται ίδια με την ικανότητα διάχυσης της θερμότητας D_T , με αποτέλεσμα να υπάρχει μόνο ένας αριθμός *Lewis*, ο οποίος ορίζεται $Le = D_T/D$ και είναι ίσος με τη μονάδα.
- Δεν υπάρχουν παράμετροι που σχετίζονται με διαφορική διάχυση και να εμπλέκονται στο παρών πρόβλημα.

Οι χωρικές και χρονικές συντεταγμένες αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$x = x^*/d_c^*, \quad t = t^*/t_c^* \quad (3.1)$$

όπου ο δείκτης * δείχνει διαστατές ποσότητες. Συνεπώς η διαστατή απόσταση x^* μετράται από την μέση των δύο πορωδών τοιχωμάτων και το χαρακτηριστικό μήκος d_c^* ορίζεται ως το μισό της μεταξύ τους απόστασης.

Τα σύνορα του καυσίμου και του οξειδωτή βρίσκονται να είναι στο -1 και 1, αντίστοιχα. Από την άλλη πλευρά, η χαρακτηριστικός χρόνος διάχυσης t_c^* ορίζεται να είναι $t_c^* = d_c^{*2}/D_T^*$.

Οι εξαρτημένες μεταβλητές αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} T &= c_p^* \frac{(T^* - T_b^*)}{Q^* Y_{o,b}^*} + T_0 \\ Y_f &= \frac{Y_f^*}{\nu Y_{o,b}^*} \\ Y_o &= \frac{Y_o^*}{\nu Y_{o,b}^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_b^*} \end{aligned} \quad (3.2)$$

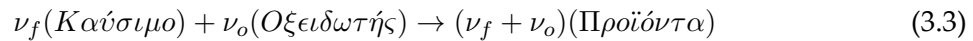
όπου ρ είναι η πυκνότητα, Y_f και Y_o τα κλάσματα μάζας του καυσίμου και του οξειδωτή, αντίστοιχα, T^* η διαστατή θερμοκρασία, T_0 η αδιάστατη αρχική θερμοκρασία αναφοράς, ν η στοιχειομετρική αναλογία του καυσίμου προς τον οξειδωτή, c_p^* είναι η ειδική θερμοκρασία υπό σταθερή πίεση, Q^* είναι η απελευθέρωση θερμότητας ανά μονάδα μάζας του οξειδωτή που καταναλώνεται και ο δείκτης b συμβολίζει το σύνορο του οξειδωτή.

Για να απλοποιήσουμε περαιτέρω το πρόβλημα, οι κανονικοποιημένες συγκεντρώσεις του καυσίμου και του οξειδωτή σε κάθε σύνορο θεωρούνται ίσες, δηλαδή, $Y_f(x = -1) = 1$ και $Y_o(x = 1) = Y_{o,b} = 1$, έτσι, ώστε το στοιχειομετρικό κλάσμα του μείγματος και είναι 1/2 και το φύλλο της αντίδρασης να βρίσκεται στο κέντρο της απόστασης των δύο πορωδών τοιχωμάτων, δηλαδή, στο $x = 0$. Επιπλέον, οι θερμοκρασίες στα σύνορα θεωρούνται ίσες με T_0 .

3.1.2 Το χημικό μοντέλο

Για το χημικό μοντέλο, εφαρμόζεται μία συνολική μη αντιστρεπτή χημική αντίδραση, μονού βήματος, με στοιχειομετρικούς συντελεστές αντίδρασης ίσους με τη μονάδα, τόσο για το καύσιμο, όσο και για τον οξειδωτή, της οποίας η ταχύτητα υπακούει έναν νόμο

Arrhenius. Συνεπώς, η χημική αντίδραση μοντελοποιείται από τη συνολική μη αντιστρεπτή αντίδραση της μορφής



όπου ν_f και ν_o , είναι οι στοιχειομετρικοί συντελεστές του καυσίμου και του οξειδωτή, αντίστοιχα.

Σημείωση Η ταχύτητα της αντίδρασης θεωρείται ότι υπακούει έναν νόμο Arrhenius μονού βήματος με ένα προεκθετικό παράγοντα A και συνολική ενέργεια ενεργοποίησης \mathcal{E}_a . Οι χημικές αντιδράσεις, γενικά, θεωρούνται με όρους μονομοριακών ή διμοριακών αντιδράσεων μεταξύ των αλληλεπιδρώντων ειδών. Μια σειρά από μη-γραμμικές, πρώτης τάξης, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν το ρυθμό των αλλαγών που οφείλονται σε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ειδών. Καμία χωρική βαθμίδα ή παράγωγοι δεν είναι παρούσες σε αυτές τις εξισώσεις. Οι εκφράσεις για τα ποσοστά που απαντώνται συνήθως στην κινητική της καύσης, συνήθως γράφονται στη μορφή Arrhenius:

$$k = A(T/T_0)^n e^{-\frac{\mathcal{E}_a}{\bar{R}T}}$$

όπου T_0 είναι η θερμοκρασία αναφοράς, ώστε να επιτρέψει στη δύναμη n να είναι αδιάστατη και \bar{R} είναι η παγκόσμια σταθερά για τα αέρια.

Η θερμοκρασία υπολογίζεται από την εξίσωση ενέργειας μαζί με την εξίσωση Arrhenius για χημική κινητική. Όταν οι χημικές αντιδράσεις απελευθερώνουν ή να απορροφούν μια μεγάλη ποσότητα ενέργειας, η κινητική της αντίδρασης είναι έντονα συνδεδεμένη με συναγωγή μέσω πίεσης και πυκνότητας. Αυτές οι εξόχως ενδόθερμες ή εξώθερμες αντιδράσεις δημιουργούν μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ της χημείας και της δυναμικής των ρευστών.

Η αρχική σκληρότητα του μείγματος που αντιπροσωπεύει την αναλογία της μάζας του καυσίμου προς του οξειδωτή που παρέχεται από τα αντίστοιχα σύνορα, κανονικοποιημένη με τις στοιχειομετρικές αναλογίες τους, δίνεται

$$\phi = \frac{Y_f/Y_{o,b}}{\nu_f W_f/\nu_o W_o}$$

όπου W_f και W_o είναι τα μοριακά βάρη του καυσίμου και του οξειδωτή, αντίστοιχα.

3.1.3 Καταστατικές εξισώσεις και Συνοριακές Συνθήκες

Οι Sohn et al. [22] ήταν οι πρώτοι που έδειξαν ότι, σε ένα ειδικό σύνολο παραμέτρων, οι γραμμικά αυξανόμενες ταλαντώσεις μπορεί να εξελιχθούν σε μία σταθερά ταλαντευόμενη φλόγα όταν χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση της μη γραμμικής ακτινοβολίας $RDa(T^4 - T_0^4)$, όπου R ο λόγος του χαρακτηριστικού χρόνου αντίδρασης προς το χρόνο ακτινοβολίας. Καθώς $R \rightarrow 0$ η χημική αντίδραση υπερισχύει και η ακτινοβολία γίνεται ασήμαντη.

Ο αδιάστατος βαθμός της αντίδρασης, οποίος μετράει τη μάζα του οξειδωτή που καταναλώνεται ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου, δίνεται

$$\omega = Da Y_o Y_f e^{-T_a/T} \quad (3.4)$$

όπου $T_a = \mathcal{E}_a/\bar{R}T_b^*$ είναι η αδιάστατη θερμοκρασία ενεργοποίησης, \mathcal{E}_a η συνολική ενέργεια ενεργοποίησης και \bar{R} είναι η παγκόσμια σταθερά για τα αέρια.

Οι αδιάστατες εξισώσεις που μοντελοποιούν τη συγκεκριμένη διάταξη [25, 26, 28] δίνονται

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \omega - RD_\alpha (T^4 - T_0^4), \quad (3.5\alpha')$$

$$Le \frac{\partial Y_o}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y_o}{\partial x^2} - \omega, \quad (3.5\beta')$$

$$Le \frac{\partial Y_f}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y_f}{\partial x^2} - \omega. \quad (3.5\gamma')$$

όπου, $T = T(x, t)$ είναι η θερμοκρασία της φλόγας, T_0 η αδιάστατη αρχική θερμοκρασία αναφοράς των τοιχωμάτων, Y_o και Y_f , ως γνωστόν, τα κλάσματα μάζας του οξειδωτή και του καυσίμου, αντίστοιχα, Le ο αριθμός *Lewis* που είναι κοινός και $Lewis = 1$. Ο αριθμός *Damköhler* δίνεται

$$Da = B^* t_c^* \nu Y_{o,b}^* = B^* \nu Y_{o,b}^* d_c^{*2} / D_T^*$$

όπου, B^* είναι ένας συντελεστής συχνότητας με μονάδες αντίστροφες του χρόνου.

Σημείωση Είναι αξιοσημείωτο ότι η απώλεια θερμότητας ακτινοβολίας είναι ανάλογη με τον αριθμό *Damköhler*. Τόσο η απώλεια θερμότητας ακτινοβολίας όσο και ο όρος της αντίδρασης είναι ανεξάρτητες από το την απόσταση d_c^* που διαχωρίζει στη μέση την καύση, ενώ η μεταφορά θερμότητας διάχυσης είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το d_c^{*2} . Κανονικοποιημένος από το χαρακτηριστικό μήκος διάχυσης και τις χρονικές κλίμακες, ο όρος της αντίδρασης, καθώς και ο όρος της απώλεια θερμότητας ακτινοβολίας γίνονται ανάλογα προς τον αριθμό *Damköhler*. Ως εκ τούτου, θεωρείται ότι το μεγάλο όριο του αριθμού *Damköhler* δεν αντιστοιχεί πλέον στο όριο των *Burke* και *Schumann*, και πολλά φαινόμενα που προκύπτουν από την πεπερασμένου ρυθμού χημεία, όπως η απόσβεση της φλόγας και η αστάθεια, είναι δυνατή στο μεγάλο όριο *Damköhler* λόγω της υπερβολικής απώλειας θερμότητας ακτινοβολίας.

Οι συνοριακές συνθήκες που θεωρούνται, βάσει των υποθέσεων του μοντέλου, είναι

$$\text{στο } x = -1: \quad T = T_0 \quad Y_f = 1 \quad Y_o = 0 \quad (3.6\alpha')$$

$$\text{στο } x = 1: \quad T = T_0 \quad Y_f = 0 \quad Y_o = 1 \quad (3.6\beta')$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.4)–(3.6) διακριτοποιούνται με χρήση **κεντρικών πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης** για την προσέγγιση των χωρικών παραγώγων που υπάρχουν σ' αυτό και επιλύεται επαναληπτικά με μία αριθμητική μέθοδο συνέχειας, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Ειδικότερα, ο μονοδιάστατος χώρος διακριτοποιείται σε $N = 100$ ισομήκη διαστήματα (δηλαδή, $N + 1 = 101$ κόμβους, έτσι, ώστε η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων είναι $\Delta x = h = 0,02$). Για να ελεγχθεί η ακρίβεια της συγκεκριμένης διακριτοποίησης, συγκρίναμε τις λύσεις για τη μόνιμη κατάσταση (που λαμβάνονται για διαφορετικές τιμές Da και R) με λύσεις που πήραμε για διάφορες διακριτοποιήσεις πυκνότερου πλέγματος. Οι λύσεις παρουσίασαν πολύ μικρές διαφορές με μεταξύ τους, έτσι, ώστε όλοι οι μετέπειτα υπολογισμοί εκτελέστηκαν σε αυτό το πλέγμα (101 κόμβοι).

Το ερώτημα είναι πώς θα κατασκευαστεί συστηματικά τα διαγράμματα διακλάδωσης των σταθερών και περιοδικών λύσεων και θα εκτελεστεί η ανάλυση της ευστάθειας τους. Η απάντηση έρχεται από την έννοια του χρονικού βήματος και τη μέθοδο συνέχειας μέσω του **ψευδο-μήκους τόξου** της καμπύλης².

3.3 Χρησιμοποιούμενες μέθοδοι συνέχειας

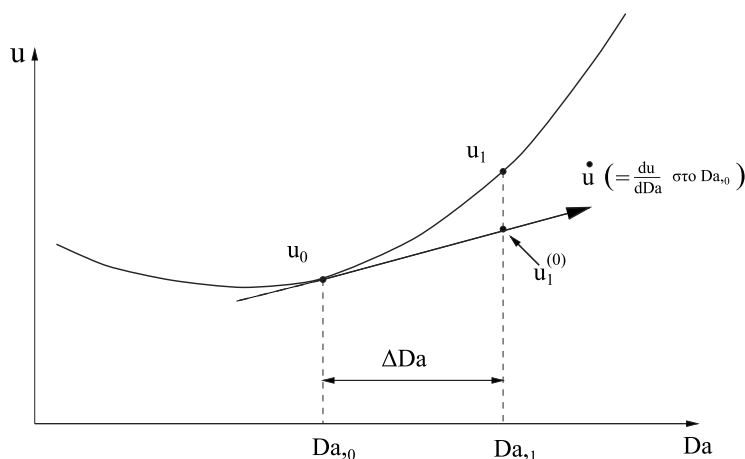
3.3.1 Χρήση της μεθόδου Newton-Raphson

Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newton-Raphson για να λυθεί το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων (3.7)- (3.9):

Σε κάθε επανάληψη, η διαδικασία περιλαμβάνει μία λύση $(\mathbf{u}_0, Da_{,0})$ της

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, Da) = 0 \quad (3.11)$$

καθώς και το διάνυσμα κατεύθυνσης $\dot{\mathbf{u}}_0 = du/dDa$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη λύση \mathbf{u}_1 στο $Da_{,1} = Da_{,0} + \Delta Da$, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2: Γραφική ερμηνεία της μεθόδου Newton-Raphson.

Για τον υπολογισμό της λύσης \mathbf{u}_1 η μέθοδος Newton είναι η εξής:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_u(\mathbf{u}_1^{(k)}, Da_{,1}) \Delta \mathbf{u}_1^{(k)} = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_1^{(k)}, Da_{,1}), \\ \mathbf{u}_1^{(k+1)} = \mathbf{u}_1^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_1^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.12)$$

Ως αρχική συνθήκη, χρησιμοποιούμε

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}_0 + \Delta Da \dot{\mathbf{u}}_0. \quad (3.13)$$

Όσο η $\mathbf{G}_u(\mathbf{u}_1, Da_1)$ είναι μη-ιδιόμορφη και το ΔDa είναι σημαντικά μικρό, τότε η θεωρία σύγκλισης για τη μέθοδο Newton εγγυάται ότι αυτή η επανάληψη θα συγκλίνει. Μετά τη σύγκλιση, το καινούριο διάνυσμα κατεύθυνσης $\dot{\mathbf{u}}_1$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της επίλυσης της

$$\mathbf{G}_u(\mathbf{u}_1, Da_{,1}) \dot{\mathbf{u}}_1 = -\mathbf{G}_{Da}(\mathbf{u}_1, Da_{,1})^3. \quad (3.14)$$

²Βλέπε παράγραφο 1.4.3.

³Η εξίσωση αυτή εξάγεται από διαφόριση της $G(\mathbf{u}(Da), Da) = 0$ ως προς το Da στο $Da = Da_{,1}$.

Σημείωση Η \mathbf{G}_u είναι η ιακωβιανή του πίνακα G του συστήματος, η οποία έχει τη μορφή

$$\mathbf{G}_u = \begin{pmatrix} \left(\frac{d\mathbf{G}}{dT} \right) & \left(\frac{d\mathbf{G}}{dY} \right) & \left(\frac{d\mathbf{G}}{dY_f} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right) \frac{dG}{dT} & \left(\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right) \frac{dG}{dY_o} & \left(\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right) \frac{dG}{dY_f} \end{pmatrix}_{[9(N-1) \times 9(N-1)]}$$

Ως εκ τούτου, θα πρέπει να λυθεί ένα τριγωνικό σύστημα για κάθε επανάληψη Newton.

Όμως, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο κλάδος της λύσης έχει ένα κρίσιμο σημείο όπου η μέθοδος συνέχειας αποτυγχάνει.

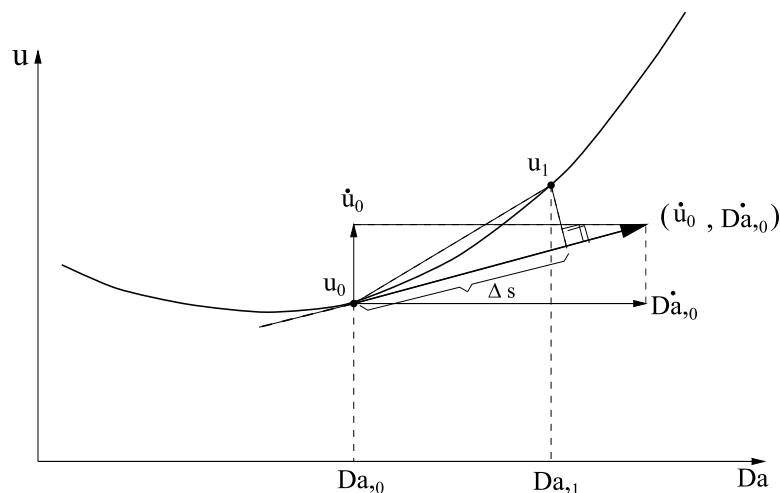
3.3.2 Συνέχιση με χρήση της μεθόδου Pseudo Arc-Length

Για να επιτραπεί η συνέχεια του κλάδου της λύσης μετά το κρίσιμο σημείο, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος συνέχειας Pseudo-ArcLength του Keller [63], βάσει της οποίας αν έχουμε μία λύση $(\mathbf{u}_0, Da_{,0})$ της (3.11), καθώς και το διάνυσμα κατεύθυνσης $(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{Da}_{,0})$ του κλάδου της λύσης. Η μέθοδος Pseudo-ArcLength επιλύει τις ακόλουθες εξισώσεις για την εύρεση του $(\mathbf{u}_1, Da_{,1})$:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, Da_{,1}) = 0, \\ \mathbf{N}(\mathbf{u}_1, Da_{,1}) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

όπου

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}_1, Da_{,1}) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)\dot{\mathbf{u}}_0 + (Da_{,1} - Da_{,0})\dot{Da}_{,0} - \Delta s. \quad (3.16)$$



Σχήμα 3.3: Γραφική ερμηνεία της μεθόδου Pseudo-ArcLength.

Η μέθοδος Newton-Raphson για τη συνέχεια της Pseudo-Arclength στην k -επανάληψη γίνεται

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{G}_u^1)^{(k)} & (\mathbf{G}_{\mathcal{D}a}^1)^{(k)} \\ \dot{\mathbf{u}} & \dot{\mathcal{D}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^{(k)} \\ \Delta \mathcal{D}a_{,1}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_1^{(k)}, \mathcal{D}a_{,1}^{(k)}) \\ \mathbf{N}(\mathbf{u}_1^{(k)}, \mathcal{D}a_{,1}^{(k)}) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

με νέο διάνυσμα κατεύθυνσης, το οποίο ορίζεται ως:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_u^1 & \mathbf{G}_{\mathcal{D}a}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_0 & \dot{\mathcal{D}a}_{,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathcal{D}a}_{,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Το Σχ. 3.3 δείχνει μία γραφική ερμηνεία αυτής της μεθόδου συνέχειας.

Σημείωση Για τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να πούμε ότι:

- Στην πράξη το $(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathcal{D}a}_{,1})$ μπορεί να υπολογιστεί με μόνο μία αντικατάσταση.
- Η περιστροφή του κλάδου διατηρείται αν το Δs είναι αρκετά μικρό.
- Το διάνυσμα κατεύθυνσης πρέπει να επανακλιμακωθεί, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1\|^2 + \dot{\mathcal{D}a}_{,1}^2 = 1. \quad (3.19)$$

Για την κατασκευή του διαγράμματος διακλάδωσης, στον ορισμό των παραγώγων $\dot{\mathbf{u}}$ και $\dot{\mathcal{D}a}$, θεωρήσαμε δύο αρχικές λύσεις $(\mathbf{u}_0, \mathcal{D}a_{,0})$ και $(\mathbf{u}_1, \mathcal{D}a_{,1})$ της (3.11) και θέσαμε

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^T}{\Delta s} \quad \text{και} \quad \dot{\mathcal{D}a} = \frac{(\mathcal{D}a_{,1} - \mathcal{D}a_{,0})}{\Delta s}. \quad (3.20)$$

Συνεπώς, για τη λύση $(\mathbf{u}, \mathcal{D}a)$ της κάθε επανάληψης, η γραμμικοποιημένη συνθήκη (3.16) της Pseudo-Arclength μεθόδου θα γίνει

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathcal{D}a) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^T}{\Delta s} + (\mathcal{D}a - \mathcal{D}a_{,1}) \frac{(\mathcal{D}a_{,1} - \mathcal{D}a_{,0})}{\Delta s} - \Delta s = 0, \quad (3.21)$$

οπότε, η σχέση (3.15) θα γίνει

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathcal{D}a) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathcal{D}a) \\ \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathcal{D}a) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Αν θέσουμε $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathcal{D}a)$, τότε η ιακωβιανή της \mathbf{H} δίνεται

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathcal{D}a} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathcal{D}a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_u & \mathbf{G}_{\mathcal{D}a} \\ \mathbf{N}_u & \mathbf{N}_{\mathcal{D}a} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

η οποία αποτελεί έναν τριδιαγώνιο πίνακα διάστασης $[9(N - 1) \times 9(N - 1)]$ με μία επιπλέον γραμμή και στήλη. Δηλαδή, έχει τη μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & & & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

Συνεπώς, η μέθοδος Newton-Raphson για τη συνέχεια της Pseudo-Arclength, σύμφωνα με τη σχέση (3.17), γίνεται

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{u}} & \mathbf{G}_{\mathcal{D}a} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{u}} & \mathbf{N}_{\mathcal{D}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathcal{D}a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathcal{D}a) \\ \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathcal{D}a) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

όπου, τελικά,

$$\mathbf{N}_{\mathbf{u}} = \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^T}{\Delta s} \quad \text{και} \quad \mathbf{N}_{\mathcal{D}a} = \frac{(\mathcal{D}a_{,1} - \mathcal{D}a_{,0})}{\Delta s}$$

Τέλος, το νέο διάνυσμα κατεύθυνσης ορίζεται ως:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{u}} & \mathbf{G}_{\mathcal{D}a} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{u}} & \mathbf{N}_{\mathcal{D}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathcal{D}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

ενώ η συνθήκη (3.19) γίνεται

$$\sqrt{\Delta \mathbf{u}^2 + \Delta \mathcal{D}a^2} = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^T (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) + (\mathcal{D}a_{,1} - \mathcal{D}a_{,0})^2} = \Delta s. \quad (3.26)$$

3.4 Το διάγραμμα διακλάδωσης

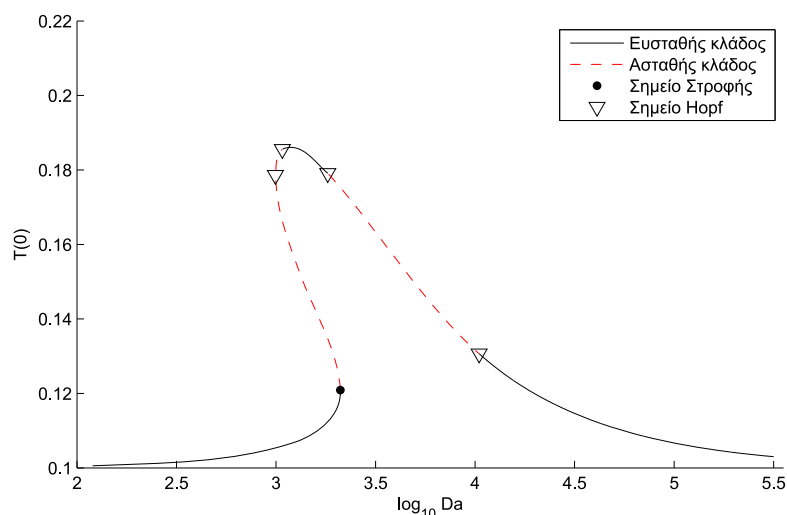
Αρχικά, υπολογίσαμε δύο λύσεις $(\mathbf{u}_0, \mathcal{D}a_{,0})$ και $(\mathbf{u}_1, \mathcal{D}a_{,1})$ για τη μόνιμη κατάσταση, όπου τελικά $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$, με χρήση της μεθόδου Euler-Newton για τιμές $\mathcal{D}a \sim O(10^2)$ όπου γνωρίζουμε ότι ο κλάδος της λύσης είναι ευσταθής και μακριά από τα κρίσιμα σημεία, με αποτέλεσμα η μέθοδος να συγκλίνει. Οι λύσεις αυτές βρέθηκαν με ολοκλήρωση Runge-Kutta. Για να δοκιμαστεί η ακρίβεια των υπολογιζόμενων λύσεων συγκρίναμε τα αποτελέσματα με διάφορα γνωστά πακέτα επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων (πακέτα ODE του προγράμματος *MATLAB*TM [93]). Η σύγκριση έδειξε αμελητέα διαφορά στα λαμβανόμενα αποτελέσματα.

Στη συνέχεια, με χρήση της μεθόδου Pseudo-Arclength βρέθηκε η λύση μόνιμης κατάστασης κατά μήκος όλων των κλάδων της λύσης, τόσο των ευσταθών, όσο και των ασταθών.

Στο Σχ. 3.4 φαίνεται το διάγραμμα διακλάδωσης της λύσης της μόνιμης κατάστασης της θερμοκρασίας συναρτήσει της παραμέτρου $\mathcal{D}a$ στο $x = 0$, $T(0)$. Το διαγράμματα διακλάδωσης κατασκευάστηκε για $T_a = 1^4$. Η λύση που αναπαρίσταται αντιστοιχεί σε λύση

⁴Επιλέξαμε μία πολύ χαμηλή θερμοκρασία ενεργοποίησης $T_a = 1$, διότι σε αυτό το T_a είναι πολύ πιο εύκολο να δείξουμε την εξέλιξη του διαγράμματος διακλάδωσης.

μόνιμης κατάστασης για $R = 0.2$ και εύρος τιμών της παραμέτρου $\log_{10} Da \in [2, 5.5]$. Με μαύρη συνεχόμενη γραμμή υποδηλώνονται οι ευσταθείς κλάδοι, με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή οι ασταθείς κλάδοι, ενώ για τα σημεία διακλάδωσης, με μαύρο κύκλο υποδηλώνεται το σημείο στροφής και με λευκό τρίγωνο τα σημεία Hopf-Andronov.



Σχήμα 3.4: Παραμετρική εξάρτηση της θερμοκρασίας στο $x = 0$ συναρτήσει του αριθμού Damköhler για $R = 0.2$ και $T_a = 1$.

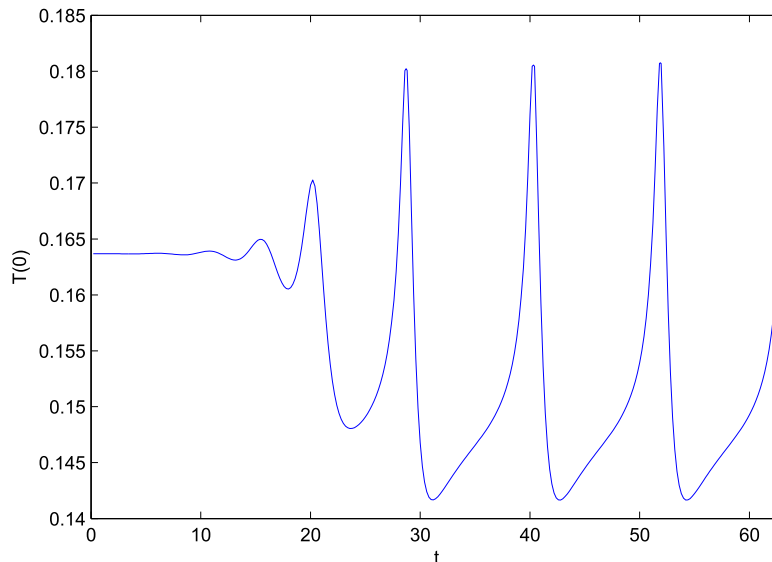
3.4.1 Χαρακτηρισμός των κλάδων της λύσης και των σημείων διακλάδωσης

Για κάθε λύση μπορούμε να βρούμε τη μεγαλύτερη (κυρίαρχη) ιδιοτιμή της ιακωβιανής \mathbf{G}_u του γραμμικού συστήματος, η οποία καθορίζει την ευστάθεια της λύσης μόνιμης κατάστασης. Είναι γνωστό, ότι αν όλες ιδιοτιμές σ της ιακωβιανής \mathbf{G}_u έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε όλες οι λύσεις του συστήματος (3.7)- (3.9) που ξεκινούν ως μικρές διαταραχές της λύσης μόνιμης κατάστασης μειώνονται εκθετικά προς αυτήν, τότε η μόνιμη κατάσταση είναι ευσταθής. Η μόνιμη κατάσταση είναι ασταθής, εάν υπάρχει μια σ ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος.

Όταν η κυρίαρχη ιδιοτιμή είναι μιγαδική και το πραγματικό μέρος της αλλάζει πρόσημο καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος Da , τότε εμφανίζεται μία **διακλάδωση Hopf-Andronov**. Η διακλάδωση Hopf-Andronov είναι είτε υπερκρίσιμη ή υποκρίσιμη⁵.

- Όταν η Hopf-Andronov διακλάδωση είναι υπερκρίσιμη, τότε ευσταθείς περιοδικές ταλαντώσεις (οριακοί κύκλοι) εξελίσσονται από μικρές διαταραχές των ασταθών λύσεων που είναι κοντά στο σημείο διακλάδωσης στην πλευρά όπου η κυρίαρχη ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος. Με άλλα λόγια, μικρές διαταραχές των ασταθών λύσεων μόνιμης κατάστασης κοντά στην υπερκρίσιμη διακλάδωση εξελίσσονται σε μία περιοδική ευσταθή λύση.
- Όταν η διακλάδωση είναι υποκρίσιμη, τότε μία ασταθής περιοδική λύση υπάρχει στην πλευρά όπου η κυρίαρχη ιδιοτιμή έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Μικρές διαταραχές της ασταθούς λύσης μόνιμης κατάστασης κοντά στο σημείο της υποκρίσιμης διακλάδωσης μπορούν να οδηγήσουν στην απόσβεση, όπως θα δούμε παρακάτω.

⁵Βλέπε μαθηματικό υπόβαθρο.



Σχήμα 3.5: Έναρξη περιοδικών ταλαντώσεων κοντά στο σημείο της διακλάδωσης.

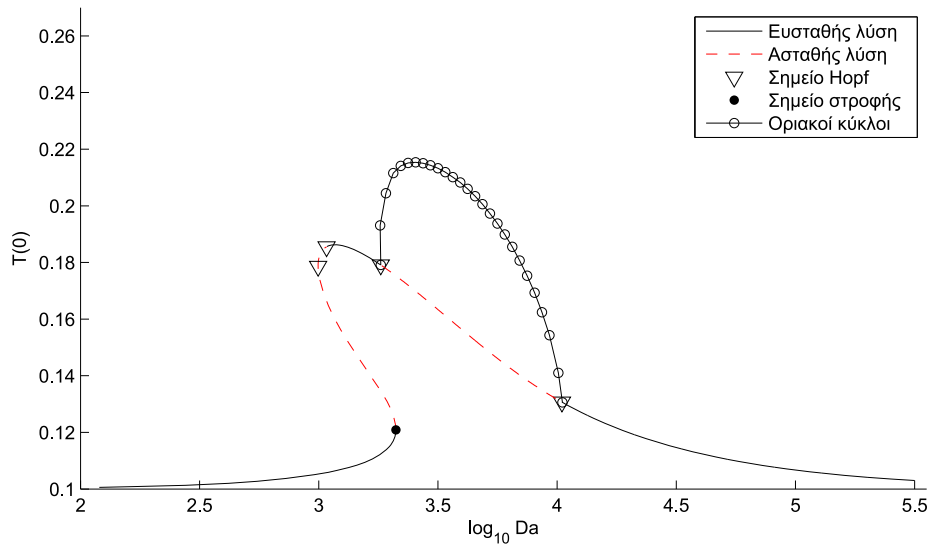
Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της διακλάδωσης Hopf-Andronov κάναμε μια μικρή αρχική διαταραχή της ασταθούς λύσης μόνιμης κατάστασης κοντά στο σημείο της διακλάδωσης και λύσαμε το σύστημα (3.7)- (3.9) με την άμεση μέθοδο συνέχειας Euler-Newton. Είναι σημαντικό να βρισκόμαστε αρκετά κοντά στο σημείο διακλάδωσης και το μέγεθος της διαταραχής να είναι αρκετά μικρό (Σχ. 3.5). Το σχήμα διαταραχής δεν έχει σημασία. Ωστόσο, εάν βρισκόμαστε πολύ κοντά στο σημείο διακλάδωσης ή η διαταραχή είναι πολύ μικρή, τότε παίρνει πολύ χρόνο για να καθοριστεί αν μια περιοδική λύση εξελίσσεται. Από την άλλη, η εξέλιξη των μικρών διαταραχών των ασταθών λύσεων μόνιμης κατάστασης που βρίσκονται πιο μακριά από το σημείο διακλάδωσης μπορεί να ακολουθήσει διάφορα σενάρια. Σε πολλούς υπολογισμούς το αποτέλεσμα ήταν πάντα είτε ευσταθείς περιοδικές ταλαντώσεις ή απόσβεση της φλόγας.

Για $R = 0.2$ και $T_a = 1$, βρήκαμε τέσσερις διακλαδώσεις Hopf-Andronov, εκ των οποίων, εκείνες στα σημεία $\log_{10} Da = 3.2610$ και $\log_{10} Da = 4.0198$ είναι υπερκρίσιμες. Μεταξύ των διακλαδώσεων αυτών οι λύσεις μόνιμης κατάστασης είναι γραμμικά ασταθείς. Ωστόσο, διαταραχές όλων αυτών τα ασταθών λύσεων οδηγούν σε ευσταθείς ταλαντώσεις, όπως ήδη αναφέραμε.

3.4.2 Κατασκευή του κλάδου οριακών κύκλων

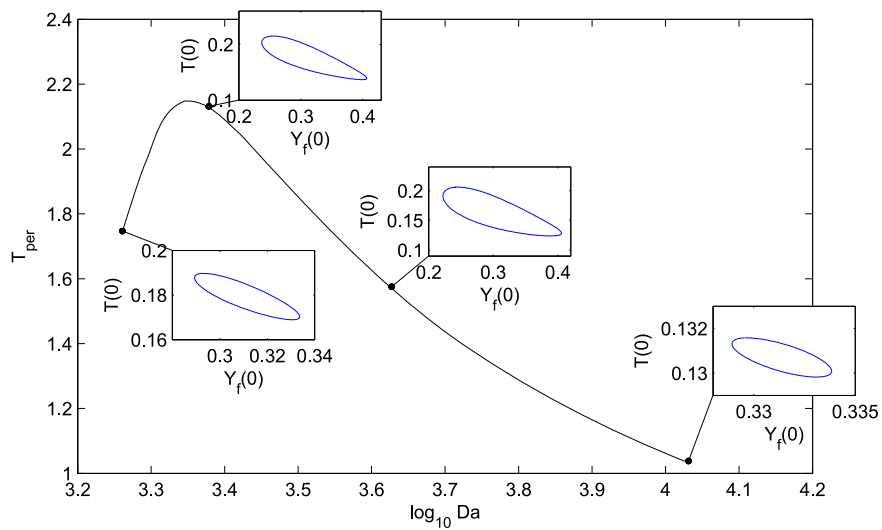
Για την κατασκευή του κλάδου των περιοδικών λύσεων επιλύσαμε το σύστημα (3.7)- (3.9) με την άμεση μέθοδο συνέχειας Euler-Newton παίρνοντας ως αρχική λύση μια διαταραγμένη λύση του ασταθούς κλάδου για τιμές $\log_{10} Da \in (3.2610, 4.0198)$. Η μέθοδος έτρεξε μέχρις ότου τα πλάτη των ταλαντώσεων των λύσεων να έχουν αμελητέα διαφορά. Οι υπολογισμένοι οριακοί κύκλοι βρέθηκαν όλοι σταθεροί. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάστηκε ο κλάδος των οριακών κύκλων που καθορίζει το μέγιστο ύψος των ταλαντώσεων. Ειδικότερα, έχουμε σχεδιάσει τη μέγιστη τιμή του $T(0)$ κατά τη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης. Συνεπώς, το Σχ. 3.4 θα γίνει

Όπου, όπως και πριν, αναπαράγεται το διάγραμμα διακλάδωσης της μόνιμης κατάστασης για $R=0.2$ και ο πλήρης κλάδος των περιοδικών λύσεων μεταξύ των σημείων Hopf-Andronov. Με μαύρη συνεχόμενη γραμμή υποδηλώνονται οι ευσταθείς κλάδοι, με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή οι ασταθείς κλάδοι, ενώ για τα σημεία διακλάδωσης, με μαύρο κύ-



Σχήμα 3.6: Ολικό διάγραμμα διακλάδωσης της θερμοκρασίας στο σημείο $x = 0$ συναρτήσει του αριθμού *Damköhler* για $R = 0.2$ και $T_a = 1$.

κλο υποδηλώνεται το σημείο στροφής και με λευκό τρίγωνο τα σημεία Hopf-Andronov. Ο κλάδος των περιοδικών λύσεων αναπαρίσταται από τη συνεχή γραμμή με τους λευκούς κύκλους.



Σχήμα 3.7: Παραμετρική εξάρτηση της περιόδου των ταλαντώσεων συναρτήσει του αριθμού *Damköhler* για $R = 0.2$ και $T_a = 1$.

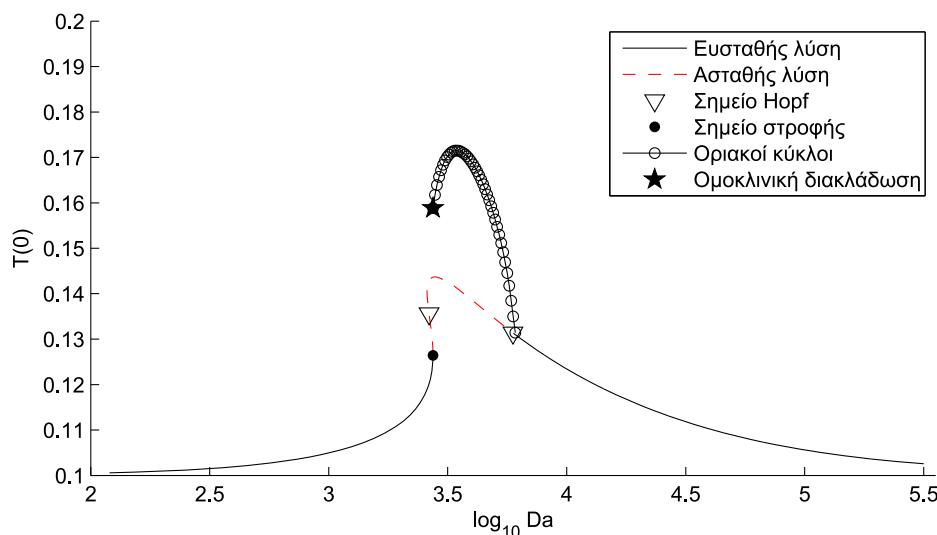
Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται καθαρά ότι η φλόγα δεν υφίσταται απόσβεση στα πλαίσια αυτού του διαστήματος.

Η εξάρτηση της περιόδου T_{per} των οριακών κύκλων ως συνάρτηση του αριθμού *Damköhler* απεικονίζεται στο Σχ. 3.7. Τα ένθετα σχήματα στα σημεία που απεικονίζονται με μαύρους κύκλους αντιστοιχούν σε πορτρέτα φάσης της θερμοκρασίας $T(0)$ του μείγματος συναρτήσει του κλάσματος μάζας καυσίμου $Y_f(0)$ του μείγματος.

3.5 Υπολογισμός της θέσης των ομοκλινικών διακλαδώσεων

Με αύξηση της τιμής του R , ενώ η τιμή της θερμοκρασίας ενεργοποίησης T_a διατηρείται σταθερή ($T_a = 1$), η περιοχή μεταξύ του αριστερού Hopf-Andronon σημείου διακλάδωσης και του σημείου στροφής μειώνεται μέχρι την πλήρη εξαφάνισή της στο $R = 0.233$. Η εξάρτηση του $T(0)$ από το Da για $T_a = 1$ και $R = 0.233$ φαίνεται λεπτομερώς στο Σχ. 3.8. Οι ευσταθείς και ασταθείς κλάδοι αναπαρίστανται με μαύρη συνεχόμενη και κόκκινη διακεκομμένη γραμμή, αντίστοιχα. Ο κλάδος των περιοδικών λύσεων αναπαρίσταται από τη συνεχή γραμμή με τους λευκούς κύκλους. Μαύροι κύκλοι και λευκά τρίγωνα χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το σημείο στροφής και τα σημεία Hopf-Andronon, αντίστοιχα. Το σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης αναπαριστάται με μαύρο αστéρι.

Το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης δείχνει και πάλι την ύπαρξη μιας περιοχής τιμών Da , όπου μπορούν να υπάρξουν ευσταθείς περιοδικές λύσεις. Ειδικότερα, ευσταθείς περιοδικές λύσεις προκύπτουν από ένα υπερκρίσιμο Hopf-Andronon σημείο διακλάδωσης, το οποίο εντοπίζεται στην τιμή $\log_{10} Da = 3.7753$. Ο κλάδος αυτός των ταλαντευόμενων λύσεων κόβεται απότομα ως συνέπεια μιας ομοκλινικής διακλάδωσης, η οποία προκαλείται στο $\log_{10} Da = 3.4381$.

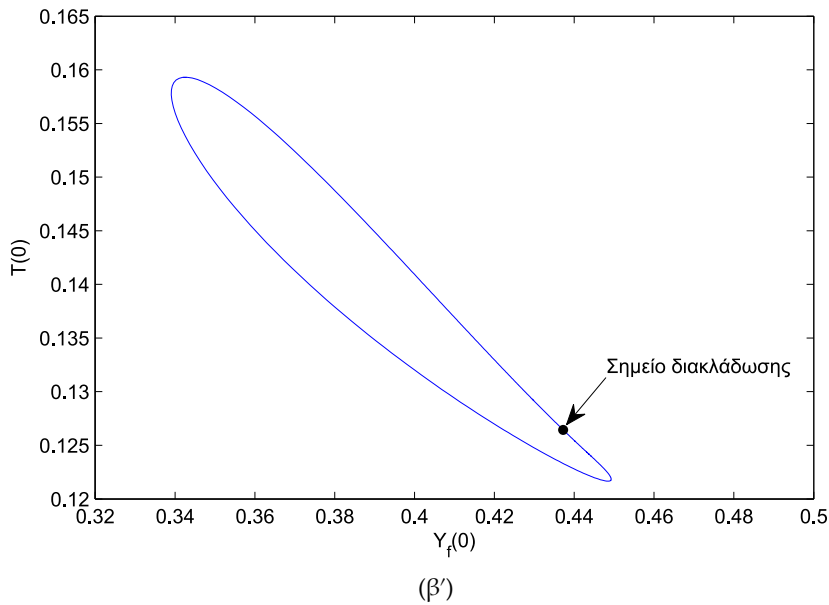
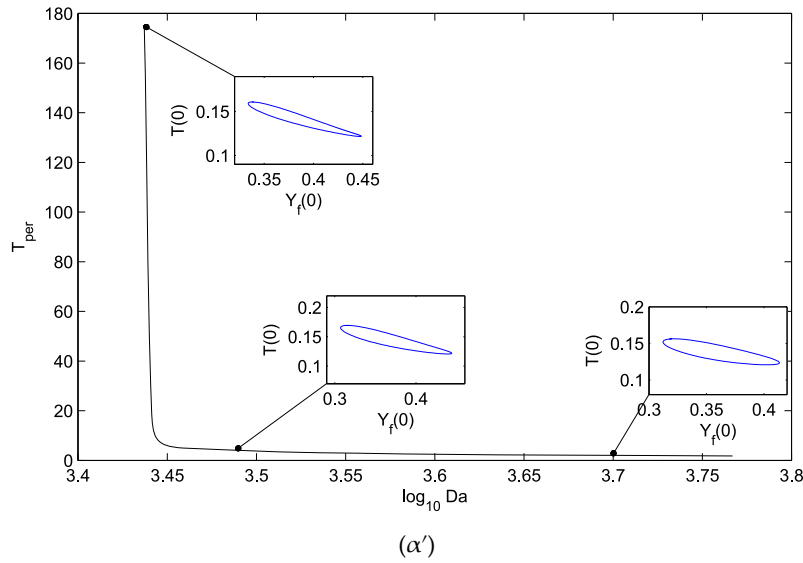


Σχήμα 3.8: Παραμετρική εξάρτηση της θερμοκρασίας στο $x = 0$ συναρτήσεως του αριθμού *Damköhler* για $R = 0.233$ και $T_a = 1$.

Η ομοκλινική διακλάδωση είναι μια ολική διακλάδωση, όπως έχουμε αναφέρει, η οποία συμβαίνει όταν μια περιοδική τροχιά συγκρούεται με ένα σαγματικό σημείο. Στο σημείο διακλάδωσης η περίοδος των ταλαντώσεων τείνει στο άπειρο και ο οριακός κύκλος μετατρέπεται σε ομοκλινική τροχιά⁶. Αυτό απεικονίζεται και στο Σχ. 3.9α', το οποίο δείχνει την εξάρτηση της περιόδου ταλάντωσης ως συνάρτηση του αριθμού *Damköhler*. Το Σχ. 3.9β' δείχνει τη σύγκρουση του οριακού κύκλου με το σημείο διακλάδωσης στο $\log_{10} Da = 3.4377$. Εδώ, συγκεκριμένα, η ταλαντευόμενη (παλλόμενη) λύση συγκρούεται με τη λύση μόνιμης κατάστασης που αντιστοιχεί στο σημείο στροφής (μαύρος κύκλος στο Σχ. 3.8) στο $\log_{10} Da = 3.4377$.

Η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος απεικονίζεται στο Σχ. 3.10 για διάφορες τιμές του Da γύρω από την ομοκλινική διακλάδωση. Συγκεκριμένα, φαίνεται η εξέλιξη των

⁶Βλέπε στην παράγραφο [Διακλάδωση ομοκλινούς βρόγχου - Ομοκλινική Διακλάδωση](#).

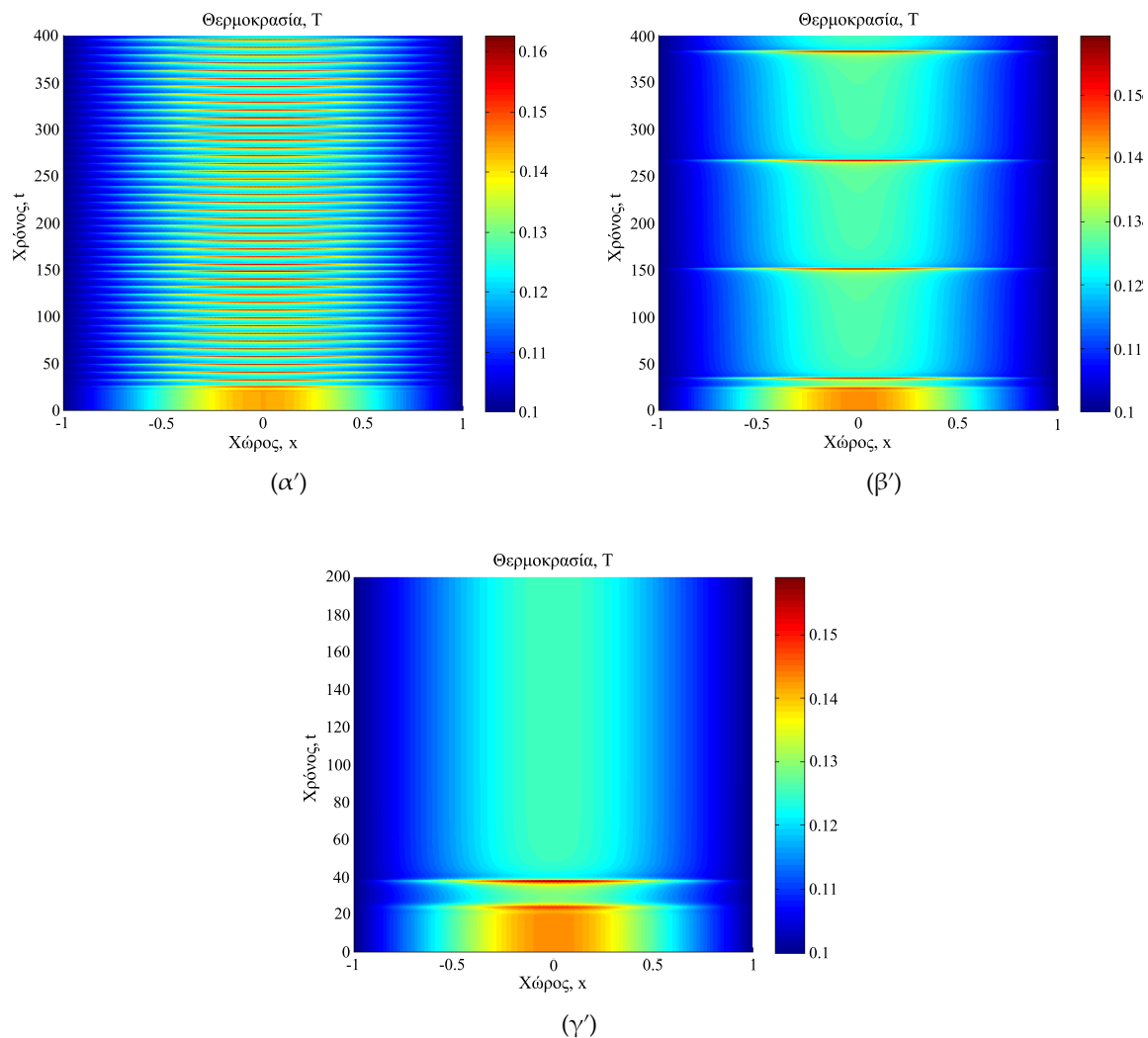


Σχήμα 3.9: Πορτρέτα φάσης της θερμοκρασίας $T(0)$ του μείγματος ως προς το κλάσμα μάζας καυσίμου $Y_f(0)$ του μείγματος.

α') Παραμετρική εξάρτηση της περιόδου των ταλαντώσεων συναρτήσει του αριθμού *Damköhler* για $R = 0.2$ και $T_a = 1$. Τα ένθετα διαγράμματα αντιστοιχούν σε πορτρέτα φάσης του $T(0)$ ως προς $Y_f(0)$. (β') Σύγκρουση της περιοδικής τροχιάς στο $\log_{10} Da = 3.4381$ με το σημείο διακλάδωσης, σηματοδοτώντας την ύπαρξη ομοκλινικής διακλάδωσης.

προφίλ της θερμοκρασίας για τρεις τιμές του αριθμού Da μεταξύ του σημείου ομοκλινικής διακλάδωσης στο $\log_{10} Da = 3.4381$ και του υπερκρίσιμου σημείου Hopf-Andronov στο $\log_{10} Da = 3.7753$.

Ως αρχικές συνθήκες χρησιμοποιήθηκαν οι αντίστοιχες (διαταραγμένες) ασταθείς λύσεις μόνιμης κατάστασης. Το Σχ. 3.10α' δείχνει την εξέλιξη για $\log_{10} Da = 3.4500$, όπου μπορεί κανείς να δει την εμφάνιση ευσταθούς ταλαντευόμενης συμπεριφοράς. Καθώς



Σχήμα 3.10: Εξέλιξη των ασταθών προφίλ θερμοκρασίας μόνιμης κατάστασης (κλάδος κόκκινης διακεκομμένης γραμμής μεταξύ των Hopf-Andronov σημείων στο Σχ. 3.8)

Εξέλιξη σε: (α') ευσταθείς ταλαντώσεις πέρα από το σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης, π.χ. $\log_{10} Da = 3.4500$, (β') ευσταθείς ταλαντώσεις μεγάλων περιόδων T_{per} στην περιοχή του σημείου ομοκλινικής διακλάδωσης, π.χ. $\log_{10} Da = 3.4378$, (γ) ευσταθές προφίλ μόνιμης κατάστασης για αριθμό *Damköhler* κάτω από το σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης, π.χ. $\log_{10} Da = 3.4377$. Εδώ, η ταλαντευόμενη συμπεριφορά που παρατηρήθηκε στην αρχή της εξέλιξης εξασθενίζει γρήγορα και το σύστημα εξελίσσεται προς την αντίστοιχη ευσταθή λύση μόνιμης κατάστασης (κλάδος μαύρης συνεχόμενης γραμμής στο Σχ. 3.8).

πλησιάζουμε στο σημείο της ομοκλινικής διακλάδωσης, π.χ. στο $\log_{10} Da = 3.4378$, αυτή η συμπεριφορά ταλάντωσης εξακολουθεί να παρατηρείται με μεγάλες περιόδους ταλάντωσης (Σχ. 3.10β'). Τέλος, όταν διασχίζουμε το σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης, π.χ. στο $\log_{10} Da = 3.4377$, οι περιοδικές λύσεις παύουν να υπάρχουν πια και το σύστημα εξελίσσεται προς την ευσταθή λύση μόνιμης κατάστασης, κοντά στην απόσβεση (Σχ. 3.10γ').

Βάσει των προηγούμενων, αν το σύστημα εξελίσσεται με ευσταθή ταλαντευόμενη συμπεριφορά κοντά στην ομοκλινική διακλάδωση, μία μικρή διαταραχή στον αριθμό Da προς τη διακλάδωση θα οδηγήσει το σύστημα σε μόνιμη κατάσταση. Αυτό το εύρημα είναι

ποιοτικά σε συμφωνία με πειραματικές παρατηρήσεις των ταλαντώσεων που εξαφανίζονται απότομα κοντά στην απόσβεση της φλόγας.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Η μη γραμμική ανάλυση των κρίσιμων καταστάσεων για την έναρξη των ταλαντευόμενων φλογών, καθώς και των διακλαδώσεων, είναι πρωταρχικής σημασίας για την κατανόηση των κύριων φυσικών και χημικών μηχανισμών που εμπλέκονται στις αστάθειες θερμοότητας διάχυσης κοντά στη απόσβεση των φλογών. Παρ' όλα αυτά, ένας ολοκληρωμένος χαρακτηρισμός της μη γραμμικής δυναμικής των φλογών διάχυσης μπορεί να υπάρξει μόνο αν υπολογιστούν συστηματικά οι διακλαδώσεις και η αστάθεια των περιοχών ταλάντωσής τους.

Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία της θεωρίας διακλαδώσεων για να αναλύσουμε τη δυναμική ενός μοντέλου επίπεδης φλόγας αντιρροής με απώλειες ακτινοβολίας θερμοότητας, και ενσωματώνοντας κινητική μονού βήματος με συστηματικό τρόπο, καταφέραμε να κατασκευάσουμε τα πλήρη διαγράμματα διακλάδωσης, συμπεριλαμβανομένων των κλάδων των οριακών κύκλων επιλέγοντας τον αριθμό *Damköhler* σαν την παράμετρο συνέχειας. Ειδικότερα, υπολογίσαμε συστηματικά την ευστάθεια και την διακλάδωση των παλλόμενων λύσεων για αριθμό *Lewis* ίσο με τη μονάδα και για διαφορετικές τιμές της απώλειας ακτινοβολίας και της ενέργειας ενεργοποίησης.

Δείξαμε ότι, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων, υπάρχουν ομοκλινικές διακλαδώσεις που είναι υπεύθυνες για την ξαφνική απόσβεση των ταλαντώσεων της φλόγας. Με το συστηματικό εντοπισμό των κλάδων των ταλαντευόμενων λύσεων, βρέθηκε η ακριβής θέση αυτών των ομοκλινικών διακλαδώσεων. Τα αποτελέσματα που ελήφθησαν αποκαλύπτουν μηχανισμούς, οι οποίοι μπορεί να είναι υπεύθυνοι για την απότομη απώλεια της ευστάθειας των παλλόμενων λύσεων, μια συμπεριφορά, η οποία έχει παρατηρηθεί σε σχετικά πειράματα [5]. Τέλος, η προτεινόμενη διαδικασία φαίνεται να είναι κατάλληλη για την ανάλυση της δυναμικής πιο σύνθετων μοντέλων μεγάλης κλίμακας, συμπεριλαμβανομένης μιας λεπτομερούς χημικής κινητικής.

Μερικά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά ανακαλύφθηκαν, επιπλέον, στην εργασία [1], αναλύοντας το διάγραμμα διακλάδωσης που προέκυψε με την περαιτέρω αύξηση της τιμής της θερμοκρασίας ενεργοποίησης σε $T_a = 1.2$ και για $R = 0.01$. Σε αυτήν την περίπτωση κάποιος μπορεί να παρατηρήσει μια περιοχή ασταθών λύσεων, η οποία περιορίζεται από δύο σημεία στροφής. Τα σημεία Hopf-Andronon υποδεικνύουν μια μικρή περιοχή ευσταθών περιοδικών λύσεων. Με αύξηση της παραμέτρου Da , στους οριακούς κύκλους, αρχικά, αυξάνεται το πλάτος, και στη συνέχεια μειώνεται για να φθάσει τον κλάδο της ευσταθούς λύσης μόνιμης κατάστασης.

Αυξάνοντας την τιμή του R σε $R = 0.04$, μία νέα συμπεριφορά παρατηρείται. Παρατηρείται μια περιοχή ασταθών λύσεων που περιορίζεται από τα σημεία στροφής. Τα Hopf-Andronon σημεία σηματοδοτούν μια μεγάλη, αυτή τη φορά, περιοχή ευσταθών περιοδικών λύσεων. Ωστόσο, η μετάβαση από τις λύσεις μόνιμης κατάστασης στις ταλαντευόμε-

νες είναι διαφορετική από εκείνη που παρατηρήθηκε για $T_a = 1.2$ και $R = 0.01$. Πράγματι, κοντά στην πρώτη Hopf-Andronon διακλάδωση, η ταλάντωση της θερμοκρασίας αυξάνει σε πλάτος απότομα μέχρι μία νέα ομοκλινική διακλάδωση. Ο κλάδος των οριακών κύκλων που δημιουργείται δεν ξεκινά συνεχόμενα από αυτό το σημείο της ομοκλινικής διακλάδωσης. Χωρίζεται από αυτό με ένα νέο σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης.

4.1 Μελλοντική έρευνα

Προκειμένου να κατανοήσουμε την πλήρη μη γραμμική δυναμική δομή, είναι απαραίτητο να αποκαλύψουμε τον τρόπο με τον οποίο τα σημεία Hopf-Andronon (δλδ οι ομοκλινικές διακλαδώσεις) -και κατ' επέκτασης οι περιοχές των ταλαντευόμενων λύσεων- συνδέονται και μεταβάλλονται σε σχέση με τη μεταβολή της θερμοκρασίας ενεργοποίησης και το συντελεστή απώλειας ακτινοβολίας. Θα ήταν μια χρήσιμη επέκταση της παρούσας μελέτης η διερεύνηση της πλήρους δομής με την μελέτη της εξέλιξης των ομοκλινικών διακλαδώσεων για διαφορετικές τιμές της θερμοκρασίας ενεργοποίησης και διαφορετικούς συντελεστές απώλειας ακτινοβολίας, σε ολόκληρο το εύρος των τιμών της παραμέτρου Da , δηλαδή σε σύστημα μικρής-μεγάλης κλίμακας.

Ήδη, η θεωρία διαταραχών πολλαπλής κλιμάκωσης και η μέθοδος του Melnikov [55], μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη μη-γραμμικών φαινομένων και ομοκλινικών διακλαδώσεων, συγκεκριμένα. Ετσι, θα μπορούσε να εξεταστεί το αν είναι δυνατό να εξαχθεί μία γενική και αναλυτική συνθήκη για την εύρεση της ομοκλινικής διακλάδωσης, δίχως να είναι απαραίτητη η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα. Θα μπορούσε, δηλαδή, να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης του θεωρήματος του Melnikov. Η θεωρία αυτή απαιτεί ως προϋπόθεση τη μετατροπή του συστήματος σε Χαμιλτονιανή μορφή. Συνεπώς, μένει ανοιχτό το ερώτημα αν είναι δυνατό να έρθει σε αυτή τη μορφή το σύστημα των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που εξετάσαμε.

Επίσης, θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω ανάλυση της συμπεριφοράς της φλόγας κοντά στην απόσβεση, κάνοντας χρήση αλγοριθμικών μεθοδολογιών για την ανάλυση πολλαπλών χρονοκλιμάκων του δυναμικού συστήματος, όπως η CSP [94–97] ή η ILDM [94, 98]. Με τη χρήση αυτών των αλγορίθμων μελετώνται οι γρήγορες και αργές πολλαπλότητες της λύσης, έτσι ώστε να ανιχνευτούν οι εκρηκτικές χρονοκλίμακες, οι οποίες μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για τις ποσότητες εκείνες του δυναμικού συστήματος που οδηγούν τη λύση και χαρακτηρίζουν κατά κύριο λόγο τη συμπεριφορά της φλόγας. Με κατάλληλο χειρισμό αυτών των ποσοτήτων μέσα στο σύστημα θα μπορούσε να υπάρξει πλήρης έλεγχος του πλάτους ταλάντωσης ή ακόμα και αποφυγή των περιοδικών λύσεων πριν την απόσβεση.

Βιβλιογραφία

- [1] M.E. Kavousanakis, L. Russo, F.S. Marra, and C. Siettos. Homoclinic bifurcations in radiating diffusion flames. *Combustion Theory and Modelling*, 17(1):40–52, 2013.
- [2] W.Y. Chan and J.S. Tien. An experiment on spontaneous flame oscillation prior to extinction. *Combustion Science and Technology*, 18(3-4):139–143, 1978.
- [3] H.D. Ross, R.G. Sotos, and J.S. Tien. Short communication. *Combustion Science and Technology*, 75(1-3):155–160, 1991.
- [4] V. Nayagam and F.A. Williams. Dynamics of diffusion flame oscillations prior to extinction during low gravity droplet combustion. In *Seventh International Conference on Numerical Combustion*, volume 46. SIAM, 1998.
- [5] M. Füre, P. Papas, and P. A. Monkewitz. Non-premixed jet flame pulsations near extinction. *Proceedings of the Combustion Institute*, 28(1):831 – 838, 2000.
- [6] B. Golovanevsky, Y. Levy, J.B. Greenberg, and M. Matalon. On the oscillatory behavior of laminar spray diffusion flames: experiment and theory. *Combustion and Flame*, 117(1-2):373 – 383, 1999.
- [7] M. Matalon. Flame dynamics. *Proceedings of the Combustion Institute*, 32(1):57 – 82, 2009.
- [8] H.D. Ross. Ignition of and flame spread over laboratory-scale pools of pure liquid fuels. *Progress in Energy and Combustion Science*, 20(1):17 – 63, 1994.
- [9] D.N. Schiller, H.D. Ross, and W.A. Sirignano. Computational analysis of flame spread across alcohol pools. *Combustion Science and Technology*, 118(4-6):203–255, 1996.
- [10] D.Lo Jacono, P. Papas, and P.A. Monkewitz. Cell formation in non-premixed, axisymmetric jet flames near extinction. *Combustion Theory and Modelling*, 7(4):635–644, 2003.
- [11] S.P. Burke and T.E.W. Schumann. Diffusion flames. *Proceedings of the Symposium on Combustion*, 1-2:2 – 11, 1928.
- [12] S. Cheatham and M. Matalon. Heat loss and lewis number effects on the onset of oscillations in diffusion flames. *Symposium (International) on Combustion*, 26(1):1063 – 1070, 1996.
- [13] J.S. Kim, F.A. Williams, and P.D. Ronney. Diffusional-thermal instability of diffusion flames. *Journal of Fluid Mechanics*, 327:273–301, 11 1996.
- [14] J.S. Kim. Linear analysis of diffusional-thermal instability in diffusion flames with lewis numbers close to unity. *Combustion Theory and Modelling*, 1(1):13–40, 1997.

- [15] J.S. Kim and S.R. Lee. Diffusional-thermal instability in strained diffusion flames with unequal lewis numbers. *Combustion Theory and Modelling*, 3(1):123–146, 1999.
- [16] S. Cheatham and M. Matalon. A general asymptotic theory of diffusion flames with application to cellular instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 414:105–144, 7 2000.
- [17] S. Kukuck and M. Matalon. The onset of oscillations in diffusion flames. *Combustion Theory and Modelling*, 5(2):217–240, 2001.
- [18] R. Vance, M. Miklavcic, and I.S. Wichman. On the stability of one-dimensional diffusion flames established between plane, parallel, porous walls. *Combustion Theory and Modelling*, 5(2):147–161, 2001.
- [19] S. Lee and J. Kim. Nonlinear dynamic characteristics of flame stripes formed in strained diffusion flames by diffusional–thermal instability. *Combustion Theory and Modelling*, 4(1):29–46, 2000.
- [20] S.R. Lee and J.S. Kim. On the sublimit solution branches of the stripe patterns formed in counterflow diffusion flames by diffusional–thermal instability. *Combustion Theory and Modelling*, 6(2):263–278, 2002.
- [21] C.H. Sohn, S.H. Chung, and J.S. Instability-induced extinction of diffusion flames established in the stagnant mixing layer. *Combustion and Flame*, 117(1-2):404 – 412, 1999.
- [22] C.H. Sohn, J.S. Kim, S.H. Chung, and K. Maruta. Nonlinear evolution of diffusion flame oscillations triggered by radiative heat loss. *Combustion and Flame*, 123(1-2):95 – 106, 2000.
- [23] E.W. Christiansen, S.D. Tse, and C.K. Law. A computational study of oscillatory extinction of spherical diffusion flames. *Combustion and Flame*, 134(4):327 – 337, 2003.
- [24] H.Y. Wang, J.K. Bechtold, and C.K. Law. Nonlinear oscillations in diffusion flames. *Combustion and Flame*, 145(1-2):376 – 389, 2006.
- [25] M. Miklavčič, A.B. Moore, and I.S. Wichman. Oscillations and island evolution in radiating diffusion flames. *Combustion Theory and Modelling*, 9(3):403–416, 2005.
- [26] M. Miklavčič. Period doubling cascade in diffusion flames. *Combustion Theory and Modelling*, 11(1):103–112, 2007.
- [27] P. Metzener and M. Matalon. Diffusive-thermal instabilities of diffusion flames: onset of cells and oscillations. *Combustion Theory and Modelling*, 10(4):701–725, 2006.
- [28] H. Gotoda, K. Michigami, K. Ikeda, and T. Miyano. Chaotic oscillation in diffusion flame induced by radiative heat loss. *Combustion Theory and Modelling*, 14(4):479–493, 2010.
- [29] H. Gotoda, T. Ikawa, K. Maki, and T. Miyano. Short-term prediction of dynamical behavior of flame front instability induced by radiative heat loss. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(3), 2012.
- [30] E. Doedel and L.S. Tuckerman. *Numerical methods for bifurcation problems and large-scale dynamical systems*. The IMA volumes in mathematics and its applications. Springer, 2000.
- [31] R.K. Ghaziani, W. Govaerts, Y.A. Kuznetsov, and H.G.E. Meijer. Numerical continuation of connecting orbits of maps in matlab. *Journal of Difference Equations and Applications*, 15(8-9):849–875, 2009.

- [32] G.M. Shroff and H.B. Keller. Stabilization of Unstable Procedures: The Recursive Projection Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30(4):1099–1120, 1993.
- [33] C.W. Gear, J.M. Hyman, P.G. Kevrekidis, I.G. Kevrekidis, O. Runborg, and C. Theodoropoulos. Equation-free, coarse-grained multiscale computation: Enabling microscopic simulators to perform system-level analysis. *Commun. Math. Sci.*, 1(4):715–762, 2003.
- [34] M.E. Kavousanakis, L. Russo, C.I. Siettos, A.G. Boudouvis, and G.C. Georgiou. A timestepper approach for the systematic bifurcation and stability analysis of polymer extrusion dynamics. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 151(1-3):59 – 68, 2008.
- [35] Α. Καραντώνης. *Εισαγωγή στα Μη-Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα και Φυσικοχημικές Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 2004.
- [36] T. Van Cutsem and C. Vournas. *Voltage stability of electric power systems*, volume 441. Springer, 1998.
- [37] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley studies in nonlinearity. Westview Press, 1994.
- [38] V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.
- [39] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [40] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, second edition, August 1983.
- [41] L.A.S. Pilotto, M. Szechtman, and A.E. Hammad. Transient ac voltage related phenomena for hvdc schemes connected to weak ac systems. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 7(3):1396–1404, 1992.
- [42] M. A. Pai, P.W. Sauer, and B.C. Lesieutre. Static and dynamic nonlinear loads and structural stability in power systems. *Proceedings of the IEEE*, 83(11):1562–1572, 1995.
- [43] I. Dobson. Observations on the geometry of saddle node bifurcation and voltage collapse in electrical power systems. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 39(3):240–243, 1992.
- [44] J. Rinzel and G. B. Ermentrout. *Analysis of neural excitability and oscillations*. C. Koch and I. Segev. eds. *Methods in Neuronal Modeling: From Synapses to Networks*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1989.
- [45] E. H. Dowell and M. Ilgamova. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*. Springer, New York, 1988.
- [46] J.M.T. Thompson and H.B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Wiley, 2002.
- [47] P.G. Drazin and W.H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.
- [48] V.I. Arnold. *Catastrophe Theory*. Springer Verlag, 1986.
- [49] P. Hirsch and E. Knobloch. Silnikov-hopf bifurcation. *Phys. D*, 62:202–216, 1993.

- [50] C. Simo M. Bosch. Attractors in a silnikov-hopf scenario and a related one-dimensional map. *Phys. D*, 62:217–229, 1993.
- [51] L.A. Belyakov. A case of the generation of periodic motion with homoclinic curves. *Math. Notes*, 15(4):336–341, 1974.
- [52] B. Deng and K. Sakamoto. Shilnikov-hopf bifurcations. *J. Differential Equations*, 119:1–23, 1995.
- [53] L.P. Shil'nikov. A case of the existence of a countable number of periodic motions. *Sov. Math. Dokl.*, 6:163–166, 1965.
- [54] L.P. Shil'nikov. A contribution to the problem of the structure of a rough equilibrium state of saddle-focus type. *Math. USSR Sbornik*, 10:91–102, 1970.
- [55] H. Kocak J. Hale. *Dynamics and Bifurcations*. Springer Verlag, 1992.
- [56] S.N. Chow, C. Li, and D. Wang. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.
- [57] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.
- [58] M. Fleifil, A.M. Annaswamy, Z.A. Ghoneim, and A.F. Ghoniem. Response of a laminar premixed flame to flow oscillations: A kinematic model and thermoacoustic instability results. *Combustion and Flame*, 106(4):487 – 510, 1996.
- [59] M. Fleifil, J.P. Hathout, A.M. Annaswamy, and A.F. Ghoneim. Reduced order modeling of heat release dynamics and active control of time delay instability. In *38th Aerospace Sciences Meeting Conference and Exhibit (AIAA-2000-0708)*, January 2000.
- [60] S.M. Candel. Combustion instabilities coupled by pressure waves and their active control. *Symposium (International) on Combustion*, 24(1):1277 – 1296, 1992.
- [61] V. Saxena and S.B. Pope. Simulations of turbulent combustion incorporating detailed chemistry. *Combustion and Flame*, 117(1-2):340 – 350, 1999.
- [62] R.S. Rogallo and P. Moin. Numerical simulation of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 16(1):99–137, 1984.
- [63] H.B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In P.H. Rabinowitz, editor, *Applications of bifurcation theory*, pages 359–384. Academic Press, New York, 1977.
- [64] T.F.C. Chan and H.B. Keller. Arc-length continuation and multigrid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3 (2):173–194, 1982.
- [65] L.L. Kirkbey and R.A. Schmitz. An analytical study of the stability of a laminar diffusion flame. *Combustion and Flame*, 10(3):205 – 220, 1966.
- [66] M. Matalon, G.S.S. Ludford, and J. Buckmaster. Diffusion flames in a chamber. *Acta Astronautica*, 6(7-8):943 – 959, 1979.
- [67] P. Metzener and M. Matalon. Diffusive-thermal instabilities of diffusion flames: onset of cells and oscillations. *Combustion Theory and Modelling*, 10(4):701–725, 2006.

- [68] C.K. Law. *Combustion Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [69] A. Liñán. *On the Structure of Laminar Diffusion Flames*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1963.
- [70] F.E. Fendel. Resonant interactions among capillary-gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 21:305–331, 1965.
- [71] A. Liñán. The asymptotic structure of counterflow diffusion flames for large activation energies. *Acta Astronautica*, 1(7-8):1007 – 1039, 1974.
- [72] J.E. Garside and B. Jackson. Polyhedral diffusion flames, 1951.
- [73] M. R. Dongworth and A. Melvin. The transition to instability in a steady hydrogen-oxygen diffusion flame. *Combustion Science and Technology*, 14(4-6):177–182, 1976.
- [74] R.H. Chen, G.B. Mitchell, and P.D. Ronney. Diffusive-thermal instability and flame extinction in nonpremixed combustion. *Symposium (International) on Combustion*, 24(1):213 – 221, 1992.
- [75] D. Lo Jacono and P.A. Monkewitz. Scaling of cell size in cellular instabilities of nonpremixed jet flames. *Combustion and Flame*, 151(1-2):321 – 332, 2007.
- [76] S. Ishizuka and H. Tsuji. An experimental study of effect of inert gases on extinction of laminar diffusion flames. *Symposium (International) on Combustion*, 18(1):695 – 703, 1981.
- [77] Y. Wang, S. Hu, and R. Pitz. *Extinction and Cellular Instability of Premixed Tubular Flames*. 46th (AIAA) Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [78] G.I. Sivashinsky. Diffusional-thermal theory of cellular flames. *Combustion Science and Technology*, 15(3-4):137–145, 1977.
- [79] J.D. Buckmaster and G.S.S. Ludford. *Theory of Laminar Flames*. Cambridge University Press, New York, 1982.
- [80] A. M. Turing. The Chemical Basis of Morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237(641):37–72, 1952.
- [81] H. Hanai, K. Maruta, H. Kobayashi, and T. Niioka. Pulsating flame propagation of {PMMA} particle cloud in microgravity. *Symposium (International) on Combustion*, 27(2):2675 – 2681, 1998.
- [82] J.D. Buckmaster, G. Joulin, and P.D. Ronney. The structure and stability of nonadiabatic flame balls: Ii. effects of far-field losses. *Combustion and Flame*, 84(3-4):411 – 422, 1991.
- [83] K. Maruta, M. Yoshida, Y. Ju, and T. Niioka. Experimental study on methane-air premixed flame extinction at small stretch rates in microgravity. *Symposium (International) on Combustion*, 26(1):1283 – 1289, 1996.
- [84] K. Maruta, Y. Ju, A. Honda, and T. Niioka. Lewis number effect on extinction characteristics of radiative counterflow $\text{CH}_4\text{-O}_2\text{-N}_2\text{-He}$ flames. *Symposium (International) on Combustion*, 27(2):2611 – 2617, 1998.
- [85] K. Maruta, M. Yoshida, H. Guo, Y. Ju, and T. Niioka. Extinction of low-stretched diffusion flame in microgravity. *Combustion and Flame*, 112(1-2):181 – 187, 1998.

- [86] G. Joulin and G. I. Sivashinsky. On the dynamics of nearly-extinguished non-adiabatic cellular flames. *Combustion Science and Technology*, 31(1-2):75–90, 1983.
- [87] J.D. Buckmaster and M. Short. Cellular instabilities, sublimit structures and edge-flames in premixed counterflows. *Combustion Theory and Modelling*, 3(1):199–214, 1999.
- [88] G.I. Sivashinsky. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 15(1):179–199, 1983.
- [89] P. Clavin. Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 11(1):1 – 59, 1985.
- [90] S. Cheatham. *On the Structure and Stability of Diffusion Flames*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, 1997.
- [91] G. Joulin and G.I. Sivashinsky. Short communication. *Combustion Science and Technology*, 55(1-3):83–88, 1987.
- [92] H. Pearlman. Excitability in high-lewis number premixed gas combustion. *Combustion and Flame*, 109(3):382 – 398, 1997.
- [93] L.F. Shampine and M.W. Reichelt. The matlab ode suite. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18:1–22, 1997.
- [94] D.A. Goussis and U. Maas. Model reduction for combustion chemistry. In T. Echehki and E. Mastorakos, editors, *Turbulent Combustion Modeling*, volume 95 of *Fluid Mechanics and Its Applications*, pages 193–220. Springer Netherlands, 2011.
- [95] D.A. Goussis, M. Valorani, F. Creta, and H.N. Najm. Reactive and reactive-diffusive time scales in stiff reaction-diffusion systems. *Progress in Computational Fluid Dynamics, An International Journal*, 5(6):316, 2005.
- [96] M. Hadjinicolaou and D.A. Goussis. Asymptotic solution of stiff PDEs with the CSP method: The reaction diffusion equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(3):781–810, 1998.
- [97] S.H. Lam and D.A. Goussis. Understanding complex chemical kinetics with computational singular perturbation. *Proc. Combustion Institute*, 22:931–941, 1988.
- [98] U. Maas and S. Pope. Simplifying chemical kinetics: Intrinsic low-dimensional manifolds in composition space. *Combustion and Flame*, 88:239–264, 1992.