



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

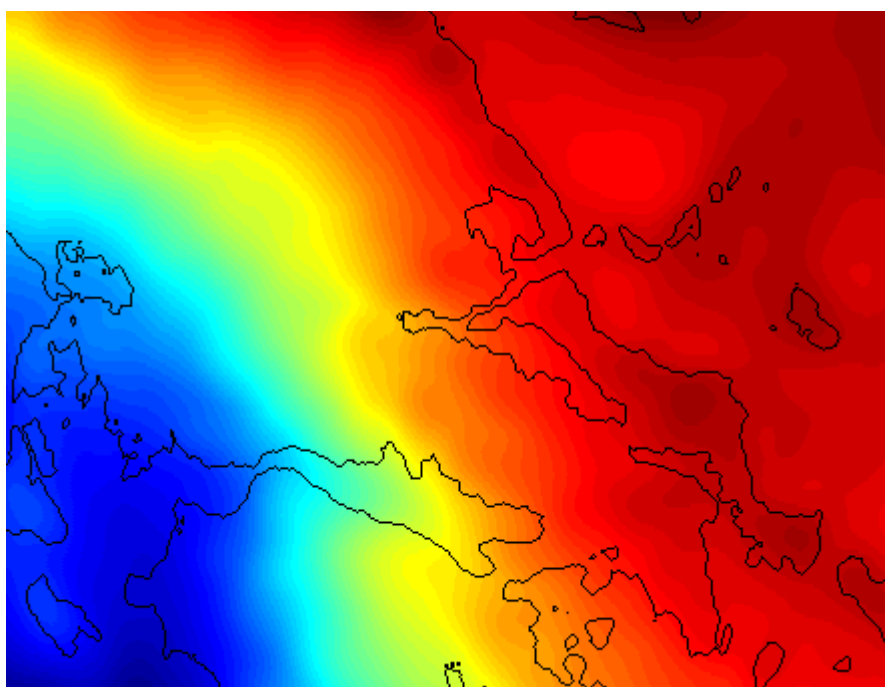
Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών

Τομέας Τοπογραφίας

Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας

Διπλωματική Εργασία:

**Μέθοδοι προσδιορισμού μοντέλων γεωειδούς – Μελέτη περίπτωσης
στην περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος**



ΠΕΤΡΟΣ ΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ (ΑΜ: 06111201)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών

Τομέας Τοπογραφίας

Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας

Διπλωματική Εργασία:

Μέθοδοι προσδιορισμού μοντέλων γεωειδούς – Μελέτη περίπτωσης στην περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος

ΠΕΤΡΟΣ ΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ (ΑΜ: 06111201)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Δημήτριος Δεληκαράογλου

Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

(Επιβλέπων)

Δημήτριος Παραδείσης

Καθηγητής ΕΜΠ

Βασίλειος Γκίκας

Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Ημ/νία Εξέτασης

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2014

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, ερευνητικής ή εκπαιδευτικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο, εκφράζουν τις θέσεις του συγγραφέα και όχι απαραίτητα τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Φωτογραφία εξώφυλλου : *«Μοντέλο γεωειδούς του EGM 2008 για την ευρύτερη περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος».*

Πηγή: ICGEM, σύνθεση στο λογισμικό MATLAB

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους εκείνους οι οποίοι συνέβαλλαν καθ' οιονδήποτε τρόπο, υλικό και άυλο στην προσπάθεια αυτή.

Πρωτίστως ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, Αναπλ. Καθ. κ. Δημήτριο Δεληκαράογλου, τόσο για την ανάθεση του θέματος όσο και για την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης, καθώς και για την ελευθερία που μου έδωσε σε επιλογές για την τελική διαμόρφωση του αντικειμένου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθ. κ. Δημήτρη Παραδείση και Αναπλ. Καθ. κ. Βασίλειο Γκίκα για την αντικειμενική και αμερόληπτη αξιολόγηση της παρούσας εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ τη Διεύθυνση Γεωγραφικού του ΓΕΣ (ΓΕΣ/ΔΓΕ) και τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ), που ενέκριναν την πρόσβαση μου σε δεδομένα μετρήσεων της ΓΥΣ, χωρίς την ύπαρξη των οποίων δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση της εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω και προς την Υποδιεύθυνση Γεωδαισίας – Τοπογραφίας της ΓΥΣ, για την πολύ καλή και οργανωμένη προεπεξεργασία των εν λόγω δεδομένων, καθώς και για την υποστήριξη και διευκόλυνση που μου παρείχε, κατά τη διάρκεια των εργασιών μου.

Ακόμα, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς και τα αδέρφια μου, για την ειλικρινή και αμέριστη στήριξή τους, καθ' όλη την μέχρι τώρα πορεία μου.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στη σύζυγό μου Αγγελική, που παρ' ότι εγκυμονούσα, ανέχτηκε τις ατέλειωτες ώρες δουλειάς που κλεινόμουν στο γραφείο καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, ήταν πάντα δίπλα μου και με στήριξε αληθινά.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά στη δημιουργία ενός μοντέλου γεωειδούς για την περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος. Ο όρος «μοντέλο» δεν εξαντλείται απλά στην παραγωγή ενός χάρτη γεωειδούς, αλλά ουσιαστικά σημαίνει την ύπαρξη ενός αλγορίθμου, ο οποίος θα δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού της αποχής (N) του γεωειδούς σε ένα οποιοδήποτε σημείο της υπό μελέτης περιοχής, με μια δεδομένη ακρίβεια. Με άλλα λόγια, θα μας επιτρέπει δηλ. να προσδιορίσουμε ορθομετρικά υψόμετρα με ικανοποιητική ακρίβεια, έχοντας χρησιμοποιήσει μόνο δέκτες GPS και χωρίς την ανάγκη χωροστάθμησης κατά τις εργασίες πεδίου.

Ξεκινώντας από μια γενική επισκόπηση στις σημαντικές έννοιες της φυσικής γεωδαισίας που σχετίζονται άμεσα με τη μελέτη του γεωειδούς, όπως το γήινο δυναμικό κι η μαθηματική του έκφραση, τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών κι η σημασία τους, το κανονικό και διαταρακτικό δυναμικό, κλπ., περνάμε στις διάφορες αναγωγές κι ανωμαλίες βαρύτητας και τη σχέση βαρύτητας – υψομέτρων, καθώς και στις διάφορες μεθόδους (γεωμετρικές, βαρυτημετρικές, συνδυαστικές) που έχουν κατά καιρούς αναπτυχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για τον προσδιορισμό τοπικών και περιφερειακών μοντέλων γεωειδούς, για να καταλήξουμε τέλος στην παρουσίαση του δικτύου της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ) που χρησιμοποιήθηκε για την εργασία, καθώς και των τριών μεθόδων που εφαρμόστηκαν για τον προσδιορισμό του γεωειδούς στην υπό μελέτη περιοχή της Κεντρικής Ελλάδας.

Συγκεκριμένα, στην πρώτη μέθοδο, ακολουθείται μια γεωμετρική προσέγγιση στον προσδιορισμό του γεωειδούς, με τη χρησιμοποίηση δεδομένων από μετρήσεις GPS και χωροστάθμηση. Πραγματοποιείται πολυωνυμική προσαρμογή των μετρημένων τιμών των αποχών του γεωειδούς στα σημεία του δικτύου και στη συνέχεια εφαρμόζονται δύο μέθοδοι (της σημειακής προσαρμογής και του σταθμισμένου μέσου όρου), για τη δημιουργία του τελικού μοντέλου. Εναλλακτικά ως προς τη μέθοδο αυτή προτείνονται δύο συνδυαστικές προσεγγίσεις, όπου στην πρώτη συνδυάζονται και δεδομένα από μοντέλο σφαιρικών αρμονικών (EGM 2008), ενώ στη δεύτερη συνδυάζονται και δεδομένα αστρογεωδαιτικής χωροστάθμησης (μετρήσεις των συνιστωσών ζ και η της απόκλισης της κατακορύφου).

Στη δεύτερη μέθοδο, χρησιμοποιείται αρχικά η επιφάνεια του γεωειδούς του EGM 2008 για την περιοχή μελέτης, η οποία προσαρμόζεται στα δεδομένα των μετρήσεων με τη χρήση μιας διορθωτικής επιφάνειας. Στη συνέχεια κι εδώ εφαρμόζονται οι μέθοδοι της σημειακής προσαρμογής και του σταθμισμένου μέσου όρου, για τη δημιουργία του τελικού μοντέλου, ενώ τέλος, η τρίτη μέθοδος ακολουθεί την ίδια διαδικασία με τη δεύτερη, αλλά αντί για το EGM 2008, δημιουργείται ως αρχική επιφάνεια ένα βαρυτημετρικό μοντέλο γεωειδούς με τη μέθοδο Remove-Restore.

Από τη σύγκριση κι αξιολόγηση των δημιουργούμενων μοντέλων και της τελικής τους ακρίβειας, προκύπτουν σημαντικά ευρήματα ως προς τη δυνατότητα ευρείας χρησιμοποίησής τους, αλλά και την περαιτέρω αξιολόγηση και βελτίωσή τους.

Abstract

This Diploma Thesis is dealing with the determination of a geoid model in the area of Central Greece. By the term “model”, is meant not only the production of a geoidal map, but mainly the existence of an algorithm that gives us the ability to determine geoid undulations (N) at any point of the study area, with a certain accuracy. In other words, we will be able to determine orthometric heights with a sufficient accuracy, only by using GPS receivers during fieldwork, with no need for leveling.

Specifically, we started with a general overview of the main concepts of physical geodesy which are directly related to the study of the geoid, such as the earth’s gravitational potential and its mathematical expression in terms of spherical harmonic models and their importance, the separation into normal and disturbing potential, etc. Next, we deal with the various gravitational reductions and the computation of gravity anomalies, the relation between gravity and heights and the various (geometric, gravimetric, combination) methods that can be found in the international literature for the determination of local and regional geoid models, and finally we end up with the presentation of the network of Hellenic Military Geographical Service (HMGS) which was used for the purposes of the present study, and the three methods applied in order to determine the geoid in the study area of Central Greece.

In the first method, a geometric approach is followed in determining the geoid, using data from GPS measurements and leveling in an extensive network of benchmarks. Polynomial adjustment of the measured values of geoid undulations in the network points is accomplished and then two methods are applied (collocation and weighted average) to generate the final geoid model which can be used for interpolation at any other point in the area. As an alternative to this method, two combination approaches are proposed, where the first also combines data from a spherical harmonic model (EGM 2008), while the second combines data from astrogeodetic leveling (measurements of the components ξ , η of deviation of the vertical).

In the second method, the surface of the EGM 2008 geoid for the study area is first computed, and in turn is adapted to the measurement data using a correction surface. Then, the least squares collocation and weighted average methods are also applied to generate the final geoid model, and finally, the third method follows the same procedure with the second, but instead of the EGM 2008 geoid as initial surface, a gravimetric geoid model is determined by using the Remove-Restore method.

Comparing and evaluating the above generated models and their final accuracy, has provided significant results, especially with regard to their wide use and their further evaluation and foreseeable improvement.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες	v
Περίληψη	vi
Abstract	vii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	viii
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ	xi
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ	xiii
ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ	xv
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
Ιστορική αναδρομή της Γεωδαισίας	1
Επιφάνειες Αναφοράς	4
Σκοπός – Διάρθρωση Εργασίας	11
ΜΕΡΟΣ Α: ΠΕΡΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ, ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ	13
1. Κεφάλαιο 1 ^ο : Γήινο Δυναμικό – Μοντέλα Σφαιρικών Αρμονικών	13
1.1. Το δυναμικό του γήινου πεδίου βαρύτητας	13
1.2. Εξίσωση Poisson και εξίσωση Laplace	14
1.3. Επίλυση εξίσωσης Laplace	14
1.3.1. Συνοριακά προβλήματα	15
1.3.2. Διαδικασία επίλυσης	15
1.3.3. Επεξήγηση σχέσεων – Συναρτήσεις Legendre	16
1.3.4. Γεωμετρική σημασία των επιφανειακών αρμονικών συναρτήσεων	17
1.4. Τελική μορφή του αναπτύγματος του ελκτικού δυναμικού	18
1.5. Μοντέλα Σφαιρικών Αρμονικών	20
1.5.1. Γενικά περί μοντέλων σφαιρικών αρμονικών	20
1.5.2. Σύγκριση των μοντέλων EGM 2008 και EIGEN-6C3 STAT με το μοντέλο γεωειδούς των ΗΠΑ GEOID 12A	22
2. Κεφάλαιο 2 ^ο : Κανονικό και Διαταρακτικό Δυναμικό, Υψόμετρα και Βαρύτητα, Μέθοδοι Προσδιορισμού του Γεωειδούς	35
2.1. Το δυναμικό του κανονικού πεδίου βαρύτητας	35
2.1.1. Ελλειψοειδείς Συντεταγμένες	36
2.1.2. Κανονική βαρύτητα	37
2.2. Το διαταρακτικό δυναμικό	38

2.3.	Αναγωγές κι ανωμαλίες βαρύτητας	39
2.3.1.	Αναγωγή γεωγραφικού πλάτους.....	41
2.3.2.	Αναγωγή κι ανωμαλία ελεύθερου αέρα ή υψομέτρου.....	41
2.3.3.	Αναγωγή κι ανωμαλία Bouguer.....	42
2.3.4.	Ισοστατικές αναγωγές κι ανωμαλίες βαρύτητας.....	45
2.4.	Σχέση των διαφόρων τύπων υψομέτρων και της βαρύτητας	47
2.5.	Μέθοδοι προσδιορισμού της αποχής (N) του γεωειδούς.....	50
2.5.1.	Γενικά.....	50
2.5.2.	Παραδείγματα	52
ΜΕΡΟΣ Β: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ		57
3.	Κεφαλαίο 3 ^ο : Παρουσίαση δικτύου –Στατιστικοί έλεγχοι	57
3.1.	Γενικά Στοιχεία	57
3.2.	Στατιστικοί Έλεγχοι	59
3.2.1.	Οπτικός Έλεγχος.....	59
3.2.2.	Σύγκριση με EGM 2008 και EIGEN 6C-3 STAT	60
3.2.3.	Επιμερισμός περιοχής σε μικρά τμήματα και έλεγχος σε καθένα εξ αυτών.....	63
3.3.	Επιλογή σημείων ελέγχου (test points).....	65
4.	Κεφάλαιο 4 ^ο : Διαδικασία προσδιορισμού του γεωειδούς	67
4.1.	Μοντέλο 1 ^ο	67
4.1.1.	Προσαρμογή κατάλληλης πολυωνυμικής επιφάνειας	67
4.1.2.	Μέθοδος σημειακής προσαρμογής (collocation).....	70
4.1.3.	Μέθοδος σταθμισμένου μέσου όρου (weighted average)	74
4.1.4.	Αξιολόγηση 1 ^{ου} μοντέλου – εναλλακτικές μέθοδοι.....	76
4.2.	Μοντέλο 2 ^ο	82
4.2.1.	Δημιουργία διορθωτικής επιφάνειας (corrector surface).....	84
4.2.2.	Εξαγωγή του «σήματος» από τα υπόλοιπα των μετρήσεων.....	86
4.2.3.	Αξιολόγηση 2 ^{ου} μοντέλου	89
4.3.	Μοντέλο 3 ^ο	89
4.3.1.	Δημιουργία βαρυτημετρικού μοντέλου γεωειδούς.....	89
4.3.2.	Διορθωτική επιφάνεια κι εξαγωγή του σήματος.....	95
4.3.3.	Αξιολόγηση 3 ^{ου} μοντέλου	97
4.4.	Συνολική Αξιολόγηση μοντέλων	97

5. Κεφάλαιο 5 ^ο : Συμπεράσματα - Προτάσεις	99
5.1. Συμπεράσματα	99
5.2. Προτάσεις.....	102
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	105
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	109

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 0-1: Τα κυριότερα ελλειψοειδή και οι παράμετροί τους.....	3
Πίνακας 1-1: Σύγκριση των τιμών του N για τα EGM 08 και EIGEN-6C3 STAT στις 3 περιοχές των ΗΠΑ (κάθε χρώμα κελιών και μια περιοχή). Οι τιμές είναι σε m.....	24
Πίνακας 1-2: Σύγκριση των τιμών του N των μοντέλων με το GEOID 12A στις 3 περιοχές των ΗΠΑ (κάθε χρώμα κελιών και μια περιοχή). Οι τιμές είναι σε m.....	27
Πίνακας 2-1: Αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων στις περιοχές της Κων/πολης (αριστερά) και του Σαγγάριου (δεξιά)	54
Πίνακας 2-2: Αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων στην περιοχή του Τσανκιρί.....	55
Πίνακας 3-1: Αποτελέσματα σύγκρισης $N_{GPS/Lev}$ με N_{EGM} και N_{EIGEN}	62
Πίνακας 3-2: Αποτελέσματα σύγκρισης $N_{GPS/Lev}$ με N_{EGM} και N_{EIGEN} μετά την απαλοιφή των outlier points.....	63
Πίνακας 4-1: Υπολογισμένοι συντελεστές πολυωνυμικής επιφάνειας 4 ^{ου} βαθμού με τη MET	69
Πίνακας 4-2: Στατιστικά αποτελέσματα πολυωνυμικής επιφάνειας 4 ^{ου} βαθμού	70
Πίνακας 4-3: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής	73
Πίνακας 4-4: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου	75
Πίνακας 4-5: Στατιστικά αποτελέσματα 1 ^{ης} εναλλακτικής επιφάνειας.....	77
Πίνακας 4-6: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής για την 1 ^η εναλλακτική επιφάνεια	78
Πίνακας 4-7: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου για την 1 ^η εναλλακτική επιφάνεια.....	78
Πίνακας 4-8: Στατιστικά αποτελέσματα 2 ^{ης} εναλλακτικής επιφάνειας.....	80
Πίνακας 4-9: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής για την 2 ^η εναλλακτική επιφάνεια	81
Πίνακας 4-10: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου για την 2 ^η εναλλακτική επιφάνεια.....	81
Πίνακας 4-11: Στατιστικά των διαφορών ΔN του EGM 08 από τις μετρήσεις στην περιοχή μελέτης	83
Πίνακας 4-12: Υπολογισμένοι συντελεστές πολυωνυμικής επιφάνειας 2 ^{ου} βαθμού με τη MET	85
Πίνακας 4-13: Στατιστικά αποτελέσματα βελτιωμένης επιφάνειας	85
Πίνακας 4-14: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής	86
Πίνακας 4-15: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου	87
Πίνακας 4-16: Στατιστικά αποτελέσματα αρχικού βαρυτημετρικού μοντέλου (1 ^η μεθοδολογία).....	92
Πίνακας 4-17: Στατιστικά αποτελέσματα αρχικού βαρυτημετρικού μοντέλου (2 ^η μεθοδολογία).....	94
Πίνακας 4-18: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής	95
Πίνακας 4-19: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μ.ο.	96
Πίνακας 4-20: Στατιστικά αποτελέσματα 1 ^{ου} μοντέλου ως προς τα extra test points.....	97
Πίνακας 4-21: Στατιστικά αποτελέσματα 2 ^{ου} μοντέλου ως προς τα extra test points.....	97

Πίνακας 4-22: Στατιστικά αποτελέσματα 3 ^{ου} μοντέλου ως προς τα extra test points .98	
Πίνακας 5-1: Σύγκριση μοντέλων της ελληνικής και διεθνούς βιβλιογραφίας με τα μοντέλα που δημιουργήθηκαν στην παρούσα εργασία	101

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 0-1: Υπολογισμός της γήινης ακτίνας από τον Ερατοσθένη.....	2
Εικόνα 0-2: Σφαιρικές γεωγραφικές συντ/νες	4
Εικόνα 0-3: Γεωμετρία του τριαξονικού ελλειψοειδούς	5
Εικόνα 0-4: Γεωδαιτικές συντ/νες	6
Εικόνα 0-5: Επιφάνειες αναφοράς και υψόμετρα.....	8
Εικόνα 0-6: Επιφάνειες αναφοράς στη Γεωδαισία	9
Εικόνα 0-7: Επιφάνειες αναφοράς και μεταξύ τους αποστάσεις.....	10
Εικόνα 1-1: Αρμονικές: ζώνης (αριστερά), τεσσεροειδείς (κέντρο), τομέα (δεξιά) ...	18
Εικόνα 1-2: Χωρική κατανομή των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{EGM} - N_{EIGEN}$ (σε m) στην 1η περιοχή.....	26
Εικόνα 1-3: Χωρική κατανομή των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{EGM} - N_{EIGEN}$ (σε m) στη 2η περιοχή	26
Εικόνα 1-4: Χωρική κατανομή των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{EGM} - N_{EIGEN}$ (σε m) στην 3η περιοχή.....	27
Εικόνα 1-5: Πιθανές διαφορές 2 μοντέλων (1 και 2) ως προς την τιμή του N, κατά μήκος ενός προφίλ μιας περιοχής	28
Εικόνα 1-6: Χωρική κατανομή των διαφορών $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ (σε m) μεταξύ EGM 08 και GEOID12A (αριστερά) και μεταξύ EIGEN-6C3 STAT και GEOID 12A (δεξιά), στην 1 ^η περιοχή.....	30
Εικόνα 1-7: Τοπογραφία 1ης περιοχής.....	30
Εικόνα 1-8: Χωρική κατανομή των διαφορών $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ (σε m) μεταξύ EGM 08 και GEOID12A (αριστερά) και μεταξύ EIGEN-6C3 STAT και GEOID 12A (δεξιά), στην 2 ^η περιοχή.....	31
Εικόνα 1-9: Τοπογραφία 2ης περιοχής.....	31
Εικόνα 1-10: Χωρική κατανομή των διαφορών $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ (σε m), μεταξύ EGM 08 και GEOID12A (αριστερά) και μεταξύ EIGEN-6C3 STAT και GEOID 12A (δεξιά), στην 3 ^η περιοχή.....	32
Εικόνα 1-11: Τοπογραφία 3ης περιοχής.....	32
Εικόνα 2-1: Γεωμετρική Ερμηνεία των ελλειψοειδών συντ/νων u, β, λ	36
Εικόνα 2-2: Διαταραχή κι Ανωμαλία βαρύτητας	40
Εικόνα 2-3: Αναγωγή μετρημένης τιμής βαρύτητας στο γεωειδές	42
Εικόνα 2-4: Σφάλματα που υπεισέρχονται κατά την αναγωγή Bouguer.....	43
Εικόνα 2-5: Υπολογισμός τοπογραφικών διορθώσεων: (α) Με διαχωρισμό της περιοχής σε ομόκεντρους κύκλους – αύξηση ακτίνας όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο μέτρησης, (β) με χρήση πλεγμάτων μεταβλητής διακριτικής ικανότητας (πυκνό πλέγμα για την εγγύς περιοχή, αραιό για τη μακρινή)	44
Εικόνα 2-6: Ισοστατικά μοντέλα - (αριστερά) μοντέλο Pratt, (δεξιά) μοντέλο Airy ..	45
Εικόνα 2-7: Ισοστατικά μοντέλα - (αριστερά) μοντέλο Pratt - Hayford, (δεξιά) μοντέλο Airy – Heiskanen	46
Εικόνα 2-8: Σημεία της ίδιας ισοδυναμικής επιφάνειας.....	47
Εικόνα 2-9: Απόκλιση μετρούμενης και ορθομετρικής υψομετρικής διαφοράς.....	49

Εικόνα 3-1: Κατανομή σημείων δικτύου και τοπογραφία περιοχής	58
Εικόνα 3-2: Παράδειγμα σημείων με χονδροειδές σφάλμα	60
Εικόνα 3-3: Κάνναβος τιμών του N για το EGM 2008	61
Εικόνα 3-4: Κατανομή των τιμών $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EGM}$ (αριστερά) και $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EIGEN}$ (δεξιά) στην περιοχή μελέτης.....	62
Εικόνα 3-5: Επιμερισμός συνολικής περιοχής σε "υποπεριοχές".....	63
Εικόνα 3-6: Ιστόγραμμα συχνοτήτων των αποχών ΔN της 5ης υποπεριοχής.....	64
Εικόνα 3-7: Reference points (μπλε) και Test points (κόκκινα) στην περιοχή μελέτης	65
Εικόνα 3-8: Κατανομή των 22 extra test points.....	66
Εικόνα 4-1: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{polynom}$ της επιφάνειας από τις μετρήσεις (σε m).....	70
Εικόνα 4-2: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σημειακής προσαρμογής).....	73
Εικόνα 4-3: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (μέθοδος σημειακής προσαρμογής)....	73
Εικόνα 4-4: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)	75
Εικόνα 4-5: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ στα test points (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.).....	76
Εικόνα 4-6: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (1 ^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σημειακής προσαρμογής)	78
Εικόνα 4-7: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (1 ^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)	79
Εικόνα 4-8: Κατανομή σημείων με διαθέσιμες μετρήσεις απόκλισης κατακορύφου .79	
Εικόνα 4-9: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (2 ^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σημειακής προσαρμογής)	81
Εικόνα 4-10: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (2 ^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)	82
Εικόνα 4-11: Το γεωειδές του EGM 08 για την περιοχή μελέτης.....	83
Εικόνα 4-12: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EGM 08}$	83
Εικόνα 4-13: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (σε m).....	85
Εικόνα 4-14: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Final Model}$ (σημειακή προσαρμογή).....	86
Εικόνα 4-15: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Final Model}$ (μέθοδος σταθμισμένου μέσου όρου).....	87
Εικόνα 4-16: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σημειακής προσαρμογής).....	88
Εικόνα 4-17: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)	88
Εικόνα 4-18: Χωρική κατανομή των Δg_{FA} (σε mgal).....	90
Εικόνα 4-19: Χωρική κατανομή των $\Delta g_{res(1)}$ (σε mgal).....	91
Εικόνα 4-20: Αναπαράσταση τοπογραφίας με ορθογώνια πρίσματα.....	92
Εικόνα 4-21: Χωρική κατανομή των Δg_{res} (σε mgal).....	94
Εικόνα 4-22: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σημειακής προσαρμογής).....	96
Εικόνα 4-23: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)	96

ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

ΓΥΣ	Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού
ΕΓΣΑ	Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς
ΕΕΠ	Ελλειψοειδές Εκ Περιστροφής
ΕΣΥ	Εθνικό Σύστημα Υψομετρίας
MET	Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων
ΜΣΘ	Μέση Στάθμη της Θάλασσας
ΠΕΓΣΑ	Παλαιό Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς
ΥΥ-ΠΝ	Υδρογραφική Υπηρεσία Πολεμικού Ναυτικού
ΦΓΕ	Φυσική Γήινη Επιφάνεια
EGM	Earth Gravitational Model
EIGEN	European Improved Gravity model of the Earth by New techniques
GOCE	Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GRS	Geodetic Reference System
HEPOS	Hellenic Positioning System
ICGEM	International Centre of Global Earth Models
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
NGA	National Geospatial – Intelligence Agency
NGS	National Geodetic Survey
RCR	Remove – Compute – Restore
RET	Rock – Equivalent Topography
RMSE	Round Mean Square Error
RTM	Residual Terrain Model
WGS	World Geodetic System

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

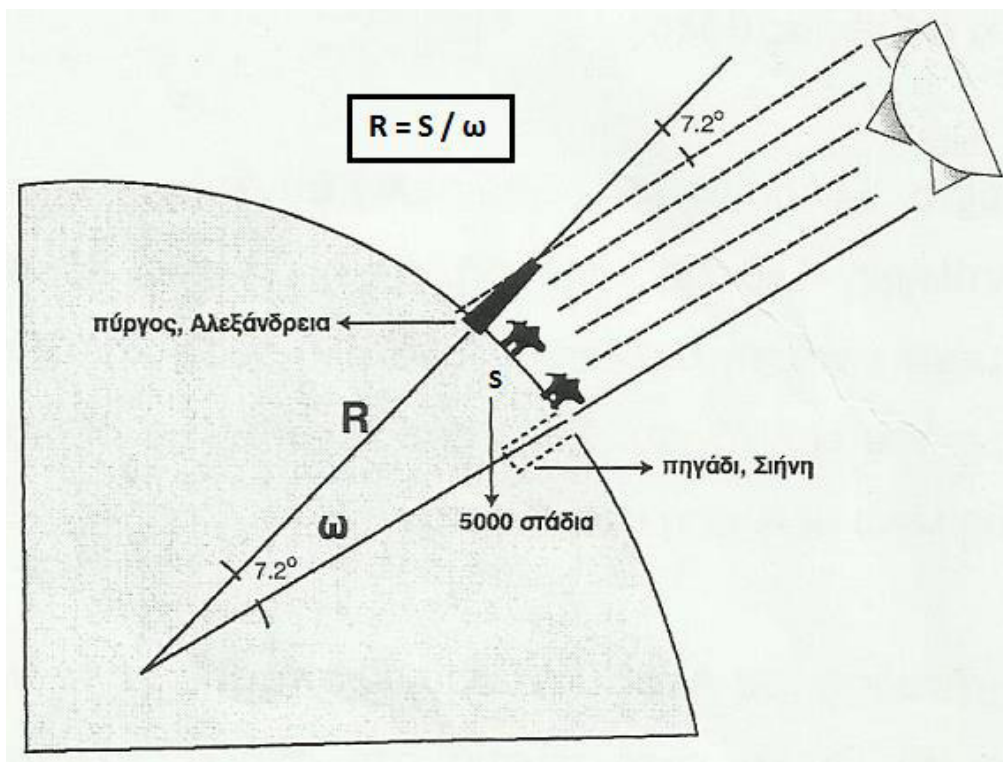
Ιστορική αναδρομή της Γεωδαισίας

Η Γεωδαισία (Γη + δαίω = μοιράζω) είναι μια επιστήμη με ένα αρκετά ευρύ πεδίο μελέτης, το οποίο υπεισέρχεται και σε πεδία ενδιαφέροντος πολλών άλλων επιστημών. Ως εκ τούτου δύναται να ενταχθεί τόσο στις Γεωεπιστήμες όσο και στις επιστήμες της Μηχανικής (Torge, 2000). Ο κλασσικός ορισμός του F.R. Helmert (1843 – 1917) για τη Γεωδαισία αναφέρει ότι είναι *«η επιστήμη της μέτρησης και της χαρτογράφησης της επιφάνειας της γης»*. Η επέκταση αυτού του ορισμού από τον H. Draheim και την I. Fischer περιγράφει ότι *«το πρόβλημα της Γεωδαισίας είναι να προσδιορίσει το σχήμα και το μέγεθος καθώς και το εξωτερικό πεδίο βαρύτητας της γης (και άλλων αστρικών σωμάτων), ως συνάρτηση του χρόνου. Επίσης να προσδιορίσει το μέσο ελλειψοειδές (που προσεγγίζει καλύτερα το σχήμα και το μέγεθος της γης) από παραμέτρους που προσδιορίζονται πάνω στη φυσική γήινη επιφάνεια ή κι έξω από αυτή»*.

Ο προσδιορισμός του μεγέθους και του σχήματος της Γης, που όπως φαίνεται κι από τους παραπάνω ορισμούς είναι εκ των κατεξοχήν πεδίων έρευνας της Γεωδαιτικής επιστήμης, είναι ένα πρόβλημα που απασχόλησε τον άνθρωπο από τα πολύ παλαιά χρόνια. Πρώτοι οι Αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν με αυτό το θέμα. Διάφορες ενδιαφέρουσες απόψεις και αναφορές συναντώνται σε αρκετά αρχαία κείμενα (Όμηρος, Θαλής, Αναξίμανδρος, Φιλόλαος, Πλάτωνας, Αριστοτέλης, κ.ά.). Ωστόσο αξίζει ιδιαιτέρως να σημειωθούν δύο περιπτώσεις: η πρώτη περίπτωση αφορά στον Πυθαγόρα και τη σχολή του (580 – 500 π.Χ.), οι οποίοι θεωρούνται οι πρώτοι που υιοθέτησαν το σφαιρικό σχήμα της γης. Η δεύτερη αφορά, όπως είναι φυσικό, στον «πατέρα της Γεωδαισίας» τον Ερατοσθένη (276 – 192 π.Χ.), ο οποίος είναι ο πρώτος που υπολόγισε με αξιοσημείωτη ακρίβεια το μέγεθος της γης από μετρήσεις, υιοθετώντας το σφαιρικό της σχήμα.

Συγκεκριμένα ο Ερατοσθένης, παρατήρησε τις ακτίνες του ήλιου κατά το θερινό ηλιοστάσιο, οι οποίες ήταν ακριβώς κάθετες (δηλ. παράλληλες με την τοπική κατακόρυφο) σε ένα πηγάδι στην περιοχή της Σήνης (σημερινό Ασσουάν), ενώ στην περιοχή της Αλεξάνδρειας που βρίσκεται στον ίδιο μεσημβρινό περίπου, σχημάτιζαν γωνία (με την κατακόρυφο), που παρατηρήθηκε από τη σκιά ενός πύργου. Με διάφορα όργανα της εποχής, υπολόγισε αυτή τη γωνία ίση με 1/50 του κύκλου, δηλ. 7° 12'. Κατόπιν, εκτίμησε την απόσταση των 2 πόλεων από Αιγυπτιακούς

κτηματολογικούς χάρτες (ή από ένα караβάνι καμήλων κατά άλλη εκδοχή) και την βρήκε ίση με 5000 στάδια περίπου κι έτσι υπολόγισε την ακτίνα της σφαιρικής γης, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί:



Εικόνα 0-1: Υπολογισμός της γήινης ακτίνας από τον Ερατοσθένη

Πηγή: Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας, ΕΜΠ, 2009

Κατ' αυτό τον τρόπο, ο Ερατοσθένης προσδιόρισε την ακτίνα της γης ίση με 6267 km (εάν θεώρησε το Αιγυπτιακό στάδιο που ισούται με 157.5 m) και 7380 km (εάν θεώρησε το Αττικό στάδιο που ισούται με 185 m), εκτιμήσεις που απέχουν κατά -2% και +15.5% αντίστοιχα από τη μέση ακτίνα καμπυλότητας της γης (R_m) που θεωρούμε σήμερα (6371 km). Και στις δύο πάντως περιπτώσεις, δεδομένων και των μέσων της εποχής, αφ' ενός η εκτίμηση του είναι ιδιαίτερος επιτυχημένη κι αφ' ετέρου η αρχή της μεθόδου του για τη μέτρηση μήκους τόξου ήταν πολύ πρωτοποριακή και αποτελεί ακόμα και σήμερα υπόδειγμα επιστημονικής σκέψης και πειραματικής απλότητας.

Συνεχίζοντας την ιστορική αυτή αναδρομή, συναντούμε τον Ποσειδώνιο λίγο μετά τον Ερατοσθένη, που υπολόγισε κι αυτός την ακτίνα της γης με απόκλιση -11% από την R_m , ενώ μετά από αυτόν επικρατεί μια στασιμότητα πολλών αιώνων στην επιστημονική γνώση, απόρροια και των κοινωνικών συνθηκών των περιόδων που μεσολάβησαν. Το μόνο που αξίζει να αναφερθεί είναι ο υπολογισμός της γήινης ακτίνας από τους Άραβες τον 9^ο μ.Χ. αιώνα με απόκλιση +10% από την R_m .

Στην πραγματικότητα, ουσιαστική πρόοδος στην επιστημονική σκέψη συναντάται πλέον από τον 14^ο αιώνα και μετά. Ειδικά τον 16^ο και 17^ο σε συνδυασμό και με την πρόοδο στην τεχνολογία των οργάνων, ξεκινάει ουσιαστικά μια νέα λαμπρή περίοδος για τη Γεωδαιτική επιστήμη (Fernel, Copernicus, Kepler, Galileo Galilei, Tycho Brahe, Snelling, Picard, κ.ά.). Εκείνη την εποχή (17^{ος} αιώνας) αρχίζει να αναπτύσσεται και η επέκταση του σφαιρικού σχήματος της γης σε ελλειπτικό, από τις παρατηρήσεις του Γάλλου Αστρονόμου Richer, για να έρθει λίγα χρόνια αργότερα ο Newton που θα μιλήσει για το, πεπλατυσμένο στους πόλους, ελλειψοειδές σχήμα της γης (Newton, Huygens).

Οι επόμενοι αιώνες (18^{ος} και 19^{ος}), είναι η περίοδος που πραγματοποιούνται μετρήσεις τόξων μεσημβρινών απ' όπου προκύπτουν και οι διαστάσεις του ελλειψοειδούς σχήματος της γης, δηλ. ο μεγάλος ημιάξονας a , ο μικρός ημιάξονας b και η επιπλάτυνση f , ($f = (a - b) / a$). Έτσι έχουμε τα ελλειψοειδή των Delambre & Merchain, Everest, Airy, Bessel (χρησιμοποιείτο στην Ελλάδα στο ΠΕΓΣΑ) και τα 2 ελλειψοειδή του Clarke. Επίσης την εποχή αυτή ξεκινούν να ιδρύονται τριγωνομετρικά δίκτυα (Gauss).

Τέλος, τον 20^ο αιώνα, (και ήδη από τα τέλη του 19^{ου}), με την εξέλιξη της τεχνολογίας και την εφεύρεση νέων οργάνων για την πραγματοποίηση γεωδαιτικών, αστρονομικών και βαρυτημετρικών παρατηρήσεων, εισέρχεται πλέον δυναμικά στο επιστημονικό ενδιαφέρον της γεωδαιτικής κοινότητας και ο προσδιορισμός του γεωειδούς, (δηλ. των αποχών του από τα διάφορα ελλειψοειδή αναφοράς), ενώ προσδιορίζονται και νέα ελλειψοειδή (Helmert, Hayford, GRS 67, κ.ά.) με τελευταίο το GRS 80, που υιοθετήθηκε από τη Διεθνή Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής (IUGG) το 1980 και το οποίο είναι αυτό που χρησιμοποιείται σήμερα τόσο στην Ελλάδα (ΕΓΣΑ, HEPOS) όσο και διεθνώς. Παρακάτω παρατίθεται πίνακας με τα κυριότερα ελλειψοειδή που κατά καιρούς προσδιορίστηκαν, τη χρονολογία τους και τις τιμές των παραμέτρων a και f :

Ελλειψοειδές (εκ περιστροφής)	Μεγάλος ημιάξονας (a)	Επιπλάτυνση (f)
Everest (1830)	6377276 m	1 / 300.8
Airy (1830)	6376542 m	1 / 299.3
Bessel (1841)	6377397 m	1 / 299.15
Clarke (1866)	6378206 m	1 / 294.98
Clarke (1880)	6378245 m	1 / 293.5
Helmert (1907)	6378200 m	1 / 298.3
Hayford International (1924)	6378388 m	1 / 297.0
Krassowsky (1942)	6378245 m	1 / 298.3
GRS (1967)	6378160 m	1 / 298.247
WGS (1972)	6378135 m	1 / 298.26
Gposhkin (1973)	6378140 m	1 / 298.256
GRS (1980)	6378137 m	1 / 298.25722

Πίνακας 0-1: Τα κυριότερα ελλειψοειδή και οι παράμετροί τους

Πηγή: Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας, ΕΜΠ, 2009

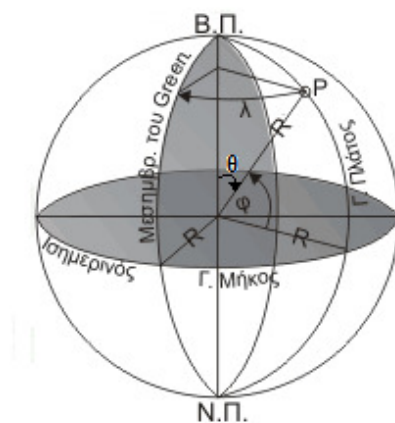
Επιφάνειες Αναφοράς

Μετά τη σύντομη ιστορική αναδρομή που παρατέθηκε πιο πάνω, κρίνεται σκόπιμη η πραγματοποίηση μιας γενικής επισκόπησης στις βασικότερες επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία. Οι επιφάνειες αυτές είναι (από την απλούστερη στην πιο σύνθετη μαθηματικά): η σφαίρα, το ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ΕΕΠ), το γεωειδές και η φυσική γήινη επιφάνεια (φ.γ.ε).

- Η **σφαίρα** είναι η επιφάνεια με την απλούστερη μαθηματική έκφραση, αλλά και την μικρότερη ακρίβεια όσον αφορά την προσέγγιση του σχήματος της γης. Αν θεωρήσουμε ένα τρισσορθόγωνιο καρτεσιανό σύστημα συντ/νων X, Y, Z και μια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το σημείο $O (0, 0, 0)$ της αρχής των αξόνων, τότε η θέση ενός σημείου που βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας προκύπτει από την εξίσωση:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

Ένα σημείο στην επιφάνεια της γήινης σφαίρας μπορεί επίσης να προσδιοριστεί με τη βοήθεια των σφαιρικών συντ/νων R, φ, λ (ή R, θ, λ), όπου το **γεωγραφικό πλάτος** φ είναι η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα του σημείου με το ισημερινό επίπεδο (δηλ. το επίπεδο OXY), ενώ η θ είναι η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα με τον άξονα περιστροφής (δηλ. τον OZ), το **γεωγραφικό μήκος** λ είναι η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο που ορίζει ο μεσημβρινός του σημείου, με το επίπεδο που ορίζει ο μεσημβρινός του Greenwich (δηλ. το επίπεδο OXZ) και R είναι η **ακτίνα της σφαίρας**, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 0-2: Σφαιρικές γεωγραφικές συντ/νες

Πηγή: www.geo.auth.gr

Οι σχέσεις που συνδέουν καρτεσιανές και σφαιρικές συντ/νες είναι οι εξής:

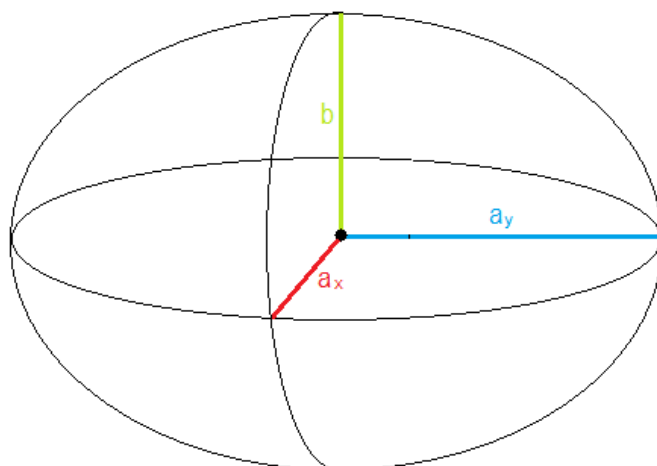
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{Z}{R} \quad \left(\theta = \arccos \frac{Z}{R} \right)$$

$$\lambda = \arccos \frac{X}{R \cdot \cos \varphi} = \arcsin \frac{Y}{R \cdot \cos \varphi}$$

Η σφαίρα ως επιφάνεια αναφοράς χρησιμοποιείται τοπικά κυρίως, όταν η περιοχή των εργασιών είναι εν γένει μικρή, ενώ επίσης χρησιμοποιείται ευρέως στη χαρτογραφία και τη ναυσιπλοΐα.

- Το **ελλειψοειδές εκ περιστροφής** (ΕΕΠ) είναι η επιφάνεια αναφοράς που χρησιμοποιείται στη Γεωδαισία σήμερα. Προκύπτει από την περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από τον μικρό της άξονα, προς τούτο και ο όρος «εκ περιστροφής». Είναι διαξονικό, καθ' όσον από τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται, η τομή του ελλειψοειδούς με το επίπεδο OXY (ισημερινό) είναι κύκλος ακτίνας ίσης με τον μεγάλο ημιάξονα (a) της «γενεσιουργού» έλλειψης, όπως κύκλοι (μικρότερης ακτίνας) είναι και οι τομές του ελλειψοειδούς με όλα τα παράλληλα προς τον ισημερινό επίπεδα, ενώ οι μεσημβρινοί του, (δηλ. οι τομές του ΕΕΠ με τα επίπεδα που είναι κάθετα στο OXY και περιέχουν τον άξονα περιστροφής του, δηλ. τον Z), είναι ελλείψεις ίδιων διαστάσεων (a , b) με τη «γενεσιουργό» έλλειψη. Προσεγγίζει το γεωειδές σε αρκετά καλύτερο βαθμό από τη σφαίρα και συγχρόνως έχει σχετικά απλή μαθηματική έκφραση. Ωστόσο δεν πρέπει να παραγνωριστεί η σύγχρονη τάση που καταγράφεται πλέον και η οποία έχει να κάνει με την χρησιμοποίηση **τριαξονικών ελλειψοειδών** ως επιφανειών αναφοράς, (βλ. Ραπου G., 2014, “*A Study on Geodetic Boundary Value Problems in Ellipsoidal Geometry*”). Εξάλλου και το ΕΕΠ μπορεί να θεωρηθεί ως μια εκφυλισμένη μορφή τριαξονικού ελλειψοειδούς, (όπου $\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$).



Εικόνα 0-3: Γεωμετρία του τριαξονικού ελλειψοειδούς

Ένα γεωκεντρικό ελλειψοειδές έχει το κέντρο του στο κέντρο μάζας της γης, ο άξονας συμμετρίας του συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής της και προσαρμόζεται

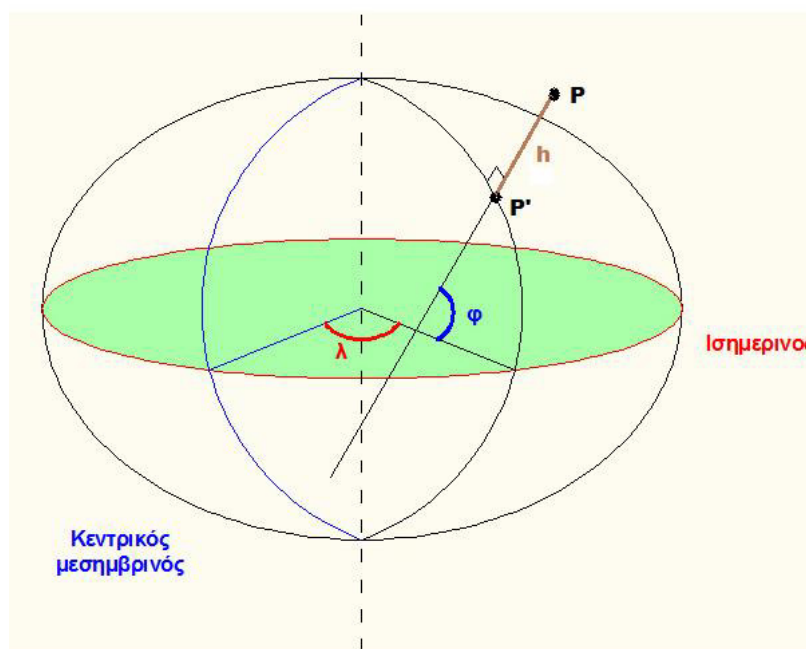
όσο το δυνατό καλύτερα στο γεωειδές (μέγιστη αποχή περί τα 100 m, ενώ για τη σφαίρα μέγιστη αποχή είναι περί τα 16 km). Σε πολλές περιπτώσεις όμως γεωδαιτικών (όχι γεωκεντρικών) ελλειψοειδών αναφοράς, έχουμε παράλληλη μετάθεση του ελλειψοειδούς για να προσαρμόζεται καλύτερα με το γεωειδές μιας συγκεκριμένης περιοχής ενδιαφέροντος, με αποτέλεσμα το κέντρο του πλέον να μη συμπίπτει με το κέντρο μάζας της γης. Μια τέτοια περίπτωση έχουμε και στο ΕΓΣΑ 87, όπου έγινε παράλληλη μετάθεση του κέντρου του ελλειψοειδούς GRS 80 κατά:

$$\Delta X = -199.87 \text{ m,}$$

$$\Delta Y = +74.79 \text{ m,}$$

$$\Delta Z = +246.42 \text{ m,} \quad (\text{Μήλας, Μπιλλήρης, 2006}).$$

Ένα σημείο της φ.γ.ε αντιστοιχίζεται με μοναδικό τρόπο σε ένα σημείο του ελλειψοειδούς, με τη βοήθεια των γεωδαιτικών συντ/ων φ , λ , h . Έτσι, το **γεωδαιτικό πλάτος (φ)** ενός σημείου είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που διέρχεται από το εν λόγω σημείο και είναι κάθετη στο ελλειψοειδές, με το επίπεδο OXY (ισημερινό). Το γεωδαιτικό πλάτος δεν πρέπει να συγχέεται με το γεωκεντρικό πλάτος, το οποίο είναι η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα του σημείου με το ισημερινό επίπεδο, (τα δύο αυτά πλάτη συμπίπτουν όταν το σημείο βρίσκεται στον ισημερινό ή στους πόλους). Το **γεωδαιτικό μήκος (λ)** του σημείου είναι η γωνία που σχηματίζει ο μεσημβρινός του σημείου με τον μεσημβρινό του Greenwich και το **γεωμετρικό υψόμετρο (h)** του σημείου είναι η απόσταση του σημείου της φ.γ.ε από το ίχνος του, κατά μήκος της καθέτου, πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Ενδεικτικό είναι το σχήμα που ακολουθεί:



Εικόνα 0-4: Γεωδαιτικές συντ/νες

Πηγή: www.geosolution.gr

Οι σχέσεις που συνδέουν τις γεωδαιτικές με τις καρτεσιανές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\varphi_{i+1} = \arctan \frac{Z + e^2 N \sin \varphi_i}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (\text{επαναληπτική σχέση έως ότου υπάρξει σύγκλιση}),$$

$$\text{με } \varphi_0 = \arctan \frac{Z}{(1 - e^2)\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

Όπου:

$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ η ακτίνα καμπυλότητας της κύριας καθέτου τομής και

$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - (f - 1)^2$ η κύρια εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς αναφοράς. Για το GRS

80, έχουμε τις εξής τιμές για τις παραμέτρους του ελλειψοειδούς:

$$a = 6378137.000 \text{ m}$$

$$b = 6356752.314 \text{ m}$$

$$f^{-1} = 298.257222101$$

$$e^2 = 0.006694380$$

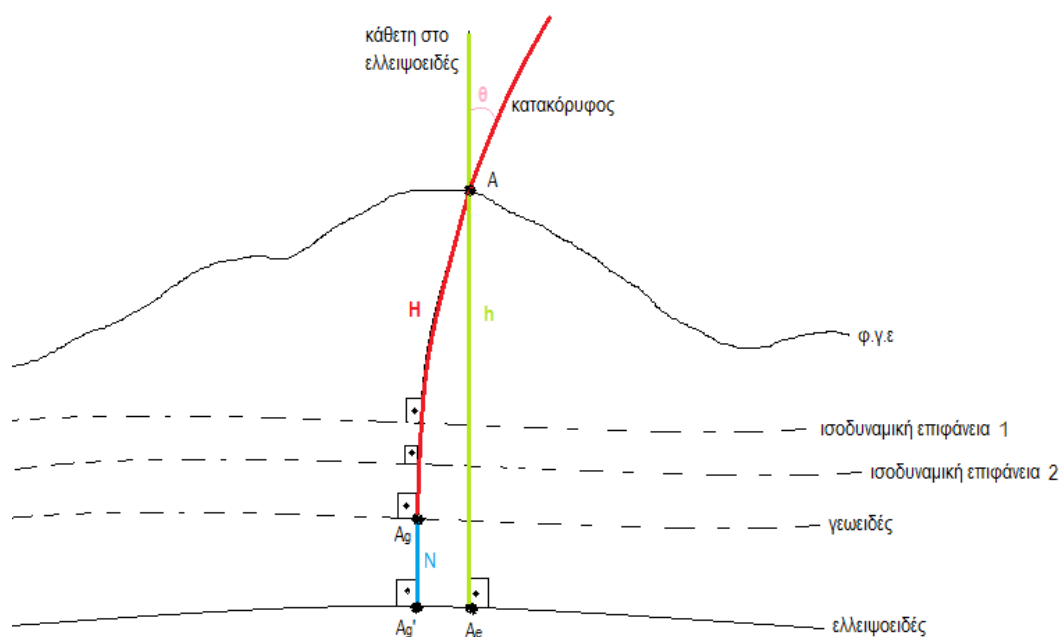
- Επόμενη επιφάνεια αναφοράς, που είναι κι αυτή η οποία θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία, είναι το **γεωειδές**. Ξεκινώντας από έναν γενικό ορισμό του γεωειδούς κατά τον J.C.F. Gauss (1777 – 1855), θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η ισοδυναμική επιφάνεια έλξης και περιστροφής της γης (δηλ. ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με σταθερή τιμή του γήινου δυναμικού), που προσεγγίζεται σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό (± 1 m) από τη μέση στάθμη της θάλασσας (ΜΣΘ), εάν αυτή διορθωθεί από τις επιδράσεις των παλιρροιών, των ρευμάτων, της μεταβολής της πυκνότητας και του κυματισμού. Με όρους βαρύτητας, το γεωειδές είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια, σε κάθε σημείο της οποίας η τιμή του δυναμικού W του γήινου πεδίου βαρύτητας έχει την τιμή W_0 , δηλ. για κάθε σημείο της επιφάνειας του γεωειδούς, ισχύει $W = W_0$. Όμως, αφ' ενός η στάθμη της θάλασσας δεν αποτελεί ισοδυναμική επιφάνεια εξαιτίας των ανέμων, των ρευμάτων και λοιπών παραγόντων κι αφ' ετέρου η επιφάνεια αυτή προεκτεινόμενη στα

ηπειρωτικά τμήματα, περνάει κάτω από τις εδαφικές μάζες που της ασκούν βαρυτική έλξη και την στρεβλώνουν.

Η επιφάνεια του γεωειδούς είναι η αφετηρία μέτρησης των **ορθομετρικών υψομέτρων (H)**, τα οποία μετρώνται κατά μήκος της κατακόρυφου. Η κατακόρυφος σε ένα σημείο της φ.γ.ε είναι μια δυναμική γραμμή (καμπύλη κι όχι ευθεία), που σημαίνει ότι είναι κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες (κι επομένως και στο γεωειδές) και το διάνυσμα της βαρύτητας εφάπτεται σε κάθε σημείο της. Η περιγραφή της επιφάνειας του γεωειδούς γίνεται με την **αποχή ή υψόμετρο του γεωειδούς (N)** από κάποιο ελλειψοειδές αναφοράς. Η αποχή του γεωειδούς έχει θετική τιμή όταν το γεωειδές είναι πάνω από το ελλειψοειδές και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση, (π.χ. στην Ελλάδα η τιμές του N είναι θετικές και κυμαίνονται μεταξύ 30 – 40 m). Η θεμελιώδης σχέση που συνδέει τα τρία υψόμετρα (h, H, N) είναι η εξής:

$$h = H + N$$

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Εικόνα 0-5: Επιφάνειες αναφοράς και υψόμετρα

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, το γεωμετρικό υψόμετρο (h) μετριέται κατά μήκος της καθέτου στο ελλειψοειδές (ευθεία γραμμή), ενώ το ορθομετρικό (H) κατά μήκος της κατακόρυφου (καμπύλη γραμμή). Επίσης, η προβολή του σημείου A της φ.γ.ε πάνω στο ελλειψοειδές κατά μήκος της καθέτου (σημείο Ae – προβολή Helmert), διαφέρει από την προβολή του πάνω στο γεωειδές κατά μήκος της κατακόρυφου (σημείο Ag) κι από κει προβολή (του Ag) πάνω στο ελλειψοειδές κατά μήκος της καθέτου (σημείο Ag' - προβολή Pizzetti). Όμως η απόσταση (Ag'-Ae)

είναι μικρή (< 30 cm) και δεν επηρεάζει ως προς το υψόμετρο του σημείου A. Με ακρίβεια χιλιοστού οι δύο αυτές προβολές είναι ισοδύναμες κι άρα δεχόμαστε τη θεμελιώδη σχέση $h = H + N$.

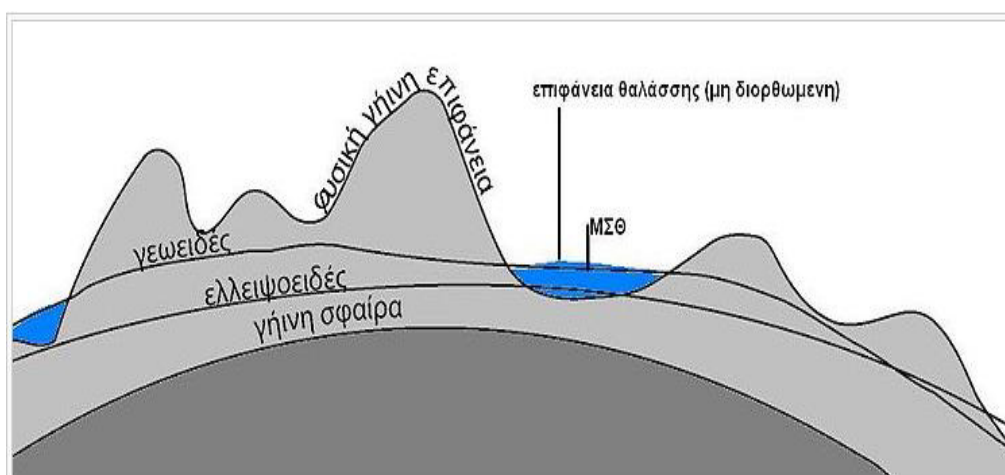
Επίσης, πάλι από το σχήμα, βλέπουμε ότι η κατακόρυφος, που όπως αναφέρθηκε είναι μια δυναμική γραμμή, τέμνει κάθετα όλες τις ισοδυναμικές επιφάνειες οι οποίες δεν τέμνονται και δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους. Ακόμα, μεταξύ της κατακόρυφου και της καθέτου σε ένα σημείο, σχηματίζεται μια γωνία (γωνία θ στο σχήμα), που ονομάζεται **απόκλιση της κατακόρυφου**. Η γωνία αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες ξ και η , κατά τη διεύθυνση του μεσημβρινού του σημείου και κατά τη διεύθυνση του πρώτου κάθετου επιπέδου αντίστοιχα και ισχύει:

$$\xi = \Phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos\varphi$$

όπου (Φ, Λ) οι αστρονομικές συντ/νες του σημείου, που προκύπτουν από αστρονομικές παρατηρήσεις.

- Μετά το γεωειδές, σειρά έχει η **φυσική γήινη επιφάνεια (φ.γ.ε)**, δηλ. η πραγματική επιφάνεια της γης που περιλαμβάνει την τοπογραφική επιφάνεια και τον πυθμένα των ωκεανών και είναι η επιφάνεια επί της οποίας πραγματοποιούνται οι γεωδαιτικές μετρήσεις. Η φ.γ.ε είναι μια ιδιαίτερα πολύπλοκη επιφάνεια που δεν μπορεί να περιγραφεί με μαθηματική σχέση και η απεικόνισή της γίνεται με τη βοήθεια γραφικών μεθόδων, δηλ. υψομετρικών καμπύλων πάνω σε ένα χάρτη. Στην εικόνα που ακολουθεί, φαίνονται όλες οι προαναφερθείσες επιφάνειες αναφοράς και η μεταξύ τους σχέση:



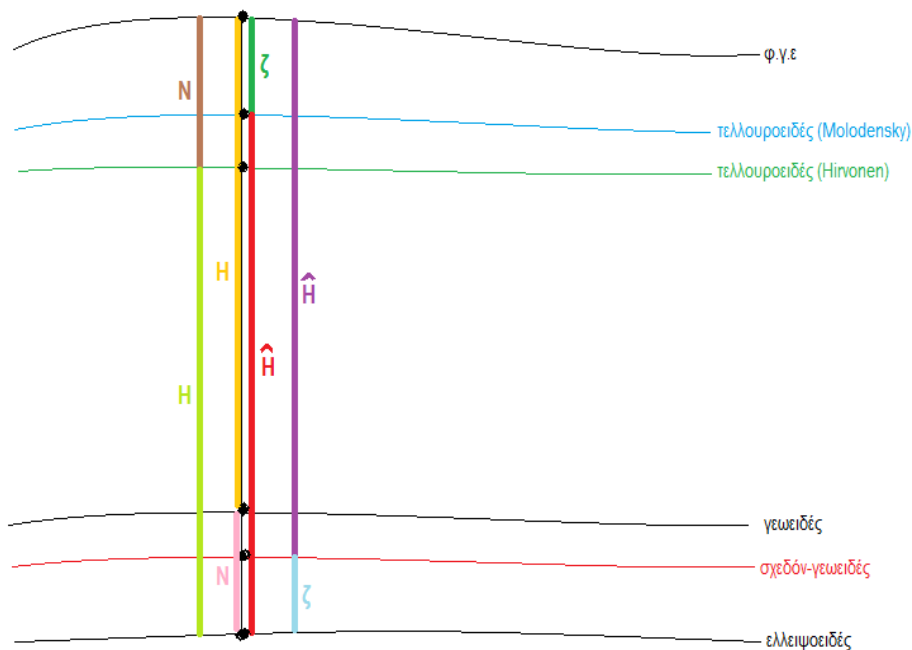
Εικόνα 0-6: Επιφάνειες αναφοράς στη Γεωδαισία

Πηγή: el.wikipedia.org

- Κλείνοντας την αναφορά στις βασικότερες επιφάνειες, πρέπει να αναφερθούμε και σε κάποιες άλλες χρήσιμες επιφάνειες που χρησιμοποιούνται σήμερα στη Γεωδαισία:

Το **σχεδόν-γεωειδές** (quasi-geoid) που προτάθηκε από τον Molodensky, είναι η επιφάνεια που απέχει απόσταση ζ (ανωμαλία υψομέτρου ζ) από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Για τον υπολογισμό της ανωμαλίας υψομέτρου ζ , δεν χρειάζονται διάφορες υποθέσεις για την κατανομή των μαζών στα ανώτερα στρώματα, οι οποίες απαιτούνται για τον υπολογισμό του N . Ωστόσο, το σχεδόν-γεωειδές δεν έχει κάποια φυσική σημασία, όπως το γεωειδές. Συμπίπτει με το γεωειδές στις θαλάσσιες περιοχές, αλλά στις ηπειρωτικές η απόκλιση ($N - \zeta$) αυξάνεται με την αύξηση του υψομέτρου. Αποτελεί την αφετηρία μέτρησης των **κανονικών υψομέτρων** (\hat{H}).

Μια άλλη επιφάνεια είναι το **τελλουροειδές** (telluroid). Κατά τον **Hirvonen**, το τελλουροειδές είναι η επιφάνεια της οποίας τα σημεία απέχουν από ένα γεωκεντρικό ελλειψοειδές, όσο απέχει η φ.γ.ε από το γεωειδές, άρα το υψόμετρο του τελλουροειδούς ως προς το ελλειψοειδές είναι ίσο με το ορθομετρικό υψόμετρο H και το υψόμετρο της φ.γ.ε ως προς το τελλουροειδές είναι ίσο με την αποχή του γεωειδούς N . Κατά τον **Molodensky** όμως, το τελλουροειδές είναι η επιφάνεια της οποίας τα σημεία απέχουν από το ελλειψοειδές, όσο απέχει η φ.γ.ε από το σχεδόν-γεωειδές, άρα το υψόμετρο του τελλουροειδούς ως προς το ελλειψοειδές είναι ίσο με το κανονικό υψόμετρο \hat{H} και το υψόμετρο της φ.γ.ε ως προς το τελλουροειδές είναι ίσο με την ανωμαλία υψομέτρου ζ . Τα παραπάνω συνοψίζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Εικόνα 0-7: Επιφάνειες αναφοράς και μεταξύ τους αποστάσεις

Τέλος, υπάρχει και το **αντισταθμισμένο γεωειδές** ή παρά-γεωειδές (compensated geoid ή co-geoid), που προκύπτει από τη μαθηματική «μετατόπιση» των μαζών, όταν εφαρμόσουμε τις τοπογραφικές διορθώσεις στις ανωμαλίες βαρύτητας, διαδικασία για την οποία θα γίνει εκτενέστερη αναφορά παρακάτω.

Σκοπός – Διάρθρωση Εργασίας

Ο σκοπός της παρούσης εργασίας επικεντρώνεται στον προσδιορισμό της επιφάνειας του γεωειδούς στην ευρύτερη περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος, με τη βοήθεια μετρήσεων GPS, βαρύτητας, αποκλίσεων κατακορύφου, κλπ., σε διάφορα σημεία της περιοχής μελέτης. Η ολοένα αυξανόμενη χρήση του συστήματος GPS με το οποίο προσδιορίζουμε γεωμετρικά υψόμετρα, καθιστά ολοένα και επιτακτικότερη την ανάγκη χρήσης «καλών» μοντέλων γεωειδούς από τα οποία θα εξάγονται τα ορθομετρικά υψόμετρα με ικανοποιητική ακρίβεια, χωρίς την ανάγκη της επίπονης και χρονοβόρου διαδικασίας της γεωμετρικής χωροστάθμησης.

Η εργασία διαρθρώνεται σε δύο μέρη. Το Α' μέρος (θεωρητικό) αποτελείται από τα κεφάλαια 1 και 2, ενώ το Β' μέρος (πρακτικό) από τα κεφάλαια 3, 4 και 5. Στο 1^ο κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή στο γήινο δυναμικό και συγκεκριμένα στο ελκτικό δυναμικό ως ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών και λύση της εξίσωσης Laplace. Περιγράφεται η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης και γίνεται αναφορά στα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών, καθώς και στη σύγκριση των μοντέλων EGM 2008 και EIGEN 6C-3 STAT με το μοντέλο γεωειδούς GEOID 12A της NGS (National Geodetic Survey), που πραγματοποιήθηκε για τις ανάγκες της παρούσης εργασίας, σε 3 περιοχές των ΗΠΑ. Επιλέχθηκαν οι ΗΠΑ για τη σύγκριση των 2 μοντέλων, διότι αφ' ενός το GEOID 12A είναι από τα πλέον αξιόπιστα και λεπτομερή μοντέλα γεωειδούς κι αφ' ετέρου τα δεδομένα του είναι προσβάσιμα από το site της NGS.

Στο 2^ο κεφάλαιο, γίνεται η διάκριση του δυναμικού σε κανονικό και διαταρακτικό και πραγματοποιείται αναφορά στις διαφορών ειδών αναγωγές κι ανωμαλίες βαρύτητας, καθώς και στη σχέση βαρύτητας και υψομέτρων. Επίσης, περιγράφονται οι διάφοροι μέθοδοι προσδιορισμού του γεωειδούς (τοπικές – περιφερειακές, γεωμετρικές – βαρυτομετρικές – συνδυαστικές προσεγγίσεις) και παρουσιάζονται παραδείγματα από την εφαρμογή τους ανά τον κόσμο.

Στο 3^ο κεφάλαιο, δίνονται πληροφορίες για την περιοχή μελέτης και το δίκτυο των σημείων, καθώς και για την ποιότητα των μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν και διενεργούνται διάφοροι στατιστικοί έλεγχοι για την απομάκρυνση σημείων με χονδροειδή σφάλματα στις μετρήσεις. Ακόμα, επιλέγονται τα σημεία που θα χρησιμεύσουν μόνο στον έλεγχο της επιφάνειας κι όχι στον προσδιορισμό της (test points).

Στο 4^ο κεφάλαιο, γίνεται αναλυτική παρουσίαση των μεθόδων που εφαρμόστηκαν στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, για τον προσδιορισμό της εν λόγω επιφάνειας του γεωειδούς. Επίσης παρουσιάζονται οι διάφοροι στατιστικοί έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν για την αξιολόγηση των μοντέλων.

Τέλος, στο 5^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την παρούσα εργασία και προτείνονται διάφορα αξιοσημείωτα θέματα για περαιτέρω μελέτη.

ΜΕΡΟΣ Α:
ΠΕΡΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ, ΜΟΝΤΕΛΩΝ
ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ
ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ

Κεφαλαίο 1^ο: Γήινο Δυναμικό – Μοντέλα Σφαιρικών Αρμονικών

1.1. Το δυναμικό του γήινου πεδίου βαρύτητας

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σώμα που βρίσκεται πάνω στη γη, ασκείται μια δύναμη. Η δύναμη αυτή είναι η συνισταμένη της ελκτικής δύναμης λόγω της βαρύτητας και της φυγόκεντρης δύναμης λόγω της περιστροφής της γης, δηλ. ισχύει:

$$(1.1) \quad \vec{F}_{ολ} = \vec{F}_{ελκτική} + \vec{F}_{φυγόκεντρος}$$

Κατ' επέκταση του παραπάνω, το δυναμικό (W) του γήινου πεδίου βαρύτητας, συντίθεται από την επίδραση του **ελκτικού δυναμικού (V)** και του **φυγόκεντρου δυναμικού (Φ)**, δηλ.:

$$(1.2) \quad W = V + \Phi$$

Το δυναμικό είναι ένα βαθμωτό μέγεθος ($W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). Εφαρμόζοντας τον τελεστή *grad* στο βαθμωτό μέγεθος του δυναμικού, παίρνουμε το **διάνυσμα** της κλίσης του δυναμικού, που δεν είναι τίποτε άλλο από την γνωστή **ένταση της βαρύτητας \vec{g}** , άρα:

$$(1.3) \quad \vec{g} = \nabla W = gradW = \frac{\partial W}{\partial x}i + \frac{\partial W}{\partial y}j + \frac{\partial W}{\partial z}k$$

1.2. Εξίσωση Poisson και εξίσωση Laplace

Για το ελκτικό δυναμικό V , στο εσωτερικό και πάνω στην επιφάνεια της γης, ισχύει η εξίσωση του **Poisson** (1.4), ενώ έξω από τη γήινη επιφάνεια, ισχύει η εξίσωση του **Laplace** (1.5):

$$(1.4) \quad \Delta V = \nabla^2 V = \text{div}(\text{grad}V) = \text{div}\left(\frac{\partial V}{\partial x}i + \frac{\partial V}{\partial y}j + \frac{\partial V}{\partial z}k\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\rho$$

$$(1.5) \quad \Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

όπου, G είναι η παγκόσμια βαρυτική σταθερά με τιμή $6.67428 (\pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ και ρ η πυκνότητα της γης.

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις αποτελούν τις βασικότερες διαφορικές εξισώσεις της Φυσικής Γεωδαισίας. Οι λύσεις της εξίσωσης (1.5) αποτελούν τις λεγόμενες **αρμονικές συναρτήσεις** κι επομένως το ελκτικό δυναμικό έξω από τη γήινη επιφάνεια, είναι μια αρμονική συνάρτηση.

Αντίστοιχα, για το φυγόκεντρο δυναμικό Φ ισχύει η απλούστερη σχέση:

$$(1.6) \quad \Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

όπου, ω είναι γωνιακή ταχύτητα της γης κι ισούται με $7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{sec}$.

Από τα παραπάνω, προκύπτει η **γενικευμένη εξίσωση του Poisson** για το γήινο δυναμικό W , στο εσωτερικό και πάνω στην επιφάνεια της γης:

$$(1.7) \quad \Delta W_{in} = \Delta(V + \Phi) = \Delta V + \Delta \Phi = -4\pi G\rho + 2\omega^2$$

Ενώ, έξω από τη γήινη επιφάνεια:

$$(1.8) \quad \Delta W_{out} = \Delta(V + \Phi) = \Delta V + \Delta \Phi = 2\omega^2 \neq 0$$

που σημαίνει ότι το γήινο δυναμικό W για τα σημεία έξω από τη γήινη επιφάνεια, (σε αντίθεση με το ελκτικό δυναμικό) δεν αποτελεί αρμονική συνάρτηση.

1.3. Επίλυση εξίσωσης Laplace

Τα κύρια προβλήματα στα οποία επικεντρώνεται η Φυσική Γεωδαισία είναι (α) ο προσδιορισμός του γήινου πεδίου βαρύτητας και των διαχρονικών μεταβολών του και (β) ο προσδιορισμός ενός μοντέλου της 'μέσης' Γης (π.χ. ενός κατάλληλου

χωροσταθμικού ελλειψοειδούς), από γεωδαιτικές μετρήσεις που γίνονται στην επιφάνεια της ή έξω από αυτήν. Τα εν λόγω προβλήματα είναι αλληλένδετα και αντιμετωπίζονται με έναν ενιαίο θεωρητικό φορμαλισμό που αναφέρεται ως **γεωδαιτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών** (geodetic boundary value problem), το οποίο απαιτεί για την επίλυση του την εισαγωγή των τριών βασικών επιφανειών αναφοράς: της φυσικής γήινης επιφάνειας, του γεωειδούς και του ελλειψοειδούς. Εξ αυτών, η φ.γ.ε και το γεωειδές χαρακτηρίζονται ως συνοριακές επιφάνειες στις οποίες αναφέρονται τα δεδομένα των ποικίλων γεωδαιτικών μετρήσεων, και είναι ουσιαστικά αυτές που τελικά προσδιορίζονται από τις εκάστοτε διαθέσιμες μετρήσεις.

1.3.1. Συνοριακά προβλήματα

Υπάρχουν τρία είδη τέτοιων προβλημάτων:

Το **1^ο είδος** (βασίζονται στο πρόβλημα του **Dirichlet**), όπου η λύση της εξίσωσης Laplace ($\Delta V = 0$), προσδιορίζεται από τιμές του V πάνω στη συνοριακή επιφάνεια, δηλ. την επιφάνεια της γης.

Το **2^ο είδος** (βασίζονται στις συνοριακές συνθήκες του **Neumann**), όπου είναι γνωστές οι τιμές της παραγώγου της συνάρτησης του δυναμικού V κατά μήκος της καθέτου, σε κάθε σημείο της συνοριακής επιφάνειας.

Το **3^ο είδος** (βασίζονται στη συνοριακή συνάρτηση του **Robin**), που είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συνοριακών προβλημάτων 1^{ου} και 2^{ου} είδους.

1.3.2. Διαδικασία επίλυσης

Για τη λύση της εξίσωσης Laplace ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία (Heiskanen & Moritz 1967, Hofmann – Wellenhof & Moritz 2005):

- μετατροπή της εξίσωσης σε σφαιρικές συντ/νες (r, θ, λ)
- διαχωρισμός της εξίσωσης σε 3 ανεξάρτητες συναρτήσεις $f(r), g(\theta), h(\lambda)$
- επίλυση 3 διαφορικών εξισώσεων και γραμμικός συνδυασμός των λύσεων σε μία γενική λύση
- εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (απόρριψη ασυμβίβαστων λύσεων)
- αποδοχή συντελεστών και μορφοποίηση τελικής λύσης

Ο προσδιορισμός της λύσης σε σφαιρικές συντ/νες προτιμάται από τις καρτεσιανές, διότι με τη βοήθειά τους προσδιορίζονται οι λεγόμενες **σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις**, που είναι πάρα πολύ χρήσιμες στη Φυσική Γεωδαισία, καθώς διευκολύνουν τον υπολογισμό των αναπτυγμάτων των διαφόρων παραμέτρων του γήινου δυναμικού.

Κατόπιν της διαδικασίας που περιγράφηκε παραπάνω, για το ελκτικό δυναμικό V , οι λύσεις δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

α) **Εσωτερικά** της γήινης επιφάνειας:

$$(1.9) \quad V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cdot Y_{nm}^c(\theta, \lambda) + B_{nm} \cdot Y_{nm}^s(\theta, \lambda))$$

β) **Εξωτερικά** της γήινης επιφάνειας:

$$(1.10) \quad V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cdot Y_{nm}^c(\theta, \lambda) + B_{nm} \cdot Y_{nm}^s(\theta, \lambda))$$

1.3.3. Επεξήγηση σχέσεων – Συναρτήσεις Legendre

Στις παραπάνω σχέσεις, συναντώνται οι εξής όροι:

- Οι συντελεστές A_{nm}, B_{nm} λέγονται **αρμονικοί συντελεστές**.
- Οι συναρτήσεις $Y_{nm}^c(\theta, \lambda)$ και $Y_{nm}^s(\theta, \lambda)$, είναι οι **επιφανειακές αρμονικές συναρτήσεις**:

$$(1.11) \quad Y_{nm}^c(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \cdot \cos m\lambda$$

$$(1.12) \quad Y_{nm}^s(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \cdot \sin m\lambda$$

- Οι συναρτήσεις $P_{nm}(\cos \theta)$ καλούνται **συναρτήσεις Legendre 1^{ου} είδους**, είναι της μορφής:

$$(1.13) \quad P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(t^2-1)^n}{dt^{n+m}} \quad \text{για } t \in [-1, 1], (t = \cos \theta)$$

κι αποτελούν λύσεις της **χαρακτηριστικής διαφορικής εξίσωσης** των συναρτήσεων **Legendre** (μετασχηματισμένη μορφή):

$$(1.14) \quad (1-t^2)\bar{g}''(t) - 2t \cdot \bar{g}'(t) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right) \bar{g}(t) = 0$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$, με $0 < m < n$

Τα **n, m** είναι ο **βαθμός και η τάξη** της συνάρτησης Legendre, αντίστοιχα.

Για $m = 0$, παίρνουμε τις συναρτήσεις Legendre μηδενικής τάξης (ή αλλιώς τα **πολύωνυμα Legendre**), που είναι της μορφής:

$$(1.15) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}$$

από τα οποία υπολογίζονται εύκολα οι αντίστοιχες συναρτήσεις Legendre (προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre), ως εξής:

$$(1.16) \quad P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$$

Οι συναρτήσεις και τα πολυώνυμα Legendre έχουν την πολύ σημαντική ιδιότητα να ικανοποιούν τη λεγόμενη **συνθήκη ορθογωνικότητας**, η οποία διευκολύνει κατά πολύ τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων του γήινου δυναμικού. Η συνθήκη εκφράζεται ως εξής:

α) Για τα πολυώνυμα Legendre:

$$(1.17) \quad \int_{-1}^1 P_n(t) \cdot P_m(t) dt = \frac{2}{2n+1} \cdot \delta_{n,m}$$

όπου $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$, το δέλτα του Kronecker

β) Για τις συναρτήσεις Legendre ($0 \leq m \leq n$):

$$(1.18) \quad \int_{-1}^1 \frac{P_{km}(t) \cdot P_{nm}(t)}{1-t^2} dt = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \cdot \delta_{k,n}, \quad \text{για κάθε } m \text{ σταθερό}$$

$$(1.19) \quad \int_{-1}^1 \frac{P_{nk}(t) \cdot P_{nm}(t)}{1-t^2} dt = \begin{cases} 0 & (m \neq 0) \\ \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} & (m = n \neq 0) \\ \infty & (m = n = 0) \end{cases}, \quad \text{για κάθε } n \text{ σταθερό}$$

1.3.4. Γεωμετρική σημασία των επιφανειακών αρμονικών συναρτήσεων

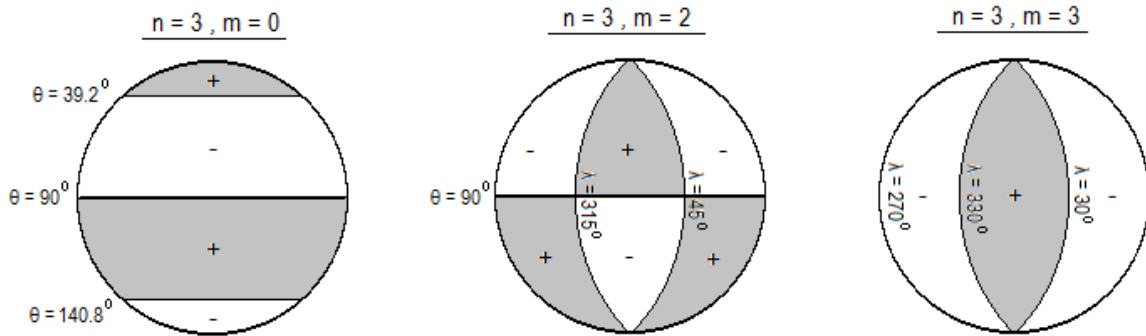
Οι επιφανειακές αρμονικές $Y_{nm}^c(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \cdot \cos m\lambda$ και $Y_{nm}^s(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \cdot \sin m\lambda$, έχουν (**n-m**) μηδενικές τιμές για $0 < \theta < \pi$ και **2m** μηδενικές τιμές για $0 < \lambda < 2\pi$. Οι περιοχές όπου οι συναρτήσεις μηδενίζονται, όπως είναι φυσικό, είναι οι περιοχές όπου έχουμε εναλλαγή τιμών από θετικές σε αρνητικές και αντίστροφα. Έτσι:

Όταν έχουμε πολυώνυμα Legendre ($m = 0$), οι σφαιρικές επιφανειακές αρμονικές μηδενίζονται n φορές για $0 < \theta < \pi$ και καμία φορά για $0 < \lambda < 2\pi$, δηλ. δεν υπάρχει εξάρτηση από το λ , επομένως χωρίζουν τη σφαίρα σε ζώνες θετικών κι αρνητικών τιμών διαδοχικά (**αρμονικές ζώνης**).

Όταν $m \neq 0$ και $n \neq m$, χωρίζουν τη σφαίρα σε τετραγωνικά τραπεζοειδή τεμάχια και λέγονται **τραπεζοειδείς ή τεσσεροειδείς αρμονικές** (tesseral harmonics).

Όταν $n = m$, οι επιφανειακές αρμονικές δεν μηδενίζονται καμία φορά για $0 < \theta < \pi$, δηλ. δεν υπάρχει εξάρτηση από το θ και μηδενίζονται $2m$ φορές για $0 < \lambda < 2\pi$, επομένως χωρίζουν τη σφαίρα σε τομείς θετικών κι αρνητικών τιμών διαδοχικά (**αρμονικές τομεία**).

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Εικόνα 1-1: Αρμονικές: ζώνης (αριστερά), τεσσεροειδείς (κέντρο), τομεία (δεξιά)

Πηγή: W. Torge «Γεωδαισία», ΕΜΠ, 2000

1.4. Τελική μορφή του αναπτύγματος του ελκτικού δυναμικού

Η μορφή του αναπτύγματος του ελκτικού δυναμικού εξωτερικά της γήινης επιφάνειας, που είδαμε στη σχέση (1.10), κατόπιν πράξεων μετασχηματίζεται τελικά, στη βολικότερη μορφή:

$$(1.20) \quad V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cdot \cos m\lambda + S_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta)$$

Όπου: **GM** – το γινόμενο της παγκόσμιας βαρυτικής σταθεράς επί τη μάζα της γης (συμπεριλαμβανομένης και της ατμόσφαιρας) που ισούται με $3.986004418 (\pm 2 \times 10^{-9}) \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec}^2$, **r** – το διάνυσμα της απόστασης της σημειακής ελκνόμενης μάζας από το κέντρο της γης, **a_e** – η γήινη ακτίνα στον ισημερινό και **C_{nm}**, **S_{nm}** – οι συντελεστές του Stokes (χωρίς μονάδες) που αντικατέστησαν τους **A_{nm}**, **B_{nm}** (που ήταν σε μονάδες δυναμικού / μον. μήκους) και δίδονται από τις εξής σχέσεις:

$$(1.21) \quad \left. \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{(2 - \delta_m) \cdot (n - m)!}{M \cdot (n + m)!} \iiint_{\Gamma\Omega} \left(\frac{r'}{a_e}\right)^n P_{nm}(\cos \theta') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} dM$$

όπου δ_m – το δέλτα του Kronecker (παίρνει τιμή 1 εάν $m = 0$ και τιμή 0 εάν $m \neq 0$), ενώ οι $(\mathbf{r}', \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\lambda}')$ περιγράφουν τις στοιχειώδεις έλκουσες μάζες, που αποτελούν τη συνολική γήινη μάζα.

Για αποφυγή αριθμητικών προβλημάτων στους υπολογισμούς, η (1.20) γίνεται:

$$(1.22) \quad V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

όπου:

$$(1.23) \quad \left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{\Pi_{nm}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right.$$

$$(1.24) \quad \bar{P}_{nm} = \Pi_{nm} \cdot P_{nm}$$

οι κανονικοποιημένοι συντελεστές του Stokes και οι κανονικοποιημένες συναρτήσεις Legendre αντίστοιχα, με:

$$(1.25) \quad \Pi_{nm} = \sqrt{(2 - \delta_{nm}) \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}$$

Η (1.22) μπορεί επίσης να γραφτεί:

$$(1.26) \quad V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right)$$

ή αλλιώς:

$$(1.27) \quad V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{J}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{K}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right)$$

όπου $\mathbf{J}_{nm} = -\mathbf{C}_{nm}$, $\mathbf{K}_{nm} = -\mathbf{S}_{nm}$ (κι αντίστοιχα για τους κανονικοποιημένους συντελεστές).

Οι συντελεστές του Stokes \mathbf{C}_n , \mathbf{C}_{nm} , \mathbf{S}_{nm} εκφράζουν ολοκληρώματα συναρτήσεων που εξαρτώνται από τη γήινη κατανομή μάζας. Για $\mathbf{n} = \mathbf{1}$, (δηλ. οι C_{10} , C_{11} , S_{11}) εκφράζουν τις συντ/νες του κέντρου κατανομής της μάζας κι εφ' όσον θεωρούμε γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς, δηλ. η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το κέντρο μάζας της γης, οι εν λόγω συντελεστές μηδενίζονται. Για $\mathbf{n} = \mathbf{2}$, οι C_{21} , S_{21} είναι κι αυτοί μηδενικοί, διότι εκφράζουν τα γινόμενα αδρανείας I_{xz} , I_{yz} που είναι μηδέν, καθ'

όσον ο άξονας z (πού περιέχει τον μέσο άξονα της γήινης περιστροφής) συμπίπτει με έναν από τους κύριους αδρανειακούς άξονες, ενώ αντίθετα οι C_{20} , C_{22} , S_{22} δεν είναι μηδενικοί, καθώς εκφράζουν την απόκλιση της γης από τη σφαιρική συμμετρία, ο πρώτος λόγω της επιπλάτυνσης των πόλων κι οι άλλοι δύο λόγω της μη ιδανικής συμμετρικής κατανομής της γήινης μάζας. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ανάπτυγμα της (1.26) πρέπει να ξεκινάει από $n = 2$, εξαιτίας των προαναφερθέντων **απαγορευμένων αρμονικών συντελεστών** $C_{10} = C_{11} = C_{21} = S_{11} = S_{21} = 0$.

1.5. Μοντέλα Σφαιρικών Αρμονικών

1.5.1. Γενικά περί μοντέλων σφαιρικών αρμονικών

Για την έκφραση του γήινου δυναμικού με τις σχέσεις που είδαμε παραπάνω, απαιτείται ο υπολογισμός των συντελεστών του Stokes. Αυτός πραγματοποιείται με τη βοήθεια των εξής τύπων μετρήσεων (Δεληκαράογλου, 2010):

- Παρατηρήσεις των διαταράξεων των δορυφορικών τροχιών, εξαιτίας του βαρυτικού πεδίου της γης
- Μετρήσεις βαρύτητας στην επιφάνεια της γης (ηπειρωτική και θαλάσσια)
- Δορυφορικές μετρήσεις αλτιμετρίας και πιο πρόσφατα δορυφορικής βαθμιδομετρίας

Έτσι, στα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του γήινου δυναμικού γίνεται προσπάθεια για την ενσωμάτωση των προαναφερθέντων τύπων δεδομένων, με σκοπό τον καλύτερο υπολογισμό των αρμονικών συντελεστών του Stokes, έως το μεγαλύτερο δυνατό βαθμό. Όσο μεγαλύτερος είναι ο μέγιστος βαθμός n_{\max} ενός μοντέλου τόσο μεγαλύτερη είναι και η διακριτική του ικανότητα, με άλλα λόγια δηλ. όσους περισσότερους αρμονικούς συντελεστές προσδιορίσουμε (θεωρητικά είναι άπειροι), τόσο λεπτομερέστερο είναι το μοντέλο, ως προς την περιγραφή του γήινου δυναμικού. Αυτό συνάγεται κι από την παρακάτω σχέση:

$$(1.28) \quad \lambda = \frac{2\pi R_{\Gamma H}}{n_{\max}}$$

όπου η παράμετρος λ είναι το **μήκος κύματος** κι είναι ενδεικτική της χωρικής διακριτικότητας του μοντέλου. Όσο μικρότερο το μήκος κύματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η διακριτική ικανότητα του μοντέλου. Επίσης, η μη δυνατότητα υπολογισμού των (θεωρητικώς) άπειρων αρμονικών συντελεστών αλλά μόνο μέχρι τον βαθμό n_{\max} του εκάστοτε μοντέλου, έχει ως συνέπεια τα λεγόμενα **σφάλματα παράλειψης** (omission errors) που επιδρούν στον υπολογισμό των διαφόρων παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας, (π.χ. αποχές γεωειδούς N , ανωμαλίες βαρύτητας Δg , κλπ.) από το μοντέλο, ενώ υπάρχουν και τα **σφάλματα μεταφοράς** (commission errors) που

«μεταφέρουν» στον υπολογισμό των διαφορών παραμέτρων, τα σφάλματα από τον προσδιορισμό των αρμονικών συντελεστών.

Ένα μοντέλο προσδιορίζεται από τα εξής χαρακτηριστικά:

- Τις τιμές των **συντελεστών του Stokes** ($n > 2$).
- Την τιμή της σταθεράς **GM**
- Την τιμή της γήινης ακτίνας στον ισημερινό a_e (συντελεστής κλίμακας μοντέλου)
- Το χρησιμοποιούμενο **μοντέλο παλίρροιών** (εκ των τριών: μέσης παλίρροιας, υποτιθέμενης μηδενικής παλίρροιας και ελεύθερης παλίρροιας). Ο αρμονικός συντελεστής C_{20} σχετίζεται με το μοντέλο των γήινων παλίρροιών.

Όσον αφορά τον τύπο των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του κάθε μοντέλου σφαιρικών αρμονικών, διακρίνονται τρεις κατηγορίες:

Δορυφορικών – μόνο μετρήσεων: Προέρχονται από την ανάλυση των δορυφορικών τροχιών και των διαταραχών τους. Είναι αξιόπιστα για τον προσδιορισμό των αρμονικών συντελεστών χαμηλού βαθμού ($n < 30$), που σημαίνει μεγάλα μήκη κύματος κι άρα μικρή διακριτική ικανότητα. Ωστόσο, οι αναπτυγμένες τεχνικές των τελευταίων δορυφορικών αποστολών, έχουν περιορίσει σημαντικά το παραπάνω πρόβλημα (π.χ. τα μοντέλα EIGEN – GRACE 02-S και EIGEN – GRACE 03-S, με τυπικό $n_{\max} = 140$ με 150).

Συνδυασμένων τύπων μετρήσεων: Προέρχονται από τον συνδυασμό δορυφορικών παρατηρήσεων, μετρήσεων βαρύτητας (στην επιφάνεια της γης ή αερομεταφερόμενων) και δορυφορικών μετρήσεων αλτιμετρίας. Τα δορυφορικά δεδομένα βοηθούν κυρίως, στον προσδιορισμό αρμονικών συντελεστών χαμηλού βαθμού (μεγάλα μήκη κύματος), ενώ τα επίγεια δεδομένα στον προσδιορισμό των αρμονικών συντελεστών μεγαλύτερου βαθμού (μικρότερα μήκη κύματος). Τα εν λόγω μοντέλα φέρουν τους περιορισμούς που πηγάζουν από τις δορυφορικές μετρήσεις, αλλά και από την αδυναμία πλήρους χωρικής κάλυψης των επίγειων μετρήσεων. Παραδείγματα τέτοιων μοντέλων είναι τα GRIM 5 – C1, TEG 4, κ.ά.

Προσαρμοσμένα μοντέλα υψηλής διακριτικότητας: Προέρχονται από τους παραπάνω τύπους μοντέλων, αυξάνοντας τον n_{\max} , με τη βοήθεια επιπλέον μετρήσεων βαρύτητας κι αλτιμετρίας. Παραδείγματα τέτοιων μοντέλων είναι τα EGM 96, GFZ 97 και το πλέον εξελιγμένο μοντέλο EGM 2008.

1.5.2. Σύγκριση των μοντέλων EGM 2008 και EIGEN-6C3 STAT με το μοντέλο γεωειδούς των ΗΠΑ GEOID 12A

Στο σημείο αυτό, για να δούμε την εξέλιξη των μοντέλων τα τελευταία χρόνια, θα γίνει μια αναφορά στη σύγκριση που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, μεταξύ δύο εκ των πλέον εξελιγμένων παγκόσμιων μοντέλων σφαιρικών αρμονικών, του EGM 2008 και του EIGEN-6C3 STAT, (ως προς τον υπολογισμό της αποχής του γεωειδούς N), και του GEOID 12A που αποτελεί το πιο πρόσφατο μοντέλο γεωειδούς που εξέδωσε η Εθνική (Αμερικανική) Γεωδαιτική Υπηρεσία (National Geodetic Survey, NGS), για την ευρύτερη περιοχή των ΗΠΑ. Όπως προαναφέρθηκε και στην εισαγωγή της παρούσης εργασίας, οι ΗΠΑ δεν επιλέχθηκαν τυχαία ως περιοχή μελέτης, αλλά διότι πληρούσαν δύο πολύ σημαντικούς λόγους, που συνέβαλλαν στην πληρέστερη αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αυτής της σύγκρισης. Ο πρώτος είναι ότι το GEOID 12A είναι ένα λεπτομερές μοντέλο της πλέον αξιόπιστης NGS, το οποίο συνεχώς ενημερώνεται κι επικαιροποιείται, (2009, 2012, 2012A) και ο δεύτερος είναι ότι δίνεται η δυνατότητα σε κάθε χρήστη να έχει δωρεάν πρόσβαση στο μοντέλο μέσω του site της NGS, απ' όπου μπορούμε να πάρουμε δεδομένα (φ, λ, N) σε μορφή καννάβου, για οποιαδήποτε περιοχή εντός των ορίων του μοντέλου, δηλ. στην ευρύτερη περιοχή των ΗΠΑ.

Το **EGM** (Earth Gravitational Model) **2008** είναι ίσως το πιο εξελιγμένο παγκόσμιο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών στον κόσμο σήμερα κι αποτελεί πολλές φορές το μοντέλο αναφοράς για την αξιολόγηση άλλων μοντέλων γεωειδούς τοπικών, περιφερειακών και παγκόσμιων. Δημιουργήθηκε από την Εθνική Υπηρεσία Γεωχωρικών Πληροφοριών (National Geospatial-Intelligence Agency, NGA) των ΗΠΑ, από τον Δρ. Νίκο Παυλή και τους συνεργάτες του (Pavlis et al). Είναι το τελευταίο από μια σειρά μοντέλων υψηλής διακριτικής ικανότητας (με προηγούμενο το PGM 2007A) και περιλαμβάνει επίγεια δεδομένα βαρύτητας διαφόρων εθνικών οργανισμών, δεδομένα δορυφορικής αλτιμετρίας, καθώς και υψηλής ακρίβειας δεδομένα βαρύτητας από δορυφορικές αποστολές (GRACE) χαμηλής τροχιακής ακτίνας, που το καθιστούν έως και 100 φορές ακριβέστερο στα μεγάλα μήκους κύματος χαρακτηριστικά, από το γνωστό μοντέλο κι ευρέως χρησιμοποιούμενο για πάνω από μια δεκαετία, EGM 96. Δεν περιλαμβάνει δεδομένα αποκλίσεων κατακορύφου και GPS – χωροσταθμίσεων. Είναι πλήρες σε βαθμό και τάξη έως 2159 και περιέχει επιπρόσθετους αρμονικούς συντελεστές έως βαθμού 2190, γεγονός το οποίο χονδρικά σημαίνει:

$$\begin{array}{cccccc}
 C_{20} & C_{21} & C_{22} & & & \\
 C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} & & \\
 C_{40} & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & \\
 \dots & & & & & \\
 C_{2159-0} & C_{2159-1} & C_{2159-2} & \dots & C_{2159-2159} &
 \end{array}$$

δηλ., τον υπολογισμό $(3+4+5+\dots+2160)$ συντελεστών C_{nm} κι άλλων τόσων για τους συντελεστές S_{nm} , άρα συνολικά:

$$2 \cdot (3+4+\dots+2160) = 2 \cdot [(2160+3) + (2159+4) + \dots] = 2 \cdot \left(2163 \cdot \frac{2158}{2} \right) \approx 4.67 \times 10^6$$

κι αφού περιέχει και επιπλέον (έως βαθμού 2190), πρακτικά χρειάζεται ο προσδιορισμός 4.7 εκατομμυρίων συντελεστών (!) για την υλοποίησή του, γεγονός που καταδεικνύει την υψηλή ποιότητα του εν λόγω μοντέλου. Έχει παγκοσμίως μέση ακρίβεια ± 15 cm στον προσδιορισμό των αποχών του γεωειδούς και διακριτική ικανότητα 5', που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος 9 km στον ισημερινό (Δεληκαράογλου, 2010).

Το **EIGEN** (European Improved Gravity model of the Earth by New techniques) **6C3 STAT** που εκδόθηκε το 2014, είναι και αυτό το πιο πρόσφατο μιας σειράς μοντέλων (EIGEN-6C που εκδόθηκε το 2011, EIGEN-6C2 το 2012) κι αποτελεί προέκδοση του τελικού μοντέλου της σειράς EIGEN-6C4, που δεν έχει ακόμα εκδοθεί. Περιλαμβάνει δεδομένα βαρύτητας από τις δορυφορικές αποστολές LAGEOS, GRACE και GOCE, δεδομένα αλτιμετρίας για τις ωκεάνιες περιοχές και δεδομένα του EGM 2008 για τις ηπειρωτικές περιοχές, όπου για αρμονικούς συντελεστές βαθμού $n > 235$, αποτελεί ουσιαστικά μια ανακατασκευή του EGM 2008. Έχει βαθμό $n_{max} = 1949$ κι αποτελεί το μοντέλο αναφοράς για το νέο Καναδικό Βαρυτημετρικό Γεωειδές CGG2013 (Canadian Gravimetric Geoid 2013).

Το **GEOID 12A** είναι το πιο πρόσφατο λεπτομερές μοντέλο γεωειδούς της ευρύτερης περιοχής των ΗΠΑ (περιλαμβάνει δηλ. και μέρος των γειτονικών χωρών Καναδά και Μεξικού) και αντικατέστησε το προηγούμενο GEOID 12. Χρησιμοποιεί ως σύστημα αναφοράς το **NAD** (North American Datum) **83**, (το οποίο έχει ως ελλειψοειδές το GRS 80) και ως υψομετρικό σύστημα για την κύρια περιοχή των ΗΠΑ, το **NAVD** (North American Vertical Datum) **88**, με τη βοήθεια του οποίου υλοποιείται η αφετηρία μέτρησης των ορθομετρικών υψομέτρων στην περιοχή. Είναι υβριδικό μοντέλο, καθ' όσον για τη δημιουργία του χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από μοντέλο σφαιρικών αρμονικών (EGM 2008), σε συνδυασμό με δεδομένα μετρήσεων GPS/χωροστάθμησης.

Όσον αφορά το NAD 83, αν και αρχικά ορίστηκε να ταιριάζει απόλυτα με το WGS 84, εν τούτοις λόγω της κίνησης των τεκτονικών πλακών με την πάροδο των χρόνων, που αλλάζει τη σχετική θέση μεταξύ τους και επειδή το NAD 83 δημιουργήθηκε για να «παρακολουθεί» τη βορειοαμερικανική πλάκα, σήμερα υπάρχει μια διαφορά μεταξύ των αναθεωρημένων εκδόσεων των δύο συστημάτων, της τάξης του 1 m οριζοντιογραφικά, γεγονός όμως που δεν επηρεάζει ως προς την τιμή της αποχής του γεωειδούς N, καθ' όσον το γεωειδές είναι μια επιφάνεια χωρίς απότομες εξάρσεις (σε αντίθεση με τη φ.γ.ε) και πρακτικά η τιμή του N δεν αλλάζει σε τόσο μικρές αποστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι δεν απαιτείται για τις ανάγκες της συγκεκριμένης σύγκρισης η μετατροπή των συντ/νων του WGS 84 σε NAD 83, αλλά θα τις θεωρήσουμε πρακτικά ίδιες.

Η σύγκριση των 3 μοντέλων πραγματοποιήθηκε σε 3 περιοχές των ΗΠΑ, διαστάσεων 30' x 30' η καθεμιά (η 1^η περιοχή με νοτιοδυτικό άκρο το σημείο: $\varphi = 40^\circ$, $\lambda = 240^\circ$, η 2^η περιοχή με νοτιοδυτικό άκρο το σημείο: $\varphi = 42^\circ$, $\lambda = 260^\circ$ και η 3^η περιοχή με νοτιοδυτικό άκρο το σημείο: $\varphi = 35^\circ$, $\lambda = 275^\circ$). Για κάθε μοντέλο χρησιμοποιήθηκε κάρναβος τιμών του N, βήματος 1' 30''. Επίσης χρησιμοποιήθηκε μοντέλο της τοπογραφίας κάθε περιοχής με το ίδιο βήμα καννάβου, με τη βοήθεια του ETOPO 1. Οι υπολογισμοί για τα EGM 2008, EIGEN-6C3 STAT και ETOPO 1, έγιναν με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής που υπάρχει στο site του ICGEM (International Centre for Global Earth Models), (icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM), ενώ για το GEOID 12A με την αντίστοιχη μηχανή στο site της NGS, (www.ngs.noaa.gov/GEOID/GEOID12A/). Η επεξεργασία των δεδομένων έγινε με τη χρήση της MATLAB. Για τα 2 μοντέλα σφαιρικών αρμονικών, οι υπολογισμοί έγιναν πρώτα χρησιμοποιώντας το ελλειψοειδές του GRS 80 και μετά το WGS 84. Επίσης, για το EGM 2008, υπολογίστηκε και η αποχή του γεωειδούς που δίνεται από την συνάρτηση 'geoidheight' της MATLAB. Η 'geoidheight' είναι μια έτοιμη συνάρτηση, στην οποία εισάγονται ως ορίσματα (*inputs*) οι συντ/νες φ , λ των σημείων ενδιαφέροντος (στο WGS 84) και το επιθυμητό μοντέλο σφαιρικών αρμονικών (EGM 96 ή EGM 2008) και δίνει ως αποτέλεσμα (*output*) την αποχή του γεωειδούς N στα σημεία αυτά ως προς το WGS 84. Τέλος, σε όλες τις περιπτώσεις όσον αφορά το μοντέλο παλιρροιών, χρησιμοποιήθηκε αυτό της ελεύθερης παλίρροιας, (tide free system). Τα πρώτα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

	$\Delta N = N_{\text{EGM-GRS80}} - N_{\text{EGM-WGS84}}$	$\Delta N = N_{\text{EGM-GRS80}} - N_{\text{EGM-MATLAB}}$	$\Delta N = N_{\text{EIGEN-GRS80}} - N_{\text{EIGEN-WGS84}}$	$\Delta N = N_{\text{EGM-GRS80}} - N_{\text{EIGEN-GRS80}}$
min	-0.932	-0.553	-0.932	-0.046
max	-0.932	-0.498	-0.932	0.052
mean	-0.932	-0.525	-0.932	0
st dev	0	0.010	0	0.020
min	-0.932	-0.533	-0.932	-0.003
max	-0.932	-0.522	-0.932	0.041
mean	-0.932	-0.527	-0.932	0.019
st dev	0	0.002	0	0.010
min	-0.932	-0.531	-0.932	-0.030
max	-0.932	-0.526	-0.932	0.033
mean	-0.932	-0.528	-0.932	0.009
st dev	0	0.001	0	0.011

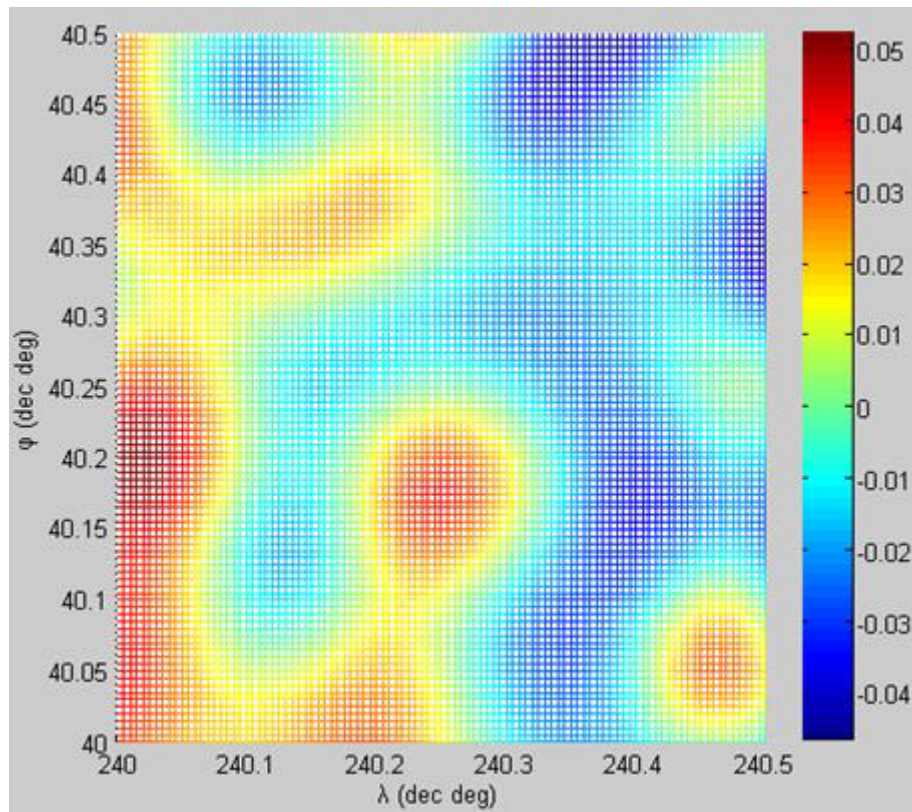
Πίνακας 1-1: Σύγκριση των τιμών του N για τα EGM 08 και EIGEN-6C3 STAT στις 3 περιοχές των ΗΠΑ (κάθε χρώμα κελιών και μια περιοχή). Οι τιμές είναι σε m

Όπως βλέπουμε στον παραπάνω πίνακα, ανεξαρτήτως του χρησιμοποιούμενου μοντέλου σφαιρικών αρμονικών, η χρησιμοποίηση του WGS 84, δίνει μια σταθερή διαφορά $\Delta N = +93.2$ cm, σε σχέση με το GRS 80. Δηλαδή, για ένα οποιοδήποτε σημείο, η τιμή της αποχής του γεωειδούς που θα πάρουμε από ένα μοντέλο με το WGS 84, θα είναι κατά 93.2 cm μεγαλύτερη από την τιμή της αποχής με το GRS 80. Γνωρίζοντας ότι οι άξονες των 2 ελλειψοειδών είναι ίσοι με ακρίβεια mm

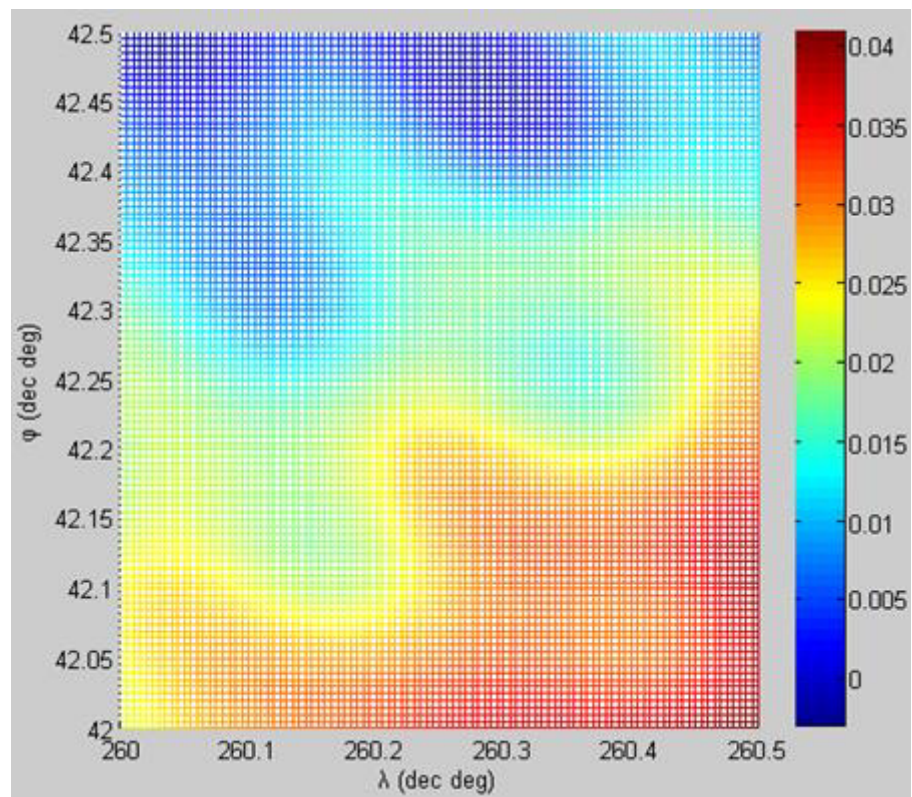
($a = 6378137$ m, $b = 6356752.314$ m), η διαφορά αυτή οφείλεται κατά κύριο λόγο στη **διαφορετική τιμή της σταθεράς GM**, μεταξύ των 2 ελλειψοειδών. Κι αυτό διότι διαφορετική τιμή της GM, έχει ως αποτέλεσμα διαφορετική τιμή του δυναμικού W_0 . Επομένως το θέμα τελικά έγκειται στην ισοδυναμική επιφάνεια για την οποία ισχύει $W=W_0$ (η οποία αποτελεί το «γεωειδές») και η οποία φυσικά αλλάζει για διαφορετικές τιμές του W_0 . Στο GRS 80, η τιμή είναι 3.986005×10^{14} m³/s², για τη σταθερά GM, ενώ στο WGS 84 η χρησιμοποιούμενη τιμή είναι $3.986004418 \times 10^{14}$ m³/s², γεγονός που επιφέρει την σημαντική αυτή διαφορά της τάξεως των 93 cm, στην τιμή της αποχής του γεωειδούς.

Μια άλλη παρατήρηση έχει να κάνει με την τιμή της αποχής του γεωειδούς που υπολογίζει η συνάρτηση 'geoidheight' της MATLAB, για το EGM 2008. Η τιμή αυτή αναφέρεται στο WGS 84 ελλειψοειδές, αλλά παρουσιάζει μια σημαντική διαφορά ($\Delta N = N_{\text{MATLAB(WGS 84)}} - N_{\text{ICGEM(WGS 84)}}$) της τάξης των **-40 cm** (με πολύ μικρές διακυμάνσεις) από την τιμή της υπολογιστικής μηχανής του ICGEM για το WGS 84, όπως φαίνεται κι από τον πίνακα 1-1, αφαιρώντας την δεύτερη από την πρώτη στήλη. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η MATLAB, (όπως π.χ. και η NGA) έχει εισάγει **διορθωτικούς όρους στην τιμή του U_0** (τιμή του κανονικού δυναμικού πάνω στην επιφάνεια του χωροσταθμικού ελλειψοειδούς) που προέκυψαν από μεταγενέστερους υπολογισμούς, ενώ το ICGEM έχει αφήσει την τιμή U_0 , όπως ορίστηκε αρχικά στο εν λόγω σύστημα αναφοράς. Ουσιαστικά δηλ., το αποτέλεσμα κι εδώ είναι τελικά επιλογή διαφορετικής ισοδυναμικής επιφάνειας, ως «επιφάνεια του γεωειδούς». Για το λόγο αυτό συμβαίνει πολλές φορές να παρατηρούμε διαφορετικές τιμές από διαφορετικές υπολογιστικές μηχανές, ενώ αναφέρονται στο ίδιο μοντέλο και στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

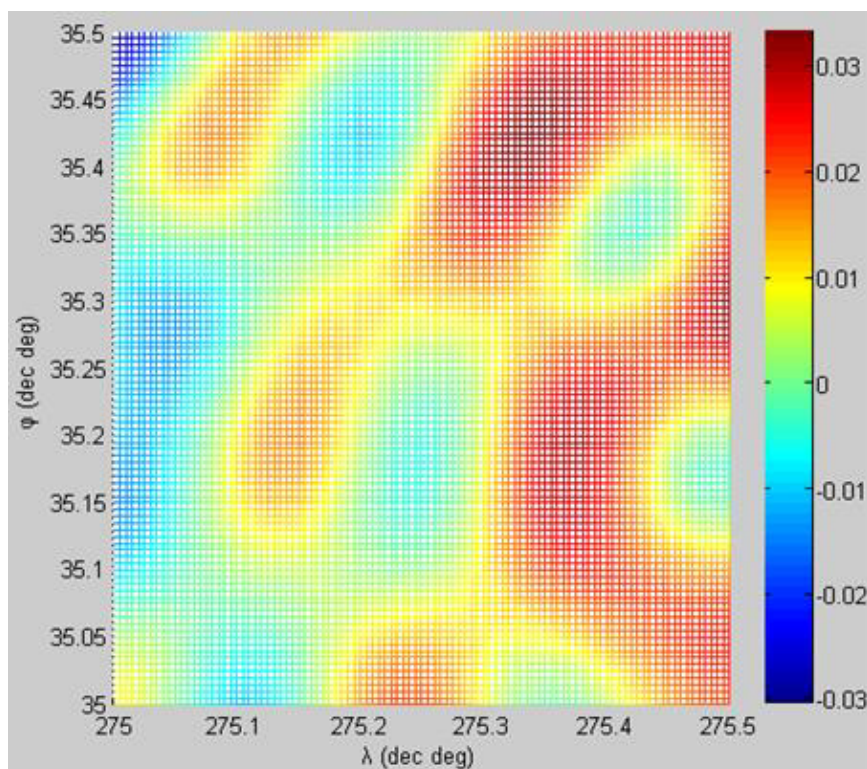
Η τρίτη παρατήρηση έχει να κάνει με τη σύγκριση των 2 μοντέλων, του EGM 2008 και του EIGEN-6C3 STAT. Όπως βλέπουμε στην τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα, τα 2 μοντέλα δίνουν αρκετά κοντινές τιμές για το N και στις 3 περιοχές. Στην 1^η περιοχή έχουμε ένα εύρος τιμών ($\Delta N_{\text{max}} - \Delta N_{\text{min}}$) περί τα 10cm για την διαφορά ΔN των 2 μοντέλων, ενώ στη 2^η και 3^η περιοχή, έχουμε εύρος περί τα 4.5 και 3.5cm, αντίστοιχα, με το EGM 08 να βρίσκεται κατά μέσο όρο ελαφρώς υψηλότερα από το EIGEN-6C3 STAT. Από τη σύγκριση αυτή, βλέπουμε ότι το EIGEN-6C3 STAT είναι κι αυτό ένα αξιόπιστο μοντέλο, που προσαρμόζεται σε αρκετά καλό βαθμό στο πλέον εξελιγμένο EGM 2008. Στις εικόνες που ακολουθούν, φαίνεται η κατανομή στο χώρο των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{\text{EGM}} - N_{\text{EIGEN}}$, για καθεμιά από τις 3 περιοχές.



Εικόνα 1-2: Χωρική κατανομή των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{EGM} - N_{EIGEN}$ (σε m) στην 1η περιοχή



Εικόνα 1-3: Χωρική κατανομή των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{EGM} - N_{EIGEN}$ (σε m) στη 2η περιοχή



Εικόνα 1-4: Χωρική κατανομή των παρατηρούμενων διαφορών $\Delta N = N_{EGM} - N_{EIGEN}$ (σε m) στην 3η περιοχή

Στο 2^ο βήμα της σύγκρισης, ελέγχουμε τα προαναφερθέντα μοντέλα, συγκρίνοντάς τα με το GEOID 12A, που προσεγγίζει, στον καλύτερο δυνατό βαθμό, την επιφάνεια του γεωειδούς για την ευρύτερη περιοχή των ΗΠΑ. Τα αποτελέσματα αυτής της σύγκρισης συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\Delta N =$ $N_{EGM-GRS80} -$ $N_{GEOID12A}$	$\Delta N =$ $N_{EGM-WGS84} -$ $N_{GEOID12A}$	$\Delta N =$ $N_{EGM-MATLAB} -$ $N_{GEOID12A}$	$\Delta N =$ $N_{EIGEN-GRS80} -$ $N_{GEOID12A}$	$\Delta N =$ $N_{EIGEN-WGS84} -$ $N_{GEOID12A}$
min	-0.365	0.567	0.166	-0.402	0.530
max	-0.138	0.794	0.387	-0.108	0.824
mean	-0.215	0.717	0.310	-0.215	0.717
st dev	0.037	0.037	0.041	0.049	0.049
rms	0.218	0.718	0.313	0.221	0.718
min	-0.700	0.232	-0.174	-0.737	0.195
max	-0.662	0.269	-0.135	-0.671	0.261
mean	-0.673	0.259	-0.146	-0.693	0.239
st dev	0.007	0.007	0.007	0.014	0.014
rms	0.673	0.259	0.146	0.693	0.240
min	-1.531	-0.599	-1.003	-1.551	-0.618
max	-1.419	-0.486	-0.891	-1.389	-0.456
mean	-1.453	-0.520	-0.925	-1.461	-0.529
st dev	0.014	0.014	0.014	0.021	0.021
rms	1.453	0.521	0.925	1.462	0.529

Πίνακας 1-2: Σύγκριση των τιμών του N των μοντέλων με το GEOID 12A στις 3 περιοχές των ΗΠΑ (κάθε χρώμα κελιών και μια περιοχή). Οι τιμές είναι σε m

Από τον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι σε απόλυτους αριθμούς, στην 1^η περιοχή προσαρμόζονται καλύτερα στο GEOID 12A, τα EGM 08 (GRS 80) και EIGEN-6C3 STAT (GRS 80) με μέση διαφορά ΔN στα -21.5 cm, στη 2^η περιοχή το EGM 08 (MATLAB) με μέση διαφορά -14.6 cm και στην 3^η περιοχή τα EGM 08 (WGS 84) και EIGEN-6C3 STAT (WGS 84) με μέση διαφορά στα -52 και -52.9 cm, αντίστοιχα. Ωστόσο, σε μια δεύτερη πιο ουσιαστική προσέγγιση, πέρα από τη μέση συστηματική διαφορά (σε σχέση με το GEOID 12A) που παρατηρείται για το κάθε μοντέλο σε καθεμιά περιοχή, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να εξεταστεί η διακύμανση αυτής της διαφοράς. Για παράδειγμα, μια διαφορά ΔN ενός μοντέλου από το GEOID 12A με μια μέση τιμή περί τα 50 cm, αλλά με μικρό εύρος τιμών (π.χ. 5 cm) και μικρή τυπική απόκλιση (π.χ. 1 cm), δείχνει ένα συστηματικό σφάλμα που οφείλεται στους αρμονικούς συντελεστές που αφορούν τα μεγάλα και μεσαία μήκη κύματος του μοντέλου, αλλά χωρίς την ύπαρξη σημαντικών σφαλμάτων στα μικρά μήκη κύματος, (εφ' όσον δεν παρατηρούνται απότομες εξάρσεις στις τιμές της) και μπορεί να θεωρηθεί ιδιαίτερα «βολική», καθώς μπορεί εύκολα να μοντελοποιηθεί για να προσδιορίζουμε με ακρίβεια την τιμή του N σε κάθε σημείο μιας συγκεκριμένης περιοχής. Αντίθετα, μια διαφορά ΔN με μια μηδενική μέση τιμή, αλλά με μεγάλο εύρος τιμών (π.χ. 50 cm) και μεγάλη τυπική απόκλιση (π.χ. 10 cm), δείχνει ότι δεν υπάρχει σημαντικό σφάλμα στα μεγάλα μήκη κύματος του μοντέλου, αλλά η ύπαρξη σημαντικών σφαλμάτων στα μικρομεσαία μήκη κύματος, καθιστά δύσκολη τη μοντελοποίηση της εν λόγω διαφοράς, για τον προσδιορισμό του N . Αυτό μπορεί να γίνει ευκολότερα κατανοητό στο παρακάτω σχήμα:



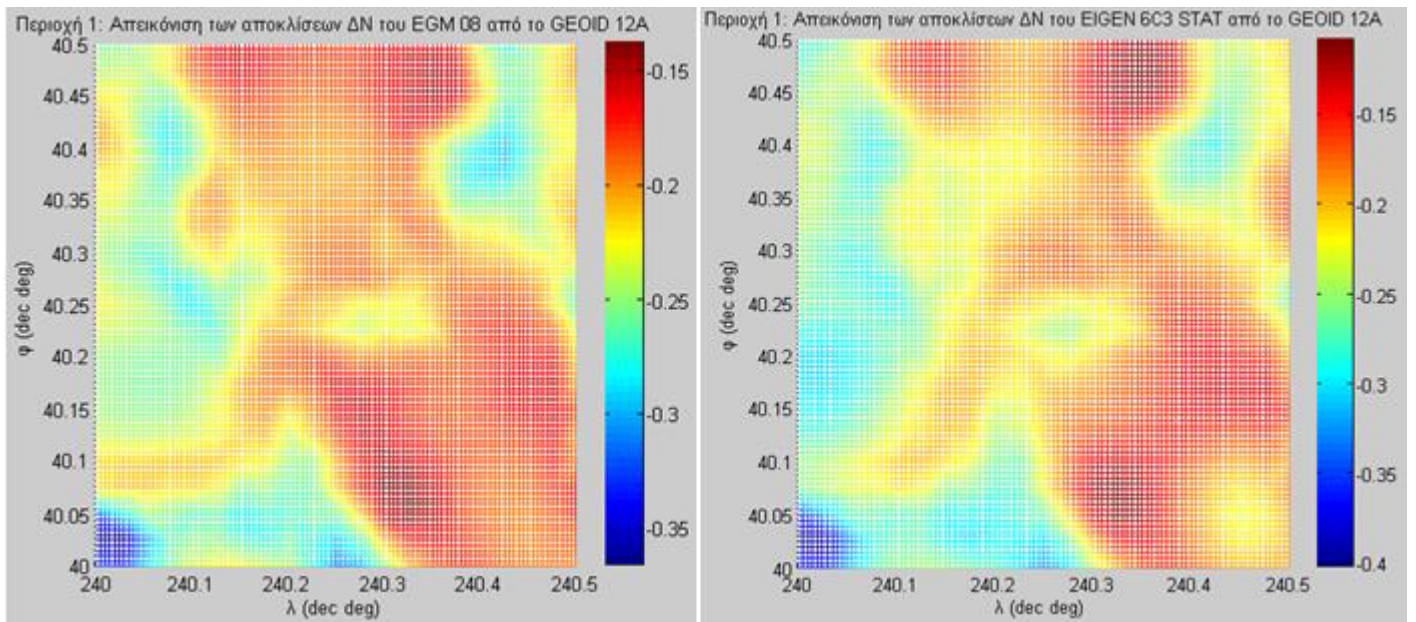
Εικόνα 1-5: Πιθανές διαφορές 2 μοντέλων (1 και 2) ως προς την τιμή του N , κατά μήκος ενός προφίλ μιας περιοχής

Όπως φαίνεται και πιο πάνω, είναι πολύ πιο εύκολη η μοντελοποίηση των διαφορών ΔN_1 των τιμών του μοντέλου 1 ($\Delta N_1 = N_1 - N$), όπου αρκεί μια απλή μετάθεση, σε αντίθεση με το μοντέλο 2, όπου απαιτείται μια πιο σύνθετη αντιμετώπιση.

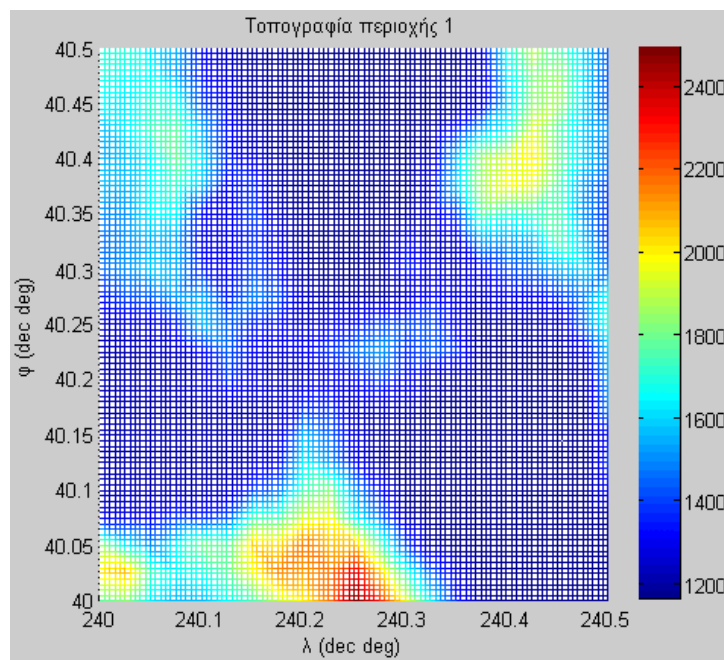
Ακόμα, από τον πίνακα (1-2), παρατηρούμε ότι και στις 3 περιοχές το EGM 08 παρουσιάζει λίγο μικρότερο εύρος τιμών από το EIGEN-6C3 STAT και μικρότερη τυπική απόκλιση, (εξετάζουμε την περίπτωση χρησιμοποίησης του GRS 80 και στα 2

μοντέλα σφαιρικών αρμονικών, καθ' όσον η συστηματική διαφορά που δημιουργεί η χρησιμοποίηση του WGS 84, δεν επηρεάζει το εύρος τιμών και την τυπική απόκλιση). Στην 1^η περιοχή και τα 2 μοντέλα παρουσιάζουν σχετικά υψηλό εύρος τιμών, με 22.7 cm για το EGM 08 και 29.4 cm για το EIGEN-6C3 STAT, με τυπικές αποκλίσεις 3.7 και 4.9 cm, αντίστοιχα. Στη 2^η περιοχή, έχουμε εύρος 3.7 και 6.6 cm και τυπικές αποκλίσεις 0.7 και 1.4 cm για EGM κι EIGEN αντίστοιχα και τέλος στην 3^η περιοχή, έχουμε εύρος 11.2 και 16.2 cm και τυπικές αποκλίσεις 1.4 και 2.1 cm για EGM κι EIGEN αντίστοιχα. Βλέπουμε δηλ. ότι στη 2^η και 3^η περιοχή έχουμε μια αρκετά καλή προσαρμογή των 2 μοντέλων, με το EGM 08 να προσεγγίζει σε καλύτερο βαθμό το γεωειδές του GEOID 12A και στις 3 περιοχές, καθ' όσον οι διαφορές ΔN παρουσιάζουν μικρότερες διακυμάνσεις, σε σχέση με το EIGEN-6C3 STAT, γεγονός που θεωρείται αναμενόμενο, καθ' όσον το EGM 08 έχει συντελεστές μεγαλύτερου βαθμού και τάξης από το EIGEN-6C3 STAT, άρα είναι λογικό να είναι πιο ακριβές στα μικρά μήκη κύματος.

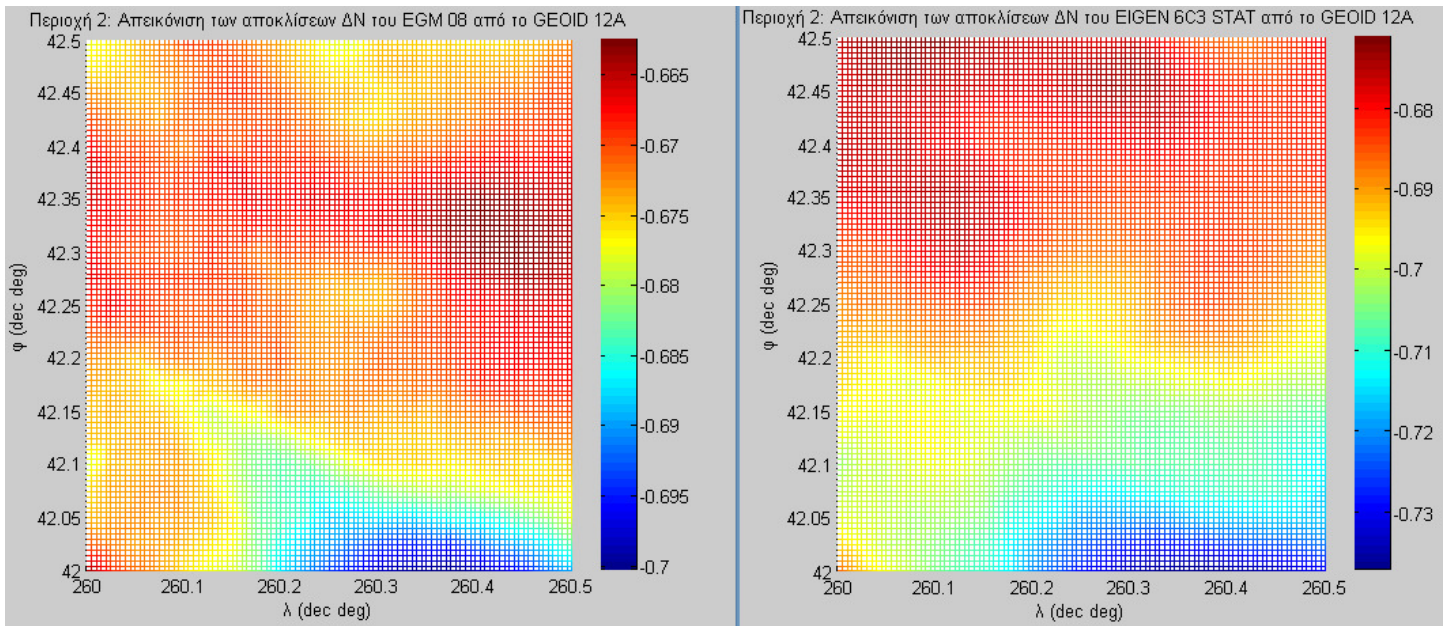
Τέλος, στο 3^ο βήμα της σύγκρισης, αξίζει να δούμε ποιοτικά τη χωρική κατανομή της διαφοράς ΔN μεταξύ EGM 08 και EIGEN-6C3 STAT με το GEOID 12A, σε σχέση και με την τοπογραφία της κάθε περιοχής. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις παρακάτω εικόνες:



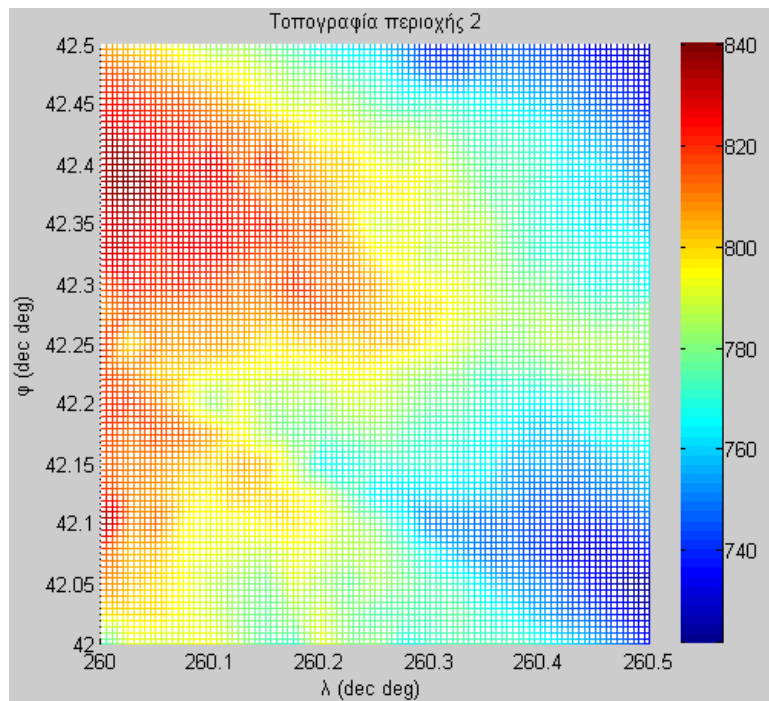
Εικόνα 1-6: Χωρική κατανομή των διαφορών $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ (σε m) μεταξύ EGM 08 και GEOID12A (αριστερά) και μεταξύ EIGEN-6C3 STAT και GEOID 12A (δεξιά), στην 1^η περιοχή



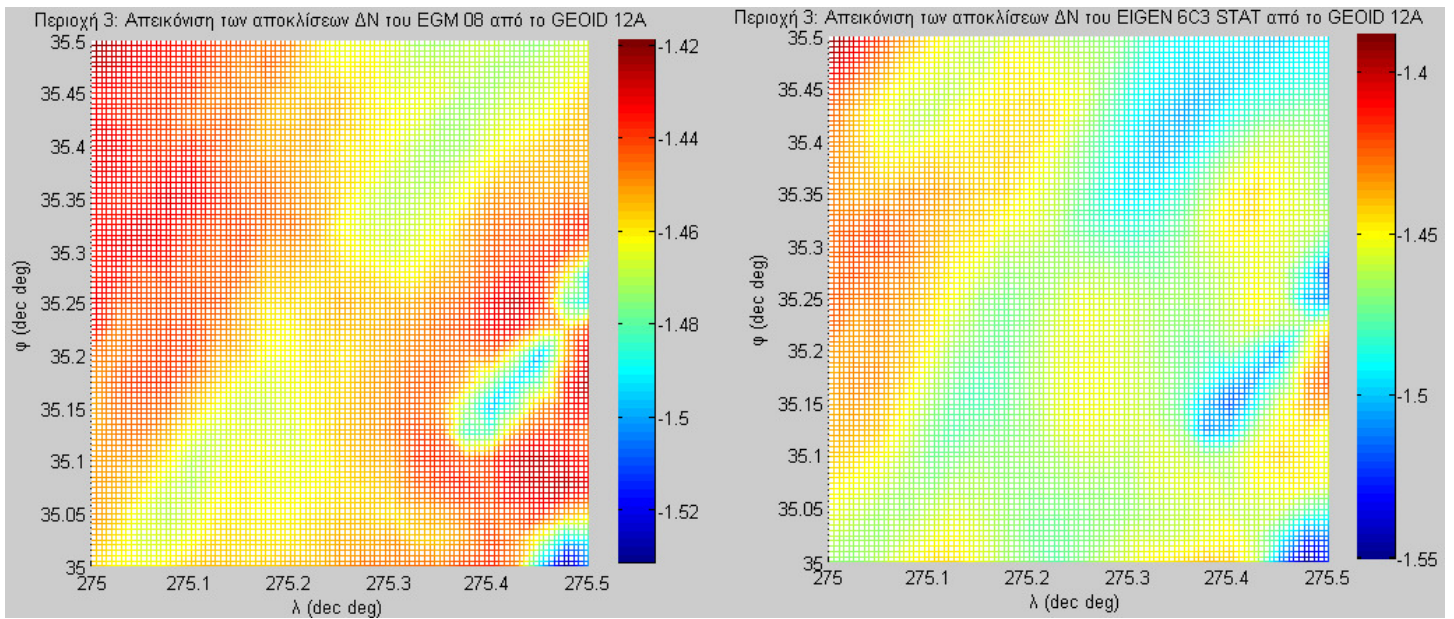
Εικόνα 1-7: Τοπογραφία 1ης περιοχής



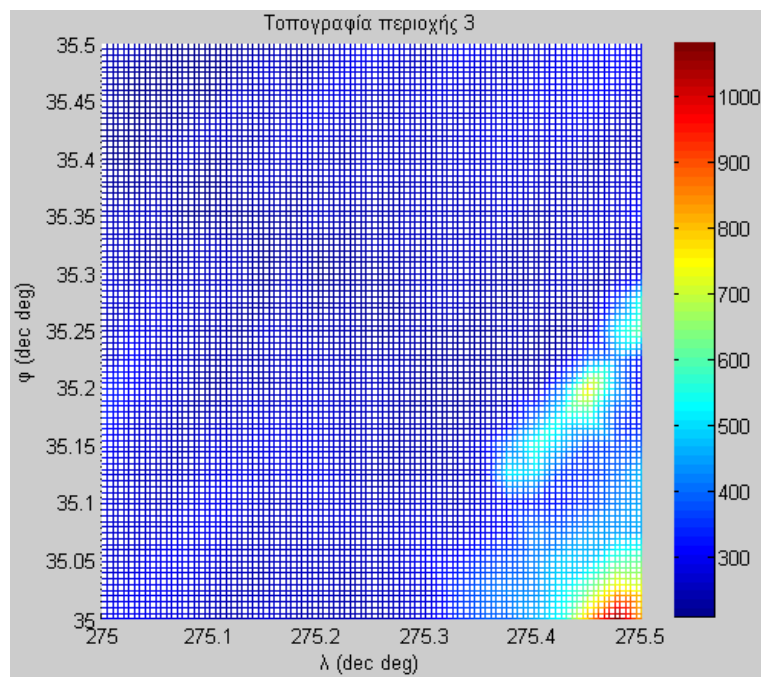
Εικόνα 1-8: Χωρική κατανομή των διαφορών $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ (σε m) μεταξύ EGM 08 και GEOID12A (αριστερά) και μεταξύ EIGEN-6C3 STAT και GEOID 12A (δεξιά), στην 2^η περιοχή



Εικόνα 1-9: Τοπογραφία 2ης περιοχής



Εικόνα 1-10: Χωρική κατανομή των διαφορών $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ (σε m), μεταξύ EGM 08 και GEOID12A (αριστερά) και μεταξύ EIGEN-6C3 STAT και GEOID 12A (δεξιά), στην 3^η περιοχή



Εικόνα 1-11: Τοπογραφία 3ης περιοχής

Αυτό που γίνεται άμεσα αντιληπτό από τις παραπάνω εικόνες, είναι η **αρνητική εξάρτηση** που υπάρχει **μεταξύ των διαφορών ΔN και των τοπογραφικών εξάρσεων**. Όπως βλέπουμε στις περιοχές 1 και 3, σε όποια τμήματα των περιοχών αυτών παρατηρούνται αξιοσημείωτες τοπογραφικές εξάρσεις, υπάρχει αντίστοιχα και μια μείωση της διαφοράς ΔN . Δηλαδή θα λέγαμε ότι ένας παράγοντας που επηρεάζει την τιμή της $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$, είναι οι υψομετρικές εξάρσεις και μάλιστα όσο πιο έντονη προς τα πάνω μια τοπογραφική έξαρση, τόσο μειώνεται η διαφορά ΔN (κι άρα αν η τιμή της ΔN είναι αρνητική, τότε η απόλυτη τιμή της αυξάνει). Αντίθετα, στη 2^η περιοχή, όπου δεν παρατηρούνται έντονες τοπογραφικές εξάρσεις, αλλά μια σταδιακή ομαλή υψομετρική μείωση από δυτικά προς ανατολικά με συνολικό εύρος υψομετρικής διαφοράς της περιοχής μικρότερο από 150 m, δεν παρατηρείται κάποια χαρακτηριστική εξάρτηση της $\Delta N = N_{GM} - N_{GEOID12A}$ με την τοπογραφία.

Κεφάλαιο 2^ο : Κανονικό και Διαταρακτικό Δυναμικό, Υψόμετρα και Βαρύτητα, Μέθοδοι Προσδιορισμού του Γεωειδούς

2.1. Το δυναμικό του κανονικού πεδίου βαρύτητας

Το δυναμικό του γήινου πεδίου βαρύτητας (πραγματικό δυναμικό W), πέρα από την ανάλυση του σε ελκτικό και φυγόκεντρο που είδαμε στο 1^ο κεφάλαιο, αναλύεται κατά άλλον τρόπο, επίσης σε δύο μέρη: α) το **κανονικό δυναμικό (U)** που αντιστοιχεί στο πεδίο βαρύτητας που δημιουργείται από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής του οποίου τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά προσεγγίζουν, κατά το δυνατό, τα χαρακτηριστικά της πραγματικής γης και β) το **διαταρακτικό δυναμικό (T)** που ουσιαστικά εκφράζει την απόκλιση του κανονικού από το πραγματικό δυναμικό. Συνεπώς, ισχύει:

$$(2.1) \quad W = U + T$$

Το κανονικό δυναμικό υλοποιείται με τη βοήθεια του **κανονικού χωροσταθμικού ελλειψοειδούς** ή αλλιώς του **μέσου γήινου χωροσταθμικού ελλειψοειδούς**. Αυτό ορίζεται από τον μεγάλο και μικρό ημιάξονά του (a και b αντίστοιχα), από τη μάζα του (ίση με τη μάζα της πραγματικής γης, συμπεριλαμβανομένης και της μάζας της ατμόσφαιρας) και από την ταχύτητα περιστροφής του (ίση με την ταχύτητα περιστροφής της γης). Ακόμα, το κανονικό χωροσταθμικό ελλειψοειδές έχει την εξής σημαντική ιδιότητα: η τιμή του κανονικού δυναμικού στην επιφάνειά του είναι σταθερή και ίση με την τιμή του πραγματικού δυναμικού στην επιφάνεια του γεωειδούς, δηλ.:

$$(2.2) \quad U_{0(ellipsoid)} = W_{0(geoid)}$$

Το ελκτικό μέρος του κανονικού δυναμικού μπορεί κι αυτό να εκφραστεί ως ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών. Λόγω της συμμετρίας του περί τον άξονα περιστροφής του ελλειψοειδούς, δεν υπάρχει εξάρτηση από το γεωδαιτικό μήκος λ ($m = 0 \Rightarrow$ πολυώνυμα Legendre \Rightarrow αρμονικές ζώνης), ενώ λόγω της συμμετρίας ως προς το ισημερινό επίπεδο, έχουμε αρμονικούς συντελεστές άρτιου βαθμού μόνο ($n = 2, 4, \dots$).

2.1.1. Ελλειψοειδείς Συντεταγμένες

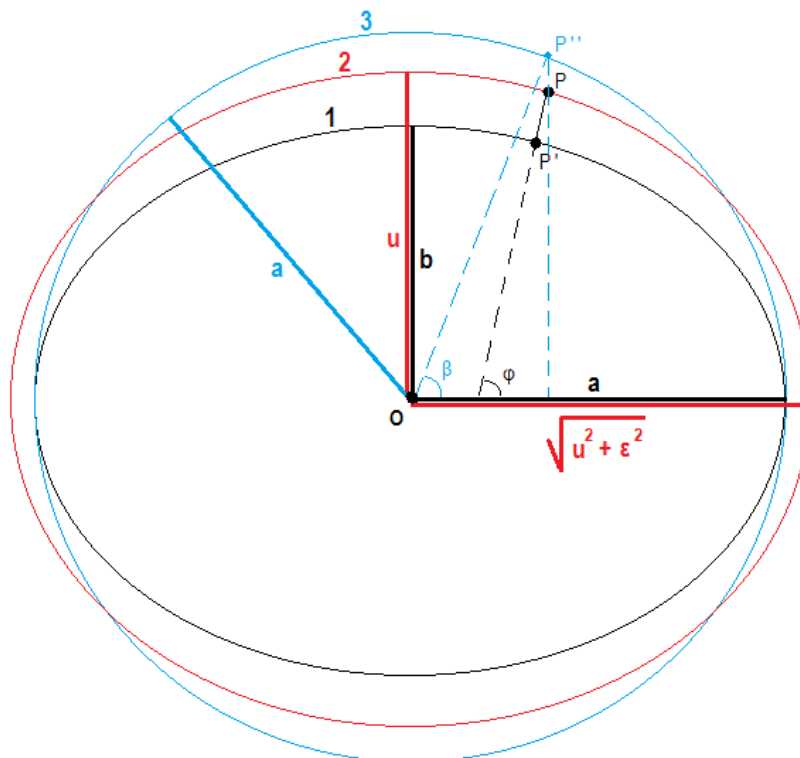
Έχει αποδειχτεί (Pizzetti 1894, Somigliana 1929), ότι το κανονικό δυναμικό εκφράζεται με κλειστές μαθηματικές σχέσεις, με τη χρήση των **ελλειψοειδών συντ/νων** (u, β, λ). Οι σχέσεις που δίνουν τις ελλειψοειδείς από τις καρτεσιανές συντ/νες (X, Y, Z) είναι:

$$(2.3) \quad u = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2 + Z^2 - \varepsilon^2}{2}} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot \varepsilon \cdot Z}{X^2 + Y^2 + Z^2 - \varepsilon^2} \right)^2} \right]$$

$$(2.4) \quad \beta = \arctan \frac{Z \cdot \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}}{u \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$(2.5) \quad \lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

όπου, $\varepsilon = (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)^{1/2}$ η εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και λ το γνωστό γεωδαιτικό μήκος. Η γεωμετρική ερμηνεία των ελλειψοειδών συντ/νων γίνεται με τη βοήθεια του σχήματος 2.1:



Εικόνα 2-1: Γεωμετρική Ερμηνεία των ελλειψοειδών συντ/νων u, β, λ

Στο παραπάνω σχήμα, βλέπουμε μια τομή κατά το επίπεδο ενός μεσημβρινού. Η έλλειψη 1 (μαύρο χρώμα) είναι το γήινο γεωκεντρικό ελλειψοειδές (κέντρο O), με μεγάλο ημιάξονα \mathbf{a} , μικρό \mathbf{b} και εκκεντρότητα $\varepsilon = (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)^{1/2}$. Θεωρώντας το τυχαίο σημείο P και φέρνοντας την κάθετη στο ελλειψοειδές, παρατηρούμε στο σχήμα το γεωμετρικό υψόμετρο (P'P) του σημείου και προεκτείνοντας την κάθετη, σχηματίζεται η γωνία της με το ισημερινό επίπεδο (γεωδαιτικό πλάτος φ). Η έλλειψη 2 (κόκκινο χρώμα) είναι η ομόκεντρη έλλειψη που διέρχεται από το σημείο P κι έχει την **ίδια εκκεντρότητα** ε με το γήινο ελλειψοειδές. Ο μικρός ημιάξονας αυτής της έλλειψης είναι η συντ/νη \mathbf{u} του σημείου P, ενώ ο μεγάλος της ημιάξονας θα έχει μήκος \mathbf{a}' , τέτοιο ώστε:

$$\varepsilon = \sqrt{a'^2 - u^2} \Rightarrow \varepsilon^2 = a'^2 - u^2 \Rightarrow a' = \sqrt{\varepsilon^2 + u^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + u^2} \quad (2.6)$$

Ο κύκλος 3 (μπλε χρώμα) είναι ο ομόκεντρος κύκλος ακτίνας ίσης με τον μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς (\mathbf{a}). Προβάλλουμε το σημείο P στην περιφέρεια του κύκλου 3 (σημείο P''), κατά την κάθετη στο ισημερινό επίπεδο διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία της επιβατικής ακτίνας OP'' με το ισημερινό επίπεδο είναι το **ανηγμένο πλάτος β** .

2.1.2. Κανονική βαρύτητα

Κατ' αντιστοιχία με το πραγματικό δυναμικό W και την πραγματική βαρύτητα \vec{g} , εφαρμόζοντας τον τελεστή grad στο κανονικό δυναμικό παίρνουμε το διάνυσμα της κλίσης του, που είναι η **κανονική βαρύτητα $\vec{\gamma}$** :

$$\vec{\gamma} = \nabla U = \text{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

ή σε ελλειψοειδείς συντ/νες:

$$\vec{\gamma} = \nabla U = \text{grad}U = \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\beta \\ \gamma_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \frac{\partial U}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2 \beta} \frac{\partial U}{\partial \beta} \\ \frac{1}{\cos \beta \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

όπου $\gamma_\lambda = 0$, λόγω της μη εξάρτησης από το γεωδαιτικό μήκος λ και $\gamma_\beta = 0$ για τα σημεία στην επιφάνεια του κανονικού ελλειψοειδούς. Γενικά, το μέτρο του

διανύσματος της κανονικής βαρύτητας, εκφράζεται σε ελλειψοειδείς συντ/νες ως εξής, (Αράμπελος, Τζιαβός, 2007):

$$(2.9) \quad |\vec{\gamma}(u, \beta)| = \sqrt{\frac{u^2 + \varepsilon^2}{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \beta}} \cdot \left(\frac{GM}{u^2 + \varepsilon^2} + \frac{a^2 \omega^2 \varepsilon}{u^2 + \varepsilon^2} \cdot \frac{q \cdot (3 \sin^2 \beta - 1)}{6 \cdot q_0} - \omega^2 u \cos^2 \beta \right)$$

όπου

$$(2.10) \quad q = \frac{3(u^2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \cdot \left(1 - \frac{u}{\varepsilon} \cdot \arctan \frac{u}{\varepsilon} \right) - 1, \quad q_0 = \frac{3b^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} \cdot \arctan \frac{\varepsilon}{b} - \frac{3b}{2\varepsilon}$$

και θέτοντας στις παραπάνω σχέσεις $u = b$ και $\beta = 0$ και $\pm 90^\circ$, παίρνουμε την τιμή του γ στον ισημερινό και στους πόλους αντίστοιχα.

Το διάνυσμα της κανονικής βαρύτητας έχει της διεύθυνση της καθέτου στο ελλειψοειδές σε κάθε σημείο και η γωνία που σχηματίζει με το διάνυσμα της πραγματικής βαρύτητας, είναι η απόκλιση της κατακορύφου. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε δεν εξαρτάται από το γεωδαιτικό μήκος, που σημαίνει ότι όλα τα σημεία πάνω σε έναν παράλληλο έχουν την ίδια τιμή για την κανονική βαρύτητα. Για το χωροσταθμικό ελλειψοειδές του GRS 80, η τιμή της συναρτήσεως του πλάτους φ , δίδεται από τον παρακάτω τύπο με ακρίβεια ± 0.0001 mgal ($1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m/sec}^2$):

$$(2.11) \quad \gamma_{1980} = 978032.67715 (1 + 0.0052790414 \sin^2 \varphi + 0.0000232718 \sin^4 \varphi + 0.0000001262 \sin^6 \varphi + 0.0000000007 \sin^8 \varphi) \quad \text{σε mgals}$$

Επίσης, όπως είναι φυσικό η τιμή της μειώνεται με την αύξηση του υψομέτρου h . Η μείωση αυτή λέγεται **διόρθωση ελεύθερου αέρα** και προσεγγίζεται από την σχέση:

$$(2.12) \quad \delta\gamma = (-0.3087691 - 0.0004398 \sin^2 \varphi) \cdot h + 7.2125 \cdot 10^{-8} \cdot h^2 \quad \text{σε mgals}$$

$$(2.13) \quad \gamma_h = \gamma_{1980} + \delta\gamma$$

2.2. Το διαταρακτικό δυναμικό

Όπως ειπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, το **διαταρακτικό δυναμικό (T)** εκφράζει την απόκλιση του κανονικού από το πραγματικό δυναμικό ή αλλιώς «εκφράζει τη διαφορά του σχήματος της πραγματικής γης από εκείνο του ελλειψοειδούς», (Δεληκαράογλου, 2010) και ως εκ τούτου είναι:

$$(2.14) \quad \mathbf{T} = \mathbf{W} - \mathbf{U}$$

Αριθμητικά είναι πολύ μικρότερο από το πραγματικό δυναμικό κι εκφράζει τις τοπικές παραλλαγές του πεδίου βαρύτητας. Ικανοποιεί κι αυτό την εξίσωση (1.5)

(εξίσωση Laplace $\Delta T = 0$) κι επομένως μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών, όπως και οι διάφορες παράμετροι του πεδίου βαρύτητας, οι οποίες συνδέονται με αυτό, μέσω των σχέσεων που ακολουθούν.

➤ Για την **αποχή του γεωειδούς (N)**:

$$(2.15) \quad N = T / \gamma$$

(είναι η 2^η σχέση του Bruns, όπου η τιμή της κανονικής βαρύτητας είναι στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς)

➤ Για τις **συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου (ξ, η)** πάνω στο γεωειδές, ισχύει:

$$(2.16) \quad \xi = -\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial N}{\partial \varphi} \quad , \quad \eta = -\frac{1}{N \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial N}{\partial \lambda}$$

όπου M, N οι ακτίνες καμπυλότητας της μεσημβρινής και της κάθετης τομής αντίστοιχα:

$$(2.17) \quad M = \frac{\alpha(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad , \quad N = \frac{\alpha}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

Με τη βοήθεια της (2.15), η (2.16) γίνεται:

$$(2.18) \quad \xi = \frac{T}{M \cdot \gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - \frac{1}{M \cdot \gamma} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad , \quad \eta = -\frac{1}{N \cdot \cos \varphi \cdot \gamma} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

(όπου η τιμή της κανονικής βαρύτητας είναι στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς).

➤ Για τις **διαταραχές (δg) κι ανωμαλίες (Δg) βαρύτητας**, (έννοιες οι οποίες θα εξηγηθούν στην επόμενη παράγραφο), ισχύουν οι σχέσεις:

$$(2.19) \quad \delta g = -\partial T / \partial h$$

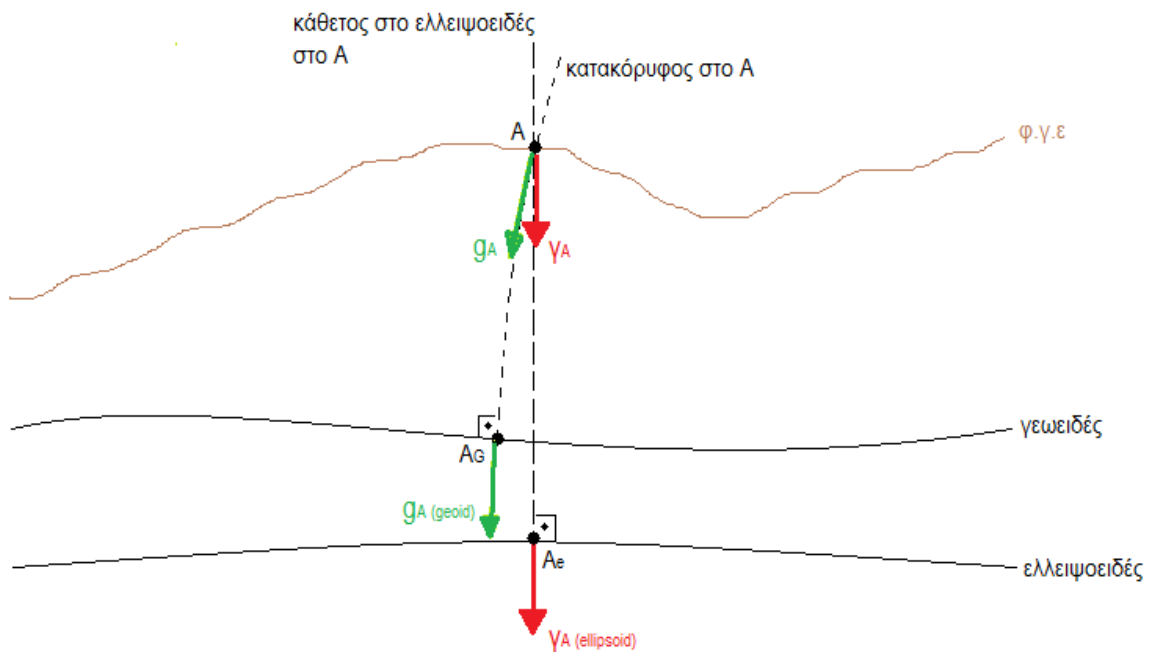
$$(2.20) \quad \Delta g = \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \frac{T}{\gamma} - \frac{\partial T}{\partial h} \quad (\text{θεμελιώδης σχέση της Φυσικής Γεωδαισίας})$$

(όπου η τιμή της κανονικής βαρύτητας υπολογίζεται στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς).

2.3. Αναγωγές κι ανωμαλίες βαρύτητας

Στη Φυσική Γεωδαισία γίνεται ένας εννοιολογικός διαχωρισμός των όρων «αναγωγή» και «ανωμαλία» βαρύτητας. **Αναγωγή** είναι μια «διόρθωση» που εφαρμόζουμε επί μίας μετρημένης τιμής βαρύτητας πάνω στη φ.γ.ε, με σκοπό να «μεταφέρουμε» θεωρητικά τη μέτρηση αυτή σε μια άλλη επιφάνεια (π.χ. αναγωγή

μιας μέτρησης στο γεωειδές) ή εν γένει σε κάποιο άλλο σημείο (π.χ. διόρθωση πλάτους). **Ανωμαλία βαρύτητας** είναι η απόκλιση της ανηγμένης (στο γεωειδές) τιμής της βαρύτητας από την τιμή της κανονικής βαρύτητας πάνω στην επιφάνεια του κανονικού ελλειψοειδούς, που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σημείο. **Διαταραχή βαρύτητας** είναι η απόκλιση της τιμής της πραγματικής βαρύτητας από την τιμή της κανονικής βαρύτητας στο ίδιο ακριβώς σημείο, π.χ. πάνω στη φ.γ.ε. (Στην ανωμαλία και διαταραχή βαρύτητας, η απόκλιση κανονικά είναι όχι μόνο αριθμητική, αλλά και διανυσματική). Στο σχήμα που ακολουθεί, γίνεται οπτική επεξήγηση των εννοιών αυτών:



Εικόνα 2-2: Διαταραχή κι Ανωμαλία βαρύτητας

Στο παραπάνω σχήμα, η ευθεία AA_e είναι η κάθετη στο ελλειψοειδές στο σημείο A , ενώ η καμπύλη AA_G είναι η κατακόρυφος στο A . Το διάνυσμα της κανονικής βαρύτητας (γ) έχει την κατεύθυνση της καθέτου, ενώ το διάνυσμα της πραγματικής βαρύτητας (g) είναι πάντα εφαπτόμενο στην κατακόρυφο.

Αναγωγή είναι η διόρθωση που θα εφαρμόσουμε, ώστε από την τιμή g_A που μετράμε, να οδηγηθούμε στην g_A (geoid).

Η **διαταραχή βαρύτητας** είναι:

$$\delta \vec{g}_A = \vec{g}_A - \vec{\gamma}_A \quad \text{και} \quad \delta g_A = |\vec{g}_A - \vec{\gamma}_A| \cong g_A - \gamma_A$$

Και η **ανωμαλία βαρύτητας**:

$$\Delta \vec{g}_A = \vec{g}_{A(\text{geoid})} - \vec{\gamma}_{A(\text{ellipsoid})} \quad \text{και} \quad \Delta g_A = |\vec{g}_{A(\text{geoid})} - \vec{\gamma}_{A(\text{ellipsoid})}| \cong g_{A(\text{geoid})} - \gamma_{A(\text{ellipsoid})}$$

2.3.1. Αναγωγή γεωγραφικού πλάτους

Όπως προειπώθηκε στο παρόν κεφάλαιο, η βαρύτητα εξαρτάται από το πλάτος φ και συγκεκριμένα καθώς κινούμαστε βόρεια στο Βόρειο ημισφαίριο (ή νότια στο Νότιο ημισφαίριο) η τιμή της αυξάνεται (περί τα 9.7805 m/s^2 είναι η τιμή της στον ισημερινό και περί τα 9.8322 m/s^2 στους 2 πόλους). Αυτό συμβαίνει, εξαιτίας δύο παραγόντων: α) του πεπλατυσμένου σχήματος της γης το οποίο είναι τέτοιο που καθώς κινούμαστε προς τους πόλους, μειώνεται η απόστασή μας από το κέντρο βάρους της και β) της φυγόκεντρης δύναμης, η επίδραση της οποίας μειώνεται καθώς πλησιάζουμε τον άξονα περιστροφής της γης.

Για το λόγο αυτό αν θέλουμε να ανάγουμε μια μετρημένη τιμή βαρύτητας σε κάποιο άλλο σημείο (π.χ. έναν σταθμό-βάση) σε κοντινή απόσταση, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη **διόρθωση πλάτους πάνω στο μεσημβρινό**, η οποία δίδεται από την προσεγγιστική σχέση:

$$(2.21) \quad \delta g_{\varphi} = 0.0008 \cdot \sin 2\varphi \text{ (mgal/m)} \cdot S \text{ (σε m)}$$

Για το βόρειο ημισφαίριο, αν το σημείο στο οποίο θέλουμε να αναχθούμε είναι βορειότερα του σημείου μέτρησης, τότε προσθέτουμε την παραπάνω διόρθωση, ενώ αν είναι νοτιότερα την αφαιρούμε.

2.3.2. Αναγωγή κι ανωμαλία ελεύθερου αέρα ή υψομέτρου

Για να αναχθεί μια μέτρηση βαρύτητας από την φ.γ.ε στην επιφάνεια του γεωειδούς, πρέπει κατ' αρχήν να απαλλαγεί (η μετρημένη τιμή) από την επίδραση του υψομέτρου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη **διόρθωση ελεύθερου αέρα ή υψομέτρου (δg_{FA})** που εφαρμόζουμε στη μετρημένη τιμή. Αν η μέτρηση έγινε πάνω από την επιφάνεια του γεωειδούς ($H > 0$), τότε προστίθεται μια ποσότητα στη μετρημένη τιμή για να αναχθούμε στο γεωειδές, ενώ αν η μέτρηση έγινε κάτω από την επιφάνεια του γεωειδούς ($H < 0$), τότε αφαιρείται μια ποσότητα από τη μετρημένη τιμή. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οδηγούμαστε στην **ανωμαλία ελεύθερου αέρα ή υψομέτρου (Δg_{FA})**, η οποία είναι η απόκλιση της τιμής της βαρύτητας (που έχει αναχθεί στο γεωειδές εφαρμόζοντας την διόρθωση ελεύθερου αέρα), από την τιμή της κανονικής βαρύτητας (στην επιφάνεια του κανονικού ελλειψοειδούς) για το συγκεκριμένο πλάτος φ του εν λόγω σημείου.

Για τη διόρθωση ελεύθερου αέρα, είναι:

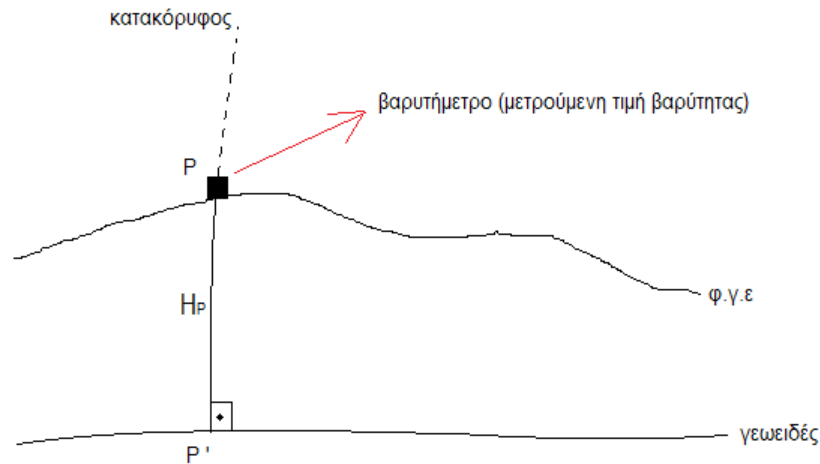
$$(2.22) \quad \delta g_{FA} = - (dg / dH) \cdot H$$

όπου το μείον δείχνει την αρνητική συσχέτιση υψομέτρου και βαρύτητας (αύξηση υψομέτρου \rightarrow μείωση βαρύτητας). Η παραπάνω σχέση σε μια πρώτη προσέγγιση

ισούται με **0.3086 mgal ανά μέτρο ύψους**. Βάσει αυτών, η ανωμαλία ελεύθερου αέρα δίνεται από τον τύπο:

$$(2.23) \quad \Delta g_{FA} = g_{\text{μετρημένο}} + \delta g_{FA} - \gamma \approx g_{\text{μετρημένο}} + (0.3086 \cdot H) - \gamma$$

Στο παρακάτω σχήμα, βλέπουμε ένα παράδειγμα για την κατανόηση της ανωμαλίας ελεύθερου αέρα:



Εικόνα 2-3: Αναγωγή μετρημένης τιμής βαρύτητας στο γεωειδές

Εμείς μετράμε με το βαρυτήμετρο πάνω στη φ.γ.ε και παίρνουμε μια τιμή g_{μ} . Για να αναχθεί αυτή στο γεωειδές (λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο το υψόμετρο του σημείου κι όχι τις παρεμβαλλόμενες τοπογραφικές μάζες), προσθέτουμε μια ποσότητα περίπου ίση με **0.3086 mgals · H_P**, άρα η ανηγμένη τιμή είναι $g_{\mu} + 0.3086 \cdot H_P$ και για την ανωμαλία ελεύθερου αέρα, αφαιρούμε από την ανηγμένη τιμή την τιμή της κανονικής βαρύτητας για $\varphi = \varphi_P$, δηλ: $g_{\mu} + 0.3086 \cdot H_P - \gamma(\varphi_P)$.

2.3.3. Αναγωγή κι ανωμαλία Bouguer

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, στην αναγωγή ελεύθερου αέρα δεν λάβαμε υπ' όψιν τις τοπογραφικές μάζες που παρεμβάλλονται μεταξύ γεωειδούς και σημείου μέτρησης. Για παράδειγμα, στην εικόνα (2-3) για να ανάγουμε την μέτρηση στο γεωειδές, θα έπρεπε επιπρόσθετα να αφαιρέσουμε από την μετρούμενη τιμή μια ποσότητα που οφείλεται στην έλξη των τοπογραφικών μαζών (ενώ αν το σημείο μέτρησης ήταν κάτω από το γεωειδές, θα έπρεπε να προσθέσουμε μια ποσότητα, λόγω έλλειψης μαζών). Σε μια πρώτη προσέγγιση, αυτό γίνεται με τη λεγόμενη **πλάκα Bouguer**, μια υποθετική πλάκα άπειρου μήκους και πάχους H_P , η έλξη της οποίας ισούται με $2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot H$. Έτσι, έχουμε την **ελλιπή αναγωγή Bouguer**:

$$(2.24) \quad \delta g_B = 2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot H = (-0.1119 \text{ mgal/m}) \cdot H, \quad (\text{για } \rho = 2670 \text{ kg/m}^3)$$

που μας οδηγεί στην **ελλιπή ανωμαλία Bouguer**:

$$(2.25) \quad \Delta g_B = g_{\text{μετρημένο}} + \delta g_B - \gamma \approx g_{\text{μετρημένο}} - (0.1119 \cdot H) - \gamma$$

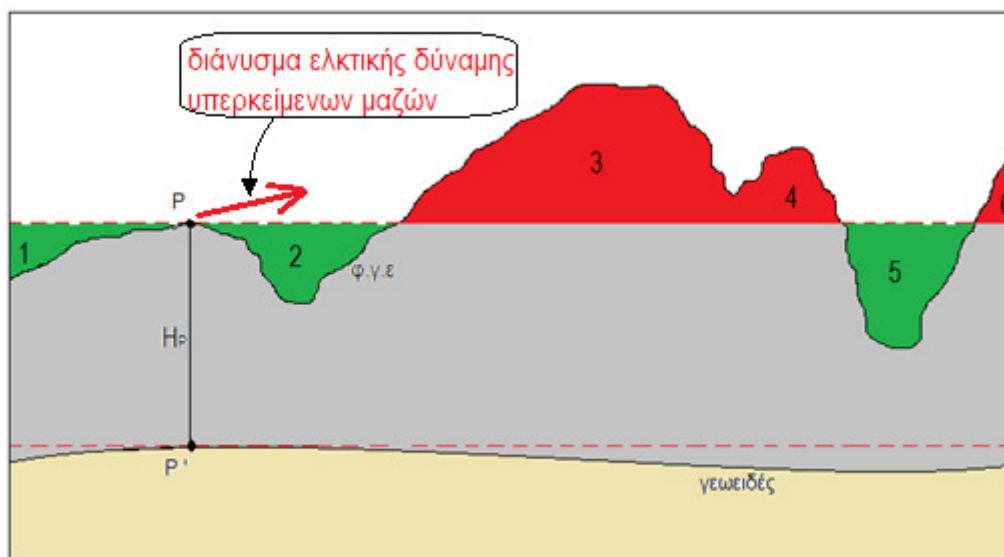
Αν εφαρμόσουμε και τις δύο αναγωγές (ελεύθερου αέρα και Bouguer) στη μετρημένη τιμή, παίρνουμε την **απλή αναγωγή Bouguer**:

$$(2.26) \quad \delta g_{CB} = \delta g_{FA} + \delta g_B = 0.3086 \cdot H - 0.1119 \cdot H = (0.1967 \text{ mgal/m}) \cdot H$$

που μας δίνει την **απλή ανωμαλία Bouguer**:

$$(2.27) \quad \Delta g_{CB} = g_{\text{μετρημένο}} + \delta g_{CB} - \gamma \approx g_{\text{μετρημένο}} + (0.1967 \cdot H) - \gamma$$

Ωστόσο, η απλή αναγωγή Bouguer προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματικότητα, μόνο εάν έχουμε ομαλό ανάγλυφο στην περιοχή. Σε περιπτώσεις τοπογραφικών εξάρσεων κι έντονου αναγλύφου, η απλή αναγωγή Bouguer εισάγει σφάλματα, όπως μπορούμε να δούμε και στο σχήμα που ακολουθεί:

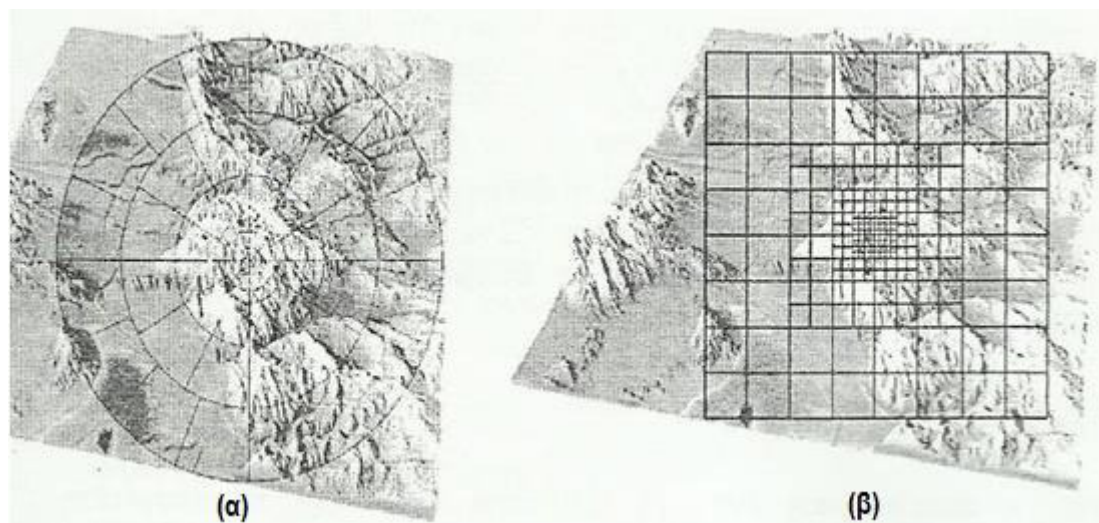


Εικόνα 2-4: Σφάλματα που υπεισέρχονται κατά την αναγωγή Bouguer

Στο παραπάνω σχήμα, έστω ότι μετράμε με το βαρυτήμετρο στο σημείο P και θέλουμε να ανάγουμε τη μετρούμενη τιμή στο P' πάνω στο γεωειδές. Εφαρμόζοντας την αναγωγή Bouguer, η υποθετική τοπογραφική μάζα που θεωρούμε είναι αυτή που περικλείεται από τις 2 κόκκινες διακεκομμένες γραμμές. Με την αναγωγή Bouguer, στις περιπτώσεις 1, 2 και 5 που σημειώνονται με πράσινο χρώμα, έχουμε εφαρμόσει υπέρμετρη διόρθωση εφ' όσον εκεί έχουμε έλλειμμα μάζας σε σχέση με την πλάκα Bouguer, επομένως μετά την αναγωγή πρέπει να προστεθεί μια ποσότητα στην ανηγμένη τιμή. Επιπρόσθετα, στις περιπτώσεις 3, 4 και 6 έχουμε μάζες που βρίσκονται ψηλότερα από το σημείο P. Η ζενίθεια γωνία του διανύσματος της ελκτικής δύναμης που ασκούν αυτές οι μάζες στο σημείο P είναι μικρότερη των 90°, άρα ασκείται μια «αρνητική επίδραση» που μειώνει την παρατηρούμενη τιμή

βαρύτητας και η οποία δεν έχει ληφθεί κι αυτή υπ' όψιν. Άρα και σε αυτή την περίπτωση μετά την αναγωγή Bouguer, πρέπει να προστεθεί μια ποσότητα στην ανηγμένη τιμή.

Για τη ρύθμιση περιπτώσεων όπου έχουμε μη ομαλό ανάγλυφο, σαν αυτές που προαναφέρθηκαν, απαιτείται πέραν των δύο διορθώσεων που αναπτύχθηκαν, η εφαρμογή της **τοπογραφικής διόρθωσης (αναγωγής) δg_T** . Αυτή παλαιότερα, γινόταν με τη διαίρεση της περιοχής γύρω από το σημείο μέτρησης σε ομόκεντρους κύκλους μεταβλητής ακτίνας (εικ. 2-5.α), όπου η τοπογραφική διόρθωση υπολογιζόταν για καθέναν από τους τομείς των σχηματιζόμενων δακτυλίων. Τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη των ψηφιακών μοντέλων εδάφους (*DEM – Digital Elevation Model*), ο υπολογισμός γίνεται με τη χρήση **πλεγμάτων μεταβλητής διακριτικής ικανότητας** για την τοπογραφία της κοντινής και της μακρινής περιοχής αντίστοιχα, (εικ. 2-5.β).



Εικόνα 2-5: Υπολογισμός τοπογραφικών διορθώσεων: (α) Με διαχωρισμό της περιοχής σε ομόκεντρους κύκλους – αύξηση ακτίνας όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο μέτρησης, (β) με χρήση πλεγμάτων μεταβλητής διακριτικής ικανότητας (πυκνό πλέγμα για την εγγύς περιοχή, αραιό για τη μακρινή)

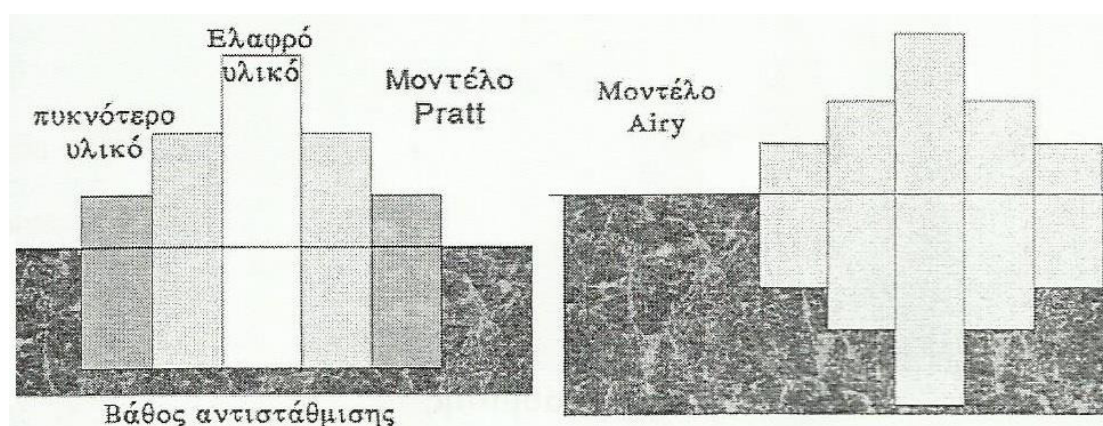
Πηγή: Δ. Δεληκαράογλου, «Φυσική Γεωδαισία – Θεωρητικές και Τεχνολογικές Βάσεις», 2010

Έχοντας εφαρμόσει και την τοπογραφική αναγωγή, παίρνουμε την **πλήρη ή βελτιωμένη ανωμαλία Bouguer** (ή αλλιώς την **τοπογραφική ανωμαλία βαρύτητας**) Δg_{TC} , που είναι:

$$(2.28) \quad \Delta g_{TC} = g_{\text{μετρημένο}} + \delta g_{CB} + \delta g_T - \gamma = g_{\text{μετρημένο}} + \delta g_{FA} + \delta g_B + \delta g_T - \gamma$$

2.3.4. Ισοστατικές αναγωγές κι ανωμαλίες βαρύτητας

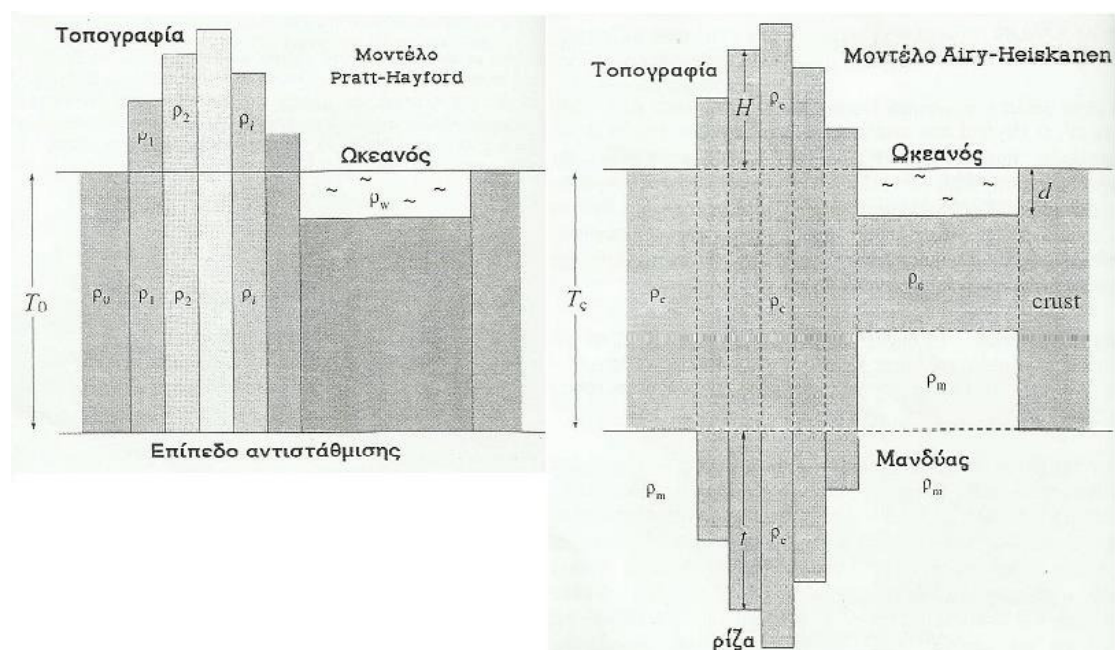
Τελειώνοντας τη γενική αυτή επισκόπηση στις αναγωγές και τις ανωμαλίες βαρύτητας, θα αναφερθούμε και στην **ισοστατική αναγωγή**. Η ισοστατική αναγωγή, σε αντίθεση με τις παραπάνω αναγωγές, λαβαίνει υπ' όψιν την μεταβλητή κατανομή μάζας – πυκνότητας, ιδίως στο ανώτερο τμήμα του φλοιού της γης και στηρίζεται στην αρχή της άνωσης του Αρχιμήδη. Τα πετρώματα του φλοιού έχουν μικρότερη πυκνότητα από εκείνα του μανδύα, με αποτέλεσμα τμήμα αυτών να «επιπλέει» και τμήμα αυτών να «βυθίζεται» στο μανδύα, όπως σύμφωνα με την άνωση επιπλέει ένα παγόβουνο στο νερό. Στη γεωδαισία, για τον υπολογισμό του φαινομένου έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα, όπως του *Pratt* και του *Airy*, (καθώς και οι επεκτάσεις αυτών των μοντέλων *Pratt – Hayford*, *Airy – Heiskanen*).



Εικόνα 2-6: Ισοστατικά μοντέλα - (αριστερά) μοντέλο Pratt, (δεξιά) μοντέλο Airy

Πηγή: Δ. Δεληκαράογλου, «Φυσική Γεωδαισία – Θεωρητικές και Τεχνολογικές Βάσεις», 2010

Όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα, στο μοντέλο του Pratt όλη η τοπογραφία αντισταθμίζεται στο ίδιο βάθος, αλλά όσο υψηλότερη η τοπογραφία τόσο χαμηλότερη η πυκνότητα του υλικού, ενώ στου Airy έχουμε σταθερή πυκνότητα υλικών, αλλά όσο υψηλότερη η τοπογραφία τόσο μεγαλύτερο το βάθος αντισταθμισμού. Οι επεκτάσεις των δύο μοντέλων (μοντέλα Pratt – Hayford και Airy – Heiskanen) φαίνονται στην εικόνα (2-7):



Εικόνα 2-7: Ισοστατικά μοντέλα - (αριστερά) μοντέλο Pratt - Hayford, (δεξιά) μοντέλο Airy - Heiskanen

Πηγή: Δ. Δεληκαράογλου, «Φυσική Γεωδαισία – Θεωρητικές και Τεχνολογικές Βάσεις», 2010

Στο μοντέλο **Pratt – Hayford**, το επίπεδο αντιστάθμισης είναι σταθερό (T_0) και κάθε στήλη της τοπογραφίας, αναλόγως του υλικού της, έχει μια τιμή πυκνότητας ρ_i , ενώ όταν έχουμε μηδενικό υψόμετρο τοπογραφίας η τιμή πυκνότητας είναι ρ_0 . Η συνθήκη ισοστατικής ισορροπίας εκφράζεται ως εξής:

$$(2.29) \quad \rho_i (T_0 + H_i) = \rho_0 T_0 \quad (\text{ηπειρωτικές περιοχές})$$

$$(2.30) \quad \rho_i (T_0 - d_i) + \rho_w d_i = \rho_0 T_0 \quad (\text{ωκεάνιες περιοχές})$$

όπου $\rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$. Το βάθος αντιστάθμισης υπολογίστηκε κατ' αυτό τον τρόπο από τον Hayford στην τιμή $T_0 = 113.7 \text{ km}$ κι είναι αντίστοιχο των εκτιμήσεων του λιθοσφαιρικού βάθους.

Στο μοντέλο **Airy – Heiskanen**, ο φλοιός (με τυπική πυκνότητα $\rho_c = 2670 \text{ kg/m}^3$) «επιπλέει» στο μανδύα (με τυπική πυκνότητα $\rho_m = 3270 \text{ kg/m}^3$), όπως το παγόβουνο στο νερό. Για κάθε στήλη τοπογραφίας (i), υπάρχει μια αντίστοιχη εισχώρηση (t_i) της στήλης αυτής στο μανδύα (εισχώρηση φλοιού στο μανδύα), ενώ στην εισχωρούμενη στήλη ο μανδύας ασκεί μια δύναμη άνωσης προς τα επάνω. Αντίθετα, στους ωκεανούς (με τυπική πυκνότητα $\rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$) έχουμε μια αρνητική εισχώρηση, δηλ. μια εισχώρηση του μανδύα στο φλοιό. Η συνθήκη ισοστατικής ισορροπίας εκφράζεται ως εξής:

$$(2.31) \quad (\rho_m - \rho_c) t_i = \rho_c H_i \quad (\text{ηπειρωτικές περιοχές})$$

$$\text{όπου } t_i = H_i [\rho_c / (\rho_m - \rho_c)] = 4.45 \cdot H_i$$

$$(2.32) \quad (\rho_m - \rho_c) t_i = (\rho_c - \rho_w) d_i \quad (\text{ωκεάνιες περιοχές})$$

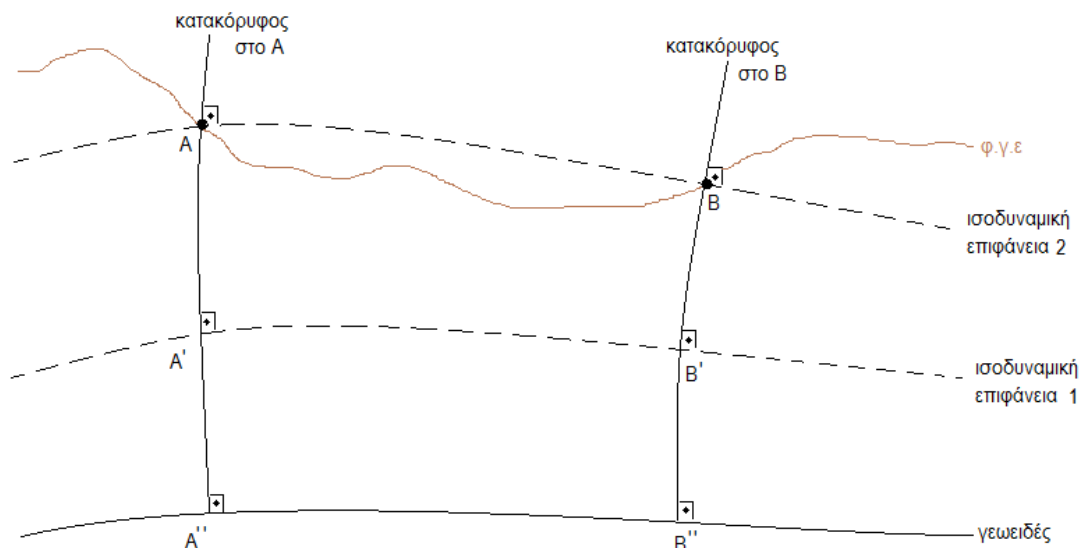
$$\text{όπου } t_i = d_i [(\rho_c - \rho_w) / (\rho_m - \rho_c)] = 2.73 \cdot d_i$$

Με την εφαρμογή της ισοστατικής αναγωγής, παίρνουμε την αντίστοιχη **ισοστατική ανωμαλία βαρύτητας**, κατά τα προαναφερθέντα.

2.4. Σχέση των διαφόρων τύπων υψομέτρων και της βαρύτητας

Ορίζοντας χονδροειδώς την έννοια του υψομέτρου, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι «η κατακόρυφη απόσταση ενός σημείου από μια επιφάνεια αναφοράς». Όμως ο ορισμός αυτός περιέχει αρκετές ασάφειες, όπως π.χ. η έννοια της κατακορυφότητας, όπου στην περίπτωση του γεωμετρικού υψομέτρου (που έχει ως επιφάνεια αναφοράς την επιφάνεια του επιλεγμένου ελλειψοειδούς) αναφέρεται σε μια ευθεία γραμμή κάθετη στο ελλειψοειδές στο συγκεκριμένο σημείο, ενώ στην περίπτωση του ορθομετρικού υψομέτρου (που έχει ως επιφάνεια αναφοράς την επιφάνεια του γεωειδούς) αναφέρεται στην κατακόρυφο, δηλ. μια καμπύλη γραμμή κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες κι άρα κάθετη και στο γεωειδές, στο συγκεκριμένο σημείο.

Μια άλλη ασάφεια έχει να κάνει με την έννοια της απόστασης, η οποία μπορεί να είναι απλά γεωμετρική ή μπορεί και να σχετίζεται και με τη φυσική έννοια του δυναμικού της βαρύτητας. Ενδεικτικά, βλέπουμε το παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 2-8: Σημεία της ίδιας ισοδυναμικής επιφάνειας

Όπως παρατηρούμε, τα σημεία A και B της φ.γ.ε βρίσκονται στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια, όμως εξαιτίας της μη παραλληλίας των ισοδυναμικών επιφανειών, έχουν διαφορετική απόσταση από το γεωειδές (κατά μήκος της κατακορύφου), δηλ. έχουν διαφορετικά ορθομετρικά υψόμετρα κι άρα θα ήταν π.χ. λανθασμένη η κατασκευή ενός αγωγού ύδατος που να συνδέει το A με το B. Για το λόγο αυτό ορίζεται η έννοια του **γεωδυναμικού αριθμού (C)**, που είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ ενός σημείου A σε υψόμετρο $H = H_A$ και του γεωειδούς ($H = 0$), δηλ.:

$$(2.33) \quad \left. \begin{aligned} C_A = W_0 - W_A = \int_0^{H_A} g dH = \bar{g} \cdot H_A \\ C_B = W_0 - W_B = \int_0^{H_B} g dH = \bar{g} \cdot H_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta C_{AB} = C_B - C_A = W_A - W_B = \int_{H_A}^{H_B} g dH = \bar{g} \cdot \Delta H_{AB}$$

όπου \bar{g} η μέση τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας κατά μήκος της διαδρομής από το γεωειδές στο εκάστοτε σημείο (ή από το ένα σημείο στο άλλο).

Ο γεωδυναμικός αριθμός είναι μια πολύ σημαντική έννοια, γιατί συνδέει φυσικά μεγέθη όπως το δυναμικό της βαρύτητας, με γεωμετρικά όπως το υψόμετρο. Από τον ορισμό επίσης του γεωδυναμικού αριθμού, συνάγεται ότι όλα τα σημεία μιας ισοδυναμικής επιφάνειας έχουν ίδιο γεωδυναμικό αριθμό, αλλά και όταν κάποια σημεία έχουν ίδιο γεωδυναμικό αριθμό, τότε βρίσκονται στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια. Για να κατασκευαστεί ένας αγωγός ύδατος, όπως στο προαναφερθέν παράδειγμα, είναι ασφαλέστερο να ληφθούν υπ' όψιν οι γεωδυναμικοί αριθμοί των σημείων (ή τα δυναμικά υψόμετρα που θα δούμε στη συνέχεια) παρά τα ορθομετρικά υψόμετρα. Μονάδα μέτρησης του γεωδυναμικού αριθμού είναι το **1 GPU = 10 m²/sec²**. Από τον ορισμό του GPU συνάγεται ότι δύο ισοδυναμικές επιφάνειες με $\Delta C = 0.98 \text{ GPU}$, απέχουν περίπου 1m μεταξύ τους (αφού $g \approx 9.8 \text{ m/sec}^2$).

Εξαιτίας αυτής της απόκλισης του γεωδυναμικού αριθμού με τα ορθομετρικά υψόμετρα (περί το 2%), συνηθίζεται αντ' αυτού να χρησιμοποιείται το **δυναμικό υψόμετρο (H^D)**, για το οποίο είναι:

$$(2.34) \quad H^D = C / g_c$$

όπου g_c είναι μια σταθερή συμβατική τιμή βαρύτητας για μια χώρα ή για μια περιοχή εν γένει. Συνήθως χρησιμοποιείται η τιμή της κανονικής βαρύτητας για πλάτος $\phi = 45^\circ$, δηλ. η γ_{45} , η οποία για το GRS 80 είναι:

$$\gamma_{45} = 9.806199 \text{ m/sec}^2 = 0.9806199 \text{ kgal} \quad \text{και άρα:}$$

$$(2.35) \quad H^D = C / 0.9806199$$

Σημεία με ίδιο δυναμικό υψόμετρο βρίσκονται στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια, αλλά έχουν διαφορετικά ορθομετρικά υψόμετρα.

Μια άλλη κατηγορία υψομέτρων είναι τα **κανονικά υψόμετρα (\hat{H})** που, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, έχουν ως επιφάνεια αναφοράς το σχεδόν-γεωειδές και τα οποία, σύμφωνα με τον *Molodensky*, ορίζονται ως εξής:

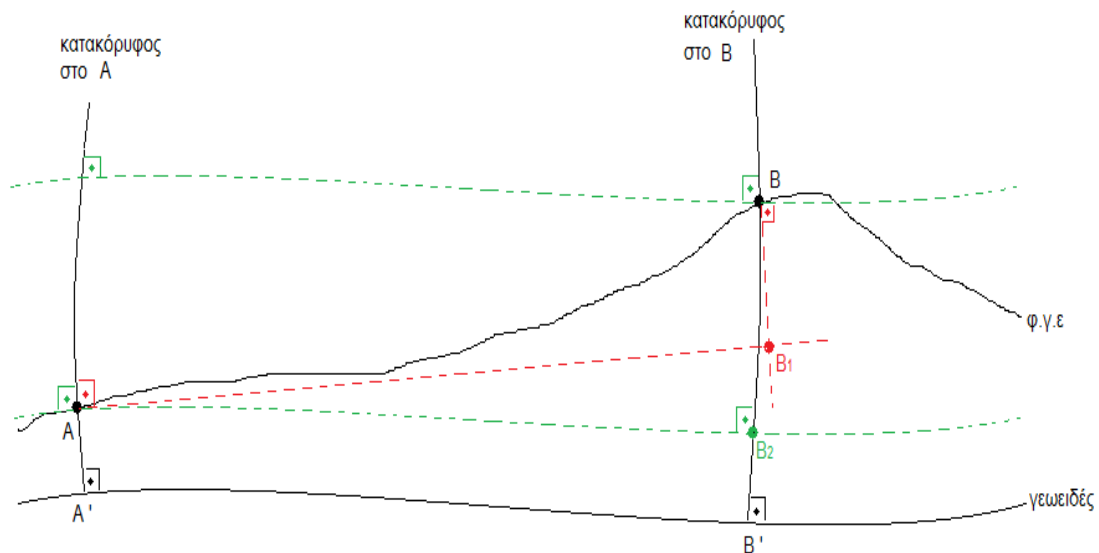
$$(2.36) \quad \hat{H} = C / \bar{\gamma}$$

όπου $\bar{\gamma}$ η μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας, κατά μήκος της καθέτου στο ελλειψοειδές, από το σημείο της φ.γ.ε έως το σχεδόν-γεωειδές ή από το τελλουροειδές έως το ελλειψοειδές. Τα κανονικά υψόμετρα, κατά *Molodensky*, χρησιμοποιούνται στη Ρωσία και σε χώρες της ανατολικής Ευρώπης, ενώ στη Δύση χρησιμοποιούνται τα κανονικά υψόμετρα του Γάλλου γεωδαίτη *Jean Vignal*, που δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$(2.37) \quad \hat{H} = \frac{C}{\gamma_{\phi} - 0.1543 \cdot H}$$

όπου γ_{ϕ} η τιμή της κανονικής βαρύτητας στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς (για το συγκεκριμένο πλάτος ϕ) και H το μετρούμενο υψόμετρο του σημείου. Οι δύο αυτοί τύποι κανονικών υψομέτρων (*Molodensky* και *Vignal*) δίνουν πολύ κοντινές τιμές για τα διάφορα σημεία.

Κλείνοντας τη σύντομη αυτή αναφορά στους τύπους υψομέτρων και τη σύνδεσή τους με τη βαρύτητα, αξίζει να σημειώσουμε ένα λεπτό σημείο, (που πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν κατά τις υψομετρικές εργασίες πεδίου), με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



Εικόνα 2-9: Απόκλιση μετρούμενης και ορθομετρικής υψομετρικής διαφοράς

Στο παραπάνω σχήμα, η ευθεία AB_1 συμβολίζει το επίπεδο που είναι κάθετο στην κατακόρυφο στο Α (κι άρα εφαπτόμενο στην ισοδυναμική επιφάνεια που διέρχεται από το Α), ενώ η ευθεία BB_1 συμβολίζει την εφαπτόμενη στην κατακόρυφο στο Β (κι άρα κάθετη στην ισοδυναμική επιφάνεια που διέρχεται από το Β). Όταν είμαστε στο Α και θέλουμε να μετρήσουμε την υψομετρική διαφορά με το Β, αυτό που μετράμε είναι το τμήμα B_1B (ή κάποιο τμήμα περίπου ίσο με αυτό, αναλόγως τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε και αν έχουμε ενδιάμεσες στάσεις.) Στην πραγματικότητα όμως, η υψομετρική διαφορά είναι το τμήμα B_2B μετρούμενο κατά μήκος της κατακόρυφου. Γι' αυτό το λόγο, πρέπει στη μετρούμενη υψομετρική διαφορά να προσθέσουμε την **ορθομετρική διόρθωση (OC)**, που είναι:

$$(2.38) \quad OC_{AB} = DC_{AB} + \frac{\bar{g}_A - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \cdot H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \cdot H_B$$

όπου \bar{g} η μέση τιμή της βαρύτητας κατά μήκος της κατακόρυφου από το γεωειδές μέχρι το σημείο (τιμή που προσεγγίζεται με διάφορους τρόπους) και **DC** η λεγόμενη **δυναμική διόρθωση**, (που προσθέτουμε στη μετρούμενη υψομετρική διαφορά για να μας δώσει δυναμικά υψόμετρα), η οποία είναι:

$$(2.39) \quad DC_{AB} = \frac{\bar{g}_{AB} - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \cdot \Delta H_{\text{μετρούμενο}}$$

όπου \bar{g}_{AB} η μέση τιμή της βαρύτητας κατά μήκος της διαδρομής από το Α στο Β.

2.5. Μέθοδοι προσδιορισμού της αποχής (N) του γεωειδούς

2.5.1. Γενικά

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε διάφορους τύπους υψομέτρων και την ερμηνεία τους. Ωστόσο, ο σημαντικότερος τύπος υψομέτρων, που χρησιμοποιείται στις περισσότερες χώρες του κόσμου και βρίσκεται πιο κοντά στη φυσική αντίληψη περί υψομέτρου, δεν είναι άλλος από το **ορθομετρικό υψόμετρο (H)**, που έχει ως επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές. Στη χώρα μας, το Εθνικό Σύστημα Υψομετρίας (Ε.Σ.Υ) χρησιμοποιεί τα ορθομετρικά υψόμετρα που έχουν ως επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές, όπως αυτό υλοποιείται από τη μ.σ.θ που προσδιορίστηκε από την Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού (ΥΥ-ΠΝ) με τις καταγραφές του παλιρροιογράφου του Πειραιά, για την περίοδο 1933 – 1978. Η βασική υψομετρική αφετηρία R287 της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ), βρίσκεται κοντά στον βασικό παλιρροιογράφο στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων κι έχει υψόμετρο $H = 14.665$ m. Από αυτήν έχουν δοθεί υψόμετρα στα σημεία του χωροσταθμικού δικτύου του ηπειρωτικού Ελλαδικού χώρου, ενώ στην Κρήτη και στα μεγάλα νησιά έχουν ιδρυθεί

τοπικά χωροσταθμικά δίκτυα, ως προς την τοπική μ.σ.θ., (Βέης, Μπιλλήρης, Παπαζήση, 2009).

Μια άλλη ευρέως χρησιμοποιούμενη κατηγορία υψομέτρων, κυρίως τα τελευταία χρόνια λόγω της συνεχώς αυξανόμενης χρήσης του GPS, είναι και το **γεωμετρικό υψόμετρο (h)**. Όμως, επειδή είναι ένα μέγεθος που αναφέρεται στην μαθηματική επιφάνεια του ελλειψοειδούς, είναι απαραίτητη η σύνδεση του με ένα υψόμετρο που να συνδέεται με μια φυσική επιφάνεια, όπως π.χ. η Μ.Σ.Θ. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την ευκολία που παρέχει το GPS σε σχέση με τις μεθόδους της κλασσικής τοπογραφίας, έχει κάνει όλο και πιο επιτακτική την ανάγκη ύπαρξης **μοντέλων γεωειδούς ακριβείας**. Κι αυτό, διότι γνωρίζοντας με μια ικανοποιητική ακρίβεια (π.χ. λίγων cm) την αποχή **N** του γεωειδούς σε ένα σημείο (ή τη διαφορά ΔN της αποχής μεταξύ 2 σημείων), μπορούμε με τη χρήση του GPS να προσδιορίσουμε το ορθομετρικό υψόμετρο του ζητούμενου σημείου (με ακρίβεια μερικών cm), σύμφωνα με τη θεμελιώδη σχέση $H = h - N$, χωρίς την ανάγκη εκτελέσεως της διαδικασίας της γεωμετρικής χωροστάθμησης, που μπορεί να δώσει ακριβέστερα αποτελέσματα, αλλά είναι αρκετά χρονοβόρα και κοστίζει. Ως εκ τούτου, ο προσδιορισμός του γεωειδούς (σε τοπικό και περιφερειακό κυρίως επίπεδο, αλλά και σε παγκόσμιο) είναι ένα θέμα που απασχολεί σε μεγάλο βαθμό τη γεωδαιτική κοινότητα και για το λόγο αυτό συνεχίζονται οι προσπάθειες για να αναπτυχθούν διαφόρων ειδών **μέθοδοι προσδιορισμού του γεωειδούς**.

Αναλόγως των **χρησιμοποιούμενων δεδομένων**, οι μέθοδοι αυτοί διακρίνονται σε:

- **Βαρυτημετρικές** (Gravimetric), οι οποίες χρησιμοποιούν μετρήσεις βαρύτητας, σε συνδυασμό με μοντέλα σφαιρικών αρμονικών και μοντέλα τοπογραφίας. Χρησιμοποιούνται σε τοπικό, περιφερειακό και παγκόσμιο επίπεδο.
- **Αστρογεωδαιτικές** (Astrogeodetic), που χρησιμοποιούν τις συνιστώσες (ξ , η) της απόκλισης της κατακορύφου (αυτοτελώς ή συνδυαστικά με μοντέλα σφαιρικών αρμονικών και ανωμαλίες βαρύτητας).
- **Γεωμετρικές** (Geometric), οι οποίες χρησιμοποιούν δεδομένα GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης (h και H αντίστοιχα) και με κατάλληλες μεθόδους παρεμβολής, προσεγγίζουν το γεωειδές σε τοπικό επίπεδο.
- **Συνδυαστικές** (Combination), που χρησιμοποιούν ετερογενή δεδομένα και αποτελούν συνδυασμό των παραπάνω μεθόδων.

Όσον αφορά την **ακολουθούμενη μεθοδολογία** για τους υπολογισμούς, χωρίζονται σε:

- **Ολοκληρωματικές** (Integral), οι οποίες χρησιμοποιούν τύπους ολοκλήρωσης που σχετίζονται με τα γεωδαιτικά συνοριακά προβλήματα και χρησιμοποιούν δεδομένα από μετρήσεις διαφόρων παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας (π.χ. Δg , N , ξ , η , κλπ.), στη φ.γ.ε. Χρησιμοποιούν είτε τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης είτε

φασματικής, με τη δεύτερη κατηγορία να έχει το πλεονέκτημα του ταχύτερου υπολογισμού.

➤ **Στοχαστικές** (Stochastic), που στηρίζονται σε διαδικασίες παρεμβολής μεταξύ των μετρήσεων των διαφόρων παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας και σε συναρτήσεις συμμεταβλητότητας, που προκύπτουν εκ των διαθέσιμων αυτών μετρήσεων.

2.5.2. Παραδείγματα

Για να αντιληφθούμε τις σύγχρονες τάσεις ως προς τον προσδιορισμό του γεωειδούς, αλλά και να δούμε που κυμαίνονται τα επίπεδα της ακρίβειας που επιτυγχάνονται με την εκάστοτε μέθοδο, παραθέτουμε εν συντομία, μερικά παραδείγματα μεθόδων προσδιορισμού του γεωειδούς από τη διεθνή βιβλιογραφία:

➤ **Περιφερειακά μοντέλα γεωειδούς: (1) Africa Geoid Project 2003 – Preliminary Geoid Model of Africa – AGP2003, (2) Tanzania Geoid 2007 – TZG07:** (βιβλ.: P. E. Ulotu, L. E. Sjoberg, “Geoid Model of Tanzania from Sparse and Varying Gravity Data Density by the KTH Method”, Stockholm, 2009), **(3) Turkish Geoid 2003 – TG03:** (βιβλ.: B. Erol, S. Erol, “GNSS in Practical Determination of Regional Heights”, Turkey), **(4) Canadian Geoid Model – GARR 98:** (βιβλ.: G. Fotopoulos, C. Kotsakis, M. G. Sideris, “Evaluation of Geoid models and their use in combined GPS/Levelling/Geoid height Network Adjustments”, Calgary-Canada, 1999), **(5) Μοντέλο γεωειδούς (τοπικό) στην ευρύτερη περιοχή της Θεσ/νίκης:** (βιβλ.: Β.Δ. Ανδριτσάνος, Β. Καγιαδάκης, Γ. Κωστάκης, Ε. Μυλωνά-Κοτρογιάννη, Χ. Πικριδάς, Δ. Ρωσσικόπουλος, Η.Ν. Τζιαβός, Α. Φωτίου, «Προσδιορισμός Τοπικού Μοντέλου Γεωειδούς συνδυάζοντας μετρήσεις GPS, Βαρύτητας και Υψομετρίας. Εφαρμογή στην ευρύτερη περιοχή της Θεσ/νίκης», 1999):

Στα παραδείγματα που αναφέρονται παραπάνω, καθώς και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος **Remove – Compute – Restore (RCR)**, για τη δημιουργία ενός **βαρυτημετρικού μοντέλου γεωειδούς**, το οποίο στη συνέχεια προσαρμόστηκε στις τιμές του N που προήλθαν από μετρήσεις GPS/χωροστάθμησης (GPS/Levelling) στην περιοχή, με τη βοήθεια διορθωτικής επιφάνειας (*corrector surface*), την οποία θα δούμε παρακάτω. Η RCR είναι η πλέον συνήθης μέθοδος προσδιορισμού του γεωειδούς σε τοπικό και περιφερειακό επίπεδο. Βάσει αυτής, η αποχή N του γεωειδούς για κάθε σημείο της υπό μελέτη περιοχής, υπολογίζεται ως εξής:

$$(2.40) \quad N = N_{GM} + N_{Ag} + N_{ind}$$

όπου:

$$(2.41) \quad N_{GM} = N(\theta, \lambda) = \frac{T(\theta, \lambda)}{\gamma} = R \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \delta \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

είναι η συνεισφορά του μεγάλου μήκους κύματος στην συνολική τιμή του N και υπολογίζεται από ένα διαθέσιμο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών,

$$(2.42) \quad N_{\Delta g} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g_r \cdot S(\psi) \cdot d\sigma$$

είναι η λεγόμενη **εξίσωση του Stokes**, στην οποία:

$$(2.43) \quad S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin(\psi/2) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \cdot \ln(\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2))$$

είναι η **συνάρτηση του Stokes**, όπου ψ η σφαιρική απόσταση μεταξύ του σημείου που θέλουμε να υπολογίσουμε το N και του εκάστοτε σημείου με μετρημένη τιμή βαρύτητας και ισχύει:

$$(2.44) \quad \psi = \arccos(\sin\varphi \cdot \sin\varphi' + \cos\varphi \cdot \cos\varphi' \cdot \cos(\lambda' - \lambda))$$

κι επίσης στην εξίσωση του Stokes:

$$(2.45) \quad \Delta g_r = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM} - \Delta g_T$$

είναι η **μειωμένη τιμή της ανωμαλίας βαρύτητας**, η οποία υπολογίζεται από την ανωμαλία ελεύθερου αέρα Δg_{FA} , αφαιρώντας την ανωμαλία βαρύτητας Δg_{GM} του επιλεγμένου μοντέλου σφαιρικών αρμονικών (επίδραση μεγάλου μήκους κύματος) και την άμεση επίδραση της τοπογραφίας Δg_T στη βαρύτητα (*direct effect*). Η Δg_T εκφράζει τη διαφορά της έλξης των τοπογραφικών μαζών υπεράνω του γεωειδούς μείον την έλξη των «συμπυκθέντων εντός του γεωειδούς» μαζών και υπολογίζεται με διάφορες μεθόδους, (π.χ. μέθοδος συμπύκνωσης Helmert, RTM, κλπ).

Η σχέση (2.42) στην πράξη, υπολογίζεται έχοντας τις ανωμαλίες βαρύτητας στις κορυφές ενός καννάβου, είτε με αριθμητική ολοκλήρωση είτε με φασματικές μεθόδους, με τη βοήθεια του ευθέως και αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

Επιστρέφοντας τέλος στη (2.40), ο τρίτος όρος της N_{ind} εκφράζει τη **δευτερεύουσα επίδραση της τοπογραφίας** (*indirect effect*). Κατά την αναγωγή των τοπογραφικών μαζών που περιγράφηκε, προκαλείται μια μεταβολή στο δυναμικό εξαιτίας αυτής της «σύμπτυξης», με αποτέλεσμα εάν δεν λάβουμε υπ' όψιν τη **δευτερεύουσα επίδραση της τοπογραφίας**, να υπολογίζουμε μια άλλη επιφάνεια κι όχι το γεωειδές, η οποία λέγεται **αντισταθμισμένο γεωειδές** (*compensated geoid or co-geoid*). Ο τρίτος όρος της (2.40) ουσιαστικά μας μετατοπίζει από το αντισταθμισμένο γεωειδές στο γεωειδές.

Στα παραδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, τα αποτελέσματα της μεθόδου ήταν εν γένει ικανοποιητικά συναρτήσει πάντοτε και του αριθμού των διαθέσιμων μετρήσεων, της κατανομής και του τύπου αυτών. Στην περίπτωση του **TG03** έγινε έλεγχος σε 197 σημεία γνωστού N (GPS/Levelling) κι αναφέρεται μια μέση ακρίβεια (RMS) της τάξης του ± 8.3 cm, που θεωρείται αρκετά ικανοποιητική. Όσον αφορά το **AGP2003**, ελέγχθηκε η βελτιωμένη έκδοση του (AGP2006) στην Αλγερία και στη Ν. Αφρική και βρέθηκε να έχει μέση ακρίβεια ± 27 cm και ± 18 cm, αντίστοιχα. Ωστόσο

ο έλεγχος έγινε με μικρό αριθμό σημείων, (στην Αλγερία ο έλεγχος περιελάμβανε μόλις 14 σημεία, ενώ στη Ν. Αφρική 62) και δεδομένου ότι δεν έχουμε στοιχεία για τις λοιπές χώρες, δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα. Για το **GARR98**, ο έλεγχος πραγματοποιήθηκε σε 1300 περίπου σημεία γνωστού N, όπου μετά τη χρήση 4-παραμετρικής διορθωτικής επιφάνειας, βρέθηκε να έχει μέση ακρίβεια της τάξης των ± 14 cm, που είναι αρκετά ικανοποιητική, δεδομένου και του μεγέθους της περιοχής. Τέλος, για την **ευρύτερη περιοχή της Θεσ/νίκης** (περιοχή μελέτης: $40.25^\circ \leq \varphi \leq 41^\circ$ και $22.50^\circ \leq \lambda \leq 24.25^\circ$), ο έλεγχος πραγματοποιήθηκε σε 29 σημεία (GPS/Levelling) εντός της περιοχής $40.40^\circ \leq \varphi \leq 40.75^\circ$ και $22.90^\circ \leq \lambda \leq 23.40^\circ$ και η μέση ακρίβεια βρέθηκε ίση με 8.3 cm, που κρίνεται ικανοποιητική.

➤ **Τοπικά μοντέλα γεωειδούς στην Τουρκία, στις ευρύτερες περιοχές: (1) της Κωνσταντινούπολης, (2) του Σαγγάριου ποταμού, (3) της επαρχίας Τσανκιρί (βιβλ.: B. Erol, S. Erol, “GNSS in Practical Determination of Regional Heights”, Turkey), (4) της Σμύρνης (βιβλ.: B. Erol, R. Nurhan, “Precise Local Geoid Determination to Make GPS Technique More Effective in Practical Applications of Geodesy”, Turkey):**

Στις περιπτώσεις της Κων/πολης και του Σαγγάριου, έγινε προσδιορισμός **γεωμετρικού μοντέλου** γεωειδούς με τη μέθοδο της **πολυωνυμικής προσαρμογής**. Συγκεκριμένα στην Κων/πολη χρησιμοποιήθηκαν 1005 σημεία γνωστού N (GPS/Levelling) για τη δημιουργία του μοντέλου (σημεία αναφοράς – εσωτερικός έλεγχος) και 200 σημεία γνωστού N για τον έλεγχο του μοντέλου (σημεία ελέγχου – εξωτερικός έλεγχος), ενώ στο Σαγγάριο 95 σημεία αναφοράς και 14 σημεία ελέγχου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, γίνεται ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή μιας πολυωνυμικής επιφάνειας, στις διαθέσιμες τιμές της αποχής του γεωειδούς. **Οι μετρήσεις (n) είναι οι διαθέσιμες τιμές του N και οι άγνωστες καθοριστικές παράμετροι (m) είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.** Στην Κων/πολη επιλέχθηκε κατόπιν δοκιμών, πολυωνυμική επιφάνεια $5^{ου}$ βαθμού και στο Σαγγάριο $4^{ου}$ βαθμού. Τα αποτελέσματα, όπως ήταν φυσικό, ήταν πολύ καλύτερα στην Κων/πολη, δεδομένου του μεγάλου αριθμού σημείων και της πυκνής κατανομής τους, σε αντιδιαστολή με τις λίγες μετρήσεις στο Σαγγάριο. Στον πίνακα που ακολουθεί, συνοψίζονται τα αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων των 2 περιοχών, καθώς και τα αποτελέσματα της σύγκρισης με το TG03 στις ίδιες περιοχές (αριστερά Κων/πολη, δεξιά Σαγγάριος, τα αποτελέσματα είναι σε cm, πλην του R^2 που είναι αδιάστατος):

	5th order polynomial		TG03	4th order polynomial		TG03
	Reference BMs	Test BMs		Reference BMs	Test BMs	
Minimum	-11.2	-11.5	-32.5	-52.0	-36.3	-53.8
Maximum	11.4	11.5	30.0	82.7	24.1	64.3
Mean	0.0	0.0	-0.3	-0.3	-7.5	-4.4
RMSE	4.2	4.4	10.8	22.7	20.4	18.6
R²	0.993	0.992	0.960	0.923	0.905	0.945

Πίνακας 2-1: Αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων στις περιοχές της Κων/πολης (αριστερά) και του Σαγγάριου (δεξιά)

Όσον αφορά τώρα την περίπτωση του Τσανκιρί, η μέθοδος που υιοθετήθηκε ήταν να χρησιμοποιηθεί μια **διορθωτική επιφάνεια** (*corrector surface*) για την τοπική βελτίωση του τουρκικού μοντέλου TG03. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, ελέγχεται ένα περιφερειακό (ή παγκόσμιο) μοντέλο γεωειδούς σε μια περιοχή, με τη βοήθεια σημείων γνωστού N (GPS/Levelling). Οι αποκλίσεις $\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{model}}$ που παρατηρούνται στα σημεία αυτά μοντελοποιούνται, με την **ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή μιας επιφάνειας**. Οι συνήθως χρησιμοποιούμενες επιφάνειες είναι είτε πολυωνυμικές είτε παραμετρικές (3, 4, 5 και 7 παραμέτρων και κυρίως 4 και 5 παραμέτρων). Στην συγκεκριμένη περίπτωση, χρησιμοποιήθηκαν 22 σημεία αναφοράς (*reference benchmarks*) και 9 σημεία ελέγχου (*test benchmarks*). Η διορθωτική επιφάνεια που επιλέχθηκε ήταν πολυωνυμική 1^{ου} βαθμού (επίπεδο), ενώ ελέγχθηκε ταυτόχρονα και μια επιφάνεια 2^{ου} βαθμού (από τα ίδια σημεία) η οποία δημιουργήθηκε με τη μέθοδο της πολυωνυμικής προσαρμογής που προαναφέρθηκε, για την προσέγγιση του τοπικού γεωειδούς της περιοχής. Τα αποτελέσματα, ήταν πολύ καλύτερα με τη χρήση της διορθωτικής επιφάνειας, όπως φαίνεται και στον πίνακα που ακολουθεί:

	refining method		min.	max.	mean	RMSE
TG03			-10.8	60.4	19.3	26.2
refined TG03	CS fit., 1 st order polynomial	model	-25.4	43.3	0.0	17.6
		test	-45.4	28.5	0.0	19.2
local geoid model	2nd order polynomial		-120.1	85.7	0.0	46.6

Πίνακας 2-2: Αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων στην περιοχή του Τσανκιρί

Στο τέταρτο παράδειγμα (Σμύρνη), ο προσδιορισμός του τοπικού γεωειδούς έγινε με τη μέθοδο της **σημειακής προσαρμογής** (*least squares collocation – LSC*). Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην παραδοχή, ότι τα υπόλοιπα των μετρήσεων που προκύπτουν από μια ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή, αποτελούνται από ένα ωφέλιμο μέρος – το «**σήμα**» (*signal*) κι από ένα τυχαίο μέρος – το «**θόρυβο**» (*noise*). Σκοπός της μεθόδου είναι να προσδιοριστεί όσο το δυνατό καλύτερα η χωρική μεταβολή του «σήματος» στην υπό μελέτη περιοχή, με την χρήση της κατάλληλης **συνάρτησης συμμεταβλητότητας**, η εύρεση της οποίας αποτελεί τον πιο κρίσιμο παράγοντα επιτυχίας της μεθόδου. Συνήθως, στη συνάρτηση συμμεταβλητότητας υπεισέρχεται η απόσταση των σημείων ως μεταβλητή (δηλ. όσο πιο κοντινά 2 σημεία τόσο μεγαλύτερη η συμμεταβλητότητα των «σημάτων» τους), ενώ ο «θόρυβος» θεωρείται ασυσχέτιστος. Για κάθε σημείο το τελικό υψόμετρο του γεωειδούς που υπολογίζεται, είναι το άθροισμα του αποτελέσματος της ελαχιστοτετραγωνικής επίλυσης και του «σήματος»:

$$N_{\text{LSC}} = N_{\text{LeastSquares}} + \text{signal}$$

(* αναλυτικότερη μαθηματική επεξήγηση της μεθόδου αυτής, καθώς και των προηγούμενων της πολυωνυμικής προσαρμογής και της διορθωτικής επιφάνειας, θα πραγματοποιηθεί παρακάτω, στο Β' μέρος της παρούσης εργασίας).

Στην περίπτωση της Σμύρνης χρησιμοποιήθηκαν 181 σημεία αναφοράς και 121 σημεία ελέγχου για τη δημιουργία και τον έλεγχο της πολυωνυμικής επιφάνειας (5^{ου} βαθμού) στο πρώτο βήμα της διαδικασίας. Στο δεύτερο βήμα, επιλέχθηκε η κατάλληλη συνάρτηση συμμεταβλητότητας και κατόπιν έγινε ο προσδιορισμός των «σημάτων». Τα αποτελέσματα ελέγχθηκαν στα 121 σημεία ελέγχου κι είχαν RMS ± 3.9 cm και μέγιστη απόκλιση 10.4 cm, τα οποία κρίνονται αρκετά ικανοποιητικά.

➤ **Τοπικά μοντέλα γεωειδούς, στις ευρύτερες περιοχές: (1) του Hong Kong, (2) της Shenzhen, (βιβλ.: Y. Q. Chen, Z. Luo, “A hybrid method to determine a local geoid model – Case study”, Hong Kong, 2004):**

Και στα παραδείγματα του Hong Kong και της Shenzhen, η μέθοδος που ακολουθήθηκε έχει αρκετές ομοιότητες με τις προηγούμενες. Στην αρχή δημιουργήθηκε ένα βαρυτημετρικό γεωειδές με τη μέθοδο RCR, χρησιμοποιώντας σημειακές μετρήσεις βαρύτητας στις εν λόγω περιοχές. Στη συνέχεια, τα αρχικά μοντέλα προσαρμόστηκαν ελαχιστοτετραγωνικά σε σημεία γνωστού N (σημεία αναφοράς), με τη χρήση 3-παραμετρικών επιφανειών (βελτιωμένα μοντέλα). Τέλος, οι παρατηρούμενες διαφορές ΔN μεταξύ βελτιωμένων μοντέλων και σημείων αναφοράς, μοντελοποιήθηκαν με τη **μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου**, στην οποία η προστιθέμενη ποσότητα σε κάθε σημείο καννάβου του βελτιωμένου μοντέλου προκύπτει ως συνάρτηση των κοντινότερων παρατηρούμενων ΔN στα σημεία αναφοράς. Στο Hong Kong χρησιμοποιήθηκαν 55 σημεία αναφοράς και 22 σημεία ελέγχου, ενώ στη Shenzhen 65 σημεία αναφοράς και 29 σημεία ελέγχου. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης του τελικού μοντέλου και του παρατηρούμενου N στα σημεία ελέγχου, δίνουν ένα RMS ± 1.7 cm για το Hong Kong και ± 1.4 cm για τη Shenzhen και είναι ικανοποιητικά.

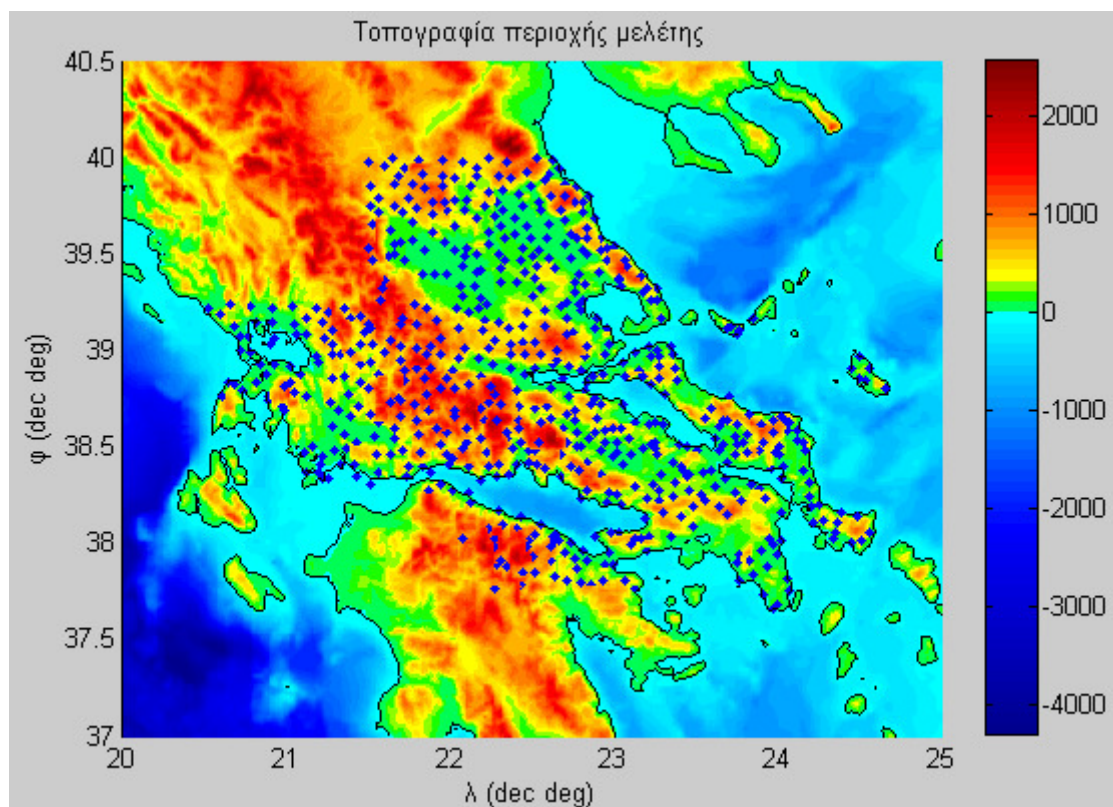
ΜΕΡΟΣ Β: **ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ** **ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ** **ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ**

Κεφάλαιο 3^ο : Παρουσίαση δικτύου –Στατιστικοί έλεγχοι

Μετά την παρουσίαση των κυριότερων θεωρητικών στοιχείων που σχετίζονται άμεσα με το αντικείμενο της παρούσης εργασίας, στο Β΄ μέρος θα ασχοληθούμε αναλυτικά με τα βήματα που ακολουθήθηκαν για τον προσδιορισμό του μοντέλου γεωειδούς (ή ακριβέστερα της τοπικής επιφάνειας αναφοράς των ορθομετρικών υψομέτρων) στην περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται, γιατί όπως ειπώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο «*τα ορθομετρικά υψόμετρα στον ηπειρωτικό Ελλαδικό χώρο έχουν ως επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές, όπως αυτό υλοποιείται από τη Μ.Σ.Θ που προσδιορίστηκε από την Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού (ΥΥ-ΠΝ) με τις καταγραφές του παλιρροιογράφου του Πειραιά, για την περίοδο 1933 – 1978*». Επομένως, όπως είναι λογικό αυτή η επιφάνεια (που περιέχει τα σφάλματα του προσδιορισμού της, αλλά και τα σφάλματα που υπεισέρχονται με την πάροδο του χρόνου), αποκλίνει από τη σημερινή «πραγματική» επιφάνεια της Μ.Σ.Θ (γεωειδές) τόσο σε τοπικό όσο και σε παγκόσμιο επίπεδο (*datum inconsistencies*). Ωστόσο, εμείς θα αναφερθούμε στο γεωειδές, όπως αυτό υλοποιείται από το Εθνικό Σύστημα Υψομετρίας.

3.1. Γενικά Στοιχεία

Το δίκτυο μας αποτελείται από **623 τριγωνομετρικά σημεία της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ)**. Τα σημεία αυτά δόθηκαν για τους σκοπούς της παρούσης εργασίας από την Υποδιεύθυνση Γεωδαισίας – Τοπογραφίας της ΓΥΣ, κατόπιν εγκρίσεως της Διεύθυνσης Γεωγραφικού του Γενικού Επιτελείου Στρατού (ΓΕΣ/ΔΓΕ). Τα σημεία κατανέμονται στην ευρύτερη περιοχή της Κεντρικής Ελλάδος και συγκεκριμένα κατά κύριο λόγο στα γεωγραφικά διαμερίσματα της Στερεάς Ελλάδας και της Θεσσαλίας, αλλά και σε μικρό τμήμα της βόρειας Πελοποννήσου και της νότιας Ηπείρου, όπως φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 3-1: Κατανομή σημείων δικτύου και τοπογραφία περιοχής

(Η Τοπογραφία της περιοχής και η οριογραμμή προέρχονται από το ψηφιακό μοντέλο εδάφους *etopo 1*, από δεδομένα σε μορφή καννάβου $36'' \times 36''$, που πρακτικά σημαίνει διακριτική ικανότητα της τάξης του 1 km περίπου)

Η έκταση του δικτύου ξεπερνάει τα 40.000 km^2 , που συνεπάγεται **μέση πυκνότητα 1 σημείο ανά $65 - 70 \text{ km}^2$** περίπου. Σε κάθε σημείο του δικτύου, έχουν πραγματοποιηθεί από τη ΓΥΣ μετρήσεις GPS και βαρυτημετρίας κι ως εκ τούτου εκτός των φ , λ , H , γνωρίζουμε επίσης το γεωμετρικό υψόμετρο h και την απόλυτη τιμή βαρύτητας g πάνω στη φ.γ.ε. Δεδομένου του μέσου ονομαστικού τυπικού σφάλματος προσδιορισμού των ορθομετρικών υψομέτρων (H) από τη ΓΥΣ, που για τα τριγωνομετρικά της περιοχής ήταν ίσο με $\pm 17 \text{ mm}$, καθώς και του μέσου τυπικού σφάλματος (κατά την κατακόρυφη συνιστώσα) των μετρήσεων GPS σε διάφορα σημεία του δικτύου που ήταν ίσο με $\pm 35 \text{ mm}$, συνάγεται (από το νόμο μετάδοσης σφαλμάτων) το συμπέρασμα ότι ο **προσδιορισμός της αποχής N του γεοειδούς σε κάθε σημείο του δικτύου, δεν μπορεί να είναι καλύτερος από $\pm 4 \text{ cm}$ κατά μέσο όρο:**

$$(3.1) \quad N = h - H \rightarrow \sigma_N^2 = \sigma_h^2 + \sigma_H^2 = 35^2 + 17^2 \rightarrow \sigma_N = 39 \text{ mm} \approx 4 \text{ cm}$$

Σχετικά με την περιοχή μελέτης, χαρακτηρίζεται από έντονο ανάγλυφο με κορυφές που ξεπερνούν τα 2000 m, όπως βλέπουμε και στην παραπάνω εικόνα, ενώ επίσης χαρακτηριστική είναι και η μεγάλης έκτασης πεδιάδα στην περιοχή της Θεσσαλίας.

Ακόμα, πρέπει να αναφερθεί ότι η εφαρμογή των αποτελεσμάτων της εργασίας επικεντρώνεται στην Στερεά Ελλάδα και τη Θεσσαλία και όχι τόσο στη βόρεια Πελοπόννησο και τα νησιά των Σποράδων, δεδομένου ότι μεταξύ των περιοχών αυτών και του κύριου όγκου του δικτύου παρεμβάλλεται μεγάλο θαλάσσιο τμήμα στο οποίο δεν έχουμε μετρήσεις κι έτσι η προσαρμογή της επιφάνειας στις θαλάσσιες αυτές περιοχές παρουσιάζει υψηλό βαθμό αβεβαιότητας. Ωστόσο τα σημεία του δικτύου σε Πελοπόννησο και Σποράδες είναι πολύ χρήσιμα για τον έλεγχο και τη διατήρηση της συμβατότητας του μοντέλου στα όρια της περιοχής μελέτης.

Όσον αφορά την επεξεργασία των δεδομένων, έγινε εξ' ολοκλήρου σε **MATLAB**. Ο κώδικας που συντάχθηκε για τις ανάγκες της παρούσης εργασίας επισυνάπτεται σε παράρτημα στο τέλος, καθώς επίσης και σε μορφή cd.

3.2. Στατιστικοί Έλεγχοι

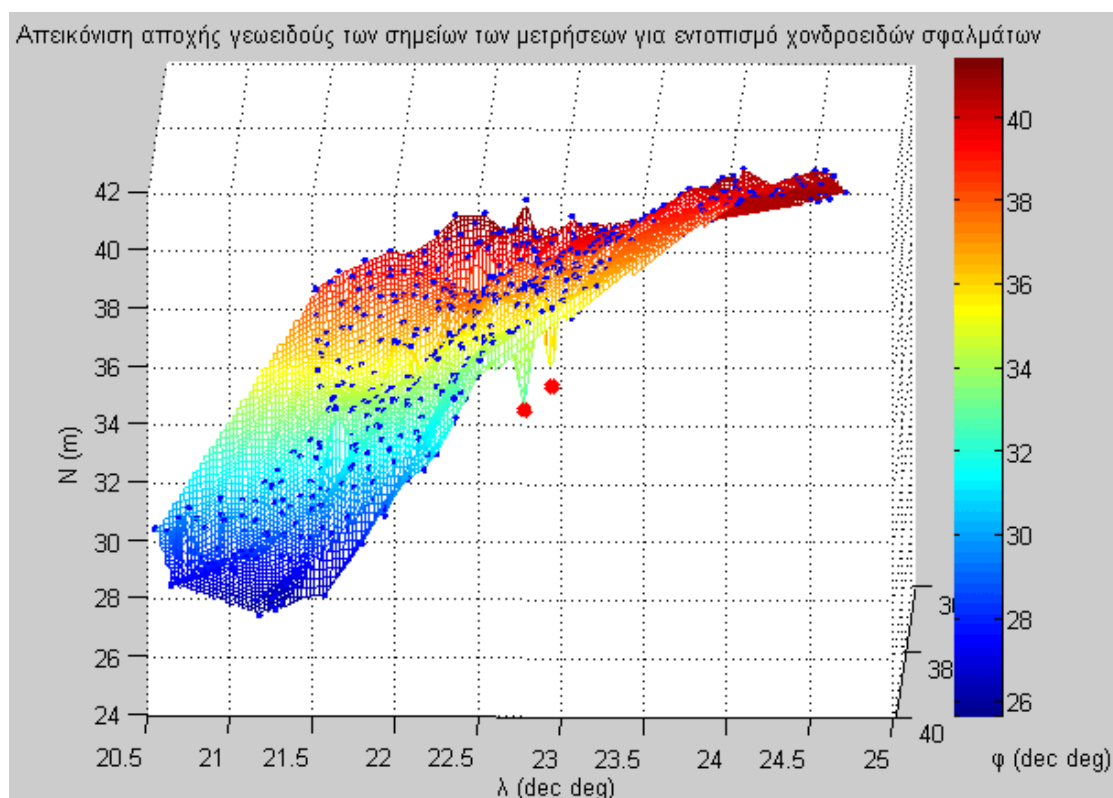
Το πρώτο βήμα της διαδικασίας έχει να κάνει με την εφαρμογή διαφόρων **στατιστικών ελέγχων**, προκειμένου να απαλειφθούν από τις περαιτέρω αναλύσεις τυχόν «επιζήμια» σημεία, δηλ. σημεία η συνεισφορά των οποίων θα μπορούσε να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η ονομαστική ακρίβεια των ορθομετρικών υψομέτρων είναι καλύτερη της σημερινής πραγματικής τους ακρίβειας (εξαιτίας παραγόντων όπως φθορά του υλικού, ανθρώπινες επεμβάσεις, κίνηση της λιθόσφαιρας, κλπ.), καθώς και το γεγονός ότι δεν υπήρχαν δεδομένα για την ακρίβεια των μετρήσεων GPS σε όλα τα σημεία του δικτύου αλλά και ότι το ονομαστικό τυπικό σφάλμα στις μετρήσεις GPS «δεν λέει πάντα όλη την αλήθεια», (είτε από λάθη του χρήστη, π.χ. κατά την εισαγωγή συντ/νων σημείου εξάρτησης, ύψους κεραίας, κλπ, είτε εξαιτίας γεωμετρίας δορυφόρων, συνθηκών ατμόσφαιρας κι άλλων παραγόντων), η εφαρμογή των στατιστικών ελέγχων είναι ένα πολύ σημαντικό τμήμα της διαδικασίας του προσδιορισμού μοντέλου γεωειδούς, διότι πραγματοποιεί το απαραίτητο «φιλτράρισμα» των σημείων, διατηρώντας τα ωφέλιμα και απορρίπτοντας τα επιζήμια. Δεδομένου ότι κανένας στατιστικός έλεγχος δεν μπορεί να είναι 100% σωστός, κρίνεται σκόπιμο να προτιμηθούν λάθη τύπου I παρά τύπου II, δηλ. καλύτερα να απορριφθεί ένα ωφέλιμο σημείο, παρά να διατηρηθεί ένα επιζήμιο. Στην παρούσα εργασία, εφαρμόστηκαν 3 στατιστικοί έλεγχοι, για όσο το δυνατόν αυστηρότερο «φιλτράρισμα», οι οποίοι παρουσιάζονται παρακάτω:

3.2.1. Οπτικός Έλεγχος

Ο πρώτος έλεγχος που πραγματοποιήθηκε έχει να κάνει με την απαλοιφή σημείων που παρουσιάζουν χονδροειδές σφάλμα, το οποίο μπορεί να γίνει αντιληπτό με το μάτι. Για το σκοπό αυτό, δημιουργήθηκε με γραμμική παρεμβολή η επιφάνεια που διέρχεται από όλα τα σημεία του δικτύου (φ , λ , N). Εξαιτίας της μεθόδου παρεμβολής η επιφάνεια αυτή δεν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο της, καθ' όσον

παρουσιάζει ακμές και σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί επιφάνεια γεωειδούς αν και παρ' ότι απλοϊκή στη δημιουργία της, μπορεί να δείξει τη γενική τάση που παρουσιάζει το γεωειδές στην περιοχή. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι ο σκοπός της είναι μόνο ο οπτικός έλεγχος των σημείων για χονδροειδές σφάλμα.

Αφού παρήχθη το τρισδιάστατο (3-d) διάγραμμα της επιφάνειας αυτής, ελέγχοντας το με τη δυνατότητα της περιμετρικής επισκόπησης του διαγράμματος που δίνει η MATLAB, εντοπίστηκαν διάφορα «υψώματα» και «κοιλότητες», εξαιτίας σημείων που ξέφευγαν από τη γενική τάση της επιμέρους περιοχής, όπως π.χ. τα δύο σημεία που έχουν μαρκαριστεί με κόκκινο στην εικόνα που ακολουθεί:



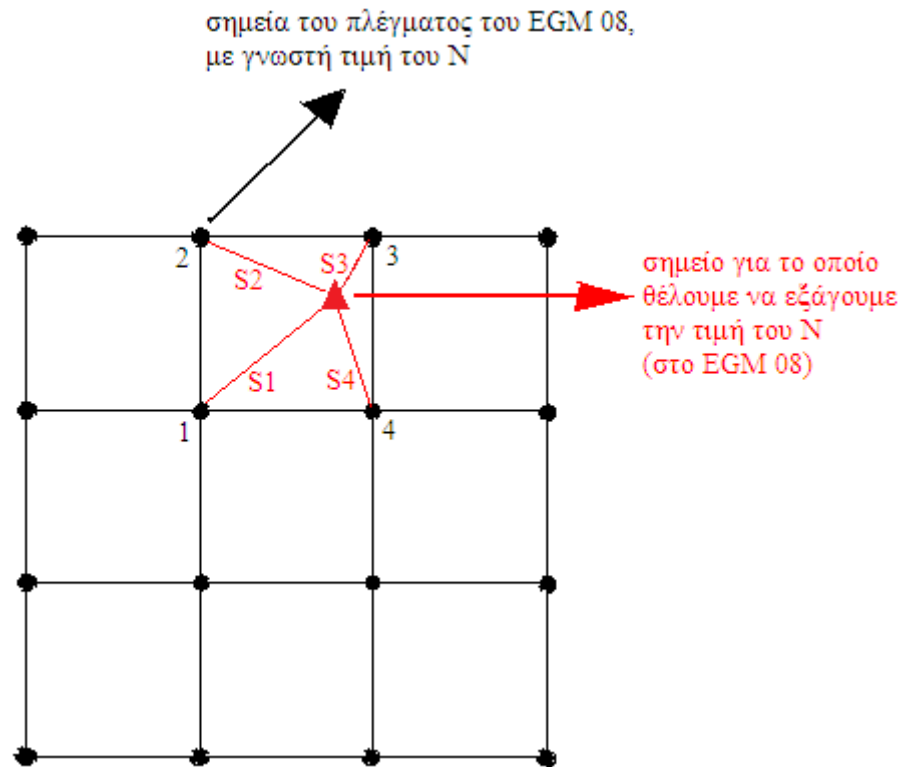
Εικόνα 3-2: Παράδειγμα σημείων με χονδροειδές σφάλμα

Από τον έλεγχο αυτό, βρέθηκαν τελικά κι απαλείφθηκαν 8 σημεία που θεωρήθηκε ότι εμπειριέχον χονδροειδές σφάλμα, με αποτέλεσμα ο αριθμός των σημείων του δικτύου, μετά την εφαρμογή του οπτικού ελέγχου, να μειωθεί σε 615 σημεία.

3.2.2. Σύγκριση με EGM 2008 και EIGEN 6C-3 STAT

Ο επόμενος έλεγχος έχει να κάνει με τη σύγκριση των τιμών του N των σημείων του δικτύου, με τις τιμές του N που δίνουν τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών EGM 2008 και EIGEN 6C-3 STAT, για τα οποία έγινε αναφορά στο Α' μέρος της εργασίας. Οι τιμές του N των δύο μοντέλων λήφθηκαν από το site του ICGEM,

(icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM) σε κάρναβο 36'' x 36'' στην περιοχή μελέτης (διακριτική ικανότητα της τάξης του 1 km περίπου), ως προς το ελλειψοειδές του GRS 80 και με το *tide free* σύστημα παλιρροιών. Για να δοθεί τιμή για το N από το κάθε μοντέλο στα 615 σημεία του δικτύου, (δηλ. για να βρούμε τα N_{EGM} και N_{EIGEN} για καθένα εκ των σημείων), δημιουργήθηκε ένας αλγόριθμος παρεμβολής, με τον οποίο κάθε σημείο εξ' αυτών, παίρνει την τιμή του από τα 4 σημεία του κάρναβου που το περιβάλλουν, με συνεισφορά αντιστρόφως ανάλογη της οριζόντιας απόστασης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 3-3: Κάρναβος τιμών του N για το EGM 2008

Βάσει του αλγορίθμου που δημιουργήσαμε, η τιμή N_{EGM} (ή N_{EIGEN}) στο σημείο που είναι σημασμένο με κόκκινο στο παραπάνω σχήμα κι απέχει αποστάσεις S_1 , S_2 , S_3 και S_4 , από τα αντίστοιχα σημεία 1, 2, 3 και 4 του πλέγματος, θα έχει ως εξής:

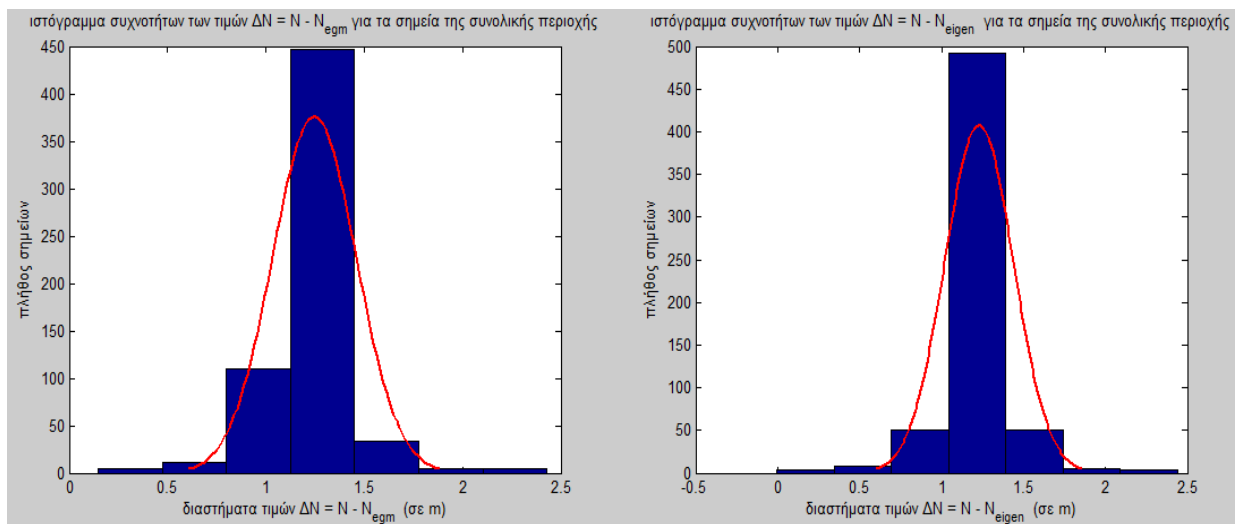
$$(3.2) \quad N = \frac{\frac{N_1}{S_1} + \frac{N_2}{S_2} + \frac{N_3}{S_3} + \frac{N_4}{S_4}}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4}}$$

Δοκιμάζοντας στον αλγόριθμο να τεθεί συνεισφορά των σημείων του κάρναβου αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης, παρατηρήθηκε διαφοροποίηση των τιμών μικρότερη του 1 mm κατά μέσο όρο, οπότε κρίθηκε αρκετό να διατηρηθεί η συνεισφορά αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Κατόπιν,

της εφαρμογής του προαναφερθέντος αλγόριθμου, συγκρίθηκαν οι τιμές του N που προέκυψαν από τις μετρήσεις ($N_{GPS/Levelling}$) με τις τιμές του N των δύο μοντέλων (N_{EGM} και N_{EIGEN}) στα 615 σημεία του δικτύου. Παρακάτω βλέπουμε τα στατιστικά αποτελέσματα αυτών των συγκρίσεων:

$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (σε m)	EGM 2008	EIGEN 6C-3 STAT
max	2.429	2.439
min	0.147	-0.002
mean	1.247	1.230
st. dev.	0.213	0.210
RMS	1.265	1.247

Πίνακας 3-1: Αποτελέσματα σύγκρισης $N_{GPS/Lev}$ με N_{EGM} και N_{EIGEN}



Εικόνα 3-4: Κατανομή των τιμών $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EGM}$ (αριστερά) και $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EIGEN}$ (δεξιά) στην περιοχή μελέτης

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, βλέπουμε ότι οι τιμές των μοντέλων βρίσκονται εν γένει πολύ χαμηλότερα από τις αντίστοιχες μετρημένες τιμές (μέση διαφορά ΔN 1.247 m για το EGM 2008 και 1.23 m για το EIGEN 6C-3 STAT), αλλά οι διαφορές ΔN παρουσιάζουν σταθερότητα, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι η τυπική απόκλιση είναι αρκετά μικρή σε σχέση με το εύρος τιμών (21.3 cm με εύρος 2.282 m για το EGM 2008 και 21 cm με εύρος 2.441 m για το EIGEN 6C-3 STAT), καθώς και από τα ιστογράμματα, όπου η μεσαία στήλη είναι πολύ υψηλότερη από τις υπόλοιπες.

Κατόπιν των αποτελεσμάτων, **απαλείφθηκαν τα σημεία που βρίσκονται εκτός ορίων για διάστημα εμπιστοσύνης 95%**, δηλ. τα σημεία για τα οποία ισχύει:

$$\Delta N \notin [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] \Rightarrow \begin{cases} \Delta N \notin [0.821m, 1.673m] & EGM\ 2008 \\ \Delta N \notin [0.810m, 1.650m] & EIGEN\ 6C3 - STAT \end{cases}$$

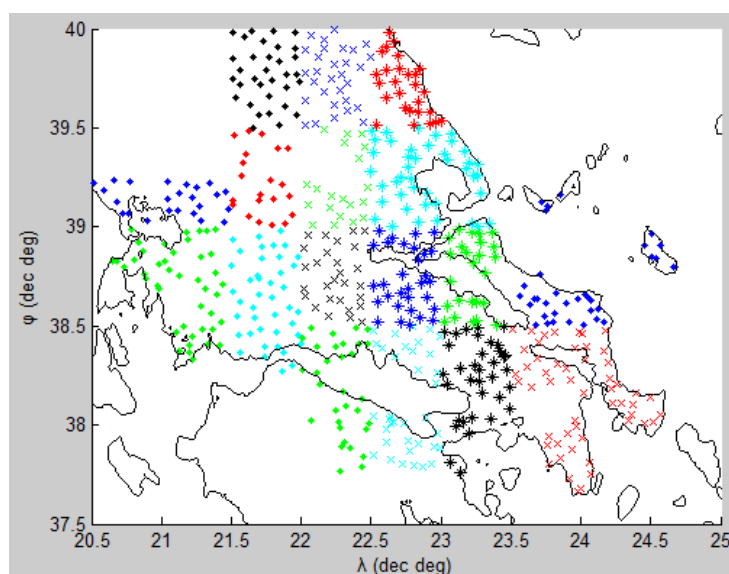
Από τον έλεγχο αυτό, απαλείφθηκαν τελικά 30 σημεία, με αποτέλεσμα ο αριθμός των σημείων του δικτύου, μετά την εφαρμογή του δεύτερου ελέγχου, να είναι 585 σημεία. Τα στατιστικά αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο μοντέλων με τις μετρήσεις, μετά την απαλοιφή των *outlier points*, φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (σε m)	EGM 2008	EIGEN 6C-3 STAT
max	1.607	1.595
min	0.858	0.822
mean	1.253	1.237
st. dev.	0.139	0.128
RMS	1.260	1.244

Πίνακας 3-2: Αποτελέσματα σύγκρισης $N_{GPS/Lev}$ με N_{EGM} και N_{EIGEN} μετά την απαλοιφή των *outlier points*

3.2.3. Επιμερισμός περιοχής σε μικρά τμήματα και έλεγχος σε καθένα εξ αυτών

Στον τρίτο και τελευταίο έλεγχο που εφαρμόστηκε επί των σημείων του δικτύου, χωρίσαμε τη συνολική περιοχή σε μικρά τμήματα και ελέγξαμε το καθένα ξεχωριστά. Με αυτό τον τρόπο, δημιουργήθηκαν 17 υποσύνολα σημείων σε μικρής έκτασης περιοχές, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα όπου οι εναλλαγές χρώματος ή σχήματος (για την αναπαράσταση των σημείων) σε σημεία διαδοχικών περιοχών, υποδηλώνουν αυτή τη διάκριση των «υποπεριοχών» μεταξύ τους:



Εικόνα 3-5: Επιμερισμός συνολικής περιοχής σε "υποπεριοχές"

Κατόπιν, δημιουργήσαμε τη συνάρτηση "*function_StatTest*" και την εφαρμόσαμε σε κάθε υποπεριοχή ξεχωριστά. Τα ορίσματα (*inputs*) της συνάρτησης είναι τα σημεία της υποπεριοχής (αρ. σημείου, φ, λ, h, H) και το αποτέλεσμα της (*output*) είναι τα σημεία της υποπεριοχής που παρέμειναν μετά την εφαρμογή του ελέγχου που θα περιγραφεί παρακάτω, δηλ. χωρίς τα σημεία που «έκοψε» ο έλεγχος (*outlier points*).

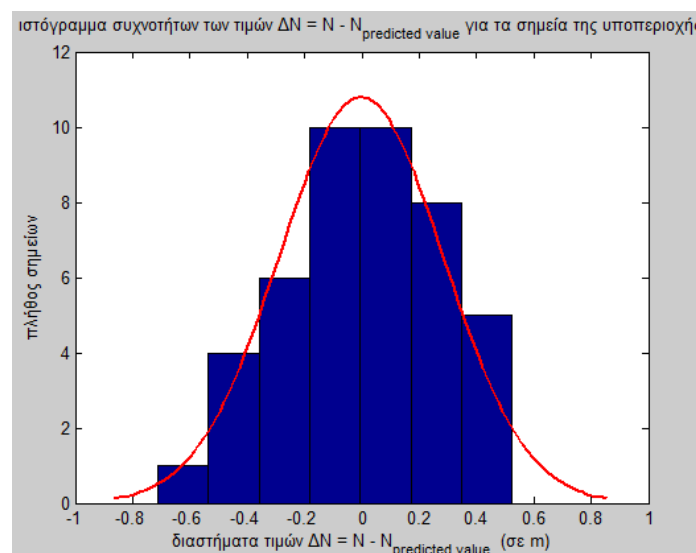
Ο έλεγχος συνίσταται στην εξής διαδικασία: για κάθε σημείο i με συντ/νες $(\varphi_i, \lambda_i, N_i)$ μιας υποπεριοχής που έχει έστω n σημεία, υπολογίζεται το βέλτιστο επίπεδο $(a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 = 0)$ χωρίς τη συμμετοχή του εν λόγω σημείου i , αλλά των υπόλοιπων $n - 1$ σημείων. Αφού προσδιορίσουμε ελαχιστοτετραγωνικά τα a_1, a_2, a_3 , στη συνέχεια υπολογίζεται η τιμή $N_{p(i)}$ του βέλτιστου επιπέδου για φ_i, λ_i και μετά βρίσκουμε την αποχή του σημείου από το βέλτιστο επίπεδο $\Delta N_i = N_i - N_{p(i)}$. Αφού γίνει αυτό για κάθε σημείο της υποπεριοχής, υπολογίζεται ο μέσος όρος (μ) των παρατηρούμενων αποχών και η τυπική τους απόκλιση (σ) και **απαλείφονται τα σημεία που βρίσκονται εκτός ορίων για διάστημα εμπιστοσύνης 95%**, δηλ. τα σημεία για τα οποία ισχύει:

$$\Delta N_i \notin [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$$

Για παράδειγμα, έστω η 5^η υποπεριοχή που έχει 44 σημεία. Για το 1^ο σημείο, υπολογίζουμε το βέλτιστο επίπεδο από τα υπόλοιπα 43 σημεία (2^ο, 3^ο, ..., 44^ο). Στη συνέχεια βρίσκουμε την αποχή ΔN_1 του σημείου από το επίπεδο. Αυτό το κάνουμε και για τα 44 σημεία της υποπεριοχής και κατόπιν βρίσκουμε το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των αποχών ΔN που είναι **-0.3 cm** και **28.7 cm**, αντίστοιχα. Βάσει των προαναφερθέντων απαλείφονται τα σημεία, για τα οποία:

$$\Delta N_i \notin [-57.7 \text{ cm}, 57.1 \text{ cm}]$$

Στην προκειμένη περίπτωση απαλείφεται ένα σημείο με $\Delta N = -71.1 \text{ cm}$, οπότε ο τελικός αριθμός σημείων της εν λόγω υποπεριοχής είναι 43, τα οποία είναι και το αποτέλεσμα (*output*) της συνάρτησης. Παρακάτω, βλέπουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων των αποχών ΔN , για τη συγκεκριμένη υποπεριοχή:



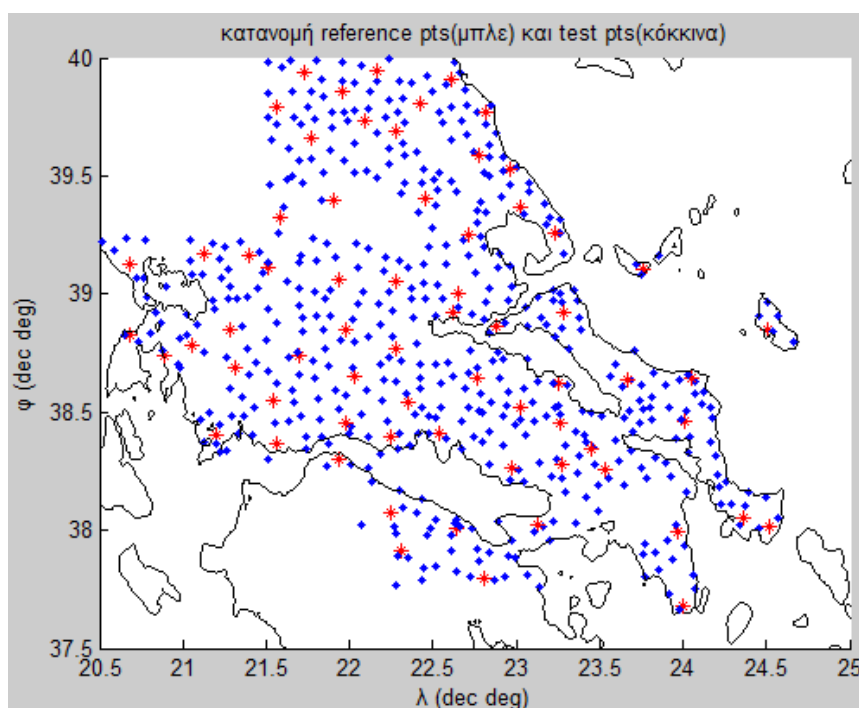
Εικόνα 3-6: Ιστόγραμμα συχνοτήτων των αποχών ΔN της 5ης υποπεριοχής

Μετά την εφαρμογή και του τρίτου ελέγχου, απαλείφθηκαν άλλα 27 σημεία, με αποτέλεσμα ο τελικός αριθμός των σημείων του δικτύου που θα χρησιμοποιηθούν, να είναι **558 σημεία**.

3.3. Επιλογή σημείων ελέγχου (test points)

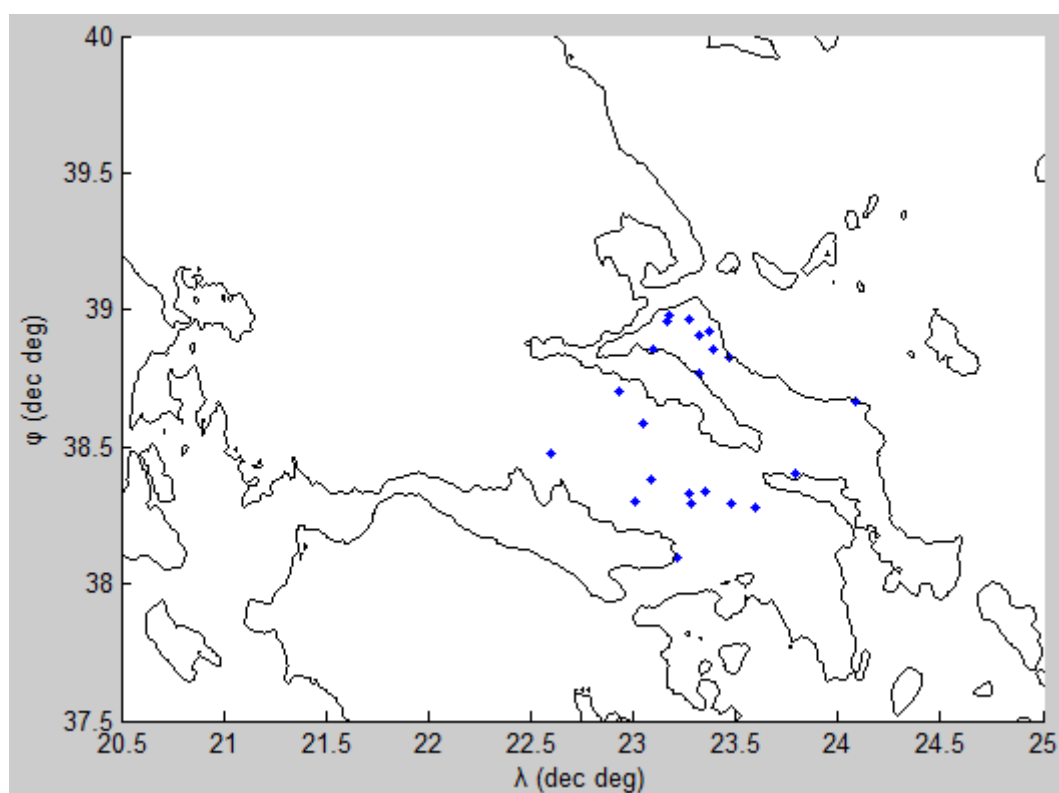
Αφού εφαρμόστηκαν όλοι οι στατιστικοί έλεγχοι και απομακρύνθηκαν τα *outlier points*, επόμενο σημαντικό βήμα είναι η επιλογή των σημείων ελέγχου (*test points*). Τα *test points* είναι σημεία του δικτύου, τα οποία δεν θα συμμετάσχουν σε κανένα στάδιο της διαδικασίας προσδιορισμού της επιφάνειας του γεωειδούς και θα χρησιμοποιηθούν μόνο για τον έλεγχο αυτής (εξωτερικός έλεγχος). Μπορεί με αυτό τον τρόπο, να «χάνουμε» κάποια σημεία που θα βοηθούσαν στην καλύτερη προσαρμογή της επιφάνειας, ωστόσο η ύπαρξη ενός ικανού αριθμού σημείων «ξένων» προς τον προσδιορισμό της επιφάνειας αυτής, είναι υψίστης σημασίας κι αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την πραγματική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Σημαντική ιδιότητα των *test points* είναι ότι πρέπει να είναι όσο το δυνατόν **ισοκατανεμημένα** σε όλη την περιοχή μελέτης, ώστε τα αποτελέσματα να μην αφήνουν καμία ακάλυπτη επιμέρους περιοχή. Τελικά επιλέχθηκαν **67 test points** (12% των συνολικών σημείων), ενώ τα υπόλοιπα **491 είναι τα λεγόμενα σημεία αναφοράς (reference points)**, που θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της επιφάνειας του γεωειδούς και για τον εσωτερικό της έλεγχο. Η κατανομή των *test points* και *reference points* φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 3-7: Reference points (μπλε) και Test points (κόκκινα) στην περιοχή μελέτης

Κρίθηκε σκόπιμο, πέρα από την επιλογή κάποιων σημείων του δικτύου μας ως σημεία ελέγχου, να εισάγουμε και κάποια άλλα σημεία ελέγχου (*extra test points*) στην υπό μελέτη περιοχή, τα οποία δεν θα σχετίζονται με το εν λόγω δίκτυο μετρήσεων. Για το σκοπό αυτό, ελήφθησαν 22 σημεία ενός δικτύου στην περιοχή Αττικοβοιωτίας – Εύβοιας, όπου είχαν διεξαχθεί μετρήσεις του ΕΜΠ από 30/9 έως 10/10 του 1997 για τη μελέτη της τεκτονικής συμπεριφοράς της ευρύτερης περιοχής και το οποίο είχε εξαρτηθεί από 7 μόνιμους σταθμούς: Ankara-ANKR, Graz-GRAZ, Matera-MATE, Nicosia-NICO, Penc-PENC, Sofia-SOFI, Wettzell-WTZR) της International GNSS Service-IGS (βλ. Μητσακάκη Χ., Παπαζήση Κ., Παπανικολάου Ξ., «Διερεύνηση Μεθόδων Συνόρθωσης Μεγάλων Δικτύων GPS για την Παρακολούθηση Μετακινήσεων – Εφαρμογή στην Εύβοια», 2009). Παρά το γεγονός ότι τα εν λόγω σημεία είναι συγκεντρωμένα σε ένα τμήμα της περιοχής μελέτης και όχι σε όλο το εύρος της, ωστόσο μας δίνουν μια εικόνα για τη γενική ισχύ του μοντέλου. Η χωρική κατανομή τους φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 3-8: Κατανομή των 22 extra test points

Κεφάλαιο 4^ο: Διαδικασία προσδιορισμού του γεωειδούς

4.1. Μοντέλο 1^ο

Η δημιουργία του 1^{ου} μοντέλου συνίσταται σε δύο βασικά στάδια. Το πρώτο αφορά στην προσαρμογή της κατάλληλης πολυωνυμικής επιφάνειας στα δεδομένα των μετρήσεων, ενώ το δεύτερο έχει να κάνει με μεθόδους «εξαγωγής του σήματος», τις οποίες θα εξηγήσουμε παρακάτω.

4.1.1. Προσαρμογή κατάλληλης πολυωνυμικής επιφάνειας

Το πρώτο στάδιο, όπως αναφέρθηκε, είναι η προσαρμογή της κατάλληλης πολυωνυμικής επιφάνειας στα δεδομένα μας (φ , λ , N). Για το σκοπό αυτό, δημιουργήθηκε η συνάρτηση “*function_PolynomSurfFit*”, με την οποία προσαρμόσαμε τη βέλτιστη πολυωνυμική επιφάνεια στις μετρημένες τιμές των *reference points*, με τη βοήθεια της MET (μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων). Τα *inputs* της συνάρτησης είναι τα φ , λ , N των *reference points* (για τη δημιουργία και τον εσωτερικό έλεγχο της επιφάνειας), τα φ , λ , N των *test points* (για τον εξωτερικό έλεγχο), ο βαθμός της πολυωνυμικής επιφάνειας και τέλος δεδομένα της τοπογραφίας της περιοχής μελέτης (φ , λ , H) σε κάρναβο από ένα μοντέλο τοπογραφίας, που χρησιμεύουν για την απεικόνιση της ακτογραμμής στην περιοχή μελέτης, (στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο τοπογραφίας *etopo 1*, σε κάρναβο 36'' x 36''). Το *output* της συνάρτησης είναι οι διαφορές ΔN του μοντέλου από τις μετρημένες τιμές.

Στην πολυωνυμική προσαρμογή για κάθε σημείο i , η αποχή του γεωειδούς N_i εκφράζεται ως συνάρτηση των συντ/ων του (φ_i , λ_i), ως εξής:

$$\begin{aligned}
 N_i(u_i, v_i) = & a_{k,0}u_i^k + a_{k-1,1}u_i^{k-1}v_i + a_{k-2,2}u_i^{k-2}v_i^2 + \dots + a_{1,k-1}u_iv_i^{k-1} + a_{0,k}v_i^k + \\
 & a_{k-1,0}u_i^{k-1} + a_{k-2,1}u_i^{k-2}v_i + a_{k-3,2}u_i^{k-3}v_i^2 + \dots + a_{1,k-2}u_iv_i^{k-2} + a_{0,k-1}v_i^{k-1} + \\
 (4.1) & \dots + \\
 & a_{2,0}u_i^2 + a_{1,1}u_iv_i + a_{0,2}v_i^2 + \\
 & a_{1,0}u_i + a_{0,1}v_i + a_{0,0}
 \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{u}_i = \varphi_i - \varphi_0$ και $\mathbf{v}_i = (\lambda_i - \lambda_0) \cdot \cos\varphi_i$, με (φ_0, λ_0) το κέντρο της περιοχής μελέτης:

$$(4.2) \quad \varphi_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i}{n}, \quad \lambda_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n},$$

\mathbf{n} ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων σημείων και \mathbf{k} ο βαθμός της πολυωνυμικής επιφάνειας. Σκοπός μας είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών του πολυωνύμου στην εξίσωση (4.1). Κάθε εξίσωση παρατήρησης θα έχει τη μορφή:

$$(4.3) \quad N_i(u_i, v_i) = N_{i(GPS/Lev)} + u_i$$

κι επομένως προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων σε μορφή πινάκων:

$$(4.4) \quad \mathbf{A}_{n \times m} \cdot \mathbf{X}_{m \times 1} = \mathbf{l}_{n \times 1} + \mathbf{v}_{n \times 1}$$

όπου:

$$(4.5) \quad \mathbf{A}_{n \times m} = \begin{bmatrix} u_1^k & u_1^{k-1}v_1 & u_1^{k-2}v_1^2 & \dots & u_1^2 & u_1v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1 & 1 \\ u_2^k & u_2^{k-1}v_2 & u_2^{k-2}v_2^2 & \dots & u_2^2 & u_2v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^k & u_n^{k-1}v_n & u_n^{k-2}v_n^2 & \dots & u_n^2 & u_nv_n & v_n^2 & u_n & v_n & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.6) \quad \mathbf{X}_{m \times 1} = [a_{k,0} \quad a_{k-1,1} \quad a_{k-2,2} \quad \dots \quad a_{2,0} \quad a_{1,1} \quad a_{0,2} \quad a_{1,0} \quad a_{0,1} \quad a_{0,0}]^T$$

$$\text{με } m = \frac{(k+4)(k-1)}{2} + 3$$

$$(4.7) \quad \mathbf{l}_{n \times 1} = [N_{1(GPS/Lev)} \quad N_{2(GPS/Lev)} \quad \dots \quad N_{n(GPS/Lev)}]^T$$

$$(4.8) \quad \mathbf{v}_{n \times 1} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]^T$$

Η επίλυση της 4.4 με τη βοήθεια της MET, προκύπτει ως εξής:

$$(4.9) \quad \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l} \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{l}$$

$$(4.10) \quad \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n-m}} \quad , \quad \hat{V}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

όπου \mathbf{P} ο πίνακας βάρους των μετρήσεων κι εδώ ο μοναδιαίος αφού θεωρήσαμε ισοβαρείς μετρήσεις, $\hat{\sigma}_0$ το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους και $\hat{V}_{\hat{x}}$ ο

πίνακας μεταβλητότητας – συμμεταβλητότητας, από τη διαγώνιο του οποίου παίρνουμε τα τετράγωνα των τυπικών σφαλμάτων των καλύτερων τιμών των αγνώστων.

Ως παράδειγμα των προαναφερθέντων έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές μιας πολυωνυμικής επιφάνειας 2^{ου} βαθμού. Κάθε εξίσωση παρατήρησης, θα είναι:

$$(4.11) \quad a_{2,0}u_i^2 + a_{1,1}u_iv_i + a_{0,2}v_i^2 + a_{1,0}u_i + a_{0,1}v_i + a_{0,0} = N_{i(GPS/Lev)} + v_i, i = 1, \dots, n$$

και οι πίνακες:

$$(4.12) \quad A_{n \times 6} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1 & 1 \\ u_2^2 & u_2v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^2 & u_nv_n & v_n^2 & u_n & v_n & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{1,1} \\ a_{0,2} \\ a_{1,0} \\ a_{0,1} \\ a_{0,0} \end{bmatrix}$$

ενώ στη συνέχεια η εξίσωση λύνεται κατά τα προαναφερθέντα.

Στην περίπτωση του δικτύου μας κατόπιν δοκιμών, επιλέχθηκε τελικά ως καταλληλότερη η **πολυωνυμική επιφάνεια 4^{ου} βαθμού**. Οι συντελεστές του πολυωνύμου και τα στατιστικά αποτελέσματα της επιφάνειας φαίνονται στους πίνακες που ακολουθούν:

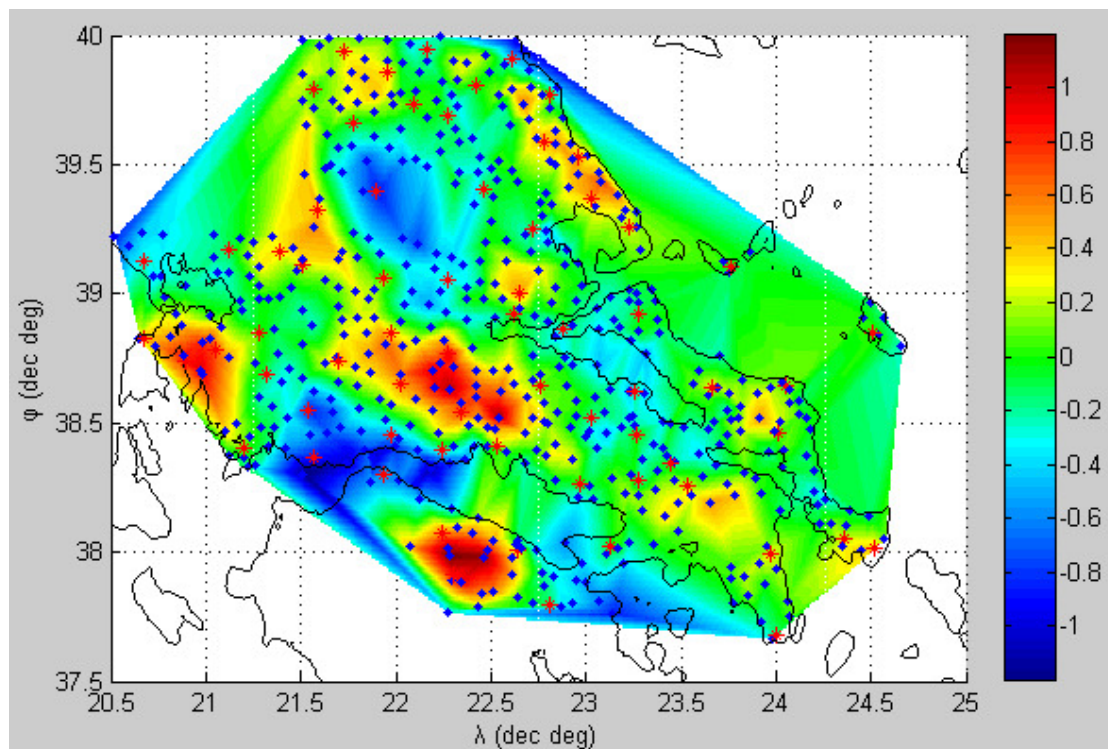
Συντελεστές πολυωνυμικής επιφάνειας 4 ^{ου} βαθμού	
$\alpha_{4,0}$	1.9847 ± 0.1944
$\alpha_{3,1}$	2.4390 ± 0.3656
$\alpha_{2,2}$	1.8086 ± 0.3843
$\alpha_{1,3}$	0.9195 ± 0.1803
$\alpha_{0,4}$	0.7280 ± 0.0566
$\alpha_{3,0}$	-0.2913 ± 0.1175
$\alpha_{2,1}$	-1.6200 ± 0.1654
$\alpha_{1,2}$	-0.0518 ± 0.1418
$\alpha_{0,3}$	-1.0476 ± 0.0462
$\alpha_{2,0}$	-1.5119 ± 0.2068
$\alpha_{1,1}$	-4.4114 ± 0.2274
$\alpha_{0,2}$	-2.8482 ± 0.1186
$\alpha_{1,0}$	3.2695 ± 0.0904
$\alpha_{0,1}$	6.9376 ± 0.0641
$\alpha_{0,0}$	36.5842 ± 0.0423

Πίνακας 4-1: Υπολογισμένοι συντελεστές πολυωνυμικής επιφάνειας 4^{ου} βαθμού με τη MET

Στατιστικοί έλεγχοι επιφάνειας		
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{polynom}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	1.212	0.935
min (max negative)	-1.225	-0.891
mean	0	0.069
st. dev.	0.364	0.382
RMS	0.364	0.385

Πίνακας 4-2: Στατιστικά αποτελέσματα πολυωνομικής επιφάνειας 4^{ου} βαθμού

Επίσης στην παρακάτω εικόνα, βλέπουμε τις παρατηρούμενες διαφορές ΔN της επιφάνειας από τις μετρήσεις:



Εικόνα 4-1: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{polynom}$ της επιφάνειας από τις μετρήσεις (σε m)

4.1.2. Μέθοδος σημειακής προσαρμογής (collocation)

Όπως είδαμε στον πίνακα 3.3 με τα στατιστικά αποτελέσματα της επιφάνειας, οι διαφορές του πολυωνομικού μοντέλου από τις μετρημένες τιμές είναι αρκετά μεγάλες (RMS 36.4 cm στον έλεγχο εσωτερικής ακρίβειας και 38.5 cm στον έλεγχο εξωτερικής ακρίβειας), για να μπορούμε να πούμε ότι προσεγγίζει ικανοποιητικά την επιφάνεια του γεωειδούς. Για το λόγο αυτό, θα επιχειρήσουμε μια περαιτέρω βελτίωση του μοντέλου, με τη μέθοδο της **σημειακής προσαρμογής** (*least squares collocation - LSC*).

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας, η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο ότι τα υπόλοιπα των μετρήσεων που προκύπτουν κατά την επίλυση με τη MET, αποτελούνται από ένα ωφέλιμο μέρος – το «σήμα» (*signal*) κι από ένα τυχαίο μέρος – το «θόρυβο» (*noise*). Σκοπός λοιπόν της μεθόδου είναι, με τη βοήθεια μιας **συνάρτησης συµµεταβλητότητας** μεταξύ των σημείων του δικτύου, να προσδιοριστεί αυτό το σήμα, καθώς και η χωρική κατανομή του ώστε να μπορεί να προβλεφθεί για οποιοδήποτε σημείο της περιοχής μελέτης. Με άλλα λόγια δηλ., προσπαθούμε να προσδιορίσουμε το «ωφέλιμο μέρος» των διαφορών του μοντέλου από τις μετρήσεις, το οποίο προστιθέμενο εν συνεχεία στο μοντέλο, θα προσεγγίζει καλύτερα τη ζητούμενη επιφάνεια του γεωειδούς.

Για το σκοπό αυτό, δημιουργήσαμε τη συνάρτηση “*function_Collocation*”. Τα *inputs* της συνάρτησης είναι: α) τα $(\varphi, \lambda, \Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{polynom}})$ των *reference points*, β) τα $(\varphi, \lambda, \Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{polynom}})$ των *test points*, γ) το φυσικό μέγεθος (π.χ. απόσταση) που θα χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή στη συνάρτηση συµµεταβλητότητας, δ) η συνάρτηση συµµεταβλητότητας που θα χρησιμοποιηθεί μεταξύ των προεπιλεγμένων συναρτήσεων και ε) οι τιμές των διαφορών σταθερών που παρουσιάζονται μέσα στις προεπιλεγμένες συναρτήσεις. Το *output* της συνάρτησης είναι το διάνυσμα των σημάτων (*s*), το οποίο προστιθέμενο στο N_{polynom} μας δίνει το τελικό *N* του μοντέλου:

$$(4.13) \quad N_{\text{model}} = N_{\text{polynom}} + s$$

Σύμφωνα με την LSC, το διάνυσμα των σημάτων (s_p) ενός αριθμού σημείων (το οποίο πρέπει να προστεθεί στα αντίστοιχα *N* του μοντέλου που προέκυψε κατά την επίλυση με τη MET για να μας δώσει το τελικό *N* του βελτιωμένου μοντέλου), ισούται με:

$$(4.14) \quad s_p = C_p (C + D)^{-1} \Delta N$$

όπου:

➤ C_p είναι ο πίνακας συµµεταβλητότητας μεταξύ των σημείων των οποίων θέλουμε να προσδιορίσουμε το σήμα και των σημείων του δικτύου μας. Στην περίπτωσή μας, π.χ. θέλουμε να προσδιορίσουμε το σήμα στα 67 *test points* (t_i) και το δίκτυό μας αποτελείται από τα 491 *reference points* (r_i), οπότε ο C_p είναι:

$$(4.15) \quad C_p (67 \times 491) = \begin{bmatrix} C_{t_1, r_1} & C_{t_1, r_2} & \dots & C_{t_1, r_{491}} \\ C_{t_2, r_1} & C_{t_2, r_2} & \dots & C_{t_2, r_{491}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{t_{67}, r_1} & C_{t_{67}, r_2} & \dots & C_{t_{67}, r_{491}} \end{bmatrix}$$

➤ C είναι ο πίνακας συµµεταβλητότητας των σημείων του δικτύου, δηλ. εδώ:

$$(4.16) \quad C_{(491 \times 491)} = \begin{bmatrix} C_{r_1, r_1} & C_{r_1, r_2} & \dots & C_{r_1, r_{491}} \\ C_{r_2, r_1} & C_{r_2, r_2} & \dots & C_{r_2, r_{491}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{r_{491}, r_1} & C_{r_{491}, r_2} & \dots & C_{r_{491}, r_{491}} \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός

➤ **D** είναι ο πίνακας συµµεταβλητότητας του θορύβου των µετρήσεων, όπου εδώ ο θόρυβος για απλοποίηση της διαδικασίας θα θεωρηθεί ασυσχέτιστος όπως συνηθίζεται (αν και θεωρητικώς η παραδοχή αυτή δεν είναι σωστή) κι άρα ο **D** θα είναι ο μοναδιαίος **I**_(491x491)

➤ $\Delta \mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{GPS/Lev}} - \mathbf{N}_{\text{LeastSquares}}$ το διάνυσμα των υπολοίπων της ελαχιστοτετραγωνικής συνόρθωσης για τα σημεία του δικτύου, δηλ.:

$$(4.17) \quad \Delta \mathbf{N}_{(491 \times 1)} = [\Delta N_1 \quad \Delta N_2 \quad \dots \quad \Delta N_{491}]^T$$

Το κρίσιμο κομμάτι της μεθόδου έγκειται στην επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης, προκειμένου να εκφραστεί όσο το δυνατόν καλύτερα η συµµεταβλητότητα (C_{ij}) μεταξύ των εκάστοτε δύο σημείων. Για το σκοπό αυτό, δημιουργούνται **εμπειρικές συναρτήσεις βασισμένες στα διαθέσιμα δεδομένα**, ωστόσο στην παρούσα εργασία δοκιμάστηκαν διάφορες «έτοιμες» συναρτήσεις, όπως:

$$(4.18) \quad C_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r_{ij}}{k}\right)^2} \quad (\text{Hirvonen Function})$$

$$(4.19) \quad C_{ij} = e^{(-r_{ij}^2/2k^2)} \quad (\text{Squared Exponential Function})$$

$$(4.20) \quad C_{ij} = \left(1 + \frac{r_{ij}}{k} \sqrt{3}\right) \cdot e^{\left(-\frac{r_{ij}}{k} \sqrt{3}\right)} \quad (\text{Matern Class Function, } \nu = 3/2)$$

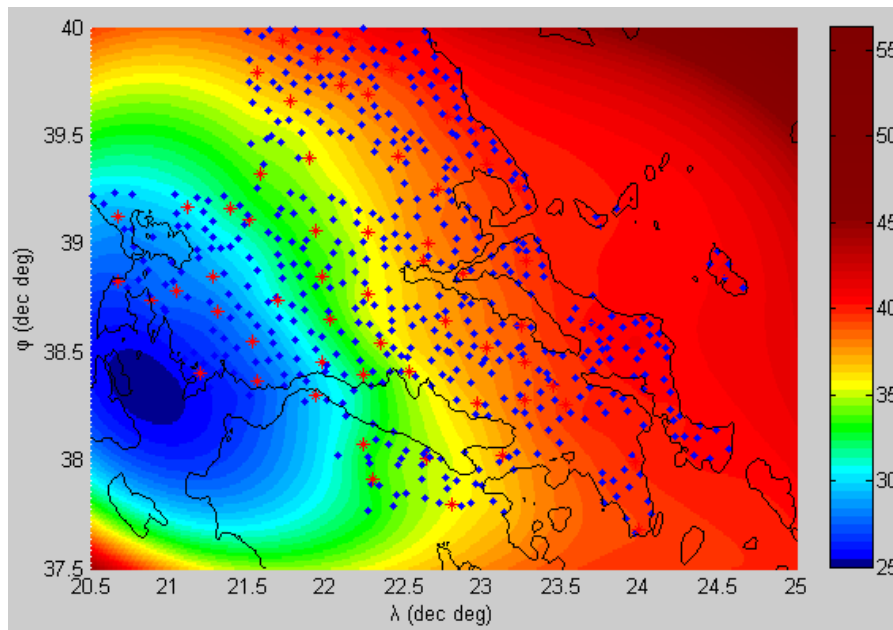
$$(4.21) \quad C_{ij} = \left(1 + \frac{r_{ij}^2}{2k_1 \cdot k_2}\right)^{-k_1} \quad (\text{Rational Quadratic Function})$$

όπου τα k, k_1, k_2 εκφράζουν κάποιες σταθερές των συναρτήσεων, ενώ το r_{ij} εκφράζει το φυσικό μέγεθος που θα χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή της συνάρτησης. Κατόπιν των δοκιμών που εκτελέστηκαν, επιλέχθηκε ως καταλληλότερη για την περιοχή μελέτης η εξίσωση 4.18 (συνάρτηση του Hirvonen) και ως μεταβλητή της

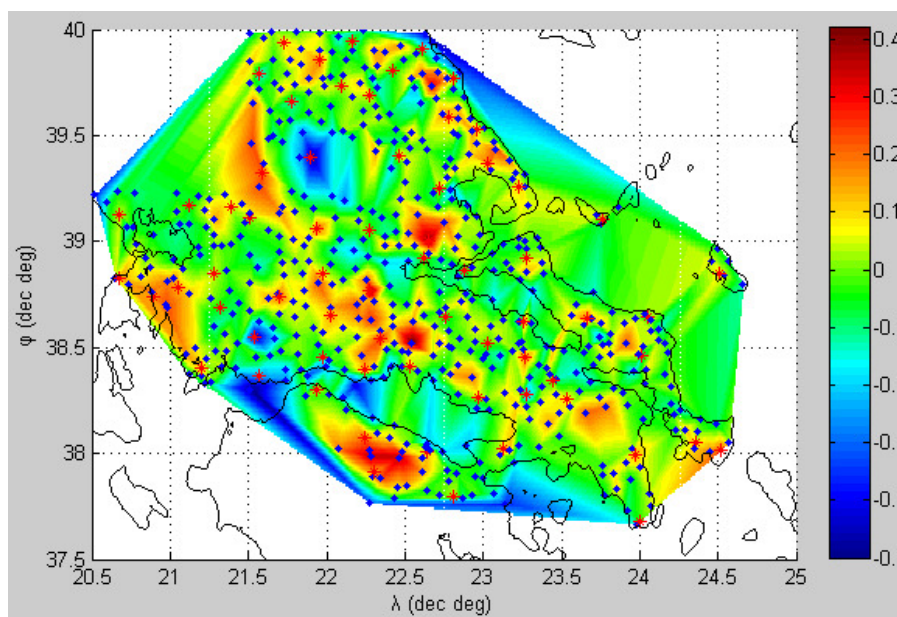
συνάρτησης η απόσταση των 2 σημείων, ενώ η σταθερά k επιλέχθηκε ίση με 0.1. Τα στατιστικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου, καθώς και η απεικόνιση της επιφάνειας και των διαφορών της από τις μετρήσεις, φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	0.439	0.408
min (max negative)	-0.510	-0.477
mean	-0.002	0.043
st. dev.	0.118	0.155
RMS	0.118	0.160

Πίνακας 4-3: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής



Εικόνα 4-2: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σημειακής προσαρμογής)



Εικόνα 4-3: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (μέθοδος σημειακής προσαρμογής)

4.1.3. Μέθοδος σταθμισμένου μέσου όρου (weighted average)

Μια άλλη μέθοδος εξαγωγής του σήματος από τα υπόλοιπα των μετρήσεων που προέκυψαν μετά τη συνόρθωση, είναι και η μέθοδος του **σταθμισμένου μέσου όρου** (*weighted average*). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το «σήμα» (*signal*) σε ένα οποιοδήποτε σημείο προσδιορίζεται με τη βοήθεια των υπολοίπων στα σημεία των μετρήσεων, των οποίων η συνεισφορά (βάρος) αυξάνει με τη μείωση της απόστασης από το εν λόγω σημείο.

Για την εφαρμογή της μεθόδου, δημιουργήσαμε τη συνάρτηση “*function_WeightAve*”, η οποία ως ορίσματα δέχεται: α) τα $(\varphi, \lambda, \Delta N)$ των *reference points*, β) τα $(\varphi, \lambda, \Delta N)$ των *test points*, γ) τον αριθμό που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση βάρους που θα επιλεγεί μεταξύ των δύο προεπιλεγμένων, δ) την τιμή του εκθέτη της συνάρτησης βάρους και ε) την ακτίνα πέραν της οποίας το βάρος μηδενίζεται (σε περίπτωση επιλογής της 2^{15} συνάρτησης). Το αποτέλεσμα της συνάρτησης είναι το διάνυσμα των σημάτων (*s*), το οποίο προστιθέμενο στο N_{polynom} που πήραμε από το μοντέλο της πολυωνυμικής προσαρμογής, μας δίνει το τελικό N του μοντέλου:

$$(4.22) \quad N_{\text{model}} = N_{\text{polynom}} + s$$

Εάν έχουμε n μετρήσεις, το σήμα s_p σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής μελέτης με τη μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου, θα είναι:

$$(4.23) \quad s_p = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot \Delta N_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = \frac{P_1 \cdot \Delta N_1 + P_2 \cdot \Delta N_2 + \dots + P_n \cdot \Delta N_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

όπου $\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Least Squares}}$ στα 491 *reference points* του δικτύου και P_i είναι το βάρος κάθε σημείου, το οποίο στη συνάρτηση που δημιουργήσαμε, μπορεί να προσδιοριστεί από μία εκ των παρακάτω δύο συναρτήσεων:

$$(4.24) \quad P_i = 1 / r_i^m$$

$$(4.25) \quad \sqrt[m]{P_i} = \begin{cases} 1 / r_i & 0 < r_i \leq D/3 \\ \frac{a}{b \cdot D} \cdot \left(\frac{r_i}{D} - 1 \right)^2 & D/3 < r_i \leq D \text{ (local Shepard fitting method)} \\ 0 & D < r_i \end{cases}$$

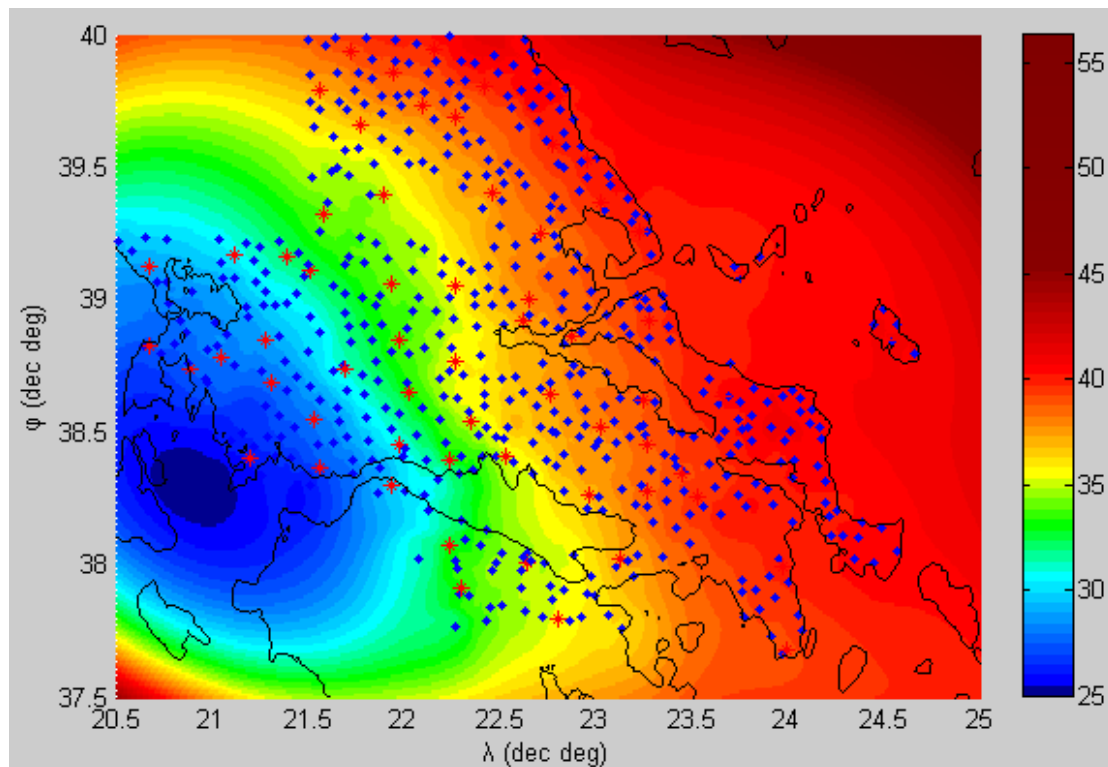
όπου r_i είναι η απόσταση του εκάστοτε σημείου του δικτύου από το σημείο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το σήμα, D είναι η ακτίνα πέραν της οποίας

μηδενίζεται το βάρος (στη 2^η συνάρτηση) και \mathbf{m} είναι ο εκθέτης της απόστασης στη συνάρτηση βάρους. Κατόπιν δοκιμών επιλέχθηκαν οι τιμές $\mathbf{m} = 5$ (και για τις 2 συναρτήσεις) και $\mathbf{D} = 0.3^\circ$.

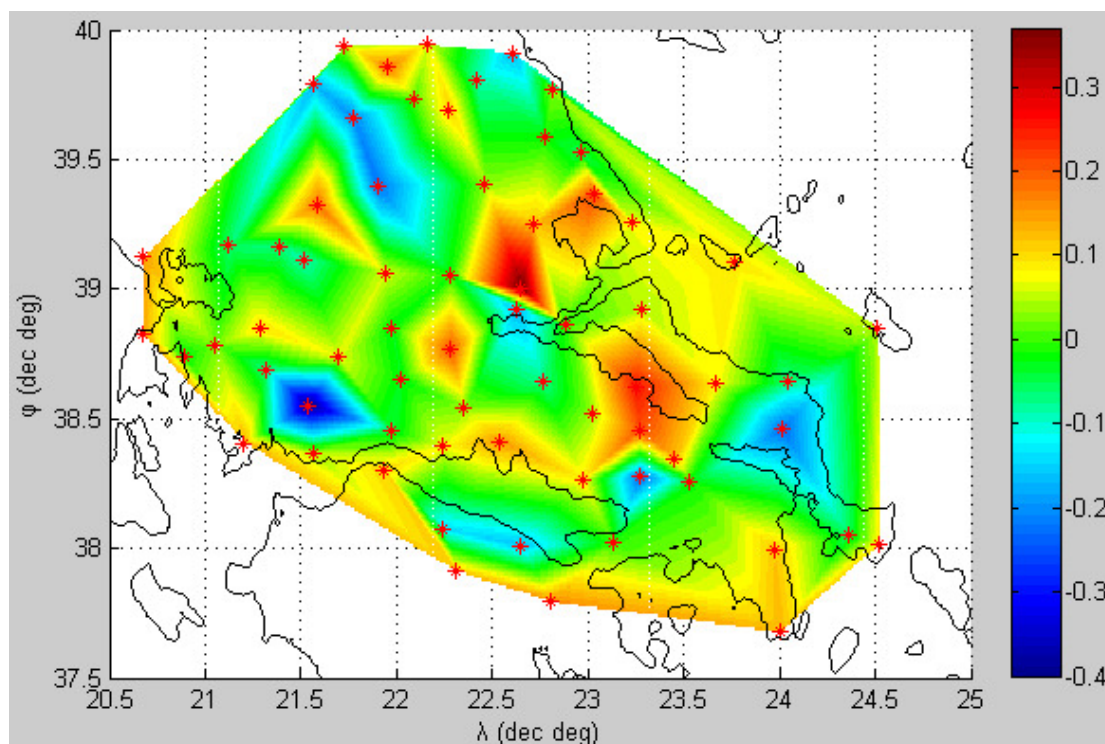
Όπως φαίνεται από τις παραπάνω συναρτήσεις, όταν η απόσταση μηδενίζεται, το βάρος γίνεται άπειρο, που σημαίνει ότι για τα 491 σημεία του δικτύου το σήμα ισούται με το ΔN που προέκυψε από τη συνόρθωση, επομένως ο έλεγχος που μπορεί να γίνει σε αυτή τη μέθοδο είναι μόνο με τα 67 σημεία ελέγχου (εξωτερικός). Τα αποτελέσματα της μεθόδου φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{model}}$ (σε m)	συνάρτηση 4.24	συνάρτηση 4.25
max	0.382	0.374
min (max negative)	-0.403	-0.385
mean	0.021	0.021
st. dev.	0.135	0.134
RMS	0.136	0.135

Πίνακας 4-4: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου



Εικόνα 4-4: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)



Εικόνα 4-5: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ στα test points (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)

Στο παραπάνω γράφημα, βλέπουμε ότι οι «ομοειδείς» περιοχές που σχηματίζονται από τις παρατηρούμενες διαφορές ΔN έχουν μη ομαλή μορφή, παρουσιάζοντας γωνίες. Αυτό οφείλεται αφ' ενός στο ότι ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων σημείων στο γράφημα είναι πολύ μικρός (67 σημεία) σε σχέση με το μέγεθος της περιοχής κι αφ' ετέρου στο ότι η χρησιμοποιούμενη μέθοδος παρεμβολής στα γραφήματα που απεικονίζουν διαφορές ΔN είναι η γραμμική παρεμβολή. Η γραμμική παρεμβολή δεν δίνει ομαλές και διαφορίσιμες επιφάνειες, διέρχεται όμως από όλα τα δοθέντα σημεία, δίνοντας με αυτό τον τρόπο την ακριβή τιμή της παρατηρούμενης διαφοράς σε κάθε σημείο μέτρησης.

4.1.4. Αξιολόγηση 1^{ου} μοντέλου – εναλλακτικές μέθοδοι

Αξιολογώντας το πρώτο μοντέλο για τον προσδιορισμό της επιφάνειας του γεωειδούς, βλέπουμε ότι αν και αρχικά η πολυωνυμική προσαρμογή από μόνη της δεν μπορεί να δώσει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας για μια τόσο μεγάλη περιοχή δίνοντας μια **μέση ακρίβεια (RMS) περί τα 36.5 cm (ref. points) και περί τα 38.5 cm (test points)** στον προσδιορισμό του N, ωστόσο στη συνέχεια με την εφαρμογή των μεθόδων «εξαγωγής του σήματος», η βελτίωση της ακρίβειας ήταν ιδιαίτερα σημαντική (60% με 70%), πετυχαίνοντας μέσες ακρίβειες της τάξης των 15 cm, **(RMS περί τα 12 cm (ref. points) και περί τα 16 cm (test points) στη σημειακή προσαρμογή και περί τα 13.5 cm (test points) στη μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου)**, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικές αν

αναλογιστούμε το μέγεθος της περιοχής μελέτης και ότι κατά την εν λόγω μέθοδο δεν χρησιμοποιήσαμε δεδομένα βαρύτητας. Αναφορικά και με το τελικό ζητούμενο της εργασίας που αφορά στη δυνατότητα προσδιορισμού της αποχής του γεωειδούς σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής μελέτης, το εν λόγω μοντέλο μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε το N με μέση αβεβαιότητα όχι μεγαλύτερη των **15 cm** ή με άλλα λόγια μετρώντας μόνο με δέκτες GPS, μπορούμε να προσδιορίσουμε ορθομετρικά υψόμετρα στην περιοχή μελέτης, με μέση ακρίβεια **± 15 cm**.

Ένα άλλο θέμα στο οποίο πρέπει να σταθούμε είναι το γεγονός ότι στο νοτιοδυτικό και βορειοανατολικό άκρο της εικονιζόμενης περιοχής (νότια της Ζακύνθου και βορειοανατολικά των Σποράδων, αντίστοιχα), η δημιουργηθείσα πολυωνυμική επιφάνεια «ξεφεύγει», παίρνοντας τιμές περί τα 45 m και 55 m αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στις εικόνες 4.2 και 4.4. Αν και οι περιοχές αυτές, βρίσκονται εκτός της περιοχής μελέτης (Στερεά Ελλάδα - Εύβοια, Θεσσαλία, Β. Πελοπόννησος) και δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα του μοντέλου σε αυτήν, ωστόσο δοκιμάσαμε να άρουμε αυτή τη «δυσαρμονία» με δύο τρόπους:

➤ Στον πρώτο, δώσαμε ενδεικτικά στις 4 γωνίες της εικονιζόμενης περιοχής, τιμές για το N από το μοντέλο EGM 2008 (ή εναλλακτικά προσθέτοντας στο N_{EGM08} τη μέση απόκλιση των μετρημένων N στην περιοχή μελέτης που είναι περί το 1.20 m), δηλ:

$$N = N_{EGM08} \quad \text{ή} \quad N = N_{EGM08} + \text{mean}(N_{GPS/Lev} - N_{EGM08}), \text{ για τις 4 γωνίες}$$

Εντάξαμε αυτές τις 4 «ψευδομετρήσεις» στο δίκτυό μας, δίνοντας τους μικρότερο βάρος από τις κανονικές μετρήσεις και πραγματοποιήσαμε ξανά τη συνόρθωση (συνάρτηση “*function_PolynomSurfFit_4FramePts*”). Τα στατιστικά αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικοί έλεγχοι επιφάνειας		
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{polynom}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	1.340	1.099
min (max negative)	-1.245	-0.980
mean	0.001	0.068
st. dev.	0.380	0.399
RMS	0.379	0.401

Πίνακας 4-5: Στατιστικά αποτελέσματα I^{75} εναλλακτικής επιφάνειας

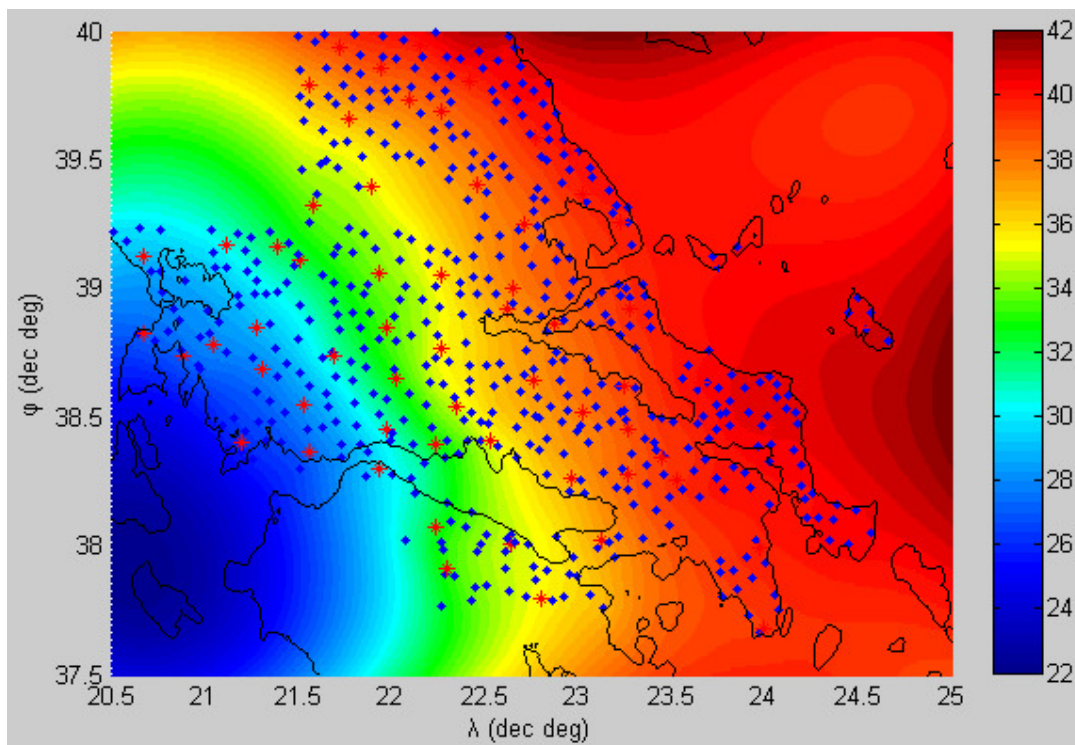
Όπως είναι φυσικό, τα στατιστικά αποτελέσματα της επιφάνειας είναι ελαφρώς χειρότερα από της αρχικής πολυωνυμικής, καθώς «εξαναγκάσαμε» τα 4 άκρα να βρίσκονται κοντά στις δοθείσες τιμές. Όμως στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής και του σταθμισμένου μέσου όρου, τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι εξίσου ικανοποιητικά με τα αρχικά των αντίστοιχων μεθόδων. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα των εν λόγω τελικών επιφανειών:

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{model}}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	0.441	0.411
min (max negative)	-0.427	-0.489
mean	-0.001	0.041
st. dev.	0.119	0.158
RMS	0.119	0.162

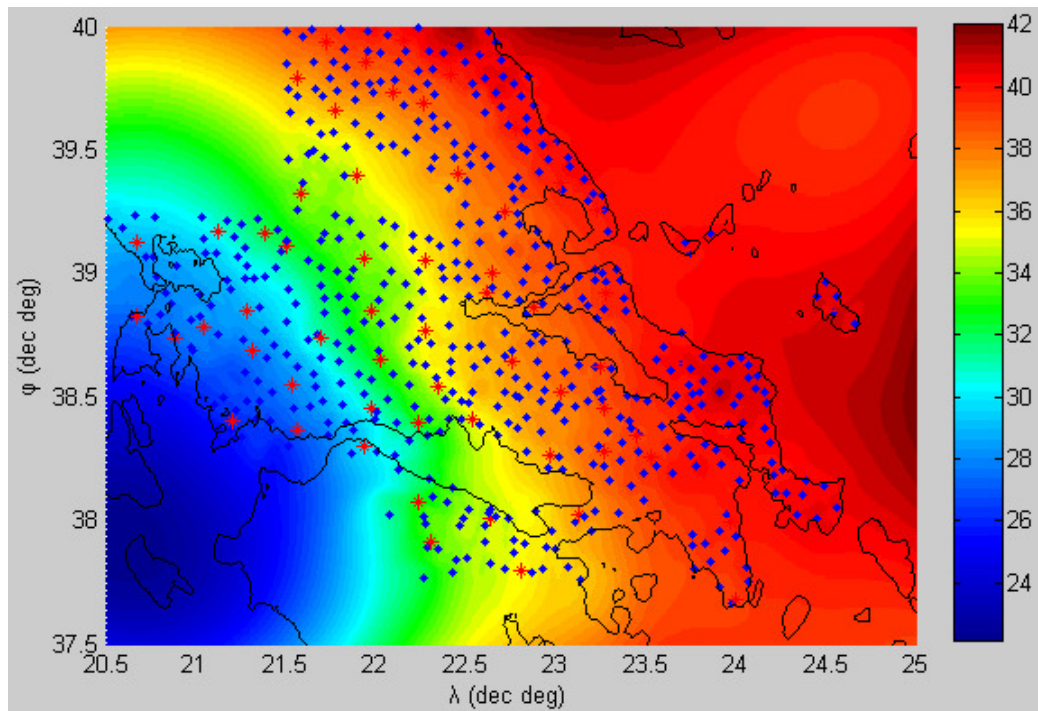
Πίνακας 4-6: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής για την 1^η εναλλακτική επιφάνεια

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{model}}$ (σε m)	συνάρτηση 4.24	συνάρτηση 4.25
max	0.377	0.368
min (max negative)	-0.408	-0.386
mean	0.019	0.019
st. dev.	0.136	0.135
RMS	0.136	0.135

Πίνακας 4-7: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου για την 1^η εναλλακτική επιφάνεια

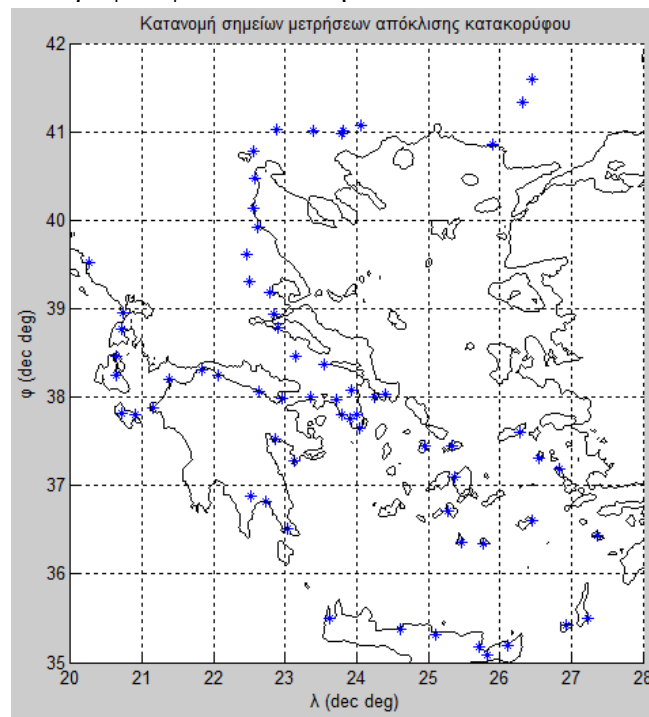


Εικόνα 4-6: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (1^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σημειακής προσαρμογής)



Εικόνα 4-7: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (1^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)

➤ Στο δεύτερο τρόπο, εντάξαμε στις μετρήσεις μας, 67 σημεία στον Ελλαδικό χώρο, στα οποία είχαν πραγματοποιηθεί μετρήσεις των συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου (ξ , η), οι οποίες ελήφθησαν από τη διδακτορική διατριβή του Δ. Μπαλοδήμου «*Geoidal Studies in Greece*» (1972). Τα σημεία όπου μετρήθηκαν οι αποκλίσεις της κατακορύφου φαίνονται στην εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 4-8: Κατανομή σημείων με διαθέσιμες μετρήσεις απόκλισης κατακορύφου

Δεδομένου λοιπόν, ότι για κάθε σημείο \mathbf{i} είναι:

$$\begin{aligned}
 N_i(u_i, v_i) = & a_{4,0}u_i^4 + a_{3,1}u_i^3v_i + a_{2,2}u_i^2v_i^2 + a_{1,3}u_iv_i^3 + a_{0,4}v_i^4 + \\
 & a_{3,0}u_i^3 + a_{2,1}u_i^2v_i + a_{1,2}u_iv_i^2 + a_{0,3}v_i^3 + \\
 & a_{2,0}u_i^2 + a_{1,1}u_iv_i + a_{0,2}v_i^2 + \\
 & a_{1,0}u_i + a_{0,1}v_i + a_{0,0}
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

από κάθε σημείο μέτρησης της απόκλισης της κατακορύφου, παίρνουμε 2 εξισώσεις, ως εξής:

$$\begin{aligned}
 -\xi_i = \partial N_i / (R \cdot \partial \varphi) = \partial N_i(u, v) / \partial u = & 4a_{4,0}u_i^3 + 3a_{3,1}u_i^2v_i + 2a_{2,2}u_iv_i^2 + a_{1,3}v_i^3 + \\
 & 3a_{3,0}u_i^2 + 2a_{2,1}u_iv_i + a_{1,2}v_i^2 + \\
 & 2a_{2,0}u_i + a_{1,1}v_i + \\
 & a_{1,0}
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 -\eta_i = \partial N_i / (R \cos \varphi \cdot \partial \lambda) = \partial N_i(u, v) / \partial v = & a_{3,1}u_i^3 + 2a_{2,2}u_i^2v_i + 3a_{1,3}u_iv_i^2 + 4a_{0,4}v_i^3 + \\
 & a_{2,1}u_i^2 + 2a_{1,2}u_iv_i + 3a_{0,3}v_i^2 + \\
 & a_{1,1}u_i + 2a_{0,2}v_i + \\
 & a_{0,1}
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

όπου $\mathbf{u}_i = \mathbf{R}(\varphi_i - \varphi_0)$ και $\mathbf{v}_i = \mathbf{R}(\lambda_i - \lambda_0) \cdot \cos \varphi_i$. Επαναλαμβάνουμε τη συνόρθωση εντάσσοντας στις εξισώσεις παρατήρησης και τις παραπάνω εξισώσεις (συνάρτηση “*function_PolynomialSurfFit_DefVert*”). Τα στατιστικά αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικοί έλεγχοι επιφάνειας		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{polynom}}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	1.214	1.069
min (max negative)	-1.327	-0.984
mean	0	0.068
st. dev.	0.386	0.408
RMS	0.386	0.41

Πίνακας 4-8: Στατιστικά αποτελέσματα 2^{ης} εναλλακτικής επιφάνειας

Όπως είναι αναμενόμενο και σε αυτή την περίπτωση, τα αποτελέσματα της επιφάνειας είναι ελαφρώς χειρότερα από της αρχικής, αφού έχουμε εξαναγκάσει την επιφάνεια να πάρει δεδομένη κλίση σε αρκετά σημεία της. Όμως κι εδώ, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής και του σταθμισμένου μέσου όρου, παίρνουμε εξίσου ικανοποιητικά αποτελέσματα (σε σχέση πάντα με τα αρχικά

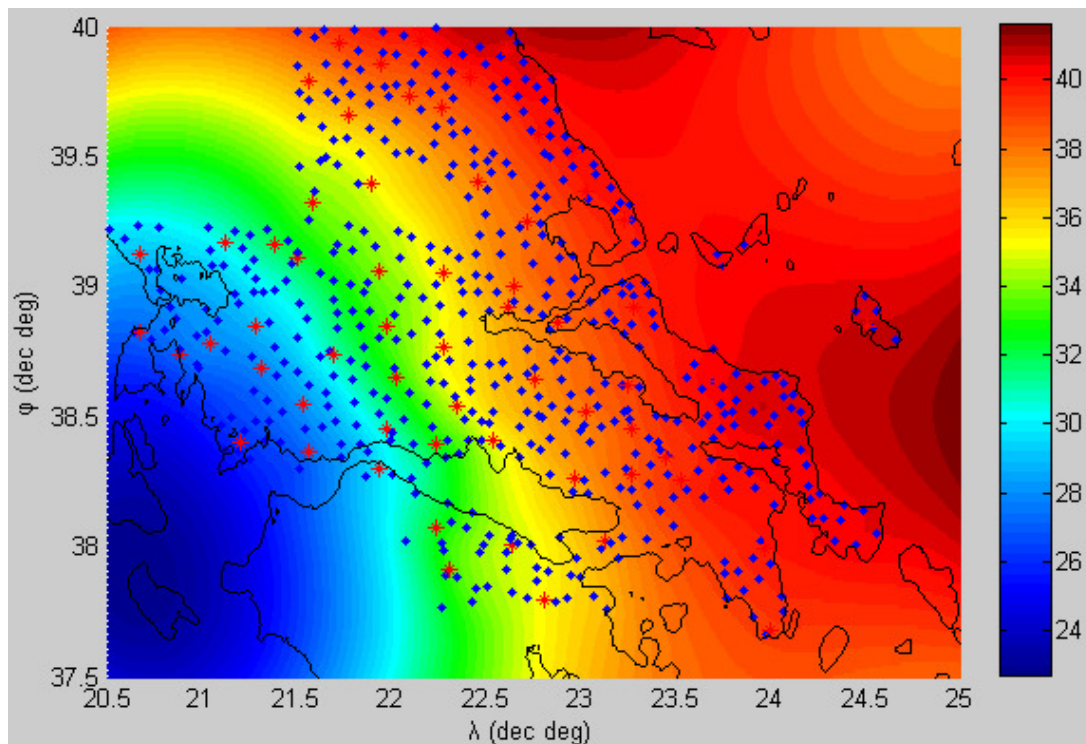
των αντίστοιχων μεθόδων). Τα τελικά αποτελέσματα της 2^{ης} αυτής επιφάνειας έχουν ως εξής:

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{model}}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	0.444	0.424
min (max negative)	-0.485	-0.487
mean	-0.001	0.042
st. dev.	0.117	0.16
RMS	0.117	0.165

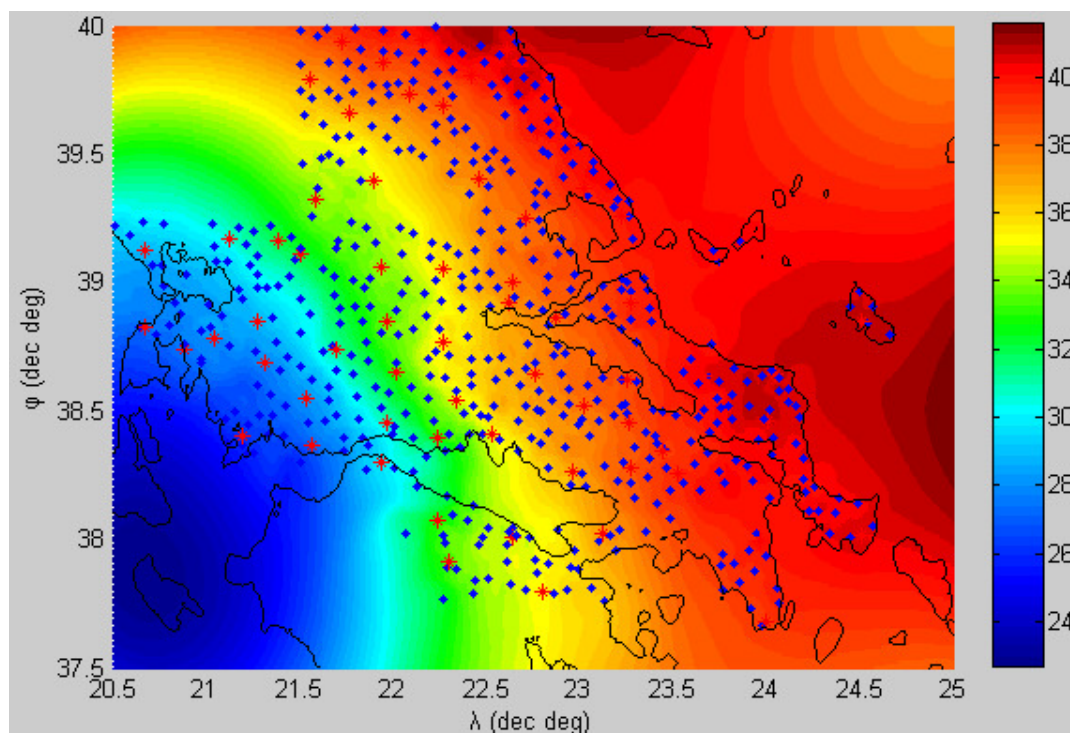
Πίνακας 4-9: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής για την 2^η εναλλακτική επιφάνεια

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{model}}$ (σε m)	συνάρτηση 4.24	συνάρτηση 4.25
max	0.366	0.356
min (max negative)	-0.421	-0.401
mean	0.016	0.017
st. dev.	0.135	0.134
RMS	0.135	0.134

Πίνακας 4-10: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου για την 2^η εναλλακτική επιφάνεια



Εικόνα 4-9: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (2^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σημειακής προσαρμογής)

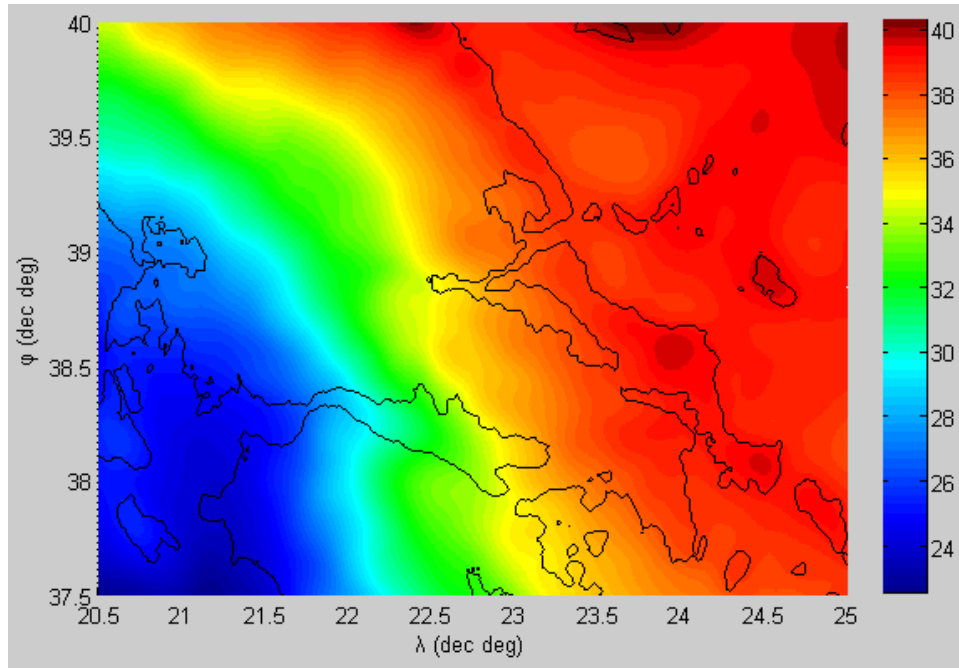


Εικόνα 4-10: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (2^η εναλλακτική επιφάνεια – μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)

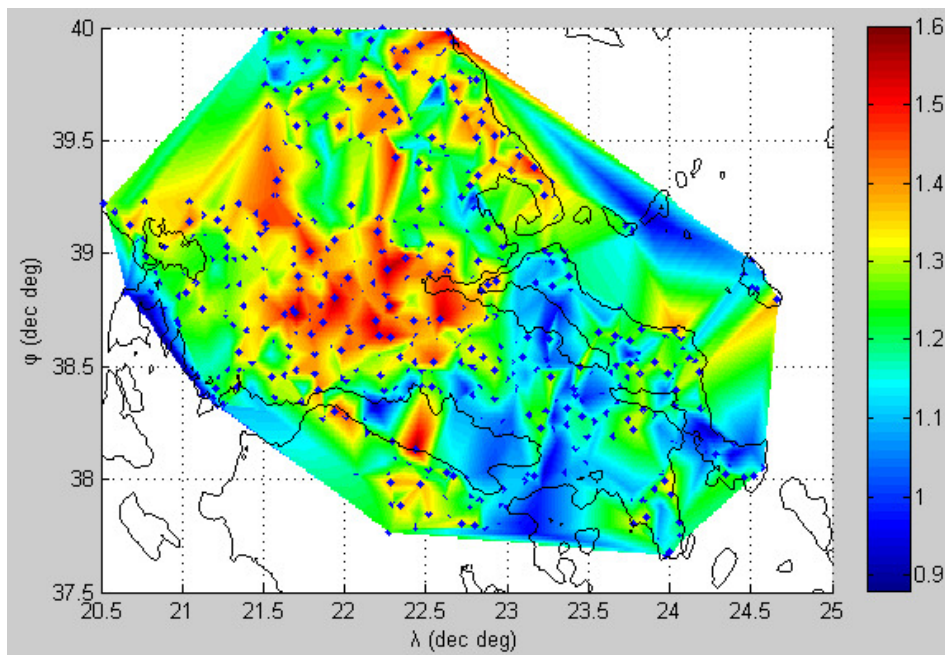
Βλέπουμε ότι και με τους δύο προαναφερθέντες συνδυαστικούς τρόπους, (μαζί με τις μετρήσεις μας στον πρώτο τρόπο συνδυάσαμε δεδομένα από μοντέλο σφαιρικών αρμονικών και στον δεύτερο δεδομένα μετρήσεων αστρογεωδαιτικής χωροστάθμησης), άρθηκε η «δυσαρμονία» της επιφάνειας στα άκρα της εικονιζόμενης περιοχής και τα αποτελέσματα είναι εξίσου ικανοποιητικά με τα αρχικά. Μπορούμε δηλ. να αντικαταστήσουμε την αρχική επιφάνεια, π.χ. με την 2^η εναλλακτική, η οποία λόγω της πληροφορίας που περιέχει για την κλίση του γεωειδούς σε αρκετά σημεία, δίνει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της πραγματικής επιφάνειας (ιδιαίτερα όσον αφορά τη διαφορά ΔN της αποχής μεταξύ 2 σημείων) κι έχει πολύ μεγαλύτερη συμβατότητα με τυχόν μοντέλα γεωειδούς σε γειτονικές περιοχές.

4.2. Μοντέλο 2^ο

Για το 2^ο μοντέλο, θα ξεκινήσουμε χρησιμοποιώντας την επιφάνεια του γεωειδούς που δίνει το μοντέλο σφαιρικών αρμονικών EGM 2008 για την περιοχή μελέτης, τα δεδομένα του οποίου τα πήραμε από το site του ICGEM (icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM) σε κάναβο 36'' x 36''. Παρακάτω βλέπουμε την επιφάνεια αυτή, καθώς και τις διαφορές του EGM 2008 από τις μετρήσεις μας.



Εικόνα 4-11: Το γεοειδές του EGM 08 για την περιοχή μελέτης



Εικόνα 4-12: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EGM08}$

	$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{EGM08}$ (σε m)
max	1.607
min	0.882
mean	1.253
st. dev.	0.134
RMS	1.260

Πίνακας 4-11: Στατιστικά των διαφορών ΔN του EGM 08 από τις μετρήσεις στην περιοχή μελέτης

4.2.1. Δημιουργία διορθωτικής επιφάνειας (corrector surface)

Πρώτη ενέργεια είναι να προσαρμόσουμε κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο την αρχική επιφάνεια του EGM 08 στα δεδομένα των μετρήσεων μας, χρησιμοποιώντας μια διορθωτική επιφάνεια (*corrector surface*). Ουσιαστικά δηλ. με τη βοήθεια της MET, θα προσδιορίσουμε τη βέλτιστη επιφάνεια $F(\varphi, \lambda)$ που προσαρμόζεται στις διαφορές ΔN μεταξύ των μετρήσεων και των τιμών του EGM 08 ($\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{EGM08}}$). Ως διορθωτικές επιφάνειες συνήθως χρησιμοποιούνται είτε πολυωνυμικές (χαμηλού βαθμού) είτε επιφάνειες 4, 5 ή 7 παραμέτρων του τύπου:

$$(4.29) \quad F_4(\varphi, \lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi \cos\lambda + \alpha_2 \cos\varphi \sin\lambda + \alpha_3 \sin\varphi$$

$$(4.30) \quad F_5(\varphi, \lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi \cos\lambda + \alpha_2 \cos\varphi \sin\lambda + \alpha_3 \sin\varphi + \alpha_4 \sin^2\varphi$$

$$(4.31) \quad F_7(\varphi, \lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi \cos\lambda + \alpha_2 \cos\varphi \sin\lambda + \alpha_3 \sin\varphi + \alpha_4 \frac{\cos\varphi \cos\lambda \sin\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}} + \alpha_5 \frac{\cos\varphi \sin\lambda \sin\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}} + \alpha_6 \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης “*function_PolynomSurfFit*” που είδαμε και στην προηγούμενη μέθοδο και της “*function_ParamSurfFit*” που δημιουργήσαμε για τη δεύτερη κατηγορία επιφανειών, προσδιορίστηκαν ελαχιστοτετραγωνικά οι συντελεστές της διορθωτικής επιφάνειας, με τις εξισώσεις παρατήρησης να έχουν τη μορφή:

$$(4.32) \quad F(\varphi_i, \lambda_i) = \Delta N_i^{\text{GPS/Lev, EGM08}} + v_i, \quad i=1, 2, \dots, 491 \text{ (ref. points)}$$

και την αποχή N του μοντέλου, σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής να δίνεται ως εξής:

$$(4.33) \quad N_p^{\text{model}} = N_p^{\text{EGM08}} + F(\varphi_p, \lambda_p)$$

Για την πολυωνυμική επιφάνεια 2^{ου} βαθμού που επιλέχτηκε τελικά, οι πίνακες της MET είχαν ως εξής:

$$A_{491 \times 6} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1 & 1 \\ u_2^2 & u_2 v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{491}^2 & u_{491} v_{491} & v_{491}^2 & u_{491} & v_{491} & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $u_i = \varphi_i - \varphi_0$ και $v_i = (\lambda_i - \lambda_0) \cdot \cos\varphi_i$,

$$X_{6 \times 1} = [a_{2,0} \quad a_{1,1} \quad a_{0,2} \quad a_{1,0} \quad a_{0,1} \quad a_{0,0}]^T$$

$$l_{491 \times 1} = [\Delta N_1^{GPS/Lev, EGM08} \quad \Delta N_2^{GPS/Lev, EGM08} \quad \dots \quad \Delta N_{491}^{GPS/Lev, EGM08}]^T$$

$$v_{491 \times 1} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_{491}]^T$$

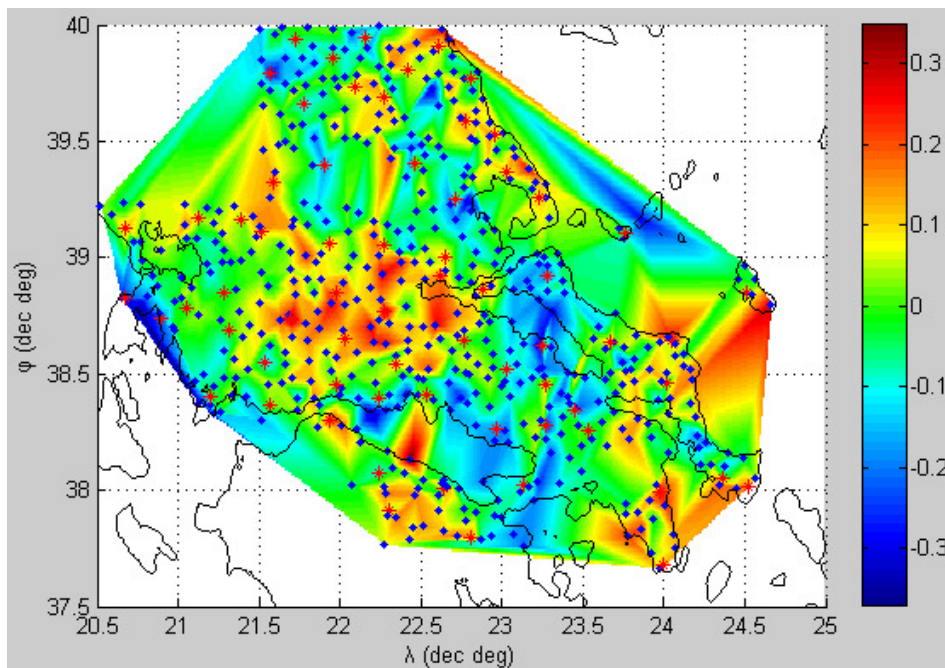
Οι συντελεστές του πολωνύμου και τα στατιστικά αποτελέσματα της βελτιωμένης επιφάνειας φαίνονται παρακάτω:

Συντελεστές πολωνομικής επιφάνειας 2 ^{ου} βαθμού	
$\alpha_{2,0}$	-0.0529 ± 0.0188
$\alpha_{1,1}$	-0.0051 ± 0.0238
$\alpha_{0,2}$	-0.0460 ± 0.0115
$\alpha_{1,0}$	0.0486 ± 0.0107
$\alpha_{0,1}$	-0.0412 ± 0.0089
$\alpha_{0,0}$	1.2893 ± 0.0097

Πίνακας 4-12: Υπολογισμένοι συντελεστές πολωνομικής επιφάνειας 2^{ου} βαθμού με τη MET

Στατιστικοί έλεγχοι βελτιωμένης επιφάνειας		
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	0.357	0.315
min (max negative)	-0.373	-0.298
mean	0	0.022
st. dev.	0.120	0.127
RMS	0.120	0.128

Πίνακας 4-13: Στατιστικά αποτελέσματα βελτιωμένης επιφάνειας



Εικόνα 4-13: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{model}$ (σε m)

4.2.2. Εξαγωγή του «σήματος» από τα υπόλοιπα των μετρήσεων

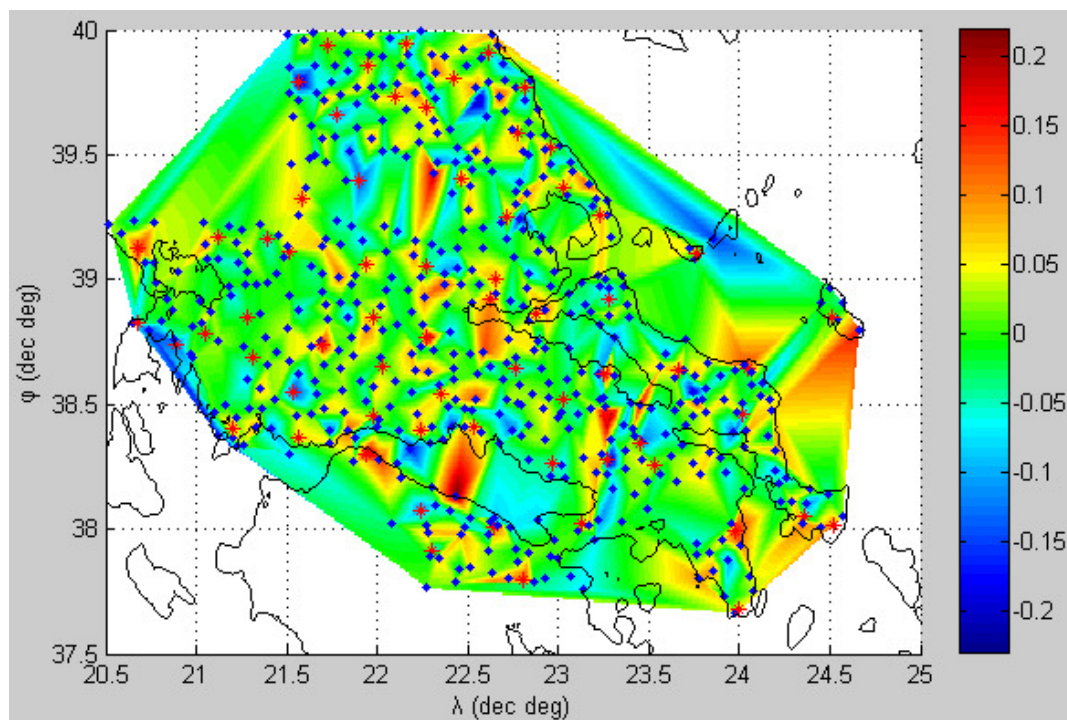
Στη συνέχεια, (όπως έγινε και στο 1^ο μοντέλο), εφαρμόσαμε τις δύο μεθόδους προσδιορισμού του σήματος (s) που εξηγήσαμε παραπάνω (σημειακής προσαρμογής και σταθμισμένου μέσου όρου) ως προς τα υπόλοιπα μεταξύ μετρήσεων και βελτιωμένης επιφάνειας, για περαιτέρω βελτίωση του μοντέλου. Η τελική τιμή της αποχής N του μοντέλου σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής μελέτης, θα δίνεται ως εξής:

$$(4.34) \quad N_p^{\text{Final Model}} = N_p^{\text{EGM08}} + F(\varphi_p, \lambda_p) + S_p$$

Για τη **σημειακή προσαρμογή**, χρησιμοποιήθηκε κι εδώ η εξίσωση 4.18 (συνάρτηση του Hirvonen), ως μεταβλητή η απόσταση μεταξύ των σημείων, κι η σταθερά k επιλέχθηκε ίση με 0.1. Τα στατιστικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου, καθώς και η απεικόνιση των διαφορών ΔN της τελικής επιφάνειας από τις μετρήσεις, φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Final Model}}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	0.223	0.232
min (max negative)	-0.238	-0.225
mean	0	0.020
st. dev.	0.063	0.099
RMS	0.063	0.100

Πίνακας 4-14: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής

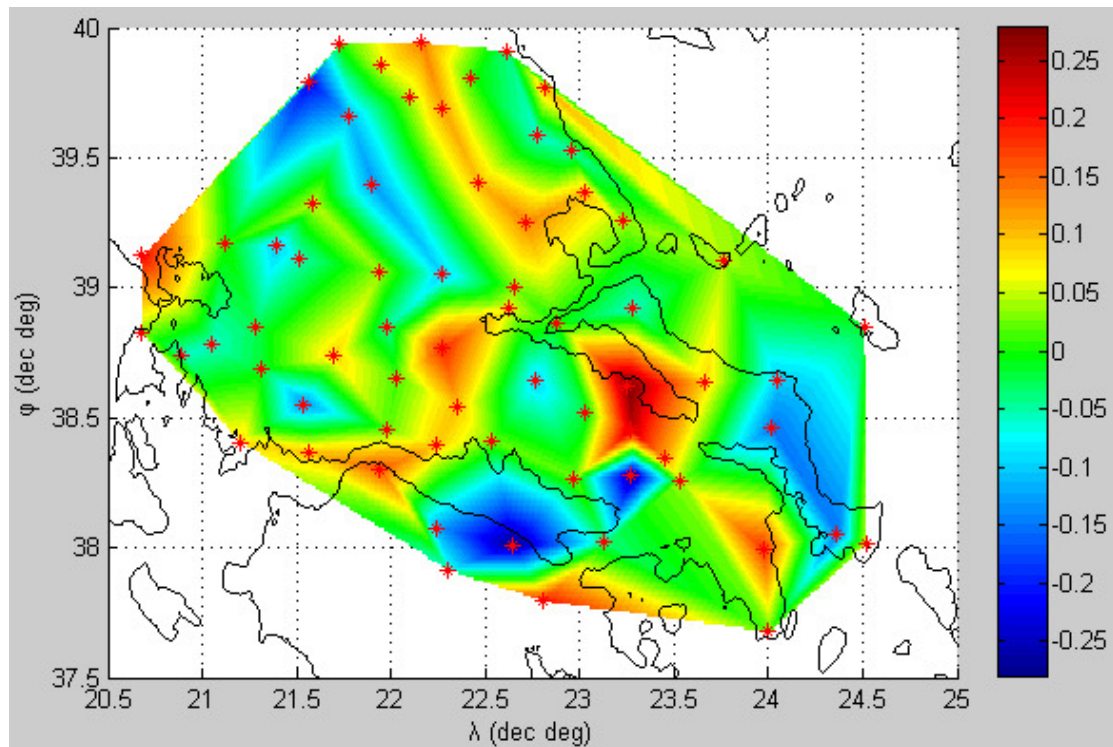


Εικόνα 4-14: Διαφορές $\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Final Model}}$ (σημειακή προσαρμογή)

Ενώ για τη μέθοδο του **σταθμισμένου μέσου όρου**, επιλέχθηκε τελικά η εξίσωση 4.24 για τον προσδιορισμό του βάρους με εκθέτη $m = 2$. Τα στατιστικά αποτελέσματα και η απεικόνιση των παρατηρούμενων διαφορών (για τα test points), φαίνονται παρακάτω:

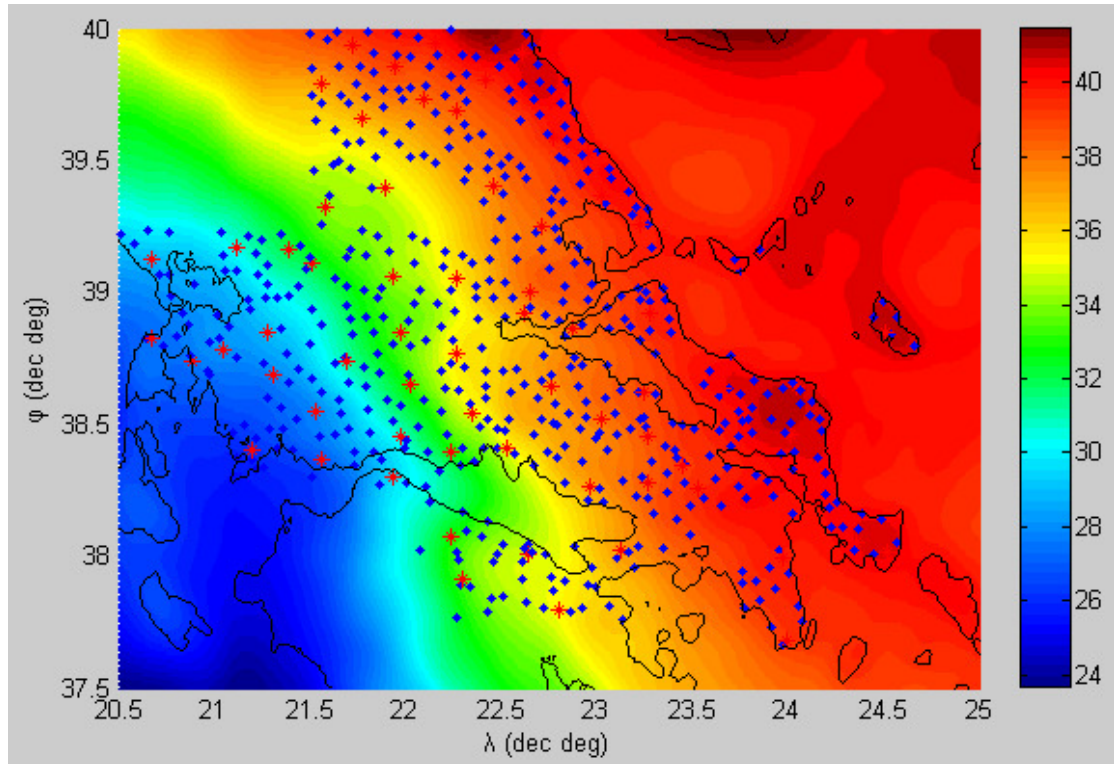
Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου	
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Final Model}$ (σε m)	Test points
max	0.222
min (max negative)	-0.246
mean	0.018
st. dev.	0.0101
RMS	0.102

Πίνακας 4-15: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μέσου όρου

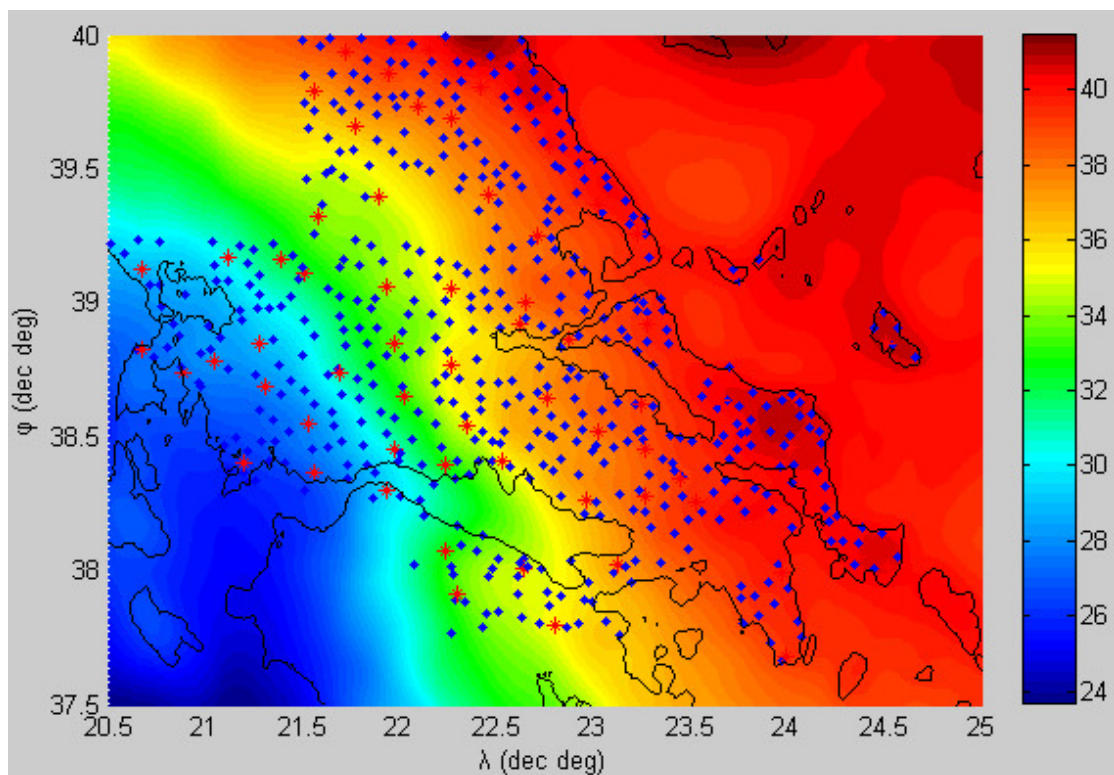


Εικόνα 4-15: Διαφορές $\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Final Model}$ (μέθοδος σταθμισμένου μέσου όρου)

Τέλος, στις εικόνες που ακολουθούν, βλέπουμε την τελική επιφάνεια του γεωειδούς που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση:



Εικόνα 4-16: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σημειακής προσαρμογής)



Εικόνα 4-17: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)

4.2.3. Αξιολόγηση 2^{ου} μοντέλου

Αξιολογώντας το 2^ο μοντέλο, βλέπουμε ότι η χρήση μιας διορθωτικής επιφάνειας στο γεωειδές ενός μοντέλου σφαιρικών αρμονικών προσεγγίζει σε αρκετά καλό βαθμό τις μετρήσεις μας, αυξάνοντας κατά πολύ τη **μέση ακρίβεια προσδιορισμού του N (το RMS από 1.25 m περίπου, μειώνεται στα 12 cm για τα ref. points και 13 cm για τα test points)**. Επιπρόσθετα, με την εφαρμογή των μεθόδων «εξαγωγής του σήματος», έχουμε σημαντική περαιτέρω βελτίωση της ακρίβειας, (μείωση του RMS κατά 50% περίπου για τα ref. points (RMS περί τα 6.5 cm) και κατά 25% περίπου για τα test points (RMS περί τα 10 cm) στη σημειακή προσαρμογή και πάλι RMS περί τα 10 cm για τα test points στη μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου).

Μπορούμε δηλ. να πούμε ότι με το 2^ο μοντέλο εν γένει, έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την αποχή N του γεωειδούς σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής μελέτης (ή αλλιώς να προσδιορίσουμε ορθομετρικά υψόμετρα μετρώντας μόνο με GPS), με μια μέση αβεβαιότητα περί τα 10 cm.

4.3. Μοντέλο 3^ο

Όσον αφορά το 3^ο μοντέλο, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το 2^ο, με τη μόνη διαφορά ότι ως αρχική επιφάνεια δεν χρησιμοποιήσαμε την επιφάνεια του γεωειδούς του EGM 2008, αλλά δημιουργήσαμε ένα βαρυτημετρικό μοντέλο γεωειδούς για την περιοχή με τη μέθοδο **Remove – Compute – Restore (RCR)**, που έχει περιγραφεί στο Α' μέρος της παρούσης.

4.3.1. Δημιουργία βαρυτημετρικού μοντέλου γεωειδούς

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, στα 623 σημεία του δικτύου μας, έχουν πραγματοποιηθεί και μετρήσεις βαρύτητας, με αποτέλεσμα σε καθένα εξ' αυτών να γνωρίζουμε την απόλυτη τιμή της βαρύτητας, πάνω στη φ.γ.ε. Εφαρμόζοντας την **αναγωγή ελεύθερου αέρα δg_{FA}** , παίρνουμε την **ανωμαλία ελεύθερου αέρα δg_{FA}** , που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο:

$$(4.35) \quad \Delta g_{FA} = g_{\text{μετρημένο}} + \delta g_{FA} - \gamma \approx g_{\text{μετρημένο}} + (0.3086 \cdot H) - \gamma$$

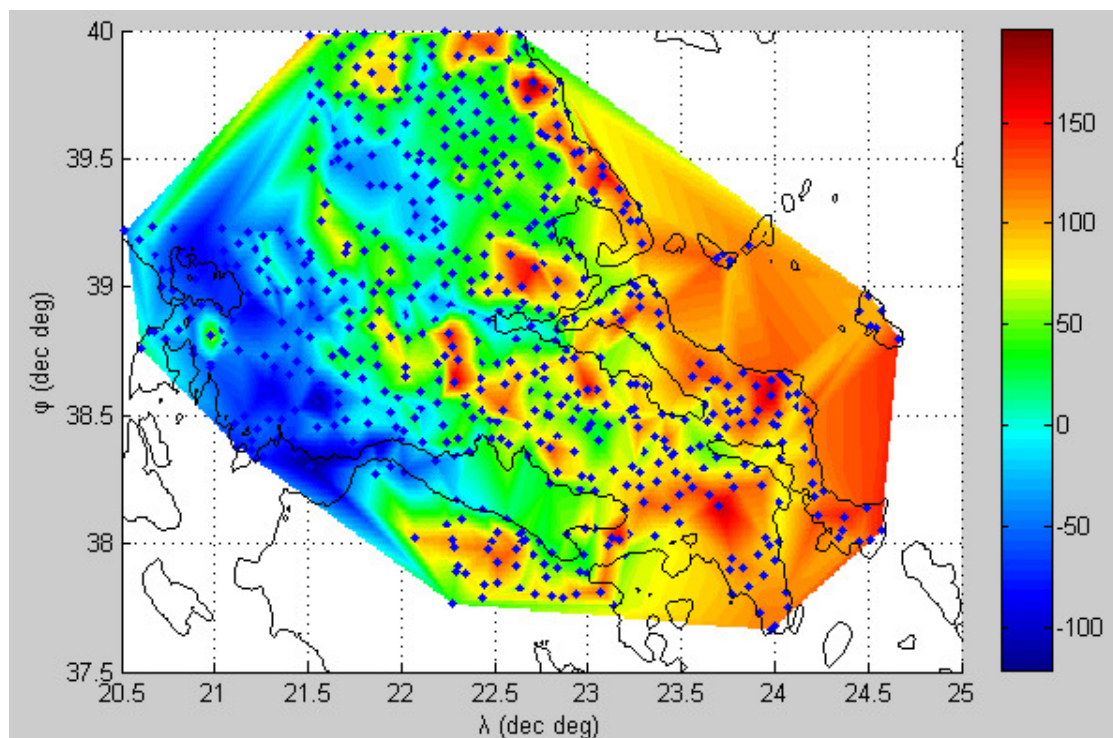
Στη συνέχεια, από την παραπάνω τιμή της ανωμαλίας ελεύθερου αέρα, αφαιρούμε την επίδραση ενός μοντέλου σφαιρικών αρμονικών, η οποία ουσιαστικά αντιπροσωπεύει την επίδραση του μεγάλου μήκους κύματος στην τιμή της ανωμαλίας βαρύτητας και η οποία δίνεται ως εξής:

$$(4.36) \quad \Delta g_{GM} = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{n(\max)} (n-1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$$

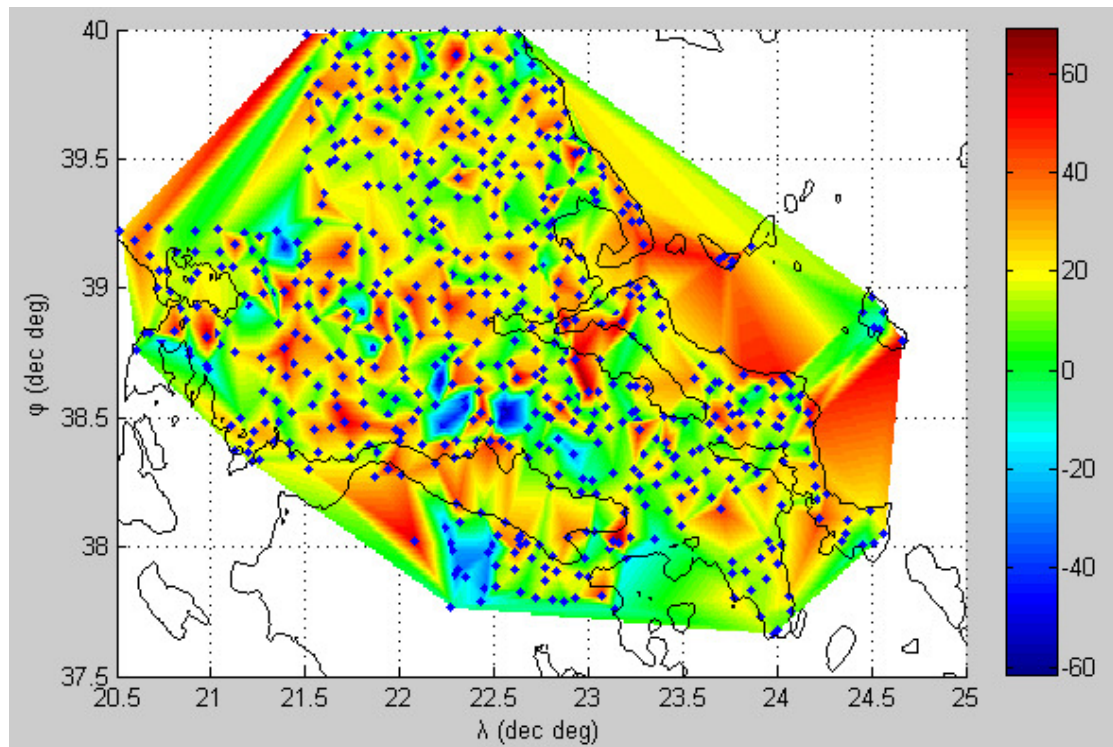
Στην παρούσα εργασία, επιλέχθηκε το EGM 2008, τις τιμές του οποίου τις πήραμε από την υπολογιστική μηχανή που υπάρχει στο site του ICGEM, σε κάναβο 36''x 36'', απ' όπου με παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης πήραμε τις τιμές στα 623 σημεία του δικτύου. Κατ' αυτό τον τρόπο, οδηγηθήκαμε στις ελαττωμένες ανωμαλίες βαρύτητας $\Delta g_{\text{res}(1)}$, δηλ. είναι:

$$\Delta g_{\text{res}(1)} = \Delta g_{\text{FA}} - \Delta g_{\text{GM}}$$

Το επόμενο βήμα κανονικά είναι να αφαιρεθεί από τις παραπάνω τιμές $\Delta g_{\text{res}(1)}$, ένας όρος που αντιπροσωπεύει την επίδραση της τοπογραφίας Δg_T . Όμως στις τιμές του EGM 2008, (σε αντίθεση με τα παλαιότερα χρησιμοποιούμενα μοντέλα), εξαιτίας του πολύ υψηλού βαθμού του αναπτύγματός του και της επακόλουθης μεγάλης διακριτικής του ικανότητας (περί τα 5'), περιέχεται και ένα τμήμα της πληροφορίας της τοπογραφίας. Με άλλα λόγια, αφαιρώντας την επίδραση του EGM 2008 από τις αρχικές ανωμαλίες Δg_{FA} , έχει ήδη αφαιρεθεί κι ένα μέρος της επίδρασης της τοπογραφίας, αυτό που αφορά τα μεγάλα και μεσαία μήκη κύματος. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό κι από τις εικόνες που ακολουθούν, όπου στην πρώτη που δείχνει τη χωρική κατανομή των Δg_{FA} , είναι εμφανής η συσχέτιση με την τοπογραφία, ενώ στη δεύτερη που δείχνει τη χωρική κατανομή των $\Delta g_{\text{res}(1)}$, δεν φαίνεται κάποια μεγάλης κλίμακας συσχέτιση με την τοπογραφία της περιοχής:



Εικόνα 4-18: Χωρική κατανομή των Δg_{FA} (σε mgal)



Εικόνα 4-19: Χωρική κατανομή των $\Delta g_{res(1)}$ (σε mgal)

Για το λόγο αυτό ακολουθήθηκαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις, όπου στην πρώτη δοκιμαστικά δεν αφαιρέθηκε η επίδραση της τοπογραφίας, αλλά υιοθετήθηκαν οι $\Delta g_{res(1)}$ ως τελικές υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας, ενώ στη δεύτερη πραγματοποιήθηκε και η περαιτέρω τοπογραφική αναγωγή (με τη μέθοδο RTM), για να ελέγξουμε με αυτό τον τρόπο την επάρκεια της πρώτης προσέγγισης.

Στην πρώτη προσέγγιση, όπως αναφέρθηκε, δεν πραγματοποιήθηκε περαιτέρω αφαίρεση της επίδρασης της τοπογραφίας. Από τις παραπάνω τιμές $\Delta g_{res(1)}$ στα 609 σημεία του δικτύου (απερρίφθησαν 14 σημεία με χονδροειδές σφάλμα), δημιουργήσαμε έναν κάνναβο, όσο το δυνατό ομαλό και που να αποδίδει παράλληλα τις τάσεις των μετρημένων τιμών $\Delta g_{res(1)}$ (συνάρτηση 'DgFitLowess50'), με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε το $N_{\Delta g}$ σε κάθε κορυφή (p) του καννάβου της συνολικής περιοχής, ως εξής:

$$(4.37) \quad N_{\Delta g(p)} = \frac{\Delta\varphi\Delta\lambda R}{4\pi\gamma} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \Delta g_{res}(\varphi_n, \lambda_m) \cdot \cos \varphi_n \cdot S(\psi_{p,(\varphi_n, \lambda_m)})$$

Στη συνέχεια για να βρούμε το τελικό N του μοντέλου σε κάθε σημείο του καννάβου, παίρνουμε το N_{GM} (για το EGM 2008 – από το ICGEM) και σε κάθε σημείο της περιοχής, το N του μοντέλου της αρχικής επιφάνειας, θα δίνεται ως εξής:

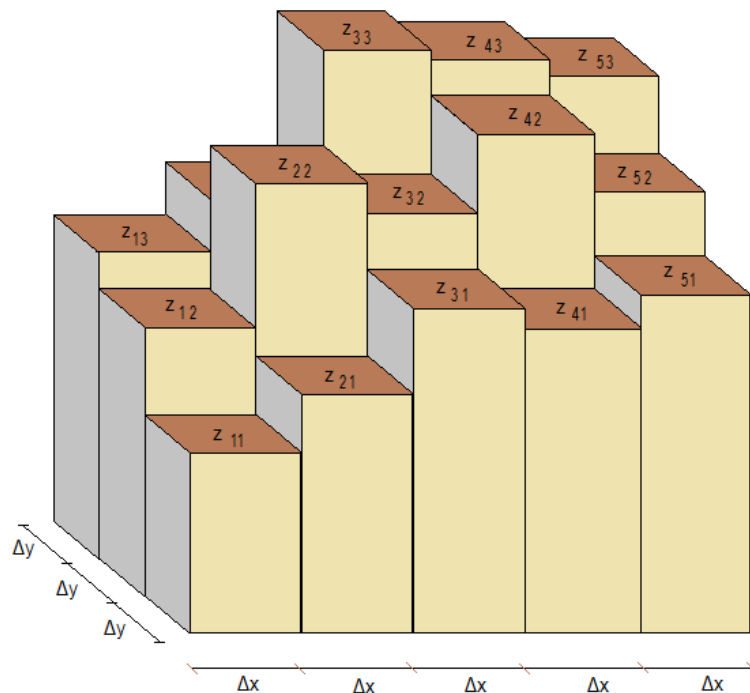
$$(4.38) \quad N = N_{GM} + N_{\Delta g}$$

Τα στατιστικά αποτελέσματα της αρχικής αυτής επιφάνειας, φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικά αποτελέσματα αρχικού μοντέλου	
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Model}}$ (σε m)	
max	0.951
min (max negative)	-0.476
mean	0.258
st. dev.	0.201
RMS	0.320

Πίνακας 4-16: Στατιστικά αποτελέσματα αρχικού βαρυτημετρικού μοντέλου (1^η μεθοδολογία)

Στη δεύτερη προσέγγιση, πραγματοποιήθηκε περαιτέρω αφαίρεση της επίδρασης της τοπογραφίας Δg_T (με τη μέθοδο RTM – Residual Terrain Model), για να συγκριθεί κατόπιν με την πρώτη. Για την αναπαράσταση της τοπογραφίας, πήραμε από το site του ICGEM το ψηφιακό μοντέλο εδάφους του *etopo 1*, σε κάρναβο 36'' x 36'', χωρίζοντας ουσιαστικά την περιοχή σε ορθογώνια πρίσματα που αναπαριστούν την τοπογραφία, όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 4-20: Αναπαράσταση τοπογραφίας με ορθογώνια πρίσματα

Θεωρώντας το εκάστοτε σημείο υπολογισμού ως αρχή των αξόνων (0,0,0), η έλξη που ασκεί το κάθε πρίσμα σε αυτό δίνεται από τον τύπο του D. Plouff:

$$(4.39) \quad g = G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left(z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \ln(R_{ijk} + y_j) - y_j \ln(R_{ijk} + x_i) \right)$$

όπου $\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$ και $R_{ijk} = (x_i^2 + y_j^2 + z_k^2)^{1/2}$.

Σύμφωνα με την RTM, καθορίζεται μια **επιφάνεια αναφοράς** (με υψόμετρο H_{ref}), η οποία αντιπροσωπεύει τη μεγάλη (και μεσαίου) μήκους κύματος πληροφορία της τοπογραφίας της περιοχής, (που περιέχεται ουσιαστικά στο χρησιμοποιούμενο γεωδυναμικό μοντέλο). Αυτό που λαμβάνεται υπ' όψιν, για τον υπολογισμό της επίδρασης της τοπογραφίας, είναι η **απόκλιση της πραγματικής τοπογραφίας από αυτή την επιφάνεια αναφοράς**. Η απόκλιση αυτή αντιπροσωπεύει την μικρού μήκους κύματος πληροφορία που δεν έχει ληφθεί υπ' όψιν. Κατ' αυτό τον τρόπο, για να βρούμε τη συνολική επίδραση της τοπογραφίας που ασκείται σε ένα σημείο και η οποία πρέπει τελικά να αφαιρεθεί για να οδηγηθούμε στις τελικές υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας, αθροίζουμε την επίδραση των τοπογραφικών μαζών υπεράνω αυτής της επιφάνειας κι αφαιρούμε την επίδραση των μαζών κάτωθεν αυτής, δηλ. αθροίζουμε την έλξη που ασκούν τα τμήματα των πρισμάτων υπεράνω της επιφάνειας αναφοράς ($z_1 = H_{ref}$, $z_2 = H$, με $H > H_{ref}$, για τον τύπο του Plouff) και αφαιρούμε τα «κενά» που δημιουργούνται από τα πρίσματα που είναι κάτω από την επιφάνεια αναφοράς ($z_1 = H_{ref}$, $z_2 = H$, με $H < H_{ref}$).

Η επίδραση της τοπογραφίας Δg_T μέσω της RTM, θα μπορούσε να παρασταθεί κι από την αφαίρεση δύο πλακών Bouguer μείον την τοπογραφική διόρθωση (TC), με την προϋπόθεση ότι η επιφάνεια αναφοράς για την εγγύς περιοχή του σημείου μπορεί να παρασταθεί από ένα επίπεδο, δηλ.:

$$(4.40) \quad \Delta g_T = 2 \pi G \rho (H - H_{ref}) - TC$$

Η προαναφερθείσα επιφάνεια αναφοράς ορίζεται είτε από το μέσο όρο των υψομέτρων της εγγύς περιοχής (για το εκάστοτε σημείο), π.χ. μια επιφάνεια 100 km x 100 km, είτε καλύτερα από το ανάπτυγμα της τοπογραφίας ενός μοντέλου σε σφαιρικές αρμονικές μέχρι το βαθμό του χρησιμοποιούμενου γεωδυναμικού μοντέλου. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα της τοπογραφίας του *etopo1* σε σφαιρικές αρμονικές, από το site του ICGEM, μέχρι βαθμού 2159.

Επίσης, για τις θαλάσσιες περιοχές ($H < 0$), για να αποφευχθεί η διάκρισή τους από τις χερσαίες, καθ' όσον θα έπρεπε να χρησιμοποιείται διαφορετική τιμή πυκνότητας, ακολουθήθηκε η μέθοδος RET (*Rock - Equivalent Topography*), όπου τα υψόμετρα της τοπογραφίας του πυθμένα αντικαθίστανται από τα «ισοδύναμα»:

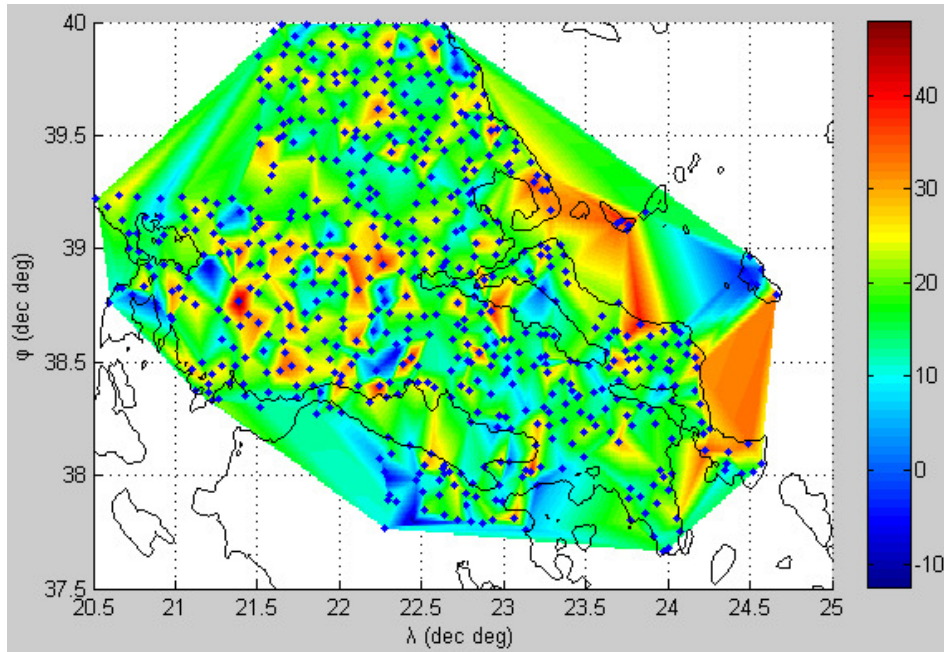
$$(4.41) \quad H^* = H \cdot (1 - \rho_w / \rho)$$

και πλέον λαμβάνονται υπ' όψιν στη μέθοδο, σαν υψόμετρα χερσαίας περιοχής.

Με αυτό τον τρόπο, οδηγούμαστε στις τελικές τιμές των υπολειπόμενων ανωμαλιών βαρύτητας (Δg_{res}) για τα σημεία του δικτύου ως εξής:

$$(4.42) \quad \Delta g_{res} = \Delta g_{FA} - \Delta g_T - \Delta g_{GM}$$

Η χωρική κατανομή των Δg_{res} φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 4-21: Χωρική κατανομή των Δg_{res} (σε mgal)

Όπως φαίνεται κι από τις εικόνες (4.19) και (4.21), οι Δg_{res} δημιουργούν μια πολύ πιο ομαλή επιφάνεια από τις $\Delta g_{res(1)}$, γεγονός που καθιστά πιο εύκολη την παρεμβολή τους και τη δημιουργία ενός ομαλού καννάβου.

Στη συνέχεια, βάσει της εξίσωσης (4.37), βρίσκουμε τις $\zeta_{\Delta g}$ (με την RTM προσδιορίζουμε το σχεδόν-γεωειδές αντί του γεωειδούς, οπότε αναφερόμαστε σε ανωμαλίες υψομέτρου ζ , αντί των αποχών του γεωειδούς N), στις οποίες προσθέτουμε τις ανωμαλίες υψομέτρου του γεωδυναμικού μοντέλου ζ_{GM} και τις $\zeta_{ind} = \Delta T / \gamma$, που αφορούν την έμμεση επίδραση της τοπογραφίας κι εκφράζουν τη διαφορά δυναμικού μεταξύ της πραγματικής τοπογραφίας και αυτής που διαμορφώνεται με την εφαρμογή της RTM κι άρα είναι:

$$(4.43) \quad \zeta = \zeta_{\Delta g} + \zeta_{GM} + \zeta_{ind}$$

κι από εκεί για να αναχθούμε στο γεωειδές:

$$(4.44) \quad N = \zeta - (\Delta g_B / \gamma) \cdot H$$

Τα στατιστικά αποτελέσματα της αρχικής επιφάνειας, με τη δεύτερη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε, φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Στατιστικά αποτελέσματα αρχικού μοντέλου	
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Model}$ (σε m)	
max	0.693
min (max negative)	-0.310
mean	0.173
st. dev.	0.136
RMS	0.220

Πίνακας 4-17: Στατιστικά αποτελέσματα αρχικού βαρνημετρικού μοντέλου (2^η μεθοδολογία)

Από την εφαρμογή των δύο παραπάνω προσεγγίσεων για τη δημιουργία της αρχικής επιφάνειας του βαρυτημετρικού μοντέλου, βλέπουμε ότι η δεύτερη δίνει σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα, όπως φυσικά είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι σε αυτήν οι υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας είναι εντελώς απαλλαγμένες από την εξάρτηση με την τοπογραφία (θεωρητικά) κι ως εκ τούτου δεν εισάγουν κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό του N . Θα μπορούσαμε να είχαμε ακόμα καλύτερα αποτελέσματα, με τη χρήση ενός λεπτομερέστερου ψηφιακού μοντέλου για την εγγύς περιοχή του εκάστοτε σημείου, όμως οι δυνατότητες του λογισμικού δεν μας το επέτρεπαν.

Ένας άλλος παράγοντας δυσκολίας είναι το γεγονός ότι έξω από την περιοχή των μετρήσεων δεν έχουμε πληροφορία για την κατανομή των ανωμαλιών βαρύτητας, με αποτέλεσμα η παρεμβολή στην εκτός μετρήσεων περιοχή να εισαγάγει σημαντικά σφάλματα, τα οποία μπορεί να έχουν μεγάλη επίδραση στον υπολογισμό του $N_{\Delta g}$, ιδιαίτερος για τα ακριανά σημεία των μετρήσεων. Για να παρακαμφθεί αυτή η δυσκολία, ελήφθησαν από το site του *University of California, San Diego* (http://topex.ucsd.edu/cgi-bin/get_data.cgi) τιμές ανωμαλιών βαρύτητας σε κάρναβο $1' \times 1'$ για την ευρύτερη περιοχή γύρω από τις μετρήσεις. Οι τιμές αυτές προέρχονται από δορυφορικές μετρήσεις αλτιμετρίας και καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος της γήινης επιφάνειας (βλ. *Sandwell, D. T., and W. H. F. Smith, (2009), "Global marine gravity from retracked Geosat and ERS-1 altimetry: Ridge Segmentation versus spreading rate"* και *Sandwell, D. T., E. Garcia, K. Soofi, P. Wessel, and W. H. F. Smith, (2013), "Towards 1 mGal Global Marine Gravity from CryoSat-2, Envisat, and Jason-1, The Leading Edge"*). Κατ' αυτό τον τρόπο, άρθηκε αυτή η δυσκολία και ο κάρναβος των ανωμαλιών βαρύτητας στην εκτός μετρήσεων περιοχή δεν δημιουργήθηκε «αυθαίρετα» ως επέκταση του κάρναβου της περιοχής που περικλείεται από τις μετρήσεις, αλλά χρησιμοποιήθηκαν οι προαναφερθείσες τιμές.

4.3.2. Διορθωτική επιφάνεια κι εξαγωγή του σήματος

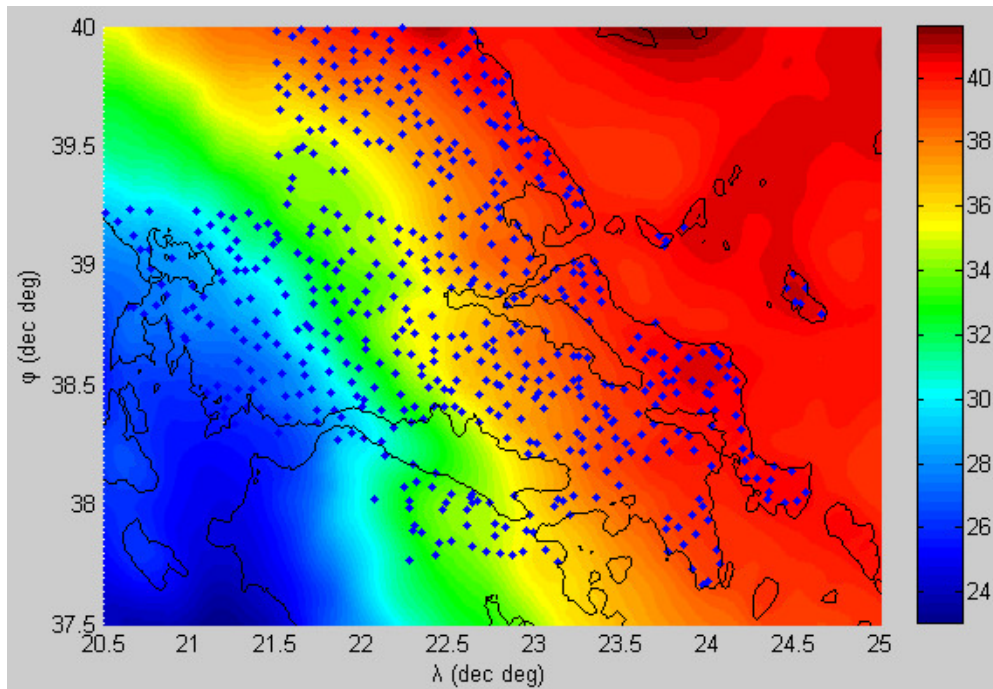
Στη συνέχεια, κατά τα γνωστά, χρησιμοποιήσαμε μια διορθωτική επιφάνεια για την προσαρμογή του αρχικού μοντέλου (που δημιουργήσαμε με τη 2^η προσέγγιση) στις μετρημένες τιμές της αποχής N των 491 *reference points* και κατόπιν εφαρμόσαμε τις δύο μεθόδους εξαγωγής του σήματος, που είδαμε και παραπάνω. Τα τελικά αποτελέσματα του μοντέλου, μετά και την εφαρμογή των δύο μεθόδων εξαγωγής του σήματος, φαίνονται παρακάτω:

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου		
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Final Model}}$ (σε m)	Reference points	Test points
max	0.246	0.269
min (max negative)	-0.245	-0.221
mean	0	0.021
st. dev.	0.065	0.100
RMS	0.065	0.101

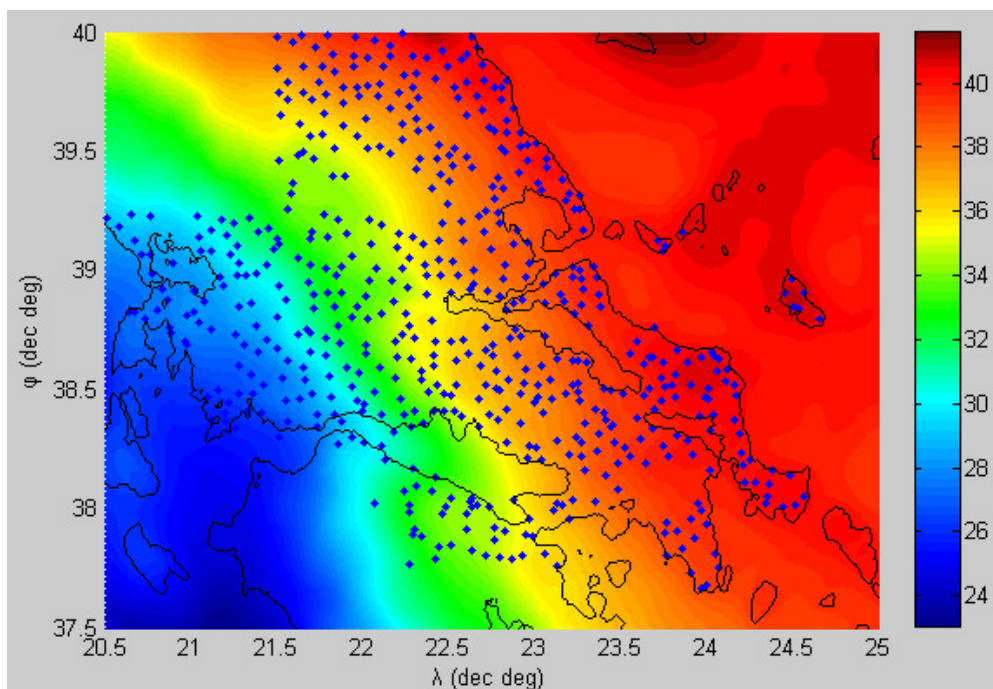
Πίνακας 4-18: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σημειακής προσαρμογής

Στατιστικοί έλεγχοι μεθόδου	
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Model}$ (σε m)	Test points
max	0.241
min (max negative)	-0.232
mean	0.019
st. dev.	0.101
RMS	0.102

Πίνακας 4-19: Στατιστικά αποτελέσματα μεθόδου σταθμισμένου μ.ο.



Εικόνα 4-22: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σημειακής προσαρμογής)



Εικόνα 4-23: Τελική επιφάνεια γεωειδούς (μέθοδος σταθμισμένου μ.ο.)

4.3.3. Αξιολόγηση 3^{ου} μοντέλου

Αξιολογώντας και το τρίτο μοντέλο, μπορούμε να πούμε ότι δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα, δεδομένου ότι η **μέση αβεβαιότητα προσδιορισμού του N είναι περί τα ± 10 cm**. Με το συγκεκριμένο μοντέλο, θα μπορούσαμε ίσως να πάρουμε κι ακόμα καλύτερα αποτελέσματα, όπως αναφέρθηκε πρωτύτερα, με την εισαγωγή ενός λεπτομερέστερου ψηφιακού μοντέλου εδάφους, για την επίδραση της τοπογραφίας στην εγγύς περιοχή του εκάστοτε σημείου υπολογισμού.

4.4. Συνολική Αξιολόγηση μοντέλων

Απαραίτητη προϋπόθεση για τη συνολική αξιολόγηση των 3 μοντέλων που περιγράφηκαν στις προηγούμενες παραγράφους είναι και ο έλεγχος των αποτελεσμάτων τους ως προς τα **22 extra test points**, δηλ. τα σημεία εκείνα που δεν προέρχονται από το δίκτυο μετρήσεων της ΓΥΣ, αλλά ελήφθησαν αποκλειστικά για τον εξωτερικό έλεγχο των μοντέλων. Τα σημεία αυτά όπως προειπώθηκε, είναι συγκεντρωμένα σε τμήμα μόνο της περιοχής μελέτης. Ωστόσο τα αποτελέσματα αυτού του ελέγχου είναι μείζονος σημασίας για την τελική αξιοπιστία των μοντέλων. Στους πίνακες που ακολουθούν, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα του κάθε μοντέλου για τα *extra test points* (μετά και την εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής – LSC):

Στατιστικοί έλεγχοι 1 ^{ου} μοντέλου	
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Model}}$ (σε m)	Extra test points
max	0.356
min (max negative)	-0.203
mean	0.062
st. dev.	0.136
RMS	0.147

Πίνακας 4-20: Στατιστικά αποτελέσματα 1^{ου} μοντέλου ως προς τα *extra test points*

Στατιστικοί έλεγχοι 2 ^{ου} μοντέλου	
$\Delta N = N_{\text{GPS/Lev}} - N_{\text{Model}}$ (σε m)	Extra test points
max	0.195
min (max negative)	-0.115
mean	0.066
st. dev.	0.066
RMS	0.093

Πίνακας 4-21: Στατιστικά αποτελέσματα 2^{ου} μοντέλου ως προς τα *extra test points*

Στατιστικοί έλεγχοι 3 ^{ου} μοντέλου	
$\Delta N = N_{GPS/Lev} - N_{Model}$ (σε m)	Extra test points
max	0.275
min (max negative)	-0.093
mean	0.070
st. dev.	0.073
RMS	0.100

Πίνακας 4-22: Στατιστικά αποτελέσματα 3^{ου} μοντέλου ως προς τα extra test points

Συγκρίνοντας τους πίνακες (4-20), (4-21), (4-22), με τους (4-3), (4-14), (4-18) αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι τα 22 extra test points δίνουν αποτελέσματα ίδιας τάξης μεγέθους με τα 67 test points. Αυτή η «συμφωνία» των αποτελεσμάτων είναι απαραίτητη για την αξιοπιστία των μοντέλων και μας δίνει μια σημαντική ένδειξη ότι η πραγματική τελική τους ακρίβεια όντως κυμαίνεται στα επίπεδα που αναφέρθηκαν στην αξιολόγηση του καθενός μοντέλου στις προηγούμενες παραγράφους.

Επίσης, είναι εμφανές ότι η 2η και η 3η μέθοδος δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα από την 1η (RMS περί τα 10 cm, ενώ στην πρώτη περί τα 15 cm), δηλ. μας δίνουν τη δυνατότητα προσδιορισμού της αποχής του γεωειδούς με μικρότερη αβεβαιότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ως βάση της 1ης μεθόδου είχαμε μια γεωμετρική προσέγγιση για τον προσδιορισμό του γεωειδούς που, εξαιτίας και του μεγέθους της εν λόγω περιοχής, δεν μπορεί να αποδώσει τη συνολική επιφάνεια με όλη τη δυνατή λεπτομέρεια, ενώ στη 2^η και 3^η μέθοδο, η βάση της προσέγγισης ήταν είτε ένα μοντέλο σφαιρικών αρμονικών είτε ένα βαρυτημετρικό μοντέλο γεωειδούς, με αποτέλεσμα να αποδίδονται πολύ καλύτερα οι κατά τόπους διαφοροποιήσεις του γήινου δυναμικού.

Τέλος, αυτό που πρέπει να έχουμε υπ' όψιν, είναι ότι με τις παραπάνω μεθόδους, **δεν μπορούμε να προβλέψουμε τιμές γεωειδούς με ικανοποιητική ακρίβεια, πέραν της περιοχής των μετρήσεων**, όπως επίσης επισφαλής θα ήταν και στα ακρότατα όρια της υπό μελέτη περιοχής. Μπορεί να υπάρχει η δυνατότητα καταγραφής της γενικής τάσης της επιφάνειας στις περιοχές αυτές, αλλά οι τιμές της αποχής N, δεν μπορούν να θεωρηθούν ότι πληρούν τις προαναφερθείσες απαιτήσεις ακρίβειας κι ως εκ τούτου η χρήση των δημιουργηθέντων μοντέλων γεωειδούς συνίσταται μόνο στην υπο μελέτη περιοχή, ήτοι Στερεά Ελλάδα, Εύβοια, Θεσσαλία, κατά κύριο λόγο.

Κεφάλαιο 5^ο: Συμπεράσματα - Προτάσεις

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, θα αναφερθούμε στα συμπεράσματα που εξήχθησαν κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης με το συγκεκριμένο αντικείμενο και τα οποία προέκυψαν τόσο από τη μελέτη της βιβλιογραφίας, όσο και από την επεξεργασία των δεδομένων, καθώς επίσης κι από τις δυσχέρειες που αντιμετωπίστηκαν στο διάστημα αυτό. Επίσης, διατυπώνονται μια σειρά προτάσεων που απορρέουν από τα παραπάνω και ενδείκνυνται για μελλοντική έρευνα.

5.1. Συμπεράσματα

➤ Όσον αφορά τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών, ένα λεπτό θέμα στο οποίο δεν δίνεται συνήθως ιδιαίτερη προσοχή, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένα «γκρίζο» σημείο που συναντάται αρκετές φορές στη διεθνή βιβλιογραφία, είναι το γεγονός ότι για τον **πλήρη ορισμό ενός μοντέλου, είναι απαραίτητο να ορίζεται και το συγκεκριμένο χωροσταθμικό ελλειψοειδές που χρησιμοποιείται**. Κι αυτό γιατί οι μηχανικές ιδιότητες του χωροσταθμικού ελλειψοειδούς (π.χ. μάζα, περιστροφή, κλπ.) είναι αυτές που τελικά καθορίζουν και την τιμή W_0 , που είναι η τιμή του γήινου δυναμικού πάνω στην ισοδυναμική επιφάνεια που αποτελεί το γεωειδές. Δύο ελλειψοειδή με διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες, (ακόμα και με ίδια γεωμετρικά στοιχεία), δίνουν διαφορετική τιμή W_0 , άρα ορίζουν διαφορετική ισοδυναμική επιφάνεια ως «επιφάνεια του γεωειδούς». Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει το «γεωειδές του X μοντέλου σφαιρικών αρμονικών», αλλά «το γεωειδές του X μοντέλου σφαιρικών αρμονικών ως προς το Y χωροσταθμικό ελλειψοειδές». Γι' αυτό και η χρησιμοποίηση π.χ. του GRS 80 αντί του WGS 84, δίνει μια συστηματική απόκλιση στην αποχή του γεωειδούς της τάξης των 93 cm.

➤ Ως προς τον προσδιορισμό του γεωειδούς, **οι πλέον διαδεδομένες προσεγγίσεις στη σύγχρονη βιβλιογραφία, αποτελούν συνδυασμό διαφόρων μεθόδων**. Τα συνήθως χρησιμοποιούμενα δεδομένα είναι μετρήσεις βαρύτητας, GPS/Leveling και δεδομένα από κάποιο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών, ενώ σπανιότερα χρησιμοποιούνται και δεδομένα αστρογεωδαιτικής χωροστάθμησης. Σύμφωνα με τα παραπάνω, για ένα περιφερειακό (ή και τοπικό) μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί το γεωειδές από κάποιο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών ή ένα βαρυτημετρικό μοντέλο (που δημιουργείται με τη μέθοδο RCR συνήθως), το οποίο στη συνέχεια θα προσαρμοστεί σε δεδομένα μετρήσεων GPS/Leveling με τη χρήση

διορθωτικής επιφάνειας και στη συνέχεια για περαιτέρω βελτίωση εάν χρειάζεται, θα χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος προσδιορισμού του «σήματος» από τα υπόλοιπα των μετρήσεων που προέκυψαν κατά την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή της διορθωτικής επιφάνειας, (π.χ. η σημειακή προσαρμογή – *collocation* που είναι ιδιαίτερα αξιόπιστη και διαδεδομένη). Στην περίπτωση της δημιουργίας τοπικού μοντέλου κυρίως, μπορεί αντ' αυτού να γίνει αρχικά προσαρμογή μιας πολυωνυμικής συνήθως επιφάνειας σε δεδομένα μετρήσεων GPS/Leveling και στη συνέχεια αναλόγως το μέγεθος της περιοχής και την ανάγκη βελτίωσης της επιφάνειας, πραγματοποιείται κι εδώ εξαγωγή του σήματος από τα υπόλοιπα των μετρήσεων. Μετά και τον προσδιορισμό του σήματος, οι αποκλίσεις ΔN που παρατηρούνται μεταξύ τελικού μοντέλου και μετρήσεων, (εάν δεν υπάρχει κάποιο συστηματικό σφάλμα), ακολουθούν τυχαία χωρική κατανομή.

➤ Πριν από την επεξεργασία των δεδομένων που παίρνουμε από τις μετρήσεις στο πεδίο, είναι **απαραίτητος ο στατιστικός τους έλεγχος**, προκειμένου να αποφευχθεί η είσοδος τέτοιων που θα εισάγουν σφάλματα και μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα. Κανένας έλεγχος δεν μπορεί να θεωρηθεί αλάνθαστος, ωστόσο η εφαρμογή συνδυασμού ελέγχων μπορεί να αποτρέψει την εισαγωγή «επιζήμιων» δεδομένων.

➤ Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, εφαρμόστηκαν **3 μέθοδοι προσδιορισμού του γεωειδούς**. Στην πρώτη μέθοδο, ακολουθήθηκε αρχικά μια γεωμετρική προσέγγιση, η οποία στη συνέχεια συνδυάστηκε εναλλακτικά, πρώτα με δεδομένα μοντέλου σφαιρικών αρμονικών και κατόπιν με δεδομένα αστρογεωδαιτικής χωροστάθμησης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο συνδυασμός των δεδομένων ήταν επιτυχής, γεγονός που μας δίνει τη δυνατότητα, κυρίως ως προς την αστρογεωδαιτική χωροστάθμηση, να εντάξουμε και τις μετρήσεις αυτές στον προσδιορισμό του μοντέλου μας. Στη δεύτερη και τρίτη μέθοδο, χρησιμοποιήσαμε ένα αρχικό βαρυτημετρικό μοντέλο, το οποίο προσαρμόσαμε στις μετρημένες αποχές N του δικτύου μας και στη συνέχεια με τη χρήση δύο μεθόδων εξαγωγής σήματος, εξήχθη το τελικό μοντέλο σε κάθε περίπτωση. Η **μέση ακρίβεια προσδιορισμού της αποχής του γεωειδούς για τα 3 μοντέλα ήταν περί τα ± 15 cm, ± 10 cm και ± 10 cm**, αντίστοιχα, γεγονός που σημαίνει ότι για τοπογραφικές εργασίες (εντός της υπό μελέτη περιοχής της Κεντρικής Ελλάδος) με σχετικά χαμηλές απαιτήσεις υψομετρικής ακρίβειας (10 – 15 cm), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιο από τα παραπάνω μοντέλα γεωειδούς και μόνο με χρήση GPS στις εργασίες πεδίου, να πάρουμε ορθομετρικά υψόμετρα. Συγκρίνοντας αυτές τις τιμές, με τις ακρίβειες που συναντήσαμε στα μοντέλα γεωειδούς από τη διεθνή κι ελληνική βιβλιογραφία, τα αποτελέσματα για την υπό μελέτη περιοχή κρίνονται ιδιαίτερος ικανοποιητικά. Στον πίνακα που ακολουθεί, βλέπουμε τη σύγκριση των μοντέλων που παρατέθηκαν στο 2^ο κεφάλαιο, με τα 3 μοντέλα που δημιουργήθηκαν στα πλαίσια της παρούσης εργασίας:

α/α	Μοντέλο	Είδος	Περιοχή μελέτης	Μέση ακρίβεια - Παρ/σεις
1	AGP2006	περιφερειακό μεγάλης έκτασης	Αφρική (30.000.000 km ²)	Έλεγχος σε 62 σημεία GPS/Leveling στη Ν. Αφρική με RMS ±18cm και σε 14 σημεία στην Αλγερία με RMS ±27cm
2	GARR98	περιφερειακό μεγάλης έκτασης	Καναδάς (10.000.000 km ²)	Έλεγχος σε 1300 σημεία GPS/Leveling με RMS ±14cm
3	TZG07	περιφερειακό	Τανζανία (950.000 km ²)	Έλεγχος σε 15 σημεία GPS/Leveling με RMS ±104cm
4	TG2003	περιφερειακό	Τουρκία (800.000 km ²)	Έλεγχος σε 28 σημεία GPS/Leveling με RMS ±10.5cm
5		τοπικό μεγάλης έκτασης	Τουρκία – Τσανκιρί (30.000 km ²)	Έλεγχος σε 9 σημεία GPS/Leveling με RMS ±19.2cm
6		τοπικό μέσης έκτασης	Ελλάδα – ευρύτερη περιοχή Θεσ/νίκης (12.000 km ²)	Έλεγχος σε 29 σημεία GPS/Leveling στο κέντρο της περιοχής με RMS ±8.3cm
7		τοπικό μέσης έκτασης	Τουρκία – Κων/πολη (7.000 km ²)	Έλεγχος σε 200 σημεία GPS/Leveling με RMS ±4.4cm
8		τοπικό μέσης έκτασης	Τουρκία – Σαγγάριος (10.000 km ²)	Έλεγχος σε 14 σημεία GPS/Leveling με RMS ±20.4cm
9	HKGEOID2000	τοπικό μικρής έκτασης	Hong Kong (1.000 km ²)	Έλεγχος σε 29 σημεία GPS/Leveling με RMS ±1.7cm
10	SZGEOID2001	τοπικό μικρής έκτασης	Shenzen (2.000 km ²)	Έλεγχος σε 22 σημεία GPS/Leveling με RMS ±1.4cm
11		τοπικό μικρής έκτασης	Τουρκία – Σμύρνη (2.500 km ²)	Έλεγχος σε 121 σημεία GPS/Leveling με RMS ±3.9cm
12	Μοντέλο 1°	τοπικό μεγάλης έκτασης	Ελλάδα – ευρύτερη περιοχή Κ. Ελλάδας (40.000 km ²)	Έλεγχος σε 67 σημεία GPS/Leveling με RMS ±16cm και σε 22 σημεία σε Αττικοβοιωτία κι Εύβοια με RMS ±14.7cm
13	Μοντέλο 2°	τοπικό μεγάλης έκτασης	Ελλάδα – ευρύτερη περιοχή Κ. Ελλάδας (40.000 km ²)	Έλεγχος σε 67 σημεία GPS/Leveling με RMS ±10cm και σε 22 σημεία σε Αττικοβοιωτία κι Εύβοια με RMS ±9.3cm
14	Μοντέλο 3°	τοπικό μεγάλης έκτασης	Ελλάδα – ευρύτερη περιοχή Κ. Ελλάδας (40.000 km ²)	Έλεγχος σε 67 σημεία GPS/Leveling με RMS ±10.1cm και σε 22 σημεία σε Αττικοβοιωτία κι Εύβοια με RMS ±10cm

Πίνακας 5-1: Σύγκριση μοντέλων της ελληνικής και διεθνούς βιβλιογραφίας με τα μοντέλα που δημιουργήθηκαν στην παρούσα εργασία

- Σε καθεμιά εκ των τριών μεθόδων που εφαρμόστηκαν, χρησιμοποιήσαμε και **δύο μεθόδους προσδιορισμού του «σήματος»** από τα υπόλοιπα των μετρήσεων που προέκυψαν κατά τη συνόρθωση (μέθοδος σημειακής προσαρμογής – *collocation* και σταθμισμένου μέσου όρου – *weighted average*). Αν και για την ορθή εφαρμογή των μεθόδων απαιτήθηκαν αρκετές δοκιμές (π.χ. στη σημειακή προσαρμογή πρέπει να προσδιοριστεί η κατάλληλη συνάρτηση συμμεταβλητότητας που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα των μετρήσεων και κατόπιν να οριστούν κατάλληλα οι διάφορες σταθερές της συνάρτησης), ωστόσο η χρησιμοποίησή τους επέφερε μεγάλη βελτίωση στο μοντέλο. Ως εκ τούτου, οι μέθοδοι αυτοί κρίνονται ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για τον προσδιορισμό μοντέλων γεωειδούς.
- Για την επεξεργασία των δεδομένων από την αρχή έως το τέλος της εργασίας, δεν χρησιμοποιήθηκε κάποιο εξειδικευμένο πακέτο λογισμικού, αλλά γράφτηκε **κώδικας σε MATLAB**, ο οποίος επισυνάπτεται στο παράρτημα της παρούσης. Η MATLAB ως μια «μαθηματική γλώσσα προγραμματισμού» είναι ένα άκρως χρήσιμο εργαλείο για τέτοιου είδους επεξεργασία δεδομένων. Δίνει μεγάλη ευχέρεια στην παραγωγή και διαχείριση 2-d και 3-d γραφημάτων, μαζί με τα πλεονεκτήματα μιας γλώσσας προγραμματισμού σε σχέση με ένα έτοιμο πακέτο με συγκεκριμένες δυνατότητες και χρήση. Ως μειονέκτημα, θα μπορούσε να ληφθεί η σχετική δυσκολία της MATLAB στο χειρισμό αρχείων μεγάλου όγκου. Η δυσκολία αυτή παρακάμφθηκε είτε με ισοδύναμη εναλλακτική συγγραφή του κώδικα σε κάποιους βρόχους ώστε να αποφεύγεται ο πολύ μεγάλος αριθμός επαναλήψεων, είτε μειώνοντας αναγκαστικά τον όγκο κάποιων αρχείων εισόδου, (π.χ. η διαχείριση ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους διακριτικής ικανότητας 100 m για μια περιοχή τέτοιου μεγέθους όπως η παρούσα, θα είχε ως αποτέλεσμα μια απαγορευτική αύξηση του χρόνου εκτελέσεως των υπολογισμών).
- Η ροή εργασιών που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία, μπορεί να βοηθήσει ως προς την τυποποίηση μιας συνήθους διαδικασίας προσδιορισμού μοντέλου γεωειδούς.

5.2. Προτάσεις

- Κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική η συμπλήρωση των μοντέλων που δημιουργήθηκαν, με νέα δεδομένα από μετρήσεις που διεξήχθησαν ή θα διεξαχθούν στην περιοχή μελέτης και πέριξ αυτής. Η εισαγωγή νέων δεδομένων θα δώσει τη δυνατότητα καλύτερης αξιολόγησης και περαιτέρω βελτίωσης των παραπάνω μοντέλων.
- Επίσης θα ήταν άκρως εποικοδομητικός ο προσδιορισμός μοντέλων γεωειδούς σε γειτονικές κι επικαλυπτόμενες περιοχές. Κατ' αυτό τον τρόπο, θα δοθεί η δυνατότητα ελέγχου της συμβατότητας των γειτονικών μοντέλων και βελτίωσής τους,

προς την κατεύθυνση της επίτευξης του τελικού σκοπού, που είναι ο προσδιορισμός ενός ενιαίου αξιόπιστου μοντέλου γεωειδούς για όλο τον Ελλαδικό χώρο.

➤ Τέλος, ο υψομετρικός επανέλεγχος του κρατικού τριγωνομετρικού δικτύου θα ήταν αρκετά επωφελής, ως προς την πραγματική ακρίβεια προσδιορισμού του γεωειδούς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αγατζά-Μπαλοδήμου Α.Μ., (2005), «Θεωρία Σφαλμάτων και Συνορθώσεις», Εκδ. ΕΜΠ

Ανδριτσάνος Β.Δ., Κατσάμπαλος Κ.Ε., Κεχαΐδου Κ.Ε., Τζιαβός Η.Ν., (1999), «Βελτιστοποίηση Τοπικού Γεωειδούς με δεδομένα Βαρύτητας, Τοπογραφίας, Πυκνότητας και GPS»

Βέης Γ., Μπιλλήρης Χ., Παπαζήση Κ., (2009), «Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας», Εκδ. ΕΜΠ

Δεληκαράογλου Δ., (2003), «Γεωφυσικές Διασκοπήσεις – Βαρυτημετρία», Εκδ. ΕΜΠ

Δεληκαράογλου Δ., (2010), «Φυσική Γεωδαισία – Θεωρητικές και Τεχνολογικές Βάσεις», Εκδ. ΕΜΠ

Μήλας Π., Μπιλλήρης Χ., (2006), «Μετατροπές Συστημάτων Αναφοράς και Προβολικών Συστημάτων – Υψομετρικά Συστήματα Αναφοράς», Εκδ. ΕΜΠ

Παραδείσης Δ., Παρασκευάς Μ., Μήλας Π., Παπαζήση Κ., (2011), «Προσδιορισμός γεωειδούς από επίγειες τιμές βαρύτητας για την περιοχή της Αταλάντης»

Φωτίου Α., Πικριδάς Χ., (2006), «GPS και Γεωδαιτικές Εφαρμογές», Εκδ. Ζήτη

Διεθνής

Amos M.J., (2007), “Quasigeoid Modelling in New Zealand to Unify Multiple Local Vertical Datums”, Curtin University of Technology

Bajracharya S., (2003), “Terrain Effects on Geoid Determination”, University of Calgary

Balodimos D.D., (1972), “Geoidal Studies in Greece”

Barthelmes F., (2013), “Definition of Functionals of the Geopotential and their Calculation from Spherical Harmonic Models”, GFZ – German Research Centre for Geosciences

Blakely R.J., (1996), “Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications”, University of Cambridge

Chen Y.Q., Luo Z., (2004), “A hybrid method to determine a local geoid model – case study”, Earth Planets Space

Delikaraoglou D., Mintourakis I., Kallianou F., (2009), “Impact of recent Global Digital Bathymetry and Topography Models on geoid modelling: Results from two case studies in Balearic and Aegean Seas”

Erol B., Erol S., “GNSS in Practical Determination of Regional Heights”

Erol B., Celik R.N., (2004), “Precise Local Geoid Determination to Make GPS Technique More Effective in Practical Applications of Geodesy”

Featherstone W.E., Claessens S.J., (2006), “Closed-Form Transformation between Geodetic and Ellipsoidal Coordinates”

Forsberg R., Tscherning C.C., (1997), “Topographic effects in gravity field modelling for BVP”

Fotopoulos G., Kotsakis C., Sideris M.G., (1999), “Evaluation of Geoid Models and their use in combined GPS/Leveling/Geoid Height Network Adjustments”

Hirt C., (2013), “RTM gravity forward-modeling using topography/bathymetry data to improve high-degree global geopotential models in the coastal zone”, Marine Geodesy

Huang O., (2012), “Terrain Corrections for Gravity Gradiometry”, Ohio State University

Kaas E., Sorensen B., Tscherning C. C., Veicherts M., (2013), “Multi-processing least squares collocation: Applications to gravity field analysis”, Journal of Geodetic Science

Komarov R.V., Kascheev R.A., Zagretdinov R.V., (2007), “Geoid Determination by GPS/Levelling Method in the Republic of Tatarstan”, Georesources – international journal of science

Kotsakis C., Sideris M.G., (1999), “On the adjustment of combined GPS/leveling/geoid networks”, Journal of Geodesy

Olaleye J. B., Olusina J. O., Badejo O. T. and Aleem K. F., (2013), “Geoidal Map and Three Dimension Surface Model Part of Port Harcourt Metropolis from “Satlevel” Collocation Model”, IJCER

Panou G., (2014), “A Study on Geodetic Boundary Value Problems in Ellipsoidal Geometry”, NTUA

Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K., (2008), “An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008”, National Geospatial Intelligence Agency

Robbins J.W., (1985), “Least Square Collocation applied to local Gravimetric Solutions from Satellite Gravity Gradiometry data”, Ohio State University

Rozsa S., (1998), “Determination of Terrain Correction in Hungary and the Surrounding Area”

Smith A.D., (1998), “There is no such thing as "The" EGM96 geoid: Subtle points on the use of a global geopotential model”, International Geoid Service

Soycan M., (2013), “Analysis of Geostatistical Surface Model for GPS height transformation: a case study in Izmir territory of Turkey”, Geodetski Vestnik

Tenzen R., Ellmann A., (2012), “On evaluation of the mean gravity gradient within the topography”

Torge W., (2000), «Γεωδαισία», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ

Torres R.S., (1977), “Geoid Determination from Heterogeneous Data”, University of New Brunswick

Tscherning C.C., (2001), “Geoid determination after the first satellite gravity missions”

Ulotu E.P., Sjoberg L.E., (2009), “Geoid Model of Tanzania from Sparse and Varying Gravity Data Density by the KTH Method”

Ιστότοποι

<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>

<http://www.wikipedia.org/>

<http://www.ngs.noaa.gov/>

<http://earth-info.nga.mil/>

<http://www.geology.ohio-state.edu/>

<http://geographiclib.sourceforge.net/>

<http://www.lib.ntua.gr/>

<http://www.lib.auth.gr/>

www.academia.edu

www.geosolution.gr

<http://topex.ucsd.edu/>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα της παρούσης εργασίας επισυνάπτονται τα αρχεία της MATLAB (*script και functions*) που συντάχθηκαν για την επεξεργασία των δεδομένων και την εξαγωγή των αποτελεσμάτων:

A. Script αρχείο “fl StatisticalTests”, που δημιουργήθηκε για τον στατιστικό έλεγχο των δεδομένων, ώστε να φιλτραριστούν σημεία που πιθανόν να εισάγουν σφάλματα και για την επιλογή των σημείων ελέγχου (*test points*):

```
clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΠΕΤΡΟΣ\n')
fprintf('\nΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΓΙΑ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΧΟΝΔΡΟΕΙΔΗ
ΣΦΑΛΜΑΤΑ\n\n')

gys_pts=xlsread('gys_pts.xls');
pt_id=gys_pts(:,1);
f=gys_pts(:,2);
l=gys_pts(:,3);
h=gys_pts(:,4);
H=gys_pts(:,5);
g=gys_pts(:,6);
InitialPointsNumber=length(gys_pts)

fprintf('\n\n1)Έλεγχος για διπλογραμμένα σημεία\n\n')
count=0;
for i=1:InitialPointsNumber
    for j=1:InitialPointsNumber
        if pt_id(i)==pt_id(j) && i<j
            count=count+1;
            doublewrites(count,:)= [i j pt_id(i) f(i)-f(j) l(i)-l(j) h(i)-h(j)];
            corrects(count,:)= [i j pt_id(i) (f(i)+f(j))/2 (l(i)+l(j))/2
(h(i)+h(j))/2];
        end
    end
end
doublewrites
corrects

count=0;
for i=1:InitialPointsNumber
    count2=0;
    for j=1:InitialPointsNumber
```

```

    if pt_id(i)~=pt_id(j)
        count2=count2+1;
    else if pt_id(i)==pt_id(j) && i<j
        count=count+1;
        remain(count)=i;
        f(i)=(f(i)+f(j))/2;
        l(i)=(l(i)+l(j))/2;
        h(i)=(h(i)+h(j))/2;
        break;
    end
end
end
if count2==InitialPointsNumber-1
    count=count+1;
    remain(count)=i;
end
end
%πλέον έχουν απαλειφθεί τα διπλογραμμένα σημεία
gys_pts=gys_pts(remain,:);
pt_id=pt_id(remain,1);
f=f(remain,1);
l=l(remain,1);
h=h(remain,1);
H=H(remain,1);
g=g(remain,1);
PointsNumber1=length(gys_pts)

fprintf('\n\n2)Οπτικός έλεγχος χονδροειδών σφαλμάτων\n\n')
axe_x=20.5:0.025:25;
axe_y=37.5:0.025:40;
[XI,YI]=meshgrid(axe_x,axe_y);
ZI=griddata(l,f,h-H,XI,YI);

figure(1)
mesh(XI,YI,ZI),hold on
plot3(l,f,h-H,','), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('Απεικόνιση αποχής γεωειδούς των σημείων των μετρήσεων για εντοπισμό
χονδροειδών σφαλμάτων')

%από οπτικό έλεγχο του γραφήματος βρέθηκαν κι επιλέχθηκαν να απαλειφθούν τα
παρακάτω 8 σημεία (λ,φ,N) με χονδροειδή σφάλματα
coarse_errors=[22.887781    38.569647    33.766000
                20.713580    39.001813    30.032000
                22.180349    39.221533    33.556000
                22.703635    37.954885    32.267000
                24.023259    38.008724    40.664000
                21.597671    38.989120    33.469000
                22.737302    39.476975    37.024700
                22.769541    39.838625    41.596500];

k=1;
for i=1:PointsNumber1
    for j=1:length(coarse_errors)
        criterion1(i,j)=f(i)-coarse_errors(j,2);
        criterion2(i,j)=l(i)-coarse_errors(j,1);
    end
end

```

```

if abs(criterion1(i,:)) > 0.000001 | abs(criterion2(i,:)) > 0.000001
    in(k)=i;
    k=k+1;
end
end
gys_pts=gys_pts(in,:);
pt_id=pt_id(in,1);
f=f(in,1);
l=l(in,1);
h=h(in,1);
H=H(in,1);
g=g(in,1);
PointsNumber2=length(gys_pts)
%πλέον έχουν απαλειφθεί τα χονδροειδή από οπτικό έλεγχο

fprintf('\n\n3) Σύγκριση του N των μετρήσεων με το N του EGM 2008 και του EIGEN-
6C3 STAT (για τα συγκεκριμένα σημεία μετρήσεων), για απαλοιφή σημείων με
υπερβολικά μεγάλη (ή μικρή) απόκλιση ΔN=N-Negm σε σχέση με τη μέση τιμή της
περιοχής\n\n')
egm=load('egm2008_grs80gre1925_3741_0_01.txt');
eigen=load('eigen6c3stat_grs80gre1925_3741_0_01.txt');
gm=[egm(:,2) egm(:,1) egm(:,3) eigen(:,3)]; %(φ λ Negm Neigen)

%εύρεση της αποχής N του EGM 08 και του EIGEN-6C3 STAT στα σημεία των
παρατηρήσεων, δημιουργώντας έναν αλγόριθμο παρεμβολής από
%τα 4 σημεία του πλέγματος του EGM 08, που περιβάλλουν το κάθε σημείο
for i=1:PointsNumber2
    k=1; j=1;
    while j<=length(gm) && k<=4
        if abs(gm(j,1)-f(i))<0.01 && abs(gm(j,2)-l(i))<0.01
            near_pts(k)=j;
            k=k+1;
        end
        j=j+1;
    end
    sum1=[0 0];
    suma=0;
    for km=1:length(near_pts)
        sum2=0;sum_b=0;
        m=near_pts(km);
        dist(i,km)=sqrt((f(i)-gm(m,1))^2 + ((l(i)-gm(m,2)) * cos(
(f(i)+gm(m,1))/2 * pi/180))^2);
        sum1=sum1+[gm(m,3)/dist(i,km) gm(m,4)/dist(i,km)];
        suma=suma+1/dist(i,km);
    end
    end
    Ngm(i,:)=sum1/suma; %παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης
end
Ngm=round(Ngm*1000)/1000;%1η στήλη: N(egm) 2η στήλη: N(eigen)
DN=[h-H-Ngm(:,1) h-H-Ngm(:,2)];%1η στήλη: N-N(egm) 2η στήλη: N-N(eigen)
Nmatlab=geoidheight(f,l,'EGM2008');
sygkr=round([pt_id h-H Ngm(:,1) Nmatlab' Ngm(:,1)-Nmatlab']*1000)/1000

fprintf('\nΣύγκριση των EGM 08 και EIGEN-6C3 STAT με τις μετρήσεις στην περιοχή
μελέτης (N(gps/lev)-N(gm))\n')
fprintf('\n          EGM 08          EIGEN-6C3 STAT\n')
max_DN=round(1000*[max(DN(:,1)) max(DN(:,2))])/1000
min_DN=round(1000*[min(DN(:,1)) min(DN(:,2))])/1000
mean_DN=round(1000*[mean(DN(:,1)) mean(DN(:,2))])/1000
std_DN=round(1000*[std(DN(:,1)) std(DN(:,2))])/1000

```

```

rms_DN=round(1000*sqrt([sum(DN(:,1).^2) sum(DN(:,2).^2)]/length(DN)))/1000

figure
histfit(DN(:,1),9)
xlabel('διαστήματα τιμών ΔN = N - N_e_g_m (σε m)')
ylabel('πλήθος σημείων')
title('ιστόγραμμα συχνοτήτων των τιμών ΔN = N - N_e_g_m για τα σημεία της
συνολικής περιοχής')

figure
histfit(DN(:,2),9)
xlabel('διαστήματα τιμών ΔN = N - N_e_i_g_e_n (σε m)')
ylabel('πλήθος σημείων')
title('ιστόγραμμα συχνοτήτων των τιμών ΔN = N - N_e_i_g_e_n για τα σημεία της
συνολικής περιοχής')

fprintf('\n\n')
%για το EGM 08
outliers1=find(DN(:,1)>mean_DN(1)+2*std_DN(1) | DN(:,1)<mean_DN(1)-2*std_DN(1));
outliers1=round(1000*DN(outliers1,1))/1000
inliers1=find(DN(:,1)<mean_DN(1)+2*std_DN(1) & DN(:,1)>mean_DN(1)-2*std_DN(1));
gys_pts=gys_pts(inliers1,:);
DN=DN(inliers1,:);
outlier_pts1=length(outliers1)

fprintf('\n\n')
%για το EIGEN-6C3 STAT
outliers2=find(DN(:,2)>mean_DN(2)+2*std_DN(2) | DN(:,2)<mean_DN(2)-2*std_DN(2));
outliers2=round(1000*DN(outliers2,2))/1000
inliers2=find(DN(:,2)<mean_DN(2)+2*std_DN(2) & DN(:,2)>mean_DN(2)-2*std_DN(2));
gys_pts=gys_pts(inliers2,:);
DN=DN(inliers2,:);
outlier_pts2=length(outliers2)
pt_id=gys_pts(:,1);
f=gys_pts(:,2);
l=gys_pts(:,3);
h=gys_pts(:,4);
H=gys_pts(:,5);
g=gys_pts(:,6);
PointsNumber3=length(gys_pts)

fprintf('\n\n4)Διαίρεση περιοχής σε υποπεριοχές μικρής έκτασης κι επιμέρους
στατιστικός έλεγχος των σημείων σε καθεμιά υποπεριοχή με προσαρμογή των βέλτιστων
τοπικών επιπέδων και σύγκριση των αποκλίσεων των σημείων\n\n')
region1=find(l<=21.5);
region2=find(l>21.5 & l<=22);
region3=find(l>22 & l<=22.5);
region4=find(l>22.5 & l<=23);
region5=find(l>23 & l<=23.5);
region5a=find(l>22.5 & l<=23.5);
region6=find(l>23.5);

region1=gys_pts(region1,:);
region2=gys_pts(region2,:);
region3=gys_pts(region3,:);
region4=gys_pts(region4,:);
region5=gys_pts(region5,:);
region5a=gys_pts(region5a,:);
region6=gys_pts(region6,:);

```


%δημιουργία 17 υποπεριοχών ανάλογα και με την κατανομή των σημείων

```
region1_1=find(region1(:,2)>39 & region1(:,2)<=39.5);
region1_2=find(region1(:,2)<=39);
region2_1=find(region2(:,2)>39.5);
region2_2=find(region2(:,2)>39 & region2(:,2)<=39.5);
region2_3=find(region2(:,2)<=39);
region3_1=find(region3(:,2)>39.5);
region3_2=find(region3(:,2)>39 & region3(:,2)<=39.5);
region3_3=find(region3(:,2)>38.5 & region3(:,2)<=39);
region3_4=find(region3(:,2)<=38.5);
region4_1=find(region4(:,2)>38.5 & region4(:,2)<=39);
region4_2=find(region4(:,2)<=38.5);
region5_1=find(region5(:,2)>38.5 & region5(:,2)<=39);
region5_2=find(region5(:,2)<=38.5);
region5a_1=find(region5a(:,2)>39.5);
region5a_2=find(region5a(:,2)<=39.5 & region5a(:,2)>39);
region6_1=find(region6(:,2)>38.5);
region6_2=find(region6(:,2)<=38.5);
```

```
region1_1=region1(region1_1,:);
region1_2=region1(region1_2,:);
region2_1=region2(region2_1,:);
region2_2=region2(region2_2,:);
region2_3=region2(region2_3,:);
region3_1=region3(region3_1,:);
region3_2=region3(region3_2,:);
region3_3=region3(region3_3,:);
region3_4=region3(region3_4,:);
region4_1=region4(region4_1,:);
region4_2=region4(region4_2,:);
region5_1=region5(region5_1,:);
region5_2=region5(region5_2,:);
region5a_1=region5a(region5a_1,:);
region5a_2=region5a(region5a_2,:);
region6_1=region6(region6_1,:);
region6_2=region6(region6_2,:);
```

%προσαρμογή βέλτιστων επιπέδων σε κάθε υποπεριοχή για έλεγχο των σημείων:
 %για να ελέγξουμε το κάθε σημείο (ϕ, λ, N) , π.χ. το σημείο i , βρίσκουμε το
 %βέλτιστο επίπεδο των υπόλοιπων σημείων της υποπεριοχής (δηλ. χωρίς τη
 %συμμετοχή του i) και κατόπιν, υπολογίζουμε την απόκλιση του N του
 %σημείου i από το υπολογισθέν επίπεδο. Σημεία με αποκλίσεις πολύ
 %μεγαλύτερες από το μέσο όρο των αποκλίσεων της περιοχής, απαλείφονται

%για κάθε υποπεριοχή καλούμε τη συνάρτηση `stattest` που δημιουργήσαμε για το
 %σκοπό αυτό

```
region1_1=function_StatTest(region1_1);
region1_2=function_StatTest(region1_2);
region2_1=function_StatTest(region2_1);
region2_2=function_StatTest(region2_2);
region2_3=function_StatTest(region2_3);
region3_1=function_StatTest(region3_1);
region3_2=function_StatTest(region3_2);
region3_3=function_StatTest(region3_3);
region3_4=function_StatTest(region3_4);
region4_1=function_StatTest(region4_1);
region4_2=function_StatTest(region4_2);
region5_1=function_StatTest(region5_1);
region5_2=function_StatTest(region5_2);
```

```

region5a_1=function_StatTest(region5a_1);
region5a_2=function_StatTest(region5a_2);
region6_1=function_StatTest(region6_1);
region6_2=function_StatTest(region6_2);

gys_pts=[region1_1;region1_2;region2_1;region2_2;region2_3;region3_1;region3_2;re
gion3_3;region3_4;

region4_1;region4_2;region5_1;region5_2;region5a_1;region5a_2;region6_1;region6_2
];
pt_id=gys_pts(:,1);
f=gys_pts(:,2);
l=gys_pts(:,3);
h=gys_pts(:,4);
H=gys_pts(:,5);
g=gys_pts(:,6);
FinalPointsNumber=length(gys_pts)

fprintf('\n\n5)Επιλογή των σημείων ελέγχου του μοντέλου (test points)\n\n')
%τα σημεία διακρίνονται στα reference pts που θα χρησιμοποιηθούν για τη
%δημιουργία του μοντέλου και στα test pts που είναι μόνο για έλεγχο και δεν
%συμμετέχουν στην παραγωγή του μοντέλου. Η επιλογή των test pts πρέπει να
%είναι όσο το δυνατό ισοκαταναμημένη στην περιοχή μελέτης. Για το λόγο αυτό
%θα χρησιμοποιήσουμε το διαχωρισμό σε υποπεριοχές που είδαμε πιο πάνω, με
%αναλογική κατανομή των test pts σε καθεμιά υποπεριοχή

topo=load('etopo1_gre1925_3741_0_01.txt');
axe_x=20.5:0.01:25;
axe_y=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(axe_x,axe_y);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contourlines=[0 5000 10000];

figure
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contourlines+50,'k'),hold on
plot3(region1_1(:,3),region1_1(:,2),region1_1(:,4)-
region1_1(:,5),'b.',region1_2(:,3),region1_2(:,2),region1_2(:,4)-
region1_2(:,5),'g. '), hold on
plot3(region2_1(:,3),region2_1(:,2),region2_1(:,4)-
region2_1(:,5),'k.',region2_2(:,3),region2_2(:,2),region2_2(:,4)-
region2_2(:,5),'r.',region2_3(:,3),region2_3(:,2),region2_3(:,4)-
region2_3(:,5),'c. '), hold on
plot3(region3_1(:,3),region3_1(:,2),region3_1(:,4)-
region3_1(:,5),'bx',region3_2(:,3),region3_2(:,2),region3_2(:,4)-
region3_2(:,5),'gx',region3_3(:,3),region3_3(:,2),region3_3(:,4)-
region3_3(:,5),'kx',region3_4(:,3),region3_4(:,2),region3_4(:,4)-
region3_4(:,5),'g. '), hold on
plot3(region4_1(:,3),region4_1(:,2),region4_1(:,4)-
region4_1(:,5),'b*',region4_2(:,3),region4_2(:,2),region4_2(:,4)-
region4_2(:,5),'cx'), hold on
plot3(region5_1(:,3),region5_1(:,2),region5_1(:,4)-
region5_1(:,5),'g*',region5_2(:,3),region5_2(:,2),region5_2(:,4)-
region5_2(:,5),'k*'), hold on
plot3(region5a_1(:,3),region5a_1(:,2),region5a_1(:,4)-
region5a_1(:,5),'r*',region5a_2(:,3),region5a_2(:,2),region5a_2(:,4)-
region5a_2(:,5),'c*'), hold on
plot3(region6_1(:,3),region6_1(:,2),region6_1(:,4)-
region6_1(:,5),'b.',region6_2(:,3),region6_2(:,2),region6_2(:,4)-
region6_2(:,5),'rx'), hold off

```

```

grid off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')

%επιλέγουμε τα test pts από το γράφημα όσο το δυνατό ισοκατανεμημένα
test_pts=[? ? ?];

k1=1;k2=1;
for i=1:length(gys_pts)
    j=1; k=0;
    while j<=length(test_pts) && k==0;
        if abs(f(i)-test_pts(j,2))<0.000001 && abs(l(i)-test_pts(j,1))<0.000001
            test(k1)=i;
            k1=k1+1;
            k=k+1;
        end
        j=j+1;
    end
    if k==0
        ref(k2)=i;
        k2=k2+1;
    end
end
ref_pts=gys_pts(ref,:);
RefPtsNumber=length(ref_pts)
fprintf('\n\n')
test_pts=gys_pts(test,:);
TestPtsNumber=length(test_pts)

figure
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contourlines+50,'k'),hold on
plot3(ref_pts(:,3),ref_pts(:,2),ref_pts(:,4)-
ref_pts(:,5),'b.',test_pts(:,3),test_pts(:,2),test_pts(:,4)-test_pts(:,5),'r*'),
hold off
grid off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title('κατανομή reference pts (μπλε) και test pts (κόκκινα)')

for i=1:length(f)
    k=1; j=1;
    while j<=length(gm) && k<=4
        if abs(gm(j,1)-f(i))<0.01 && abs(gm(j,2)-l(i))<0.01
            near_pts(k)=j;
            k=k+1;
        end
        j=j+1;
    end
    sum1=[0 0];
    suma=0;
    for km=1:length(near_pts)
        sum2=0;sum_b=0;
        m=near_pts(km);
        dist(i,km)=sqrt((f(i)-gm(m,1))^2 + ((l(i)-gm(m,2)) * cos(
(f(i)+gm(m,1))/2 * pi/180))^2);
        sum1=sum1+[gm(m,3)/dist(i,km) gm(m,4)/dist(i,km)];
        suma=suma+1/dist(i,km);
    end
end

```

```

end
Ngmf(i,:) = sum1/suma; %παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης
end
Ngmf = round(Ngmf*1000)/1000; %1η στήλη: N(egm) 2η στήλη: N(eigen)
DN = [h-H-Ngmf(:,1) h-H-Ngmf(:,2)]; %1η στήλη: N-N(egm) 2η στήλη: N-N(eigen)

ZI11 = griddata(egm(:,1), egm(:,2), egm(:,3), XI, YI);
ZI22 = griddata(1, f, DN(:,1), XI, YI);

figure
mesh(XI, YI, ZI11), hold on
contour3(XI, YI, ZI11, contourlines+50, 'k'), hold on
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')

figure
mesh(XI, YI, ZI22), hold on
contour3(XI, YI, ZI22, contourlines+3, 'k'), hold on
plot3(1, f, DN(:,1), '.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')

```

B. Script αρχείο “f2 SurfaceCreation”, που δημιουργήθηκε για τον προσδιορισμό των ενδιάμεσων και τελικών επιφανειών του 1⁰⁰ και 2⁰⁰ μοντέλου:

```

clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΠΕΤΡΟΣ\n')
fprintf('\nΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΔΥΝΑΤΟ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ\n\n')

refpts = load('ref_pts.txt');
ptr = refpts(:,1);
fr = refpts(:,2);
lr = refpts(:,3);
hr = refpts(:,4);
Hr = refpts(:,5);
gr = refpts(:,6);
Nr = Hr - Hr;
%εύρεση των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα για τα ref pts
sinfr = sin(fr*pi/180);
gnormal1980r = 978032.67715*(1 + 0.0052790414*sinfr.^2 + 0.0000232718*sinfr.^4 + 0.0000001262*sinfr.^6 + 0.0000000007*sinfr.^8); %κανονική βαρύτητα πλάτους φ
dgfar = (0.3087691 + 0.0004398*sinfr.^2) .* Hr - 7.2125 * 10^(-8) * Hr.^2; %διόρθωση ελεύθερου αέρα
Dgfar = gr + dgfar - gnormal1980r; %ανωμαλίες ελεύθερου αέρα για τα ref pts
ReferencePointsNumber = length(refpts)

testpts = load('test_pts.txt');
ptt = testpts(:,1);
ft = testpts(:,2);

```

```

lt=testpts(:,3);
ht=testpts(:,4);
Ht=testpts(:,5);
gt=testpts(:,6);
Nt=ht-Ht;
%εύρεση των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα για τα test pts
sinft=sin(ft*pi/180);
gnormal1980t=978032.67715*(1 + 0.0052790414*sinft.^2 + 0.0000232718*sinft.^4 +
0.0000001262*sinft.^6 + 0.0000000007*sinft.^8); %κανονική βαρύτητα πλάτους φ
dgifat=(0.3087691+0.0004398*sinft.^2) .* Ht - 7.2125 * 10^(-8) * Ht.^2; %διόρθωση
ελεύθερου αέρα
Dgifat=gt+dgifat-gnormal1980t; %ανωμαλίες ελεύθερου αέρα για τα test pts
TestPointsNumber=length(testpts)

%και για όλα τα σημεία μαζί συνολικά:
totalpts=[refpts;testpts];
pt=[ptr;ptt];
f=[fr;ft];
l=[lr;lt];
h=[hr;ht];
H=[Hr;Ht];
g=[gr;gt];
N=[Nr;Nt];
Dgfa=[Dgfar;Dgifat];
TotalPointsNumber=length(totalpts)

topo=load('etopo1_gre1925_3741_0_01.txt');
%βρίσκουμε τις τιμές του N από τα μοντέλα, για τα σημεία των μετρήσεων
egm=load('egm2008_grs80gre1925_3741_0_01.txt');
egm_ha=load('egm2008_grs80gre1925_3741_ha_0_01.txt');
eigen=load('eigen6c3stat_grs80gre1925_3741_0_01.txt');
gm=[egm(:,2) egm(:,1) egm(:,3) eigen(:,3) egm_ha(:,4)]; %(φ λ Negm Neigen ζegm)

%εύρεση της αποχής N του EGM 08 και του EIGEN-6C3 STAT στα σημεία των
παρατηρήσεων, δημιουργώντας έναν αλγόριθμο παρεμβολής από
%τα 4 σημεία του πλέγματος του EGM 08, που περιβάλλουν το κάθε σημείο
for i=1:TotalPointsNumber
    k=1; j=1;
    while j<=length(gm) && k<=4
        if abs(gm(j,1)-f(i))<0.01 && abs(gm(j,2)-l(i))<0.01
            near_pts(k)=j;
            k=k+1;
        end
        j=j+1;
    end
    sum1=[0 0 0];
    suma=0;
    for km=1:length(near_pts)
        m=near_pts(km);
        dist(i,km)=sqrt((f(i)-gm(m,1))^2 + ((l(i)-gm(m,2)) * cos(
(f(i)+gm(m,1))/2 * pi/180))^2);
        sum1=sum1+[gm(m,3)/dist(i,km) gm(m,4)/dist(i,km) gm(m,5)/dist(i,km)];
        suma=suma+1/dist(i,km);
    end
    Ngm(i,:)=sum1/suma; %παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης
end
Ngm=round(Ngm*1000)/1000; %1η στήλη: N(egm) 2η στήλη: N(eigen) 3η στήλη:
ζ(egm)
DNgm=[ h-H-Ngm(:,1) h-H-Ngm(:,2) h-H-Ngm(:,3) h-H-geoidheight(f,l,'EGM2008')' ];
%1η στήλη: N-N(egm) 2η στήλη: N-N(eigen) 3η στήλη: N-ζ(egm) 4η στήλη: N-N(egm-
matlab)

```

```

for i=1:ReferencePointsNumber
    DNgmr(i,:)=DNgm(i,:); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    DNgmt(i,:)=DNgm(ReferencePointsNumber+i,:); %για τα test points
end
fprintf('\n\n\nΣτατιστικοί έλεγχοι EGM 08\n')
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_positive_dz=[round(1000*max(DNgmr(:,1)))/1000
round(1000*max(DNgmt(:,1)))/1000]
max_negative_dz=[round(1000*min(DNgmr(:,1)))/1000
round(1000*min(DNgmt(:,1)))/1000]
mean_dz=[round(mean(DNgmr(:,1))*1000)/1000 round(mean(DNgmt(:,1))*1000)/1000]
stdev=[round(std(DNgmr(:,1))*1000)/1000 round(std(DNgmt(:,1))*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum(DNgmr(:,1).^2)/length(DNgmr(:,1))))/1000
round(1000*sqrt(sum(DNgmt(:,1).^2)/length(DNgmt(:,1))))/1000]

fprintf('\n\nΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΝ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΤΗΣ
ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ Ni = hi - Hi\n\n')
fprintf('\n\n\nΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ\n\n')

surf=function_PolynomSurfFit_4FramePts_forCollocationGraph(fr,lr,Nr,ft,lt,Nt,4);
% Ni - Nmodel

for i=1:ReferencePointsNumber
    dNmipoly4r(i,1)=dNmipoly4(i,1); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    dNmipoly4t(i,1)=dNmipoly4(ReferencePointsNumber+i,1); %για τα test points
end

collocation=function_Collocation2(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,0,0,1,0.1,0,0
,topo);
signal=function_Collocation2_forGraph(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,0,0,1,0.1
,0,0);

wave=function_WeightAve(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,1,5,0,topo);
signalwave=function_WeightAve_forGraph(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,1,5,0);

%γραφήματα
xi=20.5:0.025:25;
yi=37.5:0.025:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

c=0;
for i=1:length(xi)
    for j=1:length(yi)
        xiyi(j+c,1)=XI(j,i);
        xiyi(j+c,2)=YI(j,i);
    end
    c=c+length(yi);
end

ZI1=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),signal+surf,XI,YI);
ZI2=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),signal,XI,YI);

```

```

ZI3=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),signalwave+surf,XI,YI);
ZI4=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),signalwave,XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

figure
mesh(XI,YI,ZI2), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

figure
mesh(XI,YI,ZI3), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

figure
mesh(XI,YI,ZI4), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

fprintf('\n\n\ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΔΙΟΡΘΩΤΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ (corrector surfaces) ΠΟΥ
ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΝ ΤΗΝ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΔΝ = Ni - Ngm\n\n')
fprintf('\n\n\ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ\n\n')

dNmipoly2=function_PolynomSurfFit(fr,lr,DNgmr(:,1),ft,lt,DNgmt(:,1),2,topo); % Ni
- Nmodel
surf=function_PolynomSurfFit_forCollocationGraph(fr,lr,DNgmr(:,1),ft,lt,DNgmt(:,1),2); % Ni - Nmodel

for i=1:ReferencePointsNumber
    dNmipoly2r(i,1)=dNmipoly2(i,1); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    dNmipoly2t(i,1)=dNmipoly2(ReferencePointsNumber+i,1); %για τα test points
end

```

```

coll=function_Collocation2(fr,lr,dNmipoly2r,ft,lt,dNmipoly2t,0,0,1,0.1,0,0,topo);
signal=function_Collocation2_forGraph(fr,lr,dNmipoly2r,0,1,0.1,0,0);

wave=function_WeightAve(fr,lr,dNmipoly2r,ft,lt,dNmipoly2t,1,2,0,topo);
signalwave=function_WeightAve_forGraph(fr,lr,dNmipoly2r,ft,lt,dNmipoly2t,1,2,0);

%γραφήματα
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

ZI1=griddata(surf(:,2),surf(:,1),surf(:,3)+signal(:,3),XI,YI);
ZI2=griddata(surf(:,2),surf(:,1),surf(:,3)+signalwave(:,3),XI,YI);
ZIgm=griddata(egm(:,1),egm(:,2),egm(:,3),XI,YI);
ZItel1=ZI1+ZIgm;
ZItel2=ZI2+ZIgm;
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

figure
mesh(XI,YI,ZItel1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

figure
mesh(XI,YI,ZItel2), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

fprintf('\n\n\nΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ\n\n')

dDNgmparam5=function_4_5_7_ParamSurfFit(fr,lr,DNgmr(:,1),ft,lt,DNgmt(:,1),5,topo)
;

for i=1:ReferencePointsNumber
    dDNgmparam5r(i,1)=dDNgmparam5(i,1); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    dDNgmparam5t(i,1)=dDNgmparam5(ReferencePointsNumber+i,1); %για τα test points
end

collocationDNpar=function_Collocation(fr,lr,-dDNgmparam5r,ft,lt,-
dDNgmparam5t,0,0,1,0.2,0,0);

```


Γ. Script αρχείο “Dev of Vert”, που δημιουργήθηκε για την επεξεργασία των μετρήσεων των συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου και την ένταξή τους στη 2^η εναλλακτική της 1^{ης} μεθόδου:

```
clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΠΕΤΡΟΣ\n')
fprintf('\nΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ\n\n')

devofvert=xlsread('devvert.xlsx');
pt_id=devofvert(:,1);

fed50d=devofvert(:,2);
fed50m=devofvert(:,3);
fed50=fed50d + fed50m / 60;

led50d=devofvert(:,4);
led50m=devofvert(:,5);
led50=led50d + led50m / 60;

xied50=devofvert(:,6);
ittaed50=devofvert(:,7);
Ned50=devofvert(:,8);

xiiiau67=devofvert(:,9);
ittaiiau67=devofvert(:,10);
Niau67=devofvert(:,11);

InitialPointsNumber=length(devofvert)

%προσεγγιστικές σχέσεις μετατροπής
fegsa= fed50 - 13.17/3600 + 0.09/3600 * (fed50-38) + 0.07/3600 * (led50-24);
legsa= led50 - 8.15/3600 - 0.11/3600 * (fed50-38) - 0.03/3600 * (led50-24);

fwgs= fegsa + 9.37/3600 - 0.02/3600 * (fegsa-38) - 0.05/3600 * (legsa-24);
lwgs= legsa + 6.10/3600 + 0.08/3600 * (fegsa-38) - 0.11/3600 * (legsa-24);

xiwgs=round( (xied50 - (fwgs - fed50) * 3600) *10 ) / 10 %σε sec
ittawgs1=round( (ittaed50 - (lwgs - led50) * 3600 .* cos(fwgs*pi/180)) *10 ) / 10
%σε sec
for i=1:length(ittawgs1)-6
    ittawgs(i,1)=ittawgs1(i,1);
end

%γράφημα
xi=20:0.025:28;
yi=35:0.025:42;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);
topo=load('etopo1_gre2028_3542_0_01.txt');
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

figure
```

```

contour3(XI,YI,ZItopo,contour_lines,'k'),hold on
plot3(lwgs,fwgs,fwgs,'b*'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Κατανομή σημείων μετρήσεων απόκλισης κατακορύφου')

refpts=load('ref_pts.txt');
ptr=refpts(:,1);
fr=refpts(:,2);
lr=refpts(:,3);
hr=refpts(:,4);
Hr=refpts(:,5);
gr=refpts(:,6);
Nr=hr-Hr;

%εύρεση των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα για τα ref pts
sinfr=sin(fr*pi/180);
gnormal1980r=978032.67715*(1 + 0.0052790414*sinfr.^2 + 0.0000232718*sinfr.^4 +
0.0000001262*sinfr.^6 + 0.0000000007*sinfr.^8); %κανονική βαρύτητα πλάτους φ
dgfar=(0.3087691+0.0004398*sinfr.^2) .* Hr - 7.2125 * 10^(-8) * Hr.^2; %διόρθωση
ελεύθερου αέρα
Dgfar=gr+dgfar-gnormal1980r; %ανωμαλίες ελεύθερου αέρα για τα ref pts
ReferencePointsNumber=length(refpts)

testpts=load('test_pts.txt');
ptt=testpts(:,1);
ft=testpts(:,2);
lt=testpts(:,3);
ht=testpts(:,4);
Ht=testpts(:,5);
gt=testpts(:,6);
Nt=ht-Ht;

%εύρεση των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα για τα test pts
sinft=sin(ft*pi/180);
gnormal1980t=978032.67715*(1 + 0.0052790414*sinft.^2 + 0.0000232718*sinft.^4 +
0.0000001262*sinft.^6 + 0.0000000007*sinft.^8); %κανονική βαρύτητα πλάτους φ
dgfat=(0.3087691+0.0004398*sinft.^2) .* Ht - 7.2125 * 10^(-8) * Ht.^2; %διόρθωση
ελεύθερου αέρα
Dgfat=gt+dgfat-gnormal1980t; %ανωμαλίες ελεύθερου αέρα για τα test pts
TestPointsNumber=length(testpts)

dNmipoly4=function_PolynomSurfFit_DefVert(fr, lr, Nr, fwgs, lwgs, xiwgs, ittagws,
ft, lt, Nt, 4, topo); % Ni - Nmodel
surf=function_PolynomSurfFit_DefVert_forGraph(fr, lr, Nr, fwgs, lwgs, xiwgs,
ittawgs, ft, lt, Nt, 4); % Ni - Nmodel

for i=1:ReferencePointsNumber
    dNmipoly4r(i,1)=dNmipoly4(i,1); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    dNmipoly4t(i,1)=dNmipoly4(ReferencePointsNumber+i,1); %για τα test points
end

collocation=function_Collocation2(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,0,0,1,0.1,0,0
,topo);
signal=function_Collocation2_forGraph(fr,lr,dNmipoly4r,0,1,0.1,0,0);

wave=function_WeightAve(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,1,5,0,topo);

```

```

signalwave=function_WeightAve_forGraph(fr,lr,dNmipoly4r,ft,lt,dNmipoly4t,1,5,0);

%γραφήματα
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

ZI1=griddata(surf(:,2),surf(:,1),surf(:,3)+signal(:,3),XI,YI);
ZI3=griddata(surf(:,2),surf(:,1),surf(:,3)+signalwave(:,3),XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

figure
mesh(XI,YI,ZI3), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lr,fr,Nr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft,Nt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')

```

Δ. Script αρχείο “RCRI”, που δημιουργήθηκε για την εύρεση των υπολειπόμενων ανωμαλιών βαρύτητας που εισήχθησαν στην εξίσωση του Stokes, στην 3^η μέθοδο:

```

clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΠΕΤΡΟΣ\n')
fprintf('\nΔιαδικασία εύρεσης των υπολειπόμενων ανωμαλιών βαρύτητας Δg(res)\n\n')

gys_pts=xlsread('gys_pts2.xls');
gys_pts1=load('ref_pts.txt');
gys_pts2=load('test_pts.txt');
%gys_pts=[gys_pts1;gys_pts2];
%xlsread('gys_pts.xls');
pt_id=gys_pts(:,1);
f=gys_pts(:,2);
l=gys_pts(:,3);
h=gys_pts(:,4);
H=gys_pts(:,5);
g=gys_pts(:,6);
PointsNumber1=length(gys_pts)

```

```

sinf=sin(f*pi/180);
cosf=cos(f*pi/180);
gnormal1980=978032.67715*(1 + 0.0052790414*sinf.^2 + 0.0000232718*sinf.^4 +
0.0000001262*sinf.^6 + 0.0000000007*sinf.^8); %κανονική βαρύτητα πλάτους φ σε
mgal
dgfa=(0.3087691+0.0004398*sinf.^2) .* H - 7.2125 * 10^(-8) * H.^2; %διόρθωση
ελεύθερου αέρα σε mgal
Dgfa= g + dgfa - gnormal1980; %ανωμαλίες ελεύθερου αέρα σε mgal

topo=load('etopo1_gre1826_3642_0_01.txt');
toposhm=load('etopo1_SphHarm_gre1826_3642_0_01.txt');
toporef=[topo(:,1) topo(:,2) topo(:,3)-toposhm(:,3)];
%intopo=load('etopo1_gre1925_3741_0_0025.txt');
gm=load('egm2008_grs80gre1925_3741_Dgcl_0_01.txt');

%εύρεση των ανωμαλιών βαρύτητας για το EGM 08 στα σημεία των παρατηρήσεων,
δημιουργώντας έναν αλγόριθμο παρεμβολής από
%τα 4 σημεία του πλέγματος του EGM 08, που περιβάλλουν το κάθε σημείο
for i=1:PointsNumber1
    k=1; j=1;
    while j<=length(gm) && k<=4
        if abs(gm(j,2)-f(i))<0.01 && abs(gm(j,1)-l(i))<0.01
            near_pts(k)=j;
            k=k+1;
        end
        j=j+1;
    end
    sum1=0;
    suma=0;
    for km=1:length(near_pts)
        m=near_pts(km);
        dist(i,km)=sqrt( (f(i)-gm(m,2))^2 + (l(i)-gm(m,1)) * cos(
0.5*(f(i)+gm(m,2)) *pi/180 ) )^2 );
        sum1=sum1 + gm(m,3) / dist(i,km)^2 ;
        suma=suma + 1 / dist(i,km)^2 ;
    end
    Dggm(i,1)=sum1/suma; %παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης
end
Dggm=round(Dggm*1000)/1000; %ανωμαλίες γεωδυναμικού μοντέλου Δg_cl(egm) σε mgal

fprintf('\nbefore\n')

%εύρεση των επιδράσεων της τοπογραφίας στην ανωμαλία βαρύτητας, (ΔgT)
Re=6371000; %σε m
G=6.67428 * 10^(-11); %σε N * m^2 / kg^2
p=2670; pw=1030; %σε kg / m^3
for ii=1:PointsNumber1
    psi=acos( sin(toporef(:,2) * pi/180) * sinf(ii) + cos(toporef(:,2) * pi/180)
* cosf(ii) .* cos((toporef(:,1)-l(ii))*pi/180) ); %σε rad
    in=find( psi <= 1 * pi/180 );
    points=toporef(in,:); % συμμετέχοντα σημεία
    %-----
    points2=topo(in,:);
    sea=find(points2(:,3)<0);
    points(sea,3)=points(sea,3) * (1-pw/p); %μέθοδος RET
    %-----
    pos=find(points(:,3)>0);
    pointspos=points(pos,:);

x=(pointspos(:,1)-l(ii)) * pi/180 * Re .* cos(pointspos(:,2)*pi/180);

```

```

y=(pointspos(:,2)-f(ii)) * pi/180 * Re;
dx=0.01*pi/180 * Re * cos(pointspos(:,2)*pi/180);
dy=0.01*pi/180 * Re;

summationpos=zeros(length(x),1);
for i=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            mi=(-1)^i * (-1)^j * (-1)^k;
            xi = x + (-1)^i .* dx/2;
            yi = y + (-1)^j .* dy/2;
            %zi= Href + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            %zi = Href-H(ii) + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            zi = 0 + (k-1) * pointspos(:,3);
            R=sqrt( xi.^2 + yi.^2 + zi.^2 );
            dg_components = mi * ( zi .* atan( xi.*yi./(zi.*R) ) - xi .*
log(R+yi) - yi .* log(R+xi) );
            summationpos=summationpos+dg_components;
        end
    end
end

neg=find(points(:,3)<0);
pointsneg=points(neg,:);

x=(pointsneg(:,1)-l(ii)) * pi/180 * Re .* cos(pointsneg(:,2)*pi/180);
y=(pointsneg(:,2)-f(ii)) * pi/180 * Re;
dx=0.01*pi/180 * Re * cos(pointsneg(:,2)*pi/180);
dy=0.01*pi/180 * Re;

summationneg=zeros(length(x),1);
for i=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            mi=(-1)^i * (-1)^j * (-1)^k;
            xi = x + (-1)^i .* dx/2;
            yi = y + (-1)^j .* dy/2;
            %zi= Href + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            %zi = Href-H(ii) + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            zi = 0 + (k-1) * pointsneg(:,3);
            R=sqrt( xi.^2 + yi.^2 + zi.^2 );
            dg_components = mi * ( zi .* atan( xi.*yi./(zi.*R) ) - xi .*
log(R+yi) - yi .* log(R+xi) );
            summationneg=summationneg+dg_components;
        end
    end
end

DgT(ii,1) = 10^5 * ( G * p * ( sum(summationpos)-sum(summationneg) ) );
%επίδραση τοπογραφίας σε mgal

end

DgT
fprintf('\nend\n')

Dgres = Dgfa - DgT - Dggm; %Υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας σε mgal

```

% από οπτικό έλεγχο του γραφήματος βρέθηκαν κι επιλέχθηκαν να απαλειφθούν τα παρακάτω 14 σημεία (λ,φ,N) με χονδροειδή σφάλματα

```
coarse_errors=[22.128418    38.207621  -210.743455
                21.283095    38.850672    90.468947
                22.108606    38.265902  -187.294736
                22.402850    38.070212  133.780310
                24.285736    38.112872  230.790277
                24.391395    38.160742  200.624504
                23.275722    38.857876  211.529629
                22.769541    39.838625  -61.509102
                22.074842    38.019329   83.987205
                22.621021    38.650179   79.777027
                21.506650    39.979827   63.450076
                22.543610    38.523215  -28.270567
                22.518005    38.479346  -30.977321
                22.124608    39.855900  -29.029226];
```

```
k=1;
for i=1:PointsNumber1
    for j=1:length(coarse_errors)
        criterion1(i,j)=f(i)-coarse_errors(j,2);
        criterion2(i,j)=l(i)-coarse_errors(j,1);
    end
    if abs(criterion1(i,:)) > 0.000001 | abs(criterion2(i,:)) > 0.000001
        inliers(k)=i;
        k=k+1;
    end
end
```

```
gys_ptsi=gys_pts(inliers,:);
pt_idi=pt_id(inliers,1);
fi=f(inliers,1);
li=l(inliers,1);
hi=h(inliers,1);
Hi=H(inliers,1);
gi=g(inliers,1);
PointsNumber2=length(gys_ptsi)
```

```
Dgresi=Dgres(inliers,1); %υπολειπόμενες ανωμαλίες
Dgfai=Dgfa(inliers,1);
DgTi=DgT(inliers,1);
Dggmi=Dggm(inliers,1);
%πλέον έχουν απαλειφθεί τα χονδροειδή από οπτικό έλεγχο
```

```
aa=[fi li Dgfai-Dggmi]
a=[fi li Dgresi]
```

```
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);
```

```
ZI1=griddata(li,fi,Dgfai,XI,YI);
ZI2=griddata(li,fi,Dggmi,XI,YI);
ZI3=griddata(li,fi,Dgfai-Dggmi,XI,YI);
ZI4=griddata(li,fi,DgTi,XI,YI);
ZI5=griddata(li,fi,Dgresi,XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];
```

```
figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
```

```

contour3(XI,YI,ZItopo+300,contour_lines+300,'k'),hold on
plot3(li,fi,Dgfai+10,'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των Dgfai στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI2), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+300,contour_lines+300,'k'),hold on
plot3(li,fi,Dggmi+10,'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των Dggm στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI3), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+300,contour_lines+300,'k'),hold on
plot3(li,fi,Dgfai-Dggmi+10,'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των Dgfai-Dggm στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI4), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+300,contour_lines+300,'k'),hold on
plot3(li,fi,DgTi+10,'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των Δg_T στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI5), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+300,contour_lines+300,'k'),hold on
plot3(li,fi,Dgresi-10,'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των μειωμένων ανωμαλιών Δg_r_e_s στα σημεία των μετρήσεων')

```

E. Script αρχείο “RCR2”, που δημιουργήθηκε για την εύρεση της τελικής αποχής N του μοντέλου, στην 3^η μέθοδο:

```

clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΜΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΠΕΤΡΟΣ\n')
fprintf('\nεύρεση του N = N(gm) + N(Δg) + N(ind) \n\n')

gravpts=load('Dg_res_TotalTerrainEffect.txt');
fgr=gravpts(:,1);
lgr=gravpts(:,2);

```

```

Dgres=gravpts(:,3) / 10^5; %σε m/sec^2
PointsNumber=length(gravpts)

topo=load('etopol_grel826_3642_0_01.txt');
toposhm=load('etopol_SphHarm_grel826_3642_0_01.txt');
toporef=[topo(:,1) topo(:,2) topo(:,3)-toposhm(:,3)];

xi=19.5:0.025:26;
yi=36.5:0.025:41;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

fprintf('\n\nbeforexiyi\n\n')

c=0;
for i=1:length(xi)
    for j=1:length(yi)
        xiyi(j+c,1)=XI(j,i);
        xiyi(j+c,2)=YI(j,i);
    end
    c=c+length(yi);
end

fprintf('\n\nxiyiend\n\n')

[fitresult1, gof1] = DgFitCubic(lgr, fgr, Dgres)
in_zi=fitresult1(xiyi(:,1),xiyi(:,2));
in_grid=[xiyi(:,1) xiyi(:,2) in_zi];

NaNDetect=isnan(in_zi);
nans=find(NaNDetect==1);
nums=find(NaNDetect==0);

[fitresult2, gof2] = DgFitLowess(lgr, fgr, Dgres)
out_zi=fitresult2(xiyi(:,1),xiyi(:,2));
out_grid=[xiyi(:,1) xiyi(:,2) out_zi];

in_grid=in_grid(nums,:);
out_grid=out_grid(nans,:);
total_grid=[out_grid]; %φτιάξαμε τον κάνναβο των τιμών Δg_res

fk=total_grid(:,2);
lk=total_grid(:,1);
Dgk=total_grid(:,3);

sinfk=sin(fk*pi/180);
cosfk=cos(fk*pi/180);
g1=9.7803267715 * (1 + 0.0052790414*sinfk.^2 + 0.0000232718*sinfk.^4 +
0.0000001262*sinfk.^6 + 0.0000000007*sinfk.^8); %κανονική βαρύτητα πλάτους φ σε
m/sec^2
g=mean(g1)
Re=6371000 %σε m
G=6.67428 * 10^(-11); %σε N * m^2 / kg^2
p=2670; pw=1030; %σε kg / m^3

fprintf('before_for\n')

%συνάρτηση Stokes

```



```

psi=zeros(1,length(fk));
s=zeros(1,length(fk));
S=zeros(1,length(fk));
Ndgl=zeros(1,length(fk));
Ndgk=zeros(length(fk),1)+100;
DT=zeros(1,length(fk));

for i = 1 : length(fk)

    if (fk(i)>=37.5 && fk(i)<=40) && (lk(i)>=20.5 && lk(i)<=25)
        psi = acos( sinfk' * sinfk(i) + cosfk' * cosfk(i) .* cos((lk'-
lk(i))*pi/180) ); %σε rad
        s=sin(psi/2);
        s(i)=sin(pi/180 * 0.025/4);
        S = s.^(-1) - 6*s + 1 - 5 * (1 - 2 * s.^2) - 3 * (1 - 2 * s.^2) .*
log(s+s.^2);
        Ndgl = Dgk' .* cosfk' .* S;
        in = find( psi <= 0.5 * pi/180 );
        Ndgk(i,1) = Re * ( pi/180 * 0.025 ) * ( pi/180 * 0.025 ) / ( 4 * pi * g ) *
sum( Ndgl(in) );
    end

%-----
points=toporef(in,:); % συμμετέχοντα σημεία
%-----
points2=topo(in,:);
sea=find(points2(:,3)<0);
points(sea,3)=points(sea,3) * (1-pw/p); %μέθοδος RET
%-----
pos=find(points(:,3)>0);
pointspos=points(pos,:);

x=(pointspos(:,1)-lk(i)) * pi/180 * Re .* cos(pointspos(:,2)*pi/180);
y=(pointspos(:,2)-fk(i)) * pi/180 * Re;
dx=0.01*pi/180 * Re * cos(pointspos(:,2)*pi/180);
dy=0.01*pi/180 * Re;

summationpos=zeros(length(x),1);
for iii=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            mi=(-1)^iii * (-1)^j * (-1)^k;
            xi = x + (-1)^iii .* dx/2;
            yi = y + (-1)^j * dy/2;
            %zi= Href + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            %zi = Href-H(ii) + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            zi = 0 + (k-1) * pointspos(:,3);
            R=sqrt( xi.^2 + yi.^2 + zi.^2 );
            dg_components = mi * ( - xi .* yi .* log(R+zi) - xi .* zi .*
log(R+yi) - zi .* yi .* log(R+xi) + 0.5*xi.^2 .* atan( zi.*yi./(xi.*R) ) +
0.5*yi.^2 .* atan( zi.*xi./(yi.*R) ) + 0.5*zi.^2 .* atan( yi.*xi./(zi.*R) ) );
            summationpos=summationpos+dg_components;
        end
    end
end

neg=find(points(:,3)<0);
pointsneg=points(neg,:);

```

```

x=(pointsneg(:,1)-lk(i)) * pi/180 * Re .* cos(pointsneg(:,2)*pi/180);
y=(pointsneg(:,2)-fk(i)) * pi/180 * Re;
dx=0.01*pi/180 * Re * cos(pointsneg(:,2)*pi/180);
dy=0.01*pi/180 * Re;

summationneg=zeros(length(x),1);
for iii=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            mi=(-1)^iii * (-1)^j * (-1)^k;
            xi = x + (-1)^iii .* dx/2;
            yi = y + (-1)^j * dy/2;
            %zi= Href + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            %zi = Href-H(iii) + (k-1) * (points(:,3)-Href);
            zi = 0 + (k-1) * pointsneg(:,3);
            R=sqrt( xi.^2 + yi.^2 + zi.^2 );
            dg_components = mi * ( - xi .* yi .* log(R+zi) - xi .* zi .*
log(R+yi) - zi .* yi .* log(R+xi) + 0.5*xi.^2 .* atan( zi.*yi./(xi.*R) ) +
0.5*yi.^2 .* atan( zi.*xi./(yi.*R) ) + 0.5*zi.^2 .* atan( yi.*xi./(zi.*R) ) );
            summationneg=summationneg+dg_components;
        end
    end
end

DT(i,1) = 10^5 * ( G * p * ( sum(summationpos)-sum(summationneg) ) );
%διαφορά δυναμικού σε mgal
%-----
-----

end

fprintf('for_end\n')

inside=find( Ndgk(:,1) ~= 100 );
fk=fk(inside,1);
lk=lk(inside,1);
Dgk=Dgk(inside,1);
Ndgk=Ndgk(inside,1); %N(Δg)
DT=DT(inside,1);
g1=g1(inside,1);
Nind=(10^-5) * DT ./ g1;

gm=load('egm2008_grs80gre1925_3741_ha_0_01.txt');
Dgbg=load('egm2008_grs80gre1925_3741_Dgbg_0_01.txt');
topo=load('etopo1_gre1925_3741_0_01.txt');

g1_ = 978032.67715 * (1 + 0.0052790414*sin(Dgbg(:,2)*pi/180).^2 +
0.0000232718*sin(Dgbg(:,2)*pi/180).^4 + 0.0000001262*sin(Dgbg(:,2)*pi/180).^6 +
0.0000000007*sin(Dgbg(:,2)*pi/180).^8);
g2_ = g1_ - 0.3086*topo(:,3);
g_ = (g1_ + g2_) / 2;
dNj= ( Dgbg(:,3) ./ g_ ) .* topo(:,3); %για να αναχθούμε από το ζ στο N

xii=20.5:0.01:25;
yii=37.5:0.01:40;
[XII,YII]=meshgrid(xii,yii);

ZII_Ndg=griddata(lk,fk,Ndgk,XII,YII);

```

```

ZII_Ngm=griddata(gm(:,1),gm(:,2),gm(:,4),XII,YII);
ZII_topo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XII,YII);
%ZII_Nind= griddata(lk,fk,Nind,XII,YII);
ZII_Nj=griddata(gm(:,1),gm(:,2),dNj,XII,YII);
ZII_N = ZII_Ngm + ZII_Ndg + ZII_Nind - ZII_Nj; % N μοντέλου
contour_lines=[0 5000 10000];

c=0;
for i=1:length(xii)
    for j=1:length(yii)
        im(j+c,1)=XII(j,i); % λ κάναβος
        im(j+c,2)=YII(j,i); % φ κάναβος
        im(j+c,3)=ZII_N(j,i); % N κάναβος
    end
    c=c+length(yii);
end

%πλέον έχει δημιουργηθεί το βαρυτημετρικό μοντέλο και παρακάτω το
%συγκρίνουμε με τις μετρήσεις για την περαιτέρω συνέχιση της διαδικασίας

%-----

refpts=load('ref_pts.txt');
ptr=refpts(:,1);
fr=refpts(:,2);
lr=refpts(:,3);
hr=refpts(:,4);
Hr=refpts(:,5);
gr=refpts(:,6);
Nr=hr-Hr;
ReferencePointsNumber=length(refpts)

testpts=load('test_pts.txt');
ptt=testpts(:,1);
ft=testpts(:,2);
lt=testpts(:,3);
ht=testpts(:,4);
Ht=testpts(:,5);
gt=testpts(:,6);
Nt=ht-Ht;
TestPointsNumber=length(testpts)

%και για όλα τα σημεία μαζί συνολικά:
totalpts=[refpts;testpts];
pt=[ptr;ptt];
f=[fr;ft];
l=[lr;lt];
h=[hr;ht];
H=[Hr;Ht];
g=[gr;gt];
N=[Nr;Nt];
TotalPointsNumber=length(totalpts)

%εύρεση της αποχής N του μοντέλου στα σημεία των παρατηρήσεων, δημιουργώντας έναν
αλγόριθμο παρεμβολής από
%τα 4 σημεία του πλέγματος, που περιβάλλουν το κάθε σημείο
for i=1:TotalPointsNumber
    k=1; j=1;
    while j<=length(im) && k<=4
        if abs(im(j,1)-l(i))<0.01 && abs(im(j,2)-f(i))<0.01

```

```

        near_pts(k)=j;
        k=k+1;
    end
    j=j+1;
end
sum1=0;
suma=0;
for km=1:length(near_pts)
    m=near_pts(km);
    dist(i,km)=sqrt((f(i)-im(m,2))^2 + (l(i)-im(m,1)) * cos(
(f(i)+im(m,2))/2 * pi/180))^2);
    sum1=sum1+im(m,3)/dist(i,km);
    suma=suma+1/dist(i,km);
end
Nim(i,:)=sum1/suma; %παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης
end
Nim=round(Nim*1000)/1000; % N(initial model)
DNim= N-Nim(:,1) ; % N-N(initial model)
for i=1:ReferencePointsNumber
    DNimr(i,1)=DNim(i,1); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    DNimt(i,1)=DNim(ReferencePointsNumber+i,1); %για τα test points
end

figure
mesh(XII,YII,ZII_N), hold on
contour3(XII,YII,ZII_topo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(l,f,Nim+5,'. '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση του αρχικού μοντέλου')

ZII_DN=griddata(l,f, DNim,XII,YII);
figure
mesh(XII,YII,ZII_DN), hold on
contour3(XII,YII,ZII_topo+10,contour_lines+10,'k'),hold on
plot3(lr,fr, DNimr+2,'b. '), hold on
plot3(lt,ft, DNimt+2,'r* '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων του αρχικού μοντέλου')

fprintf('\n\n\nΣτατιστικοί έλεγχοι μοντέλου\n\n')
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_positive_dz=[round(1000*max(DNimr(:,1)))/1000
round(1000*max(DNimt(:,1)))/1000]
max_negative_dz=[round(1000*min(DNimr(:,1)))/1000
round(1000*min(DNimt(:,1)))/1000]
mean_dz=[round(mean(DNimr(:,1))*1000)/1000 round(mean(DNimt(:,1))*1000)/1000]
stdev=[round(std(DNimr(:,1))*1000)/1000 round(std(DNimt(:,1))*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum(DNimr(:,1).^2)/length(DNimr(:,1))))/1000
round(1000*sqrt(sum(DNimt(:,1).^2)/length(DNimt(:,1))))/1000]

```

```

dNmipoly2=function_PolynomSurfFit(fr,lr,DNimr(:,1),ft,lt,DNimt(:,1),2,topo); % Ni
- Nmodel

for i=1:ReferencePointsNumber
    dNmipoly2r(i,1)=dNmipoly2(i,1); %για τα reference points
end
for i=1:TestPointsNumber
    dNmipoly2t(i,1)=dNmipoly2(ReferencePointsNumber+i,1); %για τα test points
end

coll2=function_Collocation2(fr,lr,dNmipoly2r,ft,lt,dNmipoly2t,0,0,1,0.1,0,0,topo);

wave1=function_WeightAve(fr,lr,dNmipoly2r,ft,lt,dNmipoly2t,1,2,0,topo);

```

ΣΤ. Function αρχείο “function StatTest”, που δημιουργήθηκε για τη διενέργεια του στατιστικού ελέγχου (με προσαρμογή των βέλτιστων επιπέδων) σε κάθε υποπεριοχή και χρησιμοποιήθηκε στο (A) script αρχείο:

```

function [in_region] = function_StatTest( region )
%το όρισμα της συνάρτησης είναι ένας πίνακας (περιοχή) με 5 τουλάχιστον
%στήλες (id,φ,λ,h,H) και το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας ίδιου αριθμού
%στηλών, αλλά χωρίς τις γραμμές που αντιπροσωπεύουν outlier points
fo=mean(region(:,2));
lo=mean(region(:,3));
u=region(:,2)-fo;
v=(region(:,3)-lo) .* cos(region(:,2)*pi/180);
N=region(:,4)-region(:,5);
diff=zeros(length(region),1);
for i=1:length(region)
    count=1; refpts=zeros(length(region)-1,1);
    for j=1:length(region)
        if i~=j
            refpts(count,1)=j;
            count=count+1;
        end
    end
    SurflstDeg=fit([v(refpts,1),u(refpts,1)],N(refpts,1),'poly11');
    diff(i)=N(i)-SurflstDeg(v(i),u(i));
end

figure
histfit(diff,7)
xlabel('διαστήματα τιμών ΔN = N - N_p_r_e_d_i_c_t_e_d_v_a_l_u_e (σε m)')
ylabel('πλήθος σημείων')
title('ιστόγραμμα συχνοτήτων των τιμών ΔN = N - N_p_r_e_d_i_c_t_e_d_v_a_l_u_e
για τα σημεία της υποπεριοχής')

mean_diff=round(1000*mean(diff))/1000
std_diff=round(1000*std(diff))/1000
outliers=find(diff>mean(diff)+2*std(diff) | diff<mean(diff)-2*std(diff));
outliers=round(1000*diff(outliers,1))/1000

```



```

l=[lref;ltest];
z=[zref;ztest];
%μεταθέτουμε την αρχη του συστήματος στο μέσο (φο,λο) της περιοχής
fo=mean(f);
lo=mean(l);
uref=(fref-fo);
vref=(lref-lo) .* cos(fref*pi/180);
utest=(ftest-fo);
vtest=(ltest-lo) .* cos(ftest*pi/180);

k=0; c=0;
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
    A(:,j)=uref.^(n-c-k) .* vref.^k;
    k=k+1;
    if n-c-k < 0
        c=c+1;
        k=0;
    end
end
X=(A'*A) \ A'*zref;
zref_model=A*X; % οι τιμές του Z για τα ref pts που προβλέπει το μοντέλο της
πολυων. επιφ.
dzref=round(1000*(zref-zref_model))/1000; % οι αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου
από τις παρατηρήσεις( Zi - Zmodel ) στα ref pts
so=sqrt( ( dzref' * dzref ) / ( length(uref) - (n+4)*(n-1)/2 - 3 ) )
Vx=so^2 * inv(A'*A);
for i= 1 : length(X)
    fprintf( '\n%1.4f +- %1.4f',X(i),sqrt(Vx(i,i)) )
end

k=0; c=0;
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
    At(:,j)=utest.^(n-c-k) .* vtest.^k;
    k=k+1;
    if n-c-k < 0
        c=c+1;
        k=0;
    end
end
ztest_model=At*X; % οι τιμές του Z για τα test pts που προβλέπει το μοντέλο της
πολυων. επιφ.
dztest=round(1000*(ztest-ztest_model))/1000; % οι αποκλίσεις των τιμών του
μοντέλου από τις παρατηρήσεις( Zi - Zmodel ) στα test pts
dz=[dzref;dztest];

fprintf( '\n\n' )

fprintf('\n\n\nΣτατιστικοί έλεγχοι της πολυωνυμικής επιφάνειας\n')
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_positive_dz=[max(dzref)  max(dztest)]
max_negative_dz=[min(dzref)  min(dztest)]
mean_dz=[round(mean(dzref)*1000)/1000  round(mean(dztest)*1000)/1000]
stdev=[round(std(dzref)*1000)/1000  round(std(dztest)*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum(dzref.^2)/length(dzref)))/1000
round(1000*sqrt(sum(dztest.^2)/length(dztest)))/1000]
R2=[round(1000*(1-sum(dzref.^2)/sum((zref-mean(zref)).^2)))/1000  round(1000*(1-
sum(dztest.^2)/sum((ztest-mean(ztest)).^2)))/1000]

```

```

%γραφήματα
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

fprintf('\n\nPSF_beforexiyi\n\n')

c=0;
for i=1:length(xi)
    for j=1:length(yi)
        xiyi(j+c,1)=XI(j,i);
        xiyi(j+c,2)=YI(j,i);
    end
    c=c+length(yi);
end

fprintf('\n\nPSF_xiyiend\n\n')

k=0; c=0;
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
    Ar(:,j)=(xiyi(:,2)-fo).^ (n-c-k) .* ( (xiyi(:,1)-lo) .* cos(xiyi(:,2)*pi/180)
).^k;
    k=k+1;
    if n-c-k < 0
        c=c+1;
        k=0;
    end
end

fprintf('\n\nPSF_beforegriddata\n\n')

ZI1=griddata(1,f,dz,XI,YI);
ZI2=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),Ar*X,XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

fprintf('\n\nPSF_griddataend\n\n')

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+3,contour_lines+3,'k'), hold on
plot3(lref,fref,dzref+2.5,'b.'), hold on
plot3(ltest,ftest,dztest+2.5,'r*'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων  $\Delta z = Z - Z(\text{model})$  στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI2), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'), hold on
plot3(lref,fref,zref+2.5,'b.'), hold on
plot3(ltest,ftest,ztest+2.5,'r*'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση της πολυωνυμικής επιφάνειας')
fprintf('\n\n\n\n')

```



```
fprintf('\n\nPSF_END\n\n')
```

```
end
```

H. Function αρχείο “function ParamSurfFit”, που δημιουργήθηκε για τη δημιουργία παραμετρικών διορθωτικών επιφανειών και χρησιμοποιήθηκε στο (B) και (E) script αρχείο:

```
function [ dz ] = function_ParamSurfFit( fref, lref, zref, ftest, ltest, ztest,
n, topo )
%τα ορίσματα της συνάρτησης είναι 6 πίνακες-στήλη (διάνυσματα), ένας
%θετικός ακέραιος και ένας πίνακας 3 στηλών (φ,λ,Η) για την τοπογραφία της
%περιοχής, κατά την εξής σειρά: φ(ή y), λ(ή x), Z(π.χ. N,ΔN,Η,κλπ)
%-> reference pts, φ(ή y), λ(ή x), Z(π.χ. N,ΔN,Η,κλπ)-> test pts, ο
%βαθμός της παραμετρικής επιφάνειας (4,5,7) και ο πίνακας της τοπογραφίας
%το αποτέλεσμα είναι ο πίνακας-στήλη (διάνυσμα) των συντελεστών της
%παραμετρικής επιφάνειας, κατά τη σειρά που δεικνύεται (ή το διάνυσμα των
%υπολοίπων dz = z - z(model) )
fprintf('\n\n*****\n\n')
fprintf('\n\n%1.0f-παραμετρική επιφάνεια %1.0fου βαθμού (σύνολο %1.0f
όροι)\n\n',n)

f1=1/298.25722210088;
e2=1-(f1-1)^2;

cosfr=cos(fref*pi/180);
sinfr=sin(fref*pi/180);
coslr=cos(lref*pi/180);
sinlr=sin(lref*pi/180);

cosft=cos(ftest*pi/180);
sinft=sin(ftest*pi/180);
coslt=cos(ltest*pi/180);
sinlt=sin(ltest*pi/180);

f=[fref;ftest];
l=[lref;ltest];
z=[zref;ztest];

A=zeros(length(fref),n);
for i=1:length(fref)
    A(i,1)=1;
    A(i,2)=cosfr(i)*coslr(i);
    A(i,3)=cosfr(i)*sinlr(i);
    A(i,4)=sinfr(i);
    if n==5;
        A(i,5)=sinfr(i)^2;
    else if n==7
        A(i,5)=cosfr(i)*coslr(i)*sinfr(i) / sqrt(1-e2*sinfr(i)^2);
        A(i,6)=cosfr(i)*sinlr(i)*sinfr(i) / sqrt(1-e2*sinfr(i)^2);
        A(i,7)=sinfr(i)^2 / sqrt(1-e2*sinfr(i)^2);
    end
end
end
```

```

X=inv(A'*A)*A'*zref;
zref_model=round(1000*A*X)/1000; % οι τιμές του Z για τα ref pts που προβλέπει το
μοντέλο της παραμετρικής επιφ.
dzref=zref-zref_model; % οι αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου από τις
παρατηρήσεις (Zi - Zmodel) στα ref pts
so=sqrt( ( dzref' * dzref ) / ( length(fref) - (n+4)*(n-1)/2 - 3 ) )
Vx=so^2 * inv(A'*A);
for i= 1 : length(X)
    fprintf( '\n%1.4f +- %1.4f',X(i),sqrt(Vx(i,i)) )
end

At=zeros(length(ftest),n);
for i=1:length(ftest)
    At(i,1)=1;
    At(i,2)=cosft(i)*coslt(i);
    At(i,3)=cosft(i)*sinlt(i);
    At(i,4)=sinft(i);
    if n==5;
        At(i,5)=sinft(i)^2;
    else if n==7
        At(i,5)=cosft(i)*coslt(i)*sinft(i) / sqrt(1-e2*sinft(i)^2);
        At(i,6)=cosft(i)*sinlt(i)*sinft(i) / sqrt(1-e2*sinft(i)^2);
        At(i,7)=sinft(i)^2 / sqrt(1-e2*sinft(i)^2);
    end
end
end
ztest_model=round(1000*At*X)/1000; % οι τιμές του Z για τα test pts που προβλέπει
το μοντέλο της παραμετρικής επιφ.
dztest=ztest-ztest_model; % οι αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου από τις
παρατηρήσεις (Zi - Zmodel) στα test pts
dz=round(1000*[dzref;dztest])/1000;

fprintf('\nΣτατιστικοί έλεγχοι της παραμετρικής επιφάνειας\n')
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_positive_dz=[round(1000*max(dzref))/1000 round(1000*max(dztest))/1000]
max_negative_dz=[round(1000*min(dzref))/1000 round(1000*min(dztest))/1000]
mean_dz=[round(mean(dzref)*1000)/1000 round(mean(dztest)*1000)/1000]
stdev=[round(std(dzref)*1000)/1000 round(std(dztest)*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum(dzref.^2)/length(dzref)))/1000
round(1000*sqrt(sum(dztest.^2)/length(dztest)))/1000]
R2=[round(1000*(1-sum(dzref.^2)/sum((zref-mean(zref)).^2)))/1000 round(1000*(1-
sum(dztest.^2)/sum((ztest-mean(ztest)).^2)))/1000]

%γραφήματα
xi=20.5:0.025:25;
yi=37.5:0.025:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

c=0;
for i=1:length(xi)
    for j=1:length(yi)
        xiyi(j+c,1)=XI(j,i);
        xiyi(j+c,2)=YI(j,i);
    end
    c=c+length(yi);
end
end

cosfw=cos(xiyi(:,2)*pi/180);
sinfw=sin(xiyi(:,2)*pi/180);

```

```

coslw=cos(xiyi(:,1)*pi/180);
sinlw=sin(xiyi(:,1)*pi/180);

Aw=zeros(length(xiyi),n);
for i=1:length(xiyi)
    Aw(i,1)=1;
    Aw(i,2)=cosfw(i)*coslw(i);
    Aw(i,3)=cosfw(i)*sinlw(i);
    Aw(i,4)=sinfw(i);
    if n==5;
        Aw(i,5)=sinfw(i)^2;
    else if n==7
        Aw(i,5)=cosfw(i)*coslw(i)*sinfw(i) / sqrt(1-e2*sinfw(i)^2);
        Aw(i,6)=cosfw(i)*sinlw(i)*sinfw(i) / sqrt(1-e2*sinfw(i)^2);
        Aw(i,7)=sinfw(i)^2 / sqrt(1-e2*sinfw(i)^2);
    end
end
end

ZI1=griddata(1,f,dz,XI,YI);
ZI2=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),Aw*X,XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+2,contour_lines+2,'k'),hold on
plot3(lref,fref,dzref+2,'b.'), hold on
plot3(ltest,ftest,dztest+2,'r*'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων Δz = Z - Z(model) στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI2), hold on
%contour3(XI,YI,ZItopo+3,contour_lines+3,'k'),hold on
%plot3(lref,fref,zref+2,'b.'), hold on
%plot3(ltest,ftest,ztest+2,'r*'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση της πολυωνυμικής επιφάνειας')
fprintf('\n\n\n\n')

end

```

Θ. Function αρχείο “function PolynomSurfFit 4FramePts”, που δημιουργήθηκε για την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή των πολυωνυμικών επιφανειών στα δεδομένα των μετρήσεων και παράλληλα την ένταξη των αποχών του EGM 2008 στην επίλυση για την 1^η εναλλακτική της 1^{ης} μεθόδου και χρησιμοποιήθηκε στο (B) script αρχείο:

```

function [ dz ] = function_PolynomSurfFit_4FramePts( fref, lref, zref, ftest,
ltest, ztest, n, topo )

```

```

%τα ορίσματα της συνάρτησης είναι 6 πίνακες-στήλη (διανύσματα), ένας
%θετικός ακέραιος και ένας πίνακας 3 στηλών (φ,λ,Η) για την τοπογραφία της
%περιοχής, κατά την εξής σειρά: φ(ή y), λ(ή x), Z(π.χ. N,ΔN,Η,κλπ)
%-> reference pts, φ(ή y), λ(ή x), Z(π.χ. N,ΔN,Η,κλπ)-> test pts, ο
%βαθμός της πολυωνυμικής επιφάνειας και ο πίνακας της τοπογραφίας
%το αποτέλεσμα είναι ο πίνακας-στήλη (διάνυσμα) των συντελεστών της
%πολυωνυμικής επιφάνειας, κατά τη σειρά που δεικνύεται (ή το διάνυσμα των
%υπολοίπων dz = z - z(model) )
fprintf('\n\n*****\n\n')
fprintf('\nπολυωνυμική επιφάνεια %1.0fου βαθμού (σύνολο %1.0f
όροι)\n',n,(n+4)*(n-1)/2 + 3)

if n==1
    fprintf('\n a1,0 u + a0,1 v + a0,0\n\n\n')
end
if n==2
    fprintf('\n a2,0 u^2 + a1,1 u v + a0,2 v^2 + a1,0 u + a0,1 v + a0,0\n\n\n')
end
if n==3
    fprintf('\n a3,0 u^3 + a2,1 u^2 v + a1,2 u v^2 + a0,3 v^3 + a2,0 u^2 + a1,1 u
v + a0,2 v^2 + a1,0 u + a0,1 v + a0,0\n\n\n')
end
if n==4
    fprintf('\n a4,0 u^4 + a3,1 u^3 v + a2,2 u^2 v^2 + a1,3 u v^3 + a0,4 v^4
+\n')
    fprintf('\n+ a3,0 u^3 + a2,1 u^2 v + a1,2 u v^2 + a0,3 v^3 +\n')
    fprintf('\n+ a2,0 u^2 + a1,1 u v + a0,2 u^2 +\n')
    fprintf('\n+ a1,0 u + a0,1 v + a0,0\n\n\n')
end
if n>4
    fprintf('\n a%1.0f,0 u^%1.0f + a%1.0f,1 u^%1.0f v + a%1.0f,2 u^%1.0f v^2
+...+ a0,%1.0f v^%1.0f +\n',n,n,n-1,n-1,n-2,n-2,n,n)
    fprintf('\n+ a%1.0f,0 u^%1.0f + a%1.0f,1 u^%1.0f v + a%1.0f,2 u^%1.0f v^2
+...+ a0,%1.0f v^%1.0f +\n',n-1,n-1,n-2,n-2,n-3,n-3,n-1,n-1)
    fprintf('\n.....\n')
    fprintf('\n+ a2,0 u^2 + a1,1 u v + a0,2 v^2 +\n')
    fprintf('\n+ a1,0 u + a0,1 v + a0,0\n\n\n')
end

f=[fref;ftest];
l=[lref;lttest];
z=[zref;ztest];
%-----
framepts=load('frame_pts2.txt');
ff=framepts(:,2);
lf=framepts(:,1);
zf=framepts(:,3)+1.2;
ztot=[zref;zf];
%-----

%μεταθέτουμε την αρχή του συστήματος στο μέσο (φο,λο) της περιοχής
fo=mean(f);
lo=mean(l);
uref=(fref-fo);
vref=(lref-lo) .* cos(fref*pi/180);
utest=(ftest-fo);
vtest=(lttest-lo) .* cos(ftest*pi/180);

%-----

```

```

uf=(ff-fo);
vf=(lf-lo) .* cos(ff*pi/180);
utot=[uref;uf];
vtot=[vref;vf];
%-----

k=0; c=0;
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
    A(:,j)=utot.^(n-c-k) .* vtot.^k;
    k=k+1;
    if n-c-k < 0
        c=c+1;
        k=0;
    end
end

P=eye(length(utot));
for i = length(uref)+1 : length(utot)
    P(i,i)=0.5;
end

X=inv(A'*P*A)*A'*P*ztot;
ztot_model=A*X; % οι τιμές του Z για τα ref pts που προβλέπει το μοντέλο της
πολυων. επιφ.
dztot=round(1000*(ztot-ztot_model))/1000;
for i=1:length(zref)
    dzref(i,1)=dztot(i,1);
end

so=sqrt( ( dztot' * P * dztot ) / ( length(utot) - (n+4)*(n-1)/2 - 3 ) )
Vx=so^2 * inv(A'*P*A);
for i= 1 : length(X)
    fprintf( '\n%1.4f +- %1.4f',X(i),sqrt(Vx(i,i)) )
end

k=0; c=0;
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
    At(:,j)=utest.^(n-c-k) .* vtest.^k;
    k=k+1;
    if n-c-k < 0
        c=c+1;
        k=0;
    end
end
ztest_model=At*X; % οι τιμές του Z για τα test pts που προβλέπει το μοντέλο της
πολυων. επιφ.
dztest=round(1000*(ztest-ztest_model))/1000; % οι αποκλίσεις των τιμών του
μοντέλου από τις παρατηρήσεις( Zi - Zmodel ) στα test pts
dz=[dzref;dztest];

fprintf('\n\n\nΣτατιστικοί έλεγχοι της πολυωνυμικής επιφάνειας\n')
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_positive_dz=[max(dzref) max(dztest)]
max_negative_dz=[min(dzref) min(dztest)]
mean_dz=[round(mean(dzref)*1000)/1000 round(mean(dztest)*1000)/1000]
stdev=[round(std(dzref)*1000)/1000 round(std(dztest)*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum(dzref.^2)/length(dzref)))/1000
round(1000*sqrt(sum(dztest.^2)/length(dztest)))/1000]

```

```
R2=[round(1000*(1-sum(dzref.^2)/sum((zref-mean(zref)).^2)))/1000 round(1000*(1-
sum(dztest.^2)/sum((ztest-mean(ztest)).^2)))/1000]
```

```
%γραφήματα
```

```
xi=20.5:0.01:25;
```

```
yi=37.5:0.01:40;
```

```
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);
```

```
fprintf('PSF4FP_beforexiyi')
```

```
c=0;
```

```
for i=1:length(xi)
```

```
    for j=1:length(yi)
```

```
        xiyi(j+c,1)=XI(j,i);
```

```
        xiyi(j+c,2)=YI(j,i);
```

```
    end
```

```
    c=c+length(yi);
```

```
end
```

```
fprintf('PSF4FP_beforexiyiend')
```

```
k=0; c=0;
```

```
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
```

```
    Ar(:,j)=(xiyi(:,2)-fo).^(n-c-k) .* ( (xiyi(:,1)-lo) .* cos(xiyi(:,2)*pi/180)
).^k;
```

```
    k=k+1;
```

```
    if n-c-k < 0
```

```
        c=c+1;
```

```
        k=0;
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i=1:length(zref)
```

```
    Aa(i,:)=A(i,:);
```

```
end
```

```
Aaa=[Aa;At];
```

```
fprintf('PSF4FP_beforegriddata')
```

```
ZI1=griddata(1,f,z-Aaa*X,XI,YI);
```

```
ZI2=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),Ar*X,XI,YI);
```

```
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
```

```
contour_lines=[0 5000 10000];
```

```
fprintf('PSF4FP_griddataend')
```

```
figure
```

```
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
```

```
contour3(XI,YI,ZItopo+2,contour_lines+2,'k'),hold on
```

```
plot3(lref,fref,zref-Aa*X+2,'b.'), hold on
```

```
plot3(ltest,ftest,ztest-At*X+2,'r*'), hold off
```

```
xlabel('λ (dec deg)')
```

```
ylabel('φ (dec deg)')
```

```
zlabel('Z (m)')
```

```
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων Δz = Z - Z(model) στα σημεία των μετρήσεων')
```

```
figure
```

```
mesh(XI,YI,ZI2), hold on
```

```
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
```



```

fprintf('\n+ a1,0 u + a0,1 v + a0,0\n\n\n\n')
end

f=[fref;ftest];
l=[lref;ltest];
z=[zref;ztest];
%μειοθέτουμε την αρχή του συστήματος στο μέσο (φο,λο) της περιοχής
R=6371; %σε km
fo=mean(f);
lo=mean(l);
uref=(fref-fo) * pi/180 * R; %σε km
vref=pi/180 * R * (lref-lo) .* cos(fref*pi/180); %σε km
utest=(ftest-fo) * pi/180 * R; %σε km
vtest=pi/180 * R * (ltest-lo) .* cos(ftest*pi/180); %σε km

fdev=(f-fo) * pi/180 * R; %σε km
ldev=(l-lo) * pi/180 * R; %σε km
vdev=pi/180 * R * (ldev-lo) .* cos(fdev*pi/180); %σε km

A=zeros( length([uref;xi;itta]), (n+4)*(n-1)/2 + 3 );
for i=1:length(uref)
    k=0; c=0;
    for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
        A(i,j)=uref(i)^(n-c-k) * vref(i)^k;
        k=k+1;
        if n-c-k < 0
            c=c+1;
            k=0;
        end
    end
end
for i = length(uref)+1 : length([uref;xi])
    k=0; c=0;
    for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
        A(i,j)=(n-c-k)*udev(i-length(uref))^(n-c-k-1) * vdev(i-length(uref))^k;
        k=k+1;
        if n-c-k < 0
            c=c+1;
            k=0;
        end
    end
end
for i = length([uref;xi])+1 : length([uref;xi;itta])
    k=0; c=0;
    for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
        A(i,j)=udev(i-length([uref;xi]))^(n-c-k) * k*vdev(i-
length([uref;xi]))^(k-1);
        k=k+1;
        if n-c-k < 0
            c=c+1;
            k=0;
        end
    end
end
lengthA=length(A)
P=eye( length([uref;xi;itta]) );
for i = length(uref)+1 : length([uref;xi;itta])
    P(i,i)=1;
end

X=( A'*P*A ) \ ( A' * P * [zref/1000; -xi/3600 * pi/180; -itta/3600 * pi/180] );

```



```

model=A*X; % οι τιμές του Z για τα ref pts που προβλέπει το μοντέλο της πολυων.
επιφ.
for i=1:length(zref)
    zref_model(i,1)=model(i,1);
end
dmodel=[zref/1000; -xi/3600 * pi/180; -itta/3600 * pi/180] - model %σε km και σε
rad
dzref=zref-zref_model*1000; % οι αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου από τις
παρατηρήσεις( Zi - Zmodel ) στα ref pts
so=sqrt( ( dmodel' * P * dmodel ) / ( length(model) - (n+4)*(n-1)/2 - 3 ) )
Vx=so^2 * eye(length(X)) / (A' * P * A);
for i= 1 : length(X)
    fprintf( '\n%1.18f +- %1.18f',X(i),sqrt(Vx(i,i)) )
end

for i=1:length(utest)
    k=0; c=0;
    for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
        At(i,j)=utest(i)^(n-c-k) * vtest(i)^k;
        k=k+1;
        if n-c-k < 0
            c=c+1;
            k=0;
        end
    end
end
ztest_model=At*X; % οι τιμές του Z για τα test pts που προβλέπει το μοντέλο της
πολυων. επιφ.
dztest=ztest-ztest_model*1000; % οι αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου από τις
παρατηρήσεις( Zi - Zmodel ) στα test pts
dz=round(1000*[dzref;dztest])/1000;
fprintf( '\n\n' )
nnn=length(dz)

fprintf( '\n\n' )

fprintf('\n\n\nΣτατιστικοί έλεγχοι της πολυωνυμικής επιφάνειας\n')
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_positive_dz=[round(1000*max(dzref))/1000 round(1000*max(dztest))/1000]
max_negative_dz=[round(1000*min(dzref))/1000 round(1000*min(dztest))/1000]
mean_dz=[round(mean(dzref)*1000)/1000 round(mean(dztest)*1000)/1000]
stdev=[round(std(dzref)*1000)/1000 round(std(dztest)*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum(dzref.^2)/length(dzref)))/1000
round(1000*sqrt(sum(dztest.^2)/length(dztest)))/1000]
R2=[round(1000*(1-sum(dzref.^2)/sum((zref-mean(zref)).^2)))/1000 round(1000*(1-
sum(dztest.^2)/sum((ztest-mean(ztest)).^2)))/1000]

%γράφηματα
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

fprintf('\nPSFDV_beforexiyi')

c=0;
for i=1:length(xi)
    for j=1:length(yi)
        xiyi(j+c,1)=XI(j,i);
        xiyi(j+c,2)=YI(j,i);
    end
end

```

```

end
c=c+length(yi);
end

fprintf('\nPSFDV_xiyiend')

k=0; c=0;
for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
    Ar(:,j)=( pi/180 * R *(xiyi(:,2)-fo) ).^(n-c-k) .* ( pi/180 * R * (xiyi(:,1)-
lo) .* cos(xiyi(:,2)*pi/180) ).^k;
    k=k+1;
    if n-c-k < 0
        c=c+1;
        k=0;
    end
end

fprintf('\nPSFDV_beforegriddata')

ZI1=griddata(l,f,dz,XI,YI);
ZI2=griddata(xiyi(:,1),xiyi(:,2),1000*Ar*X,XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

fprintf('\nPSFDV_griddataend')

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+2,contour_lines+2,'k'),hold on
plot3(lref,fref,dzref+2,'b.'), hold on
plot3(ltest,ftest,dztest+2,'r*'), hold on
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων Δz = Z - Z(model) στα σημεία των μετρήσεων')

figure
mesh(XI,YI,ZI2), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+50,contour_lines+50,'k'),hold on
plot3(lref,fref,zref+3,'b.'), hold on
plot3(ltest,ftest,ztest+3,'r*'), hold on
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση της πολυωνυμικής επιφάνειας')

fprintf('\n\nPSFDV_END\n\n')

end

```

IA. Function αρχείο “*function Collocation*”, που δημιουργήθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής και χρησιμοποιήθηκε στα (B), (Γ) και (E) script αρχεία:

```
function [ st ] = function_Collocation( fr, lr, dzr, ft, lt, dzt, pr, pt, n, c,
c5a, c5b, topo )
%τα ορίσματα της συνάρτησης είναι κατά σειρά: φ, λ, dz (των ref pts), φ, λ,
%dz (των test pts), pr και pt - αφορούν τη μεταβλητή που θα χρησιμοποιηθεί για
τον προσδιορισμό
%της συμμεταβλητότητας (π.χ. απόσταση, υψομετρική διαφορά, κλπ) για τα ref
%pts και test pts αντίστοιχα, n (1-5) - ο αριθμός της χρησιμοποιούμενης
%συνάρτησης συμμεταβλητότητας, c, c5a, c5b - οι τιμές των διαφόρων σταθερών
%που παρουσιάζονται στις συναρτήσεις συμμεταβλητότητας
%το αποτέλεσμα της συνάρτησης είναι το σήμα (signal) για τα test pts
fprintf('\n\n*****\n\n')
fprintf('\ncollocation - σημειακή προσαρμογή\n')

f=[fr;ft];
l=[lr;lt];
dz=[dzr;dzt];

for i=1:length(fr)
    if pr==0
        S(i,:)=180/pi * acos( sin(fr'*pi/180) * sin(fr(i)*pi/180) +
cos(fr'*pi/180) * cos(fr(i)*pi/180) .* cos((lr'-lr(i))*pi/180) ); % απόσταση
        r(i,:)=S(i,:);
    else r(i,:)=abs(pr(i)-pr'); % παράμετρος p (π.χ. δΔg, δH, κλπ)
    end
end
if n==1
    C = ( 1 + (r/c).^2 ) .^(-1); % Hirvonen Covariance Function
end
if n==2
    C = exp( -r.^2 / (2*c^2) ); % Squared Exponential Covariance Function
end
if n==3
    C = (1 + sqrt(3)*r/c) .* exp(-sqrt(3)*r/c); % Matern Class Covariance
Function (v = 3/2)
end
if n==4
    C = ( 1 + sqrt(5)*r/c + 5*r.^2/(3*c^2) ) .* exp(-sqrt(5)*r/c); % Matern Class
Covariance Function (v = 5/2)
end
if n==5
    C = ( 1 + r.^2 / (2*c5a*c5b^2) ) .^(-c5a); % Rational Quadratic Covariance
Function
end

for i=1:length(ft)
    if pt==0
        St(i,:)=180/pi * acos( sin(fr'*pi/180) * sin(ft(i)*pi/180) +
cos(fr'*pi/180) * cos(ft(i)*pi/180) .* cos((lr'-lt(i))*pi/180) ); % απόσταση
        rt(i,:)=St(i,:);
    else rt(i,:)=abs(pt(i)-pr'); % παράμετρος p (π.χ. δΔg, δH, κλπ)
    end
end
if n==1
    Ct = ( 1 + (rt/c).^2 ) .^(-1); % Hirvonen Covariance Function
```

```

end
if n==2
    Ct = exp( -rt.^2 / (2*c^2) ); % Squared Exponential Covariance Function
end
if n==3
    Ct = (1 + sqrt(3)*rt/c) .* exp(-sqrt(3)*rt/c); % Matern Class Covariance
Function (v = 3/2)
end
if n==4
    Ct = ( 1 + sqrt(5)*rt/c + 5*rt.^2/(3*c^2) ) .* exp(-sqrt(5)*rt/c); % Matern
Class Covariance Function (v = 5/2)
end
if n==5
    Ct = ( 1 + rt.^2 / (2*c5a*c5b^2) ) .^(-c5a); % Rational Quadratic Covariance
Function
end

st = Ct / ( eye(length(fr)) + C ) * dzr;
sr = C / ( eye(length(fr)) + C ) * dzr;
msr=mean(sr)
mst=mean(st)

fprintf('\nΣτατιστικοί έλεγχοι (αρ. συνάρτησης: %1.0f, τιμές σταθερών (c, c5a,
c5b): %1.2f, %1.2f, %1.2f)\n',n,c,c5a,c5b)
fprintf('\n          1η στήλη:Reference pts          2η στήλη:Test pts\n\n')

max_dz=[round(1000*max(dzr-sr))/1000    round(1000*max(dzt-st))/1000]
min_dz=[round(1000*min(dzr-sr))/1000    round(1000*min(dzt-st))/1000]
mean_dz=[round(mean(dzr-sr)*1000)/1000    round(mean(dzt-st)*1000)/1000]
stdev=[round(std(dzr-sr)*1000)/1000    round(std(dzt-st)*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum((dzr-sr).^2)/length(dzr-sr)))/1000
round(1000*sqrt(sum((dzt-st).^2)/length(dzt-st)))/1000]
fprintf('\n\n\n\n')

%γραφήματα
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

fprintf('\n\nC_beforegriddata\n\n')

ZI1=griddata(1,f,dz-[sr;st],XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

fprintf('\n\nC_griddataend\n\n')

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+2,contour_lines+2,'k'),hold on
plot3(lr,fr,dzr-sr+1,'b.'), hold on
plot3(lt,ft,dzt-st+1,'r*'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων Δz = Z - Z(model) στα σημεία των μετρήσεων')

fprintf('\n\nC_END\n\n')
end

```



```

        st(i,1)= sumsc(i) / sump(i);
    end
end

fprintf('\nΣτατιστικοί έλεγχοι (αρ. συνάρτησης: %1.0f, τιμή εκθετών: %1.1f, τιμή
ακτίνας (2η συνάρτηση): %1.2f (σε μοίρες))\n',n,m,D)
fprintf('\nTest pts\n\n')

max_dz=[round(1000*max(dzt-st))/1000]
min_dz=[round(1000*min(dzt-st))/1000]
mean_dz=[round(mean(dzt-st)*1000)/1000]
stdev=[round(std(dzt-st)*1000)/1000]
RMS=[round(1000*sqrt(sum((dzt-st).^2)/length(dzt-st)))/1000]
fprintf('\n\n\n\n\n')

%γράφηματα
xi=20.5:0.01:25;
yi=37.5:0.01:40;
[XI,YI]=meshgrid(xi,yi);

fprintf('\nWA_beforegriddata\n')

ZI1=griddata(lt,ft,dzt-st,XI,YI);
ZItopo=griddata(topo(:,1),topo(:,2),topo(:,3),XI,YI);
contour_lines=[0 5000 10000];

fprintf('\nWA_griddataend\n')

figure
mesh(XI,YI,ZI1), hold on
contour3(XI,YI,ZItopo+2,contour_lines+2,'k'),hold on
plot3(lt,ft,dzt-st+1,'r*'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('Z (m)')
title ('Απεικόνιση των αποκλίσεων  $\Delta z = Z - Z(\text{model})$  στα σημεία των μετρήσεων')

fprintf('\nWA_END\n')

end

```