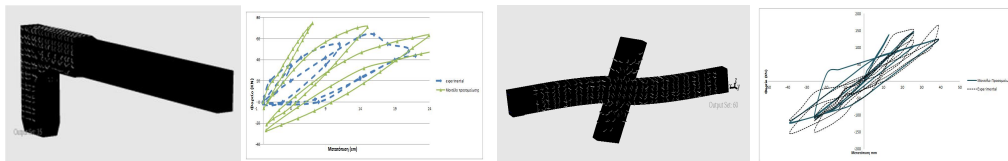




**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2014-2015**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΑΠΟ ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ
ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ ΚΑΤΑΠΟΝΟΥΜΕΝΩΝ ΑΠΟ
ΑΝΑΚΥΚΛΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΜΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΜΟΥΡΛΑΣ**



**ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:
ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ ΜΑΝΟΛΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.**

**ΜΑΡΚΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ALHOSN UNIVERSITY**

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Σύνοψη

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία παρουσιάζουμε τη λεπτομερή προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα, με σκοπό να αποτιμήσουμε την μη γραμμική στατική τους συμπεριφορά. Συγκεκριμένα εξετάζουμε φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα οι οποίοι καταπονούνται από ανακυκλική φόρτιση. Το σκυρόδεμα διακριτοποιείται με ισοπαραμετρικά εξαεδρικά οκτακομβικά πεπερασμένα στοιχεία. Τα στοιχεία οπλισμού διακριτοποιούνται με φυσικά στοιχεία δυνάμεων, τα οποία συνδυάζουν την μέθοδο των φυσικών μορφών με την μέθοδο των ινών και έχουν την δυνατότητα να λαμβάνουν υπόψη πέραν της αξονικής τόσο την καμπτική όσο και την διατμητική στιβαρότητα των ράβδων οπλισμού. Επίσης οι ράβδοι οπλισμού μπορούν να έχουν οποιαδήποτε θέση και οποιοδήποτε προσανατολισμό στο εσωτερικό των εξαεδρικών στοιχείων, διευκολύνοντας την προσομοίωση των διαμήκων και εγκάρσιων οπλισμών του φορέα. Η ρηγμάτωση του οπλισμού προσομοιώνεται με την μέθοδο της διανεμημένης ρωγμής και έχει αναπτυχθεί αλγόριθμος τροποποίησης του καταστατικού μητρώου του υλικού για να αντιμετωπίσει το άνοιγμα και το κλείσιμο των ρωγμών. Επιπλέον η προτεινόμενη προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε και για την ανάλυση ενός προεντεταμένου φορέα. Τέλος η ρεαλιστικότητα και η αριθμητική στιβαρότητα που προσφέρει κώδικας του ReConAn, ο οποίος έχει αναπτυχθεί σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 95, φαίνεται από την σύγκριση των αποτελεσμάτων των μοντέλων προσομοίωσης με τα αντίστοιχα αποτελέσματα πειραματικών διατάξεων.

Abstract

In this thesis we present a detailed finite element modeling for the simulation of the nonlinear behavior of reinforced concrete structures. Specifically we examine reinforced concrete structures under cyclic loading. The proposed modeling method uses 8-node hexahedral isoparametric elements for the discretization of concrete. For the discretization of the embedded rebars we use the natural beam-column flexibility based elements that is based on natural mode method and the fiber approach and takes into consideration bending and shear stiffness. Steel bars may have any position and any orientation inside the corresponding hexahedral element in order to facilitate the simulation of longitudinal as well as transverse reinforcement. Concrete cracking is treated with the smeared crack approach and we present an algorithm which deals the opening and closing of cracks for the cyclic concrete material model. In addition the proposed model is used to simulate prestressed concrete structures. The proposed code, ReConAn (reinforced concrete analysis) was developed in language Fortran 95. Finally the comparison between the results came from the proposed code ReConAn, with the experimental ones, proves the numerical robustness and the accuracy of the proposed code.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή του τομέα Δομοστατικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και επβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Μανόλη Παπαδρακάκη για την καθοδήγησή του και την πίστη στις δυνατότητες μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του ALHOSN University κ. Γεώργιο Μάρκου για την βοήθεια του και την άψογη συνεργασία του καθ'όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συμπαράσταση που μου έχουν δείξει σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή..... | 1 |
| 1.1 Γενικά..... | 2 |
| 1.2 Σκοπός..... | 2 |
| 1.3 Περίληψη Κεφαλαίων | 3 |
| Κεφάλαιο 2. Θεωρία των Πεπερασμένων Στοιχείων | 5 |
| 2.1 Σκυρόδεμα | 6 |
| 2.1.1 Εξαιδρικά ορθογωνικά στοιχεία οκτώ κόμβων | 6 |
| 2.2 Χάλυβας οπλισμού | 12 |
| 2.2.1 Ραβδωτό στοιχείο δικτύωματος-Rod elements | 12 |
| 2.2.2 Φυσικό στοιχείο δυνάμεων-Natural forced-based finite elements | 14 |
| 2.2.3 Γενικά χαρακτηριστικά του στοιχείου..... | 16 |
| 2.2.4 Φυσικές μορφές στερεού σώματος..... | 17 |
| 2.2.5 Φυσικές μορφές παραμόρφωσης..... | 21 |
| 2.2.6 Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης BN..... | 29 |
| 2.2.7 Καταστατικές σχέσεις | 30 |
| 2.2.8 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας | 31 |
| 2.2.9 Τοπικό και καθολικό μητρώο στιβαρότητας | 33 |
| 2.2.10 Προσδιορισμός της κατάστασης ενός στοιχείου και η διαδικασία της ανάλυσης ενός στοιχείου με την χρήση του μητρώου ενδοσιμότητας | 37 |
| 2.2.10.1 Γενικευμένες δυνάμεις και μετατοπίσεις | 37 |
| 2.2.10.2 Διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων | 39 |
| 2.2.10.3 Προσδιορισμός της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων..... | 45 |
| Κεφάλαιο 3. Μοντέλο ενσωμάτωσης του οπλισμού σε εξαιδρικά πεπερασμένα στοιχεία..... | 53 |
| 3.1 Εισαγωγή | 54 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2 Κινηματικές σχέσεις | 55 |
| 3.3 Προσδιορισμός του μητρώου δυσκαμψίας του εξαεδρικού με τα ενσωματωμένα σε αυτά στοιχεία δυνάμεων | 59 |
| 3.4 Η διαδικασία γένεσης του ενσωματωμένου οπλισμού στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων | 60 |
| 3.4.1 Εύρεση βοηθητικών κόμβων των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού | 61 |
| Κεφάλαιο 4. Αλγόριθμοι Επίλυσης Μη Γραμμικών Προβλημάτων... | 69 |
| 4.1 Εισαγωγή | 70 |
| 4.2 Newton-Raphson με έλεγχο των φορτίων | 70 |
| 4.2 Newton-Raphson με έλεγχο των μετατοπίσεων | 74 |
| Κεφάλαιο 5. Καταστατικό μοντέλο οπλισμένου σκυροδέματος..... | 79 |
| 5.1 Εισαγωγή | 80 |
| 5.2 Χρήσιμες σχέσεις οκταεδρικών τάσεων-παραμορφώσεων..... | 81 |
| 5.3 Καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos & Pavlovic | 85 |
| 5.4 Συνθήκες αποφόρτισης-επαναφόρτισης..... | 96 |
| 5.5 Κριτήριο Αστοχίας..... | 96 |
| 5.6 Το τροποποιημένο καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos & Pavlovic..... | 99 |
| 5.7 Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack modeling)..... | 102 |
| 5.8 Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας β (shear retention factor) | 106 |
| 5.9 Η ενοποιημένη αντιμετώπιση της ρηγμάτωσης..... | 106 |
| 5.10 Καταστατικό μοντέλο για χάλυβα οπλισμού | 111 |
| Κεφάλαιο 6. Αριθμητικές Εφαρμογές Κατασκευών που Καταπονούνται από Ανακυκλική Φόρτιση | 115 |
| 6.1 Εξωτερικός Κόμβος πλαισίου (Frame joint) | 116 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.2 Εσωτερικός κόμβος πλαισίου..... | 124 |
| Κεφάλαιο 7. Προγραμματισμός Προεντεταμένων Φορέων από Οπλισμένο Σκυρόδεμα | 133 |
| 7.1 Εισαγωγή | 134 |
| 7.2 Εισαγωγή της προέντασης στον κώδικα του ReConAn..... | 135 |
| 7.3 Αριθμητική Εφαρμογή της Προέντασης | 136 |
| Κεφάλαιο 8. Χρήση του Προγράμματος ReConAn..... | 145 |
| 8.1 Χαρακτηριστικά του κώδικα..... | 146 |
| 8.2 Εξοικείωση με τον κώδικα ReConAn | 148 |

Πίνακας Σχημάτων

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Σχήμα 2. 1 Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας οκτώ κόμβων ^[6] | 7 |
| Σχήμα 2. 2 Εξαεδρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία 8 έως 27 κόμβων ^[6] | 12 |
| Σχήμα 2. 3 Ισοπαραμετρικό στοιχείο δικτυώματος δύο κόμβων | 12 |
| Σχήμα 2. 4 Χωρισμός της διατομής σε υποεπιφάνειες (πλαστικοποίηση ακραίων τινών) ^[11] | 15 |
| Σχήμα 2. 5 Διακριτοποιημένη σε υποεπιφάνειες δοκός από οπλισμένο σκυρόδεμα στο χώρο ^[14] | 17 |
| Σχήμα 2. 6 Οι 6 φυσικές μορφές στερεού σώματος ^[14] | 19 |
| Σχήμα 2. 7 Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης ^[14] | 22 |
| Σχήμα 2. 8 Γενικευμένες φυσικές δυνάμεις ^[14] | 23 |
| Σχήμα 2. 9 Παραμορφώσεις λόγω κάμψης και διάτμησης που οφείλονται στην αντισυμμετρική μορφή παραμόρφωσης ^[14] | 26 |
| Σχήμα 2. 10 Μετατοπίσεις λόγω της στρέψης ^[14] | 28 |
| Σχήμα 2. 11 Αντισυμμετρική μορφή παραμόρφωσης λόγω της κάθετης επικόμβιας μετατόπισης ^[14] | 34 |
| Σχήμα 2. 12 Γενικευμένες μετατοπίσεις και δυνάμεις του φυσικού στοιχείου δυνάμεων ^[14] | 38 |
| | |
| Σχήμα 3. 1 Η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη ενός ενσωματωμένου (εντός του εξαεδρικού) Α) στοιχείου δικτυώματος(rod element) Β) στοιχείο δοκού(beam element) ^[14] | 54 |
| Σχήμα 3. 2 Τα τρίγωνα αναφοράς των κόμβων 1 και 2 του στοιχείου δοκού ^[14] | 55 |
| Σχήμα 3. 3 Στροφή $\theta 1$ ^[14] | 59 |
| Σχήμα 3. 4 Ενσωματωμένοι ράβδοι οπλισμού μέσα στα εξαεδρικά στοιχεία ^[14] | 61 |
| Σχήμα 3. 5 Τοιχίο, όπου φαίνεται το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του σκυροδέματος με τον ενσωματωμένο οπλισμό από χάλυβα ^[14] | 61 |
| Σχήμα 3. 6 Γεωμετρικός περιορισμός για την εύρεση των κόμβων των ράβδων οπλισμού: (Α) $Re1 > dn21$, ο γεωμετρικός περιορισμός ικανοποιείται, (Β) $Re1 < dn2j < dn1j$, ο γεωμετρικός περιορισμός δεν ικανοποιείται ^[14] | 63 |
| Σχήμα 3. 7 Απεικόνιση των τριών περιπτώσεων: (Α) Περίπτωση 1: ο κόμβος της ράβδου οπλισμού πάνω στην έδρα του εξαεδρικού στοιχείου, (Β) Περίπτωση 2: Τομή ράβδου οπλισμού με την έδρα του εξαεδρικού στοιχείου, (C) Περίπτωση 3: ο κόμβος του οπλισμού βρίσκεται μέσα στον όγκο του εξαεδρικού στοιχείου ^[14] | 64 |
| Σχήμα 3. 8 Σχετικές θέσεις ευθείας με επίπεδο: (Α) Ευθεία τέμνει το επίπεδο (ένα σημείο τομής), (Β) Ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο (κανένα σημείο τομής), (Γ) Ευθεία ανήκει στο επίπεδο (άπειρα κοινά σημεία) ^[14] | 66 |
| Σχήμα 3. 9 Σημεία τομής στοιχείων οπλισμού με εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος ^[14] | 66 |
| Σχήμα 3. 10 Διάγραμμα ροής της προτεινόμενης μεθόδου γένεσης των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού ^[14] | 68 |
| | |
| Σχήμα 4. 1 Μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο φορτίου ^[14] | 73 |
| Σχήμα 4. 2 (Α) Τροποποιημένη Newton-Raphson και (Β) Μέθοδος οιονεί-Newton. Ανανέωση του μητρώου δυσκαμψίας ανά δύο επαναλήψεις ^[14] | 74 |
| Σχήμα 4. 3 Παραδείγματα απόκλισης της μεθόδου Newton-Raphson με τον έλεγχο φορτίου ^[14] | 76 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Σχήμα 4. 4 Γραφική απεικόνιση της μετατροπής ενός προβλήματος Dirichlet σε ισοδύναμο πρόβλημα Newman ^[14] | 76 |
| Σχήμα 5. 1 Καμπύλη τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης για διάφορες συνοριακές συνθήκες της πειραματικής διάταξης ^[14] | 81 |
| Σχήμα 5. 2 (α) Τασικός χώρος καρτεσιανός ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) και κυλινδρικός (z, r, θ') (b) όψη από το αποκλίνων επίπεδο ^[14] | 82 |
| Σχήμα 5. 3 Η ερμηνεία της εσωτερικής τάσης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό μη γραμμικών καταστατικών σχέσεων για το σκυρόδεμα. | 87 |
| Σχήμα 5. 4 Τυπικές σχέσεις του τέμνοντος και του εφαπτομενικού μέτρου συμπιεστότητας με την υδροστατική τάση σ_0 για συγκεκριμένη ποιότητα σκυροδέματος $f_c = 31,7 \text{ Mpa}$ ^[14] | 91 |
| Σχήμα 5. 5 Τυπικές σχέσεις του τέμνοντος και του εφαπτομενικού μέτρου διάτμησης με την αποκλίνουσα τάση τ_0 για συγκεκριμένη ποιότητα σκυροδέματος $f_c =$ $31,7 \text{ Mpa}$ ^[14] | 91 |
| Σχήμα 5. 6 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης τ_0 με υδροστατική παραμόρφωση $\epsilon_0(d)$ για διάφορους τύπους σκυροδέματος υπό καταπόνηση τάσεων $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ και $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ^[14] | 92 |
| Σχήμα 5. 7 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης τ_0 με οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση γ_0 για διάφορους τύπους σκυροδέματος ^[14] | 92 |
| Σχήμα 5. 8 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης τ_0 με οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση γ_0 για διάφορες τιμές υδροστατικής πίεσης σ_0 υπό καταπόνηση τάσεων $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ και $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ^[14] | 93 |
| Σχήμα 5. 9 Υπολογισμός της εσωτερικής τάσης σ_{id} για οποιοδήποτε συνδυασμό υδροστατικής και αποκλίνουσας τάσης (σ_0, τ_0) ^[14] | 93 |
| Σχήμα 5. 10 Η τομή της επιφάνειας αστοχίας του σκυροδέματος με το επίπεδο που ορίζεται από ένα διαγώνιο άξονα και έναν κύριο άξονα του συστήματος αξόνων των κυρίων τάσεων ^[14] | 98 |
| Σχήμα 5. 11 Σχηματική αναπαράσταση της επιφάνειας μέγιστης αντοχής (α) Προοπτικό στο χώρο των τάσεων (b) Εγκάρσια τομή της επιφάνειας αστοχίας με το αποκλίνων επίπεδο ^[14] | 99 |
| Σχήμα 5. 12 Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης και επιρροή διαφορετικού μέγιστου επιτρεπόμενου αριθμού ρωγμών ανά επανάληψη Newton-Raphson ^[14] | 100 |
| Σχήμα 5. 13 Διάγραμμα ροής του τροποποιημένου καταστατικού προσομοιώματος του σκυροδέματος ^[14] | 102 |
| Σχήμα 5. 14 Τοπικοί άξονες στην περίπτωση όπου έχουμε δυο ρωγμές σε ένα σημείο ολοκλήρωσης Gauss ^[14] | 105 |
| Σχήμα 5. 15 (A). Τροποποιημένος αλγόριθμος για αρηγμάτωτο σημείο ολοκλήρωσης Gauss. (B). Τροποποιημένος αλγόριθμος για ρηγματωμένο σημείο ολοκλήρωσης Gauss. | 111 |
| Σχήμα 5. 16 Το μοντέλο γραμμικά ελαστικού-γραμμικά κρατυνόμενου υλικού ^[11] | 112 |
| Σχήμα 5. 17 Το μοντέλο Menegotto-Pinto ^[14] | 114 |
| Σχήμα 6. 1(α) Διάταξη δοκιμής κόμβου (από Hartl 2000), με γκρι παρουσιάζεται ο κόμβος σκυροδέματος ενώ με μπλέ τα χαλύβδινα τμήματα. (β) Συνοριακές συνθήκες και φόρτιση κόμβου ^[9] | 116 |
| Σχήμα 6. 2 Επιβολή φόρτισης στο άκρο της μεταλλικής δοκού που ισοδυναμεί με δύναμη και ροπή (ζεύγος δυνάμεων) στην παρειά του κόμβου. Στην βάση του κόμβου επικρατούν συνθήκες πάκτωσης ^[9] | 116 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Σχήμα 6. 3 Λεπτομέρειες οπλισμού στον εξεταζόμενο κόμβο από σκυρόδεμα ^[9] | 117 |
| Σχήμα 6. 4 Λεπτομέρειες οπλισμού από την προσομοίωση του μοντέλου με χρήση του προγράμματος Femap..... | 117 |
| Σχήμα 6. 5 Προσομοίωση κόμβου σκυροδέματος (γκρί τμήμα) και χάλυβα (μπλέ τμήμα). | 119 |
| Σχήμα 6. 6 Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού..... | 119 |
| Σχήμα 6. 7 Παραμορφωμένος φορέα όπως προέκυψε από την ανάλυση..... | 120 |
| Σχήμα 6. 8Α.(αριστερό σχήμα) Ρηγματωμένη εικόνα του φορέα κυρίως στις εφελκυστικές περιοχές του φορέα Β. (δεξί σχήμα) Πύκνωση ρωγμών καθώς αυξάνεται το φορτίο..... | 120 |
| Σχήμα 6. 9 Διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα. | 121 |
| Σχήμα 6. 10 Συνάρτηση επιβαλλόμενης μετατόπισης(40/80/120/240 mm) σε 4 κύκλους φόρτισης. | 121 |
| Σχήμα 6. 11 Παραμορφώσεις του φορέα κατά την ανακύκλιση από το πρόγραμμα Femap..... | 122 |
| Σχήμα 6. 12 Ρηγμάτωση στις περιοχές όπου εμφανίζεται εφελκυσμός κατά του διάφορους κύκλους φόρτισης. | 123 |
| Σχήμα 6. 13 Γραφική παράσταση Φορτίο-Μετατόπιση και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα του φορέα υποβαλλόμενο σε ανακυκλική φόρτιση..... | 123 |
| Σχήμα 6. 14 Μηκοτομή του εξεταζόμενου φορέα και δυο χαρακτηριστικές διατομές ^[9] | 124 |
| Σχήμα 6. 15 Λεπτομέρειες οπλισμού από την προσομοίωση με χρήση του προγράμματος Femap. | 125 |
| Σχήμα 6. 16 Προσομοίωση εσωτερικού κόμβου από σκυρόδεμα με εξαεδρικά 8-κομβικά πεπερασμένα στοιχεία. | 127 |
| Σχήμα 6. 17 Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού..... | 127 |
| Σχήμα 6. 18 Συνάρτηση επιβαλλόμενης μετατόπισης (13/26/39/100mm) σε 7 κύκλους φόρτισης..... | 128 |
| Σχήμα 6. 19 Α. Παραμορφωμένος φορέας με τα εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος με χρήση του προγράμματος Femap. Β. Παραμορφωμένος φορέας όπου φαίνονται τα γραμμικά στοιχεία οπλισμού με χρήση του προγράμματος Femap..... | 129 |
| Σχήμα 6. 20 Οι μεταλλικές πλάκες που χρησιμοποιήθηκαν στις περιοχές των στηρίξεων και στο κάτω άκρο του υποστύλωματος όπου επιβάλλεται σταθερή θλιπτική δύναμη (πάνω σχήμα) και η συνάρτηση μετατόπιση (κάτω σχήμα). | 130 |
| Σχήμα 6. 21 Α. Ρηγμάτωση του φορέα κατά τον πρώτο κύκλο φόρτισης. Αριστερό σχήμα-ανοδικός κλάδος, δεξί σχήμα-καθοδικός κλάδος (κλείσιμο ρωγμών). Β. Έντονη ρηγμάτωση του φορέα κατά τον έκτο κύκλο επιβολής μετατόπισης. | 131 |
| Σχήμα 6. 22 Γραφική παράσταση Φορτίο-Μετατόπιση και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα. | 132 |
| Σχήμα 7. 1 Τάνυση πριν από την σκλήρυνση (προεντεταμένη κλίνη) ^[2] | 134 |
| Σχήμα 7. 2 Τάνυση μετά την σκλήρυνση ^[2] | 135 |
| Σχήμα 7. 3 Μηκοτομή και διατομή της εξεταζόμενης δοκού δυο ανοιγμάτων ^[15] | 136 |
| Σχήμα 7. 4 Λεπτομέρειες οπλισμού ως γραμμικού στοιχείου από την προσομοίωση του μοντέλου με χρήση του προγράμματος Femap..... | 137 |
| Σχήμα 7. 5 Λεπτομέρειες οπλισμού από την προσομοίωση του μοντέλου με χρήση του προγράμματος Femap..... | 137 |
| Σχήμα 7. 6 Απεικόνιση με εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος των διατμητικών περιοχών της δοκού. | 138 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Σχήμα 7. 7 Προσομοίωση δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα με 450 εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία..... | 139 |
| Σχήμα 7. 8 Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού..... | 140 |
| Σχήμα 7. 9 Παραμορφωμένος φορέας όπως προέκυψε από την ανάλυση..... | 141 |
| Σχήμα 7. 10 Α. Ρηγματωμένη εικόνα του φορέα στα πρώτα στάδια της φόρτισης (η κάτω εικόνα είναι μεγέθυνση του αριστερού ανοίγματος της άνω εικόνας)..... | 142 |
| Σχήμα 7. 11 Διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης των τριών αναλύσεων και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα..... | 142 |
| | |
| Σχήμα 8. 1 Κύριο παράθυρο του Femap FEA με χρήση των SMAD Custom properties..... | 147 |
| Σχήμα 8. 2 Τετραεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων: (α) τεσσάρων κόμβων (β) δέκα κόμβων | 151 |
| Σχήμα 8. 3 Παράδειγμα χρησιμοποίησης τετραεδρικών στοιχείων σε ένα μοντέλο δοκού..... | 153 |
| Σχήμα 8. 4 Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης δοκού από τετραεδρικά στοιχεία με χρήση του προγράμματος ReConAn και Nastran..... | 153 |
| Σχήμα 8. 5 Προσομοίωση βάζου με χρήση 150272 τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων..... | 154 |
| Σχήμα 8. 6 Προσομοίωση αεροπλάνου με χρήση 334754 τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων..... | 154 |
| Σχήμα 8. 7 Λεπτομέρεια σύνδεσης του φτερού με το υπόλοιπο σώμα του αεροπλάνου με χρήση τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων..... | 155 |

Πίνακες

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Πίνακας 2.1 Συναρτήσεις σχήματος τετραπλευρικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με τέσσερις έως εννέα κόμβους..... | 10 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|------------------------------|---|
| 1.1 Γενικά..... | 2 |
| 1.2 Σκοπός..... | 2 |
| 1.3 Περίληψη Κεφαλαίων | 3 |

1.1 Γενικά

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την μέθοδο λεπτομερούς προσομοίωσης φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα που καταπονούνται από ανακυκλική φόρτιση, με χρήση του προγράμματος ReConAn(Reinforced Concrete Analysis). Για την προσομοίωση χρησιμοποιήσαμε εξαεδρικά στοιχεία και ενσωματωμένα φυσικά στοιχεία δυνάμεων. Το σκυρόδεμα διακριτοποιείται με ισοπαραμετρικά οκτακομβικά εξαεδρικά στοιχεία, ενώ ο χάλυβα του οπλισμού προσομοιώνεται με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων (natural beam-column flexibility based element), τα οποία υπολογίζουν την καμπτική και την διατμητική στιβαρότητα των οπλισμών. Τα στοιχεία οπλισμού μπορούν να έχουν οποιοδήποτε προσανατολισμό και οποιαδήποτε θέση μέσα στο εξαεδρικό στοιχείο, κάτι που μας δίνει την δυνατότητα να προσομοιώσουμε τόσο τον διαμήκη όσο και τον εγκάρσιο οπλισμό (συνδετήρες) κάθε φορέα. Η ρηγμάτωση του σκυροδέματος αντιμετωπίζεται με την προσέγγιση της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack approach). Παρουσιάζεται αλγόριθμος τροποποίησης του καταστατικού μητρώου του υλικού για να αντιμετωπίσει το άνοιγμα και το κλείσιμο των ρωγμών κατά την διάρκεια της ανακυκλικής φόρτισης.

Επιπλέον στα πλαίσια της προσομοίωσης κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, εξετάστηκε και ένας προεντεταμένος φορέας από τον οποίο εξάγαμε χρήσιμα συμπεράσματα.

Τέλος το πρόγραμμα ReConAn μα δίνει την δυνατότητα λεπτομερής προσομοίωσης φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα και συνδυάζει την αριθμητική ακρίβεια(numerical accuracy), την αριθμητική στιβαρότητα(numerical robustness) και την υπολογιστική αποδοτικότητα.

1.2 Σκοπός

Ο στόχος της διπλωματική μου εργασίας ήταν να εντάξω στο πρόγραμμα ReConAn την συμπεριφορά μιας κατασκευής από οπλισμένο σκυρόδεμα όταν καταπονείται από ανακυκλική φόρτιση. Δηλαδή έπρεπε να αναπτυχθεί ο αλγόριθμος τροποποίησης του καταστατικού μητρώου του υλικού με σκοπό να συμπεριλάβει το σταδιακό κλείσιμο και άνοιγμα των ρωγμών κατά την διάρκεια της ανακύκλισης. Για τον σκοπό αυτό παρουσιάζουμε δυο αριθμητικές εφαρμογές, οι οποίες προσομοιώνουν κόμβους πλαισίων, και εξάγουμε τις καμπύλες φόρτισης-μετατόπισης. Συγκρίνοντας τις καμπύλες φόρτισης-μετατόπισης των μοντέλων προσομοίωσης με τις αντίστοιχες πειραματικές βγάζουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την ρεαλιστικότητα των μοντέλων μας αλλά και για την συμπεριφορά του υλικού μας.

1.3 Περίληψη Κεφαλαίων

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε στα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε για να προσομοιώσουμε το σκυρόδεμα και τους ράβδους οπλισμού.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται το δίκτυο του ενσωματωμένου οπλισμού και τον τρόπο με τον οποίο συμπεριλαμβάνουμε την δυσκαμψία του οπλισμού στην δυσκαμψία των εξαεδρικών στοιχείων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι επίλυσης που χρησιμοποιήθηκαν στις αριθμητικές μας εφαρμογές.

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφονται τα καταστατικά μοντέλα του σκυροδέματος και του χάλυβα οπλισμού που χρησιμοποιήθηκαν και αναλύθηκε ο τρόπος αντιμετώπισης της ρωγμής στην περίπτωση της ανακυκλικής φόρτισης.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται δυο αριθμητικές εφαρμογές που προσομοιώνουν κόμβους πλαισίων από οπλισμένο σκυρόδεμα που καταπονούνται από ανακυκλική φόρτιση.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο επιβάλλεται η προένταση στο πρόγραμμα ReConAn και μια αριθμητική εφαρμογή μιας δοκού δύο ανοιγμάτων.

Τέλος στο όγδοο κεφάλαιο αναφέρονται κάποια βασικά χαρακτηριστικά του κώδικα που χρησιμοποιήθηκε και παρουσιάζονται τα τετραεδρικά στοιχεία τα οποία προγραμματίστηκαν στα πλαίσια εξοικείωσης με το πρόγραμμα ReConAn.

Κεφάλαιο 2. Θεωρία των Πεπερασμένων Στοιχείων

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 Σκυρόδεμα | 6 |
| 2.1.1 Εξασθετικά ορθογωνικά στοιχεία οκτώ κόμβων | 6 |
| 2.2 Χάλυβας οπλισμού | 12 |
| 2.2.1 Ραβδωτό στοιχείο δικτυώματος-Rod elements | 12 |
| 2.2.2 Φυσικό στοιχείο δυνάμεων-Natural forced-based finite elements | 14 |
| 2.2.3 Γενικά χαρακτηριστικά του στοιχείου..... | 16 |
| 2.2.4 Φυσικές μορφές στερεού σώματος..... | 17 |
| 2.2.5 Φυσικές μορφές παραμόρφωσης..... | 21 |
| 2.2.6 Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης BN..... | 29 |
| 2.2.7 Καταστατικές σχέσεις | 30 |
| 2.2.8 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας | 31 |
| 2.2.9 Τοπικό και καθολικό μητρώο στιβαρότητας | 33 |
| 2.2.10 Προσδιορισμός της κατάστασης ενός στοιχείου και η διαδικασία της ανάλυσης ενός στοιχείου με την χρήση του μητρώου ενδοσιμότητας | 37 |
| 2.2.10.1 Γενικευμένες δυνάμεις και μετατοπίσεις | 37 |
| 2.2.10.2 Διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων | 39 |
| 2.2.10.3 Προσδιορισμός της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων..... | 45 |

2.1 Σκυρόδεμα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας προκειμένου να προσομοιωθούν κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα. Η δημιουργία των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση φορέων των οποίων η εντατική κατάσταση αντιστοιχεί στην τρισδιάστατη ελαστικότητα μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί από τα στοιχεία της διδιάστατης ελαστικότητας με την προσθήκη της συντεταγμένης z και της αντίστοιχης μετατόπισης w . Θα παρουσιαστούν τα ισοπαραμετρικά εξαεδρικά ορθογωνικά στοιχεία οκτώ κόμβων τα οποία είναι τα επικρατέστερα στην προσομοίωση της συμπεριφοράς του σκυροδέματος καθώς και αυτά των είκοσι κόμβων με τα οποία σε ορισμένες περιπτώσεις εξάγουμε πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία χρησιμοποιούνται προκειμένου να προσομοιωθούν φορείς με οποιοδήποτε σχήμα και με καμπύλα σύνορα. Η ισοπαραμετρική θεώρηση βασίζεται στη χρήση ενός δευτέρου συστήματος συντεταγμένων, το οποίο ορίζεται στο Καρτεσιανό σύστημα μέσω μιας απεικόνισης και ονομάζεται φυσικό σύστημα. Για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας καταφεύγουμε σε αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος από το οποίο προκύπτει το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, αφού ο αναλυτικός υπολογισμός είναι εφικτός μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, ενώ απαιτείται ο υπολογισμός ενός μητρώου μετασχηματισμού $[J]$ το οποίο εκφράζει την Ιακωβιανή της απεικόνισης. Ο όρος ισοπαραμετρικός εξηγείται από το γεγονός ότι τόσο οι συνιστώσες της μετατόπισης u, v, w όσο και οι Καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z εκφράζονται ως προς τις αντίστοιχες επικόμβιες ποσότητες, με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής ή συναρτήσεις σχήματος.

2.1.1 Εξαεδρικά ορθογωνικά στοιχεία οκτώ κόμβων

Συναρτήσεις σχήματος

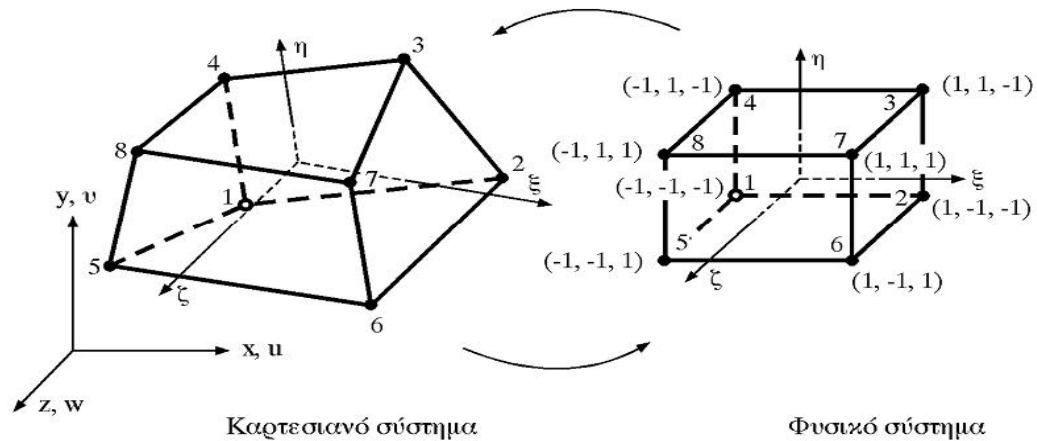
Στο σχήμα 2.1 φαίνεται ένα εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο οκτώ κόμβων στο φυσικό και στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο αποτελεί την γενίκευση του τετραπλευρικού ισοπαραμετρικού στοιχείου επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων.

Σε κάθε κόμβο του εξαεδρικού στοιχείου αντιστοιχούν τρεις μετατοπισιακοί βαθμοί ελευθερίας. Έχουμε λοιπόν την μετατόπιση κατά την διεύθυνση x (u), την μετατόπιση κατά την διεύθυνση y (v) και την μετατόπιση κατά την διεύθυνση του άξονα z (w).

Συνολικά σε κάθε τρισδιάστατο εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων παρουσιάζονται $3 \times 8 = 24$ επικόμβιοι μετατοπισιακοί βαθμοί ελευθερίας.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 x &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\eta\zeta + a_7\xi\zeta + a_8\xi\eta\zeta \\
 y &= a_9 + a_{10}\xi + a_{11}\eta + a_{12}\zeta + a_{13}\xi\eta + a_{14}\eta\zeta + a_{15}\xi\zeta + a_{16}\xi\eta\zeta \\
 z &= a_{17} + a_{18}\xi + a_{19}\eta + a_{20}\zeta + a_{21}\xi\eta + a_{22}\eta\zeta + a_{23}\xi\zeta + a_{24}\xi\eta\zeta
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$



Σχήμα 2. 1 Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας οκτώ κόμβων^[6].

Για να εξάγουμε τις συναρτήσεις σχήματος ακολουθούμε την γνωστή διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω:

Για την συντεταγμένη x έχουμε:

$$x = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \xi\zeta \quad \xi\eta\zeta] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}
 \tag{2.2}$$

Ξέρουμε ότι για:

$$\begin{aligned}
 \xi=-1, \eta=-1, \zeta=-1 & \quad x = x_1 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - a_8 \\
 \xi= 1, \eta=-1, \zeta=-1 & \quad x = x_2 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 \\
 \xi= 1, \eta= 1, \zeta=-1 & \quad x = x_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 - a_8 \\
 \xi=-1, \eta= 1, \zeta=-1 & \quad x = x_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8 \\
 \xi=-1, \eta=-1, \zeta= 1 & \quad x = x_5 = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 \\
 \xi= 1, \eta=-1, \zeta= 1 & \quad x = x_6 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 - a_8
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

$$\xi=1, \eta=1, \zeta=1 \quad x = x_7 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

$$\xi=-1, \eta=1, \zeta=1 \quad x = x_8 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - a_8$$

οπότε έχω:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \quad 2.4$$

Αντικαθιστώντας την σχέση 2.4 στην σχέση 2.2, έχω:

$$x = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \xi\zeta \quad \xi\eta\zeta][A]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \quad 2.5$$

ή

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 \quad 2.6$$

με

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8} * (1 - \xi) * (1 - \eta) * (1 - \zeta) , & N_5 &= \frac{1}{8} * (1 - \xi) * (1 - \eta) * (1 + \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8} * (1 + \xi) * (1 - \eta) * (1 - \zeta) , & N_6 &= \frac{1}{8} * (1 + \xi) * (1 - \eta) * (1 + \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8} * (1 + \xi) * (1 + \eta) * (1 - \zeta) , & N_7 &= \frac{1}{8} * (1 + \xi) * (1 + \eta) * (1 + \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8} * (1 - \xi) * (1 + \eta) * (1 - \zeta) , & N_8 &= \frac{1}{8} * (1 - \xi) * (1 + \eta) * (1 + \zeta) \end{aligned} \quad 2.7$$

Ενώ ανάλογες σχέσεις προκύπτουν για τις συντεταγμένες y και z.

Η σχέση 2.6 μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i , \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i , \quad z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \quad 2.8$$

Λόγω της ισοπαραμετρικής θεώρησης ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i , \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i , \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad 2.9$$

Μητρώο παραμόρφωσης

Το Ιακωβιανό μητρώο είναι το μητρώο που συνδέει τις παραγώγους μιας συνάρτησης φ ως προς τα δύο συστήματα συντεταγμένων:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad 2.10$$

Όπου

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \quad 2.11$$

Τα στοιχεία J_{ii}^* του αντιστρόφου του Ιακωβιανού μητρώου μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά συναρτήσεως των στοιχείων J_{ij} του μητρώου $[J]$.

Από τις σχέσεις 2.9 και 2.10 προκύπτει ότι:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix}$$

ή

$$\{\varepsilon\} = [B_1] \{u_{,\xi}\} \quad 2.12$$

(6x1) (6x9) (9x1)

Οι μερικές παράγωγοι των u, v, w ως προς ξ, η, ζ προκύπτουν από τις σχέσεις 2.9 και εκφράζονται συναρτήσεως των επικόμβιων μετατοπίσεων:

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \cdots & N_{8,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \cdots & N_{8,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \cdots & N_{8,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \cdots & 0 & N_{8,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \cdots & 0 & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \cdots & 0 & N_{8,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \cdots & 0 & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \cdots & 0 & 0 & N_{8,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \cdots & 0 & 0 & N_{8,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{matrix} \{u, \xi\} = [B_2]\{d\} & 2.13 \\ (9 \times 1) & (9 \times 24) (24 \times 1) \end{matrix}$$

Οι όροι $N_{i,\xi}$, $N_{i,\eta}$, $N_{i,\zeta}$ του μητρώου $[B_2]$ προκύπτουν από τους γενικούς τύπους

$$\begin{aligned} N_{i,\xi} &= \pm 1/8(1 \pm \eta)(1 \pm \zeta) \\ N_{i,\eta} &= \pm 1/8(1 \pm \xi)(1 \pm \zeta) \\ N_{i,\zeta} &= \pm 1/8(1 \pm \xi)(1 \pm \eta) \end{aligned} \quad 2.14$$

Όπου τα πρόσημα καθορίζονται από την θέση του αντίστοιχου κόμβου i ($i = 1 \div 8$). Με την αντικατάσταση της σχέσης 2.13 στην 2.12 προκύπτει η έκφραση του μητρώου παραμορφώσεως $[B]$ του στοιχείου:

$$\begin{matrix} \{\varepsilon\} = [B_1][B_2]\{d\} & 2.15 \\ (6 \times 1) & (6 \times 9)(9 \times 24)(24 \times 1) \end{matrix}$$

Μητρώο στιβαρότητας εξαεδρικού ισοπαραμετρικού στοιχείου οκτώ κόμβων δίνεται από την σχέση

$$\begin{matrix} [k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e & 2.16 \\ (24 \times 24) & (24 \times 6)(6 \times 6)(6 \times 24) \end{matrix}$$

ή

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta, \zeta)]^T [E] [B(\xi, \eta, \zeta)] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad 2.17$$

όπου το μητρώο E δίνεται από την σχέση:

$$[E] = \frac{E}{(1 + \nu) * (1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad 2.18$$

Ισοπαραμετρικά εξαεδρικά στοιχεία ανώτερου βαθμού

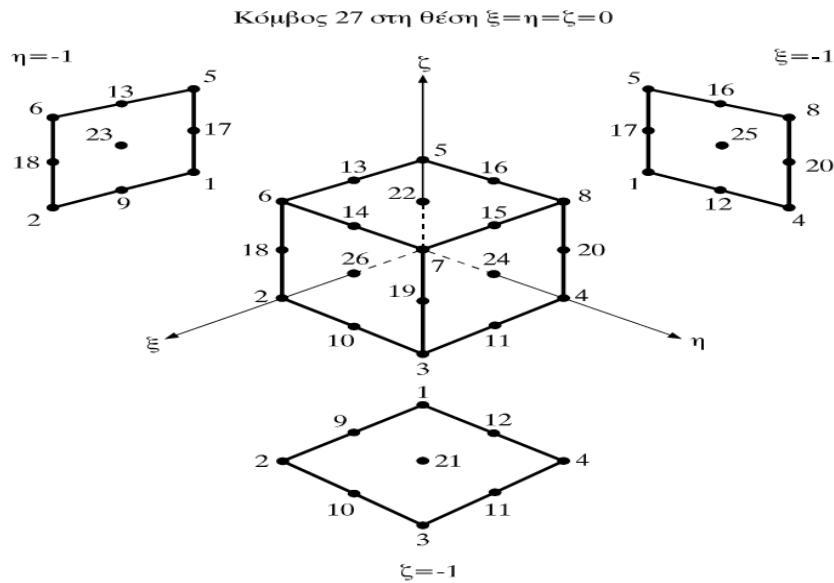
Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία των οποίων όλοι οι κόμβοι βρίσκονται στις πλευρές ανήκουν στην οικογένεια των στοιχείων Serendipity, ενώ τα ισοπαραμετρικά στοιχεία με εσωτερικό ή εσωτερικούς κόμβους ανήκουν στην οικογένεια Lagrange. Η ονομασία των στοιχείων Lagrange προέρχεται από τις συναρτήσεις σχήματος οι οποίες προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων παρεμβολής Lagrange.

Ένα πλήρες δευτεροβάθμιο χωρικό στοιχείο τύπου serendipity με ενδιάμεσους κόμβους σε όλες τις ακμές έχει 20 κόμβους, ενώ το αντίστοιχο στοιχείο Lagrange περιλαμβάνει ένα κεντρικό κόμβο στην αρχή των αξόνων, $\xi=\eta=\zeta=0$, καθώς και στα κέντρα βάρους των έξι εδρών. Το δευτεροβάθμιο στοιχείο Lagrange έχει 27 κόμβους. Οι συναρτήσεις σχήματος σχηματίζονται με ανάλογο τρόπο προς τις συναρτήσεις σχήματος των αντίστοιχων επιπέδων ισοπαραμετρικών στοιχείων και συνδυάζονται κατ' αναλογία με τον πίνακα 1.1 για τον σχηματισμό στοιχείων αποτελούμενο από 8 έως 27 κόμβους (σχήμα 1.2). Για την περίπτωση ενός 20-κομβικού στοιχείου serendipity οι συναρτήσεις σχήματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1/8(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(-\xi - \eta - \zeta - 2) \\
N_2 &= 1/8(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(\xi - \eta - \zeta - 2) \\
N_3 &= 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(\xi + \eta - \zeta - 2) \\
N_4 &= 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(-\xi + \eta - \zeta - 2) \\
N_5 &= 1/8(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(-\xi - \eta + \zeta - 2) \\
N_6 &= 1/8(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(\xi - \eta + \zeta - 2) \\
N_7 &= 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(\xi + \eta + \zeta - 2) \\
N_8 &= 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(-\xi + \eta + \zeta - 2) \\
N_9 &= 1/4(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
N_{10} &= 1/4(1 - \eta^2)(1 + \xi)(1 - \zeta) \\
N_{11} &= 1/4(1 - \xi^2)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
N_{12} &= 1/4(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 - \zeta) \\
N_{13} &= 1/4(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
N_{14} &= 1/4(1 - \eta^2)(1 + \xi)(1 + \zeta) \\
N_{15} &= 1/4(1 - \xi^2)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\
N_{16} &= 1/4(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 + \zeta) \\
N_{17} &= 1/4(1 - \zeta^2)(1 - \xi)(1 - \eta) \\
N_{18} &= 1/4(1 - \zeta^2)(1 + \xi)(1 - \eta) \\
N_{19} &= 1/4(1 - \zeta^2)(1 + \xi)(1 + \eta) \\
N_{20} &= 1/4(1 - \zeta^2)(1 - \xi)(1 + \eta)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

| | i=5 | i=6 | i=7 | i=8 | i=9 |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $N_1 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta)$ | $-1/2N_5$ | | | $-1/2N_8$ | $-1/4N_9$ |
| $N_2 = 1/4(1 + \xi)(1 - \eta)$ | $-1/2N_5$ | $-1/2N_6$ | | | $-1/4N_9$ |
| $N_3 = 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)$ | | $-1/2N_6$ | $-1/2N_7$ | | $-1/4N_9$ |
| $N_4 = 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)$ | | | $-1/2N_7$ | $-1/2N_8$ | $-1/4N_9$ |
| $N_5 = 1/2(1 - \xi^2)(1 - \eta)$ | | | | | $-1/2N_9$ |
| $N_6 = 1/2(1 + \xi)(1 - \eta^2)$ | | | | | $-1/2N_9$ |
| $N_7 = 1/2(1 - \xi^2)(1 + \eta)$ | | | | | $-1/2N_9$ |
| $N_8 = 1/2(1 - \xi)(1 - \eta^2)$ | | | | | $-1/2N_9$ |
| $N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ | | | | | |

Πίνακας 2.1 Συναρτήσεις σχήματος τετραπλευρικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με τέσσερις έως εννέα κόμβους.



Σχήμα 2. 2 Εξαεδρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία 8 έως 27 κόμβων^[6].

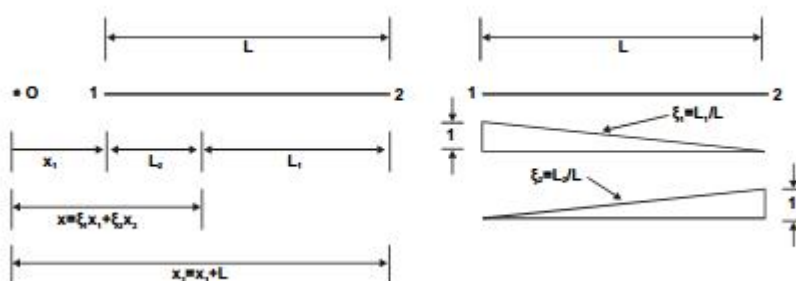
2.2 Χάλυβας οπλισμού

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν δυο διαφορετικοί τύποι πεπερασμένων στοιχείων προκειμένου να προσομοιωθεί ο χάλυβας οπλισμού:

1. Ραβδωτό στοιχείο δικτύωματος-Rod elements
2. Φυσικό στοιχείο δυνάμεων-Natural forced-based finite elements

2.2.1 Ραβδωτό στοιχείο δικτύωματος-Rod elements

Ομοίως με τα εξαεδρικά στοιχεία, χρησιμοποιείται η ισοπαραμετρική θεώρηση. Στο σχήμα 2.3 φαίνεται το στοιχείο δικτύωματος δυο κόμβων, τα δυο συστήματα συντεταγμένων και η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των δυο συστημάτων.



Σχήμα 2. 3 Ισοπαραμετρικό στοιχείο δικτύωματος δύο κόμβων

Συναρτήσεις σχήματος

Τα όρια απεικόνισης είναι $-1 \leq \xi \leq 1$ για το φυσικό σύστημα και $x_1 \leq x \leq x_2$ για το Καρτεσιανό σύστημα. Η απεικόνιση καθώς και οι συναρτήσεις σχήματος ορίζονται από γραμμικές σχέσεις αφού δύο είναι οι κόμβοι του στοιχείου. Η απεικόνιση έχει την εξής μορφή:

$$x = a_1 + a_2 \xi = [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad 2.20$$

Ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία όπου:

$$\text{για } \xi=-1, x_1 = a_1 - a_2$$

$$\text{για } \xi=1, x_1 = a_1 + a_2$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad 2.21$$

Με την αντικατάσταση των σχέσεων 2.21 στην 2.20 έχουμε:

$$x = [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad 2.22$$

Συνεπώς προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/2(1 - \xi) \\ N_2 &= 1/2(1 + \xi) \end{aligned} \quad 2.23$$

Λόγω της ισοπαραμετρικής θεώρησης ορίζονται με τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος, οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό της ράβδου ως προς τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου:

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 2.24$$

Μητρώο παραμόρφωσης

Για να ορίσουμε το μητρώο παραμόρφωσης πρέπει να προσδιορίσουμε την σχέση που συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις επικόμβιες μετατοπίσεις. Συνεπώς πρέπει να εκφάσουμε την ανηγμένη παραμόρφωση ε_x ως εξής:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad 2.25$$

Όπου από την σχέση 2.24 προκύπτει:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{u_2 - u_1}{2} \quad 2.26$$

και

$$\frac{dx}{d\xi} = [J] = \det[J] = \frac{-x_1 + x_2}{2} = \frac{L}{2} \quad 2.27$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας τις σχέσεις 2.26,2.27 στην 2.25 έχω:

$$\varepsilon_x = [-1/L \quad 1/L] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 2.28$$

Από την οποία ορίζεται το μητρώο παραμόρφωσης B:

$$B = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad 2.29$$

Μητρώο στιβαρότητας

Στην γενική περίπτωση το μητρώο παραμόρφωσης είναι συνάρτηση των φυσικών συντεταγμένων και η ολοκλήρωση, προκειμένου να υπολογιστεί το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, γίνεται ως προς τις φυσικές συντεταγμένες. Ακολουθώντας αυτή την γενική διαδικασία, παρά το γεγονός ότι στην περίπτωση του ισοπαραμετρικού στοιχείου δικτυώματος δύο κόμβων δεν είναι απαραίτητο, έχουμε:

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E][B] dV_e = \int_{A_e} \left[\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \det[J] d\xi \right] dydz \quad 2.30$$

Για την περίπτωση πρισματικής ράβδου σταθερής διατομής η σχέση 2.30 γίνεται

$$[k] = \frac{EA}{L} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi$$

ή

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.31$$

2.2.2 Φυσικό στοιχείο δυνάμεων-Natural forced-based finite elements

Το φυσικό στοιχείο δυνάμεων προκύπτει από τον εκφυλισμό του μεικτού πεπερασμένου στοιχείου μετατοπίσεων-δυνάμεων. Σύμφωνα με την γενικευμένη αυτή ενεργειακή πρόταση, θεωρούμε ως άγνωστα μεγέθη εκτός από τις μετατοπίσεις και τις εσωτερικές δυνάμεις. Γι αυτό τον λόγο εκτός από τις συναρτήσεις παρεμβολής των μετατοπίσεων, παρουσιάζονται και οι συναρτήσεις παρεμβολής των εσωτερικών δυνάμεων. Με την επιλογή των συγκεκριμένων συναρτήσεων παρεμβολής για τις μετατοπίσεις, η μεικτή μέθοδος ανάγεται στην ειδική μέθοδο της ευκαμψίας, μέσω της οποίας υπολογίζουμε το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου με την βοήθεια των συναρτήσεων παρεμβολής των εσωτερικών δυνάμεων. Στην συνέχεια το μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζεται με την αντιστροφή του μητρώου ευκαμψίας.

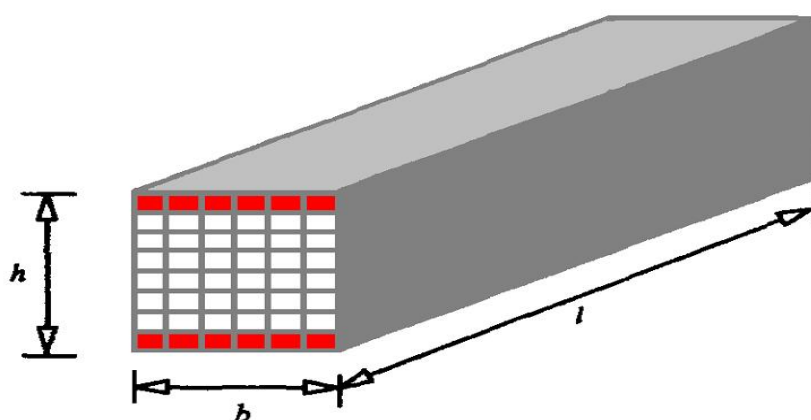
Το φυσικό στοιχείο δυνάμεων χρησιμοποιείται μια επαναληπτική μη γραμμική διαδικασία (σε επίπεδο στοιχείου) μέσω της οποίας ικανοποιείται πάντα το

συμβιβαστό των παραμορφώσεων (το οποίο συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις μετατοπίσεις) και η ισορροπία των δυνάμεων κατά μήκος του στοιχείου. Αυτή η διαδικασία μας επιτρέπει στις περισσότερες περιπτώσεις να προσομοιώνουμε κάθε μέλος με ένα και μόνο στοιχείο.

Η προσομοίωση φορέων με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων στηρίζεται στην διακριτοποίηση του στοιχείου σε ίνες (fibers) και στην διαίρεση της διατομής σε υποεπιφάνειες (fiber approach-σχήμα 2.4). Κάθε υποεπιφάνεια έχει την δυνατότητα να έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά του υλικού (μέτρο ελαστικότητας). Με αυτόν τον τρόπο εξάγουμε μια πιο ρεαλιστική ανελαστική συμπεριφορά του φορέα επειδή μας δίνεται η δυνατότητα να προσομοιώσουμε την σταδιακή εξέλιξη της πλαστικοποίησης των μελών του φορέα. Όταν μια διατομή φτάσει στην διαρροή για πρώτη φορά, τότε οι τάσεις των ακραίων ινών της διατομής έχουν τιμή ίση με τις τάσεις διαρροής ενώ η υπόλοιπη διατομή παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά. Συνεπώς με την διαίρεση της διατομής σε πολλές επιφάνειες μπορούμε να προσεγγίσουμε την πραγματική εξέλιξη της πλαστικοποίησης της διατομής.

Συγκεκριμένα με την θεώρηση της διανεμημένης πλαστικοποίησης όταν κάποια χαρακτηριστική τάση (εξαρτάται από το κριτήριο αστοχίας που θα επιλέξουμε) της υποεπιφάνειας γίνει ίση με την τάση διαρροής σ_y , τότε ολόκληρη η υποεπιφάνεια πλαστικοποιείται. Για να πλαστικοποιηθεί πλήρως ολόκληρη η διατομή θα πρέπει όλες οι υποεπιφάνειες να πλαστικοποιηθούν.

Οι τάσεις και οι ανηγμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας. Στην συνέχεια συγκρίνουμε αυτήν την τάση με την τάση διαρροής. Στην περίπτωση δοκών με μικρό ύψος μπορούμε να αγνοήσουμε τη συμβολή των διατμητικών τάσεων στην αντοχή της δοκού και να συγκρίνουμε μόνο την ορθή τάση σ_{xx} (όπου x ο διαμήκης άξονας της δοκού) που αναπτύσσεται στο μέσο κάθε υποεπιφάνειας με την σ_y χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε κάποια ισοδύναμη τάση.



Σχήμα 2. 4 Χωρισμός της διατομής σε υποεπιφάνειες (πλαστικοποίηση ακραίων ινών)^[11].

2.2.3 Γενικά χαρακτηριστικά του στοιχείου

Το φυσικό στοιχείο δυνάμεων αποτελείται από δύο κόμβους στον τρισδιάστατο χώρο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5. Το στοιχείο έχει 12 βαθμούς ελευθερίας (6 σε κάθε κόμβο) και το διάνυσμα των οποίων, θεωρώντας πως οι άξονες xyz ταυτίζονται με τους καθολικούς άξονες του στοιχείου, έχει την εξής μορφή:

$$\rho = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \varphi_1 \ \psi_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \varphi_2 \ \psi_2] \quad 2.32$$

όπου u, v, w αντιπροσωπεύουν τους μετακινησιακούς βαθμούς ελευθερίας ενώ θ, φ, ψ αντιπροσωπεύουν τους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας μπορεί να αναφέρονται είτε στο καθολικό είτε στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων και συνδέονται μέσω ενός πίνακα μετασχηματισμού.

Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων x', y', z' το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας έχει αντίστοιχα την μορφή:

$$\bar{\rho} = [\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{w}_1 \ \bar{\theta}_1 \ \bar{\varphi}_1 \ \bar{\psi}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{w}_2 \ \bar{\theta}_2 \ \bar{\varphi}_2 \ \bar{\psi}_2] \quad 2.33$$

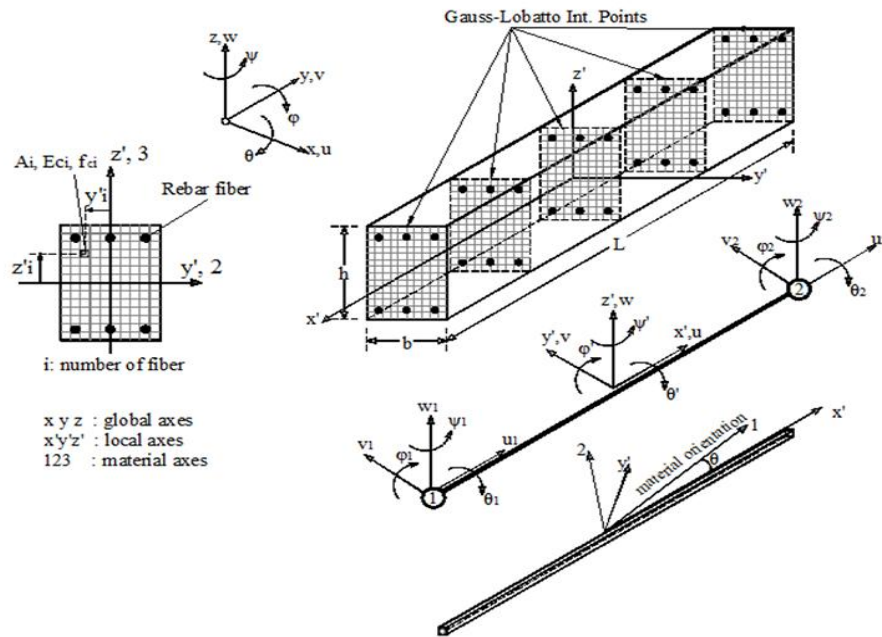
Σύμφωνα με την μέθοδο των φυσικών μορφών, οι φυσικές μορφές κάθε στοιχείου διακρίνονται σε φυσικές μορφές στερεού σώματος ρ_0 (natural rigid body modes) και σε φυσικές μορφές παραμόρφωσης ρ_N (natural straining modes). Υπάρχει μάλιστα μοναδική σχέση η οποία συνδέει τις φυσικές μορφές των τοπικών και καθολικών βαθμών ελευθερίας.

$$\begin{matrix} \rho & \Leftrightarrow & \bar{\rho} & \Leftrightarrow & \rho_0, \rho_N & & \rho_N = \bar{\rho} - \rho_0 \\ (12 \times 1) & & (12 \times 1) & & (6 \times 1) (6 \times 1) & & (6 \times 1) \quad (12 \times 1) \quad (6-1) \end{matrix} \quad 2.34$$

Στην περίπτωση που έχουμε κάνει διακριτοποίηση της διατομής σε υποεπιφάνειες (fiber approach), με σκοπό να προσομοιώσουμε την γραμμική συμπεριφορά δυο στοιχείων (οπλισμένο σκυρόδεμα), τότε εισάγουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων 123 για κάθε ίνα οπλισμού (fiber k). Η διεύθυνση του 1 ταυτίζεται με την διεύθυνση του οπλισμού ενώ η διεύθυνση του 2 είναι κάθετη της 1. Η διεύθυνση της 3 ταυτίζεται με τον τοπικό άξονα z'. Ο άξονας 1 κάθε ίνας k σχηματίζει γωνία θ_k με τον τοπικό άξονα x' (σχήμα 1.5). Το γεγονός αυτό εξηγεί και του 12 βαθμούς ελευθερίας που παρουσιάζει το φυσικό στοιχείο δυνάμεων αλλά οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης είναι 6.

$$12 \text{ βαθμοί ελευθερίας} - 6 \text{ βαθμούς ελευθερίας στερεού σώματος} = 6 \text{ μορφές παραμόρφωσης} \quad 2.35$$

Αξίζει να επισημάνουμε πως ο αριθμός των μορφών παραμόρφωσης είναι ίσος με την διαφορά των βαθμών ελευθερίας στερεού σώματος από τους επικόμβιους βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου (σχέση 2.35).



Σχήμα 2. 5 Διακριτοποιημένη σε υποεπιφάνειες δοκός από οπλισμένο σκυρόδεμα στο χώρο^[14].

2.2.4 Φυσικές μορφές στερεού σώματος

Οι φυσικές μορφές ενός στερεού σώματος είναι πάντα 6, οι οποίες αποτελούνται από 3 μετακινησιακές και 3 στρωφικές για ένα χωρικό στοιχείο (δηλαδή για ένα στοιχείο τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης). Στην περίπτωση ενός στοιχείου επίπεδης εντατικής κατάστασης εμφανίζονται 3 μορφές από τις οποίες οι 2 είναι μετακινήσεις και η 1 είναι στρόφη. Ένα απολύτως στερεό σώμα εκτελεί επίπεδη κίνηση, όταν το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε σημείου του βρίσκεται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή η επίπεδη κίνηση αναλύεται σε μια μεταφορική και σε μια περιστροφική κίνηση, ο άξονας της οποίας βρίσκεται κάθετα στο επίπεδο της κίνησης.

Στο σχήμα 2.6 παρουσιάζονται οι 6 φυσικές μορφές στερεού σώματος ενός στοιχείου δοκού. Το διάνυσμα των φυσικών μορφών είναι το εξής:

$$\rho_0 = [\rho_{01} \ \rho_{02} \ \rho_{03} \ \rho_{04} \ \rho_{05} \ \rho_{06}] \quad 2.36$$

Οι μορφές του στερεού σώματος δεν παράγουν παραμορφώσεις αλλά δημιουργούν δυνάμεις και ροπές, το διάνυσμα των οποίων έχει την μορφή:

$$P_0 = [P_{01} \ P_{02} \ P_{03} \ P_{04} \ P_{05} \ P_{06}] \quad 2.37$$

Η σχέση των φυσικών μορφών στερεού σώματος με τους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}u_1 &= \rho_{01} \\u_2 &= \rho_{02} \\v_1 &= \rho_{02} - \frac{L}{2}\rho_{06} \\v_2 &= \rho_{02} + \frac{L}{2}\rho_{06} \\w_1 &= \rho_{03} + \frac{L}{2}\rho_{05} \\w_2 &= \rho_{03} + \frac{L}{2}\rho_{05}\end{aligned}\tag{2.38}$$

Όπου

ρ_{01} : η μετατόπιση του στοιχείου ως στερεό σώμα κατά τον τοπικό καρτεσιανό διαμήκη άξονα x

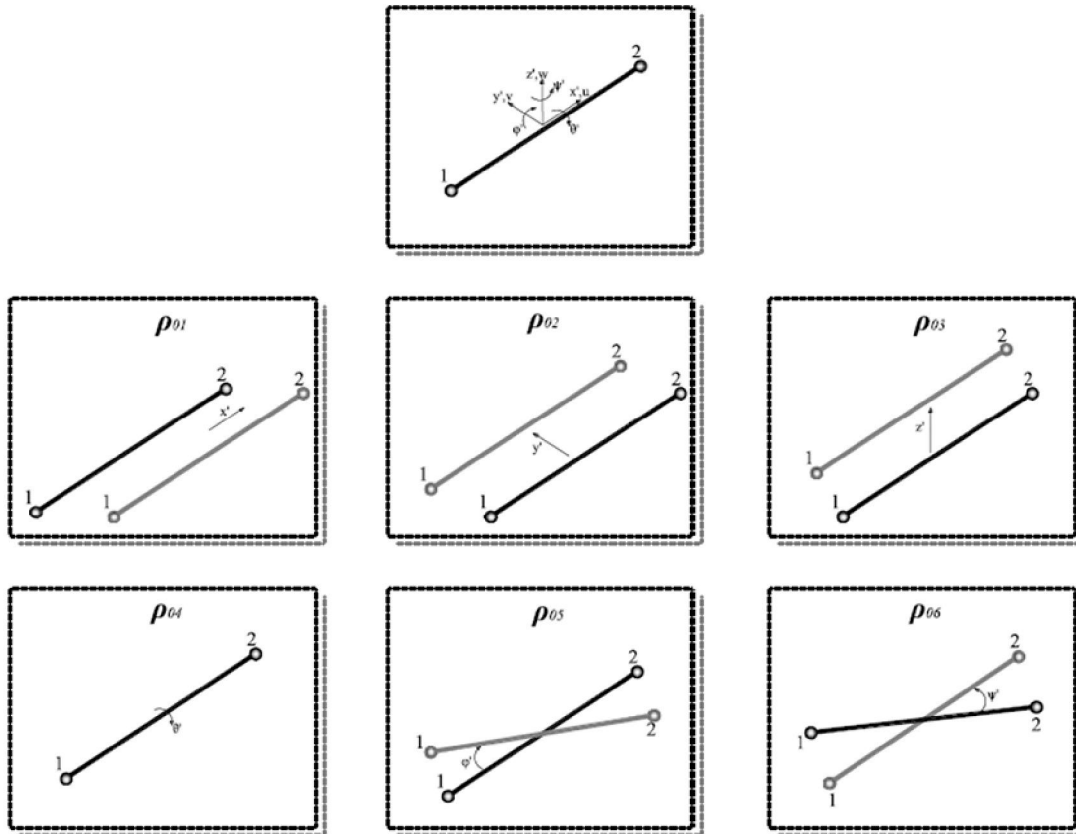
ρ_{02} : η μετατόπιση του στοιχείου ως στερεό σώμα κατά τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y

ρ_{03} : η μετατόπιση του στοιχείου ως στερεό σώμα κατά τον τοπικό καρτεσιανό και κάθετο στο μέσο επίπεδο του στοιχείου άξονα z

ρ_{04} : η στροφή του στοιχείου ως στερεό σώμα περί τον τοπικό καρτεσιανό διαμήκη άξονα x

ρ_{05} : η στροφή του στοιχείου ως στερεό σώμα περί τον τοπικό καρτεσιανό άξονα y

ρ_{06} : η στροφή του στοιχείου ως στερεό σώμα περί τον τοπικό καρτεσιανό και κάθετο στο επίπεδο του στοιχείου άξονα z



Σχήμα 2. 6 Οι 6 φυσικές μορφές στερεού σώματος^[14].

Από τις σχέσεις 2.38 προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$$

$$\rho_{02} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

$$\rho_{03} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$$

2.39

$$\rho_{05} = \frac{1}{L}(w_1 - w_2)$$

$$\rho_{06} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$$

όπου L το μήκος της δοκού.

Όσον αφορά την τέταρτη φυσική μορφή στερεού σώματος, αυτή αντιστοιχεί σε στροφή περί των διαμήκη άξονα x. Ειδικότερα:

$$\rho_{04} = \frac{\theta_{x1} + \theta_{x2}}{2} \quad 2.40$$

Συνοψίζοντας τις σχέσεις 2.39, 2.40 έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{02} \\ \rho_{03} \\ \rho_{04} \\ \rho_{05} \\ \rho_{06} \end{bmatrix} = [\bar{\alpha}_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [\rho_0] = [\bar{\alpha}_0][\bar{\rho}] \quad 2.41$$

(12x1) (6x12) (12x1)

Όπου

$$[\bar{\alpha}_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.42$$

είναι το μητρώο που συνδέει τις φυσικές μορφές στερεού σώματος με τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς γνωρίζοντας το διάνυσμα των τοπικών μετακινήσεων ενός στοιχείου μπορούμε να υπολογίσουμε τις φυσικές μορφές του στερεού σώματος.

Οι φυσικές μορφές του στερεού σώματος μπορούν να υπολογιστούν από το διάνυσμα των καθολικών βαθμών ελευθερίας.

$$\bar{\rho} = T_{04} \rho \quad 2.43$$

(12x1) (12x12) (12x1)

όπου ρ, T_{04} είναι το διάνυσμα των καθολικών βαθμών ελευθερίας και το μητρώο μετασχηματισμού (που αποτελείται από τα υπομητρώα συνημιτόνων κατεύθυνσης) αντίστοιχα.

Άρα η σχέση 2.41 γίνεται:

$$\rho_0 = \bar{\alpha}_0 \bar{\rho} = T_{04} \rho \quad 2.44$$

(12x1) (6x12) (12x1) (12x12)(12x1)

2.2.5 Φυσικές μορφές παραμόρφωσης

Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης είναι υπεύθυνες για την δημιουργία παραμορφώσεων και τάσεων. Με αυτόν τον τρόπο μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στην δοκό. Στο σχήμα 2.7 απεικονίζονται οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης και στο σχήμα 2.8 φαίνονται οι αντίστοιχες γενικευμένες δυνάμεις και ροπές. Το διάνυσμα που περιλαμβάνει τις 6 μορφές παραμόρφωσης έχει την εξής μορφή:

$$\rho_N = [\rho_{N1} \ \rho_{N2} \ \rho_{N3} \ \rho_{N4} \ \rho_{N5} \ \rho_{N6}] \quad 2.45$$

Το διάνυσμα των δράσεων που παράγονται από τις παραπάνω παραμορφώσεις έχει την εξής μορφή:

$$P_N = [P_{N1} \ P_{N2} \ P_{N3} \ P_{N4} \ P_{N5} \ P_{N6}] \quad 2.46$$

Οι φυσικές μορφές παραμορφώσεων συνδέονται με τις δράσεις μέσω του φυσικού μητρώου στιβαρότητας.

$$P_N = k_N \rho_N \quad 2.47$$

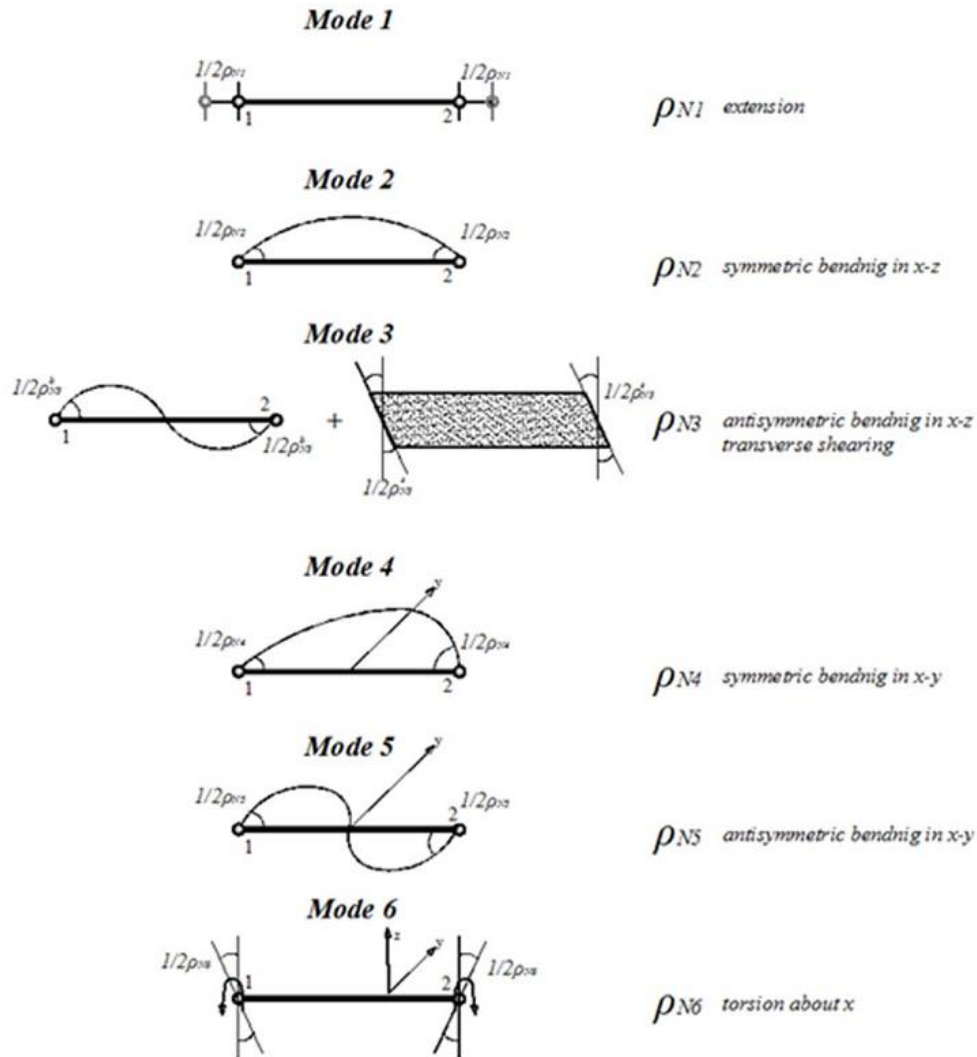
Στις σχέσεις που ακολουθούν χρησιμοποιήθηκε μια αδιάστατη μεταβλητή ζ η οποία αντιπροσωπεύει έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της δοκού.

$$-1 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta = \frac{2x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \quad 2.48$$

Επίσης χρησιμοποιήθηκε ως εξής:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{2}{L} \quad 2.49$$

Να επισημάνουμε πως το φυσικό μητρώο στιβαρότητας προέρχεται από τις φυσικές παραμορφώσεις του στοιχείου χωρίς να λάβουμε υπόψη τις φυσικές μορφές σώματος του στοιχείου.



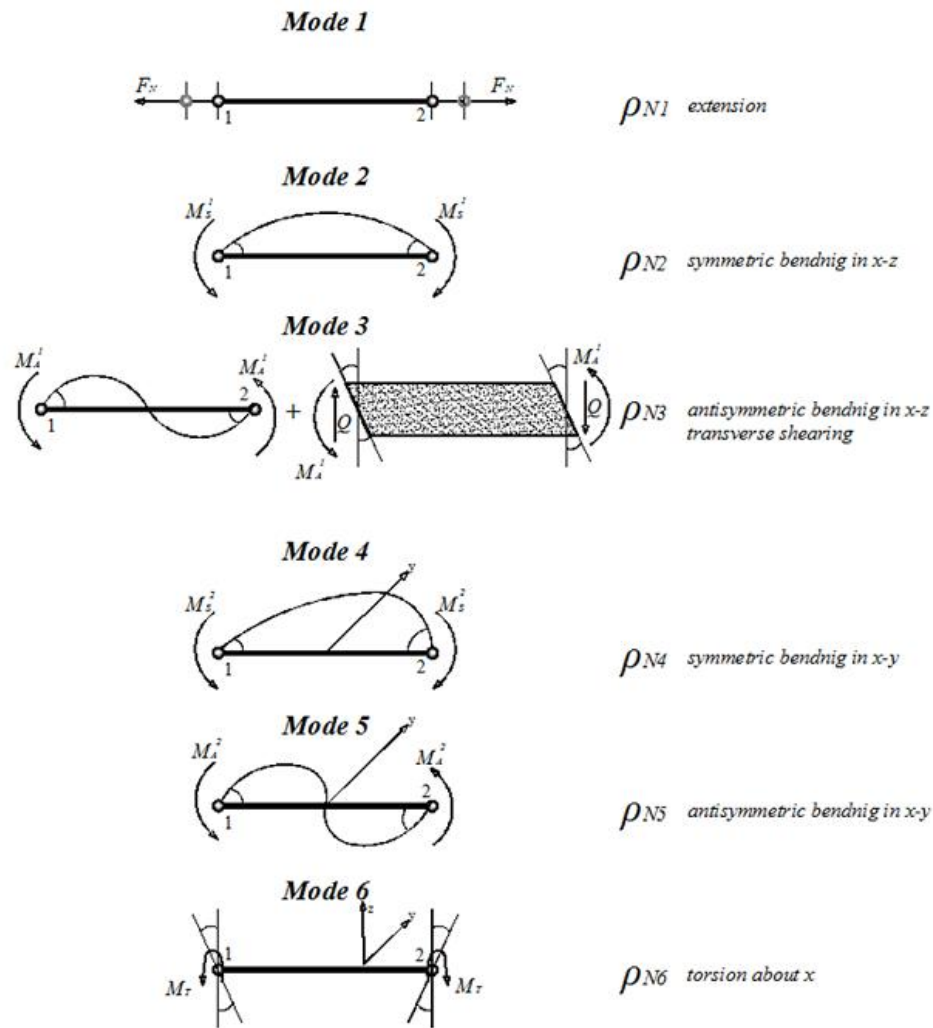
Σχήμα 2. 7 Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης^[14].

ρ_{N1} : Η πρώτη φυσική μορφή αναφέρεται στην συνολική επιμήκυνση του στοιχείου. Καθένας από τους ακραίους κόμβους μετατοπίζεται κατά $\rho_{N1}/2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Συμπερασματικά την αξονική μετατόπιση της δοκού μπορούμε να την γράψουμε ως γραμμική συνάρτηση της μεταβλητής ζ :

$$u(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta \rho_{N1} \quad 2.50$$

Γνωρίζοντας την μετατόπιση u , μπορούμε να υπολογίσουμε την αξονική παραμόρφωση ϵ_{xx}^E

$$\epsilon_{xx}^E = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\rho_{N1}}{L} = a^E \rho_{N1}, \quad a^E = \frac{1}{L} \quad 2.51$$



Σχήμα 2. 8 Γενικευμένες φυσικές δυνάμεις^[14].

ρ_{N2} : αναφέρεται στην συμμετρική κάμψη του στοιχείου στο επίπεδο xz (κάθετο στο μέσο επίπεδο του στοιχείου). Αυτή η μορφή παραμόρφωσης προκαλεί στροφή και στους δυο ακραίους κόμβους ίση με $\rho_{N2}/2$. Η περιγραφή της ελαστικής γραμμής μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού:

$$w(x) = ax^2 + bx + c, \quad x: -\frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{2} \quad 2.52$$

Εάν ικανοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες:

$$w\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad 2.53$$

$$w'\left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{\rho_{N2}}{2}, \quad w'\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\rho_{N2}}{2}$$

Άρα παίρνουμε την σχέση

$$w(x) = -\frac{1}{2}x^2\rho_{N2} + \frac{L}{8}\rho_{N2} \quad 2.54$$

Αλλά επειδή:

$$x = \frac{L}{2}\zeta \quad 2.55$$

Έχουμε ότι:

$$w(\zeta) = \frac{L}{8}(1 - \zeta^2)\rho_{N2} \quad 2.56$$

ρ_{N3} : αναφέρεται α) στην αντισυμμετρική κάμψη στο κατακόρυφο επίπεδο xz και β) στην εγκάρσια διάτμηση που εμφανίζεται κατά την παραμόρφωση.

$$\rho_{N3} = \rho_{N3}^b + \rho_{N3}^s \quad 2.57$$

α) Για την αντισυμμετρική κάμψη στο κατακόρυφο επίπεδο xz, ρ_{N3}^b η ελαστική γραμμή ακολουθεί μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού.

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad 2.58$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} w\left(-\frac{L}{2}\right) &= 0, & w\left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \\ w'\left(-\frac{L}{2}\right) &= \frac{\rho_{N3}}{2}, & w'\left(\frac{l}{2}\right) &= -\frac{\rho_{N3}}{2}, & \rho_{N3}^b &= \rho_{N3} \end{aligned} \quad 2.59$$

Λαμβάνουμε την εξής σχέση:

$$w(\zeta) = \frac{L}{8}(\zeta^3 - \zeta^2)\rho_{N3} \quad 2.60$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.56 και 2.59, βρίσκουμε την συνάρτηση της ελαστικής γραμμής λόγω της επιρροής της δεύτερης και της τρίτης μορφής παραμόρφωσης στην δοκό.

$$w(\zeta) = \frac{L}{8}(1 - \zeta^2)\rho_{N2} + \frac{L}{8}(\zeta^3 - \zeta^2)\rho_{N3} \quad 2.61$$

Η αντίστοιχη αξονική παραμόρφωση που προκύπτει από τις μορφές ρ_{N2} και ρ_{N3} είναι:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \quad 2.62$$

Από την σχέση 2.61 προκύπτει:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{L} \rho_{N2} - 3 \frac{z}{L} \zeta \rho_{N3} \quad 2.63$$

β) Η εγκάρσια διάτμηση παράγεται μέσω της αντισυμμετρικής φυσικής μορφής παραμόρφωσης ρ_{N3}^S . Στην πραγματικότητα οι διατμητικές δυνάμεις εμφανίζονται προκειμένου να εξισορροπήσουν τις αντισυμμετρικές ροπές κάμψεως, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9.

Άρα

$$Q = \frac{2M_A}{L} \quad 2.64$$

Η στροφή του αριστερού κόμβου λόγω της ροπής M_A που ασκείται στον ίδιο κόμβο είναι:

$$\theta_b^1 = \frac{M_A L}{3EI} \quad 2.65$$

Η στροφή του ίδιου κόμβου λόγω της ροπής M_A που ασκείται στον δεξιά κόμβο είναι:

$$\theta_b^2 = -\frac{M_A L}{6EI} \quad 2.66$$

Όπου E, I και L είναι το μέτρο ελαστικότητας, η ροπή αδράνειας και το μήκος της δοκού αντίστοιχα.

Συνεπώς η συνολική στροφή που αναπτύσσεται στον κόμβο είναι:

$$\theta_b = \theta_b^1 + \theta_b^2 = \frac{M_A L}{6EI} \quad 2.67$$

Συνεπώς η φυσική μορφή παραμόρφωσης ρ_{N3} λόγω κάμψης και διάτμησης είναι:

$$\rho_{N3} = \rho_{N3}^b + \rho_{N3}^s = 2(\theta_b + \theta_s) = 2 \left(\frac{M_A L}{6EI} + \frac{2M_A}{LGA} \right) \quad 2.68$$

Από την σχέση 2.66 μπορούμε να εκφράσουμε την ροπή M_A συναρτήσει της φυσικής μορφής παραμόρφωσης ρ_{N3} :

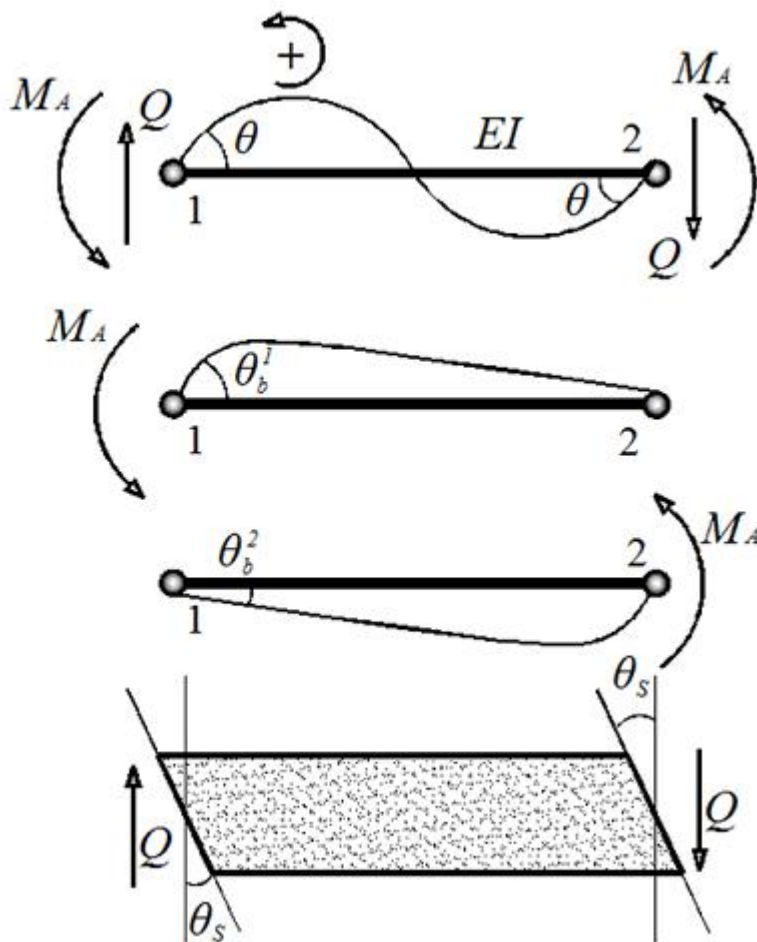
$$M_A = \left(\frac{\frac{3EI}{L}}{1 + \frac{12EI}{L^2GA}} \right) \rho_{N3} \quad 2.69$$

ή

$$M_A = \left(\frac{\frac{3EI}{L}}{1 + \frac{12EI}{L^2GA}} \right) \rho_{N3} = \left(\frac{3EI}{L(1 + \lambda)} \right) \rho_{N3}, \quad \lambda = \frac{12EI}{L^2GA} \quad 2.70$$

όπου λ είναι ο συντελεστής διάτμησης της δοκού. Από την σχέση 2.70 φαίνεται πως:

$$GA \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow 0, \quad M_A = \frac{3EI}{L} \quad 2.71$$



Σχήμα 2. 9 Παραμορφώσεις λόγω κάμψης και διάτμησης που οφείλονται στην αντισυμμετρική μορφή παραμόρφωσης^[14].

ρ_{N4} : αναφέρεται στη συμμετρική κάμψη του στοιχείου στο επίπεδο xy (επί του επιπέδου του). Αντίστοιχα με την μορφή παραμόρφωσης ρ_{N2} , η ελαστική γραμμή έχει την εξής μορφή:

$$v(\zeta) = \frac{L}{8}(1 - \zeta^2)\rho_{N4} \quad 2.72$$

ρ_{N5} : αναφέρεται στην αντισυμμετρική κάμψη στο οριζόντιο επίπεδο xy . Η μορφή της ρ_{N5} ακολουθεί την μορφή της ρ_{N4} με την διαφορά ότι συμβαίνει στο επίπεδο xy και επίσης λαμβάνουμε υπόψη μόνο τις παραμορφώσεις λόγω κάμψης. Δηλαδή αγνοούμε την συνεισφορά της διάτμησης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην υπάρχει ισορροπία στον φορέα, εφόσον δεν υπάρχουν οι διατμητικές δυνάμεις να ισορροπήσουν τις ροπές κάμψης. Παρόλα αυτά, σε δοκάρια με μικρό ύψος οι ροπές που δημιουργούν ανισορροπία στον φορέα είναι αμελητέες. Συνεπώς επαλληλίζοντας τις ελαστικές γραμμές της ρ_{N4} και ρ_{N5} λαμβάνουμε την σχέση:

$$v(\zeta) = \frac{L}{8}(1 - \zeta^2)\rho_{N4} + \frac{L}{8}(\zeta^3 - \zeta^2)\rho_{N5} \quad 2.73$$

και η αξονική παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{y}{L}\rho_{N4} - 3\frac{y}{L}\zeta\rho_{N5} \quad 2.74$$

ρ_{N6} : αναφέρεται στην στρέψη του στοιχείου περί τον διαμήκη άξονα x . Η γωνία στροφής σε κάθε άκρο ισούται με $\rho_{N6}/2$. Οι τιμές της στροφής λόγω αυτής της μορφής παραμόρφωσης, περιγράφονται από την συνάρτηση:

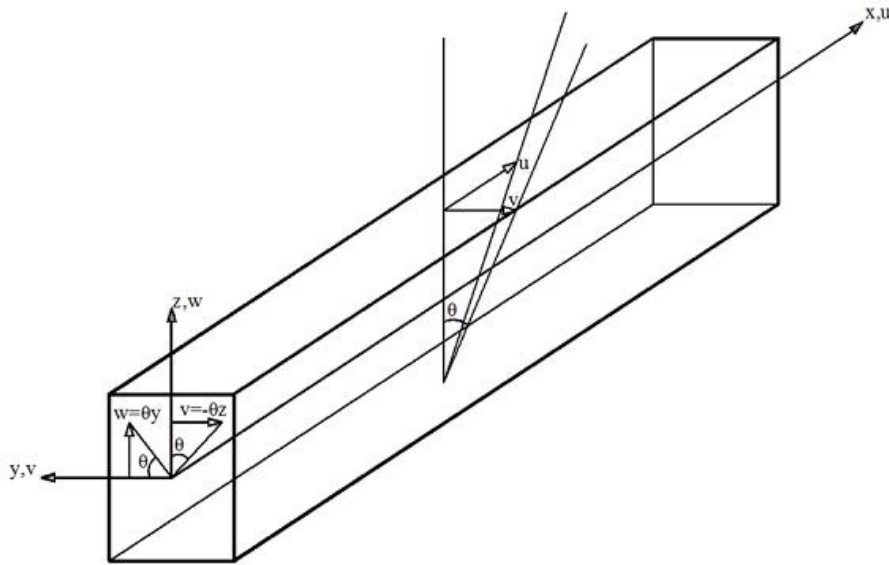
$$\theta(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta\rho_{N6} \quad 2.75$$

Οι μετατοπίσεις που παράγονται λόγω αυτής της στροφής δίνονται από τις σχέσεις (σχήμα 2.10):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \theta(x)\Psi(y, z) \\ v(x, z) &= -\theta(x)z \\ w(x, y) &= \theta(x)y \end{aligned} \quad 2.76$$

όπου $\Psi(y, z)$ είναι η συνάρτηση στρέβλωσης. Συνδυάζοντας την σχέση 2.75 στην 2.76 έχουμε:

$$\begin{aligned} u(\zeta, y, z) &= \theta\Psi(y, z) = \frac{1}{L}\Psi(y, z)\rho_{N6} \\ v(\zeta, z) &= -\theta z = -\frac{1}{2}\zeta z\rho_{N6} \\ w(\zeta, y) &= \theta y = \frac{1}{2}\zeta y\rho_{N6} \end{aligned} \quad 2.77$$



Σχήμα 2. 10 Μετατοπίσεις λόγω της στρέψης^[14].

Οι σχέσεις 2.77 με χρήση της μεταβλητής x κάνοντας χρήση της σχέσης 2.48 προκύπτουν:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \frac{1}{L} \Psi(y, z) \rho_{N6} \\
 v(x, z) &= -\frac{x}{L} z \rho_{N6} \\
 w(x, y) &= \frac{x}{L} y \rho_{N6}
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$

Για την παραγωγή του πεδίου παραμορφώσεων δρούμε όπως και προηγουμένως. Άρα:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z
 \tag{2.79}$$

Για να είμαστε συνεπής με την έκφραση της δυναμικής ενέργειας λόγω παραμόρφωσης, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις με τον αριθμό $\sqrt{2}$. Συνεπώς έχουμε:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} [\sqrt{2} \sigma_{ij}] [\sqrt{2} \varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)
 \tag{2.80}$$

Άρα το πεδίο των παραμορφώσεων είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{z}{L}\right)\rho_{N6}, \\
\sqrt{2}\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{y}{L}\right)\rho_{N6}, \\
\sqrt{2}\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{x}{L} + \frac{x}{L}\right)\rho_{N6} = 0
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Συνοψίζοντας τις μη μηδενικές τιμές των παραμορφώσεων λόγω αυτής της στρεπτικής μορφής παραμόρφωσης είναι:

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \sqrt{2}\varepsilon_{xy} = \frac{1}{L\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right)\rho_{N6}, \quad \sqrt{2}\varepsilon_{xz} = \frac{1}{L\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right)\rho_{N6} \tag{2.82}$$

και μητρικά γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right) \end{bmatrix} \rho_{N6} \quad \text{ή} \quad \varepsilon_T = a^T \rho_{N6} \tag{2.83}$$

2.2.6 Το φυσικό μητρώο παραμόρφωσης B_N

Προσθέτουμε όλες τις εκφράσεις των παραμορφώσεων που παράγονται από τις έξι μορφές παραμορφώσεων και έχουμε :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^E + \varepsilon_{xx}^{Sb} + \varepsilon_{xx}^{Ab} + \varepsilon_{xx}^T \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

όπου ε_{xx}^E , ε_{xx}^{Sb} , ε_{xx}^{Ab} , ε_{xx}^T είναι οι παραμορφώσεις λόγω αξονικής παραμόρφωσης, συμμετρικής κάμψης, αντισυμμετρικής κάμψης και στρέψης αντίστοιχα.

Αναπτύσσοντας τις εκφράσεις ε_{xx} έχουμε:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^E + \varepsilon_{xx}^{Sb} + \varepsilon_{xx}^{Ab} + \varepsilon_{xx}^T = \frac{1}{L}(\rho_{N1} + z\rho_{N2} - 3z\zeta\rho_{N3} + y\rho_{N4} - 3y\zeta\rho_{N5}) \tag{2.85}$$

ή μητρικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & z & -3z\zeta & y & -3y\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial y} - z\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial z} + y\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{N1} \\ \rho_{N2} \\ \rho_{N3} \\ \rho_{N4} \\ \rho_{N5} \\ \rho_{N6} \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

ή

$$\varepsilon = \alpha_N \rho_N \quad 2.87$$

(3x1) (3x6)(6x1)

όπου α_N είναι το μητρώο μετασχηματισμού το οποίο συνδέει τις παραμορφώσεις, οι οποίες εκφράζονται στο Καρτεσιανό επίπεδο, με τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης και ορίζεται ως:

$$\alpha_N = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & z & -3z\zeta & y & -3y\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \Psi(y,z)}{\partial y} - z \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \Psi(y,z)}{\partial z} + y \right) \end{bmatrix} \quad 2.88$$

2.2.7 Καταστατικές σχέσεις

Οι καταστατικές σχέσεις υλικού που εφαρμόζονται στους άξονες 123 του οπλισμού (σχήμα 2.5) για κάθε i ίνα ισχύει:

$$\begin{aligned} \sigma &= \kappa_{12} \varepsilon, \\ \sigma_s &= \kappa_s \varepsilon_s \end{aligned} \quad 2.89$$

Για ένα ορθότροπο υλικό οι σχέσεις 2.89 γίνονται:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}_i = \frac{1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_2 & \cdot \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2G_{12} \left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_i \quad 2.90$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 2G & \cdot \\ \cdot & 2G \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \end{bmatrix}_i$$

Αν έχω απόλυτη ιστροπία, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$, $E_1 = E_2 = E$, $G_{12} = G$ η σχέση 2.90 γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{E}{1 - \nu^2} & \nu \frac{E}{1 - \nu^2} & \cdot \\ \nu \frac{E}{1 - \nu^2} & \frac{E}{1 - \nu^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2G \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_i \quad 2.91$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 2G & \cdot \\ \cdot & 2G \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \end{bmatrix}_i$$

Τα καταστατικά μητρώα υλικού μεταφέρονται από του άξονες 123 στους τοπικού Καρτεσιανούς $x'y'z'$ χρησιμοποιώντας τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} \kappa' &= [A_1^T \kappa_{12} A_1]_i, \\ G' &= [A_S^T G_{12} A_S]_i \end{aligned} \quad 2.92$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} c_\theta^2 & s_\theta^2 & \sqrt{2}s_\theta c_\theta \\ s_\theta^2 & c_\theta^2 & -\sqrt{2}s_\theta c_\theta \\ -\sqrt{2}s_\theta c_\theta & \sqrt{2}s_\theta c_\theta & 2G \end{bmatrix}_i, \\ A_S &= \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}_i, \quad c_\theta = \cos\theta, \quad s_\theta = \sin\theta \end{aligned} \quad 2.93$$

όπου η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας 1 με τον άξονα x' (σχήμα 2.5). Συνεπώς η καταστατική σχέση του υλικού που συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις εκφρασμένη στο καρτεσιανό επίπεδο.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & \cdot \\ E_{xy} & 2G_{xy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2G_{xz} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \end{bmatrix}_i \Rightarrow \sigma = \kappa \varepsilon \quad 2.94$$

2.2.8 Το φυσικό μητρώο στιβαρότητας

Για την εξαγωγή του μητρώου στιβαρότητας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης.

$$U = \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad 2.95$$

Κάνοντας χρήση των τύπων 2.86 και 2.94 έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha_N \rho_N, \\ \sigma &= \kappa \varepsilon \end{aligned} \quad 2.96$$

Συνεπώς

$$U = \rho_N^T \left[\int \alpha_N^T \kappa \alpha_N dV \right] \rho_N \quad 2.97$$

(1x6) (6x3) (3x3) (3x6) (6x1)

όπου το $[\int \alpha_N^T \kappa \alpha_N dV]$ αποτελεί το φυσικό μητρώο στιβαρότητας.

Άρα το φυσικό μητρώο στιβαρότητας είναι ένα μητρώο 6x6 και έχει την εξής μορφή (σχέση 2.98):

$$k_N = \frac{1}{L^2} \int_V \begin{bmatrix} E_{xx} & zE_{xx} & -3z\zeta E_{xx} & yE_{xx} & -3y\zeta E_{xx} & \frac{E_{xy}}{\sqrt{2}}(\psi_{,y} - z) \\ & z^2 E_{xx} & -3z^2\zeta E_{xx} & zyE_{xx} & -3zy\zeta E_{xx} & \frac{zE_{xy}}{\sqrt{2}}(\psi_{,y} - z) \\ & & 9z^2\zeta^2 E_{xx} & -zyE_{xx} & 9zy\zeta^2 E_{xx} & -3zy\zeta E_{xy}(\psi_{,y} - z) \\ & & & y^2 E_{xx} & -3y^2\zeta^2 E_{xx} & \frac{yE_{xy}}{\sqrt{2}}(\psi_{,y} - z) \\ & & & & 9y^2\zeta^2 E_{xx} & -\frac{3y\zeta E_{xy}}{\sqrt{2}}(\psi_{,y} - z) \\ & & & & & G_{xy}(\psi_{,y} - z)^2 + G_{xy}(\psi_{,y} - z)^2 \end{bmatrix} \quad 2.98$$

Το παραπάνω μητρώο αποτελεί το φυσικό μητρώο στιβαρότητας ενός στοιχείου δοκού και χρησιμοποιείται για να εκφράσει την ανισοτροπία του υλικού. Κάποιοι όροι του μητρώου παρουσιάζουν αμελητέα συνεισφορά στην στιβαρότητα του υλικού και γι αυτόν τον λόγο εξαλείφονται. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με ισοτροπικό υλικό, η τιμή του E_{xy} είναι πολύ μικρή και ίση με το μηδέν. Επιπλέον μπορούμε να θεωρήσουμε πως κάποιες φυσικές μορφές παραμόρφωσης είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

$$\begin{aligned} k_N E_{xy} &\cong 0 \\ \rho_{N1} &<> \rho_{N3}, \quad \rho_{N1} <> \rho_{N5} \\ \rho_{N2} &<> \rho_{N3}, \quad \rho_{N2} <> \rho_{N5} \\ \rho_{N3} &<> \rho_{N4}, \quad \rho_{N3} <> \rho_{N5} \\ \rho_{N4} &<> \rho_{N5}, \quad <>: \text{δεν έχουν αλληλεπίδραση} \end{aligned} \quad 2.99$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε μια απλοποιημένη μορφή του μητρώου στιβαρότητας (σχέση 2.100):

$$k_N = \frac{1}{L^2} \int_V \begin{bmatrix} E_{xx} & zE_{xx} & \cdot & yE_{xx} & \cdot & \cdot \\ & z^2 E_{xx} & \cdot & zyE_{xx} & \cdot & \cdot \\ & & 9z^2\zeta^2 E_{xx} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & y^2 E_{xx} & \cdot & \cdot \\ & & & & 9y^2\zeta^2 E_{xx} & \cdot \\ & & & & & G_{xy}(\psi_{,y} - z)^2 + G_{xy}(\psi_{,y} - z)^2 \end{bmatrix} \quad 2.100$$

Η σχέση 2.100 αποτελεί την απλοποιημένη έκφραση του μητρώου στιβαρότητας ενός φυσικού στοιχείου δυνάμεων. Με αυτόν τον τρόπο μειώνουμε τα στοιχεία που χρειάζεται να αποθηκεύσει ο κώδικας για την χρησιμοποίηση του μητρώου, από 78

σε 21. Στο ReConAn FEA όλοι οι συμμετρικοί πίνακες αποθηκεύονται σε πίνακες-στήλες, έτσι ώστε αν έχουμε έναν πίνακα $n \times n$ τότε αυτός αποθηκεύεται σε έναν πίνακα στήλη χωρητικότητας $n \cdot (n+1)/2$. Για παράδειγμα για έναν πίνακα 12×12 χρησιμοποιούμε 78 στοιχεία στήλης, τα οποία αντιπροσωπεύουν τον άνω τριγωνικό πίνακα του πίνακα 12×12 . Αυτός ο τρόπος αποθήκευσης μειώνει σημαντικά την απαιτούμενη μνήμη που χρειάζονται τα μοντέλα μας και επιταχύνει τον χρόνο που χρειάζεται ο επεξεργαστής του υπολογιστή να χρησιμοποιήσει αυτά τα μητρώα εκτελώντας διάφορες πράξεις. Για να είμαστε σε θέση να εκτελέσουμε διάφορες πράξεις χρησιμοποιώντας αυτήν την μορφή αποθήκευσης, έχουν αναπτυχθεί διάφορες υπορουτίνες όπως ο πολλαπλασιασμός πινάκων κτλ. Αυτό σημαίνει πως δεν χρειάζεται να μετατρέψουμε τον πίνακα στήλη σε πίνακα μορφής $n \times n$ για να εκτελέσουμε τις πράξεις και μετά να επιστρέψουμε στην μορφή πίνακα στήλη. Το τελικό στάδιο είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.100 υπολογίζοντας το άθροισμα των τιμών της ολοκληρωτέας ποσότητας στα σημεία Gauss. Αφού υπολογιστεί και αυτό τότε το μητρώο στιβαρότητας έχει την εξής μορφή:

$$k_N = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} EA & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & EI_{yy} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{3EI_{yy}}{\left(L + \frac{12EI_{yy}}{L(GA)}\right)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & EI_{zz} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3EI_{zz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & GJ_p \end{bmatrix} \quad 2.101$$

όπου E , G , A , I_{yy} , I_{zz} και J_p είναι το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διάτμησης, το εμβαδόν της διατομής, η ροπή αδράνειας όσον αφορά τον άξονα y , η ροπή αδράνειας όσον αφορά τον άξονα z και η πολική ροπή αδράνεια αντίστοιχα.

2.2.9 Τοπικό και καθολικό μητρώο στιβαρότητας

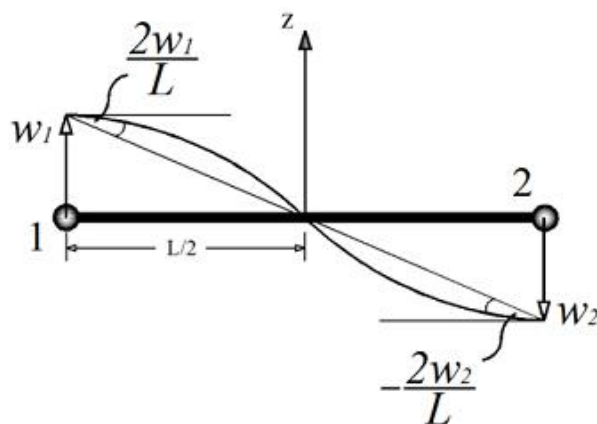
Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζονται τα μητρώα μετασχηματισμού, τα οποία μετασχηματίζουν το φυσικό μητρώο στιβαρότητας k_N στους τοπικού και στην συνέχεια στους καθολικούς Καρτεσιανούς άξονες συντεταγμένων. Αυτό απαιτεί την σύνδεση των φυσικών μορφών παραμόρφωσης με τους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας:

$$\rho_N = \bar{a}_N \bar{\rho} \quad 2.102$$

(6x1) (6x12)(12x1)

Το μητρώο μετασχηματισμού \bar{a}_N περιέχει μόνο γεωμετρικές παραμέτρους και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι οι περισσότερες μορφές παραμόρφωσης προκύπτουν από προσθαφαίρεση τοπικών βαθμών ελευθερίας. Η σχέση της κάθετης επικόμβιας

μετατόπισης με την αντισυμμετρική μορφή παραμόρφωσης απεικονίζονται στο σχήμα 2.11.



Σχήμα 2. 11 Αντισυμμετρική μορφή παραμόρφωσης λόγω της κάθετης επικόμβιας μετατόπισης^[14].

Οι εκφράσεις των μορφών παραμόρφωσης είναι οι εξής:

$$\rho_{N1} = u_2 - u_1, \quad \rho_{N2} = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \rho_{N3} = -(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{2(w_1 - w_2)}{L}, \quad 2.103$$

$$\rho_{N4} = \psi_1 - \psi_2, \quad \rho_{N5} = (\psi_1 + \psi_2) + \frac{2(v_1 - v_2)}{L}, \quad \rho_{N6} = \theta_2 - \theta_1$$

από τις οποίες εξάγουμε τα μητρώα μετασχηματισμού:

$$\bar{a}_N = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{2}{L} & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{2}{L} & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \frac{2}{L} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -\frac{2}{L} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad 2.104$$

Τώρα είμαστε σε θέση να συνδέσουμε τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης και στερεού σώματος με τους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_0 \\ \dots \\ \bar{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.105$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.41, 2.102 και 2.105 έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \rho_0 \\ \dots \\ \rho_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 \\ \dots \\ \bar{a}_N \end{bmatrix} \bar{\rho}_N = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 \\ \dots \\ \bar{a}_N \end{bmatrix} T_{04} \rho \quad 2.106$$

Αντιστρέφοντας την σχέση έχουμε:

$$\rho = T_{04}^{-1} [\bar{A}_0 \quad | \quad \bar{A}_N] \begin{bmatrix} \bar{\rho}_0 \\ \dots \\ \bar{\rho}_N \end{bmatrix} \quad 2.107$$

όπου

$$[\bar{a}]^{-1} = \bar{A} \quad 2.108$$

Από την έκφραση την δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} U &= \int_V \sigma^T \varepsilon dV \\ &= \rho_N^T \left[\int \alpha_N^T \kappa \alpha_N dV \right] \rho_N \end{aligned}$$

┌──────────┐

Φυσικό μητρώο
στιβαρότητας

$$= \bar{\rho}^T \left[\bar{\alpha}_N^T \left[\int \alpha_N^T \kappa \alpha_N dV \right] \bar{\alpha}_N \right] \bar{\rho} \quad 2.109$$

τοπικό μητρώο
 στιβαρότητας

Το τοπικό διάνυσμα $\bar{\rho}$ συνδέεται με το καθολικό διάνυσμα ρ μέσω της σχέσης:

$$\bar{\rho} = T_{04} \rho \quad 2.110$$

όπου το μητρώο T_{04} είναι ο πίνακας που περιέχει υπομητρώα με τα συνημίτονα κατεύθυνσης:

$$T_{04} = \begin{bmatrix} T_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & T_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & T_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & T_0 \end{bmatrix} \quad 2.111$$

(12x12)

όπου

$$T_0 = \begin{bmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{bmatrix} \quad 2.112$$

(3x3)

όπου $c_{x'x}$ συμβολίζει το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει ο καθολικός άξονας x με τον τοπικό άξονα x'. Ομοίως και για τους άλλους όρους του πίνακα.

Χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$\rho_N = \bar{\alpha}_N \bar{\rho} = \bar{\alpha}_N T_{04} \rho = \alpha_N \rho \quad 2.113$$

Η έκφραση της δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης γίνεται:

$$U = \bar{\rho}^T \left[T_{04}^T \left[\bar{\alpha}_N^T \left[\int \alpha_N^T \kappa \alpha_N dV \right] \bar{\alpha}_N \right] T_{04} \right] \bar{\rho} \quad 2.114$$

καθολικό μητρώο
 στιβαρότητας

Από την σχέση 2.114 εξάγουμε τις εξισώσεις ισορροπίας του φορέα εκφρασμένη σε κάθε σύστημα συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} P_N &= k_N \rho_N, & \text{φυσικό σύστημα συντεταγμένων} \\ \bar{P} &= \bar{k} \bar{\rho}, & \text{τοπικό σύστημα συντεταγμένων} \\ P &= k \rho, & \text{καθολικό σύστημα συντεταγμένων} \end{aligned} \quad 2.115$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα μητρώα μετασχηματισμού T_{04} και $\bar{\alpha}_N$ μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν αριθμητικές αστάθειες στον κώδικα. Γι αυτόν τον λόγο πρέπει και

στα δυο μητρώα να έχουμε ορίσει τα ίδια συστήματα συντεταγμένων ακολουθώντας τους ίδιους κανόνες φοράς των αξόνων (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη φορά των αξόνων).

2.2.10 Προσδιορισμός της κατάστασης ενός στοιχείου και η διαδικασία της ανάλυσης ενός στοιχείου με την χρήση του μητρώου ενδοσιμότητας

Η προσομοίωση ενός φορέα με πεπερασμένα στοιχεία έχει σαν αποτέλεσμα την μόρφωση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας και τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών του φορέα. Στην υποενότητα αυτή περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού των εσωτερικών δυνάμεων ενός στοιχείου δυνάμεων και οι μετατροπές που χρειάζονται ώστε να συνδεθούν με τις φυσικές μορφές του στοιχείου. Το μητρώο στιβαρότητας ενός φυσικού στοιχείου δυνάμεων προκύπτει άμεσα από το αντίστροφο του μητρώου ενδοσιμότητας. Τα εντατικά μεγέθη του στοιχείου προκύπτουν μέσω μιας χαρακτηριστικής επαναληπτικής διαδικασίας η οποία βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των ροπών και των αξονικών δυνάμεων κατά μήκος του στοιχείου.

2.2.10.1 Γενικευμένες δυνάμεις και μετατοπίσεις

Όπως έχει αναφερθεί το φυσικό στοιχείο δυνάμεων έχει 12 βαθμούς ελευθερίας και γι αυτό παράγει 12 επικόμβιες δυνάμεις και 12 μετατοπίσεις. Τα διανύσματα των δυνάμεων και των μετατοπίσεων ορισμένα στο καθολικό σύστημα αξόνων είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} P &= [P_1 \ P_2 \ \cdots \ \cdots \ P_{11} \ P_{12}]^T \\ \rho &= [\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \cdots \ \rho_{11} \ \rho_{12}]^T \end{aligned} \quad 2.116$$

Τα διανύσματα αυτά συνδέονται με τις φυσικές μορφές στερεού σώματος και παραμόρφωσης μέσω των μητρώων μετασχηματισμού των σχέσεων 1.105 και 1.111. Επίσης υποθέτουμε πως η απόκριση του στοιχείου σε στρεπτική καταπόνηση είναι γραμμικώς ελαστική και ανεξάρτητη από τους άλλους βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το στοιχείο περιέχει πέντε γενικευμένους βαθμούς ελευθερίας: την αξονική επιμήκυνση ρ_1 και τις δύο στροφές που παρουσιάζει κάθε κόμβος, οι (ρ_2, ρ_3) στον κόμβο 1 και οι (ρ_4, ρ_5) στον κόμβο 2. Αυτές οι πέντε μετατοπίσεις καλούνται γενικευμένες μετατοπίσεις του στοιχείου q και αντιστοίχως γενικευμένες δυνάμεις Q , όπως απεικονίζονται στο σχήμα 2.12. Η Q_1 είναι η αξονική δύναμη του στοιχείου, οι (Q_2, Q_3) είναι οι ροπές κάμψης του κόμβου 1 και (Q_4, Q_5) είναι οι ροπές κάμψης του κόμβου 2.

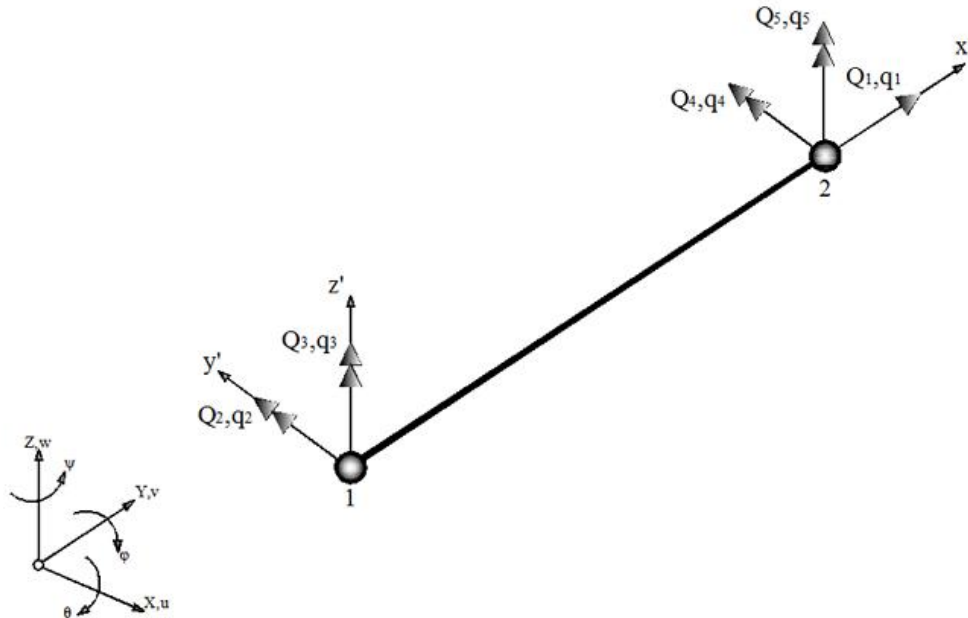
$$\begin{aligned} Q &= [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5]^T \\ q &= [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T \end{aligned} \quad 2.117$$

Η σχέση που συνδέει το ρ με το q γράφεται ως εξής:

$$q = a_N T_{04} \rho, \quad q(6) = 0$$

(6x1) (6x12)(12x12)(12x1)

2.118



Σχήμα 2. 12 Γενικευμένες μετατοπίσεις και δυνάμεις του φυσικού στοιχείου δυνάμεων^[14].

Το διάνυσμα των δυνάμεων και των μετατοπίσεων μιας διατομής μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή:

$$D(\xi) = \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_z(\xi) \end{Bmatrix} \quad 2.119$$

$$d(\xi) = \begin{Bmatrix} \varepsilon(\xi) \\ \chi_y(\xi) \\ \chi_z(\xi) \end{Bmatrix} \quad 2.120$$

Η δομή του κώδικα στο ReConAn FEA έχει δημιουργηθεί με βέλτιστο τρόπο ώστε να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης. Για τον σκοπό αυτό οι μεταβλητές αποθηκεύονται δυναμικά σε πίνακες στήλης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιαδήποτε στιγμή και σε οποιαδήποτε υποενότητα του κώδικα.

Όπως έχουμε αναφέρει η ανάλυση πραγματοποιείται με την προσέγγιση των ινών, δηλαδή την διαίρεση του στοιχείου σε τμήματα. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες του υλικού εισάγονται στην ανάλυση μέσω των διανυσμάτων των τάσεων και των παραμορφώσεων των ινών στις οποίες χωρίζεται η διατομή:

$$e(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1(\xi, y_1, z_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_{ifiber}(\xi, y_{ifiber}, z_{ifiber}) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(\xi, y_n, z_n) \end{array} \right\} \quad 2.121$$

$$E(\xi) = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1(\xi, y_1, z_1) \\ \vdots \\ \sigma_{ifiber}(\xi, y_{ifiber}, z_{ifiber}) \\ \vdots \\ \sigma_n(\xi, y_n, z_n) \end{array} \right\} \quad 2.122$$

όπου ξ είναι η συντεταγμένη του άξονα της δοκού και καθορίζει την θέση της διατομής της δοκού στην οποία αναφερόμαστε. Οι y_{ifiber}, z_{ifiber} είναι οι συντεταγμένες των ινών της διατομής στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Το διάνυσμα των παραμορφώσεων συνδέεται με το διάνυσμα των μετατοπίσεων με την εξής σχέση:

$$e(\xi) = l(\xi) d(\xi) \quad 2.123$$

όπου $l(\xi)$ είναι ένα μητρώο που εξαρτάται από την γεωμετρία της διατομής.

$$l(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & -z_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -z_{ifiber} & y_{ifiber} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -z_n & y_n \end{bmatrix} \quad 2.124$$

Η θεωρία Bernoulli ,όπου η διατομή παραμένει επίπεδη και κάθετη στον διαμήκη άξονα του στοιχείου μετά την παραμόρφωση του, μας επιτρέπει αυτήν την γραμμική σύνδεση (μέσω του μητρώου $l(\xi)$) των μετατοπίσεων με των παραμορφώσεων. Αυτή η υπόθεση κρίνεται μη ρεαλιστική σε περιπτώσεις οπλισμένου σκυροδέματος. Σε περιπτώσεις όπου απαιτείται να λάβουμε υπόψη μας τις διατμητικές παραμορφώσεις, τότε θα χρειαζόμασταν ένα πιο περίπλοκο μητρώο $l(\xi)$.

2.2.10.2 Διατύπωση του φυσικού στοιχείου δυνάμεων

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έχει χρησιμοποιηθεί το φυσικό στοιχείο δυνάμεων που περιέχει τα χαρακτηριστικά του στοιχείου που πρότειναν οι Spacone et al. Συγκεκριμένα απλοποιείται η διαδικασία προτείνοντας μια συνάρτηση σχήματος που αναφέρεται στις μετατοπίσεις και χρησιμοποιώντας το μητρώο ενδοσιμότητας του στοιχείου με στόχο τον προσδιορισμό των εντατικών μεγεθών ή δράσεων κάθε εσωτερικής διατομής του στοιχείου. Συμβολίζοντας με Δ τις μεταβολές (αυξήσεις)

των αντίστοιχων μεγεθών, οι παραμορφώσεις και οι δυνάμεις σε κάθε διατομή του στοιχείου δίνονται από την σχέση:

$$\Delta d^i(\xi) = \alpha(\xi)\Delta q \quad 2.125$$

$$D^i(\xi) = b(\xi)Q^i \quad \text{and} \quad \Delta D^i(\xi) = b(\xi)\Delta Q^i \quad 2.126$$

όπου $\alpha(\xi)$ και $b(\xi)$ είναι τα μητρώα παραμορφώσεων των μετατοπίσεων και των δυνάμεων αντίστοιχα. Η παράμετρος ξ αντιπροσωπεύει τις συντεταγμένες του σημείου ολοκλήρωσης Gauss-Lobato (σημείο ελέγχου). Ο άνω δείκτης i δείχνει πως βρισκόμαστε στην i -επανάληψη Newton Raphson.

Με την χρήση των πολλαπλασιαστών Laplace, οι οποίοι θεωρούμε ότι ισοδυναμούν με τις γενικευμένες δυνάμεις, η εξίσωση ισορροπίας που συνδέει τα εντατικά μεγέθη με τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε μια διατομή ενσωματώνεται σε μια διευρυμένη έκφραση της συνολικής δυναμικής ενέργειας της διατομής και γράφεται με την εξής μορφή:

$$\int_0^L \delta D^T(\xi) [\Delta d^i(\xi) - f^{i-1}(\xi)\Delta D^i(\xi)]d\xi = 0 \quad 2.127$$

και η σχέση που συνδέει τις δυνάμεις με τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε μια διατομή με την χρήση του μητρώου ενδοσιμότητας γράφεται:

$$\Delta d^i(\xi) = f^{i-1}(\xi)\Delta D^i(\xi) \quad 2.128$$

Ο δείκτης $i - 1$ του μητρώου ενδοσιμότητας δείχνει πως χρησιμοποιούμε το μητρώο ενδοσιμότητας της προηγούμενης επανάληψης Newton Raphson. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 2.125 και 2.126 στην σχέση 2.127 έχουμε:

$$\Delta Q^T \int_0^L b^T(\xi) [a(\xi)\Delta q^i - f^{i-1}(\xi)b(\xi)\Delta Q^i]d\xi = 0 \quad 2.129$$

και εφόσον η σχέση 2.129 ισχύει για κάθε ΔQ^T έχουμε την σχέση:

$$\left[\int_0^L b^T(\xi) a(\xi) d\xi \right] \Delta q^i - \left[\int_0^L b^T(\xi) f^{i-1}(\xi) b(\xi) d\xi \right] \Delta Q^i = 0 \quad 2.130$$

όπου

$$F^{i-1} = \left[\int_0^L b^T(\xi) f^{i-1}(\xi) b(\xi) d\xi \right] \quad 2.131$$

$$T = \left[\int_0^L b^T(\xi) a(\xi) d\xi \right] \quad 2.132$$

Το μητρώο F αποτελεί το μητρώο ενδοσιμότητας του στοιχείου ενώ το μητρώο T είναι το μητρώο που εξαρτάται από τις συναρτήσεις παρεμβολής. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.131 και 2.132 η 2.130 γίνεται:

$$T\Delta q^i = F^{i-1}\Delta Q^i \quad 2.133$$

όπου είναι η γραμμικοποιημένη σχέση που συνδέει τις δυνάμεις (φυσικά εντατικά μεγέθη) με τις μετατοπίσεις (φυσικές μορφές παραμόρφωσης) μιας διατομής σε μητρωική μορφή.

Στην συνέχεια διατυπώνουμε την εξίσωση ισορροπίας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων, δεδομένου ότι οι εξωτερικές δυνάμεις πρέπει να ισορροπούν με τα αντίστοιχα εσωτερικά εντατικά μεγέθη παντού κατά μήκος του στοιχείου. Σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων η ζητούμενη εξίσωση ισορροπίας παίρνει την εξής μορφή:

$$\int_0^L \delta d^T(\xi) [D^i(\xi) + \Delta D^i(\xi)] d\xi = \delta q^T P^i \quad 2.134$$

όπου P^i είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων που όπως αναφέραμε πρέπει να ισορροπεί τις εσωτερικές δυνάμεις $D^i(\xi) + \Delta D^i(\xi)$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 2.125 και 2.126 στην 2.134 έχουμε:

$$\delta q^T \left[\int_0^L a^T(\xi) [b(\xi)Q^{i-1} + b(\xi)\Delta Q^i] d\xi \right] = \delta q^T P^i \Rightarrow \quad 2.135$$

$$\left[\int_0^L a^T(\xi)b(\xi)d\xi \right] Q^{i-1} + \left[\int_0^L a^T(\xi)b(\xi)d\xi \right] \Delta Q^i = P^i$$

Και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.131 και 2.132 έχουμε:

$$T^T Q^{i-1} + T^T \Delta Q^i = P^i \quad 2.136$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την μητρωική διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του φυσικού στοιχείου δυνάμεων.

Ο συνδυασμός των σχέσεων 2.133 και 2.136 μας δίνει:

$$\begin{bmatrix} -F^{i-1} & T \\ T^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta Q^i \\ \Delta q^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P^i - T^T Q^{i-1} \end{Bmatrix} \quad 2.137$$

Επιλύοντας το σύστημα ως προς ΔQ^i προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$T^T [F^{i-1}]^{-1} T \Delta q^i = P^i - T^T Q^{i-1} \quad 2.138$$

Στην συνέχεια πρέπει να γίνει η κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων παρεμβολής $a(\xi)$ και $b(\xi)$ προκειμένου να απλοποιήσουμε το μητρώο T , το οποίο εξαρτάται αποκλειστικώς από τις συναρτήσεις παρεμβολής και κατ'επέκταση την μορφή των εξισώσεων στις οποίες υπεισέρχεται. Αν και σε ένα μεικτό στοιχείο οι συναρτήσεις παρεμβολής είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, για λόγους απλοποίησης επιλέγουμε την ακόλουθη μορφή του μητρώου $a(\xi)$:

$$a(\xi) = f^{i-1}(\xi) b(\xi) [F^{i-1}]^{-1} \quad 2.139$$

Αυτές οι συναρτήσεις παρεμβολής συνδέουν τις παραμορφώσεις της διατομής με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις του στοιχείου με την σχέση:

$$\Delta d^i(\xi) = f^{i-1}(\xi) b(\xi) [F^{i-1}]^{-1} \Delta q^i \quad 2.140$$

Όπου F^{i-1} είναι το εφαπτομενικό μητρώο ενδοσιμότητας που εμφανίζεται στο τέλος της $i-1$ Newton Raphson. Η επιλογή αυτής της συνάρτησης παρεμβολής $a(\xi)$ απλοποιεί την μορφή του μητρώου T σε ένα μητρώο μοναδιαίο 3×3 . Αυτό προκύπτει από την ακόλουθη σχέση (σχέση 2.141):

$$T = \begin{bmatrix} \int_0^L b^T(\xi) a(\xi) d\xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L b^T(\xi) f^{i-1}(\xi) b(\xi) d\xi \\ 0 \end{bmatrix} [F^{i-1}]^{-1} = [F^{i-1}] [F^{i-1}]^{-1} = I \quad 2.141$$

Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε την σχέση 2.138 με τον εξής τρόπο:

$$[F^{i-1}]^{-1} \Delta q^i = P^i - Q^{i-1} \quad 2.142$$

Με την σχέση αυτήν οδηγούμαστε από το γενικό μεικτό στοιχείο δοκού στο στοιχείο δυνάμεων. Η σχέση αυτή αποτελεί την μητρική διατύπωση της γραμμικοποιημένης που συνδέει τις εξωτερικές επιβαλλόμενες γενικευμένες δυνάμεις που δεν έχουν εξισορροπηθεί (unbalanced forces) $P^i - Q^{i-1}$ με τις αντίστοιχες επαυξητικές φυσικές μορφές παραμόρφωσης Δq^i κάθε φυσικού στοιχείου δυνάμεων.

Πρόκειται λοιπόν για μια παραλλαγή της σχέσης $F=KD$ της κλασσικής μεθόδου στιβαρότητας. Οι τέσσερις κυριότερες διαφορές που παρουσιάζουν οι δύο μέθοδοι είναι τα εξής: α) Το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου υπολογίζεται με την αντιστροφή του μητρώου ενδοσιμότητας του, β) Για τον προσδιορισμό της κατάστασης ενός στοιχείου του φορέα, τα εντατικά μεγέθη δεν προκύπτουν άμεσα από τις εσωτερικές δυνάμεις των διατομών αλλά μέσω της χαρακτηριστικής επαναληπτικής διαδικασίας γ) Για την αναλυτική διαδικασία πρέπει να λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός του μητρώου ενδοσιμότητας μέσω της αντιστροφής του μητρώου στιβαρότητας που υπολογίζεται στην κλασσική μέθοδο στιβαρότητας και δ) με την κλασσική μέθοδο της δυσκαμψίας λαμβάνονται ως βασικοί άγνωστοι οι μετατοπίσεις. Η μη γραμμική διαδικασία στην μέθοδο της ευκαμψίας υπολογίζει την ακριβή λύση της εξίσωσης ισορροπία μεταξύ των μη εξισορροπούμενων δυνάμεων και των αντίστοιχων μετατοπίσεων. Το γεγονός αυτό προσφέρει αριθμητική ευστάθεια κατά την επίλυση της μη γραμμικής διαδικασίας.

Πρέπει να επιλέξουμε την μορφή της συνάρτησης παρεμβολή $b(\xi)$ έτσι ώστε να μπορούμε να εξάγουμε την κατανομή του φορτίου $D(\xi)$ κατά μήκος του στοιχείου από το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων Q . Η συνάρτηση $b(\xi)$ επιλέγεται με βάση την ισορροπία της αξονικής δύναμης της διατομής $N(x)$ και των καμπτικών ροπών $M_y(\xi)$ και $M_z(\xi)$. Με την θεώρηση ότι οι ροπές κάμψης κατανέμονται γραμμικά κατά μήκος του στοιχείου και η αξονική δύναμη παραμένει σταθερή κατά μήκος του στοιχείου έχουμε ότι:

$$b(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad 2.143$$

όπου ξ είναι η φυσική συντεταγμένη του σημείου Gauss-Lobato (σημείο ελέγχου) όπου είναι και η μέθοδος ολοκλήρωσης που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

Όταν μία διατομή περνά στην ανελαστική περιοχή του διαγράμματος τάσεων παραμορφώσεων, τότε το μητρώο δυσκαμψίας χρειάζεται αναβάθμιση. Όπως έχει αναφερθεί στον κώδικα ReConAn οι μεταβλητές έχουν αποθηκευθεί ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους σε πίνακες στήλες (array type matrices). Συμβολίζοντας την μεταβλητή A ως το μητρώο που περιέχει το εμβαδόν της κάθε ίνας A_{ifiber} και την μεταβλητή E το μητρώο που περιέχει τα μέτρα ελαστικότητας της κάθε ίνας E_{ifiber} , το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας δίνεται από την σχέση:

$$k^j(\xi) = l^T(\xi)(E_{ifiber}^j A_{ifiber})l(\xi) \quad 2.144$$

η οποία καταλήγει στο μητρώο (σχέση 2.145):

$$k^j(\xi) = \begin{bmatrix} \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} & - \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Z_{ifiber} & \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Y_{ifiber} \\ - \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Z_{ifiber} & \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Z_{ifiber}^2 & - \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Z_{ifiber} Y_{ifiber} \\ \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Y_{ifiber} & - \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Z_{ifiber} Y_{ifiber} & \sum_{ifiber=1}^{nfibers} E_{ifiber}^j A_{ifiber} Y_{ifiber}^2 \end{bmatrix} \quad 2.145$$

Όταν η διατομή βρίσκεται στην ελαστική περιοχή της καμπύλης τάσεων παραμορφώσεων, τότε η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στην γνωστή έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας. Υπενθυμίζουμε πως όταν μια διατομή βρεθεί στην ανελαστική περιοχή της καμπύλης τάσεων παραμορφώσεων, τότε δεν πλαστικοποιείται όλη η διατομή ταυτόχρονα. Αλλά κάποιες ίνες (τμήματα της διατομής) μπορεί να έχουν πλαστικοποιηθεί και κάποιες άλλες να βρίσκονται ακόμα στην ελαστική περιοχή. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξάγουμε την κατανομή της πλαστικοποίησης.

Για να αναβαθμίσουμε το φυσικό μητρώο στιβαρότητας ενός φυσικού στοιχείου δυνάμεων πρέπει να υπολογίσουμε για κάθε διατομή του στοιχείου το μητρώο δυσκαμψίας, να το αντιστρέψουμε προκειμένου να προσδιορίσουμε το μητρώο ευκαμψίας της διατομής και να συνυπολογίσουμε την συνεισφορά κάθε διατομής σύμφωνα με την σχέση 2.146 με σκοπό τον υπολογισμό του μητρώου ευκαμψίας του στοιχείου.

$$F = \sum_{isection}^{nsections} \begin{matrix} b^T(\xi) & f^{isection}(\xi) & b(\xi) & w^{isection} \\ (6 \times 6) & (6 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 6) \end{matrix} \quad 2.146$$

όπου το w είναι ο συντελεστής βαρύτητας. Στην συνέχεια για να εξάγουμε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, πρέπει να αντιστρέψουμε το μητρώο ενδοσιμότητας:

$$[K_{Natural}^{beam}] = [F_{beam}]^{-1} \quad 2.147$$

Ομοίως οι εναπομένουσες εσωτερικές δυνάμεις $D_R^j(\xi)$ μιας διατομής υπολογίζονται από την συνεισφορά κάθε ίνας της διατομής όπως φαίνεται παρακάτω:

$$D_R^j(\xi) = l^T(\xi) E^j A \quad 2.148$$

ή

$$D_R^j(\xi) = \left\{ \begin{matrix} \sum_{ifiber=1}^{nfibers} \sigma_{ifiber}^j A_{ifiber} \\ - \sum_{ifiber=1}^{nfibers} \sigma_{ifiber}^j A_{ifiber} Z_{ifiber} \\ \sum_{ifiber=1}^{nfibers} \sigma_{ifiber}^j A_{ifiber} Y_{ifiber} \end{matrix} \right\} \quad 2.149$$

Η σχέση που συνδέει τις εναπομένουσες δυνάμεις με τις γενικευμένες δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$Q = \sum_{isection=1}^{nsections} b^T(\xi) D_R^{isection}(\xi) w^{isection} \quad 2.150$$

(6x1) (6x3) (3x1)

Η σχέση που μεταφέρει τις εσωτερικές δυνάμεις στο καθολικό Καρτεσιανό σύστημα είναι η εξής:

$$P_{internal} = T_{04}^T a_n^T Q \quad 2.151$$

(12x1) (12x12) (12x6)(6x1)

2.2.10.3 Προσδιορισμός της κατάστασης του φυσικού στοιχείου δυνάμεων

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την διαδικασία ανάλυσης ενός φυσικού στοιχείου δυνάμεων με την χρησιμοποίηση των φυσικών μορφών και του μητρώου ενδοσιμότητας του στοιχείου. Η διαδικασία αυτή εμπεριέχεται στην επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson. Να επισημάνουμε πως ο κώδικας χρησιμοποιεί την δομή αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού που μας δίνει την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε χαρακτηριστικά υλικού και οποιαδήποτε στρατηγική επίλυσης. Ένας τέτοιος αλγόριθμος επίλυσης είναι και η επαναληπτική διαδικασία Newton Raphson που ανανεώνει το μητρώο δυσκαμψίας όταν εμφανίζονται μη γραμμικότητες στο στοιχείο. Άρα το συνολικό μη γραμμικό φορτίο ασκείται σε επανυζητικά βήματα.

Υποθέτοντας πως ο αριθμός k δείχνει το επαυξητικό βήμα της Newton Raphson και i δηλώνει την i εσωτερική επανάληψη της Newton Raphson, τότε η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται ως εξής:

- 1) Αρχικοποίηση όλων των απαιτούμενων μεταβλητών για k=1 και i=1.
- 2) Επίλυση της καθολικής εξίσωσης ισορροπίας και ανανέωση των επαυξητικών μετατοπίσεων κάθε στοιχείου.

$$\Delta P_E^k = (K_{structure}^k)^{i-1} (\delta \Delta \rho^k)^i \Rightarrow$$

$$(\delta \Delta \rho^k)^i = \left[(K_{structure}^k)^{i-1} \right]^{-1} \Delta P_E^k \quad 2.152$$

Εάν η τιμή του i είναι μεγαλύτερη από 1 τότε στην θέση του ΔP_E^k μπαίνει το $(P_u^k)^{i-1}$, το οποίο είναι το διάνυσμα των μη εξισορροπούμενων δυνάμεων της προηγούμενης επανάληψης Newton Raphson. Οι εξισορροπούμενες

δυνάμεις υπολογίζονται από την αφαίρεση των εσωτερικών εναπομενουσών δυνάμεων από το συνολικό φορτίο. Απαιτείται ένας έλεγχος εάν εμφανίζονται μη γραμμικότητες ώστε να χρειαστεί αναβάθμιση το μητρώο στιβαρότητας πριν τον υπολογισμό των επαυξητικών μορφών παραμόρφωσης. Η συνολική προσαύξηση των μετατοπίσεων του i βήματος υπολογίζεται από την σχέση:

$$(\Delta \rho^k)^i = (\Delta \rho^k)^{i-1} + (\delta \Delta \rho^k)^i \quad 2.153$$

- 3) **Υπολογισμός των επαυξητικών μορφών παραμόρφωσης κάθε στοιχείου.**
Χρησιμοποιώντας το μητρώο T_{04} για να μετασχηματίσουμε τις καθολικές επικόμβιες μετακινήσεις του στοιχείου σε τοπικές και το μητρώο α_N για να υπολογίσουμε τις προσαυξητικές μορφές παραμόρφωσης:

$$\underset{(6 \times 1)}{(\delta \Delta q^k)^i} = \underset{(6 \times 12)}{\alpha_N} \underset{(12 \times 12)}{T_{04}} \underset{(12 \times 1)}{(\delta \Delta \rho^k)^i} \quad 2.154$$

Να τονίσουμε ότι οι προσαυξητικές παραμορφώσεις του στοιχείου δεν αλλάζουν μέχρι να αλλάξει η τιμή της μεταβλητής j η οποία δηλώνει έναν νέο βρόγχο επανάληψης που αφορά την κατάσταση του στοιχείου.

- 4) **Αρχή της διαδικασίας προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου.**
Θέτουμε $j=1$
- 5) **Υπολογισμός της μεταβολής των προσαυξητικών δυνάμεων του στοιχείου.**

Για $j=1$ το $((\delta \Delta Q^k)^i)^1$ υπολογίζεται από το $(\delta \Delta q^k)^i$ της τρέχουσας επανάληψης Newton Raphson χρησιμοποιώντας το φυσικό μητρώο στιβαρότητας:

$$\underset{(6 \times 1)}{((\delta \Delta Q^k)^i)^1} = \underset{(6 \times 6)}{(K_N^k)^{i-1}} \underset{(6 \times 1)}{(\delta \Delta q^k)^i} \quad 2.155$$

Για $j>1$, το $((\delta \Delta Q^k)^i)^j$ υπολογίζεται από τη εναπομένουσα προσαυξητική παραμόρφωση $((s^k)^i)^{j-1}$ της προηγούμενης επανάληψης $j-1$ καθώς και το αντίστοιχο φυσικό μητρώο στιβαρότητας

$$\underset{(6 \times 1)}{((\delta \Delta Q^k)^i)^j} = \underset{(6 \times 6)}{((K_N^k)^i)^{j-1}} \underset{(6 \times 1)}{((s^k)^i)^{j-1}} \quad 2.156$$

- 6) **Ανανεώνουμε τις προσαυξητικές δυνάμεις στοιχείου και τις συνολικές φυσικές δυνάμεις.**

Το νέο διάνυσμα των προσαυξητικών δυνάμεων είναι ίσο με:

$$\begin{pmatrix} (\Delta Q^k)^i \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} (\Delta Q^k)^i \end{pmatrix}^{j-1} + \begin{pmatrix} (\delta \Delta Q^k)^i \end{pmatrix}^j \quad 2.157$$

Οι συνολικές φυσικές δυνάμεις του στοιχείου ενημερώνονται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{pmatrix} (Q^k)^i \end{pmatrix}^j = Q^{k-1} + \begin{pmatrix} (\Delta Q^k)^i \end{pmatrix}^j \quad 2.158$$

7) Υπολογισμός του διανύσματος των γενικευμένων εσωτερικών δυνάμεων στην διατομή ελέγχου.

Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων πρέπει να ξέρουμε το συνολικό αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης Gauss-Lobato. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση παρεμβολής $b(\xi)$ οι επαυξητικές γενικευμένες δυνάμεις δίνονται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} (\delta \Delta D^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j = b(\xi) \begin{pmatrix} (\delta \Delta Q^k)^i \end{pmatrix}^j \quad 2.159$$

$$\begin{pmatrix} (\Delta D^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} (\Delta D^k(\xi))^i \end{pmatrix}^{j-1} + \begin{pmatrix} (\delta \Delta D^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j \quad 2.160$$

και οι συνολικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στην διατομή είναι:

$$\begin{pmatrix} (D^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j = D^{k-1}(\xi) + \begin{pmatrix} (\Delta D^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j \quad 2.161$$

8) Υπολογισμός των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής ελέγχου.

Η προσαύξηση των γενικευμένων παραμορφώσεων της διατομής $\begin{pmatrix} (\delta \Delta d^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j$ υπολογίζεται από την σχέση (σχέση 2.162):

$$\begin{pmatrix} (\delta \Delta d^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} (r^k(\xi))^i \end{pmatrix}^{j-1} + \begin{pmatrix} (f^k(\xi))^i \end{pmatrix}^{j-1} (\beta(\xi)) \begin{pmatrix} (K_N^k)^i \end{pmatrix}^{j-1} \begin{pmatrix} (s^k)^i \end{pmatrix}^{j-1} \quad 2.162$$

και έπειτα οι γενικευμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται:

$$\begin{pmatrix} (\Delta d^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} (\Delta d^k(\xi))^i \end{pmatrix}^{j-1} + \begin{pmatrix} (\delta \Delta d^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j \quad 2.163$$

9) Υπολογισμός τις προσαυξητικές παραμορφώσεις για κάθε ένα της διατομής.

Κάνοντας χρήση του μητρώου μετασχηματισμού $l(x)$ της σχέσης 2.124 οι προσαυξητικές παραμορφώσεις δίνονται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} (\delta \Delta e^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j = l(x) \begin{pmatrix} (\delta \Delta d^k(\xi))^i \end{pmatrix}^j \quad 2.164$$

Στην συνέχεια ενημερώνονται οι προσαυξητικές παραμορφώσεις:

$$\left(\underset{(1 \times 1)}{\Delta e^k(\xi)} \right)^i \Big)^j = \left(\underset{(1 \times 1)}{\Delta e^k(\xi)} \right)^i \Big)^{j-1} + \left(\underset{(1 \times 1)}{\delta \Delta e^k(\xi)} \right)^i \Big)^j \quad 2.165$$

και οι συνολικές παραμορφώσεις της ίνας είναι:

$$\left(\underset{(1 \times 1)}{e^k(\xi)} \right)^i \Big)^j = \underset{(1 \times 1)}{e^{k-1}(\xi)} + \left(\underset{(1 \times 1)}{\Delta e^k(\xi)} \right)^i \Big)^j \quad 2.166$$

10) Υπολογισμός των τάσεων και ενημέρωση του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας για κάθε ίνα.

Χρησιμοποιώντας το τρέχων μέτρο ελαστικότητας της κάθε ίνας, υπολογίζουμε τις προσαυξητικές τάσεις. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις συνολικές τάσεις για κάθε ίνα και ανάλογα με τον νόμο του υλικού γίνεται έλεγχος πλαστικοποίησης. Τέλος για κάθε ίνα που πλαστικοποιείται, ανανεώνεται το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας του υλικού της.

11) Υπολογισμός του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας και του μητρώου ενδοσιμότητας.

Έχοντας υπολογίσει για κάθε ίνα το νέο εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας, εφαρμόζουμε την σχέση 2.145 και υπολογίζουμε το μητρώο στιβαρότητας $\left(\left(k^k(\xi) \right)^i \right)^j$. Αντιστρέφοντας το μητρώο δυσκαμψίας προσδιορίζουμε το μητρώο ενδοσιμότητας:

$$\left(\underset{(3 \times 3)}{f^k(\xi)} \right)^i \Big)^j = \left[\left(\underset{(3 \times 3)}{k^k(\xi)} \right)^i \Big)^j \right]^{-1} \quad 2.167$$

12) Υπολογισμός του διανύσματος των εσωτερικών εναπομενουσών γενικευμένων δυνάμεων της διατομής ελέγχου.

Χρησιμοποιώντας την σχέση 2.149 υπολογίζουμε τις γενικευμένες εσωτερικές δυνάμεις της διατομής από τις τάσεις που αναπτύσσονται στις ίνες.

13) Υπολογισμός των μη εξισορροπούμενων δυνάμεων.

Οι μη εξισορροπούμενες δυνάμεις υπολογίζονται από την διαφορά των εσωτερικών εναπομενουσών δυνάμεων από τις συνολικά εφαρμοζόμενες δυνάμεις:

$$\left(\underset{(3 \times 1)}{D_U^k(\xi)} \right)^i \Big)^j = \left(\underset{(3 \times 1)}{D^k(\xi)} \right)^i \Big)^j - \left(\underset{(3 \times 1)}{D_R^k(\xi)} \right)^i \Big)^j \quad 2.168$$

14) Υπολογισμός του διανύσματος των υπολειμματικών παραμορφώσεων της διατομής του στοιχείου.

$$\left((r^k(\xi))^i \right)^j_{(3 \times 1)} = \left((f^k(\xi))^i \right)^j_{(3 \times 3)} \left((D_{ij}^k(\xi))^i \right)^j_{(3 \times 1)} \quad 2.169$$

15) Υπολογισμός του μητρώου ενδοσιμότητας του στοιχείου.

Το μητρώο ενδοσιμότητας υπολογίζεται από την σχέση:

$$\left((F^k)^i \right)^j_{(6 \times 6)} = \sum_{isec=1}^{tot.num.sec} \left[w_{isec} b^T(\xi_{isec})_{(6 \times 3)} \left((f^k(\xi_{isec}))^i \right)^j_{(3 \times 3)} b(\xi_{isec})_{(3 \times 6)} \right] \quad 2.170$$

όπου *tot.num.sec* να δηλώνει τον συνολικό αριθμό των διατομών (total number of sections). Δηλαδή τα συνολικά σημεία ολοκλήρωσης Gauss-Lobato. Τα ξ_{isec} είναι οι φυσικές συντεταγμένες των διατομών ελέγχου και w_{isec} είναι ο αντίστοιχος συντελεστής βαρύτητας. Πρέπει να επισημάνουμε πως σε όλα τα φυσικά στοιχεία η έκτη γραμμή και η έκτη στήλη είναι μηδενικές. Αυτό εξηγείται από το γεγονός πως η έκτη στήλη του μητρώου $b(\xi)$ είναι μηδενική και γι αυτό οι τιμές του μητρώου ενδοσιμότητας της έκτης γραμμής και στήλης μηδενίζονται. Όμως στο μητρώο δυσκαμψίας, το οποίο υπολογίζεται από την αντιστροφή του μητρώου ενδοσιμότητας, η τιμή $((K(6,6)^k)^i)^j$ αντιπροσωπεύει την στρεπτική δυσκαμψία του στοιχείου. Συνεπώς:

$$\left((K^k)^i \right)^j_{(5 \times 5)} = \left[\left((F^k)^i \right)^j_{(5 \times 5)} \right]^{-1} \quad \mu\epsilon \quad \left((K(6,6)^k)^i \right)^j = \frac{GJ_p}{L} \quad 2.171$$

16) Έλεγχος κριτηρίου σύγκλισης.

Χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω ενεργειακό κριτήριο σύγκλισης:

$$error = \frac{\left[\left((s^k)^i \right)^j \right]^T \left((K^k)^i \right)^j \left((s^k)^i \right)^j}{(\Delta q^k)^T \left((K^k)^i \right)^1 (\Delta q^k)} \quad 2.172$$

όπου $((s^k)^i)^j$ η εναπομένουσα παραμόρφωση του στοιχείου:

$$\left((s^k)^i \right)^j_{(6 \times 1)} = \sum_{isec=1}^{tot.num.sec} \left[w_{isec} b^T(\xi_{isec})_{(6 \times 3)} \left((r^k(\xi_{isec}))^i \right)^j_{(3 \times 1)} \right] \quad 2.173$$

Εάν $(tolerance > error)$ then $\rightarrow exit$

Όπου *tolerance* εννοούμε την ανοχή του κριτηρίου η οποία τίθεται 10^{-16} .

Αν το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιείται τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα του αλγορίθμου, διαφορετικά επιστρέφουμε στο βήμα 5) και αυξάνουμε την τιμή j κατά 1.

17) Υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων των στοιχείων, των εντατικών μεγεθών του φορέα και επαναυπολογισμός του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας.

Όταν όλα τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων ικανοποιήσουν το κριτήριο σύγκλισης, τότε πριν ολοκληρωθεί το i βήμα της Newton Raphson προσδιορίζονται τα εντατικά μεγέθη του φορέα. Τα εντατικά μεγέθη του φορέα $(P_R^k)^i$ υπολογίζονται προσθέτοντας όλες τις εσωτερικές δυνάμεις των στοιχείων $(Q_{ele}^k)^i$ σύμφωνα με την παρακάτω έκφραση:

$$\begin{matrix} (P_{ele}^k)^i & = & T_{04}^T & a_n^T & (Q_{ele}^k)^i \\ (12 \times 1) & & (12 \times 12) & (12 \times 6) & (6 \times 1) \end{matrix} \quad 2.174.a$$

Έπειτα

$$(P_R^k)^i = \sum_{iele=1}^{num.ele} (P_{iele}^k)^i \quad 2.174.b$$

Η ενημέρωση του μητρώου δυσκαμψίας πραγματοποιείται προσθέτοντας τα μητρώα δυσκαμψίας κάθε στοιχείου:

$$\begin{matrix} (K_{ele}^k)^i & = & T_{04}^T & a_n^T & (K_N^k)^i & a_n & T_{04} \\ (12 \times 12) & & (12 \times 12) & (12 \times 6) & (6 \times 6) & (6 \times 12) & (12 \times 12) \end{matrix} \quad 2.175.a$$

Ομοίως στην συνέχεια:

$$(K_S^k)^i = \sum_{iele=1}^{num.ele} (K_{iele}^k)^i \quad 2.175.b$$

18) Υπολογισμός των μη εξισορροπούμενων δυνάμεων του φορέα.

$$(P_U^k)^i = P_E^k - (P_R^k)^i \quad 2.176$$

Όπου P_E^k είναι το συνολικό εξωτερικό φορτίο που επιβάλλεται στον φορέα στην τρέχουσα επανάληψη NR.

$$P_E^k = P_E^{k-1} + \Delta P_E^k \quad 2.177$$

19) Έλεγχος καθολικού κριτηρίου σύγκλισης.

Εάν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης τότε προχωράμε στο επόμενο επαυξητικό βήμα φόρτισης και αυξάνουμε την τιμή i κατά 1 ώστε να περάσουμε στην $i+1$ επανάληψη NR. Επίσης σε αυτό το σημείο χρησιμοποιήθηκε το ενεργειακό κριτήριο σύγκλισης και στις αριθμητικές μας εφαρμογές θέσαμε ως *tolerance* = 10^{-4} .

20) Έλεγχος επιβολής του συνολικού εξωτερικού φορτίου.

Εάν έχουμε ασκήσει όλο το προβλεπόμενο φορτίο, τότε η ανάλυση έχει ολοκληρωθεί, διαφορετικά αυξάνουμε την τιμή του k κατά 1 και επανερχόμαστε στο βήμα 2 έχοντας το νέο διάνυμα εξωτερικών φορτίων. Στο σημείο αυτό οι Spacone et al πρότειναν να γίνεται ενημέρωση των διανυσμάτων των δυνάμεων και των παραμορφώσεων προσθέτοντας τις προσαυξήσεις των αντίστοιχων μεγεθών όπως έχουν προκύψει από την προηγούμενη επανάληψη NR. Αυτή η διαδικασία δεν χρειάζεται στην δικιά μας περίπτωση, καθώς οι ενημερώσεις των μεταβλητών που αναφέρονται στις δυνάμεις και στις παραμορφώσεις έχουν πραγματοποιηθεί κατά την διάρκεια προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου.

Κεφάλαιο 3. Μοντέλο ενσωμάτωσης του οπλισμού σε εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία

Πίνακας περιεχομένων

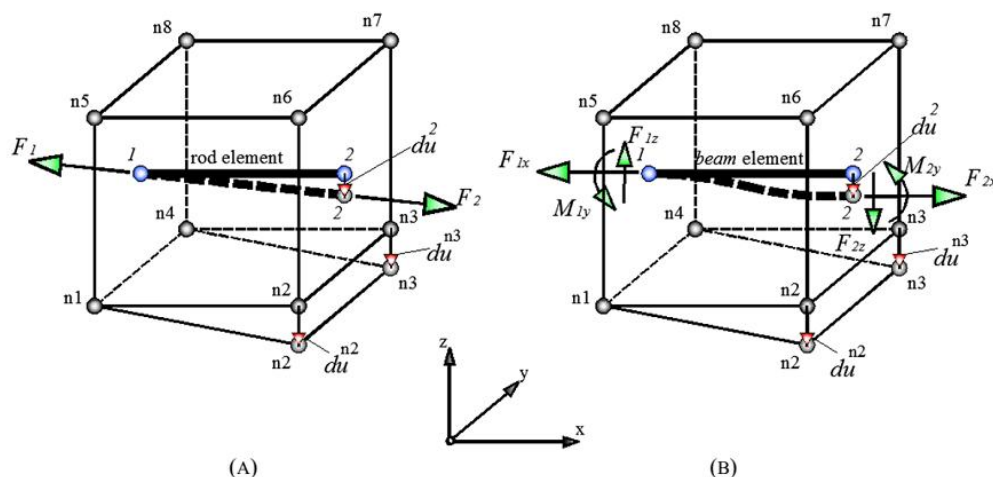
| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1 Εισαγωγή | 54 |
| 3.2 Κινηματικές σχέσεις | 55 |
| 3.3 Προσδιορισμός του μητρώου δυσκαμψίας του εξαεδρικού με τα ενσωματωμένα σε αυτά στοιχεία δυνάμεων | 59 |
| 3.4 Η διαδικασία γένεσης του ενσωματωμένου οπλισμού στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων | 60 |
| 3.4.1 Εύρεση βοηθητικών κόμβων των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού | 61 |

3.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε αναφέρει τα στοιχεία οπλισμού προσομοιώνονται με δύο τρόπους, είτε ως στοιχεία δικτύωματος 2 ή 3 κόμβων (rod elements) είτε ως φυσικά στοιχεία δυνάμεων (Natural Beam Column Flexibility Based elements).

Με τα στοιχεία δικτύωματος επιτρέπουμε στα στοιχεία του οπλισμού να εντείνονται αξονικά. Δηλαδή τα στοιχεία οπλισμού μπορούν να παρουσιάσουν αξονικό εφελκυσμό ή αξονική θλίψη αγνοώντας την κάμψη και την διάτμηση. Παρόλο που στις περισσότερες περιπτώσεις η ένταση που παράγεται από την κάμψη και την διάτμηση είναι αμελητέα, υπάρχουν κατασκευές στις οποίες δεν μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Για παράδειγμα ένα τοίχιο, ένας βραχύς πρόβολος ή μια υψίκορμη δοκός παρουσιάζουν σημαντική διάτμηση η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη για να επιτευχθεί μια αντιπροσωπευτική προσομοίωση. Γι αυτόν τον λόγο προτείνεται η προσομοίωση του οπλισμού να γίνεται με στοιχεία δοκού.

Με τα φυσικά στοιχεία δυνάμεων δίνεται η δυνατότητα στον οπλισμό να αναπτύξει διάτμηση και κάμψη (ανεξαρτήτως της θλίψης και του εφελκυσμού). Εκτός από αυτό το γεγονός, παρατηρείται πως η προσομοίωση του οπλισμού με φυσικά στοιχεία δυνάμεων προσδίδει στην επαναληπτική διαδικασία NR μεγαλύτερη αριθμητική ευστάθεια, λόγω της ύπαρξης της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας σε επίπεδο στοιχείου (χαρακτηριστικό του φυσικού στοιχείου δυνάμεων). Η σύνδεση ενός τρισδιάστατου στοιχείου δοκού με το αντίστοιχο εξαεδρικό πεπερασμένο στοιχείο εισάγει κάποια ζητήματα εφαρμογής.

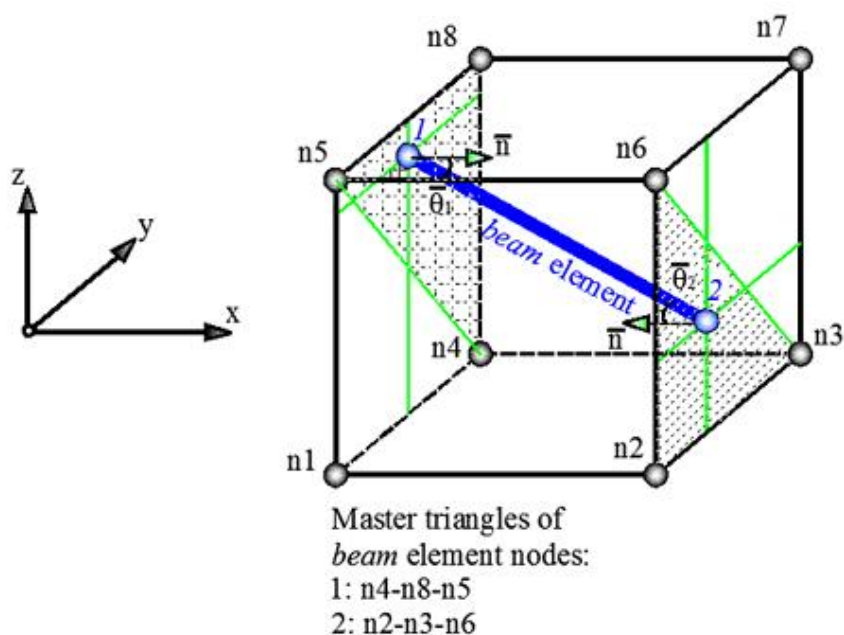


Σχήμα 3. 1 Η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη ενός ενσωματωμένου (εντός του εξαεδρικού) Α) στοιχείου δικτύωματος (rod element) Β) στοιχείο δοκού (beam element)^[14].

Στην περίπτωση ενός στοιχείου δικτύωματος 2 ή 3 κόμβων, οι συνθήκες συμβατότητας μεταξύ των ακραίων κόμβων του δικτύωματος και των αντίστοιχων κόμβων του εξαεδρικού στοιχείου επιβάλλονται μόνο μέσω των μεταφορικών

βαθμών ελευθερίας (σχήμα 3.1 Α) εφόσον οι στροφές των κόμβων αμελούνται. Όταν όμως χρησιμοποιείται ένα στοιχείο δοκού πρέπει να βρεθεί η εξάρτηση των στροφών των κόμβων του στοιχείου δοκού με τις στροφές των εδρών του εξαεδρικού στοιχείου. Αυτή η συμβατότητα επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό της στροφής της έδρας του εξαεδρικού στοιχείου, η οποία περιέχει τον κόμβο του στοιχείου δοκού.

Έστω $\bar{\theta}$ η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της ράβδου οπλισμού και κάθετου διανύσματος \bar{n} του τριγώνου αναφοράς (master triangle) της εξαεδρικής έδρας (σχήμα 3.2). Θεωρούμε πως η γωνία αυτή παραμένει σταθερή και μετά την παραμόρφωση, η απαιτούμενη στροφή μπορεί να προκύψει μέσω κινηματικών εξαρτήσεων. Η διαδικασία εύρεσης του τριγώνου αναφοράς πραγματοποιείται πριν την ανάλυση ανιχνεύοντας τους τρεις πιο κοντινούς κόμβους της έδρας του εξαεδρικού στοιχείου με τον αντίστοιχο κόμβο του οπλισμού που ανήκει στην ίδια έδρα. Οι κόμβοι n_2, n_3, n_6 του σχήματος 3.2 σχηματίζουν το τρίγωνο αναφοράς του κόμβου 2 του στοιχείου του οπλισμού, το οποίο καθορίζει την στροφή του αντίστοιχου κόμβου του οπλισμού.



Σχήμα 3. 2 Τα τρίγωνα αναφοράς των κόμβων 1 και 2 του στοιχείου δοκού^[14].

3.2 Κινηματικές σχέσεις

Οι περισσότεροι ερευνητές (Kotsovos MD and Pavlovic MN, Spiliopoulos KV and Lykidis G., Barzegar F and Maddipudi S) χρησιμοποίησαν σταθερές κινηματικές σχέσεις για να περιγράψουν τις σχέσεις που συνδέουν τις μετατοπίσεις των στοιχείων οπλισμού με τις μετατοπίσεις των αντίστοιχων εξαεδρικών στοιχείων. Μια πιο σύγχρονη προσέγγιση προτάθηκε από τους Jendele and Cervenka (2009) σύμφωνα με την οποία διεξάγεται η επίλυση ενός προβλήματος πολυκομβικών συνοριακών συνθηκών (Complex Boundary Conditions). Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την

επίλυση ενός συστήματος μη συμμετρικών συνοριακών εξισώσεων (non symmetric constraint equations).

Στην παρούσα εργασία, οι κινηματικές σχέσεις που συνδέουν τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου δοκού με τις μετατοπίσεις των κόμβων του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\mathbf{u}^B = \mathbf{T} \mathbf{U}^H, \quad \mathbf{F}^H = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^B \quad 3.1$$

(12x1) (12x24) (24x1) (24x1) (24x12) (12x1)

όπου \mathbf{u}^B οι μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου δοκού ενώ \mathbf{U}^H οι μετατοπίσεις των κόμβων του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου. Ομοίως τα διανύσματα \mathbf{F}^B , \mathbf{F}^H αντιπροσωπεύουν τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους κόμβους του στοιχείου δοκού και στους κόμβους του εξαεδρικού αντίστοιχα. Το μητρώο μετασχηματισμού \mathbf{T} αποτελείται από 32 υπομητρώα(3x3) τα οποία υπολογίζονται από τις φυσικές συντεταγμένες του εξαεδρικού στοιχείου, του στοιχείου δοκού και των κόμβων του τριγώνου αναφοράς.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 & T_4^1 & T_5^1 & T_6^1 & T_7^1 & T_8^1 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^1 & R_5^1 & 0 & 0 & R_8^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 & T_4^2 & T_5^2 & T_6^2 & T_7^2 & T_8^2 \\ 0 & R_2^2 & R_3^2 & 0 & 0 & R_6^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.2$$

Τα υπομητρώα της πρώτης και της τρίτης γραμμής του μητρώου \mathbf{T} αναφέρονται στους μετακινησιακούς βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου δοκού. Ενώ η 2 και η 4 γραμμή αναφέρονται στους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου δοκού που αντιπροσωπεύει τον ενσωματωμένο στοιχείο οπλισμού. Η σχέση 3.2 αναφέρεται στην περίπτωση που απεικονίζεται στο σχήμα 3.2 όπου οι κόμβοι 4,5 και 8 του εξαεδρικού σχηματίζουν το τρίγωνο αναφοράς του κόμβου 1 του στοιχείου δοκού και αντίστοιχα οι κόμβοι 2,3 και 6 αποτελούν το τρίγωνο αναφοράς του κόμβου 2 του στοιχείου δοκού.

Κάθε μητρώο μετασχηματισμού \mathbf{T} (σχέση 3.2) αποτελείται από 32 υπομητρώα διαστάσεων 3x3. Οι μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου δοκού μετασχηματίζονται μέσω του μητρώου T_i^j με τον εξής τρόπο:

$$T_i^j = \begin{bmatrix} N_i^j & 0 & 0 \\ 0 & N_i^j & 0 \\ 0 & 0 & N_i^j \end{bmatrix} \quad 3.3$$

όπου N_i^j ($i=1,8$) αντιπροσωπεύουν τις 8 συναρτήσεις σχήματος του εξαεδρικού και ο δείκτης $j(j=1,2)$ δηλώνει τον κόμβο του στοιχείου του οπλισμού στον οποίο αναφερόμαστε. Άρα μπορούμε να μορφώσουμε το μητρώο T_i^j υπολογίζοντας τις

τιμές των συναρτήσεων σχήματος του εξαεδρικού πεπερασμένου στοιχείου στις θέσεις των φυσικών συντεταγμένων των κόμβων των στοιχείων του οπλισμού. Όπως φαίνεται από την σχέση 3.3 για τον υπολογισμό του μητρώου T_i^j χρειαζόμαστε τις τιμές της συνάρτησης σχήματος του κόμβου i του εξαεδρικού στις θέσεις των φυσικών συντεταγμένων του κόμβου j του κόμβου του στοιχείου δοκού.

Για να μπορέσουμε να βρούμε την σχέση των στρωφικών βαθμών ελευθερίας του στοιχείου δοκού με το εξαεδρικό στοιχείο, χρειάστηκε να ορίσουμε ένα τρίγωνο αναφορά με σκοπό να προσδιορίσουμε την στρόφη των στοιχείων γύρω από τους τρεις καθολικούς άξονες. Όπως έχουμε αναφέρει το τρίγωνο αναφοράς σχηματίζεται από τους τρεις πιο κοντινούς κόμβους της έδρας του εξαεδρικού με τον κόμβο του οπλισμού που βρίσκεται στην ίδια έδρα. Ο υπολογισμός του κάθε τριγώνου αναφοράς πραγματοποιείται με την χρήση της θεωρίας των φυσικών μορφών των Argyris et al (1997). Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις φυσικές μορφές ως συναρτήσεις των μετατοπίσεων και των στρωφών των κορυφών 1,2 και 3 του τριγώνου αναφοράς, υποθέτουμε ότι ισχύουν γραμμικές σχέσεις στο πεδίο των μετατοπίσεων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου και έχουν την εξής μορφή:

$$u = p_0 + p_1x + p_2y, \quad v = q_0 + q_1x + q_2y, \quad w = r_0 \quad 3.4$$

όπου οι p_i, q_i, r_i είναι οι μετατοπίσεις που αναφέρονται στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα. Αν θέσουμε ως αρχή των αξόνων το βαρύκεντρο του τριγώνου η σχέση 2.4 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 3p_0, \quad v_1 + v_2 + v_3 = 3q_0, \quad w_1 + w_2 + w_3 = 3r_0 \quad 3.5$$

Η μορφή ρ_{06} που αναφέρεται στην στρόφη του στοιχείου ως στερεού σώματος δίνεται από την σχέση:

$$\rho_{06} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (q_1 - p_2) \quad 3.6$$

Αν γράψουμε την σχέση 3.4 για κάθε κορυφή του τριγώνου, τότε η σχέση 3.6 γίνεται:

$$\rho_{06} = -\frac{1}{2\Omega} (x_a u_1 + y_a v_1 + x_\beta u_2 + y_\beta v_2 + x_\gamma u_3 + y_\gamma v_3) \quad 3.7$$

όπου:

$$\begin{aligned} x_a &= x_3 - x_2, & x_\beta &= x_1 - x_3, & x_\gamma &= x_2 - x_1 \\ y_a &= y_3 - y_2, & y_\beta &= y_1 - y_3, & y_\gamma &= y_2 - y_1 \end{aligned} \quad 3.8$$

όπου $x_i, y_i (i=1,3)$ είναι οι συντεταγμένες των κόμβων των κορυφών του τριγώνου στο τοπικό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και το Ω είναι το εμβαδόν του τριγώνου. Στην συνέχεια πρέπει να βρεθεί η σχέση των στροφικών μορφών ρ_{04}, ρ_{05} στερεού σώματος με τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου. Για τον σκοπό αυτό η στροφή θ_1 γύρω από την πλευρά 23 όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3 δίνεται από την σχέση:

$$\theta_1 = \frac{w_1}{h_a} = \frac{w_1 l_a}{2\Omega} \quad 3.9$$

και οι δυο προβολές του στους τοπικούς καρτεσιανούς άξονες δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta_{1x} = \theta_1 \cos \alpha_x = \theta_1 \frac{x_a}{l_a} = \frac{x_a}{2\Omega} w_1, \quad \theta_{1y} = \theta_1 \cos \alpha_y = \theta_1 \frac{y_a}{l_a} = \frac{y_a}{2\Omega} w_1 \quad 3.10$$

Ομοίως

$$\theta_{2x} = \frac{x_\beta}{2\Omega} w_2, \quad \theta_{3x} = \frac{x_\gamma}{2\Omega} w_3, \quad \theta_{2y} = \frac{y_\beta}{2\Omega} w_2, \quad \theta_{3y} = \frac{y_\gamma}{2\Omega} w_3 \quad 3.11$$

Συνεπώς οι ρ_{04}, ρ_{05} δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho_{04} = \theta_{1x} + \theta_{2x} + \theta_{3x}, \quad \rho_{05} = \theta_{1y} + \theta_{2y} + \theta_{3y} \quad 3.12$$

$$\rho_{04} = \frac{x_a}{2\Omega} w_1 + \frac{x_\beta}{2\Omega} w_2 + \frac{x_\gamma}{2\Omega} w_3, \quad \rho_{05} = \frac{y_a}{2\Omega} w_1 + \frac{y_\beta}{2\Omega} w_2 + \frac{y_\gamma}{2\Omega} w_3 \quad 3.13$$

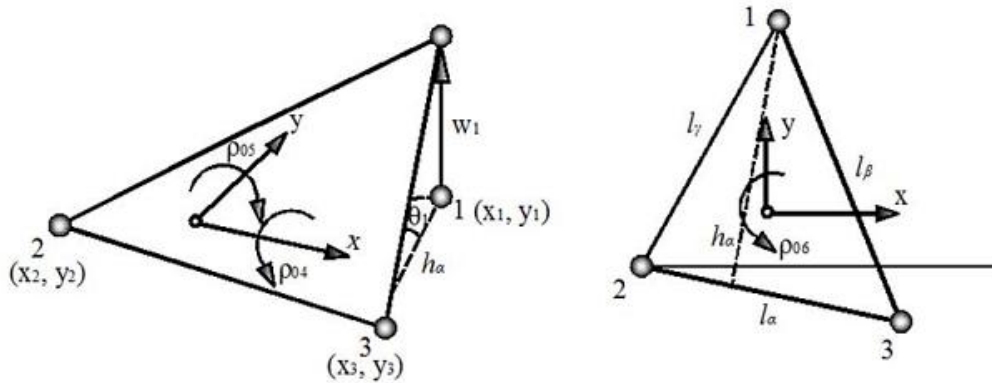
Η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί και μητρικώς ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \rho_{04} \\ \rho_{05} \\ \rho_{06} \end{Bmatrix} = [\bar{R}_1^j \quad \bar{R}_2^j \quad \bar{R}_3^j] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad 3.14$$

$$\bar{R}_1^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{x_a}{2\Omega} \\ 0 & 0 & \frac{y_a}{2\Omega} \\ -\frac{x_a}{2\Omega} & -\frac{y_a}{2\Omega} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_2^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{x_\beta}{2\Omega} \\ 0 & 0 & \frac{y_\beta}{2\Omega} \\ -\frac{x_\beta}{2\Omega} & -\frac{y_\beta}{2\Omega} & 0 \end{bmatrix}, \quad 3.15$$

$$\bar{R}_3^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{x_\gamma}{2\Omega} \\ 0 & 0 & \frac{y_\gamma}{2\Omega} \\ -\frac{x_\gamma}{2\Omega} & -\frac{y_\gamma}{2\Omega} & 0 \end{bmatrix}$$

Όπου $j=1,2$ δηλώνει τον κόμβο του οπλισμού στον οποίο αναφερόμαστε, Ω το εμβαδόν του τριγώνου και x,y,z είναι τα διανύσματα των μετατοπίσεων των κορυφών του τριγώνου αναφοράς.



Σχήμα 3. 3 Στροφή θ_1 [14]

Στην συνέχεια χρειάζεται να μεταφέρουμε το μητρώο \bar{R}_m^j στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων μέσω του γνωστού μητρώο T_0 (που περιέχει τα συνημίτονα κατεύθυνσης):

$$R_m^j = T_0^T \bar{R}_m^j T_0 \quad 3.16$$

(3x3) (3x3)(3x3)(3x3)

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε την αριθμητική υπεροχή που προσφέρει η χρησιμοποίηση των 8 κομβικών εξαεδρικών στοιχείων. Το γεγονός ότι οι έδρες του 8κομβικού δεν καμπυλώνονται έντονα (όσο του 20κομβικού) και μετά την παραμόρφωση του στοιχείου απαλλάσσουν τον αλγόριθμό μας από μη απαραίτητους επιπρόσθετους υπολογισμούς και δημιουργούν τις προϋποθέσεις αριθμητικής ευστάθειας στην ανάλυσή μας. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται πιο εύκολη η μόρφωση του μητρώου T το οποίο έχει διαστάσει 12×24 , σε αντίθεση με τη χρησιμοποίηση 20κομβικών που θα προέκυπτε ένα μητρώο T διαστάσεων 12×60 .

3.3 Προσδιορισμός του μητρώου δυσκαμψίας του εξαεδρικού με τα ενσωματωμένα σε αυτά στοιχεία δυνάμεων

Η συνεισφορά του στοιχείου του οπλισμού στο μητρώο δυσκαμψίας του εξαεδρικού στοιχείου δίνεται από την σχέση:

$$\hat{K}_{Hexa} = K_{Hexa} + \sum_{i=1}^{nr} (T_i)^T K_i^{rebar} T_i \quad 3.17$$

(24x24) (24x24) (24x12)(12x12)(12x24)

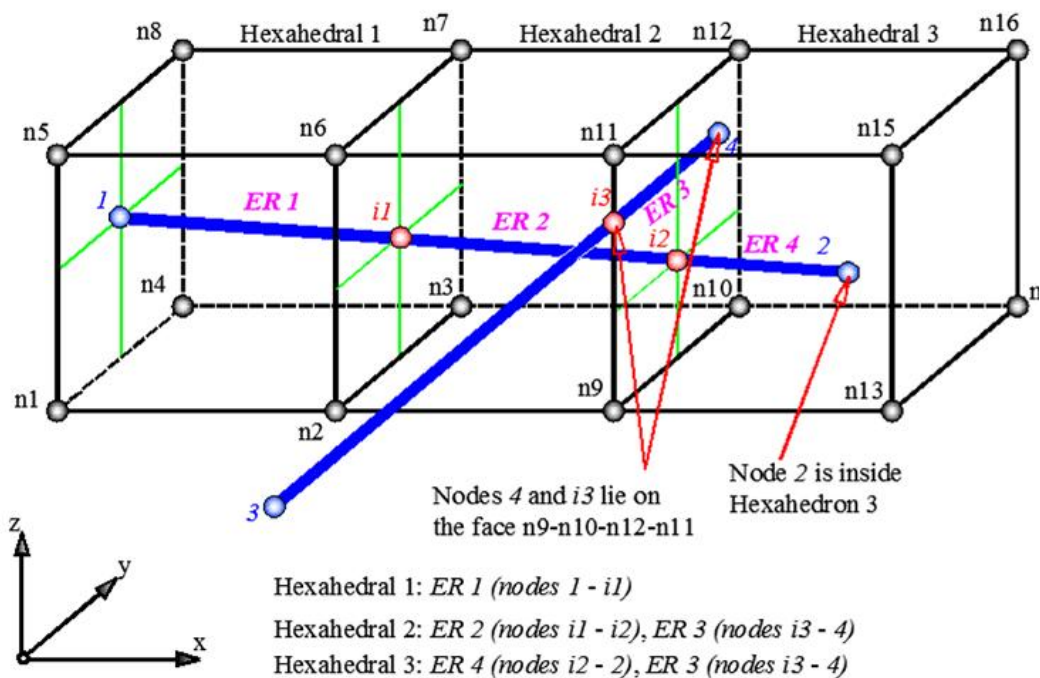
όπου T_i είναι το μητρώο μετασχηματισμού που δίνεται από την σχέση 3.3 όπου περιέχει τις συνθήκες συμβιβαστότητας ανάμεσα στις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου οπλισμού και του εξαεδρικού στοιχείου. K_{Hexa} είναι το μητρώο δυσκαμψίας του εξαεδρικού στοιχείου και το n_f είναι ο αριθμός των στοιχείων οπλισμού.

3.4 Η διαδικασία γένεσης του ενσωματωμένου οπλισμού στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων

Η πιο γνωστή μέθοδος γένεσης στοιχείων οπλισμού στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα είναι αυτή που προτάθηκε από τους Barzegar and Maddipudi (1994) η οποία είναι μια επέκταση της δουλειάς των Elwi and Hruday (1989). Αυτή η προσέγγιση μας δίνει την δυνατότητα να τοποθετήσουμε τον οπλισμό αυθαίρετα μέσα στο εξαεδρικό στοιχείο του οποίου η γεωμετρία είναι ελεύθερη. Παρόλα αυτά, χρειάζεται να διεξαχθεί μια μη γραμμική διαδικασία ,η οποία βασίζεται στην NR, με σκοπό την εύρεση των φυσικών συντεταγμένων των κόμβων των στοιχείων των οπλισμών. Ενώ αυτή η επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει γρήγορα, οι υπολογιστικές απαιτήσεις που δημιουργούνται ιδιαίτερα σε μεγάλης κλίμακας μοντέλα, όπου χρησιμοποιούνται χιλιάδες ράβδοι οπλισμού, είναι αρκετά υψηλές. Επίσης αυτή η μέθοδος δεν διαθέτει κανέναν γεωμετρικό περιορισμό στην διαδικασία εύρεσης των ράβδων οπλισμού. Το γεγονός αυτό επιβαρύνει υπολογιστικά περισσότερο το μοντέλο ανάλυσης. Παρόλα αυτά αρκετοί ερευνητές χρησιμοποίησαν την μέθοδο αυτή στα μοντέλα ανάλυσης τους.

Η μέθοδος που προτείνεται στην παρούσα εργασία τοποθετεί αυθαίρετα τον οπλισμό μέσα στα εξαεδρικά στοιχεία, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4, αποφεύγοντας όμως την επαναληπτική διαδικασία εύρεσης των φυσικών συντεταγμένων των κόμβων των οπλισμών μέσα στα αντίστοιχα εξαεδρικά στοιχεία.

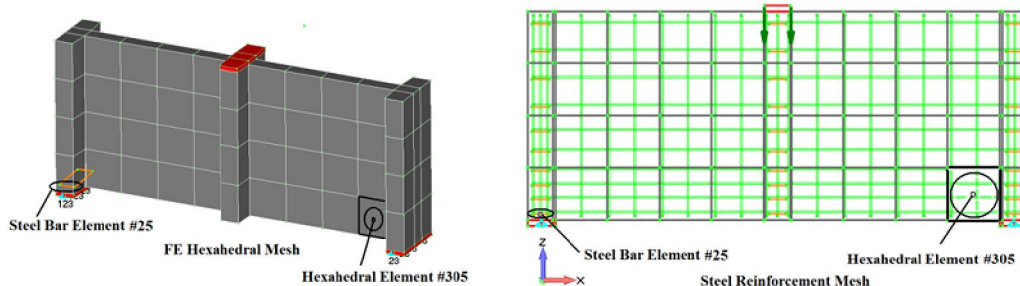
Ο προτεινόμενος κώδικας ReConAn χρησιμοποιεί ως pre-processor και ως post-processor το πακέτο λογισμικού Femap, μέσω του οποίου γίνεται η γένεση του αρχικού δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων. Συνεπώς το ReConAn χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες των κόμβων του οπλισμού οι οποίες έχουν δημιουργηθεί από το Femap και παράγει το αριθμητικό μοντέλο του ενσωματωμένου οπλισμού. Το μοντέλο δημιουργίας του ενσωματωμένου οπλισμού πραγματοποιείται για κάθε ράβδο οπλισμού ξεχωριστά. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ράβδο οπλισμού διεξάγεται μια ξεχωριστή έρευνα προκειμένου να βρεθούν όλα τα σημεία τομής του ευθύγραμμου τμήματος της ράβδου με τα περιβάλλοντα εξαεδρικά στοιχεία. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η τοποθέτηση του ενσωματωμένου οπλισμού μέσα στο εξαεδρικό στοιχείο.



Σχήμα 3. 4 Ενσωματωμένοι ράβδοι οπλισμού μέσα στα εξαεδρικά στοιχεία^[14].

3.4.1 Εύρεση βοηθητικών κόμβων των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού

Οι βοηθητικοί κόμβοι αναφέρονται σε σημεία τομής των ράβδων οπλισμού με τις έδρες ή τις ακμές των εξαεδρικών στοιχείων, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4 (κόμβοι i_1, i_2 και i_3). Η διαδικασία εύρεσης αυτών των σημείων τομής γίνεται αρκετά πολύπλοκη όταν το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από χιλιάδες εξαεδρικά στοιχεία και στοιχεία οπλισμού. Είναι προφανές ότι ο υπολογισμός όλων αυτών των πιθανών σημείων τομής χωρίς να εισάγουμε κάποιον χωρικό περιορισμό, αυξάνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης. Το πρόβλημα εμφανίζεται από το γεγονός ότι χρειάζεται να εντοπίσουμε όλες τις πιθανές θέσεις (σημεία τομής) όλων των ράβδων οπλισμού που διαθέτουν σε σχέση με τα εξαεδρικά στοιχεία που τους περιβάλλουν (σχήμα 3.5).



Σχήμα 3. 5 Τοίχιο, όπου φαίνεται το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του σκυροδέματος με τον ενσωματωμένο οπλισμό από χάλυβα^[14].

Για να μειώσουμε αυτό το υπολογιστικό κόστος ,έχει εισαχθεί στο προτεινόμενο μοντέλο ένας γεωμετρικός περιορισμός με σκοπό να περιορίσει την περιοχή γύρω από τους ράβδους οπλισμού όπου διεξάγεται η διαδικασία εύρεσης των βοηθητικών κόμβων (σημείων τομής) των ράβδων οπλισμού. Ο γεωμετρικός περιορισμός που χρησιμοποιήθηκε παριστάνεται με μια ενεργή σφαίρα (active sphere) με ακτίνα R_c :

$$R_c = c * L \quad 3.18$$

όπου

$$L = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \quad 3.19$$

και (σχέση 3.20)

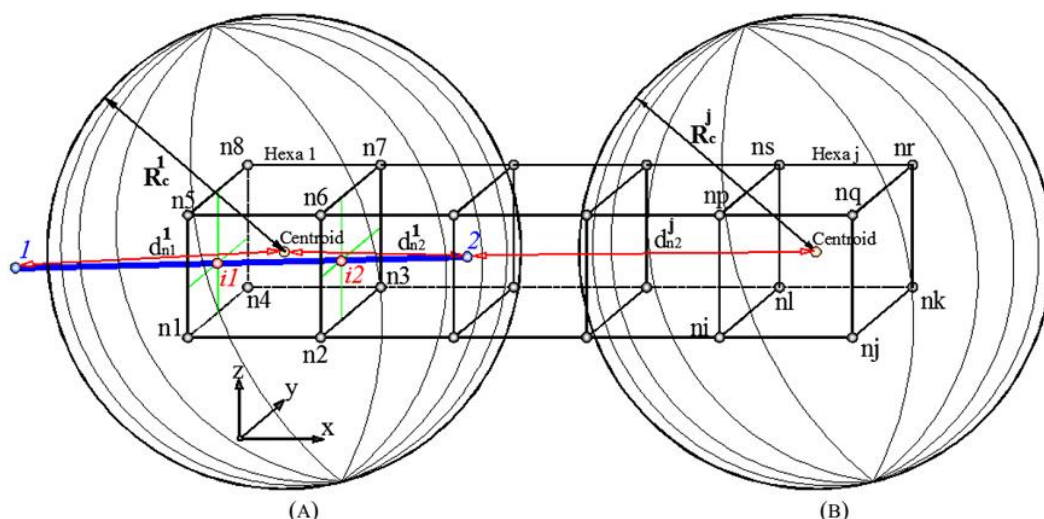
$$s_x = \frac{(\sum_{n=1}^8 (s_x^{cen} - s_x^n))}{8}, \quad s_y = \frac{(\sum_{n=1}^8 (s_y^{cen} - s_y^n))}{8}, \quad 3.20$$

$$s_z = \frac{(\sum_{n=1}^8 (s_z^{cen} - s_z^n))}{8}$$

Με s_x^n, s_x^{cen} οι συντεταγμένες του κόμβου n και του κέντρου μάζας αντίστοιχα του υπό εξέταση εξαεδρικού πεπερασμένου στοιχείου. Η παράμετρος c μας δείχνει το συνολικό όγκο που καταλαμβάνει η ενεργή σφαίρα γύρω από το εξεταζόμενο εξαεδρικό στοιχείο και κατ' επέκταση μας δείχνει τα όρια της περιοχής όπου γίνεται η εύρεση των βοηθητικών κόμβων του οπλισμού (σημείων τομής). Αυτή η διαδικασία αναζήτησης πραγματοποιείται αν ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$d_{n1}^i \quad \text{ή} \quad d_{n2}^i < R_c \quad 3.21$$

Όπου $d_{n1}^i = |s^{cen} - s_{rebar}^{n1}|$, $d_{n2}^i = |s^{cen} - s_{rebar}^{n2}|$ είναι οι αποστάσεις των αρχικών ακραίων κόμβων της ράβδου οπλισμού από το κέντρο μάζας i του εξεταζόμενου εξαεδρικού στοιχείου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6.



Σχήμα 3. 6 Γεωμετρικός περιορισμός για την εύρεση των κόμβων των ράβδων οπλισμού: (A) $R_e^1 > d_{n2}^1$, ο γεωμετρικός περιορισμός ικανοποιείται, (B) $R_e^1 < d_{n2}^1 < d_{n1}^1$, ο γεωμετρικός περιορισμός δεν ικανοποιείται^[14].

Μετά από εκτενή παραμετρική διερεύνηση, συνιστάται να χρησιμοποιείται για την παράμετρο c η τιμή 5, όπως και χρησιμοποιήθηκε σε όλες τις αριθμητικές εφαρμογές. Μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου c οδηγούν σε περισσότερους περιττούς υπολογισμούς για την εύρεση των σημείων τομής των ράβδων οπλισμού με τις έδρες των εξαεδρικών στοιχείων, ενώ μικρότερες τιμές της παραμέτρου c κάνουν πολύπλοκη και χρονοβόρα την διαδικασία γένεσης του αρχικού δικτύου ράβδων οπλισμών μέσω του Femap (pre-processing software). Αυτό σημαίνει πως κατά την γένεση του δικτύου οπλισμού, η ράβδος οπλισμού δεν θα πρέπει να διεισδύει παραπάνω από 5 εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος για να διασφαλίσουμε πως ένας ακραίος κόμβος της ράβδου οπλισμού θα βρίσκεται στο εσωτερικό της ενεργής ράβδου (σχήμα 3.6). Ο προτεινόμενος περιορισμός μειώνει το υπολογιστικό κόστος καθώς μας επιτρέπει να εξετάσουμε λιγότερα γειτονικά εξαεδρικά στοιχεία, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις μοντέλων μεγάλης κλίμακας.

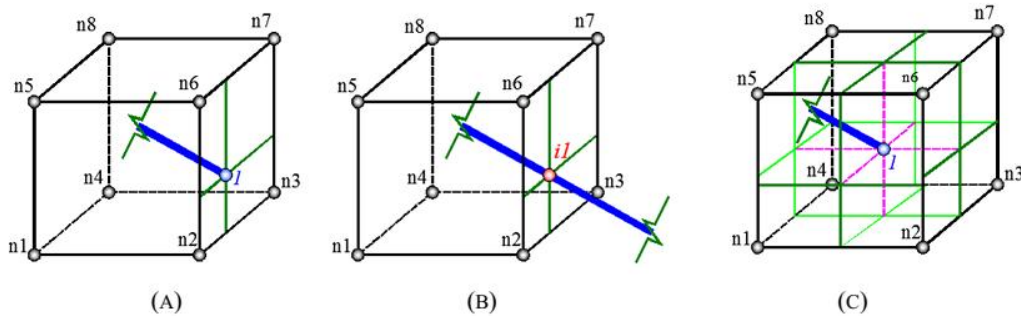
Αφού ικανοποιηθεί ο περιορισμός της σχέσης 3.21 η γένεση των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού συνεχίζονται ακολουθώντας τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1.

Σε αυτήν την περίπτωση ανιχνεύονται είτε ένας ή δυο ακραίοι κόμβοι βρίσκονται πάνω σε έδρα εξαεδρικού στοιχείου (σχήμα 3.7). Σε αυτήν την περίπτωση αυτοί οι κόμβοι θεωρούνται επίσης βοηθητικοί. Στην συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε τις φυσικές συντεταγμένες των κόμβων αυτών. Για το σκοπό αυτό πρέπει να υπολογιστούν οι αποστάσεις dx , dy , dz μεταξύ του κέντρου μάζας του εξαεδρικού στοιχείου και του πρώτου εξαεδρικού κόμβου n_1 , οι οποίες αποθηκεύονται στο

αντίστοιχο εξαεδρικό μητρώο συνδεσμολογίας (connectivity matrix). Οι αποστάσεις dx , dy , dz υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$dx^{Hexa} = s_x^{Hn1} - s_x^{cen}, dy^{Hexa} = s_y^{Hn1} - s_y^{cen}, dz^{Hexa} = s_z^{Hn1} - s_z^{cen} \quad 3.22$$



Σχήμα 3. 7 Απεικόνιση των τριών περιπτώσεων: (A) Περίπτωση 1: ο κόμβος της ράβδου οπλισμού πάνω στην έδρα του εξαεδρικού στοιχείου, (B) Περίπτωση 2: Τομή ράβδου οπλισμού με την έδρα του εξαεδρικού στοιχείου, (C) Περίπτωση 3: ο κόμβος του οπλισμού βρίσκεται μέσα στον όγκο του εξαεδρικού στοιχείου^[14].

Τέλος οι φυσικές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου p που βρίσκεται μέσα στο εξαεδρικό στοιχείο δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\xi_p = \frac{s_x^p - s_x^{cen}}{dx^{Hexa}}, \quad \eta_p = \frac{s_y^p - s_y^{cen}}{dy^{Hexa}}, \quad \zeta_p = \frac{s_z^p - s_z^{cen}}{dz^{Hexa}} \quad 3.23$$

Τα παραπάνω ισχύουν στην περίπτωση που το εξαεδρικό στοιχείο είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Διαφορετικά θα χρειαζόταν η επαναληπτική διαδικασία της κλασσικής μεθόδου των Barzegar and Maddipudi.

Στην περίπτωση που και οι δυο κόμβοι (προφανώς και όλο το στοιχείο) βρίσκονται στην ίδια έδρα του εξαεδρικού στοιχείου, τότε ο προτεινόμενος κόμβος αναζητά σημεία τομής με τις ακμές των εξαεδρικών στοιχείων. Επιπλέον όσον αφορά την στιβαρότητα του στοιχείου, το μητρώο στιβαρότητας του ενσωματωμένου στοιχείου οπλισμού κατανέμεται μεταξύ των δυο γειτονικών εξαεδρικών στοιχείων.

Περίπτωση 2.

Στην δεύτερη περίπτωση ανιχνεύονται τα σημεία τομής των ράβδων οπλισμού με τις έδρες του εξαεδρικού στοιχείου, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.7(B). Προκειμένου να βρούμε το σημείο τομής που παρουσιάζει το ευθύγραμμο τμήμα της ράβδου του οπλισμού με το επίπεδο της έδρας του εξαεδρικού, πρέπει να επιλύσουμε την αλγεβρική εξίσωση, η οποία περιγράφεται παρακάτω.

Ένα επίπεδο μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad 3.24$$

Όπου (x,y,z) αναπαριστά τις συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείο που ανήκει στο επίπεδο. Υποθέτοντας πως δύο σημεία P_1 και P_2 με συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) ορίζουν μια ευθεία, της οποίας η εξίσωση γράφεται:

$$P = P_1 + \lambda(P_2 - P_1) \quad 3.25$$

Από την σχέση 3.25 εξάγουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned} \quad 3.25.a$$

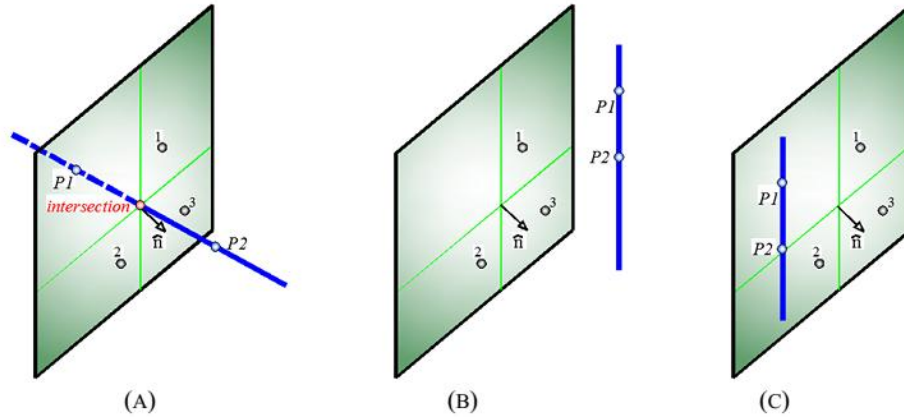
Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.25α στην εξίσωση του επιπέδου της σχέσης 3.24 έχουμε (σχέση 3.26):

$$xA(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) + B(y_1 + \lambda(y_2 - y_1)) + C(z_1 + \lambda(z_2 - z_1)) + D = 0 \quad 3.26$$

και λύνοντας ως προς λ :

$$\lambda = \frac{A x_1 + B y_1 + C z_1 + D}{A(x_1 - x_2) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)} \quad 3.27$$

Η τιμή της παραμέτρου λ καθορίζει την σχετική θέση της ευθείας σε σχέση με το επίπεδο. Η πρώτη περίπτωση είναι το λ να έχει την τιμή 0 ($\lambda=0$), που σημαίνει πως η ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο ή ότι το κάθετο διάνυσμα που ορίζει το επίπεδο είναι κάθετο και στην ευθεία. Συνεπώς δεν υπάρχει σημείο τομής όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.8(B). Διαφορετικά αν το λ έχει τιμή διάφορη του μηδενός ($\lambda \neq 0$), που σημαίνει πως η ευθεία και το επίπεδο έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Αν έχουν μόνο ένα κοινό σημείο (σχήμα 3.8(A)), τότε αυτό υπολογίζεται με την αντικατάσταση της τιμής του λ στην εξίσωση της ευθείας της σχέσης 3.25.



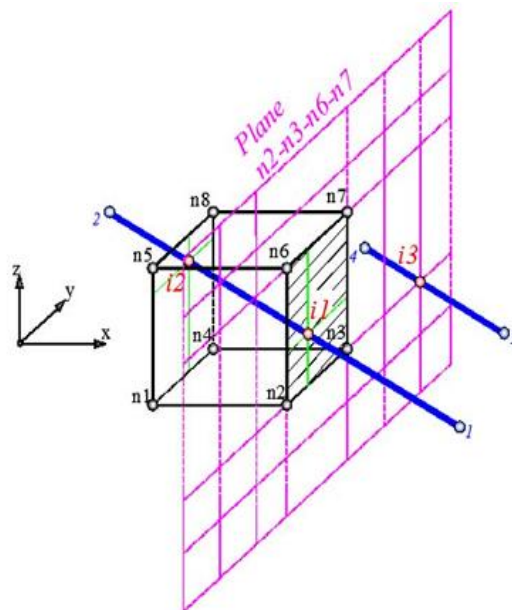
Σχήμα 3. 8 Σχετικές θέσεις ευθείας με επίπεδο: (Α) Ευθεία τέμνει το επίπεδο (ένα σημείο τομής), (Β) Ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο (κανένα σημείο τομής), (Γ) Ευθεία ανήκει στο επίπεδο (άπειρα κοινά σημεία)^[14].

Επιπλέον πρέπει να γίνει έλεγχος αν η ευθεία ανήκει στο επίπεδο (σχήμα 3.8(C)). Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό εάν και τα δυο σημεία P_1, P_2 ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου της σχέσης 3.24. Αν και τα δύο σημεία ικανοποιούν την εξίσωση, τότε βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η ευθεία κείται στο επίπεδο αυτό.

Επίσης αφού προσδιορισθεί το σημείο τομή με την παραπάνω διαδικασία, πρέπει να ελεγχθεί αν το σημείο αυτό βρίσκεται στα όρια του υπό εξέταση εξαεδρικού στοιχείου. Ο έλεγχος αυτό πραγματοποιείται με την παρακάτω συνθήκη:

$$|\xi_p, \eta_p, \zeta_p| \leq 1 \quad 3.28$$

Όπου ξ_p, η_p, ζ_p είναι οι φυσικές συντεταγμένες των σημείων τομής.



Σχήμα 3. 9 Σημεία τομής στοιχείων οπλισμού με εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος^[14].

Στο σχήμα 3.9 απεικονίζεται δυο στοιχεία οπλισμού που τέμνει δυο επίπεδα των εδρών του εξαεδρικού στοιχείου. Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία ανιχνεύονται οι κόμβοι $i1$, $i3$ (σημεία τομής των ευθύγραμμων τμημάτων 12,34 με το επίπεδο $n2n3n7n6$) και $i2$ (σημεία τομής του ευθύγραμμου τμήματος 12 με το επίπεδο $n1n4n8n5$). Όμως μόνο οι $i1$ και οι $i2$ μπορούν να θεωρηθούν βοηθητικοί κόμβοι καθώς μόνο αυτοί ικανοποιούν την συνθήκη της σχέσης 3.28.

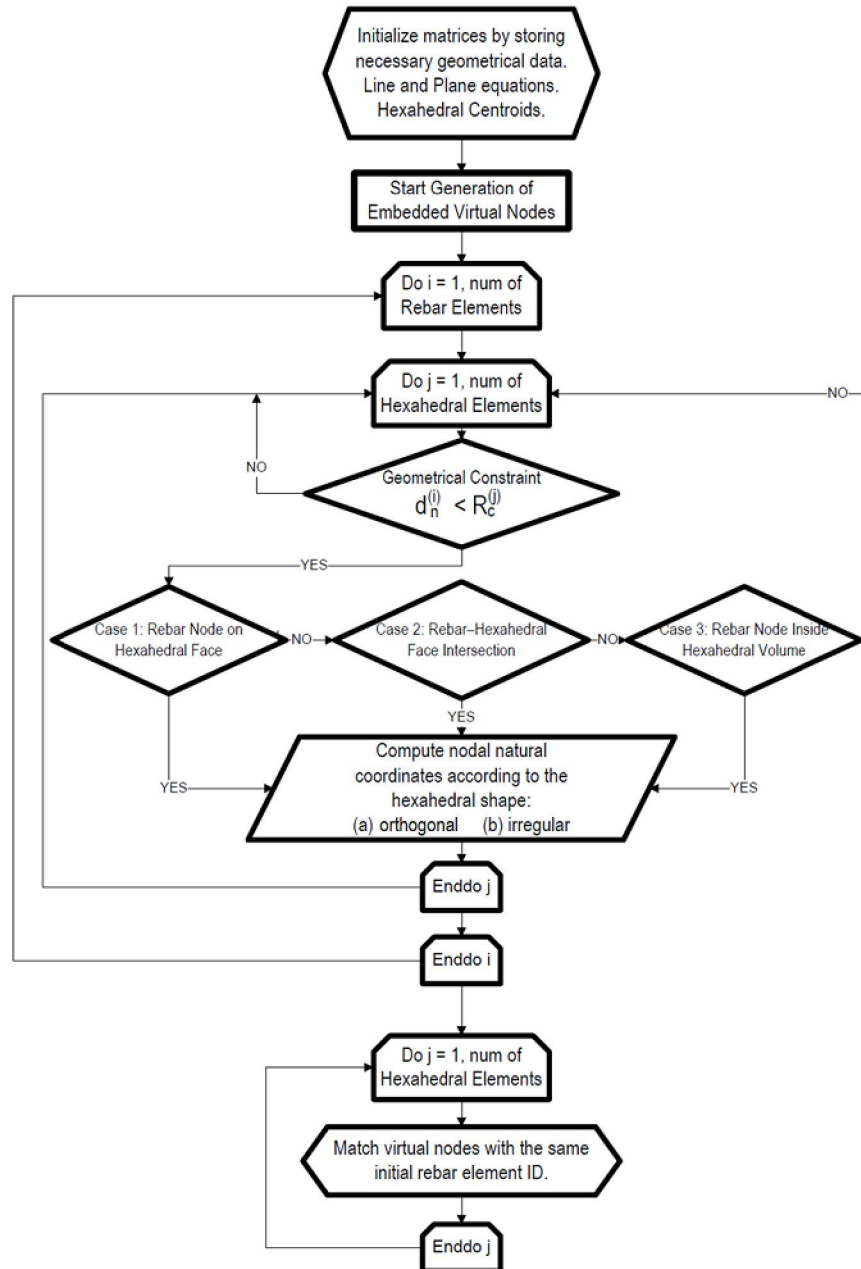
Περίπτωση 3.

Όταν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις 1 και 2 τότε πραγματοποιείται ο παρακάτω έλεγχος:

$$|\xi_R, \eta_R, \zeta_R| \leq 1 \quad 3.29$$

Όπου ξ_R, η_R, ζ_R είναι οι φυσικές συντεταγμένες των ακραίων κόμβων της ράβδου οπλισμού. Αν ικανοποιείται η σχέση 3.29, τότε συμπεραίνουμε πως ο κόμβος του οπλισμού βρίσκεται μέσα στο εξαεδρικό στοιχείο, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.7(C). Διαφορετικά ο κόμβος του οπλισμού βρίσκεται εκτός του εξαεδρικού στοιχείου και δεν πραγματοποιείται καμία διαδικασία ελέγχου.

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, καθορίζονται όλα τα απαραίτητα δεδομένα του κάθε εξαεδρικού στοιχείου όσον αφορά τους βοηθητικούς κόμβους οπλισμού που βρίσκονται στις έδρες, στις ακμές ή στο εσωτερικό των εξαεδρικών στοιχείων. Σε αυτό το σημείο τα απαραίτητα χαρακτηριστικά των ενσωματωμένων ράβδων οπλισμού έχουν υπολογιστεί και έχουν αποθηκευτεί. Συγκεκριμένα έχουν αποθηκευτεί: ο τύπος του στοιχείου (φυσικό στοιχείο δυνάμεων ή στοιχείο δικτύωματος), οι συντεταγμένες των κόμβων του στοιχείου, ο τύπος των κόμβων (βοηθητικός κόμβος ή φυσικός κόμβος του αρχικού δικτύου των στοιχείων οπλισμού) και οι ιδιότητες των υλικών. Στο σχήμα 3.10 απεικονίζεται το διάγραμμα ροής του προτεινόμενου αλγορίθμου γένεσης ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού. Τέλος πρέπει να διευκρινιστεί πως για να είναι εφαρμόσιμη η παραπάνω διαδικασία εύρεσης των επικόμβιων φυσικών συντεταγμένων πρέπει τα εξαεδρικά στοιχεία να είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Σε διαφορετική περίπτωση χρησιμοποιείται η μέθοδος των Barzegar and Maddipudi.



Σχήμα 3. 10 Διάγραμμα ροής της προτεινόμενης μεθόδου γένεσης των ενσωματωμένων στοιχείων οπλισμού^[14].

Κεφάλαιο 4. Αλγόριθμοι Επίλυσης Μη Γραμμικών Προβλημάτων

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|-----------------------------------------------------|----|
| 4.1 Εισαγωγή | 70 |
| 4.2 Newton-Raphson με έλεγχο των φορτίων | 70 |
| 4.2 Newton-Raphson με έλεγχο των μετατοπίσεων | 74 |

4.1 Εισαγωγή

Μετά την μόρφωση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα, χρειάζεται να επιλυθεί ένα σύστημα εξισώσεων που έχει την εξής μορφή:

$$K_s u_s = f_s \quad 4.1$$

Όπου K_s είναι το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας, u_s είναι το διάνυσμα των αγνώστων επικόμβιων μετατοπίσεων και f_s είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων. Το μητρώο δυσκαμψίας είναι πάντα ένα συμμετρικό μητρώο πράγμα που μας επιτρέπει την εφαρμογή προηγμένων αλγορίθμων επίλυσης συνδυασμένες προγραμματιστικές τεχνικές αποθήκευσης, βελτιστοποίησης και αυξημένης υπολογιστικής απόδοσης κατά την διάρκεια της ανάλυσης.

Είναι προφανές πως η επίλυση της εξίσωσης 4.1 απαιτεί την χρήση επαναληπτικών μεθόδων τύπου Newton-Raphson. Σύγχρονες μελέτες έχουν αποδείξει πως είναι η πιο αποδοτική προσαυξητική μέθοδος προσδιορισμού της λύσης ενός μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες παραλλαγές της μεθόδου, ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Στην παρούσα διπλωματική εργασία έχουν χρησιμοποιηθεί δύο αλγόριθμοι Newton-Raphson: 1) Έλεγχος των φορτίων 2) Έλεγχος των μετατοπίσεων.

4.2 Newton-Raphson με έλεγχο των φορτίων

Στην περίπτωση ενός γραμμικού στατικού προβλήματος όπου οι συνοριακές συνθήκες παραμένουν σταθερές, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε πως μια μεταβολή στο διάνυσμα των φορτίσεων $\Delta t f_s$ θα προκαλούσε την ίδια μεταβολή στο διάνυσμα των μετατοπίσεων $\Delta t u_s$ (σύμφωνα με την εξίσωση 4.1). Όμως, στις περισσότερες αριθμητικές εφαρμογές αντιμετωπίζουμε μη γραμμικές συμπεριφορές (υλικού ή/και γεωμετρίας) του φορέα μας. Για παράδειγμα στις δικές μας αριθμητικές εφαρμογές χρησιμοποιούμε το οπλισμένο σκυρόδεμα που παρουσιάζει μη γραμμικές συμπεριφορές όπως φαινόμενα πλαστικοποίησης, ρηγμάτωσης όπου μεταβάλλουν τις ιδιότητες του υλικού κατά την διάρκεια της ανάλυσης. Κύριος στόχος μας, είναι ότι σε κάθε βήμα πρέπει οι εσωτερικές δυνάμεις να εξισορροπούν τις εξωτερικές που εφαρμόζουμε. Αν υποθέσουμε πως το φορτίο είναι συνάρτηση του χρόνου, τότε η εξίσωση ισορροπίας που πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε βήμα είναι:

$$F_s^t - R_s^t = 0 \quad 4.2$$

Όπου F_s^t είναι το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων που ασκούνται στον φορέα την χρονική στιγμή t και R_s^t είναι οι επικόμβιες εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται

στον φορέα. Η σχέση 4.2 εκφράζει ένα σύστημα εξισώσεων που ισχύει σε μια παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα συμπεριλαμβανομένου και όλες τις μη γραμμικότητες. Η σχέση αυτή είναι γενική και ισχύει ακόμα και σε δυναμικά προβλήματα όπου οι δυνάμεις αδράνειας και απόσβεσης συμπεριλαμβάνονται στο διάνυσμα F_s^t .

Η επαναληπτική διαδικασία ξεκινά διαιρώντας το εξωτερικό φορτίο σε n βήματα (F_s^t/n). Χρησιμοποιώντας έναν σταθερό αυξητικό συντελεστή ($\Delta t=1/n$), το εξωτερικό φορτίο ασκείται σταδιακά στον φορέα, αυξάνοντας το σε κάθε βήμα κατά $F_s^t \Delta t$. Με αυτόν τον τρόπο σε κάθε βήμα NR έχουμε ένα διαφορετικό εξωτερικό φορτίο και προσπαθούμε να ικανοποιήσουμε την εξίσωση ισορροπίας της σχέσης 4.2 μέχρι το τελευταίο βήμα όπου θα έχει επιβληθεί στον φορέα το συνολικό φορτίο. Στην περίπτωση που στον φορέα επιβάλλεται στατικό φορτίο, η παράμετρος t (του χρόνου) προσδιορίζει τα διαφορετικά προσαυξητικά βήματα του φορτίου που οδηγεί αντίστοιχα σε μεταβολές και άλλων χαρακτηριστικών του φορέα, όπως οι μετατοπίσεις και το μητρώο στιβαρότητας. Η μέθοδος περιλαμβάνει δυο επαναληπτικές διαδικασίες, μια εξωτερική i και μια εσωτερική j . Η εξωτερική περιλαμβάνει τις προσαυξήσεις του εξωτερικού φορτίου, ενώ η εσωτερική επιτυγχάνει την σύγκλιση της μεθόδου σε κάθε εξωτερικό βήμα i .

Έστω πως i είναι ο αριθμός του τρέχοντος προσαυξητικού βήματος φόρτισης. Στην επανάληψη t (χρονική στιγμή) η επαναληπτική διαδικασία έχει εξάγει το διάνυσμα των μετατοπίσεων σε χρόνο t :

$$u_s^t, \text{ όπου } t = i \Delta t \quad 4.3$$

Στο επόμενο εξωτερικό βήμα της επαναληπτικής μεθόδου σε χρόνο $t + \Delta t = t_{i+1}$, η εξίσωση 4.1 παίρνει την εξής μορφή:

$$K_s^t \Delta u_s^{t+\Delta t} = \Delta f_s^{t+\Delta t} \quad 4.4$$

Όπου $\Delta f_s^{t+\Delta t} = f_s^{t+\Delta t} - f_s^t$, με $f_s^{t+\Delta t}, f_s^t$ τα διανύσματα των εξωτερικών φορτίων του προσαυξητικού βήματος $i+1$ και i αντίστοιχα (θεωρώντας ότι βρισκόμαστε στην πρώτη εσωτερική επανάληψη). Ουσιαστικά κάνουμε μια πρόβλεψη για το πώς θα συμπεριφερθεί ο φορέας. Γι αυτό χρησιμοποιούμε το μητρώο δυσκαμψίας K_s^t του προηγούμενου βήματος φόρτισης. Με την επίλυση της σχέσης 4.4 προσδιορίζουμε την μεταβολή του διανύσματος των επικόμβιων μετατοπίσεων του φορέα $\Delta u_s^{t+\Delta t}$. Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων χρησιμοποιούμε την παρακάτω σχέση:

$$u_s^{t+\Delta t} = u_s^t + \Delta u_s^{t+\Delta t} \quad 4.5$$

Στην συνέχεια είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις επικόμβιες μετατοπίσεις των κόμβων του κάθε μέλους του φορέα και να τις πολλαπλασιάσουμε με το μητρώο δυσκαμψίας του κάθε μέλους του φορέα ώστε να υπολογίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται. Τέλος προσδιορίζουμε το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων του φορέα $R_s^{t+\Delta t}$ και ελέγχουμε αν ικανοποιείται η σχέση 4.2 (όπου $t=t+\Delta t$, αφού βρισκόμαστε στο βήμα $i+1$). Συνεπώς το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων πρέπει να συγκλίνει με το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων. Για να επιτευχθεί αυτή η σύγκλιση ο αλγόριθμος πραγματοποιεί μια επιπλέον εσωτερική επαναληπτική διαδικασία όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.1.

Στην εσωτερική επανάληψη j (ενώ στην εξωτερική επανάληψη βρισκόμαστε στο βήμα $i+1$) υπολογίζουμε το εξής διάνυσμα των δυνάμεων:

$$r_s^j = F_s^{t+\Delta t} - R_s^{t+\Delta t} \quad 4.6$$

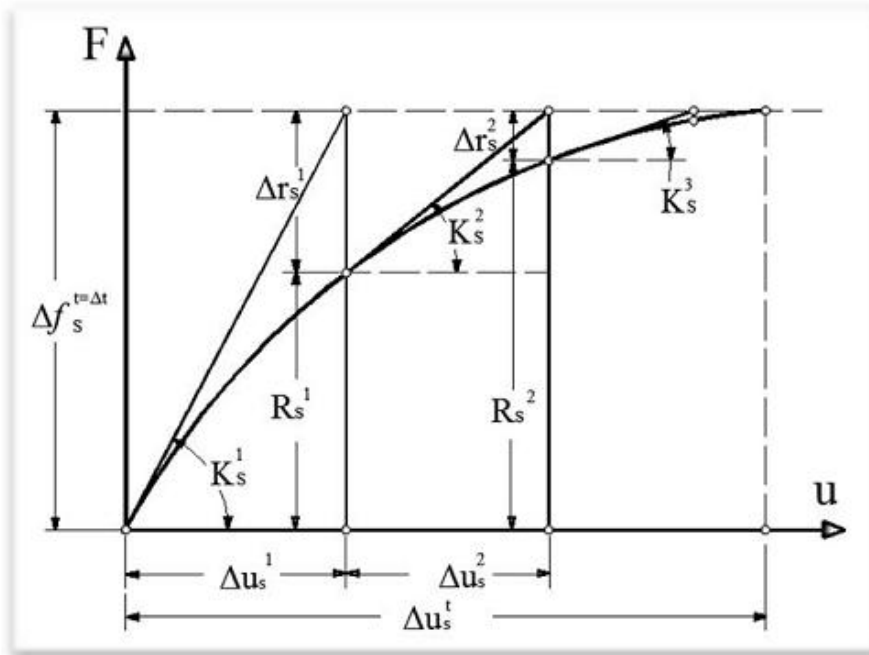
Το διάνυσμα αυτό αποτελεί το σφάλμα (τις μη εξισορροπούμενες δυνάμεις) της εξίσωσης 4.2 και χρησιμοποιείται ως κριτήριο σύγκλισης για τα διάφορα κριτήρια σύγκλισης:

$$e_{er} = \frac{\|\Delta u_s^j\|}{\|u_s^{t+\Delta t}\|} \leq e_D \quad 4.7.a$$

$$e_{er} = \frac{\|F_s^{t+\Delta t} - R_s^{t+\Delta t}\|}{\|F_s^{t+\Delta t} - R_s^t\|} \leq e_F \quad 4.7.b$$

$$e_{er} = \frac{\Delta u_s^j \|F_s^{t+\Delta t} - R_s^{t+\Delta t}\|}{\Delta u_s^1 \|F_s^{t+\Delta t} - R_s^t\|} \leq e_E \quad 4.7.c$$

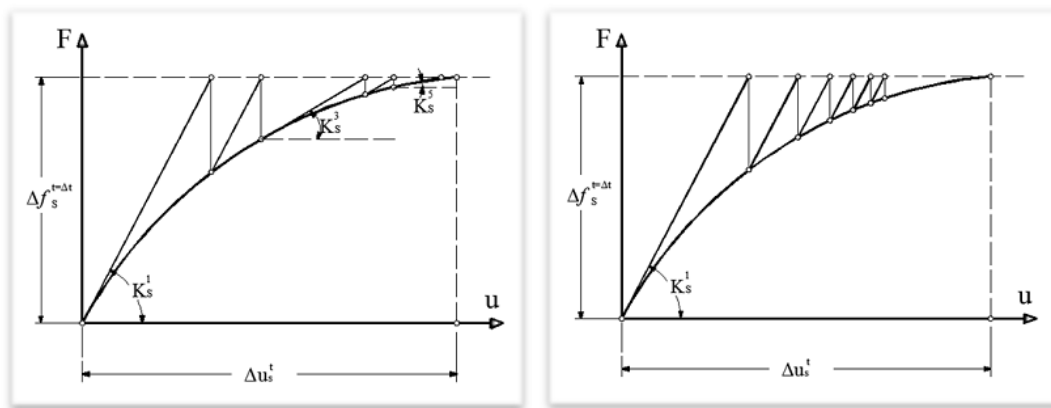
Όπου e_D , e_F , e_E είναι το κριτήριο σύγκλισης της μετατόπισης, της δύναμης και της ενέργειας αντίστοιχα. Για κάθε εσωτερική επανάληψη j , το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής ανανεώνεται χρησιμοποιώντας τις νέες ιδιότητες του υλικού οι οποίες εφαρμόζονται μέσω της χρήσης του καταστατικού μητρώου του υλικού C της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Για παράδειγμα οι μετατροπές που γίνονται στο καταστατικό μητρώο του υλικού κατά την ρηγμάτωση. Το ανανεωμένο μητρώο δυσκαμψίας είναι γνωστό και ως το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας. Σε περίπτωση που δεν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, οι εναπομένουσες (μη εξισορροπούμενες) δυνάμεις παίζουν το ρόλο της εξωτερικής φόρτισης στην σχέση 3.4 και η αλγοριθμική διαδικασία προχωρά στο εσωτερικό βήμα $j+1$.



Σχήμα 4. 1 Μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο φορτίου^[14].

Όταν το μητρώο δυσκαμψίας ανανεώνεται σε κάθε εσωτερικό βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας τότε χρησιμοποιούμε την ολοκληρωμένη μέθοδο Newton-Raphson. Αυτή η διαδικασία είναι υπολογιστικά απαιτητική αλλά οδηγεί τον αλγόριθμο γρήγορα σε σύγκλιση. Πολλοί ερευνητές θεώρησαν πως αυτή η διαδικασία συνεχόμενου επαναπροσδιορισμού του μητρώου δυσκαμψίας, είναι υπολογιστικά χρονοβόρα, κάτι που δεν επαληθεύεται στην παρούσα εργασία. Γι αυτόν τον λόγο έχουν χρησιμοποιηθεί εναλλακτικοί αλγόριθμοι με σκοπό την μείωση αυτού του υπολογιστικού κόστους. Για παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 4.2 η τροποποιημένη μέθοδος και η οιονεί-Newton μέθοδος όπου το μητρώο δυσκαμψίας ανανεώνεται μετά από έναν καθορισμένο αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων ή έμμεσα μετά από κάθε επανάληψη, αντίστοιχα, κατά την διάρκεια της επίλυσης. Το μειονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ο αρκετά αργός ρυθμός σύγκλισης σε περιπτώσεις που εμφανίζονται μεγάλες μη γραμμικές συμπεριφορές, όπου χρειάζονται πολλές επαναλήψεις για να φτάσουμε στην σύγκλιση.

Αξίζει να σημειωθεί πως η μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο του φορτίου εμφανίζεται να είναι αριθμητικά πιο ασταθής από την μέθοδο ελέγχου των μετατοπίσεων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η ολοκληρωμένη μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο των φορτίων όπου παρουσία αριθμητική ευρωστία και επάρκεια στις αριθμητικές μας εφαρμογές.



(A)

(B)

Σχήμα 4. 2 (A) Τροποποιημένη Newton-Raphson και (B) Μέθοδος οιονεί-Newton. Ανανέωση του μητρώου δυσκαμψίας ανά δύο επαναλήψεις^[14].

4.2 Newton-Raphson με έλεγχο των μετατοπίσεων

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο των φορτίων αδυνατεί να συγκλίνει. Όπως εμφανίζεται στο σχήμα 4.3, οι καμπύλες A και B περιγράφουν μη γραμμικές συμπεριφορές όπου η μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο των φορτίων δεν θα μπορούσε να συγκλίνει όσες επαναλήψεις και να εκτελούσε. Συγκεκριμένα η καμπύλη A παρουσιάζει έναν σταθερό κλάδο και μετά έναν ανοδικό μέχρι να προσεγγίσει το οριακό φορτίο ενώ η καμπύλη B παρουσιάζει έναν σταθερό κλάδο μετά το οριακό φορτίο και στην συνέχεια ακολουθεί ένας καθοδικός μέχρι την αστοχία. Και στις δύο περιπτώσεις η μέθοδος ελέγχου των φορτίων αποτυγχάνει να εντοπίσει το οριζόντιο και τον καθοδικό κλάδο των καμπυλών. Συνεπώς η μέθοδος ελέγχου των φορτίων χρησιμοποιείται για να βρεθεί το οριακό φορτίο και γενικότερα για την αποτίμηση της φέρουσας ικανότητας της κατασκευής που εξετάζουμε. Βέβαια σε περιπτώσεις όπως η καμπύλη A και η εύρεση του οριακού φορτίου αντιμετωπίζει αρκετές δυσκολίες.

Σε αυτά τα παραδείγματα εμφανίζονται αποκλίσεις οι οποίες δεν σχετίζονται με την πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής αλλά με τα αριθμητικά προβλήματα που παρουσιάζει η μέθοδος. Γι αυτό λοιπόν χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο των μετατοπίσεων. Γενικότερα ο έλεγχος των μετατοπίσεων μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την μετελαστική συμπεριφορά της κατασκευής. Σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα οι οποίες καταπονούνται από σεισμικά φορτία, η μετελαστική συμπεριφορά παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην απόκριση του συστήματος ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούνται οι διατάξεις του ευρωκώδικα 8.

Αυτή η προσέγγιση θεωρεί μια προσαύξηση συγκεκριμένων επιβαλλόμενων επικόμβιων μετατοπίσεων (αντί των εξωτερικών δυνάμεων) και η μη γραμμική συμπεριφορά περιγράφεται μέσω του υπολογισμού των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται οι αντίστοιχοι κόμβοι. Επιλύοντας αυτού του είδους τα προβλήματα,

φαίνεται πως μετατρέπουμε ένα πρόβλημα Dirichlet σε πρόβλημα Neumann, κάτι που φαίνεται μέσω των εξισώσεων 4.8 και 4.9 και όπως απεικονίζεται στο σχήμα 4.4 όπου παρουσιάζεται αυτή η μετατροπή στην περίπτωση ενός προβόλου που έχει διακριτοποιηθεί με τρία στοιχεία δοκού. Ουσιαστικά η επιβολή κάποιας μετατόπισης σε κάποιο κόμβο προϋποθέτει την θεώρηση στήριξης στον κόμβο αυτό. Η πραγματική φόρτιση που ασκείται στον κόμβο αυτόν είναι ίση με την αντίδραση της στήριξης και η συγκεκριμένη αντιμετώπιση αποτελεί την βάση της μεθοδολογίας ελέγχου μετατοπίσεων.

Αρχικά διαχωρίζουμε του βαθμούς ελευθερίας σε αυτούς που επιβάλουμε την μετατόπιση και στους υπόλοιπους που θεωρούνται ελεύθεροι. Αντιστοίχως αναδιατάσσουμε τα μητρώα των μετατοπίσεων, των εσωτερικών και των εξωτερικών δυνάμεων και του μητρώου στιβαρότητας.

$$u_s = \begin{Bmatrix} u_U \\ u_I \end{Bmatrix}, \quad f_s = \begin{Bmatrix} f_U \\ f_I \end{Bmatrix}, \quad R_s = \begin{Bmatrix} R_U \\ R_I \end{Bmatrix}, \quad K_s = \begin{bmatrix} K_{U,U} & K_{U,I} \\ K_{I,U} & K_{I,I} \end{bmatrix} \quad 4.8$$

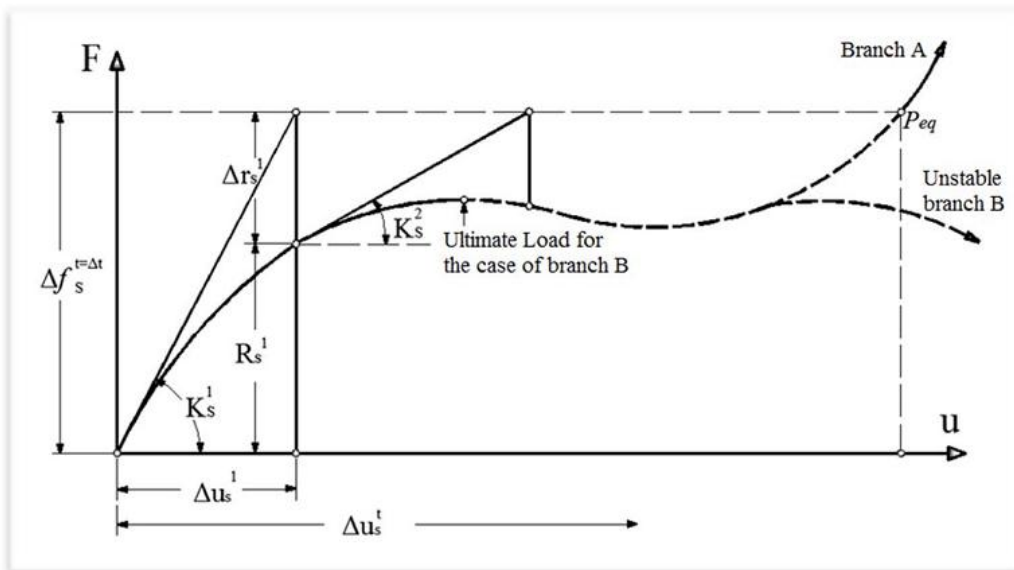
Όπου U δηλώνει τους άγνωστους βαθμούς ελευθερίας (unknown) ενώ ο δείκτης I δηλώνει τους βαθμούς ελευθερίας όπου έχουμε επιβάλει μετατόπιση (imposed). Αφού αναδιατάξαμε και το μητρώο στιβαρότητας, μπορούμε να λύσουμε ως προς τις άγνωστες μετατοπίσεις ως εξής:

$$K_s u_s = f_s \Rightarrow \begin{bmatrix} K_{U,U} & K_{U,I} \\ K_{I,U} & K_{I,I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_U \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_U \\ f_I \end{Bmatrix} \Rightarrow K_{U,U} u_U + K_{U,I} u_I = f_U \Rightarrow \quad 4.9$$

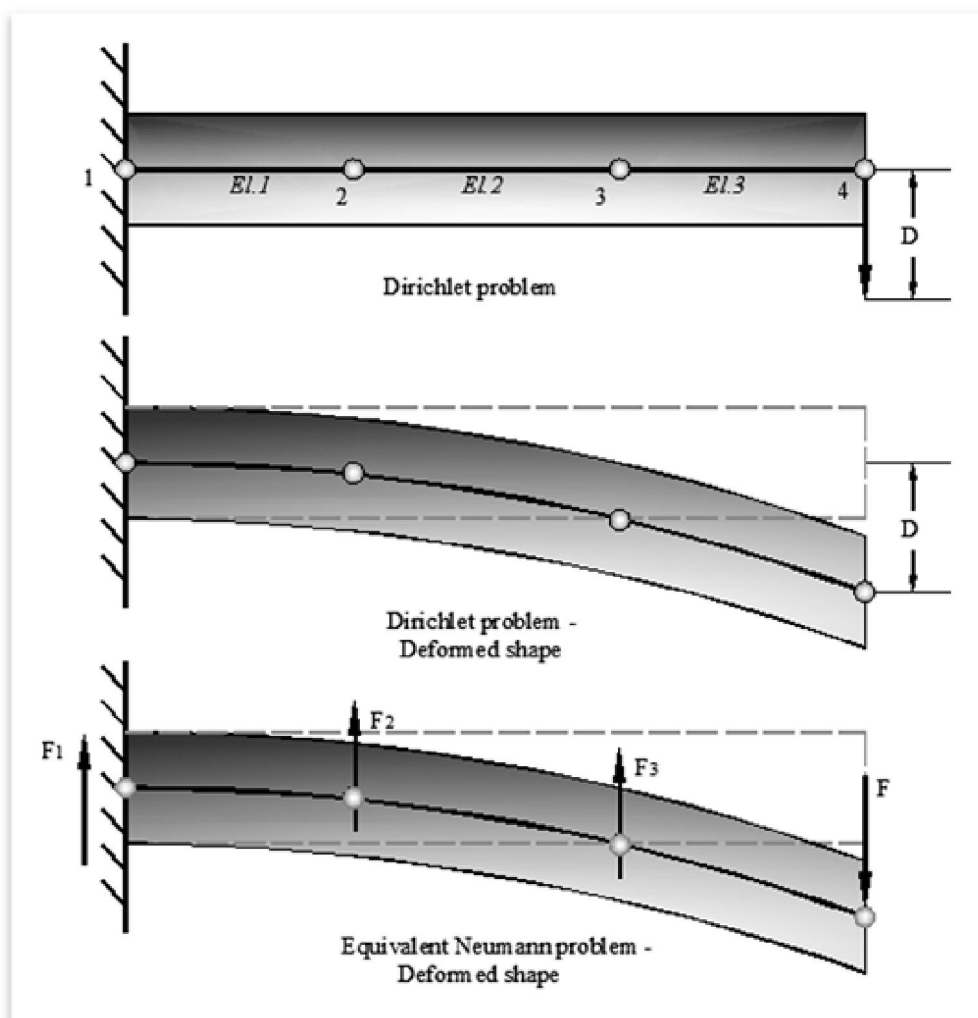
$$u_U = [K_{U,U}]^{-1} (f_U - K_{U,I} u_I) = [K_{U,U}]^{-1} \tilde{f}_U$$

Η μέθοδος του ελέγχου των μετατοπίσεων δεν επιφέρει σημαντικές αλλαγές στην επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson αφού χρησιμοποιούνται οι ίδιες εξισώσεις. Συνεπώς ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία, διαιρούμε τις εξαναγκασμένες μετατοπίσεις σε η βήματα και τις επιβάλουμε προσαυξητικά σε κάθε εξωτερικό βήμα NR (όπως αντίστοιχα κάναμε με τις δυνάμεις). Αυτό που αλλάζει σε αυτήν την διαδικασία, είναι πως το καινούργιο (προσαυξάνεται σε κάθε εξωτερική επανάληψη) διάνυσμα των εξαναγκασμένων μετατοπίσεων παραμένει σταθερό για κάθε εσωτερική επανάληψη των βημάτων φόρτισης της μεθόδου NR. Με αυτόν τον τρόπο απαιτείται η επίλυση της εξίσωσης 4.9 έτσι ώστε να υπολογιστούν οι άγνωστες μετατοπίσεις λόγω των εξαναγκασμένων προσαυξητικών μετατοπίσεων. Θέτοντας $u_I = \Delta u_I^t$ η εξίσωση ισορροπίας, αντίστοιχα με την σχέση 4.4, γίνεται:

$$K_{U,U}^t \Delta u_U^{t+\Delta t} = \Delta \tilde{f}_U^{t+\Delta t} \quad 4.10$$



Σχήμα 4. 3 Παραδείγματα απόκλισης της μεθόδου Newton-Raphson με τον έλεγχο φορτίου^[14].



Σχήμα 4. 4 Γραφική απεικόνιση της μετατροπής ενός προβλήματος Dirichlet σε ισοδύναμο πρόβλημα Newman^[14].

Στην συνέχεια, αφού υπολογίσουμε τις άγνωστες μετατοπίσεις, πρέπει (όπως και στον έλεγχο φορτίου) να υπολογίσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε μέλος του φορέα. Με αυτόν τον τρόπο μορφώνουμε το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων και μπορούμε να υπολογίσουμε την διαφορά τους από τις εξωτερικές, $\Delta r_U^{j=1}$. Μετά ελέγχουμε αν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης που χρησιμοποιούμε. Αν δεν ικανοποιείται τότε ξεκινά η εσωτερική επαναληπτική διαδικασία όπου ως εξωτερική δύναμη θεωρείται το διάνυσμα των υπολειπόμενων δυνάμεων. Δηλαδή:

$$K_{U,U}^t \Delta u_U^{j+1} = - \Delta r_U^j \quad 4.11$$

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε πως ο όρος $-K_{U,I} u_I$ της σχέσης 4.9 μηδενίζεται για $j \neq 1$, δηλαδή μετά την πρώτη εσωτερική επανάληψη της μεθόδου. Αυτό συμβαίνει επειδή όπως αναφέραμε το μητρώο των εξαναγκασμένων μετατοπίσεων u_I παραμένει σταθερό σε κάθε εξωτερικό προσαυξητικό βήμα NR.

Κεφάλαιο 5. Καταστατικό μοντέλο οπλισμένου σκυροδέματος

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 Εισαγωγή | 80 |
| 5.2 Χρήσιμες σχέσεις οκταεδρικών τάσεων-παραμορφώσεων..... | 81 |
| 5.3 Καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos & Pavlovic | 85 |
| 5.4 Συνθήκες αποφόρτισης-επαναφόρτισης..... | 96 |
| 5.5 Κριτήριο Αστοχίας..... | 96 |
| 5.6 Το τροποποιημένο καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos & Pavlovic..... | 99 |
| 5.7 Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack modeling)..... | 102 |
| 5.8 Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας β (shear retention factor) | 106 |
| 5.9 Η ενοποιημένη αντιμετώπιση της ρηγμάτωσης..... | 106 |
| 5.10 Καταστατικό μοντέλο για χάλυβα οπλισμού | 111 |

5.1 Εισαγωγή

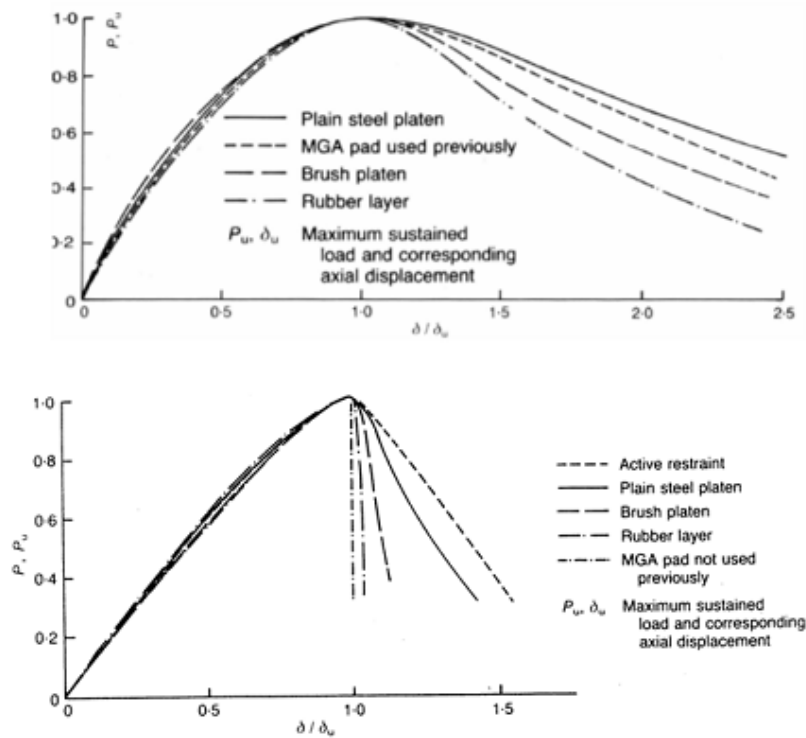
Για την προσομοίωση του σκυροδέματος έχουν γίνει πολλές έρευνες και έχουν προταθεί πολλά μοντέλα προσομοίωσης καταστατικών μοντέλων υλικού. Επικρατέστερα θεωρούνται τα τρισδιάστατα μοντέλα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία το προτεινόμενο τρισδιάστατο καταστατικό μοντέλο του σκυροδέματος βασίστηκε στο προσομοίωμα που διατυπώθηκε από τους Kotsonos and Pavlovic εισάγοντας διάφορες τροποποιήσεις κυρίως σε αριθμητικό επίπεδο. Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στο προσομοίωμα των Kotsonos & Pavlovic καθώς και στις προτεινόμενες διαφοροποιήσεις.

Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ενός προσομοιώματος εξαρτάται από την ακρίβεια των πειραματικών αποτελεσμάτων. Η σύγκριση των δυο αυτών αποτελεσμάτων μας δείχνει κατά πόσο αντιπροσωπευτικό είναι το μοντέλο που χρησιμοποιούμε. Για την διατύπωση της συμπεριφοράς του σκυροδέματος υποβαλλόμενο σε διάφορες καταπονήσεις, διεξάγονται εργαστηριακές δοκιμές όπως η δοκιμή του σκυροδέματος σε θλίψη και η δοκιμή του σκυροδέματος σε τριαξονική καταπόνηση. Στα πειράματα αυτά χρησιμοποιούνται κυλινδρικά, πρισματικά ή κυβικά δοκίμια και η φόρτιση επιβάλλεται μέσω χαλύβδινων πλακών φόρτισης.

Τα πειραματικά αποτελέσματα εκφράζονται μέσω της καμπύλης τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων. Υπό θλιπτικές δυνάμεις παρατηρείται ένας αύξοντας κλάδος κράτυνσης (strain hardening branch), ο οποίος ακολουθείται από έναν φθίνοντα κλάδο (strain softening branch). Έχει αποδειχθεί πως ο φθιτός κλάδος δεν αποτελεί ιδιότητα του υλικού του σκυροδέματος αλλά περιγράφει την αλληλεπίδραση του δοκιμίου με την διάταξη φόρτισης. Δηλαδή ο κλάδος αυτός καθορίζεται από την ανάπτυξη μη ελεγχόμενων δυνάμεων τριβής μεταξύ της επιφάνειας του δοκιμίου και της επιφάνεια της πλάκας φόρτισης. Η επίδραση των δυνάμεων αυτών έχει διερευνηθεί πειραματικά χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους για την μείωση των δυνάμεων τριβής. Η διερεύνηση αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.1. Όσο μειώνονται οι δυνάμεις τριβής τόσο μεγαλώνει η κλίση του φθιτού κλάδου. Έτσι αποδεικνύεται πως για μηδενικές δυνάμεις τριβής το σκυρόδεμα παρουσιάζει ψαθυρή συμπεριφορά, δηλαδή χαρακτηρίζεται από απότομη και πλήρη απώλεια της φέρουσας ικανότητας.

Στον εφελκυσμό παρουσιάζεται ομοίως ένας φθιτός κλάδος ο οποίος όμως αποτελεί μέρος της ιδιότητας του υλικού. Παρόλα αυτά στα διάφορα προσομοιώματα δεν χρησιμοποιείτε επειδή θα εμπεριείχε πολυπλοκότητες οι οποίες ελάχιστα προσφέρουν στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς του οπλισμένου σκυροδέματος. Η συμβολή του κλάδου αυτού θα ήταν σημαντική μόνο σε άοπλους φορείς. Επίσης η μείωση της εφελκυστικής συμβολής του χάλυβα στην στιβαρότητα (tension stiffening) μπορεί να ληφθεί υπόψη με εναλλακτικούς τρόπους, όπως με την θεώρηση ολίσθησης με συνάφεια των οπλισμών.

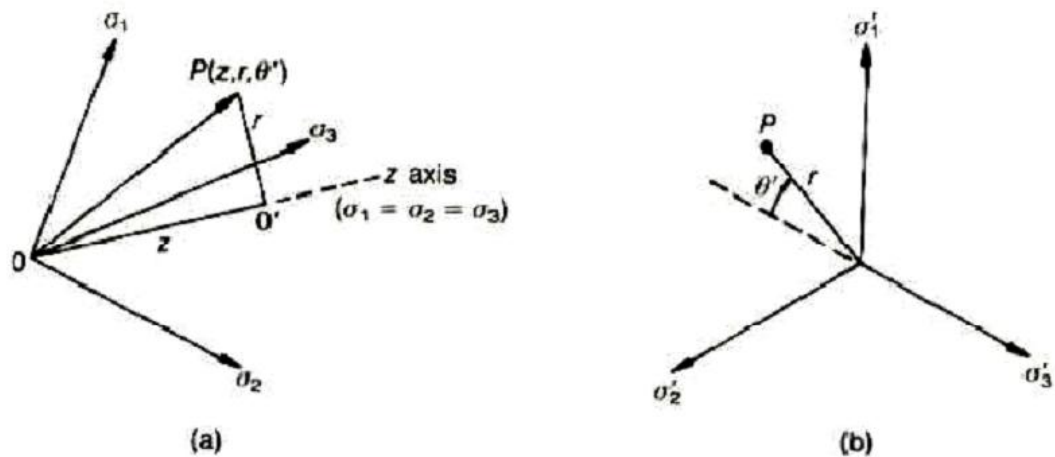
Συμπερασματικά η καμπύλη που περιγράφει αντιπροσωπευτικά την συμπεριφορά του σκυροδέματος, είναι η καμπύλη που περιέχει έναν ανιόντα κλάδο μέχρι και την μέγιστη τιμή του φορτίου, το οποίο εκφράζει την αντοχή του σκυροδέματος.



Σχήμα 5. 1 Καμπύλη τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης για διάφορες συνοριακές συνθήκες της πειραματικής διάταξης^[14].

5.2 Χρήσιμες σχέσεις οκταεδρικών τάσεων-παραμορφώσεων

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε πιο εύκολα τα πειραματικά δεδομένα, κάνουμε χρήση της οκταεδρικής διατύπωσης των τάσεων. Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα τάσεων $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Έστω P ένα τυχαίο σημείο του τασικού χώρου, το οποίο δίνεται είτε με τις καρτεσιανές του συντεταγμένες P ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) είτε με τις κυλινδρικές του συντεταγμένες P(z, r, θ). Στο σχήμα 5.2 απεικονίζεται ο καρτεσιανός και ο κυλινδρικός τασικός χώρος.



Σχήμα 5. 2 (α) Τασικός χώρος καρτεσιανός ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) και κυλινδρικός (z, r, θ') (β) όψη από το αποκλίνων επίπεδο^[14].

Οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} \quad 5.1.a$$

$$r = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{\sqrt{3}} \quad 5.1.b$$

$$\cos \theta' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}{\sqrt{6} * r} \quad 5.1.c$$

Η οκταεδρική τάση ασκείται σε επίπεδο κάθετο στην τριχοτόμο του συστήματος των αξόνων των κύριων τάσεων και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} * \frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad 5.2$$

Συνεπώς μ' αυτήν την διατύπωση καταφέρνουμε να αναλύσουμε την τάση σ_{oct} σε δύο συνιστώσες:

- σ_0 : ορθή συνιστώσα της οκταεδρικής τάσης σ_{oct} (υδροστατική τάση)
- τ_0 : διατμητική συνιστώσα της οκταεδρικής τάσης σ_{oct} (αποκλίνουσα τάση)

Μ' αυτήν την διατύπωση καταφέρνουμε να έχουμε δύο συνιστώσες τάσεων όπου η σ_0 να προκαλεί την ογκομετρική αλλαγή του σώματος από όπου ασκείται, ενώ η τ_0 να συνδέεται με την αλλαγή του σχήματος του σώματος από όπου ασκείται.

Για να οριστεί πλήρως η οκταεδρική τάση θα πρέπει εκτός από τις τάσεις σ_0, τ_0 να γνωρίσουμε και την στροφική γωνία θ . Η στροφική γωνία θ ορίζεται ως η γωνία που

σηματίζει η αποκλίνουσα τάση τ_0 με την προβολή οποιουδήποτε άξονα στο αποκλίνον επίπεδο.

Οι τάσεις σ_0 , τ_0 καθώς και η στρωφική γωνία θ εκφράζονται συναρτήσει των κυρίων τάσεων $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ με βάσει τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{Z}{\sqrt{3}} \quad 5.3.a$$

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} \Rightarrow \tau_0 = \frac{r}{\sqrt{3}} \quad 5.3.b$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_0 - \sigma_3}{\sqrt{2} * \tau_0} = \cos \theta' \quad 5.3.c$$

Διαπιστώνεται λοιπόν ότι είναι αρκετά χρήσιμος ο προσδιορισμός των κυρίων τάσεων καθώς και των αντίστοιχων κύριων διευθύνσεων αν είναι γνωστή μια τυχαία εντατική κατάσταση ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$).

Ο μετασχηματισμός του τανυστή των τάσεων σε ένα σύστημα $P_{x'y'z'}$ όταν είναι γνωστές οι συνιστώσες του τανυστή σε ένα σύστημα P_{xyz} επιτυγχάνεται με την βοήθεια του παρακάτω συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \bullet \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx} * \cos^2(x', x) + \sigma_{yy} * \cos^2(x', y) + \sigma_{zz} * \cos^2(x', z) + \\ & 2 * \tau_{xy} * \cos(x', x) * \cos(x', y) + 2 * \tau_{yz} * \cos(x', y) * \cos(x', z) + \\ & 2 * \tau_{zx} * \cos(x', z) * \cos(x', x) \\ \bullet \sigma_{y'y'} &= \sigma_{yy} * \cos^2(y', y) + \sigma_{zz} * \cos^2(y', z) + \sigma_{xx} * \cos^2(y', x) + \\ & 2 * \tau_{yz} * \cos(y', y) * \cos(y', z) + 2 * \tau_{zx} * \cos(y', z) * \cos(y', x) + \\ & 2 * \tau_{xy} * \cos(y', x) * \cos(y', y) \\ \bullet \sigma_{z'z'} &= \sigma_{zz} * \cos^2(z', z) + \sigma_{xx} * \cos^2(z', x) + \sigma_{yy} * \cos^2(z', y) + \\ & 2 * \tau_{zx} * \cos(z', z) * \cos(z', x) + 2 * \tau_{xy} * \cos(z', x) * \cos(z', y) + \\ & 2 * \tau_{yz} * \cos(z', y) * \cos(z', z) \\ \bullet \tau_{x'y'} &= \sigma_{xx} * \cos(x', x) * \cos(y', x) + \sigma_{yy} * \cos(x', y) * \cos(y', y) + \sigma_{zz} * \\ & \cos(x', z) * \cos(y', z) + \\ & \tau_{xy} * [\cos(x', x) * \cos(y', y) + \cos(x', y) * \cos(y', x)] + \tau_{yz} * [\cos(x', y) * \\ & \cos(y', z) + \cos(x', z) * \cos(y', y)] + \tau_{zx} * [\cos(x', z) * \\ & \cos(y', x) + \cos(x', x) * \cos(y', z)] \\ \bullet \tau_{y'z'} &= \sigma_{yy} * \cos(y', y) * \cos(z', y) + \sigma_{zz} * \cos(y', z) * \cos(z', z) + \sigma_{xx} * \\ & \cos(y', x) * \cos(z', x) + \\ & \tau_{yz} * [\cos(y', y) * \cos(z', z) + \cos(y', z) * \cos(z', y)] + \tau_{zx} * [\cos(y', z) * \\ & \cos(z', x) + \cos(y', x) * \cos(z', z)] + \tau_{xy} * [\cos(y', x) * \\ & \cos(z', y) + \cos(y', y) * \cos(z', x)] \\ \bullet \tau_{z'x'} &= \sigma_{zz} * \cos(z', z) * \cos(x', z) + \sigma_{xx} * \cos(z', x) * \cos(x', x) + \sigma_{yy} * \\ & \cos(z', y) * \cos(x', y) + \\ & \tau_{zx} * [\cos(z', z) * \cos(x', x) + \cos(z', x) * \cos(x', z)] + \tau_{xy} * [\cos(z', x) * \\ & \cos(x', y) + \cos(z', y) * \cos(x', x)] + \tau_{yz} * [\cos(z', y) * \\ & \cos(x', z) + \cos(z', z) * \cos(x', y)] \end{aligned} \quad 5.4$$

Με την βοήθεια του συστήματος αυτού είναι δυνατόν να προσδιορισθεί ένα ειδικό σύστημα αναφοράς P_{123} , τέτοιο ώστε ο προκύπτων τανυστής να αποτελείται αποκλειστικώς από ορθές τάσεις, ενώ όλες οι διατμητικές τάσεις να είναι μηδενικές. Το συγκεκριμένο (και μοναδικό για κάθε σημείο του φορτιζόμενου σώματος) σύστημα αναφοράς, ονομάζεται κύριο και οι συνιστώσες του αντίστοιχου τανυστή των τάσεων κύριες τάσεις. Αποδεικνύεται ότι οι κύριες τάσεις είναι οι ρίζες της κυβικής εξίσωσης:

$$\sigma^3 - I_1 * \sigma^2 + I_2 * \sigma - I_3 = 0 \quad 5.5$$

Όπου I_1, I_2, I_3 καλούνται αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων επειδή διατηρούν σταθερή τιμή, ανεξαρτήτως του συστήματος συντεταγμένων στο οποίο αναφέρεται η εντατική κατάσταση τυχόντος σημείου του φορτιζόμενου σώματος. Οι ποσότητες αυτές ορίζονται:

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1 * \sigma_2 + \sigma_2 * \sigma_3 + \sigma_3 * \sigma_1) \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3 \end{aligned} \quad 5.6$$

ή με την βοήθεια των συνιστωσών του τυχόντος τανυστή των τάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_x * \sigma_y + \sigma_y * \sigma_z + \sigma_z * \sigma_x) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_x * \sigma_y * \sigma_z - \sigma_x * \tau_{zx}^2 - \sigma_y * \tau_{zx}^2 - \sigma_z * \tau_{xy}^2 + 2 * \tau_{xy} * \tau_{yz} * \tau_{zx} \end{aligned} \quad 5.7$$

Οι οκταεδρικές τάσεις συνδέονται με τις αναλλοίωτες ως εξής:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = I_1/3 \quad 5.8.a$$

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} = \sqrt{2 * \sigma_0^2 - \frac{2 * I_2}{3}} \quad 5.8.b$$

$$\cos(3 * \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\tau_0^3} * J_3 \quad 5.8.c$$

Όπου J_3 η τρίτη αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 * \delta_{ij}$.

Ομοίως έχω ανάλογες σχέσεις για τις παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = I_1/3 \quad 5.9.a$$

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}}{3} \quad 5.9.b$$

$$\cos(\delta) = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_3}{\sqrt{2} * \gamma_0} \quad 5.9.c$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που συνδέουν τις κύριες τάσεις ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) με τις κύριες παραμορφώσεις ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1 - \nu * (\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2 - \nu * (\sigma_1 + \sigma_3)}{E} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3 - \nu * (\sigma_1 + \sigma_2)}{E} \end{aligned} \quad 5.10$$

Στην συνέχεια εξάγουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις οκταεδρικές τάσεις με τις οκταεδρικές παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2 * \nu}{E} * \sigma_0 \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3 * K} \quad 5.11.a$$

$$\gamma_0 = \frac{1 + \nu}{E} * \tau_0 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\tau_0}{2 * G} \quad 5.11.b$$

Όπου K είναι το μέτρο συμπίεστότητας, $K = \frac{E}{3 * (1 - 2 * \nu)}$ 5.12.a

και G είναι το μέτρο διάτμησης, $G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)}$ 5.12.b

5.3 Καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos & Pavlovic

Οι Kotsovos and Pavlovic αναφέρουν 3 τρόπους μαθηματικής περιγραφής της παραμορφωσιακής κατάστασης του σκυροδέματος πριν την ρηγμάτωση:

1. Των τριών σταθερών
2. Των εσωτερικών τάσεων
3. Την συνδυαστική των (1) και (2)

Η 3^η προσέγγιση παρουσιάζεται ως πιο απλή και πιο εύκολα εφαρμόσιμη και γι αυτό εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε τα

χαρακτηριστικά των δυο πρώτων προσεγγίσεων που χρησιμοποιούνται ώστε να γίνει η εφαρμογή της (3).

Η πρώτη προσέγγιση των τριών σταθερών χρησιμοποιεί την οκταεδρική διατύπωση των τάσεων και των παραμορφώσεων και διαχωρίζει τις ογκομετρικές μεταβολές από τις μεταβολές που προκαλούν στρέβλωση αξιοποιώντας το μέτρο συμπίεστότητας $K = \frac{E}{3*(1-2*\nu)}$ και το μέτρο διάτμησης $G = \frac{E}{2*(1+\nu)}$.

Η Τρίτη σταθερά που περιλαμβάνεται σ'αυτην την προσέγγιση είναι η σταθερά H, όπου:

$$H = \frac{\tau_0}{\varepsilon_{0(d)}}, \text{ το (d) αναφέρεται στο μέγεθος όπου προκαλεί στρέβλωση (distortion)}$$

Η σταθερά αυτή, στην συνέχεια, τροποποιήθηκε εισάγοντας την εσωτερική τάση σ_{id} που βασίζεται στην δεύτερη προσέγγιση των εσωτερικών τάσεων.

Με την χρήση των τριών σταθερών μπορούμε να περιγράψουμε την συμπεριφορά του σκυροδέματος και οι καταστατικές σχέσεις οκταεδρικών τάσεων-παραμορφώσεων μπορούν να υπολογιστούν έχοντας οποιαδήποτε εντατική κατάσταση.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0(h)} + \varepsilon_{0(d)} = \frac{\sigma_0}{3 * K_s} + \frac{\tau_0}{H_s} \quad 5.13$$

$$\gamma_0 = \gamma_{0(d)} = \frac{\tau_0}{2 * G_s} \quad 5.14$$

Η δεύτερη προσέγγιση περιγράφεται μέσω της καμπύλης τάσεων-παραμορφώσεων στο σχήμα 5.3. Συνεπώς η χρήση της εσωτερικής τάσης σε συνδυασμό με τις σταθερές K_e, G_e ή E_e, ν_e θεωρούνται αρκετές ώστε να περιγράψουν την μη γραμμική συμπεριφορά του σκυροδέματος.

Η σχέση γενικευμένων τάσεων-παραμορφώσεων με βάση τον νόμο του Hooke είναι στην γενική της μορφή:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu_e}{E_e} * \sigma_{kk} * \delta_{ij} + \frac{(1 + \nu_e)}{E_e} * \sigma_{ij} \Rightarrow \quad 5.15$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{(3 * K_e - 2 * G_e)}{18 * K_e * G_e} * \sigma_{kk} * \delta_{ij} + \frac{1}{2 * G_e} * \sigma_{ij}$$

με K_e, G_e τα ελαστικά μέτρα συμπίεστότητας και διάτμησης αντίστοιχα. Μετατρέποντας τις τάσεις σε οκταεδρικές έχουμε ότι:

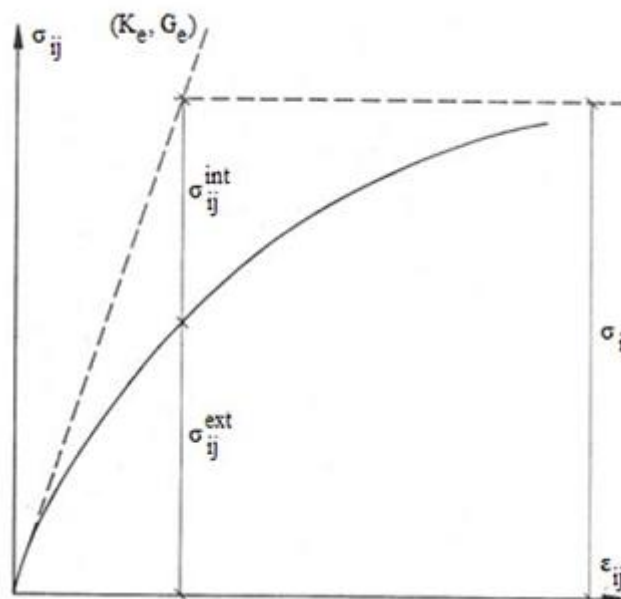
$$\sigma_{kk} = 3 * \sigma_0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad 5.15.a$$

$$2 * \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} \quad 5.15.b$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \quad 5.15.c$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 * \delta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 * \delta_{ij} + e_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_0}{3 * K_e} * \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2 * G_e} \quad 5.15.d$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 * \delta_{ij} \quad 5.15.e$$



Σχήμα 5. 3 Η ερμηνεία της εσωτερικής τάσης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό μη γραμμικών καταστατικών σχέσεων για το σκυρόδεμα.

Στο σκυρόδεμα λόγω της μη γραμμικότητας (πριν την μακρορηγμάτωση) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\sigma_0 = \sigma_{ij}^{ext} + \sigma_{ij}^{int} \quad 5.16$$

Δηλαδή η τάση χωρίζεται σε μια εξωτερική συνιστώσα που οφείλεται στην εξωτερική φόρτιση και σε μια εσωτερική λόγω της μικρορηγμάτωσης. Η συνιστώσα της παραμόρφωσης που οφείλεται στην εξωτερική τάση είναι αναστρέψιμη κατά την αποφόρτιση ενώ αυτή λόγω της εσωτερικής όχι.

Μετά την αναλυτική επεξεργασία των δεδομένων που απεικονίζεται στα σχήματα 5.4, 5.5 με την μέθοδο της παλινδρόμησης προέκυψαν οι παρακάτω σχέσεις $\sigma_0 - \varepsilon_0$ και $\tau_0 - \gamma_0$:

$$\varepsilon_{oh} = \frac{\sigma_0 + 3 * K_e * \sigma_0^b}{3 * K_e} \text{ για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \quad 5.17.a$$

$$\varepsilon_{oh} = \frac{\sigma_0 + 3 * a * b * K_e * (2 * f_c)^{b-1} * \sigma_0 + 3 * a * (1 - b) * K_e * (2 * f_c)^b * \sigma_0}{3 * K_e} \quad 5.17.b$$

$$\text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2$$

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0 + 2 * c * G_e * \tau_0^d}{2 * G_e} \quad 5.18$$

Όπου K_e, G_e το αρχικό μέτρο συμπίεστικότητας και το αρχικό μέτρο διάτμησης αντίστοιχα, για διάφορους τύπους σκυροδέματος. Τα μέτρα αυτά εκφράζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$K_e = 11000 + 3,2 * f_c \quad 5.19$$

$$G_e = 9224 + 136 * f_c + 3296 * 10^{-15} * f_c^{8,273} \quad 5.20$$

Όπου f_c είναι η αντοχή του σκυροδέματος σε μονοαξονική θλίψη και a, b, c, d παράμετροι που εξαρτώνται από την ποιότητα του υλικού και μπορούν επίσης να εκφραστούν συναρτήσει του f_c . Συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$b = 2 + 1,81 * 10^{-8} * f_c^{4,461} \quad 5.21$$

$$d = 2,12 + 0,183 * f_c \quad \text{για } f_c \leq 31,7MPa \quad 5.22.a$$

$$d = 2,7 \quad \text{για } f_c > 31,7MPa \quad 5.22.b$$

Το α ενσωματώνεται στην παράμετρο A ως εξής:

$$A = 3 * \alpha * K_e * f_c^{b-1} \quad 5.23$$

Οι σχέσεις 5.17.α, 5.17.b και 5.18 των $\varepsilon_{0(h)}$ και γ_0 πρέπει να είναι συμβατές με τον πρώτο όρο της εναλλακτικής διατύπωσης του νόμου του Hooke 5.15.d. Πρέπει δηλαδή η υδροστατική συνιστώσα της εσωτερικής τάσης $\sigma_{0(int)}^h = \sigma_{ih}$ που προκύπτει από την υδροστατική τάση $\sigma_0^{ext} \equiv \sigma_0$ να είναι:

$$\frac{\sigma_{ih}}{f_c} = A * \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^b \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \quad 5.24.a$$

$$\frac{\sigma_{ih}}{f_c} = 2^{b-1} * A * b * \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right) + 2^b * A * (1 - b) \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2 \quad 5.24.b$$

Με ανάλυση παλινδρόμησης των πειραματικών δεδομένων της σχέσης 5.24.a,b προκύπτουν οι εκφράσεις του A (και άρα και του α):

$$A = 0,516 \quad \text{για } f_c \leq 31,7MPa \quad 5.25.a$$

$$A = \frac{0,516}{1 + 0,0027 * (f_c - 31,7)^{2,397}} \quad \text{για } f_c > 31,7MPa \quad 5.25.b$$

Το c ενσωματώνεται στην παράμετρο C ως εξής:

$$C = 2 * c * G_e * f_c^{d-1} \quad 5.26$$

Ομοίως στην σχέση 5.18 του γ_0 πρέπει να συμβατή με τον πρώτο όρο της εναλλακτικής διατύπωσης του νόμου του Hooke 5.15.d. Πρέπει δηλαδή η αποκλίνουσα συνιστώσα της εσωτερική τάσης $\tau_{0(d)}^{int} \equiv \tau_{id}$ να είναι:

$$\frac{\tau_{id}}{f_c} = C * \left(\frac{\tau_0}{f_c}\right)^d \quad 5.27$$

Η σχέση 5.27 με ανάλυση παλινδρόμησης από τα πειραματικά αποτελέσματα δίνει το συντελεστή C ίσο με:

$$\frac{\tau_{id}}{f_c} = C * \left(\frac{\tau_0}{f_c}\right)^d \quad C = 3,573 \quad \text{για } f_c \leq 31,7MPa \quad 5.28.a$$

$$C = \frac{3,573}{1 + 0,0134 * (f_c - 31,7)^{1,414}} \quad \text{για } f_c > 31,7MPa \quad 5.28.b$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για $15MPa < f_c < 65MPa$. Για τιμές του f_c μικρότερες του 15Μρα ή για τιμές μεγαλύτερες του 65Μρα τα K, G θα είναι εκείνα που ισχύουν για f_c ίσο με 15Μρα και 65Μρα αντίστοιχα.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η προσομοίωση μπορεί να γίνει ως εξής:

a) με τη χρήση των κατάλληλων K, G ώστε να λαμβάνουν τις μη γραμμικότητες των $\sigma_0 - \varepsilon_{0(h)}$ και $\tau_0 - \gamma_{0(d)}$

b) σε συνδυασμό με τον υπολογισμό της εσωτερικής έντασης σ_{id} ώστε να λαμβάνεται υπόψη η σχέση μεταξύ $\tau_0 - \varepsilon_{0(d)}$.

Συμπερασματικά οι γενικευμένες σχέσεις τάσεων ανηγμένων παραμορφώσεων μπορούν να διατυπωθούν αναλύοντας κάθε εντατική κατάσταση σε μια υδροστατική και μία αποκλίνουσα συνιστώσα, οι οποίες αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα την ορθή και διατμητική οκταεδρική τάση. Συνεπώς οι οκταεδρικές παραμορφώσεις που

προκαλούνται από μια εξωτερικώς εφαρμοζόμενη εντατική κατάσταση (σ_0, τ_0) μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0(h)} + \varepsilon_{0(d)} = \frac{\sigma_0 + \sigma_{id}}{3 * K_s} \quad 5.29$$

$$\gamma_0 = \gamma_{0(d)} = \frac{\tau_0}{2 * G_s} \quad 5.30$$

όπου K_s, G_s είναι οι τέμνουσες εκφράσεις των μέτρων συμπιεστότητας και διάτμησης αντίστοιχα:

$$K_s = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, G_s = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \quad 5.31$$

ενώ η σ_{id} είναι η ισοδύναμη εσωτερική υδροστατική τάση, η οποία εξαρτάται από την ορθή οκταεδρική τάση σ_0 , τη διατμητική οκταεδρική τάση τ_0 και την μονοαξονική αντοχή σε θλίψη f_c του σκυροδέματος και ερμηνεύει την σύνδεση μεταξύ της αποκλίνουσας διατμητικής τάσης τ_0 και της αποκλίνουσας ανηγμένης παραμόρφωσης ε_{0d} .

Οι εφαπτομενικές εκφράσεις των μέτρων συμπιεστότητας και διάτμησης δίνονται από τις σχέσεις:

$$K_\tau = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0}, G_\tau = \frac{d\tau_0}{d\gamma_0} \quad 5.32$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τις παραμορφώσεις ε και γ με τις εκφράσεις τους από τις σχέσεις 5.29 και 5.30 προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{K_s}{K_e} = \frac{1}{1 + A * \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{b-1}} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \quad 5.33.a$$

$$\frac{K_s}{K_e} = \frac{1}{1 + 2^{b-1} * A * b - 2 * (b-1) * A * \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{-1}} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2 \quad 5.33.b$$

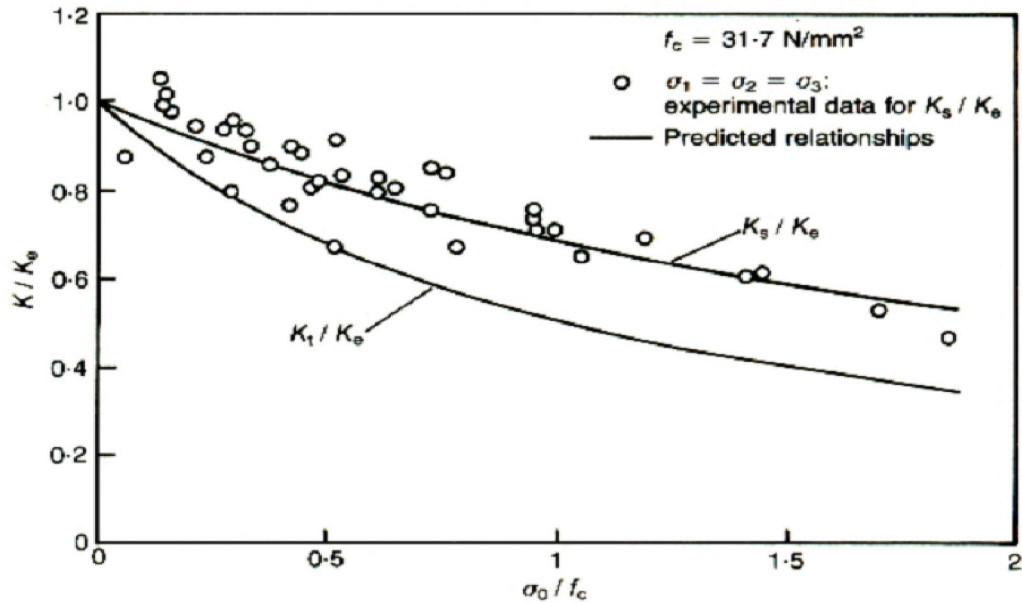
$$\frac{G_s}{G_e} = \frac{1}{1 + C * \left(\frac{\tau_0}{f_c}\right)^{d-1}} \quad 5.34.a$$

$$\frac{K_\tau}{K_e} = \frac{1}{1 + b * A * \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^{b-1}} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} \leq 2 \quad 5.35.a$$

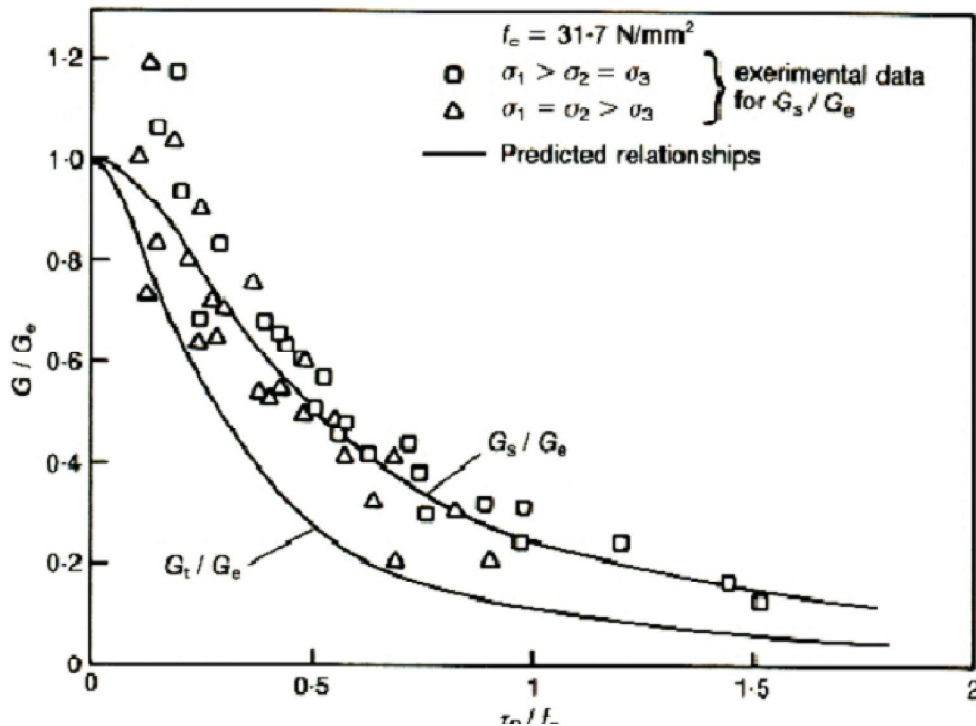
$$\frac{K_\tau}{K_e} = \frac{1}{1 + 2^{b-1} * A * b} \quad \text{για } \frac{\sigma_0}{f_c} > 2 \quad 5.35.b$$

$$\frac{G_s}{G_e} = \frac{1}{1 + d * C * \left(\frac{\tau_0}{f_c}\right)^{d-1}} \quad 5.34.b$$

Οι παραπάνω σχέσεις απεικονίζονται στα σχήματα 5.4 και 5.5.

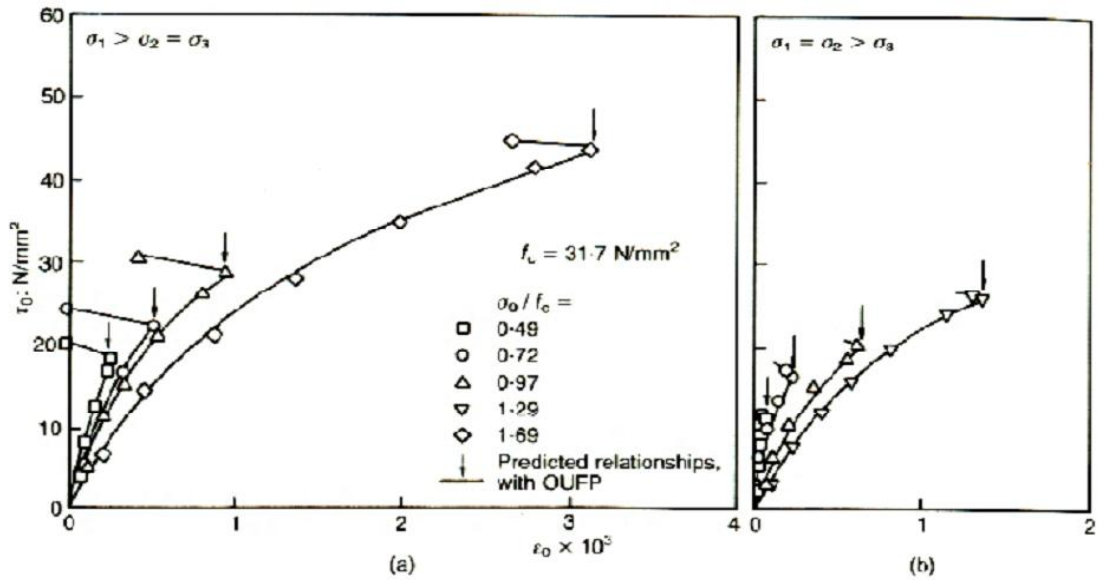


Σχήμα 5. 4 Τυπικές σχέσεις του τέμνοντος και του εφαπτομενικού μέτρου συμπίεστικότητας με την υδροστατική τάση σ_0 για συγκεκριμένη ποιότητα σκυροδέματος $f_c = 31,7 \text{ Mpa}^{[14]}$.

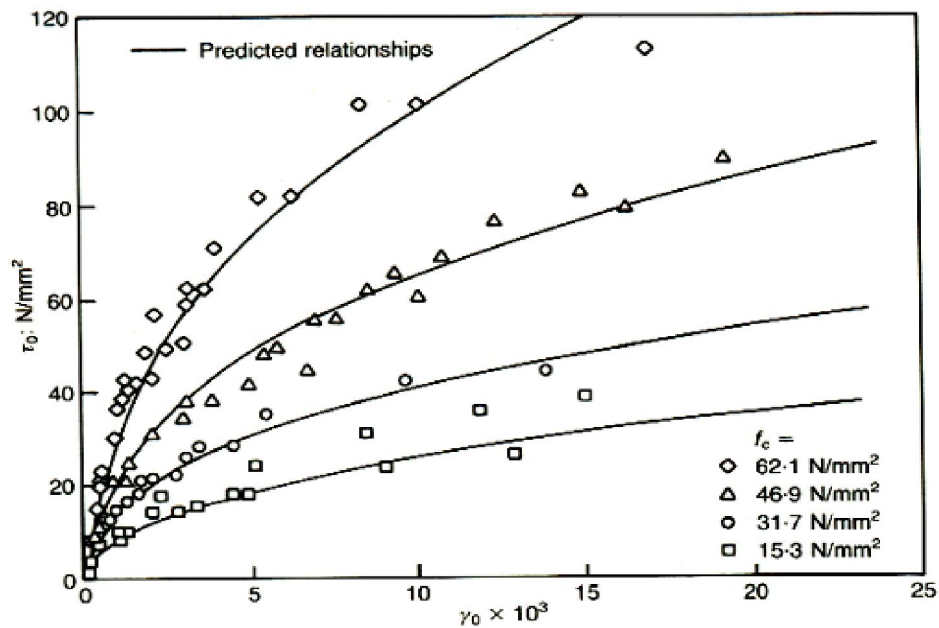


Σχήμα 5. 5 Τυπικές σχέσεις του τέμνοντος και του εφαπτομενικού μέτρου διάτμησης με την αποκλίνουσα τάση τ_0 για συγκεκριμένη ποιότητα σκυροδέματος $f_c = 31,7 \text{ Mpa}^{[14]}$.

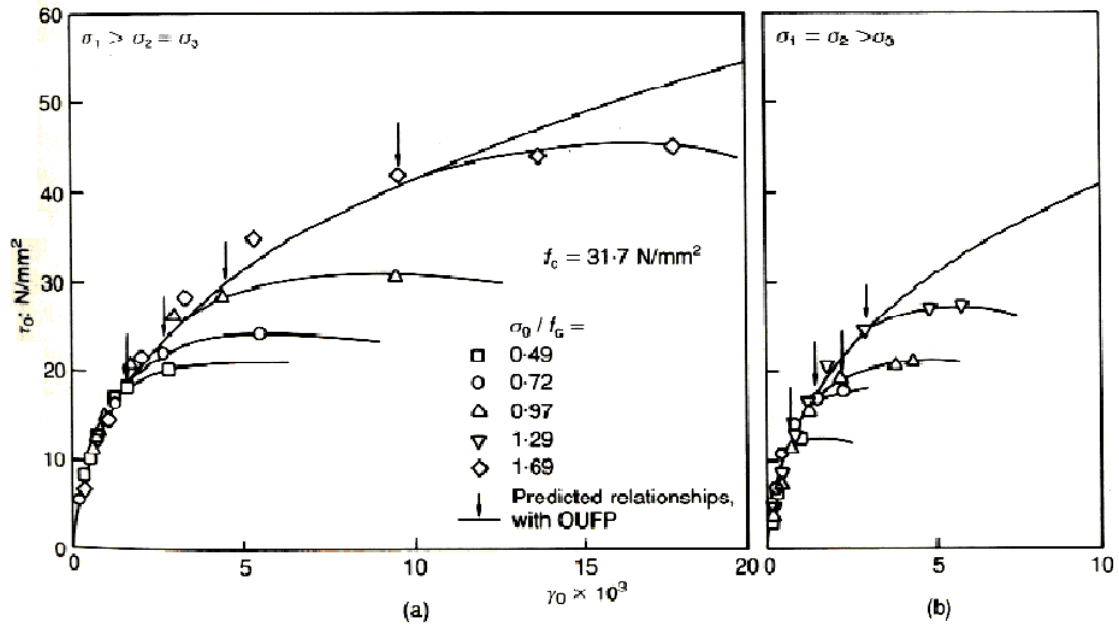
Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την σ_{id} που εκφράζει την σχέση $\tau_0 - \varepsilon_{0d}$ και αποτελεί την εσωτερική τάση που αναπτύσσεται στο δοκίμιο λόγω της μικρορηγματώσεως που χαρακτηρίζει το σκυροδέμα. Από τις καμπύλες των σχημάτων 5.6, 5.7 και 5.8 που περιγράφουν την σχέση $\sigma_0 - \varepsilon_0$, από τις σχέσεις $\tau_0 - \varepsilon_{0d}$ προκύπτει ο υπολογισμός της σ_{id} .



Σχήμα 5. 6 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης τ_0 με υδροστατική παραμόρφωση $\varepsilon_{0(d)}$ για διάφορους τύπους σκυροδέματος υπό καταπόνηση τάσεων $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ και $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ [14].

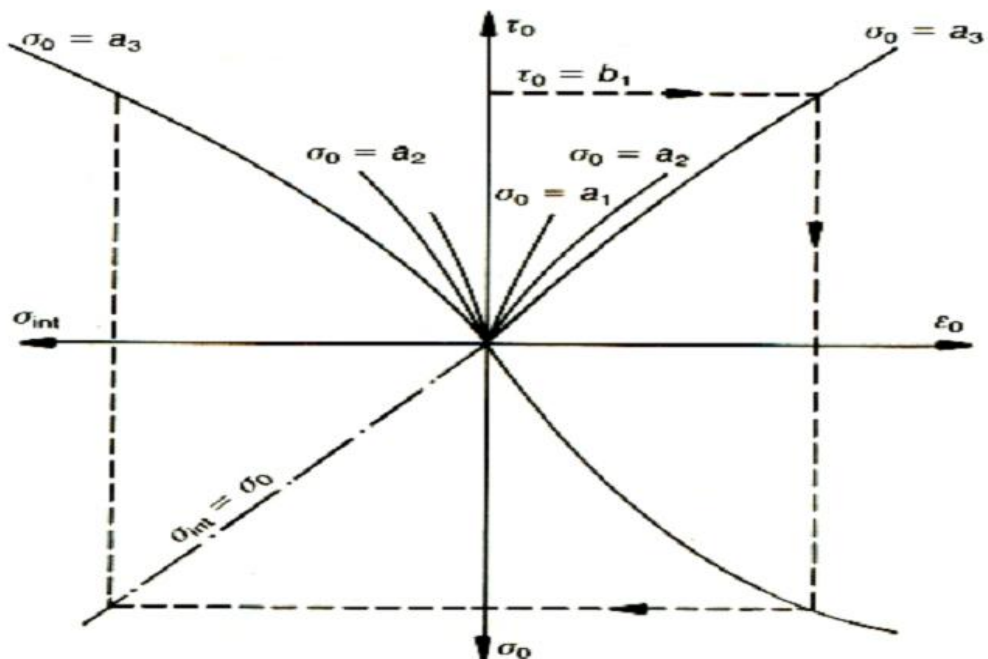


Σχήμα 5. 7 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης τ_0 με οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση γ_0 για διάφορους τύπους σκυροδέματος [14].



Σχήμα 5. 8 Σχέση διατμητικής οκταεδρικής τάσης τ_0 με οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση γ_0 για διάφορες τιμές υδροστατικής πίεσης σ_0 υπό καταπόνηση τάσεων $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ και $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ^[14].

Συγκεκριμένα, για κάποια συγκεκριμένη τιμή $\varepsilon_{0(d)}$ που αντιστοιχεί στην εντατική κατάσταση (σ_0, τ_0) , η υδροστατική τάση (που μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά κάποια τιμή της σ_{id}) μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση $\sigma_0 - \varepsilon_{0(h)}$ (Σχήμα 5.8). Με αυτό τον τρόπο η σχέση $\tau_0 - \varepsilon_{0(d)}$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε σχέση $\sigma_{id} - \tau_0$. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται σχηματικά στο Σχήμα 5.9.



Σχήμα 5. 9 Υπολογισμός της εσωτερικής τάσης σ_{id} για οποιοδήποτε συνδυασμό υδροστατικής και αποκλίνουσας τάσης (σ_0, τ_0) ^[14].

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\sigma_{id}}{f_c} = D * \left(\frac{\tau_0}{f_c}\right)^n \quad 5.36.a$$

με

$$D = \frac{k}{1 + l * \left(\frac{\sigma_0}{f_c}\right)^m} \quad 5.36.b$$

Τα k,l,m,n είναι παράμετροι, οι οποίες βασίζονται στη μονοαξονική αντοχή σε θλίψη του σκυροδέματος και μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$k = \frac{4}{1 + 1,087 * (f_c - 15)^{0,23}} \quad 5.37.a$$

$$l = 0,222 + 0,01086 * f_c - 0,000122 * f_c^2 \quad 5.37.b$$

$$m = -2,415 \text{ για } f_c \leq 31,7MPa \quad 5.37.c$$

$$m = -3,531 + 0,0352 * f_c \text{ για } f_c > 31,7MPa \quad 5.37.d$$

$$n = 1,0 \text{ για } f_c \leq 31,7MPa \quad 5.37.e$$

$$n = 0,3124 + 0,0217 * f_c \text{ για } f_c > 31,7MPa \quad 5.37.f$$

Ομοίως για $f_c > 65MPa$ και $f_c < 15MPa$ οι παραπάνω παράμετροι έχουν σταθερές τιμές και ίσες με αυτές που αντιστοιχούν σε $f_c = 65MPa$ και $f_c = 15MPa$.

Όταν η εντατική κατάσταση είναι γνωστή, τότε τα μεγέθη σ_0, τ_0, θ μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\sigma_0 = \frac{I_1}{3}$$

$$\tau_0 = \sqrt{\left(2 * \sigma_0^2 - \frac{2 * I_2}{3}\right) * \frac{I_1}{3}} \quad 5.38$$

$$\cos(3 * \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\tau_0^3} * J_3$$

Όπου I_1, I_2 είναι η πρώτη και η δεύτερη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων, ενώ J_3 είναι η Τρίτη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων όπου,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 * \delta_{ij}$$

Δεδομένου ότι η σ_{id} είναι υδροστατική τάση οι 5.29 και 5.30 είναι ισοδύναμες με την

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{id} * \delta_{ij}}{2 * G_s} - \frac{3 * \nu_s}{E_s} * (\sigma_0 + \sigma_{id}) * \delta_{ij} \quad 5.39$$

Από τις εκφράσεις των μέτρων συμπίεστικότητας και διάτμησης μπορούν εύκολα να προκύψουν οι σχέσεις που δίνουν το μέτρο ελαστικότητας Young E και το λόγο Poisson ν .

$$E = \frac{9 * K * G}{3 * K + G} \quad 5.40$$

$$\nu = \frac{3 * K - 2 * G}{3 * K + 2 * G} \quad 5.41$$

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις του σκυροδέματος κατά την διεύθυνση της κύριας τάσης προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_{int}}{E} - \nu * \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + 2 * \sigma_{int}}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_{int}}{E} - \nu * \frac{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 * \sigma_{int}}{E} \quad 5.42$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 + \sigma_{int}}{E} - \nu * \frac{\sigma_2 + \sigma_1 + 2 * \sigma_{int}}{E}$$

Η διαδικασία για τον υπολογισμό των καθολικών παραμορφώσεων από τις καθολικές τάσεις έχει ως εξής:

- Οι οκταεδρικές τάσεις (σ_0, τ_0) υπολογίζονται είτε από τις κύριες τάσεις σ_1, σ_2 και σ_3 είτε από τις καθολικές τάσεις σ_{ij}
- Υπολογίζονται τα K_s, G_s, E_s και ν
- Υπολογίζεται η υδροστατική διόρθωση σ_{id}
- Υπολογίζονται οι καθολικές παραμορφώσεις ε_{ij}

Ο υπολογισμός της παραμορφωσιακής μεταβολής $\Delta \varepsilon$ έχοντας υπολογίσει την μεταβολή των τάσεων $\Delta \sigma$ ακολουθεί την ίδια διαδικασία κάνοντας όμως χρήση των εφαπτομενικών εκφράσεων των σταθερών K_τ, G_τ, E_τ και ν .

5.4 Συνθήκες αποφόρτισης-επαναφόρτισης

Το κριτήριο που περιγράφει την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε (φόρτιση ή αποφόρτιση) στηρίχτηκε στην θεωρία που προτείνεται στο άρθρο Kotsonos & Spiliopoulos 1998. Σύμφωνα με αυτό αποφόρτιση από κάποιο εντατικό σημείο και επαναφόρτιση με επιστροφή σε αυτό μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από της αρχικές ελαστικές μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Εφόσον η μη γραμμική αποκλίνουσα τάση είναι πολύ μεγαλύτερη από την υδροστατική, τότε το κριτήριο φόρτισης/επαναφόρτισης βασίζεται στην σύγκριση της τρέχουσας αποκλίνουσας τάσης με την μέγιστη αποκλίνουσα τάση που έχει προκύψει μέχρι το τρέχων βήμα. Συγκεκριμένα αν η τρέχουσα αποκλίνουσα τάση τ_0 είναι μεγαλύτερη από την τ_{0max} τότε βρισκόμαστε σε κατάσταση φόρτισης, διαφορετικά βρισκόμαστε σε κατάσταση αποφόρτισης.

5.5 Κριτήριο Αστοχίας

Κριτήριο αστοχίας ονομάζουμε την σχέση που ικανοποιείται την στιγμή της μετάβασης του υλικού από την ελαστική κατάσταση (αντιστρεπτά φαινόμενα) στην κατάσταση διαρροής (μη αντιστρεπτά φαινόμενα). Η οκταεδρική διατύπωση των τάσεων χρησιμοποιείται και εδώ προκειμένου να περιγραφεί η επιφάνεια των τάσεων η οποία επιφέρει ρηγμάτωση στο σκυρόδεμα. Συνεπώς πρέπει να ορίσουμε τον τασικό χώρο στο ορθογώνιο σύστημα των κυρίων τάσεων $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Αποδεικνύεται πειραματικά ότι στην σύνθετη εντατική κατάσταση η αστοχία εξαρτάται από όλες τις τρεις κύριες τάσεις σ_1, σ_2 και σ_3 και όχι μόνο από την μέγιστη εξ αυτών σ_1 . Τα κριτήρια αστοχίας ποικίλλουν, αναλόγως των υλικών που περιγράφουν (όλκιμα ή ψαθυρά) και των υποθέσεων επί των οποίων στηρίζονται. Παρόλα αυτά οφείλουν να έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά:

- Ανεξαρτησία από το σύστημα αναφοράς. Η αστοχία ως φυσικό φαινόμενο, δεν μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς για τον τανυστή των τάσεων.
- Ανεξαρτησία της αστοχίας από την υδροστατική πίεση. Έχει αποδειχθεί, στην πλειονότητα των υλικών, ότι η επιβολή υδροστατικής πίεσης (οσονδήποτε μεγάλης) δεν μπορεί να επιφέρει αστοχία, δεδομένου ότι η συμβολή της στην αλλαγή σχήματος του υλικού είναι αμελητέα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση που περιγράφει την αστοχία δεν εξαρτάται από την πρώτη αναλλοίωτη $I_1(T_\sigma)$, που είναι το τριπλάσιο της υδροστατικής πίεσεως, αλλά θα αποτελεί συνάρτηση των άλλων δύο $I_2(T_\sigma)$ και $I_3(T_\sigma)$ ή εναλλακτικά των $I_2(D_\sigma)$ και $I_3(D_\sigma)$ αναλλοίωτων του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων.

Ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων ορίζεται ως εξής:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} * \sigma_0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - p * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5.43$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases} \quad 5.44$$

και p είναι η υδροστατική πίεση

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \Rightarrow p = \frac{I_1(T_\sigma)}{3} \quad 5.45$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$I_1(D_\sigma) = 0 \quad 5.46$$

Αν λοιπόν εκμεταλλευτούμε τα επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν ως τώρα και την γεωμετρική αναπαράσταση της εντατικής κατάστασης τότε η εξίσωση αστοχίας θα είναι εξίσωση ενός κυλινδρικού πρίσματος στο χώρο των κυρίων τάσεων, του οποίου ο άξονας είναι η γραμμή $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Είναι επομένως αρκετό, στη συνέχεια, να εξετάσουμε, μόνο το ίχνος της κυλινδρικής αυτής επιφάνειας επί του αποκλίνοντος επιπέδου. Το αποκλίνων επίπεδο διέρχεται από την αρχή, O , του συστήματος αξόνων $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ και είναι κάθετο στην γραμμή $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Το ίχνος αυτό, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τους άξονες $1', 2', 3'$ (οι προβολές των κυρίων αξόνων επί του αποκλίνοντος επιπέδου), ονομάζεται καμπύλη αστοχίας. Η καμπύλη αστοχίας έχει τις εξής ιδιότητες:

- Δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, O , δεδομένου ότι η αστοχία συνδέεται με σημαντικές διατμητικές τάσεις.
- Είναι κυρτή, δηλαδή πρέπει να κείται εξ ολοκλήρου από τη μία πλευρά της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο της.

Η επιφάνεια αστοχίας που χρησιμοποιείται στο σκυρόδεμα, κάνοντας χρήση των οκταεδρικών τάσεων φαίνονται στο σχήμα 5.10. Για να προσδιορίσουμε την περιβάλλουσα αστοχίας αρκεί να προβάλλουμε την επιφάνεια αστοχίας στο αποκλίνων επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο στην διεύθυνση της σ_0 . Η περιβάλλουσα καμπύλη μας δείχνει τα όρια της μέγιστης επιτρεπόμενης τιμής της μέγιστης αποκλίνουσας τάσης τ_{0u} . Η μέγιστη τιμή τ_{0u} υπολογίζονται από την υδροστατική τάση σ_0 και την γωνία θ . Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της αποκλίνουσας τάσης τ_0 με την προβολή οποιουδήποτε άξονα του συστήματος

αξόνων των κυρίων τάσεων στο αποκλίνων επίπεδο. Η τιμή της τ_{0u} δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tau_{0u} = \frac{2 * \tau_{0c} * (\tau_{0c}^2 - \tau_{0e}^2) * \cos \theta + \tau_{0c} * (2 * \tau_{0e} - \tau_{0c}) * \cos \theta * \sqrt{[4 * (\tau_{0c}^2 - \tau_{0e}^2) * \cos^2 \theta + 5 * \tau_{0c}^2 - 4 * \tau_{0c} * \tau_{0e}]}}{4 * (\tau_{0c}^2 - \tau_{0e}^2) * \cos^2 \theta + (2 * \tau_{0e} - \tau_{0c})}$$

για $60^\circ < \theta < 0^\circ$ 5.47

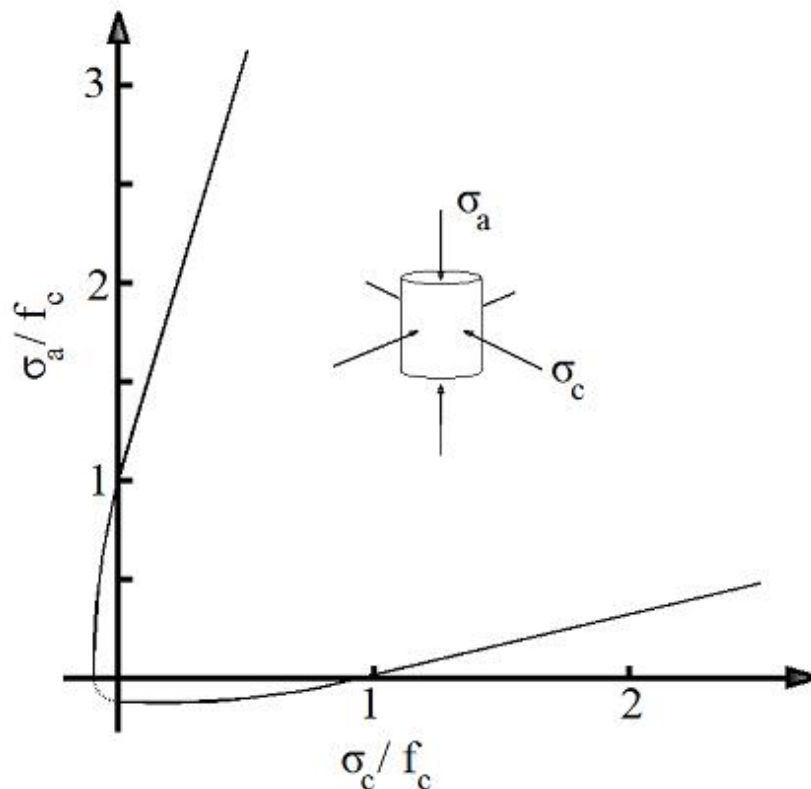
Η επιφάνεια που περιγράφεται από την παραπάνω σχέση, είναι μια ομαλή κυρτή επιφάνεια της οποίας οι εφαπτόμενες είναι κάθετες στις διευθύνσεις των τάσεων τ_{0e} και τ_{0c} για $\theta = 0^\circ$ και $\theta = 60^\circ$ αντίστοιχα (σχήμα 5.11).

Οι αναλυτικές εκφράσεις των τ_{0e} και τ_{0c} προκύπτουν από την ανάλυση πειραματικών αποτελεσμάτων και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

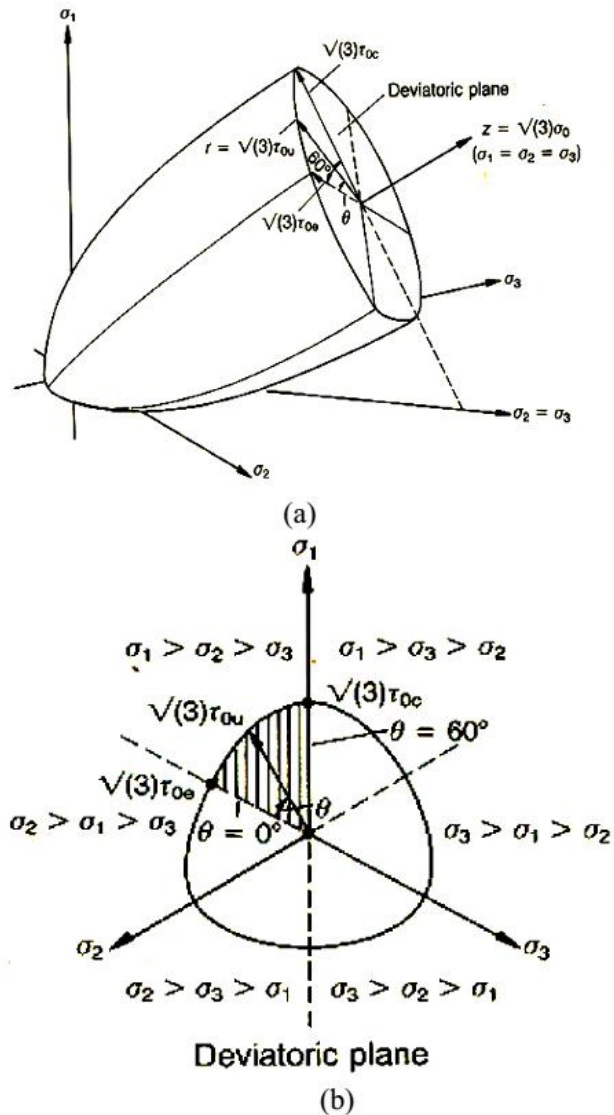
$$\frac{\tau_{0c}}{f_c} = 0,944 * \left(\frac{\sigma_0}{f_c} + 0,05 \right)^{0,724} \quad 5.48.a$$

$$\frac{\tau_{0e}}{f_c} = 0,633 * \left(\frac{\sigma_0}{f_c} + 0,05 \right)^{0,857} \quad 5.48.b$$

Με τις παραπάνω σχέσεις, υπολογίζουμε τα μεγέθη σ_0 , τ_{0e} και τ_{0c} και με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να καθορίσουμε πλήρως την επιφάνεια αστοχίας.



Σχήμα 5. 10 Η τομή της επιφάνειας αστοχίας του σκυροδέματος με το επίπεδο που ορίζεται από ένα διαγώνιο άξονα και έναν κύριο άξονα του συστήματος αξόνων των κυρίων τάσεων^[14].



Σχήμα 5. 11 Σχηματική αναπαράσταση της επιφάνειας μέγιστης αντοχής (α) Προοπτικό στο χώρο των τάσεων (β) Εγκάρσια τομή της επιφάνειας αστοχίας με το αποκλίνων επίπεδο^[14].

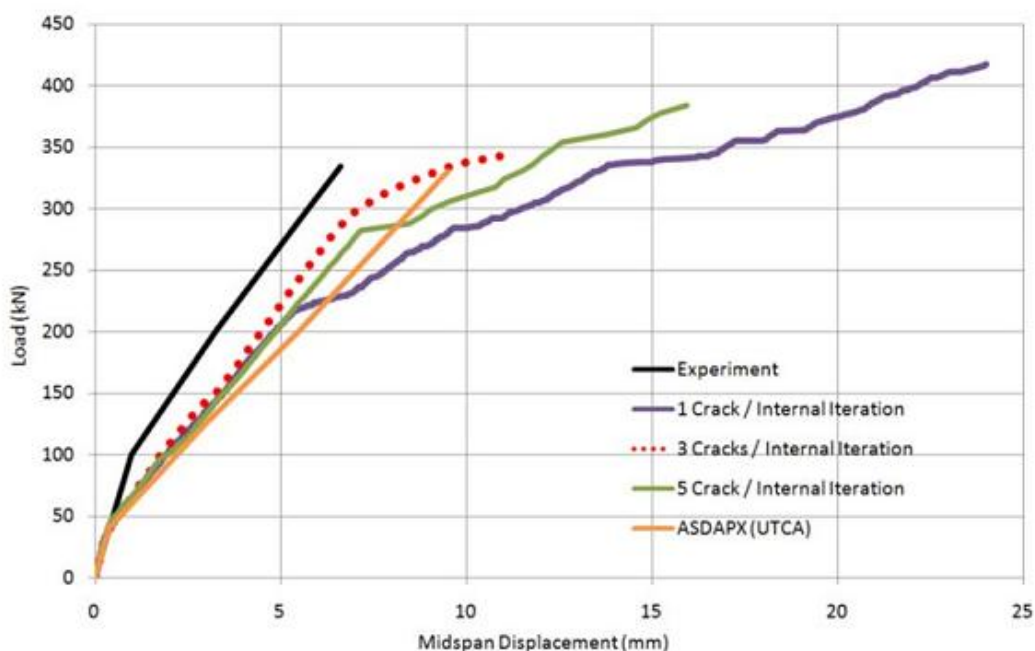
5.6 Το τροποποιημένο καταστατικό προσομοίωμα των Kotsovos & Pavlovic

Παρατηρήθηκαν αριθμητικές αστάθειες κατά την χρήση του τρισδιάστατου καταστατικού νόμου του υλικού σε συνδυασμό με την προσέγγιση της διανεμημένης ρηγμάτωσης. Συγκεκριμένα η αδυναμία σύγκλισης του μοντέλου εμφανίζεται όταν παρουσιάζεται τοπική ρηγμάτωση η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της φέρουσας ικανότητας της κατασκευής αλλά όχι την κατάρρευσή της. Αυτή η αστάθεια εισάγεται μέσω της μόρφωσης του καταστατικού μητρώου $[E](6 \times 6)$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται αρκετοί μηδενικοί διαγώνιοι όροι ή αρνητικοί στο μητρώο δυσκαμψίας. Επιπλέον όταν ανοίγουν αρκετές ρωγμές οι υπολειπόμενες

εσωτερικές τάσεις μετατρέπονται σε δυνάμεις που δημιουργούν αστάθεια και οδηγούν την επαναληπτική αριθμητική μέθοδο Newton-Raphson του αλγορίθμου να αποκλίνει.

Οι Kotsovos & Pavlovic χρησιμοποίησαν εξαεδρικά στοιχεία 20 και 27 κόμβων και 3x3 κανόνα ολοκλήρωσης. Για να εξαλείψουν τα προβλήματα σύγκλισης περιόρισαν τον αριθμό των ρωγμών που μπορούν να ανοίξουν σε κάθε βήμα Newton-Raphson. Συγκεκριμένα θεώρησαν ότι σε κάθε βήμα μπορούν να ανοίξουν 2 ή 3 ρωγμές. Με αυτόν τον τρόπο κατάφεραν να ελέγξουν τον αριθμό των ρωγμών και να εξαλείψουν τα προβλήματα σύγκλισης. Παρόλα αυτά ο καταστατικός νόμος του υλικού προέκυπτε μη αντικειμενικός και τα αποτελέσματα των αριθμητικών εφαρμογών τους επηρεάζονταν αρκετά από τον καθορισμό του αριθμού των επιτρεπόμενων ρωγμών και αυτό οδηγούσε σε υπερεκτίμηση της αντοχής του υπό εξέταση φορέα από οπλισμένο σκυρόδεμα.

Τα αριθμητικά προβλήματα απεικονίζονται στο σχήμα 5.12 όπου παρουσιάζεται η καμπύλη φορτίου- μετατόπισης για μία αμφιέριστη δοκό από οπλισμένο σκυρόδεμα χωρίς συνδετήρες. Στο σχήμα παρουσιάζεται η καμπύλη που προκύπτει χωρίς κανένα περιορισμό στο άνοιγμα των ρωγμών, και οι καμπύλες που προκύπτουν με έχοντας ορίσει σαν επιτρεπόμενο όριο 1,3,5 ρωγμές ανά εσωτερική επανάληψη. Παρατηρούμε πως αυτός ο περιορισμός του αριθμού των ρωγμών επηρεάζει αρκετά τις καμπύλες ιδιαίτερα στον μετελαστικό κλάδο, γεγονός που επισημαίνει περισσότερο τις αδυναμίες αυτού του μοντέλου.



Σχήμα 5. 12 Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης και επιρροή διαφορετικού μέγιστου επιτρεπόμενου αριθμού ρωγμών ανά επανάληψη Newton-Raphson^[14].

Οι Λυκίδης και Σπηλιόπουλος πρότειναν έναν ενιαίο τρόπο αντιμετώπισης ανοίγματος των ρωγμών όπου κανένας περιορισμός ως προς το άνοιγμα των ρωγμών

δεν λαμβάνει χώρα. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε σημείο Gauss μπορεί να ρηγματωθεί εφόσον η αντίστοιχη αποκλίνουσα τάση φτάσει την μέγιστή της τιμή τ_{0u} . Εφάρμοσαν την παραπάνω μέθοδο χρησιμοποιώντας εξαεδρικά στοιχεία 27 κόμβων και κανόνα ολοκλήρωσης 3x3x3, γεγονός όμως που οδήγησε σε μεγάλο υπολογιστικό κόστος και χρόνο ακόμη και για μικρής κλίμακας μοντέλα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία για την προσομοίωση του σκυροδέματος χρησιμοποιήθηκαν ισοπαραμετρικά 8 κομβικά εξαεδρικά στοιχεία με κανόνα ολοκλήρωσης 2x2x2. Επίσης εφαρμόστηκε ένας τροποποιημένος καταστατικός νόμος των Kotsinos & Pavlovic καθώς και η ενιαία αντιμετώπιση των ρωγμών που πρότειναν οι Λυκίδης και Σπηλιόπουλος. Μέσα από τις αριθμητικές εφαρμογές φαίνεται πως το προτεινόμενο μοντέλο παράγει αντικειμενικά αποτελέσματα και είναι αριθμητικά ευσταθές.

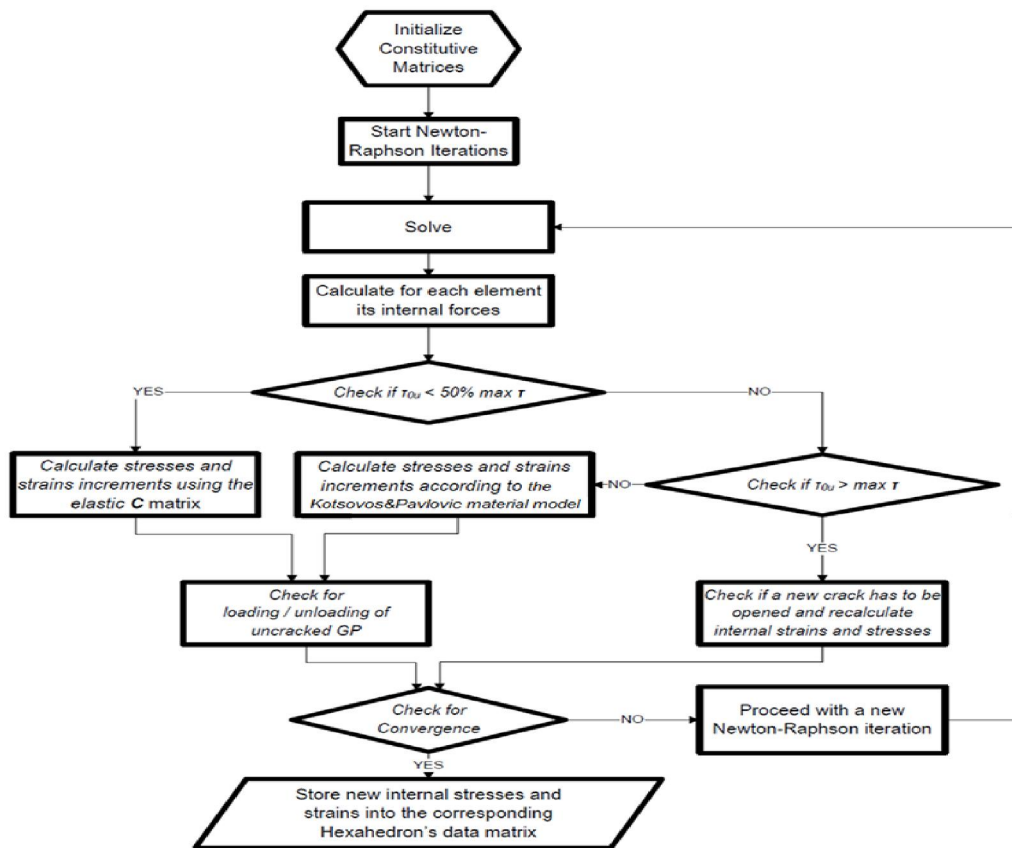
Στο καταστατικό προσομοίωμα του σκυροδέματος των Kotsinos & Pavlovic, το τέμνον μέτρο συμπίεστικότητας K_s καθώς και το τέμνον μέτρο διάτμησης G_s αλλάζουν τιμή ακόμα και όταν οι τάσεις που αναπτύσσονται είναι αρκετά μικρότερες από τις τάσεις αντοχής ($\tau_{0u} \ll \max\tau$). Αυτό συμβαίνει επειδή οι τιμές τους εξαρτώνται από τις τιμές της υδροστατικής και αποκλίνουσας συνιστώσας (σ_0, τ_0). Αυτή λοιπόν η ενημέρωση των μητρώων στιβαρότητας των εξαεδρικών στοιχείων αποτελεί επιπλέον υπολογιστική επιβάρυνση χωρίς να επιφέρει βελτίωση στην γραμμική και στην μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού.

Επιπλέον η ενημέρωση των μητρώων δυσκαμψίας στα μη ρηγματωμένα στοιχεία δημιουργεί επιπρόσθετες δυνάμεις οι οποίες προκαλούν αριθμητική αστάθεια στην μη γραμμική διαδικασία επίλυσης. Έχοντας λοιπόν να επιλύσουμε ένα αριθμητικά παθογενές πρόβλημα όταν συμβαίνει ρηγματώση των στοιχείων, τα αρηγμάτωτα εξαεδρικά στοιχεία εισάγουν επιπρόσθετη αστάθεια και αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος μέσω της μόρφωσης του καταστατικού μητρώου του υλικού και την απαίτηση για την συνεχή αναβάθμιση των μητρώων στιβαρότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις αριθμητικές δυσκολίες, προτείνεται μια τροποποίηση όσον αφορά τον αριθμητικό χειρισμό του καταστατικού νόμου των Kotsinos & Pavlovic. Μετά από παραμετρική διερεύνηση καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αν η μέγιστη αποκλίνουσα τάση τ_{0u} σε κάποιο σημείο Gauss είναι μικρότερη του 50% της αντίστοιχης αντοχής, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ελαστικό καταστατικό μητρώο E , σύμφωνα με την σχέση 5.49. Δηλαδή μόνο όταν η αποκλίνουσα τάση ξεπερνά το 50% της αντίστοιχης αντοχής τότε χρησιμοποιείται ο μη γραμμικός νόμος υλικού και το καταστατικό μητρώο υπολογίζεται ανανεώνοντας τα επαπτομενικά μέτρα συμπίεστικότητας και διάτμησης K_τ και G_τ αντίστοιχα. Το σχήμα 5.13 απεικονίζεται το διάγραμμα ροής που δείχνει την πορεία που ακολουθεί ο αλγόριθμος όσον αφορά τον χειρισμό του καταστατικού νόμου του υλικού.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} C & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & C & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2} \end{bmatrix}, A = \frac{E}{(1 + \nu)}, B = \frac{A * \nu}{(1 - 2 * \nu)}, C = A + B \quad 5.49$$

Όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και ν ο λόγος Poisson.



Σχήμα 5. 13 Διάγραμμα ροής του τροποποιημένου καταστατικού προσομοιώματος του σκυροδέματος^[14].

5.7 Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής (smeared crack modeling)

Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής λαμβάνει υπόψη της την ρηγματώση περιοχών μέσω της τροποποίησης του μητρώου στιβαρότητας και των τάσεων στα σημεία Gauss. Αυτή η προσέγγιση μας δίνει την δυνατότητα να προσομοιώσουμε την κάθε ρωγμή χωρίς να αλλάξουμε την διακριτοποίηση του φορέα ,όπως γίνεται στην θεώρηση της διακριτής ρωγμής. Στην θεώρηση της διακριτής ρωγμής, η δημιουργία

μιας ασυνέχειας ρηγμάτωσης προσομοιώνεται με επαναδιακριτοποίηση του φορέα και διαχωρισμό των κόμβων εκατέρωθεν μιας ρωγμής. Αυτή η μέθοδος δεν θεωρείται εύχρηστη όσον αφορά την προσομοίωση του σκυροδέματος καθώς απαιτεί αρκετά πολύπλοκες προγραμματιστικές τεχνικές λόγω της επαναδιακριτοποίησης κατά την διάρκεια της ρηγμάτωσης.

Στην μέθοδο της διανεμημένης ρηγμάτωσης, η δημιουργία μια ρωγμής σε ένα σημείο Gauss ισοδυναμεί με ένα άπειρο αριθμό μικρορηγματώσεων διανεμημένων σε όλο τον όγκο του στοιχείου.

Διακρίνουμε δυο είδη προσομοιώματος διανεμημένης ρωγμής. Στο προσομοίωμα σταθερής διανεμημένης ρωγμής (fixed smeared crack model) η ρωγμή διαμορφώνεται κάθετα στη διεύθυνση της μέγιστης εφελκυστικής τάσης και παραμένει σε αυτήν την διεύθυνση για το υπόλοιπο της ανάλυσης. Αντίθετα στο εναλλακτικό προσομοίωμα της στρεπτόμενης διανεμημένης ρωγμής (rotating crack model), το επίπεδο της ρωγμής μπορεί να στρέφεται ανάλογα με το πώς μετασχηματίζεται το σύστημα των κυρίων τάσεων κατά τη διάρκεια της ανάλυσης.

Στον προτεινόμενο κώδικα ReConAn χρησιμοποιείται η προσέγγιση της σταθερής διανεμημένης ρηγμάτωσης όπως διατυπώθηκε από τους Kotsovos & Pavlovic η οποία βασίστηκε σε πειραματικές δοκιμές υπό τριαξονικές εντατικές καταστάσεις και αντιμετωπίζει τη ρηγμάτωση ως πλήρη απότομη απώλεια της έντασης, δηλαδή ως πλήρη ψαθυρή.

Στην μη γραμμική ανάλυση θεωρείται πως το φορτίο προσ αυξάνεται βαθμιαία και σε κάθε προσ αύξηση πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας του φορέα. Σε κάθε επαυξητικό βήμα οι αντίστοιχες τάσεις ($\Delta\sigma$) στα σημεία Gauss συνδέονται με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις ($\Delta\varepsilon$) μέσω του μητρώου καταστατικότητας C.

$$\Delta\sigma = C * \Delta\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2G + \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 2G + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad 5.50$$

Όπου

$$\mu = \frac{\nu * E}{(1 - \nu) * (1 - 2 * \nu)} \quad 5.50.a$$

ή

$$\mu = K - \frac{2 * G}{3} \quad 5.50.b$$

η σταθερά του Lamé.

Κατά την διάρκεια της επίλυσης η αποκλίνουσα τάση σε ένα σημείο Gauss μπορεί να ξεπεράσει την αντίστοιχη τάση αντοχής. Δηλαδή οι τάσεις σε αυτό το σημείο

ολοκλήρωσης να βγουν έξω από την επιφάνεια αστοχίας με αποτέλεσμα το μηδενισμό της στιβαρότητας και συνεπώς το σχηματισμό ρωγμών κάθετα στην διεύθυνση της κύριας εφελκυστικής δύναμης. Εάν θεωρήσουμε ότι δημιουργείται στη διεύθυνση z' σε ένα νέο τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων x', y', z' τότε η καταστατική σχέση παίρνει της εξής μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{x'} \\ \Delta\sigma_{y'} \\ \Delta\sigma_{z'} \\ \Delta\tau_{x'y'} \\ \Delta\tau_{y'z'} \\ \Delta\tau_{z'x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2G + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{x'} \\ \Delta\varepsilon_{y'} \\ \Delta\varepsilon_{z'} \\ \Delta\gamma_{x'y'} \\ \Delta\gamma_{y'z'} \\ \Delta\gamma_{z'x'} \end{Bmatrix} \quad 5.51$$

Με αυτόν τρόπο, παρατηρούμε ότι κατά την δημιουργία της ρωγμής δεν παρουσιάζεται ισοτροπική συμπεριφορά του υλικού. Συνεπώς χρειάζεται να μεταφέρουμε το μητρώο C' στους καθολικούς άξονες. Άρα χρειάζεται να μετασχηματίσουμε το καταστατικό μητρώο σύμφωνα με το παράρτημα. Ο συντελεστής β ονομάζεται συντελεστής διατήρησης διατμητικής στιβαρότητας και ο ρόλος περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

Στην συνέχεια κατά τον σχηματισμό της 2^{ης} ρωγμής στο ίδιο σημείο ολοκλήρωσης Gauss, η εναπομένουσα στιβαρότητα βρίσκεται κατά την διεύθυνση η οποία σχηματίζεται από την τομή των επιπέδων των δυο ρωγμών. Εάν υποθέσουμε ότι ο άξονας αυτός συμπίπτει με τον άξονα y'' ενός συστήματος αξόνων x'', y'', z'' τότε η καταστατική σχέση παίρνει την μορφή:

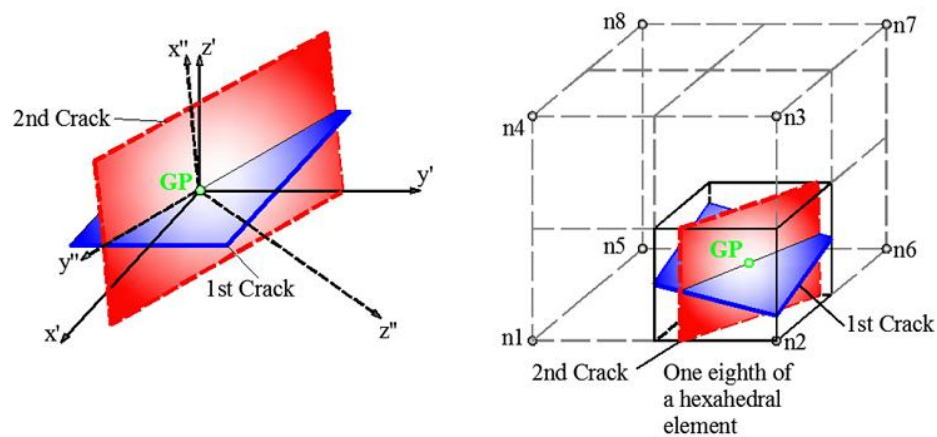
$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{x''} \\ \Delta\sigma_{y''} \\ \Delta\sigma_{z''} \\ \Delta\tau_{x''y''} \\ \Delta\tau_{y''z''} \\ \Delta\tau_{z''x''} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{x''} \\ \Delta\varepsilon_{y''} \\ \Delta\varepsilon_{z''} \\ \Delta\gamma_{x''y''} \\ \Delta\gamma_{y''z''} \\ \Delta\gamma_{z''x''} \end{Bmatrix} \quad 5.52$$

Ομοίως δεν παρατηρείται ισοτροπική συμπεριφορά του υλικού και γι αυτό πρέπει το καταστατικό μητρώο να το μετασχηματίσουμε στους καθολικούς άξονες (όπως και στην περίπτωση της 1^{ης} ρηγμάτωσης). Κατά την εμφάνιση της 2^{ης} ρηγμάτωσης, πριν μορφώσουμε το καινούργιο καταστατικό μητρώο, είναι χρήσιμο να επανέλθουμε στο επίπεδο της 1^{ης} ρηγμάτωσης έτσι ώστε να αποθηκεύσουμε τις τιμές $C(2,2)=2*G+\mu$ και $C(4,4)=\beta*G$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε εύκολα να μορφώσουμε το καινούργιο καταστατικό μητρώο χωρίς να υπολογίσουμε ξανά τις εφαπτομενικές εκφράσεις των μέτρων συμπίεστος K_T και διάτμησης G_T .

Στην περίπτωση που δημιουργηθεί και 3^η ρωγμή τότε δεν υπάρχει στιβαρότητα σε καμία διεύθυνση και το σημείο ολοκλήρωσης Gauss δεν συνεισφέρει στην στιβαρότητα του φορέα. Συνεπώς η καταστατική σχέση παίρνει την μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{x''} \\ \Delta\sigma_{y''} \\ \Delta\sigma_{z''} \\ \Delta\tau_{x''y''} \\ \Delta\tau_{y''z''} \\ \Delta\tau_{z''x''} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{x''} \\ \Delta\varepsilon_{y''} \\ \Delta\varepsilon_{z''} \\ \Delta\gamma_{x''y''} \\ \Delta\gamma_{y''z''} \\ \Delta\gamma_{z''x''} \end{Bmatrix} \quad 5.53$$

Επίσης φαίνεται ότι και σε αυτήν την περίπτωση το καταστατικό μητρώο εκφράζει μια ισοτροπική συμπεριφορά του υλικού έτσι ώστε να μην χρειάζεται να μεταφερθεί στους καθολικούς άξονες. Στο σχήμα 5.14 φαίνεται μια διατομή στην οποία έχουν σχηματιστεί δύο ρωγμές. Συγκεκριμένα παρατηρούμε το επίπεδο της κάθε ρωγμής και τους αντίστοιχους άξονες. Οι άξονες 1',2',3' αναφέρονται στην ρωγμή 1, ενώ οι άξονες 1'',2'',3'' αναφέρονται στη ρωγμή 2. Οι άξονες 3',3'' είναι αντίστοιχα κάθετοι στο επίπεδο της ρωγμής 1,2. Το εύρος της ρωγμής σχεδιάζεται στο ReConAn Eye και θεωρείται ίσο με το 1/8 της ακμής του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου.



Σχήμα 5. 14 Τοπικοί άξονες στην περίπτωση όπου έχουμε δυο ρωγμές σε ένα σημείο ολοκλήρωσης Gauss^[14].

Στην περίπτωση όπου έχουμε κλείσιμο μιας ρωγμής σε μία διεύθυνση, τότε το καταστατικό μητρώο επανέρχεται στην αρηγμάτωτη του μορφή. Προφανώς το αντίστοιχο επίπεδο αστοχίας μηδενίζεται και στην συνέχεια του κώδικα το αντίστοιχο σημείο Gauss έχει μια ρωγμή λιγότερο. Είναι σαφές πως όταν ένα σημείο Gauss έχει συμπληρώσει 3 ρωγμές δεν συμμετέχει στην στιβαρότητα του φορέα και δεν μπορεί να επιστρέψει σε μια προγενέστερη μορφή (1^{ης} ή 2^{ης} ρηγμάτωσης).

5.8 Ο συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας β (shear retention factor)

Το κύριο πρόβλημα της μεθόδου της διανεμημένης ρηγμάτωσης είναι η αριθμητική αστάθεια που δημιουργείται λόγω της μόρφωσης των μητρώων στιβαρότητας κατά την διάνοιξη ρωγμών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται διάφορα αριθμητικά προβλήματα κατά την διάρκεια της επίλυσης των μη γραμμικών εξισώσεων ισοροπίας σε κάθε επαυξητικό βήμα. Η παράμετρο β έρχεται να αντισταθμίσει αυτά τα αριθμητικά προβλήματα κατά την διάρκεια της ρηγμάτωσης. Θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι συνδέεται φυσικά με την αλληλεμπλοκή των αδρανών κατά οποιαδήποτε διεύθυνση του επίπεδου της ρωγμής.

Για πολύ μικρές τιμές του β ($\beta=0$) θα οδηγούμασταν σε αστάθειες της επίλυσης της αριθμητικής διαδικασίας και θα καταλήγαμε σε αποκλίσεις που θα σταματούσαν την ανάλυση. Μεγάλες τιμές του β (π.χ. $0.5 < \beta < 1$) προσελκύουν μεγάλες τιμές του φορτίου λόγω της μεγάλης στιβαρότητας. Αντίθετα μικρές τιμές του β ($\beta=0,01$) οδηγούν στην δημιουργία μη αντιστρέψιμων μητρώων στιβαρότητας για τα ρηγματωμένα στοιχεία. Γι αυτούς τους λόγους οι επικρατέστερες τιμές του συντελεστή β κυμαίνονται $0,05 \leq \beta \leq 0,1$. Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιήθηκε η τιμή, $\beta=0,05$.

5.9 Η ενοποιημένη αντιμετώπιση της ρηγμάτωσης

Στην εργασία των Kotsovos & Spiliopoulos 1998 χρησιμοποιήθηκε μια μέθοδος διαχείρισης των ρωγμών η οποία λέγεται Single Crack Approach(SCA, Προσέγγιση Μοναδικής Ρωγμής, ΠΙΜΡ). Αυτή η προσέγγιση είχε τα εξής χαρακτηριστικά:

- Επιτρέπεται μόνο σε μία ρωγμή να ανοίξει ή να κλείσει σε κάθε επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson.
- Ο έλεγχος της φόρτισης/αποφόρτισης πραγματοποιείται στην αρχή του κάθε βήματος και η κατάσταση αυτή θεωρείται σταθερή σε όλες τις υπόλοιπες επαναλήψεις.
- Τέλος το κλείσιμο και το άνοιγμα των ρωγμών περιγράφονται ως δύο διαφορετικές διαδικασίες (υπορουτίνες).

Στην εργασία των Λυκίδης & Σπηλιόπουλος προτάθηκε μια νέα προσέγγιση για το άνοιγμα και το κλείσιμο των ρωγμών. Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται Unified Total Crack Approach(UTCA, Ενοποιημένη Αντιμετώπιση της Ρηγμάτωσης σε Τυχούσα Ιστορία Φόρτισης) και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Σε κάθε επαυξητικό βήμα Newton-Raphson επιτρέπεται για ένα σημείο Gauss να βρεθεί και στις δύο καταστάσεις φόρτισης ή αποφόρτισης.

- Ο έλεγχος για φόρτιση/αποφόρτιση πραγματοποιείται μέσα στην επανάληψη Newton-Raphson και όχι στην αρχή της.
- Η διαδικασία ανοίγματος/κλεισίματος μια ρωγμής αντιμετωπίζεται με ενιαίο τρόπο σε μια επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson.

Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, σε ένα σημείο Gauss στην επανάληψη j μέσα σε ένα επαυξητικό βήμα φόρτισης ακολουθείται ο παρακάτω αλγόριθμος:

1. Αρχικά υπολογίζονται οι επαυξήσεις των παραμορφώσεων με βάση τις επαυξήσεις των μετατοπίσεων καθώς και των συνολικών παραμορφώσεων:

$$\Delta \varepsilon^j = B * \Delta d^j \text{ και } \varepsilon^j = \varepsilon^{j-1} + \Delta \varepsilon^j \quad 5.54$$

Όπου B είναι το μητρώο συμβατότητας του στοιχείου του σκυροδέματος.

2. Υπολογισμός αντίστοιχων επαυξητικών τάσεων με βάση τις εφαπτομενικές ιδιότητες της προηγούμενης επανάληψης (προφανώς στην πρώτη επανάληψη κάνουμε ελαστική πρόβλεψη χρησιμοποιώντας C_{el}) καθώς και των συνολικών τάσεων του τρέχοντος βήματος:

$$\Delta \sigma^j = C^{j-1} * \Delta \varepsilon^j$$

$$\sigma^j = \sigma^{j-1} + \Delta \sigma^j \Rightarrow \sigma^j = \sigma^{j-1} + C^{j-1} * \Delta \varepsilon^j \quad 5.55$$

3. Έχοντας προβλέψει την εντατική κατάσταση του σημείου Gauss, μπορούμε να υπολογίσουμε την υδροστατική σ_0 και αποκλίνουσα τ_0 συνιστώσα των τάσεων καθώς και την γωνία θ . Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε την τ_{0u} (αποκλίνουσα τάση αντοχής).

Με αυτόν τον τρόπο μας δίνεται η δυνατότητα να ελέγξουμε αν με την νέα εντατική κατάσταση το σημείο Gauss βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας ή όχι. Δηλαδή μπορούμε να ελέγξουμε εάν έχουμε σχηματισμό ρωγμής ή όχι.

Στην συνέχεια θέτουμε τις συνθήκες που καθορίζουν πλήρως την κατάσταση που βρίσκεται το σημείο Gauss. Αρχικά ελέγχουμε εάν έχουμε ργμάτωση. Στην συνέχεια προσδιορίζουμε εάν στην προηγούμενη επανάληψη αυτό το σημείο βρισκόταν σε κατάσταση φόρτισης ή αποφόρτισης και τέλος ελέγχουμε την τρέχουσα κατάσταση του σημείου (φόρτιση/αποφόρτιση).

Για ένα αρηγμάτωτο σημείο Gauss όλα τα πιθανά σενάρια φαίνονται στο σχήμα 15.

Η διόρθωση των τάσεων πραγματοποιείται όταν εμφανίζεται διαφορετική εντατική κατάσταση του σημείου που προκαλεί αλλαγή της υδροστατικής σ_0 και της

αποκλίνουσας τ_0 συνιστώσας των τάσεων. Υπολογίζονται από τη σχέση 5.41 οι διορθωμένες παραμορφώσεις ε' εισάγοντας την εσωτερική τάση σ_{id} . Στην συνέχεια υπολογίζουμε το νέο $\Delta\varepsilon$ από την σχέση:

$$\Delta\varepsilon' = \varepsilon' - \varepsilon \quad 5.56$$

Οπότε βρίσκουμε τις διορθωμένες τάσεις σύμφωνα με την σχέση:

$$\Delta\sigma' = C * \Delta\varepsilon \quad 5.57$$

Ένα αρηγμάτωτο σημείο το οποίο παραμένει αρηγμάτωτο διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν παραμένει στην ίδια κατάσταση φόρτισης/αποφόρτισης με την προηγούμενή του τότε:
 - ❖ Στην περίπτωση της φόρτισης εκτελείται διόρθωση των τάσεων με βάση την πάνω διαδικασία, λόγω της καινούργιας εντατικής κατάστασης που παρουσιάζεται στο σημείο Gauss. Επιπλέον γίνεται ο έλεγχος αν η αποκλίνουσα τάση τ_0 έχει ξεπεράσει το 50% της αντίστοιχης αντοχής τ_{ou} . Σε αυτήν την περίπτωση γίνεται ενημέρωση του μητρώου καταστατικότητας του υλικού, διαφορετικά χρησιμοποιείται το C_{el} (Τροποποιημένο μητρώο Kotsinos & Pavlovic).
 - ❖ Στην περίπτωση που συνεχίζεται η αποφόρτιση τότε η ελαστική (σύμφωνα με το καταστατικό μητρώο της προηγούμενης επανάληψης) πρόβλεψη των τάσεων είναι σωστή.
- Αν αλλάζει κατάσταση από αποφόρτιση σε φόρτιση ή το ανάστροφο, τότε γίνεται ανανέωση του μητρώου καταστατικότητας του υλικού. Στην συνέχεια γίνεται υπολογισμός των τάσεων:

$$\Delta\sigma = C * \Delta\varepsilon \quad 5.58$$

Τέλος εκτελείται η διόρθωση των τάσεων λόγω της καινούργιας εντατικής κατάστασης που υπολογίσαμε.

Αν αναπτυχθεί στο σημείο αποκλίνουσα τάση τ_0 μεγαλύτερη από την διατμητική τάση αντοχής τ_{ou} τότε έχουμε εμφάνιση ρωγμής. Σε αυτήν την περίπτωση μορφώνουμε το καινούργιο μητρώο καταστατικότητας όπως περιγράφηκε στην ενότητα 'Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής'. Για την μόρφωση του μητρώου καταστατικότητας είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε την διεύθυνση του επιπέδου

της ρωγμής μέσω του υπολογισμού των κύριων τάσεων και διευθύνσεων. Με αυτόν τον τρόπο είμαστε σε θέση να μεταφέρουμε το καταστατικό μητρώο του υλικού στους καθολικούς άξονες του στοιχείου.

Εάν το σημείο Gauss είναι ήδη ρηγματωμένο τότε τα πιθανά σενάρια φαίνονται στο σχήμα 5.16.

Υπολογίζονται οι συνολικές παραμορφώσεις ε^j κάθετα σε όλες τις διευθύνσεις των ρωγμών και ελέγχονται σχετικά με το αν είναι θλιπτικές ή όχι. Αν συμβαίνει αυτό για κάποιες από αυτές, τότε θεωρείται ότι γίνεται κλείσιμο της ρωγμής. Σε αυτήν την περίπτωση τροποποιείται το μητρώο καταστατικότητας του υλικού (σύμφωνα με την ενότητα 'Η μέθοδος της διανεμημένης ρωγμής') θεωρώντας πως το σημείο Gauss έχει μια ρωγμή λιγότερη. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι νέες τάσεις που αναπτύσσονται στο σημείο με την σχέση:

$$\Delta\sigma^j = C' * \Delta\varepsilon^j \quad \text{και} \quad \sigma^j = \sigma^{j-1} + \Delta\sigma^j \quad 5.59$$

Επιπλέον γίνεται διόρθωση των τάσεων σύμφωνα με την διαδικασία που αναφέρθηκε πιο πάνω.

Αν δεν συμβαίνει αυτό (δεν έχω θλιπτικές παραμορφώσεις), πρέπει να γίνει έλεγχος εάν έχουμε δημιουργία νέας ρωγμής. Για να γίνει αυτό πρέπει να εκτελέσουμε την αναγκαία διόρθωση των τάσεων λόγω της νέας εντατικής κατάστασης του σημείου. Στην συνέχεια βρίσκουμε την διεύθυνση του επιπέδου της νέας ρωγμής (μέσω του υπολογισμού των κύριων τάσεων/διευθύνσεων).

Έχουμε την δυνατότητα να ελέγξουμε εάν η διεύθυνση της νέας ρωγμής συμπίπτει με την διεύθυνση της υπάρχουσας ρωγμής πράγμα που σημαίνει πως δεν έχουμε άνοιγμα νέας ρωγμής.

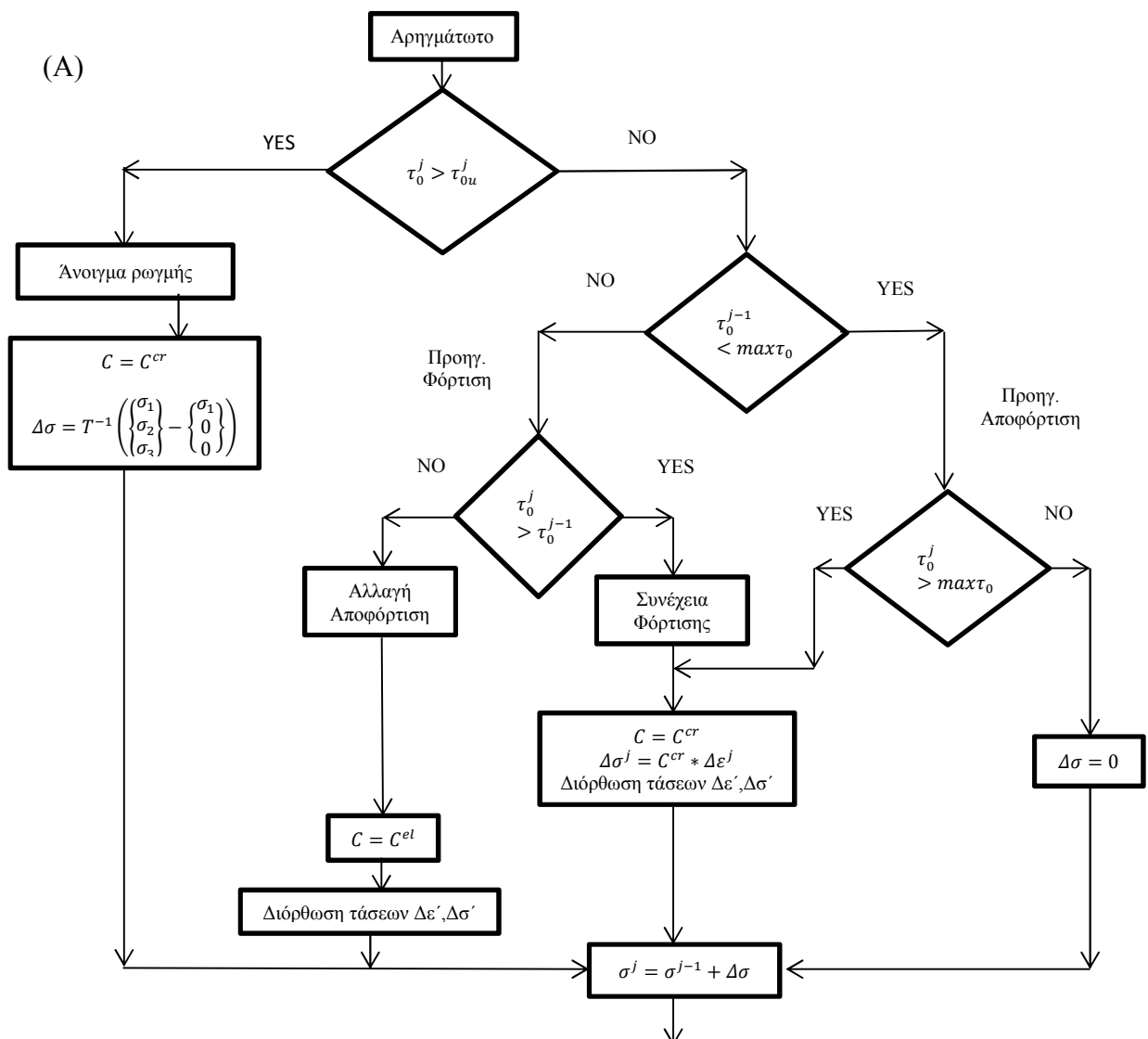
Στην περίπτωση που έχουμε δημιουργία νέας ρωγμής τότε μορφώνουμε το καινούργιο καταστατικό μητρώο του υλικού με βάση το νέο επίπεδο ρηγμάτωσης. Τέλος υπολογίζουμε τις νέες τάσεις που αναπτύσσονται στο σημείο Gauss ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία.

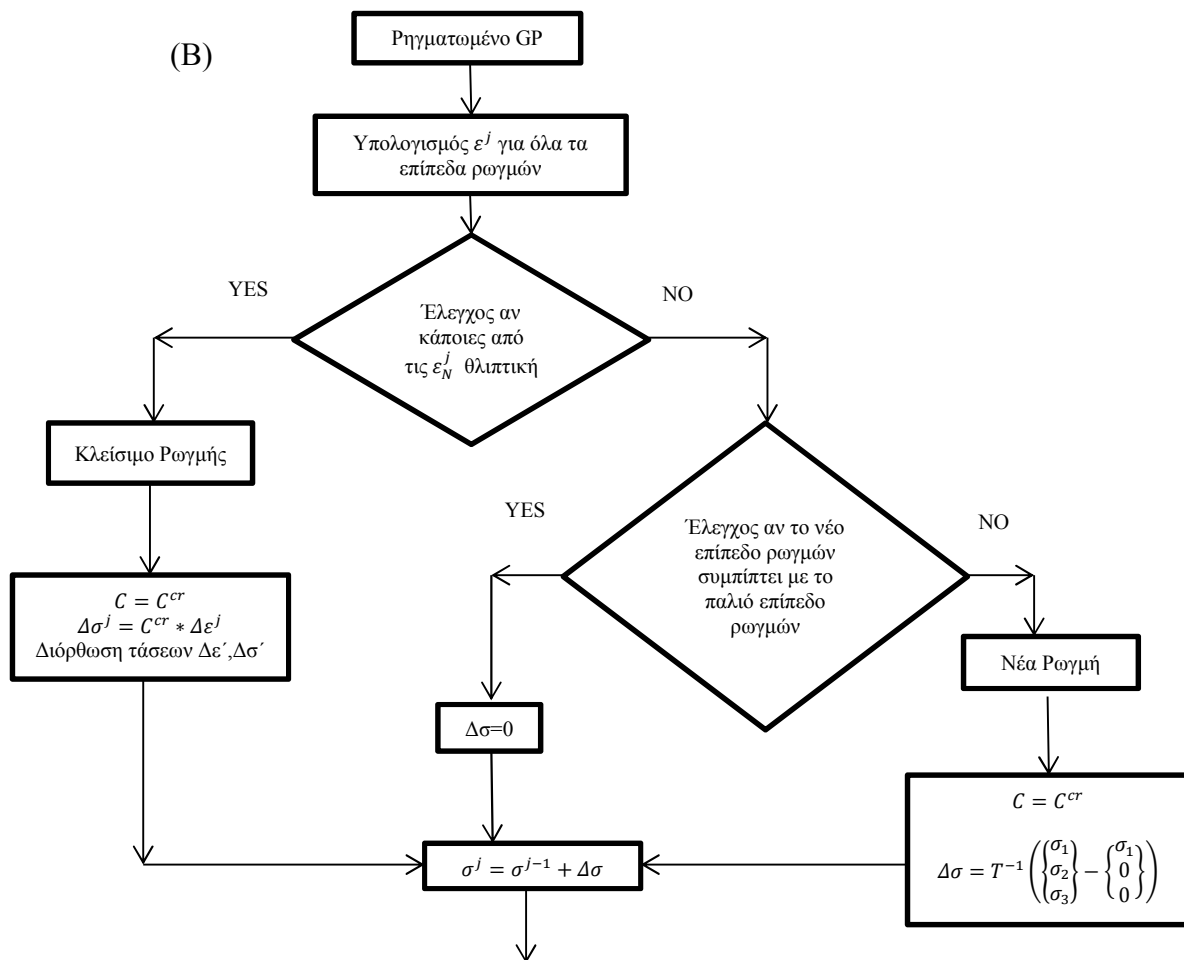
Κατά την δημιουργία νέας ρωγμής χρειάζεται να υπολογιστεί το νέο μητρώο τάσεων που ασκείται στο σημείο Gauss. Αφού προσδιορίσουμε τις κύριες και τις διευθύνσεις τους, είμαστε σε θέση να μορφώσουμε το μητρώο των κύριων τάσεων. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μηδενίσουμε την κύρια τάση που ασκείται στο επίπεδο της ρηγμάτωσης. Τέλος επαναφέρουμε το μητρώο στους καθολικούς άξονες του στοιχείου. Δηλαδή:

$$\Delta\sigma = T^{-1} \left(\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad 5.60$$

όπου $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ και το μητρώο T^{-1} είναι το αντεστραμμένο μητρώο μετασχηματισμού που συνδέει το κύριο σύστημα αξόνων με τους καθολικούς άξονες. Σε όποια από τις δύο καταστάσεις βρίσκεται το σημείο Gauss(ρηγματωμένο-αρηγμάτωτο), οι διορθώσεις των τάσεων δίνουν μη εξισορροπούμενες δυνάμεις, οι οποίες επανέρχονται στην επόμενη επανάληψη της διαδικασίας ως ένα νέο διάνυσμα φορτίσεων.

Επιπλέον είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε την περίπτωση όπου ένα σημείο αστοχεί έχοντας θλιπτικές τάσεις και στις τρεις διευθύνσεις. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν π.χ. έχουμε μια θλιβόμενη περιοχή που υπόκειται σε περίσφιγξη λόγω των συνδετήρων. Σε αυτήν την περίπτωση η υπολογιστική διαδικασία συναντά δυσκολίες καθώς όταν αναπτυσσόταν μια ρωγμή κατά την διεύθυνση της ελάχιστης θλίψης, ο αλγόριθμος έτεινε να κλείσει την ρωγμή στην επόμενη επανάληψη εφόσον συναντούσε εκεί θλιπτική παραμόρφωση κάθετα σε αυτή. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε, θεωρώντας δυσμενώς πως οποιοδήποτε σημείο Gauss αστοχεί υπό πλήρη θλιπτική ένταση, χάνει την φέρουσα ικανότητά του.





Σχήμα 5. 15 (A). Τροποποιημένος αλγόριθμος για αρηγματώτο σημείο ολοκλήρωσης Gauss. (B). Τροποποιημένος αλγόριθμος για ρηγματωμένο σημείο ολοκλήρωσης Gauss.

5.10 Καταστατικό μοντέλο για χάλυβα οπλισμού

Για την προσομοίωση του χάλυβα οπλισμού χρησιμοποιούμε μονοδιάστατο καταστατικό μοντέλο υλικού. Υπάρχουν δύο μοντέλα προσομοίωσης:

1. Διγραμμικό μοντέλο (Bilinear Steel Material Model)
2. Μοντέλο Menegotto-Pinto

Το διγραμμικό Μοντέλο

Το διγραμμικό μοντέλο απεικονίζεται στο σχήμα 5.16 και αποτελείται από έναν ελαστικό και έναν ανελαστικό κλάδο. Θεωρεί πως ο χάλυβας μπορεί να παραλάβει τάση και μετά την διαρροή. Το φαινόμενο αυτό λέγεται κράτυνση. Ως μέτρο κράτυνσης ορίζεται ο λόγος:

$$H = f_u/f_y \quad 5.61$$

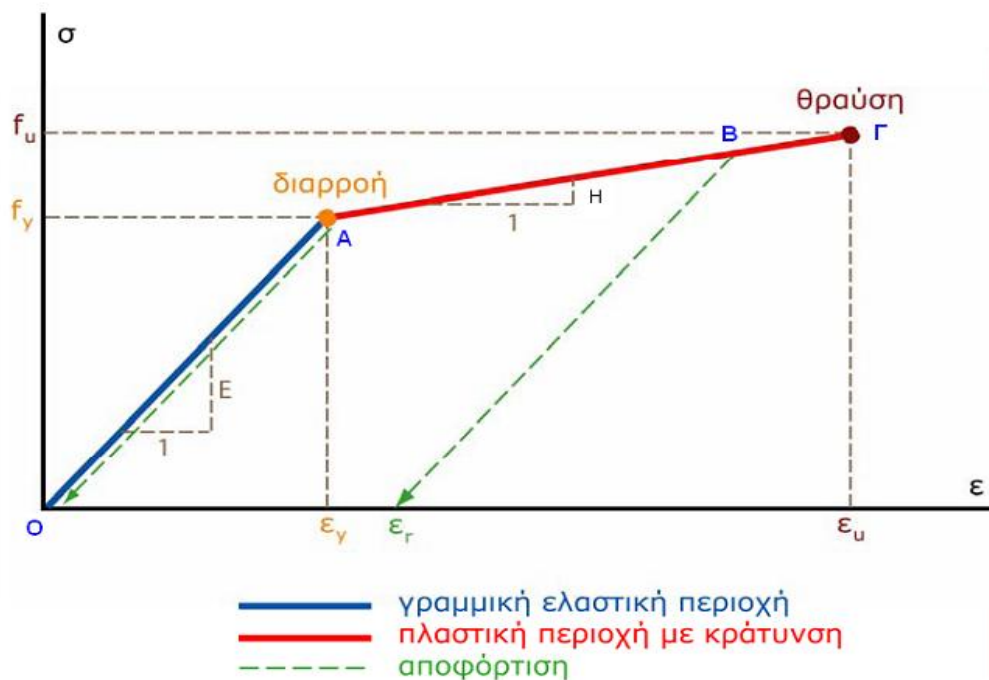
Συνεπώς το διάγραμμα τάσεων(ϵ)-ανηγμένων παραμορφώσεων(σ) μέχρι την τάση διαρροής ακολουθεί έναν ελαστικό κλάδο με κλίση E , ίση με το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα. Μετά την διαρροή ακολουθεί μια δευτέρα κεκλιμένη ευθεία με κλίση H , ίση με το μέτρο κράτυνσης. Οι τιμές του μέτρου κράτυνσης κυμαίνονται συνήθως $H = 0,005E \div 0,05E$. Κατά την κράτυνση επέρχεται πλαστική παραμόρφωση (ϵ_r , *remained strain*), αλλά αυξάνεται και η ελαστική παραμόρφωση ($\epsilon_e = \epsilon_u - \epsilon_r$) και μάλιστα κατά ποσό ανάλογο της αύξησης της τάσης.

Στην γραμμική ελαστική περιοχή οι κλάδοι φόρτισης, αποφόρτισης συμπίπτουν και στην πλήρη αποφόρτιση δεν υπάρχουν παραμένουσες παραμορφώσεις. Στην ανελαστική περιοχή η αποφόρτιση ακολουθεί μια ευθεία γραμμή παράλληλη με τον αρχικό ελαστικό κλάδο. Σε περίπτωση πλήρους αποφόρτισης παραμένουν στο δοκίμιο οι λεγόμενες πλαστικές-μόνιμες-παραμορφώσεις. Η πλαστική παραμόρφωση ϵ_r δίνεται από την σχέση:

$$\epsilon_r = (\epsilon - \epsilon_y) * \left(1 - \frac{H}{E}\right) \quad 5.62$$

όπου ϵ είναι η ανηγμένη παραμόρφωση τη στιγμή έναρξης της αποφόρτισης.

Στην περίπτωση της μονοαξονικής εντατικής κατάστασης, συμπεριφορά ενός γραμμικά ελαστικού-γραμμικά κρατυνόμενου υλικού περιγράφεται πλήρως όταν γνωρίζουμε το μέτρο ελαστικότητας E , την τάση διαρροής f_y (ή την ανηγμένη παραμόρφωση διαρροής $\epsilon_y = \frac{f_y}{E}$), το μέτρο κράτυνσης H και την θραύση f_u (ή την ανηγμένη παραμόρφωση θραύσης ϵ_u). Στην περίπτωση της πολυαξονικής εντατικής κατάστασης, απαιτείται επιπρόσθετα και η γνώση του λόγου Poisson ν ή του μέτρου διάτμησης G .



Σχήμα 5. 16 Το μοντέλο γραμμικά ελαστικού-γραμμικά κρατυνόμενου υλικού^[11].

Το μοντέλο Menegotto-Pinto

Το μοντέλο των Menegotto and Pinto δίνει μια πιο ρεαλιστική προσομοίωση της συμπεριφοράς, συμπεριλαμβάνοντας το φαινόμενο Bauschinger και απεικονίζεται στο σχήμα 5.17. Η σχέση τάσεων παραμορφώσεων δίνεται από την σχέση:

$$\sigma^* = b * \varepsilon^* + \frac{(1 - b) * \varepsilon^*}{(1 - \varepsilon^{*R})^{1/R}} \quad 5.63$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \quad \text{και} \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r}$$

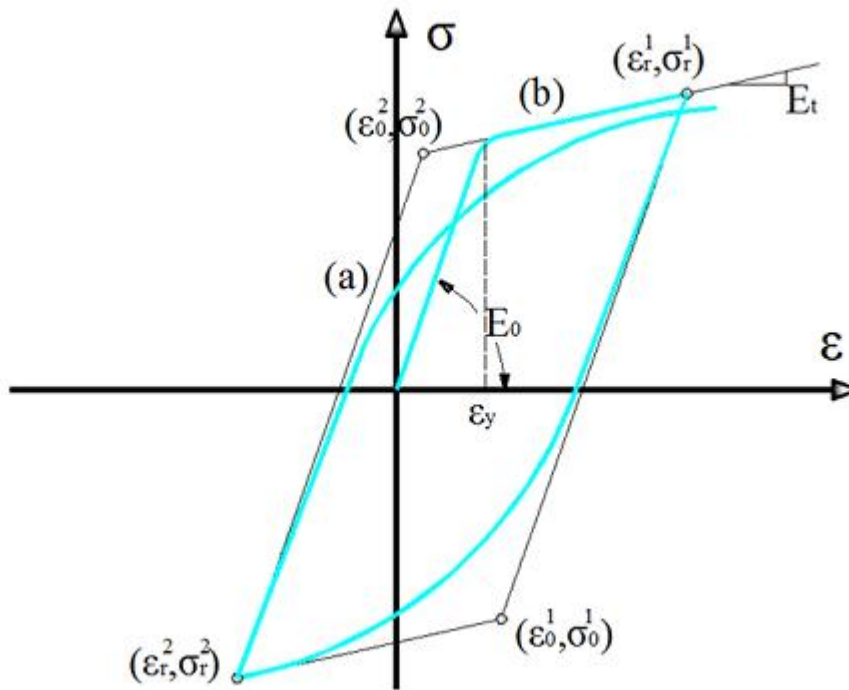
Όπου

- σ_0, ε_0 : η τάση και η ανηγμένη παραμόρφωση αντίστοιχα του σημείου τομής των δύο Ευθειών
- σ_r, ε_r : η τάση και η ανηγμένη παραμόρφωση αντίστοιχα του σημείου, στο οποίο πραγματοποιήθηκε η τελευταία αλλαγή της φοράς της φόρτισης
- R : η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής, που καθορίζει το σχήμα της καμπύλης μετάβασης. Καθώς η παράμετρος αυτή αυξάνεται, η μετάβαση από τη μία ευθεία στην άλλη γίνεται πιο απότομη. Η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής του i-οστού κύκλου φόρτισης ισούται με:

$$R^i = R_0 - \frac{a_1 * (\varepsilon_r^i - \varepsilon_0^i)}{a_2 + (\varepsilon_r^i - \varepsilon_0^i)} \quad 5.64$$

- R_0 : η καμπυλότητα του τόξου συναρμογής κατά τον πρώτο κύκλο φόρτισης. Καθορίζεται πειραματικά. Ως τυπική τιμή μπορούμε να θεωρούμε $R_0=20$.
- $\varepsilon_0^i = \varepsilon_r^{i-1} + \frac{\sigma_0^i - \sigma_0^{i-1}}{E}$
- a_1, a_2 : μεταβλητές που καθορίζονται πειραματικά με τυπικές τιμές $a_1 = 18,5$ και $a_2 = 0,15$.

Το σημείο τομής των δυο ευθειών $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ σηματοδοτεί την έναρξη του νέου κλάδου φόρτισης. Μετά από κάθε αλλαγή φόρτισης, οι παράμετροι $\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_r, \sigma_r$ ανανεώνονται.



Σχήμα 5. 17 Το μοντέλο Menegotto-Pinto^[14].

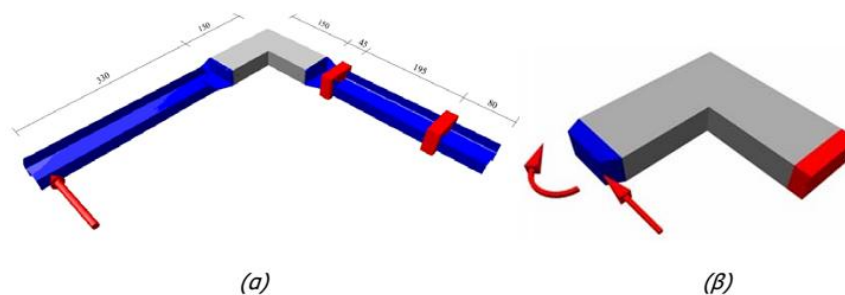
Κεφάλαιο 6. Αριθμητικές Εφαρμογές Κατασκευών που Καταπονούνται από Ανακυκλική Φόρτιση

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| 6.1 Εξωτερικός Κόμβος πλαισίου (Frame joint) | 116 |
| 6.2 Εσωτερικός κόμβος πλαισίου..... | 124 |

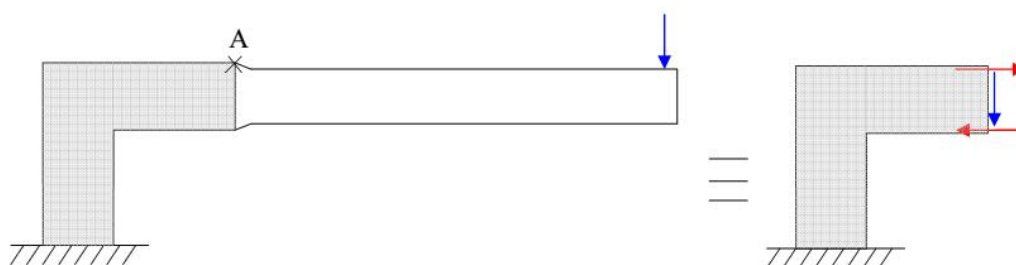
6.1 Εξωτερικός Κόμβος πλαισίου (Frame joint)

Στην διδακτορική διατριβή του Hartl παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα μιας διάταξης κόμβου πλαισίου υπό μονοαξονική και ανακυκλική φόρτιση. Τα πειράματα διεξήχθησαν από τον Luiki (1999) και απεικονίζονται στο σχήμα 1. Στην διάταξη φαίνεται πως έχουν χρησιμοποιηθεί δύο χαλύβδινα τμήματα (μπλε τμήματα) διατομής I εκατέρωθεν του κόμβου. Στο ένα χαλύβδινο τμήμα ασκήθηκε η φόρτιση η οποία βρίσκεται σε απόσταση 3,30 m από την αριστερή παρειά του κόμβου. Στο άλλο χαλύβδινο τμήμα δημιουργήθηκαν οι συνθήκες πάκτωσης στην βάση του. Με αυτόν τον τρόπο το μοντέλο έχει την μορφή του σχήματος 2 όπου στην παρειά του κόμβου ασκείται η φόρτιση $V_{κόμβου} = P$ και ροπή $M_{κόμβου} = 3,30 * P$.

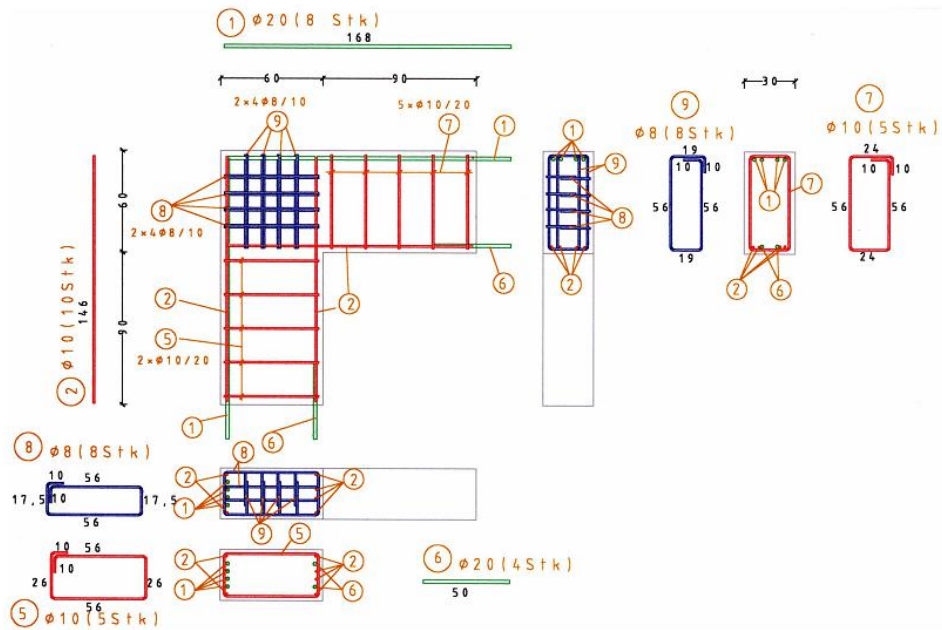


Σχήμα 6. 1(α) Διάταξη δοκιμής κόμβου (από Hartl 2000), με γκρί παρουσιάζεται ο κόμβος σκυροδέματος ενώ με μπλέ τα χαλύβδινα τμήματα. (β) Συνοριακές συνθήκες και φόρτιση κόμβου¹⁹¹.

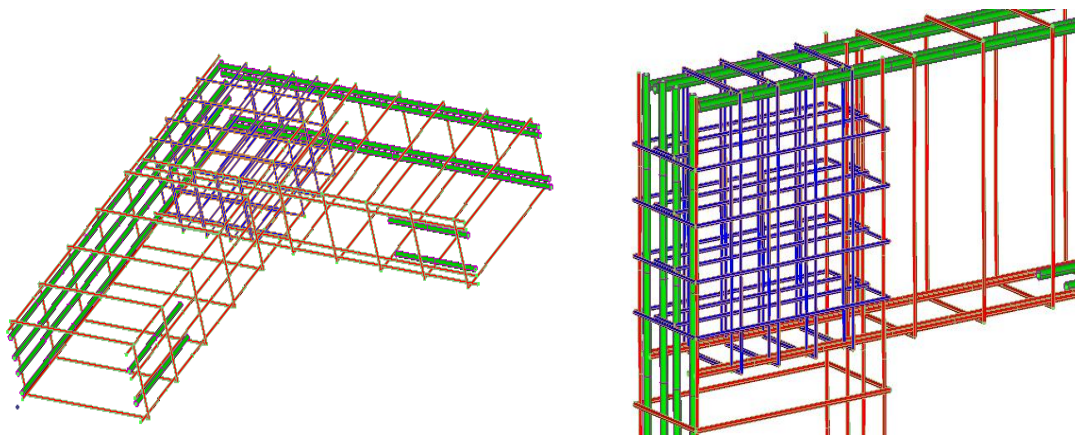
Η γκρίζα περιοχή αποτελεί το εξεταζόμενο τμήμα οπλισμένου σκυροδέματος. Οι λεπτομέρειες του οπλισμού απεικονίζονται στο σχήμα 6.3. Οι οπλισμοί αγκυρώνονται ευθύγραμμα και όχι με καμπύλωση όπως απεικονίζονται στο σχήμα 6.4.



Σχήμα 6. 2 Επιβολή φόρτισης στο άκρο της μεταλλικής δοκού που ισοδυναμεί με δύναμη και ροπή (ζεύγος δυνάμεων) στην παρειά του κόμβου. Στην βάση του κόμβου επικρατούν συνθήκες πάκτωσης¹⁹¹.



Σχήμα 6. 3 Λεπτομέρειες οπλισμού στον εξεταζόμενο κόμβο από σκυροδέμα^[9].



Σχήμα 6. 4 Λεπτομέρειες οπλισμού από την προσομοίωση του μοντέλου με χρήση του προγράμματος Femap.

Χαρακτηριστικά Σκυροδέματος

Χρησιμοποιήθηκε σκυροδέμα ποιότητας C35/45. Η αντοχή του σε εφελκυσμό είναι $f_{ctm} = 2,7 \text{ MPa}$. Το μέτρο ελαστικότητας του είναι $E = 32000 \text{ MPa}$ ενώ ο λόγος Poisson $\nu = 0,20$. Επίσης σύμφωνα με την διδακτορική διατριβή του Hartl δίνεται η εφελκυστική παραμόρφωση διαρροής (λίγο πριν την ρηγμάτωση) $\epsilon_{yt} = 0,00005$. Τέλος στο μοντέλο προσομοίωσης χρησιμοποιήσαμε συντελεστή μερικής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας $\beta=0,05$.

Χαρακτηριστικά Χάλυβα οπλισμού

Για τις διατομές οπλισμού (1) και (6) από το σχήμα 3, έχω:

- $E = 206000$ MPa το μέτρο ελαστικότητας.
- $f_{yk} = 430$ MPa η χαρακτηριστική αντοχή.

Για τις υπόλοιπες διατομές οπλισμού ισχύουν τα εξής:

- $E = 206000$ MPa το μέτρο ελαστικότητας.
- $f_{yk} = 550$ MPa η χαρακτηριστική αντοχή.

Χρησιμοποιήθηκε λόγος Poisson $\nu=0,3$ και μέτρο κράτνσης $H=2060$ MPa.

Προσομοίωση Σκυροδέματος

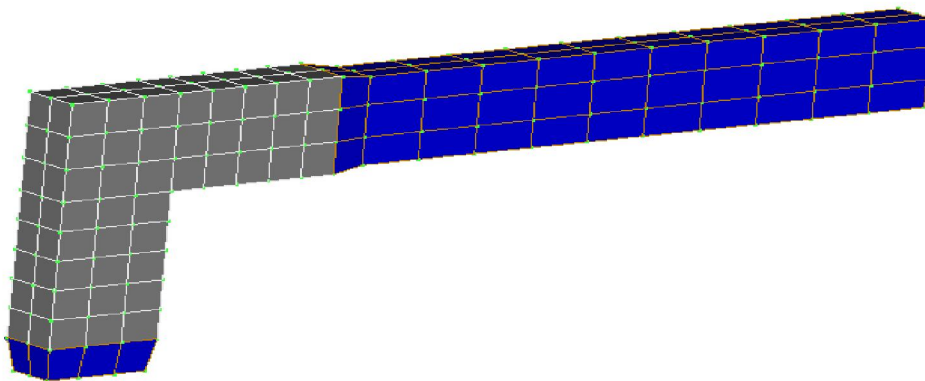
Για την προσομοίωση του σκυροδέματος χρησιμοποιήθηκαν εξαεδρικά 8-κομβικά πεπερασμένα στοιχεία. Κάθε εξαεδρικό στοιχείο έχει μήκος 0,20m ,πλάτος 0,15m και ύψος 0,20m. Εφαρμόστηκε η θεωρία της διανεμημένης ρωγμής για την προσομοίωση της ρηγμάτωσης. Επιπλέον σύμφωνα με τις τροποποιήσεις του καταστατικού του υλικού (κεφάλαιο 5.5) , ορίστηκε ως όριο για την χρησιμοποίηση του ελαστικού μητρώου καταστατικότητας το 50%. Τέλος χρησιμοποιήθηκε η παράμετρος $c = 5$ απαραίτητη για τον γεωμετρικό περιορισμό της αναζήτησης της θέσης των γειτονικών οπλισμών με το πεπερασμένο στοιχείο σκυροδέματος. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 78 πεπερασμένα στοιχεία για την προσομοίωση του κόμβου σκυροδέματος (γκρί τμήμα) όπως απεικονίζεται στο σχήμα 6.5.

Προσομοίωση Χάλυβα οπλισμού

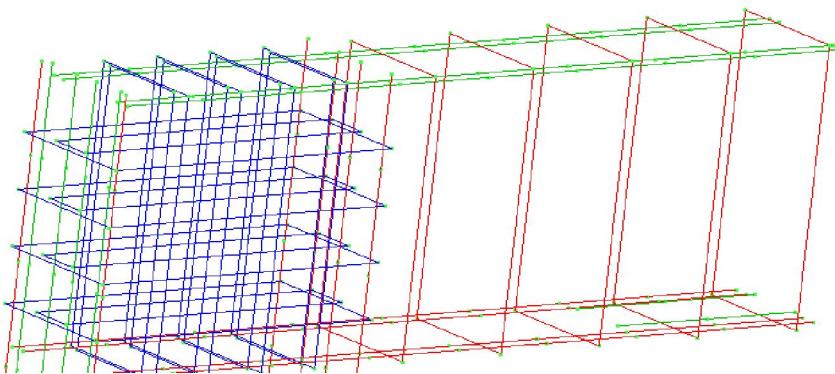
Για την προσομοίωση του χάλυβα οπλισμού χρησιμοποιήθηκαν τα γραμμικά πεπερασμένα NBCFB στοιχεία. Τα στοιχεία του διαμήκη οπλισμού έχουν μήκος 0,2m ενώ των συνδετήρων έχουν μήκη ίσα με τις πλευρές των διαστάσεων του (όπως φαίνεται στο σχήμα 3). Σε αυτά τα στοιχεία, οι διατομές προσομοιάστηκαν με 9 στρώσεις και χρησιμοποιήθηκαν 3 σημεία ολοκλήρωσης Gauss. Τέλος εφαρμόστηκε το προσομοίωμα Menegotto-Pinto για να περιγράψει αντιπροσωπευτικά την συμπεριφορά του χάλυβα. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 256 πεπερασμένα στοιχεία χάλυβα οπλισμού όπως απεικονίζεται στο σχήμα 6.6.

Προσομοίωση Χάλυβα

Για την προσομοίωση των χαλύβδινων τμημάτων (μπλε τμημάτων στο σχήμα 6.5) εκατέρωθεν του κόμβου σκυροδέματος, χρησιμοποιήθηκαν ομοίως εξαεδρικά 8-κομβικά πεπερασμένα στοιχεία. Τα πεπερασμένα στοιχεία έχουν μήκος 0,312m, πλάτος 0,12m και ύψος 0,17m. Για το υλικό θεωρήθηκε ότι ισχύει το κριτήριο αστοχίας του Von Mises.



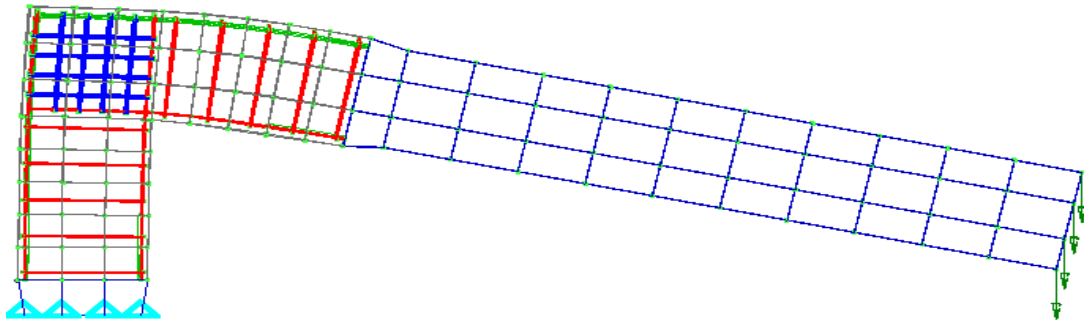
Σχήμα 6. 5 Προσομοίωση κόμβου σκυροδέματος (γκρί τμήμα) και χάλυβα (μπλέ τμήμα).



Σχήμα 6. 6 Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού.

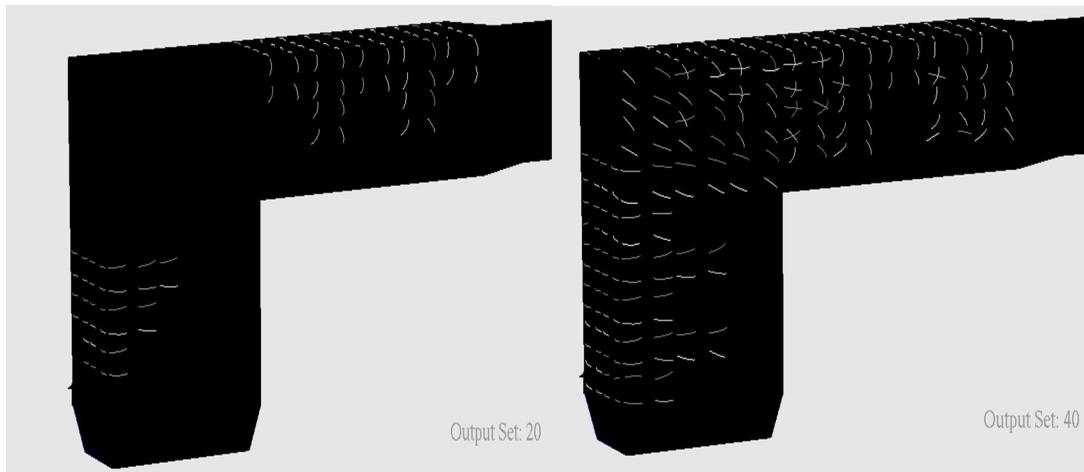
Ανάλυση σε μονοτονική φόρτιση

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε κάνοντας χρήση του προγράμματος που αναπτύχθηκε στην διδακτορική διατριβή του Γ.Μάρκου(2010). Η ανάλυση εκτελέστηκε με δύο τρόπους, με έλεγχο φορτίου και με έλεγχο μετατόπισης. Για τον έλεγχο φορτίου ασκήθηκε φόρτιση στο άκρο του χαλύβδινου τμήματος ίση 90KN σε 100 βήματα Newton-Raphson ,με 50 εσωτερικές επαναλήψεις το κάθε βήμα. Η φόρτιση επιβλήθηκε στο άκρο του χαλύβδινου τμήματος ισομοιράζοντας την στους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων(12 κόμβοι στο άκρο, άρα $90/12=7,5\text{KN}$). Για τον έλεγχο μετατόπισης επιβλήθηκε σε όλους του κόμβους του άκρου του φορέα, μετατόπιση ίση με 24cm. Ομοίως χρησιμοποιήθηκαν 100 βήματα Newton-Raphson με 50 εσωτερικές επαναλήψεις. Στις δύο αναλύσεις προέκυψαν παρόμοια αποτελέσματα.



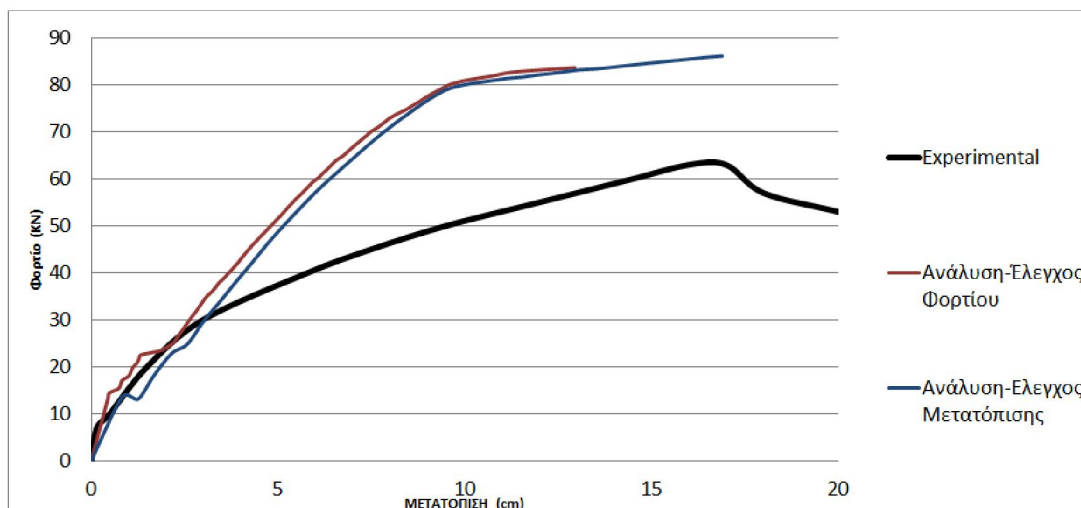
Σχήμα 6. 7 Παραμορφωμένος φορέα όπως προέκυψε από την ανάλυση.

Σύμφωνα με την ανάλυση έχουμε εμφάνιση ρωγμών στις περιοχές όπου αναπτύσσεται πιο έντονα ο εφελκυσμός. Οι ρωγμές αυτές ακολουθούν την τροχιά των θλιπτικών τάσεων όπως φαίνεται στο σχήμα 6.8.A. Οι λοξές ρωγμές που εμφανίζονται στην συνέχεια στον κόμβο οφείλονται στην επαλληλία του εφελκυσμού με την διάτμηση. Όσο αυξάνεται το φορτίο, οι ρωγμές πυκνώνουν σε όλο τον φορέα (σχήμα 6.8.B).



Σχήμα 6. 8A.(αριστερό σχήμα) Ρηγματωμένη εικόνα του φορέα κυρίως στις εφελκυστικές περιοχές του φορέα B. (δεξί σχήμα) Πύκνωση ρωγμών καθώς αυξάνεται το φορτίο.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση απεικονίζονται στη γραφική παράσταση της καμπύλης ικανότητας του φορέα (σχήμα 6.9). Τα αποτελέσματα προέκυψαν από τις μετακινήσεις του τελευταίου κόμβου σκυροδέματος.

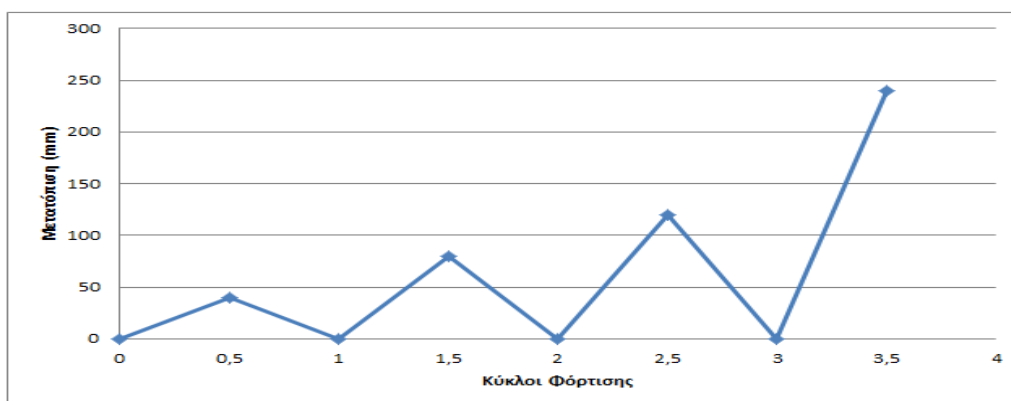


Σχήμα 6. 9 Διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα είχαν σκοπό να αναδείξουν την επιρροή της ολίσθησης του οπλισμού στον εξεταζόμενο φορέα. Στην παρούσα εργασία ο οπλισμός βρίσκεται σε πλήρη συνάφεια με το περιβάλλον σκυρόδεμα. Συνεπώς είναι λογικό από τις αναλύσεις που έγιναν να προκύπτει μεγαλύτερη φέρουσα ικανότητα στον εξεταζόμενο κόμβο πλαισίου. Άρα η σύγκριση των αποτελεσμάτων μας δείχνει πως μέχρι τα 30 KN τα αποτελέσματα των αναλύσεων προσεγγίσεων αντιπροσωπευτικά τα πειραματικά αποτελέσματα. Στην συνέχεια όμως τα μοντέλα προσομοίωσης έχουν μεγαλύτερη δυσκαμψία και μεγαλύτερο οριακό φορτίο σε σχέση με το πείραμα.

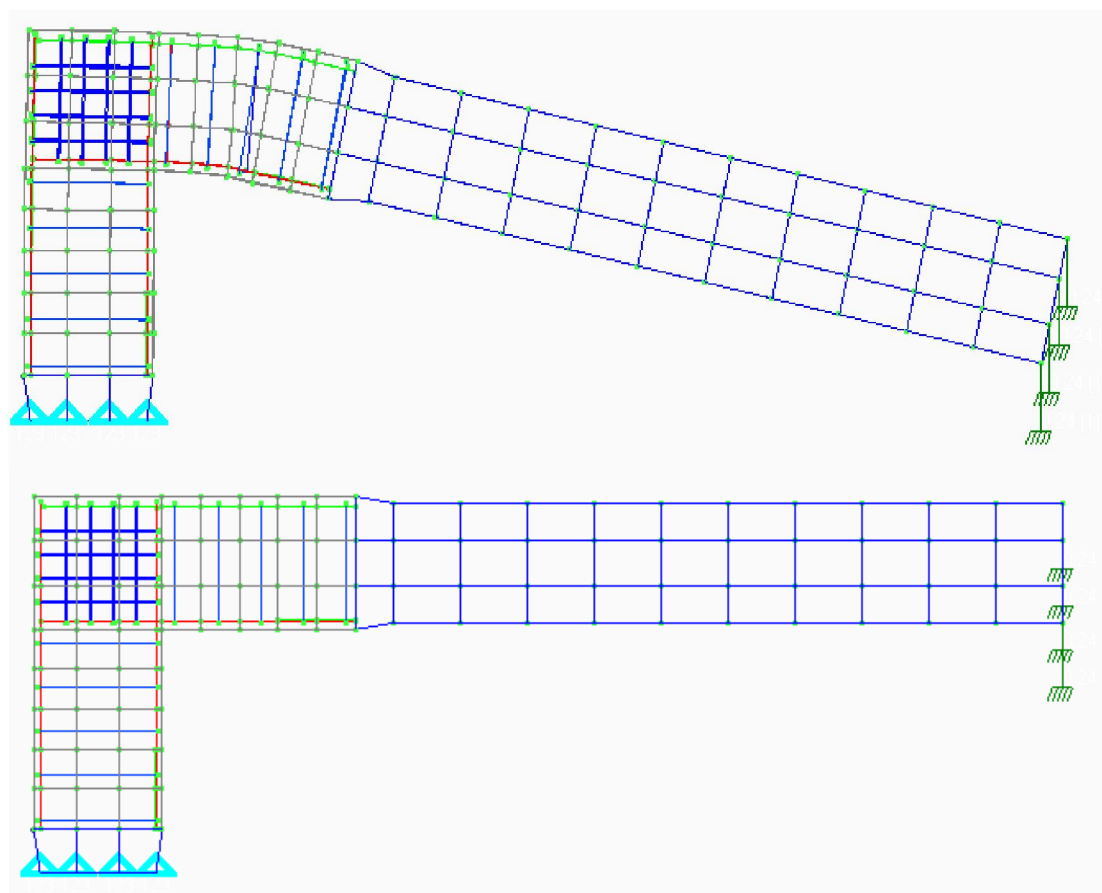
Ανάλυση σε ανακυκλική φόρτιση

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε κάνοντας χρήση του αλγορίθμου που περιγράφεται στο κεφάλαιο 5.7 . Η επίλυση εκτελέστηκε χρησιμοποιώντας τον έλεγχο μετατόπισης. Επιβλήθηκε στο άκρο του χαλύβδινου τμήματος μετατόπιση, που ακολουθεί την παρακάτω συνάρτηση (σχήμα 6.10) :



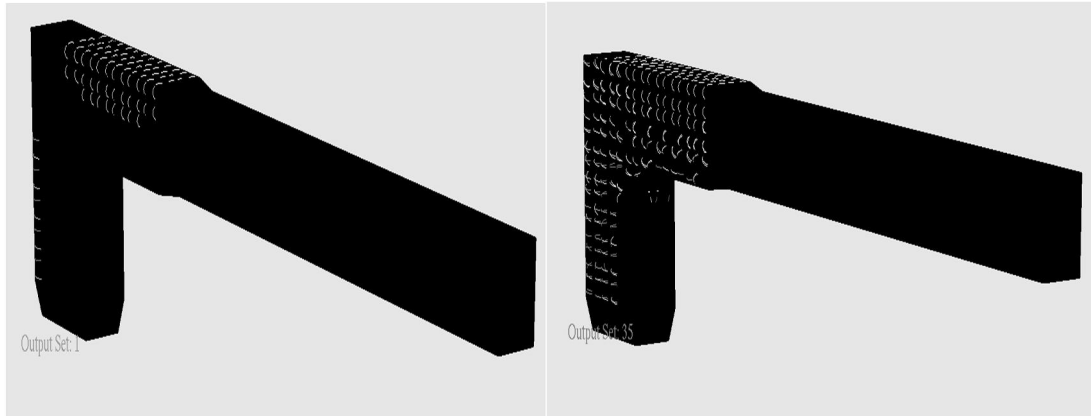
Σχήμα 6. 10 Συνάρτηση επιβαλλόμενης μετατόπισης(40/80/120/240 mm) σε 4 κύκλους φόρτισης.

Για κάθε κλάδο της συνάρτησης μετατόπισης εκτελέστηκαν 10 βήματα Newton-Raphson και 50 εσωτερικές επαναλήψεις έως ότου επιτευχτεί η σύγκλιση σε κάθε βήμα. Οι παραμορφώσεις του φορέα φαίνονται στο σχήμα 5.11.



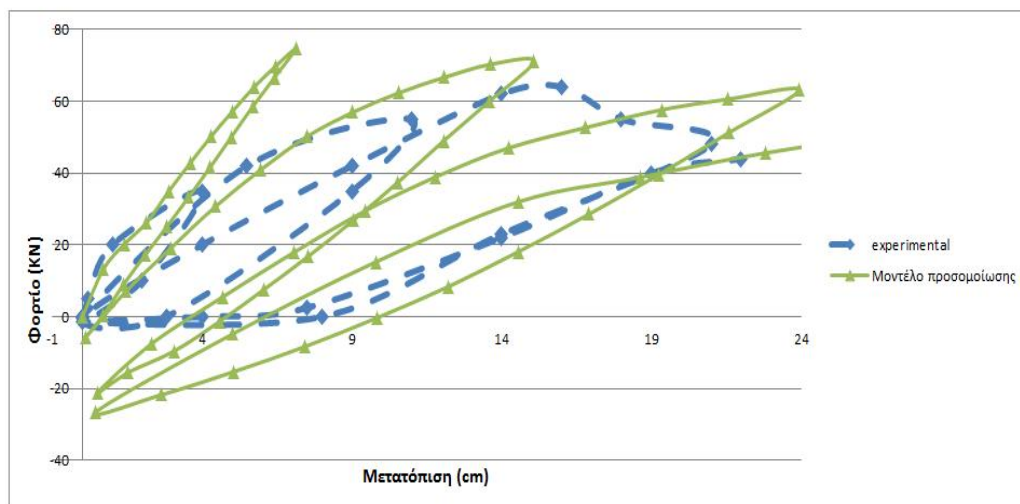
Σχήμα 6. 11 Παραμορφώσεις του φορέα κατά την ανακύκλιση από το πρόγραμμα Femap.

Οι ρηγματώσεις του φορέα αναπτύσσονται στις προβλεπόμενες εφελκυστικές περιοχές του φορέα όπως αυτές εμφανίζονται σε κάθε κύκλο φόρτισης. Οι ρηγματώσεις απεικονίζονται στο σχήμα 6.12. Όπως φαίνεται στην αριστερή εικόνα οι ρωγμές δημιουργούνται στην πάνω και στην αριστερή πλευρά του κόμβου ,δηλαδή σε περιοχές που εφελκύνονται κατά την παραμόρφωση που ακολουθεί έναν ανοδικό κλάδο της συνάρτησης που φαίνεται στο σχήμα 6.10. Στην δεξιά εικόνα φαίνεται η αντίστροφη πορεία παραμόρφωσης (καθοδικός κλάδος του σχήματος 6.10) και συνεπώς εμφανίζονται ρωγμές στις αντίθετες πλευρές από ότι σε αυτές της αριστερής εικόνας.



Σχήμα 6. 12 Ρηγμάτωση στις περιοχές όπου εμφανίζεται εφελκυσμός κατά του διάφορους κύκλους φόρτισης.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση απεικονίζονται στην γραφική παράσταση του σχήματος 6.13. Τα αποτελέσματα προέκυψαν από τις μετακινήσεις του τελευταίου κόμβου σκυροδέματος.



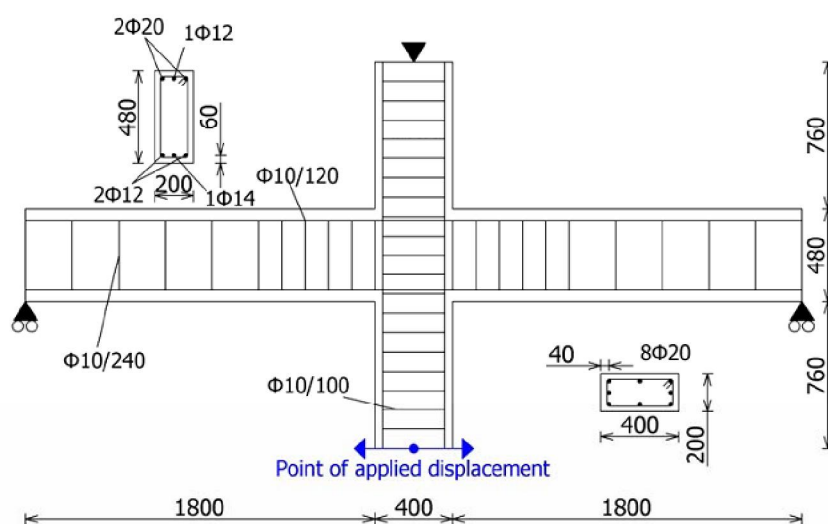
Σχήμα 6. 13 Γραφική παράσταση Φορτίο-Μετατόπιση και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα του φορέα υποβαλλόμενο σε ανακυκλική φόρτιση.

Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων προκύπτει πως σε κάθε κύκλο φόρτισης, το μοντέλο προσομοίωσης παρουσιάζει την ίδια δυσκαμψία (κλίση της καμπύλης) με το πειραματικό μοντέλο. Όμως κάθε κύκλος παρουσιάζει μεγαλύτερη οριακό φορτίο (μεγαλύτερη αντοχή του φορέα) ταυτόχρονα στον θετικό (ιδιαίτερα στον πρώτο κύκλο φόρτισης) και στον αρνητικό άξονα του φορτίου. Σημαντική διαφορά παρουσιάζει το εύρος παραμορφώσεων του τρίτου κύκλου φόρτισης όπως εμφανίζεται στο διάγραμμα. Τα πειραματικά αποτελέσματα προέρχονται από την διδακτορική διατριβή του Hartl και είχαν σκοπό να αποδείξουν την επιρροή της ολίσθησης των οπλισμών του κόμβου πλαισίου (όπως αναφέρθηκε και στην μονοαξονική φόρτιση). Στο μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία ο

οπλισμός βρίσκεται σε πλήρη συνάφεια με το περιβάλλον σκυρόδεμα και θεωρείται πλήρως αγκυρωμένος. Συνεπώς αυτό εξηγεί πως η καμπύλη προσομοίωσης παρουσιάζει μεγαλύτερη αντοχή από τα πειραματικά αποτελέσματα. Είναι σαφές πως αυτό το γεγονός επηρεάζει την πορεία της καμπύλης και στου επόμενους κύκλους φόρτισης. Γενικότερα η καμπύλη αντιπροσωπεύει επαρκώς την πειραματική και θα είχε ακόμα καλύτερα αποτελέσματα αν είχαμε λάβει υπόψη μας στο μοντέλο μας, την ολίσθηση του οπλισμού.

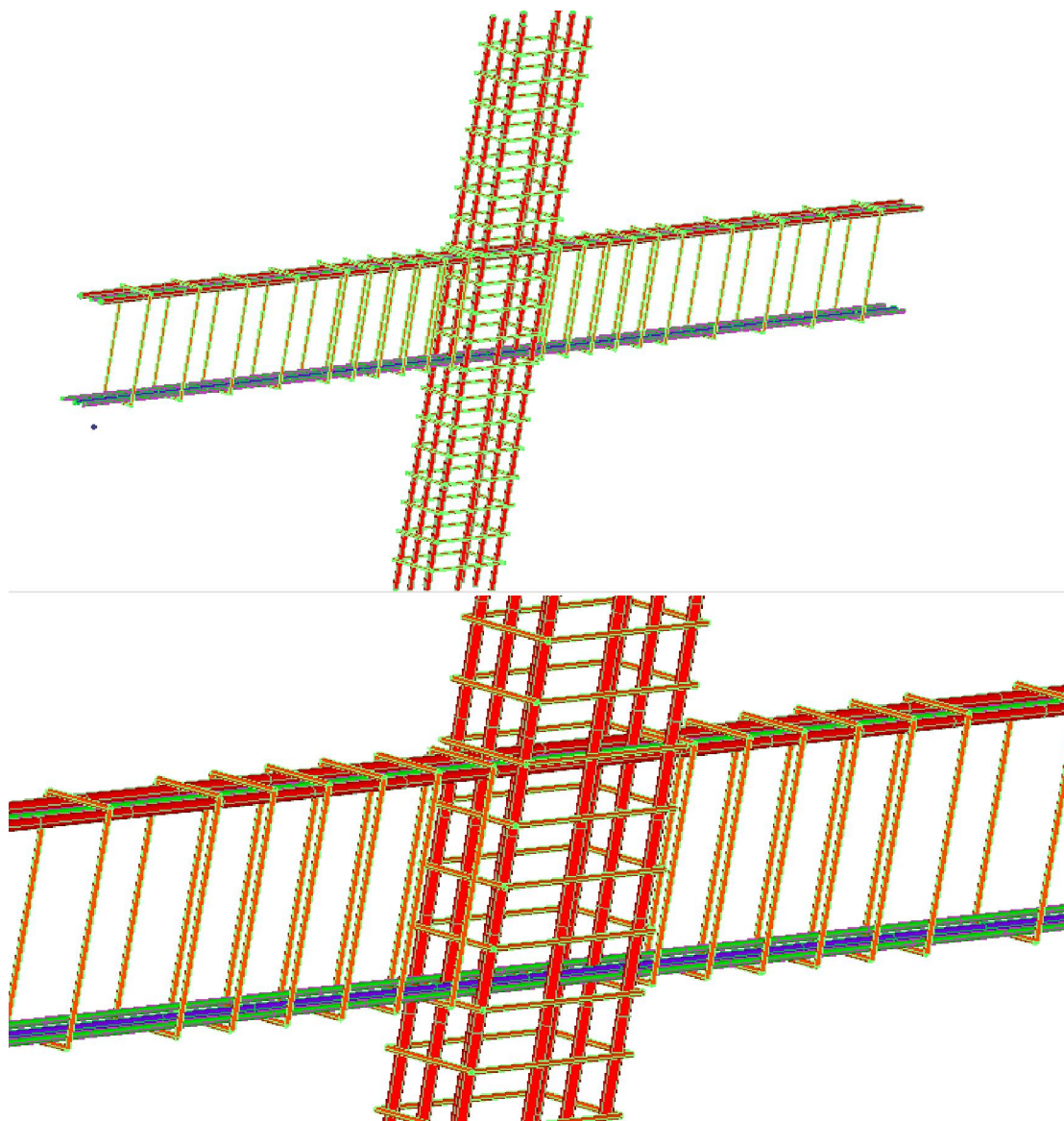
6.2 Εσωτερικός κόμβος πλαισίου

Στην διδακτορική διατριβή του κ.Λυκίδη(2007) παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα μιας διάταξης εσωτερικού κόμβου πλαισίου το οποίο καταπονείται από ανακυκλική φόρτιση. Τα πειράματα διεξήχθησαν από τον Del Toro Rivera 1998 όπως επίσης ο κόμβος είχε αναλυθεί και από τους Fleury et al. 1999. Η συγκεκριμένη διάταξη έχει ως στόχο την προσομοίωση της σεισμικής συμπεριφοράς μιας σύνδεσης δοκού-υποστυλώματος ενός πολυώροφου πλαισίου. Στο σχήμα 6.14 απεικονίζεται ο εξεταζόμενος φορέας (η μηκотоμή του και δυο χαρακτηριστικές διατομές) όπου φαίνονται οι οπλισμοί που χρησιμοποιήθηκαν και οι συνθήκες στήριξης και φόρτισης που επιβλήθηκαν στον φορέα. Στα άκρα της δοκού παρουσιάζονται κυλίσεις ενώ στο άνω άκρο του υποστυλώματος έχουμε συνθήκες άρθρωσης.



Σχήμα 6. 14 Μηκотоμή του εξεταζόμενου φορέα και δυο χαρακτηριστικές διατομές^[9].

Οι λεπτομέρειες του οπλισμού φαίνονται και στο σχήμα 6.15 από το πρόγραμμα Femap.



Σχήμα 6. 15 Λεπτομέρειες οπλισμού από την προσομοίωση με χρήση του προγράμματος Femap.

Χαρακτηριστικά Σκυροδέματος

Χρησιμοποιήθηκε σκυρόδεμα με μονοαξονική θλιπτική αντοχή $f_c = 40MPa$. Το μέτρο ελαστικότητας του είναι $E = 30000MPa$ ενώ ο λόγος Poisson $\nu=0,20$. Τέλος στο μοντέλο χρησιμοποιήθηκε συντελεστής μερικής διατήρησης της διατμητικής σιβαρότητας $\beta=0,05$.

Χαρακτηριστικά Χάλυβα οπλισμού

Τα όρια διαρροής του χάλυβα για τους διάφορους οπλισμού είναι:

- $f_{sy,\phi 10} = 570MPa$
- $f_{sy,\phi 12} = 490MPa$

- $f_{sy,\phi14} = 440MPa$
- $f_{sy,\phi20} = 554MPa$

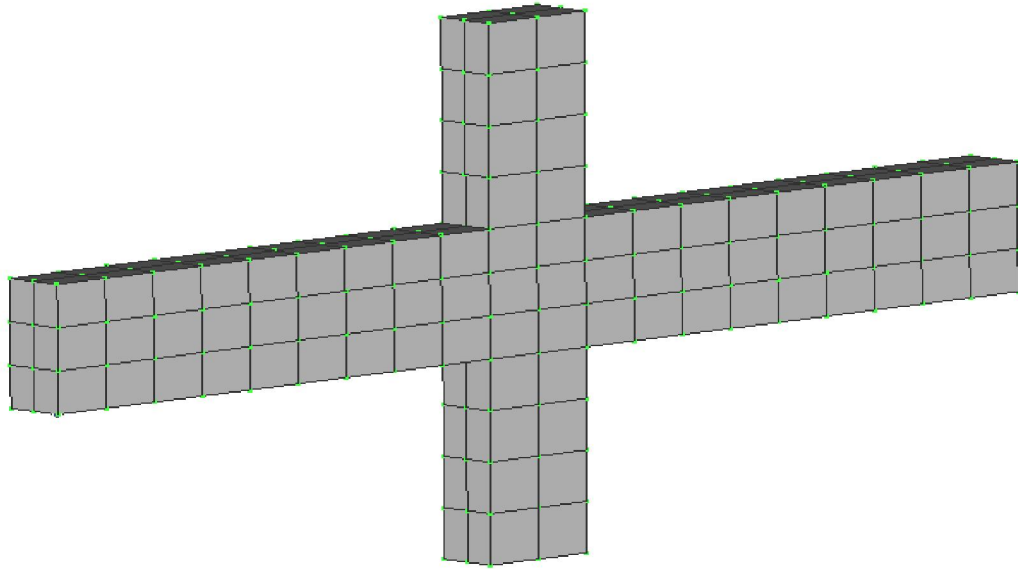
Το μέτρο ελαστικότητας των οπλισμών είναι $E = 200000MPa$ και χρησιμοποιήθηκε λόγος Poisson $\nu=0,3$ και μέτρο κράτynσης $H = 2000MPa$.

Προσομοίωση Σκυροδέματος

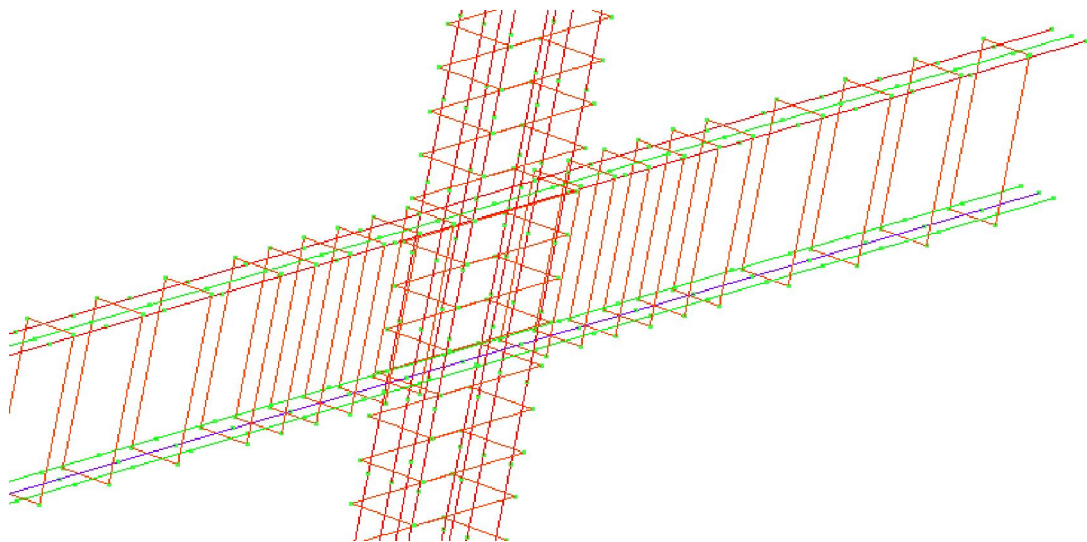
Για την προσομοίωση του σκυροδέματος χρησιμοποιήθηκαν εξαεδρικά 8-κομβικά πεπερασμένα στοιχεία. Κάθε εξαεδρικό στοιχείο έχει μήκος 0,20m και πλάτος 0,1m. Στα εξαεδρικά στοιχεία όπου προσομοιώνουμε την δοκό (μαζί με το κοινό τμήμα του κόμβου) έχουν ύψος 0,16m ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του στύλου (τα τμήματα του στύλου που βρίσκονται πάνω και κάτω από την δοκό) έχουν ύψος 0,19m. Εφαρμόστηκε η θεωρία της διανεμημένης ρωγμής για την προσομοίωση της ρηγμάτωσης. Επιπλέον ορίστηκε όριο χρησιμοποίησης του ελαστικού μητρώου καταστατικότητας το 50%(σύμφωνα με την προτεινόμενη τροποποίηση του κεφαλαίου 5.5). Τέλος χρησιμοποιήθηκε η παράμετρος $c = 5$ απαραίτητη για τον γεωμετρικό περιορισμό της αναζήτησης της θέσης των γειτονικών οπλισμών με το πεπερασμένο στοιχείο σκυροδέματος. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 152 εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία για την προσομοίωση του εσωτερικού κόμβου από σκυροδέμα όπως φαίνεται στο σχήμα 6.16.

Προσομοίωση Χάλυβα οπλισμού

Για την προσομοίωση του χάλυβα οπλισμού χρησιμοποιήθηκαν τα γραμμικά πεπερασμένα NBCFB στοιχεία. Τα στοιχεία του διαμήκη οπλισμού έχουν μήκος 0,2m ενώ των συνδετήρων έχουν μήκη ίσα με τις πλευρές των διαστάσεων του. Σε αυτά τα στοιχεία, οι διατομές προσομοιάστηκαν με 9 στρώσεις και χρησιμοποιήθηκαν δύο σημεία Gauss. Τέλος εφαρμόστηκε το διγραμμικό προσομοίωμα για να περιγράψει αντιπροσωπευτικά την συμπεριφορά του χάλυβα. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 376 πεπερασμένα στοιχεία χάλυβα οπλισμού όπως απεικονίζεται στο σχήμα 6.17.



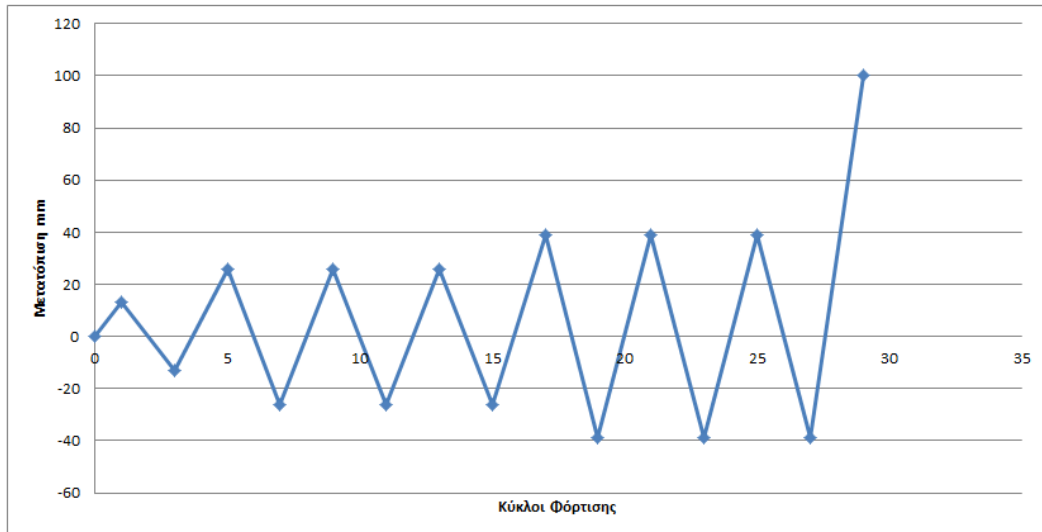
Σχήμα 6. 16 Προσομοίωση εσωτερικού κόμβου από σκυρόδεμα με εξαεδρικά 8-κομβικά πεπερασμένα στοιχεία.



Σχήμα 6. 17 Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού.

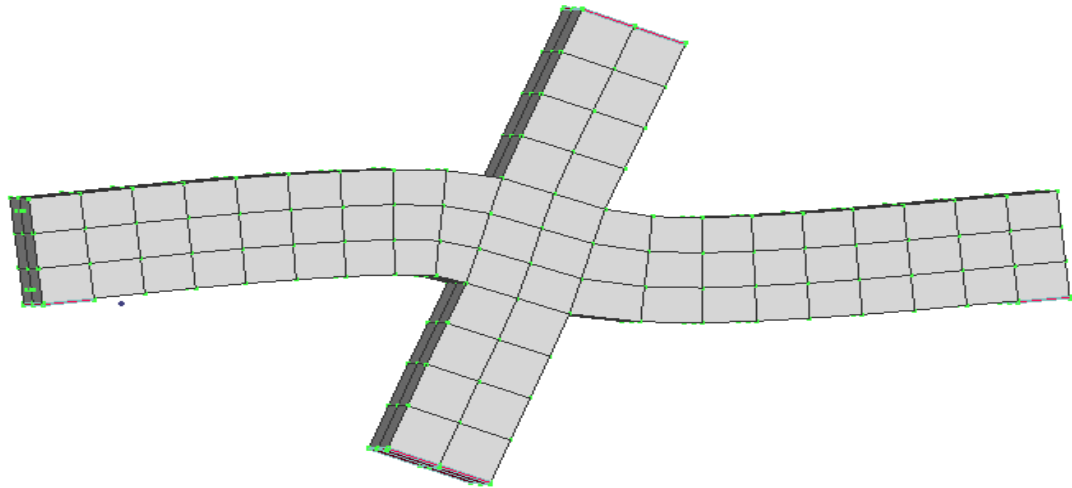
Ανάλυση σε ανακυκλική φόρτιση

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε κάνοντας χρήση του κεφαλαίου που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 5.7. Η επίλυση εκτελέστηκε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson με έλεγχο μετατόπισης. Επιβλήθηκε στο κάτω άκρο του υποστυλώματος μετατόπιση που ακολουθεί την παρακάτω συνάρτηση (σχήμα 6.18):

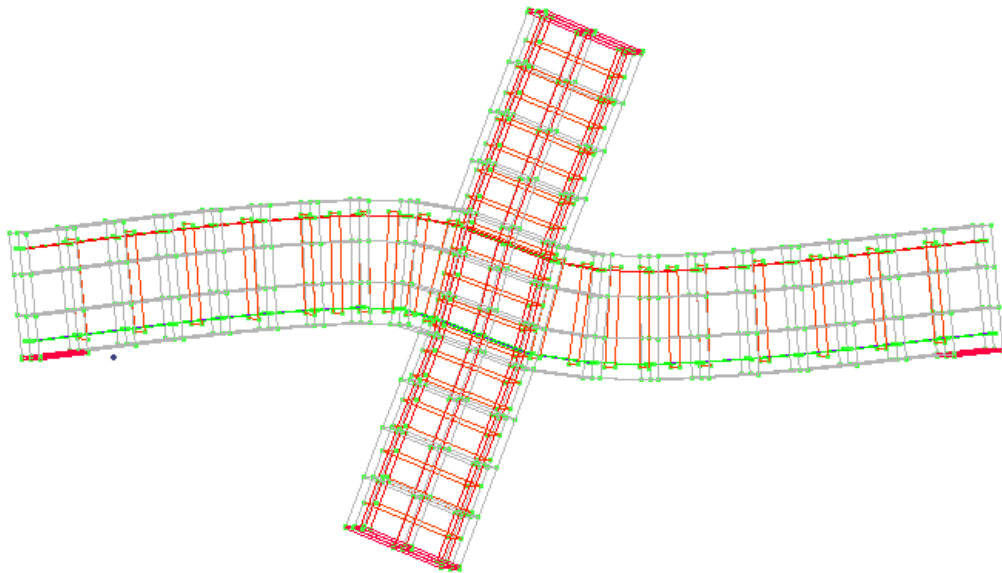


Σχήμα 6. 18 Συνάρτηση επιβαλλόμενης μετατόπισης (13/26/39/100mm) σε 7 κύκλους φόρτισης.

Για κάθε κλάδο της συνάρτησης μετατόπισης εκτελέστηκαν 10 βήματα Newton-Raphson και 50 εσωτερικές επαναλήψεις έως ότου επιτευχθεί η σύγκλιση σε κάθε βήμα. Επιπλέον στον φορέα ασκήθηκε θλιπτική δύναμη 200KN στο υποστώμα προκειμένου να προσομοιώσει τα κατακόρυφα φορτία των υπερκείμενων ορόφων. Αυτή η φόρτιση επιβλήθηκε στον φορέα στους κόμβους του κάτω άκρου του υποστυλώματος (στους ίδιους κόμβου όπου επιβάλουμε την μετατόπιση) προς τα πάνω, έτσι ώστε να κάνουμε τον στύλο να βρίσκεται υπό θλίψη (σε συνδυασμό με την κύλιση που έχει στο άνω άκρο, άρα θα αναπτύσσει μια αντίδραση θλιπτική). Ο παραμορφωμένος φορέας όπως προέκυψε από την ανάλυση φαίνεται στο σχήμα 6.19. Επίσης για να αποφύγουμε τις τοπικές αστοχίες, σε όλες τις στηρίξεις και στο κάτω άκρο όπου επιβάλουμε την μετατόπιση και την θλιπτική δύναμη, τοποθετήσαμε μεταλλικές πλάκες. Οι μεταλλικές πλάκες έχουν μέτρο ελαστικότητας $E = 200GPa$ με $\nu = 0,3$ και αντοχή σε θλίψη και εφελκυσμό $f_c = 500MPa$ και $f_t = 500MPa$ αντίστοιχα. Προσομοιάστηκαν με 8-κομβικά εξαεδρικά στοιχεία όπως φαίνεται στο σχήμα 6.20.

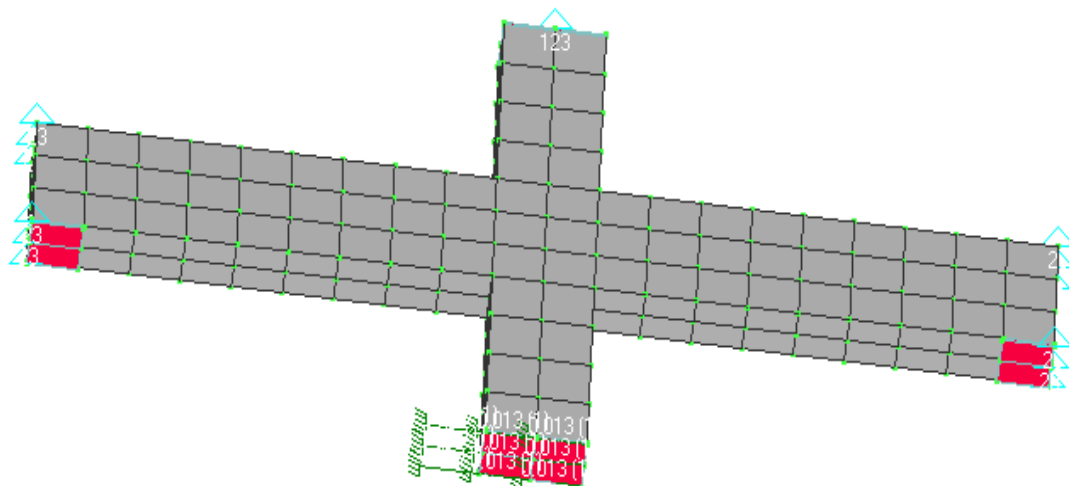
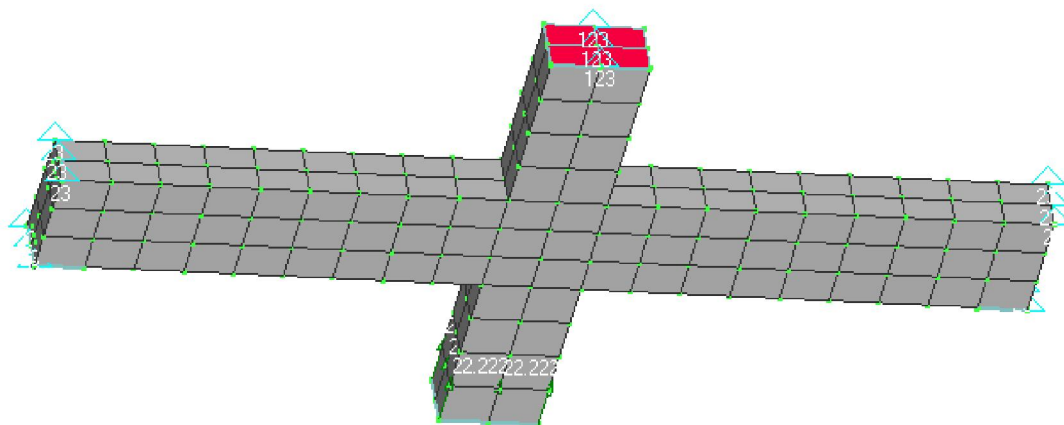


A.



B.

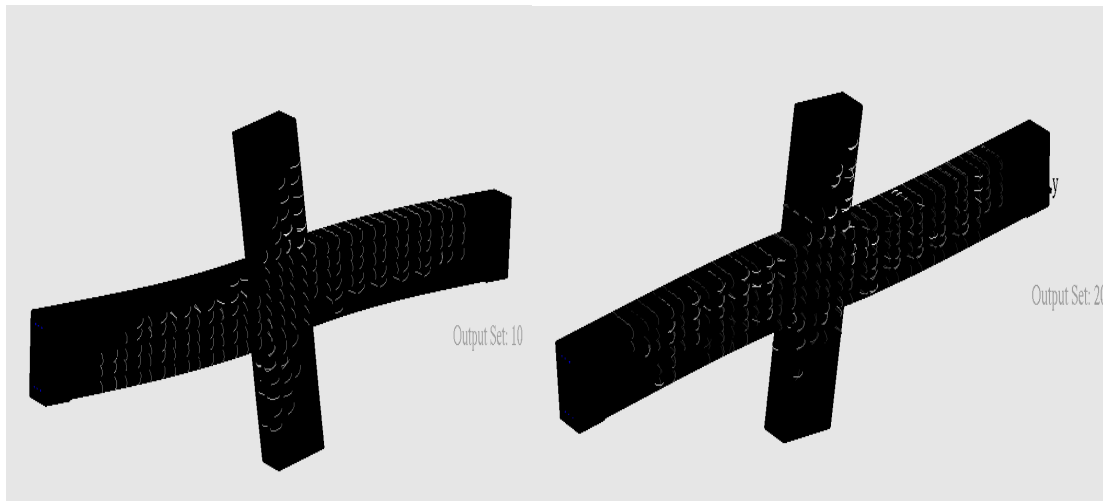
Σχήμα 6. 19 A. Παραμορφωμένος φορέας με τα εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος με χρήση του προγράμματος Femap. B. Παραμορφωμένος φορέας όπου φαίνονται τα γραμμικά στοιχεία οπλισμού με χρήση του προγράμματος Femap.



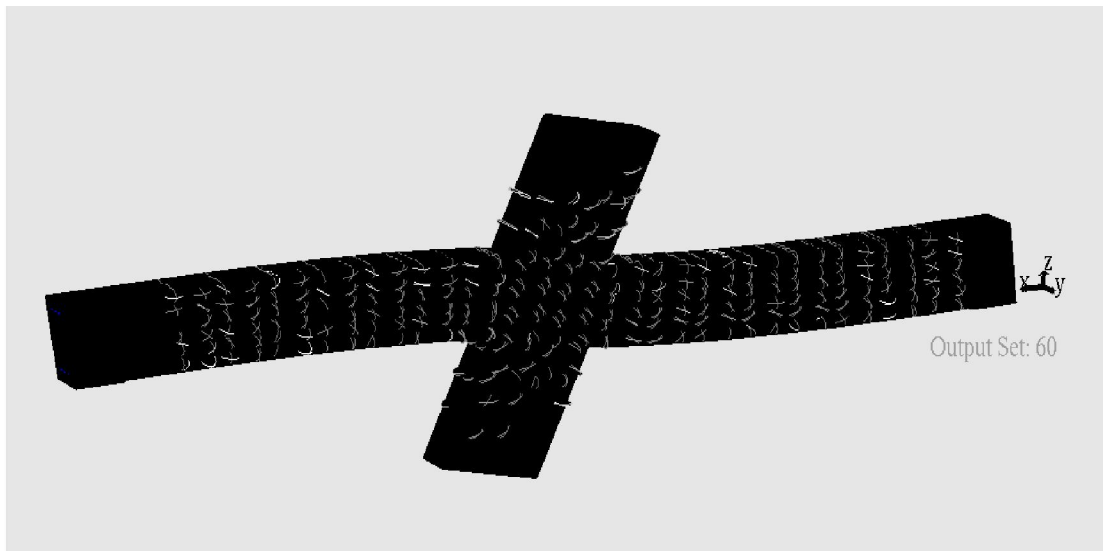
Σχήμα 6. 20 Οι μεταλλικές πλάκες που χρησιμοποιήθηκαν στις περιοχές των στηρίξεων και στο κάτω άκρο του υποστυλώματος όπου επιβάλλεται σταθερή θλιπτική δύναμη (πάνω σχήμα) και η συνάρτηση μετατόπιση (κάτω σχήμα).

Οι ρηγματώσεις του φορέα αναπτύσσονται στις περιοχές που αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις κατά την διάρκεια των κύκλων φόρτισης. Οι ρηγματώσεις απεικονίζονται στο σχήμα 6.21. Στο 6.21 Α, φαίνονται ακριβώς οι ρωγμές που έχουν αναπτυχθεί στις εφελκυσόμενες περιοχές κατά την παραμόρφωση του φορέα. Στο 6.21 Α, αριστερά απεικονίζεται ο ανοδικός κλάδος του πρώτου κύκλου ενώ δεξιά ο καθοδικό κλάδος του ίδιου κύκλου επιβολής μετατόπισης. Μπορούμε να διακρίνουμε στο δεξί σχήμα ότι κάποιες ρωγμές, που είχαν αναπτυχθεί στο υποστύλωμα και στο δοκάρι (κυρίως στο αριστερό τμήμα) κατά τον ανοδικό κλάδο (αριστερό σχήμα), έχουν κλείσει. Δηλαδή κατά την αντίστροφη πορεία μετατόπισης, οι ρωγμές που είχαν ανοίξει τείνουν να κλείσουν. Τέλος στο σχήμα 6.21Β φαίνεται στον έκτο κύκλο

επιβολής μετατόπισης, την πύκνωση των ρωγμών που οδηγεί σε μη γραμμικές συμπεριφορές στον φορέα.



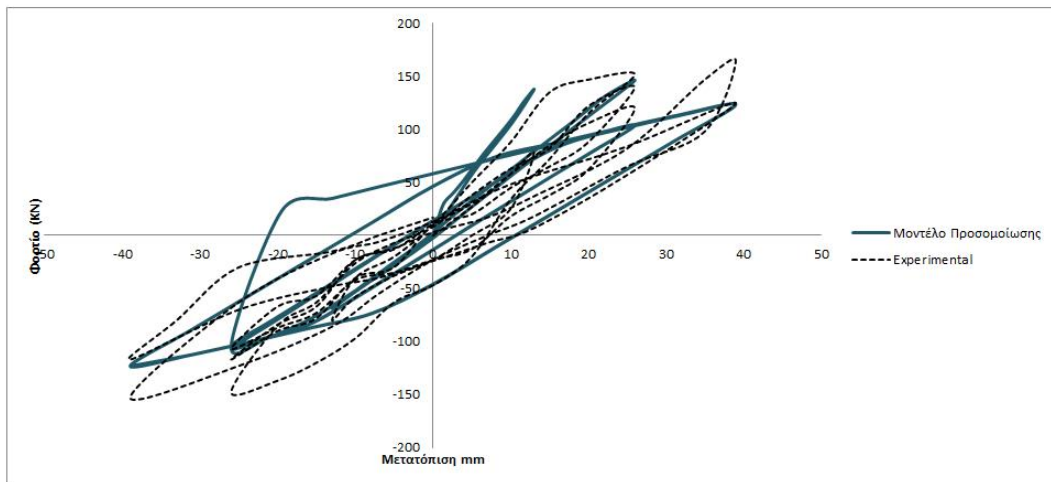
A.



B.

Σχήμα 6. 21 A. Ρηγμάτωση του φορέα κατά τον πρώτο κύκλο φόρτισης. Αριστερό σχήμα-ανοδικός κλάδος, δεξί σχήμα-καθοδικός κλάδος (κλείσιμο ρωγμών). B. Έντονη ρηγμάτωση του φορέα κατά τον έκτο κύκλο επιβολής μετατόπισης.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση απεικονίζονται στην γραφική παράσταση του σχήματος 6.22. Τα αποτελέσματα προέκυψαν από τον κόμβο που ανέπτυξε τις μεγαλύτερες μετατοπίσεις και βρίσκεται στο κατώτερη διατομή του στύλου.



Σχήμα 6. 22 Γραφική παράσταση Φορτίο-Μετατόπιση και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων προκύπτει πως κάθε κύκλος φόρτισης προσεγγίζει ικανοποιητικά το οριακό φορτίο (κυρίως στις θετικές μετατοπίσεις). Το εύρος των μετατοπίσεων κάθε κύκλου είναι κοντά με το πειραματικό, κυρίως για τους πρώτους κύκλους φόρτισης. Η ελάχιστη αυξημένη δυσκαμψία που παρουσιάζει το μοντέλο προσομοίωσης οφείλεται στο γεγονός, ότι δεν έχουμε λάβει υπόψη μας την ολίσθηση των οπλισμών αλλά θεωρούμε πως ο οπλισμός παρουσιάζει πλήρη συνάφεια και είναι επαρκώς αγκυρωμένος. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες του μοντέλου προσομοίωσης δεν προσεγγίζουν το οριακό φορτίο (με αρνητικό πρόσημο) του πειραματικού στις αρνητικές μετατοπίσεις. Το κυριότερο πρόβλημα φαίνεται πως παρουσιάζεται όταν από την ακραία αρνητική μετατόπιση επιστρέφει στην αρχική θέση ισορροπίας (ανοδικός κλάδος από την αρνητική ακραία τιμή μέχρι την μηδενική τιμή της μετατόπισης). Κυρίως στον τέταρτο κύκλο και στον τελευταίο εμφανίζεται μια σημαντική απόκλιση της καμπύλης από το συνολικό εύρος των μετατοπίσεων που φαίνεται πως παρουσιάζει ο φορέας. Σε αυτούς τους κύκλους, ιδιαίτερα στον τελευταίο εμφανίζονται κάποιες τοπικές αστοχίες του φορέα και τον οδηγούν σε αυτά τα αποτελέσματα που διαφέρουν από τα πειραματικά. Συγκεκριμένα σε αυτά τα σημεία παρατηρήθηκε αδυναμία σύγκλισης του κώδικα δεδομένου του αυξημένου αριθμού των ρωγμών στο σκυρόδεμα.

Κεφάλαιο 7. Προγραμματισμός Προεντεταμένων Φορέων από Οπλισμένο Σκυρόδεμα

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 7.1 Εισαγωγή | 134 |
| 7.2 Εισαγωγή της προέντασης στον κώδικα του ReConAn..... | 135 |
| 7.3 Αριθμητική Εφαρμογή της Προέντασης | 136 |

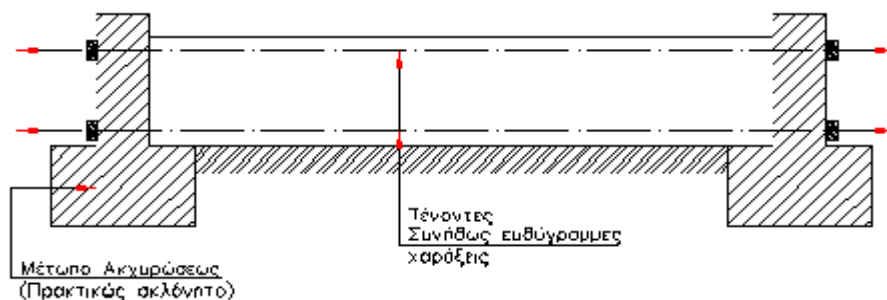
7.1 Εισαγωγή

Σε πολλές κατασκευές μεγάλης κλίμακας, όπως είναι οι γέφυρες μεγάλων ανοιγμάτων, χρησιμοποιείται η μέθοδος της προέντασης. Πρόκειται για μια τεχνική εισαγωγής θλιπτικής δύναμης στην κατασκευή μας προσδοκώντας βελτίωση της καμπτικής συμπεριφοράς του σκυροδέματος. Η ευνοϊκή επιρροή της θλιπτικής δύναμης φαίνεται από την μείωση των εφελκυστικών τάσεων που αναπτύσσονται στο σκυρόδεμα.

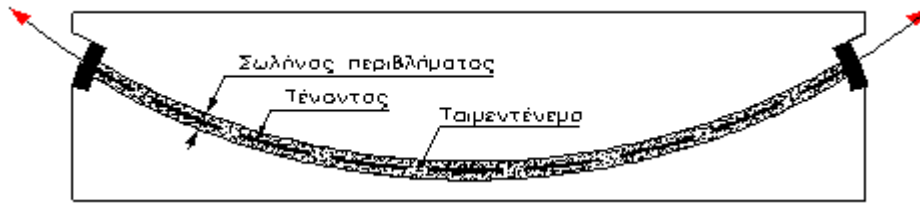
Με την εφαρμογή της προέντασης επιτυγχάνουμε για την ίδια διατομή αύξηση της φέρουσας ικανότητας και μείωση των παραμορφώσεων. Επιπλέον για την ίδια ένταση μπορούμε να σχεδιάσουμε τους φορείς μας με μικρότερες διαστάσεις και συνεπώς να ελαττώσουμε την ένταση που δημιουργεί το ίδιο βάρος. Γι αυτόν τον λόγο, δίνεται η δυνατότητα επέκτασης χρήσεως του σκυροδέματος για την γεφύρωση μεγάλων ανοιγμάτων ή την κάλυψη μεγάλων χώρων. Επίσης βελτιώνεται γενικώς η συμπεριφορά του σκυροδέματος αφού αποφεύγεται (ή περιορίζεται σε επιθυμητά επίπεδα) η ρηγματώση με αποτέλεσμα την βελτίωση την ανθεκτικότητας και την επίτευξη υψηλότερων επιπέδων επιτελεστικότητας.

Η προένταση επιβάλλεται μέσω τενόντων από χάλυβα υψηλής αντοχής ($f_{yk} = 1670 \sim 2160 \text{ MPa}$). Οι τύποι τενόντων που χρησιμοποιούνται είναι: 7-κλώνα συρματόσχοινα (όπου είναι η πιο διαδεδομένη μορφή), ράβδοι και σύρματα.

Η τάνυση επιβάλλεται είτε πριν είτε μετά την σκλήρυνση του σκυροδέματος. Η τάνυση πριν από την σκλήρυνση (προεντεταμένη κλίνη, σχήμα 7.1) χρησιμοποιείται κυρίως για την προένταση προκατασκευασμένων στοιχείων. Οι χάλυβες που περιβάλλονται από σκυρόδεμα βρίσκονται σε άμεση συνάφεια. Η τάνυση που επιβάλλεται μετά την σκλήρυνση (σχήμα 7.2) πραγματοποιείται μέσω σωλήνων (χαλύβδινων ή πλαστικών). Ο χώρος μεταξύ του σωλήνα και του χάλυβα γεμίζει με κάποιο προστατευτικό υλικό (τσιμεντένεμα ή κερί ή προϊόντα πετρελαίου). Σε αυτήν την περίπτωση ο τένοντας βρίσκεται πάλι σε πλήρη συνάφεια με το τσιμεντένεμα και έμμεσα με το περιβάλλον σκυρόδεμα (εφόσον το τσιμεντένεμα βρίσκεται σε συνάφεια με τον σωλήνα και αυτός με την σειρά του με το περιβάλλον σκυρόδεμα). Επιπλέον υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο τένοντας δεν βρίσκεται σε συνάφεια με το σκυρόδεμα, κυρίως σε περιπτώσεις εξωτερικής προέντασης.



Σχήμα 7. 1 Τάνυση πριν από την σκλήρυνση (προεντεταμένη κλίνη)^[2].



Σχήμα 7. 2 Τάνυση μετά την σκλήρυνση^[2].

7.2 Εισαγωγή της προέντασης στον κώδικα του ReConAn

Είναι κοινώς αποδεκτό πως η προένταση μπορεί να προσομοιωθεί με την μεταβολή της θερμοκρασίας ή από ένα σύνολο αξονικών κατανεμημένων δυνάμεων το οποίο ασκείται θλιπτικά στα μέλη της κατασκευής από οπλισμένο σκυρόδεμα. Το ReConAn χρησιμοποιεί μια υπολογιστική διαδικασία επιβολής των δυνάμεων προέντασης άμεσα στους τένοντες οι οποίοι προσομοιώνονται ως ενσωματωμένοι ράβδοι οπλισμού.

Ο αλγόριθμος που έχει αναπτυχθεί, με σκοπό τον υπολογισμό της θλίψης που παράγεται στα εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος σε επίπεδο υλικού, πρώτα υπολογίζει την αρχική τάση και την αρχική παραμόρφωση που παράγονται από την επιβολή των δυνάμεων προέντασης στα στοιχεία των τενόντων (σχέση 7.1). Στην συνέχεια οι εσωτερικές δυνάμεις της προέντασης των τενόντων $F_{R,Int}$ μετατρέπονται μέσω του μητρώου T , που εκφράζει τις κινηματικές σχέσεις ενσωματωμένου οπλισμού-εξαεδρικού στοιχείου (σχέση 7.2), σε διάνυσμα εσωτερικών δυνάμεων του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου σκυροδέματος $F_{H,Int}$ το οποίο ορίζει τις αρχικές συνθήκες φόρτισης του εξαεδρικού στοιχείου. Μετά το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων του εξαεδρικού στοιχείου λόγω προέντασης, μετατρέπεται σε ένα διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων $F_{H,Ext}$ (σχέση 7.3) το οποίο επιβάλλεται στους κόμβους του αντίστοιχου εξαεδρικού στοιχείου. Η επιρροή της επιβολής της προέντασης λαμβάνει χώρα στο πρώτο προσαυξητικό βήμα φόρτισης όπου γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής τάσης και παραμόρφωσης (σχέση 7.1). Μετά την ολοκλήρωση του πρώτου προσαυξητικού βήματος, ασκείται στον φορέα προσαυξητικά το μη γραμμικό φορτίο μέχρι να φτάσει η κατασκευή σε αστοχία. Παράλληλα οι τένοντες λειτουργούν ως στοιχεία οπλισμού και οι νέες τάσεις και οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται υπολογίζονται σύμφωνα με την σχέση 7.4.

$$\sigma_{i0} = \frac{F_p}{A_i}, \quad \varepsilon_{i0} = \frac{\sigma_{i0}}{E_s} \quad 7.1$$

$$F_{H,Int} = T L F_{R,Int} \quad 7.2$$

(24x1) (24x6)(6x2)(2x1)

$$F_{H,Ext} = -F_{H,Int} \quad 7.3$$

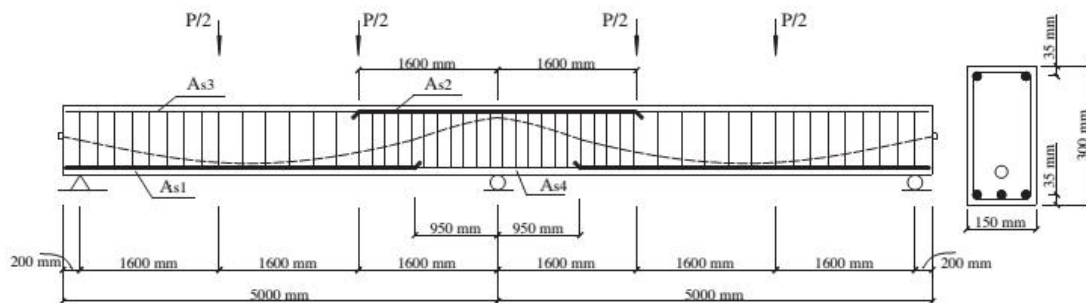
(24x1) (24x1)

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i0} + \Delta\sigma_{i+1}, \quad \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i0} + \Delta\varepsilon_{i+1} \quad 7.4$$

Όπου F_p είναι η δύναμη προέντασης, A_i είναι το εμβαδόν διατομής του τένοντα, E_s το μέτρο ελαστικότητας του τένοντα.

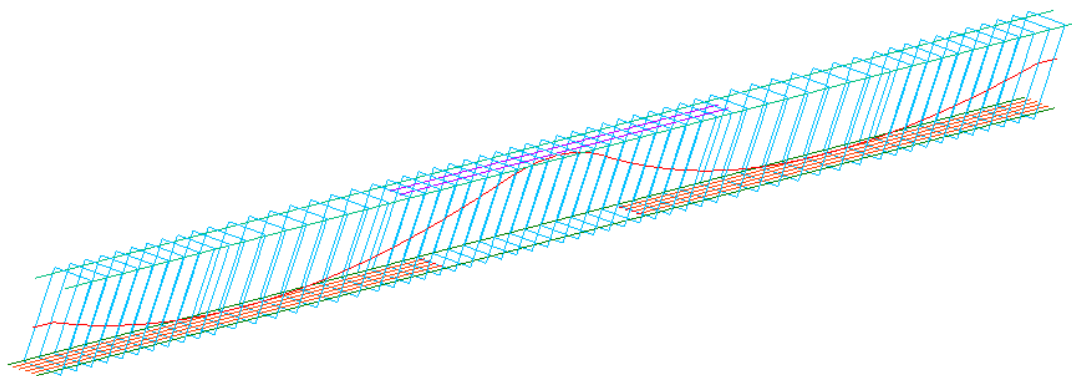
7.3 Αριθμητική Εφαρμογή της Προέντασης

Προσομοιάστηκε το μοντέλο που χρησιμοποιείται στο άρθρο ‘Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams’ που δημοσιεύτηκε από τους Tiejiong Lou, Sergio M.R. Lopes and Andelino V.Lopes. Πρόκειται για ένα δοκάρι δυο ανοιγμάτων από οπλισμένο σκυρόδεμα που απεικονίζεται στο σχήμα 7.3. Οι διαστάσεις της διατομής και η θέση των οπλισμών φαίνονται επίσης στο σχήμα 7.3. Ο φορέας περιλαμβάνει έναν προεντεταμένο τένοντα που ακολουθεί καμπύλη χάραξη και μη προεντεταμένους διαμήκεις και εγκάρσιους (συνδετήρες) οπλισμούς. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3, το δεξί άκρο παρουσιάζει άρθρωση, ενώ στην μέση και στο δεξί άκρο ο φορέας στηρίζεται με κύλιση. Η φόρτιση επιβάλλεται στους κόμβους των εξαεδρικών στοιχείων σκυροδέματος που βρίσκονται σε απόσταση 1,6m από τις ακραίες στηρίξεις και επίσης 1,6m εκατέρωθεν της μεσαίας κύλισης.

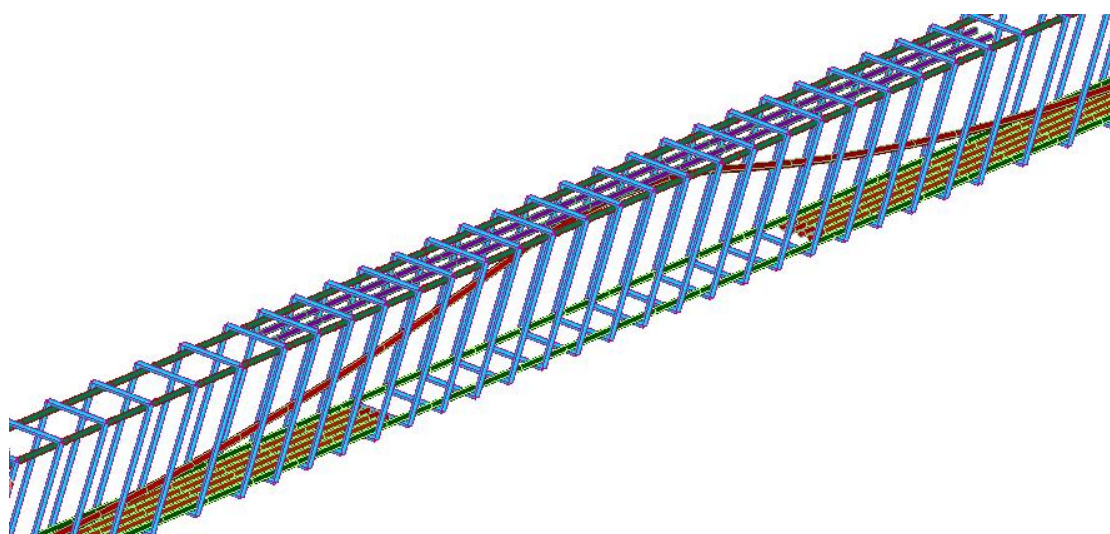


Σχήμα 7.3 Μηκτομή και διατομή της εξεταζόμενης δοκού δυο ανοιγμάτων^[15].

Στην δικιά μας αριθμητική εφαρμογή (μοντέλο YLA2 του άρθρου) χρησιμοποιήθηκαν οι εξής μη προεντεταμένοι οπλισμοί: Για A_{s1} χρησιμοποιήθηκαν 4Φ12 ενώ για A_{s2}, A_{s3}, A_{s4} χρησιμοποιήθηκαν 2Φ12 το καθένα. Στα σχήματα 7.4 και 7.5 φαίνονται η προσομοίωση των οπλισμών με χρήση του προγράμματος Femap.



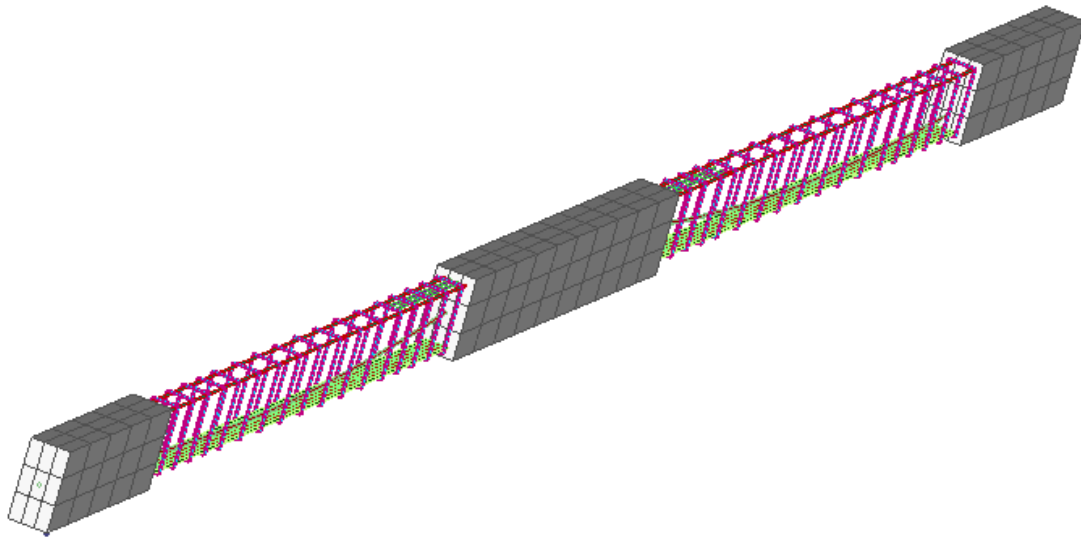
Σχήμα 7. 4 Λεπτομέρειες οπλισμού ως γραμμικού στοιχείου από την προσομοίωση του μοντέλου με χρήση του προγράμματος Femap.



Σχήμα 7. 5 Λεπτομέρειες οπλισμού από την προσομοίωση του μοντέλου με χρήση του προγράμματος Femap.

Χαρακτηριστικά Σκυροδέματος

Χρησιμοποιήθηκε σκυρόδεμα με χαρακτηριστική αντοχή σε θλίψη $f_{ck} = 36,7 \text{ MPa}$. Το μέτρο ελαστικότητας του είναι $E = 30000 \text{ MN/m}^2$ ενώ ο λόγος Poisson $\nu = 0,20$. Η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος ορίζεται μέσω μιας παραμέτρου που εκφράζει ένα ποσοστό της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος. Επίσης υπάρχει και ο συντελεστής διατήρησης της διατμητικής στιβαρότητας β . Η δοκός χωρίστηκε σε 5 περιοχές: (1) 3 γύρω από τις στηρίξεις όπου εκτείνονται 1m οι ακραίες και 2m εκατέρωθεν της μεσαίας και αντιπροσωπεύει τις περιοχές όπου κυριαρχεί η διάτμηση, (2) 2 περιοχές στα ανοίγματα της δοκού όπου κυριαρχεί η κάμψη. Στις περιοχές αυτές (σχήμα 7.6), πραγματοποιήθηκε παραμετρική διερεύνηση των παραμέτρων εφελκυσμού και παραμένουσας διατμητικής στιβαρότητας. Οι επικρατέστερες τιμές της εφελκυστικής αντοχής είναι 0,01 και 0,05, ενώ της παραμένουσας διατμητικής στιβαρότητας είναι 0 και 0,05.



Σχήμα 7. 6 Απεικόνιση με εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος των διατμητικών περιοχών της δοκού.

Χαρακτηριστικά Μη Προεντεταμένου Οπλισμού

Χρησιμοποιήθηκε χάλυβας οπλισμού με χαρακτηριστική τάση διαρροής $f_{yk} = 361 \text{ MPa}$. Το μέτρο ελαστικότητας που χρησιμοποιήθηκε είναι $E = 200000 \text{ MPa}$. Χρησιμοποιήθηκε λόγος Poisson $\nu=0,3$. Τέλος τοποθετήθηκαν συνδετήρες (εγκάρσιος οπλισμός) $\Phi 10/150$ στις διατμητικές περιοχές της δοκού, ενώ τοποθετήθηκαν $\Phi 10/200$ στις καμπτικές περιοχές της δοκού.

Χαρακτηριστικά Τένοντα

Για τον τένοντα χρησιμοποιήθηκε 7-κλωνο συρματόσχοινα με σωλήνα διαμέτρου 15mm με χαρακτηριστική αντοχή $f_{uk} = 1941 \text{ MPa}$, χαρακτηριστική τάση διαρροής $f_{yk} = 1680 \text{ MPa}$ και μέτρο ελαστικότητας $E = 197 \text{ GPa}$. Η αρχική τάση του τένοντα λόγω της δύναμης προέντασης είναι $f_{pe} = 1196 \text{ MPa}$. Τέλος η καμπύλη που ακολουθεί ο τένοντας περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$y = 2,5297 * 10^{-5}x^2 - 0,1006 x \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1988 \text{ mm} \quad 7.5.a$$

$$y = 3,0518 * 10^{-5}x^2 - 0,1214 x + 20,7 \quad \text{για } 1988 \leq x \leq 4320 \text{ mm} \quad 7.5.b$$

$$y = -1,4817 * 10^{-4}x^2 + 1,4224 x - 3313,9 \quad \text{για } 4320 \leq x \leq 4800 \text{ mm} \quad 7.5.c$$

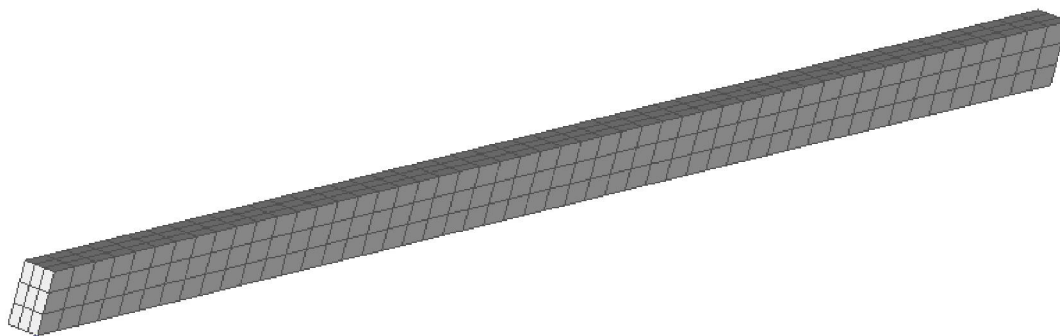
Όπου x είναι η από την ακραία στήριξη και y είναι η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του άξονα του τένοντα και του άξονα της δοκού. Στις περιοχές έξω από τις στηρίξεις (διάστημα 200mm) ο τένοντας βρίσκεται οριζόντιος.

Προσομοίωση Σκυροδέματος

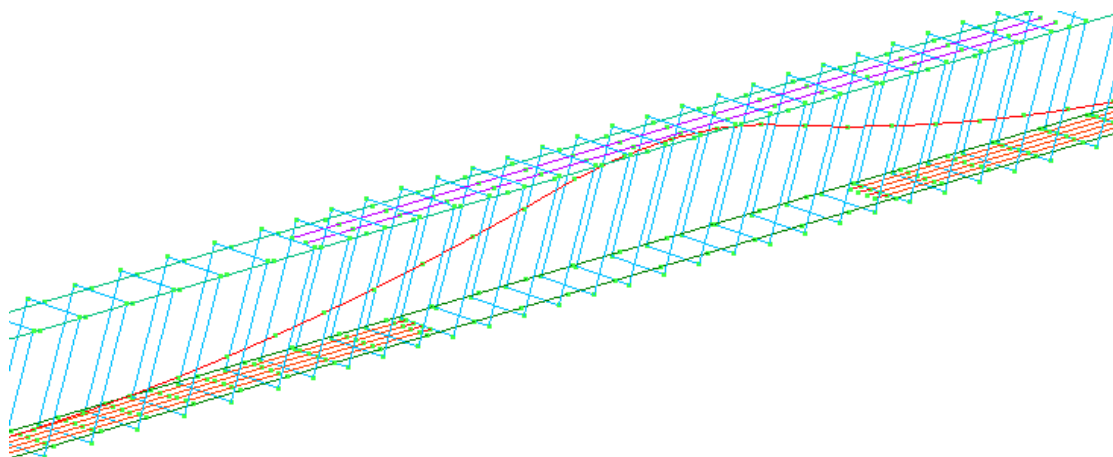
Για την προσομοίωση του σκυροδέματος χρησιμοποιήθηκαν εξαεδρικά στοιχεία 8-κομβικά και 20-κομβικά. Επίσης έγινε η ανάλυση με εξαεδρικά στοιχεία μήκους 0,20m και 0,10m, πλάτους 0,05m και ύψους 0,10m. Εφαρμόστηκε η θεωρία της διανεμημένης ρωγμής για την προσομοίωση της ρηγμάτωσης. Επίσης σύμφωνα με τις τροποποιήσεις του καταστατικού υλικού (κεφάλαιο 5.5), ορίστηκε ως όριο για την χρησιμοποίηση του ελαστικού μητρώου καταστατικότητας το 50%. Τέλος χρησιμοποιήθηκε η παράμετρος $c=5$ απαραίτητη για τον γεωμετρικό περιορισμό της αναζήτησης της θέσης των γειτονικών οπλισμών με το πεπερασμένο στοιχείο σκυροδέματος. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 450 πεπερασμένα στοιχεία (σχήμα 7.7) στην περίπτωση που τα στοιχεία είχαν μήκος 0,2m, ενώ προφανώς στην περίπτωση που το μήκος ήταν 0,1m τα στοιχεία ήταν 900.

Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού

Για την προσομοίωση του χάλυβα οπλισμού (προεντεταμένου και μη) χρησιμοποιήθηκαν τα γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία δικτύματος, ενώ δοκιμάστηκαν και τα NBCFB στοιχεία χωρίς να προκαλέσουν κάποια σημαντική αλλαγή. Τα στοιχεία του διαμήκη οπλισμού έχουν μήκος 0,2m ενώ των συνδετήρων έχουν μήκη ίση με τις πλευρές των διαστάσεων του. Επίσης η οριζόντια προβολή του κάθε στοιχείου του τένοντα είναι 0,2m. Τέλος εφαρμόστηκε το διγραμμικό προσομοίωμα υλικού για τον μη προεντεταμένο οπλισμό, ενώ εφαρμόστηκε το προσομοίωμα Menegotto-Pinto για τον τένοντα προέντασης. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 622 πεπερασμένα στοιχεία χάλυβα οπλισμού όπως απεικονίζεται στο σχήμα 7.8.



Σχήμα 7. 7 Προσομοίωση δοκού από οπλισμένο σκυρόδεμα με 450 εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία.

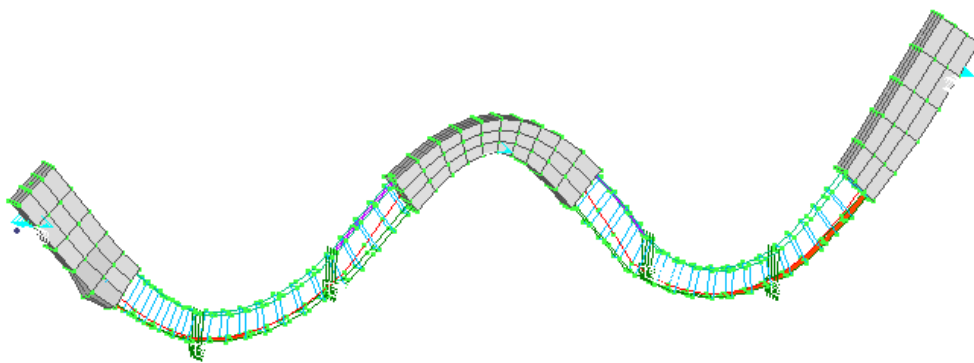


Σχήμα 7. 8 Προσομοίωση χάλυβα οπλισμού

Ανάλυση

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε κάνοντας χρήση του προγράμματος που αναπτύχθηκε στην διδακτορική διατριβή του Γ.Μάρκου(2010). Η ανάλυση εκτελέστηκε με έλεγχο φορτίου. Για τον έλεγχο φορτίου ασκήθηκε φόρτιση ίση με $P/2=117,6$ KN στους αντίστοιχους κόμβους του στοιχείου σκυροδέματος όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3. Δηλαδή το συνολικό φορτίο που ασκήθηκε στον φορέα ήταν $4 * P/2=470,4$ KN. Όμως στις καμπύλες P-δ χρησιμοποιήθηκε το φορτίο $P=2*117,6=235,2$ KN (δηλαδή η συνολική φόρτιση ενός ανοίγματος, $2*P/2$). Για την φόρτιση χρησιμοποιήθηκαν 100 βήματα Newton-Raphson , με 50 εσωτερικές επαναλήψεις το κάθε βήμα. Συνολικά περιγράφονται τα αποτελέσματα τριών αναλύσεων με τα εξής διαφορετικά χαρακτηριστικά:

- Ανάλυση 1: Προσομοίωση με 8-κομβικά εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος με μήκος 0,2m. Ο συντελεστής παραμένουσας διατμητικής αντοχής μηδενίστηκε($\beta=0$) και στις δυο περιοχές (διατμητική-καμπτική). Η παράμετρος της εφελκυστικής αντοχής του σκυροδέματος πήρε την τιμή 0,01 στις διατμητικές περιοχές, ενώ μηδενίστηκε στις καμπτικές περιοχές.
- Ανάλυση 2: Προσομοίωση με 20-κομβικά εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος με μήκος 0,1m. Ο συντελεστής παραμένουσας διατμητικής αντοχής μηδενίστηκε($\beta=0$) στην καμπτική περιοχή ενώ στην διατμητική πήρε την τιμή $\beta=0,01$. Η παράμετρος της εφελκυστικής αντοχής του σκυροδέματος πήρε την τιμή 0,05 και στις δύο περιοχές.
- Ανάλυση 3: Προσομοίωση με 8-κομβικά εξαεδρικά στοιχεία σκυροδέματος με μήκος 0,1m. Ο συντελεστής παραμένουσας διατμητικής αντοχής μηδενίστηκε($\beta=0$) στην καμπτική περιοχή ενώ στην διατμητική πήρε την τιμή $\beta=0,01$. Η παράμετρος της εφελκυστικής αντοχής του σκυροδέματος πήρε την τιμή 0,05 και στις δύο περιοχές.



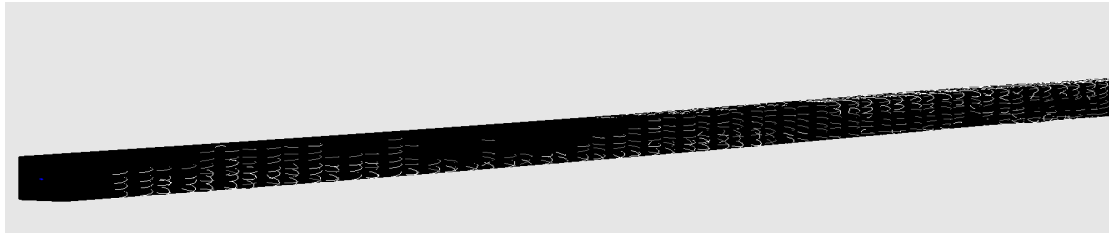
Σχήμα 7. 9 Παραμορφωμένος φορέας όπως προέκυψε από την ανάλυση.

Σύμφωνα με την ανάλυση έχουμε εμφάνιση ρωγμών στις περιοχές όπου αναπτύσσεται πιο έντονα ο εφελκυσμός (σχήμα 7.10). Εμφανίζονται λοιπόν ρωγμές από τα πρώτα βήματα της φόρτισης στις καμπτικές περιοχές στις κάτω ίνες της διατομής και αντίστοιχα στις άνω ίνες της διατομής στην μεσαία στήριξη. Κοντά στις στηρίξεις (διατμητικές περιοχές) εμφανίζονται λοξές ρωγμές που οφείλονται στην διάτμηση. Επίσης κάνουν την εμφάνιση τους κάποιες οριζόντιες και κάποιες λοξές ρωγμές στα πρώτα στάδια της φόρτισης κοντά στα άκρα των στηρίξεων που μπορούμε να υποθέσουμε πως οφείλονται και στην επιβολή της προέντασης (στα πρώτα βήματα όπου η δύναμη προέντασης υπερτερεί έναντι του μη γραμμικού φορτίου).



A.



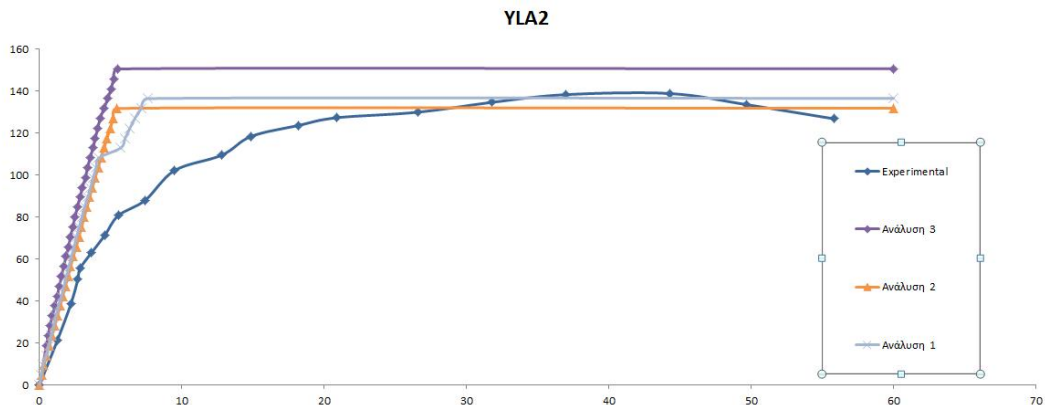


B.

Σχήμα 7. 10 Α. Ρηγματωμένη εικόνα του φορέα στα πρώτα στάδια της φόρτισης (η κάτω εικόνα είναι μεγέθυνση του αριστερού ανοίγματος της άνω εικόνας).

Β. Ρηγματωμένη εικόνα του φορέα στα τελευταία στάδια φόρτισης-πύκνωση ρωγμών (ομοίως η κάτω εικόνα είναι μεγέθυνση του αριστερού ανοίγματος της άνω εικόνας).

Τα αποτελέσματα των αναλύσεων που προέκυψαν από την ανάλυση απεικονίζονται στις γραφική αναπαράσταση της καμπύλης ικανότητας του φορέα (σχήμα 7.11). Εξετάστηκε η συμπεριφορά του αριστερού ανοίγματος της δοκού. Τα αποτελέσματα προέκυψαν από τις μετακινήσεις του κόμβου που βρίσκεται στο μέσο του αριστερού ανοίγματος και παρουσίασε την μέγιστη μετατόπιση.



Σχήμα 7. 11 Διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης των τριών αναλύσεων και σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Οι αναλύσεις μας όπως φαίνεται στο σχήμα 7.11, καταφέρνουν να προσεγγίσουν το οριακό φορτίο με ικανοποιητικό τρόπο. Τα 20-κομβικά στοιχεία παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευκαμψία από τα 8-κομβικά (όπως ήταν αναμενόμενο) όπως φαίνεται από την σύγκριση της ανάλυσης 2 και 3 που διαθέτουν κοινά τα άλλα χαρακτηριστικά. Επίσης τα 8-κομβικά της ανάλυσης 3 παρουσιάζουν μεγαλύτερη αντοχή από τα 20-κομβικά της ανάλυσης 2. Η ανάλυση 1, λόγω μηδενισμού της παραμέτρου της εφελκυστικής αντοχής και την παρουσία μιας μικρής τιμής της παραμένουσας διατμητικής αντοχής, εμφανίζει μη γραμμικότητες λίγο πριν φτάσει στο οριακό φορτίο. Η απόκλιση των αποτελεσμάτων των αναλύσεων μας εμφανίζονται στην μετάβαση από τον ελαστικό κλάδο στον οριζόντιο μετελαστικό. Σύμφωνα με την

πειραματική καμπύλη, μετά την ελαστική περιοχή αρχίζουν τμήματα του φορέα να πλαστικοποιούνται και να γίνεται μια ομαλή μετάβαση (καμπύλωση) μέχρι τον σταθερό (σχεδόν οριζόντιο) μετελαστικό κλάδο.

Η βασική διαφορά της πειραματικής διάταξης με τα μοντέλα προσομοίωσης που αναπτύχθηκαν, είναι πως ο προεντεταμένος χάλυβας οπλισμού δεν βρίσκεται σε συνάφεια με το περιβάλλον σκυρόδεμα (unbonded prestressed concrete beams). Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήσαμε, μετά την επιβολή της προέντασης, λαμβάνει τον τένοντα σαν απλό στοιχείο οπλισμού το οποίο συμβάλει σημαντικά στην δυσκαμψία και στην φέρουσα ικανότητα του φορέα. Δηλαδή στα μοντέλα προσομοίωσης ο τένοντας βρίσκεται σε πλήρη συνάφεια με το περιβάλλον σκυρόδεμα όπως και ο μη προεντεταμένος χάλυβας οπλισμού. Συνεπώς αυτό θα μπορούσε να εξηγήσει την μεγαλύτερη δυσκαμψία που παρουσιάζουν τα μοντέλα προσομοίωσης και κατ' επέκταση την μη εμφάνιση μη γραμμικών συμπεριφορών πριν το οριακό φορτίο. Επιπλέον παρατηρήθηκε λόγω των μεγάλων διαστάσεων (και συνεπώς εμφάνιση υψηλών εντάσεων) πως οι ράβδοι οπλισμού παρουσιάζουν παρασιτική δυσκαμψία. Οι μεγάλες διαστάσεις θεωρώ πως εντείνουν και το πρόβλημα της συνάφειας.

Κεφάλαιο 8. Χρήση του Προγράμματος ReConAn

Πίνακας περιεχομένων

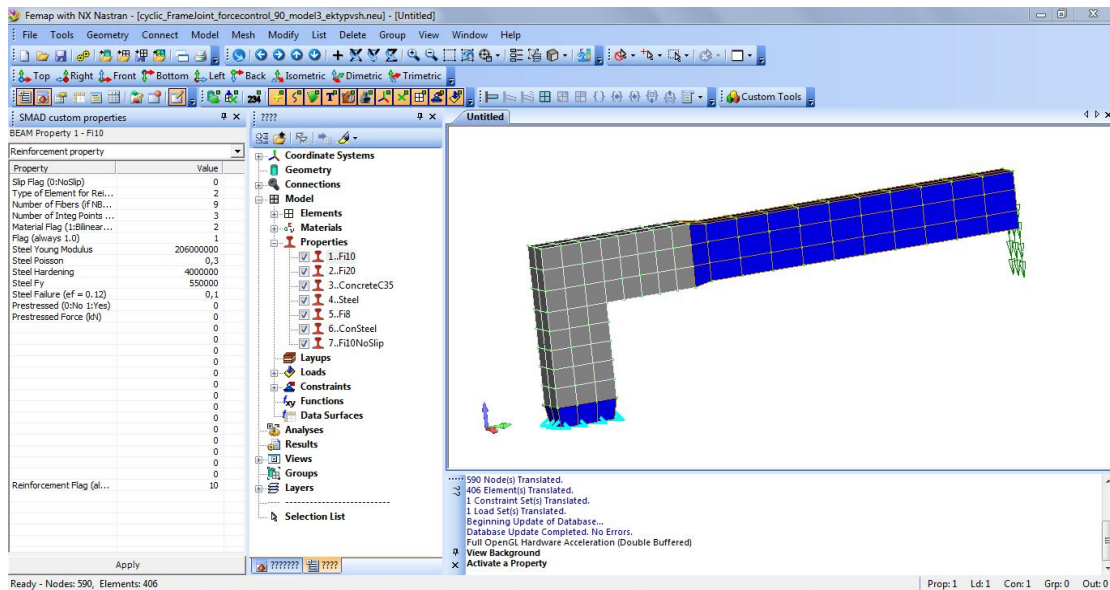
| | |
|--------------------------------------------|-----|
| 8.1 Χαρακτηριστικά του κώδικα..... | 146 |
| 8.2 Εξοικείωση με τον κώδικα ReConAn | 148 |

8.1 Χαρακτηριστικά του κώδικα

Όπως είναι γνωστό, κάθε πρόγραμμα ανάλυσης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από τρία διαφορετικά τμήματα. Το πρώτο αναφέρεται στην απεικόνιση του προβλήματος (κόμβοι, στοιχεία, υλικά κλπ.), στην περιγραφή της γεωμετρίας στην διακριτοποίηση του φορέα(pre-processor). Το δεύτερο αναφέρεται στην αριθμητική ανάλυση του φορέα, την ερμηνεία της διακριτοποίησης που έγινε στο πρώτο τμήμα για το αριθμητικό μοντέλο το οποίο επιλύεται χρησιμοποιώντας την κατάλληλη στρατηγική επίλυσης. Το τρίτο αναφέρεται στην απεικόνιση των αποτελεσμάτων (τάσεις, παραμορφώσεις, μετατοπίσεις) που προέρχονται από την επίλυση του αριθμητικού μοντέλου(post-processor).

Προεπεξεργαστής (pre-processor)

Το ReConAn χρησιμοποιεί για το πρώτο τμήμα το πρόγραμμα Femap. Το Femap είναι ένα εύχρηστο πρόγραμμα το οποίο μας παρέχει ένα ανεξάρτητο περιβάλλον σχεδίασης και προσομοίωσης του μοντέλου μας. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε την δυνατότητα να σχεδιάσουμε τον φορέα μας, να τον ορίσουμε γεωμετρικά και να τον διακριτοποιήσουμε. Φτιάχνουμε λοιπόν τα πεπερασμένα στοιχεία ορίζοντας κόμβους και καθορίζουμε τις παραμέτρους και τις ιδιότητες κάθε στοιχείου. Οι παράμετροι έχουν να κάνουν με τα χαρακτηριστικά του υλικού που παρουσιάζει το κάθε στοιχείο, όπως το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson. Διάφορα άλλα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στην προσομοίωση των στοιχείων (όπως τον καθορισμό των ινών που διαιρείται κάθε διατομή στην περίπτωση που έχουμε NBCFB στοιχείο), ορίζονται μέσω του SMAD Custom properties software (σχήμα 8.1). Με την χρήση του SMAD Custom properties software μας δίνεται η δυνατότητα να παρέχουμε στον κώδικα όλες τις απαραίτητες παραμέτρους που χρειάζεται ο επιλύτης για να μπορέσει να εφαρμόσει την υπολογιστική διαδικασία. Το SMAD Custom properties software έχει αναπτυχθεί από τον Γ.Σταυρουλάκη κατά την διάρκεια της διδακτορικής του διατριβής.



Σχήμα 8. 1Κύριο παράθυρο του Femap FEA με χρήση των SMAD Custom properties.

Βασικά στοιχεία του κώδικα ReConAn-επιλύτη(solver)

Ο κώδικας ReConAn έχει γραφτεί σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90/95 με την χρήση του Microsoft Visual Studio. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί ο τελευταίος Fortran Compiler (μεταγλωττιστής) για να φτιάξει (build) τα εκτελέσιμα αρχεία. Το ReConAn FEA είναι συμβατό με Windows XP, Vista και 7 για 32bit και 64bit CPU systems.

Το βασικότερο στοιχείο του κώδικα αποτελεί ο αντικειμενοστραφής προγραμματισμός του. Η χρησιμοποίηση του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού κάνει την ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων περισσότερο ευέλικτη γιατί ένας κώδικας που βασίζεται στην ανάλυση αυτή μπορεί εύκολα να επεκταθεί και επαναχρησιμοποιηθεί.

Για αυτόν τον λόγο ο συνολικός κώδικας έχει διασπαστεί σε ανεξάρτητα τμήματα (modules). Αυτά τα τμήματα αποτελούν αυτοδύναμα κομμάτια κώδικα τα οποία μας δίνουν την δυνατότητα να τα επαναχρησιμοποιήσουμε σε οποιαδήποτε εφαρμογή. Επιπλέον, καθώς μια εφαρμογή αποτελείται από αυτοδύναμα κομμάτια κώδικα, δίνεται η δυνατότητα στον προγραμματιστή να αναπτύξει την συγκεκριμένη εφαρμογή σε στάδια. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται εύκολη η παρακολούθηση του κώδικα για έλεγχο των αριθμητικών διαδικασιών και αποτελεσμάτων σε κάθε φάση της ανάλυσης και η επίλυση των προβλημάτων.

Όπως όλες οι σύγχρονες γλώσσες αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, η Fortran90/95 διαθέτει τη δυνατότητα υλοποίησης τριών χαρακτηριστικών:

- Ενθυλάκωση (encapsulation). Πρόκειται για την δυνατότητα δημιουργίας κλάσεων, δηλαδή αυτόνομων μονάδων, όπως τα αρθρώματα (modules). Ένα

άρθρωμα δημιουργείται σε ξεχωριστό αρχείο που περιέχει πηγαίο κώδικα με την κατάληξη .f90.

- Κληρονομικότητα (inheritance). Πρόκειται για την δυνατότητα δημιουργία ιεραρχικών τύπων δεδομένων, όπως διαδοχικά παράγωγων τύπων δεδομένων.
- Πολυμορφισμός (Polymorphism). Πρόκειται για την δυνατότητα δημιουργία ενιαίων διεπιφανειών για διαφοροποιημένη χρήση ανάλογα με το είδος των δεδομένων.

Τέλος ο επιλύτης του κώδικα είναι υπεύθυνος για την μετάφραση της γεωμετρίας του μοντέλου και των ιδιοτήτων των στοιχείων του (από το αρχείο που εξάγει ο προεπεξεργαστής). Στην συνέχεια θα εκτελέσει την κατάλληλη διαδικασία επίλυσης και θα προσδιορίσει τα εντατικά μεγέθη του φορέα, τάσεις και μετατοπίσεις.

Το λογισμικό του post-processor

Το λογισμικό του post-processor είναι υπεύθυνο για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων που προέρχονται από τον επιλύτη. Υπάρχουν δυο προγράμματα που χρησιμοποιούνται γι αυτόν τον σκοπό:

- Το λογισμικό Femap που προσφέρει την δυνατότητα απεικόνισης των τάσεων (μέσω χρωματισμών) και των παραμορφώσεων. Επίσης γίνεται η εικονική αναπαράσταση της παραμορφωμένης και απαραμόρφωτης κατάστασης του φορέα και των διαφόρων ιδιομορφών.
- Το πρόγραμμα ReConAn Eye που μας δίνει την δυνατότητα απεικόνισης του φαινομένου της ρηγμάτωσης, ιδιαίτερα όταν εξετάζονται μοντέλα από οπλισμένο σκυρόδεμα. Καθώς αυξάνεται το φορτίο μπορούμε να παρατηρήσουμε την εξέλιξη της ρηγμάτωσης στον φορέα καθώς και την παραμόρφωσή του.

Με την χρήση και των δύο αυτών προγραμμάτων είμαστε σε θέση να εξάγουμε τα συμπεράσματα μας για την συμπεριφορά μιας κατασκευής από οπλισμένο σκυρόδεμα.

8.2 Εξοικείωση με τον κώδικα ReConAn

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας και για λόγους εξοικείωσης με τον κώδικα, προγραμμάτισα τα τετραεδρικά στοιχεία εντάσσοντας τα στην υπολογιστική διαδικασία του κώδικα ReConAn. Τα τετραεδρικά στοιχεία προσφέρονται για την προσομοίωση ολόσωμων φορέων με πολύπλοκη γεωμετρία και παρέχουν την δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού του μητρώου στιβαρότητας με κλειστούς τύπους.

Τετραεδρικά στοιχεία

Ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία, αρχικά ορίζουμε το πεδίο των μετατοπίσεων:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad 8.1$$

Από την οποία, αν κάνουμε αντικατάσταση των συντεταγμένων του κόμβου προκύπτει η σχέση:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

ή

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad 8.2$$

Η αντιστροφή του A γίνεται εύκολα ακολουθώντας την σχέση:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{bmatrix} \quad 8.3$$

Όπου

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \gamma_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad 8.4$$

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_1 = - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

Ενώ οι άλλοι συντελεστές $\beta_2 \div \varepsilon_4$ παράγονται με κυκλική εναλλαγή των δεικτών με τη σειρά 1,2,3,4. Επίσης ισχύει η σχέση:

$$6V_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad 8.5$$

Όπου V_e είναι ο όγκος του τετραέδρου.

Με την αντικατάσταση της λύσης του διανύσματος $\{a\}$ στη σχέση 8.2 προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{d\} \quad 8.6$$

όπου

$$N_i = \frac{1}{6V_e} (\beta_i + x\gamma_i + y\delta_i + z\varepsilon_i), \quad i = 1,2,3,4 \quad 8.7$$

Στην συνέχεια το εκφράζουμε το μητρώο παραμόρφωσης το οποίο εκφράζει την σχέση των παραμορφώσεων με τις επικόμβιες μετατοπίσεις (σχέση 8.8):

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & \dots & N_{4,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{4,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & \dots & 0 & 0 & N_{4,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{4,y} & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & N_{2,z} & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{4,z} & N_{4,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & N_{1,z} & 0 & N_{2,x} & \dots & N_{4,z} & 0 & N_{4,x} \end{bmatrix} \{d\} \quad 8.8$$

Η παραγωγή των N_i ως προς x, y, z μας δίνει τα στοιχεία του μητρώου παραμορφώσεως:

$$[B] = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \\ \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_2 & \gamma_2 & 0 & \delta_3 & \gamma_3 & 0 & \delta_4 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & \delta_1 & 0 & \varepsilon_2 & \delta_2 & 0 & \varepsilon_3 & \delta_3 & 0 & \varepsilon_4 & \delta_4 \\ \varepsilon_1 & 0 & \gamma_1 & \varepsilon_2 & 0 & \gamma_2 & \varepsilon_3 & 0 & \gamma_3 & \varepsilon_4 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \quad 8.9$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του μητρώου παραμόρφωσης περιέχει σταθερές ποσότητες μη εξαρτώμενες από συντεταγμένες x, y, z . Για το λόγο αυτό το στοιχείο ονομάζεται τετραεδρικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης.

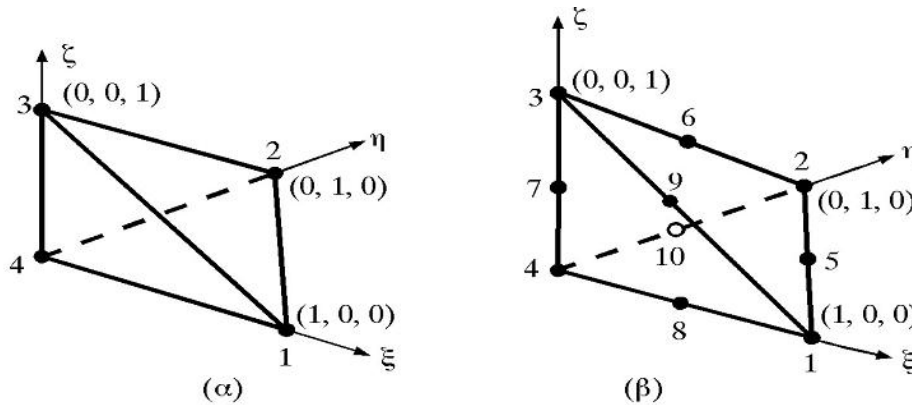
Τέλος το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου τεσσάρων κόμβων δίνεται από την σχέση:

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e \quad 8.10$$

(12x12) (12x6)(6x6)(6x12)

Η ολοκλήρωση της σχέση 7.10 πραγματοποιείται εύκολα δεδομένου ότι το μητρώο $[B]$ είναι ανεξάρτητο των x, y, z .

$$[k] = V_e [B]^T [E] [B] \quad 8.11$$



Σχήμα 8. 2 Τετραεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων: (α) τεσσάρων κόμβων (β) δέκα κόμβων

Όσον αφορά τα ισοπαραμετρικά τετραεδρικά στοιχεία (σχήμα 8.2), χρησιμοποιούμε τις εξής χωρικές συντεταγμένες οι οποίες ορίζονται από τους λόγους:

$$s_1 = \frac{V_1}{V_e}, \quad s_2 = \frac{V_2}{V_e}, \quad s_3 = \frac{V_3}{V_e}, \quad s_4 = \frac{V_4}{V_e} \quad 8.12$$

με $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$, οι οποίες σε συνδυασμό με την διάταξη του στοιχείου ως προς το φυσικό σύστημα ξ, η, ζ ορίζουν τις συναρτήσεις σχήματος:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= s_1 = \xi \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= s_2 = \eta \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= s_3 = \zeta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - s_1 - s_2 - s_3 = 1 - \xi - \eta - \zeta \end{aligned} \quad 8.13$$

Οι συντεταγμένες x, y, z και οι μετατοπίσεις u, v, w δίνονται από τις σχέσεις 2.7 και 2.8, αντίστοιχα με $n=4$, των οποίων N_i ορίζονται από τις σχέσεις 8.13.

Το μητρώο παραμόρφωσης δίνονται από τις σχέση 2.14 όπου οι εκφράσεις των όρων του μητρώου $[B_1]$ είναι ανεξάρτητες από το πλήθος των κόμβων του στοιχείου, προκειμένου για πρόβλημα τρισδιάστατης ελαστικότητας, ενώ η μορφή του μητρώου $[B_2]$ εξαρτάται από το πλήθος των κόμβων και τον τύπο του στοιχείου. Έτσι για την περίπτωση του τετραεδρικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων το μητρώο $[B_2]$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$[B_2] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & N_{3,\zeta} & 0 & 0 & N_{4,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & N_{3,\zeta} & 0 & 0 & N_{4,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & N_{3,\xi} & 0 & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & N_{3,\eta} & 0 & 0 & N_{4,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & N_{3,\zeta} & 0 & 0 & N_{4,\zeta} \end{bmatrix} \quad 8.14$$

Συνεπώς το μητρώο παραμόρφωσης προκύπτει από την σχέση:

$$[B] = [B_1][B_2] \quad 8.15$$

(6x12) (6x9) (9x12)

Άρα το μητρώο δυσκαμψία δίνεται από την σχέση:

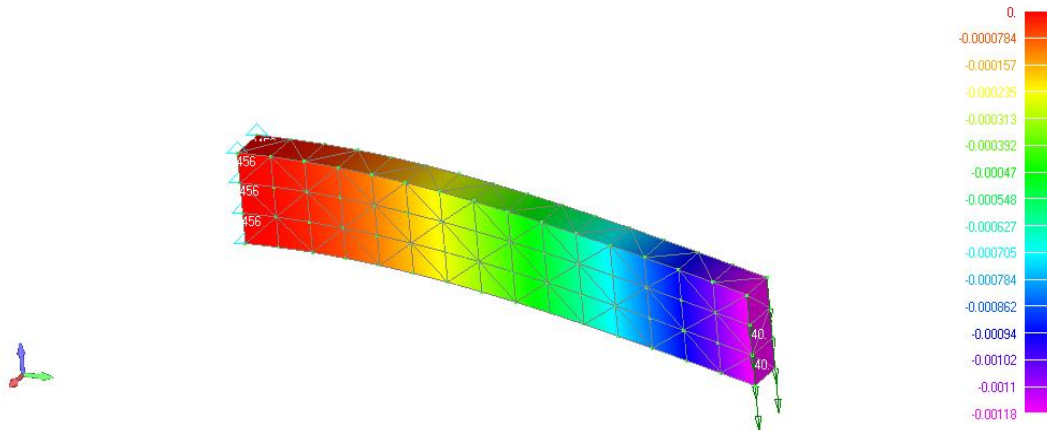
$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e \quad 8.16$$

(12x12) (12x6)(6x6)(6x12)

ή

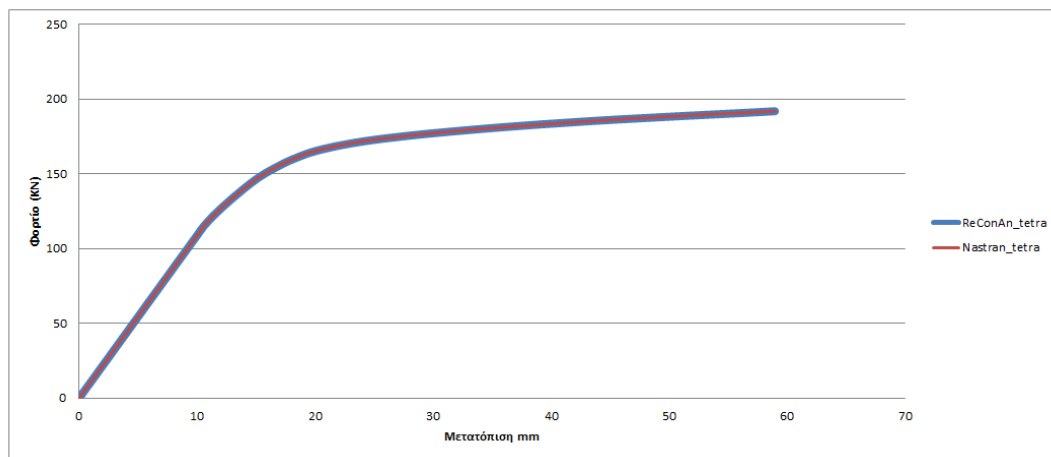
$$[k] = \int_{\zeta=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\zeta} \int_{\xi=0}^{1-\zeta-\eta} [B(\xi, \eta, \zeta)]^T [E] [B(\xi, \eta, \zeta)] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad 8.17$$

Στο σχήμα 8.3 παρουσιάζεται ένα δοκάρι το οποίο έχει προσομοιωθεί με τετραεδρικά πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό το παράδειγμα επιλύθηκε και με τον πρόγραμμα Nastran και με το ReConAn όπου προέκυψε το ίδιο αποτέλεσμα (χρησιμοποιήθηκε σαν έλεγχος του αλγορίθμου που ανέπτυξα).



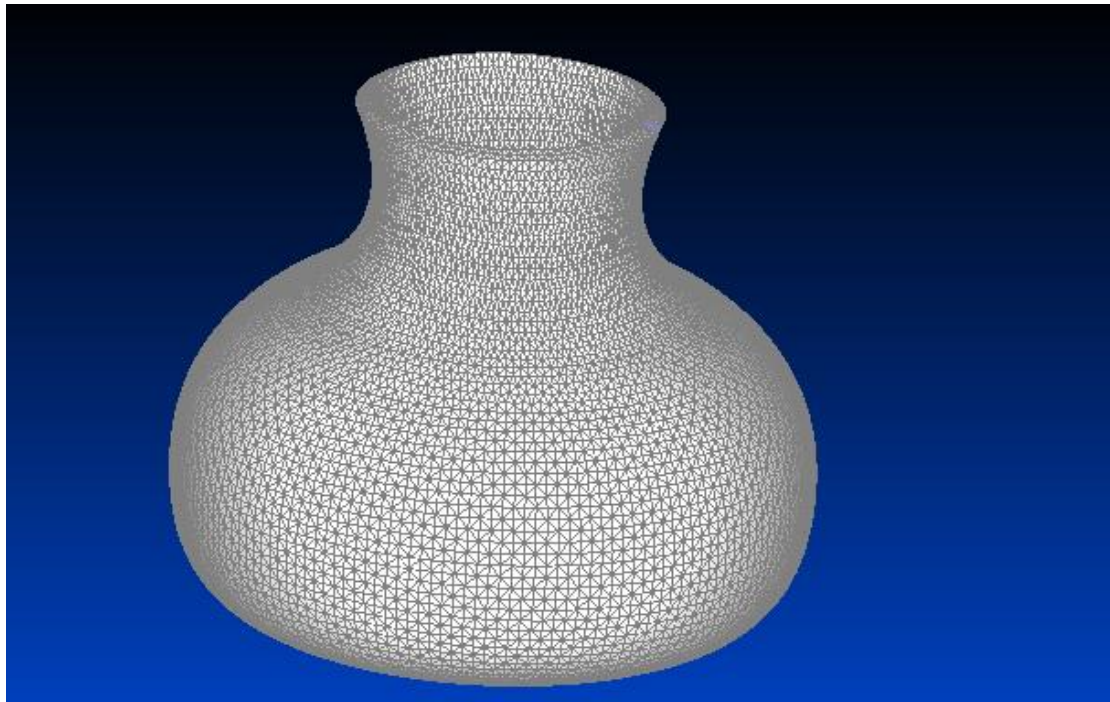
Σχήμα 8. 3 Παράδειγμα χρησιμοποίησης τετραεδρικών στοιχείων σε ένα μοντέλο δοκού.

Επιπλέον το σχήμα 8.4 δείχνει την καμπύλη αντοχής του μοντέλου δοκού (το ίδιο με το σχήμα 8.3) μετά από μη γραμμική επίλυση του φορέα. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ταυτίζονται απόλυτα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα Nastran.

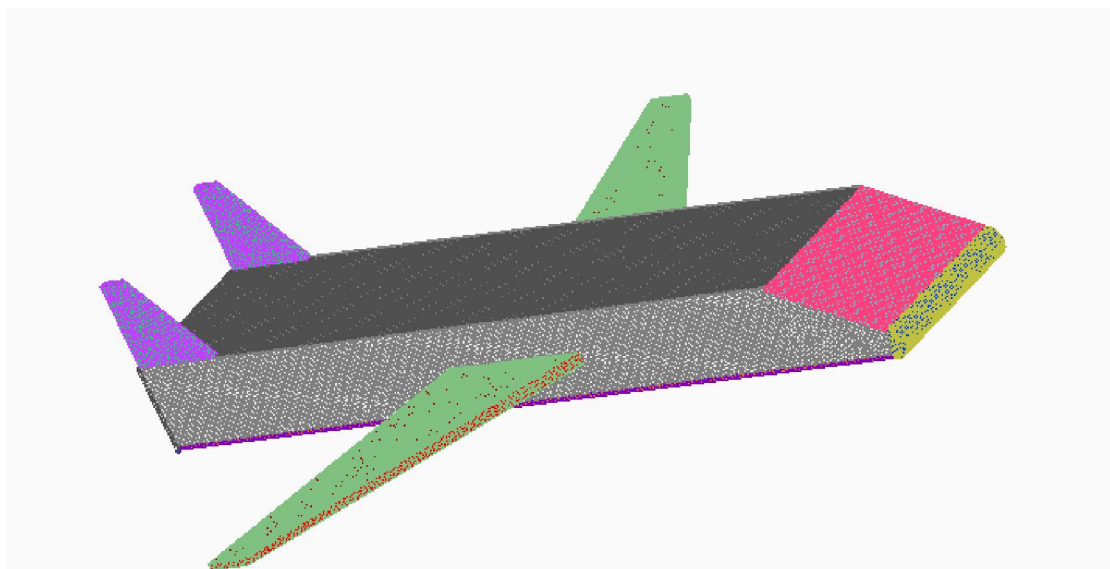


Σχήμα 8. 4 Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης δοκού από τετραεδρικά στοιχεία με χρήση του προγράμματος ReConAn και Nastran.

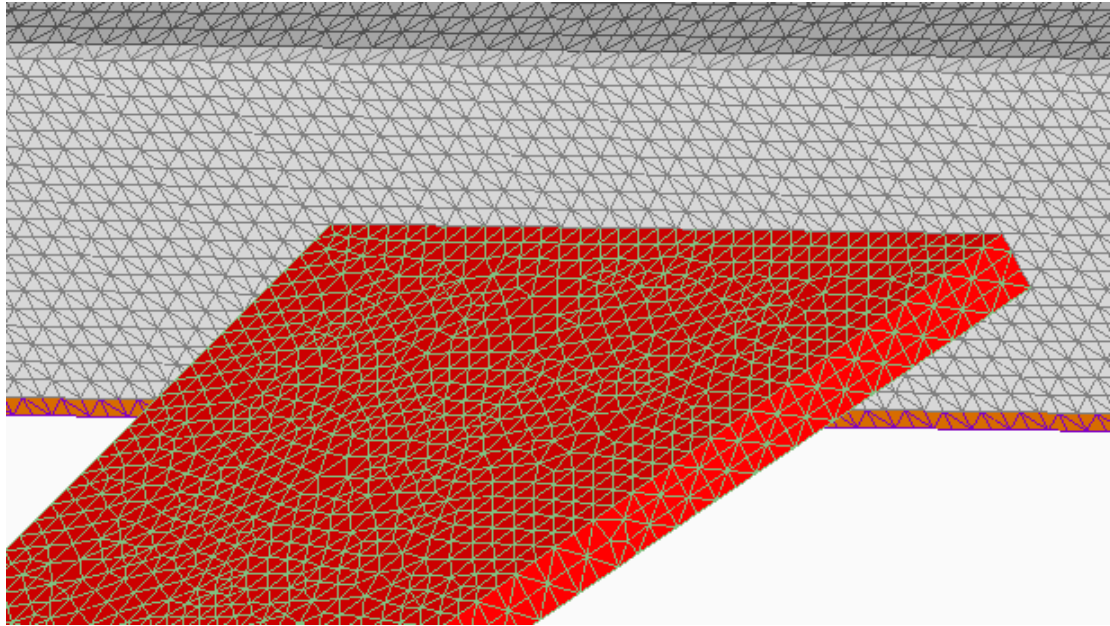
Στα σχήματα 8.5 και 8.6 δείχνουν το ευρύ φάσμα χρήσης των τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων. Στο σχήμα 8.4 προσομοιώνεται ένα βάζο με 150272 τετραεδρικά πεπερασμένα στοιχεία, ενώ στο σχήμα 8.5 προσομοιώνεται ένα αεροπλάνο με 334754 τετραεδρικά πεπερασμένα στοιχεία.



Σχήμα 8. 5 Προσομοίωση βάζου με χρήση 150272 τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 8. 6 Προσομοίωση αεροπλάνου με χρήση 334754 τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 8. 7 Λεπτομέρεια σύνδεσης του φτερού με το υπόλοιπο σώμα του αεροπλάνου με χρήση τετραεδρικών πεπερασμένων στοιχείων.

Βιβλιογραφία

1. Kotsovos M.D., Pavlovic M.N. (1995) Structural concrete. Finite Element Analysis for Limit State Design. Thomas Telford:London,1995
2. Τάσιος Θ. Π., Γιαννόπουλος Π., Τρέζος Κ., Τσουκαντάς Σ. (1995), Προεντεταμένο Σκυρόδεμα, Συμμετρία.
3. Argyris J., Tenec, Mattson A. (1997), BEC: a 2-node fast converging shear-deformable isotropic and composite beam element based on 6 rigid-body and straining modes, University of Stuttgart, June 1997.
4. Kotsovos M. D. and Spiliopoulos K. V. (1998) Modelling of crack closure for finite-element analysis of structural concrete, Comp. Struct., vol. 69, p. 383-398.
5. Πρασιανάκης Ι. Ν., Κουρκουλής Σ. Κ. (1999) Πειραματική αντοχή των υλικών, Συμμετρία.
6. Παπαδρακάκης Μ. (2001), Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, Παπασωτηρίου.
7. Παπαδρακάκης Μ. (2003) Πλαστική ανάλυση ραβδωτών φορέων-σύγχρονες μέθοδοι, Ε.Μ.Π.
8. Spiliopoulos K.V. and Lykidis G. (2006), An efficient three-dimensional solid finite element dynamic analysis of reinforced concrete structures. Earthquake Engng. Dyn. 2006;35:137-157.
9. Γεώργιος Χρ. Λυκίδης (2007), Στατική και δυναμική ανάλυση κατασκευών από Ωπλισμένο Σκυρόδεμα με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων διανεμημένης ρηγμάτωσης, Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π, 2007.
10. Rachael Padman (2007), Programming in Fortran 95, University of Cambridge, Department of Physics.
11. Καρακίτσιος Π. (2009), Ανελαστική στατική ανάλυση πλαισιακών φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα με την μέθοδο των μη γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Σεπτέμβριος 2009.
12. Markou G. and Papadrakakis M. (2010), Generating Embedded Reinforcement in Hexahedral Elements for Concrete Simulation, 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Limassol, Cyprus, 12-14 July.
13. Markou G. and Papadrakakis M. (2010), Detailed Three-Dimensional Modeling of Reinforced Concrete Structures, 9th HSTAM International Congress on Mechanics, Limassol, Cyprus, 12-14 July.

14. Markou G (2010). Detailed Three-Dimensional Nonlinear Modeling Combined with Hybrid Simulation for the Analysis of full-Scale Reinforced Concrete Structures Subjected to Seismic Loadings. Ph.D. Thesis, National Technical University of Athens, Institute of Structural Analysis and Seismic Research, Greece 2010.
15. Tiejiong Lou, Sergio M.R. Lopes, Adelino V. Lopes (2013), Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams, *Comp. Struct.*, vol 119, p.166-176.