ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ
ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Θεωρία Μη Γραμμικών Τελεστών Μονότονου Τύπου και Εφαρμογές τους σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

ΚΥΡΙΑΚΗ ΒΑΣΙΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής:
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Χ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ

2010

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Δημήτριο Χ. Κραββαρίτη για την καθοδήγηση, το αμέριστο ενδιαφέρον και τη πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε τόσο κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής αυτής εργασίας όσο και γενικότερα στα πλαίσια των δραστηριοτήτων μου στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ. Βασίλειο Παπανικολάου και κ. Ιωάννη Τσινιά, οι οποίοι αποτελούν μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου που με στηρίζει ένθερμα στις επιλογές μου, στις σπουδές μου και τη ζωή μου.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε μία κλάση μη γραμμικών τελεστών μονότονου τύπου και ορισμένες εφαρμογές τους σε προβλήματα συνοριακών τιμών.

Στο Κεφάλαιο 2 παραθέτουμε ορισμένα βασικά Θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης τα οποία χρησιμοποιούμε στη συνέχεια.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μία μικρή αναφορά στη Θεωρία των χώρων Sobolev. Εξετάζεται τόσο ο χώρος $\mathcal{W}^{m,p}(I)$ με $I \subseteq \mathbb{R}$ όσο και ο χώρος $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες τους.

Στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνύεται η Ανισότητα Poincaré και μελετώνται δύο προβλήματα συνοριακών τιμών. Το πρώτο είναι γραμμικό και η ύπαρξη λύσης στηρίζεται στο Θεώρημα Lax-Milgram. Τα άλλα δύο είναι μη γραμμικά και η ύπαρξη λύσης αυτών των προβλημάτων στηρίζεται στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder και στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, αντίστοιχα.

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μία εισαγωγή στους μονότονους τελεστές σε χώρους Banach και παραθέτουμε ορισμένες βασικές ιδιότητές τους. Στο τέλος της παραγράφου αυτής αποδεικνύεται ένα βασικό Θεώρημα επί των Minty - Browder που αφορά στους μονότονους τελεστές. Στη συνέχεια ορίζονται οι τελεστές Nemytski και αποδεικνύονται κάποιες βασικές ιδιότητές τους.

Στο κεφάλαιο 6 γίνεται μία εφαρμογή του Θεωρήματος Minty - Browder σ' ένα μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + au &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου $a \geq 0$ σταθερά, $2 \leq p < \infty$ με $p \geq \frac{2n}{n+2}$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο.

Στο Κεφάλαιο 7 ορίζονται οι μη γραμμικοί ψευδομονότονοι τελεστές και παραθέτουμε ένα Θεώρημα επί του Brezis που αφορά στους ψευδομονότονους τελεστές. Στη συνέχεια δίνεται μία εφαρμογή του Θεωρήματος Brezis σ' ένα μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 8 μελετώνται οι γραμμικοί και μεγιστικά μονότονοι τελεστές και γίνεται αναφορά του Θεωρήματος Hille - Yosida.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ

Θεωρημα 2.1 (**Αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn - Banach**). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας γραμμικός χώρος και συνάρτηση $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:*

(1) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y),\ \forall\ x, y \in \mathcal{X}$
(2) $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x),\ \forall\ x, y \in \mathcal{X},\ \forall\ \lambda > 0.$

Έστω, επί πλέον, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{X}$ και $\phi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ ένα γραμμικό συναρτησιακό, ώστε:

$$\phi(x) \leq \rho(x),\ \forall\ x \in \mathcal{Y}.$$

Τότε, υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό f ορισμένο στο $\mathcal{X}$ που επεκτείνει το ϕ, δηλαδή:

$$\phi(x) = f(x),\ \forall\ x \in \mathcal{Y}$$

και τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq \rho(x),\ \forall\ x, y \in \mathcal{X}.$$

Πορισμα 2.2 (**Συνέπειες του Θεωρήματος Hahn - Banach**). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος με νόρμα και $\mathcal{Y}$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{X}$.*

(1) *Εάν $y^* \in \mathcal{Y}^*$, τότε υπάρχει $x^* \in \mathcal{X}^*$, ώστε:*

$$x^*(x) = y^*(x),\ \forall\ x \in \mathcal{Y} \text{ και } \|x^*\| = \|y^*\|.$$

(2) *Εάν ο $\mathcal{Y}$ είναι, επί πλέον, κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{X}$, τότε για κάθε $x_0 \in \mathcal{X} - \mathcal{Y}$ υπάρχει $x^* \in \mathcal{X}^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{Y}$ και τότε $x^*(x_0) = \rho(x_0, \mathcal{Y})$, όπου ρ είναι η μετρική που καθορίζεται από τη νόρμα του $\mathcal{X}$.*
(3) *Για κάθε $x_0 \in \mathcal{X}$ με $x_0 \neq 0$, υπάρχει $x^* \in \mathcal{X}^*$ με $\|x^*\| = 1$, ώστε $x^*(x_0) = \|x_0\| \neq 0$. Άρα, ο $\mathcal{X}^*$ διαχωρίζει τα σημεία του $\mathcal{X}$ (δηλαδή για κάθε $x, y \in \mathcal{X}$ με $x \neq y$, υπάρχει $x^* \in \mathcal{X}^*$, ώστε $x^*(x) = x^*(y)$).*
(4) *Ο γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{Y}$ του $\mathcal{X}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ εάν και μόνον εάν για κάθε $x^* \in \mathcal{X}^*$, με $x^*(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathcal{Y}$, ισχύει: $x^* = 0$.*

Θεωρημα 2.3 (**Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach**). *Έστω $(\mathcal{X}, \rho)$ ένας μη κενός πλήρης μετρικός χώρος και μία συστολή $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Τότε, υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{X}$, ώστε $f(x) = x$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 (**Θεώρημα Banach - Steinhaus**). *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο Banach χώροι και $(\mathrm{T_i})_{i\in\mathcal{I}}$ μία οικογένεια (όχι απαραίτητα αριθμήσιμη) γραμμικών και συνεχών τελεστών από τον $\mathcal{E}$ στον $\mathcal{F}$.*
Υποθέτουμε ότι:

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \|T_i(x)\| < \infty,\ \forall\ x \in \mathcal{E}.$$

Τότε,

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \|T_i\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})} < \infty.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:

$$\|T_i(x)\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in \mathcal{E},\ \forall\ i \in \mathcal{I}.$$

Το Θεώρημα αυτό συχνά αναφέρεται ως Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5 (**Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower**). *Κάθε συνεχής συνάρτηση από την μπάλα $\mathcal{B}(0,1)$ του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.6 (**Πόρισμα Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brower**). *Εάν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = R > 0$ ισχύει: $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_0\| \leq R$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7 (**Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder**). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach και $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Εάν η συνάρτηση $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ είναι συνεχής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8 (**Πόρισμα Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder**). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach και $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Εάν η συνάρτηση $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ είναι συνεχής και συμπαγής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9 (**Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue**). *Εάν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1(G)$ και οι f, h είναι μετρήσιμες συναρτήσεις του $\mathcal{L}^1(G)$ ώστε:*

$$f_n(x) \to f(x)\ \text{σ.π. στο}\ G\ \text{και}\ |f_n(x)| \leq h(x)\ \text{σ.π. στο}\ G,$$

τότε,

$$f_n \to f\ \text{στον}\ \mathcal{L}^1(G).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10 (**Γενικευμένο Θεώρημα Lebesgue**). *Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^1(G)$ και f, h μετρήσιμες συναρτήσεις του $\mathcal{L}^1(G)$ ώστε:*

$$f_n(x) \to f(x)\ \text{σ.π. στο}\ G\ \text{και}\ h_n(x) \to h(x)\ \text{σ.π. στο}\ G.$$

Εάν, επί πλέον, ισχύουν:

$$|f_n(x)| \leq h_n(x)\ \text{σ.π. στο}\ G,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \text{και}\ h_n \to h\ \text{στον}\ \mathcal{L}^1(G),$$

τότε,

$$f_n \to f \text{ στον } \mathcal{L}^1(G).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11. Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και $\alpha(\cdot,\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ένα διγραμμικό συναρτησιακό. Τότε, το α λέγεται:

(1) **συνεχές** εάν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:

$$|\alpha(u,v)| \leq c|u||v|, \ \forall \ u, v \in \mathcal{H},$$

(2) **πιεστικό** εάν υπάρχει σταθερά $k > 0$ τέτοια ώστε:

$$\alpha(u,u) \geq k|u|^2, \ \forall \ u \in \mathcal{H}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.12 (**Θεώρημα Lax - Milgram**). *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και $\alpha(\cdot,\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ένα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό. Τότε, για κάθε $\varphi \in \mathcal{H}$ υπάρχει $u \in \mathcal{H}$ μοναδικό τέτοιο ώστε:*

$$\alpha(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \ \forall \ v \in \mathcal{H}.$$

Επί πλέον, εάν το α είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα:

$$u \in \mathcal{H} \text{ και } \frac{1}{2}\alpha(u,v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in \mathcal{H}} \{\frac{1}{2}\alpha(u,u) - \langle \varphi, v \rangle\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.13 (**Φασματικό Θεώρημα**). *Έστω T ένας αυτοσυζυγής, συμπαγής τελεστής σ' έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε, υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.*

Επί πλέον, ισχύει:

$$\mathrm{T}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n,$$

όπου λ_n είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές των u_n.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.14. *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert με νόρμα $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Εάν το $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ είναι ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathcal{H}$, τότε, για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε:*

$$\|f - u\| = min\{\|f - w\| : w \in \mathcal{K}\}. \tag{0.0.1}$$

Επί πλέον, το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα:

$$\langle f - u, w - u \rangle \leq 0, \ \forall \ w \in \mathcal{K}. \tag{0.0.2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.15. Με βάση το παραπάνω Θεώρημα, είναι καλώς ορισμένη η απεικόνιση:

$$\wp_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \to \mathcal{K} \text{ με } \wp_{\mathcal{K}}(f) := u, \ \forall f \in \mathcal{H},$$

όπου $u \in \mathcal{K}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα (0.0.1).

Ορισμος 2.16. Η $\wp_{\mathcal{K}}$ ονομάζεται **μετρική προβολή** του $\mathcal{H}$ στο $\mathcal{K}$ και προφανώς $\wp_{\mathcal{K}}(a) = a,\ \forall a \in \mathcal{K}$. Χρησιμοποιώντας τη μετρική προβολή $\wp_{\mathcal{K}}$ του $\mathcal{H}$ στο $\mathcal{K}$, η σχέση (0.0.2) γράφεται ισοδύναμα:

$$\langle f - \wp_{\mathcal{K}}(f), w - \wp_{\mathcal{K}}(f)\rangle \leq 0,\ \forall\ w \in \mathcal{K}. \tag{0.0.3}$$

Ουσιαστικά, το $u = \wp_{\mathcal{K}}(f)$ είναι το πλησιέστερο σημείο του $\mathcal{K}$ προς το $f \in \mathcal{H}$ και η ανισότητα (0.0.3) δείχνει ότι για οποιοδήποτε $w \in \mathcal{K}$ η γωνία φ που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $f - \wp_{\mathcal{K}}(f), w - \wp_{\mathcal{K}}(f)$ είναι αμβλεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΧΩΡΟΙ SOBOLEV

1. Ο ΧΩΡΟΣ SOBOLEV $\mathcal{W}^{m,p}(I),\ I \subseteq \mathbb{R}$

Έστω $\mathcal{I} = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα φραγμένο ή μη και έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p \leq \infty$.

Ορισμος 3.1. Ο χώρος **Sobolev** $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{W}^{1,p}(I) := \{u \in \mathcal{L}^p(I) : \exists\ g \in \mathcal{L}^p(I) \text{ τέτοια ώστε :}$$
$$\int_I uw'dx = -\int_I gwdx,\ \forall\ w \in \mathcal{C}_0^\infty(I)\}.$$

Προφανώς,

$$\mathcal{W}^{1,p}(I) \subseteq \mathcal{L}^p(I).$$

Θέτουμε

$$\mathcal{H}^1(I) = \mathcal{W}^{1,2}(I).$$

Για κάθε $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$ γράφουμε $u'_w = g$ και η g ονομάζεται **ασθενής παράγωγος** της u $1^{ης}$ τάξης.

Παρατηρηση 3.2. Προφανώς, εάν $u \in \mathcal{C}^1(I) \bigcap \mathcal{L}^p(I)$ και $u' \in \mathcal{L}^p(I)$ (εδώ η u' είναι η συνήθης παράγωγος της u), τότε $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$. Επί πλέον, η συνήθης παράγωγος της u ταυτίζεται με την ασθενή παράγωγο της u υπό την έννοια του $\mathcal{W}^{1,p}(I)$, δηλαδή $u' = u'_w$.

Παρατηρηση 3.3. Στην περίπτωση που το I είναι φραγμένο ισχύει: $\mathcal{C}^1(\overline{I}) \subset \mathcal{W}^{1,p}(I)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$.

Ορισμος 3.4. Ο χώρος $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)} : \mathcal{W}^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)} := \|u\|_{\mathcal{L}^p(I)} + \|u'_w\|_{\mathcal{L}^p(I)},\ \forall\ u \in \mathcal{W}^{1,p}(I).$$

ή καμιά φορά με την ισοδύναμή της:

$$(\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(I)} + \|u'_w\|^p_{\mathcal{L}^p(I)})^{\frac{1}{p}},\ \forall\ u \in \mathcal{W}^{1,p}(I).$$

Ειδικά, ο χώρος $\mathcal{H}^1(I) = \mathcal{W}^{1,2}(I)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^1(I)} : \mathcal{H}^1(I) \times \mathcal{H}^1(I) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^1(I)} := \langle u, v\rangle_{\mathcal{L}^2(I)} + \langle u'_w, v'_w\rangle_{\mathcal{L}^2(I)}, \ \forall\ u, v \in \mathcal{H}^1(I).$$

Η αντίστοιχη νόρμα του $\mathcal{H}^1(I)$ είναι:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(I)} : \mathcal{H}^1(I) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(I)} := (\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(I)} + \|u'_w\|^2_{\mathcal{L}^2(I)})^{\frac{1}{2}}, \ \forall\ u \in \mathcal{H}^1(I)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $\mathcal{W}^{1,2}(I)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. *Ο χώρος Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ είναι:*

(1) *χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$,*
(2) *ανακλαστικός χώρος για $1 < p < \infty$ και*
(3) *διαχωρίσιμος χώρος για $1 \leq p < \infty$.*

Ειδικά, ο χώρος $\mathcal{H}^1(I) = \mathcal{W}^{1,2}(I)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.6. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ (η οποία εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$) τέτοια ώστε:*

a. *Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ ισχύει:*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(I)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(I)}, \ \forall\ u \in \mathcal{W}^{1,p}(I),$$

δηλαδή η ενσφήνωση $\mathcal{W}^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathcal{L}^\infty(I)$ είναι συνεχής.

b. *Επί πλέον, εάν το I είναι φραγμένο, τότε:*
   i. *Για κάθε $1 < p \leq \infty$, η ενσφήνωση $\mathcal{W}^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{I})$ είναι συμπαγής.*
   ii. *Για κάθε $1 \leq q < \infty$, η ενσφήνωση $\mathcal{W}^{1,1}(I) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(I)$ είναι συμπαγής.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7. Εάν $m \geq 2$ ακέραιος και $1 \leq p \leq \infty$ πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά το χώρο Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(I)$ ως εξής:

$$\mathcal{W}^{m,p}(I) := \{u \in \mathcal{W}^{m-1,p}(I) : u' \in \mathcal{W}^{m-1,p}(I)\}.$$

Θέτουμε

$$\mathcal{H}^m(I) = \mathcal{W}^{m,2}(I).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $u \in \mathcal{W}^{m,p}(I)$ εάν και μόνον εάν υπάρχουν m συναρτήσεις $g_1, g_2, ..., g_m \in \mathcal{L}^p(I)$ τέτοιες ώστε:

$$\int_I uD^j w dx = (-1)^j \int_I g_i w dx, \ \forall\ w \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \ \forall\ j = 1, 2, 3, ..., m,$$

όπου το $D^j w$ συμβολίζει την ασθενή παράγωγο τάξεως j της $w \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$. Όταν $u \in \mathcal{W}^{m,p}(I)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις διαδοχικές παραγώγους $u'_w = g_1, (u'_w)'_w = g_2, ...$ μέχρι την τάξη m, τις οποίες συμβολίζουμε με $Du, D^2u, ..., D^m u$. Άρα, ο χώρος Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(I)$ είναι πιο απλά ο εξής:

$$\mathcal{W}^{m,p}(I) := \{u \in \mathcal{L}^p(I) : \text{ υπάρχουν οι ασθενείς παράγωγοι μέχρι και } m - \text{τάξεως και όλες ανήκουν στον } \mathcal{L}^p(I)\}.$$

Ορισμος 3.8. Ο χώρος Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{m,p}(I)} : \mathcal{W}^{m,p}(I) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{m,p}(I)} := \|u\|_{\mathcal{L}^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_{\mathcal{L}^p(I)},\ \forall\ u \in \mathcal{W}^{m,p}(I).$$

Ειδικά, ο χώρος $\mathcal{H}^m(I) = \mathcal{W}^{m,2}(I)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^m(I)} : \mathcal{H}^m(I) \times \mathcal{H}^m(I) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u, w\rangle_{\mathcal{H}^m(I)} := \langle u, w\rangle_{\mathcal{L}^2(I)} + \sum_{j=1}^{m} \langle D^j u, D^j w\rangle_{\mathcal{L}^2(I)},\ \forall\ u, w \in \mathcal{H}^m(I).$$

Αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{m,p}(I)}$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα:

$$|||u||| = \|u\|_{\mathcal{L}^p(I)} + \|D^m u\|_{\mathcal{L}^p(I)}.$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, εάν $1 \le j \le m-1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει c σταθερά (η οποία εξαρτάται από το ε και το $|I| \le \infty$), τέτοιο ώστε:

$$\|D^j u\|_{\mathcal{L}^p(I)} \le \varepsilon \|D^m u\|_{\mathcal{L}^p(I)} + c\|u\|_{\mathcal{L}^p(I)},\ \forall\ u \in \mathcal{W}^{m,p}(I).$$

Παρατηρηση 3.9. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(I)$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον χώρο Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$.

Ορισμος 3.10. Για $1 \le p < \infty$, συμβολίζουμε με $\mathcal{W}_0^{1,p}(I)$ το κλειστό περίβλημα του $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ στον $\mathcal{W}^{1,p}(I)$.

Ο χώρος $\mathcal{W}_0^{1,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο χώρος $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ και είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι, επί πλέον, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

Γράφουμε

$$\mathcal{H}_0^1(I) = \mathcal{W}_0^{1,2}(I).$$

Ο χώρος $\mathcal{H}_0^1(I)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

2. Ο ΧΩΡΟΣ SOBOLEV $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $p \in \mathbb{R}$, με $1 \le p \le \infty$.

Ορισμος 3.11. Ο χώρος Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) :\ \text{υπάρχουν}\ g_1, g_2, ..., g_n \in \mathcal{L}^p(\Omega)\ \text{τέτοιες ώστε}: \int_\Omega u \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i w dx,\ \forall\ w \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), i = 1, 2, ..., n\}.$$

Θέτουμε
$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathcal{W}^{1,2}(\Omega).$$
Για $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, γράφουμε:
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ και } \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = gradu.$$

Ορισμος 3.12. Ο χώρος $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:
$$\| \cdot \|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
με
$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \ \forall \ u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$$
ή, καμιά φορά, με την ισοδύναμή της:
$$(\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}, \ \forall \ u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega).$$

Ειδικά, ο χώρος $\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:
$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} : \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
όπου
$$\langle u, w \rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} := \langle u, w \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \ \forall \ u, w \in \mathcal{H}^1(\Omega).$$
Η αντίστοιχη νόρμα του $\mathcal{H}^1(\Omega)$ είναι:
$$\| \cdot \|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} : \mathcal{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
με
$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} := (\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \ \forall \ u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$$
η οποία είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$.

Προταση 3.13. *Ο χώρος Sobolev* $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ *είναι:*

(1) *χώρος Banach για* $1 \leq p \leq \infty$,
(2) *ανακλαστικός χώρος για* $1 < p < \infty$ *και*
(3) *διαχωρίσιμος χώρος για* $1 \leq p < \infty$.

Ειδικά, ο χώρος $\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ *είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

Παρατηρηση 3.14. Προφανώς, εάν $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)\bigcap \mathcal{L}^p(\Omega)$ και $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$ (εδώ η $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο της u με τη συνήθη έννοια), τότε $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Επί πλέον, οι μερικές παράγωγοι της u με τη συνήθη έννοια ταυτίζονται με τις μερικές παραγώγους της u υπό την έννοια του $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, δηλαδή $u' = u'_w$. Ειδικά, εάν το Ω είναι φραγμένο, τότε $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι, εάν $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)\bigcap \mathcal{C}(\Omega)$ με $1 \leq p \leq \infty$ και εάν $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{C}(\Omega)$, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ (το $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο με την έννοια του $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$), τότε $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Ορισμος 3.15. Εάν $m \geq 2$ ακέραιος και $1 \leq p \leq \infty$ πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά το χώρο Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ ως εξής:

$$\mathcal{W}^{m,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{W}^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{W}^{m-1,p}(\Omega),\ \forall\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ με $\alpha_i \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ ορίζουμε

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

και για κάθε $u \in \mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ συμβολίζουμε:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Ισοδύναμα, ο χώρος $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{m,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) :\ &\text{για κάθε } \alpha \text{ με } |\alpha| \leq m \text{ υπάρχει } g_\alpha \in \mathcal{L}^p(\Omega)\\ &\text{τέτοιο ώστε} : \int_\Omega u D^\alpha w dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha w dx,\ \forall\ w \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}.\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε $D^\alpha u = g_\alpha$.
Θέτουμε

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \mathcal{W}^{m,2}(\Omega)$$

Ορισμος 3.16. Ο χώρος Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)} : \mathcal{W}^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},\ \forall\ u \in \mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$$

και είναι χώρος Banach.

Ειδικά, ο χώρος $\mathcal{H}^m(\Omega) = \mathcal{W}^{m,2}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^m(\Omega)} : \mathcal{H}^m(\Omega) \times \mathcal{H}^m(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u, w\rangle_{\mathcal{H}^m(\Omega)} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha w\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)},\ \forall\ u, w \in \mathcal{H}^m(\Omega).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.17. Αποδεικνύεται ότι, εάν το Ω είναι ¨αρκετά ομαλό¨, με $\partial\Omega$ φραγμένο, η νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)}$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Συγκεκριμένα, για κάθε πολυδείκτη α με $0 < |\alpha| < m$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ αποδεικνύεται ότι υπάρχει c σταθερά (η οποία εξαρτάται από τα $\Omega, \varepsilon, \alpha$), τέτοιο ώστε:

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + c\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},\ \forall\ u \in \mathcal{W}^{m,p}(\Omega).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.18. Για $1 \leq p < \infty$, συμβολίζουμε με $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ στον $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Ο χώρος $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο χώρος $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ και είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι, επί πλέον, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

Γράφουμε

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega).$$

Ο χώρος $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.19. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, δηλαδή

$$\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

και ιδιαίτερα εάν $\Omega = \mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \mathcal{H}^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{H}^1(\Omega)}.$$

Γενικά, ισχύει:

$$\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{H}^1(\Omega)} \subsetneqq \mathcal{H}^1(\Omega).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.20. Οι συναρτήσεις του $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ¨χονδρικά' συναρτήσεις του $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

Επί πλέον, αποδεικνύεται ότι, για $1 \leq p < \infty$, κάθε $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ που έχει συμπαγή φορέα ο οποίος περιέχεται στο Ω, τότε $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.21 (**Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev**). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο $\partial\Omega$.*

(1) *Εάν* $1 \leq p < n$, *τότε για κάθε* q^* *με* $1 \leq q^* \leq \frac{np}{n-p}$ *η ενσφήνωση*
$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{q^*}(\Omega)$$
είναι συνεχής.

(2) *Εάν* $q^* < \frac{np}{n-p}$, *τότε η ενσφήνωση*
$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{q^*}(\Omega)$$
είναι συμπαγής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.22 (**Θεώρημα Rayleigh**). *Για* $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ *και* $u \neq 0$ *το πηλίκο Rayleigh είναι:*
$$R(u) = \frac{\int_\Omega (\nabla u)^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} = \frac{|u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$
Ισχύει:
$$\lambda_1 = \min_{u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)} R(u),$$
όπου λ_1 *η πρώτη ιδιοτιμή της Λαπλασιανής.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ POINCARÉ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ POINCARÉ

Θεωρημα 4.1 (**Ανισότητα Poincaré**). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*
Τότε, υπάρχει $c > 0$ σταθερά τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \ \forall\ u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει για $n = 2$.
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) Θεωρούμε $\Omega = (-\alpha, \alpha) \times (-\alpha, \alpha) \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με $\alpha > 0$. Θα αποδείξουμε την ανισότητα Poincaré για κάθε $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, αφού ο $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(x, y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Τότε,

$$u/\partial\Omega = 0$$

και

$$u(x, y) = \int_{-\alpha}^{y} \frac{\partial u(x, t)}{\partial y} dt + u(x, -\alpha).$$

Αλλά $u(x, -\alpha) = 0$ αφού $u/\partial\Omega = 0$, οπότε:

$$u(x, y) = \int_{-\alpha}^{y} \frac{\partial u(x, t)}{\partial y} dt.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
u^2(x, y) &= (\int_{-\alpha}^{y} \frac{\partial u(x, t)}{\partial y} dt)^2 \\
&\leq (\int_{-\alpha}^{y} 1^2 dt)(\int_{-\alpha}^{y} (\frac{\partial u(x, t)}{\partial y})^2 dt) \\
&= [t]_{-\alpha}^{y} (\int_{-\alpha}^{y} (\frac{\partial u(x, t)}{\partial y})^2 dt) \\
&= (y + \alpha)(\int_{-\alpha}^{y} (\frac{\partial u(x, t)}{\partial y})^2 dt) \\
&\leq 2\alpha(\int_{-\alpha}^{y} (\frac{\partial u(x, t)}{\partial y})^2 dt) \qquad (1.0.4)
\end{aligned}$$

διότι $y \in [-\alpha, \alpha] \Leftrightarrow -\alpha \leq y \leq \alpha$ άρα $0 \leq y + \alpha \leq 2\alpha$.
Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.0.4) ως προς x έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} u^2(x,y)dx &\leq 2\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{y} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial y})^2 dt) dx \\ &\leq 2\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{\alpha} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial y})^2 dt) dx. \qquad (1.0.5)\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.0.5) ως προς y έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{\alpha} u^2(x,y)dx)dy &\leq \int_{-\alpha}^{\alpha} 2\alpha dy \int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{\alpha} (\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 dy) dx \\ &= 4\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{\alpha} (\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 dy) dx. \qquad (1.0.6)\end{aligned}$$

Αλλά, για κάθε $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ έχουμε:

$$\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} u^2(x,y) dx dy,$$

άρα, η σχέση (1.0.6) γράφεται:

$$\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq 4\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{\alpha} (\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 dy) dx. \qquad (1.0.7)$$

Ομοίως, θεωρώντας τη συνάρτηση $u(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ως εξής:

$$u(x,y) = \int_{-\alpha}^{x} \frac{\partial u(t,y)}{\partial x} dt + u(-\alpha, y)$$

τότε

$$u(x,y) = \int_{-\alpha}^{x} \frac{\partial u(t,y)}{\partial x} dt$$

αφού $u/\partial\Omega = 0$ και προκύπτει ότι:

$$\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq 4\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (\int_{-\alpha}^{\alpha} (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2 dx) dy. \qquad (1.0.8)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.0.7) και (1.0.8) έχουμε:

$$\begin{aligned}2\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq 4\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} [(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2] dx dy \\ \Leftrightarrow \|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq 2\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} [(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2] dx dy.\end{aligned}$$

Αλλά ,για κάθε $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ έχουμε:

$$\|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} [(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2] dx dy.$$

Οπότε, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq 2\alpha^2\|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\\ \Leftrightarrow \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \sqrt{2}\alpha\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \qquad (1.0.9)\end{aligned}$$

και θέτοντας $c = \sqrt{2}\alpha > 0$ σταθερό, η σχέση (1.0.9) γράφεται:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Άρα, όταν το Ω είναι τετράγωνο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ισχύει:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},\ \forall\ u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega).$$

(2) Εάν το Ω δεν είναι τετράγωνο δηλαδή το Ω δεν είναι της μορφής $\Omega = (-\alpha, \alpha)\times(-\alpha, \alpha)$, με $\alpha > 0$, τότε μπορούμε να βρούμε ένα τετράγωνο $\overline{\Omega}$ τέτοιο ώστε: $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$, αφού το Ω είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Τότε, για κάθε $u \in \mathcal{H}^1_0(\overline{\Omega})$ ισχύει:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\overline{\Omega})} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\overline{\Omega})}. \qquad (1.0.10)$$

Για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ θεωρούμε την επέκτασή της στον $\mathcal{L}^2(\overline{\Omega})$, την $\overline{f}$, με $\overline{f} = f$ στο Ω και $\overline{f} = 0$ στο $(\overline{\Omega} \setminus \Omega)$. Οπότε, για κάθε $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega) \subseteq \mathcal{H}^1_0(\overline{\Omega})$ ισχύει η σχέση (1.0.10):

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Άρα, όταν το Ω δεν είναι τετράγωνο αλλά είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ισχύει:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},\ \forall\ u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega).$$

Έτσι, για κάθε $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ ισχύει:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Στον $\mathbb{R}^n$ η απόδειξη της ανισότητας Poincaré είναι όμοια με $c = \sqrt[n]{2}\alpha > 0$ και η σταθερά c εξαρτάται από το σύνολο Ω και τη διάσταση του $\mathbb{R}^n$. □

Παρατηρηση 4.2. Στον $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$ θεωρούμε την απεικόνιση:

$$|\cdot|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} : \mathcal{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

$$|u|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} := \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},\ \forall\ u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega).$$

Λόγω της Ανισότητας Poincaré, η απεικόνιση $|\cdot|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} : \mathcal{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της νόρμας (ιδιαίτερα την ιδιότητα της απόλυτης ομογένειας). Άρα, η $|\cdot|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} : \mathcal{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$.

Στον $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$, η νόρμα που έχει οριστεί είναι η:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} : \mathcal{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R},$$

όπου

$$\|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} := \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \ \forall\ u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Άρα, για κάθε $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &= \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &= \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\ \Rightarrow \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\geq |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.0.11}$$

Από την ανισότητα Poincaré έχουμε:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &= \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq (c+1)\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &= (c+1)|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.0.12}$$

Από τις σχέσεις (1.0.11) και (1.0.12) έχουμε για κάθε $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$:

$$|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq (c+1)|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}. \tag{1.0.13}$$

Συνεπώς, οι νόρμες $|\cdot|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$ είναι ισοδύναμες στον $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Πρόβλημα Dirichlet):

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.0.14}$$

Για δεδομένη $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ονομάζουμε **ασθενή λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** (2.0.14) μία συνάρτηση $u \in \mathcal{X} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ώστε για κάθε $w \in \mathcal{X} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ να ισχύει:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx. \tag{2.0.15}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών* (2.0.14) *(Πρόβλημα Dirichlet* (2.0.14)*):*

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f, \textit{ στο } \Omega \\ u &= 0, \textit{ στο } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Το Πρόβλημα Dirichlet (2.0.14) *έχει μοναδική ασθενή λύση.*

Απόδειξη. Στο χώρο Hilbert $(\mathcal{H}_0^1(\Omega), |\cdot|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)})$ θεωρούμε το διγραμμικό συναρτησιακό:

$$\alpha(\cdot,\cdot) : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου:

$$\alpha(u,w) := \int_\Omega \nabla u \nabla w dx, \ \forall \ u, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Τότε, για κάθε $u, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ισχύει:

$$\begin{aligned} |\alpha(u,w)| &= |\int_\Omega \nabla u \nabla w dx| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla w| dx \\ &\leq |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} |w|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\ \Rightarrow |\alpha(u,w)| &\leq |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} |w|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Άρα, το διγραμμικό συναρτησιακό α είναι συνεχές.

Επί πλέον, για κάθε $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha(u,u) &= \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \\ &= \|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\ \Rightarrow \alpha(u,u) &= |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Οπότε, το διγραμμικό συναρτησιακό α είναι πιεστικό.
Επομένως, από το Θεώρημα Lax - Milgram (2.12), υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ώστε:

$$\begin{aligned} \alpha(u,w) &= \langle f, w \rangle, \ \forall \ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega f w dx, \ \forall \ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Άρα, για δεδομένη συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ώστε να ισχύει η σχέση (2.0.15). Επομένως, υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ για το Πρόβλημα Dirichlet (2.0.14). □

Πρόταση 4.4. *Η συνάρτηση* $\mathrm{F} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, *όπου σε κάθε* $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ *η* F *αντιστοιχεί τη μοναδική ασθενή λύση* $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ *του Προβλήματος Dirichlet* (2.0.14), *είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(f) &= u \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega f w dx, \ \forall \ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.0.16}$$

Προφανώς, η συνάρτηση F είναι γραμμική αφού για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει:

$$\mathrm{F}(f+g) = \mathrm{F}(f) + \mathrm{F}(g).$$

Για $w = u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, η σχέση (2.0.16) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \nabla u dx &= \int_\Omega f u dx \\
\Leftrightarrow \int_\Omega (\nabla u)^2 dx &= \int_\Omega f u dx \\
\Leftrightarrow \|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \int_\Omega f u dx \le \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
\Leftrightarrow |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &= \|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
\Leftrightarrow |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \qquad (2.0.17)
\end{aligned}$$

Λόγω της Ανισότητας Poincaré, η σχέση (2.0.17) γράφεται:

$$\begin{aligned}
|u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} c |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\
\Leftrightarrow |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le c \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\
\Leftrightarrow |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le c \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \qquad (2.0.18)
\end{aligned}$$

Αλλά $u = \mathrm{F}(f)$, οπότε από τη σχέση (2.0.18) έχουμε:

$$|\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le c \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Επομένως, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει:

$$|\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le c \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \qquad (2.0.19)$$

Άρα, η γραμμική συνάρτηση F είναι συνεχής. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.5. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ισχύει η σχέση (1.0.13):

$$|u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le (c+1) |u|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.$$

Άρα, για $u = \mathrm{F}(f) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le (c+1) |\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{c+1} |\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le \frac{1}{c+1} \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le |\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Έτσι, από τη σχέση (2.0.19) για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c+1} |\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le \frac{1}{c+1} \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le |\mathrm{F}(f)|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \le c \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
\Rightarrow \frac{1}{c+1} \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\le c \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \qquad (2.0.20)
\end{aligned}$$

Αλλά, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει:

$$\|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \ge \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Άρα, η σχέση (2.0.20) γράφεται:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c+1}\|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{c+1}\|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq c(c+1)\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Θεωρώντας $M = c(c+1) > 0$ από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{F}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq M\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},\ \forall\ f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \\ \Leftrightarrow \|\mathrm{F}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} &\leq M. \qquad (2.0.21)\end{aligned}$$

Επομένως, η γραμμική συνάρτηση $\mathrm{F} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ είναι συνεχής.

3. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση.

Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Πρόβλημα Dirichlet):

$$\begin{aligned}-\triangle u &= g(u),\ \text{στο } \Omega \\ u &= 0,\ \text{στο } \partial\Omega. \qquad (3.0.22)\end{aligned}$$

Για δεδομένη $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ονομάζουμε **ασθενή λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** (3.0.22) μία συνάρτηση $u \in \mathcal{X} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ώστε για κάθε $w \in \mathcal{X} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ να ισχύει:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega g(u) w dx. \qquad (3.0.23)$$

Θεωρημα 4.6. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών* (3.0.22) *(Πρόβλημα Dirichlet* (3.0.22)*):*

$$\begin{aligned}-\triangle u &= g(u),\ \textit{στο } \Omega \\ u &= 0,\ \textit{στο } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Το Πρόβλημα Dirichlet (3.0.22) *έχει ασθενή λύση.*

Αποδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $\mathrm{T} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$ όπου

$$\mathrm{T}(f) := \mathrm{F}(g(f)),\ \forall\ f \in \mathcal{L}^2(\Omega),$$

με

$$\mathrm{F} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

ο τελεστής του Προβλήματος Dirichlet (2.0.14) όπου $\mathrm{F}(f) = u,\ \forall\ f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Ο T είναι καλώς ορισμένος τελεστής. Πράγματι, η g είναι φραγμένη συνάρτηση, άρα υπάρχει $m > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|g(f(x))| \leq m \Leftrightarrow |(g \circ f)(x)| \leq m. \tag{3.0.24}$$

Η g είναι συνεχής συνάρτηση και $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε ισχύει:

$$\begin{aligned} |(g \circ f)(x)|^2 &\leq m^2 \\ \Rightarrow \|g \circ f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \int_\Omega |(g \circ f)(x)|^2 dx \leq \int_\Omega m^2 dx \\ \Rightarrow \|g \circ f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq m^2 \mu(\Omega) \\ \Rightarrow \|g \circ f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq m\sqrt{\mu(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.0.25}$$

άρα $(g \circ f) \ \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.
Επομένως, $\mathrm{T}(f) = \mathrm{F}(g(f)) \ \in \mathcal{L}^2(\Omega), \ \forall \ f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.
Επιπρόσθετα, ο τελεστής T είναι φραγμένος. Πράγματι, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ έχουμε:

$$\|\mathrm{T}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|\mathrm{F}(g(f))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|\mathrm{F}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|g(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \tag{3.0.26}$$

Ο τελεστής F είναι φραγμένος και μάλιστα από τη σχέση (2.0.21) έχουμε:

$$\|\mathrm{F}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} \leq M,$$

όπου $M = c(c+1) > 0$ και $c > 0$ η σταθερά που προκύπτει από την Ανισότητα Poincaré.
Άρα, από τις σχέσεις (2.0.21) και (3.0.25), η σχέση (3.0.26) γίνεται:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{T}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \|\mathrm{F}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|g(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|\mathrm{T}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq Mm\sqrt{\mu(\Omega)} \end{aligned}$$

και θεωρώντας $k = Mm\sqrt{\mu(\Omega)} > 0$ έχουμε:

$$\|\mathrm{T}(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq k, \ \forall \ f \in \mathcal{L}^2(\Omega). \tag{3.0.27}$$

Επομένως, $\mathrm{T}(f) \in \mathcal{B}(0,k)$ και άρα $\mathrm{T} : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{B}(0,k) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε ο τελεστής T είναι φραγμένος.
Επί πλέον, ο τελεστής T είναι συμπαγής. Πράγματι, έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Η συνάρτηση g είναι φραγμένη, άρα το $g(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενσφήνωσης του Lebesgue (3.21), το $\mathrm{F}(g(\mathcal{U}))$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$, άρα το $\mathrm{T}(\mathcal{U}) = \mathrm{F}(g(\mathcal{U}))$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Άρα, για κάθε $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ φραγμένο, το $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Έτσι, ο τελεστής T είναι συμπαγής.

Ο τελεστής T είναι, επίσης, συνεχής. Πράγματι, έστω η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Άρα, υπάρχει μία υπακολουθία $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $u_{n_k}(x) \to u(x)$ $\sigma.\pi.$ στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$ και τότε:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{T}(u_{n_k}) - \mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \|\mathrm{F}(g(u_{n_k})) - \mathrm{F}(g(u))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\\ &\leq M\|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \qquad (3.0.28)\end{aligned}$$

αφού ο F είναι συνεχής και φραγμένος τελεστής.
Αλλά, η συνάρτηση g είναι φραγμένη και από τη σχέση (3.0.24) έχουμε:

$$|g(u_{n_k})| \leq m, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Επί πλέον, για την υπακολουθία $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει:

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \ \sigma.\pi. \text{ στον } \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Επομένως, από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue (2.9) έχουμε:

$$\|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \to 0.$$

Άρα, από τη σχέση (3.0.28) προκύπτει ότι:

$$\|\mathrm{T}(u_{n_k}) - \mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \to 0,$$

οπότε

$$\mathrm{T}(u_{n_k}) \to \mathrm{T}(u) \text{ στον } \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Έτσι, $\mathrm{T}(u_n) \to \mathrm{T}(u)$, διότι εάν $\mathrm{T}(u_n) \nrightarrow \mathrm{T}(u)$ στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$, τότε θα υπήρχε μία υπακολουθία $(u_{k_l})_{k_l\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\mathrm{T}(u_{k_l}) \to \mathrm{T}(u)$ στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$, άτοπο. Άρα, $\mathrm{T}(u_n) \to \mathrm{T}(u)$ και ο τελεστής T είναι συνεχής.
Έτσι, ο τελεστής $\mathrm{T} : \mathcal{B}(0,k) \to \mathcal{B}(0,k) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι συνεχής, φραγμένος και συμπαγής και η $\mathcal{B}(0,k) \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Οπότε, από το Πόρισμα του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder (2.8) υπάρχει σταθερό σημείο u για τον τελεστή T με:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(u) &= u\\ \Leftrightarrow \mathrm{F}(g(u)) &= u\\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega g(u) w dx, \ \forall\ w \in \mathcal{X} = \mathcal{H}_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

□

Θεωρημα 4.7. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (3.0.29) *(Πρόβλημα Dirichlet* (3.0.29)*):*

$$\begin{aligned}-\triangle u &= g(u), \ \text{στο } \Omega\\ u &= 0, \ \text{στο } \partial\Omega. \qquad (3.0.29)\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz με σταθερά $k > 0$.

Εάν για τη σταθερά Lipschitz k της g ισχύει $k < \lambda_1$, όπου

$$\lambda_1 = \min\{\frac{|w|^2_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}}{\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} : w \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)\},$$

τότε το Πρόβλημα Dirichlet (3.0.29) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz με σταθερά $k > 0$ άρα, ισχύει:

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|, \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.0.30}$$

Για $y = 0$, η σχέση (3.0.30) γίνεται:

$$|g(x) - g(0)| \leq k|x|, \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.0.31}$$

Αλλά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$||g(x)| - |g(0)|| \leq |g(x) - g(0)|. \tag{3.0.32}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (3.0.30) και (3.0.31) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} &||g(x)| - |g(0)|| \leq k|x| \\ \Leftrightarrow\ &|g(x)| - |g(0)| \leq k|x| \\ \Leftrightarrow\ &|g(x)| \leq k|x| + |g(0)|. \end{aligned} \tag{3.0.33}$$

Η σχέση (3.0.33) ισχύει για κάθε $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} |g(u(x))| &\leq k|u(x)| + |g(0)| \\ \Rightarrow |g(u(x))|^2 &\leq (k|u(x)| + |g(0)|)^2 \\ \Rightarrow |g(u(x))|^2 &\leq 2(k^2|u(x)|^2 + |g(0)|^2). \end{aligned} \tag{3.0.34}$$

Επί πλέον, η σχέση (3.0.30) ισχύει για κάθε $u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} |g(u(x)) - g(w(x))| &\leq k|u(x) - w(x)| \\ \Rightarrow |g(u(x)) - g(w(x))|^2 &\leq k^2|u(x) - w(x)|^2 \\ \Rightarrow \int_\Omega |g(u(x)) - g(w(x))|^2 dx &\leq k^2 \int_\Omega |u(x) - w(x)|^2 dx, \\ \Rightarrow \|g(u) - g(w)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq k\|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.0.35}$$

Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ όπως ορίστηκε στο Πρόβλημα Dirichlet (2.0.14). Τότε, για κάθε $u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι $g(u), g(w) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε από τη σχέση (3.0.35) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|(F \circ g)(u) - (F \circ g)(w)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \|F(g(u)) - F(g(w))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &= \|F(g(u) - g(w))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|F\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))}\|g(u) - g(w)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|F\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} k\|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &= k\|F\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))}\|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.0.36}$$

Ο τελεστής F είναι αυτοσυζυγής. Πράγματι, για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ υπάρχουν $u, v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, αντίστοιχα, που είναι ασθενείς λύσεις του Προβλήματος Dirichlet (2.0.14) τέτοιες ώστε:

$$u = F(f) \text{ και } v = F(g).$$

Επομένως, ισχύουν :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \ \forall\ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \tag{3.0.37}$$

και

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega g w dx, \ \forall\ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{3.0.38}$$

Η σχέση (3.0.37) ισχύει για $w = v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, άρα:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{3.0.39}$$

Η σχέση (3.0.38) ισχύει για $w = u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, άρα:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g u dx. \tag{3.0.40}$$

Από τις σχέσεις (3.0.39) και (3.0.40) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f v dx &= \int_\Omega g u dx \\ \Leftrightarrow \int_\Omega f F(g) dx &= \int_\Omega g F(f) dx \\ \Leftrightarrow \langle f, F(g) \rangle &= \langle g, F(f) \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f, F(g) \rangle &= \langle F(f), g \rangle. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ισχύει:

$$\langle f, F(g) \rangle = \langle F(f), g \rangle$$

και έτσι ο τελεστής F είναι αυτοσυζυγής.
Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι ο τελεστής $F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$ είναι συμπαγής. Άρα, ισχύει το Φασματικό Θεώρημα (2.13) και έτσι υπάρχει ακολουθία ιδιοτιμών $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda_1 > 0$ τέτοια ώστε :

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

και

$$\lambda_1 = \min\{\frac{|w|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}}{\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} : w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)\}.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{|w|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}}{\|w\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}, \ \forall\ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)\} \\ \Leftrightarrow \lambda_1 |w|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \|w\|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}, \ \forall\ w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Επί πλέον, για κάθε $f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ υπάρχει $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, η οποία είναι ασθενής λύση του Προβλήματος Dirichlet (2.0.14), τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} u &= F(f) \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega f w dx, \ \forall\, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.0.41}$$

Οπότε, για $w = u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, η σχέση (3.0.41) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla u dx &= \int_\Omega f u dx \\ \Rightarrow \int_\Omega (\nabla u)^2 dx &= \int_\Omega f u dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \int_\Omega (\nabla u)^2 dx = \|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow |u|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda_1 \|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda_1 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda_1 \|F(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|F(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|F\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{L}^2(\Omega))} &\leq \frac{1}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση (3.0.36) δίνει:

$$\|(F \circ g)(u) - (F \circ g)(w)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{k}{\lambda_1} \|u - w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \ \forall\, u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

με $k < \lambda_1$, άρα $\frac{k}{\lambda_1} < 1$.

Επομένως, η συνάρτηση $F \circ g$ είναι συστολή.
Έτσι, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach (2.3) προκύπτει ότι η $F \circ g$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Άρα, υπάρχει μοναδική $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} (F \circ g)(u) &= u \\ \Leftrightarrow F(g(u)) &= u \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega g(u) w dx, \ \forall\, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Έτσι, το Πρόβλημα Dirichlet (3.0.29) έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΘΕΩΡΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach και $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας τελεστής.

i. Ο T καλείται **μονότονος** εάν και μόνον εάν
$$\langle \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y), x - y \rangle \geq 0, \ \forall \ x, y \in \mathcal{X}.$$

ii. Ο T καλείται **γνησίως μονότονος** εάν και μόνον εάν
$$\langle \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y), x - y \rangle > 0, \ \forall \ x, y \in \mathcal{X} \text{ με } x \neq y.$$

iii. Ο T καλείται **αυστηρώς μονότονος** εάν και μόνον εάν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:
$$\langle \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y), x - y \rangle \geq c\|x - y\|^2, \ \forall \ x, y \in \mathcal{X}.$$

1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2. Έστω η πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ από τον $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ στον $\mathcal{X}^*$. Προφανώς, ισχύει:
$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = (f(x) - f(y))(x - y), \ \forall \ x, y \in \mathcal{X}.$$
Τότε, ισχύουν:

i. Η $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι (γνησίως) μονότονη εάν και μόνον εάν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι (γνησίως) αύξουσα.

ii. Η $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι αυστηρά μονότονη εάν και μόνον εάν
$$\inf\{\frac{f(x) - f(y)}{x - y} : x, y \in \mathcal{X} \text{ με } x \neq y\} > 0.$$

iii. Εάν η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{C}^2$ και υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:
$$F^{''}(x) \geq c, \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$
τότε:
$$(F^{'}(x) - F^{'}(y))(x - y) \geq c(x - y)^2, \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}$$
οπότε η $F^{'} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά μονότονη.

iv. Εάν η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{C}^1$ και υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:
$$F^{'}(x) - F^{'}(y) \geq c(x - y), \ \forall \ x, y \in \mathbb{R} \text{ με } x \geq y,$$
τότε η $F^{'} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά μονότονη.

Παραδειγμα 5.3. Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας γραμμικός τελεστής στον χώρο Banach $\mathcal{X}$. Ισχύουν:

i. Ο T είναι μονότονος εάν και μόνον εάν ο T είναι θετικός εάν και μόνον εάν ισχύει:
$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq 0, \ \forall \ x \in \mathcal{X}.$$

ii. Ο T είναι γνησίως μονότονος εάν και μόνον εάν ο T είναι γνήσια θετικός, εάν και μόνον εάν ισχύει:
$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle > 0, \ \forall \ x \in \mathcal{X} \text{ με } x \neq 0.$$

iii. Ο T είναι αυστηρά μονότονος εάν και μόνον εάν ο T είναι αυστηρά θετικός, εάν και μόνον εάν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:
$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq c\|x\|^2, \ \forall \ x \in \mathcal{X}.$$

Παραδειγμα 5.4. Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert με νόρμα $\|\cdot\|$ και εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Θεωρούμε τη μετρική προβολή του $\mathcal{H}$ στο $\mathcal{K}$, την $\wp_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ με $\wp_{\mathcal{K}}(f) := u, \ \forall \ f \in \mathcal{H}$, όπου $u \in \mathcal{K}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα (0.0.1) και η ανισότητα (0.0.3).
Η μετρική προβολή $\wp_{\mathcal{K}}$ είναι μονότονος τελεστής. Πράγματι, η ανισότητα (0.0.3) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$, επομένως ισχύουν:
$$\langle x - \wp_{\mathcal{K}}(x), w - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle \leq 0, \ \forall \ w \in \mathcal{K} \tag{1.0.42}$$
και
$$\langle y - \wp_{\mathcal{K}}(y), w - \wp_{\mathcal{K}}(y)\rangle \leq 0, \ \forall \ w \in \mathcal{K}. \tag{1.0.43}$$
Άρα, η σχέση (1.0.42) ισχύει και για $w = \wp_{\mathcal{K}}(y) \in \mathcal{K}$, οπότε έχουμε:
$$\langle x - \wp_{\mathcal{K}}(x), \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle \leq 0, \ \forall \ w \in \mathcal{K}. \tag{1.0.44}$$
Επίσης, η σχέση (1.0.43) ισχύει και για $w = \wp_{\mathcal{K}}(x) \in \mathcal{K}$, οπότε έχουμε:
$$\langle y - \wp_{\mathcal{K}}(y), \wp_{\mathcal{K}}(x) - \wp_{\mathcal{K}}(y)\rangle \leq 0, \ \forall \ w \in \mathcal{K}. \tag{1.0.45}$$
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.0.44) και (1.0.45) προκύπτει:
$$\begin{aligned}
\langle x - \wp_{\mathcal{K}}(x), \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle + \langle y - \wp_{\mathcal{K}}(y), \wp_{\mathcal{K}}(x) - \wp_{\mathcal{K}}(y)\rangle &\leq 0 \\
\Leftrightarrow \langle x - \wp_{\mathcal{K}}(x) - y + \wp_{\mathcal{K}}(y), \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle &\leq 0 \\
\Leftrightarrow \langle x - y, \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle + \langle \wp_{\mathcal{K}}(y) + \wp_{\mathcal{K}}(x), \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle &\leq 0 \\
\Leftrightarrow \langle x - y, \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle + \|\wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\|^2 &\leq 0
\end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow \|\wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\|^2 \leq \langle y - x, \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle. \tag{1.0.46}$$
Αλλά, $\|\wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\|^2 \geq 0$, άρα από τη σχέση (1.0.46) έχουμε ότι:
$$\langle y - x, \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle \geq 0 \text{ με } x, y \in \mathcal{H}.$$
Άρα, ισχύει:
$$\langle y - x, \wp_{\mathcal{K}}(y) - \wp_{\mathcal{K}}(x)\rangle \geq 0, \ \forall \ x, y \in \mathcal{H},$$
οπότε η μετρική προβολή $\wp_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ είναι μονότονος τελεστής.

Ορισμος 5.5. Έστω $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση στο ανοικτό $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ ένας πραγματικός χώρος Banach.

i. Η f καλείται **G-διαφορίσιμη στο** $u \in \mathcal{U}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει συναρτησιακό $\alpha \in \mathcal{X}^*$ τέτοιο ώστε:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} = \langle \alpha, h \rangle, \ \forall \ h \in \mathcal{X}.$$

Το α ονομάζεται **Gateaux παράγωγος** της f στο $\mathcal{U}$ και γράφουμε $f'(u) = \alpha$.

ii. Η f καλείται **G-διαφορίσιμη στο ανοικτό** $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ εάν και μόνον εάν η f είναι G- διαφορίσιμη σε κάθε $u \in \mathcal{U}$.

Ορισμος 5.6. Έστω $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση στο τυχαίο σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ ένας πραγματικός χώρος Banach. Η f είναι **G-διαφορίσιμη στο** $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ εάν και μόνον εάν η f είναι ορισμένη σε ανοικτή περιοχή του $\mathcal{U}$ και είναι G-διαφορίσιμη σε κάθε $u \in \mathcal{U}$.

Ένα σημαντικό παράδειγμα μονότονων τελεστών προκύπτει από την επόμενη πρόταση.

Προταση 5.7. *Έστω $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ μία G-διαφορίσιμη συνάρτηση στο κυρτό υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ ένας πραγματικός Banach χώρος. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

1. *Η f είναι κυρτή (αντίστοιχα γνησίως κυρτή).*
2. *Η $f' : \mathcal{U} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονη (αντίστοιχα γνησίως μονότονη).*

Αποδειξη. Έστω $x, y \in \mathcal{U}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση: $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\varphi(t) := f(x+ty), \ \forall \ t \in [0,1].$$

Τότε, λόγω του ότι η f είναι G-διαφορίσιμη συνάρτηση στο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$, εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\varphi'(t) = f'(x+t(y-x))(y-x), \ \forall \ t \in [0,1]$$

ή αλλιώς

$$\varphi'(t) = \langle f'(x+t(y-x)), y-x \rangle, \ \forall \ t \in [0,1]$$

αφού $f'(u) \in \mathcal{X}^*, \ \forall \ u \in \mathcal{U}$.

$(1 \to 2)$. Έστω ότι η f είναι κυρτή.

Τότε, η συνάρτηση $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι επίσης κυρτή και η φ' είναι μονότονη. Οπότε, για κάθε $x, y \in \mathcal{U}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \varphi'(1) &\geq \varphi'(0) \\ \Leftrightarrow \langle f'(x+1(y-x)), y-x \rangle &\geq \langle f'(x+0(y-x)), y-x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f'(y), y-x \rangle &\geq \langle f'(x), y-x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f'(y) - f'(x), y-x \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x, y \in \mathcal{U}$ ισχύει:

$$(f'(y) - f'(x), y-x) \geq 0$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f' : \mathcal{U} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονη.

$(2 \to 1)$. Έστω ότι η $f' : \mathcal{U} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονη συνάρτηση και έστω $s, t \in [0,1]$ με $s < t$. Τότε,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - \varphi'(s) &= \langle f'(x + t(y-x)), y - x\rangle - \langle f'(x + s(y-x)), y - x\rangle \\ &= \langle f'(x + t(y-x)) - f'(x + s(y-x)), y - x\rangle. \end{aligned} \tag{1.0.47}$$

Η f' είναι μονότονη συνάρτηση, άρα:

$$\langle f'(x + t(y-x)) - f'(x + s(y-x)), (x + t(y-x)) - (x + s(y-x))\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle f'(x + t(y-x)) - f'(x + s(y-x)), (t-s)(y-x)\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-s)\langle f'(x + t(y-x)) - f'(x + s(y-x)), y - x\rangle \geq 0. \tag{1.0.48}$$

Επειδή $t, s \in [0,1]$ με $s < t$ έπεται ότι $t - s > 0$, άρα από τη σχέση (1.0.48) προκύπτει ότι:

$$\langle f'(x + t(y-x)) - f'(x + s(y-x)), y - x\rangle \geq 0,$$

οπότε από τη σχέση (1.0.47) έχουμε:

$$\varphi'(t) - \varphi'(s) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'(t) \geq \varphi'(s).$$

Άρα,

$$\varphi'(t) \geq \varphi'(s),\ \forall\, t, s \in [0,1] \text{ με } s < t.$$

Οπότε , η συνάρτηση φ' είναι μονότονη, άρα η συνάρτηση φ είναι κυρτή. Επομένως, η συνάρτηση f είναι κυρτή. □

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Οι μονότονοι τελεστές έχουν σημαντικές ιδιότητες μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται στις παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 5.8. *Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος τελεστής στον χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε, ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει περιοχή $\mathcal{U}$ του x, δηλαδή $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$, τέτοια ώστε η εικόνα $\mathrm{T}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}^*$ να είναι φραγμένη.

Έστω ότι ο τελεστής T δεν είναι τοπικά φραγμένος. Τότε, υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ για κάποιο $x \in \mathcal{X}$, καθώς $n \to \infty$, και $\|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \to \infty$, καθώς $n \to \infty$.

Εφ' όσον $x_n \to x$, καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι

$$\|x_n\| \to \|x\|$$

και η ακολουθία $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$a_n = \frac{1}{1 + \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\|}$$

και προφανώς $0 < a_n < 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Ο τελεστής Τ είναι μονότονος, άρα $\forall\ u \in \mathcal{X}$ και $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \mathrm{T}(x_n) - \mathrm{T}(u), x_n - u\rangle \\
\Leftrightarrow 0 &\leq \langle \mathrm{T}(x_n) - \mathrm{T}(u), x_n - x + x - u\rangle \\
\Leftrightarrow 0 &\leq \langle \mathrm{T}(x_n), x_n - x\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), x - u\rangle - \langle \mathrm{T}(u), x_n - u\rangle \\
\Leftrightarrow \langle \mathrm{T}(x_n), u - x\rangle &\leq \langle \mathrm{T}(x_n), x_n - x\rangle + \langle \mathrm{T}(u), x_n - u\rangle \\
&\leq \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\| + \|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - u\| \\
&\leq \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\| + \|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\| + \|u\|) \\
\Leftrightarrow \langle \mathrm{T}(x_n), u - x\rangle &\leq \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\| + \|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\| + \|u\|).
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανισοτική σχέση με a_n έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_n\langle \mathrm{T}(x_n), u - x\rangle &\leq a_n\|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\| + a_n\|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\| + \|u\|) \\
\Rightarrow a_n\langle \mathrm{T}(x_n), u - x\rangle &< 1 + a_n\|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\| + \|u\|) \qquad (2.0.49)
\end{aligned}$$

αφού εξ' ορισμού της a_n έπεται ότι:

$$a_n\|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\| = 1 - a_n < 1.$$

Θεωρούμε την ποσότητα $K(x,u) = a_n\|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*}(\|x_n\| + \|u\|)$, η οποία εξαρτάται από τα $x, u \in \mathcal{X}$ και όχι από το $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, η σχέση (2.0.49) γράφεται:

$$a_n\langle \mathrm{T}(x_n), u - x\rangle < 1 + K(x,u),\ \forall\ x, u \in \mathcal{X}. \qquad (2.0.50)$$

Θέτουμε $w = u - x \in \mathcal{X}$ και η σχέση (2.0.50) γράφεται:

$$a_n\langle \mathrm{T}(x_n), w\rangle < 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall\ w \in \mathcal{X}. \qquad (2.0.51)$$

Άρα, η σχέση (2.0.51) ισχύει και για $-w \in \mathcal{X}$ οπότε έχουμε:

$$a_n\langle \mathrm{T}(x_n), -w\rangle < 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall\ w \in \mathcal{X}. \qquad (2.0.52)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.0.51) και (2.0.52) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
|a_n\langle \mathrm{T}(x_n), w\rangle| &< 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall\ w \in \mathcal{X} \\
\Leftrightarrow |\langle a_n\mathrm{T}(x_n), w\rangle| &< 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall\ w \in \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

Άρα, ισχύει:

$$\sup_{n\to\infty} |\langle a_n\mathrm{T}(x_n), w\rangle| < 0.$$

και έτσι από το Θεώρημα Banach-Steinhaus ομοιόμορφου φράγματος (2.4) προκύπτει ότι υπάρχει $\lambda(x) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} \|a_n \mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} &\leq \lambda(x) \\ \Leftrightarrow \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} &\leq \frac{\lambda(x)}{a_n} \\ \Leftrightarrow \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} &\leq \lambda(x)[1 + \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}\|x_n - x\|] \\ \Leftrightarrow \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*}[1 - \lambda(x)\|x_n - x\|] &\leq \lambda(x) \\ \Leftrightarrow \|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} &\leq \frac{\lambda(x)}{1 - \lambda(x)\|x_n - x\|}. \qquad (2.0.53) \end{aligned}$$

Αλλά $x_n \to x$, καθώς $n \to \infty$, άρα η ακολουθία $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη οπότε και η ακολουθία $(\frac{\lambda(x)}{1-\lambda(x)\|x_n - x\|})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Επομένως, από τη σχέση (2.0.53) έπεται ότι και η $(\|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\|\mathrm{T}(x_n)\|_{\mathcal{X}^*} \to \infty$, καθώς $n \to \infty$. Άρα, ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος. □

Πρόταση 5.9. *Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας γραμμικός και μονότονος τελεστής στον χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε, ο τελεστής T είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Ο T είναι μονότονος τελεστής. Έτσι, από την Πρόταση (5.8) έπεται ότι ο τελεστής T είναι τοπικά φραγμένος. Έτσι, ο T είναι γραμμικός και τοπικά φραγμένος τελεστής σε μια περιοχή του $0 \in \mathcal{X}$. Άρα, ο T είναι φραγμένος και στην κλειστή μοναδιαία μπάλα. Επομένως, υπάρχει $c > 0$ τέτοια ώστε:

$$\|\mathrm{T}(u)\|_{\mathcal{X}^*} \leq c\|u\|, \ \forall\, u \in \mathcal{X},$$

οπότε ο T είναι συνεχής τελεστής. □

Ορισμός 5.10. Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας τελεστής στον Banach χώρο $\mathcal{X}$.

i. Ο T λέγεται **demicontinuous** εάν και μόνον εάν για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in \mathcal{X}$, ισχύει $\mathrm{T}(u_n) \rightharpoonup \mathrm{T}(u)$ καθώς $n \to \infty$.
ii. Ο T λέγεται **hemicontinuous** εάν και μόνον η πραγματική συνάρτηση $t \mapsto \langle \mathrm{T}(x + ty), w\rangle, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής για κάθε $x, y, w \in \mathcal{X}$.
iii. Ο T λέγεται **ισχυρά συνεχής** εάν και μόνον εάν για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $u_n \rightharpoonup u$ καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in \mathcal{X}$, ισχύει $\mathrm{T}(u_n) \to \mathrm{T}(u)$ καθώς $n \to \infty$.
iv. Ο T λέγεται **φραγμένος** εάν και μόνον εάν ο T απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{X}$ σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{X}^*$.

Παρατήρηση 5.11. Κάθε συνεχής τελεστής $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ (με τις νόρμες των χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{X}^*$) είναι *demicontinuous* και κάθε τελεστής που είναι *demicontinuous* είναι *hemicontinuous*.

ΛΗΜΜΑ 5.12. *Έστω* $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *ένας μονότονος και hemicontinuous τελεστής στον χώρο Banach* $\mathcal{X}$. *Εάν υπάρχουν* $x \in \mathcal{X}$ *και* $b \in \mathcal{X}^*$ *τέτοια ώστε:*

$$\langle b - \mathrm{T}(y), x - y \rangle \geq 0, \ \forall \ y \in \mathcal{X},$$

τότε $b = \mathrm{T}(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $z \in \mathcal{X}$. Θέτουμε $y = x - tz$ με $t > 0$. Ισχύει:

$$\langle b - \mathrm{T}(y), x - y \rangle, \ \forall \ y \in \mathcal{X}. \tag{2.0.54}$$

Επομένως, η σχέση (2.0.54) ισχύει και για $y = x - tz$ με $t > 0$, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle b - \mathrm{T}(x - tz), x - (x - tz) \rangle &\geq 0, \ \forall \ t > 0 \\ \Leftrightarrow \langle b - \mathrm{T}(x - tz), tz \rangle &\geq 0, \ \forall \ t > 0 \\ \Leftrightarrow t\langle b - \mathrm{T}(x - tz), z \rangle &\geq 0, \ \forall \ t > 0 \\ \Leftrightarrow \langle b - \mathrm{T}(x - tz), z \rangle &\geq 0, \ \forall \ t > 0. \end{aligned}$$

Οπότε, για κάθε $z \in \mathcal{X}$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει:

$$\langle b - \mathrm{T}(x - tz), z \rangle \geq 0. \tag{2.0.55}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ με $t_n > 0$ και $t_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n = x - t_n z, \ \forall \ z \in \mathcal{X}$, με $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ και $x_n \to x$ πάνω σε μία ημιευθεία. Όμως, ο T είναι *hemicontinuous* τελεστής, άρα $\mathrm{T}(x_n) = \mathrm{T}(x - t_n z) \rightharpoonup \mathrm{T}(x)$, καθώς $n \to \infty$.
Οπότε, ισχύει:

$$\langle b - \mathrm{T}(x - t_n z), z \rangle \rightharpoonup \langle b - \mathrm{T}(x), z \rangle, \ \text{καθώς} \ n \to \infty.$$

Αλλά από τη σχέση (2.0.55) έπεται ότι:

$$\langle b - \mathrm{T}(x - t_n z), z \rangle \geq 0, \ \forall \ z \in \mathcal{X}$$

άρα και

$$\langle b - \mathrm{T}(x), z \rangle \geq 0, \ \forall \ z \in \mathcal{X} \tag{2.0.56}$$

οπότε και

$$\begin{aligned} \langle b - \mathrm{T}(x), -z \rangle &\geq 0, \ \forall \ z \in \mathcal{X} \\ \Leftrightarrow \langle b - \mathrm{T}(x), z \rangle &\leq 0, \ \forall \ z \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.0.57}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.0.56) , (2.0.57) προκύπτει ότι:

$$\langle b - \mathrm{T}(x), z \rangle = 0, \ \forall \ z \in \mathcal{X}.$$

Άρα,

$$b - \mathrm{T}(x) = 0 \Rightarrow b = \mathrm{T}(x).$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.13. *Έστω* $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *ένας hemicontinuous και μονότονος τελεστής στον ανακλαστικό χώρο Banach* $\mathcal{X}$. *Τότε, ο τελεστής* T *είναι demicontinuous.*

Αποδειξη. Έστω $u \in \mathcal{X}$ και ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in \mathcal{X}$. Ο T είναι μονότονος τελεστής, άρα από την Πρόταση (5.9) έπεται ότι ο T είναι τοπικά φραγμένος τελεστής. Άρα, η ακολουθία $(\mathrm{T}(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}^*$ είναι φραγμένη. Επί πλέον, ο χώρος Banach $\mathcal{X}$ είναι ανακλαστικός άρα και ο χώρος $\mathcal{X}^*$ είναι ανακλαστικός. Άρα, για τη φραγμένη ακολουθία $(\mathrm{T}(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}^*$ υπάρχει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της, έστω η $(\mathrm{T}(u_{n_k}))_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (\mathrm{T}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ με $\mathrm{T}(u_{n_k}) \rightharpoonup b \in \mathcal{X}^*$, καθώς $k \to \infty$.
Λόγω μονοτονίας του T έπεται ότι:

$$\langle \mathrm{T}(u_{n_k}) - \mathrm{T}(w), u_{n_k} - w\rangle \geq 0, \ \forall\ w \in \mathcal{X}, \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Άρα, και

$$\langle b - \mathrm{T}(w), u - w\rangle \geq 0, \ \forall\ w \in \mathcal{X}. \tag{2.0.58}$$

Επομένως, ο $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονος και *hemicontinuous* τελεστής και για $x \in \mathcal{X}$ και για $b \in \mathcal{X}^*$ ισχύει η σχέση (2.0.58).
Έτσι, από το Λήμμα (5.12) έπεται ότι:

$$b = \mathrm{T}(u).$$

Οπότε,

$$\mathrm{T}(u_{n_k}) \rightharpoonup b = \mathrm{T}(u).$$

Άρα,

$$\mathrm{T}(u_n) \rightharpoonup \mathrm{T}(u).$$

Έτσι, για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι:

$$\mathrm{T}(u_n) \rightharpoonup \mathrm{T}(u).$$

Επομένως, ο T είναι *demicontinuous* τελεστής. □

Παρατηρηση 5.14. Από την παραπάνω πρόταση διαπιστώνουμε ότι η συνέχεια για μονότονους τελεστές σ'ενα σημείο x είναι ισοδύναμη με την *hemicontinuity* στο x, δηλαδή με τη συνέχεια πάνω σε όλες τις ημιευθείες που καταλήγουν στο x.

Πορισμα 5.15. *Έστω* $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *ένας μονότονος τελεστής στον ανακλαστικό χώρο Banach* $\mathcal{X}$. *Τότε, ο* T *είναι demicontinuous τελεστής εάν και μόνον εάν είναι hemicontinuous.*

Ορισμος 5.16. Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας τελεστής στον Banach χώρο $\mathcal{X}$. Ο T καλείται **πιεστικός** εάν και μόνον εάν

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle \mathrm{T}(u), u\rangle}{\|u\|} = \infty.$$

Σε περίπτωση που $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, τότε ο τελεστής $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι πιεστικός εάν και μόνον εάν:

$$\lim_{u\to+\infty} \mathrm{T}(u) = +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.17. *Εάν η συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *είναι συνεχής και πιεστική, τότε η* f *είναι επί.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Η f είναι πιεστική, άρα

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| \geq R$ ισχύει:

$$\frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} > M \Leftrightarrow \langle f(x), x \rangle > M\|x\|.$$

Επομένως, για $M = \|y\| > 0$ και $R = \|x\| > 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle > M\|x\| = \|y\|\|x\| \geq \langle y, x \rangle \\ \Rightarrow \langle f(x), x \rangle > \langle y, x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f(x), x \rangle - \langle y, x \rangle > 0 \\ \Leftrightarrow \langle f(x) - y, x \rangle > 0. \end{aligned} \tag{2.0.59}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - y$ με $x \in \mathbb{R}^n$.
Η συνάρτηση H είναι συνεχής αφού η f είναι συνεχής. Επί πλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$\langle H(x), x \rangle = \langle f(x) - y, x \rangle = \langle f(x), x \rangle - \langle y, x \rangle$$

οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.0.59) προκύπτει ότι:

$$\langle H(x), x \rangle > 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \text{ με } R = \|x\| > 0.$$

Άρα, από το Πόρισμα του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brower (2.5), υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_0\| \leq R$ τέτοιο ώστε:

$$H(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - y = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y.$$

Επομένως, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = y.$$

Άρα, η f είναι επί. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.18. Ένα ανάλογο συμπέρασμα αποδεικνύεται στη συνέχεια για απειροδιάστατους χώρους όπου εκτός από τη συνέχεια και την πιεστικότητα του τελεστή απαιτείται και η μονοτονία του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.19 (Minty-Browder). *Έστω* $\mathcal{X}$ *ένας διαχωρίσιμος και ανακλαστικός χώρος Banach. Εάν ο τελεστής* $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι μονότονος, συνεχής και πιεστικός, τότε ο* T *είναι επί.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $y \in \mathcal{X}^*$. Εφ' όσον ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος υπάρχει ακολουθία $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ υποχώρων του $\mathcal{X}$ με $\dim \mathcal{X}_n < \infty$ και
$\mathcal{X}_n = span\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ τέτοια ώστε:

$$\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n}.$$

Περιορίζοντας τον T στον $\mathcal{X}_n$, οι ιδιότητες της συνέχειας και της πιεστικότητας του T διατηρούνται. Έτσι, ο $\mathrm{T} : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_n^*$ είναι συνεχής και πιεστικός τελεστής. Άρα, από την Πρόταση (5.17) έπεται ότι ο T είναι επί στον $\mathcal{X}_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Οπότε, υπάρχει $x_n \in \mathcal{X}_n$ τέτοιο ώστε:

$$\mathrm{T}(x_n) = y.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$.
Έχουμε:

$$\frac{\langle \mathrm{T}(x_n), x_n \rangle}{\|x_n\|} = \frac{\langle y, x_n \rangle}{\|x_n\|} \leq \frac{\|y\|\|x_n\|}{\|x_n\|} = \|y\| \tag{2.0.60}$$

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία διότι εάν δεν ήταν φραγμένη τότε θα υπήρχε x_n με $\|x_n\| \to \infty$ οπότε λόγω πιεστικότητας του T θα είχαμε:

$$\frac{\langle \mathrm{T}(x_n), x_n \rangle}{\|x_n\|} \to \infty$$

αυτό όμως είναι άτοπο από τη σχέση (2.0.60).
Επειδή ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ανακλαστικός, για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ που είναι φραγμένη υπάρχει μία υπακολουθία της, έστω η $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ με $x_{n_k} \rightharpoonup x$, καθώς $k \to \infty$, και $x \in \mathcal{X}$. Ο T είναι μονότονος τελεστής, άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{T}(x_{n_k}) - \mathrm{T}(z), x_{n_k} - z \rangle &\geq 0,\ \forall\ z \in \mathcal{X} \\ \Leftrightarrow \langle y - \mathrm{T}(z), x_{n_k} - z \rangle &\geq 0,\ \forall\ z \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Λόγω της ασθενούς σύγκλισης $x_{n_k} \rightharpoonup x$, καθώς $k \to \infty$ έπεται ότι και

$$\langle y - \mathrm{T}(z), x_{n_k} - z \rangle \rightharpoonup \langle y - \mathrm{T}(z), x - z \rangle,\ \forall\ z \in \mathcal{X}.$$

Αλλά $\langle y - \mathrm{T}(z), x_{n_k} - z \rangle \geq 0,\ \forall\ z \in \mathcal{X}$ οπότε και

$$\langle y - \mathrm{T}(z), x - z \rangle \geq 0,\ \forall\ z \in \mathcal{X}.$$

Επομένως, από το Λήμμα (5.12) προκύπτει ότι:

$$y = \mathrm{T}(x).$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathcal{X}^*$ υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{T}(x) = y$, οπότε ο τελεστής T είναι επί. □

Το Θεώρημα Minty-Browder (5.19) είναι πολύ σημαντικό στη Θεωρία των Μονότονων τελεστών και βρίσκει πολλές εφαρμογές σε Μη Γραμμικά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών. Μία εφαρμογή του σε τέτοια προβλήματα θα δώσουμε παρακάτω. Θα χρειαστούμε όμως ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν στη μετρησιμότητα και στη συνέχεια μη γραμμικών τελεστών που ορίζονται σε χώρους $\mathcal{L}^p$.
Ένας πολύ χρήσιμος τελεστής που εμφανίζεται σε μη γραμμικά προβλήματα είναι και ο τελεστής Nemytski.

3. ΤΕΛΕΣΤΕΣ NEMYTSKI

Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω η συνάρτηση $f : \mathcal{G} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(x,y) \in \mathbb{R},\ \forall\ (x,y) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί:

(a) τις συνθήκες Καραθεοδωρή, δηλαδή:
   i. για κάθε $y \in \mathbb{R}$ σταθερό, η απεικόνιση $x \mapsto f(x,y)$ είναι μετρήσιμη
   ii. για τυχαίο $x \in \mathcal{G}$, η απεικόνιση $y \mapsto f(x,y)$ είναι συνεχής.

(b) τις συνθήκες αύξησης τάξεως $p-1 > 0$ για $p > 1$ (growth conditions) δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{G}$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x,y)| \leq |\alpha(x)| + b|y|^{p-1}$$

με $\alpha \in \mathcal{L}^q(\mathcal{G}),\ b > 0$ σταθερό, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ορίζουμε τον τελεστή $F : \mathcal{L}^p(\mathcal{G}) \to \mathcal{L}^q(\mathcal{G})$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ως εξής:

$$(Fu)(x) := f(x, u(x)),\ \forall\ u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G}),\ \forall\ x \in \mathcal{G}.$$

Ο τελεστής F ονομάζεται τελεστής Nemytski.

Θεωρημα 5.20. *Έστω $f : \mathcal{G} \times \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (a) και (b). Τότε, ο τελεστής Nemytski F απεικονίζει το $\mathcal{L}^p(\mathcal{G})$ στο $\mathcal{L}^q(\mathcal{G})$.*

Αποδειξη. Έστω $u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G})$. Τότε, η $u(x)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση άρα υπάρχει ακολουθία $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ κλιμακωτών συναρτήσεων τέτοια ώστε $u_n(x) \to u(x)$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathcal{G}$. Από τη συνθήκη Καραθεοδωρή (aii) έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x)) = f(x, u(x)) = (Fu)(x)\ \sigma.\pi.\text{στο}\ \mathcal{G}. \qquad (3.0.61)$$

Θεωρούμε

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{M(n)} c_i^n X_{\mathcal{G}_i^n}(x),$$

όπου τα $\mathcal{G}_i{}^n$ είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathcal{G}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Τότε,

$$f(x, u_n(x)) = f(x, \sum_{i=1}^{M(n)} c_i^n X_{\mathcal{G}_i^n}(x)) = \sum_{i=1}^{M(n)} f(x, c_i^n) X_{\mathcal{G}_i^n}(x).$$

Επομένως, η $f(x, u_n(x))$ είναι μετρήσιμη αφού οι $f(x, c_i^n)$ είναι μετρήσιμες. Οπότε, από τη σχέση (3.0.61) έπεται ότι και η $(Fu)(x)$ είναι μετρήσιμη ως όριο μετρήσιμων συναρτήσεων.
Επί πλέον, η f πληροί τη (b) συνθήκη αύξησης τάξεως $p-1$ με $p > 1$ και ως γνωστόν ισχύει:

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p),\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \text{με}\ a > 0, b > 0.$$

Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned}|(Fu)(x)|^q = |f(x,u(x))|^q &\leq (|\alpha(x)| + b|u(x)|^{p-1})^q \\ &\leq 2^q(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^{(p-1)q}) \\ &= 2^q(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p). \quad (3.0.62)\end{aligned}$$

Αλλά, η συνάρτηση $(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p)$ είναι ολοκληρώσιμη ως άθροισμα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, άρα από τη σχέση (3.0.62) έπεται ότι και η $|(Fu)(x)|^q = |f(x,u(x))|^q$ είναι ολοκληρώσιμη.
Άρα, για κάθε $u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G})$, η $(Fu) \in \mathcal{L}^q(\mathcal{G})$ και έτσι ο τελεστής Nemytski F είναι καλώς ορισμένος. □

Πρόταση 5.21. *Ο τελεστής Nemytski $F : \mathcal{L}^p(\mathcal{G}) \to \mathcal{L}^q(\mathcal{G})$ είναι φραγμένος και μάλιστα υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει:*

$$\|Fu\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} \leq c(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b\|u\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})}), \ \forall\ u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G}).$$

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G})$. Τότε, ισχύει η σχέση (3.0.62):

$$|(Fu)(x)|^q \leq 2^q(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p).$$

Άρα,

$$\int_{\mathcal{G}} |(Fu)(x)|^q dx \leq 2^q\left(\int_{\mathcal{G}} |\alpha(x)|^q dx + b^q \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^p dx\right).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\|Fu\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} &\leq 2^q(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b^q\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})}) \\ \Rightarrow (\|Fu\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})}{}^q)^{\frac{1}{q}} &\leq [2^q(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b^q\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})})]^{\frac{1}{q}} \\ &= 2(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b^q\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})})^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2^{1+\frac{1}{q}}[(\|\alpha\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})})^{\frac{1}{q}} + (b^q)^{\frac{1}{q}}(\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})})^{\frac{1}{q}}] \\ &= 2^{1+\frac{1}{q}}(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b\|u\|^{\frac{p}{q}}_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})}) \\ &= c(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b\|u\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})}). \quad (3.0.63)\end{aligned}$$

όπου $c = 2^{1+\frac{1}{q}} > 0$ σταθερά.
Άρα, από τη σχέση (3.0.63) έπεται ότι για κάθε $u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G})$ ισχύει:

$$\|Fu\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} \leq c(\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} + b\|u\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(\mathcal{G})}), \text{ με } c > 0 \text{ σταθερά,}$$

και επομένως ο τελεστής Nemytski F είναι φραγμένος. □

Θεώρημα 5.22. *Ο τελεστής Nemytski $F : \mathcal{L}^p(\mathcal{G}) \to \mathcal{L}^q(\mathcal{G})$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^p(\mathcal{G})$ με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k}(x))_{n_k\in\mathbb{N}}$ της $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ και $u \in \mathcal{L}^p(\mathcal{G})$ τέτοια ώστε:

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \text{ σ.π. στο } \mathcal{G} \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}|(Fu_{n_k})(x)-(Fu)(x)|^q &= |f(x,u_{n_k}(x))-f(x,u(x))|^q\\ &\leq c(|f(x,u_{n_k}(x))|^q+|f(x,u(x))|^q)\\ &\leq c(|\alpha(x)|^q+b^q|u_{n_k}(x)|^p+|f(x,u(x))|^q).\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$g_{n_k}(x)=f(x,u_{n_k}(x))-f(x,u(x))$$

και

$$h_{n_k}(x)=c(|\alpha(x)|^q+b^q|u_{n_k}(x)|^p+|f(x,u(x))|^q)$$

οπότε

$$g_{n_k}\in\ \mathcal{L}^1(\mathcal{G})\text{ και }h_{n_k}\in\ \mathcal{L}^1(\mathcal{G}).$$

Έτσι, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$|g_{n_k}(x)|^q\leq h_{n_k}(x)\ \sigma.\pi.\ \text{στον}\mathcal{L}^1(\mathcal{G}). \tag{3.0.64}$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη Καραθεοδωρή (aii).
Οπότε, αφού $u_{n_k}(x)\to u(x)$ σ.π. στο $\mathcal{G}$, καθώς $k\to\infty$, έπεται ότι:

$$f(x,u_{n_k}(x))\to f(x,u(x))$$

Άρα,

$$g_{n_k}(x)\to 0\ \sigma.\pi.\ \text{στο } \mathcal{G}$$

και

$$h_{n_k}(x)\to c(|\alpha(x)|^q+b^q|u(x)|^p+|f(x,u(x))|^q)\ \sigma.\pi.\ \text{στο } \mathcal{G}.$$

Θέτουμε

$$h(x)=c(|\alpha(x)|^q+b^q|u(x)|^p+|f(x,u(x))|^q)$$

και τότε:

$$h_{n_k}(x)\to h(x)\ \sigma.\pi.\ \text{στο } \mathcal{G}\text{ καθώς } k\to\infty.$$

Επίσης, εφ' όσον $u_n\to u$ στον $\mathcal{L}^p$ τότε και $\|u_n\|\to\|u\|$, άρα και $h_{n_k}\to h$ στον $\mathcal{L}^1$.
Έτσι, πληρούνται οι προϋποθέσεις του Γενικευμένου Θεωρήματος Lebesgue (2.10), οπότε $g_{n_k}\to 0$ στον $\mathcal{L}^1$.
Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\|F(u_{n_k})-F(u)\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} &= \int_{\mathcal{G}}|(Fu_{n_k})(x)-(Fu)(x)|^q dx\\ &= \int_{\mathcal{G}}|f(x,u_{n_k}(x))-f(x,u(x))|^q dx\\ &= \int_{\mathcal{G}}|g_{n_k}(x)|^q dx.\end{aligned}$$

και προφανώς $\int_{\mathcal{G}} |g_{n_k}(x)|^q dx \to 0$.
Επομένως,

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathcal{G})} \to 0 \Rightarrow F(u_{n_k}) \to F(u). \tag{3.0.65}$$

Έτσι, έπεται ότι $F(u_n) \to F(u)$, διότι εάν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_l})_{n_l \in \mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ της u_n τέτοια ώστε:

$$F(u_{n_l}) \nrightarrow F(u).$$

Τότε, όπως αποδείχθηκε παραπάνω, υπάρχει υπακολουθία της $(F(u_{n_l}))_{n_l \in \mathbb{N}}$ η $(F(u_{n_{l_m}}))_{n_{l_m} \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $F(u_{n_{l_m}}) \to F(u)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, άρα $F(u_n) \to F(u)$. Οπότε, ο τελεστής Nemytski F είναι συνεχής. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ MINTY-BROWDER

Θα δώσουμε τώρα μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θεωρήματος Minty-Browder (5.19) σε ένα Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών.

1. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο.

Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών:

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + au &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.0.66}$$

όπου $a \geq 0$ σταθερά και $2 \leq p < \infty$ με $p \geq \frac{2n}{n+2}$.

Παρατηρηση 6.1. Για $p = 2$ και $a = 0$, προκύπτει το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (2.0.14):

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned}$$

το οποίο έχει μελετηθεί στο Κεφάλαιο 4.

Για δεδομένη $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ ονομάζουμε **ασθενή λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** (1.0.66) μία συνάρτηση $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε για κάθε $w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ να ισχύει:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uw dx = \int_\Omega fw dx. \tag{1.0.67}$$

Για να έχει νόημα η ισότητα (1.0.67) πρέπει $u, w \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.
Από Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev (3.21) προκύπτει ότι εάν $p \geq \frac{2n}{n+2}$, τότε $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$, οπότε πράγματι η ισότητα (1.0.67) είναι καλώς ορισμένη.
Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό:

$$\alpha(u, w) := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uw dx, \ \forall\ u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Λημμα 6.2. *Για σταθερό* $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, *το γραμμικό συναρτησιακό* $w \mapsto \alpha(u,w)$, $\forall\ w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *είναι φραγμένο (άρα και συνεχές).*

Αποδειξη. Έστω $u \in \mathcal{X}$ σταθερό. Τότε, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
|\alpha(u,w)| &= |\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uw dx| \\
&\leq |\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx| + a|\int_\Omega uw dx| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u||\nabla w| dx + a\int_\Omega |u||w| dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla w| dx + a\int_\Omega |u||w| dx \\
&\leq [\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx]^{\frac{1}{q}} (\int_\Omega |\nabla w|^p dx)^{\frac{1}{p}} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= (\|\nabla u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^{\frac{1}{q}}\|\nabla w\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= (\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^{\frac{p}{q}}\|\nabla w\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= (\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^{p-1}\|\nabla w\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|^{p-1}_{\mathcal{X}}\|w\|_{\mathcal{X}} + ak\|u\|_{\mathcal{X}}\|w\|_{\mathcal{X}} \\
&= (\|u\|^{p-1}_{\mathcal{X}} + ak\|u\|_{\mathcal{X}})\|w\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Άρα, ισχύει:

$$|\alpha(u,w)| \leq (\|u\|^{p-1}_{\mathcal{X}} + ak\|u\|_{\mathcal{X}})\|w\|_{\mathcal{X}},\ \forall\ w \in \mathcal{X}. \tag{1.0.68}$$

Θέτουμε $M = \|u\|^{p-1}_{\mathcal{X}} + ak\|u\|_{\mathcal{X}} > 0$ και επειδή το $u \in \mathcal{X}$ σταθερό, το M είναι επίσης σταθερό.
Οπότε, η σχέση (1.0.68) γράφεται:

$$|\alpha(u,w)| \leq M\|w\|_{\mathcal{X}},\ \forall\ w \in \mathcal{X}.$$

Επομένως, το γραμμικό συναρτησιακό $\alpha(u,w)$ είναι φραγμένο, όταν το $u \in \mathcal{X}$ είναι σταθερό.
Άρα, για σταθερό $u \in \mathcal{X}$ είναι $\alpha(u,w) \in \mathcal{X}^*$, για κάθε $w \in \mathcal{X}$. □

Παρατηρηση 6.3. Λόγω των παραπάνω, είναι καλώς ορισμένος ο τελεστής $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, όπου για κάθε $u \in \mathcal{X}$ είναι $\mathrm{A}(u) \in \mathcal{X}^*$ με:

$$(\mathrm{A}u)(w) := \alpha(u,w),\ \forall\ w \in \mathcal{X}.$$

Τότε, η ισότητα (1.0.67) γράφεται:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A}u)(w) &= \int_\Omega fw dx,\ \forall\ w \in \mathcal{X} \\
\Leftrightarrow \langle \mathrm{A}u, w\rangle &= \langle f, w\rangle,\ \forall\ w \in \mathcal{X} \\
\Leftrightarrow \mathrm{A}(u) &= f.
\end{aligned}$$

Άρα, για δεδομένη $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ ονομάζουμε **ασθενή λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** (1.0.66) μία συνάρτηση $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{A}(u) = f.$$

Έτσι, για να αποδείξουμε την ύπαρξη ασθενούς λύσης του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών αρκεί να αποδείξουμε ότι ο τελεστής A είναι επί.
Ο χώρος $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach, αφού $1 < p < \infty$. Άρα, εάν αποδείξουμε ότι ο τελεστής $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονος, πιεστικός και συνεχής, τότε από το Θεώρημα Minty-Browder (5.19) έπεται ότι ο A είναι επί.

Λημμα 6.4. *Ο τελεστής* $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι μονότονος.*

Αποδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\langle \mathrm{A}(u) - \mathrm{A}(w), u - w \rangle \geq 0, \ \forall \ u, w \in \mathcal{X}.$$

Για $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A}u, u \rangle = \alpha(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u dx + a \int_\Omega u u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} (\nabla u)^2 dx + a \int_\Omega u^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + a \int_\Omega u^2 dx \\
&= \|u\|_{\mathcal{X}}^p + a \int_\Omega u^2 dx \\
&= \|u\|_{\mathcal{X}}^p + a \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}$$

Ομοίως, για $w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\langle \mathrm{A}w, w \rangle = \alpha(w,w) = \|w\|_{\mathcal{X}}^p + a \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 .$$

Επί πλέον, για $u, w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A}u, w \rangle &= \alpha(u,w) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx + a \int_\Omega u w dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \nabla w dx + a \int_\Omega u w dx \\
&\leq [\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx]^{\frac{1}{q}} (\int_\Omega |\nabla w|^p dx)^{\frac{1}{p}} + a \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&= \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla w\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + a \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} \|w\|_{\mathcal{X}} + a \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Ομοίως, για $u, w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\langle \mathrm{A}w, u \rangle = \alpha(w,u) \leq \|w\|_{\mathcal{X}}^{p-1} \|u\|_{\mathcal{X}} + a \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} .$$

Επομένως, για $u, w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{A}(u)-\mathrm{A}(w), u-w\rangle &= \langle \mathrm{A}(u), u\rangle - \langle \mathrm{A}(u), w\rangle - \langle \mathrm{A}(w), u\rangle + \langle \mathrm{A}(w), w\rangle \\ &\geq \|u\|_{\mathcal{X}}^p + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 - (\|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1}\|w\|_{\mathcal{X}} + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}) - \\ &-(\|w\|_{\mathcal{X}}^{p-1}\|u\|_{\mathcal{X}} + a\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}) + \|w\|_{\mathcal{X}}^p + a\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \\ &= a(\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 - 2\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}) + \\ &+\|u\|_{\mathcal{X}}^p - \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1}\|w\|_{\mathcal{X}} - \|w\|_{\mathcal{X}}^{p-1}\|u\|_{\mathcal{X}} + \|w\|_{\mathcal{X}}^p \\ &= a(\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} - \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)})^2 + \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1}(\|u\|_{\mathcal{X}} - \|w\|_{\mathcal{X}}) - \\ &-\|w\|_{\mathcal{X}}^{p-1}(\|u\|_{\mathcal{X}} - \|w\|_{\mathcal{X}}) \\ &= (\|u\|_{\mathcal{X}} - \|w\|_{\mathcal{X}})(\|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \|w\|_{\mathcal{X}}^{p-1}) + a(\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} - \|w\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)})^2 \geq 0\end{aligned}$$

οπότε,

$$\langle \mathrm{A}(u)-\mathrm{A}(w), u-w\rangle \geq 0, \ \forall\, u, w \in \mathcal{X}.$$

Επομένως, ο τελεστής A είναι μονότονος. □

Λημμα 6.5. *Ο τελεστής* $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι πιεστικός.*

Αποδειξη. Για $u \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{A}u, u\rangle = \alpha(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u dx + a\int_\Omega uudx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u)^2 dx + a\int_\Omega u^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + a\int_\Omega u^2 dx \\ &= \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p + a\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \\ \Rightarrow \langle \mathrm{A}u, u\rangle &\geq \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \|u\|_{\mathcal{X}}^p.\end{aligned}$$

Οπότε, για $u \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$\langle \mathrm{A}u, u\rangle \geq \|u\|_{\mathcal{X}}^p,$$

άρα, για $u \in \mathcal{X}$ με $\|u\|_{\mathcal{X}} \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\langle \mathrm{A}u, u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \geq \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1}. \tag{1.0.69}$$

Αλλά,

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{X}}\to\infty} \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} = \infty.$$

οπότε από τη σχέση (1.0.69) προκύπτει ότι:

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{X}}\to\infty} \frac{\langle \mathrm{A}u, u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} = \infty.$$

Άρα, ο τελεστής A είναι πιεστικός. □

Λημμα 6.6. *Ο τελεστής* $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι συνεχής.*

Αποδειξη. Έστω η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $u_n \to u$ με $u \in \mathcal{X}$, καθώς $n \to \infty$. Τότε,

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{X}} \to 0. \tag{1.0.70}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x, u(x)) := |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \ \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, u \in \mathcal{X}.$$

Η f πληροί τις συνθήκες Καραθεοδωρή και τη growth condition.
Άρα, είναι καλώς ορισμένος ο τελεστής Nemytski $F : \mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathcal{L}^q(\Omega)$ με:

$$(Fu)(x) := f(x, u(x)) = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).$$

Έτσι, από το Θεώρημα (5.22) έπεται ότι ο τελεστής F είναι συνεχής.
Άρα, εφ' όσον $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι

$$F(u_n) \to F(u), \text{ καθώς } n \to \infty,$$

οπότε και

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \to 0. \tag{1.0.71}$$

Τότε, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u, w\rangle &= \langle \mathrm{A}u_n, w\rangle - \langle \mathrm{A}u, w\rangle = \alpha(u_n, w) - \alpha(u, w)\\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w dx + a\int_\Omega u_n w dx -\\
&\quad -\Big(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega u w dx\Big)\\
&= \int_\Omega F(u_n)\nabla w dx + a\int_\Omega u_n w dx - \Big(\int_\Omega F(u)\nabla w dx + a\int_\Omega u w dx\Big)\\
&= \int_\Omega (F(u_n) - F(u))\nabla w dx + a\int_\Omega (u_n - u) w dx\\
&\le (\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{X}})\|w\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$\langle \mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u, w\rangle \le (\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{X}})\|w\|_{\mathcal{X}}.$$

Οπότε, από την παραπάνω σχέση, για $w \in \mathcal{X}$ με $\|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0$, προκύπτει ότι:

$$\frac{\langle \mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u, w\rangle}{\|w\|_{\mathcal{X}}} \le \|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{X}}$$

άρα,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u\|_{\mathcal{X}*} &= \sup\Big\{\frac{\langle \mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u, w\rangle}{\|w\|_{\mathcal{X}}} : \ w \in \mathcal{X}, \|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0\Big\}\\
&\le \|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} + a\|u_n - u\|_{\mathcal{X}} \qquad (1.0.72)
\end{aligned}$$

οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.0.70), (1.0.71) και (1.0.72) έπεται ότι:

$$\|\mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u\|_{\mathcal{X}^*} \to 0.$$

Επομένως,

$$\mathrm{A}u_n \to \mathrm{A}u$$

και έτσι ο A είναι συνεχής τελεστής. □

Με τη βοήθεια των Λημμάτων (6.4), (6.5), (6.6) αποδεικνύεται το ακόλουθο Θεώρημα ύπαρξης ασθενούς λύσης για το Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (1.0.66), το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.7. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο.*
Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (1.0.66)*:*

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + au &= f, \ \text{στο}\ \Omega \\ u &= 0, \ \text{στο}\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου $a \geq 0$ σταθερά και $2 \leq p < \infty$ με $p \geq \frac{2n}{n+2}$.
Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ υπάρχει ασθενής λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών (1.0.66) *$u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ για την οποία ισχύει:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uw dx = \int_\Omega f w dx, \ \forall\ w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΨΕΥΔΟΜΟΝΟΤΟΝΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΨΕΥΔΟΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Ορισμος 7.1. Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας τελεστής, όπου $\mathcal{X}$ ένας χώρος Banach. Ο τελεστής Τ λέγεται **ψευδομονότονος** εάν και μόνον εάν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με:

(1) $x_n \rightharpoonup x$ καθώς $n \to \infty$,
(2) $\mathrm{T}(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$
(3) $\limsup \langle \mathrm{T}(x_n), x_n - x\rangle \le 0$,

ισχύουν:

$$y = \mathrm{T}(x) \text{ και } \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \to \langle \mathrm{T}(x), x\rangle.$$

Σε όλα όσα ακολουθούν ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι Banach.

Προταση 7.2. *Έστω $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ένας μονότονος και συνεχής τελεστής, τότε ο Τ είναι ψευδομονότονος τελεστής.*

Αποδειξη. Έστω η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x_n \rightharpoonup x,\ \mathrm{T}(x_n) \rightharpoonup y,\ \text{καθώς } n \to \infty \text{ και } \limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n - x\rangle \le 0$$

Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n - x\rangle &\le 0 \\ \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} (\langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle - \langle \mathrm{T}(x_n), x\rangle) &\le 0 \\ \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle &\le \langle y, x\rangle. \end{aligned} \qquad (1.0.73)$$

Ο Τ είναι μονότονος τελεστής, άρα για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} &\langle \mathrm{T}(\xi) - \mathrm{T}(x_n), \xi - x_n\rangle \ge 0, \\ \Leftrightarrow &\langle \mathrm{T}(\xi), \xi\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), x_n\rangle - \langle \mathrm{T}(x_n), \xi\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \ge 0, \\ \Leftrightarrow &\langle \mathrm{T}(\xi), x_n\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), \xi\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), \xi\rangle \le \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle. \end{aligned} \qquad (1.0.74)$$

Επομένως, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$ από τη σχέση (1.0.74) προκύπτει:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \ge \limsup_{n\to\infty} (\langle \mathrm{T}(\xi), x_n\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), \xi\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), \xi\rangle),$$

οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.0.73) για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$ προκύπτει ότι ισχύει:

$$\langle y, x\rangle \ge \limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \ge \limsup_{n\to\infty} (\langle \mathrm{T}(\xi), x_n\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), \xi\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), \xi\rangle)$$

και επειδή $x_n \rightharpoonup x$,$\mathrm{T}(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle y, x\rangle &\geq \langle \mathrm{T}(\xi), x\rangle + \langle y, \xi\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), \xi\rangle, \ \forall\, \xi \ \in \mathcal{X} \\ \Leftrightarrow \langle y, x\rangle - \langle y, \xi\rangle &\geq \langle \mathrm{T}(\xi), x\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), \xi\rangle, \ \forall\, \xi \in \mathcal{X} \\ \Leftrightarrow \langle y, x-\xi\rangle &\geq \langle \mathrm{T}(\xi), x-\xi\rangle, \ \forall\, \xi \in \mathcal{X} \\ \Leftrightarrow \langle y, x-\xi\rangle - \langle \mathrm{T}(\xi), x-\xi\rangle &\geq 0, \ \forall\, \xi \in \mathcal{X} \\ \Leftrightarrow \langle y - \mathrm{T}(\xi), x-\xi\rangle &\geq 0, \ \forall\, \xi \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{1.0.75}$$

Άρα, από τη σχέση (1.0.75) και από το Λήμμα (5.12) έπεται ότι:

$$y = \mathrm{T}(x).$$

Έτσι, η σχέση (1.0.73) γράφεται:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \leq \langle \mathrm{T}(x), x\rangle. \tag{1.0.76}$$

Ο T είναι μονότονος, οπότε ισχύει:

$$\begin{aligned} &\langle \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(x_n), x - x_n\rangle \geq 0, \\ \Leftrightarrow\ &\langle \mathrm{T}(x), x\rangle - \langle \mathrm{T}(x), x_n\rangle - \langle \mathrm{T}(x_n), x\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{1.0.77}$$

Από τη σχέση (1.0.77) προκύπτει:

$$\liminf_{n\to\infty} (\langle \mathrm{T}(x), x\rangle - \langle \mathrm{T}(x), x_n\rangle - \langle \mathrm{T}(x_n), x\rangle + \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle) \geq 0$$

και επειδή $x_n \rightharpoonup x$, $\mathrm{T}(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle - \langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\liminf_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \geq \langle \mathrm{T}(x), x\rangle. \end{aligned} \tag{1.0.78}$$

Επί πλέον, ισχύει:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \geq \liminf_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle. \tag{1.0.79}$$

Οπότε από τις σχέσεις (1.0.76), (1.0.78) και (1.0.79) έχουμε:

$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \geq \limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \geq \liminf_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \geq \langle \mathrm{T}(x), x\rangle.$$

άρα,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{T}(x), x\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \\ \Rightarrow \langle \mathrm{T}(x), x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\langle \mathrm{T}(x_n), x_n\rangle \to \langle \mathrm{T}(x), x\rangle.$$

Έτσι, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με

$x_n \rightharpoonup x,\ \mathrm{T}(x_n) \rightharpoonup y$ καθώς $n \to \infty$ και $\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{T}(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$

ισχύουν:

$$y = \mathrm{T}(x) \text{ και } \langle \mathrm{T}(x_n), x_n \rangle \to \langle \mathrm{T}(x), x \rangle.$$

Άρα, ο Τ είναι ψευδομονότονος τελεστής. □

Πρόταση 7.3. *Έστω* $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *ένας μονότονος και συνεχής τελεστής . Έστω* $\mathrm{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *ένας ισχυρά συνεχής τελεστής. Τότε, ο τελεστής* $\Gamma = \mathrm{A} + \mathrm{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι ψευδομονότονος.*

Απόδειξη. Ο $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονος και συνεχής τελεστής επί του Banach χώρου $\mathcal{X}$. Οπότε, από την Πρόταση (7.2) έπεται ότι ο τελεστής Α είναι ψευδομονότονος.
Έστω η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x$, $\Gamma(x_n) \rightharpoonup y$, καθώς $n \to \infty$, και

$$\limsup \langle \Gamma(x_n), x_n - x \rangle \leq 0.$$

Άρα, καθώς $n \to \infty$, ισχύει:

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})(x_n) \rightharpoonup y \Leftrightarrow \mathrm{A}(x_n) + \mathrm{B}(x_n) \rightharpoonup y. \tag{1.0.80}$$

Ο τελεστής Β είναι ισχυρά συνεχής, άρα

$$\mathrm{B}(x_n) \to \mathrm{B}(x). \tag{1.0.81}$$

Από τις σχέσεις (1.0.80), (1.0.81) προκύπτει:

$$\mathrm{A}(x_n) \rightharpoonup y - \mathrm{B}(x). \tag{1.0.82}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \langle \Gamma(x_n), x_n - x \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\limsup_{n\to\infty} \langle (\mathrm{A} + \mathrm{B})(x_n), x_n - x \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{A}(x_n) + \mathrm{B}(x_n), x_n - x \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\limsup_{n\to\infty} (\langle \mathrm{A}(x_n), x_n - x \rangle + \langle \mathrm{B}(x_n), x_n - x \rangle) \leq 0. \end{aligned} \tag{1.0.83}$$

Επί πλέον, επειδή $x_n \rightharpoonup x$, καθώς $n \to \infty$, και ο τελεστής Β είναι ισχυρά συνεχής, ισχύει:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{B}(x_n), x_n - x \rangle = 0. \tag{1.0.84}$$

Από τις σχέσεις (1.0.83), (1.0.84) προκύπτει:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \mathrm{A}(x_n), x_n - x \rangle \leq 0. \tag{1.0.85}$$

Ο τελεστής Α είναι ψευδομονότονος και για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με $x_n \rightharpoonup x$, καθώς $n \to \infty$, ισχύουν οι σχέσεις (1.0.82), (1.0.85), δηλαδή:

$$\mathrm{A}(x_n) \rightharpoonup y - \mathrm{B}(x) \text{ και } \limsup_{n\to\infty} (\langle \mathrm{A}(x_n), x_n - x \rangle) \leq 0.$$

Επομένως,

$$\mathrm{A}(x) = y - \mathrm{B}(x) \text{ και } \langle \mathrm{A}(x_n), x_n \rangle \to \langle \mathrm{A}(x), x \rangle.$$

Έτσι,

$$y = \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x) = (\mathrm{A} + \mathrm{B})(x) = \Gamma(x)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{A}(x_n), x_n \rangle = \langle \mathrm{A}(x), x \rangle.$$

Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle \Gamma(x_n), x_n \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle (\mathrm{A}+\mathrm{B})(x_n), x_n \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{A}(x_n) + \mathrm{B}(x_n), x_n \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} (\langle \mathrm{A}(x_n), x_n \rangle + \langle \mathrm{B}(x_n), x_n \rangle) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{A}(x_n), x_n \rangle + \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{B}(x_n), x_n \rangle \\ &= \langle \mathrm{A}(x), x \rangle + \langle \mathrm{B}(x), x \rangle \\ &= \langle \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x), x \rangle \\ &= \langle \Gamma(x), x \rangle. \end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x_n \rightharpoonup x,\ \Gamma(x_n) \rightharpoonup y,\ \text{καθώς } n \to \infty \text{ και } \limsup_{n\to\infty} \langle \Gamma(x_n), x_n - x \rangle \leq 0$$

ισχύουν:

$$y = \Gamma(x) \text{ και } \langle \Gamma(x_n), x_n \rangle \to \langle \Gamma(x), x \rangle.$$

Άρα, ο Γ είναι ψευδομονότονος τελεστής. □

Θεωρημα 7.4 (Haïm Brezis, 1968). *Έστω $\mathcal{X}$ ένας διαχωρίσιμος και ανακλαστικός χώρος Banach. Εάν ο τελεστής $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι ψευδομονότονος, φραγμένος, συνεχής και πιεστικός, τότε ο T είναι επί.*

Θα δώσουμε τώρα μία εφαρμογή των ψευδομονότονων τελεστών σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

2. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο.
Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών:

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.0.86}$$

όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση.

Για δεδομένη $f \in \mathcal{X}^*$ ονομάζουμε **ασθενή λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** (2.0.86) μία συνάρτηση $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε για κάθε $w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ να ισχύει:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + \int_\Omega g(u) w dx = \int_\Omega f w dx. \qquad (2.0.87)$$

ΛΗΜΜΑ 7.5. *Εάν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη growth condition:*

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Τότε, ο τελεστής $\mathrm{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\langle \mathrm{B}(u), w\rangle := \int_\Omega g(u) w dx, \ \forall\, u, w \in \ \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

είναι φραγμένος για $1 < p < n$ και $r \leq \frac{np}{n-p}$.
Εάν, επί πλέον, $r < \frac{np}{n-p}$, τότε ο τελεστής B είναι ισχυρά συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $u, w \in \ \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$.
Εφ' όσον $r \leq \frac{np}{n-p}$, η ενσφήνωση $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ είναι συνεχής. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
|\langle \mathrm{B}(u), w\rangle| &= |\int_\Omega g(u) w dx| \leq \int_\Omega |g(u)||w| dx \\
&\leq \int_\Omega c(1 + |u|^{r-1})|w| dx \\
&\leq \int_\Omega c|w| dx + \int_\Omega c|u|^{r-1}|w| dx \\
&= c\int_\Omega |w| dx + c\int_\Omega |u|^{r-1}|w| dx \\
&\leq c\int_\Omega |w| dx + c(\int_\Omega |u|^{(r-1)q'} dx)^{\frac{1}{q'}}(\int_\Omega |w|^q dx)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c\|w\|_{\mathcal{X}} + c\|u\|^{r-1}_{\mathcal{L}^{(r-1)q'}(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \\
&\leq c\|w\|_{\mathcal{X}} + k\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}\|w\|_{\mathcal{X}} \\
&= \|w\|_{\mathcal{X}}(c + k\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}).
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $u, w \in \ \mathcal{X}$ ισχύει:

$$|\langle \mathrm{B}(u), w\rangle| \leq \|w\|_{\mathcal{X}}(c + k\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}). \qquad (2.0.88)$$

Επομένως, από τη σχέση (2.0.88) για κάθε $w \in \ \mathcal{X}$ με $\|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{|\langle \mathrm{B}(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} \leq c + k\|u\|^{r-1}_{\mathcal{X}}, \ \forall\, u \ \in \ \mathcal{X}.$$

Άρα, για κάθε $u \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{B}(u)\|_{\mathcal{X}^*} &= \sup\{\frac{|\langle \mathrm{B}(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} : w \in \mathcal{X},\ \|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0\} \\ &\leq c + k\|u\|_{\mathcal{X}}^{r-1} \\ \Rightarrow \|\mathrm{B}(u)\|_{\mathcal{X}^*} &\leq c + k\|u\|_{\mathcal{X}}^{r-1}. \end{aligned}$$

Οπότε, ο τελεστής B είναι φραγμένος.

Εάν, επί πλέον, $r < \frac{np}{n-p}$, τότε η ενσφήνωση $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^r(\Omega)$ είναι συμπαγής.

Έστω η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ και $u \in \mathcal{X}$ με $u_n \rightharpoonup u$ στο $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, καθώς $n \to \infty$. Λόγω της συμπαγούς ενσφήνωσης του $\mathcal{X}$ στον χώρο $\mathcal{L}^r(\Omega)$ έπεται ότι $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$ στον $\mathcal{L}^r(\Omega)$.

Θεωρούμε τον τελεστή:

$$F : \mathcal{L}^r(\Omega) \to \mathcal{L}^{r'}(\Omega) \text{ με } F(u) := g(u), \text{ για κάθε} u \in \mathcal{L}^r(\Omega).$$

Ο τελεστής F είναι τελεστής Nemytski και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής και ικανοποιεί τη growth condition:

$$|g(u)| \leq c(1 + |u|^{r-1}),\ \forall\ u \in \mathcal{L}^r(\Omega),$$

τότε σύμφωνα με το Θεώρημα (5.22), ο τελεστής F είναι συνεχής. Επομένως, αφού $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, στον $\mathcal{L}^r(\Omega)$ τότε

$$F(u_n) \to F(u),\ \text{καθώς } n \to \infty \text{ στον } \mathcal{L}^{r'}(\Omega).$$

Άρα, έχουμε:

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)} \to 0. \tag{2.0.89}$$

Τότε, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |\langle \mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u), w\rangle| &= |\int_\Omega (g(u_n) - g(u))w dx| \\ &\leq \int_\Omega |g(u_n) - g(u)||w|dx \\ &= \int_\Omega |F(u_n) - F(u)||w|dx \\ &\leq \|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)} \\ &\leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$|\langle \mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u), w\rangle| \leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)}\|w\|_{\mathcal{X}}. \tag{2.0.90}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.0.90) για κάθε $w \in \mathcal{X}$ με $\|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{|\langle \mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} \leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)}.$$

Οπότε ισχύει:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u)\|_{\mathcal{X}^*} &= \sup\{\frac{|\langle \mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u), w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{X}}} : w \in \mathcal{X},\ \|w\|_{\mathcal{X}} \neq 0\} \\ \Rightarrow \|\mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u)\|_{\mathcal{X}^*} &\leq M\|F(u_n) - F(u)\|_{\mathcal{L}^{r'}(\Omega)}. \qquad (2.0.91) \end{aligned}$$

Άρα, από τις σχέσεις (2.0.89) και (2.0.91) έχουμε:

$$\|\mathrm{B}(u_n) - \mathrm{B}(u)\|_{\mathcal{X}^*} \to 0,$$

οπότε

$$\mathrm{B}(u_n) \to \mathrm{B}(u).$$

Επομένως, ο τελεστής B είναι ισχυρά συνεχής. □

Λημμα 7.6. *Έστω οι τελεστές* $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *και* $\mathrm{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *με* $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, *οι οποίοι ορίζονται ως εξής:*

$$\langle \mathrm{A}(u), w\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx,\ \forall\ u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

και

$$\langle \mathrm{B}(u), w\rangle := \int_\Omega g(u) w dx,\ \forall\ u, w \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Εάν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και πληροί:*

(1) *τη growth condition:*

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty,$$

(2) *την ασυμπτωτική συνθήκη:*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x)x > -\infty$$

και επί πλέον, $1 < p < n$ *και* $r < \frac{np}{n-p}$, *τότε ο τελεστής* $(\mathrm{A}+\mathrm{B}) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ *είναι ψευδομονότονος, ισχυρά συνεχής, φραγμένος και πιεστικός.*

Αποδειξη. Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και πληροί τη growth condition:

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty$$

και επί πλέον, $1 < p < n$ και $r < \frac{np}{n-p}$.

Οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα (7.5), ο τελεστής $\mathrm{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι ισχυρά συνεχής και φραγμένος. Από τα Λήμματα (6.4), (6.6) έπεται ότι ο τελεστής $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι μονότονος και συνεχής. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση (7.3), έπεται ότι ο τελεστής $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι ψευδομονότονος. Προφανώς, ο τελεστής $(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ είναι φραγμένος και

ισχυρά συνεχής.
Για $u \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{A}(u), u \rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} (\nabla u)^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^p dx \\ &= \|u\|_{\mathcal{X}}^p. \end{aligned} \tag{2.0.92}$$

και

$$\langle \mathrm{B}(u), u \rangle = \int_\Omega g(u) u dx, \tag{2.0.93}$$

Η συνάρτηση g πληροί την ασυμπτωτική συνθήκη:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x)x > -\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ υπάρχει } k \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε: } g(x)x > k.$$

Επομένως, για $u \in \mathcal{X}$ είναι:

$$\begin{aligned} g(u)u &> k \\ \Leftrightarrow \int_\Omega g(u) u dx &> \int_\Omega k dx \\ \Leftrightarrow \int_\Omega g(u) u dx &> k\mu(\Omega) = M. \end{aligned} \tag{2.0.94}$$

Από τις σχέσεις (2.0.93), (2.0.94) έπεται ότι:

$$\langle \mathrm{B}(u), u \rangle > M. \tag{2.0.95}$$

Έτσι, για $u \in \mathcal{X}$ με $\|u\|_{\mathcal{X}} \neq 0$ και από τις σχέσεις (2.0.92), (2.0.95) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\mathrm{A}+\mathrm{B})(u), u \rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} &= \frac{\langle \mathrm{A}(u), u \rangle + \langle \mathrm{B}(u), u \rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \\ &> \frac{\|u\|_{\mathcal{X}}^p + M}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \\ &= \|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \frac{M}{\|u\|_{\mathcal{X}}}. \end{aligned}$$

Άρα, εφ' όσον $p > 1$ έπεται ότι:

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{X}} \to \infty} \frac{\langle (\mathrm{A}+\mathrm{B})(u), u \rangle}{\|u\|_{\mathcal{X}}} = \infty.$$

Επομένως, ο τελεστής $(\mathrm{A}+\mathrm{B}) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι πιεστικός. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.7. *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *με αρκετά λείο σύνορο. Έστω η συνεχής συνάρτηση* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *η οποία πληροί:*

(1) *τη growth condition:*

$$|g(x)| \leq c(1 + |x|^{r-1}) \text{ με } 1 \leq r < \infty,$$

(2) *την ασυμπτωτική συνθήκη:*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x)x > -\infty$$

και επί πλέον, $1 < p < n$ *και* $r < \frac{np}{n-p}$.
Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{X}^*$ *υπάρχει ασθενής λύση* $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *για το Μη Γραμμικό Προβλήματος Συνοριακών Τιμών (2.0.86):*

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.0.96}$$

δηλαδή υπάρχει $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *τέτοια ώστε για κάθε* $w \in \mathcal{X}$ *να ισχύει:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + \int_\Omega g(u)w dx = \int_\Omega f w dx. \tag{2.0.97}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε τους τελεστές $\mathrm{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, $\mathrm{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ οι οποίοι ορίστηκαν στα Λήμματα (7.5), (7.6). Οι προϋποθέσεις των Λημμάτων (7.5), (7.6) ισχύουν, άρα ο τελεστής $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ είναι ψευδομονότονος, φραγμένος, πιεστικός και συνεχής, όπου για κάθε $u, w \in \mathcal{X}$ έχουμε:

$$\langle (\mathrm{A} + \mathrm{B})(u), w \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + \int_\Omega g(u)w dx.$$

Επίσης, ο $\mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ για $1 < p \leq n$ είναι διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach. Άρα, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Brezis (7.4) οπότε ο τελεστής $(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ είναι επί.
Επομένως, για κάθε $f \in \mathcal{X}^*$ υπάρχει $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})(u) = f.$$

Άρα, για κάθε $w \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle (\mathrm{A} + \mathrm{B})(u), w \rangle &= \langle f, w \rangle \\ \Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + \int_\Omega g(u)w dx &= \int_\Omega f w dx. \end{aligned} \tag{2.0.98}$$

Άρα, για κάθε $f \in \mathcal{X}^*$ υπάρχει ασθενής λύση $u \in \mathcal{X} = \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ για το Μη Γραμμικό Προβλήματος Συνοριακών Τιμών:

$$\begin{aligned} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega. \end{aligned}$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΜΕΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΟΤΟΝΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΕΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert.

Ορισμος 8.1. Ένας μονότονος τελεστής $\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ονομάζεται **μεγιστικά μονότονος** (maximal monotone) εάν και μόνον εάν:

$$\mathcal{R}(\mathrm{T}+\mathrm{I}) = \mathcal{H}$$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε:

$$(\mathrm{T}+\mathrm{I})(u) = f \Leftrightarrow \mathrm{T}(u) + u = f.$$

Θεωρημα 8.2. *Εάν ο τελεστής $\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι γραμμικός και μεγιστικά μονότονος, τότε:*

(1) *Ο $\mathcal{D}(\mathrm{T})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}$, δηλαδή $\overline{\mathcal{D}(\mathrm{T})} = \mathcal{H}$.*
(2) *Για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει ο τελεστής $(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}$ ο οποίος είναι φραγμένος με $\|(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ και συνεχής.*
(3) *Ο τελεστής T είναι κλειστός δηλαδή το γράφημά του: $\mathcal{G}r(\mathrm{T}) = \{(x, \mathrm{T}(x)) : x \in \mathcal{D}(\mathrm{T})\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

Αποδειξη. Ο τελεστής T είναι μεγιστικά μονότονος. Επομένως, ισχύουν τα εξής:

(α) Ο T είναι μονότονος, δηλαδή ισχύει:

$$\langle u, \mathrm{T}(u)\rangle \geq 0, \ \forall \ u \ \in \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}, \tag{1.0.99}$$

(β)

$$\mathcal{R}(\mathrm{T}+\mathrm{I}) = \mathcal{H}. \tag{1.0.100}$$

(1) Έστω $f_0 \in \mathcal{H}$ για το οποίο ισχύει:

$$\langle u, f_0\rangle = 0, \ \forall \ u \in \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}. \tag{1.0.101}$$

Από τη σχέση (1.0.100) έχουμε ότι για το $f_0 \in \mathcal{H} = \mathcal{R}(\mathrm{T}+\mathrm{I})$ υπάρχει $u_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{T}+\mathrm{I}) = \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}+\mathrm{I})(u_0) &= f_0 \\ \Leftrightarrow \mathrm{T}(u_0) + u_0 &= f_0. \end{aligned} \tag{1.0.102}$$

Από τις σχέσεις (1.0.101), (1.0.102) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \langle u, \mathrm{T}(u_0) + u_0 \rangle &= 0, \ \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow \langle u, \mathrm{T}(u_0)\rangle + \langle u, u_0 \rangle &= 0, \ \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}. \qquad (1.0.103) \end{aligned}$$

Για $u_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ ισχύει η σχέση (1.0.103), άρα

$$\begin{aligned} \langle u_0, \mathrm{T}(u_0)\rangle + \langle u_0, u_0 \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle u_0, \mathrm{T}(u_0)\rangle + \|u_0\|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \|u_0\|^2 &= -\langle u_0, \mathrm{T}(u_0)\rangle. \qquad (1.0.104) \end{aligned}$$

Αλλά

$$\|u_0\|^2 \geq 0$$

και από τη σχέση (1.0.99) έχουμε:

$$\langle u_0, \mathrm{T}(u_0)\rangle \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η σχέση (1.0.104) πρέπει:

$$\|u_0\|^2 = 0 \text{ και } \langle u_0, \mathrm{T}(u_0)\rangle = 0.$$

Επομένως,

$$u_0 = 0 \text{ και } \mathrm{T}(u_0) = 0.$$

Άρα, από τη σχέση (1.0.102) προκύπτει ότι:

$$f_0 = 0.$$

Οπότε, εάν $f_0 \in \mathcal{H}$ με $\langle u, f_0 \rangle = 0, \ \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τότε $f_0 = 0$. Έτσι, το μοναδικό ορθογώνιο στοιχείο του $\mathcal{H}$ είναι το $0 \in \mathcal{H}$, άρα σύμφωνα με τις συνέπειες του Θεωρήματος Hahn - Banach ισχύει:

$$\overline{\mathcal{D}(\mathrm{T})} = \mathcal{H}.$$

Επομένως, ο $\mathcal{D}(\mathrm{T})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

(2) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής

$$(\mathrm{I} + \mathrm{T}) : \mathcal{D}(\mathrm{I} + \mathrm{T}) = \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του

$$(\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}$$

είναι φραγμένος με

$$\|(\mathrm{I} + \mathcal{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$$

και συνεχής.

Από τη σχέση (1.0.100) έπεται ότι ο τελεστής $(\mathrm{I} + \mathrm{T})$ είναι επί. Άρα, για $f \in \mathcal{H} = \mathcal{R}(\mathrm{I} + \mathrm{T})$ υπάρχει $u_1 \in \mathcal{D}(\mathrm{I} + \mathrm{T}) = \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I} + \mathrm{T})(u_1) &= f \\ \Leftrightarrow u_1 + \mathrm{T}(u_1) &= f. \qquad (1.0.105) \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u_2 \in \mathcal{D}(\mathrm{I}+\mathrm{T}) = \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}+\mathrm{T})(u_2) &= f \\ \Leftrightarrow u_2 + \mathrm{T}(u_2) &= f. \end{aligned} \tag{1.0.106}$$

Από τις σχέσεις (1.0.105), (1.0.106) προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_1 + \mathrm{T}(u_1) &= u_2 + \mathrm{T}(u_2) \\ \Leftrightarrow u_1 - u_2 + \mathrm{T}(u_1) - \mathrm{T}(u_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow u_1 - u_2 + \mathrm{T}(u_1 - u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 + \mathrm{T}(u_1 - u_2)\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle + \langle u_1 - u_2, \mathrm{T}(u_1 - u_2)\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \|u_1 - u_2\|^2 + \langle u_1 - u_2, \mathrm{T}(u_1 - u_2)\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.0.107}$$

Αλλά

$$\|u_1 - u_2\|^2 \geq 0$$

και από τη σχέση (1.0.99) έχουμε:

$$\langle u_1 - u_2, \mathrm{T}(u_1 - u_2)\rangle \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η σχέση (1.0.107) πρέπει:

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2.$$

Επομένως, ο τελεστής $\mathrm{I}+\mathrm{T}$ είναι $1-1$.
Έτσι, ο τελεστής

$$(\mathrm{I}+\mathrm{T}) : \mathcal{D}(\mathrm{I}+\mathrm{T}) = \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

είναι $1-1$ και επί, άρα υπάρχει ο αντίστροφός του

$$(\mathrm{T}+\mathrm{I})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H},$$

ώστε για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}+\mathrm{T})^{-1}(f) &= u \\ \Leftrightarrow (\mathrm{I}+\mathrm{T})(u) &= f \\ \Leftrightarrow u + \mathrm{T}(u) &= f. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \langle u + \mathrm{T}(u), u\rangle &= \langle f, u\rangle \\ \Leftrightarrow \langle u, u\rangle + \langle \mathrm{T}(u), u\rangle &= \langle f, u\rangle \\ \Leftrightarrow \|u\|^2 + \langle \mathrm{T}(u), u\rangle &= \langle f, u\rangle. \end{aligned} \tag{1.0.108}$$

Από τη σχέση (1.0.108) έχουμε:

$$\langle f, u\rangle \geq \|u\|^2. \tag{1.0.109}$$

Από την ανισότητα Cauchy - Schwartz έχουμε:

$$\|f\|\|u\| \geq \langle f, u\rangle \tag{1.0.110}$$

Άρα, από τις σχέσεις (1.0.109), (1.0.110) έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \|f\|\|u\| \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \|f\|\|u\| - \|u\|^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \|u\|(\|f\| - \|u\|). \end{aligned} \tag{1.0.111}$$

Επειδή $0 \leq \|u\|$ από τη σχέση (1.0.11) προκύπτει:

$$\|f\| - \|u\| \geq 0 \Leftrightarrow \|f\| \geq \|u\|. \tag{1.0.112}$$

Αλλά $u = (\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1}(f)$ άρα η σχέση (1.0.112) γράφεται:

$$\|f\| \geq \|(\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1}(f)\|,$$

οπότε για $f \in \mathcal{H}$ με $f \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\|(\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1}(f)\|}{\|f\|} \leq 1.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\|(\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup\{\frac{\|(\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1}(f)\|}{\|f\|} : f \in \mathcal{H},\ f \neq 0\} \leq 1.$$

Άρα, ο τελεστής

$$(\mathrm{I} + \mathrm{T})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}$$

είναι φραγμένος και γραμμικός.

Επομένως, ο τελεστής $(\mathrm{T} + \mathrm{I})^{-1}$ είναι συνεχής. Τώρα, θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει ο τελεστής

$$(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{T})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}$$

ο οποίος είναι φραγμένος με

$$\|(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$$

και συνεχής.

Για $\lambda = 1$, δείξαμε ότι ισχύει. Έστω ότι για κάποιο $\lambda_0 > 0$ ο τελεστής $(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})$ είναι $1 - 1$, επί, συνεχής, γραμμικός και φραγμένος τελεστής με

$$\|(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

Άρα, για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοιο ώστε:

$$(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})(u) = f \Leftrightarrow u + \lambda_0\mathrm{T}(u) = f.$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda > \lambda_0$ ο τελεστής

$$\mathrm{I} + \lambda\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

είναι επί. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοιο ώστε:

$$(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{T})(u) = f \Leftrightarrow u + \lambda\mathrm{T}(u) = f.$$

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει λύση $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ για την εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
u + \lambda\mathrm{T}(u) &= f && (1.0.113)\\
\Leftrightarrow \lambda\mathrm{T}(u) &= f - u\\
\Leftrightarrow \lambda_0\lambda\mathrm{T}(u) &= \lambda_0 f - \lambda_0 u\\
\Leftrightarrow \lambda_0\mathrm{T}(u) &= \frac{\lambda_0}{\lambda}f - \frac{\lambda_0}{\lambda}u\\
\Leftrightarrow u + \lambda_0\mathrm{T}(u) &= \frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u\\
\Leftrightarrow (\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})(u) &= \frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u. && (1.0.114)
\end{aligned}
$$

Επειδή όμως υπάρχει ο $(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}$ η σχέση (1.0.114) γίνεται:

$$
u = (\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}(\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u). \qquad (1.0.115)
$$

Θεωρώντας $\mathrm{A}(u) = (\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}(\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u_1)$ η σχέση (1.0.115) γράφεται:

$$
u = \mathrm{A}(u).
$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοια ώστε:

$$
u = \mathrm{A}(u),
$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής A έχει σταθερό σημείο. Έστω $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{A}(u_1) - \mathrm{A}(u_2)\| &= \|(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})(u_1 - u_2)\|\\
&= |1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}|\|(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}(u_1 - u_2)\|\\
&\leq |1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}|\|(\mathrm{I} + \lambda_0\mathrm{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}\|u_1 - u_2\|\\
&\leq |1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}|\|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}
$$

Επιλέγοντας $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε:

$$
\begin{aligned}
0 < |1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}| < 1\\
\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} < 1\\
\Leftrightarrow -2 < -\frac{\lambda_0}{\lambda} < 0\\
\Leftrightarrow 0 < \frac{\lambda_0}{2} < \lambda.
\end{aligned}
$$

Τότε, ο τελεστής A είναι συστολή και άρα από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου Banach υπάρχει $u \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{A}(u) \\ \Leftrightarrow u &= (\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})(\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1-\frac{\lambda_0}{\lambda})(u), \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση (1.0.113) έχει λύση και μάλιστα είναι μοναδική διότι εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ της εξίσωσης (1.0.113), τότε:

$$u_1 = (\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})(u_1) \text{ και } u_2 = (\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})(u_2)$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 + \lambda\mathrm{T}(u_1-u_2) &= 0 \\ \Rightarrow \langle u_1-u_2, u_1-u_2+\lambda\mathrm{T}(u_1-u_2)\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \|u_1-u_2\|^2 + \langle u_1-u_2, \lambda\mathrm{T}(u_1-u_2)\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \|u_1-u_2\|^2 = -\langle u_1-u_2, \lambda\mathrm{T}(u_1-u_2)\rangle. \tag{1.0.116}$$

Αλλά,

$$\|u_1-u_2\|^2 \geq 0$$

και λόγω μονοτονίας του T έχουμε:

$$\langle u_1-u_2, \lambda\mathrm{T}(u_1-u_2)\rangle \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η σχέση (1.0.116) πρέπει:

$$\|u_1-u_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2.$$

Επομένως, η εξίσωση (1.0.113) έχει μία και μοναδική λύση. Άρα, ο τελεστής $(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})$ είναι $1-1$ και επί, άρα αντιστρέφεται. Έτσι, έχουμε δείξει ότι για $\lambda_0 = 1$ και για $\lambda > \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} = \lambda_0'$ το Θεώρημα ισχύει. Επομένως, και για $\lambda_0'' = \frac{1}{2}+\varepsilon$, με $\varepsilon > 0$ ισχύει και για κάθε $\lambda > \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon}{2}$ επίσης ισχύει. Έτσι, το Θεώρημα ισχύει για κάθε $\lambda > 0$, δηλαδή για κάθε $\lambda > 0$ υπάρχει ο τελεστής $(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{H}$ ο οποίος είναι φραγμένος με $\|(\mathrm{I}+\lambda\mathrm{T})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ και συνεχής.

(3) Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι κλειστός τελεστής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το γράφημα του T, το $\mathcal{G}r(\mathrm{T}) = \{(x, \mathrm{T}(x)) : x \in \mathcal{D}(\mathrm{T})\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Έστω $((x_n, \mathrm{T}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{G}r(\mathrm{T})$ που συγκλίνει στο στοιχείο $(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Θα αποδείξουμε ότι $(x,y) \in \mathcal{G}r(\mathrm{T})$ δηλαδή $x \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ και $y = \mathrm{T}(x)$. Πράγματι, εφ' όσον $(x_n, \mathrm{T}(x_n) \to (x,y)$ έπεται ότι:

$$x_n \to x \text{ και } \mathrm{T}(x_n) \to y.$$

Άρα και

$$x_n + \mathrm{T}(x_n) \to x + y \Rightarrow (\mathrm{I}+\mathrm{T})(x_n) \to x+y. \tag{1.0.117}$$

Επειδή όμως από το (2) του Θεωρήματος έπεται ότι ο τελεστής $(\mathrm{I}+\mathrm{T})^{-1}$ υπάρχει, είναι συνεχής και γραμμικός. Άρα, από τη σχέση (1.0.117) συμπεραίνουμε ότι:

$$x_n \to (\mathrm{I}+\mathrm{T})^{-1}(x+y).$$

Αλλά $x_n \to x$ άρα από τα παραπάνω έπεται ότι

$$x = (\mathrm{I}+\mathrm{T})^{-1}(x+y)$$

άρα, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ και

$$x+y = (\mathrm{I}+\mathrm{T})(x) \Leftrightarrow x+y = x+\mathrm{T}(x) \Leftrightarrow y = \mathrm{T}(x).$$

Επομένως, ο τελεστής T είναι κλειστός.

□

Πάνω σ' αυτό το Θεώρημα βασίζεται η απόδειξη ενός Θεμελιώδους Θεωρήματος της Μη Γραμμικής Ανάλυσης γνωστό ως Θεώρημα Hille-Yosida το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3. *Έστω T ένας μεγιστικά μονότονος τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε, για κάθε $u_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ υπάρχει μία συνάρτηση*

$$u \in \mathcal{C}^1([0,\infty),\mathcal{H}) \bigcap \mathcal{C}([0,\infty),\mathcal{D}(\mathrm{T}))$$

μοναδική τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \mathrm{T}(u) &= 0 \text{ στο } [0,\infty) \\ u &= u_0. \end{aligned}$$

Επί πλέον, ισχύουν:

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ και } |\frac{du}{dt}(t) = |\mathrm{T}(u(t))| \leq |\mathrm{T}(u_0)|, \ \forall\, t \geq 0.$$

Βιβλιογραφία

[1] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Αθήνα 1997.

[2] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Αθήνα 1991.

[3] H. Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα 1997.

[4] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973, Cours de 3e cycle sur les équations d' evolution non lineaires.

[5] E. Zeidler, *Nonlinear Fuunctinal Analysis and its Applications II/B, Nonlinear Monotone Operators*, Springer- Verlag, 1990.

[6] D. H. Griffel, *Applied Functional Analysis*, Dover Publications, INC. Mineola, New York.

[7] M. Ruzicka, *Nichlineare Funktionalanalysis* , Springer 2003.

[8] L. Tartar, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer 2007.

[9] B. Reddy, *Introductory Functional Analysis*, Springer 1998.

[10] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[11] A. W. Naylor, G. R. Sell, *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.

[12] L. Debnath, P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Academic Press, 1999.