ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

«ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑΣ ΞΗΡΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: κ. ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΣΜΥΡΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 2014

Τριμελής Επιτροπή

1. κ. Γεώργιος Σμυρλής, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπων)

2. κ. Δημήτριος Κραββαρίτης, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ

3. κ. Βασίλειος Παπανικολάου, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στη σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, στα πλαίσια των δραστηριοτήτων του Τομέα Μαθηματικών. Ωστόσο, η πραγματοποίησή της δε θα ήταν εφικτή χωρίς τη βοήθεια κάποιων ανθρώπων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίκουρο καθηγητή ΕΜΠ και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Γεώργιο Σμυρλή, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με το θέμα αυτό σε επίπεδο διπλωματικής εργασίας, καθώς και τον ομότιμο καθηγητή του ΕΜΠ, κ. Δημήτριο Κραββαρίτη, για την πολύτιμη βοήθειά του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξή της καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Εμμανουέλα Ξηράκη

Απρίλιος 2014

Περίληψη

Μία σημαντική εφαρμογή της θεωρίας της μιγαδικής ανάλυσης αποτελούν οι μιγαδικοί ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί. Με αυτούς τους μετασχηματισμούς δύναται να επιλυθούν με πιο εύκολο και αποτελεσματικό τρόπο ορισμένες εξισώσεις.

Η σημασία των μετασχηματισμών αυτών έγκειται στο γεγονός ότι οι πράξεις στις μετασχηματισμένες συναρτήσεις είναι πιο απλές.

Μία συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής (object function), ο αντίστοιχος μετασχηματισμός την απεικονίζει σε μία συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής, τη μετασχηματισμένη συνάρτηση (result function).

Οι κυριότεροι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί είναι οι μετασχηματισμοί Fourier, Laplace και Hankel οι οποίοι και θα αναλυθούν αργότερα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι προαναφερθέντες μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται σε σωρεία επιστημονικών πεδίων όπως Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Κβαντομηχανική, Ανάλυση Σήματος, Τηλεπικοινωνίες. Στις Τηλεπικοινωνίες, για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει μία συνάρτηση χρόνου σε μία συνάρτηση συχνότητας.

Abstract

Complex integral transforms are an important part of complex analysis theory. Some equations can be solved more easily and effectively by using them.

These transforms are important because calculations in transformed functions are simpler.

Transforms take a function of a real variable as input argument (object function) and return a function of a complex variable (result function).

The most important integral transforms are Fourier transform, Laplace transform and Hankel transform which will be analyzed later.

It is important to mention that the previous transforms are used in several scientific fields such as Applied Mathematics, Quantum mechanics, Sign Analysis, Telecommunications. In Telecommunications, for example, Fourier transform takes a function of time as its input argument and returns a function of frequency.

Περιεχόμενα

1. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f:\Re\rightarrow\mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτηση απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$

Ο μετασχηματισμός Fourier της f ορίζεται ως το εξής ολοκλήρωμα:

$$F(f(x))=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx,\quad \omega\in\Re$$

■

Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι οι εξής:

<u>Πρόταση</u>: Αν υποτεθεί ότι οι μετασχηματισμοί που παρουσιάζονται υπάρχουν, τότε υπάρχουν οι εξής ιδιότητες:

i) $F(af(x)+bg(x))=aF(f(x))+bF(g(x))$, όπου $a,b\in\mathbb{C}$, δηλαδή ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός.

ii) $F\left(e^{-iax}f(x)\right)=\hat{f}(\omega+a),\ a\in\Re$

iii) $F(f(x-x_0))=\hat{f}(\omega)e^{-i\omega x_0}$

iv) $F\left(\overline{f(x)}\right)=\overline{F(f(-x))}$

v) $F(f'(x))=i\omega\hat{f}(\omega)$

vi) $F\left(f^{(n)}(x)\right)=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$

■

Παράδειγμα - συνάρτηση Haar :

Η συνάρτηση Haar ορίζεται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1/2\\ -1, & 1/2\le x\le 1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Θα υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της f.

Λύση:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{1/2}e^{-i\omega x}dx-\int_{1/2}^{1}e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}\left(1-2e^{-i\omega/2}+e^{-i\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega/2}}{i\omega}\left(e^{i\omega/2}-2+e^{-i\omega/2}\right)$$

■

1.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

<u>Ορισμός</u>: Έστω $F\big(f(x)\big)=\hat{f}(\omega)$, τότε η f είναι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $\hat{f}$ και γράφεται ότι $f(x)=F^{-1}\big(\hat{f}(\omega)\big)$.

■

<u>Θεώρημα Ολοκληρωτικής Αναπαράστασης Fourier</u>: Έστω f συνεχής, τμηματικά λεία (δηλαδή, διαθέτει συνεχή πρώτη παράγωγο μεταξύ των σημείων ασυνέχειας) και απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, τότε

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\big(\omega(x-u)\big)du\,d\omega,\ x\in\Re.$$

■

<u>Πόρισμα</u>: Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, αν

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx,\ \text{τότε}\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

■

Παράδειγμα: Να βρεθεί η αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier της συναρτήσεως $\hat{g}(\omega)=e^{-|\omega|\kappa}$, $\kappa>0$.

Λύση: Από το Πόρισμα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τη σχέση $F^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\right)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega,\ -\infty<x<\infty$.

Οπότε, $F^{-1}\left(\hat{g}(\omega)\right)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}e^{-|\omega|\kappa}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{i\omega x}e^{\omega\kappa}d\omega+$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{i\omega x}e^{-\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{(ix+\kappa)\omega}d\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{(ix-\kappa)\omega}d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{(ix+\kappa)\omega}d\omega}{ix+\kappa}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{(ix-\kappa)\omega}}{ix-\kappa}\Bigg|_{0}^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\kappa}{x^2+\kappa^2}$$

■

1.3 ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

<u>Ορισμός</u>: Έστω f: $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\omega\in\Re$. Ο ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως εξής:

$$F_s\left(f(x)\right)=\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx.$$

Ο αντίστροφος ημιτονικός μετασχηματισμός δε, θα είναι ο εξής:

$$F_s^{-1}\left(\hat{f}_s(\omega)\right)=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_s(\omega)\sin(\omega x)d\omega$$

■

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\omega\in\Re$. Ο συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως εξής:

$$F_c\left(f(x)\right)=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx.$$

Ο αντίστροφος συνημιτονικός μετασχηματισμός δε, θα είναι ο εξής:

$$F_c^{-1}\left(\hat{f}_c(\omega)\right)=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega$$

■

Υπάρχουν δε, οι εξής ιδιότητες των ημιτονικών και συνημιτονικών μετασχηματισμών:

(1) Γραμμικότητα: $F_C\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)=\lambda F_C\left(f(x)\right)+\mu F_C\left(g(x)\right)$

$$F_S\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)=\lambda F_S\left(f(x)\right)+\mu F_S\left(g(x)\right)$$

(2) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,$ τότε $F_C\left(f'(x)\right)=\omega F_S\left(f(x)\right)-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}f(0)$

$$F_S\left(f'(x)\right)=-\omega F_C\left(f(x)\right)$$

(3) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0,$ τότε $F_C\left(f''(x)\right)=-\omega^2 F_C\left(f(x)\right)-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}f'(0)$

$$F_S\left(f''(x)\right)=-\omega^2 F_S\left(f(x)\right)-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\omega f(0)$$

■

1.4 ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier σε προβλήματα αρχικών – συνοριακών τιμών είναι, συχνώς, αναγκαία η εύρεση της αντίστροφης μετασχηματισμένης Fourier, $F^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\right)$, όταν είναι γνωστό ότι $F^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\right)=f(x)$ και $F^{-1}\left(\hat{g}(\omega)\right)=g(x)$.

Έτσι, υπάρχει ο εξής ορισμός:

<u>Ορισμός</u>: Έστω f, g δύο απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις πάνω στο $\Re$.

Η συνέλιξη των συναρτήσεων, $f*g$, ορίζεται από την ισότητα

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

■

Η συνέλιξη έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) $f*g=g*f$ (αντιμεταθετική)

ii) $f*(g*h)=(f*g)*h$ (προσεταιριστική)

iii) $f*(g+h)=f*g+f*h$ (επιμεριστική)

■

Σημαντικό δε, είναι το εξής θεώρημα:

<u>Θεώρημα συνέλιξης</u>: Αν οι συναρτήσεις f και g είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες, τότε ισχύει $F((f*g)(x)) = F(f(x)) \cdot F(g(x))$.

<u>Απόδειξη</u>: Από τον ορισμό της συνέλιξης προκύπτει ότι:

$$F((f*g)(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) g(\xi) d\xi \right) e^{-i\omega x} dx$$

Με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης προκύπτει:

$$F((f*g)(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) e^{-i\omega x} dx \right) g(\xi) d\xi,$$ τίθετε x – ξ = u ,

οπότε υπολογίζεται: $F((f*g)(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) e^{-i\omega\xi} g(\xi) d\xi =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = F(f(x)) \cdot F(g(x)).$$

■

<u>Ορισμός</u>: Μία συνάρτηση (πραγματική ή μιγαδική) είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αν $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. Έτσι, π.χ. η συνάρτηση $f(x) = e^x$ δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο R.

■

Τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συναντώνται σε φυσικά φαινόμενα. Για παράδειγμα, το ηλεκτρικό πεδίο ενός κυματοπακέτου περιγράφεται από μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Επίσης, από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier και το Θεώρημα συνέλιξης ισχύει ότι:

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)d\omega=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi,$$

Θέτοντας x = 0 και $f(-\xi)=\overline{g(\xi)}$ στη σχέση αυτή και λαμβάνοντας $\hat{f}(s)=\overline{\hat{g}(s)}$, παρατίθεται το εξής θεώρημα:

<u>Θεώρημα (Τύπος Parseval)</u>: Αν η f(x) είναι απόλυτα και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε η μετασχηματισμένη Fourier, $\hat{f}(\omega)$, της f(x) είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2d\omega \text{ (τύπος Parseval)}$$

■

Στην κβαντομηχανική, το x λέγεται μεταβλητή θέσεως και το ω μεταβλητή ορμής.

Η διασπορά περί το 0 της f(x) είναι

$$D_0(f)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx},$$

όταν τα ολοκληρώματα υπάρχουν. Αναλόγως ορίζεται και η διασπορά της $\hat{f}(\omega)$ περί το 0. Για τη συνάρτηση Gauss $f(x)=e^{-\kappa x^2}$, κ > 0 αποδεικνύεται ότι

$D_0(f)=\frac{1}{4\kappa}$, $D_0(\hat{f})=\kappa$, οπότε $D_0(f)\cdot D_0(\hat{f})=\frac{1}{4}$.

Γενικώς, ισχύει το εξής θεώρημα:

<u>Αρχή της αβεβαιότητας ή της απροσδιοριστίας</u>:

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f:\Re \to \mathbb{C}$ και η μετασχηματισμένη Fourier της, $\hat{f}(\omega)$, των οποίων ορίζονται οι διασπορές. Τότε ισχύει η ανισότητα:

$$D_0(f)\cdot D_0(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

-Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $f(x)=ce^{-\kappa x^2}$, όπου c μιγαδική σταθερά και κ > 0.

■

Τέλος, επισημαίνεται ότι η έννοια της Συνέλιξης επεκτείνεται και στους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς Fourier.

Πιο συγκεκριμένα, για τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier, ισχύει ο τύπος:

$$\left(f*g\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-\xi)-f(x+\xi)]g(\xi)d\xi \quad ,$$

ενώ για το συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier ισχύει ο τύπος:

$$\left(f*g\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-\xi)+f(x+\xi)]g(\xi)d\xi$$

■

1.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

1. Επίλυση ορισμένων γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Ας θεωρηθεί, για παράδειγμα, μια εξίσωση της μορφής

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f(t)dt,$$

όπου f είναι μία άγνωστη συνάρτηση και k, g γνωστές συναρτήσεις. Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων f, g, k υπάρχουν. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση, υπολογίζεται:

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) + \sqrt{2\pi}\hat{k}(\omega)\hat{f}(\omega) \qquad (*)$$

οπότε

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\hat{k}(\omega)}.$$

Άρα, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\omega)e^{i\omega x}}{1-\sqrt{2\pi}\hat{k}(\omega)} d\omega$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση $e^{-x^2/2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}f(t)dt$.

Υπόδειξη: Ο μετασχηματισμός Fourier της f (η οποία είναι συνάρτηση της μεταβλητής x) είναι η ίδια συνάρτηση αλλά με μεταβλητή την ω.

<u>Λύση</u>: Αποδεικνύεται ότι $F\left(e^{-|x|}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$ διότι σημειώνοντας

$k(x)=e^{-\kappa|x|},\ \ \kappa>0$

υπολογίζεται ότι $F(e^{-\kappa|x|})=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa|x|}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\kappa-i\omega)x}dx+$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\kappa+i\omega)x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{(\kappa-i\omega)x}}{\kappa-i\omega}\right|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-(\kappa+i\omega)x}}{-(\kappa+i\omega)}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\kappa-i\omega}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\kappa+i\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\kappa}{\kappa^2+\omega^2}.$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (*) στην εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την Υπόδειξη της εκφώνησης, υπολογίζεται ότι

$$e^{-\omega^2/2}=\frac{2}{1+\omega^2}\cdot\hat{f}(\omega),\text{ οπότε }\ \hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}(1+\omega^2)e^{-\omega^2/2}\qquad(1)$$

Από την ιδιότητα $F\left(f^{(n)}(x)\right)=(i\omega)^n\cdot\hat{f}(\omega)$ λαμβάνεται ότι

$$F\left((e^{-x^2/2})''\right)=-\omega^2e^{-\omega^2/2},\ \text{ δηλαδή }\ F\left(e^{-x^2/2}(x^2-1)\right)=-\omega^2e^{-\omega^2/2}\qquad(2)$$

Επομένως, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[e^{-x^2/2}+e^{-x^2/2}(1-x^2)\right]=\frac{1}{2}e^{-x^2/2}(2-x^2)=e^{-x^2/2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

■

2. Επίλυση ορισμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων

Ορισμένες μερικές διαφορικές εξισώσεις (δηλαδή, εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από τις χωρικές μεταβλητές x, y, z όσο και από τη χρονική μεταβλητή t) ορίζονται κατά κανόνα σε πεπερασμένα πεδία. Υπάρχουν όμως προβλήματα που μαθηματικώς μοντελοποιούνται από μερικές διαφορικές εξισώσεις ορισμένες σε άπειρα πεδία. Για παράδειγμα, σε μονοδιάστατα προβλήματα είναι δυνατόν οι αντίστοιχες μερικές διαφορικές εξισώσεις να ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $(-\infty, \infty)$ ή $(0, \infty)$.

Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, ακολουθώνται τα παρακάτω τρία βήματα, τα οποία παρατίθενται στη μονοδιάστατη περίπτωση, όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι η $u(x, t)$:

Βήμα 1: Εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Fourier στο δοθέν πρόβλημα θεωρώντας ως μεταβλητή το x, οπότε παρουσιάζεται μια συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς t με άγνωστη συνάρτηση τη $\hat{u}(\omega, t)$.

Βήμα 2: Επιλύεται η συνήθης διαφορική εξίσωση, οπότε ευρίσκεται η $\hat{u}(\omega, t)$.

Βήμα 3: Η αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier της $\hat{u}(\omega, t)$ δίνει τη ζητούμενη $u(x, t)$.

Παραδείγματα επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier:

i) Η εξίσωση θερμότητας σε άπειρη ράβδο

Η περίπτωση αυτή δίνεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών.

(Ε) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$

(Α) $u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$ (αρχική κατανομή θερμοκρασίας).

Για σταθερό t, έστω $\hat{u}(\omega,t)$ η μετασχηματισμένη Fourier της $u(x,t)$, δηλαδή

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx .$$

Αν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Fourier στην εξίσωση (Ε), λαμβάνεται από την ιδιότητα $F\left(f^{(n)}(x)\right) = (i\omega)^n \cdot \hat{f}(\omega)$ η σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x} dx = a^2 (i\omega)^2 \hat{u}(\omega,t).$$

Με τον τρόπο αυτό, το αρχικό πρόβλημα (Ε)-(Α) μετασχηματίζεται στο

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\hat{u}(\omega,t) = -a^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

Η γενική λύση που επαληθεύει την προκύπτουσα συνήθη διαφορική εξίσωση είναι η

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega) e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Για t = 0, λαμβάνεται ότι $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) = A(\omega)$. Επομένως η λύση του προβλήματος (*) είναι

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Σε αυτό το σημείο θα αποδειχθεί ότι

$$F^{-1}(e^{-\omega^2/(4k)}) = \sqrt{2k}e^{-kx^2}, \qquad k>0,$$

Πράγματι, έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-kx^2}, k>0$ η οποία έχει μετασχηματισμό Fourier $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}e^{-i\omega x}dx$.

Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα από -∞ έως +∞ της f ισούται με $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}$

Το ολοκλήρωμα που προκύπτει εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier δεν υπολογίζεται με στοιχειώδεις πράξεις οπότε θα πραγματοποιηθεί παραγώγιση της ισότητας ως προς ω:

$$\hat{f}'(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-kx^2}e^{-i\omega x}dx=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-kx^2}}{2k}\right)'e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-kx^2}}{2k}e^{-i\omega x}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-kx^2}}{2k}(-i\omega)e^{-i\omega x}dx=-\frac{\omega}{2k}\hat{f}(\omega).$$

Για τη διαφορική εξίσωση που προέκυψε, $\hat{f}'(\omega)=-\dfrac{\omega}{2k}\hat{f}(\omega)$, η γενική λύση που την επαληθεύει είναι η $\hat{f}(\omega)=Ce^{-\omega^2/(4k)}$.

Για ω=0, λαμβάνεται: $C=\hat{f}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-kx^2}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}.$

(Χρησιμοποιήθηκε και η Υπόδειξη.)

Επομένως, η ζητούμενη μετασχηματισμένη Fourier είναι η

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-\omega^2/(4k)}.$$

Από την τελευταία ισότητα και από τη $f(x) = e^{-kx^2}, k > 0$ προκύπτει ότι

$$F^{-1}(e^{-\omega^2/(4k)}) = \sqrt{2k}e^{-kx^2}, k > 0$$

οπότε

$$(1) \qquad F^{-1}\left(e^{-a^2\omega^2 t}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4a^2t)},$$

ενώ από το θεώρημα της συνελίξεως προκύπτει ότι

$$u(x,t) = F^{-1}\left(\hat{f}(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} f(\xi)d\xi.$$

Επομένως η λύση της εξισώσεως θερμότητας σε άπειρη ράβδο είναι

$$(2) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \; .$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση που προκύπτει από την (1)

$$g_t(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$$

ονομάζεται **θερμικός πυρήνας** ή **πυρήνας Gauss** και παίζει σημαντικό ρόλο στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Επομένως, η λύση της εξισώσεως θερμότητας σε άπειρη ράβδο είναι η συνέλιξη της αρχικής κατανομής θερμότητας και του θερμικού πυρήνα.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα (E)-(A)

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \\ u(x,0) &= e^{-x} \end{aligned}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0.$$

Υπόδειξη: $u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \xi} d\xi = \dfrac{e^{t-x}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+2t-x)^2}{4t}} d\xi = \ldots$ και,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$.

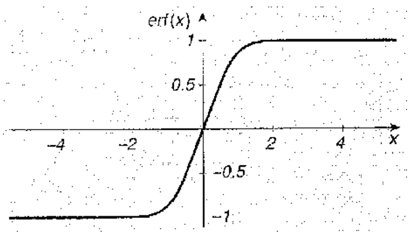
Λύση: Η λύση του προβλήματος, σύμφωνα με τη (2) για α = 1 και $f(x) = e^{-x}$,

είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \xi} d\xi = \frac{e^{t-x}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+2t-x)^2}{4t}} d\xi =$$

= (τίθεται $\dfrac{\xi + 2t - x}{\sqrt{4t}} = \eta$, οπότε $d\eta = \dfrac{d\xi}{\sqrt{4t}}$) $= \dfrac{e^{t-x}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = e^{t-x}$.

Πολλές φορές η λύση (2) της εξισώσεως θερμότητας μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της **συναρτήσεως σφάλματος** που χρησιμοποιείται τόσο στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, όσο και στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται με erf και ορίζεται ως εξής:



$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta, \ x \in \Re .$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το πρόβλημα (Ε)-(Α)

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4} u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0.$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 20, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λύση: Από τον τύπο (2) προκύπτει:

$$u(x,t) = \frac{20}{\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi = (\text{τίθεται } \frac{x-\xi}{\sqrt{t}} = \eta, \text{ οπότε } d\eta = -\frac{d\xi}{\sqrt{t}}) =$$

$$= -\frac{20}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x+1}{\sqrt{t}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta = 10\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

■

ii) Ταλάντωση δοκού άπειρου μήκους

Η ταλάντωση μιας δοκού άπειρου μήκους περιγράφεται από το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

(E) $u_{tt}(x,t) + a^2 u_{xxxx}(x,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0.$

(A) $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty.$

Έστω $\hat{u}(\omega,t)$ η μετασχηματισμένη Fourier της λύσεως $u(x,t)$. Τότε το πρόβλημα (E)-(A) παίρνει τη μορφή:

(**) $\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\hat{u}(\omega,t) + a^2\omega^4\hat{u}(\omega,t) = 0 \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \\ \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{g}(\omega) \end{cases}$

Η λύση που επαληθεύει το πρόβλημα αυτό είναι η

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\cos(a\omega^2 t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{a\omega^2}\sin(a\omega^2 t).$$

Επομένως η λύση του προβλήματος της ταλαντώσεως δοκού άπειρου μήκους είναι:

(3) $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left[\hat{f}(\omega)\cos(a\omega^2 t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{a\omega^2}\sin(a\omega^2 t)\right]d\omega.$$

Παράδειγμα: Να επιλυθεί το πρόβλημα της ταλαντώσεως δοκού άπειρου μήκους με αρχικές συνθήκες:

$u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$

$u_t(x,0) = 0$

Λύση: Η λύση (3) για την περίπτωση αυτή είναι

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \cos(a\omega^2 t) d\omega =$ (εφαρμογή της αρχικής κατανομής θερμοκρασίας της εξίσωσης θερμότητας σε άπειρη ράβδο, για k=1) $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4} \cos(a\omega^2 t) d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ I, όπου I είναι το ολοκλήρωμα του αμέσως προηγούμενου μέλους χωρίς το σταθερό όρο.

■

iii) Η εξίσωση Laplace στο άνω ημιεπίπεδο

Η περίπτωση αυτή περιγράφεται από το πρόβλημα συνοριακών τιμών

(Ε) $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad y>0.$

(Σ) $u(x,0)=f(x), \quad -\infty<x<\infty,$

$|u(x,y)|\le M, \quad -\infty<x<\infty, \quad y>0,$

όπου f(x), $-\infty<x<\infty$, είναι μια συνάρτηση τμηματικά λεία και απολύτως ολοκληρώσιμη.

Αν $\hat{u}(\omega,y)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier της u(x,y) ως προς τη μεταβλητή x και $\hat{f}(\omega)$ η μετασχηματισμένη Fourier της f(x), τότε το αρχικό πρόβλημα (Ε)-(Σ) λαμβάνει τη μορφή:

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,y)+\frac{d^2}{dy^2}\hat{u}(\omega,y)=0 \quad .$$

$$\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)$$

Η γενική λύση που επαληθεύει την προκύπτουσα συνήθη διαφορική εξίσωση είναι η

$$\hat{u}(\omega,y)=C_1(\omega)e^{-\omega y}+C_2(\omega)e^{\omega y},$$

από την οποία, λόγω των συνθηκών του προβλήματος, συμπεραίνεται ότι

$$\hat{u}(\omega,y)=\hat{f}(\omega)e^{-|\omega|y}.$$

Επειδή - όπως έχει υπολογισθεί στα προηγούμενα - ισχύει ότι

$$F^{-1}(e^{-|\omega|y})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{x^2+y^2}=g(x,y) \ ,$$

η λύση του προβλήματος θα είναι:

$$u(x,y)=(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

Επομένως η λύση του προβλήματος της εξισώσεως Laplace δίνεται από τον **ολοκληρωτικό τύπο Poisson για το ημιεπίπεδο:**

(4) $$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad y>0,$$

$$u(x,0)=\begin{cases}50, & -1<x<1\\ 0, & \text{διαφορετικα}\end{cases}.$$

Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα ως προς y, από x+1 έως x-1, της - y / (η^2 +y^2)

ισούται με $\left[Arc\tan\frac{1+x}{y}+Arc\tan\frac{1-x}{y}\right]$.

Λύση: Αν εφαρμοστεί ο τύπος (4) για την περίπτωση αυτή ευρίσκεται:

$$u(x,y)=\frac{50y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2},$$

από την οποία, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού x – ξ = η και της Υπόδειξης, υπολογίζεται:

$$u(x,y)=\frac{50}{\pi}\left[\text{Arctan}\frac{1+x}{y}+\text{Arctan}\frac{1-x}{y}\right].$$

■

Επιπροσθέτως, παρατίθενται μερικές εφαρμογές των ημιτονικών και συνημιτονικών μετασχηματισμών Fourier:

i) Η εξίσωση θερμότητας σε ημιφραγμένη ράβδο.

Πρόκειται για το ακόλουθο πρόβλημα:

(Ε) $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0.$

(Α) $u(x,0) = f(x), \quad x > 0.$

(Σ) $u(0,t) = 0, \quad t > 0.$

Το πρόβλημα μοντελοποιεί τη διάχυση θερμότητας σε μια ημιφραγμένη ράβδο με αρχική κατανομή θερμότητας f(x) και της οποίας η θερμότητα στο (πεπερασμένο) άκρο είναι μηδέν.

<u>Τρόπος αντιμετώπισης</u>: Λόγω της αρχικής συνθήκης (Α) θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Fourier ως προς τη μεταβλητή x, ενώ, λόγω της συνοριακής συνθήκης (Σ) θα χρησιμοποιηθεί ο ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier.

Αν

$F_S\big(u(x,t)\big) = \hat{u}_S(\omega,t),$

τότε το πρόβλημα (Ε)-(Α)-(Σ) λαμβάνει τη μορφή:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{u}_S(\omega,t) &= -\alpha^2\omega^2\hat{u}_S(\omega,t) \\ \hat{u}_S(\omega,0) &= \hat{f}_S(\omega) \end{aligned}$$

Η γενική λύση που επαληθεύει το πρόβλημα (*) είναι:

$\hat{u}_S(\omega,t) = \alpha(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t},$

οπότε για t = 0, διαπιστώνεται ότι:

$\hat{u}_S(\omega,t) = \hat{f}_S(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$

Από τη σχέση $F^{-1}\left(e^{-a^2\omega^2 t}\right)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4a^2t)}$, που υπολογίσθηκε στα προηγούμενα, ισχύει:

$F_s^{-1}\left(e^{-\alpha^2\omega^2 t}\right)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$ και άρα, η λύση του προβλήματος είναι:

$$u(x,t)=F_s^{-1}\left(\hat{f}_s(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}f(\xi)\frac{1}{\alpha\sqrt{2t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}}\right]d\xi.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet-Neumann:

(Ε) $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x < \alpha, \quad y > 0.$

(Σ) $$\begin{cases} \text{(i)} \ u_y(x,0) = 0, \ 0 < x < \alpha \\ \text{(ii)} \ u(0,y) = 0 \\ \text{(iii)} \ u(\alpha,y) = f(y), \ y > 0 \end{cases}$$

Εφαρμογή: Όταν α = 1 και $f(y) = e^{-y}$.

Υπόδειξη: Το αόριστο ολοκλήρωμα, ως προς t, της $e^{-t}\cos(\omega t)$ ισούται με $1/(1+\omega^2)\,[e^{-t}(\omega \sin(\omega t) - \cos(\omega t))] + c$.

Λύση: Επειδή y > 0 και το x μεταβάλλεται σε πεπερασμένο διάστημα θα χρησιμοποιηθεί μετασχηματισμός ως προς τη μεταβλητή y. Εξάλλου η συνοριακή συνθήκη (i) οδηγεί στη χρήση του συνημιτονικού μετασχηματισμού Fourier.

Αν η συνημιτονική μετασχηματισμένη της λύσεως είναι $\hat{u}_c(x,\omega)$, τότε:

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{u}_c(x,\omega) - \omega^2 \hat{u}_c(x,\omega) = 0.$$

(*) $$\begin{cases} \hat{u}_c(0,\omega) = 0 \\ \hat{u}_c(\alpha,\omega) = \hat{f}_c(\omega) \end{cases}$$

Η γενική λύση που επαληθεύει την προκύπτουσα συνήθη διαφορική εξίσωση είναι η

$\hat{u}_c(x,\omega) = A(\omega)\cosh(\omega x) + B(\omega)\sinh(\omega x).$

Αν τεθεί στη λύση x = 0 και x = α και χρησιμοποιηθούν οι συνθήκες (*) τότε, με sinh(0) = 0, cosh(0) = 1 αφού $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ και $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, ευρίσκεται ότι:

$$A(\omega)=0 \quad \text{και} \quad B(\omega)=\frac{\hat{f}_C(\omega)}{\sinh(\omega\alpha)}.$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι:

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{u}_C(x,\omega)\cos(\omega y)d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\hat{f}_C(\omega)}{\sinh(\omega\alpha)}\sinh(\omega x)\cos(\omega y)d\omega.$$

Εφαρμογή:

Ισχύει ότι (με χρήση και της Υπόδειξης)

$$F_c\left(e^{-y}\right)=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\cos(\omega t)dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}\left[e^{-t}(\omega\sin(\omega t)-\cos(\omega t))\right]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2},$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι:

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\frac{\sinh(\omega x)}{\sinh\omega}\cos(\omega y)d\omega.$$

∎

ii) Η εξίσωση Laplace σε τεταρτημόριο

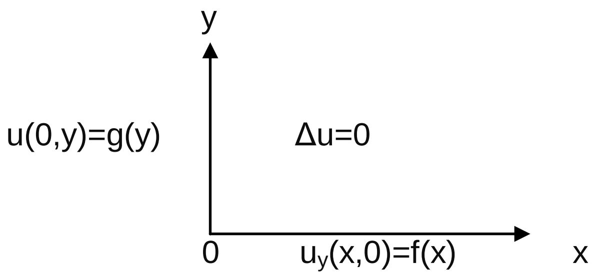
Πρόκειται για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

(E) $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x > 0, \; y > 0.$

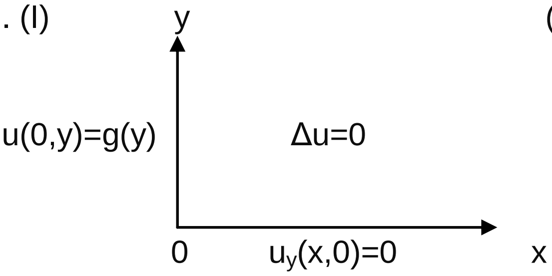
(Σ) $\begin{cases} u(0,y) = g(y), \; y > 0 \\ u_y(x,0) = f(x), \; x > 0 \end{cases}$

<u>Τρόπος αντιμετώπισης</u>: Το πρόβλημα αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους προβλήματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

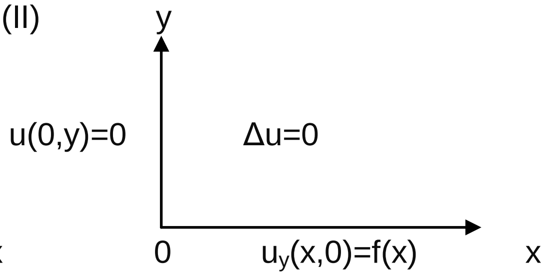
.



. (I)



(II)



Θα εξεταστεί καταρχάς το πρόβλημα (I):

(E) $\Delta u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x > 0, \; y > 0$

(Σ,I) $\begin{cases} u(0,y) = g(y), \; y > 0 \\ u_y(x,0) = 0, \; x > 0 \end{cases}$

Η πρώτη από τις συνθήκες (Σ,I) υποδεικνύει να χρησιμοποιηθεί μετασχηματισμός Fourier ως προς τη μεταβλητή y, ενώ η (Σ,II) να χρησιμοποιηθεί συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier.

Έτσι, αν $F_c\left(u(x,\omega)\right) = \hat{u}(x,\omega)$, τότε θα πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα:

(*) $$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}\hat{u}(x,\omega) - \omega^2\hat{u}(x,\omega) = 0 \\ &\hat{u}(0,\omega) = \hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

Η γενική λύση που επαληθεύει την προκύπτουσα συνήθη διαφορική εξίσωση είναι:

$\hat{u}(x,\omega) = A(\omega)e^{\omega x} + B(\omega)e^{-\omega x}$,

Για να είναι η λύση φραγμένη, όταν το $x \to +\infty$, θα πρέπει A(ω) = 0, οπότε λόγω της συνοριακής συνθήκης της (*) ευρίσκεται ότι:

$\hat{u}(x,\omega) = \hat{g}(\omega)e^{-\omega x}$.

Στα προηγούμενα έχει αποδειχθεί ότι $F_c^{-1}\left(e^{-\omega x}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{x^2 + y^2}$, οπότε προκύπτει η λύση του προβλήματος (I):

$$u_I(x,y) = \frac{x}{\pi}\int_0^{\infty} g(\xi)\left[\frac{1}{x^2 + (y-\xi)^2} + \frac{1}{x^2 + (y+\xi)^2}\right]d\xi$$

Το πρόβλημα (ΙΙ) έχει τη μορφή:

(Ε) $\Delta u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \;\; x > 0, \;\; y > 0$

(Σ,ΙΙ) $\begin{cases} u(0,y) = 0, \;\; y > 0 \\ u_y(x,0) = f(x), \;\; x > 0 \end{cases}.$

Με εργασία, όπως και στο πρόβλημα (Ι), ως προς τη μεταβλητή x, παρουσιάζεται το πρόβλημα:

$$\frac{d^2}{dy^2}\hat{u}(\omega,y) - \omega^2\hat{u}(\omega,y) = 0$$

(**) $\begin{cases} \hat{u}(0,y) = 0 \\ u_y(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}.$

Με τον ίδιο τρόπο με το πρόβλημα (Ι) διαπιστώνεται ότι $\hat{u}(\omega,y) = -\frac{\hat{f}(\omega)}{\omega}e^{-\omega y}$

και ότι η λύση του προβλήματος (ΙΙ) είναι:

$$u_{II}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} -\frac{\hat{f}(\omega)}{\omega}e^{-\omega y}\sin(\omega x)d\omega.$$

Τέλος, η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$u(x,y) = u_I(x,y) + u_{II}(x,y).$

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\Delta u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u_x(0,y) = 0, \ \ y > 0$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$

Λύση:

Εφαρμόζεται συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier ως προς τη μεταβλητή x, οπότε για $F_c\left(u(x,y)\right) = \hat{u}\left(\omega, y\right)$ το πρόβλημα λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d^2}{dy^2}\hat{u}(\omega, y) - \omega^2 \hat{u}(\omega, y) = 0$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega},$$

αφού $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \cos(\omega x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}.$

Ισχύει ότι

$$\hat{u}(\omega, y) = A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y} \qquad .$$

Η επίλυση του τελευταίου προβλήματος δίνει τη λύση:

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)e^{-\omega y}d\omega.$$

■

2. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ο μετασχηματισμός Fourier δε μπορεί να εφαρμοστεί, όπως έχει φανεί ήδη, σε συναρτήσεις που δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες στο R. Ένας άλλος ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που έχει πολλές εφαρμογές σε πρακτικά προβλήματα της τεχνολογίας που αφορούν σε μηχανικά ή ηλεκτρικά συστήματα, στα οποία επιδρούν ασυνεχείς ή κρουστικές δυνάμεις, είναι ο μετασχηματισμός Laplace.

Ορισμός: Έστω $f:[0,\infty)\to C$ και $s\in\mathbb{C}$. Ο μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται ως εξής:

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

■

Η ποσότητα εντός του ολοκληρώματος, εκτός της f(t), καλείται πυρήνας του μετασχηματισμού.

Κατά τη μελέτη του μετασχηματισμού Laplace, σημαντική είναι και η έννοια της συνάρτησης εκθετικής τάξεως α:

Ορισμός: Η συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι εκθετικής τάξεως α αν υπάρχουν θετικές σταθερές Μ, Τ και α ώστε να ισχύει:

$$|f(t)|\le M\cdot e^{\alpha t}$$

για κάθε $t\ge T$.

■

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει ικανές (αλλά όχι αναγκαίες) συνθήκες για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης.

<u>Πρόταση</u>: Αν η $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξεως α, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της f για κάθε s με Res > α.

<u>Απόδειξη</u>:

Είναι:

$$\left|L\{f(t)\}\right| \le \int_0^T \left|e^{-st}f(t)\right|dt + M\int_T^\infty \left|e^{-(s-\alpha)t}\right|dt \qquad (1)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο σύμφωνα με τα άκρα ολοκλήρωσης και το δεύτερο ανάγεται στο $\int_T^\infty e^{-(Res-\alpha)t}dt$ που συγκλίνει ανν Res>α.

■

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της f(t) = $e^{\alpha t}$, $\alpha \in C$.

<u>Λύση</u>: Το ολοκλήρωμα

$L\{e^{\alpha t}\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt$ έχει πεπερασμένη τιμή στο πεδίο όπου Res > Reα και είναι $F(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$.

Έτσι, $e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{s-\alpha}$.

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται με τον εναλλακτικό συμβολισμό που αφορά το μετασχηματισμό Laplace.

■

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της f(t) = cosαt, $\alpha \in C$.

Λύση: Είναι:

$$L\{\cos\alpha t\} = F(s) = L\left\{\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}\right)\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-st}e^{i\alpha t} + e^{-st}e^{-i\alpha t}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(s-i\alpha)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(s+i\alpha)t}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\alpha} + \frac{1}{s+i\alpha}\right) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

ή $\cos at \risingdotseq \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $L\{\sin\alpha t\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$.

Όλα αυτά ισχύουν με την προϋπόθεση Res > –Imα οπότε και τα ολοκληρώματα έχουν πεπερασμένες τιμές.

■

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Λύση:

$$L\{H(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

όπου το ολοκλήρωμα ορίζεται στο ημιεπίπεδο με Res > 0, οπότε

$H(t) \risingdotseq \frac{1}{s}$ (1)

■

Δύο συνήθεις μετασχηματισμοί Laplace δε, είναι οι εξής:

i) $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $n \in \aleph$

ii) $L\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$, $\mathrm{Re}\, s > 0$

Σημειώνεται ότι, η συνάρτηση Γάμμα συμβολίζεται με Γ(p) και ορίζεται από το εξής ολοκλήρωμα:

$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}\ x^p\ dx$.

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, καθώς το x τείνει στο άπειρο, για όλα τα p.

■

Επιπροσθέτως, ισχύει η εξής πρόταση που αφορά στην αναλυτικότητα του μετασχηματισμού Laplace:

<u>Πρόταση</u>: Αν η f(t) είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξεως α, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

είναι ολόμορφη συνάρτηση (συνεκτική, δηλαδή σε κάθε σημείο μίας συμπαγούς περιοχής είναι μονοσήμαντη, συνεχής και έχει παράγωγο) στο δεξιό ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη σχέση Res>α.

■

2.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

(1) Γραμμικότητα: Αν $f(t) \risingdotseq F(s)$ και $g(t) \risingdotseq G(s)$, τότε $\kappa f(t) + \lambda g(t) \risingdotseq \kappa F(s) + \lambda G(s)$ όπου $\kappa,\lambda \in C$.

<u>Παράδειγμα</u>: Από τον τύπο $\sinh\omega t = \dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$ υπολογίζεται ότι

$$L\{\sinh\omega t\} = L\left\{\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{\omega t}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-\omega t}\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$ ή αλλιώς

$\sinh\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ και ομοίως, από τον τύπο $\cosh\omega t = \dfrac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$

υπολογίζεται ότι $\cosh\omega t \risingdotseq \dfrac{s}{s^2 - \omega^2}$

(2) Αν $f(t) \risingdotseq F(s)$ τότε, $\forall \lambda \in C$ ισχύει

$$L\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s - \lambda), \ \operatorname{Re} s > \alpha + \operatorname{Re}\lambda.$$

Πράγματι, είναι

$$L\{e^{\lambda t} f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-\lambda)t} dt = F(s-\lambda) \ \text{ ή } \ e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(s-\lambda)$$

Οπότε, επειδή είναι γνωστό ότι $\cos\alpha t \risingdotseq \dfrac{s}{s^2 + \alpha^2}$, λαμβάνεται ότι

$e^{\lambda t}\cos\alpha t \risingdotseq \dfrac{s - \lambda}{(s-\lambda)^2 + \alpha^2}$ και ομοίως ,επειδή είναι γνωστό ότι $t \risingdotseq \dfrac{1}{s^2}$

λαμβάνεται ότι $e^{\alpha t} t \risingdotseq \dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$

(3) Η συνάρτηση Heavyside, όπως έχει ήδη γραφεί, είναι η

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

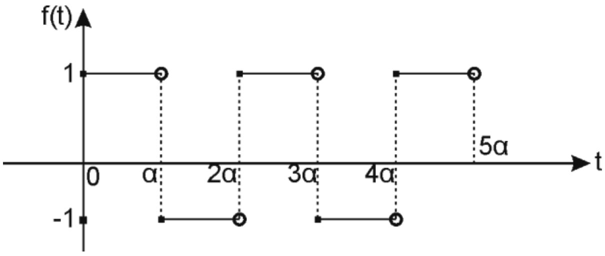
Έστω $f(t) \doteqdot F(s)$, $\alpha \in \Re_+^*$ τότε

$H(t-\alpha)\, f(t) \doteqdot e^{-\alpha s} F(s)$ και αν f(t) = 1

$$H(t-\alpha) \doteqdot \frac{e^{-\alpha s}}{s}$$

<u>Παράδειγμα</u>:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2n\alpha \leq t < (2n+1)\alpha \\ -1, & (2n+1)\alpha \leq t < (2n+2)\alpha \end{cases} \quad , \; n \in \aleph$$



Ισχύει ότι:

$$f(t) = H(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H(t - n\alpha)$$

Από τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\alpha s}\right) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{2e^{-\alpha s}}{1+e^{-\alpha s}}\right)$$

■

2.3 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Θεώρημα (τύπος Mellin): Έστω f(t) μία συνάρτηση που είναι τμηματικά λεία και εκθετικής τάξης α. Αν F(s) (Res > α) είναι ο μετασχηματισμός Laplace της f, τότε

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{st}F(s)ds,\ b > \alpha$$

Απόδειξη: Από το Πόρισμα του Θεωρήματος Ολοκληρωτικής Αναπαράστασης Fourier ισχύει ότι για b > α,

$$e^{-bt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bu}f(u)e^{-ivu}du\right)e^{ivt}dv \qquad (1)$$

Θέτοντας s = b + iv, προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bu}f(u)e^{-ivu}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-su}du = F(s)$$

αφού f(t) = 0 για t < 0.

Άρα, από την (1) υπολογίζεται ότι

$$e^{-bt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt}F(s)dv,$$

δηλαδή

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(b+iv)}F(s)dv,$$

οπότε

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{st}F(s)ds.$$

■

Παρατήρηση: Στον τύπο του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, η ολοκλήρωση γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο κατά μήκος μίας ευθείας που είναι παράλληλη προς το φανταστικό άξονα και βρίσκεται δεξιά από την ευθεία Res = α. Επιπροσθέτως, η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του b > α.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω ότι η F(s) είναι ένας μετασχηματισμός Laplace που έχει πεπερασμένο πλήθος πόλων $s_1, s_2, \ldots, s_n$ αριστερά της κατακόρυφης γραμμής Res = b. Αν η συνάρτηση sF(s) είναι φραγμένη για $R \to \infty$ τότε ισχύει:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{Re\,s}\left(e^{st}F(s), s_\kappa\right)$$

■

<u>Πρόταση</u>:

Αν η f έχει έναν πόλο τάξεως i στο z_1, τότε :

Res(f, z_1)=$\lim_{z\to z_1} 1/(i-1)! \frac{d^n}{dz^n}[(z-z_1)^i f(z)]$

όπου n=i-1 .

■

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^3}$.

<u>Λύση</u>: Η F(s) έχει το s = –1 πόλο τάξης 3, οπότε

$$f(t) = \mathrm{Re\,s}\left\{e^{st}\frac{s}{(s+1)^3}, -1\right\} = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{d^2}{ds^2}\left(se^{st}\right) = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)e^{-t},\ t > 0 .$$

■

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^3}$.

Λύση: Η F έχει τα $s_1 = i$ και $s_2 = -i$ πόλους τάξης 3 οπότε

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{st}}{(s+i)^3}\right]''_{s=i}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{st}}{(s-i)^3}\right]''_{s=-i}=\frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{1}{8}t^2\sin t$$

■

Θεώρημα συνέλιξης: Αν $L\{f_1(t)\}=F(s)$ και $L\{f_2(t)\}=G(s), \operatorname{Re}s>\alpha$ τότε

$L\{(f_1*f_2)(t)\}=L\{f_1(t)\}\cdot L\{f_2(t)\}=F(s)\cdot G(s), \operatorname{Re}s>\alpha.$

■

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$.

Λύση: Είναι γνωστό ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ και ότι $L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{s}}$, οπότε

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t=\int_0^t\frac{e^{t-u}}{\sqrt{\pi u}}du\overset{u=\tau^2}{=}\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau=e^t\cdot\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right).$$

■

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$ καλείται **συνάρτηση σφάλματος**, ενώ η συνάρτηση $\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)$ καλείται **συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος**.

■

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)=J_0\left(2\sqrt{t}\right)$, όπου J_0 η συνάρτηση Bessel τάξης 0.

<u>Λύση</u>: Η συνάρτηση Bessel $J_0(t)$ τάξης 0 ορίζεται μέσω της δυναμοσειράς

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n},$$

οπότε

$$J_0(2\sqrt{t})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}t^n$$

άρα

$$L\left\{J_0(2\sqrt{t})\right\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}t^n dt$$

Λαμβάνεται ότι:

$$L\left\{J_0(2\sqrt{t})\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}L\left\{t^n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/s)^n}{n!s}=\frac{e^{-1/s}}{s}$$

■

2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

(1) Επίλυση ορισμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων

Εάν σε μία ολοκληρωτική εξίσωση εμφανίζεται όρος σε μορφή συνέλιξης συναρτήσεων, τότε λαμβάνεται η Λαπλασιανή εξίσωσή της και υπολογίζεται η $F(s) = L\{y(t)\}$. Ακολούθως, ευρίσκεται η λύση $y(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

Πιο συγκεκριμένα, εάν η ολοκληρωτική εξίσωση έχει τη μορφή

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(t-u)f(u)du,\ t \in [0, \infty),$$

όπου f άγνωστη συνάρτηση και g, K γνωστές συναρτήσεις, τότε εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Laplace οπότε:

$$F(s) = G(s) + K(s)\,F(s) \text{ ή } F(s) = \frac{G(s)}{1-K(s)}.$$

Υποθέτοντας ότι $|K(s)| < 1$, ισχύει ότι

$$\frac{G(s)}{1-K(s)} = G(s) + \sum_{n=1}^{\infty} (K(s))^n G(s).$$

Από το Θεώρημα συνέλιξης (επεκτείνεται και για περισσότερες -από δύο- συναρτήσεις) προκύπτει ότι

$$L^{-1}\left\{(K(s))^n\right\} = \underbrace{K(t) * K(t) * \ldots * K(t)}_{\text{n φορές}} = K_n(t)$$

Επομένως, επιστρέφοντας στην αρχική, ισχύει ότι

$$f(t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t K_n(t-u)g(u)du \quad (1)$$

Αυτή είναι η λύση, υπό μορφή σειράς Liouville-Newman, της αρχικής ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t)=4t-3\int_0^t y(u)\sin(t-u)du.$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα προκύπτει ως η συνέλιξη των y(t), sint, ήτοι

$$\int_0^t y(u)\sin(t-u)du=y(t)*\sin t,$$

είναι:

$$L\{y(t)\}=F(s)$$

$$L\{4t\}=\frac{4}{s^2}$$

άρα $L\left\{\int_0^t y(u)\sin(t-u)du\right\}=L\{y(t)*\sin t\}=L\{y(t)\}L\{\sin t\}=F(s)\dfrac{1}{s^2+1}$.

Οπότε, με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην αρχική ολοκληρωτική εξίσωση, λαμβάνεται:

$$F(s)=\frac{4}{s^2}-3\frac{F(s)}{s^2+1}\Rightarrow F(s)\left(1+\frac{3}{s^2+1}\right)=\frac{4}{s^2}\Rightarrow F(s)=\frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)}.$$

Και, αναλύεται η F(s) σε απλά κλάσματα:

$$F(s)=\frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+4}\Rightarrow 4s^2+4=s^3(A+\Gamma)+s^2(B+\Delta)+4sA+4B.$$

Λαμβάνεται, λοιπόν, Α = Γ = 0, Β = 1, Δ = 3, οπότε:

$$y(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=t+\frac{3}{2}\sin 2t.$$

■

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί η λύση υπό μορφή σειράς Liouville-Newman της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$f(t) = g(t) + \int_0^t (t-u) f(u) du, \ t > 0$$

Λύση:

Έστω $K_n(t) = \underbrace{t * t * ... * t}_{n \text{ φορές}}$, τότε επαγωγικώς μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$K_n(t) = \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Οπότε, σύμφωνα με τον τύπο (1) της λύσης, υπό μορφή σειράς Liouville-Newman, λαμβάνεται:

$$f(t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t g(u) \frac{(t-u)^{2n-1}}{(2n-1)!} du.$$

■

(2) Επίλυση ορισμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων

Ο μετασχηματισμός Laplace δύναται να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ορισμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Είναι ιδιαιτέρως χρήσιμος στην περίπτωση που οι μεταβλητές κυμαίνονται σε άπειρα διαστήματα αρκεί το διάστημα στο οποίο κινείται μία τουλάχιστον από τις μεταβλητές να μην περιέχει το $-\infty$. Από την άλλη δε, η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων δύναται να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν μία τουλάχιστον μεταβλητή κινείται σε πεπερασμένο διάστημα. Για την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης ακολουθώνται τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Θεωρείται ως μεταβλητή το t και μετασχηματίζονται τα μέλη της διαφορικής εξίσωσης κατά Laplace ως προς t, οπότε εμφανίζεται μία διαφορική εξίσωση που εμπεριέχει τη μετασχηματισμένη συνάρτηση U(x,s) χρησιμοποιώντας παράλληλα την ιδιότητα $L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$.

Βήμα 2: Θεωρείται ως μεταβλητή το x, ενώ το s θεωρείται σταθερά και μετασχηματίζεται η συνθήκη που δε χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο βήμα κατά Laplace. Έπειτα, επιλύεται η προηγούμενη διαφορική εξίσωση.

Βήμα 3: Θεωρείται ως μεταβλητή το s, ενώ το x θεωρείται σταθερά και υπολογίζεται η λύση ευρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα

(Ε) $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$,

(Σ) $u(0, t) = f(t)$, $t \geq 0$,

(Α) $u(x, 0) = 0$, $x \geq 0$.

Λύση: Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιεί τη μεταφορά θερμότητας σε μια άπειρη μονωμένη -από το περιβάλλον- ράβδο, της οποίας η αρχική θερμοκρασία είναι 0° και το άκρο της τροφοδοτείται με θερμότητα f(t).

Αν U(x,s) είναι η μετασχηματισμένη Laplace της u(x,t) ως προς τη μεταβλητή t και εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός στην (Ε), τότε λαμβάνεται η διαφορική εξίσωση $sU(x,s) - u(x,0) = \alpha^2 \dfrac{d^2U(x,s)}{dx^2}$, η οποία λόγω της (Α) παίρνει τη μορφή $\alpha^2 \dfrac{d^2U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) = 0$, με γενική λύση $U(x,s) = A(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x} + B(s)e^{\frac{-\sqrt{s}}{\alpha}x}$.

Επειδή αναζητώνται φραγμένες λύσεις, θα πρέπει A(s) = 0. Εξάλλου από την (Σ) προκύπτει ότι U(0,s) = F(s), όπου F(s) = L{f(t)}. Επομένως, η γενική λύση είναι $U(x,s) = F(s)e^{\frac{-\sqrt{s}}{\alpha}x}$,

από την οποία, με τη βοήθεια του τύπου $L\{\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\alpha^2/(4t)}\} = e^{-\alpha\sqrt{s}}$,

λαμβάνεται η λύση

$$u(x,t) = L^{-1}\left(F(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x}\right) = \frac{x}{2\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} d\tau.$$

■

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το πρόβλημα

(Ε) $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$,

(Σ) $u(0,t) = T_o$, $t > 0$,

(Α) $u(x,0) = T_1$, $x > 0$.

Λύση: Αν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Laplace στην (Ε), τότε λαμβάνεται ότι $sU(x,s) - T_1 = \alpha^2 \dfrac{d^2U(x,s)}{dx^2}$, της οποίας η γενική λύση είναι

$$U(x,s) = A(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x} + B(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x} + \frac{1}{s}T_1.$$

Όπως και στο παράδειγμα 1, θα πρέπει A(s) = 0. Εξάλλου, επειδή $U(0,s) = \dfrac{T_o}{s}$, θα είναι $B(s) = \dfrac{1}{s}(T_o - T_1)$, οπότε

$$U(x,s) = \frac{1}{s}(T_o - T_1)e^{\frac{\sqrt{s}}{\alpha}x} + \frac{1}{s}T_1.$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση $L\{\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\alpha^2/(4t)}\} = e^{-\alpha\sqrt{s}}$, η λύση του προβλήματος γράφεται ως εξής:

$$u(x,t) = L^{-1}\big(U(x,s)\big) = (T_o - T_1)\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\alpha}\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2\tau}} d\tau + T_1.$$

Η λύση δύναται να γραφεί και με τη βοήθεια της συναρτήσεως σφάλματος erf ως εξής:

$$u(x,t) = (T_1 - T_o)erf\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right) + T_1.$$

■

Παράδειγμα 3: Να λυθεί το πρόβλημα

(Ε) $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(t),\ \ x > 0,\ t > 0,$

(Σ) $u(0,t) = 0,\ \ t > 0,$

(Α) $u(x,0) = 0$ και $u_t(x,0) = 0,\ \ x > 0.$

Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιεί την κίνηση χορδής άπειρου μήκους, της οποίας το ένα άκρο ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων, υπό την επενέργεια εξωτερικής δυνάμεως f(t), που συμβολίζει το -ανά μονάδα μήκους- ποσό της δυνάμεως.

Αν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Laplace στην (Ε) και ληφθεί υπόψη η αρχική συνθήκη (Α), τότε λαμβάνεται η διαφορική εξίσωση

$$s^2 U(x,s) = c^2 \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} + F(s),$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$U(x,s) = A(s)e^{\frac{s}{\alpha}x} + B(s)e^{-\frac{s}{\alpha}x} + \frac{F(s)}{s^2}.$$

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, θα πρέπει A(s) = 0 καθώς επίσης και, λόγω της (Σ), θα πρέπει U(0,s) = 0, οπότε $B(s) = -\frac{F(s)}{s^2}$.

Επομένως,

$$U(x,s)=F(s)\left(\frac{1-e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}\right).$$

Επειδή $\quad g(t)=L^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}\right\}=t-H\left(t-\frac{x}{c}\right)\left(t-\frac{x}{c}\right),$

η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x,t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\left[t-H\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\right]d\tau.$$

■

Παράδειγμα 4: Μια ελαστική ράβδος μήκους ℓ είναι σταθερή στο ένα άκρο, ενώ στο άλλο υπόκειται στη δύναμη Fsin(ωt). Η αρχική μετατόπιση και η ταχύτητα της ράβδου είναι μηδέν. Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης της ράβδου.

Λύση: Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx},\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ \ 0 < x < \ell \\ u(0,t) = 0 \ \text{και}\ u_x(\ell,t) = \dfrac{F}{E}\sin\omega t, \end{cases}$$

όπου E είναι το μέτρο Young του υλικού και $c = \sqrt{E/\rho}$, όπου ρ η γραμμική πυκνότητα της ράβδου. Έστω U(x,s) ο μετασχηματισμός Laplace της u(x,t) ως προς τη μεταβλητή t. Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην (1) δίνει

$$(2)\qquad \begin{cases} s^2 U(x,s) = c^2 U_{xx}(x,s) \\ U(0,s) = 0 \ \text{και}\ U_x(\ell,s) = \dfrac{F}{E}\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{cases}$$

Η λύση του προβλήματος (2) είναι:

$$U(x,s) = \frac{F}{E}\frac{c\omega}{s(s^2+\omega^2)}\cdot\frac{\sinh\frac{sx}{c}}{\cosh\frac{s\ell}{c}}.$$

όπου, οι πόλοι s_i της συναρτήσεως U(x,s) είναι οι

$$0,\ \pm i\omega\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \pm\frac{c}{\ell}\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \kappa=1,2,\ldots$$

και είναι, όλοι, απλοί

και,σύμφωνα με το θεώρημα σχετικώς με τους πόλους του μετασχηματισμού Laplace, ισχύει ότι

$$u(x,t) = \sum_i \operatorname{Res}\left(e^{st}U(x,s),\, s_i\right)$$

με τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πόλων να είναι:

(i) $$\operatorname{Res}\left(e^{st}U(x,s),\ 0\right)=0$$

(ii) $$\operatorname{Res}\left(e^{st}U(x,s),\ \pm i\omega\right)=\frac{Fc\omega}{E}\left(\mp e^{\pm i\omega t}\,\frac{i\sin\dfrac{\omega x}{c}}{2\omega^{2}\cos\dfrac{\omega\ell}{c}}\right)$$

(iii) $$\operatorname{Res}\left(e^{st}U(x,s),\ \pm\frac{c}{\ell}\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\pi\right)=$$

$$=\frac{Fc\omega}{E}\left\{\pm\frac{8i(-1)^{\kappa}\ell^{2}\sin\dfrac{(2\kappa-1)\pi x}{\ell}}{(2\kappa-1)\pi\left[4\ell^{2}\omega^{2}-(2\kappa-1)^{2}c^{2}\pi^{2}\right]}e^{\pm i(2\kappa-1)c\pi t/2\ell}\right\}$$

■

Παράδειγμα 5: Θεωρείται το πρόβλημα της θερμικής αγωγιμότητας σε μια ημιάπειρη ράβδο $x \geq 0$. Υποτίθεται ότι η αρχική θερμοκρασία είναι μηδέν. Για x = 0 η θερμοκρασία είναι σταθερή u(0,t) = K.

Λύση: Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x > 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = 0, \ x > 0 \\ u(0,t) = \kappa, \ t > 0 \end{cases}$$

Έστω U(x,s) ο μετασχηματισμός Laplace της u(x,t) ως προς τη μεταβλητή t. Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace δίνει:

$sU(x,s) = \alpha^2 U_{xx}(x,s)$ (3)

$$U(0,s) = \frac{K}{s}. \qquad (4)$$

Η (3) είναι μια γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση με λύση:

$$U(x,s) = A(s)e^{-(\sqrt{s}/\alpha)x} + B(s)e^{+(\sqrt{s}/\alpha)x}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\infty} U(x,s) = 0$, θα πρέπει B(s) = 0. Εξάλλου, λόγω της συνθήκης (4), θα είναι A(s) = K/s . Επομένως,

$$U(x,s) = \frac{Ke^{-(\sqrt{s}/\alpha)x}}{s},$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι:

$$u(x,t) = K \cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right).$$

■

3. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HANKEL

3.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίστηκε ο μετασχηματισμός Fourier και μελετήθηκαν διάφορα προβλήματα σε μη φραγμένα διαστήματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Σε προβλήματα με πολικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες, όταν η πολική ακτίνα r διατρέχει το διάστημα $[0,+\infty)$, η χρήση του μετασχηματισμού Hankel, ο οποίος θα μελετηθεί αμέσως τώρα, είναι πιο αποτελεσματική.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι αντίστοιχο του θεωρήματος ολοκληρωτικής αναπαραστάσεως Fourier.

<u>Θεώρημα</u>: Αν η συνάρτηση $\sqrt{r}f(r)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και η f(r) είναι κατά τμήματα λεία σε κάθε φραγμένο διάστημα, τότε ισχύει:

$$\frac{f(r+)+f(r-)}{2}=\int_0^\infty pA(p)J_n(pr)dp,\ 0<r<\infty,$$

όπου

$A(p)=\int_0^\infty rf(r)J_n(pr)dr$ και J_n είναι η συνάρτηση Bessel τάξεως n, δηλαδή η

αναλυτική λύση της (όπου n το ν):

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

(διαφορική εξίσωση Bessel).

■

Στα επόμενα υποτίθεται, χωρίς να αναφέρεται ρητώς, ότι η συνάρτηση f(r) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος.

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\hat{f}_n$, η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$\hat{f}_n(p) = \int_0^\infty r f(r) J_n(pr)\,dr, \ p \geq 0,$$

ονομάζεται **μετασχηματισμένη Hankel της f τάξεως n.**

Η απεικόνιση $\mathbf{H_n}$, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε συνάρτηση f(r) τη συνάρτηση $\hat{f}_n(p)$ ονομάζεται **μετασχηματισμένη Hankel,** δηλαδή

$$H_n\{f(r)\} = \hat{f}_n(p) = \int_0^\infty r f(r) J_n(pr)\,dr.$$

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Hankel** δίνεται από την ισότητα

$$H_n^{-1}\left\{\hat{f}_n(p)\right\} = f(r) = \int_0^\infty p \hat{f}_n(p) J_n(pr)\,dp.$$

■

Παρατίθενται οι ακόλουθες ιδιότητες του μετασχηματισμού Hankel:

(i) $-pH_0\{f(r)\} = H_1\{f'(r)\}$,

(ii) $H_0\left\{f'(r) + \frac{1}{r}f(r)\right\} = pH_1\{f(r)\}$,

(iii) $H_0\left\{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)\right\} = -p^2 H_0\{f(r)\}$.

■

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

(Ε) $$u_{rr}(r,z)+\frac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0, \quad r>0, \; z>0,$$

(Σ) $$u_z(r,0)=\begin{cases} -\dfrac{Q}{\alpha^2}, \; 0\le r<R \\ 0, \; r>R \end{cases}$$

Το πρόβλημα προτυποποιεί την κατανομή θερμοκρασίας μόνιμης κατάστασης στον άνω ημίχωρο (z > 0), όταν ένας δίσκος $0\le r<R$ στο επίπεδο xOy εκπέμπει θερμότητα με σταθερό ρυθμό Q, ενώ το υπόλοιπο τμήμα του επιπέδου (r > R) είναι μονωμένο.

Αν U(p,z) είναι η μετασχηματισμένη Hankel τάξεως 0 της u(r,z) ως προς τη μεταβλητή r τότε, με την εφαρμογή του μετασχηματισμού στην (Ε) και στη (Σ) και εάν ληφθεί υπόψη η ιδιότητα (iii), λαμβάνεται:

$$-p^2U(p,z)+\frac{d^2U(p,z)}{dz^2}=0,$$
$$\frac{dU}{dz}(p,0)=R\frac{Q}{\alpha^2}\frac{J_1(Rp)}{p}.$$

Η λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι:

$$U(p,z)=A(p)e^{-pz}+B(p)e^{pz}.$$

Επειδή αναζητώνται φραγμένες λύσεις, θα πρέπει B(p) = 0, οπότε

$$U(p,z)=A(p)e^{-pz}, \; \frac{dU(p,z)}{dz}=-pA(p)e^{-pz},$$

και

$$\frac{dU(p,0)}{dz}=-pA(p)=R\frac{Q}{\alpha^2}\frac{J_1(Rp)}{p},$$

που σημαίνει ότι:

$$A(p) = \frac{QR}{\alpha^2 p^2} J_1(Rp) \quad \text{και} \quad U(p,z) = \frac{QR}{\alpha^2 p^2} J_1(Rp) e^{-pz}.$$

Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Hankel λαμβάνεται η λύση:

$$u(r,z) = \frac{QR}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{e^{-pz}}{p} J_1(Rp) J_0(pr) dp.$$

■

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών της κυματικής εξισώσεως σε πολικές συντεταγμένες:

(E) $$u_{tt}(r,t) = c^2\left(u_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}u_r(r,t)\right),\ r>0,\ t>0,$$

(A) $u(r,0) = f(r)$, $u_t(r,0) = g(r)$, $r > 0$.

Το πρόβλημα περιγράφει την ταλάντωση μιας πολύ μεγάλης μεμβράνης, όταν είναι γνωστό ότι η αρχική απομάκρυνση και η αρχική ταχύτητα είναι συναρτήσεις της αποστάσεως r από ένα σταθερό σημείο.

Αν U(p,t) είναι η μετασχηματισμένη Hankel τάξεως 0 της λύσεως τότε, με εφαρμογή του μετασχηματισμού στις (E) και (A), λαμβάνεται:

(*) $$\begin{cases} U_{tt}(p,t) = -c^2p^2U(p,t),\ t>0 \\ U(p,0) = F(p),\ U_t(p,0) = G(p) \end{cases},$$

όπου F(p), G(p) είναι οι μετασχηματισμένες Hankel τάξεως 0 των συναρτήσεων f(r) και g(r) αντιστοίχως.

Η λύση του προβλήματος (*) είναι:

$$U(p,t) = F(p)\cos(pct) + \frac{G(p)}{pc}\sin(pct),$$

οπότε η λύση του προβλήματος (E)-(A) είναι:

$$u(r,t) = \int_0^\infty pF(p)\cos(pct)J_0(pr)dp + \frac{1}{c}\int_0^\infty G(p)\sin(pct)J_0(pr)dp.$$

■

Βιβλιογραφία

1. Κραββαρίτης Δ.Χ., *Εφαρμοσμένη μιγαδική ανάλυση*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2006.
2. Κραββαρίτης Δ.Χ., Παντελίδης Γ.Ν., *Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003.
3. Κραββαρίτης Δ.Χ., Παντελίδης Γ.Ν., Χατζησάββας Ν.Σ., *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1990.
4. Τραχανάς Σ.Λ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο Κρήτης 2004.
5. Boyce W.E., DiPrima R.C., *Elementary differential equations and boundary value problems / 6th edition*, John Wiley and Sons, New York 1997.
6. James J.F., *A student's guide to Fourier transforms*, Cambridge University Press, United Kingdom 1995.
7. Sidorov Y.V., Fedoryuk M.V., Shabumin M.I., *Lectures on the theory of functions of a complex variable*, Mir publishers, Moscow 1985.