Θετική Επέκταση Γραμμικών Τελεστών

Βασίλειος Χρ. Φραγκούλης

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων: Ιωάννης Πολυράκης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες
Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα, 2011

Θετική Επέκταση Γραμμικών Τελεστών

Βασίλειος Χρ. Φραγκούλης

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων: Ιωάννης Πολυράκης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες
Τομέας Μαθηματικών
Αθήνα, 2011

Πρόλογος

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας, είναι η μελέτη και παρουσίαση του προβλήματος της θετικής επέκτασης ενός γραμμικού τελεστή. Μιλώντας για θετική επέκταση εννοούμε γραμμική επέκταση ενός θετικού τελεστή από υπόχωρο διατεταγμένου διανυσματικού χώρου, σε ολόκληρο τον χώρο, διατηρώντας παράλληλα την θετικότητα.

Το πιο πάνω πρόβλημα δεν είναι κάτι τετριμμένο και είναι διαφορετικό από αυτό της γραμμικής επέκτασης χωρίς να μας ενδιαφέρει η θετικότητα. Όπως είναι φυσικό, κυρίαρχο ρόλο στην εργασία παίζει η έννοια των θετικών τελεστών, όπως και αυτές των διατεταγμένων διανυσματικών χώρων και των γραμμικών συνδέσμων (vector lattices ή χώρων Riesz).

Εφαλτήριο του λογισμού που αφορά τις θετικές επεκτάσεις γραμμικών τελεστών, αποτελεί το Θεώρημα επέκτασης του L. V. Kantorovich (ή Θεώρημα Hahn-Banach-Kantorovich), στο οποίο επαληθεύοντας την προσθετικότητα στον θετικό κώνο, δοθέντος θετικού τελεστή, καταλήγουμε σε θετική επέκταση.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, ύστερα από τις εισαγωγικές έννοιες (βλ. [3], [12], [13], [16]), δουλεύοντας σε μερικά διατεταγμένους διανυσματικούς χώρους, θα παρουσιάσουμε το προαναφερθέν Θεώρημα του Kantorovich και κάποια από τα αρχικά αποτελέσματα της περιοχής, καταλήγοντας σε ένα των S. Mazur και W. Orlicz και μερικές πολύ σημαντικές εφαρμογές του (βλ. [6]).

Έπειτα, θα συνεχίσουμε την παρουσίασή μας σε Banach lattices, βλέποντας το Θεώρημα των Abramovich και Wickstead (βλ. [1]) και διάφορα άλλα Θεωρήματα θετικής επέκτασης, τύπου Hahn-Banach-Kantorovich (βλ. [9], [10], [6], [7]).

Τέλος, θα κλείσουμε παρουσιάζοντας ένα αποτελέσματα επέκτασης σε lattice subspaces (βλ. [14], [15]).

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Ιωάννη Πολυράκη, αφ΄ ενός για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου το θέμα της παρούσης διπλωματικής εργασίας και αφ΄ ετέρου για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την προετοιμασία της. Ευχαριστώ επίσης τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Σ. Καρανάσιο και τον Επίκ. Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Α. Αρβανιτάκη, που δέχθηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή εξεταστική επιτροπή. Τέλος, ευχαριστώ τον υποψήφιο Διδάκτορα του Ε.Μ.Π. κ. Φοίβο Ξανθό για την επίσης πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Χώροι με διάταξη και χώροι Riesz

Ένας **μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος** E, είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μία **σχέση διάταξης** $\geq$ (δηλαδή $\geq$ είναι μία ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική διμερής σχέση στον E), η οποία είναι συμβατή με την αλγεβρική δομή του E, με την έννοια ότι ικανοποιεί τα εξής δύο αξιώματα :

(1) αν $x \geq y$, τότε $x + z \geq y + z$, για κάθε $z \in E$.
(2) αν $x \geq y$, τότε $\alpha x \geq \alpha y$, για κάθε $\alpha \geq 0$.

Έστω E ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Για δύο στοιχεία x, y του E γράφουμε $x \geq y$ ή ισοδύναμα $x \leq y$. Ένα $x \in E$ θα λέμε ότι είναι **θετικό** όταν $x \geq 0$. Το σύνολο όλων των θετικών διανυσμάτων του E συμβολίζεται με $E^+ = \{x \in E \,:\, x \geq 0\}$ και καλείται **θετικός κώνος** του E. Στο επόμενο Θεώρημα φαίνονται κάποιες αρχικές ιδιότητες των θετικών κώνων.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω E μερικά διατεταγμένος χώρος και E^+ ο θετικός του κώνος. Ισχύουν τα εξής :*
(i) $x, y \in E^+ \Rightarrow x + y \in E^+$.
(ii) $x \in E^+ \Rightarrow \alpha x \in E^+ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+$.
(iii) $x, -x \in E^+ \Rightarrow x = 0$.
Αντιστρόφως, έστω E^+ υποσύνολο του πραγματικού διανυσματικού χώρου E, που ικανοποιεί τα (i),(ii) και (iii). Αν ο E εφοδιαστεί με την διάταξη $\geq$ που ορίζεται ως : $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in E^+$, τότε είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος, έχοντας ως θετικό κώνο (ως προς την $\geq$) το E^+.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω E και F μερικά διατεταγμένοι χώροι και $T : E \longmapsto F$ ένας γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται **θετικός** αν για κάθε $x \in E^+$, έχουμε ότι $T(x) \in F^+$. Έναν θετικό T συμβολίζουμε ως $T \geq 0$ ή $0 \leq T$.*

Από τον πιο πάνω ορισμό βλέπουμε πως ένας γραμμικός τελεστής $T : E \longmapsto F$, μεταξύ μερικά διατεταγμένων χώρων είναι θετικός, αν και μόνον αν $T(E^+) \subseteq F^+$ (αν και μόνον αν $x \leq y$, συνεπάγεται $Tx \leq Ty$).

Έστω E μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Ο E καλείται **χώρος Riesz** ή **γραμμικός σύνδεσμος** (**vector lattice** ή απλώς **lattice**) αν ισχύει επιπλέον ότι για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $x, y \in E$, τόσο το supremum όσο και το infimum του συνόλου $\{x, y\}$ υπάρχουν στον E. Τις δύο τελευταίες ποσότητες θα συμβολίζουμε με $x \vee y$ και $x \wedge y$ αντίστοιχα.

Ένας υπόχωρος F του E καλείται **υπόχωρος Riesz** (**vector sublattice**) αν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x, y \in F$ ισχύει ότι $x \vee y, x \wedge y \in F$ (τα sup και inf λαμβάνονται στον E και προφανώς υπάρχουν καθώς ο E είναι χώρος Riesz). Προφανώς ο F με την επαγώμενη από τον E διατακτική δομή είναι χώρος Riesz.

(Οι χώροι Riesz κατά τα πρώτα στάδια ανάπτυξής τους καλούνταν **K-lineals** (Ρωσική βιβλιογραφία) ή και **semi-ordered linear spaces** (Ιαπωνική βιβλιογραφία). Ο όρος **χώρος Riesz** ή **vector lattice**, χρησιμοποιήθηκε αρχικά στις σημειώσεις των Bourbaki και είναι αυτός που επικράτησε.)

Έστω x ένα στοιχείο του χώρου Riesz E. Ορίζουμε τις ποσότητες,
$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad$ και $\quad |x| = x \vee (-x)$.
Το στοιχείο x^+ καλείται **θετικό μέρος**, το x^- **αρνητικό μέρος** και το $|x|$ **απόλυτη τιμή** του x.

Ακολουθούν κάποιες χρήσιμες ταυτότητες για τους χώρους Riesz, χωρίς όλες τις αποδείξεις (μόνο στοιχειώδεις - για τις υπόλοιπες δες [3], [12]).

Θεώρημα 1.1.3. *Έστω x, y και z στοιχεία ενός χώρου Riesz. Τότε :*
(1) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *και* $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$.
(2) $x + y = x \wedge y + x \vee y$.
(3) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ *και* $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$.
(4) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ *και* $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$.

Λήμμα 1.1.4. *Έστω $x, x_1, x_2 \dots, x_n$ θετικά στοιχεία ενός χώρου Riesz. Ισχύει ότι*

$$x \wedge (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 + \ldots + x \wedge x_n.$$

Θεώρημα 1.1.5. *Αν x ένα τυχαίο διάνυσμα ενός χώρου Riesz E, τότε ισχύουν τα εξής :*
(1) $x = x^+ - x^-$.
(2) $|x| = x^+ + x^-$.
(3) $x^+ \wedge x^- = 0$.
Επιπλέον, η διάσπαση στο (1) ικανοποεί τα επόμενα.
(*a*) *Αν* $x = y - z$ *με* $y, z \in E^+$, *τότε* $y \geq x^+$ *και* $z \geq x^-$.
(*b*) *Αν* $x = y - z$ *με* $y \wedge z = 0$, *τότε* $y = x^+$ *και* $z = x^-$.

Λήμμα 1.1.6. *Αν $T : E \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής μεταξύ δύο χώρων Riesz, τότε για κάθε $x \in E$ έχουμε*

$$|T(x)| \leq T|x|.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in E$, ισχύει $\pm x \leq |x|$ και από θετικότητα του T, $\pm Tx \leq T|x|$, πράγμα ισοδύναμο με το ζητούμενο $|Tx| \leq T|x|$. □

Θεώρημα 1.1.7. *Έστω x και y τυχαία στοιχεία ενός χώρου Riesz. Ισχύουν τα επόμενα :*
(1) $x = (x - y)^+ + x \wedge y$.
(2) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *και* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
(3) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.
(4) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$.
(5) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$.
(6) $|x + y| \wedge |x - y| = ||x| - |y||$.
(7) $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$.

Απόδειξη. (1) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.3,

$$\begin{aligned} x &= x \vee y - y + x \wedge y = (x - y) \vee (y - y) + x \wedge y \\ &= (x - y) \vee 0 + x \wedge y = (x - y)^+ + x \wedge y. \end{aligned}$$

(2) Για την πρώτη ταυτότητα έχουμε,

$$\begin{aligned} x + y + |x - y| &= x + y + (x - y) \vee (y - x) \\ &= [(x + y) + (x - y)] \vee [(x + y) + (y - x)] \\ &= (2x) \vee (2y) = 2(x \wedge y). \end{aligned}$$

(3) Άμεσο από (1) και (2).
Όμοια και τα υπόλοιπα. □

Παρατήρηση 1.1.8. *Από το (2) του προηγούμενου Θεωρήματος, προκύπτει ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος E είναι χώρος Riesz αν, και μόνον αν για κάθε διάνυσμα $x \in E$, υπάρχει η απόλυτη τιμή $|x| = x \vee (-x)$. Πράγματι, έστω ότι για κάθε $z \in E$, υπάρχει $|z|$ και έστω $x, y \in E$. Τότε $(x+y), (x-y) \in E \Rightarrow |x+y|, |x-y| \in E$ και από το (2) έχουμε το ζητούμενο. Το ορθό είναι προφανές.*

Ορισμός 1.1.9. *Έστω E χώρος Riesz και A ένα υποσύνολό του. Λέμε ότι το A είναι* ***solid*** *υποσύνολο του E, αν για $|x| \leq |y|$ με $y \in A$, συνεπάγεται ότι $x \in A$. Ένας* ***solid υπόχωρος*** *ενός χώρου Riesz καλείται* ***ideal****.*

Έστω E χώρος Riesz και A μη κενό υποσύνολό του. Το σύνολο όλων των υποχώρων Riesz που περιέχουν το A είναι μη κενό (περιέχει τον E). Παίρνοντας τη τομή των στοιχείων αυτού του συνόλου, βρίσκουμε τον μικρότερο υπόχωρο Riesz που περιέχει το A. Όμοια βρίσκουμε και το μικρότερο ideal που περιέχει το A.

Ο μικρότερος υπόχωρος Riesz (αντ. ideal) που περιέχει δοθέν μη κενό υποσύνολο A του E, καλείται υπόχωρος Riesz (αντ. ideal) που παράγεται από το A. Αν το A είναι μονοσύνολο, ο παραγώμενος υπόχωρος Riesz (αντ. ideal) καλείται principal υπόχωρος Riesz (αντ. principal ideal). Για τα ideals συγκεκριμένα, έχουμε αυστηρή περιγραφή ενός ideal που παράγεται από το A. Αν I_A είναι το τελευταίο, τότε

$$I_A = \left\{ x \in E \ : \ \exists \ y_1, \ldots, y_n \in A, \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N} \ \text{με} \ |x| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i y_i| \right\}.$$

Από τον τύπο προκύπτει ότι το principal ideal που παράγεται από στοιχείο $x \in E$, είναι το

$$I_{\{x\}} = I_x = \{ y \in E \ : \ \exists \ a \in \mathbb{R} \ \text{με} \ |y| \leq |ax| \}.$$

Τέλος, δύο στοιχεία x και y ενός χώρου Riesz καλούνται ξένα μεταξύ τους (συμβολίζουμε $x \perp y$) όταν $|x| \wedge |y| = 0$. Σύμφωνα με το (5) του Θεωρήματος 1.1.7, έχουμε ότι

$$x \perp y \ \text{αν και μόνον αν} \ |x+y| = |x-y|.$$

Θεωρώντας υποσύνολα, θα λέμε ότι δύο υποσύνολα A, B ενός χώρου Riesz είναι μεταξύ τους ξένα (συμβολίζουμε $A \perp B$) αν, και μόνον αν $a \perp b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Τέλος αν A μη κενό υποσύνολο ενός χώρου Riesz, το ορθογώνιο συμπλήρωμα A^d του A, ορίζεται ως $A^d = \{x \in E \ : \ x \perp y, \ \forall \ y \in A\}$. Γράφουμε A^{dd} για το $(A^d)^d$ κ.ο.κ. Ισχύει ότι, $A \cap A^d = \{0\}$.

1.2 Ανισότητες και Distributive Laws σε χώρους Riesz

Θεώρημα 1.2.1. *(The Infinite Distributive Law). Έστω A μη κενό υποσύνολο ενός χώρου Riesz E. Αν υπάρχει το $supA$, τότε για κάθε $x \in E$, υπάρχει και το supremum του συνόλου $x \wedge A$ και ισχύει*

$$sup(x \wedge A) = x \wedge supA.$$

Όμοια αν υπάρχει το $infA$, τότε για κάθε $x \in E$ υπάρχει και το $inf(x \vee A)$ και ισχύει

$$inf(x \vee A) = x \vee infA.$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει το $supA$ και θέτουμε $y = supA$. Επιλέγουμε $x \in E$. Για κάθε $a \in A$, έχουμε $x \wedge a \leq x \wedge y$. Δηλαδή το $x \wedge y$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου $x \wedge A$. Έστω προς άτοπο $z \in E$ τέτοιο, ώστε $x \wedge a \leq z$, για κάθε $a \in A$. Έχουμε ότι $a = x \wedge a + x \vee a - x \leq z + x \vee y - x$, για κάθε $a \in A$, από όπου και $y \leq z + x \vee y - x$. Συνεπώς, $x \wedge y = x + y - x \vee y \leq z$. Επομένως υπάρχει το $sup(x \wedge A)$ και ισούται με $x \wedge supA$. Όμοια και $inf(x \vee A) = x \vee infA$. □

Πόρισμα 1.2.2. *(Finite Distributive law). Έστω χώρος Riesz E και $x, y, z \in E$. Τότε,*

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge z &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad \text{και} \\ (x \wedge y) \vee z &= (x \vee z) \wedge (y \vee z). \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2.3. *Για τυχαία στοιχεία x, y και z ενός χώρου Riesz, ισχύουν τα επόμενα*
(1) $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$ *και* $(x+y)^- \leq x^- + y^-$.
(2) $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$ *(τριγωνική ανισότητα).*
(3) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$ *και* $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x-y|$ *(**ανισότητες Birkhoff**).*
(4) $|x^+ - y^+| \leq |x-y|$ *και* $|x^- - y^-| \leq |x-y|$.

Απόδειξη. (1) Ισχύει ότι $x^+ + y^+ \geq x + y$ και $x^+ + y^+ \geq 0$. Συνεπώς, $x^+ + y^+ \geq (x+y) \vee 0 = (x+y)^+$. Επίσης, $x^- + y^- = (-x)^+ + (-y)^+ \geq (-x-y)^+ = (x+y)^-$.
(2) Προφανώς $x + y \leq |x| + |y|$ και $-x - y \leq |x| + |y|$. Άρα, $|x+y| = (x+y) \wedge (-x-y) \leq |x| + |y|$.

Από την ανισότητα $|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |y|$, έχουμε $|x| - |y| \leq |x+y|$. Όμοια και $|y| - |x| \leq |x+y|$ και άρα $||x| - |y|| \leq |x+y|$.
(3) Έχουμε,

$$\begin{aligned} x \vee z - y \vee z &= [(x-z) \vee 0 + z] - [(y-z) \vee 0 + z] \\ &= (x-z)^+ - (y-z)^+ \\ &= [(x-y) + (y-z)]^+ - (y-z)^+ \\ &\leq [(x-y)^+ + (y-z)^+] - (y-z)^+ \\ &= (x-y)^+ \leq |x-y|. \end{aligned}$$

Όμοια, $y \vee z - x \vee z \leq |x-y|$ και επομένως $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$.
(4) Από ανισότητες Birkhoff,

$$|x^+ - y^+| = |x \vee 0 - y \vee 0| \leq |x-y|$$

και

$$|x^- - y^-| = |(-x) \vee 0 - (-y) \vee 0| \leq |-x+y| = |x-y|.$$

□

1.3 Η Αρχιμήδειος ιδιότητα και το Θεώρημα Riesz-Kantorovich

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε σε πολλά από τα επόμενα αποτελέσματα είναι η **Αρχιμήδειος ιδιότητα**, η οποία (διατυπωμένη στο $\mathbb{R}$) μας λέει ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, η ακολουθία (nx) δεν είναι άνω φραγμένη (ισοδύναμα, αν $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $y \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $nx \leq y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x \leq 0$). Υποκινούμενοι από τα προηγούμενα, θα λέμε ότι ένας χώρος Riesz E είναι **Αρχιμήδειος**, αν $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ για κάθε $x \in E^+$.

Παρατήρηση 1.3.1. *Ο E είναι Αρχιμήδειος αν, και μόνον αν για κάθε $x, y \in E^+$ τέτοια ώστε $nx \leq y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $x = 0$.*

Πράγματι, αν E Αρχιμήδειος και $0 \leq nx \leq y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $0 \leq x \leq \frac{1}{n}y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπώς $x = 0$. Αντίστροφα, έστω ένα τυχαίο $y_0 \in E^+$. Θεωρούμε την ακολουθία $(\frac{1}{n}y_0 \ : \ n = 1, 2, \ldots)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε κάτω φράγμα z της ακολουθίας, ισχύει ότι $z \leq 0$ (από όπου παίρνουμε ότι 0 είναι το infimum της ακολουθίας). Παρατηρούμε ότι το $v = z \vee 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας, επομένως $0 \leq nv \leq y_0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$). Συνεπώς $v = 0 \ \Leftrightarrow \ z \vee 0 = 0 \ \Rightarrow \ z \leq 0$.

Το επόμενο Θεώρημα του L. V. Kantorovich, θεωρείται η αφετηρία της μελέτης των θετικών τελεστών. Η σημαντικότητά του έγκειται στο ότι δείχνοντας πως ένας τελεστής $T : E^+ \longmapsto F^+$, όπου E και F είναι χώροι Riesz, είναι προσθετικός στον E^+ έχουμε ισοδύναμα ότι ο T είναι περιορισμός ενός (μοναδικού) θετικού τελεστή από τον E στον F. Ακολουθεί το Θεώρημα χωρίς την απόδειξη (βλ. [3], σελ. 9).

Θεώρημα 1.3.2. *(Kantorovich). Έστω E χώρος Riesz και F Αρχιμήδειος χώρος Riesz. Έστω επίσης ότι $T : E^+ \longmapsto F^+$ είναι ένας προσθετικός τελεστής. Τότε ο T επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε θετικό τελεστή από τον E στον F. Ο τελεστής της επέκτασης (τον οποίο συμβολίζουμε ξανά με T), δίνεται ως*

$$T(x) = T(x^+) - T(x^-),$$

για κάθε $x \in E$.

Παρατήρηση 1.3.3. *Από το Θεώρημα 1.3.2 προκύπτει πως ένας θετικός τελεστής προσδιορίζεται πλήρως από την δράση του (προσθετικότητα) στον θετικό κώνο του πεδίου ορισμού του.*

Εφ' εξής, θα συμβολίζουμε με $L(E,F)$ τον διανυσματικό χώρο όλων των γραμμικών τελεστών από το E στο F. Ο $L(E,F)$ εφοδιασμένος με την διάταξη $\geq$, για την οποία $T \geq S$, αν και μόνον αν $T-S$ είναι θετικός τελεστής (δηλαδή $T(x) \geq S(x)$, για κάθε $x \in E^+$), είναι ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματκός χώρος.

Έστω E χώρος Riesz και $x, y \in E$ τέτοια ώστε $x \leq y$. Ορίζουμε ως **διατεταγμένο διάστημα** (**order interval**) των x, y, το σύνολο

$$[x,y] = \{z \in E \ : \ x \leq z \leq y\}.$$

Ένα υποσύνολο A του E καλείται **άνω φραγμένο**, όταν υπάρχει $x \in E$, τέτοιο ώστε $y \leq x$ για κάθε $y \in A$. Όμοια το A καλείται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει $x \in E$, τέτοιο ώστε $y \geq x$ για κάθε $y \in A$. Τέλος, θα λέμε ότι το A είναι **διατακτικά φραγμένο** (**order bounded**), όταν είναι άνω και κάτω φραγμένο (ή ισοδύναμα όταν περιέχεται σε ένα διατεταγμένο διάστημα του E).

Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για τον χώρο όλων των διατακτικά φραγμένων και τον χώρο των regular τελεστών μεταξύ χώρων Riesz.

Ορισμός 1.3.4. *Έστω E και F χώροι Riesz. Θα λέμε ότι ένας τελεστής $T : E \longmapsto F$ είναι* ***διατακτικά φραγμένος (order bounded)****, όταν απεικονίζει διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του E σε διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του F.*

Συμβολίζουμε με $L_b(E,F)$ τον διανυσματικό χώρο όλων των διατακτικά φραγμένων τελεστών από τον E στον F.

Ορισμός 1.3.5. *Έστω E και F χώροι Riesz. Ένας τελεστής $T : E \longmapsto F$ που μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο θετικών τελεστών, καλείται* ***regular****.*

Συμβολίζουμε με $L_r(E,F)$ τον διανυσματικό χώρο όλων των regular τελεστών από τον E στον F.

Παρατήρηση 1.3.6. *Ο Ορισμός 1.3.4 είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι υπάρχει θετικός τελεστής $S : E \longmapsto F$, τέτοιος ώστε $T \leq S$.*

Πράγματι, έστω ένας θετικός $S : E \longmapsto F$, για τον οποίο $T \leq S$. Τότε, $S - T \geq 0$ και $S \geq 0$, από όπου και παίρνουμε ότι $T = S - (S - T)$.

Θα δούμε στη συνέχεια ότι οι πιο πάνω διανυσματικοί χώροι συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$L_r(E,F) \subseteq L_b(E,F) \subseteq L(E,F).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε θετικός τελεστής είναι διατακτικά φραγμένος. Έστω λοιπόν $T : E \longmapsto F$ θετικός τελεστής και $x \in E^+$. Τότε $x \in [0,x] \ \Rightarrow \ T(x) \in [0, T(x)]$. Επομένως $T(z) \in [0, T(x)]$ για κάθε $z \in [0,x]$. Δηλαδή $T[0,x] \subseteq [0,T(x)] \ \Rightarrow \ T$ διατακτικά φραγμένος.
Συνεπώς και κάθε regular τελεστής είναι διατακτικά φραγμένος και ισχύει ο ζητούμενος εγκλεισμός.

Ορισμός 1.3.7. *Ένας χώρος Riesz E καλείται* ***Dedekind πλήρης****, όταν κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει supremum (ή ισοδύναμα όταν κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολό του έχει infimum).*

Πόρισμα 1.3.8. *Ένας χώρος Riesz E είναι Dedekind πλήρης, αν και μόνον αν $0 \leq x_a \uparrow \leq x$ συνεπάγεται την ύπαρξη του $\sup\{x_a\}$.*

Με βάση τα παραπάνω ένας χώρος Riesz E, καλείται **σ-Dedekind πλήρης** αν κάθε αριθμήσιμο άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει ελάχιστο άνω φράγμα ($0 \leq x_n \uparrow \leq x \ \ \Rightarrow \ \ \exists \ \sup\{x_n\}$).

Στο επόμενο αποτέλεσμα βλέπουμε γιατί έχει σημασία να είναι ένας χώρος Dedekind πλήρης. Ο λόγος είναι ότι έχοντας τον F Dedekind πλήρη, ο χώρος $L_b(E,F)$ έχει τη δομή χώρου Riesz.

Θεώρημα 1.3.9. *(Riesz-Kantorovich). Αν E, F χώροι Riesz, όπου F Dedekind πλήρης, τότε ο διανυσματικός χώρος $L_b(E,F)$ είναι ένας Dedekind πλήρης χώρος Riesz στον οποίο ισχύουν τα επόμενα :*

$$\begin{aligned} |T|(x) &= \sup\{|T(y)| \ : \ |y| \leq |x|\}, \\ [S \vee T](x) &= \sup\left\{S(y) + T(z) \ : \ y, z \in E^+ \ \ \textit{και} \ \ x = y + z\right\} \quad \textit{και} \\ [S \wedge T](x) &= \inf\left\{S(y) + T(z) \ : \ y, z \in E^+ \ \ \textit{και} \ \ x = y + z\right\}, \end{aligned}$$

για κάθε $S, T \in L_b(E, F)$ *και* $x \in E^+$.

Επίσης, $T_a \downarrow 0$ *στον* $L_b(E, F)$ *αν, και μόνον αν* $T_a(x) \downarrow 0$ *στον* F*, για κάθε* $x \in E^+$.

Παρατήρηση 1.3.10. *Αν* E, F *χώροι Riesz, όπου* F *Dedekind πλήρης, τότε για κάθε διατακτικά φραγμένο τελεστή* $T : E \longmapsto F$*, ισχύουν τα επόμενα*

$$\begin{aligned} T^+(x) &= \sup\{Ty \,:\, 0 \le y \le x\} \quad \textit{και} \\ T^-(x) &= \sup\{-Ty \,:\, 0 \le y \le x\}, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in E^+$.

Γράφοντας τον T *ως διαφορά* $T^+ - T^-$*, προκύπτει ότι ο* $L_b(E, F)$ *συμπίπτει με τον διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τους θετικούς τελεστές στον* $L(E, F)$*. Συνοψίζοντας, όταν ο* F *είναι Dedekind πλήρης έχουμε ότι* $L_r(E, F) = L_b(E, F)$.

Κλείνοντας το κεφάλαιο, θα αναφερθούμε στην έννοια του **διατακτικά συνεχή** (**order continuous**) τελεστή (T. Ogasawara, 1940).

Ορισμός 1.3.11. *Έστω* E *χώρος Riesz και* $\{x_a\}$ *δίκτυο του* E*. Θα λέμε ότι το* $\{x_a\}$ ***συγκλίνει διατακτικά (order convergent)*** *σε ένα* $x \in E$ *και θα γράφουμε ότι* $x_a \xrightarrow{o} x$*, όταν υπάρχει ένα άλλο δίκτυο* $\{y_a\}$ *στον* E*, τέτοιο ώστε* $|x_a - x| \le y_a \downarrow 0$.

Ορισμός 1.3.12. *Έστω* E *και* F *χώροι Riesz. Ένας τελεστής* $T : E \longmapsto F$*, καλείται*
(i) ***διατακτικά συνεχής****, αν* $x_a \xrightarrow{o} 0$ *στον* $E \Rightarrow Tx_a \xrightarrow{o} 0$ *στον* F.
(ii) σ***-order continuous****, αν* $x_n \xrightarrow{o} 0$ *στον* $E \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{o} 0$ *στον* F.

Παρατήρηση 1.3.13. *Σημειώνουμε ότι ένας τελεστής* $T : E \longmapsto F$*, όπου* E *και* F *χώροι Riesz, είναι order continuous αν, και μόνον αν* $x_a \downarrow 0$ *στον* E*, συνεπάγεται* $Tx_a \downarrow 0$ *στον* F *(αν, και μόνον αν* $0 \le x_a \uparrow x$ *στον* F *συνεπάγεται ότι* $Tx_a \uparrow Tx$ *στον* F*).*

Λήμμα 1.3.14. *Κάθε διατακτικά συνεχής τελεστής, είναι διατακτικά φραγμένος.*

Κεφάλαιο 2

Θεωρήματα Θετικής Επέκτασης

2.1 Αρχικά - Βασικά Θεωρήματα

Στην θεωρία των μερικά διατεταγμένων χώρων, το πρόβλημα ύπαρξης θετικής επέκτασης δοθέντος θετικού γραμμικού τελεστή, δεν είναι τετριμμένο (βλ. 2.1.4). Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι εντελώς διαφορετικό από το παρόμοιο της επέκτασης χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την διατήρηση της θετικότητας του τελεστή, καθώς είναι δυνατό να έχουμε γραμμική επέκταση χωρίς παράλληλα να είναι και θετική. Ξεκινώντας, θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα όσον αφορά την επέκταση θετικών τελεστών. Αρχικά θα δούμε μία νέα μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach (σε μορφή μερικά διατεταγμένων χώρων) μέσω της οποίας εξασφαλίζεται η ύπαρξη επέκτασης ενός τελεστή από έναν διανυσματικό υπόχωρο, σε ολόκληρο τον χώρο.

Ας θυμηθούμε πως μία απεικόνιση $p : G \longmapsto F$, όπου G είναι (πραγματικός) διανυσματικός χώρος και F μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος καλείται **υπογραμμική**, όταν

(a) $\quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \;\; \forall x, y \in G,$ και

(b) $\quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \; \forall x \in G, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

(H p είναι **θετικά ομογενής** (**positive homogeneous**) αν $p(\lambda x) = \lambda p(x), \; \forall\, \lambda > 0, \; \forall\, x \in G$)

Θεώρημα 2.1.1. *(Hahn-Banach).([3], Thm 1.25) Έστω G (πραγματικός) διανυσματικός χώρος, F Dedekind πλήρης χώρος Riesz και έστω $p : G \longmapsto F$ μία υπογραμμική συνάρτηση. Αν H διανυσματικός υπόχωρος του G και $S : H \longmapsto F$ ένας τελεστής για τον οποίο ισχύει ότι $S(x) \leq p(x), \forall\, x \in H$, τότε υπάρχει τελεστής $T : G \longmapsto F$ τέτοιος ώστε $T = S$, στον H και $T(x) \leq p(x), \forall x \in G$.*

Ακολουθεί ένα πρώτο αποτέλεσμα της νέα μορφής του Θεωρήματος Hahn-Banach (ιδιότητα επέκτασης θετικών τελεστών).

Θεώρημα 2.1.2. *([3], Thm 1.26) Έστω E, F χώροι Riesz με F Dedekind πλήρη και $T : E \longmapsto F$ θετικός τελεστής. Έστω επίσης G Riesz υπόχωρος του E και $S : G \longmapsto F$ ένας τελεστής, τέτοιος ώστε $0 \leq S(x) \leq T(x), \; \forall\, x \in G^+$. Τότε, ο S επεκτείνεται σε θετικό τελεστή από τον E στον F για τον οποίο ισχύει $0 \leq S \leq T$, στον $L(E, F)$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $p : E \longmapsto F$ ως $p(x) = T(x^+), \;\; \forall \;\; x \in E$ και εύκολα διαπιστώνουμε πως p είναι θετική υπογραμμική συνάρτηση για την οποία $S(x) \leq p(x), \;\; \forall \;\; x \in G$. Από άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει γραμμική επέκταση του S σε ολόκληρο το χώρο E (την οποία χάριν ευκολίας συμβολίζουμε ξανά με S) τέτοια, ώστε $S(x) \leq p(x), \; \forall\, x \in E$. Επιλέγοντας $x \in E^+$, έχουμε

$$-S(x) = S(-x) \leq p(-x) = T((-x)^+) = T(0) = 0$$

και άρα $0 \leq S(x) \leq p(x) = T(x)$. Δηλαδή, $\forall \;\; x \in E^+, 0 \leq S(x) \leq T(x)$. $\square$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποιες από τις αρχικές ιδιότητες επέκτασης των θετικών τελεστών. Αρχικά θα δούμε ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα με το οποίο έχουμε ότι ένας θετικός τελεστής, το πεδίο ορισμού του οποίου είναι υπόχωρος Riesz, επεκτείνεται σε θετικό τελεστή αν, και μόνον αν κυριαρχείται από μονότονη υπογραμμική απεικόνιση. Θυμίζουμε ότι μια απεικόνιση $f : E \longmapsto F$ μεταξύ διατεταγμένων χώρων E και F καλείται **μονότονη**, όταν $\forall \ x, y \in E : x \leq y$ έχουμε ότι $f(x) \leq f(y)$.

Θεώρημα 2.1.3. *([3], Thm 1.27) Έστω E και F χώροι Riesz, με F Dedekind πλήρη. Αν G είναι Riesz υπόχωρος του E και $T : G \longmapsto F$ θετικός τελεστής, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

1. *Ο T επεκτείνεται σε θετικό τελεστή από τον E στον F.*
2. *Ο T επεκτείνεται σε διατακτικά φραγμένο (order bounded) τελεστή από τον E στον F.*
3. *Υπάρχει μια μονότονη υπογραμμική απεικόνιση $p : E \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $T(x) \leq p(x), \forall \ x \in G$.*

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2) Προφανές, καθώς κάθε θετικός τελεστής είναι διατακτικά φραγμένος.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Έστω $S \in L_b(E,F) : S(x) = T(x), \forall \ x \in G$ και $p : E \longmapsto F$ η απεικόνιση που ορίζεται ως $p(x) = |S|(x^+), \ x \in E$. Εύκολα βλέπουμε πως p μονότονη ($x \leq y \Rightarrow x^+ \leq y^+ \overset{|S| \geq 0}{\Rightarrow} |S|x^+ \leq |S|y^+ \Leftrightarrow p(x) \leq p(y)$), υπογραμμική και ικανοποιεί

$$T(x) \leq T(x^+) = S(x^+) \leq |S|(x^+) = p(x), \quad \forall \ x \in G.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) Έστω $p : E \longmapsto F$ μονότονη, υπογραμμική απεικόνιση τέτοια, ώστε $T(x) \leq p(x), \forall \ x \in G$. Τότε ο τύπος $q(x) = p(x^+), x \in E$ ορίζει υπογραμμική απεικόνιση από τον E στον F τέτοια, ώστε

$$T(x) \leq T(x^+) \leq p(x^+) = q(x), \quad \forall \ x \in G$$

Επομένως από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει επέκταση $R \in L_b(E,F)$ του T τέτοια, ώστε $R(x) \leq q(x)$, για κάθε $x \in E$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι R είναι θετικός τελεστής. Προς τούτο, έστω $x \in E^+$. Τότε,

$$-R(x) = R(-x) \leq q(-x) = p(-x^+) = p(0) = 0,$$

από όπου και $R(x) \geq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι R είναι θετική γραμμική επέκταση του T σε ολόκληρο τον E. □

Παρατήρηση 2.1.4. *Κατά την απόδειξη της τελευταίας συνεπαγωγής ((3) $\Longrightarrow$ (1)), θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Hahn-Banach απευθείας για το συναρτησιακό p. Όμως, σε αυτή την περίπτωση δεν είμαστε σε θέση να αποφανθούμε για το αν ο τελεστής R που προκύπτει ως επέκταση του T είναι θετικός.*

Το επόμενο αποτέλεσμα αναφέρεται σε περιορισμούς θετικών τελεστών σε ideals.

Θεώρημα 2.1.5. *([3], Thm 1.28) Έστω E, F χώροι Riesz, με F Dedekind πλήρη και έστω $T : E \longmapsto F$ θετικός τελεστής. Για κάθε ideal A του E, ο τύπος*

$$T_A(x) = \sup \{T(y) : \ y \in A \ \textit{και} \ 0 \leq y \leq x\}, \quad x \in E^+,$$

ορίζει θετικό τελεστή από τον E στον F. Επιπλέον, έχουμε

1. *$0 \leq T_A \leq T$*
2. *$T_A = T$ στον A και $T_A = 0$ στον A^d.*
3. *Αν B ένα άλλο ideal με $A \subseteq B$, τότε $T_A \leq T_B$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in E^+$ και $y \in A$ με $0 \leq y \leq x$. Ο T είναι θετικός, συνεπώς $0 \leq T(x) \leq T(y)$ και άρα το σύνολο $\{T(y) \ : \ y \in A, \ 0 \leq y \leq x\}$ είναι άνω φραγμένο, στον Dedekind πλήρη χώρο F. Άρα, για κάθε $x \in E^+$, υπάρχει στον F^+ το $\sup \{T(y) \ : \ y \in A, \ 0 \leq y \leq x\} = T_A(x)$ και εξ' αυτού ο $T_A : E \longmapsto F$ είναι καλά ορισμένος.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$T_A(x) = \sup\left\{T(x \wedge y) : \ y \in A^+\right\}, \ \ \forall \ \ x \in E^+. \tag{2.1}$$

Έστω $x \in E^+$ και $y \in A$ με $0 \leq y \leq x$. Τότε, $0 \leq x \wedge y \leq x, y \ \Rightarrow 0 \leq T(x \wedge y) \leq T(x), T(y)$. Άρα,

$$\begin{array}{rcl} T(x \wedge y) & \leq & T(y), \quad \forall \ y \in A \ \ \text{με} \ \ 0 \leq y \leq x \\ T(x \wedge y) & \leq & \sup\left\{T(y) \ : \ y \in A, \ 0 \leq y \leq x\right\} = T_A(x) \ . \end{array}$$

Όμως A είναι *ideal* του E, συνεπώς για $x = y \in A^+ \ \Rightarrow \ T(x \wedge y) = T(y), y \in A^+ \subseteq A, \ 0 \leq y \leq x$. Τελικά, $T_A(x) = \sup\left\{T(x \wedge y) : \ y \in A^+\right\}, \ \ \forall \ \ x \in E^+$.

Αν δείξουμε ότι ο T_A είναι προσθετικός στο E^+, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Kantorovich που είδαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο (Θεώρημα 1.3.2), θα υπάρχει θετική επέκτασή του σε ολόκληρο τον χώρο E. Έστω λοιπόν $x, \ y \in E^+$. Αν $z \ \in A^+$, τότε από την ανισότητα $(x + y) \wedge z \leq x \wedge z + y \wedge z$, συνεπάγεται ότι

$$T_A(x + y) \leq T_A(x) + T_A(y).$$

Αντίστροφα,

$$\begin{array}{rcl} x \wedge u + y \wedge v & \leq & (x + y) \wedge (x + v) \wedge (u + y) \wedge (u + v) \\ & \leq & (x + y), (x + v), (u + y), (u + v) \\ & \leq & (x + y) \wedge (u + v) \ \ \Rightarrow \\ T(x \wedge u) + T(y \wedge v) & \leq & T((x + y) \wedge (u + v)) \ \ \leq \ \ T_A(x + y) \ \ \Rightarrow \\ T(x \wedge u) & \leq & T_A(x + y) - T(y \wedge v), \ \ \forall \ \ u \in A^+ \ \ \Rightarrow \\ T(y \wedge v) & \leq & T_A(x + y) - T_A(x), \ \ \forall \ \ v \in A^+ \ \ \Rightarrow \\ T_A(x) + T_A(y) & \leq & T_A(x + y). \end{array}$$

Επομένως ισχύει, $T_A(x + y) = T_A(x) + T_A(y)$ και άρα T_A είναι προσθετικός στον E^+, ισοδύναμα επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε τελεστή $E \longmapsto F$ (τον οποίο, χάριν ευκολίας, συμβολίζουμε ξανά με T_A). Η επέκταση T_A είναι θετικός τελεστής καθώς για $x \in E^+$ και $y \in A$ με $0 \leq y \leq x$, έχουμε $0 \leq T(y) \leq T(x) \ \ \Rightarrow \ \ 0 \ \leq \ \sup\left\{T(y) \ : \ y \in A, \ 0 \leq y \leq x\right\} \ \leq \ T(x) \ \ \Rightarrow \ \ 0 \leq T_A(x) \leq T(x)$.

Τα αποτελέσματα (1),(2) και (3) προκύπτουν ως απλές συνέπειες του τύπου (2.1). □

Θυμίζουμε πως ένας υπόχωρος G ενός μερικά διατεταγμένου χώρου E καλείται **majorizing**, αν για κάθε $x \in E$, υπάρχει $y \in G$ με $x \leq y$ (ισοδύναμα, για κάθε $x \in E$, υπάρχει $y \in G$, τέτοιο ώστε $y \leq x$).

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την απόδειξη ενός από τα σημαντικότερα αποτελέσματα που αφορούν τις θετικές επεκτάσεις σε μερικά διατεταγμένους χώρους και οφείλεται στον L. V. Kantorovich (από όπου πήρε και το όνομά του). Στην ουσία, είναι το πρώτο Θεώρημα αυτού του είδους και ένα σημαντικό εργαλείο που παρέχει αρκετά αποτελέσματα στο κομμάτι των θετικών επεκτάσεων. Μας λέει πως κάθε θετικός τελεστής το πεδίο ορισμού του οποίου είναι majorizing υπόχωρος και το πεδίο τιμών του περιέχεται σε Dedekind πλήρη χώρο Riesz, έχει πάντοτε θετική επέκταση. Πολλές φορές το Θεώρημα αναφέρεται και ως Θεώρημα Hahn-Banach-Kantorovich.

Θεώρημα 2.1.6. *(Kantorovich).([3], Thm 1.32) Έστω E και F μερικά διατεταγμένοι διανυσματικοί χώροι, όπου F Dedekind πλήρης χώρος Riesz. Αν G είναι majorizing διανυσματικός υπόχωρος του E και $T : G \longmapsto F$ θετικός τελεστής, τότε ο T έχει θετική γραμμική επέκταση σε ολόκληρο τον χώρο E.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $p : E \longmapsto F$ έτσι, ώστε $p(x) = \inf\left\{T(y) \ : \ y \in G, \ x \leq y\right\}, \ \ x \in E$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι η p είναι καλά ορισμένη. Έστω λοιπόν $x \in E$ και $y \in G$ τέτοιο ώστε $x \leq y$. Τότε, εφόσον G είναι majorizing υπόχωρος, έχουμε ότι υπάρχει $u \in G$ έτσι ώστε $u \leq x$, από όπου $u \leq y \Rightarrow Tu \leq Ty$. Επομένως, $Tu \leq Ty, \ \forall y \in G \ , \ x \leq y$, πράγμα που σημαίνει πως το σύνολο $\{Ty \ : \ y \in G, \ x \leq y\}$ είναι κάτω φραγμένο στον Dedekind πλήρη F και άρα υπάρχει το infimum του.

Εύκολα βλέπουμε πως $p(x) = T(x), \ \ \forall \ \ x \in G$ και ότι p είναι υπογραμμική απεικόνιση. Εφαρμόζοντας λοιπόν το Θεώρημα Hahn-Banach, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει γραμμική επέκταση S του T σε ολόκληρο τον E τέτοια, ώστε $S(z) \leq p(z), \ \ \forall \ \ z \in E$.

Μένει να δείξουμε ότι ο τελεστής της επέκτασης είναι θετικός. Προς τούτο, έστω $z \in E^+$. Τότε $-z \leq 0$ και άρα,

$$-S(z) = S(-z) \leq p(-z) \leq T(z), \;\; \forall \;\; y \in G \;, \; -z \leq y \;\overset{0 \in G}{\Longrightarrow}\; -S(z) \leq 0 \Leftrightarrow S(z) \geq 0.$$

Επομένως, $S(z) \in F^+$ για κάθε $z \in E^+$, πράγμα που σημαίνει ότι ο τελεστής S είναι θετικός. □

Τελειώνοντας αυτή την παράγραφο, θα δώσουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach-Kantorovich για το πρόβλημα της κοινής επέκτασης μιας οικογένειας γραμμικών θετικών τελεστών.

Έστω λοιπόν E μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και $(G_\delta)_{\delta\in\Delta}$ μια οικογένεια υποχώρων του. Συμβολίζουμε με $\Phi((G_\delta)_{\delta\in\Delta})$ τη συλλογή όλων των οικογενειών $\{x_\delta \in G_\delta \;:\; \delta \in \Delta\}$ για τις οποίες, $x_\delta \neq 0$ το πολύ για πεπερασμένο πλήθος $\delta \in \Delta$.

Θεώρημα 2.1.7. *([6], Thm 5.4) Έστω E μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και $(G_\delta)_{\delta\in\Delta}$ οικογένεια υποχώρων του τέτοια, ώστε υπάρχει τουλάχιστον ένας υπόχωρος, έστω G_{δ_0}, ο οποίος είναι majorizing. Έστω F Dedekind πλήρης διατεταγμένος χώρος και $\{T_\delta : G_\delta \longmapsto F \mid \delta \in \Delta\}$ οικογένεια θετικών γραμμικών τελεστών. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) Η οικογένεια $\{T_\delta : G_\delta \longmapsto F \mid \delta \in \Delta\}$ έχει μία κοινή θετική επέκταση $T : E \longmapsto F$ (δηλαδή,

$T(x) = T_\delta(x), \;\; \forall \;\; \delta \in \Delta$ *και* $x \in X$*).*

(ii) Για κάθε οικογένεια $(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \in \Phi((G_\delta)_{\delta\in\Delta})$, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sum_{\delta\in\Delta} x_\delta \geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(x_\delta) \geq 0.$$

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Έστω $(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \in \Phi((G_\delta)_{\delta\in\Delta})$ και $\sum_{\delta\in\Delta} x_\delta \geq 0$. Τότε,

$$\sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(x_\delta) = \sum_{\delta\in\Delta} T(x_\delta) = T(\sum_{\delta\in\Delta} x_\delta).$$

Αφού $\sum_{\delta\in\Delta} x_\delta \geq 0$,

$$T(\sum_{\delta\in\Delta} x_\delta) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(x_\delta) \geq 0.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Έστω $G = span(\bigcup_{\delta\in\Delta} G_\delta)$ όπου G majorizing υπόχωρος του E και $x \in E$. Τότε, $\exists \; a \in A \;:\; x \leq a$ καθώς G_{δ_0} majorizing υπόχωρος του E και $G_{\delta_0} \subseteq G$. Ορίζουμε $T_0 : G \longmapsto F$, ως

$$T_0(x) = \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(x_\delta),$$

όπου $x = \sum_{\delta\in\Delta} x_\delta$ τυχαία οικογένεια στο $\Phi((G_\delta)_{\delta\in\Delta})$. Έστω $x, y \in G$ με $x \leq y$. Τότε,

$$\begin{aligned} y - x \geq 0 \;\;&\Leftrightarrow\;\; \sum_{\delta\in\Delta}(y_\delta - x_\delta) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(y_\delta - x_\delta) \geq 0 \\ \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(y_\delta) \;\;&\geq\;\; \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(x_\delta) \Leftrightarrow T_0(y) \geq T_0(x). \end{aligned}$$

Άρα, $T_0(y) \geq T_0(x), \;\; \forall \;\; x \in G$ με $x \leq y$ και έτσι T_0 είναι καλά ορισμένος. Επίσης, είναι γραμμικός και θετικός ($x \geq 0 \Rightarrow \sum_{\delta\in\Delta} T_\delta(x_\delta) = T_0(x) \geq 0$).

Επομένως, από το Θεώρημα Kantorovich, υπάρχει θετική, γραμμική απεικόνιση $T : E \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $T(x) = T_0(x), \;\; \forall \;\; x \in G$. Προφανώς, T είναι η κοινή επέκταση. □

2.2 Το σύνολο $\mathcal{E}(T)$ και τα ακραία του σημεία

Θα αναφέρουμε εδώ κάποια αποτελέσματα για την εύρεση ακραίων σημείων συνόλων θετικών τελεστών.

Έστω E μερικά διατεταγμένος χώρος, G διανυσματικός υπόχωρος του E και F Dedekind πλήρης χώρος Riesz. Έστω επίσης $T : G \longmapsto F$ ένας θετικός τελεστής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(T)$, το σύνολο των θετικών επεκτάσεων του T σε ολόκληρο τον χώρο E. Δηλαδή γράφουμε,

$$\mathcal{E}(T) := \{S \in L(E,F) : \ S \geq 0 \ \text{ και } \ S = T \ \text{ στον } \ G\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{E}(T)$ είναι πάντα κυρτό υποσύνολο του $L(E,F)$ (καθώς, $\forall\ S,T \in L(E,F)$ και $\forall\ \lambda \in (0,1)$, ισχύει ότι, $\lambda S + (1-\lambda)R \in\ \mathcal{E}(T)$). Επίσης το σύνολο $\mathcal{E}(T)$, ίσως είναι κενό (βλ. [3], παράδειγμα 1.29, σελ. 26).

Ένας θετικός τελεστής $T : G \longmapsto F$, (E, F όπως παραπάνω) θα λέμε ότι έχει **μικρότερη επέκταση** (**smallest extension**), όταν υπάρχει ένας $S \in \mathcal{E}(T)$ τέτοιος, ώστε $S \leq R$, $\forall\ R \in \mathcal{E}(T)$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι ο S είναι η μικρότερη επέκταση του T.
Έχουμε δηλαδή ότι, ο T έχει μια μικρότερη επέκταση αν, και μόνον αν το $\min \mathcal{E}(T)$ υπάρχει στον $L(E,F)$. Στο επόμενο Θεώρημα βλέπουμε πως ένας επεκτάσιμος θετικός τελεστής, το πεδίο ορισμού του οποίου είναι ideal, έχει πάντα μία μικρότερη επέκταση.

Θεώρημα 2.2.1. *([3], Thm 1.30) Έστω E και F χώροι Riesz, με F Dedekind πλήρη, A ideal του E και $T : A \longmapsto F$ θετικός τελεστής. Αν $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$, τότε ο T έχει μικρότερη επέκταση. Αν σε αυτή την περίπτωση $S = \min \mathcal{E}(T)$, τότε*

$$S(x) = \sup \{Ty \ : \ y \in A \ \text{ και } \ 0 \leq y \leq x\},$$

για κάθε $x \in E^+$.

Απόδειξη. Ο T έχει τουλάχιστον μία θετική επέκταση. Ορίζουμε $T_A : E \longmapsto F$ ως,

$$T_A(x) = \sup \{T(y) : \ y \in A \ \text{ και } \ 0 \leq y \leq x\}, \quad x \in E^+. \tag{2.2}$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.5, ο T_A είναι θετικός τελεστής, τέτοιος ώστε $T_A = T$ στο A και έτσι $T_A \in \mathcal{E}(T)$.
Αν τώρα $S \in \mathcal{E}(T)$, τότε $S = T$ στο A. Επομένως, $T_A = S_A \leq S$ και $T_A = \min \mathcal{E}(T)$. □

Έστω λοιπόν $T_A : E \longmapsto F$ θετικός τελεστής, όπου F Dedekind πλήρης. Από το προηγούμενο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι, για κάθε ideal A του E, ο θετικός τελεστής T_A που ορίσαμε πιο πάνω, είναι η μικρότερη επέκταση του τελεστή που προκύπτει αν περιορίσουμε τον T στο A.
Το επόμενο αποτέλεσμα των Z. Lipecki, D. Plachky και W. Thomsen, είναι ένα πρώτο αποτέλεσμα χαρακτηρισμού των ακραίων σημείων του συνόλου $\mathcal{E}(T)$.

Θεώρημα 2.2.2. *(Lipecki-Plachky-Thomsen).([11], Thm 3.) Έστω E και F χώροι Riesz, με F Dedekind πλήρη. Έστω επίσης G διανυσματικός υπόχωρος του E και $T : G \longmapsto F$ θετικός τελεστής. Τότε, για $S \in \mathcal{E}(T)$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

1. *S ακραίο σημείο του $\mathcal{E}(T)$.*
2. *Για κάθε $x \in E$, έχουμε $\inf \{S|x-y| \ : \ y \in G\} = 0$.*

Απόδειξη. (1)$\Longrightarrow$(2) Έστω S ακραίο σημείο του $\mathcal{E}(T)$. Ορίζουμε την απεικόνιση $p : E \longmapsto F$ ως,

$$p(x) = \inf \{S|x-y| \ : \ y \in G\}, \quad x \in E.$$

Η p είναι καλά ορισμένη καθώς,

$$0 \leq |x-y|,\ \forall\, y \in G \overset{0 \leq S}{\Longrightarrow} 0 \leq S|x-y| \text{ στο } F \text{ και } F \textit{ Dedekind} \text{ πλήρης } \Longrightarrow \exists\ \inf \{S|x-y|,\ y \in G\}.$$

Εύκολα βλέπουμε πως η p είναι υπογραμμική απεικόνιση για την οποία επίσης έχουμε :

$$p(-x) = \inf\{S|-x-y|;\ y \in G\} = \inf\{S|x+y|;\ y \in G\}$$
$$\inf\{S|x-(-y)|;\ y \in G\} = \inf\{S|x-Z|;\ z \in G\}$$

και προφανώς $p(x) \geq 0, \forall\ x \in E$. Επομένως,

$$\begin{aligned} 0 \leq p(x) &= p(-x) \leq S|x-y|, \quad \forall y \in G \implies \\ 0 \leq p(x) &= p(-x) \leq S|x|, \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Τέλος, $y \in G \implies p(y) = 0$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $p(x) = 0, \forall\ x \in E$. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $x \in E$ τέτοιο, ώστε $p(x) > 0$. Ορίζουμε τον τελεστή $R : \{\lambda x :\ \lambda \in \mathbb{R}\} \longmapsto F$ ως $R(\lambda x) = \lambda p(x)$, για τον οποίο έχουμε ότι $R(\lambda x) \leq p(\lambda x)$. Επομένως από το Θεώρημα Hahn-Banach, ο τελεστής R επεκτείνεται γραμμικά σε ολόκληρο τον χώρο E. Συμβολίζοντας χάριν ευκολίας, την επέκταση ξανά με R, έχουμε ότι

$$R(z) \leq p(z),\ \forall\ z \in E.$$

Προφανώς $R \neq 0$.

Επίσης, $|R(z)| \leq p(z),\ \forall\ \ z \in E$ (καθώς, $z \in E \Rightarrow -z \in E \Rightarrow R(-z) = -R(z) \leq R(z) \leq p(z) \Rightarrow \pm R(z) \leq p(z) \Leftrightarrow |R(z)| \leq p(z),\ \forall z \in E$) και άρα $R(y) = 0, \forall\ \ y \in G$ (καθώς, $|R(y)| \leq p(y)$). Έστω τώρα $z \in E^+$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} R(z) &\leq p(z) \leq S|z| = S(z) \\ -R(z) &= R(-z) \leq p(-z) \leq S|-z| = S(z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε ότι, $S-R,\ S+R \in E^+ \implies S-R,\ S+R \in \mathcal{E}(T)$. Άρα, $S = \frac{1}{2} + (S-R)\frac{1}{2}(S+R)$ και S ακραίο σημείο του συνόλου $\mathcal{E}(T)$, συνεπώς, $S = S-R = S+R$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το ότι $R \neq 0$.

(2)$\Longrightarrow$(1) Έστω $\inf\{S|x-y| \ :\ y \in G\} = 0,\ \ \forall\ \ x \in E$. Έστω επίσης $R,\ Q\ in\ \mathcal{E}(T),\ \lambda \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $\lambda Q + (1-\lambda)R = S$. Θα δείξουμε ότι $S = Q = R$.

Για κάθε $x, y \in E$,

$$|Q(x) - Q(y)| = |Q(x-y)| \leq Q|x-y| = (\frac{1}{\lambda}S - \frac{1-\lambda}{\lambda}R)|x-y| \leq \frac{1}{\lambda}S|x-y|.$$

Αν τώρα $x \in E$ και $y \in E$, τότε $S(y) = Q(y) = T(y)$ και έτσι έχουμε,

$$|S(x) - Q(x)| \leq |S(x) - S(y)| + |Q(y) - Q(x)| \leq (1 + \frac{1}{\lambda})S|x-y|.$$

Παίρνοντας infimum στην πιο πάνω σχέση και χρησιμοποιώντας την αρχική υπόθεση, καταλήγουμε στο ότι $S(x) = Q(x),\ \ \forall x \in E\ \Rightarrow S = Q$. Έχοντας επίσης $\lambda Q + (1-\lambda)R = S$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\lambda Q + (1-\lambda)R = Q,\ \forall\ \ \lambda \in (0,1)$ από όπου και $R = Q = S$. □

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα αποτέλεσμα του Z. Lipecki, ο οποίος χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach-Kantorovich, απέδειξε ότι αν το πεδίο ορισμού ενός θετικού τελεστή T είναι majorizing διανυσματικός υπόχωρος, τότε το $\mathcal{E}(T)$ όχι απλώς δεν είναι κενό αλλά έχει και ακραίο σημείο.

Θεώρημα 2.2.3. *(Lipecki).([11], Thm 1.) Έστω E και E χώροι Riesz με F Dedekind πλήρη. Αν G majorizing διανυσματικός υπόχωρος του E και $T : G \longmapsto F$ θετικός τελεστής, τότε το μη κενό, κυρτό σύνολο $\mathcal{E}(T)$ έχει ένα ακραίο σημείο.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $S \in \mathcal{E}(T)$ έτσι, ώστε

$$\inf\{S|x-y| \ :\ y \in G\} = 0,$$

για κάθε $x \in E$.

Θεωρούμε ζεύγη (H, S), όπου H majorizing διανυσματικός υπόχωρος του E και $S : H \longmapsto F$ θετικός τελεστής. Για καθένα από τα παραπάνω ζεύγη ορίζουμε $p_{H,S} : E \longmapsto F$ έτσι, ώστε

$$p_{H,S}(x) = \inf \{S(y) \ : \ y \in H \ , \ x \leq y\} .$$

Καθεμιά από τις πιο πάνω απεικονίσεις $p_{H,S}$ είναι υπογραμμική και $p_{H,S}(y) = S(y), \ \ \forall \ \ y \in H$. Επίσης, αν για (H_1, S_1) και (H_2, S_2) έχουμε ότι $H_1 \subseteq H_2$ και $S_2 = S_1$ στον H_1, τότε $p_{H_2,S_2}(x) \leq p_{H_1,S_1}(x), \ \ \forall \ \ x \in E$.

Έστω τώρα C η συλλογή όλων των ζευγών (H, S), για τα οποία :

(1) H υπόχωρος του E με $G \subseteq H$ ($\Rightarrow$ H majorizing υπόχωρος του E).

(2) $S : H \longmapsto F$ θετικός τέτοιος, ώστε $S = T$ στον G.

(3) $\inf \{p_{H,S}|x - y| \ : \ y \in G\} = 0, \ \ \ \forall \ \ \ x \in H$.

Εύκολα βλέπουμε ότι $(G, T) \in C$, έτσι $C \neq \emptyset$. Στη συνέχεια ορίζουμε μια διμερή σχέση $\succeq$ στον C, θεωρώντας ότι $(H_2, S_2) \succeq (H_1, S_1)$, όταν $H_2 \supseteq H_1$ και $S_2 = S_1$ στον H. Η $\succeq$ είναι μια σχέση διάταξης στον C, κάθε αλυσίδα στοιχείων του οποίου έχει άνω φράγμα στο C. Από Λήμμα Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο της C, έστω (M, R). Μένει να δείξουμε ότι, $M = E$. Τότε, $R = p_{M,R}$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.2, παίρνουμε ότι R είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{E}(T)$ (καθώς λόγω της σχέσης (3), $\inf \{\cdots\} = 0$).

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $x \in E \setminus M$. Θεωρούμε τον χώρο $H = \{u + \lambda x \ : \ u \in M, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ και ορίζουμε απεικόνιση

$$S : H \longmapsto F, \ \ \text{τέτοια ώστε} \ \ u + \lambda x \to S(u + \lambda x) = Ru + \lambda p_{M,R}(x).$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το ζεύγος (H, S) είναι στοιχείο του C.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $M \subsetneqq H$, $S = R$ στον M και $S : H \longmapsto F$ είναι θετικός τελεστής. Τέλος, θα δείξουμε ότι το ζεύγος (H, S) ικανοποεί την (3). Από την υπογραμμικότητα του $p_{H,S}$, το σύνολο

$$V = \{y \in E \ : \ \inf \{p_{H,S}(|x - y|) \ : \ z \in M\} = 0\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του E τέτοιος, ώστε $M \subseteq V$. Επίσης, από το ότι

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ inf \{p_{H,S}(|x - y|) \ : \ z \in M\} \\ &\leq \ inf \{p_{H,S}(|z - x|) \ : \ z \in M, \ \ x \leq z\} \\ &= \ inf \{R(z) - p_{H,S}(x) \ : \ z \in M, \ \ x \leq z\} \\ &= \ inf \{R(z) \ : \ z \in M, \ \ x \leq z\} - p_{M,R}(x) = 0, \end{aligned}$$

έχουμε ότι $x \in V$ και άρα $H \subseteq V$. Στη συνέχεια, για τυχαία $u \in H$, $z \in M$ και $v \in G$, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{H,S}(|u - v|) \ &\leq \ p_{H,S}(|u - z|) + p_{H,S}(|v - z|) \\ &\leq \ p_{H,S}(|u - z|) + p_{M,R}(|v - z|), \end{aligned}$$

και έτσι, αφού $(M, R) \in C$ και $u \in H \subseteq V$, έχουμε ότι

$$inf \{p_{H,S}(|u - v|) \ : \ v \in G\} = 0, \quad \forall u \in H.$$

Επομένως, $(H, S) \in C$. Όμως το γεγονός ότι $(H, S) \succeq (M, R)$ και $(H, S) \neq (M, R)$ έρχεται σε αντίθεση με το ότι το ζεύγος (M, R) είναι μεγιστικό για το σύνολο C. Τελικά έχουμε το ζητούμενο $M = E$. $\square$

2.3 Το Θεώρημα Mazur-Orlicz

Σε αυτή τη παράγραφο, θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα ύπαρξης επεκτάσεων για θετικούς τελεστές, χρησιμοποιώντας μια νέα έκδοση του Θεωρήματος Mazur-Orlicz για μερικά διατεταγμένους χώρους.

Η κλασική εκδοχή του Θεωρήματος Mazur-Orlicz, είναι στην ουσία ένα αποτέλεσμα που μας παρέχει μία ισοδυναμία ύπαρξης γραμμικού τελεστή από τη μία και επαλήθευσης μιας ανισότητας για δοθέν υπογραμμικό τελεστή από την άλλη. Όπως θα δούμε, «παίζοντας» με τις αρχικές συνθήκες του Θεωρήματος, καταφέρνουμε η ανισότητα που καλείται να επαληθεύει ο υπογραμμικός τελεστής να γίνεται συνεχώς απλούστερη και τελικά υπό κατάλληλες συνθήκες καταλήγουμε σε αποτέλεσμα θετικής επέκτασης.

Ξεκινάμε με ένα αποτέλεσμα (Θεώρημα ύπαρξης Hahn-Banach) που παίζει σημαντικό ρόλο στις πιο κάτω αποδείξεις (δίνοντας πρώτα ένα Λήμμα που χρησιμεύει στην απόδειξή του).

Λήμμα 2.3.1. *([13], Lem 1.5.1) Έστω X διανυσματικός χώρος, F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος και έστω $S : X \longmapsto F$ μία υπογραμμική απεικόνιση. Έστω επίσης $K \subseteq X$ μη κενό, κυρτό σύνολο και $\tau : K \longmapsto F$ κοίλη συνάρτηση τέτοια, ώστε $\tau \leq S$ (κατά σημείο). Για κάθε $x \in X$, έστω*

$$\lambda(x) = \inf \{S(x+tu) - t\tau(u) \ : \ t \in [0,\infty), \ u \in K\}.$$

Τότε, λ υπογραμμικό τέτοιο, ώστε $\lambda \leq S$. Επιπλέον, αν $T : X \longmapsto F$ γραμμική, τότε $T \leq \lambda$ είναι ισοδύναμο με $T \leq S$ και $\tau \leq T$ στο K.

Απόδειξη. Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι η απεικόνιση λ είναι καλά ορισμένη. Έστω λοιπόν $x \in X$. Τότε, για κάθε $u \in K$ και $\tau \geq 0$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
\theta(x+tu) = \theta(tu-(-x)) &\geq \theta(tu) - \theta(-x) \Rightarrow \\
\theta(x+tu) - t\tau(u) &\geq \theta(tu) - \theta(-x) - t\tau(u) \\
&= t\theta(u) - \theta(-x) - t\tau(u) \\
&= t(\theta(u) - \tau(u)) - \theta(-x) \overset{t=0}{\Rightarrow} \\
\theta(x+tu) - t\tau(u) &\geq -\theta(-x),
\end{aligned}$$

και άρα υπάρχει το

$$\inf \{\theta(x+tu) - t\tau(u) \ : \ t \in [0,+\infty]\} = \lambda(x).$$

Έχουμε λοιπόν ότι,

$$\lambda(x) \geq -\theta(-x)$$

και $t = 0, \forall u \in K$ έχουμε $\lambda(x) \leq \theta(x)$, από όπου και

$$-\theta(-x) \leq \lambda(x) \leq \theta(x), \ \forall \, x \in X. \quad (*)$$

Όσον αφορά την υπογραμμικότητα, για $x \in X$ και $a > 0$ (αν $a = 0$ είναι προφανές) έχουμε,

$$\begin{aligned}
\lambda(ax) &= \inf \{\theta(ax+tu) - t\tau(u) \ : \ t \in [0,+\infty]\} \\
&= \inf \left\{ a(\theta(x + \frac{t}{a}u) - \frac{t}{a}\tau(u)) \ : \ t \in [0,+\infty] \right\} \\
&= a \cdot \inf \left\{ \theta(x + \frac{t}{a}u) - \frac{t}{a}\tau(u) \ : \ t \in [0,+\infty] \right\} \\
&= a \cdot \lambda(x),
\end{aligned}$$

δηλαδή λ θετικά ομογενής. Έστω $x, y \in X$. Τότε για κάθε $u, v \in K$ και για κάθε $s, t > 0$ έχουμε

$$(\theta(x+tu) - t\tau(u)) + (\theta(y+sv) - s\tau(v)) = (\theta(x+tu) - \theta(y+sv)) - (t\tau(u) - s\tau(v)) \quad (**)$$

Θέτοντας $w = \frac{tu+sv}{s+t}$, παίρνουμε ότι

$$t(w) = t(\frac{tu+sv}{s+t}) \geq \frac{t}{s+t}\tau(u) + \frac{s}{s+t}\tau(v).$$

Η σχέση $(**)$, γίνεται από την τελευταία ανισότητα,

$$\begin{aligned}
(\theta(x+tu) - t\tau(u)) + (\theta(y+sv) - s\tau(v)) &\geq \theta((x+y) + (s+t)\frac{tu+sv}{s+t}) - (s+t)\tau(w) \\
&\geq \lambda(x+y), \ \forall \, x, y \in X,
\end{aligned}$$

από όπου και $\lambda(x)+\lambda(y) \geq \lambda(x+y)$. Πράγματι λοιπόν, λ είναι υπογραμμική και από τη σχέση $(*)$ συνεπάγεται ότι $\lambda \leq \theta$. Έστω στη συνέχεια γραμμική απεικόνιση $T : X \longmapsto E$, για την οποία $T \leq \lambda$. Προφανώς $T \leq \theta$ (καθώς $\lambda \leq \theta$). Έστω $u \in K$. Τότε,

$$-T(u) = T(-u) \leq \lambda(-u) \overset{t=1}{\leq} \theta(-u + 1 \cdot u) - 1 \cdot \tau(u) \overset{\theta(0)=0}{=} -\tau(u)$$

και άρα $T(u) \geq \tau(u)$, δηλαδή $T \geq \tau$ στο K.

Αντίστροφα, έστω $T : X \longmapsto E$ γραμμική τέτοια, ώστε $T \leq \theta$ και $\tau \leq T$ στο K καθώς επίσης και $x \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x+tu) - tT(u) \leq \theta(x+tu) - tT(u) \Rightarrow \\ T(x) &\leq \inf\{\theta(x+tu) - tT(u) \ : \ t \in [0,\infty]\} = \lambda(x) \end{aligned}$$

και άρα $T \leq \lambda$. □

Ακολουθεί το **Θεώρημα ύπαρξης Hahn-Banach**.

Θεώρημα 2.3.2. *([13], Lem 1.5.2) Έστω X διανυσματικός χώρος και F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος. Τότε, για κάθε υπογραμμικό τελεστή $S : X \longmapsto F$, υπάρχει γραμμικός τελεστής $L : X \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $L \leq S$ στον X.*

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο $\mathcal{M} = \{g \ / \ g : X \longmapsto F \ \ sublinear, \ \ g \leq S\}$ είναι διατεταγμένο με την σημειακή διάταξη. Παρατηρούμε ότι $S \in \mathcal{M}$, συνεπώς $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Θεωρούμε μια αλυσίδα στοιχείων $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$. Για κάθε $x \in X$ έστω

$$\tau(x) = \inf\{g(x) : \ g \in \mathcal{K}\}.$$

Η τ είναι καλά ορισμένη καθώς, έστω $x \in X$ και $g \in \mathcal{K}$. Τότε,

$$\begin{aligned} 0 = g(-x+x) \leq g(-x) + g(x) \quad &\Rightarrow \quad -g(-x) \leq g(x) \\ g(-x) \leq S(-x) \quad &\Rightarrow \quad -S(-x) \leq -g(-x), \end{aligned}$$

συνεπώς $-S(-x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in X$.

Επομένως το σύνολο $\{g(x) : \ g \in \mathcal{K}\}$ είναι κάτω φραγμένο στο Dedekind πλήρη χώρο F και άρα υπάρχει το $\inf\{g(x) : \ g \in \mathcal{K}\} = \tau(x), \forall x \in X$.

Η τ είναι υπογραμμική (εύκολη επαλήθευση) και

$$\forall\, x \in X, \ \ \tau(x) \leq g(x), \ \ \forall\, g \in \mathcal{K}.$$

Επίσης $g(x) \leq S(x)$, από όπου και συνεπάγεται[1] $\tau(x) \leq S(x), \forall\, x \in X$. Επομένως, τ υπογραμμική και $\tau \leq S$, συνεπώς $\tau \in \mathcal{M}$.

Ισχυριζόμαστε ότι τ αποτελεί κάτω φράγμα της αλυσίδας $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{M}$. Πράγματι, έχουμε ότι $\tau \in \mathcal{M}$ και έστω $x \in X$ και $h \in \mathcal{K}$. Ισχύει,

$$\tau(x) = \inf\{g(x) : g \in \mathcal{K}\} \leq h(x), \ \forall\, x \in X.$$

Δηλαδή, $\tau \leq h$, $\forall\, h \in \mathcal{K}$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν το Λήμμα Zorn, υπάρχει ελαχιστικό στοιχείο $L \in \mathcal{M}$. Υπάρχει δηλαδή υπογραμμική $L : X \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $L \leq S$ στον X. Μένει να δείξουμε ότι L είναι γραμμική ή ισοδύναμα ότι $L(x+y) \geq L(x) + L(y)$, $\forall\, x, y \in X$. Προς τούτο, έστω για κάθε $y \in X$ ότι $Y = \{y\}$ και $\tau(y) = L(y)$. Ορίζουμε,

$$\lambda(x) = \inf\{L(x+tu) - t\tau(u) \ : \ t \in [0,\infty), \ u \in Y\}, \ \ \forall x \in X.$$

(οι S, Y, τ ικανοποιούν τις υποθέσεις του προηγούμενου Λήμματος και έτσι ορίζουμε το αντίστοιχο λ)

Παρατηρούμε ότι $\lambda \leq L$ (από τον ορισμό του λ για $t = 0$) και εφόσον το L είναι ελαχιστικό, έχουμε ότι $\lambda = L$. Τέλος, για κάθε $x \in X$ (από τον ορισμό του λ για $t = 1$) έχουμε ότι,

$$L(x) = \lambda(x) \leq L(x+1y) - 1\tau(y) = L(x+y) - L(y),$$

από όπου και $L(x) + L(y) \leq L(x+y)$, $\forall\, x, y \in X$. □

[1] $\mathcal{K}$ αλυσίδα του $\mathcal{M}$ και $\tau(x) \leq g(x), \ g(x) \leq S(x) \Rightarrow \tau(x) \leq S(x)$

Όπως είπαμε, θα χρησιμοποιήσουμε μία νέα έκδοση του Θεωρήματος Mazur-Orlicz για μερικά διατεταγμένους χώρους (βλ. [6]). Στην απόδειξή του, ακολουθείται η λεγόμενη **auxiliary sublinear operator μέθοδος**, η οποία προκύπτει από το προηγούμενο Θεώρημα και συνίσταται σε δύο βήματα : αρχικά κατασκευάζουμε έναν υπογραμμικό τελεστή και έπειτα εφαρμόζοντας το Θεώρημα ύπαρξης Hahn-Banach βρίσκουμε γραμμικό τελεστή, ο οποίος κυριαρχείται σε ολόκληρο τον χώρο από τον υπογραμμικό που κατασκευάσαμε. Είναι μια μέθοδος (με την οποία επιτυγχάνεται ύπαρξη ενός γραμμικού τελεστή) που χρησιμοποείται σε αρκετά από τα επόμενα αποτελέσματα.

Ακολουθεί η κλασική εκδοχή του Θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.3. *(Mazur-Orlicz).([6], Thm 2.1) Έστω X διανυσματικός χώρος, F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος και $S : X \longmapsto F$ υπογραμμικός τελεστής. Έστω επίσης A τυχαίο μη κενό σύνολο, $f : A \longmapsto F$ και $g : A \longmapsto X$ δύο απεικονίσεις. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) Υπάρχει γραμμικός τελεστής $L : X \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε

(a) $L \leq S$ στον X και (b) $f \leq L \circ g$ στο A.

(ii) Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq A$ και $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$, ισχύει ότι

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \leq S(\sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) \ .$$

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq A$ και $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$. Τότε, για κάθε $i = 1, 2, \cdots n$

$$\begin{aligned} f(a_i) &\leq L \circ g(a_i) = L(g(a_i)) \leq S(g(a_i)) \ \Rightarrow \\ \lambda_i f(a_i) &\leq \lambda_i L(g(a_i)) = L(\lambda_i g(a_i)) \ \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) &\leq L(\sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) \leq S(\sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)). \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Για κάθε $x \in X$, θέτουμε

$$S_1(x) = \inf \left\{ S(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \right\},$$

όπου το infimum λαμβάνεται γιά κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq A$ και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ $(n \in \mathbb{N})$. O $S_1 : X \longmapsto F$ είναι καλά ορισμένος, καθώς για κάθε $x \in X$ και για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq A$ και $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) &\leq S(\sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) = S(-x + x + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) \leq S(-x) + S(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) \\ -S(-x) &\leq S(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \ . \end{aligned}$$

Επομένως, το σύνολο $\{S(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \ : \ \cdots\}$ είναι κάτω φραγμένο στον Dedekind πλήρη χώρο F και άρα υπάρχει το infimum του. Από την τελευταία σχέση καταλήγουμε στο

$$-S(-x) \leq S_1(x), \ \ \forall \ x \in X.$$

Επίσης, $S_1(x) \leq S(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ του A και $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$. Επομένως $S_1(x) \leq S(x), \ \forall \ x \in X$ και τελικά

$$-S(-x) \leq S_1(x) \leq S(x), \ \ \forall \ x \in X. \tag{2.4}$$

Εύκολα επαληθεύουμε πως ο S_1 είναι υπογραμμικός και εφαρμόζοντας το Θεώρημα ύπαρξης Hahn-Banach, καταλήγουμε σε έναν γραμμικό τελεστή $L : X \longmapsto F$, τέτοιον ώστε

$$L(x) \leq S_1(x), \ \ \forall \ x \in X. \tag{2.5}$$

Από τις σχέσεις (2.4) και (2.5), καταλήγουμε στο ότι $L(x) \leq S(x), \;\; \forall \;\; x \in X$. Έστω τώρα $a \in A$. Έχουμε,

$$L(-g(a)) \overset{(2.5)}{\leq} S_1(-g(a)) \leq S(-g(a) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(a_i)) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i),$$

για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq A$ και $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$. Θέτοντας λοιπόν $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ και $\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} L(-g(a)) &\leq S_1(-g(a)) \leq S(-g(a) + g(a)) - f(a) = -f(a) \Leftrightarrow \\ f(a) &\leq -L(-g(a)) = L(g(a)) \end{aligned}$$

και άρα $f \leq L \circ g$ για κάθε $a \in A$. □

Παρατήρηση 2.3.4. *Συνοπτικά, για την απόδειξη του αντιστρόφου, ορίζουμε υπογραμμικό τελεστή S_1 (η ανισότητα στην ουσία παρέχει ένα φράγμα έτσι ώστε να είναι καλά ορισμένος ο S_1) και έπειτα μέσω του Θεωρήματος επέκτασης Hahn-Banach βρίσκουμε τον ζητούμενο γραμμικό τελεστή L που κυριαρχείται από τον S_1 και στην συνέχεια από τον S (auxiliary sublinear operator μέθοδος).*

Θα δούμε στη συνέχεια αυτό που αναφέραμε προηγουμένως, ότι δηλαδή μεταβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες του Θεωρήματος, καταλήγουμε σε διάφορα ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Θα δούμε αρχικά ότι το Θεώρημα Mazur-Orlicz μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του Θεωρήματος επέκτασης Hahn-Banach για μερικά διατεταγμένους χώρους (Θεώρημα 2.1.1). Για την ακρίβεια το τελευταίο προκύπτει ως Πόρισμα του Θεωρήματος 2.3.3, θεωρώντας το σύνολο A ως διανυσματικό υπόχωρο G του X, την συνάρτηση $g = I : G \longmapsto G$ (ταυτοτική) και $f = T : G \longmapsto F$ γραμμικό τελεστή.

Πόρισμα 2.3.5. *([6], Cor 2.2) Έστω X διανυσματικός χώρος, F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος και $S : X \longmapsto F$ υπογραμμικός τελεστής. Έστω G διανυσματικός υπόχωρος του X και τέλος $T : G \longmapsto F$ γραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) Υπάρχει γραμμικός τελεστής $L : X \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε

(a) $L \leq S$ στον X και (b) $L = T$ στον G.

(ii) $T \leq S$ στον G.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την αντιστοιχία των αποτελεσμάτων μεταξύ του Θεωρήματος 2.3.3 και αυτών του Πορίσματος. Υπό τις αρχικές μας υποθέσεις, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(a_i) \leq S(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(a_i))$. $(*)$
Όμως $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq G$, συνεπώς

$$\lambda_i I(a_i) = \lambda_i a_i \in G \;\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = a \in G.$$

Επίσης, εφόσον T γραμμικός, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(a_i) = T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)$ και από την σχέση $(*)$,

$$T(a) \leq S(a), \;\; \forall \;\; a \in G \;\Leftrightarrow\; T \leq S \;\; \text{στον} \;\; G.$$

Τέλος, εφόσον $f \leq L \circ g$ στον $A = G$,

$$T \leq L \circ I = L \;\; \text{στον} \;\; G \;\Leftrightarrow\; T \leq L \;\; \text{στον} \;\; G.$$

□

Παρατήρηση 2.3.6. *Εξαιτίας του ότι έχοντας (ή κατασκευάζοντας) έναν υπογραμμικό τελεστή S και έναν γραμμικό T, ο οποίος κυριαρχείται από τον υπογραμμικό, μπορούμε να βρούμε μια γραμμική επέκταση L του T, επί της οποίας επίσης κυριαρχεί ο υπογραμμικός τελεστής S, διαπιστώνουμε πως υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των προβλημάτων ύπαρξης και επέκτασης για τους γραμμικούς τελεστές.*

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στην έκδοση του Θεωρήματος Mazur-Orlicz για μερικά διατεταγμένους χώρους (Θεώρημα 2.3.8), η οποία προκύπτει θεωρώντας στη κλασική εκδοχή του Θεωρήματος τις εξής τροποποιήσεις : $X = E$ μερικά διατεταγμένος χώρος, $A = K$ μη κενό κυρτό σύνολο, $g = P : K \longmapsto E$ κυρτός και $f = Q : K \longmapsto F$ κοίλος τελεστής.

Η κλασική μορφή του Θεωρήματος, δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης γραμμικού τελεστή, χρησιμοποιώντας μία ανισότητα για δοθέντα υπογραμμικό τελεστή. Στην έκδοση των μερικά διατεταγμένων χώρων, υποθέτοντας επιπλέον ότι ο υπογραμμικός τελεστής $S : E \longmapsto F$ είναι μονότονος, θα εξάγουμε ένα κριτήριο ύπαρξης θετικού γραμμικού τελεστή. Επίσης θα δούμε πως η ανισότητα που πρέπει να ικανοποεί ο αρχικός υπογραμμικός τελεστής, θα γίνει αρκετά απλούστερη και έτσι ευκολότερα επαληθεύσιμη.

Παρατήρηση 2.3.7. *Αν $S : E \longmapsto F$ είναι μονότονος και θετικά ομογενής τελεστής και $L : E \longmapsto F$ γραμμικός τελεστής τέτοιος, ώστε $L \leq S$ στον E, τότε για κάθε $x \in E^+$, $S(x) \geq 0$ και $L(x) \geq 0$ (δηλαδή, ο L είναι θετικός).*

Πράγματι, εφόσον $S(0) = 0$ και ο S είναι μονότονος, αν $x \geq 0$ τότε $S(x) \geq S(0) = 0$. Επίσης, $-L(x) = L(-x) \leq S(-x) \leq S(0) = 0 \Rightarrow L(x) \geq 0$, δηλαδή ο L είναι θετικός.

Θεώρημα 2.3.8. *(βλ. [6], Thm 2.4) Έστω E, F μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου F Dedekind πλήρης και $S : E \longmapsto F$ μονότονος, υπογραμμικός τελεστής. Έστω K μη κενό κυρτό σύνολο, $P : K \longmapsto E$ κυρτός και $Q : K \longmapsto F$ κοίλος τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) Υπάρχει θετικός γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε

(a) $L \leq S$ στον E και (b) $Q \leq L \circ P$ στο K.

(ii) Ισχύει $Q \leq S \circ P$ στον K.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η σχέση (ii), είναι ισοδύναμη με την σχέση (ii) της κλασικής έκδοσης του Θεωρήματος Mazur-Orlicz (Θεώρημα 2.3.3) και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2.3.7 καταλήγουμε στο ότι ο L είναι θετικός.

($\Longrightarrow$) Έστω $\sum_{i=1}^n \lambda_i Q(a_i) \leq S(\sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i))$, $\forall\ \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq K$, $\forall\ \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$. Για $a \in K$, θεωρούμε $a_1 = a$ και $a_j = 0$, $\forall\ j \neq 1$ και $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$. Τότε,

$$Q(a) \leq S(P(a)) \Leftrightarrow Q(a) \leq S \circ P(a).$$

($\Longleftarrow$) Θεωρούμε $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ και θέτουμε $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Έστω $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$. Ο Q είναι κοίλος, έτσι $Q(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i) \geq \sum_{i=1}^n \mu_i Q(a_i)$. Επίσης ο P κυρτός, άρα $P(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i P(a_i)$ και εφόσον S μονότονος, $S(P(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i)) \leq S(\sum_{i=1}^n \mu_i P(a_i))$. Από τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(a_i) &= \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i Q(a_i) \leq \lambda Q(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i) \leq \lambda S(P(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i)) \\ &\leq \lambda S(\sum_{i=1}^n \mu_i P(a_i)) = S(\sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i)) \ . \end{aligned}$$

□

Ακολουθεί ένα πρώτο αποτέλεσμα θετικής επέκτασης χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3.8.
Έστω λοιπόν E και F μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου F Dedekind πλήρης, G υπόχωρος του E και $T : G \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής. Τότε ο T επεκτείνεται θετικά σε ολόκληρο τον E, αν για παράδειγμα κυριαρχείται στο πεδίο ορισμού του, από μονότονο υπογραμμικό τελεστή $S : E \longmapsto F$.

Πρόταση 2.3.9. *([6], Prop 5.1) Έστω E και F μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου F Dedekind πλήρης, G υπόχωρος του E, $T : G \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής και $S : E \longmapsto F$ μονότονος υπογραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(*i*) *Υπάρχει θετική γραμμική επέκταση* $L : E \longmapsto F$ *του* T *τέτοια, ώστε* $L \leq S$ *στον* E.

(*ii*) $T(v) \leq S(v), \;\; \forall \;\; v \in G$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 2.3.5, θεωρώντας $X = E$ και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2.3.7. □

Επομένως για να έχουμε Θετική επέκταση, ο υπογραμμικός τελεστής πρέπει να είναι και μονότονος. Στην επόμενη Πρόταση θα δούμε πως είναι δυνατό να μην απαιτούμε ο υπογραμμικός να είναι μονότονος. Αυτό επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας τη σχέση (ii) της προηγούμενης Πρότασης, με την εξής συνθήκη :

$$T(v) \leq S(x), \;\; \forall \;\; v \in G \text{ και } x \in E \text{ τέτοια, ώστε } v \leq x.$$

Πρόταση 2.3.10. *([6], Prop 5.2) Έστω* E, F *μερικά διατεταγμένοι χώροι, με* F *Dedekind πλήρη,* G *υπόχωρος του* E, $T : G \longmapsto F$ *θετικός γραμμικός τελεστής και* $S : E \longmapsto F$ *υπογραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(*i*) *Υπάρχει θετική γραμμική επέκταση* $L : E \longmapsto F$ *του* T *τέτοια, ώστε* $L \leq S$ *στον* E.

(*ii*) $T(v) \leq S(v+u), \;\; \forall \;\; v \in G$ *και* $u \in E^+$.

(*iii*) $T(v) \leq S(x), \;\; \forall \;\; v \in G$ *και* $x \in E$ *, τέτοια ώστε* $v \leq x$.

Απόδειξη. (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) Έστω $v \in G$ και $u \in E^+$. Τότε, $v \leq v + u$.
Επομένως, $T(v) = L(v) \leq L(u+v) \leq S(u+v)$.
(*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*) Ορίζουμε, $S_1 : E \longmapsto F$, ως

$$S_1(x) = \inf \left\{ S(x+u) \;:\; u \in E^+ \right\}, \;\; x \in E.$$

Για $u \in E^+$,

$$u = x + u - x \Rightarrow S(u) = S(x+u-x) \leq S(x+u) + S(-x),$$

και αν $v = 0 \in G$,

$$\begin{aligned} 0 &= T(0) \leq S(0+u) = S(u) \leq S(x+v) + S(-x) \Rightarrow \\ 0 &\leq -S(-x) \leq S(x+u), \;\; \forall \;\; u \in E^+. \end{aligned}$$

Επομένως, το σύνολο $\{S(x+u) \;:\; u \in E^+\}$ είναι κάτω φραγμένο στον Dedekind πλήρη χώρο F, πράγμα που σημαίνει πως η S_1 είναι καλά ορισμένη. Έστω τώρα $x, y \in E$ και $\lambda \geq 0$.

$$S_1(\lambda x) = \inf_{u \in E^+} S(\lambda x + u) = \inf_{u \in E^+} \lambda S(x + u\lambda) = \lambda \inf_{u_1 \in E^+} S(x+u_1) = \lambda S_1(x)$$

και $S_1(x+y) \leq S(x+y+u), \;\; \forall \;\; u \in E^+$, άρα

$$\begin{aligned} S_1(x+y) &\leq S(x+y+2u) \leq S(x+u) + S(y+u), \;\; u \in E^+ \\ &\leq \inf_{u \in E^+} \{S(x+u) + S(y+u)\} \leq \inf_{u \in E^+} S(x+u) + \inf_{u \in E^+} S(y+u), \;\; u \in E^+ \\ &= S_1(x) + S_1(y) \end{aligned}$$

Επομένως, S_1 υπογραμμική. Επίσης είναι και μονότονη, καθώς έστω $x, y \in E$ τέτοια ώστε $x \leq y$. θα δείξουμε ότι $S_1(x) \leq S_(y)$. Έχουμε,

$$S_1(x) = \inf \left\{ S(x+u) \;:\; u \in E^+ \right\} \leq S(x+u), \; \forall \, u \in E^+.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} x \leq y \Rightarrow y - x \geq 0 \;\;&\Rightarrow\;\; y - x \in E^+ \overset{u \in E^+}{\Rightarrow} y - x + u \in E^+ \Rightarrow \\ S_1(x) \leq S(x + (y-x+u)) = S(y+u) \;\;&\Rightarrow\;\; S_1(x) \leq S(y+u), \; \forall \, u \in E^+ \Rightarrow S_1(x) \leq \inf_{u \in E^+} S(y+u) = S_1(y). \end{aligned}$$

Εξ' υποθέσεως, για $v \in G$, έχουμε $T(v) \leq S(v+u), \quad \forall u \in E^+$ και εφόσον $S_1(v) = \inf_{u\in E^+} S(v+u)$ καταλήγουμε στο ότι $T(v) \leq S_1(v), \ \forall \ v \in G$. Επίσης για $x \in E$,

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \inf_{u\in E^+} S(x+u) \leq S(x+u), \ \forall \ u \in E^+ \ \Rightarrow \\ S_1(x) &\leq S(x), \ \forall \ x \in E. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη Πρόταση 2.3.9., υπάρχει γραμμική επέκταση του T, έστω $L : E \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $L \leq S_1$ στον E. Ήδη δείξαμε ότι $S_1 \leq S$ στον E, επομένως $L \leq S_1 \leq S$ στον E.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Έστω, $T(v) \leq S(v+u), \ \forall \ v \in G, \ \forall \ u \in E^+$. θα δείξουμε ότι, $T(v) \leq S(x), \ \forall \ v \in G, \ \forall \ x \in E$ με $v \leq x$.

Έστω λοιπόν $v \in G, \ \forall \ x \in E$ με $v \leq x$. Τότε $x - v \in E^+$ και άρα, $T(v) \leq S(v + x - v) = S(x)$.
$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Έστω $T(v) \leq S(x), \ \forall \ v \in G, \ \forall \ u \in E$ με $v \leq x$. Θα δείξουμε ότι, $T(v) \leq S(v+u), \ \forall \ v \in G, \ \forall \ u \in E^+$.

Για $v \in G$ και $u \in E^+$, $T(v) \leq S(u)$. Άρα, $v \leq v+u \ \Rightarrow \ T(v) \leq S(v+u)$. □

Παρατήρηση 2.3.11. *Ας υποθέσουμε ότι $E, \ F$ είναι μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου F Dedekind πλήρης, G majorizing υπόχωρος του E και $T : G \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής. Θεωρούμε τον τελεστή $S : E \longmapsto F$ που ορίζεται ως $S(x) = \inf \{T(a) \ : \ a \in G, \ a \geq x\}$.*

Ο S είναι μονότονος, υπογραμμικός και $S(a) = T(a), \ \forall \ a \in G$ (S καλά ορισμένος καθώς F Dedekind πλήρης). Για κάθε $v \in G$ και $x \in E$ τέτοια, ώστε $v \leq x$, ισχύει ότι $T(v) = S(v) \leq S(x)$. Επομένως (εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη (iii) της προηγούμενης Πρότασης) υπάρχει θετική γραμμική επέκταση του T σε ολόκληρο τον E.

Οι πιο πάνω υποθέσεις για $E, \ F, \ G, \ T$ και S είναι οι υποθέσεις της προηγούμενης Πρότασης. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το θεμελιώδες για τις θετικές επεκτάσεις Θεώρημα 2.1.6 (Hahn-Banach-Kantorovich), προκύπτει ως Πόρισμα της Πρότασης 2.3.10.

Εν συνεχεία θα δούμε κάποια αποτελέσματα επέκτασης χρησιμοποιώντας την auxiliary sublinear operator μέθοδο. Αρχικά, μέσω της μεθόδου, θα δούμε πώς προκύπτει μια ικανή συνθήκη ύπαρξης ενός μονότονου, υπογραμμικού τελεστή. Πρόκειται για μια συνεπαγωγή μεταξύ δύο ανισοτήτων που αφορούν δοθείσες απεικονίσεις (κινούμαστε στο πνεύμα του Θεωρήματος Mazur-Orlicz, καθώς η προαναφερθείσα συνεπαγωγή μας θυμίζει την ανισότητα που απαιτείται να ικανοποιεί ο υπογραμμικός τελεστής κατά την απόδειξη $(ii) \Rightarrow (i)$ του Θεωρήματος Mazur-Orlicz).

Θεώρημα 2.3.12. *([6], Thm 6.1) Έστω E_0, F μερικά διατεταγμένοι διανυσματικοί χώροι, με F Dedekind πλήρη και A, M τυχαία μη κενά σύνολα. Θεωρούμε τις απεικονίσεις, $g : A \longmapsto E_0$, $h : M \longmapsto E_0^+$, $f : A \longmapsto F$, $r : M \longmapsto F$ και έστω $E = span(g(A) \cup h(M)) \subseteq E_0$. Τέλος, υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} h(a_i) \ \ \Rightarrow \ \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r(a_i), \tag{2.6}$$

για κάθε πεπερασμένα σύνολα $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, $\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq M$, $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \subseteq \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Τότε υπάρχει ένας μονότονος υπογραμμικός τελεστής $S : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε

$$a)\ S \circ g \leq f \ \text{ στο } A \quad \text{και} \quad b)\ S \circ h \leq r \ \text{ στο } M.$$

Απόδειξη. Βήμα 1. Θα δείξουμε ότι η (2.6), είναι ισοδύναμη με την

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i) \ \ \Rightarrow \ \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(a_i), \tag{2.7}$$

για $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, $z_i \in M$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \geq 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, n$.

Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις.
Περίπτωση 1.
Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ και $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $y_i \in M$, $i = 1, \ldots, m$, ως

$$\begin{aligned} (i=1) \quad y_1 &= \ldots = y_{\lambda_1} = z_1, \quad (\lambda_1 \text{ το πλήθος}) \\ (i=2) \quad y_{\lambda_1+1} &= \ldots = y_{\lambda_1+\lambda_2} = z_2, \quad (\lambda_2 \text{ το πλήθος}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (i=n) \quad y_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}+1} &= \ldots = y_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} = z_n \quad (\lambda_n \text{ το πλήθος}). \end{aligned}$$

Εφόσον, $m \geq n$, γράφουμε $\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(a_i)$, με $\mu_{n+1} = \ldots = \mu_m = 0$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{m} h(y_i).$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν την συνεπαγωγή (2.6),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mu_i f(a_i) &\leq \sum_{i=1}^{m} r(y_i) = \sum_{i=1}^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} r(y_i) \\
&= \overbrace{r(y_1) + \cdots + r(y_{\lambda_1})}^{\lambda_1 r(z_1)} \\
&+ \overbrace{r(y_{\lambda_1+1}) + \cdots + r(y_{\lambda_1+\lambda_2})}^{\lambda_2 r(z_2)} \\
&+ \cdots \\
&+ \overbrace{r(y_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}+1}) + \cdots + r(y_m)}^{\lambda_n r(z_n)} \\
&= \lambda_1 r(z_1) + \lambda_2 r(z_2) + \lambda_n r(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(z_i).
\end{aligned}$$

Περίπτωση 2.
Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}_+^*$. Υποθέτουμε ότι $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$, όπου $p_i \in \mathbb{N}$, $q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$ και έστω q το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $q_i, \ldots, q_n$. Τότε υπάρχει $k_i \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $q = k_i q_i$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(zi) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} h(z_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i k_i}{q} h(z_i) \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} q\mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i k_i h(z_i) &\overset{\text{περ.1}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} q\mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i k_i r(z_i) \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i k_i}{q} r(z_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} r(z_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(z_i).
\end{aligned}$$

Περίπτωση 3.
Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, έστω $(\lambda_i^{(k)})$ μια ακολουθία θετικών ρητών τέτοια, ώστε $\lambda_i^{(k)} \searrow \lambda_i$ για $k \to \infty$. Εφόσον η h παίρνει θετικές τιμές, έχουμε

$$\begin{aligned}
z_i \in M &\Rightarrow h(z_i) \geq 0 \Rightarrow \lambda_i^{(k)} h(z_i) \searrow \lambda_i h(z_i) \\
&\Rightarrow \lambda_i^{(k)} h(z_i) \geq \lambda_i h(z_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} h(z_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i).
\end{aligned}$$

Έτσι αν, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i)$, θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} h(z_i)$$

και εφαρμόζοντας την Περίπτωση 2,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} r(z_i).$$

Για $k \to \infty$, $\lambda_i^{(k)} \searrow \lambda_i$ και ο χώρος F είναι Αρχιμήδειος, επομένως έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(z_i).$$

Βήμα 2. Ορίζουμε τον τελεστή $S : E = span(g(A) \cup h(M)) \longmapsto F$, ως

$$S(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(z_i) \right\},$$

λαμβάνοντας infimum ως προς όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς που ικανοποιούν την ανισότητα,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i) \geq x \ , \quad (*)$$

με $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, $z_i \in M$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, n$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχει το infimum. Προς τούτο, έστω $x \in E = span(g(A) \cup h(M))$. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, $a_i^{'} \in A$, $z_i^{'} \in M$ και $\xi_i, \zeta_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, \ldots, m$ τέτοια, ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i g(a_i^{'}) + \sum_{i=1}^{m} \zeta_i h(z_i^{'})$. Έχουμε λοιπόν,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i g(a_i^{'}) + \sum_{i=1}^{m} \zeta_i h(z_i^{'}) \overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i),$$

όπου $a_i \in A$, $z_i \in M$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, n$. Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = n$. Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \xi_i g(a_i^{'}) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i) - \sum_{i=1}^{n} \zeta_i h(z_i^{'}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(z_i) + \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i| h(z_i^{'}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την συνεπαγωγή (2.7), προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(a_i^{'}) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(z_i) + \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i| r(z_i^{'}),$$

ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(a_i^{'}) - \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i| r(z_i^{'}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r(z_i).$$

Η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι το σύνολο που εμφανίζεται στον ορισμό του $S(x)$, ελαχιστοποιείται στον Dedekind πλήρη F από το στοιχείο $\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(a_i^{'}) - \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i| r(z_i^{'})$. Πράγματι λοιπόν το infimum υπάρχει και συμβολίζεται με $S(x)$. Ύστερα από πράξεις βλέπουμε ότι ο S είναι μονότονος και υπογραμμικός.

Βήμα 3. Ο υπογραμμικός τελεστής S έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Πράγματι, για να δείξουμε ότι $S \circ g \leq f$ στο A, έστω a τυχόν στοιχειό του A. Εφόσον έχουμε $g(a) \leq 1 \cdot g(a) + 0 \cdot h(z)$, για κάποιο $z \in M$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} S(g(a)) &\leq S(1 \cdot g(a) + 0 \cdot r(z)) = \inf \{\ldots\} \Rightarrow \\ S(g(a)) &\leq 1 \cdot f(a) + 0 \cdot r(z) = f(a) \Rightarrow \\ (S \circ g)(a) &\leq f(a), \ \ \forall \, a \in A. \end{aligned}$$

Για την άλλη ανισότητα, παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in M$, μπορούμε να γράψουμε $h(z) \leq 0 \cdot g(a) + 1 \cdot h(z)$, για τυχαίο $a \in A$. Τότε, εφόσον ο S είναι μονότονος,

$$S(h(z)) \leq S(0 \cdot g(a) + 1 \cdot h(z)) \leq 0 \cdot f(a) + 1 \cdot r(z) = r(z).$$

Συνεπώς, $(S \circ h)(z) \leq r(z), \ \ \forall \, z \in M.$ □

Θεώρημα 2.3.13. *([6], Thm 6.2) Υπό τις ίδιες προυποθέσεις με το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει ένας θετικός, γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε*

$$a)\ L \circ g \leq f \ \text{ στο } A \quad \text{ και } \quad b)\ L \circ h \leq r \ \text{ στο } M.$$

Απόδειξη. Βάσει του προηγούμενου Θεωρήματος, υπάρχει μονότονος υπογραμμικός τελεστής $S : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $S \circ g \leq f$ στο A και $S \circ h \leq r$ στο M. χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα ύπαρξης Hahn-Banach (Θεώρημα 2.3.2), για τον υπογραμμικό S, υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $L \leq S$ στον E. Από την Παρατήρηση 2.3.7, $S(x),\ L(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Έχουμε λοιπόν $S \circ g \leq f$ στο A και $L \circ h \leq r$ στον E, συνεπώς

$$L(g(x)) \leq S(g(x)) \ \Rightarrow \ L \circ g(x) \leq f(x), \ \forall \ x \in A.$$

Όμοια αποδεικνύουμε και ότι $L \circ h(x) \leq r(x), \ \forall \ x \in M$. □

Στο Θεώρημα 2.3.13, η συνθήκη (2.6) του Θεωρήματος (2.3.12), είναι ικανή για την ύπαρξη θετικού γραμμικού τελεστή. Στο επόμενο Θεώρημα, γίνεται ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης θετικού γραμμικού τελεστή.

Θεώρημα 2.3.14. *([6], Thm 6.3) Έστω E_0 και G μερικά διατεταγμένοι χώροι. Έστω επίσης F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος και M τυχαίο μη κενό σύνολο. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $h : M \longmapsto (E_0)^+$ και $r : M \longmapsto F$ και τους γραμμικούς τελεστές $P : G \longmapsto E_0$ και $T : G \longmapsto F$ όπου ο T είναι επίσης θετικός. Τέλος, συμβολίζουμε με E το σύνολο $span(P(G) \cup h(M)) \subseteq E_0$.*

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

(i) Υπάρχει θετικός, γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε
a) $L \circ P = T$ στον G και b) $L \circ h \leq r$ στο M.

(ii) Για κάθε $v \in G$, $z_1, \ldots, z_n \in M$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η συνεπαγωγή,

$$P(v) \leq \sum_{i=1}^{n} h(z_i) \implies T(v) \leq \sum_{i=1}^{n} r(z_i). \tag{2.8}$$

Απόδειξη. $(i) \implies (ii)$ Έστω $n \in \mathbb{N}$, $v \in G$ και $z_1, \ldots, z_n \in M$. Τότε,

$$\begin{aligned} P(v) \leq \sum_{i=1}^{n} h(z_i) \quad &\Rightarrow \quad L(P(v)) \leq L(\sum_{i=1}^{n} h(z_i)) = \sum_{i=1}^{n} L(h(z_i)) \\ &\Rightarrow \quad (L \circ P)(v) \leq \sum_{i=1}^{n} (L \circ h)(z_i). \\ (L \circ h) \leq r \ \text{ στο } M \quad &\Rightarrow \quad \forall \ i = 1, \cdots, n, \ (L \circ h)(z_i) \leq r(z_i) \\ &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (L \circ h)(z_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r(z_i). \end{aligned}$$

Τελικά, $(L \circ P)(v) = T(v) \leq \sum_{i=1}^{n} r(z_i)$.

$(ii) \implies (i)$ Εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 2.3.12 και 2.3.13, (υπό την διατύπωση του 2.3.13 έχουμε, $g = P$, $A = G$ και $f = T$) και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα των τελεστών P και T παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το προηγούμενο Θεώρημα ύπαρξης συνεπάγεται ένα αποτέλεσμα επέκτασης, θεωρώντας G ως διανυσματικό υπόχωρο του E_0 και $P = I : G \longmapsto G$ τον ταυτοτικό τελεστή.

Θεώρημα 2.3.15. *([6], Thm 6.4) Έστω E_0 μερικά διατεταγμένος χώρος, G διανυσματικός υπόχωρός του, F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος και M τυχαίο σύνολο. Θεωρούμε δύο απεικονίσεις $h : M \longmapsto (E_0)^+$ και $r : M \longmapsto F$, θετικό γραμμικό τελεστή $T : G \longmapsto F$ και έστω E το σύνολο $span(G \cup h(M)) \subseteq E_0$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(*i*) *Υπάρχει θετικός, γραμμικός τελεστής* $L : E \longmapsto F$ *τέτοιος, ώστε*
  a) $L = T$ *στον* G *και* b) $L \circ h \leq r$ *στο* M.
(*ii*) *Για κάθε* $v \in G$, $z_1, \ldots, z_n \in M$ *και* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει η συνεπαγωγή,*

$$v \leq \sum_{i=1}^{n} h(z_i) \implies T(v) \leq \sum_{i=1}^{n} r(z_i). \tag{2.9}$$

Τέλος παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου Θεωρήματος και έχει εφαρμογές στην κυρτή ανάλυση (βλ. [8]).

Θεώρημα 2.3.16. *([6], Thm 6.5) Έστω* E_0 *μερικά διατεταγμένος χώρος,* G *διανυσματικός υπόχωρός του,* F *Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος και* M *τυχαίο μη κενό υπόσυνολο του* E_0^+. *Θεωρούμε μία τυχαία απεικόνιση* $r : M \longmapsto F$ *και έναν θετικό γραμμικό τελεστή* $T : G \longmapsto F$. *Έστω τέλος* $E = span(G \cup M) \subseteq E_0$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*
(*i*) *Υπάρχει θετικός, γραμμικός τελεστής* $L : E \longmapsto F$ *τέτοιος, ώστε*
  a) $L = T$ *στον* G *και* b) $L \leq r$ *στο* M.
(*ii*) *Για κάθε* $v \in G$, $z_1, \ldots, z_n \in M$ *και* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει η συνεπαγωγή,*

$$v \leq \sum_{i=1}^{n} z_i \implies T(v) \leq \sum_{i=1}^{n} r(z_i). \tag{2.10}$$

Απόδειξη. Έχοντας $\emptyset \neq M \subseteq E_0^+$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.3.15, για την ταυτοτική απεικόνιση

$$h = J : M \longmapsto M$$

και παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Το Θεώρημα 2.3.16, γίνεται Θεώρημα επέκτασης σε ολόκληρο τον E_0 αν $E_0 = span(G \cup M)$ για τις επόμενες περιπτώσεις
1. $M = E_0^+$ και $E_0 = E_0^+ - E_0^+$ (δηλαδή, ο κώνος E_0^+ είναι generating).
2. $M \subseteq E_0^+$ είναι μια αλγεβρική βάση του E_0.
3. $M = E_0^+$ και G majorizing υπόχωρος του E_0.

Κοιτάζοντας τις ικανές για ύπαρξη θετικού γραμμικού τελεστές, συνθήκες (ανισότητες) των Θεωρημάτων 2.3.13, 2.3.14, 2.3.15 και 2.3.16, παρατηρούμε ότι τα αριστερά μέλη των ανισοτήτων απλοποιούνται, αν το σύνολο A αντικατασταθεί από τυχαίο μερικά διατεταγμένο χώρο G και αν η απεικόνιση $g : A \longmapsto E_0$, αντικατασταθεί με την σειρά της από γραμμικό τελεστή $P : G \longmapsto E_0$, αντίστοιχα αν το A αντικατασταθεί από υπόχωρο G του E_0 και αν η $g : A \longmapsto E_0$, αντικατασταθεί από τον ταυτοτικό τελεστή $I : G \longmapsto G$.

Από τα παραπάνω προκύπτει το ερώτημα : είναι δυνατό να απλοποιηθούν και τα δεξιά μέλη των ανισοτήτων ; Η απάντηση στο ερώτημα είναι θετική, υποθέτοντας ότι M είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση υποσύνολο ενός τυχαίου μερικά διατεταγμένου χώρου και ότι οι απεικονίσεις $-h$ και r είναι υποπροσθετικές[2]. Υπό αυτές τις προυποθέσεις, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τα Θεωρήματα 2.3.12, 2.3.13, 2.3.14, 2.3.15 και 2.3.16. Σε αυτή την περίπτωση, οι συνθήκες 2.6, 2.8, 2.9 και 2.10 μετατρέπονται στις

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq h(z) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq r(z), \;\; z \in M \\
P(v) \leq h(z) \quad &\Rightarrow \quad T(v) \leq r(z), \;\; v \in G, \;\; z \in M \\
v \leq h(z) \quad &\Rightarrow \quad T(v) \leq r(z), \;\; v \in G, \;\; z \in M \\
v \leq z \quad &\Rightarrow \quad T(v) \leq r(z), \;\; v \in G, \;\; z \in M.
\end{aligned}$$

Για παράδειγμα το Θεώρημα 2.3.13, γίνεται :

[2] $-h(x+y) \leq -h(x) - h(y)$ και $r(x+y) \leq r(x) + r(y), \;\; \forall \; x, y$

Θεώρημα 2.3.17. *([6], Thm 6.7) Έστω E_0 μερικά διατεταγμένος χώρος, F Dedekind πλήρης μερικά διατεταγμένος χώρος, A και M τυχαία μη κενά σύνολα όπου M είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, σε τυχαίο μερικά διατεταγμένο χώρο E_1. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $g : A \longmapsto E_0$, $h : M \longmapsto E_0^+$, $f : A \longmapsto F$, $r : M \longmapsto F$ τέτοιες, ώστε $-h$ και r υποπροσθετικές. Συμβολίζουμε με E το σύνολο $span(g(A) \cup h(M)) \subseteq E_0$. Έστω ότι για κάθε πεπερασμένα σύνολα $\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq A$, $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\} \subseteq \mathbb{R}$ και για κάθε $z \in M$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq h(z) \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq r(z). \tag{2.11}$$

Τότε υπάρχει θετικός, γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε

$$a) \;\; L \circ g \leq f \;\; \text{στο } A \quad \text{και} \quad b) \;\; L \circ h \leq r \;\; \text{στο } M. \tag{2.12}$$

Απόδειξη. Η σχέση (2.11) συνεπάγεται την (2.6).

Πράγματι, έστω

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} h(z_i),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, $z_i \in M$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Εφόσον $-h$ είναι υποπροσθετικός έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i g(a_i) \leq h(\sum_{i=1}^{n} z_i),$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} z_i \in M$. Χρησιμοποιώντας την 2.11 και την υποπροσθετικότητα του r, καταλήγουμε στο ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(a_i) \leq r(\sum_{i=1}^{n} z_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r(z_i).$$

Επομένως το Θεώρημα 2.3.17 είναι συνεπαγωγή του Θεωρήματος 2.3.13. □

2.3.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος Mazur-Orlicz

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο, είναι να παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές του κύριου Θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή του Θεωρήματος Mazur-Orlicz (στη μορφή μερικά διατεταγμένων διανυσματικών χώρων).

Αρχικά θα δούμε πώς το Θεώρημα εφαρμόζεται στην απόδειξη κάποιων Θεωρημάτων διάσπασης, για τελεστές ή συναρτησιακά που δρουν σε μερικά διατεταγμένους διανυσματικούς χώρους. Λέγοντας Θεωρήματα διάσπασης, αναφερόμαστε σε Θεωρήματα αθροισμάτων, Θεωρήματα μεγίστου ή Θεωρήματα κυρτών συνδυασμών.

Θα δούμε τέλος και ένα minimax Θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.18. *([6], Thm 3.1) Έστω E, F μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου F Dedekind πλήρης και $S_1, \ldots, S_n : E \longmapsto F$ μονότονοι, υπογραμμικοί τελεστές. Έστω επίσης K μη κενό, κυρτό σύνολο, $P : K \longmapsto E$ κυρτός και $Q : K \longmapsto F$ κοίλος τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*
(i) $Q \leq S_1 \circ P + \ldots + S_n \circ P$ *στο* K.
(ii) *Υπάρχουν* $P_1, \ldots, P_n : K \longmapsto F$ *κυρτοί τελεστές τέτοιοι, ώστε*

$$a) \;\; Q \leq P_1 + \ldots + P_n \;\; \text{στο } K,$$

$$b) \;\; P_i \leq S_i \circ P, \;\; \text{στο } K, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Απόδειξη. $(ii) \Longrightarrow (i)$ Έστω, $x \in K$. Τότε,

$$Q(x) \leq P_1(x) + \cdots + P_n(x) \leq S_1 \circ P(x) + \ldots + S_n \circ P(x).$$

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Ορίζουμε, $S : E^n \longmapsto F$ και $\tilde{P} : K \longmapsto E^n$ έτσι, ώστε

$$S(x_1, \ldots, x_n) = S_1(x_1) + \ldots + S_n(x_n) \text{ και } \tilde{P}(a) = (P(a), \ldots, P(a)),$$

αντίστοιχα. Έστω $x \leq y$ στον E^n. Τότε, $x_i \leq y_i$ στον E. Εφόσον S_i, $i = 1, \ldots, n$ μονότονος,

$$S_i(x_i) \leq S_i(y_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} S_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} S_i(y_i) \Leftrightarrow S(x) \leq S(y).$$

Επομένως S μονότονος και εύκολα βλέπουμε ότι είναι και υπογραμμικός (χρησιμοποιώντας την υπογραμμικότητα των S_i).

Ο $\tilde{P}$ είναι κυρτός καθώς για $a, b \in K$ και $\lambda, \mu \in (0,1)$ με $\lambda + \mu = 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(a + \mu b) &= (P(a + \mu b), \ldots, P(a + \mu b)) \\ &\leq (\lambda P(a) + \mu P(b), \ldots, \lambda P(a) + \mu P(b)) \\ &= \lambda \tilde{P}(a) + \mu \tilde{P}(b). \end{aligned}$$

και επίσης $Q \leq S \circ \tilde{P}$ στον K, καθώς

$$S \circ \tilde{P}(a) = S(\tilde{P}(a)) = S_1(P(a)) + \ldots + S_n(P(a)) = S_1 \circ P(a) + \ldots + S_n \circ P(a) \overset{(i)}{\geq} Q(a).$$

Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα Mazur-Orlicz, από όπου υπάρχει θετικός τελεστής $L : E^n \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $L \leq S$ στον E^n και $Q \leq L \circ \tilde{P}$ στον K. Οι ζητούμενοι τελεστές P_i δίνονται ως $P_i : K \longmapsto F$ έτσι, ώστε

$$P_i(a) := L(0, \ldots, 0, P(a), 0, \ldots, 0).$$

Μένει να δείξουμε ότι P_i, $i = 1, \ldots, n$ είναι κυρτοί και ότι ισχύουν τα (a) και (b). Προς τούτο, θεωρώντας $a, b \in K$ και $\lambda, \mu \in (0,1)$ με $\lambda + \mu = 1$, ύστερα από απλές πράξεις βλέπουμε ότι,

$$P_i(\lambda a + \mu b) \leq \lambda P_i(a) + \mu P_i(b), \;\; Q(a) \leq \sum_{i=1}^{n} P_i(a) \text{ και } P_i(a) \leq S_i \circ P(a).$$

πράγμα που σημαίνει ότι ισχύουν τα (a) και (b). □

Αν στο παραπάνω Θεώρημα αντικαταστήσουμε το κυρτό σύνολο K με έναν διανυσματικό χώρο X και θεωρήσουμε γραμμικούς τελεστές P και Q, τότε ο Q μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα γραμμικών τελεστών. Για την ακρίβεια, ισχύει το επόμενο.

Θεώρημα 2.3.19. *([6], Thm 3.2) Έστω E, F μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου F Dedekind πλήρης και $S_1, \ldots, S_n : E \longmapsto F$ μονότονοι, υπογραμμικοί τελεστές. Έστω επίσης X διανυσματικός χώρος και $P : X \longmapsto E$, $Q : X \longmapsto F$ γραμμικοί τελεστές. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*
(i) $Q \leq S_1 \circ P + \ldots + S_n \circ P$ στον X.
(ii) Υπάρχουν $P_1, \ldots, P_n : X \longmapsto F$ γραμμικοί τελεστές τέτοιοι, ώστε

$a)$ $Q = P_1 + \ldots + P_n$ στον X,

$b)$ $P_i \leq S_i \circ P$ στον X, $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος, λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι τελεστές P_i, $i = 1, \ldots, n$ είναι γραμμικοί. □

Ακολουθεί ένα Λήμμα, που θα χρησιμοποιήσουμε στις αποδείξεις των επόμενων Θεωρημάτων.

Λήμμα 2.3.20. *Έστω γραμμικό συναρτησιακό* $l : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ *τέτοιο, ώστε*

$$l(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *πραγματικοί αριθμοί. Έστω επίσης* $s : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ *ένα μονότονο, υπογραμμικό συναρτησιακό ορισμένο ως*

$$s(a_1, \ldots, a_n) = \max\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :
(i) $l \leq s$ *στον* $\mathbb{R}^n$.
(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ *και* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Έστω $a \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} l &\leq s \Rightarrow l(-a) \leq s(-a) \Rightarrow -l(a) \leq s(-a) \Leftrightarrow \\ -s(-a) &\leq l(a) \Rightarrow -s(-a) \leq l(a) \leq s(a), \ \forall \ a \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Έστω τώρα $a = e_i, \ i = 1, 1, \ldots, n$ (όπου, $e_i = (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{\vartheta\acute{\varepsilon}\sigma\eta - i}, 0, \ldots, 0)$). Από την σχέση (2.13),

$$-S(-e_i) \leq l(e_i) \leq S(e_i) \Rightarrow 0 \leq \lambda_i \leq 1, \ \forall \, i = 1, \ldots, n.$$

Για $a = (1, \ldots, 1)$, η (2.13) συνεπάγεται,

$$-S(-a) \leq l(a) \leq S(a) \Rightarrow -(-1) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Τότε, $\forall \ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$l(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \max\{a_1, \ldots, a_n\} = s(a_1, \ldots, a_n).$$

□

Θεώρημα 2.3.21. *([6], Thm 3.4) Έστω* E *μερικά διατεταγμένος χώρος και* $s_1, \ldots, s_n : E \longmapsto \mathbb{R}$, n *το πλήθος υπογραμμικά συναρτησιακά. Έστω* K *κυρτό σύνολο,* $P : K \longmapsto E$ *κυρτός τελεστης και* $q : K \longmapsto \mathbb{R}$ *κοίλο συναρτησιακό. Τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα.*
(i) $q \leq \max\{s_1 \circ P, \ldots, s_n \circ P\}$ *στο* K.
(ii) *Υπάρχουν* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ *τέτοια, ώστε* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ *και*

$$q \leq \lambda_1(s_1 \circ P) + \ldots + \lambda_n(s_n \circ P) \ \text{ στο } \ K.$$

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Ορίζουμε $s : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ και $\tilde{P} : K \longmapsto \mathbb{R}^n$ έτσι, ώστε

$$s(a_1, \ldots, a_n) = \max\{a_1, \ldots, a_n\} \ \text{ και } \ \tilde{P}(a) = (s_1(P(a)), \ldots, s_n(P(a))).$$

Ύστερα από απλές πράξεις καταλήγουμε στο ότι ο s είναι υπογραμμικός, μονότονος και ο $\tilde{P}$ κυρτός. Έχοντας ορίσει τους s και $\tilde{P}$, η συνθήκη (i) μετατρέπεται στην $q \leq s \circ \tilde{P}$ στο K. Από το Θεώρημα Mazur-Orlicz, υπάρχει θετικός γραμμικός τελεστής $l : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$(a) \ l \leq s \ \text{ στο } \ \mathbb{R}^n, \quad (b) \ q \leq l \circ \tilde{P} \ \text{ στο } \ K.$$

Ο $l : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ έχει τη μορφή

$$l(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n, \ \text{ για } \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το προηγούμενο Λήμμα, παίρνουμε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
Τέλος,

$$q \leq l \circ \tilde{P} \ \text{ στο } \ K \ \Leftrightarrow \ q \leq \lambda_1(s_1 \circ P) + \ldots + \lambda_n(s_n \circ P) \ \text{ στο } \ K.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Απλή επαλήθευση. □

Στη συνέχεια θα δούμε πως αν τα συναρτησιακά $s_1, \ldots, s_n$ του προηγούμενου Θεωρήματος είναι και μονότονα, η συνθήκη (ii) μετατρέπεται σε συνθήκη ύπαρξης n το πλήθος κυρτών συναρτησιακών, ένας γραμμικός συνδυασμός των οποίων κυριαρχεί επί του συναρτησιακού q.

Θεώρημα 2.3.22. *([6], Thm 3.5) Έστω E μερικά διατεταγμένος χώρος και $s_1, \ldots, s_n : E \longmapsto \mathbb{R}$, n το πλήθος μονότονα υπογραμμικά συναρτησιακά. Έστω K κυρτό σύνολο, $P : K \longmapsto E$ κυρτός τελεστής και $q : K \longmapsto \mathbb{R}$ κοίλο συναρτησιακό. Τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα.*
(i) $q \leq \max\{s_1 \circ P, \ldots, s_n \circ P\}$ στο K.
(ii) Υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ τέτοια, ώστε $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $p_1, \ldots, p_n : K \longmapsto \mathbb{R}$ κυρτά συναρτησιακά με τις ιδιότητες :

$$\begin{aligned} a)\ q &\leq \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n \ \text{ στο } K, \\ b)\ p_i &\leq s_i \circ P \ \text{ στο } K,\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ τέτοια, ώστε

$$\begin{aligned} q &\leq \lambda_1(s_1 \circ P) + \ldots + \lambda_n(s_n \circ P) \\ &\leq (\lambda_1 s_1) \circ P + \cdots + (\lambda_n s_n) \circ P, \end{aligned}$$

στο K.

Εφόσον $s_1, \ldots, s_n$ είναι μονότονοι, υπογραμμικοί, το ίδιο ισχύει και για τους $\lambda_i s_i$, $i = 1, \ldots, n$. Από το Θεώρημα 2.3.18., υπάρχουν $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n : K \longmapsto \mathbb{R}$ κυρτά συναρτησιακά τέτοια, ώστε

$$q \leq \tilde{p}_1 + \cdots + \tilde{p}_n \quad \text{και} \quad \tilde{p}_i \leq (\lambda_i s_i) \circ P, \ \text{ στο } K, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

Τα ζητούμενα κυρτά συναρτησιακά είναι

$$p_i = \frac{1}{\lambda_i}\tilde{p}_i, \ \ \lambda_i \neq 0, \ \text{ και } \ p_i = s_i \circ P, \ \lambda_i = 0.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Απλή επαλήθευση. □

Θα δείξουμε τέλος και μια εφαρμογή του Θεωρήματος Mazur-Orlicz, στην απόδειξη ενός minimax αποτελέσματος (Θεώρημα 2.3.24). Για την απόδειξη του minimax Θεωρήματος, θα χρειαστούμε το επόμενο.

Πρόταση 2.3.23. *([6], Prop 4.1) Έστω E, F μερικά διατεταγμένοι διανυσματικοί χώροι, όπου F Dedekind πλήρης και K μη κενό κυρτό σύνολο. Αν $S : E \longmapsto F$ είναι μονότονος υπογραμμικός και $P : K \longmapsto E$ κυρτός τελεστής τέτοιος, ώστε να υπάρχει το $\inf\{S(P(a)) : a \in K\}$, τότε υπάρχει θετικός γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε :*
(a) $L \leq S$ στον E.
(b) Υπάρχει το $\inf\{L(P(a)) : a \in K\}$ και είναι

$$\inf\{L(P(a)) \ : \ a \in K\} \ = \ \inf\{S(P(a)) \ : \ a \in K\}.$$

Απόδειξη. Έστω $y = \inf_{a \in K} S(P(a))$. Ορίζουμε την απεικόνιση $Q : K \longmapsto F$, ως $Q(a) = y$, $\forall\ a \in K$ και ισχυριζόμαστε ότι είναι κοίλη και $Q \leq S \circ P$ στο K. Έστω $a, b \in K$ και $\lambda, \mu \in (0,1)$ με $\lambda + \mu = 1$. Τότε,

$$Q(a) = \inf_{a \in K} S(P(a)) \leq S(P(a)) = S \circ P(a), \ \forall\ a \in K$$

και άρα $Q \leq S \circ P$ στο K. Επίσης,

$$\begin{aligned} P(\lambda a + \mu b) &\leq \lambda P(a) + \mu P(b) \ \Rightarrow \ S(P(\lambda a + \mu b)) \leq \lambda S(P(a)) + \mu S(P(b)) \ \Rightarrow \\ \inf\{\ldots\} &\geq \inf\{\ldots\} = \inf\{\ldots\} + \inf\{\ldots\} = \lambda \inf\{\ldots\} + \mu \inf\{\ldots\} \end{aligned}$$

Επομένως, $Q(\lambda a + \mu b) \geq \lambda Q(a) + \mu Q(b)$.

Από τα προηγούμενα και εφόσον $Q \leq S \circ P$ στο K, (λόγω του Θεωρήματος Mazur-Orlicz) υπάρχει θετικός γραμμικός τελεστής $L : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε

$$(a)\, L \leq S \ \text{ στον } \ E \quad \text{και} \quad (b)\, Q \leq L \circ P \ \text{ στο } \ K.$$

Από το (b) συνεπάγεται ότι, $Q(a) = y \leq L(P(a)), \ \ \forall \ a \in K$. Επομένως, το σύνολο $\{L(P(a)) \ : \ a \in K\}$, είναι κάτω φραγμένο (στον Dedekind πλήρη χώρο F) από το y. Άρα, υπάρχει το $\inf = \{L(P(a)) \ : \ a \in K\}$ και μάλιστα $\inf = \{L(P(a)) \ : \ a \in K\} \geq y$ όπου $y = \inf_{a \in K} S(P(a))$. Δηλαδή,

$$\inf = \{L(P(a)) \ : \ a \in K\} \geq \inf_{a \in K} S(P(a)).$$

Τέλος, εφόσον $L \leq S$ στον E και $\forall \, a \in K, \ P(a) \in E$,

$$L(P(a)) \leq S(P(a)) \ \Rightarrow \ \inf_{a \in K} L(P(a)) \leq \inf_{a \in K} S(P(a)).$$

□

Θεώρημα 2.3.24. *([6], Thm 4.2) Έστω K μη κενό, κυρτό σύνολο και $p_1, \ldots, p_n : K \longmapsto \mathbb{R}$ κυρτά συναρτησιακά τέτοια, ώστε να υπάρχει το*

$$\inf \left\{ \max \left\{ p_1(a), \ldots, p_n(a) \right\} \ : \ a \in K \right\}.$$

Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ και

$$\inf_{a \in K} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p(a_i) \right\} = \inf \left\{ \max \left\{ p_1(a), \ldots, p_n(a) \right\} \ : \ a \in K \right\}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $E = \mathbb{R}^n, \ F = \mathbb{R}$ και $s : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ έτσι, ώστε $s(a_1, \ldots, a_n) = \max \{a_1, \ldots, a_n\}$. Εύκολα βλέπουμε πως η απεικόνιση s είναι μονότονη και υπογραμμική.

Ορίζουμε επίσης την κυρτή απεικόνιση, $P : K \longmapsto \mathbb{R}$, ως $P(a) = (p_1(a), \ldots, p_n(a))$. Εξ' υποθέσεως,

$$\inf_{a \in K} S(P(a)) = \inf \left\{ \max \left\{ p_1(a), \ldots, p_n(a) \right\} \ : \ a \in K \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την αμέσως προηγούμενη Πρόταση, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $l : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $l \leq s$ στο $\mathbb{R}^n$ και

$$\inf \left\{ l(P(a)) \ : \ a \in K \right\} = \inf \left\{ s(P(a)) \ : \ a \in K \right\}. \tag{2.14}$$

Από το Λήμμα 2.3.20 ($l \leq s, \ $ στον $\ \mathbb{R}^n$), καταλήγουμε στο ότι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ και από τον ορισμό των $l, \ s$ και τη σχέση (2.14), καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} l(a_1, \ldots, a_n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad \text{και} \quad s(a_1, \ldots, a_n) = \max \left\{ a_1, \ldots, a_n \right\}, \quad \text{συνεπώς} \\ l(P(a)) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i(a) \quad \text{και} \quad S(P(a)) = \max \left\{ p_1(a), \ldots, p_n(a) \right\} \end{aligned}$$

και άρα,

$$\inf_{a \in K} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i(a) = \inf_{a \in K} \max \{p_1(a), \ldots, p_n(a)\}.$$

□

Κεφάλαιο 3

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα σε Banach lattices

Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα για την θεωρία των θετικών επεκτάσεων σε Banach lattices, είναι αυτό που απέδειξαν οι Y. A. Abramovich και A. W. Wickstead στο άρθρο τους 'The Regularity of Order Bounded Operators into C(K), II' ([1]). Όπως είδαμε, το Θεώρημα Hahn-Banach-Kantorovich για μερικά διατεταγμένους διανυσματικούς χώρους, προυποθέτει ότι ο χώρος F είναι Dedekind πλήρης. Το Θεώρημα Abramovich-Wickstead, είναι ένα τύπου Hahn-Banach-Kantorovich αποτέλεσμα, το οποίο αντικαθιστά αυτή τη συνθήκη με την ασθενέστερη countable interpolation property (ή Cantor property).

3.1 Το Θεώρημα Abramovich-Wickstead

Μια νόρμα $\|\cdot\|$ σε έναν χώρο Riesz καλείται **lattice norm**, όταν $|x| \leq |y|$ συνεπάγεται $\|x\| \leq \|y\|$. Ένας χώρος Riesz εφοδιασμένος με μια lattice νόρμα, καλείται **χώρος Riesz με νόρμα** ή **normed lattice** και αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα, καλείται **Banach lattice**.

Παρατήρηση 3.1.1. *Σε χώρο Riesz με νόρμα E, ισχύει ότι $\|x\| = \||x|\|$, για κάθε $x \in E$. Επίσης,*

$$\left\|x^+ - y^+\right\| \leq \|x - y\| \quad \text{και} \quad \||x| - |y|\| \leq \|x - y\|,$$

για κάθε $x, y \in E$.

Αν E και F Banach lattices και $T : E \longmapsto F$ θετικός τελεστής, τότε ο T είναι κατ' ανάγκην συνεχής. Αυτό το αποτέλεσμα απεδείχθει αρχικά από τον S. Banach για ολοκληρωτικούς τελεστές. Αντίστοιχο είναι το Θεώρημα που ακολουθεί, το οποίο είναι αρκετά χρήσιμο για κάποιες από τις επόμενες αποδείξεις και απεδείχθει από τους I. A. Bahtin, M. A. Krasnoselskii, V. Y. Stecenko. Όσον αφορά θετικά γραμμικά συναρτησιακά, πάλι ισχύει αντίστοιχο Θεώρημα (G. Birkhoff, M. G. Krein).

Θεώρημα 3.1.2. *Κάθε θετικός τελεστής από Banach lattice σε normed lattice, είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $T : E \longmapsto F$ θετικός τελεστής από Banach lattice σε χώρο Riesz με νόρμα. Έστω προς άτοπο ότι ο T δεν είναι φραγμένος ως προς τη νόρμα. Τότε υπάρχει μια ακολουθία (x_n) του E έτσι, ώστε $\|x_n\| = 1$ και $\|Tx_n\| \geq n^3$. Εφόσον $|Tx_n| \leq T|x_n|$, υποθέτουμε ότι $x_n \geq 0, \ \forall \ n$. Από το ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{n^2}$ και ότι ο E είναι πλήρης, παίρνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ είναι συγκλίνουσα ως προς τη νόρμα στον E.

Έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$. Προφανώς, $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x, \ \forall \ n$ και έτσι

$$n \leq \left\|T(\frac{x_n}{n^2})\right\| \leq \|Tx\| < \infty, \ \forall \ n,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

Επομένως, ο T είναι φραγμένος ως προς τη νόρμα και άρα συνεχής. □

Ορισμός 3.1.3. *Ένας Αρχιμήδειος χώρος Riesz E λέμε ότι ικανοποιεί την* ***ιδιότητα Cantor*** *(ή* ***countable interpolation property****), αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών $x_n \uparrow$, $z_m \downarrow$ στον E με $x_n \leq z_m$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y \in E$, τέτοιο ώστε $x_n \leq y \leq z_m$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.*

Λέμε ότι ο E ικανοποιεί την ***strong countable interpolation property****, αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών (x_n) και (z_m) στον E, για τις οποίες $x_n \leq z_m$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y \in E$, τέτοιο ώστε $x_n \leq y \leq z_m$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.*

Ακολουθεί το Θεώρημα Abramovich-Wickstead ([1], Thm 3.5).

Θεώρημα 3.1.4. *(Abramovich-Wickstead). Έστω E και F Banach lattices τέτοια, ώστε E διαχωρίσιμο και F έχει την ιδιότητα Cantor. Έστω επίσης $p : E \longmapsto F$ ένας συνεχής υπογραμμικός τελεστής. Αν E_0 είναι διανυσματικός υπόχωρος του E και $T : E_0 \longmapsto F$ συνεχής τελεστής τέτοιος, ώστε $T(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in E_0$, τότε υπάρχει επέκταση $\hat{T}$ του T σε ολόκληρο τον E, για την οποία $\hat{T}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in E$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in E \setminus E_0$ και $u, v \in E_0$. Έχουμε,

$$T(u) + T(v) = T(u+v) \leq p(u+v) = p(u - x_0 + v + x_0) \leq p(u - x_0) + p(v + x_0),$$

από όπου και $T(u) - p(u - x_0) \leq p(v + x_0) - T(v), \;\; \forall u, v \in E_0$.

Ο E_0 είναι διαχωρίσιμος (εφόσον E διαχωρίσιμος) και άρα υπάρχει $D \subseteq E_0$, αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Επομένως, η τελευταία σχέση γίνεται

$$T(u) - p(u - x_0) \leq p(v + x_0) - T(v), \;\; \forall u, v \in D.$$[1]

Ο F έχει την ιδιότητα Cantor, επομένως υπάρχει $y_0 \in F$ τέτοιο, ώστε

$$T(u) - p(u - x_0) \leq y_0 \leq p(v + x_0) - T(v), \;\; \forall u, v \in D.$$

Πάλι εξαιτίας της συνέχειας των T, p και αφού $\overline{D} = E_0$, έχουμε

$$T(u) - p(u - x_0) \leq y_0 \leq p(v + x_0) - T(v), \;\; \forall u, v \in E_0. \tag{3.1}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τον χώρο $E_1 =< E_0 \cup \{x_0\} >$ και την απεικόνιση $\widehat{T} : E_1 \longmapsto F$ τέτοια, ώστε

$$\widehat{T}(u + \lambda x_0) = T(u) + \lambda y_0, \; u \in E_0, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

(θεωρώντας ότι $T(x_0) = y_0$).

Ισχυριζόμαστε ότι η $\widehat{T}$ είναι γραμμική επέκταση της T στον E_1 και ότι $\widehat{T}(x) \leq p(x), \; x \in E_1$.
Έστω $u \in E_0$. Τότε, $\widehat{T}(u) = \widehat{T}(u + 0 \cdot x_0) = T(u) + 0 \cdot y_0 = T(u)$. Συνεπώς, $\widehat{T}/_{E_0} = T$.
Για την γραμμικότητα, έστω $u, v \in E_0$ και $\lambda, \mu, m \in \mathbb{R}$. Τότε αν $x_1 = u + \lambda x_0$ και $x_2 = v + \mu x_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{T}(x_1 + x_2) &= \widehat{T}((u + \lambda x_0) + (v + \mu x_0)) = \widehat{T}((u+v) + (\lambda + \mu)x_0) \\ &= T(u+v) + (\lambda + \mu) y_0 = (T(u) + \lambda y_0) + (T(v) + \mu y_0) = \widehat{T}(x_1) + \widehat{T}(x_2), \\ \widehat{T}(m x_1) &= \widehat{T}(mu + \lambda m x_0) = T(mu) + \lambda m y_0 = m\widehat{T}(x_1). \end{aligned}$$

Μένει (για την απόδειξη του ισχυρισμού) να δείξουμε ότι $\widehat{T}(x) \leq p(x), \; x \in E_1$.

Προς τούτο, έστω $x_1 \in E_1$. Τότε $x = u + \lambda x_0$, όπου $u \in E_0, \lambda \in \mathbb{R}$ και άρα $\widehat{T}(x_1) = T(u) + \lambda y_0$.
Αν $\lambda > 0$,

από την (3.1), έχουμε ότι $T(v) + y_0 \leq p(v + x_0)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} T(\lambda v) + y_0 &\leq p(\frac{1}{\lambda}\lambda v + x_0) = \frac{1}{\lambda} p(\lambda v + \lambda x_0) \Rightarrow \\ T(\lambda v) + \lambda y_0 &\leq p(\lambda v + \lambda x_0). \end{aligned}$$

[1] Λόγω συνέχειας της T και p και αφού $\overline{D} = E_0$, παίρνοντας όρια καταλήγουμε στην αρχική σχέση.

Όμως $v \in E_0 \Rightarrow \lambda v = u \in E_0$, συνεπώς $T(u) + \lambda y_0 \leq p(u + \lambda x_0)$.

Αν $\lambda < 0$,
πάλι από την (3.1), έχουμε ότι $T(v) - y_0 \leq p(v - x_0)$. Συνεπώς,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{\lambda}T(\lambda v) - y_0 & \leq & p(\frac{1}{\lambda}\lambda v - x_0) = \frac{-1}{\lambda}p(-\lambda v + \lambda x_0) \Rightarrow \\ T(\lambda v) - \lambda y_0 & \geq & -p(-\lambda v + \lambda x_0) \Rightarrow \\ T(-\lambda v) + \lambda y_0 & \leq & p(-\lambda v + \lambda x_0). \end{array}$$

Αφού $v \in E_0 \Rightarrow -\lambda v = u \in E_0$, καταλήγουμε στο $T(u) + \lambda y_0 \leq p(u + \lambda x_0)$.

Αν $\lambda = 0$,
$\widehat{T}(x_1) = \widehat{T}(u) = T(u) \leq p(u),\ \forall\, u \in E_0$.

Από τις τρεις περιπτώσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο, $\widehat{T} \leq p$ στον E_1.

Πριν εφαρμόσουμε Λήμμα Zorn, θα δείξουμε ότι η επέκταση $\widehat{T}$ είναι και συνεχής απεικόνιση (ανεξάρτητα από την επιλογή του $x_0 \in E \setminus E_0$). Έστω λοιπόν $x_1 \in E_1$. Τότε $\widehat{T}(x_1) \leq p(x_1)$. Επίσης,

$$-\widehat{T}(x_1) = \widehat{T}(-x_1) \leq p(-x_1) = p(x_1) \Rightarrow -p(x_1) \leq \widehat{T}(x_1).$$

Τελικά,

$$-p(x_1) \leq \widehat{T}(x_1) \leq p(x_1) \ \Rightarrow \left|\widehat{T}(x_1)\right| \leq p(x_1) \Rightarrow \left\|\widehat{T}(x_1)\right\| \leq \|p(x_1)\|\,,\ \forall x_1 \in E_1$$

πράγμα που σημαίνει πως $\widehat{T}$ είναι φραγμένος (ως προς τη νόρμα) στον E_1.

Έστω το μερικά διατετεγμένο σύνολο

$$\mathcal{A} = \{T_i : E_i \longmapsto F \mid i \in I, E_i \subseteq E \text{ υπόχωρος }, E_0 \subseteq E_i, T_i \text{ γραμμικός, συνεχής }, T_i/_{E_i} = T,\ T_i \leq p \text{ στον } E_i\}\,.$$

Ορίζουμε μια σχέση διάταξης $\preceq$ στο $\mathcal{A}$ ως εξής,

$$T_1 \preceq T_2 \Leftrightarrow E_1 \subseteq E_2 \text{ και } T_2/_{E_1} = T_1.$$

Έστω $\mathcal{K}$ μη κενή αλυσίδα στοιχείων του $\mathcal{A}$ (έστω για $J \subseteq I$). Θεωρούμε το σύνολο $Z = \cup_{j\in J} E_i$ και την απεικόνιση $S : Z \longmapsto F$ τέτοια, ώστε αν $z \in Z$ και υπάρχει $i_0 \in J$ για το οποίο $z \in E_{i_0}$, τότε $S(z) = T_{i_0}(z)$. Από τον ορισμό της S, πράγματι $S \in \mathcal{A}$. Επίσης άμεσα έχουμε ότι, $\forall i \in J$ ισχύει $E_i \in Z$ και $S/_{E_i} = T_i$. Επομένως η απεικόνιση S είναι ένα άνω φράγμα της $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{A}$.

Από το Λήμμα Zorn, το $\mathcal{A}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω L (δηλαδή $L : D_{max} \longmapsto F,\ E_0 \subseteq D_{max}$, $D_{max} \subseteq E,\ L/_{E_0} = T$ και L γραμμικός, συνεχής, $L \leq p$ στον E).

Ισχυριζόμαστε ότι $D_{max} = E$.
Έστω προς άτοπο ότι, $D_{max} \subset E$. Τότε εφαρμόζοντας από την αρχή την απόδειξη, καταλήγουμε σε γραμμική, συνεχή επέκταση $U : D \longmapsto F$ του μεγιστικού L, για την οποία ισχύει ότι $D_{max} \subseteq D$ και $U/_{E_0} = T$, πράγμα άτοπο.

Πράγματι λοιπόν, $D_{max} = E$ και $L : E \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $L/_{E_0} = T$. □

3.1.1 Μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος

Είναι γνωστό, ότι ο χώρος των regular τελεστών $L_r(E, F)$, όπου E και F είναι χώροι Riesz, είναι χώρος Riesz, αν ο F είναι Dedekind πλήρης (για την ακρίβεια, ο $L_r(E, F)$ είναι ένας Dedekind πλήρης χώρος Riesz (βλ. [13], Θεώρημα 1.3.2). Αν όμως ο F δεν είναι Dedekind πλήρης χώρος Riesz, δεν γνωρίζουμε πολλά για την διατακτική δομή του $L_r(E, F)$.

Θυμίζουμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος E έχει την **Riesz Decomposition Property** ή απλώς **Decomposition Property** (εν συντομεία **RDP**), αν για κάθε $x, u, v \in E^+$ με $x \leq u + v$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in E$, τέτοια ώστε $0 \leq x_1 \leq u,\ 0 \leq x_2 \leq v$ και $x = x_1 + x_2$.

Λήμμα 3.1.5. *Ένας μερικά διατεταγμένος χώρος E έχει την Riesz Decomposition Property αν, και μόνον αν*

$$[0,x]+[0,y]=[0,x+y]\,,$$

για κάθε $x,y\in E^+$.

(Για την απόδειξη, βλ. [4], Λήμμα 1.51, σελ. 44)

Στην προσπάθεια κατανόησης της διατακτικής δομής του $L_r(E,F)$, θεωρούμε διάφορες συνθήκες (ισχυρότερες ή ασθενέστερες) για τους χώρους E και F. Κάποια αποτελέσματα, για συγκεκριμένους χώρους E και F, παρουσίασαν οι Y. A. Abramovich και A. W. Wickstead στο άρθρο τους 'Regular Operators from and into a small Riesz space'. Το 1995, ο A. W. Wickstead, στο άρθρο του 'Spaces of operators with the Riesz separation property', μελέτησε την Riesz Decomposition Property για τον χώρο των συνεχών regular τελεστών $\mathcal{L}_r(E,F)$, όπου όμως οι E και F είναι Banach lattices. Απέδειξε ότι ο χώρος $\mathcal{L}_r(c,F)$ έχει την Riesz Decomposition Property αν, και μόνον αν το Banach lattice F έχει την countable interpolation property. Έδειξε επίσης ότι ένας τέτοιος χώρος μπορεί να έχει την Riesz Decomposition Property, χωρίς να είναι lattice, καθώς και ότι δεν έχουν όλοι οι χώροι των regular τελεστών την Riesz Decomposition Property. Τέλος, στο ίδιο άρθρο, διατύπωσε την εικασία: ο $\mathcal{L}_r(E,F)$, όπου E και F είναι Banach lattices, έχει την Riesz Decomposition Property, αν E είναι διαχωρίσιμο και F έχει την countable interpolation property.

Το επόμενο Θεώρημα του N. Dăneţ, απαντά θετικά στην εικασία του A. W. Wickstead χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Abramovich-Wickstead.

Θεώρημα 3.1.6. *(Dăneţ).([5], Thm 3.1) Έστω E και F Banach lattices, τέτοια ώστε E διαχωρίσιμο και F έχει την countable interpolation property. Τότε ο χώρος των συνεχών, regular τελεστών $\mathcal{L}_r(E,F)$, έχει την Riesz Decomposition Property.*

Απόδειξη. Έστω $T,\ S_1,\ S_2$ θετικοί γραμμικοί τελεστές στον $\mathcal{L}_r(E,F)$. Ζητάμε $T_1,\ T_2$ τέτοιους, ώστε $0\le T_1\le S_1$, $0\le T_2\le S_2$ και $T=T_1+T_2$. Θεωρούμε το Banach lattice $E\times E$ (με την κανονική διάταξη) και έστω $P:E\times E\longmapsto F$ τέτοια, ώστε

$$P(x_1,x_2)=S_1({x_1}^+)+S_2({x_2}^+),\quad (x_1,x_2)\in E\times E.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι η P είναι συνεχής και υπογραμμική. Έστω λοιπόν $x,\ y\in E\times E$ και $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Για κάθε $i=1,2$ έχουμε ότι,

$$(x_i+y_i)^+\le {x_i}^+ + {y_i}^+ \Rightarrow S_i(x_i+y_i)^+\le S_i(x_i)^+ + S_i(y_i)^+.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(x+y) &= P(x_1+y_1,x_2+y_2)=S_1(x_1+y_1)^+ + S_2(x_2+y_2)^+\\ &\le S_1({x_1}^+)+S_2({x_2}^+)+S_1({y_1}^+)+S_2({y_2}^+)=P(x)+P(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda x) &= S_1(\lambda x_1)^+ + S_2(\lambda x_2)^+ = S_1(\lambda(x_1)^+)+S_2(\lambda(x_2)^+)\\ &= \lambda S_1(x_1)^+ + \lambda S_2(x_2)^+ = \lambda(S_1(x_1)^+ + S_2(x_2)^+)=\lambda P(x). \end{aligned}$$

Επομένως η P είναι υπογραμμική. Επίσης, εφόσον οι lattice operations είναι συνεχείς και S_1,S_2 είναι επίσης συνεχείς ($\in\mathcal{L}_r(E,F)$), P συνεχής.

Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο $G=\{(x,x)\ :\ x\in E\}$ (δηλαδή τη διαγώνιο του $E\times E$), την απεικόνιση $T_0:G\longmapsto F$, τέτοια ώστε $T_0(x,x)=T(x)$, όπου $(x,x)\in G$ και θα δείξουμε ότι η T_0 είναι γραμμική, συνεχής και $T_0(x,x)\le P(x,x),\ \ \forall\ (x,x)\in G$.

Πράγματι, η T_0 είναι συνεχής (όμοιος συλλογισμός με αυτόν της συνέχειας της P) και εύκολα προκύπτει ότι είναι και γραμμική. Έστω λοιπόν $(x,x)\in G$ (δηλαδή $x\in E$). Τότε,

$$T_0(x,x)=T(x)=T(x^+-x^-)=Tx^+-Tx^-\le Tx^+\le S_1(x^+)+S_2(x^+)=P(x,x).$$

Επομένως, $T_0(x,x)\le P(x,x)$, $\forall\ (x,x)\in G$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το Θεώρημα Abramovich-Wickstead, υπάρχει γραμμική επέκταση $\hat{T}$ της T_0 τέτοια, ώστε $\hat{T}(x,y) \leq P(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in E \times E$.

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} T_1 : E \longmapsto F, &\quad \text{τέτοια ώστε} \quad T_1(x) = \hat{T}(x,0), \;\; x \in E \\ T_2 : E \longmapsto F, &\quad \text{τέτοια ώστε} \quad T_2(x) = \hat{T}(0,x), \;\; x \in E. \end{aligned}$$

Για τυχαίο $x \in E$,

$$T(x) = T_0(x,x) = \hat{T}(x,x) = \hat{T}(x,0) + \hat{T}(0,x) = T_1(x) + T_2(x).$$

Επομένως, $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$, $\forall\ x \in E$. Επίσης, $T_1(x) = \hat{T}(x,0) \leq P(x,0) = S_1 x^+$ για κάθε $x \in E$. Άρα,

$$\begin{aligned} -T_1(x) = \hat{T}(-x,0) &\leq P(-x,0) = S_1((-x)^+) = S_1 x^- \;\; \Rightarrow \\ -S_1 x^- &\leq T_1(x) \;\; \Leftrightarrow \\ -S_1 x^- \leq \;\; T_1(x) &\leq S_1 x^+, \;\; \forall\ x \in E. \end{aligned}$$

Άρα για $x \in E^+$ ($\Rightarrow x^+ = x,\ x^- = 0$) έχουμε ότι, $0 = -S_1(0) \leq T_1(x) \leq S_1(x)$ και συνεπώς $0 \leq T_1 \leq S_1$ στον E^+. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $0 \leq T_2 \leq S_2$ στον E^+, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

3.2 Θεωρήματα τύπου Hahn-Banach-Kantorovich

Ακολουθούν κάποια αποτελέσματα τύπου Hahn-Banach-Kantorovich, στην απόδειξη των οποίων παίζει σπουδαίο ρόλο το Θεώρημα Abramovich-Wickstead. Το πρώτο αποτέλεσμα που θα δούμε μας λέει ότι κάθε θετικός γραμμικός τελεστής από majorizing υπόχωρο ενός διαχωρίσιμου Banach lattice, σε Banach lattice με την ιδιότητα Cantor, είναι δυνατόν να επεκταθεί.

Σημειώνουμε ότι κάθε θετικός γραμμικός τελεστής T από majorizing υπόχωρο G ενός Banach lattice E, σε Banach lattice F, είναι συνεχής (Θεώρημα 3.1.2).

Θεώρημα 3.2.1. *([10], Thm 2.) Έστω E διαχωρίσιμο Banach lattice, G majorizing υπόχωρος του E και F Banach lattice που ικανοποιεί την ιδιότητα Cantor. Αν $T : G \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής, τότε υπάρχει θετικός γραμμικός τελεστής $S : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $S(v) = T(v)$, για κάθε $v \in G$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in E \backslash G$. Θέτουμε $G_1 = span(\{x_0\} \cup G)$ και θα επεκτείνουμε τον T στο G_1.

Έχουμε λοιπόν ότι $x_0 \in E \backslash G$ και G υπόχωρος του E. Συνεπώς,

$$\exists\ u, v \in G \ : \ u \leq x_0 \leq v \;\; \Rightarrow \;\; T(u) \leq T(v).$$

Έστω W το σύνολο όλων των u, v της πιο πάνω μορφής ($\emptyset \neq W \subseteq G$). Εφόσον ο E είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο D του W για το οποίο,

$$T(u) \leq T(v), \;\; \forall\ u, v \in D \;\; \text{με} \;\; u \leq x_0 \leq v.$$

Το F είναι vector lattice, άρα η ιδιότητα Cantor συμπίπτει με την strong σ-intepolation property και άρα υπάρχει $y_0 \in F$ τέτοιο, ώστε

$$T(u) \leq y_0 \leq T(v), \;\; \forall\ u, v \in D \;\; \text{με} \;\; u \leq x_0 \leq v.$$

Ο T είναι συνεχής (Θεώρημα 3.1.2), συνεπώς[2]

$$T(u) \leq y_0 \leq T(v), \;\; \forall\ u, v \in G \;\; \text{με} \;\; u \leq x_0 \leq v. \tag{3.2}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $T_1 : G \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $T_1(v + \lambda x_0) = T(v) + \lambda y_0$, όπου $T_1(x_0) = y_0$, $\forall\ v \in G, \lambda \in \mathbb{R}$. Προφανώς, T_1 επέκταση του T σε ολόκληρο τον G_1.

[2] Επιλέγοντας $u, v \in G$, υπάρχουν $\{u_n\}, \{v_n\} \subseteq D$ τέτοιες, ώστε $u_n \to u, v_n \to v$ και το ζητούμενο ισχύει για κάθε $u, v \in D$. Επομένως, λόγω συνέχειας του T θα ισχύει και λαμβάνοντας όρια.

Ισχυριζόμαστε ότι ο G_1 είναι majorizing υπόχωρος του E.
Έστω $x \in E$. Ζητάμε $z \in G_1$ τέτοιο, ώστε $x \leq z$. Έχουμε ότι υπάρχει $v \in G$ τέτοιο, ώστε $x \leq v$. Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\lambda x_0 \geq 0$ ισχύει ότι $v + \lambda x_0 \geq v \geq x \;\Rightarrow\; z \geq x$ και $z \in G$.

Εν συνεχεία θα δείξουμε ότι ο T_1 είναι θετικός.
Προς τούτο, έστω $v + \lambda x_0 \geq 0$ με $\lambda \neq 0$ (για $\lambda = 0$ προφανώς ισχύει καθώς ο T είναι θετικός). Από τη σχέση (3.1) για $\lambda > 0$,

$$x_0 \geq -\frac{v}{\lambda} \Rightarrow y_0 \geq T(-\frac{v}{\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}T(v) \Rightarrow T(v) + \lambda T_1(x_0) \geq 0 \Rightarrow T_1(v + \lambda x_0) \geq 0.$$

Όμοια, αν $\lambda < 0$ τότε $x_0 \leq -\frac{v}{\lambda}$. Επομένως, $y_0 \leq T(-\frac{v}{\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}T(v) \Rightarrow y_0 + \frac{1}{\lambda}T(v) \leq 0$

$$\lambda T_1(x_0) + T(v) \geq 0 \;\Rightarrow\; T_1(v + \lambda x_0) \geq 0.$$

Η απόδειξη τελειώνει με εφαρμογή του Λήμματος Zorn. Θεωρούμε το μερικά διατεταγμένο σύνολο

$$\mathcal{A} = \{T_i : G_i \longmapsto Y \;/\; i \in I,\; G_i \subseteq X \; majorizing,\; G \subseteq G_i,\; T_i/_G = T,\; T_i,\; \text{θετικός, γραμμικός}\}.$$

Ορίζουμε σχέση διάταξης $\preceq$ στο $\mathcal{A}$, ως εξής :

$$T_1 \preceq T_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2 \;\text{ και }\; T_2/_{G_1} = T_1.$$

Έστω $\mathcal{K}$ μη κενή αλυσίδα στοιχείων του $\mathcal{A}$ (δηλαδή, $\mathcal{K} = \{T_i : G_i \longmapsto Y \;/\; i \in J \subseteq I,\; G_i \subseteq X \; majorizing,$ $G \subseteq G_i,\; T_i/_G = T,\; T_i,$ θετικός, γραμμικός).

Θεωρούμε το σύνολο $Z = \cup_{i \in J} G_i$ και την απεικόνιση $S : Z \longmapsto Y$, τέτοια ώστε αν $z \in Z \Rightarrow z \in G_{i_0}$, έστω $S(z) = T_{i_0}(z)$ $(i_0 \in J)$.

Από τον ορισμό της S βλέπουμε ότι πράγματι $S \in \mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι S είναι και άνω φράγμα της $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{A}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i \in J$, ισχύει ότι $G_i \subseteq Z$ και $S/_{G_i} = T_i$ (άμεσο από τον ορισμό της S). Πράγματι λοιπόν S άνω φράγμα της $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{A}$. Επομένως, από το Λήμμα Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο, έστω L του $\mathcal{A}$ (δηλαδή, $L : D_{max} \longmapsto Y$ τέτοια, ώστε $G \subseteq D_{max}$, $D_{max} \subseteq X$, $majorizing$ $L/_G = T$ και L θετική, γραμμική).

Ισχυριζόμαστε τέλος ότι $D_{max} = X$. Έστω πως $D_{max} \subset X$. Επαναλαμβάνοντας το πρώτο μέρος της απόδειξης, καταλήγουμε σε $U : D \longmapsto Y$ θετική γραμμική επέκταση της L τέτοια, ώστε $D_{max} \subseteq D$ και $U/_G = T$, πράγμα άτοπο. Επομένως, $D_{max} = D$, συνεπώς $L : X \longmapsto Y$ και $L/_G = T$. □

Ορισμός 3.2.2. *Έστω E Banach lattice. Ένα $e \in E^+$ καλείται **axial element**, αν για κάθε $x \in E$, υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε $x \leq \lambda e$.*

Πόρισμα 3.2.3. *([10], Cor 3.) Έστω E και F Banach lattices, τέτοια ώστε E διαχωρίσιμο και περιέχει ένα axial element και F έχει την ιδιότητα Cantor. Τότε, για κάθε $y_0 \in F^+$, υπάρχει ένας θετικός γραμμικός τελεστής $U : E \longmapsto F$ με $U(e) = y_0$.*

Απόδειξη. Αφού το e είναι axial element του E, έχουμε ότι $span(e)$ είναι majorizing υπόχωρος του E.

Εστω $y_0 \in F$. Ορίζουμε $T : span(e) \longmapsto F$ τέτοιο, ώστε $T(\lambda e) = \lambda y_0$. Προφανώς ο T είναι γραμμικός και εύκολα βλέπουμε ότι είναι και θετικός. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει γραμμικός θετικός τελεστής $S : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $S(v) = T(v), \;\; \forall \; v \in span(e)$. Τελικά,

$$S(e) = T(e) = T(1 \cdot e) = 1 \cdot y_0 \Leftrightarrow S(e) = y_0,$$

δηλαδή S είναι ο ζητούμενος τελεστής. □

Παρατήρηση 3.2.4. *Έστω E μερικά διατεταγμένος χώρος και G υπόχωρός του. Έστω E^+ ο θετικός κώνος του E και $G \cap intE^+ \neq \emptyset$. Τότε ο G είναι majorizing υπόχωρος.*

Επίσης, κάθε θετικός γραμμικός τελεστής $T : E \longmapsto F$, όπου F μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος, για τον οποίο $T|_G = 0$ (G majorizing υπόχωρος), είναι κατ΄ ανάγκην ο μηδενικός [3].

[3] Για τυχόν $x \in E$, υπάρχουν $\exists\, u, v \in G$ τέτοια, ώστε $u \leq x \leq v$. Συνεπώς $T(u) \leq T(x) \leq T(v)$ και $T|_G = 0$. Επομένως, $T(x) = 0, \;\; \forall \; x \in E$.

Πόρισμα 3.2.5. *([10], Cor 4.) Έστω E διαχωρίσιμο Banach lattice με $intE^+ \neq \emptyset$ και F Banach lattice με την ιδιότητα Cantor. Τότε για κάθε υπόχωρο G του E, για τον οποίο $G \cap intE^+ = \emptyset$, υπάρχει μη μηδενικός, θετικός γραμμικός τελεστής $U : E \longmapsto F$ με $U|_G = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in intE^+$. Θέτουμε $G_0 = span(G \cup \{x_0\})$. Από Παρατήρηση 3.2.4, G_0 είναι majorizing υπόχωρος του E.

Έστω τώρα $y_0 \in F$ και ορίζουμε την απεικόνιση $T_0 : G_0 \longmapsto F$ ως $T_0(v + \lambda x_0) = \lambda y_0$. Προφανώς, η T_0 γραμμική. Έστω $v \in G$ και $\lambda \neq 0$ τέτοιο, ώστε $v + \lambda x_0 \geq 0$. Αν $\lambda < 0$, τότε $-\lambda x_0 \in intE^+$.

Επομένως, έχουμε $v \in G$ και $v = v + \lambda x_0 + (\lambda x_0) \in intE^+$, από όπου και $v \in G \cap intE^+$, πράγμα άτοπο. Συνεπώς, $\lambda > 0$ και άρα $T(v + \lambda x_0) = \lambda y_0 \geq 0$ (προφανώς ισχύει αν $\lambda = 0$), δηλαδή ο T_0 είνα θετικός. ☐

Ορισμός 3.2.6. *Ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος E, ικανοποιεί την **(os)-property** αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο D του E τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in E$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του D, για την οποία $x_n \xrightarrow{o} x$.*

Θεώρημα 3.2.7. *([10], Thm 5.) Έστω E, F μερικά διατεταγμένοι χώροι, όπου ο F έχει την ιδιότητα Cantor και έστω G ένας υπόχωρος του E, εφοδιασμένος με την $(os) - property$. Έστω $T : G \longmapsto F$ διατακτικά συνεχής γραμμικός τελεστής και $p : E \longmapsto F^+$ διατακτικά συνεχής seminorm τέτοια, ώστε $T(v) \leq p(v)$, $\forall\ v \in G$. Τότε, για κάθε $x_0 \in E \backslash G$, υπάρχει επέκταση του T σε έναν διατακτικά συνεχή, γραμμικό τελεστή $T_1 : G_1 \longmapsto F$, όπου $G_1 = span(\{x_0\} \cup G)$ έτσι, ώστε $T_1(z) \leq p_1(z)$, $\forall\ z \in G_1$.*

Απόδειξη. Ο G είναι εφοδιασμένος με την $(os) - property$, συνεπώς υπάρχει ένα D αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολό του τέτοιο, ώστε για κάθε $v \in G$, υπάρχει $(v_n) \subseteq D$ με $v_n \xrightarrow{o} v$. Έστω $u, v \in G$. Τότε,
$T(u) - T(v) = T(u - v) \leq p(u - v) = p((u + x_0) - (v + x_0)) \leq p(u + x_0) + p(v + x_0)$, συνεπώς

$$-p(v + x_0) - T(v) \leq p(u + x_0) - T(u), \quad \forall\ u, v \in G. \tag{3.3}$$

Η τελευταία σχέση, θα ισχύει και για κάθε $u, v \in D$. Εξαιτίας τώρα της ιδιότητας Cantor, έχουμε ότι υπάρχει $y_0 \in F$ τέτοιο, ώστε

$$-p(v + x_0) - T(v) \leq y_0 \leq p(u + x_0) - T(u), \quad \forall\ u, v \in D. \tag{3.4}$$

Έστω $u, v \in G$. Υπάρχουν ακολουθίες $(u_n), (v_n) \subseteq D$ τέτοιοες, ώστε $u_n \xrightarrow{o} u$, $v_n \xrightarrow{o} v$. Οι απεικονίσεις p, T είναι διατακτικά συνεχείς και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα (3.3). Επομένως,

$$-p(v + x_0) - T(v) \leq y_0 \leq p(u + x_0) - T(u), \quad \forall\ u, v \in G. \tag{3.5}$$

(καθώς, $u_n \xrightarrow{o} u \Rightarrow u_n - u \xrightarrow{o} 0$, $(u_n + x_0) - (u + x_0) \xrightarrow{o} 0 \Rightarrow T(u_n - u) \xrightarrow{o} 0$, $p((u_n + x_0) - (u + x_0)) \xrightarrow{o} 0$ και όμοια για (v_n)).

Θεωρούμε την απεικόνιση $T_1 : G_1 \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $T_1(v + \lambda x_0) = T(v) + \lambda y_0$, $\forall\ (v + \lambda x_0) \in G_1$. Προφανώς T_1 γραμμική και αν $v \in G$, τότε $T_1(v) = T_1(v + 0 \cdot x_0) = T(v) + 0 \cdot y_0 = T(v)$.

Επομένως, η T_1 είναι μια γραμμική επέκταση του T σε ολόκληρο τον G_1. Έστω $v \in G$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $T_1(v + \lambda x_0) \leq p(v + \lambda x_0)$. Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι $T(v) + \lambda y_0 \leq p(v + \lambda x_0)$.
Αν $\lambda = 0$, τότε $T_1 \equiv T \leq P$ στον G.
Αν $\lambda > 0$, τότε $\frac{v}{\lambda} \in G$ και

$$\begin{aligned}(3.4) \quad &\Rightarrow \quad y_0 \leq p(\frac{v}{\lambda} + x_0) - T(\frac{v}{\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}(p(v + \lambda x_0) - T(v)) \\ &\Rightarrow \quad T(v) + \lambda y_0 \leq p(v + \lambda x_0).\end{aligned}$$

Αν $\lambda < 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(3.4) \quad &\Rightarrow \quad -p(\frac{v}{\lambda} + x_0) - T(\frac{v}{\lambda}) \leq y_0 \\ &\Rightarrow \quad y_0 \geq -\frac{1}{\lambda}(p(v + \lambda x_0) + T(v)) \\ &\Rightarrow \quad \lambda y_0 \leq -p(v + \lambda x_0) - T(v) \\ &\Rightarrow \quad T(v) + \lambda y_0 \leq -p(v + \lambda x_0) \leq p(v + \lambda x_0),\end{aligned}$$

άρα ισχύει το ζητούμενο.

Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι ο T_1 είναι διατακτικά συνεχής. Προς τούτο, έχουμε ότι $T_1 \leq P$ στον G_1, όπου P είναι διατακτικά συνεχής seminorm. Έστω $(x_a) \subseteq G_1$ τέτοια, ώστε $x_a \xrightarrow{o} 0$. Τότε, $p(x_a) \xrightarrow{o} 0$ και για κάθε a, $p(x_a) \geq T_1(x_a)$. Εφόσον $p(x_a) \xrightarrow{o} 0$, έχουμε εξ' ορισμού ότι υπάρχει $(y_a) \subseteq G_1$ έτσι, ώστε $|p(x_a)| \leq y_a \downarrow 0$. Συνεπώς, $|T_1(x_a)| \leq |p(x_a)| \leq y_a \downarrow 0$ και πάλι από τον ορισμό έχουμε ότι, $T_1(x_a) \xrightarrow{o} 0$.

Πράγματι λοιπόν ο T_1 είναι διατακτικά συνεχής, καθώς κυριαρχείται από διατακτικά συνεχή seminorm. □

Πόρισμα 3.2.8. *([10], Cor 6.) Υπό τις υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος και θεωρώντας επιπλέον ότι κάθε διανυσματικός υπόχωρος του E έχει την (os)-property, υπάρχει διατακτικά συνεχής γραμμικός τελεστής $S : E \longmapsto F$ τέτοιος, ώστε $S(v) = T(v), \ \forall \ v \in G$ και $S(x) \leq p(x), \ \forall \ x \in E$.*

Πρόταση 3.2.9. *([9], Cor 4.) Έστω E, F Banach lattices έτσι, ώστε E διαχωρίσιμο και το F έχει την ιδιότητα Cantor. Έστω $P : E \longmapsto F^+$ ένας συνεχής υπογραμμικός τελεστής. Τότε, για κάθε $x_0 \in E$ υπάρχει συνεχής γραμμικός τελεστής $U : E \longmapsto F$, τέτοιος, ώστε $U(x_0) = P(x_0)$ και $-P(-x) \leq U(x) \leq P(x)$ για κάθε $x \in E$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in E$ και $G = span(x_0)$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $T : G \longmapsto F$, όπου $T(\lambda x_0) = \lambda P(x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε T συνεχής γραμμικός που ικανοποιεί τη σχέση $T(v) \leq P(v), \ \forall \ v \in G$.

Πράγματι, έστω $v \in G$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $v = \lambda x_0$.
Αν $\lambda \geq 0$, τότε $T(v) = \lambda P(x_0) = P(\lambda x_0) = P(v)$.
Έστω $\lambda < 0$. Τότε, αφού $P(x_0) \in F^+$, έχουμε $T(v) = \lambda P(x_0) \leq 0$ και $P(\lambda x_0) \in F^+$, επομένως $T(v) \leq 0 \leq P(\lambda x_0) = P(v)$.

Από το Θεώρημα Abramovich-Wickstead, έχουμε ότι υπάρχει συνεχής γραμμική επέκταση U του T σε ολόκληρο τον E έτσι, ώστε $U(x) \leq P(x), \quad \forall \quad x \in E$. Ο U είναι ο ζητούμενος τελεστής, καθώς $U(x_0) = U(1 \cdot x_0) = T(1 \cdot x_0) = 1 \cdot P(x_0) \Leftrightarrow U(x_0) = P(x_0)$. Τέλος, αν $x \in E$, τότε

$$\begin{aligned} U(x) \leq P(x) \quad &\Rightarrow \quad -P(x) \leq -U(x) = U(-x) \leq P(-x) \\ &\Rightarrow \quad -P(-x) \leq U(x) \leq P(x), \ \forall \ x \in E. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.2.10. *Θυμίζουμε ότι μία seminorm (ή υπογραμμικός τελεστής) $P : E \longmapsto F$, όπου E, F είναι lattices, καλείται μονότονη, όταν $0 \leq x_1 \leq x_2$ στο E, συνεπάγεται $P(x_1) \leq P(x_2)$.*

Αν $P : E \longmapsto F^+$ είναι μια lattice seminorm, τότε είναι μονότονη στο E^+ ($x \leq y$ στο $E^+ \Rightarrow x = |x|, y = |y| \Rightarrow |x| \leq |y| \Rightarrow P(x) \leq P(y)$) και $P|x| = P(x)$, $\forall \ x \in E$ ($E \ni x \leq |x| \Rightarrow Px \leq P|x|$, αν $x \geq 0 \Rightarrow x = |x| \Rightarrow P(x) = P(|x|)$).

Θεώρημα 3.2.11. *([9], Thm 5.) Έστω E, F Banach lattices έτσι, ώστε E διαχωρίσιμο, F έχει την ιδιότητα Cantor και έστω $P : E \longmapsto F^+$ συνεχής υπογραμμικός τελεστής. Στη συνέχεια θεωρούμε G ένα sublattice του E και $T : G \longmapsto F$ θετικό γραμμικό τελεστή τέτοιο, ώστε $T(v) \leq P(v), \ \forall \ v \in G$. Αν P μονότονος στον E^+, τότε υπάρχει θετική γραμμική επέκταση $S : E \longmapsto F$ του T τέτοια, ώστε $S(x) \leq P(x^+)$, $\forall \, x \in E$. Αν P είναι lattice seminorm, τότε $S(x) \leq P(x)$, $\forall \, x \in E$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $T(v) \leq P(v)$, $\forall \, v \in G$ και P συνεχής και υπογραμμικός, επομένως ο T είναι συνεχής στον G. Ορίζουμε στη συνέχεια μια απεικόνιση $P_1 : E \longmapsto F^+$ έτσι, ώστε $P_1(x) = P(x^+)$, $x \in E$.

Προφανώς η P είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι είναι και υπογραμμική. Έστω λοιπόν $x, y \in E$ και $\lambda \geq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} (x+y)^+ \leq x^+ + y^+ \quad &\Rightarrow \quad P(x+y)^+ \leq P(x^+ + y^+) \leq Px^+ + Py^+ \Leftrightarrow P_1(x+y) \leq P_1(x) + P_1(y) \quad \text{και} \\ (\lambda x)^+ \leq \lambda x^+ \quad &\Rightarrow \quad P_1(\lambda x) \leq P(\lambda x)^+ = P(\lambda x^+) = \lambda P(x^+) = \lambda P_1(x), \end{aligned}$$

επομένως P_1 υπογραμμική. Έστω $x \in G$. Τότε $x \leq x^+ \ \Rightarrow Tx \leq Tx^+ \leq Px^+ = P_1(x)$. Δηλαδή $Tx \leq P_1(x), \ \forall \ x \in G$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Abramovich-Wickstead, υπάρχει συνεχής γραμμική επέκταση $S : E \longmapsto F$ του T έτσι, ώστε $S(x) \leq P_1(x)\ \forall\ x \in E$. Επιλέγοντας $E \ni x \leq 0$, έχουμε ότι $S(x) \leq P_1(x) = P(x^+) \overset{x\leq 0}{=} P(0) = 0$. Άρα, αν $x \in E^+$, τότε $-x \leq 0 \ \Rightarrow\ S(-x) \leq 0 \ \Rightarrow\ -S(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ S(x) \geq 0$. Επομένως ο S είναι θετικός.

Έστω τέλος P lattice seminorm. Τότε, P μονότονος και $P(x) = P(|x|), \ \forall\ x \in E$, από όπου και $S(x) \leq P(x), \ \forall\ x \in E$. □

Στο επόμενο αποτέλεσμα θα προχωρήσουμε σε ταυτόχρονη επέκταση φθίνουσας ακολουθίας θετικών γραμμικών τελεστών.

Πόρισμα 3.2.12. *([9], Cor 6.) Έστω E, F Banach lattices έτσι, ώστε E διαχωρίσιμο και F έχει την ιδιότητα Cantor. Έστω επίσης $P_1 : E \longmapsto F^+$ συνεχής lattice seminorm και G sublattice του E. Υποθέτουμε πως για ακολουθία θετικών γραμμικών τελεστών $T_n : G \longmapsto F$ ισχύει ότι, $T_1(v) \leq P_1(v), \ \forall\ v \in G$ και $T_{n+1}(v) \leq T_n(v), \ \forall\ v \in G^+, \ n = 1, 2, \ldots$. Τότε η ακολουθία $\{T_n\}_{n\geq 1}$ μπορεί να επεκταθεί ταυτόχρονα σε ακολουθία θετικών γραμμικών τελεστών $\{S_n\}_{n\geq 1}$, όπου $S_n : E \longmapsto F$ έτσι, ώστε $S_1(x) \leq P_1(x), \ \forall\ x \in E$ και $S_{n+1}(x) \leq S_n(x), \ \forall\ x \in E^+, \ n = 1, 2, \ldots$.*

Απόδειξη. Από άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.11, υπάρχει θετική γραμμική επέκταση $S_1 : E \longmapsto F$ του T_1 τέτοια, ώστε $S_1(x) \leq P_1(x), \ \forall\ x \in E$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $P_2 : E \longmapsto F^+$ έτσι, ώστε $P_2(x) = S_1|x|, \ \ x \in E$. Η P_2 είναι συνεχής και εύκολα βλέπουμε ότι είναι και lattice seminorm. Έστω $v \in G$. Τότε,

$$\begin{aligned} v \leq |v| \ &\Rightarrow\ T_2 v \leq T_2|v| \leq T_1|v| = S_1|v| = P_2(v) \\ &\Rightarrow\ T_2(v) \leq P_2(v), \ \forall\ v \in G. \end{aligned}$$

Ξαναχρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.11, υπάρχει θετική επέκταση του T_2, έστω $S_2 : E \longmapsto F$ έτσι, ώστε $S_2(x) \leq P_2(x), \ \forall\ x \in E$. Αν $x \in E^+$, τότε $x = |x|$ και άρα $S_2(x) \leq P_2(x) = S_1|x| = S_1(x)$, από όπου και $S_2(x) \leq S_1(x), \ \forall\ x \in E^+$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν επαγωγικά το Θεώρημα 3.2.11, δημιουργούμε την ακολουθία $\{S_n\}_{n\geq 1}$ και για το τυχαίο $n \in \mathbb{N}$, θα ισχύει $S_{n+1}(x) \leq S_n(x), \ \forall\ x \in E^+$. □

Πόρισμα 3.2.13. *([9], Cor 7.) Έστω E, F Banach lattices έτσι, ώστε E διαχωρίσιμο και το F έχει την ιδιότητα Cantor. Υποθέτουμε ότι $P_1, P_2, \ldots, P_n : E \longmapsto F^+$ είναι συνεχείς υπογραμμικοί τελεστές, μονότονοι στον E^+ και $T : E \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής τέτοιος, ώστε $T(x) \leq P_1(x) + \ldots + P_n(x)$, για κάθε $x \in E$. Τότε υπάρχουν n το πλήθος θετικοί γραμμικοί τελεστές $T_1, T_2, \ldots, T_n : E \longmapsto F$ τέτοιοι, ώστε $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ και $T_i(x) \leq P_i(x)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και $x \in X$.*

Απόδειξη. Έστω ο χώρος γινόμενο $Z = E^n$ (ο Z είναι διαχωρίσιμο Banach lattice στην l_1 νόρμα) και $x \in E$. Συμβολίζουμε με $z(x)$ και $(\delta_{i,j}(x))_{j=1}^n$ τα στοιχεία του Z που ορίζονται αντίστοιχα ως $z(x) = \sum_{i=1}^n (\delta_{i,j}(x))_{j=1}^n$ και

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} x & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.Το G είναι Banach sublattice του Z.

Ορίζουμε τις απεικονίσεις $P : Z \longmapsto F^+$, ως $P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n P_i(x_i), \ \ x_1, \ldots, x_n \in E$ και $T_0 : G \longmapsto F$, ως $T_0(z(x)) = T(x), \ \ x \in E$.

Η P είναι συνεχής και εύκολα βλέπουμε πως είναι και υπογραμμική μονότονη στον Z^+. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι η T_0 είναι θετική γραμμική τέτοια, ώστε $T_0(z(x)) \leq P(z(x)), \ \ \forall\ \ x \in E$. Από το Θεώρημα 3.2.11, υπάρχει θετική γραμμική επέκταση $S : Z \longmapsto F$ του T_0 τέτοια, ώστε $S(x_1, \ldots, x_n) \leq P(x_1, \ldots, x_n), \ \forall\ x_1, \ldots, x_n \in E$. Στη συνέχεια ορίζουμε $T_i(x) = S((\delta_{i,j}(x))_{j=1}^n)$.

Έχουμε επομένως n το πλήθος θετικούς γραμμικούς τελεστές από τον E στον F για τους οποίους

$$\begin{aligned} T_1(x) + \ldots + T_n(x) &= S((\delta_{1,j}(x))_{j=1}^n) + \cdots + S((\delta_{n,j}(x))_{j=1}^n) \\ &= S((\delta_{1,j}(x))_{j=1}^n + \cdots + (\delta_{n,j}(x))_{j=1}^n) \\ &= S(z(x)) = T_0(z(x)) = T(x), \end{aligned}$$

ισοδύναμα $T(x) = T_1(x) + \ldots + T_n(x)$. Μένει να δείξουμε ότι, $T_i(x) \leq P_i(x)\ \forall\ i = 1, \ldots, n, \ \ x \in E$.

Έστω λοιπόν $x \in E$ και $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Τότε,

$$\begin{aligned} T_{i_0}(x) &= S((\delta_{i_0,j}(x))_{j=1}^n) \leq P((\delta_{i_0,j}(x))_{j=1}^n) \\ &= P(\delta_{i_0,1}(x), \dots, \delta_{i_0,n}(x)) \\ &= P_1(\delta_{i_0,1}(x)) + \ldots + P_{i_0}(\delta_{i_0,i_0}(x)) + \cdots + P_n(\delta_{i_0,n}(x)) \\ &= P_{i_0}(x). \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.2.14. *([9], Cor 8.) Έστω E, F Banach lattices έτσι, ώστε E διαχωρίσιμο και το F έχει την ιδιότητα Cantor. Υποθέτουμε ότι $T, S_1, S_2, \dots, S_n : E \longmapsto F$ είναι θετικοί γραμμικοί τελεστές τέτοιοι, ώστε $T(x) \leq S_1(x) + \ldots + S_n(x), \ \forall \ x \in E$. Τότε, υπάρχουν θετικοί γραμμικοί τελεστές $T_1, T_2, \dots, T_n : E \longmapsto F$ για τους οποίους ισχύει $T = T_1 + \ldots + T_n$ και $T_i(x) \leq S_i(x)$, για κάθε $i = 1, \dots, n$ και $x \in E$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $P_i(x) = S_i|x|$ για κάθε $x \in E$ και $i = 1, \dots, n$. Παρατηρούμε ότι είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το αμέσως προηγούμενο Πόρισμα, από όπου και έχουμε το ζητούμενο. □

Θυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός Banach lattice E είναι άνω διατακτικά φραγμένο ή majorized, αν υπάρχει $u \in E^+$ τέτοιο, ώστε $a \leq u$ για κάθε $a \in A$.

Θεώρημα 3.2.15. *([9], Thm 10.) Έστω E, F Banach lattices έτσι, ώστε E διαχωρίσιμο και F έχει την ιδιότητα Cantor. Υποθέτουμε ότι G είναι διανυσματικός υπόχωρος του E και B είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του G. Έστω $T : G \longmapsto F$ θετικός γραμμικός τελεστής. Αν το σύνολο $T(B)$ είναι διατακτικά φραγμένο, ο T έχει θετική γραμμική επέκταση στον E. Αν ο F έχει axial element, τότε ο T έχει θετική γραμμική επέκταση στον E αν, και μόνον αν το $T(B)$ είναι φραγμένο ως προς τη νόρμα.*

Απόδειξη. Έστω το σύνολο $M = B - E^+$. Ισχύει ότι $M = \{x \in E \ : \ x \leq b \ \text{για κάποιο} \ b \in B\}$.

Πράγματι, έστω $x \in M$. Τότε υπάρχει $b \in B$ και $y \in E^+$ έτσι ώστε $x = b - y$. Άρα, $y = b - x \geq 0 \Leftrightarrow b \geq x$ ή ισοδύναμα

$$B - E^+ \subseteq \{x \in E \ : \ x \leq b \ \text{για κάποιο} \ b \in B\}.$$

Από την άλλη, έστω $x \in E$ και $b \in B$ έτσι, ώστε $x \leq b$. Τότε, $b - x := y \geq 0 \Rightarrow y \in E^+$ και άρα $x = b - (b - x) = b - y, \ b \in B, \ y \in E^+$ ή ισοδύναμα,

$$\{x \in E \ : \ x \leq b \ \text{για κάποιο} \ b \in B\} \subseteq B - E^+.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το $T(B)$ είναι διατακτικά φραγμένο ή ισοδύναμα ότι υπάρχει $y_0 \in F^+$ τέτοιο, ώστε $y \leq y_0, \ \forall \ y \in T(B)$ ($T(B)$ majorized από το y_0) και ισχυριζόμαστε ότι και το σύνολο $T(G \cap M)$ είναι επίσης majorized από το y_0.

Έστω $y \in T(G \cap M)$. Συνεπώς υπάρχει $x \in G \cap M$ τέτοιο, ώστε $T(x) = y$ και αφού $x \in G \cap M$, έχουμε ότι $x \in G$ και υπάρχει $b \in B$ με $x \leq b$. Ο T είναι θετικός, επομένως $Tx \leq Tb$. Όμως $b \in B \Rightarrow Tb \in T(B) \Rightarrow Tb \leq y_0$. Τελικά, $T(x) = y \leq Tb \leq y_0 \Leftrightarrow y \leq y_0$.

Έστω p_M το συναρτησοειδές Minkowski για την κυρτή περιοχή του μηδενός M. Έχουμε ότι, B κλειστή μοναδιαία μπάλα του G και $M = \{x \in E \ : \ x \leq b \ \text{για κάποιο} \ b \in B\}$. Τότε,

$$b \in B \Rightarrow \|b\| \leq 1 \Rightarrow \|x\| \leq \|b\| \leq 1.$$

Άρα, M περιοχή του μηδενός για το G και (εύκολα) M convex, $0 \in M^o$. Συνεπώς, p_M συνεχές (υπογραμμικό).

Ορίζουμε απεικόνιση $P : E \longmapsto F^+$ έτσι, ώστε

$$P(x) = p_M(x) y_0 \ , \ x \in E.$$

Το p_M είναι υπογραμμικό, άρα P υπογραμμική και επίσης Θετική απεικόνιση ($p_M : E \longmapsto \mathbb{R}_+, \ y_o \in F^+$). Τελικά P συνεχής. Θα δείξουμε ότι ισχύει και $T \leq P$ στον G.

Έστω $v \in G$ και $\epsilon > 0$. Τότε $p_M(v) + \epsilon > p_M(v) \ \Rightarrow \ \exists \lambda > 0$ τέτοιο, ώστε $0 < p_M(v) \leq \lambda < p_M(v) + \epsilon$. Έχοντας, $\frac{v}{\lambda} \in M$ και $0 \leq \frac{\lambda}{p_M(v)+\epsilon} < 1$, όπου M κυρτό με $0 \in M^o$,

$$\frac{v}{p_M(v) + \epsilon} = (1 - \frac{\lambda}{p_M(v) + \epsilon}) \cdot 0 + \frac{\lambda}{p_M(v) + \epsilon} \cdot \frac{v}{\lambda} \in M.$$

Επίσης, $v \in G$ και $p_M(v)+\epsilon > 0$, συνεπώς $\frac{v}{p_M(v)+\epsilon} \in G$. Από τα παραπάνω,

$$\begin{aligned} \frac{v}{p_M(v)+\epsilon} \in G \cap M &\Rightarrow T(\frac{v}{p_M(v)+\epsilon}) \in T(G \cap M) \Rightarrow \\ T(\frac{v}{p_M(v)+\epsilon}) \leq y_0 &\Rightarrow T(v) \leq y_0 \cdot (p_M(v)+\epsilon),\ \forall\, \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Τελικά, $T(v) \leq p_M(v) \cdot y_0 = P(v)$, $\forall\, v \in G$.

Συνοπτικά, ο T είναι θετικός, γραμμικός και άρα συνεχής. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Abramovich - Wickstead, υπάρχει συνεχής γραμμική επέκταση $S : E \longmapsto F$ του T, για την οποία $S \leq P$ στον E. Η επέκταση S είναι θετική. Πράγματι, έστω $x \in E^+$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $-nx = 0 - nx \in M \Rightarrow p_M(-nx) \leq 1$ (καθώς $-nx \in 1 \cdot M \Rightarrow 1 \in \{\lambda > 0 \ / \ -nx \in \lambda M\} \Rightarrow \inf\{\cdots\} \leq 1$). Τότε,

$$\begin{aligned} S(-nx) &\leq P(-nx) = p_M(-nx) \cdot y_0 \leq y_0 \ \Rightarrow \\ S(x) &\geq -\frac{1}{n} \cdot y_0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $S(x) \geq 0, \ \ \forall \ x \in E^+$.

Προχωράμε τώρα στο δεύτερο μέρος του Θεωρήματος, υποθέτοντας ότι w είναι axial element του F^+, συνεπώς $\{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$ majorizing στον F ή ισοδύναμα $\forall y \in F$, $\exists \lambda \in \mathbb{R} : y \leq \lambda w$.

Αν $S : E \longmapsto F$ είναι θετική γραμμική επέκταση του T, τότε το σύνολο

$$A = \{x \in E \ : \ |S(x)| \leq w\},$$

είναι κυρτό, κλειστό και απορροφητικό υποσύνολο του E.

Πράγματι, έστω $x, y \in A$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε, $|S(x)|, |S(y)| \leq w$.

$$\begin{aligned} |S(\lambda x + (1-\lambda)y)| &= |\lambda S(x) + (1-\lambda)S(y)| = \lambda S(x) + (1-\lambda)S(y) \\ &\leq \lambda w + (1-\lambda)w = w \Rightarrow A \text{ κυρτό}. \end{aligned}$$

Έστω $(x_n) \subseteq A$, τέτοια ώστε $x_n \to x$ (όπου S θετικός και άρα συνεχής) και άρα $S(x_n) \to S(x)$ και $|S(x_n)| \leq w, \forall n \Rightarrow |S(x)| \leq w \Leftrightarrow x \in A$. Άρα το A είναι κλειστό.

Έστω τέλος $x \in E \setminus \{0\}$. Τότε, $|S(x)| \in F \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : |S(x)| \leq \lambda w$.
Αν $\lambda < 0$, τότε $|S(x)| \leq \lambda w \leq 0$, πράγμα άτοπο. Επίσης, για αν $\lambda = 0 \Rightarrow |S(x)| \leq 0 \leq w \Rightarrow x \in A$. Έστω $\lambda > 0$. Τότε, $|S(x)| \leq \lambda w \Rightarrow \left|S(\frac{x}{\lambda})\right| \leq w \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in A \Rightarrow x \in \lambda A$. Έστω $t > \lambda$. Άρκεί $x \in tA$.

$$|S(x)| \leq \lambda w < tw \Rightarrow \left|S(\frac{x}{t})\right| \leq w \Rightarrow \frac{x}{t} \in A \Leftrightarrow x \in tA.$$

Άρα το A απορροφητικό.

Έχουμε λοιπόν ότι $(A_\lambda)_{\lambda>0}$, όπου $A_\lambda = \{x \in E : |S(x)| \leq \lambda w\}$ είναι μία οικογένεια από κλειστά, κυρτά και απορροφητικά υποσύνολα του E για την οποία ισχύει $E = \cup_{\lambda>0} A_\lambda = \cup_{n=1}^{\infty} nA$. Από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire,

$$\exists\, n_0 \in N : int(n_0 A) \neq \emptyset.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} int(A) \neq \emptyset &\Rightarrow \exists\, x \in A \text{ και } \epsilon > 0 \ : \ x + S_G(0,\epsilon) \subseteq A \\ &\Rightarrow S_G(0,\epsilon) \subseteq A - x \subseteq A + n^{'} A = (1+n^{'})A. \end{aligned}$$

Επομένως, $B \subseteq \frac{1+n^{'}}{\epsilon} A$ ή ισοδύναμα $B \subseteq \lambda A,\ \lambda > 0$. Συνεπώς $T(B)$ majorized από το $y_o = \lambda w$ και άρα $T(B)$ norm φραγμένο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι T norm φραγμένο. Το G είναι κλειστό καθώς F κλειστό, συνεπώς $T^{-1}(F) = G$ κλειστό. Τότε το

$$A^{'} = \{x \in G \ : \ |T(x)| \leq w\},$$

είναι κλειστό, απορροφητικό και κυρτό υποσύνολο του G και ξανά από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire, το $A^{'}$ περιέχει ένα πολλαπλάσιο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας B του G. Επομένως, $T(B)$ είναι majorized και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το πρώτο μέρος της απόδειξης από όπου και παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 4

Επέκταση σε lattice subspaces

Ορισμός 4.0.16. *Έστω E lattice και F υπόχωρος του E. Ο F καλείται **lattice subspace** του E, αν εφοδιασμένος με την επαγώμενη από το E διάταξη, είναι με τη σειρά του lattice.*

Έστω λοιπόν F lattice subspace ενός lattice E. Συμβολίζουμε x^{++} το **θετικό**, x^{--} το **αρνητικό μέρος** και $|x|_F$ την **απόλυτη τιμή** του τυχαίου στοιχείου $x \in F$ στο F αντίστοιχα (ο συμβολισμός των αντίστοιχων μεγεθών στο E για $x \in E$, ως γνωστόν είναι x^+, x^-, $|x|$). Έστω τώρα $x, y \in F$. Συμβολίζουμε με $x \nabla y$ και $x \Delta y$ το supremum και infimum αντίστοιχα, των x, y ως προς το lattice subspace F ($x \vee y, x \wedge y$ για το E). Τέλος τονίζουμε ότι από τον Ορισμό 4.0.16, προκύπτει ότι για κάθε $x, y \in F$ ισχύει $x \nabla y \geq x \vee y \geq x \wedge y \geq x \Delta y$.

Λήμμα 4.0.17. *Έστω F lattice subspace ενός lattice E. Έστω ότι για $\{a_{ij}\}_{i\in I, j \in J}$, και $\{b_{kl}\}_{k\in K, l\in L}$, πεπερασμένες οικογένειες στοιχείων του F ισχύει*

$$\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij} = \vee_{k\in K} \wedge_{l \in L} a_{kl}.$$

Τότε,

$$\nabla_{i\in I} \Delta_{j \in J} a_{ij} = \nabla_{k\in K} \Delta_{l\in L} a_{kl}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι αν $a_{ij} \in F$ και $\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij} \geq 0$, τότε και $\nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J} a_{ij} \geq 0$.

Θέτοντας $\Sigma = I^J$, από distributive law στο E, παίρνουμε ότι

$$\wedge_{j\in J} \vee_{\sigma \in \Sigma} a_{\sigma(j)j} = \vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij} \geq 0,$$

για κάθε $j \in J$. Επομένως, $\nabla_{\sigma\in\Sigma} a_{\sigma(j)j} \geq 0$, συνεπώς $\Delta_{j\in J} \nabla_{\sigma\in\Sigma} a_{\sigma(j)j} \geq 0$, από όπου και

$$\nabla_{i\in I} \Delta_{j\in J} a_{ij} \geq 0.$$

Σταθεροποιούμε στη συνέχεια ένα $i \in I$ και έχουμε ότι $\vee_{k\in K} \wedge_{l\in L} b_{kl} \geq \wedge_{j\in J} a_{ij}$. Έχοντας ότι $\wedge_{j\in J} a_{ij} \geq \Delta_{j\in J} a_{ij}$, καταλήγουμε στο $\vee_{k\in K} \wedge_{l\in L} (b_{kl} - \Delta_{j\in J} a_{ij}) \geq 0$. Εφόσον τώρα $b_{kl} - \Delta_{j\in J} a_{ij} \in F$, το πρώτο μέρος της απόδειξης μας οδηγεί στο $\nabla_{k\in K} \Delta_{l\in L} (b_{kl} - \Delta_{j\in J} a_{ij}) \geq 0$, ισοδύναμα $\nabla_{k\in K} \Delta_{l\in L} b_{kl} \geq \nabla_{i\in I} \Delta_{j\in J} a_{ij}$. Όμοια αποδεικνύεται και η αντίστροφη φορά της ανισότητας. □

Θυμίζουμε ότι αν E είναι τυχαίος διανυσματικός χώρος, ένας γραμμικός τελεστής $P : E \longmapsto E$ καλείται προβολή στον E, αν $P(P(x)) = P(x)$ για κάθε $x \in E$. Γράφουμε ισοδύναμα ότι $P^2 = P$.

Θεώρημα 4.0.18. *Έστω F lattice subspace ενός lattice E. Υποθέτουμε ότι F_0 sublattice του E παραγόμενο από το F. Τότε υπάρχει θετική γραμμική προβολή P από το F_0 επί του F, η οποία είναι lattice ομοιομορφική ως προς τις lattice δομές των F_0 και F, δηλαδή $P(x \wedge y) = P(x) \Delta P(y)$ και $P(x \vee y) = P(x) \nabla P(y)$ για κάθε $x, y \in F_0$.*

Απόδειξη. Εφόσον F_0 sublattice του E παραγόμενο από F, έχουμε

$$F_0 = \{\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij} \ : \ I, J \ \text{πεπερασμένα}, \ a_{ij} \in F\}.$$

Ορίζουμε απεικόνιση $P : F_0 \longmapsto F$ τέτοια, ώστε $P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) = \nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J}a_{ij}$, όπου $a_{ij} \in F$ και I, J πεπερασμένα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.0.17, συμπεραίνουμε ότι η P είναι καλά ορισμένη. Για τυχόν $x \in F_0$, έχουμε ότι $P(x) \in F$, επομένως η P είναι επί. Επίσης για $x \in F$, έχουμε $P(x) = x$ από όπου και $P^2 = P$.

Τόσο η προσθετικότητα, όσο και ο ομοιομορφισμός ως προς τις lattice δομές των F_0 και F, προκύπτουν χρησιμοποιώντας distributive laws. Για παράδειγμα, έστω I, J, K και L πεπερασμένα σύνολα και $a_{ij}, b_{kl} \in F$ για κάθε $i \in I, j \in J, k \in K$ και $l \in L$. Τότε,

$$\begin{aligned} P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij} + \vee_{k\in K} \wedge_{l\in L} b_{kl}) &= P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} \vee_{k\in K} \wedge_{l\in L} (a_{ij} + b_{kl})) \\ &= P(\vee_{i\in I} \vee_{\sigma\in\Sigma} \wedge_{j\in J} \wedge_{l\in L} (a_{ij} + b_{\sigma(j)l})) \\ &= \nabla_{i\in I}\nabla_{\sigma\in\Sigma}\Delta_{j\in J}\Delta_{l\in L}(a_{ij} + b_{\sigma(j)l}) \\ &= \nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J}\nabla_{k\in K}\Delta_{l\in L}(a_{ij} + b_{kl}) \\ &= P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) + P(\vee_{k\in K} \wedge_{l\in L} b_{kl}), \end{aligned}$$

όπου $\Sigma = K^J$ □

Ακολουθεί το αντίστροφο του προηγούμενου Θεωρήματος.

Πρόταση 4.0.19. *Έστω E lattice και P θετική γραμμική προβολή στο E. Τότε το πεδίο τιμών PE της P είναι lattice subspace του E και για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\{a_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ στοιχείων του PE ισχύει ότι $P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) = \nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J}a_{ij}$.*

Απόδειξη. Η εικόνα PE είναι lattice subspace του E και $x\nabla y = P(x \vee y)$, $x\Delta y = P(x \wedge y)$ για κάθε $x, y \in PE$ ([16], Πρόταση 11.5, σελ 214). Σταθεροποιώντας ένα $i \in I$, έχουμε

$$P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) \geq P(\wedge_{j\in J}a_{ij}) \geq P(\Delta_{j\in J}a_{ij}) = \Delta_{j\in J}a_{ij}.$$

Επομένως, $P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) \geq \nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J}a_{ij}$. Από την άλλη, θέτοντας $\Sigma = J^I$, παίρνουμε $\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij} = \wedge_{\sigma\in\Sigma} \vee_{i\in I} a_{i\sigma(i)}$. Συνεπώς, για τυχαίο (σταθερό) $\sigma \in \Sigma$,

$$P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) \leq P(\vee_{i\in I}a_{i\sigma(i)}) \leq P(\nabla_{i\in I}a_{i\sigma(i)}) = \nabla_{i\in I}a_{i\sigma(i)}.$$

Επομένως, $P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) \leq \Delta_{\sigma\in\Sigma}\nabla_{i\in I}a_{i\sigma(i)} = \nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J}a_{ij}$ και άρα $P(\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} a_{ij}) = \nabla_{i\in I}\Delta_{j\in J}a_{ij}$. □

Παρατήρηση 4.0.20. *Έστω ότι E είναι χώρος Riesz, X lattice subspace του E και $S(X)$ το sublattice του E που παράγεται από τον X. Από το Θεώρημα 4.0.18, υπάρχει θετική γραμμική προβολή $P : S(X) \longmapsto X$, επί του X η οποία είναι lattice ομοιόμορφη ως προς τις lattice δομές των X, $S(X)$.*

Στη συνέχεια θεωρούμε τα εξής θετικά γραμμικά συναρτησιακά

$$f : X \longmapsto \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad g = f \circ P : S(X) \longmapsto \mathbb{R}$$

και παρατηρούμε ότι το g είναι θετική γραμμική επέκταση του f, σε ολόκληρο το $S(X)$.

Πράγματι, για την θετικότητα, έστω $x \in S(X)^+$. Τότε, εφόσον P θετικός, $P(x) \geq 0$ και $f(P(x)) \geq 0$ (f θετικό). Δηλαδή, $g \in \mathbb{R}^+$. Η γραμμικότητα είναι προφανής. Τέλος, αν $x \in X$, τότε $g(x) = f(P(x)) = f(x)$. Άρα g επέκταση του f σε ολόκληρο το $S(X)$.

Τελειώνοντας την παρούσα μελέτη θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα μη ικανοποίησης της ιδιότητας θετικής επέκτασης ([15], σελ 2798).

Έστω λοιπόν $\Omega = [-1, 1]$, $x_1(t) = |t|$ και

$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{|t|}, & \text{αν } -1 \leq t < 0, \\ t^2, & \text{αν } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Έστω επίσης $X = [x_1, x_2]$. Τότε ο X είναι lattice subspace του $C(\Omega)$ και το σύνολο $\{x_1, x_2\}$ είναι βάση του X (x_1, x_2 γραμμικά ανεξάρτητα). Για την ακρίβεια είναι θετική βάση του X. Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε ότι,

$$X_+ = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}.$$

Προφανώς, $\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \subseteq X_+$.

Για το αντίστροφο, έστω $x \in X_+$ τέτοιο, ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ και θα δείξουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Έστω ακολουθία $t_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$0 \leq \frac{x(t_n)}{x_1(t_n)} = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{x_2(t_n)}{x_1(t_n)} = \lambda_1 + \lambda_2 t_n = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{1}{n} \to \lambda_1,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 \geq 0$.

Όσον αφορά το λ_2, θεωρούμε την ακολουθία $t_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι,

$$0 \leq \frac{x(t_n)}{x_2(t_n)} = \lambda_1 \frac{x_1(t_n)}{x_2(t_n)} + \lambda_2 = \lambda_1 \frac{|t_n|}{\sqrt{|t_n|}} + \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \lambda_2 \to \lambda_2,$$

από όπου και $\lambda_2 \geq 0$. Πράγματι λοιπόν, το σύνολο $\{x_1, x_2\}$ είναι θετική βάση του X.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα συναρτησιακά συντεταγμένων της βάσης, έστω f_1, f_2. Τότε τα f_1, f_2 είναι θετικά γραμμικά συναρτησιακά του X, τα οποία δεν επεκτείνονται σε θετικά γραμμικά συναρτησιακά του $C[-1,1]$.

Έστω προς άτοπο, ότι f_1 επεκτείνεται σε θετικό γραμμικό συναρτησιακό του $C[-1,1]$ το οποίο συμβολίζουμε ξανά f_1. Τότε,

$$f_1(x_2) = \int_\Omega x_2 \, d\mu_1 = 0 \ \text{ και } \ f_1(x_1) = \int_\Omega x_1 \, d\mu_1 = 1,$$

όπου $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$ και $x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$. Άρα,

$$\int_\Omega x_2 \, d\mu_1 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 0 \ \ \mu_1\text{−}a.e. \ \overset{x_2 \geq 0}{\Rightarrow} \ \mu_1(x_2 > 0) = 0 \ \Rightarrow \ \mu_1([-1,1] \setminus \{0\}) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mu_1([-1,1])}_{2} - \underbrace{\mu_1(\{0\})}_{0} = 0,$$

πράγμα άτοπο (όμοια και για f_2).

Βιβλιογραφία

[1] Y. A. Abramovich and A. W. Wickstead, *The Regularity of Order Bounded Operators into C(K), II*, Quart. J. Math. Oxford (2) **44**, (1993), 257-270.

[2] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Heidelberg and New York, 2006.

[3] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer-Verlag, 2006.

[4] C. D. Aliprantis, R. Tourky, *Cones and Duality*, A.M.S., 2007.

[5] N. Dăneţ, *The Riesz Decomposition Property for the space of Regular Operators*, Proc. Am. Math. Soc. **129** (2001), 539-542.

[6] N. Dăneţ and R.-M. Dăneţ, *Existence and Extensions of Positive Linear Operators*, Positivity **13** (2009), no. 1, 89-106.

[7] N. Dăneţ and R.-M. Dăneţ, *Extension Theorems and the Riesz Decomposition Property*, Positivity **7** (2003), no. 1-2, 87-93.

[8] R.-M. Dăneţ, *Some consequences of a theorem about extension of positive linear operators*, Rev. Roumaine. Math. Pures Appl., **33** (1988), 727-729.

[9] R.-M. Dăneţ and N. C. Wong, *Extension Theorems without Dedekind Completeness*, Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Vol. **I** (Potenza, 2000). Rend. Circ. Mat. Palermo (**2**) Suppl. 2002, no. **68**, part I, 381-387.

[10] R.-M. Dăneţ and N. C. Wong, *Hahn-Banach-Kantorovich type theorems with the range space not necessarily (o)-complete*, Taiwanese J. Math. **6** (2002), no. 2, 241-246.

[11] Z. Lipecki, D. Plachky and W. Thomsen, *Extensions of Positive Operators and Extreme Points, I*, Colloq. Math. **42** (1979), 279-284.

[12] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland Publishing Company, 1971.

[13] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1991.

[14] S. Miyajima, *Structure of Banach quasi-sublattices*, Hokkaido Mathematical Journal **12** (1983), 83-91.

[15] I. A. Polyrakis, *Finite-Dimensional Lattice-Subspaces of $C(\Omega)$ and Curves of* $\mathbb{R}^n$, Trans. Am. Math. Soc. **348** (1996), no. 7, 2793-2810.

[16] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, 1974.

Ευρετήριο