




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΑΙΤΗΣΗ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ


ΕΠΩΝΥΜΟ : ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ
ΟΝΟΜΑ : ΙΩΑΝΝΗΣ
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ : ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ : 52112019
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ (Οδός-αριθμός;-περιοχή-Τ.Κ.) : ΚΛΑΖΟΜΕΝΩΝ 14, ΤΑΥΡΟΣ, 177 78
ΤΗΛΕΦΩΝΟ : 6974 146 202
E-MAIL : giannopioa@gmail.com
ΡΟΗ (ΡΕΥΣΤΩΝ ή ΣΤΕΡΕΩΝ) : ΣΤΕΡΕΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	Καθηγητής Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου
ΤΙΤΛΟΣ ΘΕΜΑΤΟΣ	Μοντελοποίηση ινωδών σύνθετων υλικών και προσδιορισμός των ελαστο-στατικών σταθερών τους με υπολογιστικές μεθόδους.

Ο/Η ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ/-ΟΥΣΑ


.....
(υπογραφή καθηγητή)
Ε.Ε. Θεοτόκογλου

ΑΘΗΝΑ 26/6/2013
Ο/Η ΑΙΤΩΝ/-ΟΥΣΑ


.....
(υπογραφή φοιτητή)

Ευχαριστώ τον καθηγητή κύριο Γιώργο Τσαμασφύρο για την εμπιστοσύνη που επέδειξε στο άτομο μου και για την συγκατάθεση του για την επιλογή μου ως υποψήφιο διδάκτορα στην ΣΕΜΦΕ

Ευχαριστώ τον καθηγητή κύριο Ευστάθιο Θεοτόκογλου για την αποδοχή του να με αναλάβει και να με καθοδηγήσει σαν υποψήφιο διδάκτορα καθώς και για την συμπαράσταση και την καθοδήγηση του στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία

Ευχαριστώ τον επίκουρο καθηγητή κύριο Εμίλιο Σιδερίδη για την πολύτιμη προσφορά του στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία

Περιεχόμενα

Λίστα συμβόλων	3
Περίληψη	5
Summary	7
1 Η ελαστο-στατική διατύπωση του προβλήματος	9
2 Μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία	12
2.1 Επίπεδα στοιχεία – επίπεδη ένταση	13
2.2 Επίπεδα στοιχεία – επίπεδη παραμόρφωση	14
2.3 Επίπεδα αξονοσυμμετρικά στοιχεία.....	16
2.4 Στοιχεία όγκου	17
3 Η προσέγγιση με τα πεπερασμένα στοιχεία	19
3.1 Κύλινδρος περίπτωση 1 ^η	22
3.2 Κύλινδρος περίπτωση 2 ^η	27
3.3 Κύλινδρος περίπτωση 3 ^η	31
3.4 Συμπεράσματα επί των αποτελεσμάτων της μοντελοποίησης συμπαγούς κυλινδρικού σώματος από ομογενές υλικό με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων:	35
3.5 Σωληνοειδές χωρίο περίπτωση 1 ^η	37
3.6 Σωληνοειδές χωρίο περίπτωση 2 ^η	42
3.7 Σωληνοειδές χωρίο περίπτωση 3 ^η	49

3.8	Προσέγγιση μη γραμμικού πεδίου μετατοπίσεων με στοιχεία γραμμικής ή μεγαλύτερης τάξης παρεμβολή	53
3.9	Συμπεράσματα.....	58
4	Η μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης.....	59
5	Αριθμητική προσέγγιση.....	64
5.1	Οι αναλογίες των αριθμητικών δοκιμών.....	64
5.2	Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L	67
5.3	Ο λόγος Poisson ν_{LT}	69
5.4	Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T και ο εγκάρσιος λόγος του Poisson ν_{TT}	71
5.5	Έλεγχος επίδρασης διακριτοποίησης πεπερασμένων στοιχείων	76
5.6	Αριθμητική προσέγγιση του λόγου Poisson ν_{TT}	79
6	Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα	83
	Παράρτημα	86
	Αναφορές.....	88

Λίστα συμβόλων

E : Μέτρο ελαστικότητας ισότροπου υλικού (Young's modulus of elasticity)

E_L : Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας (longitudinal modulus of elasticity)

E_T : Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας (transverse modulus of elasticity)

K : Μέτρο συμπιεστότητας (bulk modulus of elasticity)

ν : Λόγος Poisson μεταξύ τροπών διαφορετικών διευθύνσεων (Poisson ratio)

ν_{LT} : Λόγος Poisson μεταξύ εγκάρσιας και διάμηκου τροπής (Poisson ratio)

ν_{TT} : Λόγος Poisson μεταξύ διάμηκων τροπών διαφορετικών διευθύνσεων (Poisson ratio)

ε : Τροπή (strain)

ε_r : Τροπή κατά την ακτινική διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (radial strain)

$\varepsilon_{\theta\theta}$: Τροπή κατά την γωνιακή διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (angular strain)

ε_{zz} : Τροπή κατά την αξονική διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (longitudinal strain)

σ : Τάση (stress)

σ_r : Τάση κατά την ακτινική διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (radial stress)

$\sigma_{\theta\theta}$: Τάση κατά την γωνιακή διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (angular stress)

σ_{zz} : Τάση κατά την αξονική διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (longitudinal stress)

u : Μετατόπιση (displacement)

Γιαννόπουλος Ιωάννης

u_r : Μετατόπιση κατά την ακτινική διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (radial displacement)

u_θ : Μετατόπιση κατά την γωνιακή διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (angular displacement)

u_z : Μετατόπιση κατά την αξονική διεύθυνση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (longitudinal displacement)

Suffix f : fiber

Suffix m : matrix

Suffix i : interface

Περίληψη

Η ακόλουθη εργασία έχει συνταχθεί στα πλαίσια διερεύνησης της καταλληλότητας προς χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την μοντελοποίηση και στατική ανάλυση μικρο-μηχανικού μοντέλου από σύνθετα υλικά.

Το πρόβλημά μας είναι ο υπολογισμός ελαστο-στατικών μηχανικών ιδιοτήτων ενός ινώδους σύνθετου υλικού μακροσκοπικά, το οποίο απαρτίζεται από ισότροπες και ομογενείς φάσεις με διαφορετικές επιμέρους μηχανικές ιδιότητες. Εν μέσω των παραπάνω θεωρήσεων, προκύπτει και το πρόβλημα της μοντελοποίησης της λεγόμενης ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες βάσει μιας χωρικής συντεταγμένης.

Οι μακροσκοπικές μηχανικές ιδιότητες του συνθέτου υλικού θεωρούμενου σαν ένα σώμα που θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, είναι:

- Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L (longitudinal modulus of elasticity)
- Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T (transverse modulus of elasticity)
- Το λόγο Poisson ν_{LT} , ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος του αντιθέτου της εγκάρσιας τροπής προς την διαμήκη
- Το λόγο Poisson ν_{TT} , ο οποίος συσχετίζει τις εγκάρσιες τροπές διαφορετικών διευθύνσεων

Θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε την καταλληλότητα της χρήσης των πεπερασμένων στοιχείων συγκρίνοντας:

- Αποτελέσματα από αναλυτικές λύσεις στοιχειωδών προβλημάτων με αυτές που προκύπτουν από μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία
- Τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων και πειραματικών αποτελεσμάτων των δημοσιεύσεων [1] και [2], με αυτά των πεπερασμένων στοιχείων

Στο **πρώτο κεφάλαιο** της παρούσας μελέτης, διατυπώνεται το ελαστο στατικό πρόβλημα προς επίλυση.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο**, μελετάται η καταλληλότητα διαφόρων ειδών πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματός μας.

Στο **τρίτο κεφάλαιο**, επιλύονται στοιχειώδεις γεωμετρίες αναλυτικά και συγκρίνονται τα αποτελέσματα τους με αυτά των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** αναλύεται η προσεγγιστική αριθμητική μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης του σύνθετου υλικού.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** επιλύεται αριθμητικά το σύνθετο μοντέλο και τα αποτελέσματα της ανάλυσης ως προς το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας και λόγου του Poisson, συγκρίνονται με προ υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις και πειραματικά αποτελέσματα.

Στο **έκτο κεφάλαιο** βρίσκονται τα συμπεράσματα της μελέτης αυτής καθώς και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Summary

The following study has been compiled in order to investigate the results of the application of finite elements for modeling static analysis of micromechanical composite materials.

The result of investigation is the calculation of macroscopic elasto-static mechanical properties of a composite material which comprises of two main isotropic and homogeneous phases, being the fiber and the matrix whilst knowing the properties of the individual constituents. The third phase that is taken into account, the so called mesophase, is the third phase of our composite and its properties vary according to a spatial coordinate via an assumed known analytic function.

The macroscopic elastic properties of the composite material under investigation are:

- The longitudinal modulus of elasticity, E_L
- The transverse modulus of elasticity, E_T
- The Poisson's ratio ν_{LT} , which is the ratio of the opposite of the transverse to the longitudinal strain
- The Poisson's ratio ν_{TT} , which relates the transverse strains of different directions

We shall validate our finite element solution by comparing it to:

- Analytical solutions from elementary problems
- Results from analytical solution already published and relevant test results i.e. [1] & [2]

In the **first chapter** of this study, the elasto static problem to be solved is posed

In the **second chapter**, different element formulations are investigated, that could be employed for our problem.

In the **third chapter**, elementary problems are solved and compared to already known closed form analytical solutions

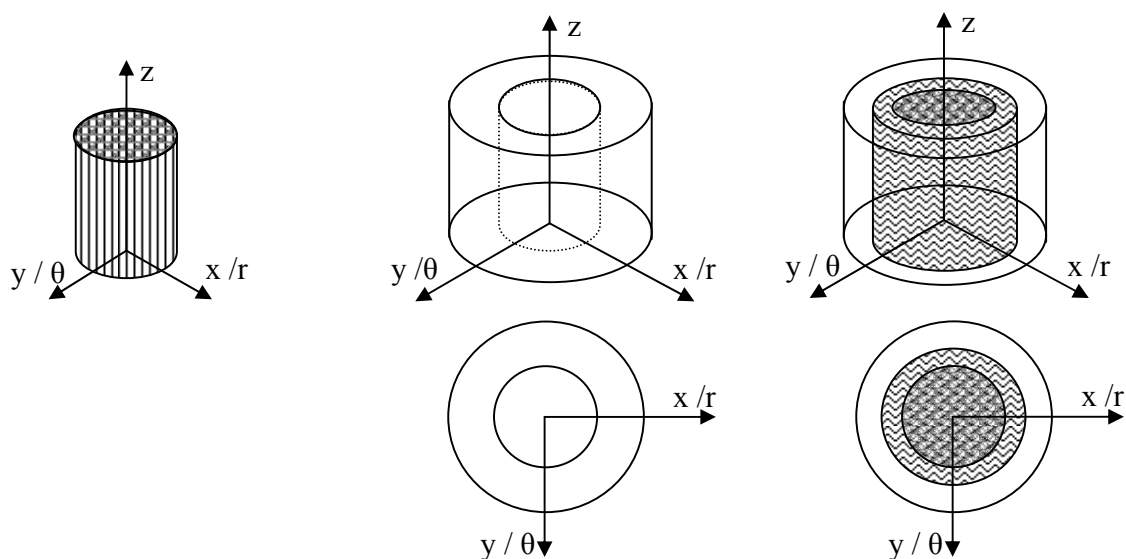
In the **fourth chapter**, the idealization of the mesophase is explained and the way to be implemented into the FE model.

In the **fifth chapter**, the complete model is solved and various results are drawn with respect to the elasto static properties of the composite material, versus analytic and test results.

In the **sixth chapter**, the study is concluded and future investigations are proposed.

1 Η ελαστο-στατική διατύπωση του προβλήματος

Το ελαστο-στατικό πρόβλημα που καλούμαστε να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, απεικονίζεται στο σχήμα 1.1.γ. Στα σχήματα 1.1.α,β & γ, επεξηγούμε την συλλογιστική διαδοχή που θα ακολουθηθεί για την αναλυτική – υπολογιστική διερεύνηση του προβλήματος μας.



α: Κύλινδρος

β: Σωληνοειδής κύλινδρος

γ: Το μικρο-μηχανικό μας μοντέλο

Σχήμα 1.1: Απεικόνιση του μικρο-μηχανικού μοντέλου και των επιμέρους φάσεων

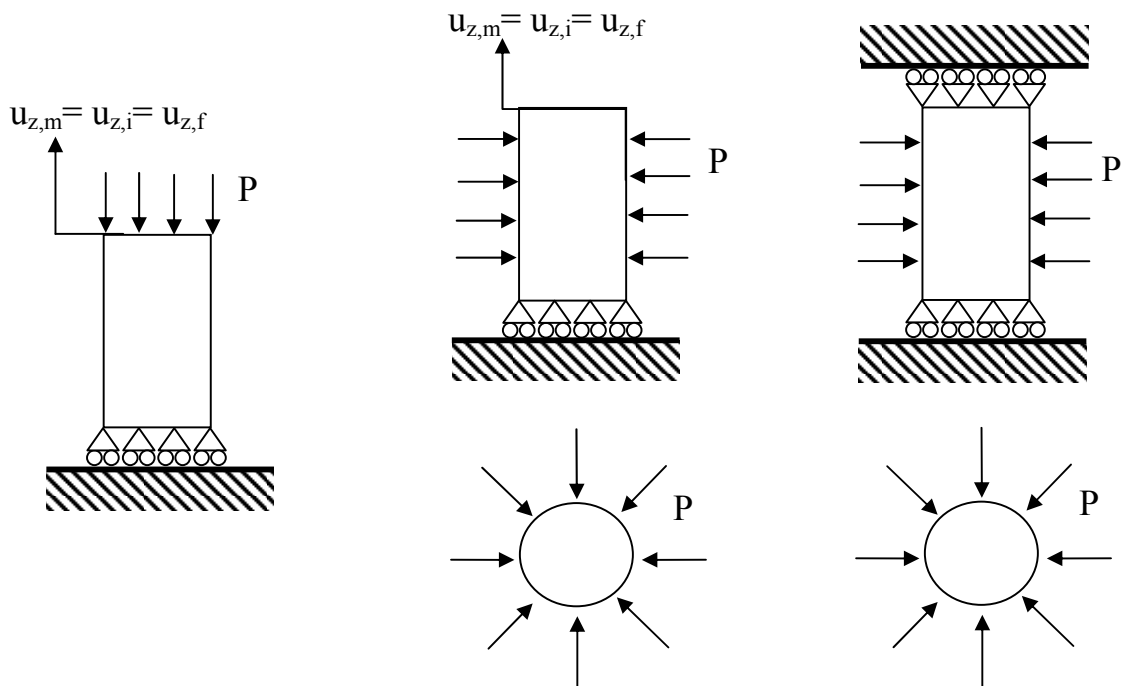
Στο σχήμα 1.1.α, απεικονίζεται ένα κυλινδρικό χωρίο, το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από ομογενές ισότροπο υλικό. Αυτό το χωρίο μοντελοποιεί την ίνα γυαλιού. (Οι δείκτες των ελαστικών μεγεθών που θα σχετίζονται με αυτό το υλικό θα φέρουν τον δείκτη “f” από την συντομογραφία “f = fiber”).

Στο σχήμα 1.1.β, απεικονίζεται ένα σωληνοειδές χωρίο, επίσης από ομογενές ισότροπο υλικό με διαφορετικές στατικές ελαστικές ιδιότητες από αυτό του σχήματος 1.1.α. Αυτό το

χωρίο μοντελοποιεί την μήτρα. (Οι δείκτες των ελαστικών μεγεθών που θα σχετίζονται με αυτό το υλικό θα φέρουν τον δείκτη “m” από την συντομογραφία “m = matrix”).

Στο σχήμα 1.1.γ, απεικονίζεται ότι στο σχήμα 1.1.α. & β μαζί, ενώ υπάρχει ένα επιπλέον σωληνοειδές ενδιάμεσο χιτώνιο που δρα ως ‘ενδιάμεση φάση’ στα δύο υλικά.. Το υλικό της ενδιάμεσης αυτής φάσης, μπορεί να υποτεθεί ότι έχει μεταβλητές ελαστικές ιδιότητες συναρτήσει της ακτίνας. Αυτό το χωρίο μοντελοποιεί την ενδιάμεση φάση (Οι δείκτες των ελαστικών μεγεθών που θα σχετίζονται με αυτό το υλικό θα φέρουν τον δείκτη “i” από την συντομογραφία “i = interphase region”).

Οι οριακές συνθήκες των άνωθεν χωρίων του σχήματος 1.1.γ, οι οποίες θα μας οδηγήσουν στον υπολογισμό στατικών ελαστικών μεγεθών του συνολικού σώματος θεωρώντας το μακροσκοπικά ως ομογενές σώμα, είναι οι ακόλουθες:



α: Οριακές συνθήκες για την διερεύνηση των E_L και ν_{LT}

β: Οριακές συνθήκες για την διερεύνηση του E_T

γ: Οριακές συνθήκες για την διερεύνηση του K και ν_{LT}

Σχήμα 1.2: Οριακές συνθήκες και φόρτιση επί του μικρομηχανικού μοντέλου

Με P , συμβολίζουμε την εξωτερική φόρτιση – πίεση.

Με u συμβολίζουμε την μετατόπιση του συνόρου γενικά, και ειδικότερα με u_f , u_i , u_m , τις μετατοπίσεις των άνω συνόρων της ίνας, ενδιάμεσης φάσης και μήτρας αντίστοιχα.

Σχήμα 1.2.α: οριακές συνθήκες και φόρτιση για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας (E_L , longitudinal modulus of elasticity) και του λόγου Poisson ν_{LT} . Η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου θα είναι η ίδια για όλα τα υλικά του συνθέτου κυλίνδρου

Σχήμα 1.2.β: οριακές συνθήκες και φόρτιση για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας (E_T , transverse modulus of elasticity) σε συνθήκες επίπεδης έντασης. Η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου θα είναι η ίδια για όλα τα υλικά του συνθέτου κυλίνδρου

Σχήμα 1.2.γ: οριακές συνθήκες και φόρτιση για τον υπολογισμό του μέτρου συμπίεστικότητας (K , bulk modulus) του συνθέτου υλικού ή τον έμμεσο υπολογισμό του λόγου Poisson ν_{LT}

Σημείωση επί των σχημάτων 1.2.α,β & γ: Οι οριακές συνθήκες οι οποίες έχουν απεικονιστεί στα κάτω άκρα των κυλίνδρων, είναι ουσιαστικά κυλίσεις, δηλαδή δεν επιτρέπουν στον κύλινδρο να αποχωριστεί από το επίπεδο, επιτρέπουν όμως την αυξομείωση της ακτίνας του κυλίνδρου επί του επιπέδου.

Σημείωση επί των σχημάτων 1.2.α & β: Οι οριακές συνθήκες του άνω ελεύθερου άκρου, επιτρέπουν στον σύνθετο κύλινδρο να παρουσιάσει μετατόπιση κατά τον άξονα των z , αλλά όλα τα επιμέρους υλικά θα έχουν την ίδια μετατόπιση.

2 Μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία

Η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία έλαβε χώρα χρησιμοποιώντας το εμπορικό πακέτο “PATRAN – NASTRAN” της εταιρίας MSC Software, βλέπε αναφορές [8], [9], [10], [11] & [12]. Το πρόγραμμα “PATRAN” μας βοήθησε στην γραφική αποτύπωση και διατύπωση των προβλημάτων μας (pre-processor) καθώς και στην ανάγνωση και γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων (post-processor) ενώ το πρόγραμμα “NASTRAN” είναι ο επιλυτής των προβλημάτων όπως αυτά διατυπώνονται από τον προ- επεξεργαστή PATRAN.

Για την μοντελοποίηση γενικά με τα πεπερασμένα στοιχεία θα αναφερθούμε σε μερικές πρακτικές που βοηθούν στην ορθολογικότερη προσέγγιση των προβλημάτων:

- Προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε όσο πιο μικρά μοντέλα μπορούμε, δηλαδή πιο λίγα στοιχεία με όσο πιο απλές συναρτήσεις σχήματος γίνεται. Δεν είναι δυνατό να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το μέγεθος του στοιχείου για την ικανοποιητική προσέγγιση του πεδίου μετατοπίσεων του προβλήματός μας. Παρόλα αυτά, με προηγούμενη αποκτηθείσα εμπειρία του χρήστη, ή με την βοήθεια επαναληπτικών δοκιμών επί του μοντέλου, είτε με την προσομοίωση ή κατά προσέγγιση προσομοίωση της μορφής μιας αναλυτικής λύσης, μπορούμε να μαντέψουμε την διακύμανση του πεδίου μετατοπίσεων που περιμένουμε να επιδείξει το μοντέλο μας.
- Σε συμμετρικά προβλήματα, μπορούμε να περιορίσουμε το χωρίο επίλυσης, θέτοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα επίπεδα συμμετρίας.
- Σε αξονοσυμμετρικά προβλήματα, αντίστοιχα με την παραπάνω σημείωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τομέα μόνο του χωρίου μας. Εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ειδικά επίπεδα ‘αξονοσυμμετρικά’ στοιχεία. Τα προβλήματα αυτά πρέπει να επιδεικνύουν συμμετρία και ως προς την γεωμετρία και ως προς την φόρτιση και τις οριακές συνθήκες.

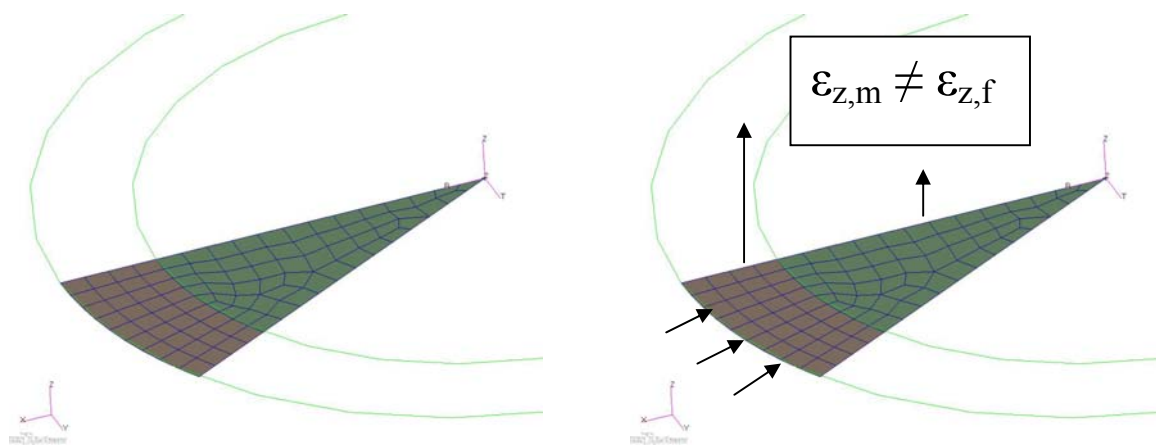
Το υπολογιστικό χωρίο το οποίο καλούμαστε να μοντελοποιήσουμε (σχήμα 1.1.α, β ή γ) είναι στην πραγματικότητα τρισδιάστατο και η πρώτη εντύπωση μας παραπέμπει σε Τρισδιάστατη πεπερασμένα στοιχεία για την μοντελοποίηση του.

Κατόπιν παραδοχών, οι οποίες θα μελετηθούν εν συνεχεία, θα διαπιστώσουμε σε ποιές περιπτώσεις αυτό το τρισδιάστατο χωρίο μπορεί να υποπέσει στην κατηγορία επίπεδων προβλημάτων (επίπεδης έντασης ή παραμόρφωσης, ή αξονοσυμμετρικό) και ως τέτοιο, να μοντελοποιηθεί από στοιχεία επίπεδα αντί για στοιχεία όγκου και εάν υπάρχει υπολογιστικό κέρδος από μια τέτοια μετατροπή.

2.1 Επίπεδα στοιχεία – επίπεδη ένταση

Στην περίπτωση κατά την οποία θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι στις δύο επιφάνειες στις οποίες αρχίζει και τελειώνει ο παραπάνω σύνθετος κύλινδρος, τα δύο του άκρα δηλαδή, δεν υπάρχει κάποιας μορφής πίεση ή αντίδραση από κάποια πάκτωση, με άλλα λόγια ο κύλινδρος είναι ελεύθερος να διασταλεί κατά τον z άξονα εάν του ασκηθεί ακτινική πίεση, τότε αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί με επίπεδα στοιχεία, στα οποία επάνω θα θεωρούνταν οι εξισώσεις πεδίου επίπεδης έντασης, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Απεικονίζουμε την περίπτωση ενός σύνθετου κυλίνδρου με δύο διαφορετικά υλικά $f = \text{fiber}$ και $m = \text{matrix}$.

Για να μειώσουμε το μέγεθος του συνολικού μοντέλου και άρα το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο έναν τομέα του συνολικού κυκλικού δίσκου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Η παραδοχή αυτή για την χρήση μόνο ενός τομέα, προκύπτει εάν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η φόρτιση θα είναι αξονοσυμμετρική επί του επιπέδου του δίσκου, επομένως το μοντέλο θα επιδείξει αξονοσυμμετρική παραμόρφωση δηλαδή τα μεγέθη μας είναι ανεξάρτητα από την γωνία, θα εξαρτώνται μόνο από την ακτινική απόσταση από το κέντρο του κυκλικού δίσκου.



Σχήμα 2.1: Μοντελοποίηση με επίπεδα στοιχεία, επίπεδης έντασης. Η διαφορά στις τροπές κατά τον άξονα των z (ϵ_z) που προκύπτει από ακτινική φόρτιση σε κύλινδρο με πυρήνα και χιτώνιο από διαφορετικά υλικά

Το πρόβλημα αυτής της μοντελοποίησης είναι ότι με την εφαρμογή ακτινικής πίεσης, η τροπή κατά την διεύθυνση z για τα δύο υλικά θα είναι διαφορετική. Στην δική μας περίπτωση θέλουμε να μελετήσουμε περιπτώσεις κατά τις οποίες η τροπή κατά z θα είναι μηδενική (σχήμα 1.2.γ) ή εάν δεν είναι μηδενική, θα είναι η ίδια για όλο το δίσκο (σχήμα 1.2.α & β).

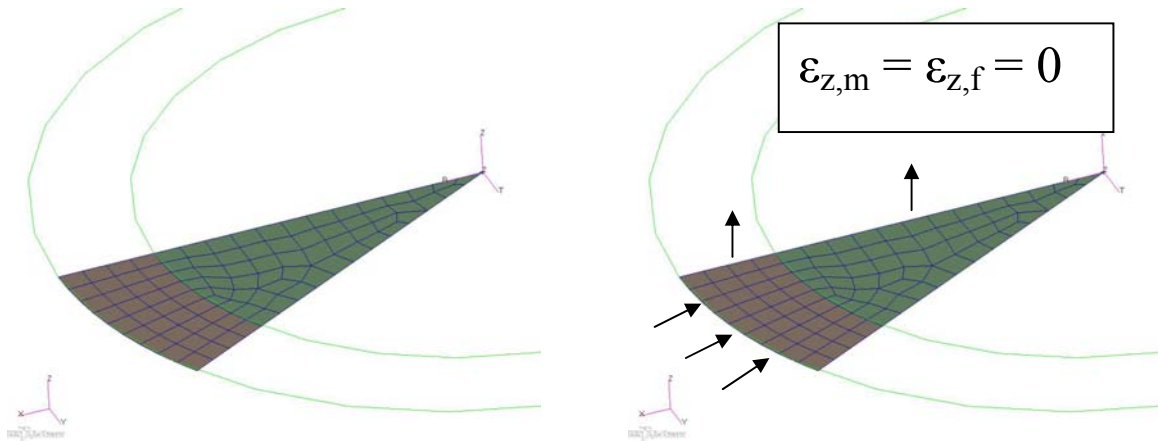
Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι δεν μπορεί να ασκηθεί πίεση κατά την διεύθυνση z συνεπώς δεν μπορούμε να μελετήσουμε το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L ή το λόγο Poisson ν_{LT} .

Συνεπώς, αυτά τα στοιχεία, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μόνο στην περίπτωση του σχήματος 1.2.β και για ομογενές υλικό μίας φάσης. Δεν ενδείκνυται η χρήση τους για τα δικά μας προβλήματα.

2.2 Επίπεδα στοιχεία – επίπεδη παραμόρφωση

Στην περίπτωση κατά την οποία θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι στις δύο επιφάνειες στις οποίες αρχίζει και τελειώνει ο παραπάνω σύνθετος κύλινδρος, τα δύο του άκρα δηλαδή, υπάρχει πίεση ή αντίδραση από κάποια πάκτωση έτσι ώστε η τροπή κατά τον άξονα z να είναι

μηδέν και για τα δύο υλικά, με άλλα λόγια ο κύλινδρος δεν είναι ελεύθερος να διασταλεί εάν του ασκηθεί ακτινική πίεση, τότε αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί με επίπεδα στοιχεία, στα οποία επάνω θα θεωρούνταν οι εξισώσεις πεδίου επίπεδης παραμόρφωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα 2γ & δ.



Σχήμα 2.2: Μοντελοποίηση με επίπεδα στοιχεία, επίπεδης παραμόρφωσης. Οι τροπές κατά τον άξονα των z (ϵ_z) που προκύπτουν από ακτινική φόρτιση σε κύλινδρο με πυρήνα και χιτώνιο από διαφορετικά υλικά είναι ίδιες

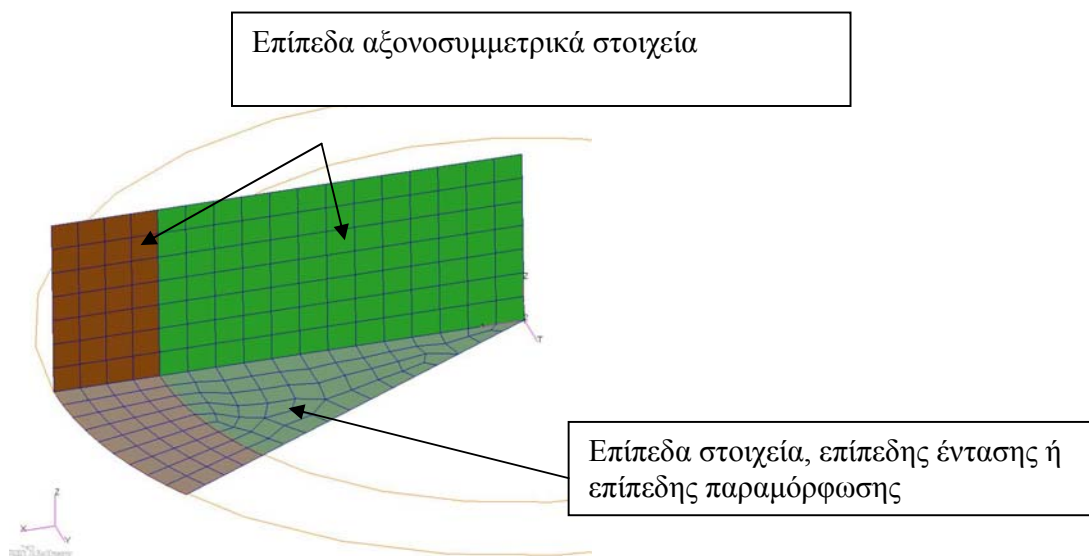
Το πρόβλημα με αυτήν την μοντελοποίηση είναι ότι αναγκαστικά θεωρούμε τη τροπή κατά z ίση με το μηδέν. Οπότε δεν μπορούν να μελετηθούν προβλήματα κατά τα οποία η τροπή κατά z θα είναι ίση με ένα σταθερό αριθμό για όλο το χωρίο.

Επίσης όπως και πριν, δεν μπορεί να επιβληθεί φορτίο κατά την διεύθυνση z οπότε και δεν μπορούμε να εξαγάγουμε αποτελέσματα για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L ή το λόγο Poisson ν_{LT} .

Συνεπώς, αυτού του είδους τα στοιχεία, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση του σχήματος 1.2.γ για ομογενές ή και σύνθετο υλικό. Δεν ενδείκνυται η χρήση τους για τα δικά μας προβλήματα.

2.3 Επίπεδα αξονοσυμμετρικά στοιχεία

Μια τρίτη κατηγορία επίπεδων στοιχείων που ταιριάζει στο πρόβλημά μας, είναι τα αξονοσυμμετρικά στοιχεία, όπως φαίνονται στο σχήμα 2.ε. Αυτά μοντελοποιούν το πρόβλημά μας και στην z διεύθυνση. Προϋπόθεση είναι να υπάρχει και αξονοσυμμετρική φόρτιση έτσι ώστε τα μεγέθη που ψάχνουμε να είναι ανεξάρτητα της γωνίας, κάτι που στην περίπτωσή μας ισχύει. Στο παρακάτω σχήμα 2.3, φαίνεται και η διαφορά στο επίπεδο μοντελοποίησης μεταξύ επίπεδων και αξονοσυμμετρικών στοιχείων



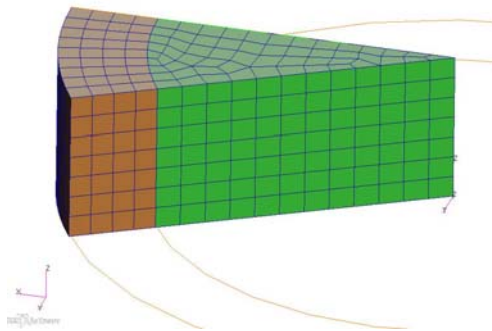
Σχήμα 2.3: Μοντελοποίηση με αξονοσυμμετρικά στοιχεία

Με αυτά τα στοιχεία, προσπερνούμε το πρόβλημα της τροπής κατά z , μιας και μπορούμε να την μεταχειριστούμε είτε ως μηδενική, είτε να είναι ίδια για όλη την πάνω και κάτω πλευρά του κυλίνδρου.

Επίσης μπορούμε να φορτίσουμε και κατά την ακτινική και κατά την διαμήκη διεύθυνση και να πάρουμε αποτελέσματα επίσης είτε/και κατά την ακτινική είτε/και κατά την διαμήκη διεύθυνση.

Το πρόβλημα αυτών των στοιχείων (με γραμμικές συναρτήσεις σχήματος) είναι ότι υποστηρίζονται υπολογιστικά σε μη γραμμικές στατικά επιλύσεις στο εμπορικό πακέτο που χρησιμοποιούμε. Επειδή προτιμούμε να διατηρήσουμε την μελέτη μας σε απλά γραμμικά υπολογιστικά σχήματα, δεν θα επιλέξουμε αυτή τη μέθοδο μοντελοποίησης η οποία κατά τα άλλα είναι μια πολύ εξυπηρετική μέθοδος για τα προβλήματά μας.

2.4 Στοιχεία όγκου



Σχήμα 2.4: Μοντελοποίηση με στοιχεία όγκου

Με αυτά τα στοιχεία, όλα τα προβλήματα μοντελοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω, εξαλείφονται.

Το ύψος του κυλινδρικού τομέα, η γωνία του τομέα που θα μοντελοποιηθεί, το μέγεθος των στοιχείων (ο συνολικός τους αριθμός), οι συνοριακές συνθήκες και άλλες παρεμφερής παράμετροι, θα επιφέρουν υπολογιστικές επιπτώσεις επί της λύσης. Οι παράμετροι αυτοί θα

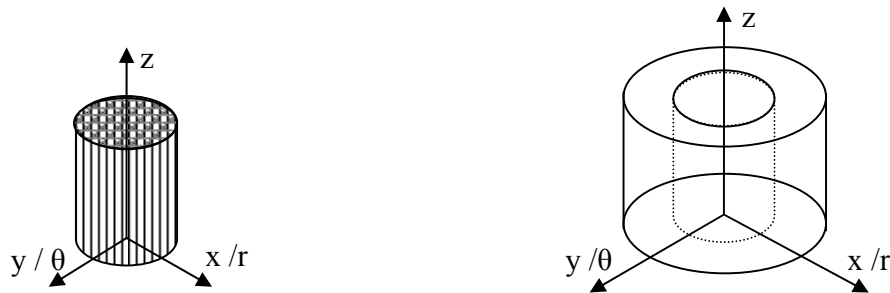
στοιχειοθετηθούν βάσει της εμπειρίας του χρήστη και φυσικά βάσει πειραματισμών και συγκρίσεων της απόκρισης του μοντέλου από την αναλυτική λύση.

Οι αρνητικές επιπτώσεις από την χρήση αυτού του είδους των στοιχείων είναι ότι το μοντέλο που θα προκύψει θα είναι μεγαλύτερο από

3 Η προσέγγιση με τα πεπερασμένα στοιχεία

Το πρόβλημα ενός σύνθετου χωρίου από ομόκεντρους σωληνοειδής κυλίνδρους, μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα επιμέρους στοιχειώδη προβλήματα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 3.1. Για τα στοιχειώδη αυτά προβλήματα ξεχωριστά, υφίστανται αναλυτικές λύσεις για το πεδίο μετατοπίσεων.

Για να αξιολογήσουμε την καταλληλότητα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην επίλυση του ελαστο-στατικού μας προβλήματος (σχήμα 1.1.γ), θα επιλύσουμε τα στοιχειώδη προβλήματα (σχήμα 3.1.α & β) υπολογιστικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και με τυχαία αριθμητικά δεδομένα και θα τα συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων.



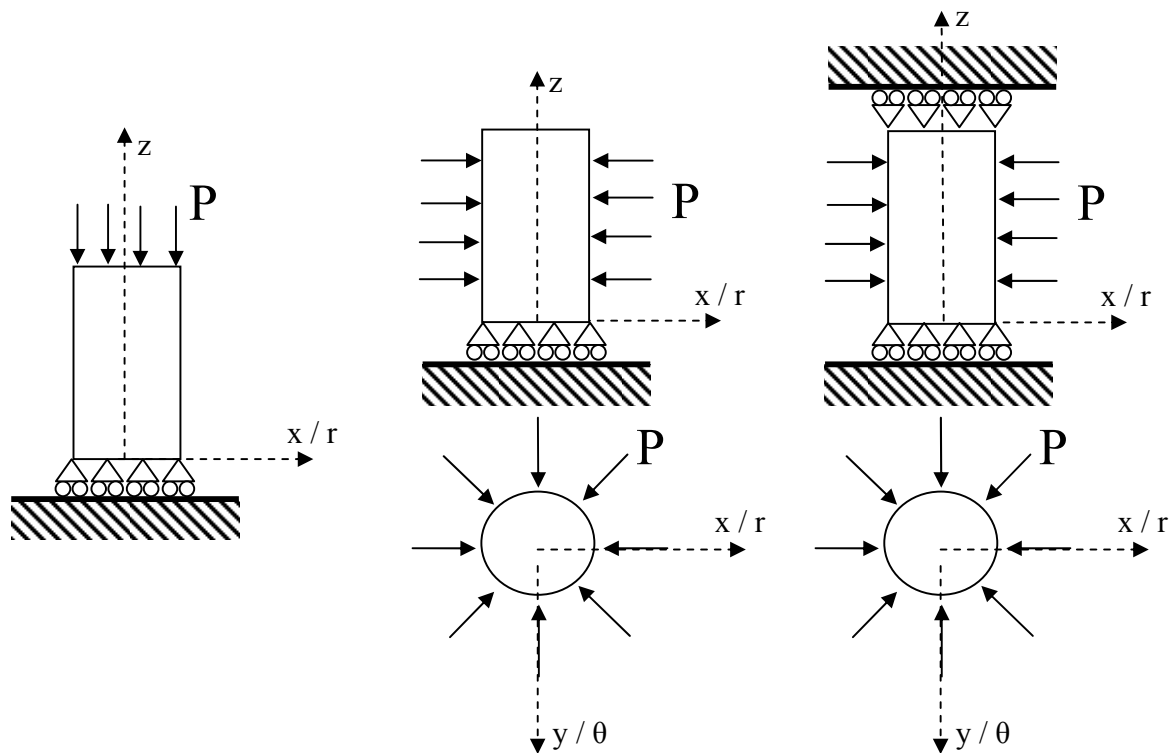
α: Κυλινδρικό χωρίο από ομογενές υλικό

β: Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές υλικό

Σχήμα 3.1: Ανάλυση σύνθετου χωρίου σε επιμέρους στοιχειώδη προβλήματα

Σε μεταγενέστερη φάση (κεφ. 4), θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα κατά το οποίο το σωληνοειδές χωρίο, έχει μεταβαλλόμενες ελαστικές ιδιότητες συναρτήσει της ακτίνας

Η μορφή των ελαστοστατικών προβλημάτων που θα εξεταστούν, δηλαδή οι οριακές συνθήκες και η φόρτιση, παρατίθενται στη συνέχεια:



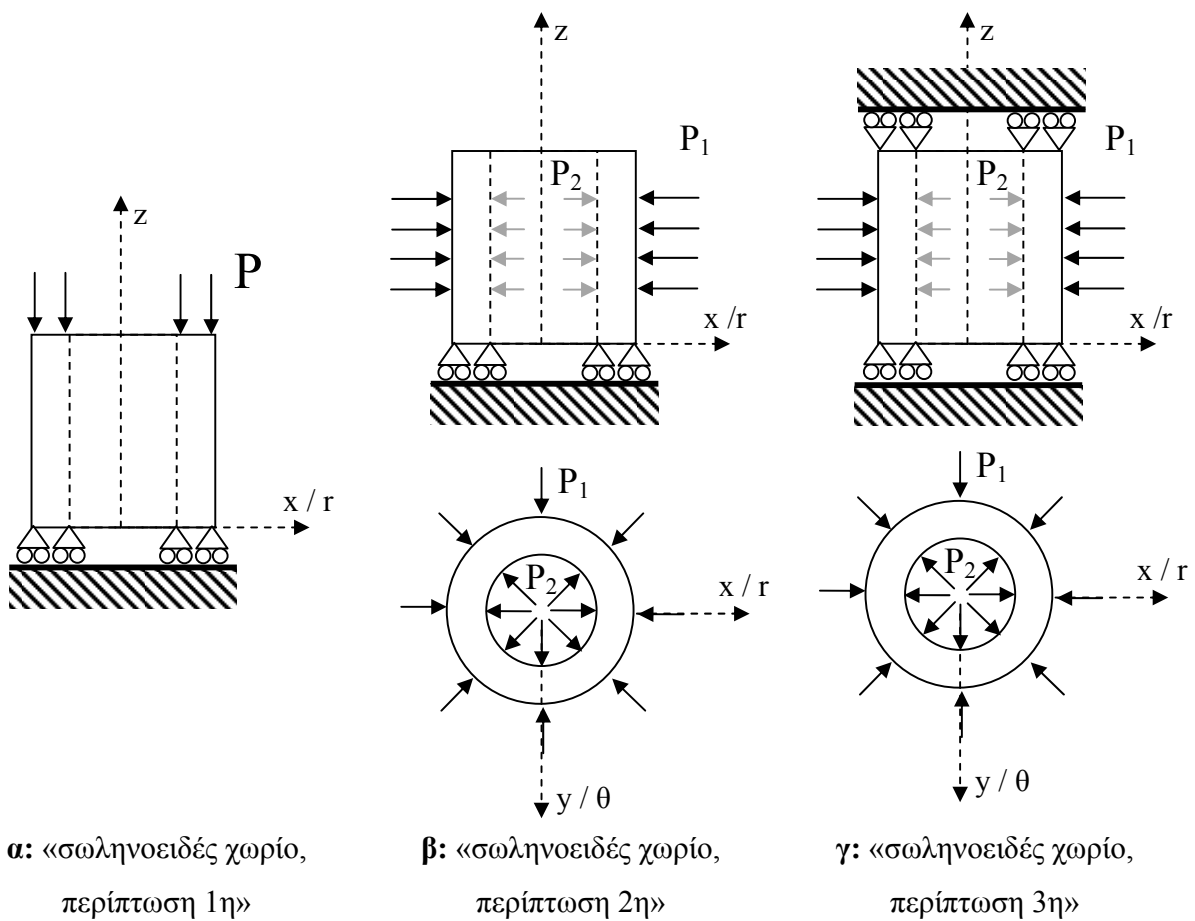
α: «κύλινδρος, περίπτωση 1η» **β:** «κύλινδρος, περίπτωση 2η» **γ:** «κύλινδρος, περίπτωση 3η»

Σχήμα 3.2: Φορτίσεις και οριακές συνθήκες για την επίλυση του κυλίνδρου

Σχήμα 3.2.α: Κύλινδρος από ομογενές ισότροπο υλικό, με συνθήκες κύλισης στο ένα του άκρο και με φόρτιση παράλληλη στον άξονα του στο άλλο του άκρο

Σχήμα 3.2.β: Κύλινδρος από ομογενές ισότροπο υλικό, με συνθήκες κύλισης στο ένα του άκρο, το άλλο του άκρο ελεύθερο και με φορτίο επί της εξωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας σταθερό κατά ύψος και γωνία

Σχήμα 3.2.γ: Κύλινδρος από ομογενές ισότροπο υλικό, με συνθήκες κύλισης στα δύο του άκρα και με φορτίο επί της εξωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας σταθερό κατά ύψος και γωνία



Σχήμα 3.3: Φορτίσεις και οριακές συνθήκες για την επίλυση του σωληνοειδούς κυλινδρικού χωρίου

Σχήμα 3.3.α: Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές ισότροπο υλικό, με συνθήκες κύλισης στο ένα του άκρο και με φόρτιση παράλληλη στον άξονα του στο άλλο του άκρο

Σχήμα 3.3.β: Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές ισότροπο υλικό, με συνθήκες κύλισης στο ένα του άκρο, και το άλλο του άκρο ελεύθερο και με φορτίο επί της εξωτερικής και εσωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας, σταθερό κατά ύψος και γωνία

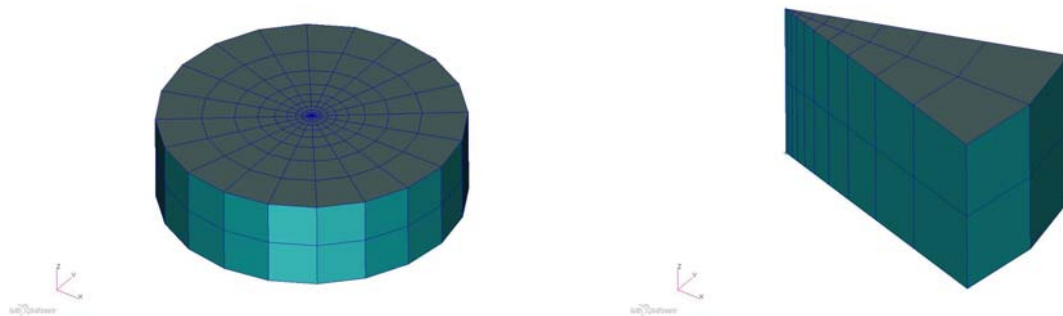
Σχήμα 3.3.γ: Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές ισότροπο υλικό, με συνθήκες κύλισης και στα δύο του άκρα και με φορτίο επί της εξωτερικής και εσωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας κυλινδρικής του επιφάνειας σταθερό κατά ύψος και γωνία

3.1 Κύλινδρος περίπτωση 1^η

Κύλινδρος από ομογενές ισότροπο υλικό πακτωμένο στο ένα του άκρο και με φόρτιση παράλληλη στον άξονα του.



Σχήμα 3.1.1: Τρισδιάστατη παράσταση του κυλινδρικού μοντέλου. Οριακές συνθήκες και φόρτιση για την περίπτωση 3.1



Σχήμα 3.1.2: Μοντελοποίηση κυλίνδρου από ομογενές υλικό με πεπερασμένα στοιχεία. Η αριθμητική επίλυση μπορεί να λάβει χώρα και σε έναν τομέα του κυλίνδρου

Αριθμητικά δεδομένα περίπτωσης 3.1:

Υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι από ομογενές υλικό με ελαστικές ιδιότητες που προσομοιάζουν την ομογενή ίνα υάλου με:

- Μέτρο ελαστικότητας, $E = 72 \text{ GPa}$ και
- Λόγο Poisson, $\nu = 0.2$

Επίσης θεωρούμε αυθαίρετα ότι έχει τα ακόλουθα γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- Εξωτερική ακτίνα, $R = 10\text{mm}$
- Ύψος, $h = 6\text{mm}$

Οι συνοριακές του συνθήκες και η φόρτιση είναι αυτές του σχήματος 3.1.1, και:

- Μέτρο φόρτισης, $P = 10\text{MPa}$

Αναλυτική λύση της περιπτώσεως της παραγράφου 3.1:

Ο νόμος του Hooke στις τρεις διαστάσεις, διατυπωμένος ως προς τις τάσεις, [6, σελ. 69, σχέση (7.β)]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) \quad (3.1.1)$$

Το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς την γεωμετρία και την φόρτιση, επομένως:

$$\sigma_{ij}, \epsilon_{ij} = 0, \text{ για } i \neq j \quad (3.1.2)$$

Στο ελεύθερο άνω άκρο του κυλίνδρου έχουμε πίεση P.

$$\sigma_{zz} = P = -10\text{MPa} \quad (3.1.3)$$

Στην ελεύθερη κυλινδρική επιφάνεια, δεν ασκείται καμία δύναμη ή πίεση επομένως:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\text{Επιλύοντας την (3.1.1) για } \sigma_{rr} = 0, \text{ συνάγεται ότι: } \epsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\text{Επιλύοντας την (3.1.1) για } \sigma_{\theta\theta} = 0, \text{ συνάγεται ότι: } \epsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\text{Ο συνδυασμός των (3.1.5) \& (3.1.6) μας δίνει ότι: } \epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} \quad (3.1.7)$$

$$\text{Από το συνδυασμό των (3.1.5) \& (3.1.7) } \Rightarrow \epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = -\nu \epsilon_{zz} \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Από το συνδυασμό των (3.1.1) \& (3.1.8) } \Rightarrow \sigma_{zz} = P &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) \right\} = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{zz} - 2\nu \epsilon_{zz}) \right\} = E \epsilon_{zz} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\text{Από το συνδυασμό των (3.1.9) \& (3.1.3) } \Rightarrow \epsilon_{zz} = -1.389 \times 10^{-4} \quad (3.1.10)$$

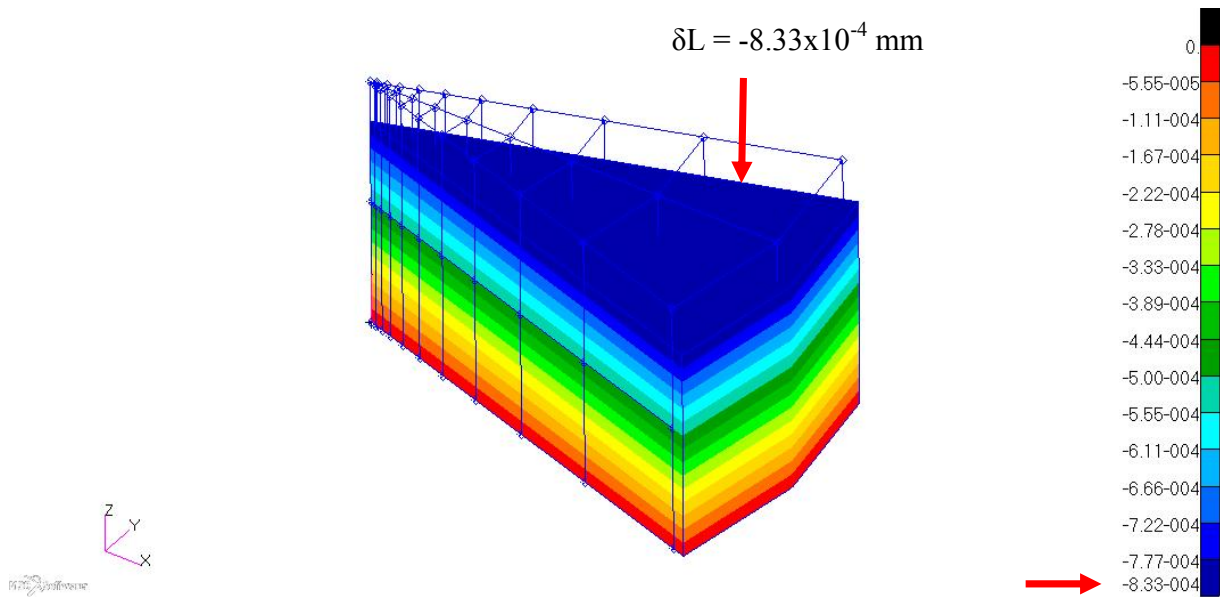
$$\text{Από το συνδυασμό των (3.1.8) \& (3.1.10) } \Rightarrow \epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = 2.778 \times 10^{-5} \quad (3.1.11)$$

$$\text{Μετατόπιση του άνω άκρου: } \delta L = \epsilon_{zz} L = -1.389 \times 10^{-4} \times 6\text{mm} = -8.334 \times 10^{-4}\text{mm} \quad (3.1.12)$$

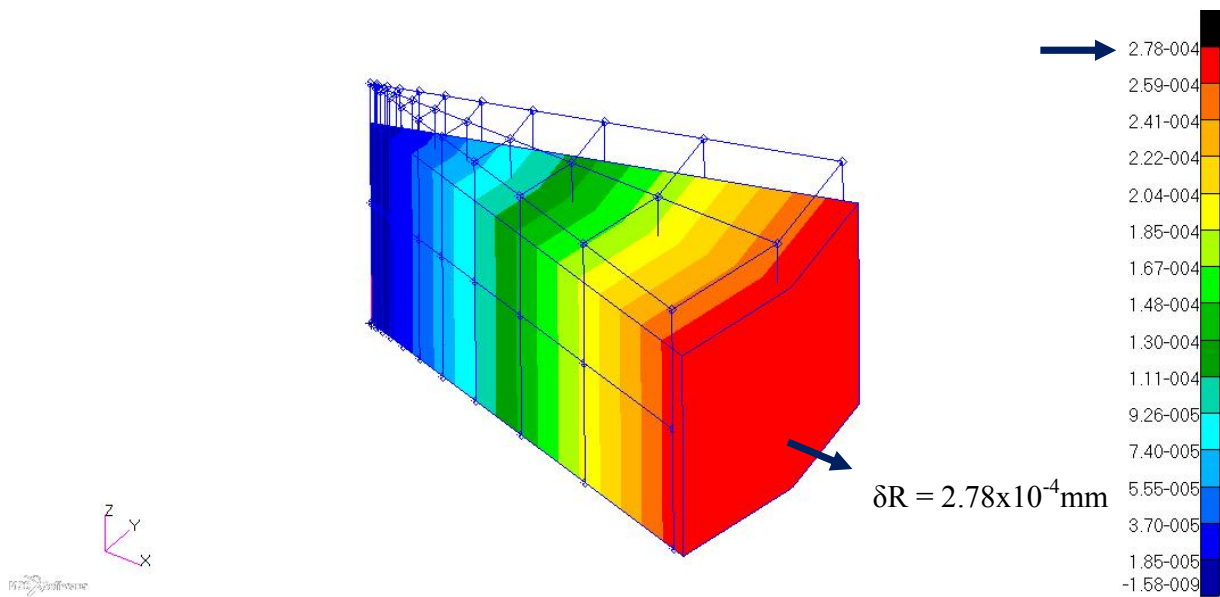
$$\text{Μετατόπιση ακτινικά: } \delta R = \epsilon_{rr} R = 2.778 \times 10^{-5} \times 10\text{mm} = 2.778 \times 10^{-4}\text{mm} \quad (3.1.13)$$

Ακολουθούν παραστάσεις αποτελεσμάτων από τα πεπερασμένα στοιχεία:

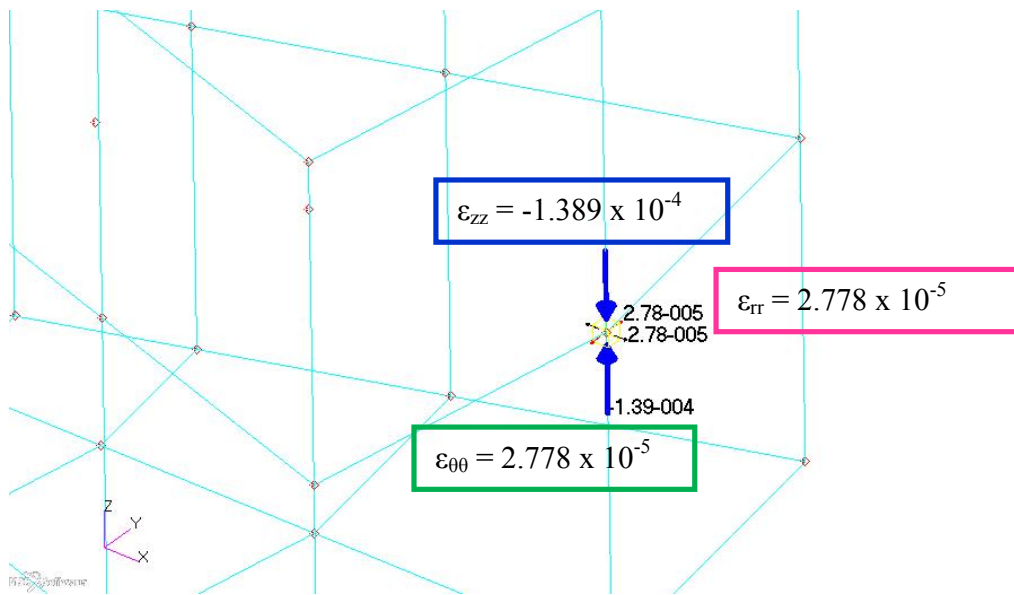
Γιαννόπουλος Ιωάννης



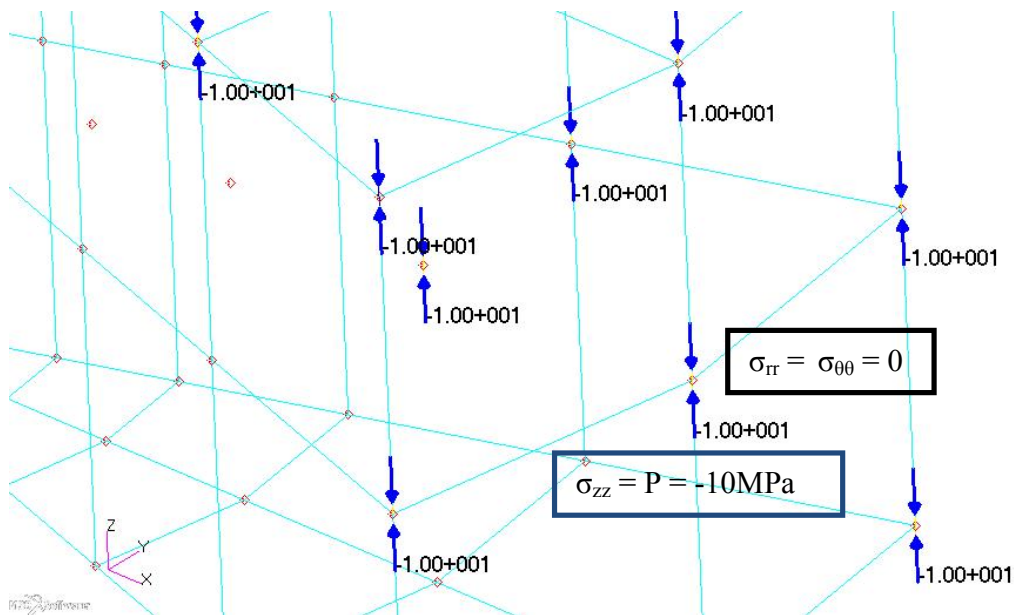
Σχήμα 3.1.3: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά z. Μετατόπιση του άνω άκρου σύμφωνα με την σχέση (3.1.12)



Σχήμα 3.1.4: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R. Μετατόπιση εξωτερικής περιφέρειας ακτινικά σύμφωνα με την σχέση (3.1.13)



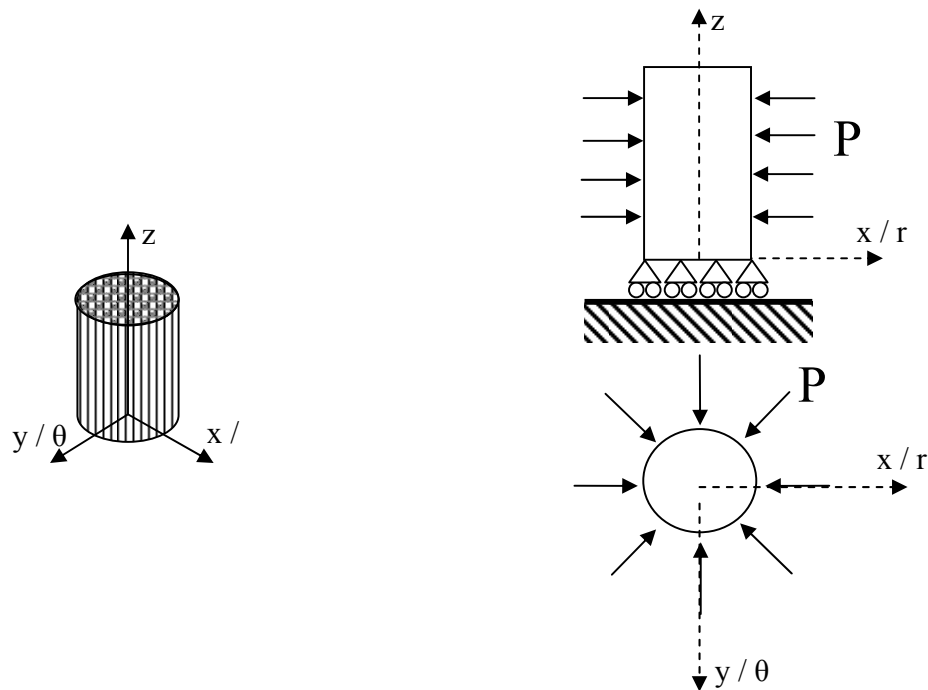
Σχήμα 3.1.5: Τιμή τροπών στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.1.10) & (3.1.11)



Σχήμα 3.1.6: Τιμή τάσεων στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.1.3) & (3.1.4)

3.2 Κύλινδρος περίπτωση 2^η

Κύλινδρος από ομογενές ισότροπο υλικό πακτωμένο στο ένα του άκρο, το άλλο του άκρο ελεύθερο και με φορτίο επί της εξωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας σταθερό κατά ύψος και γωνία



Σχήμα 3.2.1: Τρισδιάστατη παράσταση του κυλινδρικού μοντέλου. Οριακές συνθήκες και φόρτιση για την περίπτωση 3.2

Αριθμητικά δεδομένα περίπτωσης 3.2:

Για την επίλυση του προβλήματός μας με τα πεπερασμένα στοιχεία θα θεωρήσουμε τα ίδια δεδομένα γεωμετρίας, υλικού και φόρτισης όπως και στην περίπτωση 3.1.

Αναλυτική λύση της περιπτώσεως της παραγράφου 3.2:

Στην κυλινδρική επιφάνεια, ασκείται πίεση $P = -10\text{MPa}$ επομένως:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -10\text{MPa} \quad (3.2.1)$$

Ισχύουν οι σχέσεις (3.1.1) και (3.1.2), όπως φαίνονται στην σελίδα 22 του παρόντος και όπως έχουν αποτυπωθεί από την αναφορά [6, σελ. 69, σχέση (7.β)].

Στο ελεύθερο άνω άκρο του κυλίνδρου δεν ασκείται πίεση:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (3.2.2)$$

Επιλύοντας την (3.1.1) ως προς σ_{zz} και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.2.2), συνάγεται ότι

$$\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = 0 \quad (3.2.3)$$

Επιλύοντας την (3.1.1) ως προς $\sigma_{\theta\theta}$ και σ_{rr} , συνάγεται ότι, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr}$ (3.2.4)

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.2.3) την σχέση (3.2.4) $\Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{2\nu}{\nu-1} \varepsilon_{rr}$ (3.2.5)

Επιλύοντας την εξίσωση (3.1.1) ως προς σ_{rr} και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.2.5),

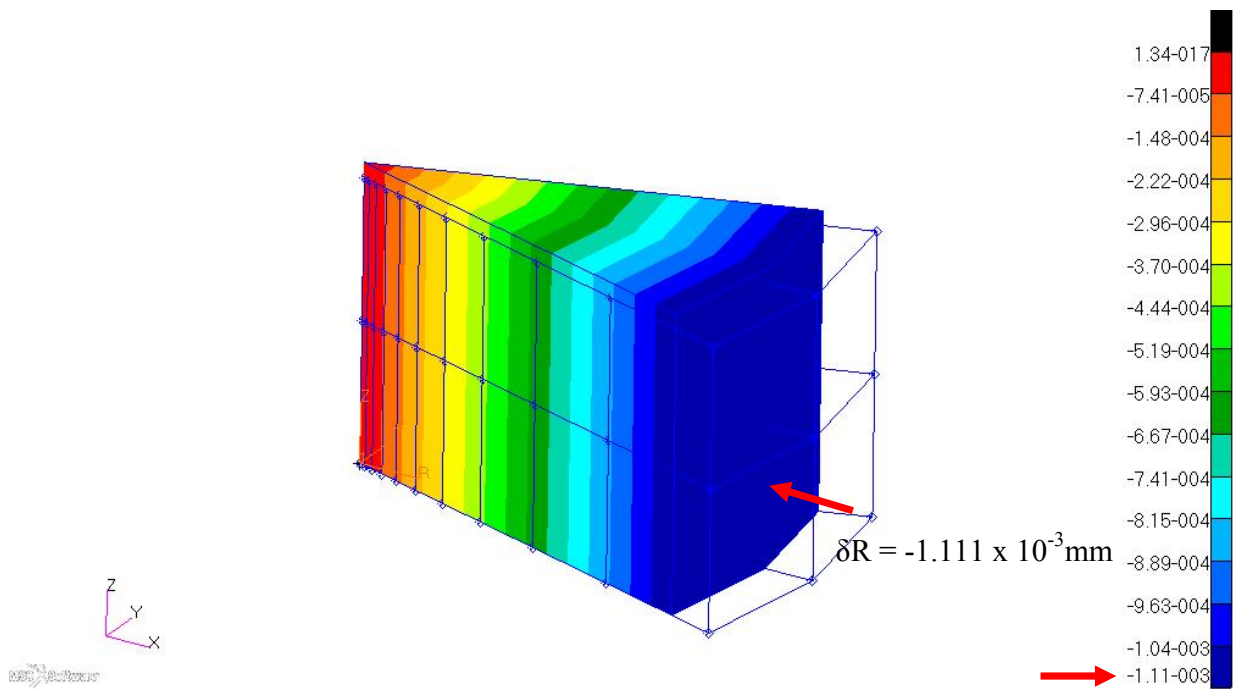
συνάγεται ότι, $\sigma_{rr} = P = \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_{rr}$ (3.2.6)

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.2.6) την σχέση (3.2.1) και λόγω της ισότητας της με την σχέση (3.2.4) $\Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} = -1.111 \times 10^{-4}$ (3.2.7)

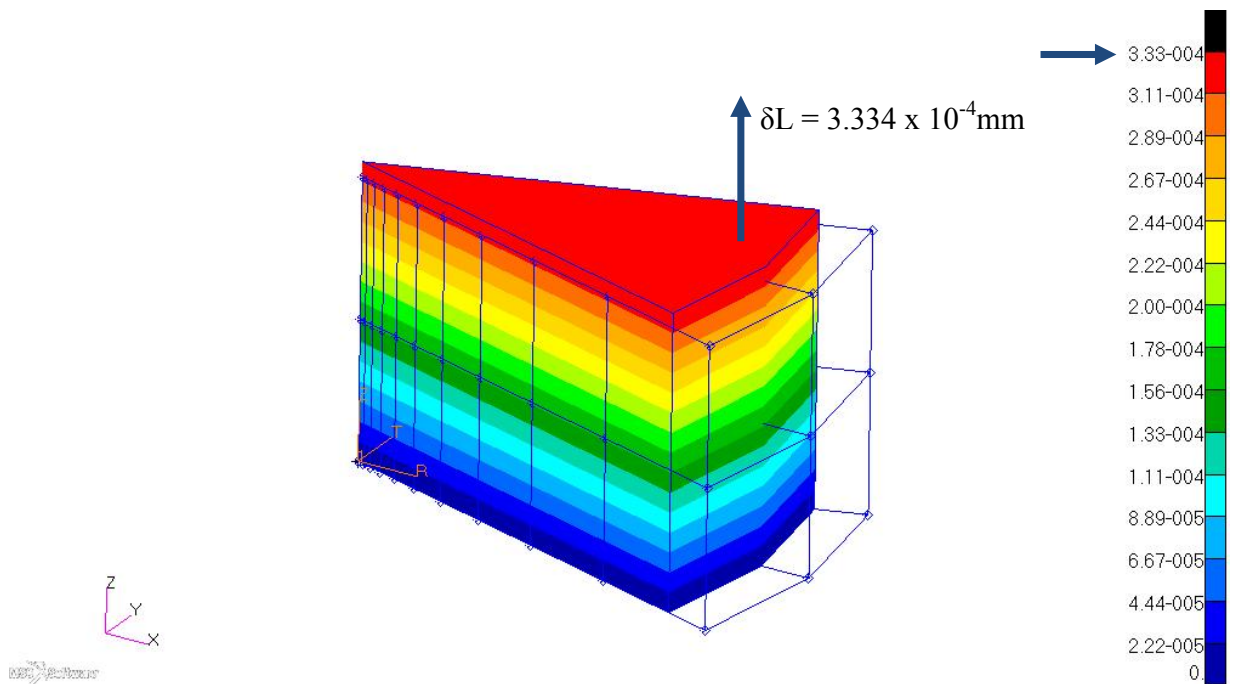
Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της (3.2.7) στην σχέση (3.2.5) $\Rightarrow \varepsilon_{zz} = 5.556 \times 10^{-5}$ (3.2.8)

Μετατόπιση του άνω άκρου κατά z: $\delta L = \varepsilon_{zz} L = 5.556 \times 10^{-5} \times 6\text{mm} = 3.334 \times 10^{-4}\text{mm}$ (3.2.11)

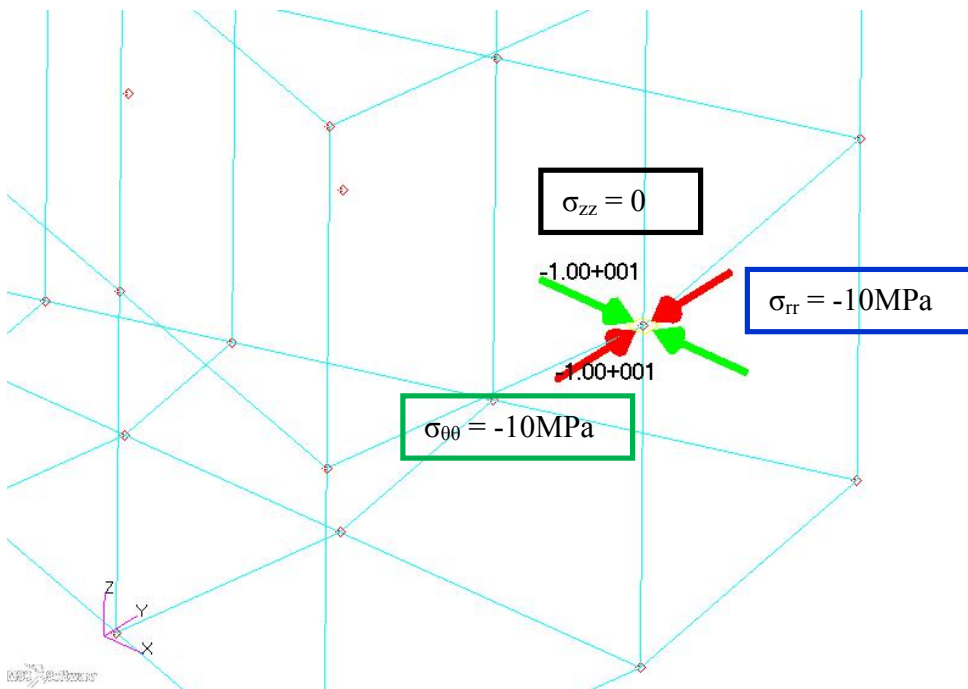
Μετατόπιση ακτινικά κατά R: $\delta R = \varepsilon_{rr} R = -1.111 \times 10^{-4} \times 10\text{mm} = -1.111 \times 10^{-3}\text{mm}$ (3.2.12)



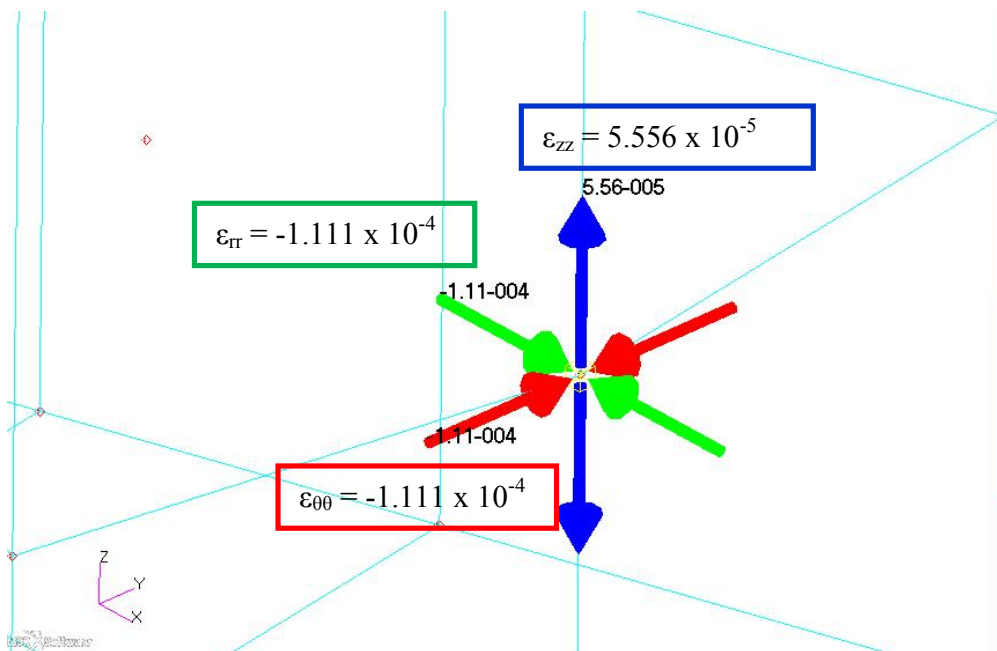
Σχήμα 3.2.2: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R. Μετατόπιση εξωτερικής περιφέρειας ακτινικά σύμφωνα με την σχέση (3.2.12)



Σχήμα 3.2.3: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά z. Μετατόπιση του άνω άκρου σύμφωνα με την σχέση (3.2.11)



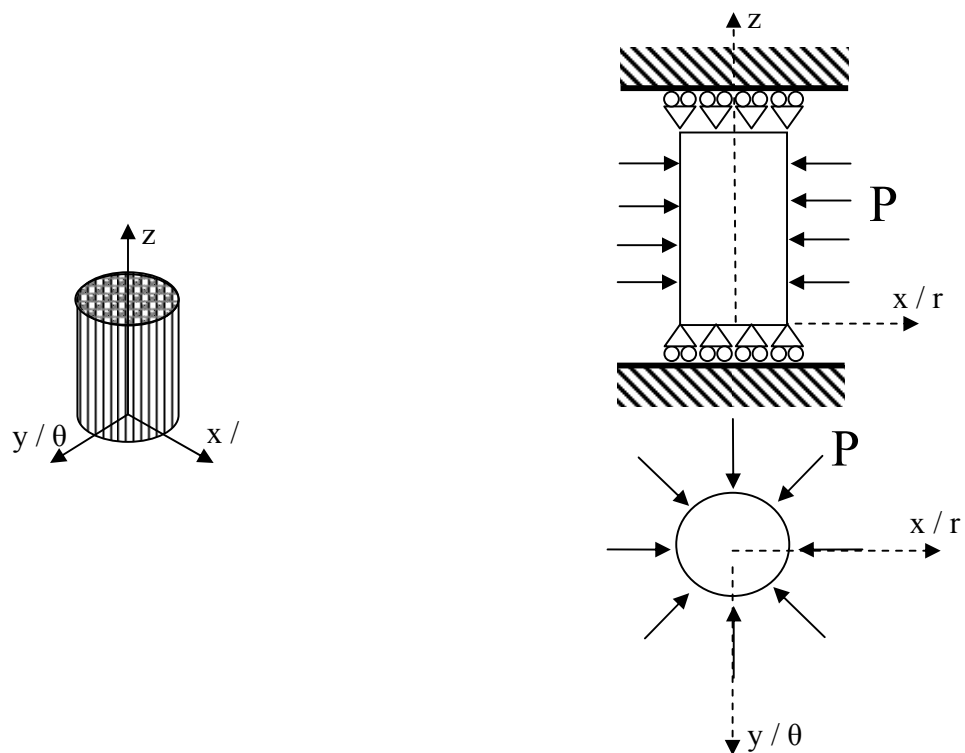
Σχήμα 3.2.4: Τιμή τάσεων στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.2.1) & (3.2.2)



Σχήμα 3.2.5: Τιμή τροπών στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.2.7) & (3.2.8)

3.3 Κύλινδρος περίπτωση 3^η

Κύλινδρος από ομογενές ισότροπο υλικό πακτωμένο και στα δύο του άκρα και με φορτίο επί της εξωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας σταθερό κατά ύψος και γωνία



Σχήμα 3.3.1: Τρισδιάστατη παράσταση του κυλινδρικού μοντέλου, οριακές συνθήκες και φόρτιση για την περίπτωση 3.3

Αριθμητικά δεδομένα περίπτωσης 3.3:

Για την επίλυση του προβλήματός μας με τα πεπερασμένα στοιχεία θα θεωρήσουμε τα ίδια δεδομένα γεωμετρίας, υλικού και φόρτισης όπως και στην περίπτωση 3.1.

Αναλυτική λύση της περιπτώσεως της παραγράφου 3.3:

Στην κυλινδρική επιφάνεια, ασκείται πίεση $P = -10\text{MPa}$ επομένως:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -10\text{MPa} \quad (3.3.1)$$

Ισχύουν οι σχέσεις (3.1.1) και (3.1.2), όπως φαίνονται στην σελίδα 22 του παρόντος και όπως έχουν αποτυπωθεί από την αναφορά [6, σελ. 69, σχέση (7.β)].

Στο ελεύθερο άνω άκρο του κυλίνδρου, λόγω της πακτώσεως, ασκείται πίεση με άγνωστο μέτρο και η μετατόπιση του άνω άκρου είναι μηδενική:

$$\sigma_{zz} \neq 0 \quad (3.3.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.3.3)$$

$$\text{Επιλύοντας την σχέση (3.1.1) ως προς } \sigma_{\theta\theta} \text{ και } \sigma_{rr} \text{ προκύπτει ότι, } \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} \quad (3.3.4)$$

Επιλύοντας την σχέση (3.1.1) ως προς $\sigma_{\theta\theta}$ και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.3.3), συνάγεται

$$\text{ότι, } \sigma_{\theta\theta} = P = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{\theta\theta} \quad (3.3.5)$$

Συσχετίζοντας τις σχέσεις (3.3.1), (3.3.5) και (3.3.4) προκύπτει ότι,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} = -1 \times 10^{-4} \quad (3.3.6)$$

Επιλύοντας την σχέση (3.1.1) ως προς σ_{zz} και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.3.3) και (3.3.5)

$$\text{συνάγεται ότι } \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{rr} = 2\nu \sigma_{\theta\theta} \quad (3.3.7)$$

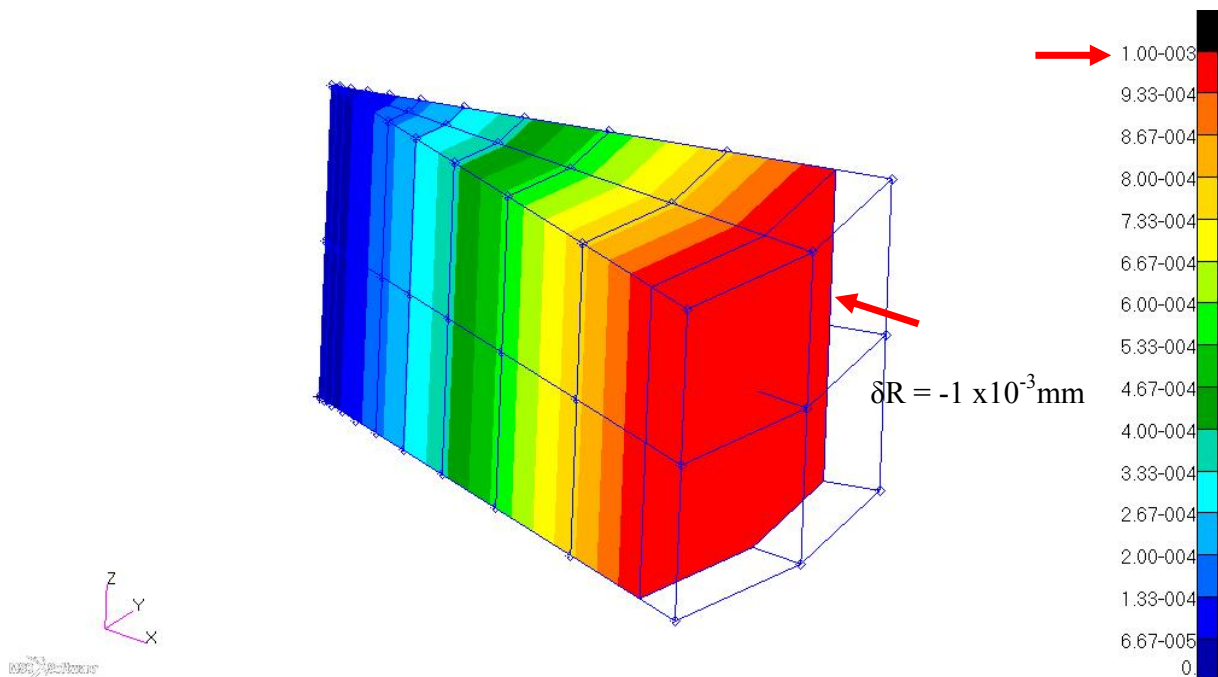
$$\text{Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.3.7) την σχέση (3.3.6) } \Rightarrow \sigma_{zz} = P = -4 \text{ MPa} \quad (3.3.9)$$

$$\text{Μετατόπιση ακτινικά κατά } R: \delta R = \varepsilon_{rr} R = -1 \times 10^{-4} \times 10\text{mm} = -1 \times 10^{-3}\text{mm} \quad (3.3.10)$$

Εναλλακτικά, για τις λύσεις των δύο τελευταίων περιπτώσεων, κύλινδρος περίπτωση 2^η και 3^η, αυτές συνδέονται από τις σχέσεις του κάτωθι πίνακα 1, όπως αυτός αναγράφεται στην αναφορά [6] του παραρτήματος, σελ 120.

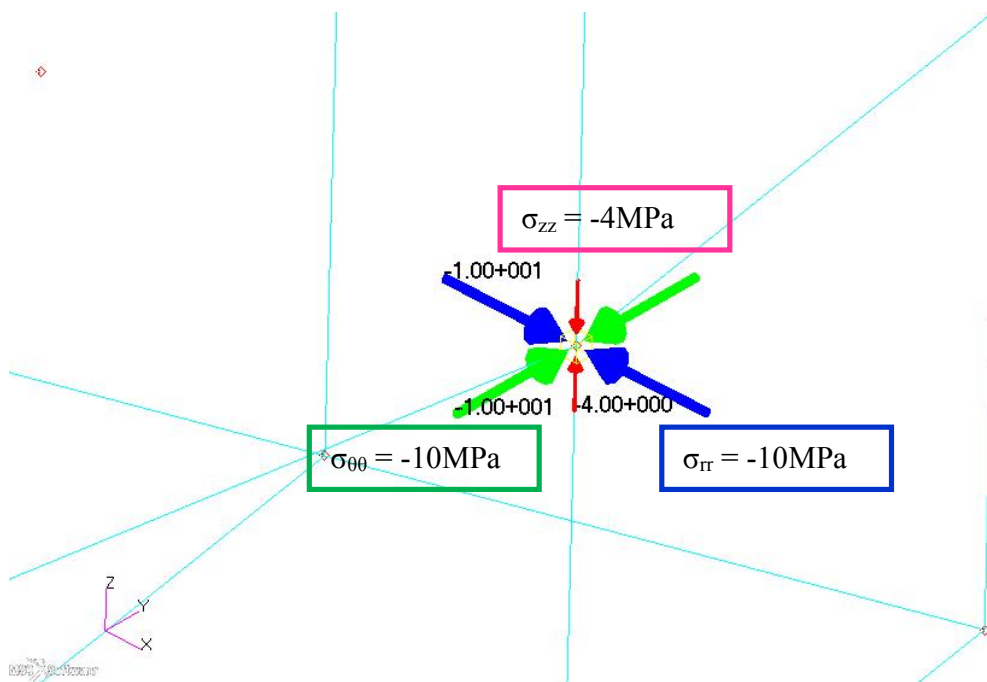
Πίνακας 1: Μετατροπή επίπεδων προβλημάτων

Υπάρχουσα λύση	Μετατροπή σε	Το E αντικαθίσταται από:	Το ν αντικαθίσταται από:
Επίπεδη ένταση	Επίπεδη παραμόρφωση	$\frac{E}{1-\nu^2}$	$\frac{\nu}{1-\nu}$
Επίπεδη παραμόρφωση	Επίπεδη ένταση	$\frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$	$\frac{\nu}{1+\nu}$

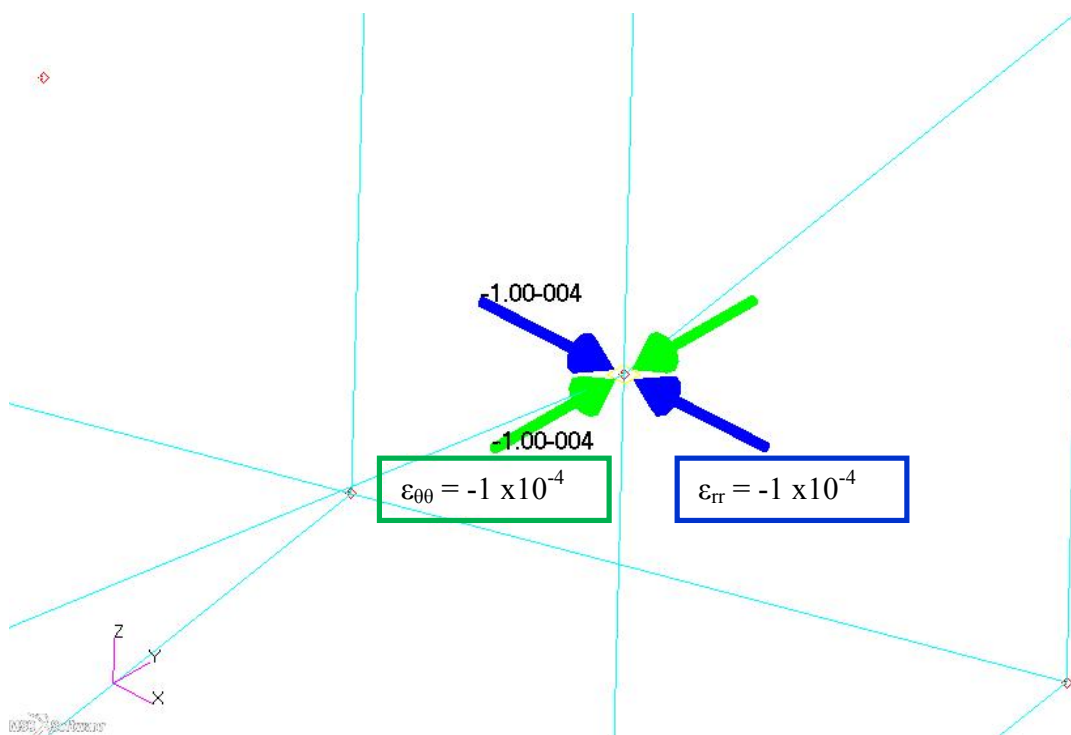


Σχήμα 3.3.2: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R. Μετατόπιση εξωτερικής περιφέρειας ακτινικά σύμφωνα με την σχέση (3.3.10)

Μετατόπιση κατά z δεν υπάρχει μιας και τα δύο άκρα του κυλίνδρου είναι πακτωμένα



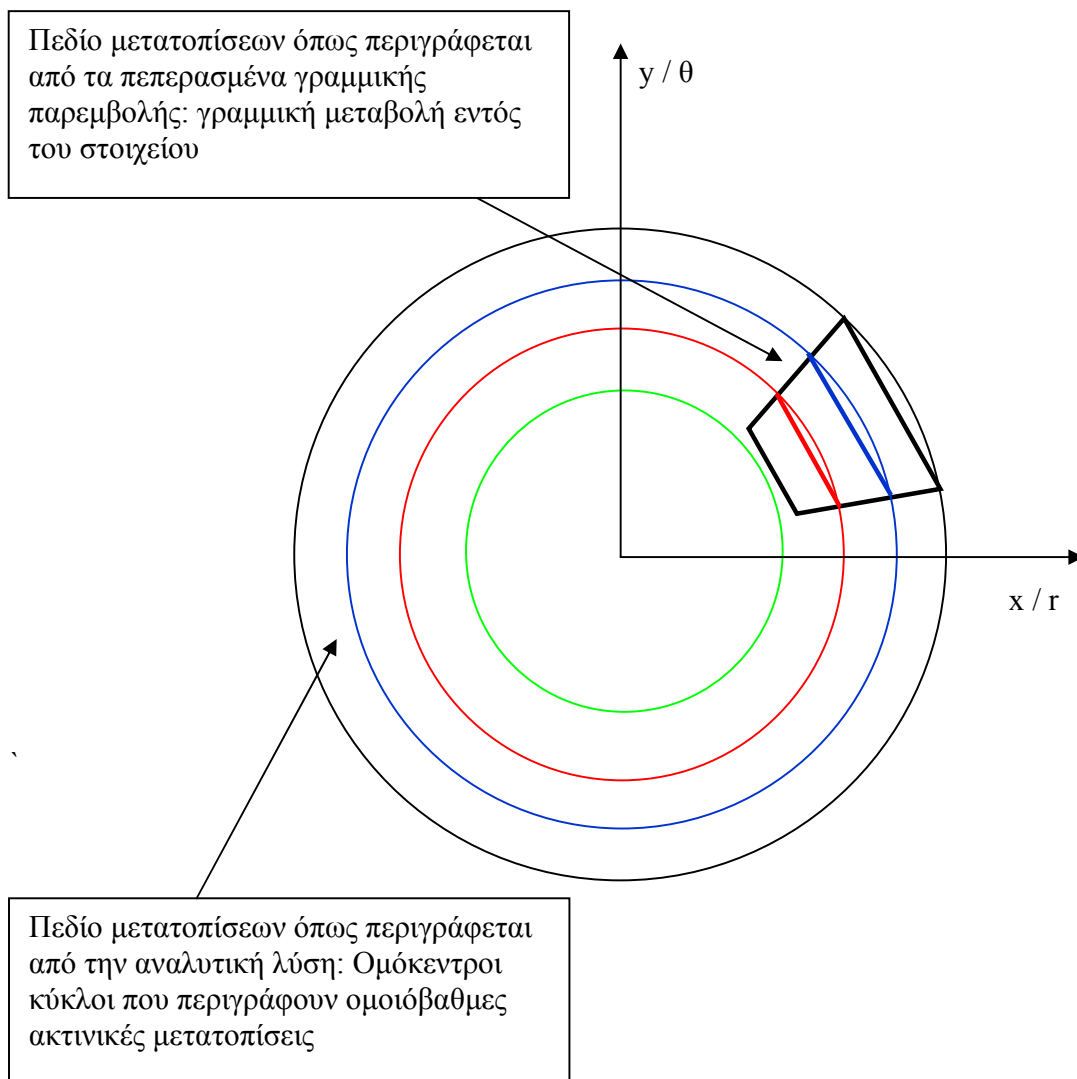
Σχήμα 3.3.3: Τιμή τάσεων στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.3.1) & (3.3.9)



Σχήμα 3.3.4: Τιμή τροπών στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.3.3) & (3.3.6)

3.4 Συμπεράσματα επί των αποτελεσμάτων της μοντελοποίησης συμπαγούς κυλινδρικού σώματος από ομογενές υλικό με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων:

Η ακόλουθη εικόνα μπορεί να περιγράψει την προσέγγιση του πεδίου μετατοπίσεων με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων. Παραθέτουμε μια τομή του κυλινδρικού χωρίου, ο άξονας του κυλίνδρου είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος:



Σχήμα 3.4: Η περιγραφή του πεδίου μετατοπίσεων από την αναλυτική και την αριθμητική λύση

Στην αναλυτική λύση, για τις χωρικές κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ , ή εναλλακτικά για τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y , το πεδίο μετατοπίσεων ακολουθεί την κυλινδρική γεωμετρία του σώματος, σχηματίζοντας κυκλικές γραμμές ισόβαθμων μέτρων ακτινικών μετατοπίσεων.

Τα πεπερασμένα στοιχεία, μπορούν και συμπίπτουν με την αναλυτική λύση του πεδίου στις τιμές των κόμβων, αλλά δεν περιγράφουν σωστά το πεδίο εντός του στοιχείου.

Κατά τον άξονα των z , το πεδίο περιγράφεται πιστά.

ΣΥΝΟΛΙΚΑ:

- Τα μεγέθη του ελαστικού προβλήματος που προκύπτουν από τα αναλυτικά αποτελέσματα, συμπίπτουν απόλυτα με αυτά των πεπερασμένων στοιχείων, στις κομβικές θέσεις
- Το πεδίο μετατοπίσεων κατά την ακτινική διεύθυνση είναι γραμμικό της μορφής :

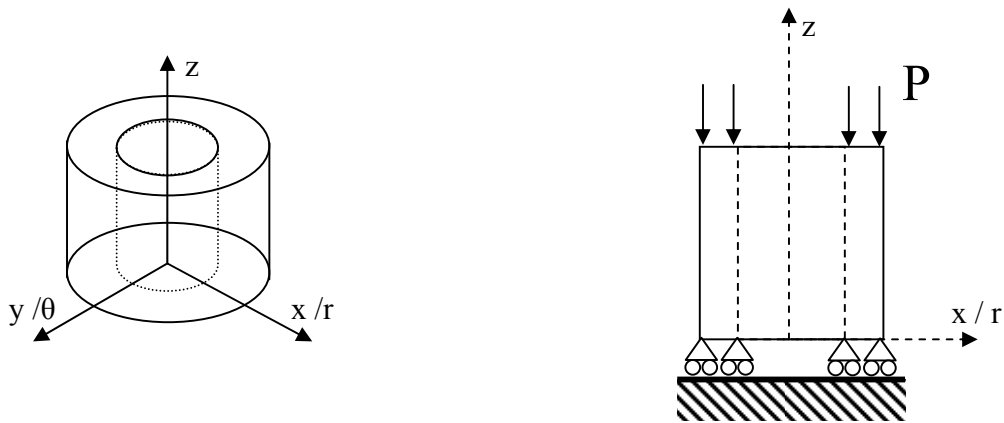
$$u_r = \frac{-P(1-2\nu)(1+\nu)}{E} r, \text{ \{αναφορά [3] σελ.172, σχέση (1)\},}$$

για την 3^η περίπτωση, ή εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τον πίνακα 1 της σελίδας 30 και αντικαθιστώντας τα E και ν με αυτά της δεύτερης σειράς, θα καταλήξουμε στην έκφραση για την 2^η περίπτωση. Το πεδίο μπορεί να παρασταθεί άριστα στις κομβικές θέσεις από τα στοιχεία με γραμμική παρεμβολή σε ότι αφορά την ακτινική μετατόπιση

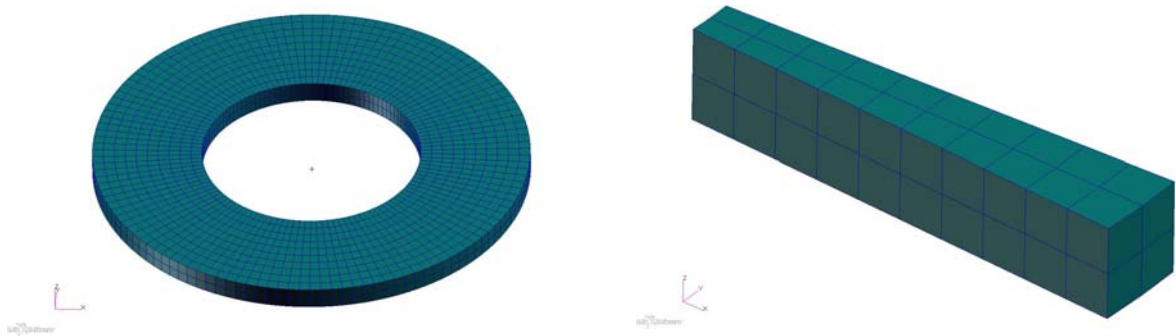
- Το πεδίο μετατοπίσεων κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι καμπύλο και μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικότερα με μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων ή με στοιχεία μεγαλύτερης παρεμβολής. Αυτό δεν θα αποτελέσει πρόβλημα στην σωστή προσέγγιση των ελαστικών μεγεθών που ψάχνουμε, μιας και σε αυτού του είδους τα προβλήματα μας απασχολεί η σωστή προσέγγιση της ακτινικής μετατόπισης και θα αρκεστούμε στην ανάγνωση των αποτελεσμάτων στις κομβικές θέσεις

3.5 Σωληνοειδές χωρίο περίπτωση 1^η

Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές ισότροπο υλικό, πακτωμένο στο ένα του άκρο (αλλά με την ικανότητα ακτινικής παραμόρφωσης) και με φόρτιση παράλληλη στον άξονα του στο άλλο του άκρο



Σχήμα 3.5.1: Τρισδιάστατη παράσταση του κυλινδρικού μοντέλου. Οριακές συνθήκες και φόρτιση για την περίπτωση της παραγράφου 3.5



Σχήμα 3.5.2: Μοντελοποίηση σωληνοειδούς χωρίου από ομογενές υλικό με πεπερασμένα στοιχεία. Η αριθμητική επίλυση μπορεί να λάβει χώρα και σε έναν τομέα του χωρίου

Αριθμητικά δεδομένα περίπτωσης 3.5:

Υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι από ομογενές υλικό με ελαστικές ιδιότητες που προσομοιάζουν την ομογενή εποξική μήτρα με:

- Μέτρο ελαστικότητας, $E = 3500 \text{ MPa}$
- Λόγο Poisson, $\nu = 0.35$

Επίσης θεωρούμε τα ακόλουθα τυχαία γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- Εξωτερική ακτίνα, $R_1 = 6000 \text{ mm}$
- Εσωτερική ακτίνα, $R_2 = 3000 \text{ mm}$
- Ύψος, $h = 600 \text{ mm}$

Οι συνοριακές του συνθήκες και η φόρτιση είναι αυτές του σχήματος 3.5.1, και υποθέτουμε:

- Μέτρο φόρτισης, $P = 10 \text{ MPa}$

Αναλυτική λύση της περιπτώσεως της παραγράφου 3.5:

Ο νόμος του Hooke στις τρεις διαστάσεις, διατυπωμένος ως προς τις τροπές, όπως αυτός παρατίθεται στο παράρτημα [6], σελ 70, σχέση (11β):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \{(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}\} \quad (3.5.1)$$

Το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς την γεωμετρία και την φόρτιση, επομένως:

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0, \text{ για } i \neq j \quad (3.5.2)$$

Στο ελεύθερο άνω άκρο του κυλίνδρου έχουμε πίεση P.

$$\sigma_{zz} = P = -10\text{MPa} \quad (3.5.3)$$

Στην ελεύθερη κυλινδρική επιφάνεια, δεν ασκείται καμία δύναμη ή πίεση επομένως:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (3.5.4)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.5.1) για ε_{zz} και αντικαθιστώντας την (3.5.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{zz} = -0.00287 \quad (3.5.5)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.5.1) για ε_{rr} και αντικαθιστώντας την (3.5.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{rr} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{rr} = 0.001 \quad (3.5.6)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.5.1) για $\varepsilon_{\theta\theta}$ και αντικαθιστώντας την (3.5.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta} = 0.001 = \varepsilon_{rr} \quad (3.5.7)$$

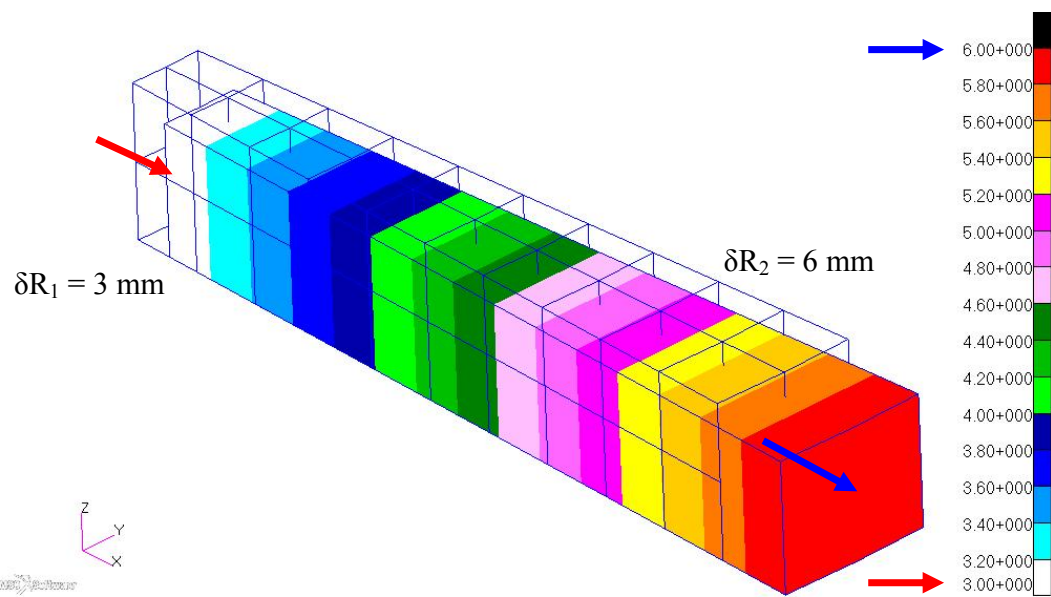
$$\text{Μετατόπιση του άνω άκρου κατά } z: \delta L = \varepsilon_{zz} L = -0.001 \times 600\text{mm} = -1.71\text{mm} \quad (3.5.8)$$

Μετατόπιση ακτινικά κατά R των σημείων της εσωτερικής ακτίνας:

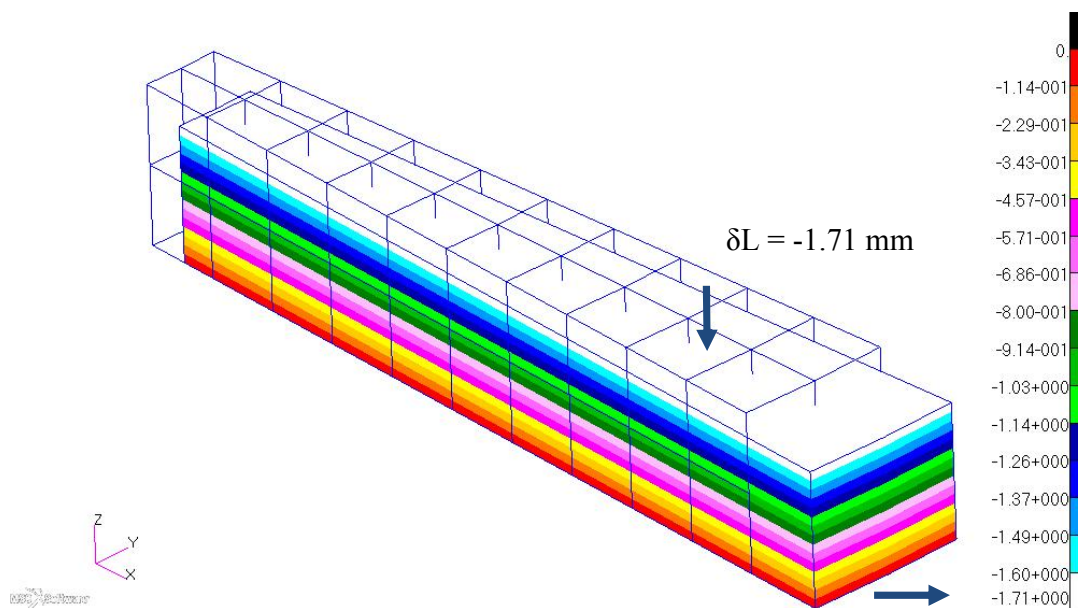
$$\delta R = \varepsilon_{rr} R_{in} = 0.001 \times 3000\text{mm} = 3\text{mm} \quad (3.5.9)$$

Μετατόπιση ακτινικά κατά R των σημείων της εξωτερικής ακτίνας:

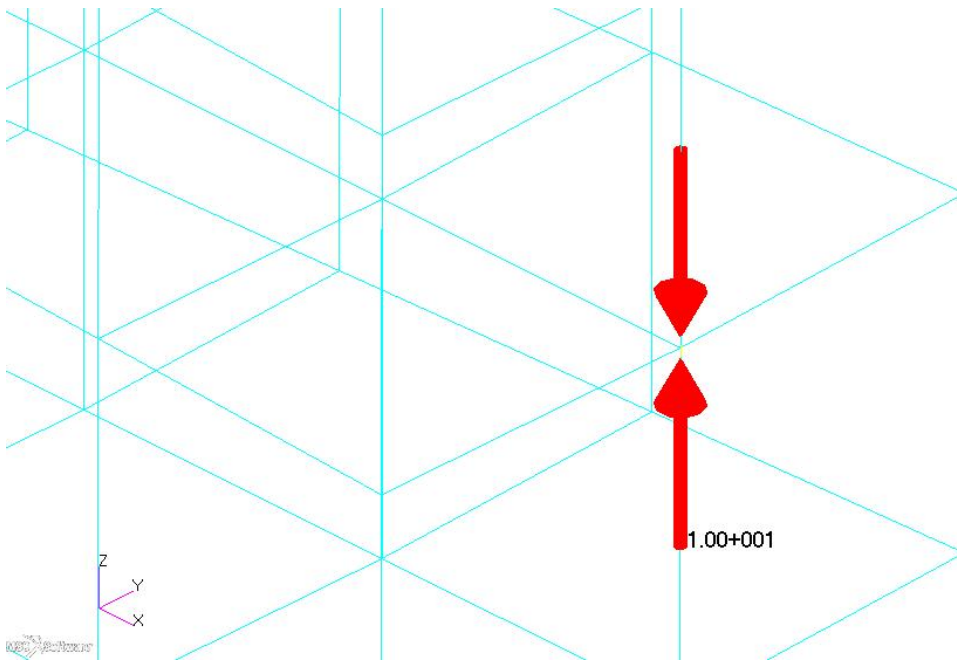
$$\delta R = \varepsilon_{rr} R_{in} = 0.001 \times 6000\text{mm} = 6\text{mm} \quad (3.5.10)$$



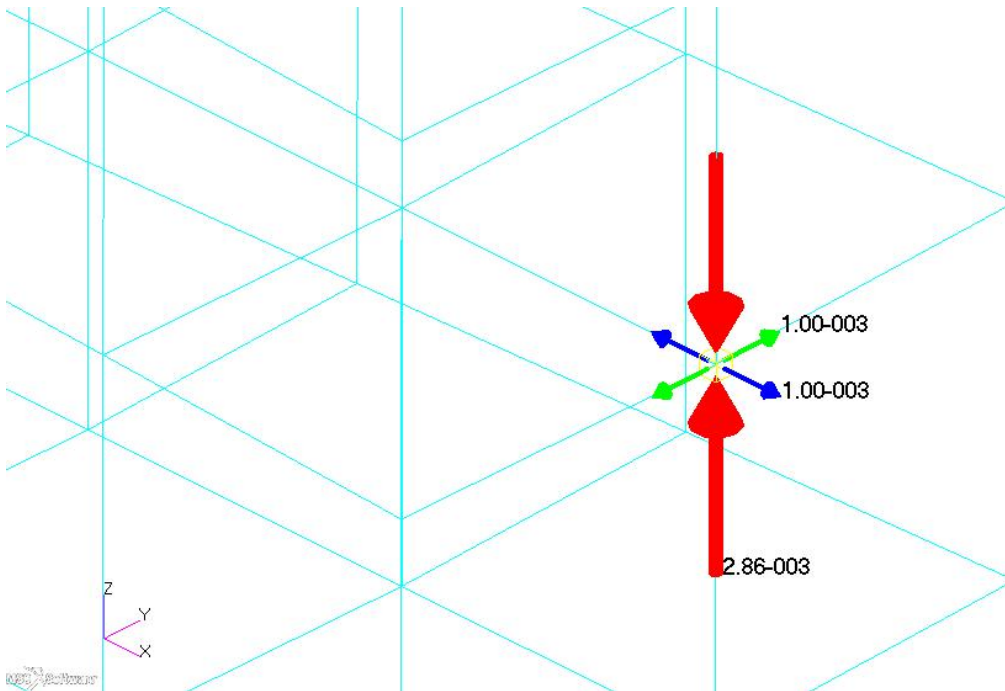
Σχήμα 3.5.3: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R. Μετατόπιση εσωτερικής περιφέρειας ακτινικά σύμφωνα με την σχέση (3.5.9) και εξωτερικής περιφέρειας σύμφωνα με την σχέση (3.5.10)



Σχήμα 3.5.4: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά z. Μετατόπιση του άνω άκρου σύμφωνα με την σχέση (3.5.8)



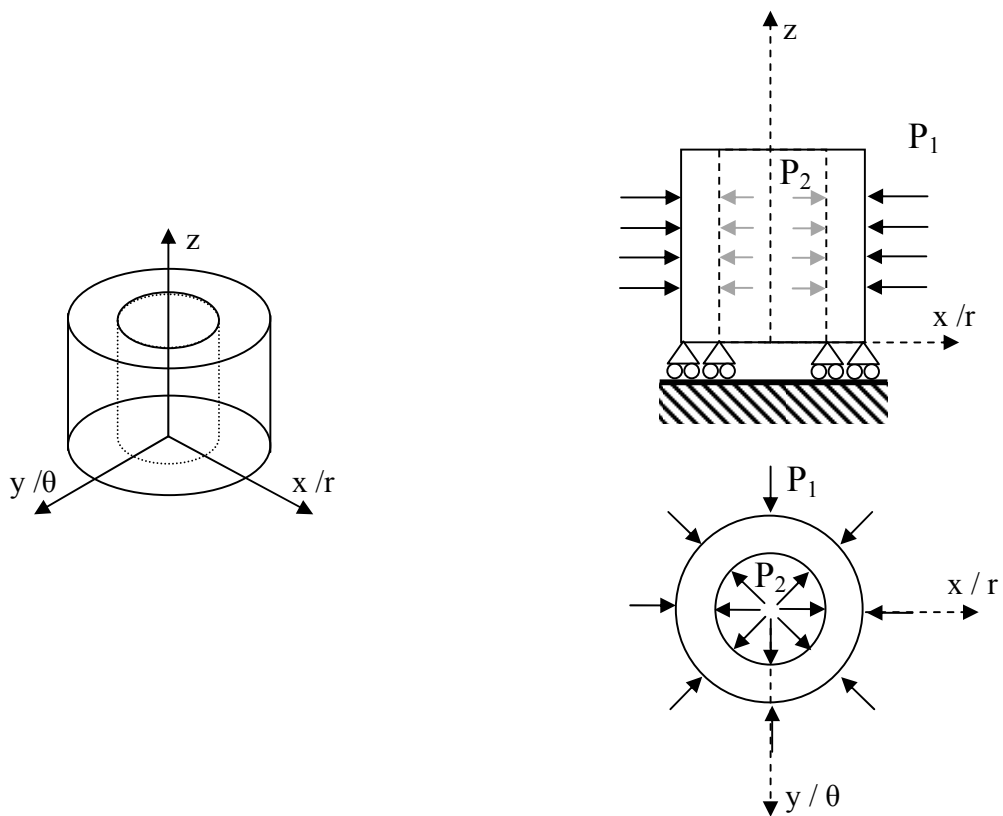
Σχήμα 3.5.5: Τιμή τάσεων στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.5.3) & (3.5.4)



Σχήμα 3.5.6: Τιμή τροπών στους κόμβους με βάση τις σχέσεις (3.5.5), (3.5.6) & (3.5.7)

3.6 Σωληνοειδές χωρίο περίπτωση 2^η

Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές ισότροπο υλικό, πακτωμένο στο ένα του άκρο (αλλά με την ικανότητα ακτινικής παραμόρφωσης) το άλλο του άκρο ελεύθερο και με φορτίο επί της εξωτερικής και εσωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας, σταθερό κατά ύψος και γωνία



Σχήμα 3.6.1: Τρισδιάστατη παράσταση του κυλινδρικού μοντέλου, οριακές συνθήκες και φόρτιση για την περίπτωση της παραγράφου 3.6

Αριθμητικά δεδομένα περίπτωσης 3.6:

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι από ομογενές με ελαστικές ιδιότητες που προσομοιάζουν την ομογενή εποξική μήτρα με:

- Μέτρο ελαστικότητας, $E = 3500 \text{ MPa}$
- Λόγο Poisson, $\nu = 0.35$

Επίσης θεωρούμε τα ακόλουθα τυχαία γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- Εξωτερική ακτίνα, $R_1 = 6000 \text{ mm}$
- Εσωτερική ακτίνα, $R_2 = 3000 \text{ mm}$
- Ύψος, $h = 600 \text{ mm}$

Οι συνοριακές του συνθήκες και η φόρτιση είναι αυτές του σχήματος 3.6.1, και:

- Μέτρο φόρτισης, $P_1 = 100 \text{ MPa}$, $P_2 = 200 \text{ MPa}$

Αναλυτική λύση της περιπτώσεως της παραγράφου 3.6:

Υπενθυμίζουμε ότι λόγω της συμμετρίας της γεωμετρίας αλλά και της φόρτισης, τα μεγέθη που περιγράφουν το ελαστοστατικό πρόβλημα σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, εξαρτώνται μόνο από την ακτίνα (r) και όχι από την γωνία (θ) και το ύψος (z).

Οι αναλυτικές κλειστές διατυπώσεις ως προς τις τάσεις, υπάρχουν στην βιβλιογραφία {[6], σελ. 131, σχέσεις (6) & (7)}:

$$\sigma_{rr}(r) = -P_1 \frac{\frac{R_2^2}{r^2} - 1}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} - P_2 \frac{1 - \frac{R_1^2}{r^2}}{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} \quad (3.6.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = P_1 \frac{\frac{R_2^2}{r^2} + 1}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} - P_2 \frac{1 + \frac{R_1^2}{r^2}}{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} \quad (3.6.2)$$

Ο νόμος του Hooke στις τρεις διαστάσεις, διατυπωμένος ως προς τις τροπές, {[6], σελ 70, σχέση (11β)}:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \{(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}\} \quad (3.6.3)$$

Επειδή στο πρόβλημα μας ισχύει:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (3.6.4)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.6.3) για ε_{rr} και αντικαθιστώντας την σχέση (3.6.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{rr}(r) = \frac{1}{E} \{\sigma_{rr}(r) - \nu \sigma_{\theta\theta}(r)\} \quad (3.6.5)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.6.3) για $\varepsilon_{\theta\theta}$ και αντικαθιστώντας την σχέση (3.6.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{E} \{\sigma_{\theta\theta}(r) - \nu \sigma_{rr}(r)\} \quad (3.6.6)$$

Γιαννόπουλος Ιωάννης

Επίσης στην βιβλιογραφία θα βρούμε την εξίσωση των ακτινικών μετατοπίσεων, {[3], σελ. 172, σχέση (2)}, που αφορά σε πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης:

$$u_r = \frac{1 + \nu}{E} \left\{ \frac{R_1^2 \cdot P_1 - R_2^2 \cdot P_2}{R_2^2 - R_1^2} (1 - 2\nu) \cdot r + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2 (P_2 - P_1)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r} \right\} \quad (3.6.7)$$

Στην παραπάνω σχέση εάν αντικαταστήσουμε τα E και ν , με τη δεύτερη σειρά του πίνακα 1 της σελίδας 30, θα προκύψει η συνάρτηση των ακτινικών μετατοπίσεων βάσει της ακτίνας για πρόβλημα επίπεδης έντασης. Αυτή αποτυπώνεται στο σχήμα 3.6.4.

Αντικαθιστώντας τα δικά μας αριθμητικά δεδομένα στην σχέση (3.6.7) θα προκύψει:

$$u_r (R_1) = 117.07 \text{ mm} \quad (3.6.8)$$

$$u_r (R_2) = 2.77 \text{ mm} \quad (3.6.9)$$

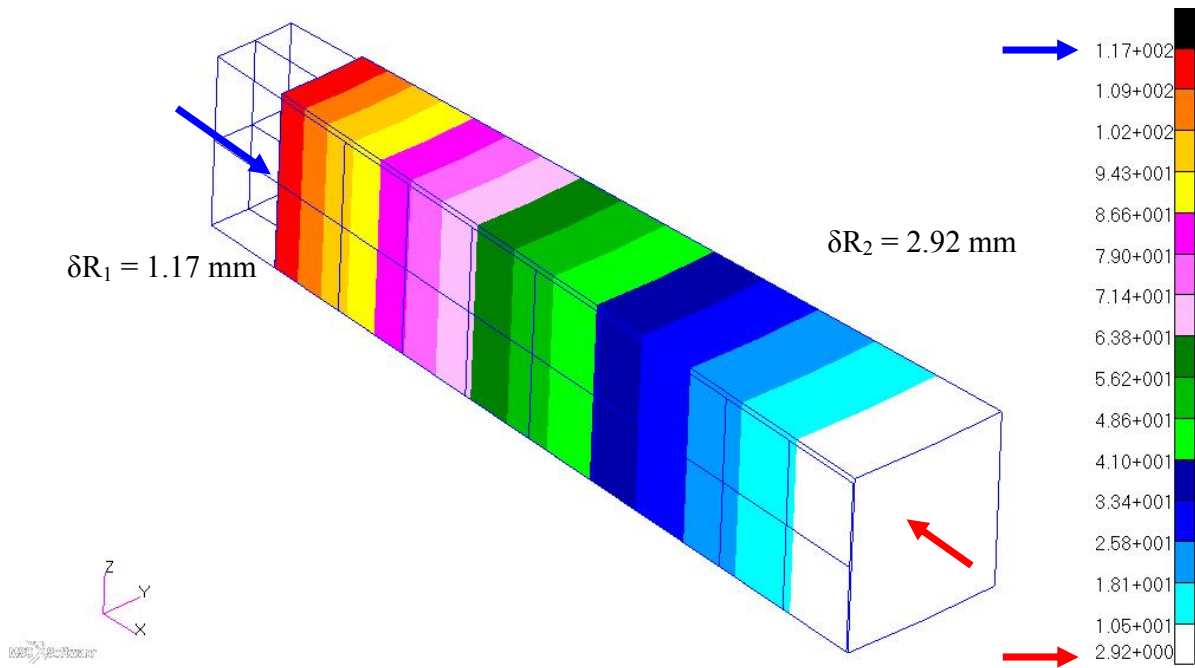
Το σφάλμα μεταξύ των τιμών αυτών με εκείνες των πεπερασμένων στοιχείων όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.6.2, είναι λιγότερο από 1%

Η μετατόπιση κατά z , θα υπολογιστεί από την εξίσωση (3.6.3), που στην δική μας την περίπτωση είναι $\varepsilon_{zz} = 0.0133$, οπότε για το συνολικό ύψος:

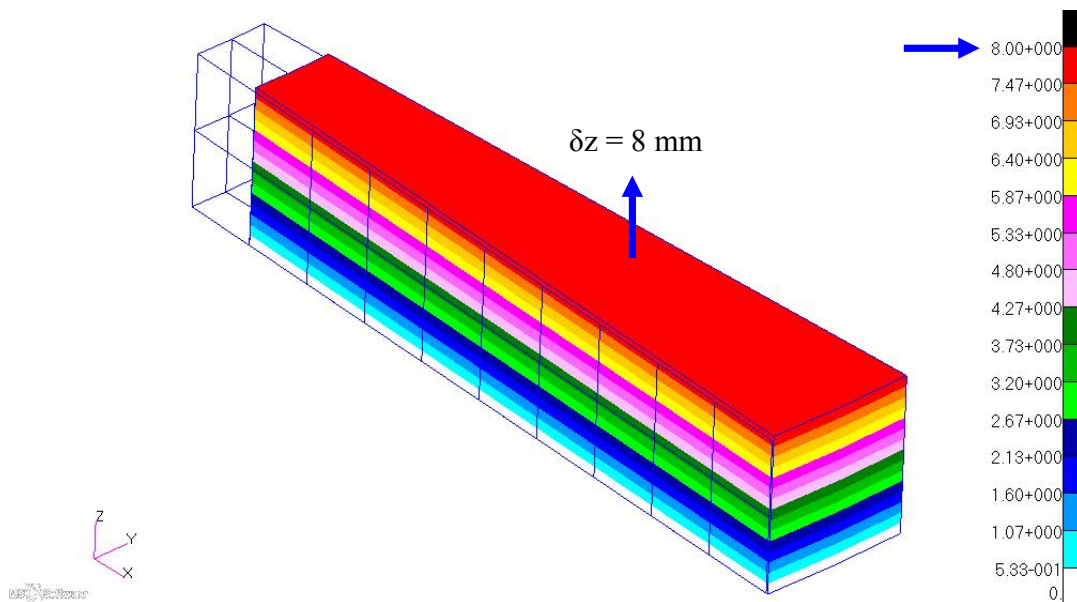
$$\Delta z = h \varepsilon_{zz} = 8 \text{ mm} \quad (3.6.10)$$

Σε αυτόν τον υπολογισμό δεν υπάρχει σφάλμα για την αριθμητική διακριτοποίηση που έχουμε επιλέξει.

Παραθέτονται διαγράμματα ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων και τροπών για χωρίο μοντελοποιημένο με πεπερασμένα στοιχεία με δέκα κομβικές τιμές και αναλυτικών λύσεων για το ίδιο χωρίο με τριάντα τιμές. Επίσης παρατίθεται διάγραμμα της ακτινικής μετατόπισης (σχήμα 3.6.4) όπως αυτή φαίνεται στην εξίσωση (3.6.7) με την αντίστοιχη αντικατάσταση των E και ν , βάση του πίνακα 1.

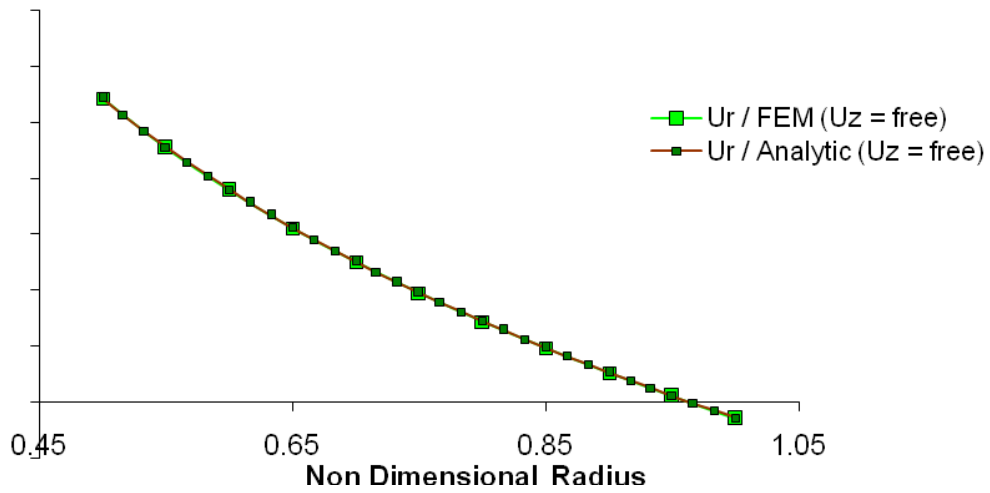


Σχήμα 3.6.2: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R. Μετατόπιση εσωτερικής περιφέρειας ακτινικά σύμφωνα με την σχέση (3.6.8) και εξωτερικής περιφέρειας σύμφωνα με την σχέση (3.6.9)



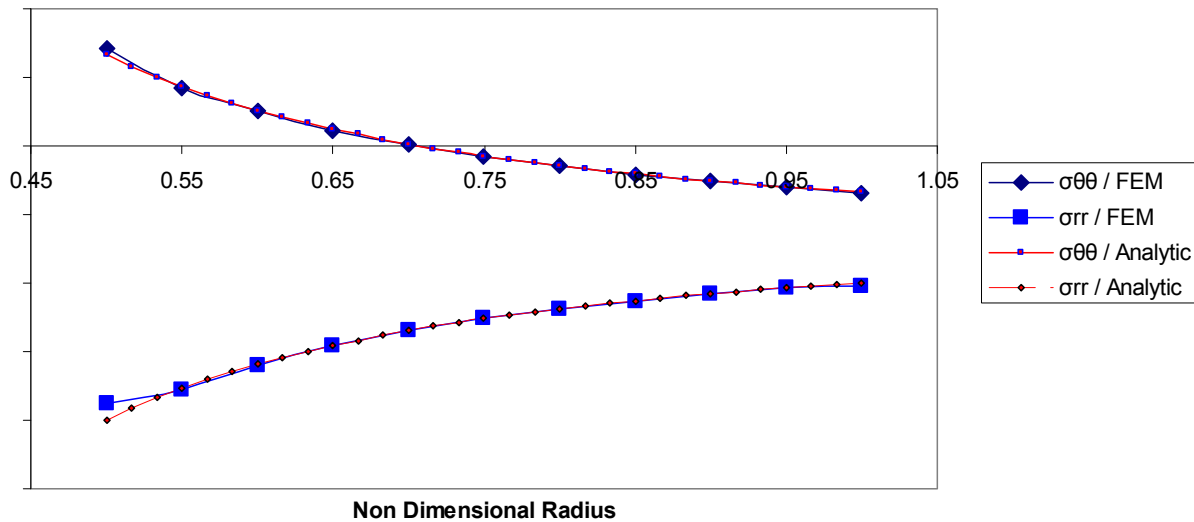
Σχήμα 3.6.3: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά z. Μέγιστη μετατόπιση βάση της σχέσης (3.6.10)

Radial Displacements (U_r)



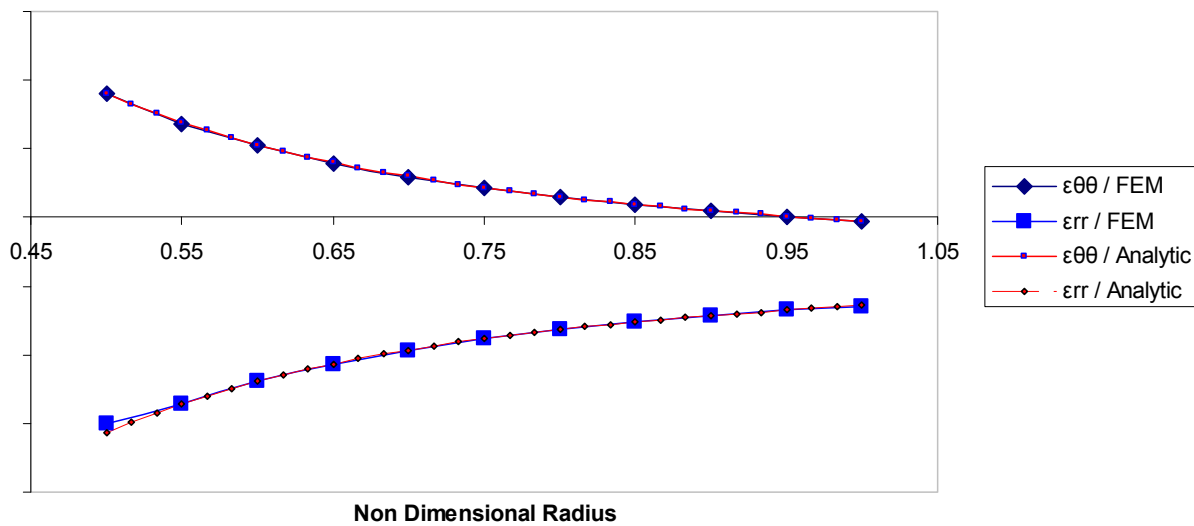
Σχήμα 3.6.4: Διακόμανση μετατοπίσεων κατά R ως προς μια αδιάστατη ακτίνα

Radial (σ_{rr}) and Tangential ($\sigma_{\theta\theta}$) Stresses



Σχήμα 3.6.5: Σύγκριση ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης

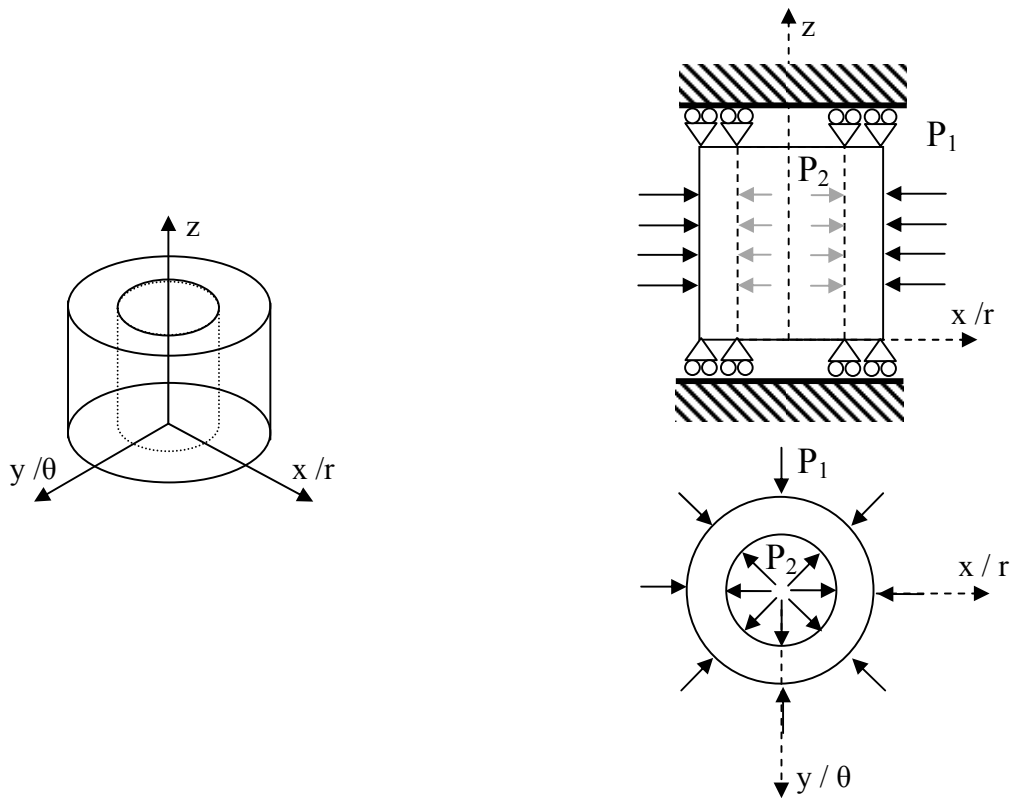
Radial (ϵ_{rr}) and Tangential ($\epsilon_{\theta\theta}$) Strains



Σχήμα 3.6.6: Σύγκριση ακτινικών και εφαπτομενικών τρόπων της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης

3.7 Σωληνοειδές χωρίο περίπτωση 3^η

Σωληνοειδές χωρίο από ομογενές ισότροπο υλικό, πακτωμένο και στα δύο του άκρα (αλλά με την ικανότητα ακτινικής παραμόρφωσης) και με φορτίο επί της εξωτερικής και εσωτερικής κυλινδρικής του επιφάνειας κυλινδρικής του επιφάνειας σταθερό κατά ύψος και γωνία



Σχήμα 3.7.1: Τρισδιάστατη παράσταση του κυλινδρικού μοντέλου, οριακές συνθήκες και φόρτιση για την περίπτωση της παραγράφου 3.7

Αριθμητικά δεδομένα περίπτωσης 3.7:

Για την επίλυση του προβλήματός μας με τα πεπερασμένα στοιχεία θα θεωρήσουμε τα ίδια δεδομένα γεωμετρίας, υλικού και φόρτισης όπως και στην περίπτωση 3.6.

Αναλυτική λύση της περιπτώσεως της παραγράφου 3.7:

Οι αναλυτικές κλειστές διατυπώσεις ως προς τις τάσεις, υπάρχουν στην βιβλιογραφία {[6], σελ.131, σχέσεις (6) & (7)}, είναι δε όμοιες με εκείνες της παραγράφου 3.6:

$$\sigma_{rr}(r) = -P_1 \frac{\frac{R_2^2}{r^2} - 1}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} - P_2 \frac{1 - \frac{R_1^2}{r^2}}{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} \quad (3.7.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = P_1 \frac{\frac{R_2^2}{r^2} + 1}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} - P_2 \frac{1 + \frac{R_1^2}{r^2}}{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} \quad (3.7.2)$$

Ο νόμος του Hooke στις τρεις διαστάσεις, διατυπωμένος ως προς τις τροπές {[6], σελ 70, σχέση (11β)}:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \{(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}\} \quad (3.7.3)$$

Επειδή σε αυτό το πρόβλημα μας ισχύει:

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (3.7.4)$$

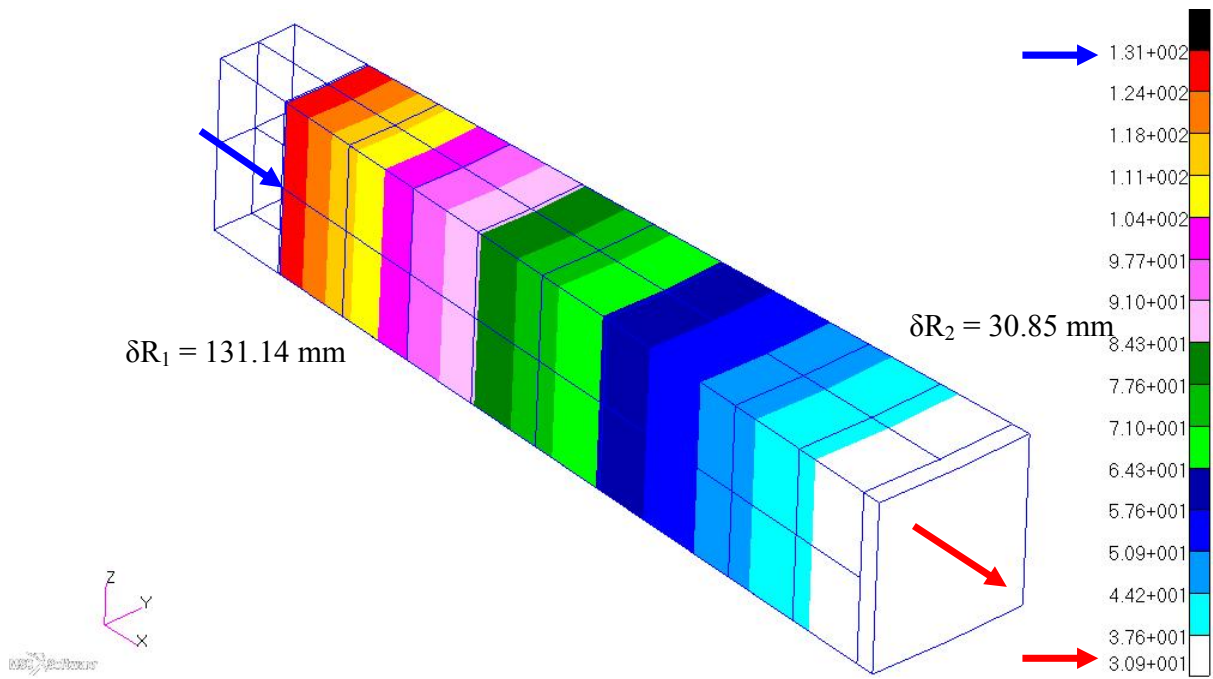
Επιλύοντας την εξίσωση (3.7.3) για ε_{rr} και με βάση την σχέση (3.7.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} \{(1 - \nu^2)\sigma_{rr} - \nu(\nu + 1)\sigma_{\theta\theta}\} \quad (3.7.5)$$

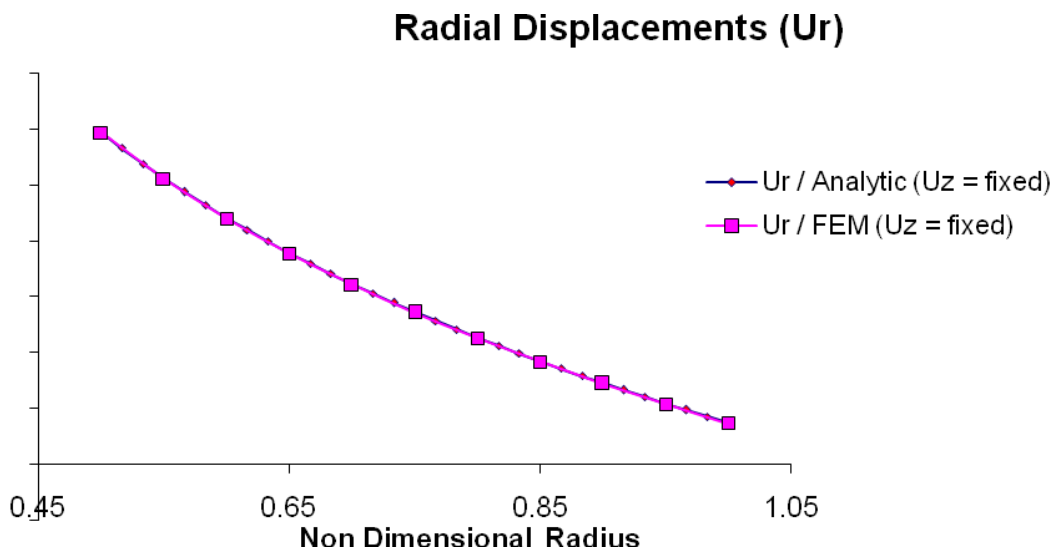
Επιλύοντας την εξίσωση (3.7.3) για $\varepsilon_{\theta\theta}$ (3.7.3) και με βάση την σχέση (3.7.4) συνάγεται ότι:

$$\Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \{(1 - \nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(\nu + 1)\sigma_{rr}\} \quad (3.7.6)$$

Παραθέτονται διαγράμματα ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων και τροπών για χωρίο μοντελοποιημένο με πεπερασμένα στοιχεία με δέκα κομβικές τιμές και αναλυτικών λύσεων για το ίδιο χωρίο με τριάντα τιμές.

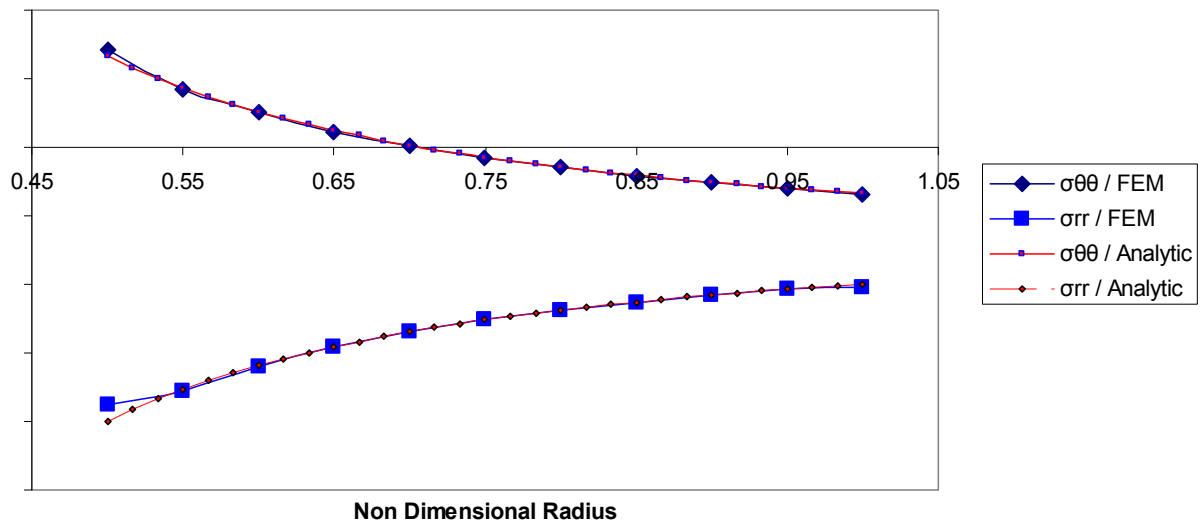


Σχήμα 3.7.2: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R. Μετατόπιση εσωτερικής περιφέρειας ακτινικά σύμφωνα με την σχέση (3.5.9) και εξωτερικής περιφέρειας σύμφωνα με την σχέση (3.5.10)



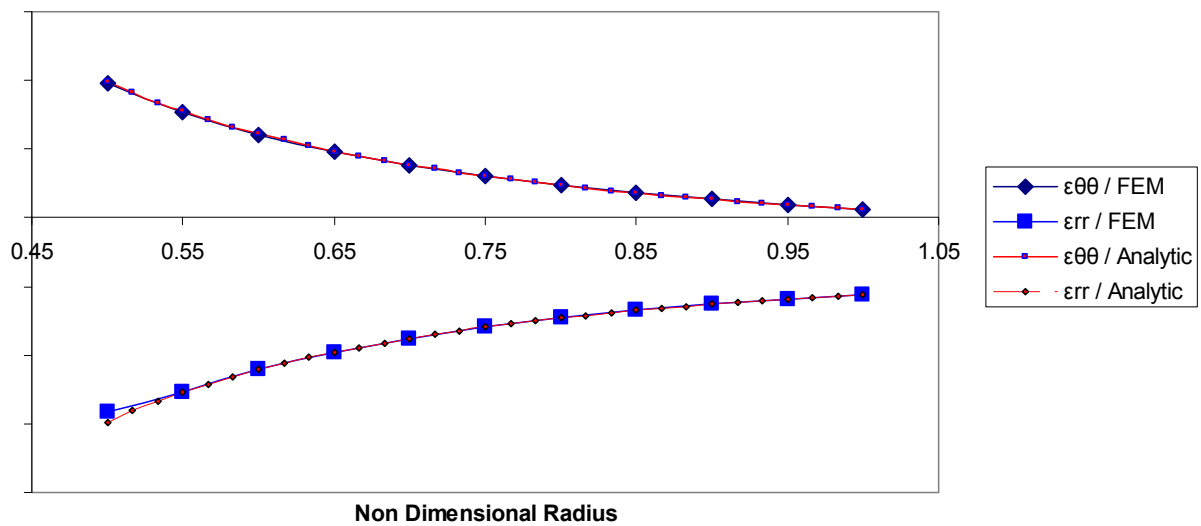
Σχήμα 3.7.3: Διακύμανση μετατοπίσεων κατά R

Radial (σ_{rr}) and Tangential ($\sigma_{\theta\theta}$) Stresses



Σχήμα 3.7.4: Σύγκριση ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης

Radial (ϵ_{rr}) and Tangential ($\epsilon_{\theta\theta}$) Strains



Σχήμα 3.7.5: Σύγκριση ακτινικών και εφαπτομενικών τρόπων της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης

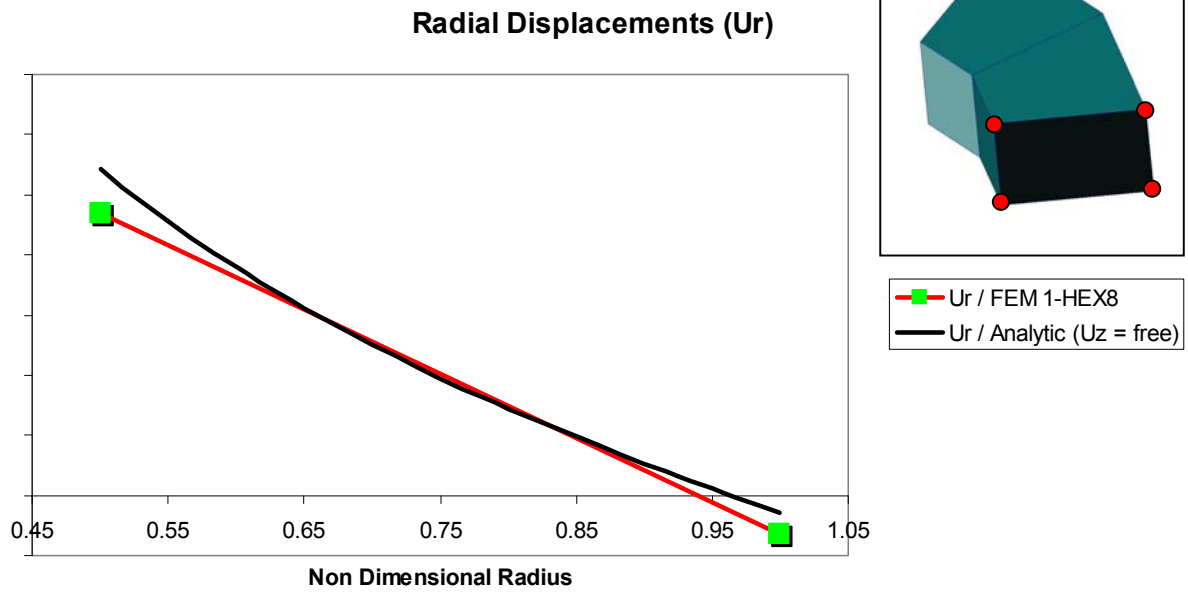
3.8 Προσέγγιση μη γραμμικού πεδίου μετατοπίσεων με στοιχεία γραμμικής ή μεγαλύτερης τάξης παρεμβολή

Το πεδίο μετατοπίσεων που προκύπτει από την επίλυση δισκοειδών χωρίων με εσωτερική και εξωτερική πίεση, είναι μη γραμμικό καθώς περιέχει όρο του αντιστρόφου της ακτίνας, όπως φαίνεται και από την εξίσωση (3.6.7) του παρόντος.

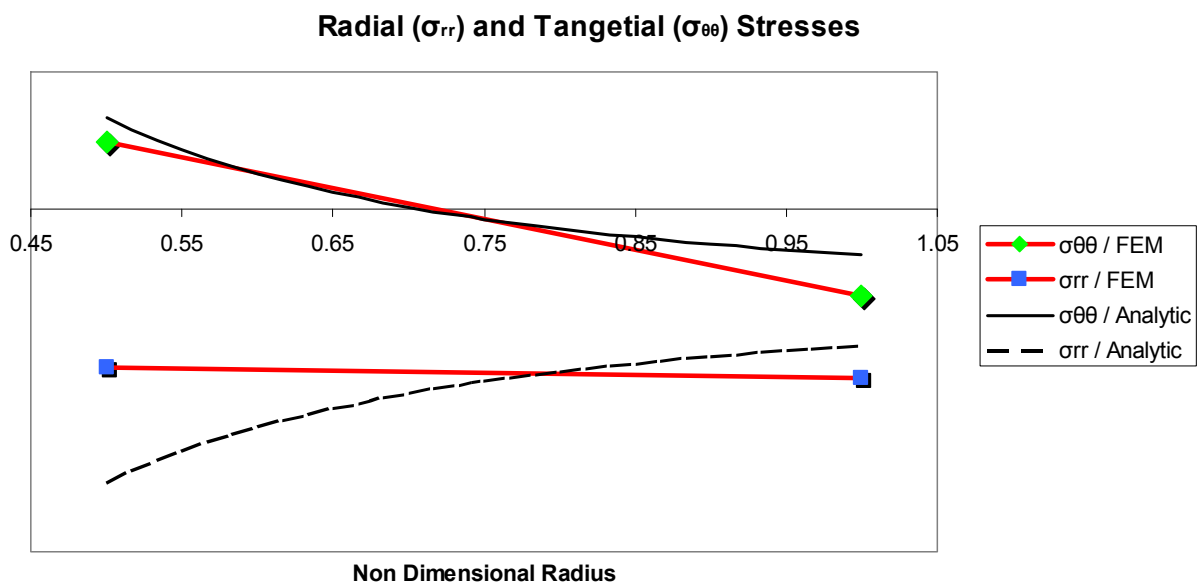
Μοντελοποιήσαμε το δισκοειδές μας χωρίο στις παραγράφους 3.6 και 3.7 με τη βοήθεια πεπερασμένων στοιχείων όγκου με γραμμική παρεμβολική συνάρτηση. Το σφάλμα που παρατηρείται στην περίπτωση των μετατοπίσεων είναι αμελητέο, στην περίπτωση όμως των τάσεων και πιο συγκεκριμένα στην εσωτερική ακτίνα, μπορεί να φτάσει και το 7% στο συγκεκριμένο πρόβλημα που εμείς θεωρήσαμε.

Για την προσέγγιση πεδίων μετατοπίσεων τα οποία ορίζονται από πιο πολύπλοκες συναρτήσεις από την γραμμική, μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε περισσότερα γραμμικής παρεμβολής (h-refinement), είτε στοιχεία με παρεμβολική συνάρτηση μεγαλύτερης τάξης (P-refinement).

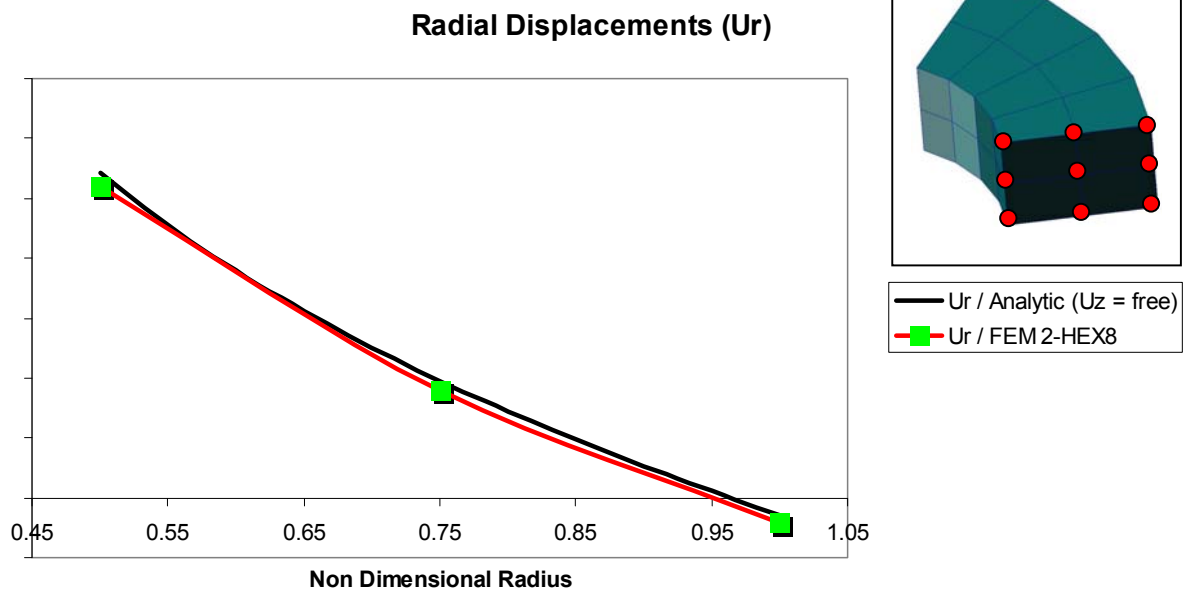
Μελετήσαμε την επίπτωση στην ορθότερη προσέγγιση των μεγεθών του πεδίου μετατοπίσεων που επιφέρει η αριθμητική λύση συσχετίζοντας στοιχεία με γραμμική και δευτέρου βαθμού παρεμβολή. Τα αποτελέσματα παρατίθενται παρακάτω:



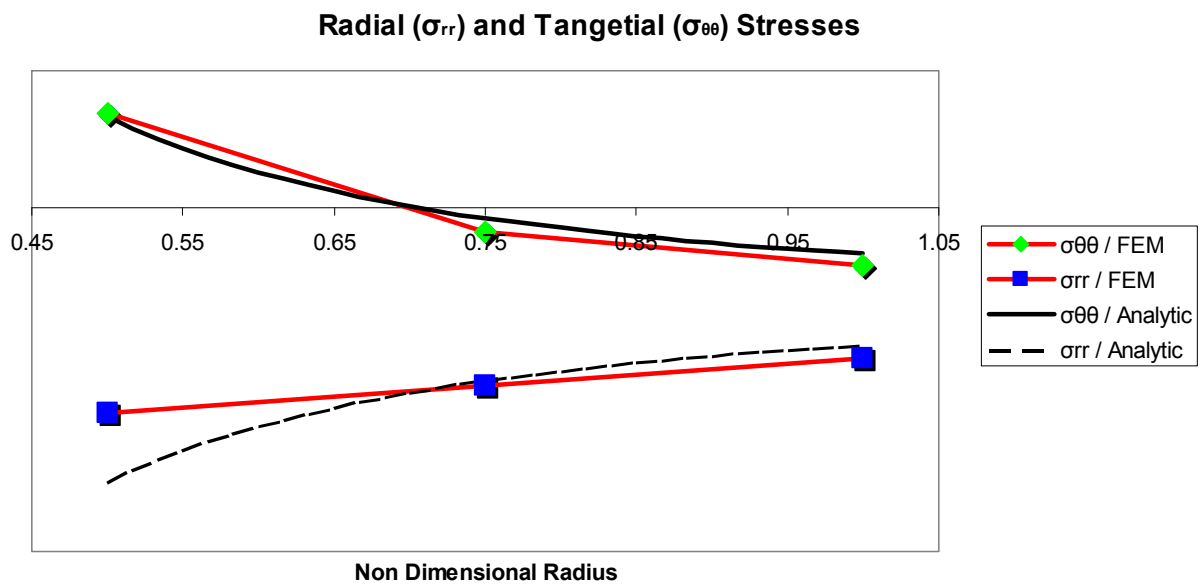
Σχήμα 3.8.1: Προσέγγιση πεδίου μετατοπίσεων με ένα στοιχείο γραμμικής παρεμβολής



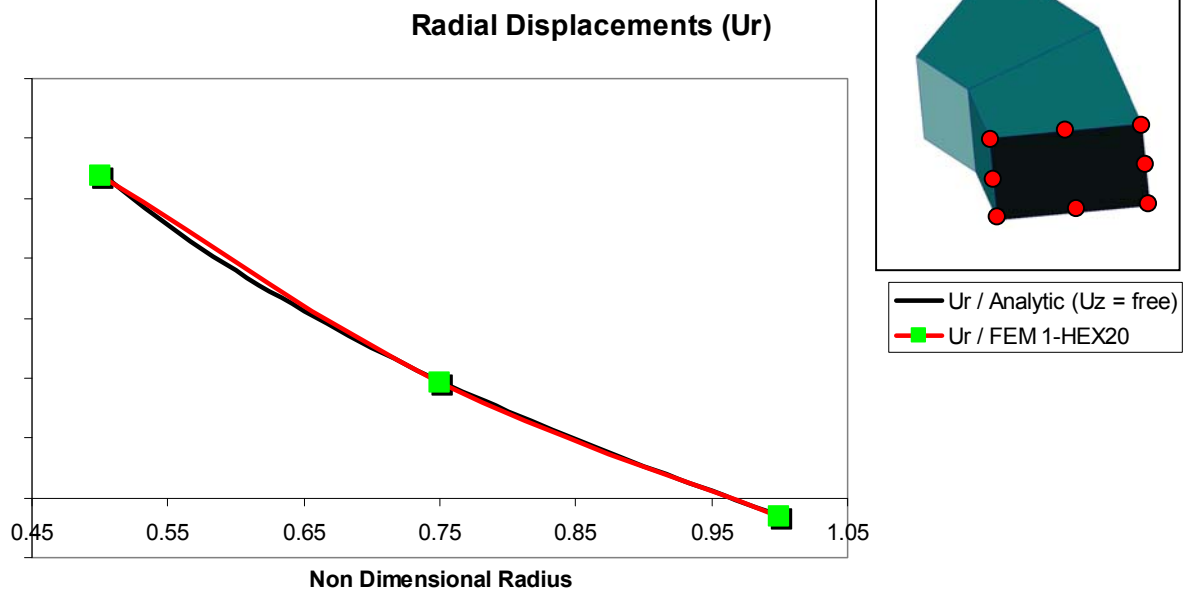
Σχήμα 3.8.2: Προσέγγιση πεδίου τάσεων με ένα στοιχείο γραμμικής παρεμβολής



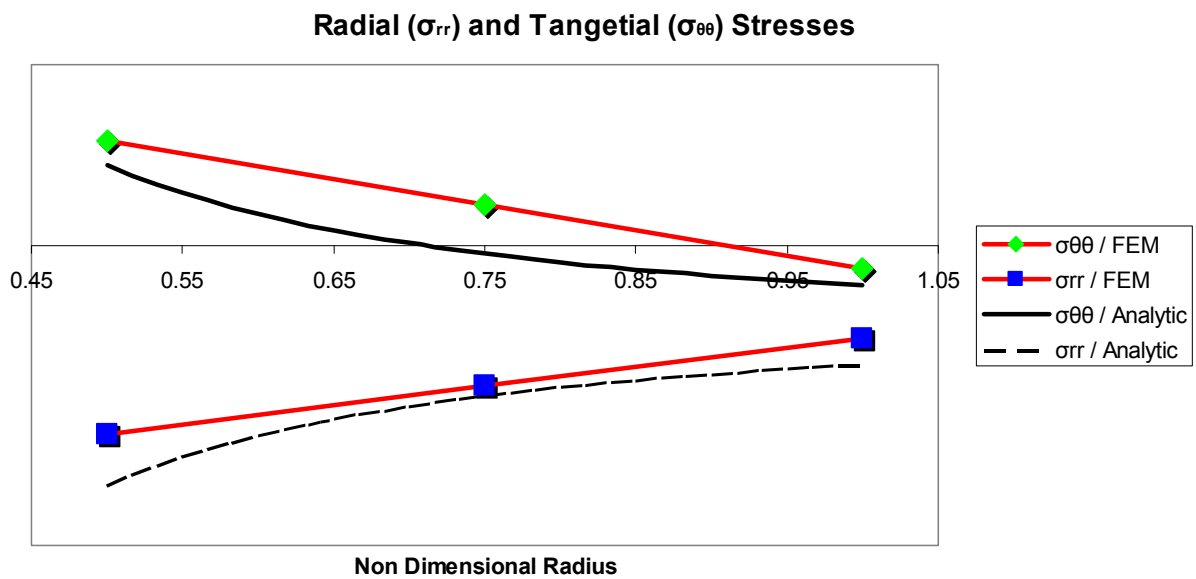
Σχήμα 3.8.3: Προσέγγιση πεδίου μετατοπίσεων με δύο στοιχεία γραμμικής παρεμβολής



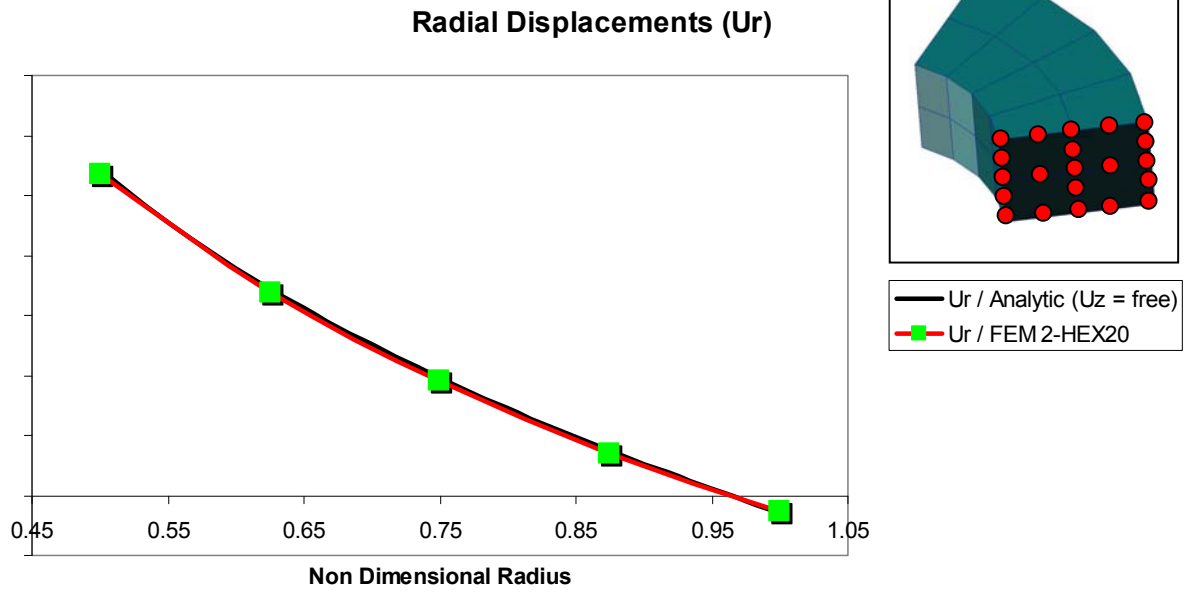
Σχήμα 3.8.4: Προσέγγιση πεδίου τάσεων με δύο στοιχεία γραμμικής παρεμβολής



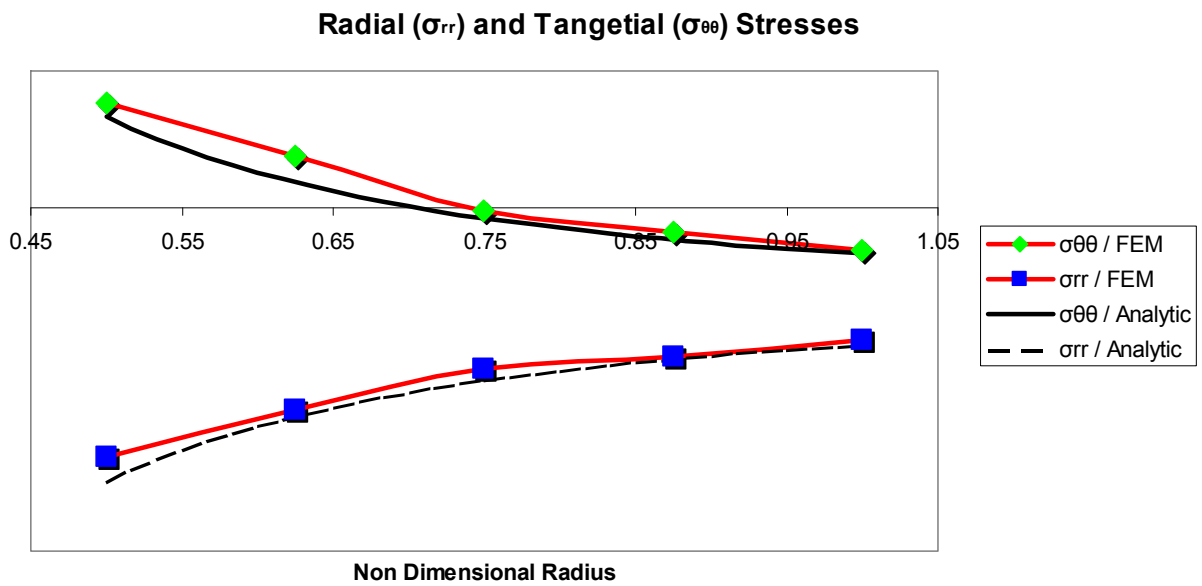
Σχήμα 3.8.5: Προσέγγιση πεδίου μετατοπίσεων με ένα στοιχείο δευτεροβάθμιας παρεμβολής



Σχήμα 3.8.6: Προσέγγιση πεδίου τάσεων με ένα στοιχείο δευτεροβάθμιας παρεμβολής



Σχήμα 3.8.7: Προσέγγιση πεδίου μετατοπίσεων με δύο στοιχεία δευτεροβάθμιας παρεμβολής



Σχήμα 3.8.8: Προσέγγιση πεδίου τάσεων με δύο στοιχεία δευτεροβάθμιας παρεμβολής

3.9 Συμπεράσματα

Όπως προκύπτει από τις παραγράφους 3.1 έως 3.8, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με τα συγκεκριμένα Τρισδιάστατα στοιχεία γραμμικής παρεμβολής έχουν την ικανότητα να αποδώσουν τα μεγέθη των επιμέρους ελαστοστατικών μας προβλημάτων με κάποιο ποσοστό προσεγγιστικού σφάλματος..

Η μέγιστη απόκλιση που εμφανίζεται στην προσέγγιση των μεγεθών του μη γραμμικού πεδίου μετατοπίσεων σωληνοειδών χωρίων, εμφανίζεται στην εσωτερική ακτίνα και εξαρτάται από την συγκεκριμένη διακριτοποίηση των πεπερασμένων, δηλαδή των αριθμό των χρησιμοποιούμενων στοιχείων.

Η μοντελοποίηση με στοιχεία μεγαλύτερης παρεμβολής από την γραμμική δεν θα προτιμηθεί μιας και τα αποτελέσματα που επιφέρει δεν είναι τα αναμενόμενα, συγκριτικά με την αντίστοιχη αύξηση σε υπολογιστικό κόστος που θα επιφέρει. Θα προτιμηθεί η λύση του h-refinement δηλαδή της χρησιμοποίησης περισσότερων στοιχείων γραμμικής παρεμβολής για την περιγραφή και του μη γραμμικού πεδίου μετατοπίσεων.

Αναμένεται ότι το πρόβλημα, όπως αυτό περιγράφεται στο σχήμα 1.1.γ, το οποίο θα μοντελοποιηθεί με στοιχεία γραμμικής παρεμβολής, να προσεγγίζει με ικανοποιητικό τρόπο την αναλυτική λύση όπως αυτή περιγράφεται εντός των [1] και [2].

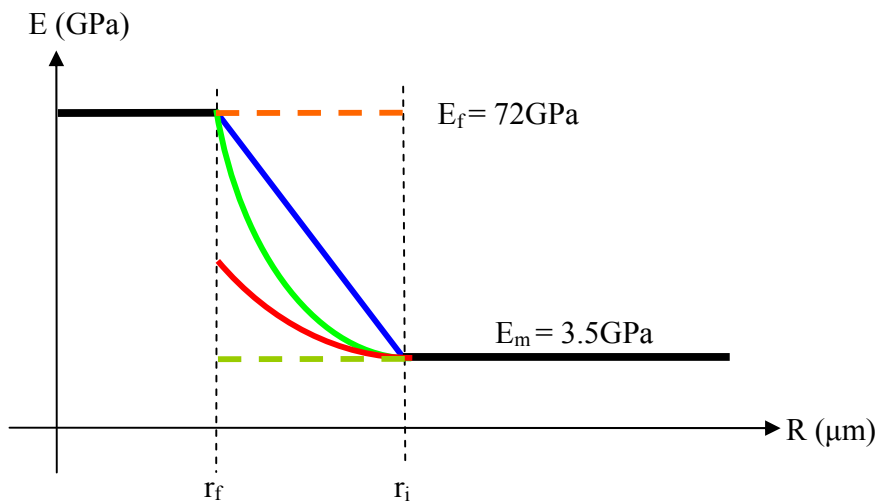
4 Η μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης

Το τελευταίο κομμάτι μοντελοποίησης το οποίο θα εξεταστεί πριν την καθολική μοντελοποίηση του συνολικού σώματος (σχήμα 1.1.γ) είναι η μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης.

Η ενδιάμεση φάση είναι το σωληνοειδές εκείνο χωρίο μεταξύ των φάσεων αμιγούς ίνας και αμιγούς μήτρας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.γ της πρώτης παραγράφου. Αυτό το χωρίο δεν έχει σταθερές ιδιότητες κατά την ακτινική του χωρική συντεταγμένη. Μπορεί να υποθεθεί ότι το υλικό που είναι πιο κοντά στην ίνα έχει ελαστικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές της ινώδους φάσεως, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτό το σύνορο και πλησιάζουμε την μήτρα, τότε οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης προσομοιάζουν αυτές της μήτρας.

Το ποσοστό της ενδιάμεσης φάσης που υπάρχει σε ένα σύνθετο υλικό και είθισται να συσχετίζεται με τη κατ' όγκο περιεκτικότητα της ινώδους φάσεως, έχει προσδιοριστεί πειραματικά και αναφέρεται εντός των αναφορών [1], σελ.412, Table 1 “Values for the longitudinal modulus of the composite and the mesophase volume fraction v_i and its maximum polar radius (r_i)” στην στήλη “volume fraction (v_i)” και [2], σελ 251, Table I, “Values of the interphase thickness ($\Delta r_i = r_i - r_f$) and volume fraction v_i , versus fibre volume fraction v_f ”. Αυτές τις συγκεντρώσεις θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς στην αριθμητική μας προσέγγιση, οι οποίες αναγράφονται και στο σχήμα 5.1 της παραγράφου 5.

Ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται οι ιδιότητες του υλικού στην ενδιάμεση φάση η αλλιώς οι συναρτησιακές σχέσεις που περιγράφουν την μεταβολή των ιδιοτήτων βάσει της ακτίνας, είναι αντικείμενο προς διερεύνηση. Οι συγγραφείς των αναφορών [1] και [2], για την επίλυση του προβλήματος έχουν θεωρήσει διαφόρων μορφών συναρτήσεις όπως γραμμική, παραβολική, υπερβολική και άλλες. Στο σχήμα 4.1 που ακολουθεί, περιγράφονται κάποιες από αυτές.



Μεταβολή μέτρου ελαστικότητας με:

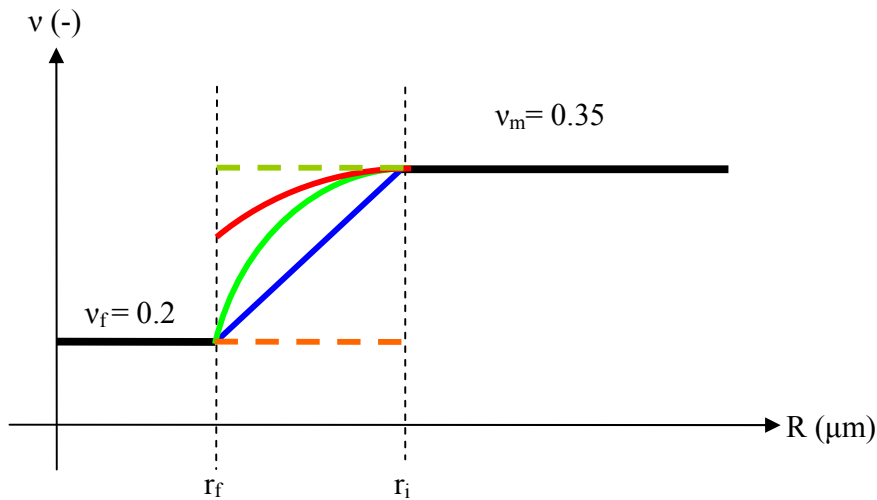
- α) γραμμική συνάρτηση (μπλε καμπύλη)
- β) συνάρτηση δευτέρου βαθμού (πράσινη καμπύλη)
- γ) συνάρτηση δευτέρου βαθμού με διαφορά στην αρχική τιμή (κόκκινη καμπύλη)

Επίσης αποτυπώνονται και οι ακρότατες περιπτώσεις, κατά τις οποίες η ενδιάμεση φάση θεωρείται ότι:

- δ) κατέχει τις ιδιότητες της ίνας (πορτοκαλί άνω διακεκομμένη ευθεία)
- ε) κατέχει τις ιδιότητες της μήτρας (λαχανί κάτω διακεκομμένη ευθεία)

Σχήμα 4.1: Σχέσεις που περιγράφουν την μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας στην ενδιάμεση φάση.

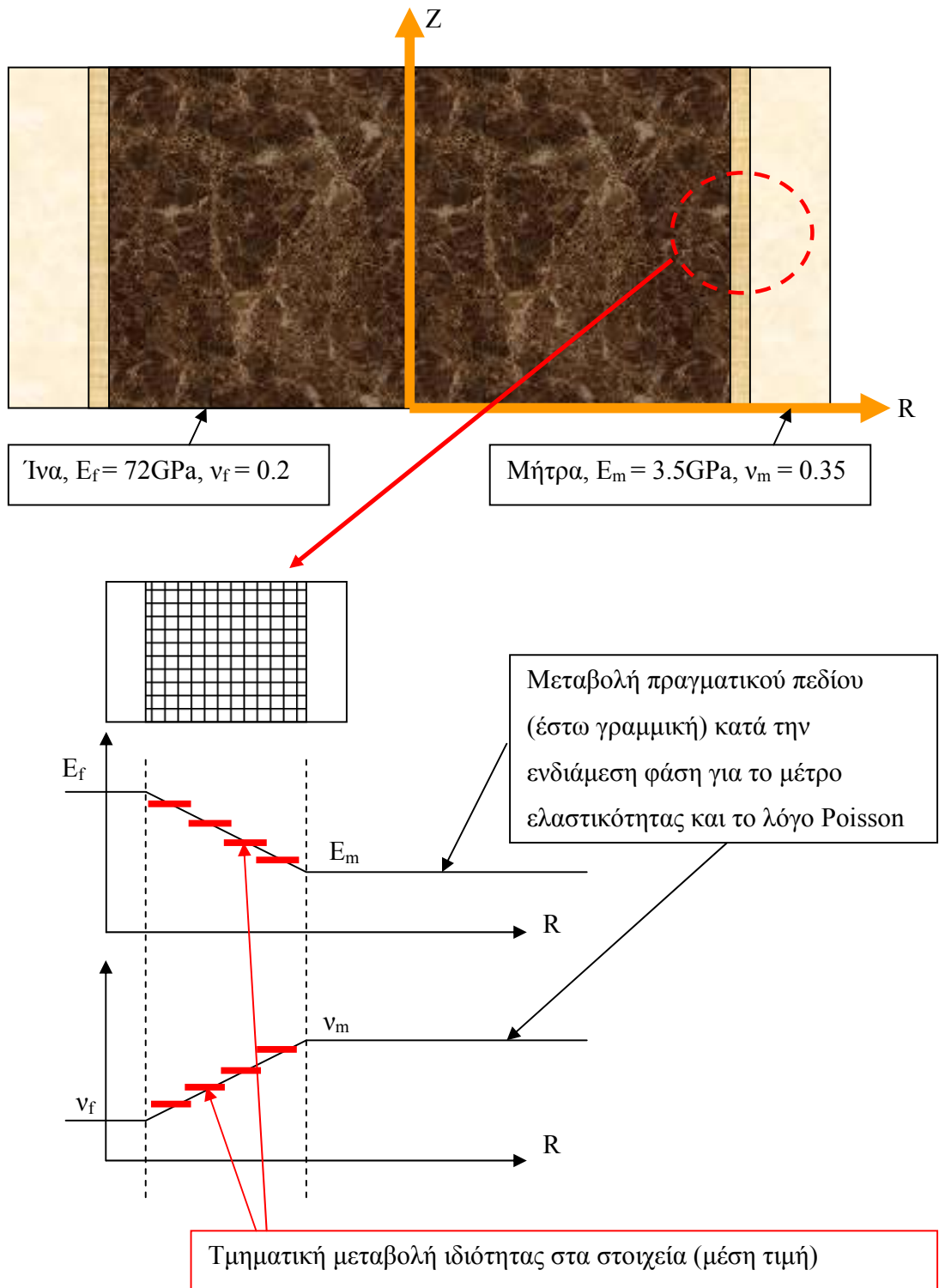
Με παρεμφερή συλλογισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε και αντίστοιχες συναρτήσεις για την μεταβολή του λόγου του Poisson κατά την ενδιάμεση φάση, με τιμές αυτού να κυμαίνονται μεταξύ των $\nu_f = 0.2$ στην ίνα και $\nu_m = 0.35$ για την μήτρα.



Σχήμα 4.2: Σχέσεις που περιγράφουν την μεταβολή του λόγου του Poisson στην ενδιάμεση φάση.

Για την αριθμητική μας προσέγγιση, εμείς θα θεωρήσουμε τυπικά την γραμμική συνάρτηση μεταβολής των ιδιοτήτων, ενώ παράλληλα θα υπολογίσουμε και τα μεγέθη στις ακρότατες καταστάσεις, δηλαδή όταν η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ότι κατέχει τις ιδιότητες της ίνας ή της μήτρας εξ' ολοκλήρου. Θα παρουσιασθεί σε επόμενο κεφάλαιο ότι διαφορά που προκύπτει μεταξύ των ακρότατων θεωρήσεων επί των μεγεθών που μας απασχολούν δεν είναι άξια λόγου για να προβούμε στον υπολογισμό και άλλων συναρτήσεων πλην αυτών των βασικών.

Ένα σημαντικό θέμα με την μοντελοποίηση των πεπερασμένων στοιχείων, είναι ότι το χωρίο του πεπερασμένου στοιχείου πρέπει να έχει συγκεκριμένες και σταθερές μηχανικές ιδιότητες στο χώρο που καταλαμβάνει. Όταν θα πρέπει να μοντελοποιηθεί μια περιοχή με μεταβλητές μηχανικές ιδιότητες, τότε πρέπει να θεωρηθεί ένας τρόπος εύρεσης μιας μέσης ή ικανοποιητικής τιμής ιδιοτήτων η οποία να χαρακτηρίζει όλο το χωρίο. Η συνήθης προσέγγιση αυτών των προβλημάτων είναι να θεωρούμε έναν ικανοποιητικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων για να περιγραφεί η περιοχή με τις μεταβλητές ιδιότητες, σαν πεδίο τμηματικά σταθερών ιδιοτήτων, οι οποίες είναι οι μέσες τιμές των μεταβλητών πεδίων όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Η τμηματική προσέγγιση των ελαστικών μεγεθών εντός των στοιχείων

Επίσης σημαντικό είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων να μπορεί να περιοριστεί σε τέτοια βαθμό ώστε να μην προκύπτει ένα τερατώδες αριθμητικό μοντέλο. Στην δική μας περίπτωση, θα τεμαχίσουμε την ενδιάμεση φάση σε δέκα (10) πεπερασμένα στοιχεία. Ξεκινώντας την μοντελοποίηση από εκεί, προκύπτει το συνολικό μας μοντέλο το οποίο έχει αποδεκτό μέγεθος και ένα παράδειγμα αυτού παρίσταται στο σχήμα 5.2.

Στην αριθμητική μας προσέγγιση, θα θεωρήσουμε μια γραμμική μεταβολή κατά την ακτινική διεύθυνση των ελαστικών μεγεθών που μεταβάλλονται στην ενδιάμεση φάση. Στα άρθρα [1] και [2], διάφορες συναρτήσεις έχουν θεωρηθεί και εξεταστεί, ήτοι γραμμική, παραβολική, υπερβολική και λογαριθμική παρεμβολή.

Το πλεονέκτημα των πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι μπορούν να μοντελοποιήσουν τα ελαστικά μεγέθη της ενδιάμεσης φάσης χωρίς αυτά να υπακούουν αναγκαστικά σε μια συναρτησιακή μορφή που θα μας εξυπηρετούσε στην αναλυτική λύση. Μπορεί να θεωρηθεί οποιασδήποτε μορφής μεταβολή, η οποία θα μοντελοποιηθεί ως τμηματικά σταθερή.

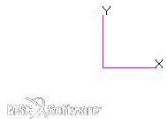
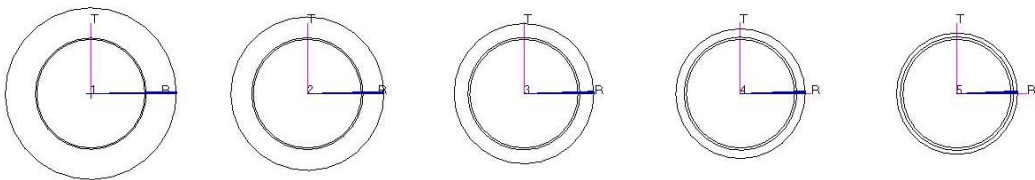
Το μειονέκτημα είναι ότι για την πιστή αποτύπωση των μεταβολών των μεγεθών χρειάζεται μεγάλος αριθμός στοιχείων, πράγμα στο οποίο υπάρχει όριο από την υπολογιστική ισχύ των εκάστοτε υπολογιστικών συστημάτων.

5 Αριθμητική προσέγγιση

5.1 Οι αναλογίες των αριθμητικών δοκιμίων

Στο ακόλουθο σχήμα 5.1.1, αποτυπώνονται πέντε κυκλικές διατομές (υπολογιστικά χωρία) με τρεις ομόκεντρους κύκλους η καθεμία από αυτές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν διαφορετικές κατ' όγκο συγκεντρώσεις σε υλικό ίνας, μήτρας και ενδιάμεσης φάσης. Αυτές οι αναλογίες θα επιλυθούν υπολογιστικά.

$v_f = 40 \%$	$v_f = 50 \%$	$v_f = 60 \%$	$v_f = 70 \%$	$v_f = 80 \%$
$v_i = 1.968 \%$	$v_i = 3.075 \%$	$v_i = 4.428 \%$	$v_i = 6.027 \%$	$v_i = 7.822 \%$
$v_m = 58.032 \%$	$v_m = 46.925 \%$	$v_m = 35.572 \%$	$v_m = 23.973 \%$	$v_m = 12.178 \%$



Υπόθεση:

Ιδιότητες Ίνας, $E_f = 72\text{GPa}$, $\nu_f = 0.2$

Ιδιότητες Μήτρας, $E_m = 3.5\text{GPa}$, $\nu_m = 0.35$

Γραμμική συνάρτηση για τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης με:

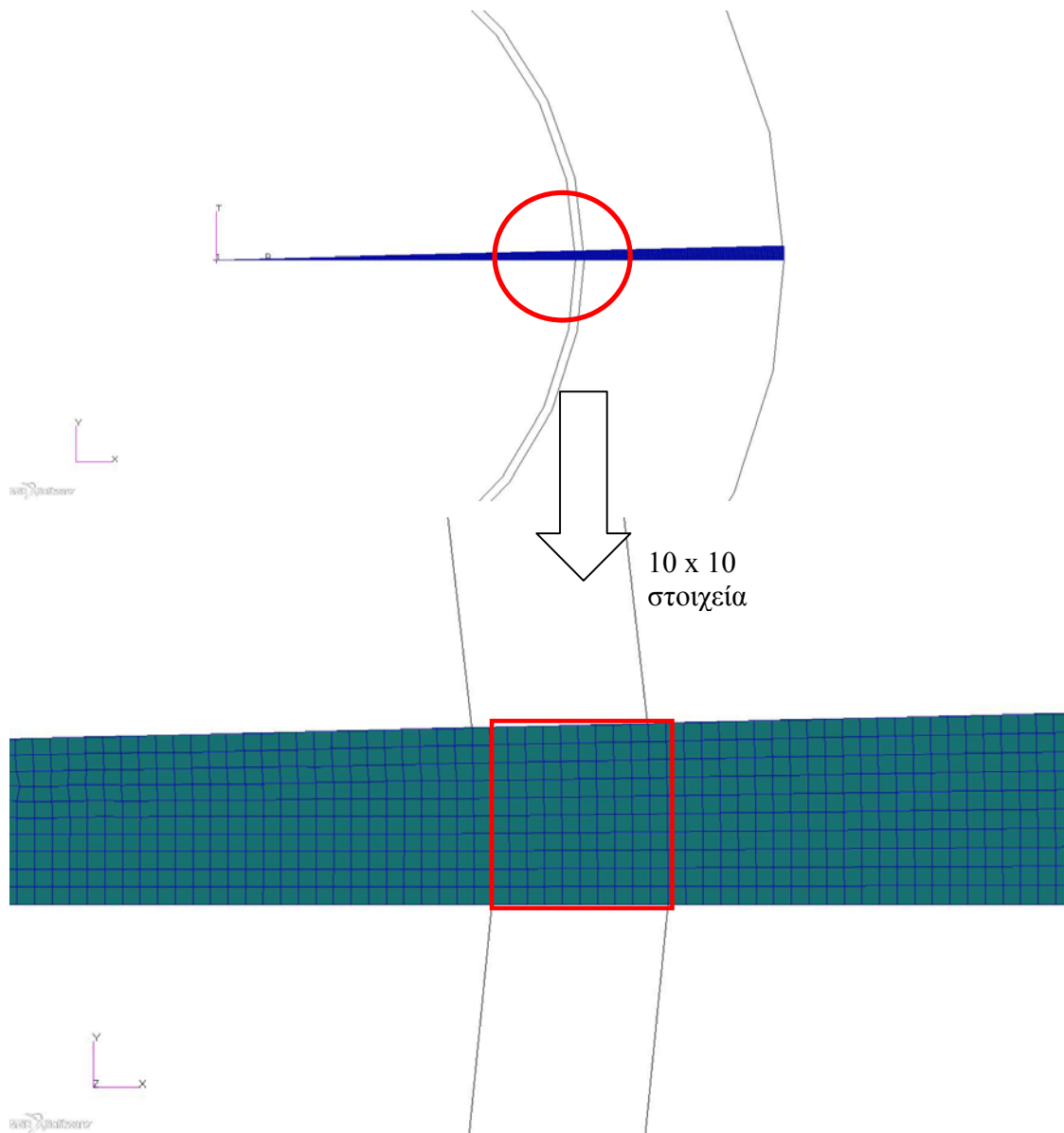
$$E_i(r_i) = E_f, \text{ και } E_i(r_m) = E_m$$

$$\nu_i(r_i) = \nu_f, \text{ και } \nu_i(r_m) = \nu_m$$

Σχήμα 5.1.1: Οι κατ' όγκο αναλογίες των αριθμητικών δοκιμίων

Οι κατ' όγκο συγκεντρώσεις των ενδιάμεσων φάσεων (v_i) που αντιστοιχούν στις άνωθεν κατ' όγκο συγκεντρώσεις των δοκιμίων με αναφορά αυτές των ινών (v_f), έχουν βρεθεί πειραματικά και αναφέρονται {[1], σελ.412, table 1}.

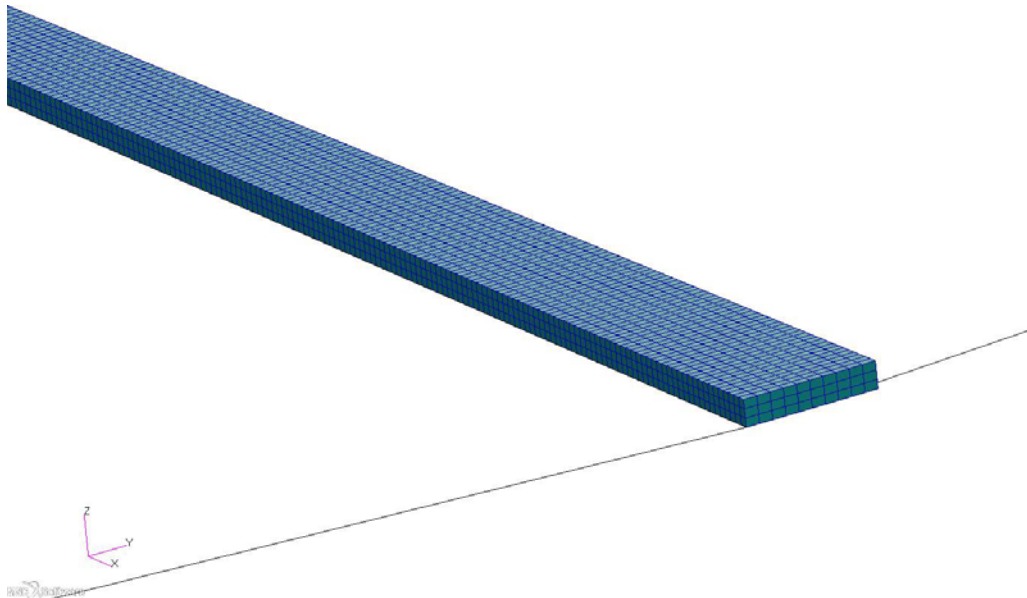
Όπως έχει προαναφερθεί, η λύση θα λάβει χώρα μόνο σε έναν τομέα του συνολικού χωρίου, λόγω του ότι το πρόβλημα παρουσιάζει αξονο-συμμετρία ως προς τη γεωμετρία και την φόρτιση. Αυτό βέβαια θα μπορούσε δυνητικά να επιφέρει αριθμητικά σφάλματα, στην περίπτωση μας όμως είναι απαραίτητο να συμβεί λόγω του υπολογιστικού μεγέθους του μοντέλου. Στο σχήμα 5.1.1 αποτυπώνονται αδρά οι κυκλικόι τομείς (υπολογιστικά χωρία) στους οποίους θα λάβει χώρα η αριθμητική λύση.



Σχήμα 5.1.2: Υπολογιστικό χωρίο (κυκλικός τομέας) και μέγεθος πλέγματος.

Κατόπιν μοντελοποίησης που έλαβε χώρα για κυκλικούς τομείς διαφορετικών γωνιών σε μια συγκεκριμένη ποσόστωση υλικών, διαπιστώθηκε ότι η γωνία του κυκλικού υπολογιστικού τομέα δεν επιφέρει αλλοίωση στα αριθμητικά αποτελέσματα και η υπολογιστική ακρίβεια διατηρείται για το πλήθος των σημαντικών ψηφίων που έχουμε επιλέξει ως αριθμητική διακριτοποίηση.

Το μέγεθος του πλέγματος έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, εστιασμένο στην περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, ώστε να θεωρεί δέκα πεπερασμένα στοιχεία κατά την ακτίνα και κατά την γωνία στην περιοχή της ενδιάμεσης φάσης και τρία στοιχεία καθ' ύψος



Σχήμα 5.1.3: Υπολογιστικό χωρίο (κυκλικός τομέας) και μέγεθος πλέγματος. Τρία στοιχεία καθ' ύψος

Τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα CHEXA8 [10, σελ. 1426], δηλ. τα κιβωτοειδή στοιχεία με γραμμική παρεμβολική συνάρτηση σχήματος. Το μοντέλο προς επίλυση έχει:

- Συνολικό αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων: 26568 και
- Συνολικό αριθμό κόμβων στην υπολογιστική κানাβο: 40285

5.2 Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L

Για την αριθμητική προσέγγιση του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας για τις συγκεντρώσεις των επιμέρους υλικών του συνθέτου όπως απεικονίζονται στο σχήμα 5.1.1, θα επιλυθούν τα χωρία του σχήματος αυτού με τις οριακές συνθήκες και τις συνθήκες φόρτισης του σχήματος 1.2.β.

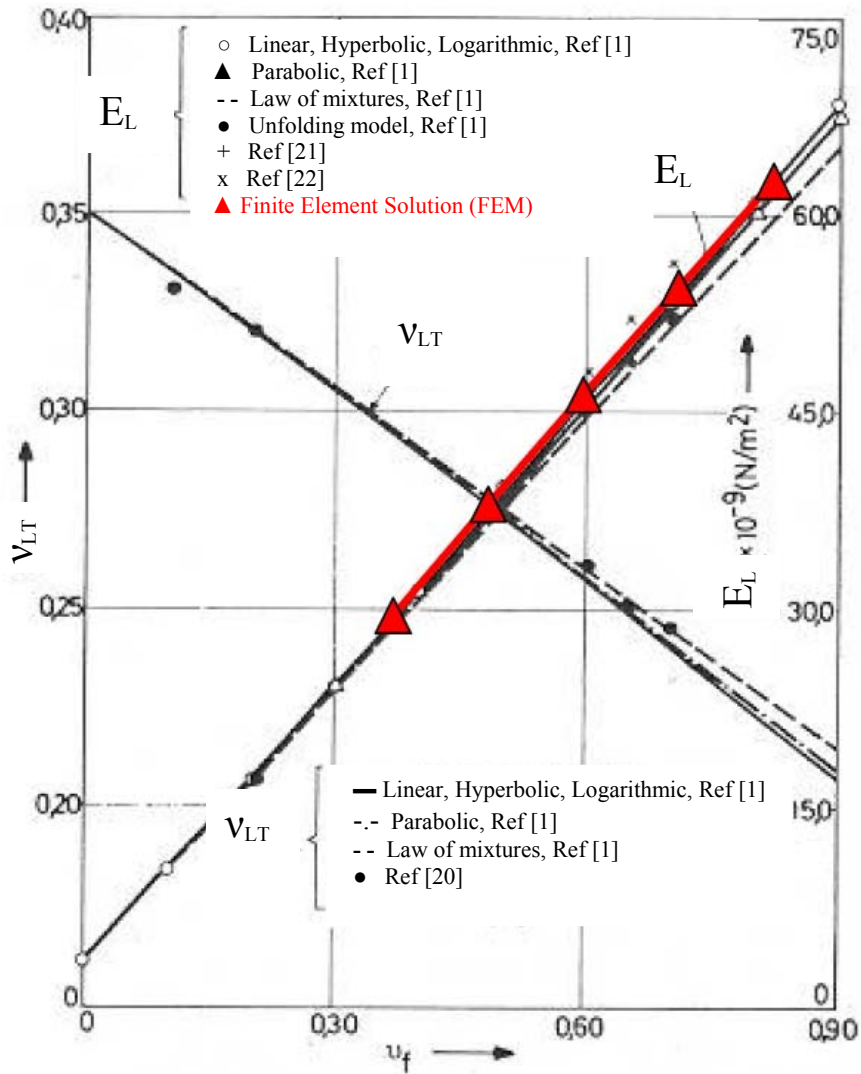
Συνοπτικά, η υπολογιστική λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία θα μας οδηγήσει στα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία συγκρίνονται με αυτά της αναλυτικής προσέγγισης της αναφοράς του παραρτήματος {[1], σελ.412, table 1}. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας αποτυπώνονται στον πίνακα Π1 του παραρτήματος.

Πίνακας 2: Συσχέτιση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων διάμηκους μέτρου ελαστικότητας, με την μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης.

ν_f	E_L FEM, (MPa)	E_L analytic, (MPa), ref [1] pg.412, Table 1, values from “linear law”	Error (%)
40%	31598	31570	0.09
50%	38816	38800	0.04
60%	46135	46110	0.06
70%	53498	53500	0.01
80%	60978	60980	0.01

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του διάμηκους μέτρου ελαστικότητας όπως αυτές προέκυψαν από την αριθμητική μέθοδο σε σχέση με τις τιμές της αναλυτικής λύσης της αναφορά [1], είναι σχεδόν ταυτόσημες .

Πολύ καλός συσχετισμός συναντάται με τις περισσότερες προσεγγίσεις για αυτό το μέγεθος, όπως αναφέρεται και στο [1].



Σχήμα 5.2: Παράσταση αριθμητικών τιμών (κόκκινο χρώμα) που προέκυψαν από την επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας (E_L), επί των προ υαρχουσών λύσεων από αναλυτικές μεθόδους, όπως αυτές αποτυπώνονται {[1], σχήμα 6, σελ 416}

5.3 Ο λόγος Poisson ν_{LT}

Για την αριθμητική προσέγγιση του λόγου Poisson ν_{LT} που συνδέει τις εγκάρσιες τροπές με τις διαμήκεις ($\nu_{LT} = \varepsilon_T / \varepsilon_L$, όπου ε_T είναι η εγκάρσια-ακτινική τροπή και ε_L είναι η διαμήκης τροπή κατά τον διαμήκη άξονα ενός κυλινδρικού δοκιμίου), θα επιλυθούν επίσης τα χωρία του σχήματος 5.1.1 ως προς τις τροπές, με τις οριακές συνθήκες και τις συνθήκες φόρτισης του σχήματος 1.2.β.

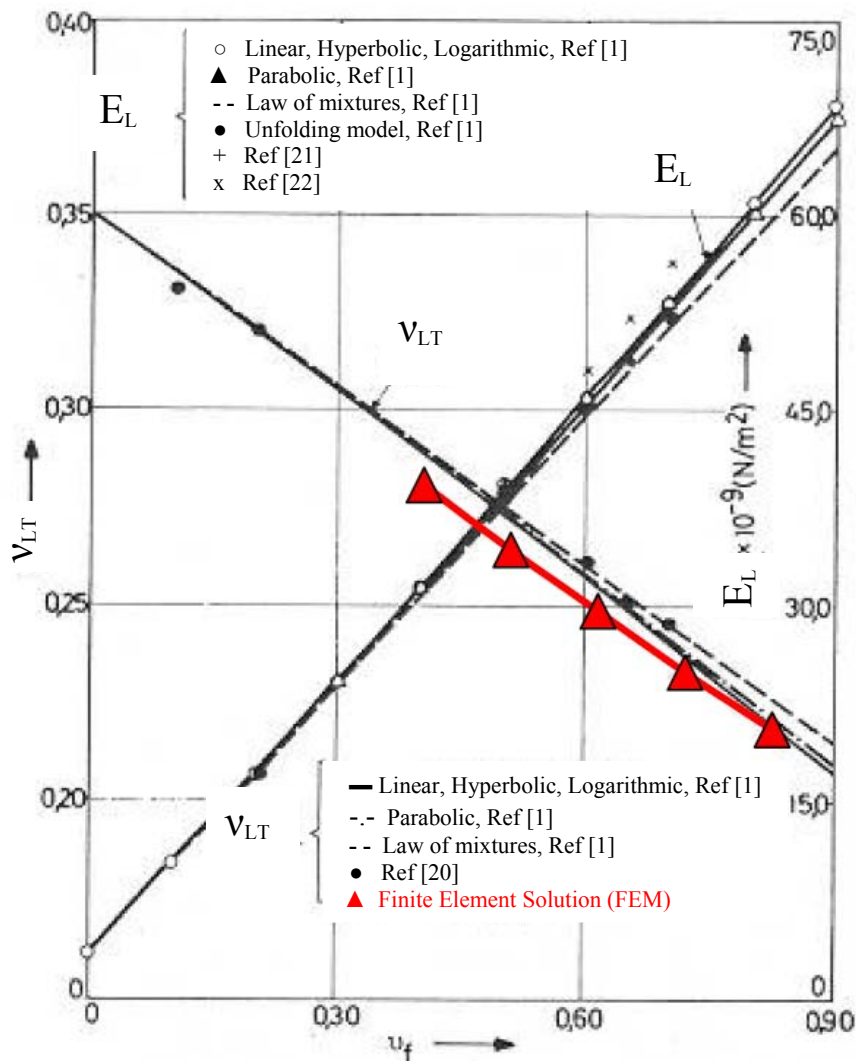
Συνοπτικά, η υπολογιστική λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία θα μας οδηγήσει στα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία συγκρίνονται με αυτά της αναλυτικής προσέγγισης της αναφοράς [1]. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του λόγου Poisson ν_{LT} αποτυπώνονται στον πίνακα Π2 του παραρτήματος.

Πίνακας 3: Συσχέτιση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων εγκάρσιου προς διάμηκους λόγου Poisson, με την μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης

ν_f	ν_{LT} FEM	ν_{LT} analytic, ref [1] pg.413, Table 2, values from “linear law”	Error (%)
40%	0.280	0.289	3.12
50%	0.264	0.273	3.30
60%	0.249	0.257	3.12
70%	0.234	0.241	2.90
80%	0.220	0.224	1.79

Εναλλακτικά και για να διασταυρώσουμε τα αποτελέσματα, μπορούμε να επιλύσουμε τα χωρία του σχήματος 5.1.1 ως προς τις τροπές, με τις οριακές συνθήκες και τις συνθήκες φόρτισης του σχήματος 1.2.γ. Από αυτήν την λύση, θα προκύψει η τάση σ_{zz} στην άνω πλευρά του χωρίου και επειδή $\sigma_{zz} = \nu_{LT} (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr})$, μπορούμε να λύσουμε ως προς ν_{LT} .

Η δεύτερη αυτή μέθοδος διαφέρει ως προς την πρώτη στο ότι η φόρτιση πλέον είναι ακτινικά και όχι παράλληλα με τον άξονα του κυλίνδρου. Η λύση αυτού του προβλήματος μας οδήγησε σε ακριβώς ίδια αποτελέσματα με αυτά που αναγράφονται στον πίνακα 3.



Σχήμα 5.3: Παράσταση αριθμητικών τιμών (κόκκινο χρώμα) που προέκυψαν από την επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για τον λόγο Poisson ν_{LT} (κόκκινο χρώμα) επί των προ υπάρχουσών λύσεων από αναλυτικές μεθόδους, όπως αυτές αποτυπώνονται στο σχήμα 6, της αναφοράς [1], σελ 416.

5.4 Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T και ο εγκάρσιος λόγος του Poisson ν_{TT}

Το σύνθετο μικρο-μηχανικό μας μοντέλο, δεν είναι από ομογενές υλικό. Παρουσιάζει όμως αξονοσυμμετρία και λόγω αυτής της ιδιαιτερότητάς του, μπορούμε να αποδώσουμε τις ακόλουθες εξισώσεις του νόμου του Hooke, με αναφορά σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στην αρχή των αξόνων των κυλίνδρων, όπως αυτές αναφέρονται {[2], σελ. 249, εξισώσεις (48), (49) & (50)}:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{zz}}{E_L} \quad (5.3.1)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{zz}}{E_L} \quad (5.3.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_L} \{ \sigma_{zz} - \nu_{LT} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \} \quad (5.3.3)$$

Η εξίσωση (5.3.3), για μηδενικές τροπές κατά την διεύθυνση z , μας υποδηλώνει το μέτρο των τάσεων που θα αναπτυχθούν στην διεύθυνση z , και πως αυτό εξαρτάται από τις άλλες δύο τάσεις και το λόγο Poisson ν_{LT} .

Για να βρούμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T , θα φορτίσουμε κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Λόγω της συμμετρίας του μοντέλου, ασκώντας μια εξωτερική πίεση P , προκύπτει:

$$P = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} \quad (5.3.4)$$

Αυτή η φόρτιση έχει σαν αποτέλεσμα να κάνει τις εξισώσεις (5.3.1) & (5.3.2), ταυτόσημες. Επομένως, για το πρόβλημά μας το οποίο έχει ουσιαστικά δύο αγνώστους, το E_T και το ν_{TT} , αλλά μία εξίσωση προς λύση, δεν μπορεί να επιλυθεί μονοσήμαντα.

Για την επίλυση του, θα πάρουμε ως δεδομένο τις τιμές του λόγου του Poisson ν_{TT} , όπως αυτές αναφέρονται στο [2]. Σε αυτό το άρθρο η ίδια διαδικασία έλαβε χώρα, δηλαδή οι συγγραφείς θεώρησαν τις τιμές του ν_{TT} ότι προκύπτουν από τον απλό νόμο των φάσεων, με την επιπρόσθετη θεώρηση ότι οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης μεταβάλλονται βάσει κάποιας συνάρτησης. Ο νόμος που ολοκληρώνει την επίδραση της ενδιάμεσης φάσης στην τιμή του λόγου του Poisson, αποτυπώνεται από τους συγγραφείς της αναφοράς [2] στην σελίδα 250, εξίσωση (60), και διατυπώνεται παρακάτω:

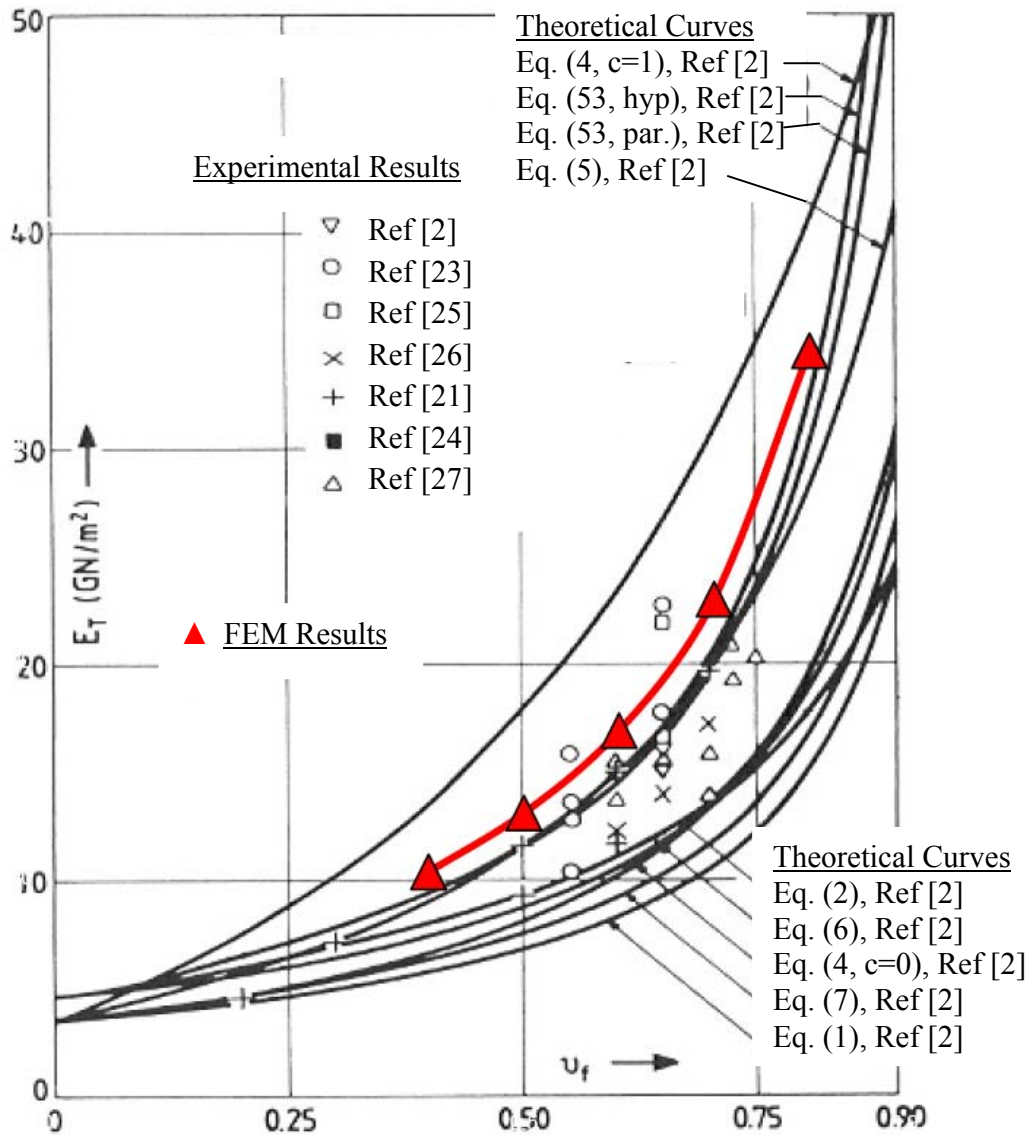
$$\frac{1}{\nu_{TT}} = \frac{\nu_f}{\nu_f} + \frac{\nu_m}{\nu_m} + \frac{2\nu_f}{r_f^2} \int_{r_f}^{r_i} r dr \nu_i(r) \quad (5.3.5)$$

Οι τιμές για το λόγο του Poisson ν_{TT} , υπάρχουν εντός της αναφοράς [2] σελ. 254, πίνακας 3, στην στήλη που περιγράφεται η γραμμική παρεμβολή. Αυτές, παρατίθενται επίσης στον πίνακα 4 του παρόντος.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα για το υπολογιζόμενο E_T όπως αυτό προκύπτει από την αριθμητική επίλυση με την βοήθεια των τιμών για το ν_{TT} από την αναφορά [2], παρατίθενται στον πίνακα 4, σε αντιδιαστολή με τις τιμές της αναλυτικής λύσης της αναφοράς [2]. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, αποτυπώνονται στον πίνακα Π3 του παραρτήματος.

Πίνακας 4: Συσχέτιση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, με την γραμμικού νόμου μεταβολής των ιδιοτήτων μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης

ν_f	ν_{TT} , ref [2], pg.254, table III, values from “linear law”	E_T FEM (MPa)	E_T analytic (MPa), ref [2], pg.252, table II, values from “linear law”	Error (%)
40%	0.268	10285	9520	8.05
50%	0.253	13008	11700	11.19
60%	0.239	16813	14930	12.62
70%	0.227	22901	20250	13.10
80%	0.216	34368	30930	11.12



Σχήμα 5.4.1: Παράσταση αριθμητικών τιμών που προέκυψαν από την επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T (κόκκινο χρώμα) επί των προϋπαρχουσών λύσεων από αναλυτικές μεθόδους καθώς και συγκρινόμενα με πειραματικά αποτελέσματα, όπως αυτές αποτυπώνονται {[2], σχ.4, σελ.253}.

Από τα αποτελέσματα του πίνακα 4, παρατηρούμε ότι το σφάλμα των πεπερασμένων στοιχείων με βάση την αναλυτική λύση, για την δική μας μοντελοποίηση μπορεί να φτάσει κοντά στο 14% ως προς την τιμή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας.

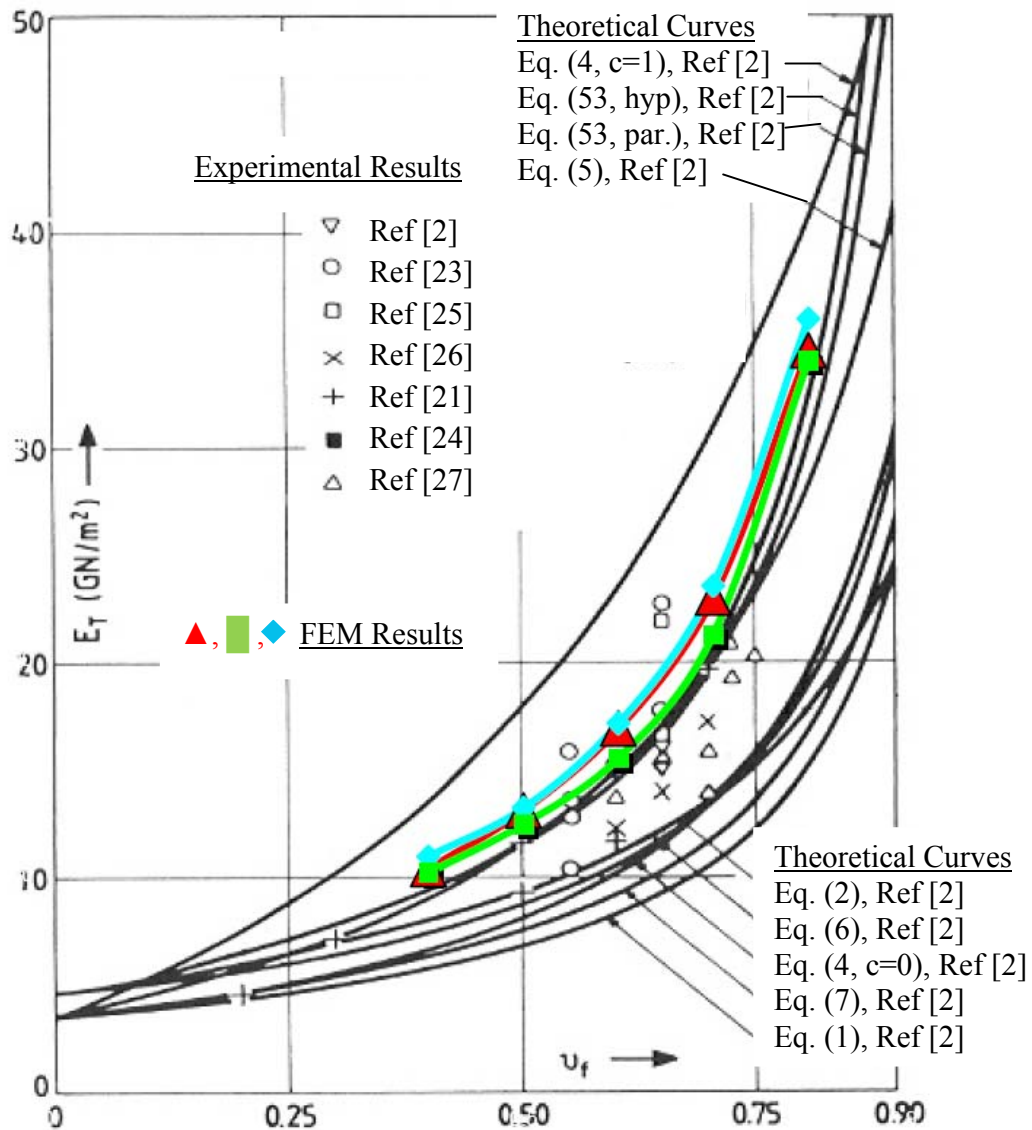
Μοντελοποιήσαμε ακόμα δύο περιπτώσεις, θεωρώντας ότι η ενδιάμεση φάση δεν υφίσταται. Στην πρώτη περίπτωση το χωρίο της ενδιάμεσης φάσης θεωρήθηκε κομμάτι της ίνας και στην δεύτερη θεωρήθηκε κομμάτι της μήτρας. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στους πίνακες 5 και 6. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των μέτρων ελαστικότητας αποτυπώνονται στους πίνακες Π4 και Π5 του παραρτήματος.

Πίνακας 5: Συσχέτιση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, θεωρώντας την ενδιάμεση φάση μέρος της ινώδους φάσεως

ν_f	ν_{TT} , ref [2], pg.254, table III, values from “linear law”	E_T FEM (MPa)	E_T analytic (MPa), ref [2], pg.252, table II, values from “linear law”	Error (%)
40%	0.268	10861	9520	14.6
50%	0.253	13125	11700	12.2
60%	0.239	17057	14930	14.3
70%	0.227	23453	20250	15.8
80%	0.216	35843	30930	15.9

Πίνακας 6: Συσχέτιση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, θεωρώντας την ενδιάμεση φάση μέρος της μήτρας

ν_f	ν_{TT} , ref [2], pg.254, table III, values from “linear law”	E_T FEM (MPa)	E_T analytic (MPa), ref [2], pg.252, table II, values from “linear law”	Error (%)
40%	0.268	10106	9520	6.2
50%	0.253	12372	11700	5.8
60%	0.239	15442	14930	3.5
70%	0.227	21161	20250	4.5
80%	0.216	33902	30930	9.6



Σχήμα 5.4.2: Παράσταση αριθμητικών τιμών που προέκυψαν από την επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T (κόκκινο χρώμα = γραμμικός νόμος, μπλε = ενδιάμεση φάση με ιδιότητες ίνας, πράσινο = ενδιάμεση φάση με ιδιότητες μήτρας) επί των προϋπαρχουσών λύσεων από αναλυτικές μεθόδους καθώς και συγκρινόμενα με πειραματικά αποτελέσματα, όπως αυτές αποτυπώνονται {[2], σχ. 4, σελ.253}.

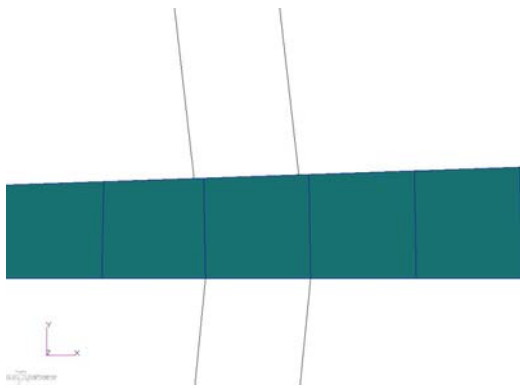
5.5 Έλεγχος επίδρασης διακριτοποίησης πεπερασμένων στοιχείων

Είναι κατανοητό ότι ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων πεπερασμένων στοιχείων για την μοντελοποίηση ενός χωρίου έχει επιπτώσεις επί των αποτελεσμάτων που εξάγονται από την επίλυση των αριθμητικών μοντέλων. Μεγαλύτερος αριθμός πεπερασμένων στοιχείων δημιουργεί μεγαλύτερη ευκρίνεια στη λύση και στις πλείστες των περιπτώσεων η πραγματική λύση προσεγγίζεται καλύτερα. Το κόστος της λύσης βέβαια αυξάνεται με το πλήθος των στοιχείων.

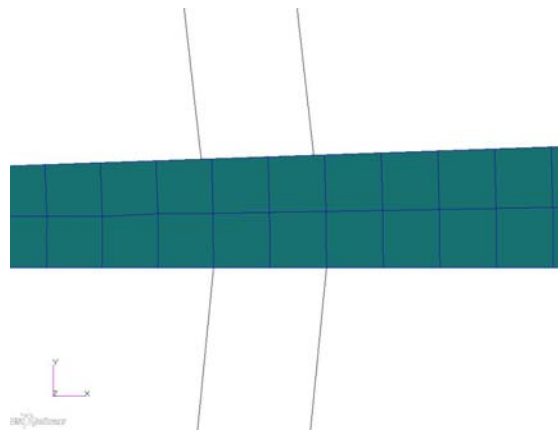
Βεβαίως, μια απεικόνιση με πιο πολλά στοιχεία μπορεί να είναι πιο πιστή και πιο ευκρινής, αλλά για το κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα, η ευκρίνεια που θα του προσδώσει μια λύση με πιο πολλά στοιχεία μπορεί να αφορά δεκαδικά ψηφία των μεγεθών προς διερεύνηση τα οποία δεν μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμα.

Ένας τρόπος για να συνάγουμε μια πιο ευκρινή αριθμητική λύση ή την πιθανή πραγματική λύση με βάση τα πεπερασμένα στοιχεία, είναι να επιλυθούν μια σειρά ομοίων προβλημάτων με διαφορετική πυκνότητα πλέγματος και να εξάγουμε εν συνεχεία συμπερασματικά την πιθανή τιμή των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν σε ένα υποθετικό πρόβλημα του οποίου το πλέγμα θα χρησιμοποιούσε πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων ή ακόμα και θεωρητικά άπειρα στοιχεία.

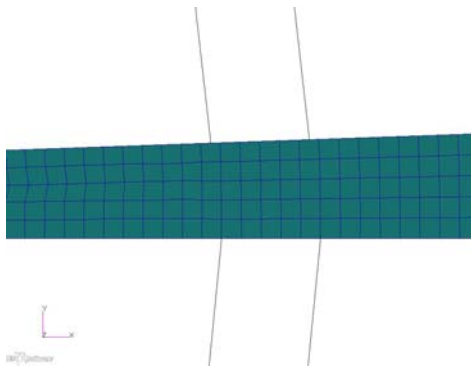
Για την επίδειξη αυτής της τεχνικής θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο μας με ποσόστωση 60%. Στον πίνακα 4 της παραγράφου 5.3, είδαμε ότι η διακριτοποίηση των 10 στοιχείων κατά την ακτίνα για την ενδιάμεση φάση, θα αποφέρει απόκλιση 12.62% από την αναλυτική λύση.



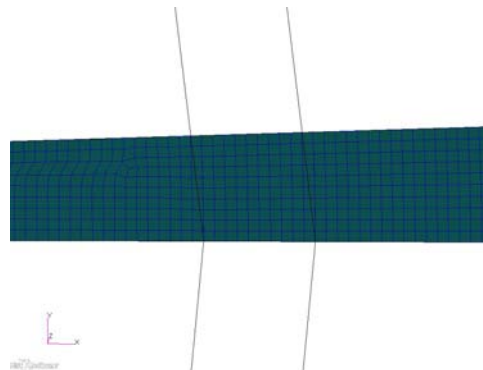
α: Ένα στοιχείο κατά ακτίνα



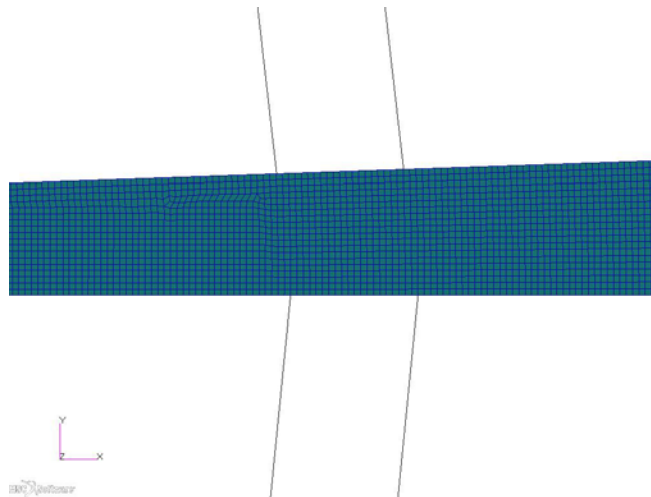
β: Δύο στοιχεία κατά την ακτίνα



γ: Πέντε στοιχεία κατά την ακτίνα

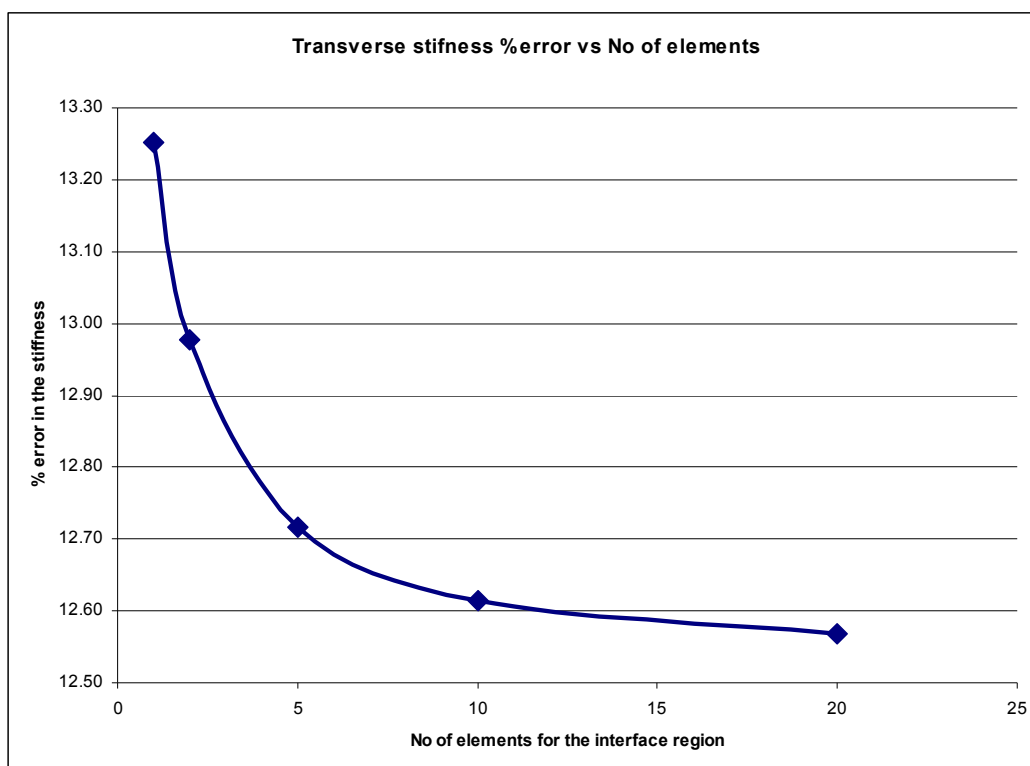


δ: Δέκα στοιχεία κατά την ακτίνα



ε: Είκοσι στοιχεία κατά την ακτίνα

Σχήμα 5.5.1: Διακριτοποίηση υπολογιστικού χωρίου με αυξανόμενο πλήθος χρησιμοποιούμενων πεπερασμένων στοιχείων στην ενδιάμεση φάση και κατ'επέκταση σε όλο το υπολογιστικό χωρίο, ίνας και μήτρας



Σχήμα 5.5.2: Διακύμανση του % σφάλματος του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας από την αναλυτική λύση, για πλέγματα με αυξανόμενο πλήθος πεπερασμένων στοιχείων

Μπορούμε να εξάγουμε συμπερασματικά από το διάγραμμα του σχήματος 5.5.2, ότι και για πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων, η αριθμητική λύση από την αναλυτική θα διατηρούσε μια διαφορά μεγαλύτερη του 10%. Επομένως δεν υπάρχει λόγος για περαιτέρω πυκνότερη διακριτοποίηση πλέγματος μιας και τα 10 στοιχεία κατά την ακτίνα που έχουμε επιλέξει, προσεγγίζουν τα όρια της αριθμητικής προσέγγισης ικανοποιητικά.

Από το σχήμα 5.5.2, συμπεραίνουμε ότι η αριθμητική λύση δεν μπορεί να προσεγγίσει ακριβώς την αναλυτική και αυτό συμβαίνει για τους εξής λόγους:

α) Στην αναλυτική λύση, ο λόγος του Poisson ν_{TT} προκύπτει προσεγγιστικά από τον τύπο (5.3.5) διότι το σύστημα των εξισώσεων του Hooke δεν έχει επιλυθεί μονοσήμαντα.

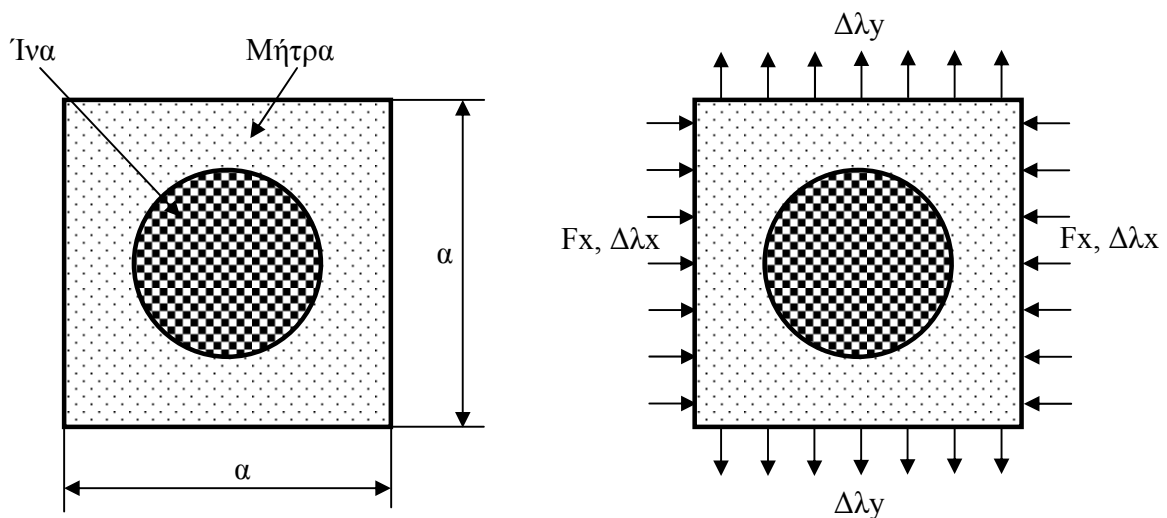
β) Στην αριθμητική λύση, υπάρχει σφάλμα στην προσέγγιση μη γραμμικών πεδίων μετατοπίσεων όπως αναφέρεται στην παράγραφο 3.8 αφενός και αφετέρου οι μεταβλητές ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης, αποτυπώνονται επί των πεπερασμένων στοιχείων κλιμακωτά και όχι συνεχώς μεταβαλλόμενα όπως αναφέρεται στην παράγραφο 4.

5.6 Αριθμητική προσέγγιση του λόγου Poisson ν_{TT}

Στην παράγραφο 5.3 του παρόντος, εξηγήσαμε γιατί στο μικρο-μηχανικό μοντέλο που έχουμε θεωρήσει, δεν μπορούμε να επιλύσουμε μονοσήμαντα ως προς τους αγνώστους, E_T και ν_{TT} . Οι συγγραφείς της αναφοράς [2] του παραρτήματος, προσέγγισαν τις τιμές του ν_{TT} βάση της κατ' όγκο σχέσης ίνας μήτρας, η οποία μονοσήμαντα εμπεριέχει την ποσόστωση της ενδιάμεσης φάσης, με τον τύπο (5.3.5) και όπως αυτός παρατίθεται στην αναφορά [2], σελ.250, εξίσωση (60).

Με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, μπορούμε να προσεγγίσουμε αριθμητικά το λόγο του Poisson, αλλάζοντας ελαφρώς την γεωμετρία του υπολογιστικού μας χωρίου.

Θα θεωρήσουμε το υπολογιστικό χωρίο της ακόλουθης μορφής:



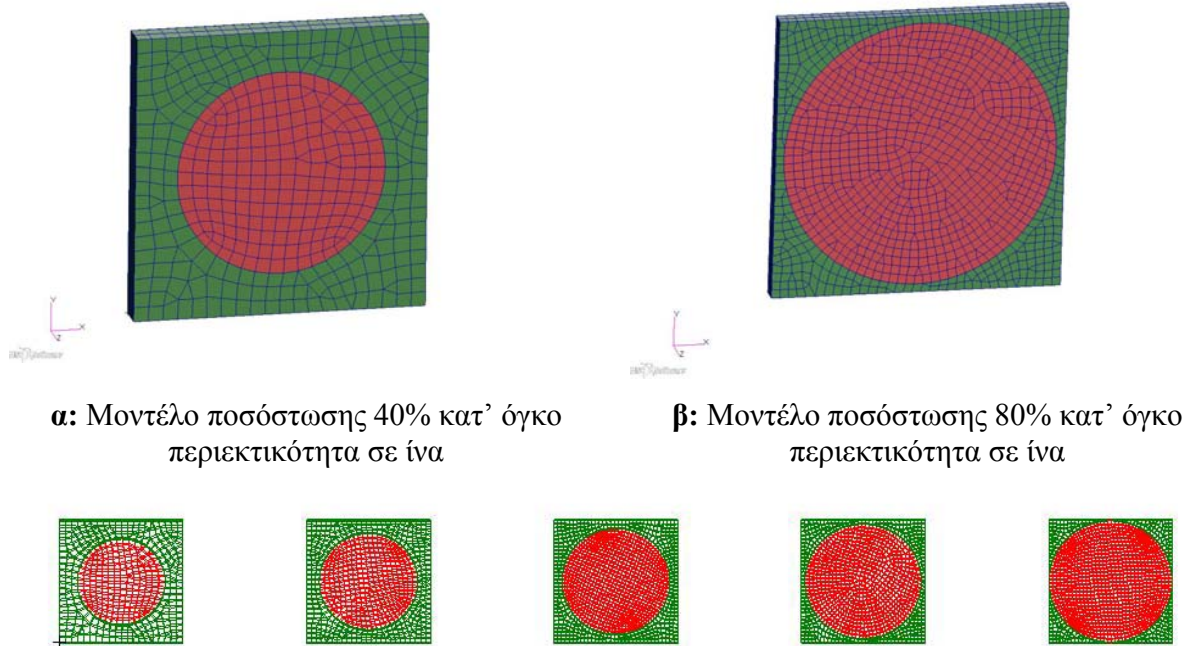
α: Ίνα και μήτρα στο μικρο μηχανικό μοντέλο **β:** Παράδειγμα φόρτισης για την εξαγωγή του

$$\nu_{TT} = - \varepsilon_y / \varepsilon_x = - \Delta\lambda_y / \Delta\lambda_x$$

Σχήμα 5.6.1: Μικρο μηχανικό μοντέλο για την αριθμητική προσέγγιση του λόγου του Poisson ν_{TT} , F_x δύναμη κατά την x διεύθυνση, $\Delta\lambda_x$ και $\Delta\lambda_y$ μεταβολές μήκους κατά την x και y διεύθυνση αντίστοιχα

Επειδή το μοντέλο αυτό δεν είναι αξονοσυμμετρικό και δεν μπορούμε να δουλέψουμε σε ένα τμήμα του μόνο, θα πρέπει να επιλυθεί ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο. Η μοντελοποίηση

της ενδιάμεσης φάσης σε αυτήν την περίπτωση δημιουργεί υπερμέγεθες υπολογιστικό μοντέλο, οπότε και θα παραληφτεί και το χωρίο της ενδιάμεσης φάσης θα αντικατασταθεί από της ιδιότητες της μήτρας. Η μοντελοποίηση θα γίνει με στοιχεία όγκου τρισδιάστατα όπως και στα προηγούμενα μοντέλα.



α: Μοντέλο ποσόστωσης 40% κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ίνα

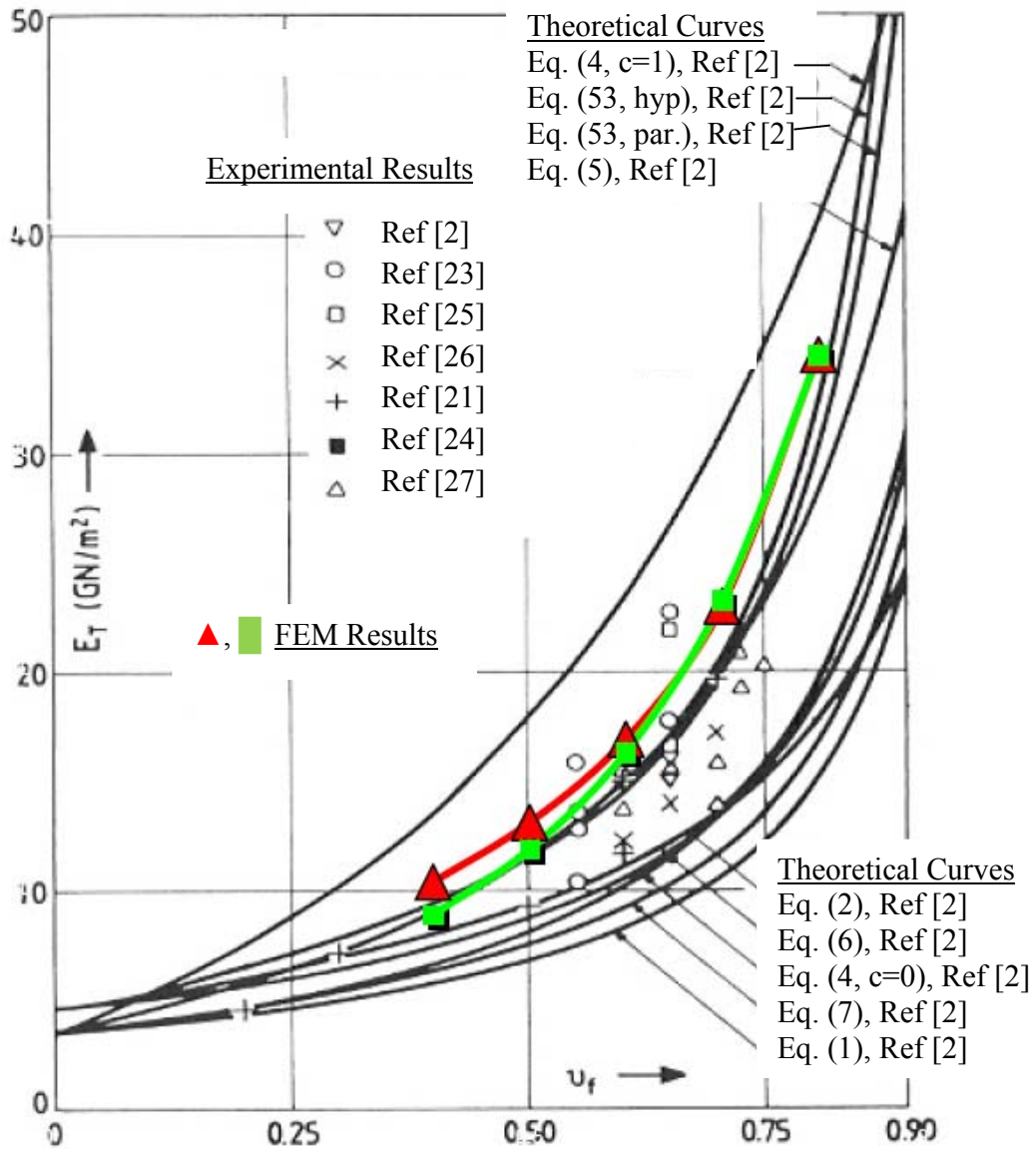
β: Μοντέλο ποσόστωσης 80% κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ίνα

γ: Τα μοντέλα των ποσοστώσεων προς επίλυση (40%, 50%, 60%, 70%,80%)

Σχήμα 5.6.2: Υπολογιστικά χωρία για την αριθμητική προσέγγιση του λόγου του Poisson ν_{TT}

Πίνακας 7: Συσχέτιση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, με την γραμμικού νόμου μεταβολής των ιδιοτήτων μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα για το λόγο Poisson ν_{TT}

u_f	ν_{TT} , FEM	E_T FEM (MPa)	E_T analytic (MPa), ref [2], pg.252, table II, values from “linear law”	Error (%)
40%	0.375	8782	9520	7.8
50%	0.323	11789	11700	0.8
60%	0.266	16217	14930	8.7
70%	0.218	23168	20250	14.5
80%	0.216	34368	30930	11.2



Σχήμα 5.6.3: Παράσταση αριθμητικών τιμών που προέκυψαν από την επίλυση πεπερασμένων στοιχείων για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T (κόκκινο χρώμα = γραμμικός νόμος, πράσινο = γραμμικός νόμος και αριθμητικά δεδομένα για το ν_{TT}) επί των προ υπάρχουσών λύσεων από αναλυτικές μεθόδους καθώς και συγκρινόμενα με πειραματικά αποτελέσματα, όπως αυτές αποτυπώνονται στην αναφορά {[2], σχ. 4, σελ.253}.

6 Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Η εργασία αυτή, συνέκρινε τις ήδη υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις και τα αποτελέσματα από πειραματικές διατάξεις με τις λύσεις που προέκυψαν από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τον τρόπο που χρησιμοποιήθηκε από τον συγγραφέα του παρόντος. Όλες οι προσεγγίσεις των ελαστοστατικών ιδιοτήτων του συνθέτου υλικού εμπεριέχουν σφάλματα, είτε λόγω θεωρήσεων για την επίτευξη κλειστής λύσης στις μεν αναλυτικές μεθόδους, είτε σε σφάλματα διενέργειας και διασποράς των αποτελεσμάτων στις πειραματικές διατάξεις. Και στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, τα σφάλματα που εμπεριέχονται επί των λύσεων αποτυπώθηκαν και αναλύθηκαν.

Η αριθμητική προσέγγιση του διάμηκου μέτρου ελαστικότητας E_L είναι αρκετά σωστή με βάση την αναλυτική λύση της αναφοράς [1], πράγμα το οποίο συμβαίνει ακόμα και με τις πιο απλές μεθόδους υπολογισμού αυτού του μεγέθους.

Η αριθμητική προσέγγιση του λόγου Poisson ν_{LT} , παρουσιάζει σφάλμα που για την δική μας μοντελοποίηση αγγίζει το 3.3%.

Ο λόγος του Poisson ν_{TT} υπολογίζεται από θεωρητικό τύπο και για την μελέτη μας λαμβάνεται από τον πίνακα της αναφοράς [2]. Επειδή το πρόβλημα μας δεν μπορεί να επιλυθεί μονοσήμαντα, όπως εξηγούμε στην παράγραφο 5.3, αυτή η αυθαίρετη επιλογή του ν_{TT} , θα επηρεάσει και τον υπολογισμό του E_T .

Για την αριθμητική προσέγγιση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T παραθέτουμε τα εξής:

- Η απόκλιση των λύσεων που δίνουν τα πεπερασμένα στοιχεία για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας σε σχέση με την αναλυτική της αναφοράς [2] μπορεί να φτάσει κοντά στο 14%. Οι αριθμητικές λύσεις παρουσιάζουν ένα μοντέλο με υψηλότερο E_T , πιο στιβαρό μέτρο ελαστικότητας
- Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι η ενδιάμεση φάση έχει τα ελαστικά χαρακτηριστικά της ίνας, το σφάλμα σε σχέση με την αναλυτική λύση της αναφοράς [2]

μπορεί να φτάσει το 16% (πιο στιβαρό) για τα δικά μας αριθμητικά μοντέλα και την δική μας διακριτοποίηση.

- Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι η ενδιάμεση φάση έχει τα ελαστικά χαρακτηριστικά της μήτρας, το σφάλμα σε σχέση με την αναλυτική λύση της αναφοράς [2] φτάνει το 10% (πιο στιβαρό) για τα δικά μας αριθμητικά μοντέλα και την δική μας διακριτοποίηση.

Η σωστή αριθμητική προσέγγιση των εγκάρσιων ιδιοτήτων αποτελούν την πρόκληση σε αυτού του είδους το πρόβλημα. Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η τιμή του E_T θα μπορούσαμε να πούμε ότι με την παραπάνω στρατηγική μοντελοποίησης, (είδη στοιχείων, μέγεθος πλέγματος, μέγεθος κυκλικού τομέα, τμηματικά σταθερές ιδιότητες για την μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης κλπ) θα μπορούσαμε να αγνοήσουμε την ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης και να την θεωρούσαμε μέρος της μήτρας. Ακόμα και με αυτό τον τρόπο θα έχουμε υπερεκτιμήσει το μέγεθος κοντά στο 10%, εξαρτώμενης της περιπτώσεως και για την δική μας στρατηγική μοντελοποίησης.

Παρόλο το γεγονός ότι το σφάλμα που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση είναι υπολογίσιμο, τα αριθμητικά μοντέλα μπορούν να μας φανούν χρήσιμα στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Στον συσχετισμό περιπτώσεων με διαφορετικές παραμέτρους. Μπορούμε να κατανοήσουμε την συμπεριφορά διαφόρων μεταβολών στα δεδομένα, συγκρίνοντας τα μεταξύ τους και όχι απαραίτητα με την πραγματική λύση, εάν αυτή υπάρχει.
- Στην μοντελοποίηση οποιαδήποτε τμηματικά σταθερή συνάρτηση για την περιγραφή της ενδιάμεσης φάσης, χωρίς αυτή να περιγράφεται απαραίτητα από μια συνάρτηση.
- Σε περιπτώσεις όπου το σφάλμα αυτής της τάξης είναι αποδεκτό

Τα αποτελέσματα των αριθμητικών λύσεων βρίσκονται εντός του εύρους των πειραματικών αποτελεσμάτων, για όσα πειραματικά αποτελέσματα υπάρχουν διαθέσιμα

Οι λόγοι για τους οποίους η αριθμητική προσέγγιση, με τα πεπερασμένα στοιχεία όπως αυτά έχουν θεωρηθεί εντός του παρόντος, του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας δεν μπορεί να ταυτιστεί με την αναλυτική λύση της αναφοράς [2] είναι οι εξής:

α) Στην αναλυτική λύση, ο λόγος του Poisson ν_{TT} προκύπτει από τον τύπο (5.3.5) διότι το σύστημα των εξισώσεων του Hooke δεν έχει επιλυθεί μονοσήμαντα οπότε και αποτελεί μια προσέγγιση του μεγέθους βασισμένη σε μια αυτόνομη θεώρηση

β) Στην αριθμητική λύση, υπάρχει σφάλμα στην προσέγγιση μη γραμμικών πεδίων μετατοπίσεων όπως αναφέρεται στην παράγραφο 3.8 αφενός και αφετέρου οι μεταβλητές ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης, αποτυπώνονται επί των πεπερασμένων στοιχείων κλιμακωτά και όχι συνεχώς μεταβαλλόμενα όπως αναφέρεται στην παράγραφο 4.

Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση επί της εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση στατικών μικρο μηχανικών μοντέλων είναι:

A) Η δημιουργία ενός 'ιδιαίτερου' στοιχείου, το οποίο μακροσκοπικά θα συμπεριφέρεται σαν ένα τμήμα της μεσοφάσης, δηλαδή θα ενταφιάσει την μη γραμμική μεταβολή των ιδιοτήτων του εντός των συναρτήσεων σχήματος του.

B) Την προσπάθεια μοντελοποίησης του προβλήματος με αξονο-συμμετρικά στοιχεία.

Γ) Την συμπεριφορά παρόμοιων μοντέλων σε δυναμική ανάλυση και διερεύνηση των ελαστο-δυναμικών ιδιοτήτων του συνθέτου υλικού.

Παράρτημα

Πίνακας Π.1

% Fiber content	Change in radius (dr)	Change in height (dz)	Actual radius (r)	Actual height (h)	Radial strain calculated ($e_r = dr/r$)	Longitudinal strain calculated ($e_z = dz/z$)	Stress	Calculated (EL)
40%	-0,0002291730	0,00000378192	158,1139	0,73	-0,0000014494	0,0000051807	0,163702330	31598,421
50%	-0,0001620460	0,00000390727	141,4214	0,90	-0,0000011458	0,0000043414	0,168517037	38816,19
60%	-0,0001196190	0,00000372569	129,0994	1,00	-0,0000009266	0,0000037257	0,171887603	46135,777
70%	-0,0000873469	0,00000405877	119,5529	1,30	-0,0000007306	0,0000031221	0,167028864	53498,356
80%	-0,0000684974	0,00000403680	111,8034	1,45	-0,0000006127	0,0000027840	0,169765413	60978,956

Πίνακας Π.2

% Fiber content	Change in radius (dr)	Change in height (dz)	Actual radius (r)	Actual height (h)	Radial strain calculated ($e_r = dr/r$)	Longitudinal strain calculated ($e_z = dz/z$)	Calculated (vL)
40%	-0,0002291730	0,00000378192	158,1139	0,73	-0,0000014494	0,0000051807	0,27977179
50%	-0,0001620460	0,00000390727	141,4214	0,90	-0,0000011458	0,0000043414	0,263932134
60%	-0,0001196190	0,00000372569	129,0994	1,00	-0,0000009266	0,0000037257	0,248696245
70%	-0,0000873469	0,00000405877	119,5529	1,30	-0,0000007306	0,0000031221	0,23401101
80%	-0,0000684974	0,00000403680	111,8034	1,45	-0,0000006127	0,0000027840	0,220064427

Πίνακας Π.3

% Fiber content	Change in radius (dr)	Change in height (dz)	Actual radius (r)	Actual height (h)	Radial strain calculated ($e_r = dr/r$)	Longitudinal strain calculated ($e_z = dz/z$)	(VTT)	Calculated (ET)
40%	-0,0112525000	0,0000129268	158,1139	0,73	-0,0000711671	0,0000177079	0,268000000	10285,6587
50%	-0,0081209210	0,0000122391	141,4214	0,90	-0,0000574236	0,0000135990	0,253000000	13008,5967
60%	-0,0058432490	0,0000107811	129,0994	1,00	-0,0000452616	0,0000107811	0,239000000	16813,359
70%	-0,0040353490	0,0000137053	119,5529	1,30	-0,0000337537	0,0000105425	0,227000000	22901,2142
80%	-0,0025503950	0,0000104657	111,8034	1,45	-0,0000228114	0,0000072177	0,216000000	34368,7412

Πίνακας Π.4

% Fiber content	Change in radius (dr)	Change in height (dz)	Actual radius (r)	Actual height (h)	Radial strain calculated ($\epsilon_r = dr/r$)	Longitudinal strain calculated ($\epsilon_z = dz/z$)	(VTT)	Calculated (ET)
40%	-0,0106270000	0,0000125894	158,1139	0,73	-0,0000672110	0,0000172458	0,268000000	10891,0675
50%	-0,0080484600	0,0000118170	141,4214	0,90	-0,0000569112	0,0000131300	0,253000000	13125,7142
60%	-0,0057596100	0,0000103044	129,0994	1,00	-0,0000446138	0,0000103044	0,239000000	17057,5166
70%	-0,0039403600	0,0000107517	119,5529	1,30	-0,0000329591	0,0000082705	0,227000000	23453,2864
80%	-0,0024454600	0,0000097828	111,8034	1,45	-0,0000218729	0,0000067468	0,216000000	35843,5082

Πίνακας Π.5

% Fiber content	Change in radius (dr)	Change in height (dz)	Actual radius (r)	Actual height (h)	Radial strain calculated ($\epsilon_r = dr/r$)	Longitudinal strain calculated ($\epsilon_z = dz/z$)	(VTT)	Calculated (ET)
40%	-0,0114517000	0,0000132816	158,1139	0,73	-0,0000724269	0,0000181940	0,268000000	10106,7418
50%	-0,0085387000	0,0000126826	141,4214	0,90	-0,0000603777	0,0000140918	0,253000000	12372,1159
60%	-0,0063621000	0,0000112818	129,0994	1,00	-0,0000492806	0,0000112818	0,239000000	15442,1721
70%	-0,0046514600	0,0000120140	119,5529	1,30	-0,0000389071	0,0000092415	0,227000000	19867,8247
80%	-0,0025854600	0,0000111750	111,8034	1,45	-0,0000231251	0,0000077069	0,216000000	33902,6191

Αναφορές

- [1] P.S. Theocharis, E.P. Sideridis, G.C. Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus and Poisson’s Ratio of Fiber Composites”, Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol.4 (1985)
- [2] E.P. Sideridis, “The Transverse Elastic Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concepts of Interface”, Journal of Applied Polymer Science, Vol.48, 243-255 (1993)
- [3] P.S. Theocharis, G. Spathis, E.P. Sideridis, “Elastic and Viscoelastic Properties of Fibre Reinforced Composite Materials”, Journal of Fibre Science and Technology, Vol.17, 169-181 (1982)
- [4] G.C. Papanicolaou, N.K. Anifantis, L.K. Keppas, TH.V. Kosmidou, “Stress analysis of short fiber reinforced polymers incorporating a hybrid interphase region”, Journal of Composite Interfaces, Vol.14, 131-152 (2007)
- [5] S.A. Hayes, R. Lane, F.R. Jones, “Fibre/matrix stress transfer through a discrete interphase. Part 1: Single fibre model composites”, Journal of Composites, Part A, Vol.32, 379-389 (2001)
- [6] Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, “Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών”, Εκδόσεις Συμμετρία, 2003
- [7] Martin H.Sadd, “Elasticity. Theory, Applications and Numerics”, 2e, Academic Press, 2009
- [8] PATRAN, User’s Guide, MSC Software Corporation
- [9] NASTRAN, Getting Started User’s Guide, MSC Software Corporation
- [10] NASTRAN, Quick Reference Guide, MSC Software Corporation
- [11] NASTRAN, Linear Static User’s Guide, MSC Software Corporation

- [12] NASTRAN, Reference Manual, MSC Software Corporation
- [13] Γ.Ι. Τσαμασφύρος & Ε.Ε. Θεοτόκογλου, “Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων Ι & ΙΙ”, εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, 2005
- [14] Daryl L. Logan, “A First Course in the Finite Element Method”, 4e, Thomson Canada Ltd, 2007
- [15] O.O.Ochoa & J.N.Reddy, “Finite Element Analysis of Composite Laminates”, Kluwer Academic Publishers, 1992
- [16] Robert D. Cook, “Finite Element Modeling for Stress Analysis”, John Wiley & Sons 1995
- [17] Isaac M. Daniel & Ori Ishai, “Engineering Mechanics of Composite Materials”, Oxford University Press, 1994
- [18] Γ. Τσαμασφύρος & Γ. Καντεράκης, “Ειδικά Κεφάλαια Συνθέτων Υλικών”, ΕΜΠ 2004
- [19] R. Jones, “Mechanics of Composite Materials”, 2e, Taylor & Francis, 1999
- [20] Theocharis, P.S., Papanikolaou, G.C., and Sideridis, E.P., Jnl. of Reinforced Plastics and Composites, Vol.1, p.92 (1982)
- [21] Sih,G.C, Hilton, P.D., Badaliane, R., Schenberger, P.S., and Villareal, G., Fracture Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521, pp. 98-132 (1973)
- [22] Whitney, J.M., and Riley, M.B., AIAA Journal, 4(9), p.1537 (1966)
- [23] L.B. Greszczuk, Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites, SPI 21st Conference, Chicago, IL, Sect. 5-B 1966
- [24] R.M. Ogorkiewicz, J. Mech Eng. Sci., 15(2), 102 (1973)
- [25] R.M. Ogorkiewicz and G.W. Weidmann, Composites, 11, 242 (1974)
- [26] P.C. Theocharis and G.C. Papanikolaou, Colloid and Polym. Sci., 258, 1044 (1980)

[27] S.W. Tsai, NASA CR-71, (1964)