

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**«ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL»**

Διπλωματική εργασία του  
Κασιουλή Νικόλα

Επιβλέπων: Αναπληρωτής Καθηγητής Γκιντίδης Δρόσος

ΑΘΗΝΑ ΟΚΤΩΒΡΗΣ 2014

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη των ειδικών συναρτήσεων Bessel καθώς και των ιδιοτήτων τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους καθώς και η εύρεση της λύσης της στις περιπτώσεις αρνητικής και μη αρνητικής τάξης, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται οι συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel (και οι αποδείξεις τους): οι αναγωγικοί και ασυμπτωτικοί τύποι, οι ρίζες των συναρτήσεων Bessel, η παραμετρική μορφή τους, η ορθογωνιότητα τους και οι σειρές Fourier-Bessel.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται η εφαρμογή των συναρτήσεων Bessel στο φυσικό πρόβλημα της ταλάντωσης κυκλικής μεμβράνης.

## **Abstract**

The purpose of this dissertation it's the study of Bessel functions and also their properties.

The first Chapter presents the Bessel functions of the first kind and its solutions whether we have negative or non-negative class, and the second chapter presents the Bessel function of the second kind.

The third chapter presents the properties of Bessel functions (also the prove of those properties): the reduction and asymptotic formula, Bessel functions roots, Bessel parametric form, the orthogonality property and the Fourier-Bessel series.

The fourth chapter presents the Bessel function application in physics problem of the vibrations of a circular membrane.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ειδικές συναρτήσεις είναι πλέον καθιερωμένες όχι μόνο στον μαθηματικό τομέα (μαθηματική ανάλυση) αλλά και στην φυσική, στον τομέα των υπολογιστών και σε πολλούς άλλους τομείς.

Οι ειδικές συναρτήσεις όμως δεν είχαν τόσες πολλές εφαρμογές όταν πρωτοεμφανίστηκαν, και απασχολούσαν περισσότερο τον μαθηματικό κλάδο. Οι πρώτες ειδικές συναρτήσεις διατυπώθηκαν στις αρχές του 1700, και πιο συγκεκριμένα ήταν το 1720 όταν ο Euler διατύπωσε την συνάρτηση  $\Gamma$ , την συνάρτηση  $Z$  και τις συναρτήσεις Bessel (για την έρευνα κυκλικών τυμπάνων). Στα επόμενα χρόνια και έως το τέλος του 1700 υπήρξαν πολλές νέες ειδικές συναρτήσεις με βασικότερες τις συναρτήσεις Legendre 1780, (γνωστές για αρκετό καιρό σαν συναρτήσεις Laplace).

Στις αρχές του 1800, διατυπώθηκαν τα ορθογώνια πολυώνυμα (Hermite, Laguerre, κλπ), οι περιοδικές συναρτήσεις (1820), και αρκετές άλλες ειδικές συναρτήσεις. Η εμφάνιση όλων και περισσότερων ειδικών συναρτήσεων ώθησαν τον Gauss στην προσπάθεια του να ενοποιήσει τις ειδικές συναρτήσεις, και μελέτησε τις υπεργεωμετρικές συναρτήσεις και παρατήρησε πολλές ομοιότητες με τις ειδικές συναρτήσεις. Μετά από αρκετά χρόνια όμως οι ειδικές συναρτήσεις φαίνονταν όλο και πιο δύσχρηστες και μη εφαρμόσιμες στον καθαρό μαθηματικό κλάδο, ενώ απ' την άλλη η μελέτη και οι εφαρμογές των ειδικών συναρτήσεων στην φυσική, και πιο συγκεκριμένα στην μηχανική, είχαν αποκτήσει πλέον σημαντικό ρόλο (τα περισσότερα προβλήματα της κβαντικής μηχανικής, ακόμα και τα πιο βασικά, περιείχαν ειδικές συναρτήσεις).

Με την είσοδο του 20<sup>ου</sup> αιώνα το ενδιαφέρον και οι εφαρμογές των ειδικών συναρτήσεων ήταν πλέον εμφανές. Παράδειγμα προγραμμάτων και έργων που εφάρμοσαν ειδικές συναρτήσεις ήταν το WPA, το Manhattan, H-bomb κλπ. Πλέον οι ειδικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνταν από όλο τον επιστημονικό κλάδο και από το 1960 εφαρμόζονταν και από τον κλάδο των υπολογιστών (αριθμητικούς αλγόριθμους κλπ).

Οι ειδικές συναρτήσεις περιέχουν φυσικά βασικές συναρτήσεις, εκθετικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές και τις αντίστροφές τους, λογαριθμικές κλπ, και εμφανίζονται σαν λύσεις διαφορικών εξισώσεων ή ολοκληρωμάτων βασικών συναρτήσεων.

Παραδείγματα ειδικών συναρτήσεων :

**Συνάρτηση  $\Gamma$ :**

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n > 0$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

**Συνάρτηση Β (ολοκλήρωμα Euler 1<sup>ου</sup> είδους):**

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y > 0$$

**Συναρτήσεις Bessel  $J_p(x), Y_p(x)$  (ΚΕΦ 1-2)**

**Συναρτήσεις Hankel  $H_p(x)$ :**

1<sup>ου</sup> είδους:

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iY_p(x),$$

2<sup>ου</sup> είδους:

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iY_p(x)$$

**Συνάρτηση Legendre  $P_l^m(x)$ :**

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_l(x)$$

$$P_l^m(x) = \frac{(l+m)!}{l! \pi} (-1)^{\frac{m}{2}} \int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^l \cos^m \varphi d\varphi$$

Όπου  $P_l(x)$  το πολυώνυμο Legendre.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. Συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους .....</b>	<b>7</b>
1.1 Εύρεση γενικής λύσης της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους μη αρνητικής τάξης ( $p \geq 0$ ) .....	7
1.2 Εύρεση γενικής λύσης της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους αρνητικής τάξης ( $p < 0$ ).....	11
<b>2.Συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους και τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel .....</b>	<b>14</b>
2.1 Συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους .....	14
2.2 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel .....	16
<b>3. Ιδιότητες Συναρτήσεων Bessel.....</b>	<b>19</b>
3.1 Αναγωγικοί τύποι .....	19
3.2 Ασυμπτωτικοί τύποι .....	22
3.3 Οι ρίζες των συναρτήσεων Bessel.....	27
3.4 Παραμετρική Μορφή της εξίσωσης Bessel.....	29
3.5 Ορθογωνιότητα συναρτήσεων Bessel.....	30
3.6 Σειρές Fourier-Bessel.....	34
3.7 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων Bessel.....	36
<b>4.Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης .....</b>	<b>38</b>
4.1 Ακτινικές Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης.....	38
4.2 Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης (Γενική Περίπτωση) .....	41
<b>5.ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL.....</b>	<b>48</b>
5.1 Βαριά αλυσίδα .....	49
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>51</b>

# 1. Συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους

Η διαφορική εξίσωση Bessel τάξης  $p$  ( $p$ =σταθερά) είναι η  $2^{\text{η}}$  τάξης διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\chi^2 y'' + \chi y' + (\chi^2 - p^2)y = 0 \quad (1.1)$$

και κάθε μη μηδενική λύση της (1.1) ονομάζεται συνάρτηση Bessel.

Η διαφορική εξίσωση Bessel είναι  $2^{\text{η}}$  τάξης συνήθης διαφορική εξίσωση και έτσι μια γενική λύση της θα είναι της μορφής:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (1.2)$$

όπου  $y_1, y_2$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel και  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές. Άρα για την εύρεση μιας γενικής λύσης της (1.1) αρκεί να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις αυτής.

Για την εύρεση τώρα της γενικής λύσης της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους θα βρούμε πρώτα την γενική λύση της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους μη αρνητικής τάξης και την γενική λύση της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους αρνητικής τάξης.

## 1.1 Εύρεση γενικής λύσης της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους μη αρνητικής τάξης ( $p \geq 0$ ).

Για διευκόλυνση των υπολογισμών θέτουμε:

$$y = \chi^p z \quad (1.3)$$

και αντικαθιστούμε στην (1.1). Εφόσον όμως :

$$y' = p\chi^{p-1}z + \chi^p z', \quad y'' = p(p-1)\chi^{p-2}z + 2p\chi^{p-1}z' + \chi^p z''$$

η συνάρτηση  $z$  θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$z'' + \frac{2p+1}{\chi} z' + z = 0 \quad (1.4)$$

Τώρα πρέπει να βρούμε μια λύση της (1.4) υπό μορφή δυναμοσειρών:

$$z = c_0 + c_1 \chi + c_2 \chi^2 + c_3 \chi^3 \dots + c_n \chi^n + \dots$$

Άρα

$$z' = c_1 + 2c_2\chi + 3c_3\chi^2 + \dots + (n+2)c_{n+2}\chi^{n+1} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{\chi} = \frac{c_1}{\chi} + 2c_2 + 3c_3\chi + \dots + (n+2)c_{n+2}\chi^n + \dots$$

και

$$z'' = 2c_2 + 2 * 3c_3\chi + 3 * 4c_4\chi^2 + \dots + (n+1) * (n+2)c_{n+2}\chi^n + \dots + \dots$$

και αντικαθιστούμε στην (1.4) :

$$[2c_2 + 2 * 3c_3\chi + 3 * 4c_4\chi^2 + \dots + (n+1) * (n+2)c_{n+2}\chi^n + \dots + \dots] +$$

$$[(2p+1) \left[ \frac{c_1}{\chi} + 2c_2 + 3c_3\chi + \dots + (n+2)c_{n+2}\chi^n + \dots \right] +$$

$$[c_0 + c_1\chi + c_2\chi^2 + c_3\chi^3 \dots + c_n\chi^n + \dots] = 0]$$

$$\Rightarrow \frac{2p+1}{\chi}c_1 + [c_0 + (2p+1)2c_2 + 2c_2] + [2 * 3c_3 + (2p+1)3c_3 + c_1]\chi +$$

$$[3 * 4c_4 + (2p+1)4c_4 + c_2]\chi^2 + \dots$$

$$+ [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2p+1)(n+2)c_{n+2} + c_n]\chi^n + \dots = 0$$

Για να υπάρξει λύση οι διάφοροι παράγοντες των δυνάμεων του  $\chi$  πρέπει να ισούνται με 0:

$$c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2m-1} = 0 \quad (1.5)$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2p+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

$$\Rightarrow c_{n+2} = \frac{-c_n}{(n+2)(n+2p+2)} \quad (1.6)$$

Άρα:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2p+2)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2p+4)} = \frac{c_0}{2*4(2p+2)(2p+4)} \quad .$$

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2 * 4 * \dots * 2m(2p+2)(2p+4) \dots (2p+2m)}$$

Επομένως έχουμε την σειρά :

$$z = c_0 + c_2\chi^2 + c_4\chi^4 + \dots = c_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2*4(2p+2)(2p+4)} + \dots \right)$$



$$\Rightarrow z = c_0 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \chi^{2m}}{2^{2m} * 1 * 2 * \dots * m * (p+1)(p+2) \dots (p+m)} \right\} \quad (1.7)$$

Όπου  $c_0$  μία αυθαίρετη σταθερά και  $z$  μία τυπική λύση της (1.4). Ακόμη επειδή οι διαφοροποιήσεις των διάφορων όρων μιας δυναμοσειράς βρίσκονται πάντα μέσα στο διάστημα σύγκλισης, η  $z$  είναι η λύση της (1.4).

Έτσι η συνάρτηση:

$$y = \chi^p z = c_0 \chi^p \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \chi^{2m}}{2^{2m} * 1 * 2 * \dots * m * (p+1)(p+2) \dots (p+m)} \right\}$$

όπου  $c_0$  λύση της (1.1) και ορίζεται:

$$c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \quad (1.8)$$

όπου  $\Gamma$  η συνάρτηση Γάμμα, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  για κάθε  $p$
- $\Gamma(p+1) = p!$  για  $p > 0$

Εφόσον η  $c_0$  ορίζεται από την (1.8) τότε η σειρά (1.7) μας δίνει την συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης  $p$  και συμβολίζεται με  $J_p(\chi)$ :

$$\begin{aligned} J_p(\chi) &= \frac{\chi^p}{2^p \Gamma(p+1)} \left[ 1 - \frac{\chi^2}{2(2p+2)} + \frac{\chi^4}{2*4(2p+2)(2p+4)} + \dots \right] \\ &= \left\{ \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{p+2m}}{1 * 2 * \dots * m * (p+1)(p+2) \dots (p+m) \Gamma(p+1)} \right\} \end{aligned}$$

Όμως :

$$1 * 2 * \dots * m = m! = \Gamma(p+1) \quad (3^{\text{η}} \text{ ιδιότητα της } \Gamma\text{-συνάρτησης})$$

και:

$$\begin{aligned} (p+1)(p+2) \dots (p+m) \Gamma(p+1) &= (p+2)(p+3) \dots (p+m) \Gamma(p+2) = \\ &= (p+3)(p+4) \dots (p+m) \Gamma(p+3) = \\ &= (p+m) \Gamma(p+m) = \\ &= \Gamma(p+m+1) \end{aligned}$$

Άρα:

$$J_p(\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)} \quad (1.9)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου  $p = 0$  έχουμε:

$$J_0(\chi) = \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)} = 1 - \frac{\chi^2}{2^2\Gamma(1+1)} + \frac{\chi^4}{4^2\Gamma(2+1)} - \dots$$

όμως  $\Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$  και  $\Gamma(2+1) = 2^2 \Rightarrow$

$$J_0(\chi) = 1 - \frac{\chi^2}{2^2} + \frac{\chi^4}{2^2 4^2} - \frac{\chi^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \quad (1.10)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου  $p = 1$  έχουμε:

$$J_1(\chi) = \frac{\chi}{2} \left[ 1 - \frac{\chi^2}{2 * 4} + \frac{\chi^4}{2 * 4 * 4 * 6} - \frac{\chi^6}{2 * 4 * 6 * 4 * 6 * 8} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow J_1(\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m+1}}{m!(1+m)!}$$

Γενικά για  $p \geq 0$ :

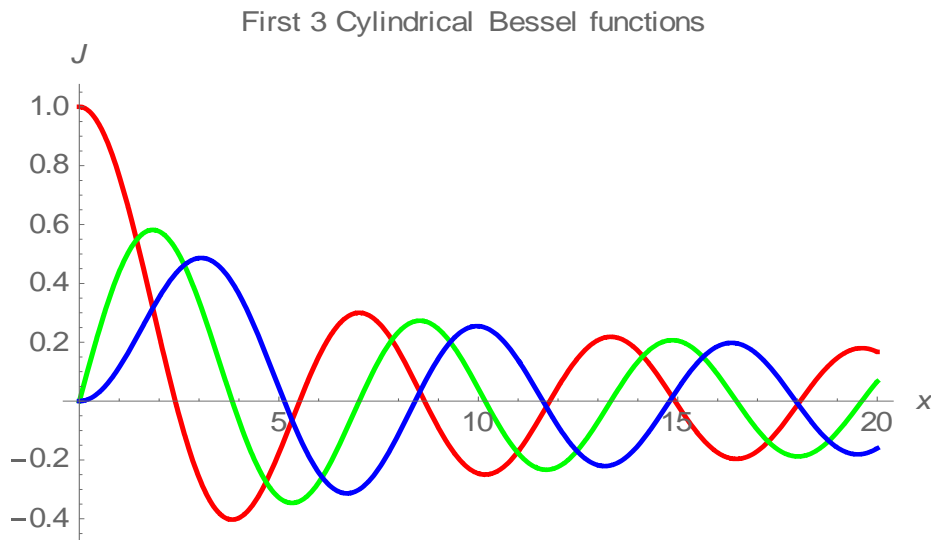
$$J_p(\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{p+2m}}{m!(p+m)!} \quad (1.11)$$

Από (1.10) και (1.11):

αν  $p = 0$  ή  $p$  άρτιος ακέραιος τότε η  $J_p(\chi)$  είναι άρτια συνάρτηση

αν  $p$  περιττός ακέραιος τότε η  $J_p(\chi)$  είναι περιττή συνάρτηση

Γραφική παράσταση των  $J_0(\chi), J_1(\chi), J_2(\chi)$ :



**ΓΡΑΦΗΜΑ 1:**  $J_0(x), J_1(x), J_2(x)$

Υπολογισμός με MATHEMATICA:

```
Plot[{BesselJ[0, x], BesselJ[1, x], BesselJ[2, x]}, {x, 0, 20}, PlotStyle
→ {{Thick, Red}, {Thick, Green}, {Thick, Blue}}, LabelStyle
→ Medium, AxesLabel-> {x, J}, PlotLabel
→ "First 3 Cylindrical Bessel functions"]
```

## 1.2 Εύρεση γενικής λύσης της εξίσωσης Bessel πρώτου είδους αρνητικής τάξης ( $p < 0$ ).

Αντικαθιστούμε το  $p$  με  $-p$  στην (1.9) :

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-p+m+1)} \quad (1.12)$$

Όμως για ακέραιο  $p$  και για  $m = 0, 1, \dots, p-1$  η ποσότητα  $(-p+m+1)$  παίρνει τιμές  $\leq 0$ , οπότε η συνάρτηση  $\Gamma(-p+m+1)$  τείνει προς το άπειρο για τις τιμές του  $m$ , και οι αντίστοιχοι όροι της σειράς (1.12) θα ισούνται με 0.

Οπότε για ακέραιο  $p$ :

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-p+m+1)}$$

και θέτοντας  $m = p + k$  :

$$J_{-p}(\chi) = (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\chi}{2}\right)^{p+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} = (-1)^p J_p(\chi) \quad (1.13)$$

Έτσι από τις εξισώσεις (1.9) και (1.12):

$$J_p(\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}$$

όπου  $p$  μπορεί να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές

### Γενική Λύση της εξίσωσης Bessel:

Υποθέτοντας ότι ο  $p > 0$  δεν είναι ακέραιος, άρα  $J_p(\chi)$  και  $J_{-p}(\chi)$  γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η γενική λύση της εξίσωσης Bessel είναι:

$$y = c_1 J_p(\chi) + c_2 J_{-p}(\chi) \quad (1.14)$$

Αν  $p \geq 0$  ακέραιος, τότε από την (1.13) οι συναρτήσεις  $J_p(\chi)$  και  $J_{-p}(\chi)$  είναι γραμμικά εξαρτημένες, δίνοντας μας διαφορετική λύση η οποία ονομάζεται συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους (συμβολισμός  $Y_p(\chi)$ ):

$$y = c_1 J_p(\chi) + c_2 Y_p(\chi)$$

### Ειδική περίπτωση συνάρτησης Bessel πρώτου είδους με $p = n + \frac{1}{2}$ όπου $n=1,2,\dots$ :

Για  $p = \frac{1}{2}$  και από την εξίσωση

$$J_p(\chi) = \frac{\chi^p}{2^p \Gamma(p+1)} \left[ 1 - \frac{\chi^2}{2(2p+2)} + \frac{\chi^4}{2*4(2p+2)(2p+4)} + \dots \right] \text{ έχουμε}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(\chi) = \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \left[ 1 - \frac{\chi^2}{2*3} + \frac{\chi^4}{2*4*3*5} - \frac{\chi^6}{2*4*6*3*5*7} + \dots \right] \text{ πολλαπλασιάζουμε με } \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \left[ \chi - \frac{\chi^3}{3!} + \frac{\chi^5}{5!} - \frac{\chi^7}{7!} + \dots \right] = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \sin \chi$$

Υπολογισμός του  $\Gamma(\frac{3}{2})$ :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(\text{αντικατάσταση } \chi = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\chi} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}d\chi)$$

Άρα

$$J_{\frac{1}{2}}(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin \chi \quad (1.15)$$

Παρόμοια

$$J_{-\frac{1}{2}}(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \cos \chi$$

Με τη χρήση του αναγωγικού τύπου  $J_{p-1}(\chi) + J_{p+1}(\chi) = \frac{2p}{\chi} J_p(\chi)$  (Κεφ. Α3) μπορούμε να υπολογίζουμε οποιοδήποτε  $p = n + \frac{1}{2}$ .

Παράδειγμα  $p = \frac{1}{2}$ :

$$J_{-\frac{1}{2}}(\chi) + J_{\frac{3}{2}}(\chi) = \frac{1}{\chi} J_{\frac{1}{2}}(\chi) \Rightarrow J_{\frac{3}{2}}(\chi) = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin \chi - \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin \chi$$

## 2.Συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους και τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel

### 2.1 Συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους

Για κλασματικό  $p$ , η συνάρτηση Bessel 2<sup>ου</sup> είδους δίνεται από την σχέση (1.14) με συγκεκριμένες τιμές των σταθερών  $c_1, c_2$ .

Π.χ. αν θέσουμε:

$$Y_p(\chi) = J_p(\chi) \frac{\cos p\pi}{\sin p\pi} - J_{-p}(\chi) \frac{1}{\sin p\pi} = \frac{J_p(\chi) \cos p\pi - J_{-p}(\chi)}{\sin p\pi} \quad (2.1)$$

Για ακέραιο  $p$  η (2.1) δεν ορίζεται αφού μηδενίζεται ο αριθμητής και ο παρονομαστής. Με χρήση L'Hospital έχουμε:

$$\begin{aligned} Y_n(\chi) &= \lim_{p \rightarrow n} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)[J_p(\chi) \cos p\pi - J_{-p}(\chi)]}{\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) \sin p\pi} = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\cos p\pi \left[\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)J_p(\chi)\right] - J_p(\chi)\pi \sin p\pi - \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)J_{-p}(\chi)}{\pi \cos p\pi} \\ &= \left[ \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)J_p(\chi) * (-1)^n - \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)J_{-p}(\chi)}{\pi(-1)^n} \right]_{p=n} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση της πιο πάνω εξίσωσης με τις σειρές (1.9) και (1.12), διαφοροποιώντας ως προς  $p$ , και εξισώνοντας τον αυθαίρετο δείκτη  $p$  ίσο με τον ακέραιο δείκτη  $n$  έχουμε:

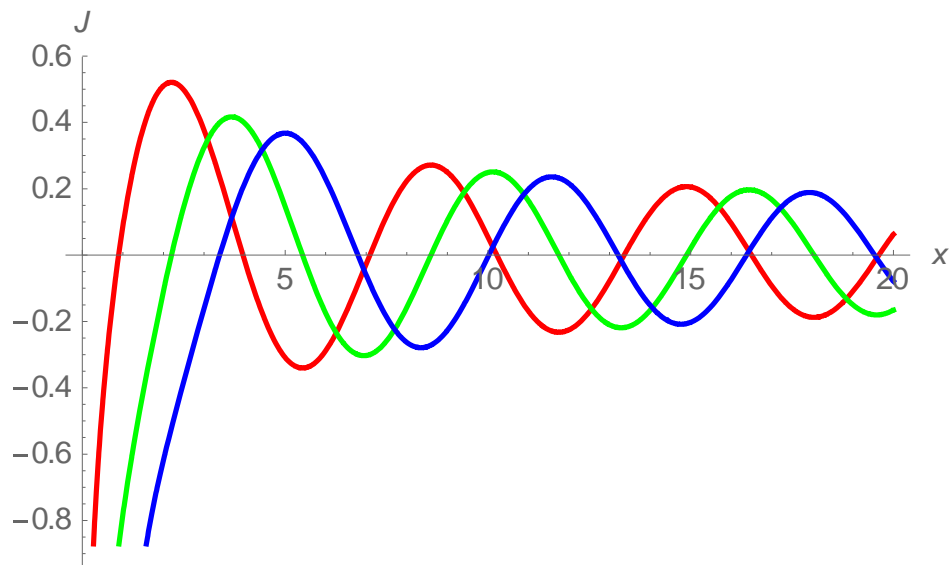
$$\begin{aligned} Y_n(\chi) &= \frac{2}{\pi} J_n(\chi) \left( \ln \frac{\chi}{2} + c \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{-n+2m} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\chi}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \left( \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

όπου  $c = 0.577215664901532 \dots$  η σταθερά Euler's.

Τώρα εάν  $n = 0$  έχουμε:

$$Y_0(\chi) = \frac{2}{\pi} J_0(\chi) \left( \ln \frac{\chi}{2} + c \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m} * \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Η  $Y_n(\chi)$  είναι λύση της (1.1) (αντικατάσταση της  $Y_n(\chi)$  στην (1.1) με  $p = n$ , και  $J_n(\chi)$  και  $Y_n(\chi)$  γραμμικά ανεξάρτητες εφόσον για  $x = 0$  η  $J_n(\chi)$  έχει πεπερασμένη τιμή ενώ η  $Y_n(\chi)$  τείνει στο άπειρο).



**ΓΡΑΦΙΚΗ 2:  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$**

Υπολογισμός με MATHEMATICA:

```
Plot[{BesselY[0, x], BesselY[1, x], BesselY[2, x]}, {x, 0, 20}, PlotStyle ->
{{Thick, Red}, {Thick, Green}, {Thick, Blue}}, LabelStyle -> Medium, AxesLabel -> {x, J}
```

## 2.2 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel

Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel ονομάζονται οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bessel :

$$\chi^2 y'' + \chi y' - (\chi^2 + p^2)y = 0 \quad p \geq 0$$

Και έχουν γενική λύση :

$$y = c_1 I_p(\chi) + c_2 I_{-p}(\chi) \quad p \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$y = c_1 I_p(\chi) + c_2 K_p(\chi) \quad \text{για κάθε } p$$

$$y = c_1 I_p(\chi) + c_2 I_p(\chi) \int \frac{d\chi}{\chi I_p^2(\chi)} \quad \text{για κάθε } p$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες σταθερές και  $I_p(\chi)$  και  $K_p(\chi)$  οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> είδους αντίστοιχα. Αναλυτικότερα έχουμε :

$$\begin{aligned} I_p(\chi) &= i^{-p} J_p(i\chi) = e^{\frac{-p\pi i}{2}} J_p(i\chi) \\ &= \frac{\chi^p}{2^p \Gamma(p+1)} \left( 1 + \frac{\chi^2}{2(2p+2)} + \frac{\chi^4}{2 * 4(2p+2)(2p+4)} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^{(p+2n)}}{n! \Gamma(p+n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{-p}(\chi) &= i^p J_{-p}(i\chi) = e^{\frac{p\pi i}{2}} J_{-p}(i\chi) \\ &= \frac{\chi^{-p}}{2^{-p} \Gamma(1-p)} \left( 1 + \frac{\chi^2}{2(2-2p)} + \frac{\chi^4}{2 * 4(2-2p)(4-2p)} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^{(2n-p)}}{n! \Gamma(n+1-p)} \end{aligned}$$

(για  $p = 0, 1, 2, \dots$  έχουμε  $I_{-p}(\chi) = I_p(\chi)$ , ενώ για  $p \neq 0, 1, 2, \dots$  οι  $I_p(\chi)$  και  $I_{-p}(\chi)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες)

$$K_p(\chi) = \frac{\pi(I_{-p}(\chi) - I_p(\chi))}{2 \sin(p\pi)} \quad \text{για } p = 0, 1, 2, \dots$$

$$K_p(\chi) = \lim_{\nu \rightarrow p} \frac{\pi(I_{-\nu}(\chi) - I_{\nu}(\chi))}{2 \sin(\nu\pi)}$$



$$\xrightarrow{L' Hospital} (-1)^{p+1} \left( \ln \frac{\chi}{2} + \gamma \right) I_p(\chi) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n (p-k-1)! \left( \frac{\chi}{2} \right)^{2n-p} \\ + \frac{(-1)^p}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\chi}{2} \right)^{p+2n}}{n! (p+n)} (\Phi(n) + \Phi(p+n))$$

όπου  $\gamma$  η σταθερά Euler, και  $\nu_0 = 0, \nu_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  για  $n = 1, 2, \dots$

Οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> είδους ικανοποιούν τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις :

$$\frac{d}{d\chi} (\chi^p I_p(\chi)) = \chi^p I_{p-1}(\chi)$$

$$\frac{d}{d\chi} (\chi^{-p} I_p(\chi)) = \chi^{-p} I_{p+1}(\chi)$$

$$I'_p(\chi) = I_{p-1}(\chi) - \frac{p}{\chi} I_p(\chi)$$

$$I'_p(\chi) = \frac{p}{\chi} I_p(\chi) + I_{p+1}(\chi)$$

και με πρόσθεση των τελευταίων δυο εξισώσεων παίρνουμε :

$$I'_p(\chi) = \frac{1}{2} (I_{p-1}(\chi) + I_{p+1}(\chi))$$

ενώ με αφαίρεση των τελευταίων δυο εξισώσεων παίρνουμε :

$$I_{p-1}(\chi) - I_{p+1}(\chi) = \frac{2p}{\chi} I_p(\chi)$$

$$\frac{d}{d\chi} (\chi^p K_p(\chi)) = -\chi^p K_{p-1}(\chi)$$

$$\frac{d}{d\chi} (\chi^{-p} K_p(\chi)) = -\chi^{-p} K_{p+1}(\chi)$$

$$K'_p(\chi) = -K_{p-1}(\chi) - \frac{p}{\chi} K_p(\chi)$$

$$K'_p(\chi) = \frac{p}{\chi} K_p(\chi) - K_{p+1}(\chi)$$

και με πρόσθεση των τελευταίων δυο εξισώσεων παίρνουμε :

$$K'_p(\chi) = -\frac{1}{2}(-K_{p-1}(\chi) + K_{p+1}(\chi))$$

ενώ με αφαίρεση των τελευταίων δυο εξισώσεων παίρνουμε :

$$K_{p-1}(\chi) - K_{p+1}(\chi) = -\frac{2p}{\chi}K_p(\chi)$$

## 3. Ιδιότητες Συναρτήσεων Bessel

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις βασικότερες ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel και στις αποδείξεις τους :

- Αναγωγικοί τύποι
- Ασυμπτωτικοί τύποι
- Ρίζες των συναρτήσεων Bessel
- Παραμετρική μορφή
- Ορθογωνιότητα
- Σειρές Fourier-Bessel
- Ολοκληρωτικές Αναπαραστάσεις

### 3.1 Αναγωγικοί τύποι

Για κάθε  $p$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^p J_p(\chi)] = \chi^p J_{p-1}(\chi) \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^{-p} J_p(\chi)] = -\chi^{-p} J_{p+1}(\chi) \quad (3.1.2)$$

Για κλασματικό  $p$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^p Y_p(\chi)] = \chi^p Y_{p-1}(\chi) \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^{-p} Y_p(\chi)] = -\chi^{-p} Y_{p+1}(\chi) \quad (3.1.4)$$

Από τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.2) παίρνουμε και τους τύπους:

$$\chi J_p'(\chi) + p J_p(\chi) = \chi J_{p-1}(\chi) \quad (3.1.5)$$

$$\chi J_p'(\chi) - p J_p(\chi) = -\chi J_{p+1}(\chi) \quad (3.1.6)$$

$$J_{p-1}(\chi) - J_{p+1}(\chi) = 2J_p'(\chi) \quad (3.1.7)$$

$$J_{p-1}(\chi) + J_{p+1}(\chi) = \frac{2p}{\chi} J_p(\chi) \quad (3.1.8)$$

### Αποδείξεις:

**(3.1.1)** Από την εξίσωση (1.9) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\chi} [\chi^p J_p(\chi)] &= \frac{d}{d\chi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\chi)^{2p+2m}}{2^{p+2m} \Gamma(m+1) \Gamma(p+m+1)} = \\ &= \frac{d}{d\chi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\chi)^{2p+2m}}{2^{p+2m} \Gamma(m+1) * (p+m) \Gamma(p+m)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\chi)^{2p+2m-1}}{2^{p+2m-1} \Gamma(m+1) * (p+m) \Gamma(p+m)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\chi)^{2p+2m-1}}{2^{p+2m-1} \Gamma(m+1) * (p+m) \Gamma(p+m)} = \chi^p J_{p-1}(\chi)\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η **(3.1.2)**

**(3.1.3)** Αντικαθιστούμε το  $p$  στην (3.1.2) με  $-p$ :

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^p J_{-p}(\chi)] = -\chi^p J_{-p+1}(\chi) \quad (3.1.9)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα την (3.1.1) με  $\frac{\cos p\pi}{\sin p\pi}$  και αφαιρούμε την (3.1.9) \*  $\frac{1}{\sin p\pi}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\chi} \left[ \chi^p \frac{J_p(\chi) \cos p\pi - J_{-p}(\chi)}{\sin p\pi} \right] &= \chi^p \frac{J_{p-1}(\chi) \cos p\pi + J_{-p+1}(\chi)}{\sin p\pi} = \\ &= \chi^p \frac{J_{p-1}(\chi) \cos (p-1)\pi - J_{-p+1}(\chi)}{\sin (p-1)\pi}\end{aligned}$$

Αφού  $\cos(p-1)\pi = -\cos p\pi$  και  $\sin(p-1)\pi = -\sin p\pi$ . Άρα:

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^p Y_p(\chi)] = \chi^p Y_{p-1}(\chi)$$

**(3.1.4)** Αντικαθιστούμε το  $p$  στην (3.1.1) με  $-p$ :

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^{-p} J_{-p}(\chi)] = \chi^{-p} J_{-p-1}(\chi) \quad (3.1.10)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα την (3.1.2) με  $\frac{\cos p\pi}{\sin p\pi}$  και αφαιρούμε την (3.1.10) \*  $\frac{1}{\sin p\pi}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\chi} \left[ \chi^{-p} \frac{J_p(\chi) \cos p\pi - J_{-p}(\chi)}{\sin p\pi} \right] &= \chi^{-p} \frac{-J_{p+1}(\chi) \cos p\pi - J_{-p-1}(\chi)}{\sin p\pi} = \\ &= \chi^{-p} \frac{J_{p+1}(\chi) \cos (p+1)\pi - J_{-p-1}(\chi)}{\sin (p+1)\pi}\end{aligned}$$

Αφού  $\cos(p+1)\pi = -\cos p\pi$  και  $\sin(p+1)\pi = -\sin p\pi$ . Άρα:

$$\frac{d}{d\chi} [\chi Y_p(\chi)] = -\chi^{-p} Y_{p+1}(\chi)$$

**(3.1.5)** Από την (3.1.1) έχουμε:

$$p\chi^{p-1}J_p(\chi) + \chi^p J_p'(\chi) = \chi^p J_{p-1}(\chi)$$

διαιρώντας με  $\chi^{p-1}$  :

$$\chi J_p'(\chi) + pJ_p(\chi) = \chi J_{p-1}(\chi)$$

**(3.1.6)** Από την (3.1.2) έχουμε:

$$-p\chi^{-p-1}J_p(\chi) + \chi^{-p} J_p'(\chi) = -\chi^{-p} J_{p+1}(\chi)$$

διαιρώντας με  $\chi^{-p-1}$  :

$$\chi J_p'(\chi) - pJ_p(\chi) = -\chi J_{p+1}(\chi)$$

**(3.1.7)** Προσθέτοντας την (3.1.5) και την (3.1.6) :

$$2\chi J_p'(\chi) = \chi J_{p-1}(\chi) - \chi J_{p+1}(\chi) \Rightarrow$$

$$J_{p-1}(\chi) - J_{p+1}(\chi) = 2J_p'(\chi)$$

**(3.1.8)** Αφαιρώντας την (3.1.5) και την (3.1.6) :

$$2pJ_p(\chi) = \chi J_{p-1}(\chi) + \chi J_{p+1}(\chi) \Rightarrow$$

$$\frac{2p}{\chi} J_p(\chi) = J_{p-1}(\chi) + J_{p+1}(\chi)$$

### 3.2 Ασυμπτωτικοί τύποι

Τύποι που περιγράφουν την συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel για  $\chi \gg 0$ .

Μετατρέπουμε την (1.1) με την αντικατάσταση

$$y = \frac{z}{\sqrt{\chi}} \quad (3.2.1)$$

Άρα έχουμε:

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)z = 0 \quad (3.2.2)$$

Θέτουμε τώρα :

$$m = \frac{1}{4} - p^2 \text{ και } \frac{m}{x^2} = \rho \quad (3.2.3)$$

Και παίρνουμε:

$$z'' + (1 + \rho)z = 0 \quad (3.2.4)$$

για  $\chi \gg 0$  το  $\rho = \frac{m}{x^2} \rightarrow 0$ . Άρα η λύση της (3.2.4) δεν θα διαφέρει πολύ από την λύση της  $z'' + z = 0$

π.χ.  $z = a \sin(\chi + \omega)$ ,

Με την υπόθεση ότι το  $z$  είναι λύση της (3.2.4) θα υπάρχουν συναρτήσεις  $\alpha = \alpha(\chi)$  και  $\delta = \delta(\chi)$  έτσι ώστε:

$$z = a \sin(\chi + \delta) \quad (3.2.5)$$

όπου  $\alpha$  και  $\delta$  συγκλίνουν σε πεπερασμένα όρια όταν το  $\chi \rightarrow \infty$ .

Για την **απόδειξη** ύπαρξης των δυο αυτών συναρτήσεων θεωρούμε την εξίσωση

$$z' = \alpha \cos(\chi + \delta) \quad (3.2.6)$$

και την (3.2.5) και αντικαταστούμε στην (3.2.4) την (3.2.5) και την (3.2.6) με άγνωστα το  $\alpha$  και  $\delta$ :

$$z'' = -(1 + \rho)a \sin(\chi + \delta)$$

και από την (3β.6):

$$z'' = a' \cos(\chi + \delta) - a(1 + \delta') \sin(\chi + \delta)$$

εξισώνοντας τώρα τις πιο πάνω εξισώσεις:

$$-(1 + \rho)a \sin(\chi + \delta) = a' \cos(\chi + \delta) - a(1 + \delta') \sin(\chi + \delta) \Rightarrow$$

$$\sin(\chi + \delta) [a(1 + \delta') - a(1 + \rho)] = a' \cos(\chi + \delta) \Rightarrow$$

$$\tan(\chi + \delta) = \frac{a'}{a(\delta' - \rho)} \quad (3.2.7)$$

Ακόμη η παράγωγος της (3.2.5) :

$$z' = a' \sin(\chi + \delta) + a(1 + \delta') \cos(\chi + \delta)$$

και εξισώνοντας με την (3.2.6) έχουμε :

$$a \cos(\chi + \delta) = a' \sin(\chi + \delta) + a(1 + \delta') \cos(\chi + \delta) \Rightarrow$$

$$a' \sin(\chi + \delta) = \cos(\chi + \delta) [a - a - a\delta'] \Rightarrow$$

$$\tan(\chi + \delta) = -\frac{a\delta'}{a'} \quad (3.2.8)$$

πολλαπλασιάζοντας την (3.2.7) με την (3.2.8) έχουμε:

$$\tan^2(\chi + \delta) = -\frac{\delta'}{\delta' - \rho} \text{ και}$$

$$\delta' = \rho \sin^2(\chi + \delta) \quad (3.2.9)$$

Άρα από την (3.2.8) ισχύει:

$$\frac{a'}{a} = -\frac{\delta'}{\tan(\chi + \delta)} = -\rho \sin(\chi + \delta) \cos(\chi + \delta) \quad (3.2.10)$$

Οι συναρτήσεις  $\delta$  και  $\alpha$  τις παίρνουμε από τις εξισώσεις (3.2.9) και (3.2.10) αντίστοιχα ενώ τις αρχικές συνθήκες από τις εξισώσεις (3.2.5) και (3.2.6).

### Ανάλυση της ασύμπτωτης συμπεριφοράς των $\alpha$ και $\delta$ :

Εφόσον

$$\delta(\chi) = \delta(b) - m \int_x^b d'(t) dt$$

έχουμε τότε από τις εξισώσεις (3.2.3) και (3.2.9) ότι:

$$\delta(\chi) = \delta(b) - m \int_x^b \frac{\sin^2(t + d)}{t^2} dt$$

Για  $b \rightarrow \infty$  το ολοκλήρωμα συγκλίνει αφού δεν μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του  $\frac{1}{t^2}$ , και άρα υπάρχει το όριο  $\delta(b)$  με  $b \rightarrow \infty$ .

Θέτοντας

$\lim_{b \rightarrow \infty} \delta(b) = \omega$  τότε:

$$\delta(\chi) = \omega - m \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin^2(t+d)}{t^2} dt \quad (3.2.11)$$

Όμως το ολοκλήρωμα

$$0 < \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin^2(t+d)}{t^2} dt < \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_{t=\chi}^{t=\infty} = \frac{1}{\chi}$$

Άρα

$$0 < m\chi \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin^2(t+d)}{t^2} dt < m$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε την (3.2.11) σε μορφή:

$$\delta(\chi) = \omega + \frac{\eta(\chi)}{\chi} \quad (3.2.12)$$

$$\text{όπου } \eta(\chi) = -m\chi \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin^2(t+d)}{t^2} dt$$

Επίσης

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = (\ln \alpha)' \text{ οπότε } \ln \alpha(\chi) = \ln \alpha(b) - \int_{\chi}^{\infty} \frac{\alpha'(\chi)}{\alpha(\chi)} dt \text{ η από (3.2.10)}$$

$$\ln \alpha(\chi) = \ln \alpha(b) + m \int_{\chi}^b \frac{\sin(t+\delta) \cos(t+\delta)}{t^2} dt$$

Παρομοίως με πριν για  $b \rightarrow \infty$  υπάρχει όριο για το  $\ln \alpha(b)$  και άρα για το  $\alpha(b)$ .

Θέτουμε  $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha(b) = A$  με  $A \neq 0$  οπότε:

$$\ln \alpha(\chi) = \ln A + m \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin(t+\delta) \cos(t+\delta)}{t^2} dt$$

Άρα

$$\ln \alpha(\chi) = \ln A + \frac{\varphi(\chi)}{\chi}$$

$$\text{όπου } \varphi(\chi) = m\chi \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin(t+\delta) \cos(t+\delta)}{t^2} dt$$

$$\Rightarrow \alpha(\chi) = A \exp\left[\frac{\varphi(\chi)}{\chi}\right]$$

Όμως από το θεώρημα Taylor για κάθε  $t$  έχουμε



$e^t = 1 + te^{\theta t}$  ( $0 < \theta < 1$ ) και με την αντικατάσταση  $t = \frac{\varphi(\chi)}{\chi}$  παίρνουμε :

$$\exp\left[\frac{\varphi(\chi)}{\chi}\right] = 1 + \frac{\varphi(\chi)}{\chi} \exp\left[\frac{\theta\varphi(\chi)}{\chi}\right] = 1 + \frac{\xi(\chi)}{\chi}$$

$$\text{όπου } \xi(\chi) = \varphi(\chi) \exp\left[\frac{\theta\varphi(\chi)}{\chi}\right]$$

Άρα

$$\alpha(\chi) = A\left(1 + \frac{\xi(\chi)}{\chi}\right) \quad (3.2.13)$$

Οι τύποι (3.2.12) και (3.2.13) δείχνουν την συμπεριφορά των συναρτήσεων  $\alpha$  και  $\delta$  όταν  $\chi \rightarrow \infty$  καθώς και την συμπεριφορά της λύσης  $z$  της εξίσωσης (3.2.4). Με αντικατάσταση τώρα των (3.2.12) και (3.2.13) στην (3.2.5) έχουμε:

$$z = A\left(1 + \frac{\xi(\chi)}{\chi}\right) \sin\left(\chi + \omega + \frac{\theta\eta(\chi)}{\chi}\right) \quad (3.2.14)$$

Και από θεώρημα Taylor γνωρίζουμε πως

$$\sin(\alpha + t) = \sin \alpha + t \cos(\alpha + \theta t) \quad (0 < \theta < 1)$$

Οπότε με  $\alpha = \chi + \omega$  και  $t = \frac{\eta(\chi)}{\chi}$  το

$$\sin\left(\chi + \omega + \frac{\theta\eta(\chi)}{\chi}\right) = \sin(\chi + \omega) + \frac{\zeta(\chi)}{\chi}$$

$$\text{όπου } \zeta(\chi) = \eta(\chi) \cos\left(\chi + \omega + \frac{\theta\eta(\chi)}{\chi}\right)$$

Άρα:

$$z = A\left(1 + \frac{\xi(\chi)}{\chi}\right) \left(\sin(\chi + \omega) + \frac{\zeta(\chi)}{\chi}\right) \Rightarrow$$

$$z = A \sin(\chi + \omega) + A \frac{\xi(\chi) \sin(\chi + \omega) + \left(1 + \frac{\xi(\chi)}{\chi}\right) \zeta(\chi)}{\chi} \Rightarrow$$

$$z = A \sin(\chi + \omega) + \frac{r(\chi)}{\chi} \quad (3.2.15)$$

ο ασύμπτωτος τύπος για την λύση της (3.2.2)

Στην περίπτωση μας της εξίσωσης Bessel χρησιμοποιούμε την (3.2.1) :

$$y = \frac{A}{\sqrt{\chi}} \sin(\chi + \omega) + \frac{r(\chi)}{\chi\sqrt{\chi}} \quad (3.2.16)$$

όπου  $A = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ , και  $r(\chi)$  φραγμένη για  $\chi \rightarrow \infty$ .

Με τον πιο πάνω τύπο συμπεραίνουμε πως για μεγάλα  $\chi$ , οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης Bessel δεν θα διαφέρει πολύ από την λύση της

$$y = \frac{A}{\sqrt{\chi}} \sin(\chi + \omega)$$

Ακόμη σύμφωνα με τα πιο πάνω παίρνουμε πιο συγκεκριμένους υπολογισμούς των συναρτήσεων Bessel  $J_p(\chi)$  και  $Y_p(\chi)$  :

$$J_p(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \cos\left(\chi - \frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{r_p(\chi)}{\chi\sqrt{\chi}}$$

$$Y_p(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin\left(\chi - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\rho_p(\chi)}{\chi\sqrt{\chi}}$$

(3.2.17)

με τις συναρτήσεις  $r_p(\chi)$  και  $\rho_p(\chi)$  φραγμένες για  $\chi \rightarrow \infty$ .

Εκτός από τον τύπο (3.2.15), είναι χρήσιμο να βρούμε και τον τύπο του  $z'$ . Με αντικατάσταση των (3.2.12) και (3.2.13) με  $\delta$  και  $\alpha$ , στην (3.2.6) έχουμε:

$$z' = A\left(1 + \frac{\xi(\chi)}{\chi}\right) \cos\left(\chi + \omega + \frac{\eta(\chi)}{\chi}\right)$$

Άρα (όπως μετατρέψαμε την (3.2.14) και μετά την (3.2.15))

$$z' = A \cos(\chi + \omega) + \frac{s(\chi)}{\chi} \tag{3.2.18}$$

### 3.3 Οι ρίζες των συναρτήσεων Bessel

Πρόταση 1: Κάθε λύση της εξίσωσης Bessel  $J_p(\chi)$ , έχει αριθμήσιμο πλήθος θετικών ριζών.

Απόδειξη: Από την σχέση (3.2.15) συμπεραίνουμε αμέσως ότι η εξίσωσης Bessel  $J_p(\chi)$  έχει αριθμήσιμο πλήθος θετικών ριζών, και οι ρίζες αυτές δεν διαφέρουν πολύ από τις ρίζες της συνάρτησης  $\sin(\chi + \omega)$ ,

$$K_n = n\pi - \omega$$

όπου  $n$  ακέραιος αριθμός.

Πρόταση 2: Μεταξύ δυο διαδοχικών θετικών ριζών της συνάρτησης  $\chi^{-p}J_p(\chi)$  υπάρχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα της συνάρτησης  $\chi^{-p}J_{p+1}(\chi)$ .

Απόδειξη: Εφόσον οι ρίζες της  $J_p(\chi)$  δεν διαφέρουν πολύ από τις ρίζες της συνάρτησης  $\sin(\chi + \omega)$  θα δείξουμε αρχικά, πως για  $n \gg 0$  υπάρχει μόνο μία ρίζα κοντά σε κάθε  $K_n$ . Από την (3.2.1) και την (3.2.2) οι συναρτήσεις  $y$  και  $z$  έχουν τις ίδιες θετικές ρίζες, οπότε φθάνει αν αποδείξουμε μόνο για την συνάρτηση  $z$ . Αν για  $n \gg 0$ , είχαμε δυο ρίζες της συνάρτησης  $z$  κοντά στο σημείο  $K_n$ , τότε από το θεώρημα Rolle η συνάρτηση  $z'$  έχει ρίζα κοντά στο  $z_n$ . Όμως από την σχέση (3.2.18) αυτό δεν γίνεται, αφού κοντά στο σημείο  $z_n = n\pi - \omega$ , η τιμή του  $z'$  θα είναι κοντά στο  $A \cos n\pi$ . Άρα για  $n \gg 0$ , οι ρίζες της συνάρτησης  $y$  είναι κοντά στους αριθμούς  $K_n$  και υπάρχει μόνο μια ρίζα κοντά στο  $K_n$ . Βλέπουμε ακόμη πως οι ρίζες της συνάρτησης  $y$  πλησιάζουν την τιμή  $\pi$  όσο απομακρυνόμαστε από την αρχή.

Τα πιο πάνω ισχύουν και για τις συναρτήσεις  $J_p(\chi)$  και  $Y_p(\chi)$ , και από την σχέση (3.2.17) οι τιμές του  $K_n$  είναι :

$$K_n = n\pi + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \text{ για την } J_p(\chi),$$

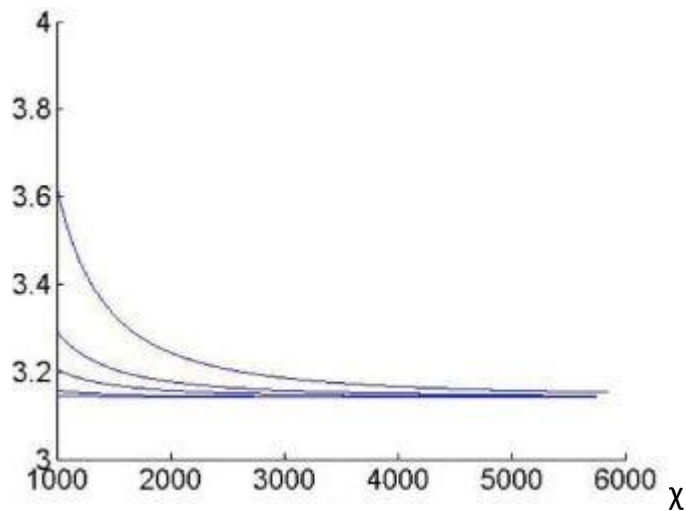
$$K_n = n\pi - \frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ για την } Y_p(\chi).$$

Από την σχέση (3.1.2) και το θεώρημα Rolle αποδεικνύεται ότι υπάρχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα της συνάρτησης  $\chi^{-p}J_{p+1}(\chi)$  μεταξύ δυο διαδοχικών θετικών ριζών της συνάρτησης  $\chi^{-p}J_p(\chi)$ . Για παράδειγμα υπάρχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα της συνάρτησης  $J_{p+1}(\chi)$  μεταξύ δυο διαδοχικών θετικών ριζών της συνάρτησης  $J_p(\chi)$ . Με αντικατάσταση του  $p$  με  $p + 1$  στην (3.1.1) παίρνουμε

$$\frac{d}{d\chi} [\chi^{p+1} J_{p+1}(\chi)] = \chi^{p+1} J_p(\chi)$$

Βλέπουμε από την πιο πάνω σχέση πως υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της συνάρτησης  $J_p(\chi)$  μεταξύ δυο συνεχόμενων ριζών της συνάρτησης  $J_{p+1}(\chi)$ , και οι ρίζες των συναρτήσεων αυτών χωρίζουν η μία την άλλη. Δηλαδή, μία και μόνο μία ρίζα της συνάρτησης  $J_{p+1}(\chi)$  εμφανίζεται μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της  $J_p(\chi)$ , και ακόμη οι  $J_p(\chi)$  και  $J_{p+1}(\chi)$  δεν μπορούν να έχουν τις ίδιες ρίζες.

Όσο αφορά την συνάρτηση  $J'_p(\chi)$ , σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της συνάρτησης  $J'_p(\chi)$ , μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της συνάρτησης  $J_p(\chi)$ . Άρα και η συνάρτηση  $J'_p(\chi)$  έχει αριθμήσιμο πλήθος ριζών.



**ΓΡΑΦΗΜΑ 3: Διαφορά της απόστασης των ριζών της συνάρτησης  $y$  .Πλησιάζουν την τιμή  $\pi$  όσο μεγαλώνει το  $\chi$**

Υπολογισμός με Mathematica:

$$N[\text{BesselZero}[0,1001] - \text{BesselZero}[0,1000]]$$

$$= 3.1415926138211034$$

### 3.4 Παραμετρική Μορφή της εξίσωσης Bessel

Έστω  $y(\chi)$  λύση της εξίσωσης Bessel (1.1). Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση  $y(\lambda\chi)$  και θέτουμε  $\lambda\chi = t$ . Εφόσον

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - p^2)y = 0 \quad (3.4.1)$$

αντικαταστήσουμε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{d\chi}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 y}{d\chi^2}, \quad \lambda\chi = t$$

στην (3.4.1) :

$$\chi^2 \frac{d^2 y}{d\chi^2} + \chi \frac{dy}{d\chi} + (\lambda^2 \chi^2 - p^2)y = 0$$

Έτσι, αν η συνάρτηση  $y(\chi)$  είναι λύση της εξίσωσης Bessel (1.1), η συνάρτηση  $y(\lambda\chi)$  θα είναι λύση της εξίσωσης

$$\chi^2 y'' + \chi y' + (\lambda^2 \chi^2 - p^2)y = 0$$

η οποία λέγεται παραμετρική μορφή της εξίσωσης Bessel, με παράμετρο  $\lambda$ .

### 3.5 Ορθογωνιότητα συναρτήσεων Bessel

Έστω  $\lambda \geq 0$  και  $\mu \geq 0$ , και οι συναρτήσεις  $y = J_p(\lambda\chi)$  και  $z = J_p(\mu\chi)$  με  $p > -1$ . Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\chi^2 y'' + \chi y' + (\lambda^2 \chi^2 - p^2)y = 0$$

$$\chi^2 z'' + \chi z' + (\mu^2 \chi^2 - p^2)z = 0$$

Αφού πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με  $z$  και την δεύτερη εξίσωση με  $y$  τις αφαιρούμε, οπότε:

$$\chi(yz'' - zy'') + (yz' - zy') = (\lambda^2 - \mu^2)\chi yz \Rightarrow$$

$$\chi(yz' - zy')' + (yz' - zy') = (\lambda^2 - \mu^2)\chi yz \Rightarrow$$

$$[\chi(yz' - zy')] = (\lambda^2 - \mu^2)\chi yz \quad (3.5.1)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την πιο πάνω εξίσωση στο διάστημα  $[0,1]$  έχουμε:

$$[\chi(yz' - zy')]_{\chi=0}^{\chi=1} = \int_0^1 (\lambda^2 - \mu^2)\chi yz \quad (3.5.2)$$

ή

$$[\chi(yz' - zy')]_{\chi=1} = \int_0^1 (\lambda^2 - \mu^2)\chi yz \quad (3.5.3)$$

$$\text{αφού } [\chi(yz' - zy')]_{\chi=0} = 0$$

Για  $\chi = 1$  έχουμε :

$$[y]_{\chi=1} = J_p(\lambda) \text{ και } [z]_{\chi=1} = J_p(\mu)$$

$$y' = \frac{d}{d\chi} J_p(\lambda\chi) = \lambda J'_p(\lambda\chi) \text{ και}$$

$$z' = \frac{d}{d\chi} J_p(\mu\chi) = \mu J'_p(\mu\chi)$$

έτσι ώστε:

$$[y']_{\chi=1} = \lambda J'_p(\lambda) \text{ και } [z']_{\chi=1} = \mu J'_p(\mu)$$

Οπότε η (3.5.3) ισούται με :

$$\mu J_p(\lambda) J'_p(\mu) - \lambda J_p(\mu) J'_p(\lambda) = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 \chi J_p(\lambda\chi) J_p(\mu\chi) d\chi \quad (3.5.4)$$

Ισχύουν οι εξής κανόνες:

- Όταν  $\lambda \neq \mu$  ρίζες της συνάρτησης  $J_p(\lambda\chi)$  και  $J_p(\mu\chi)$  αντίστοιχα ισχύει:

$$\int_0^1 \chi J_p(\lambda\chi) J_p(\mu\chi) d\chi = 0 \quad (3.5.5)$$

και οι συναρτήσεις  $J_p(\lambda\chi)$  και  $J_p(\mu\chi)$  ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα  $[0,1]$  ως προς την συνάρτηση βάρους  $r(\chi) = \chi$ .

- Όταν  $\lambda \neq \mu$  ρίζες της συνάρτησης  $J'_p(\chi)$  ισχύει:

$$\int_0^1 \chi J_p(\lambda\chi) J_p(\mu\chi) d\chi = 0$$

- Όταν  $\lambda = \mu$  ρίζες της συνάρτησης  $J_p(\lambda\chi)$  και  $J_p(\mu\chi)$  αντίστοιχα ισχύει:

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\lambda)$$

### Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi$

Όταν  $\lambda \neq \mu$  ισχύει η εξίσωση :

$$\int_0^1 \chi J_p(\lambda\chi) J_p(\mu\chi) d\chi = \frac{\lambda J_p(\mu) J'_p(\lambda) - \mu J_p(\lambda) J'_p(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2}$$

Όμως όταν  $\mu \rightarrow \lambda$  έχουμε

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda J_p(\mu) J'_p(\lambda) - \mu J_p(\lambda) J'_p(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2} = \frac{0}{0}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα L'Hospital και αφήνοντας το  $\lambda$  σταθερό έχουμε:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda J'_p(\mu) J'_p(\lambda) - \mu J_p(\lambda) J''_p(\mu) - J_p(\lambda) J'_p(\mu)}{2\mu} \\ &= \frac{\lambda J'^2_p(\lambda) - \lambda J_p(\lambda) J''_p(\lambda) - J_p(\lambda) J'_p(\lambda)}{2\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \left[ J'^2_p(\lambda) - J_p(\lambda) J''_p(\lambda) - \frac{J_p(\lambda) J'_p(\lambda)}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Όμως η  $J_p(\lambda)$  ικανοποιεί την εξίσωση Bessel

$$\lambda^2 J_p''(\lambda) + \lambda J_p'(\lambda) + (\lambda^2 - p^2)J_p(\lambda) = 0$$

οπότε

$$-J_p(\lambda)J_p''(\lambda) - \frac{J_p(\lambda)J_p'(\lambda)}{\lambda} = \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right)J_p^2(\lambda)$$

καταλήγοντας έτσι στην σχέση:

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi = \frac{1}{2} \left[ J_p'^2(\lambda) - \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda) \right] \quad (3.5.6)$$

### Συμπεράσματα:

- Αν  $\lambda$  ρίζα της συνάρτησης  $J_p(\lambda)$ , τότε

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi = \frac{1}{2} J_p'^2(\lambda)$$

ή με την χρήση του 2<sup>ου</sup> αναγωγικού τύπου (όπου  $\chi$  έχουμε  $\lambda$ )

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\lambda) \quad (3.5.6)$$

- Αν  $\lambda$  ρίζα της συνάρτησης  $J_p'(\lambda)$ , τότε

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda) \quad (3.5.7)$$

### **Όρια του ολοκληρώματος $\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi$**

Χρήσιμη ανισότητα (για μεγάλα  $\lambda$ ):

$$\frac{K}{\lambda} \leq \int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi \leq \frac{M}{\lambda} \quad (3.5.8)$$

$K > 0$  και  $M > 0$  σταθερές.

Έχουμε:

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda t J_p^2(t) dt \quad (3.5.9)$$

Όμως από την σχέση (3.2.16) έχουμε

$$|J_p(t)| \leq \frac{2A}{\sqrt{t}} \Rightarrow$$



$$\int_0^\lambda t J_p^2(t) dt \leq M \int_0^\lambda dt \leq M\lambda \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi \leq \frac{1}{\lambda^2} M\lambda \leq \frac{M}{\lambda}$$

Επίσης από την σχέση (3.2.16) έχουμε

$$\begin{aligned} t J_p^2(t) &= (A \sin(t + \omega) + \frac{r}{t})^2 \\ &= A^2 \sin^2(t + \omega) + \frac{2A r \sin(t + \omega)}{t} + \frac{r^2}{t^2} \\ &\geq A^2 \sin^2(t + \omega) - \frac{L}{t} \quad (L \text{ σταθερά}) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda t J_p^2(t) dt &> \int_{\lambda_0}^\lambda t J_p^2(t) dt \geq \int_{\lambda_0}^\lambda (A^2 \sin^2(t + \omega) - \frac{L}{t}) dt \\ &= \int_{\lambda_0}^\lambda A^2 \sin^2(t + \omega) dt - L(\ln \lambda - \ln \lambda_0) \geq K\lambda \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda\chi) d\chi \geq \frac{1}{\lambda^2} K\lambda \geq \frac{K}{\lambda}$$

### 3.6 Σειρές Fourier-Bessel

Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  οι θετικές ρίζες της εξίσωσης  $J_p(\chi) = 0$  με  $p > 1$ . Τότε οι συναρτήσεις

$$J_p(\lambda_1 \chi), J_p(\lambda_2 \chi), \dots, J_p(\lambda_n \chi), \dots \quad (3.6.1)$$

ορίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα  $[0,1]$  ,με συνάρτηση βάρους  $r(\chi) = \chi$ . Για κάθε συνάρτηση  $f(\chi)$  που είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $[0,1]$ , και με την σχέση (3.6.1) ορίζουμε τις σειρές Bessel Fourier:

$$f(\chi) \sim c_1 J_p(\lambda_1 \chi) + c_2 J_p(\lambda_2 \chi) + \dots \quad (3.6.2)$$

όπου

$$c_n = \frac{\int_0^1 \chi f(\chi) J_p(\lambda_n \chi) d\chi}{\int_0^1 \chi J_p^2(\lambda_n \chi) d\chi} = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 \chi f(\chi) J_p(\lambda_n \chi) d\chi \quad (3.6.3)$$

ο συντελεστής της σειράς Bessel-Fourier του  $f(\chi)$

#### Θεώρημα:

Έστω η συνάρτηση  $f(\chi)$  τμηματικά λεία στο διάστημα  $[0,1]$ . Τότε η συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Fourier-Bessel για  $0 < \chi < 1$  και ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n \chi) = \frac{f(\chi + 0) - f(\chi - 0)}{2}$$

Οι σειρές αυτές συγκλίνουν στο 0 για  $\chi=1$ , και για  $\chi=0$  αν  $p > 0$ .

#### Παραδείγματα

- Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier-Bessel η συνάρτηση  $f(\chi) = \chi^p$ ,  $p \geq -\frac{1}{2}$ , για  $0 < \chi < 1$ .

➤ Ο συντελεστής της σειράς θα ισούται με:

$$c_n = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 \chi * \chi^p J_p(\lambda_n \chi) d\chi$$

όμως με  $t = \lambda_n \chi$

$$\int_0^1 \chi^{p+1} J_p(\lambda_n \chi) d\chi = \int_0^{\lambda_n} \left(\frac{t}{\lambda_n}\right)^{p+1} J_p(t) \frac{1}{\lambda_n} dt = \frac{1}{\lambda_n^{p+2}} \int_0^{\lambda_n} t^{p+1} J_p(t) dt$$

όμως  $\frac{d}{dt} [t^{p+1} J_{p+1}(t)] = t^{p+1} J_p(t) \Rightarrow$

$$\int_0^{\lambda_n} t^{p+1} J_p(t) dt = [t^{p+1} J_{p+1}(t)]_{t=0}^{t=\lambda_n} = \lambda_n^{p+1} J_{p+1}(\lambda_n) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \chi^{p+1} J_p(\lambda_n \chi) d\chi = \frac{1}{\lambda_n} J_{p+1}(\lambda_n)$$

Άρα

$$c_n = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \frac{1}{\lambda_n} J_{p+1}(\lambda_n) \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)}$$

Οπότε

$$\chi^p = 2 \left( \frac{J_p(\lambda_1 \chi)}{\lambda_1 J_{p+1}(\lambda_1)} + \frac{J_p(\lambda_2 \chi)}{\lambda_2 J_{p+1}(\lambda_2)} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} J_p(\lambda_n \chi) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad 0 < \chi < 1.$$

- Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier-Bessel τάξεως 2 η συνάρτηση  $f(\chi) = \chi^2$ , για  $0 < \chi < 1$ .
- Όπως δείξαμε πιο πάνω μπορούμε αμέσως να δείξουμε πως η σειρά είναι 
$$\chi^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_3(\lambda_n)} J_2(\lambda_n \chi), \quad 0 < \chi < 1.$$

### 3.7 Ολοκληρωτικές αναπαράστασεις των συναρτήσεων Bessel

Κάποια προβλήματα είναι ευκολότερα στην επίλυση τους αν χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις Bessel στην ολοκληρωτική τους μορφή. Για να καταλήξουμε σε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης Bessel θα εργαστούμε με την γεννήτρια συνάρτηση :

$$e^{\frac{\chi}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(\chi)t^p$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την αντικατάσταση  $t = e^{i\theta}$  έχουμε :

$$\begin{aligned} e^{\frac{\chi}{2}(e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}})} &= e^{i\chi \sin \theta} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(\chi)e^{ip\theta} = \sum_{p=0}^{\infty} J_p(\chi)(e^{ip\theta} + (-1)^p e^{-ip\theta}) \\ &= J_0(\chi) + 2(J_2(\chi) \cos 2\theta + J_4(\chi) \cos 4\theta + \dots) \\ &\quad + 2i(J_1(\chi) \sin \theta + J_3(\chi) \sin 3\theta + \dots) \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } e^{i\chi \sin \theta} = \cos(\chi \sin \theta) + i \sin(\chi \sin \theta)$$

Εξισώνοντας τώρα το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα έχουμε :

$$\cos(\chi \sin \theta) = J_0(\chi) + 2(J_2(\chi) \cos 2\theta + J_4(\chi) \cos 4\theta + \dots)$$

$$\sin(\chi \sin \theta) = 2(J_1(\chi) \sin \theta + J_3(\chi) \sin 3\theta + \dots) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(\chi) \cos((2p+1)\theta)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\sin$  και  $\cos$  :

$$\int_0^{\pi} \cos p\theta \cos m\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{mp}$$

$$\int_0^{\pi} \sin p\theta \sin m\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{mp}$$

$$\delta_{mp} \begin{cases} 0, & m \neq p \\ 1, & m = p \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\chi \sin \theta) \cos m\theta d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (J_0(\chi) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\chi) \cos 2p\theta) \cos m\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\chi) \int_0^{\pi} \cos 2p\theta \cos m\theta d\theta \end{aligned}$$

Οπότε για  $m = 2p$  :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\chi \sin \theta) \theta \cos m\theta \, d\theta = J_{2p}(\chi)$$

ενώ για  $m = 2p + 1$  :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\chi \sin \theta) \theta \cos m\theta \, d\theta = 0$$

Ομοίως έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\chi \sin \theta) \theta \cos m\theta \, d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p+1}(\chi) \cos(2p+1)\theta \right) \cos m\theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p+1}(\chi) \int_0^\pi \cos((2p+1)\theta) \cos m\theta \, d\theta \end{aligned}$$

όπου για  $m = 2p$  :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\chi \sin \theta) \theta \cos m\theta \, d\theta = 0$$

ενώ για  $m = 2p + 1$  :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\chi \sin \theta) \theta \cos m\theta \, d\theta = J_{2p+1}(\chi)$$

Με πρόσθεση τώρα των δύο πιο πάνω αποτελεσμάτων την δυο ολοκληρωμάτων έχουμε :

$$J_m(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\chi \sin \theta - m\theta) \, d\theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

## 4. Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης

### 4.1 Ακτινικές Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης

Θεωρούμε την κυκλική μεμβράνη ακτίνας  $l$ . Και με την χρήση των Πολικών συντεταγμένων

$$x = r \cos \theta \text{ και } y = r \sin \theta$$

i) στην εξίσωση ελεύθερης ταλάντωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

έχουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), \quad (4.1.1)$$

ii) στην εξίσωση εξαναγκασμένης ταλάντωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{F(x,y,t)}{\rho}$$

έχουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{F(r,\theta,t)}{\rho} \quad (4.1.2)$$

Θα εργαστούμε με την πρώτη περίπτωση ελεύθερης ταλάντωσης κυκλικής μεμβράνης (4.1.1) και θεωρούμε την αρχική απομάκρυνση της μεμβράνης ανεξάρτητης του  $\theta$  δηλαδή  $u = u(r, t)$ . Έτσι οι ταλαντώσεις θα είναι ακτινικές άρα η (4.1.1) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.1.3)$$

με συνοριακές συνθήκες της μορφής:

$$u(l, t) = 0 \quad (4.1.4)$$

και αρχικές συνθήκες της μορφής:

$$u(r, 0) = f(r)$$

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = g(r) \quad (4.1.5)$$

Οπότε η λύση της (4.1.3) θα είναι της μορφής

$$u(r, t) = R(r)T(t)$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη (4.14). Παραγωγίζουμε τώρα την πιο πάνω εξίσωση και αντικαταστούμε στην (4.1.3):

$$RT'' = c^2(R''T + \frac{1}{r}R'T) \Rightarrow$$

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = \frac{T''}{c^2T} = -\lambda^2 = \text{σταθερά} \Rightarrow$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda^2R = 0 \quad (4.1.6)$$

$$T'' + c^2\lambda^2T = 0 \quad (4.1.7)$$

Η εξίσωση (4.1.6) είναι η παραμετρική μορφή της εξίσωσης Bessel τάξης  $p = 0$ , η οποία έχει γενική λύση

$$R(r) = C_1J_0(\lambda r) + C_2Y_0(\lambda r)$$

Όμως η  $Y_0$  δεν ορίζεται για  $r = 0$  οπότε  $C_2 = 0$ ,  $C_1 \neq 0$ . Άρα από (4.1.4)

$$J_0(\lambda l) = 0$$

και το  $\mu = \lambda l$  είναι λύση της  $J_0(\mu)$ . Με  $C_1 = 1$  παίρνουμε

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$$

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{l}\right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.1.8)$$

( $\mu_n = \lambda_n l$  η  $n$ -οστή ρίζα της  $J_0(\mu)$ )

Τώρα για  $\lambda = \lambda_n$  η (4.1.7) έχει λύση:

$$T_n(t) = A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Οπότε μια πιο συγκεκριμένη λύση της (4.1.3) θα είναι της μορφής:

$$u_n(t) = (A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.1.9)$$

που ικανοποιεί την συνθήκη (4.1.4). Για την εύρεση λύσης που θα ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες (4.1.5) γράφουμε:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r) \quad (4.1.10)$$

με την αναγκαία συνθήκη να ισχύει:

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = f(r)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} &= [\sum_{n=1}^{\infty} (-A_n c \lambda_n \sin c \lambda_n t + B_n c \lambda_n \cos c \lambda_n t) J_0(\lambda_n r)]_{t=0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n c \lambda_n J_0(\lambda_n r) = g(r) \end{aligned}$$

Υπολογισμός συντελεστών Fourier των  $f(r)$  και  $g(r)$ :

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r f(r) J_0(\lambda_n r) dr \quad (4.1.11)$$

$$B_n c \lambda_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r g(r) J_0(\lambda_n r) dr \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{2}{c \lambda_n l^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r g(r) J_0(\lambda_n r) dr \quad (4.1.12)$$



## 4.2 Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης (Γενική Περίπτωση)

Έχουμε το πρόβλημα ελεύθερης ταλάντωσης κυκλικής μεμβράνης ακτίνας  $l$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.2.1)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$u(l, \theta, t) = 0 \quad (4.2.2)$$

και αρχικές συνθήκες:

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

$$\frac{\partial u(r, \theta, 0)}{\partial t} = g(r, \theta) \quad (4.2.3)$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής:

$$u(r, \theta, t) = \Phi(r, \theta)T(t)$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη (4.2.2)

Αντικαταστούμε την πιο πάνω σχέση στην (4.2.1) :

$$\Phi T'' = c^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) T \Rightarrow$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}}{\Phi} = -\lambda^2 = \text{σταθερά}$$

Οπότε

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\lambda^2 \Phi \quad (4.2.4)$$

$$T'' + c^2 \lambda^2 T = 0 \quad (4.2.5)$$

με

$$\Phi(l, \theta) = 0 \quad (4.2.6)$$

ώστε να ισχύει η συνθήκη (4.2.2).

Έχουμε τώρα το συνοριακό πρόβλημα (4.2.4) , που ικανοποιεί την (4.2.6) οπότε η λύση που θέλουμε θα είναι της μορφής:

$$\Phi(r, \theta) = R(r)F(\theta) \quad (4.2.7)$$

Με αντικατάσταση τώρα στην (4.2.4) παίρνουμε:

$$R'' F + \frac{1}{r} R' F + \frac{1}{r^2} R F'' = -\lambda^2 R F \Rightarrow$$

$$R'' F + \frac{1}{r} R' F + \lambda^2 R F = -\frac{1}{r^2} R F'' \Rightarrow$$

$$-(R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R) \frac{r^2}{R} = \frac{F''}{F} = -\nu^2 = \text{σταθερά}$$

Οπότε

$$r^2 R'' + r R' + R(\lambda^2 r^2 - \nu^2) = 0 \quad (4.2.8)$$

$$F'' + \nu^2 F = 0 \quad (4.2.9)$$

Οι λύσεις της (4.2.9) είναι:

$$\cos n\theta, \sin n\theta \quad (n = \nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2.10)$$

και η (4.2.8) παίρνει την μορφή

$$r^2 R'' + r R' + R(\lambda^2 r^2 - n^2) = 0$$

η οποία είναι η παραμετρική μορφή της συνάρτησης Bessel τάξης  $n$  με γενική λύση:

$$R(r) = C_1 J_n(\lambda r) + C_2 Y_n(\lambda r)$$

και θέτουμε  $C_2 = 0$  αφού  $Y_n(\lambda r) \rightarrow \infty$  για  $r \rightarrow 0$ .

Για  $C_1 = 1$  τότε από την συνθήκη (4.2.6) έχουμε:

$$R(l) = J_n(\lambda l) = 0$$

και εφόσον  $\lambda l = \mu$  λύση της εξίσωσης  $J_n(\mu) = 0$  έχουμε:

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{l},$$

$$R_{nm} = J_n(\lambda_{nm} r) = J_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{l}\right) \quad (4.2.11)$$

όπου  $m = 1, 2, \dots$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $\mu_{nm}$  η  $n$ -οστή θετική ρίζα της συνάρτησης  $J_n(\mu)$ . Οπότε το πρόβλημα (4.2.4) με την συνοριακή συνθήκη (4.2.6) έχει τις ιδιοτιμές  $\lambda_{nm}$  και τις ιδιοσυναρτήσεις :

$$\Phi_{nm}(r, \theta) = J_n(\lambda_{nm} r) \cos n\theta$$

$$\Phi_{nm}^*(r, \theta) = J_n(\lambda_{nm} r) \sin n\theta \quad \text{με} \quad (m = 1, 2, \dots \text{ και } n = 1, 2, \dots)$$

Για την εξίσωση (4.2.5) τώρα, έχουμε με αντικατάσταση  $\lambda = \lambda_{nm}$  :

$$T_{nm} = A_{nm} \cos c\lambda_{nm} t + B_{nm} \sin c\lambda_{nm} t .$$

Οπότε μια λύση της (4.2.1) που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (4.2.2) είναι:

$$u_{nm}(r, \theta, t) = (A_{nm} \cos c\lambda_{nm} t + B_{nm} \sin c\lambda_{nm} t) J_n(\lambda_{nm} r) \cos n\theta$$

με  $m = 1, 2, \dots$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$u_{nm}^*(r, \theta, t) = (A_{nm}^* \cos c\lambda_{nm} t + B_{nm}^* \sin c\lambda_{nm} t) J_n(\lambda_{nm} r) \sin n\theta$$

με  $m = 1, 2, \dots$  και  $n = 1, 2, \dots$

Για την εύρεση λύσης που θα ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη (4.2.3) ,κατασκευάζουμε την σειρά:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(A_{nm} \cos c\lambda_{nm} t + B_{nm} \sin c\lambda_{nm} t) \cos n\theta + (A_{nm}^* \cos c\lambda_{nm} t + B_{nm}^* \sin c\lambda_{nm} t) \sin n\theta] J_n(\lambda_{nm} r) \quad (4.2.12)$$

με αναγκαίες συνθήκες:

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos n\theta + A_{nm}^* \sin n\theta) J_n(\lambda_{nm} r) = f(r, \theta)$$

$$\frac{\partial u(r, \theta, 0)}{\partial t} =$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(-A_{nm} c\lambda_{nm} \sin c\lambda_{nm} t + B_{nm} c\lambda_{nm} \cos c\lambda_{nm} t) \cos n\theta + (-A_{nm}^* c\lambda_{nm} \sin c\lambda_{nm} t + B_{nm}^* c\lambda_{nm} \cos c\lambda_{nm} t) \sin n\theta] J_n(\lambda_{nm} r) \right\}_{t=0} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u(r, \theta, 0)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (B_{nm} c\lambda_{nm} \cos n\theta + B_{nm}^* c\lambda_{nm} \sin n\theta) J_n(\lambda_{nm} r) =$$

$$= g(r, \theta)$$

(4.2.13)

## Εύρεση συντελεστών

Έστω η σειρά:

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(r) \cos n\theta + f_n^*(r) \sin n\theta] \quad (4.2.14)$$

όπου:

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) d\theta$$

$$f_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos n\theta d\theta$$

$$f_n^*(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta d\theta \quad (4.2.15)$$

Αναπτύσσουμε την  $f(r, \theta)$  σε τριγωνομετρική σειρά Fourier ως προς την μεταβλητή  $\theta$  , και μετά αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις  $f_n(r)$  και  $f_n^*(r)$  σε σειρές Fourier ως προς το σύστημα  $J_n(\lambda_{nm} r)$  . Καταλήγουμε έτσι στις συναρτήσεις:

$$f_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} J_n(\lambda_{nm} r)$$

$$f_n^*(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}^* J_n(\lambda_{nm} r)$$

όπου

$$C_{nm} = \frac{2}{l^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^l r f_n(r) J_n(\lambda_{nm} r) dr$$

$$C_{nm}^* = \frac{2}{l^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^l r f_n^*(r) J_n(\lambda_{nm} r) dr$$

(4.2.16)

Με αντικατάσταση της (4.2.16) στην (4.2.14) έχουμε:

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{nm} \cos n\theta + C_{nm}^* \sin n\theta) J_n(\lambda_{nm} r)$$

Οπότε συγκρίνοντας την πιο πάνω εξίσωση με τις σχέσεις (4.2.13) και με την βοήθεια των (4.2.15), (4.2.16) έχουμε:

$$A_{0m} = C_{0m} = \frac{1}{\pi l^2 J_1^2(\mu_{0m})} \int_0^l dr \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) J_0(\lambda_{0m} r) d\theta$$

$$A_{nm} = C_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^l dr \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) \cos n\theta J_n(\lambda_{nm} r) d\theta$$

$$A_{nm}^* = C_{nm}^* = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^l dr \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) \sin n\theta J_n(\lambda_{nm} r) d\theta$$

$$n = 1, 2, \dots \text{ και } m = 1, 2, \dots \quad (4.2.17)$$

$$B_{0m} c \lambda_{0m} = \frac{1}{\pi l^2 J_1^2(\mu_{0m})} \int_0^l dr \int_{-\pi}^{\pi} r g(r, \theta) J_0(\lambda_{0m} r) d\theta$$

$$B_{nm} c \lambda_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^l dr \int_{-\pi}^{\pi} r g(r, \theta) \cos n\theta J_n(\lambda_{nm} r) d\theta$$

$$B_{nm}^* c \lambda_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^l dr \int_{-\pi}^{\pi} r g(r, \theta) \sin n\theta J_n(\lambda_{nm} r) d\theta$$

$$n = 1, 2, \dots \text{ και } m = 1, 2, \dots \quad (4.2.18)$$

Έτσι η λύση του προβλήματός μας δίνεται από την σχέση (4.2.12) και η εύρεση των συντελεστών της δίνεται από τις σχέσεις (4.2.17) και (4.2.18)

### Παράδειγμα:

Να λυθεί το πρόβλημα ταλάντωσης μεμβράνης με  $a = l = 1$  και αρχικές συνθήκες:

$$f(r, \theta) = 1 - r^4 \text{ και } g(r, \theta) = 0$$

### Λύση:

Επειδή  $g(r, \theta) = 0$  συμπεραίνουμε αμέσως πως  $A_{nm}^* = B_{nm}^* = 0$  για κάθε  $m$  και  $n$ .  
Ακόμη  $f(r, \theta) = f(r)$  άρα θα έχουμε μόνο ακτινική ταλάντωση. Συνεχίζουμε με την εύρεση των συντελεστών:

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) \cos n\theta J_n(\lambda_{nm} r) d\theta \Rightarrow$$

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\mu_{nm})} \int_0^1 r f(r, \theta) J_n(\lambda_{nm} r) dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta d\theta$$

$$\text{Όμως το ολοκλήρωμα } \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta = 0,$$

Άρα  $A_{nm} = 0$  όπως και  $B_{nm} = 0$ .

$$A_{0m} = \frac{1}{\pi J_1^2(\mu_{0m})} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) J_0(\lambda_{0m} r) d\theta \Rightarrow$$

$$A_{0m} = \frac{2\pi}{\pi J_1^2(\mu_{0m})} \int_0^1 r(1-r^4) J_0(\lambda_{0m} r) dr \Rightarrow$$

με αντικατάσταση  $\chi = \lambda_{0m} r$

$$A_{0m} = \frac{2}{J_1^2(\mu_{0m})} \int_0^{\lambda_{0m}} \frac{\chi}{\lambda_{0m}} \left(1 - \frac{\chi^4}{\lambda_{0m}^4}\right) J_0(\chi) \frac{d\chi}{\lambda_{0m}} =$$

$$= \frac{2}{\lambda_{0m}^2 J_1^2(\mu_{0m})} \int_0^{\lambda_{0m}} \chi \left(1 - \frac{\chi^4}{\lambda_{0m}^4}\right) J_0(\chi) d\chi \Rightarrow$$

$$A_{0m} = \frac{2}{\lambda_{0m}^2 J_1^2(\mu_{0m})} \left\{ \int_0^{\lambda_{0m}} \chi J_0(\chi) d\chi - \frac{1}{\lambda_{0m}^4} \int_0^{\lambda_{0m}} \chi^5 J_0(\chi) d\chi \right\}$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel. Από την πρώτη ιδιότητα γνωρίζουμε πως:

αν  $\nu = \chi^p J_p(\chi)$  τότε  $d\nu = \chi^p J_{p-1}(\chi)$ , άρα με  $p=0$  έχουμε την περίπτωση του πρώτου ολοκληρώματος  $\Rightarrow$

$$\int_0^{\lambda_{0m}} \chi J_0(\chi) d\chi = \chi J_1(\chi) \Big|_0^{\lambda_{0m}} = \lambda_{0m} J_1(\lambda_{0m})$$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\lambda_{0m}} \chi^5 J_0(\chi) d\chi$ , με τον υπολογισμό πρώτα του γενικευμένου ολοκληρώματος  $\int \chi^{p+5} J_p(\chi) d\chi$ :

$$\begin{aligned} \int \chi^{p+5} J_p(\chi) d\chi &= \int \chi^4 \chi^{p+1} J_p(\chi) d\chi = \chi^4 \chi^{p+1} J_{p+1}(\chi) - \int \chi^{p+1} J_{p+1}(\chi) d\chi^4 = \\ &= \chi^{p+5} J_{p+1}(\chi) - 4 \int \chi^3 \chi^{p+1} J_{p+1}(\chi) d\chi = \chi^{p+5} J_{p+1}(\chi) - 4 \int \chi^{p+4} J_{p+1}(\chi) d\chi \end{aligned}$$

Παρόμοια :

$$\int \chi^{p+4} J_{p+1}(\chi) d\chi = \chi^{p+4} J_{p+2}(\chi) - \int \chi^{p+3} J_{p+2}(\chi) d\chi =$$

$$= \chi^{p+4} J_{p+2}(\chi) - 2 \int \chi^{p+3} J_{p+2}(\chi) d\chi \Rightarrow$$

$$\int \chi^{p+5} J_p(\chi) d\chi = \chi^{p+5} J_{p+1}(\chi) - 4(\chi^{p+4} J_{p+2}(\chi) - 2 \int \chi^{p+3} J_{p+2}(\chi) d\chi) \Rightarrow$$

$$\int \chi^{p+5} J_p(\chi) d\chi = \chi^{p+5} J_{p+1}(\chi) - 4\chi^{p+4} J_{p+2}(\chi) + 8 \int \chi^{p+3} J_{p+2}(\chi) d\chi =$$

$$= \chi^{p+5} J_{p+1}(\chi) - 4\chi^{p+4} J_{p+2}(\chi) + 8\chi^{p+3} J_{p+3}(\chi) + K$$

Άρα το δεύτερο μας ολοκλήρωμα θα ισούται με :

$$\int_0^{\lambda_{0m}} \chi^5 J_0(\chi) d\chi = [\chi^5 J_1(\chi) - 4\chi^4 J_2(\chi) + 8\chi^3 J_3(\chi)] \Big|_0^{\lambda_{0m}} =$$

$$= \lambda_{0m}^5 J_1(\lambda_{0m}) - 4\lambda_{0m}^4 J_2(\lambda_{0m}) + 8\lambda_{0m}^3 J_3(\lambda_{0m})$$

Υπολογίζουμε τώρα :

$$\int_0^{\lambda_{0m}} \chi J_0(\chi) d\chi - \frac{1}{\lambda_{0m}^4} \int_0^{\lambda_{0m}} \chi^5 J_0(\chi) d\chi = \lambda_{0m} J_1(\lambda_{0m}) - \lambda_{0m} J_1(\lambda_{0m}) + 4J_2(\lambda_{0m}) -$$

$$8\lambda_{0m}^{-1} J_3(\lambda_{0m}) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\lambda_{0m}} \chi J_0(\chi) d\chi - \frac{1}{\lambda_{0m}^4} \int_0^{\lambda_{0m}} \chi^5 J_0(\chi) d\chi = 4J_2(\lambda_{0m}) - 8\lambda_{0m}^{-1} J_3(\lambda_{0m})$$

Και έτσι ο συντελεστής  $A_{0m}$  θα ισούται με:

$$A_{0m} = \frac{2}{\lambda_{0m}^2 J_1^2(\mu_{0m})} (4J_2(\lambda_{0m}) - 8\lambda_{0m}^{-1} J_3(\lambda_{0m})) \Rightarrow$$

$$A_{0m} = \frac{8J_2(\lambda_{0m}) - 2J_3(\lambda_{0m})}{\lambda_{0m}^3 J_1^2(\mu_{0m})} .$$

Καταλήγουμε έτσι στην λύση του προβλήματος:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8J_2(\lambda_{0m}) - 2J_3(\lambda_{0m})}{\lambda_{0m}^3 J_1^2(\mu_{0m})} J_0(\lambda_{0m} r) \cos(\lambda_{0m} t).$$

## Εφαρμογή στην Mathematica:

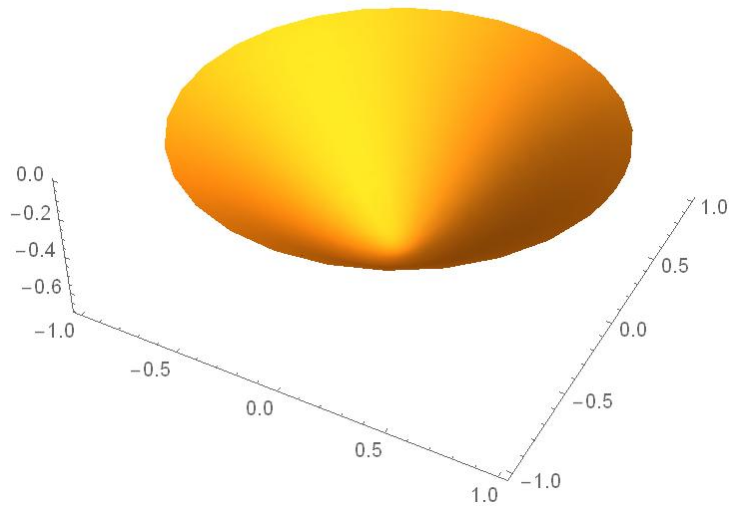
```
lam[m_] := BesselZero[0, m]
```

```
u[r_, th_, t_] := Sum[(8 * BesselJ[2, lam[m]] - 2 * BesselJ[3, lam[m]])  
    * BesselJ[0, lam[m] * r] * Cos[lam[m]  
    * t]/(lam[m])^3/(BesselJ[1, lam[m]])^2, {m, 1, 10}]
```

```
cylinderPlot3D[f_, {rMin_, rMax_}, {tMin_, tMax_}, opts___] :  
= ParametricPlot3D[{rCos[t], rSin[t], f[r, t]}, {r, rMin, rMax}, {t, tMin, tMax}, opts]
```

```
k[r_, th_] = u[r, th, 1]
```

```
cylinderPlot3D[k, {0, 1}, {0, 2Pi}, Mesh -> None, Boxed -> False]
```



## 5.ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL

Οι συναρτήσεις Bessel εμφανίζονται κυρίως σε προβλήματα που χρειάζονται εύρεση διάφορων λύσεων των εξισώσεων Laplace και των εξισώσεων Helmholtz σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες . Τέτοιου είδους προβλήματα είναι για παράδειγμα :

1. Θερμική αγωγιμότητα σε κυλινδρικό αντικείμενο
2. Προβλήματα διάχυσης σε πλέγμα
3. Εύρεση συχνότητας εξαρτώμενης από την τριβή σε κυκλικό αγωγό
4. Προβλήματα δυναμικής σωμάτων που επιπλέουν
5. Προβλήματα ακουστικής φυσικής
6. Προβλήματα ατομικής και πυρηνικής φυσικής

Οι συναρτήσεις Bessel εμφανίζονται σε αρκετά προβλήματα, αλλά μια από τις πρώτες εμφανίσεις των συναρτήσεων Bessel ήταν το 1732 όταν ο Daniel Bernoulli έλυσε το πρόβλημα ταλάντωσης μια κρεμάμενης βαριάς αλυσίδας .



## 5.1 Βαριά αλυσίδα

Έστω έχουμε μια αλυσίδα, μήκους  $L$  και γραμμικής πυκνότητας  $\rho$ , η οποία θεωρούμε πως κινείται μόνο σε μια κατεύθυνση και με αφετηρία την θέση  $\chi=0$  και αρχική ταχύτητα  $0$  (ακίνητη). Τότε η απόκλιση της αλυσίδας από την θέση ισορροπίας θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = g\left(\chi \frac{d^2u}{d\chi^2} + \frac{du}{d\chi}\right) \quad (5.1)$$

$$u \Big|_{\chi=L} = 0$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών:

$$u = X(\chi)T(t)$$

με

$$u_\chi = T(t)X'(\chi)$$

$$u_{\chi\chi} = T(t)X''(\chi)$$

$$u_{tt} = X(\chi)\ddot{T}(t)$$

Με αντικατάσταση στην (5.1) έχουμε :

$$X(\chi)\ddot{T}(t) = g\chi T(t)X''(\chi) + gT(t)X'(\chi)$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{g\chi X''(\chi) + gX'(\chi)}{X(\chi)}$$

με συνάρτηση χρόνου  $T(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\chi X''(\chi) + X'(\chi) + \frac{\omega^2}{g}X(\chi) = 0 \quad (5.2)$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$X(L) = 0 \quad X(0) < \infty$$

Για να καταλήξουμε τώρα σε μια εξίσωση της μορφής Bessel θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση :

$$y = 2\omega \sqrt{\frac{\chi}{g}}$$

στην εξίσωση (5.2), και καταλήγουμε σε εξίσωση μορφής Bessel:

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\chi}{dy} + \chi = 0$$

μηδενικής τάξης ( $p=0$ ) και με λύση :

$$u = AJ_0\left(2\omega \sqrt{\frac{\chi}{g}}\right)$$

Έτσι η αλυσίδα θα ταλαντώνεται με τρόπο ώστε να ταυτίζεται στις συχνότητες που ταιριάζουν με τις λύσεις της συγκεκριμένης συνάρτησης Bessel για το δοσμένο μήκος  $L$ . Οπότε η χαρακτηριστική συχνότητα  $\omega_k$  παίρνει διακριτές τιμές ( $\omega_k, k = 1, 2, \dots, \infty$ ) οι οποίες μπορούν να βρεθούν από τις συνοριακές συνθήκες :

$$u(L) = 0 \text{ (το πάνω άκρος της αλυσίδας δεν κινείται)} \quad J_0\left(2\omega_k \sqrt{\frac{L}{g}}\right) = 0$$

Οπότε:

$$2\omega_k \sqrt{\frac{L}{g}} = \alpha_k^0 \quad J_0(\alpha_k^0) = 0 \quad \omega_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \alpha_k^0$$

όπου  $\alpha_k^0$  οι λύσεις των συναρτήσεων Bessel  $J_0$ .

Η τελική λύση του προβλήματος μας είναι :

$$u(\chi, t) = AJ_0\left(2\omega_k \sqrt{\frac{\chi}{g}}\right) \cos(\omega_k t)$$

Αν τώρα η αλυσίδα είχε αρχικό σχήμα και κάποια αρχική ταχύτητα τότε θα είχαμε και αρχικές συνθήκες

$$u(\chi, 0) = f(\chi)$$

$$u_t(\chi, 0) = g(\chi)$$

# Βιβλιογραφία

1. Bell W.: Special Functions for Scientists and Engineers, Dover Publication, 2004
2. Frank Bowman: Introduction to Bessel Functions, Dover Publications, Inc., New York, 2010
3. Georgi P. Tolstov : Fourier Series, Dover Publications, Inc., New York, 1976
4. Lebedev N. N.: Special Functions and Their Applications, Dover Publications, 1972