

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Διπλωματική Εργασία

***ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ CUSUM ΚΑΙ EWMA:
ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥΣ***

ΣΟΦΙΑ ΜΠΑΛΗ

Επιβλέπων: Κουκουβίνος Χρήστος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο εσωτερικός έλεγχος ποιότητας σε ένα αναλυτικό εργαστήριο βρίσκεται κάτω από μία συνεχόμενη κριτική αξιολόγηση των αναλυτικών μεθόδων του ίδιου του εργαστηρίου και των αναλύσεων ρουτίνας. Ο έλεγχος περιλαμβάνει την αναλυτική πορεία/διαδικασία ξεκινώντας από την είσοδο του δείγματος στο εργαστήριο και καταλήγει στην έκθεση αναφοράς. Το πιο σημαντικό εργαλείο σε αυτόν τον έλεγχο ποιότητας είναι η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου (control charts).

Το πρώτο κεφάλαιο είναι μια εισαγωγή στη φιλοσοφία των διαγραμμάτων ελέγχου και την ιστορική αναδρομή αυτών. Αναλύονται τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart και Levey-Jennings καθώς και των κριτηρίων Westgard για μια ομαλή εισαγωγή του αναγνώστη.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται το βασικό διάγραμμα ελέγχου Cusum και αναλύουμε τις βασικές ιδιότητες αυτού. Παράλληλα αναλύουμε και διάφορες παραλλαγές του διαγράμματος Cusum (Tabular Cusum, FIR-Cusum, Scale-Cusum, Τυποποιημένα διαγράμματα Cusum).

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται το βασικό διάγραμμα ελέγχου EWMA και τις βασικές έννοιες. Αναλύεται η μέθοδος σχεδιασμού ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA και παρουσιάζεται και η μέθοδος FIR-EWMA.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το εκθετικό διάγραμμα Cusum με εκτιμώμενα όρια ελέγχου. Από τη μία παρουσιάζεται το μονομερές κάτω εκθετικό διάγραμμα Cusum με γνωστή και άγνωστη παράμετρο ενώ από την άλλη παρέχεται ένα βιομηχανικό παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική περιγραφή και σύγκριση των μεθόδων RSS, MRSS, MDRSS και DMRSS του διαγράμματος EWMA. Επίσης παρουσιάζεται και μια εφαρμογή όπου παρατηρούμε όλα τα αποτελεσμάτα μας.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο εισάγουμε τις βασικές έννοιες των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Αναλύουμε τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA με τη βοήθεια προσημικών βαθμολογικών στατιστικών συναρτήσεων.

ABSTRACT

The internal quality control in an analytical lab is under continuous evaluation of the analytical methods of the lab as well as of the routine analysis. The control encompasses the analytical process starting from the entry of the sample in the lab and finishing with the final report. The most important tool in the quality control process is the use of control charts.

The first chapter is an introduction in the philosophy of the control charts and their history. The Shewhart and Levey-Jennings control as well the Westgard criteria are being analysed, so that the reader is introduced to the concept.

In the second chapter we analyse the basic control chart CUSUM along with its main properties. Additionally, we analyse various variations of it (Tabular CUSUM, FIR-CUSUM, Scale CUSUM, Standardised CUSUM charts).

The third chapter delves into the basic EWMA control chart and the main concepts around that. We analyse the design methodology for a EWMA control chart and we present the FIR-EWMA method.

In the fourth chapter we present the exponential CUSUM chart with estimated control limits. On one hand we present the one-sided lower CUSUM chart with known and unknown parameter and on the other hand we provide an industrial example so that the results are better understood.

In the fifth chapter there is a comprehensive presentation of the RSS, MRSS, MDRSS and DMRSS methods for the EWMA control chart. Additionally, we present a practical application so that all our observations become visible.

Finally in the sixth chapter we introduce the basic principles of the Nonparametric control charts. We analyse the nonparametric CUSUM and EWMA control charts with these of signed ranked statistics.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα, καθώς και τη καθοδήγησή του καθόλη τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διπλωματικής.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Ανδρουλάκη Εμμανουήλ, για τα χρήσιμα σχόλια και τις εύστοχες παρατηρήσεις του, τα οποία με βοήθησαν ιδιαίτερα στη μελέτη μου αλλά και στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου για την υποστήριξη και την ενθάρρυνση που είχα ώστε να ολοκληρώσω την προσπάθειά μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	2
ABSTRACT.....	4
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	5

ΚΕΦΑΛΑΙΑ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ</u>	<u>10</u>
1.1 Ποιοτικός έλεγχος.....	10
1.2 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας.....	10
1.3 Τα 7 κυριότερα εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου διεργασιών	12
1.4 Ιστορική αναδρομή	14
1.5 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart.....	18
1.6 Κανόνες ευαισθητοποίησης διαγράμματος ελέγχου Shewhart.....	20
1.7 Διαγράμματα ελέγχου Levey-Jennings.....	21
1.8 Ερμηνεία διαγραμμάτων ελέγχου Levey-Jennings.....	24
1.9 Μέθοδοι πολλαπλών κριτηρίων –Μέθοδος Westgard.....	25

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΟΥ</u>	
<u>ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ (CUMULATIVE SUM CONTROL CHARTS).....</u>	<u>29</u>
2.1. Εισαγωγή και βασικές έννοιες	29
2.2 Η μέθοδος της V-mask Cusum Charts.....	32
2.3 Διαγράμματα Tabular Cusum	34
2.4 Επιλογή παραμέτρων και απόδοση Tabular Cusum.....	37

2.5 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου Cusum.....	38
2.6 FIR Cusum	39
2.7 Τυποποιημένα διαγράμματα Cusum.....	40
2.8 Διαγράμματα Scale Cusum.....	41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΚΙΝΗΤΟΥΣ

<u>ΜΕΣΟΥΣ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΒΑΡΗ (EXPONENTIALLY WEIGHTED</u> <u>MOVING AVERAGE CONTROL CHARTS).....</u>	<u>43</u>
3.1 Εισαγωγή	43
3.2 Σχεδιασμός διαγράμματος ελέγχου EWMA.....	47
3.3 Η ιδιότητα FIR	50
3.4 Μειονεκτήματα του EWMA διαγράμματος ελέγχου.....	51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ CUSUM ΜΕ

<u>ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ.....</u>	<u>52</u>
4.1 Εισαγωγή	52
4.2 Το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα Cusum (One-sided lower exponentially Cusum).....	54
4.2.1 Το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM με γνωστή εκθετική παράμετρο	54
4.2.2 Το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM όταν η παράμετρος β ₀ είναι άγνωστη.....	56
4.2.3 Εφαρμογή κλίμακας στο εκθετικό μοντέλο και εφαρμογή του γραφήματος CUSUM στο κλιμακούμενο μοντέλο.....	57
4.3 Μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων του μήκους ροής.....	58
4.4 Αποτελέσματα και συζήτηση.....	59
4.4.1 Υπό προϋποθέσεις απόδοση του μονομερούς εκθετικού γραφήματος CUSUM	59

4.4.2 Οριακή απόδοση του μονομερούς εκθετικού γραφήματος CUSUM	61
4.5 Ένα βιομηχανικό παράδειγμα και συμβουλές στους αναλυτές	63
4.6 Συμπεράσματα	64

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

5.1 Εισαγωγή	70
5.2 Μέθοδοι δειγματοληψίας.....	71
5.2.1 <i>RSS</i>	73
5.2.2 <i>MRSS</i>	75
5.2.3 <i>MDRSS</i>	76
5.2.4 <i>DMRSS</i>	77
5.3 Στατιστική απόδοση.....	78
5.4 Συγκριτικές μελέτες	81
5.4.1 Σύγκριση με το κλασσικό EWMA	82
5.4.2 Σύγκριση με το FIR EWMA.....	82
5.4.3 Σύγκριση με το διπλό EWMA.....	83
5.4.4 Σύγκριση με το EWMA βασισμένο σε κανόνες.....	83
5.4.5 Σύγκριση με το υβριδικό EWMA.....	84
5.4.6 Σύγκριση με το διάγραμμα Shewhart–EWMA με ταξινομημένα δεδομένα	84
5.4.7 Συγκρίνοντας τα τρία προτεινόμενα συστήματα	85
5.4.8 Χείριστες περιπτώσεις-Ατελής Ταξινόμηση	86
5.5 Εφαρμογή – Όγκος σε μπουκάλια αναψυκτικού.....	89
5.6 Περίληψη και συμπεράσματα.....	92

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ CUSUM ΚΑΙ EWMA</u>	<u>97</u>
6.1 Εισαγωγή	97
6.2 Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου CUSUM που χρησιμοποιούν προσημικές- βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις	99
6.3 Μη παραμετρικά EWMA διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές- βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις	103
<u>BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</u>	<u>106</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

1.1 Ποιοτικός έλεγχος

Η ιδέα της παγκοσμιοποίησης της οικονομίας έκανε τις επιχειρήσεις να αναζητούν νέους τρόπους αύξησης της ανταγωνιστικότητας τους. Σημαντικό βέβαια ρόλο θα έπαιζε η ποιότητα των παρεχόμενων αγαθών και υπηρεσιών. Ταυτόχρονα, άρχισε να επικρατεί και η άποψη ότι η ελεύθερη διακίνηση αγαθών θα απαιτούσε και κοινά αποδεκτά πρότυπα ποιότητας.

Βασική φιλοσοφία του νέου συστήματος ποιότητας είναι η συνεχής διακίνηση αγαθών μέσα απο ένα συγκεκριμένο κύκλο: Σχεδιασμός – Υλοποίηση- Έλεγχος – Δράση. Με την πάροδο των ετών έχουμε φτάσει σε ένα τέτοιο επίπεδο εξέλιξης της ποιότητας έτσι ώστε σε μια επιχείρηση να υπάρχει ξεχωριστός κλάδος –τμήμα ποιότητας που συνήθως εκφράζεται με τον όρο σύστημα διοίκησης ποιότητας. Βασικό εργαλείο της είναι τα διαγράμματα ελέγχου που αποτυπώνουν την εξέλιξη διάφορων μετρήσεων όπως: ποσοτικά χαρακτηριστικά προϊόντων, ποιοτικά χαρακτηριστικά προϊόντων .

1.2 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (Statistical Quality Control) είναι ένα κρίσιμο εργαλείο μίας επιχείρησης που επηρεάζει αποφάσεις σχετικές με τις προδιαγραφές, την παραγωγική διαδικασία και τον έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων. Για την αποτελεσματική χρήση του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας απαιτείται η ενσωμάτωση του σε ένα πλαίσιο λειτουργίας και διοίκησης της

επιχείρησης που έχει ως στόχο τη διαρκή βελτίωση της ποιότητας σε όλα τα επίπεδα της επιχείρησης, γνωστού ως Διοίκησης Ολικής Ποιότητας (Total Quality Management ή Total Quality Assurance). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτέλεσε τον προάγγελο της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας. Στόχος της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας είναι η συνεχής βελτίωση στην ποιότητα εκτέλεσης όλων των διεργασιών, προϊόντων και υπηρεσιών σε μία επιχείρηση. Αυτό επιτυγχάνεται με τρία βήματα τα οποία επαναλαμβάνονται το ένα μετά το άλλο και όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία ξεκινάει πάλι από την αρχή.

Χαρακτηριστικά εξέλιξης Ελέγχου Ποιότητας :

- Πολυπλοκότητα των νέων προϊόντων.
- Απαιτήσεις για υψηλή ποιότητα.
- Έξοδα ελέγχου.

Σκοπός Ελέγχου Ποιότητας :

- Εγγύηση για καλή ποιότητα των τελικών προϊόντων και ανάπτυξη ακριβέστερων μέσων ελέγχου.
- Μείωση των εξόδων ελέγχου ποιότητας.

Για την επίτευξη αυτών των σκοπών, ο έλεγχος ποιότητας κάνει χρήση των μαθηματικών και ειδικότερα της στατιστικής οπότε και Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (Statistical Quality Control). Ο Αμερικανός επιστήμονας W.Shewhart επινοεί τα διαγράμματα ελέγχου, διαγράμματα που ακόμα και σήμερα θεωρούνται από τα καλύτερα εργαλεία ποιότητας. Δύο είναι οι βασικοί πόλοι ανάπτυξης των εργαλείων αυτών:

- Εργαλεία τα οποία επιτρέπουν να ληφθεί απόφαση για την ποιότητα μίας παρτίδας προϊόντων προς έλεγχο με τη λήψη σχετικά μικρού δείγματος από την αντίστοιχη παρτίδα (Δειγματοληπτικός Έλεγχος Αποδοχής).
- Εργαλεία τα οποία επιτρέπουν ελαχιστοποίηση των ελαττωματικών ή σκάρτων μιας διεργασίας, παρακολουθώντας κατά τακτά χρονικά διαστήματα την ομοιομορφία των παραγομένων προϊόντων (Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (SPC) : έλεγχος ποιότητας διαδικασίας) .

1.3 Τα 7 Κυριότερα Εργαλεία του Στατιστικού Έλεγχου Διεργασιών

Για να ικανοποιεί ένα προϊόν τον χρήστη πρέπει να παράγεται σύμφωνα με μια “σταθερή επαναλαμβανόμενη” διεργασία. Η διεργασία πρέπει να είναι ικανή να λειτουργεί με μικρή μεταβλητότητα γύρω από κάποιες τιμές στόχους που έχουν τεθεί στα ποιοτικά χαρακτηριστικά που πρέπει να διακρίνει το τελικό προϊόν. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών είναι μια συλλογή εργαλείων που είναι χρήσιμα για την επίβλεψη της ικανότητας (capability) μέσω της μείωσης της μεταβλητότητας της. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών μπορεί να εφαρμοσθεί σε κάθε διαδικασία. Τα επτά κυριότερα εργαλεία που χρησιμοποιεί είναι τα ακόλουθα :

- Το Ιστόγραμμα ή το Διάγραμμα Φύλλων (Histogram or Stem-and-Leaf Plot).
Το ιστόγραμμα αποτελεί τη γραφική απεικόνιση ενός πίνακα συχνοτήτων και αποκαλύπτει σημαντικές πληροφορίες για το σύνολο των τιμών που αντιπροσωπεύει όπως είναι η κεντρική τάση, η μεταβλητότητα και το σχήμα της κατανομής των τιμών. Για τον τρόπο κατασκευής των πινάκων συχνοτήτων ο αναγνώστης παραπέμπεται σε βιβλία περιγραφικής στατιστικής. Κρίνεται όμως σκόπιμο να υπενθυμίσουμε ορισμένα βασικά στοιχεία της κατασκευής ενός πίνακα συχνοτήτων. Ο καθορισμός του πλήθους C των τάξεων σε ένα πίνακα συχνοτήτων (οπότε και του πλήθους των ιστίων-ορθογωνίων του αντίστοιχου ιστογράμματος) έγκειται στην κρίση του αναλυτή.
- Το Φύλλο Ελέγχου (Check Sheet)
Το φύλλο ελέγχου ή καταχώρησης είναι ένα απλό εργαλείο συλλογής και καταγραφής στοιχείων. Σε ένα φύλλο ελέγχου μπορούν να καταχωρηθούν λεπτομέρειες σχετικές με το είδος και το χρόνο των σφαλμάτων που εμφανίζουν τα προϊόντα, να καταγραφούν οι απαραίτητοι έλεγχοι που πρέπει να γίνουν κατά την παραλαβή μίας παρτίδας υλικών ή κατά την επιθεώρηση ενός συστήματος ποιότητας κτλ. Επιπλέον στο φύλλο ελέγχου καταγράφονται διάφορα συμπληρωματικά στοιχεία με το είδος των δεδομένων που καταχωρούνται όπως η ημέρα, η παρτίδα, η βάρδια και γενικά κάθε πληροφορία που αφορά τη διεργασία. Τέλος το φύλλο ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως φύλλο εργασίας για την εισαγωγή των δεδομένων σε υπολογιστή.

- Το Διάγραμμα Pareto (Pareto Chart)

Το διάγραμμα Pareto (ή ανάλυση Pareto) οφείλει το ονομά του στον Ιταλό οικονομολόγο Vilfredo Pareto ο οποίος είναι κυρίως γνωστός για την παρατηρήσή του ότι η κατανομή του 80%-90% του πλούτου της χώρας του ήταν συγκεντρωμένη στο 20%-10% του πληθυσμού (κανόνας 80/20 αρχή Pareto). Έτσι η ανάλυση Pareto έχει ως σκοπό να διαχωρίσει τις σημαντικές πλευρές ενός προβλήματος από τις λιγότερες σημαντικές.

Τα βασικά βήματα που ακολουθούνται για την ανάλυση Pareto είναι τα ακόλουθα :

Καταγραφή όλων των στοιχείων

Μέτρηση των στοιχείων

Διάταξη των στοιχείων

Δημιουργία αθροιστικών κατανομών

Σχεδίαση διαγραμμάτος Pareto

Ερμηνεία του διαγραμμάτος Pareto

- Το διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος (Cause and Effect Diagram)

Το διάγραμμα αιτίου αποτελέσματος χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσει πιθανές αιτίες ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Αποτελεί μια απεικόνιση των ποικίλων στοιχείων ενός συστήματος (αιτία) τα οποία συνεισφέρουν στη δημιουργία ενός προβλήματος (αποτέλεσμα).

- Το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (Defect Concentration Diagram)

Το διάγραμμα συγκέντρωσης ελαττωμάτων έχει ως σκοπό να απεικονίσει τις τοποθεσίες που εμφανίζονται τα διάφορα ελαττώματα σε ένα προϊόν. Είναι μια εικόνα όλων των εξωτερικών όψεων του προϊόντος όπου σημειώνονται οι θέσεις (περιοχές) που εμφανίζονται τα ελαττώματα. Έτσι βοηθάει στην ανίχνευση ειδικών αιτιών της παραγωγικής διαδικασίας που είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία αυτών των ελαττωμάτων. Η θέση που παρατηρείται το ελάττωμα είτε χρωματίζεται (συνήθως τα διάφορα είδη ελαττωμάτων

απεικονίζονται με διαφορετικό χρώμα) είτε σημειώνεται πάνω της ένας κωδικός (διαφορετικοί κωδικοί για κάθε είδος ελαττώματος).

- Το Διάγραμμα Διασποράς ή Διασκόρπισης
Το Διάγραμμα Διασποράς ή Διασκόρπισης χρησιμοποιείται για να μας αποκαλύψει αν υπάρχει σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών. Είναι ένα γράφημα που απεικονίζει τις τιμές δύο μεταβλητών με τη μορφή σημείων σε ένα επίπεδο. Αν οι μεταβλητές είναι συσχετισμένες τότε τα σημεία ακολουθούν την πορεία μιας γραμμής ή καμπυλης. Όσο πιο έντονη είναι η συσχέτιση τόσο πιο πολύ "αγκαλιάζουν" τη γραμμή.
- Το Διάγραμμα Ελέγχου (Control Chart)
Τα παραπάνω στατιστικά εργαλεία αναφέρονται και ως "the magnificent seven". Από τα παραπάνω εργαλεία, το διάγραμμα ελέγχου θα αποτελέσει αντικείμενο εκτενής μελέτης όντας ίσως το πιο σημαντικό εργαλείο.

1.4 Ιστορική αναδρομή

Στο σημείο αυτό θεωρούμε σκόπιμο να αναφέρουμε τη σειρά των γεγονότων που οδήγησαν στη σταδιακή εφαρμογή του SPC :

- Στη δεκαετία 1900-1910
 - Η AT&T εφαρμόζει για πρώτη φορά συστηματική επιθεώρηση και έλεγχο των προϊόντων της.
 - Κατα την διάρκεια του Α΄ Παγκοσμίου Πολέμου η Αγγλία χρηματοδοτεί ένα πρόγραμμα αξιολόγησης προμηθευτών. Ιδρύεται στη Μεγάλη Βρετανία ο Σύνδεσμος Τεχνικής Επιθεώρησης (Technical Inspection Association).
- Στη δεκαετία 1920-1930
 - Η AT&T δημιουργεί το πρώτο τμήμα ελέγχου ποιότητας.
 - Η εταιρεία General Electric παρακολουθεί την ποιότητα των ηλεκτρικών λαμπτήρων χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους.
- Στη δεκαετία 1930-1940

- Ο Shewhart εκδίδει το πρώτο βιβλίο που αναφέρεται στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας (Economic Control Of Quality of Manufactured Products) και δίνει διαλέξεις για την εφαρμογή αυτών των μεθόδων στο πανεπιστήμιο του Λονδίνου και στην Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή.
 - Η βρετανική βιομηχανία αρχίζει να εφαρμόζει τον πειραματικό σχεδιασμό (Design of Experiments, DOE) .
- Στη δεκαετία 1940-1950
- Το 1944 εκδόθηκε για πρώτη φορά το περιοδικό “Industrial Quality Control”.
 - Το 1946 ιδρύονται τα ASQC και JUSE (American Society for Quality Control και Union of Japanese Scientists and Engineers αντίστοιχα).
 - Το υπουργείο πολέμου των ΗΠΑ οργανώνει εκπαιδευτικά σεμινάρια στη βιομηχανία και εκδίδει οδηγό χρήσης των διαγραμμάτων ελέγχου.
 - Ο Hotelling το 1947 εισάγει για πρώτη φορά μια προσέγγιση στο SPC για παρακολούθηση διεργασιών με πολλές μεταβλητές.
 - Ο Deming προσκαλείται στην Ιαπωνία και δίνει διαλέξεις με θέμα τις στατιστικές μεθόδους.
- Στη δεκαετία 1950-1960
- Ο Deming εκπαιδεύει τους Ιάπωνες διευθυντές βιομηχανιών και η JUSE καθιερώνει στην Ιαπωνία το βραβείο Deming.
 - Οι Grant και Duncan δημοσίευσαν εργασίες με θέμα το στατιστικό έλεγχο ποιότητας.
 - Δημοσίευση εργασιών για το σχεδιασμό πειραμάτων και εισαγωγή στη μεθοδολογία απόκρισης επιφάνειας (Response Surface Methodology, RSM) από τους Box και Willson.
 - Στην Ιαπωνία ο J. Juran δίνει διαλέξεις με θέμα τη διαχείριση και τη βελτίωση της ποιότητας.
 - Ο J.S Hunter εκδίδει το “Technometrics”.
 - Οι Juran και Gryna ξεκινάνε την έκδοση του “Quality Control Handbook”.
 - Το 1959 ο Jackson εισάγει τη μέθοδο της Ανάλυσης Κυρίων Συνιστωσών (Principal Component Analysis, PCA).
 - Εισαγωγή των διαγραμμάτων CUSUM και EWMA.

- Στη δεκαετία 1960-1970
 - Η ΝΑΣΑ ωθεί την βιομηχανία να υιοθετήσει την έννοια της αξιοπιστίας σε θέματα παραγωγής.
 - Στα πανεπιστήμια εισάγονται σε ευρεία κλίμακα μαθήματα στατιστικού ελέγχου ποιότητας.
 - Στη βιομηχανία ξεκινά το πρόγραμμα “zero defects”.
 - Το περιοδικό “Industrial Quality Control” αντικαθίσταται από το “Journal of Quality Technology”.
 - Στην Ιαπωνία ο K. Ishikawa εισάγει τους κύκλους ποιότητας.
- Στην δεκαετία 1970-1980
 - Ιδρύεται ο Βρετανικός Σύνδεσμος Ποιότητας (BQA).
 - Εμφάνιση βιβλίων με θέμα τον Πειραματικό Σχεδιασμό για μηχανικούς και άλλους επιστήμονες.
 - Εισαγωγή υποχρεωτικών μαθημάτων Στατιστικής σε πολλά εκπαιδευτικά προγράμματα.
- Στην δεκαετία 1980-1990
 - Ο έντονος ανταγωνισμός οδηγεί στην αύξηση του ενδιαφέροντος για τη βελτίωση ποιότητας με αποτέλεσμα την εισαγωγή των στατιστικών μεθόδων στη βιομηχανία.
 - Η ASA (American Statistical Association) ιδρύει την επιτροπή Ad Hoc για την Ποιότητα και την Παραγωγικότητα (1984).
 - Η κυβέρνηση των ΗΠΑ εισάγει το Εθνικό βραβείο ποιότητας Malcolm Baldrige (1988).
 - Έκδοση των περιοδικών “Quality & Reliability Engineering International” (1988) και “Quality Engineering” (1989).
 - Η προσέγγιση Tagushi στο σχεδιασμό ανθεκτικότητας γίνεται παγκοσμίως γνωστή και η εταιρία Ford Motor υιοθετεί τις μεθόδους αυτές.
 - Εφαρμογή της θεωρίας 6σ από την Motorola.
 - Διάδοση της TQM.
 - Ανάπτυξη της μεθόδου Μερικών Ελαχίστων Τετραγώνων από τους Gelati και Kowalski.

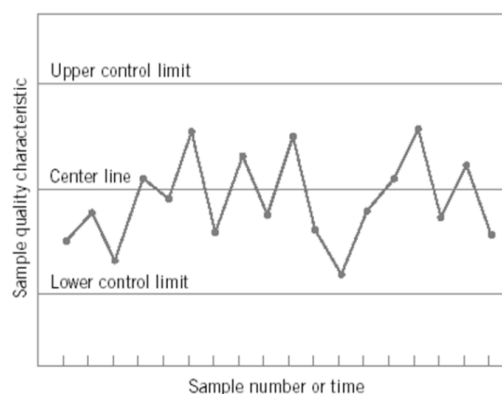
➤ Την δεκαετία 1990-2000

- Καθιέρωση διαφόρων Προτύπων Ποιότητας.
- Σταθερή αύξηση των αιτούντων για το βραβείο Baldrige.
- Διάδοση της προσέγγισης των 6σ και σε άλλες βιομηχανίες.
- Το ASQC μετονομάζεται σε ASQ (American Society for Quality) σε μια προσπάθεια να επιδείξει τις ευρύτερες πλευρές του πεδίου βελτίωσης ποιότητας.
- Το 1990 ο Snee ξεκαθαρίζει την έννοια της στατιστικής σκέψης.
- Αναπτύσσονται μέθοδοι ανάλυσης διεργασιών με μεγάλο αριθμό δεδομένων, διαδικασίες για τη συνεχή παρακολούθηση διεργασιών, δημιουργούνται απλά εργαλεία για εφαρμογή στη βιομηχανία και αναπτύσσονται διαγνωστικά εργαλεία για την ταχεία ταυτοποίηση της φύσης οποιουδήποτε σφάλματος.
- Το 1991 τίθεται η βασική μεθοδολογία εφαρμογής των μεθόδων Principal Component Analysis (PCA) και Partial Least Squares (PLS) για την παρακολούθηση συνεχών διεργασιών από τους Kresta, MacGregor και Wise.
- Εισαγωγή της χρήσης γραφικής αναπαράστασης με σκοπό τη διάγνωση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας από τους Miller και MacGregor.
- Επέκταση των τεχνικών PCA και PLS ώστε να μπορούν να διαχειριστούν μεγάλες διεργασίες και δημιουργία των μεθόδων multiblock PCA και PLS από τους Nomikos & MacGregor (1995). Χρήση των μεθόδων αυτών και σε διεργασίες παρτίδων.
- Το 1995 οι Rao και Arthanari εισάγουν τα βασικά στοιχεία στατιστικής σκέψης, όπως η παραγωγή δεδομένων με επαρκή στατιστική βάση, η εξαγωγή πληροφοριών από δεδομένα με τη χρήση στατιστικών εργαλείων και η χρήση πληροφοριών για ορθότερη λήψη αποφάσεων.
- Το 1999 οι Baardseth, Dalen και Tandberg μεταφέρουν τη γνώση και την τεχνολογία που είχε αναπτυχθεί σε μικρές και μεσαίες επιχειρήσεις τροφίμων.

1.5 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

Στις παραγωγικές διαδικασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μια κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται. Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις αυτού του χαρακτηριστικού, όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων, X_1, X_2, \dots . Χρησιμοποιώντας τα τυχαία αυτά δείγματα υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(X_t)$, $t = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως χρησιμοποιούμε αμερόληπτη εκτιμήτρια) την ποσότητα που μας ενδιαφέρει (για παράδειγμα μέση τιμή ή διακύμανση της X). Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της μέσης τιμής σε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n ($n \geq 1$) σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_t = g(X_t) = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου του X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής. Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή

Γράφημα 1.5.1 : Διάγραμμα Shewhart



όπου στο σχήμα εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές W_t που έχουν απεικονιστεί με σημεία τα οποία έχουν συνδεθεί με μία τεθλασμένη γραμμή και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (center line, CL) παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (mean value) της W όπως προκύπτει από την λειτουργία μίας εντός ελέγχου διεργασίας δηλαδή

μίας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας. Οι άλλες δύο γραμμές που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος. Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Τότε πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Ωστόσο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο ,το μοντέλο ορίων σιγμα (sigma limits model), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Πίνακας 1.5.1

Μοντέλο ορίων σίγμα
$UCL = \mu_w + L\sigma_w$
$CL = \mu_w$
$LCL = \mu_w - L\sigma_w$

Οι ποσότητες μ_w και σ_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου (συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή). Η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως $L=3$ οπότε μιλάμε για διαγράμματα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου.

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν το χαρακτηριστικό X είναι συνεχής μεταβλητή ή διακριτή τυχαία

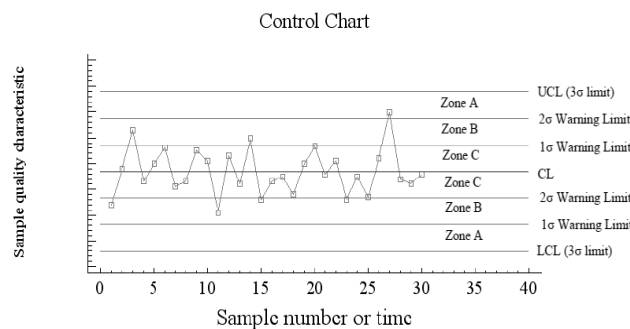
μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 τότε υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς της X . Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση του ποσοστού (και του αριθμού) των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία, καθώς επίσης και για τον αριθμό (και το μέσο αριθμό) των ελαττωμάτων (ατελειών) σε μία μονάδα ελέγχου. (Αντζουλάκος(2003))

Το πιο απλό και διαδεδομένο διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X .

1.6 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου μ της W (έως και 1.5σ) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ARL του διαγράμματος Shewhart δεν είναι ικανοποιητικό (δηλαδή είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Για να γίνει περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ως προς την ικανότητα του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά όρια εσωτερικά των ορίων ελέγχου όπως δείχνει το ακόλουθο διάγραμμα :

Γράφημα 1.6.1 : Εσωτερικά προειδοποιητικά όρια



Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη κανόνων ευαισθητοποίησης (sensitizing rules) οι οποίοι περιγράφουν ενδεχόμενα που

σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών ακολουθιών σημείων (patterns) σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος ελέγχου (*UCL* και *LCL*).

Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart είναι οι ακόλουθοι :

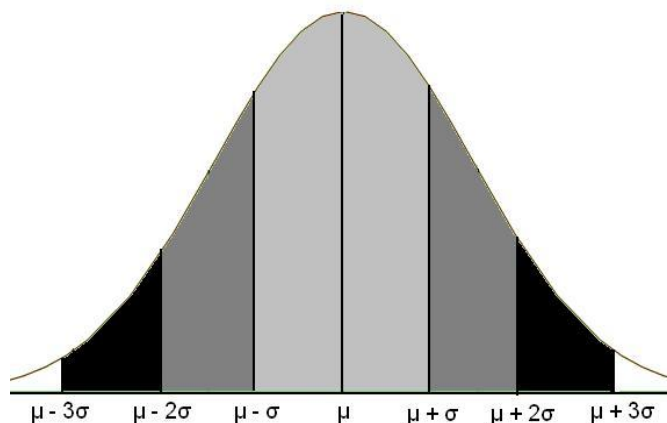
- 1) Ένα σημείο εκτός ορίων ελέγχου (κανόνας 1-από-1).
- 2) Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία σε μία από τις ζώνες A (κανόνας 2-από-3).
- 3) Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία σε μία από τις δύο περιοχές, πέραν της ζώνης C (κανόνας 4-από-5).
- 4) Πέντε συνεχόμενα σημεία, όλα πέραν της ολικής ζώνης C (και στις δύο περιοχές).
- 5) Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
- 6) Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C.
- 7) Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”.
- 8) Εννέα συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (πάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής (κανόνας 9-από-9).

1.7 Διαγράμματα ελέγχου Levey-Jennings

Το διάγραμμα Levey –Jennings πρωτοεμφανίστηκε τη δεκαετία του 50 αν και σαν στατιστική μέθοδο είχε επινοηθεί από τη δεκαετία του 20 (Shewhart 1924). Την εποχή εκείνη η μέθοδος αυτή χρησιμοποιούνταν αποκλειστικά στη βιομηχανία. Το 1951 οι χημικοί Levey και Jennings μετέφεραν τη στατιστική μέθοδο Shewhart από τη χημική βιομηχανία στην κλινική χημεία. Από τότε το διάγραμμα Levey –Jennings χρησιμοποιείται ως η μέθοδος αναφοράς για τον έλεγχο ποιότητας όλων των σύγχρονων αναλυτών.

Το διάγραμμα Levey –Jennings βασίζεται στην ιδιότητα της κανονικής κατανομής να έχει όλες τις τιμές X_i σε γεωμετρικά ίση απόσταση γύρω από τη μέση τιμή μ .

Γράφημα 1.7.1 Διαγράμματα Levey-Jennings

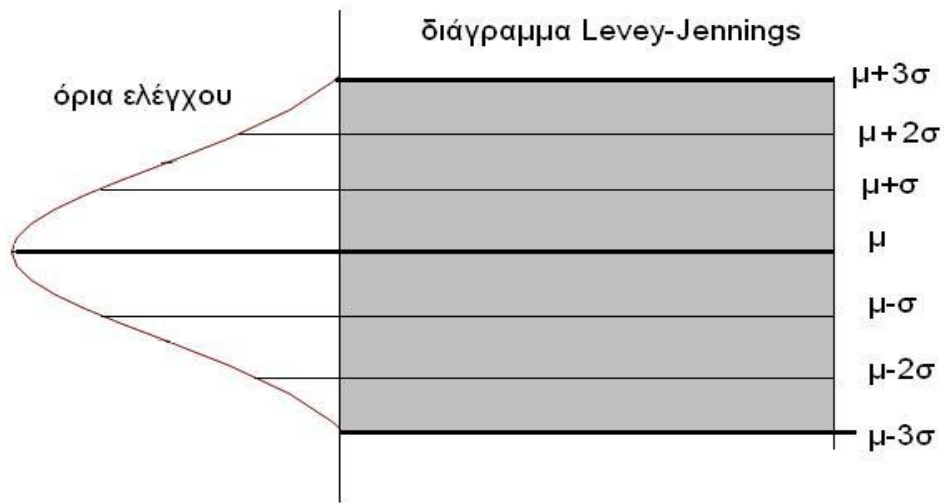


Η κανονική κατανομή μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από δύο μεγέθη : την μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ . Η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ μπορούν να προσδιοριστούν εύκολα από 20-30 επαναλαμβανόμενες μετρήσεις.

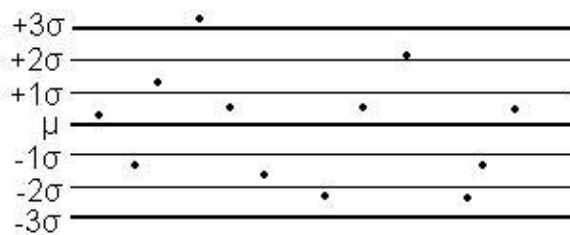
Η κατασκευή του διαγράμματος Levey –Jennings είναι πολύ απλή. Συγκεκριμένα αντιστρέφεται η κανονική κατανομή κατά 90° και χαράσσονται επτά παράλληλες γραμμές στα σημεία $\mu, \mu \pm 1\sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$. Κατόπιν κατασκευάζεται ένα διάγραμμα όπου στον άξονα $\chi\chi'$ βρίσκονται οι τιμές των ορίων ελέγχου. Σύμφωνα με τη θεωρία της κανονικής κατανομής μέσα στο εύρος $\mu \pm 1\sigma$ αναμένεται το 68,3% των μετρήσεων ,στο $\mu \pm 2\sigma$ το 95,4% και στο εύρος $\mu \pm 3\sigma$ αναμένεται το 99,7%.

Στην εικόνα που ακολουθεί παριστάνεται η δημιουργία του διαγράμματος Levey –Jennings από μια κανονική κατανομή.

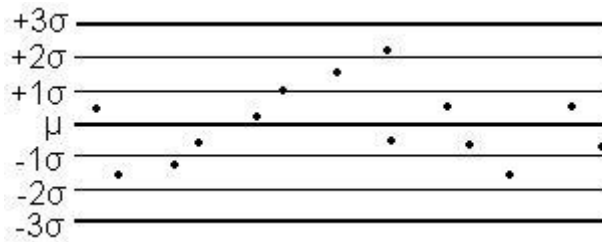
Γράφημα 1.7.2



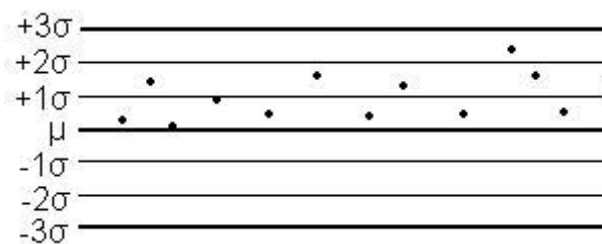
Στην καθημερινή εφαρμογή του διαγράμματος Levey –Jennings τοποθετείται πάνω στο διάγραμμα ένα σημείο που αντιστοιχεί στην συγκέντρωση του ορίου ελέγχου. Ελέγχεται στη συνέχεια αν αυτό το σημείο είναι έξω από το ανώτερο όριο $\mu \pm 3\sigma$



Αλλά και αν τα σημεία αυτά εμφανίζουν κάποια συστηματική τάση (π.χ.συνεχόμενη αύξηση ή μείωση) ή μετατόπιση (π.χ όλα τα σημεία βρίσκονται από την μία πλευρά της μέσης τιμής)



ή η μετατόπιση (π.χ όλα τα σημεία βρίσκονται από την μία πλευρά της μέσης τιμής)



1.8 Ερμηνεία των διαγραμμάτων Levey-Jennings

Η ερμηνεία των διαγραμμάτων Levey –Jennings γίνεται με βάση τη θέση των μετρήσεων στο διάγραμμα. Η βασική ιδέα είναι ότι οι νέες μετρήσεις, αν η αναλυτική διαδικασία είναι σταθερή και δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα, θα πρέπει να ακολουθούν την κανονική κατανομή των προηγούμενων. Έτσι :

- Είναι εξαιρετικά σπάνιο (πιθανότητα 0.3%) να βρεθεί μια τιμή έξω από τα όρια: μέση τιμή $\pm 3SD$ για αυτό και τα όρια αυτά ονομάζονται όρια δράσης.
- Παρότι λίγο πιθανό (πιθανότητα 4,5%) είναι «στατιστικά αναμενόμενο» να βρεθεί μια τιμή έξω από τα όρια: μέση τιμή $\pm 2SD$ για αυτό και τα όρια αυτά ονομάζονται όρια προειδοποίησης.
- Είναι το πιο πιθανό μια τιμή να βρεθεί στο διάστημα $\pm 1SD$ (πιθανότητα 68,2%) και για αυτό τα όρια αυτά δεν αξιολογούνται.

Υπάρχουν πολλά κριτήρια με τα οποία κρίνουμε τη θέση μιας τιμής του δείγματος ελέγχου πάνω στο διάγραμμα Levey –Jennings τόσο σε σχέση με τα όρια ελέγχου

όσο και συγκριτικά με τις προηγούμενες τιμές. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ένα δείγμα ελέγχου σε μια σειρά αναλύσεων, τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα κριτήρια είναι το 1_{2s} και 1_{3s} που συγκρίνουν τη νέα τιμή του δείγματος με τα όρια ελέγχου ή δράσεως $4SD$ ή $3 \pm SD$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που η νέα τιμή είναι εντός των ορίων ελέγχου θεωρείται ότι η κατάσταση είναι «υπό έλεγχο» ενώ στην περίπτωση που παραβιάζεται το κριτήριο η κατάσταση θεωρείται «εκτός ελέγχου» και απαιτείται η λήψη μέτρων, τα οποία περιγράφονται στη συνέχεια.

1.9 Μέθοδοι πολλαπλών κριτηρίων-Μέθοδος Westgard

Οι μέθοδοι ενός κριτηρίου και κυρίως το κριτήριο 1_{2s} χρησιμοποιούνται ευρέως στην αξιολόγηση μιας σειράς αναλυτικών αποτελεσμάτων και στην απόφαση για την αποδοχή ή την απόρριψή τους. Πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει τη χρήση περισσότερων του ενός κριτηρίων ταυτόχρονα για την αξιολόγηση μιας σειράς αναλυτικών αποτελεσμάτων. Η πλέον γνωστή από τις μεθόδους των πολλαπλών κριτηρίων είναι η μέθοδος Westgard η οποία χρησιμοποιεί 6 διαφορετικά κριτήρια. Τα 6 κριτήρια ελέγχου κατά Westgard είναι τα $1_{2s}, 1_{3s}, 2_{2s}, R_{4s}, 4_{1s}, 10_x$.

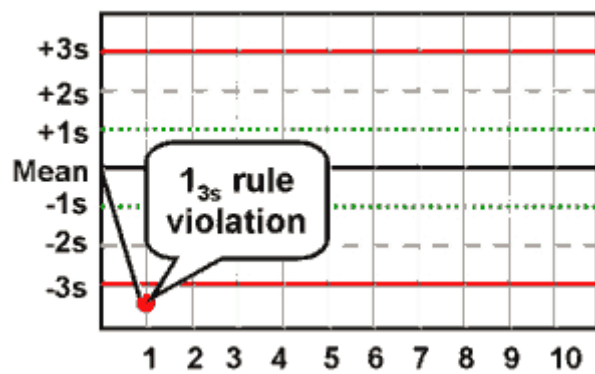
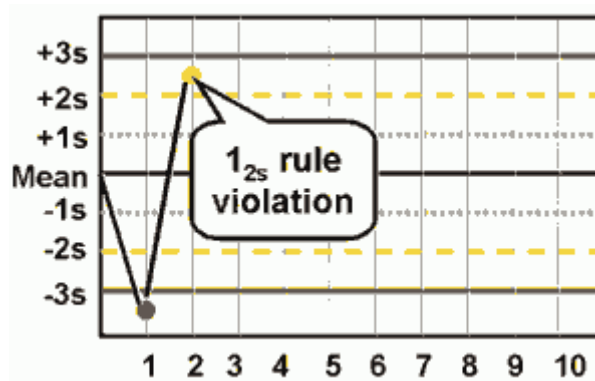
Η ανάλυση των κριτηρίων τα οποία δεν έχουν αναφερθεί είναι :

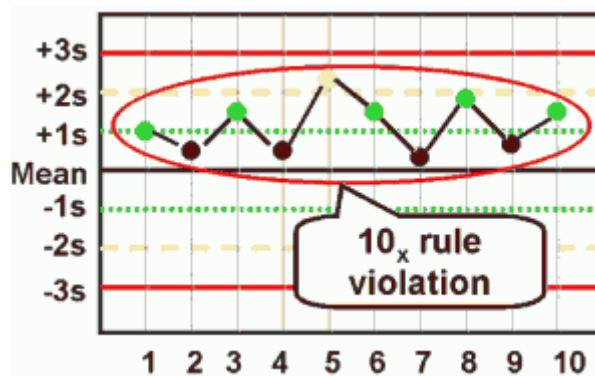
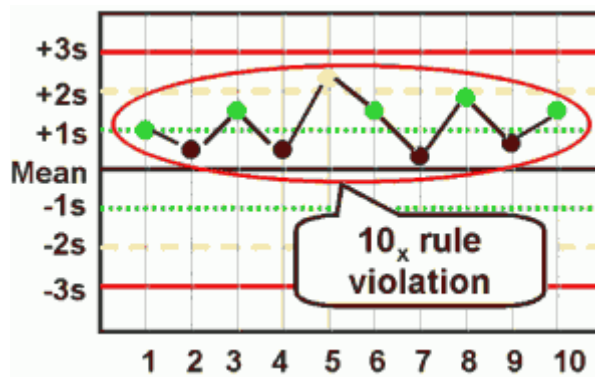
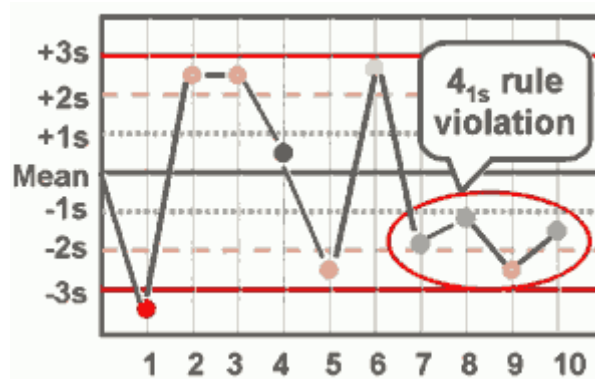
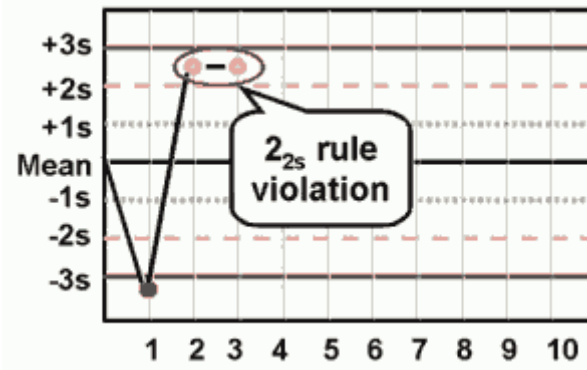
- 2_{2s} : Οι τιμές ξεπερνούν το όριο $\pm 2SD$. Το κριτήριο είναι ευαίσθητο σε συστηματικό σφάλμα.
- R_{4s} : Η διαφορά των τιμών ξεπερνούν το όριο $4SD$. Το κριτήριο είναι ευαίσθητο σε αυξημένα τυχαία σφάλματα.
- 4_{1s} : 4 διαδοχικές τιμές του ίδιου ελέγχου ξεπερνούν το ίδιο όριο της $1SD$ προς την ίδια κατεύθυνση. Η παραβίαση αυτού του κριτηρίου μπορεί να μην απαιτεί απόρριψη της σειράς, αλλά να αποτελεί ένδειξη ότι υπάρχει ανάγκη συντήρησης ή βαθμονόμησης του ανάλυτη.
- 10_x : 10 διαδοχικές τιμές του ίδιου ελέγχου βρίσκονται από την ίδια πλευρά της μέσης τιμής (πάνω ή κάτω). Το κριτήριο είναι ευαίσθητο σε συστηματικό

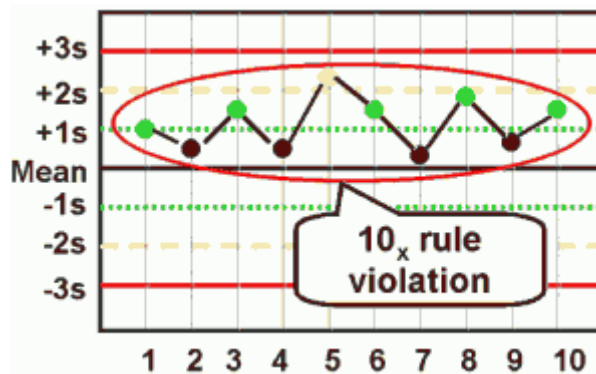
σφάλμα. Και αυτού του κριτηρίου η παραβίαση μπορεί να μην απαιτεί απόρριψη της σειράς, αλλά να αποτελεί ένδειξη ότι υπάρχει ανάγκη συντήρησης ή βαθμονόμησης του ανάλυτη.

Τα κριτήρια αυτά δεν εφαρμόζονται ταυτόχρονα, αλλά με βάση το παρακάτω λογικό διάγραμμα, που πρότεινε ο Westgard. Τα κριτήρια αυτά μπορεί να μην είναι ίδια για κάθε παράμετρο, αλλά ο τρόπος εφαρμογής τους πρέπει να τηρείται αυστηρά προκειμένου να έχουμε υψηλή πιθανότητα ανίχνευσης σφάλματος και πολύ μικρή πιθανότητα απόρριψης.

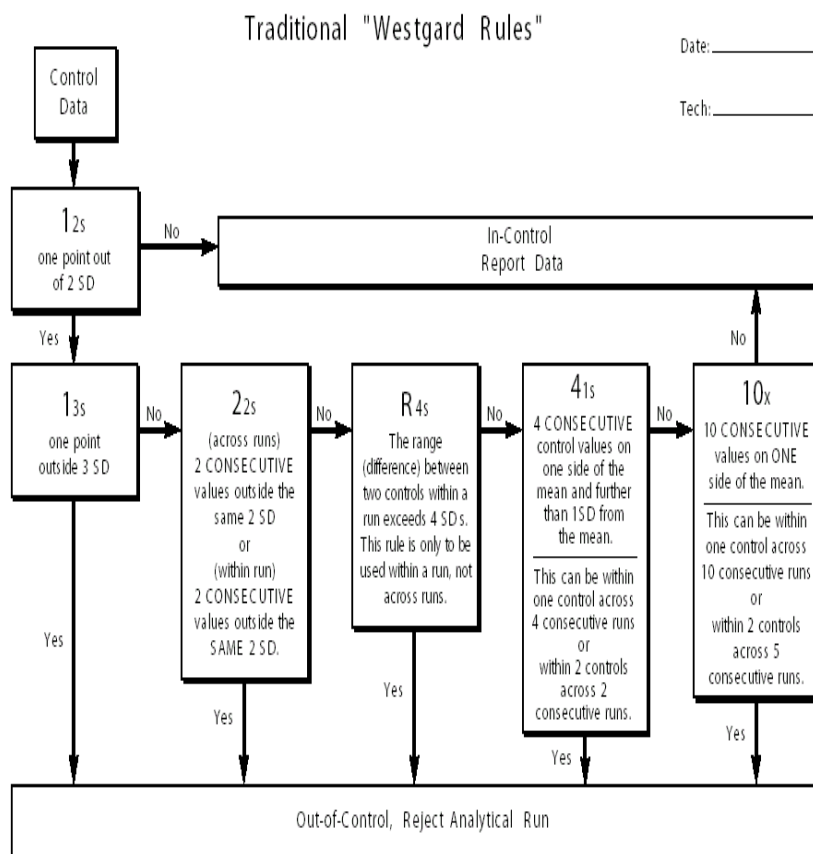
Γράφημα 1.9.1 : Κριτήρια Westgard







Γράφημα 1.9.2 : Κριτήρια Westgard



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ (CUMULATIVE SUM CONTROL CHARTS)

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του διαγράμματος Shewhart και του διαγράμματος \bar{x} είναι ότι χρησιμοποιεί μόνο τα δεδομένα της διεργασίας από την τελευταία μέτρηση του δείγματος και αγνοεί δεδομένα από ολόκληρη τη σειρά των μετρήσεων. Αυτή η ιδιαιτερότητα κάνει το διάγραμμα Shewhart σχετικά ανίκανο να εντοπίσει μικρές μετατοπίσεις και λιγότερο χρήσιμο στην όλη παρακολούθηση της διαδικασίας. Φυσικά η χρήση ορίων προειδοποίησης (warning limits) και κανόνων ευαισθητοποίησης (sensitizing rules) βελτιώνει την απόδοση του διαγράμματος Shewhart για μικρές μετατοπίσεις, αλλά τα μέτρα αυτά μειώνουν δραματικά το Μέσο Μήκος Ροής (ARL) του διαγράμματος όταν η διαδικασία είναι υπό έλεγχο. Δύο πολύ αποτελεσματικές εναλλακτικές λύσεις για αντιμετώπιση μικρών μετατοπίσεων της διαδικασίας είναι τα διαγράμματα Συσσωρευτικού Αθροίσματος και τα διαγράμματα με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη. (Cusum και EWMA)

2.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες

Τα διαγράμματα Cusum προτάθηκαν για πρώτη φορά από τον χημικό Page (1954,1961) ο οποίος μελέτησε το μέσο αριθμό δειγμάτων μέχρι την ένδειξη προβλήματος σε διάγραμμα στο οποίο λαμβάνονται υπόψη τα στοιχεία όλων των δειγμάτων με την ίδια βαρύτητα.

Τα διαγράμματα ελέγχου Cusum για τον έλεγχο ποιότητας βασίζονται στην δημιουργία συσσωρευτικού αθροίσματος (Cumulative Sum - Cusum). Τα

διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για να ανιχνεύσουν μικρές εκτροπές (shifts) από τη μέση τιμή των δειγμάτων ελέγχου. Το διάγραμμα Cusum έχει τη δυνατότητα να διακρίνει μικρά συστηματικά σφάλματα που το Shewhart εντοπίζει δύσκολα.

Έστω $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 . Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής είναι ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.1.1)$$

και ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης σ^2 είναι η δειγματική διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.2.2)$$

Έστω ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ^2 γνωστά. Έστω τώρα ότι έχουμε στη διάθεσή μας τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $X_i(X_{i1}, \dots, X_{in})$ με $i \geq 1$. Για κάθε τυχαίο δείγμα $X_i(X_{i1}, \dots, X_{in})$ είναι γνωστόν ότι ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} \dots + X_{in}}{n} \quad (2.2.3)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ και είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ του χαρακτηριστικού X .

Σε ορισμένες περιπτώσεις το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 (αυτόματη επιθεώρηση παραγόμενων προϊόντων, μικρός ρυθμός παραγωγής). Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις. Τα διαγράμματα ελέγχου Cusum ενδείκνυται στις περιπτώσεις μεμονωμένων παρατηρήσεων. Κατά την χρήση των διαγραμμάτων αυτών αξιοποιούνται οι πληροφορίες όχι μόνο από την τελευταία δειγματοληψία (όπως στα διαγράμματα Shewhart), αλλά από όλα τα δείγματα που ελήφθησαν μέχρι και την τρέχουσα δειγματοληψία. Τα συγκεκριμένα διαγράμματα αποσκοπούν στον

αποτελεσματικότερο (στον ταχύτερο) εντοπισμό μικρών μεταβολών των παραμέτρων της παραγωγικής διαδικασίας.

Στο διάγραμμα ελέγχου Cusum υπολογίζουμε τα συσσωρευτικά αθροίσματα C_i των διαφορών των δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο μ_0 .

Το συσσωρευτικό άθροισμα C_i ορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$C_1 = X_1 - \mu_0, C_2 = (X_1 - \mu_0) + (X_2 - \mu_0), \dots, C_m = (X_1 - \mu_0) + \dots + (X_m - \mu_0)$$

δηλαδή

$$C_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \mu_0) \text{ ή πιο απλά } C_i = (X_i - \mu_0) + C_{i-1} \text{ με } 1 \leq i \leq m$$

όπου X_i = ημερήσια τιμή ελέγχου

μ_0 = τιμή στόχος – μέση τιμή ορίων ελέγχου

C_i = συσσωρευτικό άθροισμα με αρχική τιμή $C_0 = 0$.

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρείται ότι δημιουργείται πάντα ένα υπολογίσιμο συσσωρευτικό άθροισμα διαφορετικό του μηδενός το οποίο θα εμφανίζεται στο αντίστοιχο διάγραμμα Cusum. Η κλίση της καμπύλης του αθροίσματος πληροφορεί για το μέγεθος της εκτροπής της μέσης τιμής. Η κλίση της καμπύλης μας πληροφορεί για το είδος του στατιστικού σφάλματος. Όταν έχουμε μικρή κλίση καμπύλης υποπτευόμαστε ότι έχουμε συστηματικές μετατοπίσεις ενώ με μεγαλύτερη κλίση καμπύλης υποπτευόμαστε συστηματικές εκτροπές.

Επειδή το C_i συνδυάζει πληροφορίες από όλα τα i διαθέσιμα δείγματα το αθροιστικό διάγραμμα είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό στον εντοπισμό μικρών μεταβολών της μέσης τιμής μ της τάξεως $0.5\sigma - 1.5\sigma$.

2.2 Η μέθοδος της V-mask Cusum Charts

Τη δεκαετία του 50 προτάθηκε ένα εναλλακτικό διάγραμμα Cusum, η μέθοδος της V-mask. Θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω σύμβολα με την αντίστοιχη ορολογία.

d : οδηγούσα απόσταση

θ : βασική γωνία

α, β : σφάλματα τύπου I και II ($\alpha, \beta \in [0,1]$)

Η σημασία των α και β :

σφάλμα τύπου I : Να προκύψει σημείο εκτός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εντός.

σφάλμα τύπου II : Να προκύψει σημείο εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός.

Όπως θα φανεί παρακάτω τα α και β συνδέονται μεταξύ τους μέσω του λογαρίθμου ως $\ln(1-\beta)/\alpha$. Η ποσότητα είναι χαρακτηριστική στον ακολουθιακό σχεδιασμό και ανάλυση και αυτό είναι αναμενόμενο αφού οι βασικές ευθείες της V-mask, που ουσιαστικά είναι ένα διάγραμμα ελέγχου, ενέχουν στοιχεία ακολουθιακού σχεδιασμού.

Δ : το στοιχείο που επιθυμείται να αφαιρεθεί

λ : συντελεστής κλίμακας δεδομένων $\lambda \in (\sigma_{\bar{x}}, 2\sigma_{\bar{x}})$

συνήθως επιλέγεται $\lambda = 2\sigma_{\bar{x}}$

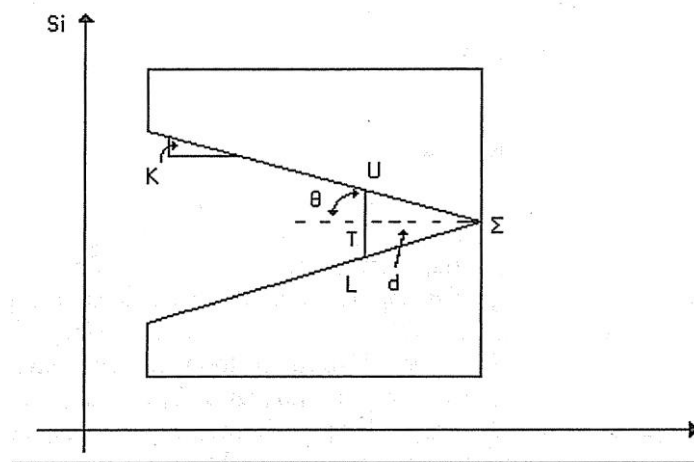
K : η κλίση των “βραχιόνων” της μάσκας .

τότε τίθεται :

$H=TL=UL/2$ το ήμισυ του ύψους της V-mask.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι υπολογισμοί που είναι πολυπλοκότεροι στην V-mask από ότι στα άλλα διαγράμματα ελέγχου επιτυγχάνονται με ένα στατιστικό πακέτο.

Γράφημα 2.2



Για τις ποσότητες K , H , Δ υπάρχουν οι αντίστοιχοι κανονικοποιημένοι συντελεστές δηλαδή, διαιρούμενοι με την τυπική απόκλιση του μέσου:

$$k = K/\sigma_{\bar{x}} \text{ , } h = H/\sigma_{\bar{x}} \text{ και } \delta = \Delta/\sigma_{\bar{x}} \quad (2.2.1)$$

Σημειώσατε ότι όταν $n=1$ προφανώς :

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma \quad (2.2.2)$$

Συνήθως επιλέγονται στην πράξη οι ποσότητες :

$$d = (2/\delta^2) \ln((1-\beta)/\alpha) \quad (2.2.3)$$

$$\theta = \text{Arc tan}(\Delta/2\lambda) \quad (2.2.4)$$

με τα α , β τα σφάλματα τύπου I και τύπου II .

Επιλέγοντας $\lambda = 2\sigma_{\bar{x}}$ και β πολύ μικρό η (2.2.3) μετατρέπεται σε

$$d \approx -(2/\delta^2) \ln \alpha \quad (2.2.3a)$$

και η (2.2.4) σε :

$$\tan \theta = \Delta/2\lambda = (\delta\sigma_{\bar{x}})/(2(2\sigma_{\bar{x}})) = \delta/4 \quad (2.2.4b)$$

Από τον ορισμό της εφαπτομένης και της κλίσης στο αντίστοιχο V-mask θα είναι

$$\tan \theta = K/\lambda = (k\sigma_{\bar{x}})/(2\sigma_{\bar{x}}) = k/2 \quad (2.2.5)$$

από (2.2.4b) και (2.2.5) θα πρέπει είναι :

$$k = \delta/2$$

Άρα από την (2.2.1) συνεπάγεται ότι $K = \Delta/2 = \delta\sigma_{\bar{x}}/2$

Όμοια θα είναι :

$$\tan \theta = H/(\lambda d) = (h\sigma_{\bar{x}})/((2\sigma_{\bar{x}})d) = h/(2d)$$

Οπότε υπολογίζονται αντίστοιχα

$$h = 2d \tan \theta \quad \text{και} \quad H = 2d\sigma_{\bar{x}} \tan \theta$$

Άρα γνωρίζοντας δύο στοιχεία της μάσκας μπορούμε με απλά στοιχεία τριγωνομετρίας να την προσδιορίσουμε, να υπολογιστούν δηλαδή όλα τα στοιχεία. Σημειώνεται ότι οι πράξεις είναι απλούστατες και πραγματοποιούνται με τη χρήση κάποιου στατιστικού πακέτου.

2.3 Διαγράμματα Tabular Cusum

Οι περισσότεροι χρήστες των διαγραμμάτων Cusum προτιμούν τη μέθοδο του Tabular Cusum έναντι της μεθόδου της V-μάσκας. Η μέθοδος της V- μάσκας χρησιμοποιούταν κατά κύριο λόγο στην προ- υπολογιστών εποχή. Η μέθοδος Tabular

Cusum μπορεί πολύ γρήγορα να υλοποιηθεί με τη βοήθεια τυποποιημένων υπολογιστικών προγραμμάτων.

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία, η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους την οποία θέλουμε να παρακολουθήσουμε, έχει μέση τιμή μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Από τη διεργασία λαμβάνονται παρατηρήσεις $X_i, i \geq 1$ και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ ($\delta > 0$).

Στο διάγραμμα αυτό απεικονίζονται ταυτόχρονα οι 2 ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις :

$$C_i^+ = \max \left[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+ \right]$$

$$C_i^- = \max \left[0, X_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^- \right]$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Οι τιμές C_0^+, C_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (head start values). Η ποσότητα K (≥ 0) ονομάζεται τιμή αναφοράς (reference value) και η πιο συνηθισμένη τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{\delta\sigma}{2} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} = k\sigma, \quad k = \delta/2$$

Η ποσότητα C_i^+ συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $\mu_0 + K$ από την στιγμή που θα εμφανιστεί θετική απόκλιση και συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad - \quad H_1^+ : \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma, \quad \delta > 0$$

αφού μεγάλες θετικές τιμές της οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^+ .

Ανάλογα, η ποσότητα C_i^- συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $\mu_0 - K$, από τη στιγμή που θα εμφανιστεί αρνητική απόκλιση και

συνεπώς η ποσότητα C_i^- μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad - \quad H_1^- : \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma, \quad \delta > 0$$

αφού μικρές αρνητικές τιμές της C_i^- οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^- .

Κάθε φορά που οι διαφορές γίνονται αρνητικές το άθροισμα (C_i^+ και C_i^-) μηδενίζεται για να αρχίσει ξανά να αυξάνεται όταν οι διαφορές γίνουν μεγαλύτερες από το μηδέν.

Η απόφαση μας για το ποια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ και H_1^- θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας, θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει η σχέση

$$C_i^+ > H \quad \text{ή η σχέση} \quad C_i^- < -H$$

όπου μια H θετική σταθερά ($H > 0$).

Η πιο συνηθισμένη τιμή της H είναι η εξής :

$$H = h\sigma, \quad h = 4.5.$$

Η ποσότητα H ονομάζεται διάστημα απόφασης (decision interval). Φυσικά αν μία από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ ή H_1^- γίνει αποδεκτή, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο αντίστοιχα.

Ωστόσο η τιμή αναφοράς K όσο και το διάστημα απόφασης H , μπορούν να διαφέρουν σε ένα τέτοιο διάγραμμα Cusum. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα μη συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Cusum. Επίσης οι τιμές εκκίνησης C_0^+ και C_0^- δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίσες με το μηδέν. Όταν $0 < C_0^+ < H$ ή/και $0 < C_0^- < H$ μιλάμε για εφαρμογή της μεθόδου της άμεσης αρχικής αντίδρασης (fast initial response). Συνεπώς στη γενική περίπτωση σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου Cusum απεικονίζονται οι ποσότητες

$$C_i^+ = \max \left[0, X_i - (\mu_0 + K^+) + C_{i-1}^+ \right], \quad 0 \leq C_0^+ < H^+$$

$$C_i^- = \max\left[0, (\mu_0 - K^-) - X_i + C_{i-1}^-\right], \quad H < C_0^- \leq 0$$

όπου $H^+ > 0, K^+ > 0, H^- < 0, K^- < 0$.

Το μη συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Cusum δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή i αν $0 \leq C_0^+ < H^+$ ή $H^- < C_0^- \leq 0$. Φυσικά αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε αποκλειστικά μετατοπίσεις του μέσου σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο στο διάγραμμα ελέγχου τύπου Cusum θα απεικονιστεί μόνο η ποσότητα C_i^+ (C_i^-) και το διάστημα απόφασης H^+ (H^-). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων (one-sided Cusum).

2.4 Επιλογή παραμέτρων και απόδοση Tabular Cusum

Για τη σωστή σχεδίαση του διαγράμματος Tabular Cusum είναι πολύ σημαντική η σωστή επιλογή της τιμής αναφοράς K (Παρόλο που η τιμή K δεν σχεδιάζεται στο διάγραμμα Tabular Cusum απλά συμμετέχει στους υπολογισμούς των C_i^+ και C_i^-) και του διαστήματος απόφασης H έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η απόδοση του διαγράμματος μέσω του μέσου μήκους ροής (ARL). Γενικά για το διάγραμμα Tabular Cusum ορίζουμε τις τιμές

$$H = h\sigma \quad \text{και} \quad K = k\sigma$$

Το k ορίζεται σε σχέση με το μέγεθος της μετατόπισης που ζητείται να ανευρεθεί δηλαδή $k = \delta/2$, όπου δ είναι το μέγεθος της μετατόπισης σε μονάδες τυπικής απόκλισης σ .

$$K = k\sigma = \frac{\delta}{2}\sigma \quad \text{και} \quad \delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

με μ_0 να είναι η τιμή στόχος και μ_1 να είναι η εκτός ελέγχου τιμή του μέσου η οποία είτε δηλώνεται από το χρήστη είτε είναι αποτέλεσμα προηγούμενων στατιστικών μελετών. Ωστόσο η επιλογή της παραμέτρου k εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί. Όταν επιλεγεί $h=5$ η μετατόπιση θα είναι

$\delta = 1\sigma$ άρα $k = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές του ARL για τιμές του $h=4$ και $h=5$.

Πίνακας απόδοσης 2.4 ARL για $k=1/2$ και $h=4$ ή $h=5$

Μετατόπιση (σε πολλαπλάσια του σ)	ARL $\beta'_y = (1 - \delta^*) \hat{\beta}_{0,y}$	ARL $h=5$
0.00	168	465
0.25	74.2	139
0.50	26.6	38.0
0.75	13.3	17.0
1.00	8.38	10.4

Αυτή η επιλογή αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της τιμής του ARL_1 για την εύρεση της μετατόπισης μεγέθους δ για μη μεταβλητό ARL_0 . Όταν επιλεγεί το k , το h επιλέγεται για να έχουμε απόδοση υπό έλεγχο ARL_0 .

2.5 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα έλεγχου Cusum

Για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής ARL στα διαγράμματα τύπου Cusum έχουν προταθεί δύο μέθοδοι:

- A. Η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων και
- B. Η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων καταλήγει σε μια ορθή ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί το ARL , η οποία λύνεται με προσεγγιστικές μεθόδους. Η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων ξεκινάει με μία προσεγγιστική εξίσωση που ικανοποιεί το ARL για την οποία ωστόσο βρίσκεται ακριβής λύση.

Εδώ θα υπολογίσουμε προσεγγιστικά το μέσο μήκος ροής ARL που προτείνει ο Siegmund (1985). Για ένα Tabular Cusum διάγραμμα με παραμέτρους h και k ισχύει ότι :

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad \text{αν } \Delta \neq 0 \text{ και (2.5.1)}$$

$$ARL = b^2 \quad \text{αν } \Delta = 0 \quad (2.5.2)$$

Η τιμή Δ υπολογίζεται από τον εξής τύπο

$$\Delta = \delta - k \text{ για το άνω συσσωρευμένο άθροισμα } C_i^+ \text{ και}$$

$$\Delta = -\delta - k \text{ για το κάτω συσσωρευμένο άθροισμα } C_i^-$$

Με $\delta = \mu_1 - \mu_0 / \sigma$ και $b = h + 1.66$. Η ποσότητα δ παριστάνει τη μετατόπιση του μέσου. Άρα για $\delta = 0$ έχουμε εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ενώ για $\delta \neq 0$ έχουμε εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Για το διάγραμμα Tabular Cusum το ARL δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} = \frac{1}{ARL^-} \text{ με } \delta = 0: ARL_0^+ = ARL_0^- \text{ . (2.5.3)}$$

2.6 FIR CUSUM

Τη δεκαετία του 80 προτάθηκε από τον Lucas και Crosier (1982) μια παραλλαγή του διαγράμματος Cusum το οποίο ονομάζεται FIR Cusum (Fast Initial Response ή head start). Στόχος του FIR διαγράμματος είναι από την αρχή της διαδικασίας να επιτευχθεί αύξηση της ευαισθησίας.

Οι αρχικές τιμές C_0^+ και C_0^- είναι διαφορετικές του μηδενός και ίσες πάντα με τη τιμή $H/2$ δηλαδή $C_0^+ = C_0^- = H/2$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του μέσου μήκους ροής (ARL) για τις διαδικασίες που είναι εκτός ελέγχου. Αν η διαδικασία είναι εξαρχής εντός ελέγχου τα συσσωρευμένα αθροίσματα C_0^+ και C_0^- φτάνουν γρήγορα στη τιμή μηδέν αφού οι παρατηρήσεις δεν απέχουν πολύ από το στόχο μ_0 . Αντιθέτως αν η διαδικασία είναι εξαρχής εκτός ελέγχου τα αθροίσματα C_i^+ και C_i^- αυξάνονται συνεχώς άρα απομακρύνονται συνεχώς από την κεντρική τιμή του μηδενός. Συμπερασματικά το διάγραμμα FIR Cusum έχει μεγαλύτερη απόδοση και ελαττώνει την τιμή του εκτός ελέγχου του μέσου μήκους ροής (ARL_I).

2.7 Τυποποιημένα διαγράμματα Cusum.

Σε ορισμένες περιπτώσεις απαιτείται να τυποποιείται η μεταβλητή X_i πριν τον υπολογισμό των συσσωρευμένων αθροισμάτων (Κουκουβίνος 2008). Ορίζουμε λοιπόν μια νέα μεταβλητή

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$$

η οποία ακολουθεί την κατανομή $N(0,1)$ και αποτελεί την τυποποιημένη τιμή της X_i .

Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι σε ένα Tabular διάγραμμα ελέγχου τύπου Cusum απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$C_i^+ = \max\left[0, Y_i - k + C_{i-1}^+\right]$$

$$C_i^- = \max\left[0, -Y_i - k + C_{i-1}^-\right]$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$

και αν $C_i^+ > h$, ($C_i^- < -h$) τότε ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο. Τα τυποποιημένα διαγράμματα Cusum υπερτερούν στο ότι :

- Εφόσον οι τιμές των k και h δεν είναι πλέον εξαρτημένες τιμές (διότι στην τυποποιημένη κανονική κατανομή το σ είναι πάντα σταθερό και ίσο με ένα) μπορούμε να έχουμε περισσότερα από ένα διαγράμματα Cusum.
- Με τη βοήθεια του τυποποιημένου διαγράμματος Cusum μπορούμε ευκολότερα να κατασκευάσουμε διαγράμματα ελέγχου για την μεταβλητότητα μίας διαδικασίας.

2.8 Διάγραμμα Scale Cusum

Τα διαγράμματα για τον έλεγχο της μεταβλητότητας μιας διαδικασίας τα ονομάζουμε διαγράμματα Scale Cusum (Hawkins 1981, Κουκουβίνος 2008)). Όπως και στο τυποποιημένο διάγραμμα Cusum θεωρούμε την μεταβλητή X_i με μέση τιμή ή τιμή στόχο μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Υπολογίζουμε μια καινούργια μεταβλητή v_i ως εξής

$$v_i = \frac{\sqrt{Y_i} - 0.822}{0.349} \quad \text{με } 1 \leq i \leq m \text{ όπου (2.8.1)}$$

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$$

Οι τιμές 0,822 και 0,349 είναι σταθερές οι οποίες έχουν προκύψει από προσομοιώσεις.

Οι ποσότητες v_i είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες στις αλλαγές της διασποράς μιας διαδικασίας παρά σε μετατοπίσεις του μέσου. Οι ποσότητες v_i εφόσον προκύπτουν από το τυποποιημένο διάγραμμα Cusum ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$ οπότε τα υπολογίζουμε τα άνω και κάτω συσσωρευτικά αθροίσματα ως ακολούθως

$$S_i^+ = \max\left[0, v_i - k + S_{i-1}^+\right]$$

$$S_i^- = \max\left[0, -v_i - k + S_{i-1}^-\right]$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $S_0^+ = S_0^- = 0$

Η εξήγηση και η ερμηνεία των διαγραμμάτων Scale Cusum είναι αντίστοιχη των διαγραμμάτων Cusum για το μέσο. Αν η τυπική απόκλιση μειωθεί, θα μειωθούν αντίστοιχα και οι τιμές των S_i^- ενώ αν η τυπική απόκλιση αυξηθεί θα αυξηθεί και η τιμή S_i^+ μέχρι τη στιγμή που θα ξεπεράσει το διάστημα απόφασης H .

Αξίζει να αναφέρουμε ότι αν βρεθεί σήμα εκτός ελέγχου μόνο στο διάγραμμα Scale Cusum μάλλον υπάρχει αλλαγή στη διασπορά της διαδικασίας ενώ αν βρεθεί σήμα εκτός ελέγχου και στο διάγραμμα μέσου και στο διάγραμμα μεταβλητότητας μάλλον υπάρχει μετατόπιση στο μέσο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΚΙΝΗΤΟΥΣ ΜΕΣΟΥΣ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΒΑΡΗ (EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE CONTROL CHARTS)

Εκτός από τα διαγράμματα Cusum μία καλή εναλλακτική λύση όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μεταβολές της τάξης του $0,5\sigma$ έως $1,5\sigma$ είναι τα διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους. Αυτά τα διαγράμματα είναι :

- A. Διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη
- B. Διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους.

Τα διαγράμματα EWMA παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Roberts (1959, 1966) ο οποίος μέσω προσομοίωσης εκτίμησε το *ARL* και έδειξε ότι τα EWMA διαγράμματα ελέγχου είναι χρήσιμα για την ανίχνευση μικρών μεταβολών. Αργότερα οι Robinson και Ho (1978), Waldman (1986), Crowder (1987) και οι Lucas και Saccucci (1987, 1990) υπολόγισαν με αριθμητικές μεθόδους τις ιδιότητες του *ARL* του EWMA.

3.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία, η οποία παράγει προϊόντα, στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους του οποίου θέλουμε να παρακολουθήσουμε. Το δείγμα έχει μέση τιμή μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Από τη διεργασία λαμβάνονται ανεξάρτητες μεμονωμένες παρατηρήσεις $X_i, i \geq 1$ και μας

ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, $\mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma$. Στα διαγράμματα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένου μέσου ή απλά διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$z_i = (1-\lambda)z_{i-1} + \lambda x_i, \text{ με } i \geq 1 \quad (3.1.1)$$

όπου x_i είναι οι παρατηρήσεις και λ μία παράμετρος που ονομάζεται συντελεστής βαρύτητας (weighting factor) με $0 < \lambda \leq 1$. Για παράδειγμα αν $\lambda = 1$ μόνο η τελευταία παρατήρηση θα επηρεάσει το EWMA δηλαδή όσο πιο κοντά είναι στο 1 τόσο λιγότερο επηρεάζεται από τα τελευταία δεδομένα.

Για την εκκίνηση του παραπάνω σχεδίου EWMA απαιτείται ο καθορισμός της τιμής εκκίνησης z_0 , η οποία συνήθως λαμβάνεται ίση με μ_0 ($z_0 = \mu_0$) ή γενικότερα λαμβάνεται ίση με μία τιμή στόχο (target value) T ($\mu_0 = T$). Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο έχουμε

$$\begin{aligned} z_i &= (1-\lambda)z_{i-1} + \lambda x_i \\ &= (1-\lambda)[(1-\lambda)z_{i-2} + \lambda x_{i-1}] + \lambda x_i \\ &= (1-\lambda)^2 z_{i-2} + \lambda(1-\lambda)^1 x_{i-1} + \lambda(1-\lambda)^0 x_i \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= (1-\lambda)^i z_0 + \lambda(1-\lambda)^{i-1} x_1 + \lambda(1-\lambda)^{i-2} x_2 + \dots + \lambda(1-\lambda)x_{i-1} + \lambda(1-\lambda)^0 x_i \\ &= (1-\lambda)^i z_0 + \lambda \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} x_j \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα z_i αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο των παρατηρήσεων $z_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i$ με αντίστοιχα βάρη

$(1-\lambda)^i, \lambda(1-\lambda)^{i-1}, \lambda(1-\lambda)^{i-2}, \dots, \lambda(1-\lambda)^1, \lambda$ (τα βάρη αθροίζονται στη μονάδα). Τα βάρη $\lambda(1-\lambda)^{i-j}$ των ποσοτήτων x_j φθίνουν γεωμετρικά καθώς προχωρούμε από την παρατήρηση x_i προς την παρατήρηση x_1 και συνεπώς η τιμή της παραμέτρου λ απεικονίζει την σπουδαιότητα που δίνουμε στις νέες (μεγάλη τιμή για το λ) ή στις παλαιότερες (μικρή τιμή για το λ) παρατηρήσεις. Για παράδειγμα αν $\lambda=1$ μόνο η τελευταία παρατήρηση θα επηρεάσει το EWMA δηλαδή όσο πιο κοντά είναι στο 1 τόσο λιγότερο επηρεάζεται από τα τελευταία δεδομένα.

Για αυτό το λόγο ονομάσαμε τα διαγράμματα που βασίζονται στη ποσότητα z_i ως διαγράμματα ελέγχου γεωμετρικού κινητού μέσου (geometric moving average control charts).

Για το μέσο και τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης z_i ($z_0 = \mu_0$) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_{z_i} &= E\left((1-\lambda)^i z_0 + \lambda \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} x_j\right) \\ &= (1-\lambda)^i \mu_0 + \lambda \mu_0 \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} = (1-\lambda)^i \mu_0 + \mu_0 (1 - (1-\lambda)^i) = \mu_0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

και

$$\sigma_{z_i}^2 = \text{Var}\left((1-\lambda)^i z_0 + \lambda \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} x_j\right) = \lambda^2 \sigma^2 \sum_{j=1}^i [(1-\lambda)^2]^{i-j} = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (3.1.4)$$

Συνεπώς λαμβάνοντας υπόψη τη φιλοσοφία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart, στο διάγραμμα ελέγχου EWMA, απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης z_i και τα όρια ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL = \mu_{z_i} + L\sigma_{z_i} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$CL = \mu_{z_i} = \mu_0$$

$$LCL = \mu_{z_i} - L\sigma z_i = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2i}]} \quad (3.1.5)$$

όπου L το εύρος των ορίων (συνήθως = 3) και μ_0 η τιμή στόχος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για $\lambda=1$ το διάγραμμα ελέγχου EWMA ανάγεται στο αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Επίσης παρατηρούμε ότι τα όρια ελέγχου του παραπάνω διαγράμματος ελέγχου είναι μεταβλητά ($\lambda \neq 1$). Ωστόσο η ποσότητα $(1-\lambda)^{2i}$ τείνει στο μηδέν καθώς το i αυξάνει, οπότε σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα τα όρια ελέγχου εξομαλύνονται και δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL = \mu_{z_i} + L\sigma z_i = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LCL = \mu_{z_i} - L\sigma z_i = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad (3.1.6)$$

Αν και η μέθοδος των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις μπορεί να τροποποιηθεί άμεσα έτσι ώστε να καλύψει την περίπτωση όπου έχουμε δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα x_i θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{x}_i (δηλαδή με το μέσο του i δείγματος) και η ποσότητα σ με την ποσότητα σ/\sqrt{n} . Συνεπώς στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η ποσότητα

$$z_i = (1-\lambda)z_{i-1} + \lambda \bar{x}_i \quad \text{με } i \geq 1 \text{ και } 0 < \lambda \leq 1 \quad (3.1.7)$$

Με όρια ελέγχου

$$UCL = \mu_{z_i} + L\sigma z_i = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2i}]}$$

$$CL = \mu_{z_i} = \mu_0$$

$$LCL = \mu_{z_i} - L\sigma z_i = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2i}]} \quad (3.1.8)$$

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA χρησιμοποιούνται όπως και τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Cusum, όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων τύπου EWMA έναντι των Cusum είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

3.2 Σχεδιασμός διαγράμματος ελέγχου EWMA

Ο σχεδιασμός ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA δηλαδή η βέλτιστη επιλογή των παραμέτρων λ και L , εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από το ARL του διαγράμματος. Γενικά η τιμή του ARL πρέπει να είναι μεγάλη όταν η διεργασία λειτουργεί κοντά στην τιμή στόχο T , ενώ πρέπει να είναι μικρή όταν συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο.

Να σημειώσουμε ότι μεγαλώνοντας το πλάτος των ορίων μειώνεται εξίσου και το σφάλμα τύπου I ενώ ταυτόχρονα η πιθανότητα σφάλματος τύπου II μεγαλώνει.

Για την επιλογή των λ και L καθορίζουμε πρώτα το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής και τη μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που θέλουμε να ανιχνεύσουμε και κατόπιν επιλέγουμε τα λ και L από διαθέσιμους πίνακες με κριτήριο το μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Στην πράξη επιλέγεται ένα λ τέτοιο ώστε $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ με πιο δημοφιλείς επιλογές τις $\lambda = 0,05$, $\lambda = 0,10$ και $\lambda = 0,20$ ενώ για το L επιλέγουμε συνήθως $L = 3$. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου EWMA είναι ανώτερα των διαγραμμάτων Cusum για ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου ιδιαίτερα για $\lambda > 0,10$.

Ο ακόλουθος πίνακας μας δίνει την κατάλληλη επιλογή του ζεύγους L και λ όπως προτείνουν οι Vandeman και Jobe (1998) για κανονικοποιημένα δεδομένα.

Πίνακας 3.2.1 : Επιλογή των παραμέτρων λ και L

λ	0.05	0.10	0.10	0.30	0.40	0.50	0.75	1.00
L	2.49	2.70	2.86	2.93	2.96	2.98	3.00	3.00

Ακολουθως δίνουμε ένα ενδεικτικό πίνακα με τιμές για το μέσο μήκος ροής σε διαγράμματα EWMA όπου η μετατόπιση του μέσου είναι εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης για διάφορες τιμές των παραμέτρων λ και L . Ο πίνακας έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 να είναι ίσο με 500 (Montgomery (2001)).

Πίνακας 3.2.2 : Τυπικές τιμές του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου EWMA

ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΟ ΜΕΣΟ	$L=3.054$ $\lambda=0.40$	$L=2.998$ $\lambda=0.25$	$L=2.962$ $\lambda=0.20$	$L=2.814$ $\lambda=0.10$	$L=2.615$ $\lambda=0.05$
0.00	500	500	500	500	500
0.25	224	170	150	106	84.1
0.50	71.2	48.2	41.8	31.3	28.8
0.75	28.4	20.1	18.2	15.9	16.4
1.00	14.3	11.11	10.5	10.3	11.4
1.50	5.9	5.5	5.5	6.1	7.1
2.00	3.5	3.6	3.7	4.4	5.2
2.50	2.5	2.7	2.9	3.4	4.2
3.00	2.0	2.3	2.4	2.9	3.5
4.00	1.4	1.7	1.9	2.2	2.7

Για τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν τη χρήση του ακόλουθου πίνακα που περιέχει βέλτιστες τιμές των παραμέτρων λ , L και για συγκεκριμένες τιμές στην αλλαγή του μέσου (δ) και ARL_0 .

Πίνακας 3.3.3: Σχεδιασμός διαγράμματος EWMA

		ARL_0					
		100	300	500	1000	2000	5000
$\delta=0.5$	λ	0.07-0.06	0,06-0.05	0.05	0.04	0.04-0.03	0.03
	L	2.015-1954	2.462-2.399	2.616	2.817	3.069-2.989	3.299
	ARL_{\min}	17.3	24.9	28.7	34.3	40.1	47.7
$\delta=1.0$	λ	0.19-0.16	0.15-0.14	0.15-0.12	0.13-0.10	0.12-0.10	0.09
	L	2.346-2.295	2.723-2.707	2.907-2.858	3.113-3.059	3.317-3.283	3.538
	ARL_{\min}	6.97	9.14	10.2	11.7	13.2	15.2
$\delta=2.0$	λ	0.52-0.47	0.42-0.38	0.37-0.36	0.35-0.31	0.32-0.28	0.29-0.26
	L	2.538-2.526	2.895-2.885	3.047-3.044	3.253-3.241	3.445-3.433	3.686-3.677
	ARL_{\min}	2.62	3.23	3.51	3.90	4.29	4.81
$\delta=3.0$	λ	0.81-0.77	0.74-0.71	0.70-0.66	0.66-0.59	0.61-0.53	0.53-0.47
	L	2.572-2.569	2.931-2.930	3.086-3.084	3.286-3.283	3.477-3.473	3.714-3.711
	ARL_{\min}	1.45	1.72	1.86	2.06	2.26	2.51
$\delta=4.0$	λ	1.00-0.85	0.97-0.84	0.95-0.85	0.91-0.80	0.91-0.75	0.84-0.72
	L	2.576-2.573	2.935-2.934	3.090-3.089	3.290-3.289	3.480-3.480	3.719-3.718
	ARL_{\min}	1.08	1.16	1.21	1.29	1.39	1.53

Σε κάθε τιμή εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_0 και της μετατόπισης δ του μέσου της διεργασίας, αντιστοιχεί μία ελάχιστη τιμή ARL , ARL_{\min} , για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής που δίνεται στον παραπάνω πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές των ποσοτήτων λ και L , για τις οποίες επιτυγχάνεται το συγκεκριμένο ARL_{\min} . Όταν οι ελάχιστες τιμές ARL_{\min} επιτυγχάνονται σε διαστήματα τιμών των λ, L τότε στον πίνακα παρουσιάζονται τα διαστήματα αυτά. Το σχέδιο EWMA, το οποίο σχεδιάζεται με τη μικρότερη τιμή του λ του διαστήματος, παρέχει μεγαλύτερη προστασία σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου διεργασίας. Αντίθετα το σχέδιο EWMA, το οποίο σχεδιάζεται με τη μεγαλύτερη τιμή του λ του διαστήματος παρέχει μεγαλύτερη προστασία σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις του μέσου διεργασίας.

3.3 Η ιδιότητα FIR

Στο EWMA διάγραμμα μπορούμε να πετύχουμε τη γρήγορη αρχική αντίδραση (Fast Initial Response) ώστε όπως και στο Cusum, να είναι ταχέως ανιχνεύσιμο ένα σημείο που βρίσκεται εκτός ελέγχου στην αρχή (start-up) της διαδικασίας. Οι μέθοδοι των Rhoads, Montgomery και Mastrangelo (1996) και Steiner (1999) είναι οι πιο γνωστές. (Κουκουβίνος 2008). Η πιο διαδεδομένη και η πιο εύκολη στη χρήση είναι η μέθοδος του Steiner καθώς χρησιμοποίησε πιο στενά όρια ελέγχου, δηλαδή

$$\pm L\sigma \left\{ \left(1 - (1-f)^{1+a(i-1)} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2i} \right]} \right\} \quad (3.3.1)$$

όπου a και f σταθερές οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν. Το a πρέπει να έχει τέτοια τιμή ώστε το FIR να έχει μικρή επιρροή από την 20^η παρατήρηση περίπου και μετά. Η διαδικασία αυτή έχει ως αποτέλεσμα μια επιλογή του

$$a = \left[-2/\log(1-f) - 1 \right] / 19 \quad (3.3.2)$$

3.4 Μειονεκτήματα του EWMA διαγράμματος ελέγχου.

Βασικό μειονέκτημα των διαγραμμάτων EWMA είναι ότι δεν είναι εύκολη η ερμηνεία τους, εν συγκρίσει π.χ. των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart. Το διάγραμμα EWMA αργεί να ανιχνεύσει γρήγορα μεγάλες αλλαγές στο μέσο συγκριτικά με το διάγραμμα Shewhart.

Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι όταν οι μέσες τιμές EWMA βρίσκονται προς τη μία μεριά της κεντρικής τιμής και η μετατόπιση του μέσου πραγματοποιείται από την άλλη μεριά, τότε υπάρχει καθυστέρηση στον εντοπισμό της μετατόπισης. Αυτό το φαινόμενο (το οποίο ονομάζεται φαινόμενο αδράνειας) προκύπτει αν η τιμή του λ είναι μικρή και όταν το λ είναι μικρό δε δίνεται βάρος στις νέες παρατηρήσεις. Παρόλα αυτά τα μειονεκτήματα των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA η εφαρμογή τους, ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία, είναι ευρέως διαδεδομένη, γεγονός που τα καθιστά χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ποιοτικού Ελέγχου. Για ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαγραμμάτων EWMA ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες Muth (1960), Brown (1962) και Freunf (1962).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ CUSUM ΜΕ ΕΚΤΙΜΩΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Τα εκθετικά γραφήματα CUSUM χρησιμοποιούνται στην παρακολούθηση του ρυθμού εμφάνισης σπάνιων φαινομένων γιατί οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ γεγονότων σε μία ομογενή διαδικασία Poisson θεωρούνται i.i.d. εκθετικές τυχαίες μεταβλητές. Σε αυτές τις εφαρμογές υποθέτουμε πως η εκθετική παράμετρος, δηλαδή ο μέσος, είναι γνωστός ή έχει εκτιμηθεί με ακρίβεια. Παρόλα αυτά στην πράξη, ο εσωτερικός μέσος ελέγχου είναι συνήθως άγνωστος και πρέπει να εκτιμηθεί ώστε να κατασκευαστούν τα όρια του εκθετικού γραφήματος CUSUM. Σε αυτό το κεφάλαιο ερευνούμε την επιρροή της εκτίμησης της παραμέτρου στις ιδιότητες της διάρκειας δημιουργίας μονομερών εκθετικών γραφημάτων CUSUM. Επιπλέον, η ανάλυση μέτρων απόδοσης υπό όρους υποδεικνύει ότι η επίδραση του σφάλματος εκτίμησης μπορεί να αποδειχθεί σημαντική, επηρεάζοντας και το μέσο μήκος ροής εντός ελέγχου και την γρήγορη ανίχνευση της φθοράς της διαδικασίας. Επιπρόσθετα παρέχουμε συστάσεις σχετικά με το μέγεθος των δειγμάτων της πρώτης φάσης. Το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ώστε το γράφημα απόδοσης εντός ελέγχου να προσεγγίζει την πραγματική παράμετρο. Τέλος, παραθέτουμε ένα βιομηχανικό παράδειγμα για να τονίσουμε τις πρακτικές εφαρμογές του σφάλματος εκτίμησης και να προσφέρουμε συμβουλές σε επαγγελματίες καθώς συνθέτουν και αναλύουν ένα δείγμα πρώτης φάσης.

4.1. Εισαγωγή

Η εμφάνιση σπάνιων γεγονότων σε διαδικασίες κατασκευής (π.χ. μη συμβατά εξαρτήματα ή αποτυχίες μηχανών) συχνά μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας ομογενείς διαδικασίες Poisson. Στο άρθρο των Zhang et al (2007) υπογραμμίστηκε

πως ο ρυθμός Poisson μπορεί να παρατηρηθεί με δύο διαφορετικές μεθόδους: διαγράμματα ελέγχου για καταμέτρηση και διαγράμματα ελέγχου βασισμένα στα χρονικά διαστήματα μεταξύ των εμφανίσεων των γεγονότων, τα οποία είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή όταν η διαδικασία είναι σταθερή. Τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στα χρονικά διαστήματα μεταξύ των εμφανίσεων των γεγονότων είναι πιο αποτελεσματικά. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγεται το εκθετικό γράφημα Shewhart, ο εκθετικά σταθμισμένος κινούμενος μέσος όρος (EWMA) και τα εκθετικά γραφήματα ελέγχου (CUSUM). Μεταξύ των ανωτέρω, το εκθετικό γράφημα CUSUM είναι δημοφιλές γιατί μπορεί να βελτιστοποιηθεί για την γρήγορη ανίχνευση μιας δεδομένης μετάβασης.

Η διαθέσιμη βιβλιογραφία πάνω στα εκθετικά γραφήματα CUSUM είναι βασισμένη στην προϋπόθεση ότι ο εσωτερικός μέσος του ελέγχου για τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των εμφανίσεων των γεγονότων είναι γνωστός ή έχει εκτιμηθεί με ακρίβεια. Παρόλα αυτά, στην πράξη η απόδοση των εκθετικών γραφημάτων CUSUM εξαρτάται από τα όρια του ελέγχου, τα οποία με τη σειρά τους βασίζονται στην εκτίμηση της εσωτερικής παραμέτρου της εκθετικής κατανομής εντός ελέγχου. Έτσι, είναι σημαντικό να παρατεθούν οδηγίες έτσι ώστε η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στο εκθετικό διάγραμμα CUSUM μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή. Πρέπει να σημειωθεί πως τέτοιες οδηγίες έχουν παρατεθεί για το εκθετικό διαγράμμα Shewhart, το εκθετικό διάγραμμα EWMA, το σχετικό (προσαρμοσμένο για ρίσκο) Bernoulli γράφημα CUSUM, καθώς και το μη προσαρμοσμένο για ρίσκο Bernoulli γράφημα CUSUM. Οι μέθοδοι που είναι βασισμένοι στην κατανομή Bernoulli μπορούν να εφαρμοστούν όταν μπορεί κανείς να καταμετρήσει τον αριθμό των επαναλήψεων μεταξύ γεγονότων (π.χ. τα εξαρτήματα που παράγονται) αντί των χρόνων μεταξύ γεγονότων (time-between-events –TBE). Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο αριθμός των επαναλήψεων μεταξύ γεγονότων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Έτσι, το εκθετικό γράφημα CUSUM μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχής εκδοχή του γεωμετρικού γραφήματος CUSUM.

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάμε την επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στην απόδοση του μονομερούς εκθετικού γραφήματος CUSUM χρησιμοποιώντας την εκτιμώμενη τιμή του μέσου μήκους ροής (ARL_{avg}), την τυπική απόκλιση του μέσου

μήκους ροής (*SDARL*), την τυπική απόκλιση του μήκους ροής (*SDRL*) και τα εκατοστημόρια της κατανομής μήκους ροής. Στη συνέχεια αυτά εκτιμώνται κάτω από δύο συνθήκες, όταν η σχέση μεταξύ του εκτιμώμενου μέσου με τον πραγματικό μέσο εσωτερικού ελέγχου είναι γνωστή και όταν είναι άγνωστη. Αυτές οι δύο αναλύσεις αναφέρονται ως υπό συνθήκες (conditional) και οριακή (marginal) απόδοση των μέτρων του μέσου μήκους ροής, αντίστοιχα. Η υπό συνθήκες ανάλυση μας επιτρέπει να κατανοήσουμε την επίρεια της υπερεκτίμησης ή υποεκτίμησης της εκθετικής παραμέτρου στην απόδοση του μέσου μήκους ροής. Από την άλλη μεριά, η οριακή απόδοση είναι χρήσιμη στο να παρέχει συστάσεις σχετικά με το μέγεθος του δείγματος γιατί μελετά την κατανομή της εκτιμώμενης παραμέτρου και έτσι λαμβάνει υπόψιν τη μεταβλητότητα που εισάγεται μέσω της εκτίμησης της παραμέτρου. Πρέπει να σημειωθεί ότι μελετάμε μόνο την επίρεια του σφάλματος εκτίμησης στο κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM επειδή “το πιο σύνηθες φαινόμενο στην πράξη είναι να χρησιμοποιεί κανείς τους χρόνους μεταξύ των γεγονότων CUSUM ώστε να ανιχνεύει μείωση των χρόνων μεταξύ αυτών των γεγονότων” (Montgomery 2012). Η ανάλυσή μας όμως θα μπορούσε να επεκταθεί και στα δύο άκρα.

Στη δεύτερη ενότητα επανεξετάζουμε σύντομα τις ιδιότητες του κάτω μονομερούς (one-sided lower) εκθετικού γραφήματος CUSUM. Στην τέταρτη ενότητα παρέχουμε τα αποτελέσματα και μία συζήτηση γύρω από τα συνιστάμενα μεγέθη δείγματος για το εκθετικό EWMA και για άλλα γραφήματα ελέγχου που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για αυτό τον τύπο δεδομένων. Η πέμπτη ενότητα παρέχει ένα βιομηχανικό παράδειγμα από το χώρο της επαγγελματικής υγείας και ασφάλειας ώστε να απεικονιστεί η σημασία του σφάλματος εκτίμησης στα γραφήματα CUSUM στην πράξη. Τέλος, τα συμπεράσματά μας παρέχονται στην έκτη ενότητα.

4.2. Το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM (One-sided lower exponential CUSUM chart)

4.2.1. Το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM με γνωστή εκθετική παράμετρο

Έστω ότι η καταγραφή των σπάνιων γεγονότων ξεκινά τη χρονική στιγμή 0, και ότι αυτά συμβαίνουν τις χρονικές στιγμές T_1, T_2, T_3 κ.ο.κ. Θεωρώντας ως δεδομένο ότι η διαδικασία είναι σταθερή, μπορούμε να ορίσουμε μία ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών που είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια εκθετική κατανομή, $X_1 = T_1, X_2 = T_2 - T_1, X_3 = T_3 - T_2, \dots$ και οι οποίες παριστάνουν τα διαστήματα μεταξύ γεγονότων. Έστω ότι η ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή όπως ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (4.2.1.a)$$

όπου β είναι ο μέσος των χρόνων μεταξύ γεγονότων (TBE – time between events). Επιπρόσθετα, αρχικά υποθέτουμε ότι η εκθετική παράμετρος β είναι γνωστή και ίση με β_0 όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου (in-control). Τότε ένα μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε κανείς να ανιχνεύσει μειώσεις στο μέσο χρόνο μεταξύ εμφάνισης των γεγονότων. Το στατιστικό C_t , για αυτό το γράφημα ορίζεται ως

$$C_t = \min\{0, C_{t-1} + X_t - K\}, t = 1, 2, \dots, \quad (4.2.1.b)$$

όπου X_t είναι ο χρόνος που πέρασε μεταξύ των γεγονότων t και $t-1$, και K ορίζεται ως εξής :

$$K = \frac{\beta_0 \times \beta'}{\beta' - \beta_0} \ln \left(\frac{\beta'}{\beta_0} \right) \quad (4.2.1.c)$$

όπου β' είναι η μικρότερη μετατόπιση που μπορεί να ανιχνευτεί γρήγορα. Στην εξίσωση (4.2.1.b) η αρχική τιμή του γραφήματος CUSUM (C_0) συνήθως επιλέγεται ίση με 0. Το γράφημα ελέγχου μας ειδοποιεί την πρώτη φορά που $C_t \leq -h$, όπου h είναι το κατώτατο όριο του ελέγχου. Πρέπει να σημειωθεί πως το μονομερές κάτω CUSUM μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα από το μη-αρνητικό στατιστικό

$$C_t^- = \max \{0, C_{t-1}^- + X_t + K\}, t = 1, 2, \dots, \text{ όπου } C_0^- = 0$$

Στα άρθρα των Lucas(1985) και Gan (1992) παρέχονται λεπτομέρειες σχετικά με την επιλογή των K και h έτσι ώστε να μπορεί να βρεθεί ένα προκαθορισμένο ARL εντός ελέγχου για το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM. Επιπρόσθετα, οι Borror et al (2003) εξέτασαν την αξιοπιστία αυτού του γραφήματος CUSUM και έδειξαν ότι μικρές αποκλίσεις από την εκθετική κατανομή δεν επηρεάζουν σημαντικά την απόδοσή του. Στα παρακάτω θα αναφερόμαστε στα μη-αρνητικά στατιστικά C_t ως μονομερή κάτω εκθετικά στατιστικά CUSUM.

4.2.2. Το μονομερές κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM όταν η παράμετρος β_0 είναι άγνωστη

Το όριο ελέγχου h , για το κάτω μονομερές στατιστικό CUSUM μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά (Vardeman και Ray (1985)), με βάση την εξίσωση ολοκληρωμάτων (Gan (1992)) ή με την αλυσίδα Markov (Brook και Evans (1972)) αν η παράμετρος β_0 είναι γνωστή. Παρόλο αυτά, όταν είναι άγνωστη, η τιμή της πρέπει να εκτιμηθεί πριν από οποιουδήποτε άλλους υπολογισμούς. Συνηθέστερα χρησιμοποιείται ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας ώστε να εκτιμηθεί η παράμετρος β_0 από ένα ιστορικό δείγμα φάσης I αποτελούμενο από n χρόνους αναμονής. Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας είναι

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.2.2.a)$$

Αντίστοιχα, το β_0 αντικαθίσταται από το $\hat{\beta}_0$ σε όλους τους υπολογισμούς του μήκους ροής για το κάτω εκθετικό γράφημα CUSUM. Ο στόχος της παρούσης

ενότητας είναι να καθοριστεί η επίρεια του μεγέθους του δείγματος φάσης I στην απόδοση του εκθετικού γραφήματος CUSUM. Στην ενότητα 4.2.3 εφαρμόζουμε κλίμακα στο εκθετικό μοντέλο ώστε να μπορεί να χειριστεί το σχεδιασμό του γραφήματος CUSUM, χωρίς να υπονομεύουμε τη γενική εφαρμογή των αποτελεσμάτων μας.

4.2.3. Εφαρμογή κλίμακας στο εκθετικό μοντέλο και εφαρμογή του γραφήματος CUSUM στο κλιμακούμενο μοντέλο

Έστω $\delta = \beta/\beta_0$, όπου δ είναι μέγεθος της μετατόπισης εκτός ελέγχου και β ο πραγματικός μέσος της διαδικασίας. Η περίπτωση όπου $\delta=1$ παριστάνει μια διαδικασία εντός ελέγχου, ενώ αν $\delta > 1$ τότε έχουμε μία επιδεινούμενη διαδικασία Poisson βασισμένη σε μειωμένους μέσους χρόνους μεταξύ γεγονότων (TBE). Για να απλοποιήσουμε το σχεδιασμό του εκθετικού γραφήματος CUSUM, εισάγουμε την ακόλουθη κλίμακα των εκθετικών παρατηρήσεων TBE:

$$Y_t = \frac{X_t}{\hat{\beta}_0} = \frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} \times \frac{\beta}{\beta_0} \times \frac{X_t}{\beta} \quad (4.2.3.b)$$

Έστω $W = \beta_0/\hat{\beta}_0$ και $Q_t = X_t/\beta$, οπότε η εξίσωση (4.2.3.b) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$Y_t = W \times \delta \times Q_t \quad (4.2.3.c)$$

Η τυχαία μεταβλητή W είναι ενδεικτική του σφάλματος εκτίμησης του εκθετικού μέσου εντός του ελέγχου και ακολουθεί την αντίστροφη κατανομή Γάμμα IGamma (n,n) στην κατάσταση εντός του ελέγχου (Ozsan et al. (2010)). Θέτοντας ως προϋπόθεση το $\hat{\beta}_0$, η μεταβλητή Y_t ακολουθεί εκθετική κατανομή και παριστάνει τις εκθετικές παρατηρήσεις TBE στις οποίες έχει εφαρμοστεί η κλίμακα $\hat{\beta}_0$. Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με τη μεταβλητή Y_t (αντί για τη X_t), γιατί αυτό διευκολύνει το σχεδιασμό του γραφήματος CUSUM. Το στατιστικό CUSUM για την Y_t μπορεί να βρεθεί αντικαθιστώντας την X_t με την Y_t στην εξίσωση (4.2.1.c). Αυτό μας δίνει

$$S_t = \min \{0, S_{t-1} + Y_t - K\}, t = 1, 2, \dots, \quad (4.2.3.d)$$

Εδώ συγκεκριμένα $S_0=0$ και K ορίζεται ως

$$K = \frac{\beta'_y}{\beta'_y - \hat{\beta}_{0,y}} \ln \left(\frac{\beta'_y}{\hat{\beta}_{0,y}} \right) \quad (4.2.3.e)$$

Ο σχηματισμός του K έχει αποδειχτεί ότι είναι βέλτιστος στο να ανιχνεύει τη μετατόπιση β'_y . Η επιλογή της β'_y είναι συγκεκριμένη ανά εφαρμογή. Στο παρόν, β'_y ορίζεται ως :

$$\beta'_y = (1 - \delta^*) \hat{\beta}_{0,y} \quad (4.2.3.f)$$

όπου $\delta^* = 0,2, 0,5$ ή $0,8$. Έτσι έχουμε $K = \left(1 - \frac{1}{\delta^*}\right) \ln(1 - \delta^*)$. Το κατώτερο όριο ελέγχου του κάτω εκθετικού γραφήματος CUSUM που χρησιμοποιείται για την παρατήρηση της Y_t ορίζεται ως :

$$LCL_y = -h_y \quad (4.2.3.g)$$

όπου h_y είναι μία θετική σταθερά επιλεγμένη ώστε να δίνει το επιθυμητό ARL εντός ελέγχου, έστω ARL_0 . Στην επόμενη ενότητα, παραθέτουμε μερικές λεπτομέρειες γύρω από τους υπολογισμούς μας.

4.3. Μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων του μήκους ροής.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.2.3 η απόδοση του μήκους ροής του κάτω εκθετικού γραφήματος CUSUM μπορεί να υπολογιστεί ποικιλοτρόπως. Στη συγκεκριμένη ενότητα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των αλυσίδων Markov, η οποία προτάθηκε από τους Brook και Evans (1972), ώστε να υπολογιστεί η απόδοση του γραφήματος όταν εκτιμάται η εκθετική παράμετρος. Όμοια με τη μελέτη των Ozsan et al.(2010), μελετάμε και τις υπό προϋποθέσεις και τις οριακές ιδιότητες του μήκους ροής.

Για να βρεθούν οι ιδιότητες του μήκους ροής πρέπει να οριστούν ο αριθμός των καταστάσεων της αλυσίδας Markov, καθώς και η σταθερά h_y . Ορίζουμε τον αριθμό των καταστάσεων της αλυσίδας Markov, $m+1$, να ισούται με 401. Η επιλογή του αριθμού των καταστάσεων βασίστηκε στη σύγκριση του μήκους ροής με 101, 201, 401, 501, 1001 και 2001 καταστάσεις. Οι υπολογισμοί μας συνέκλιναν όταν $m+1=401$.

Επίσης, θέτουμε τον ARL_0 εντός ελέγχου να είναι περίπου ίσος με 500 για όλα τα εκθετικά CUSUM που εξετάζονται στο παρόν, δηλαδή για τα γραφήματα που έχουν σχεδιαστεί για $\delta^*=0.2, 0.5$ και 0.8 . Χρησιμοποιήσαμε μια δυαδική αναζήτηση για τη σταθερά h_y . Πρέπει να σημειωθεί ότι παρέχουμε τις παραμέτρους σχεδίασης (K και h_y) για κάθε ένα από τα εκθετικά γραφήματα CUSUM στην ενότητα με τα αποτελέσματα.

4.4. Αποτελέσματα και συζήτηση

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις υπό προϋποθέσεις και οριακές ιδιότητες του μήκους ροής για το εκθετικό γράφημα CUSUM όταν τα όρια του ελέγχου εκτιμώνται. Η απόδοση υπό προϋποθέσεις παρουσιάζεται περιληπτικά στην ενότητα 4.4.1, στην οποία εξετάζουμε τρία υποθετικά σενάρια εκτίμησης παραμέτρων όπως παρουσιάζονται από τον Ozsan (2010). Αυτές οι περιπτώσεις αντιστοιχούν στο πρώτο, δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο από W περιπτώσεις και σηματοδοτούν περιπτώσεις υπερεκτίμησης ($W < 1$), πιο ακριβούς εκτίμησης και υποεκτίμησης ($W > 1$) της εκθετικής παραμέτρου. Να σημειωθεί ότι οι τιμές της παραμέτρου $\hat{\beta}_{0,y}$ που αντιστοιχούν σε αυτά τα τεταρτημόρια μπορούν να βρεθούν εύκολα γιατί η τυχαία μεταβλητή W ακολουθεί την αντίστροφη κατανομή Γάμμα $IGamma(n,n)$ (Ozsan et al. (2010)) για μια παρουσίαση αυτών των τιμών για διαφορετικά μεγέθη δείγματος). Από την άλλη μεριά, παρουσιάζουμε την συνολική εικόνα της οριακής απόδοσης στην ενότητα 4.4.2. Αυτή μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας το μέσο όρο των μέτρων απόδοσης για όλες τις τιμές της μεταβλητής W , όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (4.3.2.c) ως (4.3.2.f).

4.4.1. Υπό προϋποθέσεις απόδοση του μονομερούς εκθετικού γραφήματος CUSUM

Οι Πίνακες 1-3 (βλ. τέλος του κεφαλαίου όπου παρουσιάζονται όλοι οι πίνακες) παρουσιάζουν περιληπτικά την απόδοση του μήκους ροής των γραφημάτων CUSUM που έχουν σχεδιαστεί για $\delta^* = 0.2, 0.5$ και 0.8 αντίστοιχα. Αυτές παραθέτονται για καθένα από τα σενάρια εκτίμησης της παραμέτρου που έχουν ήδη αναφερθεί στα προηγούμενα, καθώς και για την περίπτωση που η παράμετρος είναι γνωστή ($W=1$). Επιπλέον, οι γκρι γραμμές αντιστοιχούν στην περίπτωση εντός ελέγχου ($\delta=1$). Αρκετές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν με βάση αυτούς τους πίνακες. Η συζήτησή μας κατευθύνεται δίνοντας έμφαση στην τιμή του δ .

Όταν $\delta=1$, υπερεκτίμηση της εκθετικής παραμέτρου συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των ψευδών σημάτων και μείωση της μεταβλητότητας του μήκους ροής, σε σύγκριση με τη μέση περίπτωση. Αντίθετα, υποεκτίμηση συνεπάγεται αύξηση της μεταβλητότητας του μήκους ροής και υψηλότερο ARL_0 σε σχέση με την σχεδιαζόμενη τιμή 500. Αυτά τα αποτελέσματα είναι συνεπή για τα γραφήματα CUSUM που παρατίθενται στους Πίνακες 1-3. Παρόλα αυτά, το μέγεθος της επίρειας μειώνεται καθώς οι τιμές των δ^* ή/και n αυξάνονται. Πιστεύουμε πως η αιτιολόγηση αυτών των παρατηρήσεων μπορεί να διασπαστεί σε τρία μέρη. Αρχικά, η υπερεκτίμηση μπορεί να δώσει την εντύπωση πως μειώνει το μέσο χρόνο μεταξύ γεγονότων, το οποίο θα ήταν ανάλογο με μία επιδείνωση της διαδικασίας κι έτσι με αύξηση του ρυθμού των ψευδών σημάτων. Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο η ανίχνευση της επιδείνωσης της διαδικασίας, η φαινομενική βελτίωση που συνεπάγεται η υποεκτίμηση της εκθετικής παραμέτρου θα οδηγήσει σε λιγότερο συχνά ψευδή σήματα σε σύγκριση με την περίπτωση όπου η εκθετική παράμετρος είναι γνωστή, επειδή το γράφημα CUSUM είναι μονομερές. Δευτερευόντως, καθώς η τιμή του n αυξάνεται, συγκλίνουμε προς την περίπτωση όπου η εκθετική παράμετρος είναι γνωστή και η διαφορά μεταξύ των μέτρων απόδοσης μεταξύ των τριών υποθετικών περιπτώσεων και της περίπτωσης όπου δεν υπάρχει σφάλμα εκτίμησης μειώνεται. Τρίτον, οι αυξήσεις στη δ^* κάνουν το γράφημα CUSUM λιγότερο ευαίσθητο σε

μικρότερες μετατοπίσεις. Έτσι, αυξήσεις της δ^* συνεπάγονται μικρότερη επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στην απόδοση του γραφήματος CUSUM.

Για την περίπτωση εκτός ελέγχου ($\delta < 1$), τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στην απόδοση εντός ελέγχου συνεχίζεται και για το σενάριο εκτός ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, αύξηση του αριθμού των ψευδών σημάτων συνοδεύεται από πιο ταχεία ανίχνευση συνθηκών εκτός ελέγχου, ενώ αύξηση του εντός ελέγχου ARL (λόγω σφάλματος εκτίμησης) οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές για το ARL στην περίπτωση εκτός του ελέγχου. Τα αποτελέσματα επίσης υποδεικνύουν πως η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στην απόδοση εκτός ελέγχου ελαττώνεται με μειούμενες τιμές του δ και αυξανόμενες τιμές των n και δ^* . Το μεγαλύτερο ζήτημα, παρόλα αυτά, είναι η δυσκολία να ελεγχθεί το εντός ελέγχου ARL .

4.4.2. Οριακή απόδοση του μονομερούς εκθετικού γραφήματος CUSUM

Παραθέτουμε περιληπτικά την οριακή απόδοση των τριών εκθετικών γραφημάτων CUSUM για διάφορα μεγέθη δειγμάτων και μεγεθών μετατοπίσεων στον Πίνακα 4. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι αυτές είναι οι εκτιμώμενες τιμές για τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές, για παράδειγμα στον Πίνακα 4 με ARL_{avg} συμβολίζουμε την εκτιμώμενη τιμή της ARL . Όπως και στην περίπτωση της υπό προϋποθέσεις απόδοσης, αναλύουμε τις περιπτώσεις εντός και εκτός ελέγχου ξεχωριστά. Για την περίπτωση εντός του ελέγχου, οι τιμές της ARL_0 είναι σημαντικά μεγαλύτερες του 500 που είχαμε σχεδιάσει για μικρές τιμές του n κι αυτό γίνεται εντονότερο για μικρές τιμές του δ^* . Καθώς το n μεγαλώνει, οι τιμές του ARL_0 αρχίζουν να συγκλίνουν στο 500. Αν το n υπερβεί το 500, οι τιμές της ARL πλησιάζουν προσεγγιστικά εντός 10% της τιμής του ARL που στοχεύουμε. Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν για τα τεταρτημόρια της τυπικής απόκλισης της κατανομής του μήκους ροής. Έτσι, στον Πίνακα 4, δείχνουμε μόνο τις τιμές των ARL_{avg} και $SARL_{avg}$. Συμπεράσματα βασισμένα μόνο στις αναμενόμενες τιμές του ARL , του τυπικού μήκους ροής και των τεταρτημόριων της κατανομής του

μήκους ροής μπορούν να είναι παραπλανητικά, όπως περιγράφεται στους Lee et al.(2012) και Zhang et al.(2012) διότι δεν λαμβάνουν υπόψη την μεταβλητότητα του ARL με βάση τα αντίστοιχα δείγματα φάσης I ανάλογα με την εφαρμογή. Αυτή η μεταβλητότητα ανάλογα με την εφαρμογή μπορεί να ληφθεί υπόψη μόνο αν κάποιος χρησιμοποιήσει το $SDRL_{avg}$ (ή τα τεταρτημόρια του ARL). Η τιμή $SDRL_{avg}$ είναι 0 όταν η εκθετική παράμετρος είναι γνωστή. Έτσι όταν $n=1000$ οι τιμές του $SDRL_{avg}$ 229.8, 130.5 και 170.6 για $\delta^*=0,2, 0,5$ και $0,8$ αντίστοιχα, αντιστοιχούν σε σημαντική μεταβλητότητα στις τιμές του ARL . Αντίστοιχα κανείς χρειάζεται ένα πολύ μεγαλύτερο δείγμα φάσης I ειδικά καθώς το δ^* μειώνεται. Συνιστούμε το $SDRL_{avg}$ να είναι μικρό (ίσως το 5-10% του ARL_0) έτσι ώστε κανείς να είναι σίγουρος ότι η απόδοση φάσης I μπορεί να προβλεφθεί και να πλησιάσει την περίπτωση εντός ελέγχου με γνωστή παράμετρο. Αυτό παρόλα αυτά είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί.

Για τις περιπτώσεις εκτός ελέγχου συγκρίνοντας την οριακή απόδοση με τα αποτελέσματα όταν η παράμετρος είναι γνωστή, είναι εύκολο κανείς να παρατηρήσει μια υποβάθμιση στην απόδοση του εκθετικού διαγράμματος Cusum. Ο μέσος και η τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής είναι πολύ μεγαλύτερα συγκρινόμενα με τα αποτελέσματα για γνωστή παράμετρο. Ειδικά για μικρότερες τιμές n και μεγαλύτερες τιμές του δ^* τα σενάρια εκτός ελέγχου παρέχουν περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με την επιλογή του μεγέθους δείγματος αλλά το κύριο θέμα παραμένει το να ελέγξει κανείς το ARL εκτός ελέγχου.

Με βάση τους Πίνακες 1-4 μπορεί κανείς να εξάγει δύο γενικά συμπεράσματα. Πρώτον καθώς οι αναλυτές εστιάζουν περισσότερο στην ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων (που συμβολίζονται με το δ^*) το μέγεθος του δείγματος φάσης I χρειάζεται να αυξηθεί δραματικά. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και οι Lee et al. (2012) για το διάγραμμα Bernoulli Cusum. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι η σημασία της χρήσης του $SDARL$ για να αξιολογηθεί η επήρεια σφάλματος εκτίμησης. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι χρησιμοποιώντας μόνο τις εκτιμώμενες τιμές του ARL και του $SDRL$ (καθώς και των τεταρτημορίων του μήκους ροής) μπορεί κανείς να παραπλανηθεί. Έτσι χρειάζεται κανείς πολύ μεγαλύτερα δείγματα από τα προηγούμενα αποτελέσματα έτσι ώστε να αναλύσει την επήρεια του σφάλματος εκτίμησης σε εκθετικά διαγράμματα ελέγχου. Για

παράδειγμα οι Ozsán et al.(2010) συνέστησαν δείγματα μεγαλύτερα του 200 για τα εκθετικά διαγράμματα EWMA. Η επιλογή τους βασίστηκε στην παρατήρηση ότι «αυξάνοντας το δείγμα n μέχρι το 200 βελτιώνεται σημαντικά η οριακή απόδοση εκτός ελέγχου. Πέραν του 200 η βελτίωση είναι σταθερή αλλά μικρότερη». Θα μπορούσαμε να έχουμε βγάλει ένα παραπλήσιο συμπέρασμα αγνοώντας τα αποτελέσματα του *SDARL*. Παρόλο αυτά δε συνιστούμε τόσο μικρά δείγματα διότι η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στην απόδοση και εντός και εκτός ελέγχου είναι σχετικά μεγάλα, ειδικά για $\delta^* = 0.2$ και 0.5 . Ο αναγνώστης πρέπει να λάβει υπόψιν ότι τα συμπεράσματα των Ozsán et al.(2010) δεν συμβαδίζουν με τους υπολογισμούς τους. Συγκεκριμένα έδειξαν ότι το *ARL* εντός ελέγχου θα απέχει τις μισές φορές περισσότερο από 20% από την επιθυμητή τιμή (τιμή στόχο) ακόμη κι αν $n = 500$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τα προηγούμενα συμπεράσματά τους. Η χρήση του *SDARL* διευκολύνει το να αποκτήσει κανείς εικόνα πότε η επιρροή του σφάλματος εκτίμησης είναι αμελητέα διότι λαμβάνει υπόψιν τη μεταβλητότητα του *ARL* ανάλογα με τον αναλυτή. Έτσι είναι ευκολότερο για όλους εμάς να κατανοήσουμε την ανάγκη για μεγαλύτερα μεγέθη δείγματος. Στις περισσότερες εφαρμογές δε θα είναι πρακτικό να έχει κανείς μεγέθη δείγματος φάσης I αρκετά μεγάλα έτσι ώστε να αγνοηθεί η επήρεια σφάλματος εκτίμησης.

4.5 Ένα βιομηχανικό παράδειγμα και συμβουλές στους αναλυτές.

Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει ένα σύνολο βιομηχανικών δεδομένων από εργασιακά ατυχήματα τα οποία συνέβησαν σε ένα εργοστάσιο μέσα σε διάρκεια 5 ετών. Σε αυτή την περίπτωση ο αναλυτής πρέπει πρώτα να καθορίσει αν τα δεδομένα υποδεικνύουν μία σταθερή διαδικασία και τότε να αποφασίσει εάν τα διαθέσιμα δεδομένα είναι αρκετά, ώστε να εκτιμηθεί η εντός ελέγχου παράμετρος που τον ενδιαφέρει. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα λάβαμε υπόψιν τα δεδομένα των τελευταίων 5 ετών τα οποία παρέχονται στο άρθρο του Lucas (1985). Έχει αποδειχθεί ότι ο ρυθμός ατυχημάτων μειώθηκε περίπου 50% ξεκινώντας από το 1975. Η ερώτηση τώρα είναι αν κατά πόσο τα δεδομένα των τελευταίων πέντε χρόνων είναι αρκετά ώστε να εκτιμηθεί ο χρόνος μεταξύ γεγονότων (TBE) έτσι ώστε η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στο εκθετικό διάγραμμα Cusum να είναι αμελητέα. Ο αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στον Montgomery (2012) και Lucas

(1985) για λεπτομερή συζήτηση για τον τρόπο με τον οποίο κανείς μπορεί να εκτιμήσει τη σταθερότητα της διαδικασίας για το δείγμα φάσης I.

Με βάση τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι αυτές οι 58 παρατηρήσεις είναι ανεπαρκείς ώστε να παρέχουν μια έγκυρη εκτίμηση των χρόνων μεταξύ γεγονότων (TBE). Στην πραγματικότητα το μέγεθος δείγματος που χρειάζεται είναι πολύ μεγαλύτερο (από το 58) διότι έχουμε θεμελιώσει ότι χρειαζόμαστε ένα μέγεθος δείγματος αρκετών χιλιάδων παρατηρήσεων έτσι ώστε η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης να είναι αμελητέα. Αυτό δεν είναι μόνο μη πρακτικό σε αυτή την περίπτωση (θα χρειαζόντουσαν εκατοντάδες χρόνια παρατηρήσεων) αλλά θα ήταν επίσης δύσκολο να εξασφαλιστεί ότι οι υποθέσεις πίσω από την ασφάλεια της απόδοσης παρέμειναν έγκυρες. Για να παρακάμψει κάποιος αυτό το πρόβλημα ίσως είναι καλύτερο να παρατηρήσει ένα (ή και περισσότερα) χαρακτηριστικά της διαδικασίας που εμφανίζεται συχνότερα. Στην περίπτωση του παραδείγματος μας ο αναλυτής ίσως πρέπει να παρατηρήσει “παρ’ ολίγο” ατυχήματα και γεγονότα τα οποία έχουν οδηγήσει σε μικρούς ή/και μεγάλους τραυματισμούς γιατί αυτά θα παρείχαν μια καλή ένδειξη ασφάλειας. Αυτή η σύσταση είναι παρόμοια της προσέγγισης των Steiner και MacKay (2004) οι οποίοι πρότειναν να μοντελοποιήσει κανείς την εντός ελέγχου απόδοση πολύ παραγωγικών διαδικασιών κατασκευής χρησιμοποιώντας ένα λογιστικό μοντέλο παλινδρόμησης, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να θεμελιωθεί η σχέση μεταξύ του γεγονότος που μας ενδιαφέρει και κάποιου υποκείμενου χαρακτηριστικού της διαδικασίας και του προϊόντος το οποίο μπορεί να παρατηρηθεί αποτελεσματικά.

4.6 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε και την υπό προϋποθέσεις και την οριακή απόδοση έτσι ώστε να αναλύσουμε την επήρεια του σφάλματος εκτίμησης στην απόδοση του μονόπλευρου κάτω εκθετικού διαγράμματος Cusum. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης γίνεται μεγαλύτερη όταν το διάγραμμα Cusum σχεδιάζεται έτσι ώστε να ανιχνεύσει μικρότερες μετατοπίσεις του μέσου. Γενικά η επήρεια του σφάλματος εκτίμησης είναι σημαντική για τις τρεις τιμές του δ^* που εξετάσαμε ειδικά όταν $n < 10000$. Τα μέτρα απόδοσης υπό προϋποθέσεις δείχνουν ότι η

υπερεκτίμηση του χρόνου μεταξύ γεγονότων (TBE) οδηγεί σε σημαντικά χαμηλότερη τιμή του ARL εντός ελέγχου συγκρινόμενο με την επιθυμητή τιμή. Αυτό συνοδεύεται με μικρότερη διακύμανση (μεταβλητότητα). Αντίθετα η υπόεκτίμηση οδηγεί σε αύξηση της μεταβλητότητας του μήκους ροής και σε μεγαλύτερα ARL_0 από την επιθυμητή τιμή. Οι πίνακες οριακής απόδοσης δείχνουν ότι ένα μέγεθος της τάξης του 10.000 ή μεγαλύτερο μπορεί να είναι αναγκαίο ώστε η απόδοση φάσης I να μπορεί να προβλεφθεί και να προσεγγίζει την περίπτωση εντός ελέγχου με γνωστή παράμετρο. Παρατηρήσαμε ότι τα αναγκαία μεγέθη δείγματος μπορεί να μην είναι εφαρμόσιμα όταν ο εκθετικός μέσος εντός ελέγχου είναι μεγάλος όπως είδαμε στο βιομηχανικό παράδειγμα. Σε αυτό το παράδειγμα μόνο 58 ατυχήματα συνέβησαν σε 5 χρόνια το οποίο καθιστά μη πρακτική την επιλογή ενός τόσο μεγάλου μεγέθους δείγματος.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

n	δ	First quartile (overestimation)					Second quartile					Third quartile (underestimation)					W = 1 (no estimation error)				
		ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th
30	0.2	14.9	1.0	14	15	16	15.3	1.2	14	15	17	16.0	1.4	14	16	18	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	19.7	2.9	16	19	24	21.5	3.7	17	21	26	24.0	5.0	18	23	31	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	28.9	7.7	21	28	39	35.2	11.5	23	33	50	46.9	19.8	27	42	73	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	52.8	24.4	28	47	85	86.3	53.5	36	72	156	205.3	168.6	54	154	425	81.5	49.1	35	68	145
	1	167.1	130.9	49	128	337	573.2	535.9	94	409	1271	3416.0	3381.4	391	2378	7821	500.0	462.7	86	358	1103
50	0.2	14.9	1.0	14	15	16	15.3	1.2	14	15	17	15.8	1.3	14	16	18	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	20.0	3.1	16	20	24	21.4	3.7	17	21	26	23.3	4.6	18	23	29	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	29.9	8.2	21	28	41	34.9	11.3	23	33	50	43.0	16.9	26	39	65	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	56.9	27.7	29	50	93	84.4	51.7	36	70	151	155.4	119.5	47	120	311	81.5	49.1	35	68	145
	1	202.1	165.5	53	152	417	542.8	505.6	91	388	1201	2042.3	2006.7	247	1427	4656	500.0	462.7	86	358	1103
100	0.2	15.0	1.1	14	15	16	15.3	1.2	14	15	17	15.6	1.3	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	20.3	3.2	17	20	25	21.3	3.7	17	21	26	22.6	4.3	18	22	28	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	31.0	8.9	21	29	43	34.7	11.2	23	33	49	39.9	14.6	25	37	59	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	62.1	32.0	31	54	104	82.9	50.4	35	69	148	123.2	88.3	42	98	238	81.5	49.1	35	68	145
	1	252.2	215.2	59	187	532	520.8	483.6	88	373	1151	1278.0	1241.6	167	897	2895	500.0	462.7	86	358	1103
200	0.2	15.1	1.1	14	15	16	15.3	1.2	14	15	17	15.5	1.2	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	20.6	3.3	17	20	25	21.3	3.7	17	21	26	22.2	4.1	18	22	28	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	31.9	9.4	22	30	44	34.6	11.1	23	32	49	38.0	13.4	24	35	56	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	66.5	35.8	32	57	113	82.2	49.7	35	69	147	107.1	72.9	40	86	202	81.5	49.1	35	68	145
	1	301.0	263.8	65	221	644	510.3	473.0	87	365	1126	943.8	907.1	133	666	2125	500.0	462.7	86	358	1103
500	0.2	15.2	1.1	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17	15.4	1.2	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	20.8	3.4	17	20	25	21.3	3.7	17	21	26	21.8	3.9	17	21	27	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	32.8	10.0	22	31	46	34.5	11.1	23	32	49	36.6	12.4	23	34	53	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	71.2	39.9	33	61	123	81.8	49.4	35	69	146	95.9	62.4	38	79	177	81.5	49.1	35	68	145
	1	357.6	320.3	71	260	775	504.2	466.9	87	361	1112	735.3	698.3	111	521	1645	500.0	462.7	86	358	1103
1,000	0.2	15.2	1.1	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17	15.4	1.2	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	20.9	3.5	17	20	26	21.3	3.7	17	21	26	21.7	3.8	17	21	27	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	33.2	10.3	22	31	47	34.5	11.1	23	32	49	35.9	12.0	23	34	52	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	73.9	42.3	33	63	129	81.7	49.3	35	68	146	91.2	58.0	37	75	166	81.5	49.1	35	68	145
	1	392.7	355.4	75	284	856	502.4	465.1	87	360	1108	653.2	616.1	102	464	1456	500.0	462.7	86	358	1103
10,000	0.2	15.3	1.2	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17	15.3	1.2	14	15	17
	0.4	21.2	3.6	17	21	26	21.3	3.7	17	21	26	21.4	3.7	17	21	26	21.3	3.6	17	21	26
	0.6	34.1	10.8	23	32	48	34.5	11.1	23	32	49	34.9	11.3	23	33	50	34.5	11.0	23	32	49
	0.8	79.0	46.8	34	66	140	81.6	49.2	35	68	145	84.4	51.7	36	70	152	81.5	49.1	35	68	145
	1	462.6	425.3	82	332	1017	500.6	463.3	86	359	1104	543.5	506.3	91	388	1203	500.0	462.7	86	358	1103

Πίνακας 2

n	δ	First quartile (overestimation)					Second quartile					Third quartile (underestimation)					W=1 (no estimation error)				
		ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th
30	0.2	8.6	1.0	7	8	10	9.0	1.2	8	9	11	9.5	1.5	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	12.9	3.6	9	12	18	14.6	4.8	10	14	21	17.4	6.9	10	16	26	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	23.5	12.0	12	20	39	32.4	20.1	14	27	59	51.2	38.3	16	40	101	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	61.1	48.1	18	47	124	115.9	102.6	24	85	250	264.6	251.5	40	188	592	108.5	95.2	23	79	232
	1	223.0	209.8	35	159	496	545.7	532.9	69	382	1240	1522.7	1510.4	171	1059	3490	500.0	487.1	64	351	1135
50	0.2	8.7	1.1	8	9	10	9.0	1.2	8	9	11	9.4	1.4	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	13.1	3.7	9	12	18	14.6	4.7	10	14	21	16.6	6.2	10	15	25	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	24.7	13.1	12	21	42	31.9	19.7	14	26	58	44.6	31.9	16	35	86	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	68.0	54.9	19	51	140	112.9	99.6	24	82	243	209.3	196.1	34	149	465	108.5	95.2	23	79	232
	1	261.3	248.1	39	185	585	527.2	514.3	67	369	1197	1150.5	1138.1	132	801	2633	500.0	487.1	64	351	1135
100	0.2	8.8	1.1	8	9	10	9.0	1.2	8	9	11	9.2	1.4	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	13.5	4.0	9	13	19	14.5	4.7	10	13	21	15.8	5.7	10	15	23	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	26.3	14.5	12	22	45	31.6	19.4	13	26	57	39.6	27.0	15	32	75	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	76.7	63.6	20	57	159	110.7	97.4	24	81	237	168.9	155.6	30	121	371	108.5	95.2	23	79	232
	1	310.6	297.5	45	219	698	513.4	500.5	66	360	1165	883.5	870.9	104	616	2018	500.0	487.1	64	351	1135
200	0.2	8.8	1.1	8	9	10	9.0	1.2	8	9	11	9.2	1.3	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	13.7	4.1	9	13	19	14.5	4.7	10	13	21	15.4	5.3	10	14	22	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	27.5	15.6	13	23	48	31.4	19.3	13	26	56	36.7	24.2	14	30	68	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	84.2	71.0	21	63	177	109.6	96.3	23	80	235	146.7	133.4	27	106	321	108.5	95.2	23	79	232
	1	353.8	340.7	49	249	798	506.6	493.7	65	355	1150	740.4	727.7	89	517	1688	500.0	487.1	64	351	1135
500	0.2	8.9	1.2	8	9	10	9.0	1.2	8	9	11	9.1	1.3	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	14.0	4.3	9	13	20	14.5	4.7	10	13	21	15.0	5.1	10	14	22	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	28.7	16.8	13	24	50	31.3	19.2	13	26	56	34.4	22.1	14	28	63	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	91.9	78.7	21	68	194	108.9	95.7	23	80	233	130.5	117.2	26	95	283	108.5	95.2	23	79	232
	1	399.6	386.6	54	281	903	502.7	489.8	65	352	1141	637.1	624.4	79	446	1450	500.0	487.1	64	351	1135
1,000	0.2	8.9	1.2	8	9	10	9.0	1.2	8	9	11	9.0	1.3	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	14.1	4.4	10	13	20	14.5	4.7	10	13	21	14.8	4.9	10	14	21	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	29.4	17.4	13	25	52	31.3	19.1	13	26	56	33.4	21.1	14	27	61	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	96.3	83.1	22	71	205	108.7	95.5	23	80	233	123.4	110.1	25	90	267	108.5	95.2	23	79	232
	1	426.1	413.1	57	299	964	501.5	488.7	64	352	1138	592.3	579.5	74	415	1347	500.0	487.1	64	351	1135
10,000	0.2	8.9	1.2	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11	9.0	1.2	8	9	11
	0.4	14.3	4.6	10	13	20	14.5	4.7	10	13	21	14.6	4.7	10	14	21	14.5	4.7	10	13	21
	0.6	30.7	18.5	13	26	55	31.3	19.1	13	26	56	31.9	19.7	14	26	58	31.3	19.1	13	26	56
	0.8	104.5	91.2	23	77	223	108.6	95.3	23	79	233	113.0	99.7	24	83	243	108.5	95.2	23	79	232
	1	475.3	462.4	62	333	1078	500.4	487.5	64	351	1135	527.6	514.7	67	370	1198	500.0	487.1	64	351	1135

Πίνακας 3

n	δ	First quartile (overestimation)					Second quartile					Third quartile (underestimation)					W=1 (no estimation error)				
		ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th	ARL	SDRL	10th	50th	90th
30	0.2	6.1	1.8	4	6	8	6.7	2.3	4	6	10	7.5	3.0	5	7	11	6.6	2.2	4	6	10
	0.4	14.4	9.4	6	12	27	18.8	13.7	6	15	37	26.1	21.0	7	20	53	18.3	13.2	6	14	35
	0.6	42.5	37.3	9	31	91	64.8	59.7	11	47	143	104.6	99.5	16	74	234	62.2	57.1	11	45	137
	0.8	122.6	117.6	17	87	276	201.4	196.5	26	141	457	344.6	339.7	41	240	787	192.2	187.2	25	135	436
	1	310.2	305.3	37	217	708	525.3	520.5	60	366	1203	917.6	912.9	101	637	2107	500.0	495.2	57	348	1145
50	0.2	6.2	1.9	4	6	9	6.7	2.3	4	6	10	7.3	2.8	5	7	11	6.6	2.2	4	6	10
	0.4	15.1	10.0	6	12	28	18.6	13.5	6	15	36	23.8	18.7	7	18	48	18.3	13.2	6	14	35
	0.6	45.8	40.7	9	33	99	63.8	58.7	11	46	140	91.8	86.7	14	65	205	62.2	57.1	11	45	137
	0.8	134.3	129.3	19	95	303	197.7	192.8	25	139	449	298.2	293.3	36	208	680	192.2	187.2	25	135	436
	1	342.0	337.1	40	239	781	515.2	510.4	59	359	1180	790.4	785.7	87	549	1814	500.0	495.2	57	348	1145
100	0.2	6.3	2.0	4	6	9	6.6	2.2	4	6	10	7.0	2.6	5	7	11	6.6	2.2	4	6	10
	0.4	15.8	10.8	6	13	30	18.4	13.4	6	14	36	21.9	16.8	7	17	44	18.3	13.2	6	14	35
	0.6	49.7	44.6	10	36	108	63.0	57.9	11	45	138	81.2	76.0	13	58	180	62.2	57.1	11	45	137
	0.8	148.0	143.0	20	104	334	194.9	190.0	25	137	442	259.9	255.0	32	182	592	192.2	187.2	25	135	436
	1	379.4	374.6	44	264	867	507.5	502.7	58	353	1162	685.4	680.7	76	477	1572	500.0	495.2	57	348	1145
200	0.2	6.4	2.0	4	6	9	6.6	2.2	4	6	10	6.9	2.5	4	6	10	6.6	2.2	4	6	10
	0.4	16.5	11.4	6	13	31	18.4	13.3	6	14	36	20.7	15.6	7	16	41	18.3	13.2	6	14	35
	0.6	52.9	47.8	10	38	115	62.6	57.5	11	45	137	74.7	69.6	12	53	165	62.2	57.1	11	45	137
	0.8	159.1	154.1	21	112	360	193.6	188.6	25	136	439	236.9	232.0	29	166	539	192.2	187.2	25	135	436
	1	409.7	404.9	47	285	937	503.7	498.9	57	351	1154	622.3	617.6	70	433	1427	500.0	495.2	57	348	1145
500	0.2	6.5	2.1	4	6	9	6.6	2.2	4	6	10	6.8	2.4	4	6	10	6.6	2.2	4	6	10
	0.4	17.1	12.0	6	14	33	18.3	13.3	6	14	36	19.7	14.6	7	15	39	18.3	13.2	6	14	35
	0.6	56.0	50.9	11	40	122	62.4	57.3	11	45	137	69.7	64.6	12	50	154	62.2	57.1	11	45	137
	0.8	170.2	165.2	22	119	385	192.8	187.8	25	135	437	218.8	213.8	27	153	497	192.2	187.2	25	135	436
	1	439.8	435.0	51	306	1006	501.5														

Πίνακας 4

δ^*	n	δ	0.2			0.5			0.8		
			ARL _{avg}	SDARL	SDRL _{avg}	ARL _{avg}	SDARL	SDRL _{avg}	ARL _{avg}	SDARL	SDRL _{avg}
50		0.2	15.4	0.7	1.2	9.1	0.5	1.3	6.8	0.9	2.4
		0.4	21.9	2.9	4.0	15.3	3.4	5.4	20.7	8.6	15.6
		0.6	40.4	35.9	16.2	40.5	34.0	28.4	76.3	47.9	71.2
		0.8	308.1	3983.0	275.9	201.3	356.8	188.2	244.1	173.4	239.1
		1	10,740.7	213,171.2	10,705.4	1157.3	2561.7	1144.5	642.6	474.4	637.8
200		0.2	15.3	0.3	1.2	9.0	0.3	1.2	6.7	0.4	2.3
		0.4	21.4	1.2	3.7	14.6	1.3	4.8	18.8	3.3	13.8
		0.6	35.4	5.1	11.8	33.0	7.9	20.8	65.3	17.5	60.2
		0.8	94.9	50.1	62.5	123.8	59.5	110.5	203.6	62.7	198.6
		1	865.0	1352.0	828.3	605.1	384.5	592.2	531.5	171.4	526.7
500		0.2	15.3	0.2	1.2	9.0	0.2	1.2	6.6	0.2	2.2
		0.4	21.3	0.8	3.7	14.5	0.8	4.7	18.5	2.0	13.4
		0.6	34.8	3.0	11.3	31.9	4.5	19.7	63.4	10.5	58.3
		0.8	86.0	21.6	53.6	114.2	31.5	100.9	196.7	37.3	191.7
		1	611.0	402.5	574.0	538.8	197.4	526.0	512.3	101.9	507.5
1,000		0.2	15.3	0.1	1.2	9.0	0.1	1.2	6.6	0.2	2.2
		0.4	21.3	0.5	3.7	14.5	0.5	4.7	18.4	1.4	13.3
		0.6	34.7	2.0	11.2	31.6	3.1	19.4	62.8	7.3	57.7
		0.8	83.7	13.8	51.2	111.3	21.0	98.0	194.4	25.8	189.4
		1	551.1	229.8	513.9	518.9	130.5	506.0	506.1	70.6	501.3
10,000		0.2	15.3	0.0	1.2	9.0	0.0	1.2	6.6	0.1	2.2
		0.4	21.3	0.2	3.7	14.5	0.2	4.7	18.3	0.4	13.2
		0.6	34.5	0.6	11.1	31.3	0.9	19.1	62.3	2.3	57.2
		0.8	81.7	4.0	49.3	108.8	6.3	95.5	192.4	8.0	187.4
		1	504.8	60.8	467.5	501.8	38.9	489.0	500.6	21.9	495.8
20,000		0.2	15.3	0.0	1.2	9.0	0.0	1.2	6.6	0.0	2.2
		0.4	21.3	0.1	3.6	14.5	0.1	4.7	18.3	0.3	13.2
		0.6	34.5	0.4	11.0	31.3	0.7	19.1	62.3	1.6	57.1
		0.8	81.6	2.8	49.2	108.6	4.5	95.3	192.3	5.7	187.3
		1	502.4	42.6	465.1	500.9	27.4	488.0	500.3	15.5	495.5
50,000		0.2	15.3	0.0	1.2	9.0	0.0	1.2	6.6	0.0	2.2
		0.4	21.3	0.1	3.6	14.5	0.1	4.7	18.3	0.2	13.2
		0.6	34.5	0.3	11.0	31.3	0.4	19.1	62.2	1.0	57.1
		0.8	81.6	1.8	49.2	108.5	2.8	95.3	192.2	3.6	187.3
		1	500.9	26.8	463.7	500.4	17.3	487.5	500.1	9.8	495.3
100,000		0.2	15.3	0.0	1.2	9.0	0.0	1.2	6.6	0.0	2.2
		0.4	21.3	0.1	3.6	14.5	0.1	4.7	18.3	0.1	13.2
		0.6	34.5	0.2	11.0	31.3	0.3	19.1	62.2	0.7	57.1
		0.8	81.6	1.3	49.1	108.5	2.0	95.2	192.2	2.5	187.2
		1	500.5	18.9	463.2	500.2	12.2	487.3	500.1	6.9	495.3

Πίνακας 5

Sequence	Day	TBE	Sequence	Day	TBE	Sequence	Day	TBE
1	23	—	21	805	39	41	1362	26
2	44	21	22	805	0	42	1434	72
3	63	19	23	806	1	43	1477	43
4	99	36	24	817	11	44	1512	35
5	113	14	25	846	29	45	1548	36
6	121	8	26	857	11	46	1550	2
7	122	1	27	860	3	47	1552	2
8	220	98	28	882	22	48	1620	68
9	240	20	29	889	7	49	1629	9
10	413	173	30	889	0	50	1636	7
11	462	49	31	903	14	51	1659	23
12	477	15	32	970	67	52	1668	9
13	517	40	33	1028	58	53	1688	20
14	577	60	34	1032	4	54	1702	14
15	612	35	35	1060	28	55	1762	60
16	646	34	36	1082	22	56	1783	21
17	712	66	37	1154	72	57	1794	11
18	756	44	38	1207	53	58	1819	25
19	759	3	39	1250	43			
20	766	7	40	1336	86			

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ.

Ένα διάγραμμα ελέγχου είναι ένα γραφικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση διαδικασιών παραγωγής και τη βελτίωση της ποιότητας. Ένα από αυτά είναι το γράφημα ελέγχου τύπου Shewhart, το οποίο είναι ευαίσθητο κυρίως σε μεγάλες μετατοπίσεις. Για μικρές μετατοπίσεις έχουν προταθεί τα αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (CUSUM) και τα εκθετικά σταθμισμένα γραφήματα κινητού μέσου (EWMA). Για να ενισχυθεί η ικανότητα των EWMA γραφημάτων ελέγχου να ανιχνεύουν γρήγορα ένα μεγάλο εύρος αλλαγών στη διαδικασία, αναπτύσσουμε ένα EWMA γράφημα ελέγχου που χρησιμοποιεί τη διάμεσο του δείγματος (ranked set sampling - RSS), τη διάμεσο του διπλού RSS και τη διπλή διάμεσο RSS. Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι η προτεινόμενη διαδικασία βελτιώνει αισθητά την ευαισθησία των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA. Τα νέα γραφήματα ελέγχου κυριαρχούν έναντι των υπολοίπων σε σχέση με τις ιδιότητες του μήκους ροής, τη μέση τετραγωνική απώλεια, και με την απόδοση του συγκριτικού δείκτη. Αυτά περιλαμβάνουν το κλασικό EWMA, το EWMA ταχείας αρχικής απόκρισης, τα διπλά και τριπλά EWMA, τα EWMA βασισμένα σε κανόνες, το μέγιστο EWMA με μέση τετραγωνική τυπική απόκλιση, τη μίξη EWMA-CUSUM, το υβριδικό EWMA και το συνδιασμό Shewhart-EWMA με βάση τις ταξινομήσεις. Επίσης παραθέτουμε μία εφαρμογή βασισμένη σε πραγματικά δεδομένα ώστε να δείξουμε την εφαρμογή και τις λεπτομέρειες της διαδικασίας της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

5.1 Εισαγωγή

Το διάγραμμα ελέγχου EWMA που προτάθηκε από τον Roberts (1959) έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία, έχει αναλυθεί με πολλές στρατηγικές σχεδιασμού και έχει υποστεί αρκετές αλλαγές ώστε να βελτιωθεί η ευαισθησία του. Για παράδειγμα, οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν τη γρήγορη αρχική απόκριση (FIR), το συνδιασμό του Shewhart–EWMA και του ισχυρού EWMA. Οι Saccucci et al. (1992) αργότερα μελέτησαν την απόδοση του EWMA χρησιμοποιώντας μεταβλητά διαστήματα μεταξύ δειγμάτων. Ο Steiner (1999) ανέλυσε την απόδοση του FIR στο EWMA διάγραμμα με βάση όρια ελέγχου που αλλάζουν με το χρόνο. Επιπλέον, οι Zhang et al. (2004) πρότειναν το συνδιασμό ενός ή και περισσότερων ειδών EWMA, ενώ οι Machado και Costa (2008) μελέτησαν το EWMA με διπλή δειγματοληψία βασισμένη στη μεταβλητότητα δύο ποιοτικών χαρακτηριστικών. Οι Abbas et al. (2011) πρότειναν τη χρήση κανόνων ροής εντός της δομής ελέγχου EWMA ώστε να αυξηθεί η δυνατότητα ανίχνευσης μικρών μεταβολών. Οι Su et al. (2011) ανέλυσαν την απόδοση του EWMA που προσαρμόζεται σε γραμμικές μεταβολές στο μέσο. Οι Abbas et al. (2012) μελέτησαν τα πλεονεκτήματα του συνδυασμού των γραφημάτων CUSUM και EWMA. Οι Abujiya et al. (2012) πρόσφατα μελέτησαν την απόδοση των συνδυασμένων γραφημάτων Shewhart–EWMA χρησιμοποιώντας ταξινομημένα δεδομένα.

Οι βελτιώσεις στο γράφημα ελέγχου EWMA ανά τη βιβλιογραφία βασίζονται κυρίως στην υπόθεση ότι τα δείγματα προέρχονται από μία διαδικασία βασισμένη σε απλή τυχαία δειγματοληψία (SRS), η οποία είναι σαφώς λιγότερο αποτελεσματική στην εκτίμηση του πληθυσμιακού μέσου σε σύγκριση με την τεχνική της ταξινομημένης δειγματοληψίας (RSS) για το ίδιο μέγεθος δείγματος (McIntyre (1952) και Takahasi και Wakimoto (1968)). Η RSS που προτάθηκε αρχικά από τον McIntyre (1952) είναι μία τεχνική συλλογής δεδομένων που παρέχει σημαντική βελτίωση σε σχέση με την παραδοσιακή SRS μέσω επιπρόσθετων πληροφοριών που προέρχονται από τις ταξινομημένες μονάδες που στην πραγματικότητα δεν μετρούνται. Η μέθοδος αυτή παρέχει καλύτερα αντικειμενικά δείγματα σε σχέση με την SRS, και έτσι καλύτερο μέσο του δείγματος με μικρότερη μεταβλητότητα. Η χρήση μίας τέτοιας, καλόδομημένης δειγματοληψίας στον σχηματισμό του διαγράμματος ελέγχου θα

μπορούσε να βελτιώσει την ευαισθησία των γραφημάτων σε μεταβολές της διαδικασίας συγκρινόμενη με την SRS.

Η τεχνική RSS και κάποιες από τις παραλλαγές της έχουν εφαρμοστεί σε ένα εύρος διαφορετικών πεδίων (Modarres et al. 2006) και πρόσφατα έχουν χρησιμοποιηθεί ώστε να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα των διαγραμμάτων ποιοτικού ελέγχου στην ανίχνευση αλλαγών στα χαρακτηριστικά της διαδικασίας. Για παράδειγμα, οι Salazar και Sinha (1997) και οι Muttlak και Al-Sabah (2003) χρησιμοποίησαν την RSS με ίσες και άνισες ταξινομήσεις ώστε να αναπτύξουν διαγράμματα ελέγχου Shewhart για το μέσο. Επιπλέον, οι Abujiya και Muttlak (2004) και οι Al-Omari και Haq (2012) χρησιμοποίησαν ένα σύστημα διπλής RSS για να κατασκευάσουν ένα γράφημα Shewhart. Ο Al-Sabah (2010) κατασκεύασε ένα διάγραμμα μέσου CUSUM χρησιμοποιώντας δεδομένα RSS. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, προτείνουμε νέα διαγράμματα ελέγχου EWMA για την παρακολούθηση του μέσου της διαδικασίας τα οποία χρησιμοποιούν μερικές παραλλαγές του συστήματος RSS και συγκεκριμένα τις τεχνικές του RSS διαμέσου (MRSS), τη διάμεσο του διπλού RSS (MDRSS) και το διπλό MRSS (DMRSS).

Τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά σε πρακτικές εφαρμογές στις οποίες το να πάρει κανείς μετρήσεις των ποιοτικών χαρακτηριστικών που μας ενδιαφέρουν μπορεί να είναι ακριβό, χρονοβόρο ή και καταστροφικό, αλλά όπου ένα σύνολο τυχαία επιλεγμένων παρατηρήσεων θα ήταν εύκολο να ταξινομηθούν (χωρίς να χρειάζονται οι πραγματικές μετρήσεις) με βάση τα πρωταρχικά χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν και χρησιμοποιώντας υποκειμενική κρίση ή βοηθητικές μετρήσεις. Οι Jafari και Mirkamali (2011) σημειώνουν ότι η εφαρμογή του συστήματος RSS στην κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου έχει αρκετά πλεονεκτήματα σε σχέση με το σύστημα SRS σε περιπτώσεις όπου η μέτρηση των ποιοτικών χαρακτηριστικών μπορεί να περιλαμβάνει καταστροφική εξέταση των προϊόντων τα οποία μπορούν να μπου σε σειρά εύκολα χρησιμοποιώντας πιο φτηνές μεθόδους και μη-καταστροφικά τεστ για παράδειγμα το να εξετάσει κανείς το μέγεθος, τον αριθμό ή το βάρος των προϊόντων. Η χρήση του RSS στο σχεδιασμό των διαγραμμάτων επίσης συνάδει με μία βασική αρχή του ποιοτικού ελέγχου, μιας που χρειάζεται συμμετοχή των χειριστών στην ταξινόμηση των μονάδων (Salazar και Sinha(1997)).

Η δομή του υπόλοιπου κεφαλαίου είναι ως εξής. Η ενότητα 5.2.1 εισάγει τη μέθοδο RSS και κάποιες από τις παραλλαγές της. Παρουσιάζουμε τις ιδιότητες του μήκους ροής (RL) και της μέσης τετραγωνικής απώλειας (AEQL) για τα προτεινόμενα διαγράμματα στην ενότητα 5.3. Στην ενότητα 5.6 συγκρίνουμε κάποια από τα υπάρχοντα γραφήματα με τα προτεινόμενα συστήματα. Στην ενότητα 5.7 παρέχουμε ένα πρακτικό παράδειγμα χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο σύστημα. Τελικά, συνοψίζουμε τα ευρήματα αυτής της μελέτης στην ενότητα 5. 8.

5.2 Μέθοδοι δειγματοληψίας

5.2.1 RSS

Η διαδικασία RSS προτάθηκε από τον McIntyre (1952) ώστε να εκτιμηθεί ο πληθυσμιακός μέσος ως εξής:

Βήμα 1 : Τυχαία επιλογή ενός δείγματος μεγέθους n^2 μονάδων από τον πληθυσμό.

Βήμα 2 : Διαχωρισμός του δείγματος σε n υποσύνολα, καθένα από αυτά μεγέθους n .

Βήμα 3 : Ταξινόμηση των μονάδων εντός κάθε υποσυνόλου με οπτική επιθεώρηση (ή με κάποια λιγότερο ακριβή μέθοδο) με κριτήριο της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει.

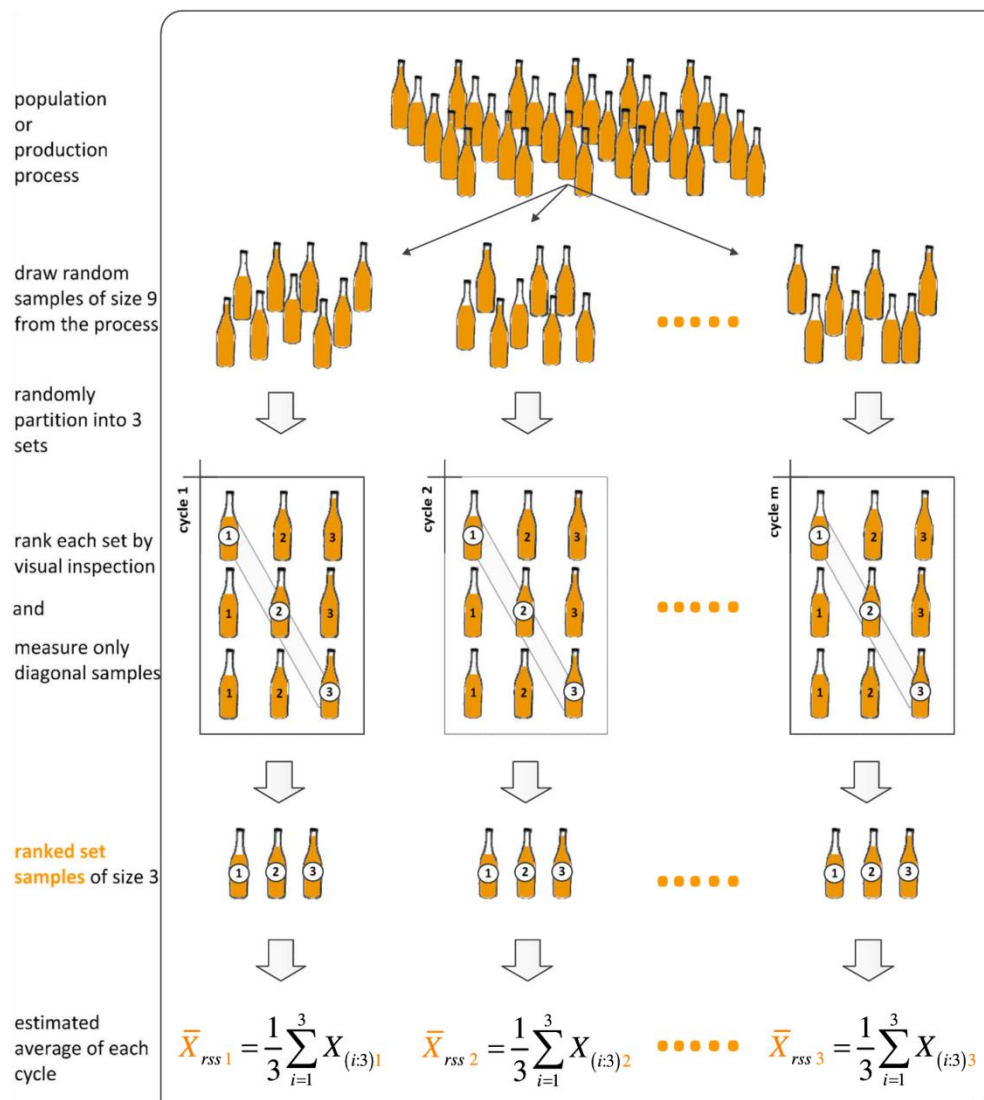
Βήμα 4 : Επιλογή της μικρότερης ταξινομημένης μονάδας από το πρώτο σύνολο, τη δεύτερη μικρότερη από το δεύτερο σύνολο κ.ο.κ. μέχρι να έχει επιλεγθεί η μεγαλύτερη ταξινομημένη μονάδα από το τελευταίο σύνολο.

Βήμα 5 : Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί m φορές ώστε να σχηματιστεί ένα δείγμα από nm μονάδες RSS δεδομένων.

Για να δείξουμε πως μπορεί να χρησιμοποιήσει το RSS για να συλλέξει πιο αντικειμενικά δείγματα από μία διαδικασία παραγωγής ας θεωρήσουμε για παράδειγμα γέμισμα ενός μπουκαλιού όπου το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει είναι ο όγκος του υγρού στο μπουκάλι. Το υγρό θα μπορούσε να είναι μεταλλικό νερό, αναψυκτικό, χυμός, λάδι, χυμός και άλλα. Θεωρώντας ένα σύνολο τριών, τυχαία επιλέγουμε εννέα δείγματα από μια διαδικασία και τα χωρίζουμε σε τρία υποσύνολα, το καθένα μεγέθους τρία (Σχήμα 1). Στη συνέχεια ταξινομούμε τα

μπουκάλια κάθε συνόλου με βάση οπτικής παρατήρησης του επιπέδου του υγρού και τα δείγματα RSS είναι τα μπουκάλια που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο κάθε κύκλου (Σχήμα 1). Υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο από τα 3 μπουκάλια που έχουν επιλεγεί και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία m φορές. Χρησιμοποιούμε το μέσο που έχουμε υπολογίσει για να βρούμε το αναγκαίο στατιστικό του διαγράμματος ελέγχου. Θα δείξουμε την πρακτική εφαρμογή αυτού του παραδείγματος αργότερα (Ενότητα 5.7).

Σχήμα 1



Μπορούμε να βρούμε πολλές ακόμη εφαρμογές όπου η RSS παίζει σημαντικό ρόλο στα διαγράμματα ελέγχου. Ας αναφέρουμε λίγες ακόμη: σε ένα πολυμερές καθορισμός της πυκνότητας μπορεί να ταξινομηθεί από τη δύναμη εφελκυσμού, σε

μία διαδικασία γυαλίσματος το πάχος μπορεί να ταξινομηθεί με βάση το χρόνο που χρειάστηκε για να απομακρυνθούν τα μεγαλύτερα γρέζια.

Έστω η ακολουθία $X_{(in)j}$ με $i=1,2,\dots,n$ και $j=1,2,\dots,m$ να δηλώνει το στατιστικό i -τάξης για το i -οστό δείγμα του υποσυνόλου μεγέθους n στο j -οστό κύκλο. Τότε ο αμερόληπτος εκτιμητής του πληθυσμιακού μέσου μ χρησιμοποιώντας RSS δεδομένα ορίζεται από τον τύπο

$$\bar{X}_{rssj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(in)j} \quad (5.2.1.a)$$

και η διακύμανση δίνεται από τον τύπο

$$\text{var}(\bar{X}_{rssj}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{(in)j}^2 = \frac{1}{n} \left[\sigma^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_{(in)j} - \mu)^2 \right] \quad (5.2.1.b)$$

όπου σ^2 είναι η διακύμανση του πληθυσμού και $\mu_{(in)}$ είναι ο μέσος του στατιστικού i -οστής τάξης δίνεται από τον τύπο

$$\mu_{(in)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i} f(x) dx \quad (5.2.1.c)$$

όπου $f(x)$ και $F(x)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας και αθροιστικής κατανομής αντίστοιχα, των τυχαίων δειγμάτων.

5.2.2 MRSS

Το MRSS μελετήθηκε από τον Muttalak (1998) για να εκτιμηθεί ο πληθυσμιακός μέσος και μπορεί να συνοψιστεί από τα παρακάτω βήματα :

Βήμα 1 : Τυχαία επιλογή ενός δείγματος μεγέθους n^2 από τον πληθυσμό που μας ενδιαφέρει.

Βήμα 2 : Χωρισμός του δείγματος σε n σύνολα ,το καθένα μεγέθους n .

Βήμα 3 : Ταξινόμηση των μονάδων εντός κάθε συνόλου με οπτική παρατήρηση ή μέσω κάποιας εύκολης μεθόδου, με βάση τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.

Βήμα 4 : Αν το υποσύνολο αποτελείται από μονό αριθμό μονάδων τότε επιλέγουμε τη διάμεσο από κάθε ταξινομημένο υποσύνολο. Αν το μέγεθος του υποσύνολου είναι άρτιος αριθμός τότε επιλέγουμε τα δύο μεσαία στατιστικά από κάθε σύνολο.

Βήμα 5 : Τα βήματα μπορούν να επαναληφθούν m φορές έτσι ώστε να σχηματισθεί ένα δείγμα από nm μονάδες από MRSS δεδομένα.

Έστω $X_{i((n+1)/2)}$ συμβολίζει τη διάμεσο του δείγματος $i, i=1,2,\dots,n$ για ένα σύνολο μονού μεγέθους. Αν το μέγεθος είναι άρτιος αριθμός έστω οι ακολουθίες $X_{i(n/2)}$ και $X_{i(n+2/2)}$ τα στατιστικά με σειρά $(n/2)$ και $((n+2)/2)$ με $i=1,2,\dots,k=n/2$ και $i=k+1,k+2,\dots,n$ αντίστοιχα. Οι εκτιμητές του πληθυσμιακού μέσου για το j -οστό κύκλο ορίζονται από τους παρακάτω τύπους για τις περιπτώσεις μονού και ζυγού μεγέθους αντίστοιχα

$$\bar{X}_{mrsj,o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i((n+1)/2)j} \quad (5.2.2.a)$$

$$\bar{X}_{mrsj,e} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n/2} X_{i(n/2)j} + \sum_{i=n/2+1}^n X_{i((n+2)/2)j} \right) \quad (5.2.2.b)$$

5.2.3 MDRSS

Η διαδικασία MDRSS μελετήθηκαν από τους Abujiya και Muttlac (2004) για την εκτίμηση του πληθυσμιακού μέσου και περιγράφεται με τα παρακάτω βήματα :

Βήμα 1 : Τυχαία επιλογή n τυχαίων δειγμάτων από τον πληθυσμό μεγέθους n^2 το καθένα.

Βήμα 2 : Εφαρμόζουμε τη διαδικασία RSS σε κάθε σύνολο ώστε να προκύψουν n ταξινομημένα δείγματα μεγέθους n το καθένα.

Βήμα 3 : Εφαρμόζουμε τη διαδικασία MRSS στα δεδομένα του RSS του προηγούμενου βήματος.

Βήμα 4 : Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί m φορές μέχρι να μετρηθούν συνολικά nm μονάδες MDRSS δεδομένων.

Έστω ακολουθία $Y_{i((n+1)/2)}$ που συμβολίζει τη διάμεσο του δείγματος i , $i=1,2,\dots,n$ για ένα σύνολο μονού μεγέθους. Αν το μέγεθος είναι άρτιος αριθμός έστω οι ακολουθίες $Y_{i(n/2)}$ και $Y_{i((n+2)/2)}$ τα στατιστικά με σειρά $(n/2)$, $((n+2)/2)$ με $i=1,2,\dots,k=n/2$ και $i=k+1,k+2,\dots,n$ αντίστοιχα. Οι εκτιμητές του πλυθησμιακού μέσου για το j -οστό κύκλο ορίζονται από τους παρακάτω τύπους για τις περιπτώσεις μονού και ζυγού μεγέθους αντίστοιχα

$$\bar{Y}_{mdrssi,o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i((n+1)/2)j} \quad (5.2.3.a)$$

$$\bar{Y}_{mdrssi,e} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n/2} Y_{i(n/2)j} + \sum_{i=n/2+1}^n Y_{i((n+2)/2)j} \right) \quad (5.2.3.b)$$

5.2.4 DMRSS

Το DMRSS προτάθηκε από τους Abujiwa και Muttlak (2004) για την εκτίμηση του πλυθησμιακού μέσου και περιγράφεται με τα παρακάτω βήματα :

Βήμα 1 : Τυχαία επιλογή n τυχαίων δειγμάτων από τον πληθυσμό μεγέθους n^2 το καθένα.

Βήμα 2 : Εφαρμόζουμε τη διαδικασία MRSS σε κάθε σύνολο ώστε να προκύψουν n ταξινομημένα δείγματα μεγέθους n το καθένα.

Βήμα 3 : Εφαρμόζουμε ξανά τη διαδικασία MRSS στα δεδομένα του MRSS του προηγούμενου βήματος.

Βήμα 4 : Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί m φορές μέχρι να μετρηθούν συνολικά nm μονάδες DMRSS δεδομένων.

Έστω η ακολουθία $Y_{i((n+1)/2)}^*$ που συμβολίζει τη διάμεσο του δείγματος i , $i=1,2,\dots,n$ για ένα σύνολο μονού μεγέθους. Αν το μέγεθος είναι άρτιος αριθμός έστω οι ακολουθίες $Y_{i(n/2)}^*$ και $Y_{i((n+2)/2)}^*$ τα στατιστικά με σειρά $(n/2)$, $((n+2)/2)$ με $i=1,2,\dots,k=n/2$ και $i=k+1,k+2,\dots,n$ αντίστοιχα. Οι εκτιμητές του πλυθησμιακού

μέσου για το j -οστό κύκλο ορίζονται από τους παρακάτω τύπους για τις περιπτώσεις μονού και ζυγού μεγέθους αντίστοιχα

$$\bar{Y}_{dmrssl,o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i((n+1)/2),j}^* \quad (5.2.4.a)$$

$$\bar{Y}_{dmrssl,e} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n/2} Y_{i(n/2),j}^* + \sum_{i=n/2+1}^n Y_{i((n+2)/2),j}^* \right) \quad (5.2.4.b)$$

5.3 Στατιστική απόδοση

Η στατιστική απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου συχνά αξιολογείται χρησιμοποιώντας το μέσο μήκος ροής ARL το οποίο παριστάνει το μέσο αριθμό δειγμάτων τα οποία πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου μέχρι να δοθεί ένα σήμα εκτός ελέγχου. Η χρήση της τυπικής απόκλισης μήκους ροής ($SDRL$) συνιστάται στη βιβλιογραφία για να συμπληρώσει τη μέθοδο ARL . Και οι δύο ιδιότητες μετρούν τη δυνατότητα του διαγράμματος ελέγχου να ανταποκρίνεται σε μετατοπίσεις της διαδικασίας. Τυπικά το ARL μιας διαδικασίας εντός ελέγχου θα έπρεπε να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να αποφεύγονται ψευδή σήματα και ικανοποιητικά μικρό για μια διαδικασία εκτός ελέγχου ώστε να καθιστά δυνατή ταχεία ανίχνευση μετατοπίσεων. Το ARL του διαγράμματος EWMA μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση ολοκληρωτικών εξισώσεων ή προσομείωση Monte Carlo. Για τα όρια ελέγχου που μεταβάλλονται με το χρόνο η προσέγγιση των ολοκληρωτικών εξισώσεων δεν είναι εφαρμόσιμη (Steiner, 1999) έτσι μας απομένουν οι άλλες δύο προσεγγίσεις. Στη παρούσα μελέτη χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση της προσομοίωσης Monte Carlo μέσω ενός αλγορίθμου Fortran. Παρόλο αυτά, αφού το ARL και το $SDRL$ μετρούν την αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου μόνο σε συγκεκριμένα σημεία εφαρμόζουμε την $AEQL$ για να μετρήσουμε τη συνολική αποτελεσματικότητα των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου (Σύμφωνα με τους Reynolds και Stoumbos(2004), Wu et al. (2008, 2009) και Ou et al. (2012)). Ο δείκτης $AEQL$ βασίζεται σε μία συνάρτηση τετραγωνικής απώλειας και μετρά την αναμενόμενη απώλεια που απορρέει από κακή ποιότητα (Wu et al., 2009). Όσο μικρότερη είναι η

τιμή $AEQL$ ενός διαγράμματος ελέγχου τόσο καλύτερη θα είναι η συνολική απόδοση του διαγράμματος στο να ανιχνεύει αλλαγές στη διαδικασία και αντίστροφα.

Η μελέτη του ARL υποθέτει ότι η διαδικασία είναι εντός ελέγχου με μέσο μ_0 και τυπική απόκλιση σ_0 και ότι σε κάποια χρονική στιγμή η διαδικασία μπορεί να βγει εκτός ελέγχου με μία μετατόπιση του μέσου από μ_0 σε μ_{out} όπου $\mu_{out} = \mu_0 + \delta(\sigma_0/\sqrt{n})$ (Montgomery, 2009). Για να υπολογίσουμε το ARL του διαγράμματος ελέγχου EWMA με ταξινομημένες διαμέσους υποθέτουμε ότι η διαδικασία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $\mu_0 = 0$ και διακύμανση $\sigma^2 = 1$ όταν είναι εντός ελέγχου. Χρησιμοποιώντας ένα υποσύνολο μεγέθους $n=5$, προσομοιώσαμε 100.000 επαναλήψεις χρησιμοποιώντας διαφορετικούς συνδιασμούς των L και λ για κάθε μετατόπιση του μέσου $\delta = \sqrt{n}|\mu_{out} - \mu_0|/\sigma_0$ υποθέτοντας τέλεια ταξινόμηση. Μια διαδικασία εντός ελέγχου παριστάνεται από $\delta = 0$ ενώ όταν $\delta > 0$ η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Οι τιμές του ARL_0 για τα τρία προτεινόμενα συστήματα ισούται με 200, 370 και 500. Χρησιμοποιήσαμε τις ίδιες ρυθμίσεις για να υπολογίσουμε τις τιμές του $AEQL$ με αριθμητικές εξισώσεις (Reynolds και Stoumbos(2004), Wu et al.(2008)) με τύπο

$$AEQL = \frac{1}{\delta_{\max} - \delta_{\min}} \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \delta^2 ARL(\delta) d\delta \quad (5.3.1)$$

όπου $ARL(\delta)$ είναι η τιμή του ARL ενός διαγράμματος ελέγχου για τη τιμή δ και δ_{\min} και δ_{\max} τα κάτω και πάνω όρια της μετατόπισης του μέσου αντίστοιχα. Στους Πίνακες 1,2,3 (βλ. τέλος του κεφαλαίου, όπου παρουσιάζονται όλοι οι πίνακες) παρατίθενται οι τιμές του ARL , $SDRL$ και $AEQL$ για τα προτεινόμενα συστήματα EWMA και όλο το εύρος μετατοπίσεων ($0 \leq \delta \leq 2$), χρησιμοποιώντας μεταβλητά όρια. Για να επαληθεύσουμε τον αλγόριθμο προσομείωσης Monte Carlo αναπαράγαμε το ARL και το $SDRL$ του κλασσικού διαγράμματος ελέγχου EWMA με σταθερά και μεταβλητά όρια και τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά του Lucas και Saccucci (1990) καθώς και του Steiner(1999). Χάριν σύγκρισης υπολογίσαμε επιπλέον τις τιμές του ARL , του $SDRL$ και του $AEQL$ για τα προτεινόμενα συστήματα EWMA χρησιμοποιώντας σταθερά όρια ελέγχου με $ARL_0 = 500$ και τα

αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα 4. Επιπλέον παρέχουμε προσεγγιστικά στον Πίνακα 5 το 10° , 50° και 90° τεταρτημόριο για τις κατανομές μήκους ροής των προτεινόμενων συστημάτων ελέγχου με ταξινομημένες διαμέσους.

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των Πινάκων 1-5 συνοψίζουμε τα ευρήματά μας στα παρακάτω :

1. Το EWMA είναι πολύ αξιόπιστο σε σχέση με ταξινομημένα δεδομένα υπό την έννοια ότι δεν αύξανει το ρυθμό των ψεύτικων σημάτων όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου αντίθετα με το διάγραμμα Shewhart.
2. Όλες οι προτεινόμενες μέθοδοι ανιχνεύουν αποτελεσματικά μικρές, μεσαίες και μέχρι ενός σημείου μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας (Πίνακες 1-4)
3. Οι τιμές του *SDRL* για όλες τις μεθόδους είναι περίπου ίδιες με εκείνες με τις αντίστοιχες τιμές του *ARL* όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, $\delta = 0$. (Πίνακες 1-4)
4. Καθώς η διαδικασία τίθεται εκτός ελέγχου, $\delta > 0$, τα *ARL* και τα *SDRL* μειώνονται δραστικά σε όλα τα προτεινόμενα συστήματα. (Πίνακες 1-4)
5. Τα τεταρτημόρια της κατανομής του μήκους ροής υποδεικνύουν ότι τα προτεινόμενα συστήματα ελέγχου έχουν κατανομές ροής με δεξιά συμμετρία. (Πίνακας 5)
6. Τα προτεινόμενα συστήματα EWMA με μεταβλητά όρια έχουν μεγαλύτερη δυνατότητα ανίχνευσης σε σύγκριση με εκείνα με σταθερά όρια για μικρές τιμές του λ δηλαδή όταν $\lambda < 0.5$. (Πίνακες 3 και 4)
7. Τα προτεινόμενα συστήματα έχουν μειώσει σημαντικά τις τιμές του *AEQL* του διαγράμματος ελέγχου EWMA. (Πίνακες 1-4)
8. Η προτεινόμενη μέθοδος EWMA που βασίζεται στο σύστημα ελέγχου DMRSS εμφανίζεται ως η βέλτιστη επιλογή με συνολικά καλύτερη απόδοση με βάση τα *ARL*, *SDRL* και *AEQL* συγκρινόμενη με τις μεθόδους MDRRS και MRRS για κοινές παραμέτρους σχεδιασμού. (Πίνακες 1-3)
9. Γενικά υπάρχει μεγάλη βελτίωση στην απόδοση των προτεινόμενων συστημάτων ελέγχου όταν κανείς χρησιμοποιεί μικρότερες τιμές του λ . (Πίνακες 1-4)

5.4 Συγκριτικές μελέτες

Σε αυτή την ενότητα παρέχουμε μία συγκριτική ανάλυση των προτεινόμενων συστημάτων σε σχέση με τα υπάρχοντα συγκρίσιμα συστήματα. Για να συγκρίνουμε την απόδοση των προτεινόμενων συστημάτων με κάποια από τα υπάρχοντα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA με παρόμοιους στόχους, χρησιμοποιούμε τα ARL και $AEQL$ καθώς και δύο επιπλέον δείκτες, το μέσο λόγο των ARL ($ARARL$) (Wu et al., 2009) που ορίζεται από τον τύπο

$$ARARL = \frac{1}{\delta_{\max} - \delta_{\min}} \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \frac{ARL(\delta)}{ARL_{\text{benchmark}}(\delta)} d\delta \quad (5.4.1)$$

και το δείκτη σύγκρισης απόδοσης (PCI) (Ou et al.(2012)) που ορίζεται από τον τύπο

$$PCI = \frac{AEQL}{AEQL_{\text{benchmark}}} \quad (5.4.2)$$

όπου τα $ARL_{\text{benchmark}}(\delta)$ και $AEQL_{\text{benchmark}}$ προκύπτουν από το διάγραμμα αναφοράς που σε αυτή τη μελέτη αντιστοιχεί στο προτεινόμενο διάγραμμα EWMA βασισμένο στο $DMRSS$. Τα οχτώ συστήματα ελέγχου που χρησιμοποιούνται για τη σύγκριση περιέχουν το κλασικό EWMA με μεταβλητά όρια, το μεταβλητό EWMA με FIR, το διπλό EWMA, το δύο-στα-δύο EWMA βασισμένο σε κανόνες ροής, το τροποποιημένο δύο-στα-τρία EWMA βασισμένο σε κανόνες ροής, το υβριδικό EWMA, καθώς και το συνδυασμένο Shewhart–EWMA βασισμένο στα RSS και $MRSS$. Επιπλέον έχουμε χρησιμοποιήσει 3 επιπρόσθετα συστήματα για τη σύγκριση των καμπύλων ARL , το συνδυασμένο διάγραμμα EWMA-CUSUM, το τριπλό EWMA και το μέγιστο EWMA.

Για την αποτελεσματική μέτρηση της απόδοσης αυτών των διαγραμμάτων ελέγχου προσομοιώσαμε τις τιμές του ARL με τις ίδιες ρυθμίσεις όταν η υποκείμενη κατανομή είναι κανονική και με το εντός ελέγχου ARL_0 να ισούται με 500. Παρόμοια με την ενότητα 5.3, χρησιμοποιήσαμε ένα δείγμα μεγέθους $n = 5$ και με διαφορετικές μετατοπίσεις μέσου δ . Χωρίς απώλεια της γενικότητας, ο μέσος και η διακύμανση της διαδικασίας εντός ελέγχου υποθέτουμε ότι ισούνται με 0 και 1 αντίστοιχα. Οι τιμές του ARL που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SRS είναι ανεξάρτητες

του μεγέθους του δείγματος (Salazar και Sinha (1997)). Αυτό είναι προφανές από τα αποτελέσματά μας με μέγεθος δείγματος $n=5$ στον Πίνακα 6 (για ανίχνευση μικρών αλλαγών) και στον πίνακα 7 (για ανίχνευση αλλαγών μεσαίου μεγέθους), και αυτό είναι σε συμφωνία με τις τιμές του ARL για μεμονωμένες παρατηρήσεις ανά τη βιβλιογραφία. Αυτό εξηγείται από τον τρόπο που έχουμε ορίσει το δ ως συνάρτηση του n , δηλαδή $\delta = \sqrt{n} |\mu_{out} - \mu_o| / \sigma_o$.

5.4.1 Σύγκριση με το κλασσικό EWMA

Το κλασσικό διάγραμμα ελέγχου EWMA που εισήχθη από τον Roberts (1959), και ο Steiner (1999) πρότεινε αργότερα τη χρήση μεταβλητών ορίων ελέγχου ώστε να μειώσει περαιτέρω τις τιμές του ARL εκτός ελέγχου. Συγκρίνοντας τις προσομοιωμένες τιμές του ARL για το μεταβλητό κλασσικό EWMA με το σύστημα που προτείναμε για $\lambda = 0.1$ (Πίνακας 6) και $\lambda = 0.5$ (Πίνακας 7), παρατηρήσαμε ότι τα προτεινόμενα συστήματα είναι ανώτερα του κλασσικού EWMA αναφορικά με την ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου. Γενικά το κλασσικό EWMA είναι λιγότερο αποτελεσματικό από τα προτεινόμενα συστήματα με βάση τα $AEQL$, PCI καθώς και το $ARARL$. Για παράδειγμα, το διάγραμμα EWMA που βασίζεται σε $MRSS$ ξεπερνά σε απόδοση το κλασσικό EWMA κατά 58,2% το λιγότερο, με βάση το $AEQL$ ή το PCI (Πίνακες 6 και 7).

5.4.2 Σύγκριση με το FIR EWMA

Το μεταβλητό EWMA με το επιπλέον χαρακτηριστικό FIR προτάθηκε από τον Steiner (1999) και έχει επιτύχει να βελτιώσει σημαντικά όχι μόνο το κλασσικό EWMA, αλλά και τα περισσότερα από τα υπόλοιπα διαγράμματα για μικρές αλλαγές υπό ανάλυση (Πίνακας 6). Αυτό δείχνει το πλεονέκτημα της επιπλέον παραμέτρου f , αλλά με κόστος την αύξηση της συχνότητας των ψευδών σημάτων. Η σύγκριση με τα προτεινόμενα συστήματα υποδεικνύει ότι το διάγραμμα FIR EWMA παρουσιάζει μικρότερες τιμές του ARL εκτός ελέγχου σε σχέση με το διάγραμμα EWMA-MRSS για μετατοπίσεις μεσαίου μεγέθους ($1.0 \leq \delta \leq 3.0$) και όταν $\lambda = 0.1$, αλλά χειρότερες σε σχέση με τα προτεινόμενα $MDRSS$ και $DMRSS$. Ο Πίνακας 7 επίσης

αποκαλύπτει ότι τα προτεινόμενα διαγράμματα EWMA με βάση τα *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS* απέδωσαν καλύτερα από το μεταβλητό FIR EWMA κατά 13,1%, 35,4% και 42,3% αντίστοιχα.

5.4.3 Σύγκριση με το διπλό EWMA

Το διπλό EWMA προτάθηκε από τους Zhang et al. (2004) και περιλαμβάνει το συνδυασμό δύο διαγραμμάτων EWMA για την ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου. Το διάγραμμα έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί τις τιμές του *ARL* εκτός ελέγχου για ένα μεγάλο εύρος μετατοπίσεων του μέσου. Έστω και αν το αρχικό διπλό EWMA από τους Zhang et al.(2004) βασίζεται σε σταθερά όρια ελέγχου, στο παρόν παρέχουμε τη μεταβλητή του εκδοχή στον Πίνακα 6. Η σύγκριση των τιμών μας για το *ARL* με αυτές του διπλού EWMA δείχνει ότι τα προτεινόμενα συστήματα είναι ικανά να ανιχνεύουν μετατοπίσεις του μέσου καλύτερα από το διπλό EWMA. Στην πραγματικότητα, όλα τα προτεινόμενα συστήματα μπόρεσαν να ανιχνεύσουν μετατοπίσεις του μέσου τουλάχιστον δύο φορές πιο γρήγορα σε σχέση με το διπλό EWMA με βάση το *ARL* όταν μας ενδιαφέρουν αλλαγές μεσαίου μεγέθους ($0 \leq \delta \leq 2.5$). Η συνολική απόδοση αυτού του διαγράμματος είναι καλύτερη από το κλασικό EWMA αλλά λιγότερο αποτελεσματική από τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου (Πίνακες 6 και 7).

5.4.4 Σύγκριση με το EWMA βασισμένο σε κανόνες

Οι Abbas et al. (2011) πρότειναν το 2-στα-2 EWMA βασισμένο σε κανόνες (2/2-RREWMA) και το τροποποιημένο 2-στα-3 EWMA βασισμένο σε κανόνες (2/3-RR EWMA). Ο Πίνακας 7 δείχνει ότι και τα δύο αυτά συστήματα δίνουν μικρότερες τιμές *ARL* εκτός ελέγχου σε σύγκριση με το κλασικό διάγραμμα ελέγχου EWMA για μετατοπίσεις $0 < \delta < 1.5$ αλλά περισσότερο από δύο φορές μεγαλύτερες σε σχέση με τα προτεινόμενα συστήματα. Οι δείκτες σύγκρισης, *PCI* αλλά και το *ARARL* δείχνουν ότι τα διαγράμματα EWMA βασισμένα σε κανόνες ροής είναι τα συστήματα με τη χειρότερη απόδοση όταν κανείς μελετά μετατοπίσεις μεσαίου μεγέθους (Πίνακας 7). Παρόλο αυτά, αυτά τα διαγράμματα υπερτερούν του

υβριδικού διαγράμματος EWMA στην περίπτωση μικρών αλλαγών στη διαδικασία (Πίνακας 6). Συνολικά, τα προτεινόμενα συστήματα είναι πιο αποτελεσματικά από τα διαγράμματα EWMA με κανόνες ροής κατά τουλάχιστον 100% (Πίνακες 6 και 7).

5.4.5 Σύγκριση με το υβριδικό EWMA

Το υβριδικό EWMA προτάθηκε από τον Haq (2012) και είναι το μείγμα δύο διαγραμμάτων ελέγχου EWMA για την παρακολούθηση του μέσου της διαδικασίας. Αυτό το σύστημα είναι παρεμφερές του διπλού EWMA αλλά παρέχει καλύτερη προστασία σε μια μικρή περιοχή όπου οι μετατοπίσεις του μέσου ανήκουν στο διάστημα $0 < \delta < 1.5$, δηλαδή όταν κανείς μελετά αλλαγές μεσαίου μεγέθους (Πίνακας 7). Η σύγκριση των εκτός ελέγχου τιμών του ARL για το υβριδικό EWMA με τα προτεινόμενα συστήματα δείχνει ότι τα προτεινόμενα συστήματα είναι πιο αποτελεσματικά στο χειρισμό μετατοπίσεων του μέσου της διαδικασίας. Οι τιμές των $AEQL$, PCI και $ARARL$ στους Πίνακες 6 και 7 δείχνουν επίσης ότι η συνολική απόδοση του υβριδικού διαγράμματος EWMA είναι γενικά χαμηλή. Στην ουσία, είναι σημαντικά πιο αποτελεσματικό σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα (κατά τουλάχιστον 40,1%) με κριτήριο τα $AEQL$ ή PCI , αν κανείς εστιάσει μόνο σε αλλαγές μεσαίου μεγέθους (Πίνακας 7).

5.4.6 Σύγκριση με το διάγραμμα Shewhart–EWMA με ταξινομημένα δεδομένα

Το συνδυασμένο διάγραμμα Shewhart–EWMA (X&EWMA) βασίζεται σε ταξινομημένα δεδομένα και μελετήθηκε από τους Abujjya et al.(2012). Το διάγραμμα αυτό στοχεύει στο να προσφέρει καλύτερη προστασία από ένα εύρος μετατοπίσεων του μέσου. Ο αρχικός σχεδιασμός με βάση τα RSS και $MRSS$ θεωρούσε σταθερά όρια, αλλά εμείς παρουσιάζουμε αποτελέσματα για μεταβλητά όρια στους Πίνακες 6 και 7. Τα διαγράμματα X&EWMA έχουν πολύ χαμηλές τιμές για το εκτός ελέγχου ARL , και έχουν πετύχει στο να βελτιώσουν σημαντικά τη συνολική απόδοση σε σχέση με τα περισσότερα διαγράμματα, αλλά και πάλι είναι σαφώς χειρότερα από τα προτεινόμενα συστήματα $MDRSS$ και $DMRSS$ στην ανίχνευση διαφορετικών

μεγεθών μετατοπίσεων του μέσου. Συγκρίνοντας τις τιμές για τα *AEQL* και *ARARL* των προτεινόμενων EWMA –MRSS με το X&EWMA-MRSS βλέπουμε ότι η προσθήκη των ορίων ελέγχου Shewhart σε ένα διάγραμμα EWMA δεν βελτιώνει απαραίτητα την ικανότητα του διαγράμματος EWMA να ανιχνεύει μεγάλο εύρος μετατοπίσεων του μέσου (Πίνακες 6 και 7). Δεν είναι δύσκολο να εντοπιστεί ο λόγος για αυτό. Τα στατιστικά *MRSS* αντιστέκονται σε απομακρυσμένες τιμές και είναι ισχυροί εκτιμητές θέσης για δείγματα χωρίς τέτοιες απομακρυσμένες τιμές (Alwan(2000)).

5.4.7 Συγκρίνοντας τα τρία προτεινόμενα συστήματα

Τα προτεινόμενα διαγράμματα EWMA βασισμένα σε *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS* υπερτερούν όλων των άλλων διαγραμμάτων σε σχέση με την ικανότητά τους να ανιχνεύουν ένα μεγάλο εύρος μετατοπίσεων του μέσου όταν κανείς επικεντρώνεται σε αλλαγές μεσαίου μεγέθους (Πίνακας 7). Για αλλαγές μικρού μεγέθους το EWMA-MRSS είναι σχεδόν τόσο αποτελεσματικό όσο και το X&EWMA-MRSS με κριτήριο τα *AEQL* και *ARARL*. Το διάγραμμα με την καλύτερη απόδοση είναι το *DMRSS*, το οποίο είναι πιο αποτελεσματικό από τα *MRSS* και *MDRSS* κατά 21,5% και 4,3% αντίστοιχα, όταν $\lambda = 0.1$ και κατά 25,7% και 5% αντίστοιχα, όταν $\lambda = 0.5$.

Για να αποκτήσουμε μια καθαρότερη εικόνα της απόδοσης του μήκους ροής των προτεινόμενων συστημάτων παρουσιάζουμε τις καμπύλες μήκους ροής για τα νέα διαγράμματα χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σχεδιασμού λ όταν $\delta = 0.25$ και για $ARL_0 = 200$ (Γράφημα 2). Στατιστικά, όσο ψηλότερη η καμπύλη μήκους ροής ενός διαγράμματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα μικρότερων μηκών ροής και έτσι γρηγορότερη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της διαδικασίας. Η αθροιστική πιθανότητα της ανίχνευσης για τα προτεινόμενα συστήματα είναι αρκετά μεγάλη για όλες τις τιμές του λ , ειδικά για μικρότερα μήκη ροής, υποδεικνύοντας ότι όλα τα προτεινόμενα διαγράμματα έχουν μεγάλη τάση να ανιχνεύουν γρήγορα μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διαδικασίας. Ας παρατηρηθεί ακόμα μία φορά ότι το *DMRSS* έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα γρηγορότερης

ανίχνευσης μικρών μετατοπίσεων του μέσου, ακολουθούμενο από το *MDRSS* και ύστερα το *MRSS*.

5.4.8 Χείριστες περιπτώσεις-Ατελής Ταξινόμηση

Ο σχεδιασμός των προτεινόμενων συστημάτων βασίζεται σε τέλεια ταξινόμηση. Ενώ η ταξινόμηση των μονάδων σε ένα υποσύνολο με κριτήριο το κύριο χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει μπορεί να είναι δύσκολο να εκτιμηθεί, μπορεί παρόλο αυτά να υλοποιηθεί με βάση ένα ταυτόσημο χαρακτηριστικό. Επειδή η ταξινόμηση γίνεται με βάση ένα ταυτόσημο χαρακτηριστικό, η ακρίβεια της διαδικασίας εξαρτάται από τη γραμμική σχέση μεταξύ του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει και του ταυτόσημου χαρακτηριστικού που χρησιμοποιούμε. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ατελής ταξινόμηση (*imperfect ranking*). Στην παρούσα μελέτη θεωρούμε το ασθενέστερο σύστημα *MRSS* για να δείξουμε την απόρροια της ατελούς ταξινόμησης. Για τα άλλα συστήματα μπορεί κανείς να αναμένει ακόμα μεγαλύτερη ικανότητα ανίχνευσης σε σχέση με το *MRSS* για την περίπτωση της ατελούς ταξινόμησης λόγω της ήδη αποδεδειγμένης ανωτερότητάς τους στην περίπτωση τέλει ταξινόμησης.

Έστω (X, Y) ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή και έστω ότι η παλινδρόμηση του ποιοτικού χαρακτηριστικού X που μας ενδιαφέρει επί του ταυτόσημου χαρακτηριστικού Y είναι γραμμική. Έστω $Y_{(i:n/2)j}$ και $X_{(i:n/2)j}$ για $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, m$ να είναι οι i -οστές τιμές της διαμέσου των μεταβλητών Y και X , αντίστοιχα, στο i -οστό δείγμα του j -οστού κύκλου. Το υποκειμενικό στατιστικό της διαμέσου (*judgment median statistic*) (Muttalak(1998)) δίνεται από το τύπο

$$X_{[i:n/2]j} = \mu_x + \frac{\rho_{xy}\sigma_x}{\sigma_y} (Y_{(i:n/2)j} - \mu_y) + \varepsilon_{ij} \quad (5.4.8.a)$$

όπου μ_x , μ_y , σ_x και σ_y είναι οι μέσοι και οι τυπικές αποκλίσεις των X και Y , αντίστοιχα, ρ_{xy} είναι η συσχέτιση μεταξύ των X και Y , ε_{ij} είναι όρος του

σφάλματος με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)$. Ο εκτιμητής της μέσης τιμής του, με υποκειμενική ταξινόμηση με βάση το Y και χρησιμοποιώντας ένα ατελές $MRSS$ ($IMRSS$), δίνεται από τον τύπο

$$\bar{X}_{IMRSSj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{[i:n/2]j} \quad (5.4.8.b)$$

Και η διακύμανση της \bar{X}_{IMRSSj} από τον τύπο

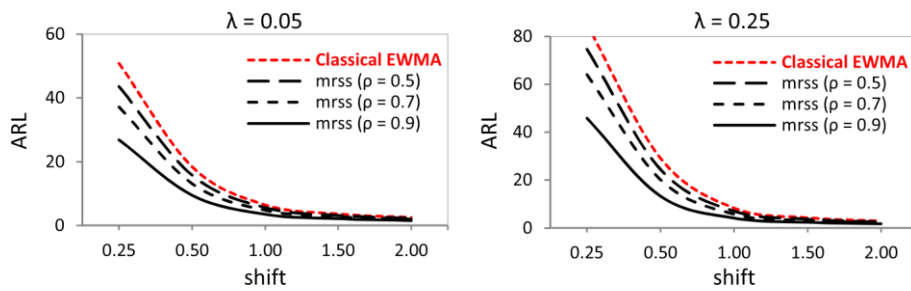
$$\sigma_{\bar{X}_{IMRSSj}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n^2} \left(n(1-\rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{z(i:n/2)}^2 \right) \quad (5.4.8.c)$$

όπου $\sigma_{z(i:n/2)}^2$ είναι η διακύμανση της i -οστής διαμέσου του i -οστού δείγματος της κανονικής κατανομής (Muttlak (1998)). Τα στατιστικά του διαγράμματος EWMA με ταξινομημένες διαμέσους που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3 βασίζονται σε τέλεια ταξινομημένη δειγματοληψία. Για να λάβουμε υπόψιν την ατελή ταξινόμηση, αντικαθιστούμε το x_i στην εξίσωση (3.1.1) με X_{IMRSS} από την εξίσωση (5.4.8.b). Επιπλέον, αντικαθιστούμε το σ στην εξίσωση (3.1.5) με

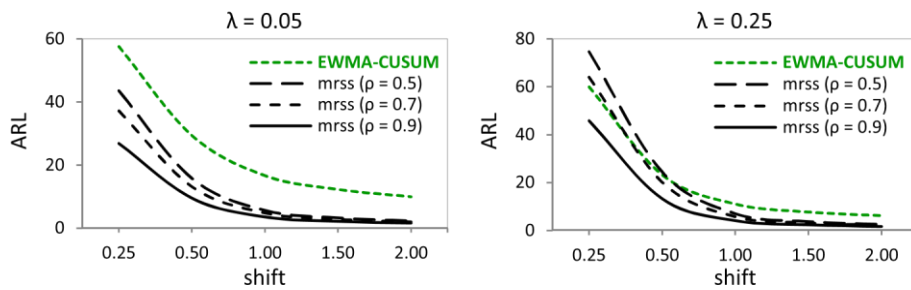
$$\sigma_{\bar{X}_{IMRSSj}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n^2} \left(n(1-\rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{z(i:n/2)}^2 \right)$$

το οποίο είναι η τυπική απόκλιση του $IMRSS$. Στη συνέχεια τρέχουμε προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιώντας δείγματα με ατελή ταξινόμηση των διαμέσων τα οποία έχουν προκύψει από κανονική κατανομή δύο μεταβλητών με μέση τιμή 0 και μοναδιαία διακύμανση. Χρησιμοποιήσαμε ένα υποσύνολο μεγέθους $n = 5$ με συντελεστές συσχέτισης $\rho_{xy} = 0.5, 0.7$ και 0.9 , και συγκρίναμε τα αποτελέσματα από το $IMRSS$ με αυτά από το κλασικό EWMA, το συνδιασμένο EWMA-CUSUM (Abbas et al.(2012)), το τριπλό EWMA (Zhang et al.(2004)) και το μέγιστο EWMA (Ostadsharif και Niaki (2011)) χρησιμοποιώντας γραφική αναπαράσταση των καμπύλων ARL (Γραφήματα 3-6).

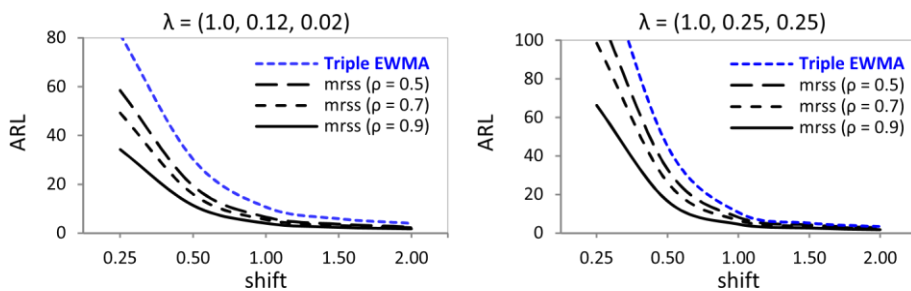
Γράφημα 3 (Καμπύλες ARL –MRSS και κλασικό EWMA για $ARL_0 = 200$)



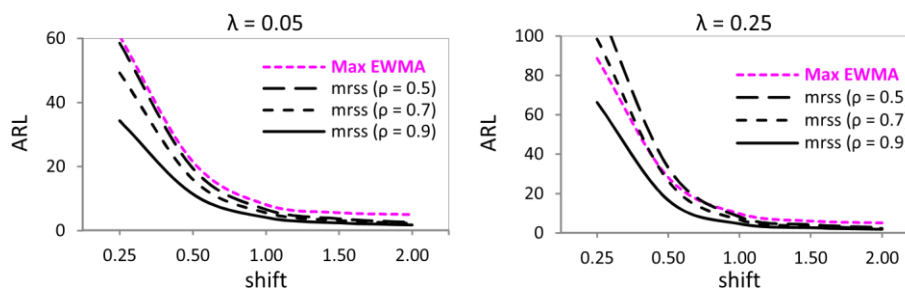
Γράφημα 4 (Καμπύλες ARL –MRSS και διπλό EWMA –CUSUM για $ARL_0 = 200$)



Γράφημα 5 (Καμπύλες ARL –MRSS και τριπλό EWMA για $ARL_0 = 370$)



Γράφημα 6 (Καμπύλες ARL –MRSS και max- EWMA για $ARL_0 = 370$)



5.5 Εφαρμογή – Όγκος σε μπουκάλια αναψυκτικού

Σε αυτή την ενότητα παρέχουμε ένα πρακτικό παράδειγμα για να δείξουμε την εφαρμογή των προτεινόμενων συστημάτων χρησιμοποιώντας ένα αληθινό σύνολο δεδομένων που αφορά στον όγκο του υγρού σε μπουκάλια αναψυκτικού, το οποίο συνέλεξαν οι Muttlak και Al-Sabah (2003). Το δείγμα πάρθηκε από μία μονάδα παραγωγής ενός εργοστασίου της Pepsi-Cola, στο Al-Khobar της Σαουδικής Αραβίας, μετρώντας το μέρος των μπουκαλιών που παρέμενε άδειο. Τα δεδομένα περιέχουν 54 τυχαία δείγματα, καθένα από αυτά αποτελούμενο από υποσύνολα 3 μπουκαλιών όταν η διαδικασία παραγωγής είναι εντός ελέγχου και πληροί ικανοποιητικά την υπόθεση της κανονικότητας. Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήσαμε τα δεδομένα στα οποία έχει γίνει διπλή δειγματοληψία (re-sampled data) βασιζόμενοι στην προσέγγιση των Takahasi και Wakimoto (1968) και σε δεδομένα που συνέλεξαν οι Abujiya και Muttlak (2004), οι οποίοι χρησιμοποίησαν τις τεχνικές SRS, MRSS, MDRSS και DMRSS με τέλεια ταξινόμηση. Οι μέσοι των δεκαοχτώ παρατηρήσεων, καθένα σε υποσύνολα των τριών, προέκυψαν από την επανα-δειγματοληψία που παριστάνεται γραφικά στο γράφημα 7.

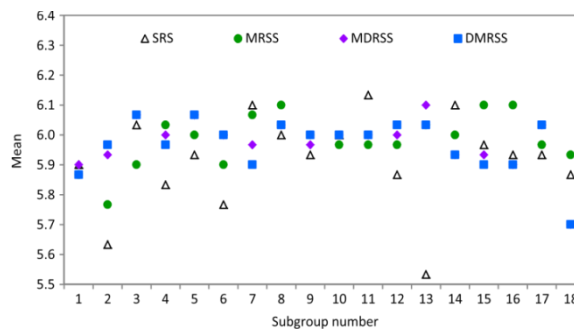
Για να εξετάσουμε την ευαισθησία των προτεινόμενων συστημάτων σε μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας, αλλοιώσαμε κάθε μία από τις τελευταίες 5 παρατηρήσεις προσθέτοντας 0,25 μονάδες. Έτσι, οι 13 πρώτες μετρήσεις βρίσκονται εντός του ελέγχου, ενώ οι τελευταίες 5 βρίσκονται εκτός ελέγχου. Τα στατιστικά EWMA για τα 18 δείγματα υπολογίστηκαν με βάση και τα κλασσικά αλλά και τα

προτεινόμενα συστήματα για εντός ελέγχου $ARL_0 = 500$ όταν $\lambda = 0.1$ και $L = 2.820$ για το κλασσικό EWMA, και 2.820 για το MRSS και 2.819 για τα MDRSS και DMRSS. Οι γραφικές απεικονίσεις των διαγραμμάτων ελέγχου δίνονται στα γραφήματα 8–10.

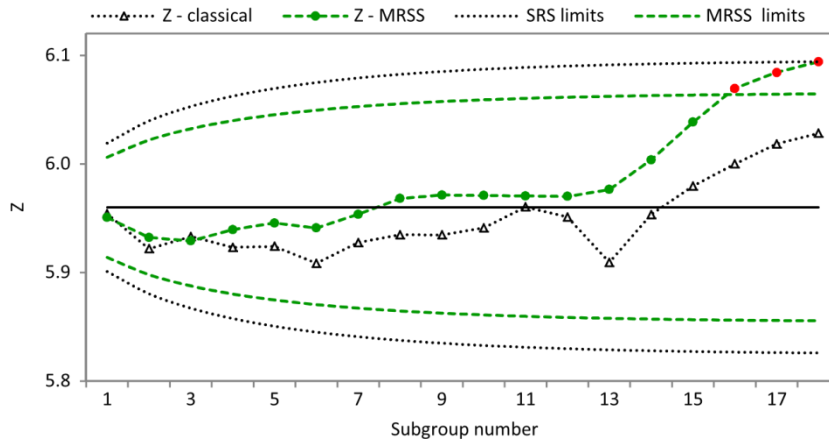
Έχοντας δείξει την υλοποίηση των συστημάτων που προτείνουμε στην παρούσα ανάλυση με πραγματικά δεδομένα, προχωράμε στις παρακάτω παρατηρήσεις βασιζόμενοι στο πραγματικό σύνολο δεδομένων που χρησιμοποιήσαμε σε αυτή την εφαρμογή (Γραφήματα 8–10).

- 1) Έστω και με την αλλοίωση των τελευταίων 5 παρατηρήσεων, το κλασσικό διάγραμμα EWMA υποδεικνύει μία τάση, αλλά δε δίνει ξεκάθαρο σήμα εκτός ελέγχου. Με άλλα λόγια, αδυνατεί να ανιχνεύσει μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διαδικασίας (Γραφήματα 8–10).
- 2) Το διάγραμμα EWMA που βασίζεται σε δεδομένα MRSS δίνει τρία σήματα εκτός ελέγχου για τα υποσύνολα 16, 17 και 18 (γράφημα 8), το οποίο ξεκάθαρα υποδεικνύει ότι τα προτεινόμενα συστήματα δίνουν σήμα πολύ πιο γρήγορα από το κλασσικό EWMA.
- 3) Στο γράφημα 9, το διάγραμμα ελέγχου EWMA με βάση δεδομένα MDRSS δίνει 4 σήματα εκτός ελέγχου, για τα υποσύνολα 15, 16, 17 και 18, το οποίο υποδεικνύει ότι το MDRSS είναι πιο αποτελεσματικό από το MRSS.
- 4) Ακόμη και το διάγραμμα EWMA με βάση το DMRSS δεν αποδίδει απογοητευτικά. Αποδίδει καλύτερα από το MRSS αναφορικά με την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στη διαδικασία, και όπως και το MDRSS, δίνει 4 σήματα εκτός ελέγχου για τα υποσύνολα 15, 16, 17 και 18 (Γράφημα 10).

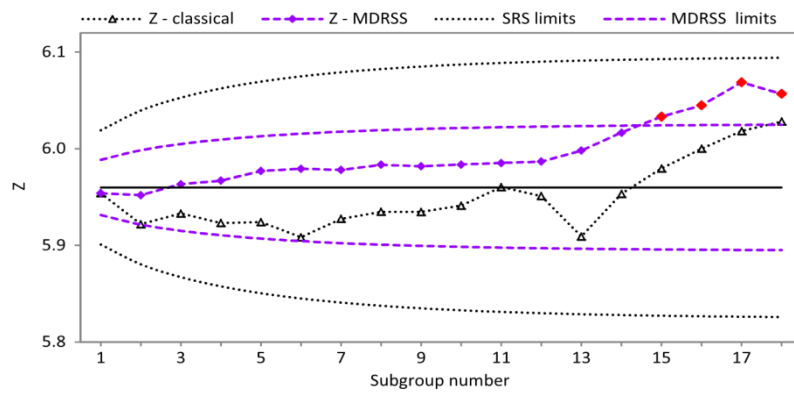
Γράφημα 7 (Επαναδειγματοληψία των SRS, MRSS, MDRSS και DMRSS)



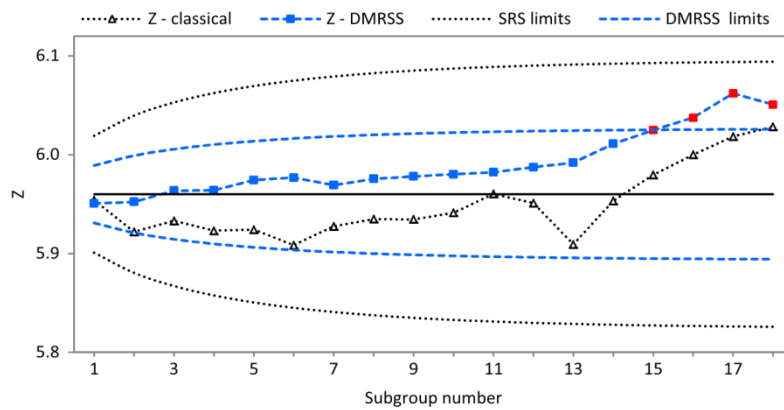
Γράφημα 8 (Κλαστικό EWMA –SRS)



Γράφημα 9 (EWMA-MDRSS)



Γράφημα 10 (SRS-DMRSS)



5.6 Περίληψη και συμπεράσματα

Σε αυτή τη μελέτη προτείναμε ένα νέο EWMA που βασίζεται σε μία καλοσηματισμένη τεχνική δειγματοληψίας και συγκεκριμένα παραλλαγές του RSS με ταξινόμηση διαμέσων. Το RSS είναι ένα σύστημα συλλογής δεδομένων που έχει αποδειχτεί ότι είναι πιο αποτελεσματικό από το παραδοσιακό SRS στην εκτίμηση των παραμέτρων μιας διαδικασίας και κυρίως σε καταστάσεις όπου η μέτρηση του κύριου ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι δύσκολη ή κοστίζει πολύ, αλλά θα μπορούσε να ταξινομηθεί εύκολα με οπτικές παρατηρήσεις ή μέσω βοηθητικών χαρακτηριστικών. Η επιλογή της παραλλαγής του RSS με ταξινομημένες διαμέσους προέκυψε από την παρατήρηση ότι η διάμεσος του δείγματος δεν επηρεάζεται από απομακρυσμένες τιμές μέσα στο δείγμα και επίσης από το ότι είναι ένας ισχυρός εκτιμητής θέσης για δείγματα που περιέχουν τέτοιες απομακρυσμένες τιμές. Αυτή η παραλλαγή λοιπόν θα μπορέσει να χειριστεί περιπτώσεις του ποιοτικού ελέγχου παραγωγικών διαδικασιών, όπου η υποκείμενη κατανομή τείνει να εμφανίζει απομακρυσμένες τιμές.

Αξιολογήσαμε την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA χρησιμοποιώντας τις προτεινόμενες παραλλαγές του RSS με βάση τα *ARL*, *SDRL*, *AEQL*, *PCI* και *ARARL*. Βρήκαμε ότι όλα είναι σημαντικά πιο αποτελεσματικά στην ανίχνευση ενός εύρους μετατοπίσεων στο μέσο της διαδικασίας σε σύγκριση με το κλασικό *SRS*, χωρίς να αυξάνουν τη συχνότητα ψευδών σημάτων. Στην πραγματικότητα, το διάγραμμα EWMA που βασίζεται σε δεδομένα με ταξινομημένες διαμέσους μπορεί να ανιχνεύσει αλλαγές στο μέσο της διαδικασίας πιο γρήγορα από τα περισσότερα υπάρχοντα διαγράμματα που έχουν σχεδιαστεί για παραπλήσιο σκοπό. Το *DMRSS* παρουσιάζει καλύτερη συνολική απόδοση, ακολουθούμενο από κοντά από το *MDRSS* και στη συνέχεια το *MRSS*. Το περιεχόμενο αυτής της μελέτης μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους τύπους διαγραμμάτων ελέγχου ή τύπους συστημάτων με κανόνες ροής.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

Πίνακας 1

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ									AEQL
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	
0.05	2.256	MRSS	ARL	200.31	20.25	7.13	4.04	2.77	2.12	1.73	1.47	1.27	3.101
			SDRL	206.85	15.35	4.35	2.07	1.23	0.85	0.66	0.56	0.45	
	2.253	MDRSS	ARL	200.40	11.47	4.21	2.49	1.79	1.41	1.17	1.05	1.01	2.096
			SDRL	207.77	7.87	2.22	1.06	0.69	0.53	0.38	0.22	0.10	
	2.255	DMRSS	cARL	200.28	7.85	3.00	1.86	1.36	1.10	1.02	1.00	1.00	1.783
			SDRL	207.06	4.92	1.38	0.72	0.51	0.30	0.13	0.04	0.00	
0.10	2.468	MRSS	ARL	200.29	23.48	7.92	4.38	3.00	2.27	1.85	1.56	1.35	3.338
			SDRL	199.91	18.35	4.77	2.20	1.31	0.89	0.69	0.58	0.49	
	2.466	MDRSS	ARL	200.64	12.97	4.59	2.69	1.92	1.50	1.23	1.08	1.02	2.206
			SDRL	201.44	8.95	2.35	1.13	0.72	0.56	0.43	0.27	0.13	
	2.466	DMRSS	ARL	200.56	8.70	3.25	1.99	1.45	1.15	1.03	1.00	1.00	1.833
			SDRL	202.31	5.41	1.47	0.74	0.54	0.35	0.16	0.05	0.01	
0.25	2.684	MRSS	ARL	200.16	33.18	9.36	4.78	3.14	2.36	1.89	1.59	1.36	3.534
			SDRL	198.10	29.74	6.50	2.64	1.45	0.96	0.72	0.59	0.50	
	2.684	MDRSS	ARL	199.72	16.87	5.03	2.81	1.97	1.53	1.24	1.08	1.02	2.266
			SDRL	197.59	13.62	2.80	1.23	0.75	0.57	0.44	0.28	0.14	
	2.684	DMRSS	ARL	200.09	10.50	3.44	2.03	1.47	1.15	1.03	1.00	1.00	1.854
			SDRL	199.07	7.57	1.63	0.78	0.55	0.36	0.17	0.06	0.01	
0.50	2.780	MRSS	ARL	200.35	52.22	13.44	5.72	3.35	2.34	1.81	1.49	1.28	3.773
			SDRL	199.26	50.17	11.57	4.08	1.95	1.15	0.79	0.61	0.47	
	2.779	MDRSS	ARL	200.23	26.27	6.12	2.92	1.90	1.43	1.17	1.05	1.01	2.285
			SDRL	197.62	24.25	4.46	1.60	0.85	0.57	0.39	0.22	0.11	
	2.779	DMRSS	ARL	199.89	15.37	3.76	1.98	1.38	1.10	1.02	1.00	1.00	1.856
			SDRL	198.03	13.51	2.30	0.91	0.54	0.31	0.13	0.04	0.01	

Πίνακας 2

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ									AEQL
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	
0.05	2.511	MRSS	ARL	370.57	25.21	8.42	4.64	3.15	2.38	1.93	1.63	1.41	3.507
			SDRL	375.42	18.41	4.93	2.29	1.34	0.91	0.70	0.59	0.51	
	2.509	MDRSS	ARL	370.71	13.87	4.86	2.82	2.01	1.57	1.28	1.10	1.03	2.287
			SDRL	377.63	8.99	2.44	1.17	0.73	0.57	0.46	0.30	0.16	
	2.510	DMRSS	ARL	370.23	9.31	3.42	2.08	1.51	1.18	1.04	1.00	1.00	1.869
			SDRL	373.91	5.52	1.52	0.76	0.55	0.39	0.19	0.06	0.01	
0.10	2.709	MRSS	ARL	370.48	30.04	9.27	5.00	3.36	2.53	2.05	1.72	1.48	3.746
			SDRL	368.65	23.64	5.43	2.43	1.42	0.95	0.72	0.60	0.53	
	2.708	MDRSS	ARL	370.00	15.74	5.23	3.01	2.13	1.66	1.34	1.14	1.04	2.401
			SDRL	369.46	10.59	2.60	1.23	0.75	0.58	0.48	0.35	0.20	
	2.708	DMRSS	ARL	370.29	10.26	3.65	2.20	1.60	1.23	1.05	1.01	1.00	1.922
			SDRL	368.82	6.15	1.60	0.79	0.56	0.43	0.23	0.09	0.02	
0.25	2.900	MRSS	ARL	370.66	46.97	11.37	5.45	3.49	2.57	2.06	1.72	1.48	3.964
			SDRL	367.46	43.16	8.14	3.01	1.60	1.02	0.75	0.62	0.54	
	2.900	MDRSS	ARL	370.43	21.83	5.80	3.12	2.15	1.66	1.34	1.13	1.04	2.455
			SDRL	369.20	17.94	3.28	1.35	0.79	0.59	0.49	0.34	0.19	
	2.900	DMRSS	ARL	369.77	12.93	3.84	2.22	1.60	1.23	1.05	1.01	1.00	1.940
			SDRL	368.53	9.53	1.84	0.83	0.57	0.42	0.22	0.08	0.02	
0.50	2.982	MRSS	ARL	369.85	81.88	18.06	6.94	3.83	2.60	1.98	1.61	1.36	4.428
			SDRL	368.71	80.28	15.91	5.09	2.27	1.29	0.87	0.65	0.52	
	2.982	MDRSS	ARL	371.07	38.60	7.48	3.31	2.07	1.55	1.24	1.08	1.02	2.511
			SDRL	369.82	36.76	5.60	1.84	0.92	0.62	0.45	0.27	0.14	
	2.982	DMRSS	ARL	369.53	20.99	4.35	2.18	1.48	1.15	1.03	1.00	1.00	1.948
			SDRL	366.55	18.80	2.74	0.99	0.59	0.36	0.16	0.05	0.01	

Πίνακας 3

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ									AEQL		
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00			
0.05	2.630	MRSS	ARL	500.02	27.74	9.06	4.93	3.32	2.51	2.03	1.71	1.48	3702		
			SDRL	501.42	20.00	5.17	2.39	1.41	0.94	0.71	0.60	0.53			
	2.630	MDRSS	ARL	500.74	15.21	5.19	2.99	2.12	1.65	1.34	1.13	1.04		2386	
			SDRL	502.66	9.68	2.55	1.21	0.75	0.58	0.48	0.34	0.19			
	0.10	2.628	DMRSS	ARL	500.48	10.05	3.63	2.19	1.59	1.23	1.05	1.01		1.00	1916
				SDRL	503.86	5.91	1.58	0.79	0.57	0.42	0.22	0.08		0.02	
2.820		MRSS	ARL	500.96	33.68	9.93	5.31	3.54	2.65	2.13	1.80	1.55	3944		
			SDRL	498.48	26.66	5.80	2.56	1.48	0.99	0.73	0.60	0.54			
2.819		MDRSS	ARL	500.02	17.27	5.58	3.17	2.22	1.73	1.40	1.17	1.05	2498		
			SDRL	498.01	11.63	2.73	1.28	0.77	0.59	0.51	0.38	0.22			
2.819	DMRSS	ARL	501.07	11.09	3.86	2.30	1.67	1.28	1.07	1.01	1.00	1969			
		SDRL	497.48	6.68	1.68	0.81	0.57	0.45	0.26	0.10	0.03				
0.25	3.000	MRSS	ARL	500.36	55.13	12.47	5.81	3.67	2.69	2.14	1.79	1.53	4190		
			SDRL	497.87	50.95	9.02	3.23	1.68	1.06	0.77	0.62	0.55			
	3.000	MDRSS	ARL	499.45	24.97	6.15	3.25	2.23	1.72	1.39	1.16	1.05	2551		
			SDRL	494.00	20.87	3.50	1.41	0.81	0.60	0.50	0.37	0.22			
	3.000	DMRSS	ARL	499.97	14.33	4.05	2.32	1.65	1.27	1.07	1.01	1.00	1985		
			SDRL	499.62	10.73	1.94	0.85	0.58	0.45	0.25	0.10	0.03			
0.50	3.075	MRSS	ARL	500.17	101.87	20.96	7.62	4.09	2.74	2.07	1.67	1.41	4810		
			SDRL	497.29	99.53	18.69	5.71	2.46	1.37	0.90	0.68	0.54			
	3.075	MDRSS	ARL	500.14	46.24	8.21	3.48	2.17	1.60	1.28	1.10	1.03	2630		
			SDRL	495.97	43.79	6.22	1.94	0.96	0.64	0.47	0.30	0.16			
	3.075	DMRSS	ARL	499.45	24.75	4.67	2.28	1.53	1.18	1.04	1.00	1.00	2000		
			SDRL	497.49	22.50	2.96	1.04	0.61	0.39	0.19	0.06	0.02			

Πίνακας 4

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ									AEQL		
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00			
0.05	2.615	MRSS	ARL	500.14	31.73	12.37	7.68	5.61	4.47	3.73	3.23	2.87	6436		
			SDRL	483.80	19.07	4.80	2.32	1.43	1.00	0.77	0.61	0.54			
	2.614	MDRSS	ARL	500.23	18.85	7.98	5.14	3.85	3.14	2.66	2.27	2.05		4465	
			SDRL	483.48	8.97	2.46	1.24	0.81	0.58	0.53	0.44	0.23			
	0.10	2.614	DMRSS	ARL	500.82	13.43	6.02	3.98	3.04	2.46	2.09	1.99		1.91	3669
				SDRL	485.32	5.45	1.59	0.84	0.56	0.51	0.29	0.13		0.28	
2.815		MRSS	ARL	499.96	35.32	11.38	6.63	4.71	3.70	3.07	2.64	2.33	5401		
			SDRL	490.24	26.31	5.50	2.41	1.42	0.97	0.73	0.61	0.50			
2.814		MDRSS	ARL	499.96	18.77	6.92	4.28	3.17	2.55	2.17	1.99	1.85	3793		
			SDRL	492.16	11.28	2.58	1.22	0.77	0.58	0.40	0.27	0.36			
2.814	DMRSS	ARL	500.82	12.56	5.08	3.28	2.47	2.07	1.89	1.63	1.30	3007			
		SDRL	490.95	6.37	1.60	0.80	0.56	0.32	0.32	0.48	0.46				
0.25	2.999	MRSS	ARL	500.18	55.50	12.79	6.12	3.97	2.97	2.42	2.08	1.85	4642		
			SDRL	496.81	50.82	8.98	3.17	1.63	1.02	0.72	0.55	0.49			
	3.000	MDRSS	ARL	499.15	25.28	6.45	3.55	2.51	2.01	1.70	1.42	1.19	2945		
			SDRL	492.51	20.82	3.43	1.36	0.77	0.53	0.50	0.50	0.39			
	2.999	DMRSS	ARL	499.97	14.66	4.36	2.60	1.96	1.57	1.24	1.06	1.01	2209		
			SDRL	498.34	10.69	1.88	0.81	0.51	0.51	0.43	0.23	0.08			
0.50	3.075	MRSS	ARL	500.32	101.97	20.99	7.67	4.14	2.79	2.12	1.72	1.46	4888		
			SDRL	497.31	99.49	18.66	5.69	2.45	1.36	0.89	0.67	0.56			
	3.075	MDRSS	ARL	500.34	46.32	8.27	3.53	2.22	1.65	1.31	1.12	1.03	2680		
			SDRL	495.94	43.77	6.23	1.93	0.96	0.64	0.48	0.33	0.18			
	3.076	DMRSS	ARL	499.61	24.81	4.71	2.33	1.58	1.21	1.04	1.01	1.00	2024		
			SDRL	497.53	22.49	2.95	1.03	0.61	0.41	0.21	0.07	0.02			

Πίνακας 5

λ	L	Sampling techniques	Percentiles	δ								
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.10	2.820	MRSS	P ₁₀	54	9	4	3	2	2	1	1	1
			P ₅₀	348	26	9	5	3	2	2	2	2
			P ₉₀	1149	68	18	9	5	4	3	2	2
	2.819	MDRSS	P ₁₀	53	6	3	2	1	1	1	1	1
			P ₅₀	348	14	5	3	2	2	1	1	1
			P ₉₀	1147	33	9	5	3	2	2	2	1
	2.819	DMRSS	P ₁₀	54	4	2	1	1	1	1	1	1
			P ₅₀	348	10	4	2	2	1	1	1	1
			P ₉₀	1153	20	6	3	2	2	1	1	1
0.25	3.000	MRSS	P ₁₀	54	10	4	3	2	2	1	1	1
			P ₅₀	348	40	10	5	3	3	2	2	2
			P ₉₀	1147	121	24	10	6	4	3	2	2
	3.000	MDRSS	P ₁₀	55	6	3	2	1	1	1	1	1
			P ₅₀	347	19	5	3	2	2	1	1	1
			P ₉₀	1147	52	11	5	3	2	2	2	1
	3.000	DMRSS	P ₁₀	54	4	2	1	1	1	1	1	1
			P ₅₀	345	11	4	2	2	1	1	1	1
			P ₉₀	1145	28	7	3	2	2	1	1	1
0.50	3.075	MRSS	P ₁₀	53	13	4	2	2	1	1	1	1
			P ₅₀	347	71	15	6	3	2	2	2	1
			P ₉₀	1150	232	45	15	7	4	3	2	2
	3.075	MDRSS	P ₁₀	54	7	2	2	1	1	1	1	1
			P ₅₀	349	33	6	3	2	2	1	1	1
			P ₉₀	1145	103	16	6	3	2	2	1	1
	3.075	DMRSS	P ₁₀	54	5	2	1	1	1	1	1	1
			P ₅₀	344	18	4	2	1	1	1	1	1
			P ₉₀	1159	54	9	4	2	2	1	1	1

Πίνακας 6

	Classical EWMA	FIR EWMA	Double EWMA	2/2 RR EWMA	2/3 RR EWMA	Hybrid EWMA	X&EWMA RSS	X&EWMA MRSS	EWMA MRSS	EWMA MDRSS	EWMA DMRSS
	$\lambda = 0.1$ L = 2.820	$\lambda = 0.1$ L = 3.000 f = 0.390	$\lambda_1 = 1.0$ $\lambda_2 = 0.010$ L ₁ = 3.290 L ₂ = 2.440	$\lambda = 0.1$ L = 2.556	$\lambda = 0.1$ L = 2.300	$\lambda_1 = 0.1$ $\lambda_2 = 0.101$ L = 7.230	$\lambda = 0.1$ L = 3.050 k = 3.310	$\lambda = 0.1$ L = 3.021 k = 3.310	$\lambda = 0.1$ L = 2.820	$\lambda = 0.1$ L = 2.819	$\lambda = 0.1$ L = 2.819
δ											
0.00	503.93	503.25	502.56	499.70	501.71	502.39	500.67	500.34	500.96	500.02	501.07
0.25	103.00	81.11	66.42	103.51	69.80	86.09	52.44	40.21	33.68	17.27	11.09
0.50	28.54	16.92	21.18	29.49	22.72	27.95	13.83	11.11	9.93	5.58	3.86
0.75	13.62	6.58	10.56	14.21	11.90	15.90	7.00	5.76	5.31	3.17	2.30
1.00	8.23	3.61	6.50	8.90	7.71	11.23	4.48	3.73	3.54	2.22	1.67
1.25	5.66	2.35	4.47	6.39	5.61	8.79	3.21	2.69	2.65	1.73	1.28
1.50	4.18	1.78	3.36	4.94	4.37	7.24	2.46	2.06	2.13	1.40	1.07
1.75	3.24	1.47	2.65	4.02	3.64	6.10	1.96	1.65	1.80	1.17	1.01
2.00	2.66	1.29	2.20	3.43	3.14	5.33	1.61	1.37	1.55	1.05	1.00
2.25	2.23	1.17	1.87	3.05	2.80	4.74	1.37	1.20	1.35	1.01	1.00
2.50	1.92	1.10	1.63	2.76	2.57	4.25	1.21	1.09	1.19	1.00	1.00
2.75	1.69	1.06	1.45	2.54	2.39	3.84	1.10	1.03	1.09	1.00	1.00
3.00	1.51	1.04	1.33	2.38	2.27	3.52	1.05	1.01	1.04	1.00	1.00
3.25	1.37	1.02	1.22	2.27	2.17	3.25	1.02	1.00	1.01	1.00	1.00
3.50	1.26	1.01	1.15	2.18	2.12	3.03	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
3.75	1.18	1.01	1.10	2.12	2.07	2.82	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
4.00	1.12	1.00	1.06	2.08	2.04	2.64	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
AEQL	11.3519	7.1274	9.6485	16.3375	15.1820	22.8937	7.5937	7.0037	7.1715	6.1605	5.9025
PCI	1.9232	1.2075	1.6346	2.7679	2.5721	3.8786	1.2865	1.1866	1.2150	1.0437	1.0000
ARARL	3.2529	1.8136	2.5784	3.9432	3.4282	5.0999	1.8847	1.6188	1.6054	1.1539	1.0000

Πίνακας 7

	Classical EWMA	FIR EWMA	Double EWMA	RR (2/2) EWMA	RR (2/3) EWMA	Hybrid EWMA	X&EWMA RSS	X&EWMA MRSS	EWMA MRSS	EWMA MDRSS	EWMA DMRSS
	$\lambda = 0.5$ $L = 3.071$	$\lambda = 0.5$ $L = 3.231$ $f = 0.390$	$\lambda_1 = 1.0$ $\lambda_2 = 0.150$ $L_1 = 3.290$ $L_2 = 3.108$	$\lambda = 0.5$ $L = 2.358$	$\lambda = 0.5$ $L = 2.157$	$\lambda_1 = 0.1$ $\lambda_2 = 0.500$ $L = 4.340$	$\lambda = 0.5$ $L = 3.192$ $k = 3.310$	$\lambda = 0.5$ $L = 3.166$ $k = 3.310$	$\lambda = 0.5$ $L = 3.075$	$\lambda = 0.5$ $L = 3.075$	$\lambda = 0.5$ $L = 3.075$
δ											
0.00	502.88	500.09	499.71	503.71	503.26	501.30	500.58	500.75	500.17	500.14	499.45
0.25	254.91	214.63	159.28	233.67	133.41	100.46	151.23	118.11	101.87	46.24	24.75
0.50	89.50	52.95	42.44	76.56	47.64	28.61	33.56	23.80	20.96	8.21	4.67
0.75	35.54	13.31	17.86	30.79	21.39	14.28	11.47	8.27	7.62	3.48	2.28
1.00	17.36	4.76	10.11	15.28	11.57	8.99	5.63	4.29	4.09	2.17	1.53
1.25	9.65	2.58	6.70	9.01	7.27	6.50	3.49	2.80	2.74	1.60	1.18
1.50	6.30	1.86	4.88	6.13	5.15	5.11	2.50	2.06	2.07	1.28	1.04
1.75	4.50	1.51	3.77	4.59	4.00	4.14	1.95	1.64	1.67	1.10	1.00
2.00	3.38	1.33	3.05	3.68	3.30	3.51	1.60	1.36	1.41	1.03	1.00
2.25	2.70	1.19	2.50	3.12	2.87	3.07	1.36	1.19	1.23	1.00	1.00
2.50	2.26	1.12	2.17	2.75	2.59	2.70	1.20	1.09	1.11	1.00	1.00
2.75	1.91	1.08	1.89	2.50	2.39	2.46	1.10	1.03	1.04	1.00	1.00
3.00	1.70	1.04	1.68	2.34	2.26	2.23	1.05	1.01	1.01	1.00	1.00
3.25	1.51	1.02	1.51	2.22	2.16	2.05	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
3.50	1.37	1.01	1.38	2.15	2.10	1.91	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
3.75	1.27	1.01	1.28	2.08	2.06	1.78	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
4.00	1.18	1.00	1.19	2.05	2.04	1.65	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
AEQL	16.1274	8.4215	13.1240	18.9448	16.7344	15.3441	8.3981	7.5141	7.4415	6.2153	5.9167
PCI	2.7258	1.4234	2.2182	3.2020	2.8284	2.5934	1.4194	1.2700	1.2577	1.0505	1.0000
ARARL	5.7808	2.6287	3.7968	5.6424	4.3812	3.6939	2.4074	1.9402	1.8575	1.1900	1.0000

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

6.1 Εισαγωγή

Σκοπός του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας (Statistical Process Control, SPC) ή Διεργασιών (Statistical Quality Control, SQC) είναι η βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων κάτι το οποίο μπορεί να επιτευχθεί με τον εντοπισμό και τη μείωση των ειδικών ή συστηματικών αιτιών μεταβλητότητας, στο βαθμό που κάτι τέτοιο είναι εφικτό. Στον Παραμετρικό Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας ή Διεργασιών (Parametric SPC or SQC), η βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας ακολουθούν κάποια παραμετρική κατανομή, όπως για παράδειγμα την κανονική κατανομή. Συνεπώς, η επιλογή της στατιστικής συνάρτησης και ο υπολογισμός των ορίων ελέγχου εξαρτάται από τη μορφή και τις ιδιότητες της κατανομής αυτής, οι οποίες θεωρούνται “ακριβείς” εφόσον η βασική υπόθεση ικανοποιείται.

Παρόλο που η θεωρία του Παραμετρικού Ελέγχου Ποιότητας χρησιμοποιείται ευρέως, στην πραγματικότητα η κατανομή των αιτιών μεταβλητότητας είτε δεν είναι γνωστή είτε είναι πολύ μακριά από την κανονική. Για αυτό το λόγο, θεωρούμε υποχρεωτική την ανάγκη να κατασκευάσουμε και να χρησιμοποιήσουμε πιο ευέλικτα (flexible) και ανθεκτικά (robust) διαγράμματα, τα οποία δεν θα απαιτούν την υπόθεση της κανονικότητας, ή κάποιας άλλης γνωστής κατανομής. Κατά συνέπεια, τα μη παραμετρικά ή ελεύθερα κατανομής διαγράμματα ελέγχου (nonparametric or distribution-free control charts) αποτελούν χρήσιμες εναλλακτικές των παραμετρικών. Ο όρος «μη παραμετρικά» υποδηλώνει ότι δεν εμπλέκονται παράμετροι στην διεργασία, κάτι το οποίο δεν ισχύει αφού απλώς τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου δε χρησιμοποιούν τις παραμέτρους ακόμη και αν υπάρχουν.

Για αυτό τον λόγο ο όρος «ελεύθερα κατανομής» περιγράφει ορθότερα τι μπορούν να πραγματοποιήσουν τα διαγράμματα αυτά αν και ο πρώτος όρος χρησιμοποιείται πιο συχνά.

Τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου αναπτύσσονται με κατάλληλη προσαρμογή συνήθως γνωστών διαδικασιών, όπως ο έλεγχος υποθέσεων. Τα τελευταία χρόνια, ένας μεγάλος αριθμός από αντίστοιχες μεθόδους μη παραμετρικών ελέγχων είναι διαθέσιμο στη διεθνή βιβλιογραφία. Έχει αποδειχθεί ότι αυτές οι μέθοδοι συμπεριφέρονται εξίσου καλά σε σχέση με τις αντίστοιχες παραμετρικές. Συγκεκριμένα, όταν η υποκείμενη κατανομή είναι η κανονική, η απόδοση μερικών μη παραμετρικών ελέγχων ανάλογων των (βέλτιστων) κανονικών ελέγχων μπορεί να φτάσει στο επίπεδο του 95.5%. Στην πραγματικότητα, κάποιοι μη παραμετρικοί έλεγχοι είναι πιο αποδοτικοί-αποτελεσματικοί. Θεωρητικά, οι μη παραμετρικές μέθοδοι είναι λιγότερα αποδοτικές από τις αντίστοιχες παραμετρικές, όταν υπάρχει πλήρης γνώση των κατανομών για τις οποίες οι παραμετρικές μέθοδοι έχουν ειδικά σχεδιαστεί. Ωστόσο στην πράξη η πληροφορία αυτή σπάνια υπάρχει ή είναι διαθέσιμη. Εντούτοις, η αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος συνήθως μπορεί να βελτιωθεί με την επεξεργασία περισσότερων παρατηρήσεων. Ένα επιπλέον μειονέκτημα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι ότι για μικρά μεγέθη δείγματος ο αναλυτής υποχρεούται να χρησιμοποιήσει ειδικούς πίνακες.

Το βασικό πλεονέκτημα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι η ευκολία και η ευελιξία της χρήσης τους, αφού δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι η υποκείμενη διεργασία ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή. Επιπλέον, το εντός ελέγχου μήκος ροής (ARL_0) της κατανομής είναι το ίδιο για όλες τις συνεχείς κατανομές και για αυτό το λόγο διαφορετικά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου μπορούν να συγκριθούν πιο εύκολα μεταξύ τους. Επίσης τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου είναι πιθανό να διατηρούν την ιδιότητα της ευρωστίας (robustness property) των μη παραμετρικών ελέγχων οπότε ενδεχομένως επηρεάζονται λιγότερο από ακραίες τιμές. Επιπλέον βασικό πλεονέκτημα τους είναι η αποδοτικότητα τους στην ανίχνευση αλλαγών, όταν η πραγματική κατανομή δεν είναι κανονική. Τέλος δεν απαιτείται εκτίμηση της διακύμανσης στην κατασκευή διαγραμμάτων για την παράμετρο θέσης.

6.2 Μη παραμετρικά διαγράμματα CUSUM που χρησιμοποιούν προσημικές-βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις

Ιδιαίτερα δημοφιλής είναι τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές-βαθμολογικές συναρτήσεις (signed-rank statistics). Σε αυτά τα διαγράμματα αρχικά συλλέγεται ένα τυχαίο δείγμα $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ με $i=1, 2, \dots$, μεγέθους n σε χρονική στιγμή κατά την οποία η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου (X_{ij} είναι j -οστή παρατήρηση του i -οστού δείγματος που λαμβάνεται από την παραγωγή). Στη συνέχεια συλλέγονται και άλλα ανεξάρτητα μεταξύ τους τυχαία δείγματα και ανεξάρτητα επίσης από το αρχικό δείγμα με σκοπό να ανιχνεύσουμε αν παραμένει εντός ελέγχου ή έχει μετατοπισθεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα μη παραμετρικό διάγραμμα χρησιμοποιούμε την προσημική στατιστική συνάρτηση (sign test statistics)

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0)$$

όπου

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

με θ_0 να είναι εκτίμηση για την εντός ελέγχου τιμή κάποιας στατιστικής παραμέτρου της κατανομής των αρχικών δεδομένων, που συλλέχθηκαν ενώ η διεργασία βρισκόταν εντός στατιστικού ελέγχου και n το μέγεθος των νέων τυχαίων δειγμάτων που συλλέγονται. Ουσιαστικά, η συνάρτηση SN_i είναι απλά η διαφορά μεταξύ του πλήθους των παρατηρήσεων πάνω από τη τιμή του μ_0 στο i -οστό δείγμα. Εφόσον η αναμενόμενη τιμή της SN_i είναι μηδέν η διαδικασία θα δίνει σήμα εκτός ελέγχου αν $|SN_i| \geq a_2$ με a_2 μια θετική σταθερά. Το βασικό πλεονέκτημα λοιπόν της χρήσης της SN_i είναι ότι συγκρατεί τα όρια ελέγχου γύρω από το μηδέν (συμμετρικά γύρω από το μηδέν). Το ARL για την αμφίπλευρη περίπτωση δίνεται από τον τύπο

$L(\mu) = 1/P(SN_i \geq a_2)$ ενώ το ARL_o θα παραμείνει σταθερό για όλες τις κατανομές με μέσο μ_0 .

Έχουμε υποθέσει ότι η κατανομή των παρατηρήσεων είναι συνεχής, δηλαδή $P(X_{ij} - \mu_0) = 0$ άρα σε πρακτικό επίπεδο η περίπτωση $sign(X_{ij} - \mu_0) = 0$ δεν συμβαίνει ποτέ. Ωστόσο αφού μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε τις τιμές των παρατηρήσεων θα υπάρξει εμφάνιση της τιμής μηδέν. Τη συνάρτηση SN_i τη χρησιμοποιούμε εφόσον η τιμή μηδέν δεν εμφανίζεται συχνά.

Η διαδικασία που προτείνεται (Amin, Reynolds and Bakir (1995)), χρησιμοποιεί το συσσωρευμένο άθροισμα των SN_1, SN_2, \dots , τα οποία είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων προσημικών-βαθμολογικών συναρτήσεων τα οποία προκύπτουν από κάθε τυχαίο δείγμα που συλλέγεται. Το συγκεκριμένο διάγραμμα δίνει σήμα ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου στο i -οστό δείγμα, αν και εφόσον ικανοποιείται ένας εκ των δύο παρακάτω έλεγχος υποθέσεων

$$\sum_{i=1}^n (SN_i - k) - \min_{0 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m (SN_i - k) \geq h$$

ή

$$\max_{0 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m (SN_i + k) - \sum_{i=1}^n (SN_i + k) \geq h$$

όπου k , h είναι δύο θετικές παράμετροι. Οι δύο αυτές παράμετροι k και h οι οποίες διαμορφώνουν την κατασκευή και την εφαρμογή αυτού του διαγράμματος προσδιορίζονται ως εκείνες οι τιμές οι οποίες για γνωστό μέγεθος των νέων τυχαίων δειγμάτων, αντιστοιχούν σε ένα αρχικά προσδιορισμένο και αρκετά μεγάλο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Το ARL ενός μονόπλευρου διαγράμματος με όρια ελέγχου και προειδοποίησης προς τη θετική κατεύθυνση δίνεται από τον τύπο

$$L^+(\mu) = \frac{1 - p_1'}{1 - p_1 - p_0(1 - p_1')}$$

με $p_0 = P\{SN_i < w_2 | \mu\}$ και $p_1 = P\{w_2 \leq SN_i < a_2 | \mu\}$ ενώ το ARL ενός μονόπλευρου διαγράμματος με όρια ελέγχου και προειδοποίησης προς την αρνητική κατεύθυνση δίνεται από τον ίδιο τύπο αλλά με $p_0 = P\{SN_i < -w_2 | \mu\}$ και $p_1 = P\{-a_2 \leq SN_i < -w_2 | \mu\}$.

Το ARL του αμφίπλευρου διαγράμματος δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$L(\mu) = \frac{L^-(\mu)L^+(\mu)}{L^-(\mu) + L^+(\mu)}$$

Η τιμή του ARL για το CUSUM διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση SN_i εξαρτάται από τις τιμές των h και k . Ουσιαστικά για την σωστή επιλογή των τιμών των h και k θα επιλέξουμε αυτές τις τιμές που ελαχιστοποιούν το $L^+(\mu_1)$ για να παραμείνει η συγκεκριμένη τιμή $L^+(\mu_0)$ όπου μ_1 είναι η τιμή αυτή της μ που πραγματοποιείται μια σημαντική μετατόπιση. Έχουμε υπολογίσει προσεγγιστικά ότι η καλύτερη τιμή για την τιμή της παραμέτρου k δίνεται από τον τύπο

$$k = (1/2)E[SN_i | \mu_1]$$

Η τιμή της παραμέτρου h με τη χρήση της τιμής του k επιλέγεται έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή του $L^+(\mu_0)$.

Στον παρακάτω πίνακα για τις διάφορες τιμές της διαφοράς $\mu_1 - \mu_0$ (θεωρούνται σε μονάδες τυπικής απόκλισης) έχουμε και τις βέλτιστες τιμές της k όταν το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 10$ και για τις εξής κατανομές: ομοιόμορφη, κανονική, διπλή εκθετική, Cauchy και τέλος την Gamma. Παρατηρούμε ότι οι τιμές των k δεν διαφέρουν πολύ για όλες τις κατανομές εκτός από την κατανομή Cauchy. Ωστόσο το να προσδιορίσουμε την τιμή μ_1 δεν είναι τόσο εύκολο και το αποτέλεσμα δεν είναι και τόσο ακριβές. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τις k -τιμές για την κανονική κατανομή οι οποίες μας παρέχουν μικρά σφάλματα. Στην τελευταία στήλη του Πίνακα 6.2.1 δίνονται οι στρογγυλοποιημένες τιμές (στον πλησιέστερο ακέραιο) των κανονικών k -τιμών.

Πίνακας 6.2.1

Μετατόπιση $\mu_1 - \mu_0$	Κατανομή					Στρ/νες
	Ομοιόμορφη	Κανονική	διπλή εκθετική	Cauchy	Gamma	Κανονικές Τιμές
0.25	0.71	0.99	1.49	1.22	1.09	1
0.50	1.44	1.91	2.53	1.74	2.20	2
1.00	2.88	3.41	3.78	2.09	4.11	3
2.00	5.00	4.77	4.70	2.29	5.00	5
3.00	5.00	4.98	4.93	2.36	5.00	5

Τέλος παρέχονται και οι τιμές του $L^+(\mu_0)$ όταν το μέγεθος του δείγματος είναι $n=10$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων h και k . (Πίνακας 6.2.2).

Πίνακας 6.2.2

k	1	2	3	4	5	6	7
h							
3	5.6	14.4	17.8	78.0	92.4	930.0	1023.0
4	9.1	14.4	44.6	78.0	521.5	930.0	50083.8
5	11.8	36.8	67.0	464.9	875.6	45525.1	
6	16.9	36.8	148.0	3165.5	4756.3	45525.1	
7	22.8	91.6	282.5	3166.5	23143.0		
8	30.1	91.6	519.0	17931.9	41364.0		
9	39.9	216.3	1074.2	17931.9			
10	51.1	216.3	1886.4				
11	65.9	499.5	3663.9				
12	83.7	499.5	6968.4				
13	105.8	1147.8	13030.2				
14	133.3	1147.8	25236.3				
15	166.8	2623.3	47128.0				
16	208.3	2623.3	89762.1				

Να σημειωθεί ότι στα διαγράμματα ελέγχου CUSUM μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μέγεθος δείγματος μικρότερο (π.χ. σε σχέση με το διάγραμμα Shewhart) αφού η διαδικασία βασίζεται σε μεμονωμένα δείγματα. Μεγαλύτερη τιμή για την $L^+(\mu_0)$ θα επιτευχθεί με επιλογή μεγάλων τιμών της παραμέτρου h . Ωστόσο δεν συνιστάται μικρό μέγεθος δείγματος στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

CUSUM διότι αφού χρησιμοποιούν την στατιστική συνάρτηση SN_i είναι δύσκολο να δοθεί σήμα εκτός ελέγχου από ένα μόνο δείγμα αν $n < h + k$.

6.3 Μη παραμετρικά EWMA διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν προσημικές-βαθμολογικές στατιστικές συναρτήσεις

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου EWMA προτάθηκαν από του Amin και Searcy (1991) και βασίζεται στη βαθμολόγηση των παρατηρήσεων εντός του δείγματος. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε για κάθε i τυχαίο δείγμα την στατιστική συνάρτηση

$$SR_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0)$$

όπου n το μέγεθος του κάθε δείγματος που συλλέγεται, θ_0 η εκτίμηση για την εντός ελέγχου στατιστική παράμετρο της κατανομής των δεδομένων. Επιπλέον ο R_{ij} είναι ο βαθμός (rank) που αντιστοιχεί στην παρατήρηση $|X_{ij} - \theta_0|$ για το i τυχαίο δείγμα δηλαδή είναι ο βαθμός που αντιστοιχεί για το i τυχαίο δείγμα στην απόλυτη τιμή της απόκλισης της παρατήρησης X_{ij} από την εντός ελέγχου επιθυμητή τιμή θ_0 .

Σε αυτό το EWMA διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται γραφικά η στατιστική συνάρτηση (διακριτή τυχαία μεταβλητή)

$$Z_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda) Z_{i-1} \text{ με } 0 < \lambda < 1$$

και αρχική τιμή Z_0 η επιθυμητή τιμή στόχος για την διεργασία (συνήθως η εντός ελέγχου μέση τιμή της κατανομής των παρατηρήσεων που προσπαθούμε, εκτιμώντας την, να την προσεγγίσουμε ικανοποιητικά).

Το συγκεκριμένο διάγραμμα ελέγχου έχει δύο όρια ελέγχου τα οποία δίνονται από τους τύπους

$$LCL = \mu_0 - L$$

$$CL = \mu_0$$

$$UCL = \mu_0 + L$$

όπου μ_0 είναι μία άγνωστη παράμετρος που δηλώνει την κεντρική γραμμή σε αυτό το διάγραμμα ελέγχου L είναι μία άγνωστη θετική παράμετρος που δηλώνει την απόσταση των δύο ορίων ελέγχου LCL , UCL από την κεντρική τιμή CL . Οι δύο αυτές παράμετροι μ_0 και L , εκτιμώνται από τα δεδομένα που συλλέγονται.

Το συγκεκριμένο διάγραμμα ελέγχου, δίνει ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου, αν για κάποιο i τυχαίο δείγμα η στατιστική συνάρτηση $n < h+k$ πάρει τιμή έξω από τα δύο όρια ελέγχου LCL , UCL δηλαδή αν για κάποιο i τυχαίο δείγμα ισχύει $Z_i > UCL$ ή $Z_i < LCL$. Αυτό το διάγραμμα ελέγχου είναι μη παραμετρικό αφού έχει βρεθεί (Amin and Searcy (1991)) ότι, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής Z_i δεν εξαρτάται από την κατανομή που ακολουθούν οι παρατηρήσεις και αυτή, είναι ίδια και σταθερή για όλες τις κατανομές που πιθανόν ακολουθούν.

Οι Amin and Searcy (1991) προτείνουν επίσης επιπλέον να χρησιμοποιείται κι ένα άλλο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς (μεταβλητότητας) της διεργασίας. Από συγκεκριμένες μελέτες έχει αποδειχθεί ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου διαγράμματος ελέγχου δεν επηρεάζονται από την επιλογή της θετικής παραμέτρου λ ούτε και από την αυτοσυσχέτιση που εμφανίζεται μεταξύ των στατιστικών συναρτήσεων Z_i . Επιπλέον αυτά τα διαγράμματα ελέγχου βελτιώνονται σημαντικά με την προσθήκη προειδοποιητικών ορίων ελέγχου (warning limits).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κουκουβίνος Χ., (2008). Στατιστικός Έλεγχος ποιότητας.
- Αντζουλάκος, Δ. (2006). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική»
- Abbas N, Riaz M, Does R. Enhancing the Performance of EWMA Charts. *Quality and Reliability Engineering International* 2011; 27(6):821–833.
- Abbas N, Riaz M and Does RJMM. Mixed Exponentially Weighted Moving Average–Cumulative Sum Charts for Process Monitoring. *Quality and Reliability Engineering International* 2012: available online with DOI: 10.1002/qre.1385.
- Abujiya MR, Muttlak HA. Quality control chart for the mean using double ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics* 2004; 31(10):1185–1201.
- Abujiya MR, Riaz, M, Lee MH. Enhancing the Performance of Combined Shewhart-EWMA Charts. *Quality and Reliability Engineering International* 2012: DOI: 10.1002/qre.1461.
- Al-Omari AI and Haq A. Improved quality control charts for monitoring the process mean, using double-ranked set sampling methods. *Journal of Applied Statistics* 2012; 39(4):745–763.
- Al-Sabah WS. Cumulative sum statistical control charts using ranked set sampling data. *Pakistan Journal of Statistics* 2010; 26(2):365–378.
- Alwan, LC (2000). *Statistical Process Analysis*. New York: McGraw-Hill.

- Amin, Reynolds and Bakir (1995). Non parametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic. *Communications in Statistics Theory and Methods* 24, pp 1597-1623.
- Amin and Searcy (1991). A nonparametric exponentially weighted moving average control scheme, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 20:4, 1049-1072.
- Borror CM, Keats JB, Montgomery DC. Robustness of the time between events CUSUM. *International Journal of Production Research* 2003; 41:3435–3444.
- Brook D, Evans, DA. An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika* 1972; 59:539–549.
- . Fu JC, Spiring FA, Xie H. On the average run lengths of quality control schemes using a Markov chain approach. *Statistics and Probability Letters* 2002; 56: 369–380.
- Gan FF. Exact run length distributions for one-sided exponential CUSUM schemes. *Statistica Sinica* 1992; 2:297–312.
- Gan FF. Design of optimal exponential CUSUM control charts. *Journal of Quality Technology* 1994; 26:109–124.
- Gan FF. Designs of one and two-sided exponential EWMA control charts. *Journal of Quality Technology* 1998; 30:55–69.
- Gibbons, J.D., Chakraborti, S. (2003). *Nonparametric Statistical Inference*, fourth ed. Marcel Dekker, New York. *Economic Quality Control*.
- Haq A. A New Hybrid Exponentially Weighted Moving Average Control Chart for Monitoring Process Mean. *Quality and Reliability Engineering*

International 2012; DOI: 10.1002/qre.1453.

- Jafari JM, Mirkamali, SJ Control charts for attributes with maxima nominated samples. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2011; 141(7):2386–2398.
- Jensen WA, Jones-Farmer LA, Champ CW, Woodall WH. Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. *Journal of Quality Technology* 2006; 38:349–364.
- Jones LA, Champ CW. Phase I control charts for time between events. *Quality and Reliability Engineering International* 2002; 18:479–488.
- Jones MA, Steiner SH. Assessing the effect of estimation error on risk-adjusted CUSUM chart performance. *International Journal for Quality in Health Care* 2012; 24:176–181.
- Lee J, Wang N, Xu L, Schuh A, Woodall WH. The effects of parameter estimation on upper-sided Bernoulli cumulative sum charts. *Quality and Reliability Engineering International* 2012; DOI: 10.1002/qre.1413 (available online).
- Lucas JM. Counted data CUSUMs. *Technometrics* 1985; 27:129–144.
- Lucas JM, Saccucci MS. Exponentially weighted moving average control schemes - Properties and enhancements. *Technometrics* 1990; 32(1):1–12.
- Lucas JM, Saccucci MS. Exponentially weighted moving average control schemes - Properties and enhancements. *Technometrics* 1990; 32(1):12–29.
- Machado MAG, Costa AFB. The double sampling and the EWMA charts based on the sample variances. *International Journal of Production Economics* 2008; 114(1):134–148.

- McIntyre GA. A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research* 1952; 3(4):385–390.
- Modarres R, Hui TP, Zheng, G. Resampling methods for ranked set samples. *Computational Statistics and Data Analysis* 2006; 51(2):1039–1050.
- Montgomery DC. *Introduction to statistical quality control*, (7η έκδοση). Hoboken, NJ: John Wiley, 2012.
- Muttlak HA Median ranked set sampling with concomitant variables and a comparison with ranked set sampling and regression estimators. *Environmetrics* 1998; 9(3):255–267.
- Muttlak HA, Al-Sabah WS Statistical quality control based on ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics* 2003; 30(9):1055–1078.
- Ostadsharif MA Niaki STA. The Max EWMAMS control chart for joint monitoring of process mean and variance with individual observations. *Quality and Reliability Engineering International* 2011; 27(4):499–514.
- Ou Y, Wen D, Wu Z, Khoo MBC. A comparison study on effectiveness and robustness of control charts for monitoring process mean and variance. *Quality and Reliability Engineering International* 2012; 28(1):3–17.
- Ozsan G, Testik MC, Weiß CH. Properties of the exponential EWMA chart with parameter estimation. *Quality and Reliability Engineering International* 2010; 26:555–569.
- Page E. (1961). Cumulative Sum Control Charts. *Technometrics*,3,1-9
- Rhoads T. R,D. C. Montgomery and C. M. Mastrangelo (1996). Fast initial Response Scheme for the EWMA Control Chart. *Quality Engineering*.9,317-327.

- Roberts S. W (1959) .Control Chart tests on Geometric Moving Averages. Technometrics,42,97-102.
- Reynolds MR, Stoumbos ZG Control charts and the efficient allocation of sampling resources. Technometrics 2004; 46(2):200–214.
- Saccucci MS, Amin RW, Lucas JM. Exponentially weighted moving average control schemes with variable sampling intervals. Communications in Statistics - Simulation and Computation 1992; 21:627–657.
- Salazar RD, Sinha, AK. Control chart X based on ranked set sampling. Comunicacion Tecica 1997; No. 1-97-09 (PE/CIMAT).
- Steiner SH. EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response. Journal of Quality Technology 1999; 31(1):75–86.
- Steiner SH, MacKay RJ. Effective monitoring of processes with parts per million defective – A hard problem! In Frontiers in statistical quality control 7, Lenz HJ, Wilrich PTh (Eds.). Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2004
- Su, Y, Shu, L, Tsui K-L. Adaptive EWMA procedures for monitoring processes subject to linear drifts. Computational Statistics & Data Analysis 2011; 55(10):2819–2829.
- Szarka JL III, Woodall WH. On the equivalence of the Bernoulli and geometric CUSUM charts. Journal of Quality Technology 2012; 44(1):54–62.
- Takahasi K, Wakimoto, K. On unbiased estimates of population mean based on sample stratified by means of ordering. Annals of the Institute of Statistical Mathematics 1968; 20(1):1–31.

- Testik MC. Conditional marginal performance of the Poisson CUSUM control chart with parameter estimation. *International Journal of Production Research* 2007; 45:5621–5638.
- Vardeman S, Ray D. Average run lengths for CUSUM schemes when observations are exponentially distributed. *Technometrics* 1985; 27:145–150.
- Vanderman S. B. and M. Jobe (1998). *Statistical Quality Assurance Methods for Engineers*. John and Sons, New York.
- Westgard O. James, Patricia L. Barry and Marian R. Hunt (1981). A Multi-Rule Shewhart Chart for Quality Control in Clinical Chemistry. *27/3*, 493-501
- Wu Z, Yang M, Jiang W, Khoo MBC Optimization designs of the combined Shewhart-CUSUM control charts. *Computational Statistics & Data Analysis* 2008; 53(2):496–506.
- Wu Z, Jiao J, Yang M, Liu Y, Wang Z. An enhanced adaptive CUSUM control chart. *IIE Transactions* 2009; 41(7):642–653.
- Xie M, Goh TN, Ranjan P. Some effective control chart procedures for reliability monitoring. *Reliability Engineering and System Safety* 2002 77:143–150.
- Zhang LY, Bebbington MS, Govindaraju K, Lai CD. Composite EWMA control charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 2004;33(4):1133–1158.
- Zhang CW, Xie M, Goh TN. A control chart for the gamma distribution as a model of time between events. *International Journal of Production Research* 2007; 45(23):5649–5666.

- Zhang M, Peng Y, Schuh A, Megahed FM, Woodall WH. Geometric charts with estimated control limits. *Quality and Reliability Engineering International* 2012, DOI: 10.1002/qre.1304 (available online).