ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΓΕΝΕΙΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ

Μιχαήλ Ο. Ροκίδης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΘΗΝΑ 2010

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΓΕΝΕΙΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ

Μιχαήλ Ο. Ροκίδης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τριμελής Επιτροπή

Ιωάννης Μαρουλάς, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Σωτήριος Καρανάσιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Παναγιώτης Ψαρράκος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. (επιβλέπων)

ΑΘΗΝΑ 2010

Στη μνήμη του συνάδελφου, φίλου και δασκάλου
Κώστα Στεφανουδάκη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο πλαίσιο της συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Π. Ψαρράκο, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π, τόσο για την υπόδειξη του θέματος όσο και για τη συνεχή παρακολούθηση, καθοδήγηση, ενθάρρυνση και υπομονή κατά της διάρκεια της σύνταξής της. Είμαι ευγνώμων και θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου και προς τους κ.κ. Ι. Μαρουλά, Καθηγητή Ε.Μ.Π., και Σ. Καρανάσιο, Καθηγητή Ε.Μ.Π, για την ενεργή συμμετοχή στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή. Ευχαριστώ τους γονείς μου, Οδυσσέα και Δέσποινα Ροκίδη για την ηθική υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Πάνω απ' όλα εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στους δασκάλους μου, κ.κ. Μ. Ευστρατίου, Μ. Καραμεσίνη, Χ. Αργυρό, Ε. Τσάκωνα, Χ. Δέδε, Κ. Σουσάνη και ιδιαιτέρως στον Κ. Στεφανουδάκη, για τις γνώσεις που μου έδωσαν, αλλά κυρίως για την πίστη τους στις δυνατότητες μου.

Περιεχόμενα σελ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ..... 11

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ..... 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: Γενικές Έννοιες..... 19

1.1. Ειδικές Μορφές Πινάκων..... 19
1.2. Διανυσματικές Νόρμες – Νόρμες Πινάκων..... 24
1.3. Ίχνος Πίνακα..... 27
1.4. Παραγοντοποίηση QR..... 28
1.5. Παραγοντοποίηση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)..... 29
1.6. Αριθμητικό Πεδίο – Αριθμητική Ακτίνα..... 33
1.7. Διαταραχές Ιδιοτιμών..... 34

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: Κανονικοί Πίνακες..... 37
2.1. Η έννοια του κανονικού πίνακα..... 37
2.2. Κανονικότητα και Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα..... 42
2.3. Κανονικότητα και Ερμιτιανοί – Αντιερμιτιανοί Πίνακες..... 44
2.4. Κανονικότητα και Φάσμα Πίνακα..... 48
2.5. Κανονικότητα και Πολική Παραγοντοποίηση..... 50
2.6. Κανονικότητα και Ιδιάζουσες Τιμές..... 54
2.7. Κανονικότητα και Εσωτερικό Γινόμενο..... 59
2.8. Λοιπές συνθήκες κανονικότητας..... 61
2.9. Παραδείγματα..... 70

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: Αποστάσεις Από την Κανονικότητα..... 77
3.1. Μέτρα Κανονικότητας..... 77
3.2. Σύγκριση Μέτρων Κανονικότητας..... 80
3.3. Σύγκριση Μέτρων Κανονικότητας Διαγωνοποιήσιμου Πίνακα..... 97
3.4. Παραδείγματα..... 104

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: Απομάκρυνση Από την Κανονικότητα του Henrici... 111
4.1. Δυνάμεις Πινάκων..... 111
4.2. Κατά Προσέγγιση Λύσεις Γραμμικών Συστημάτων..... 113
4.3. Φασματική Μεταβολή – Μεταβολή Ιδιοτιμών..... 114
4.4. Αριθμητικό Πεδίο F(A)..... 121

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... 127

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας με τίτλο *Κανονικότητα Πινάκων και Συγγενείς Αποστάσεις* πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες» της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου. Πέραν του τυπικού μέρους, αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια δημιουργίας γνωστικού υποβάθρου, αλλά και κινήτρου, για την περαιτέρω έρευνα της περιοχής των κανονικών πινάκων και του βαθμού που η απόσταση από την κανονικότητα επηρεάζει τη συμπεριφορά ενός (τυχαίου) τετραγωνικού πίνακα.

Η επιλογή του θέματος έγινε με κριτήριο το προσωπικό ενδιαφέρον και κυρίως την προοπτική που ανοίγεται από μια ειδική μορφή πινάκων, όπως οι κανονικοί πίνακες. Με τους πίνακες αυτούς, όπως επίσης και τις αποστάσεις τυχαίων πινάκων από την κανονικότητα, έχουν ασχοληθεί κατά καιρούς πολλοί μαθηματικοί όπως οι P. Henrici (1961), P.J. Eberlein (1962), G. Loizou (1969), R. Kress, H.L. de Vries και R. Wegmann (1974), A. Ruhe (1975), L. Elsner και M.H.C. Paardekooper (1987), R. Grone, C.R. Johnson, E.M. Sa και H. Wolkowicz (1987), B. Aupetit και J. Zemanek (1990), και L. Elsner και Kh.D. Ikramov (1998). Η επιστημονική τους έρευνα αποτέλεσε το ερέθισμα για την σύνταξη της εργασίας αυτής, η οποία με τη σειρά της επιδιώκει μια πλήρη και αυτόνομη παρουσίαση (στο βαθμό του δυνατού) της συγκεκριμένης περιοχής.

Ειδικότερα, το πρώτο κεφάλαιο έχει βοηθητικό χαρακτήρα. Επικεντρώνεται αρχικά στις έννοιες των ερμιτιανών, αντιερμιτιανών, ορθομοναδιαίων, κανονικών, στοχαστικών, διπλά στοχαστικών και εκθετικών πινάκων, καθώς επίσης και στο Θεώρημα του Schur, ένα πολύ εύχρηστο εργαλείο για την διαγωνοποίηση πινάκων (Παράγραφος 1.1). Κατόπιν γίνεται αναφορά στις διανυσματικές νόρμες, στις νόρμες πινάκων και στο ίχνος πίνακα, που θα χρησιμοποιηθούν ευρύτατα στα επόμενα κεφάλαια (Παράγραφοι 1.2 και 1.3). Ακολουθούν οι παραγοντοποιήσεις QR, ιδιαζουσών τιμών και πολική, όπως και ο ψευδοαντίστροφος (Moore–Penrose) (Παράγραφοι 1.4 και 1.5). Υπενθυμίζονται οι ορισμοί του αριθμητικού πεδίου και της αριθμητικής ακτίνας, καθώς το ελλειπτικό θεώρημα και το Θεώρημα Toeplitz–Hausdorf (Παράγραφος 1.6). Στο τέλος του κεφαλαίου αναφέρονται οι διαταραχές των ιδιοτιμών και το Θεώρημα Bauer–Fike (Παράγραφος 1.7).

Στο δεύτερο κεφάλαιο, εξετάζεται εκτενέστερα η έννοια του κανονικού πίνακα, βασιζόμενη στη δημοσίευση των R. Grone, C.R. Johnson, E.M. Sa και H. Wolkowicz με τίτλο *Normal Matrices* στο περιοδικό *Linear Algebra and its Applications*, 87 (1987) 213–225. Αναφέρονται εβδομήντα επτά ικανές και αναγκαίες συνθήκες κανονικότητας. Αναλυτικότερα, στην Παράγραφο 2.1 αναφέρονται έντεκα συνθήκες βασισμένες στον ορισμό του κανονικού πίνακα. Στην Παράγραφο 2.2, ακολουθούν επτά συνθήκες που συσχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα.

Στη συνέχεια, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 2.3, αποδεικνύονται δεκατέσσερις συνθήκες κανονικότητας βασισμένες στην ανάλυση ενός πίνακα σε ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος. Από την περιγραφή αυτή δεν θα μπορούσε να λείψει ο συνδυασμός κανονικότητας και φάσματος πίνακα (Παράγραφος 2.4) και συγκεκριμένα τρεις συνθήκες, όπως και ο συνδυασμός κανονικότητας και πολικής παραγοντοποίησης (Παράγραφος 2.5) με δεκαπέντε συνθήκες. Στην Παράγραφο 2.6 χρησιμοποιούμε την έννοια του πίνακα A^*A και των ιδιαζουσών τιμών του για να περιγράψουμε δώδεκα συνθήκες κανονικότητας. Εδώ αναφέρεται και αποδεικνύεται το Συμπλεκτικό Θεώρημα Cauchy. Στην Παράγραφο 2.7, επεξεργαζόμαστε πέντε συνθήκες κανονικότητας και εσωτερικού γινομένου και στην Παράγραφο 2.8 αναφέρονται έντεκα επιπλέον γενικευμένες συνθήκες βασισμένες στην δημοσίευση των L. Elsner και Kh.D. Ikramov με τίτλο *Normal Matrices: An update* στο περιοδικό *Linear Algebra and its Applications*, *2*85 (1998) 291–303. Το κεφάλαιο τελειώνει με παραδείγματα για τις βασικότερες συνθήκες κανονικότητας, ώστε να γίνουν κατανοητές οι έννοιες.

Το τρίτο κεφάλαιο βασίζεται στην δημοσίευση των L. Elsner και M.H.C. Paardekooper με τίτλο *On Measures of Nonnormality of Matrices* στο περιοδικό *Linear Algebra and its Applications 92* (1987) 107–124 και χωρίζεται σε τέσσερις υποπαραγράφους. Στην Παράγραφο 3.1 ορίζονται έντεκα μέτρα κανονικότητας, ή όπως αναφέρονται στην δημοσίευση, αποστάσεις από την κανονικότητα. Τα μέτρα αυτά θα μας φανούν χρήσιμα στην Παράγραφο 3.2 όπου θα τα συγκρίνουμε μεταξύ τους με δεκαέξι ανισότητες. Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται και αποδεικνύονται το Θεώρημα Kress De Vries–Wegmann, το Θεώρημα Birkhoff και το Θεώρημα Hoffman–Wielandt, τα οποία χρησιμοποιούνται για τις αποδείξεις των δεκαέξι ανισοτήτων. Στην συνέχεια, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 3.3, αναφέρονται πέντε νέες ανισότητες για διαγωνοποιήσιμους πίνακες. Όπως και πριν, επικουρικά αναφέρονται και αποδεικνύονται, η ανισότητα Kantorovich, η ανισότητα και το Θεώρημα Smith. Το κεφάλαιο κλείνει με παραδείγματα, στην Παράγραφο 3.4, από τα μέτρα κανονικότητας και από τις βασικότερες ανισότητες.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο εστιάζουμε στην απομάκρυνση από την κανονικότητα κατά Henrici και στην ανισότητα 3.2.1 που βασίζεται στην δημοσίευση του P. Henrici με τίτλο *Bounds for Iterates, Inverses, Spectral Variation and Fields of Values of Non–Normal Matrices*, στο περιοδικό *Numerische Mathematik*, *4* (1962) 24–40. Αρχικά ορίζονται οι εκθετικοί πίνακες (Παράγραφο 4.1), όπως και οι βασικές τους ιδιότητες, και στη συνέχεια (Παράγραφο 4.2), περιγράφονται οι προσεγγιστικές λύσεις γραμμικών συστημάτων. Στην επόμενη παράγραφο (Παράγραφος 4.3) ορίζονται η φασματική μεταβολή και η μεταβολή ιδιοτιμών, δύο έννοιες που συσχετίζουν τις ιδιοτιμές δύο διαφορετικών πινάκων. Στη συνέχεια δίνονται φράγματα για την φασματική μεταβολή και για την μεταβολή ιδιοτιμών, καθώς επίσης και παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση τους. Στην τελευταία παράγραφο 4.4, μελετάμε την απόσταση του αριθμητικού πεδίου από την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών και την απομάκρυνση από την κανονικότητα, με τη χρήση της

Frobenious νόρμας. Αναφέρεται δύο πολύ σημαντικά Θεωρήματα 4.4.1 και 4.4.2 που μας βοηθούν να κατανοήσουμε ότι το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα περιέχεται στην κυρτή θήκη των ιδιοτιμών, η οποία είναι έλλειψη με εστίες δύο από αυτές και μικρό ημιάξονα το ένα δεύτερο της Δ_p απομάκρυνσης μεγίστου αθροίσματος γραμμών.

Τελειώνοντας, πρέπει να αναφερθεί πώς, οι κανονικοί πίνακες μπορούν να επεκταθούν σε κανονικούς τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert και σε κανονικά στοιχεία σε C^*–Άλγεβρες.

Μιχαήλ Ο. Ροκίδης

Δεκέμβριος 2010

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\mathbb{R}$	Σώμα πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	Σώμα μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{F}$	Σώμα (συνήθως $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$)
$\mathbb{R}^n$	Σώμα πραγματικών διανυσμάτων n συντεταγμένων
$\mathbb{C}^n$	Σώμα μιγαδικών διανυσμάτων n συντεταγμένων
$\mathbb{R}^{n\times n}$	Σώμα $n\times n$ πραγματικών πινάκων
$\mathbb{C}^{n\times n}$	Σώμα $n\times n$ μιγαδικών πινάκων
$A=\left[\alpha_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ κ.α.	Πίνακες μιγαδικοί ή πραγματικοί
$\bigcirc, \bigcirc_n$	Μηδενικός $n\times n$ πίνακας
I, I_n	Μοναδιαίος $n\times n$ πίνακας
A^{-1}	Αντίστροφος του πίνακα A
$\overline{A}$	Πίνακας με τα συζυγή στοιχεία του A
A^{T}	Ανάστροφος του πίνακα A
$A^*, \overline{A}^{\mathrm{T}}$	Αναστροφοσυζυγής του πίνακα A
$A^\dagger$	Ψευδοαντίστροφος (Moore–Penrose) του πίνακα A
$H_A=\dfrac{A+A^*}{2}$	Ερμιτιανό μέρος του πίνακα A
$iK_A=\dfrac{A-A^*}{2}$	Αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα A
$adjA$	Συμπληρωματικός (προσαρτημένος) πίνακας
A^r	Εκθετικός πίνακας
$U,\ V,\ W$	Ορθομοναδιαίος πίνακας
x, y, z	Διάνυσμα στήλη
$A^{\frac{1}{2}}$	Τετραγωνική ρίζα θετικά ημιορισμένου πίνακα
trA	Ίχνος πίνακα A
T	Άνω τριγωνικός πίνακας
D	Διαγώνιος πίνακας
$\Lambda=diag\left\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right\}$	Διαγώνιος πίνακας, με κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές
$e^{t\mathrm{A}}$	Εκθετικός πίνακας
$P=I-\dfrac{2}{u^*u}uu^*$	Πίνακας Hauseholder
$rank\left(A\right)$	Βαθμός (τάξη) πίνακα
$\delta\left(A\right)$	Φάσμα πίνακα
λ_{A}	Φασματική ακτίνα
$\lambda_i\in\delta\left(A\right)$	Ιδιοτιμή πίνακα
$\mathrm{Re}\left(\bullet\right)$	Πραγματικό μέρος
$\mathrm{Im}\left(\bullet\right)$	Φανταστικό μέρος

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$	Ιδιάζουσα τιμή πίνακα A
$\tilde{A} = A + E$	Πίνακας διαταραχής
$\tilde{\lambda} \in \delta\left(\tilde{A}\right) \setminus \delta\left(A\right)$	Ιδιοτιμή διαταραγμένου πίνακα
$F\left(A\right)$	Αριθμητικό πεδίο πίνακα A
$r\left(A\right)$	Αριθμητική ακτίνα πίνακα A
$p\left(\lambda\right) = \alpha_n \lambda^n + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$	Πολυώνυμο βαθμού n
$p\left(A\right) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$	Πίνακας $p\left(A\right)$
$Co\left(\bullet\right)$	Κυρτή θήκη
$W = span\left\{x\right\}$	Παραγόμενος χώρος από το διάνυσμα x
$W^{\perp}$	Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W
$\oplus$	Ευθύ άθροισμα
$\otimes$	Ευθύ γινόμενο (Kroneker)
$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$	Ανάπτυγμα $\dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$
$\left(u, v\right)$	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων u, v
$\left\|\bullet\right\|$, $\left\|\bullet\right\|_{\nu}$	Διανυσματική νόρμα, νόρμα πινάκων
$\left\|\bullet\right\|_1$	ℓ_1 διανυσματική νόρμα, νόρμα μεγίστου αθροίσματος στηλών πίνακα
$\left\|\bullet\right\|_2$	ℓ_2 διανυσματική νόρμα, ευκλείδεια (φασματική) νόρμα πίνακα
$\left\|\bullet\right\|_F$	Frobenious νόρμα πίνακα
$\left\|\bullet\right\|_{\infty}$	ℓ_{∞} διανυσματική νόρμα, νόρμα μεγίστου αθροίσματος γραμμών πίνακα
$\left\|diag\left(\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right\}\right)\right\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \left\|\lambda_i\right\|$	axis–oriented νόρμα, προσανατολισμένη κατά άξονα νόρμα
$\mathrm{K}\left(A\right) = \mathrm{K}_{\nu}\left(A\right)$	Δείκτης κατάστασης πίνακα, τυχαίας νόρμας
$\mathrm{K}_2\left(A\right)$	Δείκτης κατάστασης πίνακα, ευκλείδειας νόρμας
$\mathrm{K}_F\left(A\right)$	Δείκτης κατάστασης πίνακα, Frobenious νόρμας
$\kappa_A\left(\lambda\right) = \dfrac{\left\|x\right\|\left\|y\right\|}{\left\|y^* x\right\|}$	Δείκτης κατάστασης ιδιοτιμής λ
$C = \left[A, A^*\right] = AA^* - A^* A$	Αντιμεταθετής του πίνακα A
$\mu_1 - \mu_{11}$	Αποστάσεις από την κανονικότητα ως προς $\left\|\bullet\right\|_F$
$\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_3$, $\tilde{\mu}_9 - \tilde{\mu}_{11}$	Αποστάσεις από την κανονικότητα ως προς $\left\|\bullet\right\|_2$
μ_3, $\Delta_F\left(A\right)$	Απομάκρυνση κατά Henrici ως προς $\left\|\bullet\right\|_F$
$\tilde{\mu}_3$, $\Delta_2\left(A\right)$	Απομάκρυνση κατά Henrici ως προς $\left\|\bullet\right\|_2$
$\Delta_{\nu}\left(A\right)$	Απομάκρυνση κατά Henrici ως προς $\left\|\bullet\right\|$

$s = s_A(B) = \max_{1\le i\le n}\left\{\min_{1\le i\le n}\left\|\mu_i - \lambda_j\right\|\right\}$	Φασματική μεταβολή του B σε σχέση με τον A
$\upsilon = \upsilon(A,B) = \min_{p}\left\{\max_{1\le i\le n}\left\|\lambda_i - \mu_{p(i)}\right\|\right\}$	Μεταβολή ιδιοτιμών του B σε σχέση με τον A
$\mathrm{E}\left(\lambda_i, \lambda_j, \frac{1}{2}\alpha\right)$	Έλλειψη με εστίες λ_i, λ_j και μικρό άξονα α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Γενικές Έννοιες

Σκοπός του πρώτου κεφαλαίου της εργασίας είναι να αναφερθούν περεταίρω βασικές έννοιες και αποτελέσματα, τόσο της Γραμμικής Άλγεβρας, όσο και της Ανάλυσης (Λογισμού) Πινάκων. Οι στοιχειώδεις έννοιες και αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας, για τις οποίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε ένα οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας προπτυχιακού επιπέδου, έχουν παραληφθεί.

1.1 Ειδικές Μορφές Πινάκων

Ξεκινώντας το κεφάλαιο αυτό, σημειώνουμε ότι θα ασχοληθούμε με $n \times n$ τετραγωνικούς πίνακες και πως συμβολίζουμε το σύνολο των μιγαδικών $n \times n$ *τετραγωνικών πινάκων* το σύνολο $\mathbb{C}^{n\times n}$. Το σύνολο των πραγματικών $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων θα συμβολίζεται με $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ορισμός 1.1.1 (Ερμιτιανός Πίνακας) Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται *ερμιτιανός* αν ισχύει:

$$A^* = A,$$

όπου $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$ ο αναστροφοσυζυγής.

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας A λέγεται *συμμετρικός* αν ισχύει:

$$A^{\mathrm{T}} = A.$$

Σε κάθε περίπτωση ο πίνακας A καλείται *αυτοσυζυγής*.

Ορισμός 1.1.2 (Αντιερμιτιανός Πίνακας) Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται *αντιερμιτιανός* αν ισχύει:

$$A^* = -A.$$

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας A λέγεται *αντισυμμετρικός* αν ισχύει:

$$A^{\mathrm{T}} = -A.$$

Παρατήρηση 1.1.1 Κάθε ερμιτιανός πίνακας A έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου πραγματικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, συζυγείς. Δηλαδή $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ και $\alpha_{ji} = \overline{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αν ο A είναι συμμετρικός τότε ο A έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου πραγματικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, ίσο. Δηλαδή $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ και $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Αντίστοιχα αν ο πίνακας A είναι αντιερμιτιανός, τότε έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου φανταστικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, αντίθετους και συζυγείς. Δηλαδή $\alpha_{ij} \in \mathrm{I}$ και $\alpha_{ji} = -\overline{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αν ο A είναι αντισυμμετρικός τότε ο A έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου φανταστικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, αντίθετο. Δηλαδή, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ και $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Πρόταση 1.1.1 (Ιδιότητες Ερμιτιανού Πίνακα)

1. $\left(A^*\right)^* = A$.
2. $\left(\alpha A\right)^* = \overline{\alpha} A^*$.
3. $\left(A + B\right)^* = A^* + B^*$.
4. $\left(AB\right)^* = B^* A^*$.
5. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τότε οι πίνακες $A^* A$, AA^*, $A + A^*$, $i\left(A - A^*\right)$ είναι ερμιτιανοί.
6. Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A = H_A + iK_A,$$

όπου $H_A = \dfrac{A + A^*}{2}$ το ερμιτιανό μέρος και $iK_A = \dfrac{A - A^*}{2}$ το αντιερμιτιανό μέρος. Συνεπώς ο πίνακας $K_A = \dfrac{A - A^*}{2i}$ είναι ερμιτιανός.

Θεώρημα 1.1.1 *Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικές, ενώ οι ιδιοτιμές ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι μιγαδικές.*

Θεώρημα 1.1.2 *Τα ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι κάθετα μεταξύ τους.*

Ορισμός 1.1.3 (Ορθομοναδιαίος Πίνακας) Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγεται *ορθομοναδιαίος (ή μοναδιαίος)* αν ισχύει:

$$A^* A = AA^* \Leftrightarrow A^* = A^{-1}.$$

Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε ο πίνακας A λέγεται *ορθογώνιος* αν ισχύει:

$$A^{\mathrm{T}} A = AA^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} = A^{-1}.$$

Θεώρημα 1.1.3 *Οι ιδιοτιμές ενός ορθομοναδιαίου πίνακα έχουν μέτρο 1.*

Θεώρημα 1.1.4 *Τα ιδιοδιανύσματα ενός ορθομοναδιαίου πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι κάθετα μεταξύ τους.*

Θεώρημα 1.1.5 (Schur) *Για κάθε* $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε* $P^* AP = T$ *, όπου ο T είναι άνω τριγωνικός πίνακας.*

Απόδειξη

Έστω x_1 ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, με $x_1^* x_1 = 1$ (μοναδιαίο). Από το x_1 παράγουμε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$, έστω η $x_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, και θεωρούμε τον πίνακα $U_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$. Ο πίνακας $P_1 = \left[x_1 \middle| U_1 \right]$ είναι ορθομοναδιαίος $\left(P_1^* P_1 = I_n \right)$ και $U_1^* x_1 = 0$ επειδή το διάνυσμα x_1 είναι ορθογώνιο προς τα u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Συνεπώς,

$$P_1^* A P_1 = \begin{bmatrix} x_1^* \\ U_1^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 & U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_1 & AU_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & AU_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* \lambda_1 x_1 & x_1^* A U_1 \\ U_1^* \lambda x_1 & U_1^* A U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^* A U_1 \\ 0 & U_1^* A U_1 \end{bmatrix},$$

αφού $x_1^* x_1 = 1$ και $U_1^* x_1 = 0$. Τα διανύσματα $x_1^* A U_1$ δεν είναι μηδενικά.

Για τον πίνακα $A_2 = U_1^* A U_1$ που έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, επαναλαμβάνουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία, και προκύπτει ένας $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας Q_2 τέτοιος ώστε

$$Q_2^* A_2 Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & x_2^* A_2 U_2 \\ 0 & U_2^* A_2 U_2 \end{bmatrix},$$

όπου ο $\mathrm{A}_3 = U_2^* \mathrm{A}_2 U_2$ είναι ένα $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας με ιδιοτιμές τις $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$.

Ορίζουμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα $\mathrm{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$. Επαγωγικά, ορίζουμε τους πίνακες $Q_3, \ldots, Q_{n-2}$ και τους ορθομοναδιαίους $P_3, \ldots, P_{n-2}$ με

$$Q_i^* A_i Q_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & x_i^* A_i U_i \\ 0 & U_i^* A_i U_i \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix}, \; i = 3, \ldots, n-2.$$

Τελικά προκύπτει ότι $P^* A P = T$, όπου $P = P_1 P_2 \cdots P_{\nu-1}$ και ο πίνακας T είναι άνω τριγωνικός. □

Πόρισμα 1.1.1 (Διαγωνοποίηση Ερμιτιανών Πινάκων) *Για κάθε A ερμιτιανό $n \times n$ πίνακα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας P έτσι ώστε*

$$P^* A P = D$$

όπου $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Απόδειξη
Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα του Schur. □

Παρατήρηση 1.1.2 Τα διαγώνια στοιχεία του T είναι οι *ιδιοτιμές* του A. Ωστόσο οι στήλες του P, εκτός της πρώτης, δεν είναι εν γένει *ιδιοδιανύσματα* του A. Αυτές ονομάζονται διανύσματα *Schur*.

Παρατήρηση 1.1.3 Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.6 και την Παρατήρηση 1.1.2 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα ενός διαγώνιου $n \times n$ πίνακα D με στοιχεία της ιδιοτιμές του A και ενός $n \times n$ αυστηρά άνω τριγωνικού πίνακα M, δηλαδή $A = D + M$.

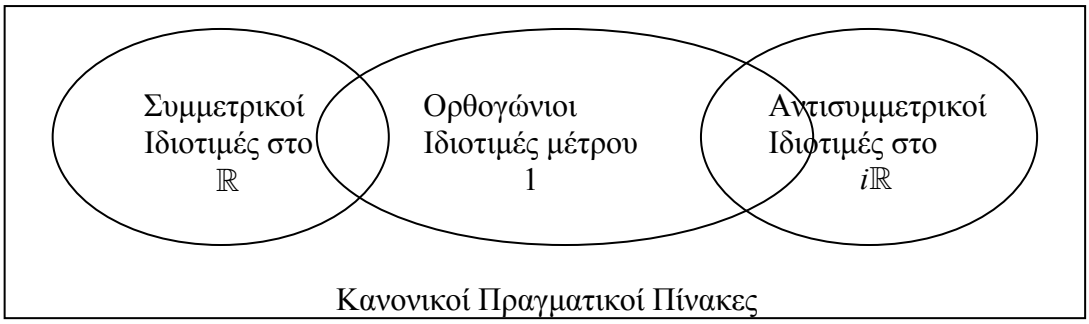
Ορισμός 1.1.4 (Κανονικός Πίνακας) Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται *κανονικός (normal)* όταν ικανοποιεί την σχέση:

$$AA^* = A^* A .$$

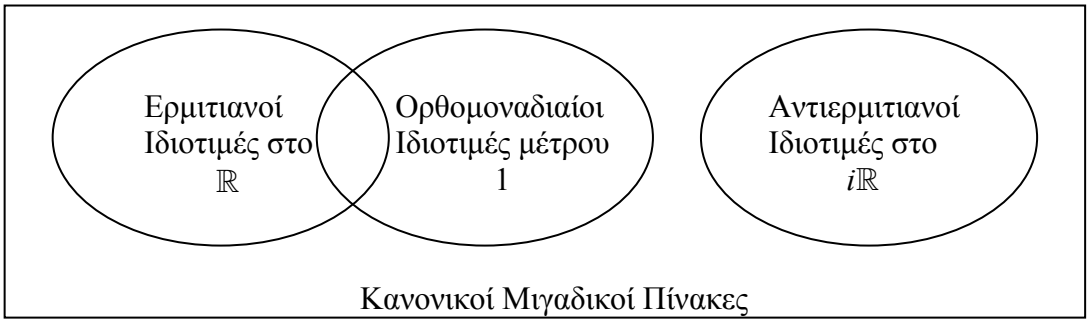
Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ καλείται *κανονικός* αν και μόνο αν $AA^t = A^t A$.

Παρατήρηση 1.1.4 Οι ερμιτιανοί, οι αντιερμιτιανοί και οι ορθομοναδιαίοι πίνακες είναι κανονικοί.

Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε τους πραγματικούς κανονικούς πίνακες,



και στο επόμενο τους μιγαδικούς κανονικούς πίνακες.



Ορισμός 1.1.5 (Στοχαστικός Πίνακας) Ένας μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται *στοχαστικός* αν το άθροισμα σε κάθε γραμμή του (ή στήλη) είναι 1.

Ορισμός 1.1.6 (Διπλά Στοχαστικός Πίνακας) Ένας μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται διπλά *στοχαστικός* αν οι πίνακες A και A^{T} είναι στοχαστικοί. Δηλαδή, αν το άθροισμα κάθε γραμμής αλλά και στήλης του πίνακα A είναι 1.

Πρόταση 1.1.2 *Τα σύνολα των στοχαστικών και των διπλά στοχαστικών πινάκων είναι κυρτά και συμπαγή.*

Ορισμός 1.1.7 (Συνάρτηση Πίνακα που Ορίζεται με Δυναμοσειρά) Έστω $f(\lambda)$ μία συνάρτηση η οποία αναπαρίσταται με δυναμοσειρά ως προς λ, κέντρου 0 και ακτίνας σύγκλισης ρ. Τότε έχουμε:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda^i .$$

Αν A είναι ένας $n \times n$ μιγαδικός (ή πραγματικός) πίνακας του οποίου κάθε ιδιοτιμή λ ικανοποιεί την σχέση $|\lambda| < \rho$, τότε ορίζουμε:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A^i .$$

Αν η συνάρτηση $f(t) = e^{\alpha t}$ είναι αναλυτική για κάθε t, συνεπώς έχει μία αναπαράσταση με δυναμοσειρά, δηλαδή

$$e^{\alpha t} = \sum_{k=0}^{k-1} \frac{\alpha^k t^k}{k!} .$$

Αν τώρα A είναι ένας $n \times n$ πίνακας κατ' αντιστοιχία προς την συνάρτηση $e^{\alpha t}$ θα έχουμε για την συνάρτηση e^{At}, του πίνακα A

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{k-1} \frac{A^k t^k}{k!} .$$

Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ο e^A πίνακας ορίζεται ως εξής:

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^\nu}{\nu!} + \cdots .$$

Επιπλέον, είναι $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, όταν $AB = BA$.

1.2 Διανυσματικές Νόρμες – Νόρμες Πινάκων

Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία των μαθηματικών αποτελούν οι διανυσματικές νόρμες και οι νόρμες πινάκων. Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε αναφορά σ' αυτές, με δεδομένο ότι αποτελούν ένα ιδιαιτέρα χρήσιμο εργαλείο έρευνας για την γραμμική άλγεβρα και για τους πίνακες.

Ορισμός 1.2.1 (Διανυσματική Νόρμα)
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}(=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$. Μία απεικόνιση

$$\|\bullet\| : \mathrm{V} \to \mathbb{R}_0^+ : x \to \|x\|$$

ονομάζεται διανυσματική νόρμα (norm), αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

1. $\|x\| \geq 0$, για κάθε $x \in \mathrm{V}$, $x \neq 0$ και $\|0\| = 0$.
2. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in \mathrm{V}$ ισχύει: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
3. Για κάθε $x, y \in \mathrm{V}$ ισχύει: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Επειδή ο $\mathbb{C}^{nxn}$ (και ο $\mathbb{R}^{nxn}$) είναι διανυσματικοί χώροι διάσταση n^2, το μέγεθος ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{nxn}(\mathbb{R}^{nxn})$ μπορεί να μετρηθεί με την χρήση μιας διανυσματικής νόρμας επί του $\mathbb{C}^{n^2}(\mathbb{R}^{n^2})$. Επιπλέον, ο $\mathbb{C}^{nxn}$ (και ο $\mathbb{R}^{nxn}$) δεν είναι ένας διανυσματικός χώρος μεγάλης διάστασης (n^2), αλλά επιπλέων έχει μεταξύ των στοιχείων του μία πράξη πολλαπλασιασμού που καθιστά μία εκτίμηση που να συνδέει το μέγεθος του AB με τα μεγέθη των A και B.

Ορισμός 1.2.2 (Νόρμα Πινάκων) Μία συνάρτηση

$$\|\bullet\| : \mathbb{C}^{nxn}\left(\mathbb{R}^{nxn}\right) \to \mathbb{R}_+^0 : \mathrm{A} \to \|\mathrm{A}\|,$$

ονομάζεται νόρμα πινάκων, αν για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{nxn}(\mathbb{R}^{nxn})$ ικανοποιεί τα επόμενα τέσσερα αξιώματα:

1. $\|A\| \geq 0$ και $\|A\| = 0$ αν και μόνο αν $A \equiv \mathrm{O}$.
2. $\|cA\| = |c|\|A\|$, με $c \in \mathbb{C}$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, Τριγωνική Ανισότητα.
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, Υποπολλαπλασιαστικότητα.

Παρατήρηση 1.2.1 Οι ιδιότητες 1 – 3 είναι ίδιες με τις ιδιότητες της διανυσματικής νόρμας. Άρα μια διανυσματική νόρμα ορισμένη επί του $\mathbb{C}^{nxn}$ (ή $\mathbb{R}^{nxn}$) μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικό χώρο διάσταση n^2, που ικανοποιεί τα Αξιώματα 1 – 3 και ονομάζεται *Γενικευμένη Νόρμα Πινάκων*. Αν επιπλέων που ικανοποιεί το Αξίωμα 4 ονομάζεται *Νόρμα Πινάκων*.

Γνωστές νόρμες πινάκων είναι οι νόρμες $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$, $\|\bullet\|_\infty$, $\|\bullet\|_F$, που θα αναφέρουμε αναλυτικά στην συνέχεια.

Ορισμός 1.2.3 (Νόρμα Μεγίστου Αθροίσματος Στηλών $\|\bullet\|_1$) Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, η νόρμα μεγίστου αθροίσματος στηλών ορίζεται ως εξής:

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| .$$

Η νόρμα μεγίστου αθροίσματος στηλών , επάγεται από την διανυσματική νόρμα ℓ_1.

Ορισμός 1.2.4 (Νόρμα Μεγίστου Αθροίσματος Γραμμών $\|\bullet\|_\infty$) Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, η νόρμα μεγίστου αθροίσματος γραμμών ορίζεται ως εξής:

$$\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| .$$

Η νόρμα μεγίστου αθροίσματος γραμμών, επάγεται από την διανυσματική νόρμα ℓ_∞.

Ορισμός 1.2.5 (Ευκλείδεια ή Φασματική Νόρμα $\|\bullet\|_2$) Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, η Ευκλείδεια νόρμα ορίζεται ως εξής:

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \left[\frac{x^* A^* A x}{x^* x} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Η Ευκλείδεια νόρμα, επάγεται από την διανυσματική νόρμα ℓ_2.

Παρατήρηση 1.2.2 Η Ευκλείδεια νόρμα, όπως θα δούμε και στην Παράγραφο 1.5 ορίζεται και ως την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα *A*. Δηλαδή

$$\|A\|_2 = \max\left\{ \sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma\left(A^* A\right) \right\} .$$

Ορισμός 1.2.6 (Frobenious Νόρμα $\|\bullet\|_F$) Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, η Frobenious νόρμα ορίζεται ως εξής:

$$\|A\|_F = \left[\sum_{1\le i,j\le n} |\alpha_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Ορισμός 1.2.7 (Νόρμα Αθροίσματος Στοιχείων $\|\bullet\|_p$) Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, η νόρμα αθροίσματος στοιχείων ορίζεται ως εξής:

$$\|A\|_p = \sum_{1 \le i, j \le n} |\alpha_{ij}|.$$

Ορισμός 1.2.8 Έστω $\|\bullet\|$ μία διανυσματική νόρμα επί του $\mathbb{C}^n \left(\mathbb{R}^n\right)$. Ορίζουμε επί του $\mathbb{C}^{n \times n} \left(\mathbb{R}^{n \times n}\right)$ την συνάρτηση

$$\|\bullet\| : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}_0^+ : A \to \|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι καλά ορισμένη, επειδή η $\|Ax\|$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς x και το σύνολο $\mathfrak{B} = \left\{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\right\}$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα 1.2.1 *Η συνάρτηση $\|\bullet\|$ που ορίσαμε προηγούμενος, στον Ορισμό 1.2.8 είναι μία νόρμα πινάκων επί του $\mathbb{C}^{n \times n} \left(\mathbb{R}^{n \times n}\right)$.*

Επιπλέον ισχύει ότι $\|Ax\| \le \|A\| \|x\|$, για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.

Ορισμός 1.2.9 Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Η ποσότητα

$$\mathrm{K}(A) = \mathrm{K}_\nu(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\|_\nu \|A\|_\nu, & \text{αν ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

ονομάζεται *δείκτης κατάστασης* (*condition number*) του πίνακα *A*.

Παρατήρηση 1.2.3 Ο δείκτης κατάστασης ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες με το ένα. Δηλαδή,

$$\mathrm{K}_\nu(A) = \|A^{-1}\|_\nu \|A\|_\nu \ge \|A^{-1} A\|_\nu = \|I_n\|_\nu \ge 1.$$

Παρατήρηση 1.2.4 Αν ο δείκτης κατάστασης ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι μικρός, δηλαδή πλησίον του ένα, λέμε ότι ο πίνακας *A* έχει καλή κατάσταση. Αν ο πίνακας *A* είναι μεγάλος λέμε τότε ότι ο πίνακας έχει κακή κατάσταση και αν έχει δείκτη κατάστασης ένα θα λέμε πως έχει ιδανική κατάσταση. Πίνακες με ιδανική κατάσταση είναι οι ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Πρόταση 1.2.1 *Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{K}_\nu\left(A\right)=\mathrm{K}_\nu\left(A^{-1}\right).$$

Απόδειξη
Έστω ότι ο αντιστρέψιμος πίνακας A έχει δείκτη κατάστασης

$$\mathrm{K}_\nu\left(A\right)=\left\|A^{-1}\right\|_\nu\left\|A\right\|_\nu,$$

και ο αντίστροφος του

$$\mathrm{K}_\nu\left(A^{-1}\right)=\left\|A\right\|_\nu\left\|A^{-1}\right\|_\nu.$$

Άρα $\mathrm{K}_\nu\left(A^{-1}\right)=\mathrm{K}_\nu\left(A\right)$. □

Πρόταση 1.2.2 *Έστω οι $n\times n$ τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι πίνακες $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ισχύει*

$$\mathrm{K}_\nu\left(AB\right)\le\mathrm{K}_\nu\left(A\right)\mathrm{K}_\nu\left(B\right).$$

Απόδειξη
Έστω ότι ο αντιστρέψιμοι πίνακες A, B έχουν δείκτη κατάστασης

$$\mathrm{K}_\nu\left(AB\right)=\left\|AB\right\|_\nu\left\|\left(AB\right)^{-1}\right\|_\nu=\left\|AB\right\|_\nu\left\|B^{-1}A^{-1}\right\|_\nu$$

$$\le\left\|A\right\|_\nu\left\|B\right\|_\nu\left\|B^{-1}\right\|_\nu\left\|A^{-1}\right\|_\nu\le\mathrm{K}_\nu\left(A\right)\mathrm{K}_\nu\left(B\right).\ \square$$

1.3 Ίχνος Πίνακα

Ορισμός 1.3.1 (Ίχνος Πίνακα) Έστω ένας $n\times n$ πίνακας A. Ονομάζουμε *ίχνος* του πίνακα A και συμβολίζουμε με trA το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή τον αριθμό

$$trA=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}.$$

Πρόταση 1.3.1 (Ιδιότητες Ίχνους Πίνακα)

1. *Γραμμικότητα:* $tr\left(\lambda A+\mu B\right)=\lambda tr\left(A\right)+\mu tr\left(B\right)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.
2. $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$.
3. *Γενικότερα* $tr\left(\prod_{i=1}^{k}A_p\right)=tr\left(\prod_{i=1}^{k}A_{\sigma(p)}\right)$, *όπου* $\sigma\left(p\right)$ *μία οποιαδήποτε μετάθεση.*
4. $tr\left(AA^*\right)=tr\left(A^*A\right)$.
5. *Αν δύο $n\times n$ πίνακες A,B είναι όμοιοι τότε έχουν ίσα ίχνη, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $B=P^{-1}AP$ και $tr\left(B\right)=tr\left(P^{-1}AP\right)=tr\left(A\right)$.*

1.4 Παραγοντοποίηση Πίνακα *QR*

Η παραγοντοποίηση *QR* έχει δύο μορφές. Την *απλή* παραγοντοποίηση *QR* και την *πλήρη* παραγοντοποίηση *QR*.

Ξεκινώντας με την απλή παραγοντοποίηση *QR* έχουμε.

Θεώρημα 1.4.1 (Απλή Παραγοντοποίηση *QR*) *Αν* $\mathrm{A} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *ένας* $m \times n$ *μιγαδικός πίνακας με στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε ο A μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων της μορφής*

$$A = QR,$$

όπου ο Q *ένας* $m \times n$ *ορθομοναδιαίος πίνακας με στήλες τα ορθοκανονικά διανύσματα, δηλαδή* $Q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$, *όπου* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα κατά την μέθοδο Gram – Schmidt, και* R *ένας* $n \times n$ *αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία τους συντελεστές της ορθοκανονικοποίησης αυτής, δηλαδή*

$$R = \begin{bmatrix} (u_1, q_1) & (u_2, q_1) & \cdots & (u_n, q_1) \\ 0 & (u_2, q_2) & \cdots & (u_n, q_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (u_n, q_n) \end{bmatrix}.$$

Για την πλήρη παραγοντοποίηση QR αρχικά θα δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.4.1 (Πίνακα Householder ή Πίνακα Αντανάκλασης) Έστω ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^n$. Ο $n \times n$ μιγαδικός πίνακας $P = I - \frac{2}{u^* u} u u^*$ καλείται *πίνακας Householder (Αντανάκλασης)*, ενώ το διάνυσμα u λέγεται *διάνυσμα Householder* που αντιστοιχεί στον πίνακα *P*.

Θεώρημα 1.4.2 (Πλήρης Παραγοντοποίησης *QR*) *Αν* $\mathrm{A} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *ένας* $m \times n$ *μιγαδικός πίνακας με στήλες γραμμικός ανεξάρτητα διανύσματα, τότε ο A μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο πινάκων της μορφής*

$$A = QR$$

όπου ο Q *ένας* $n \times n$ *ορθομοναδιαίος πίνακας της μορφής*

$$Q = \left(\begin{bmatrix} I_{m-1} & 0 \\ 0 & P_m \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} P_1 \right)^*$$

όπου P_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *πίνακες Hauseholder (ανάκλασης) και* R *ένας* $n \times m$ *άνω τριγωνικός πίνακας της μορφής*

$$R = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I_{m-1} & 0 \\ 0 & P_m \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} P_1 \right) A .$$

Παρατήρηση 1.4.1 Στην περίπτωση των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων η απλή παραγοντοποίηση QR και η πλήρης παραγοντοπίηση QR ταυτίζονται. Ακόμα πρέπει να σημειωθεί ότι η ορθοκανονικοποίηση Gram – Schmids μπορεί να οδήγηση σε πλήρη παραγοντοποίηση QR αρκεί να επεκτείνουμε το ορθοκανονικό σύστημα $q_1, q_2, \ldots, q_m$ σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^m$ και να προσθέσουμε $m - n$ μηδενικές γραμμές στο κάτω μέρος τοθ πίνακα *R*. Στην περίπτωση αυτή η παραγοντοποίηση QR δεν είναι μοναδική.

1.5 Παραγοντοποίηση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

Η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών είναι γνωστή και ως Singular Values Decomposition. Εμείς θα χρησιμοποιούμε την ονομασία SVD για την παραγοντοποίηση αυτή.

Ορισμός 1.5.1 (Ιδιάζουσες Τιμές Πίνακα) Έστω ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ονομάζουμε *ιδιάζουσα τιμή* $\sigma_i = \sigma_i(A)$ με $i = 1, 2, \ldots, n$, του πίνακα *A* την τιμή

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^* A$. Οι ιδιάζουσες τιμές συνήθως διατάσσονται σε φθίνουσα σειρά, δηλαδή $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$.

Θεώρημα 1.5.1 Αν *A* είναι $n \times m$ μιγαδικός πίνακας, τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U = [u_1 \,|\, u_2 \,|\, \cdots \,|\, u_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $V = [v_1 \,|\, v_2 \,|\, \cdots \,|\, v_m] \in \mathbb{C}^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε

$$A = Udiag\left\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min\{n,m\}}\right\}V^* = U\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}V^* = U\Sigma V^*,$$

όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{n,m\}} \geq 0$ οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα *A, με* $\sigma(A) = \sqrt{\lambda(A)}$, και $rank(A) = r$. □

Παρατήρηση 1.5.1 Από το Θεώρημα 1.5.1 είναι φανερό πώς η Ευκλείδεια νόρμα είναι ίση με την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή. Δηλαδή,

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sigma_1(A).$$

Ακόμα η νόρμα Frobenious του πίνακα *A* μπορεί να γραφτεί ως εξής,

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j}|\alpha_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}}\sigma_i}.$$

Θεώρημα 1.5.2 Έστω A, B δύο πλήρως συνεχείς τελεστές, σε ένα χώρο Hilbert $\mathfrak{H}$. Αν $\{\lambda_i\}$, $\{\kappa_i\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\sigma_i\}$ είναι οι ιδιοτιμές των τελεστών A^*A, B^*B, $(AB)^*(AB)$ και $(A+B)^*(A+B)$ αντίστοιχα, τότε για κάθε δύο μη αρνητικούς ακεραίους m, n ισχύουν

$$\mu_{m+n+1} \leq \lambda_{m+1}\kappa_{n+1} \tag{1.1}$$

$$\sqrt{\sigma_{m+n+1}} \leq \sqrt{\lambda_{m+1}} + \sqrt{\kappa_{n+1}} \tag{1.2}$$

Απόδειξη

Έστω $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ δύο πλήρως ορθοκανονικά σύνολα, τέτοια ώστε

$$AA^*x_i = \lambda_i x_i \quad \text{και} \quad B^*By_i = \kappa_i y_i, \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Έστω $AB = WH$ η πολική παραγοντοποίηση του πίνακα AB, όπου ο πίνακας *H* είναι η μή αρνητική τετραγωνική ρίζα του $(AB)^*(AB)$ και ο πίνακας *W* είναι μερικά ισομετρικός. Για κάθε $z \in \mathfrak{H}$, έχουμε ότι

$$(Hz, z)^2 = (W^*ABz, z)^2 \leq (A^*AWz, Wz)(B^*Bz, z).$$

Αν για το z έχουμε $\|z\|=1$, $\left(z,W^{*}x_i\right)=0$ με $0\le i\le m$ και $\left(z,y_i\right)=0$ με $0\le i\le n$ τότε ισχύει ότι,

$$\left(AA^{*}Wz,Wz\right)\le\|Wz\|^{2}\lambda_{m+1}\le\lambda_{m+1}$$

και

$$\left(B^{*}Bz,z\right)\le\kappa_{n+1}\le\lambda_{m+1}.$$

Άρα, τελικά θα έχουμε

$$\left(Hz,z\right)^{2}\le\left(A^{*}AWz,Wz\right)\left(B^{*}Bz,z\right)\le\lambda_{m+1}\cdot\kappa_{n+1}.$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε το minimum και το maximum θα έχουμε το συμπέρασμα.

Η σχέση (1.2) αποδεικνύεται όμοια. □

Πόρισμα 1.5.1 Έστω οι πίνακας $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ και $\sigma_1\left(A\right),\sigma_2\left(A\right),\ldots,\sigma_n\left(A\right)$ οι ιδιάζουσες τιμές του, με $\sigma_1\left(A\right)\ge\sigma_2\left(A\right)\ge\ldots\ge\sigma_n\left(A\right)\ge 0$. Τότε θα ισχύει

$$\sigma_i\left(A+B\right)\le\sigma_i\left(A\right)+\sigma_1\left(B\right) \tag{1.3}$$

$$\sigma_i\left(AB\right)\le\sigma_i\left(A\right)\sigma_1\left(B\right). \tag{1.4}$$

Ορισμός 1.5.2 (Πολική Παραγοντοποίηση Πίνακα) Κάθε $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας A γράφεται $A=VP$, όπου V ορθομοναδιαίος και P ερμιτιανός, με

$$A^{*}A=P^{2}\Rightarrow A=\left(\left(A^{*}\right)^{-1}P\right)P \text{ ή } A=PV \text{ με } AA^{*}=P^{2}\Rightarrow A=P\left(P\left(A^{*}\right)^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow A=PV.$$

Παρατήρηση 1.5.2 Κάθε $n\times m$ μιγαδικός πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή,

$$A=U\Sigma V^{*}=U\Sigma U^{*}UV^{*}=\left(U\Sigma U^{*}\right)\left(UV^{*}\right)=PW,$$

όπου ο πίνακας $P=U\Sigma U^{*}$ είναι ερμιτιανός, θετικά ημιορισμένος και $rank\left(P\right)=rank\left(A\right)$, ενώ ο πίνακας $W=UV^{*}$ είναι ορθομοναδιαίος. Δηλαδή έχουμε την πολική παραγοντοποίηση πίνακα.

Αν τώρα ο μιγαδικός πίνακας A είναι $n\times n$ τετραγωνικός , τότε θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$AA^* = Udiag\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min\{n,m\}}^2\right\}U^*,$$

όπου τα ιδιοδιανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ του AA^*, ονομάζονται *αριστερά ιδιοδιανύσματα* του A. Και ,

$$A^*A = Vdiag\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{\min\{n,m\}}^2\right\}V^*,$$

όπου τα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A^*A, ονομάζονται *δεξιά ιδιοδιανύσματα* του A.

Παρατήρηση 1.5.3 (Αντιστρόφος ως προς SVD) Αν ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ο αντίστροφος του A^{-1}, με την βοήθεια της παραγοντοποίησης SVD μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$A^{-1} = Vdiag\left\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_n}\right\}U^* = V\Sigma^{-1}U^*.$$

Ορισμός 1.5.3 (Ψευδοαντίστροφος Πίνακας, Moore–Penrose) Έστω ένας $n \times m$ πίνακας A με παραμετροποίηση SVD, όπου U,V ορθομοναδιαίοι πίνακες, ώστε

$$A = U\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}V^* = U\Sigma V^*,$$

με $rank(A) = r$, και $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ιδιάζουσες τιμές του A.

Ορίζουμε ως *(Moore–Penrose) ψευδοαντίστροφο* του πίνακα A, τον $m \times n$ πίνακα

$$A^\dagger = V\begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^{-1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}U^* = V\Sigma^{-1}U^*.$$

Πρόταση 1.5.1 (Ιδιότητες Ψευδοαντίστροφου Πίνακα) Γενικά, ισχύουν:

1. $AA^\dagger A = A$.
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.
3. Οι πίνακες $AA^\dagger$ και $A^\dagger A$ είναι ερμιτιανοί.

1.6 Αριθμητικό Πεδίο – Αριθμητική Ακτίνα

Ορισμός 1.6.1 (Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα) Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A. Ονομάζουμε *Αριθμητικό πεδίο* (*Numerical Range ή Field of Values*) του πίνακα A και συμβολίζουμε με $F(A)$ το σύνολο

$$F(A) = \left\{ x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \right\}.$$

Ορισμός 1.6.2 (Αριθμητική Ακτίνα Πίνακα) Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A. Ονομάζουμε α*ριθμητικό ακτίνα* (*numerical radious*) του πίνακα A και συμβολίζουμε με $r(A)$ το σύνολο

$$r(A) = \max\left\{ |z| : z \in F(A) \right\}.$$

Πρόταση 1.6.1 (Συμπάγεια) Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A, το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Πρόταση 1.6.2 Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A και $\alpha \in \mathbb{C}$, ισχύουν

$$F(A + \alpha I) = F(A) + \alpha \quad \text{και} \quad F(\alpha A) = \alpha F(A).$$

Πρόταση 1.6.3 Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A, ισχύουν

$$F(H_A) = F\left(\frac{A + A^*}{2}\right) = \operatorname{Re}\left(F(A)\right) \quad \text{και} \quad F(K_A) = F\left(\frac{A - A^*}{2}\right) = i \operatorname{Im}\left(F(A)\right)$$

όπου το $\operatorname{Im}(\cdot)$ περιλαμβάνει την φανταστική μονάδα i.

Ορισμός 1.6.3 (Φάσμα Πίνακα) Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A. Ονομάζουμε *Φάσμα* του πίνακα *A,* το σύνολο των ιδιοτιμών του A και το συμβολίζουμε $\delta(A)$. Δηλαδή

$$\delta(A) = \left\{ \lambda_i \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I_n) = 0 \right\}$$

Πρόταση 1.6.4 Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A, το φάσμα $\delta(A)$, περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο $F(A)$. Δηλαδή

$$\delta(A) \subseteq F(A).$$

Πρόταση 1.6.5 (Υποπροσθετικότητα) Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει

$$F(A + B) \subseteq F(A) + F(B).$$

Πρόταση 1.6.6 Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικούς πίνακες A, U , και U ορθομοναδιαίο, ισχύει

$$F\left(U^* AU\right) = F\left(A\right).$$

Πρόταση 1.6.7 (Κανονικότητα) Για κάθε κανονικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ το αριθμητικό του πεδίο είναι ίσο με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών, δηλαδή

$$F\left(A\right) = Co\left(\delta\left(A\right)\right).$$

Πρόταση 1.6.8 Αν ένα πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ερμιτιανός, τότε το αριθμητικό του πεδίο είναι κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του A.

Πρόταση 1.6.9 (Ελλειπτικό Θεώρημα) Έστω ένας 2×2 τετραγωνικός πίνακας με ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Το αριθμητικό πεδίο του A είναι ένας ελλειπτικός δίσκος με εστίες λ_1, λ_2 και μικρό άξονα ίσο με $\sqrt{tr\left(A^* A\right) - \left|\lambda_1\right|^2 + \left|\lambda_2\right|^2}$.

Πρόταση 1.6.10 (Θεώρημα Toplitz–Hausdorff) Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A, το αριθμητικό πεδίο $F\left(A\right)$ είναι κυρτό.

1.7 Διαταραχές Ιδιοτιμών

Ορισμός 1.7.1 Έστω ένας πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ονομάζουμε πίνακα *διαταραχής* ένα πίνακα $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιον ώστε

$$\tilde{A} = A + E\,.$$

Θεώρημα 1.7.1 (Bauer–Fike) *Αν Q είναι ένας τυχαίος $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας, τότε για κάθε $\tilde{\lambda} \in \delta\left(\tilde{A}\right) \setminus \delta\left(A\right)$ ισχύει*

$$\left\| Q^{-1}\left(A - \tilde{\lambda} I\right)^{-1} Q \right\|^{-1} \le \left\| Q^{-1} E Q \right\|.$$

Ορισμός 1.7.2 Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, λ μία ιδιοτιμή του και $x, y \in \mathbb{C}^n$ τα αντίστοιχα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής. Ονομάζουμε *δείκτη κατάστασης* της ιδιοτιμής λ, τον ακόλουθο συντελεστή

$$\kappa_A\left(\lambda\right) = \frac{\left\|x\right\|\left\|y\right\|}{\left|y^* x\right|}.$$

Ο δείκτης κατάστασης ιδιοτιμής αποτελεί ένα μέτρο ευαισθησίας της ιδιοτιμής αυτής.

Πρόταση 1.7.1 *Έστω ένας κανονικός πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *με ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. *Αν* $\tilde{\lambda}$ *είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα* $\tilde{A} = A + E$, *τότε υπάρχει ιδιοτιμή* $\lambda_i \in \delta(A)$ *τέτοια ώστε*

$$\left|\tilde{\lambda} - \lambda_i\right| \le \|E\|.$$

Θεώρημα 1.7.2 *Έστω ότι ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος με* $A = Q\Lambda Q^{-1}$ *και* $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. *Θεωρούμε επίσης μία νόρμα* $\|\bullet\|$ *που ικανοποιεί τη σχέση* $\|diag\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}\| = \max_{1\le i\le n}|\mu_i|$, *για κάθε διαγώνιο πίνακα. Τότε για κάθε ιδιοτιμή* $\tilde{\lambda}$ *του πίνακα* $\tilde{A}$, *υπάρχει μία ιδιοτιμή* $\lambda_i \in \delta(A)$ *τέτοια ώστε*

$$\left|\tilde{\lambda} - \lambda_i\right| \le \mathrm{K}(Q)\|E\|,$$

όπου $\mathrm{K}(Q)$ *ο δείκτης κατάστασης του πίνακα Q.*

Παρατήρηση 1.7.1 Το Θεώρημα 1.7.2 παρουσιάζεται συχνά στη βιβλιογραφία ως το Θεώρημα Bauer–Fike αντί του Θεωρήματος 1.7.1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Κανονικοί Πίνακες

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε εκτενέστερα την έννοια του κανονικού πίνακα. Θα συνδυάσουμε τους κανονικούς πίνακες με τις ιδιοτιμές και με τα ιδιοδιανύσματα, με τους ερμιτιανούς και με τους αντιερμιτιανούς πίνακες, με το φάσμα του πίνακα, με την πολική παραγοντοποίηση, με τις ιδιάζουσες τιμές πίνακα, με την παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών, καθώς επίσης με το εσωτερικό γινόμενο και με τις νόρμες διανυσμάτων και πινάκων. Θα ακολουθήσουν εβδομήντα οκτώ συνθήκες κανονικότητας με τις οποίες θα συνδυάσουμε όλα τα παραπάνω.

2.1 Η έννοια του κανονικού πίνακα

Όπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο και στον Ορισμό 1.1.6, κανονικός ονομάζεται ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A που αντιμετατίθεται με τον αναστροφοσυζυγή του, δηλαδή

$$AA^* = A^* A .$$

Η έννοια λοιπόν του κανονικού πίνακα θα συνδυαστεί με τις ακόλουθες συνθήκες.

Συνθήκη 2.1.1 *Ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν ο $p(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$ είναι κανονικός για κάθε πολυώνυμο $p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$.*

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός, τότε για κάθε πολυώνυμο $p(\lambda)$ ισχύει

$$p(A)\left[p(A)\right]^* = \left[\alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right]\left[\alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right]^*$$

$$= \left[\alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right]^* \left[\alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right] = \left[p(A)\right]^* p(A),$$

δηλαδή ο πίνακας $p(A)$ είναι κανονικός.

Το αντίστροφο είναι προφανές □

Συνθήκη 2.1.2 *Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A^{-1} είναι κανονικός.*

Απόδειξη
Αν ο A είναι αντιστρέψιμος κανονικός πίνακας. Τότε ισχύει

$$\left(A^{-1}\right)^{*} A^{-1} = \left(A^{*}\right)^{-1} A^{-1} = \left(AA^{*}\right)^{-1} = \left(A^{*}A\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^{*}\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{*}.$$

Άρα $\left(A^{-1}\right)^{*} A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{*}$, δηλαδή ο A^{-1} είναι κανονικός.

Αντίστροφα, αν ο A^{-1} είναι κανονικός, τότε από το ευθύ θα είναι κανονικός και ο πίνακας $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{A}$. □

Συνθήκη 2.1.3 *Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο $A^{-1}A^{*}$ είναι ορθομοναδιαίος.*

Απόδειξη
Πράγματι αν ο A είναι αντιστρέψιμος και κανονικός, τότε

$$\left(A^{-1}A^{*}\right)\left(A^{-1}A^{*}\right)^{*} = A^{-1}A^{*}A\left(A^{-1}\right)^{*} = A^{-1}AA^{*}\left(A^{-1}\right)^{*} = I\cdot I = I$$

και

$$\left(A^{-1}A^{*}\right)^{*}\left(A^{-1}A^{*}\right) = A\left(A^{-1}\right)^{*} A^{-1}A^{*} \overset{2.1.2}{=} AA^{-1}\left(A^{-1}\right)^{*} A^{*} = I\cdot I = I.$$

Άρα $\left(A^{-1}A^{*}\right)\left(A^{-1}A^{*}\right)^{*} = \left(A^{-1}A^{*}\right)^{*}\left(A^{-1}A^{*}\right) = I$.

Αντίστροφα, αν ο $A^{-1}A^{*}$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε $A^{*} = AA^{-1}$, και

$$\left(A^{-1}A^{*}\right)\left(A^{-1}A^{*}\right)^{*} = \left(A^{-1}A^{*}\right)^{*}\left(A^{-1}A^{*}\right) \Rightarrow A^{-1}A^{*}A\left(A^{-1}\right)^{*} = A\left(A^{-1}\right)^{*} A^{-1}A^{*}$$

$$\Rightarrow A^{*}A^{-1}AA = A\left(A^{-1}\right)^{*} A^{*}A^{*} \Rightarrow A^{*}A = AA^{*},$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.1.4 *Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $A = A^{*}AA^{*-1}$.*

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός πίνακας τότε $A^{*}AA^{*-1} = AA^{*}A^{*-1} = A\cdot I = A$.

Αντίστροφα, αν $A = A^{*}AA^{*-1} \Rightarrow AA^{*} = A^{*}AA^{*-1}A^{*} \Rightarrow AA^{*} = A^{*}AI \Rightarrow AA^{*} = A^{*}A$, δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.1.5 *Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A αντιμετατίθεται με τον πίνακα $A^{-1}A^{*}$.*

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός τότε

$$A\left(A^{-1}A^{*}\right)=AA^{-1}A^{*}=I\cdot A^{*}=A^{*}$$

και

$$\left(A^{-1}A^{*}\right)A=A^{-1}A^{*}A=A^{-1}AA^{*}=I\cdot A^{*}=A^{*}.$$

Άρα $A\left(A^{-1}A^{*}\right)=\left(A^{-1}A^{*}\right)A$.

Αντίστροφα, αν ισχύει $\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}^{*}\right)=\left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}^{*}\right)\mathrm{A}$, τότε

$$A^{*}=A^{-1}A^{*}A\Rightarrow AA^{*}=AA^{-1}A^{*}A\Rightarrow AA^{*}=IA^{*}A\Rightarrow AA^{*}=A^{*}A,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.1.6 *Ο πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας $U^{*}AU$ είναι κανονικός για οποιοδήποτε ορθομοναδιαίο πίνακα U.*

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε έχουμε

$$\left(U^{*}AU\right)\left(U^{*}AU\right)^{*}=U^{*}AUU^{*}A^{*}U=U^{*}AIA^{*}U=U^{*}AA^{*}U$$

και

$$\left(U^{*}AU\right)^{*}\left(U^{*}AU\right)=U^{*}A^{*}UU^{*}AU=U^{*}A^{*}IAU=U^{*}A^{*}AU=U^{*}AA^{*}U.$$

Άρα

$$\left(U^{*}AU\right)\left(U^{*}AU\right)^{*}=\left(U^{*}AU\right)^{*}\left(U^{*}AU\right),$$

δηλαδή ο πίνακας $U^{*}AU$ είναι κανονικός.

Αντίστροφα, αν ισχύει $\left(U^{*}AU\right)\left(U^{*}AU\right)^{*}=\left(U^{*}AU\right)^{*}\left(U^{*}AU\right)$, τότε

$$U^{*}AUU^{*}A^{*}U=U^{*}A^{*}UU^{*}AU\Rightarrow U^{*}AA^{*}U=U^{*}A^{*}AU$$

$$\Rightarrow UU^{*}AA^{*}UU^{*}=UU^{*}A^{*}AUU^{*}\Rightarrow AA^{*}=A^{*}A,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.1.7 *Ο πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν, στην περίπτωση που ισχύει*

$$U^*AU = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix},$$

για κάποιο ορθομοναδιαίο U *με* B_{11} *τετραγωνικό τότε υποχρεωτικά* $B_{12} = 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι ο πίνακας A είναι κανονικός. Τότε και ο $U^*AU = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$ είναι κανονικός , από τη Συνθήκη 2.1.6, με $U^*A^*U = B^* = \begin{bmatrix} \overline{B_{11}} & 0 \\ \overline{B_{12}} & \overline{B_{22}} \end{bmatrix}$.

Άρα έχουμε

$$BB^* = B^*B \Rightarrow \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{B_{11}} & 0 \\ \overline{B_{12}} & \overline{B_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B_{11}} & 0 \\ \overline{B_{12}} & \overline{B_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} B_{11}\overline{B_{11}} + B_{12}\overline{B_{12}} & B_{12}\overline{B_{22}} \\ B_{22}\overline{B_{12}} & B_{22}\overline{B_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B_{11}}B_{11} & \overline{B_{11}}B_{12} \\ \overline{B_{12}}B_{11} & \overline{B_{12}}B_{12} + \overline{B_{22}}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} B_{11}{}^2 + B_{12}{}^2 & B_{12}\overline{B_{22}} \\ B_{22}\overline{B_{12}} & B_{22}{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}{}^2 & \overline{B_{11}}B_{12} \\ \overline{B_{12}}B_{11} & B_{12}{}^2 + B_{22}{}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{11}{}^2 + B_{12}{}^2 = B_{11}{}^2 \\ B_{12}\overline{B_{22}} = \overline{B_{11}}B_{12} \\ B_{22}\overline{B_{12}} = \overline{B_{12}}B_{11} \\ B_{22}{}^2 = B_{12}{}^2 + B_{22}{}^2 \end{cases} \Rightarrow B_{12} = 0.$$

Αντίστροφα, αν $U^*AU = B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$, τότε

$$BB^* = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{B_{11}} & 0 \\ 0 & \overline{B_{22}} \end{bmatrix} = B_{11}{}^2 + B_{22}{}^2$$

και

$$B^*B = \begin{bmatrix} \overline{B_{11}} & 0 \\ 0 & \overline{B_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = B_{11}{}^2 + B_{22}{}^2.$$

Άρα $BB^* = B^*B \Rightarrow \left(U^*AU\right)\left(U^*A^*U\right) = \left(U^*A^*U\right)\left(U^*AU\right) \overset{2.1.6}{\Rightarrow} AA^* = A^*A$,

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.1.8 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν για κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο του A, $W \subseteq \mathbb{C}^n$, και ο $W^{\perp}$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του A.*

Απόδειξη
Η συνθήκη αυτή αποτελεί γεωμετρική επιβεβαίωση της Συνθήκης 2.1.6, αν θεωρήσουμε τον πίνακα

$$U^* AU = B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}. \ \square$$

Συνθήκη 2.1.9 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν για κάθε ιδιοδιάνυσμα x του A, το ορθογώνιο συμπλήρωμα $x^{\perp}$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του A.*

Απόδειξη
Είναι άμεση συνέπεια της Συνθήκης 2.1.7, αν θεωρήσουμε $W = span\{x\}$. □

Συνθήκη 2.1.10 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U και διαγώνιος πίνακας D τέτοιοι ώστε $U^* AU = D$.*

Απόδειξη
Από το Θεώρημα 1.1.6 του Schur έχουμε $T = U^* AU \Rightarrow A = UTU^*$, όπου ο πίνακας U είναι ορθομοναδιαίος και ο T είναι άνω τριγωνικός. Αν ο A είναι κανονικός, δηλαδή $AA^* = A^* A$, τότε

$$TT^* = U^* AUU^* A^* U = U^* AA^* U = U^* A^* AU = U^* A^* UU^* AU = T^* T.$$

Από τη Συνθήκη 2.1.9, ο T είναι διαγώνιος, αφού θα περιέχει κάθετα ιδιοδιανύσματα.

Αντίστροφα, αφού ο D είναι διαγώνιος, $DD^* = D^* D$. Επομένως,

$$AA^* = \left(UDU^*\right)\left(UD^* U^*\right) = UDU^* UD^* U^* = UDD^* U^* = UD^* DU^* = A^* A. \ \square$$

Συνθήκη 2.1.11 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύει ότι,*

$$AB = BA \Rightarrow A^* B = BA^*.$$

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός πίνακας, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο $U^* AU = D$ διαγώνιος πίνακας, για κάποιο ορθομοναδιαίο πίνακα U. Τότε ισχύει $DB = BD \Rightarrow D^* B = BD^*$.

Πράγματι, αν $D=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn}\end{bmatrix}$, τότε $D^*=\begin{bmatrix}\lambda_{11}^* & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_{22}^* & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn}^*\end{bmatrix}$,

και για $B=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn}\end{bmatrix}$, έχουμε

$$D^*B=\begin{bmatrix}\lambda_{11}^* & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_{22}^* & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{11}^*\beta_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_{22}^*\beta_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn}\beta_{nn}^*\end{bmatrix}=BD^*.$$

Αντίστροφα, αν ισχύει $AB=BA\Rightarrow A^*B=BA^*$, τότε για $B=A$ έχουμε $A^*A=AA^*$, δηλαδή ο Α είναι κανονικός. □

2.2 Κανονικότητα και Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα

Συνεχίζοντας τις εκτιμήσεις για την κανονικότητα ενός πίνακα $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, θα συσχετίσουμε την έννοια αυτή με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανίσματα του με την βοήθεια των συνθηκών που ακολουθούν.

Συνθήκη 2.2.1 *Ο πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα x του A, είναι ιδιοδιάνυσμα και του A^*.*

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός τότε $U^*AU=D$ και $U^*A^*U=D^*$ για κάποιον διαγώνιο πίνακα D και για κάποιο ορθομοναδιαίο U. Όμως ο D και ο D^* είναι ίσοι πίνακες με διαγώνιο τις ιδιοτιμές τους. Άρα έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

Αντίστροφα. Έστω $u_1=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$, κανονικοποιημένο διάνυσμα που βρίσκεται στην πρώτη στήλη του πίνακα U. Ο πίνακας A γράφεται $U^*AU=B$ και έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον πίνακα A^*, που γράφεται $U^*A^*U=B^*$ ο οποίος από την 2.1.7 είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.2.2 *Ο πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A.*

Απόδειξη
Προκύπτει άμεσα από τη Συνθήκη 2.1. □

Συνθήκη 2.2.3 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και τα ιδιοδιανυσμάτα του, που προέρχονται από διακεκριμένες ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη
Είναι ισοδύναμη με τη Συνθήκη 2.2.2. □

Συνθήκη 2.2.4 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε ο πίνακάς A μπορεί να γραφεί ως $A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j$, όπου E_j ένας $n \times n$ πίνακας με $E_j^{\,2} = E_j = E_j^{\,*}$, $E_i E_j = 0$ για $i \neq j$ και $\sum_{j=1}^{n} E_j = I$.*

Απόδειξη
Αφού ο A είναι κανονικός, μπορούμε να θεωρήσουμε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ τις ιδιοτιμές $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, και $E_j = x_j x_j^{\,*}$. Κάθε πίνακας E_j ικανοποιεί τις σχέσεις $E_j^{\,2} = E_j = E_j^{\,*}$, $E_i E_j = 0$ για $i \neq j$ και $\sum_{j=1}^{n} E_j = I$.

Αντίστροφα, έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ $n \times n$ πίνακες που ικανοποιούν τις σχέσεις $E_j^{\,2} = E_j = E_j^{\,*}$, $E_i E_j = 0$ για $i \neq j$ και $\sum_{j=1}^{n} E_j = I$. Τότε επαληθεύεται με πράξεις ότι ο πίνακας $A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j$ είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.2.5 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχουν διακεκριμένοι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε ο πίνακάς A να μπορεί να γραφτεί ως $A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$, όπου κάθε P_j είναι ένας $n \times n$ πίνακας ορθογώνιας προβολής με $P_j^{\,2} = P_j = P_j^{\,*}$, $P_i P_j = 0$ για $i \neq j$ και $\sum_{j=1}^{n} P_j = I$.*

Απόδειξη
Οι ορθογώνιες προβολές $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της Συνθήκης 2.2.4, και άρα ισχύει. □

Συνθήκη 2.2.6 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $A^* = p(A)$.*

Απόδειξη
Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε από τη Συνθήκη 2.1.10 ότι $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Διαλέγουμε πολυώνυμο παρεμβολής τάξης το πολύ $n-1$, που ικανοποιεί τη σχέση $p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα $p(A) = A^*$.

Αντίστροφα, αν $A^* = p(A) \Rightarrow A^* = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$.
Τότε

$$A^* A = \alpha_n A^{n+1} + \cdots + \alpha_1 A^2 + \alpha_0 A \text{ και } AA^* = \alpha_n A^{n+1} + \cdots + \alpha_1 A^2 + \alpha_0 A .$$

Άρα

$$AA^* = A^* A ,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.2.7 *Ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A αντιμετατίθεται με κανονικούς πίνακες με διακεκριμένες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι ο κανονικός πίνακας A είναι ισοδύναμος με ένα διαγώνιο πίνακα D (ορισμός 2.1.10). Τότε ο D αντιμετατίθεται με έναν κανονικό πίνακα N με διακεκριμένες ιδιοτιμές, δηλαδή $D \cdot N = N \cdot D$.

Αντίστροφα, αν ισχύει $A \cdot N = N \cdot A$, με N κανονικό πίνακα με διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε θα υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $A = p(N)$. Άρα από τον ορισμό 2.1.1 ο A είναι κανονικός. □

2.3 Κανονικότητα και Ερμιτιανό – Αντιερμιτιανό Μέρος Πίνακα

Όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 1.1, κάθε τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας μπορεί να αναλυθεί ως εξής

$$A = H_A + iK_A ,$$

όπου $H_A = \dfrac{A + A^*}{2}$ το ερμιτιανό μέρος και $iK_A = \dfrac{A - A^*}{2}$ το αντιερμιτιανό μέρος.

Οι ακόλουθες συνθήκες θα συνδυάσουν ερμιτιανούς και αντιερμιτιανούς πίνακες με την κανονικότητα, καθώς και με την ανάλυση της προηγούμενης μορφής.

Συνθήκη 2.3.1 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A αντιμετατίθεται με ερμιτιανούς πίνακες με διακεκριμένες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη

Οι ερμιτιανοί πίνακες είναι κανονικοί, άρα ισχύει από τη Συνθήκη 2.2.7. □

Συνθήκη 2.3.2 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας $A^* A - AA^*$ είναι ημιορισμένος.*

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός, τότε $A^*A - AA^* = 0$. Άρα ο $A^*A - AA^*$ είναι ημιορισμένος.

Αντίστροφα, αν οι πίνακες A^*A και AA^* είναι θετικά ημιορισμένοι με ίχνη τα $tr\left(A^*A\right)$ και $tr\left(AA^*\right)$. Όμως ο μοναδικός ημιορισμένος πίνακας με ίχνος 0 είναι ο μηδενικός.
Επομένως $A^*A - AA^* = 0$, δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.3 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $H_A K_A = K_A H_A$.*

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$H_A K_A = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)\frac{1}{2}\left(A - A^*\right) = \frac{1}{4}\left(A^2 - AA^* + A^*A + \left(A^*\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(A^2 - \left(A^*\right)^2\right) = K_A H_A .$$

Αντίστροφα, έχουμε

$$H_A K_A = K_A H_A \Rightarrow \frac{1}{4}\left(A^2 - AA^* + A^*A + \left(A^*\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(A^2 + AA^* - A^*A + \left(A^*\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow -AA^* + A^*A = AA^* - A^*A \Rightarrow 2A^*A = 2AA^* \Rightarrow A^*A = AA^*,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.4 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $AH_A = H_A A$.*

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$AH_A = A\frac{1}{2}\left(A + A^*\right) = \frac{1}{2}\left(A^2 + AA^*\right) \text{ και } H_A A = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)A = \frac{1}{2}\left(A^2 + A^*A\right).$$

Αφού $A^*A - AA^* \Rightarrow AH_A = H_A A\mathrm{A}$.

Αντίστροφα, αν $AH_A = H_A A \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A^2 + AA^*\right) = \frac{1}{2}\left(A^2 + A^*A\right) \Rightarrow AA^* = A^*A$,

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.5 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $AH_A + H_A A^* = 2H_A^2\left(= H_A\mathrm{A} + \mathrm{A}^* H_A\right)$.*

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$AH_A + H_A A^* = \frac{1}{2}\left(A^2 + AA^*\right) + \frac{1}{2}\left(AA^* + \left(A^*\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(A^2 + 2AA^* + \left(A^*\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)^2 = H_A^2.$$

Αντίστροφα, έχουμε

$$AH_A + H_A A^* = 2H_A^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A^2 + AA^*\right) + \frac{1}{2}\left(AA^* + \left(A^*\right)^2\right) = 2\frac{1}{4}\left(A^* + A\right)^2 \Rightarrow AA^* = A^* A,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.6 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $AK_A = K_A A$.

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$AK_A = A\frac{1}{2}\left(A - A^*\right) = \frac{1}{2}\left(A^2 - AA^*\right) \text{ και } K_A A = \frac{1}{2}\left(A - A^*\right)A = \frac{1}{2}\left(A^2 - A^* A\right).$$

Αφού $A^* A - AA^* \Rightarrow AK_A = K_A A$.

Αντίστροφα, έχουμε

$$AK_A = K_A A \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A^2 - AA^*\right) = \frac{1}{2}\left(A^2 - AA^*\right) \Rightarrow AA^* = A^* A,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.7 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $AK_A + K_A A^* = 2K_A{}^2 \left(= K_A A + A^* K_A\right)$.

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$AK_A + K_A K_A{}^* = \frac{1}{2}\left(A^2 - AA^*\right) + \frac{1}{2}\left(AA^* - \left(A^*\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(A^2 - 2AA^* + \left(A^*\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(A - A^*\right)^2 = K_A^2.$$

Αντίστροφα, αν $AK_A + K_A A^* = 2K_A^2$, τότε

$$\frac{1}{2}\left(A^2 - AA^*\right) + \frac{1}{2}\left(AA^* - \left(A^*\right)^2\right) = 2\frac{1}{4}\left(A^* - A\right)^2 \Rightarrow AA^* = A^* A,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.8 *Έστω ότι ο πίνακας* H_A *έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του* H_A *είναι ιδιοδιάνυσμα του* K_A.

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός τότε από τη Συνθήκη 2.3.3, $H_A K_A = K_A H_A$, και αφού ο H_A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές , ο K_A έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον H_A.

Αντίστροφα, αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του H_A είναι ιδιοδιάνυσμα του K_A, αν και μόνο αν ο H_A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε αντιμετατίθενται, οπότε από τη Συνθήκη 2.1.11 ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.3.9 *Έστω ότι ο πίνακας K_A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του K_A είναι ιδιοδιάνυσμα του H_A.*

Συνθήκη 2.3.10 *Έστω ότι ο πίνακας H_A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του H_A είναι ιδιοδιάνυσμα του A.*

Συνθήκη 2.3.11 *Έστω ότι ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του H_A.*

Συνθήκη 2.3.12 *Έστω ότι ο πίνακας K_A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του H_A είναι ιδιοδιάνυσμα του A.*

Συνθήκη 2.3.13 *Έστω ότι ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του K_A.*

Οι Συνθήκες 2.3.9 − 2.3.13, αποδεικνύονται όμοια με τη Συνθήκη 2.3.8.

Συνθήκη 2.3.14 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν στην Toeplitz (Καρτεσιανή) γραφή του A ισχύει $H_A^2 + K_A^2 = A^* A \ \left(ή\ AA^*\right)$.*

Απόδειξη
Έχουμε ότι

$$H_A^2 + K_A^2 = \left(\frac{A+A^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{A-A^*}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[A^2 + 2AA^* + \left(A^*\right)^2 - A^2 + 2AA^* - \left(A^*\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4} 4AA^* = AA^*.$$

Όμοια για $H_A^2 + K_A^2 = AA^*$.

Αντίστροφα, αν $H_A^2 + K_A^2 = A^* A$, τότε

$$\frac{1}{4}\left(2A^* A + 2AA^*\right) = A^* A \Rightarrow A^* A = AA^*.$$

Όμοια για $H_A^2 + K_A^2 = AA^*$. □

2.4 Κανονικότητα και Φάσμα Πίνακα.

Γνωρίζουμε ότι $\delta(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα Α, δηλαδή το φάσμα του πίνακα *A*, και $\delta(H_A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\delta(K_A) = \{i\beta_1, \ldots, i\beta_n\}$ τα φάσματα των H_A και K_A αντίστοιχα. Με τη βοήθεια αυτών θα δείξουμε τις ακόλουθες Συνθήκες.

Συνθήκη 2.4.1 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει κατάλληλη διάταξη των ιδιοτιμών του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του A τέτοια ώστε*

$$\delta(A) = \left\{\alpha_j + i\beta_{\sigma(j)} : j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Απόδειξη
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι οι πίνακες *A*, H_A, K_A είναι διαγώνιοι από τη Συνθήκη 2.1.10, οπότε υπάρχει κατάλληλη διάταξη των ιδιοτιμών του *A*, του H_A και του K_A, ώστε να ισχύει ότι $\delta(A) = \left\{\alpha_j + i\beta_{\sigma(j)} : j = 1, \ldots, n\right\}$. □

Συνθήκη 2.4.2 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\mathrm{Re}\,\delta(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Απόδειξη
Αν ο πίνακας *A* είναι κανονικός προκύπτει άμεσα από τη Συνθήκη 2.4.1.

Το αντίστροφο προκύπτει από τη Συνθήκη 2.4.3 που ακολουθεί, όπως φαίνεται στο αντίστροφο της Συνθήκης 2.4.3. □

Συνθήκη 2.4.3 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\mathrm{Im}\,\delta(A) = \{i\beta_1, \ldots, i\beta_n\}$.

Απόδειξη
Αν ο *A* είναι κανονικός, τότε προκύπτει άμεσα από τη Συνθήκη 2.4.1.

Αντίστροφα, η Συνθήκη 2.4.3 συνεπάγεται τη Συνθήκη 2.4.1.
Πράγματι, υποθέτουμε $A = H_A + iK_A$, και η διαγωνοποίηση του H_A θα είναι

$$H_A = U^* D U \ .$$

Άρα $U^* A U = D + U^* K_A U$, όπου $U^* K_A U$ ερμιτιανός.

Επιπλέον, με μεταφορά της μορφής $A - \mu I$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του H_A είναι $\alpha_1 > \cdots > \alpha_\xi > 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_\kappa & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix},$$

όπου κ η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής α_1 του H_A .

Έστω (λ_0, x_0) ιδιοζεύγος του A με $\mathrm{Re}(\lambda_0) = \alpha_1$. Τότε για $x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ είναι

$$\mathrm{A} x_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathrm{I}_\kappa & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} (\alpha_1 + i\beta_\xi) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathrm{I}_\kappa & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + i\beta_\xi) = \alpha_1 (x_1^* \cdot x_1) + x_2^* D_1 x_2 + \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_1 \|x_1\|^2 + x_2^* D_1 x_2 ,$$

Όμως ,

$$\alpha_1 (x_1^* \cdot x_1) + x_2^* D_1 x_2 \in \mathbb{R} , \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in i\mathbb{R} \text{ και } \|x_0\| = 1 \Rightarrow \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 1$$

Τώρα $\dfrac{x_2^* D_1 x_2}{x_2^* \cdot x_2} \le \alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow x_2^* D_1 x_2 < \alpha_1 (x_2^* \cdot x_2)$ και άρα $x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Πράγματι, αν $x_2 \ne 0$, τότε $\alpha_1 < \alpha_1 \|x_1\|^2 + \alpha_1 \|x_2\|^2 < \alpha_1$ που είναι άτοπο.
Άρα το άθροισμα όλων των χώρων των ιδιοτιμών του A με πραγματικό μέρος α_1 αποτελούνται από ιδιοδιανίσματα της μορφής $\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$, με $y \in \mathbb{C}^*$.
Ο διανυσματικός χώρος V είναι αναλλοίωτος για τον A και για τον H_A .

Πράγματι,

$$\left.\begin{array}{r} Ax \in V, \forall x \in V \\ H_A x \in V, \forall x \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \left(A - H_A\right)x = K_A x \in V, \forall x \in V .$$

Άρα είναι αναλλοίωτος υπόχωρος για τον K_A και άρα $K_{21} = 0 \Rightarrow K_{21} = -K_{12} = 0$ αφού ο K είναι αντιερμιτιανός. Δηλαδή $K_A = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}$, όπου K_{11} διαγώνιος.

Αφού $K_{11}^* = -K_{11} \Leftrightarrow K_{11}$ κανονικός και υπάρχει ορθομοναδιαίος $V \in \mathbb{C}^{\kappa\times\kappa}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $V^* K_{11} V = \Delta$ διαγώνιος. Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} V^* & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \mathrm{A} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^* & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathrm{I}_\kappa & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V^* & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 I_\kappa & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{11} & V^* K_{12} \\ K_{21} V & K_{22} \end{bmatrix},$$

με $\begin{bmatrix} \Delta_{11} & V^* K_{12} \\ K_{21} V & K_{22} \end{bmatrix}$ αντιερμιτιανό. Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι ο K_{11} είναι διαγώνιος.

Επαγωγικά, μπορούμε να συνεχίσουμε και για τις υπόλοιπες διαστάσεις. □

2.5 Κανονικότητα και Πολική Παραγοντοποίηση

Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο, και συγκεκριμένα στον Ορισμό 1.5.1, η πολική παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A = VP$, όπου V ορθομοναδιαίος και P ερμιτιανός, θα αποτελέσει το βασικό συστατικό για τις παρακάτω Συνθήκες κανονικότητας.

Συνθήκη 2.5.1 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $VP = PV$.*

Απόδειξη
Αν A κανονικός, δηλαδή $AA^* = A^* A$, τότε

$$PP\left(P^*\right)^{-1} A^* = A^* PP\left(A^*\right)^{-1} \Rightarrow PP = A^* PV \Rightarrow \left(A^*\right)^{-1} PP = \left(A^*\right)^{-1} A^* PV$$

$$\Rightarrow \left(A^*\right)^{-1} PP = \left(A^*\right)^{-1} A^* PV \Rightarrow VP = PV .$$

Αντίστροφα, αν $A = VP = PV$ όπου V, P κανονικοί πίνακες που αντιμετατίθενται, τότε με απλές πράξεις επαληθεύεται ότι και ο A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.5.2 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $AV = VA$.*

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$AV = \left(A^*\right)^{-1} PPV = VPV \quad \text{και} \quad VA = VP\left(A^*\right)^{-1} P = VPV .$$

Άρα $AV = VA$.

Αντίστροφα, αν ισχύει $AV = VA$, τότε

$$VPV = VVP \Rightarrow V^*VPV = V^*VVP \Rightarrow PV = VP .$$

Άρα ο A είναι κανονικός από τη Συνθήκη 2.5.1. □

Συνθήκη 2.5.3 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $AP = PA$.*

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$AP = PP\left(A^*\right)^{-1} P = PPP\left(A^*\right)^{-1} = P^3\left(A^*\right)^{-1}$$

και

$$PA = PPP\left(A^*\right)^{-1} = P^3\left(A^*\right)^{-1} .$$

Άρα $AP = PA$.

Αντίστροφα, αν $AP = PA$, τότε

$$VPP = PVP \Rightarrow VPPP = PVPP \Rightarrow VPP^2 = PVP^2 .$$

Τότε $VP = PV$, αφού P^2 ερμιτιανος.
Άρα από τη Συνθήκη 2.5.1 ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.5.4 *Έστω ότι ο πίνακας V έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα του P.*

Απόδειξη
Ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.1. □

Συνθήκη 2.5.5 *Έστω ότι ο πίνακας P έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του P είναι ιδιοδιάνυσμα του V.*

Απόδειξη
Ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.1. □

Συνθήκη 2.5.6 *Έστω ότι ο πίνακας V έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα του A.*

Απόδειξη
Ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.2 . □

Συνθήκη 2.5.7 *Έστω ότι ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του V.*

Απόδειξη
Ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.2. □

Συνθήκη 2.5.8 *Έστω ότι ο πίνακας P έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του P είναι ιδιοδιάνυσμα του A.*

Απόδειξη
Ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.3. □

Συνθήκη 2.5.9 *Έστω ότι ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του P.*

Απόδειξη
Ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.3. □

Όπως γνωρίζουμε από την Παράγραφο 1.6 και τον Ορισμό 1.6.3, το φάσμα πινάκων πολικής παραγοντοποίησης των πινάκων *V και P* είναι το ακόλουθο,

$$\delta(V) = \{u_1, \ldots, u_n\} \quad \text{και} \quad \delta(P) = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}.$$

Με την βοήθεια αυτών έχουμε τις ακόλουθες Συνθήκες κανονικότητας.

Συνθήκη 2.5.10 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει* κατάλληλη διάταξη των ιδιοτιμών του *V* και του *P* τέτοια ώστε

$$\delta(A) = \left\{u_j \cdot \rho_{\sigma(j)} : j = 1, \ldots n\right\}.$$

Απόδειξη
Όμοια με τη Συνθήκη 2.4.1. □

Συνθήκη 2.5.11 *Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν το σύνολο των μέτρων των ιδιοτιμών του A είναι* $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$.

Απόδειξη
Όμοια με τη Συνθήκη 2.4.2. □

Συνθήκη 2.5.12 *Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν το σύνολο των ορισμάτων των ιδιοτιμών του A είναι* $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

Απόδειξη
Όμοια με τη Συνθήκη 2.4.3. □

Συνθήκη 2.5.13 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $|A| = |A^*|$.

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός, τότε έχουμε $|A| = \left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}} = \left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}} = |A^*|$.

Αντίστροφα, αν $|A| = |A^*|$, τότε

$$\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}} = \left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A^*A = AA^*,$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.5.14 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A αντιμετατίθεται με τον πίνακα* $\left[A, A^*\right] = AA^* - A^*A$.

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι έχουμε τον ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό, δηλαδή $A \to U^*AU$.

Θεωρούμε την αντιμετάθεση $C = \left[A, A^*\right] = AA^* - A^*A$, όπου $C \to U^*CU$.

Έστω C ένας μη μηδενικός πίνακας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι ο C είναι της μορφής

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix},$$

όπου C_{ii} είναι τετραγωνικοί υποπίνακες που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές του C, $\lambda_1(C), \lambda_2(C), \ldots, \lambda_m(C)$. Προφανώς, $m \geq 2$ αφού $trC = 0$.

Αντίστροφα, αν ο A και ο C αντιμετατίθενται, τότε υποθέτουμε ότι ο C έχει την ίδια μορφή με τον A, και $A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \cdots \oplus A_{mm}$.

Τότε $C_{ii} = \left[A_{ii}, A_{ii}^* \right]$, με $trC_{ii} = 0$ για $i = 1, 2, \ldots, m$ και $\lambda_i(C) = 0$ που είναι άτοπο, αφού $C = C_{11} \oplus C_{22} \oplus \cdots \oplus C_{mm}$. □

Συνθήκη 2.5.15 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A αντιμετατίθεται με τον $A^* A$ $\left(ή\ AA^* \right)$.*

Απόδειξη

Ο A αντιμετατίθεται με κάθε πολυώνυμο της μορφής $A^* A \left(ή\ AA^* \right)$. Άρα ο A αντιμετατίθεται με το πολυώνυμο $|A| = \left(A^* A \right)^{\frac{1}{2}} \left(ή\ \left| A^* \right| = \left(AA^* \right)^{\frac{1}{2}} \right)$, που ισχύει από τη Συνθήκη 2.5.2. □

2.6 Κανονικότητα και Ιδιάζουσες Τιμές

Η έννοια της κανονικότητας μπορεί να επεκταθεί και στις ιδιοτιμές του πίνακα $A^* A$, δηλαδή στις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ σύμφωνα με τις ακόλουθες συνθήκες.

Για τη Συνθήκη 2.6.1 που ακολουθεί, θα χρειαστούμε τις δύο ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 2.6.1 (Θεώρημα Rayleigh–Ritz) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας $n \times n$ ερμιτιανός πίνακας και έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, με τη διάταξη $\lambda_{\min} = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n = \lambda_{\max}$. Τότε ισχύει ότι*

$$\lambda_1 x^* x \le x^* A x \le \lambda_{\max} x^* x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{C}^n$$

με

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \le \min_{x \ne 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \min_{x^* x = 1} x^* A x \quad \text{και} \quad \lambda_{\max} = \lambda_n \le \max_{x \ne 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \max_{x^* x = 1} x^* A x .$$

Απόδειξη

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ερμιτιανός πίνακας. Τότε θα υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $A = U \Lambda U^*$, με $\Lambda = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \right)$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ έχουμε,

$$x^* A x = x^* U \Lambda U^* x = \left(U^* x \right)^* \Lambda \left(U^* x \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| \left(U^* x \right)_i \right|^2 .$$

Αφού κάθε στοιχείο $\left| \left(U^* x \right)_i \right|^2$ είναι μη αρνητικό θα έχουμε,

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} \left| \left(U^* x \right)_i \right|^2 \le x^* A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| \left(U^* x \right)_i \right|^2 \le \lambda_{\max} \sum_{i=1}^{n} \left| \left(U^* x \right)_i \right|^2 .$$

Όμως, αφού ο πίνακας U είναι ορθομοναδιαίος, θα έχουμε ότι,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\left(U^{*}x\right)_{i}\right|^{2}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{2}=x^{*}x,$$

και άρα $\lambda_1 x^* x = \lambda_{\min} x^* x \le x^* A x \le \lambda_{\max} x^* x = \lambda_n x^* x$.
Αν x είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, τότε ισχύει ότι

$$x^* A x \le x^* \lambda_1 x = \lambda_1 x^* x.$$

Όμοια αν x είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n, τότε ισχύει ότι

$$x^* A x \le x^* \lambda_n x = \lambda_n x^* x.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε $x \ne 0$ θα έχουμε $\dfrac{x^* A x}{x^* x} \le \lambda_n$, και αν x είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n θα είναι $\dfrac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_n$.

Τελικά για $x \ne 0$ θα έχουμε $\dfrac{x^* A x}{x^* x} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^* x}}\right)^* A \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^* x}}\right)$, με $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^* x}}\right)^* \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^* x}}\right) = 1$.

Άρα $\max\limits_{x \ne 0} \dfrac{x^* A x}{x^* x} = \max\limits_{x^* x = 1} x^* A x = \lambda_n$.

Όμοια αποδεικνύεται για το λ_1 ότι $\min\limits_{x \ne 0} \dfrac{x^* A x}{x^* x} = \min\limits_{x^* x = 1} x^* A x = \lambda_1$. □

Πρόταση 2.6.2 (Συμπλεκτικό Θεώρημα Cauchy) *Κάθε διαγώνιο στοιχείο ενός $n \times n$ ερμιτιανού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, βρίσκεται μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης ιδιοτιμής του.*

Απόδειξη
Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.6.1. □

Συνθήκη 2.6.1 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει* κατάλληλη διάταξη των ιδιοτιμών του A και του A^* τέτοια ώστε

$$\delta\left(A^* A\right) = \left\{\lambda_j \overline{\lambda_{\sigma(j)}} : j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Απόδειξη
Αν ο A κανονικός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι από τη Συνθήκη 2.1.10 ότι είναι διαγώνιος, οπότε ισχύει.

Αντίστροφα, έστω $\delta\left(A^* A\right) = \left\{\lambda_j \overline{\lambda_{\sigma(j)}} : j = 1, \ldots, n\right\}$ και $\left|\lambda_1\right|^2 \ge \cdots \ge \left|\lambda_n\right|^2 \ge 0$. Άρα η μέγιστη ιδιοτιμή του $A^* A$ είναι $\left|\lambda_1\right|^2$. Υποθέτουμε ότι ο A είναι κάτω τριγωνικός με

κύρια διαγώνιο $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Εξετάζουμε πιθανές περιπτώσεις για τα υπόλοιπα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα A.
Αν υπάρχει $a_{i1} \neq 0$ στοιχείο του A, για $i \geq 2$, τότε το στοιχείο α_{11} του A^*A είναι μεγαλύτερο από τον $|\lambda_1|^2$ που συνεπάγεται ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του A^*A είναι μεγαλύτερο από το $|\lambda_1|^2$ από την πρόταση 2.6.2 (Συμπλεκτικό Θεώρημα Cauchy). Άρα $\alpha_{21} = \cdots = \alpha_{n1} = 0$ και $\lambda_1 = \lambda_{\sigma(1)}$.
Επαγωγικά, θα έχουμε ότι ο A είναι διαγώνιος αν και μόνο αν $\lambda_i = \lambda_{\sigma(i)}$, $i = 1,\ldots,n$.
Άρα ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.6.2 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει κατάλληλη διάταξη των ιδιοτιμών του A και του A^* και $a,b \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε*

$$\delta\left(aA + bA^*\right) = \left\{a\lambda_j + b\overline{\lambda_{\sigma(j)}} : j = 1,\ldots n\right\}.$$

Απόδειξη
Αν ο A κανονικός, προκύπτουν άμεσα από τη Συνθήκη 2.6.1.

Το αντίστροφο προκύπτει από τη Συνθήκη 2.1.9. □

Συνθήκη 2.6.3 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχουν $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ με $c_1 + c_2 \neq 0$ τέτοια ώστε*

$$\delta\left(a_1A + a_2A^* + b_1A^2 + b_2A^{*2} + c_1AA^* + c_2AA^*\right) =$$

$$= \left\{a_1\lambda_j + a_2\overline{\lambda_j} + b_1\lambda_j^{\,2} + b_2\overline{\lambda_j^{\,2}} + \left(c_1 + c_2\right)\lambda_j\overline{\lambda_j} : j = 1,\ldots n\right\}.$$

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, οι σχέσεις των ιδιοτιμών προκύπτουν άμεσα από τη Συνθήκη 2.6.1.

Το αντίστροφα προκύπτει από τη Συνθήκη 2.1.9. □

Συνθήκη 2.6.4 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχουν $a_2 = \overline{a_1}$, $b_2 = \overline{b_1}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και $c_1 + c_2 \neq 0$ τέτοια ώστε*

$$\delta\left(a_1A + a_2A^* + b_1A^2 + b_2A^{*2} + c_1AA^* + c_2AA^*\right) =$$

$$= \left\{a_1\lambda_j + \overline{a_1}\,\overline{\lambda_j} + b_1\lambda_j^{\,2} + \overline{b_1}\,\overline{\lambda_j^{\,2}} + \left(c_1 + c_2\right)\lambda_j\overline{\lambda_j} : j = 1,\ldots n\right\}.$$

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, οι σχέσεις των ιδιοτιμών προκύπτουν άμεσα από τη Συνθήκη 2.6.1.

Το αντίστροφο προκύπτει από τη Συνθήκη 2.1.9. □

Συνθήκη 2.6.5 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν*

$$|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 = tr\left(A^* A\right) = \sum |\alpha_{ij}|^2 .$$

Απόδειξη
Ας θεωρήσουμε γενικά ότι ο πίνακας A έχει μετασχηματιστεί στην τριγωνική μορφή Schur. Τότε,

$$|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 \le tr\left(A^* A\right).$$

Ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A διαγώνιος και άρα

$$|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 = tr\left(A^* A\right). \ \square$$

Συνθήκη 2.6.6 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν*

$$\left(\operatorname{Re}\lambda_1\right)^2 + \cdots + \left(\operatorname{Re}\lambda_n\right)^2 = \alpha_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_n^{\ 2} = tr\left(H_A^2\right).$$

Απόδειξη
Έστω ότι ο πίνακας Α είναι κανονικός. Από τη Συνθήκη 2.1.10, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A και ο H_A είναι ορθομοναδιαία όμοιοι με διαγώνιους πίνακες και άρα

$$\left(\operatorname{Re}\lambda_1\right)^2 + \cdots + \left(\operatorname{Re}\lambda_n\right)^2 = \alpha_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_n^{\ 2} = tr\left(H_A^2\right).$$

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας Α έχει την τριγωνική μορφή Schur με κύρια διαγώνιο $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Τότε η κύρια διαγώνιος του H_A θα είναι $\left(\operatorname{Re}\lambda_1\right),\ldots,\left(\operatorname{Re}\lambda_n\right)$ και άρα

$$\left(\operatorname{Re}\lambda_1\right)^2 + \cdots + \left(\operatorname{Re}\lambda_n\right)^2 \le tr\left(H_A^2\right) \le tr\left(H_A^* H_A\right).$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ο H_A είναι διαγώνιος πίνακας. Τότε κι ο A είναι διαγώνιος πίνακας και άρα κανονικός. □

Συνθήκη 2.6.7 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν*

$$\left(\operatorname{Im}\lambda_1\right)^2 + \cdots + \left(\operatorname{Im}\lambda_n\right)^2 = -\left(\beta_1^{\ 2} + \cdots + \beta_n^{\ 2}\right) = -tr\left(K_A^2\right).$$

Απόδειξη
Θεωρούμε τους πινάκες iA και K_A και εργαζόμαστε ομοίως με την απόδειξη της Συνθήκης 2.6.6. □

Συνθήκη 2.6.8 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν για κατάλληλο ορθομοναδιαίος πίνακας U και* $diag\left(U^* AU\right) = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ *ο πίνακας* $U^* AU = D$ *είναι διαγώνιος.*

Απόδειξη
Αν ο πίνακας *A* είναι κανονικός, τότε ισχύει.

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας *A* δεν είναι κανονικός και αν *U* ορθομοναδιαίος πίνακας με $diag\left(U^* AU\right) = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ διαγώνιο. Άρα ο πίνακας *A* είναι διαγώνιος, που είναι άτοπο. □

Συνθήκη 2.6.9 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν*

$$\delta\left(A^* A\right) = \left\{\left|\lambda_1\right|^2 + \cdots + \left|\lambda_n\right|^2\right\}.$$

Απόδειξη
Αν ο πίνακας *A* είναι κανονικός, τότε από τη Συνθήκη 2.6.1 ισχύει ότι

$$\delta\left(A^* A\right) = \left\{\lambda_j \overline{\lambda_{\sigma(j)}} : j = 1, \ldots, n\right\} = \left\{\left|\lambda_1\right|^2 + \left|\lambda_2\right|^2 + \cdots + \left|\lambda_n\right|^2\right\}.$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ο *A* είναι διαγώνιος με $\delta\left(A^* A\right) = \delta\left(AA^*\right)$, τότε $A^* A = AA^*$, δηλαδή ο πίνακας *A* είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.6.10 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι* $\left|\lambda_1\right|, \ldots, \left|\lambda_n\right|$.

Απόδειξη
Αποτελεί επαναδιατύπωση της Συνθήκης 2.6.1. □

Συνθήκη 2.6.11 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του *A*, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του *A*, και $\left|\lambda_1\right| \geq \cdots \geq \left|\lambda_n\right| \geq 0$, τότε $\sigma_1 \cdots \sigma_n = \left|\lambda_1 \cdots \lambda_n\right|$, για $\kappa = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη
Αποτελεί επαναδιατύπωση της Συνθήκης 2.6.9. □
Από την Παράγραφο 1.5 του πρώτου κεφαλαίου γνωρίζουμε την Παραγοντοποίηση ιδιαζουσών Ιδιοτιμών. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε, για *U*, *V* ορθομοναδιαίους πίνακες, την παραγοντοποίηση $A = Udiag\left\{s_1, s_2, \ldots, s_n\right\}V^*$. Με την βοήθεια αυτής έχουμε την ακόλουθη συνθήκη κανονικότητας.

Συνθήκη 2.6.12 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο* $A^\dagger$ *είναι κανονικός.*

Απόδειξη
Έστω $A^{\dagger} = V\Sigma^{-1}U^{*}$, και $\left(A^{\dagger}\right)^{*} = U\left(\Sigma^{-1}\right)^{*}V^{*}$. Τότε έχουμε

$$\left(A^{\dagger}\right)^{*}A^{\dagger} = U\left(\Sigma^{-1}\right)^{*}V^{*}V\Sigma^{-1}U^{*} = I$$

και

$$A^{\dagger}\left(A^{\dagger}\right)^{*} = V\Sigma^{-1}U^{*}U\left(\Sigma^{-1}\right)^{*}V^{*} = I\,.$$

Άρα ο πίνακας $A^{\dagger}$ είναι κανονικός.

Αντίστροφα, αν ο πίνακας $A^{\dagger}$ είναι κανονικός, δηλαδή $\left(A^{\dagger}\right)^{*}A^{\dagger} = A^{\dagger}\left(A^{\dagger}\right)^{*}$, τότε

$$\left(A^{*}\right)^{\dagger}A^{\dagger} = A^{\dagger}\left(A^{*}\right)^{\dagger} \Rightarrow \left(AA^{*}\right)^{\dagger} = \left(A^{*}A\right)^{\dagger} \Rightarrow \left(\left(AA^{*}\right)^{\dagger}\right)^{\dagger} = \left(\left(A^{*}A\right)^{\dagger}\right)^{\dagger} \Rightarrow AA^{*} = A^{*}A\,,$$

δηλαδή ο A είναι κανονικός. □

2.7 Κανονικότητα και Εσωτερικό Γινόμενο

Η έννοια του κανονικού πίνακα μπορεί ακόμα να συνδυαστεί με τις νόρμες πινάκων και το εσωτερικό γινόμενο, όπως θα δούμε στις παρακάτω συνθήκες.

Συνθήκη 2.7.1 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\left(Ax, Ay\right) = \left(A^{*}x, A^{*}y\right)$, *για* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$.

Απόδειξη
Έστω $B = A^{*}A - AA^{*}$, τότε ο πίνακας A είναι κανονικός αν και μόνο αν

$$\left(Bx, y\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\left(A^{*}A - AA^{*}\right)x, y\right) = 0 \Leftrightarrow \left(A^{*}A - AA^{*}\right)\left(x, y\right) = 0$$

$$A^{*}A\left(x, y\right) - AA^{*}\left(x, y\right) = 0 \Leftrightarrow A^{*}A\left(x, y\right) = AA^{*}\left(x, y\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(A^{*}x, A^{*}y\right) = \left(Ax, \left(A^{*}\right)^{*}y\right). \ \square$$

Συνθήκη 2.7.2 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\left(Ax, Ax\right) = \left(A^{*}x, A^{*}x\right)$, *για* $\mathrm{x} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$.

Απόδειξη
Αποδεικνύεται όμοια με τη Συνθήκη 2.7.1, για $\left(Bx, x\right) = 0$. □

Συνθήκη 2.7.3 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\|Ax\| = \|A^* x\|$, *για* $x \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη
Από τη Συνθήκη 2.7.2 έχουμε ότι ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν

$$(Ax, Ax) = (A^* x, A^* x) \Leftrightarrow \|Ax\|^2 = \|A^* x\|^2 \Leftrightarrow \|Ax\| = \|A^* x\|. \ \square$$

Συνθήκη 2.7.4 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $A^* = UA$ *για ορθομοναδιαίο U.*

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας V τέτοιος ώστε $A = V^* D V$, όπου ο πίνακας D είναι διαγώνιος και $A^* = V^* D^* V$, τότε υπάρχει

ορθομοναδιαίος πίνακας $U = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}$ ώστε $A^* = UA$.

Αντίστροφα, αν $\|A^* x\| = \|UAx\| = \|U\|\|Ax\| = 1\|Ax\| = \|Ax\|$. Άρα από τη Συνθήκη 2.8.3 ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.7.5 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με το ευθύ άθροισμα πινάκων με την ιδιότητα ότι το φάσμα βρίσκεται στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου.*

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός , τότε διαγωνοποιήται με ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό και άρα είναι όμοιος με το ευθύ άθροισμα πινάκων με την ιδιότητα το φάσμα να βρίσκεται στο σύνορο.

Αντίστροφα, αν από τη Συνθήκη 2.2.2 έχουμε ότι, αν λ μία ιδιοτιμή από το σύνορο $F(A)$, τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα από τον αντίστοιχο ιδιόχωρο του A είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του A. Άρα

$U^* A U = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$, όπου κάθε υποπίνακας A_i είναι κανονικός, για $i = 1, \ldots n$. Άρα το ευθύ άθροισμα κανονικών πινάκων είναι κανονικός πίνακας. □

2.8 Λοιπές Συνθήκες Κανονικότητας

Η κανονικότητα ενός πίνακα μπορεί να επεκταθεί και περεταίρω. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικές επιπλέον συνθήκες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Όπως έχουμε αναφέρει στο πρώτο κεφάλαιο και συγκεκριμένα στις Παραγράφους 1.2 και 1.7, ο δείκτης κατάστασης πίνακα και ιδιοτιμής, είναι αντίστοιχα $\mathrm{K}(X)=\mathrm{K}_{\nu}(X)=\|X\|\|X^{-1}\|$ και $\kappa_A(\lambda)=\dfrac{\|x\|\|y\|}{|y^*x|}$ με $\lambda\in\delta(A)$. Με την βοήθεια αυτών θα έχουμε:

Συνθήκη 2.8.1 *Έστω ότι ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Ο πίνακας* $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος με* $A=X\Lambda X^{-1}$, *με*

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

και

$$\mathrm{K}(X)=1 \quad \textit{ή} \quad \kappa_A(\lambda)=1 \text{ (για όλες τις ιδιοτιμές)}.$$

Απόδειξη
Αν ο A είναι κανονικός, τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U και διαγώνιος πίνακας D τέτοιος ώστε $U^*AU=D\Leftrightarrow UDU^*=A$. Και αφού $U^*=U^{-1}$ και $\mathrm{K}(U)=\mathrm{K}(U^*)=1$. Άρα ισχύει $A=X\Lambda X^{-1}$.
Όσον αφορά το δείκτη κατάστασης ιδιοτιμής, αφού ο A είναι κανονικός τα ιδιοδιανύσματα του ταυτίζονται με τα ιδιοδιανύσματα του A^*, όπως προκύπτει από τη Συνθήκη 2.1.12. Έστω τώρα x_i, y_i τα μοναδιαία δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ_i, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι

$$\kappa_{\mathrm{A}}(\lambda_i)=|x_iy_i|^{-1}=1\Leftrightarrow|x_iy_i|=1\Leftrightarrow x_i^*=y_i.$$

Άρα για την ιδιοτιμή λ_i, έχουμε $x_ix_i^*=1$ και $\kappa_{\mathrm{A}}(\lambda_i)=|x_ix_i^*|^{-1}=1$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A=X\Lambda X^{-1}$ με $\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ και $\mathrm{K}(X)=1$. Όμως, μέσω της παραγοντοποίησης ιδιαζουσών τιμών, εύκολα μπορεί κανείς να επαληθεύσει πως οι μοναδικοί (τετραγωνικοί) πίνακες με βαθμό κατάστασης 1 είναι οι ορθομοναδιαίοι.

Όσον αφορά το δείκτη κατάστασης ιδιοτιμής, παρατηρούμε ότι για κάθε ιδιοτιμή λ_i του A (ο οποίος έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές), ισχύει $\kappa_{\mathrm{A}}(\lambda_i)=1$ και συνεπώς τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα της λ_i ταυτίζονται. Άρα τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του A συμπίπτουν με τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του, και ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.8.2 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $tr\left(A^{*2}A^{2}\right) = tr\left(A^{*}A\right)^{2}$.

Απόδειξη
Αν ο πίνακας A είναι κανονικός αν και μόνο αν

$$tr\left(A^{*2}A^{2}\right) = tr\left(A^{*}A\right)^{2} \Leftrightarrow \left\|A^{*}A - AA^{*}\right\| = 0 . \ \square$$

Για την απόδειξη της ακόλουθης συνθήκης θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 2.8.1 Έστω $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας $n\times n$ ερμιτιανός πίνακας και $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,\ldots,n$ οι ιδιοτιμές του με την διάταξη $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Για κάθε θετικό ακέραιο $q \leq n$, τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{q}\lambda_i$ και $\sum_{i=1}^{q}\lambda_{n+1-i}$ είναι αντίστοιχα η μέγιστη ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $\sum_{j=1}^{q}\left(Hx_j, x_j\right)$, όπου $x_j \in \mathbb{C}^n$, $i = 1,\ldots,q$ ορθοκανονικά διανύσματα.

Απόδειξη
Έστω $u_i \in \mathbb{C}^n$, $i = 1,\ldots,n$ ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του H, δηλαδή $Hu_i = \lambda_i u_i$. Για κάθε j θετικό ακέραιο έχουμε

$$\left(Hx_j, x_j\right) = \lambda_q \sum_{i=1}^{n}\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2 + \sum_{i=1}^{q}\left(\lambda_i - \lambda_q\right)\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2 + \sum_{i=q+1}^{n}\left(\lambda_i - \lambda_q\right)\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2 . \quad (2.1)$$

Αν $\left\|x_j\right\| = 1$, τότε

$$\left(Hx_j, x_j\right) \leq \lambda_q + \sum_{i=1}^{q}\left(\lambda_i - \lambda_q\right)\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2 . \quad (2.2)$$

Άρα θα έχουμε,

$$\sum_{i=1}^{q}\lambda_i - \sum_{j=1}^{q}\left(Hx_j, x_j\right) \geq \sum_{i=1}^{q}\left(\lambda_i - \lambda_q\right)\left\{1 - \sum_{j=1}^{q}\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2\right\} . \quad (2.3)$$

Αν τώρα $x_j \in \mathbb{C}^n$, $i = 1,\ldots,q$ ορθοκανονικά διανύσματα, τότε $\sum_{j=1}^{q}\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2 \leq \left\|u_i\right\|^2 = 1$ και το δεξιό μέρος της (2.3) είναι $\sum_{i=1}^{q}\left(\lambda_i - \lambda_q\right)\left\{1 - \sum_{j=1}^{q}\left|\left(x_j, u_i\right)\right|^2\right\} \geq 0$.

Αν στο αριστερό μέρος της ανισότητας (2.3) αντικαταστήσουμε το u_i με x_i, τότε προκύπτει το συμπέρασμα για το μέγιστο. Όμοια αποδεικνύεται για το ελάχιστο. $\square$

Θεώρημα 2.8.2 Έστω $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας $n\times n$ κανονικός πίνακας και $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i=1,\ldots,n$ οι ιδιοτιμές του με την διάταξη $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Έστω s,q δύο θετικοί ακέραιοι και $q \leq n$. Τότε $\sum_{i=1}^{q} |\lambda_i|^{2s}$ είναι το μέγιστο του $\sum_{j=1}^{q} \left\| (UN)^s x_j \right\|^2$, όπου $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος πίνακας και $x_j \in \mathbb{C}^n$, $i=1,\ldots,q$ ορθοκανονικά διανύσματα.

Απόδειξη
Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, αρκεί να δείξουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$\sum_{j=1}^{q} \left\| (UN)^s x_j \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^{q} |\lambda_i|^{2s}. \tag{2.4}$$

Αφού $\left\| UN^2 x_j \right\|^2 = \left(N^* N x_j, x_j \right)$, η σχέση (2.4) προκύπτει από το Θεώρημα 2.8.1.
Υποθέτουμε ότι η σχέση (2.4) ισχύει για s, και έστω $u_i \in \mathbb{C}^n$, $i=1,\ldots,n$ ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του N, δηλαδή $Nu_i = \lambda_i u_i$. Για $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίο πίνακα και $x_j \in \mathbb{C}^n$, $i=1,\ldots,q$ ορθοκανονικά διανύσματα έχουμε

$$\left\| (UN)^{s+1} x_j \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \left| \left((UN)^s x_j, u_i \right) \right|^2$$

$$\Rightarrow \left\| (UN)^{s+1} x_j \right\|^2 \leq |\lambda_q|^2 \left\| (UN)^s x_j \right\|^2 + \sum_{i=1}^{q} \left(|\lambda_i|^2 - |\lambda_q|^2 \right) \left| \left((UN)^s x_j, u_i \right) \right|^2. \tag{2.5}$$

Αφού $x_j \in \mathbb{C}^n$, $i=1,\ldots,q$ ορθοκανονικά διανύσματα, θα έχουμε για κάθε i

$$\sum_{j=1}^{q} \left| \left((UN)^s x_j, u_i \right) \right|^2 \leq \left\| \left(\left(N^* U^* \right)^s u_i \right) \right\|^2 = \left\| \left(\left(N^* U^* \right)^s U^* u_i \right) \right\|^2. \tag{2.6}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.5) και (2.6), καθώς και τον ισχυρισμό της (2.4) θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{q} |\lambda_i|^{2s+2} - \sum_{j=1}^{q} \left\| (UN)^{s+1} x_j \right\|^2 \geq \sum_{i=1}^{q} \left(|\lambda_i|^2 - |\lambda_q|^2 \right) \left[|\lambda_i|^{2s} - \left\| \left(\left(N^* U^* \right)^s U^* u_i \right) \right\|^2 \right]. \tag{2.7}$$

Έστω $d_q = \sum_{i=1}^{q} \left(|\lambda_i|^2 - |\lambda_q|^2 \right) \left[|\lambda_i|^{2s} - \left\| \left(\left(N^* U^* \right)^s U^* u_i \right) \right\|^2 \right]$ το δεύτερο μέρος της (2.7), τότε

$$d_{q+1} - d_q = \left(|\lambda_q|^2 - |\lambda_{q+1}|^2 \right) \left[\sum_{i=1}^{q} |\lambda_i|^{2s} - \sum_{i=1}^{q} \left\| \left(\left(N^* U^* \right)^s U^* u_i \right) \right\|^2 \right]. \tag{2.8}$$

Αφού U^*u_i, $i=1,\dots q$ είναι ορθοκανονικά, λόγο της επαγωγής έχουμε για την (2.8) ότι,

$$d_{q+1}-d_q=\left(\left|\lambda_q\right|^2-\left|\lambda_{q+1}\right|^2\right)\left[\sum_{i=1}^{q}\left|\lambda_i\right|^{2s}-\sum_{i=1}^{q}\left\|\left(\left(N^*U^*\right)^s U^*u_i\right)\right\|^2\right]\geq 0\Rightarrow d_{q+1}\geq d_q .$$

Όμως αφού $d_1=0$, τότε $d_q\geq 0$ και τελικά η σχέση (2.4) ισχύει για $s+1$. □

Συνθήκη 2.8.3 (Γενίκευση Συνθήκης 2.8.2) *Ο πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $tr\left(A^{*p}A^p\right)=tr\left(A^*A\right)^p$ για κάποιο θετικό ακέραιο $p\geq 2$.*

Απόδειξη

Αν ο πίνακας A είναι κανονικός τότε ισχύει $tr\left(A^{*p}A^p\right)=tr\left(A^*A\right)^p$.

Αντίστροφα, με επαγωγή θα δείξουμε ότι αν ισχύει η σχέση $tr\left(A^{*p}A^p\right)=tr\left(A^*A\right)^p$ για εκθέτη p τότε θα ισχύει και για p-1. Και για πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα καταλήξουμε στην σχέση $tr\left(A^{*2}A^2\right)=tr\left(A^*A\right)^2$, δηλαδή ότι ο πίνακας A είναι κανονικός.

Πράγματι, έστω $rank\left(A\right)=r$ και από τις ιδιάζουσες τιμές $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_n$ μόνο οι πρώτες r είναι μη μηδενικές.

Έστω $H_1=\left|A\right|=\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$, $H_2=\left|A^*\right|=\left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}}$ και παρατηρούμαι ότι $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ οι ιδιοτιμές του H_1, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\upsilon_1,\upsilon_2,\dots,\upsilon_n$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$S\left(p\right)=tr\left[\left(A^*A\right)^p\right]-tr\left[\left(A^{*p}A^p\right)\right] \text{ και } D\left(t,s\right)=\sum_{i=1}^{t}\left(\sigma_i^2-\sigma_t^2\right)\left(\sigma_i^{2s}-\left\|A^sU\upsilon_i\right\|^2\right),$$

όπου το U είναι ορθομοναδιαίος παράγοντας της πολικής παραγοντοποίησης του.

Παρατηρούμε ότι $S\left(p\right)\geq 0$ για κάθε θετικό ακέραιο p, που ισχύει αφού $\left[tr\left(AB\right)\right]^m\geq tr\left(AB\right)^m\geq tr\left(A^mB^m\right)$, με m θετικό ακέραιο.

Επίσης $D\left(t+1,s\right)\geq D\left(t,s\right)$ για κάθε θετικούς ακέραιους t,s $(t\leq s)$, διότι $\sigma_i^2-\sigma_t^2\geq 0$, $\forall i=1,2,\dots,t-1$, αφού $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_n\geq 0$ και $\sigma_i^{2s}-\left\|A^sU\upsilon_i\right\|^2\geq 0$, που ισχύει από το Θεώρημα 2.8.2. Κατά συνέπεια, έχουμε $D\left(t+1,s\right)\geq D\left(t,s\right)\geq D\left(t-1,s\right)\geq\ldots\geq D\left(1,s\right)=0$, και $D\left(t,s\right)\geq 0$. Επομένως ισχύει ότι $S\left(p\right)\geq\sigma_r^2S\left(p-1\right)+D\left(r,p-1\right)$. Τελικά $S\left(p\right)=0\Rightarrow S\left(p-1\right)=0$. □

Παρατήρηση 2.8.1 (Γενίκευση Συνθήκης 2.8.3) Η Συνθήκη 2.8.3 μπορεί να γενικευτεί στην ακόλουθη πρόταση. Ο *πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $tr\left[\left(A^{*p}A^{p}\right)^{q}\right] = tr\left(A^{*}A\right)^{pq}$ για κάποιους θετικούς ακέραιους $p \geq 2, q \geq 1$. Η απόδειξη της πρότασης αυτής παραλείπεται, γιατί είναι έξω από τους στόχους της εργασίας αυτής.

Συνθήκη 2.8.4 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας* $e^{t_n A}$ *είναι κανονικός για συγκλίνουσα στο 0 ακολουθία* $\{t_n\}$.

Απόδειξη

Η συνθήκη ισχύει αν υποθέσουμε ότι $A = \lim_{t_n \to 0} \frac{\left(e^{t_n A} - \mathrm{I}\right)}{t_n}$. □

Συνθήκη 2.8.5 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $tr\left(e^{A^*}e^{A}\right) = tr\left(e^{A^*+A}\right)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον ακόλουθο εκθετικό τύπο για κάθε $n \times n$ πίνακα X, Y

$$\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}} \cdot e^{\frac{Y}{m}}\right)^{m} = e^{X+Y} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} tr\left[\left(e^{\frac{X}{m}} \cdot e^{\frac{Y}{m}}\right)^{m}\right] = tr\left(e^{X+Y}\right).$$

Χρησιμοποιώντας κατ' επανάληψη τη σχέση $tr_i\left(A^{*p}A^{p}\right) \leq tr_i\left(A^{*}A\right)^{p}$ για $p = 2$, $q = 1, 2, 3, \ldots$, και για A θεωρούμε $e^{\frac{A}{2^q}}$, μπορούμε να δείξουμε πως για κάθε τετραγωνικό πίνακα Α, η ακολουθία $tr\left[\left(e^{\frac{A^*}{2^q}} \cdot e^{\frac{A}{2^q}}\right)^{2^q}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα, και μάλιστα συγκλίνει στο $tr\left(e^{A^*} \cdot e^{A}\right)$. Άρα $tr\left[\left(e^{\frac{A^*}{2^q}} \cdot e^{\frac{A}{2^q}}\right)^{2^q}\right] \lim_{m\to\infty} = tr\left(e^{A^*} \cdot e^{A}\right)$, για κάθε θετικό ακέραιο q.

Όμως $tr\left[\left(e^{\frac{A^*}{2^q}} \cdot e^{\frac{A}{2^q}}\right)^{2^q}\right] \lim_{m\to\infty} = tr\left(e^{A^*} \cdot e^{A}\right) \Leftrightarrow tr\left(e^{A^*}e^{A}\right) = tr\left(e^{A^*+A}\right)$, για $p = 2^q$ και ο A αντικαθίσταται με $B_q = e^{\frac{A}{2^q}}$. Από τη Συνθήκη 2.8.3 ο πίνακας B_q είναι κανονικός, και από τη Συνθήκη 2.8.5 ο πίνακας A είναι κανονικός και αντίστροφα. □

Συνθήκη 2.8.6 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν η συνάρτηση* $f_x(t) = \ln\left\|e^{tA}x\right\|$ *είναι κυρτή στο* $\mathbb{R}$, *για κάθε διάνυσμα* $x \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη

Έστω ο πίνακας A είναι κανονικός και η συνάρτηση $f_x(t) = \ln\left\|e^{tA}x\right\|$ που ικανοποιεί τη σχέση $f_x\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \le \frac{f_x(x_1)+f_x(x_2)}{2}$. Πράγματι,

$$\left\|e^{\frac{t_1+t_2}{2}A}x\right\|^2 \le \left\|e^{t_1A}x\right\|\left\|e^{t_2A}x\right\|.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμαι ένα ισόμορφο διαγώνιο πίνακα $A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ και διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, οπότε η προηγούμενη σχέση θα γίνει

$$\sum_{i=1}^{n}\left|e^{\frac{t_1+t_2}{2}\lambda_i}x_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|e^{t_1\lambda_i}x_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|e^{t_2\lambda_i}x_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αφού $\left|e^{\frac{t_1+t_2}{2}\lambda_i}x_i\right|^2 = \left|e^{(t_1+t_2)\lambda_i}x_i^2\right| \le \left|e^{t_1\lambda_i}x_i\right|\cdot\left|e^{t_2\lambda_i}x_i\right|$, τότε από την ανίσωση Cauchy-Schwarz θα έχουμε,

$$\left\|e^{\frac{t_1+t_2}{2}A}x\right\|^2 \le \left\|e^{t_1A}x\right\|\left\|e^{t_2A}x\right\|.$$

Αντίστροφα, έστω $f(t) = \ln\left\|e^{tA}x\right\|$ κυρτή στο $\mathbb{R}$ για κάθε διάνυσμα x. Τότε η συνάρτηση

$$f(t) = \ln\left\|e^{tA}\right\| = \sup_{\|x\|=1} f_x(t),$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Έστω $t_1 = 0$ και $t_2 = 2t, (t > 0)$ και αντικαθιστώντας $f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ έχουμε

$$f\left(\frac{2t}{2}\right) \le \frac{f(0)+f(2t)}{2} \Rightarrow \left\|e^{tA}\right\| \le \left(\left\|e^{0A}\right\|\left\|e^{2tA}\right\|\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1\left\|e^{2tA}\right\|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ακόμα έχουμε ότι,

$$\left\|e^{2tA}\right\| = \left\|e^{tA}\cdot e^{tA}\right\| \le \left\|e^{tA}\right\|^2 .$$

Άρα $\left\|e^{tA}\right\| = \left\|e^{2tA}\right\|^{\frac{1}{2}}$, και επαγωγικά έχουμε ότι $\left\|e^{tA}\right\| = \left\|e^{2^\kappa tA}\right\|^{\frac{1}{2^\kappa}}$, $\kappa = 1,2,\ldots$ Άρα από τη φασματική ακτίνα έχουμε ότι $\left\|e^{tA}\right\| = \rho\left(e^{tA}\right)$ και αφού $B_t = e^{tA}$, έχουμε $\left\|B_t\right\| = \rho\left(B_t\right)$.

Από τις σχέσεις αυτές έχουμε την ορθογώνια ανάλυση του χώρου $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = H_1 \oplus H_2$, όπου η προβολή του B_t στον H_1 είναι βαθμωτός πίνακας.

Όμοια για τον πίνακα H_2. Τελικά ο B_t είναι κανονικός πίνακας και από τη Συνθήκη 2.8.5 ο πίνακας Α είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.8.7 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν η συνάρτηση $f_j(t) = \ln\sigma_j\left(e^{tA}\right)$, $j = 1,2,\ldots,n$, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη
Έστω A κανονικός πίνακας με ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_n$. Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο πίνακας e^{tA} είναι κανονικό και άρα από τη Συνθήκη 2.6.10 οι ιδιάζουσες τιμές θα είναι $\sigma_j\left(e^{tA}\right) = \left|\lambda_j\left(e^{tA}\right)\right|$, $j = 1,2,\ldots,n$.
Έστω τώρα $x = \upsilon_j$ και από τον ορισμό της $f_x(t)$ έχουμε $f_{\upsilon_j}(t) = \ln\left\|e^{tA}\upsilon_j\right\| = \ln\left\|\lambda_j\left(e^{tA}\right)\right\| = \ln\sigma_j\left(e^{tA}\right) = f_j(t) \Rightarrow f_j(t)$ είναι κυρτό στο $\mathbb{R}$, για $j = 1,2,\ldots,n$.

Αντίστροφα, αφού $\|B\| = \sigma_1(B)$, και έστω $f_j(t) = \ln\sigma_j\left(e^{tA}\right)$ κυρτό στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\sigma_j\left(e^{A}\right) \le \sigma_j\left(e^{2A}\right)^{\frac{1}{2}} \le \cdots \le \sigma_j\left(e^{2^\kappa A}\right)^{\frac{1}{2^\kappa}} \le \cdots$ για $j = 1,2,\ldots,n$.

Από τις Συνθήκες 2.6.10 και 2.8.5 η αύξουσα ακολουθία συγκλίνει στο $\left|\lambda_j\left(e^{tA}\right)\right|$. □

Συνθήκη 2.8.8 *Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A διαγωνοποιήται, όπως τη Συνθήκη 2.1.10, και υπάρχει μία μη μηδενική διαταραχή B τέτοια ώστε για κάποια ιδιοτιμή μ_0 του διαταραγμένου πίνακα $A + B$ η κοντινότερη ιδιοτιμή λ_0 του A είναι μονοσήμαντα ορισμένη και $\left|\lambda_0 - \mu_0\right| = \|B\|\mathrm{K}(X)$.*

Απόδειξη
Έστω A, Λ, X πίνακες με τον X ορθομοναδιαίο και τον Λ διαγώνιο. Σύμφωνα από το θεώρημα Bauer–Fike, για κάθε ιδιοτιμή μ του διαταραγμένου πίνακα $A + B$, υπάρχει μία ιδιοτιμή λ του πίνακα A τέτοια ώστε,

$$\left|\lambda - \mu\right| \le \mathrm{K}(X)\|B\|. \tag{2.1}$$

Αν ο πίνακας A είναι κανονικό τότε ο πίνακας X είναι ορθομοναδιαίος και η σχέση (2.1) γίνεται $|\lambda-\mu|\le\|B\|$.

Ακόμα αν ο A είναι κανονικός είναι πιθανό, για κάποιες τιμές της μ ιδιοτιμής , έστω μ_o, κοντύτερα στο λ_o να ορίζει ισότητα, δηλαδή

$$|\lambda_o-\mu_o|=\mathrm{K}(X)\|B\|.$$

Πράγματι, αν x ιδιοδιάνυσμα του (A + B) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ_o , τότε

$$(A+B)x=\mu_o x \overset{\Sigma\upsilon\nu\theta\acute{\eta}\kappa\eta}{\underset{2.8.1}{\Rightarrow}} (\Lambda+X^{-1}BX)x=\mu_o x\Rightarrow(\Lambda+X^{-1}BX)\mathrm{T}^{-1}x=\mu_o T^{-1}x\,.$$

Θεωρούμε $\upsilon=T^{-1}x$ η κατάλληλη κανονικοποίηση του X, και άρα $x=T\upsilon$. Άρα

$$\begin{aligned}(\Lambda+X^{-1}BX)\upsilon=\mu_o\upsilon&\Rightarrow\Lambda\upsilon+(X^{-1}BX)\upsilon=\mu_o\upsilon\\ &\Rightarrow(\Lambda-\mu_o I)\upsilon=-(T^{-1}BT)\upsilon\,.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Από την σχέση (2.1) έχουμε $|\lambda_o-\mu_o|=\mathrm{K}(X)\|B\|$ και άρα

$$\mathrm{K}(X)\|B\|=\min_j|\lambda_j-\mu_o|\le\|(\Lambda-\mu_o I)\upsilon\|\le\mathrm{K}(X)\|B\|\Rightarrow\|(\Lambda-\mu_o\mathrm{I})\upsilon\|=\min_j|\lambda_j-\mu_o|.$$

Αφού το κοντινότερο λ (έστω λ_o) είναι μοναδικό, τότε το υ είναι ιδιοδιάνισμα του $\Lambda-\mu_o I$, τέτοιο ώστε

$$\|(\Lambda-\mu_o I)\upsilon\|=\min_j|\lambda_j-\mu_o|\Rightarrow\|(\Lambda-\mu_o I)\upsilon\|=(\lambda_o-\mu_o)\upsilon\overset{(2.2)}{\Rightarrow}(\lambda_o-\mu_o)\upsilon=-T^{-1}BT\upsilon$$

$$\Rightarrow(\lambda_o-\mu_o)\upsilon=-T^{-1}BT\upsilon\Rightarrow(\lambda_o-\mu_o)T\upsilon=-TT^{-1}Bx\Rightarrow(\lambda_o-\mu_o)x=-Bx$$

$$\overset{(2.1)}{\Rightarrow}\mathrm{K}(X)\|B\|\|x\|=|\mu_o-\lambda_o|\|x\|\le\|B\|\|x\|.$$

Αφού $\mathrm{K}(X)\ge0\Rightarrow\mathrm{K}(X)=1$, άρα από τη Συνθήκη 2.8.1 ισχύει η κανονικότητα. □

Πόρισμα 2.8.1
Αν ο A δεν είναι κανονικός, τότε η ανισότητα Bawer – Fike είναι απόλυτη για μικρές διαταραχές B.

Απόδειξη
Πράγματι, αν $2\mathrm{K}(X)\|B\|$ είναι μικρότερο από την μικρότερη απόσταση των ιδιοτιμών του A, τότε για κάθε μ, το κοντινότερο λ (απλή ή πολλαπλή) ορίζει ανισότητα, δηλαδή $|\lambda-\mu|\le\mathrm{K}(X)\|B\|$. □

Συνθήκη 2.8.9 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\left|(Au,u)\right| \le \left(\left|A\right|u,u\right)$, *για κάθε* $u \in \mathbb{C}^n$ *και* $\alpha \in \mathbb{R}$ *με* $\alpha \ne \frac{1}{2}$.

Απόδειξη

Έστω η πολική παραγοντοποίηση του A, $A = U\left|A\right|$. Από τη Συνθήκη 2.5.1, οι πίνακες U και $\left|A\right|$ αντιμετατίθενται. Επίσης ο $\left|A\right|^{\frac{1}{2}}$ είναι πολυώνυμο του $\left|A\right|$ και άρα ο $\left|A\right|^{\frac{1}{2}}$ αντιμετατίθεται με τον U. Για $u \in \mathbb{C}^n$ έχουμε

$$\left|(Au,u)\right| = \left|\left(U\left|A\right|u,u\right)\right| = \left|\left(U\left|A\right|^{\frac{2}{2}}u,u\right)\right| = \left|\left(U\left|A\right|^{\frac{1}{2}}u,\left|A\right|^{\frac{1}{2}}u\right)\right|$$

$$\le \left\|U\left|A\right|^{\frac{1}{2}}u\right\| \cdot \left\|\left|A\right|^{\frac{1}{2}}u\right\| = \left\|\left|A\right|^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 = \left|(Au,u)\right|.$$

Αντίστροφα, έστω $\left|(Au,u)\right| = \left|\left(\left|A\right|u,u\right)\right|$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε από το θεώρημα του Schur, ότι ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Έστω $(t_1, t_2, \ldots, t_n)^{\mathrm{T}}$ η πρώτη στήλη του πίνακα $\left|A\right|$, και άρα

$$\left|A\right|^2 = A^* A \Rightarrow \left|t_1\right|^2 + \left|t_2\right|^2 + \cdots + \left|t_n\right|^2 = \left|\lambda_1\right|^2.$$

Ακόμα αν $u = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, τότε $\left|\lambda_1\right| \le t_1 \Rightarrow \left|\lambda_1\right| = t_1$ και $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο και συμπεραίνουμε ότι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του συμπίπτουν με τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του A. Άρα από τη Συνθήκη 2.6.10, ο πίνακας A είναι κανονικός. □

Συνθήκη 2.8.10 *Ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $\left|(Au,u)\right| \le \left(\left|A^*\right|u,u\right)$, *για κάθε* $u \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη

Αποδεικνύεται όμοια με τη Συνθήκη 2.8.9. □

Οι Συνθήκες 2.8.9 και 2.8.10 μπορούν να γενικευθούν σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.8.1 Ο πίνακας A είναι κανονικός αν και μόνο αν $\left|(Au,u)\right| \le \left(\left|A\right|u,u\right)^{\alpha}\left(\left|A^*\right|u,u\right)^{1-\alpha}$ για κάθε $u \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη

Η απόδειξη της πρότασης αυτής παραλείπεται, γιατί είναι έξω από τους στόχους της παρούσας εργασίας. □

Συνθήκη 2.8.11 *Έστω* $A = QR$, *τότε ο πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν ο* Q^* *και ο* R *είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι από έναν ορθομοναδιαία όμοιο μετασχηματισμό.*

Απόδειξη

Η συνθήκη αυτή είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου λήμματος των Elsner και Ikramov.

Λήμμα 2.8.1 Οι πίνακες A_1 και A_2 είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι από ένα ορθομοναδιαία όμοιο μετασχηματισμό αν και μόνο αν τα γινόμενα $A_1A_2^*$ και $A_2^*A_1$ είναι και οι δύο κανονικοί πίνακες. □

2.9 Παραδείγματα

Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού, παρουσιάζουμε παραδείγματα για τις συνθήκες του κανονικού πίνακα που αναφέρθηκαν.

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό 3×3 πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι κανονικός, αφού ισχύει,

$$A^*A = AA^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Από τη Συνθήκη 2.1.2 εξετάζουμε αν ο πίνακας A^{-1} είναι κανονικός.
Πράγματι ο αντίστροφος του A είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2-0.6i & 0.2+0.4i & 0 \\ 0.2-0.4i & 0.2-0.6i & 0 \\ 0 & 0 & 0.5+0.5i \end{bmatrix},$$

που είναι κανονικός αφού

$$\left(A^{-1}\right)^* A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^* = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Από τη Συνθήκη 2.1.3, ο πίνακας $A^{-1}A^*$ είναι ορθομοναδιαίος. Πράγματι, ο

$$A^{-1}A^{*}=\begin{bmatrix}0.2-0.4i & 0.8-0.4i & 0\\ 0.8-0.4i & -0.2-0.4i & 0\\ 0 & 0 & i\end{bmatrix},$$

είναι ορθομοναδιαίος αφού $\left(A^{-1}A^{*}\right)^{*}A^{-1}A^{*}=A^{-1}A^{*}\left(A^{-1}A^{*}\right)^{*}=I$.

Θεωρώντας τώρα την ανάλυση Schur, θα έχουμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα

$$U=\begin{bmatrix}-0.7071 & 0.7071i & 0\\ -0.7071 & -0.7071i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

τέτοιον ώστε να ισχύει

$$U^{*}AU=D=\begin{bmatrix}2+i & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{bmatrix},$$

δηλαδή η συνθήκη 2.1.10.

Σύμφωνα με τη Συνθήκη 2.2.1, τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και του A^{*} είναι τα ίδια, δηλαδή $u_1=\left(0.7071\ ,\ 0.7071\ ,\ 0\right)$, $u_1=\left(0.7071\ ,\ -0.7071\ ,\ 0\right)$ και $u_3=\left(0\ ,\ 0\ ,\ 1\right)$, που είναι κάθετα μεταξύ τους, αφού $\left(u_1,u_2\right)=\left(u_2,u_3\right)=\left(u_1,u_3\right)=0$, από τη Συνθήκη 2.2.3.

Συνεχίζοντας, αναλύουμε τον πίνακα A στο ερμιτιανό και στο αντιερμιτιανό μέρος του, δηλαδή

$$A=H_K+iK_A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}.$$

Από τις Συνθήκες 2.3.3 – 2.3.7 και 2.3.14, έχουμε αντίστοιχα

$$H_AK_A=K_AH_A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$AH_A=H_AA=\begin{bmatrix}2+i & 2+i & 0\\ 2+i & 2+i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{bmatrix},$$

$$AH_A + H_A A^* = 2H_A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$AK_A = K_A A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1+i \end{bmatrix},$$

$$AK_A + K_A A^* = 2K_A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$H_A^2 + K_A^2 = A^* A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το φάσμα του πίνακα A, $\delta(A) = \{2+i\ ,\ i\ ,\ 1-i\}$. Από τις Συνθήκες 2.4.2 και 2.4.3, έχουμε $\mathrm{Re}\,\delta(A) = \{2\ ,\ 0\ ,\ 1\}$ και $\mathrm{Im}\,\delta(A) = \{i\ ,\ i\ ,\ -i\}$ αντίστοιχα.

Η πολική παραγοντοποίηση του πίνακα A είναι

$$A = PV = \begin{bmatrix} 1.618 & 0.618 & 0 \\ 0.618 & 1.618 & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4472+0.7236i & 0.472-0.2764i & 0 \\ 0.472-0.2764i & 0.4472+0.7236i & 0 \\ 0 & 0 & 0.7072-0.701i \end{bmatrix}$$

Από τις Συνθήκες 2.5.1, 2.5.2 και 2.5.3 έχουμε αντίστοιχα

$$PV = VP = A\,.$$

$$AV = VA = \begin{bmatrix} 0.1708+0.8944i & 1.1708+0.8944i & 0 \\ 1.1708+0.8944i & 0.1708+0.8944i & 0 \\ 0 & 0 & -1.4142i \end{bmatrix}.$$

$$AP = PA = \begin{bmatrix} 2.2361+1.618i & 2.2361+0.618i & 0 \\ 2.2361+0.618i & 2.2361+1.618i & 0 \\ 0 & 0 & 1.4142-1.4142i \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες A, P και V, της πολικής παραγοντοποίησης, έχουν διακεκριμένες ιδιοτιμές αφού τα φάσματα τους είναι $\delta(A) = \{2+i\ ,\ i\ ,\ 1-i\}$, $\delta(P) = \{2.2361\ ,\ 1\ ,\ 1.4142\}$ και $\delta(V) = \{i\ ,\ 0.8944+0.4472i\ ,\ 0.7071-0.7071i\}$ αντίστοιχα. Και οι τρείς αυτοί

πίνακες έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, δηλαδή $u_1 = (0.7071\ ,\ 0.7071\ ,\ 0)$, $u_1 = (0.7071\ ,\ -0.7071\ ,\ 0)$, $u_3 = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)$, σύμφωνα με τις Συνθήκες 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.8 και 2.5.9.

Θεωρούμε τώρα τους πίνακες A^*A, $H_1 = |A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ και $H_2 = |A^*| = (AA^*)^{\frac{1}{2}}$ που είναι οι έξης,

$$A^*A = A^*A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$|A| = |A^*| = \begin{bmatrix} 1.618 & 0.618 & 0 \\ 0.618 & 1.618 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4142 \end{bmatrix},$$

και ικανοποιούν τη Συνθήκη 2.5.13.

Από τη Συνθήκη 2.5.15, έχουμε ότι ο πίνακας A αντιμετατίθεται με τον A^*A, δηλαδή

$$A(A^*A) = (A^*A)A = \begin{bmatrix} 5+3i & 5+2i & 0 \\ 5+2i & 5+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{bmatrix}.$$

Από τον συσχετισμό των ιδιοτιμών του πίνακα A και των ιδιαζουσών τιμών του έχουμε

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + |\lambda_3|^2 = tr(A^*A) = 8,$$

$$(\mathrm{Re}\,\lambda_1)^2 + (\mathrm{Re}\,\lambda_2)^2 + (\mathrm{Re}\,\lambda_3)^2 = tr(H_A^2) = 5,$$

$$(\mathrm{Im}\,\lambda_1)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda_2)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda_3)^2 = -tr(K_A^2) = 3,$$

σύμφωνα με τις Συνθήκες 2.6.5, 2.6.6 και 2.6.7 αντίστοιχα.
Έστω $A^\dagger$ ο ψευδοαντίστροφος του πίνακα A,

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 0.2-0.6i & 0.2+0.4i & 0 \\ 0.2+0.4i & 0.2-0.6i & 0 \\ 0 & 0 & 0.5+0.5i \end{bmatrix},$$

που από τη Συνθήκη 2.6.12 είναι κανονικός, αφού

$$\left(A^{\dagger}\right)^{*} A^{\dagger} = A^{\dagger}\left(A^{\dagger}\right)^{*} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τώρα δύο διανύσματα $x = (1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ και $y = (1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ και παρατηρούμε ότι

$$(Ax, Ax) = \left(A^{*}x, A^{*}x\right) = 12 \text{ και } (Ax, Ay) = \left(A^{*}x, A^{*}y\right) = 5,$$

σύμφωνα με τις Συνθήκες 2.7.1 και 2.7.2, αντίστοιχα.

Ακόμα από τη Συνθήκη 2.7.3, έχουμε ότι

$$\|Ax\|_2 = \left\|A^{*}x\right\|_2 = 3.4641 \text{ και } \|Ax\|_F = \left\|A^{*}x\right\|_F = 3.4641,$$

$$\|Ay\|_2 = \left\|A^{*}y\right\|_2 = 1.7321 \text{ και } \|Ay\|_F = \left\|A^{*}y\right\|_F = 1.7321.$$

Τελειώνοντας, θεωρούμε τους πίνακες $A^{*2}A^{2}$ και $\left(A^{*}A\right)^{2}$,

$$A^{*2}A^{2} = \left(A^{*}A\right)^{2} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

όπου ικανοποιούν τη Συνθήκη 2.8.3, δηλαδή

$$tr\left(A^{*2}A^{2}\right) = tr\left(A^{*}A\right)^{2} = 30.$$

Όμοια, θεωρούμε τους πίνακες $A^{*5}A^{5}$ και $\left(A^{*}A\right)^{5}$,

$$A^{*5}A^{5} = \left(A^{*}A\right)^{5} = \begin{bmatrix} 1563 & 1563 & 0 \\ 1563 & 1563 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix},$$

όπου ικανοποιούν τη Συνθήκη 2.8.3, δηλαδή

$$tr\left(A^{*5}A^{5}\right) = tr\left(A^{*}A\right)^{5} = 3158,$$

καθώς επίσης τους πίνακες $\left(A^{*5}A^{5}\right)^{2}$ και $\left(A^{*}A\right)^{5\cdot 2}$,

$$\left(A^{*5}A^{5}\right)^{2}=\left(A^{*}A\right)^{5\cdot 2}=\begin{bmatrix}4882813 & 4882813 & 0\\ 4882813 & 4882813 & 0\\ 0 & 0 & 1024\end{bmatrix},$$

όπου ικανοποιούν την γενίκευση της Συνθήκης 2.8.3, δηλαδή

$$tr\left(A^{*5}A^{5}\right)^{2}=tr\left(A^{*}A\right)^{10}=9766650\,.$$

Ακόμα μπορούμε να θεωρήσουμε, από τις Συνθήκες 2.8.9, 2.8.10 και τη γενίκευση της 2.8.10, τα ακόλουθα για τον πίνακα A θέτοντας $u=x=\left(1\ ,\ 1\ ,\ 1\right)$ και $\alpha=2$,

$$\left|\left(Au,u\right)\right|=26\le\left(\left|A\right|u,u\right)=35.5809$$

και

$$\left|\left(Au,u\right)\right|=26\le\left(\left|A\right|u,u\right)^{2}\left(\left|A^{*}\right|u,u\right)^{\frac{1}{2}}=1602756\cdot 0.000000222=35.5809\,.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Αποστάσεις Από την Κανονικότητα

Συνεχίζοντας την διερεύνηση στην έννοια της κανονικότητας, στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τα μέτρα κανονικότητας και θα τα συνδυάσουμε με την κανονικότητα. Θα συγκρίνουμε ακόμα τα μέτρα μεταξύ τους και τη συμπεριφορά της κανονικότητας μέσα από αυτά.

3.1 Μέτρα Κανονικότητας

Ξεκινώντας τα μέτρα κανονικότητας, τονίζουμε πώς θα χρησιμοποιηθούν η ευκλείδεια νόρμα $\|\bullet\|_2$ και η νόρμα Frobenious $\|\bullet\|_F$, που έχουν οριστεί στο πρώτο κεφάλαιο και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 1.2.

Ορισμός Μέτρου 3.1.1 (Τοπολογική Απόσταση) Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και N ένας τυχαίος κανονικός $n\times n$ πινάκας. Ορίζουμε ως *τοπολογική απόσταση* του πίνακα A από τον πίνακα N, κατά τη νόρμα Frobenious και την Ευκλείδεια νόρμα, τα μέτρα

$$\mu_1(A) = \inf\left\{\|A-N\|_F : N \text{ κανονικός}\right\} \text{ και } \tilde{\mu}_1(A) = \inf\left\{\|A-N\|_2 : N \text{ κανονικός}\right\}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.2 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ορίζουμε ως *απόσταση του πίνακα A^*A από τον πίνακα AA^**, κατά τη νόρμα Frobenious και την Ευκλείδεια νόρμα, τα μέτρα

$$\mu_2(A) = \left\|A^*A - AA^*\right\|_F^{\frac{1}{2}} \text{ και } \tilde{\mu}_2(A) = \left\|A^*A - AA^*\right\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.3 (Απομάκρυνση Henrici) Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, όπου κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται τόσες φορές όσο είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της, U ορθομοναδιαίος πίνακας και $\tilde{\Lambda}$ διαγώνιος. Ορίζουμε ως *απομάκρυνση Henrici*, κατά τη νόρμα Frobenious και την Ευκλείδεια νόρμα, τα μέτρα

$$\mu_3(A) = \Delta_F(A) = \left(\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \inf\left\{\|M\|_F : M \text{ γνήσια άνω τριγωνικός}, \exists U, \tilde{\Lambda} : U^*AU = \tilde{\Lambda} + M\right\},$$

και

$$\tilde{\mu}_3(A) = \Delta_2(A) = \inf\left\{\|M\|_2 : M \text{ γνήσια άνω τριγωνικός}, \exists U, \tilde{\Lambda} : U^*AU = \tilde{\Lambda} + M\right\}$$

Γενικότερα,

$$\Delta_\nu(A) = \inf\left\{\|M\| : M \text{ γνήσια άνω τριγωνικός}, \exists U, \tilde{\Lambda} : U^* A U = \tilde{\Lambda} + M\right\}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.4 (Ruhe) Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, όπου κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται τόσες φορές όσο είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της και $\sigma_i \in \delta\left(A^* A\right)$. Ορίζουμε ως *απόσταση Ruhe*, κατά τη νόρμα Frobenious, το μέτρο

$$\mu_4(A) = \max_i\left(\sigma_i - |\lambda_i|\right).$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.5 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, και $H_1 = \left|A^*\right| = \left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}}$ και $H_2 = |A| = \left(A^* A\right)^{\frac{1}{2}}$. Ορίζουμε ως *απόσταση του πίνακα H_1 από τον πίνακα H_2*, κατά τη νόρμα Frobenious, το μέτρο

$$\mu_5(A) = \|H_1 - H_2\|_F = \left\|\left|A^*\right| - |A|\right\|_F = \left\|\left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}} - \left(A^* A\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_F.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.6 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $\lambda_i \in \delta(A)$, α_i ιδιοτιμές του $H_A = \dfrac{A + A^*}{2}$ και β_i ιδιοτιμές του $K_A = \dfrac{A - A^*}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, και p, q τυχαίες μεταθέσεις. Ορίζουμε ως *απόσταση των αθροισμάτων των ιδιοτιμών του H_A και K_A από τις ιδιοτιμές του A*, κατά τη νόρμα Frobenious, το μέτρο

$$\mu_6(A) = \min_{p,q}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda_j - \left(\alpha_{p(j)} + i\beta_{q(j)}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.7 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $\gamma_i = \mathrm{Re}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \delta(A)$, α_i ιδιοτιμές του $H_A = \dfrac{A + A^*}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, και p τυχαία μετάθεση. Ορίζουμε ως *απόσταση των ιδιοτιμών του H_A από τις ιδιοτιμές του A*, κατά τη νόρμα Frobenious, το μέτρο

$$\mu_7(A) = \min_p\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j - \left(\alpha_{p(j)}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.8 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $\delta_i = \mathrm{Im}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \delta(A)$, β_i ιδιοτιμές του $iK_A = \dfrac{A - A^*}{2}$, $i = 1,\ldots,n$, και q τυχαία μετάθεση. Ορίζουμε ως *απόσταση των ιδιοτιμών του iK_A από τις ιδιοτιμές του A*, κατά τη νόρμα Frobenious, το μέτρο

$$\mu_8(A) = \min_q \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \delta_j - \left(\beta_{q(j)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.9 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, και δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες U, V, τέτοιοι ώστε $U^*\left(A + A^*\right)U$ και $V^*\left(A - A^*\right)V$ διαγώνιοι πίνακες. Ορίζουμε ως *απόσταση των U και V,* κατά τη νόρμα Frobenious και την Ευκλείδεια νόρμα, τα μέτρα

$$\mu_9(A) = \min\left\{ \|U - V\|_F : U^*\left(A + A^*\right)U, V^*\left(A - A^*\right)V \text{ διγώνιοι, } U, V \text{ ορθομοναδιαίοι} \right\}$$

και

$$\tilde{\mu}_9(A) = \min\left\{ \|U - V\|_2 : U^*\left(A + A^*\right)U, V^*\left(A - A^*\right)V \text{ διγώνιοι, } U, V \text{ ορθομοναδιαίοι} \right\}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.10 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, και δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες U, V, τέτοιοι ώστε $U\mathrm{A}V^*$ διαγώνιος πίνακας. Ορίζουμε ως *απόσταση των U και V,* κατά τη νόρμα Frobenious και την Ευκλείδεια νόρμα, τα μέτρα

$$\mu_{10}(A) = \min\left\{ \|U - V\|_F : U\mathrm{A}V^* \text{ διγώνιος, } U, V \text{ ορθομοναδιαίοι} \right\}$$

και

$$\tilde{\mu}_{10}(A) = \min\left\{ \|U - V\|_2 : U\mathrm{A}V^* \text{ διγώνιος, } U, V \text{ ορθομοναδιαίοι} \right\}.$$

Ορισμός Μέτρου 3.1.11 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και X ένας αντιστρέψιμος πίνακας με δείκτη κατάστασης πίνακα $\mathrm{K}_F(X) = n$ ή $\mathrm{K}_2(X) = 1$, τέτοιος ώστε ο $X^{-1}AX = \Lambda$ να είναι διαγώνιος με $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Ορίζουμε ως *απόσταση των δεικτών κατάστασης,* κατά τη νόρμα Frobenious και την Ευκλείδεια νόρμα, το μέτρο

$$\mu_{11}(A) = \min\left\{ \mathrm{K}_F(A) - n : X \in \mathbb{C}^{n\times \mathrm{n}}, X^{-1}AX = \Lambda \right\}$$

και

$$\tilde{\mu}_{11}(A) = \min\left\{\mathrm{K}_2(A) - 1 : X \in \mathbb{C}^{n\times n}, X^{-1}AX = \Lambda\right\}.$$

Τα μέτρα που μόλις αναφέρθηκαν, έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

Πρόταση 3.1.1 (Ιδιότητες Μέτρων Κανονικότητας)

1. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ισχύει ότι

$$\mu(A) = \mu(\overline{A}) = \mu(A^t) = \mu(A^*) = \mu(U^*AU),$$

με U ορθομοναδιαίο και $\mu \in \mathfrak{L} = \{\mu_i : i = 1,2,\ldots,11\} \cup \{\tilde{\mu}_i : i = 1,2,3,9,10,11\}$.

2. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\omega \in \mathbb{C}$ τα μέτρα παραμένουν αναλλοίωτα ως προς την μετατόπιση, δηλαδή ισχύει ότι $\mu(A) = \mu(A + \omega I)$, για κάθε μέτρο $\mu \in \mathfrak{L} \setminus \{\mu_4, \mu_5, \mu_{10}, \tilde{\mu}_{10}\}$.

3.2 Σύγκριση Μέτρων Κανονικότητας

Με τη βοήθεια των μέτρων που ορίστηκαν παραπάνω, θα μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα μέτρα κανονικότητας και να βρούμε ποια η μεταξύ τους σχέση.

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ισχύουν οι ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις.

Ανισότητα 3.2.0 $\tilde{\mu}_i \le \mu_i \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_i$, *για i = 1,2,3,9,10.*

Απόδειξη

Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ισχύει $\|\mathrm{B}\|_2 \le \|\mathrm{B}\|_F \le \sqrt{n}\,\|\mathrm{B}\|_2$.

Πράγματι, αν $\kappa_1 \ge \kappa_2 \ge \cdots \ge \kappa_n$ οι ιδιοτιμές του B, τότε

$$\|B\|_2 = \sqrt{|\kappa_1|} \le \sqrt{|\kappa_1|^2 + |\kappa_2|^2 + \cdots + |\kappa_n|^2} = \|B\|_F \le \sqrt{|\kappa_1|^2 + |\kappa_1|^2 + \cdots + |\kappa_1|^2}$$

$$\le \sqrt{n|\kappa_1|^2} = \sqrt{n}\,|\kappa_1| = \sqrt{n}\,\|B\|_2 .$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι σχέσεις $\tilde{\mu}_i \le \mu_i \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_i$, για i = 1,2,3,9,10.
Συγκεκριμένα, για i = 1, έχουμε

$$\|A - N\|_2 \le \|A - N\|_F \le \sqrt{n}\,\|A - N\|_2 \Rightarrow \min\|A - N\|_2 \le \min\|A - N\|_F$$

$$\le \sqrt{n}\min\|A - N\|_2 \Rightarrow \tilde{\mu}_1 \le \mu_1 \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_1 .$$

Για i = 2, έχουμε

$$\left\|A^*A-AA^*\right\|_2 \le \left\|A^*A-AA^*\right\|_F \le \sqrt{n}\left\|A^*A-AA^*\right\|_2 \le n\left\|A^*A-AA^*\right\|_2$$

$$\Rightarrow \left\|A^*A-AA^*\right\|_2^{\frac{1}{2}} \le \left\|A^*A-AA^*\right\|_F^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{n}\left\|A^*A-AA^*\right\|_2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \tilde{\mu}_2 \le \mu_2 \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_2 .$$

Για $i = 3$, έχουμε

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2 \Rightarrow \Delta_2(A) \le \Delta_F(A) \le \sqrt{n}\Delta_2(A) \Rightarrow \tilde{\mu}_3 \le \mu_3 \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_3 .$$

Για $i = 9$, έχουμε

$$\|U-V\|_2 \le \|U-V\|_F \le \sqrt{n}\|U-V\|_2 \Rightarrow \min\|U-V\|_2 \le \min\|U-V\|_F \le \sqrt{n}\min\|U-V\|_2$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}_9 \le \mu_9 \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_9 .$$

Για $i = 10$, με όμοια διαδικασία έχουμε $\tilde{\mu}_{10} \le \mu_{10} \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_{10}$. □

Ανισότητα 3.2.1 $\mu_3 \le \left(\dfrac{n^3-n}{12}\right)^{\frac{1}{4}} \mu_2$.

Απόδειξη

Έστω $T = D + M$, όπου ο πίνακας T είναι τριγωνική μορφή Schur του A, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U ώστε $A = U^*TU$ και ο πίνακας M είναι γνήσια άνω τριγωνικός. Έστω ακόμα ο πίνακας $\Gamma = (\gamma_{ij})$ τέτοιος ώστε $\Gamma = T^*T - TT^*$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\|M\|_F^2 = \left[\mu_3(M)\right]^2 \le \gamma_{22} + 2\gamma_{33} + \cdots + (n-1)\gamma_{nn} ,$$

ή ισοδύναμα,

$$\left\{\|M\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^2\right|\right\}^{\frac{1}{2}} \le \gamma_{22} + 2\gamma_{33} + \cdots + (n-1)\gamma_{nn} . \qquad (3.1)$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για $M = (m_{ij})$, έχουμε $\gamma_{ii} = \sum_{\kappa<i}\left|m_{\kappa i}\right|^2 - \sum_{\kappa>i}\left|m_{i\kappa}\right|^2$. (3.2)

Επαγωγικά, για τη σχέση (3.1) έχουμε:

Ισχύει για πίνακες τάξης 1.

Υποθέτουμε πως ισχύει για n και θα δείξουμε ότι ισχύει για n + 1, όπου έχει τον πίνακα M ως πάνω αριστερά υποπίνακα τάξης n, με $\gamma'_{ii} = \gamma_{ii} - \left|m_{i,n+1}\right|^2, i = 1, 2, \ldots, n$.
Οπότε προκύπτει ότι

$$\|M'\|_F^2 = \left[\mu_3(M')\right]^2 = \left[\mu_3(M)\right]^2 + \left|m_{1,n+1}\right|^2 + \left|m_{2,n+1}\right|^2 + \cdots + \left|m_{n,n+1}\right|^2$$

$$\leq \gamma_{22} + 2\gamma_{33} + \cdots + (n-1)\gamma_{nn} + \gamma'_{n+1,n+1}$$

$$= \gamma'_{22} + \left|m_{2,n+1}\right|^2 + 2\gamma'_{33} + 2\left|m_{3,n+1}\right|^2 + \cdots + (n-1)\gamma'_{nn} + (n-1)\left|m_{n,n+1}\right|^2 + \gamma'_{n+1,n+1}$$

$$\leq \gamma'_{22} + 2\gamma'_{33} + \cdots + n\gamma'_{n+1,n+1}.$$

Η ισότητα της σχέσης αυτής ισχύει αν και μόνο αν $m_{ij} = 0, \forall j > i+1$.

Αφαιρώντας $\frac{n-1}{2}$ φορές τη σχέση $\gamma_{11} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{nn} = 0$, έχουμε

$$\|M\|_F^2 = \left[\mu_3(M)\right]^2 \leq \frac{1-n}{2}\gamma_{11} + \frac{3-n}{2}\gamma_{22} + \cdots + \frac{n-1}{2}\gamma_{nn}$$

$$\overset{\text{Ανισότητα Cauchy}}{\Rightarrow} \left[\mu_3(M)\right]^4 \leq \left[\left(\frac{1-n}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-n}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]\left[\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \cdots + \gamma_{nn}^2\right]$$

$$\Rightarrow \left[\mu_3(M)\right]^4 \leq \frac{n^3-n}{12}\left[\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \cdots + \gamma_{nn}^2\right] \Rightarrow \left[\mu_3(M)\right]^2 \leq \sqrt{\frac{n^3-n}{12}}\sqrt{\varepsilon\left(A^*A - AA^*\right)}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της σχέσης (3.1).

Θεωρούμε τώρα,

$$A^*A - AA^* = U^*\Gamma U \Rightarrow \gamma_{11} + \gamma_{22} + \ldots + \gamma_{nn} \leq \|\Gamma\|_F^2 = \left\|\mathrm{A}^*\mathrm{A} - \mathrm{AA}^*\right\|_F^2. \quad (3.3)$$

Η Ανισότητα 3.3.1 ισχύει αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (3.1), (3.2) και (3.3).

Η ισότητα της (3.3) απαιτεί ο πίνακα $\Gamma = T^*T - TT^*$ να είναι διαγώνιος πίνακας. Για τους σχεδόν διαγώνιους πίνακες *T*, ο *Γ* είναι διαγώνιος αν και μόνο αν τα στοιχεία του *T* ταυτίζονται.

Τα διαγώνια στοιχεία του *Γ* ικανοποιούν την σχέση

$$\left|m_{\kappa,\kappa+1}\right|^2 = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{nn}, \ \kappa = 1, 2, \ldots, n. \quad (3.4)$$

Η ισότητα της σχέσης (3.3) απαιτεί $\gamma_{\kappa\kappa} = \alpha(1 + n - 2\kappa)$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.
Η σχέση (3.4) ικανοποιεί την υπόθεση, αν και μόνο αν, για κάποιο $\alpha \geq 0$, ώστε $\left|m_{\kappa,\kappa+1}\right|^2 = \alpha\kappa(n-\kappa)$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n-1$. □

Για την ανισότητα που ακολουθεί θα χρειαστούμε το θεώρημα του Kress, De Vries και Wegmann που ακλουθεί.

Θεώρημα 3.2.1 (Kress, De Vries και Wegmann) *Έστω ο μη κανονικός πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Ισχύει η ανισοτική σχέση*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \left(\|A\|_F^4 - \frac{1}{2}\|AA^* - A^*A\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

αν και μόνο αν $A = \alpha\left(vw^* + rwv^*\right)$, όπου $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \ne 0$, $r \in \mathbb{R}$, $0 \le r \le 1$ και v, w ορθοκανονικά διανύσματα.

Απόδειξη
Η απόδειξη παραλείπεται γιατί είναι έξω από την φιλοσοφία της εργασίας αυτής. □

Ανισότητα 3.2.2 $\mu_2^2 \le \sqrt{2\left(\|A\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2\right)}\mu_3 \le 2\|A\|_F\, \mu_3$, *όπου* $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ *και* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *οι ιδιοτιμές του* A .

Απόδειξη
Για το πρώτο μέρος της ανίσωσης ισχύει η σχέση των Kress, De Vries και Wegmann

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)^2 \le \|A\|_F^4 - \frac{1}{2}\mu_2^4 \Rightarrow \mu_2^4 \le 2\left[\|A\|_F^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)^2 \right].$$

Άρα

$$\mu_2^4 \le 2\left(\|A\|_F^2 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)\left(\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \mu_2^2 \le \sqrt{2\left(\|A\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2\right)}\left(\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right) \Rightarrow \mu_2^2 \le \sqrt{2\left(\|A\|_F^2 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)}\mu_3 .$$

Για το δεύτερο μέρος της ανίσωσης και από το Θεώρημα 1.1.5 (Schur) ,

$$\|\Lambda\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 ,$$

έχουμε ότι

$$\sqrt{2\left(\|A\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2\right)}\mu_3 \le \sqrt{2\left(\|A\|_F^2 + \|A\|_F^2\right)}\mu_3 \le \sqrt{4\|A\|_F^2}\,\mu_3 \le 2\|A\|_F\, \mu_3 . \ \square$$

Ανισότητα 3.2.3 $\mu_2^2 \le 4\|A\|_2\, \mu_1$.

Απόδειξη
Έστω N ο πλησιέστερος του A, ως προς το μέτρο μ_1, κανονικός πίνακας. Έχουμε τη σχέση,

$$A^*A - AA^* = A^*(A-N) + (A-N)^* N - (A-N)N^* - A(A-N)^*$$

$$\Rightarrow \|A^*A - AA^*\|_F = \|A^*(A-N) + (A-N)^* N - (A-N)N^* - A(A-N)^*\|_F$$

$$\le \|A^*(A-N)\|_F + \|(A-N)^* N\|_F + \|(A-N)N^*\|_F + \|A(A-N)^*\|_F$$

$$\le \|A^*\|_2 \|(A-N)\|_F + \|(A-N)^*\|_F \|N\|_2 + \|(A-N)\|_F \|N^*\|_2 + \|A\|_2 \|(A-N)^*\|_F$$

$$= 2\|A\|_2 \|A-N\|_F + 2\|A-N\|_F \|N\|_2 = 2\left(\|A\|_2 + \|N\|_2\right)\|A-N\|_F .$$

Έστω ένας ορθομοναδιαίος πίνακας U και ένας διαγώνιος D τέτοιοι ώστε $D = U^*NU$ και $\|N\|_2 = \|U^*DU\|_2 = \|D\|_2 \le \|A\|_2$. Άρα,

$$\mu_1 = \|A-N\|_F \overset{\|U\|=1}{=} \|U^*AU - U^*NU\|_F = \|U^*AU - D\|_F = \min\left\{\|U^*AU - D\|_F : D \text{ διαγ}, U \text{ ορθ}\right\}$$

Οπότε,

$$\|A^*A - AA^*\|_2 \le 2\left(\|A\|_2 + \|N\|_2\right)\|A-N\|_F \le 2\left(\|A\|_2 + \|A\|_2\right)\|A-N\|_F = 4\|A\|_2 \|A-N\|_F . \ \square$$

Για την ακόλουθη ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1 (Σχέση Eberlain) *Έστω ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Τότε ισχύει η σχέση,*

$$\|AA^* - A^*A\|^2 = 2\|A^*A\|^2 - 2\|A^2\|^2 \le 2\|A\|^2$$

Απόδειξη
Για οποιαδήποτε νόρμα πινάκων έχουμε ότι

$$\|AA^* - A^*A\|^2 = 2tr\left(AA^*AA^*\right)^2 - 2tr\left(AA^*A^*A\right)^2$$

$$= \|A^*A\|^2 - 2\|A^2\|^2 \le 2\|A\|^2 ,$$

Δηλαδή ισχύει η ανισότητα. $\square$

Ανισότητα 3.2.4 $\mu_2^2 \le 4\|A\|_F\, \tilde{\mu}_1 + \sqrt{2n}\tilde{\mu}_1^2$.

Απόδειξη
Έστω ο τετραγωνικός $n \times n$ κανονικός πίνακας N και έχουμε τη σχέση

$$A^*A - AA^*$$

$$= A^*(A-N) + (A-N)^* A - (A-N)A^* - A(A-N)^*$$

$$+(A-N)(A-N)^* - (A-N)^*(A-N)$$

$$\Rightarrow \|A^*A - AA^*\|_F \le \|A^*(A-N)\|_F + \|(A-N)^* A\|_F + \|(A-N)A^*\|_F$$

$$+\|A(A-N)^*\|_F + \|(A-N)(A-N)^* - (A-N)^*(A-N)\|_F .$$

Όμως από τη Πρόταση 3.2.1 του Eberlein για κάθε πίνακα $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$, έχουμε

$$\|GG^* - G^*G\|_F^2 = 2\|G^*G\|_F^2 - 2\|G^2\|_F^2 \le 2\|G\|_F^2$$

Άρα η προηγούμενη σχέση θα γίνει

$$\|A^*A - AA^*\|_F \le \|A^*\|_F \|(A-N)\|_2 + \|(A-N)^*\|_2 \|A\|_F + \|A-N\|_2 \|A^*\|_F$$

$$+\|A\|_F \|(A-N)^*\|_2 + \sqrt{2}\|(A-N)(A-N)^*\|_F$$

$$\Rightarrow \|A^*A - AA^*\|_F \le 4\|A\|_F \|A-N\|_2 + \sqrt{2n}\|(A-N)\|_2 \|(A-N)^*\|_2$$

$$\le 4\|A\|_F \|A-N\|_2 + \sqrt{2n}\|(A-N)\|_2^2$$

$$\Rightarrow \mu_2^2 \le 4\|A\|_F\, \tilde{\mu}_1 + \sqrt{2n}\mu_1^2 . \ \square$$

Ανισότητα 3.2.5 $\mu_1 \le \mu_3$.

Απόδειξη
Έστω $U^*AU = \Lambda + M$, με U ορθομοναδιαίο πίνακα και M γνήσια άνω τριγωνικός. Τότε

$$\mu_3^2 = \|M\|_F^2 = \|U^*AU - \Lambda\|_F^2 = \|A - U^*\Lambda U\|_F^2$$

$$\ge \min\left\{\|A - U^*\Lambda U\|_F^2 ,\ \text{με } U^*\Lambda U \text{ κανονικός}\right\} = \mu_1^2 . \ \square$$

Για την επόμενη ανισότητα θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2 Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S\Lambda S^{-1}$. Διατάσουμε τις ιδιοτιμές του A ώστε να ισχύει $\mathrm{K}_2(S)^{-1}\sigma_i(A) \le |\lambda_i(A)| \le \mathrm{K}_2(S)\sigma_i(A)$, όπου $\mathrm{K}_2(S) = \dfrac{\sigma_1(S)}{\sigma_n(S)}$ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα S. Έστω $\Delta_2(A)$ η απομάκρυνση από την κανονικότητα του Henrici θα έχουμε $\left|\sigma_i(A) - |\lambda_i(A)|\right| \le \Delta_2$.

Απόδειξη
Αρχικά γνωρίζουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύουν οι σχέσεις (1.3) και (1.4) του πορίσματος 1.5.1, δηλαδή,

$$\sigma_i(A+B) \le \sigma_i(A) + \sigma_1(B) \tag{1.3}$$

$$\sigma_i(AB) \le \sigma_i(A)\sigma_1(B). \tag{1.4}$$

Αφού $\mathrm{A} = S\Lambda S^{-1}$, αντικαθιστούμε στην (2) έχουμε

$$\sigma_i(A) \le \sigma_i(S)\cdot\sigma_i(\Lambda)\cdot\sigma_i(S^{-1}) \Rightarrow \sigma_i(A) \le \sigma_i(S)\cdot|\lambda_i(A)|\cdot\sigma_i(S^{-1})$$

$$\Rightarrow \mathrm{K}_2(S)^{-1}\sigma_i(A) \le |\lambda_i(A)| \le \mathrm{K}_2(S)\sigma_i(A)$$

Τώρα από την τριγωνική μορφή Schur $A = UTU^* = U(\Lambda + M)U^*$ και την (1) έχουμε

$$\sigma_i(A) = \sigma_i(\Lambda + M) \le \sigma_i(\Lambda) + \sigma_i(M) = \sigma_i(A) + \sigma_i(M) = |\lambda_i(A)| + \sigma_i(M)$$

$$\Rightarrow \sigma_i(A) - |\lambda_i(A)| = \sigma_i(M) \Rightarrow \left|\sigma_i(A) - |\lambda_i(A)|\right| = \Delta_2 . \ \square$$

Ανισότητα 3.2.6 $\mu_4 \le \tilde{\mu}_3$.

Απόδειξη
Από το Θεώρημα 3.2.1 ισχύει η ανισότητα $\mu_4 \le \tilde{\mu}_3$. □

Ανισότητα 3.2.7 $\mu_3^2 \le 2\sqrt{n}\,\|A\|_F\,\mu_4 \le 2n\|A\|_2\,\mu_4$.

Απόδειξη
Έχουμε ότι

$$\mu_3^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i^2 - |\lambda_i|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i - |\lambda_i|\right)\left(\sigma_i + |\lambda_i|\right) \le \max\left(\sigma_i - |\lambda_i|\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i + |\lambda_i|\right)$$

$$= \mu_4 \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i + |\lambda_i| \right) = \mu_4 \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \right)$$

$$\leq \mu_4 \sqrt{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq 2\sqrt{n} \, \|\mathrm{A}\|_F \, \mu_4 .$$

Όμως από τη σχέση $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$, έχουμε $2\sqrt{n} \|A\|_F \, \mu_4 \leq 2n \|A\|_2 \, \mu_4$. □

Ανισότητα 3.2.8 $\left\|A^{\dagger}\right\|_2^{-1} \mu_5 \leq \mu_2^2 \leq 2\|A\|_2 \, \mu_5$, *όπου ο* $A^{\dagger}$ *είναι ο ψευδοαντίστροφος του πίνακα* A .

Απόδειξη
Έχουμε

$$A^* A - AA^* = H_2^2 - H_1^2 = H_2 \left(H_2 - H_1 \right) + H_1 \left(H_2 - H_1 \right) \text{ και } \|H_1\|_2 = \|H_2\|_2 = \|A\|_2$$

Έστω W, V ορθομοναδιαίοι πίνακες, από την παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών θα έχουμε $A = W \Sigma V^*$, $\Sigma = diag\left\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\right\}$. Ακόμα θεωρούμε $H_1 = W \Sigma W^*$, $H_2 = V \Sigma V^*$ και $A = H_1 U = U H_2$, $U = W V^*$.
Έστω $Y = W^* V = \left(y_{ij} \right)$ ορθομοναδιαίος πίνακας, και άρα

$$W^* = Y V^* \text{ (3.4)}, \; V = W Y . \tag{3.5}$$

Οπότε,

$$H_1 - H_2 = W \Sigma W^* - V \Sigma V^* \underset{(3.5)}{\overset{(3.4)}{=}} W \Sigma Y V^* - W Y \Sigma V^* = W \left(\Sigma Y - Y \Sigma \right) V^*$$

$$\Rightarrow \mu_5^2 = \|H_1 - H_2\|_F^2 = \left\| W \left(\Sigma Y - Y \Sigma \right) V^* \right\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| y_{ij} \right|^2 \left(\sigma_i - \sigma_j \right)^2 . \tag{3.6}$$

Ακόμα,

$$H_1^2 - H_2^2 = \left(W \Sigma W^* \right)^2 - \left(V \Sigma V^* \right)^2 \underset{(3.5)}{\overset{(3.4)}{=}} W \Sigma^2 W^* - V \Sigma^2 V^*$$

$$= W \Sigma^2 Y V^* - W Y \Sigma^2 V^* = W \left(\Sigma^2 Y - Y \Sigma^2 \right) V^*$$

$$\Rightarrow \mu_2^4 = \left\| H_1^2 - H_2^2 \right\|_F^2 = \left\| W \left(\Sigma^2 Y - Y \Sigma^2 \right) V^* \right\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| y_{ij} \right|^2 \left(\sigma_i^2 - \sigma_j^2 \right). \tag{3.7}$$

Για τον Moore–Penrose αντίστροφο του A, $A^{\dagger}$ ισχύουν

$$\left\|A^{\dagger}\right\|_2 = \max\left\{\sigma_i^{-1} : \sigma_i > 0, i = 1,2,\ldots,n\right\} \text{ και } \left|\sigma_i - \sigma_j\right| \le \left\|A^{\dagger}\right\|_2 \left|\sigma_i^2 - \sigma_j^2\right|. \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας στη (3.8) τις (3.6) και (3.7) προκύπτει $\left\|A^{\dagger}\right\|_2^{-1} \mu_5 \le \mu_2^2$.

Όμοια αποδεικνύεται η $\mu_2^2 \le 2\left\|A\right\|_2 \mu_5$. □

Για την ανισότητα που ακολουθεί αρχικά θα αναφέρουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.2.3 (Birkhoff) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ο πίνακας A είναι διπλά στοχαστικός αν και μόνο αν για $N < \infty$ υπάρχουν πίνακες μεταθέσεων $P_1, P_2, \ldots, P_N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και θετικοι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ με $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1$, τέτοιοι ώστε*

$$A = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_N P_N .$$

Απόδειξη

Έστω ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = \left[\alpha_{ij}\right]$. Αν ο πίνακας A είναι πίνακας μεταθέσεων, τότε σε κάθε γραμμή θα υπάρχει μία τιμή 1 και όλες οι άλλες θα είναι 0. Αν θεωρήσουμε ότι ο πίνακας $A = \alpha_1 B + \alpha_2 C$, με $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ και $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, και B, C διπλά στοχαστικοί πίνακες, τότε κάθε μηδενικο στοιχείο των B, C που αντιστοιχεί στο στοιχείο $\alpha_{ij} = 0$ του A, θα ικανοποιεί την σχέση $0 = \alpha_{ij} = \alpha_1 b_{ij} + \alpha_2 c_{ij}$. Άρα $b_{ij} = c_{ij} = 0$ αφού τα στοιχεία α_1 και α_2 είναι μη αρνητικά και μη μηδενικά.

Αφού οι πίνακες B, C είναι διπλά στοχαστικοί, το άθροισμα των γραμμών τους θα είναι 1, και άρα οι μη μηδενικές του τιμές θα είναι όλες 1 και θα έχουν την ίδια θέση με τα μη μηδενικά στοιχεία του A. Οπότε θα έχουμε $A = B = C$. Τελικά κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ένα ακραίο στοιχείο του συνόλου των διπλά στοχαστικών πινάκων.

Αν τώρα ο πίνακας A δεν είναι πίνακας μεταθέσεων, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μία γραμμή του A, έστω η i, που θα περιέχει δύο μη μηδενικά στοιχεία. Επιλέγω στην γραμμή αυτή οποιοδήποτε δύο μη μηδενικά στοιχεία $\alpha_{i_1 i_2}$ που να ικανοποιούν τη σχέση $0 < \alpha_{i_1 i_2} < 1$, αφού υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη μηδενικά στοιχεία της γραμμής i και το άθροισμα της είναι 1.
Αφού υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη μηδενικά στοιχεία της γραμμής i_2 και το άθροισμα της είναι 1, θα υπάρχουν μερικά μη μηδενικά στοιχεία $\alpha_{i_3 i_2}$, $i_3 \ne i_2$, στην ίδια στήλη του $\alpha_{i_1 i_2}$ και $0 < \alpha_{i_3 i_2} < 1$.

Για τον ίδιο λόγο θα υπάρχουν και άλλα μη μηδενικά στοιχεία $\alpha_{i_4 i_3}$ που να ικανοποιούν τη σχέση $0 < \alpha_{i_4 i_3} < 1$. Συνεχίζοντας αυτή την διαδικασία, και

επιλέγοντας τα κατάλληλα στοιχεία, μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα φτάσουμε στο σημείο να επιλέξουμε ένα στοιχείο α_{ij} που να έχει επιλεγεί ξανά.

Η ακολουθία των στοιχείων από το πρώτο στο δεύτερο που απαρτίζεται από τα στοιχεία του α_{ij} (συμπεριλαμβανομένου του πρώτου, αλλά όχι του δευτέρου στοιχείου του α_{ij}) είναι μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του A, όπου κάθε διαδοχικό ζευγάρι του οποίου είναι διαδοχικά στην ίδια σειρά ή στήλη, και έστω $\alpha_{i'j'}$ είναι το μικρότερο θετικό στοιχείο στην ακολουθία αυτή.

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, όπου το στοιχείο με τιμή 1 βρίσκεται στην ίδια θέση με το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας α_{ij}, το στοιχείο με τιμή -1 βρίσκεται στην ίδια θέση με το δεύτερο της ακολουθίας α_{ij}, το στοιχείο με τιμή 1 βρίσκεται στην ίδια θέση με το τρίτο στοιχείο της ακολουθίας α_{ij} και τελικά επιλέγω διαδοχικά στοιχεία με τιμή ± 1. Όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα B είναι μηδενικά. Παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα των γραμμών και των στηλών του B είναι 0.

Θεωρούμε τώρα $A_+ = A + \alpha_{i'j'} B$ και $A_- = A - \alpha_{i'j'} B$. Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A_+ και A_- είναι μη αρνητικοί πίνακες (από την ελάχιστη ιδιότητα του $\alpha_{i'j'}$), του οποίου τα αθροίσματα γραμμών και στηλών είναι 1 (αφού το άθροισμα γραμμών και στηλών του B είναι 0). Οπότε οι πίνακες A_+ και A_- είναι διπλά στοχαστικοί πίνακες.
Αφού $A = \frac{1}{2} A_+ + \frac{1}{2} A_-$ και $A_+ \neq A$, συμπεράνουμε ότι ο πίνακας A δεν είναι ακραίο σημείο του κυρτού και συμπαγές συνόλου των διπλά στοχαστικών πινάκων.

Το επιχείρημα που μόλις παρουσιάστηκε, ότι ένας πίνακας A είναι ακραίο σημείο στο κυρτό και συμπαγές σύνολο των διπλά στοχαστικών πινάκων, αν και μόνο αν είναι πίνακας μεταθέσεων. Το θεώρημα προκύπτει από το γεγονός, ότι κάθε σημείο σε ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο είναι κυρτός συνδυασμός ακραίων σημείων. □

Θεώρημα 3.2.4 (Hoffman – Wielandt) *Έστω A, E δύο τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες, με A και $A+E$ κανονικοί, και έστω $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n\}$ οι ιδιοτιμές του A και $A+E$ αντίστοιχα με κάποια σειρά. Τότε υπάρχει μετάθεση $\sigma(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ ώστε*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left| \hat{\lambda}_{\sigma(i)} - \lambda_i \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|E\|_2 .$$

Απόδειξη
Έστω $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\hat{\Lambda} = diag\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n\}$ και V, W ορθομοναδιαίοι πίνακες, έτσι ώστε $A = V \Lambda V^*$ και $A + E = W \hat{\Lambda} W^*$. Όμως αφού η Frobenious νόρμα είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, ισχύει

$\|E\|_2^2 = \|(A+E)-E\|_2^2 = \|W\hat{\Lambda}W^* - V\Lambda V^*\|_2^2$, και θέτοντας $Z = V^*W$, θα έχουμε

$$\|E\|_2^2 = \|V^*W\hat{\Lambda}W^*V - \Lambda\|_2^2 = \|Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda\|_2^2 = tr\left[\left(Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda\right)\left(Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda\right)^*\right]$$

$$= tr\left[\left(Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda\right)\left(Z\hat{\Lambda}^*Z^* - \Lambda^*\right)\right] = tr\left[\left(Z\hat{\Lambda}Z^* - \Lambda\right)\left(Z\hat{\Lambda}^*Z^* - \Lambda^*\right)\right]$$

$$= tr\left[\left(\hat{\Lambda}\hat{\Lambda}^* + \Lambda\Lambda^*\right) - \left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^* + \Lambda Z\hat{\Lambda}^*Z^*\right)\right]$$

$$= tr\left[\left(\hat{\Lambda}\hat{\Lambda}^* + \Lambda\Lambda^*\right) - \left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^* + \left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^*\right)^*\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\hat{\lambda}_i\right|^2 + \left|\lambda_i\right|^2\right) - 2\,\mathrm{Re}\,tr\left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^*\right)$$

$$\Rightarrow \|E\|_2^2 \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\hat{\lambda}_i\right|^2 + \left|\lambda_i\right|^2\right) - 2\max\left\{\mathrm{Re}\,tr\left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^*\right) : U \in \mathfrak{U}\right\}.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι η ακριβής τιμή του συνόρου θα είναι η σχέση

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\hat{\lambda}_{\sigma(i)} - \lambda_i\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|E\|_2$$

Πράγματι, έστω $U = \left[u_{ij}\right]$ τετραγωνικός πίνακας και υπολογίζουμε ότι

$$\mathrm{Re}\,tr\left(U\hat{\Lambda}U^*\Lambda^*\right) = \mathrm{Re}\,tr\begin{pmatrix} |u_{11}|^2\,\hat{\lambda}_1\overline{\lambda}_1 & & & \mathrm{O} \\ & |u_{22}|^2\,\hat{\lambda}_2\overline{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & |u_{nn}|^2\,\hat{\lambda}_n\overline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n}|u_{ii}|^2\,\mathrm{Re}\left(\hat{\lambda}_j\overline{\lambda}_i\right).$$

Θα βρούμε την μέγιστη τιμή της έκφρασης με U μέγιστη ακτίνα πάνω στο συμπαγές σύνολο των $n \times n$ ορθομοναδιαίων πινάκων.

Έστω $c_{ij} = \left|u_{ij}\right|^2$ και $C = \left[c_{ij}\right]$, με C, ένα θετικά ορισμένος τετραγωνικός πίνακας όπου όλα τα αθροίσματα κατά γραμμή και κατά στήλη είναι ακριβώς 1, αφού U ορθομοναδιαίος. Τότε ο πίνακας C θα είναι διπλά στοχαστικός, για κάθε U ορθομαναδιαίο, και εάν τροποποιήσουμε το πρόβλημα ακρότατων να αναγνωρίζει τους διπλά στοχαστικούς πίνακες, θα έχουμε την δυνατότητα να έχουμε ένα πρόβλημα ακρότατων πάνω κυρτό συμπαγές σύνολο γνωστής δομής.

Το μέγιστο σε μία τέτοια περιοχή θα είναι ενδεχομένως μεγαλύτερο, δηλαδή

$$\max\left\{\mathrm{Re}\,tr\left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^*\right):U \text{ ορθομοναδιαίος}\right\}=\max\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left|u_{ii}\right|^2\mathrm{Re}\left(\hat{\lambda}_j\overline{\lambda}_i\right):U \text{ ορθομοναδιαίος}\right\}$$

$$\le\max\left\{\sum_{i,j=1}^{n}C_{ij}\,\mathrm{Re}\left(\hat{\lambda}_j\overline{\lambda}_i\right):C \text{ Διπλά Στοχαστικός}\right\}.$$

Η συνάρτηση μεγιστοποίησης είναι γραμμική πάνω στον συμπαγές κυρτό σύνολο, αφού κάθε γραμμική συνάρτηση είναι κυρτή. Το ακραίο σημείο του συνόλου των διπλά στοχαστικών πινάκων, είναι πίνακες μεταθέσεων που προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.3 του Birkhoff. Τότε θα υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε το

$$\max\left\{\sum_{i,j=1}^{n}C_{ij}\,\mathrm{Re}\left(\hat{\lambda}_j\overline{\lambda}_i\right):C \text{ Διπλά Στοχαστικός}\right\}=\mathrm{Re}\,tr\left(U\hat{\Lambda}U^*\Lambda^*\right),$$

και αφού ο P είναι ορθομοναδιαίος θα έχουμε

$$\max\left\{\mathrm{Re}\,tr\left(Z\hat{\Lambda}Z^*\Lambda^*\right):U \text{ ορθομοναδιαίος}\right\}=\mathrm{Re}\,tr\left(P\hat{\Lambda}P^{\mathrm{T}}\Lambda^*\right).$$

Αφού $\mathrm{P}e_i=e_{\sigma(i)}$, $i=1,2,\ldots,n$, τότε $\mathrm{Re}\,tr\left(P\hat{\Lambda}P^{\mathrm{T}}\Lambda^*\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\hat{\lambda}_{\sigma(i)}\overline{\lambda}_i\right)$. Άρα ,

$$\|E\|_2^2\ge\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\left|\hat{\lambda}_{\sigma(i)}\right|^2+\left|\lambda_i\right|^2\right)-2\,\mathrm{Re}\left(\hat{\lambda}_{\sigma(i)}\overline{\lambda}_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left|\hat{\lambda}_{\sigma(i)}-\lambda_i\right|^2.\ \square$$

Ανισότητα 3.2.9 $\mu_7^2\le\frac{1}{2}\mu_3^2\le2\|H_A\|_F\,\mu_7-\mu_7^2$, *με* $H_A=\frac{A+A^*}{2}$.

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι $A=\Lambda+M$, με Λ διαγώνιο πίνακα και M γνήσια άνω τριγωνικός, $H_A=\frac{A+A^*}{2}=\frac{\Lambda+\Lambda^*}{2}+\frac{M+M^*}{2}$ και α_i ιδιοτιμή του πίνακα H_A.

Το πρώτο μέρος της ανισότητας αυτής προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.4 Hoffman – Wielandt . Πράγματι,

$$\min\left(\sum_{i=1}^{\nu}\left|\hat{\lambda}_{\sigma(i)}-\lambda_i\right|^2\right)^2=\mu_7^2\le\|\Lambda\|_2^2\le\|\Lambda\|_F^2=\frac{\left\|\Lambda+\Lambda^*\right\|_F^2}{4}$$

$$\leq \frac{\left\| A - M + A^* - M^* \right\|_F^2}{4} \leq \frac{2\left\| A - M \right\|_F^2}{4} \leq \frac{1}{2}\mu_3^2 .$$

Για το **δεύτερο μέρος** της ανισότητας, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \|F\|_F^2 = \left\| \frac{A + A^*}{2} \right\|_F^2 = \left\| \frac{\Lambda + \Lambda^*}{2} + \frac{M + M^*}{2} \right\|_F^2 = \left\| \frac{\Lambda + \Lambda^*}{2} \right\|_F^2 + \left\| \frac{M + M^*}{2} \right\|_F^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\left|\lambda_i\right|^2 + \left\| \frac{M}{2} \right\|_F^2 + \left\| \frac{M^*}{2} \right\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 + \frac{1}{2}\|M\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 + \frac{1}{2}\mu_3^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu_3^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2 - \gamma_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i - \gamma_i\right)\left(\alpha_i + \gamma_i\right).$$

Άρα για κάποια μετάθεση $p(i)$ θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\mu_3^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{p(i)} - \gamma_i\right)\left(\alpha_{p(i)} + \gamma_i\right) \text{ και } \mu_7^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\gamma_i - \alpha_{\sigma(i)}\right)^2 .$$

Οπότε,

$$\frac{1}{2}\mu_3^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{p(i)} - \gamma_i\right)\left(\alpha_{p(i)} + \gamma_i\right) \overset{C.S}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{p(i)} - \gamma_i\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{p(i)} + \gamma_i\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\mu_7 \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p(i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_7 \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p(i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu_3^2 \leq \mu_7 \left[\|F\|_F + \left(\|F\|_F^2 - \frac{1}{3}\mu_3^2 \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu_3^2 \leq \max\left\{ \mu_7 \|F\|_F , 2\mu_7 \|F\|_F - \mu_7^2 \right\} = \mu_7 \left(2\|F\|_F - \mu_7 \right). \ \square$$

Ανισότητα 3.2.10 $\mu_8^2 \leq \frac{1}{2}\mu_3^2 \leq 2\|K_A\|_F \, \mu_8 - \mu_8^2$, *με* $K_A = \frac{A - A^*}{2i}$.

Απόδειξη

Αποδεικνύεται όμοια με την Ανισότητα 3.2.9, αν θεωρήσουμε τον ερμιτιανό πίνακα $K_A = \frac{A - A^*}{2i} = \frac{\Lambda - \Lambda^*}{2i} + \frac{M - M^*}{2i}$. □

Ανισότητα 3.2.11 $\mu_6^2 \le \mu_3^2 \le 2\|A\|_F\, \mu_6 - \mu_6^2$.

Απόδειξη
Παρατηρούμε ότι

$$\mu_6^2 = \mu_7^2 + \mu_8^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\left|\lambda_j - \left(\alpha_{p(j)} + ib_{q(j)}\right)\right|^2 = \sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j - \alpha_{p(j)}\right|^2 + \sum_{j=1}^{n}\left[i\left|\delta_j - b_{q(j)}\right|\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\gamma_j - \alpha_{p(j)}\right) + i\left(\delta_j - b_{q(j)}\right)\right\}^2 = \left(\gamma_j + \alpha_{p(j)}\right)^2 + \left[i\left(\delta_j - b_{q(j)}\right)\right]^2$$

που ισχύει αφού $\left(\gamma_j - \alpha_{p(j)}\right)\left(\delta_j - b_{q(j)}\right) = 0$, ως εσωτερικό γινόμενο καθέτων διανυσμάτων.

Ακόμα ισχύει,

$$\|A\|_F^2 = \left\|\frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}\right\|_F^2 = \left\|\frac{A+A^*}{2}\right\|_F^2 + \left\|\frac{A-A^*}{2}\right\|_F^2.$$

Άρα από τις σχέσεις αυτές και τις ανισότητες 3.2.9 και 3.2.10 ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα. □

Ανισότητα 3.2.12 $\tilde{\mu}_2^2 \le 8\|A\|_2^2\, \tilde{\mu}_9$ *και* $\mu_2^2 \le 8\|A\|_2^2\, \mu_9$.

Απόδειξη

Έστω U, V ορθομοναδιαίοι πίνακες, και $\tilde{M} = U^*\left(\frac{A+A^*}{2}\right)U, \tilde{N} = V^*\left(\frac{A-A^*}{2}\right)V$ διαγώνιοι πίνακες, με $\tilde{M}\tilde{N} = \tilde{N}\tilde{M}$. Άρα $U\tilde{M}U^* = \frac{A+A^*}{2}$ και $V\tilde{N}V^* = \frac{A-A^*}{2}$. Οπότε έχουμε

$$U\tilde{M}U^*V\tilde{N}V^* = \frac{1}{4}\left(A^2 - AA^* + A^*A - A^{*2}\right) \tag{3.9}$$

και

$$V\tilde{N}V^*U\tilde{M}U^* = \frac{1}{4}\left(A^2 + AA^* - A^*A - A^{*2}\right). \tag{3.10}$$

Από $(3.9)-(3.10) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A^*A - AA^*\right) = U\tilde{M}U^*V\tilde{N}V^* - V\tilde{N}V^*U\tilde{M}U^*$

και προσθαφαιρώντας τους πίνακες $V\tilde{M}U^*V\tilde{N}V^*, V\tilde{M}V^*U\tilde{N}U^*, V\tilde{N}V^*U\tilde{M}V^*$, θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(A^*A - AA^*\right)$$

$$=\left(U-V\right)\tilde{M}U^{*}V\tilde{N}V^{*}+V\tilde{M}\left(U-V\right)^{*}V\tilde{N}V^{*}-V\tilde{N}V^{*}\left(U-V\right)\tilde{M}V^{*}-V\tilde{N}V^{*}U\tilde{M}\left(U-V\right)^{*}$$

Όμως ξέρουμε ότι $\left\|\tilde{N}\right\|_2 \le \left\|A\right\|_2$ και $\left\|\tilde{M}\right\|_2 \le \left\|A\right\|_2$, και παίρνοντας την ευκλείδια νόρμα στην τελευταία σχέση θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\left\|\mathrm{A}^{*}\mathrm{A}-\mathrm{A}\mathrm{A}^{*}\right\|_2$$

$$\le \left\|U-V\right\|_2\left\|\tilde{M}\right\|_2\left\|U^{*}\right\|_2\left\|V\right\|_2\left\|\tilde{N}\right\|_2\left\|V^{*}\right\|_2+\left\|V\right\|_2\left\|\tilde{M}\right\|_2\left\|\left(U-V\right)^{*}\right\|_2\left\|V\right\|_2\left\|\tilde{N}\right\|_2\left\|V^{*}\right\|_2$$

$$+\left\|V\right\|_2\left\|\tilde{N}\right\|_2\left\|V^{*}\right\|_2\left\|U-V\right\|_2\left\|\tilde{M}\right\|_2\left\|V^{*}\right\|_2+\left\|V\right\|_2\left\|\tilde{N}\right\|_2\left\|V^{*}\right\|_2\left\|U\right\|_2\left\|\tilde{M}\right\|_2\left\|\left(U-V\right)^{*}\right\|_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\|A^{*}A-AA^{*}\right\|_2 \le 8\left\|U-V\right\|_2\left\|A\right\|_2^2 .$$

Όμοια αποδεικνύεται η σχέση $\frac{1}{2}\left\|A^{*}A-AA^{*}\right\|_F \le 8\left\|U-V\right\|_F\left\|A\right\|_2^2$. □

Ανισότητα 3.2.13 $\tilde{\mu}_2^2 \le 2\left\|A\right\|_2^2\tilde{\mu}_{10}$ *και* $\mu_2^2 \le 2\left\|A\right\|_2^2\mu_{10}$.

Απόδειξη
Έστω διαγώνιος πίνακας $UAV^{*}=D \Leftrightarrow V\mathrm{A}^{*}U^{*}=D^{*} \Leftrightarrow A=U^{*}DV \Leftrightarrow A^{*}=V^{*}D^{*}U$.
Συνεπώς $A^{*}A=V^{*}D^{*}DV$, $AA^{*}=U^{*}D^{*}DU$ και $A^{*}A-AA^{*}=V^{*}D^{*}DV-U^{*}D^{*}DU$.

Προσθαφαιρώντας στην τελευταία σχέση $U^{*}D^{*}DV$ θα έχουμε

$$A^{*}A-AA^{*}=\left(V-U\right)^{*}D^{*}DV-U^{*}D^{*}D\left(V-U\right),$$

και παίρνοντας την ευκλείδεια νόρμα έχουμε

$$\left\|A^{*}A-AA^{*}\right\|_2=\left\|\left(V-U\right)^{*}D^{*}DV-U^{*}D^{*}D\left(V-U\right)\right\|_2$$

$$\le \left\|\left(V-U\right)^{*}\right\|_2\left\|D^{*}\right\|_2\left\|D\right\|_2\left\|V\right\|_2+\left\|U^{*}\right\|_2\left\|D^{*}\right\|_2\left\|D\right\|_2\left\|V-U\right\|_2$$

$$\le \left\|V-U\right\|_2\left\|D\right\|_2^2+\left\|D\right\|_2^2\left\|V-U\right\|_2=2\left\|D\right\|_2^2\left\|V-U\right\|_2$$

και αφού $\left\|D\right\|_2 \le \left\|A\right\|_2$, έχουμε

$$\left\|A^{*}A-AA^{*}\right\|_2 \le 2\left\|A\right\|_2^2\left\|V-U\right\|_2 \Rightarrow \tilde{\mu}_2^2 \le 2\left\|A\right\|_2^2\tilde{\mu}_{10}$$

.

Η σχέση $\mu_2^2 \le 2\left\|A\right\|_2^2\mu_{10}$ αποδεικνύεται όμοια. □

Για την επόμενη ανισότητα θα αποδείξουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.2.1 Έστω $Y=\left(Y_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots\kappa}$, ένας ορθομοναδιαίος και σύνθετος πίνακας με $Y_{ij}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $i=1,2,\ldots,n$, θετικά ημιορισμένος και $\sum_{j=1}^{\kappa} n_j = n$. Τότε $\left\|Y-I\right\|_F^2 \le 2\sum_{i\neq j}\left\|Y_{ij}\right\|_F^2$.

Απόδειξη Έστω $\hat{Y}=diag\left(Y_{ij}\right)$. Οπότε θα έχουμε

$$\left\|\hat{Y}\right\|_F^2+\left\|Y-\hat{Y}\right\|_F^2=\left\|\hat{Y}\right\|_F^2=n. \tag{3.11}$$

Αφού Y είναι ορθομοναδιαίος και

$$\left\|I-\hat{Y}\right\|_F^2 \le n\left\|\hat{Y}\right\|_F^2 \overset{(1)}{=} \left\|Y-\hat{Y}\right\|_F^2. \tag{3.12}$$

Άρα $\left\|Y-I\right\|_F^2=\left\|Y-I+\hat{Y}-\hat{Y}\right\|_F^2=\left\|\hat{Y}-I\right\|_F^2+\left\|\hat{Y}-Y\right\|_F^2 \overset{(2)}{\le} 2\left\|\hat{Y}-Y\right\|_F^2$. □

Ανισότητα 3.2.14 Αν $\mu_2^2 \le 2\delta\tilde{\delta}$, *όπου* $\delta=\min_{\alpha_i\neq\alpha_j}\left|\alpha_i-\alpha_j\right|$, $\tilde{\delta}=\min_{\beta_i\neq\beta_j}\left|\beta_i-\beta_j\right|$ *και* α_i *οι ιδιοτιμές του* H_A *και* β_i *οι ιδιοτιμές του* K_A, *τότε*

$$\mu_9 \le \frac{\sqrt{2}\mu_2^2}{2\delta\tilde{\delta}-\mu_2^2}.$$

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε τον πίνακα U^*AU, με U ορθομοναδιαίο πίνακα, αντί για τον A, και έστω ότι $H_A=\frac{A+A^*}{2}=diag\left(\tilde{\alpha}_i I_{n_i}\right)$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, $i\neq j$, $i=1,\ldots,\kappa$ και $K_A=\frac{A-A^*}{2i}=\left(G_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,k}=\tilde{\Gamma}+\tilde{G}$, $G_{ij}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ και $\tilde{\Gamma}=diag\left(G_{ii}\right)$ διαγώνιος.

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες H_A και K_A έχουν την ίδια ανάλυση σύνθετων πινάκων και η ανάλυση των ιδιοτιμών του H_A διαφέρει από εκείνες της εισαγωγής.
Έχουμε ότι

$$\frac{1}{4}\mu_2^4=\frac{1}{4}\left\|A^*A-AA^*\right\|_F^2=\left\|K_AH_A-H_AK_A\right\|_F^2=\sum_{i\neq j}\left(\tilde{\alpha}_i-\tilde{\alpha}_j\right)^2\left\|G_{ij}\right\|_F^2 \ge \delta^2\left\|\tilde{G}_{ij}\right\|_F^2$$

$$\Rightarrow \left\|\tilde{G}_{ij}\right\|_F^2 \le \frac{\mu_2^4}{4\delta^2} = \varepsilon^2 . \tag{3.13}$$

Από το Θεώρημα 3.2.4 (Hoffman – Wielandt) έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i - \gamma_i\right)^2 \le \left\|\tilde{G}\right\|_F^2 \le \varepsilon^2$ με β_i, γ_i οι ιδιοτιμές του G και του $\tilde{\Gamma}$ αντίστοιχα, σε φθίνουσα σειρά.

Ορίζουμε πίνακα μετάθεσης P έτσι ώστε $P\tilde{\Gamma}P^{\mathrm{T}} = \Gamma = diag\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_n\right)$.

Οι ιδιοτιμές β_i του G ορίζουν μία νέα ανάλυση σύνθετων πινάκων $B = diag\left(\beta_i\right) = diag\left(\tilde{\beta}_i I_{r_i}\right)_{i=1,\ldots s}$ και $\tilde{\beta}_i \ne \tilde{\beta}_j$, $i \ne j$.

Υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας Y ώστε $PGP^{\mathrm{T}}Y = YB$ και υποδιαιρώντας τον Y ανάλογα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι διαγώνιοι υποπίνακες Y_{ij} του Y, είναι θετικά ημιορισμένοι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και ο B είναι ορθομοναδιαιά αναλλοίωτος ως προς τον μετασχηματισμό διαγώνιο υποπινάκων. Άρα

$$\Gamma Y - YB = P\tilde{\Gamma}P^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} - PGP^{\mathrm{T}}Y = P\left(\tilde{\Gamma} - G\right)P^{\mathrm{T}}Y \overset{G=\tilde{\Gamma}+\tilde{G}}{=} -P\tilde{G}P^{\mathrm{T}}Y . \tag{3.14}$$

Έστω ότι το γ_j βρίσκεται σε διαφορετικό υποπίνακα από τον $\tilde{\beta}_i$, τότε,

$$\left|\tilde{\beta}_i - \gamma_j\right| = \left|\tilde{\beta}_i - \beta_i + \beta_i - \gamma_j\right| \ge \left|\tilde{\beta}_i - \beta_i\right| - \left|\beta_i - \gamma_j\right| \ge \tilde{\delta} - \varepsilon = \Delta \text{, με } \Delta > 0 \text{ αφού } \mu_2^2 < 2\delta\tilde{\delta} .$$

Άρα από την σχέση (3.14) έχουμε,

$$\left\|\Gamma Y - YB\right\|_F^2 = \left\|P\tilde{G}P^{\mathrm{T}}Y\right\|_F^2 \Rightarrow \sum_{i\ne j}\left\|\mathrm{Y}_{ij}\right\|_F^2 \Delta^2 \le \left\|\tilde{G}\right\|_F^2 \overset{(3)}{\le} \varepsilon^2 \Rightarrow \sum_{i\ne j}\left\|\mathrm{Y}_{ij}\right\|_F^2 \le \frac{\varepsilon^2}{\Delta^2} .$$

Από το Λήμμα 3.2.1. έχουμε

$$\left\|Y - I\right\|_F^2 \le 2\sum_{i\ne j}\left\|\mathrm{Y}_{ij}\right\|_F^2 \le 2\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2} \overset{(3)}{=} \frac{2\mu_2^4}{4\delta^2\left(\tilde{\delta} - \varepsilon\right)^2} = \frac{2\mu_2^4}{\left(2\delta\tilde{\delta} - \frac{2\delta\mu_2^2}{2\delta}\right)^2} = \frac{2\mu_2^4}{\left(2\delta\tilde{\delta} - \mu_2^2\right)^2} . \ \square$$

Ανισότητα 3.2.15 $\mu_{10} \le \frac{\sqrt{2}}{r}\mu_5$ *με* $r = \min\left\{\left|\sigma_i - \sigma_j\right| : \sigma_i \ne \sigma_j\right\}$ *και* $r = 1$, *αν όλα τα* σ_i *είναι ίσα.*

Απόδειξη

Έστω η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα A, δηλαδή $A = W\Sigma V^*$, με W, V ορθομοναδιαίοι, και $\Sigma = diag\left(\tilde{\sigma}_i I_{n_i}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$, και $\tilde{\sigma}_i \ne \tilde{\sigma}_j$ για $i \ne j$ μία ανάλυση ιποπινάκων.

Αν κ = 1 τότε ο A θα είναι κανονικός, ως διαγωνοποιήσιμος, και άρα ισχύει το συμπέρασμα.

Αν κ > 1, και έστω $Y = W^* V = \left(Y_{ij}\right)$.

Σύμφωνα με την πολική ανάλυση του πίνακα Y_{ii} παίρνουμε V_i, D_i ορθομοναδιαίοι και D_i διαγώνιος τέτοιοι ώστε ο $V_i Y_{ii} V_i^* D_i$ είναι θετικά ημιορισμένος. Αντικαθιστώντας τον V^* με $diag\left(\tilde{D}_i V_i\right) V^*$ και τον W με $W diag\left(V_i^*\right)$ και παίρνουμε $A = W\tilde{D}V^*$, όπου $\tilde{D} = \Sigma diag\left(D_i\right)$ με $\left|\tilde{D}\right| = \Sigma$ και ορίζεται ο διαγώνιος σύνθετος πίνακας

$$Y = WV^* \Rightarrow \begin{cases} W = YV^* \\ V = WY \end{cases}. \tag{3.15}$$

Θεωρούμε $H_1 - H_2 = \left(AA^*\right)^{\frac{1}{2}} - \left(A^* A\right)^{\frac{1}{2}} = W\Sigma W^* - V\Sigma V^*$. Άρα

$$\mu_5^2 = \left\|H_1 - H_2\right\|_F^2 = \left\|W\Sigma W^* - V\Sigma V^*\right\|_F^2 = \left\|W\Sigma Y V^* - WY\Sigma V^*\right\|_F^2 = \left\|W\left(\Sigma Y - Y\Sigma\right)V^*\right\|_F^2$$

$$= \left\|\Sigma Y - Y\Sigma\right\|_F^2 = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}^2 \left(\sigma_i - \sigma_j\right)^2 \geq \min_{i \neq j}\left\{\left|\sigma_i - \sigma_j\right|^2\right\} \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}^2 = r^2 \left\|Y_{ij}\right\|_F^2 \Rightarrow \mu_5^2 \geq r^2 \left\|\mathrm{Y}_{ij}\right\|_F^2.$$

Από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε ότι

$$\left\|W - V\right\|_F^2 \overset{(1)}{=} \left\|W - WY\right\|_F^2 = \left\|W\right\|_F^2 \left\|I - Y\right\|_F^2 = \left\|Y - I\right\|_F^2 \leq \sum_{i \neq j} \left\|Y_{ij}\right\|_F^2 \leq \frac{2\mu_5^2}{r^2} \Rightarrow \mu_{10} \leq \frac{\sqrt{2}\mu_5}{r}. \ \square$$

3.3 Σύγκριση Μέτρων Κανονικότητας Διαγωνοποιήσιμου Πίνακα

Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε θα έχουμε τις ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις των μέτρων κανονικότητας.
Αρχικά θα δείξουμε τις ακόλουθες πρότασεις.

Πρόταση 3.3.1 (Ανισότητα Kantorovich)
Έστω ο πίνακας A ένας τετραγωνικός και θετικά ορισμένος ερμιτιανός πίνακας, με χαρακτηριστικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ και $x \in \mathbb{C}^n$ μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε ισχύει

$$1 \leq \left(Ax, x\right) \cdot \left(A^{-1}x, x\right) \leq \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}^2.$$

Απόδειξη
Έστω f μία κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $\left[\lambda_n, \lambda_1\right]$, όπου $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$.
Υποθέτουμε ότι $tf\left(t\right) \geq 1$ στο $\left[\lambda_n, \lambda_1\right]$ και έστω c > 0.

Στο (n-1) simplex πολύεδρο $\mathrm{H}\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) = S_{n-1}$ ορίζουμε

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\lambda_i), \text{ με } \alpha \in S_{n-1}.$$

Τότε έχουμε ότι

$$1 \le F(\alpha) \le \max\left\{ c\lambda_1 + \frac{1}{c} f(\lambda_1), c\lambda_n + \frac{1}{c} f(\lambda_n) \right\}.$$

Θέτοντας $f(t) = t^{-1}$, $c = \left(\lambda_1 \lambda_n\right)^{-1}$ και $\alpha_1 = \alpha_n = \frac{1}{2}$, $\alpha_i = 0$ για $i \ne 1, n$ θα έχουμε ότι

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\lambda_i) \le \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]^2.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ορθομοναδιαία ιδιάζοντα διανύσματα των ιδιαζουσών ιδιοτιμών $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, τότε $(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i$ και $\left(A^{-1}x, x\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i^{-1}$ με $\alpha_i = \left|(x, u_i)\right|^2$ και άρα ισχύει το συμπέρασμα. □

Πρόταση 3.3.2 (Ανισότητα Smith) $n - 2 + \kappa_2 + \kappa_2^{-1} \le \kappa_F \le \frac{n}{2}\left(\kappa_2 + \kappa_2^{-1}\right)$.

Απόδειξη
Έστω $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n \ge 0$ οι ιδιάζουσες τιμές του A. Τότε,

$$\|A\|_F^2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_F^2 = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n\right)\left(\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1} + \ldots + \sigma_n^{-1}\right) = e^* \Sigma e \cdot e^* \Sigma^{-1} e,$$

με $e^* = (1, 1, \ldots, 1)$ και $\Sigma = diag(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ακόμα $\kappa_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Το **2ο Μέρος** του αποτελέσματος Smith προκύπτει από την ανισότητα Kantorovich, δηλαδή

$$1 \le e^* \Sigma e \cdot e^* \Sigma^{-1} e \le \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^2 \le \left\{ \frac{n}{2}\left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^2. \ \square$$

Ανισότητα 3.3.1 $\dfrac{\tilde{\mu}_{11}^2}{1+\tilde{\mu}_{11}} \le \mu_{11} \le \dfrac{n}{2}\dfrac{\tilde{\mu}_{11}^2}{1+\tilde{\mu}_{11}}$.

Απόδειξη
Η ανισότητα αυτή αποτελεί επαναδιατύπωση της Πρότασης 3.3.2 (Ανισότητα Smith).

Για το **1ο Μέρος**, έχουμε

$$n-2+\kappa_2+\kappa_2^{-1} \le \kappa_F \Rightarrow n+\kappa_2+\frac{1}{\kappa_2}-2 \le \kappa_F - n \Rightarrow \frac{\kappa_2^2-\kappa_2+1}{1+\kappa_2-1} \le \kappa_F - n$$

$$\Rightarrow \frac{(\kappa_2-1)^2}{1+(\kappa_2-1)} \le \kappa_F - n \Rightarrow \frac{\tilde{\mu}_{11}^2}{1+\tilde{\mu}_{11}^2} \le \mu_{11}.$$

Για το **2ο Μέρος** της Ανισότητας αυτής, έχουμε ότι

$$\kappa_F \le \frac{n}{2}\left(\kappa_2+\kappa_2^{-1}\right) \Rightarrow \kappa_F + n - n \le \frac{n}{2}\left(\kappa_2+\frac{1}{\kappa_2}\right) \Rightarrow \kappa_F - n \le \frac{n}{2}\left(\kappa_2+\frac{1}{\kappa_2}-2\right)$$

$$\Rightarrow \kappa_F - n \le \frac{n}{2}\left(\frac{\kappa_2^2-2\kappa_2+1}{\kappa_2}\right) \Rightarrow \kappa_F - n \le \frac{n}{2}\frac{(\kappa_2-1)^2}{1+(\kappa_2-1)} \Rightarrow \mu_{11} \le \frac{n}{2}\frac{\tilde{\mu}_{11}^2}{1+\tilde{\mu}_{11}^2}. \ \square$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, που χρησιμοποιηθεί για την επόμενη ανισότητα.

Θεώρημα 3.3.1 (Smith) Αν λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, είναι απλές ιδιοτιμές του A, τότε ισχύει ότι

$$\kappa_F \le \sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\Delta_F^2}{(n-1)\delta_j^2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}, \text{ όπου } \delta_j = \min\left\{\left|\lambda_i-\lambda_j\right| : i \ne j\right\} \text{ με } j=1,2,\ldots n.$$

Απόδειξη
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε ότι ο A είναι άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία της κύριας διαγωνίου τις διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_i, $i=1,2,\ldots,n$. Τότε $A=\Lambda+M$, με $\Lambda = diag(\lambda_i)$ και M ένας γνήσια άνω τριγωνικός πίνακας.

Το i–στο διαγώνιο στοιχείο του $(\lambda_j I - A)^*(\lambda_j I - A)$ είναι $\left|\lambda_j-\lambda_i\right|^2 + \|m_i\|_F^2$, (3.16)
όπου το διάνυσμα m_i είναι η i–ιοστή στήλη του M. Ακόμα γνωρίζουμε ότι

$$\sum \|m_i\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2 = \Delta_F^2. \tag{3.17}$$

Έστω $C=\lambda_j I - A$ και αντικαθιστώντας στην σχέση $(adjC)(adjC)^* = adj(C^*C)$ θα έχουμε

$$\left\{adj\left(\lambda_j I - A\right)\right\}\left\{adj\left(\lambda_j I - A\right)\right\}^* = adj\left\{\left(\lambda_j I - A\right)^*\left(\lambda_j I - A\right)\right\}. \qquad (3.18)$$

Αν y^{T} είναι η πρώτη γραμμή του $adj\left(\lambda_j I - A\right)$, τότε το κυρίαρχο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα του αριστερού μέρους της (3.18) είναι $\|y\|_F^2$. Από το δεξιό μέρος της σχέσης (3.18) έχουμε ότι $\|y\|_F^2 = \det B$, όπου B προκύπτει αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και στήλη από τον πίνακα $\left(\lambda_j I - A\right)^*\left(\lambda_j I - A\right)$. Αφού ο B είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, η Ανισότητα του Hadamart δίνει ότι $\|y\|_F^2 = \det B \le b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$, όπου $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του B.

Όμως, τα $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ είναι και διαγώνια στοιχεία του $\left(\lambda_j I - A\right)^*\left(\lambda_j I - A\right)$ και από την (3.16) προκύπτει ότι

$$\|y\|_F^2 \le \prod_j \left\{\left|\lambda_j - \lambda_i\right|^2 + \|m_i\|_F^2\right\} \le \prod_j \left\{1 + \delta_j^{-1}\|m_i\|_F^2\right\} \cdot \prod_j \left|\lambda_j - \lambda_i\right|^2. \qquad (3.19)$$

Αν το $\sum_j$ δείχνει τα αθροίσματα για όλα τα $i \ne j$ με $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε η σύγκριση μεταξύ γεωμετρικού και αριθμητικού μέσου δίνει την σχέση

$$\prod_j \left\{1 + \delta_j^{-2}\|m_i\|_F^2\right\}^{\frac{1}{(n-1)}} \le (n-1)^{-1}\sum_j \left\{1 + \delta_j^{-2}\|m_i\|_F^2\right\} \overset{(3.17)}{\le} 1 + (n-1)^{-1}\delta_j^{-2}\Delta_F^2.$$

Αντικαθιστώντας στην (3.19) θα έχουμε $\|y\|_F^2 \le \left[1 + (n-1)^{-1}\delta_j^{-2}\Delta_F^2\right]^{n-1} \cdot \prod_j \left|\lambda_j - \lambda_i\right|^2$.

Από την σχέση αυτή, τον δείκτη κατάστασης ιδιοτιμής $\kappa_A\left(\lambda_j\right) = \dfrac{\|x\|\|y\|}{\left|y^{\mathrm{T}}x\right|}$ και τις σχέσεις $\|x\| = \prod_j \left|\lambda_j - \lambda_i\right|$, $y^{\mathrm{T}}x = \prod_j \left(\lambda_j - \lambda_i\right)^2$ έχουμε το ζητούμενο. □

Ανισότητα 3.3.2 Αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι απλές και $\delta_j = \min\left\{\left|\lambda_i - \lambda_j\right| : i \ne j\right\}$ *με* $j = 1, 2, \ldots n$, *τότε* $\mu_{11} \le \sum_{i=1}^{n}\left[\left\{1 + \dfrac{\mu_3^2}{\delta_j^2(n-1)}\right\}^{\frac{n-1}{2}} - 1\right]$.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.3.1 και τη σχέση $\kappa_F \le \sum_{j=1}^{n}\left(1 + \dfrac{\Delta_F^2}{(n-1)\delta_j^2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}$ προκύπτει ότι

$$\kappa_F - n \le \sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\Delta_F^2}{(n-1)\delta_j^2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} - n \Rightarrow \kappa_F - n \le \sum_{j=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{\Delta_F^2}{(n-1)\delta_j^2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} - 1\right\}$$

$$\Rightarrow \mu_{11} \le \sum_{i=1}^{n}\left[\left\{1+\frac{\mu_3^2}{\delta_j^2(n-1)}\right\}^{\frac{n-1}{2}} - 1\right]. \ \square$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε δύο ακόμα προτάσεις.

Πρόταση 3.3.3 Αν ο πίνακας S είναι ερμιτιανός και ο X ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε $\|S\|_F \le \|X^{-1}SX\|_F$.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα (Schur) γνωρίζουμε ότι $\|\Lambda\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \le \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$, και από αυτό προκύπτει το συμπέρασμα. □

Πρόταση 3.3.4 Αν ο Y είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας και $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε $\|Y^{-1}GY - G\|_F \le (\kappa_2(Y)-1)\|G\|_F$.

Απόδειξη

Έστω ο γραμμικός τελεστής $L:\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, με $L(G) = Y^{-1}GY - G$ και η διανυσματική μορφή $vec(L(G)) = (Y\otimes Y^{-1} - I_n \otimes I_n)vec(G) = \tilde{L}vec(G)$, όπου $\otimes$ το γινόμενο Kronecker. Αφού $\tilde{L}$ είναι ερμιτιανός και έχει ιδιοτιμές $\frac{\eta_i}{\eta_j} - 1$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, όπου η_i ιδιοτιμές του Y, και $\|G\|_F$ η Frobenious νόρμα του $vec(G) \in \mathbb{C}^{n^2}$. Κατά συνέπεια ισχύει η σχέση $\|Y^{-1}GY - G\|_F \le (\kappa_2(Y)-1)\|G\|_F$. □

Ανισότητα 3.3.3 $\mu_2^2 \le 2\|\Lambda\|_2\|\Lambda\|_F\,\tilde{\mu}_{11}(2+\tilde{\mu}_{11}) \le 2\|A\|_F^2\,\tilde{\mu}_{11}(2+\tilde{\mu}_{11})$.

Απόδειξη

Έστω $A = X_1\Lambda X_1^{-1} \Leftrightarrow A^* = (X_1^{-1})^*\Lambda^* X_1^*$ και $\tilde{\mu}_{11} = \kappa_2(X_1) - 1$.

Τότε για $Y = X_1^* X_1 \Leftrightarrow Y^{-1} = X_1^{-1}(X_1^{-1})^*$, θετικά ορισμένο θα έχουμε

$$X_1^{-1}(A^*A - AA^*)X_1 = X_1^{-1}\left[(X_1^{-1})^*\Lambda^* X_1^* X_1 \Lambda X_1^{-1} - X_1\Lambda X_1^{-1}(X_1^{-1})^*\Lambda^* X_1^*\right]X_1$$

$$\overset{\pm\Lambda^*\Lambda}{=} X_1^{-1}(X_1^{-1})^*\Lambda^* X_1^* X_1 \Lambda X_1^{-1} X_1 - X_1^{-1}X_1\Lambda X_1^{-1}(X_1^{-1})^*\Lambda^* X_1^* X_1 + \Lambda\Lambda^* - \Lambda^*\Lambda$$

$$= \Upsilon^{-1}\Lambda^{*}\Upsilon\Lambda - \Lambda^{*}\Lambda - \left(\Lambda\Upsilon^{-1}\Lambda^{*}\Upsilon - \Lambda\Lambda^{*}\right) = \left(Y^{-1}\Lambda^{*}Y - \Lambda^{*}\right)\Lambda - \Lambda\left(Y^{-1}\Lambda^{*}Y - \Lambda^{*}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_2^2 = \left\|A^{*}A - AA^{*}\right\|_F \underset{3.3.1}{\overset{\text{Πρόταση}}{\leq}} \left\|X_1^{-1}\left(A^{*}A - AA^{*}\right)X_1\right\|_F = 2\|\Lambda\|_2 \left\|Y^{-1}\Lambda^{*}Y - \Lambda^{*}\right\|_F$$

$$\underset{3.3.2}{\overset{\text{Πρόταση}}{\leq}} 2\|\Lambda\|_2 \|\Lambda\|_F \left[\kappa_2(\Upsilon) - 1\right] = 2\|\Lambda\|_2 \|\Lambda\|_F \left[\kappa_2^2(\mathrm{X}_1) - 1\right] =$$

$$= 2\|\Lambda\|_2 \|\Lambda\|_F \left[\kappa_2(X_1) - 1\right]\left[\kappa_2(X_1) + 1\right]$$

$$= 2\|\Lambda\|_2 \|\Lambda\|_F \, \tilde{\mu}_{11}\left[2 + \tilde{\mu}_{11}\right] \leq 2\|A\|_F^2 \, \tilde{\mu}_{11}\left[2 + \tilde{\mu}_{11}\right]. \ \square$$

Ανισότητα 3.3.4 $\mu_3^2 \leq \dfrac{\|A\|_F^2 \, \tilde{\mu}_{11}\left(2 + \tilde{\mu}_{11}\right)}{\left(1 + \tilde{\mu}_{11}\right)^2}$.

Απόδειξη
Έστω ότι $A = X_1 \Lambda X_1^{-1}$, τότε θα έχουμε

$$\|A\|_F^2 = \left\|X_1 \Lambda X_1^{-1}\right\|_F^2 \leq \|\Lambda\|_F^2 \|X_1\|_2^2 \left\|X_1^{-1}\right\|_2^2 = \|\Lambda\|_F^2 \, \kappa_2^2(X_1)$$

$$\Rightarrow \|A\|_F^2 \leq \|\Lambda\|_F^2 \, \kappa_2^2(X_1) \Rightarrow -\|A\|_F^2 \, \kappa_2^{-2}(X_1) \geq -\|\Lambda\|_F^2$$

$$\Rightarrow \|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 - \|A\|_F^2 \, \kappa_2^{-2}(X_1) = \|\mathrm{A}\|_F^2 \left(1 - \kappa_2^{-2}(X_1)\right)$$

$$\Rightarrow \mu_3^2 \leq \|A\|_F^2 \left(\frac{\kappa_2^2(X_1) - 1}{\kappa_2^2(X_1)}\right) = \|A\|_F^2 \frac{\left(\kappa_2(X_1) - 1\right)\left(\kappa_2(X_1) + 1\right)}{\left(1 + \kappa_2(X_1) - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \mu_3^2 \leq \frac{\|\mathrm{A}\|_F^2 \, \tilde{\mu}_{11}\left(2 + \tilde{\mu}_{11}\right)}{\left(1 + \tilde{\mu}_{11}\right)^2}. \ \square$$

Ένα ακόμα θεώρημα που θα χρησιμοποιηθεί για την επόμενη ανισότητα είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.3.2 Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος X ώστε $A = X\Lambda X^{-1}$, τότε μπορούμε να διατάξουμε τις ιδιοτιμές του A με τέτοιο τρόπο, ώστε να ισχύει $\mathrm{K}_2(X)^{-1}\sigma_i(A) \leq \left|\lambda_i(A)\right| \leq \mathrm{K}_2(X)\sigma_i(A)$, όπου $\mathrm{K}_2(X) = \dfrac{\sigma_1(X)}{\sigma_n(X)}$ είναι ο δείκτης κατάστασης του X.

Απόδειξη
Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $\sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A)\sigma_i(B)$.

Άρα $\sigma_i(A)=\sigma_i\left(X\Lambda X^{-1}\right)\le\sigma_i(X)\sigma_i(\Lambda)\sigma_i\left(X^{-1}\right)$
Όμως , αφού $\sigma_i(A)=\left|\lambda_i(A)\right|$ θα έχουμε

$$\sigma_i(A)\le\sigma_i(X)\left|\lambda_i(A)\right|\sigma_i\left(X^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow\sigma_i(A)\le\frac{\sigma_1(X)}{\sigma_n(X)}\left|\lambda_i(A)\right|\Rightarrow \mathrm{K}_2(X)^{-1}\sigma_i(A)\le\left|\lambda_i(A)\right|.$$

Όμοια για $\Lambda=X^{-1}AX$ έχουμε

$$\sigma_i(\Lambda)\le\sigma_i(X)\sigma_i(A)\sigma_i\left(X^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow\left|\lambda_i(A)\right|\le\frac{\sigma_1(X)}{\sigma_n(X)}\sigma_i(A)\Rightarrow\left|\lambda_i(A)\right|\le\mathrm{K}_2(X)\sigma_i(A).\ \square$$

Ανισότητα 3.3.5 $\mu_4\le\|A\|_2\,\tilde{\mu}_{11}$.

Απόδειξη
Από το Θεώρημα 3.3.2 έχουμε

$$\mathrm{K}_2(X)^{-1}\sigma_i(A)\le\left|\lambda_i(A)\right|\Rightarrow-\left|\lambda_i(A)\right|\le-\mathrm{K}_2(X)^{-1}\sigma_i(A)$$

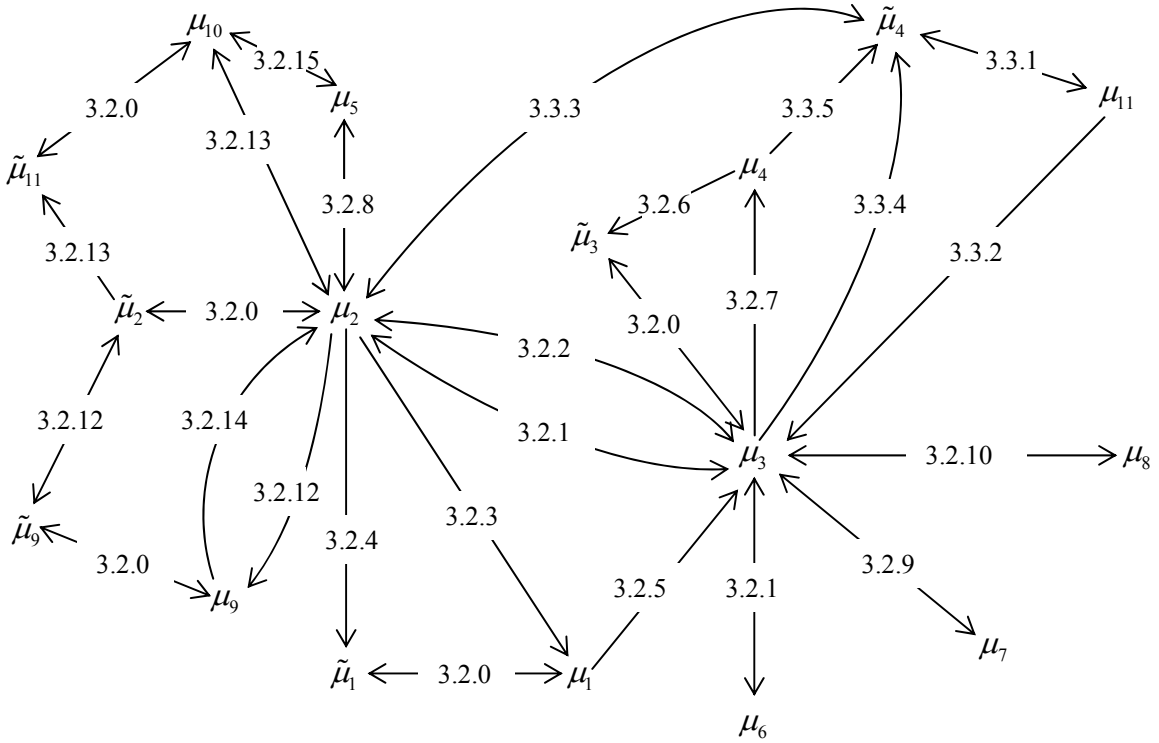
$$\Rightarrow\sigma_i(A)-\left|\lambda_i(A)\right|\le\sigma_i(A)-\mathrm{K}_2(X)^{-1}\sigma_i(A)$$

$$\sigma_i(A)-\left|\lambda_i(A)\right|\le\sigma_i(A)\left(\frac{\mathrm{K}_2(X)-1}{\mathrm{K}_2(X)}\right)$$

$$\le\|A\|_2\left(\frac{\mathrm{K}_2(X)-1}{\mathrm{K}_2(X)}\right)\le\|A\|_2\frac{\tilde{\mu}_{11}}{1+\tilde{\mu}_{11}}\le\|A\|_2\,\tilde{\mu}_{11}$$

$$\Rightarrow\max_i\left|\sigma_i(A)-\left|\lambda_i(A)\right|\right|\le\|A\|_2\,\tilde{\mu}_{11}\Rightarrow\mu_4\le\|A\|_2\,\tilde{\mu}_{11}.\ \square$$

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό μπορούμε να συνοψίσουμε τα μέτρα κανονικότητας που αναφέρθηκαν, και τις σύγκριση τους με τις ανισότητες που αποδείχτηκαν, με το ακόλουθο σχήμα. Το σχήμα αυτό περιγράφει την σχέση που έχουν μεταξύ τους, αλλά και με τον τρόπο που συνδέονται με τις προηγούμενες ανισότητες.



3.3 Παραδείγματα

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε παραδείγματα για τα μέτρα κανονικότητας, καθώς επίσης και για τη σύγκριση των μέτρων αυτών που αναφέρθηκαν και αποδείχθηκαν πιο πριν. Θα θεωρήσουμε δύο τετραγωνικούς 4×4 πίνακες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, από τον ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό ομοιότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε τους πίνακες αυτούς άνω τριγωνικούς. Έστω,

$$B=\begin{bmatrix}10 & 1 & 0 & i\\ 0 & 20 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & -10 & 0.3\\ 0 & 0 & 0 & 10i\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma=\begin{bmatrix}2 & 10 & 4 & 2\\ 0 & -1 & -3i & 5\\ 0 & 0 & 2 & 4i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

οι δύο πίνακες. Για τα μέτρα κανονικότητας θα έχουμε:

Για την τοπολογική απόσταση,

$$\mu_1(B)=\inf\|B-N\|_F=1.5297\,,\ \tilde{\mu}_1(B)=\inf\|B-N\|_2=1.478$$

και

$$\mu_1(\Gamma)=\inf\|\Gamma-N\|_F=13.0384\,,\ \tilde{\mu}_1(\Gamma)=\inf\|\Gamma-N\|_2=11.1265\,.$$

Για την απόσταση του A^*A από τον AA^*,

$$\mu_2(B)=\left\|B^*B-BB^*\right\|_F^{\frac{1}{2}}=5.5\,,\ \tilde{\mu}_2(B)=\left\|B^*B-BB^*\right\|_2^{\frac{1}{2}}=4.6929$$

και

$$\mu_2(\Gamma)=\left\|\Gamma^*\Gamma-\Gamma\Gamma^*\right\|_F^{\frac{1}{2}}=12.9377\,,\ \tilde{\mu}_2(\Gamma)=\left\|\Gamma^*\Gamma-\Gamma\Gamma^*\right\|_F^{\frac{1}{2}}=11.1215\,.$$

Για την απομάκρυνση του Henrici,

$$\mu_3(B)=\Delta_F(B)=\left(\|B\|_F^2-\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1.5297\,,\ \tilde{\mu}_3(B)=\Delta_2(B)=1.478$$

και

$$\mu_3(\Gamma)=\Delta_F(\Gamma)=\left(\|\Gamma\|_F^2-\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=13.0384\,,\ \tilde{\mu}_3(\Gamma)=\Delta_2(\Gamma)=11.1265$$

Για την απομάκρυνση του Ruhe,

$$\mu_4(B)=\max_i\left(\sigma_i-|\lambda_i|\right)=0.5248\,,\ \mu_4(\Gamma)=\max_i\left(\sigma_i-|\lambda_i|\right)=9.2935\,.$$

Για το μέτρο της απόστασης του H_1 από τον H_2,

$$\mu_5(B)=\left\|\left(BB^*\right)^{\frac{1}{2}}-\left(B^*B\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_F=1.478\,,\ \mu_5(\Gamma)=\left\|\left(\Gamma\Gamma^*\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\Gamma^*\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_F=15.256$$

Για το μέτρο της διαφοράς των U και V των πινάκων $U^*\left(A+A^*\right)U, V^*\left(A-A^*\right)V$,

$$\mu_9(B)=\min\|U-V\|_F=2.24505\,,\ \tilde{\mu}_9(B)=\min\|U-V\|_2=2$$

και

$$\mu_9(\Gamma)=\min\|U-V\|_F=2.6140\,,\ \tilde{\mu}_9(\Gamma)=\min\|U-V\|_2=1.9981\,.$$

Για το μέτρο της διαφοράς των U και V του διαγώνιου πίνακα $U\mathrm{A}V^*$,

$$\mu_{10}(B)=\min\|U-V\|_F=2.24505\,,\ \tilde{\mu}_{10}(B)=\min\|U-V\|_2=2$$

και

$$\mu_{10}(\Gamma)=\min\|U-V\|_F=2.6140\,,\ \tilde{\mu}_{10}(\Gamma)=\min\|U-V\|_2=1.9981\,.$$

Για το μέτρο της διαφοράς των δεικτών κατάστασης,

$$\mu_{11}(B) = \mathrm{K}(B) - n = 4.788 - 4 = 0.788\,,\ \tilde{\mu}_{11}(B) = \mathrm{K}(B) - 1 = 2.1135 - 1 = 1.1135$$

και

$$\mu_{11}(\Gamma) = \mathrm{K}(\Gamma) - n = 149.3988 - 4 = 145.3988\,,$$

$$\tilde{\mu}_{11}(\Gamma) = \mathrm{K}(\Gamma) - 1 = 127.5431 - 1 = 126.5431\,.$$

Παρατηρούμε πώς ο πίνακας B είναι ένας πίνακας κοντά στην κανονικότητα, αφού τα μέτρα του είναι αρκετά κοντά στο μηδέν, ενώ ο πίνακας Γ απέχει αρκετά από αυτήν, αφού τα μέτρα του είναι αρκετά μακριά.

Συνεχίζοντας θα δώσουμε παραδείγματα, και για τους δύο πίνακες B και Γ, για τις ανισότητες που προαναφέρθηκαν.

Πιο συγκεκριμένα για την Ανίσωση 3.2.0, έχουμε:

Για $i = 1$,

$$\tilde{\mu}_1(B) \le \mu_1(B) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_1(B) \Rightarrow 1.478 \le 1.5297 \le 2.956$$

και

$$\tilde{\mu}_1(\Gamma) \le \mu_1(\Gamma) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_1(\Gamma) \Rightarrow 11.1265 \le 13.0384 \le 22.253\,.$$

Για $i = 2$,

$$\tilde{\mu}_2(B) \le \mu_2(B) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_2(B) \Rightarrow 4.6929 \le 5.5 \le 9.3858$$

και

$$\tilde{\mu}_2(\Gamma) \le \mu_2(\Gamma) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_2(\Gamma) \Rightarrow 11.1215 \le 12.9377 \le 22.243\,.$$

Για $i = 3$,

$$\tilde{\mu}_3(B) \le \mu_3(B) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_3(B) \Rightarrow 1.478 \le 1.5279 \le 2.956$$

και

$$\tilde{\mu}_3(\Gamma) \le \mu_3(\Gamma) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_3(\Gamma) \Rightarrow 11.1265 \le 13.0384 \le 22.253\,.$$

Για $i = 9$,

$$\tilde{\mu}_9(B) \le \mu_9(B) \le \sqrt{n}\,\tilde{\mu}_9(B) \Rightarrow 2 \le 2.4505 \le 4$$

και

$$\tilde{\mu}_1(\Gamma) \le \mu_1(\Gamma) \le \sqrt{n}\tilde{\mu}_1(\Gamma) \Rightarrow 11.1265 \le 13.0384 \le 22.253 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.1, έχουμε

$$\mu_3(B) \le \left(\frac{n^3-n}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \mu_3(B) \Rightarrow 1.5297 \le 12.2984$$

και

$$\mu_3(\Gamma) \le \left(\frac{n^3-n}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \mu_3(\Gamma) \Rightarrow 13.0384 \le 28.9296 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.2, έχουμε

$$\mu_2^2(B) \le \sqrt{2\left(\|B\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2\right)}\mu_3(B) \le 2\|B\|_F\, \mu_3(B) \Rightarrow 31.3867 \le 81.0117 \le 81.0793$$

και

$$\mu_2^2(\Gamma) \le \sqrt{2\left(\|\Gamma\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2\right)}\mu_3(\Gamma) \le 2\|\Gamma\|_F\, \mu_3(\Gamma) \Rightarrow 167.3858 \le 250.1199 \le 349.8568 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.3 έχουμε

$$\mu_2^2(B) \le 4\|B\|_2\, \mu_1(B) \Rightarrow 30.2505 \le 122.6312$$

και

$$\mu_2^2(\Gamma) \le 2\|\Gamma\|_2\, \mu_1(\Gamma) \Rightarrow 167.3858 \le 588.9967 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.4, έχουμε

$$\mu_2^2(B) \le 4\|B\|_F\, \tilde{\mu}_1(B) + \sqrt{2n}\tilde{\mu}_1^2(B) \Rightarrow 30.2505 \le 162.8564$$

και

$$\mu_2^2(\Gamma) \le 4\|\Gamma\|_F\, \tilde{\mu}_1(\Gamma) + \sqrt{2n}\tilde{\mu}_1^2(\Gamma) \Rightarrow 167.385 \le 947.2667 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.5, έχουμε

$$\mu_1(B) \le \mu_3(B) \Rightarrow 1.5297 \le 1.5297 \quad \text{και} \quad \mu_1(\Gamma) \le \mu_3(\Gamma) \Rightarrow 13.0384 \le 13.0384 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.6, έχουμε

$$\mu_4(B) \le \tilde{\mu}_3(B) \Rightarrow 0.0419 \le 1.478 \quad \text{και} \quad \mu_4(\Gamma) \le \tilde{\mu}_3(\Gamma) \Rightarrow 10.2935 \le 11.1265 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.7, έχουμε

$$\mu_3^2(B) \le 2\sqrt{n}\,\|B\|_F\,\mu_4(B) \le 2n\|B\|_2\,\mu_4(B) \Rightarrow 2.34 \le 55.6324 \le 84.1431$$

και

$$\mu_3^2(\Gamma) \le 2\sqrt{n}\,\|\Gamma\|_F\,\mu_4(\Gamma) \le 2n\|\Gamma\|_2\,\mu_4(\Gamma) \Rightarrow 170 \le 498.7413 \le 839.6491 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.8 έχουμε

$$\|B^\dagger\|_2^{-1}\,\mu_5(B) \le \mu_2^2(B) \le 2\|B\|_2\,\mu_5(B) \Rightarrow 12.1062 \le 30.2505 \le 51.1945$$

και

$$\|\Gamma^\dagger\|_2^{-1}\,\mu_5(\Gamma) \le \mu_2^2(\Gamma) \le 2\|\Gamma\|_2\,\mu_5(\Gamma) \Rightarrow 1.3898 \le 167.3858 \le 344.5872 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.12, έχουμε

$$\tilde{\mu}_2^2(B) \le 8\|B\|_2^2\,\tilde{\mu}_9(B) \Rightarrow 22.0237 \le 3213.3664 ,$$

$$\mu_2^2(B) \le 8\|B\|_2^2\,\mu_9(B) \Rightarrow 30.2505 \le 5618.72$$

και

$$\tilde{\mu}_2^2(\Gamma) \le 8\|\Gamma\|_2^2\,\tilde{\mu}_9(\Gamma) \Rightarrow 123.6887 \le 2038.7653 ,$$

$$\mu_2^2(\Gamma) \le 8\|\Gamma\|_2^2\,\mu_9(\Gamma) \Rightarrow 167.3858 \le 3764.16 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.13, έχουμε

$$\tilde{\mu}_2^2(B) \le 2\|B\|_2^2\,\tilde{\mu}_{10}(B) \Rightarrow 22.0237 \le 1606.6832 ,$$

$$\mu_2^2(B) \le 2\|B\|_2^2\,\mu_{10}(B) \Rightarrow 30.2505 \le 3442.1683$$

και

$$\tilde{\mu}_2^2(\Gamma) \le 2\|\Gamma\|_2^2\,\tilde{\mu}_{10}(\Gamma) \Rightarrow 123.6887 \le 509.6913 ,$$

$$\mu_2^2(\Gamma) \le 2\|\Gamma\|_2^2\,\mu_{10}(\Gamma) \Rightarrow 167.3858 \le 666.8 .$$

Για την Ανίσωση 3.2.15, έχουμε

$$\mu_{10}(B) \le \frac{\sqrt{2}}{r}\mu_5(B) \Rightarrow 2.4505 \le 3.5025 \text{, όπου } r = \min\left\{\left|\sigma_i - \sigma_j\right| : \sigma_i \ne \sigma_j\right\} = 0.5157$$

και

$$\mu_{10}(\Gamma) \le \frac{\sqrt{2}}{r}\mu_5(\Gamma) \Rightarrow 2.614 \le 48.2344 \text{, όπου } r = \min\left\{\left|\sigma_i - \sigma_j\right| : \sigma_i \ne \sigma_j\right\} = 0.4473 .$$

Τέλος θα δώσουμε παραδείγματα για διαγωνοποιήσιμους πίνακες. Και οι δύο πίνακες B και Γ είναι διαγωνοποιήσιμοι, οπότε θα έχουμε τις ακόλουθες Ανισότητες.

Για την Ανίσωση 3.3.1 έχουμε

$$\frac{\tilde{\mu}_{11}^2(B)}{1+\tilde{\mu}_{11}(B)} \le \mu_{11}(B) \le \frac{n}{2}\frac{\tilde{\mu}_{11}^2(B)}{1+\tilde{\mu}_{11}(B)} \Rightarrow 0.5866 \le 0.788 \le 1.1732$$

και

$$\frac{\tilde{\mu}_{11}^2(\Gamma)}{1+\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)} \le \mu_{11}(\Gamma) \le \frac{n}{2}\frac{\tilde{\mu}_{11}^2(\Gamma)}{1+\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)} \Rightarrow 125.5495 \le 145.3988 \le 251.0991 .$$

Για την Ανίσωση 3.3.3 έχουμε

$$\mu_2^2(B) \le 2\|A\|_2\|A\|_F\,\tilde{\mu}_{11}(B)\left(2+\tilde{\mu}_{11}(B)\right) \le 2\|B\|_F^2\,\tilde{\mu}_{11}(B)\left(2+\tilde{\mu}_{11}(B)\right)$$

$$\Rightarrow 30.2505 \le 2325.0258 \le 3086.0033$$

και

$$\mu_2^2(\Gamma) \le 2\|A\|_2\|A\|_F\,\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\left(2+\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\right) \le 2\|\Gamma\|_F^2\,\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\left(2+\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\right)$$

$$\Rightarrow 167.3858 \le 205754.9528 \le 5855842.621 .$$

Για την Ανίσωση 3.3.4, έχουμε

$$\mu_3^2(B) \le \frac{\|B\|_F^2\,\tilde{\mu}_{11}(B)\left(2+\tilde{\mu}_{11}(B)\right)}{\left(1+\tilde{\mu}_{11}(B)\right)^2} \Rightarrow 2.34 \le 482.6489$$

και

$$\mu_3^2(\Gamma) \le \frac{\|\Gamma\|_F^2\,\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\left(2+\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\right)}{\left(1+\tilde{\mu}_{11}(\Gamma)\right)^2} \Rightarrow 170 \le 179.9889$$

Για την Ανίσωση 3.3.5 έχουμε

$$\mu_4(B) \le \|B\|_2 \, \tilde{\mu}_{11}(B) \Rightarrow 0.5248 \le 22.2463$$

και

$$\mu_4(\Gamma) \le \|\Gamma\|_2 \, \tilde{\mu}_{11}(\Gamma) \Rightarrow 9.2935 \le 1429.1145 \, .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Απομάκρυνση Από την Κανονικότητα Κατά Henrici.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε το μέτρο κανονικότητας 3.1.3 της απομάκρυνσης κατά Henrici ενός πίνακα A,

$$\mu_3(A) = \Delta_F(A) = \left(\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \inf\left\{ \|M\|_F : M \text{ γνήσια άνω τριγωνικός}, \exists U, \tilde{\Lambda} : U^* A U = \tilde{\Lambda} + M \right\},$$

και

$$\tilde{\mu}_3(A) = \Delta_2(A) = \inf\left\{ \|M\|_2 : M \text{ γνήσια άνω τριγωνικός}, \exists U, \tilde{\Lambda} : U^* A U = \tilde{\Lambda} + M \right\}$$

Γενικότερα,

$$\Delta_\nu(A) = \inf\left\{ \|M\| : M \text{ γνήσια άνω τριγωνικός}, \exists U, \tilde{\Lambda} : U^* A U = \tilde{\Lambda} + M \right\}.$$

Όταν ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε $\mu_3(A) = 0$ και $\tilde{\mu}_3(A) = 0$. Ακόμα είδαμε την Ανισότητα 3.2.1, $\mu_3 \le \left(\frac{n^3 - n}{12} \right)^{\frac{1}{4}} \mu_2$, δηλαδή το φράγμα χωρίς ιδιοτιμές.

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες αυτές για να μελετήσουμε την απομάκρυνση από την κανονικότητα.

4.1 Δυνάμεις Πινάκων

Ξεκινώντας το κεφάλαιο αυτό, θα δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.1 (Δύναμη Πινάκα) Ονομάζουμε δύναμη πίνακα ένα πίνακα της μορφής A^r.

Για έναν κανονικό πίνακα A ισχύει $\|A^r\|_2 = \lambda_A^r$, (4.1) και λ_A η φασματική ακτίνα.

Για τη νόρμα του μεγίστου άθροισμα γραμμών, έχουμε

$$\left\|A^r\right\|_\infty \le \mathrm{K}_\infty\left(S\right)\left(\lambda_A+\varepsilon\right)^r,\ r=1,2,\ldots, \tag{4.2}$$

όπου η συνάρτηση $\mathrm{K}_\infty\left(S\right)$ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $\varepsilon>0$ και έστω J η Jordan κανονική μορφή του πίνακα $2\varepsilon^{-1}A$, εάν $2\varepsilon^{-1}A=SJS^{-1}$, τότε $K_\infty\left(S\right)=\left\|S\right\|_\infty\left\|S^{-1}\right\|_\infty$, όπου $\mathrm{K}_\infty\left(S\right)$ ο δείκτης κατάστασης του S ως προς τη $\|\ \|_\infty$.

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω* $m=\Delta_2\left(A\right)$ *και αν* $\lambda_\mathrm{A}>0$, *τότε*

$$\left\|A^r\right\|_2 \le \lambda_A^r+\binom{r}{1}\lambda_A^{r-1}m+\cdots+\binom{r}{n-1}\lambda_A^{r-n+1}m^{n-1}. \tag{4.3}$$

Αν τώρα $\lambda_A=0$, *τότε*

$$\begin{cases}\left\|A^r\right\|_2 \le m^r, & r=0,1,\ldots,n-1\\ \left\|A^r\right\|_2 = m^r, & r\ge n\end{cases}. \tag{4.4}$$

Απόδειξη
Έστω $A=UTU^*$, με U ορθομοναδιαίος πίνακας και $T=D+M$ τριγωνική μορφή του Schur, δηλαδή θα έχουμε,

$$A^r=U\left(D+M\right)^r U^*.$$

Αφού οι πίνακες D και M, δεν αντιμετατίθενται γενικά, ο πίνακας $\left(D+M\right)^r$ δεν μπορεί να επεκταθεί σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα του Newton. Όμως, αφού ο D είναι διαγώνιος, αν τον επεκτείνουμε χωρίς αντιμετάθεση, κάθε στοιχείο του που περιέχει περισσότερα από n – 1 πίνακες M είναι μηδέν. Υπάρχουν ακριβώς $\binom{r}{q}$ όροι που αναμιγνύουν qM και r – qD, για $q=0,1,2,\ldots,n-1$.
Αν τώρα πάρουμε την ευκλείδεια νόρμα και αφού $\left\|D\right\|_2=\lambda_\mathrm{A}$, $\left\|M\right\|_2=m$, προκύπτουν οι σχέσεις (4.3) και (4.4). Αν ισχύουν οι σχέσεις αυτές για κάθε πίνακα M, και αν τα δεξιά μέρη των σχέσεων αυτών εξαρτώνται συνεχώς από το m, το συμπέρασμα του θεωρήματος προκύπτει άμεσα. □

Παρατήρηση 4.1.1 Το δεξί μέρος της (4.3) μπορεί να υπολογιστεί περισσότερο, και για μεγάλο r είναι ασυμπτωτικά ίση με $\dfrac{\lambda_\mathrm{A}^{r-n+1}\left(mr\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}$, δηλαδή $\left\|A^r\right\|_2 \le \dfrac{\lambda_\mathrm{A}^{r-n+1}\left(mr\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}$.

4.2 Προσεγγιστικές Λύσεις Γραμμικών Συστημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε νόρμες της μορφής $\left\| diag\left(\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}\right)\right\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$. Στη διεθνή ορολογία οι νόρμες είναι γνωστές ως *axis–oriented*. Εμείς, προς χάριν ευκολίας, θα αναφερόμαστε σε αυτές ως προσανατολισμένες κατά άξονα νόρμες.

Ορισμός 4.2.1 Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας, b ένα διάνυσμα και $\tilde{x}$ μία λύση του συστήματος $Ax = b$. Ορίζουμε το *υπόλοιπο* του $\tilde{x}$ ως $r = A\tilde{x} - b$ και αν $\|\bullet\|$ είναι μία διανυσματική νόρμα, το *σφάλμα* $\tilde{x} - A^{-1}b = A^{-1}r$ του $\tilde{x}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\left\|\tilde{x} - A^{-1}b\right\| = \left\|A^{-1}r\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|r\|, \tag{4.5}$$

Ορισμός 4.2.2 Αν $\tilde{X}$ είναι ο αντίστροφος του A και $\|\bullet\|$ οποιαδήποτε νόρμα πινάκων, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα σύνορο για τη $\left\|\tilde{X} - A^{-1}\right\|$ σε επίπεδο νορμών, του πίνακα υπολοίπου $R = A\tilde{X} - I$ ως εξής:

$$\left\|\tilde{X} - A^{-1}\right\| = \left\|A^{-1}R\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|R\|. \tag{4.6}$$

Οι σχέσεις (4.5) και (4.6) χρειάζεται να υπολογίσουμε το σύνορο $\left\|A^{-1}\right\|$. Το σύνορο αυτό υπολογίζεται εύκολα, εάν υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με ένα άνω τριγωνικό πίνακα της μορφής $A = SDS^{-1}$.

Αν υποθέσουμε ότι η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι προσανατολισμένη κατά άξονα , θα έχουμε $A^{-1} = SD^{-1}S^{-1}$, και άρα

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \mathrm{K}_\nu\left(S\right)\lambda_{A^{-1}}, \tag{4.7}$$

όπου

$$\mathrm{K}_\nu\left(S\right) = \|S\|\left\|S^{-1}\right\|. \tag{4.8}$$

Αν ο A είναι κανονικός τότε θα έχουμε ότι $\left\|A^{-1}\right\| \le \lambda_{A^{-1}}$ και αφού πάντα ισχύει ότι $\left\|A^{-1}\right\| \ge \lambda_{A^{-1}}$, έχουμε

$$\left\|A^{-1}\right\| = \lambda_{A^{-1}}. \tag{4.9}$$

Έστω τώρα μία πραγματική μεταβλητή $x \ge 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f\left(x\right) = x + x^2 + \cdots + x^n. \tag{4.10}$$

Παρατηρούμε ότι η f και η $x^{-1}f$ είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις, και για $x>0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-1}f(x)=1. \tag{4.11}$$

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω A αντιστρέψιμος και μη κανονικός πίνακας. Αν* $x=\lambda_{A^{-1}}\Delta_2(A)$, *τότε*

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 \le \frac{f(x)}{x}\lambda_{A^{-1}} = \frac{f(x)}{\Delta_2(A)}. \tag{4.12}$$

Απόδειξη
Έστω $A=U(D+M)U^*$, η γνωστή τριγωνική μορφή του Schur. Τότε για U ορθομοναδιαίο πίνακα, έχουμε

$$A^{-1}=U(D+M)^{-1}U^* = U\left(I+D^{-1}M\right)^{-1}D^{-1}U^*.$$

Όμως,

$$\left(I+D^{-1}M\right)^{-1} = I-D^{-1}M+\ldots+(-1)^{n-1}\left(D^{-1}M\right)^{n-1}, \text{ και αφού } \|D\|_2=\lambda_{A^{-1}},$$

παίρνοντας νόρμες θα έχουμε,

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 \le \|U\|_2 \left\|\left(I+D^{-1}M\right)^{-1}\right\|_2 \left\|D^{-1}\right\|_2 \left\|U^*\right\|_2 \le \frac{f(x)}{x}\lambda_{A^{-1}} = \frac{f(x)}{\Delta_2(A)}. \ \square$$

Παρατήρηση 4.2.1 Για σταθερό $\lambda_{A^{-1}}$, αφού το $\Delta_2(A)\to 0$, τότε το σύνορο (4.12) προσεγγίζει τη σχέση (4.9) $\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\|=\lambda_{A^{-1}}$, από τη σχέση (4.11). □

4.3 Φασματική Μεταβολή – Μεταβολή Ιδιοτιμών.

Ξεκινώντας θα ορίσουμε τα ακόλουθα:

Ορισμός 4.3.1 Έστω $A=(\alpha_{ij})$, με ιδιοτιμές λ_i, και $B=(b_{ij})$, με ιδιοτιμές μ_i και $i=1,2,\ldots,n$. Ονομάζουμε *φασματική μεταβολή* του B σε σχέση με τον A, την ποσότητα:

$$s=s_A(B)=\max_{1\le i\le n}\left\{\min_{1\le i\le n}\left|\mu_i-\lambda_j\right|\right\}. \tag{4.13}$$

Η φασματική μεταβολή δεν είναι ‘1 – 1’, και γενικά $s_A(B)\ne s_B(A)$

Ορισμός 4.3.2 Έστω $A=\left(\alpha_{ij}\right)$, με ιδιοτιμές λ_i, και $B=\left(b_{ij}\right)$, με ιδιοτιμές μ_i και $i=1,2,\ldots,n$. Ονομάζουμε *μεταβολή ιδιοτιμών* του B σε σχέση με τον A, την ποσότητα:

$$\upsilon=\upsilon\left(A,B\right)=\min_{p}\left\{\max_{1\le i\le n}\left|\lambda_i-\mu_{p(i)}\right|\right\} \tag{4.14}$$

όπου το ελάχιστο επιλέγεται σε σχέση με όλες τις μεταθέσεις του p, για $i=1,2,\ldots,n$. Για κάθε πίνακες A, B ισχύουν οι σχέσεις:

$$\upsilon\left(A,B\right)=\upsilon\left(B,A\right) \tag{4.15}$$

και

$$s_{\mathrm{A}}\left(B\right)\le\upsilon\left(A,B\right). \tag{4.16}$$

Πρόταση 4.3.1 *Έστω οι πίνακες* $\mathrm{A}=\left(\alpha_{ij}\right)$, $\mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)$, *με* $\mathrm{M}=\max_{1\le i,j\le n}\left(\left|\alpha_{ij}\right|,\left|b_{ij}\right|\right)$ *και* $\left\|\mathrm{A}\right\|_p=\sum_{i,j}\left|\alpha_{ij}\right|$, *τότε θα έχουμε τα ακόλουθα φράγματα για τη*

$$\textit{Φασματική μεταβολή:}\quad s_{\mathrm{A}}\left(B\right)\le\left(n+2\right)M\left[\frac{\left\|A-B\right\|_p}{M}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.16}$$

και τη

$$\textit{Μεταβολή Ιδιοτιμών :}\quad \upsilon\left(A,B\right)\le 2n\left(n+2\right)M\left[\frac{\left\|A-B\right\|_p}{M}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.17}$$

Απόδειξη.
Η απόδειξη παραλείπεται γιατί είναι έξω από τους σκοπούς της εργασίας αυτής. □

Αν ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα D, ώστε

$$A=SDS^{-1}$$

και αν $\left\|\bullet\right\|$ είναι μία προσανατολισμένη νόρμα κατά άξονα, τότε θα έχουμε

$$s_A\left(B\right)\le\mathrm{K}_\nu\left(S\right)\left\|A-B\right\|. \tag{4.18}$$

Αν τώρα ο A είναι κανονικός, τότε η παραπάνω σχέση θα γίνει

$$s_A\left(B\right)\le\left\|A-B\right\|. \tag{4.19}$$

Ακόμα αν στη σχέση (4.19) θέσουμε τη Frobenious νόρμα $\|\bullet\|_F$, και οι πίνακες *A*, *B* είναι κανονικοί, θα ισχύει το σύνορο για τη μεταβολή ιδιοτιμών (Hoffmann – Wielandt)

$$\upsilon(A,B) \le \|A-B\|_F . \tag{4.20}$$

Παρατήρηση 4.3.1 Για τυχαίο διαγωνοποιήσιμο πίνακα *A*, το αποτέλεσμα (4.18) δεν μπορεί να δώσει σαφή εκτίμηση για τον δείκτη κατάστασης $\mathrm{K}_\nu(S)$.

Θεωρούμαι τώρα την πραγματική μεταβλητή $y \ge 0$ και τη συνάρτηση $g = g(y)$, σαν μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$g + g^2 + \cdots + g^n = y .$$

Η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f που ορίσαμε στην Παράγραφο 4.2.

Για τη συνάρτηση g έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $$\lim_{y\to 0^+} y^{-1} g(y) = 1 . \tag{4.21}$$

(ii) $$n^{-1} y \le g(y) \le y ,\ 0 \le y \le n . \tag{4.22}$$

(iii) $$g(n) = 1 . \tag{4.23}$$

(iv) $$\left(n^{-1} y\right)^{\frac{1}{n}} \le g(y) \le y^{\frac{1}{n}} ,\ y \ge n . \tag{4.24}$$

(v) $$\lim_{y\to\infty} y^{-\frac{1}{n}} g(y) = 1 . \tag{4.25}$$

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω A ένας μη κανονικός πίνακας, και έστω* $B - A \ne 0$. *Αν* $\|\bullet\|$ *είναι οποιαδήποτε νορμα, μεγαλύτερη της ευκλείδεια νόρμα* $\|\bullet\|_2$, *και αν*

$$y = \frac{\Delta_\nu(A)}{\|B-A\|} .$$

Τότε,

$$s_{\mathrm{A}}(B) \le \frac{y}{g(y)} \|B-A\| = \frac{\Delta_\nu(A)}{g(y)} . \tag{4.26}$$

Απόδειξη

Έστω ο πίνακας $A = UTU^*$, όπου $T = D + M$ η τριγωνική μορφή Schur.
Θέτουμε $E = B - A$, $UBU^* = B_1$, $UEU^* = F$, και έχουμε

$$B_1 = D + M + F .$$

Έστω μ μία ιδιοτιμή του B (η του B_1) πού όμως δεν είναι ιδιοτιμή του A. Τότε ο πίνακας $D+M+\mu I$ είναι αντιστρέψιμος, και έχουμε

$$0=\det\left(B_1-\mu I\right)=\det\left(D+M-\mu I+F\right)$$

$$=\det\left(D+M-\mu I\right)\det\left[I+\left(D+M-\mu I\right)^{-1}F\right].$$

Αφού $\det\left(D+M-\mu I\right)\neq 0$, ισχύει

$$\det\left[I+\left(D+M-\mu I\right)^{-1}F\right]=0$$

και προκύπτει ότι -1 είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $\left(D+M-\mu I\right)^{-1}F$.

Αλλά $\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}F\right\|_2\geq|\lambda|=1$, και $\|F\|_2=\|E\|_2$,
οπότε έχουμε,

$$\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}\right\|_2\|E\|_2\geq\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}F\right\|_2\geq 1$$

$$\Rightarrow\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}\right\|_2\geq\frac{1}{\|E\|_2}. \tag{4.27}$$

Τώρα θα εκτιμήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}\right\|_2$. Αφού ο πίνακας $D-\mu I$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε ότι

$$\left(D+M-\mu I\right)^{-1}=\left[I-\left(D-\mu I\right)^{-1}M\right]^{-1}\left(D-\mu I\right)^{-1}. \tag{4.28}$$

Όμως αφού $\left(D-\mu I\right)^{-1}$ είναι διαγώνιος, ο πίνακας $\left(D-\mu I\right)^{-1}M$ έχει την ιδιότητα ότι τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο να είναι 0. Άρα ισχύει

$$\left[\left(D-\mu\mathrm{I}\right)^{-1}\mathrm{M}\right]^{r}=0,\ \text{για}\ r\geq n.$$

Οπότε,

$$\left[I-\left(D-\mu I\right)^{-1}M\right]^{-1}=I-\left(D-\mu I\right)^{-1}M+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\left[\left(D-\mu I\right)^{-1}M\right]^{n-1}. \tag{4.29}$$

Για λόγους συντομίας θέτουμε $\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}\right\|_2=p$, $\|M\|_2=m$, $\|E\|_2=e$, και από τις σχέσεις (4.28) και (4.29) προκύπτει

$$\left\|\left(D+M-\mu I\right)^{-1}\right\|_2 \le p+p^2m+\ldots+p^nm^{n-1}=m^{-1}f\left(mp\right)$$

Όπου η f ορίζεται όπως στη σχέση (4.10). Από την τελευταία σχέση, από τη (4.27) και από τον ορισμό της συνάρτησης g έχουμε

$$f\left(mp\right)\ge me^{-1}\Rightarrow mp\ge g\left(me^{-1}\right)\Rightarrow \frac{1}{p}\le\frac{m}{g\left(me^{-1}\right)}. \tag{4.30}$$

Αφού η Ευκλείδεια νόρμα $\|\bullet\|_2$ είναι προσανατολισμένη κατά άξονα, θα έχουμε

$$\left\|\left(D-\mu I\right)^{-1}\right\|_2=\max_{1\le j\le n}\left|\lambda_j-\mu\right|^{-1}\overset{(4.30)}{\Rightarrow}\max_{1\le j\le n}\left|\lambda_j-\mu\right|\le\frac{m}{g\left(me^{-1}\right)}.$$

Η σχέση αυτή αποδείχτηκε για οποιασδήποτε ιδιοτιμής $\mu=\mu_i$ του B, που δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A. Επίσης ισχύει τετριμμένα για κάθε ιδιοτιμή μ_i του πίνακα A. Άρα θα έχουμε ότι,

$$s_{\mathrm{A}}\left(B\right)=\max_{1\le i\le n}\left\{\min_{1\le i\le n}\left|\lambda_j-\mu_i\right|\right\}\le\frac{m}{g\left(me^{-1}\right)}=\frac{y_0}{g\left(y_0\right)}\|B-A\|_2,\ \text{όπου}\ y_0=\frac{\|M\|_2}{\|B-A\|_2}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε επιλογή τριγωνικής μορφής του Schur $D+M$. Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής, η σχέση (4.26) ισχύει για την Ευκλείδεια νόρμα $\|\bullet\|_2$.

Έστω τώρα $\|\bullet\|$ μία νόρμα μεγαλύτερη της Ευκλείδειας νόρμας $\|\bullet\|_2$. Αφού η συνάρτηση g είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα, ακόμα έχουμε,

$$s_{\mathrm{A}}\left(B\right)\le\frac{\|M\|_2}{g\left(\dfrac{\|M\|_2}{\|B-A\|}\right)}=\|B-A\|\frac{y_1}{g\left(y_1\right)},\ \text{όπου}\ y_1=\frac{\|M\|_2}{\|B-A\|}. \tag{4.32}$$

Έστω $0<y_1<y_2$, και ορίζουμε $x_i=g\left(y_i\right)$, $i=1,2$. Από τη μονοτονία της $x^{-1}f\left(x\right)$ προκύπτει ότι

$$\frac{y_1}{g\left(y_1\right)}=\frac{f\left(x_1\right)}{x_1}<\frac{f\left(x_2\right)}{x_2}=\frac{y_2}{g\left(y_2\right)}.$$

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $y\left[g\left(y\right)\right]^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα, και από τη σχέση (4.32), αντικαθιστώντας $\|M\|_2$ με $\|M\|$, έχουμε

$$s_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{B}\right)\le\frac{y_2}{g\left(y_2\right)}\|\mathrm{B}-\mathrm{A}\|,\ \text{με}\ y_1=\frac{\|M\|}{\|B-A\|}.$$

Από τη συνέχεια της g ισχύει το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 4.3.2 Οι σχέσεις (4.10), (4.23), (4.24) μπορεί να δώσουν το σύνορο (4.26) ποιο άμεσα. Η σχέση (4.21) δείχνει, για $\Delta_\nu(A) \to 0$ και το όριο του $\|B - A\|$ να απομακρύνεται από το 0, ότι η εκτίμηση της (4.26) προσεγγίζει τη (4.19). Με αυτό τον τρόπο δεν μπορούμε να λάβουμε τη σχέση (4.20). Η σχέση (4.25) δείχνει ότι για σταθερό μη κανονικό πίνακα A και για $B \to A$ το όριο της σχέσης (4.26) είναι στην ίδια σειρά με τη (4.16). Ο αριθμητικός συντελεστής μπορεί να είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον συντελεστή στη σχέση (4.16) και αυτό εξαρτάται από την απομάκρυνση από την κανονικότητα του πίνακα A.

Παράδειγμα 4.3.1

Έστω οι πίνακες $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-10^{-4} \end{pmatrix}$, με ην εξής ιδιότητα

$$\|B_i - A_i\|_F \le 10^{-2},\ i = 1,2. \tag{4.33}$$

Θέτουμε $s_i = \sup s_{\mathrm{A}_i}(B_i)$, με $i = 1,2$, όπου το supremum κάθε πίνακα B_i ικανοποιεί τη σχέση (4.33), και έστω οι διαφορές

$$B_1 - A_1 = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{1}{2}}10^{-2} & 0 \\ 0 & -2^{-\frac{1}{2}}10^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B_2 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $s_1 \ge 0.00707$ και $s_2 \ge 0.10000$. Χρησιμοποιώντας $m = 1.02$, $p_{\alpha\varepsilon} = 2$ το φράγμα (4.16) γίνεται και στις δύο περιπτώσεις $s_i \le 0.57132$, $i = 1,2$. Το φράγμα (4.18) δεν είναι εφαρμόσιμο για τον A_1, αφού ο πίνακας έχει ένα μη γραμμικό στοιχειώδες διαιρέτη. Η σχέση $A_2 = SDS^{-1}$ ικανοποιείται για τον πίνακα

$$S = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ 0 & -10^{-4}\eta \end{pmatrix},$$

όπου ξ και η τυχαίες μη μηδενικές σταθερές. Επιλέγουμε ξ και η τέτοια ώστε ο δείκτης κατάστασης $\mathrm{K}_\nu(S)$ ελαχιστοποιείται και η σχέση (4.18) δίνει $s_2 \le 20.00001$.

Για τη σχέση (4.28) βρίσκουμε ότι $\Delta_F(A_1) = 10^{-4}$, $y = 10^{-2}$, $g(y) = 0.009902$, και από αυτά προκύπτει ότι $s_1 \le 0.10099$. Για τον διαγωνοποιήσιμο πίνακα A_2, έχουμε $\Delta_F(A_2) = 1$, $y = 10^2$, $g(y) = 9.5125$, και από αυτά προκύπτει ότι $s_2 \le 0.105125$.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα το φράγμα που δίνεται από τη σχέση (4.26) συγκρίνεται ικανοποιητικά με τα άλλα φράγματα. Όμως φαίνεται ακόμα ότι αν ο πίνακας έχει ένα μη γραμμικό στοιχειώδες διαιρέτη, δεν σημαίνει πως θα έχει μεγάλη φασματική μεταβολή. □

Γεωμετρική Ερμηνεία Θεωρήματος 4.3.1 Θεωρούμε τους πίνακες *A*, *B* που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος 4.3.1 και έστω το δεύτερο μέρος της ανίσωσης (4.26)

$$\frac{y}{g(y)}\|B-A\| = \frac{\Delta_\nu(A)}{g(y)} = \delta .$$

Τότε το φάσμα του πίνακα *B* περιέχεται στην ένωση όλων των δίσκων $D_i = \{\lambda : |\lambda - \lambda_i| \le \delta\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, L_δ, όπου $L_\delta = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Αφού $\delta \to 0$ μονότονα, τότε $A \to B$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε συστατικό του L_δ περιέχει τόσες ιδιοτιμές του *B* όσες και του *A*. Από τη διαπίστωση αυτή και από το επιχείρημα συνοχής έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω A, B και* $\|\bullet\|$ *ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.3.1, και έστω ότι το y ορίζεται όπως πριν, δηλαδή* $y = \frac{\Delta_\nu(A)}{\|B-A\|}$. *Τότε ισχύει,*

$$\upsilon(A,B) \le (2n-1)\frac{y}{g(y)}\|B-A\|. \tag{4.34}$$

Παρατήρηση 4.3.3 Έστω τώρα μία διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$, *x* ένα διάνυσμα ώστε $\|x\| = 1$ και *λ* ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\|Ax - \lambda x\|$ να είναι μικρό. Το ερώτημα που δημιουργείται είναι το *λ* πόσο κοντά είναι σε μία ιδιοτιμή του πίνακα *A* μπορεί να βρίσκεται. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δόθηκε από τους Householder–Bauer ως εξής:

Έστω *A* είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα *D*, τέτοιο ώστε $A = SDS^{-1}$, και αν $\|\bullet\|$ είναι νόρμα πινάκων επαγόμενη από αυτήν που μόλις αναφέραμε, τότε ισχύει

$$|\lambda_i - \lambda| \le \mathrm{K}_\nu(A)\|Ax - \lambda x\|, \tag{4.35}$$

για μία τουλάχιστον ιδιοτιμή λ_i, όπου $\mathrm{K}_\nu(\bullet)$ είναι ο δείκτης κατάστασης της $\|\bullet\|$. Η παραπάνω σχέση έχει το μειονέκτημα ότι ισχύει μόνο για διαγωνοποιήσιμους πίνακες και δεν μπορεί να δώσει κάποια ξεκάθαρη εκτίμηση αν δεν δίνεται ο δείκτης κατάστασης K_ν.

Θεώρημα 4.3.3 (D. D. Morrisson) *Έστω A ένας μη κανονικός πίνακας,* $\|\bullet\|$ *μία διανυσματική νόρμα, και η επαγόμενη νόρμα πινάκων από τη* $\|\bullet\|$. *Αν x ένα διάνυσμα και λ ένα μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε* $\|x\| = 1$, $\|Ax - \lambda x\| \ne 0$, *και αν*

$$y = \frac{\Delta_\nu A}{\|Ax - \lambda x\|},$$

τότε υπάρχει μία ιδιοτιμή λ_i *του A έτσι ώστε*

$$|\lambda_i - \lambda| \le \frac{y}{g(y)} \|\mathrm{A}x - \lambda x\|. \tag{4.36}$$

4.4 Αριθμητικό Πεδίο F(*A*).

Το αριθμητικό πεδίο, όπως είδη γνωρίζουμε από την Πρόταση 1.6.7, για τους κανονικούς πίνακες ταυτίζεται με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών, δηλαδή $\mathrm{F}(A) = C_0(\delta(A))$. Αν ο πίνακας δεν είναι κανονικός τότε το αριθμητικό πεδίο περιέχεται στην κυρτή θήκη, δηλαδή $\mathrm{F}(A) \subseteq Co(\delta(A))$, που αποτελεί ένα φράγμα για το αριθμητικό πεδίο. Οι προτάσεις που θα αποδειχτούν στη συνέχεια για τις συγκεκριμένες νόρμες, θα μας δείξουν την απόσταση του αριθμητικού πεδίου από την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών και την απομάκρυνση από την κανονικότητα.

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω ξ ένα σημείο του αριθμητικού πεδίου ενός πίνακα A, τότε υπάρχει ένα σημείο η της κυρτής θήκης των ιδιοτιμών του A,* $Co(\delta(A))$ *έτσι ώστε να ισχύει*

$$|\xi - \eta| \le \sqrt{\frac{1 - n^{-1}}{2}} \Delta_F(A). \tag{4.37}$$

Η σταθερά $\left[\frac{(1 - n^{-1})}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ *δεν μπορεί να βελτιωθεί περεταίρω.*

Απόδειξη

Έστω $A = UTU^*$, με U ορθομαναδιαίο πίνακα και $T = D + M$ την τριγωνική μορφή Schur του A. Έστω $\xi = x^* Ax$, μ $x^* x = 1$. Θέτουμε $U^* x = y$ και έχουμε ότι $y^* y = 1$ και $\xi = y^* Dy + y^* My$, και έχουμε

$$\xi = \eta + y^* My, \tag{4.38}$$

όπου $\eta = y^* Dy$ σημείο του $Co(\delta(A))$. Άρα ισχύει

$$|\xi - \eta| = |y^* My|.$$

Θέτουμε $M = (m_{ij})$ και $y = (y_i)$, και έχουμε

$$\left|y^{*}My\right|^{2}=\left|\sum_{i<j}m_{ij}\overline{y}_{i}y_{j}\right|^{2}\overset{Cauchy}{\leq}\left[\Delta_{F}\left(A\right)\right]^{2}\sum_{i<j}\left|\overline{y}_{i}y_{j}\right|^{2}.$$

Όμως,

$$\sum_{i<j}\left|\overline{y}_{i}y_{j}\right|^{2}\overset{Cauchy}{\leq}\sum_{i<j}\left|y_{i}\right|^{2}\left|y_{j}\right|^{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{2}\right)^{2}-\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{4}\right\}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{2}\right)^{2}-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{2}\right)^{2}\right\}\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Άρα, θα έχουμε $\left|y^{*}My\right|=\sqrt{\frac{1-n^{-1}}{2}}\Delta_{F}\left(A\right)$.

Για να δείξουμε τώρα ότι η ανίσωση ισχύει για κάθε πίνακα A, θεωρούμε τον πίνακα $A=\lambda I+M$, όπου $\lambda\in\mathbb{C}^{n}$ και $m_{ij}=c$, με $i<j$ και $c>0$. Άρα,

$$\Delta_{F}\left(A\right)=\left\|M\right\|_{F}=\left[\frac{1}{2}n\left(n-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}c.$$

Η κυρτή θήκη $Co\left(\delta\left(A\right)\right)$ τώρα μειώνεται στο σημείο λ. Επιλέγοντας $y_{i}=n^{-1}$, με $i=1,2,\ldots,n$, βρίσκουμε ότι το σημείο $y^{*}Ay$ του $\mathrm{F}\left(A\right)$ απέχει από το $Co\left(\delta\left(A\right)\right)$ την εξής απόσταση

$$y^{*}\mathrm{M}y=\sum_{i<j}\frac{c}{n}=\frac{c}{2}\left(n-1\right)=\sqrt{\frac{1-n^{-1}}{2}}\Delta_{F}\left(\mathrm{A}\right).\ \square$$

Θεώρημα 4.4.2 *Έστω ξ ένα σημείο του αριθμητικού πεδίου ενός πίνακα A, τότε υπάρχει ένα σημείο η της κυρτής θήκης των ιδιοτιμών του A,* $Co\left(\delta\left(\mathrm{A}\right)\right)$*, έτσι ώστε να ισχύει*

$$\left|\xi-\eta\right|\leq\frac{1}{2}\Delta_{p}\left(A\right). \tag{4.39}$$

Η σταθερά $\frac{1}{2}$ *είναι η βέλτιστη δυνατή, δηλαδή δεν μπορεί να αντικατασταθεί από κανένα άλλο παράγοντα.*

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα ξ όπως στο Θεώρημα 4.4.1, και υπολογίζουμε το $y^{*}My$,

$$\left|y^{*}My\right|=\left|\sum_{i<j}m_{ij}\overline{y}_{i}y_{j}\right|\leq\left\|M\right\|_{p}\max_{i<j}\left|\overline{y}_{i}y_{j}\right|.$$

Αφού $\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=1$, το $\max_{i<j}|\overline{y}_i y_j|$ μεγαλώνει, εάν το διάνυσμα y έχει ακριβώς δύο μη μηδενικά στοιχεία. Από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου έχουμε ,

$$\sqrt{\|\overline{y}_i y_j\|}\le\frac{|\overline{y}_i|+|y_j|}{2}\Rightarrow\max_{i<j}|\overline{y}_i y_j|\le\frac{1}{2}.$$

Άρα θα έχουμε

$$|y^*My|\le\frac{1}{2}\|M\|_p. \tag{4.40}$$

Για να δείξουμε τώρα ότι η ανίσωση ισχύει για κάθε πίνακα *A*, θεωρούμε τον πίνακα $A=\lambda I+M$, όπου $\lambda\in\mathbb{C}^n$ και $m_{12}=m>0$, και $m_{ij}=0$ για κάθε άλλη περίπτωση. Όπως και προηγουμένως, η κυρτή θήκη $Co(\sigma(A))$ μειώνεται στο σημείο λ. Επιλέγοντας τώρα το διάνυσμα y έτσι ώστε $y_1=y_2=2^{-\frac{1}{2}}$ και $y_i=0$ για $i=3,\ldots,n$, παράγεται ένα σημείο του y^*Ay, του $\mathrm{F}(A)$ που η απόσταση του από την κυρτή των ιδιοτιμών $Co(\delta(A))$ είναι,

$$y^*My=\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\|M\|_p. \tag{4.41}$$

Έστω τώρα $M'=(m'_{ij})$ τα εκτός διαγωνίου στοιχεία οποιουδήποτε άλλης τριγωνικής μορφής Schur του *A*. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\|M'\|_p\ge\|M'\|_F=\|M\|_F=m$, θα έχουμε $\Delta_p(A)=m$. Αντικαθιστώντας στη (4.41) θα έχουμε ότι $y^*My=\frac{1}{2}\Delta_p(A)$. □

Γνωρίζουμε ότι για πίνακες 2×2 με την τριγωνική μορφή του Shcur

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & m_{12}\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

το αριθμητικό πεδίο είναι έλλειψη με εστίες λ_1, λ_2 και μικρό (δευτερεύων) ημιαξόνα $\frac{1}{2}m_{12}$. Όμως μόνο δύο σημεία του αριθμητικού πεδίου επιτυγχάνουν τη μέγιστη απόσταση $\frac{1}{2}m_{12}$ από την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών $Co(\sigma(A))$, όπως δείξαμε και στα Θεωρήματα 4.4.1 και 4.4.2. Όλα τα υπόλοιπα έχουν μικρότερη απόσταση. Τα στοιχεία αυτά θα γενικευτούν από το παρακάτω θεώρημα. Θα δείξουμε ότι για $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ και $c\in\mathbb{R}$, $c\ge0$, με $\mathrm{E}(\lambda,\mu;c)$ συμπαγές σύνολο σημείων στο μιγαδικό επίπεδο είναι έλλειψη με εστίες λ, μ και μικρό ημιάξονα c.

Θεώρημα 4.4.3 Έστω λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί, και έστω $\alpha \geq 0$. Τότε το αριθμητικό πεδίο οποιουδήποτε πίνακα A με ιδιοτιμές λ_i και $\Delta_p(A)=\alpha$, περιέχεται στην κυρτή θήκη, $Co(\delta(A))$ των $\frac{n(n-1)}{2}$ στοιχείων

$$\mathrm{E}\left(\lambda_i, \lambda_j, \frac{1}{2}\alpha\right),\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Απόδειξη

Έστω ο πίνακας A που ικανοποιεί την υπόθεση, και έστω ξ, y_i, D και $M=(m_{ij})$ ορίζεται όπως ορίζεται στο Θεώρημα 4.4.1, και θέτουμε $m=\|M\|_p=\sum_{i<j} m_{ij}$.

Αν $m=0$, τότε έχουμε το Θεώρημα 1.6.10 του Toplitz για την κανονικότητα.

Έστω $m>0$. Θέτουμε $\vartheta_{ij}=\begin{cases} \frac{m_{ij}}{|m_{ij}|}, & m_{ij} \neq 0 \\ 0, & m_{ij}=0 \end{cases}$ και έχουμε

$$\xi=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k |y_k|^2+\sum_{i<j} m_{ij}\overline{y}_i y_j=\sum_{i<j}|m_{ij}|\left\{\vartheta_{ij}\overline{y}_i y_j+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k |y_k|^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i<j}|m_{ij}|\left\{m\vartheta_{ij}\overline{y}_i y_j+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k |y_k|^2\right\}.$$

Αυτό μας δείχνει ότι το ξ ανήκει στην κυρτή θήκη των σημείων

$$\eta_{ij}=m\vartheta_{ij}\overline{y}_i y_j+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k |y_k|^2,\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι τα σημεία η_{ij} ανήκουν στο $Co(\delta_{kl}(A))$, δηλαδή στην κυρτή θήκη των σημείων $\mathrm{E}\left(\lambda_k, \lambda_l, \frac{1}{2}m\right)$, $1 \leq k < l = n$.

Αν $|y_i|^2+|y_j|^2=0$, τότε είναι προφανές.

Αν $|y_i|^2+|y_j|^2=1$ τότε $y_k=0$ για $k \neq i, j$ και το η_{ij} ανήκει στην $\mathrm{E}\left(\lambda_k, \lambda_l, \frac{1}{2}m\right)$ και κατά συνέπεια στο $Co(\delta_{kl}(A))$.

Αν $0<|y_i|^2+|y_j|^2<1$, τότε ορίζουμε τις μεταβλητές

$$z_k = \begin{cases} \dfrac{y_k}{\sqrt{|y_i|^2 + |y_j|^2}}, & k = i, j \\ \dfrac{y_k}{\sqrt{1 - |y_i|^2 - |y_j|^2}} & k \neq i, j \end{cases},$$

Άρα έχουμε,

$$\eta_{ij} = \left(|y_i|^2 + |y_j|^2\right)\left(\lambda_i |z_i|^2 + \lambda_j |z_j|^2 + \vartheta_{ij} \bar{z}_i z_j\right) + \left(1 - |y_i|^2 - |y_j|^2\right) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} \lambda_k |z_k|^2 .$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το η_{ij} ανήκει στην κυρτή θήκη του συνόλου $\mathrm{E}\left(\lambda_i, \lambda_j, \frac{1}{2}m\right)$, και τα σημεία λ_k, $k \neq i, j$ ανήκουν όλα στο $Co\left(\delta_{kl}(A)\right)$. Άρα η_{ij} ανήκει στο $Co\left(\delta_{kl}(A)\right)$. Και τελικά το ξ ανήκει στο $Co\left(\delta_{kl}(A)\right)$.

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε πίνακα *M* που μπορεί να έχει την τριγωνική μορφή Shour του *A*. Κατά συνέπεια το ξ βρίσκεται στο εσωτερικό όλων των πιθανών συνόλων $Co\left(\delta_{kl}(A)\right)$. Αφού όλα τα $Co\left(\delta_{kl}(A)\right)$ είναι κλειστά και αφού είναι συνεχώς εξαρτώμενα από το m, άρα $\xi \in imf\left\{Co\left(\delta_{kl}(A)\right)\right\} = Co\left(\delta(A)\right)$. □

Παρατήρηση 4.4.1 Η ένωση των αριθμητικών πεδίων όλων των πινάκων *A* με ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, και δοθέν $\Delta_p(A) = m$, δεν συμπληρώνει το σύνολο $Co\left(\delta_{kl}(A)\right)$.

Βιβλιογραφία

1. Aupetit B. and Zemanek J., A Characterization of Normal Matrices by Their Exponentials, *Linear Algebra and its Applications*, **132** (1990) 119–121.

2. Batterson S., Convergence of the Shifted QR Algorithm of 3×3 Normal Matrices, *Numerische Mathematik*, **58** (1990) 341–352.

3. Bouer F.L., Fike C.T., Norms and Exclusion Theorems, *Numerische Mathematik*, **2** (1960) 137–141.

4. Cohen J, Friedland Sh., Kato T. and Kelly P., Eigenvalue Inequalities for Products of Matrix Explonentials, *Linear Algebra and its Applications*, **45** (1982) 55 – 95.

5. Eberlein P.J., *On Measures of Nonnormality For Matrices*, University of Rochester.

6. Elsner L. and Ikramov Kh., Normal Matrices: An Update, *Linear Algebra and its Applications*, **285** (1988) 291 – 303.

7. Elsner L. and Paardekooper M H., On Measures of Nonnormality of Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **92** (1987) 107 – 124.

8. Fan K., *Maximum Properties and Inequalities fort the Eigenvalues of Completely Continuous Operators*, Department of Mathematics, University of Notre Dame.

9. Fan K., *On a Theorem of Weyl Concerning Eigenvalues of Linear Transformations*, Department of Mathematics, University of Notre Dame.

10. Grone R, Johnson C., Sa Ed. and Wolkowicz H., Normal Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **87** (1987) 213 – 225.

11. Henrici P., Bounds for Iterates, Inverses, Spectral Variation and Fields of Values of Non-Normal Matrices, *Numerische Mathematik*, **4** (1962) 24 – 40.

12. Horn R.A. and Johnson C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1995.

13. Horn R.A. and Johnson C.R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

14. Kress R., De Vries H. L. and Wegmann R., On Nonnormal Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **8** (1974) 109 – 120.

15. Loizou G., Nonnormality and Jordan Condition Numbers of Matrices, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **16**(4) (1969) 580–584.

16. Marcus M. and Minc H., *A Survey Of Matrix Theory And Matrix Inequalities*, Dover Publications, INC New York 1969.

17. Ruhe A., On the Closeness of Eigenvalues and Singular Values for Almost Normal Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **11** (1978) 87 – 94.

18. Smith R.A., The Condition Numbers of the Matrix Eigenvalue Problems, *Numerische Mathematik*, **10** (1967) 232 – 240.

19. Yamamoto T., On the Extreme Values of the Roots of Matrices, *J. Math. Soc. Japan*, 19(2), 1967.

20. Ανδρεαδάκης Σ., *Γραμμική Άλγεβρα,* Εκδώσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1989.

21. Καλογερόπουλος Γ., *Λογισμός Πινάκων και Εφαρμογές*, Αθήνα 1995.

22. Μαρουλάς Ι., *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα, 1996.

23. Φελλούρης Α., *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα, 2009.

24. Ψαράκος Π., *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων (Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος)*, Αθήνα 2009.