Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική Εργασία

Εφαρμογές της Θεωρίας Γραμμικών Τελεστών στην Ομαλοποίηση ill-posed Τελεστικών Εξισώσεων

Συγγραφή : Σάββας Ανδρονίκου

Επιβλέπων Καθηγητής : Σωτήρης Καρανάσιος

Τριμελής Επιτροπή : Σ. Καρανάσιος, Ι. Πολυράκης, Π. Ψαράκος

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, με την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Σωτήρη Καρανάσιο για την καθοδήγηση και συμπαράσταση που μου προσέφερε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Δρόσο Γκιντίδη για τις συμβουλές που μου παρείχε σε επιστημονικό αλλά και σε προσωπικό επίπεδο. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου Νίκο και Αγνή που δημιούργησαν όλες τις προϋποθέσεις ώστε να ασχοληθώ απερίσπαστα με τις σπουδές μου.

Πρόλογος

Οι γραμμικοί τελεστές, οριζόμενοι σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα χρησιμοποιούνται ευρέως για την περιγραφή φυσικών ποσοτήτων. Συνεπώς η θεωρία γραμμκών τελεστών αποτελεί πρωταγωνιστικό ρόλο στο πεδίο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Συγκεκριμένα οι γραμμικοί τελεστές χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση διαφόρων φυσικών φαινομένων υπό τη μορφή τελεστικών εξισώσεων (operator equations). Επομένως η κατηγορία προβλημάτων που σχετίζεται με αντίστροφες διαδικασίες τα λεγόμενα αντίστροφα προβλήματα, διατυπώνονται υπό τη μορφή τελεστικών εξισώσεων. Οι τελεστικές εξισώσεις με τις οποίες διατυπώνονται τέτοιου είδους προβλήματα, τις περισσότερες φορές παρουσιάζουν μια παθολογική συμπεριφορά η οποία προέρχεται από την ίδια τη φύση του προβλήματος που περιγράφουν. Αυτή η παθολογική συμπεριφορά συνίσταται κυρίως στη μη-καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Δηλαδή το πρόβλημα είναι ill-posed. Ετσι και η θεωρία ομαλοποίησης έχει σαν κύριο αντικέιμενο την έυρεση διαφόρων μεθόδων επίλυσης ill-posed προβλημάτων.

Στόχος της συγκεκριμένης εργασίας είναι η μελέτη βασικών στοιχείων της θεωρίας γραμμικών τελεστών που απαιτούνται για την ανάπτυξη της βασικής θεωρίας των μεθόδων ομαλοποίησης ill-posed προβλημάτων. Η εργασία χωρίζεται σε δύο βασικά μέρη. Συγκεκριμένα το πρώτο μέρος αφορά τη θεωρία Γραμμικων Τελεστών και το δεύτερο τη θεωρία ομαλοποίησης ill-posed Τελεστικών εξισώσεων. Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση της θεωρίας χώρων Hilbert, ξεκινώντας από τους χώρους εσωτερικού γινομένου. Στη συνέχεια στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας των συνεχών γραμμικών τελεστών. Μια σημαντική κατηγορία συνεχών τελεστών είναι οι Hilbert συζυγείς που ορίζονται μέσω των ημι-αντιδιγραμμικών μορφών. Οι συγκεκριμένοι χρησιμοποιούνται ευρέως στη θεωρία ομαλοποίησης ill-posed προβλημάτων. Επίσης δίνεται έμφαση στο φάσμα ενός τελεστή καθώς επίσης και στις ιδιότητες του φάσματος ενός αυτοσυζυγή τελεστή. Τέλος στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια του συμπαγή τελεστή και ακολούθως δίνεται έμφαση στους αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές όπου αποδεικνύεται το Φασματικό θεώρημα για αυτή την κλάση τελεστών. Πρέπει να αναφερθεί ότι το Φασματικό θεώρημα διαδραματίζει σημαντικότατο ρόλο στη θεωρία ομαλοποίησης ill-posed τελεστικών εξισώσεων.

Το β’ μέρος που σχετίζεται με τη θεωρία ομαλοποίησης, αρχικά στο κεφάλαιο 3 γίνεται μια εισαγωγή στα ill-posed προβλήματα όπου παρουσιάζεται η έννοια της μη καλής τοποθέτησης κατά Hadamard. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό, δίνονται κάποια σχετικά παραδείγματα ill-posed προβλημάτων. Ακολούθως το κεφάλαιο 4 που αφορά τις ιδιάζουσες τιμές, αποδεικνύεται το θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης (Singular Value Decomposition), το οποίο βασίζεται στο

Φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές. Επίσης αποδεικνύεται το θεώρημα Picard μέσα από το οποίο φανερώνεται η ανάγκη εφαρμογής μιας διαδικασίας ομαλοποίησης για την αρχική τελεστική εξίσωση. Στα κεφάλαια 5 και 6 αρχικά δίνεται ο ορισμός της στρατηγικής ομαλοποίησης και ταυτόχρονα γίνεται ανάλυση του σφάλματος που υπάρχει μεταξύ ακριβούς και ομαλοποιημένης λύσης της τελεστικής εξίσωσης. Στο κεφάλαιο 6 συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ένα γενικό σχήμα στρατηγικής ομαλοποίησης όπου για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης φίλτρου καθορίζονται οι αντίστοιχες μορφές των γνωστών στρατηγικών ομαλοποίησης, όπως η στρατηγική Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης με Φασματική Αποκοπή καθώς επίσης και η στρατηγική Ομαλοποίησης Tikhonov. Τέλος στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζεται μια υπολογιστική εφαρμογή της στρατηγικής ομαλοποίησης Tikhonov για το Αντίστροφο πρόβλημα εκτίμησης της αρχικής συνθήκης για την εξίσωση της θερμότητας όπου στα δεδομένα υπάρχει κάποιο σφάλμα.

Περιεχόμενα

Μέρος I

Θεωρία Γραμμικών Τελεστών

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Χώρων Hilbert

1.1 Χώροι εσωτερικού γινομένου

Για να ορίσουμε την έννοια ενός χώρου Hilbert πρέπει αρχικά να ορίσουμε την έννοια του εσωτερικού γινομενου σε ενα διανυσματικό χώρο. Πιο κάτω διατυπώνουμε καποιες σχετικές ιδιότητες και προτάσεις διανυσματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Ορισμός 1.1.1 (Εσωτερικό Γινόμενο)
Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$. Η απεικόνιση

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \ V\ x\ V \to \mathbb{C}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες:
$\forall x, y, z \in V\ και\ \lambda \in \mathbb{C}$
α) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
β) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
γ) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
δ) $\langle x, x\rangle \geq 0\ και\ αν\ \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = O_V$
λέγεται εσωτερικό γινόμενο στον V και ο V με την απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle$ λέγεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
Εύκολα αποδεικνύονται οι πιο κάτω συνέπειες που προκύπτουν από την απεικόνιση του εσωτερικού γινομένου.

Συνέπειες

(1) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
(2) $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\,\langle x, y\rangle$
(3) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = O_X$
(4) Αν $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle, \forall\ z \in V \ \Longrightarrow x = y$

Πρόταση 1.1.2 (Ανισότητα Cauchy-Swartz)
Έστω V δ.χ με εσωτερικό γινόμενο. Τοτε $\forall\ x, y \in V$ ισχύει:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \qquad (*)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη

Έστω x, y γραμμικώς εξαρτημένα. Δηλαδή $\exists \lambda \in \mathbb{C} : x = \lambda y$. Τότε έπεται:

$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle \lambda y, y\rangle|^2 = |\lambda\langle y, y\rangle|^2 &= |\lambda|^2|\langle y, y\rangle|^2\\ &= \lambda\, \bar{\lambda}\, \overline{\langle y, y\rangle}\, \langle y, y\rangle\\ &= \lambda\overline{\langle \lambda y, y\rangle}\, \langle y, y\rangle\\ &= \lambda\langle y, \lambda y\rangle\langle y, y\rangle\\ &= \langle \lambda y, \lambda y\rangle\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\end{aligned}$$

Άρα είναι προφανές ότι η σχέση $(*)$ ισχύει ως ισότητα. Θα δείχθεί το αντίστροφο, δηλαδή αν είναι σε ισχύ η ισότητα της πιο πάνω σχέσης τότε έπεται η γραμμική εξάρτηση των x, y. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις για τα x, y στα οποία μπορεί η σχέση $(*)$ να λειτουργεί ως ισότητα.

α) Αν $y = O_V \Longrightarrow \langle y, y\rangle = 0$. Τότε αναγκαστικά ισχύει $|\langle x, y\rangle|^2 = 0$. Συνεπώς η $(*)$ ισχύει ως η ισότητα. Τότε αναγκαστικά θα ισχύει ότι τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

β) Έστω $x, y \neq O_V$ τέτοια ώστε να ισχύει $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$. Τότε έπεται ότι

$$\langle x, x\rangle = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \Leftrightarrow \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = 0 \quad (1)$$

Ορίζεται ως $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Τότε αφού $\lambda^2 = \lambda \cdot \bar{\lambda}$ έπεται ότι $\lambda^2 = \frac{\langle x,y\rangle \cdot \overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle^2} = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle^2}$. Άρα τότε $|\langle x, y\rangle|^2 = \lambda^2\langle y, y\rangle^2$. Συνεπώς από την (1) έπεται:

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle - \lambda^2 \frac{\langle y, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle - \lambda \cdot \bar{\lambda}\, \langle y, y\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle x, x\rangle - \lambda^2\, \langle y, y\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle x, x\rangle = \lambda^2\, \langle y, y\rangle \qquad (*)\end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x - \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \overline{\langle x - \lambda y, x\rangle} - \lambda\langle y, x - \lambda y\rangle =\\ &= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\, \overline{\langle y, x\rangle} - \lambda\overline{\langle x - \lambda y, y\rangle}\\ &= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\, \overline{\langle y, x\rangle} - \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\, \bar{\lambda}\, \langle y, y\rangle\\ &\overset{(*)}{=} \lambda^2\, \langle y, y\rangle - \bar{\lambda}\, \langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle\\ &\overset{\langle x,y\rangle = \lambda\langle y,y\rangle}{=} \quad \lambda^2\, \langle y, y\rangle - \bar{\lambda}\, \cdot \lambda\langle y, y\rangle - \lambda \overline{\cdot\, \lambda}\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

Επομένως $x - \lambda y = 0 \Longrightarrow x = \lambda y$. Δηλαδή τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Ακολούθως θα δειχθεί η ανίσωση. Έστω $y \neq O_V$. Τότε για $\lambda \epsilon \mathbb{C}$ έπεται :

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\, \langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda \cdot\, \bar{\lambda}\, \langle y, y\rangle \qquad (2)$$

Για $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ τότε από την (2)

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\, \cdot \langle y, y\rangle$$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}$$

$$\Rightarrow 0 \le \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

■

Πιο κάτω παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα
α) Ο χώρος $C[a,b] = \{f: [a,b] \to \mathbb{C} : f\ συνεχής\}$ εφοδιασμένος με την εξής απεικόνιση $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$ καθίσταται χώρος εσωτερικού γινομένου.
β) Ο χώρος $l_2(\mathbb{N}) = \{(a_n): a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}\ με\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ εφοδιασμένος με την εξής απεικόνιση $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ καθίσταται χώρος εσωτερικού γινομένου.
γ) Ο χώρος των μιγαδικών διανυσμάτων $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, z_3 \dots z_n): z_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1,2,..n\}\}$ καθίσταται χώρος εσωτερικού γινομένου με την πιο κάτω απεικόνιση $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

Με την παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται ότι κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου είναι και χώρος με νόρμα (normed space).

Πρόταση 1.1.3
Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η απεικόνιση $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ είναι μια απεικόνιση νόρμας.

Απόδειξη
Θα δείχθεί ότι η $\|\cdot\|$ πληρεί τις ιδιότητες της νόρμας.

- Για $x \in V$, ισχύει ότι $\langle x,x\rangle \ge 0 \Longrightarrow \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} \ge 0$.
  Αν $\|x\| = 0 \Longrightarrow \langle x,x\rangle^{1/2} = 0 \Longrightarrow \langle x,x\rangle = 0$. Άρα $x = O_V$. Αν $x = O_V \Longrightarrow \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = 0$.
- Για $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda \overline{\langle \lambda x, x\rangle}} = \sqrt{\lambda\, \bar{\lambda} \langle x,x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x,x\rangle}$
  $= |\lambda| \sqrt{\langle x,x\rangle}$
  $= |\lambda| \|x\|$
- Θα δείξουμε ότι $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\
&= \overline{\langle x+y, x\rangle} + \overline{\langle x+y, y\rangle} \\
&= \langle x,x\rangle + \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\, Re(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2\,(|\langle x,y\rangle|) + \|y\|^2 \\
&\overset{C-S}{\le} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

■

Από την πιο πάνω πρόταση, εξάγεται το συμπέρασμα ότι κάθε απεικόνιση εσωτερικού γινομένου επάγει και μια νόρμα, δηλαδή καθε χώρος εσωτερικού γινομένου είναι και χώρος με νόρμα .Το αντίστροφο της πιο πάνω πρότασης δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή υπάρχουν νόρμες οι οποίες δεν επάγονται από κάποια απεικόνιση εσωτερικού γινομένου. Αυτό εξακριβώνεται και από τον κανόνα παραλληλογράμμου που θα αποδείχθεί πιο κάτω.

Πρόταση 1.1.4

Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, $x \in V$ η επαγόμενη νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. Τότε η απεικόνιση

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: (V, \|\cdot\|) \times (V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη

Θα αποδείχθεί η συνέχεια με τη χρήση του ακολουθιακού κριτηρίου συνέχειας. Έστω $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία του καρτεσιανού γινομένου $V \times V$. Έπίσης έστω $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ ως προς την μετρική γινόμενο. Αυτό είναι ισοδύναμο με $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y_0$. Δηλαδή ισοδύναμα $\|x_n - x_0\| \to 0$ και $\|y_n - y_0\| \to 0$. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_0\rangle + \langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_0\rangle + \langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\overset{C-S}{\leq} \|x_n\|\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\|y_0\| \qquad (*)\end{aligned}$$

Η (x_n) ως συγκλίνουσα είναι και φραγμένη. Επομένως $\exists M > 0\ \tau.\omega\ \|x_n\| \leq M$. Άρα από την $(*)$ έπεται:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \leq M\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\|y_0\| \xrightarrow{n\to\infty} M \cdot 0 + 0 \cdot \|y_0\| = 0$$

Συνεπώς $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$. Άρα η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι συνεχής απεικόνιση.

■

Παρακάτω θα διατυπωθεί ο κανόνας του παραλληλογράμμου ο οποίος καθορίζει αν μια νόρμα επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 1.1.5 (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

Σ'ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

όπου $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle \\ &= \overline{\langle x + y, x\rangle} + \overline{\langle x + y, y\rangle} \\ &= \langle x, x\rangle + \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2Re(\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) \qquad (1)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα ισχύει:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2Re(\langle x, y\rangle) \qquad (2)$$

Προσθέτωντας την (1) και την (2) έπεται το ζητούμενο.

■

Για παράδειγμα η νόρμα $\|\cdot\|_\infty: C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|: t \in [a,b]\}$ δεν επάγεται από κάποιο εσωτερικο γινόμενο αφού για τις συναρτήσεις $f(t) = 1, g(t) = t \ \ , \forall t \in [0,1]$, εύκολα διαπιστώνεται ότι ο κανόνας παραλληλογράμμου δεν ικανοποιείται. Επομένως ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

1.2 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.2.1 (Χώρος Hilbert)
Ένας χώρος $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert αν είναι Banach ως προς τη νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Ισοδύναμα
Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο στον H. Δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον H τέτοιο ώστε:
$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \forall x \in H$.

Πρόταση 1.2.2
Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ χώρος Banach και υποθέτουμε ότι ο X είναι γραμμικά ισομετρικός και επί με ένα χώρο Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$. Τότε ο $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι χώρος Hilbert.

Απόδειξη
Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ χώρος Hilbert και $T: X \to H$ μια γραμμική ισομετρία και επί. Επομένως ο T είναι επί και διατηρεί τη νόρμα. Δηλαδή $\|T(x)\|_H = \|x\|_X, \forall x \in X$. Θα δειχθεί ότι η νόρμα του χώρου X επάγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο στον X. Ορίζεται η πιο κάτω απεικόνιση

$$\langle x, y\rangle_X = \langle T(x), T(y)\rangle_H \ , \forall \ x, y \in X$$

Αρχικά ισχύει ότι $\|x\|_X = {\langle x, x\rangle_X}^{1/2}$. Πράγματι

$$\langle x, x\rangle_X = \langle T(x), T(x)\rangle_H = {\|T(x)\|^2}_H \overset{T-\iota\sigma o\mu.}{\cong} {\|x\|_X}^2$$

Άρα $\|x\|_X = {\langle x, x\rangle_X}^{1/2}$. Ακολούθως θα δειχθεί ότι η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ αποτελεί εσωτερικό γινόμενο.
Αρχικά: $\langle x, x\rangle_X = \langle T(x), T(x)\rangle_H = {\|T(x)\|^2}_H \geq 0$. Αν $x = O_X \Longrightarrow \langle x, x\rangle_X = {\|T(O_X)\|^2}_H = 0$. Επίσης αν $\langle x, x\rangle_X = 0 \Longrightarrow {\|T(x)\|^2}_H = 0 \Longrightarrow \|T(x)\|_H = 0 \Longrightarrow T(x) = O_X$. Δηλαδή $x \in KerT = \{O_X\}$ αφού ο T ως ισομετρία είναι και 1-1. Άρα $x = O_X$.
Ακόμα: $\langle x, y\rangle_X = \langle T(x), T(y)\rangle_H = \overline{\langle T(y), T(x)\rangle_H} = \overline{\langle y, x\rangle_X}$. Έστω $x, y, z \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu y, z\rangle_X = \langle T(\lambda x + \mu y), T(z)\rangle_H &\overset{T\ linear}{\cong} \langle \lambda T(x) + \mu T(y), T(z)\rangle_H \\ &= \lambda \langle T(x), T(z)\rangle_H + \mu \langle T(y), T(z)\rangle_H \\ &= \lambda\langle x, z\rangle_X + \mu \langle y, z\rangle_X\end{aligned}$$

Συνεπώς η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει την νόρμα $\|\cdot\|_X$. Άρα ο X είναι χώρος Hilbert.

■

Πρόταση 1.2.3
Έστω H χώρος Hilbert και K κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Τότε $\forall x \in H \ \exists! \ y \in K \ \tau.\omega$:

$$\|x - y\| = d(x, K) = inf\{\|x - z\|: z \in K\}$$

Απόδειξη
Αν $\Delta = \{\|x - z\|: z \in K\}$ τότε το $inf\Delta$ αποτελεί οριακό σημείο του Δ. Δηλαδή

$$\exists(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Delta \ \tau.\omega \ \delta_n \to inf\Delta = d$$

Έστω $\delta_n = \|x - y_n\| \to d$. Αρχικά αποδεικνύεται ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Πράγματι:

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x)+(x - y_m)\|^2 = \|x' + y'\|^2$$

με $x' = y_n - x$ και $y' = x - y_m$. Τότε από κανόνα παραλληλογράμμου έπεται ότι:

$$\|x' + y'\|^2 + \|x' - y'\|^2 = 2\|x'\|^2 + 2\|y'\|^2 \Rightarrow \|x' + y'\|^2 = 2\|x'\|^2 + 2\|y'\|^2 - \|x' - y'\|^2 \quad (1)$$

Επομένως, από (1) είναι:

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|y_n+y_m - 2x\|^2$$
$$= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m) - x\right\|^2$$

Έπίσης ισχύει ότι $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$, όπου Κ κυρτό, άρα $\frac{1}{2}(y_n+y_m) \in K$. Επομένως $\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m) - x\right\|^2 \geq d^2$. Τότε ισχύει:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\, d^2$$

Για $n \to \infty \Rightarrow \|y_n - x\| \to d$ και για $m \to \infty \Rightarrow \|y_m - x\| \to d$. Επομένως $\|y_n - y_m\|^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$. Συνεπώς η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Λόγω του ότι H είναι Hilbert, $\exists y \in H \ \tau.\omega \ y_n \to y$ ισοδύναμα $\|y_n - y\| \to 0$. Επειδή όμως $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ και Κ κλειστό σύνολο, έπεται ότι $y \in K$. Τότε από τη συνέχεια της νόρμας έπεται:

$$\|x - y\| = \|x - lim\, y_n\| = \lim\|x - y_n\| = \lim \delta_n = d$$

Η μοναδικότητα έπεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα:
αν $\exists\ y_1, y_2 \in K \ \tau.\omega \ \|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$ τότε όπως και πρίν έπεται

$$0 \leq \|y_1 - y_2\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_1+y_2) - x\right\|^2$$
$$= 2\ d^2 + 2\ d^2 - 4\ \left\|\frac{1}{2}(y_1+y_2) - x\right\|^2$$
$$\leq 2\ d^2 + 2\ d^2 - 4\, d^2 = 0$$

Συνεπώς $y_1 = y_2$.

■

Ορισμός 1.2.4

Έστω A μη κενό υποσύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Ένα στοιχείο $x \in E$ λέγεται κάθετο στο Α ($x \perp A$) αν $\forall\ y \in A : \langle x, y\rangle = 0$, δηλαδή $x \perp y$, $\forall y \in A$.

Εύκολα αποδεικνύεται η πολύ σημαντική πρόταση του Πυθαγόρειου θεωρήματος που ακολουθεί.

Πρόταση 1.2.5 (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου. Τότε ισχύει η πιο κάτω συνεπαγωγή:

$$x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Πρόταση 1.2.6

Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H και $x \in H\backslash F$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ ώστε $x - y \perp F$. Συγκεκριμένα ισχύει $x - y \perp F \Leftrightarrow p(x, F) = x - y$.

Απόδειξη

($\Longleftarrow$) Επειδή F υπόχωρος, τότε το F είναι κυρτό. Επίσης F κλειστό. Άρα από την πρόταση 1.2.3 έπεται ότι $\exists!\, y \in F \ \tau.\omega \ \|x - y\| = p(x, F)$. Θα δειχθεί ότι $x - y \perp F$. Έστω $u = x - y$ και $z \in F$. Αν $z = 0$ τότε $z \perp u$. Αν $z \neq O_H$, τότε ισχύει $\|u\| \leq \|u - \lambda z\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Πράγματι αφού

$\|x-y\| \le \|x-(y+\lambda z)\|$ αφού $y+\lambda z \in F, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ και y είναι το πλησιεστερο σημείο του Fστο x. Τότε $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\|u\|^2 \le \|u-\lambda z\|^2 = \langle u-\lambda z, u-\lambda z\rangle &= \langle u, u-\lambda z\rangle - \lambda\langle z, u-\lambda z\rangle \\ &= \overline{\langle u-\lambda z, u\rangle} - \lambda\overline{\langle u-\lambda z, z\rangle} \\ &= \langle u,u\rangle - \bar{\lambda}\,\overline{\langle z,u\rangle} - \lambda\overline{\langle u,z\rangle} + \lambda^2\langle z,z\rangle \\ &= \|u\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 - 2\,Re(\lambda\langle z,u\rangle)\end{aligned}$$

Συνεπώς: $2\,Re(\lambda\langle z,u\rangle) \le \lambda^2\|z\|^2$. Για $\lambda = r\overline{\langle z,u\rangle}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ έπεται ότι:

$$2\,r\,Re(|\langle z,u\rangle|^2) \le r^2|\langle z,u\rangle|^2\|z\|^2 \qquad (*)$$

Αν $|\langle z,u\rangle| \neq 0$ τότε από την $(*)$ θα ισχύει $2 \le r\|z\|^2, r \in \mathbb{R}_+^*$ (άτοπο).
Άρα $|\langle z,u\rangle| = 0 \Longrightarrow \langle z,u\rangle = 0, \forall z \in F$. Συνεπώς $u \perp F$.
$(\Longrightarrow)$ Έστω $x-y \perp F$, $\mu\varepsilon$ $y \in F$, θα δειχθεί οτι $p(x,F) = x-y$. Ισοδύναμα δηλαδή ότι: $\|x-y\| \le \|x-z\|, \forall\, z \in F$. Τότε το $\|x-y\|$ θα αποτελεί κάτω φραγμα του συνόλου $A = \{\|x-z\|: z \in F\}$ και ταυτόχρονα θα ισχύει $\|x-y\| \in A$. Συνεπώς θα ισχύει $\|x-y\| = infA$. Ταυτόχρονα μέσω της πρότασης 1.2.3 θα έπεται οτι το y θα αποτελεί ταυτόχρονα και το μοναδικό στοιχείο του F που ικανοποιεί $x-y \perp F$.

Τότε $\forall\, z \in F$: $\|x-z\|^2 = \|(x-y)+(y-z)\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \ge \|x-y\|^2$. Άρα $\|x-z\| \ge \|x-y\|$. Συνεπώς $\|x-y\| = infA$.

■

Ορισμός 1.2.7 (Ορθογώνιο Συμπλήρωμα)
Έστω Η χώρος Hilbert και $A \subseteq H$. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του A είναι το σύνολο

$$A^\perp = \{x \in H: x \perp y, \forall y \in A\}$$

Πρόταση 1.2.8
Έστω H χώρος Hilbert και $A \subseteq H$. Τότε το $A^\perp$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.
Απόδειξη
Έστω $x, y \in A^\perp$. Δηλαδή $x \perp z, \forall z \in A$ και $y \perp z, \forall z \in A$. Τότε θα δειχθεί ότι $\lambda x + y \perp z, \forall z \in A$. Ισοδύναμα $\langle \lambda x + y, z\rangle = 0, \forall z \in A$. Τότε $\forall z \in A$:
$\langle \lambda x + y, z\rangle = \langle \lambda x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0$. Άρα $\lambda x + y \perp z, \forall z \in A$. Δηλαδή $A^\perp$ είναι γραμμικός υπόχωρος του Η. Ακολούθως θα δειχθεί ότι ο $A^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος. Αρκεί να δειχθεί οτι $\overline{A^\perp} \subseteq A^\perp$. Έστω $x \in \overline{A^\perp}$, δηλαδή x αποτελεί οριακό σημείο του $A^\perp$. Τότε από ακολουθιακό κριτήριο οριακού σημείου $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A^\perp$ $\tau.\omega$ $x_n \to x$. Αφού $x_n \in A^\perp$ τότε $\forall y \in A : \langle x_n, y\rangle = 0$. Από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου ισχύει ότι: $\forall y \in A$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n\,, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \lim_{n\to\infty} x_n\,, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

Άρα $x \perp y, \forall y \in A \Longrightarrow x \in A^\perp$. Επομένως το $A^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος.

■

Στην περίπτωση ενός χώρου Hilbert, φαίνεται από την πιο κάτω πρόταση ότι κάθε κλειστός υπόχωρος έχει πάντα ένα κλειστό συμπληρωματικό υπόχωρο που είναι ορθογώνιος σε σχέση με τον αρχικό.

Θεώρημα 1.2.9 (Προβολής)
Έστω H ένας χώρος Hilbert, F ενα κλειστός υπόχωρος του H. Τότε ο H διασπάται ως $H = F \oplus F^\perp$. Δηλαδή $H = F + F^\perp$ και $F \cap F^\perp = \{O_H\}$.

Απόδειξη

Έστω $x \in H$. Επειδή F είναι υπόχωρος του H, τότε F είναι κυρτό σύνολο. Τότε από την πρόταση 1.2.3 $\exists!\, y \in F$ τέτοιο ώστε να είναι το πλησιέστερο στοιχείο του Fαπό το x. Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση 1.2.6 έπεται ότι $y' = x - y \perp F$. Δηλαδή $x - y \in F^{\perp}$. Τότε $x = y + y' \in F + F^{\perp}$. Αν $x \in F \cap F^{\perp}$, τότε $x \in F$ και $x \in F^{\perp}$. Δηλαδή $x \perp y, \forall y \in F$. Για $y = x \Longrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = O_H$. Άρα $F \cap F^{\perp} = \{O_H\}$.

■

Πιο κάτω παρουσιάζονται χωρίς απόδειξη κάποια βασικά πορίσματα τα οποία χρησιμοποιούνται στη σύνεχεια σε διάφορες αποδείξεις.

Πόρισμα 1.2.10

Αν S είναι ένα υποσύνολο του Η τότε ο $S^{\perp\perp}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει το S. Δηλαδή $S^{\perp\perp} = \overline{[S]}$.

Πόρισμα 1.2.11

Αν M είναι ένας υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H τότε $M^{\perp} = \{0_H\}$ αν και μόνο αν ο M είναι πυκνός στον H.

Πρόταση 1.2.12

Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x_0 \in X$. Η απεικόνιση

$$f_{x_0}: X \to \mathbb{C}$$

με $f_{x_0}(y) = \langle y, x_0 \rangle$. Τότε η f_{x_0} είναι γραμμική και συνεχής και $\|f_{x_0}\| = \|x_0\|$.

Απόδειξη

Θα δειχθεί ότι η f_{x_0} είναι γραμμική. Έστω $y_1, y_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε:

$$f_{x_0}(\lambda y_1 + y_2) = \langle \lambda y_1 + y_2, x_0 \rangle = \lambda \langle y_1, x_0 \rangle + \langle y_2, x_0 \rangle = \lambda\, f_{x_0}(y_1) + f_{x_0}(y_2)$$

Άρα η f_{x_0} είναι γραμμική. Θα δειχθεί στη συνέχεια ότι είναι φραγμένη. Αρχικά

$$|f_{x_0}(y)| = |\langle y, x_0 \rangle| \overset{C-S}{\leq} \|x_0\|_X \|y\|_X$$

Επομένως η f_{x_0} είναι φραγμένη, άρα συνεχής. Από το τελευταίο έπεται ότι $\|f_{x_0}\| \leq \|x_0\|_X$. Θα δειχθεί ότι $\|f_{x_0}\| \geq \|x_0\|_X$. Δηλαδή $sup\{|f_{x_0}(y)|: y \in B_X\} \geq \|x_0\|_X$. Για να δειχθεί αυτό, αρκεί να βρεθεί $y \in X$ με $y \in B_X$ τέτοιο ώστε $|f_{x_0}(y)| \geq \|x_0\|_X$. Υπάρχουν δυο περιπτώσεις:

α) Έστω $y = x_0 = 0_X$. Τότε $y \in B_X$ και $|f_{x_0}(y)| = 0 \Longrightarrow \|f_{x_0}\| = \|x_0\|_X$.

β) Αν $x_0 \neq 0_X$, τότε αν $y = \frac{x_0}{\|x_0\|_X} \in B_X$. Τότε

$$|f_{x_0}(y)| = \left|\langle \frac{x_0}{\|x_0\|_X}, x_0 \rangle\right| = \frac{1}{\|x_0\|_X} |\langle x_0, x_0 \rangle| = \frac{1}{\|x_0\|_X} \|x_0\|_X{}^2 = \|x_0\|_X \Longrightarrow \|f_{x_0}\| = \|x_0\|_X.$$

■

Θεώρημα 1.2.13 (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Τότε $\forall f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_{x_0}$.

Απόδειξη

Αν $f = 0$ τότε αν τεθεί $x_0 = 0_H$ θα ισχύει από σχετική ιδιότητα του συναρτησιακού f_{x_0} ότι

$\left\|f_{0_H}\right\| = \|0_H\| = 0 \Longrightarrow f_{0_H} = 0$. Επομένως $f = f_{x_0}$. Αν $f \neq 0$, τότε ο $M = Kerf = \{y \in H : f(y) = 0\}$ ως υπόχωρος του H με f συνεχή συναρτησιακό θα είναι κλειστός υπόχωρος. Τότε από την προηγούμενη πρόταση 1.2.6 $\exists z \in H$ τέτοιο ώστε $z \perp M$ και $z \neq 0_H$. Θα δειχθεί ότι το ζητούμενο $x_0 = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Ισχύει ότι για $y \in H$ ότι:

$$f(z) \cdot y - f(y) \cdot z \in M$$

αφού $f(f(z) \cdot y - f(y) \cdot z) = f(z) \cdot f(y) - f(y) \cdot f(z) = 0$. Από το γεγονός ότι $z \perp M$ έπεται ότι:

$$0 = \langle f(z) \cdot y - f(y) \cdot z, z\rangle = f(z)\langle y, z\rangle - f(y)\langle z, z\rangle \Longrightarrow f(y) = \frac{f(z)\langle y, z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \frac{\overline{\overline{f(z)}}\,\overline{\langle z, y\rangle}}{\langle z, z\rangle} = \overline{\langle \frac{\overline{f(z)}}{\langle z, z\rangle} z, y\rangle}$$

$$= \langle y, \frac{\overline{f(z)}}{\langle z, z\rangle} z\rangle$$

Άρα $x_0 = \lambda z$ με $\lambda = \frac{\overline{f(z)}}{\langle z,z\rangle}$. Η μοναδικότητα έπεται ως εξής:

Έστω ότι $\exists x_1, x_2 \in H$ τέτοια ώστε $f = f_{x_1} = f_{x_2}$.

Δηλαδή $\langle y, x_1\rangle = \langle y, x_2\rangle, \forall y \in H \Leftrightarrow \langle y, x_1 - x_2\rangle = 0, \forall y \in H \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_H \Leftrightarrow x_1 = x_2$

■

Πόρισμα 1.2.14

Έστω H χώρος Hilbert. Τότε ο δυϊκός του H είναι αντι-γραμμικά ισομετρικός και επί με τον H.

Απόδειξη

Αφού ο Η είναι χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε $\forall x \in H \ \exists f_x : H \to \mathbb{C}$ με $f_x(y) = \langle y, x_0\rangle$ η οποία είναι γραμμική, συνεχής και $\left\|f_{x_0}\right\|_{H^*} = \|x_0\|_H$. Ορίζεται η εξής απεικόνιση:

$T: H \to H^*$ με $T(x) = f_x$ η οποία από το θεώρημα Riesz είναι καλώς ορισμένη. Θα δειχθεί ότι η T είναι αντι-γραμμική ισομετρία και επί. Αρχικά αποδεικνύεται ότι είναι αντι-γραμμική. Έστω $x, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε:

$T(\lambda x + y) = f_{\lambda x + y} = \bar{\lambda} f_x + f_y = \bar{\lambda}\, T(x) + T(y)$. Πράγματι αφού για $z \in H$ έχουμε:

$$f_{\lambda x+y}(z) = \langle z, \lambda x + y\rangle = \overline{\langle \lambda x + y, z\rangle} = \bar{\lambda}\ \overline{\langle x, z\rangle} + \overline{\langle y, z\rangle} = \bar{\lambda}\ \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle = \bar{\lambda}\, f_x(z) + f_y(z)$$

$$= \left(\bar{\lambda}\, f_x + f_y\right)(z)$$

Επομένως ο T είναι αντι-γραμμική απεικόνιση. Επίσης ο T είναι και ισομετρία, δηλαδή διατηρεί την επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο.Πράγματι όντως αφού:

$$\|T(x)\|_{H^*} = \|f_x\|_{H^*} = \|x\|_H$$

Ακόμα ο T είναι επί αφού από το θεώρημα Riesz ισχύει ότι $\forall f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_{x_0} = T(x_0)$.

■

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν καποιες ιδιότητες για τα ορθοκανονικά συστήματα που θα χρησημοποιηθούν ευρέως και στην θεωρία ομαλοποίησης.

Στη συνέχεια θα οριστεί η έννοια σύγκλισης της σειράς σε ένα χώρο Banach και ακολούθως θα διατυπωθεί ένα χρήσιμο θεώρημα που ισχύει για χώρους Hilbert.

Ορισμός 1.2.15

Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του X . Με τον όρο σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ονομάζεται η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Αν η $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $x \in X$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty}\|s_n - x\|_X = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα στο x.
Πιο κάτω παρουσιάζονται κάποιες σχετικές προτάσεις με τις σειρές που είναι ανάλογες με αυτές των πραγματικών αριθμών.

Πρόταση 1.2.16

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει τότε, $x_n \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$.

Απόδειξη

Έστω $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ έπεται ότι $\exists s_0 \in X$ τέτοιο ώστε $s_n \to s_0$. Η $(s_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ως υπακολουθία της $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει στο s_0. Δηλαδή $s_{n-1} \to s_0$. Τότε αν οριστεί η ακολουθία $\alpha_n = s_n - s_{n-1} = x_n$ έπεται ότι $\lim_n \alpha_n = \lim_n(s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = 0$. Επομένως $\lim_n x_n = 0$.

■

Πρόταση 1.2.17 (Κριτήριο Cauchy)

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ σ'ενα χώρο Banach X συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Απόδειξη

Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα . Δηλαδή η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. Έστω $s_n \to s_0$. Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > n_0: \|s_n - s_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Επίσης για $m > n > n_0$ ισχύει $\|s_m - s_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Τότε $\|s_n - s_m\| = \|s_n - s_0 + s_0 - s_m\| \leq \|s_n - s_0\| + \|s_0 - s_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall m > n > n_0$
Δηλαδή η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον X.
Αντίστροφα έστω ότι η $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Επειδή ο X είναι Banach έπεται ότι θα είναι και συγκλίνουσα.

■

Πρόταση 1.2.18

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$ τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι συγκλίνουσα στον X.

Απόδειξη

Έστω $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Δηλαδή

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Θα δειχθεί ότι η πιο πάνω ακολουθία είναι βασική στον X όπου είναι Banach, άρα με βάση την πιο πάνω πρόταση 1.2.17 θα είναι και συγκλίνουσα. Έπεται ότι αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$ θα ισχύει ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|$ θα είναι συγκλίνουσα. Άρα θα είναι και βασική στον $\mathbb{R}$. Επομένως $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > m > n_0: |\alpha_n - a_m| < \varepsilon$.
Δηλαδή

$$|\alpha_n - a_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|\right| = \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\| < \varepsilon, \forall n > m > n_0 \qquad (1)$$

Τότε $\forall n > m > n_0$ ισχύει ότι:

$$\|s_n - s_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\| = |\alpha_n - a_m| < \varepsilon$$

Δηλαδή η $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Άρα το ζητούμενο έπεται.

■

Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα αποτέλεσμα το οποίο ισχύει για χώρους Hilbert και σχετίζεται με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ όπου $\{e_n : n = 1,2,\dots\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο.

Πρόταση 1.2.19
Έστω H ένας χώρος Hilbert, $\{e_n : n = 1,2,\dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H και $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$.

Απόδειξη
Ισχύει ότι για $n > m$ ότι

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{k=m+1}^{n} \|\lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2 \qquad (*)$$

Τότε από την έκφραση (*) ισχύουν οι πιο κάτω συνεπαγωγές

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{συγκλίνουσα} \Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{βασική}$$

$$\Leftrightarrow \textit{η ακολουθία } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ με } \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \textit{ είναι βασική στον } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \textit{η ακολουθία } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$$

$$\Leftrightarrow \textit{η ακολουθία } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$$

■

1.3 Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός 1.3.1 (Ορθοκανονική Βάση)
Έστω H χώρος Hilbert και S υποσύνολο του H. Το S καλείται ορθοκανονική βάση του H αν είναι μεγιστικό ορθοκανονικό υποσύνολο του H. Δηλαδή δεν υπάρχει άλλο ορθοκανονικό υποσύνολο του H που να περιέχει γνήσια το S.

Παρατηρήσεις
α) Η ορθοκανονική βάση $\{e_i : i = 1,2,\dots n\}$ σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης n $(dim\ X = n)$ είναι και αλγεβρική βάση Hamel.
β) Ισχύει ότι αν ο X είναι διανυσματικός χώρος και $D \subseteq X$ μια Hamel βάση αυτού, τότε από σχετικό θεώρημα ισχύει ισοδύναμα ότι

$$\forall x \in X \backslash \{0_X\} \ \exists! \ \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\} \ \textit{και} \ \{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq D \ \tau.\omega \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

ανεξάρτητα με το αν ο X είναι άπειρης ή πεπερασμένης διάστασης. Αυτό συγκεκριμένα για χώρους $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ άπειρης διάστασης με ορθοκανονική βάση δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή δεν ισχύει αναγκαστικά ότι κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης.

γ) Μια ορθοκανονική βάση παρ'ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο σε ένα απειροδιάστατο χώρο Hilbert δεν είναι ποτέ μια βάση Hamel.

Το πιο κάτω παράδειγμα δείχνει το πιο πάνω.
Συγκεκριμένα το σύνολο $S = \{e_1 = (1,0,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,0,\dots)\dots\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου $X = l_2(\mathbb{N})$. Τότε

$$span(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i : \forall n \in \mathbb{N}, \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{C}, \{e_i\}_{i=1}^{n} \subseteq S \right\} = \mathrm{C}_{00} \neq l_2(\mathbb{N})$$

Συνεπώς κάθε στοιχείο $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}_{00}$ γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης S. Ταυτόχρονα φαίνεται ότι η γραμμική θήκη του S δεν παράγει τον $l_2(\mathbb{N})$. Επειδή ο C_{00} είναι πυκνός στον $l_2(\mathbb{N})$, δηλαδή $\overline{\mathrm{C}_{00}} = l_2(\mathbb{N})$ ισχύει από σχετικό θεώρημα ότι

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})\ \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_{00}\ \tau.\omega\ y_n = \sum_{\iota=1}^{n} \lambda_i e_i \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$$

Άρα κάθε στοιχείο του $l_2(\mathbb{N})$ προσεγγίζεται με μια ακολουθία πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S.

Πρόταση 1.3.2

Αν $S = \{e_i : i \in J\} \subset H$, όπου H χώρος Hilbert είναι ορθοκανονική βάση αν και μόνο αν ισχύουν:
α) το S ειναι ορθοκανονικό υποσύνολο του H
β) $\overline{span(S)} = H$

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Έστω ότι ισχύουν τα (α) και (β) αλλά το S δεν είναι ορθοκανονική βάση του H. Δηλαδή υπάρχει μια ορθοκανονική οικογένεια F που περιέχει γνήσια το S. Τότε για κάθε μη-μηδενικό $x \in F \backslash S$ ισχύει ότι $x \perp S$. Άρα $x \perp span(S)$. Τότε $(span(S))^{\perp} \neq \{0_H\}$. Επομένως από το προηγούμενο πόρισμα 1.2.11 ισχύει ότι ο υπόχωρος $span(S)$ δεν είναι πυκνός στον H, άτοπο.
($\Longleftarrow$) Έστω S είναι βάση του H αλλά το (β) δεν ισχύει. Δηλαδή $\overline{span(S)} \neq H$. Συνεπώς το $\overline{span(S)}$ ως κλειστό σύνολο $\exists x \in H \backslash \overline{span(S)}$ τέτοιο ώστε $x \perp \overline{span(S)}$. Άρα $x \perp S$. Αν οριστεί το $y = \frac{x}{\|x\|}$ ισχύει ότι το σύνολο $S \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ είναι ορθοκανονικό το οποίο περιέχει το S. Άτοπο, αφού το S είναι βάση και άρα αποτελεί μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

$\blacksquare$

Λήμμα 1.3.3 (Ανισότητα Bessel)

Έστω $\{e_i : \iota = 1,2,\dots n\}$ ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο και $h \in H$. Αν $\alpha_\iota = \langle h, e_i \rangle, \mu\varepsilon$ $i = 1,2,..$τότε ισχύει:

$$\sum_{\iota=1}^{n} |a_\iota|^2 \leq \|h\|^2$$

Απόδειξη

$$0 \leq \left\| h - \sum_{i=1}^{n} a_\iota e_i \right\|^2 = \langle h - \sum_{i=1}^{n} a_\iota e_i, h - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle h, h - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \,, h - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \rangle \\
&= \overline{\langle h - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \,, h \rangle} - \overline{\langle h - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \,, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \rangle} \\
&= \langle h, h \rangle - \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \overline{\langle e_j, h \rangle} - \overline{\langle h, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \rangle} + \overline{\langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \,, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \rangle} \\
&= \|h\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \langle h, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, h \rangle + \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \,, \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \rangle \\
&= \|h\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \langle h, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, h \rangle + \sum_{i=1}^{n} a_i \, \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \rangle \\
&= \|h\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \alpha_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a}_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \, \overline{\langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \,, e_i \rangle} \\
&= \|h\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a}_j \, \langle e_i, e_j \rangle = \|h\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2
\end{aligned}
$$

Άρα το ζητούμενο έπεται.

■

Λήμμα 1.3.4

Έστω $\{e_i, i \in I\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία του H και $h \in H$. Τότε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle e_i$ συγκλίνει σ' ένα $h' \in H$ τέτοιο ώστε $h - h' \perp e_i, \forall i = 1,2,\dots$

Απόδειξη

Έστω $h_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Θα δειχθεί ότι η $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ είναι βασική. Τότε αφού ο H είναι Hilbert θα συγκλίνει σ'ένα $h' \in H$. Αρχικά:

$$
\begin{aligned}
\|h_{n+m} - h_n\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n+m} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=n}^{n+m} a_i e_i \right\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{i=n}^{n+m} \|a_i e_i\|^2 &= \sum_{i=n}^{n+m} |a_i|^2 \|e_i\|^2 \\
&= \sum_{i=n}^{n+m} |a_i|^2
\end{aligned}
$$

Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ είναι γνησίως αύξουσα και μέσω της ανισότητας Bessel είναι και άνω φραγμένη. Δηλαδή η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι συγκλίνουσα. Συνεπώς η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ είναι συγκλίνουσα. Ως συγκλίνουσα η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της είναι και βασική. Άρα $\forall c = \varepsilon^2 > 0 \; \exists n_0(c) > 0 \; \tau.\omega \; \forall n, m > n_0 \colon \sum_{i=n}^{n+m} |a_i|^2 < \varepsilon^2$. Τότε

$\|h_{n+m} - h_n\|^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow \|h_{n+m} - h_n\| < \varepsilon$. Δηλαδή η ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και συγκλίνει, έστω στο $h' \in H$. Θα δειχθεί ότι $h - h' \perp e_i, i \in I$. Έστω $i \in \mathbb{N}$ και $n \geq i$. Τότε:

$$\langle h-h_n,e_i\rangle=\langle h-\sum_{j=1}^{n}a_je_j,e_i\rangle=\langle h,e_i\rangle-\langle\sum_{j=1}^{n}a_je_j,e_i\rangle=\langle h,e_i\rangle-\sum_{j=1}^{n}a_j\langle e_j,e_i\rangle=\langle h,e_i\rangle-a_\iota$$
$$=a_\iota-a_\iota=0$$

Τότε από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου ότι :

$$\langle h-h_n,e_i\rangle=0\Longrightarrow\lim_n\langle h-h_n,e_i\rangle=0\Longrightarrow\langle\lim_{n\to\infty}(h-h_n)\,,e_i\rangle=0$$
$$\Longrightarrow\langle h-h',e_i\rangle=0$$

Επομένως $\langle h-h',e_i\rangle=0,\forall i\in\mathbb{N}$ και άρα $h-h'\perp e_i,\forall i=1,2,\ldots.$

■

Θεώρημα 1.3.5

Έστω H χώρος Hilbert και $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική ακολουθία του H. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Η $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι βάση του Η.

β) Αν $\langle h,e_i\rangle=0\ ,\forall i\in\mathbb{N}$ τότε $h=0_H$.

γ) $h=\sum_{i=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle e_i,\forall h\in H$ $(Ανάλυση\ Fourier)$

δ) $\langle h,g\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle\overline{\langle g,e_\iota\rangle},\forall h,g\in H$ $(Ταυτότηα\ Parseval)$

ε) $\|h\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle h,e_i\rangle|^2,\forall h\in H$ $(Ταυτότητα\ Bessel)$

Απόδειξη

$(\alpha)\Longrightarrow(\beta)$

Έστω $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του H. Αν $\langle h,e_i\rangle=0\ ,\forall i\in\mathbb{N}$ και έστω $h\neq O_H$. Αν οριστεί το στοιχείο $s=\frac{h}{\|h\|}$ με $\|s\|=1$ και $\langle s,e_i\rangle=0,\forall i\in\mathbb{N}$. Συνεπώς το σύνολο $S=\left\{\frac{h}{\|h\|}\right\}\cup\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ αποτελεί ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H που περιέχει γνήσια την ορθοκανονική βάση $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Άτοπο αφού η $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ως βάση αποτελεί μέγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

$(\beta)\Longrightarrow(\gamma)$

Το $S=\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ ως ορθοκανονική βάση του H, τότε από το προηγούμενο λήμμα 1.3.4 ισχύει:

$$\sum_{\iota=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle e_i=h'$$

με την ιδιότητα ότι $h-h'\perp e_i,\forall i=1,2,\ldots$Συνεπώς με βάση το (β) ισχύει ότι $h-h'=0_H\Longrightarrow h=h'$. Άρα έπεται ότι:

$$\sum_{\iota=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle e_i=h$$

$(\gamma)\Longrightarrow(\delta)$

Από το (γ) ισχύει ότι αν $h,g\in H$, τότε:

$$h=\sum_{i=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle e_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle h,e_i\rangle e_i$$
$$g=\sum_{i=1}^{\infty}\langle g,e_i\rangle e_i=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\langle g,e_i\rangle e_i$$

Τότε από συνέχεια του εσωτερικού γινομένου ισχύει:

$$\langle h, g\rangle = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \langle \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i\rangle e_i\, , \sum_{j=1}^{m} \langle g, e_j\rangle e_j \rangle$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \langle h, e_i\rangle \langle e_i, \sum_{j=1}^{\min\{n,m\}} \langle g, e_j\rangle e_j \rangle \right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \langle h, e_i\rangle \overline{\langle \sum_{j=1}^{\min\{n,m\}} \langle g, e_j\rangle e_j\, , e_i\rangle} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \langle h, e_i\rangle \sum_{j=1}^{\min\{n,m\}} \overline{\langle g, e_j\rangle} \langle e_i, e_j\rangle \right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \langle h, e_i\rangle \overline{\langle g, e_i\rangle} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i\rangle \overline{\langle g, e_i\rangle}$$

$(\delta) \Longrightarrow (\varepsilon)$

Για $h = g$, τότε από το (δ) έχουμε:

$$\langle h, h\rangle = \|h\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i\rangle \overline{\langle h, e_i\rangle} = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle h, e_i\rangle|^2, \forall h \in H$$

$(\varepsilon) \Longrightarrow (\alpha)$

Έστω ότι η $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δεν είναι βάση του H. Δηλαδή δεν είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο. Τότε $\exists x \in H$ $\tau.\omega$ $x \perp e_i, \forall i \in \mathbb{N}$ και $\|x\| = 1$. Τότε από το (ε) έπεται ότι:
$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0$, άτοπο αφού $\|x\| = 1$.

■

Κεφάλαιο 2

Συνεχείς Γραμμικοί Τελεστές

2.1 Φραγμένοι Τελεστές

Ορισμός 2.1.1
Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ μια γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε
$$\|T\| = sup\{\|T(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \in [0, \infty]$$
O T θα λέγεται *φραγμένος* τελεστής αν $\|T\| < \infty$. Αν $\|T\| = \infty$ ο T θα λέγεται μη φραγμένος τελεστής. Το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων τελεστών $T: X \to Y$ θα συμβολίζεται με $B(X, Y)$.

Αρχικά αποδεικνύεται ότι η πιο πάνω απεικόνιση $\|\cdot\|: B(X, Y) \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα.

Πρόταση 2.1.2
Η απεικόνιση $\|\cdot\|: B(X, Y) \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $B(X, Y)$.
Απόδειξη
Θα δειχθεί ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της νόρμας.
α) $\forall x \in X$: $\|T(x)\|_Y \geq 0$ αφού η $\|\cdot\|_Y$ είναι νόρμα στον Y.
Συνεπώς $\|T\| = sup\{\|T(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \geq 0$. Συγκεκριμένα έστω $\|T\| = 0$. Τότε
$$\|T(x)\| = 0, \forall x \in X\ \mu\varepsilon \|x\| \leq 1$$
Δηλαδή $T = 0$. Αντίστροφα έστω $T = 0$ δηλαδή $T(x) = 0_Y, \forall x \in X \Longrightarrow \|T(x)\|_Y = \|0_Y\|_Y = 0$. Άρα $\|T\| = 0$.
β) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε:
$$\begin{aligned}\|\lambda T\| &= sup\{\|(\lambda T)(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &= sup\{\|\lambda\, T(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &= sup\{|\lambda|\|\, T(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| sup\{\|\, T(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} = |\lambda|\|T\|\end{aligned}$$
γ) Έστω $T, S \in B(X, Y)$. Θα δειχθεί η τριγωνική ανισότητα $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$. Άρα
$$\begin{aligned}\|T + S\| &= sup\{\|(T + S)(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &= sup\{\|T(x) + S(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &\leq sup\{\|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &= sup\{\|T(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} + sup\{\|S(x)\|_Y: x \in X\ \tau.\omega\ \|x\| \leq 1\} \\ &= \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Συνεπώς η απεικόνιση $\|\cdot\|: B(X,Y) \to \mathbb{R}$ αποτελεί νόρμα στον $B(X,Y)$.

■

Ισχύει ότι σύνολο $B(X,Y) \subset L(X,Y)$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $L(X,Y)$ με τις επαγόμενες πράξεις "+" και " $\cdot$ " του $L(X,Y)$, όπου ο $L(X,Y)$ αποτελεί τον χώρο των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια πολυ βασική πρόταση χαρακτηρισμού της συνέχειας των γραμμικών τελεστών.

Πρόταση 2.1.3
Έστω $(X,\|\cdot\|_X), (Y,\|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Τα επομένα είναι ισοδύναμα:
α) Ο T είναι συνεχής.
β) Υπάρχει $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $T[B(x_0,\delta)]$ να είναι φραγμένο.
γ) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(0_X,\delta)]$ να είναι φραγμένο.
δ) Το $T[B(0_X,1)]$ να είναι φραγμένο.
ε) Υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X$.
ζ) Ο T είναι Lipschitz.
Απόδειξη
$\zeta) \Longrightarrow \alpha)$ Είναι προφανές.
$\alpha) \Longrightarrow \beta)$ Αν T είναι συνεχής στο x_0 τότε ισχύει ότι:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : T[B(x_0,\delta)] \subset B(T(x_0),\varepsilon)$$

Για $\varepsilon = 1$ ισχύει ότι $T[B(x_0,\delta)] \subset B(T(x_0),1)$. Το σύνολο $B(T(x_0),1)$ είναι φραγμένο στον Y.
Πράγματι $\forall y \in B(T(x_0),1) \Longrightarrow \|y - T(x_0)\|_Y < 1$. Επομένως

$$\begin{aligned}\|y\|_Y &= \|y - T(x_0) + T(x_0)\|_Y \\ &\leq \|y - T(x_0)\|_Y + \|T(x_0)\|_Y \\ &< 1 + \|T(x_0)\|_Y = M\end{aligned}$$

Άρα το $B(T(x_0),1)$ είναι φραγμένο, συνεπώς και το $T[B(x_0,\delta)]$ είναι φραγμένο.
$\beta) \Longrightarrow \gamma)$ Έστω $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $T[B(x_0,\delta)]$ να είναι φραγμένο. Ισχύει ότι $T[B(x_0,\delta)] = T[x_0 + B(O_X,\delta)] = T(x_0) + T[B(O_X,\delta)] \Longrightarrow T[B(O_X,\delta)] = T[B(x_0,\delta)] - T(x_0)$. Έστω $y \in T[B(O_X,\delta)]$. Δηλαδή $\exists\ z \in T[B(x_0,\delta)]$ τέτοιο ώστε $y = z - T(x_0)$. Άρα $z = y + T(x_0)$. Επειδή $T[B(x_0,\delta)]$ φραγμένο έπεται ότι $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\|z\|_Y \leq M$. Δηλαδή $\|y + T(x_0)\|_Y \leq M$. Συνεπώς $\|y\|_Y = \|y - T(x_0) + T(x_0)\|_Y \leq \|y - T(x_0)\|_Y + \|T(x_0)\|_Y \leq M + \|T(x_0)\|_Y = K$. Άρα το $T[B(0_X,\delta)]$ είναι φραγμένο.
$\gamma) \Longrightarrow \delta)$ Έστω ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T[B(0_X,\delta)]$ να είναι φραγμένο. Ισχύει ότι: $T[B(0_X,1)] = \frac{1}{\delta}T[B(0_X,\delta)]$ αλλά το $T[B(0_X,\delta)]$ είναι φραγμένο. Άρα και το $T[B(0_X,1)]$ είναι φραγμένο.
$\delta) \Longrightarrow \varepsilon)$ Το $T[B(0_X,1)]$ να είναι φραγμένο.
Δηλαδή $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T(x)\|_Y \leq M, \forall x \in B(0_X,1)$. Αν $x = 0_X \Longrightarrow T(0_X) = O_Y \Longrightarrow$ $\|T(0_X)\|_Y = 0 = M\|0_X\|_X$. Αν $x \neq 0_X$ τότε αν οριστεί το $z = \frac{x}{\|x\|_X} \Longrightarrow \|z\|_X = 1$. Επομένως $\|T(z)\|_Y \leq M \Leftrightarrow \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leq M \Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|_X}\|T(x)\|_Y \leq M \Leftrightarrow \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.
$\varepsilon) \Longrightarrow \zeta)$ Ισχύει ότι $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \underbrace{\leq}_{(\varepsilon)} M\|x - y\|_X$. Δηλαδή είναι Lipschitz.

■

Πρόταση 2.1.4
Αν X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε:
α) $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$
β) $\|T\| = inf\{m > 0 : \|T(x)\|_Y \leq m\|x\|_X, x \in X\}$
Απόδειξη
α) Αν $x = 0_X$, τότε $\|x\|_X = 0$. Επίσης $T(0_X) = 0_Y$. Άρα $\|T(0_X)\|_Y = 0$. Επομένως ισχύει
$$\|T(x)\|_Y = \|T\|\|x\|_X$$
Αν $x \neq 0_X$, τότε ορίζεται $y = \frac{x}{\|x\|}$ με $\|y\| = 1$. Συνεπώς $y \in B[0_X, 1]$. Άρα $T(y) = T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}T(x)$.
Επομένως $\|T(y)\|_Y = \left\|\frac{T(x)}{\|x\|_X}\right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X}\|T(x)\|_Y$.
Τότε $\|T\| = \underbrace{sup}_{y \in B[0_X,1]} \|T(y)\|_Y \geq \|T(y)\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X}\|T(x)\|_Y \Longrightarrow \|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$.
β) Αν T είναι μηδενικός δηλαδή $T(x) = 0_Y, \forall x \in X \Longrightarrow \|T(x)\|_Y = 0 \leq m\,\|x\|_X, \forall x \in X$. Επομένως $inf\{m > 0 : \|T(x)\|_Y \leq m\|x\|_X\} = inf(0, \infty) = 0$. Επίσης αν T είναι μηδενικός ισχύει $\|T\| = 0$ από ιδιότητα της νόρμας $\|\cdot\|$ στον Β(Χ,Υ). Συνεπώς ισχύει η ισότητα.
Έστω $\|T\| \neq 0$ με $\|T\| > 0$. Ορίζονται τα πιο κάτω σύνολα
$$A = \{\|T(x)\|_Y : \forall x \in X \; με \; \|x\|_X \leq 1\}$$
$$B = \{m > 0 : \|T(x)\|_Y \leq m\|x\|_X\}$$
Θα δειχθεί ότι $infB = supA = \|T\|$ μέσω διπλής ανισότητας. Δηλαδή $infB \leq supA$ και $supA \leq infB$. Αρχικά αποδεικνύεται $supA \leq infB$. Γιαυτό αρκεί να δειχθεί ότι το $infB$ αποτελεί άνω φράγμα του συνόλου A. Έστω $x \in X, \|x\|_X \leq 1$ και θα δειχθεί ότι $\|T(x)\|_Y \leq infB$. Το τελευταίο για να δειχθεί αρκεί να δειχθεί ότι το $\|T(x)\|_Y$ είναι κάτω φράγμα του Β. Πράγματι για $x \in X$ με $\|x\|_X$ έχουμε ότι για $m > 0$ τ.ω $\|T(x)\|_Y \leq m\,\|x\|_X \leq m$. Συνεπώς το $\|T(x)\|_Y$ είναι ένα κάτω φράγμα του B. Επομένως $supA \leq infB$. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι $infB \leq supA$. Πράγματι επειδή ισχύει ότι $T \in B(X, Y)$, τότε $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X = supA\|x\|_X \leq supA$, $\forall x \in X \; με \; \|x\|_X \leq 1$. Άρα $supA \in B$. Επομένως $infB \leq supA$.

■

Θεώρημα 2.1.5
Έστω X χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach. Τότε ο $B(X, Y)$ με τη νόρμα που έχει εφοδιαστεί είναι χώρος Banach.
Αποδειξη
Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον $B(X, Y)$. Θα δειχθεί ότι $\exists T: X \rightarrow Y$ με $T \in B(X, Y)$ τέτοιος ώστε $limT_n$=T. Αρχικά αφού $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική τότε:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0: \|T_m - T_n\| < \varepsilon \;\; (*)$$
Ισχύει ότι $\forall x \in X$ ότι: $\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\|_X$, (1)
Για $x \in X \; με \; \|x\|_X \leq 1$ από την (1) έπεται ότι:
$$\|T_m(x) - T_n(x)\|_Y \leq \|T_m - T_n\| \overset{(*)}{<} \varepsilon, \;\; (2)$$
Συνεπώς η $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, \forall x \in X, με \; \|x\|_X \leq 1$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y. Επίσης για $x \in X \; με \; \|x\|_X > 1$ αν οριστεί $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\|x\|_X} > 0$ έτσι ώστε $\|T_m - T_n\| < \varepsilon^*$. Επομένως από την (1) έπεται ότι $\|T_m(x) - T_n(x)\|_Y \leq \|T_m - T_n\|\|x\|_X < \frac{\varepsilon}{\|x\|_X}\|x\|_X = \varepsilon$. Άρα η $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, \forall x \in X$

$\mu\varepsilon$ $\|x\|_X > 1$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y. Επειδή ο Y είναι Banach έπεται ότι η $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συκλίνει σε ένα στοιχείο του Y. Έστω $T: X \to Y$ με $T(x) = \lim T_n(x)$. Θα δειχθεί ότι $T \in B(X, Y)$ και ότι $limT_n = T$. Αρχικά αποδεικνύεται ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Πράγματι για $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι:

$$T(\lambda x + y) \overset{o\rho\iota.}{\cong} li\,m\,T_n(\lambda x + y) = limT_n(\lambda x) + limT_n(y) \overset{T_n\ linear}{\cong} \lambda\, limT_n(x) + limT_n(y) = \lambda\, T(x) + T(y)$$

Άρα ο T είναι γραμμικός τελεστής. Θα δειχθεί ακολούθως ότι ο T είναι φραγμένος. Από την (2) για $m \to \infty$ ισχύει από συνέχεια της νόρμας ότι:

$$\|T(x) - T_n(x)\|_Y < \varepsilon, \forall x \in B_X \qquad (3)$$

Δηλαδή $\|(T - T_n)(x)\|_Y < \varepsilon, \forall x \in B_X$. Τότε με βάση τον χαρακτηρισμό συνέχειας γραμμικών τελεστών αφού το σύνολο$(T - T_n)(B_X)$ είναι φραγμένο θα έπεται ότι $T - T_n \in B(X, Y), \forall n \geq n_0$. Συγκεκριμένα για $n = n_0$ ισχύει ότι $T - T_{n_0} \in B(X, Y)$. Άρα $T = T_{n_0} + \left(T - T_{n_0}\right) \in B(X, Y)$ αφού ο $B(X, Y)$ είναι διανυσματικός χώρος. Στη συνέχεια θα δειχθεί ότι $\lim T_n = T$. Από την (3) ισχύει ότι $\forall x \in B_X$ ότι $\|T(x) - T_n(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0$.

Από την ιδιότητα ότι $\|T - T_n\| = inf\{m > 0 : \|(T - T_n)(x)\|_Y \leq m\|x\|_X, x \in X\}$ έπεται ότι $\|T - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Επομένως $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$: $\|T - T_n\| < \varepsilon$. Δηλαδή $T_n \overset{\|\cdot\|}{\rightarrow} T$.

■

Ορισμός 2.1.6

Γραμμικό συναρτησοειδές ονομάζεται μια γραμμική απεικόνιση $T: X \to \mathbb{R}$ με X διανυσματικός χώρος.Τα γραμμικά φραγμένα συναρτησοειδή ανήκουν στον χώρο $X^* = B(X, \mathbb{R})$ που ονομάζεται ο δϋικός του X.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια βασική πρόταση η οποία χαρακτηρίζει την ισοδυναμία που υπάρχει μεταξύ της συνέχειας των γραμμικών συναρτησιακών με τον πυρήνα τους. Αποτελέσματα αυτής της πρότασης εφαρμόζονται και στις επόμενες αποδείξεις.

Πρόταση 2.1.7

Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ χώρος με νόρμα και $f: X \to \mathbb{R}, f \neq O$ ένα γραμμικό συναρτησιακό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

α) Το f είναι φραγμένο(συνεχές)

β) το $kerf$ είναι κλειστό

γ) Το $Kerf$ δεν είναι πυκνό στον X

Απόδειξη

$(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$ Αφού το f είναι φραγμένο, τότε θα είναι και συνεχές από τον χαρακτηρισμό συνέχειας γραμμικών τελεστών. Τότε $Kerf = \{x \in X: f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$. Το f ως συνεχές συναρτησιακό αντιστρέφει τα κλειστά σύνολα σε κλειστά και πάλι. Επομένως αφού το $\{0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ θα είναι και ο πυρηνας $Kerf$ του f κλειστό σύνολο ως αντίστροφη εικόνα κλειστού από συνεχή συνάρτηση.

$(\beta) \Longrightarrow (\gamma)$ Αφού $f \neq O \Longrightarrow kerf \neq X$. Επίσης αφού το $Kerf$ είναι κλειστό, έπεται ισοδύναμα ότι ισχύει: $\overline{Kerf} = Kerf \neq X$. Επομένως το $Kerf$ δεν είναι πυκνό στον X.

$(\gamma) \Longrightarrow (\alpha)$ Έστω f ένα γραμμικό συναρτησιακό ώστε το $Kerf$ να μην είναι πυκνό στον X. Συνεπώς θα υπάρχει $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $Kerf \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$, δηλαδή ισοδύναμα

$f^{-1}(\{0\}) \cap \left(x + B(O_X, \varepsilon)\right) = \emptyset$. Ισχύει ότι $0 \notin f[B(x,\varepsilon)]$ αφού αν $0 \in f[B(x,\varepsilon)] \Longrightarrow y \in B(x,\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $f(y) = 0$. Δηλαδή $y \in f^{-1}(\{0\})$. Επομένως $f^{-1}(\{0\}) \cap \left(x + B(O_X, \varepsilon)\right) \neq \emptyset$.(άτοπο) Τότε αφού $f[B(x,\varepsilon)] = f[x + B(O_X,\varepsilon)] = f(x) + f[B(O_X,\varepsilon)] \not\subset \{0\} \Longrightarrow -f(x) \notin f[B(O_X,\varepsilon)]$ (1). Αν θεωρηθεί ότι το f δεν είναι φραγμένο συναρτησιακό τότε από πρόταση χαρακτηρισμού συνέχειας γραμμικών τελεστών, έπεται ότι το σύνολο $f[B(O_X,\varepsilon)]$ είναι μη φραγμένο. Το $B(O_X,\varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο και συμμετρικό υποσύνολο του X. Δηλαδή για $x \in X \; \mu\varepsilon \; x \in B(O_X,\varepsilon) \Longrightarrow (-x) \in B(O_X,\varepsilon)$. Τότε λόγω της γραμμικότητας του f ισχύει ότι το σύνολο $f[B(O_X,\varepsilon)]$ είναι κυρτό και συμμετρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή το $f[B(O_X,\varepsilon)]$ είναι μη φραγμένο, τότε $f[B(O_X,\varepsilon)] = \mathbb{R}$, άτοπο αφού από την (1) ισχύει ότι $-f(x) \notin \mathbb{R}$ που είναι άτοπο. Συνεπώς το $f[B(O_X,\varepsilon)]$ είναι φραγμένο, δηλαδή το f είναι συνεχές συναρτησιακό.

■

Ένα θεμελιώδες θεώρημα είναι το πιο κάτω που σχετίζει την διασταση του χώρου με την πληρότητα του.

Πρόταση 2.1.8

Κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης.

Απόδειξη

Αν $\dim X = 1$ τότε ο X είναι ισομετρικός του $\mathbb{R}$, άρα πλήρης. Αν θεωρηθεί ότι το συμπέρασμα ισχύει για χώρους διάστασης k και έστω ότι X αποτελεί χώρο με νόρμα με διάσταση $\dim X = k+1$. Έστω $(e_i)_{i=1}^{k+1}$ μια Hamel βάση του X με $\|e_i\|_X = 1$. Επίσης έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy του X. Για κάθε n ισχύει $x_n = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i{}^{(n)} e_i$. Θα δειχθεί ότι $1 \leq i \leq k+1$ η ακολουθία $\left(\lambda_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$ και άρα συγκλίνουσα. Ορίζεται ως $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ με $f_i\left(\sum_{j=1}^{k+1} r_j e_j\right) = r_i$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα συναρτησιακά f_i είναι γραμμικά. Ισχύει επίσης $Kerf_i = span\{e_j : j \neq i\}$. Συνεπώς αφού $\dim(Kerf_i) = k$, τότε από το επαγωγικό βήμα ο $Kerf_i$ είναι πλήρης και άρα κλειστός από γνωστή πρόταση. Συνεπώς τα συναρτησιακά f_i είναι συνεχή από την προηγούμενη πρόταση 2.1.7. Επειδή η $f_i(x_n) = \lambda_i^{(n)}$ είναι γραμμική συνεχής απεικόνιση τότε από πρόταση 2.1.3 έπεται ότι θα είναι και Lipschitz και άρα και ομοιόμορφα συνεχής. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Ισχύει από θεώρημα ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις απεικονίζουν βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες. Επομένως η $\left(\lambda_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$ και άρα συγκλίνουσα. Τότε αν τεθεί $\lambda_i = \lim_n \lambda_i^{(n)}$, $\forall i = 1,2,..k+1$ ορίζεται το $x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i \in X$. Τότε

$$\|x_n - x\|_X = \left\|\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i{}^{(n)} e_i - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i\right\|_X = \left\|\sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_i{}^{(n)} - \lambda_i) e_i\right\|_X \leq \sum_{i=1}^{k+1} \left|\lambda_i{}^{(n)} - \lambda_i\right| < (k+1)\frac{\varepsilon}{(k+1)}$$
$$= \varepsilon$$

Συνεπώς $x_n \to x$.

■

Λήμμα 2.1.9

Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και $\left(e_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ μια Hamel βάση του X. Τότε $\exists M > 0$ που εξαρτάται από τη νόρμα και τη βάση ώστε να ισχύει:

$$\forall x \in X, x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \ \ : \max\{|\lambda_i| : i = 1,2..n\} \leq M\|x\|_X$$

Απόδειξη

Για κάθε $i = 1,2..n$ θεωρούνται τα πιο κάτω συναρτησιακά $f_i: X \to \mathbb{R}$ με $f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \lambda_i$. Ισχύει ότι το f_i είναι γραμμικό και $Kerf_i = span\{e_j : j \neq i\}$. Άρα $\dim(Kerf_i) < \infty$. Επομένως ο $Kerf_i$ είναι πλήρης και κλειστός υπόχωρος του X. Συνεπώς το f_i είναι φραγμένο συναρτησιακό. Δηλαδή $\|f_i\| < \infty$. Αν $M = \max\{\|f_i\| : i = 1,2,..n\}$ τότε για

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$$

ισχύει ότι $\forall i = 1,2..n$ ότι $|\lambda_i| = |f_i(x)| \leq \|f_i\|\|x\|_X \leq M\|x\|_X$.

■

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα σημαντικό θεώρημα, το θεώρημα της αυτόματης συνέχειας που μέσω της πληροφορίας για την διάσταση του χώρου X μπορεί να εξαχθεί αν ο T είναι συνεχής.

Θεώρημα 2.1.10

Έστω X, Y χώροι με νόρμα με τον X να είναι πεπερασμένης διάστασης. Τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T: X \to Y$ είναι φραγμένος.

Απόδειξη

Έστω $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ μια Hamel βάση του X. Ορίζεται ως $N = \sum_{j=1}^{n} \left\|T(e_j)\right\|_Y$. Από το προηγούμενο λήμμα 2.1.9 ισχύει ότι αν $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ τότε $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\max\{|\lambda_i| : i = 1,2..n\} \leq M\|x\|_X$. Άρα για $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_Y = \left\|T(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j)\right\|_Y = \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(e_j)\right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i| \left\|T(e_j)\right\|_Y \leq M\|x\|_X \sum_{j=1}^{n} \left\|T(e_j)\right\|_Y \\ = \left(M \sum_{j=1}^{n} \left\|T(e_j)\right\|_Y\right) \|x\|_X \\ = MN\|x\|_X \end{aligned}$$

Επομένως ο T είναι συνεχής και άρα φραγμένος με $\|T\| \leq MN$.

■

Ορισμός 2.1.11

Αν X, Y, Z διανυσματικοί χώροι και $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$. Τότε ορίζεται η *σύνθεση των τελεστών* S, T:

$$S^\circ T \equiv ST: X \to Z \text{ με } (ST)(x) = S(T(x))$$

Πρόταση 2.1.12

Αν $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$ τότε $S^\circ T \in B(X, Z)$ και $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Απόδειξη

Αρχικά αποδεικνύεται ότι ο $S^\circ T$ είναι γραμμικός. Έστω $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε

$$\begin{aligned} (S^\circ T)(\lambda x + \mu y) = S\big(T(\lambda x + \mu y)\big) = S(\,T(\lambda x) + T(\mu\, y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) \\ = S\big(\lambda T(x)\big) + S(\mu T(y)) \\ = \lambda\, S\big(T(x)\big) + \mu\, S(T(y)) \end{aligned}$$

$$= \lambda(ST)(x) + \mu\,(ST)(y)$$

Επομένως ο ST είναι γραμμικός. Επίσης ο ST είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς είναι και φραγμένοι με βάση τον χαρακτηρισμό συνέχειας γραμμικών τελεστών.(πρόταση 2.1.3) Δηλαδή $ST \in B(X,Z)$. Επίσης $\forall x \in X$ ισχύει ότι:
$\|(ST)(x)\|_Z = \|S(T(x))\|_Z = \|S\|\|T(x)\|_Y \leq \|S\|\|T\|\|x\|_X$. Άρα $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

■

Πρόταση 2.1.13

Ο πολλαπλασιασμός (σύνθεση) τελεστών ως απεικόνιση που ορίστηκε πιο πάνω είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη

Θα εφαρμοστεί το ακολουθιακό κριτήριο συνέχειας. Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$ και $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$ με $\lim_n T_n = T \in B(X)$ και $\lim_n S_n = S \in B(X)$. Ισοδύναμα $(S_n,T_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\|\cdot\|}{\rightrightarrows} (S,T)$ ως προς τη νόρμα γινόμενο του $B(X)\times B(X)$. Τότε θα δειχθεί ότι $(^\circ)(S_n,T_n) \equiv S_nT_n \overset{\|\cdot\|}{\rightrightarrows} ST$. Ισοδύναμα δηλαδή $(\|S_nT_n - ST\|)_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$. Πράγματι

$$\|S_nT_n - ST\| = \|S_nT_n - ST_n + ST_n - ST\| = \|(S_n - S)T_n + S(T_n - T)\|$$
$$\leq \|S_n - S\|\|T_n\| + \|S\|\|T_n - T\| \quad (*)$$

Επειδή $\lim_n T_n = T$, έπεται ότι η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
Συνεπώς $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα από την $(*)$έπεται ότι:

$$\|S_nT_n - ST\| \leq M\|S_n - S\| + \|S\|\|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$$

Ισοδύναμα $S_nT_n \overset{\|\cdot\|}{\rightrightarrows} ST$. Δηλαδή η σύνθεση είναι συνεχής στο χώρο γινόμενο $B(X)\times B(X)$.

■

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα φραγμένων γραμμικών τελεστών.
Αρχικά ο πολλαπλασιαστικός τελεστής ορίζεται ως εξής:
Έστω $f \in C[a,b]$, τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$M_f\colon L_2[a,b] \to L_2[a,b]$$
$$\text{με } \big(M_f\varphi\big)(x) = f(x)\varphi(x)$$

ο M_f είναι γραμμικός. Πράγματι έστω $g,\varphi \in L_2[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.
Τότε: $M_f(\lambda\varphi + g)(x) = f(x)(\lambda\varphi + g)(x) = f(x)[\lambda\varphi(x) + g(x)] = \lambda f(x)\varphi(x) + f(x)g(x)$

$$= \lambda(M_f\varphi)(x) + (M_fg)(x)$$

Επομένως ο M_f είναι γραμμικός τελεστής. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο M_f είναι φραγμένος.
Ισχύει ότι:

$$\big\|M_f(\varphi)\big\|_{L_2[a,b]}^2 = \|f\varphi\|_{L_2[a,b]}^2 = \int_\alpha^\beta |f(x)|^2\,|\varphi(x)|^2dx \leq \Bigg(\underbrace{sup}_{x\in L_2[a,b]}|f(x)|\Bigg)^2 \int_\alpha^\beta |\varphi(x)|^2dx$$
$$= \|f\|_\infty^2 \int_\alpha^\beta |\varphi(x)|^2dx = \|f\|_\infty^2\|\varphi\|_{L_2[a,b]}^2$$

Άρα $\big\|M_f(\varphi)\big\|_{L_2[a,b]} \leq \|f\|_\infty\|\varphi\|_{L_2[a,b]}$. Επομένως $\big\|M_f\big\| \leq \|f\|_\infty$, δηλαδή ο M_f είναι φραγμένος.

Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα φραγμένου τελεστή είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής. Έστω $[\alpha, b], [c, d]$ κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$ και $k: [c, d] \times [\alpha, b] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ο ολοκληρωτικός τελεστής έχει ως εξής:

$$T: L_2[a, b] \to L_2[c, d]$$

$$\text{με } \big(T(f)\big)(t) = \int_a^b k(t, s) f(s) ds$$

Αρχικά αποδεικνύεται ότι ο T είναι γραμμικός. Πράγματι για $f, g \in L_2[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τότε:

$$\begin{aligned}
\big(T(\lambda f + g)\big)(t) &= \int_a^b k(t, s)(\lambda f + g)\,(s) ds \\
&= \int_a^b k(t, s)[\lambda f(s) + g(s)]\, ds \\
&= \lambda \int_a^b k(t, s)\, f(s) ds + \int_a^b k(t, s) g(s) ds = \lambda\big(T(f)\big)(t) + \big(T(g)\big)(t)
\end{aligned}$$

Συνεπώς ο T είναι γραμμικός τελεστής. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο Τ είναι φραγμένος. Ισχύει:

$$\|T(f)\|^2_{L_2[a,b]} = \int_c^d \left|\big(T(f)\big)(t)\right|^2 dt$$

αλλά

$$\begin{aligned}
\left|\big(T(f)\big)(t)\right|^2 = \left|\int_a^b k(t, s) f(s) ds\right|^2 &\overset{C_S}{\leq} \left(\int_a^b |k(t, s)|^2 ds\right)\left(\int_a^b |f(s)|^2 ds\right) \\
&= \|f\|^2_{L_2[a,b]} \left(\int_a^b |k(t, s)|^2 ds\right)
\end{aligned}$$

συνεπώς ισχύει: $\|T(f)\|^2_{L_2[a,b]} \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t, s)|^2 ds\, dt\right) \|f\|^2_{L_2[a,b]}$.

Επομένως $\|T(f)\|_{L_2[a,b]} \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t, s)|^2 ds\, dt\right)^{1/2} \|f\|_{L_2[a,b]}$. Άρα ο Τ είναι φραγμένος με $\|T\| \leq \left(\int_c^d \int_a^b |k(t, s)|^2 ds\, dt\right)^{1/2}$.

2.2 Ημιαντι-διγραμμικές Μορφές (Sesquilinear Forms)

Ορισμός 2.2.1

Έστω H, K χώροι Hilbert και η απεικόνιση:

$$\varphi: H \times K \to \mathbb{C} \;\text{ με}(x, y) \longmapsto \varphi(x, y) \in \mathbb{C}$$

Η φ θα λέγεται ημιαντι-διγγραμική μορφή αν

α) $\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\, \varphi(x_1, y) + \mu\, \varphi(x_2, y), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\; \kappa\alpha\iota\; \forall x_1, x_2 \in H\,, y \in K$

β) $\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda}\varphi(x, y_1) + \bar{\mu}\varphi(x, y_2), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\; \kappa\alpha\iota\; \forall y_1, y_2 \in K\,, x \in H$

Επίσης η φ θα λέγεται φραγμένη αν $\exists k > 0: |\varphi(x, y)| \leq k\|x\|\|y\|, \forall x \in H, \forall y \in K$.

Θεώρημα 2.2.2

Έστω H, K χώροι Hilbert. Ισχύουν τα πιο κάτω:

α) Αν $A \in B(H, K)$ τότε η απεικόνιση

$$\varphi_A(x, y) = \langle A(x), y\rangle, x \in H, y \in K$$

είναι φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή.
β) Κάθε φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή φ ορίζει ένα φραγμένο τελεστή Α. Συγκεκριμένα

$$\varphi(x,y) = \langle A(x), y\rangle$$

γ) Αν $B_b = \{\varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma\ \eta\mu\iota\alpha\nu\tau\iota - \delta\iota\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mu o\rho\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma\}$ τότε υπάρχει «1-1» και «επί» απεικόνιση $T: B(H,K) \to B_b$.

Απόδειξη

α) Αρχικά θα δειχθεί ότι η $\varphi_A(x,y) = \langle A(x), y\rangle, x \in H, y \in K$ είναι ημιαντι-διγραμμική μορφή. Τότε για $x_1, x_2 \in H$, $y \in K$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ότι:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \langle A(\lambda x_1 + \mu x_2), y\rangle = \langle \lambda A(x_1) + \mu A(x_2), y\rangle &= \lambda\langle A(x_1), y\rangle + \mu\langle A(x_2), y\rangle \\ &= \lambda\varphi_A(x_1, y) + \mu\lambda\varphi_A(x_2, y)\end{aligned}$$

Επίσης για $y_1, y_2 \in K$, $x \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\varphi_A(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \langle A(x), \lambda y_1 + \mu y_2\rangle = \overline{\langle \lambda y_1 + \mu y_2, x\rangle} &= \bar{\lambda}\ \overline{\langle y_1, x\rangle} + \bar{\mu}\ \overline{\langle y_2, x\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\,\langle x, y_1\rangle + \bar{\mu}\ \langle x, y_2\rangle \\ &= \bar{\lambda}\,\varphi_A(x, y_1) + \ \bar{\mu}\ \varphi_A(x, y_2)\end{aligned}$$

Συνεπώς η φ_A είναι ημιαντι-διγραμμική μορφή. Θα δειχθεί ότι είναι φραγμένη. Ισχύει:

$$|\varphi_A(x,y)|^2 = |\langle A(x), y\rangle|^2 \overset{C-S}{\leq} \langle A(x), A(x)\rangle\langle y, y\rangle = \|A(x)\|^2{}_K\|y\|^2{}_K \leq \|A\|^2\|x\|^2{}_H\|y\|^2{}_K$$

Άρα η φ_A είναι φραγμένη.

β) Έστω $\varphi: H \times K \to \mathbb{C}$ μια φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή. Για $x \in H$ σταθερό η απεικόνιση $\overline{\varphi(x,\cdot)}: K \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική και αποτελεί συνεχές συναρτησιακό αφού η φ είναι φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή. Τότε από το θεώρημα Αναπαράστασης Riesz $\exists!\, y_x \in K\ \tau.\omega\ \overline{\varphi(x,y)} = \langle y, y_x\rangle, \forall y \in K$. Άρα $\varphi(x,y) = \overline{\langle y, y_x\rangle} = \langle y_x, y\rangle, \forall y \in K$. Ορίζεται η απεικόνιση $A: H \to K$ με $A(x) = y_x$. Τότε θα ισχύει ότι $\varphi(x,y) = \langle A(x), y\rangle$. Θα δειχθεί οτι $A \in B(H,K)$. Έστω $x_1, x_2 \in H$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ τότε:

$$\begin{aligned}\langle A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y\rangle = \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \lambda_1\varphi(x_1, y) + \lambda_2\varphi(x_2, y) \\ &= \lambda_1\langle A(x_1), y\rangle + \lambda_2\langle A(x_2), y\rangle \\ &= \langle \lambda_1 A(x_1), y\rangle + \langle \lambda_2 A(x_2), y\rangle \\ &= \langle \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2), y\rangle\end{aligned}$$

Άρα τότε $\langle A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y\rangle = \langle \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2), y\rangle$, $\forall y \in K$. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$$

Δηλαδή ο A είναι γραμμικός τελεστής. Θα δειχθεί ότι ο A είναι φραγμένος. Εύκολα αποδεικνύεται ότι σε ένα χώρο Hilbert ισχύει: $\|x\| = \underbrace{sup}_{y \neq O_H} \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}$. Τότε

$$\|A(x)\|_K = \underbrace{sup}_{y \neq O_K} \frac{|\langle A(x), y\rangle|}{\|y\|} = \underbrace{sup}_{y \neq O_K} \frac{|\varphi(x,y)|}{\|y\|} \leq \underbrace{sup}_{y \neq O_K} \frac{k\|x\|\|y\|}{\|y\|} = k\|x\|$$

Άρα $\|A\| \leq k$, δηλαδή ο A είναι φραγμένος τελεστής.

γ) Η απεικόνιση $T: B(H,K) \to B_b$ με $T(A) = \varphi_A$ είναι καλά ορισμένη αφού για κάθε φραγμένο τελεστη A από το (α) έπεται ότι η φ_A είναι φραγμενη ημιαντι-διγραμμική μορφή. Δηλαδή $\varphi_A \in B_b$. Επίσης από το (β) έχουμε ότι η απεικόνιση Τ είναι «επί». Μένει να δειχθεί ότι η T είναι «1-1». Έστω $A_1, A_2 \in B(H,K)$ και ισχύει $T(A_1) = \mathrm{T}(A_2)$. Τότε $\varphi_{A_1} = \varphi_{A_2}$. Άρα

$$\langle A_1(x), y\rangle = \langle A_2(x), y\rangle, \forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \langle A_1(x) - A_2(x), y\rangle = 0, \forall x \in H\ , \forall \mathrm{y} \in \mathrm{K}$$

Δηλαδή $A_1(x) - A_2(x) = O_K, \forall x \in H \Longrightarrow A_1 = A_2$. Επομένως η T είναι «επί» απεικόνιση.

■

2.3 Ο συζυγής ενός φραγμένου Γραμμικού Τελεστή σε χώρο Hilbert (Hilbert adjoint)

Σε αυτό το χωρίο θα διακριθούν δυο περιπτώσεις όπου ο διανυσματικός χώρος H μπορεί να είναι είτε πεπερασμένος είτε απειροδιάστατος. Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης χωρού.

Αν H είναι ένας χώρος Hilbert με $dimH<\infty$ και $\{e_i: i = 1,2..n\}$ μια ορθοκανονική βάση και $T: H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ως προς τη βάση αυτή αντιστοιχεί ένας πίνακας $A = (\alpha_{ij})$. Δηλαδή $T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$ και μέσω ανάλυσης Fourier ισχύει ότι $\alpha_{ij} = \langle T(e_j), e_i\rangle$. Αν $B = \bar{A}^T = (\overline{a_{ji}})$. Τότε ο B ως προς την ίδια βάση ορίζει μια νέα γραμμική απεικόνιση $T^*: H \to H$ με $b_{ij} = \langle T^*(e_j), e_i\rangle$ αλλά αφού $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ έπεται ότι $\overline{\langle T(e_i), e_j\rangle} = \langle e_j, T(e_i)\rangle = \langle T^*(e_j), e_i\rangle \Longrightarrow \overline{\langle e_j, T(e_i)\rangle} = \overline{\langle T^*(e_j), e_i\rangle}$. Συνεπώς

$$\langle T(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, T^*(e_j)\rangle$$

Πόρισμα 2.3.1
Για διανυ.χώρο πεπερασμένης διάστασης ($\dim H < \infty$) ότι $\forall x, y \in H$: $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$.
Απόδειξη
Έστω $x, y \in H$, τότε $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. Τότε

$$\langle T(x), y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\langle \sum_{j=1}^{n} y_j e_j , T(e_i)\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} \overline{\langle e_j, T(e_i)\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle T(e_i), e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, T^*(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j}\, \overline{\langle T^*(e_j), e_i\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\langle \sum_{j=1}^{n} y_j T^*(e_j), e_i\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j T^*(e_j)\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j T^*(e_j)\rangle$$

$$= \langle x, T^*\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\right)\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

■

Θα δούμε μέσω του πιο κάτω θεωρήματος ότι το πιο πάνω αποτέλεσμα ισχύει και σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert.

Θεώρημα 2.3.2
Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in B(H, K)$. Τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $A^* \in B(K, H)$τέτοιος ώστε

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle \ \forall x \in H \ και \, \forall y \in K \ με \ \|A\| = \|A^*\|$$

Απόδειξη
Έστω η απεικόνιση $\varphi(y, x): K \times H \to \mathbb{C}$ με $\varphi(y, x) = \langle y, A(x)\rangle$, (1). Θα δειχθεί ότι είναι μια φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή. Έστω $y_1, y_2 \in K$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ τότε:

$$\varphi(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, x) = \langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, A(x)\rangle = \lambda_1\langle y_1, A(x)\rangle +, \lambda_2\langle y_2, A(x)\rangle = \lambda_1\varphi(y_1, x) + \lambda_2\varphi(y_2, x)$$

Άρα η $y \longmapsto \varphi(y, x)$ είναι γραμμική. Για $x_1, x_2 \in H$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\varphi(y, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \langle y, A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\rangle = \langle y, \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)\rangle &= \overline{\lambda_1}\langle y, A(x_1)\rangle + \overline{\lambda_2}\langle y, A(x_2)\rangle \\ &= \overline{\lambda_1}\varphi(y, x_1) + \overline{\lambda_2}\,\varphi(y, x_2)\end{aligned}$$

Συνεπώς η $x \longmapsto \varphi(y, x)$ είναι αντιγραμμική. Άρα η φ είναι όντως μια ημιαντι-διγραμμική μορφή. Ακολούθως αποδεικνύεται ότι η φ είναι φραγμένη. Πράγματι

$$|\varphi(y, x)| = |\langle y, A(x)\rangle| \overbrace{\leq}^{C\_S} \|y\|\|A(x)\| \leq \|y\|\|A\|\|x\| \Rightarrow \|\varphi\| \leq \|A\|$$

Δηλαδή η φ είναι φραγμένη απεικόνιση. Από σχετικό θεώρημα ορίζεται ο $A^*: K \to H$ με $A^* \in B(K, H)$ τέτοια ώστε $\varphi(y, x) = \langle A^*(y), x\rangle$, (2). Από τις μορφές (1) και (2) καταλήγουμε ότι

$$\langle y, A(x)\rangle = \langle A^*(y), x\rangle \Leftrightarrow \overline{\langle y, A(x)\rangle} = \overline{\langle A^*(y), x\rangle} \Leftrightarrow \langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\|A^*\| = \underbrace{sup}_{y \neq 0_K} \frac{\|A^*(y)\|_H}{\|y\|_K} = \underbrace{sup}_{\substack{y \neq 0_K \\ x \neq 0_H}} \frac{|\langle A^*(y), x\rangle|}{\|x\|_H\|y\|_K} = \underbrace{sup}_{\substack{y \neq 0_K \\ x \neq 0_H}} \frac{|\langle y, A(x)\rangle|}{\|x\|_H\|y\|_K} = \underbrace{sup}_{x \neq 0_H} \frac{\|A(x)\|_K}{\|x\|_H} = \|A\|$$

■

Ορισμός 2.3.3 (Hilbert Συζυγής)
Έστω $A \in B(H, K)$. Ο μοναδικός τελεστής $A^* \in B(K, H)$ ονομάζεται Hilbert συζυγής του A.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα συνεχών γραμμικών τελεστών από τους οποιους καθορίζεται η αντίστοιχη συζυγή μορφή τους.

Παραδείγματα
α) Ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f έχει ως συζυγή τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{\bar{f}}$.
Πράγματι για κάθε $\varphi, g \in L^2[a, b]$ έστω ότι ισχύει

$$\begin{aligned}\langle M_f\varphi, g\rangle = \langle \varphi, M_f^* g\rangle \Leftrightarrow \int_a^b (M_f\varphi)(x)\overline{g(x)}dx &= \int_a^b \varphi(x)\,\overline{(M_f^* g)(x)}dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\overline{g(x)}dx &= \int_a^b \varphi(x)\overline{(M_f^* g)(x)}dx\end{aligned}$$

Συνεπώς:
$\overline{(M_f^* g)(x)} = f(x)\overline{g(x)}$ $\sigma\chi\varepsilon\delta\acute{o}\nu\ \pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon} \Leftrightarrow (M_f^* g)(x) = \overline{f(x)}g(x) = (M_{\bar{f}}g)(x)\sigma\chi\varepsilon\delta\acute{o}\nu\ \pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}.$
Άρα $M_f^* = M_{\bar{f}}$
β) Ο ολοκληρωτικός τελεστής $T: L^2[a,b] \longrightarrow L^2[c,d]$ με πυρήνα τη συνεχή συνάρτηση $K(t,s): [c,d] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ έχει ως συζυγή τον ολοκληρωτικό τελεστή με πυρήνα τον $\overline{K(s,t)}$.
Πράγματι έστω $f \in L^2[a,b]$ και $g \in L^2[c,d]$ και έστω ότι ισχύει $\langle T(f), g\rangle = \langle f, T^*(g)\rangle$. Τότε ισοδύναμα ισχύει:

$$\int_c^d \big(T(f)\big)(t)\overline{g(t)}dt = \int_a^b f(s)\overline{\big(T^*(g)\big)(s)}ds \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_c^d \left(\int_a^b k(t,s)f(s)ds\right)\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b f(s)\overline{\big(T^*(g)\big)(s)}ds \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \int_c^d f(s)k(t,s)\,\overline{g(t)}\,ds\,dt = \int_a^b f(s)\overline{\big(T^*(g)\big)(s)}ds \Leftrightarrow$$

Άρα

$$\overline{\big(T^*(g)\big)(s)} = \int_c^d k(t,s)\overline{g(t)}dt$$

Επομένως $\big(T^*(g)\big)(s) = \int_c^d \overline{k(t,s)}g(t)dt$. Δηλαδή $\big(T^*(g)\big)(t) = \int_c^d \overline{k(s,t)}g(s)ds$.

Ορισμός 2.3.4 (Ενέλιξη (involution))
Η συνάρτηση της ενέλιξης“ $*$ ” ορίζεται ως εξής “ $*$ ”: $\mathrm{B(H,K)} \to \mathrm{B(K,H)}$ με $A \mapsto A^*$.
Ιδιότητες
$\forall A, B \in \mathrm{B(H,K)}$ ισχύει για $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$:
α) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ β) $(A+B)^* = A^* + B^*$
γ) $(A^\circ B)^* = B^*A^*$ δ) $(A^*)^* = A$
ε) $\|A^*A\| = \|A\|^2$
Απόδειξη
α) $\langle(\lambda A)(x), y\rangle = \langle\lambda\, A(x), y\rangle = \lambda\langle A(x), y\rangle = \lambda\,\langle x, A^*(y)\rangle = \lambda\,\overline{\langle A^*(y), x\rangle} = \overline{\langle\bar{\lambda}A^*(y), x\rangle} = \langle x, \bar{\lambda}A^*(y)\rangle$
Άρα $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$.
β) $\langle(A+B)(x), y\rangle = \langle A(x) + B(x), y\rangle = \langle A(x), y\rangle + \langle B(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle + \langle x, B^*(y)\rangle$
$= \langle x, A^*(y) + B^*(y)\rangle$
$= \langle x, (A^* + B^*)(y)\rangle$
Άρα $(A+B)^* = A^* + B^*$.
γ) $\langle(A^\circ B)(x), y\rangle = \langle A\big(B(x)\big), y\rangle = \langle B(x), A^*(y)\rangle = \langle x, B^*(A^*(y))\rangle = \langle x, (B^{*\,\circ}A^*)(y)\rangle$
Άρα $(A^\circ B)^* = B^*A^*$.
δ) $\langle A^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, A^*(x)\rangle} = \overline{\langle A(y), x\rangle} = \langle x, A(y)\rangle$. Άρα $(A^*)^* = A$.
ε) Από ιδιότητα της σύνθεσης ισχύει:

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| \overset{\|A\|=\|A^*\|}{=} \|A\|^2, \qquad (1)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \langle x, A^*(A(x))\rangle \overset{C-S}{\leq} \|x\|\|A^*(A(x))\| \leq \|x\|^2\|A^*A\|$$

Δηλαδή $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$ (2). Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

■

Ορισμός 2.3.5
Έστω $A \in B(H,K)$. Τότε ορίζονται τα πιο κάτω για τον τελεστή A
α) Πυρήνας (*Kernel*) του A τον κλειστό υπόχωρο
$$Ker\ A = \{x \in H : A(x) = O_K\}$$
β) Εικόνα (*Image*) του A τον υπόχωρο
$$Im\ A = A(H) = \{y \in K : \exists x \in H\ \tau.\omega\ y = A(x)\}$$

Πρόταση 2.3.6
Έστω ένας τελεστής $A \in B(H,K)$. Τότε ισχύουν:
α) $Ker\ A = (Im\ A^*)^\perp$ γ) $\overline{Im\ A} = (\ker A^*)^\perp$
β) $Ker\ A^* = (Im\ A)^\perp$ δ) $\overline{Im\ A^*} = (\ker A)^\perp$

Απόδειξη
α) Έστω $x \in Ker\ A$. Δηλαδή $A(x) = O_K$. Τότε ισοδύναμα ισχύει
$$\langle A(x), y\rangle = 0\ , \forall y \in K \Leftrightarrow \langle x, A^*(y)\rangle = 0, \forall y \in K \Leftrightarrow x \perp A^*(y), \forall y \in K$$
Δηλαδή ισχύει ισοδύναμα ότι $y \in (Im\ A^*)^\perp$. Επομένως $Ker\ A = (Im\ A^*)^\perp$.
β) $Ker\ A^* \overset{(\alpha)}{=} (Im(A^*)^*)^\perp = (Im\ A)^\perp$
γ) $\overline{Im\ A} = (\overline{ImA})^{\perp\perp} = \overline{span(\overline{ImA})} = \overline{\overline{span(Im\ A)}} = \overline{span(Im\ A)} = (ImA)^{\perp\perp} = ((ImA)^\perp)^\perp \overset{(\beta)}{=} (KerA^*)^\perp$
δ) $\overline{Im\ A^*} = (Ker(A^*)^*)^\perp = (KerA)^\perp$

■

2.4 Αυτοσυζυγείς, Φυσιολογικοί και Ορθομοναδιαίοι Τελεστές

Ορισμός 2.4.1
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται αυτοσυζυγής ή ερμιτιανός αν $A = A^*$.

Πιο κάτω παρουσιάζονται κάποιες συνθήκες για τον πολλαπλασιαστικό και ολοκληρωτικό τελεστή που όταν είναι σε ισχύ οι δυο τελεστές είναι αυτοσυζυγείς. Συγκεκριμένα
α) Ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f : L^2[\mathrm{a,b}] \to L^2[\mathrm{a,b}]$ είναι αυτοσυζυγής αν $M_f^* = M_f$ δηλαδή $M_{\bar{f}} = M_f \Leftrightarrow f = \bar{f}$.
β) Ο ολοκληρωτικός τελεστής $T: L^2[\mathrm{a,b}] \to L^2[\mathrm{a,b}]$ με $\big(T(f)\big)(\mathrm{t}) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds$ όπου $K(t,s): [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ η συνεχής συνάρτηση πυρήνα αν
$$T^* = \mathrm{T} \Leftrightarrow \int_\alpha^b \overline{K(s,t)}g(s)ds = \int_a^b K(t,s)g(s)ds \Leftrightarrow \overline{K(s,t)} = K(t,s)\ \sigma\tau o\ [a,b] \times [a,b]$$

Πρόταση 2.4.2
Έστω $A \in B(H)$ αυτοσυζυγής. Τότε ισχύει:
$$H = Ker\ A \oplus \overline{ImA}$$
Απόδειξη
Ο $KerA$ είναι κλειστός υπόχωρος του H. Από θεώρημα προβολής, ισχύει:
$$H = Ker\ A \oplus (Ker\ A)^{\perp} = Ker\ A \oplus \overline{ImA^*} \underbrace{=}_{A^*=A} Ker\ A \oplus \overline{ImA}$$
■

Πρόταση 2.4.3
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}\ , \forall x \in H$.
Απόδειξη
($\Longrightarrow$) Έστω A είναι αυτοσυζυγής. Δηλαδή $A = A^*$. Τότε
$$\langle A(x), x\rangle = \langle x, A^*(x)\rangle \underbrace{=}_{A^*=A} \langle x, A(x)\rangle = \overline{\langle A(x), x)\rangle}$$
Συνεπώς $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.
($\Longleftarrow$) Αντίστροφα έστω $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}\ , \forall x \in H$. Τότε $\overline{\langle A(x), x\rangle} = \langle A(x), x\rangle$. Δηλαδή
$$\overline{\langle x, A(x)\rangle} = \langle A(x), x\rangle = \langle x, A^*(x)\rangle \Longrightarrow \langle x, A(x) - A^*(x)\rangle = 0, \forall x \in H$$
Επομένως $\langle x, (A - A^*)(x)\rangle = 0, \forall x \in H$. Άρα $(A - A^*)(x) = 0_H$. Δηλαδή $A^* = A$.
■

Η πιο πάνω πρόταση δεν ισχύει για πραγματικούς χώρους Hilbert, αφού $\langle A(x), y\rangle \in \mathbb{R}, \forall x, y \in H$.

Ορισμός 2.4.4
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται θετικός και συμβολίζεται με $A \geq 0$ αν ισχύει $\langle A(x), x\rangle \geq 0, \forall x \in H$.
Επίσης το $B_\alpha(H)$ αποτελείτο σύνολο των αυτοσυζυγών τελεστών επί του H και με $B_\theta(H)$ το σύνολο των θετικών τελεστών επί του H.

Είναι προφανές από την πιο πάνω πρόταση ότι κάθε θετικός τελεστής είναι και αυτοσυζυγής. Συνεπώς $B_\theta(H) \subseteq B_\alpha(H)$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι το άθροισμα δυο θετικών τελεστών είναι επίσης θετικός τελεστής. Από την άλλη το γινόμενο δυο θετικών τελεστών δεν είναι θετικός τελεστής κατ'ανάγκη.
Ορισμός 2.4.5
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται:
α) φυσιολογικός (normal) αν ικανοποιεί: $A^*A = A\,A^*$
β) ορθομοναδιαίος (unitary) αν ικανοποιεί: $A^*A = A\,A^* = I$

Από τον πιο πάνω ορισμό έπεται το συμπέρασμα ότι κάθε ορθομοναδιαίος τελεστής είναι και φυσιολογικός.
Για παράδειγμα κάθε διαγώνιος τελεστής T_α είναι φυσιολογικός τελεστής.
Πράγματι αφού ο $T_\alpha: l_2 \to l_2$ με $T_\alpha(x) = (a_1x_1, a_2x_2, \dots)$ έχει σαν συζυγή τον $T_\alpha^* = T_{\overline{\alpha}}$. Τότε ισχύει:
$$T_\alpha^* T_\alpha = T_{\overline{\alpha}} T_\alpha = T_{\overline{\alpha}\alpha} = T_{\alpha\overline{\alpha}} = T_\alpha T_{\overline{\alpha}} = T_\alpha T_\alpha^*$$
Άρα όντως ο διαγώνιος τελεστής είναι φυσιολογικός.

Πρόταση 2.4.6
Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Ο τελεστής T είναι:
α) φυσιολογικός αν και μόνο αν $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|, \forall x \in H$.
β) ισομετρία αν και μόνο αν $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in H$ αν και μόνο αν $T^*T = I$.
γ) ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν είναι ισομετρία και επί.
Απόδειξη
α)($\Longrightarrow$) Έστω T φυσιολογικός. Δηλαδή $T^*T = TT^*$. Τότε ισχύει, $\forall x \in H$:

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, (T^*T)(x)\rangle = \langle x, (TT^*)(x)\rangle &= \overline{\langle (TT^*)(x), x\rangle} \\ &= \overline{\langle T^*(x), T^*(x)\rangle} \\ &= \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \|T(x)\|^2\end{aligned}$$

Άρα $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|, \forall x \in H$.
($\Longleftarrow$) Αντίστροφα έστω $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|, \forall x \in H$. Τότε $\|T(x)\|^2 = \|T^*(x)\|^2, \forall x \in H$. Ισοδύναμα τότε ισχύει, $\forall x \in H$:

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle &\Leftrightarrow \langle x, (T^*T)(x)\rangle = \langle x, (T^*)^*(T^*(x))\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x, (T^*T)(x)\rangle = \langle x, (T\,T^*)(x)\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x, ((T^*T) - (T\,T^*))(x)\rangle = 0\end{aligned}$$

Άρα $((T^*T) - (T\,T^*))(x) = O_H, \forall x \in H$. Επομένως $T^*T - TT^* = 0 \Leftrightarrow T^*T = TT^*$

β) Έστω ότι $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in H$. Τότε ισοδύναμα ισχύει $\forall x, y \in H$:

$$\langle x, (T^*T)(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \langle x, ((T^*T) - I)(y)\rangle = 0$$

Συνεπώς ισχύει $((T^*T) - I)(y) = O_H$. Άρα $T^*T - I = 0 \Leftrightarrow T^*T = I$. Επίσης έστω ότι ο T είναι ισομετρία. Δηλαδή ο T διατηρεί την επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο στον H.
Τότε $\forall x \in H$:

$$\begin{aligned}\|T(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \|T(x)\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle &\Leftrightarrow \langle x, (T^*T)(x)\rangle = \langle x, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x, ((T^*T) - I)(x)\rangle = 0\end{aligned}$$

Επομένως $((T^*T) - I)(x) = O_H, \forall x \in H$. Ισοδύναμα ισχύει: $T^*T = I$.
γ)($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο T είναι ορθομοναδιαίος. Δηλαδή $T^*T = T\,T^* = I$. Από τη σχέση $T^*T = I$ έπεται από το (β) ότι ο T είναι ισομετρία. Θαδειχθεί ότι ο T είναι «επί». Έστω $y \in H$. Τότε

$$(T\,T^*)(y) = I(y) = y = T(T^*(y))$$

($\Longleftarrow$) Αντίστροφα έστω ότι ο T είναι «επί» και ισομετρία. Τότε με βάση το (β) θα ισχύει ότι $T^*T = I$. Επίσης αφού ο T είναι «επί» θα ισχύει ότι $\forall y \in H\ \exists x \in H\ \tau.\omega\ y = T(x)$. Επομένως

$$T^*(y) = T^*\big(T(x)\big) = (T^*T)(x) = I(x) = x$$

Δηλαδή $x = T^*(y)$. Τότε έπεται ότι $y = T(x) = T\big(T^*(y)\big) = (T\,T^*)(y) = I(y)$. Συνεπώς $T\,T^* = I$. Άρα ο T είναι ορθομοναδιαίος.

■

2.5 Αντιστρέψιμοι Τελεστές

Ορισμός 2.5.1
Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $A \in B(X, Y)$. Ο τελεστής A λέγεται αντιστρέψιμος αν

$$\exists B \in B(Y, X): AB = I_Y\ \kappa\alpha\iota\ BA = I_X$$

με I_X, I_Y οι ταυτοτικοί τελεστές επί των X και Y αντίστοιχα.

Ο B όταν υπάρχει, είναι μοναδικός και συμβολίζεται με $B = A^{-1}$ και ονομάζεται αντίστροφος του A. Επίσης από τον ορισμό του αντίστροφου A^{-1}, ενός τελεστή $A \in B(X, Y)$, απαιτείται και ο A^{-1} να είναι φραγμένος τελεστής. Δηλαδή μπορεί ο A^{-1} να υπάρχει ως αντίστροφη απεικόνιση του A αλλά να μην είναι φραγμένος ο A^{-1}. Τότε ο A^{-1} δεν θα αποτελεί τον αντίστροφο του A.
Πιο κάτω αναφέρεται χωρίς απόδειξη το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης από το οποίο προκύπτει ένα βασικό πόρισμα.

Θεώρημα 2.5.2 (Open Mapping Theorem)
Αν X, Y είναι χώροι Banach και ο τελεστής $T \in B(X, Y)$ είναι επί, τότε ο T αποτελεί ανοικτή απεικόνιση. Δηλαδή το σύνολο $T(M)$ είναι ανοικτό στον Y για κάθε ανοικτό υποσύνολο M του X.

Πόρισμα 2.5.3
Αν X, Y είναι χώροι Banach και ο τελεστής $T \in B(X, Y)$είναι ''1-1'' και επί, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος.
Απόδειξη
Επειδή ο T είναι ''1-1'' και επί ο T^{-1} ορίζεται καλώς. Θα δειχθεί ότι ο $T^{-1}: Y \to X$ είναι φραγμένος. Έστω M ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε $(T^{-1})^{-1}(M) = T(M)$ με $T(M)$ να είναι ανοικτό από το θεώρημα Ανοικτής απεικόνισης. Συνεπώς ο T^{-1} είναι συνεχής γραμμικός τελεστής. Άρα ο T είναι αντιστρέψιμος.

■

Ορισμός 2.5.4
Ένας τελεστής $T \in B(X, Y)$ λέγεται κάτω φραγμένος αν $\exists c > 0 : \|T(x)\| \geq c\|x\|, \forall\, x \in X$.

Μια συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι αν ο T είναι κάτω φραγμένος τελεστής, τότε είναι ''1-1''.
Πράγματι, εστω $T \in B(X)$ κάτω φραγμένος. Αν $x, y \in X$, τότε έστω

$$T(x) = T(y) \Leftrightarrow T(x) - T(y) = O_X \Leftrightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|O_X\| \Longrightarrow 0 = \|T(x - y)\| \overbrace{\underbrace{\geq}_{\varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}.}}^{T\ \kappa\acute{\alpha}\tau\omega} c\|x - y\| \geq 0$$

Άρα $\|x - y\| = 0 \Longrightarrow x = y$. Συνεπώς ο T είναι ''1-1''.

Πρόταση 2.5.5
Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in B(X)$. Ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών.
Απόδειξη
($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο T είναι αντιστρέψιμος. Τότε ισοδύναμα είναι ''1-1'' και ''επί''. Συνεπώς $ImT = X$. Άρα $\overline{ImT} = \bar{X} = X$. Δηλαδή η εικόνα του τελεστή T είναι πυκνή στο X. Επιπλέον ο T είναι κάτω φραγμένος. Πράγματι για $\forall x \in X$ ισχύει:

$$\|x\| = \|(T^{-1}T)(x)\| = \|T^{-1}(T(x))\| \underbrace{\leq}_{T^{-1} \in B(X)} \|T^{-1}\|\|T(x)\| \Longrightarrow \|T(x)\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\|$$

Άρα ο T είναι κάτω φραγμένος.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι ο T είναι κάτω φραγμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών. Τότε ως κάτω φραγμένος είναι ''1-1''. Αρκεί να δειχθεί ότι ο T είναι επί. Τότε θα είναι και αντιστρέψιμος από το γεγονός ότι ο X είναι Banach. Έστω $\big(T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ μια βασική ακολουθία. Τότε $\forall n > m$ με $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\| \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|T(x_n) - T(x_m)\| \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Άρα η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον X ο οποίος είναι Banach. Άρα $\exists x_0 \in X : \lim x_n = x_0$. Ο $T \in B(X)$. Άρα ισχύει ότι $\lim T(x_n) = T(x_0) \in \overline{ImT}$ αλλά ταυτόχρονα ισχύει $T(x_0) \in ImT$ αφού $x_0 \in X$. Άρα $\overline{ImT} \subset ImT$. Συνεπώς $ImT = \overline{ImT} = X$. Δηλαδή ο T είναι επί του X.

■

Πρόταση 2.5.6

Έστω X χώρος Banach. Αν ο $T \in B(X)$ είναι κάτω φραγμένος, τότε το σύνολο τιμών ImT είναι κλειστό.

Απόδειξη

Αρκεί να δειχθεί ότι $\overline{ImT} = ImT$. Προφανώς ισχύει ότι: $ImT \subset \overline{ImT}$. Μένει να δειχθεί ότι $\overline{ImT} \subset ImT$. Το τελευταίο αποδεικνύεται όπως στην προηγούμενη πρόταση.

■

Με τη βοήθεια της επαγωγής αποδεικνύεται και το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.5.7

Αν ο τελεστής $T \in B(X)$ είναι κάτω φραγμένος τότε και το ImT^n είναι κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 2.5.8

Έστω H ενας χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) ο T είναι αντιστρέψιμος

β) ο T^* είναι αντιστρέψιμος

γ) οι T και T^* είναι κάτω φραγμένοι

δ) οι T και T^* είναι ''1-1'' και το ImT είναι κλειστό

Απόδειξη

$(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ Έστω ότι ο T είναι αντιστρέψιμος. Τότε $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Ισοδύναμα $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I$. Δηλαδή: $(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$. Επομένως ο T^* είναι αντιστρέψιμος με $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(α) $\Longrightarrow$ (γ) Έστω ότι ο T είναι αντιστρέψιμος. Τότε $\forall x \in X$: $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|$ $\Longrightarrow \|T(x)\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\|$. Επομένως ο T είναι κάτω φραγμένος.

$(\gamma) \Longrightarrow$ (α) Έστω οι T και T^* είναι κάτω φραγμένοι. Δηλαδή είναι ''1-1''.Τότε ισχύει ότι: $\overline{ImT} = (Ker\,T^*)^{\perp} = \{O_X\}^{\perp} = H$. Συνεπώς το ImT είναι πυκνό στον H. Επίσης ο T είναι κάτω φραγμένος. Άρα το ImT είναι κλειστό. Δηλαδή $ImT = \overline{ImT} = H$. Επομένως ο T είναι επί του H. Από το πόρισμα 2.5.3 έπεται ότι ο T είναι αντιστρέψιμος.

$(\gamma) \Longrightarrow$ (δ) Έστω T και T^* είναι κάτω φραγμένοι. Τότε είναι και ''1-1''. Θα δειχθεί ότι το ImT είναι κλειστό. Έστω $\big(T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ μια βασική ακολουθία. Τότε $\forall n > m$ με $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\| \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|T(x_n) - T(x_m)\| \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Άρα η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον X ο οποίος είναι Banach. Άρα $\exists x_0 \in X : \lim x_n = x_0$. Ο $T \in B(X)$. Άρα ισχύει ότι $\lim T(x_n) = T(x_0) \in \overline{ImT}$ αλλά ταυτόχρονα ισχύει $T(x_0) \in ImT$ αφού $x_0 \in X$. Άρα $\overline{ImT} \subset ImT$. Συνεπώς $ImT = \overline{ImT}$. Δηλαδή το ImT είναι κλειστό.
$(\delta) \Longrightarrow$ (α) Έστω ότι οι T και T^* είναι ''1-1'' και το ImT είναι κλειστό. Αρκεί να δειχθεί ότι ο T είναι επί. Αφού το ImT είναι κλειστό ισχύει $ImT = \overline{ImT}$. Λόγω του ότι ο T^* είναι ''1-1'' έπεται ότι $KerT^* = \{O_X\}$. Επομένως $\overline{ImT} = (Ker\, T^*)^{\perp} = \{O_X\}^{\perp} = H$. Άρα $ImT = H$. Δηλαδή ο T είναι επί. Συνεπώς ο T είναι αντιστρέψιμος.

■

Πόρισμα 2.5.9
Ένας φυσιολογικός τελεστής T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος.

2.6 Προβολές

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιαστεί μια συνοπτική κλάση γραμμικών τελεστών που έχουν κυρίαρχο ρόλο στην γενικότερη θεωρία Γραμμικών Τελεστών. Μια ειδική κατηγορία προβολών, οι ορθογώνιες προβολές θα χρησιμοποιηθούν ευρέως στο β' μέρος που σχετίζεται με την θεωρία ομαλοποίησης τελεστικών εξισώσεων.

Ορισμός 2.6.1
Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και M, N υπόχωροι τέτοιοι ώστε $X = M \dotplus N$. Τότε

$$\forall x \in X, \exists!\, m \in M, n \in N : x = m + n$$

Επομένως από το πιο πάνω ορίζεται η απεικόνιση $P\colon X \to X$ με $P(x) = m$. Η P είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί τις ιδιότητες α) είναι γραμμική, β) $P^2 = P$, γ) $R(P) = M,\ \ker(P) = N$. Η απεικόνιση P ονομάζεται *προβολή* του X επί του υπόχωρου M παράλληλα προς τον υπόχωρο N.

Επίσης αν $P\colon X \to X$ είναι μια γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $P^2 = P$,τότε οι χώροι $R(P), Ker(P)$ είναι συμπληρωματικοί. Πράγματι

$$\forall x \in X\colon x = P(x) + \big(x - P(x)\big) = P(x) + (I - P)(x)$$

όπου $P(x) \in R(P)$ και $(I-P)(x) \in Ker(P)$. Πράγματι αφου

$P\big((I-P)(x)\big) = P\big(x - P(x)\big) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = O_X$. Δηλαδή $X = R(P) + Ker(P)$.
Επίσης ισχύει $R(P) \cap Ker(P) = \{O_X\}$. Πράγματι έστω $x \in R(P) \cap Ker(P)$. Τότε $x \in R(P)$. Δηλαδή $\exists y \in X\colon x = P(y)$. Επίσης ισχύει ότι $x \in Ker(P)$. Δηλαδή $P(x) = O_X$. Επομένως

$$O_X = P(x) = P(P(y) = P^2(y) = P(y) = x$$

Συνεπώς από μια τυχαία απεικόνιση P με την ιδιότητα $P^2 = P$, εξάγεται το αποτέλεσμα ότι οι χώροι $R(P), Ker(P)$ είναι συμπληρωματικοί. Άρα με βάση τον πιο πάνω ορισμό, προκύπτει ότι αυτή η απεικόνιση αποτελεί προβολή του X επί του $R(P)$ παράλληλα προς τον $Ker(P)$.

Ορισμός 2.6.2
Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $P \in B(X)$ ένας φραγμένος τελεστής. Ο τελεστής P λέγεται ταυτοδύναμος αν $P^2 = P$.

Πρόταση 2.6.3

Έστω X ένας χώρος με νόρμα και P ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Τότε οι υπόχωροι $R(P), Ker(P)$ είναι *κλειστοί* συμπληρωματικοί και ταυτόχρονα ισχύει:

$$Ker(P) = R(I - P) \text{ και } Ker(I - P) = R(P)$$

Απόδειξη

Αφού ο P είναι ταυτοδύναμος, τότε $P^2 = P$. Τότε το γεγονός ότι οι χώροι $R(P), Ker(P)$ είναι συμπληρωματικοί αποδείκτηκε πιο πάνω. Δηλαδή μέχρι στιγμής ο P είναι απεικόνιση προβολής. Θα δειχθεί ότι $R(P), Ker(P)$ είναι κλειστοί. Ισχύει ότι $Ker(P) = P^{-1}(\{O_X\})$ με $P \in B(X)$ και $\{O_X\}$ κλειστό. Συνεπώς το $Ker(P)$ είναι κλειστό. Επειδή ο P είναι ταυτοδύναμος, τότε και ο $I - P$ είναι ταυτοδύναμος. Άρα για να δειχθεί ότι το $R(P)$ αρκει να δειχθεί ότι $Ker(I - P) = R(P)$ αφού το $Ker(I - P)$ είναι κλειστό σύνολο. Έστω $x \in Ker(I - P)$. Δηλαδή

$$(I - P)(x) = O_X \Leftrightarrow x = P(x) \in R(P) \Longrightarrow Ker(I - P) \subset R(P)$$

Αντίστροφα έστω $x \in R(P)$. Δηλαδή $\exists y \in X : x = P(y)$. Τότε $P(x) = P\big(P(y)\big) = P^2(y) = P(y) = x$. Ισοδύναμα $x - P(x) = O_X \Leftrightarrow (I - P)(x) = O_X \Longrightarrow x \in \ker(I - P)$. Επομένως $R(P) \subset \ker(I - P)$. Συνεπώς $\ker(I - P) = R(P)$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $Ker(P) = R(I - P)$.

∎

Πρόταση 2.6.4

Έστω X ένας χώρος Banach και M, N δύο κλειστοί και συμπληρωματικοί υπόχωροι. Τότε η προβολή P του X επί τον M παράλληλα προς τον N είναι ταυτοδύναμος τελεστής.

Απόδειξη

Αφού η P είναι προβολή, έπεται ότι $P^2 = P$. Μένει να δειχθεί ότι $P \in B(X)$. Μ εφαρμογή του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος θα δειχθεί ότι ο P είναι φραγμένος. Αρκεί να δειχθεί ότι το γράφημα $Gr(P) = \{(x, P(x)) : x \in X\}$ είναι κλειστό. Έστω $\big(x_n, P(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του $Gr(P)$ τέτοια ώστε $\big(x_n, P(x_n)\big) \to (x_0, y)$. Ισοδύναμα$x_n \to x_0$ και $P(x_n) \to y$. Για να δειχθεί ότι το $Gr(P)$ είναι κλειστό, αρκεί να δειχθεί ότι $(x_0, y) \in Gr(P)$. Ισοδύναμα $y = P(x_0)$. Ισχύει ότι $P(x_n) \in R(P) = M$. Επειδή ο M είναι κλειστός υπόχωρος ισχύει ότι $y \in M$. Δηλαδή $\exists x \in X : y = P(x)$. Επομένως: $P(y) = P\big(P(x)\big) = P^2(x) = P(x) = y$, (1). Επίσης ισχύει:

$$(I - P)(x_n) = x_n - P(x_n) \in Ker(P) = N$$

Επειδή ο N είναι κλειστός υπόχωρος, τότε $x_0 - y \in Ker(P)$. Ισοδύναμα $P(x_0) = P(y)$, (2). Από (1) και (2) έπεται ότι $P(x_0) = y$.

∎

Στη συνέχεια θα οριστεί η έννοια της ορθής προβολής.

Ορισμός 2.6.5 (Ορθή Προβολή)

Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert. Τότε από το αποτέλεσμα του θεωρήματος Προβολής ισχύει ότι $M \oplus M^{\perp} = H$ μέσω του οποίου ορίζεται μια προβολή του H επί του M παράλληλα προς τον $M^{\perp}$ η οποία ονομάζεται *ορθογώνια προβολή.* Δηλαδή $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = m$ όπου ισχύουν οι ιδιότητες: $R(P) = M, Ker(P) = M^{\perp}$ και $P^2 = P$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε ορθή προβολή είναι ένας γραμμικός τελεστής. Πράγματι, έστω $x, y \in H$και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε από το θεώρημα Προβολής ισχύει ότι:

$$x = x_1 + y_1, x_1 \in M, y_1 \in M^{\perp}$$

$$y = x_2 + y_2, x_2 \in M, y_2 \in M^{\perp}$$

Επομένως: $P_M(\lambda x + y) = P_M(\lambda x_1 + \lambda y_1 + x_2 + y_2) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda\, P_M(x) + P_M(y)$.
Επίσης είναι και συνεχής τελεστής αφού ο H είναι χώρος Hilbert και οι $R(P) = M, Ker(P) = M^{\perp}$ είναι κλειστοί υπόχωροι. Δηλαδή ο P_M είναι ταυτοδύναμος τελεστής.

Στο παρακάτω θεώρημα αναφέρονται κάποιες σημαντικες ισοδυναμίες των ταυτοδύναμων τελεστών.

Θεώρημα 2.6.6
Έστω H ένας χώρος Hilbert και $P \in B(H)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
α) ο P είναι ορθογώνια προβολή
β) ο P είναι αυτοσυζυγής
γ) $\|P\| = 1$
δ) $\ker(P) \perp R(P)$

2.7 Φάσμα Τελεστή

Ορισμός 2.7.1
Έστω $T \in B(H)$. Φάσμα του τελεστή T ορίζεται ως το πιο κάτω σύνολο

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : o\ \lambda I - T\ \ \mu\eta\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\psi\iota\mu o\varsigma\}$$

Πρόταση 2.7.2
Έστω $T \in B(H)$. Το φάσμα $\sigma(T)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και ισχύει:

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| \leq \|T\|\}$$

Απόδειξη
Αρκεί να δειχθεί ότι το $\sigma(T)$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \to B(H)$ με $f(\lambda) = \lambda I - T$. Ισχύει ότι

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|\lambda\, I - T - (\mu\, I - T)\| = |\lambda - \mu|$$

Επομένως η f ως συνάρτηση Lipschitz είναι συνεχής. Αν το σύνολο των μη αντιστρέψιμων τελεστών συμβολιστεί με $M = B(H) \backslash B_{ant}(H)$,τότε από σχετικό θεώρημα ισχύει ότι το $B_{ant}(H)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $B(H)$. Συνεπώς αφού $M^c = B_{ant}(H)$, έπεται ότι το M είναι κλειστό υποσύνολο του $B(H)$. Ισχύει ότι $\sigma(T) = f^{-1}(M)$ είναι κλειστό ως αντίστροφη εικόνα κλειστού από συνεχή συνάρτηση. Αν $|\lambda| > \|T\| \Longrightarrow 1 > \frac{1}{|\lambda|}\|T\| = \left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|$. Επομένως ο τελεστής $I - \frac{1}{\lambda}T$ είναι αντιστρέψιμος(ισχύει από σχετικό θεώρημα). Ισοδύναμα ο τελεστής $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε $\lambda \notin \sigma(T)$. Συνεπώς $\lambda \in \sigma(T)\ \alpha\nu\ \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$. Άρα το $\sigma(T)$ είναι και φραγμένο σύνολο, δηλαδή συμπαγές.

∎

Παρακάτω παρουσιάζεται η διάκριση του φάσματος ενός τελεστή σε τρία μέρη,το σημειακό φάσμα, το προσεγγιστικά σημειακό φάσμα και το φάσμα συμπίεσης του τελεστή T. Συγκεκριμένα δίνονται από τον πιο κάτω ορισμό.

Ορισμός 2.7.3

Έστω $T \in B(H)$. Τότε ορίζονται τα πιο κάτω μέρη του φάσματος $\sigma(T)$:

α) *σημειακό φάσμα του* $T: \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker\ (\lambda I - T) \neq \{O_H\}\}$

β) *προσεγγιστικά σημειακό φάσμα του* T:

$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H\ \mu\varepsilon\ \|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}\ \mu\varepsilon\ \|(\lambda I - T)(x_n)\| \to 0\}$

γ) *φάσμα συμπίεσης του* T:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \overline{Im(\lambda I - T)} \neq H\}$$

Τα $\lambda \in \sigma_p(T)$ λέγονται ιδιοτιμές (eigenvalues) του T και τα $x \in Ker(\lambda I - T), x \neq O_H$ λέγονται ιδιοδιανύσματα (eigenvectors) του τελεστή T και $Ker(\lambda I - T)$ λέγονται ιδιόχωροι (eigenspaces) του T.

Πρόταση 2.7.4

Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(H)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

α) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

β) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T)\}$

γ) $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_p(T)\}$

Απόδειξη

α) Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*$ είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$. Επομένως $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

β) Από ορισμό ισχύει ότι:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker\ (\lambda I - T) \neq \{O_H\}\}$$

τότε από σχετική ιδιότητα των γραμμικών τελεστών (Πρόταση 2.3.6) ισχύει:

$$ker(\lambda I - T) = (Im(\lambda I - T)^*)^\perp = \left(Im(\bar{\lambda} I - T^*)\right)^\perp \neq \{O_H\}$$

$$\Rightarrow \left(Im(\bar{\lambda} I - T^*)\right)^{\perp\perp} \neq \{O_H\}^\perp = H$$

Άρα ισχύει ότι $\overline{Im(\bar{\lambda} I - T^*)} \neq H$. Επομένως $\bar{\lambda} \in \sigma_c(T)$.

γ) Από ορισμό ισχύει ότι:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \overline{Im(\lambda I - T)} \neq H\}$$

τότε από σχετική ιδιότητα των γραμμικών τελεστών (Πρόταση 2.3.6) ισχύει:

$$\overline{Im(\lambda I - T)} = (Ker(\lambda I - T)^*)^\perp = \left(Ker(\bar{\lambda} I - T^*)\right)^\perp \neq H$$

$$\Rightarrow \left(Ker(\bar{\lambda} I - T^*)\right)^{\perp\perp} \neq H^\perp = \{O_H\}$$

Άρα ισχύει ότι: $\left(Ker(\bar{\lambda} I - T^*)\right)^{\perp\perp} = \overline{Ker(\bar{\lambda} I - T^*)} = Ker(\bar{\lambda} I - T^*) \neq \{O_H\}$ αφού ο υπόχωρος $Ker(\bar{\lambda} I - T^*)$ είναι κλειστό σύνολο ώς αντίστροφη εικόνα του κλειστού $\{O_H\}$ από τον συνεχή τελεστή $\bar{\lambda} I - T^*$. Επομένως $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

■

Το παρακάτω θεώρημα αφορά την κλάση των φυσιολογικών τελεστών.

Θεώρημα 2.7.5

Έστω $T \in B(H)$ ένας φυσιολογικός τελεστής. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

α) Για $x \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει: $Tx = \lambda x \Leftrightarrow T^*x = \bar{\lambda}x$
β) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$
γ) Οι ιδιόχωροι του T που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Απόδειξη
α) Αφού ο T είναι φυσιολογικός τότε και ο τελεστής $T - \lambda I$ είναι φυσιολογικός. Συνεπώς από σχετική ιδιότητα των φυσιολογικών τελεστών ισχύει:

$$\| T - \lambda I\| = \|(T - \lambda I)^*\| = \left\|T^* - \bar{\lambda} I\right\|$$

Αν $(T - \lambda I)(x) = O_H \Leftrightarrow \| T - \lambda I\| = 0 \Leftrightarrow \left\|T^* - \bar{\lambda} I\right\| = 0 \Leftrightarrow \left(T^* - \bar{\lambda} I\right)(x) = O_H$. Επομένως έπεται η ζητούμενη ισοδυναμία.
β) Ισχύει ότι $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_c(T)$. Επομένως ισχύει ότι $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$. Μένει να δειχθεί ότι: $\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Ισοδύναμα αν $\lambda \notin \sigma_{ap}(T) \Longrightarrow \lambda \notin \sigma(T)$. Δηλαδή θα ισχύει $\lambda \notin \sigma_c(T)$ που το τελευταίο είναι ισοδύναμο με την πρόταση « το συνολο $Im(\lambda I - T)$ είναι πυκνό στον H». Άρα έστω $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. θα δειχθεί ότι $\lambda \notin \sigma_c(T)$ και τότε αφού $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_c(T)$ θα έπεται ότι $\lambda \notin \sigma(T)$.
Έστω $x \in \left(Im(\lambda I - T)\right)^{\perp} = Ker\ (\bar{\lambda} I - T^*)$. Δηλαδή $(\bar{\lambda} I - T^*)(x) = O_H$. Επειδή $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ τότε ο τελεστής $\lambda I - T$ είναι κάτω φραγμένος και επειδή είναι φυσιολογικός ισχύει:

$$\left\|(\bar{\lambda} I - T^*)(x)\right\| = \|(\lambda\, I - T)(x)\| \geq c\, \|x\| \geq 0$$

Άρα $x = O_H$. Επομένως $\left(Im(\lambda I - T)\right)^{\perp} = \{O_H\}$. Τότε $\left(Im(\lambda I - T)\right)^{\perp\perp} = \overline{Im(\lambda I - T)} = \{O_H\}^{\perp} = H$. Συνεπώς $\lambda \notin \sigma_c(T)$.
γ) Έστω $x \in Ker(\lambda I - T)$ και $y \in Ker(\mu I - T)$ με $\lambda \neq \mu$. Τότε

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle = \langle x, \bar{\mu} y\rangle = \overline{\langle \bar{\mu} y, x\rangle} = \mu\overline{\langle y, x\rangle} = \mu\,\langle x, y\rangle$$

Άρα $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Επομένως $\langle x, y\rangle = 0$ αφού $\lambda \neq \mu$. Συνεπώς

$$Ker(\lambda I - T) \perp Ker(\mu I - T)$$

■

2.8 Συμπαγείς Αυτοσυζυγείς Τελεστές

Αρχικά σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούν κάποια πολύ βασικά στοιχεία της θεωρίας των συμπαγών τελεστών και έπειτα η σχετική θεωρία θα επικεντρωθεί γύρω από τους συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές οι οποίοι χρησιμοποιούνται στη Θεωρία Ομαλοποίησης που παρουσιάζεται στο Μέρος II.

Ορισμός 2.8.1
Ένας τελεστής $T \in B(H)$ λέγεται συμπαγής αν για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του H, το σύνολο $\overline{T(S)}$ είναι συμπαγές.
Με την πιο κάτω πρόταση δίνονται διάφοροι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του συμπαγούς τελεστή.

Πρόταση 2.8.2
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(α) ο $T \in B(H)$ είναι συμπαγής
(β) Το $\overline{T(S_1)}$ είναι συμπαγές με $S_1 = \{x \in H\colon \|x\| \leq 1\}$

(γ) Για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) του H η ακολουθία $\left(T(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη

$(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$ Έπεται άμεσα από τον ορισμό του συμπαγούς τελεστή.

$(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$ Έστω S ένα φραγμένο υποσύνολο του H. Τότε $\exists M > 0 : \forall x \in S : \ \|x\| \leq M$. Συνεπώς $S \subseteq MS_1 = S_M(0_H, M) = \{x \in H: \|x\| \leq M\}$. Επομένως $T(S) \subseteq T(S_M) = T(MS_1) = M\,T(S_1)$.

$$\text{Άρα } \overline{T(S)} \subseteq M\,\overline{T(S_1)}.$$

Από το (β) ισχύει ότι το $\overline{T(S_1)}$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε και το $\overline{T(S)}$ είναι συμπαγές σύνολο αφού είναι υποσύνολο του συμπαγούς Μ $\overline{T(S_1)}$.

$\alpha) \Longrightarrow (\gamma)$Έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία του Η και $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ το αποίο είναι φραγμένο. Αφού ο T είναι συμπαγής έπεται από τον ορισμό ότι $\overline{T(S)}$ είναι συμπαγές σύνολο. Τότε η ακολουθία $T(x_n)$ όπου ισχύει $\{T(x_n)\} \subseteq T(S) \subseteq \overline{T(S)}$ αποτελεί ταυτόχρονα και ακολουθία του συμπαγούς συνόλου $\overline{T(S)}$. Τότε το $\overline{T(S)}$ ως συμπαγές σύνολο είναι και ακολουθιακά συμπαγές. Επομένως κάθε ακολουθία στοιχείων του έχει και συγκλίνουσα υπακολουθία.

$(\gamma) \Longrightarrow (\alpha)$ Έστω S ένα φραγμένο υποσύνολο του Η. Επίσης έστω η ακολουθία $T(x_n)$ του $T(x_n)$. Δηλαδή η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Άρα με βάση το (γ) η $T(x_n)$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα απο γνωστό θεώρημα των μετρικών χώρων περί ακολουθιακής συμπάγειας έπεται ότι το σύνολο $T(S)$ είναι συμπαγές. Δηλαδή είναι κλειστό και φραγμένο. Συνεπώς ισχύει $T(S) = \overline{T(S)}$. Άρα το $\overline{T(S)}$ είναι συμπαγές. Συνεπώς ο T είναι συμπαγής.

■

Στη συνέχεια δίνεται μια βασική πρόταση που εμπλέκει την συμπάγεια της μοναδιαίας κλειστής μπάλας S_1 ενός χώρου Hilbert με την διάσταση του. Αυτή η πρόταση δίνει ταυτόχρονα και ενα πόρισμα για τον ταυτοτικό τελεστή I που παρουσιάζεται πιο κάτω.

Πρόταση 2.8.3

Η μοναδιαία κλειστή μπάλα S_1ενός χώρου H, Hilbert είναι συμπαγές σύνολο αν και μόνο αν ο χώρος H είναι πεπερασμένης διάστασης.

Το πόρισμα που έπεται από την πιο πάνω πρόταση έχει ως εξής:

Ο ταυτοτικός τελεστής I σε ένα απειροδιάστατο χώρο Hilbert δεν είναι συμπαγής τελεστής. Δηλαδή $I \in B(H)$αλλά $I \notin K(H)$.

Απόδειξη

Αν $I \in K(H)$ τότε $\overline{I(S_1)} = S_1$ όπου S_1 είναι συμπαγές σύνολο. Αύτο είναι άτοπο αφού ο H είναι άπειρης διάστασης και από την πιο πάνω πρόταση η κλειστή μοναδιαία σφαίρα είναι συμπαγές σύνολο αν και μόνο όταν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης. Επομένως στην προκειμένη περίπτωση το S_1 δεν είναι συμπαγές και άρα ο I δεν είναι συμπαγής αφού αντιβαίνει τον ορισμό του συμπαγούς τελεστή.

■

Θεώρημα 2.8.4
Το σύνολο των συμπαγών τελεστών $K(H)$ είναι διανυσματικός χώρος. Επίσης είναι ένα δίπλευρο ιδεώδες του $B(H)$.
Απόδειξη
Αρχικά αποδεικνύεται ότι το $K(H)$ είναι διανυσματικός χώρος. Έστω $A, B \in K(H)$. Αν (x_n) μια φραγμένη ακολουθία του H, τότε αφού ο A είναι συμπαγής υπάρχει μια υπακολουθία $\left(x_{i_n}\right)$ της (x_n) έτσι ώστε η $A\left(x_{i_n}\right)$ να συγκλίνει. Επίσης ο B είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία $\left(x_{i_{n_k}}\right)$ της $\left(x_{i_n}\right)$, ώστε η $B\left(x_{i_{n_k}}\right)$ να συγκλίνει. Συνεπώς η ακολουθία $\left((A+B)\left(x_{i_{n_k}}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$συγκλίνει και είναι μια υπακολουθία της ακολουθίας $\left((A+B)(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα $A+B \in K(H)$. Ομοίως και $\lambda A \in K(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Συνεπώς ο $K(H)$ είναι διανυσματικος χώρος. Ακολούθως θα δειχθεί ότι το $K(H)$ είναι δίπλευρο ιδεώδες του Β(Η). Δηλαδή για $A \in K(H)$ και $B \in B(H)$ ισχύει $AB \in K(H)$ και $BA \in K(H)$. Πράγματι έστω (x_n)μια φραγμένη ακολουθία του H. Τότε αφού ο B είναι συνεχής η $\left(B(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία. Τότε αφού ο A είναι συμπαγής θα ισχύει ότι η $(AB)(x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή $AB \in K(H)$. Επίσης αφού ο Α είναι συμπαγής τότε ισχύει ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) υπάρχει υπακολουθία $\left(x_{i_n}\right)$ τέτοια ώστε η ακολουθία $A\left(x_{i_n}\right)$ να είναι συγκλίνουσα. Λόγω του ότι ο B είναι συνεχής θα ισχύει ότι η υπακολουθία $(BA)\left(x_{i_n}\right)$ της ακολουθίας $(BA)(x_n)$ είναι συγκλίνουσα. Άρα $BA \in K(H)$.

■

Πόρισμα 2.8.5
Έστω H άπειρης διάστασης χώρος Hilbert. Τότε κάθε αντιστρέψιμος τελεστής του $B(H)$ δεν είναι συμπαγής.
Απόδειξη
Έστω A αντιστρέψιμος και ταυτόχρονα $A \in K(H)$. Τότε αφού ο A είναι αντιστρέψιμος θα ισχύει ότι $A^{-1} \in B(H)$. Τότε $AA^{-1} = I \in K(H)$ αφού το $K(H)$ είναι δίπλευρο ιδεώδες του $B(H)$. Αυτό είναι άτοπο αφού $I \notin K(H)$. Επομένως κάθε αντιστρέψιμος τελεστής σε χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

■

Ακολούθως παρουσιάζονται κάποια βασικά αποτελέσματα για την φασματική ανάλυση συμπαγών τελεστών και συγκεκριμένα αυτοσυζυγών συμπαγών τελεστών.
Από την παράγραφο 2.7 που αφορούσε το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή έχει δειχθεί ότι το φάσμα ενός $T \in B(H)$ ειναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης ισχύει ότι αν $T \in K(H)$ και H είναι άπειρης διάστασης, τότε το $0 \in \sigma(T)$. Πράγματι αφού για $\lambda = 0$ ισχύει:
ότι $\lambda I - T = -T \in K(H)$. Τότε από το πιο πάνω πόρισμα έπεται ότι αφού $-T$ είναι συμπαγής σε χώρο άπειρης διάστασης, τότε αναγκαστικά ο $\lambda I - T = -T$ δεν μπορεί να ειναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς $0 \in \sigma(T)$.
Πιο κάτω δίνεται χωρίς απόδειξη μια πρόταση η οποία μας δίνει την πληροφορία ότι αν για κάθε μη μηδενικό αριθμό λ ο οποίος δεν είναι ιδιοτιμή ενός συμπαγούς τελεστή T τότε το σύνολο τιμών του τελεστή $\lambda I - T$ είναι κλειστό και ταυτόχρονα ο τελεστης $\lambda I - T$ είναι επί του H. Συγκεκριμένα έχει ως εξής:

Πρόταση 2.8.6
Αν $T \in B(H)$ συμπαγής τελεστής και $\lambda \neq 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του T τότε $R(\lambda I - T)$ είναι κλειστό και $R(\lambda I - T) = H$.
Μια συνέπεια του θεωρήματος αυτού ειναι το πιο κάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.8.7
Αν ο H είναι απειροδιάστατος χώρος και ο $T \in B(H)$ είναι συμπαγής, τότε το φάσμα του $\sigma(T)$ του T αποτελείται από το 0 και τις ιδιοτιμές του.
Απόδειξη
Επειδή ο H είναι άπειρης διάστασης και ο T είναι συμπαγής, τότε $0 \in \sigma(T)$. (έχει δειχθεί πιο πάνω). Έστω $\lambda \neq 0$ και $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Τότε $Ker(\lambda I - T) = \{O_H\}$. Άρα ο $\lambda I - T$ είναι ''1-1''. Επίσης από την προηγούμενη πρόταση ισχύει ότι $R(\lambda I - T) = H$. Άρα ο $\lambda I - T$ είναι και ''επί''.Τότε αφού ο H είναι Banach από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς $\forall \lambda \neq 0$ ισχύει ότι $\lambda \notin \sigma(T)$.Επομένως $\forall \lambda \neq 0 : \lambda \in \sigma_p(T)$. Δηλαδή $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

■

Επομένως για ένα συμπαγή τελεστή ο οποίος ορίζεται σε ένα απειροδιάστατο χώρο, ισχύει ότι το φάσμα του αποτελείται μόνο από το μηδέν και τις ιδιοτιμές του. Παρακάτω δίνεται χωρίς απόδειξη ένα πολυ σημαντικό θεώρημα το οποίο χρησιμοποιείται και στην απόδειξη του Φασματικού θεωρήματος για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές.

Θεώρημα 2.8.8
Έστω H ένας άπειρης διάστασης χώρος Hilbert και $T \in B(H)$συμπαγής. Τότε το φάσμα $\sigma(T)$ αποτελείται από το μηδέν και το πολύ από ένα αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών με πιθανο σημείο συσσώρευσης το μηδέν. Επίσης κάθε ιδιόχωρος του T που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παρακάτω η θεωρία επικεντρώνεται στην φασματική ανάλυση των συμπαγών αυτοσυζυγών τελεστών.

Λήμμα 2.8.9
Αν $T \in B(H)$ είναι συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής, τότε $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
Απόδειξη
Λόγω του ότι ο T είναι συμπαγής τότε από το πόρισμα 2.8.7 έπεται ότι το φάσμα του τελεστή T, $\sigma(T)$ αποτελείται μόνο από το μηδέν και τις ιδιοτιμές του. Συνεπώς αρκεί να δειχθεί ότι όλες οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Έστω $x \in H, x \neq O_H$ και $Ax = \lambda x$. Τότε $\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$. Επίσης ισχύει ότι:

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*(x)\rangle \overset{A^*=A}{\triangleq} \langle x, A(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\langle \lambda x, x\rangle} = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle = \bar{\lambda}\ \|x\|^2$$

Άρα $\lambda = \bar{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

■

Λήμμα 2.8.10

Έστω $T \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $m = \underbrace{inf}_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle, M = \underbrace{sup}_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$. Τότε $m, M \in \sigma(T)$.

Πόρισμα 2.8.11

Έστω $T \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε οι αριθμοί m, M αν είναι μη μηδενικοί, είναι ιδιοτιμές του T και για κάθε ιδιοτιμή λ του T ισχύει:

$$|\lambda| \leq max\{M, -m\} = \|T\|$$

Απόδειξη

Το ότι οι αριθμοί $m, M \in \sigma(T)$ προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα 2.8.10. Επίσης ισχύει από σχετικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές ότι:

$$\begin{aligned} \|T\| = \underbrace{sup}_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle| = \underbrace{sup}_{\|x\|=1} \{max\{\langle T(x), x\rangle, -\langle T(x), x\rangle\}\} \\ = max\left\{\underbrace{sup}_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle, \underbrace{-inf}_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle\right\} \\ = max\{M, -m\} \end{aligned}$$

Έστω λ μια ιδιοτιμή του T με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x, $\|x\| = 1$. Τότε $T(x) = \lambda x$. Ισχύει επίσης $|\lambda| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\|$. Επομένως $|\lambda| = \|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| = \|T\|$.
Συνεπώς $|\lambda| \leq \|T\| = max\{M, -m\}$.

■

Ένα άλλο πόρισμα το οποίο έπεται ότι από το προηγούμενο πόρισμα είναι:

Πόρισμα 2.8.12

Αν $T \in B(H)$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής τότε $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ και $\|T\| = max\{|\lambda|: \lambda\ ιδιοτιμή\ του\ T\}$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό των m και M ότι $\forall x \in H$:

$$m\langle x, x\rangle \leq \langle A(x), x\rangle \leq M\langle x, x\rangle$$

Δηλαδή

$$m\|x\|^2 \leq \langle A(x), x\rangle \leq M\|x\|^2, \forall x \in H$$

Συνεπώς αν το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ , θα ισχύει:

$$m\|x\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 \leq M\|x\|^2 \Longrightarrow m \leq \lambda \leq M$$

Συνεπώς $\sigma(T) \subseteq [m, M]$. Από το προηγούμενο πόρισμα 2.8.11 ισχύει ότι

$$|\lambda| \leq max\{M, -m\} = \|T\|$$

Επομένως $-\|T\| \leq \lambda \leq \|T\|$. Δηλαδή είτε ο $\|T\|$, είτε ο $-\|T\|$ είναι ιδιοτιμή του Τ. Συνεπώς

$$\|T\| = max\{|\lambda|: \lambda\ ιδιοτιμή\ του\ T\}$$

■

Πόρισμα 2.8.13
Αν $T \in B(H)$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής ο οποίος δεν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές τότε $T = 0$.
Απόδειξη
Πράγματι αφού από το προηγούμενο πόρισμα ισχύει ότι:
$$\|T\| = max\{|\lambda|: \lambda \text{ ιδιοτιμή του } T\}$$
Τότε από τα δεδομένα έπεται ότι $\|T\| = 0 \Longrightarrow T = 0$

■

Στην συνέχεια με την έννοια του ευθέως εσωτερικού γινομένου μαζί με την φασματική ανάλυση των αυτοσυζυγών συμπαγών τελεστών, θα διατυπωθεί και θα αποδειχθεί το Φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές.

Αρχικά ορίζεται το ευθύ εσωτερικό άθροισμα στην *πεπερασμένη* διάσταση.Έστω H ένας χώρος Hilbert με $dimH < \infty$ και $M, N \subseteq H$ κλειστοί συμπληρωματικοί υπόχωροι με $M \perp N$.
Τότε $H = M \oplus N$. Επαγωγικά αν $N_i, i = 1,2..k$ είναι ανα δύο κάθετοι υπόχωροι, ο οποίοι είναι συμπληρωματικοί, τότε ορίζεται το $H = \oplus_{i=1}^{k} N_i$.
Στην μη πεπερασμένη διάσταση ισχύει το εξής θεώρημα
Θεώρημα 2.8.14
Έστω $(N_i), i = 1,2, \ldots$ μια ακολουθία ανά δύο κάθετων υποχώρων του H και P_i η ορθή προβολή στον N_i Τότε $\forall x \in H$ η σειρά $\sum_{\iota=1}^{\infty} P_i(x)$ συγκλίνει σ' ένα $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε $x - x_0 \perp N_i, \forall i = 1,2, ..$
Απόδειξη
Αρχικά θα δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{\iota=1}^{\infty} P_i(x)$ συγκλίνει. Αρκεί να δειχθεί ότιη ακολουθία μερικών αθροισμάτων $h_n = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$ είναι συγκλίνουσα στον H. Για $m > n$ ισχύει:
$$\|h_m - h_n\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{m} P_i(x) - \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} P_i(x)\right\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{\cong} \sum_{i=n+1}^{m} \|P_i(x)\|^2, \qquad (*)$$
αφού $\forall i = 1,2..$ ισχύει ότι $P_i(x) \in N_\iota$ όπου οι N_ι είναι ανά δύο κάθετοι. Άρα εφαρμόζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα. Θα δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \|P_i(x)\|^2$ είναι συγκλίνουσα. Ισχύει ότι:
$$0 \leq \left\|x - \sum_{i=1}^{n} P_i x\right\|^2 = \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \langle x, P_i x\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle P_i x, P_i x\rangle, \qquad (1)$$
Ισχύει από θεώρημα ότι $\langle x - P_i x, P_i x\rangle = 0, \forall i = 1,2..$ Ισοδύναμα $\langle x, P_i x\rangle = \langle P_i x, P_i x\rangle, \forall i = 1,2..$
Επομένως η (1) γίνεται:
$$0 \leq \left\|x - \sum_{i=1}^{n} P_i x\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle P_i x, P_i x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|P_i x\|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \|P_i x\|^2 \leq \|x\|^2$$
Δηλαδή η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \|P_i x\|^2$ είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}$. Τότε η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ως συγκλίνουσα θα είναι και βασική, άρα θα ισχύει ότι
$$\sum_{i=n+1}^{m} \|P_i(x)\|^2 \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$$
Επομένως η ακολουθία (h_n) είναι βασική στον H, άρα και συγκλίνουσα αφού ο H είναι Hilbert.
Έστω $h_n \to x_0$. Για κάθε j σταθερό και για κάθε $n > j$ ισχύει ότι:

$P_j(\sum_{i=1}^{n} P_i x) = P_j x$ αφού τα στοιχεία $P_i x, i = 1,2..$ είναι ανά δύο κάθετα, άρα όταν δράσει ο τελεστής της προβολής P_j πάνω σε ένα από αυτά τα διανύσματα η προβολή στον υπόχωρο N_j θα είναι ίση με το μηδενικό στοιχείο 0_H, αφού $N_j \perp N_i$. Τότε λόγω συνέχειας του τελεστή P_j ισχύει:

$$P_j\left(\sum_{i=1}^{\infty} P_i x\right) = P_j x \Longrightarrow P_j x_0 = P_j x \Leftrightarrow P_j(x_0 - x) = 0_H$$

Άρα $x_0 - x \perp N_j$.

■

Μια συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι αν οι υπόχωροι N_i παράγουν τον H, δηλαδή $H = \overline{[N_\iota : \iota = 1,2..]}$, τότε με βάση το πιο πάνω θεώρημα ισχύει ότι $\forall x \in H, \exists x_0 : x_0 = \sum_{\iota=1}^{\infty} P_i(x)$ με την ιδιότητα $x_0 - x \perp N_i, \forall \iota = 1,2, \ldots$ Άρα $x_0 - x \perp H$. Επομένως αφού $x_0 - x \in H$ έπεται από την καθετότητα ότι $x_0 - x = O_H \Leftrightarrow x = x_0 = \sum_{\iota=1}^{\infty} P_i(x)$. Τότε μέσω αυτού ορίζεται το άπειρο ευθύ εσωτερικό άθροισμα των υποχώρων N_i και συμβολίζεται με $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty}$

Πιο κάτω παρουσιάζεται το Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές.

Θεώρημα 2.8.15 (Φασματικό Θεώρημα)

Έστω $T \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής με $\{\lambda_i\}, i \geq 1$ οι διαφορετικές μη μηδενικές ιδιοτιμές του για τις οποίες ισχύει χωρις βλάβη της γενικότητας ότι $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots$ και P_i η ορθή προβολή επί του ιδιόχωρου N_i αντίστοιχου της ιδιοτιμής $\lambda_i, i \geq 1$. Τότε

$$T = \sum_{\iota=1}^{\infty} \lambda_i P_i$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του χώρου $B(H)$.

Απόδειξη

Έστω N_i ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και $N_0 = KerT$. Ο τελεστής T ως αυτοσυζυγής είναι φυσιολογικός τελεστής. Τότε από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι οι ιδιόχωροι $N_i, i = 0,1,2, ..$ είναι ανά δύο κάθετοι. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα ορίζονται οι πιο κάτω υπόχωροι:

$$M' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i \; \kappa\alpha\iota \; M = [\bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i]^{\perp}$$

Θα δειχθεί ότι οι πιο πάνω υπόχωροι είναι T-αναλλοίωτοι. Αυτό θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για να αποδειχθεί ότι ο περιορισμός του T στον υπόχωρο M, δηλαδή ο T_M δεν έχει ιδιοτιμές σε αυτόν τον υπόχωρο. Έστω $m' \in M'$ τότε $m' = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$ με $x_i \in N_i$. Επίσης ισχύει ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$. Πράγματι αφού $\|m'\|^2 = \|\sum_{i=0}^{\infty} x_i\|^2 = \lim_n \|\sum_{i=0}^{n} x_i\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \lim_n (\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$.Τότε $Tm' = \sum_{i=0}^{\infty} Tx_i = Tx_0 + \sum_{i=1}^{\infty} Tx_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ η οποία συγκλίνει αφού αν $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ τότε για $m > n$ ισχύει ότι $\|s_m - s_n\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i x_i\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{i=n+1}^{m} \|\lambda_i x_i\|^2$ όμως

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_i x_i\|^2 = \sum_{\iota=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \|x\|^2 \leq |\lambda_1|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2 < \infty$$

Δηλαδή η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_i x_i\|^2$ είναι συγκλίνουσα, άρα η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ως συγκλίνουσα θα είναι και βασική. Άρα $\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \|\lambda_i x_i\|^2 \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$. Δηλαδή η (s_n) ως βασική σε χώρο Banach θα είναι και συγκλίνουσα. Επομένως $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i < \infty$.

Επίσης $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in M'$ αφού $\lambda_i x_i \in N_i$ με N_i να είναι υπόχωροι. Συνεπώς $Tm' \in M'$, $άρα\ TM' \subseteq M'$

Ακόμα αν $m \in M$ τότε $\forall m' \in M'$ ισχύει ότι $\langle Tm, m' \rangle = \langle m, T^* m' \rangle \overset{T=T^*}{\cong} \langle m, Tm' \rangle = 0$ αφού $Tm' \in M'$ και $M' \perp M$ με $m \in M$. Επομενως $Tm \in [M']^{\perp} = M$. Συνεπώς $TM \subseteq M$.

Έστω T_M ο περιορισμός του T στον υπόχωρο M. Τότε ο T_M είναι συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Ο T_M δεν έχει ιδιοτιμές διότι δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα του T στον M. Πράγματι, έστω ότι υπήρχε $x \in M, x \neq O_H$ τέτοιο ώστε $x \in Ker(\lambda_j I - T) = N_j$ με $\lambda_j \neq 0$. Δηλαδή $Tx = \lambda_j x$. Επειδή ο M είναι T-αναλλοίωτος έπεται ότι $Tx \in M \Longrightarrow Tx \perp N_i, \forall i = 0,1,2 \ldots$ Άρα $Tx \perp N_j$. Συνεπώς $\langle Tx, x \rangle = 0$ αφού $x \in N_j$. Τότε αφού $Tx = \lambda_j x$ τότε $\langle \lambda_j x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_j \langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_H$ το οποίο είναι άτοπο αφού $x \neq O_H$. Παρόμοια αντιμετωπίζεται και η περίπτωση για $\lambda_j = 0$. Από το πόρισμα 2.8.7 αφού ο T_M είναι συμπαγής αυτοσυζυγής τότε το φάσμα του θα αποτελείται από το μηδέν και τις ιδιοτιμές του. Όμως αφού ο T_M δεν έχει ιδιοτιμές έπεται ότι $\sigma(T_M) \subseteq \{0\}$, άρα από το πόρισμα(2.8.13) θα ισχύει $T_M = 0$. Συνεπώς $\forall x \in M : Tx = T_M x = O_H$. Άρα $M \subseteq N_0$ όμως $N_0 \perp M$. Επομένως $M = \{O_H\}$. Δηλαδή

$$[\oplus_{i=0}^{\infty} N_i]^{\perp} = \{O_H\} \Longrightarrow H = \oplus_{i=0}^{\infty} N_i$$

Τότε $\forall x \in H$ ισχύει $x = \sum_{i=0}^{\infty} P_i x$. Άρα

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} TP_i x = TP_0 x + \sum_{i=1}^{\infty} TP_i x = \sum_{i=1}^{\infty} TP_i x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x$ συγκλίνει στον H. Θα δειχθεί στη συνέχεια ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $B(H)$ στον T. Ισχύει ότι

$$\left\| T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \right\|_{B(H)} = \underbrace{sup}_{x \neq 0_H} \frac{\|Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\, x\|_H}{\|x\|_H}$$

όμως

$$\|Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\, x\|_H{}^2 = \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\, x\|_H{}^2 = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i P_i x\|_H{}^2 \overset{\Pi.\Theta}{\cong} \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\lambda_i P_i x\|^2$$
$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \|P_i x\|^2$$

Στην παραπάνω σχέση αν για κάθε n to πλήθος των όρων της πιο πάνω σειράς έιναι ένας πεπερασμένος αριθμός τότε για $n \to \infty$ θα ισχύει ότι η τιμή της πιο πάνω σειράς θα τείνει στο μηδέν. Άρα θα ισχύει ότι $\|T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\|_{B(H)} \to 0$. Η άλλη περίπτωση είναι να ισχύει ότι $\lambda_i \to 0$. Συνεπώς $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\ τέτοιο\ ώστε\ |\lambda_i| < \varepsilon, \forall i > n_0$. Τότε για $n > n_0$, ισχύει ότι

$$\left\| Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\, x \right\|_H^2 < \varepsilon^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \|P_i x\|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \|P_i x\|^2 = \varepsilon^2 \|x\|^2$$
$$\Longrightarrow \left\| T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \right\|_{B(H)} = \underbrace{sup}_{x \neq 0_H} \frac{\|Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\, x\|_H}{\|x\|_H} < \underbrace{sup}_{x \neq 0_H} \frac{\varepsilon \|x\|_H}{\|x\|_H} = \varepsilon$$

Άρα $\|T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\|_{B(H)} \overset{n \to \infty}{\to} 0$.

■

Ένα πόρισμα που χρησιμοποιείται στη παρακάτω θεωρία που αφορά την ομαλοποίηση είναι το πιο κάτω το οποίο αποτελεί μια διαφορετική μορφή του Φασματικού θεωρήματος για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές.

Πόρισμα 2.8.16

Έστω $T \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία (x_n) από ιδιοδιανύσματα του T, με αντίστοιχες ιδιοτιμές (μ_n) ώστε

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x_n \otimes x_n) \text{ δηλαδή} T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x_n \otimes x_n)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, x_n \rangle \, x_n$$

όπου η πρώτη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $B(H)$.

Μέρος ΙΙ

Θεωρία Ομαλοποίησης Τελεστικών Εξισώσεων

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγή στα ill-posed Προβλήματα

3.1 Η Έννοια της Μη-καλής Τοποθέτησης κατά Hadamard

Ορισμός 3.1.1

Έστω $K: U \subseteq X \to V \subseteq Y$ ένας τελεστής που ορίζεται σε ένα υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου X με νόρμα και η εικόνα του τελεστή K να παίρνει τιμές σε ένα υποσύνολο V ενός διανυσματικού χώρου Y με νόρμα. Η εξίσωση

$$K(\varphi) = f \qquad (1)$$

λέγεται καλά τοποθετημένη(well-posed or properly posed) αν ο $K: U \to V \subseteq Y$ είναι «1-1» και «επί» (bijective) και η αντίστροφη απεικόνιση $K^{-1}: V \to U$ είναι συνεχής τελεστής, διαφορετικά η εξίσωση (1) είναι μη-καλά τοποθετημένη(ill-posed or improperly posed).

Με βάση τον πιο πάνω ορισμό μπορούμε να διακρίνουμε τρία είδη μη καλά-τοποθετημένων προβλημάτων

- αν ο K δεν είναι «επί» (not-surjective), τότε η εξίσωση (1), δεν είναι επιλύσιμη (not-solvable) για όλα τα $f \in V$, άρα αυτό αφορά την ύπαρξη της λύσης (existence of solution).
- αν ο K δεν είναι «1-1» (not-injective), τότε η εξίσωση (1) μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις. Άρα αυτό αφορά τη μοναδικότητα της λύσης (uniqueness of solution).
- αν ο K^{-1} υπάρχει ως αντίστροφη γραμμική απεικόνιση αλλά δεν είναι συνεχής γραμμικος τελεστής, τότε η λύση φ της εξίσωσης (1) δεν εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα (the solution does not depend continuously of the data). Άρα αυτό αφορά στην ευστάθεια της λύσης (stability of solution).

Αυτές οι τρείς ιδιότητες που συνιστούν την έννοια της καλής τοποθέτησης μίας εξίσωσης, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν $K: X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι «1-1» και «επί», με X, Y διανυσματικοί χώροι Banach, τότε η αντίστροφη απεικόνιση $K^{-1}: Y \to X$, ορίζεται και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, άρα συνεχής (αυτό αποδεικνύεται με το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης).

Ο διανυσματικός χώρος Y, αλλά και η νόρμα που εφοδιάζεται σε αυτόν, πρέπει να είναι κατάλληλα επιλεγμένα, ώστε να περιγράφουν τα μετρήσιμα δεδομένα (measure data) και το σφάλμα των δεδομένων (data error).

Θεώρημα 3.1.2
Έστω $K: U \subseteq X \to V \subseteq Y$ ένας γραμμικός συμπαγής τελεστής ορισμένος σε ένα υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου X με νόρμα και με τιμές σε ένα υποσύνολο V ενός διανυσματικού χώρου Y με νόρμα. Τότε η εξίσωση

$$K(\varphi) = f \qquad (1)$$

είναι μη καλά τοποθετημένη αν $\dim U = \infty$.
Απόδειξη
Έστω ότι $\dim U = \infty$ και έστω ότι η (1) είναι καλά τοποθετημένη. Τότε υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $K^{-1}: V \to U$, η οποία είναι γραμμική συνεχής. Από το γεγονός ότι ο ταυτοτικός τελεστής I γράφεται ως $I = K^{-1}K$ και τότε αφού και οι δύο τελεστές, οι οποίοι είναι γραμμικοί συνεχείς και ένας εκ των δύο συμπαγής, έπεται από θεώρημα 2.8.4 ότι ο I είναι συμπαγής. Αυτό είναι άτοπο αφού ο $I: U \to U$, είναι συμπαγής αν και μόνο αν το $dimU < \infty$, ενώ αρχικά θεωρήσαμε ότι το $\dim U = \infty$. Συνεπώς, η (1) είναι μη καλά τοποθετημένη όταν $\dim U = \infty$.

■

Με βάση το πιο πάνω θεώρημα συμπεραίνεται ότι προβλήματα τα οποία ορίζονται σε απειροδιάστατους χώρους από ένα συμπαγή τελεστή, η λύση τους δεν μπορεί να έχει συνεχή εξάρτηση από τα δεδομένα.

3.2 Παραδείγματα ill-posed προβλημάτων

Σε αυτό το χωρίο θα αναφέρθούν παραδείγματα ill-posed προβλημάτων και συγκεκριμένα σχεδόν όλα έχουν το πρόβλημα της μη-ευστάθειας. Δηλαδή μικρές μεταβολές των δεδομένων επιφέρου μεγάλες μεταβολές στη λύση.

Παράδειγμα 1 (Παραγώγιση)
Έστω ότι ισχύει $q(x) = f'(x)$. Θεωρούμε ότι, αντί της συνάρτησης f,είναιγνωστή μια διαταραγμένη συνάρτηση $f_n(x) = f(x) + \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Τότε για αυτή τη διαταραγμένη συνάρτηση αντιστοιχεί μια συνάρτηση $q_n(x) = q(x) + \frac{\mathrm{n}\cos(nx)}{\sqrt{n}}$. Άρα ισχύει

$$\|q - q_n\| = \left\|\frac{\mathrm{n}\cos(nx)}{\sqrt{n}}\right\| \leq \frac{n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

καθώς και $\|f - f_n\| = \left\|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Συνεπώς, το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή ο καθορισμός της συνάρτησης q, από τη γνώση της συνάρτησης f, είναι μη-καλά τοποθετημένο πρόβλημα, αφού μικρές διαταραχές στη συνάρτηση f δημιουργούν μεγάλη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης q.

Παράδειγμα 2 (Σειρά Fourier)

Το πρόβλημα της άθροισης μίας σειράς Fourier αποτελείται από την έυρεση συνάρτησης $q\ (x)$από τους συντελεστές Fourier αυτής. Θα δειχθεί ότι το πρόβλημα της άθροισης μιας σειράς Fourier είναι μη ευσταθές ως προς τις μικρές μεταβολές των συντελεστών Fourier με βάση την L_2 μετρική.

Έστω

$$q(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa \cos(\kappa x)$$

με f_κ οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $q(x)$. Θεωρούμε ότι οι συντελεστές Fourier f_κ, φέρουν κάποια διαταραχή της πιο κάτω μορφής $\widehat{f_\kappa} = f_\kappa + \frac{\varepsilon}{\kappa}$ και θέτουμε $\hat{q}(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \hat{f}_\kappa \cos(\kappa x)$. Οι συντελεστές αυτών των σειρών ως προς την L_2 μετρική διαφέρουν ως εξής:

$$\left\|f_\kappa - \widehat{f_\kappa}\right\|_{L_2} = \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty}(f_\kappa - \widehat{f_\kappa})^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^2}{\kappa^2})^{\frac{1}{2}} = \varepsilon(\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2})^{\frac{1}{2}} = \varepsilon\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Όμως η διαφορά

$$\|q - \hat{q}\| = \left\|\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa \cos(\kappa x) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \widehat{f_\kappa} \cos(\kappa x)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(f_\kappa - \widehat{f_\kappa}\right)\cos(\kappa x)\right\| = \varepsilon \left\|\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\cos(\kappa x)}{\kappa}\right\|$$

μπορεί να είναι μεγάλη αφού η σειρά για $x = 0$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 3 (Διαφορική Εξίσωση 2ης τάξης)

Έστω ένα σωματίδιο με μοναδιαία μάζα το οποίο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής. Η κίνηση προκαλείται από μία δύναμη $q(t)$, που εξαρτάται από το χρόνο. Αν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει μηδενική ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε με βάση τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από μια συνάρτηση $u(t)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα Cauchy

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q(t)\ , t \in [0, T] \qquad (1)$$

$$u(0) = 0, u'(0) = 0$$

Έστω ότι η δύναμη $q(t)$ είναι άγνωστη και η συντεταγμένη του σωματιδίου $u(t)$ μπορεί να μετρηθεί για οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ακολούθως απαιτείται να κατασκευαστεί η $q(t)$ από την $u(t)$. Συνεπώς προκύπτει το αντίστροφο πρόβλημα: Να καθοριστεί το δεξιό μέλος της (1) από την γνώση της συνάρτησης $u(t)$. Θα δειχθεί ότι το αντίστροφο αυτό πρόβλημα είναι μη-ευσταθές.

Έστω $u(t)$ να είναι η λύση του ευθέως προβλήματος για κάποιο $q(t)$. Θεωρούμε την ακόλουθη διαταραχή της λύσης του ευθέως προβλήματος

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n}\cos(nt)$$

Αυτή η διαταραγμένη λύση του ευθέως προβλήματος αντιστοιχε,ί όταν το δεξιό μέλος της εξίσωσης (1) είναι:

$$q_n(t) = q(t) - n\cos(nt)$$

Τότε

$$\|u - u_n\|_{C[0,T]} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ ενώ } \|q - q_n\|_{C[0,T]} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Συνεπώς το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι ευσταθές. Άρα είναι μη καλά τοποθετημένο.

Παράδειγμα 4 (Πρόβλημα Cauchy για την εξίσωση Laplace)

Έστω $u(x,y)$ είναι η λύση του ακόλουθου προβλήματος,

$$\Delta u = 0 \qquad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

$$u(0,y) = f(y), \forall\, y \in \mathbb{R}$$

$$u_x(0,y) = 0, \forall\, y \in \mathbb{R}$$

όπου Δ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής. Έστω ότι επιλέγονται τα δεδομένα $f(y)$ ως εξής:

$$f(y) = u(0,y) = \frac{1}{n}\sin(ny)$$

Τότε η λύση του πιο πάνω προβλήματος για αυτά τα δεδομένα είναι:

$$u(x,y) = \frac{1}{2n}\sin(ny)\,(e^{nx} + e^{-nx}), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Άρα $\forall\, x > 0$ και για αρκετά μεγάλο n, η τιμή της λύσης (2) μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη, καθώς $\lim_{n\to\infty} f(y) = 0$. Συνεπώς, για μικρές διαταραχές στα δεδομένα μπορούν να επιφέρουν μεγάλη μεταβολή στη λύση, άρα το πρόβλημα ως μη-ευσταθές είναι μη-καλά τοποθετημένο.

Παράδειγμα 5 (Ολοκληρωτική Εξίσωση Voltera Α' είδους)

Θεωρούμε το πρόβλημα επίλυσης της πιο κάτω ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\int_0^x K(x,s)q(s)ds = f(x)\,, \qquad 0 \le x \le 1 \quad (*)$$

Για $K \equiv 1$ το πρόβλημα επίλυσης της $(*)$ είναι ισοδύναμο με την παραγώγιση $f'(x) = q(x)$. Τότε η ακολουθία $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ υποδεικνύει την αστάθεια του προβλήματος.(βλέπε παράδειγμα 1)

Παράδειγμα 6 (Συστήματα Αλγεβρικών Εξισώσεων)

Έστω ότι ισχύει ένας νόμος που περιγράφεται από ένα σύστημα αλγεβρικών Εξισώσεων $Aq = f$, όπου A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και q και f είναι n και m διάστασης διανύσματα αντίστοιχα. Για $m < n$ το σύστημα μπορεί να έχει πολλές λύσεις. Για $m > n$ τότε το σύστημα μπορεί να μην έχει λύσεις. Για $m = n$ το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιοδήποτε δεξιό μέλος αν και μόνο αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας. Για να υπάρχει ο αντίστροφος πινακας ο οποιος τότε θα είναι και φραγμένος αρκεί να ισχύει $rank(A) = n$ ή $Ker(A) = \{0\}$. Αυτό εξηγείται αφού αν ο A είναι «1-1»,ισοδυναμα δηλαδη $Ker(A) = \{0\}$ τότε μέσω του θεωρήματος $Ker(A) + rank(A) = n$ έπεται οτι ο A είναι «επί», ανάλογα ισχύει ότι αν ο A είναι «επί» τότε αναγκαστικά θα είναι και «1-1». Οι διανυσματικοί χώροι στους οποίους ορίζεται ο τελεστής A, ως πεπερασμένης διάστασης είναι και Banach. Τότε με χρήση του Θεωρήματος της Ανοικτής Απεικόνισης παίρνουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής του A. Επομένως και οι τρείς συνθήκες, για να υπάρχει ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα, ικανοποιούνται. Σε αυτή την περίπτωση θα αναλυθεί η εξάρτηση της λύσης από τις διαταραχές του δεξιού μέλους f. Έστω ότι ισχύει η διαταραγμένη εξίσωση

$$A(q + \delta q) = f + \delta f$$

Τότε αν αφαιρεθεί η αρχική εξίσωση από την διαταραγμένη παίρνουμε $A\delta q = \delta f$. Τότε ισχύει ότι $\delta q = A^{-1}\delta f \Rightarrow \|\delta q\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta f\|$. Επίσης $\|f\| \leq \|A\|\,\|q\|$. Άρα σαν αποτέλεσμα έπεται η βέλτιστη εκτίμηση σχετικού σφάλματος της λύσης:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

που φανερώνει ότι το σφάλμα εξαρτάται από το δείκτη κατάστασης $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ του συστήματος. Συστήματα με μεγάλο δείκτη κατάστασης λέγονται ill-conditioned. Αυτό στην πράξη καθιστά τα συστήματα ασταθή. Δηλαδή μικρές διαταραχές στο δεξιό μέρος μπορεί να επιφέρει μεγάλες διαταραχές στην λύση. Αν τώρα ισχύει η περίπτωση όπου $m = n$ με $\det(A) = 0$, δηλαδή ο αντίστροφος δεν υπάρχει τότε το σύστημα μπορεί να μην έχει λύσεις καθόλου ή να έχει περισσότερες από μια λύσεις. Άρα σε αυτή την περίπτωση είναι μη καλά τοποθετημένο πρόβλημα.

3.3 Ολοκληρωτική Εξίσωση Fredholm A' είδους ως ένα Αντίστροφο μη-Καλά Τοποθετημένο πρόβλημα

Έστω ότι υπάρχει το πρόβλημα επίλυσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm α'είδους η οποία έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\int_0^1 K(s,t)f(t)dt = g(s), \qquad 0 \leq s \leq 1 \qquad (*)$$

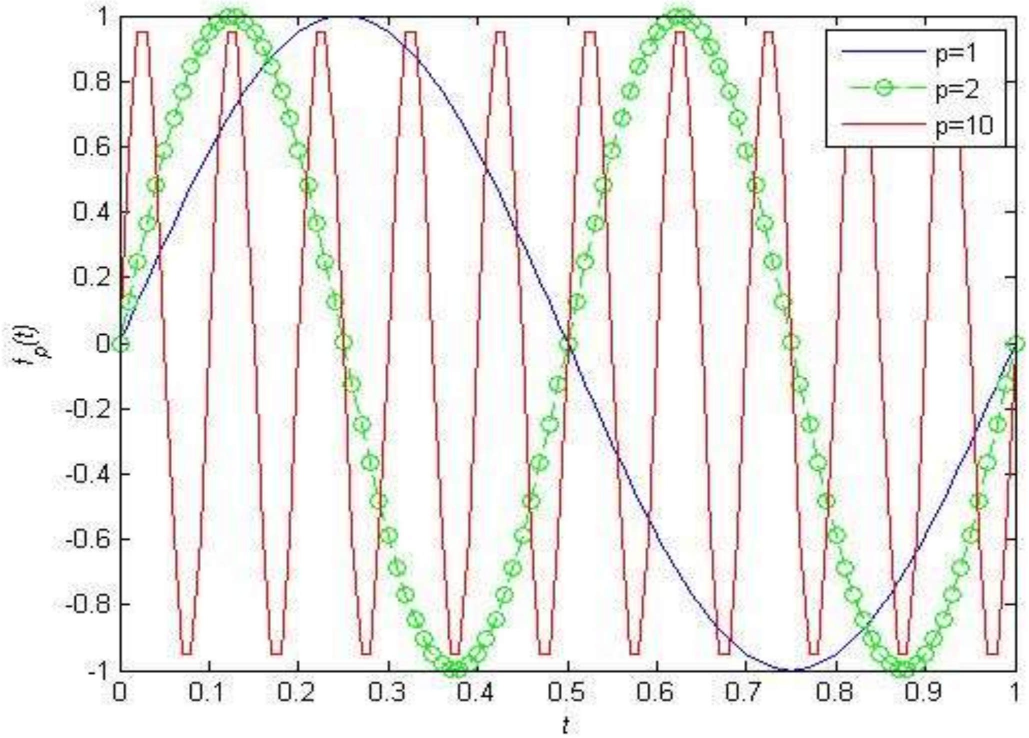
όπου ο πυρήνας $K(s,t)$ και η συνάρτηση $g(s)$ είναι δοσμένα και απαιτείται να βρούμε την συνάρτηση $f(t)$. Υποθέτουμε ότι $g \in C[0,1]$ και $f \in C[0,1]$ καθώς επίσης και $K(s,t), K_s(s,t), K_t(s,t)$ είναι συνεχείς στο ορθογώνιο $0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1$. Το πρόβλημα επίλυσης της $(*)$ είναι μη καλά τοποθετημένο αφού υπάρχουν περιπτώσεις που το πρόβλημα μπορεί να μην έχει λύση για κάποιες συναρτήσεις $g \in C[0,1]$. Για παράδειγμα αν επιλεγεί μια συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής αλλά μη-παραγωγίσιμη στο $C[0,1]$. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση $(*)$ δεν μπορεί να έχει συνεχή λύση f αφού από τις συνθήκες που επικρατούν για τον πυρήνα $K(s,t)$, τότε αναγκαστικά το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της $(*)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς την παράμετρο s για κάθε συνεχή συνάρτηση f. Επίσης η εξίσωση $(*)$ είναι μη καλά τοποθετημένη από άποψη ευστάθειας. Για να γίνει σαφές θα αναφερθεί πιο κάτω το λήμμα Riemann- Lebesque.

Λήμμα Riemann-Lebesque : Έστω η συνάρτηση $f_p(t) = \sin(2\pi p t)\,, p = 1,2,\ldots$Τότε για τυχαίο πυρήνα $K(s,t)$ ισχύει

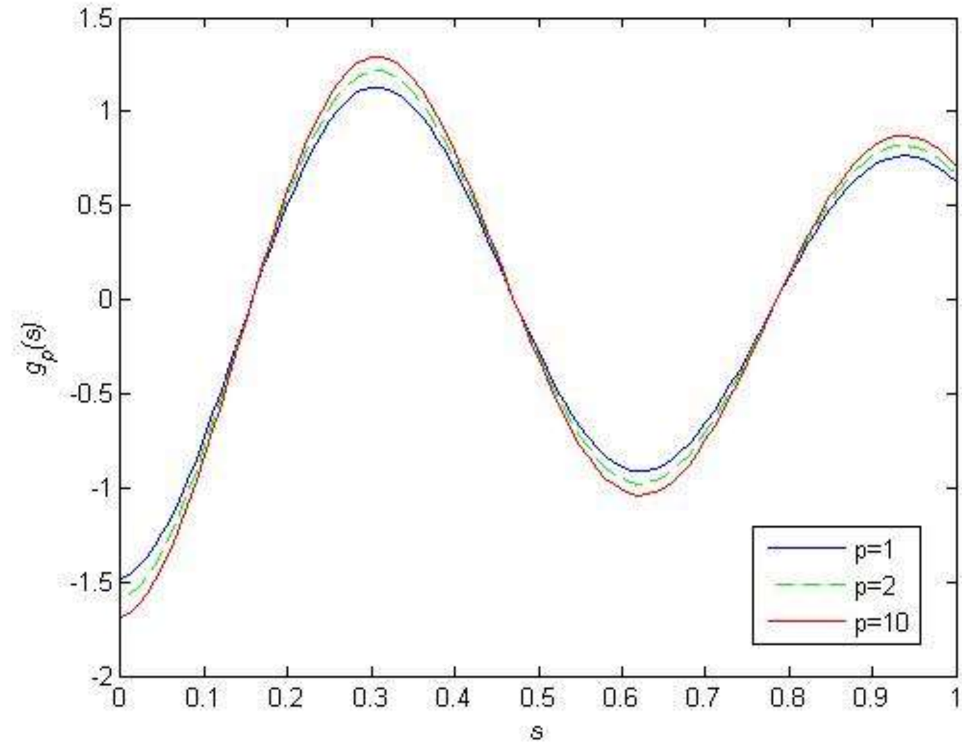
$$g_p(s) = \int_0^1 K(s,t)\ f_p(t)dt \to 0 \qquad \text{για } p \to \infty$$

Είναι γνωστό οτι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier περιοδικών συναρτήσεων διαφόρων συχνοτήτων, οι οποίες αποτελούν και ορθοκανονική βάση. Οπότε και η συνάρτηση f της εξίσωσης Fredholm Α'είδους μπορεί να αναλυθεί σε σειρά των συναρτήσεων $f_p\,, p = 12, ..$ Σύμφωνα με το λήμμα Riemann-Lebesque τα στοιχεία της f με μεγάλη συχνότητα ελαττώνουν περισσότερο την συνεισφορά της κατά την απεικόνιση από το f στο g, σε σχέση με άλλα στοιχεία μικρότερης συχνότητας. Δηλαδή η καμπύλη της συνάρτησης g είναι πιο ομαλή από την καμπύλη της f. Συνεπώς παρατηρείται ότι ο πυρήνας $K(s,t)$ λειτουργεί ως ομαλοποιητής κατά την απεικόνιση από την f στην g, ώστε η g να είναι πιο ομαλή από την f.

Από τα πιο πάνω συμπεραίνεται ότι κατά την επίλυση αντίστροφων προβλημάτων Fredholm Α'είδους παρουσιάζεται μια δυσκολία. Στο αντίστροφο πρόβλημα ακολουθείται η αντίστροφη πορεία, δηλαδή γίνεται μετάβαση από το g (γνωστό) στην f (άγνωστο) που ισοδυναμεί με ενίσχυση των στοιχείων της g με μεγάλη συχνότητα στην αντίστροφη απεικόνιση $g \xrightarrow{\widetilde{K}^{-1}} f$. Επομένως η παραμικρή διαταραχή μεγάλης συχνότητας δg_p του στοιχείου g_p της g, όσο μικρή και να είναι, προκαλεί μεγάλη διαταραχή στο στοιχείο f_p της f και κατά συνέπεια στην f. Όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα p τόσο μεγαλύτερη είναι και η διαταραχή στην f. Άρα με αυτό τον τρόπο παραβιάζεται ο τρίτος κανόνας της καλής τοποθέτησης κατά Hadamard. Επομένως το πρόβλημα είναι μη καλά τοποθετημένο.



Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f_p(t)=sin(2p\pi t)$, p=1,2,10



Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g_p(s)$ για p=1,2,10. Βλέπουμε ότι όταν δράσει ο ολοκληρωτικός τελεστής στις συναρτησεις f_p, το πλάτος των συναρτήσεων g_p μειώνεται καθώς το p μικραίνει. Αυτό αποτελεί συνέπεια του λήμματος Riemann-Lebeque.

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Ιδιάζουσων Τιμών

4.1 Ιδιάζουσα Παραγοντοποίηση(Singular Decomposition)

Στο κεφάλαιο αυτό, αλλά και στα επόμενα, όλοι οι χώροι που θεωρούμε είναι χώροι Hilbert.. Συγκεκριμένα έστω $K: X \to Y$ ένας γραμμικός συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Γ΄νεται η υπόθεση ότι οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του τελεστή K έχουν την εξής διάταξη:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq ..$$

όπου κάθε ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται ανάλογα με την πολλαπλότητα της και έστω (x_n) μια ακολουθία από τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα. Τότε από το πόρισμα 2.8.16 του Φασματικού θεωρήματος για αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές ισχύει ότι:

$$\forall x \in X : x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n + Q(x)$$

με $Q: X \to Ker(K)$ ο τελεστής ορθογώνιας προβολής του X στον διανυσματικό υπόχωρο $ker(K)$. Τότε έπεται ότι:

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n \text{ δηλαδή } K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_n \otimes x_n)$$

Με βάση τις πιο πάνω εκφράσεις θα αποδειχθεί το Θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης το οποίο θα χρησιμοποιθεί ευρέως στις στρατηγικές ομαλοποίησης μη-καλα τοποθετημένων προβλημάτων. Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι αν ένας τελεστής είναι συμπαγής, τότε από σχετικό θεώρημα ισχύει ότι και ο συζυγής του είναι συμπαγής.

Αρχικά δίνεται ο ορισμός των ιδιάζουσων τιμών για τη συνέχεια.

Ορισμός 4.1.1 (Ιδιάζουσων Τιμών)

Οι μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες ιδιοτιμών του θετικού αυτοσυζυγή τελεστή $K^*K: X \to X$ λέγονται ιδιάζουσες τιμές (singular values) του συμπαγούς γραμμικού τελεστή $K: X \to Y$.

Θεώρημα 4.1.2 (Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης)
Έστω (μ_n) η ακολουθία των μη-μηδενικών ιδιάζουσων τιμών ενός συμπαγούς γραμμικού τελεστή $K: X \to Y$ που έχουν διάταξη $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \cdots$ όπου επαναλαμβάνονται με βάση την πολλαπλότητα τους. Τότε υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) του X και (y_n) στον Y τέτοιες ώστε $\forall\ n \in N$

$$K(x_n) = \mu_n y_n \quad \kappa\alpha\iota \quad K^*(y_n) = \mu_n(x_n)$$

Επίσης $\forall\ x \in X$ έχουμε την ιδιάζουσα παραγοντοποίηση

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x|x_n\rangle x_n + Q(x)$$

με τον τελεστή ορθογώνιας προβολής $Q: X \to Ker(K)$ και

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x|x_n\rangle y_n$$

Κάθε σύστημα (μ_n, x_n, y_n) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ με αυτές τις ιδιότητες λέγεται ιδιάζον σύστημα του K.

Απόδειξη

Έστω (x_n) η ορθοκανονική ακολουθία από τα ιδιοδιανύσματα του $K^*K: X \to X$. Δηλαδή

$$(K^*K)(x_n) = \mu_n^2 x_n$$

Τότε ορίζεται μια δεύτερη ορθοκανονονική ακολουθία (y_n) με

$$y_n := \frac{1}{\mu_n} K(x_n) \qquad (*)$$

Θα δειχθεί ότι πράγματι είναι ορθοκανονική. Είναι

$$< y_n, y_m > = < \frac{1}{\mu_n} K(x_n), \frac{1}{\mu_m} K(x_m) >$$

$$= \frac{1}{\mu_n} < K(x_n), \frac{1}{\mu_m} K(x_m) >$$

$$= \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{\mu_m} < K(x_n), K(x_m) > = \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{\mu_m} < x_n, K^*K(x_m) > = \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{\mu_m} < x_n, \mu_m^2 x_m >$$

$$= \frac{\mu_m}{\mu_n} < x_n, x_m > = \delta_{nm}$$

Από την $(*)$ έπεται $K(x_n) = \mu_n y_n$

Επίσης $K^*(y_n) = K^*\left(\frac{1}{\mu_n}K(x_n)\right) = \frac{1}{\mu_n}K^*K(x_n) = \frac{1}{\mu_n}\mu_n^2 x_n = \mu_n x_n$.Άρα $K^*(y_n) = \mu_n x_n$. Συνεπώς έχει δειχθεί το πρώτο μέρος του θεωρήματος. Αν εφαρμόστεί το Φασματικό θεώρημα για τον αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $K^*K: X \to X$, τότε $\forall\ x \in X$ ισχύει:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n + Q(x)$$

με $Q: X \to \ker(K^*K)$ τελεστής ορθογώνιας προβολής. Ισχύει ότι $\ker(K^*K) = Ker(K)$. Πράγματι, έστω $x \in \ker(K^*K)$. Δηλαδή $K^*Kx = 0_X$. Τότε

$$< K(x), K(x) >=< x, K^*K(x) >=< x, 0_X >= 0$$

Άρα $\|K(x)\|^2 = 0 \Longrightarrow K(x) = 0_Y$, δηλαδή $x \in Ker(K)$. Εύκολα αποδεικνύται ότι $Ker(K) \subset Ker(K^*K)$Συνεπώς $Ker(K) = Ker(K^*K)$. Επομένως

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n + Q(x)$$

με $Q: X \to \ker(K)$ τελεστής ορθογώνιας προβολής. Ακολούθως εφαρμόζεται η δράση του συνεχούς τελεστή K στην έκφραση του x. Συγκεκριμένα

$$K(x) = K\left(\sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n + Q(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > K(x_n) + K(Q(x))$$

$$\xRightarrow{Ker(K^*K)=\ker(K)} K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < x, x_n > y_n$$

■

Στο επόμενο θεώρημα εκφράζεται η λύση της εξίσωσης Α'είδους με συμπαγή γραμμικό τελεστή σε όρους ενός ιδιάζοντος συστήματος.

4.2 Συνθήκη Picard

Θεώρημα 4.2.1 (Picard)

Έστω $K: X \to Y$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζον σύστημα (μ_n, x_n, y_n) $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η εξίσωση Α'είδους

$$Kx = f$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $f \in (KerK^*)^{\perp}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη Picard

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |< f, y_n >|^2 < \infty \qquad (1)$$

Σε αυτή την περίπτωση η λύση είναι η εξής:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < f, y_n > x_n \qquad (2)$$

Απόδειξη

Η αναγκαιότητα για το ότι η $f \in (KerK^*)^{\perp}$ έπεται από το γεγονός ότι $(\ker K^*)^{\perp} = \overline{ImK}$. Έστω ότι $x \in X$ είναι λύση της $Kx = f$. Τότε επειδή είναι $\mu_n = \overline{\mu_n}$ έχουμε:

$$\mu_n < x, x_n >=< x, \mu_n x_n >=< x, K^*(y_n) >=< K(x), y_n >=< f, y_n >$$

Επίσης ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |< f, y_n >|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \mu_n^2 \; |< x, x_n >|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |< x, x_n >|^2 \leq \|x\|^2 < \infty \text{ (ανισότητα } Bessel)$$

Αντίστροφα, έστω $f \in (KerK^*)^{\perp}$ και ότι ισχύει η (1). Τότε αφού ο X είναι χώρος Hilbert και $\{x_n\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική ακολουθία, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < f, y_n > x_n$$

με βάση την πρόταση 1.2.19 συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |< f, y_n >|^2 < \infty$$

Δηλαδή αν (λ_n) με $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} < f, y_n >$ να ισχύει $(\lambda_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$. Συνεπώς η σειρά στην έκφραση (2) συγκλίνει αφού ισχύει η (1) . Άρα στην περίπτωση που η εξίσωση $Kx = f$ είναι επιλύσιμη θα δείχθεί ότι η εκφραση (2) αποτελεί και λύση της εξίσωσης. Πράγματι

$$K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < f, y_n > K(x_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < f, y_n > \mu_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} < f, y_n > y_n$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η τριάδα (μ_n, y_n, x_n) $\forall n \in \mathbb{N}$ αποτελεί ιδιάζον σύστημα του τελεστή $K^{*}\ddot{}: \ddot{Y} \to X$. Δηλαδή $(KK^*)y_n = {\mu_n}^2 y_n$. Άρα τα y_n είναι ιδιοδιανύσματα του θετικού αυτοσυζυγή τελεστή $KK^*: Y \to Y$. Από θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης ισχύει

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n + l(f), \qquad (3)$$

όπου $l: Y \to Ker(K^*)$. Από Φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές ισχύει

$$Y = \oplus_{i=0}^{\infty} N_i = N_0 \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} N_i)$$

με $N_0 = Ker(KK^*) = Ker(K^*)$ και $\oplus_{i=1}^{\infty} N_i = (Ker(KK^*))^{\perp} = Ker(K^*)^{\perp}$.

Συνεπώς $l(f) \perp N_i, i = 1,2..$ Τότε αφού $f \in (KerK^*)^{\perp}$ θα ισχύει $f \perp l(f)$. Άρα από την έκφραση (3) έπεται ότι $\langle f, l(f) \rangle = \langle l(f), l(f) \rangle = \|l(f)\|^2 = 0$. Επομένως $l(f) = O_Y$.
Τότε η (3) γίνεται $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n = K(x)$

■

Από το θεώρημα του Picard εξάγεται η φύση της μη-καλής τοποθέτησης της εξίσωσης $Kx = f$. Αν διαταράξουμετο δεξιό μέλος, θέτοντας $f^{\delta} = f + \delta y_n$ τότε λαμβάνεται μια διαταραγμένη λύση $x^{\delta} = x + \delta \frac{x_n}{\mu_n}$ αφού $K(x^{\delta}) = f + \delta y_n = f^{\delta}$. Επομένως ο λόγος

$$\frac{\left\|x^{\boldsymbol{\delta}} - x\right\|}{\|f^{\delta} - f\|} = \frac{1}{\mu_{\boldsymbol{n}}}$$

μπορεί να γίνει πολυ μεγάλος από το γεγονός ότι οι ιδιάζουσες τιμές τείνουν στο μηδέν ($\mu_n \to 0 \; για \; n \to \infty$). Αυτό μας οδηγεί στο γεγονός να δοκιμάσουμε να ομαλοποιήσουμε την τελεστική εξίσωση $Kx = f$ με μια απόσβεση ή με ένα όρο φιλτραρίσματος της επιρροής του όρου $\frac{1}{\mu_{\boldsymbol{n}}}$ στη λύση (2) που μας δίνει το Θ.Picard.

Κεφάλαιο 5

Γενική Θεωρία Ομαλοποίησης ill-posed Προβλημάτων

5.1 Εισαγωγικά Στοιχεία

Πολλά αντίστροφα προβλήματα όπως παρουσιάστηκαν και στο κεφάλαιο 3 μπορούν να διατυπωθούν υπό τη μορφή τελεστικών εξισώσεων (operator equations) της μορφής:

$$K(x) = y$$

όπου $K: X \to Y$ είναι ένας 1-1 γραμμικός συμπαγής τελεστής με X, Y διανυσματικοί χώροι Hilbert. Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει λύση $x \in X$ στη μη-διαταραγμένη εξίσωση $K(x) = y$. Δηλαδή ισχύει ότι $y \in R(K)$. Από το γεγονός ότι ο K είναι injective έπεται και ότι η λύση είναι μοναδική. Στην πράξη όμως το στοιχείο $y \in Y$ ποτέ δεν είναι γνωστό ακριβώς, αλλά το γνωρίζουμε με κάποιο επίπεδο σφάλματος $\delta > 0$ (error level). Στη συνέχεια γίνεται η υπόθεση ότι είναι γνωστό το επίπεδο σφάλματος δ και $y^\delta \in Y$ με την συνθήκη $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Ο σκοπός είναι να λυθεί η διαταραγμένη εξίσωση $K(x^\delta) = y^\delta$ $(*)$. Γενικά όμως η $(*)$ δεν είναι επιλύσιμη επειδή δεν είναι γνωστό αν τα δεδομένα $y^\delta \in R(K)$. Άρα στην καλύτερη περίπτωση επιδιώκεται να καθορίστεί μια προσέγγιση $x^\delta \in X$ της ακριβούς λύσης $x \in X$ που να είναι βέλτιστη. Μια ακόμα προϋπόθεση για την προσέγγιση x^δ, είναι ότι πρέπει να εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα y^δ. Με άλλα λόγια να κατασκευάστεί μια κατάλληλα φραγμένη (Bounded) προσέγγιση $R: Y \to X$ του (μη φραγμένου) αντίστροφου τελεστή $K^{-1}: Im(K) \to X$.

5.2 Στρατηγική Ομαλοποίησης

Ορισμός 5.2.1 (Στρατηγική Ομαλοποίησης)
Έστω X και Y δυο διανυσματικοί χώροι με νόρμα και έστω $K: X \to Y$ ένας injective φραγμένος και γραμμικός τελεστής. Τότε μία οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών

$$R_a : Y \to X \quad , a \in \mathbb{R} \text{ με } a > 0$$

ονομάζεται στρατηγική ομαλοποίησης (regularization strategy) για τον τελεστή K αν η οικογένεια τελεστών $R_a\, K\colon X \to X$ συγκλίνει σημειακά (pointwise convergence) στον ταυτοτικό τελεστή. Δηλαδή

$$\lim_{a\to 0} R_a(K\,\varphi) = \varphi = I\,(\varphi), \forall\, \varphi \in X \qquad (*)$$

ισοδύναμα, $\|(R_a\, K)\,(\varphi) - I\,(\varphi)\|_X \to 0$ για $\alpha \to 0, \forall\, \varphi\ \in X$. Η παράμετρος α ονομάζεται παράμετρος ομαλοποίησης. Από τη σχέση $(*)$ ισχύει ισοδύναμα

$$\lim_{a\to 0} R_a\, y = K^{-1}(y), \forall\, y\ \in R(K) = K\,(X)$$

Θεώρημα 5.2.2

Έστω $R_\alpha\,, \alpha > 0$ μια στρατηγική ομαλοποίησης για το *συμπαγή γραμμικό* τελεστή $K\colon X \to Y$ με $\mathrm{dimX} = \infty$. Τότε έχουμε:

1) Οι τελεστές R_α δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένοι (uniformly bounded). Δηλαδή $\exists (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $\lim_{j\to\infty} \left\|R_{a_j}\right\| = \infty$.

2) Η οικογένεια $(R_a K)_{\alpha>0}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε φραγμένα υποσύνολα του X. Δηλαδή δεν υπάρχει σύγκλιση κατά νόρμα της ακολουθίας $(R_a K)_{\alpha>0}$ στον ταυτοτικό τελεστή I.

Απόδειξη

(1)Έστω $R_\alpha\,, \alpha > 0$ μια στρατηγική ομαλοποίησης για τον συμπαγή γραμμικό τελεστή $K\colon X \to Y$ με $dimX = \infty$. Έστω ότι οι τελεστές R_α είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Δηλαδή $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε $\|R_a\| \le c\,, \forall a > 0$. Αφού οι R_α αποτελούν μια στρατηγική ομαλοποίησης, τότε ισχύει

$$\forall\, y \in R(K)\colon R_a y \to K^{-1}y \ \text{ για } \alpha \to 0$$

Επίσης αφού $\|R_a\| \le c \xRightarrow{R_\alpha\ \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\iota} \|R_a y\| \le \|R_a\|\|y\| \le c\|y\|\ \ , \forall y \in R(K) \subseteq Y$

Από συνέχεια της νόρμας έπεται ότι:

$$\|K^{-1}y\| = \left\|\lim_{\alpha\to 0} R_a y\right\| \overset{\|\cdot\|\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\cong} \lim_{\alpha\to 0}\|R_a y\| \le c\|y\|\,, \forall y \in R(K) \subseteq Y$$

Δηλαδή ισχύει:

$$\|K^{-1}y\| \le c\|y\|\,, \forall y \in R(K) \subseteq Y$$

Επομένως ο τελεστής $K^{-1}\colon R(K) \to X$ είναι φραγμένος. Τότε ο ταυτοτικός τελεστής $I = K^{-1}K\colon X \to X$ είναι συμπαγής ως γινόμενο δύο γραμμικών και φραγμένων τελεστών εκ των οποίων ο ένας από τους δύο είναι συμπαγής (δηλ ο K). (Αυτό έπεται από συγκεκριμένο θεώρημα). Συνεπώς ο I ώς συμπαγής, θα ισχύει ότι $dimX < \infty$. Άτοπο αφού $dimX = \infty$. Άρα οι τελεστές $(R_a)_{a>0}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένοι.

(2) Έστω ότι οι τελεστές $(R_a K)\,, a > 0$ συγκλίνουν στον ταυτοτικό τελεστή I ως προς την νόρμα του διανυσματικού χώρου των φραγμένων τελεστων $B(X)$. Δηλαδή

$$\lim_{\alpha\to 0}\|(R_a K - I)\| = 0$$

Συνεπώς $\exists \alpha > 0$ τέτοιο ώστε $\|R_a K - I\| < \frac{1}{2}$.Τότε $\forall y \in R(K)$ έχουμε:

$$\|K^{-1}(y)\| = \|K^{-1}(y) - R_a(y) + R_a(y)\| = \|K^{-1}(y) - R_a K K^{-1}(y) + R_a(y)\|$$

$$\le \|K^{-1}(y) - R_a K K^{-1}(y)\| + \|R_a(y)\|$$

$$\leq \|K^{-1}(y) - R_a K K^{-1}(y)\| + \|R_a\|\|y\|$$

Όμως ισχύει:

$$\begin{aligned}\|K^{-1}(y) - R_a K K^{-1}(y)\| &= \left\|I\big(K^{-1}(y)\big) - (R_a K)(K^{-1}(y))\right\| \\ &= \|(I - R_a K)(K^{-1}(y))\| \\ &\leq \|I - R_a K\|\|K^{-1}(y)\| < \frac{1}{2}\|K^{-1}(y)\|\end{aligned}$$

Συνεπώς έπεται:

$$\begin{aligned}\|K^{-1}(y)\| &\leq \frac{1}{2}\|K^{-1}(y)\| + \|R_a\|\|y\| \\ \Rightarrow 2\|K^{-1}(y)\| &\leq \|K^{-1}(y)\| + 2\|R_a\|\|y\| \\ \Rightarrow \|K^{-1}(y)\| &\leq 2\|R_a\|\|y\|\end{aligned}$$

Άρα έχει δειχθεί ότι ο τελεστής $K^{-1} : R(K) \to X$ είναι φραγμένος. Με παρόμοιο επιχείρημα όπως το ερώτημα (1) αποδεικνύεται ότι καταλήγει σε άτοπο. Συνεπώς οι τελεστές $(R_a K)$, $a > 0$ δεν μπορούν να συγκλίνουν στον ταυτοτικό I ως προς την νόρμα του $B(X)$, αν $dimX = \infty$.

■

5.3 Ανάλυση και Ποιοτική Ερμηνεία του Σφάλματος της Ομαλοποιημένης Λύσης

Έστω τώρα $y \in R(K)$ να είναι το ακριβές μελος της εξίσωσης $Kx = y$ και $y^\delta \in Y$ να είναι το μετρήσιμο μέγεθος με την εξής συνθήκη $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Ορίζεται

$$x^{a,\delta} := R_a y^\delta$$

ως η προσέγγιση της λύσης x της $Kx = y$. Τότε υπάρχει η εξής ανάλυση του σφάλματος

$$\begin{aligned}\|x^{a,\delta} - x\| = \|R_a y^\delta - x\| &= \|R_a y^\delta - R_a y + R_a y - x\| \\ &\leq \|R_a y^\delta - R_a y\| + \|R_a y - x\| \\ &\leq \|R_a\|\|y^\delta - y\| + \|R_a K x - x\|\end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει η εξής ανάλυση σφάλματος

$$\|x^{a,\delta} - x\| \leq \delta\|R_a\| + \|R_a K x - x\|$$

Αυτή η ανάλυση σφάλματος δείχνει ότι το ολικό σφάλμα μεταξύ της ακριβούς λύσης και της υπολογιστικής συνίσταται από δύο μέλη:

α) Το πρώτο μέλος αντανακλά την επιρροή που έχουν τα μη- ακριβή δεδομένα y^δ σε σχέση με τα ακριβή y. Γνωρίζουμε από προηγούμενο θεώρημα ότι καθώς $\alpha \to 0$ ο όρος $\|R_a\| \to \infty$ συνεπώς ολόκληρος ο όρος $\delta\|R_a\| \to \infty$ για $\alpha \to 0$.

β) Το δεύτερο μέλος οφείλεται στο σφάλμα προσέγγισης μεταξύ του R_a και του K^{-1}. Δηλαδή για $Kx = y$ έχουμε

$$\|R_a K x - x\| = \|R_a y - K^{-1} y\| = \|(R_a - K^{-1})(y)\|$$

Άρα φαίνεται άμεσα με την πιο πάνω ανάλυση της νόρμας για το πιο σφάλμα περιγράφει κάθε όρος. Είναι γνωστό από ορισμό της στρατηγικής ομαλοποίησης ότι:

$$R_a y \to K^{-1}y \text{ για } \alpha \to 0\,, \forall y \in R(K)$$

Συνεπώς ο πιο πάνω όρος σφάλματος τείνει στο μηδέν για $\alpha \to 0$.

Με τα πιο πάνω συμπεραίνεται ότι χρειάζεται μια στρατηγική επιλογής $\alpha = \alpha(\delta)$ που εξαρτάται από το δ ώστε να κρατηθεί το ολικό σφάλμα όσο μικρότερο γίνεται. Δηλαδή απαιτείται να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα

$$\delta\|R_a\| + \|R_a Kx - x\| \qquad (*)$$

Αν κάποιος εστιάζει την προσοχή του στην ακρίβεια της προσέγγισης (accuracy of approximation), τότε απαιτεί να ισχύει **μικρό** σφάλμα $\|R_a Kx - x\|$ δηλαδή **μικρή** παράμετρος ομαλοποίησης α. Από την άλλη το θέμα της Ευστάθειας (Stability) απαιτεί **μικρό** $\|R_a\|$, άρα **μεγάλη** τιμή της παραμέτρου α. Επομένως ανάλογα με τη φύση της εφαρμογής επιλέγεται και η αντίστοιχη παράμετρος ομαλοποίησης ούτως ώστε η λύση του προβήματος να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν καλύτερα στις απαιτήσεις της ίδιας της εφαρμογής.

Για μια στρατηγική ομαλοποίησης αναμένεται η ομαλοποιημένη λύση (regularized solution) να συγκλίνει στην ακριβή λύση (exact solution) όταν το επίπεδο σφάλματος δ στα δεδομένα τείνει στο μηδέν. Αυτό εκφράζεται με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.3.1 (Regular strategy for a regularization scheme)
Μια στρατηγική για ένα σχήμα ομαλοποίησης $R_{a\,,}a > 0$ όπου η παράμετρος κανονικοποίησης $\alpha = \alpha(\delta)$ εξαρτάται από το επίπεδο σφάλματος δ, λέγεται **regular** αν

$$\forall\, y \in R(K) \text{ και } \forall y^\delta \in Y \text{ με } \left\|y - y^\delta\right\| \le \delta \text{ ισχύει ότι:}$$

$$R_a y^\delta \to K^{-1}y \quad \text{καθώς } \delta \to 0.$$

$$\text{δηλαδή } x^{a,\delta} \to x \text{ για } \delta \to 0$$

Κεφάλαιο 6

Στρατηγικές Ομαλοποίησης ill-posed Προβλημάτων

6.1 Γενική Στρατηγική Ομαλοποίησης

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθεί ένα θεώρημα γενικής στρατηγικής ομαλοποίησης το οποίο στη συνέχεια θα συγκεκριμενοποιηθεί ώστε να διατυπωθεί η στρατηγική ιδιαζουσας παραγοντοποίησης με φασματικη αποκοπή (TSVD) καθώς επίσης και η στρατηγική ομαλοποίησης Tikhonov.

Θεώρημα 6.1.1

Έστω $K: X \to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζον σύστημα (μ_n, x_n, y_n) , $n \in \mathbb{N}$ και έστω $q: (0, \infty) \times (0, \|K\|] \to \mathbb{R}$ μια *φραγμένη* συνάρτηση τέτοια ώστε $\forall\ \alpha > 0\ \exists c(a) > 0$ με τις ιδιότητες:

(α) $|q(a, \mu)| \leq c(a)\mu \quad , \quad 0 < \mu \leq \|K\|$

(β) $\lim_{\alpha \to 0} q(a, \mu) = 1\ \ ,\ \ 0 < \mu \leq \|K\|$

Τότε οι φραγμένοι τελεστές $R_a: Y \to X\ \ , a > 0$ που ορίζονται $\forall y \in Y$

$$R_a y \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(a, \mu_n) < y, y_n > x_n$$

περιγράφουν μια στρατηγική ομαλοποίησης με $\|R_a\| \leq c(a)$.

Απόδειξη

Αρχικά θα δειχθεί ότι οι τελεστές R_a , $a > 0$ είναι φραγμένοι. Από ανισότητα Bessel έπεται ότι:

$$\|R_a(y)\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{\mu_n}^2} [q(a, \boldsymbol{\mu_n})]^2 \left|< y, y_n >\right|^{\mathbf{2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{\mu_n}^{\mathbf{2}}} [c(a)]^2 {\mu_n}^2 \left|< y, y_n >\right|^{\mathbf{2}}$$

$$= [c(a)]^{\mathbf{2}} \sum_{n=1}^{\infty} |< y, y_n >|^{\mathbf{2}}$$

$$\overset{\alpha\nu\iota\sigma.Bessel}{\leq} \quad [c(a)]^{\mathbf{2}} \|y\|^{\mathbf{2}}$$

Άρα $\|R_a(y)\| \leq c(a)\|y\|$. Επομένως $\|R_a\| \leq c(a)$. Έπίσης ισχύει ότι: $R_a(Kx) - x \in X$. Τότε από το Θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης έπεται:

$$R_a(Kx) - x = \sum_{n=1}^{\infty} < R_a(Kx) - x, x_n > x_n + Q(R_a(Kx) - x)$$

με $Q: X \rightarrow Ker(K)$ ο τελεστής ορθογώνιας Προβολής. Επειδή K injective ισχύει $Ker(K) = \{O_X\}$. Άρα $R_a(Kx) - x = \sum_{n=1}^{\infty} < R_a(Kx) - x, x_n > x_n$. Τότε από ταυτότητα Bessel έχουμε:

$$\|R_a(Kx) - x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< R_a(Kx) - x, x_n >|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< R_a(Kx), x_n > - < x, x_n >|^2$$

Όμως

$$\begin{aligned}
< R_a(Kx), x_n > &= < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} q(a, \mu_m) < K(x), y_m > x_m \, , x_n > \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} q(a, \mu_m) < K(x), y_m > < x_m \, , x_n > \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} q(a, \mu_m) < K(x), y_m > \delta_{mn} \\
&= \frac{1}{\mu_n} q(a, \mu_n) < K(x), y_n > = \frac{1}{\mu_n} q(a, \mu_n) < x, K^*(y_n) > \\
&= \frac{1}{\mu_n} q(a, \mu_n) < x, \mu_n x_n > = q(a, \mu_n) < x, x_n >
\end{aligned}$$

Άρα έπεται

$$\|R_a(Kx) - x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [q(a, \mu_n) - 1]^2 |< x, x_n >|^2$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0_X$. Τότε ισχύει από ταυτότητα Bessel ότι:
$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< x, x_n >|^2 < \infty$. Συνεπώς για $\varepsilon > 0$ και για $M > 0$ ένα φράγμα της $q(\cdot,\cdot)$, αφού είναι φραγμένη, θα ισχύει ότι $\exists N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |< x, x_n >|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2(M+1)^2}$$

Όμως $\lim_{\alpha \to 0} q(a, \mu_n) = 1 \quad ,0 < \mu \leq \|K\|$. Δηλαδή $\exists \alpha_0(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$|q(a, \mu_n) - 1|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2} \quad , \forall n = 1,2, \dots , N \; και \; \forall \; a \in (0, a_0(\varepsilon))$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\|R_a(Kx) - x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} [q(a, \mu_n) - 1]^2 |< x, x_n >|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} [q(a, \mu_n) - 1]^2 \, |< x, x_n >|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} [q(a, \mu_n) - 1]^2 |< x, x_n >|^2 \\
&< \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2} \sum_{n=1}^{N} |< x, x_n >|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} [q(a, \mu_n) - 1]^2 |< x, x_n >|^2 \\
&< \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2} \sum_{n=1}^{N} |< x, x_n >|^2 + (M+1)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |< x, x_n >|^2
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2}\sum_{n=1}^{N}|< x, x_n >|^2 + (M+1)^2\frac{\varepsilon^2}{2(M+1)^2}$$
$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\sum_{n=1}^{N}|< x, x_n >|^2}{\sum_{n=1}^{\infty}|< x, x_n >|^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

Συνεπώς $\|R_a(Kx) - x\| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ και για $0 < \alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$. Δηλαδή $\lim_{\alpha\to 0} R_a(Kx) = x , \forall x \in X$. Επομένως

$$\lim_{\alpha\to 0} R_a(y) = K^{-1}(y) \quad \forall y \in R(K)$$

Άρα οι τελεστές $R_a , \alpha > 0$ αποτελούν μια στρατηγική ομαλοποίησης.

■

Στη συνέχεια θα περιγραφούν δύο βασικά σχήματα στρατηγικών ομαλοποίησης. Συγκεκριμένα, της φασματικής Αποκοπής (spectral cut-off) και της ομαλοποίησης Tikhonov (Tikhonov Regularization) που καθορίζονται με την επιλογή της συνάρτησης απόσβεσης ή φίλτρου $q\ (\cdot,\cdot)$ ανάλογα.

6.2 Στρατηγική Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης με Φασματική Αποκοπή (TSVD)

Θεώρημα 6.2.1 (Στρατηγική Φασματικής Αποκοπής)

Έστω $K: X \to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζον σύστημα $(\mu_n, x_n, y_n) , n \in \mathbb{N}$. Τότε η φασματική αποκοπή (spectral cut-off), η οποία ορίζεται ως:

$$R_m(y) \coloneqq \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n} < y, y_n > x_n$$

περιγράφει ένα σχήμα στρατηγικής ομαλοποίησης με παράμετρο κανονικοποίησης $m \to \infty$ και $\|R_m\| = \frac{1}{\mu_n}$.

Απόδειξη

Καταρχήν ισχύει ότι

$$R_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(m, \mu_n) < y, y_n > x_n$$

με συνάρτηση φίλτρου $q(m, \mu)$, όπου

$$q(m, \mu) = \begin{cases} 1 & \mu \geq \mu_n \\ 0 & \mu < \mu_m \end{cases}$$

Θα δειχθεί ότι οι τελεστές $R_m , m > 0$ είναι τελεστές με την μορφή $R_\alpha , \alpha > 0 , \alpha = \frac{1}{m}$ με $m \to \infty$ δηλαδή $\alpha \to 0$ με συνάρτηση φίλτρου που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β) του προηγούμενου θεωρήματος 6.1.1 που αφορούσε τη γενική στρατηγική ομαλοποίησης.

Αρχικά η συνάρτηση

$$q(m, \mu): (0, \infty) \times (0, \|K\|] \to \mathbb{R}$$

είναι φραγμένη. Συγκεκριμένα $q(m, \mu) \leq 1 , \forall m, n$.

Άρα $\forall m \in \mathbb{N} \subset (0, \infty)\ \exists c(m) > 0$ τέτοιο ώστε $|q(m, \mu)| \leq c(m)\mu \ ,0 < \mu \leq \|K\|$. Συγκεκριμένα για $c(m) = \frac{1}{\mu_m} > 0$ έχουμε:

I. για $\mu \geq \mu_m$ δηλαδή $\frac{\mu}{\mu_m} \geq 1 \Rightarrow q(m,\mu) = 1 \leq \frac{\mu}{\mu_m} = \mu\, c(m)$

II. για $\mu < \mu_m$ δηλαδή $\frac{\mu}{\mu_m} < 1 \Rightarrow q(m,\mu) = 0 < \frac{\mu}{\mu_m} = \mu\, c(m)$

Συνεπώς έχει δειχθεί το (α). Επίσης ισχύει ότι $lim_{m\to\infty} q(m,\mu) = 1\ ,0 < \mu \leq \|K\|$. (Αυτό είναι ισοδύναμο με $lim_{\alpha\to 0}\, q\left(\frac{1}{a},\mu\right) = 1\ ,\alpha = \frac{1}{m}$). Αυτό ισχύει πράγματι αφού είναι γνωστό ότι ο K^*K είναι αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Συνεπώς το φάσμα του $(K^*K\ )$ αποτελείται από το μηδέν (αν X είναι άπειρης διάστασης) και το πολύ από ένα αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών με πιθανό σημείο συσσώρευσης το μηδέν. Τότε ισοδύναμα αν $\mu_n^2 = \lambda$ έπεται ότι $lim_{n\to\infty}\, \mu_n = 0$ και ο λόγος $lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{\mu_n} \geq 1$. Επομένως ισχύει $lim_{m\to\infty}\, q(m,\mu) = 1\ ,0 < \mu \leq \|K\|$. Με βάση το τελευταίο, έχει δειχθεί και το (β). Συνεπώς με βάση το προηγούμενο θεώρημα 6.1.1 ισχύει ότι οι τελεστές $R_m\,, m > 0$ αποτελούν μια στρατηγική ομαλοποίησης. Επίσης $\|R_m\| = \frac{1}{\mu_m}$. Πράγματι αφού:

$$\begin{aligned}\|R_m(y)\|^2 &= \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{{\mu_n}^2} |< y, y_n >|^2 \\ &\leq \frac{1}{{\mu_m}^2} \sum_{\mu_n \geq \mu_m} |< y, y_n >|^2 \\ &\leq \frac{1}{{\mu_m}^2} \sum_{n=1}^{\infty} |< y, y_n >|^2 \leq \frac{1}{{\mu_m}^2} \|y\|^2\end{aligned}$$

Άρα $\|R_m(y)\| \leq \frac{1}{\mu_m}\|y\| \Rightarrow \|R_m\| \leq \frac{1}{\mu_m}$. Άφού $\|R_m\| = sup_{y\in B_Y}\|R_m(y)\|_X$,όπου B_Y η μοναδιαία κλειστή μπάλα του Y,αρκεί να βρούμε $y_1 \in B_Y$ τέτοιο ώστε $\|R_m(y_1)\| = \frac{1}{\mu_m}$. Συγκεκριμένα αν πάρουμε $y_1 = y_m$ τότε

$$R_m(y_m) \coloneqq \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n} < y_m, y_n > x_n = \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n} \delta_{nm} x_n = \frac{1}{\mu_n} x_m$$

Άρα $\|R_m(y_m)\| = \frac{1}{\mu_m}$. Επομένως $\|R_m\| = \frac{1}{\mu_m}$.

■

Επομένως για την ακρίβεια προσέγγισης απαιτείται ο αριθμός m να είναι μεγάλος (δηλαδή αφού $\alpha = \frac{1}{m} \Rightarrow a$ μικρό), ενώ για την ευστάθεια απαιτείται μικρός αριθμός m (δηλαδή αφού $\alpha = \frac{1}{m} \Rightarrow$ a μεγάλο).

Θεώρημα 6.2.2 (Καθορισμός του σημείου Τερματισμού της TSVD)

Έστω $K: X \to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y και έστω $y \in Y$ με $\delta > 0$.Τότε υπάρχει ο μικρότερος ακέραιος m τέτοιος ώστε

$$\|KR_m(y) - y\| \leq \delta$$

Απόδειξη

Από σχετικό θεώρημα ισχύει ότι αν ο τελεστής K είναι συμπαγής, τότε ισοδύναμα και ο K^* είναι συμπαγής. Τότε από θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης με ιδιάζον σύστημα (μ_n, y_n, x_n) του τελεστή K^* ισχύει ότι

$$\forall y \in Y: y = \sum_{n=1}^{\infty} < y, y_n > y_n + Q(y) \qquad (*)$$

με $Q: Y \to Ker(K^*)$) το γραμμικό τελεστή ορθογώνιας Προβολής του Y στον υπόχωρο $Ker(K^*)$. Ισχύει ότι $K(X) = Im(K)$ είναι πυκνό στον Y. Δηλαδή $\overline{Im(K)} = Y$. Από θεώρημα ισχύει $\overline{Im(K)} = (Ker(K^*))^{\perp}$. Άρα $(Ker(K^*))^{\perp} = Y$. Από αυτό, είναι προφανές ότι $Ker(K^*) = \{O_Y\}$. Συνεπώς ο K^* είναι injective. Επομένως η έκφραση $(*)$ γίνεται $y = \sum_{n=1}^{\infty} < y, y_n > y_n$. Ισχύει ότι $KR_m y - y \in Y$. Άρα από θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης έπεται ότι:

$$KR_m y - y = y = \sum_{n=1}^{\infty} < KR_m y - y, y_n > y_n$$

Άρα

$$\begin{aligned} \|KR_m y - y\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |< KR_m y - y, y_n >|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |< KR_m y, y_n > - < y, y_n >|^2 \end{aligned}$$

Για $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\mu_n \geq \mu_m$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} < KR_m y, y_n > &= < K\left(\sum_{\mu_{n'} \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_{n'}} < y, y_{n'} > x_{n'}\right), y_n > \\ &= < \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_{n'}} < y, y_{n'} > K(x_{n'}), y_n > \\ &= \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_{n'}} < y, y_{n'} > < K(x_{n'}), y_n > \\ &= \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_{n'}} < y, y_{n'} > < \mu_{n'} y_{n'}, y_n > = < y, y_n > \end{aligned}$$

Επομένως $\|KR_m y - y\|^2 = \sum_{\mu_n < \mu_m} |< y, y_n >|^2$. Όμως αφού $\mu_m \to 0$ για $m \to \infty$, έπεται ότι $\sum_{\mu_n < \mu_m} |< y, y_n >|^2 \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. Συνεπώς αυτό, αποδεικνύει ότι υπάρχει ο μικρότερος ακέραιος $m = m(\delta)$ τέτοιος ώστε $\|KR_m(y) - y\| \leq \delta$.

■

Από την πιο κάτω έκφραση

$$\|KR_m(y) - y\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{\mu_n \geq \mu_m} |< y, y_n >|^2 \qquad (1)$$

γίνεται φανερό ότι στην *πράξη* μπορεί να καθοριστεί το σημείο τερματισμού $m = m(\delta)$ όταν το δεξιό μέρος της (1) γίνει μικρότερο ή ίσο με το δ^2 για πρώτη φορά.
Το θεώρημα που ακολουθεί σχετίζεται με την κανονικότητα της Φασματικής Αποκοπής (δηλαδή το κατά πόσο είναι regular).

Θεώρημα 6.2.3

Έστω $K: X \to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y. Έστω $y \in Im(K) = K(X)$ και $y^\delta \in Y$ με την απαίτηση $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ με $\delta > 0$ και έστω $\gamma > 1$.Τότε υπάρχει ο μικρότερος ακέραιος $m = m(\delta)$ τέτοιος ώστε

$$\left\|KR_{m(\delta)}y^\delta - y^\delta\right\| \leq \gamma\delta \qquad (*)$$

και να ικανοποιείται

$$R_{m(\delta)}y^\delta \to K^{-1}(y) \text{ για } \delta \to 0 \qquad (1)$$

Απόδειξη

Το πρώτο μέρος του θεωρήματος έχει δειχθεί στο προηγούμενο θεώρημα. Θα δειχθεί η σύγκλιση (1). Από προηγούμενο θεώρημα 6.2.2 διαπιστώθηκε ότι $\forall y \in Y$.

$$\|KR_m(y) - y\|^2 = \|(KR_m - I)y\|^2 = \sum_{\mu_n < \mu_m} |< y, y_m >|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |< y, y_m >|^2 = \|y\|^2$$

Άρα $\|KR_m(y) - y\| \leq \|y\|$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Επομένως $\|KR_m - I\| \leq 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Ισχύει ότι

$$\left(KR_m y^\delta - y^\delta\right) - (KR_m y - y) = (KR_m - I)(y^\delta - y)$$

Συνεπώς ισχύει:

$$\begin{aligned}\|KR_m y - y\| &= \left\|\left(KR_m y^\delta - y^\delta\right) - (KR_m - I)(y^\delta - y)\right\| \\ &\leq \left\|KR_m y^\delta - y^\delta\right\| + \left\|(KR_m - I)(y^\delta - y)\right\| \\ &\leq \delta + \left\|KR_m y^\delta - y^\delta\right\| \qquad (2)\end{aligned}$$

Όμως $\left\|KR_m y^\delta - y^\delta\right\| = \left\|(KR_m y - y) + (KR_m - I)(y^\delta - y)\right\|$

$$\begin{aligned}&\leq \|KR_m y - y\| + \|KR_m - I\|\left\|y^\delta - y\right\| \\ &\leq \delta + \|KR_m y - y\| \qquad (3)\end{aligned}$$

Τότε από την (2) έπεται :

$$\|KR_m y - y\| \leq \delta + \left\|KR_m y^\delta - y^\delta\right\| \overset{*}{\leq} \delta + \gamma\delta = (\gamma + 1)\delta \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

Άρα από την ισχύ του τελευταίου ορίου, δηλαδή $\left\|KR_{m(\delta)}y - y\right\| \xrightarrow{\delta \to 0} 0 \qquad (4)$

υπάρχουν δυο περιπτώσεις.

(α) Από το γεγονός ότι η R_a είναι στρατηγική ομαλοποιήσης, έπεται ότι $\|(KR_m - I)(y)\|^2 \to 0$ για $m \to \infty$ και ότι για $\delta \to 0$ ισχύει $m(\delta) \to \infty$. Συνεπώς ο αριθμός των όρων του αθροίσματος $R_m = \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n} < y, y_n > x_n$ τείνει στο άπειρο.

(β) Η ανάπτυξη του στοιχείου y ανάγεται σε πεπερασμένο άθροισμα

$$y = \sum_{\mu_n \geq \mu_{m_0}} < y, y_n > y_n \text{ με } m(\delta) \geq m_0, \qquad \text{για κάποιο } m_0$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο

$$\begin{aligned}KR_{m(\delta)}(y) &= \left(\sum_{\mu_n \geq \mu_{m(\delta)}} \frac{1}{\mu_n} < y, y_n > x_n\right) \\ &= \sum_{\mu_n \geq \mu_{m(\delta)}} \frac{1}{\mu_n} < y, y_n > K(x_n) = \sum_{\mu_n \geq \mu_{m(\delta)}} < y, y_n > y_n \quad (**)\end{aligned}$$

Τότε αφου για $\delta \to 0$ ισχύει η (4), επειδή η (**) είναι πεπερασμένο το άθροισμα, έχουμε ότι $\exists m_0 \leq m(\delta)$ τέτοιο ώστε $y = \sum_{\mu_n \geq \mu_{m_0}} < y, y_n > y_n$. Για την καθε περίπτωση θα αποδειχθεί η σύγκλιση της (1).

- Στην (α) περίπτωση ισχύει

$$\left\| K R_{m(\delta)-1} y^{\delta} - y^{\delta} \right\| > \gamma \delta$$

αφού $m(\delta)$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\left\| K R_{m(\delta)} y^{\delta} - y^{\delta} \right\| < \gamma \delta$. Από την σχέση (3) για $m = m(\delta) - 1$ ισχύει:

$$\left\| K R_{m(\delta)-1} y^{\delta} - y^{\delta} \right\| \leq \delta + \left\| K R_{m(\delta)-1} y - y \right\|$$

τότε $\gamma\delta < \delta + \left\| K(R_{m(\delta)-1} y - K^{-1} y) \right\|$ δηλαδή $\delta < \frac{1}{\gamma - 1} \left\| K(R_{m(\delta)-1} y - K^{-1} y) \right\|$

Από θεώρημα Ανάλυσης του Ολικού Σφάλματος έπεται ότι

$$\left\| R_{m(\delta)} y^{\delta} - K^{-1} y \right\| = \left\| x_m^{\delta} - x \right\| \leq \delta \left\| R_{m(\delta)} \right\| + \left\| R_{m(\delta)}(Kx) - x \right\|$$

Με εφαρμογή της πιο πάνω ανίσωσης έπεται ότι:

$$\left\| R_{m(\delta)} y^{\delta} - K^{-1} y \right\| < \frac{\left\| R_{m(\delta)} \right\|}{\gamma - 1} \left\| K(R_{m(\delta)-1} y - K^{-1} y) \right\| + \left\| R_{m(\delta)}(Kx) - x \right\|$$

Έχει δειχθεί ότι στην (α) περίπτωση για $\delta \to 0 \Longrightarrow m(\delta) \to \infty$. Συνεπώς από ορισμό στρατηγικής ομαλοποίησης ισχύει:

$$R_{m(\delta)}(Kx) \to x = K^{-1}(Kx) \text{ για } m(\delta) \to \infty.$$

Δηλαδή $\left\| R_{m(\delta)}(Kx) - x \right\| \to 0$ για $m(\delta) \to \infty$. Επομένως για να δειχθεί ότι

$$\left\| R_{m(\delta)} y^{\delta} - K^{-1} y \right\| \to 0 \text{ για } m(\delta) \to \infty \text{ (αφού } \delta \to 0 \Longrightarrow m(\delta) \to \infty)$$

αρκεί να δειχθεί ότι: $\forall y \in R(K)$ ισχύει $\left\| R_{m(\delta)} \right\| \left\| K(R_{m(\delta)-1} y - K^{-1} y) \right\| \to 0$ για $m(\delta) \to \infty$.
Ισοδύναμα αρκεί να δειχθεί ότι $m(\delta) \to \infty$ ισχύει $\|R_m\|^2 \|K(R_{m-1} y - x)\|^2 \to 0$. Ισχύει ότι $R_{m-1}(Kx) - x \in X$. Από θεώρημα Ιδιάζουσας Παραγοντοποίησης έχουμε:

$$R_{m-1}(Kx) - x = \sum_{n=1}^{\infty} < R_{m-1}(Kx) - x, x_n > x_n + Q(R_{m-1}(Kx) - x)$$

όμως αφού ο K είναι injective, έπεται ότι $Ker(K) = \{0_X\}$. Άρα $Q(R_{m-1}(Kx) - x = 0_X$. Τότε

$$\begin{aligned} K(R_{m-1}(Kx) - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} < R_{m-1}(Kx) - x, x_n > K(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < R_{m-1}(Kx) - x, x_n > y_n \\ \Rightarrow \|K(R_{m-1}(Kx) - x)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} {\mu_n}^2 |< R_{m-1}(Kx) - x, x_n >|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} {\mu_n}^2 |< R_{m-1}(Kx), x_n > - < x, x_n >|^2 \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$< R_{m-1}(Kx), x_n >=< \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_{m-1}} \frac{1}{\mu_{n'}} < Kx, y_{n'} > x_{n'}, x_n >$$
$$=< \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_{m-1}} \frac{1}{\mu_{n'}} < x, K^* y_{n'} > x_{n'}, x_n >$$
$$= \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_{m-1}} < x, x_{n'} >< x_{n'}, x_n >= \sum_{\mu_{n'} \geq \mu_{m-1}} < x, x_{n'} > \delta_{n'n}$$

Τότε για $n' = n$ έπεται ότι

$$< R_{m-1}(Kx), x_n >=< x, x_n > \text{ (αυτό ισχύει για } \mu_n \geq \mu_{m-1})$$

Συνεπώς $\|K(R_{m-1}(Kx) - x)\|^2 = \sum_{\mu_n < \mu_{m-1}} {\mu_n}^2 |< x, x_n >|^2$. Επομένως

$$\|R_m\|^2 \|K(R_{m-1}(Kx) - x)\|^2 = \frac{1}{\mu_m^2} \sum_{\mu_n < \mu_{m-1}} {\mu_n}^2 |< x, x_n >|^2 \leq \sum_{\mu_n \leq \mu_m} |< x, x_n >|^2 \xrightarrow{m(\delta) \to \infty} 0$$

αφού $\lim_{m \to \infty} \mu_m = 0$. Συνεπώς έχει δειχθεί η σύγκλιση $\left\|R_{m(\delta)} y^\delta - K^{-1} y\right\| \to 0$ για $\delta \to 0$.

- Στην (β) περίπτωση που η y έχει πεπερασμένο ανάπτυγμα τότε

$$K^{-1}(y) = \sum_{\mu_n \geq \mu_{m_0}} \frac{1}{\mu_n} < y, y_n > x_n = R_m(y), \forall m \geq m_0 \quad (***)$$

Επίσης τότε $\forall m \geq m_0$ ισχύει

$$\left\|K R_m y^\delta - y^\delta\right\| = \left\|(K R_m - I)(y^\delta - y)\right\| \leq \|(K R_m - I)\| \left\|(y^\delta - y)\right\| \leq \delta \underbrace{\leq}_{\gamma > 1} \gamma \delta$$

Με βάση αυτό αναγκαστικά ισχύει $m(\delta) \leq m_0$. Τότε αυτό δίνει την ισότητα $m(\delta) = m_0$ αφού το ανάπτυγμα της y ισχύει για $m(\delta) \geq m_0$. Τότε

$$\left\|R_{m(\delta)} y^\delta - K^{-1} y\right\| \overset{m(\delta) = m_0}{\cong} \left\|R_{m_0} y^\delta - K^{-1} y\right\|$$
$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{(***): K^{-1}(y) = R_{m_0}(y)} = \left\|R_{m_0}(y^\delta - y)\right\|$$
$$\leq \left\|R_{m_0}\right\| \left\|y^\delta - y\right\| \leq \frac{1}{\mu_{m_0}} \delta \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

Άρα έχει δειχθεί και σε αυτή την περίπτωση η σύγκλιση της (1).

■

6.3 Στρατηγική Ομαλοποίησης Tikhonov

Θεώρημα 6.3.1 (Ορισμός της Στρατηγικής Ομαλοποίησης Tikhonov)

Έστω $K: X \to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής. Τότε $\forall \alpha > 0$ ο τελεστής $\alpha I + K^* K: X \to X$ έχει φραγμένο αντίστροφο τελεστή και η οικογένεια τελεστών

$$R_a \coloneqq (aI + K^* K)^{-1} K^*$$

περιγράφει μια στρατηγική ομαλοποίησης με $\|R_a\| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Απόδειξη

Θα δειχθεί ότι ο τελεστής $\alpha I + K^* K$ είναι bijective. Αρκεί να δειχθεί ότι $Ker(\alpha I + K^* K) = \{0_X\}$. Έστω $x \in Ker(\alpha I + K^* K)$.Δηλαδή $\alpha x + K^* K x = 0_X$.Τότε έχουμε

$$< x, \alpha x + K^* K x >= 0 \Leftrightarrow < x, \alpha x > + < x, K^* K x >= 0$$
$$\Leftrightarrow a\|x\|^2 + < Kx, Kx >= 0 \Leftrightarrow a\|x\|^2 + \|Kx\|^2 = 0$$

Άρα $x = 0_X \Rightarrow Ker(\alpha I + K^*K) = \{0_X\}$. Συνεπώς ο $\alpha I + K^*K$ είναι injective. Από σχετική θεωρία Riesz για συμπαγείς τελεστές, συγκεκριμένα από το γεγονός ότι ο K^*K είναι συμπαγής ως γινόμενο συμπαγών τελεστών έπεται ότι ο τελεστής $\alpha I + K^*K$ είναι και surjective. Συνεπώς έχει δειχθεί ότι είναι bijective. Επίσης είναι γνωστό ότι αν ο A είναι συμπαγής γραμμικός, τότε ο $I - A$ έχει συνεχή αντίστροφο. (Αυτό έπεται από την Θεωρία Riesz). Επομένως για $A = -\frac{1}{\alpha}K^*K$ ισχύει ότι ο $\alpha I + K^*K$ είναι αντιστρέψιμος με συνεχή αντίστροφο. Θα βρεθεί η μορφή αυτού του αντίστροφου του τελεστή $\alpha I + K^*K$. Έστω (μ_n, x_n, y_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι το ιδιάζον σύστημα του τελεστή K και έστω $Q: X \to Ker(K)$ ο τελεστής ορθογώνιας προβολής. Θα δειχθεί ότι ο τελεστής $T: X \to X$ με

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < x, x_n > x_n + \frac{1}{a} Q(x)$$

αποτελεί τον αντίστροφο του $\alpha I + K^*K$. Δηλαδή $T(\alpha I + K^*K) = (\alpha I + K^*K)T = I$. Πράγματι επειδή ο K είναι injective, έχουμε

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < x, x_n > x_n$$

Τότε για $x \in X$ ισχύει

$$\begin{aligned}(\alpha I + K^*K)T(x) &= (\alpha I + K^*K)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < x, x_n > x_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < x, x_n > (\alpha I + K^*K)(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < x, x_n > (\alpha x_n + \mu_n^2 x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n = I(x)\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}T\big((\alpha I + K^*K)(x)\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < (\alpha I + K^*K)(x), x_n > x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < x, (\alpha I + K^*K)^*(x_n) > x_n\end{aligned}$$

$$\underbrace{\overset{o\ \alpha I + K^*K}{\cong}}_{\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ self-adjoint} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+\mu_n^2} < x, (\alpha + \mu_n^2)x_n) > x_n = \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n = I(x).$$

Αφού ο τελεστής $\alpha I + K^*K$ είναι injective, η εξίσωση $(\alpha I + K^*K)x_a = K^*y$ έχει μοναδική λύση. Συγκεκριμένα είναι:

$$\begin{aligned}x_a &= (\alpha I + K^*K)^{-1}(K^*y) \\ &= T(K^*y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < K^*y, x_n > x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \mu_n^2} < y, (K^*)^* x_n > x_n\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+\mu_n^2} < y, Kx_n > x_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+\mu_n^2} < y, \mu_n y_n > x_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{a+\mu_n^2} < y, y_n > x_n$$

Για κάθε $\alpha > 0$ ορίζουμε τον τελεστή R_a ως:
$x_a := R_a y = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*y = T(K^*y)$. Θα δείχθεί ότι η οικογένεια τελεστών R_a , $a > 0$ αποτελεί μια στρατηγική ομαλοποίησης. Συγκεκριμένα οι τελεστές R_a γράφονται στη μορφή

$$R_a y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{a+\mu_n^2} < y, y_n > x_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(a,\mu_n) < y, y_n > x_n$$

με $q(a,\mu_n) = \frac{{\mu_n}^2}{a+\mu_n^2}$ να αποτελεί συνάρτηση φίλτρου. Επίσης η συνάρτηση $q(a,\mu_n)$ είναι φραγμένη ως εξής: $0 < q(a,\mu_n) < 1$. Ακόμα ισχύει $\lim_{\alpha\to 0}\frac{{\mu_n}^2}{a+\mu_n^2} = 1$. Ακόμα ισχύει ότι
$|q(a,\mu_n)| \leq c(a)\mu_n$, $0 < \mu_n \leq \|K\|$. Πράγματι αυτό ισχύει αφού από την ανισότητα του αριθμητικού γεωμετρικού μέσου έπεται:

$\sqrt{a}\,\mu_n \leq \frac{a+\mu_n^2}{2} \Rightarrow \frac{\mu_n}{a+\mu_n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{{\mu_n}^2}{a+\mu_n^2} = q(a,\mu_n) \leq \frac{\mu_n}{2\sqrt{a}}$. Επομένως $c(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Τότε από το γενικό θεώρημα για τις στρατηγικές ομαλοποίησης, συμπεραίνεται ότι οι τελεστές R_a , $a > 0$ αποτελούν μια στρατηγική ομαλοποίησης με $\|R_a\| \leq c(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

■

Θεώρημα 6.3.2
Έστω $K: X \to Y$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής και έστω $\alpha > 0$. Τότε $\forall\, y \in Y$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $x_a \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|Kx_a - y\|^2 + \alpha\|x_a\|^2 = inf_{x\in X}\{\|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2\} \quad (*)$$

Το στοιχείο ελαχιστοποίησης x_a (minimizer) δίνεται από την μοναδική λύση της εξίσωσης

$$(\alpha I + K^*K)x_a = K^*y$$

και εξαρτάται συνεχώς από το y.
Απόδειξη
Αρχικά

$$\|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2 = \|Kx - Kx_a + Kx_a - y\|^2 + \alpha\|x - x_a + x_a\|^2$$
$$= \|Kx - Kx_a\|^2 + \|Kx_a - y\|^2 + 2Re(< Kx - Kx_a, Kx_a - y >) +$$
$$+a\|x - x_a\|^2 + \alpha\|x_a\|^2 + 2\alpha Re(< x - x_a, x_a >$$
$$= \|Kx - Kx_a\|^2 + \|Kx_a - y\|^2 + 2Re(< x - x_a, K^*(Kx_a - y) >) +$$
$$+a\|x - x_a\|^2 + \alpha\|x_a\|^2 + 2\alpha Re(< x - x_a, x_a >$$

Επίσης ισχύει ότι αφού $\alpha \in \mathbb{R}^+$ τότε $\alpha Re(< x - x_a, x_a >) = Re(< x - x_a, \alpha x_a >)$. Συνεπώς

$$\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2=\|Kx-Kx_a\|^2+\|Kx_a-y\|^2+2Re(<x-x_a,\alpha x_a+K^*\mathrm{K}x_a-K^*y>)+$$
$$+a\|x-x_a\|^2+\alpha\|x_a\|^2 \qquad (1)$$
Αν $x=x_a$, δηλαδή λύση της εξίσωσης $(\alpha I+K^*K)x_a=K^*y$ ικανοποιείται το γεγονός:
$$inf_{x\in X}\{\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2\}=\|Kx_a-y\|^2+\alpha\|x_a\|^2$$
Αντίστροφα έστω ότι το στοιχείο x_a ικανοποιεί την $(*)$, αλλά έστω ότι x_a δεν ικανοποιεί την $(\alpha x_a+K^*Kx_a)=K^*y$. Αν τεθεί $z=(\alpha x_a+K^*Kx_a)-K^*y$ και $x=x_a+\varepsilon z$ για $\varepsilon\in\mathbb{R}$ τότε από την (1) έπεται ότι:
$$\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2=\|Kx_a-y\|^2+\alpha\|x_a\|^2+2Re(<\varepsilon z,z>)+\varepsilon^2\|Kz\|^2+$$
$$+\varepsilon^2[\|Kz\|^2+a\|z\|^2]$$
Ορίζεται $b=\|z\|^2$ και $c=\|Kz\|^2+a\|z\|^2$. Άρα
$\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2=\|Kx_a-y\|^2+\alpha\|x_a\|^2+2\varepsilon b+\varepsilon^2c$.Για$\varepsilon=\frac{-b}{c}\in\mathbb{R}$ έχουμε
$$\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2=\|Kx_a-y\|^2+\alpha\|x_a\|^2-2\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{c}$$
$$=\|Kx_a-y\|^2+\alpha\|x_a\|^2-\frac{b^2}{c}<\|Kx_a-y\|^2+\alpha\|x_a\|^2$$
άτοπο αφού το x_a ικανοποιεί την $(*)$. Άρα έχει δειχθεί ότι η λύση της εξίσωσης $(\alpha I+K^*K)x_a=K^*y$ αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να ισχύει η (1). Στη συνέχεια ορίζεται ο τελεστής $T:X\to X$ με $T\coloneqq\alpha I+K^*K$. Λόγω του ότι ο τελεστής T είναι injective, το x_a είναι και μοναδικό. Επιπλέον ο τελεστής T είναι strictly coercive, δηλαδή υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε $Re(<Tx,x>)\geq c\|x\|^2$,$\forall x\in X$. Πράγματι ι αφού ,$\forall x\in X$ είναι $\alpha\|x\|^2\leq\alpha\|x\|^2+\|Kx\|^2=Re(<T(x),x>)$. Από θεώρημα Lax-Milgram αφού ο τελεστής T είναι φραγμένος και strictly coercive, έπεται ότι υπάρχει ο $T^{-1}:X\to X$ και είναι φραγμένος.

■

Συνεπώς από την ερμηνεία της ομαλοποίησης Tikhonov ως ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού Tikhonov $J_a(x)\coloneqq\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2$, $x\in X$ έπεται ότι η λύση της εξίσωσης Tikhonov, που ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί το πιο πάνω συναρτησιακό, διατηρεί την ποσότητα $\|Kx-y\|$ μικρή και ταυτόχρονα είναι ευσταθής λύση διαμέσου του όρου $\alpha\|x\|^2$ (ο όρος αυτός χρησημοποιήθηκε για να δειχθεί ότι ο τελεστής $T\coloneqq\alpha I+K^*K$ έχει συνεχή αντίστροφο).

Θεώρημα 6.3.3
Έστω $K:X\to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής με $\overline{ImK}=Y$ και έστω $y\in Y$ με $0<\delta<\|y\|$. Τότε υπάρχει μοναδική παράμετρος $\alpha>0$ τέτοια ώστε
$$\|KR_ay-y\|=\delta$$
Απόδειξη
Θα δείχθεί ότι η συνάρτηση $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται $F(a)\coloneqq\|KR_ay-y\|^2-\delta^2$ έχει μοναδικό μηδενικό σημείο.Δηλαδή $\exists\alpha>0:F(a)=0$. Ισχύει ότι $KR_ay-y\in Y$. Αν (μ_n,y_n,x_n) ,$n\in\mathbb{N}$ αποτελεί το ιδιάζον σύστημα του τελεστή K^*, τότε έπεται
$$KR_ay-y=\sum_{n=1}^{\infty}<KR_ay-y,y_n>y_n+Q(KR_ay-y)$$

με $Q: X \to Ker(K^*)$ τον γραμμικό τελεστή ορθογώνιας Προβολής. Ισχύει ότι $\overline{ImK} = Y$. Από γνωστό θεώρημα έχουμε $\overline{ImK} = (Ker(K^*))^{\perp}$. Δηλαδή $(Ker(K^*))^{\perp} = Y$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $Ker(K^*) = \{0_Y\}$. Συνεπώς έχουμε

$$KR_a y - y = \sum_{n=1}^{\infty} < KR_a y - y, y_n > y_n$$

Άρα ισχύει $\|KR_a y - y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< KR_a y - y, y_n >|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< KR_a y, y_n > - < y, y_n >|^2$
Ισχύει ότι

$$< KR_a y, y_n > = < K\left(\sum_{n'=1}^{\infty} \frac{\mu_{n'}}{a + \mu_{n'}^2} < y, y_{n'} > x_{n'}\right), y_n >$$

$$= < \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{\mu_{n'}}{a + \mu_{n'}^2} < y, y_{n'} > K(x_{n'}), y_n >$$

$$= < \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{{\mu_{n'}}^2}{a + \mu_{n'}^2} < y, y_{n'} > y_{n'}, y_n >$$

$$= \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{{\mu_{n'}}^2}{a + \mu_{n'}^2} < y, y_{n'} >< y_{n'}, y_n >$$

$$= \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{{\mu_{n'}}^2}{a + \mu_{n'}^2} < y, y_{n'} > \delta_{n'n} = \frac{{\mu_n}^2}{a + \mu_n^2} < y, y_n >$$

Συνεπώς

$$\|KR_a y - y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{{\mu_n}^2}{a + \mu_n^2} - 1\right) < y, y_n >\right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{(a + \mu_n^2)^2} |< y, y_n >|^2$$

Επομένως

$$F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{(a + \mu_n^2)^2} |< y, y_n >|^2 - \delta^2$$

Άρα η F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με όρια $F(a) \xrightarrow{a \to 0} -\delta^2$ και $F(a) \xrightarrow{a \to \infty} \|y\|^2 - \delta^2$. Συνεπώς η F έχει μοναδικό μηδενικό σημείο.

■

Θεώρημα 6.3.4 (Regularity of Tikhonov Regularization Method)
Έστω $K: X \to Y$ ένας injective συμπαγής γραμμικός τελεστής με $\overline{ImK} = Y$. Έστω $y \in Im(K)$ και $y^\delta \in Y$ με την συνθήκη $\|y^\delta - y\| \le \delta \le \|y^\delta\|$, $\delta > 0$ (1). Τότε υπάρχει μοναδική παράμετρος $\alpha = \alpha(\delta)$ τέτοια ώστε $\|KR_{a(\delta)} y^\delta - y^\delta\| = \delta$ (2) και να ικανοποιείται

$$R_{a(\delta)} y^\delta \xrightarrow{\delta \to 0} K^{-1} y \qquad (*)$$

Απόδειξη
Το πρώτο μέρος του θεωρήματος που αφορά την ύπαρξη της μοναδικής παραμέτρου $\alpha = \alpha(\delta)$, έχει δειχθεί στο προηγούμενο θεώρημα. Θα δειχθεί η $(*)$. Θέτουμε $\varphi^\delta = x_{a(\delta)}^\delta = R_{a(\delta)} y^\delta$. Αφού αυτό το

φ^δ αποτελεί λύση της εξίσωσης Tikhonov, τότε ταυτόχρονα θα ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό Tikhonov $J_a(x) := \|Kx - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2$, $x \in X$. Δηλαδή

$$\|K\varphi^\delta - y^\delta\|^2 + \alpha\|\varphi^\delta\|^2 = inf_{x\in X}\left\{\|Kx - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2\right\} \quad (3)$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}\delta^2 + \alpha\|\varphi^\delta\|^2 &\overset{(2)}{=} \|K\varphi^\delta - y^\delta\|^2 + \alpha\|\varphi^\delta\|^2\\ &\overset{(3)}{\leq} \|KK^{-1}y - y^\delta\|^2 + \alpha\|K^{-1}y\|^2\\ &= \|y - y^\delta\| + \alpha\|K^{-1}y\|^2\\ &\overset{(1)}{\leq} \delta^2 + \alpha\|K^{-1}y\|^2\end{aligned}$$

Άρα έχει δειχθεί ότι $\|\varphi^\delta\|^2 \leq \|K^{-1}y\|^2$. Έστω $g \in Y$ τυχαίο,τότε ισχύει η εξής εκτίμηση:

$$\begin{aligned}|< K\varphi^\delta - y, g >| &\overset{C-S}{\leq} \|K\varphi^\delta - y\|\|g\|\\ &= \|K\varphi^\delta - y^\delta + y^\delta - y\|\|g\|\\ &\leq [\|K\varphi^\delta - y^\delta\| + \|y^\delta - y\|]\|g\|\\ &\overset{(1),(2)}{\leq} 2\delta\|g\| \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \quad (4)\end{aligned}$$

Άρα έχει δειχθεί ότι $K\varphi^\delta \rightharpoonup y$ για $\delta \to 0$. Δηλαδή $\lim_{\delta\to 0} < K\varphi^\delta, g >=< y, g >$, $\forall g \in Y$. Αυτό έχει την εξής συνέπεια:

$$\begin{aligned}|< K\varphi^\delta - y, g >| &= |< K\varphi^\delta - KK^{-1}y, g >|\\ &= |< K(\varphi^\delta - K^{-1}y), g >|\\ &= |< \varphi^\delta - K^{-1}y, K^*g >| \underset{(4)}{\overset{\delta\to 0}{\rightarrow}} 0\end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim_{\delta\to 0} < \varphi^\delta, K^*(g) >=< K^{-1}y, K^*(g) >, \forall g \in Y$ (5). Επειδή ο είναι K injective, έχουμε $Ker(K) = \{0_X\}$. Από $\overline{ImK^*} = (Ker(K))^\perp$, έπεται $\overline{ImK^*} = \{0_X\}^\perp = X$. Άρα η εικόνα του K^* είναι πυκνή στον X. Τότε αυτό σε συνδυασμό με την (5) δίνει:

$\lim_{\delta\to 0} < \varphi^\delta, z >=< K^{-1}y, z >$ $\forall z \in X$. Ισοδύναμα $\varphi^\delta \rightharpoonup K^{-1}y$,δηλαδή το φ^δ συγκλίνει ασθενώς στο $K^{-1}y$.

Τότε

$$\begin{aligned}\|\varphi^\delta - K^{-1}y\|^2{}_X &= \|\varphi^\delta\|^2{}_X - 2Re(< \varphi^\delta, K^{-1}y >) + \|K^{-1}y\|^2{}_X\\ &\leq 2\{\|K^{-1}y\|^2{}_X - Re(< \varphi^\delta, K^{-1}y >)\}\\ &= 2\{< K^{-1}y, K^{-1}y > -Re(< \varphi^\delta, K^{-1}y >)\}\\ &= 2\{Re(< K^{-1}y, K^{-1}y >) - Re(< \varphi^\delta, K^{-1}y >)\}\\ &= 2Re(< K^{-1}y - \varphi^\delta, K^{-1}y >)\end{aligned}$$

Συνεπώς $\|\varphi^\delta - K^{-1}y\|^2{}_X \leq 2Re(< K^{-1}y - \varphi^\delta, K^{-1}y >) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$. Δηλαδή $\varphi^\delta \xrightarrow{\delta\to 0} K^{-1}y$.

■

Κεφάλαιο 7

Υπολογιστική Εφαρμογή

7.1 Ομαλοποίηση για το Αντίστροφο Πρόβλημα Εκτίμησης της Αρχικής Συνθήκης για την εξίσωση Θερμότητας

Το πιο κάτω μοντέλο περιγράφει τη διάδοση θερμότητας σε μια διάσταση.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\quad 0 < x < L, \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = 0\ , u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L$$

όπου $u = u(x,t)$ είναι το θερμοκρασιακό πεδίο, $f(x)$ η αρχική συνθήκη. Για το ευθύ πρόβλημα όπου η αρχική συνθήκη $f(x)$ είναι δοσμένη, ζητείται ο καθορισμός του θερμοκρασιακού πεδίου $u(x,t)$ στο εσωτερικό ενός στερεού σώματος, το οποίο είναι συνάρτηση του χρόνου και της θέσης.

Για το αντίστροφο πρόβλημα η αρχική συνθήκη $f(x)$ είναι η άγνωστη του προβλήματος. Επιπρόσθετα υπάρχει σαν δεδομένο μια συνθήκη που δίνει μια πληροφορία για την κατανομή της θερμοκρασίας σε μια δεδομένη χρονική στιγμη T. Δηλαδή

$$u(x,T) = g(x), 0 \le x \le L$$

Επισημαίνεται ότι τα μετρήσιμα δεδομένα $u(x,T) = g(x)$ περιέχουν σφάλματα μετρήσεων. Συνεπώς το ανίστροφο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: ***Με βάση τα μετρήσιμα δεδομένα*** $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ ***καθόρισε την άγνωστη συνάρτηση*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Η λύση του ευθέως προβλήματος για μια δοσμένη αρχική συνθήκη $f(x)$ δίνεται με χρήση της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών ως εξής:

$$u(x,t) = \int_0^L K(x,y,t)f(y)dy$$

όπου

$$K(x,y,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

είναι μια άπειρη σειρά. Αριθμητικά δεν μπορούμε να διαχειριστούμε τέτοιο άθροισμα. Έτσι το περιορίζουμε το πιο πάνω ανάπτυγμα ως ένα άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων ώστε να υπάρχει σύγκλιση της πιο πάνω σειράς. Άρα

$$K(x,y,t) \approx \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{100} e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Επομένως το αντίστροφο πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της πιο κάτω ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm Α'είδους.

$$u(x,T) = g(x) = \int_0^L K(x,y,T)f(y)dy$$

Η διαδικασία διακριτοποίησης του πιο πάνω συνεχούς προβλήματος που θα ακολουθηθεί έχει ως εξής:

α) Διαμερίζεται το διάστημα [0,L] σε ίσα υποδιαστήματα με πλάτος $h = \Delta y = \frac{L}{N}$ με $y_0 = 0, y_j = j\Delta y$ και ανάλογα $x_0 = y_0, x_N = y_N = L$ και $x_\iota = y_\iota, \forall\, i = 1,2,..N-1$. Ακολούθως εφαρμόζεται ο κανόνας τραπεζίου για να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα

$$g(x) = \int_0^L K(x,y,T)f(y)dy$$

$$\approx \Delta y[\frac{1}{2}K(x,y_0,T)f(y_0) + K(x,y_1,T)f(y_1) + \cdots + K(x,y_{N-1},T)f(y_{N-1}) + \frac{1}{2}K(x,y_N,T)f(y_N)]$$

Επομένως έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$g_i = \Delta y[\frac{1}{2}K_{i0}\tilde{f}(y_0) + K_{i1}\tilde{f}(y_1) + \cdots + K_{i(N-1)}\tilde{f}(y_{N-1}) + \frac{1}{2}K_{iN}\tilde{f}(y_N)], i = 0,1, \ldots N$$

με $K_{ij} = K(x_i, y_j, T)$ και $\tilde{f}(y_i) \cong f(y_i)$. Δηλαδή η λύση του πιο πανω συστήματος μας δίνει μια προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης f στα σημεία $y_i, \forall i = 0,1,2 \ldots N$. Το πιο πάνω σύστημα σε μητρωική γραφή έχει ως εξής

$$KF = G \qquad (*)$$

$$\text{με } K = \Delta y \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K(x_0,y_0,T) & K(x_0,y_1,T) & \cdots & \frac{1}{2}K(x_0,y_N,T) \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}K(x_N,y_0,T) & K(x_N,y_1,T) & \cdots & \frac{1}{2}K(x_N,y_N,T) \end{bmatrix}$$

με $F = [\tilde{f}(y_0), \tilde{f}(y_1), \ldots \tilde{f}(y_N)]^T$ και $G = [g(x_0), g(x_1), \ldots, g(x_N)]^T$.

Όπως έχει αναφερθεί και στο πρώτο κεφάλαιο η εξίσωση $(*)$ είναι μη-καλά τοποθετημένη, άρα απαιτείται κάποια διαδικασία ομαλοποίησης. Θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov για να βρεθεί μια ευσταθής προσέγγιση της λύσης.

Τα δεδομένα που υπάρχουν στη διάθεση μας περιέχουν θόρυβο έτσι ώστε αν G αποτελούν τα ακριβή δεδομένα και G_δ τα δεδομένα με θόρυβο να ισχύει ότι:

$$\|G - G_\delta\| \le \delta$$

Μια ευσταθής προσέγγιση της ακριβούς λύσης με βάση την στρατηγική Tikhonov είναι η $F_{a,\delta}$ που προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης Tikhonov

$$(K^*K + \alpha I)F_{a,\delta} = K^*G_\delta$$

όπου η παράμετρος ομαλοποίησης α καθορίζεται ως εξής

$$\left\|KF_{a,\delta} - G_\delta\right\|_2 = \delta \qquad (**)$$

Για να λύθεί η $(**)$ ορίζεται η ποσότητα $\varphi(\alpha) = \left\|KF_{a,\delta} - G_\delta\right\|_2^2 - \delta^2$. Τότε η εξίσωση $\varphi(\alpha) = 0$ επιλύεται με την μέθοδο Newton:

$$a_{j+1} = a_j - \frac{\varphi(a_j)}{\varphi'(a_j)} \quad j = 0,1,2, \dots$$

Η παράγωγος $\varphi'(\alpha)$ μετά από υπολογισμούς έχει την εξής έκφραση

$$\varphi'(\alpha) = 2Re < -K[aI + K^*K]^{-1}[aI + K^*K]^{-1}K^*G_\delta, K[aI + K^*K]^{-1}K^*G_\delta - G_\delta >$$

Χρησιμοποιείται η supremum νόρμα για να μετρηθεί το σφάλμα μεταξύ της αριθμητικής λύσης και της αναλυτικής.

$$L_\infty = max_{0\le j\le N}\left|f(x_j) - \tilde{f}(x_j)\right|$$

Παράδειγμα

Έστω το πιο κάτω αντίστροφο πρόβλημα

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \ge 0$$

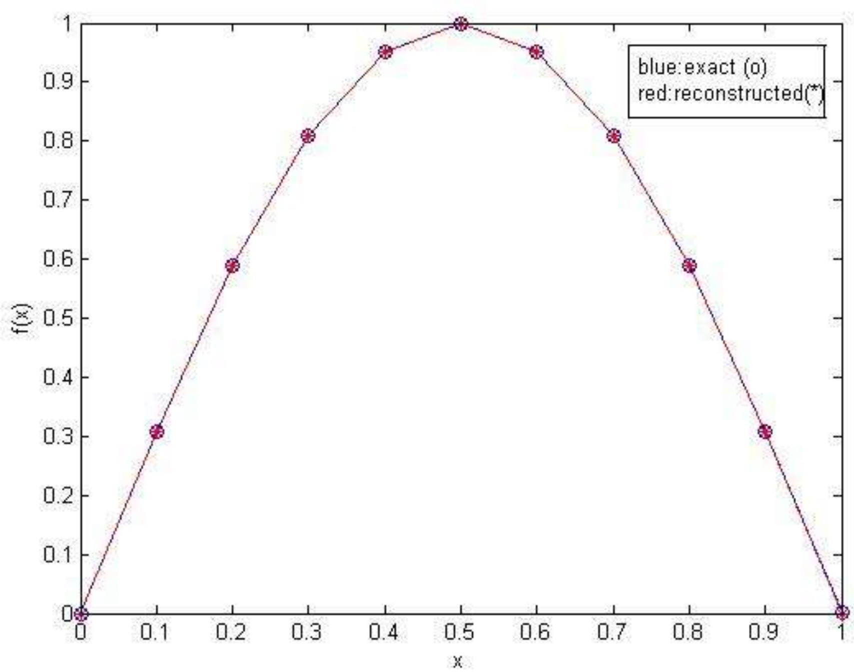
$$u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le 1$$

με την επιπρόσθετη πληροφορία $u(x,1) = g(x) = e^{-\pi^2}\sin(\pi x)$. Η αναλυτική λύση του πιο πάνω προβλήματος είναι $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$ με $f(x) = \sin(\pi x)$. Η παράμετρος ομαλοποίησης α έχει καθοριστεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton. Για διάφορα επίπεδα θορύβου δ συγκέντρωνονται στον πιο κάτω πίνακα τα αποτελέσματα με την αντίστοιχη νόρμα του σφάλματος. Τα δεδομένα έχουν την πιο κάτω διαταραγμένη μορφή :

$$g^{\delta}(x_j) = g(x_j) + \delta \sin(10\pi x_j)\,, j = 0{,}1{,}2 \dots N$$

δ	α	L_∞
0.1	5.73185×10^{-14}	2.14247×10^{-5}
0.05	8.72765×10^{-15}	3.26227×10^{-6}
0.01	2.54233×10^{-15}	9.50292×10^{-7}
0.001	9.81035×10^{-16}	3.66685×10^{-7}



6.2 Κώδικας σε Λογισμικό Matlab

```
function g=funfuc_g(x)

%dilwnume tin sinartisi g poy mas dinei ta akrivi dedomena(data)

g=exp(-pi^2).*sin(pi*x);

end

****************************************

function  sum= funfuc_l(x,y,L,T)

%L:mikos diastimatos

%T:metagenesteri xroniki stigmi

sum=0;

for j=1:100

 sum=(2/L)*exp(-((j*pi)^2)*T/(L^2)).*sin((j*pi*x)/L).*sin((j*pi*y)/L)+sum;

end

end

*****************************************

function [K,G_d] = calc(L,N,d )

format long

% L einai to mikos tu diastimatos to opoio tha diameristei

% N einai o arithmos twn ypodiastimatwn

% d einai to epipedo thorivu

% i sinartisi funfuc_l einai i sinartisi K(i,j) me ton peperasmeno arithmo

%orwn

% i sinartisi funfuc_g einai i sinartisi g twn diataragmenwn dedomenwn

dy=L/N; %platos ypodiastimatos

G_d=zeros(N+1,1);
```

```
x=zeros(N+1,1);
y=zeros(N+1,1);
x(1)=0;
for i=1:N
   x(i+1)=x(1)+i*dy;
   y(i)=x(i);
end
for j=1:N+1 %kataskeui tu dianismatos twn diataragmenwn dedomenwn
   G_d(j)=funfuc_g(x(j))+ d .*sin(10*pi*x(j));
end
K=zeros(N+1,N+1);%kataskeui tu pinaka K
%Gemisma tu Pinaka K
for i=1:N+1
   for j=1:N+1
      if (j==1)&&(j==N+1)
         K(i,j)=(0.5*funfuc_l(x(i),y(j),L,1))*dy;
      else
         K(i,j)=(funfuc_l(x(i),y(j),L,1))*dy;
      end
   end
end
end
*********************************************
function [F_reg] = Regular_Sol( a,K,G_d ,L,N)
%Ypologizume tin  regularized lysi kai epeita kanume
%tin grafiki parastasi tis lysis se antiparathesi me tin
```

```
%pragmatiki lysi u=sin(pi*x).Ypologizume episis kai tin apeiro norma tu

%sfalmatos

n=size(K); %euresi tis diastasis tou tetragwniku pinaka K

%euresi tis lysis F_reg me vasi tin e3iswsi Tikhonov

F_reg=(transpose(K)*K+a*eye(n))\(transpose(K)*G_d);

dy=L/N; %platos ypodiastimatos

x(1)=0;

for i=1:N

   x(i+1)=x(1)+i*dy;

 end

plot(x,sin(pi*x),'bo-',x,F_reg,'r*--')

%Ypologismos tis apeiru norma gia tin ektimisi tu sfalmatos

for i=1:n

   k(i)=abs(F_reg(i,1)-sin(pi*x(i)));

end

disp('I L(apeiro) norma einai:')

disp(max(k))

end
```

Βιβλιογραφία

[1] Andreas Kirsch, “An Introduction of the Mathematical Theory of Inverse Problems” , Springer, 2011

[2] David Colton και Rainer Kress, “Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory”, Springer, 2013

[3] Rainer Kress, ”Linear Integral Equations”, Springer-Verlag Berlin HeidelBerg, 1989

[4] Christian Hansen, “Discrete Inverse Problems” , Siam, 2010

[5] Kabanikhin Sergei Igorovich, “Definitions and examples of inverse and ill-posed problems” , Journal of Inverse and Ill-Posed Problems ,volume16 (2008), 317–357

[6] Σωτήρης Καρανάσιος, ‘’ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ’’ , 2009

[7] Σπύρος Αργυρός, ‘’Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης’’, 2004