

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Σχολή Χημικών Μηχανικών

Διπλωματική Εργασία

“Σχεδιασμός μικροαντλίας χωρίς βαλβίδες για μεταφορά
ζωντανών κυττάρων”

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτριος Χατζηαβραμίδης

Σέγκος Απόστολος

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	3
2. Το πρόβλημα του σχεδιασμού	7
3. Στοιχεία Ακροφύσιο / Διαχύτης.....	8
3.1.1 Ιδανική Ροή.....	8
3.1.2 Απώλειες Ενέργειας.....	11
4. Μέθοδοι Προσέγγισης του σχεδιαστικού προβλήματος.....	14
4.1 Αναλυτική Προσέγγιση – Μοντέλο συγκεντρωτικής μάζας	14
4.1.1 Πιεζοηλεκτρικός υποκινητής	17
4.2 Αναλυτική Προσέγγιση – Μη γραμμικό μοντέλο	26
5. Αποτελέσματα και συμπεράσματα των μεθόδων.....	38
6. Επίλογος.....	44
Βιβλιογραφία	45

1. Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες οι μικροσυσκευές και τα μικρο-ηλεκτρομηχανικά συστήματα (MEMS) έχουν αναδειχθεί σε δημοφιλή τομέα της έρευνας, λόγω της ολοένα αυξανόμενης απαίτησης για διαχείριση μικρών όγκων ρευστών. Οι μικροσυσκευές αυτές έχουν εφαρμογή σε ένα πλήθος επιστημονικών τομέων μερικοί από τους οποίους είναι η βιολογία, η ιατρική, η φαρμακευτική και η τεχνολογία ηλεκτρονικών συστημάτων. Σε καθέναν από αυτούς τους τομείς απαιτείται η μεταχείριση ρευστών σε όγκους μερικών νανολίτρων, όπως επί παραδείγματι για την ψύξη μικροτσιπ, για ιατρικές εξετάσεις, για τη μεταφορά βιολογικών δειγμάτων σε μικροσκοπικά συστήματα προσδιορισμού και λοιπές άλλες εφαρμογές.

Διάφορες μορφές μικροσυσκευών έχουν αναπτυχθεί, οι οποίες ποικίλουν από απλές συσκευές, όπως είναι οι μικροαισθητήρες και οι μικροαντλίες, έως και πολυπλοκότερα συστήματα για τη διαχείριση ρευστών αποτελούμενα από αντλίες, βαλβίδες, αισθητήρες ροής, τριχοειδή διαχωρισμού, ανιχνευτές χημικών και λοιπά μέρη. [7]

Κατά τη δεκαετία του 1980, μεταξύ των πρώτων μικροαντλιών που αναπτύχθηκαν, κάποιες χρησιμοποιήθηκαν σε συστήματα ελεγχόμενης χορήγησης ινσουλίνης σε ασθενείς με διαβήτη, για τη διατήρηση του επιπέδου των σακχάρων στο αίμα τους, μειώνοντας την απαιτούμενη συχνότητα ενέσιμης ινσουλίνης. Επίσης, βρήκαν εφαρμογή στην χορήγηση τεχνητών μακρομορίων σε όγκους ή/και στη ροή του αίματος, καθώς επίσης πιο πρόσφατα έρευνες εστίασαν και στα μικροσκοπικά συστήματα ανάλυσης βιολογικών και χημικών δειγμάτων. Τα πλεονεκτήματα στις εφαρμογές αυτές αφορούν αφενός τη μείωση του όγκου του απαιτούμενου δείγματος, αλλά και την μεγαλύτερη ταχύτητα της ανάλυσης, τη δυνατότητα κατασκευής φορητών μονάδων, λόγω του σημαντικά μικρού μεγέθους των μικροσυσκευών, και της μειωμένης χειρωνακτικής επέμβασης.[1]

Πρόσφατα, η χρήση μικροαντλιών για την κατασκευή φασματομέτρων μάζας μικρού βάρους έδωσε σημαντικά πλεονεκτήματα και στην επιστήμη της εξερεύνησης του διαστήματος, όπου ο απαιτούμενος εξοπλισμός είναι πλέον εφικτό να μεταφέρεται από τα ελαφρά διαστημόπλοια, δείχνοντας έτσι τις αναρίθμητες εφαρμογές των μικροσυσκευών και των MEMS.

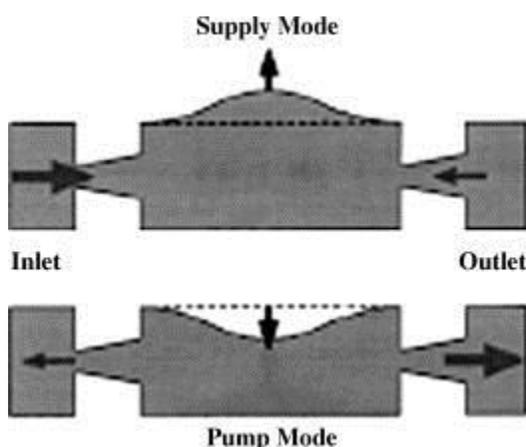
Οι μικροαντλίες, λοιπόν, κατέχουν σημαντική θέση ανάμεσα στις μικροσυσκευές, καθώς η χρήση τους καλύπτει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών: χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά ελάχιστων ποσοτήτων ρευστών από το ένα μέρος ενός εργαστηρίου-σε-τσιπ (lab-on-a-chip) σε ένα άλλο, παρέχουν μικρόλιτρα δειγμάτων ανθρώπινων κυττάρων σε μικροκανάλια για διαχωρισμό, εντοπισμό και ταυτοποίηση στα πλαίσια θεραπείας του καρκίνου, παρέχουν την δυνατότητα χορήγησης βιοτεχνολογικών φαρμάκων η οποία δεν είναι δυνατή με τις συμβατικές μεθόδους, ενώ τέλος, στη χημική βιομηχανία χρησιμοποιούνται για την παραγωγή μικροποσοτήτων χημικών.

Οι αντλίες εμπίπτουν σε μία εκ των δύο μεγάλων κατηγοριών: στις αντλίες εκτόπισης και στις δυναμικές αντλίες. Οι πρώτες προσδίδουν δυνάμεις πίεσης στο ρευστό μέσω ενός ή περισσότερων κινητών συνόρων, ενώ οι δεύτερες προσθέτουν διαρκώς ενέργεια στο ρευστό με τρόπο που αυξάνει την ορμή του ή και απευθείας την πίεση αυτού. Η προσδιδόμενη ορμή, στις αντλίες εκτόπισης, μετατρέπεται ακολούθως σε πίεση με την εφαρμογή εξωτερικής αντίστασης.

Πολλές από της αντλίες αυτής της κατηγορίας λειτουργούν με περιοδικό τρόπο και ενσωματώνουν μηχανισμούς διόρθωσης της ροής ώστε να επιτυγχάνεται συνεχής ροή. Μπορούν, ακόμα, να διαχωριστούν περαιτέρω σε παλινδρομικές και περιστροφικές, ανάλογα με το είδος κίνησης του κινητού συνόρου που χρησιμοποιούν.

Οι περισσότερες μικροαντλίες που έχουν αναφερθεί σε ερευνητικά συγγράμματα αφορούν μικροαντλίες εκτόπισης, όπου τα κινητά σύνορα ή επιφάνειες προσδίδουν πίεση με περιοδικό τρόπο. Σε αντίθεση με τις αντίστοιχες αντλίες μακροκλίμακας, που λειτουργούν με πιστόνια, οι περισσότερες μικροαντλίες εκτόπισης χρησιμοποιούν παραμορφώσιμες πλάκες από γυαλί, σιλικόνη ή/και πλαστικό, που καλούνται διαφράγματα ή μεμβράνες, και έχουν στερεωμένες τις ακμές τους στο θάλαμο της μικροαντλίας.

Τα κύρια στοιχεία μιας μικροαντλίας εκτόπισης είναι ο θάλαμος, στο ένα σύνορο του οποίου στερεώνεται το κινητό διάφραγμα, ο ενεργοποιητής/οδηγός μηχανισμός και δύο παθητικές βαλβίδες ελέγχου, μία στην είσοδο (πλευρά αναρρόφησης) και μία στην έξοδο (πλευρά κατάθλιψης) του θαλάμου της μικροαντλίας. Κατά τη λειτουργία, ο ενεργοποιητής μηχανισμός ενεργεί στο διάφραγμα και αυξομειώνεται ο όγκος του θαλάμου. Το ρευστό εισέρχεται στο θάλαμο κατά την απορρόφηση και εξέρχεται από αυτόν κατά την κατάθλιψη. Οι βαλβίδες ελέγχου είναι τέτοιες ώστε να ευνοούν την είσοδο και έξοδο του ρευστού αντίστοιχα, διορθώνοντας τη ροή και επιτυγχάνοντας καθαρή ροή σε ένα δίχρονο κύκλο άντλησης.



Σχήμα 1 - Αντλία με στοιχεία ακροφυσίου/διαχύτη

Οι ενεργοποιητές/οδηγοί που χρησιμοποιούνται διαφέρουν κατά περίπτωση και εφαρμογή: θερμοελαστικά, ηλεκτροστατικά, ηλεκτρομαγνητικά, θερμοπλαστικά και διμεταλλικά υλικά είναι μερικά από τα υλικά που αναφέρονται στη σύγχρονη βιβλιογραφία. Σε αυτά έρχονται να προστεθούν τα “έξυπνα υλικά”, όπως είναι τα κράματα μνήμης σχήματος και τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά.

Οι περισσότερες μικροαντλίες με μεμβράνη χρησιμοποιούν βαλβίδες εισαγωγής/εξαγωγής για την κατεύθυνση της ροής του ρευστού. Κατά τη σμίκρυνση, όμως, μιας τέτοιας διάταξης παρουσιάζονται προβλήματα τόσο στο κατασκευαστικό μέρος, όσο και στο λειτουργικό. Η αντλία έχει αυξημένο κίνδυνο κόπωσης και φθοράς, ενώ στην περίπτωση όπου το διαχειριζόμενο ρευστό περιέχει στερεά, υπάρχει ο κίνδυνος απόφραξης των βαλβίδων. Τέλος, εάν τα στερεά που διακινούνται μέσω του υγρού είναι έμβιες οντότητες (όπως για παράδειγμα αποικίες κυττάρων) υπάρχει ο κίνδυνος θανάτου αυτών, λόγω των τάσεων που αναπτύσσονται στα κινητά μέρη των βαλβίδων.

Για την αποφυγή αυτών των μειονεκτημάτων, τα τελευταία χρόνια ξεκίνησαν να αναπτύσσονται μικροαντλίες που χρησιμοποιούν διόδους ροής του τύπου ακροφυσίου/διαχύτη. Οι διόδοι αυτές έχουν διαφορετική αντίσταση στη ροή όταν αυτή αντιστρέφεται. Κατά τη θετική διεύθυνση της ροής μέσω του διαχύτη η ταχύτητα μειώνεται και ανακτάται σταδιακά η στατική πίεση. Όταν η ροή αντιστρέφεται, το στοιχείο λειτουργεί ως ακροφύσιο, προκαλώντας μεγαλύτερη πτώση πίεσης με αποτέλεσμα, κατά την παλινδρομική κίνηση, να δημιουργείται καθαρή ροή. Η εφαρμογή στοιχείων ακροφυσίου/διαχύτη σε μικροαντλίες έγινε πρώτη φορά από τους Stemme G. και Stemme E., και μετέπειτα από τους Gerlach και Wurmus [6],[9].

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με το σχεδιασμό μικροαντλίας χωρίς βαλβίδες της οποίας το διάφραγμα εκτελεί εξαναγκασμένη περιοδική ταλάντωση με πιεζοηλεκτρικό ενεργοποιητή, ενώ η ρύθμιση της ροής γίνεται με στοιχεία τύπου ακροφυσίου/διαχύτη.

Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφονται τα στοιχεία που αποτελούν την μικροαντλία και οι εξισώσεις που διέπουν τη λειτουργία αυτών, ενώ επιχειρείται η περιγραφή των φαινομένων της ηλεκτρομηχανικής και ρευστομηχανικής σύζευξης του προβλήματος σχεδιασμού μέσα από μεθόδους που παρέχονται από τη σχετική βιβλιογραφία.

2. Το πρόβλημα του σχεδιασμού

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, η μικροαντλία αποτελείται από τον θάλαμο, το διάφραγμα με τον ενεργοποιητή και τα στοιχεία ακροφυσίο/διαχύτης. Η ανάλυση της λειτουργίας της, λοιπόν, αποτελείται από την ανάλυση λειτουργίας των επιμέρους στοιχείων της καθώς επίσης και από την αλληλεπίδραση των τμημάτων αυτής. Όπως θα φανεί, οι πραγματικές συνθήκες λειτουργίας παρουσιάζουν δυσκολία στην επίλυση ή προσομοίωσή τους και συγκεκριμένες παραδοχές χρειάζεται να ληφθούν για την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων τα οποία διευκολύνουν στην ανάλυση του προβλήματος.

Ο σχεδιασμός της μικροαντλίας οφείλει να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του συστήματος όπου πρόκειται να χρησιμοποιηθεί. Οι απαιτήσεις αυτές συνήθως αναφέρονται είτε στο ενεργειακό κομμάτι, δηλαδή το ηλεκτρικό δυναμικό που είναι διαθέσιμο για την ενεργοποίηση του πιεζοηλεκτρικού υποκινητή και κατ' επέκταση του διαφράγματος της αντλίας, είτε στο τμήμα των ογκομετρικών παροχών. Η τελευταία απαίτηση μπορεί να εκφραστεί είτε ως μια ορισμένη προαπαιτούμενη ογκομετρική παροχή στην είσοδο της μικροαντλίας, είτε ως ένας ορισμένος προαπαιτούμενος μέσος ογκομετρικός ρυθμός εκροής.

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται το πρόβλημα του σχεδιασμού μιας μικροαντλίας χωρίς βαλβίδες, για μεταφορά ζωντανών κυττάρων, για την οποία προαπαιτείται συγκεκριμένη μέση ογκομετρική εκροή \overline{Q}_2 .

Η μέση ογκομετρική ροή υπολογίζεται ολοκληρώνοντας κατά τη διάρκεια μιας περιόδου τον ρυθμό εκροής από το στοιχείο ακροφυσίο/διαχύτης στην έξοδο της αντλίας:

$$\overline{Q}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T Q_2 dt \quad (1)$$

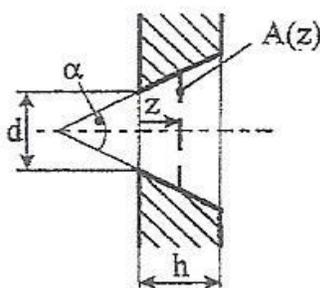
Πλέον, το πρόβλημα του σχεδιασμού μετατρέπεται σε πρόβλημα έκφρασης του ρυθμού εκροής κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, καθώς επίσης και της περιγραφής της συχνότητας ταλάντωσης του διαφράγματος συναρτήσει των φυσικών χαρακτηριστικών του συστήματος.

Προς την κατεύθυνση αυτή υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις που οδηγούν σε αποτελέσματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή τόσο ποιοτικών όσο και ποσοτικών συμπερασμάτων, τα οποία θα μελετηθούν στις παρακάτω ενότητες.

3. Στοιχεία Ακροφύσιο / Διαχύτης

Για τον υπολογισμό του ρυθμού εκροής θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν η επίδραση των στοιχείων του ακροφυσίου και διαχύτη στη ροή του ρευστού στα διαφορετικά στάδια της άντλησης, τόσο κατά τη μακροσκοπική ανάλυση του προβλήματος, όσο και κατά την ανάλυση με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Η γενική λειτουργία των στοιχείων ακροφυσίου/διαχύτη είναι να επιταχύνουν (ή να επιβραδύνουν) τη ροή του ρευστού με αύξηση (ή μείωση) της διατομής τους κατά μήκος του άξονα της ροής. Με τον τρόπο αυτό επιφέρουν τόσο τη μετατροπή της ενέργειας από κινητική σε δυναμική και αντίστροφα, όσο και την απώλεια ενέργειας σε μορφή θερμότητας. Τα φαινόμενα αυτά είναι δύσκολο να καθοριστούν επακριβώς, ειδικά για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds.



Σχήμα 2 - Στοιχείο ακροφύσιο/διαχύτης

3.1.1 Ιδανική Ροή

Για να αποκτήσουμε μια γενική εικόνα εξετάζουμε τη θεωρητική περίπτωση της ροής μη-ιξώδους ρευστού (ιδανική ροή). Η ενέργεια δεν απομακρύνεται ως θερμότητα και δεν υπάρχουν αναταράξεις στο ρευστό. Έτσι το ολοκλήρωμα του Bernoulli μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε διατομή στην πορεία της ροής:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} u_0^2 \quad (2)$$

όπου p είναι η υδροστατική πίεση, ρ η πυκνότητα του ρευστού και u η ταχύτητα. Η εξίσωση αυτή λέει πως για οποιοδήποτε σημείο της ροής, το άθροισμα της δυναμική ενέργειας (υδροστατική πίεση) και της κινητικής ενέργειας (δυναμική πίεση) παραμένει σταθερό.

Ορίζοντας:

$$p_1 = p(z) \quad (3.1)$$

$$u_1 = u(z) \quad (3.2)$$

$$p_0 = p(z = 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$u_0 = u(z = 0) \quad (3.4)$$

και αντικαθιστώντας το $u(z)$ με τη βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας:

$$u(z) = \frac{A_0}{A(z)} u_0 \quad (4)$$

η εξίσωση Bernoulli γράφεται πλέον ως εξής:

$$p(z) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A_0}{A(z)} u_0 \right)^2 = \frac{\rho}{2} u_0^2 \quad (5)$$

λύνοντας ως προς $p(z)$ βρίσκουμε τη γενική σχέση της τοπικής πίεσης:

$$p(z) = \frac{\rho}{2} u_0^2 \left[1 - \left(\frac{A_0}{A(z)} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Για χωρικούς διαχύτες, δηλαδή για τους διαχύτες όπου η διατομή που βρίσκεται κάθετα στο επίπεδο της ροής μεταβάλλεται με το z^2 , ισχύει:

$$\frac{A(z)}{A_0} = \left[1 + 2 \frac{z}{d} \tan \left(\frac{a}{2} \right) \right]^2 \quad (7)$$

επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$p(z) = \frac{\rho}{2} u_0^2 \left[1 - \frac{1}{[1 + 2 \frac{z}{d} \tan(\frac{a}{2})]^4} \right] \quad (8)$$

Για να γενικεύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιούμε τη σχετική τοπική μεταβλητή $\zeta = \frac{z}{d}$. Συσχετίζοντας την τοπική υδροστατική πίεση με τη δυναμική πίεση στο σημείο $z = 0$, προκύπτει:

$$\frac{p(z)}{\frac{\rho}{2} u_0^2} = \sigma(\zeta) \quad (9)$$

όπου

$$\sigma(\zeta) = 1 - \frac{1}{[1 + 2 \zeta \tan(\frac{a}{2})]^4}$$

Το σ μπορεί να ερμηνευθεί ως η σχετική μείωση της κινητικής ενέργειας στη θέση ζ αναφορικά με τη μικρότερη διατομή και είναι ισχυρά εξαρτώμενη από τη γωνία του ανοίγματος a . Αυτό γίνεται κατανοητό από τον σχετικό τοπικό ρυθμό μετατροπής της ενέργειας:

$$\delta(\zeta, a) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \sigma(\zeta, a)$$

Στο σημείο αυτό προκύπτουν δύο ερωτήματα: υπάρχει ελάχιστο απαιτούμενο μήκος εξαρτώμενο από τη γωνία ανοίγματος, a , ώστε να προκύπτει κατάλληλη λειτουργία, και αν ναι πως μπορεί να προσδιοριστεί; Ακόμα, η εξαρτώμενη από το a μετατροπή της ενέργειας επηρεάζει την απώλεια ενέργειας στα πραγματικά ρευστά;

Αναφορικά με το πρώτο ερώτημα ο T. Gerlach έχει εκτιμήσει πως ένας πολύ μικρού μήκους διαχύτης αποτυγχάνει να λειτουργήσει ως διαχύτης καθώς τα φαινόμενα μετατροπής ενέργειας που προκαλούνται από τη συνεχή μεταβολή της διατομής κατά μήκος της ροής δεν επικρατούν στη ροή (καθώς για $h \rightarrow 0$ το κανάλι γίνεται ιδανικό στόμιο). Υποθέτει, ακόμα, πως για τη σωστή λειτουργία του διαχύτη, τα παραπάνω φαινόμενα μετατροπής ενέργειας οφείλουν να ολοκληρώνονται μέσα στο μήκος h του στοιχείου. Επομένως η σχετική μείωση της ενέργειας σ πρέπει να ισούται ή να είναι μεγαλύτερη μιας τιμής σ_0 .

Έτσι, επιλύοντας ως προς ζ , προκύπτει η σχετική θέση ζ_0 :

$$\zeta_0(\alpha, \sigma_0) = \frac{1}{2 \tan(\frac{\alpha}{2})} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{1-\sigma_0}} - 1 \right] \quad (10)$$

όπου το ζ_0 μπορεί να ερμηνευθεί ως το ελάχιστο σχετικό μήκος του διαχύτη.[3]

3.1.2 Απώλειες Ενέργειας

Η ανάλυση που προηγήθηκε είχε ως στόχο να δημιουργήσουμε μια γενική εικόνα για την αρχή λειτουργίας ενός στοιχείου ακροφυσίου/διαχύτη. Για το λόγο αυτό αγνοήθηκαν οι απώλειες ενέργειας κατά τη ροή, κάτι που όμως δεν συμβαίνει στη ροή των πραγματικών ρευστών, τα οποία χαρακτηρίζονται από το ιξώδες τους, που προκαλεί τη διάχυση της ενέργειας υπό τη μορφή θερμότητας. Η ποσότητα της διαχεώμενης ενέργειας για οποιονδήποτε υδραυλικό αγωγό μπορεί να περιγραφεί από την απώλεια πίεσης κεφαλής, σύμφωνα με τη σχέση:

$$p_{\text{loss}} = \frac{\rho}{2} u_0^2 \xi \quad (11)$$

όπου το ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, u_0 η μέση ταχύτητα στη διατομή αναφοράς και το ξ συμβολίζει τον συντελεστή απώλειας πίεσης. Το ξ είναι αδιάστατη παράμετρος και εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του καναλιού και από τον αριθμό Reynolds. Η παραπάνω εξίσωση προστίθεται στο ολοκλήρωμα Bernoulli ώστε να αντανakλάται η ισορροπία της δυναμικής, κινητικής και απωλεσθείσας ενέργειας της πραγματική ροής.

Η εξίσωση (11) μπορεί να γραφεί και ως:

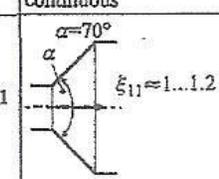
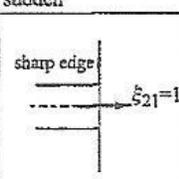
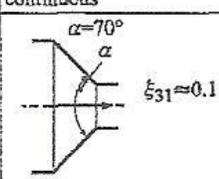
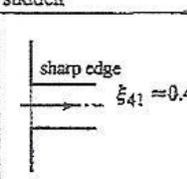
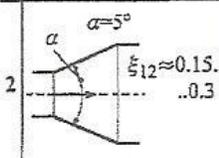
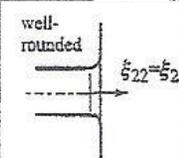
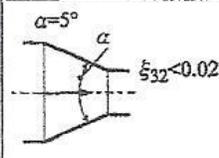
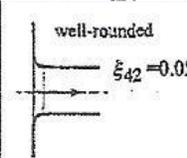
$$Q = C\sqrt{\Delta P} \quad (12)$$

Όπου το C είναι συντελεστής διεύθυνσης της ροής:

$$C = \frac{A_n}{\sqrt{\frac{1}{2}\xi\rho}} \quad C_H = \frac{A_n}{\sqrt{\frac{1}{2}\xi_L\rho}} \quad C_L = \frac{A_n}{\sqrt{\frac{1}{2}\xi_H\rho}} \quad (13)$$

A_n είναι η διατομή του στοιχείου στο λαιμό και ρ η πυκνότητα του ρευστού. Το ξ είναι μικρό για ροή προς τα δεξιά και μεγάλο για ροή προς τα αριστερά, ενώ για το C ισχύει το αντίθετο.

Από την κλασσική ρευστοδυναμική υπάρχουν επαρκή εμπειρικά δεδομένα για τον συντελεστή απώλειας πίεσης για αγωγούς διαφορετικής γεωμετρίας. Οι κύριες περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν αφορούν στη συνεχή ή απότομη σύγκλιση/απόκλιση του αγωγού, στη γωνία ανοίγματος (α) και στις απότομες ή στρογγυλομένες άκρες του αγωγού.

expansion		contraction	
continuous	sudden	continuous	sudden
 <p>$\alpha=70^\circ$ $\xi_{11} \approx 1 \dots 1.2$</p>	 <p>sharp edge $\xi_{21} = 1$</p>	 <p>$\alpha=70^\circ$ $\xi_{31} \approx 0.1$</p>	 <p>sharp edge $\xi_{41} \approx 0.4$</p>
 <p>$\alpha=5^\circ$ $\xi_{12} \approx 0.15 \dots 0.3$</p>	 <p>well-rounded $\xi_{22} \approx \xi_{21}$</p>	 <p>$\alpha=5^\circ$ $\xi_{32} < 0.02$</p>	 <p>well-rounded $\xi_{42} = 0.05$</p>

Σχήμα 3 - Συντελεστές απώλειας

Παρατηρείται πως οι μεγαλύτερες απώλειες εμφανίζονται για τη συνεχή απόκλιση του αγωγού με μεγάλη γωνία α , καθώς και για απότομη απόκλιση. Για την πρώτη περίπτωση, το ρευστό κινείται σε απότομη αύξηση της πίεσης, η οποία επιβραδύνει τη ροή κυρίως κοντά στα τοιχώματα του αγωγού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αποκόλληση του οριακού στρώματος και τη δημιουργία ανακυκλοφορίας ή ζώνη αντίστροφης ροής με ισχυρές αναταραχές και επομένως μεγάλες απώλειες θερμικής ενέργειας.

Σε γενικότερο επίπεδο, λόγω της μεγάλης μετατροπής ενέργειας για μεγάλες γωνίες ανοίγματος α , το μεγαλύτερο ποσοστό κινητικής ενέργειας κυρίως χάνεται ως θερμική ενέργεια παρά μετατρέπεται σε δυναμική. Για τη δεύτερη περίπτωση, το ρευστό εξέρχεται ως ελεύθερος πίδακας και καταλήγει σε ανοιχτή δεξαμενή (στο θάλαμο της μικροαντλίας) με αποτέλεσμα να χάνει όλη την κινητική του ενέργεια.

Για το λόγο αυτό η αντίστοιχη τιμή του ξ είναι μονάδα. Για απόκλιση με μικρή γωνία ανοίγματος δεν επέρχεται αποκόλληση του οριακού στρώματος και η ανάκτηση της πίεσης είναι σημαντικά πιο αποτελεσματική. Αυτό εξηγεί και τη σημαντικά μικρότερη τιμή του ξ μεταξύ των δύο γωνιών για ίδιο τύπο απόκλισης του αγωγού.

Η ροή σε συνεχή συστολή ή σύγκλιση γίνεται σχεδόν χωρίς απώλειες, όμοια με την ιδανική ροή. Χαρακτηρίζεται από σημαντική πτώση της πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής και σχεδόν όλη η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική, ενώ μικρές απώλειες ενέργειας παρατηρούνται μόνο κοντά στα τοιχώματα.

Συνοψίζοντας, οι απώλειες ενέργειας σε πραγματικά στοιχεία ακροφυσίου/διαχύτη είναι εξαρτώμενες από τη γεωμετρία του στοιχείου και την κατεύθυνση της ροής. Η εξάρτηση από την τελευταία, όμως, λαμβάνει χώρα μόνο για μεγαλύτερες ταχύτητες ροής, καθώς βασίζεται στην μεταφορά ορμής (και άρα σε σημαντικά ποσά κινητικής ενέργειας).

Αντιθέτως, κατά τη στρωτή ροή σε μικρότερες ταχύτητες δεν υπάρχει καμία εξάρτηση από την κατεύθυνση της ροής. Η διαθέσιμη κινητική ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και η πτώση πίεσης είναι σε ισορροπία με τις δυνάμεις ιξώδους. Συμπερασματικά, τα προφίλ ταχύτητας και για τις δύο κατευθύνσεις είναι όμοια εκτός του προσήμου τους. [3]

4. Μέθοδοι Προσέγγισης του σχεδιαστικού προβλήματος

4.1 Αναλυτική Προσέγγιση - Μοντέλο συγκεντρωτικής μάζας

Το διάφραγμα, υπό τη συνθήκη πως σε αυτό ασκείται μηδενική διαφορά πίεσης, θεωρείται πως εκτελεί ημιτονοειδή ταλάντωση ογκομετρικού ύψους V_0 και μέγιστης ογκομετρικής μετατόπισης $2V_0$. Το ύψος της μετατόπισης του διαφράγματος εξαρτάται από τη συχνότητα ταλάντωσης και από τον πιεζοηλεκτρικό υποκινητή.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι διαφορετικές μικροαντλίες αυτού του είδους λειτουργούν κοντά στην πρώτη μηχανική συχνότητα δόνησης του υλικού, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας την αναλογία μάζας – ελατηρίου, όπου οι ελαστικές ιδιότητες του διαφράγματος αναπαριστούν το ελατήριο και το ταλαντούμενο ρευστό, στα στοιχεία ακροφυσίου / διαχύτη, τη μάζα.

Εάν το σύστημα θεωρηθεί συντηρητικό και το προφίλ της ταχύτητας επίπεδο, τότε η συχνότητα ταλάντωσης για μικροαντλία με ένα θάλαμο είναι:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{K_p(1+\eta^2)^2 b(D-d)}{\rho K_v(1+\eta)L \ln \frac{D}{a}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Όπου $K_p = 1/(\frac{\partial w_0}{\partial p})$, w_0 είναι το κεντρικό πλάτος ταλάντωσης του διαφράγματος, P η διαφορική πίεση, b το βάθος του θαλάμου, D και d τα πλάτη εξόδου και εισόδου του στοιχείου ακροφυσίου/διαχύτη αντίστοιχα, $K_u = (\frac{\partial V}{\partial p})/(\frac{\partial w_0}{\partial p})$, V ο όγκος του θαλάμου (με επίπεδο διάφραγμα), $\eta = \frac{\xi_L}{\xi_H}$ και L το μήκος του στοιχείου ακροφυσίου/διαχύτη.[4]

Η συναρτήσε του χρόνου ογκομετρική μετατόπιση γράφεται ως εξής:

$$V = V_0[1 - \cos(\omega t)] \quad (15)$$

Όπου, $\omega = 2\pi f$, είναι η γωνιακή συχνότητα.

Όταν η πίεση κάτω από το διάφραγμα είναι μεγαλύτερη της πίεσης άνωθεν αυτού (συνήθως της ατμοσφαιρικής) ακολουθεί μια υπερτιθέμενη ανοδική κίνηση αυτού.

Θεωρώντας πως η κίνηση αυτή εξισορροπείται από μια αντίθετη δύναμη τύπου ελατηρίου, η μεταβολή του όγκου είναι ανάλογη της διαφοράς πίεσης:

$$\Delta V = k(P - P_{atm}) \quad (16)$$

Εάν p_b είναι η πίεση για την οποία, όταν αυτή εφαρμόζεται, η μετατόπιση είναι ίση του πλάτους ταλάντωσης V_0 :

$$V_0 = k(P_b - P_{atm}) \quad (17)$$

Τότε η εξίσωση (14) γράφεται:

$$\Delta V = V_0 \frac{(P - P_{atm})}{(P_b - P_{atm})} \quad (18)$$

Η p_b εξαρτάται από την ακαμψία του υλικού του διαφράγματος.

Η εξίσωση (13) μπορεί πλέον να γραφτεί έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει την επίδραση της διαφοράς πίεσης:

$$V = V_0[1 - \cos(\omega t)] - V_0 \frac{(P - P_{atm})}{(P_b - P_{atm})} \quad (19)$$

Η οποία αφού διαφοριστεί με το χρόνο δίνει:

$$\frac{dV}{dt} = V_0 \omega \sin(\omega t) - V_0 \frac{\frac{dP}{dt}}{P_b - P_{atm}} \quad (20)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ισούται με το ρυθμό εκροής, Q_2 , μείων το ρυθμό εισροής, Q_1 , στην αντλία. Επομένως:

$$\frac{dV}{dt} = Q_2 - Q_1 = V_0 \omega \sin(\omega t) - V_0 \frac{\frac{dP}{dt}}{P_b - P_{atm}} \quad (21)$$

Όπου:

$$Q_1 = C_H \sqrt{P_{in} - P} \quad , \text{για } P_{in} - P > 0$$

$$Q_1 = -C_L \sqrt{P - P_{in}} \quad , \text{για } P_{in} - P < 0$$

$$Q_2 = C_H \sqrt{P - P_{out}} \quad , \text{για } P - P_{out} > 0$$

$$Q_2 = C_L \sqrt{P_{out} - P} \quad , \text{για } P - P_{out} < 0$$

Η εξίσωση (19) γράφεται σε μορφή πεπερασμένων διαφορών:

$$\frac{dV}{dt} = Q_2 - Q_1 = V_0 \omega \sin(\omega t) - V_0 \frac{\frac{P - P_{old}}{\Delta t}}{P_b - P_{atm}} \quad (22)$$

Για κάθε χρόνο t , η εξίσωση (22) επιλύεται αριθμητικά ως προς p . Έπειτα, υπολογίζεται το Q_2 που είναι η ροή εξόδου.

Για την ειδική περίπτωση που η ακαμψία του διαφράγματος είναι πολύ μεγάλη (και επομένως η p_b πολύ υψηλή) η επίδραση της διαφοράς πίεσης στο διάφραγμα είναι αμελητέα. Τότε, ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (21) μπορεί να αγνοηθεί και να ληφθεί αναλυτική λύση. Η λύση αυτή λαμβάνεται για τα τρία στάδια:

1) Για $P > P_{out} > P_{in}$. Ο ρυθμός εκροής είναι $Q_2 = C_H \sqrt{P - P_{out}}$. Η λύση δίνει:

$$Q_2 = \frac{\left(\frac{C_H}{C_L}\right)^2 V_0 \omega \sin(\omega t) - C_H \sqrt{\left[\left(\frac{C_H}{C_L}\right)^2 - 1\right] \Delta P + \left(\frac{V_0 \omega \sin(\omega t)}{C_L}\right)^2}}{\left(\frac{C_H}{C_L}\right)^2 - 1} \quad (23)$$

Όπου ΔP είναι η διαφορά πίεσης $P_{out} - P_{in}$.

2) Για $P < P_{in} < P_{out}$. Η λύση δίνει:

$$Q_2 = \frac{-V_0 \omega \sin(\omega t) - C_H \sqrt{\left[\left(\frac{C_H}{C_L}\right)^2 - 1\right] \Delta P + \left(\frac{V_0 \omega \sin(\omega t)}{C_L}\right)^2}}{\left(\frac{C_H}{C_L}\right)^2 - 1} \quad (24)$$

3) Για $P_{in} < P < P_{out}$. Η λύση δίνει:

$$Q_2 = \frac{1}{2} V_0 \omega \sin(\omega t) - \sqrt{\frac{1}{2} C_L^2 \Delta P - \frac{1}{4} (V_0 \omega \sin(\omega t))^2} \quad (25)$$

Για την ειδική περίπτωση όπου $P_{in} = P_{out}$, η ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) μπορεί να γίνει αναλυτικά και ο μέσος ρυθμός εκροής :

$$\overline{Q_2} = \frac{V_0 \omega}{\pi} \frac{C_H - C_L}{C_H + C_L} \quad (26)$$

Καθώς η αρχή του προβλήματος σχεδιασμού είναι ακριβώς η τιμή της μέσης ογκομετρικής εκροής της αντλίας, μετά την επίλυση της εξίσωσης (1) ή (26) απαιτείται η επιλογή των χαρακτηριστικών του πιεζοηλεκτρικού υποκινητή.

4.1.1 Πιεζοηλεκτρικός υποκινητής

Στις μικροαντλίες δίχως βαλβίδες, οι οποίες χρησιμοποιούν πιεζοηλεκτρικό διάφραγμα ως ενεργοποιητή, το ρευστό διακινείται από την ταλάντωση της μεμβράνης. Το ίδιο το ρευστό αποτελεί σημαντικό παράγοντα αντίστασης στην ταλάντωση αυτή. Η ταλάντωση της μεμβράνης και η ροή του ρευστού είναι, συνεπώς, φυσικά συζευγμένα μεγέθη. Εφόσον η επίδραση του ρευστού θεωρηθεί αμελητέα, τότε η μεμβράνη ταλαντώνεται στη συχνότητα της πιεζοηλεκτρικής δύναμης για ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Όμως, σύμφωνα και με τη βιβλιογραφία, η ταλάντωση δεν είναι ανεξάρτητη της ροής του ρευστού σε πραγματικές εφαρμογές και η επίδραση της σύζευξης είναι σημαντική κατά την προσομοίωση της λειτουργίας μικροαντλιών. Μη-γραμμικά φαινόμενα κυριαρχούν στην απόκριση της μεμβράνης, ακόμα και όταν το πλάτος ταλάντωσης είναι μικρό. [7]

Από τις διάφορες πιεζοηλεκτρικές διαμορφώσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί σε πρακτικό αλλά και ερευνητικό επίπεδο, η διάταξη δίσκου είναι από τις πλέον διαδεδομένες. Σε πλήθος εφαρμογών χρησιμοποιούνται μονόμορφα τα οποία αποτελούνται από πιεζοηλεκτρικό στρώμα πακτωμένο ανάμεσα σε δύο ηλεκτρόδια και σε ορισμένο αριθμό παθητικών στρωμάτων από διάφορα υλικά. Η διαμόρφωση αυτή έχει έναν επικρατούντα d_{31} πιεζοηλεκτρικό συντελεστή και επομένως η διέγερση κατά την εγκάρσια, ως προς τα ηλεκτρόδια, διεύθυνση επιφέρει τάση κατά την ακτινική διεύθυνση. Ο συντελεστής d_{31} προκαλεί την εκτροπή της μεμβράνης εφόσον αυτή είναι πακτωμένη στις κυκλικές ακμές της. [14]

Συγκεκριμένα, καθώς ένα ηλεκτρικό πεδίο E_z εφαρμόζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα z (κατακόρυφος άξονας) σε πιεζοηλεκτρικό υλικό πολωμένο κατά την ίδια διεύθυνση, το οποίο ηρεμεί, παράγεται τάση ε κατά τις x - και y - διευθύνσεις, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\varepsilon = d_{31} E_z \quad (27)$$

Καθώς το πιεζοϋλικό είναι συνδεδεμένο με κάποιο υπόστρωμα, το πρώτο δεν δύναται να συσταλεί ελεύθερα και εφελκυστική τάση εφαρμόζεται σε αυτό, σύμφωνα με τη σχέση τάσης-καταπόνησης η οποία είναι συγκεκριμένη βάσει υλικού. Η παραμόρφωση του διαφράγματος περιλαμβάνει δύο κύρια φαινόμενα: την κάμψη λόγω εφαρμοζόμενης ορμής και τη συστολή λόγω καθαρής δύναμης κατά τη διεύθυνση της πιεζο-καταπόνησης. [12]

4.1.2 Πιεζοηλεκτρικός υποκινητής και διάφραγμα

Η δόνηση του διαφράγματος περιγράφεται από την κατακόρυφη μετατόπιση αυτού. Καθώς η μετατόπιση είναι μικρή σε σύγκριση με το μικρότερο χαρακτηριστικό μήκος της μεμβράνης, η θεωρία κάμψης λεπτών πλακών του Kirchoff μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποτυπώσει την μετατόπιση αυτή ως συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού, της πίεσης και των χαρακτηριστικών του υλικού της μεμβράνης σε σχέση με το χρόνο.

Η δύναμη διέγερσης, f_e , μπορεί να ληφθεί επιλύοντας την εξίσωση που περιγράφει την ηλεκτρομηχανική σύζευξη που αφορά στον ενεργοποιητή:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \quad (28)$$

όπου ε_{kl} είναι ο τανυστής μηχανικής τάσης, σ_{ij} ο τανυστής της μηχανικής πίεσης, E_k το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου, e_{ijk} ο τανυστής πιεζοηλεκτρικής σταθεράς και C^E_{ijkl} ο τανυστής σταθεράς ελαστικής δυσκαμψία για σταθερό ηλεκτρικό πεδίο. Ο τελευταίος τανυστής πρόκειται για τον παρακάτω 6×6 συμμετρικό τανυστή:

C^{1111}	C^{1122}	C^{1133}	0	0	0
C^{1122}	C^{2222}	C^{2233}	0	0	0
C^{1133}	C^{2233}	C^{3333}	0	0	0
0	0	0	C^{1212}	0	0
0	0	0	0	C^{2323}	0
0	0	0	0	0	C^{1313}

και:

$$C^{1111} = \frac{E_{11}(1-\lambda_{23}\lambda_{32})}{\Delta} \quad (29.α), \quad C^{2222} = \frac{E_{22}(1-\lambda_{13}\lambda_{31})}{\Delta} \quad (29.β),$$

$$C^{3333} = \frac{E_{33}(1-\lambda_{12}\lambda_{21})}{\Delta} \quad (29.γ), \quad C^{1122} = \frac{E_{11}(\lambda_{21}+\lambda_{13}\lambda_{32})}{\Delta} \quad (29.δ),$$

$$C^{1133} = \frac{E_{33}(\lambda_{13}+\lambda_{12}\lambda_{23})}{\Delta} \quad (29.ε), \quad C^{2233} = \frac{E_{22}(\lambda_{32}+\lambda_{12}\lambda_{31})}{\Delta} \quad (29.στ),$$

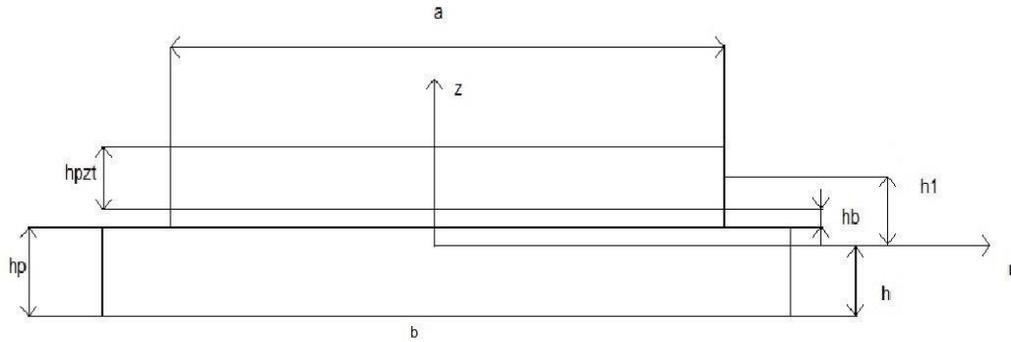
$$C^{1212} = G_{12} \quad (29.ζ), \quad C^{2323} = G_{23} \quad (29.η), \quad C^{1313} = G_{13} \quad (29.θ)$$

$$\lambda_{ij}E_j = \lambda_{ji}E_i \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \quad (29.ι),$$

$$\Delta = 1 - \lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_{32} - \lambda_{21}\lambda_{13} - 2\lambda_{12}\lambda_{32}\lambda_{13} \quad (29.κ)$$

όπου με λ_{ij} συμβολίζονται οι λόγοι Poisson, με E_{ij} οι συντελεστές Young και με G_{ij} οι συντελεστές διάτμησης του πιεζοηλεκτρικού υλικού.

Μια τυπική δομή πιεζοηλεκτρικά υπονικουμένου διαφράγματος αποτελείται, όπως ήδη αναφέρθηκε, από το πιεζοηλεκτρικό στρώμα, το συνδετικό στρώμα και την παθητική πλάκα (μεμβράνη). Το πιεζοηλεκτρικό στρώμα είναι κολλημένο στην παθητική πλάκα με αγώγιμη σύνδεση (συνδετικό στρώμα). Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η διατομή της δομής ενός πιεζοηλεκτρικού υποκινητή.



Σχήμα 4 - Πιεζοηλεκτρικός υποκινητής και διάφραγμα

Οι διάμετροι του στρώματος σύνδεσης και του πιεζοηλεκτρικού συμβολίζονται ως a , ενώ η διάμετρος της παθητικής πλάκας ως b . Η απόσταση μεταξύ της ουδέτερης επιφάνειας του υποκινητή, την οποία θα εξηγήσουμε παρακάτω, και της κάτω επιφάνειας της παθητικής πλάκας συμβολίζεται ως h και η απόσταση μεταξύ του ήμισυ του πάχους του πιεζοηλεκτρικού στρώματος και της ουδέτερης επιφάνειας συμβολίζεται ως h_1 . Τα πάχη της παθητικής πλάκας, του στρώματος σύνδεσης και του πιεζοηλεκτρικού στρώματος συμβολίζονται ως h_p , h_b και h_{pzt} αντίστοιχα.

Με την εφαρμογή συνεχούς ρεύματος η προκαλούμενη μετατόπιση θεωρείται συμμετρική ως προς τους δύο άξονες. Η ανάλυση για λόγους ευκολίας γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Βασικές παραδοχές που μετέχουν στη θεωρία κάμψης λεπτών πλακών του Kirchhoff αποτελούν οι εξής:

1. Η κάθετη τάση σ_{zz} αμελείται ($\sigma_{zz}=0$).
2. Το ευθύγραμμο στοιχείο που βρίσκεται κάθετο στην ουδέτερη επιφάνεια πριν την παραμόρφωση είναι κάθετο σε αυτή και μετά την παραμόρφωση ($e_{rz}=e_{\theta z}=0$).
3. Το πιεζοηλεκτρικό στρώμα είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση z του πάχους του και το ηλεκτρικό δυναμικό του μεταβάλλεται με τον νόμο του τετραγώνου κατά το πάχος του (z).
4. Η παθητική πλάκα είναι πακτωμένη κατά την κυκλική ακμή

Σύμφωνα με τη θεωρία των λεπτών πλακών του Kirchhoff, οι μετατοπίσεις στον πιεζοηλεκτρικό υποκινητή ορίζονται ως εξής:

$$u_z = w(r, \theta) \quad (30)$$

$$u_r = -z \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (31)$$

$$u_\theta = -z \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \quad (32)$$

όπου τα u_z , u_r και u_θ είναι οι μετατοπίσεις κατά την εγκάρσια κατεύθυνση z , την ακτινική r και την εφαπτομενική θ , αντίστοιχα.

Καθώς συνεχές εξωτερικό δυναμικό ασκείται στο πιεζοηλεκτρικό στρώμα, οι γραμμικές τάσεις που εμφανίζονται στη δομή σε σχέση με την ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση εκφράζονται ως:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -z \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (33)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = -z \frac{dw}{r dr} \quad (34)$$

Οι τάσεις στην ελαστική παθητική πλάκα είναι:

$$\sigma_{rr}^1 = \frac{E_p}{1-\nu_p^2} (e_{rr} + \nu_p e_{\theta\theta}) = -\frac{z E_p}{1-\nu_p^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_p dw}{r dr} \right) \quad (35)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \frac{E_p}{1-\nu_p^2} (e_{\theta\theta} + \nu_p e_{rr}) = -\frac{z E_p}{1-\nu_p^2} \left(\frac{dw}{r dr} + \frac{\nu_p d^2 w}{dr^2} \right) \quad (36)$$

όπου ο εκθέτης "1" δηλώνει τις μεταβλητές για την παθητική πλάκα, ενώ επίσης τα E_p και ν_p είναι το μέτρο ελαστικότητας Young και ο λόγος Poisson της παθητικής πλάκας, αντίστοιχα.

Λόγω του ότι το στρώμα σύνδεσης είναι σημαντικά πιο λεπτό από το πιεζοηλεκτρικό στρώμα και από την παθητική πλάκα, η ιξωδοελαστική του συμπεριφορά μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι οι αντίστοιχες τάσεις για το στρώμα σύνδεσης λαμβάνονται ως:

$$\sigma_{rr}^2 = \frac{E_b}{1-\nu_b^2} (e_{rr} + \nu_b e_{\theta\theta}) = -\frac{z E_b}{1-\nu_b^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_b dw}{r dr} \right) \quad (37)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{E_b}{1-\nu_b^2} (e_{\theta\theta} + \nu_b e_{rr}) = -\frac{z E_b}{1-\nu_b^2} \left(\frac{dw}{r dr} + \frac{\nu_b d^2 w}{dr^2} \right) \quad (38)$$

όπου ο εκθέτης “2” δηλώνει τις μεταβλητές για το στρώμα σύνδεσης, ενώ τα E_b και ν_b είναι το μέτρο ελαστικότητας Young και ο λόγος Poisson για το στρώμα σύνδεσης, αντίστοιχα.

Το πιεζοηλεκτρικό στρώμα θεωρείται ως εγκάρσια ιστροπικό υλικό. Από τη γραμμική καταστατική εξίσωση για πιεζοηλεκτρικά υλικά, οι τάσεις στο στρώμα αυτό βρίσκονται ως:

$$\sigma_{rr}^3 = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} (e_{rr} + \nu e_{\theta\theta}) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} E_z = -\frac{z}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} E_z \quad (39)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^3 = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} (e_{\theta\theta} + \nu e_{rr}) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} E_z = -\frac{z}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(\frac{dw}{rdr} + \frac{\nu}{dr^2} \right) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} E_z \quad (40)$$

όπου ο εκθέτης “3” δηλώνει τις μεταβλητές για το πιεζοηλεκτρικό στρώμα, ενώ επίσης $\nu = -s_{12}^E/s_{11}^E$ είναι ο λόγος Poisson του πιεζοηλεκτρικού στρώματος, s_{11}^E και s_{12}^E είναι οι σταθερές συμμόρφωσης του πιεζοηλεκτρικού υλικού, d_{31} είναι η πιεζοηλεκτρική σταθερά του υλικού και E_z είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διεύθυνση του z , αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την παραδοχή (3), το ηλεκτρικό δυναμικό θεωρείται πως μεταβάλλεται ανάλογα με το πάχος σύμφωνα με το νόμο του τετραγώνου:

$$\varphi = \varphi_0 + z\varphi_1 + z^2\varphi_2 \quad (41)$$

όπου τα φ_0 , φ_1 και φ_2 είναι παράμετροι που εξαρτώνται από το r .

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η ηλεκτρική μετατόπιση κατά μήκος της διεύθυνσης του πάχους (E_z, D_z) εκφράζονται ως εξής:

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = -\varphi_1 - 2z\varphi_2 \quad (42)$$

$$D_z = d_{31}(\sigma_{rr}^3 + \sigma_{\theta\theta}^3) + \epsilon_{33} E_z \quad (43)$$

όπου ϵ_{33} είναι η διηλεκτρική σταθερά του πιεζοηλεκτρικού υλικού.

Σύμφωνα με το νόμο του Maxwell, η απόκλιση της ηλεκτρικής ροής οφείλει να εκλείψει, συνεπώς:

$$\frac{dD_z}{dz} = 0 \quad (44)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (39),(40),(42) και (43) στην εξίσωση (44), η σταθερά φ_2 δίνεται ως:

$$\varphi_2 = \frac{d_{31}}{4d_{31}^2 - 2s_{11}^E \varepsilon_{33}(1-\nu)} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{rdr} \right) \quad (45)$$

Οι ηλεκτρικές οριακές συνθήκες για την άνω και κάτω επιφάνεια του πιεζοηλεκτρικού στρώματος είναι:

$$\varphi|_{h_1 + \frac{h_{pzt}}{2}} = V_1 \quad (46)$$

$$\varphi|_{h_1 - \frac{h_{pzt}}{2}} = V_2 \quad (47)$$

όπου $h_1 = h_p + h_b + \frac{h_{pzt}}{2} - h$. Σύμφωνα με τους Dobrucki και Pruchnicki, υπάρχει μια ουδέτερη επιφάνεια στην πολυστρωματική δομή στην οποία δεν εμφανίζεται εγκάρσια ή ακτινική τάση.

Η απόσταση h μεταξύ της ουδέτερης επιφάνειας και της κάτω επιφάνειας της παθητικής πλάκας είναι:

$$h = \frac{1}{2} \frac{\frac{E_p h_p^2}{1-\nu_p^2} + \frac{E_b [(h_b + h_p)^2 - h_b^2]}{1-\nu_b^2} + \frac{E_{pzt} [(h_{pzt} + h_b + h_p)^2 - (h_b + h_p)^2]}{1-\nu^2}}{\frac{E_p h_p}{1-\nu_p^2} + \frac{E_b h_b}{1-\nu_b^2} + \frac{E_{pzt} h_{pzt}}{1-\nu^2}} \quad (48)$$

όπου E_{pzt} είναι το μέτρο ελαστικότητας Young του πιεζοηλεκτρικού υλικού [2].

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (41) στις εξισώσεις (46) και (47), προκύπτει:

$$\varphi_1 = \frac{V_1 - V_2}{h_{pzt}} - 2h_1 \varphi_1 \quad (49)$$

όπου $V_1 - V_2$ είναι η επιβαλλόμενη, στο πιεζοηλεκτρικό στρώμα, διαφορά δυναμικού.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις του πεδίου μετατόπισης, η ελαστική δυναμική ενέργεια της παθητικής πλάκας, του στρώματος σύνδεσης και του πιεζοηλεκτρικού στρώματος μπορούν να εξαχθούν υπό όρους του πεδίου των τάσεων ως:

- $$U_1 = \int_{-h}^{h_p-h} \int_0^{b/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\sigma_{rr}^1 e_{rr} + \sigma_{\theta\theta}^1 + e_{\theta\theta}) r d\theta dr dz = \quad (50)$$

$$\frac{\pi E_p [(h_p - h)^3 + h^3]}{3(1 - \nu_p^2)} \times \int_0^{b/2} \left(r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\nu_p \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) dr$$

- $$U_2 = \int_{h_p-h}^{h_p+h_b-h} \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\sigma_{rr}^2 e_{rr} + \sigma_{\theta\theta}^2 + e_{\theta\theta}) r d\theta dr dz = \quad (51)$$

$$\frac{\pi E_b [(h_p + h_b - h)^3 + (h_p - h)^3]}{3(1 - \nu_b^2)} \times \int_0^{a/2} \left(r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\nu_b \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) dr$$

- $$U_3 = \int_{h_1 - \frac{h_{pzt}}{2}}^{h_1 + \frac{h_{pzt}}{2}} \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\sigma_{rr}^3 e_{rr} + \sigma_{\theta\theta}^3 e_{\theta\theta}) r d\theta dr dz = \quad (52)$$

$$\frac{\pi [(h_1 + h_{pzt}/2)^3 + (h_1 - h_{pzt}/2)^3]}{3s_{11}^E (1 - \nu^2)} \times \int_0^{a/2} \left(r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\nu \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) dr$$

$$- \frac{2\pi d_{31} [(h_1 + h_{pzt}/2)^3 + (h_1 - h_{pzt}/2)^3]}{3s_{11}^E (1 - \nu)} \times \int_0^{a/2} \left(r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \left(\frac{dw}{dr} \right) \right) \varphi_2 dr$$

$$- \frac{\pi d_{31} [(h_1 + h_{pzt}/2)^2 + (h_1 - h_{pzt}/2)^2]}{2s_{11}^E (1 - \nu)} \times \int_0^{a/2} \left(r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \left(\frac{dw}{dr} \right) \right) \varphi_1 dr$$

Σύμφωνα με την ανάλυση του ηλεκτρικού πεδίου, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του πιεζοηλεκτρικού στρώματος είναι:

$$\begin{aligned}
 U_E &= \int_{h_1 - \frac{h_{pzt}}{2}}^{h_1 + \frac{h_{pzt}}{2}} \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} E_z D_z r d\theta dr dz = \\
 & \left(\pi \epsilon_{33} - \frac{2\pi d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \nu)} \right) \times \int_{h_1 - \frac{h_{pzt}}{2}}^{h_1 + \frac{h_{pzt}}{2}} \int_0^{a/2} (\varphi_1^2 + 4z\varphi_1\varphi_2 + 4z^2\varphi_2^2) r dr dz \\
 & + \frac{\pi d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \times \int_{h_1 - \frac{h_{pzt}}{2}}^{h_1 + \frac{h_{pzt}}{2}} \int_0^{a/2} z(\varphi_1 + 2z\varphi_2) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) r dr dz
 \end{aligned} \tag{53}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Rayleigh – Ritz λαμβάνεται:

$$L = U_1 + U_2 + U_3 - U_E \tag{54}$$

Οι μηχανικές οριακές συνθήκες είναι $w = 0, \frac{dw}{dr} = 0$ στο $r = \frac{b}{2}$, για $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Σύμφωνα με αυτές, η γενική έκφραση της μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί ως:

$$w = \left(1 - \frac{4r^2}{b^2} \right)^2 \left[C_1 + C_2 \left(1 - \frac{4r^2}{b^2} \right) + C_3 \left(1 - \frac{4r^2}{b^2} \right)^2 \right] \tag{55}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (50) – (53) και (55) στην εξίσωση (54), μπορούν να υπολογιστούν οι συντελεστές C_i επιλύοντας την εξίσωση $\frac{\partial L}{\partial C_i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Επομένως, θεωρώντας πως κατά την πλήρη παραμόρφωση του διαφράγματος λαμβάνεται σχήμα έλλειψης, με την επίλυση της εξίσωσης (55) για $r=0$ είναι δυνατό να υπολογιστεί η τιμή του ογκομετρικού ύψους για την εξίσωση (20).

Με τον τρόπο αυτό, μπορούν πλέον να ρυθμιστούν οι παράμετροι του πιεζοηλεκτρικού υποκινητή, όπως τα χρησιμοποιούμενα υλικά, οι διαστάσεις και το ηλεκτρικό δυναμικό, για δεδομένα στοιχεία ακροφυσίου/διαχύτη είτε το αντίστροφο.

4.2 Αναλυτική Προσέγγιση - Μη γραμμικό μοντέλο

Καθώς για τις περισσότερες μικροαντλίες η μετατόπιση της μεμβράνης είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με το μικρότερο χαρακτηριστικό μέγεθος της αντλίας, η θεωρία κάμψης λεπτών πλακών μπορεί να εφαρμοστεί. Σύμφωνα με αυτή, η εξίσωση που διέπει την εξαναγκασμένη δόνηση του διαφράγματος είναι:

$$\frac{E h^3}{12 (1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 W + h \rho_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f_e - P \quad (56)$$

όπου W , E , ρ_m , h , μ , είναι η μετατόπιση, το μέτρο ελαστικότητας, η πυκνότητα, το πάχος και ο λόγος Poisson του διαφράγματος, αντίστοιχα, t είναι ο χρόνος, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$ είναι ο δισδιάστατος διπλός φορέας του Laplace, P η δυναμική πίεση που ασκείται στη μεμβράνη από το ρευστό και f_e η περιοδική πιεζοηλεκτρική δύναμη διέγερσης.

Η πίεση, P , που εμφανίζεται στην εξίσωση (56) εξαρτάται όχι μόνο από τις πιέσεις στην είσοδο και έξοδο της αντλίας, αλλά και από τη θέση και ταχύτητα του διαφράγματος. Η εξίσωση (56) είναι, συνεπώς, μια μη-γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Από τη σκοπιά της μηχανικής στερεών απαιτείται, λοιπόν, η πίεση να είναι γνωστή ωστέ να μπορεί να λυθεί η εν λόγω εξίσωση.

Από τη σκοπιά της ρευστομηχανικής, οι εξισώσεις που περιγράφουν την ασυμπίεστη στρωτή ροή είναι οι εξισώσεις Navier - Stokes(57) και η εξίσωση συνέχειας μάζας(58):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g + \mu \nabla^2 u - \nabla P \quad (57)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (58)$$

όπου ρ_L είναι η πυκνότητα του ρευστού, μ το δυναμικό ιξώδες και u η ταχύτητα.

Η πίεση μπορεί να ληφθεί εφόσον λυθούν οι εξισώσεις Navier-Stokes. Για να συμβεί αυτό, όμως, πρέπει να είναι γνωστή εκ των προτέρων η ταχύτητα του διαφράγματος ή η πίεση που ασκείται σε αυτό. Παρατηρούμε, δηλαδή, πως είναι αδύνατο να καθορίσουμε την πίεση πριν λυθούν οι εξισώσεις (56) και (57). Η πίεση, συνεπώς, αποτελεί τον παράγοντα σύζευξης μεταξύ της δόνησης του διαφράγματος και της ροής στο εσωτερικό του θαλάμου της αντλίας. Η πιο συνεπής πορεία είναι η επίλυση των εξισώσεων (56) και (57) για κάθε χρονικό βήμα, κάτι που είναι αρκετά πολύπλοκο και απαιτεί εκτεταμένη υπολογιστική προσπάθεια. [7, 13]

Εναλλακτικά, η πίεση μπορεί να συσχετισθεί με την ταχύτητα του διαφράγματος μέσω ενός προσεγγιστικού μοντέλου. Για να επιτευχθεί αυτό διατηρούνται τα κύρια χαρακτηριστικά του πεδίου ροής, ενώ αγνοούνται συγκεκριμένοι παράγοντες. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε για το εσωτερικό της αντλίας τα εξής:

- Η απώλεια της τοπικής πίεσης της ροής διαμέσω των στοιχείων ακροφυσίου/διαχύτη υπερಿಸχύει των συνολικών απωλειών
- Η πίεση στο εσωτερικό του θαλάμου της αντλίας είναι ομοιόμορφη

Οι παραπάνω υποθέσεις μπορούν να ληφθούν εφόσον η διατομή του θαλάμου είναι σημαντικά μεγαλύτερη σε σύγκριση με αυτή των στοιχείων ακροφυσίου/διαχύτη. Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, η πίεση στην εξίσωση (56) μπορεί να εκφραστεί μέσω των ογκομετρικών ροών διαμέσου των στοιχείων ακροφυσίου/διαχύτη, καθώς επίσης και μέσω της πίεσης στην είσοδο και έξοδο. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ της παλινδρομικής κίνησης του διαφράγματος και τις ογκομετρικές ροές εισόδου/εξόδου, η πίεση μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ταχύτητας του διαφράγματος. [7]

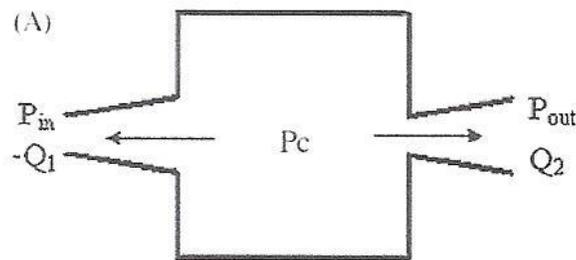
Η διαδικασία άντλησης μπορεί να χωριστεί σε τρία στάδια: το στάδιο αποφόρτισης ($P_{in} < P_{out} < P_c$), το στάδιο φόρτισης ($P_c < P_{in} < P_{out}$) και το μεταβατικό στάδιο ($P_{in} < P_c < P_{out}$), όπου με P_c , P_{in} , P_{out} συμβολίζουμε την πίεση στο θάλαμο της αντλίας, την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα. Η πίεση εισόδου είναι πάντα μικρότερη της πίεσης εξόδου, ενώ η ογκομετρική ροή μέσα από ένα στοιχείο ακροφυσίου/διαχύτη συσχετίζεται με την πίεση με την παρακάτω σχέση:

$$\Delta P = \frac{\rho}{2A_t^2} \xi Q^2 \quad (59)$$

όπου K είναι ο συντελεστής απώλειας και A_t η επιφάνεια της διατομής στο λαιμό του στοιχείου.

Η λειτουργία της αντλίας μπορεί να χωριστεί σε τρία στάδια: το στάδιο αποφόρτισης, το στάδιο φόρτισης και το μεταβατικό στάδιο. Για ευκολία στην ανάλυση θεωρούμε ότι τα στοιχεία εισόδου και εξόδου είναι ίδια, επομένως οι συντελεστές απωλειών απλώς αντιστρέφονται καθώς αντιστρέφεται η ροή σε αυτά.

1. **Στάδιο αποφόρτισης ($P_{in} < P_{out} < P_c$):** Το ρευστό εξέρχεται από το θάλαμο της αντλίας λόγω της υψηλής πίεσης του θαλάμου. Το στοιχείο εισόδου λειτουργεί ως στόμιο ενώ το στοιχείο εξόδου ως διαχύτης.



Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις και τη σχέση μεταξύ απώλειας πίεσης και ογκομετρικής ροής, οι πιέσεις για την είσοδο και την έξοδο μπορούν να γραφούν ως:

$$P_c = P_{out} + \frac{\rho}{2A_d^2} \xi_d^t Q_d^2 \quad (60.1)$$

$$P_c = P_{in} + \frac{\rho}{2A_n^2} \xi_n^t Q_n^2 \quad (60.2)$$

Για να ληφθεί η εξάρτηση μεταξύ της πίεσης P και της ταχύτητας με την οποία δονείται η μεμβράνη, εισάγουμε έναν όγκο ο οποίος μεταβάλλεται με το χρόνο ως εξής:

$$V = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} W dx dy \quad (61)$$

Σύμφωνα με τη γεωμετρική σχέση και την εξίσωση συνέχειας, ο όγκος της εξίσωσης (61) και οι ροές που εμφανίζονται στις εξισώσεις (60.1) και (60.2) ικανοποιούν:

$$\dot{V} = Q_d + Q_n \quad (62)$$

Στη συγκεκριμένη κατάσταση πίεσης, οι όροι της εξίσωσης (44) ικανοποιούν τις ανισώσεις:

$$\dot{V} \geq 0, Q_d \geq 0, Q_n \geq 0$$

Επιλύοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις (60.1), (60,2) και (62) προκύπτει:

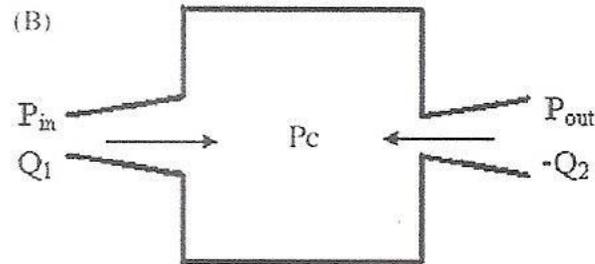
$$Q_d = \frac{\xi_n^t \dot{V} - \sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho}}{\xi_n^t - \xi_d^t} \quad (63.1)$$

$$Q_n = \frac{-\xi_d^t \dot{V} + \sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho}}{\xi_n^t - \xi_d^t} \quad (63.2)$$

$$P = P_{in} + \frac{\xi_n^t}{\xi_n^t - \xi_d^t} \Delta P + \frac{\rho}{2A^2} \frac{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}}{(\xi_n^t - \xi_d^t)^2} \left[(\xi_n^t + \xi_d^t) \dot{V} - 2 \sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho} \right] \quad (63.3)$$

,όπου $\Delta P = P_{out} - P_{in}$

2. **Στάδιο φόρτισης ($P_c < P_{in} < P_{out}$):** Το ρευστό εισέρχεται στο θάλαμο της αντλίας. Τα στοιχεία εισόδου και εξόδου λειτουργούν αντίστροφα από ότι στο στάδιο αποφόρτισης.



$$P_c = P_{out} - \frac{\rho}{2A_t^2} \xi_n^t Q_d^2 \quad (64.1)$$

$$P_c = P_{in} - \frac{\rho}{2A_t^2} \xi_d^t Q_n^2 \quad (64.2)$$

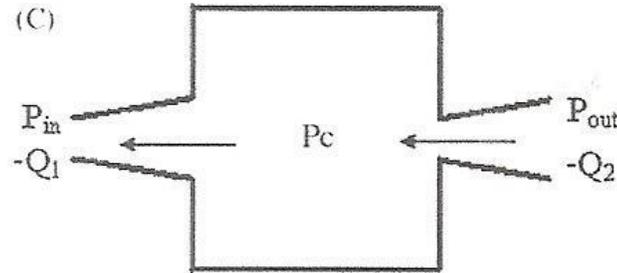
Η εξίσωση (62) ισχύει ακόμα, όμως οι όροι της είναι αρνητικοί. Επιλύοντας τις εξισώσεις (62), (64.1) και (64.2) ταυτόχρονα, προκύπτουν:

$$Q_d = - \frac{\xi_d^t \dot{V} + \sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho}}{\xi_n^t - \xi_d^t} \quad (65.1)$$

$$Q_n = \frac{\xi_n^t \dot{V} + \sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho}}{\xi_n^t - \xi_d^t} \quad (65.2)$$

$$P = P_{in} - \frac{\xi_d^t}{\xi_n^t - \xi_d^t} \Delta P - \frac{\rho}{2A^2} \frac{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}}{(\xi_n^t - \xi_d^t)^2} \left[(\xi_n^t + \xi_d^t) \dot{V} + 2 \sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho} \right] \quad (65.3)$$

3. **Μεταβατικό στάδιο ($P_{in} < P_c < P_{out}$):** Το ρευστό εισέρχεται στο θάλαμο της αντλίας από την έξοδο και το στοιχείο λειτουργεί ως ακροφύσιο. Συγχρόνως, το ρευστό εκρέει από την είσοδο, όπου το στοιχείο λειτουργεί, επίσης, ως ακροφύσιο.



$$P_c = P_{out} - \frac{\rho}{2A_d^2} \xi_n^t Q_d^2 \quad (66.1)$$

$$P_c = P_{in} - \frac{\rho}{2A_n^2} \xi_n^t Q_n^2 \quad (66.2)$$

Η εξίσωση (62) συνεχίζει να ισχύει, όμως πλέον: $Q_n \geq 0, Q_d \leq 0$. Από τις εξισώσεις (62), (66.1) και (66.2) έχουμε:

$$Q_d = \frac{\xi_n^t \dot{V} - \sqrt{\frac{2(\xi_n^t + \xi_d^t) A^2 \Delta P}{\rho} - \xi_n^t{}^2 \dot{V}^2}}{2\xi_n^t} \quad (67.1)$$

$$Q_n = \frac{\xi_n^t \dot{V} + \sqrt{\frac{2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P}{\rho} - \xi_n^t{}^2 \dot{V}^2}}{2\xi_n^t} \quad (67.2)$$

$$P = P_{in} + \frac{\xi_n^t}{2\xi_n^t} \Delta P + \frac{\rho}{2A^2} \frac{\xi_n^t \dot{V}}{2\xi_n^t{}^2} \left[2 \sqrt{\frac{4\xi_n^t A^2 \Delta P}{\rho - \xi_n^t{}^2 \dot{V}^2}} \right] \quad (67.3)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ο ρυθμός μεταβολής του όγκου \dot{V} πρέπει να ικανοποιεί $|\dot{V}| \leq \sqrt{\frac{2A^2\Delta P}{\rho\xi_n^t}}$. Με ξ_n^t και ξ_d^t συμβολίζονται οι συντελεστές συνολικής απώλειας για ακροφύσιο και διαχύτη αντίστοιχα. Οι ρυθμοί ροής Q_n και Q_d θεωρούνται θετικοί όταν το ρευστό έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της αντλίας και αρνητικοί όταν εισέρχεται σε αυτή.

Η εξίσωση της δόνησης του διαφράγματος μπορεί να εκφραστεί πλέον ως εξής, όταν $|\dot{V}| > \sqrt{\frac{2A^2\Delta P}{\rho\xi_n^t}}$:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 W + P_1(\dot{V}) + hp_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f_e - P_{in} - \frac{\dot{V}}{|\dot{V}|} \frac{\xi_n^t}{\xi_n^t - \xi_d^t} \Delta P \quad (68.1)$$

διαφορετικά,

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 W + P_2(\dot{V}) + hp_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f_e - P_{in} - \frac{\dot{V}}{2|\dot{V}|} \Delta P \quad (68.2)$$

Όπου τα P_1 και P_2 είναι αντίστοιχα:

$$P_1(\dot{V}) = \frac{\rho}{2A^2} \frac{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}}{(\xi_n^t - \xi_d^t)^2} x \left[(\xi_n^t + \xi_d^t) |\dot{V}| - 2\sqrt{\xi_n^t \xi_d^t \dot{V}^2 + 2(\xi_n^t - \xi_d^t) A^2 \Delta P / \rho} \right] \quad (69)$$

$$P_2(\dot{V}) = \frac{\rho}{A^2} \frac{\dot{V}}{4} \sqrt{\frac{4\xi_n^t A^2 \Delta P}{\rho - (\xi_n^t \dot{V})^2}} \quad (70)$$

Αφού επιλυθεί η εξίσωση (68), η μέση ροή του ρευστού που διακινείται από την αντλία μπορεί να υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης:

$$Q = \frac{1}{T} \int_T Q_d dt \quad (71)$$

,όπου T είναι η περίοδος της δύναμης που εφαρμόζεται στο διάφραγμα.

Για την περίπτωση όπου $P_{in}=0$ και $\Delta P=0$, οι εξισώσεις (68) και (71) απλοποιούνται ως εξής:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 W + \frac{\rho \xi_n^t \xi_d^t |\dot{V}|}{2A^2 (\sqrt{\xi_n^t} + \sqrt{\xi_d^t})^2} \dot{V} + h\rho_m \ddot{W} = f_e \quad (72)$$

$$Q = \frac{1}{T(\sqrt{\xi_n^t} + \sqrt{\xi_d^t})} \int_T (\sqrt{\xi_n^t} H(\dot{V}) + \sqrt{\xi_d^t} H(-\dot{V})) \dot{V} dt \quad (73)$$

Όπου $H(\dot{V})$ είναι η βηματική συνάρτηση, η οποία είναι μονάδα για $\dot{V} > 0$ και μηδέν για $\dot{V} \leq 0$.

Ακόμα και έπειτα από τις παραπάνω ληφθείσες παραδοχές για την περιγραφή της ροής του ρευστού στο εσωτερικό της αντλίας, η παραχθείσα εξίσωση που περιγράφει τη δόνηση του διαφράγματος (68) καθώς και οι εξισώσεις (69) και (70) παραμένουν σημαντικά πολύπλοκες ως προς την επίλυσή τους καθώς πρόκειται για μη γραμμικές εξισώσεις.

Για την περαιτέρω διερεύνηση και εξαγωγή αποτελεσμάτων, στη βιβλιογραφία εφαρμόζονται επιπλέον προσεγγιστικές μέθοδοι όπου επί παραδείγματι η δύναμη που ασκείται στο διάφραγμα θεωρείται αρμονική (δηλαδή η συχνότητά της είναι μικρότερη ή ίση με την πρώτη αρμονική συχνότητα του διαφράγματος, ενώ επίσης, η μεμβράνη θεωρείται τετράγωνου σχήματος ($a=b$) και πακτωμένη στις τέσσερις πλευρές της. Για τη συγκεκριμένη μεμβράνη, τα σχήματα κανονικής ταλάντωσης είναι ορθογωνικά μεταξύ τους κι επομένως η μετατόπιση W μπορεί να αναπτυχθεί ως εξής:

$$W = \sum_j \Phi_{j(x,y)} \eta_j(t) \quad (74)$$

,όπου $\eta_j(t)$ είναι η γενικευμένη συντεταγμένη και $\Phi_{j(x,y)}$ η εξίσωση σχήματος κανονικής ταλάντωσης, που ανταποκρίνεται στην j φυσική συχνότητα (ω_j). Δηλαδή η $\Phi_{j(x,y)}$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{E}{12\rho_m(1-\mu^2)} \nabla^4 \Phi_{j(x,y)} = \omega_j^2 \Phi_{j(x,y)} \quad (75)$$

Γενικά οι πρώτοι όροι της εξίσωσης (74) επικρατούν στη συμπεριφορά, οπότε οι τέσσερις πρώτοι χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη ανάλυση. Η εξίσωση (72) γράφεται προσεγγιστικά ως εξής:

$$\sum_{j=1}^4 \omega_j^2 \Phi_j \eta_j + \frac{\rho \xi_n^t \xi_d^t |\dot{V}|}{2\rho_m h A^2 \left(\sqrt{\xi_n^t} + \sqrt{\xi_d^t} \right)^2} \dot{V} + \sum_{j=1}^4 \Phi_j \ddot{\eta}_j = \frac{f_e}{h\rho_m} \sin(\omega t) \quad (76)$$

Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά της κατανομής των εξισώσεων κανονικής ταλάντωσης για τετράγωνη πλάκα, ισχύει:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (\Phi_j)_{j=2,3,4} dx dy = 0 \quad (77)$$

Επομένως, από την εξίσωση (61) προκύπτει:

$$\dot{V} = \dot{\eta}_1 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \Phi_1 dx dy = \dot{\eta}_1 \tilde{V} \quad (78)$$

Αντικαθιστώντας την (78) στην (76) και εφαρμόζοντας την ορθογωνικότητα της $\Phi_j(x,y)$, η εξίσωση (76) γίνεται:

$$\ddot{\eta}_1 + \beta |\dot{\eta}_1| \dot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = \omega_1^2 F \sin(\omega t) \quad (79)$$

,και

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0, \quad j = 2,3,4 \quad (80)$$

,όπου

$$\beta = \frac{\alpha^2 \tilde{V} \xi_n^t \xi_d^t}{2A^2 h \left(\sqrt{\xi_n^t} + \sqrt{\xi_d^t} \right)^2} \frac{\rho}{\rho_m} \quad (81)$$

Και

$$F = \frac{f_e a^2}{(h \rho_m \bar{v} \omega_1^2)} \quad (82)$$

Το β στην εξίσωση (81) πρόκειται για αδιάστατη μεταβλητή που αναπαριστά τα αποτελέσματα της σύζευξης ρευστού – μεμβράνης και της δομής των στοιχείων ακροφύσιο/διαχύτης.

Η εξίσωση (79) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\omega^2 \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \beta \omega^2 \left| \frac{d\eta}{d\tau} \right| \frac{d\eta}{d\tau} + \omega_1^2 \eta = \omega_1^2 F \sin \tau \quad (83)$$

,όπου $\tau = \omega t$.

Η συμβολή του κάθε όρου στο αριστερό τμήμα της εξίσωσης (83) εξαρτάται από το λόγο των συντελεστών. Καθώς οι λόγοι αυτοί μεταβάλλονται με τη συχνότητα ενεργοποίησης, ω , και το συντελεστή σύζευξης, β , μεταβάλλεται και η απόκριση δόνησης για δεδομένο πλάτος φορτίου F .

Για την περίπτωση όπου $\omega^2/\beta/\omega_1 < 0.01$, η εξίσωση (83) είναι ασθενώς μη γραμμική. Επομένως, με εφαρμογή της μεθόδου απόκλισης μικρών παραμέτρων, η προσεγγιστική λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$\eta = F \sin \tau - \frac{\omega^2 \beta}{\omega_1^2} F^2 |\cos \tau| \cos \tau \quad (84)$$

Για την περίπτωση όπου $\omega \approx \omega_1$ ή που το β είναι αρκετά μεγάλο, η εξίσωση (83) γίνεται σημαντικά μη γραμμική. Στην περίπτωση αυτή, ο δεύτερος όρος της (83) είναι πολύ μεγαλύτερος των άλλων δύο. Η μέθοδος απόκλισης μικρών παραμέτρων μπορεί ακόμα να εφαρμοστεί και η παράγωγος του η εκφράζεται ως:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \begin{cases} \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{\frac{F}{\beta}} \sqrt{\sin \tau} & 0 \leq \tau < \pi \\ -\frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{\frac{F}{\beta}} \sqrt{-\sin \tau} & \pi \leq \tau < 2\pi \end{cases} \quad (85)$$

Και η προκύπτουσα λύση είναι:

$$\eta = \frac{\omega_1}{\omega} \sqrt{\frac{F}{\beta}} \begin{cases} \int_0^\tau \sqrt{\sin u} du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin u} du & 0 \leq \tau < \pi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin u} du - \int_\pi^\tau \sqrt{-\sin u} du & \pi \leq \tau < 2\pi \end{cases} \quad (86)$$

Η εξίσωση (83) μπορεί να είναι έντονα μη-γραμμική σε βαθμό που η μέθοδος απόκλισης μικρών παραμέτρων να μην μπορεί να εφαρμοστεί, καθώς ο δεύτερος όρος της (ο μη γραμμικός) μπορεί να είναι παρόμοιου μεγέθους με τους άλλους δύο. Στην περίπτωση αυτή, λύση θεωρείται η:

$$\eta = \eta_0 \sin(\tau - \theta) \quad (87)$$

,όπου το πλάτος η_0 και η διαφορά φάσης κατά την οποία υστερεί η απόκριση από τη δύναμη διέγερσης, θ , είναι συναρτήσεις της πρώτης φυσική συχνότητας και της συχνότητας διέγερσης (ω_1 , ω), καθώς και του πλάτους του φορτίου, F , και του συντελεστή σύζευξης, β .

Με τη μέθοδο Galerkin μπορούν να προσδιοριστούν μοναδικά τα η_0 και θ ως:

$$\eta_0 = \frac{F}{\left[0.5 (1-R_\omega^2)^2 + \sqrt{\frac{64F^2 \beta^2 R_\omega^4}{9\pi^2} + 0,25 (1-R_\omega^2)^4} \right]^{1/2}} \quad (88)$$

$$\theta = \arcsin \left[\frac{F}{\sqrt{F^2 + \left((3\pi/16) (1-R_\omega^2)^2 / \beta R_\omega^2 \right)^2 + (3\pi/16) (1-R_\omega^2)^2 / \beta R_\omega^2}} \right] \quad (89)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $V = \tilde{V}\eta(t)$ στην εξίσωση (73) και εφαρμόζοντας την εξίσωση (84), η μέση ογκομετρική ροή διαμέσου της αντλίας είναι:

$$Q = \frac{\sqrt{\xi_n^t} - \sqrt{\xi_d^t}}{\sqrt{\xi_n^t} + \sqrt{\xi_d^t}} \tilde{V} \omega \eta_0 \quad (90)$$

Από την εξίσωση (88) παρατηρούμε πως το πλάτος η_0 είναι συνάρτηση του συντελεστή σύζευξης, β , και η εξάρτηση της μέσης ογκομετρικής ροής από τους συντελεστές απώλειας ξ_n , ξ_d είναι, συνεπώς, αρκετά πολύπλοκη.

Όταν η συχνότητα διέγερσης είναι αρκετά μικρή, η επίδραση του β είναι αμελητέα και η μέση ογκομετρική ροή μπορεί πλέον να εκφραστεί ως:

$$Q \propto \frac{\sqrt{\xi_n^t} - \sqrt{\xi_d^t}}{\sqrt{\xi_n^t} + \sqrt{\xi_d^t}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\xi_n^t}{\xi_d^t}}}{1 + \sqrt{\frac{\xi_n^t}{\xi_d^t}}} \quad (91)$$

Όσο μικρότερος είναι ο λόγος των συντελεστών απωλειών, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η τιμή της μέσης ογκομετρική ροής.

Στην περίπτωση που ισχύει $\omega = \omega_1$:

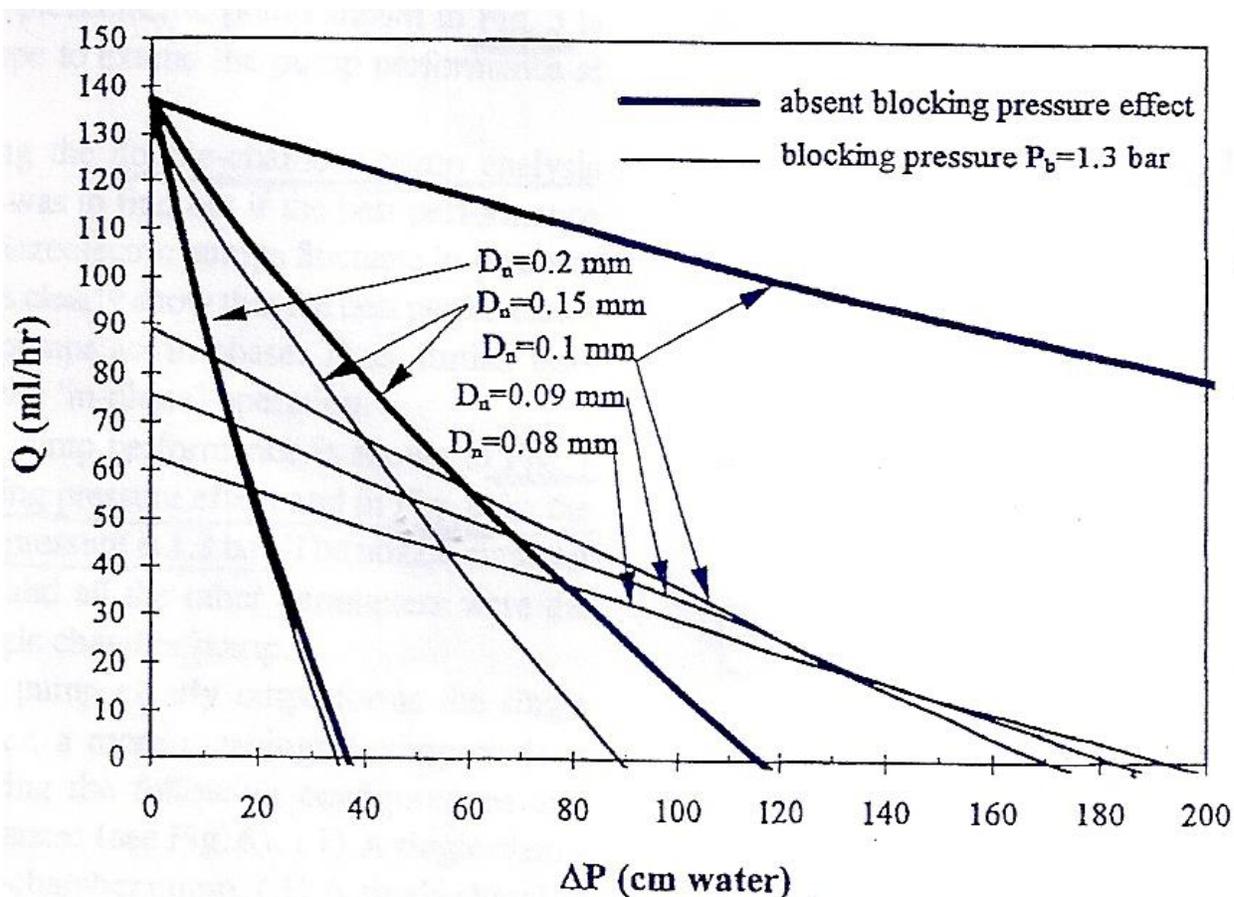
$$Q \propto \frac{\sqrt{\xi_n^t} - \sqrt{\xi_d^t}}{\sqrt{\xi_n^t \xi_d^t}} \quad (92)$$

Η μέση ογκομετρική ροή αυξάνεται με τη μείωση της τιμής του λόγου ξ_d^t / ξ_n^t .

5. Αποτελέσματα και συμπεράσματα των μεθόδων

Εξετάζοντας την αριθμητική λύση που προέκυψε από το μοντέλο συγκεντρωτικής μάζας, εξ.(22), μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα αναφορικά με την επίδραση των σημαντικών σχεδιαστικών παραμέτρων, όπως είναι η διάμετρος των στοιχείων τύπου ακροφύσιο/διαχύτης, το πλάτος της ταλάντωσης και η συχνότητα διέγερσης, στην επιθυμητή μέση ογκομετρική παροχή της μικροαντλίας.

Στη βιβλιογραφία, εφαρμόζοντας την εξίσωση (22) εξετάζεται η επίδραση ακροφυσίων διαφόρων διαμέτρων στο ρυθμό εκροής, ως συνάρτηση της διαφοράς πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου της αντλίας. Για τη διερεύνηση αυτή έχουν υποθεθεί πίεση εισόδου 0.1bar, $\xi_H = 1.0$, $\xi_L = 0.2$, μέγιστη ογκομετρική μετατόπιση $2V_0 = 0.001$ ml, συχνότητα $f = 100$ Hz, με διακινούμενο ρευστό νερό, πυκνότητας $\rho = 1000$ kg/m³. Τα αποτελέσματα για διαμέτρους μεταξύ 0.2 και 0.08 mm παρουσιάζονται στο σχήμα 5.[10]



Σχήμα 5 – Μέσος ρυθμός εκροής. Επίδραση διαμέτρου ακροφυσίου και p_b

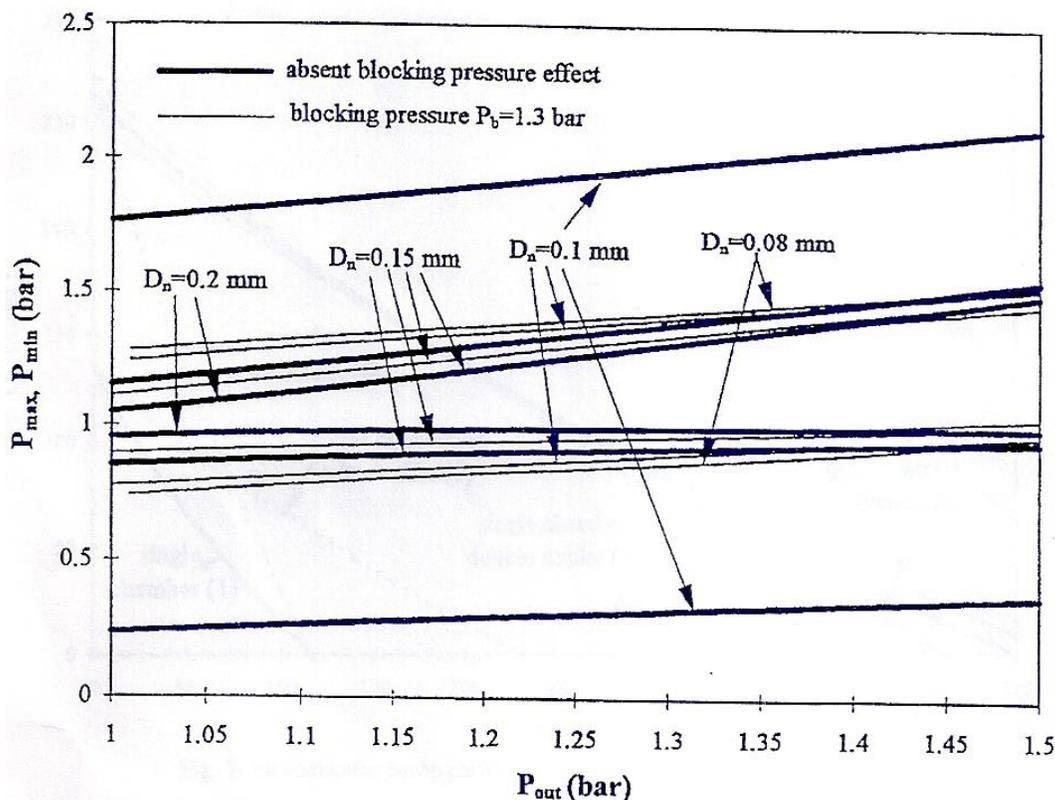
Στην παραπάνω διερεύνηση έχουν εξεταστεί η περίπτωση όπου δεν υπάρχει η αντίθετη πίεση p_b , με την έντονη γραμμή, και η περίπτωση στην οποία η p_b είναι μεγέθους 1.3bar.

Παρατηρείται ότι και στις δύο περιπτώσεις, το ακροφύσιο με τη μεγαλύτερη διάμετρο ($D_n = 0.2\text{mm}$), συμπεριφέρεται ίδια. Ο ρυθμός εκροής μηδενίζεται σε πολύ μικρή διαφορά πίεσης. Για να αυξηθεί η αποτελεσματικότητα της αντλίας σε μεγαλύτερες διαφορές πίεσης απαιτείται η χρήση ακροφυσίου με μικρότερη διάμετρο.

Για στοιχεία διαμέτρου μικρότερης του 0.1mm δεν υπάρχει λύση για την πρώτη περίπτωση. Ο λόγος για αυτό είναι πως καθώς μειώνεται η διάμετρος του ακροφυσίου, αυξάνεται η διακύμανση της πίεσης στο εσωτερικό της αντλίας, με αποτέλεσμα να παρατηρείται αρνητική πίεση για μικρές διαμέτρους.

Στην περίπτωση όπου λαμβάνεται υπόψιν η αντισταθμιστική πίεση p_b , το μοντέλο δίνει, ως αναμενόμεν, κατώτερες επιδόσεις. Όμως, σε αντίθεση με πριν όπου η μείωση της διαμέτρου σήμαινε αύξηση της παραγόμενης πίεσης, πλέον προβλέπεται μείωση του ρυθμού εκροής σε χαμηλή διαφορά πίεσης και αύξησή του σε μεγαλύτερες διαφορές πίεσης καθώς μειώνεται η διάμετρος του ακροφυσίου.

Τέλος, σε αντίθεση με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει p_b , οι μέγιστες και ελάχιστες πιέσεις περιορίζονται μεταξύ της πίεσης εισόδου συν/πλην την p_b , όπως φαίνεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6 – Ελάχιστη και μέγιστη πίεση. Επίδραση διαμέτρου ακροφυσίου και p_b

Αναφορικά με το μη γραμμικό μοντέλο, αν και έχουν αγνοηθεί οι δομικές και γεωμετρικές μη γραμμικότητες, η απόκριση δόνησης της μεμβράνης στην διεγείρουσα δύναμη παραμένει μη γραμμική λόγω του φαινομένου σύζευξης μεμβράνης – ρευστού.

Ακολουθώντας την πορεία επίλυσης της εξίσωσης (83), τα χαρακτηριστικά της δόνησης εξαρτώνται από τρεις παράγοντες: την αδρανειακή κίνηση της μεμβράνης (πρώτος όρος), τη σύζευξη μεμβράνης – ρευστού (δεύτερος όρος) και την ελαστική παραμόρφωση (τρίτος όρος). Καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα διέγερσης, ω , και η παράμετρος σύζευξης, β , η συνεισφορά κάθε όρου μεταβάλλεται καθώς και τα χαρακτηριστικά δόνησης της μεμβράνης.

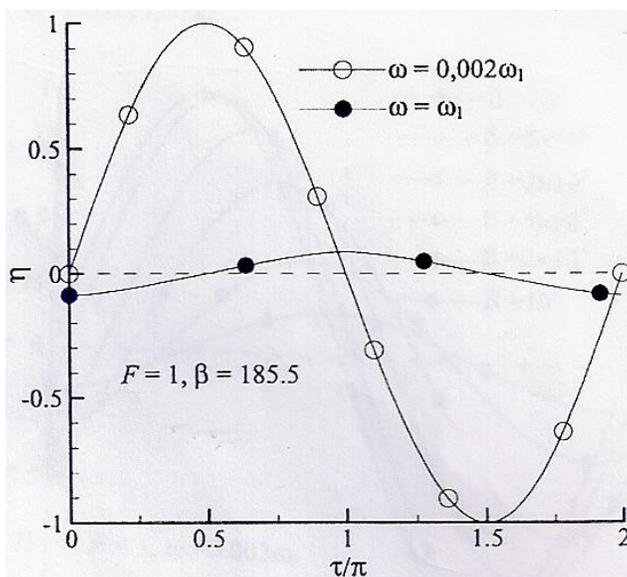
Όταν η συχνότητα διέγερσης είναι πολύ μικρότερη της πρώτης φυσικής συχνότητας ($\omega \ll \omega_1$ ή διαφορετικά $\omega < 0.1\omega_1/\sqrt{\beta}$) η επίδραση της σύζευξης και της δύναμης αδράνειας είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την δύναμη της ελαστικής παραμόρφωσης της μεμβράνης. Επομένως η διεγερτική δύναμη αντισταθμίζεται από τη δύναμη ελαστικής παραμόρφωσης και τα γραμμικά χαρακτηριστικά της δόνησης της μεμβράνης επικρατούν, όπως φαίνεται και από την εξίσωση (84).

Όταν η συχνότητα διέγερσης είναι κοντά στην πρώτη φυσική συχνότητα ($\omega \approx \omega_1$), η παράμετρος σύζευξης, β , είναι σημαντικά μεγάλη και οι άλλοι δύο όροι πολύ μικροί συγκριτικά, με αποτέλεσμα να αγνοούνται. Παρόλο που η μη γραμμικότητα κυριαρχεί σε αυτή την περίπτωση, η δόνηση ως αποτέλεσμα της διέγερσης και του παράγονται σύζευξης λαμβάνει απλή μορφή (εξισώσεις (85) – (86)).

Συνήθως, κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση, το μέγεθος της ταχύτας εξαρτάται από τη συχνότητα διέγερσης ω . Η εξίσωση (85), όμως, δείχνει πως η προκύπτουσα ταχύτητα είναι ανεξάρτητη του ω αλλά ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του λόγου F/β . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου σύζευξης, τόσο μικρότερο είναι το πλάτος της ταχύτητας. Συνεπώς, όταν η συχνότητα διέγερσης είναι πλησίον της πρώτης φυσικής συχνότητας, η παράμετρος β υπαγορεύει τη δόνηση.

Η σύγκριση των δυο παραπάνω περιπτώσεων φαίνεται στο σχήμα 7, όπου έχουν χρησιμοποιηθεί $F = 1$ και $\beta = 185.5$. Φαίνεται πως στην περίπτωση όπου $\omega = 0.002\omega_1$, η εξίσωση απόκρισης είναι σχεδόν ίδια με τη δύναμη διέγερσης, δηλαδή η δόνηση είναι σχεδόν σύγχρονη με τη δύναμη διέγερσης. Στην περίπτωση όπου $\omega = \omega_1$, η απόκριση παρουσιάζει καθυστέρηση φάσης ενός τετάρτου της περιόδου. Αυτό δείχνει πως η μη γραμμικότητα που σχετίζεται με τη σύζευξη μεμβράνης – ρευστού παίζει παρόμοιο ρόλο με τον όρο απόσβεσης στη γραμμική ταλάντωση.

Ακόμα, το πλάτος ταλάντωσης είναι μικρότερο στη δεύτερη περίπτωση, σε αντίθεση με την εξαναγκασμένη γραμμική ταλάντωση, όπου παρατηρείται μέγιστο πλάτος. Συνεπώς παρατηρείται πως η σύζευξη παίζει ενεργό ρόλο στο να αποτρέπει την ταλάντωση της μεμβράνης στην ιδιοσυχνότητά της.[7]



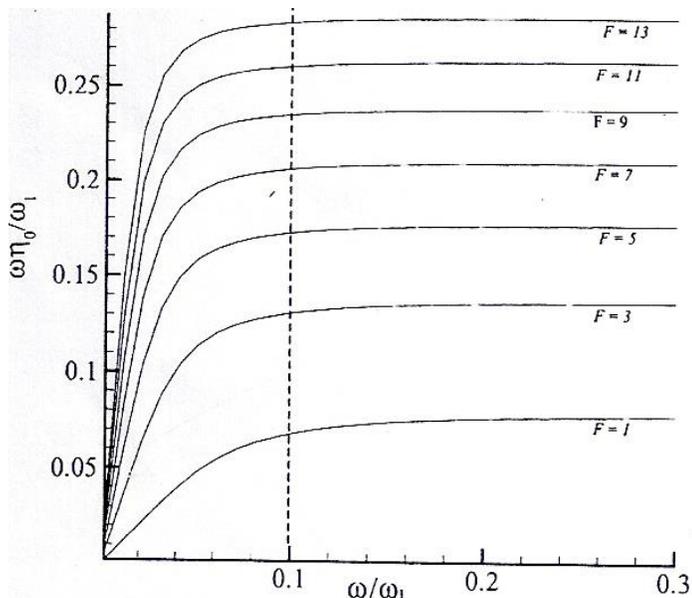
Σχήμα 7 – Σύγκριση απόκρισης για δύο διαφορετικές συχνότητες διέγερσης

Αναφορικά με το ρυθμό εκροής, όπως αυτός προκύπτει από τις εξισώσεις (90) – (92), παρατηρείται πως η αύξηση της μέσης ροής, Q , με τη μείωση της τιμής του λόγου ξ_a^t/ξ_n^t ισχύει για κάθε συχνότητα διέγερσης στο διάστημα έως $\omega \leq \omega_1$. Αυτό το συμπέρασμα είναι λογικό από σκοπιάς ρευστομηχανικής, καθώς για δεδομένο πλάτος και συχνότητα διέγερσης, όσο μικρότερος είναι ο λόγος τόσο μεγαλύτερη ποσότητα ρευστού θα εξέρχεται από την αντλία καθώς μικρότερη ποσότητα θα εισρέει εντός της αντλίας από το διαχύτη στον κύκλο μιας περιόδου. Επομένως είναι σημαντικό ο λόγος ξ_a^t/ξ_n^t να διατηρείται μικρός όταν υπάρχει απαίτηση για μεγάλες τιμές ρυθμού εκροής.

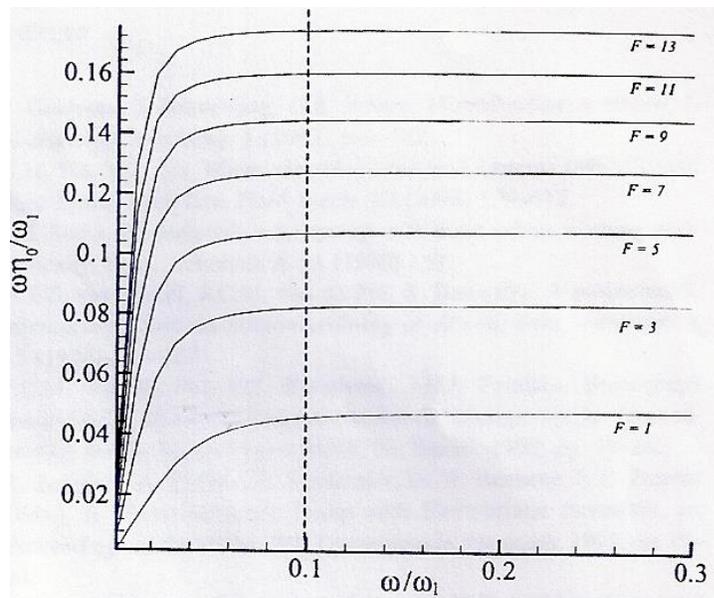
Η παράμετρος σύζευξης, β , επίσης επηρεάζει τη μέση ροή, Q . Η εξίσωση (90) δείχνει πως το Q είναι ανάλογο του πλάτους η_0 το οποίο μειώνεται με την αύξηση της τιμής του β . Συνεπώς για μεγάλες τιμές εκροής το β πρέπει να διατηρείται σε χαμηλές, όσο το δυνατόν, τιμές.

Από την εξίσωση (81) φαίνεται πως ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να αυξηθεί ο λόγος της επιφάνειας διατομής των στοιχείων ακροφύσιο/διαχύτης, A , προς την επιφάνεια της μεμβράνης, a^2 .

Τα παραπάνω συμπεράσματα αφορούσαν δεδομένη τιμή συχνότητας διέγερσης. Όμως η διακύμανση της μέσης ροής με τη μεταβολή του πλάτους και της συχνότητας διέγερσης μπορεί να είναι πολύ μεγάλη. Ενώ το πλάτος, η_0 , μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας, ω , ο όρος $\omega\eta_0$, του οποίου είναι ανάλογη η μέση ροή, αυξάνει προς μία κατεύθυνση για κάθε τιμή του φορτίου F , για δεδομένο β . Στα σχήματα 8 και 9 παρουσιάζεται τη μεταβολή αυτή για $\beta = 185.5$ και $\beta = 500$.



Σχήμα 8 – Μεταβολή μέσης εκροής με τη δύναμη διέγερσης. $\beta=185.5$



Σχήμα 9 – Μεταβολή μέσης εκροής με τη δύναμη διέγερσης. $\beta=500$

Παρατηρείται πως για κάθε δύναμη διέγερσης οι καμπύλες είναι σχεδόν οριζόντιες για $\frac{\omega}{\omega_1} \geq 0.15$. Αυτό σημαίνει πως η αύξηση της μέσης εκροής για μεγάλες μεταβολές του ω είναι πολύ μικρή στην περιοχή αυτή.

Επομένως, μια μικροαντλία που λειτουργεί σε τιμή $\omega \gg 0.15\omega_1$ θα έχει σημαντικές απώλειες ενέργειας με ουσιαστικά μηδαμινό όφελος στη μέση εκροή. Από την άλλη πλευρά, στο τμήμα $\omega/\omega_1 < 0.08$, οι καμπύλες είναι αρκετά απότομες, ώστε με μείωση της συχνότητας διέγερσης παρατηρείται σημαντική πτώση της μέσης εκροής. Συνεπώς θα πρέπει να αποφεύγεται λειτουργία στην περιοχή αυτή.

Συμπερασματικά, υπάρχει μια βέλτιστη περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας για δεδομένη τιμή της παραμέτρου σύζευξης, β , η οποία είναι δυνατόν να οριστεί και αναλυτικά, μέσω της εξίσωσης (88).

Η εξίσωση αυτή, για δεδομένη τιμή F και β , ο όρος (ω_0/ω) παίρνει τη μέγιστη τιμή του $\sqrt{3\pi F/8\beta}$ στη συχνότητα $\omega = \omega_1$. Εάν ορίσουμε τη συχνότητα $\omega(\alpha)$ ως αυτή που ανταποκρίνεται στο $Q = \alpha Q_{\max}$, ή αλλιώς $(\omega_0/\omega_1) = \alpha\sqrt{3\pi F/8\beta}$, τότε:

$$\frac{\omega(\alpha)}{\omega_1} = \sqrt{1 - \frac{4F\beta}{3\pi} \left(\sqrt{\gamma^2 + \frac{3\pi}{2F\beta}} \gamma - \gamma \right)} \quad (93)$$

Όπου $\gamma = \alpha^2 - \alpha^2$. Η βέλτιστη συχνότητα λειτουργίας μπορεί να βρεθεί αφού οριστεί πρώτα το α . [7]

6. Επίλογος

Η διαδικασία μοντελοποίησης μιας μικροαντλίας αποτελούμενης από πιεζοηλεκτρικά παρακινούμενο διάφραγμα και στοιχεία ακροφυσίου/διαχύτη περιλαμβάνει την ανάλυση πεδίων ροής, τόσο μέσα στο θάλαμο της αντλίας όσο και στα στοιχεία εισόδου και εξόδου, καθώς και ηλεκτρομηχανική ανάλυση για το τμήμα του πιεζοηλεκτρικού υποκινητή. Τα τμήματα αυτά είναι φυσικά συζευγμένα ως προς τη λειτουργία τους και η επί μέρους μελέτη τους μπορεί να είναι χρήσιμη για την απόκτηση μιας γενικής εικόνας του προβλήματος, είτε για την προσπάθεια βελτιστοποίησης των επιδόσεών τους.

Καθώς όμως περιορίζονται οι παραδοχές που λαμβάνονται, στοχεύοντας στην ολοένα και ακριβέστερη περιγραφή του προβλήματος, τα συστήματα εξισώσεων που απαιτείται να λυθούν είναι πολύπλοκα και απαιτείται σημαντική υπολογιστική ισχύς για την πλήρη μοντελοποίηση αυτών, με χρήση προγραμμάτων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

Με τις παραπάνω μεθόδους προσέγγισης καθίσταται δυνατή η μελέτη της μεταξύ τους εξάρτησης των σχεδιαστικών παραμέτρων, όπως είναι οι συντελεστές απωλειών των στοιχείων τύπου ακροφύσιο/διαχύτης, το μέγεθος, σχήμα και υλικό της μεμβράνης, η συχνότητα διέγερσης, τα τεχνικά χαρακτηριστικά των χρησιμοποιούμενων υλικών και το ηλεκτρικό δυναμικό του πιεζοηλεκτρικού υποκινητή και άλλα.

Αν και προσεγγιστικές, οι παραπάνω αναλύσεις είναι ικανές να δώσουν σημαντικές σχεδιαστικές πληροφορίες οι οποίες είναι μάλιστα σε συμφωνία με πειραματικά στοιχεία και στοιχεία προσομοιώσεων, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα κατανόησης και αντιμετώπισης του σχεδιασμού μιας τέτοιας μικροαντλίας.

Οι πληροφορίες που λαμβάνονται, συνεπώς, είναι σημαντικές οδηγοί τόσο στην περαιτέρω διερεύνηση του συγκεκριμένου προβλήματος σχεδιασμού, όσο και για την επέκταση αυτού, όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση χρήσης πολλαπλών μικροαντλιών σε σειρά ή παράλληλη σύνδεση είτε τη διερεύνηση της επίπτωσης ενός μη νευτωνικού ρευστού ως ρευστό άντλησης στις σχεδιαστικές παραμέτρους.

Βιβλιογραφία

- [1] Laser D. J. and Santiago J. G. , “A review of Micropumps”, J. Micromech. Microeng. 14 (2004), R35- R64
- [2] Dobrucki A. B. and Pruchnicki P. , “Theory of piezoelectric axisymmetric bimorph”, Sensors and Actuators A 58 (1997), 203 - 212
- [3] Torsten Gerlach, “Microdiffusers as dynamic passive valves for micropump applications”, Sensors and Actuators A 69 (1998), 181 - 191
- [4] Anders Olsson, Stemme G. and Stemme E. , “A numerical design study of the valveless diffuser pump using a lumped-mass model”, J. Micromech. Microeng. 9 (1999), 34 - 44
- [5] Richter M., Linnemann R. and Woias P., “Robust design of gas and liquid micropumps”, Sensors and Actuators A 68 (1998), 480 - 486
- [6] Torsten Gerlach and Wurmus Helmut, “Working principle and performance of the dynamic micropump”, Sensors and Actuators A 50 (1995), 135 - 140
- [7] Pan L.S., Ng T.Y., Liu G.R., Lam K.Y., Jiang T.Y., “Analytical solutions for the dynamic analysis of a valveless micropump - a fluid-membrane coupling study”, Sensors and Actuators A 93 (2001), 173 - 181
- [8] Shifeng Li , Shaochen Chen, “Analytical analysis of a circular PZT actuator for valveless micropumps”, Sensors and Actuators A 104 (2003), 151 - 161
- [9] Yeng-Yung Tsui, Shiue-Lin Lu, “Evaluation of the performance of a valveless micropump by CFD and lumped-system analyses”, Sensors and Actuators A 148 (2008), 138 - 148
- [10] Amos Ullmann, “The piezoelectric valve-less pump - performance enhancement analysis”, Sensors and Actuators A 69 (1998), 97 - 105

- [11] Nam-Trung Nguyen, Xiaoyang Huang, "Miniature valveless pumps based on printed circuit board technique", *Sensors and Actuators A* 88 (2001), 104 - 111
- [12] Herz M., Horsch D., Wachutka G., Lueth T. C., Richter M., "Design of ideal circular bending actuators for high performance micropumps", *Sensors and Actuators A* 163 (2010), 231 - 239
- [13] Fan B., Song G. and Hussain F., "Simulation of piezoelectrically actuated valveless micropump", *Smart Mater. Struct.* 14 (2005), 400 - 405
- [14] Samuel I. En Lin, "The theoretical and experimental studies of a circular multi-layered annular piezoelectric actuator", *Sensors and Actuators A* 165 (2011), 280 - 287
- [15] Yamahata C., Vendevever C., Lacharme F., Izewska P., Vogel H., Freitag R., Gijs M.A.M., "Pumping of mammalian cells with a nozzle-diffuser micropump", *Lab Chip* 5 (2005), 1083 - 1088
- [16] Cui Q., Liu C., Zha X. F., "Modeling and numerical analysis of a circular piezoelectric actuator for valveless micropumps", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 19 (2008), 1195 - 1205