

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ



ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ ΣΥΖΕΥΤΜΕΝΩΝ
ΜΕ ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

Θεόδωρου Κολυβάρη

Επιβλέπων: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής ΕΜΠ



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ ΣΥΖΕΥΤΜΕΝΩΝ

ΜΕ ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

Θεόδωρου Κολυβάρη

Επιβλέπων: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ

Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή:

.....
Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Γεώργιος Κουτσούμπας
Αναπ. Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Χρήστος Χαρμούσης
Καθηγητής Πανεπιστήμιο Orsay

.....
Αλέξανδρος Κεχαγιάς
Αναπ. Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Νικόλαος Τράκας
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Νικόλαος Ήργες
Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ιωάννης Μπάκας
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2013

Στους γονείς μου

*“ Όμως για αυτή τη μαύρη τρύπα στο διάστημα
στο διάστημα ανάμεσα στα πόδια σου
δεν τραγουδάει κανένας
άκου λοιπόν εμένα . . . ”*

*“Το Βουνό της Αφροδίτης”
Τζίμης Πανούσης*

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή θα εξετάσουμε λύσεις μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτό πεδίο. Αρχικά θα παρουσιάσουμε μια γενίκευση της φορτισμένης C - μετρικής σύμμορφα συζευγμένης με ένα βαθμωτό πεδίο παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Για συγκεκριμένες τιμές της επιτάχυνσης και της κοσμολογικής σταθεράς, η κωνική ανωμαλία μπορεί να απαλειφθεί και το πεδίο είναι ομαλό παντού. Η μελανή οπή τότε προσομοιάζει περισσότερο με μελανή χορδή με τον ορίζοντα γεγονότων να εκτείνεται μέχρι το άπειρο και να παρέχει στον εαυτό της την απαραίτητη επιτάχυνση.

Επιπλέον παρουσιάζουμε μια νέα κλάση λύσεων μελανών οπών ελάχιστα συζευγμένων με ένα βαθμωτό πεδίο παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Θεωρούμε μια μονοπαρμετρική οικογένεια δυναμικών, παραμετροποιημένων από μια αδιάστατη παράμετρο g , μη μηδενική τιμή της οποίας σημαίνει σπάσιμο της σύμμορφης αναλλοιοότητας. Θερμοδυναμικά, υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία σε μηδενική μάζα της μελανής οπής, όπου παρατηρείται μια δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μια μελανή οπή χωρίς βαθμωτό πεδίο. Εκτός αυτού, βρίσκουμε έναν κλάδο λύσεων οι οποίες παρουσιάζουν μια πρώτης τάξης αλλαγή φάσης σε μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία η οποία εξαρτάται από το g . Καθώς $g \rightarrow 0$, αυτή η δεύτερη θερμοκρασία αποκλίνει.

Επιπρόσθετα θεωρούμε ένα βαρυτικό σύστημα μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και βαθμωτό πεδίο του οποίου οι παράγωγοι είναι συζευγμένοι με τον τανυστή του Einstein. Μια Reissner-Nordström μελανή οπή παρουσιάζει μια δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μια γενικά ανισοτροπική μελανή οπή με βαθμωτό πεδίο, σε μια συγκεκριμένη κρίσιμη θερμοκρασία την οποία και υπολογίζουμε. Εξετάζοντας τις ιδιότητες της λύσης κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία βρίσκουμε ότι είναι ενεργειακά προτιμητέα σε σχέση με την αντίστοιχη Reissner-Nordström μελανή οπή.

Τέλος εξετάζουμε την αλλαγή φάσης μιας Reissner-Nordström μελανής οπής σε μια με βαθμωτό πεδίο σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο. Το φορτισμένο και με μάζα βαθμωτό πεδίο είναι συζευγμένο μέσω των παραγώγων του με τον τανυστή του Einstein. Λύνουμε τις εξισώσεις αναλυτικά κοντά στην θερμοκρασία μετάβασης και δείχνουμε ότι το πεδίο είναι συγκεντρωμένο κοντά στον ορίζοντα γεγονότων και φθίνει εκθετικά μακριά από αυτόν.

Abstract

In this thesis we discuss black hole solutions coupled with scalar fields. Firstly we present a generalisation of the charged C - metric conformally coupled with a scalar field in the presence of a cosmological constant. For certain cases of enhanced acceleration with a negative cosmological constant, the conical singularity disappears altogether and the scalar field is everywhere regular. The black hole is then rather a black string with its event horizon extending all the way to asymptotic infinity and providing itself the necessary acceleration.

Furthermore we present a new class of black hole solutions with a minimally coupled scalar field in the presence of a negative cosmological constant. We consider an one-parameter family of self-interaction potentials parametrized by a dimensionless parameter g . A non-vanishing parameter signals the departure from conformal invariance. Thermodynamically, there is a critical temperature at vanishing black hole mass, where a higher-order phase transition occurs to a black hole without a scalar field. Beside that we obtain a branch of hairy solutions which undergo a first-order phase transition at a second critical temperature which depends on g . As $g \rightarrow 0$, this second critical temperature diverges.

Additionally we consider a gravitating system of vanishing cosmological constant consisting of an electromagnetic field and a scalar field coupled to the Einstein tensor. A Reissner-Nordström black hole undergoes a second-order phase transition to a hairy black hole of generally anisotropic hair at a certain critical temperature which we compute. Calculating the properties of a hairy black hole configuration near the critical temperature we show that it is energetically favorable over the corresponding Reissner-Nordström black hole.

Finally we discuss a phase transition of a Reissner-Nordström black hole to a hairy black hole in asymptotically flat spacetime. The hair is due to a massive charged scalar field with a derivative coupling to the Einstein tensor. We solve the equations analytically near the transition temperature and show that the hair is concentrated near the horizon decaying exponentially away from it.

Ευχαριστίες

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής Καθηγητή κ. Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο, για όλη την εμπιστοσύνη που επέδειξε στο πρόσωπό μου, την βοήθειά του σε όλες τις δυσκολίες που κατά καιρούς ανέκυψαν, το ειλικρινές ενδιαφέρον του για την επιστημονική μου εξέλιξη αλλά και για όλες τις φορές που μου έλυσε αλλά και δημιούργησε νέες απορίες.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής κ.κ. Γιώργο Κουτσούμπα και Χρήστο Χαρμούση, όχι μόνο για τη άψογη συνεργασία μας αλλά και γιατί πάντα μου προσέφεραν τη βοήθειά τους όσες φορές τη χρειάστηκα. Τον δε Χρήστο θα ήθελα ιδιαιτέρως να τον ευχαριστήσω, τόσο για τις διευκολύνσεις όσο και για τη φιλοξενία που μου προσέφερε όσες φορές επισκέφτηκα τη Γαλλία.

Δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω το Μηνά Τσουκαλά για όλα αυτά τα χρόνια φιλίας, ανταλλαγής απόψεων, ιδεών και προβληματισμών. Επίσης τον Παντελή και την Έρη για όσες φορές με φιλοξένησαν στο Παρίσι, καθώς και τους φίλους Βασίλη, Βίκυ, Γιώργο, Ειρήνη, Ηλία, Κώστα, Νίκο(χ3), Πάρη, Χρύσα και όλους όσους ξεχνάω για όλα όσα έχουμε περάσει και πιει κατά τη διάρκεια αυτών των χρόνων.

Όμως πριν και πάνω από όλους, δεν έχω λόγια να εκφράσω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη στην οικογένειά μου για όλη την αγάπη και την ηθική και υλική υποστήριξη που απλόχερα μου χάρισαν όλα αυτά τα χρόνια. Είναι βέβαιο ότι δεν θα τα κατάφερνα χωρίς αυτούς. Ένα ευχαριστώ είναι πολύ λίγο.

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ. Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πρόλογος

Το θεώρημα εξάλλειψης ιχνών (no-hair theorem) λέει ότι [1, 2]: 'Όλες οι στάσιμες, ασυμπτωτικά επίπεδες, τετραδιάστατες λύσεις μελανών οπών που είναι λύσεις των εξισώσεων του Einstein στο κενό ή με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, χαρακτηρίζονται από τη μάζα, τη στροφορμή και το ηλεκτρικό (ή μαγνητικό) φορτίο.

Σύμφωνα λοιπόν με αυτό το θεώρημα, οι μελανές οπές χαρακτηρίζονται μόνο από τρεις ποσότητες: μάζα, στροφορμή και φορτίο. Η γεωμετρία τους ανήκει στην Kerr-Newman οικογένεια μετρικών και αυτές οι ποσότητες είναι ολικά φορτία (διατηρήσιμα μεγέθη) που μπορούν να μετρηθούν στο άπειρο. Εάν ένα άστρο καταρρεύσει λόγω της βαρύτητας και σχηματίσει μια μελανή οπή, παρότι το αρχικό άστρο περιγράφεται από πολλές παραμέτρους, η τελική κατάσταση ισορροπίας η οποία είναι μια μελανή οπή, περιγράφεται από ένα μικρό αριθμό παραμέτρων. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας κατάρρευσης μια μεγάλη ποσότητα πληροφορίας χάνεται. Με τον ίδιο τρόπο, όταν ένα αντικείμενο διασχίζει τον ορίζοντα γεγονότων, όταν το σύστημα ισορροπήσει και πάλι, η μόνη διαφορά μεταξύ της αρχικής και τελικής κατάστασης θα είναι διαφορά στη μάζα, τη στροφορμή και το φορτίο.

Εάν κάποιος υποθέσει τετραδιάστατο, στάσιμο και ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο και τις εξισώσεις πεδίου που προκύπτουν από μια Einstein-Hilbert δράση με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, τότε το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά. Εάν όμως κάποια από τις παραπάνω υποθέσεις απορριφθεί, τότε και το θεώρημα μπορεί να μην ισχύει. Για παράδειγμα, εάν συμπεριληφθεί αρνητική κοσμολογική σταθερά, έτσι ώστε ο χωρόχρονος να μην είναι πλέον ασυμπτωτικά επίπεδος αλλά anti-de Sitter, τότε έχουμε την πιθανότητα για μη σφαιρικούς αλλά επίπεδους ή υπερβολικούς ορίζοντες γεγονότων, παίρνοντας έτσι τις επονομαζόμενες τοπολογικές μελανές οπές [3, 4, 5].

Σε όλες τις περιπτώσεις λύσεων μελανών οπών με βαθμωτό πεδίο που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία, δεν υπάρχει κάποια σταθερά ολοκλήρωσης για το βαθμωτό πεδίο. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει συνεχής τρόπος να περάσει κάποιος από μια λύση με μάζα M και βαθμωτό πεδίο σε μια λύση με την ίδια μάζα και χωρίς βαθμωτό πεδίο. Έτσι προκαλείται μια αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης στην ελεύθερη ενέργεια, γεγονός που είναι το βαρυτικό ανάλογο των υπεραγωγών [6]. Έτσι η μετάβαση από μία μεταλλική κατάσταση σε μια υπεραγώγιμη σε ένα ισχυρά συζευγμένο σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα ασθενώς συζευγμένο βαρυτικό σύστημα, χρησιμοποιώντας την AdS/CFT αντιστοιχία [7]. Σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες υπάρχει αποσύζευξη του συστήματος μελανής οπής-βαθμωτού πεδίου και η μελανή οπή είναι ευσταθής. Η συνοριακή θεωρία βαθμίδας περιγράφει μία μεταλλική κατάσταση. Όταν η θερμοκρασία μειώνεται, η μελανή οπή γίνεται ασταθής και μία νέα μελανή

οπή με βαθμωτό πεδίο σχηματίζεται. Τότε η θεωρία βαθμίδας περιγράφει μια υπεραγωγική κατάσταση.

Στην παρούσα διατριβή θα εξετάσουμε λύσεις μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτό πεδίο. Αρχικά θα κάνουμε μια ανασκόπηση στις πιο γνωστές λύσεις μελανών οπών με βαθμωτό πεδίο. Η πρώτη λύση [8] είναι σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο ($\Lambda = 0$), παρουσιάζει όμως κάποιες παθολογίες. Το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται στον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής, ενώ στο [9] βρέθηκε ότι είναι ασταθής. Έτσι δεν παραβιάζεται το no-hair θεώρημα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη λύση MTZ [10] η οποία υπάρχει σε ασυμπτωτικά AdS χωρόχρονο $\Lambda < 0$. Θα δούμε ότι η εισαγωγή κοσμολογικής σταθεράς μετατοπίζει τον ορίζοντα καλύπτοντας τον απειρισμό του βαθμωτού πεδίου, καθιστώντας έτσι τόσο τη μετρική όσο και το βαθμωτό πεδίο, ομαλά σε όλο το χωρόχρονο. Η ύπαρξη της αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς επιτρέπει στον ορίζοντα να έχει υπερβολική γεωμετρία. Θα αναλύσουμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες της μελανής οπής και θα δούμε ότι παρατηρείται μια αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης, από την τοπολογική λύση κενού σε αυτήν με το βαθμωτό πεδίο. Σε θερμοκρασίες χαμηλότερες από μια κρίσιμη τιμή επικρατεί η hairy μελανή οπή. Θα παρουσιάσουμε επίσης την ηλεκτρικά φορτισμένη μορφή της λύσης [11].

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη γενίκευση της φορτισμένης C - μετρικής σύμμορφα συζευγμένης με βαθμωτό πεδίο, παρουσία κοσμολογικής σταθεράς [12]. Η μετρική του χωρόχρονου έχει τη συνήθη μορφή της C - μετρικής με κοσμολογική σταθερά, όπου η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο είναι ίσα. Θα δούμε ότι όταν η κοσμολογική σταθερά μηδενίζεται το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται μόνο στον ένα πόλο του ορίζοντα γεγονότων. Η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς μπορεί εν γένει να κάνει το πεδίο να είναι ομαλό όπου είναι ομαλή και η μετρική, σπρώχνοντας την ανωμαλία πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων. Για συγκεκριμένες τιμές της επιτάχυνσης με αρνητική κοσμολογική σταθερά, η κωνική ανωμαλία εξαφανίζεται και το βαθμωτό πεδίο είναι παντού ομαλό. Η μελανή οπή τότε προσομοιάζει περισσότερο σε μελανή χορδή, με τον ορίζοντα γεγονότων να εκτείνεται μέχρι το ασυμπτωτικό άπειρο και παρέχοντας στον ίδιο της τον εαυτό την απαραίτητη επιτάχυνση.

Στο επόμενο Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια νέα κλάση λύσεων μελανών οπών ελάχιστα συζευγμένων με ένα βαθμωτό πεδίο παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς [13]. Θα θεωρήσουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια αυτο-αλληλεπιδρώντων δυναμικών, παραμετροποιημένων από μια αδιάστατη σταθερά g . Όταν $g = 0$, ανακτούμε τη σύμμορφα αναλλοίωτη λύση μελανής οπής των Martinez-Troncoso-Zanelli (MTZ). Ένα μη μηδενικό g σημαίνει απομάκρυνση από τη σύμμορφη αναλλοιότητα. Θερμοδυναμικά, υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία σε μηδενική μάζα, όπου συμβαίνει μια ανώτερης τάξης αλλαγή φάσης πάνω από αυτήν τη θερμοκρασία η hairy μελανή οπή χάνει το βαθμωτό πεδίο και μετατρέπεται σε μία μελανή οπή στο κενό. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ένα κλάδο hairy λύσεων που υφίστανται μια πρώτης τάξεως αλλαγή φάσης σε μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία η οποία εξαρτάται από το g και είναι υψηλότερη από τη κρίσιμη θερμοκρασία της MTZ. Καθώς το $g \rightarrow 0$, αυτή η δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει.

Στο Κεφάλαιο 4 θεωρούμε ένα βαρυτικό σύστημα μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς που αποτελείται από ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον τανυστή Einstein [14]. Θα θεωρήσουμε μια σφαιρικά συμμετρική Reissner-Nordström μελανή οπή ως υπόβαθρο και θα τη διαταράξουμε εισάγοντας τη σύζευξη των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου.

μωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Θα δούμε ότι η Reissner-Nordström υφίσταται μια δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μια hairy μελανή οπή που έχει γενικά ανισοτροπικά hair, σε μία κρίσιμη θερμοκρασία την οποία και θα υπολογίσουμε. Θα δούμε τις ιδιότητες της λύσης κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία και θα δείξουμε ότι είναι ενεργειακά προτιμητέα από την αντίστοιχη Reissner-Nordström μελανή οπή.

Στο Κεφάλαιο 5, θα μελετήσουμε πιθανές αστάθειες μιας Reissner-Nordström μελανής οπής κοντά στον ορίζοντα γεγονότων σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο (μηδενική κοσμολογική σταθερά). Θα δούμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται μια αλλαγή φάσης της Reissner-Nordström σε μία hairy μελανή οπή [15]. Η hairy λύση, η οποία είναι σφαιρικά συμμετρική, οφείλεται σε ένα massive φορτισμένο βαθμωτό πεδίο οι παράγωγοι του οποίου είναι συζευγμένοι με τον τανυστή του Einstein. Θα δείξουμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι συγκεντρωμένο κοντά στον ορίζοντα και πέφτει εκθετικά μακριά από αυτόν. Τέλος θα κλείσουμε με τα συμπεράσματά μας.

Περιεχόμενα

Περίληψη	v
Abstract	vii
Ευχαριστίες	ix
Πρόλογος	xi
1 Λύσεις Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτό Πεδίο	1
1.1 Η λύση BBMB	1
1.1.1 Λύση τύπου A	2
1.1.2 Λύση τύπου B	3
1.2 Ηλεκτρικά φορτισμένη BBMB	3
1.3 Η λύση MTZ	5
1.3.1 Θερμοδυναμική	7
1.3.2 Σύμμορφο σύστημα αναφοράς	11
1.4 Η λύση MTS	12
1.4.1 Θερμοδυναμική	14
2 C - Μετρική Συζευγμένη με Βαθμωτό Πεδίο	17
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Επιταχυνόμενη Φορτισμένη Μελανή Οπή Συζευγμένη με Βαθμωτό Πεδίο	19
2.2.1 Ιδιότητες της Λύσης	21
2.3 Παραγοντοποιημένη Μορφή της Λύσης	25
2.4 Συμπεράσματα	28
3 Μια Νέα Κλάση Αναλυτικών Λύσεων Hairy Μελανών Οπών	31
3.1 Εισαγωγή	31
3.2 Μελανή Οπή με Scalar Hair	33
3.3 Θερμοδυναμική	36
3.4 Ανάλυση Ευστάθειας	40
3.5 Συμπεράσματα	46

4	Σύζευξη ενός Βαθμωτού Πεδίου με τον Τανυστή του Einstein	47
4.1	Εισαγωγή	47
4.2	Οι εξισώσεις πεδίου	49
4.3	Μηδενικής τάξης διόρθωση	51
4.4	Πρώτης τάξης λύση	56
4.5	Θερμοδυναμική ευστάθεια σε πρώτη τάξη	58
4.6	Συζήτηση της λύσης	62
4.7	Συμπεράσματα	64
5	Αλλαγή Φάσης Hairy Μελανής Οπής σε Ασυμπτωτικά Επίπεδο Χωρόχρονο	65
5.1	Εισαγωγή	65
5.2	Οι εξισώσεις πεδίου	67
5.3	Διαταρακτική λύση	70
	5.3.1 Πρωτεύουσα τάξη	71
	5.3.2 Δευτερεύουσα τάξη	74
5.4	Συμπεράσματα	81
6	Επίλογος	83
A	Λύση των Einstein-Maxwell Εξισώσεων	87
	Βιβλιογραφία	91

Κεφάλαιο 1

Λύσεις Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτό Πεδίο

1.1 Η λύση BBMB

Ας θεωρήσουμε 4-διάστατη βαρύτητα και ένα βαθμωτό πεδίο που περιγράφονται από τη δράση

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{12} R \phi^2 \right], \quad (1.1)$$

όπου G η σταθερά του Newton.

Οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

$$\square \phi = \frac{1}{6} R \phi, \quad (1.3)$$

όπου ο ταυνοστής ενέργειας–ορμής δίνεται από τη σχέση

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \frac{1}{6} [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}] \phi^2. \quad (1.4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δέχονται τη στατική λύση [8] ($\zeta = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}$):

$$ds^2 = - \left(\frac{w^\beta \pm w^{-\beta}}{2} \right)^2 (-w^{2\alpha} dt^2 + w^{-2\alpha} h_{ij} dx^i dx^j), \quad (1.5)$$

$$\phi = \frac{1}{\zeta} \frac{1 \mp w^{2\beta}}{1 \pm w^{2\beta}} \quad (1.6)$$

όπου $\alpha = +\sqrt{1-3\beta^2}$ και $\beta \in [-3^{-1/2}, 3^{-1/2}]$ μια ελεύθερη παράμετρος. Τα πάνω πρόσημα αντιστοιχούν στη λύση τύπου A, ενώ τα κάτω στην τύπου B. Για $\beta = 0$ η λύση A είναι η λύση κενού, ενώ η B δεν ορίζεται.

Αν η λύση κενού είναι ασυμπτωτικά επίπεδη τότε είναι επίσης και η λύση A. Για μια κατάλληλη ακτινική συντεταγμένη r , $w \rightarrow 1 - M/r$ ασυμπτωτικά, όπου M η μάζα της λύσης κενού. Προκύπτει ότι η μάζα της λύσης A είναι αM . Ασυμπτωτικά το πεδίο πάει ως $\phi \rightarrow \beta M/(\zeta r)$ οπότε μπορούμε να δούμε το $q = \beta M/\zeta$ σαν το βαθμωτό του μονόπολο. Τότε ο λόγος του βαθμωτού “φορτίου” ως προς τη μάζα είναι $\beta/(\alpha\zeta)$ και παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

1.1.1 Λύση τύπου A

Αυτή η ασυμπτωτικά επίπεδη λύση αντιστοιχεί στα πάνω πρόσημα των εξισώσεων (1.5) και (1.6) και για $\beta = 0$ παίρνουμε την Schwarzschild. Εκτός από αυτήν την περίπτωση, και για $\beta = \pm 1/2$, η επιφάνεια $r = 2M$ είναι μια γυμνή ανωμαλία, δηλαδή το $R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ απειρίζεται αλλά οι ακτινικές φωτοειδείς γεωδειακές μπορούν να δραπετεύσουν, από όσο κοντά στο $r = 2M$, στο άπειρο.

Για $0 < |\beta| < 1/2$ όλες οι εισερχόμενες φωτοειδείς ή χρονοειδείς ακτινικές γεωδειακές μπορούν να φτάσουν την ανωμαλία σε πεπερασμένο χρόνο t . Όλα τα εξερχόμενα φωτόνια είναι μετατοπισμένα στο ερυθρό (υποθέτοντας $M > 0$). Η ανωμαλία έχει άπειρο εμβαδόν: το εμβαδόν των επιφανειών $r = \text{σταθ.}$ μεγαλώνει χωρίς όριο καθώς $r \rightarrow 2M$. Είναι φανερό ότι λόγω συνέχειας, το εμβαδόν τέτοιων σφαιρών πρέπει να φτάσει κάποιο ελάχιστο μεταξύ του $r = 2M$ και του $r = \infty$. Έτσι μια εξερχόμενη σφαίρα φωτός πρώτα θα μειωθεί και μετά θα αυξηθεί σε εμβαδόν! Αυτή η περίεργη συμπεριφορά είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ο ταυστής ενέργειας–ορμής δεν ικανοποιεί πάντοτε την (ασθενή) ενεργειακή συνθήκη:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)k^\mu k^\nu > 0, \quad (1.7)$$

όπου το k^μ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα τύπου φωτός. Έτσι η σύγκλιση μιας δέσμης φωτεινών ακτίνων δεν χρειάζεται να αυξάνει μονοτονικά όπως στις περισσότερες περιπτώσεις, και το εμβαδόν ενός φωτεινού μετώπου μπορεί να αυξηθεί αφού πρώτα έχει μειωθεί.

Για $1/2 < |\beta| \leq 3^{-1/2}$ η ανωμαλία στο $r = 2M$ είναι σημείο. Εισερχόμενες φωτοειδείς ακτινικές γεωδειακές μπορούν να τη φτάσουν σε πεπερασμένο χρόνο t , αλλά οι χρονοειδείς γεωδειακές δεν μπορούν να τη φτάσουν καθόλου. Εξερχόμενα φωτόνια που έρχονται κοντά από το $r = 2M$ είναι πάντοτε μετατοπισμένα στο ιώδες όταν λαμβάνονται σε μεγάλα r .

Για $\beta = \pm 1/2$, η επιφάνεια $r = 2M$ έχει εμβαδόν πM^2 και είναι ομαλή. Αυτό είναι πιο εμφανές εάν ορίσουμε μια νέα ακτινική συντεταγμένη $\bar{r} = M(1 - w)^{-1}$ για την οποία η λύση παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{2\bar{r}}\right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2, \quad (1.8)$$

$$\phi = \frac{M}{2\zeta(\bar{r} - M/2)}. \quad (1.9)$$

Βλέπουμε ότι η ανωμαλία στο $r = 2M$ ($\bar{r} = M$) έχει απομακρυνθεί, αλλά μια νέα έχει εμφανιστεί στο $\bar{r} = M/2$. Η μετρική (1.8) είναι ίδια με τη γεωμετρία της extreme Reissner–

Nordström ($e = m$) με μάζα $m = M/2$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε τη σχέση αυτής της λύσης με μια μαύρη τρύπα.

Στην περιοχή $0 < r < 2M$ η γεωμετρία της λύσης A δεν ορίζεται: η μετρική εκεί γίνεται μιγαδική (εκτός για $\beta = 0$). Στην περιοχή $-\infty < r < 0$ η λύση αναπαριστά μια ασυμπτωτικά επίπεδη γεωμετρία μάζας $-M/2$, με μια γυμνή σημειακή ανωμαλία στο $r = 0$.

1.1.2 Λύση τύπου B

Αυτή η λύση αντιστοιχεί στα κάτω πρόσημα των εξισώσεων (1.5) και (1.6). Για $\beta = 0$ δεν ορίζεται. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η (φωτοειδής) επιφάνεια $r = \infty$ δεν είναι άπειρο: το εμβαδόν της είναι πεπερασμένο, $4\pi\beta^2 M^2$, και ακτινικές (ή φωτοειδείς) χρονοειδείς γεωδειακές μπορούν να τη φτάσουν σε πεπερασμένο ιδιοχρόνο (που είναι αφινική παράμετρος). Επιπλέον, το $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι ομαλό σε αυτή: προκύπτει ότι η γεωμετρία πρέπει να είναι επεκτάσιμη πέρα από το $r = \infty$. Όμως, επειδή το ϕ και το $\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}$ απειρίζονται στο $r = \infty$, μια αναλυτική επέκταση δεν θα είχε φυσικό νόημα.

Για $\beta = \pm 1/2$ με ένα μετασχηματισμό σε μια νέα ακτινική συντεταγμένη $\bar{r} = M(1+w)^{-1}$ παίρνουμε τη λύση των εξισώσεων (1.5) και (1.6). Έτσι, για $\beta = \pm 1/2$ οι λύσεις A και B συμπίπτουν, με την περιοχή $2M \leq r \leq \infty$ της λύσης B να αντιστοιχεί στην περιοχή $2M \geq r \geq M$ της λύσης A.

Για $0 < |\beta| < 1/2$ η επιφάνεια $r = 2M$ είναι ανωμαλία άπειρου εμβαδού: το $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ αποκλίνει σε αυτή. Ακτινικές χρονοειδείς (ή φωτοειδείς) γεωδειακές μπορούν να τη φτάσουν σε πεπερασμένο ιδιοχρόνο.

Για $1/2 < |\beta| \leq 3^{-1/2}$ η επιφάνεια $r = 2M$ είναι σημειακή ανωμαλία. Οι φωτοειδείς ακτινικές γεωδειακές μπορούν να τη φτάσουν σε πεπερασμένο ιδιοχρόνο, αλλά οι χρονοειδείς δεν μπορούν να τη φτάσουν ποτέ.

Η περιοχή $0 < r < 2M$ δεν έχει νόημα αφού η μετρική είναι μιγαδική εκεί. Όμως, η περιοχή $-\infty < r < 0$ έχει νόημα για όλα τα β . Επεκτείνεται από μία σημειακή ανωμαλία στο $r = 0$ σε μία ομαλή φωτοειδή επιφάνεια στο $r = -\infty$ με ιδιότητες τελείως ανάλογες αυτών του $r = \infty$. Είναι πιθανό αυτή η περιοχή να είναι η αναλυτική επέκταση της περιοχής $2M < r < \infty$. Τότε το $r = \infty$ και το $r = -\infty$ θα ταυτίζονταν.

1.2 Ηλεκτρικά φορτισμένη BBMB

Ας θεωρήσουμε τη στατική μετρική

$$dS^2 = -U^{-2}dt^2 + U^2\sigma_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.10)$$

όπου σ_{ij} , η Ευκλείδεια μετρική του 3-διάστατου χώρου και το U ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace σε επίπεδο χώρο,

$$(\sigma^{\frac{1}{2}}\sigma^{ij}U_{,j})_{,i} = 0, \quad (1.11)$$

με $\sigma^{ij}\sigma_{jk} = \delta^i_k$, και $\sigma = \det(\sigma_{ij})$. Ορίζουμε

$$\phi = \frac{\delta}{\zeta(U-1)}, \quad (1.12)$$

$$F_{\mu\nu} = \epsilon(U^{-1})_{,i}(\delta_\mu^i \delta_\nu^0 - \delta_\mu^0 \delta_\nu^i) \quad (1.13)$$

όπου δ και ϵ σταθερές. Λόγω της (1.11), προκύπτει $R = 0$ για τη μετρική (1.10). Τότε από την (1.11) προκύπτει ότι το ϕ ικανοποιεί την εξίσωση (1.3) και το $F_{\mu\nu}$ τις εξισώσεις του Maxwell

$$\partial_\nu[\sqrt{-g}F^{\mu\nu}] = 0. \quad (1.14)$$

Επιπλέον, η εξίσωση του Einstein για $\mu = \nu = 0$ ικανοποιείται για κάθε λύση της εξίσωσης (1.11) αρκεί να ισχύει

$$\delta^2 + \epsilon^2 = 1. \quad (1.15)$$

Οι υπόλοιπες εξισώσεις του Einstein γενικά ικανοποιούνται μόνο αν επιβάλλουμε και άλλους περιορισμούς. Για παράδειγμα, αν $\delta = 0$ ικανοποιούνται ταυτοτικά. Τότε η (1.10) και η (1.13) ορίζουν μία Papapetrou-Majumdar ηλεκτρομαγνητική λύση κενού.

Σε περιπτώσεις υψηλής συμμετρίας η συνθήκη $R = 0$ και οι ταυτότητες Bianchi μπορούν να ικανοποιηθούν τις υπόλοιπες εξισώσεις του Einstein χωρίς επιπλέον περιορισμούς. Αυτό συμβαίνει για την ασυμπτωτικά επίπεδη σφαιρικά συμμετρική λύση με

$$U = 1 + \frac{m}{r}, \quad \sigma_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.16)$$

Το m αντιστοιχεί στη μάζα, το $q = \delta m/\zeta$ το βαθμωτό μονόπολο και το $e = \epsilon m$ το ηλεκτρικό φορτίο της λύσης. Μόνο δύο από αυτές τις παραμέτρους είναι ανεξάρτητες· η τρίτη καθορίζεται από την (1.15) (με μια ελευθερία στην επιλογή προσήμου).

Για την νέα συντεταγμένη $\bar{r} = r + m$, η μετρική (1.10) και (1.16) παίρνει τη μορφή (1.8) με $M/2 = m$, ενώ

$$\phi = \frac{q}{\bar{r} - m}, \quad (1.17)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{e(\delta_\mu^i \delta_\nu^0 - \delta_\mu^0 \delta_\nu^i)}{\bar{r}^2}. \quad (1.18)$$

Έτσι βλέπουμε ότι η λύση είναι μια φορτισμένη γενίκευση των λύσεων της προηγούμενης ενότητας για $\beta = \pm 1/2$. Η γεωμετρία είναι αυτή μιας extreme Reissner–Nordström, μάζας

$$m = \sqrt{e^2 + \zeta^2 q^2} \quad (1.19)$$

αλλά αντίθετα με την extreme Reissner–Nordström που έχει μόνο μία ελεύθερη παράμετρο, e , αυτή έχει δύο, e και q . Παρ' όλα αυτά δεν παραβιάζει την υπόθεση no hair αφού τα ϕ και $\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ απειρίζονται στον οριζοντα γεγονότων $\bar{r} = m$, που γίνεται έτσι μία μη

ομαλή επιφάνεια. Έτσι η λύση είναι μελανή οπή (ομαλός ορίζοντας γεγονότων) μόνο για την περίπτωση $q = 0$ (που είναι η Reissner–Nordström). Στην περίπτωση $q \neq 0$ ένα σωματίδιο που αλληλεπιδρά άμεσα με το πεδίο ϕ θα αντιμετώπιζε παθογένειες στο $\bar{r} = m$ και πιθανώς θα καταστρεφόταν. Ένα σωματίδιο που δε θα αλληλεπιδρούσε με το ϕ θα μπορούσε καταρχήν να περάσει από το $\bar{r} = m$ και να μπει στη μαύρη τρύπα. Αλλά στην πράξη κάθε φυσικό σωματίδιο θα αλληλεπιδράσει με το ϕ , τουλάχιστον έμμεσα μέσω της γεωμετρίας. Έτσι λοιπόν από ότι φαίνεται ένα σωματίδιο δεν μπορεί να εισέλθει στη μαύρη τρύπα χωρίς να καταστραφεί στο $\bar{r} = m$. Οπότε δεν υπάρχει κάποιος λόγος από φυσικής πλευράς να θεωρήσουμε τη λύση ως μαύρη τρύπα, εκτός αν $q = 0$.

1.3 Η λύση MTZ

Ας θεωρήσουμε 4-διάστατη βαρύτητα με μια αρνητική κοσμολογική σταθερά ($\Lambda = -3\ell^{-2}$ όπου ℓ είναι η ακτίνα του AdS), και ένα βαθμωτό πεδίο που περιγράφονται από τη δράση

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (1.20)$$

όπου G η σταθερά του Newton. Θεωρούμε το παρακάτω δυναμικό αυτοαλληλεπίδρασης

$$V(\phi) = -\frac{3}{4\pi G \ell^2} \sinh^2 \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \phi, \quad (1.21)$$

το οποίο έχει ολικό μέγιστο στο $\phi = 0$, και έναν όρο μάζας $m^2 = V''|_{\phi=0} = -2\ell^{-2}$. Αυτή η μάζα ικανοποιεί το όριο Breitenlohner–Friedman που εξασφαλίζει τη σταθερότητα του AdS κάτω από διαταραχές. Το δυναμικό αυτό έχει μια φυσική ερμηνεία στο σύμμορφο σύστημα αναφοράς, όπως θα δούμε στην ενότητα 1.3.2.

Οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

$$\square \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (1.23)$$

όπου $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, και ο τανυστής ενέργειας–ορμής δίνεται από

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (1.24)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δέχονται τη στατική λύση μελανής οπής με τοπολογία $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$, όπου το Σ είναι μια διδιάστατη πολλαπλότητα αρνητικής σταθερής καμπυλότητας. Η μελανή οπή είναι [10]

$$ds^2 = \frac{r(r + 2G\mu)}{(r + G\mu)^2} \left[- \left(\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r} \right)^2 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r} \right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \right], \quad (1.25)$$

ενώ το βαθμωτό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \operatorname{Arctanh} \frac{G\mu}{r + G\mu}. \quad (1.26)$$

Το $d\sigma^2$ είναι η μετρική της Σ .

Η λύση (1.25) είναι ασυμπτωτικά τοπικά AdS, με ένα χρονοειδές διάνυσμα Killing, ∂_t , αρκεί το Σ να είναι συμπαγές χωρίς όρια.

Όπως θα δούμε παρακάτω η μάζα της λύσης είναι

$$M = \frac{\sigma}{4\pi} \mu, \quad (1.27)$$

όπου σ το εμβαδόν του Σ . Οι μοναδικές ανωμαλίες της καμπυλότητας και του βαθμωτού πεδίου συμβαίνουν όταν μηδενίζεται ο σύμμορφος συντελεστής στην (1.25), δηλαδή όταν $r = 0$ και $r = -2G\mu$. Το πεδίο ορισμού του r είναι $r > -2G\mu$ για αρνητική μάζα, και $r > 0$ αλλιώς. Αυτές οι ανωμαλίες περιβάλλονται από έναν ορίζοντα γεγονότων που βρίσκεται στη θέση

$$r_+ = \frac{\ell}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4G\mu/\ell} \right), \quad (1.28)$$

αρκεί η μάζα να είναι μεγαλύτερη από

$$\mu > -\frac{\ell}{4G}. \quad (1.29)$$

Η MTZ έχει την ίδια αιτιακή δομή με την Schwarzschild–AdS, αρκεί σε κάθε σημείο του διαγράμματος Penrose να αντικαταστήσουμε τη σφαίρα S^2 με Σ .

Για μη αρνητικές μάζες, η ακτίνα του ορίζοντα ικανοποιεί τη σχέση $r_+ \geq \ell$. Στην άμαζη περίπτωση η μετρική παίρνει την απλή μορφή

$$d\bar{s}^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2, \quad (1.30)$$

η οποία είναι τοπικά AdS (δηλαδή έχει σταθερή καμπυλότητα), και το βαθμωτό πεδίο μηδενίζεται. Για $-\ell(4G)^{-1} < \mu < 0$, η ακτίνα του ορίζοντα παίρνει τιμές στο διάστημα $\ell/2 < r_+ < \ell$, ενώ για $\mu = -\ell(4G)^{-1}$ η $r_+ = \ell/2$ γίνεται διπλή ρίζα που συμπίπτει με τις ανωμαλίες.

Σημειώνουμε ότι δεν μπορούμε να μηδενίσουμε το βαθμωτό πεδίο κρατώντας τη μάζα σταθερή. Στην πραγματικότητα υπάρχει μόνο μια σταθερά ολοκλήρωσης (μ), και για $\phi \rightarrow 0$ η γεωμετρία προσεγγίζει αυτήν της άμαζης μαύρης τρύπας (1.30). Αυτό σημαίνει ότι για δεδομένη μάζα υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις μελανής οπής: η λύση MTZ με μη τετριμμένο βαθμωτό πεδίο (1.25)–(1.26), και η λύση κενού (με $\phi = 0$) που βρέθηκε στα [5, 16], της οποίας η μετρική είναι

$$ds_0^2 = - \left[\frac{\rho^2}{\ell^2} - 1 - \frac{2G\mu_0}{\rho} \right] dt^2 + \left[\frac{\rho^2}{\ell^2} - 1 - \frac{2G\mu_0}{\rho} \right]^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2, \quad (1.31)$$

με μάζα $M = \sigma\mu_0/4\pi$, και την οποία θα αποκαλούμε TBH_{AdS} .

1.3.1 Θερμοδυναμική

Η συνάρτηση επιμερισμού για ένα θερμοδυναμικό σύστημα ταυτίζεται με το Ευκλίδειο ολοκλήρωμα διαδρομής στην προσέγγιση saddle σημείου γύρω από την Ευκλίδεια συνέχεια ($t \rightarrow it$) της κλασικής λύσης. Έτσι θεωρούμε την Ευκλίδεια συνέχεια της δράσης (1.20) σε Χαμιλτονιανή μορφή

$$I = \int \left[\pi^{ij} \dot{g}_{ij} + p \dot{\phi} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i \right] d^3x dt + B, \quad (1.32)$$

όπου π^{ij} και p οι συζυγείς ορμές της μετρικής και του πεδίου αντίστοιχα, και το B είναι ένας επιφανειακός όρος. Θεωρούμε το σύνολο των στατικών, σφαιρικά συμμετρικών, Ευκλίδειων μετρικών

$$ds^2 = N^2(r) f^2(r) dt^2 + f^{-2}(r) dr^2 + R^2(r) d\sigma^2 \quad (1.33)$$

με το $0 \leq t \leq \beta$ περιοδικό, $r \geq r_+$ και ένα βαθμωτό πεδίο της μορφής $\phi = \phi(r)$. Το αντίστροφο της περιόδου β αντιστοιχεί στη θερμοκρασία T .

Η Χαμιλτονιανή δράση γίνεται

$$I = -\beta \sigma \int_{r_+}^{\infty} N(r) \mathcal{H}(r) dr + B, \quad (1.34)$$

όπου σ το εμβαδόν του Σ , και

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = NR^2 \left[\frac{1}{8\pi G} \left(\frac{(f^2)'R'}{R} + \frac{2f^2 R''}{R} + \frac{1}{R^2} (1 + f^2) \right) \right. \\ \left. + \Lambda + \frac{1}{2} f^2 (\phi')^2 + V(\phi) \right]. \end{aligned}$$

Η Ευκλίδεια λύση είναι στατική και ικανοποιεί την εξίσωση $\mathcal{H} = 0$. Επομένως, η τιμή της δράσης στο κλασικό όριο δίνεται απλώς από τον επιφανειακό όρο B , ο οποίος πρέπει να είναι τέτοιος ώστε η δράση (1.32) να έχει μέγιστο μέσα στην κλάση των πεδίων που θεωρούμε. Υπολογίζουμε τώρα την δράση όταν ισχύουν οι εξισώσεις πεδίου. Η συνθήκη ότι οι γεωμετρίες που επιτρέπονται στη μεταβολή της δράσης δεν πρέπει να έχουν κωνικές ανωμαλίες στον ορίζοντα, απαιτεί

$$\beta \{ N(r) (f^2(r))' \} \Big|_{r=r_+} = 4\pi, \quad (1.35)$$

που για τη λύση (1.25), δίνει την περίοδο β ως συνάρτηση του r_+ ,

$$T = \beta^{-1} = \frac{1}{2\pi\ell} \left(\frac{2r_+}{\ell} - 1 \right). \quad (1.36)$$

Δουλεύοντας στη μεγαλοκανονική κατανομή, δηλαδή κατά τις μεταβολές της δράσης θεωρούμε σταθερό το β , η μεταβολή του επιφανειακού όρου είναι

$$\delta B \equiv \delta B_\phi + \delta B_G,$$

όπου

$$\delta B_G = \frac{\beta\sigma}{8\pi G} [N (RR'\delta f^2 - (f^2)'R\delta R) + 2f^2 R (N\delta R' - N'\delta R)]_{r_+}^{\infty}, \quad (1.37)$$

και η συνεισφορά από το βαθμωτό πεδίο είναι

$$\delta B_\phi = \beta\sigma NR^2 f^2 \phi' \delta\phi|_{r_+}^{\infty}. \quad (1.38)$$

Για την MTZ μαύρη τρύπα (1.25), (1.26) η μεταβολή των πεδίων στο άπειρο είναι

$$\delta f^2|_{\infty} = \frac{2G}{\ell^2} \left(G\mu - \frac{\ell^2 + 3G^2\mu^2}{r} - \frac{2G\mu\ell^2 - 8G^3\mu^3}{r^2} + O(r^{-3}) \right) \delta\mu, \quad (1.39)$$

$$\delta\phi|_{\infty} = \sqrt{\frac{3G}{4\pi}} \left(\frac{1}{r} - \frac{2G\mu}{r^2} + O(r^{-3}) \right) \delta\mu, \quad (1.40)$$

$$\delta R|_{\infty} = \left(-\frac{G^2\mu}{r} + \frac{3G^3\mu^2}{r^2} + O(r^{-3}) \right) \delta\mu, \quad (1.41)$$

και έτσι βρίσκουμε

$$\delta B_G|_{\infty} = \frac{3\beta\sigma}{4\pi\ell^2} \left(G\mu r - 4(G\mu)^2 - \ell^2/3 + O(r^{-1}) \right) \delta\mu. \quad (1.42)$$

Παρατηρούμε ότι το $\delta B_G|_{\infty}$ έχει έναν εν δυνάμει επικίνδυνο αποκλίνωντα όρο. Αυτό είναι αποτέλεσμα του πιο αργού fall-off της μετρικής αυτής σε σχέση με αυτήν της καθαρής βαρύτητας με μια συνηθισμένη, τοπικά εντοπισμένη, κατανομή ύλης. Αυτό συμβαίνει γιατί στο άπειρο, το βαθμωτό πεδίο τείνει στο μηδέν με αργότερο ρυθμό από ότι υποθέτουμε συνήθως. Ως αποτέλεσμα αυτού έχουμε ένα μη μηδενικό $\delta B_\phi|_{\infty}$ που δίνεται από

$$\delta B_\phi|_{\infty} = -\frac{3\beta\sigma}{4\pi\ell^2} \left(G\mu r - 4(G\mu)^2 + O(r^{-1}) \right) \delta\mu, \quad (1.43)$$

που ακυρώνει ακριβώς την απόκλιση που προέρχεται από $\delta B_G|_{\infty}$ και δίνει μια πεπερασμένη συνεισφορά, οδηγώντας σε μια πεπερασμένη έκφραση για την ολική μεταβολή του επιφανειακού όρου στο άπειρο,

$$B|_{\infty} = -\frac{\beta\sigma}{4\pi}\mu. \quad (1.44)$$

Η μεταβολή του επιφανειακού όρου στον ορίζοντα βρίσκεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \delta R|_{r_+} &= \delta R(r_+) - R'|_{r_+} \delta r_+, \\ \delta f^2|_{r_+} &= -(f^2)'|_{r_+} \delta r_+, \end{aligned}$$

μαζί με την (1.35), στις Εξ. (1.37, 1.38). Παρατηρούμε ότι το $\delta B_\phi|_{r_+}$ μηδενίζεται, και έτσι

$$\begin{aligned} \delta B|_{r_+} &= -\frac{\beta\sigma}{16\pi G} N(r_+) (f^2)'|_{r_+} \delta R^2(r_+) \\ &= -\frac{\sigma}{4G} \delta R^2(r_+). \end{aligned}$$

Επομένως, ο επιφανειακός όρος στον ορίζοντα είναι

$$B|_{r_+} = -\frac{\sigma}{4G}R^2(r_+). \quad (1.45)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.44) και (1.45), η τιμή της Ευκλίδειας δράσης όταν ισχύουν οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$I = -\frac{\beta\sigma}{4\pi}\mu + \frac{\sigma}{4G}R^2(r_+). \quad (1.46)$$

Επειδή η Ευκλίδεια δράση σχετίζεται με την ελεύθερη ενέργεια (σε μονάδες όπου $\hbar = k_B = 1$) ως $I = -\beta F$, έχουμε

$$I = S - \beta M, \quad (1.47)$$

όπου M και S είναι η μάζα και η εντροπία αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (1.46) και (1.47), η μάζα και η εντροπία είναι

$$M = \frac{\sigma}{4\pi}\mu,$$

και

$$S = \frac{\sigma}{4G}R^2(r_+) = \frac{A_H}{4G},$$

αντίστοιχα. Μπορούμε να δούμε ότι ο πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής $dM = TdS$ ικανοποιείται.

Η ειδική θερμότητα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.28) και (1.36)

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\sigma\ell^2}{4G} \left(\frac{2r_+}{\ell} - 1 \right),$$

που είναι πάντοτε θετική για $r_+ > \ell/2$ (δηλαδή $G\mu > -\ell/4$), και έτσι η μελανή οπή με το βαθμωτό πεδίο μπορεί πάντα να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία με ένα λουτρό θερμότητας. Όμως για καθορισμένη θερμοκρασία, η δράση (1.20), με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες, επιδέχεται επίσης την λύση TBH_{AdS} της εξίσωσης (1.31) με $\phi = 0$. Αυτό εγείρει το ερώτημα εάν η μία μαύρη τρύπα μπορεί να αλλάξει φάση και να μεταπέσει στην άλλη. Αφού $Z = \exp(-\beta F)$, αυτό μπορεί να ελεγχθεί υπολογίζοντας τη διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων ελεύθερων ενεργειών. Η θερμοκρασία της TBH_{AdS} είναι

$$T_0 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3\rho_+}{\ell^2} - \frac{1}{\rho_+} \right), \quad (1.48)$$

όπου $\rho_+ \geq \ell/\sqrt{3}$. Συγκρίνοντας την με τη θερμοκρασία της εξίσωσης (1.36) παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των οριζόντων

$$r_+ = \frac{3\rho_+}{4} - \frac{\ell^2}{4\rho_+} + \frac{\ell}{2}. \quad (1.49)$$

Η Ευκλίδεια δράση υπολογισμένη για την μετρική (1.31) δίνει

$$I_0 = \frac{\sigma}{4G} \frac{\rho_+^4 + \ell^2\rho_+^2}{3\rho_+^2 - \ell^2},$$

και επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.46), η διαφορά μεταξύ των Ευκλείδειων δράσεων δίνεται από τη σχέση

$$\Delta I = I_\phi - I_0 = \frac{\sigma}{16G} \frac{(\ell - \rho_+)^3 \ell^2 + 3\ell\rho_+ + 4\rho_+^2}{\rho_+ 3\rho_+^2 - \ell^2}. \quad (1.50)$$

Ανάλογα, για δοσμένη θερμοκρασία, η διαφορά μεταξύ των δύο μαζών είναι

$$\Delta M = M_\phi - M_0 = -\frac{\sigma}{8\pi G} \frac{(\rho_+ + \ell)(\rho_+ - \ell)^2}{\rho_+^2 \ell^2} \left[\rho_+^2 - \frac{\ell\rho_+}{8} - \frac{\ell^2}{8} \right], \quad (1.51)$$

η οποία δεν μπορεί να είναι θετική για την επιτρεπόμενες τιμές του ρ_+ , δηλαδή, $\Delta M = M_\phi - M_0 \leq 0$. Όμοια, επειδή $S_0 = \sigma\rho_+^2(4G)^{-1}$, οι εντροπίες ικανοποιούν τη σχέση $\Delta S = S_\phi - S_0 \leq 0$. Και οι δύο ανισότητες ικανοποιούνται για $r_+ = \rho_+ = \ell$. Όμως σε αυτήν την ακτίνα το ΔI αλλάζει πρόσημο, φανερώνοντας την ύπαρξη μια αλλαγής φάσης στην κρίσιμη θερμοκρασία:

$$T_c = \frac{1}{2\pi\ell}.$$

Σε αυτήν τη θερμοκρασία, και οι δύο λύσεις μελανών οπών διασταυρώνονται στην άμαζη λύση (1.30) (με $M_\phi = M_0 = 0$), περιγράφοντας ένα χωρόχρονο με αρνητική σταθερή καμπυλότητα (δηλαδή τοπικά AdS). Οι δύο φάσεις σε κάθε πλευρά του κρίσιμου σημείου είναι:

$T > T_c$:

Σε αυτήν τη φάση, $\rho_+ > \ell$, και οι δύο μαύρες τρύπες έχουν θετική μάζα. Καθώς το ΔI στην εξίσωση (1.50) είναι αρνητικό, υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα για την μετάπτωση της MTZ στην TBH, λόγω θερμικών διακυμάνσεων. Κατά τη διαδικασία, η MTZ απορροφά θερμότητα από το λουτρό θερμότητας, αυξάνοντας την ακτίνα του ορίζοντα της και κατ'επέκταση την εντροπία της. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διαδικασία, το βαθμωτό πεδίο, κατά κάποιον τρόπο, απορροφάται από την μαύρη τρύπα.

$T < T_c$:

Σε αυτήν τη φάση, $\rho_+ < \ell$, και οι δύο μαύρες τρύπες έχουν αρνητική μάζα, αλλά τώρα $\Delta I > 0$, που σημαίνει ότι η λύση με βαθμωτό πεδίο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα. Ως συνέπεια, κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία, η “γυμνή” μελανή οπή υφίσταται ένα αυθόρμητο “ντύσιμο” με το βαθμωτό πεδίο. Κατά τη διαδικασία, η μάζα και η εντροπία μειώνονται, και η διαφορά στην ενέργεια και την εντροπία μεταφέρονται στο λουτρό θερμότητας.

Στην κρίσιμη θερμοκρασία, η μετάβαση των θερμοδυναμικών συναρτήσεων των δύο φάσεων γίνεται με συνεχή τρόπο, και επομένως η αλλαγή φάσης είναι δεύτερης τάξης. Η παράμετρος που χαρακτηρίζει την αλλαγή μπορεί να οριστεί με βάση την τιμή του βαθμωτού πεδίου στον ορίζοντα,

$$\lambda = \left| \tanh \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \phi(r_+) \right| = \begin{cases} \frac{T_c - T}{T_c + T}, & \text{για } T < T_c \\ 0 & , \text{για } T > T_c \end{cases}$$

1.3.2 Σύμμορφο σύστημα αναφοράς

Η μορφή του δυναμικού (1.21) μπορεί να παρατηρηθεί φυσικά μέσω της σχέσης μεταξύ του σύμμορφου (Jordan) και του Einstein συστήματος αναφοράς. Κάνοντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμό, και έναν επανορισμό του βαθμωτού πεδίου της μορφής

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{4\pi G}{3}\Psi^2\right)^{-1} g_{\mu\nu}, \quad \Psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \tanh \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}\phi, \quad (1.52)$$

η δράση (1.20, 1.21) γίνεται (με $\alpha = -2\pi\Lambda G/9$)

$$I[\hat{g}_{\mu\nu}, \Psi] = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{\hat{R} + 6\ell^{-2}}{16\pi G} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - \frac{1}{12} \hat{R} \Psi^2 - \alpha \Psi^4 \right]. \quad (1.53)$$

Σε αυτό το σύστημα αναφοράς, η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από αυθαίρετους τοπικούς μετασχηματισμούς $\hat{g}_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)\hat{g}_{\mu\nu}$ και $\Psi \rightarrow \Omega^{-1}(x)\Psi$, οπότε η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου είναι σύμμορφα αναλλοίωτη.

Οι εξισώσεις πεδίου γίνονται

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

$$\square \Psi = \frac{1}{6} R \Psi + 4\alpha \Psi^3, \quad (1.55)$$

με τον ταυνοστή ενέργειας–ορμής να δίνεται τώρα από τη σχέση

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi + \frac{1}{6} [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}] \Psi^2 - g_{\mu\nu} \alpha \Psi^4 \quad (1.56)$$

Επειδή σε αυτό το σύστημα αναφοράς το ίχνος του $T_{\mu\nu}$ είναι μηδέν προκύπτει ότι $R = 4\Lambda$. Πράγματι είναι

$$\begin{aligned} T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi + \frac{1}{6} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square \Psi^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi^2 + \frac{1}{6} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \Psi^2 - g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \alpha \Psi^4 \\ &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - \frac{4}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi + \frac{4}{6} \square \Psi^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} \square \Psi^2 + \frac{1}{6} \left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \right) \Psi^2 - 4\alpha \Psi^4 \\ &= -g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi + \frac{1}{2} \square \Psi^2 + \frac{1}{6} (R - 2R) \Psi^2 - 4\alpha \Psi^4 \\ &= -g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi + \frac{1}{2} (2g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi + 2\Psi \square \Psi) - \frac{1}{6} R \Psi^2 - 4\alpha \Psi^4 \\ &= \Psi (\square \Psi - \frac{1}{6} R \Psi - 4\alpha \Psi^3) \\ &= 0, \end{aligned}$$

λόγω της εξίσωσης (1.55) ενώ χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\square\Psi^2 = 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi + 2\Psi\square\Psi$.
Οπότε παίρνοντας το ίχνος των εξισώσεων του Einstein έχουμε:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) &= 0 \\ g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + 4\Lambda &= 0 \\ R &= 4\Lambda. \end{aligned}$$

Η μαύρη τρύπα (1.25), (1.26) παίρνει τη μορφή

$$d\hat{s}^2 = - \left[\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2 \right] dt^2 + \left[\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2 \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2, \quad (1.57)$$

με

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \frac{G\mu}{r + G\mu}. \quad (1.58)$$

Η μετάβαση (1.52) από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο είναι αντιστρέψιμη στην περιοχή όπου ο συντελεστής $(1 - 4\pi G\Psi^2/3)$ είναι θετικός. Αυτό σημαίνει, για μη αρνητική μάζα ($\mu \geq 0$) για $r > 0$, και για αρνητική μάζα, για $r > -2G\mu$.

Για μη αρνητικές μάζες η λύση έχει μόνο έναν ορίζοντα γεγονότων και έχει την ίδια αιτιακή δομή όπως και στο σύστημα αναφοράς Einstein. Όμως, για το υπόλοιπο επιτρεπόμενο πεδίο τιμών, $-\ell/4 < G\mu < 0$, η μετρική αποκτά τρεις ορίζοντες, για τους οποίους ισχύει $0 < r_{--} < -G\mu < r_- < \ell/2 < r_+$. Μπορούμε να πούμε ότι αυτή η λύση περιγράφει μια μαύρη τρύπα μέσα σε μια άλλη. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς, το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται για $r = -G\mu$, αλλά επειδή η γεωμετρία καθώς και ο ταχυοστάτης ενέργεια ορμής είναι ομαλοί εκεί, η ανωμαλία φαίνεται ακίνδυνη.

1.4 Η λύση MTS

Ας θεωρήσουμε τώρα τη δράση

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{12}R\phi^2 - \alpha\phi^4 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] \quad (1.59)$$

όπου το α είναι μια αυθαίρετη σταθερά σύζευξης.

Οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{em}), \quad (1.60)$$

$$\square\phi = \frac{1}{6}R\phi + \alpha\phi^3, \quad (1.61)$$

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0, \quad (1.62)$$

όπου το βαθμωτό και ηλεκτρομαγνητικό κομμάτι του ταυυστή ενέργειας ορμής δίνονται από τις σχέσεις

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi + \frac{1}{6}[g_{\mu\nu}\square - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} + G_{\mu\nu}]\phi^2 - g_{\mu\nu}\alpha\phi^4, \quad (1.63)$$

$$T_{\mu\nu}^{em} = \frac{1}{4\pi}g^{\alpha\beta}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\alpha}F_{\delta\beta}g^{\gamma\delta}\right), \quad (1.64)$$

αντίστοιχα.

Η εξίσωση (1.61) μπορεί να προκύψει από την (1.60) αν χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση του ταυυστή ενέργειας ορμής. Επειδή το βαθμωτό πεδίο είναι σύμμορφα συζευγμένο, το ίχνος του $T_{\mu\nu}^{\phi}$ είναι μηδέν όπως και του $T_{\mu\nu}^{em}$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο βαθμωτός Ricci είναι $R = 4\Lambda$.

Οι εξισώσεις λύνονται από την στατική μετρική [11]

$$ds^2 = -\left[-\frac{\Lambda r^2}{3} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right] dt^2 + \left[-\frac{\Lambda r^2}{3} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (1.65)$$

με το βαθμωτό πεδίο και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό να είναι

$$\phi = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{G\mu}{r + G\mu}, \quad (1.66)$$

$$A = -\frac{q}{r} dt. \quad (1.67)$$

Το βαθμωτό πεδίο είναι πραγματικό για $\alpha > 0$.

Οι σταθερές ολοκλήρωσης μ και q δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται μέσω της σχέσης

$$q^2 = -G\mu^2 \left(1 + \frac{2\pi\Lambda G}{9\alpha}\right). \quad (1.68)$$

Όπως θα δούμε παρακάτω η μάζα M και το φορτίο Q είναι

$$M = \frac{\sigma}{4\pi}\mu \quad \text{και} \quad Q = \frac{\sigma}{4\pi}q \quad (1.69)$$

αντίστοιχα.

Υπάρχει μία μόνο ανωμαλία στην καμπυλότητα στην αρχή ($r = 0$) ενώ για το βαθμωτό πεδίο στο $r = -G\mu$ μόνο αν η μάζα είναι αρνητική.

Η εξίσωση (1.68) ορίζει ένα άνω όριο για το α

$$0 < \alpha \leq -\frac{2\pi\Lambda G}{9} \quad (1.70)$$

Όταν αυτό το όριο ικανοποιείται τότε το φορτίο μηδενίζεται και παίρνουμε την MTZ (1.57), (1.58).

1.4.1 Θερμοδυναμική

Θα αναλύσουμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες της μελανής οπής (1.65) με την Ευκλίδεια προσέγγιση. Σε αυτήν τη μέθοδο η συνάρτηση επιμερισμού ενός θερμοδυναμικού συστήματος βρίσκειται χρησιμοποιώντας το Ευκλίδειο ολοκλήρωμα διαδρομής στην προσέγγιση σαγματικού σημείου γύρω από την Ευκλίδεια συνέχεια της κλασικής λύσης. Η Ευκλίδεια συνέχεια παρατηρείται κάνοντας το μετασχηματισμό $t \rightarrow it$, όπου ο φανταστικός χρόνος έχει περίοδο β , που ταυτίζεται με την αντίστροφη θερμοκρασία. Έτσι για ένα θερμοδυναμικό σύστημα η δράση συνδέεται με την ελεύθερη ενέργεια \mathcal{F} ως $I = \beta\mathcal{F}$.

Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή μορφή της Ευκλίδειας δράσης (1.59)

$$I = - \int \left[\pi^{ij} \dot{g}_{ij} + \mathcal{E}^i \dot{A}_i + \pi_\phi \dot{\phi} - N^\perp \mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i + A_t \mathcal{E}_i^i \right] d^3x dt + B, \quad (1.71)$$

όπου το B είναι ένας επιφανειακός όρος.

Θεωρούμε το σύνολο των Ευκλίδειων στατικών, σφαιρικά συμμετρικών μετρικών

$$ds^2 = N^2(r) f^2(r) dt^2 + \frac{1}{f^2(r)} dr^2 + r^2 d\sigma^2, \quad (1.72)$$

με το $0 \leq t \leq \beta$ περιοδικό, το $r \geq r_+$, το βαθμωτό πεδίο συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης $\phi = \phi(r)$ και ένα ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}^r \equiv p(r)\sqrt{\gamma}/4\pi$. Το γ είναι η ορίζουσα της μετρικής του $d\sigma^2$. Έτσι η Χαμιλτονιανή δράση γίνεται

$$I = \frac{\beta\sigma}{4\pi} \int_{r_+}^{\infty} (N(r)\mathcal{H}(r) - A_t p') dr + B, \quad (1.73)$$

όπου σ το εμβαδόν της πολλαπλότητας Σ , και

$$\mathcal{H} = \frac{r^2}{2G} \left[8\pi G \left\{ \frac{1}{6} f^2(\phi')^2 - \frac{1}{6} \phi \phi' \left[(f^2)' + \frac{4}{r} f^2 \right] - \frac{1}{3} \phi f^2 \phi'' + \alpha \phi^4 \right\} \right. \quad (1.74)$$

$$\left. + \left(1 - \frac{4\pi G}{3} \phi^2 \right) \left(\frac{(f^2)'}{r} - \frac{1}{r^2} (-1 - f^2) \right) + \frac{Gp^2}{r^4} + \Lambda \right]. \quad (1.75)$$

Για να μην έχουμε κωνικές ανωμαλίες στον ορίζοντα πρέπει

$$\beta \{ N(r)(f^2(r))' \} \Big|_{r=r_+} = 4\pi, \quad (1.76)$$

το οποίο δίνει

$$\beta^{-1} = \frac{1}{2\pi\ell} \left(\frac{2r_+}{\ell} - 1 \right). \quad (1.77)$$

Επειδή θεωρούμε τη μεγαλοκανονική κατανομή, η θερμοκρασία β^{-1} της μελανής οπής και το ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi = A_t(r_+) - A_t(\infty)$ είναι σταθερά.

Η Ευκλείδεια λύση μελανής οπής ικανοποιεί την εξίσωση $\mathcal{H} = 0$. Επομένως η δράση της κλασικής λύσης δίνεται απλά από τον επιφανειακό όρο B , τον οποίο υπολογίζουμε απαιτώντας η δράση (1.73) να έχει ακρότατο, δηλαδή $\delta I = 0$. Έτσι βρίσκουμε

$$\delta B = -\frac{\beta\sigma}{8\pi G} \left[Nr \left(1 - \frac{4\pi G}{3} \phi^2 \right) \delta f^2 + Nr^2 \frac{4\pi G}{3} \left\{ \phi((f^2)'\delta\phi - \phi'\delta f^2) + f^2(4\phi'\delta\phi - 2\phi\delta\phi') \right\} \right]_{r_+}^{\infty} + \frac{\beta\sigma}{4\pi} A_t \delta p|_{r_+}^{\infty}. \quad (1.78)$$

Σημειώνουμε ότι $p = q$ όταν ισχύουν οι εξισώσεις πεδίου. Η μεταβολή των πεδίων στον ορίζοντα είναι

$$\delta p|_{r_+} = \delta q, \quad (1.79)$$

$$\delta f^2|_{r_+} = -(f^2)'|_{r_+} \delta r_+, \quad (1.80)$$

$$\delta\phi|_{r_+} = \delta\phi(r_+) - \phi'|_{r_+} \delta r_+. \quad (1.81)$$

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε μια ενεργή σταθερά Newton από τη σχέση

$$\frac{1}{\tilde{G}(\phi(r_+))} = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{4\pi G}{3} \phi^2(r_+) \right). \quad (1.82)$$

Έτσι από τις σχέσεις (1.78)–(1.81) παίρνουμε

$$\delta B(r_+) = \delta \left(\frac{A_+}{4\tilde{G}_+} \right) + \frac{\beta\sigma}{4\pi} A_t(r_+) \delta q, \quad (1.83)$$

όπου $A_+ = \sigma r_+^2$ είναι το εμβαδόν του ορίζοντα. Η ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης δίνει

$$B(r_+) = \frac{A_+}{4\tilde{G}_+} + \frac{\beta\sigma}{4\pi} \Phi q. \quad (1.84)$$

Για τη μεταβολή στο άπειρο έχουμε

$$\delta p|_{\infty} = \delta q, \quad (1.85)$$

$$\delta f^2|_{\infty} = -\frac{2G}{r} \delta\mu + O(r^{-2}), \quad (1.86)$$

$$\delta\phi|_{\infty} = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{rG}{(r+G\mu)^2} \delta\mu, \quad (1.87)$$

$$\delta\phi'|_{\infty} = -\sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{(r-G\mu)G}{(r+G\mu)^3} \delta\mu. \quad (1.88)$$

και χρησιμοποιώντας την (1.78) βρίσκουμε

$$\delta B(\infty) = \frac{\beta\sigma}{4\pi} \delta\mu. \quad (1.89)$$

Τότε

$$B(\infty) = \frac{\beta\sigma}{4\pi} \mu, \quad (1.90)$$

αφού το β είναι σταθερό. Τελικά η δράση γίνεται

$$I = B(\infty) - B(r_+) = \frac{\beta\sigma}{4\pi} \mu - \frac{A_+}{4\tilde{G}_+} - \frac{\beta\sigma}{4\pi} \Phi q. \quad (1.91)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα M , το φορτίο Q και την εντροπία S χρησιμοποιώντας τις θερμοδυναμικές σχέσεις της μεγαλοκανονικής κατανομής

$$M = \left(\frac{\partial}{\partial\beta} - \beta^{-1} \Phi \frac{\partial}{\partial\Phi} \right) I = \frac{\sigma}{4\pi} \mu, \quad (1.92)$$

$$Q = -\beta^{-1} \frac{\partial I}{\partial\Phi} = \frac{\sigma}{4\pi} q, \quad (1.93)$$

$$S = \left(\beta \frac{\partial}{\partial\beta} - 1 \right) I = \frac{A_+}{4\tilde{G}_+}. \quad (1.94)$$

Βλέπουμε ότι η εντροπία δεν ικανοποιεί το νόμο του εμβαδού. Αυτό οφείλεται στον όρο $R\phi^2$ στη δράση. Για την αφόρτιστη μαύρη τρύπα η εντροπία είναι πάντα θετική επειδή $\tilde{G}_+ > 0$. Όμως αν $Q \neq 0$ τότε η εντροπία είναι θετική μόνο αν

$$-\frac{\sqrt{\frac{3\ell^2\alpha}{2\pi G}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{3\ell^2\alpha}{2\pi G}}\right)^2} < \frac{\mu G}{\ell} < \frac{\sqrt{\frac{3\ell^2\alpha}{2\pi G}}}{\left(1 - \sqrt{\frac{3\ell^2\alpha}{2\pi G}}\right)^2} \quad (1.95)$$

Η μελανή οπή είναι θερμοδυναμικά σταθερή αφού στη μεγαλοκανονική κατανομή, η Ευκλείδεια δράση (1.91) είναι αρνητική στην περίπτωση που $\mu = 0$. Οπότε δεν πρόκειται να συμβεί μια αλλαγή φάσης Hawking-Page. Η ειδική θερμότητα είναι

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\sigma\ell^2}{4G} \left(\frac{2r_+}{\ell} - 1 \right), \quad (1.96)$$

που είναι πάντα θετική, και έτσι η μαύρη τρύπα με το βαθμωτό πεδίο μπορεί πάντοτε να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία με ένα λουτρό θερμότητας.

Κεφάλαιο 2

C - Μετρική Συζευγμένη με Βαθμωτό Πεδίο

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια γενίκευση της φορτισμένης C - μετρικής σύμφωνα συζευγμένης με ένα βαθμωτό πεδίο, παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Η λύση είναι είτε ασυμπτωτικά επίπεδη είτε χωρόχρονος σταθερής καμπυλότητας. Η μετρική του χωρόχρονου έχει τη συνήθη μορφή της C - μετρικής με κοσμολογική σταθερά, όταν η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο είναι ίσα. Όταν η κοσμολογική σταθερά μηδενίζεται το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται μόνο στον ένα πόλο του ορίζοντα γεγονότων. Η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς μπορεί εν γένει να κάνει το πεδίο να είναι ομαλό όπου είναι ομαλή και η μετρική, σπρώχνοντας την ανωμαλία πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων. Για συγκεκριμένες τιμές της επιτάχυνσης με αρνητική κοσμολογική σταθερά, η κωνική ανωμαλία εξαφανίζεται και το βαθμωτό πεδίο είναι παντού ομαλό. Η μελανή οπή τότε προσομοιάζει περισσότερο σε μελανή χορδή, με τον ορίζοντα γεγονότων να εκτείνεται μέχρι το ασυμπτωτικό άπειρο και παρέχοντας στον ίδιο της τον εαυτό την απαραίτητη επιτάχυνση.

Η C - μετρική είναι μια στατική και αξονικά συμμετρική λύση των εξισώσεων του Einstein. Έχει τις συμμετρίες μιας Weyl μετρικής (βλ. την ανάλυση στο [17] συμπεριλαμβανομένης της κοσμολογικής σταθεράς) και ανήκει στην ειδική Τάξη των Petrov τύπου D - μετρικών όπως οι πιο κοινές λύσεις μελανών οπών στο κενό. Η λύση περιγράφει δύο ομαλώς επιταχυνόμενες μελανές οπές σε αντίθετες κατευθύνσεις. Για να αντισταθμιστεί η αμοιβαία βαρυτική έλξη των μελανών οπών, μια κωνική ανωμαλία αναπτύσσεται στον έναν από τους γωνιακούς πόλους. Αυτή η κομβική ανωμαλία (nodal singularity), που εμφανίζεται συχνά σε Weyl μετρικές πολλαπλών μελανών οπών, ερμηνεύτηκε [18] είτε ως μια ράβδος ανάμεσα στις δυο οπές που τις κρατάει μακριά, είτε ως δύο χορδές από το άπειρο που τραβάνε η καθεμία μια μελανή οπή με τέτοιο τρόπο ώστε να παρατηρείται μια (ασταθής) στατική ισορροπία. Η ράβδος ή οι χορδές βρίσκονται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας και μπορούν να θεωρηθούν ως η αιτία (ή το αποτέλεσμα) της ομαλής επιτάχυνσης του ζεύγους των μελανών οπών. Η nodal singularity μιας φορτισμένης C - μετρικής μπορεί να απαλειφθεί με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, εισάγοντας ένα εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [19]. Σε αυτή

την νέα ακριβή Ernst C - μετρική λύση η επιτάχυνση του ζεύγους των αντιθέτως κινούμενων ηλεκτρικά φορτισμένων μελανών οπών, παρέχεται από τη δύναμη Lorentz που συνδέεται με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι γεωμετρικές ιδιότητες και η φυσική ερμηνεία της C - μετρικής αναπτύχθηκε περαιτέρω και συζητήθηκε στο [20].

Η C - μετρική μπορεί να γενικευθεί εισάγοντας στη λύση μια NUT παράμετρο, στροφορμή και έναν όρο κοσμολογικής σταθεράς Λ [21], ενώ στο [22] ένα διλατονικό πεδίο (dilaton field) μη-ελάχιστα συζευγμένο συμπεριλήφθηκε στη λύση. Οι Emparan και Reall [23] βρήκαν την πενταδιάστατη μετρική μελανού δαχτυλιδιού (black ring), η οποία άνοιξε έναν ολόκληρο νέο τομέα στις μεγαλύτερων διαστάσεων μελανές οπές [24]. Η εκδοχή με κοσμολογική σταθερά αυτών των μεγαλύτερων διαστάσεων μελανών οπών δεν έχει ακόμη βρεθεί [17], [25] (δες πάντως τις προσεγγιστικές μεθόδους [26]). Η επίπεδη περιστρεφόμενη C - μετρική μελετήθηκε περαιτέρω [27, 28, 29] και ειδικά στο [29], μετασχηματίστηκε σε μορφή Weyl και ερμηνεύτηκε ως δύο ομαλά επιταχυνόμενες περιστρεφόμενες μελανές οπές που συνδέονται με μια ράβδο.

Η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς δεν αλλάζει τα γενικά χαρακτηριστικά της C - μετρικής. Η κλίμακα μήκους l της κοσμολογικής σταθεράς, παίζει ένα συμπληρωματικό ρόλο στην παράμετρο επιτάχυνσης A μετατοπίζοντας τις θέσεις των οριζόντων. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση του AdS χώρου υπάρχει μια σχέση μεταξύ της παραμέτρου επιτάχυνσης A και του l . Η περίπτωση $A < 1/l$ μελετήθηκε στο [30] ενώ η περίπτωση $A = 1/l$ ερευνηθήκη στο [31]. Η περίπτωση $A > 1/l$ μελετήθηκε εκτενώς στο [32] όπου η ανάλυση της αιτιακής δομής της λύσης έδειξε ότι περιγράφει ένα ζεύγος μελανών οπών σε AdS υπόβαθρο.

Η Ευκλείδια εκδοχή της C - μετρικής έχει χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία ζεύγους μελανών οπών. Στο [22] μια γενίκευση της επίπεδης C - μετρικής με ένα dilaton field, τροποποιημένη με μια επίπεδη Ernst λύση ώστε να διασφαλίζεται ένα ομαλό instanton, εφαρμόστηκε στο πλαίσιο της κβαντικής δημιουργίας ζεύγους μελανών οπών που από τη στιγμή που δημιουργούνται μέσω κβαντικής σήραγγας απομακρύνονται επιταχυνόμενες. Επίσης η λύση C - μετρικής με μια γενική κοσμολογική σταθερά Λ χρησιμοποιήθηκε στα [33, 34, 35] για να περιγράψει την τελική κατάσταση της κβαντικής διαδικασίας της δημιουργίας ζεύγους μελανών οπών. Η κβαντική διαδικασία που μπορεί να δημιουργήσει το ζεύγος, θα ήταν το βαρυτικό ανάλογο της Schwinger παραγωγής ζεύγους φορτισμένων σωματιδίων σε ένα εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Η συνήθης μορφή της C - μετρικής έχει μια συναρτησιακή δομή η οποία είναι κυβικό πολύωνυμο της μεταβλητής της, ενώ η φορτισμένη περίπτωση είναι τετάρτου βαθμού. Μια νέα μορφή της ηλεκτρικά φορτισμένης C - μετρικής προτάθηκε στο [36] στην οποία η συναρτησιακή δομή μετά από ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων μπόρεσε να γραφεί σε παραγοντοποιημένη μορφή. Αυτή η μορφή οδηγεί σε πολλές απλοποιήσεις, σε διαισθητική κατανόηση ενώ επίσης επιτρέπει να γραφεί η μετρική σε Weyl συντεταγμένες. Μια ανάλογη νέα μορφή της φορτισμένης περιστρεφόμενης C - μετρικής προτάθηκε στο [37] σε παραγοντοποιημένη μορφή. Η διαφορά με τη μη περιστρεφόμενη λύση είναι ότι σε αυτήν την περίπτωση δε συνδέεται με ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη γενίκευση της φορτισμένης C-μετρικής με ένα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο. Η λύση είναι παρόμοια με την φορτισμένη C - μετρική όταν

$M = Q^1$ αλλά επιπλέον έχει ένα βαθμωτό και ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που έχουν ηλεκτρικό, μαγνητικό και βαθμωτό φορτίο που συνδέονται μέσω μιας σχέσης με τη μάζα και την κοσμολογική σταθερά. Στο όριο που η επιτάχυνση και η κοσμολογική σταθερά μηδενίζονται βρίσκουμε τη σύμμορφα συζευγμένη με βαθμωτό πεδίο μελανή οπή της Ενότητας 1.1 [8]. Αυτή η λύση έχει μια ομαλή μετρική, με τον ορίζοντα να καλύπτει μια παγιδευμένη γεωμετρία μελανής οπής με ένα μη τετράμμενο βαθμωτό πεδίο. Το βαθμωτό πεδίο όμως απειρίζεται στον ορίζοντα σε συμφωνία με το θεώρημα εξάλειψης ιχνών (no hair theorem). Αν επιτρέψουμε την ύπαρξη της κοσμολογικής σταθεράς, μπορούμε να σπρώξουμε την ανωμαλία του πεδίου πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων και να πάρουμε μια ομαλή λύση μιας φορτισμένης μελανής οπής, σύμμορφα συζευγμένης με ένα βαθμωτό πεδίο όπως βρέθηκε και στο [10] και είδαμε στην Ενότητα 1.3. Για τη λύση που βρίσκουμε εδώ θα δούμε ότι η επιτάχυνση παίζει έναν παρόμοιο ρόλο με τη κοσμολογική σταθερά. Θα δούμε ότι για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων, το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό στον ορίζοντα και έξω από αυτόν αν $\Lambda \neq 0$ και απειρίζεται στην κωνική άκρη του ορίζοντα στην επίπεδη περίπτωση. Επιπλέον για αρνητική κοσμολογική σταθερά και επαυξημένη επιτάχυνση θα δούμε ότι η επιταχυνόμενη μελανή οπή προσομοιάζει περισσότερο σε μελανή χορδή με τον ορίζοντα γεγονότων να φτάνει μέχρι το ασυμπτωτικό άπειρο. Αυτή η περίπτωση ακολουθεί στενά την περιγραφή στο [31] της σταθερού κενού AdS C - μετρικής. Θα δούμε ότι το βαθμωτό πεδίο συμπεριφέρεται καλά σε όλη την επιτρεπόμενη περιοχή των συντεταγμένων και επιπλέον η μετρική δεν έχει πια κωνική ανωμαλία. Ακολουθώντας το [31] μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό το γεγονός, ως η χορδή να εξομαλύνεται από την ίδια την επιταχυνόμενη χορδή, η οποία εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Υπό αυτήν την έννοια η κωνική ανωμαλία αντικαθίσταται από τον ίδιο τον ορίζοντα της μελανής οπής! Αυτό το φαινόμενο επομένως δεν οφείλεται στο βαθμωτό πεδίο όπως θα μπορούσε κάποιος αρχικά να υποθέσει. Στην επόμενη Ενότητα παρουσιάζουμε τη λύση και ύστερα μετασχηματίζουμε σε Hong-Teo [36] συντεταγμένες. Στην τελευταία Ενότητα ακολουθούν τα συμπεράσματα.

2.2 Επιταχυνόμενη Φορτισμένη Μελανή Οπή Συζευγμένη με Βαθμωτό Πεδίο

Θεωρούμε τη δράση

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{12} R \phi^2 - \alpha \phi^4 - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.1)$$

¹Κάποιος θα μπορούσε να μπει στον πειρασμό να ονομάσει αυτήν την περίπτωση extremal αλλά εδώ ο εσωτερικός Cauchy ορίζοντας και ο ορίζοντας γεγονότων δεν συμπίπτουν όπως στην Reissner-Nordström μετρική.

όπου α είναι μια αδιάστατη σταθερά. Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τη δράση είναι ($G = c = 1$)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu}^{(S)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} \right) , \quad (2.2)$$

$$\square\phi = \frac{1}{6}R\phi + 4\alpha\phi^3 , \quad (2.3)$$

$$\partial_\nu[\sqrt{-g}F^{\mu\nu}] = 0 , \quad (2.4)$$

όπου οι ταυιστές ενέργειας-ορμής του βαθμωτού και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι αντίστοιχα,

$$T_{\mu\nu}^{(S)} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{6}[g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu}]\phi^2 - \alpha g_{\mu\nu}\phi^4 , \quad (2.5)$$

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{4\pi}g^{\alpha\beta} \left[F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\gamma\delta}F_{\gamma\alpha}F_{\delta\beta} \right] , \quad (2.6)$$

και $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$.

Το βαθμωτό πεδίο είναι σύμμορφα συζευγμένο, οπότε ο ολικός ταυιστής ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$ είναι traceless, και έτσι ο βαθμωτός Ricci είναι σταθερός, $R = 4\Lambda$. Το γεγονός ότι ο $T_{\mu\nu}^{(S)}$ είναι traceless, θα παίζει, για συγκεκριμένες συζεύξεις, τον ίδιο ρόλο με τον ταυιστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $T_{\mu\nu}^{(EM)}$. Οι εξισώσεις πεδίου (2.2)-(2.4) επιδέχονται την ακόλουθη λύση,

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} \left[F(y)dt^2 - \frac{1}{F(y)}dy^2 + \frac{1}{G(x)}dx^2 + G(x)d\varphi^2 \right] , \quad (2.7)$$

$$F(y) = \frac{\Lambda}{3A^2} + 1 - y^2 - 2mAy^3 - m^2A^2y^4 , \quad (2.8)$$

$$G(x) = 1 - x^2 - 2mAx^3 - m^2A^2x^4 , \quad (2.9)$$

$$\phi(y, x) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{Am(x-y)}{1 + Am(x+y)} , \quad (2.10)$$

$$\mathcal{A} = eydt + gxd\varphi , \quad (2.11)$$

όπου e και g είναι παράμετροι που συνδέονται με το ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο και συνδέονται με τη μάζα μέσω της σχέσης

$$e^2 + g^2 = m^2 \left(1 + \frac{2\pi\Lambda}{9\alpha} \right) . \quad (2.12)$$

Η γεωμετρία της μελανής οπής (2.7) είναι ίδια με τη φορτισμένη C - μετρική, με μόνη διαφορά ότι ο λόγος των ηλεκτρομαγνητικών φορτίων προς τη μάζα έχει ένα όριο όπως μπορεί να δει κανείς από τη σχέση (2.12) και ότι τα συνήθη πολυώνυμα της C - μετρικής F και G είναι ταυτόσημα με την ηλεκτρικά φορτισμένη C - μετρική μάζας M και φορτίου Q για $M = Q$. Για την ακρίβεια, λόγω της (2.12), φαίνεται ότι το βαθμωτό και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

της κάθε μελανής οπής δρουν απλώς ως δοκιμαστικά πεδία στη γεωμετρία με $Q = M$, επιτρέποντας να παρατηρηθεί μια στατική ισορροπία.

Μπορούμε επίσης να γράψουμε τη λύση στο Einstein frame. Κάνοντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμό, με έναν επανορισμό για το βαθμωτό πεδίο της μορφής

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{4\pi}{3}\phi^2\right) g_{\mu\nu} \quad , \quad \Psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \text{Arctanh} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\phi \right) \quad , \quad (2.13)$$

η δράση (2.1) γίνεται

$$I = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R} - 2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - V(\Psi) - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad , \quad (2.14)$$

όπου το δυναμικό αυτο-αλληλεπίδρασης (self-interaction potential) γίνεται

$$V(\Psi) = \frac{\Lambda}{8\pi} \left[\cosh^4 \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Psi \right) + \frac{9\alpha}{2\pi\Lambda} \sinh^4 \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Psi \right) - 1 \right] \quad . \quad (2.15)$$

Σε αυτό το frame η λύση παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = \frac{u(y, x)}{A^2(x-y)^2} \left[F(y)dt^2 - \frac{1}{F(y)}dy^2 + \frac{1}{G(x)}dx^2 + G(x)dz^2 \right] \quad , \quad (2.16)$$

$$u(y, x) = 1 + \frac{2\pi\Lambda}{9\alpha} \left(\frac{Am(x-y)}{1+Am(x+y)} \right)^2 \quad , \quad (2.17)$$

$$\Psi(y, x) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \text{Arctanh} \left(\sqrt{-\frac{2\pi\Lambda}{9\alpha}} \frac{Am(x-y)}{1+Am(x+y)} \right) \quad , \quad (2.18)$$

με τις $F(y)$, $G(x)$ και \mathcal{A} να δίνονται από τις σχέσεις (2.8), (2.9) και (2.11) αντίστοιχα. Σε αυτό το frame το βαθμωτό Ψ είναι ελάχιστα συζευγμένο, με αποτέλεσμα να έχουμε στη δράση ένα ακριβές δυναμικό αυτο-αλληλεπίδρασης σε αντίθεση με μια απλή κοσμολογική σταθερά. Το όριο $\Lambda \rightarrow 0$ επιτυγχάνεται όταν και η σταθερά $\alpha \rightarrow 0$ έτσι ώστε ο λόγος $\frac{\alpha}{\Lambda}$ να παραμένει σταθερός. Η λύση προσεγγίζει ομαλά τη λύση που βρέθηκε στο [8] για μηδενική επιτάχυνση $A = 0$. Όταν $A \neq 0$ αλλά $\Lambda = 0$ το δυναμικό μηδενίζεται δίνοντας τη λύση [22] στην ελάχιστη σύζευξη του ηλεκτρομαγνητικού με το βαθμωτό πεδίο. Τέλος εάν $\Lambda \neq 0$, βρίσκουμε τις λύσεις [38], [10], [11].

2.2.1 Ιδιότητες της Λύσης

Η λύση που παρουσιάσαμε ακολουθεί τις ιδιότητες της φορτισμένης C - μετρικής για $Q = M$, (δες για παράδειγμα [32]). Εδώ θα δώσουμε τις γενικές ιδιότητες και θα επικεντρωθούμε στην ομαλότητα ή μη του βαθμωτού πεδίου. Αυτό είναι εν μέρει σχετικό με τα θεωρήματα no-hair της Γενικής Σχετικότητας. Για να έχει η μετρική (2.7) τη σωστή υπογραφή πρέπει

το $G(x)$ να είναι θετικό ενώ το $F(y)$ αρνητικό. Για $Am \neq 0$ η εξίσωση $G(x) = 0$ έχει μέχρι τέσσερις πραγματικές ρίζες

$$\xi_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4Am}}{2Am}, \quad (2.19)$$

$$\xi_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4Am}}{2Am}, \quad (2.20)$$

$$\xi_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4Am}}{2Am}, \quad (2.21)$$

$$\xi_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Am}}{2Am}. \quad (2.22)$$

Όταν $\Lambda = 0$ έχουμε $F(\xi) = G(\xi)$ και η κατάσταση είναι σχετικά απλή. Όταν $\Lambda \neq 0$ τα γωνιακά τμήματα $y = \text{σταθ.}$ είναι ίδια αλλά τα τμήματα $x = \text{σταθ.}$ μετατοπίζονται. Για να βρούμε τους ορίζοντες πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $F(y) = 0$, η οποία *a priori* δίνει τέσσερις λύσεις,

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4Am\sqrt{1 + \Lambda/3A^2}}}{2Am}, \quad (2.23)$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4Am\sqrt{1 + \Lambda/3A^2}}}{2Am}, \quad (2.24)$$

$$y_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4Am\sqrt{1 + \Lambda/3A^2}}}{2Am}, \quad (2.25)$$

$$y_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Am\sqrt{1 + \Lambda/3A^2}}}{2Am}. \quad (2.26)$$

Για να είναι τα y_i πραγματικά είναι αναγκαίο να έχουμε $1 + \Lambda/3A^2 \geq 0$ το οποίο ικανοποιείται πάντοτε για $\Lambda \geq 0$ και για AdS χώρο η σχέση ικανοποιείται εάν $|A| > 1/l$. Τώρα τα y_2, y_3 είναι πραγματικοί εάν $Am \leq \frac{1}{4\sqrt{1 + \Lambda/3A^2}}$ και τα y_1, y_4 όταν $Am \geq -\frac{1}{4\sqrt{1 + \Lambda/3A^2}}$. Στο $y \rightarrow -\infty$ έχουμε απειρισμό στη καμυλότητα (curvature singularity), και για αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνήθης ακτινική συντεταγμένη είναι αντιστρόφως ανάλογη του y ($r \sim -\frac{1}{y}$). Τα φωτεινά και χρονοειδή άπειρα προκύπτουν όταν μηδενίζεται ο σύμμορφος παράγοντας (conformal factor) στο $x = y$. Για να έχουμε $G(x) > 0$, περιορίζουμε τη x συντεταγμένη στο διάστημα (x_s, x_n) , ενώ η y πρέπει να ανήκει στο διάστημα $-\infty \leq y < x$ για όλα τα $x \in (x_s, x_n)$. Ανάλογα με την τιμή του Am έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση I. $Am > 0$

Ia. $Am < \frac{1}{4}$

Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση $G(x) = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, όπου έχουμε, $\xi_4 > 0 > \xi_3 > \xi_2 > \xi_1$ και

$$G(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 < x < \xi_4 \\ \text{or} \\ \xi_1 < x < \xi_2 \end{cases}$$

Επικεντρωνόμαστε στο διάστημα $\xi_3 \leq x \leq \xi_4$ για να έχει η μετρική τη σωστή Lorentz υπογραφή. Ο άξονας $x = \xi_3$ δείχνει προς το χωρικό άπειρο, και ο άξονας $x = \xi_4$ προς την άλλη μελανή οπή. Η επιφάνεια $y = y_1$ είναι ο εσωτερικός ορίζοντας, η $y = y_2$ είναι ο ορίζοντας γεγονότων και η $y = y_3$ ο ορίζοντας επιτάχυνσης. Όπως είπαμε νωρίτερα, για $\Lambda = 0$ οι ρίζες των F και G συμπίπτουν, οπότε η χωροειδής y περιοχή είναι το διάστημα (ξ_2, ξ_3) και $y < x$ για κάθε $\xi_3 \leq x \leq \xi_4$. Επομένως οι επιφάνειες σταθερού y τοπολογικά είναι σφαίρες [39]. Επιτρέποντας να έχουμε θετική κοσμολογική σταθερά μειώνεται το διάστημα (y_2, y_3) , δηλαδή $\xi_2 < y_2 < y_3 < \xi_3$ και για αυτό η τοπολογία του γωνιακού τμήματος παραμένει σφαιρική. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού μια θετική κοσμολογική σταθερά “επαυξάνει” την επιτάχυνση. Για να υπάρχουν οι οριζόντες γεγονότων και επιτάχυνσης έχουμε ένα κάτω όριο (φράγμα) για τη μάζα της μελανής οπής, δηλαδή $\frac{1}{16m^2} \geq A^2 + \frac{\Lambda}{3}$. Αντίθετα για $\Lambda < 0$ έχουμε $y_2 < \xi_2 < \xi_3 < y_3$ και όποτε $y > \xi_3$ έχουμε μόνο έναν άξονα (αφού $y < x$) [31]. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μια τοπολογική αλλαγή καθώς $y > \xi_3$ και οι χώροι σταθερού y τότε, τοπολογικά είναι R^2 . Ο ορίζοντας $y = y_3$ είναι τότε ο AdS ορίζοντας.

Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου στα επιτρεπόμενα διαστήματα των x και y . Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ομαλότητα του πεδίου. Έτσι θα εξετάσουμε τον παρονομαστή του. Έχουμε,

$$\Sigma = 1 + Am(x + y) \geq 1 + Am(\xi_3 + y_2) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - 4Am} - \sqrt{1 - 4Am\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{3A^2}}} \right)$$

Οι ρίζες του $\Sigma = 0$ είναι εκεί που το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται. Βλέπουμε ότι για $\Lambda = 0$ έχουμε $\Sigma \geq 0$ ², για $\Lambda > 0$, το Σ είναι παντού θετικό, ενώ για $\Lambda < 0$, το Σ μπορεί να μηδενιστεί πριν καν φτάσουμε στον ορίζοντα γεγονότων.

Ib. $Am \geq \frac{1}{4}$

Σε αυτήν την περίπτωση $\xi_4 > 0 > \xi_1$ και $G(x) > 0$ στο διάστημα $\xi_1 < x < \xi_4$ (για $Am = \frac{1}{4}$ έχουμε $\xi_1 < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4$). Αυτό σημαίνει ότι όλες οι λύσεις για $\Lambda \geq 0$ είναι singular αφού $F < 0$ αριστερά του $y = y_1$ και έτσι είμαστε εκτεθειμένοι σε μια naked singularity. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι για $\Lambda < 0$ όπου τα $y = y_2$ και $y = y_3$ εξακολουθούν να είναι πραγματικά. Έτσι έχουμε $y \leq x < \xi_4$ και χώροι με σταθερά y τοπολογικά είναι R^2 επίπεδα. Σε αυτήν την περίπτωση, [31] ο ορίζοντας γεγονότων μπορεί να φτάσει στο ασυμπτωτικό άπειρο έτσι ώστε η λύση να μοιάζει με μελανή χορδή. Παρόλα αυτά, είναι εύκολο να δείξουμε

² $\Sigma = 0$ στον ορίζοντα και θετικό έξω από αυτόν, και όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα η ιδιομορφία (singularity) είναι μόνο στον έναν πόλο του $G(x)$.

ότι $\Sigma \geq 1 + 2Amy_2$ το οποίο έχει πάντα λύση για $4Am \geq 1$ και επομένως το βαθμωτό πεδίο θα απειρίζεται για $y_2 < y < y_3$.

Case II. $Am < 0$

IIa. $Am > -\frac{1}{4}$

Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση $G(x) = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, όπου: $\xi_2 > \xi_1 > \xi_4 > 0 > \xi_3$ και

$$G(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 < x < \xi_4 \\ \text{or} \\ \xi_1 < x < \xi_2 \end{cases}$$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ έτσι ώστε η μετρικά να έχει υπογραφή Lorentz και να είναι $y < x$. Το φωτοειδές και χρονοειδές άπειρο επιτυγχάνεται όταν $y \rightarrow x$. Ο άξονας $x = \xi_1$ δείχνει προς το χωρικό άπειρο, ενώ ο άξονας $x = \xi_2$ προς την άλλη μελανή σπή. Η επιφάνεια $y = y_3$ είναι ο εσωτερικός ορίζοντας, η $y = y_4$ ο ορίζοντας γεγονότων και η $y = y_1$ ο ορίζοντας επιτάχυνσης.

Έχουμε για τον παρονομαστή του βαθμωτού πεδίου:

$$\Sigma = 1 + Am(x + y) \geq 1 + Am(\xi_1 + y_4) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4Am\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{3A^2}}} - \sqrt{1 + 4Am} \right)$$

όπου τώρα είναι παντού θετικός για $\Lambda < 0$, και μπορεί να είναι μηδέν για $\Lambda > 0$, ενώ για $\Lambda = 0$ είναι μηδέν και πάλι πάνω στον ορίζοντα. Έτσι η κατάσταση είναι αντίστροφη με την αλλαγή του προσήμου της κοσμολογικής σταθεράς σε σχέση με την περίπτωση $0 < Am < \frac{1}{4}$.

IIb. $Am \leq -\frac{1}{4}$

Σε αυτήν την περίπτωση $\xi_2 > 0 > \xi_3$ και είναι $G(x) > 0$ εκ προϋποθέτου στο διάστημα $\xi_3 < x < \xi_2$ (για $Am = -\frac{1}{4}$ έχουμε $\xi_3 < \xi_4 = \xi_1 < \xi_2$). Αυτό σημαίνει ότι όλες οι $\Lambda \geq 0$ λύσεις είναι singular αφού $F < 0$ αριστερά του $y = y_3$ και έτσι είμαστε εκτεθειμένοι σε μια naked singularity. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι για $\Lambda < 0$ όπου τα $y = y_4$ και $y = y_1$ μπορούν να είναι πραγματικά. Με άλλα λόγια έχουμε παρόμοια περίπτωση με την Ia. Εδώ θα έχουμε $y \leq x < \xi_2$ και χώροι με σταθερό y τοπολογικά είναι R^2 επίπεδα. Και πάλι, [31] ο ορίζοντας γεγονότων φτάνει μέχρι το ασυμπτωτικό άπειρο στο $y = x$, οπότε η λύση μοιάζει με μια μελανή χορδή. Υπάρχει μια σημαντική διαφορά όμως με την περίπτωση Ia.

Εδώ, είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\Sigma \geq 1 + 2Amy_4 = \sqrt{1 + 4Am\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{3A^2}}}$ το οποίο είναι πάντοτε θετικό (οπότε το βαθμωτό πεδίο είναι παντού ομαλό) στο επιτρεπόμενο διάστημα των συντεταγμένων

$$-\frac{1}{4\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{3A^2}}} < Am \leq -\frac{1}{4}. \quad (2.27)$$

Επιπλέον, η απόκλιση της nodal singularity στο τμήμα (x, φ) υποδεικνύει [32] ότι

$$G'(x_s) = -G'(x_n) . \quad (2.28)$$

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η παραπάνω σχέση ικανοποιείται εάν $(x_s, x_n) = (\xi_2, \xi_3)$ και η επαυξημένη επιτάχυνση, Am , είναι είτε μεγαλύτερη από $1/4$ είτε μικρότερη από $-1/4$ (περιπτώσεις Ib, IIb). Συγκεκριμένα αληθεύει για το εύρος τιμών της (2.27). Οπότε, το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό και δεν υπάρχουν κωνικές ανωμαλίες εάν το Am βρίσκεται στο διάστημα (2.27). Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι η απουσία κωνικής ανωμαλίας δεν είναι χαρακτηριστικό της παρουσίας του βαθμωτού πεδίου· κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και για την φορτισμένη C - μετρική όταν $Q = M$. Οπότε πώς μπορεί η μελανή οπή να επιταχύνεται χωρίς μια χορδή να παρέχει την επιτάχυνση; Όπως είδαμε η τοπολογία του ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής αλλάζει από σφαιρική σε επίπεδη. Επιπλέον είδαμε ότι ο ορίζοντας φτάνει μέχρι το ασυμπτωτικό άπειρο. Επομένως η χορδή που προκαλεί την επιτάχυνση έχει αντικατασταθεί από την ίδια την μελανή οπή-χορδή. Ο ορίζοντας είναι ουσιαστικά η ίδια η χορδή! Η περίπτωση (2.27) είναι η μοναδική περίπτωση όπου, η μετρική και το βαθμωτό πεδίο έχουν C^2 ομαλότητα στο επιτρεπτό διάστημα συντεταγμένων.

2.3 Παραγοντοποιημένη Μορφή της Λύσης

Για να έχουμε μια καλύτερη κατανόηση των εμπλεκόμενων παραμέτρων, μπορούμε να γράψουμε τη μετρική (2.7) σε μια πιο οικεία μορφή. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο είναι βολικό να παραγοντοποιήσουμε τη συνάρτηση $G(x)$. Ακολουθώντας το [36] γράφουμε

$$G(x) = (1 - x^2)(1 + Ak_1x)(1 + Ak_2x) , \quad (2.29)$$

και κάνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$x \rightarrow Bc_0(x - c_1) , \quad (2.30)$$

$$y \rightarrow Bc_0(y - c_1) , \quad (2.31)$$

$$t \rightarrow \frac{c_0}{B}t , \quad (2.32)$$

$$\varphi \rightarrow \frac{c_0}{B}\varphi , \quad (2.33)$$

όπου τα c_0, c_1, B είναι πραγματικές σταθερές. Για να διατηρήσουμε τη μορφή του line element πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \frac{A}{B} , \\ G(\xi) &\rightarrow B^2G(\xi) . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Από την εξίσωση (2.34) παίρνουμε:

$$m = \frac{M}{c_0^2 \sqrt{1+2AM}}, \quad (2.35)$$

$$c_0 = \frac{1+AM+2AMc_1}{\sqrt{1+2AM}}, \quad (2.36)$$

$$c_1 = \frac{-1-AM+\sqrt{1+2AM+5A^2M^2}}{2AM}, \quad (2.37)$$

$$B = \sqrt{\frac{1+2AM}{1+2AM+A^2M^2}}, \quad (2.38)$$

$$k_2 = \frac{M}{1+2AM}, \quad (2.39)$$

όπου έχουμε θέσει $k_1 = M$.

Τότε, η συνάρτηση $G(x)$ της εξίσωσης (2.29) γράφεται

$$G(x) = (1-x^2)(1+AMx) \left(1 + \frac{AM}{1+2AM} x \right), \quad (2.40)$$

με ρίζες

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = -\frac{1}{AM}, \quad \xi_4 = -\frac{1+2AM}{AM}. \quad (2.41)$$

Υποθέτουμε ότι $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \xi_4$ ³. Τότε $G(x) > 0$ στο διάστημα $-1 < x < 1$ (ή στο $\xi_4 < x < \xi_3$). Δε μπορούμε να απαλείψουμε και τις δύο κωνικές ανωμαλίες $x = -1$ και $x = +1$, ταυτόχρονα, αφού μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συνθήκη $G'(\xi_1) = -G'(\xi_2)$ δεν ισχύει.

Για να φέρουμε τη μετρική σε μια πιο γνωστή μορφή μπορούμε να θέσουμε

$$y = -\frac{1}{Ar}, \quad (2.42)$$

$$x = \cos \theta. \quad (2.43)$$

Τότε, η λύση γράφεται ως εξής

$$ds^2 = \frac{1}{(1+Ar \cos \theta)^2} \left[-\frac{f(r)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{p(\theta)} d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta p(\theta) d\varphi^2 \right] \quad (2.44)$$

$$f(r) = -\frac{\Lambda}{3} r^4 + (1-A^2 r^2)(r-M) \left(r - \frac{M}{1+2AM} \right), \quad (2.45)$$

$$p(\theta) = (1+AM \cos \theta) \left(1 + \frac{AM}{1+2AM} \cos \theta \right), \quad (2.46)$$

$$\phi(r, \theta) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{k(Ar \cos \theta + 1)}{r + k(Ar \cos \theta - 1)}, \quad (2.47)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{e}{r} dt + g \cos \theta d\varphi, \quad (2.48)$$

³Αυτό σημαίνει $0 < \frac{AM}{1+2AM} < AM < 1$

όπου

$$k = \frac{M}{1 + AM} . \quad (2.49)$$

Οι παράμετροι του ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου συνδέονται με τη μάζα μέσω της σχέσης

$$e^2 + g^2 = \frac{M^2}{1 + 2AM} \left(1 + \frac{2\pi\Lambda}{9\alpha} \right) . \quad (2.50)$$

Οι σταθερές A, M, e, g συνδέονται με την επιτάχυνση, μάζα, ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο αντίστοιχα, όπως μπορούμε να δούμε παίρνοντας τα κατάλληλα όρια.

Για $A = 0$ και $g = 0$, $e = 0$ (δηλαδή $\alpha = -2\pi\Lambda/9$) βρίσκουμε τη λύση MTZ μιας τετραδιάστατης μελανής οπής σε dS χώρο συζευγμένη με βαθμωτό πεδίο [38], έτσι μπορούμε να αναγνωρίσουμε το M ως τη μάζα της μη επιταχυνόμενης μελανής οπής. Για $A = 0$, $g = 0$ βρίσκουμε τη λύση MTS μιας φορτισμένης μελανής οπής με βαθμωτό πεδίο [11], έτσι το e είναι το ηλεκτρικό φορτίο, ενώ εάν έχουμε και $\Lambda = 0$ βρίσκουμε τη λύση BBMB [8]. Οι τελευταίες δύο λύσεις παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 1. Τέλος εάν δεν έχουμε βαθμωτό πεδίο έχουμε τη φορτισμένη C - μετρική με $e = M$ ([18], [32], [36]).

Έχει ενδιαφέρον να δούμε τη περίπτωση $\Lambda = e = g = 0$. Τότε το βαθμωτό πεδίο γίνεται

$$\phi(r, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{k(Ar \cos \theta + 1)}{r + k(Ar \cos \theta - 1)} . \quad (2.51)$$

Υπενθυμίζουμε ότι στη BBMB μελανή οπή [8] το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται στον ορίζοντα γεγονότων. Στην περίπτωση μας $r = r_+ = M$ έχουμε

$$\phi(r_+, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{M(AM \cos \theta + 1)}{M(1 + AM) + M(AM \cos \theta - 1)} , \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow \phi(r_+, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{AM \cos \theta + 1}{AM(1 + \cos \theta)} . \quad (2.53)$$

Έτσι το πεδίο είναι πεπερασμένο στον ορίζοντα εκτός από το σημείο $\theta = \pi$, δηλαδή στον πόλο $x = -1$. Θα ήταν επιθυμητό να απαλλείψουμε και τις δύο κωνικές ανωμαλίες με ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, εφαρμόζοντας το μηχανισμό του Ernst. Σε μια τέτοια περίπτωση το πεδίο θα ήταν ομαλό παντού.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, μπορούμε να γράψουμε τη μετρική (2.44) σε υπερβολική μορφή. Ορίζουμε

$$y = -\frac{1}{Ar} , \quad (2.54)$$

$$x = \cosh \theta . \quad (2.55)$$

και η λύση γράφεται

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + Ar \cosh \theta)^2} \left[-\frac{f(r)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{p(\theta)} d\theta^2 + r^2 \sinh^2 \theta p(\theta) d\varphi^2 \right] \quad (2.56)$$

$$f(r) = -\frac{\Lambda}{3} r^4 - (1 - A^2 r^2) (r + M) \left(r + \frac{M}{1 + 2AM} \right), \quad (2.57)$$

$$p(\theta) = (1 - AM \cosh \theta) \left(1 - \frac{AM}{1 + 2AM} \cosh \theta \right), \quad (2.58)$$

$$\phi(r, \theta) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{k(Ar \cosh \theta + 1)}{r - k(Ar \cosh \theta - 1)}, \quad (2.59)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{e}{r} dt + g \cosh \theta d\varphi, \quad (2.60)$$

όπου

$$k = \frac{M}{1 + AM}, \quad (2.61)$$

και το ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο συνδέονται με τη μάζα μέσω της σχέσης

$$e^2 + g^2 = -\frac{M^2}{1 + 2AM} \left(1 + \frac{2\pi\Lambda}{9\alpha} \right). \quad (2.62)$$

Για $A = 0$ και $g = e = 0$ (δηλαδή $\alpha = -2\pi\Lambda/9$) παίρνουμε τη λύση MTZ σε AdS χώρο [10] (βλ. Ενότητα 1.3).

2.4 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε μια νέα λύση μιας φορτισμένης C - μετρικής συζευγμένης με βαθμωτό πεδίο παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Η γεωμετρία της μετρικής είναι ταυτόσημη με την “extremal” φορτισμένη C - μετρική με τη διαφορά ότι ο λόγος φορτίου προς μάζα είναι φραγμένος. Η λύση μπορεί να είναι ασυμπτωτικά dS, AdS ή Minkowski ανάλογα με την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς. Υπάρχει ένα διάστημα των παραμέτρων όπου το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό πάνω και έξω από τον ορίζοντα. Συγκεκριμένα για $\Lambda = 0$ βλέπουμε ότι το πεδίο απειρίζεται μόνο στον έναν πόλο του ορίζοντα αφού η επιτάχυνση καλύπτει την υπόλοιπη singular επιφάνεια. Υπό μία έννοια η επιτάχυνση της μελανής οπής παίζει ένα παρόμοιο ρόλο με την κοσμολογική σταθερά όπως στην περίπτωση των BBMB και MTZ λύσεων, αλλά όχι τόσο ώστε να επιτρέπει scalar hair! Για μια επιλογή παραμέτρων, οι κωνικές ανωμαλίες και στους δύο πόλους απαλείφονται, παρόμοια με το όριο $Q = M$ της φορτισμένης C - μετρικής [18], [35]. Είδαμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η AdS μελανή οπή μοιάζει με μελανή χορδή, με τον ορίζοντα γεγονότων να φτάνει στο χωρικό άπειρο και έχοντας επίπεδη τοπολογία. Σε μία περίπτωση, Ib, και το βαθμωτό πεδίο είναι παντού ομαλό και η μετρική δεν έχει κωνικές ανωμαλίες. Η μελανή οπή επιταχύνεται από την ίδια μελανή χορδή που παρέχει

την κανονικοποίηση της nodal singularity. Η περίπτωση αυτή είναι παρόμοια με εκείνη που περιγράφηκε στο [31] για την AdS C - μετρική.

Είδαμε ότι ένα σύμμορφα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο παίζει ένα παρόμοιο ρόλο με έναν ηλεκτρομαγνητικό τανυστή ενέργειας-ορμής όσο $Q = M$. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε εάν αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μηχανισμούς εύρεσης λύσεων σε μετρικές Weyl ή Papapetrou με τελικό σκοπό να βρούμε μια λύση περιστρεφόμενης μελανής οπής με scalar charge.

Κεφάλαιο 3

Μια Νέα Κλάση Αναλυτικών Λύσεων Hairy Μελανών Οπών

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια νέα κλάση λύσεων μελανών οπών ελάχιστα συζευγμένων με ένα βαθμωτό πεδίο παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Θεωρούμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια αυτο-αλληλεπιδρώντων δυναμικών, παραμετροποιημένων από μια αδιάστατη σταθερά g . Όταν $g = 0$, ανακτούμε τη σύμμορφα αναλλοίωτη λύση μελανής οπής των Martinez-Troncoso-Zanelli (MTZ). Ένα μη μηδενικό g σημαίνει απομάκρυνση από τη σύμμορφη αναλλοιότητα. Θερμοδυναμικά, υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία σε μηδενική μάζα, όπου συμβαίνει μια ανώτερης τάξης αλλαγή φάσης, όπως και στην περίπτωση της MTZ. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ένα κλάδο hairy λύσεων που υφίστανται μια πρώτης τάξεως αλλαγή φάσης σε μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία η οποία εξαρτάται από το g και είναι υψηλότερη από τη κρίσιμη θερμοκρασία της MTZ. Καθώς το $g \rightarrow 0$, αυτή η δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει.

Οι τετραδιάστατες λύσεις μελανών οπών ενός συστήματος όπου η βαρύτητα του Einstein είναι συζευγμένη με ένα βαθμωτό πεδίο, αποτελούν αντικείμενο μελέτης εδώ και πολλά χρόνια. Ερωτήματα που αφορούν στην ύπαρξή τους, μοναδικότητα και σταθερότητά τους αναζητούν απαντήσεις σε όλο αυτό το διάστημα. Οι λύσεις Kerr και Kerr-Newman, τετραδιάστατων ασυμπτωτικά επίπεδων μελανών οπών στο κενό ή συζευγμένων με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, επέβαλλαν πολύ αυστηρές προϋποθέσεις για την ύπαρξή τους υπό τη μορφή των θεωρημάτων no-hair. Στην περίπτωση ενός ελάχιστα συζευγμένου βαθμωτού πεδίου σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο, αυτά τα θεωρήματα αποδείχτηκαν επιβάλλοντας συνθήκες για το δυναμικό αυτο-αλληλεπίδρασης [40]. Αυτά τα θεωρήματα επίσης γενικεύτηκαν για μη-ελάχιστα συζευγμένα βαθμωτά πεδία [41].

Για ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο, μια τετραδιάστατη μελανή οπή συζευγμένη με βαθμωτό πεδίο με μηδενικό δυναμικό είναι γνωστή από τις αρχές της δεκαετίας του 1970 [8]. Όμως, το πεδίο αποκλίνει στον ορίζοντα και επιπλέον η λύση δεν είναι ευσταθής [42], έτσι δεν υπάρχει παραβίαση των θεωρημάτων. Στην περίπτωση θετικής κοσμολογικής σταθεράς με ένα ελάχιστα συζευγμένο πεδίο και με δυναμικό, αναλυτικές λύσεις μελανών οπών βρέθηκαν

στο [43] καθώς και αριθμητικά στο [44], αλλά ήταν ασταθής. Εάν το πεδίο είναι μη-ελάχιστο συζευγμένο, υπάρχει λύση με ένα ϕ^4 δυναμικό [38], αλλά και αυτή αποδείχτηκε ότι είναι ασταθής [9, 45].

Στην περίπτωση αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς, ευσταθείς λύσεις βρέθηκαν αριθμητικά για σφαιρικές γεωμετρίες [46, 47] και μια ακριβής αναλυτική λύση σε ασυμπτωτικά AdS χώρο με υπερβολικό ορίζοντα βρέθηκε στο [10] όπως είδαμε και στην Ενότητα 1.3, ενώ γενικεύτηκε αργότερα ώστε να περιλαμβάνει ηλεκτρικό φορτίο [11] (Ενότητα 1.4). Αυτή η λύση είναι ευσταθής σε διαταραχές για αρνητική μάζα και μπορεί να εκδηλώσει αστάθειες για θετική μάζα [48]. Η θερμοδυναμική αυτής της λύσης μελετήθηκε στο [10] όπου βρέθηκε ότι υπάρχει μια δεύτερης τάξη αλλαγή φάσης της hairy μελανής οπής σε μια καθαρά τοπολογική μελανή οπή χωρίς hair. Ο αναλυτικός και αριθμητικός υπολογισμός των quasi-normal modes βαθμωτών, ηλεκτρομαγνητικών και τανυστικών διαταραχών αυτών των μελανών οπών επιβεβαίωσε αυτήν τη συμπεριφορά [49]. Μια πενταδιάστατη Schwarzschild-AdS μελανή οπή συζευγμένη με βαθμωτό πεδίο συζητήθηκε στο [51], ενώ διλατονικές λύσεις μελανών οπών με έναν όρο Gauss-Bonnet σε διάφορες διαστάσεις συζητήθηκαν στο [52].

Από μία γνωστή λύση μελανής οπής συζευγμένης με βαθμωτό πεδίο, άλλες λύσεις μπορούν να βρεθούν μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης (conformal mappings) [53]. Σε όλες τις λύσεις στο Einstein frame το πεδίο είναι ελάχιστο συζευγμένο στη βαρύτητα. Εφαρμόζοντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμό σε αυτές τις λύσεις, άλλες λύσεις μπορούν να βρεθούν στο Jordan frame οι οποίες δεν είναι φυσικά ισοδύναμες με τις προηγούμενες [54]. Το πεδίο στο Jordan frame είναι μη-ελάχιστο συζευγμένο με τη βαρύτητα και αυτή η σύζευξη χαρακτηρίζεται από μία αδιάστατη παράμετρο ξ . Υπάρχουν ισχυρά θεωρητικά, αστροφυσικά και κοσμολογικά επιχειρήματα (για μία επισκόπηση δεξ [54]) τα οποία δίνουν την τιμή $\xi = 1/6$. Εάν το δυναμικό του πεδίου είναι μηδέν ή τέταρτης δύναμης, η θεωρία είναι σύμμορφα αναλλοίωτη· αλλιώς ένα μη τερμιμμένο δυναμικό εισάγει μία κλίμακα στη θεωρία και η σύμμορφη αναλλοιότητα σπάει.

Στη συνέχεια λοιπόν θα παρουσιάσουμε μια κλάση λύσεων μελανών οπών τετραδιάστατης βαρύτητας συζευγμένης με ένα βαθμωτό πεδίο και με κοσμολογική σταθερά. Αναλύουμε τη δομή και μελετάμε τις ιδιότητες αυτών των λύσεων στο Einstein frame. Σε αυτό το frame, το δυναμικό του πεδίου χαρακτηρίζεται από μία αδιάστατη παράμετρο g . Εάν αυτή η παράμετρος μηδενιστεί, τότε ξαναβρίσκουμε τις γνωστές λύσεις μελανών οπών ελάχιστης σύζευξης με βαθμωτό πεδίο σε (A)dS χώρο [38, 10]. Μετασχηματίζοντας αυτές τις λύσεις στο Jordan frame, η παράμετρος g μπορεί να ειπωθεί ως μία απόκλιση από τη σύμμορφη αναλλοιότητα. Αυτό το σπάσιμο της σύμμορφης αναλλοιότητας επιτρέπει την οπισθοσκέδαση των κυμάτων του βαθμωτού πεδίου στο καμπυλωμένο υπόβαθρο του χωρόχρονου, και τη δημιουργία “ουρών” ακτινοβολίας. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να έχει σημαντικά παρατηρήσιμες συνέπειες στην κοσμολογία [55].

Ακολουθώντας το [56], εκτελούμε μια διαταρακτική ανάλυση ευστάθειας των λύσεων. Βρίσκουμε ότι η hairy μελανή οπή είναι ευσταθής κοντά στο σύμμορφο σημείο εάν η μάζα είναι αρνητική και μπορεί να εκδηλώσει αστάθειες στην περίπτωση θετικής μάζας. Επίσης μελετούμε τη θερμοδυναμική των λύσεων. Υπολογίζοντας την ελεύθερη ενέργεια, βρίσκουμε ότι υπάρχει μία κρίσιμη θερμοκρασία πάνω από την οποία η hairy μελανή οπή χάνει το hair της σε μία μελανή οπή στο κενό. Αυτή η κρίσιμη θερμοκρασία συμβαίνει σε ένα σημείο

όπου η μάζα της μελανής οπής αλλάζει πρόσημο, όπως και στην περίπτωση της MTZ [10]. Είναι αρκετά ενδιαφέρον ότι υπάρχει άλλη μία αλλαγή φάσης σε μία υψηλότερη θερμοκρασία, η οποία είναι πρώτης τάξης και περιλαμβάνει έναν διαφορετικό κλάδο της λύσης μας. Αυτή νέα κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει καθώς η σταθερά σύζευξης του δυναμικού $g \rightarrow 0$. Αυτές οι ακριβείς λύσεις μελανών οπών μπορούν να έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές σε ολογραφικούς υπεραγωγούς [57, 58], όπου νέοι τύποι ολογραφικών υπεραγωγών μπορούν να κατασκευαστούν [48, 59].

Η δομή του Κεφαλαίου έχει ως εξής. Στην Ενότητα 3.2 εισάγουμε το δυναμικό και παρουσιάζουμε τη λύση. Στην Ενότητα 3.3 συζητάμε τη θερμοδυναμική της λύσης. Στην Ενότητα 3.4 κάνουμε μία διαταρακτική ανάλυση ευστάθειας. Τέλος στην Ενότητα 3.5 παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα.

3.2 Μελανή Οπή με Scalar Hair

Για να βρούμε μία λύση με βαθμωτό πεδίο, ξεκινάμε με μία 4-διάστατη δράση η οποία έχει τον Einstein-Hilbert όρο με αρνητική κοσμολογική σταθερά Λ , μαζί με ένα βαθμωτό πεδίο,

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.1)$$

όπου G είναι η σταθερά του Newton και R ο βαθμωτός Ricci. Οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{matter}}, \\ \square \phi &= \frac{dV}{d\phi}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

με τον ταυνοστή ενέργειας-ορμής να δίνεται από

$$T_{\mu\nu}^{\text{matter}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (3.3)$$

Το δυναμικό του πεδίου είναι

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\Lambda}{4\pi G} \sinh^2 \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \phi \\ &+ \frac{g\Lambda}{24\pi G} \left[2\sqrt{3\pi G} \phi \cosh \left(\sqrt{\frac{16\pi G}{3}} \phi \right) - \frac{9}{8} \sinh \left(\sqrt{\frac{16\pi G}{3}} \phi \right) - \frac{1}{8} \sinh \left(4\sqrt{3\pi G} \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

με σταθερά σύζευξης g . Όταν $g = 0$ παίρνουμε τη δράση της MTZ μελανής οπής [10]. Αυτή η μορφή του δυναμικού επιλέχθηκε ώστε οι εξισώσεις πεδίου να λύνονται αναλυτικά. Η ποιτική φύση των αποτελεσμάτων μας δεν εξαρτάται από τη λεπτομερή μορφή του δυναμικού. Ένα παρόμοιο δυναμικό θεωρήθηκε σε διαφορετικό πλαίσιο στο [43] (δες επίσης το [59] για

την εξαγωγή δυναμικού που δίνει αναλυτική λύση για σφαιρικό ορίζοντα). Εάν κάποιος πάει στο Jordan frame, στο οποίο το βαθμωτό πεδίο υπακούει στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\square\phi - \xi R\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.5)$$

με $\xi = 1/6$, το δυναμικό έχει τη μορφή

$$V(\phi) = -\frac{2\pi G\Lambda}{9}\phi^4 - \frac{g\Lambda}{16\pi G} \left[\sqrt{\frac{16\pi G}{3}}\phi \left(1 - \frac{4\pi G}{3}\phi^2 + \frac{\frac{16\pi G}{9}\phi^2}{1 - \frac{4\pi G}{3}\phi^2} \right) - \left(1 - \frac{4\pi G}{3}\phi^2 \right) \left(1 + \frac{4\pi G}{3}\phi^2 \right) \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}\phi}{1 - \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}\phi} \right]. \quad (3.6)$$

Προφανώς, το βαθμωτό πεδίο είναι σύμμορφα συζευγμένο αλλά η σύμμορφη αναλλοιότητα σπάει για μη-μηδενική τιμή του g .

Η μάζα του πεδίου δίνεται από

$$m^2 = V''(0) = -\frac{2}{l^2} \quad (3.7)$$

όπου ορίσαμε $\Lambda = -3/l^2$. Σημειώνουμε ότι είναι ανεξάρτητο από το g και συμπίπτει με τη μάζα του πεδίου της MTZ μελανής οπής [10]. Ασυμπτωτικά ($r \rightarrow \infty$), το βαθμωτό πεδίο συμπεριφέρεται ως $\phi \sim r^{-\Delta_{\pm}}$ όπου $\Delta_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + m^2 l^2}$. Στην περίπτωση μας $\Delta_+ = 2$ και $\Delta_- = 1$. Και οι δύο συνοριακές συνθήκες είναι αποδεκτές καθώς και οι δύο δίνουν κανονικοποιημένα modes. Θα χρησιμοποιήσουμε μεικτές συνοριακές συνθήκες (καθώς $r \rightarrow \infty$)

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{c\alpha^2}{r^2} + \dots, \quad c = -\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} < 0. \quad (3.8)$$

Αυτή η επιλογή της παραμέτρου c συμπίπτει με της λύσης MTZ [10].

Λύσεις των εξισώσεων του Einstein με τις συνοριακές συνθήκες (3.8) έχουν βρεθεί στην περίπτωση σφαιρικών οριζόντων και έχει δειχθεί ότι είναι ασταθείς [56]. Σε αυτήν την περίπτωση, για $\alpha > 0$, έχει δειχθεί ότι $c < 0$ πάντοτε και η hairy μελανή οπή έχει θετική μάζα. Από την άλλη, η μελανή οπή MTZ, η οποία έχει υπερβολικό ορίζοντα και υπακούει στις συνοριακές συνθήκες (3.8) με $c < 0$, μπορούν να είναι ευσταθείς εάν έχουν αρνητική μάζα [48]. Αυτό είναι αδύνατο για σφαιρικούς ορίζοντες επειδή πάντοτε περιέχουν μελανές οπές θετικής μάζας. Η αριθμητική τιμή του c δεν είναι σημαντική (εκτός από το γεγονός ότι $c \neq 0$) και επιλέγεται όπως στην εξίσωση (3.8) για ευκολία.

Οι εξισώσεις πεδίου επιδέχονται λύσεις που είναι μελανές οπές τοπολογίας $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$, όπου Σ είναι μια δυδιάστατη πολλαπλότητα αρνητικής σταθερής καμπυλότητας. Μελανές οπές με αρνητική σταθερή καμπυλότητα είναι γνωστές ως τοπολογικές μελανές οπές (TBHs -δες για παράδειγμα [4, 60]). Η πιο απλή λύση για $\Lambda = -3/l^2$ είναι

$$ds^2 = -f_{TBH}(\rho)dt^2 + \frac{1}{f_{TBH}(\rho)}d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2, \quad f_{TBH}(\rho) = \frac{\rho^2}{l^2} - 1 - \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (3.9)$$

όπου ρ_0 είναι μία σταθερά η οποία είναι ανάλογη της μάζας και είναι φραγμένη από κάτω ($\rho_0 \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}l$), $d\sigma^2$ είναι το line element της δυδιάστατης πολλαπλότητας Σ η οποία είναι τοπικά ισομορφική στην υπερβολική πολλαπλότητα H^2 και της μορφής

$$\Sigma = H^2/\Gamma \quad , \quad \Gamma \subset O(2,1) \quad , \quad (3.10)$$

με Γ μία ελευθέρως δρώσα διακριτή υποομάδα ισομετριών. Το line element $d\sigma^2$ του Σ μπορεί να γραφεί ως

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2 \quad , \quad (3.11)$$

με $\theta \geq 0$ και $0 \leq \phi < 2\pi$ τις συντεταγμένες του υπερβολικού χώρου H^2 ή ψευδοσφαίρας, ο οποίος είναι ένας μη-συμπαγής δυδιάστατος χώρος σταθερής αρνητικής καμπυλότητας. Αυτός ο χώρος γίνεται συμπαγής, σταθερής αρνητικής καμπυλότητας με genus $g \geq 2$ ταυτίζοντας, σύμφωνα με τους κανόνες της διακριτής υποομάδας Γ , τις απέναντι άκρες ενός $4g$ -πλευρου πολυγώνου του οποίου οι πλευρές είναι γεωδαιτικές και βρίσκεται στην αρχή $\theta = \varphi = 0$ της ψευδοσφαίρας. Το οκτάγωνο είναι το πιο απλό πολύγωνο, δίνοντας μία συμπαγή επιφάνεια genus $g = 2$ κάτω από αυτές τις ταυτοποιήσεις. Έτσι, η δυδιάστατη πολλαπλότητα Σ είναι μία συμπαγής Riemann 2-επιφάνεια με genus $g \geq 2$. Το line element της εξίσωσης (3.9) είναι ένας ασυμπτωτικά τοπικά AdS χωρόχρονος. Η δομή του ορίζοντα της (3.9) καθορίζεται από τις ρίζες της συνάρτησης $f_{TBH}(\rho)$, δηλαδή

$$f_{TBH}(\rho) = \frac{\rho^2}{l^2} - 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = 0 \quad . \quad (3.12)$$

Για $-\frac{2}{3\sqrt{3}}l < \rho_0 < 0$, η εξίσωση έχει δύο διακριτές μη-εκφυλισμένες λύσεις, που αντιστοιχούν σε έναν εσωτερικό και έναν εξωτερικό ορίζοντα ρ_- και ρ_+ αντίστοιχα. Για $\rho_0 \geq 0$, η $f_{TBH}(\rho)$ έχει μόνο μία μη-εκφυλισμένη ρίζα, έτσι η μελανή οπή (3.9) έχει μόνο έναν ορίζοντα ρ_+ . Οι ορίζοντες και στις δύο περιπτώσεις του ρ_0 έχουν τη μη-τετριμμένη τοπολογία της πολλαπλότητας Σ . Σημειώνουμε ότι για $\rho_0 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}l$, η $f_{TBH}(\rho)$ έχει μία εκφυλισμένη ρίζα, αλλά ο ορίζοντας δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ορίζοντας μελανής οπής.

Το σύνορο έχει τη μετρική

$$ds_\theta^2 = -dt^2 + l^2 d\sigma^2 \quad , \quad (3.13)$$

έτσι χωρικά είναι μία υπερβολική πολλαπλότητα ακτίνας l (και καμπυλότητας $-1/l$).

Η δράση (3.1) με το δυναμικό της εξίσωσης (3.4) δέχεται μία στατική λύση μελανής οπής με τοπολογία $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$ και με scalar hair, η οποία δίνεται από

$$ds^2 = \frac{r(r+2r_0)}{(r+r_0)^2} \left[-F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\sigma^2 \right] \quad , \quad (3.14)$$

όπου

$$F(r) = \frac{r^2}{l^2} - g \frac{r_0}{l^2} r - 1 + g \frac{r_0^2}{l^2} - \left(1 - 2g \frac{r_0^2}{l^2} \right) \frac{r_0}{r} \left(2 + \frac{r_0}{r} \right) + g \frac{r^2}{2l^2} \ln \left(1 + \frac{2r_0}{r} \right) \quad , \quad (3.15)$$

ενώ το βαθμωτό πεδίο δίνεται από

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{r_0}{r+r_0} \right) \quad , \quad (3.16)$$

και υπακούει στις συνοριακές συνθήκες (3.8) όπως σχεδιάστηκε.

3.3 Θερμοδυναμική

Για να μελετήσουμε τη θερμοδυναμική της μελανής οπής θεωρούμε την Ευκλίδεια συνέχεια ($t \rightarrow i\tau$) της δράσης σε Χαμιλτονιανή μορφή

$$I = \int \left[\pi^{ij} \dot{g}_{ij} + p\dot{\phi} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i \right] d^3x dt + B, \quad (3.17)$$

όπου π^{ij} και p οι συζυγείς ορμές της μετρικής και του πεδίου αντίστοιχα και B ένας επιφανειακός όρος. Η λύση γράφεται:

$$ds^2 = N^2(r) f^2(r) d\tau^2 + f^{-2}(r) dr^2 + R^2(r) d\sigma^2 \quad (3.18)$$

όπου

$$N(r) = \frac{r(r+2r_0)}{(r+r_0)^2}, \quad f^2(r) = \frac{(r+r_0)^2}{r(r+2r_0)} F(r), \quad R^2(r) = \frac{r^3(r+2r_0)}{(r+r_0)^2}, \quad (3.19)$$

με περιοδικό τ , η περίοδος του οποίου είναι αντίστροφη της θερμοκρασίας, $\beta = 1/T$.

Η Χαμιλτονιανή δράση γίνεται

$$I = -\beta \sigma \int_{r_+}^{\infty} N(r) \mathcal{H}(r) dr + B, \quad (3.20)$$

όπου σ το εμβαδόν του Σ και

$$\mathcal{H} = NR^2 \left[\frac{1}{8\pi G} \left(\frac{(f^2)'R'}{R} + \frac{2f^2 R''}{R} + \frac{1}{R^2} (1+f^2) + \Lambda \right) + \frac{1}{2} f^2 (\phi')^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.21)$$

Η Ευκλίδεια λύση είναι στατική και ικανοποιεί την εξίσωση $\mathcal{H} = 0$. Έτσι, η τιμή της δράσης στο κλασικό όριο είναι απλώς ο επιφανειακός όρος B , ο οποίος πρέπει να μεγιστοποιεί τη δράση μέσα στην κλάση των θεωρούμενων πεδίων.

Υπολογίζουμε τη δράση όταν οι εξισώσεις πεδίου ισχύουν. Η συνθήκη ότι οι επιτρεπόμενες γεωμετρίες δεν πρέπει να έχουν κωνικές ανωμαλίες στον ορίζοντα, συνεπάγεται

$$T = \frac{F'(r_+)}{4\pi}. \quad (3.22)$$

Θεωρώντας μεγαλοκανονική κατανομή (δηλαδή θεωρώντας σταθερή τη θερμοκρασία), η μεταβολή του επιφανειακού όρου είναι

$$\delta B \equiv \delta B_\phi + \delta B_G,$$

όπου

$$\delta B_G = \frac{\beta\sigma}{8\pi G} \left[N \left(RR' \delta f^2 - (f^2)' R \delta R \right) + 2f^2 R \left(N \delta R' - N' \delta R \right) \right]_{r_+}^{\infty}, \quad (3.23)$$

και η συνεισφορά από το βαθμωτό πεδίο ισούται με

$$\delta B_\phi = \beta\sigma NR^2 f^2 \phi' \delta\phi|_{r_+}^\infty . \quad (3.24)$$

Για τη μετρική, η μεταβολή των πεδίων στο άπειρο δίνει

$$\begin{aligned} \delta f^2|_\infty &= \left(\frac{2}{l^2} r_0 - \frac{2(3 + (9 - 8g)r_0^2/l^2)}{3r} - \frac{4r_0(1 - 4r_0^2/l^2)}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right) \delta r_0 , \\ \delta\phi|_\infty &= \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \left(\frac{1}{r} - \frac{2r_0}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right) \delta r_0 , \\ \delta R|_\infty &= \left(-\frac{r_0}{r} + \frac{3r_0^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right) \delta r_0 , \end{aligned} \quad (3.25)$$

έτσι

$$\begin{aligned} \delta B_G|_\infty &= \frac{\beta\sigma}{8\pi G} \left(\frac{6r_0(r - 4(1 - 2g/9)r_0)}{l^2} - 2 + \mathcal{O}(r^{-1}) \right) \delta r_0 , \\ \delta B_\phi|_\infty &= \frac{\beta\sigma}{8\pi G} \left(-\frac{6r_0(r - 4r_0)}{l^2} + \mathcal{O}(r^{-1}) \right) \delta r_0 . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ο επιφανειακός όρος στο άπειρο είναι

$$B|_\infty = -\frac{\beta\sigma(3 - 8gr_0^2/l^2)}{12\pi G} r_0 . \quad (3.27)$$

Η μεταβολή του επιφανειακού όρου στον ορίζοντα μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \delta R|_{r_+} &= \delta R(r_+) - R'|_{r_+} \delta r_+ , \\ \delta f^2|_{r_+} &= - (f^2)'|_{r_+} \delta r_+ . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $\delta B_\phi|_{r_+}$ μηδενίζεται, αφού $f^2(r_+) = 0$, και

$$\begin{aligned} \delta B|_{r_+} &= -\frac{\beta\sigma}{16\pi G} N(r_+) (f^2)'|_{r_+} \delta R^2(r_+) \\ &= -\frac{\sigma}{4G} \delta R^2(r_+) . \end{aligned}$$

Έτσι ο επιφανειακός όρος στον ορίζοντα είναι

$$B|_{r_+} = -\frac{\sigma}{4G} R^2(r_+) . \quad (3.28)$$

Επομένως, όταν ικανοποιούνται οι εξισώσεις πεδίου, η Ευκλίδεια δράση γράφεται

$$I = -\frac{\beta\sigma(3 - 8gr_0^2/l^2)}{12\pi G} r_0 + \frac{\sigma}{4G} R^2(r_+) . \quad (3.29)$$

Η Ευκλίδεια δράση συνδέεται με την ελεύθερη ενέργεια μέσω της σχέσης $I = -\beta F$. Οπότε βρίσκουμε

$$I = S - \beta M, \quad (3.30)$$

όπου M και S η μάζα και η εντροπία αντίστοιχα.

$$M = \frac{\sigma(3 - 8gr_0^2/l^2)}{12\pi G} r_0, \quad S = \frac{\sigma}{4G} R^2(r_+) = \frac{A_H}{4G} \quad (3.31)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο 1^{ος} θερμοδυναμικός νόμος $dM = TdS$ ισχύει. Για $g = 0$, οι παραπάνω εκφράσεις ισούται με τις αντίστοιχες για την MTZ μελανή οπή [10]. Εναλλακτικά, η μάζα της μελανής οπής μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Ashtekar-Das [61]. Ο υπολογισμός επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα για την έκφραση (3.31) της μάζας.

Στην περίπτωση της τοπολογικής μελανής οπής (3.12) η θερμοκρασία, εντροπία και μάζα είναι αντίστοιχα,

$$T_{TBH} = \frac{3}{4\pi l} \left(\frac{\rho_+}{l} - \frac{l}{3\rho_+} \right), \quad S_{TBH} = \frac{\sigma\rho_+^2}{4G}, \quad M_{TBH} = \frac{\sigma\rho_+}{8\pi G} \left(\frac{\rho_+^2}{l^2} - 1 \right), \quad (3.32)$$

και επίσης ικανοποιείται ο νόμος $dM = TdS$.

Σημειώνουμε ότι, στο όριο $r_0 \rightarrow 0$, $F(r) \rightarrow \frac{r^2}{l^2} - 1$ λόγω της εξίσωσης (3.15), και η αντίστοιχη θερμοκρασία (3.22) γίνεται $T = \frac{1}{2\pi l}$, που ισούται με την θερμοκρασία της τοπολογικής μελανής οπής (3.32) στο όριο $\rho_0 \rightarrow 0$ ($\rho_+ \rightarrow 1$). Το κοινό όριο

$$ds_{\text{AdS}}^2 = - \left[\frac{r^2}{l^2} - 1 \right] dt^2 + \left[\frac{r^2}{l^2} - 1 \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (3.33)$$

είναι μία πολλαπλότητα αρνητικής σταθερής καμπυλότητας και έχει ορίζοντα γεγονότων στο $r = l$. Η TBH και η δική μας λύση ταιριάζουν συνεχώς στην κρίσιμη θερμοκρασία

$$T_0 = \frac{1}{2\pi l}, \quad (3.34)$$

που αντιστοιχεί σε $M_{TBH} = M = 0$, με την (3.33) να αποτελεί μια μεταβατική λύση.

Στην κρίσιμη θερμοκρασία (3.34) παρατηρείται μία αλλαγή φάσης όπως και στην περίπτωση της MTZ μελανής οπής (με $g = 0$). Εισάγοντας τους όρους με $g \neq 0$ στο δυναμικό δεν παρατηρείται ποιοτική αλλαγή των αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε λεπτομερώς τη θερμοδυναμική εξετάζοντας διάφορες τιμές της σταθεράς σύζευξης g . Για ευκολία θα δουλέψουμε σε μονάδες όπου $l = 1$. Ξεκινούμε με ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό της μελανής οπής, τον ορίζοντα r_+ (ρίζα της $F(r)$) (εξ. (3.15)). Στο διάγραμμα 3.1 βλέπουμε την r_0 εξάρτηση του ορίζοντα για αντιπροσωπευτικές τιμές της σταθεράς σύζευξης, $g = 3$ και $g = 0.0005$. Παρατηρούμε ότι, για $g = 3$, ο ορίζοντας μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία τιμές της παραμέτρου r_0 . Για $g = 0.0005$ βλέπουμε ότι, επιπρόσθετα, υπάρχει μια μέγιστη τιμή για την ακτίνα του ορίζοντα.

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τον ορίζοντα r_+ υπό τους όρους της αδιάστατης παραμέτρου

$$\xi = \frac{r_0}{r_+} \quad (3.35)$$

ως

$$r_+ = \frac{1 + \xi}{\sqrt{1 + g\xi(1 + \xi)(-1 + 2\xi + 2\xi^2) + \frac{1}{2}g \ln(1 + 2\xi)}} . \quad (3.36)$$

Η θερμοκρασία είναι

$$T = \frac{1 + \xi(1 + \xi)(4 - g(1 + 2\xi + 2\xi^2)) + \frac{1}{2}g(1 + 2\xi)^2 \ln(1 + 2\xi)}{2\pi(1 + 2\xi)\sqrt{1 + g\xi(1 + \xi)(-1 + 2\xi + 2\xi^2) + \frac{1}{2}g \ln(1 + 2\xi)}} , \quad (3.37)$$

ή ισοδύναμα

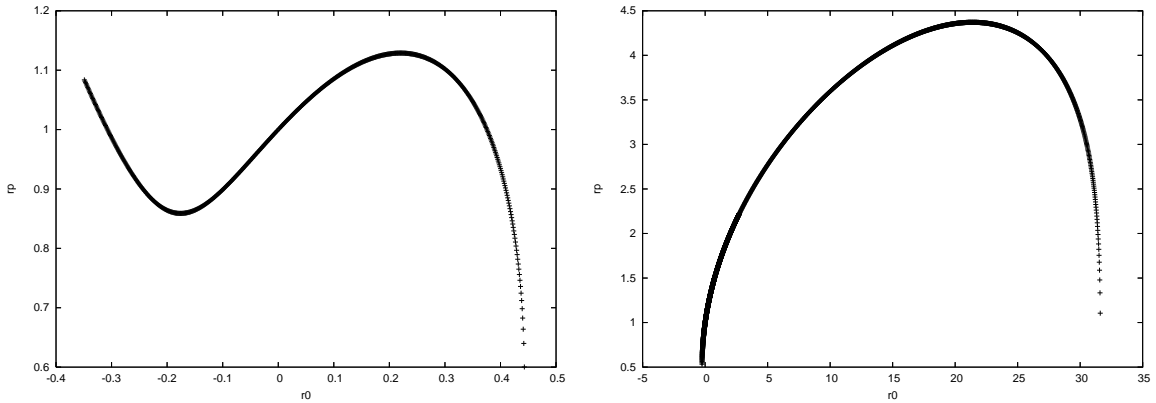
$$T = \frac{(r_+ + r_0)(r_+^2 + 4r_0r_+ + 4r_0^2 - 8gr_0^3r_+ - 8gr_0^4)}{2\pi r_+^3} , \quad (3.38)$$

μία τρίτης τάξης εξίσωση ως προς το r_+ , δείχνοντας έτσι, πως για δοθείσα θερμοκρασία, υπάρχουν γενικά τρεις πιθανές τιμές του ξ . Έτσι βρίσκουμε τρεις διαφορετικούς κλάδους λύσεων της hairy μελανής οπής.

Αρχίζουμε την ανάλυση μας με μία σχετικά μεγάλη τιμή της σταθεράς σύζευξης g , δηλαδή $g = 3$ και υπολογίζουμε την ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων, τη θερμοκρασία και την Ευκλείδεια δράση για διάφορες τιμές του r_0 . Στο αριστερό διάγραμμα 3.2 σχεδιάζουμε το r_0 συναρτήσει του T και είναι φανερό ότι υπάρχει ένα διάστημα της θερμοκρασίας T στο οποίο αντιστοιχούν τρεις τιμές του r_0 . Έξω από αυτό το διάστημα, υπάρχει μία μόνο λύση. Το αντίστοιχο γράφημα για την Ευκλείδεια δράση φαίνεται δεξιά στο ίδιο διάγραμμα. Η δράση για την τοπολογική μελανή οπή με την κοινή θερμοκρασία T έχει σχεδιαστεί με μία συνεχή γραμμή, ενώ οι δράσεις για τις hairy μελανές οπές με τη μορφή σημείων. Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (3.12) δίνει για τη θερμοκρασία της τοπολογικής μελανής οπής $T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3\rho_+}{l^2} + \frac{1}{\rho_+} \right) \Rightarrow \rho_+ = \frac{2\pi T}{3} + \sqrt{\left(\frac{2\pi T}{3} \right)^2 - \frac{1}{3}}$. Η μεγαλύτερη Ευκλείδεια δράση (η μικρότερη ελεύθερη ενέργεια) θα επικρατήσει.

Όπως είδαμε υπάρχουν τρεις διαφορετικοί κλάδοι λύσεων για τη hairy μελανή οπή, που αντιστοιχούν στις τρεις διαφορετικές τιμές του r_0 . Συγκεκριμένα για δεδομένη θερμοκρασία (π.χ., $T = 0.16$) το αλγεβρικά μικρότερο r_0 αντιστοιχεί στην αλγεβρικά μικρότερη Ευκλείδεια δράση. Όμοια η μέση και η μέγιστη τιμή της παραμέτρου r_0 αντιστοιχούν στη μέση και μέγιστη τιμή της Ευκλείδειας δράσης. Η μέση Ευκλείδεια δράση για τη μελανή οπή είναι πολύ κοντά στην τιμή της δράσης για την τοπολογική. Στην πραγματικότητα, είναι λίγο μικρότερη από τη δεύτερη για $T < \frac{1}{2\pi} \approx 0.159$ και ελαφρώς μεγαλύτερη μετά από αυτήν την τιμή. Εάν ήταν ο μοναδικός κλάδος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η hairy μελανή οπή επικρατεί για μικρές θερμοκρασίες, ενώ για μεγάλες θερμοκρασίες η τοπολογική μελανή οπή είναι προτιμητέα. Αυτή θα ήταν μία παρόμοια κατάσταση με την MTZ.

Όμως η παρουσία άλλων δύο κλάδων λύσεων αλλάζει τελείως τα συμπεράσματά μας. Ο άνω κλάδος δείχνει ότι η hairy μελανή οπή επικρατεί μέχρι $T \approx 0.20$. Όταν η σταθερά σύζευξης g μειώνεται, η εξίσωση (3.37) μαζί με την απαίτηση η θερμοκρασία να είναι θετική, δείχνουν ότι οι αποδεκτές τιμές του r_0 είναι δύο αντί για τρεις, όπως μπορούμε να δούμε στο αριστερό διάγραμμα 3.3. Ο χαμηλότερος κλάδος του προηγούμενου αντίστοιχου διαγράμματος 3.2 μικραίνει για μειούμενο g και τελικά εξαφανίζεται. Μία ενδιαφέρουσα συνέπεια



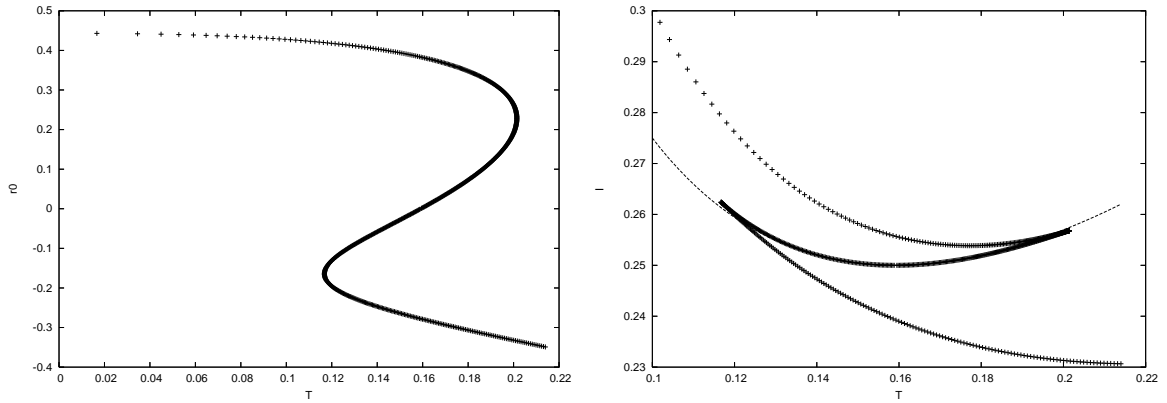
Σχήμα 3.1: Ο ορίζοντας ως προς την παράμετρο r_0 για $g = 3$ (αριστερά) και $g = 0.0005$ (δεξιά).

αυτού είναι ότι η θερμοκρασία έχει ένα άνω όριο. Το διάγραμμα για τις Ευκλείδειες δράσεις (διάγραμμα 3.3, δεξιά) επηρεάζεται αντίστοιχα. Υπάρχουν μόνο δύο κλάδοι για τη hairy μελανή οπή, αντί για τρεις στο διάγραμμα 3.2 και το γράφημα τελειώνει στο δεξί μέρος στο $T \approx 1.25$. Η συνεχής τιμή αναπαριστά τη δράση της τοπολογικής μελανής οπής στην ίδια θερμοκρασία. Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, για παράδειγμα η αλλαγή φάσης μετατοπίζεται στο $T \approx 0.80$. Επιπρόσθετα, η μεγαλύτερη τιμή του r_0 αντιστοιχεί στον άνω κλάδο της hairy μελανής οπής.

Για να κατανοήσουμε τη φύση αυτής της αλλαγής φάσης μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα φάσης, έτσι ώστε να δούμε ποια είναι η επικρατούσα λύση για δεδομένο ζεύγος g και T . Το αποτέλεσμα φαίνεται στο διάγραμμα 3.4. Η hairy λύση επικρατεί κάτω από την καμπύλη η οποία δείχνει την κρίσιμη θερμοκρασία ως συνάρτηση της σταθεράς σύζευξης g . Το πιο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό του διαγράμματος είναι ότι η κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει καθώς $g \rightarrow 0$. Έτσι δε συγκλίνει στην τιμή για την MTZ, $\frac{1}{2\pi} \approx 0.159$ στο $g = 0$. Ακόμα και για τις πιο ελάχιστες μη μηδενικές τιμές του g η κρίσιμη θερμοκρασία αποκτά εξαιρετικά υψηλές τιμές! Αυτό δείχνει να θέτει το σημείο σύμμορφης αναλλοiotτητας (MTZ μελανή οπή) ως μία ειδική περίπτωση μέσα στο σύνολο αυτών των hairy μελανών οπών. Με άλλα λόγια, η αποκατάσταση της σύμμορφης αναλλοiotτητας δεν είναι μία ομαλή διαδικασία, και η MTZ δεν μπορεί να παρατηρηθεί με συνεχές τρόπο καθώς $g \rightarrow 0$. Στην πραγματικότητα, φαίνεται ότι (ακόμα και απειροστά) μακριά από το σύμμορφο σημείο $g = 0$ οι μελανές οπές είναι κατά βάση hairy!

3.4 Ανάλυση Ευστάθειας

Για να εξετάσουμε την ευστάθεια της hairy μελανής οπής είναι πιο βολικό να δουλέψουμε στο Einstein frame. Θα δουλέψουμε σε σύστημα μονάδων όπου η ακτίνα του συνόρου είναι $l = 1$.



Σχήμα 3.2: Η παράμετρος r_0 (αριστερά) και η Ευκλείδεια δράση ως προς τη θερμοκρασία για $g = 3$ (δεξιά).

Ξεκινάμε από το line element της hairy μελανής οπής,

$$ds_0^2 = \frac{\hat{r}(\hat{r} + 2r_0)}{(\hat{r} + r_0)^2} \left[-F(\hat{r})dt^2 + \frac{d\hat{r}^2}{F(\hat{r})} + \hat{r}^2 d\sigma^2 \right], \quad (3.39)$$

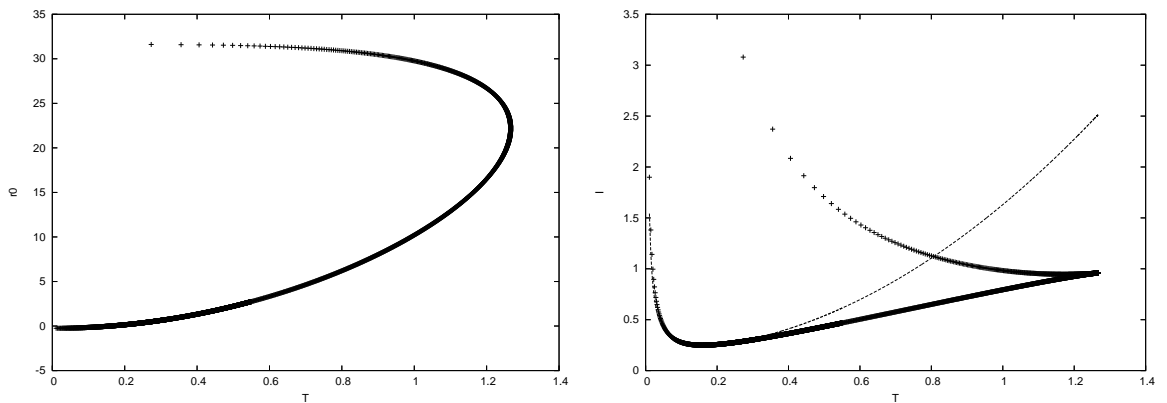
το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$ds^2 = -\frac{f_0}{h_0^2} dt^2 + \frac{dr^2}{f_0} + r^2 d\sigma^2 \quad (3.40)$$

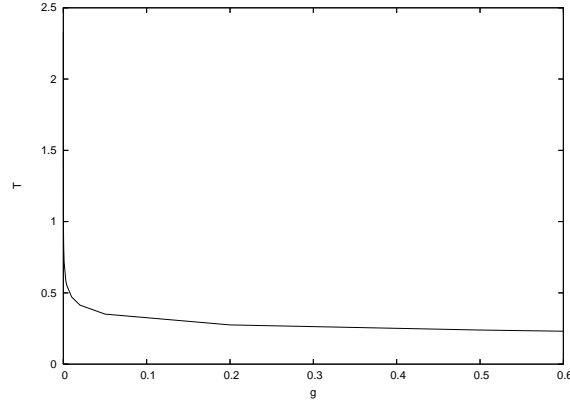
χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$$f_0(r) = F(\hat{r}) \left(1 + \frac{r_0^2}{(\hat{r} + 2r_0)(\hat{r} + r_0)} \right)^2, \quad (3.41)$$

$$h_0(r) = \left(1 + \frac{r_0^2}{(\hat{r} + 2r_0)(\hat{r} + r_0)} \right) \frac{\hat{r} + r_0}{\sqrt{\hat{r}(\hat{r} + 2r_0)}},$$



Σχήμα 3.3: PH παράμετρος r_0 (αριστερά) και η Ευκλείδεια δράση ως προς τη θερμοκρασία για $g = 0.0005$ (δεξιά).



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα φάσης. Για σημεία κάτω από την καμπύλη η hairy λύση είναι προτιμητέα.

υπό το μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$r = \frac{\hat{r}^{3/2}(\hat{r} + 2r_0)^{1/2}}{\hat{r} + r_0} . \quad (3.42)$$

Η λύση για το βαθμωτό πεδίο είναι,

$$\phi_0(r) = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \tanh^{-1} \frac{r_0}{\hat{r} + r_0} , \quad (3.43)$$

που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (3.8) με

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} |r_0| . \quad (3.44)$$

Ενδιαφερόμαστε να δούμε πότε η μελανή οπή είναι ασταθής (χάνει το hair και μετατρέπεται στην TBH) και να συζητήσουμε τα αποτελέσματα στο πλαίσιο της θερμοδυναμικής. Εφαρμόζουμε τη διαταραχή

$$f(r, t) = f_0(r) + f_1(r)e^{\omega t}, \quad h(r, t) = h_0(r) + h_1(r)e^{\omega t}, \quad \phi(r, t) = \phi_0(r) + \frac{\phi_1(r)}{r}e^{\omega t} . \quad (3.45)$$

η οποία σέβεται τις συνοριακές συνθήκες (3.8) με $\omega > 0$ για να εξελιχθεί μια αστάθεια.

Οι εξισώσεις πεδίου γράφονται:

$$-1 - f - rf' + rf \frac{h'}{h} + 8\pi Gr^2 V(\phi) = 0 , \quad (3.46)$$

$$\dot{f} + rf\dot{\phi}' = 0 , \quad (3.47)$$

$$2h' + rh \left[\frac{h^2}{f^2} \dot{\phi}^2 + \phi'^2 \right] = 0 , \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{\dot{h}}{f}\dot{\phi}\right) - \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{f}{h}\phi'\right)' + \frac{1}{h}V'(\phi) = 0. \quad (3.49)$$

Οι εξισώσεις δίνουν μία κυματική εξίσωση τύπου Schrödinger για τη βαθμωτή διαταραχή,

$$-\frac{d^2\phi_1}{dr_*^2} + \mathcal{V}\phi_1 = -\omega^2\phi_1, \quad (3.50)$$

όπου ορίσαμε την συντεταγμένη

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{h_0}{f_0}, \quad (3.51)$$

και το effective δυναμικό δίνεται από

$$\mathcal{V} = \frac{f_0}{h_0^2} \left[-\frac{1}{2}(1 + r^2\phi_0'^2)\phi_0'^2 f_0 + (1 - r^2\phi_0'^2)\frac{f_0'}{r} + 2r\phi_0'V'(\phi_0) + V''(\phi_0) \right]. \quad (3.52)$$

Η ακριβής μορφή της εξίσωσης Schrödinger είναι:

$$-F(\hat{r})\frac{d}{d\hat{r}}\left[F(\hat{r})\frac{d\phi_1}{d\hat{r}}\right] + \mathcal{V}\phi_1 = -\omega^2\phi_1, \quad (3.53)$$

όπου η συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης F έχει δοθεί στην εξίσωση (3.15) και ¹

$$\mathcal{V} = \frac{r_0^2 F(\hat{r})}{\hat{r}^2 \left(1 + \frac{2r_0}{\hat{r}}\right)^2 \left(1 + \frac{3r_0}{\hat{r}} + \frac{3r_0^2}{\hat{r}^2}\right)^2} \left\{ 5 + \frac{2 + (11g + 54)r_0^2}{r_0\hat{r}} + \frac{29 + (47g + 189)r_0^2}{\hat{r}^2} \right. \quad (3.54)$$

$$+ \frac{r_0(150 + (-3g + 270)r_0^2)}{\hat{r}^3} + \frac{r_0^2(396 + (-351g + 135)r_0^2)}{\hat{r}^4} + \frac{r_0^3(612 - 873gr_0^2)}{\hat{r}^5} \quad (3.55)$$

$$+ \frac{r_0^4(582 - 1047gr_0^2)}{\hat{r}^6} + \frac{324r_0^5(1 - 2gr_0^2)}{\hat{r}^7} + \frac{81r_0^6(1 - 2gr_0^2)}{\hat{r}^8} \quad (3.56)$$

$$\left. + \frac{g}{2} \left(5 + \frac{54r_0}{\hat{r}} + \frac{189r_0^2}{\hat{r}^2} + \frac{270r_0^3}{\hat{r}^3} + \frac{135r_0^4}{\hat{r}^4} \right) \ln \left(1 + \frac{2r_0}{\hat{r}} \right) \right\}. \quad (3.57)$$

Κοντά στον ορίζοντα η εξίσωση Schrödinger απλοποιείται ως,

$$-[f'(\hat{r}_+)]^2 \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \left[\epsilon \frac{d\phi_1}{d\epsilon} \right] = -\omega^2\phi_1, \quad \epsilon = \hat{r} - \hat{r}_+ \quad (3.58)$$

και η αποδεκτή λύση της γράφεται

$$\phi_1 \sim \epsilon^{\kappa\omega}, \quad \kappa = \frac{1}{f'(\hat{r}_+)}, \quad \omega > 0. \quad (3.59)$$

¹Έχουμε θέσει $8\pi G = 1$.

Η απαίτηση για ομαλότητα του βαθμωτού πεδίου στον ορίζοντα ($r \rightarrow r_+$) επιβάλλει τις συνοριακές συνθήκες

$$\phi_1 = 0 \quad , \quad (r - r_+) \phi_1' = \kappa \omega \phi_1 \quad , \quad \kappa > 0 \quad . \quad (3.60)$$

Για δοσμένο $\omega > 0$, καθορίζουν μοναδικά τη κυματοσυνάρτηση.

Στο σύνορο ($\hat{r} \rightarrow \infty$), η κυματική εξίσωση προσεγγίζεται από

$$- \frac{d^2 \phi_1}{dr_*^2} + 5r_0^2 \phi_1 = -\omega^2 \phi_1 \quad , \quad (3.61)$$

με λύσεις

$$\phi_1 = e^{\pm E r_*} \quad , \quad E = \sqrt{\omega^2 + 5r_0^2} \quad , \quad (3.62)$$

όπου $r_* = \int \frac{dr}{f(r)} = -\frac{1}{r} + \dots$. Επομένως, για μεγάλα r ,

$$\phi_1 = A + \frac{B}{r} + \dots \quad (3.63)$$

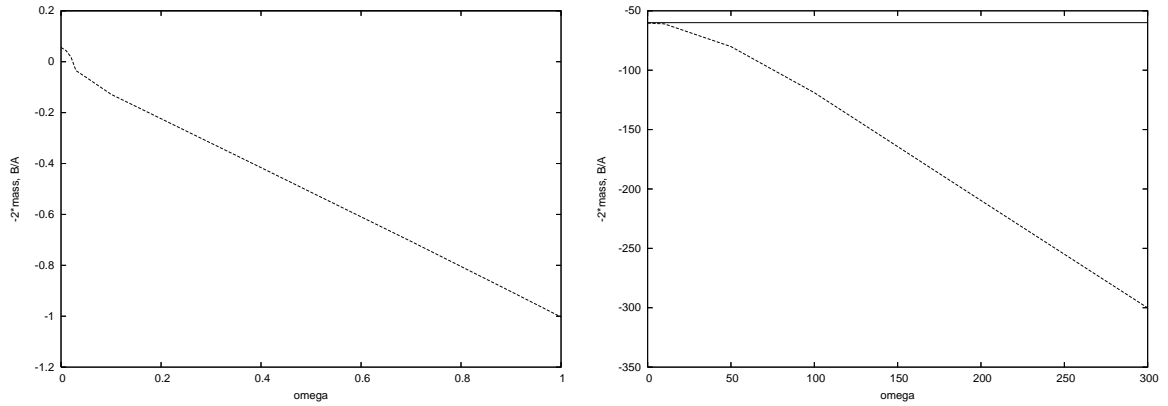
Για να ταιριάζουν οι συνοριακές συνθήκες (3.8), πρέπει

$$\frac{B}{A} = 2c\alpha_0 = -2r_0 \quad . \quad (3.64)$$

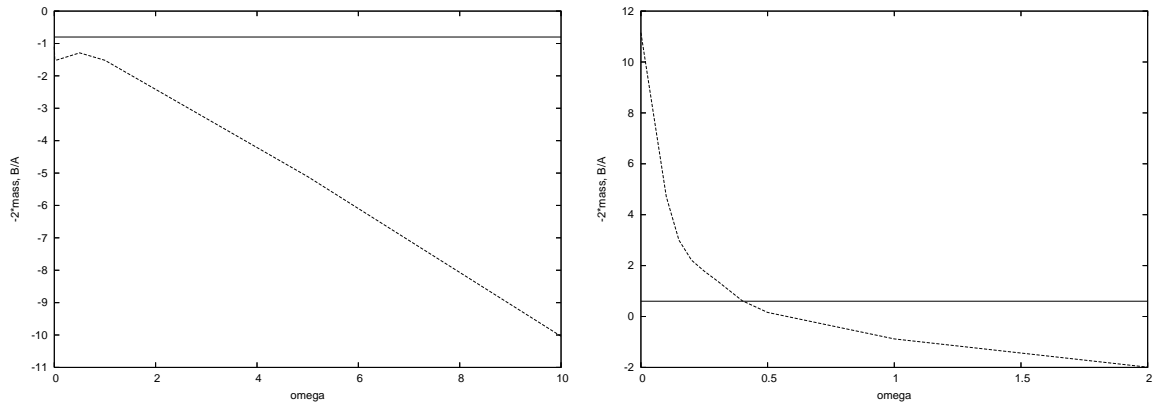
Αφού η κυματοσυνάρτηση έχει ήδη καθοριστεί από τις συνοριακές συνθήκες στον ορίζοντα και επομένως και ο λόγος B/A , παίρνουμε έναν περιορισμό για το ω . Αν η εξίσωση (3.64) έχει λύση, τότε η μελανή οπή είναι ασταθής. Εάν δεν έχει, τότε δεν υπάρχει αστάθεια τέτοιου τύπου (παρόλα αυτά, θα πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός για μη-διαταρακτικές αστάθειες.).

Στο σχήμα 3.5 (αριστερά) δείχνουμε το λόγο B/A για την κανονική MTZ μελανή οπή (που αντιστοιχεί στο $g = 0$) ως προς το ω σε μία τυπική τιμή για την παράμετρο μάζας, δηλαδή $r_0 = -0.10$. Είναι φανερό ότι η τιμή του λόγου είναι κάτω από τις τιμές $2r_0 = +0.20$. Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να έχουμε λύση για αυτήν την εξίσωση, οπότε η λύση είναι ευσταθής. Στην πραγματικότητα αυτή η τιμή της μάζας βρίσκεται στο ενδιαφέρον διάστημα για αυτήν την μελανή οπή, αφού σύμφωνα με τη θερμοδυναμική απαιτείται ότι για αρνητικές τιμές του r_0 η MTZ είναι προτιμητέα σε σχέση με την τοπολογική μελανή οπή. Βρίσκουμε ότι η MTZ είναι ευσταθής.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση $g = 0.0005$, για την οποία έχουμε ήδη παρουσιάσει δεδομένα στο σχήμα 3.3. Όπως εξηγήσαμε εκεί, ο πιο ενδιαφέρον κλάδος των διαγραμμάτων είναι ο ανώτερος, στο δεξί γράφημα, ο οποίος κυριαρχεί στις χαμηλές θερμοκρασίες T και αντιστοιχεί σε μεγάλες τιμές του r_0 (τυπικά γύρω στο 30 στα αριστερά του ίδιο σχήματος). Έτσι θέτουμε $g = 0.0005$, $r_0 = +30$ και σχεδιάζουμε το λόγο B/A ως προς το ω στο δεξί διάγραμμα του σχήματος 3.5. Είναι φανερό ότι η καμπύλη βρίσκεται συστηματικά κάτω από την τιμή $-2r_0 = -60$ και έτσι δεν υπάρχει λύση, έτσι η hairy μελανή οπή με αυτές τις παραμέτρους είναι ευσταθής.



Σχήμα 3.5: Ευστάθεια της μελανής οπής MTZ (αριστερά) για $r_0 = -0.10$. Όμοια για τη hairy μελανή οπή για $g = 0.0005$, $r_0 = +30$ (δεξιά).



Σχήμα 3.6: Ευστάθεια της hairy μελανής οπής για $g = 3$ και $r_0 = +0.40$ (αριστερά). Όμοια για $r_0 = -0.30$ (δεξιά).

Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση με $g = +3$, η οποία έχει τρεις κλάδους. Στο αριστερά διάγραμμα του σχήματος 3.6 βλέπουμε τα αποτελέσματα για $r_0 = +0.40$, που αντιστοιχεί στον άνω κλάδο του σχήματος 3.2. Η καμπύλη και πάλι είναι κάτω από την τιμή $-2r_0 = -0.80$ και δεν είναι δυνατή μία λύση, οπότε η hairy μελανή οπή είναι ευσταθής. Στο δεξιό διάγραμμα του σχήματος 3.6 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για $r_0 = -0.30$, που αντιστοιχεί στον χαμηλότερο κλάδο του σχήματος 3.2, που εξαφανίζεται για μειούμενο g . Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε κάτι ποιοτικά διαφορετικό: η καμπύλη τέμνει την ευθεία $-2r_0 = +0.60$ γύρω στο $\omega \approx 0.40$ και είναι δυνατή μια λύση, δείχνοντας αστάθεια. Έτσι, για $g = 3$ η hairy μελανή οπή μπορεί να είναι ευσταθής ή ασταθής, ανάλογα με την τιμή του r_0 .

3.5 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε μία νέα κλάση λύσεων hairy μελανών οπών σε ασυμπτωτικά AdS χώρο. Το βαθμωτό πεδίο είναι ελάχιστα συζευγμένο στη βαρύτητα και έχει ένα μη τετριμμένο δυναμικό αυτο-αλληλεπίδρασης. Μία σταθερά σύζευξης g στο δυναμικό παραμετροποιεί τις λύσεις. Εάν $g = 0$ επιστρέφουμε στην σύμμορφα αναλλοίωτη λύση μελανής οπής MTZ. Εάν $g \neq 0$ μία νέα κλάση λύσεων hairy μελανών οπών δημιουργείται. Το βαθμωτό πεδίο είναι σύμμορφα συζευγμένο αλλά οι λύσεις δεν είναι σύμμορφα αναλλοίωτες. Αυτές οι λύσεις είναι σταθερές κάτω από διαταραχές κοντά στο σύμμορφο σημείο για αρνητική μάζα και μπορούν να αναπτύξουν αστάθεια για θετική μάζα.

Εξετάσαμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες των λύσεων. Υπολογίζοντας την ελεύθερη ενέργεια δείξαμε ότι για γενικό g , πέρα από την αλλαγή φάσης της μελανής οπής MTZ στη κρίσιμη θερμοκρασία $T = 1/2\pi l$, υπάρχει ακόμα μία κρίσιμη θερμοκρασία, υψηλότερη από της MTZ, η οποία εξαρτάται από το g και στην οποία συμβαίνει μία πρώτης τάξης αλλαγή φάσης της τοπολογικής μελανής οπής προς την hairy. Η ύπαρξη μίας δεύτερης κρίσιμης θερμοκρασίας οφείλεται στο σπάσιμο της σύμμορφης αναλλοιότητας. Καθώς $g \rightarrow 0$ αυτή η δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει, υποδεικνύοντας ότι δεν υπάρχει συνεχές όριο στη λύση MTZ.

Οι λύσεις που παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν σε αυτό το Κεφάλαιο έχουν υπερβολικό ορίζοντα. Υπάρχουν επίσης και λύσεις της ίδιας μορφής με επίπεδο ή σφαιρικό ορίζοντα. Όμως αυτές οι λύσεις έχουν παθολογίες. Στην λύση με επίπεδο ορίζοντα, το βαθμωτό πεδίο αποκλίνει στον ορίζοντα, σε αντιστοιχία με τα θεωρήματα “no-hair”. Στην περίπτωση του σφαιρικού ορίζοντα, υπολογίζοντας την ελεύθερη ενέργεια βρίσκουμε ότι η λύση κενού είναι πάντοτε προτιμητέα. Επιπλέον, μελετώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά βρίσκουμε ότι είναι ασταθής για οποιαδήποτε τιμή της μάζας.

Κεφάλαιο 4

Scalar Hair από τη Σύζευξη των Παραγώγων ενός Βαθμωτού Πεδίου με τον Τανυστή του Einstein

4.1 Εισαγωγή

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ένα βαρυτικό σύστημα μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς που αποτελείται από ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον τανυστή του Einstein. Μία Reissner-Nordström μελανή οπή υφίσταται μια δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μια hairy μελανή οπή που έχει γενικά ανισοτροπικά hair, σε μία κρίσιμη θερμοκρασία την οποία και υπολογίζουμε. Υπολογίζουμε ακριβώς τις ιδιότητες της λύσης κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία και βρίσκουμε ότι είναι ενεργειακά προτιμητέα από την αντίστοιχη Reissner-Nordström μελανή οπή.

Τα θεωρήματα “no-hair” είναι πολύ ισχυρά εργαλεία για τη μελέτη λύσεων μελανών οπών όταν η βαρύτητα είναι συζευγμένη με ύλη. Περιγράφουν την ύπαρξη και ευστάθεια τετραδιάστατων ασυμπτωτικά επίπεδων μελανών οπών συζευγμένων με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ή στο κενό. Στην περίπτωση ελάχιστα συζευγμένων βαθμωτών πεδίων σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο τα θεωρήματα έχουν αποδειχτεί εισάγοντας συνθήκες στη μορφή του δυναμικού αυτοαλληλεπίδρασης [40]. Επίσης έχουν γενικευτεί σε μη ελάχιστα συζευγμένα βαθμωτά πεδία [41].

Πρόσφατα άρχισαν να μελετώνται scalar-tensor θεωρίες με σύζευξη μεταξύ των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου και της καμπυλότητας. Η πιο γενική Λαγκρανζιανή, γραμμική στην καμπυλότητα μέσω του βαθμωτού Ricci R , τετραγωνική ως προς το ϕ , και περιέχοντας όρους με τέσσερις παραγώγους μελετήθηκε στο [62]. Εκεί δείχτηκε ότι αυτή η θεωρία δεν μπορεί να επαναδιατυπωθεί σε Einsteinian μορφή μέσω ενός σύμμορφου επανορισμού. Επιπλέον ότι ακόμα και χωρίς να θεωρηθεί ένα effective δυναμικό, μπορεί να δημιουργηθεί μια effective κοσμολογική σταθερά και μια πληθωριστική φάση.

Ακολούθως στο [63] βρέθηκε ότι η εξίσωση κίνησης για ένα βαθμωτό πεδίο μπορεί να μειωθεί σε δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση όταν είναι κινητικά συζευγμένο με τον τανυστή του Einstein. Ύστερα θεωρήθηκε η κοσμολογική εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου συζευγμένου

με τον τανυστή του Einstein και δείχτηκε ότι το σύμπαν στα πρώτα στάδια έχει μία quasi-de Sitter συμπεριφορά, που αντιστοιχεί σε μία κοσμολογική σταθερά αντιστρόφως ανάλογη της σταθεράς σύζευξης του πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Αυτές οι ιδιότητες της σύζευξης των παραγώγων του βαθμωτού με την καμπυλότητα, πυροδότησαν το ενδιαφέρον για τη μελέτη των κοσμολογικών συνεπειών αυτής της νέου τύπου scalar-tensor θεωρίας [64, 65, 66, 67].

Η δυναμική εξέλιξη ενός βαθμωτού πεδίου συζευγμένου με τον τανυστή του Einstein στο υπόβαθρο μιας Reissner-Nordström μελανής οπής μελετήθηκε στο [68]. Υπολογίζοντας το quasinormal φάσμα για βαθμωτές διαταραχές, βρέθηκε ότι για ασθενή σύζευξη και για μικρή στροφορμή, το effective δυναμικό έξω από τον ορίζοντα της μελανής οπής είναι πάντα θετικό, υποδηλώνοντας ότι η μελανή οπή του υποβάθρου είναι ευσταθής για ασθενή σύζευξη. Όμως για μεγαλύτερη στροφορμή και καθώς η σταθερά σύζευξης αυξάνει περισσότερο από μια κρίσιμη τιμή, το effective δυναμικό αναπτύσσει ένα αρνητικό χάσμα κοντά στον ορίζοντα γεγονότων, υποδηλώνοντας αστάθεια της μελανής οπής υποβάθρου.

Η προηγούμενη συζήτηση υποδεικνύει ότι η σύζευξη των παραγώγων ενός βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein, σε υπόβαθρο είτε κοσμολογικό είτε μελανής οπής, δημιουργεί ένα φαινόμενο παρόμοιο με την παρουσία μιας effective κοσμολογικής σταθεράς. Σε αυτό το κεφάλαιο ερευνούμε αυτό το φαινόμενο περισσότερο. Θεωρούμε μια σφαιρικά συμμετρική Reissner-Nordström μελανή οπή ως υπόβαθρο και τη διαταράσσουμε εισάγοντας έναν όρο που περιέχει σύζευξη των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Δείχνουμε ότι σε αυτό το βαρυτικό σύστημα υπάρχει μία κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται μία δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μία ανισοτροπική hairy μελανή οπή και ότι το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό στον ορίζοντα.

Λύνοντας αριθμητικά κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία το συζευγμένο δυναμικό σύστημα των Einstein-Maxwell-Klein-Gordon εξισώσεων μελετάμε τη συμπεριφορά της hairy λύσης μελανής οπής. Υπολογίζουμε τη θερμοκρασία της και τη συγκρίνουμε με την αντίστοιχη θερμοκρασία της Reissner-Nordström μελανής οπής. Βρίσκουμε ότι πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία η Reissner-Nordström είναι ασταθής και υπολογίζοντας τις ελεύθερες ενέργειες δείχνουμε ότι η νέα hairy μελανή οπή είναι ενεργειακά προτιμητέα από την αντίστοιχη Reissner-Nordström.

Στην Ενότητα 4.2 παρουσιάζουμε τις εξισώσεις και περιγράφουμε τη λύση. Στην Ενότητα 4.3 βρίσκουμε την μηδενικής τάξης λύση και υπολογίζουμε την κρίσιμη θερμοκρασία κοντά στην οποία η Reissner-Nordström μελανή οπή μπορεί να γίνει ασταθής και να αποκτήσει hair. Στην Ενότητα 4.4 βρίσκουμε τις πρώτης τάξης λύσεις του συστήματος των Einstein-Maxwell-Klein-Gordon εξισώσεων, οι οποίες είναι hairy μελανές οπές κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία. Στην Ενότητα 4.5 συζητούμε την θερμοδυναμική ευστάθεια της πρώτης τάξης λύσης. Στην Ενότητα 4.6 συζητάμε την ακρίβεια της διαταρακτικής μεθόδου. Τέλος στην Ενότητα 4.7 κλείνουμε με τα συμπεράσματα.

4.2 Οι εξισώσεις πεδίου

Θεωρούμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu} + \kappa G^{\mu\nu})D_\mu\varphi(D_\nu\varphi)^* - m^2|\varphi|^2, \quad (4.1)$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ και e , m το φορτίο και η μάζα του βαθμωτού πεδίου και κ η σταθερά σύζευξης του πεδίου με τον ταυιστή του Einstein, με διαστάσεις μήκος στο τετράγωνο.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση άμαζου και αφόρτιστου βαθμωτού πεδίου, θέτοντας

$$m = 0, \quad e = 0, \quad (4.2)$$

και θα αφήσουμε την μελέτη της γενικής περίπτωσης για το επόμενο Κεφάλαιο. Συνεπώς το βαθμωτό πεδίο φ είναι πραγματικό.

Με την επιλογή των παραμέτρων (4.2) οι εξισώσεις πεδίου που προκύπτουν από την Λαγκρανζιανή (4.1) είναι οι εξισώσεις του Einstein:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

οι εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (4.4)$$

και η εξίσωση Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g}(g^{\mu\nu} + \kappa G^{\mu\nu})\partial_\nu\varphi] = 0 \quad (4.5)$$

Ο ταυιστής ενέργειας ορμής έχει τρεις συνεισφορές

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(EM)} + T^{(\varphi)}_{\mu\nu} + \kappa\Theta_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

όπου $T_{\mu\nu}^{(EM)}$ ο ταυιστής ενέργειας ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, $T_{\mu\nu}^{(\varphi)}$ του βαθμωτού πεδίου

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi \quad (4.7)$$

και $\Theta_{\mu\nu}$ μια επιπλέον πηγή ύλης που προκύπτει από τη σύζευξη παραγώγων του βαθμωτού πεδίου με τον ταυιστή του Einstein

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi R - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla\varphi)^2 \\ & - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi R^{\alpha\beta} + 2\nabla_\alpha\varphi\nabla_{(\mu}\varphi R_{\nu)}^\alpha + \frac{1}{2}\square(\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi) - \nabla_\alpha\nabla_{(\mu}(\nabla_{\nu)}\varphi\nabla^\alpha\varphi) \\ & + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\varphi\nabla^\beta\varphi). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Οι εξισώσεις πεδίου για $\varphi = 0$ έχουν ως λύση τη Reissner-Nordström μελανή οπή. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε hairy λύσεις, με $\varphi \neq 0$. Το θεώρημα no-hair θα παρακαμφθεί εξαιτίας της σύζευξης με τον τανυστή του Einstein (Einstein hair).

Για να λύσουμε τις μη γραμμικές εξισώσεις πεδίου, θα αναπτύξουμε γύρω από μια Reissner-Nordström μελανή οπή. Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν μπορούν όλες οι Reissner-Nordström να θεωρηθούν ως υπόβαθρο σε μια τέτοια διαταρακτική ανάπτυξη. Θα δείξουμε ότι για δεδομένο φορτίο της μελανής οπής, υπάρχει γενικά μοναδική μάζα για την Reissner-Nordström. Η αντίστοιχη θερμοκρασία τότε, αναμένεται να είναι μια κρίσιμη θερμοκρασία κατά την οποία παρατηρείται μια αλλαγή φάσης από μια Reissner-Nordström σε μια hairy μελανή οπή.

Εισάγοντας λοιπόν την (μικρή) παράμετρο τάξης ε , θέτουμε

$$\varphi = \varepsilon(\varphi^{(0)} + \varepsilon^2\varphi^{(1)} + \dots) \quad (4.9)$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon^2 g_{\mu\nu}^{(1)} + \dots \quad (4.10)$$

$$A_\mu = A_\mu^{(0)} + \varepsilon^2 A_\mu^{(1)} + \dots \quad (4.11)$$

και λύνουμε τις εξισώσεις διαταρακτικά.

Για να βρούμε μια στατική λύση, είναι βολικό να θεωρήσουμε τη μετρική¹ και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό

$$ds^2 = -e^{-\alpha} dt^2 + l^2 e^\alpha [e^{-\beta} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (4.12)$$

$$A_t = A(r, \theta) \quad , \quad \vec{A} = \vec{0} \quad (4.13)$$

Οι συναρτήσεις της μετρικής αναπτύσσονται ως εξής:

$$l = l_0 + \varepsilon^2 l_1 + \dots \quad (4.14)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 + \dots \quad (4.15)$$

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon^2 \beta_1 + \dots \quad (4.16)$$

ενώ το ηλεκτροστατικό δυναμικό ως

$$A = A_0 + \varepsilon^2 A_1 + \dots \quad (4.17)$$

Για τον τανυστή ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχουμε:

$$T_t^{(EM)t} = -T_\phi^{(EM)\phi} = \frac{1}{2r^2 l^2 g} [r^2 (\partial_r A)^2 + (\partial_\theta A)^2] \quad (4.18)$$

$$T_r^{(EM)r} = -T_\theta^{(EM)\theta} = \frac{1}{2r^2 l^2 g} [r^2 (\partial_r A)^2 - (\partial_\theta A)^2] \quad (4.19)$$

$$T_r^{(EM)\theta} = \frac{1}{l^2 g} \partial_r A \partial_\theta A \quad (4.20)$$

¹ Αυτή είναι μια μορφή της μετρικής Lewis-Parapetrou γραμμένη σε ισοτροπικές συντεταγμένες, στην οποία όλες οι συναρτήσεις f , l και g εξαρτώνται μόνο από r και θ [69].

Έτσι οι εξισώσεις του Einstein γράφονται

$$R_t^t + R_\phi^\phi = 8\pi G(T_t^t + T_\phi^\phi - T) \quad (4.21)$$

$$R_t^t = 8\pi G(T_t^t - \frac{1}{2}T) \quad (4.22)$$

$$R_r^r - R_\theta^\theta = 8\pi G(T_r^r - T_\theta^\theta) \quad (4.23)$$

όπου

$$T = T_\mu^\mu = -(\partial\varphi)^2 \quad (4.24)$$

και πρέπει να λυθούν μαζί με την εξίσωση του Maxwell (Νόμος του Gauss)

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A = 0 \quad (4.25)$$

και την Klein-Gordon (4.5).

Η θερμοκρασία Hawking της λύσης μελανής οπής μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$T = T_0 + \varepsilon^2 T_1 + \dots \quad (4.26)$$

Όταν $\varepsilon = 0$ η θερμοκρασία είναι $T = T_0$. Αυτή είναι η κρίσιμη θερμοκρασία κατά την οποία παρατηρείται μια δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μια hairy μελανή οπή, εάν αυτή υπάρχει και είναι ενεργειακά προτιμητέα. Για μικρή παράμετρο τάξης είναι,

$$\varepsilon \sim |T - T_0|^{1/2} \quad (4.27)$$

έτσι το ανάπτυγμα μπορεί να θεωρηθεί ως ανάπτυξη γύρω από την κρίσιμη θερμοκρασία.

Στη συνέχεια προχωρούμε στη διαταρακτική λύση των εξισώσεων.

4.3 Μηδενικής τάξης διόρθωση

Σε μηδενική τάξη έχουμε τις εξισώσεις Einstein-Maxwell

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(EM)(0)}, \quad \nabla^\mu F_{\mu\nu}^{(0)} = 0, \quad (4.28)$$

καθώς επίσης και την Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g^{(0)}}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g^{(0)}} (g^{(0)\mu\nu} + \kappa R^{(0)\mu\nu}) \partial_\nu \varphi^{(0)} \right] = 0, \quad (4.29)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $G_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}^{(0)}$ για τη λύση της εξίσωσης (4.28). Έτσι σε αυτήν την τάξη, οι Einstein-Maxwell εξισώσεις βλέπουμε ότι μπορούν να αποσυνευχθούν (ουσιαστικά, $\varepsilon = 0$), και η λύση $g_{\mu\nu}^{(0)}$, $A_\mu^{(0)}$ δεν έχει hair (π.χ., μια μελανή οπή Reissner-Nordström).

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση Klein-Gordon για το $\varphi^{(0)}$ στο υπόβαθρο $(g_{\mu\nu}^{(0)}, A_\mu^{(0)})$ περιορίζει το υπόβαθρο, καθώς δεν οδηγούν όλες οι λύσεις των Einstein-Maxwell εξισώσεων σε ομαλές συναρτήσεις για το $\varphi^{(0)}$. Η απαίτηση για ομαλότητα επιβάλλει περιορισμούς στη

σχεση μεταξύ των παραμέτρων της λύσης Reissner-Nordström. Εάν το δούμε σαν θερμοδυναμικό σύστημα, η κρίσιμη θερμοκρασία T_0 επίσης περιορίζεται απαιτώντας ομαλότητα του πεδίου $\varphi^{(0)}$.

Οι εξισώσεις Einstein-Maxwell σε μηδενική τάξη (4.28) έχουν ως λύση τη μελανή οπή Reissner-Nordström. Σε συντεταγμένες Lewis-Papapetrou,

$$l_0 = 1 - \frac{\mu^2}{r^2}, \quad l_0 e^{\alpha_0/2} = 1 + \frac{\mu^2}{r^2} + \frac{2\mu \coth B}{r}, \quad \beta_0 = 0, \quad (4.30)$$

ενώ το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι

$$A_t^{(0)} = \Phi - \frac{Q}{r l_0} e^{-\alpha_0/2}, \quad Q = \frac{2\mu}{\sqrt{G} \sinh B}, \quad \Phi = \frac{e^{-B}}{\sqrt{G}}, \quad (4.31)$$

όπου Q είναι το φορτίο της μελανής οπής, και Φ είναι η τιμή του δυναμικού καθώς $r \rightarrow \infty$, κανονικοποιημένο έτσι ώστε το $A_\mu A^\mu$ να είναι πεπερασμένο στον ορίζοντα.

Για να φέρουμε τη λύση σε μια πιο οικεία μορφή, κάνοντας το μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$\rho = l_0 r e^{\alpha_0/2} = r + \frac{\mu^2}{r} + 2\mu \coth B,$$

η μετρική γίνεται

$$ds^2 = -f(\rho) dt^2 + \frac{d\rho^2}{f(\rho)} + \rho^2 d\Omega^2, \quad f(\rho) = 1 - \left(1 + \frac{GQ^2}{\rho_+^2}\right) \frac{\rho_+}{\rho} + \frac{GQ^2}{\rho^2}, \quad (4.32)$$

όπου βλέπουμε ότι ο ορίζοντας είναι στο $\rho = \rho_+$,

$$\rho_+ = Q\sqrt{G} e^B.$$

Το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι $A_t^{(0)} = \frac{Q}{\rho}$, επιβεβαιώνοντας ότι το Q είναι το φορτίο της μελανής οπής. Η θερμοκρασία είναι

$$T = \frac{f'(\rho_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\rho_+} \left(1 - \frac{GQ^2}{\rho_+^2}\right) = \frac{e^{-2B} \sinh^2 B}{4\pi\mu}. \quad (4.33)$$

Η μάζα, εντροπία και το δυναμικό είναι αντίστοιχα,

$$M = \frac{2\mu}{G} \coth B, \quad S = \frac{4\pi\mu^2}{G} \frac{e^{2B}}{\sinh^2 B}, \quad \Phi = \frac{e^{-B}}{\sqrt{G}}. \quad (4.34)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (ή χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια δράση), εξάγουμε την ελεύθερη ενέργεια Gibbs

$$F = M - TS - Q\Phi = \frac{\mu}{G}. \quad (4.35)$$

Επιπρόσθετα, το βαθμωτό πεδίο υπακούει στη εξίσωση Klein-Gordon (4.29). Για $\kappa = 0$, δεν υπάρχει ομαλή λύση, κάτι που είναι συνέπεια του θεωρήματος no-hair [40, 41]. Όμως

για $\kappa \neq 0$, βρίσκουμε ομαλές στατικές λύσεις για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων μ και B . Στο [68] η εξίσωση Klein-Gordon (4.29) λύθηκε αριθμητικά στο υπόβαθρο μιας Reissner-Nordström μελανής οπής. Η αντίστοιχη θερμοκρασία T_0 της Reissner-Nordström είναι η κρίσιμη θερμοκρασία, κοντά στην οποία η μελανή οπή μπορεί γίνει ασταθής και να αποκτήσει hair, αποφεύγοντας έτσι το θεώρημα no-hair.

Για να υπολογίσουμε την κρίσιμη θερμοκρασία, είναι βολικό να εισάγουμε τη συντεταγμένη

$$z = \frac{\mu}{r}, \quad (4.36)$$

έτσι ώστε το άπειρο να είναι στο $z = 0$ και ο ορίζοντας στο $z = 1$.

Ψάχνουμε για ομαλές λύσεις της Klein-Gordon (4.29) στο διάστημα $[0, 1]$. Τέτοιες λύσεις συζητήθηκαν στο [68] όπου βρέθηκε μια αστάθεια στις quasinormal συχνότητες για $\ell \neq 0$. Για να δούμε μια τέτοια συμπεριφορά θεωρούμε ένα μη σφαιρικό *ansatz* για το βαθμωτό πεδίο

$$\varphi^{(0)} = \mathcal{Z}(z)P_\ell(\cos\theta). \quad (4.37)$$

Μετά από λίγη άλγεβρα, βρίσκουμε

$$\frac{z^2}{l_0} (l_0(1 + \kappa\mathcal{R})\mathcal{Z}')' - (1 - \kappa\mathcal{R})\ell(\ell + 1)\mathcal{Z} = 0, \quad (4.38)$$

όπου ο τόνος σημαίνει παραγώγιση ως προς z και ορίσαμε

$$\mathcal{R} = R^{(0)t}_t = R^{(0)z}_z = -R^{(0)\theta}_\theta = \frac{8 \sinh^2 B}{\mu^2} \frac{z^4}{[(1 + z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4}. \quad (4.39)$$

Η εξίσωση Klein-Gordon (4.29) δεν έχει λύση με ομαλό βαθμωτό πεδίο στον ορίζοντα για $\ell = 0$. Αυτό σημαίνει ότι εάν υπάρχει λύση με βαθμωτό πεδίο, τότε αυτό πρέπει να είναι ανισοτροπικό.² Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση ενός διπόλου,

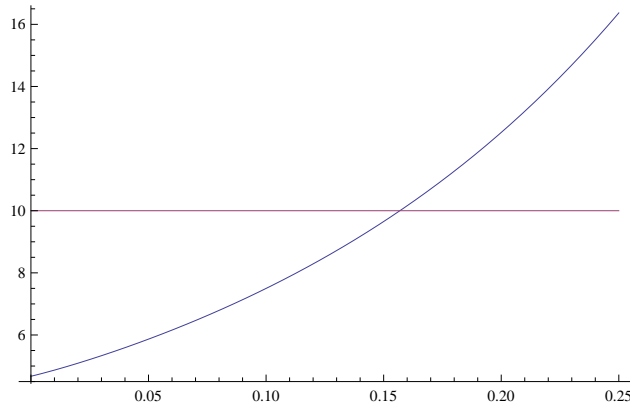
$$\ell = 1. \quad (4.40)$$

Στο σύνορο παρατηρούμε $z^2\mathcal{Z}'' - \ell(\ell + 1)\mathcal{Z} \approx 0$, επομένως

$$\mathcal{Z} \sim z^{\ell+1}.$$

Στον ορίζοντα έχουμε $((1 - z)\mathcal{Z}')' \approx 0$, επομένως $\mathcal{Z}' \sim 0$ or $\mathcal{Z}' \sim \frac{1}{1-z}$. Για κάθε τιμή του φορτίου Q , πρέπει να υπάρχει μοναδικός συνδυασμός των παραμέτρων μ και B ο οποίος να δίνει συγκλίνων \mathcal{Z}' (και επομένως πεπερασμένο \mathcal{Z}) στον ορίζοντα. Για δεδομένο κ , θα καθορίσουμε αριθμητικά ζεύγη μ και B από την εξίσωση (4.38) και οι τιμές τους θα χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουμε την T_0 ως συνάρτηση του φορτίου Q χρησιμοποιώντας την (4.33).

²Πρέπει να επισημάνουμε ότι σφαιρικά συμμετρικά λύσεις της Klein-Gordon που προκύπτει από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα (4.1) μπορούν να υπάρχουν στην περίπτωση που το βαθμωτό πεδίο έχει μάζα και φορτίο. Αυτή η πιο γενική περίπτωση θα εξεταστεί στο επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 4.1: Γραφική λύση της (4.42) ως προς B , που δείχνει ότι $B = 0.158$.

Για να λύσουμε την εξίσωση (4.38) αριθμητικά, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μεταβολών (variational method). Πιο συγκεκριμένα αναπτύσσουμε γύρω από τον ορίζοντα

$$\mathcal{Z}(z) = z^2 W(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n (1-z)^n . \quad (4.41)$$

Προκύπτει ότι για ακρίβεια καλύτερη από 10%, πρέπει να κρατήσουμε τουλάχιστον 10 όρους στο ανάπτυγμα.

Οι συντελεστές W_n εξαρτώνται από το κ και το B . Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα μοναδικό κ που θα δώσει πεπερασμένα $\mathcal{Z}(z)$ και $\mathcal{Z}(z)'$ στον ορίζοντα $z = 1$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξ. (4.38) ως

$$\kappa = \frac{\int_0^1 dz (1-z^2) [2\mathcal{Z}(z)^2/z^2 + \mathcal{Z}'^2(z)]}{\int_0^1 dz (1-z^2) \mathcal{R}(z) [2\mathcal{Z}(z)^2/z^2 - \mathcal{Z}'^2(z)]} , \quad (4.42)$$

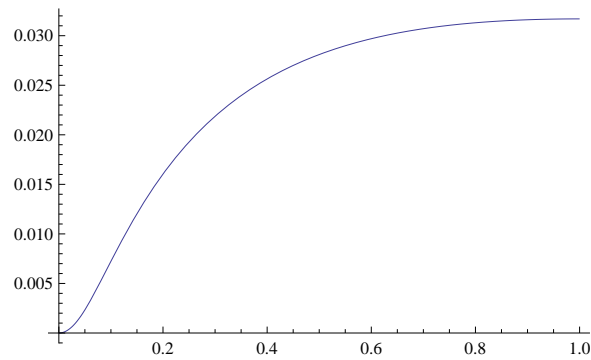
η οποία μπορεί να λυθεί γραφικά. Για την επιλογή

$$\kappa = 10 , \quad Q = 9.5 , \quad (4.43)$$

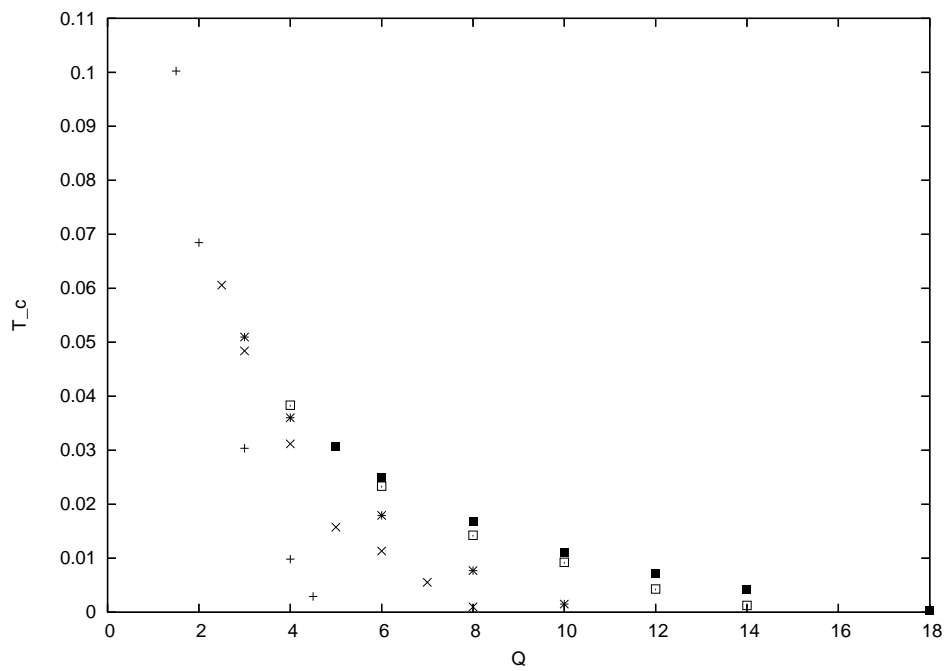
σε μονάδες $8\pi G = 1$, βρίσκουμε $\mu = 0.15$, $B = 0.158$ (δες το γράφημα 4.1), που δίνει την κρίσιμη θερμοκρασία

$$T_c \approx 0.01 . \quad (4.44)$$

Στο γράφημα 4.2, σχεδιάζουμε τη βαθμωτή συνάρτηση $\mathcal{Z}(z)$ για τις επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων, κανονικοποιημένη έτσι ώστε $\mathcal{Z}(1) \sim T_0$. Η κανονικοποίηση είναι αυθαίρετη, αφού η κυματική εξίσωση είναι γραμμική, αλλά έχουμε επιλέξει μια μικρή συνολική κανονικοποίηση η οποία πορεί να χρησιμοποιηθεί για διαταρακτική ανάπτυξη κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία. Η συνάρτηση $\mathcal{Z}(z)$ είναι πεπερασμένη σε όλο το εύρος έξω από τον ορίζοντα, όπως ήταν επιθυμητό.



Σχήμα 4.2: Η συνάρτηση $Z(z)$ για το βαθμωτό πεδίο ως προς z για τις παραμέτρους του γραφήματος 4.1



Σχήμα 4.3: Η κρίσιμη θερμοκρασία T_0 ως προς το φορτίο Q για διάφορες τιμές του κ . Τα μαύρα τετράγωνα αντιστοιχούν σε $\kappa = 15$, τα λευκά σε $\kappa = 10$, ενώ ακολουθούν οι τιμές $\kappa = 5$, $\kappa = 3$ and $\kappa = 1$.

Για τις πρώτης τάξης λύσεις της επόμενης ενότητας χρησιμοποιήσαμε τις τιμές των κ και Q της εξίσωσης (4.43). Παρόλα αυτά, για να δείξουμε πως η κρίσιμη θερμοκρασία εξαρτάται από τις παραμέτρους, στο γράφημα 4.3, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης της κρίσιμης θερμοκρασίας T_0 συναρτήσεως του φορτίου Q της μελανής οπής για διάφορες τιμές της σταθεράς σύζευξης κ , από $\kappa = 1$ έως $\kappa = 15$. Η κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει καθώς $Q \rightarrow 0$ (όριο Schwarzschild) για όλες τις τιμές του κ .

4.4 Πρώτης τάξης λύση

Σε πρώτη τάξη, οι εξισώσεις πεδίου παρέχουν μια λύση κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία, όπου το βαθμωτό πεδίο φ επιδρά στη μετρική.

Για να εξάγουμε τις πρώτης τάξης εξισώσεις από το σύνολο των μη γραμμικών εξισώσεων πεδίου, παρατηρούμε ότι ο τανυστής ενέργεια ορμής σε αυτήν την τάξη, έχει συνεισφορά από τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή (4.18), από το βαθμωτό πεδίο (εξ.(4.7) και (4.8), με το φ να αντικαθίσταται από $\varepsilon\varphi^{(0)}$ και το $g_{\mu\nu}$ από τη λύση RN $g_{\mu\nu}^{(0)}$). Για τη συνεισφορά του (4.8), μετά από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε την ακριβή έκφραση

$$\Theta_t^t = \Theta_z^z = -\Theta_\theta^\theta = -\Theta_\phi^\phi = \varepsilon^2 \frac{2z^6 e^{-3\alpha}}{\mu^4 l_0^6 \sinh^2 B} \left[z^2 \mathcal{Z}'^2 \cos^2 \theta + \mathcal{Z}^2 \sin^2 \theta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.45)$$

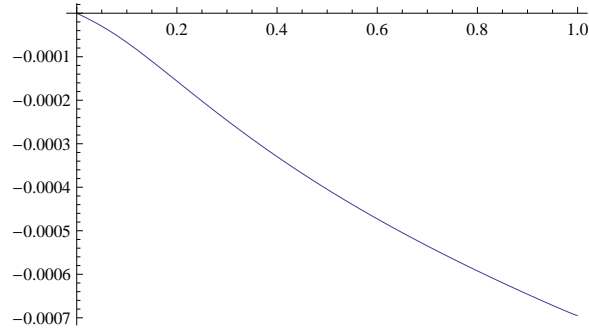
Οι τεχνικές λεπτομέρειες της επίλυσης των εξισώσεων (4.21)-(4.25) παρουσιάζονται στο Παράρτημα. Έχοντας τις λύσεις των εξισώσεων (4.21)-(4.25) θα καθορίσουμε αριθμητικά τις συναρτήσεις α και β της μετρικής και το ηλεκτρικό δυναμικό A . Σημειώνουμε ότι η παράμετρος τάξης ε και η κανονικοποίηση του μηδενικής τάξης βαθμωτού πεδίου $\varphi^{(0)}$ δεν είναι ανεξάρτητα ορισμένα, καθώς μόνο το γινόμενο τους (το οποίο πρέπει να είναι μικρό για να ισχύει το διαταρακτικό ανάπτυγμα) εισέρχεται στις εξισώσεις. Για ευκολία, θα θέσουμε $\varepsilon = 1$ στους αριθμητικούς υπολογισμούς, κάνοντας την κανονικοποίηση του $\varphi^{(0)}$ μικρή.

Θέλουμε να βρούμε τις συναρτήσεις $\alpha_{10}(z)$, $A_{10}(z)$, $\alpha_{12}(z)$, $A_{12}(z)$ οι οποίες εμφανίζονται στις πρώτης τάξης διορθώσεις

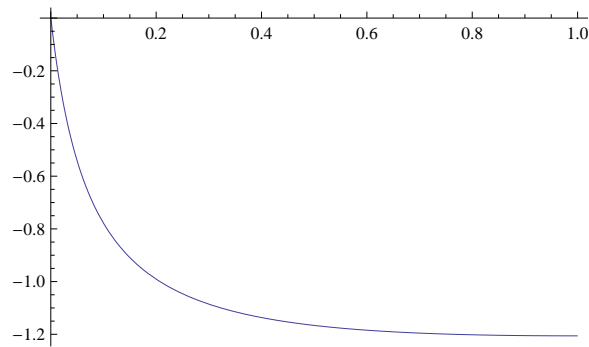
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{10}(z)P_0(\cos\theta) + \alpha_{12}(z)P_2(\cos\theta), \\ A_1 &= A_{10}(z)P_0(\cos\theta) + A_{12}(z)P_2(\cos\theta). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Πρώτα θα υπολογίσουμε τις γωνιακά ανεξάρτητες διορθώσεις πρώτης τάξης. Για τη διόρθωση α_{10} δουλεύουμε με την εξίσωση (A.10) παρατηρώντας ότι στο σύνορο $\alpha_{10}(z) \sim \lambda z$, ενώ στον ορίζοντα έχουμε μία έκφραση της μορφής $a + b \ln(1 - z)$. Κατάλληλος ορισμός του λ θα δώσει $b = 0$, δηλαδή, ομαλή λύση. Στο τεχνικό μέρος, ουσιαστικά αλλάζουμε τη μεταβλητή α_{10} σε $\zeta_0 \equiv \frac{\alpha_{10}}{z}$ με τις νέες συνοριακές συνθήκες $\zeta_0(0) = \lambda$, $\zeta_0'(0) = 0$. Το γράφημα 4.4 δείχνει τα αποτελέσματα για το α_{10} για $\lambda = -0.000421852$, το οποίο είναι μία ομαλή λύση.

Η πρώτης τάξης διόρθωση του ηλεκτροστατικού δυναμικού $A(z) = A_0 + \varepsilon^2 A_{10}$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα εάν το α είναι γνωστό χρησιμοποιώντας την εξ.(A.9) και το αποτέλεσμα έχει σχεδιαστεί στο γράφημα 4.5.



Σχήμα 4.4: Η συνάρτηση $\alpha_{10}(z)$ του γωνιακά ανεξάρτητου μέρους της πρώτης τάξης διάσπασης της μετρικής.



Σχήμα 4.5: Το ηλεκτροστατικό δυναμικό $A(z)$ σε πρώτη τάξη.

Μία διαδικασία όμοια με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε για το βαθμωτό πεδίο θα ακολουθήσουμε και για την επίλυση των εξισώσεων (5.6) και (A.12) για τις γωνιακά εξαρτώμενες πρώτης τάξης διορθώσεις A_{12} και α_{12} . Χρησιμοποιούμε τα αναπτύγματα:

$$\alpha_{12}(z) = z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{12}^{(n)}(1-z)^n, \quad A_{12}(z) = z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{12}^{(n)}(1-z)^n, \quad (4.47)$$

όπου τα $\tilde{\alpha}_{12}^{(n)}$, $\tilde{A}_{12}^{(n)}$ εξαρτώνται από μία ελεύθερη παράμετρο η οποία μπορεί να επιλεγεί να είναι η $\tilde{A}_{12}^{(2)}$ (μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο πρώτος όρος μηδενίζεται, $\tilde{A}_{12}^{(1)} = 0$). Αυτή η παράμετρος μπορεί να καθοριστεί με την μέθοδο μεταβολών. Πολλαπλασιάζουμε την εξ.(5.6) με A_{12} και ολοκληρώνουμε. Βρίσκουμε

$$\int_0^1 dz \left[-(A'_{12})^2 - \left(-\frac{l^2}{z^2 D^2} + \frac{2}{z^2 D} - \frac{1-3z^2}{z^2 l_0^2} + \frac{6}{z^2} \right) A_{12}^2 + \frac{Q l_0}{\mu D^2} A_{12} \alpha'_{12} \right] = 0 \quad (4.48)$$

όπου ορίσαμε

$$D(z) = 1 + z^2 + 2z \coth B. \quad (4.49)$$

Παρόμοια, εάν πολλαπλασιάσουμε την εξ.(A.12) με α_{12} , βρίσκουμε

$$\int_0^1 dz \left[-(\alpha'_{12})^2 - \left(-\frac{1+z^2}{l_0^2} + \frac{6}{z^2} + \frac{8}{(D \sinh B)^2} \right) \alpha_{12}^2 + \frac{16\pi G Q}{\mu l_0} \alpha_{12} A'_{12} - 16\pi G \frac{\kappa Q_2}{z^2} \alpha_2 \right] = 0. \quad (4.50)$$

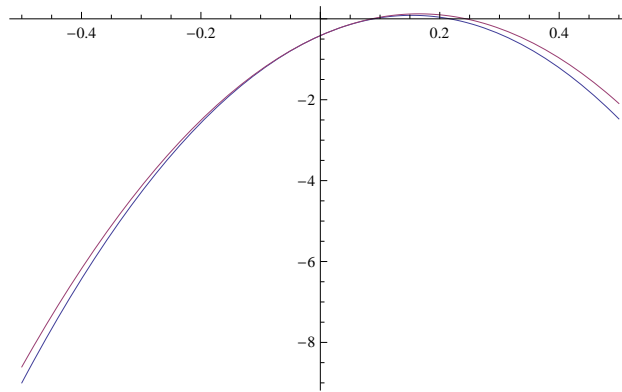
Και οι δύο εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται στη σωστή τιμή του $\tilde{A}_{12}^{(2)}$. Οποιαδήποτε από αυτές τις δύο μπορεί να καθορίσει αυτήν την τιμή.

Στο γράφημα 4.6 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για τις μεταβαλλόμενες εκφράσεις συναρτήσει της απροσδιόριστης παραμέτρου $\tilde{A}_{12}^{(2)}$ και βρίσκουμε ότι $\tilde{A}_{12}^{(2)} = 0.2$. Απεικονίζουμε το αριστερό μέλος της (4.50) και το άθροισμα των (4.48) και (4.50) κρατώντας τέσσερις όρους σε κάθε ανάπτυγμα (4.47). Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες είναι σχεδόν ταυτόσημες και ότι και οι δύο πλησιάζουν το μηδέν στην ίδια τιμή, επιβεβαιώνοντας τη συνέπεια της αριθμητικής προσέγγισης. Στο γράφημα 4.7 απεικονίζουμε τη λύση για A_{12} , ενώ στο γράφημα 4.8 τη λύση για α_{12} . Επομένως, οι πρώτης τάξης διορθώσεις A_{12} και α_{12} είναι ομαλές παντού.

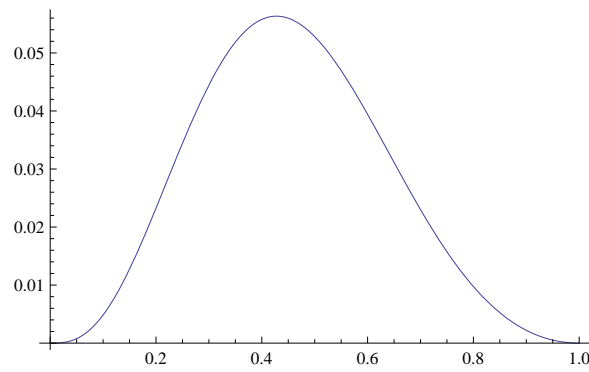
Τέλος, η συνάρτηση β της μετρικής η οποία δίνεται από την εξ. (5.17) έχει ως πρώτης τάξης γωνιακά ανεξάρτητη διόρθωση τη συνάρτηση β_{10} της εξ. (A.18) η οποία παρουσιάζεται στο γράφημα 5.21. Η συνάρτηση β_1 της γωνιακά εξαρτώμενης πρώτης τάξης συνεισφοράς δίνεται από την (A.19) και φαίνεται στο γράφημα 4.10. Επομένως και οι δύο διορθώσεις είναι ομαλές σε όλο το εύρος του z .

4.5 Θερμοδυναμική ευστάθεια σε πρώτη τάξη

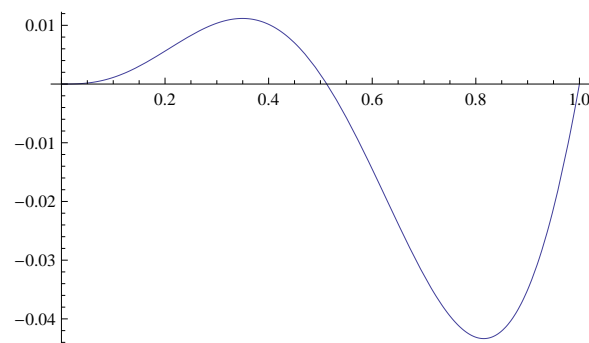
Σε αυτήν την ενότητα θα συζητήσουμε τη θερμοδυναμική ευστάθεια της λύσης μας. Πρέπει να ξέρουμε τη θερμοκρασία της hairy λύσης, η οποία σε πρώτη τάξη, εκφρασμένη σε



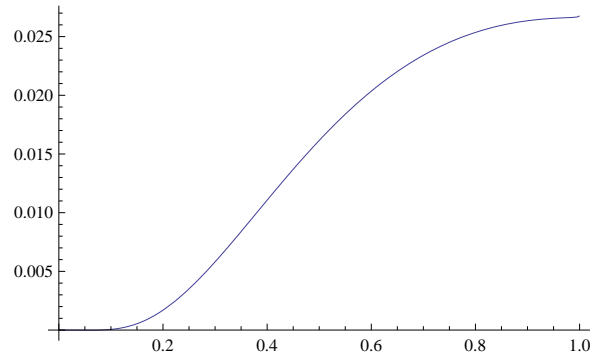
Σχήμα 4.6: Οι εκφράσεις των εξισώσεων (4.48) και (4.50) ως προς $\tilde{A}_{12}^{(2)}$ που δείχνουν ότι $\tilde{A}_{12}^{(2)} = 0.2$.



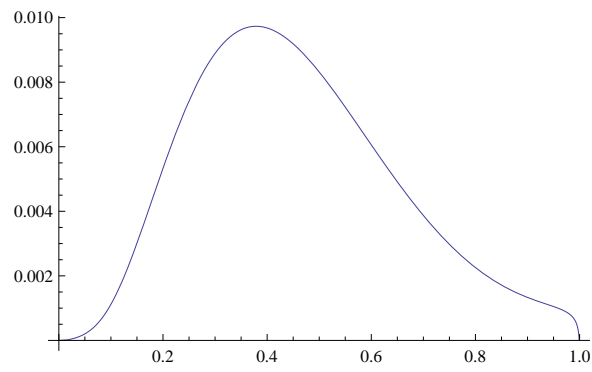
Σχήμα 4.7: Η συνάρτηση $A_{12}(z)$ για τις παραμέτρους του διαγράμματος 4.1 και $\tilde{A}_{12}^{(2)} = 0.2$.



Σχήμα 4.8: Η συνάρτηση $\alpha_{12}(z)$ για τις παραμέτρους του διαγράμματος 4.1 και $\tilde{A}_{12}^{(2)} = 0.2$.



Σχήμα 4.9: Η συνάρτηση β_{10} ως προς z .



Σχήμα 4.10: Η συνάρτηση β_{11} ως προς z .

όρους της κρίσιμης θερμοκρασίας είναι

$$T_{hair} = T_0 e^{\varepsilon^2(-\alpha_{10}(1)+\beta_{10}(1)/2)} . \quad (4.51)$$

Παρατηρούμε ότι $T_{hair} \geq T_0$, έτσι η RN μελανή οπή είναι ασταθής σε υψηλές θερμοκρασίες (μεγαλύτερες από T_0) για δεδομένο φορτίο Q . Καθώς η μάζα M προσεγγίζει την ελάχιστη τιμή της, η RN black μελανή οπή γίνεται ευσταθής.

Καθώς η διόρθωση είναι τετραγωνική ως προς το βαθμωτό πεδίο, παίρνουμε για την τιμή του πεδίου στον ορίζοντα,

$$\varphi_+ \equiv \varphi \Big|_{z=1} = \gamma \sqrt{\frac{T_{hair}}{T_0} - 1} . \quad (4.52)$$

Ας βρούμε μια RN μελανή οπή σε αυτήν τη θερμοκρασία. Θα βρούμε μία με το ίδιο φορτίο Q . Ας θεωρήσουμε τις παραμέτρους για αυτήν τη μελανή οπή $\mu' = \mu + \varepsilon^2 \mu_1$ και $B' = B + \varepsilon^2 B_1$. Επειδή $\mu / \sinh B = \text{σταθ.}$, έχουμε

$$B_1 = \tanh B \frac{\mu_1}{\mu} .$$

Ίλλη μία σχέση μεταξύ των B_1 και μ_1 μπορούμε να βρούμε θέτοντας

$$\frac{\delta T}{T_0} = \varepsilon^2 \left[-\alpha_{10}(1) + \frac{\beta_{10}(1)}{2} \right] .$$

Βρίσκουμε

$$-\alpha_{10}(1) + \frac{\beta_{10}(1)}{2} = \frac{4}{e^{2B} - 1} B_1 - \frac{\mu_1}{\mu} .$$

Αυτές οι δύο σχέσεις καθορίζουν τα B_1 και μ_1 . Για την ελεύθερη ενέργεια, βρίσκουμε

$$\frac{\delta F_{RN}}{F_{RN}} = \varepsilon^2 \frac{1 + e^{2B}}{3 - e^{2B}} \left[-\delta\alpha_0(1) + \frac{\beta_0(1)}{2} \right] .$$

Παρατηρούμε ότι $\delta F_{RN} > 0$ όσο ισχύει $e^{2B} < 3$.

Πρέπει να τη συγκρίνουμε με την ελεύθερη ενέργεια της hairy μελανής οπής. Η μάζα της hairy μελανής οπής βρίσκεται από την ασυμπτωτική συμπεριφορά του α ,

$$GM = \frac{\mu}{2} \alpha'_0(0) ,$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς z . Επομένως,

$$GM_{hair} = GM_{RN} + \varepsilon^2 \frac{\mu}{2} \alpha'_{10}(0) .$$

Αυτό βρίσκεται από τον επιφανειακό (Gibbons-Hawking) όρο στη δράση. Η εντροπία βρίσκεται από το εμβαδόν του ορίζοντα,

$$S_{hair} = S_{RN} e^{-\varepsilon^2[-\alpha_{10}+\beta_{10}/2]} \Big|_{z=1} .$$

Επομένως, το γινόμενο TS παραμένει αμετάβλητο.

Υπάρχει μία επιπρόσθετη συνεισφορά από την Einstein-Hilbert δράση επειδή ο βαθμωτός Ricci δε μηδενίζεται. Παρατηρούμε μία συνεισφορά στην ελεύθερη ενέργεια

$$\delta F_{EH} = - \int d^3x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G} = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int d^3x \sqrt{-g} (\partial\varphi^{(0)})^2 .$$

Αυτή είναι η κυρίαρχη αλλαγή στην ελεύθερη ενέργεια και είναι προφανώς αρνητική. Συγκεκριμένα,

$$\delta F_{EH} = -\frac{2\pi\mu}{3} \int_0^1 \frac{dz}{z^2} \varepsilon^2 [(z\mathcal{Z}')^2 + 2\mathcal{Z}^2] < 0 .$$

Επομένως, η διαφορά στις ελεύθερες ενέργειες είναι

$$\Delta F = \delta F_{hair} - \delta F_{RN} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha'_{10}(0) F_{RN} - \frac{1 + e^{2B}}{3 - e^{2B}} \varepsilon^2 \left[-\alpha_{10}(1) + \frac{\beta_{10}(1)}{2} \right] F_{RN} + \delta F_{EH} . \quad (4.53)$$

Αντικαθιστώντας τιμές στην (4.53) βρίσκουμε $\Delta F = -0.08091$, που σημαίνει ότι η hairy μελανή οπή είναι θερμοδυναμικά ευσταθής.

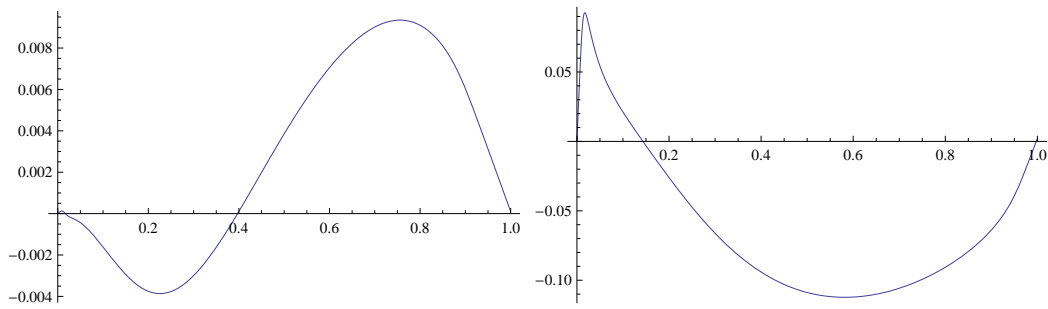
4.6 Συζήτηση της λύσης

Για να ολοκληρώσουμε με την πρώτης τάξης λύση και να επαληθεύσουμε την ισχύ της διαταραχής, θα υπολογίσουμε την πρώτη τάξης διόρθωση για το βαθμωτο πεδίο και θα υπολογίσουμε διάφορες αναλλοίωτες ποσότητες της μετρικής. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ομαλή συμπεριφορά πάνω στον ορίζοντα και έξω από αυτόν, καθώς δεν υπάρχει κανένας απειρισμός σε αυτήν την τάξη.

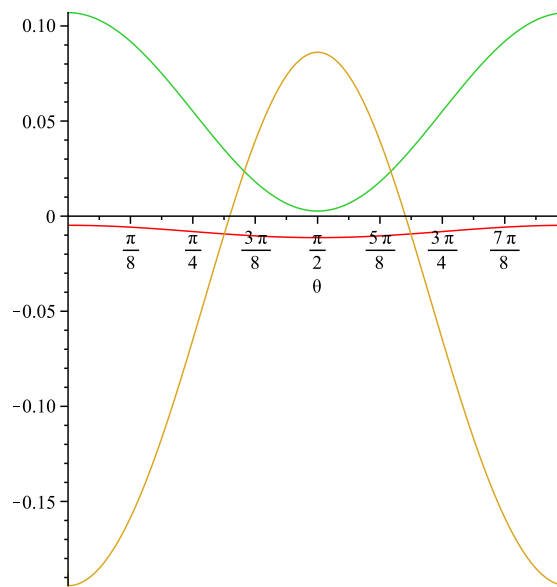
Με την επιλογή του μηδενικής τάξης βαθμωτού πεδίου $\varphi^{(0)}$ ως διπόλου (εξ. (4.37) και (4.40)), η πρώτη τάξης διόρθωση (εξ. (4.9)) περιέχει τόσο ένα δίπολο όσο και έναν όρο $\ell = 3$. Ας θεωρήσουμε

$$\varphi^{(1)}(z, \theta) = \varphi_{10}(z) \cos \theta + \varphi_{11}(z) \cos 3\theta . \quad (4.54)$$

Η εξίσωση που υπακούει το $\varphi^{(1)}$ βρίσκεται συλλέγοντας τους πρώτης τάξης όρους στην εξίσωση Klein-Gordon(4.5). Η εξίσωση που προκύπτει, μπορεί ναδειχτεί ότι οδηγεί σε αποσύζευξη των εξισώσεων για τα φ_{10} και φ_{11} , και περιέχει τις συναρτήσεις $\varphi^{(0)}(z)$, $\alpha_{10}(z)$, $\alpha_{12}(z)$, $\beta_{10}(z)$ και $\beta_{11}(z)$, οι οποίες έχουν ήδη υπολογιστεί. Τόσο το $\varphi_{10}(z)$ όσο και το $\varphi_{11}(z)$ συμπεριφέρονται ως $c_{10}z^2$ και $c_{11}z^2$ στο όριο $z \rightarrow 0$. Μπορούμε να καθορίσουμε τους συντελεστές c_{10} και c_{11} έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι οι διορθώσεις μηδενίζονται στον ορίζοντα $z = 1$. Το αποτέλεσμα για τις δύο συναρτήσεις παρουσιάζεται στο γράφημα 4.11. Μπορούμε να δούμε, συγκρίνοντας με το γράφημα 4.2, ότι οι διορθώσεις είναι της τάξης μεγέθους της μηδενικής τάξης συνεισφοράς, έτσι οι σειρές του ε αναμένεται να έχουν πεπερασμένη ακτίνα σύγκλισης.

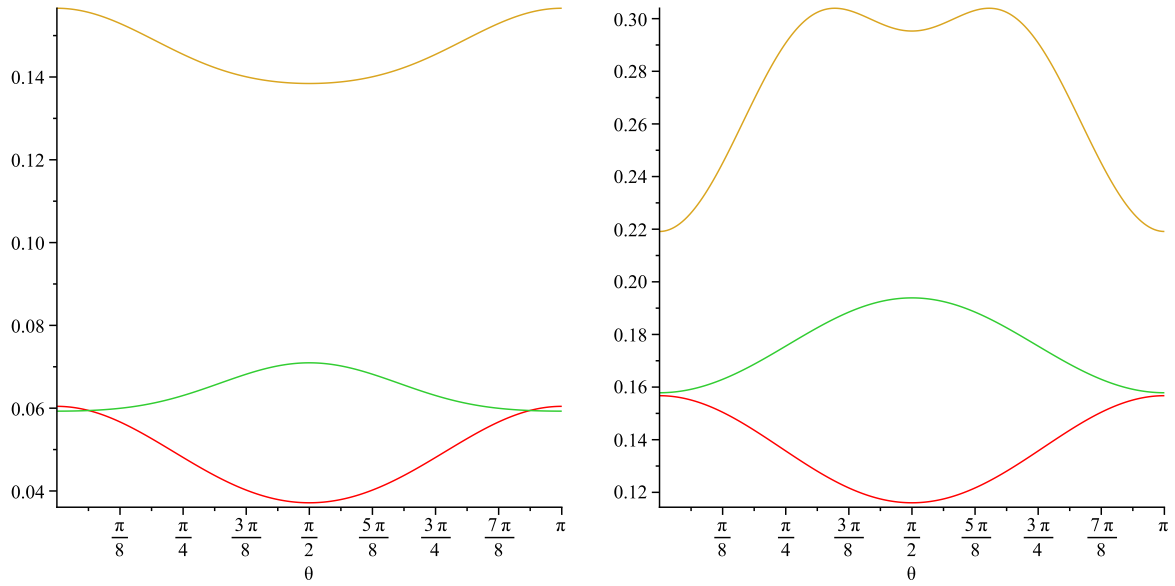


Σχήμα 4.11: Οι πρώτες τάξης διορθώσεις του βαθμωτού πεδίου, $\varphi_{10}(z)$ (αριστερά) και $\varphi_{11}(z)$ (δεξιά).



Σχήμα 4.12: Ο βαθμωτός Ricci R συναρτήσει της γωνίας θ για $z = 0.3, 0.6, 0.9$. Αντίστοιχα, $R = -0.011, 0.0027, 0.086$ στο $\theta = \frac{\pi}{2} = 0.157$.

Έχοντας δείξει την ομαλότητα στις πρώτες τάξης διορθώσεις του βαθμωτού πεδίου, στρεφόμαστε τώρα στη μετρική. Θα υπολογίσουμε αναλλοίωτες ποσότητες, όπως ο βαθμωτός Ricci R , ο οποίος μηδενίζεται σε μηδενική τάξη, μιας και αντιστοιχεί στη μελανή οπή Reissner-Nordström. Υπολογίσαμε τον R σε πρώτη τάξη τόσο αριθμητικά όσο και αναλυτικά και βρήκαμε ότι είναι ομαλός παντού. Στο γράφημα 4.12 παρουσιάζουμε τον R συναρτήσει της γωνίας θ για αντιπροσωπευτικές τιμές της ακτίνας, $z = 0.3, z = 0.6$ και $z = 0.9$. Επιπλέον, υπολογίσαμε άλλες δύο αναλλοίωτες ποσότητες, τα $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ και $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ σε πρώτη τάξη, τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά και είδαμε ότι είναι ομαλά παντού (γράφημα 4.13). Παρουσιάζουμε τις τιμές του γινομένου $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ του τανυστή Ricci, καθώς και του γινομένου $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ του τανυστή Riemann συναρτήσει της γωνίας θ για διάφορες τιμές



Σχήμα 4.13: $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ (αριστερά) και $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ (δεξιά) συναρτήσεως της γωνίας θ για $z = 0.3, 0.6, 0.9$ (από πάνω προς τα κάτω).

του z . Βρίσκουμε και πάλι ότι τα αποτελέσματα είναι πεπερασμένα και σχεδόν της ίδιας τάξης μεγέθους για τις τρεις τιμές του z .

4.7 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε την επίδραση της παρουσίας στην Einstein-Hilbert δράση, ενός όρου όπου οι παράγωγοι ενός βαθμωτού πεδίου είναι συζευγμένοι με τον τανυστή του Einstein, σε στατικές λύσεις μελανών οπών. Θεωρήσαμε την Reissner-Nordström μελανή οπή σε ισοτροπικές συντεταγμένες και σε αυτό το υπόβαθρο εισαγάγαμε ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον τανυστή του Einstein. Για μικρές τιμές του βαθμωτού πεδίου μελετήσαμε λεπτομερώς πώς αυτή η σύζευξη επιδρά στη μετρική, λύνοντας το πλήρες συζευγμένο δυναμικό σύστημα των εξισώσεων Einstein-Maxwell-Klein-Gordon.

Βρήκαμε ότι η Reissner-Nordström μελανή οπή πάνω από μία συγκεκριμένη κρίσιμη θερμοκρασία αποσταθεροποιείται σε μια νέα hairy μελανή οπή. Μελετήσαμε τις ιδιότητες αυτής της νέας μελανής οπής κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία και δείξαμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό στον ορίζοντα και στο άπειρο. Το no-hair θεώρημα αποφεύγεται λόγω της συζευγμένης παραγωγού του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Αυτή η νέα “Einstein hair” λύση είναι σε γενικές γραμμές ανισοτροπική με το βαθμωτό πεδίο και τις συναρτήσεις της μετρικής να εξαρτώνται επίσης και από τη γωνιακή συντεταγμένη. Υπολογίσαμε τη μάζα και τη θερμοκρασία της νέας hairy λύσης μελανής οπής και εξετάζοντας τις ελεύθερες ενέργειες δείξαμε ότι η νέα λύση είναι θερμοδυναμικά ευσταθής.

Κεφάλαιο 5

Αλλαγή Φάσης σε μια Hairy Μελανή Οπή σε Ασυμπτωτικά Επίπεδο Χωρόχρονο

5.1 Εισαγωγή

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την αλλαγή φάσης μιας Reissner-Nordström μελανής οπής σε μία hairy μελανή οπή σε ασυμπτωτικά επίπεδο χώροχρονο. Το hair οφείλεται σε ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο με μάζα. Μπορούμε να ξεπεράσουμε το no-hair θεώρημα χάρη στην σύζευξη των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Η προκύπτουσα hairy λύση είναι σφαιρικά συμμετρική. Λύνουμε τις εξισώσεις αναλυτικά κοντά στην θερμοκρασία μετάβασης και δείχνουμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι συγκεντρωμένο κοντά στον ορίζοντα και πέφτει εκθετικά μακριά από αυτόν.

Οι scalar-tensor θεωρίες ανήκουν σε μία κλάση θεωριών που τροποποιούν τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και βρίσκονται κάτω από έντονη μελέτη τα τελευταία χρόνια. Η πιο ενδιαφέρουσα από αυτές περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή του Horndeski [70], η οποία στις τέσσερις διαστάσεις δίνει εξισώσεις πεδίου με παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης. Σύντομα έγινε αντιληπτό ότι τα scalar-tensor μοντέλα έχουν μια Galilean συμμετρία [71, 72, 73], και ότι τα περισσότερα από αυτά είναι μια ειδική περίπτωση της θεωρίας Horndeski.

Ένας από τους όρους που εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή Horndeski είναι η σύζευξη των παραγώγων ενός βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Οι κοσμολογικές επιπτώσεις αυτής της σύζευξης αρχικά συζητήθηκαν στο [62], και βρέθηκε ότι δίνει δεύτερης τάξης εξισώσεις πεδίου [63], σε συμφωνία με τη θεωρία Horndeski. Ένα κοσμολογικό μοντέλο συζητήθηκε στα [64, 74], όπου η σύζευξη χρησιμοποιήθηκε για να εξηγηθεί η διαστολή του Σύμπαντος τόσο σε αρχικούς όσο και σε μετέπειτα χρόνους. Μοντέλα για quintessence και phantom cosmology μέσω αυτής της σύζευξης παρουσιάστηκαν στα [66, 75], ενώ η επιταχυνόμενη διαστολή συζητήθηκε στα [65, 76]. Η πρώτη πληθωριστική φάση μελετήθηκε στο [67], όπου βρέθηκε ότι η σύζευξη δρα ως παράγοντας επιβράδυνσης. Βρέθηκε επίσης ότι αυτός ο όρος έχει μια Galilean συμμετρία [77].

Παρατηρησιακά τεστ πληθωρισμού με ένα πεδίο συζευγμένο με τον τανυστή του Einstein παρουσιάστηκαν στο [78], ενώ στο [79] βρέθηκε ότι η σύζευξη των παραγώγων του πεδίου με τη βαρύτητα παρέχει ένα φυσικό μηχανισμό για να ανασταλλεί η υπερπαραγωγή βαρέων

σωματιδίων μετά τον πληθωρισμό. Η δημιουργία σωματιδίων στο τέλος της πληθωριστικής φάσης υπό το ίδιο πρίσμα συζητήθηκε επίσης στο [80].

Αυτή η ενδιαφέρουσα κοσμολογική συμπεριφορά της σύζευξης των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein προέρχεται από το γεγονός ότι αυτός ο όρος εισάγει μία κλίμακα (scale) στη θεωρία και δρα ως μια κοσμολογική σταθερά [63]. Όπως είναι γνωστό, η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς μεταβάλλει τις τοπικές ιδιότητες του χωρόχρονου, δίνοντας τη δυνατότητα να παρακαμφθούν τα no-hair θεωρήματα. Λύσεις hairy μελανών οπών έχουν βρεθεί υπό την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Επομένως, προκύπτει φυσικά το ερώτημα κατά πόσο υπάρχουν λύσεις μελανών οπών απουσία κοσμολογικής σταθεράς αλλά με σύζευξη του τανυστή του Einstein με τις παραγώγους ενός βαθμωτού πεδίου.

Λύσεις μελανών οπών στη γενική θεωρία Horndeski δεν είναι γνωστές. Λύσεις μελανών οπών σε θεωρίες που προκύπτουν από θεωρίες μεγαλύτερων διαστάσεων, οι οποίες στις τέσσερις διαστάσεις δίνουν δεύτερης τάξης εξισώσεις, συζητήθηκαν στο [85]. Σε ένα βαρυτικό μοντέλο όπου το βαθμωτό πεδίο είναι συζευγμένο με τον τανυστή του Einstein, βρέθηκε μια αστάθεια έξω από τον ορίζοντα μιας Reissner-Nordström μελανής οπής, υπολογίζοντας το quasinormal φάσμα βαθμωτών διαταραχών [68]. Βρέθηκε ότι για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς στροφορμής και σταθερά σύζευξης μεγαλύτερης από μια συγκεκριμένη τιμή, το ενεργό (effective) δυναμικό αναπτύσσει ένα αρνητικό χάσμα κοντά στον ορίζοντα γεγονότων. Αυτό υποδηλώνει ότι μπορεί να προκύψει μια αλλαγή φάσης σε μια hairy μελανή οπή.

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο (δες και [14]), ερευνήσαμε αυτό το φαινόμενο λεπτομερώς. Θεωρήσαμε ένα βαρυτικό σύστημα με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον τανυστή του Einstein και μηδενική κοσμολογική σταθερά. Βρήκαμε ότι μια Reissner-Nordström μελανή οπή υφίσταται μια δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μία hairy μελανή οπή, γενικά με ανισοτροπικά hair, σε μια κρίσιμη θερμοκρασία. Χρησιμοποιώντας θεωρία διαταραχών, υπολογίσαμε αναλυτικά τις ιδιότητες της hairy μελανής οπής και δείξαμε ότι είναι ενεργητικά προτιμητέα από τη Reissner-Nordström. Σφαιρικά συμμετρικές λύσεις μελανών οπών συζητήθηκαν επίσης στο [77].

Οι πρόσφατες πρόοδοι στην ολογραφία και συγκεκριμένα η εφαρμογή της αντιστοιχίας θεωρίας βαθμίδας/βαρύτητας (gauge/gravity duality) σε συστήματα συμπυκνωμένης ύλης (για μια επισκόπηση, δες [6]) έχουν αναζωπυρώσει το ενδιαφέρον για τη δυναμική ενός βαθμωτού πεδίου έξω από τον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής. Η μετάβαση από μία μεταλλική κατάσταση σε μια υπεραγωγική σε ένα ισχυρά συζευγμένο σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα ασθενώς συζευγμένο βαρυτικό σύστημα, χρησιμοποιώντας την AdS/CFT αντιστοιχία [7]. Το πιο απλό ολογραφικό υπεραγωγικό μοντέλο [57] περιγράφεται από μία Einstein-Maxwell-Βαθμωτού Πεδίου θεωρία με αρνητική κοσμολογική σταθερά. Σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες υπάρχει αποσύζευξη του συστήματος μελανής οπής-βαθμωτού πεδίου και η μελανή οπή είναι ευσταθής. Η συνοριακή θεωρία βαθμίδας περιγράφει μία μεταλλική κατάσταση. Όταν η θερμοκρασία μειώνεται, η μελανή οπή γίνεται ασταθής και μία νέα μελανή οπή με βαθμωτό πεδίο σχηματίζεται. Τότε η θεωρία βαθμίδας περιγράφει μια υπεραγωγική κατάσταση (για μια επισκόπηση, δες [86]). Ένα ακριβές βαρυτικό ανάλογο ενός gapless ολογραφικού υπεραγωγού συζητήθηκε στο [48].

Η δυναμική ενός ολογραφικού υπεραγωγού εξαρτάται από τη συμπεριφορά του βαθμωτού

πεδίου κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής. Στα [88, 89] παρουσιάστηκε ένα μοντέλο που αποτελούνταν από ένα ηλεκτρομαγνητικό και ένα βαθμωτό πεδίο ελάχιστα συζευγμένο με τη βαρύτητα και με αρνητική κοσμολογική σταθερά. Βρέθηκε ότι η effective μάζα του βαθμωτού πεδίου γίνεται αρνητική για μεγάλες τιμές του φορτίου της Reissner-Nordström μελανής οπής υποβάθρου, σπάζοντας έτσι την Αβελιανή συμμετρία βαθμίδας έξω από τον ορίζοντα γεγονότων της Reissner-Nordström. Αυτό μέσω της gauge/gravity duality, αντιστοιχεί στο σχηματισμό ενός συμπυκνώματος στη συνοριακή θεωρία βαθμίδας, το οποίο κάτω από μια κρίσιμη θερμοκρασία προκαλεί τη μετάβαση από μια μεταλλική σε μια υπεραγώγιμη κατάσταση. Ένας τρόπος να εξηγηθεί αυτή η συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου έξω από τον ορίζοντα παρουσιάστηκε στο [89]. Εάν το βαθμωτό σωματίδιο έχει μεγάλο φορτίο, τότε η βαρυτική έλξη προς τη μελανή οπή υπερνικάται από την ηλεκτροστατική άπωση, και επειδή ο χώρος έχει ένα σύνορο (όντας ασυμπτωτικά AdS), ανακλάται και συμπυκνώνεται έξω από τον ορίζοντα της μελανής οπής. Στο [90] παρουσιάστηκε μία γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις και άλλες τοπολογίες του ορίζοντα.

Σε αυτό το Κεφάλαιο, θα μελετήσουμε πιθανές αστάθειες μιας μελανής οπής κοντά στον ορίζοντα σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο (μηδενική κοσμολογική σταθερά). Θεωρούμε ένα βαρυτικό σύστημα που αποτελείται από ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο, το οποίο είναι ελάχιστα συζευγμένο με τη βαρύτητα και οι παράγωγοί του είναι συζευγμένοι με τον τανυστή του Einstein. Όπως αναφέρθηκε και στο [89], χωρίς αυτήν τη σύζευξη, δεν μπορούμε να έχουμε ένα “γεωμετρικό” σπάσιμο της Αβελιανής συμμετρίας κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής, αφού ο χώρος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος.

Λύνοντας λοιπόν το δυναμικό σύστημα των Einstein-Maxwell-Klein-Gordon εξισώσεων, θα δείξουμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται μια αλλαγή φάσης σε μια hairy μελανή οπή. Η διαστατική σταθερά σύζευξης παρέχει τη κλίμακα για το δυναμικό εγκλωβισμού, ένα αντίστοιχο φαινόμενο με την ακτίνα του AdS που προέρχεται από την κοσμολογική σταθερά. Αυτή η νέα hairy μελανή οπή, η οποία είναι σφαιρικά συμμετρική, προέρχεται από το σπάσιμο της Αβελιανής συμμετρίας κοντά στον ορίζοντα λόγω βαρυτικών επιδράσεων.

Στην Ενότητα 5.2, παρουσιάζουμε τη δράση και βρίσκουμε τις εξισώσεις πεδίου. Στην Ενότητα 5.3, λύνουμε τις εξισώσεις διαταρακτικά. Συζητάμε τη λύση για τις πρώτες δύο τάξεις προσέγγισης. Παρουσιάζουμε και αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα. Τέλος, κλείνουμε με τα συμπεράσματα στην Ενότητα 5.4.

5.2 Οι εξισώσεις πεδίου

Το σύστημά μας αποτελείται από ένα $U(1)$ δυναμικό βαθμίδας A_μ , και ένα βαθμωτό πεδίο φ μάζας m και φορτίου q , σε ένα βαρυτικό δυναμικό υπόβαθρο με μηδενική κοσμολογική σταθερά. Έτσι ο χωρόχρονος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος. Η δράση είναι

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu} - \kappa G^{\mu\nu}) D_\mu \varphi (D_\nu \varphi)^* - m^2 |\varphi|^2 \right], \quad (5.1)$$

όπου $D_\mu = \nabla_\mu - iqA_\mu$, και $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Στη δράση (5.1) υπάρχει σύζευξη μεταξύ της παραγώγου του βαθμωτού πεδίου και του τανυστή του Einstein, με σταθερά σύζευξης κ

διαστάσεων μήκους τετράγωνο. Για ευκολία, θεωρούμε

$$\Phi_{\mu\nu} \equiv D_\mu\varphi(D_\nu\varphi)^* , \quad \Phi \equiv g^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} . \quad (5.2)$$

Οι εξισώσεις πεδίου που προκύπτουν από τη δράση (5.1) είναι οι εξισώσεις του Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\varphi)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} - \kappa\Theta_{\mu\nu} , \quad (5.3)$$

όπου,

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu} - g_{\mu\nu}(g^{ab}\Phi_{ab} + m^2|\varphi|^2) , \quad (5.4)$$

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} , \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} = & -g_{\mu\nu}R^{ab}\Phi_{ab} + R_\nu{}^a(\Phi_{\mu a} + \Phi_{a\mu}) + R_\mu{}^a(\Phi_{a\nu} + \Phi_{\nu a}) - \frac{1}{2}R(\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu}) \\ & - G_{\mu\nu}\Phi - \frac{1}{2}\nabla^a\nabla_\mu(\Phi_{a\nu} + \Phi_{\nu a}) - \frac{1}{2}\nabla^a\nabla_\nu(\Phi_{\mu a} + \Phi_{a\mu}) + \frac{1}{2}\square(\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu}) \\ & + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_a\nabla_b(\Phi^{ab} + \Phi^{ba}) + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\nu + \nabla_\nu\nabla_\mu)\Phi - g_{\mu\nu}\square\Phi , \end{aligned} \quad (5.6)$$

η εξίσωση Klein-Gordon

$$(\partial_\mu - iqA_\mu) [\sqrt{-g}(g^{\mu\nu} - \kappa G^{\mu\nu})(\partial_\nu - iqA_\nu)\varphi] = \sqrt{-g}m^2\varphi , \quad (5.7)$$

και οι εξισώσεις Maxwell

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + (g^{\mu\nu} - \kappa G^{\mu\nu}) [2q^2 A_\nu |\varphi|^2 + iq(\varphi^* \nabla_\nu \varphi - \varphi \nabla_\nu \varphi^*)] = 0 . \quad (5.8)$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε σφαιρικά συμμετρικές λύσεις του συστήματος των παραπάνω εξισώσεων (5.3), (5.7) και (5.8). Εκτός από την πολυπλοκότητα της συνεισφοράς του $\Theta_{\mu\nu}$ (5.6) στον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$, υπάρχει άλλη μία τεχνική δυσκολία στην επίλυση των εξισώσεων. Η παρουσία της διαστατικής σταθεράς σύζευξης κ , δεν επιτρέπει στο βαθμωτό πεδίο να είναι σύμμορφα συζευγμένο με τη βαρύτητα. Σε πολλές από τις υπάρχουσες hairy λύσεις μελανών οπών, η σύμμορφη συμμετρία στο βαθμωτό κομμάτι βοηθάει στην εύρεση αναλυτικών λύσεων [10, 11, 12].

Για μια σφαιρικά συμμετρική λύση, χρησιμοποιούμε το *ansatz* για τη μετρική

$$\frac{ds^2}{\mu^2} = -e^{-\alpha(z)} dt^2 + \frac{l(z)e^{\alpha(z)}}{z^2} \left[\frac{dz^2}{z^2} + d\Omega^2 \right] , \quad (5.9)$$

όπου μ είναι μία αυθαίρετη κλίμακα και όλες οι συναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από την ακτινική συντεταγμένη z (δεν έχουμε εξάρτηση από τις γωνιακές συντεταγμένες $\Omega = (\theta, \phi)$, ή τον χρόνο t). Θα τοποθετήσουμε τον ορίζοντα στο $z = 1$, και θα επιλέξουμε συντεταγμένες τέτοιες ώστε το le^α να παραμένει πεπερασμένο στον ορίζοντα. Επιπλέον, υποθέτουμε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο καθώς $z \rightarrow 0$ (έτσι ώστε $\alpha \rightarrow 0$, και $l \rightarrow 1$). Η αυθαίρετη

κλίμακα μ μπορεί να θεωρηθεί ως η θέση του ορίζοντα, αλλάζοντας την ακτινική συντεταγμένη στην r η οποία ορίζεται μέσω της $z = \frac{\mu}{r}$. Αφού επανορίσουμε $t \rightarrow t/\mu$, η μετρική δεν εξαρτάται πλέον από την παράμετρο μ (εξαρτάται από αυτήν μόνο μέσω των συναρτήσεων α και l), και ο ορίζοντας βρίσκεται στο $r = \mu$. Στους υπολογισμούς, μπορούμε να αγνοήσουμε το μ , θέτοντας $\mu = 1$, αλλά πρέπει να το αποκαταστήσουμε σε διαστατικές ποσότητες (π.χ., $\kappa \rightarrow \kappa/\mu^2$).

Η θερμοκρασία της μελανής οπής είναι (υπενθυμίζουμε ότι το le^α είναι πεπερασμένο στον ορίζοντα, όπως επιλέξαμε τις συντεταγμένες)

$$T = \frac{1}{2\pi\mu l(1)e^\alpha(1)} \sqrt{\frac{l''(1)}{2}}. \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας το *ansatz* (5.9) για τη μετρική, οι εξισώσεις πεδίου δίνουν τις ακόλουθες εξισώσεις.

Οι εξισώσεις του Einstein (5.3) γράφονται

$$R_\mu^\nu = 8\pi G \left[T_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu T^\alpha_\alpha \right]. \quad (5.11)$$

Μόνο τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά, ενώ τα δύο γωνιακά είναι ίσα λόγω της σφαιρικής συμμετρίας. Επομένως, υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις που δίνονται από,

$$\begin{aligned} R_t^t &= -\frac{z^4 e^{-\alpha}}{4\mu^2 l} \left[\frac{l'}{l} \alpha' + 2\alpha'' \right], \\ R_z^z &= \frac{z^4 e^{-\alpha}}{4\mu^2 l} \left[-4\frac{l'^2}{l^2} + \frac{l'}{l} \left(\frac{4}{z} + \alpha' \right) + 4\frac{l''}{l} + 2\alpha'^2 + 2\alpha'' \right], \\ R_\theta^\theta = R_\phi^\phi &= \frac{z^4 e^{-\alpha}}{4\mu^2 l} \left[-\frac{l'^2}{l^2} + \frac{l'}{l} \left(-\frac{2}{z} + \alpha' \right) + 2\frac{l''}{l} + 2\alpha'' \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Η συνεισφορά του ταυσιτή ενέργειας-ορμής είναι

$$T_t^{(EM)t} = T_z^{(EM)z} = -T_\theta^{(EM)\theta} = -T_\phi^{(EM)\phi} = \frac{z^4}{2\mu^2 l} A_t'^2, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \mu^2 T_t^{(\varphi)t} &= -\frac{1}{4} [m^2 + q^2 e^\alpha A_t^2] \varphi^2 - \frac{z^4}{4l} e^{-\alpha} \varphi'^2, \\ \mu^2 T_z^{(\varphi)z} &= -\frac{1}{4} [m^2 - q^2 e^\alpha A_t^2] \varphi^2 + \frac{z^4}{4l} e^{-\alpha} \varphi'^2, \\ \mu^2 T_\theta^{(\varphi)\theta} = \mu^2 T_\phi^{(\varphi)\phi} &= -\frac{1}{4} [m^2 - q^2 e^\alpha A_t^2] \varphi^2 - \frac{z^4}{4l} e^{-\alpha} \varphi'^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

καί

$$\begin{aligned}
\mu^2 \Theta_t^t &= -\frac{q^2 z^4}{16l^3} A_t^2 \varphi^2 \left[-3l'^2 + 2ll'\alpha' + 4ll'' + l^2(\alpha'^2 + 4\alpha'') \right] - \frac{z^6 e^{-2\alpha}}{16l^4} \varphi' \left[7z^2 l'^2 \varphi' \right. \\
&\quad \left. + (24 - 24z\alpha' + 3z^2\alpha'^2 - 4z^2\alpha'') l^2 \varphi' - 8z(-2 + z\alpha') l^2 \varphi'' - 4z^2 ll'' \varphi' \right. \\
&\quad \left. + 2z(3(-4 + z\alpha')\varphi' - 4z\varphi'') ll' \right] , \\
\mu^2 \Theta_z^z &= -\frac{q^2 z^3}{16l^3} A_t^2 \varphi \left[zl'^2 \varphi + 4ll'((9 - 1 + z\alpha')\varphi + 2z\varphi') \right] + \frac{q^2 z^3}{2l^2} A_t A_t' \varphi^2 [zl' + (-2 + z\alpha')l] \\
&\quad \frac{z^6 e^{-2\alpha}}{16l^4} \varphi'^2 \left[-12zll' + 3z^2 l'^2 + (8 - 3z^2\alpha'^2) l^2 \right] , \\
\mu^2 \Theta_\theta^\theta &= \mu^2 \Theta_\phi^\phi = \frac{q^2 z^3}{16l^3} A_t^2 \left[-2z l'^2 \varphi^2 + 2l(l' + z l'') \varphi^2 + l^2(8z\varphi'^2 + (4\alpha' + z\alpha'^2 + 4z\alpha'')) \varphi^2 \right. \\
&\quad \left. + 8((1 + z\alpha')\varphi' + z\varphi'') \varphi \right] + \frac{q^2 z^4}{2l} A_t'^2 \varphi^2 \\
&\quad + \frac{q^2 z^3}{2l} A_t \varphi [4z A_t' \varphi' + ((1 + z\alpha') A_t' + z A_t'') \varphi] + \frac{z^7 e^{-2\alpha}}{4l^3} [-2l + zl'] \varphi' \varphi'' \\
&\quad + \frac{z^6 e^{-2\alpha}}{16l^4} \varphi'^2 \left[-4z^2 l'^2 + (-16 + 4z\alpha' + z^2\alpha'^2) l^2 + 2z((7 - z\alpha')l' + zl'') l \right] .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Η Klein-Gordon εξίσωση (5.7) γράφεται

$$\frac{z^4 e^{-\alpha}}{l^{3/2}} \left(\sqrt{l} \mathcal{A} \varphi' \right)' - \mu^2 m_{\text{eff}}^2 \varphi = 0 , \tag{5.16}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 1 + \frac{\kappa z^3 e^{-\alpha}}{4\mu^2 l} \left[\frac{4l'}{l} - \frac{zl'^2}{l^2} + z\alpha'^2 \right] , \\
m_{\text{eff}}^2 &= m^2 - q^2 e^\alpha A_t^2 \left[1 - \frac{\kappa z^4 e^{-\alpha}}{4\mu^2 l} \left(-\frac{3l'^2}{l^2} + 2\alpha' \frac{l'}{l} + \frac{4l''}{l} + \alpha'^2 + 4\alpha'' \right) \right] .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Τέλος, οι Maxwell εξισώσεις ανάγονται στον Νόμο του Gauss,

$$A_t'' + \left[\frac{l'}{2l} + \alpha' \right] A_t' + \frac{q^2}{2} \left[\frac{e^\alpha l}{z^4} - \frac{\kappa}{4\mu^2} \left(-\frac{3l'^2}{l^2} + 2\alpha' \frac{l'}{l} + \frac{4l''}{l} + \alpha'^2 + 4\alpha'' \right) \right] \varphi^2 A_t = 0 . \tag{5.18}$$

Το παραπάνω σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων πρέπει να λυθεί για τις συναρτήσεις α, l, A_t, φ . Θα θέσουμε $16\pi G = 1$.

5.3 Διαταρακτική λύση

Για να λύσουμε το συζευγμένο μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (5.11), (5.16) και (5.18), θα χρησιμοποιήσουμε θεωρία διαταραχών. Αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις της μετρικής και

το βαθμωτό δυναμικό για μικρές τιμές του βαθμωτού πεδίου φ . Εισάγοντας την παράμετρο ϵ , έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \dots \\ l &= l_0 + \epsilon l_1 + \epsilon^2 l_2 + \dots \\ A_t &= A_{t0} + \epsilon A_{t1} + \epsilon^2 A_{t2} + \dots \\ \varphi &= \epsilon\varphi_0 + \epsilon^2\varphi_1 + \epsilon^3\varphi_2 + \dots\end{aligned}\quad (5.19)$$

5.3.1 Πρωτεύουσα τάξη

Σε μηδενική τάξη, έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{l'_0}{l_0}\alpha'_0 + 2\alpha''_0 + e^{\alpha_0}A'_{t0}{}^2 &= 0, \\ -4z\frac{l'_0{}^2}{l_0^2} + \frac{l'_0}{l_0}(4 + z\alpha'_0) + 4z\frac{l''_0}{l_0} + 2z(\alpha_0'^2 + \alpha_0'') - ze^{\alpha_0}A'_{t0}{}^2 &= 0, \\ -z\frac{l'_0{}^2}{l_0^2} + \frac{l'_0}{l_0}(-2 + z\alpha'_0) + 2z\frac{l''_0}{l_0} + 2z\alpha_0'' + ze^{\alpha_0}A'_{t0}{}^2 &= 0, \\ A''_{t0} + \left[\frac{l'_0}{2l_0} + \alpha'_0\right]A'_{t0} &= 0, \\ \frac{z^4 e^{-\alpha_0}}{l_0^{3/2}} \left(\sqrt{l_0}\mathcal{A}_0\varphi'_0\right)' - \mu^2 m_{\text{eff},0}^2 \varphi_0 &= 0,\end{aligned}\quad (5.20)$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= 1 + \frac{\kappa z^3 e^{-\alpha_0}}{4\mu^2 l} \left[\frac{4l'_0}{l_0} - \frac{zl'_0{}^2}{l_0^2} + z\alpha_0'^2\right], \\ m_{\text{eff},0}^2 &= m^2 - q^2 e^{\alpha_0} A_{t0}^2 \left[1 - \frac{\kappa z^4 e^{-\alpha_0}}{4\mu^2 l_0} \left(-\frac{3l_0''}{l_0^2} + 2\alpha_0' \frac{l'_0}{l_0} + \frac{4l_0'''}{l_0} + \alpha_0'^2 + 4\alpha_0''\right)\right].\end{aligned}\quad (5.21)$$

Εάν το βαθμωτό πεδίο μηδενίζεται (no hair), η εξίσωση Klein-Gordon προφανώς ικανοποιείται αυτόματα, και οι υπόλοιπες εξισώσεις σχηματίζουν ένα σύστημα των Einstein-Maxwell εξισώσεων, του οποίου λύση είναι η Reissner-Nordström μελανή οπή και η οποία σε συντεταγμένες Papapetrou γράφεται,

$$\alpha_0 = \ln \frac{(1 + 2z \coth B + z^2)^2}{l_0}, \quad l_0 = (1 - z^2)^2, \quad A_{t0} = 2e^{-B} - \frac{4z}{(1 + z^2) \sinh B + 2z \cosh B}.\quad (5.22)$$

Η μάζα και το φορτίο βρίσκονται από τους $\mathcal{O}(z)$ όρους στα α και A_t . Βρίσκουμε, αντίστοιχα,

$$\frac{M}{\mu} = 8 \coth B, \quad \frac{Q}{\mu} = \frac{4}{\sinh B}.\quad (5.23)$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{Q}{M} = \frac{1}{2 \cosh B}$ είναι συνάρτηση μόνο του B . Καθώς $B \rightarrow \infty$, $\frac{Q}{M} \rightarrow 0$, και παίρνουμε τη Schwarzschild μελανή οπή. Για $B = 0$, ο λόγος αποκτά τη μέγιστή του τιμή, $\frac{Q}{M} = \frac{1}{2}$, η οποία αντιστοιχεί στην extremal Reissner-Nordström μελανή οπή.

Η θερμοκρασία βρίσκεται από την (5.10) ότι είναι

$$T = T_0 = \frac{e^{-2B} \sinh^2 B}{4\pi\mu}. \quad (5.24)$$

Για τη Schwarzschild μελανή οπή ($B \rightarrow \infty$), $T = \frac{1}{16\pi\mu}$, ενώ για την extremal Reissner-Nordström ($B = 0$), $T = 0$, όπως αναμενόταν.

Για μια hairy λύση, χρειαζόμαστε ένα μη μηδενικό βαθμωτό πεδίο. Σε μηδενική τάξη, πρέπει να έχουμε $\varphi_0 \neq 0$. Επομένως, επιπρόσθετα, πρέπει να βρούμε τη λύση στη μηδενικής τάξης Klein-Gordon εξίσωσης (η τελευταία εξίσωση στην (5.20)· οι πρώτες τέσσερις είναι ανεξάρτητες από το φ_0). Αυτό περιορίζει την 2-παραμετρική οικογένεια λύσεων που μόλις είδαμε (οι Reissner-Nordström μελανές οπές παραμετροποιούνται από (M, Q) , ή ισοδύναμα (μ, B)).

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις της Reissner-Nordström μετρικής (5.22), οι συναρτήσεις (5.21) που επεισέρχονται στην μηδενικής τάξης Klein-Gordon εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= 1 + \frac{4\kappa}{\mu^2} \frac{z^4 \sinh^2 B}{[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4}, \quad (5.25) \\ m_{\text{eff},0}^2 &= m^2 - 4q^2 e^{-2B} \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2} - \frac{16q^2 \kappa e^{-2B} \sinh^2 B}{\mu^2} \frac{z^4 (1-z)^2}{(1+z)^2 [(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4}. \end{aligned}$$

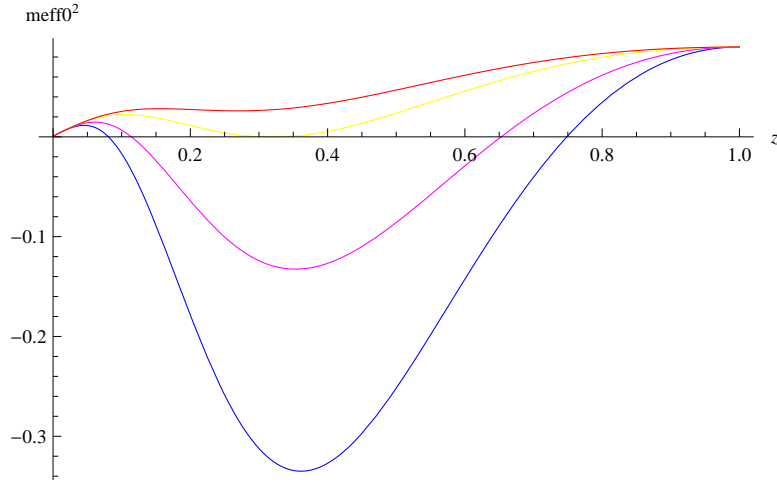
Παρατηρούμε ότι για $\kappa \geq 0$, έχουμε πάντα $\mathcal{A}_0 > 0$. Έτσι, το $m_{\text{eff},0}^2$ παρέχει ένα effective δυναμικό που καθορίζει την ύπαρξη λύσεων της βαθμωτής εξίσωσης (“δέσμιες καταστάσεις”). Για να έχουμε λύση, χρειαζόμαστε $m_{\text{eff},0}^2 < 0$ σε ένα πεπερασμένο διάστημα έξω από τον ορίζοντα. Προφανώς, για αρκούτως μεγάλο φορτίο q του πεδίου, έχουμε $m_{\text{eff},0}^2 < 0$ σε αρκετά μεγάλο διάστημα που εγγυάται την ύπαρξη λύσης, που συνεπάγεται μια πιθανή αστάθεια της μελανής οπής. Στην απουσία της σύζευξης του ταυιστή του Einstein με τις παραγώγους του βαθμωτού πεδίου ($\kappa = 0$), αυτό το διάστημα αναγκαστικά περιλαμβάνει το άπειρο ($z = 0$), αποκτώντας την ασυμπτωτική τιμή $m_{\text{eff},0}^2 = \nu^2 < 0$, όπου

$$\nu^2 \equiv m^2 - 4q^2 e^{-2B}. \quad (5.26)$$

Συνεπώς, ένα βαθμωτό σωματίδιο που απομακρύνεται από τον ορίζοντα (λόγω απωθητικής ηλεκτρικής δύναμης που υπερβαίνει την βαρυτική έλξη) θα φτάσει μέχρι το άπειρο και δε μπορεί ποτέ να συμπυκνωθεί [89]. Από την άλλη, δεν υπάρχει καμία αστάθεια για $\nu^2 \geq 0$. Αυτό είναι σε συμφωνία με το no-hair θεώρημα σε ασυμπτωτικά επίπεδους χωρόχρονους.

Η παραπάνω εικόνα αλλάζει εάν $\kappa > 0$ ¹. Ενώ για $\nu^2 < 0$ εξακολουθούμε να μην έχουμε συμπύκνωση, για $\nu^2 > 0$ οι επιπρόσθετοι όροι ανάλογοι του κ εισάγουν ένα πηγάδι δυναμικού

¹Εάν η σταθερά σύζευξης κ είναι αρνητική, τότε το σύστημα των Einstein-Maxwell-Klein-Gordon εξισώσεων (5.11), (5.16), και (5.18), είναι ασταθές και δεν μπορεί να βρεθεί καμία λύση. Το πρόσημο της σταθεράς σύζευξης κ συζητήθηκε επίσης στο [67], όπου υποστηρίχθηκε ότι ένα αρνητικό κ εισάγει ghosts στη θεωρία. Τέλος, στο [79] αποδείχτηκε ότι ένα πολύ μικρό “παράθυρο” για αρνητικό κ μπορεί να επιτραπεί.



Σχήμα 5.1: Η effective μάζα m_{eff}^2 (5.25) ως συνάρτηση της ακτινικής συντεταγμένης z έξω από τον ορίζοντα (που βρίσκεται στο $z = 1$) για σταθερά σύζευξης (από πάνω προς τα κάτω) $\kappa = 100, 170, 500, 1000$, και μάζα και φορτίο για το βαθμωτό πεδίο (μελανή οπή), $m = 0.3, q = 0.5$ ($M = 3.2, Q = 1.0$), αντίστοιχα.

το οποίο μπορεί να εγκλωβίσει βαθμωτά σωματίδια. Για αρκετά μεγάλες τιμές της σταθεράς σύζευξης κ , αυτό το πηγάδι είναι αρκετά βαθύ ώστε τα σωματίδια να συμπυκνώνονται, όπως θα δείξουμε. Έτσι, ξεπερνάται το no-hair θεώρημα και σχηματίζονται hair.

Στο Σχήμα 5.1, σχεδιάζουμε το $m_{eff,0}^2$ ως συνάρτηση της ακτινικής συντεταγμένης z για διάφορες ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται, με $\nu^2 > 0$. Επιλέγουμε $m = 0.3$ και $q = 0.5$ για το βαθμωτό πεδίο. Επίσης καθορίσαμε τη μάζα και το φορτίο της Reissner-Nordström μελανής οπής στις τιμές $M = 3.2$ και $Q = 1.0$, αντίστοιχα. Οι τέσσερις καμπύλες (από πάνω προς τα κάτω) αντιστοιχούν στις τιμές $\kappa = 100, 170, 500, 1000$, αντίστοιχα. Μπορούμε να δούμε το πηγάδι δυναμικού που σχηματίζεται σε όλες τις περιπτώσεις, όμως για $\kappa = 100, 170$, η καμπύλη είναι πάνω από τον άξονα και η κυματική εξίσωση δεν έχει λύση. Για $\kappa = 500, 1000$, το πηγάδι δυναμικού βρίσκεται σε αρνητικές τιμές. Αυτή είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη λύσεων. Για τις επιλεγμένες τιμές της μάζας και του φορτίου του σωματιδίου, μπορεί να βρεθεί λύση που αντιστοιχεί σε πηγάδια δυναμικού της μορφής του σχήματος 5.1 για $\kappa = 1000$, και μάζα και φορτίο της μελανής οπής κοντά στις παραπάνω τιμές.

Στη συνέχεια, θα δούμε την αριθμητική λύση της μηδενικής τάξης κυματικής εξίσωσης (η τελευταία εξίσωση στην (5.20) με τα \mathcal{A}_0 και $m_{eff,0}^2$ να δίνονται από την (5.25)). Είναι βολικό να απομονώσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου. Καθώς $z \rightarrow 0$ ($r = \frac{r_0}{z} \rightarrow \infty$), παρατηρούμε

$$\varphi_0(z) \sim z^{1+2\mu\xi} e^{-\frac{\mu\nu}{z}} \sim \frac{1}{r^{1+2\mu\xi}} e^{-\nu r}, \quad \xi \equiv \frac{\nu}{\sinh B} - \frac{m^2}{\nu} \quad (5.27)$$

όπου το ν έχει οριστεί στην (5.26). Παρατηρούμε ότι το πεδίο πέφτει εκθετικά καθώς

$r \rightarrow \infty$, σε αντίθεση με τη συνήθη power law συμπεριφορά σε AdS χώρο (όπου έχειδειχτεί ότι υπάρχουν hairy λύσεις). Έτσι, εάν υπάρχει λύση στην περίπτωση μας, η συμπύκνωση συμβαίνει στην περιοχή του ορίζοντα και πέφτει γρήγορα μακριά από αυτόν.

Ορίζουμε

$$\varphi_0(z) = z^{1+2\mu\xi} e^{-\frac{\mu\nu}{z}} \chi(z), \quad (5.28)$$

και θα λύσουμε την κυματική εξίσωση αριθμητικά για το χ . Αυτή η συνάρτηση είναι ομαλή στο $z = 0$, και είναι αυθαίρετα κανονικοποιημένη αφού υπακούει σε μια γραμμική εξίσωση. Μπορούμε να επιλέξουμε $\chi(0) = 1$ ως μια από τις συνοριακές συνθήκες. Η άλλη συνθήκη καθορίζεται από την αναλυτική λύση της κυματικής εξίσωσης ανεπτυγμένη γύρω από το $z = 0$ (που είναι ένα ομαλό σημείο για την χ). Παίρνουμε,

$$\chi(z) = 1 + \frac{2\mu\xi(1+2\mu\xi) - 2\mu^2\nu^2(5\nu^2 + 2\nu^2 \coth^2 B - 8\nu^2 \coth B) + 8\mu^2 m^2(2 \coth B - 1)}{2\mu\nu} z + \mathcal{O}(z^2), \quad (5.29)$$

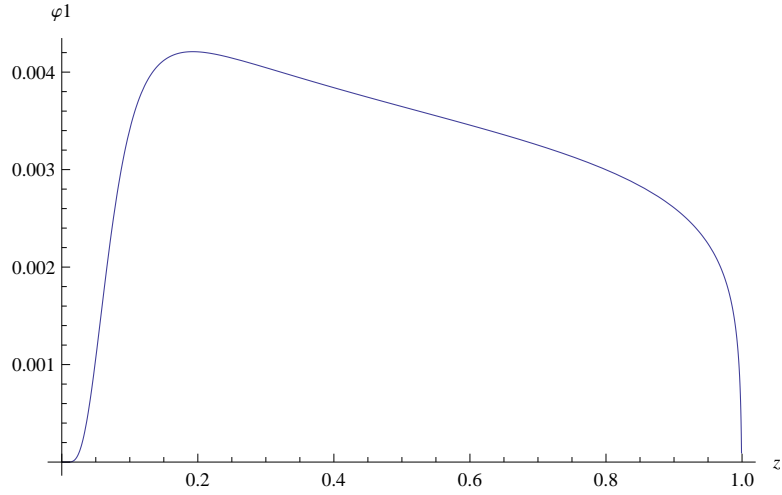
από όπου μπορούμε να βρούμε το $\chi'(0)$, για να αποτελέσει τη δεύτερη συνθήκη. Έτσι, για δεδομένο σύνολο παραμέτρων του βαθμωτού πεδίου (m, q) , μπορούμε να βρούμε μία μοναδική λύση. Όμως αυτές οι λύσεις είναι γενικά μη αποδεκτές επειδή αποκλίνουν λογαριθμικά στον ορίζοντα ($\chi(z) \sim \ln(1-z)$, καθώς $z \rightarrow 1$). Εάν $\kappa = 0$, όλες οι λύσεις αποκλίνουν στον ορίζοντα σε πλήρη συμφωνία με το no-hair θεώρημα. Για $\kappa > 0$, υπάρχουν ζεύγη παραμέτρων μελανής οπής (M, Q) για τα οποία υπάρχουν ομαλές λύσεις σε όλο το διάστημα $z \in (0, 1]$. Στο δυδιάστατο παραμετρικό χώρο σχηματίζουν μία μονοδιάστατη καμπύλη η οποία χωρίζει την περιοχή της ευστάθειας από αυτήν της αστάθειας για μια Reissner-Nordström μελανή οπή.

Το σχήμα 5.2 απεικονίζει το διάγραμμα του βαθμωτού πεδίου φ_0 που βρέθηκε λύνοντας αριθμητικά την κυματική εξίσωση όπως περιγράφηκε παραπάνω. Επιλέξαμε για τις παραμέτρους του βαθμωτού πεδίου τις τιμές $m = 0.30$ και $q = 0.50$. Μία ομαλή λύση βρέθηκε για τις παραμέτρους της μελανής οπής $M = 3.20$ και $Q = 1.05$. Το βαθμωτό πεδίο είναι συγκεντρωμένο εντός $z \lesssim 0.2$, δηλαδή μέσα σε περίπου πέντε φορές την ακτίνα του ορίζοντα (στην ακτινική συντεταγμένη $r = \frac{\mu}{z}$), πέρα από όπου πέφτει εκθετικά ($\varphi_0 \sim e^{-\nu r}$, για $r \gtrsim 5\mu$).

Τέλος στο σχήμα 5.3, σχεδιάζουμε κρίσιμες ευθείες για διάφορες τιμές της σταθεράς σύζευξης κ ($\kappa = 1000, 3000, 5000, 10000$, από πάνω προς τα κάτω). Κάτω από κάθε κρίσιμη ευθεία, η Reissner-Nordström μελανή οπή είναι ευσταθής, ενώ πάνω από αυτή εμφανίζεται αστάθεια. Επιλέξαμε τις τιμές $m = 1.0$, $q = 0.5$, για τη μάζα και το φορτίο του πεδίου αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι καθώς το κ μειώνεται, η περιοχή της αστάθειας μειώνεται προς την extremal τιμή $Q/M = 0.5$ (μηδενική θερμοκρασία). Αυτό είναι αναμενόμενο, επειδή η κυματική εξίσωση δεν έχει ομαλή λύση για μικρά κ (για $\kappa = 0$, τέτοιες λύσεις απαγορεύονται λόγω του no-hair θεωρήματος).

5.3.2 Δευτερεύουσα τάξη

Έχοντας βρει τη μηδενικής τάξης λύση στις εξισώσεις πεδίου, στρεφόμαστε τώρα στην επόμενη τάξη διόρθωση στη μετρική, το ηλεκτροστατικό δυναμικό και στο βαθμωτό πεδίο.



Σχήμα 5.2: Το βαθμωτό πεδίο φ_0 έξω από τον ορίζοντα ($0 < z \leq 1$) για σταθερά σύζευξης $\kappa = 1000$, και μάζα και φορτίο για το βαθμωτό πεδίο (μελανή οπή), $m = 0.30$, $q = 0.50$ ($M = 3.187$, $Q = 1.048$), αντίστοιχα.

Επειδή το βαθμωτό πεδίο υπεισέρχεται στις Einstein-Maxwell εξισώσεις τετραγωνικά (μέσω του τανυστή ενέργειας-ορμής), προκύπτει ότι οι $\mathcal{O}(\epsilon)$ διορθώσεις μηδενίζονται ($\alpha_1 = l_1 = A_{t1} = 0$). Επομένως, οι επόμενης τάξης διορθώσεις δίνονται από τους όρους $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

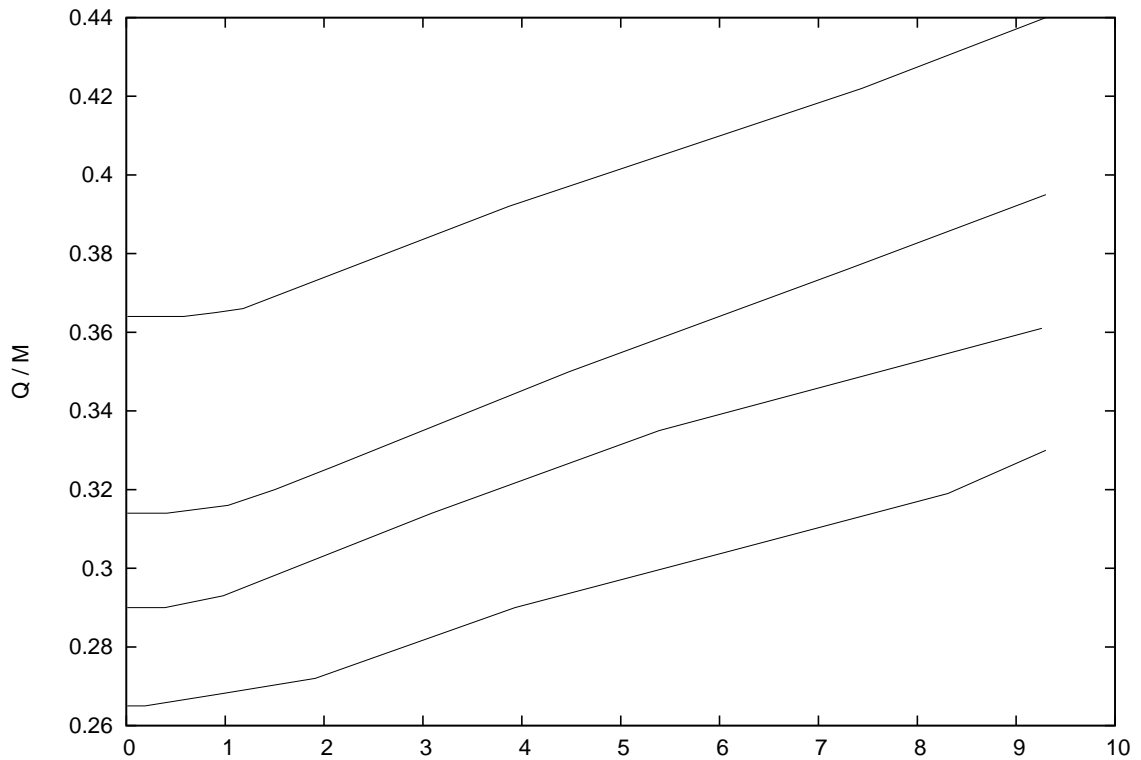
Αθροίζοντας τις tt και $\theta\theta$ εξισώσεις του Einstein, παίρνουμε για $\mathcal{O}(\epsilon^2)$,

$$l_2'' - \frac{1 - 5z^2}{z(1 - z^2)} l_2' + \frac{8z^2}{(1 - z^2)^2} l_2 = \mathcal{L}, \quad (5.30)$$

όπου το δεξί μέλος αποτελείται από μηδενικής τάξης συναρτήσεις που έχουν ήδη υπολογιστεί,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\kappa \left[q^2 e^{\alpha_0} l_0 A_{t0}^2 \varphi_0 + z^3 e^{-\alpha_0} \left(-1 + \frac{z l_0'}{2l_0} \right) \varphi_0' \right] \varphi_0'' \\ & + \kappa e^{-\alpha_0} \left[-q^2 e^{2\alpha_0} l_0 A_{t0}^2 + \frac{z^4 l_0'^2}{8l_0^2} + \frac{z^2}{4} (4 - 2z\alpha_0' + z^2 \alpha_0'^2) + \frac{z^3}{4} \left((-1 + z\alpha_0') \frac{l_0'}{l_0} - z \frac{l_0''}{l_0} \right) \right] \varphi_0'^2 \\ & - q^2 \kappa e^{\alpha_0} l_0 A_{t0} \varphi_0 \varphi_0' \left[4A_{t0}' + A_{t0} \left(-\frac{1}{z} + 2\alpha_0' + \frac{l_0'}{l_0} \right) \right] \\ & + \frac{e^{\alpha_0} l_0^2}{z^4} [-m^2 + q^2 e^{\alpha_0} A_{t0}^2] \varphi_0^2 - \frac{q^2 \kappa e^{\alpha_0} l_0}{8z} \varphi_0^2 \left[8z A_{t0}'^2 \right. \\ & + 8A_{t0} \left(z \frac{l_0'}{l_0} A_{t0}' + (-1 + 2z\alpha_0') A_{t0}' + z A_{t0}'' \right) \\ & \left. + A_{t0}^2 \left(-z \frac{l_0''}{l_0^2} + 2(-1 + 2z\alpha_0') \frac{l_0'}{l_0} + 2z \frac{l_0''}{l_0} - 4\alpha_0' + 4z\alpha_0'^2 + 4z\alpha_0'' \right) \right]. \quad (5.31) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το \mathcal{L} μηδενίζεται και στον ορίζοντα και στο άπειρο (στα $z = 0, 1$). Αυτή



Σχήμα 5.3: Κρίσιμες καμπύλες που διαχωρίζουν την M περιοχή της αστάθειας (πάνω από κάθε καμπύλη) από την περιοχή της ευστάθειας (κάτω από την καμπύλη) για σταθερά σύζευξης (από πάνω προς τα κάτω) $\kappa = 1000, 3000, 5000, 10000$, και μάζα και φορτίο του βαθμωτού πεδίου $m = 1.0, q = 0.5$, αντίστοιχα. Ο οριζόντιος άξονας είναι M και ο κάθετος Q/M , όπου M και Q η μάζα και το φορτίο της μελανής οπής, αντίστοιχα.

η εξίσωση μπορεί να λυθεί για το l_2 αναλυτικά. Βρίσκουμε

$$l_2(z) = -z^2(1-z^2) \int_z^1 dw \frac{\mathcal{L}(w)}{2w} - (1-z^2)^2 \int_0^z dw \frac{w\mathcal{L}(w)}{2(1-w^2)}, \quad (5.32)$$

όπου επιλέξαμε τα άκρα ολοκλήρωσης απαιτώντας $l_2(0) = l_2(1) = 0$ (το l πρέπει να έχει διπλή ρίζα στον ορίζοντα, $z = 1$). Έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 5.4 για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήσαμε και για το διάγραμμα του μηδενικής τάξης βαθμωτού πεδίου (σχ. 5.2).

Στη συνέχεια εξετάζουμε την tt εξίσωση του Einstein μαζί με τον Νόμο του Gauss. Για $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, αποτελούν ένα συζευγμένο σύστημα γραμμικών εξισώσεων που πρέπει να λυθεί για τα $\{\alpha_2, A_{t2}\}$,

$$\alpha_2'' + \frac{l_0'}{2l_0}\alpha_2' - \left[\alpha_0'' + \frac{l_0'}{2l_0}\alpha_0' \right] \alpha_2 + e^{\alpha_0} A_{t0}' A_{t2}' = \mathcal{P}, \quad (5.33)$$

$$A_{t2}'' + \left[\frac{l_0'}{2l_0} + \alpha_0' \right] A_{t2}' + A_{t0}' \alpha_2' = \mathcal{Q}, \quad (5.34)$$

όπου το δεξί μέλος αποτελείται από όρους με συναρτήσεις μηδενικής τάξης μόνο

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\kappa}{4\mu^2 l_0} z^3 e^{-\alpha_0} \left[\frac{z l_0'}{l_0} - 2 + z \alpha_0' \right] \varphi_0' \varphi_0'' + \frac{1}{8} \varphi_0'^2 + \frac{e^{\alpha_0} l_0}{8z^4} [m^2 + e^{\alpha_0} q^2 A_{t0}^2] \varphi_0^2 \\ &\quad - \frac{\kappa z^2 e^{-\alpha_0}}{32\mu^2 l_0} \left[\frac{7z^2 l_0'^2}{l_0^2} + \frac{6z l_0'}{l_0} (-4 + z \alpha_0') - \frac{4z^2 l_0''}{l_0} + 24 - 24z \alpha_0' + 3z^2 \alpha_0'^2 - 4z^2 \alpha_0'' \right] \varphi_0'^2 \\ &\quad - \frac{q^2 \kappa e^{\alpha_0} A_{t0}^2}{32} \left[-3 \frac{l_0'^2}{l_0^2} + 2 \frac{l_0'}{l_0} \alpha_0' + 4 \frac{l_0''}{l_0} + \alpha_0'^2 + 4\alpha_0'' \right] \varphi_0^2 - \frac{l_2''}{l_0} + \frac{l_2'}{2l_0} \left[\frac{3l_0'}{l_0} - \alpha_0' \right] \\ &\quad + \frac{l_2}{4l_0} \left[-9 \frac{l_0''^2}{l_0^2} + 4 \frac{l_0''}{l_0} \alpha_0' + 8 \frac{l_0'''}{l_0} \right], \\ \mathcal{Q} &= -\frac{q^2 A_{t0}^2 e^{\alpha_0} l_0}{2z^4} \varphi_0^2 + \frac{q^2 \kappa A_{t0}^2}{8} \left[-3 \frac{l_0'^2}{l_0^2} + 2 \frac{l_0'}{l_0} \alpha_0' + 4 \frac{l_0''}{l_0} + \alpha_0'^2 + 4\alpha_0'' \right] \varphi_0^2 \\ &\quad - \frac{A_{t0}' l_2'}{2l_0} + \frac{l_2}{l_0} \left[A_{t0}' \left(\frac{l_0'}{l_0} + \alpha_0' \right) + A_{t0}'' \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Η εξίσωση (5.34) είναι πρώτης τάξης ως προς A_{t2}' , και δίνει

$$\begin{aligned} A_{t2}'(z) &= \frac{4(1-z^2) \sinh B}{[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^2} \\ &\quad \times \left[4 \sinh B \alpha_2(z) + C + \int_0^z dw \frac{[(1+w^2) \sinh B + 2w \cosh B]^2 \mathcal{Q}(w)}{1-w^2} \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

όπου το C είναι μια αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Η διόρθωση στο ηλεκτροστατικό δυναμικό βρίσκεται ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας ότι $A_{t2}(1) = 0$,

$$A_{t2}(z) = - \int_z^1 dw A_{t2}'(w). \quad (5.37)$$

Αυτό δίνει μια διόρθωση στο φορτίο Q της μελανής οπής,

$$\frac{\delta Q}{\mu} = -\epsilon^2 A'_{t2}(0) = -\frac{4\epsilon^2 C}{\sinh B} = -C\epsilon^2 \frac{Q}{\mu}, \quad (5.38)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\alpha_2(0) = 0$.

Λόγω της (5.36), η εξίσωση (5.33) γίνεται δεύτερης τάξης για το α_2 ,

$$\alpha_2'' - \frac{2z}{1-z^2}\alpha_2' - \frac{8}{[(1+z^2)\sinh B + 2z\cosh B]^2}\alpha_2 = \mathcal{P}', \quad (5.39)$$

όπου και πάλι το δεξί μέλος έχει μηδενικής τάξης (δηλαδή γνωστές) συναρτήσεις ,

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} + \frac{16\sinh B}{[(1+z^2)\sinh B + 2z\cosh B]^3} \left[C + \int_0^z dw \frac{[(1+w^2)\sinh B + 2w\cosh B]^2 \mathcal{Q}(w)}{1-w^2} \right], \quad (5.40)$$

Αυτή πρέπει να λυθεί για το α_2 με συνοριακές συνθήκες $\alpha_2(0) = 0$ και $\alpha_2(1) < \infty$. Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί αριθμητικά.

Η λύση που βρίσκεται με αυτόν τον τρόπο περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά C . Αυτή η παράμετρος θα προσδιοριστεί λύνοντας την Klein-Gordon σε $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, η οποία γίνεται

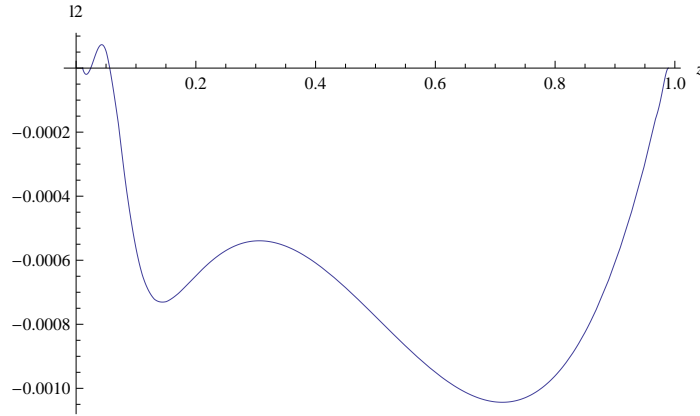
$$\begin{aligned} \frac{z^4 e^{-\alpha_0}}{l_0^{3/2}} \left(\sqrt{l_0} \mathcal{A}_0 \varphi_2' \right)' - \mu^2 m_{\text{eff},0}^2 \varphi_2 &= \frac{z^4 e^{-\alpha_0} l_2}{2l_0^{5/2}} \left(\sqrt{l_0} \mathcal{A}_0 \varphi_0' \right)' + \mu^2 m_{\text{eff},1}^2 \varphi_0 \\ &- \frac{z^4 e^{-\alpha_0}}{l_0^{3/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{l_0}} \left(-\frac{\kappa z^3 e^{-\alpha_0}}{\mu^2} \mathcal{A}_1 + \frac{l_2}{2} \mathcal{A}_0 \right) \varphi_0' \right)', \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου το δεξί μέλος περιέχει γνωστές συναρτήσεις (μηδενικής και πρώτης τάξης που έχουμε ήδη υπολογίσει),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{l_2'}{l_0^2} \left[-1 + \frac{z l_0'}{2l_0} \right] + \frac{l_2}{4l_0} \left[\frac{8l_0'}{l_0} - \frac{3z l_0'^2}{l_0^2} + z \alpha_0'^2 \right] + \frac{z}{2} \alpha_0' \alpha_2' + \alpha_2 \left[\frac{l_0'}{l_0} - \frac{z l_0'^2}{4l_0^2} + \frac{z}{4} \alpha_0'^2 \right], \\ m_{\text{eff},1}^2 &= -m^2 \left[\frac{l_2}{l_0} + \alpha_2 \right] + q^2 A_{t0} e^{\alpha_0} \left[2A_{t2} + \frac{l_2}{l_0} A_{t0} \right] \\ &+ \frac{\kappa}{4\mu^2} q^2 \frac{z^4}{l_0} A_{t0} A_{t2} \left[-\frac{3l_0'^2}{l_0^2} + 2\alpha_0' \frac{l_0'}{l_0} + \frac{4l_0''}{l_0} + \alpha_0'^2 + 4\alpha_0'' \right] \\ &+ \frac{\kappa}{4\mu^2} q^2 \frac{z^4}{l_0} A_{t0}^2 \left[\alpha_2'' + \frac{\alpha_2'}{2} \left(\frac{l_0'}{l_0} + \alpha_0' \right) + \frac{\alpha_2}{4} \left(-\frac{3l_0'^2}{l_0^2} + 2\alpha_0' \frac{l_0'}{l_0} + \frac{4l_0''}{l_0} + \alpha_0'^2 + 4\alpha_0'' \right) \right] \\ &+ \frac{\kappa}{4\mu^2} q^2 \frac{z^4}{l_0} A_{t0}^2 \left[\frac{l_2''}{l_0} + \frac{l_2'}{2l_0} \left(-\frac{3l_0'}{l_0} + \alpha_0' \right) + \frac{l_2}{l_0} \left(-\frac{3l_0'^2}{l_0^2} + \frac{l_0'}{l_0} \alpha_0' + 2\frac{l_0''}{l_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξ. (5.41) με $\frac{e^{\alpha_0} l_0^{3/2}}{z^4} \varphi_0$, και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0, 1]$, το αριστερό μέλος μηδενίζεται λόγω των (5.16) και (5.25). Έτσι παίρνουμε

$$0 = \int_0^1 dz (1-z^2) \left[\left(\frac{l_2}{2l_0} \right)' \mathcal{A}_0 \varphi_0 \varphi_0' - \frac{\kappa e^{-\alpha_0}}{\mu^2 l_0} \mathcal{A}_1 \varphi_0'^2 - \mu^2 \frac{e^{\alpha_0} l_0}{z^4} m_{\text{eff},1}^2 \varphi_0^2 \right]. \quad (5.43)$$



Σχήμα 5.4: Η δευτερεύουσας τάξης συνάρτηση της μετρικής $l_2(z)$ για επιλογή παραμέτρων όπως στο Σχήμα 5.2.

Παρότι φαίνεται πολύπλοκη, πρόκειται για μια απλή γραμμική αλγεβρική εξίσωση για την άγνωστη παράμετρο C . Μπορεί εύκολα να λυθεί για το C .

Για την επιλογή των παραμέτρων του σχήματος 5.2, από την (5.43) βρίσκουμε $C = 8.0$.

Με αυτήν τιμή, μπορούμε να λύσουμε αριθμητικά την (5.39) για το α_2 . Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη $\alpha_2(0) = 0$ και επιλέγοντας το $\alpha_2'(0)$ αυθαίρετα, βρίσκουμε μία λύση η οποία εν γένει, αποκλίνει λογαριθμικά στον ορίζοντα. Μεταβάλλοντας την τιμή του $\alpha_2'(0)$, βρίσκουμε την ομαλή λύση, η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 5.5.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την αριθμητική λύση για το α_2 για να καθορίσουμε τη διόρθωση στο ηλεκτροστατικό δυναμικό A_{i2} . Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο σχήμα 5.6.

Με αυτό ολοκληρώσαμε τον καθορισμό όλων των συναρτήσεων της μετρικής καθώς και του ηλεκτροστατικού δυναμικού και στην επόμενη τάξη διόρθωση.

Η hairy μελανή οπή έχει τις εξής γενικές ιδιότητες. Η μάζα της είναι

$$M = -2\mu\alpha'(0) = 8\mu \coth B - 2\mu\epsilon^2\alpha_2'(0) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (5.44)$$

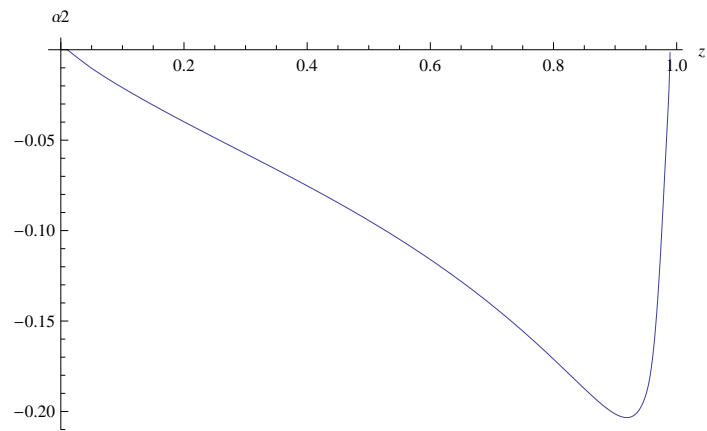
όπου το $\alpha_2'(0)$ καθορίζεται από τη λύση της εξίσωσης (5.39), το φορτίο της είναι

$$Q = -\mu A_t'(0) = [1 - C\epsilon^2] \frac{4\mu}{\sinh B} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (5.45)$$

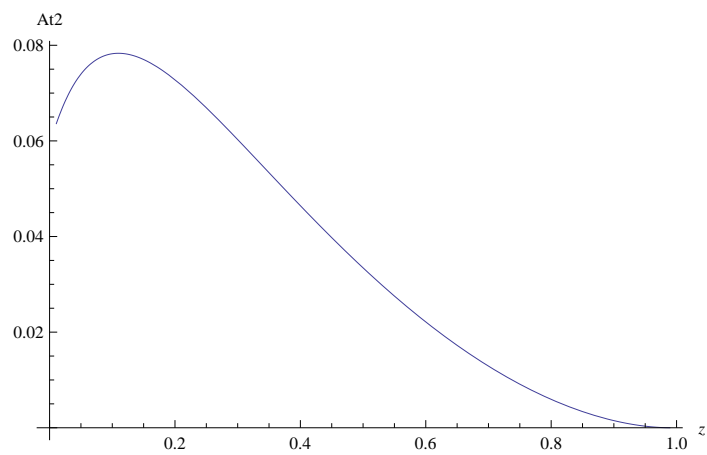
όπου το C βρίσκεται από την εξίσωση (5.43), και η θερμοκρασία της βρίσκεται από την (5.10) ότι είναι

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \epsilon^2\tau + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad \tau = \left(\alpha_2 + \frac{l_2}{l_0} - \frac{l_2''}{2l_0''} \right) \Big|_{z=1} = \alpha_2(1) + \int_0^1 dz \frac{z\mathcal{L}(z)}{4(1-z^2)}, \quad (5.46)$$

όπου το T_0 δίνεται από τη μηδενικής τάξης προσέγγιση (5.24), το $\alpha_2(1)$ καθορίζεται από τη λύση της εξίσωσης (5.39), και το \mathcal{L} έχει οριστεί στην (5.31).



Σχήμα 5.5: Η δευτερεύουσας τάξης συνάρτηση της μετρικής $a_2(z)$ για επιλογή παραμέτρων όπως στο Σχήμα 5.2. Επιπρόσθετα έχουμε επιλέξει $a_2'(0) = -0.0000105$.



Σχήμα 5.6: Η δευτερεύουσας τάξης συνάρτηση του ηλεκτροστατικού δυναμικού $A_{12}(z)$ για επιλογή παραμέτρων όπως στο Σχήμα 5.2.

5.4 Συμπεράσματα

Θεωρήσαμε ένα βαρυτικό σύστημα χωρίς κοσμολογική σταθερά (και επομένως ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο) με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο με μάζα, του οποίου οι παράγωγοι ήταν συζευγμένοι με τον τανυστή του Einstein, με σταθερά σύζευξης κ . Για μικρές τιμές του βαθμωτού πεδίου λύσαμε το συζευγμένο σύστημα των εξισώσεων Einstein-Maxwell-Klein Gordon διαταρακτικά.

Βρήκαμε ότι για αρκετά μεγάλες τιμές της σταθεράς σύζευξης κ , μια Αβελιανή $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας σπάει στην περιοχή του ορίζοντα της μελανής οπής, οδηγώντας σε μια νέα μελανή οπή με ισοτροπικά hair. Ένα μη-μηδενικό κ μας επέτρεψε να ξεπεράσουμε το θεώρημα no-hair. Η κλίμακα που εισάγεται μέσω της διαστατικής σταθεράς σύζευξης κ δρα παρόμοια με αυτήν μιας κοσμολογικής σταθεράς σε AdS χώρο, δημιουργώντας ένα πηγάδι δυναμικού που μπορεί να εγκλωβίσει βαθμωτά σωματίδια κοντά στον ορίζοντα. Σε αντίθεση με τον AdS χώρο, στον οποίο εμφανίζεται μια power law ασυμπτωτική συμπεριφορά για το βαθμωτό πεδίο, στην περίπτωσή μας δείξαμε ότι το βαθμωτό πεδίο πέφτει εκθετικά μακριά από τον ορίζοντα.

Θα ήταν ενδιαφέρον να υπολογίσουμε correlation functions σε αυτό το υπόβαθρο και να εξερευνήσουμε την πιθανότητα μιας αντιστοιχίας με μια θεωρία βαθμίδας, παρόμοια με την αντιστοιχία θεωρίας βαθμίδας/ βαρύτητας σε AdS χώρο. Θα ήταν επίσης ενδιαφέρον να βρούμε μια πλήρη αριθμητική λύση των εξισώσεων πεδίου για μηδενική θερμοκρασία, που θα μας επέτρεπε να ερευνήσουμε τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, μελετήθηκε η ύπαρξη λύσεων μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτό πεδίο σε τέσσερις διαστάσεις.

Αρχικά κάναμε μια ανασκόπηση στις πιο γνωστές λύσεις μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτό πεδίο. Η πρώτη λύση [8] είναι σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο ($\Lambda = 0$). Είδαμε κάποιες από τις ιδιότητές της και παρουσιάσαμε και την ηλεκτρικά φορτισμένη λύση. Η λύση αυτή όμως έχει κάποιες παθογένειες. Το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται στον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής, ενώ στο [9] βρέθηκε ότι είναι ασταθής. Έτσι δεν παραβιάζεται το no-hair θεώρημα. Στη συνέχεια παρουσιάσαμε τη λύση MTZ [10] η οποία υπάρχει σε ασυμπτωτικά AdS χωρόχρονο $\Lambda < 0$. Είδαμε ότι η εισαγωγή κοσμολογικής σταθεράς μετατοπίζει τον ορίζοντα καλύπτοντας τον απειρισμό του βαθμωτού πεδίου, καθιστώντας έτσι τόσο τη μετρική όσο και το βαθμωτό πεδίο ομαλά σε όλο το χωρόχρονο. Η ύπαρξη της αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς επιτρέπει στον ορίζοντα να έχει υπερβολική γεωμετρία. Αναλύσαμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες της μελανής οπής και είδαμε ότι παρατηρείται μια αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης, από την τοπολογική λύση κενού σε αυτήν με το βαθμωτό πεδίο. Σε θερμοκρασίες χαμηλότερες από μια κρίσιμη τιμή επικρατεί η hairy μελανή οπή. Είδαμε επίσης την ηλεκτρικά φορτισμένη μορφή της λύσης [11].

Ακολουθώς παρουσιάσαμε τη γενίκευση της φορτισμένης C - μετρικής σύμμορφα συζευγμένης με βαθμωτό πεδίο, παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Η λύση είναι είτε ασυμπτωτικά επίπεδη ($\Lambda = 0$) είτε χωρόχρονος σταθερής καμπυλότητας ($\Lambda \neq 0$). Η μετρική του χωρόχρονου έχει τη συνήθη μορφή της C - μετρικής με κοσμολογική σταθερά, όπου η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο είναι ίσα. Είδαμε ότι η επιτάχυνση παίζει έναν παρόμοιο ρόλο με τη κοσμολογική σταθερά. Για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό στον ορίζοντα και έξω από αυτόν αν $\Lambda \neq 0$ και απειρίζεται στην κωνική άκρη του ορίζοντα στην επίπεδη περίπτωση. Επιπλέον για αρνητική κοσμολογική σταθερά και επαυξημένη επιτάχυνση, είδαμε ότι η επιταχυνόμενη μελανή οπή προσομοιάζει περισσότερο σε μελανή χορδή με τον ορίζοντα γεγονότων να φτάνει μέχρι το ασυμπτωτικό άπειρο. Αυτή η περίπτωση ακολουθεί στενά την περιγραφή της AdS C - μετρικής στο [31]. Επίσης το βαθμωτό πεδίο συμπεριφέρεται καλά σε όλη την επιτρεπόμενη περιοχή των συντεταγμένων και επιπλέον η μετρική δεν έχει πια κωνική ανωμαλία. Ακολουθώντας το [31] ερμηνεύσαμε αυτό το γεγονός, ως η χορδή να εξομαλύνεται από την ίδια την επιταχυνόμενη χορδή, η

οποία εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Υπό αυτήν την έννοια η κωνική ανωμαλία αντικαθίσταται από τον ίδιο τον ορίζοντα της μελανής οπής! Αυτό το φαινόμενο επομένως δεν οφείλεται στο βαθμωτό πεδίο όπως θα μπορούσε κάποιος αρχικά να υποθέσει

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια νέα κλάση λύσεων μελανών οπών ελάχιστα συζευγμένων με ένα βαθμωτό πεδίο παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Θεωρήσαμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια αυτο-αλληλεπιδρώντων δυναμικών, παραμετροποιημένων από μια αδιάστατη σταθερά g . Όταν $g = 0$, ανακτούμε τη σύμμορφα αναλλοίωτη λύση μελανής οπής των Martinez-Troncoso-Zanelli (MTZ). Ένα μη μηδενικό g σημαίνει απομάκρυνση από τη σύμμορφη αναλλοιότητα. Εκτελέσαμε μια διαταρακτική ανάλυση ευστάθειας των λύσεων. Βρήκαμε ότι η hairy μελανή οπή είναι ευσταθής κοντά στο σύμμορφο σημείο εάν η μάζα είναι αρνητική και μπορεί να εκδηλώσει αστάθειες στην περίπτωση αρνητικής μάζας. Επίσης μελετήσαμε τη θερμοδυναμική των λύσεων. Υπολογίσαμε την ελεύθερη ενέργεια, και βρήκαμε ότι υπάρχει μία κρίσιμη θερμοκρασία πάνω από την οποία η hairy μελανή οπή χάνει το βαθμωτό πεδίο και μετατρέπεται σε μία μελανή οπή στο κενό. Αυτή η κρίσιμη θερμοκρασία συμβαίνει σε ένα σημείο όπου η μάζα της μελανής οπής αλλάζει πρόσημο, όπως και στην περίπτωση της MTZ [10]. Επιπρόσθετα, παρατηρήσαμε ένα κλάδο hairy λύσεων που υφίστανται μια πρώτη τάξεως αλλαγή φάσης σε μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία η οποία εξαρτάται από το g και είναι υψηλότερη από τη κρίσιμη θερμοκρασία της MTZ. Αυτή νέα κρίσιμη θερμοκρασία αποκλίνει καθώς η σταθερά σύζευξης του δυναμικού $g \rightarrow 0$.

Επιπρόσθετα στο επόμενο Κεφάλαιο θεωρήσαμε ένα βαρυτικό σύστημα μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς που αποτελείται από ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον τανυστή Einstein. Θεωρήσαμε μια σφαιρικά συμμετρική Reissner-Nordström μελανή οπή ως υπόβαθρο και τη διαταράξαμε εισάγοντας μία σύζευξη των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή του Einstein. Δείξαμε ότι σε αυτό το βαρυτικό σύστημα υπάρχει μία κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται μία δεύτερης τάξης αλλαγή φάσης σε μία ανισοτροπική hairy μελανή οπή και ότι το βαθμωτό πεδίο είναι ομαλό στον ορίζοντα. Λύνοντας αριθμητικά κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία, το συζευγμένο δυναμικό σύστημα των Einstein-Maxwell-Klein-Gordon εξισώσεων, μελετήσαμε τη συμπεριφορά της hairy λύσης μελανής οπής. Υπολογίσαμε τη θερμοκρασία της και τη συγκρίναμε με την αντίστοιχη θερμοκρασία της Reissner-Nordström μελανής οπής. Βρήκαμε ότι πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία η Reissner-Nordström είναι ασταθής και υπολογίζοντας τις ελεύθερες ενέργειες δείξαμε ότι η νέα hairy μελανή οπή είναι ενεργειακά προτιμητέα από την αντίστοιχη Reissner-Nordström.

Τέλος, στο τελευταίο Κεφάλαιο, θεωρήσαμε και πάλι ένα βαρυτικό σύστημα που αποτελείται από ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο, το οποίο είναι ελάχιστα συζευγμένο με τη βαρύτητα και οι παράγωγοί του είναι συζευγμένοι με τον τανυστή του Einstein. Όπως αναφέρθηκε και στο [89], χωρίς αυτήν τη σύζευξη, δεν μπορούμε να έχουμε ένα “γεωμετρικό” σπάσιμο της Αβελιανής συμμετρίας κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής, αφού ο χώρος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος. Σκοπός μας ήταν να μελετήσουμε πιθανές αστάθειες μιας μελανής οπής κοντά στον ορίζοντα σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο (μηδενική κοσμολογική σταθερά). Λύνοντας το δυναμικό σύστημα των Einstein-Maxwell-Klein-Gordon εξισώσεων, είδαμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται μια αλλαγή φάσης μιας Reissner-Nordström μελανής οπής σε μία hairy μελανή

οπή. Η hairy λύση είναι σφαιρικά συμμετρική. Λύνοντας τις εξισώσεις αναλυτικά κοντά στην θερμοκρασία μετάβασης, δείξαμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι συγκεντρωμένο κοντά στον ορίζοντα και πέφτει εκθετικά μακριά από αυτόν. Η διαστατική σταθερά σύζευξης παρέχει την απαραίτητη κλίμακα για το δυναμικό εγκλωβισμού, ένα αντίστοιχο φαινόμενο με την ακτίνα του AdS που προέρχεται από την κοσμολογική σταθερά.

Παράρτημα Α

Λύση των Einstein-Maxwell Εξισώσεων

Σε αυτό το Παράρτημα θα δώσουμε τις τεχνικές λεπτομέρειες της επίλυσης των εξισώσεων (4.21)-(4.25). Ξεκινάμε με την (4.21). Στο δεξί μέλος, μόνο το φ συνεισφέρει και μόνο μέσω του $\Theta_{\mu\nu}$. Εφόσον είναι μικρό, έχουμε

$$z^2 \partial_z^2 l - z \partial_z l + \partial_\theta^2 l + 2 \cot \theta \partial_\theta l = 8\pi G \frac{\mu^2 \kappa}{z^2} (1 - z^2)^3 e^\alpha (-\Theta_t^t - \Theta_\phi^\phi) = 0 ,$$

το οποίο έχει ως λύση

$$l = 1 - z^2 , \quad (\text{A.1})$$

επομένως το l παραμένει ίδιο (δες εξ. (4.30) και (4.36) για μια RN μελανή οπή).

Κατόπιν λύνουμε την εξίσωση Maxwell η οποία παίρνει την μορφή

$$z^2 \partial_z^2 A + z^2 \partial_z (\alpha + \ln l) \partial_z A + \partial_\theta^2 A + [\cot \theta + \partial_\theta \alpha + \partial_\theta \ln l] \partial_\theta A = 0 . \quad (\text{A.2})$$

Σε πρώτη τάξη,

$$z^2 \partial_z^2 A + \left[-\frac{2z}{l} + \partial_z \alpha \right] z^2 \partial_z A + \partial_\theta^2 A + \cot \theta \partial_\theta A = 0 .$$

Από την (4.22), σε πρώτη τάξη έχουμε

$$z^2 \partial_z^2 \alpha - \frac{2z^3}{l} \partial_z \alpha + \partial_\theta^2 \alpha + \cot \theta \partial_\theta \alpha = 8\pi G e^\alpha \left[(z \partial_z A)^2 + 2\mu^2 \kappa \frac{l}{z^2} \Theta_t^t \right] .$$

Αναπτύσσουμε σε πολώνυμα Legendre,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0(r) P_0(\cos \theta) + \alpha_2 P_2(\cos \theta) , \\ A &= A_0(r) P_0(\cos \theta) + A_2 P_2(\cos \theta) , \\ \mu^2 \frac{l}{z^2} e^\alpha \Theta_t^t &= \mathcal{Q}_0(r) P_0(\cos \theta) + \mathcal{Q}_2(r) P_2(\cos \theta) , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

όπου α_2 και A_2 είναι διορθώσεις πρώτης τάξης, και

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= \frac{4 \sinh^2 B}{3\mu^2} \frac{z^4}{(1-z^2)[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4} \left[\frac{1}{2}(z\mathcal{Z}')^2 + \mathcal{Z}^2 \right], \\ \mathcal{Q}_2 &= \frac{4 \sinh^2 B}{3\mu^2} \frac{z^4}{(1-z^2)[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4} [(z\mathcal{Z}')^2 - \mathcal{Z}^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$P_\ell''(\cos \theta) + \cot \theta P_\ell'(\cos \theta) = -\ell(\ell+1)P_\ell(\cos \theta),$$

παίρνουμε

$$A_0'' + \left[-\frac{2z}{l} + \alpha_0' \right] A_0' = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$A_2'' + \left[-\frac{2z}{l} + \alpha_0' \right] A_2' - \frac{6}{z^2} A_2 = -\alpha_2' A_0', \quad (\text{A.6})$$

$$\alpha_0'' - \frac{2z}{l} \alpha_0' - 8\pi G e^{\alpha_0} A_0'^2 = 16\pi G \kappa \frac{\mathcal{Q}_0}{z^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha_2'' - \frac{2z}{l} \alpha_2' - \frac{6}{z^2} \alpha_2 - 8\pi G e^{\alpha_0} A_0'^2 \alpha_2 = 16\pi G e^{\alpha_0} A_0' A_2' + 16\pi G \kappa \frac{\mathcal{Q}_2}{z^2}. \quad (\text{A.8})$$

Από την (A.5) βρίσκουμε

$$A_0(z) = \frac{Q}{\mu} \int_z^1 \frac{dz'}{l(z')} e^{-\alpha_0(z')}. \quad (\text{A.9})$$

Η εξ. (A.7) δίνει

$$\alpha_0 = \alpha_{RN} + \delta\alpha_0,$$

όπου α_{RN} είναι η λύση Reissner-Nordström που δίνεται από τις εξ.(4.30) και η διόρθωση πρώτης τάξης ικανοποιεί

$$\delta\alpha_0'' - \frac{2z}{1-z^2} \delta\alpha_0' - \frac{8}{[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^2} \delta\alpha_0 = 16\pi G \frac{\kappa \mathcal{Q}_0}{z^2}. \quad (\text{A.10})$$

Για να τη λύσουμε κοιτάμε τις συνοριακές συνθήκες. Στο σύνορο, $\delta\alpha_0'' \approx 0$, επομένως

$$\delta\alpha_0 \sim \lambda z.$$

Στον ορίζοντα, $(1-z)\delta\alpha_0'' - \delta\alpha_0' \approx 0$, επομένως $\delta\alpha_0 \sim \text{const.}$, ή $\delta\alpha_0 \sim \ln(1-z)$. Η λύση που παεί ασυμπτωτικά στο λz καθώς $z \rightarrow 0$ δίνει μια μίξη $\delta\alpha_0 \sim a + b \ln(1-z)$ στον ορίζοντα. Υπάρχει μία μοναδική τιμή του λ για την οποία $b = 0$ και η λύση είναι ομαλή.

Οι δύο εξισώσεις που απομένουν αποτελούν ένα συζευγμένο σύστημα που πρέπει να λυθεί για τα A_2 και α_2 . Συγκεκριμένα,

$$A_2'' - \frac{2}{z} \left[\frac{l}{1+z^2+2z \coth B} - \frac{1}{l} \right] A_2' - \frac{6}{z^2} A_2 + \frac{Q}{\mu} \frac{l}{(1+z^2+2z \coth B)^2} \alpha_2' = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha_2'' - \frac{2z}{l} \alpha_2' - \left[\frac{6}{z^2} + \frac{8}{[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^2} \right] \alpha_2 + \frac{16\pi G Q}{\mu} \frac{1}{l} A_2' - 16\pi G \frac{\kappa Q_2}{z^2} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Καθώς $z \rightarrow 0$, έχουμε

$$A_2 = \mathcal{A}z^3 + \dots, \quad \alpha_2 = \mathbf{a}z^3 + \dots$$

οι σταθερές \mathcal{A} και \mathbf{a} καθορίζονται απαιτώντας $\alpha_2 = A_2 = 0$ στον ορίζοντα (έτσι ώστε να μην υπάρχει γωνιακή εξάρτηση της θερμοκρασίας ή ένα ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του ορίζοντα).

Τέλος, βρίσκουμε το β από την τρίτη εξίσωση του Einstein (4.23). Σε μηδενική τάξη, έχουμε

$$0 = -\frac{1}{2}(z\alpha'_{RN})^2 - 3\frac{z l'}{l} + 2\left(\frac{z l'}{l}\right)^2 - \frac{z^2 l''}{l} + 8\pi G e^{\alpha_{RN}} (zA'_{RN})^2,$$

η οποία εύκολα βλέπουμε ότι επαληθεύεται.

Για να λύσουμε την εξίσωση σε πρώτη τάξη, θέτουμε

$$\beta = \beta_0(z) + \beta_1(z) \cos^2 \theta. \quad (\text{A.13})$$

και παίρνουμε την

$$(1+z^2)z\beta'_0 = \mathcal{S}_0(z), \quad (\text{A.14})$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(z) &= \frac{4z^2[(1+z^2) \cosh B + 2z \sinh B]}{(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B} \left(\delta\alpha'_0 - \frac{1}{2}\alpha'_2 \right) \\ &\quad - \frac{8z^2(1-z^2)}{[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^2} \left(\delta\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_2 \right) \\ &\quad - 8\pi G(1-z^2) \left[1 - \frac{4\kappa z^4}{\mu^2[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4} \right] \mathcal{Z}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

η οποία πρέπει να λυθεί ως προς $\beta_0(z)$, και

$$(1+z^2)z\beta'_1 - 2(1-z^2)\beta_1 = \mathcal{S}_1(z), \quad (\text{A.16})$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(z) &= \frac{12z^2[(1+z^2) \cosh B + 2z \sinh B]}{(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B} \alpha'_2 + \frac{12z^2(1-z^2)}{[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^2} \alpha_2 \\ &\quad + 8\pi G(1-z^2)[(z\mathcal{Z}')^2 + \mathcal{Z}^2] + 8\pi G \frac{4\kappa z^4(1-z^2)}{\mu^2[(1+z^2) \sinh B + 2z \cosh B]^4} [(z\mathcal{Z}')^2 - \mathcal{Z}^2], \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

η οποία πρέπει να λυθεί ως προς $\beta_1(z)$.

Είναι και οι δύο εξισώσεις πρώτης τάξης και ολοκληρώνονται εύκολα. Έχουμε

$$\beta_0(z) = \int_0^z \frac{dy}{y(1+y^2)} \mathcal{S}_0(y) \quad (\text{A.18})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνοριακή συνθήκη $\beta_0(0) = 0$.

Για το β_1 , χρειαζόμαστε $\beta_1 = 0$ και στα δύο άκρα. Έχουμε

$$\beta_1 = -\frac{z^2}{(1+z^2)^2} \int_z^1 \frac{dy}{y^3} (1+y^2) \mathcal{S}_1(y) \quad (\text{A.19})$$

όπου το όριο της ολοκλήρωσης επιλέχθηκε έτσι ώστε $\beta_1 = 0$ στον ορίζοντα ($z = 1$). Παρατηρούμε ότι $\beta_1 \sim \mathcal{O}(z^2)$ καθώς $z \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$), έτσι και η άλλη συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται.

Βιβλιογραφία

- [1] R. Ruffini and J. A. Wheeler, “Introducing the black hole”, *Phys. Today* **24**, 30–41 (1971).
- [2] E. Winstanley, “Classical Yang-Mills black hole hair in anti-de Sitter space”, *Lect. Notes Phys.* **769**, 49 (2009) [arXiv:0801.0527 [gr-qc]].
- [3] J. P. S. Lemos, “Cylindrical black hole in general relativity”. *Phys. Lett. B* **353**, 46–51 (1995)
- [4] R. B. Mann, “Topological Black Holes – Outside Looking In,” arXiv:gr-qc/9709039.
- [5] L. Vanzo, “Black holes with unusual topology”, *Phys. Rev. D* **56**, 6475–6483 (1997)
- [6] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics,” *Class. Quant. Grav.* **26**, 224002 (2009) [arXiv:0903.3246 [hep-th]].
- [7] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [*Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].
- [8] N. Bocharova, K. Bronnikov and V. Melnikov, *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **6**, 706 (1970).
J. D. Bekenstein, *Annals Phys.* **82**, 535 (1974); “Black Holes With Scalar Charge,” *Annals Phys.* **91**, 75 (1975).
- [9] T. J. T. Harper, P. A. Thomas, E. Winstanley and P. M. Young, “Instability of a four-dimensional de Sitter black hole with a conformally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **70**, 064023 (2004) [arXiv:gr-qc/0312104].
- [10] C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **70**, 084035 (2004) [arXiv:hep-th/0406111].
- [11] C. Martinez, J. P. Staforelli and R. Troncoso, “Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge,” *Phys. Rev. D* **74**, 044028 (2006) [arXiv:hep-th/0512022];
C. Martinez and R. Troncoso, “Electrically charged black hole with scalar hair,” *Phys. Rev. D* **74**, 064007 (2006) [arXiv:hep-th/0606130].
- [12] C. Charmousis, T. Kolyvaris and E. Papantonopoulos, “Charged C-metric with conformally coupled scalar field,” *Class. Quant. Grav.* **26**, 175012 (2009) [arXiv:0906.5568 [gr-qc]].

- [13] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “A New Class of Exact Hairy Black Hole Solutions,” *Gen. Rel. Grav.* **43**, 163 (2011) [arXiv:0911.1711 [hep-th]].
- [14] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Scalar Hair from a Derivative Coupling of a Scalar Field to the Einstein Tensor,” *Class. Quant. Grav.* **29**, 205011 (2012) [arXiv:1111.0263 [gr-qc]].
- [15] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Phase Transition to a Hairy Black Hole in Asymptotically Flat Spacetime,” arXiv:1308.5280 [hep-th].
- [16] D. R. Brill, J. Louko, and P. Peldan, *Phys. Rev.* **D56**, 3600 (1997).
- [17] C. Charmousis and R. Gregory, “Axisymmetric metrics in arbitrary dimensions,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 527 [arXiv:gr-qc/0306069].
- [18] W. Kinnersley and M. Walker, “Uniformly accelerating charged mass in general relativity,” *Phys. Rev. D* **2**, 1359 (1970).
- [19] F. J. Ernst, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 515.
- [20] H. Farhoosh, R. L. Zimmerman, “Stationary charged C-metric”, *J. Math. Phys.* **20**, 2272 (1979); “Killing horizons and dragging of the inertial frame about a uniformly accelerating particle”, *Phys. Rev. D* **21**, 317 (1980); “Interior C-metric”, *Phys. Rev. D* **23**, 299 (1981); A. Ashtekar, T. Dray, “On the existence of solutions to Einstein’s equation with non-zero Bondi-news”, *Comm. Phys.* **79**, 581 (1981); W. B. Bonnor, “The sources of the vacuum C-metric”, *Gen. Rel. Grav.* **15**, 535 (1983); The C-metric with $m = 0$, $e \neq 0$, *Gen. Rel. Grav.* **16**, 269 (1984); F. H. J. Cornish, W. J. Uttley, “The interpretation of the C metric. The vacuum case”, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 439 (1995); “The interpretation of the C metric. The charged case when $e^2 \leq m^2$ ”, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 735 (1995); W. Yongcheng, “Vacuum C-metric and the metric of two superposed Schwarzschild black holes”, *Phys. Rev. D* **55**, 7977 (1997); C. G. Wells, “Extending the black hole uniqueness theorems I. Accelerating black holes: The Ernst solution and C-metric”, gr-qc/9808044; V. Pravda, A. Pravdova, “Boost-rotation symmetric spacetimes - review”, *Czech. J. Phys.* **50**, 333 (2000); J. Podolský, J.B. Griffiths, “Uniformly accelerating black holes in a de Sitter universe”, *Phys. Rev. D* **63**, 024006 (2001). J. B. Griffiths, P. Krtous and J. Podolsky, *Class. Quant. Grav.* **23**, 6745 (2006) [arXiv:gr-qc/0609056].
- [21] J. F. Plebański, M. Demiański, “Rotating, charged and uniformly accelerating mass in general relativity”, *Annals of Phys. (N.Y.)* **98**, 98 (1976).
- [22] H. F. Dowker, J. P. Gauntlett, D. A. Kastor, J. Traschen, “Pair creation of dilaton black holes”, *Phys. Rev. D* **49**, 2909 (1994).
- [23] R. Emparan and H. S. Reall, “A rotating black ring in five dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002) [arXiv:hep-th/0110260].

- [24] R. Emparan and H. S. Reall, “Black Holes in Higher Dimensions,” *Living Rev. Rel.* **11**, 6 (2008) [arXiv:0801.3471 [hep-th]]; R. Emparan and H. S. Reall, “Black rings,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) R169 [arXiv:hep-th/0608012]; T. Harmark, “Stationary and axisymmetric solutions of higher-dimensional general relativity,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 124002 [arXiv:hep-th/0408141].
- [25] C. Charmousis, D. Langlois, D. Steer and R. Zegers, *JHEP* **0702** (2007) 064 [arXiv:gr-qc/0610091].
- [26] M. M. Caldarelli, R. Emparan and M. J. Rodriguez, *JHEP* **0811** (2008) 011 [arXiv:0806.1954 [hep-th]].
- [27] H. Farhoosh, R. L. Zimmerman, “Surfaces of infinite red-shift around a uniformly accelerating and rotating particle”, *Phys. Rev. D* **21**, 2064 (1980).
- [28] P. S. Letelier, S. R. Oliveira, “On uniformly accelerated black holes”, *Phys. Rev. D* **64**, 064005 (2001).
- [29] J. Bičák, V. Pravda, “Spinning C-metric as a boost-rotation symmetric radiative spacetime”, *Phys. Rev. D* **60**, 044004 (1999).
- [30] J. Podolský, Accelerating black holes in anti-de Sitter universe, *Czech. J. Phys.* **52**, 1 (2002).
- [31] R. Emparan, G. T. Horowitz, R. C. Myers, “Exact description of black holes on branes”, *JHEP* **0001** 007 (2000); “Exact description of black Holes on branes II: Comparison with BTZ black holes and black strings”, *JHEP* **0001** 021 (2000).
- [32] O. J. C. Dias and J. P. S. Lemos, “Pair of accelerated black holes in anti-de Sitter background: The C-metric,” *Phys. Rev. D* **67**, 064001 (2003) [arXiv:hep-th/0210065].
- [33] S. W. Hawking, G. T. Horowitz, S. F. Ross, “Entropy, area, and black hole pairs”, *Phys. Rev. D* **51**, 4302 (1995).
- [34] R. Mann, “Pair production of topological anti-de Sitter black holes”, *Class. Quantum Grav.* **14**, L109 (1997); Charged topological black hole pair creation, *Nucl. Phys. B* **516**, 357 (1998).
- [35] O. J. C. Dias, “Pair creation of particles and black holes in external fields”, in: *Astronomy and Astrophysics: Recent developments*, eds. J. P. S. Lemos et al (World Scientific, Singapore, 2001); gr-qc/0106081.
- [36] K. Hong and E. Teo, “A new form of the C-metric,” *Class. Quant. Grav.* **20**, 3269 (2003) [arXiv:gr-qc/0305089].
- [37] K. Hong and E. Teo, “A new form of the rotating C-metric,” *Class. Quant. Grav.* **22**, 109 (2005) [arXiv:gr-qc/0410002].
- [38] C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, “De Sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four dimensions,” *Phys. Rev. D* **67**, 024008 (2003) [arXiv:hep-th/0205319].

- [39] G. T. Horowitz and H. J. Sheinblatt, “Tests of Cosmic Censorship in the Ernst Spacetime,” *Phys. Rev. D* **55**, 650 (1997) [arXiv:gr-qc/9607027].
- [40] J. E. Chase, “Event horizons in static scalar-vacuum space-times,” *Commun. Math. Phys.* **19**, 276 (1970);
 J. D. Bekenstein, “Transcendence of the Law of Baryon-Number Conservation in Black-Hole Physics,” *Phys. Rev. Lett.* **28**, 452 (1972);
 J. D. Bekenstein, “Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes,” *Phys. Rev. D* **5**, 1239 (1972);
 J. D. Bekenstein, “Nonexistence of Baryon Number for Black Holes. II,” *Phys. Rev. D* **5**, 2403 (1972);
 M. Heusler, “A Mass Bound for Spherically Symmetric Black Hole Spacetimes,” *Class. Quant. Grav.* **12**, 779 (1995) [arXiv:gr-qc/9411054];
 M. Heusler and N. Straumann, “Scaling arguments for the existence of static, spherically symmetric solutions of self-gravitating systems,” *Class. Quant. Grav.* **9**, 2177 (1992);
 D. Sudarsky, “A simple proof of a no-hair theorem in Einstein-Higgs theory,” *Class. Quant. Grav.* **12**, 579 (1995);
 J. D. Bekenstein, “Novel ‘no-scalar-hair’ theorem for black holes,” *Phys. Rev. D* **51**, R6608 (1995).
- [41] A. E. Mayo and J. D. Bekenstein, “No hair for spherical black holes: charged and nonminimally coupled scalar field with self-interaction,” *Phys. Rev. D* **54**, 5059 (1996) [arXiv:gr-qc/9602057];
 J. D. Bekenstein, “Black hole hair: Twenty-five years after,” arXiv:gr-qc/9605059.
- [42] K. A. Bronnikov and Y. N. Kireyev, “Instability of black holes with scalar charge,” *Phys. Lett. A* **67**, 95 (1978).
- [43] K. G. Zloshchastiev, “On co-existence of black holes and scalar field,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 121101 (2005) [arXiv:hep-th/0408163].
- [44] T. Torii, K. Maeda and M. Narita, “No-scalar hair conjecture in asymptotic de Sitter spacetime,” *Phys. Rev. D* **59**, 064027 (1999) [arXiv:gr-qc/9809036].
- [45] G. Dotti, R. J. Gleiser and C. Martinez, “Static black hole solutions with a self interacting conformally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **77**, 104035 (2008) [arXiv:0710.1735 [hep-th]].
- [46] T. Torii, K. Maeda and M. Narita, “Scalar hair on the black hole in asymptotically anti-de Sitter spacetime,” *Phys. Rev. D* **64**, 044007 (2001).
- [47] E. Winstanley, “On the existence of conformally coupled scalar field hair for black holes in (anti-)de Sitter space,” *Found. Phys.* **33**, 111 (2003) [arXiv:gr-qc/0205092].
- [48] G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Exact Gravity Dual of a Gapless Superconductor,” *JHEP* **0907**, 026 (2009) [arXiv:0902.0733 [hep-th]].
- [49] G. Koutsoumbas, S. Musiri, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Quasi-normal modes of electromagnetic perturbations of four-dimensional topological black holes with scalar hair,”

- JHEP **0610**, 006 (2006) [arXiv:hep-th/0606096];
 G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Phase Transitions in Charged Topological-AdS Black Holes,” JHEP **0805**, 107 (2008) [arXiv:0801.4921 [hep-th]];
 G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Discontinuities in Scalar Perturbations of Topological Black Holes,” Class. Quant. Grav. **26**, 105004 (2009) [arXiv:0806.1452 [hep-th]].
- [50] A. Anabalon and H. Maeda, “New Charged Black Holes with Conformal Scalar Hair,” arXiv:0907.0219 [hep-th].
- [51] K. Farakos, A. P. Kouretsis and P. Pasipoularides, “Anti de Sitter 5D black hole solutions with a self-interacting bulk scalar field: a potential reconstruction approach,” Phys. Rev. D **80**, 064020 (2009) [arXiv:0905.1345 [hep-th]].
- [52] N. Ohta and T. Torii, “Black Holes in the Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory in Various Dimensions IV - Topological Black Holes with and without Cosmological Term,” arXiv:0908.3918 [hep-th].
- [53] K.-I. Maeda, “Towards the Einstein-Hilbert action via conformal transformation,” Phys. Rev. D **39** 3159 (1989).
- [54] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, Fund. Cosmic Phys. **20**, 121 (1999) [arXiv:gr-qc/9811047].
- [55] V. Faraoni and S. Sonego, “On The Tail Problem In Cosmology,” Phys. Lett. A **170**, 413 (1992) [arXiv:astro-ph/9209004];
 T. W. Noonan, “Huygen’s principle in conformally flat spacetimes,” Class. Quant. Grav. **12**, 1087 (1995).
- [56] T. Hertog and K. Maeda, “Stability and thermodynamics of AdS black holes with scalar hair,” Phys. Rev. D **71**, 024001 (2005) [arXiv:hep-th/0409314].
- [57] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” Phys. Rev. Lett. **101**, 031601 (2008) [arXiv:0803.3295 [hep-th]].
- [58] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Holographic Superconductors,” JHEP **0812**, 015 (2008) [arXiv:0810.1563 [hep-th]].
- [59] D. F. Zeng, “An Exact Hairy Black Hole Solution for AdS/CFT Superconductors,” arXiv:0903.2620 [hep-th].
- [60] D. Birmingham, “Topological Black Holes in Anti-de Sitter Space,” Class. Quant. Grav. **16**, 1197 (1999) [arXiv:hep-th/9808032].
- [61] A. Ashtekar and S. Das, “Asymptotically Anti-de Sitter Space-times: Conserved Quantities,” Class. Quant. Grav. **17**, L17 (2000) [arXiv:hep-th/9911230].
- [62] L. Amendola, “Cosmology with nonminimal derivative couplings,” Phys. Lett. B **301**, 175 (1993) [arXiv:gr-qc/9302010].

- [63] S. V. Sushkov, “Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling,” *Phys. Rev. D* **80**, 103505 (2009) [arXiv:0910.0980 [gr-qc]].
- [64] C. Gao, “When scalar field is kinetically coupled to the Einstein tensor,” *JCAP* **1006**, 023 (2010) [arXiv:1002.4035 [gr-qc]].
- [65] L. N. Granda, “Non-minimal Kinetic coupling to gravity and accelerated expansion,” *JCAP* **1007**, 006 (2010) [arXiv:0911.3702 [hep-th]].
- [66] E. N. Saridakis and S. V. Sushkov, “Quintessence and phantom cosmology with non-minimal derivative coupling,” *Phys. Rev. D* **81**, 083510 (2010) [arXiv:1002.3478 [gr-qc]].
- [67] C. Germani, A. Kehagias, “New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 011302 (2010). [arXiv:1003.2635 [hep-ph]].
- [68] S. Chen and J. Jing, “Dynamical evolution of a scalar field coupling to Einstein’s tensor in the Reissner-Nordström black hole spacetime,” *Phys. Rev. D* **82**, 084006 (2010) [arXiv:1007.2019 [gr-qc]].
- [69] B. Kleihaus and J. Kunz, “Static axially symmetric Einstein Yang-Mills dilaton solutions. 2. Black hole solutions,” *Phys. Rev. D* **57**, 6138 (1998) [arXiv:gr-qc/9712086].
- [70] G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10** (1974) 363-384.
- [71] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, “The Galileon as a local modification of gravity,” *Phys. Rev.* **D79** (2009) 064036. [arXiv:0811.2197 [hep-th]].
- [72] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, A. Vikman, “Covariant Galileon,” *Phys. Rev.* **D79** (2009) 084003. [arXiv:0901.1314 [hep-th]].
- [73] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, “Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions *Phys. Rev. D* **80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967].
- [74] S. Sushkov, “Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling,” *Phys. Rev. D* **85**, 123520 (2012) [arXiv:1204.6372 [gr-qc]].
- [75] L. N. Granda, D. F. Jimenez and C. Sanchez, “Quintessential and phantom power-law solutions in scalar tensor model of dark energy,” arXiv:1211.3457 [astro-ph.CO].
- [76] G. Gubitosi and E. V. Linder, “Purely Kinetic Coupled Gravity,” *Phys. Lett. B* **703**, 113 (2011) [arXiv:1106.2815 [astro-ph.CO]].
- [77] C. Germani, L. Martucci and P. Moyassari, “Introducing the Slotheon: a slow Galileon scalar field in curved space-time,” *Phys. Rev. D* **85**, 103501 (2012) [arXiv:1108.1406 [hep-th]].
- [78] S. Tsujikawa, “Observational tests of inflation with a field derivative coupling to gravity,” *Phys. Rev. D* **85**, 083518 (2012) [arXiv:1201.5926 [astro-ph.CO]].

- [79] G. Koutsoumbas, K. Ntrekis and E. Papantonopoulos, “Gravitational Particle Production in Gravity Theories with Non-minimal Derivative Couplings,” arXiv:1305.5741 [gr-qc].
- [80] H. M. Sadjadi and P. Goodarzi, “Reheating in nonminimal derivative coupling model,” JCAP **1302**, 038 (2013) [arXiv:1203.1580 [gr-qc]].
- [81] A. Anabalón, “Exact Black Holes and Universality in the Backreaction of non-linear Sigma Models with a potential in (A)dS₄,” JHEP **1206**, 127 (2012) [arXiv:1204.2720 [hep-th]].
- [82] A. Anabalón and J. Oliva, “Exact Hairy Black Holes and their Modification to the Universal Law of Gravitation,” Phys. Rev. D **86**, 107501 (2012) [arXiv:1205.6012 [gr-qc]].
- [83] A. Anabalón and A. Cisterna, “Asymptotically (anti) de Sitter Black Holes and Wormholes with a Self Interacting Scalar Field in Four Dimensions,” Phys. Rev. D **85**, 084035 (2012) [arXiv:1201.2008 [hep-th]].
- [84] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, “Conformally coupled scalar black holes admit a flat horizon due to axionic charge,” JHEP **1209**, 008 (2012) [arXiv:1205.4025 [hep-th]].
- [85] C. Charmousis, B. Gouteraux and E. Kiritsis, “Higher-derivative scalar-vector-tensor theories: black holes, Galileons, singularity cloaking and holography,” JHEP **1209**, 011 (2012) [arXiv:1206.1499 [hep-th]].
- [86] G. T. Horowitz, “Theory of Superconductivity,” Lect. Notes Phys. **828**, 313 (2011) [arXiv:1002.1722 [hep-th]].
- [87] G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Exact Gravity Dual of a Gapless Superconductor,” JHEP **0907**, 026 (2009) [arXiv:0902.0733 [hep-th]].
- [88] S. S. Gubser, “Phase transitions near black hole horizons,” Class. Quant. Grav. **22**, 5121 (2005) [hep-th/0505189].
- [89] S. S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” Phys. Rev. D **78**, 065034 (2008) [arXiv:0801.2977 [hep-th]].
- [90] J. Fernandez-Gracia and B. Fiol, “A No-hair theorem for extremal black branes,” JHEP **0911**, 054 (2009) [arXiv:0906.2353 [hep-th]].