



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

---

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Αξιολόγηση πειραματικών μετρήσεων προς  
προσδιορισμό χαρακτηριστικών τιμών και  
επιμέρους συντελεστών ασφαλείας σύμφωνα με  
τον Ευρωκώδικα 0

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεοδώρα Α. Μούκα

Επιβλέπων: Ιωάννης Βάγιας

Συνεπιβλέπων: Ξενοφών Λιγνός

Αθήνα, Μάιος 2014

ΕΜΚ ΔΕ 2014/10

Μούκα Θ. Α. (2014).  
Αξιολόγηση πειραματικών μετρήσεων προς προσδιορισμό χαρακτηριστικών τιμών και  
επιμέρους συντελεστών ασφαλείας σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 0  
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2014/10  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Mouka T. A. (2014).  
Evaluation of experimental data for the assessment of characteristic values and partial  
safety factors according to Eurocode 0  
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2014/10  
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece





# Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη .....	3
Abstract .....	4
Ευχαριστίες .....	5
1 Εισαγωγή .....	7
2 Βασικά στοιχεία Στατιστικής και Πιθανοτικής Θεωρίας .....	9
2.1 Εισαγωγή .....	9
2.2 Πληθυσμός, δείγμα και μεταβλητές .....	9
2.3 Χαρακτηριστικά δείγματος .....	9
2.3.1 Αριθμητικός μέσος .....	10
2.3.2 Διασπορά .....	10
2.3.3 Τυπική απόκλιση .....	11
2.3.4 Συντελεστής μεταβλητότητας ή διασποράς .....	11
2.4 Κατανομές συχνότητων .....	12
2.4.1 Η έννοια της συχνότητας .....	12
2.4.2 Η έννοια της σχετικής συχνότητας .....	12
2.4.3 Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνότητων και σχετικών συχνότητων .....	12
2.4.4 Αθροιστική κατανομή συχνότητων .....	13
2.5 Συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας .....	14
2.5.1 Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (ή συνάρτηση κατανομής) .....	14
2.5.2 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) .....	16
2.6 Συνήθεις θεωρητικές κατανομές .....	17
2.6.1 Κανονική κατανομή .....	17
2.6.2 Λογαριθμοκανονική κατανομή .....	20
2.6.3 Κατανομή t του Student .....	21
2.7 Εκτίμηση ποσοστημορίων .....	23
2.7.1 Εκτίμηση ποσοστημορίων με τη μέθοδο πρόβλεψης .....	24
2.7.2 Εκτίμηση ποσοστημορίων με τη μέθοδο του Bayes .....	25
3 Βασικές αρχές σχεδιασμού .....	27
3.1 Εισαγωγή .....	27
3.2 Δράσεις .....	28
3.2.1 Μόνιμες δράσεις (G) .....	29
3.2.2 Μεταβλητές δράσεις (Q) .....	30
3.3 Ιδιότητες υλικών .....	31
3.4 Επιμέρους συντελεστές ασφαλείας και τιμές σχεδιασμού .....	32
3.4.1 Τιμές σχεδιασμού δράσεων και αποτελεσμάτων τους .....	32
3.4.2 Τιμές σχεδιασμού ιδιοτήτων υλικών .....	34
3.5 Συμπεράσματα .....	35
4 Ποσοτική εκτίμηση της αξιοπιστίας στις κατασκευές .....	37
4.1 Εισαγωγή .....	37
4.2 Κατηγορίες επιπτώσεων .....	37
4.3 Συνάρτηση οριακής κατάστασης .....	38
4.4 Συντελεστής αξιοπιστίας $\beta$ .....	39
4.4.1 Επιλογή κατάλληλου δείκτη αξιοπιστίας $\beta$ ανάλογα με την περίοδο αναφοράς .....	41
4.5 Σημείο σχεδιασμού P .....	44
4.6 Παράγοντες ευαισθησίας $\alpha_R$ και $\alpha_E$ .....	46
4.7 Σχόλια .....	48

4.8	Παράδειγμα .....	49
4.8.1	Καθορισμός κατηγορίας αξιοπιστίας .....	49
4.8.2	Επιλογή δείκτη αξιοπιστίας $\beta$ .....	49
4.8.3	Προσδιορισμός παραγόντων ευαισθησίας $\alpha$ .....	50
4.8.4	Υπολογισμός τιμών σχεδιασμού .....	50
4.8.1	Υπολογισμός πιθανότητας αστοχίας .....	51
4.8.2	Παρατήρηση.....	51
5	Αξιοποίηση πειραματικών δεδομένων .....	52
5.1	Εισαγωγή.....	52
5.2	Υπολογισμός της χαρακτηριστικής τιμής $X_k$ .....	52
5.2.1	Κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές $X$ .....	52
5.2.2	Λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες μεταβλητές $X$ .....	54
5.3	Υπολογισμός της τιμής σχεδιασμού $X_d$ .....	55
5.4	Παρατηρήσεις για τη διαδικασία υπολογισμού των $X_k$ και $X_d$ .....	56
5.5	Προσδιορισμός των επιμέρους συντελεστών ασφαλείας $\gamma_m$ και $\gamma_M$ .....	57
5.5.1	Επιμέρους συντελεστής ασφαλείας $\gamma_m$ .....	57
5.5.2	Επιμέρους συντελεστής ασφαλείας $\gamma_M$ .....	58
5.5.3	Σημείωση.....	59
5.6	Παράδειγμα εφαρμογής.....	59
5.6.1	Κανονική κατανομή .....	59
5.6.2	Λογαριθμοκανονική κατανομή .....	61
5.7	Συμπεράσματα.....	63
6	Παρατηρήσεις και συμπεράσματα.....	64
6.1	Παρατηρήσεις.....	64
6.2	Συμπεράσματα.....	68
7	Βιβλιογραφία.....	70
Παράρτημα Α. Πίνακας από υπολογιστικό φύλλο EXCEL για τον προσδιορισμό παραμέτρων υλικών από πειραματικά δεδομένα .....		72
Παράρτημα Β. Πίνακες κατανομών .....		74

**Αξιολόγηση πειραματικών μετρήσεων προς προσδιορισμό  
χαρακτηριστικών τιμών και επιμέρους συντελεστών ασφαλείας σύμφωνα  
με τον Ευρωκώδικα 0**

Μούκα Θ. Α. (Επιβλέπων: Βάγιας Ι., Συνεπιβλέπων: Λιγνός Ξ.)

**Περίληψη**

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, όπως για παράδειγμα τα διάφορα φορτία που καταπονούν τις κατασκευές ή οι ιδιότητες των οικοδομικών υλικών, δεν έχουν μία σταθερή τιμή αλλά παρουσιάζουν μία τυχαία διασπορά. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την πιθανότητα ανθρώπινου σφάλματος, δημιουργούν πολλές αβεβαιότητες. Τις αβεβαιότητες αυτές καλούμαστε να καλύψουμε χρησιμοποιώντας στατιστικές και πιθανοτικές μεθόδους, ακολουθώντας την εξής μεθοδολογία, σύμφωνα και με το πρότυπο EN1990:2002, γνωστό και ως Ευρωκώδικας 0:

Θεσπίζουμε αρχικά ένα επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας για κάθε κατασκευή, το οποίο ανταποκρίνεται σε μία συγκεκριμένη θεωρητική πιθανότητα αστοχίας μέσα σε κάποια δεδομένη περίοδο αναφοράς. Αστοχία θεωρούμε ότι επέρχεται εάν τα αποτελέσματα των δράσεων που καταπονούν την κατασκευή προκύψουν μεγαλύτερα από την αντίσταση της κατασκευής. Για να προσδιοριστούν οι τιμές των δράσεων και των αντιστάσεων, θεωρούμε για την κάθε μεταβλητή μία συγκεκριμένη θεωρητική στατιστική κατανομή που την αντιπροσωπεύει. Στη συνέχεια, με βάση το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας και τις στατιστικές παραμέτρους της μεταβλητής, υπολογίζουμε την χαρακτηριστική τιμή της, τον επιμέρους συντελεστή ασφαλείας και την τιμή σχεδιασμού της, δηλαδή τις παραμέτρους που θα χρησιμοποιήσει ένας μηχανικός κατά το σχεδιασμό μιας κατασκευής.

Με μία ενδελεχή ανάγνωση του κανονισμού διαπιστώνουμε πως ο τελευταίος εμπεριέχει αρκετές ασάφειες όσον αφορά το πώς προκύπτουν στατιστικά οι διάφορες παράμετροι. Οι ασάφειες αυτές επισημαίνονται και επιχειρείται να διευκρινιστούν.

Η διπλωματική εργασία καταλήγει σε σύνταξη υπολογιστικού φύλλου EXCEL για τον υπολογισμό των παραμέτρων των μεταβλητών. Μετά από σύγκριση των αποτελεσμάτων προσδιορισμού χαρακτηριστικών τιμών και συντελεστών ασφαλείας για αντοχές υλικών με θεώρηση είτε κανονικής κατανομής είτε λογαριθμοκανονικής κατανομής, καταλήγουμε πως με χρήση λογαριθμοκανονικής κατανομής προκύπτει συνήθως μεγαλύτερη αντοχή και άρα πιο ευμενή αποτελέσματα.

**Evaluation of experimental data for the assessment of characteristic values and partial safety factors according to Eurocode 0**

Mouka T. A. (supervised by Vayas I. and Lignos X.)

**Abstract**

The variables used in civil engineering, such as loads imposed on a structure or properties of construction materials, aren't constant, but occur with some random dispersion. This fact, along with the fact that there is a considerable probability of human error, leads to many uncertainties. We try to account for these uncertainties by using statistical and probabilistic methods, employing the following methodology according to the EN 1990:2002 Standard, also known as Eurocode 0:

First of all, we set a target reliability level for each structure, which corresponds to a certain theoretical probability of failure in a given reference period. Failure is considered to have occurred, if the effects of the actions imposed on the structure happen to be greater than the resistance of the structure. In order to define values of loads and resistances, we consider for each variable a certain theoretical statistical distribution. After that, we calculate the relevant characteristic value, partial safety factor and design value (and thus the parameters to be used in structural design by an engineer), based on the target reliability level and the statistical parameters of the variable.

A more thorough reading of Eurocode 0 reveals that it contains many ambiguities regarding the statistical determination of the design parameters. We point out these ambiguities and attempt to clarify them.

The thesis results to the creation of an EXCEL spreadsheet for the calculation of variable parameters. After a comparison of normal and lognormal distribution for the determination of resistance parameters, we conclude that, with the use of lognormal distribution, we usually obtain greater resistance values than with the use of normal distribution and thus more favorable results.



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Βάγια και τον κύριο Λιγνό για την πολύτιμη βοήθειά τους και το χρόνο που μου αφιέρωσαν. Επίσης, ευχαριστώ την Αγγελική, την Άρτεμη, το Γιώργο, την Ιωάννα, τη Μάχη, το Μίλτο και το Νίκο για τη βοήθειά τους και την ψυχολογική υποστήριξη κατά τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας.



# 1 Εισαγωγή

Ως γνωστόν, η Ευρωπαϊκή Ένωση αποτελείται από πολλά κράτη-μέλη, καθένα από τα οποία έχει δική του νομοθεσία και δικούς του τεχνικούς κανονισμούς. Έτσι, προέκυψε η ανάγκη δημιουργίας ενιαίων κανονισμών, ώστε πλέον ο τομέας των κατασκευών να αντιμετωπίζεται το ίδιο σε όλες τις χώρες-μέλη, με ενιαίους κανονισμούς ώστε να διευκολυνθεί η μεταξύ τους επικοινωνία όσον αφορά τεχνικά ζητήματα και το εμπόριο το σχετικό με τις κατασκευές. Το συγκεκριμένο εγχείρημα διήρκησε πολλά χρόνια, αλλά τελικά έγινε πραγματικότητα με τη σύνταξη των Ευρωκωδίκων από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή Τυποποίησης (Comité Européen de Normalisation-CEN). Οι Ευρωκώδικες αποτελούν 10 Ευρωπαϊκά Πρότυπα (Euro norms-EN) με διαφορετική θεματολογία το καθένα:

1. EN 1990 Eurocode: Βάσεις σχεδιασμού
2. EN 1991 Eurocode 1: Δράσεις επί των κατασκευών
3. EN 1992 Eurocode 2: Σχεδιασμός κατασκευών από σκυρόδεμα
4. EN 1993 Eurocode 3: Σχεδιασμός κατασκευών από χάλυβα
5. EN 1994 Eurocode 4: Σχεδιασμός σύμμικτων κατασκευών από χάλυβα και σκυρόδεμα
6. EN 1995 Eurocode 5: Σχεδιασμός ξύλινων κατασκευών
7. EN 1996 Eurocode 6: Σχεδιασμός κατασκευών από τοιχοποιία
8. EN 1997 Eurocode 7: Γεωτεχνικός σχεδιασμός
9. EN 1998 Eurocode 8: Αντισεισμικός σχεδιασμός
10. EN 1999 Eurocode 9: Σχεδιασμός κατασκευών από αλουμίνιο

Τα παραπάνω πρότυπα έχουν υποχρεωτική εφαρμογή σε όλες τις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης. [12], [14]

Ο Ευρωκώδικας 0 (EN1990, [12]), ο οποίος είναι και αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας, αποτελεί τη βάση των υπόλοιπων Ευρωκωδίκων μιας και καθιερώνει τις αρχές σχεδιασμού των κατασκευών. Πιο συγκεκριμένα, καθιερώνει απαιτήσεις ασφάλειας, λειτουργικότητας και ανθεκτικότητας και δίνει κάποιες οδηγίες για την επίτευξη συγκεκριμένης αξιοπιστίας [12], [14]. Γενικά, παρέχει το θεωρητικό υπόβαθρο για τις οριακές καταστάσεις αστοχίας και λειτουργικότητας, τους συνδυασμούς δράσεων, τις χαρακτηριστικές τιμές καθώς επίσης και τις τιμές σχεδιασμού των δράσεων και των αποτελεσμάτων τους, των ιδιοτήτων των υλικών, των γεωμετρικών δεδομένων και γενικά όλων των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση και το σχεδιασμό μιας κατασκευής. Επίσης, παρέχει οδηγίες για την εξαγωγή παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν στο σχεδιασμό (π.χ. χαρακτηριστικών τιμών υλικών) από πειραματικά αποτελέσματα, για την περίπτωση που αυτό κριθεί σκόπιμο. Τέτοια περίπτωση θα μπορούσε να είναι για παράδειγμα κάποιο καινούργιο υλικό για το οποίο δεν υπάρχουν επαρκή δεδομένα, όπως π.χ. κάποιο ινοπλισμένο πολυμερές (frp-fibre reinforced polymer).

Τα παραπάνω τεκμηριώνονται με βάση την πιθανοτική θεωρία με σκοπό τελικά το σχεδιασμό κατασκευών οι οποίες «κατά τη διάρκεια ζωής για την οποία σχεδιάστηκαν, με κατάλληλο βαθμό αξιοπιστίας και με οικονομικό τρόπο

1. θα αντέξουν όλες τις δράσεις και τις επιρροές που είναι πιθανό να προκύψουν κατά τη διάρκεια της κατασκευής τους και της χρήσεις τους και
2. θα εκπληρώσουν τις δεδομένες απαιτήσεις λειτουργικότητας μίας κατασκευής ή δομικού στοιχείου» [12, 2.1 (1)P]

Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως, σύμφωνα και με τους Denton and Gulvanessian (2010) [13], εκφράσεις του EN1990 [12] όπως η παραπάνω είναι αρκετά αόριστες και πολλές φορές δεν παρέχονται σαφείς οδηγίες για το πώς θα επιτευχθούν. Αυτό θα μπορούσε να κάνει δύσκολη τη μεμονωμένη χρήση του EN1990 [12], γι' αυτό και συνιστάται ο τελευταίος να εφαρμόζεται σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα κείμενα των Ευρωκωδίκων.

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στην αξιοποίηση πειραματικών δεδομένων σύμφωνα με το κείμενο του Ευρωκώδικα 0 (EN1990) [12], ώστε να υπολογιστούν χαρακτηριστικές τιμές αντοχής (αντίστασης) υλικών και οι αντίστοιχοι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας, από όπου θα προκύψουν οι τελικές τιμές σχεδιασμού της αντίστασης. Για να επιτευχθεί αυτό αναπτύσσεται αρχικά το στατιστικό υπόβαθρο που θα χρησιμοποιηθεί και εν συνεχεία η φιλοσοφία σχεδιασμού που περιγράφεται στο EN1990 [12]. Κατόπιν, αποσαφηνίζεται η έννοια της αξιοπιστίας που αναφέρεται στο EN1990 [12] και το πώς αυτή υπεισέρχεται στο σχεδιασμό των κατασκευών. Στο τελευταίο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία με την οποία, αξιοποιώντας αποτελέσματα δοκιμών αντοχής, μπορούμε να υπολογίσουμε τις χαρακτηριστικές τιμές και τους συντελεστές ασφαλείας των ιδιοτήτων του υπό εξέταση υλικού, έτσι ώστε αυτές να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο σχεδιασμό έργων για την κατασκευή των οποίων χρησιμοποιείται το εν λόγω υλικό. Αυτές οι τιμές προφανώς προκύπτουν με βάση τις απαιτήσεις ασφαλείας και τη φιλοσοφία σχεδιασμού του EN1990 που αφορούν τις ιδιότητες υλικών και έχουν περιγραφεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Στο Παράρτημα Α παρατίθεται πίνακας από το συνημμένο υπολογιστικό φύλλο EXCEL, με το οποίο μπορούν να γίνουν οι υπολογισμοί της παραπάνω μεθοδολογίας.

## 2 Βασικά στοιχεία Στατιστικής και Πιθανοτικής Θεωρίας

### 2.1 Εισαγωγή

Η επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της ασφάλειας στις κατασκευές και κατά συνέπεια υπεισέρχονται σε όλα τα έργα Πολιτικού Μηχανικού οι έννοιες της αξιοπιστίας και της πιθανότητας αστοχίας. Οι μεταβλητές από τις οποίες εξαρτώνται αυτές οι έννοιες (π.χ. ιδιότητες υλικών, φορτία) φυσικά δεν είναι σταθερές, αλλά έχουν μία διακύμανση μιας και εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες. Αυτό προφανώς δυσχεραίνει την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός έργου. Σ' αυτό το σημείο η Στατιστική και οι Πιθανότητες γίνονται απαραίτητα εργαλεία, αφού μας επιτρέπουν την «ποσοτικοποίηση» της ασφάλειας μέσω μιας πιθανότητας αστοχίας. Γι' αυτόν το λόγο λοιπόν, στοιχεία Στατιστικής και Πιθανοτικής Θεωρίας υπάρχουν σε πολλά διεθνή πρότυπα και κανονισμούς (όπως π.χ. ο [12]) καθώς επίσης και σε επεξηγηματικά-συμπληρωματικά κείμενα κανονισμών (π.χ. [22] έως [28], [20]) και σχετικά βιβλία (π.χ. [16]). Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παράθεση βασικών εννοιών και μεθόδων Στατιστικής και Πιθανοτήτων, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

### 2.2 Πληθυσμός, δείγμα και μεταβλητές

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των κατασκευών (π.χ. ιδιότητες υλικών, φορτία) θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές. Τυχαία μεταβλητή είναι μια μεταβλητή η οποία θεωρητικά μπορεί να πάρει μία οποιοδήποτε τιμή από ένα ορισμένο σύνολο τιμών. Εάν μπορεί να λάβει μία οποιαδήποτε τιμή μεταξύ δύο ορισμένων τιμών ονομάζεται συνεχής μεταβλητή, διαφορετικά ονομάζεται διακριτή μεταβλητή [10], [26]. Παράδειγμα διακριτής μεταβλητής είναι ο αριθμός που θα φέρουμε εάν ρίξουμε ένα ζάρι, ο οποίος μπορεί να λάβει τις πολύ συγκεκριμένες τιμές 1, 2, 3, 4, 5 ή 6. Παράδειγμα συνεχούς μεταβλητής είναι η αντοχή του δομικού χάλυβα, η οποία μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε κάποια όρια. Συνήθως οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό είναι συνεχείς μεταβλητές [26].

Κατά κανόνα υπάρχει περιορισμένος αριθμός παρατηρήσεων της τιμής μιας μεταβλητής ή είναι ανώφελο να λάβουμε παρατηρήσεις για όλα τα στοιχεία στα οποία εξετάζουμε τη συγκεκριμένη ιδιότητα που αντιπροσωπεύει αυτή η μεταβλητή. Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε την αντοχή για το σύνολο του σκυροδέματος που παράγεται υπό συγκεκριμένες προδιαγραφές στη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε ένα μικρό μέρος του συνόλου, από το οποίο εξάγουμε συμπεράσματα για το σύνολο. Αυτό το σύνολο ονομάζεται πληθυσμός, ενώ το τμήμα του πληθυσμού από το οποίο παίρνουμε παρατηρήσεις ονομάζεται δείγμα [10], [26].

### 2.3 Χαρακτηριστικά δείγματος

Για την περιγραφή των ιδιοτήτων ενός δείγματος μπορούν να εκτιμηθούν διάφορες παράμετροι, εκ των οποίων θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής:

1. αριθμητικός μέσος ( $m$ )
2. διασπορά ( $s^2$ )
3. τυπική απόκλιση ( $s$ )
4. συντελεστής μεταβλητότητας ή διασποράς ( $V$ )

Οι παράμετροι αυτές του δείγματος αποτελούν εκτιμήτριες των αντίστοιχων παραμέτρων του πληθυσμού, δηλαδή με βάση τις παραμέτρους του δείγματος μπορούμε να εκτιμήσουμε τις αντίστοιχες παραμέτρους του πληθυσμού. Γενικά, οι αυτές οι παράμετροι του δείγματος συχνά θεωρούνται, με την αποδοχή κάποιου σφάλματος, ιδιότητες του πληθυσμού από τον οποίο έχει παρθεί το δείγμα. [10], [26]

### 2.3.1 Αριθμητικός μέσος

Ο αριθμητικός μέσος (ή απλά μέσος ή μέση τιμή),  $m$ , ενός δείγματος ορίζεται ως εξής:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

όπου  $n$  το σύνολο των τιμών του δείγματος (δηλαδή το μέγεθος του δείγματος) και  $x_i$  οι τιμές της μεταβλητής  $X$  του δείγματος. Όταν αναφερόμαστε στο μέσο ενός πληθυσμού χρησιμοποιούμε το ελληνικό γράμμα  $\mu$  αντί του  $m$  που χρησιμοποιούμε για το δείγμα. [10], [26]

### 2.3.2 Διασπορά

Ο όρος διασπορά (ή διακύμανση) υποδηλώνει το βαθμό στον οποίο οι τιμές μιας μεταβλητής διασπείρονται γύρω από την κεντρική της τιμή [10]. Η διασπορά ( $s^2$ ) εκφράζεται ως εξής:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n-1}, \quad (2.2)$$

όπου  $n$  το σύνολο των τιμών του δείγματος (δηλαδή το μέγεθος του δείγματος),  $x_i$  οι τιμές της μεταβλητής  $X$  του δείγματος και  $m$  η μέση τιμή του δείγματος. [10], [26]

Χρησιμοποιούμε στον παρονομαστή τον παράγοντα  $n-1$  αντί του  $n$  επειδή η τιμή που προκύπτει χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του δείγματος αντιπροσωπεύει καλύτερα τη διασπορά του πληθυσμού. Εάν είχαμε παρατηρήσεις από ολόκληρο τον πληθυσμό και όχι από ένα δείγμα του, τότε η ακριβής εκτίμηση της διασποράς θα γινόταν με χρήση τις τιμές  $x_i$  και  $\mu$  του πληθυσμού και παρονομαστή το μέγεθος  $n$  του πληθυσμού και όχι τον παράγοντα  $n-1$ . Επίσης, όταν αναφερόμαστε στη διασπορά ενός πληθυσμού χρησιμοποιούμε το ελληνικό γράμμα  $\sigma^2$  αντί του  $s^2$ . Άρα:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}, \quad (2.3)$$

όπου  $\mu$  ο μέσος (ή μέση τιμή) του πληθυσμού. Η διασπορά αποτελεί το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης ( $s$ ) (δείτε παράγραφο 2.3.3). [10], [26]

### 2.3.3 Τυπική απόκλιση

Η τυπική απόκλιση  $s$  ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ή, όπως αναφέρεται στο [6] «η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγώνου των αποκλίσεων από τη μέση τιμή»:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n-1}} = \sqrt{s^2} \quad (2.4)$$

όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος,  $x_i$  οι τιμές της μεταβλητής  $X$  του δείγματος και  $m$  η μέση τιμή του δείγματος. [10], [26]

Ομοίως με τη διασπορά, ο παράγοντας  $n-1$  του παρονομαστή χρησιμοποιείται αντί του  $n$  στην περίπτωση που εξετάζουμε μόνο ένα δείγμα του πληθυσμού και όχι ολόκληρο τον πληθυσμό, επειδή η προκύπτουσα τιμή είναι πιο κοντά στην τυπική απόκλιση του πληθυσμού. Για την τυπική απόκλιση του πληθυσμού χρησιμοποιείται το ελληνικό γράμμα  $\sigma$  αντί του  $s$ . Δηλαδή:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}} = \sqrt{\sigma^2}, \quad (2.5)$$

όπου  $\mu$  η μέση τιμή του πληθυσμού και  $n$  το μέγεθος του δείγματος. [10], [26]

### 2.3.4 Συντελεστής μεταβλητότητας ή διασποράς

Ο συντελεστής μεταβλητότητας ή διασποράς ( $V$ ) αποτελεί μέτρο σχετικής διασποράς και εκφράζεται ως το πηλίκο της τυπικής απόκλισης διά τον αριθμητικό μέσο [10], [26]:

$$V = \frac{s}{m} \text{ για δείγμα και} \quad (2.6)$$

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \text{ για πληθυσμό.} \quad (2.7)$$

Με άλλα λόγια, ο συντελεστής μεταβλητότητας μας δείχνει το πόσο μεγάλη είναι η διασπορά του δείγματος ή του πληθυσμού σε σχέση με τη μέση τιμή.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης της τυχαίας μεταβλητής, πράγμα που τον καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμο μέγεθος στη σύγκριση μεταβλητών με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Το βασικό του μειονέκτημα είναι πως δεν αποτελεί ιδιαίτερα χρήσιμο μέγεθος για μικρές τιμές του  $m$  και ιδιαίτερα όταν αυτός πλησιάζει το 0 [10]. Ο M. Holický (2005) στο [26] συστήνει για την περίπτωση που ο μέσος είναι πολύ μικρότερος από την τυπική απόκλιση να προτιμάται η τυπική απόκλιση από το συντελεστή μεταβλητότητας σαν μέτρο διασποράς.

## 2.4 Κατανομές συχνοτήτων

### 2.4.1 Η έννοια της συχνότητας

Συχνά ομαδοποιούμε το σύνολο των παρατηρήσεων σε ορισμένο αριθμό υποκατηγοριών, οι οποίες ονομάζονται τάξεις ή κλάσεις. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε πραγματοποιήσει αρκετές δοκιμές θλίψης σκυροδέματος. Μπορούμε να ορίσουμε διαστήματα, σε καθένα από τα οποία εμπίπτουν κάποιες από τις παρατηρήσεις (π.χ. αντοχή σκυροδέματος σε θλίψη από 0 έως 10MPa, από 10 έως 20MPa, από 20 έως 30MPa κ.ο.κ.). Αυτά τα διαστήματα είναι οι κλάσεις. Προφανώς θα πρέπει να ορίσουμε έτσι τις κλάσεις ώστε κάθε παρατήρηση να εμπίπτει σε κάποια κλάση.

Ο αριθμός των παρατηρήσεων που εμπίπτουν στην κάθε κλάση ονομάζεται συχνότητα ( $f$ ) της κλάσης. Αυτή η κατηγοριοποίηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση που έχουμε μεγάλο όγκο δεδομένων, οπότε και ο ορισμός υποκατηγοριών βοηθάει στο να έχουμε καλύτερη εποπτεία. Φυσικά αυτό έχει νόημα μόνο στην περίπτωση συνεχών μεταβλητών [5]. Για μικρό μέγεθος δείγματος η ομαδοποίηση των δεδομένων δεν έχει νόημα και συνεπώς δεν έχει ιδιαίτερο νόημα και η έννοια της συχνότητας.

Ομοίως ορίζεται και η συχνότητα για μεμονωμένες τιμές μιας μεταβλητής, δηλαδή πόσες φορές παρουσιάζεται κάθε τιμή στο δείγμα [10].

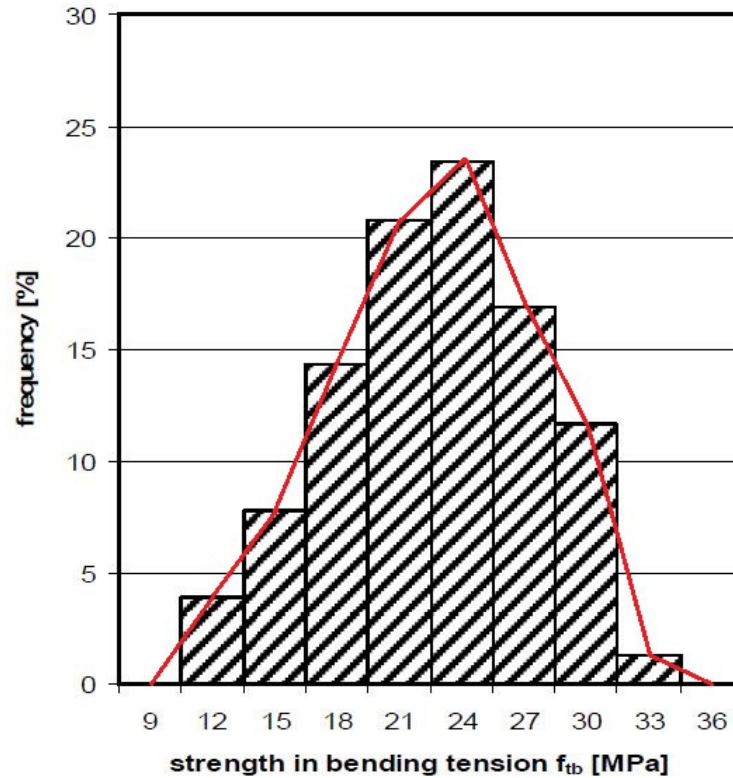
### 2.4.2 Η έννοια της σχετικής συχνότητας

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι και η έννοια της σχετικής συχνότητας ( $p$ ), η οποία ορίζεται ως το πηλίκο της συχνότητας διά το συνολικό άθροισμα των συχνοτήτων (το οποίο ταυτίζεται με το μέγεθος του δείγματος). Δηλαδή  $p=f/n$  [6]. Η σχετική συχνότητα συνήθως ορίζεται σε ποσοστό επί τοις εκατό (%) και, στην περίπτωση πολύ μεγάλων δειγμάτων, ταυτίζεται με την πιθανότητα της μεταβλητής να πάρει τη συγκεκριμένη τιμή. Αποδεικνύεται ότι το συνολικό άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 1 ή 100% [10].

### 2.4.3 Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

Στην περίπτωση που έχουμε διαστήματα κλάσεων χρησιμοποιούμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων για τη γραφική απεικόνιση των κατανομών συχνοτήτων. Ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων αποτελείται από μία σειρά εφαπτόμενων παραλληλογράμμων τα οποία έχουν βάση έναν οριζόντιο άξονα, πλάτος ανάλογο με το διάστημα της αντίστοιχης κλάσης και εμβαδό ανάλογο με το με τη συχνότητα (ή σχετική συχνότητα αντίστοιχα) της κλάσης αυτής. Το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων προκύπτει ως η τεθλασμένη γραμμή που ενώνει τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του ιστογράμματος [5], [10]. Ένα παράδειγμα ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων και του αντίστοιχου πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων που προέκυψε από δοκιμές για την τάση αντοχής σε κάμψη ινοπλισμένου σκυροδέματος με την επίβλεψη της Μ. Καρμαζίνová [21] φαίνεται στο σχήμα 2.1.





Σχήμα 2.1: Παράδειγμα ιστογράμματος και πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων [21]

#### 2.4.4 Αθροιστική κατανομή συχνοτήτων

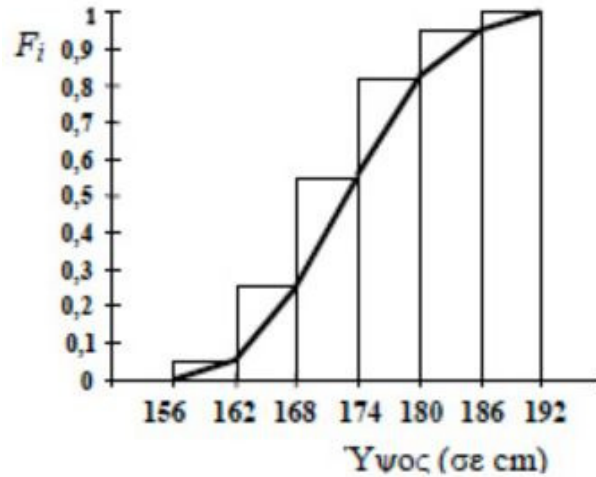
Ο όρος αθροιστική συχνότητα ( $F_i$ ) υποδηλώνει το άθροισμα των συχνοτήτων των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ , των οποίων η τιμή είναι μικρότερη ή ίση από μία τιμή  $x_i$ . Στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων αντίστοιχα, αθροιστική συχνότητα  $F_i$  είναι το άθροισμα των συχνοτήτων των παρατηρήσεων των οποίων η τιμή είναι μικρότερη από το άνω όριο μιας κλάσης. [5], [10] Δηλαδή:

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j, \text{ όπου } x_j \leq x_i \text{ για } j \leq i \quad [6] \quad (2.8)$$

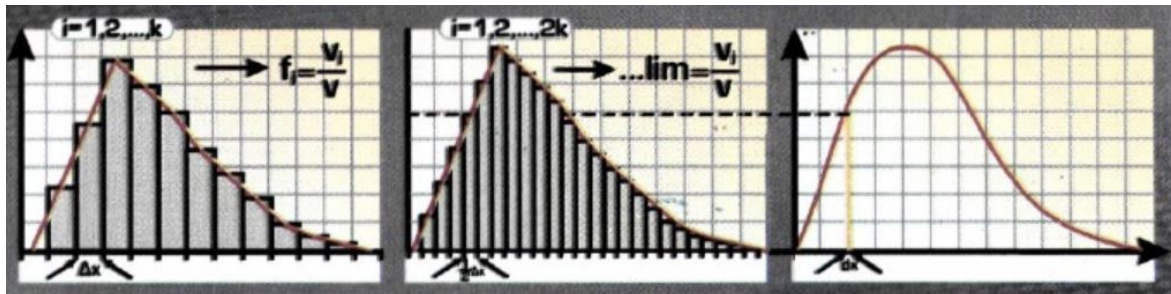
Εντελώς ανάλογα ορίζεται η αθροιστική σχετική συχνότητα  $P_i$  ως το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερο από μία ορισμένη τιμή  $x_i$ :

$$P_i = \sum_{j=1}^i p_j, \text{ όπου } x_j \leq x_i \text{ για } j \leq i \quad [6] \quad (2.9)$$

Οι αθροιστικές συχνότητες και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες μπορούν να παρασταθούν, ομοίως με τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες, σε διαγράμματα με οριζόντιο άξονα τις τιμές της μεταβλητής  $X$  και κατακόρυφο άξονα τις αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες ή σχετικές αθροιστικές συχνότητες. Παράδειγμα τέτοιου διαγράμματος που έχει προκύψει από δείγμα υψών μαθητών Λυκείου φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα ιστογράμματος και πολυγώνου σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων [1]



Σχήμα 2.3: Από ιστογράμματα συχνοτήτων σε καμπύλη συχνοτήτων [4]

## 2.5 Συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας

Όταν έχουμε πολύ μεγάλα δείγματα ή μικρό μέγεθος κλάσεων τα πολύγωνα (σχετικών) συχνοτήτων και αθροιστικών (σχετικών) συχνοτήτων τείνουν σε καμπύλες, οι οποίες ονομάζονται καμπύλες (σχετικής) συχνότητας και καμπύλες αθροιστικής (σχετικής) συχνότητας αντίστοιχα. Οι ίδιες καμπύλες μπορούν να προσεγγιστούν και στην περίπτωση μικρότερων δειγμάτων με την εξομάλυνση των αντίστοιχων πολυγώνων [10].

### 2.5.1 Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (ή συνάρτηση κατανομής)

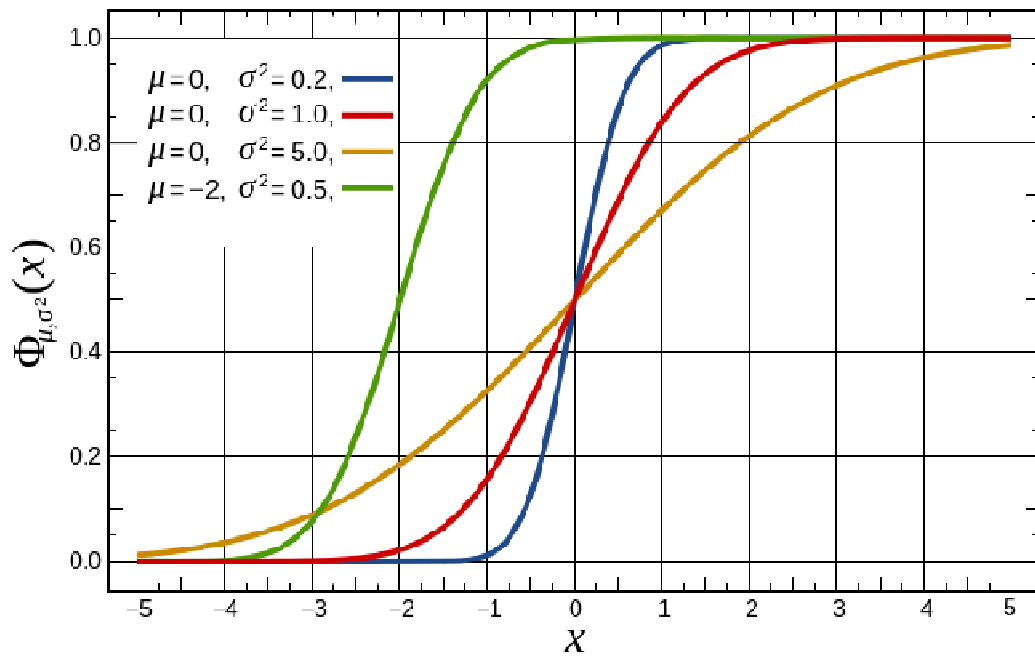
Η καμπύλη αθροιστικής συχνότητας αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής  $\Phi(x)$  της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , η οποία δίνει την πιθανότητα η μεταβλητή αυτή να λάβει τιμή μικρότερη ή ίση μίας τιμής  $x$ . Άρα:

$$\Phi(x) = P(X \leq x) \quad [26] \quad (2.10)$$

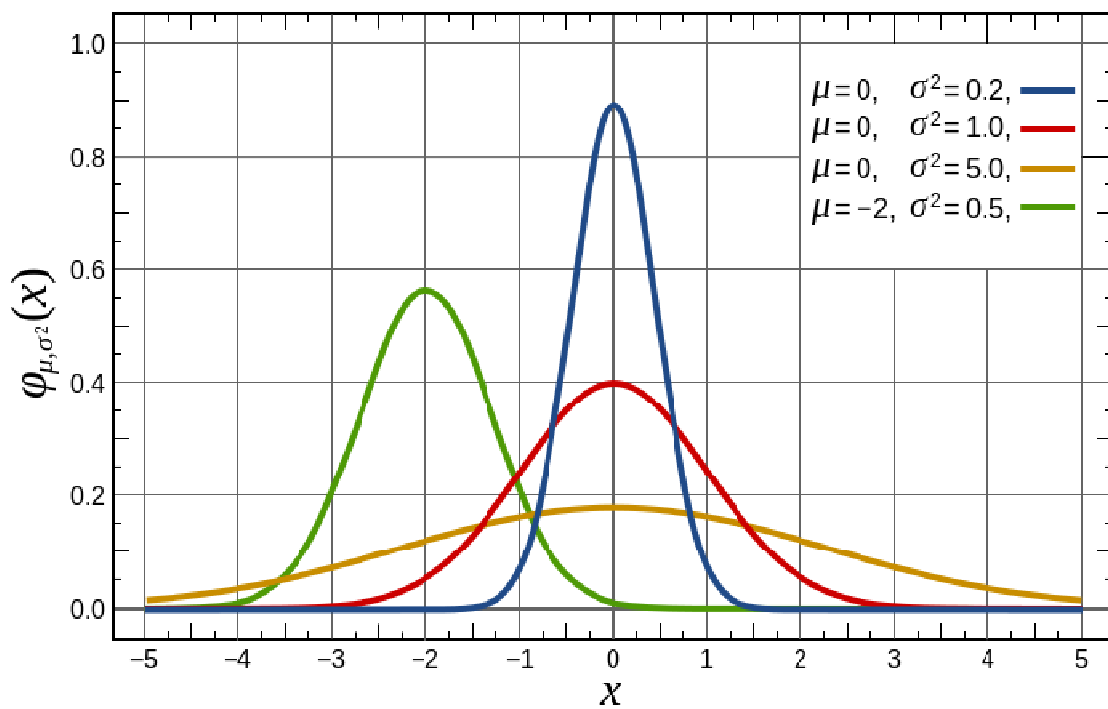
Προφανώς αφού μιλάμε για πιθανότητα ισχύει:

$$0 \leq \Phi(x) \leq 1 \quad [1] \quad (2.11)$$

Τυπικές καμπύλες συνάρτησης κανονικής αθροιστικής κατανομής (δείτε και παρ. 2.6.1) για διάφορες παραμέτρους απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα 2.4:



Σχήμα 2.4: Καμπύλες συνάρτησης αθροιστικής κατανομής [31]



Σχήμα 2.5: Καμπύλες συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής [31]

## 2.5.2 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

Η καμπύλη σχετικής συχνότητας αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας  $\phi(x)$  της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , η οποία ορίζεται ως η παράγωγος της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής  $\Phi(x)$  (όταν υπάρχει):

$$\phi(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx} \quad [5], [26] \quad (2.12)$$

Ισχύουν οι σχέσεις [2]:

$$0 \leq \int_{-\infty}^x \phi(x)dx = \Phi(x) \leq 1 \quad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1, \quad (2.14)$$

δηλαδή το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από τη σ.π.π. ισούται με 1 [2], [26]

$$\int_{-\infty}^{x_1} \phi(x)dx = P(x \leq x_1) = \Phi(x_1) \quad (2.15)$$

$$\int_a^b \phi(x)dx = P(a \leq x \leq b) \quad (2.16)$$

Τυπικές καμπύλες συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής (δείτε και παρ. 2.6.1) φαίνονται στο σχήμα 2.5.

### 2.5.2.1 Παράμετροι πληθυσμού

Μέσω της σ.π.π. ορίζονται οι παράμετροι του πληθυσμού, κατ' αντιστοιχία με τις παραμέτρους του δείγματος [2], [26]:

Μέσος ή μέση τιμή  $\mu$  (αντιστοιχεί στην τετμημένη του κέντρου βάρους της επιφάνειας που περικλείεται από τη σ.π.π.):

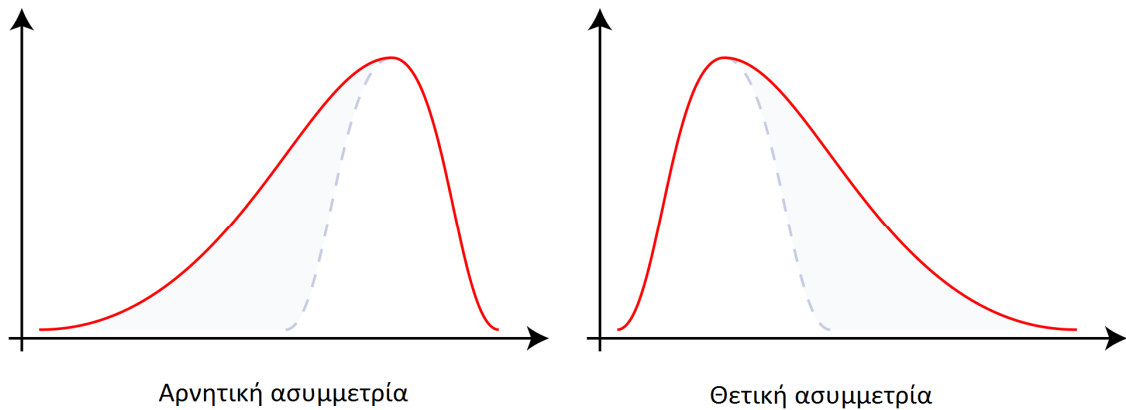
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx \quad (2.17)$$

Διασπορά  $\sigma^2$  (αντιστοιχεί στη ροπή αδράνειας της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της σ.π.π. και τον οριζόντιο άξονα ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \phi(x)dx \quad (2.18)$$

Τυπική απόκλιση  $\sigma$  (αντιστοιχεί στη ακτίνα αδρανείας της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης και τον οριζόντιο άξονα ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα):

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \phi(x)dx} \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.6: Ασυμμετρία κατανομής [32]

Συντελεστής μεταβλητότητας  $V$ :

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.20)$$

Συντελεστής ασυμμετρίας ή λόξωσης  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 \phi(x) dx}{\sigma^3} \quad (2.21)$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας δείχνει την απόκλιση από τη συμμετρία μιας καμπύλης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Αν η καμπύλη έχει μεγαλύτερη «ουρά» προς τα δεξιά, τότε  $\omega > 0$  (θετική ή δεξιά ασυμμετρία), ενώ αν έχει μεγαλύτερη ουρά προς τα αριστερά τότε  $\omega < 0$  (αρνητική ή αριστερή ασυμμετρία) [10], [26] (Σχ. 2.6).

## 2.6 Συνήθεις θεωρητικές κατανομές

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, με την εξομάλυνση της καμπύλης αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων μίας τυχαίας μεταβλητής  $X$  προκύπτει η καμπύλη κατανομής της μεταβλητής, η οποία αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής  $\Phi(x)$  της  $X$ . Οι ιδιότητες αυτής της συνάρτησης όμως, οι οποίες προκύπτουν από τις εμπειρικές παρατηρήσεις της μεταβλητής (εμπειρική κατανομή) γενικά δεν είναι γνωστές. Για να εξάγουμε λοιπόν συμπεράσματα για τους νόμους των πιθανοτήτων που διέπουν την τυχαία μεταβλητή προσαρμόζουμε την εμπειρική της κατανομή σε κάποια θεωρητική κατανομή, της οποίας οι ιδιότητες είναι γνωστές [5]. Παρακάτω δίδονται τα χαρακτηριστικά ορισμένων γνωστών κατανομών συνεχών μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

### 2.6.1 Κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή (ή κατανομή Gauss-Laplace) αποτελεί την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη κατανομή. Είναι συμμετρική και ορίζεται σε άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Το άπειρο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μειονέκτημα σε κάποιες πρακτικές

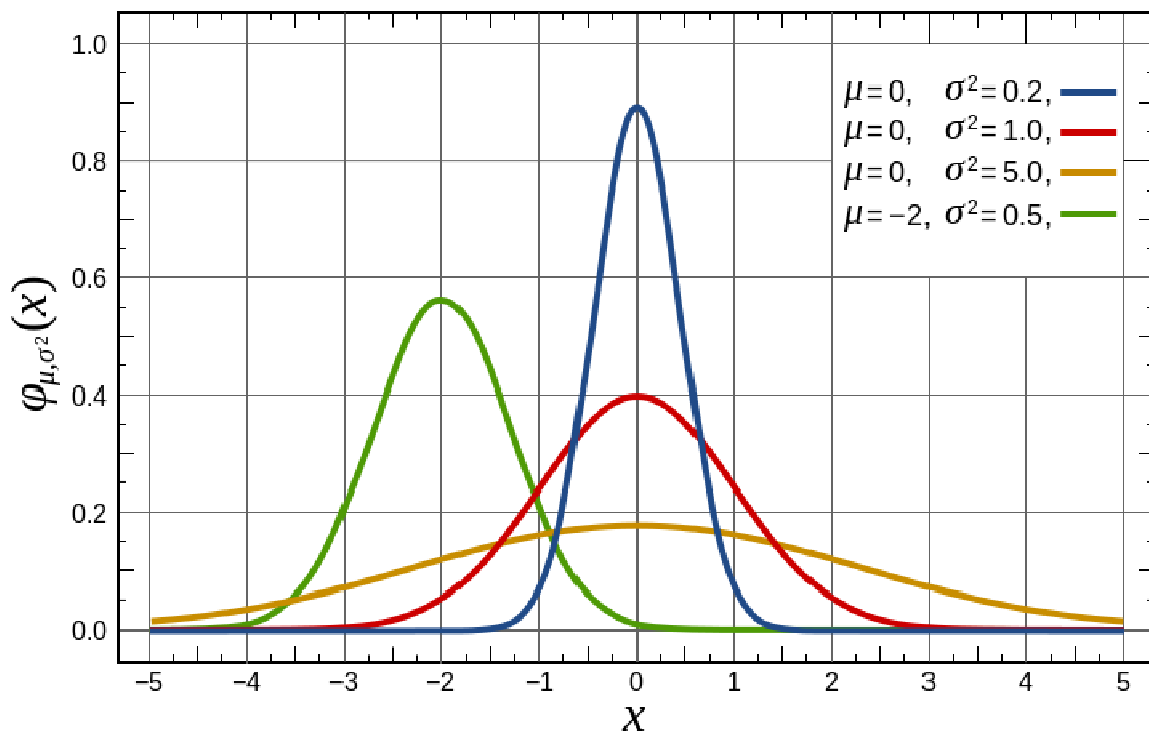
εφαρμογές, για παράδειγμα σε περιπτώσεις όπου δε θέλουμε να έχουμε αρνητικές τιμές (π.χ. αντοχές υλικών). [5], [26]

Για την πλήρη περιγραφή της χρειάζονται μόνο δύο παράμετροι, η μέση τιμή  $\mu$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma$  (ή εναλλακτικά η διακύμανση  $\sigma^2$ ). Συμβολίζεται ως εξής:  $N(\mu, \sigma)$  ή  $N(\mu, \sigma^2)$ . Οι κυριότερες μεταβλητές στο επάγγελμα του Πολιτικού Μηχανικού που θεωρούμε ότι ακολουθούν κανονική κατανομή είναι τα ίδια βάρη, η αντοχή των υλικών και κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες. [5], [26]

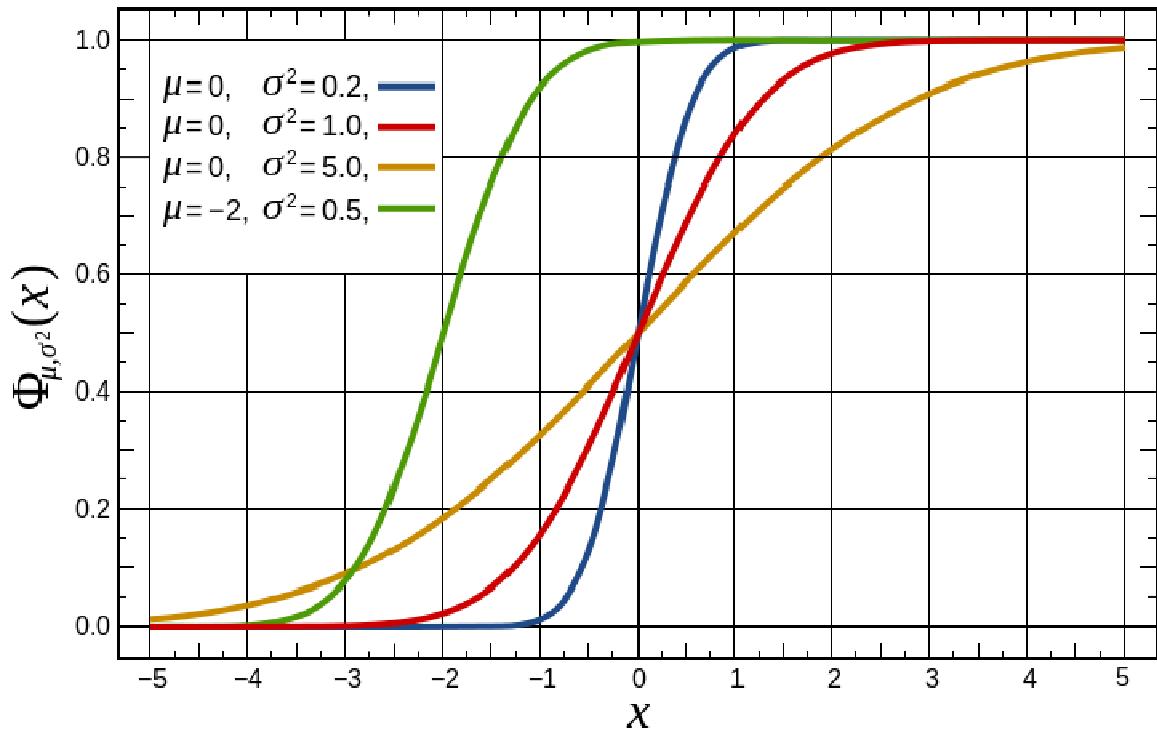
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής  $X$  με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  που ακολουθεί την κανονική κατανομή ορίζεται ως εξής:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.22)$$

Η γραφική της παράσταση έχει σχήμα καμπάνας και είναι συμμετρική (συντελεστής ασυμμετρίας  $\omega=0$ ), ενώ τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα των τετμημένων [5], [26]. Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της σ.π.π. μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή δίδονται στο σχήμα 2.7, ενώ της αντίστοιχης συνάρτησης αθροιστικής κατανομής στο σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.7: Καμπύλες συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής για διάφορες παραμέτρους  $\mu$  και  $\sigma^2$  [31]



Σχήμα 2.8: Καμπύλες συνάρτησης κανονικής αθροιστικής κατανομής [31]

#### 2.6.1.1 Τυποποιημένη κανονική κατανομή

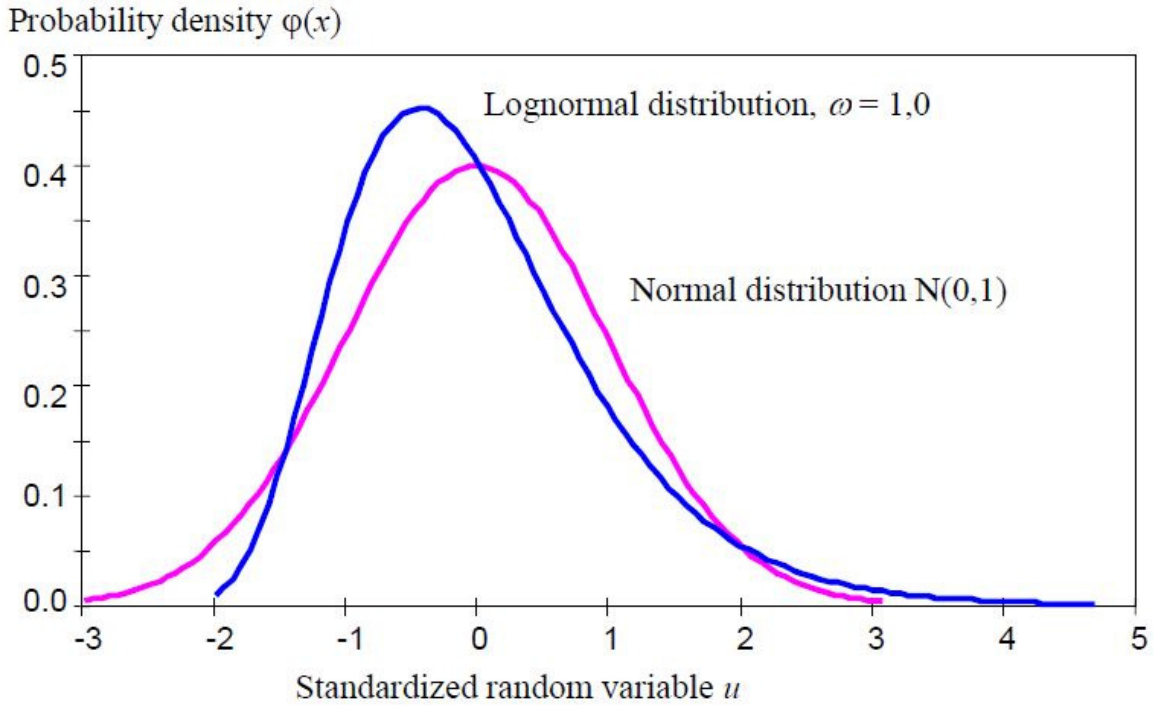
Λόγω του ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών  $\mu$  και  $\sigma$ , υπάρχουν και άπειρες κανονικές κατανομές, πράγμα που δυσχεραίνει πολύ τους υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον παρακάτω μετασχηματισμό της τυχαίας μεταβλητής  $X$  σε μία άλλη κανονικοποιημένη/τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή  $U$ :

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (2.23)$$

Τα πλεονεκτήματα του παραπάνω μετασχηματισμού είναι ότι ισχύει για οποιοδήποτε τύπο κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , ενώ η μεταβλητή  $U$  που προκύπτει ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0,1)$ , με μέση τιμή  $\mu=0$  και τυπική απόκλιση  $\sigma=1=\sigma^2$ . Η κατανομή  $N(0,1)$  καλείται τυποποιημένη (ή τυπική) κανονική κατανομή. Η σ.π.π. της  $U$  δίνεται από τον τύπο:

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (2.24)$$

Οι τιμές της παραπάνω σ.π.π. και του ολοκληρώματός της δίνονται για διάφορες τιμές του  $u$  σε σχετικούς πίνακες (δείτε Παράρτημα Β) και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη πιθανότητα κάθε τιμής της τυχαίας μεταβλητής  $X$  για οποιοδήποτε τιμές των  $\mu$  και  $\sigma$ . [5], [26]



Σχήμα 2.9: Σύγκριση καμπυλών σ.π.π. τυποποιημένης κανονικής κατανομής και λογαριθμοκανονικής κατανομής με  $\omega_X=1$  [26]

### 2.6.2 Λογαριθμοκανονική κατανομή

Χαρακτηριστικό μιας μεταβλητής  $X$  που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή είναι το ότι ο νεπέρειος λογάριθμός της μεταβλητής  $Y = \ln |X - x_0|$  ακολουθεί κανονική κατανομή. Η λογαριθμοκανονική κατανομή ορίζεται σε ένα περιορισμένο διάστημα  $[x_0, \infty)$  ή  $(-\infty, x_0]$ . Εξαρτάται από τρεις παραμέτρους, οι οποίες συνήθως είναι η μέση τιμή  $\mu_X$ , η τυπική απόκλιση  $\sigma_X$  και ο συντελεστής ασυμμετρίας  $\omega_X$ . Το όριο  $x_0$  εξαρτάται από το συντελεστή ασυμμετρίας  $\omega_X$  ως εξής:

$$x_0 = \mu_X - \frac{\sigma_X}{c}, \quad (2.25)$$

όπου  $c$  συντελεστής εξαρτώμενος από την ασυμμετρία ως εξής:

$$\omega_X = c^3 + 3c \quad (2.26)$$

Η σ.π.π. της λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι η εξής:

$$\phi(x) = \frac{1}{|x - x_0| \sqrt{\ln(1 + c^2)} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{\left[ \ln \left( \frac{|x - x_0| c \sqrt{1 + c^2}}{\sigma} \right) \right]^2}{2 \ln(1 + c^2)} \right\} \quad (2.27)$$



Εάν  $\omega_X=0$ , τότε η λογαριθμοκανονική κατανομή εμπίπτει σε κανονική κατανομή. Μία σύγκριση λογαριθμοκανονικής κατανομής με  $\omega_X=1$  και τυποποιημένης κανονικής κατανομής φαίνεται στο σχήμα 2.9.

### 2.6.2.1 Λογαριθμοκανονική κατανομή με κατώτατο όριο το μηδέν

Η λογαριθμοκανονική κατανομή με κατώτατο όριο το 0 ( $x_0=0$ ) συμβολίζεται με  $LN(\mu, \sigma)$  και αποτελεί μία ειδική περίπτωση λογαριθμοκανονικής κατανομής που εξαρτάται μόνο από δύο παράγοντες, τη μέση τιμή  $\mu_X$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma_X$ . Η σ.π.π. της  $LN(\mu, \sigma)$  είναι η εξής:

$$\phi(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(1+V^2)}\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{\left[ \ln \left( \frac{x\sqrt{1+V^2}}{\mu} \right) \right]^2}{2\ln(1+V^2)} \right\} \quad (2.28)$$

Από την εξίσωση 2.25 φαίνεται πως για  $x_0=0$  η σταθερά  $c$  ισούται με το συντελεστή μεταβλητότητας  $V_X$ . Συνεπώς η 2.26 γίνεται:

$$\omega_X = V_X^3 + 3V_X, \quad (2.29)$$

δηλαδή ο συντελεστής ασυμμετρίας  $\omega_X$  είναι συνάρτηση αποκλειστικά του συντελεστή μεταβλητότητας  $V_X$ .

Από την παραπάνω εξίσωση (2.29) φαίνεται πως η ασυμμετρία της λογαριθμοκανονικής κατανομής με κατώτατο όριο το 0 είναι πάντα θετική και μάλιστα παίρνει μεγάλες τιμές για σχετικά μεγάλη διασπορά. Γι' αυτό το λόγο πρέπει να σημειωθεί πως η συγκεκριμένη κατανομή μπορεί σε μερικές περιπτώσεις (ιδίως σε περιπτώσεις μεγάλης διασποράς) να υποεκτιμήσει την πιθανότητα εμφάνισης τιμών πολύ μικρότερων της μέσης τιμής και να υπερεκτιμήσει αντίστοιχα την εμφάνιση τιμών πολύ μεγαλύτερων της μέσης τιμής. Το πλεονέκτημά της είναι πως, σε αντίθεση με την κανονική κατανομή, δεν προκύπτουν αρνητικές τιμές, πράγμα που το επιθυμούμε σε κάποιες περιπτώσεις (π.χ. στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή  $X$  αντιπροσωπεύει αντοχές υλικών) [26].

### 2.6.3 Κατανομή t του Student

Η κατανομή t του Student αποτελεί καλύτερη προσέγγιση από την κανονική κατανομή στην περίπτωση μικρών δειγμάτων [10]. Την κατανομή t με  $\nu=n-1$  βαθμούς ελευθερίας (όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος) ακολουθεί η τυχαία συνεχής μεταβλητή  $t_\nu$  που ορίζεται από τον τύπο:

$$t_\nu = \frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}, \quad (2.30)$$

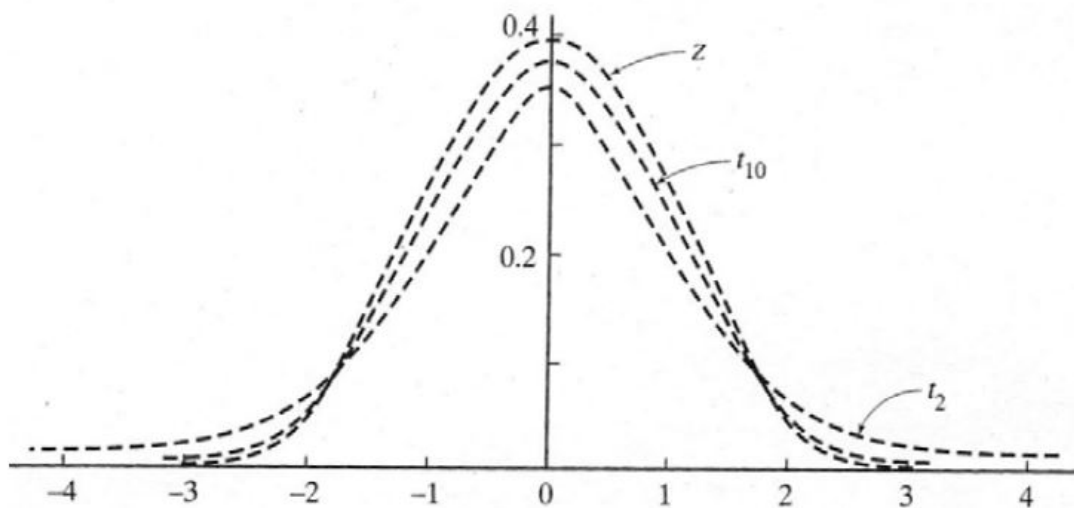
όπου  $U$  τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και  $Y$  άλλη τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή  $\chi^2$  ( $\chi$  τετράγωνο) με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας. Κατανομή  $\chi^2$  με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας καλείται η κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή  $\chi^2$ , η οποία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων  $\nu$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες ακολουθεί την κατανομή  $N(0,1)$ . Η σ.π.π. της μεταβλητής  $t_\nu$  που ακολουθεί την κατανομή  $t$  ορίζεται ως εξής:

$$\phi(t_\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} * \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.31)$$

όπου  $\Gamma(\nu)$  η συνάρτηση γάμα που δίνεται από τον τύπο:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} dx, \quad \nu > 0 \quad (2.32)$$

Η κατανομή  $t$  αποτελεί παράγωγο κατανομή της κανονικής κατανομής, έχει μέση τιμή  $\mu=0$  και διακύμανση  $\sigma^2 = \frac{1}{\nu-2}$ . Επίσης, η γραφική της παράσταση πλησιάζει αυτήν της τυποποιημένης κανονικής κατανομής  $N(0,1)$  όταν  $n > 30$  [5]. Σύγκριση γραφικών παραστάσεων των σ.π.π. της  $Z \sim N(0,1)$  και των  $t_{10}$  και  $t_2$  φαίνονται στο σχήμα. Τέλος, υπάρχουν σχετικοί πίνακες που δίνουν την πιθανότητα  $P(|t| > t_{\nu, \alpha}) = \alpha$  ή την πιθανότητα  $P(t < t_{\nu, p}) = p = 1 - \alpha$ , για διάφορες τιμές των  $\nu$  και  $\alpha$  [5] (δείτε και Παράρτημα Β).



Σχήμα 2.10: Σύγκριση καμπυλών σ.π.π. τυποποιημένης κανονικής κατανομής και κατανομής  $t$  για  $\nu=2$  και  $\nu=10$  βαθμούς ελευθερίας [9]

## 2.7 Εκτίμηση ποσοστημορίων

$p$ -ποσοστημόριο  $x_p$  καλείται εκείνη η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  η οποία έχει πιθανότητα μη υπέρβασης ίση με  $p$ . Δηλαδή υπάρχει πιθανότητα  $p$  να προκύψουν τιμές μικρότερες ή ίσες της  $x_p$ . Άρα:

$$P(x \leq x_p) = \Phi(x_p) = p, \quad (2.33)$$

όπου, όπως αναπτύχθηκε παραπάνω,  $\Phi(x)$  η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της  $X$ .

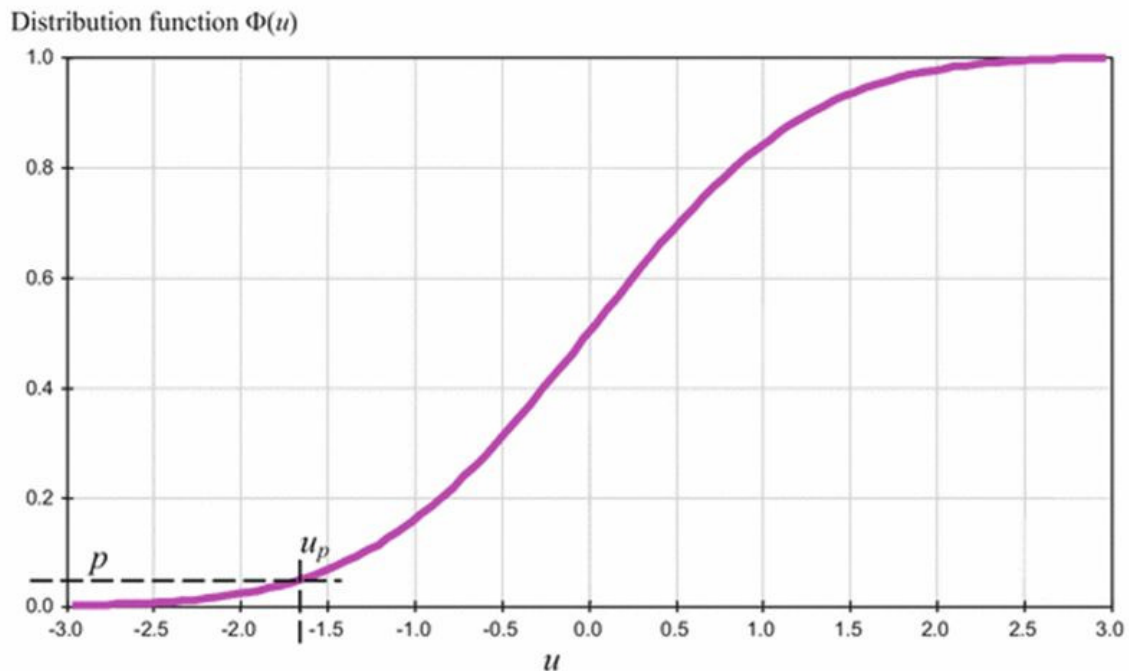
Επειδή όμως η  $\Phi(x)$  δεν είναι πάντα γνωστή, ή δεν υπάρχουν πίνακες για την κατανομή αυτή, ιδιαίτερα χρήσιμος είναι ο μετασχηματισμός της σχέσης 2.23:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}. \text{ Έτσι η } X \text{ αντικαθίσταται από τη } U \text{ και κατόπιν υπολογίζεται το}$$

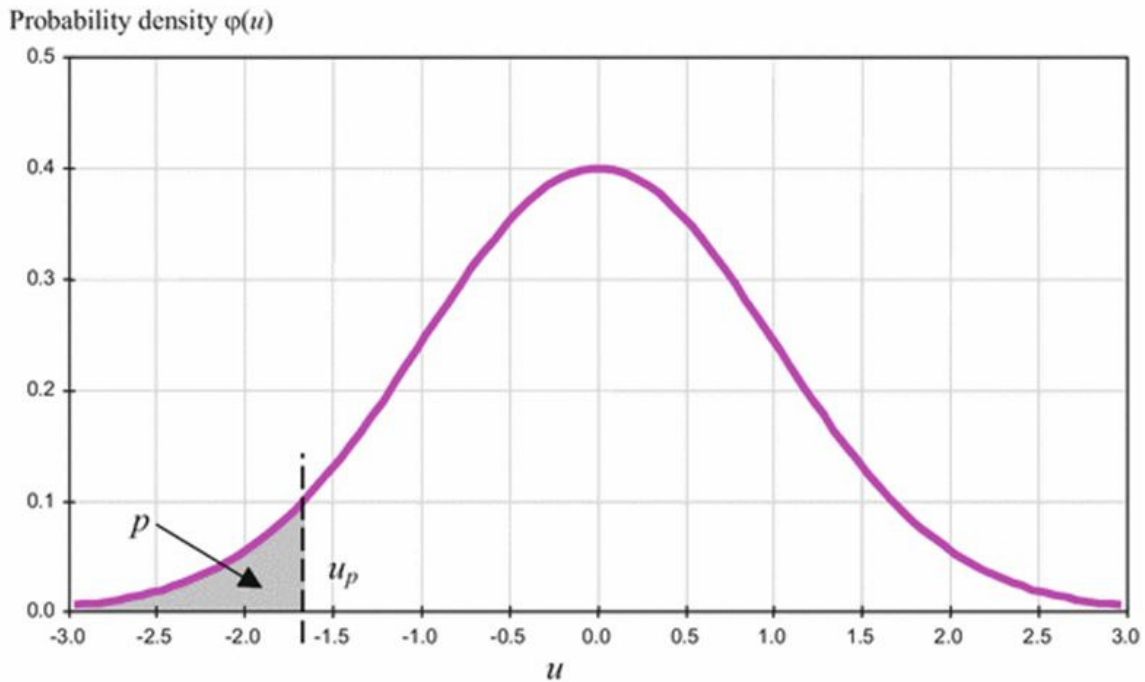
ποσοστημόριο  $u_p$  από τους πίνακες της κατανομής  $N(0,1)$ . Έπειτα, μέσω του ίδιου μετασχηματισμού ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, υπολογίζεται το επιθυμητό ποσοστημόριο  $x_p$  [17], [26]:

$$x_p = \mu + u_p \sigma = \mu(1 + u_p V), \quad (2.34)$$

Το ποσοστημόριο  $u_p$  σε σχέση με τις συναρτήσεις  $\Phi(u)$  και  $\phi(u)$  της  $N(0,1)$  φαίνεται στα σχήματα 2.11 και 2.12 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.11: Ορισμός του ποσοστημορίου  $u_p$  στη γραφική παράσταση της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής της  $N(0,1)$  [17]



Σχήμα 2.12: Ορισμός του ποσοστημορίου  $u_p$  στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της  $N(0,1)$  [17]

Λόγω συμμετρίας της τυπικής κανονικής κατανομής ισχύει  $u_{1-p} = -u_p$  και  $\Phi_U(-x) = 1 - \Phi_U(x)$ , όπου  $\Phi_U$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επίσης, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το ποσοστημόριο μιας μεταβλητής  $X$  που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με κατώτατο όριο το 0 χρησιμοποιώντας το ποσοστημόριο  $u_p$  της τυποποιημένης κανονικής κατανομής μέσω του παρακάτω τύπου:

$$x_p = \frac{\mu}{\sqrt{1+V^2}} e^{u_p \sqrt{\ln(1+V^2)}}, \quad (2.35)$$

Ικανοποιητική προσέγγιση της σχέσης 2.35 αποτελεί για μικρές τιμές του συντελεστή μεταβλητότητας ( $V < 0,2$ ) η σχέση 2.36, η οποία όμως χρησιμοποιείται συχνά και για μεγαλύτερες τιμές του  $V$ :

$$x_p = \mu e^{u_p V} \quad [26]. \quad (2.36)$$

### 2.7.1 Εκτίμηση ποσοστημορίων με τη μέθοδο πρόβλεψης

Η μέθοδος πρόβλεψης συνίσταται στον υπολογισμό ενός ποσοστημορίου  $x_{p,pred}$  (το οποίο καλείται όριο πρόβλεψης) για το οποίο ισχύει ότι, εάν επιλέξουμε τυχαία μία επιπλέον τιμή  $x_{n+1}$  από τον πληθυσμό, αυτή θα έχει πιθανότητα να είναι μικρότερη από το  $x_{p,pred}$  ίση με  $p$ . Δηλαδή:

$$P(x_{n+1} < x_{p,pred}) = p \quad (2.37)$$

Αποδεικνύεται ότι, όταν το μέγεθος  $n$  του δείγματος αυξάνεται, η τιμή  $x_{p,pred}$  τείνει στο ζητούμενο ποσοστημόριο  $x_p$ .

Για τον υπολογισμό του ορίου πρόβλεψης  $x_{p,pred}$  διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma$  του πληθυσμού και μία για άγνωστη  $\sigma$  του πληθυσμού [26].

#### 2.7.1.1 Τυπική απόκλιση $\sigma$ του πληθυσμού γνωστή

Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του ορίου πρόβλεψης τη σχέση:

$$x_{p,pred} = m + u_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} * \sigma , \quad (2.38)$$

όπου  $m$  ο μέσος του δείγματος,  $\sigma$  η τυπική απόκλιση του πληθυσμού και  $u_p$  το αντίστοιχο ποσοστημόριο, συνήθως της  $N(0,1)$  [26].

#### 2.7.1.2 Τυπική απόκλιση $\sigma$ του πληθυσμού άγνωστη

Όταν δε γνωρίζουμε την τυπική απόκλιση  $\sigma$  του υπό εξέταση πληθυσμού, χρησιμοποιούμε την τυπική απόκλιση  $s$  του δείγματος. Σ' αυτήν την περίπτωση, αντί της 2.38 εφαρμόζουμε για τον υπολογισμό του ορίου πρόβλεψης τη σχέση:

$$x_{p,pred} = m + t_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} * s , \quad (2.39)$$

όπου  $t_p$  το αντίστοιχο ποσοστημόριο της κατανομής  $t$  του Student για  $v=n-1$  βαθμούς ελευθερίας και  $n$  το μέγεθος του δείγματος. [26]

### 2.7.2 Εκτίμηση ποσοστημορίων με τη μέθοδο του Bayes

Η μέθοδος του Bayes χρησιμοποιείται, όπως και η μέθοδος πρόβλεψης, για την εκτίμηση ποσοστημορίων ενός πληθυσμού με δεδομένες τις παραμέτρους ενός δείγματος του πληθυσμού. Η διαφορά των δύο μεθόδων έγκειται στο ότι η μέθοδος του Bayes λαμβάνει υπ' όψιν και τις παραμέτρους και άλλου δείγματος του πληθυσμού, το οποίο είχε ληφθεί προγενέστερα. Δηλαδή η μέθοδος του Bayes δίνει τη δυνατότητα εξαγωγής αποτελεσμάτων μεγαλύτερης ακρίβειας, μέσω της χρήσης και προηγούμενης γνώσης για την υπό εξέταση μεταβλητή. [26]

Έστω λοιπόν  $n$  το μέγεθος του δείγματός μας (και άρα  $v=n-1$  οι βαθμοί ελευθερίας του),  $m$  η μέση τιμή του και  $s$  η τυπική του απόκλιση. Επίσης, έστω ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή  $m'$  και την τυπική απόκλιση  $s'$  ενός άλλου δείγματος από τον ίδιο πληθυσμό από προγενέστερα στοιχεία. Το μέγεθος  $n'$  του προγενέστερου δείγματος και άρα και οι βαθμοί ελευθερίας του  $v'$  δε θεωρούνται απαραίτητα γνωστά, αλλά μπορούν να εκτιμηθούν συναρτήσει των εκτιμώμενων συντελεστών διασποράς  $V$  της μέσης τιμής  $[V(\mu)]$  και της τυπικής απόκλισης  $[V(\sigma)]$  του πληθυσμού ως εξής [26]:

$$n' = \left[ \frac{s'}{m' V(\mu)} \right]^2 \quad (2.40)$$

$$v' = \frac{1}{2V(\sigma)^2} \quad (2.41)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται πως οι παράμετροι  $n'$  και  $v'$  του προγενέστερου δείγματος εκτιμώνται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, δηλαδή δεν ισχύει απαραίτητα  $v' = n' - 1$ . Προφανώς, αν δεν υπάρχει προγενέστερη γνώση για τη μεταβλητή,  $n' = 0$  και  $v' = 0$ . [25], [26]

Συνδυάζοντας λοιπόν τις παραμέτρους των δύο δειγμάτων, προκύπτουν οι αντίστοιχες παράμετροι του συνδυασμένου δείγματος με βάση τις παρακάτω σχέσεις [26]:

$$n'' = n + n' \quad (2.42)$$

$$v'' = v + v' - 1 \text{ αν } n' \geq 1 \quad (2.43)$$

$$v'' = v + v' \text{ αν } n' = 0 \quad (2.44)$$

$$m'' = \frac{mn + m'n'}{n''} \quad (2.45)$$

$$s''^2 = \frac{vs^2 + v's'^2 + nm^2 + n'm'^2 - n''m''^2}{v''} \quad (2.46)$$

Αυτές τις παραμέτρους του συνδυασμένου δείγματος τις χρησιμοποιούμε για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο πρόβλεψης (σχέση 2.39), οπότε το προκύπτον ποσοστημόριο της μεθόδου του Bayes θα είναι, δεδομένου ότι η τυπική απόκλιση  $\sigma$  του πληθυσμού δεν είναι γνωστή:

$$x_{p, Bayes} = m'' + t_p'' \sqrt{\frac{1}{n''} + 1} * s'' \quad (2.47)$$

όπου  $t_p''$  το αντίστοιχο ποσοστημόριο της κατανομής  $t$  του Student για  $v''$  βαθμούς ελευθερίας. [25], [26]

Εάν δεν έχουμε προγενέστερα δεδομένα για τη μεταβλητή, τότε  $n' = 0$ ,  $v' = 0$  και, όπως φαίνεται και από τις σχέσεις 2.42 έως 2.46, οι παράμετροι  $n''$ ,  $v''$ ,  $m''$ ,  $s''$  ισούνται με τις αντίστοιχες παραμέτρους  $n$ ,  $v$ ,  $m$  και  $s$  του υπό εξέταση δείγματος. Σ' αυτήν την περίπτωση, η σχέση 2.47 εμπίπτει στη σχέση 2.39 της μεθόδου πρόβλεψης. Εάν η  $\sigma$  του πληθυσμού είναι γνωστή, χρησιμοποιούμε το ποσοστημόριο  $u_p$  της τυπικής κανονικής κατανομής αντί του  $t_p$  της κατανομής  $t$  του Student (σχέση 2.38). [25], [26]

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως στο EN1990 [12] χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των διαφορών παραμέτρων που υπεισέρχονται στο σχεδιασμό (π.χ. χαρακτηριστικές τιμές κάποιων ιδιοτήτων υλικών) αυτή η ειδική περίπτωση της μεθόδου του Bayes, όπου δεν έχουμε προγενέστερα δεδομένα για την υπό εξέταση παράμετρο. [12], [26]

## 3 Βασικές αρχές σχεδιασμού

### 3.1 Εισαγωγή

Γενικά, στόχος του Πολιτικού Μηχανικού είναι να σχεδιάσει ασφαλείς και λειτουργικές κατασκευές, οι οποίες όμως θα έχουν ένα λογικό κόστος κατασκευής. Για να επιτευχθεί αυτό χρειάζονται διάφορα δεδομένα, τα κυριότερα εκ των οποίων είναι οι δράσεις που αναμένεται να καταπονήσουν την κατασκευή, οι οποίες προκαλούν ανάπτυξη εντατικών μεγεθών και παραμορφώσεων, και τα χαρακτηριστικά των υλικών κατασκευής, από τα οποία θα προκύψει η αντίσταση της κατασκευής στις εκάστοτε δράσεις.

Η ασφάλεια έγκειται γενικά στο να μην καταπονηθεί η κατασκευή περισσότερο απ' όσο αντέχει κατά τη διάρκεια διαφόρων καταστάσεων οι οποίες είναι πιθανόν να συμβούν κατά τη διάρκεια ζωής και λειτουργίας της. Η λειτουργικότητα έγκειται στο να υπάρχει το αίσθημα ασφάλειας και στους χρήστες της κατασκευής, δηλαδή για παράδειγμα να μην εμφανίζονται μεγάλες παραμορφώσεις ή ταλαντώσεις που θα δημιουργήσουν ανησυχία στο χρήστη, παρ' όλο που μπορεί η κατασκευή να μην κινδυνεύει με κατάρρευση. Για να εξασφαλιστεί αυτό το EN1990 [12] ορίζει στο κεφάλαιο 3 οριακές καταστάσεις οι οποίες δε θα πρέπει να ξεπεραστούν διότι «πέρα από αυτές πλέον η κατασκευή δεν πληροί το αντίστοιχο κριτήριο σχεδιασμού» [14]. Οι οριακές καταστάσεις ορίζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 6 του [12] και έχουν επιγραμματικά ως εξής:

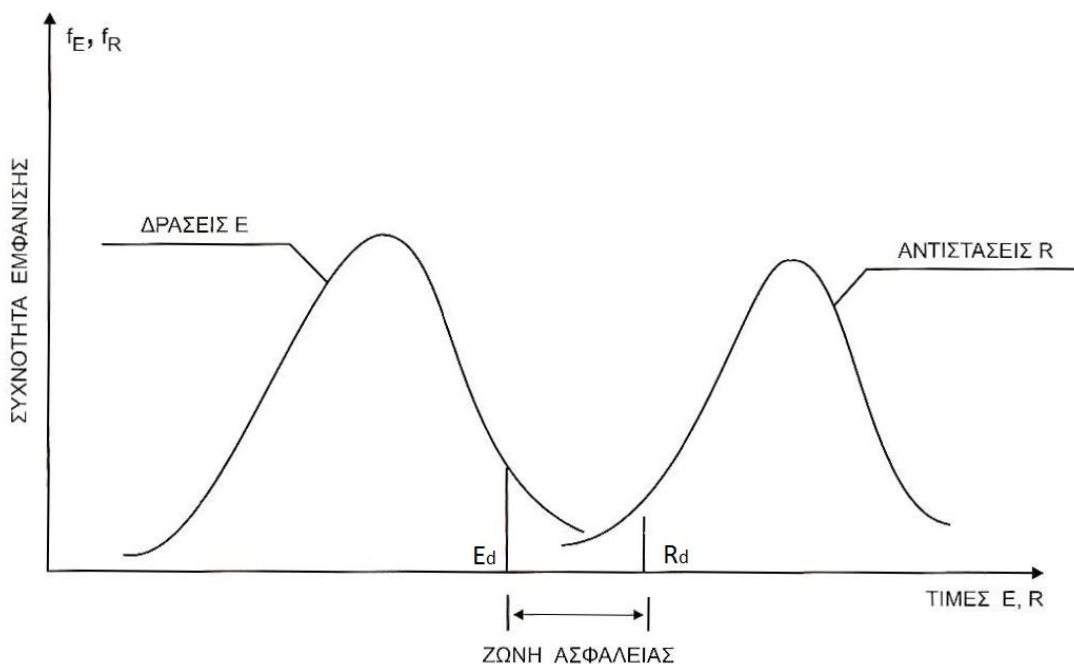
1. Οριακές καταστάσεις αστοχίας:
  - a. EQU: Απώλεια ευστάθειας της κατασκευής ή μέλους της
  - b. STR: Δομική αστοχία ή εκτεταμένη παραμόρφωση
  - c. GEO: Γεωτεχνική αστοχία
  - d. FAT: Αστοχία λόγω κόπωσης
2. Οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας

Για τον έλεγχο σε κάθε οριακή κατάσταση δίνονται από το EN1990 [12] οδηγίες, οι οποίες όμως τονίζεται ότι ισχύουν για κατασκευές που υπόκεινται σε στατική ή ισοδύναμη στατική φόρτιση (δηλαδή δυναμική φόρτιση η οποία μπορεί να προσομοιωθεί με στατική μέσω χρήσης κάποιων συντελεστών δυναμικής προσάυξης). Για μη γραμμική ανάλυση και κόπωση θα πρέπει να ακολουθηθούν ειδικοί κανόνες που αναφέρονται στα υπόλοιπα κείμενα των Ευρωκωδίκων (παράγραφος 6.2 του [12]). [8], [12]

Σε αυτή τη βάση, για αστοχία τύπου STR και/ή GEO διαμορφώνεται η θεμελιώδης ανίσωση ελέγχου:

$$E_d \leq R_d, \quad (3.1)$$

όπου  $E_d$  η τιμή σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων (π.χ. εντατικά μεγέθη, τάσεις, παραμορφώσεις [29]) και  $R_d$  η τιμή σχεδιασμού της αντίστοιχης αντίστασης [12]. Σχηματικά η παραπάνω ανίσωση φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση της ανίσωσης ελέγχου οριακών καταστάσεων [2]

Η επιλογή των παραπάνω τιμών σχεδιασμού βασίζεται στους παράγοντες οι οποίοι τις επηρεάζουν (π.χ. δράσεις, ιδιότητες υλικών) και οι οποίοι δεν είναι σταθεροί (συνήθως θεωρούμε ότι ακολουθούν κάποια γνωστή στατιστική κατανομή). Αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά το σχεδιασμό μιας και από αυτούς εξαρτάται άμεσα σύμφωνα με τα παραπάνω η ασφάλεια των κατασκευών [2]. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να εξηγήσει τη γενική διαδικασία με την οποία προκύπτουν αυτές οι τιμές.

Επίσης πρέπει να σημειωθεί πως η θεωρητική ζώνη ασφαλείας που φαίνεται στο σχήμα 3.1 στην πραγματικότητα δεν έχει πάντα αυτή τη μορφή. Συγκεκριμένα, υπάρχει πάντα μία μικρή πιθανότητα στην πράξη, σε κάποια στιγμή της ζωής της κατασκευής η δράση να προκύψει μεγαλύτερη από την αντίσταση, δηλαδή  $E > R$ . Σ' αυτήν την περίπτωση δεν ισχύει η σχέση 3.1 και επέρχεται αστοχία. Αυτή η πιθανότητα καλείται πιθανότητα αστοχίας και δεν είναι δυνατόν να εξαλειφθεί. Διεξοδικότερα σ' αυτό το θέμα θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο 4. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να εξηγήσει τη γενική διαδικασία με την οποία καταλήγουμε στις τιμές σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων ( $E_d$ ) και των αντιστάσεων ( $R_d$ ).

## 3.2 Δράσεις

Για να προσδιορίσουμε την τιμή  $E_d$ , η οποία αφορά όπως αναφέρθηκε παραπάνω αντιπροσωπεύει την τιμή σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων που δρουν στην κατασκευή, είναι προφανές πως πρέπει να καθοριστούν αρχικά αυτές οι δράσεις. Το EN1990 [12] χωρίζει τις δράσεις ανάλογα με τη διαφοροποίησή τους στο χρόνο σε:

1. μόνιμες (G), π.χ. ίδια βάρη
2. μεταβλητές (Q), π.χ. φορτία ανέμου και
3. τυχηματικές (A), π.χ. εκρήξεις

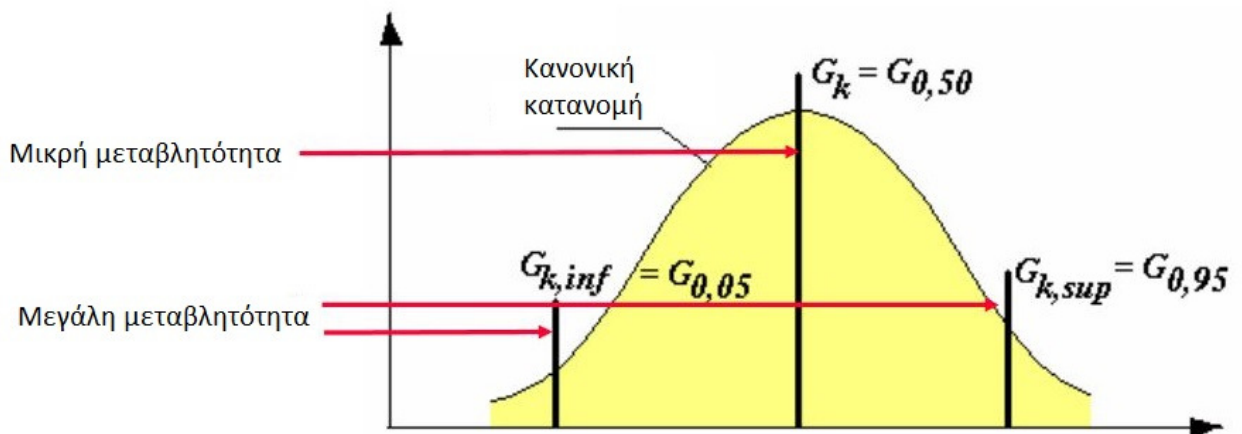


Κάθε δράση που λαμβάνεται υπ' όψιν στο σχεδιασμό έχει πάντα μία κύρια τιμή, τη λεγόμενη χαρακτηριστική τιμή. Η χαρακτηριστική τιμή μπορεί να είναι κατά περίπτωση είτε μία μέση τιμή, είτε μία ονομαστική τιμή (συνήθως στις περιπτώσεις όπου δεν είναι δυνατόν να θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη στατιστική κατανομή που να αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη δράση), είτε τέλος δύο τιμές, μία μέγιστη και μία ελάχιστη, οι οποίες χρησιμοποιούνται εν γένει ανάλογα με το εάν η επιρροή της συγκεκριμένης δράσης είναι ευμενής ή δυσμενής. [12], [30]

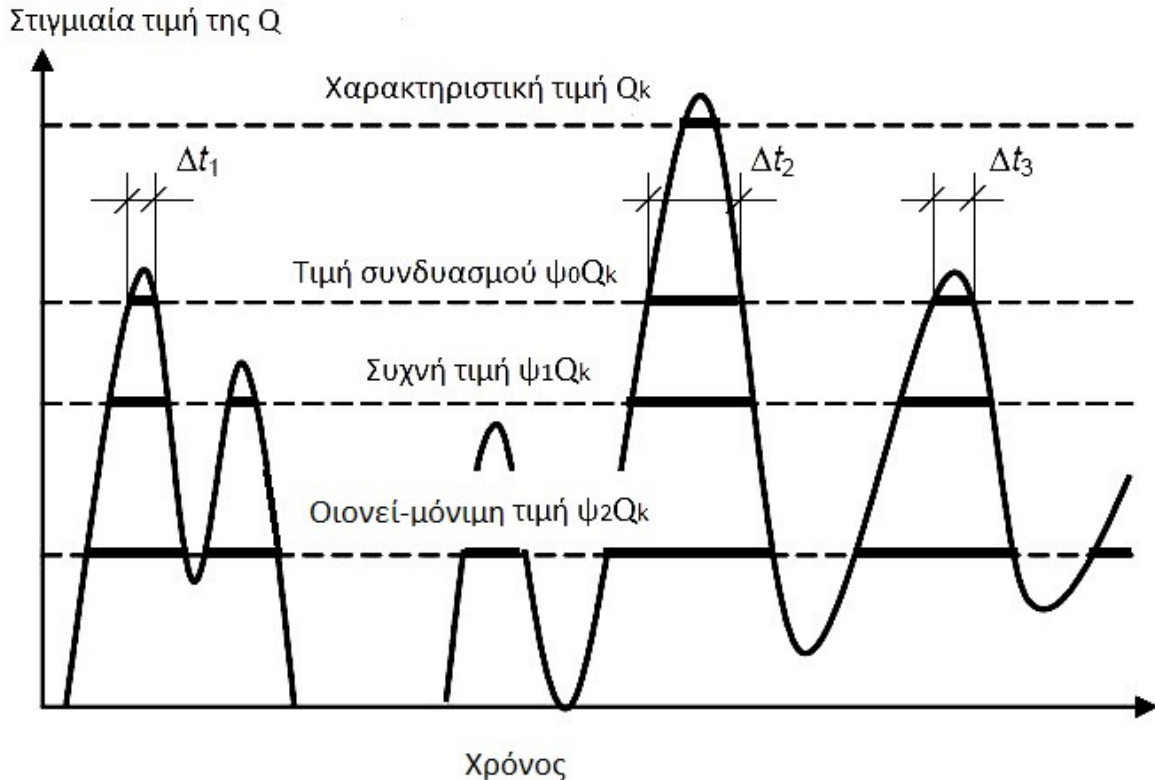
Αφού ορίσουμε τις χαρακτηριστικές τιμές των δράσεων, τις χρησιμοποιούμε για να μορφώσουμε συνδυασμούς δράσεων (ή περιπτώσεις φόρτισης). Αυτοί οι συνδυασμοί λαμβάνουν υπ' όψιν την επιρροή διαφορετικών δράσεων πάνω στην κατασκευή τη στιγμή που επέρχεται αστοχία. Για κάθε περίπτωση φόρτισης (και άρα για κάθε οριακή κατάσταση) προσδιορίζονται τα αποτελέσματα των δράσεων (π.χ. εντατικά μεγέθη, παραμορφώσεις) που θεωρείται ότι δρουν εκείνη τη στιγμή στην κατασκευή. [12], [8]

### 3.2.1 Μόνιμες δράσεις (G)

Οι μόνιμες δράσεις θεωρείται ότι αντιπροσωπεύονται είτε από μία χαρακτηριστική τιμή  $G_k$ , στην περίπτωση που μεταβλητότητά τους θεωρείται μικρή (συνήθως αυτή είναι η μέση τιμή της μεταβλητής), είτε από δύο χαρακτηριστικές τιμές, μία μέγιστη ( $G_{k,sup}$ ) και μία ελάχιστη ( $G_{k,inf}$ ), στην περίπτωση που η μεταβλητότητά τους θεωρείται μεγάλη. Η  $G_{k,sup}$  αποτελεί το 95% ποσοστημόριο της κατανομής της  $G$ , δηλαδή πιθανότητα υπέρβασης 5% ενώ η  $G_{k,inf}$  το 5% ποσοστημόριο, δηλαδή πιθανότητα μη υπέρβασης 5% (σχήμα 3.2). Οι  $G$  συνήθως θεωρείται ότι ακολουθούν κανονική κατανομή. [12], [30]



Σχήμα 3.2: Χαρακτηριστικές τιμές μόνιμων δράσεων [11]



Σχήμα 3.3: Αντιπροσωπευτικές τιμές των μεταβλητών δράσεων [13]

### 3.2.2 Μεταβλητές δράσεις (Q)

Για τις μεταβλητές δράσεις ορίζονται τέσσερις αντιπροσωπευτικές τιμές ( $F_{rep}$ ), οι οποίες έχουν διαφορετική πιθανότητα να προκύψουν [13]. Αυτές είναι (σε φθίνουσα σειρά μεγέθους):

1. χαρακτηριστική τιμή,  $Q_k$
2. τιμή συνδυασμού,  $\psi_0 Q_k$
3. συχνή τιμή,  $\psi_1 Q_k$
4. οιονεί-μόνιμη τιμή,  $\psi_2 Q_k$  [12], [14].

Οι συντελεστές  $\psi$  δίνονται στο Παράρτημα Α του EN1990 [12].

Η χαρακτηριστική τιμή είναι η κύρια αντιπροσωπευτική τιμή και αποτελεί συνήθως μια στατιστικά ακραία τιμή, με μεγάλη περίοδο επαναφοράς. Δηλαδή πρόκειται για μία τιμή που δε θα προκύψει σχεδόν ποτέ κατά τη διάρκεια ζωής της κατασκευής.

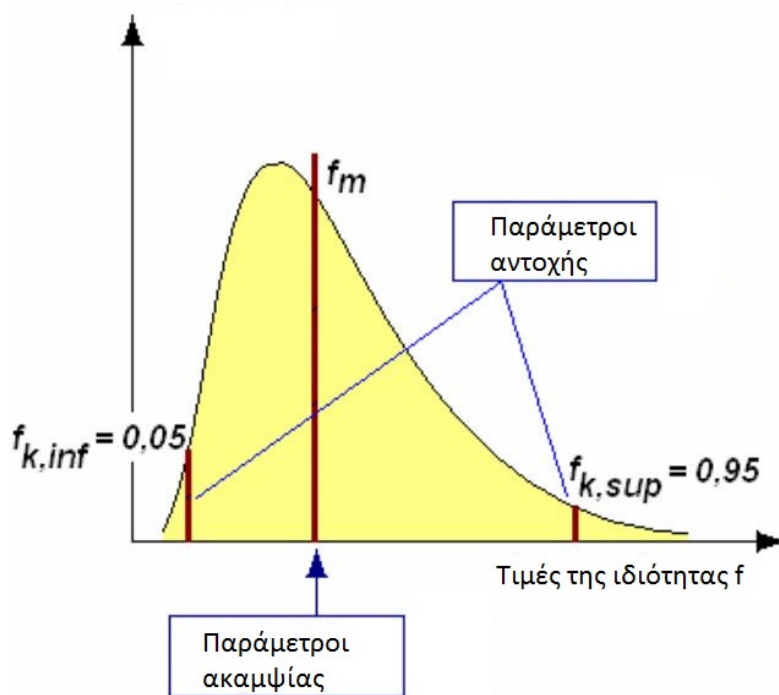
Η τιμή συνδυασμού αφορά στη μειωμένη πιθανότητα οι ακραίες τιμές δύο ή περισσότερων δράσεων να προκύψουν ταυτόχρονα. Δηλαδή σε κάποιο συνδυασμό όπου λαμβάνουμε υπ' όψιν την ταυτόχρονη δράση δύο διαφορετικών δράσεων στην κατασκευή, είναι κάπως απίθανο να συνυπάρξουν τα μέγιστα και των δύο ταυτόχρονα. Γι' αυτό το λόγο μειώνουμε τη μία εκ των δύο χρησιμοποιώντας την τιμή συνδυασμού της ( $\psi_0 Q_k$ ) και θεωρούμε ότι μόνο η άλλη δρα με τη μέγιστη τιμή της (δηλαδή τη χαρακτηριστική τιμή της  $Q_k$ ).

Τιμές μεγαλύτερες από τη συχνή εμφανίζονται περιστασιακά, σε ένα μικρό ποσοστό της περιόδου αναφοράς (π.χ. στο 1% της περιόδου αναφοράς), ενώ τιμές μεγαλύτερες από την οιονεί-μόνιμη σε ένα μεγάλο ποσοστό της περιόδου αναφοράς (π.χ. στο 50% της περιόδου αναφοράς) [13], [12], [30]. Για παράδειγμα, η συχνή και η οιονεί-μόνιμη τιμή

χρησιμοποιούνται σε συνδυασμούς που περιέχουν τυχηματικές δράσεις, δηλαδή είναι οι τιμές που ενδέχεται να έχουν κάποιες δράσεις όταν προκύψει η απρόοπτη τυχηματική δράση [30]. Εποπτικά τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα 3.3

### 3.3 Ιδιότητες υλικών

Σύμφωνα με την παρ. 1.5.4.1 του EN1990 [12], ως χαρακτηριστική τιμή μιας ιδιότητας υλικού ( $X_k$ ) ορίζεται εκείνη η τιμή η οποία έχει μία δεδομένη πιθανότητα μη υπέρβασης, αν υποθέσουμε πως μπορούμε να κάνουμε απεριόριστους πειραματικούς ελέγχους. Συνήθως υποθέτουμε πως η συγκεκριμένη ιδιότητα ακολουθεί μία δεδομένη στατιστική κατανομή, οπότε ως χαρακτηριστική της τιμή ορίζεται το ποσοστημόριο αυτής της κατανομής για τη συγκεκριμένη πιθανότητα μη υπέρβασης [12]. Στην περίπτωση που ο έλεγχος σε μια οριακή κατάσταση είναι ευαίσθητος στη μεταβολή μιας συγκεκριμένης ιδιότητας ορίζονται δύο χαρακτηριστικές τιμές, μία μέγιστη (95% ποσοστημόριο) και μία ελάχιστη (5% ποσοστημόριο) (παράγραφος 4.2 του [12]). Η  $X_k$  μπορεί επίσης να είναι μία ονομαστική τιμή στην περίπτωση που δεν υπάρχουν επαρκή στατιστικά δεδομένα [12]. Τέλος, όταν η  $X_k$  αναφέρεται σε παραμέτρους ακαμψίας (π.χ. μέτρο ελαστικότητας, συντελεστής ερπυσμού, συντελεστής θερμικής διαστολής) τότε ως χαρακτηριστική λαμβάνεται η μέση τιμή [12]. Στο σχήμα 3.4 φαίνονται οι χαρακτηριστικές τιμές των διαφορών ιδιοτήτων υλικών ως ποσοστημόρια της κατανομής της ιδιότητας.



Σχήμα 3.4: Χαρακτηριστικές τιμές ιδιοτήτων υλικών [11]

### 3.4 Επιμέρους συντελεστές ασφαλείας και τιμές σχεδιασμού

Οι τιμές σχεδιασμού τόσο για τις δράσεις όσο και για τις ιδιότητες υλικών προκύπτουν μέσω του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης αντίστοιχα με κατάλληλους επιμέρους συντελεστές ασφαλείας  $\gamma$ , με τους οποίους εξασφαλίζεται δεδομένη (και αρκετά μικρή) πιθανότητα αστοχίας [13] (δείτε και κεφάλαιο 4). Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνονται υπ' όψιν οι αβεβαιότητες που υπάρχουν στον προσδιορισμό των τιμών των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό (δράσεις, ιδιότητες υλικών κ.λπ.) καθώς και στα προσομοιώματα προσδιορισμού των αποτελεσμάτων των δράσεων και της αντίστασης των κατασκευών [13]. Συνήθως ισχύει  $\gamma \geq 1,00$ , δηλαδή υπέρ της ασφαλείας προσαυξάνουμε τις τιμές των δράσεων, πολλαπλασιάζοντάς τες με  $\gamma_E \geq 1$  και μειώνουμε τις τιμές των αντιστάσεων διαιρώντάς τες με  $\gamma_R \geq 1$ .

Γενικά οι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας προκύπτουν από τη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης του οποίου τις μεταβλητές αποτελούν οι εν λόγω συντελεστές. Οι Ευρωκώδικες, καθώς και άλλοι κανονισμοί, χρησιμοποιούν πιθανοτικές μεθόδους για τον προσδιορισμό των επιμέρους συντελεστών ασφαλείας [15]. Για κάθε διαφορετική μεταβλητή χρησιμοποιούμε διαφορετικό συντελεστή ασφαλείας, ανάλογα με τη διασπορά της και τη θεωρητική κατανομή της.

#### 3.4.1 Τιμές σχεδιασμού δράσεων και αποτελεσμάτων τους

Η τιμή σχεδιασμού  $F_d$  μίας δράσης  $F$  δίνεται γενικά από τη σχέση:

$$F_d = \gamma_f * F_{rep}, \quad (3.2)$$

όπου  $F_{rep}$  η αντιπροσωπευτική τιμή της δράσης σύμφωνα με την παράγραφο 3.2 και  $\gamma_f$  ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας της δράσης που λαμβάνει υπ' όψιν τυχόν δυσμενή διαφοροποίηση της πραγματικής τιμής της δράσης από την αντιπροσωπευτική της τιμή [12].

Οι τιμές σχεδιασμού των δράσεων χρησιμοποιούνται για τη μόρφωση συνδυασμών δράσεων, καθένας από τους οποίους θεωρείται πως καταπονεί την κατασκευή σε κάποια οριακή κατάσταση. Σε κάθε συνδυασμό θεωρούνται όλες οι δράσεις οι οποίες μπορεί να προκύψουν ταυτόχρονα [13]. Δηλαδή στις οριακές καταστάσεις λαμβάνεται υπ' όψιν μέσω αυτών των συνδυασμών η ταυτόχρονη επιρροή στην κατασκευή διαφορετικών δράσεων, από την οποία προκύπτουν οι τιμές σχεδιασμού για τα αποτελέσματα των δράσεων ( $E_d$ ) [14]. Η σχετική γενική έκφραση δίδεται παρακάτω:

$$E_d = \gamma_{sd} * E\{\gamma_{f,i} * F_{rep,i}; a_d\} \quad (3.3)$$

ή σε συνδυασμό με τη σχέση 3.2:

$$E_d = \gamma_{sd} * E\{F_{d,i}; a_d\}, \quad (3.4)$$

όπου  $\alpha_d$  η τιμή σχεδιασμού γεωμετρικών δεδομένων<sup>1</sup> όπως π.χ. διαστάσεις μελών και  $\gamma_{sd}$  επιμέρους συντελεστής που λαμβάνει υπ' όψιν αβεβαιότητες στο προσομοίωμα υπολογισμού των αποτελεσμάτων των δράσεων [12].

Στην περίπτωση γραμμικής ανάλυσης (για παράδειγμα στην περίπτωση όπου οι δράσεις και τα αποτελέσματά τους συνδέονται γραμμικά) οι δύο παραπάνω επιμέρους συντελεστές  $\gamma_f$  και  $\gamma_{sd}$  μπορούν να συνδυαστούν σε έναν ενιαίο συντελεστή  $\gamma_F$  ως εξής:

$$\gamma_{F,i} = \gamma_{f,i} * \gamma_{sd}, \quad (3.5)$$

$$\text{έτσι ώστε } E_d = E\{\gamma_{F,i} * F_{rep,i}; \alpha_d\}. \quad (3.6)$$

Περίπτωση γραμμικής ανάλυσης είναι για παράδειγμα η περίπτωση κατά την οποία οι δράσεις και τα αποτελέσματά τους συνδέονται γραμμικά, δηλαδή η εξίσωση που τα συνδέει είναι γραμμική της μορφής  $E = \lambda F$ , όπου  $E$  τα αποτελέσματα των δράσεων,  $F$  οι δράσεις και  $\lambda$  κάποια συνάρτηση ανεξάρτητη των  $E$  και  $F$ . Παράδειγμα τέτοιας εξίσωσης είναι η ροπή  $M$  (αποτελεσμα δράσης) στο μέσο μιας αμφιέριστης δοκού μήκους  $l$  που

καταπονείται από καταναμεμημένο φορτίο  $q$  (δράση):  $M = \frac{l^2}{8} * q$ .

Στην περίπτωση μη γραμμικής ανάλυσης αντίθετα χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην εφαρμογή των επιμέρους συντελεστών κατά περίπτωση. Οδηγίες για την περίπτωση μη γραμμικής ανάλυσης δίνονται στα υπόλοιπα κείμενα των Ευρωκωδίκων. [13], [12]

Άρα, για τον υπολογισμό της τιμής σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων  $E_d$ , ξεκινάμε προσδιορίζοντας τις αντιπροσωπευτικές τιμές των δράσεων  $F_{rep}$ . Κατόπιν, εφαρμόζουμε σ' αυτές το συντελεστή ασφαλείας  $\gamma_f$ , ώστε να προκύψουν οι τιμές σχεδιασμού των δράσεων  $F_d$  (σχέση 3.2). Αυτές τις τιμές σχεδιασμού τις χρησιμοποιούμε για να μορφώσουμε συνδυασμούς δράσεων, από τους οποίους επιλέγουμε τους δυσμενέστερους για την κατασκευή μας. Στη συνέχεια υπολογίζουμε για καθέναν από τους δυσμενέστερους συνδυασμούς φόρτισης τα εντατικά μεγέθη και τις παραμορφώσεις (αποτελέσματα δράσεων) που προκύπτουν για δεδομένη θεωρητική γεωμετρία κατασκευής ( $\alpha_d$ ), εάν η κατασκευή καταπονηθεί με το συγκεκριμένο συνδυασμό. Τέλος, εφαρμόζουμε στα αποτελέσματα δράσεων που προέκυψαν το συντελεστή  $\gamma_{sd}$  ώστε να προκύψουν οι τιμές σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων  $E_d$ .

Εναλλακτικά μπορούμε στις περισσότερες περιπτώσεις (δηλαδή όπου μπορεί να εφαρμοστεί γραμμική ανάλυση) να εφαρμόσουμε έναν ενιαίο συντελεστή ασφαλείας  $\gamma_F$  στις αντιπροσωπευτικές τιμές των δράσεων  $F_{rep}$ , οπότε οι τιμές των αποτελεσμάτων δράσεων που θα προκύψουν με βάση τις περιπτώσεις φόρτισης στις οποίες χρησιμοποιούνται οι  $F_d' = \gamma_F F_{rep}$  θα είναι απευθείας οι τιμές σχεδιασμού  $E_d$ .

<sup>1</sup> Ως τιμή σχεδιασμού δεδομένων ( $\alpha_d$ ) λαμβάνεται συνήθως η ονομαστική τους τιμή ( $\alpha_{nom}$ ), εκτός από τις περιπτώσεις όπου τυχόν απόκλιση είναι σημαντική για την αξιοπιστία του φορέα (π.χ. ανακρίβεια στην επιβολή της φόρτισης η οποία είναι σημαντική για τις επιρροές 2<sup>ης</sup> τάξης), οπότε  $\alpha_d = \alpha_{nom} \pm \Delta\alpha$ . [8], [12]

### 3.4.2 Τιμές σχεδιασμού ιδιοτήτων υλικών

Η τιμή σχεδιασμού  $X_d$  μιας ιδιότητας υλικού δίδεται γενικά από τη σχέση:

$$X_d = \eta \frac{X_k}{\gamma_m}, \quad (3.7)$$

όπου  $X_k$  η χαρακτηριστική τιμή της ιδιότητας,  $\eta$  η μέση τιμή του επονομαζόμενου συντελεστή μετατροπής μέσω του οποίου λαμβάνονται υπ' όψιν οι διαφορετικές συνθήκες του εργαστηρίου σε σχέση με την εφαρμογή σε πραγματικές συνθήκες [28] (φαινόμενα κλίμακας, επιρροές υγρασίας και θερμοκρασίας κ.λπ.) και  $\gamma_m$  ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας που αντισταθμίζει τυχόν δυσμενή απόκλιση της πραγματικής τιμής της  $X$  από τη  $X_k$ , καθώς και την αβεβαιότητα του συντελεστή  $\eta$  [12].

Συνάρτηση της  $X_d$  είναι η τιμή σχεδιασμού της αντίστασης ( $R_d$ ), η οποία εκφράζεται γενικά ως εξής:

$$R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R\{X_{d,i}; a_d\} = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R\left\{\eta_i \frac{X_{k,i}}{\gamma_{m,i}}; a_d\right\}, \quad (3.8)$$

όπου  $a_d$  η τιμή σχεδιασμού γεωμετρικών δεδομένων όπως π.χ. διαστάσεις μελών και  $\gamma_{Rd}$  ο επιμέρους συντελεστής λαμβάνει υπ' όψιν αβεβαιότητες στο προσομοίωμα υπολογισμού της αντίστασης [12].

Ομοίως με τους επιμέρους συντελεστές των δράσεων, οι  $\gamma_m$  και  $\gamma_{Rd}$  μπορούν να συνδυαστούν στην περίπτωση γραμμικής ανάλυσης σε έναν ενιαίο συντελεστή  $\gamma_M$  σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\gamma_{M,i} = \gamma_{m,i} * \gamma_{Rd}, \quad (3.9)$$

$$\text{έτσι ώστε } R_d = R\left\{\eta_i \frac{X_{k,i}}{\gamma_{M,i}}; a_d\right\}. \quad (3.10)$$

Άρα, για τον υπολογισμό της αντίστασης  $R_d$  ενός δομικού στοιχείου αρχικά προσδιορίζουμε τις χαρακτηριστικές τιμές των ιδιοτήτων των υλικών  $X_k$  από τα οποία αυτό αποτελείται. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στην κάθε τιμή τον αντίστοιχο επιμέρους συντελεστή  $\gamma_m$  και το συντελεστή μετατροπής  $\eta$  σύμφωνα με τη σχέση 3.7, έτσι ώστε να προκύψει η τιμή σχεδιασμού  $X_d$  της ιδιότητας. Με βάση αυτές τις τιμές σχεδιασμού και με δεδομένη γεωμετρία διατομών ( $a_d$ ) υπολογίζουμε την αντοχή (αντίσταση) του δομικού στοιχείου. Τέλος, εφαρμόζουμε σ' αυτήν την αντίσταση τον επιμέρους συντελεστή  $\gamma_{Rd}$  έτσι ώστε να προκύψει η τιμή σχεδιασμού  $R_d$  της ζητούμενης αντίστασης.

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε τον ενιαίο συντελεστή  $\gamma_M$  (σχέση 3.9) μαζί με το συντελεστή μετατροπής  $\eta$  στις χαρακτηριστικές τιμές  $X_k$ , οπότε προκύπτουν τιμές σχεδιασμού ιδιοτήτων  $X_d$ . Η αντίσταση που θα προκύψει με βάση αυτές τις τιμές είναι απευθείας η αντίσταση σχεδιασμού  $R_d$ .

Τέλος, για δομικά μέλη τα οποία αποτελούνται μόνο από ένα υλικό (π.χ. χάλυβα), η τιμή σχεδιασμού της αντίστασης  $R_d$  μπορεί να προκύψει απευθείας από τη σχέση  $R_d = R_k / \gamma_M$ , όπου  $R_k$  η χαρακτηριστική τιμή της αντίστασης που προκύπτει από τη σχετική ιδιότητα  $X_k$  του υλικού [12]. Για παράδειγμα, για ένα στοιχείο από δομικό χάλυβα S 235,  $X_k = f_y = 235 \text{ MPa}$ . Η αντίστοιχη χαρακτηριστική τιμή της αντίστασης του στοιχείου σε απλή

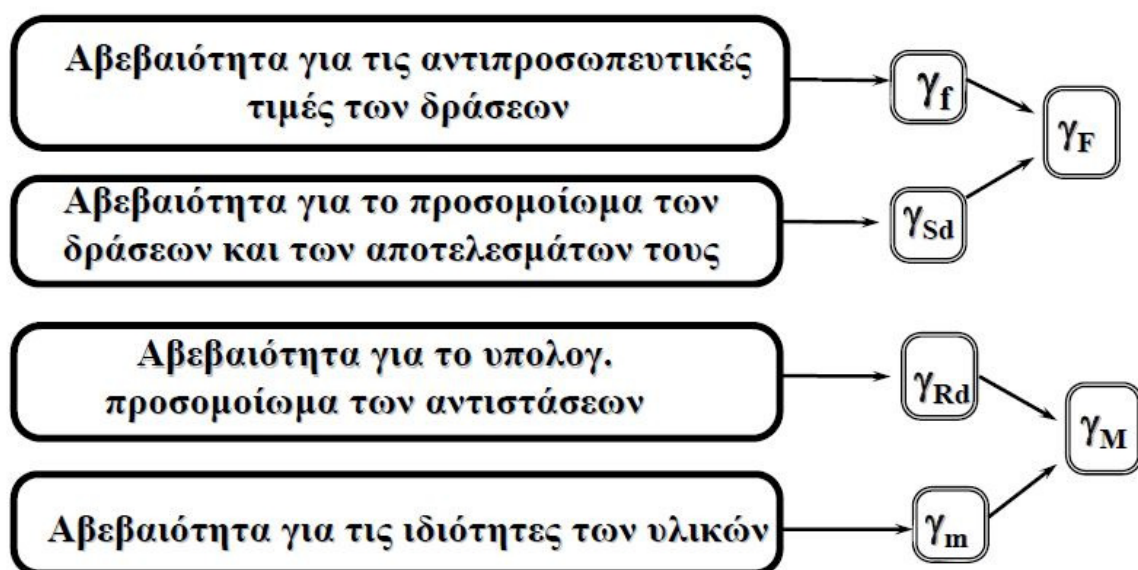
κάμψη χωρίς αξονική δύναμη ισούται για πλαστική ανάλυση με  $R_k = M_{pl,k} = W_{pl} \cdot f_y$ , όπου  $W_{pl}$  η πλαστική ροπή αντίστασης της διατομής του στοιχείου. Συνεπώς η ζητούμενη τιμή σχεδιασμού της αντίστασης είναι  $R_d = \frac{R_k}{\gamma_M} = \frac{M_{pl,k}}{\gamma_M} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_M} = M_{pl,Rd}$ , όπου  $\gamma_M$  ο αντίστοιχος συντελεστής ασφαλείας της αντίστασης.

Αφού υπολογίσουμε την τιμή σχεδιασμού της αντίστασης  $R_d$  με οποιονδήποτε από τους παραπάνω τρόπους, τη συγκρίνουμε με την τιμή σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων  $E_d$  και πρέπει να ικανοποιείται η βασική σχέση 3.1, διαφορετικά προχωράμε σε αλλαγή διατομών ή προσομοιώματος και ακολουθούμε πάλι την ίδια διαδικασία για τον υπολογισμό της  $R_d$ , επαναλαμβάνοντας μέχρι να ικανοποιείται η ανίσωση 3.1.

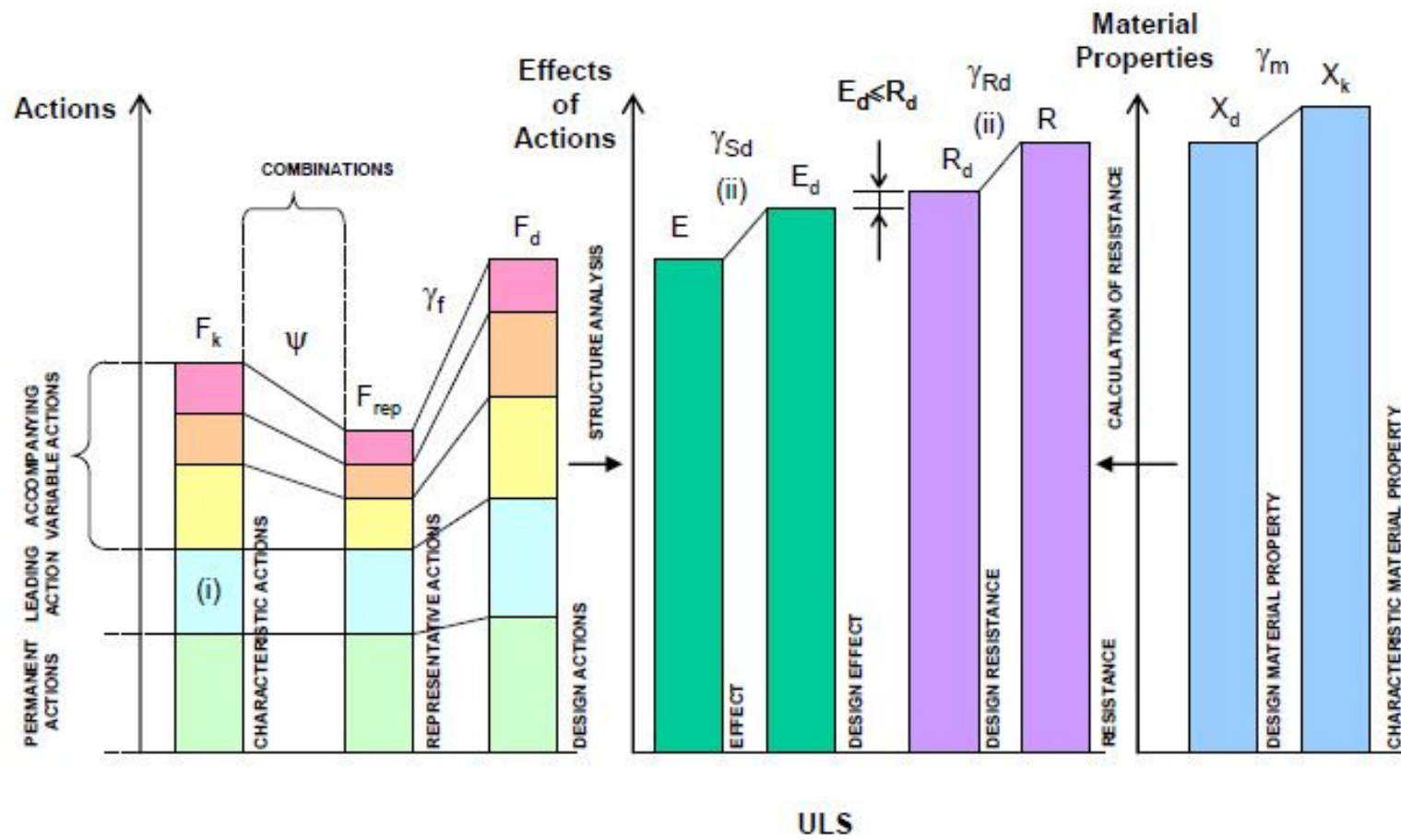
### 3.5 Συμπεράσματα

Συνεπώς, για τον προσδιορισμό των τιμών σχεδιασμού των αποτελεσμάτων δράσεων χρησιμοποιούμε δύο επιμέρους συντελεστές, έναν που εφαρμόζεται στις δράσεις ( $\gamma_f$ ) και έναν στα αποτελέσματά τους ( $\gamma_{sd}$ ). Ομοίως χρησιμοποιούμε δύο επιμέρους συντελεστές για τον προσδιορισμό των τιμών σχεδιασμού των αντιστάσεων ( $\gamma_m$ ), έναν που εφαρμόζεται στις ιδιότητες των υλικών και έναν στις αντιστάσεις ( $\gamma_{Rd}$ ) [13]. Τις δράσεις και τα αποτελέσματά τους τα πολλαπλασιάζουμε με τους αντίστοιχους συντελεστές ασφαλείας ενώ τις ιδιότητες υλικών και τις αντιστάσεις τις διαιρούμε με τους αντίστοιχους συντελεστές ασφαλείας. Στόχος είναι η υπέρ της ασφαλείας μεγιστοποίηση των τιμών των δράσεων και ελαχιστοποίηση των τιμών των αντιστάσεων, έτσι ώστε να λάβουμε υπ' όψιν ακραίες περιπτώσεις που υπάρχει πιθανότητα να προκύψουν κατά την κατασκευή ή τη διάρκεια ζωής μιας κατασκευής.

Εποπτικά η σχέση μεταξύ των επιμέρους συντελεστών φαίνεται στο σχήμα C3 του Παραρτήματος C του EN1990 [12] (σχήμα 3.5). Στόχος μας είναι να ικανοποιείται η βασική σχέση ελέγχου 3.1 ( $E_d \leq R_d$ ), έτσι ώστε η κατασκευή μας να είναι ικανοποιητικά ασφαλής. Η διαδικασία σχεδιασμού για την οριακή κατάσταση τύπου STR/GEO που περιγράφηκε στο παρόν κεφάλαιο απεικονίζεται εποπτικά στο σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.5: Σχέση μεταξύ επιμέρους συντελεστών ασφαλείας [7], [12]



Σχήμα 3.6: Διαδικασία σχεδιασμού για την οριακή κατάσταση αστοχίας τύπου STR/GEO [13]



## 4 Ποσοτική εκτίμηση της αξιοπιστίας στις κατασκευές

### 4.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, προκύπτουν πολλές αβεβαιότητες όσον αφορά τις κατασκευές, τόσο κατά τη μελέτη και κατασκευή όσο και κατά τη χρήση τους. Ενδεικτικά μερικές από αυτές είναι η τυχαιότητα των διαφόρων δράσεων, ιδιοτήτων υλικών, γεωμετρικών δεδομένων κ.λπ., ασάφεια όσον αφορά τις απαιτήσεις λειτουργίας, σοβαρά ανθρώπινα σφάλματα κατά τη μελέτη ή και τη χρήση κ. ά. Αυτές οι αβεβαιότητες αντισταθμίζονται με την απαίτηση συγκεκριμένου επιπέδου αξιοπιστίας για κάθε κατασκευή. [22]

Στο ISO 2394 [18] ως αξιοπιστία ορίζεται «η ικανότητα μιας κατασκευής να ανταπεξέλθει σε συγκεκριμένες απαιτήσεις και υπό καθορισμένες συνθήκες κατά τη διάρκεια της προσδοκώμενης ζωής της, για την οποία σχεδιάστηκε». Ποσοτική εκτίμηση της αξιοπιστίας μπορεί να θεωρηθεί η συμπληρωματική της πιθανότητας αστοχίας ( $P_f$ ), δηλαδή μία κατασκευή είναι αξιόπιστη με πιθανότητα  $P_s = 1 - P_f$ . [22]

Άρα απόλυτη αξιοπιστία, υπό την έννοια ότι μία κατασκευή δεν πρόκειται να αστοχήσει ποτέ, ουσιαστικά δεν υπάρχει. Δηλαδή δεχόμαστε ότι κάθε αξιόπιστη κατασκευή έχει μία μικρή πιθανότητα αστοχίας, διαφορετικά δε θα ήταν δυνατή η υλοποίησή της ή θα ήταν απαγορευτικά αντιοικονομική. [22]

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται οδηγίες για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας μιας κατασκευής, ανάλογα με το απαιτούμενο επίπεδο αξιοπιστίας της. Με βάση αυτήν την πιθανότητα αστοχίας ( $P_f$ ) (και κατά συνέπεια με βάση το απαιτούμενο επίπεδο αξιοπιστίας) μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές σχεδιασμού ή εναλλακτικά οι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας που τελικά θα χρησιμοποιήσει ένας μηχανικός κατά το σχεδιασμό ενός έργου.

### 4.2 Κατηγορίες επιπτώσεων

Στο Παράρτημα Β του EN1990 [12] γίνεται διαχωρισμός των διαφόρων κατασκευών ανάλογα με τις οικονομικές, κοινωνικές και περιβαλλοντικές επιπτώσεις αλλά και τις επιπτώσεις σε απώλεια ανθρώπινων ζωών που θα έχει τυχόν αστοχία τους. Ορίζονται τρεις κατηγορίες επιπτώσεων (consequences classes-CC), όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.

Σε αντιστοιχία με τις κατηγορίες επιπτώσεων ορίζονται οι κατηγορίες συνιστώμενης αξιοπιστίας που προτείνεται να έχουν οι κατασκευές κάθε κατηγορίας επιπτώσεων. Έχουμε λοιπόν τρεις κατηγορίες αξιοπιστίας (reliability classes-RC1, RC2 και RC3), για καθεμία από τις οποίες ορίζεται, όπως θα δούμε και παρακάτω, διαφορετική απαιτούμενη πιθανότητα αστοχίας (προφανώς μικρότερη για την RC3 και μεγαλύτερη για την RC1) [12].

Πίνακας 4.1: Κατηγορίες επιπτώσεων [12]

Κατηγορία επιπτώσεων	Περιγραφή	Παραδείγματα κτιρίων που εμπίπτουν στην κατηγορία
CC3	Μεγάλες επιπτώσεις σε ανθρώπινες ζωές ή πολύ μεγάλες οικονομικές, κοινωνικές ή περιβαλλοντικές επιπτώσεις	Μνημειώδη κτίρια ή δημόσια κτίρια των οποίων η αστοχία θα έχει σοβαρές συνέπειες (π.χ. αίθουσες συναυλιών)
CC2	Μέτριες επιπτώσεις σε ανθρώπινες ζωές ή σημαντικές οικονομικές, κοινωνικές ή περιβαλλοντικές επιπτώσεις	Συνήθη κτίρια, όπως κατοικίες ή κτίρια γραφείων
CC1	Χαμηλές επιπτώσεις σε ανθρώπινες ζωές ή μικρές ή αμελητέες οικονομικές, κοινωνικές ή περιβαλλοντικές επιπτώσεις	Θερμοκήπια ή αγροτικά κτίρια στα οποία δεν εισέρχονται συνήθως άνθρωποι (π.χ. αποθήκες)

### 4.3 Συνάρτηση οριακής κατάστασης

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, θεμελιώδης ανίσωση ελέγχου αστοχίας είναι η 3.1:  $E_d \leq R_d$ , όπου  $E_d$  η τιμή σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων και  $R_d$  η τιμή σχεδιασμού των αντιστάσεων. Δηλαδή θεωρείται ότι εάν αυτή η σχέση δεν ικανοποιείται, επέρχεται αστοχία [23]. Από αυτή προκύπτει η παρακάτω συνάρτηση, η οποία αποτελεί τη ζώνη ασφαλείας και καλείται συνάρτηση οριακής κατάστασης:

$$Z(X) = R_d - E_d \quad (4.1)$$

Η εξίσωση  $Z(X)=R_d-E_d=0$  αποτελεί το όριο ασφαλείας και παριστάνει μία ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο. [22], [23], [24]

Από τα παραπάνω είναι προφανές πως για  $Z(X) \geq 0$  η κατασκευή θεωρείται ότι δεν αστοχεί, ενώ για  $Z(X) < 0$  επέρχεται αστοχία. Άρα η πιθανότητα αστοχίας για τις περισσότερες οριακές καταστάσεις (STR/GEO, δείτε και παράγραφο 3.1) μπορεί να οριστεί ως εξής [22], [23], [24]:

$$P_f = P\{Z(X) < 0\} = \Phi_Z(0), \quad (4.2)$$

όπου  $\Phi_Z$  η συνάρτηση κατανομής της συνάρτησης οριακής κατάστασης  $Z$ .

Στην περίπτωση που οι μεταβλητές  $R_d$  και  $E_d$  κατανέμονται κανονικά, οι παράμετροι της  $Z$  δίνονται σε συνάρτηση με τις παραμέτρους των  $R_d$  και  $E_d$  από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_E \quad (4.3)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_E^2, \quad (4.4)$$

Προϋπόθεση για να ισχύουν αυτές οι σχέσεις είναι οι μεταβλητές  $R_d$  και  $E_d$  να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, υπόθεση η οποία δεν αντιστοιχεί πάντα στην πραγματικότητα και άρα αποτελεί προσέγγιση, σύμφωνα και με τους Holický M. and Vrouwenvelder T. [23]

Για να διευκολυνθούμε στον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας της σχέσης 4.2 συνήθως χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό 2.23  $\left( U = \frac{X - \mu}{\sigma} \right)$  στη συνάρτηση οριακής κατάστασης  $Z$ , έτσι ώστε η καινούργια μεταβλητή  $U$  να ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Άρα για  $Z=0$  έχουμε σύμφωνα με τον 2.23:

$$u_0 = \frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z} = -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (4.5)$$

Έτσι η πιθανότητα αστοχίας  $P_f$  δίνεται τελικά από τη σχέση:

$$P_f = P\{Z(X) < 0\} = \Phi_Z(0) = \Phi_U(u_0), \quad (4.6)$$

όπου  $\Phi_Z$  η συνάρτηση κατανομής της συνάρτησης  $Z$  και  $\Phi_U$  η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής  $N(0, 1)$  [23]. Τα παραπάνω φαίνονται εποπτικά στο σχήμα 4.1.

#### 4.4 Συντελεστής αξιοπιστίας $\beta$

Ένα εναλλακτικό συμβατικό μέτρο αξιοπιστίας είναι ο λεγόμενος δείκτης αξιοπιστίας  $\beta$ , ο οποίος ορίζεται έτσι ώστε:

$$P_f = \Phi_U(-\beta), \quad (4.7)$$

όπου  $\Phi_U$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Δηλαδή:

$$\beta = -\Phi_U^{-1}(P_f) = \Phi_U^{-1}(P_s), \quad (4.8)$$

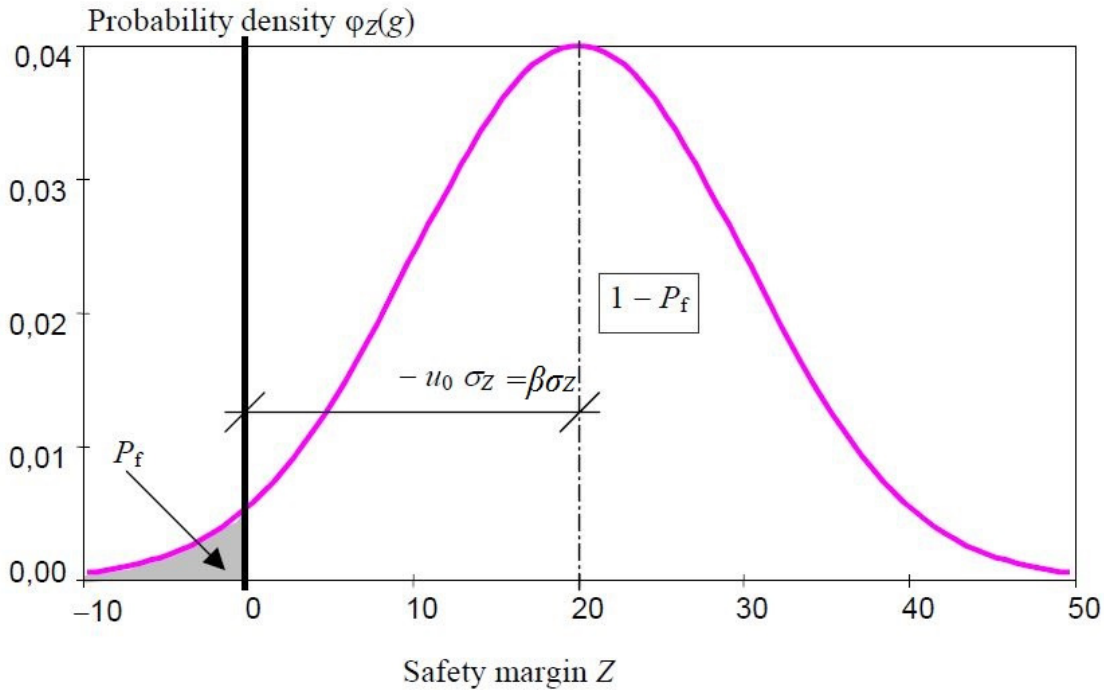
όπου  $P_s$  η πιθανότητα επιβίωσης, δηλαδή η συμπληρωματική της πιθανότητας αστοχίας ( $P_f=1-P_s$ ).

Εάν η συνάρτηση οριακής κατάστασης  $Z$  κατανέμεται κανονικά, αλλά και εάν κανονικοποιήσουμε τη συνάρτηση οριακής κατάστασης  $Z$ , τότε από τις σχέσεις 4.5, 4.6 και 4.7 προκύπτει ότι:

$$\beta = -u_0 = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (4.9)$$

Επιπλέον, εάν ισχύουν και οι προϋποθέσεις των σχέσεων 4.3 και 4.4, τότε:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \quad (4.10)$$



Σχήμα 4.1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας συνάρτησης οριακής κατάστασης  $Z$  (ή  $g$  κατά το EN1990 [12]) [23]

Επίσης, από τη σχέση 4.9 και το Σχήμα 4.1 φαίνεται ότι, εάν η  $Z$  κατανέμεται κανονικά, ο δείκτης αξιοπιστίας  $\beta$  δίνει την απόσταση της μέσης τιμής  $\mu_Z$  από την αρχή των αξόνων σε μονάδες τυπικής απόκλισης  $\sigma_Z$  [12], [20], [23], [24] και συνεπώς:

$$P_f = P(Z \leq 0) = P(Z \leq \mu_Z - \beta\sigma_Z) \quad [12]. \quad (4.11)$$

Εάν η  $Z$  ακολουθεί κάποια άλλη κατανομή, ο  $\beta$  αποτελεί ένα συμβατικό μέτρο της αξιοπιστίας  $P_s=1-P_f$  [12]. Δηλαδή δεν εκφράζεται απαραίτητα σαν συνάρτηση των χαρακτηριστικών του πληθυσμού αλλά αν έχουμε δύο κατασκευές  $A$  και  $B$  με  $\beta_A > \beta_B$ , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε πως η κατασκευή  $A$  είναι πιο «αξιόπιστη» από την κατασκευή  $B$ , δηλαδή έχει μικρότερη πιθανότητα αστοχίας. Βέβαια μπορούμε σχεδόν πάντα να κανονικοποιήσουμε τις μεταβλητές μας  $R_d$  και  $E_d$  σύμφωνα με το μετασχηματισμό 2.23 [27], και έτσι η προκύπτουσα συνάρτηση  $Z$  θα ακολουθεί κανονική κατανομή, οπότε και θα ισχύουν οι ιδιότητες του  $\beta$  που αναφέρθηκαν παραπάνω (σχέσεις 4.9, 4.10 και σχήμα 4.1) για κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές  $R$  και  $E$  και συναρτήσεις οριακής κατάστασης  $Z$ .

Διάφορες τιμές του  $\beta$  και οι αντίστοιχες προκύπτουσες πιθανότητες αστοχίας  $P_f$  φαίνονται στον πίνακα C1 του EN1990 [12] (πίνακας 4.2):

Πίνακας 4.2: Διάφορες τιμές του  $\beta$  και αντίστοιχες πιθανότητες αστοχίας  $P_f$  [12]

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1,28	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20

#### 4.4.1 Επιλογή κατάλληλου δείκτη αξιοπιστίας $\beta$ ανάλογα με την περίοδο αναφοράς

Πώς όμως επιλέγουμε την κατάλληλη τιμή του δείκτη αξιοπιστίας; Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω (παρ. 4.2), το πόσο «αξιόπιστη» επιλέγουμε να είναι η κατασκευή μας εξαρτάται από τις κοινωνικές και οικονομικές συνέπειες που ενδέχεται να έχει η αστοχία της [22]. Για παράδειγμα, για κατηγορία επιπτώσεων CC3 (και άρα για κατηγορία αξιοπιστίας RC3) θα θεωρήσουμε μικρότερη ανεκτή πιθανότητα αστοχίας (και άρα μεγαλύτερο δείκτη αξιοπιστίας  $\beta$ ) απ' ό,τι για κατηγορία επιπτώσεων CC2 (και άρα κατηγορία αξιοπιστίας RC2), μιας και οι αναμενόμενες συνέπειες είναι μεγαλύτερες στην πρώτη περίπτωση και άρα είναι πιο επιτακτική η ανάγκη να μην την αφήσουμε να συμβεί.

Όμως, δεν είναι δυνατό να κατατάξουμε τις κατασκευές ανάλογα με την αξιοπιστία τους κρίνοντας μόνο από την τιμή της πιθανότητας αστοχίας της καθεμίας, αλλά αυτή η πιθανότητα θα πρέπει να αναφέρεται και σε κάποια χρονική περίοδο. Για παράδειγμα, η λογική λέει πως μία κατασκευή που έχει πιθανότητα αστοχίας  $10^{-5}$  στα 50 χρόνια είναι πιο αξιόπιστη από μία άλλη η οποία έχει την ίδια πιθανότητα αστοχίας σε ένα χρόνο. Αυτή η χρονική περίοδος ονομάζεται περίοδος αναφοράς και πολλές φορές (αλλά όχι πάντα) ταυτίζεται με τη διάρκεια ζωής για την οποία σχεδιάζεται μία κατασκευή<sup>2</sup>. Άρα θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές τιμές του  $\beta$  για το ίδιο επίπεδο αξιοπιστίας αλλά διαφορετικές περιόδους αναφοράς [22], [24]. Ενδεικτικές διάρκειες ζωής σχεδιασμού για διάφορα είδη κατασκευών παρατίθενται στον πίνακα 2.1 του EN1990 [12] (πίνακας 4.3). Προτεινόμενες ελάχιστες τιμές του  $\beta$  για περίοδο αναφοράς 1 χρόνο και 50 χρόνια<sup>3</sup> και για έλεγχο σε οριακές καταστάσεις αστοχίας ανάλογα με την κατηγορία αξιοπιστίας της κατασκευής δίνονται στον πίνακα B2 του EN1990 [12] (πίνακας 4.4). Πρέπει να σημειωθεί πως οι τιμές του  $\beta$  που αναφέρονται στον πίνακα 4.4 για περίοδο αναφοράς 1 και 50 χρόνια αντιστοιχούν στο ίδιο επίπεδο αξιοπιστίας για κάθε κατηγορία αξιοπιστίας. Τέλος, τιμές του δείκτη αξιοπιστίας για διάφορες οριακές καταστάσεις, κατηγορία αξιοπιστίας RC2 και περίοδο αναφοράς 1 έτος και 50 έτη δίνονται στον πίνακα C2 του EN 1990 [12] (πίνακας 4.5).

Πίνακας 4.3: Ενδεικτικές διάρκειες ζωής σχεδιασμού [12], [3], [22]

Κατηγορία διάρκειας ζωής σχεδιασμού	Ενδεικτική διάρκεια ζωής σχεδιασμού (έτη)	Παραδείγματα κατασκευών
1	10	Προσωρινές κατασκευές*
2	10 με 25	Δομικά μέλη τα οποία μπορούν να αντικατασταθούν (π.χ. εφέδρανα)
3	15 με 30	Αγροτικές και παρεμφερείς κατασκευές
4	50	Κτίρια και παρεμφερείς κατασκευές
5	100	Μνημειακά κτίρια, γέφυρες και άλλα τεχνικά έργα

\*Κτίρια ή δομικά στοιχεία τα οποία μπορούν να αποσυναρμολογηθούν προκειμένου να επαναχρησιμοποιηθούν δε θα πρέπει να θεωρούνται προσωρινά

<sup>2</sup> Ως διάρκεια ζωής σχεδιασμού ( $T_d$ ) ορίζεται στα [22] και [24] «η χρονική περίοδος για την οποία μία κατασκευή ή μέρος της μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σκοπό για τον οποίο σχεδιάστηκε έχοντας υποστεί κάποια αναμενόμενη συντήρηση αλλά χωρίς να απαιτηθεί εκτεταμένη επισκευή».

<sup>3</sup> 50 χρόνια είναι η διάρκεια ζωής για την οποία σχεδιάζονται τα συνήθη κτίρια.

Πίνακας 4.4: Συνιστώμενες ελάχιστες τιμές του δείκτη αξιοπιστίας  $\beta$  (για οριακές καταστάσεις αστοχίας) [12]

Κατηγορία αξιοπιστίας	Ελάχιστες τιμές του $\beta$	
	Περίοδος αναφοράς 1 έτος	Περίοδος αναφοράς 50 έτη
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Πίνακας 4.5: Τιμές του δείκτη αξιοπιστίας  $\beta$  για κατηγορία αξιοπιστίας RC2 [12]

Οριακή κατάσταση	$\beta$	
	Περίοδος αναφοράς 1 έτος	Περίοδος αναφοράς 50 έτη
Αστοχίας	4,7	3,8
Κόπωσης	1,5 έως 3,8	
Λειτουργικότητας (μη αναστρέψιμες)	2,9	1,5

Πώς όμως επιλέγουμε ποια περίοδο αναφοράς θα χρησιμοποιήσουμε; Γενικά, οι υπάρχοντες κανονισμοί δεν αναφέρουν σαφώς πώς σχετίζεται η περίοδος αναφοράς με τη διάρκεια ζωής σχεδιασμού μιας κατασκευής. Παρ' όλ' αυτά, οι M. Holický and J. Marková (2005) αναφέρουν στο [24] πως στο ISO 13822 [19] υπονοείται ότι ως περίοδος αναφοράς για μία νέα κατασκευή μπορεί να ληφθεί γενικά η διάρκεια ζωής σχεδιασμού της,  $T_d$ .

Όμως, μπορούμε εν γένει να χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς μας και κάποια άλλη, εναλλακτική περίοδο αναφοράς (έστω  $T_a$ ), για παράδειγμα σε περιπτώσεις όπου οι μεταβλητές μας είναι χρονικά μεταβαλλόμενες και έχουμε δεδομένα μόνο για συγκεκριμένη χρονική περίοδο  $T_a$ , οπότε το να λάβουμε αυτήν τη χρονική περίοδο ως περίοδο αναφοράς δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει επειδή γι' αυτήν την περίοδο γνωρίζουμε με ακρίβεια τις στατιστικές παραμέτρους της μεταβλητής, αλλά για ολόκληρη τη διάρκεια ζωής δεν έχουμε εικόνα. Θα μπορούσαμε χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους να ανάξουμε αυτές τις παραμέτρους σε ολόκληρη τη διάρκεια ζωής, αυτό όμως θα δημιουργούσε επιπλέον αβεβαιότητες.

Για συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας, η προσεγγιστική σχέση που συσχετίζει την πιθανότητα αστοχίας  $p_n$  σε μια ορισμένη περίοδο αναφοράς  $T_n$  (συχνά  $T_n=T_d$  οπότε  $p_n=p_d$ ) με την πιθανότητα αστοχίας  $p_1$  σε μία εναλλακτική περίοδο αναφοράς  $T_1$  (συχνά  $T_1=T_a$  οπότε  $p_1=p_a$ ) είναι η εξής:

$$p_n = 1 - (1 - p_1)^n, \quad (4.12)$$

όπου  $n=T_n/T_1$ . Για πολύ μικρές πιθανότητες η σχέση 4.12 απλοποιείται περαιτέρω ως εξής:

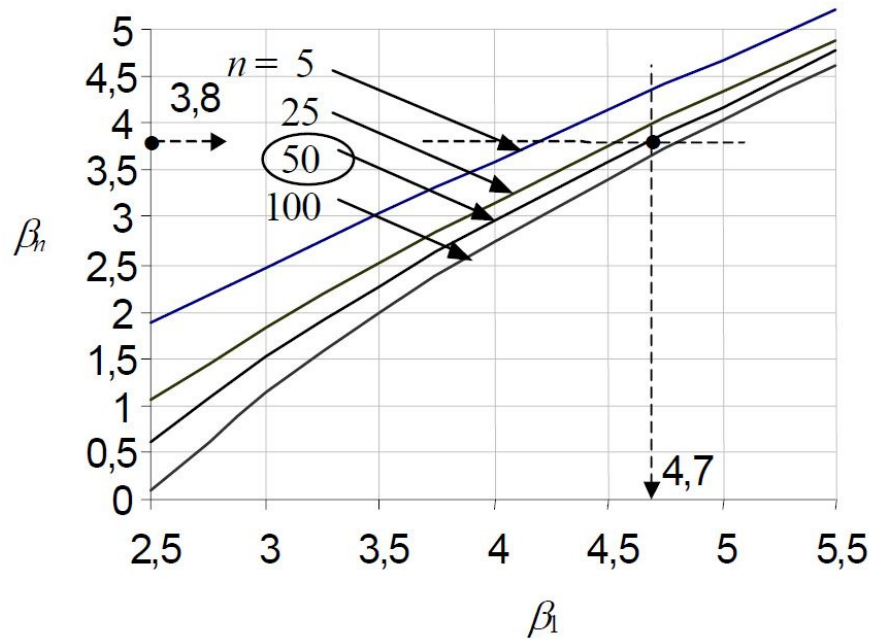
$$p_n = \frac{p_1 T_n}{T_1} \quad (4.13)$$

Ο λόγος  $n$  δεν είναι απαραίτητο να είναι ακέραιος, συχνά όμως η περίοδος  $T_I$  ισούται με 1 έτος, οπότε και ο  $n$  ισούται με τον αριθμό των ετών της περιόδου αναφοράς. [24]

Ισοδύναμη της σχέσης 4.12 προκύπτει η σχέση 4.14, εάν εκφράσουμε τις πιθανότητες  $p_I$  και  $p_n$  συναρτήσει των δεικτών  $\beta_I$  και  $\beta_n$  αντίστοιχα ( $p_I = \Phi\{-\beta_I\}$  και  $p_n = \Phi\{-\beta_n\}$ ):

$$\Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_I)]^n, \quad (4.14)$$

όπου  $\Phi$  η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής. Γραφικά η σχέση 4.14 φαίνεται για διάφορες τιμές του  $n$  στο σχήμα 4.2. [12], [24]



Σχήμα 4.2: Δείκτης αξιοπιστίας  $\beta_n$  συναρτήσει του  $\beta_I$  [24]

Εάν  $T_I=1$  έτος, τότε από το σχήμα 4.2 μπορούμε να εξάγουμε την πιθανότητα αστοχίας  $p_d=p_n$  για μια δεδομένη διάρκεια ζωής σχεδιασμού  $T_n=T_d$  ως εξής: Έστω ότι έχουμε κατηγορία αξιοπιστίας RC2 και δεδομένα μεταβλητών για  $T_I=1$  έτος. Για οριακές καταστάσεις αστοχίας και περίοδο αναφοράς 1 έτος βλέπουμε από τον πίνακα 4.4 ότι  $\beta_I=4,7$ . Από αυτήν την τιμή του  $\beta$  προκύπτει πιθανότητα αστοχίας στο 1 έτος  $p_I = \Phi(-\beta_I) = \Phi(-4,7) = 1,3 \times 10^{-6}$ . Στη διάρκεια ζωής του έργου  $T_n=T_d$  του έργου η αντίστοιχη πιθανότητα αστοχίας θα είναι  $p_n = \Phi(-\beta_n)$ , όπου  $\Phi$  η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής. Άρα εάν υποθέσουμε διάρκεια ζωής του  $T_n = 50$  χρόνια, τότε από το σχήμα 4.2 προκύπτει  $\beta_n=3,8$  και άρα πιθανότητα αστοχίας  $p_n = \Phi(-\beta_n) = \Phi(-3,8) = 7,2 \times 10^{-5}$  στα 50 χρόνια. Ομοίως, αν υποθέσουμε διάρκεια ζωής  $T_n=100$  χρόνια, από το σχήμα 4.2 λαμβάνουμε  $\beta_n=3,7$  και άρα πιθανότητα αστοχίας  $p_n = \Phi(-\beta_n) = \Phi(-3,7) = 1,1 \times 10^{-4}$  στα 100 χρόνια, δηλαδή περίπου 1 στις 10.000. Οι πιθανότητες αστοχίας  $1,3 \times 10^{-6}$  στο 1 έτος,  $7,2 \times 10^{-5}$  στα 50 έτη και  $1,1 \times 10^{-4}$  στα 100 έτη αντιστοιχούν στο ίδιο επίπεδο αξιοπιστίας.

Άρα, εάν έχουμε δεδομένα για τις μεταβλητές μας για μία συγκεκριμένη περίοδο αναφοράς, μπορούμε, χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα και με την επιλογή κατάλληλου δείκτη  $\beta$  για τη συγκεκριμένη περίοδο αναφοράς, να επιτύχουμε ίδιο επίπεδο αξιοπιστίας

με το αν λαμβάναμε ως περίοδο αναφοράς τη διάρκεια ζωής σχεδιασμού. Όπως θα δούμε και παρακάτω (παράγραφοι 4.6, 5.3), με χρήση του δείκτη  $\beta$  υπολογίζουμε τις τιμές σχεδιασμού των μεταβλητών μας, οι οποίες αντιστοιχούν σε συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας και εν γένει διαφέρουν ανάλογα με την περίοδο αναφοράς. Εξυπακούεται βέβαια πως οι τιμές σχεδιασμού όλων των μεταβλητών θα πρέπει να αναφέρονται στην ίδια περίοδο αναφοράς. [24]

## 4.5 Σημείο σχεδιασμού P

Η διαδικασία σχεδιασμού, το όριο αστοχίας και ο συντελεστής  $\beta$  φαίνονται γραφικά στο Σχήμα 4.3, όπου απεικονίζεται η γραφική παράσταση του ορίου αστοχίας με οριζόντιο άξονα την αντίσταση  $R$  σε όρους της τυπικής της απόκλισης  $\sigma_R$  και κατακόρυφο άξονα τα αποτελέσματα των δράσεων  $E$  σε όρους της τυπικής της απόκλισης  $\sigma_E$ . Οι μεταβλητές  $E$  και  $R$  θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους (παρ' όλο που αυτό μπορεί να μην ανταποκρίνεται απόλυτα στην πραγματικότητα) και κανονικά κατανομημένες. Εάν οι  $E$  και  $R$  δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, συνήθως μπορούν να μετασχηματιστούν σύμφωνα με τη σχέση 2.23  $\left( U = \frac{X - \mu}{\sigma} \right)$ , ώστε η αντίστοιχη τυποποιημένη μεταβλητή να ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή [27].

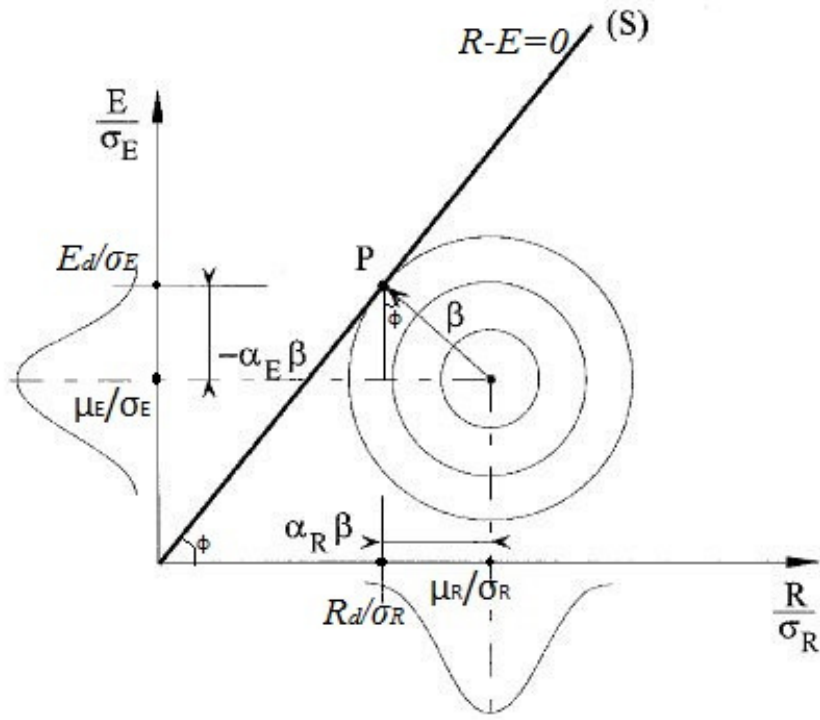
Η γραφική παράσταση του ορίου αστοχίας  $R-E=0$  είναι μία ευθεία γραμμή που περνάει από την αρχή των αξόνων. Σε όρους  $\frac{R}{\sigma_R}$  και  $\frac{E}{\sigma_E}$  η εξίσωση του ορίου αστοχίας είναι προφανώς:

$$\frac{E}{\sigma_E} = \frac{\sigma_R}{\sigma_E} * \frac{R}{\sigma_R} \quad (4.15)$$

Αν  $\sigma_E = \sigma_R$  η ευθεία αυτή διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι άξονες. Η ασφαλής περιοχή είναι αυτή για την οποία ισχύει  $R > E$ , δηλαδή η περιοχή κάτω από την ευθεία που παριστάνει το όριο αστοχίας, ενώ η περιοχή αστοχίας, όπου  $R < E$  βρίσκεται πάνω από την ευθεία του ορίου αστοχίας [27].

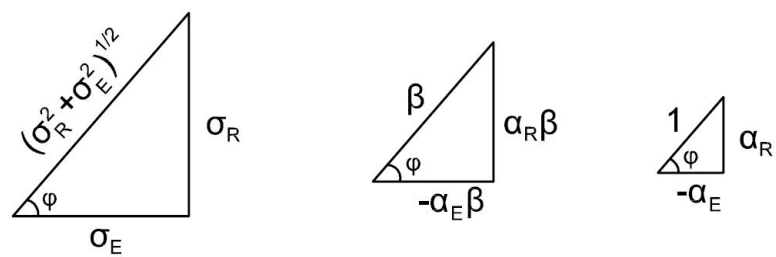
Άρα οι συντεταγμένες κάθε σημείου πάνω στην ευθεία του ορίου αστοχίας μπορούν να αποτελέσουν τις τιμές σχεδιασμού  $E_d$  και  $R_d$ . Όμως πιο πιθανό σημείο αστοχίας είναι αυτό που βρίσκεται πιο κοντά στο μέσο της περιοχής που καταλαμβάνουν τα σημεία  $\left( \frac{R}{\sigma_R}, \frac{E}{\sigma_E} \right)$ , δηλαδή στο σημείο  $\left( \frac{\mu_R}{\sigma_R}, \frac{\mu_E}{\sigma_E} \right)$ . Δηλαδή ο συνδυασμός αυτός των  $R$  και  $E$  είναι πιο πιθανό να προκαλέσει την αστοχία [20], [27]. Το σημείο αυτό καλείται σημείο αστοχίας ( $P$ ). Η απόσταση του σημείου αστοχίας  $P$  από το σημείο  $\left( \frac{\mu_R}{\sigma_R}, \frac{\mu_E}{\sigma_E} \right)$  ισούται με  $\beta$ , μιας και αποτελεί την απόσταση της μέσης τιμής της συνάρτησης  $Z=R-E$  από την ευθεία αστοχίας  $Z=R-E=0$  (σχήματα 4.1, 4.3), [12].





(S) failure boundary  $g = R - E = 0$   
 P design point

Σχήμα 4.3: Σημείο σχεδιασμού και δείκτης αξιοπιστίας  $\beta$  [12]



Σχήμα 4.4: Συνημίτονα κατεύθυνσης και κλίση ευθείας ορίου αστοχίας

## 4.6 Παράγοντες ευαισθησίας $\alpha_R$ και $\alpha_E$

Εκτός από την πιθανότητα αστοχίας  $P_f$  χρήσιμο θα ήταν να ορίσουμε τις πιθανότητες  $P(E > E_d)$  (δηλαδή την πιθανότητα να προκύψει κάποιο αποτέλεσμα δράσης μεγαλύτερο από το μέγιστο που έχουμε λάβει υπ' όψιν στο σχεδιασμό) και  $P(R < R_d)$  (δηλαδή την πιθανότητα κάποια αντίσταση να προκύψει μικρότερη από την ελάχιστη που έχουμε λάβει υπ' όψιν στο σχεδιασμό) συναρτήσει του δείκτη  $\beta$ . Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί εάν βρίσκαμε δύο συναρτήσεις του  $\beta$ , μία για τα για τα αποτελέσματα των δράσεων  $f_E(\beta)$  και μία για τις αντιστάσεις  $f_R(\beta)$  έτσι ώστε:  $P(E > E_d) = 1 - \Phi_E(E_d) = \Phi_U[f_E(\beta)]$  και  $P(R < R_d) = \Phi_R(R_d) = \Phi_U[f_R(\beta)]$ , όπου  $\Phi_R$  και  $\Phi_E$  οι συνήθως άγνωστες συναρτήσεις κατανομής των αντιστάσεων και των αποτελεσμάτων των δράσεων αντίστοιχα και  $\Phi_U$  η γνωστή συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. Έτσι θα έχουμε εικόνα και για την αβεβαιότητα των τιμών σχεδιασμού των μεταβλητών μας ανάλογα με το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας, ξεπερνώντας το πρόβλημα ότι πολλές φορές οι κατανομές των μεταβλητών αυτών δεν είναι γνωστές.

Για να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση  $\Phi_U$  λοιπόν αντί των  $\Phi_R$  και  $\Phi_E$  πρέπει να κανονικοποιήσουμε τις μεταβλητές μας σύμφωνα με το γνωστό μετασχηματισμό 2.23  $\left( U = \frac{X - \mu}{\sigma} \right)$ . Έτσι προκύπτουν αντίστοιχα  $U_{R_d} = \frac{R_d - \mu_R}{\sigma_R}$  και  $U_{E_d} = \frac{E_d - \mu_E}{\sigma_E}$ . Αν

τώρα εκφράσουμε σε όρους  $\beta$  την απόσταση της μέσης τιμής  $\frac{\mu_R}{\sigma_R}$  από την τιμή σχεδιασμού

$\frac{R_d}{\sigma_R}$  και ομοίως την απόσταση της μέσης τιμής  $\frac{\mu_E}{\sigma_E}$  από την τιμή σχεδιασμού  $\frac{E_d}{\sigma_E}$ , τότε

προκύπτουν δύο νέοι όροι,  $\alpha_R$  και  $\alpha_E$  αντίστοιχα, έτσι ώστε (δείτε και σχήμα 4.3):

$$\frac{\mu_R}{\sigma_R} - \frac{R_d}{\sigma_R} = \alpha_R \beta = -U_{R_d}, \quad \alpha_R > 0 \text{ και} \quad (4.16)$$

$$\frac{E_d}{\sigma_E} - \frac{\mu_E}{\sigma_E} = -\alpha_E \beta = U_{E_d}, \quad \alpha_E < 0 \quad (4.17)$$

$$\text{Άρα } P(R < R_d) = \Phi_U(U_{R_d}) = \Phi_U(-\alpha_R \beta) \text{ και} \quad (4.18)$$

$$P(E > E_d) = 1 - P(E < E_d) = 1 - \Phi_U(U_{E_d}) = \Phi_U(-U_{E_d}) = \Phi_U(\alpha_E \beta) \quad (4.19)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι τιμές σχεδιασμού  $R_d$  και  $E_d$  συναρτήσει των  $\alpha_R$  και  $\alpha_E$  αντίστοιχα:

$$R_d = \mu_R - \alpha_R \beta \sigma_R \text{ και} \quad (4.20)$$

$$E_d = \mu_E - \alpha_E \beta \sigma_E \quad (4.21)$$

Τα αρνητικά πρόσημα στις παραπάνω σχέσεις αποτελούν σύμβαση, μιας και  $\alpha_E < 0$  για δυσμενείς δράσεις ενώ  $\alpha_R > 0$  (με  $|\alpha| \leq 1$ ).

Άρα οι συντελεστές  $\alpha_R$  και  $\alpha_E$  δείχνουν πόσο «κοντά» βρίσκεται η μέση τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής στο σημείο αστοχίας, δηλαδή πόσο «ευαίσθητος» είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας αστοχίας στην αβεβαιότητα της αντίστοιχης μεταβλητής. Γι'

αυτό το λόγο οι συντελεστές αυτοί ονομάζονται και παράγοντες ευαισθησίας [12], [20], [27].

Μία ακόμα ιδιότητα των συντελεστών αυτών είναι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3, πως  $\sin\phi = \alpha_R\beta/\beta = \alpha_R$  και  $\cos\phi = -\alpha_E\beta/\beta = -\alpha_E$ , όπου  $\phi$  η γωνία που σχηματίζει η ευθεία του ορίου αστοχίας με τον οριζόντιο άξονα, η οποία ισούται και με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\beta$  με τον κατακόρυφο άξονα (σχήματα 4.3, 4.4). Άρα οι παράγοντες ευαισθησίας  $\alpha_R$  και  $\alpha_E$  αποτελούν επίσης τα συνημίτονα κατεύθυνσης της ευθείας του ορίου αστοχίας [20], [27]. Συνεπώς ισχύει:

$$a_E^2 + a_R^2 = (-\cos\phi)^2 + \sin^2\phi = 1 \quad [20] \text{ και} \quad (4.22)$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{\alpha_R}{\alpha_E} \text{ και σε συνδυασμό με τη σχέση 4.15:} \quad (4.23)$$

$$\tan\phi = \frac{\sigma_R}{\sigma_E} = -\frac{\alpha_R}{\alpha_E} \quad (4.24)$$

Έτσι μπορούν να προκύψουν τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος 4.4, όπου φαίνεται η γωνία  $\phi$  που σχηματίζει η ευθεία  $R-E=0$  με τον οριζόντιο άξονα και οι κάθετες πλευρές των τριγώνων προκύπτουν από τη σχέση 4.24 για την εφαπτομένη της γωνίας  $\phi$ . Το μεσαίο τρίγωνο είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 4.3 με κορυφή της γωνίας  $\phi$  το σημείο σχεδιασμού  $P$ . Από τα όμοια τρίγωνα του σχήματος 4.4 εύκολα προκύπτουν οι παράμετροι ευαισθησίας συναρτήσει των τυπικών αποκλίσεων  $\sigma_R$  και  $\sigma_E$ :

$$a_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}} \quad \text{και} \quad (4.25)$$

$$a_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}} \quad [27], [29] \quad (4.26)$$

Το EN1990 [12] δίνει τις προσεγγιστικές τιμές  $\alpha_R=0,8$  και  $\alpha_E= -0,7$  για τους παράγοντες ευαισθησίας, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει:

$$0,16 < \frac{\sigma_E}{\sigma_R} < 7,6 \quad (4.27)$$

$$\text{Έτσι τελικά: } P(R < R_d) = \Phi_U(-0,8\beta) \quad \text{και} \quad (4.28)$$

$$P(E > E_d) = \Phi_U(-0,7\beta) \quad [12], [27] \quad (4.29)$$

Για τη συνήθη τιμή  $\beta=3,8$  οι σχέσεις 4.28 και 4.29 δίνουν περίπου 0,001 πιθανότητα μη υπέρβασης και υπέρβασης αντίστοιχα. Δηλαδή από τη συνήθη τιμή του  $\beta$  προκύπτει πιθανότητα 1 στις 1000 η αντίσταση της κατασκευής να προκύψει στην πράξη μικρότερη από την αντίσταση σχεδιασμού και πιθανότητα επίσης 1 στις 1000 τα αποτελέσματα των δράσεων να προκύψουν στην πράξη μεγαλύτερα από τα αποτελέσματα δράσεων σχεδιασμού.

Η πιθανότητα της σχέσης 4.29 αντιστοιχεί σε κυρίαρχες δράσεις, ενώ για τις τιμές συνδυασμού δράσεων λαμβάνεται η τιμή του συντελεστή ευαισθησίας των δράσεων  $\alpha_E = -0,4 \times 0,7\beta = -0,28\beta$ , η οποία αντιστοιχεί για  $\beta=3,8$  σε πιθανότητα υπέρβασης περίπου 10% αντί της προηγούμενης 0,1% [12], [27]. Αυτό είναι λογικό και απολύτως αναμενόμενο, μιας και έτσι λαμβάνεται υπ' όψιν η μειωμένη πιθανότητα οι μέγιστες τιμές και των δύο δράσεων να προκύψουν ταυτόχρονα, πράγμα που οδηγεί σε ορθολογικό αλλά και οικονομικότερο σχεδιασμό.

Εάν η προϋπόθεση 4.27 δεν ισχύει, συστήνεται στο EN1990 [12] να λαμβάνεται  $\alpha = \pm 1$  για τη μεταβλητή με τη μεγαλύτερη τυπική απόκλιση και  $\alpha = \pm 0,4$  για τη μεταβλητή με τη μικρότερη τυπική απόκλιση. Δηλαδή, στην περίπτωση που οι τυπικές αποκλίσεις των μεταβλητών μας έχουν μεγάλη διαφορά, προτείνεται μία καλύτερη προσέγγιση, μιας και μεγάλη τυπική απόκλιση σημαίνει μεγαλύτερη διασπορά και μεγαλύτερη αβεβαιότητα ως προς την τελική τιμή σχεδιασμού, ενώ αντίθετα στις περιπτώσεις μικρής διασποράς υπάρχει μικρότερη αβεβαιότητα για το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Έτσι, με κατάλληλη επιλογή των παραγόντων ευαισθησίας  $\alpha$  και με προσδιορισμό του απαιτούμενου επιπέδου αξιοπιστίας μέσω κατάλληλου συντελεστή  $\beta$ , μπορούν να προκύψουν απευθείας οι τιμές σχεδιασμού των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό, ανάλογα και με τη θεωρητική κατανομή που αντιπροσωπεύει καλύτερα την κατανομή της εκάστοτε μεταβλητής [12]. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα και με τον πίνακα C3 του EN 1990 [12] έχουμε:

Πίνακας 4.6: Τιμές σχεδιασμού μεταβλητών για διάφορες θεωρητικές κατανομές [12]

Κατανομή	Τιμή σχεδιασμού
Κανονική	$\mu - \alpha\beta\sigma$
Λογαριθμοκανονική	$\mu e^{-\alpha\beta V}$ , για $V = \frac{\sigma}{\mu} < 0,2$
Gumbel	$u - \frac{1}{\alpha} \ln[-\ln \Phi(-\alpha\beta)]$ , όπου $u = \mu - \frac{0,577}{\alpha}$ και $\alpha = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{6}}$

## 4.7 Σχόλια

Στον παραπάνω πίνακα του EN 1990 [12] διακρίνουμε κάποιες ασάφειες. Η πρώτη βρίσκεται στον τρόπο υπολογισμού της τιμής σχεδιασμού μιας μεταβλητής εάν αυτή ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή. Παρατηρούμε πως παρατίθεται σχέση υπολογισμού μόνο για την περίπτωση που ο συντελεστής διασποράς  $V$  της μεταβλητής είναι μικρότερος του 0,2. Σύμφωνα και με τον M. Holický (2005) [26], αυτή η προσεγγιστική σχέση χρησιμοποιείται συχνά και για  $V > 0,2$ , ωστόσο η ακριβής σχέση υπολογισμού της συγκεκριμένης τιμής είναι η εξής:  $\frac{\mu}{\sqrt{1+V^2}} e^{-\alpha\beta\sqrt{\ln(1+V^2)}}$ , η οποία ισχύει

για κάθε τιμή του συντελεστή διασποράς  $V$ .

Δεύτερη ασάφεια που παρατηρούμε είναι η συνάρτηση  $\Phi$  στην περίπτωση της κατανομής Gumbel. Δεν ορίζεται ρητά ποια είναι αυτή η συνάρτηση αν και γενικά

υπονοείται πως πρόκειται για τη συνάρτηση κατανομής  $\Phi_U$  της τυπικής κανονικής κατανομής  $N(0, 1)$ .

Επίσης αξίζει να σημειωθεί πως οι σχέσεις του πίνακα 4.6 μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο εάν γνωρίζουμε τη μέση τιμή  $\mu$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma$  της πληθυσμού ή εάν έχουμε μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων (συνήθως περισσότερες από 100), οπότε και τα  $m$  και  $s$  του δείγματος θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι ισούνται με αρκετά μεγάλη ακρίβεια με τα αντίστοιχα  $\mu$  και  $\sigma$  του πληθυσμού. Στην περίπτωση που θέλουμε να εξάγουμε τιμές σχεδιασμού από μικρότερο δείγμα, θα πρέπει να ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφεται στην παράγραφο 5.3. Ο συγκεκριμένος περιορισμός δεν αναφέρεται ρητά στο EN 1990 [12], αλλά υπονοείται αν λάβουμε υπ' όψιν και το Παράρτημα D του EN 1990.

## 4.8 Παράδειγμα

### 4.8.1 Καθορισμός κατηγορίας αξιοπιστίας

Έστω ότι αντικείμενο της μελέτης μας είναι μία μονοκατοικία. Για τον υπολογισμό της κατασκευής αρχικά πρέπει να την κατατάξουμε σε κάποια κατηγορία επιπτώσεων, από την οποία θα προκύψει η κατηγορία αξιοπιστίας με βάση την οποία θα σχεδιαστεί. Για κτίρια κατοικιών ο πίνακας 4.1 δίνει κατηγορία επιπτώσεων CC2 και άρα προκύπτει κατηγορία αξιοπιστίας RC2.

### 4.8.2 Επιλογή δείκτη αξιοπιστίας $\beta$

Επόμενο βήμα είναι η επιλογή κατάλληλου δείκτη αξιοπιστίας  $\beta$ , έτσι ώστε να προκύψει στο τέλος αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας  $P_f$  σε σχέση με τις συνέπειες της αστοχίας. Προτεινόμενες ελάχιστες τιμές του δείκτη  $\beta$  για οριακές καταστάσεις αστοχίας δίνονται στον πίνακα 4.4. Για κατηγορία αξιοπιστίας RC2 λαμβάνουμε από τον πίνακα 4.4  $\beta=4,7$  για περίοδο αναφοράς 1 έτος και  $\beta=3,8$  για περίοδο αναφοράς 50 έτη.

Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε τις δράσεις ( $F$ ) που αναμένεται να καταπονήσουν την κατασκευή. Αυτές μπορεί να είναι φορτία ανέμου, ίδια βάρη, σεισμικά φορτία κ.λπ. Επειδή πολλές από αυτές συνήθως είναι στατιστικά μεταβαλλόμενες με την πάροδο του χρόνου, χρειαζόμαστε για κάθε είδος δράσης τη μέση τιμή της  $\mu$  και την τυπική της απόκλιση  $\sigma$  κατά τη διάρκεια κάποιας αντιπροσωπευτικής χρονικής περιόδου  $T_I$  για την οποία έχουμε παρατηρήσεις. Αυτή η περίοδος για τις δράσεις συχνά είναι το ένα έτος. Επίσης, μπορεί να είναι αρχικά διαφορετική για κάθε είδος δράσης, κατά τη μόρφωση των συνδυασμών αυτών των δράσεων όμως θα πρέπει όλες οι τιμές να αναφέρονται στην ίδια χρονική περίοδο. Η χρονική περίοδος η οποία θα επιλεγεί τελικά θα αποτελέσει την περίοδο αναφοράς.

Εάν έχουμε παρατηρήσεις για τις μεταβλητές δράσεις για ένα έτος, τότε χρησιμοποιούμε αυτήν την περίοδο σαν περίοδο αναφοράς. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση και για το κτίριο που αναφέρθηκε παραπάνω ελάχιστη τιμή για τον  $\beta$  λαμβάνεται η  $\beta=4,7$ .

Εάν η περίοδος για την οποία έχουμε παρατηρήσεις είναι κάποια άλλη, έστω  $T_n=4$  έτη, τότε για το  $\beta$  προκύπτει από τη σχέση 4.14:

$$\Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_1)]^n \Leftrightarrow \beta_n = \Phi^{-1} \{ [\Phi(\beta_1)]^n \},$$

όπου  $\Phi$  η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, σαν περίοδο  $T_I$

θεωρούμε το 1 έτος και άρα  $n = \frac{T_n}{T_I} = \frac{T_n}{1} = T_n = 4$ ,  $\beta_1=4,7$  και  $\beta=\beta_n=\beta_4$ . Άρα από την

παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\beta = \beta_n = \Phi^{-1} \left\{ [\Phi(\beta_1)]^n \right\} = \Phi^{-1} \left\{ [\Phi(4,7)]^4 \right\} = \Phi^{-1} \left\{ (0,99999)^4 \right\} = \Phi^{-1}(0,999995) = 4,41.$$

Για  $n=5$ , 25 ή 100 χρόνια ο  $\beta=\beta_n$  μπορεί να ληφθεί εναλλακτικά από το σχήμα 4.2. Για  $n=50$  χρόνια μπορεί να ληφθεί απευθείας και η τιμή του πίνακα 4.4  $\beta=\beta_n=3,8$ .

Τέλος, εάν η περίοδος για την οποία έχουμε δεδομένα είναι διαφορετική για κάθε μεταβλητή δράση, τότε ορίζουμε ενιαία περίοδο αναφοράς τη μικρότερη από τις διαθέσιμες περιόδους, μιας και για αυτή θα έχουμε δεδομένα για όλες τις δράσεις. Οι παράμετροι  $\mu$  και  $\sigma$  κάθε δράσης θα ληφθούν από αυτήν την περίοδο, αγνοώντας τυχόν δεδομένα που έχουμε για μεγαλύτερες περιόδους.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως οι τιμές του  $\beta$  που προκύπτουν με αυτή τη μεθοδολογία αποτελούν τις ελάχιστες προτεινόμενες. Εάν το επιθυμούμε μπορούμε να επιλέξουμε κάποια μεγαλύτερη τιμή από αυτές που προτείνονται, πράγμα που θα οδηγήσει σε μεγαλύτερη αξιοπιστία αλλά πιο ακριβή κατασκευή.

Για το κτίριο του παραδείγματός μας θα χρησιμοποιήσουμε για τους υπόλοιπους υπολογισμούς την τιμή  $\beta=3,8$ , η οποία είναι η ελάχιστη που προτείνεται για οριακές καταστάσεις αστοχίας, κατηγορία αξιοπιστίας RC2 και περίοδο αναφοράς 50 έτη.

### 4.8.3 Προσδιορισμός παραγόντων ευαισθησίας $\alpha$

Το EN 1990 [12] ορίζει, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, για τα αποτελέσματα των χαρακτηριστικών τιμών των δράσεων  $\alpha_E = -0,7$ , για τα αποτελέσματα των τιμών συνδυασμού των δράσεων  $\alpha_E = -0,28$  και για τις αντιστάσεις  $\alpha_R = 0,8$ , υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει  $0,16 < \sigma_E / \sigma_R < 7,6$ , όπου  $\sigma_E$  η τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων των δράσεων και  $\sigma_R$  η τυπική απόκλιση των αντιστάσεων. Έστω ότι στο παράδειγμά μας ισχύει αυτός ο περιορισμός.

Συνήθως, για τις δράσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο παράγοντας ευαισθησίας  $\alpha_E$ , δηλαδή ο παράγοντας ευαισθησίας των αποτελεσμάτων των δράσεων και για τις ιδιότητες υλικών που υπεισέρχονται στις αντιστάσεις ο παράγοντας ευαισθησίας  $\alpha_R$ , δηλαδή ο παράγοντας ευαισθησίας των αντιστάσεων [24].

### 4.8.4 Υπολογισμός τιμών σχεδιασμού

Χρησιμοποιώντας την τιμή του  $\beta$  που προέκυψε ανάλογα με την περίοδο αναφοράς που επιλέξαμε, τους παράγοντες ευαισθησίας  $\alpha$  και τις παραμέτρους  $\mu$  (μέση τιμή) και  $\sigma$  (τυπική απόκλιση) για κάθε μεταβλητή (δράση ή ιδιότητα υλικού) μπορεί να προκύψει απευθείας η τιμή σχεδιασμού της κάθε μεταβλητής. Έτσι λοιπόν έχουμε, σύμφωνα και με τον πίνακα 4.6:

Για ιδιότητες υλικών  $X$  συνήθως χρησιμοποιούμε τη λογαριθμοκανονική κατανομή,

$$\text{άρα, για } V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} < 0,2: X_d = \mu_X e^{-\alpha_R \beta V_X} = \mu_X e^{-0,8 * 3,8 V_X} = \mu_X e^{-3,04 V_X}.$$

Για μεταβλητές δράσεις  $Q$  συνήθως χρησιμοποιούμε την κατανομή Gumbel, άρα, για τη χαρακτηριστική τιμή της  $Q$ :

$$\begin{aligned} Q_d &= u - \frac{1}{a} \ln[-\ln \Phi(-\alpha_E \beta)] = u - \frac{1}{a} \ln[-\ln \Phi(0,7 * 3,8)] = u - \frac{1}{a} \ln[-\ln \Phi(2,66)] = \\ &= u - \frac{1}{a} \ln[-\ln(0,9961)] = u - \frac{1}{a} \ln(0,00391) = u + \frac{5,543}{a} \end{aligned}$$

και για την τιμή συνδυασμού της  $Q$ :

$$Q_{0,d} = u - \frac{1}{a} \ln[-\ln \Phi(0,28 * 3,8)] = u - \frac{1}{a} \ln[-\ln \Phi(1,064)] = u - \frac{1}{a} \ln[-\ln(0,856)]$$

$$= u - \frac{1}{a} \ln(0,155) = u + \frac{1,864}{a}$$

$$\text{όπου } u = \mu_Q - \frac{0,577}{\alpha} \text{ και } \alpha = \frac{\pi}{\sigma_Q \sqrt{6}}.$$

Για μόνιμες δράσεις  $G$  συνήθως χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή, άρα για τη χαρακτηριστική τιμή της  $G$ :  $G_d = \mu_G - \alpha_E \beta \sigma_G = \mu_G + 0,7 * 3,8 \sigma_G = \mu_G + 2,66 \sigma_G$  και για την τιμή συνδυασμού της  $G$ :  $G_d = \mu_G + 0,28 * 3,8 \sigma_G = \mu_G + 1,064 \sigma_G$ .

Με βάση τις προκύπτουσες τιμές σχεδιασμού προχωράμε στον υπολογισμό της κατασκευής.

#### 4.8.1 Υπολογισμός πιθανότητας αστοχίας

Η θεωρητική πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση 4.7 ως εξής:  $P_f = \Phi_U(-\beta)$ , άρα στην περίπτωση μας  $P_f = \Phi_U(-3,8) = 7,2 * 10^{-5}$  στα 50 έτη. Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες υπέρβασης ή μη υπέρβασης των τιμών σχεδιασμού που χρησιμοποιήσαμε σύμφωνα με τις σχέσεις 4.18 και 4.19. Άρα:

$$P(X < X_d) = \Phi_U(-3,04) = 1,2 * 10^{-3}$$

$$P(Q > Q_d) = \Phi_U(-2,66) = 3,9 * 10^{-3}, \quad P(Q > Q_{0,d}) = \Phi_U(-1,064) = 14\%$$

$$P(G > G_d) = \Phi_U(-2,66) = 3,9 * 10^{-3}, \quad P(G > G_{0,d}) = \Phi_U(-1,064) = 14\%$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως οι παραπάνω πιθανότητες που προκύπτουν με χρήση του συντελεστή αξιοπιστίας  $\beta$  δεν αντιπροσωπεύουν απαραίτητα τις πραγματικές πιθανότητες αστοχίας, μιας και αυτές εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τα ανθρώπινα σφάλματα. Σκοπός των πιθανοτήτων αυτών είναι η σύγκριση της αξιοπιστίας των διαφόρων κατασκευών. [12]

#### 4.8.2 Παρατήρηση

Γενικά, με τον ως άνω σχεδιασμό προσπαθούμε να βρούμε μία «χρυσή τομή» ανάμεσα στο κόστος κατασκευής και το κόστος των συνεπειών τυχόν αστοχίας του κτιρίου. Σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχει πιθανότητα να προκύψει ότι το κόστος κατασκευής προκειμένου να επιτευχθεί η ελάχιστη απαιτούμενη αξιοπιστία είναι πολύ υψηλό ή οι συνέπειες αστοχίας του κτιρίου πάρα πολύ μεγάλες. Εάν συμβεί αυτό, τότε πιθανόν να είναι καλύτερο το κτίριο να μην κατασκευαστεί καθόλου. [20]

## 5 Αξιοποίηση πειραματικών δεδομένων

### 5.1 Εισαγωγή

Με βάση τα όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω, είναι δυνατός ο υπολογισμός των παραμέτρων των υλικών (χαρακτηριστικών τιμών, τιμών σχεδιασμού και συντελεστών ασφαλείας) που θα χρησιμοποιηθούν κατά το σχεδιασμό μέσω της αξιοποίησης πειραματικών δεδομένων. Για να γίνει αυτό αρχικά θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή, η οποία αντιπροσωπεύει την υπό εξέταση ιδιότητα και ακολουθεί κάποια γνωστή θεωρητική κατανομή. Για ιδιότητες υλικών και γεωμετρικά δεδομένα πιο αντιπροσωπευτικές θεωρούνται η κανονική και η λογαριθμοκανονική κατανομή. Πλεονέκτημα της λογαριθμοκανονικής κατανομής στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το ότι δεν προκύπτουν αρνητικές τιμές, οι οποίες δεν έχουν νόημα όταν μιλάμε για ιδιότητες υλικών ή διαστάσεις. Όσον αφορά τα φορτία που δρουν στις κατασκευές, για μόνιμα φορτία αντιπροσωπευτική θεωρείται η κανονική κατανομή ενώ για μεταβλητά φορτία η κατανομή Gumbel. [12], [20], [27]

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, το EN1990 [12] δίνει οδηγίες στο Παράρτημα D για τον προσδιορισμό χαρακτηριστικών τιμών ή εναλλακτικά τιμών σχεδιασμού ιδιοτήτων υλικών μέσω επεξεργασίας πειραματικών δεδομένων. Επίσης αναφέρει στο Παράρτημα C τρόπο υπολογισμού τιμών σχεδιασμού με βάση το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας (δείτε και κεφάλαιο 4). Μετά τον υπολογισμό των παραπάνω τιμών είναι δυνατός ο προσδιορισμός του επιμέρους συντελεστή ασφαλείας για την υπό εξέταση ιδιότητα.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το EN1990 [12], θεωρούμε μία μεταβλητή  $X$ , η οποία μπορεί να αντιπροσωπεύει είτε την αντίσταση ενός υλικού (π.χ. μία αξονική δύναμη αντοχής) είτε μία ιδιότητα που συμμετέχει στην αντίσταση του υλικού (π.χ. η τάση διαρροής του χάλυβα σε ένα σύμμικτο υποστύλωμα). Στην πρώτη περίπτωση είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν τα πειραματικά αποτελέσματα για τη μεταβλητή  $X$  απευθείας για να υπολογιστεί η χαρακτηριστική τιμή, η τιμή σχεδιασμού και ο συντελεστής ασφαλείας για την εν λόγω αντίσταση, δηλαδή  $X_k=R_k$  και  $X_d=R_d$ . Στη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει, προκειμένου να υπολογιστεί η ζητούμενη αντίσταση, να ληφθούν υπ' όψιν εκτός από τη μεταβλητή  $X$  και οι υπόλοιπες ιδιότητες από τις οποίες εξαρτάται η αντίσταση, καθώς επίσης και οι αβεβαιότητες του προσομοιώματος και φαινόμενα κλίμακας κ.λπ. [12]

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των μεθοδολογιών με τις οποίες εκτιμώνται οι παραπάνω παράμετροι.

### 5.2 Υπολογισμός της χαρακτηριστικής τιμής $X_k$

#### 5.2.1 Κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές $X$

Η σχέση για τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής τιμής  $X_k$  μιας ιδιότητας υλικού χρησιμοποιώντας πειραματικά αποτελέσματα προκύπτει από τη σχέση D.1 του EN 1990 [12], η οποία ισχύει για κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές  $X$ :

$$X_d = \eta_d \frac{X_k}{\gamma_m} = \frac{\eta_d}{\gamma_m} m_X (1 - k_n V_X), \quad (5.1)$$



$$\text{δηλαδή: } X_k = m_x(1 - k_n V_x) \quad [28]. \quad (5.2)$$

Ο συντελεστής  $\eta_d$  της σχέσης 5.1 είναι ο γνωστός συντελεστής μετατροπής (δείτε και παράγραφο 3.4.2) και εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το είδος του υλικού και το είδος της δοκιμής [12]. Εναλλακτικά ο  $\eta_d$  μπορεί να ενσωματωθεί στο συντελεστή  $\gamma_m$ . Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως το EN 1990 [12] δε δίνει διευκρινίσεις για το πώς υπολογίζεται ο συντελεστής  $\eta_d$ .

Η σχέση 5.2 προκύπτει από τη μέθοδο πρόβλεψης για την εκτίμηση ποσοστημορίων (δείτε και παράγραφο 2.7), δηλαδή ο συντελεστής  $k_n$  στην περίπτωση που η τυπική απόκλιση  $\sigma$  του πληθυσμού είναι γνωστή (άρα ο συντελεστής διασποράς  $V = \sigma/m$  θεωρείται γνωστός) δίνεται από τη σχέση:

$$k_n = -u_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \quad [28] \quad (5.3)$$

Παραδείγματα γνωστών συντελεστών διασποράς  $V$  είναι αυτός του σκυροδέματος (μεταξύ 0,05 και 0,20) και του δομικού χάλυβα (μεταξύ 0,07 και 0,1) [26].

Το EN1990 [12] ορίζει στις περισσότερες περιπτώσεις ως χαρακτηριστική τιμή μιας ιδιότητας ενός υλικού εκείνη την τιμή της ιδιότητας που έχει πιθανότητα μη υπέρβασης  $p=5\%$ . Συνεπώς  $u_p$  στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η τιμή του 5% ποσοστημορίου της  $N(0,1)$ , δηλαδή  $u_p = -1,645$ .

Στην περίπτωση που η  $\sigma$  του πληθυσμού δε θεωρείται γνωστή χρησιμοποιείται αντ' αυτής η τυπική απόκλιση  $s$  του δείγματος. Έτσι ο συντελεστής μεταβλητότητας  $V$  δε θεωρείται γνωστός και εκτιμάται από τη σχέση  $V = s/m$ . Σ' αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα και με τη μέθοδο πρόβλεψης, αντί του ποσοστημορίου  $u_p$  χρησιμοποιείται το αντίστοιχο 5% ποσοστημόριο της κατανομής  $t$  του Student ( $t_p$ ), το οποίο εξαρτάται και από το μέγεθος  $n$  του δείγματος (δηλαδή τους βαθμούς ελευθερίας  $\nu = n - 1$  της κατανομής  $t$ ). Έτσι η σχέση 5.3 γίνεται:

$$k_n = -t_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \quad [28] \quad (5.4)$$

Ορισμένες τιμές του συντελεστή  $k_n$  για γνωστό ή άγνωστο συντελεστή μεταβλητότητας  $V$  και για την 5% χαρακτηριστική τιμή δίνονται στον πίνακα D1 του EN1990 [12] (Πίνακας 5.1):

Πίνακας 5.1: Συντελεστές  $k_n$  για την 5% χαρακτηριστική τιμή [12]

$n$	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	$\infty$
$V_x$ γνωστός	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
$V_x$ άγνωστος	-	-	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Παρατηρούμε στον παραπάνω πίνακα πως, για την περίπτωση « $V$  άγνωστος», ο EN1990 [12] δε μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπέρασμα από μέγεθος δείγματος

μικρότερο του 3, πράγμα λογικό δεδομένων των αβεβαιοτήτων που υπάρχουν. Επίσης, πάλι για την ίδια περίπτωση βλέπουμε πως ο συντελεστής  $k_n$  είναι μεγαλύτερος απ' ό,τι για την περίπτωση « $V$  γνωστός», δηλαδή αφαιρείται από τη μέση τιμή της ιδιότητας του υλικού μεγαλύτερο μέρος στην περίπτωση « $V$  άγνωστος». Αυτό οδηγεί εν γένει σε πιο συντηρητική χαρακτηριστική τιμή και άρα σε αποτελέσματα περισσότερο υπέρ της ασφαλείας.

## 5.2.2 Λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες μεταβλητές $X$

Στην περίπτωση λογαριθμοκανονικής κατανομής της ιδιότητας  $X$  την αντικαθιστούμε με μία καινούργια μεταβλητή  $Y$  μέσω του μετασχηματισμού  $Y=\ln X$ . Άρα, σύμφωνα και με τον ορισμό της λογαριθμοκανονικής κατανομής, η  $Y$  ακολουθεί κανονική κατανομή και η  $X$  λογαριθμοκανονική κατανομή με κατώτατο όριο το  $x_0=0$  [ $Y=\ln(X-x_0)$ , όπου  $x_0=0$ , δείτε και παράγραφο 2.6.2]. Η συσχέτιση των μέσων τιμών και των διακυμάνσεων των μεταβλητών  $X$  και  $Y$  δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$\mu_Y = \frac{\ln(\mu_X^2)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \mu_X^2}} \quad (5.5)$$

$$\sigma_Y^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right) = \ln(1 + V_X^2) \quad (5.6)$$

Όμως, οι παραπάνω σχέσεις εφαρμόζονται μόνο εάν γνωρίζουμε τη μέση τιμή  $\mu_X$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma_X$  του πληθυσμού. Για τον υπολογισμό των  $m_Y$  και  $s_Y$  του δείγματος χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό  $y_i=\ln x_i$  για όλες τις τιμές του δείγματος και στη συνέχεια να υπολογίσουμε υπολογίζουμε τη μέση τιμή  $m$  και την τυπική απόκλιση  $s$  σύμφωνα με τον ορισμό τους:

$$m_Y = \frac{\sum y_i}{n} \quad (5.7)$$

$$s_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - m_Y)^2}{n-1} \quad (5.8)$$

Τελικά, φτάνουμε στη ζητούμενη χαρακτηριστική τιμή  $X_k$  μέσω του αντίστροφου του παραπάνω μετασχηματισμού:

$$Y_k = m_Y - k_n s_Y \Leftrightarrow X_k = e^{m_Y - k_n s_Y} \Rightarrow X_d = \frac{\eta_d}{\gamma_m} e^{m_Y - k_n s_Y} \quad (5.9)$$

$$\text{όπου για γνωστό } V_X \quad s_Y = \sqrt{\ln(V_X^2 + 1)} \approx V_X \quad (5.10)$$

$$\text{και για άγνωστο } V_X \quad s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\ln x_i - m_Y)^2} \quad (5.11)$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή  $k_n$  χρησιμοποιούμε κατά τα γνωστά τις σχέσεις 5.3 ή 5.4 της μεθόδου πρόβλεψης (ή τον πίνακα 5.1, για την περίπτωση της 5% χαρακτηριστικής τιμής) ανάλογα με το εάν ο συντελεστής μεταβλητότητας  $V$  είναι

γνωστός ή άγνωστος αντίστοιχα. Δηλαδή ο συντελεστής  $k_n$  είναι ίδιος στην περίπτωση της κανονικής και της λογαριθμοκανονικής κατανομής. [12], [28]

### 5.3 Υπολογισμός της τιμής σχεδιασμού $X_d$

Εντελώς ανάλογα με τη χαρακτηριστική τιμή  $X_k$  μπορεί να προκύψει απευθείας η τιμή σχεδιασμού  $X_d$  μιας ιδιότητας υλικού:

$$X_d = \eta_d m_x (1 - k_{d,n} V_x) \text{ για κανονικά κατανεμημένες } X \text{ και} \quad (5.12)$$

$$X_d = \eta_d e^{m_y - k_{d,n} s_y} \text{ για λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες } X \quad (5.13)$$

Ο συντελεστής  $\eta_d$  σ' αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να καλύπτει από μόνος του όλες τις αβεβαιότητες που προκύπτουν από τις δοκιμές, μιας και εδώ δεν υπάρχει συντελεστής  $\gamma_M$  στον οποίο θα μπορούσε να ενσωματωθεί. Και πάλι όμως δε διευκρινίζεται στο EN 1990 [12] το πώς προκύπτει η εκάστοτε τιμή του  $\eta_d$ . [12]

Η τιμή  $X_d$  αντιστοιχεί συνήθως στο 0,1% ποσοστημόριο της μεταβλητής  $X$  για έλεγχο σε οριακές καταστάσεις αστοχίας και συντελεστή αξιοπιστίας  $\beta=3,8$ . Συνεπώς, σ' αυτήν την περίπτωση ο συντελεστής  $k_{d,n}$  θα προκύψει από τη μέθοδο πρόβλεψης σύμφωνα με τη σχέση 5.3 για γνωστό  $V$  ή 5.4 για άγνωστο  $V$ , αλλά με τα  $u_p$  και  $t_p$  να αντιστοιχούν στο 0,1% ποσοστημόριο της αντίστοιχης κατανομής [12], [26], [28]. Επίσης, ο συντελεστής  $k_{d,n}$  μπορεί να ληφθεί απευθείας από τον πίνακα D2 του EN1990 [12] (πίνακας 5.2), ο οποίος, εντελώς ανάλογα με τον πίνακα D1 (πίνακας 5.1), δίνει ορισμένες τιμές του  $k_{d,n}$  για κάποια μεγέθη δείγματος και για τις δύο περιπτώσεις,  $V_x$  γνωστός και  $V_x$  άγνωστος.

Πίνακας 5.2: Συντελεστές  $k_{d,n}$  για τη 0,1% τιμή σχεδιασμού [12]

$n$	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	$\infty$
$V_x$ γνωστός	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,04
$V_x$ άγνωστος	-	-	-	11,40	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,04

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί πως η τελευταία τιμή του πίνακα για  $n = \infty$  έχει προκύψει για  $u_p = t_p = -3,04$  αντί της τιμής  $-3,09$  που είναι η ακριβής για το 0,1% ποσοστημόριο των δύο κατανομών [27]. Η τιμή 3,04 αντιστοιχεί στο  $\alpha_R \beta$  για οριακή κατάσταση αστοχίας και αντοχή υλικού, μιας και  $\alpha_R \beta = 0,8 * 3,8 = 3,04$  (δείτε και παράγραφο 4.6). Δηλαδή, όταν έχουμε πολλές παρατηρήσεις (συνήθως  $n > 100$ ) έτσι ώστε να γνωρίζουμε με σχετική ακρίβεια τις παραμέτρους του πληθυσμού ( $\mu, \sigma$ ), τότε  $k_{d,n} = \alpha * \beta$ .

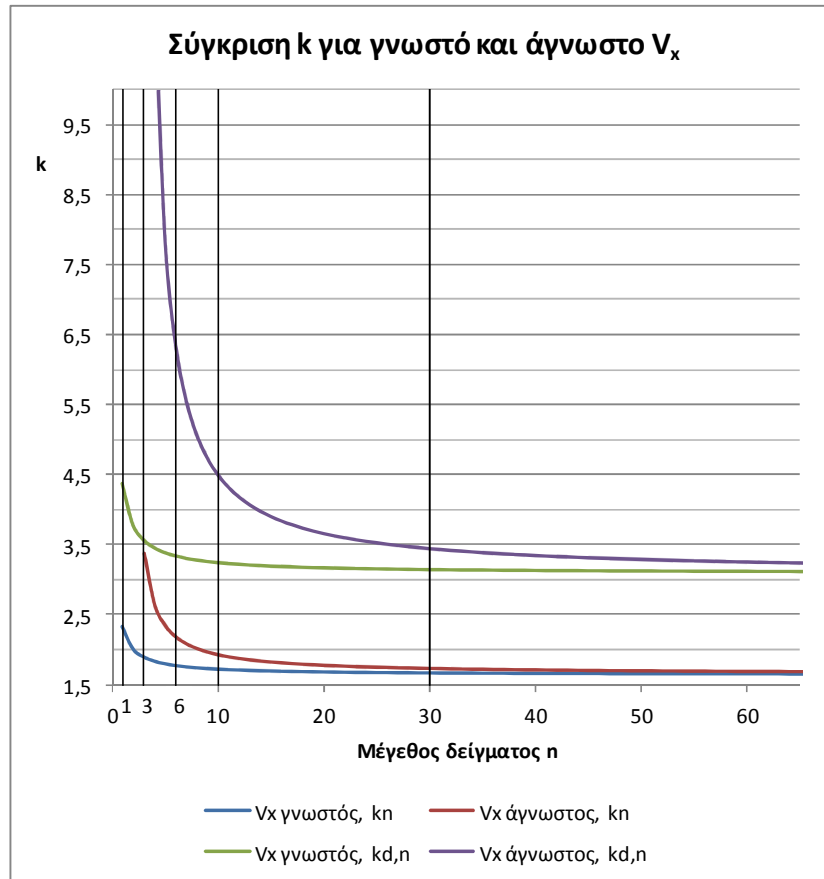
Επίσης, παρατηρούμε από τον παραπάνω πίνακα πως το EN1990 [12] δε μας επιτρέπει να υπολογίσουμε απευθείας τιμή σχεδιασμού με λιγότερες από 4 δοκιμές εάν δεν έχουμε προηγούμενη γνώση για το υλικό μας, αλλά ακόμα και με 4 δοκιμές προκύπτει  $k_n = 11,40$ , τιμή αρκετά μεγάλη που πιθανόν να μην οδηγεί σε οικονομικό σχεδιασμό. Ακόμη, και εδώ όπως και στον υπολογισμό χαρακτηριστικών τιμών, προκύπτουν εν γένει πολύ συντηρητικά αποτελέσματα για την περίπτωση « $V$  άγνωστος», μιας και πρέπει να καλυφθούν περισσότερες αβεβαιότητες.

## 5.4 Παρατηρήσεις για τη διαδικασία υπολογισμού των $X_k$ και $X_d$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί η σύσταση του EN1990 [12] που ισχύει για τον προσδιορισμό τόσο της  $X_d$  όσο και της  $X_k$ , ότι καλό είναι να προτιμάται η περίπτωση « $V$  γνωστός» σε συνδυασμό με συντηρητική εκτίμηση του  $V$  (άνω όριο), παρά η περίπτωση « $V$  άγνωστος». Δηλαδή, σχετικά μεγάλη τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας σε συνδυασμό με την περίπτωση « $V$  γνωστός» δίνει πιο συντηρητικά αποτελέσματα από μικρότερη τιμή του  $V$  σε συνδυασμό με την περίπτωση « $V$  άγνωστος», παρ' όλο που η περίπτωση « $V$  άγνωστος» δίνει πιο συντηρητικές τιμές για το συντελεστή  $k_n$  [28]. Επίσης, στην περίπτωση « $V$  άγνωστος», αυτός δε θα πρέπει να λαμβάνεται μικρότερος από 0,1, δηλαδή αν ο  $V$  του δείγματος προκύψει μικρότερος από 0,1 χρησιμοποιούμε την τιμή 0,1 αντί αυτής που έχει προκύψει από το δείγμα [12].

Επίσης, εάν έχουμε προηγούμενη γνώση για το υλικό μας το EN1990 [12] μας επιτρέπει να υπολογίσουμε χαρακτηριστική τιμή και τιμή σχεδιασμού ακόμα και με μία δοκιμή, πράγμα όμως που ενέχει αρκετές στατιστικές αβεβαιότητες [26]. Γι' αυτό το λόγο ο M. Holický [26] συνιστά να πραγματοποιούνται τουλάχιστον 3 δοκιμές, ακόμα και εάν έχουμε προηγούμενη γνώση για το υλικό μας.

Τέλος, χρήσιμη είναι η κατασκευή ενός διαγράμματος όπου φαίνονται οι τιμές των  $k_n$  για την 5% χαρακτηριστική τιμή και  $k_{d,n}$  για την 0,1% τιμή σχεδιασμού, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Παρατηρούμε το πόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $k_{d,n}$  από αυτήν του  $k_n$ , και κατά συνέπεια το πόσο μικρότερη προκύπτει η τιμή σχεδιασμού σε σχέση με τη χαρακτηριστική τιμή. Επίσης, στο ίδιο σχήμα φαίνεται ότι με περισσότερες δοκιμές έχουμε μικρότερη αβεβαιότητα και άρα καλύτερη εικόνα για το υλικό μας, μιας και οι συντελεστές  $k_n$  και  $k_{d,n}$  μειώνονται αισθητά με την αύξηση του αριθμού των δοκιμών και από ένα σημείο και μετά τείνουν σε μία συγκεκριμένη σταθερή τιμή (την τιμή που προκύπτει για  $n=\infty$ ). Άρα, αφού με την αύξηση των δοκιμών οι συντελεστές  $k_n$  και  $k_{d,n}$  μειώνονται, όσο περισσότερες δοκιμές πραγματοποιούμε τόσο μεγαλύτερη η τιμή της ιδιότητας του υλικού που θα προκύψει, πράγμα που συνήθως οδηγεί και σε οικονομικότερο σχεδιασμό. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται πως για να έχουμε ικανοποιητική εικόνα για το υλικό και άρα αρκετά οικονομικό σχεδιασμό, όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε την 5% χαρακτηριστική του τιμή αρκούν περίπου 3 δοκιμές για  $Vx$  γνωστό και περίπου 10 δοκιμές για  $Vx$  άγνωστο. Για τον απευθείας προσδιορισμό της τιμής σχεδιασμού χρειαζόμαστε τουλάχιστον 6 δοκιμές για  $Vx$  γνωστό ενώ για  $Vx$  άγνωστο θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε πάνω από 30 δοκιμές! Αυτό το διάγραμμα λοιπόν συνηγορεί στην άποψη ότι με μικρό αριθμό δοκιμών δε μπορούμε να βγάλουμε ασφαλές συμπέρασμα για το υλικό και άρα, παρ' όλο που ο EN 1990 μας επιτρέπει να υπολογίζουμε παραμέτρους ακόμα και με μία δοκιμή, αυτό δε θα πρέπει να εφαρμόζεται στην πράξη λόγω των μεγάλων στατιστικών αβεβαιοτήτων που ενέχει.



Σχήμα 5.1: Σύγκριση συντελεστών  $k$  για γνωστό και άγνωστο  $V_x$

## 5.5 Προσδιορισμός των επιμέρους συντελεστών ασφαλείας $\gamma_m$ και $\gamma_M$

### 5.5.1 Επιμέρους συντελεστής ασφαλείας $\gamma_m$

Από τις σχέσεις 5.1 και 5.12 έχουμε για κανονικά κατανομημένες μεταβλητές  $X$  και οριακή κατάσταση αστοχίας:

$$X_d = \frac{\eta_d}{\gamma_m} m_X (1 - k_n V_X) = \eta_d m_X (1 - k_{d,n} V_X) \Rightarrow \gamma_m = \frac{1 - k_n V_X}{1 - k_{d,n} V_X} \quad (5.14)$$

Ομοίως, από τις σχέσεις 5.9 και 5.13 για λογαριθμοκανονικά κατανομημένες μεταβλητές και οριακή κατάσταση αστοχίας έχουμε:

$$X_d = \frac{\eta_d}{\gamma_m} e^{m_y - k_n s_Y} = \eta_d e^{m_y - k_{d,n} s_Y} \Rightarrow \gamma_m = e^{(k_{d,n} - k_n) s_Y} \quad (5.15)$$

Παρατηρούμε πως για σταθερή τυπική απόκλιση  $s_Y$  ο συντελεστής  $\gamma_m$  εξαρτάται στην περίπτωση λογαριθμοκανονικής κατανομής μόνο από τη διαφορά  $k_{d,n} - k_n$ .

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως, εάν η  $X$  παριστάνει την αντίσταση ενός υλικού και εάν  $n = \infty$ ,  $k_n = -u_{p,5\%} = 1,645$  και  $k_{d,n} = \alpha_R \beta = 0,8\beta$ . Δηλαδή [12], [28]:

$$\gamma_m = \frac{1 - 1,645V_X}{1 - 0,8\beta V_X} \text{ για κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές και} \quad (5.16)$$

$$\gamma_m = e^{(0,8\beta - 1,645)V_X}, V_X < 0,2 \text{ για λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες μεταβλητές} \quad (5.17)$$

Όμως εάν  $n=\infty$  τελικά ο  $V_X$  θεωρείται γνωστός και άρα η σχέση 5.17 γίνεται λόγω της σχέσης 5.10:

$$\gamma_m = e^{(0,8\beta - 1,645)V_X}, V_X < 0,2 \quad (5.18)$$

Προφανώς για διαφορετικό ποσοστημόριο  $u_p$  της χαρακτηριστικής τιμής ( $u_p \neq 5\%$ ) οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\gamma_m = \frac{1 + u_p V_X}{1 - 0,8\beta V_X} \text{ για κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές και} \quad (5.19)$$

$$\gamma_m = e^{(0,8\beta + u_p)V_X}, V_X < 0,2 \text{ για λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες μεταβλητές} \quad (5.20)$$

### 5.5.2 Επιμέρους συντελεστής ασφαλείας $\gamma_M$

Εάν η μεταβλητή  $X$  αντιπροσωπεύει την αντίσταση ενός υλικού, τότε  $X_k=R_k$  και  $X_d=R_d$ , συνεπώς  $X_k/X_d=R_k/R_d=\gamma_M$  [12]. Άρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις σχέσεις 5.1 ή 5.9 προκύπτει (ανεξάρτητα με το εάν η  $X$  κατανέμεται κανονικά ή λογαριθμοκανονικά):

$$\gamma_M = \frac{X_k}{X_d} = \frac{\gamma_m}{\eta_d} \quad (5.21)$$

Προφανώς, εάν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις και επιπλέον  $\eta_d=1,00$ , τότε  $\gamma_M=\gamma_m$  και υπολογίζεται σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν η μεταβλητή  $X$  αντιπροσωπεύει κάποια ιδιότητα του υλικού από την οποία εξαρτάται η αντίστασή του, θα πρέπει να καλυφθούν επιπλέον αβεβαιότητες και για την εκτίμηση του  $\gamma_M$  θα πρέπει πρώτα να εκτιμηθεί ο επιμέρους συντελεστής  $\gamma_{Rd}$  (δείτε και παράγραφο 3.4.2). Όμως, στο EN 1990 [12] δε διευκρινίζεται το πώς μπορεί να προκύψει ο συντελεστής  $\gamma_{Rd}$ .

Τα παραπάνω, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ισχύουν για οριακές καταστάσεις αστοχίας. Για οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας το EN 1990 [12] ορίζει στην παράγραφο 6.5.4 ότι ο  $\gamma_M$  για ιδιότητες υλικών θα πρέπει να λαμβάνεται ίσος με 1,00, εκτός από συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου αναφέρεται κάτι διαφορετικό στα EN 1992 έως EN 1999. Όμως, αυτή η πρόταση μπορεί να προκαλέσει σύγχυση σε συνδυασμό με τον πίνακα C2 του EN 1990 [12] (πίνακας 4.5), όπου παρατίθενται τιμές του  $\beta$  μεταξύ άλλων και για μη αναστρέψιμες οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας, διότι αν χρησιμοποιηθούν αυτές οι τιμές του  $\beta$  για τον προσδιορισμό του  $\gamma_M$  προκύπτει εν γένει  $\gamma_M \neq 1,00$ .

### 5.5.3 Σημείωση

Στη σημείωση της παραγράφου B3.2 (3) του EN 1990 [12] επισημαίνεται πως εάν κατά το σχεδιασμό χρησιμοποιηθούν οι συντελεστές ασφαλείας που αναφέρονται στα διάφορα κείμενα των Ευρωκωδίκων η κατασκευή που προκύπτει αναμένεται να έχει δείκτη αξιοπιστίας  $\beta$  μεγαλύτερο από 3,8 για περίοδο αναφοράς 50 χρόνια.

### 5.6 Παράδειγμα εφαρμογής

Από δοκιμές εφελκυσμού σε διατομές δομικού χάλυβα HEB 400 που πραγματοποιήθηκαν στο Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών του ΕΜΠ προέκυψαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα 5.3:

Για το μέτρο ελαστικότητας ως αντιπροσωπευτική θεωρείται η μέση τιμή, δηλαδή  $E_{rep} = 1/n \sum E_i = 2465/12 = 205,4 \text{ MPa}$ , όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος.

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα δοκιμής εφελκυσμού δομικού χάλυβα

Κωδικός δοκιμίου	Μέτρο ελαστικότητας	Τάση θραύσης	Ανηγμένη παραμόρφωση
	E [GPa]	$f_u$ [MPa]	$\epsilon_u$ [%]
1A	209,0	539,31	4,14
2A	201,0	577,22	3,99
3A	206,0	549,18	3,82
1B	209,0	544,40	3,02
2B	208,0	567,26	11,02
3B	198,0	555,26	11,23
1C	209,0	519,88	10,54
2C	192,0	568,21	11,06
3C	210,0	534,67	10,08
1D	206,0	555,31	7,07
2D	208,0	587,11	7,58
3D	209,0	565,69	7,23

#### 5.6.1 Κανονική κατανομή

Έστω τώρα ότι η τάση θραύσης  $f_u$  ακολουθεί κανονική κατανομή. Έχουμε, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που περιγράφηκε παραπάνω:

$$m_f = \frac{\sum f_{u,i}}{n} = \frac{6663,5}{12} = 555,3 \text{ MPa},$$

$$s_f^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_{u,i} - m_f)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (f_{u,i} - 555,3)^2}{12-1} = \frac{4002,14}{11} = 363,8 \text{ MPa}^2,$$

$$s_f = \sqrt{s_f^2} = \sqrt{363,8} = 19,1 \text{ MPa}, \quad V_f = \frac{s_f}{m_f} = \frac{19,1}{555,3} = 0,034$$

Επειδή όμως  $V_f=0,052<0,1$  θα χρησιμοποιήσουμε στον υπολογισμό στην περίπτωση που θα ληφθεί « $V_f$  άγνωστος» την τιμή  $V_f=0,1$ .

#### 5.6.1.1 Συντελεστής μεταβλητότητας $V$ γνωστός

Εάν λοιπόν ληφθεί  $V_f$  γνωστός, τότε  $k_n = -u_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = -u_p \sqrt{\frac{1}{12} + 1} = -u_p * 1,04$  και για την 5% χαρακτηριστική τιμή που συνιστά ο EN 1990 [12] έχουμε  $k_n = -u_{p,5\%} * 1,04 = -(-1,645) * 1,04 = 1,71$ . Έτσι λοιπόν για την 5% χαρακτηριστική της τάσης θραύσης και συντελεστή διασποράς  $V_f$  ίσο με 0,07 που είναι το σύνηθες κατώτατο όριο για το χάλυβα, τότε έχουμε  $f_{u,k} = m_f (1 - k_n V_f) = 555,3(1 - 1,71 * 0,07) = 488,7 MPa$ . Ομοίως με το 5% ποσοστημόριο, για τιμή σχεδιασμού ίση με το 0,1% ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής έχουμε  $k_{d,n} = -u_{p,0,1\%} * 1,04 = -(-3,09) * 1,04 = 3,22$ . Άρα προκύπτει ο αντίστοιχος επιμέρους συντελεστής ασφαλείας  $\gamma_m$  για την τάση θραύσης:

$$\gamma_m = \frac{1 - k_n V_f}{1 - k_{d,n} V_f} = \frac{1 - 1,71 * 0,07}{1 - 3,22 * 0,07} = 1,14$$
 και κατόπιν η τιμή σχεδιασμού της τάσης

θραύσης, αν θεωρήσουμε  $\eta_d=1,00$ :  $f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{488,7}{1,14} = 430,7 MPa$ .

Εάν χρησιμοποιούσαμε τη γνωστή από προηγούμενη γνώση τιμή  $V_f=0,1$ , η οποία αποτελεί το σύνηθες ανώτατο όριο για το συντελεστή διασποράς του δομικού χάλυβα, τότε ομοίως με πριν θα είχαμε:

$$f_{u,k} = m_f (1 - k_n V_f) = 555,3(1 - 1,71 * 0,1) = 460,2 MPa < 488,7 MPa,$$

$$\gamma_m = \frac{1 - k_n V_f}{1 - k_{d,n} V_f} = \frac{1 - 1,71 * 0,1}{1 - 3,22 * 0,1} = 1,22 > 1,14,$$

$$f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{460,2}{1,22} = 376,7 MPa < 430,7 MPa.$$

Δηλαδή για μεγαλύτερο συντελεστή διασποράς προκύπτουν πιο συντηρητικές τιμές, όπως ήταν αναμενόμενο.

#### 5.6.1.2 Συντελεστής μεταβλητότητας $V$ άγνωστος

Εάν ληφθεί  $V_f$  άγνωστος, τότε  $k_n = -t_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = -t_p \sqrt{\frac{1}{12} + 1} = -t_p * 1,04$  και για την 5% χαρακτηριστική τιμή και  $\nu=n-1=12-1=11$  βαθμούς ελευθερίας έχουμε  $k_n = -t_{p,5\%,11} * 1,04 = -(-1,796) * 1,04 = 1,87 > 1,71$ , ενώ για την 0,1% τιμή σχεδιασμού προκύπτει  $k_{d,n} = -t_{p,0,1\%,11} * 1,04 = -(-4,02) * 1,04 = 4,186 > 3,22$ . Από το δείγμα υπολογίσαμε  $V_f=0,052$ , όμως επειδή αυτή η τιμή είναι μικρότερη του 0,1 θα χρησιμοποιήσουμε  $V_f=0,1$  σύμφωνα με την παρ. D7.1 (5) του EN 1990 [12]. Έτσι έχουμε  $f_{u,k} = m_f (1 - k_n V_f) = 555,3(1 - 1,87 * 0,1) = 451,5 MPa < 460,2 MPa$ ,



$$\gamma_m = \frac{1 - k_n V_f}{1 - k_{d,n} V_f} = \frac{1 - 1,87 * 0,1}{1 - 4,186 * 0,1} = 1,40 > 1,22,$$

$$f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{451,5}{1,40} = 322,7 MPa < 476,7 MPa.$$

Δηλαδή παρατηρούμε και στην πράξη ότι οι συντελεστές  $k$  προκύπτουν μεγαλύτεροι για άγνωστο συντελεστή διασποράς  $V_f$  απ' ό,τι για γνωστό  $V_f$ . Αυτό οδηγεί για ίσους συντελεστές διασποράς  $V_f$  σε πιο συντηρητικές τιμές παραμέτρων στην περίπτωση που δε χρησιμοποιούμε προηγούμενη γνώση για το υλικό, όπως είδαμε και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις για  $V_f=0,1$ .

## 5.6.2 Λογαριθμοκανονική κατανομή

Έστω τώρα ότι η τάση θραύσης  $f_u$  ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή. Οι συντελεστές  $k$  είναι ίδιοι ανεξάρτητα από το εάν η μεταβλητή ακολουθεί κανονική ή λογαριθμοκανονική κατανομή. Άρα και στην περίπτωση λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι για την 5% χαρακτηριστική τιμή  $k_n=1,71$  για γνωστό  $V$  και  $k_n=1,87$  για άγνωστο  $V$ , όπως υπολογίστηκε παραπάνω. Ομοίως, για την 0,1% τιμή σχεδιασμού είναι  $k_{d,n}=3,22$  για γνωστό  $V$  και  $k_{d,n}=4,186$  για άγνωστο  $V$ . Επίσης, υπολογίζουμε τη μέση τιμή  $m_Y$  σύμφωνα

$$\text{με τη σχέση 5.7: } m_Y = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum \ln f_{u,i}}{n} = \frac{75,83}{12} = 6,32.$$

### 5.6.2.1 Συντελεστής μεταβλητότητας $V$ γνωστός

Εάν θεωρήσουμε τη γνωστή από προηγούμενη γνώση τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας  $V_f=0,07$  έχουμε για λογαριθμοκανονική κατανομή, σύμφωνα και με τα όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω:

$$s_Y = \sqrt{\ln(V_f^2 + 1)} = \sqrt{\ln(0,07^2 + 1)} = 0,07,$$

$$f_{u,k} = e^{m_Y - k_n s_Y} = e^{6,32 - 1,71 * 0,07} = 492,4 MPa > 488,7 MPa,$$

$$\gamma_m = e^{(k_{d,n} - k_n) s_Y} = e^{(3,22 - 1,71) * 0,07} = 1,11 < 1,14,$$

$$f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{492,4}{1,11} = 443,2 MPa > 430,7 MPa.$$

Παρατηρούμε ότι με τη χρήση της λογαριθμοκανονικής κατανομής στη συγκεκριμένη περίπτωση προκύπτουν λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα από την κανονική κατανομή και άρα οικονομικότερος σχεδιασμός. Συνεπώς η λογαριθμοκανονική κατανομή με κατώτατο όριο το 0 (και άρα η ειδική περίπτωση λογαριθμοκανονικής κατανομής που στην ουσία χρησιμοποιεί ο EN 1990 [12], δείτε και παρ. 2.6.2) φαίνεται να δίνει τιμές πιο κοντά στη μέση τιμή απ' ό,τι η κανονική κατανομή για αρνητικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή. Δηλαδή  $x_p, normal < x_p, lognormal$  για  $p_{normal} = p_{lognormal}$  και  $x_p < \mu$  (όπου  $x_p$  το αντίστοιχο  $p$ -ποσοστημόριο της αντίστοιχης κατανομής,  $p$  η πιθανότητα μη υπέρβασης). Θα μπορούσαμε να πούμε πως, όπως αναφέρει και ο M. Holický [26], η λογαριθμοκανονική κατανομή με κατώτατο όριο το 0 μπορεί να υποεκτιμήσει την εμφάνιση αρνητικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή. Αντίθετα, μπορεί να υπερεκτιμήσει την εμφάνιση θετικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή, ειδικά εάν η υπό εξέταση μεταβλητή παρουσιάζει μεγάλη διασπορά [26]. Αυτό σημαίνει ότι, όταν δυσμενείς θεωρούνται οι μικρές τιμές της υπό εξέταση ιδιότητας ( $X_{rep} = X_{inf}$ , π.χ. το 5% ποσοστημόριο της  $X$ ), η λογαριθμοκανονική τιμή

δίνει λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα από την κανονική. Αντίθετα, όταν δυσμενείς θεωρούνται οι μεγάλες τιμές της υπό εξέταση ιδιότητας ( $X_{rep}=X_{sup}$ , π.χ. το 95% ποσοστημόριο της  $X$ ), η λογαριθμοκανονική κατανομή δίνει πιο συντηρητικά αποτελέσματα από την κανονική.

Εάν λάβουμε  $V_f=0,1$ , τότε ομοίως με πριν έχουμε:

$$s_Y = \sqrt{\ln(V_f^2 + 1)} = \sqrt{\ln(0,1^2 + 1)} = 0,1$$

$$f_{u,k} = e^{m_Y - k_n s_Y} = e^{6,32 - 1,71 * 0,1} = 467,9 MPa > 460,2 MPa ,$$

$$\gamma_m = e^{(k_{d,n} - k_n) s_Y} = e^{(3,22 - 1,71) * 0,1} = 1,16 < 1,22 ,$$

$$f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{467,9}{1,16} = 402,7 MPa > 376,7 MPa .$$

Και σ' αυτήν την περίπτωση προκύπτουν λιγότερο συντηρητικές τιμές απ' ό,τι με την κανονική κατανομή και ίδιο συντελεστή μεταβλητότητας  $V_f=0,1$ . Επίσης, παρατηρούμε πως, όπως ήταν αναμενόμενο, η χρήση μεγαλύτερου  $V_f$  οδηγεί σε πιο συντηρητικά αποτελέσματα.

### 5.6.2.2 Συντελεστής μεταβλητότητας $V$ άγνωστος

Εάν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε προηγούμενη γνώση για το υλικό η τυπική απόκλιση  $s_Y$  πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με το EN 1990 [12] ως εξής:

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\ln x_i - m_Y)^2} = \sqrt{\frac{1}{12-1} * 0,0131} = \sqrt{0,0012} = 0,035 .$$

Όμως εάν χρησιμοποιήσουμε αυτήν την τυπική απόκλιση προκύπτουν

$$f_{u,k} = e^{m_Y - k_n s_Y} = e^{6,32 - 1,87 * 0,035} = 520,4 MPa > 467,9 MPa ,$$

$$\gamma_m = e^{(k_{d,n} - k_n) s_Y} = e^{(4,186 - 1,87) * 0,035} = 1,08 < 1,16 \text{ και}$$

$$f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{520,4}{1,08} = 480,4 > 402,7 MPa .$$

Δηλαδή, λόγω της πολύ μικρής διασποράς του δείγματος προκύπτουν πολύ πιο συντηρητικές τιμές εάν θεωρήσουμε το γνωστό συντελεστή διασποράς απ' ό,τι τον άγνωστο! Άρα θα πρέπει και στην περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής να χρησιμοποιούμε τον περιορισμό  $V_X \geq 0,1$  όταν δεν χρησιμοποιούμε προηγούμενη γνώση για

το υλικό και άρα ισοδύναμα  $s_Y = \sqrt{\ln(V_X^2 + 1)} \approx V_X \geq 0,1$ . Συνεπώς η χρήση της τιμής  $s_Y=0,035$  είναι προφανώς λάθος και οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν με την τιμή  $s_Y=0,1$  εάν  $V_X < 0,1$ . Άρα οι σωστές τιμές για το παράδειγμά μας με την παραδοχή λογαριθμοκανονικής κατανομής και άγνωστου συντελεστή διασποράς είναι

$$f_{u,k} = e^{m_Y - k_n s_Y} = e^{6,32 - 1,87 * 0,1} = 460,4 MPa > 451,5 MPa ,$$

$$\gamma_m = e^{(k_{d,n} - k_n) s_Y} = e^{(4,186 - 1,87) * 0,1} = 1,26 < 1,40 ,$$

$$f_{u,d} = \eta_d \frac{f_{u,k}}{\gamma_m} = 1,00 * \frac{460,4}{1,26} = 365 MPa > 322,7 MPa .$$

Και για την περίπτωση  $V$  άγνωστος λοιπόν παρατηρούμε πως η λογαριθμοκανονική κατανομή δίνει λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα απ' ό,τι η κανονική για ίδιο συντελεστή διασποράς  $V$ .

## 5.7 Συμπεράσματα

Άρα λοιπόν ο προσδιορισμός των διαφόρων παραμέτρων υλικών που χρειαζόμαστε στο σχεδιασμό με βάση πεπερασμένο αριθμό πειραματικών δοκιμών ενέχει εξ ορισμού αβεβαιότητες, οι οποίες είναι τόσο περισσότερες όσο λιγότερες είναι οι δοκιμές που πραγματοποιούμε και οι δοκιμές που έχουν πραγματοποιηθεί γενικά για το συγκεκριμένο υλικό στο παρελθόν. Αυτές τις αβεβαιότητες προσπαθούμε να καλύψουμε χρησιμοποιώντας στατιστικές και πιθανοτικές μεθόδους, οι οποίες καταλήγουν συνήθως σε μείωση της μέσης τιμής της ιδιότητας του υλικού τόσο μεγαλύτερη όσο περισσότερες είναι οι αβεβαιότητες που υπάρχουν και όσο μεγαλύτερο είναι το επίπεδο αξιοπιστίας που θέλουμε να επιτύχουμε. Αναμενόμενο είναι επίσης πως για περισσότερες αβεβαιότητες και μεγαλύτερο επίπεδο αξιοπιστίας προκύπτει και μεγαλύτερος συντελεστής ασφαλείας του υλικού.

Με μία εκτενέστερη ανάλυση διαπιστώνουμε τις εξής διαφορές στα αποτελέσματα υπολογισμού των διαφόρων παραμέτρων αντοχής που χρησιμοποιούμε κατά το σχεδιασμό ανάλογα με το είδος της θεωρητικής κατανομής της παραμέτρου και το εάν θεωρούμε γνωστό ή άγνωστο το συντελεστή διασποράς της  $V$ :

1. Με θεώρηση λογαριθμοκανονικής κατανομής λαμβάνουμε εν γένει λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα απ' ό,τι με θεώρηση κανονικής κατανομής για  $X_{rep}=X_{inf}$  και πιο συντηρητικά αποτελέσματα για  $X_{rep}=X_{sup}$ .
2. Για θεώρηση γνωστού  $V$  προκύπτουν λιγότερο συντηρητικά αποτελέσματα απ' ό,τι για θεώρηση άγνωστου  $V$ , εάν χρησιμοποιήσουμε ίδιο συντελεστή διασποράς  $V$  και στις δύο περιπτώσεις ή μικρότερο  $V$  στην περίπτωση « $V$  γνωστός». Εάν όμως θεωρήσουμε μία γνωστή συντηρητική εκτίμηση του  $V$  (ανώτατο όριο), τότε πιθανόν να προκύψουν αποτελέσματα περισσότερο υπέρ της ασφαλείας απ' ό,τι στην περίπτωση « $V$  άγνωστος».

## 6 Παρατηρήσεις και συμπεράσματα

### 6.1 Παρατηρήσεις

A. Στην παράγραφο 4.2 (4)P του EN 1990:2002 [12] αναφέρεται η έννοια του συντελεστή μετατροπής ο οποίος «θα πρέπει να εφαρμόζεται όπου είναι απαραίτητο για να μετατραπούν τα αποτελέσματα των δοκιμών σε τιμές που μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν τη συμπεριφορά του υλικού στην κατασκευή ή στο έδαφος». Ο ίδιος

συντελεστής αναφέρεται και πάλι στη σχέση 6.3 της παραγράφου 6.3.3 (1):  $X_d = \eta \frac{X_k}{\gamma_m}$ ,

όπου  $\eta$  η μέση τιμή του συντελεστή μετατροπής,  $X_d$  η τιμή σχεδιασμού μιας ιδιότητας υλικού,  $X_k$  η χαρακτηριστική τιμή της ιδιότητας και  $\gamma_m$  ο επιμέρους συντελεστής ασφαλείας του υλικού. Στην ίδια παράγραφο αναφέρεται ότι ο  $\eta$  θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν φαινόμενα κλίμακας, επιρροές υγρασίας και θερμοκρασίας και λοιπές σχετικές παραμέτρους καθώς επίσης και ότι μπορεί να ενσωματωθεί στη χαρακτηριστική τιμή ή στον ενιαίο συντελεστή ασφαλείας  $\gamma_M$  της παραγράφου 6.3.5 (2). Τέλος, στην παράγραφο D7.2 (1) αναφέρεται επιπλέον ότι η εκτίμηση του εκάστοτε συντελεστή μετατροπής εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το είδος της δοκιμής και το είδος του υλικού, ενώ στην παράγραφο D7.3 (2) ότι, στην περίπτωση που εκτιμάται απευθείας η τιμή σχεδιασμού μιας ιδιότητας από δοκιμές, ο  $\eta$  θα πρέπει να καλύπτει όλες τις αβεβαιότητες που δεν καλύπτονται από τις δοκιμές.

Εκτός από αυτές τις γενικές οδηγίες όμως δεν παρέχονται συγκεκριμένες διευκρινίσεις για το πώς μπορεί να προκύψει η τιμή του συντελεστή μετατροπής, με αποτέλεσμα η όλη έννοιά του να είναι αρκετά αόριστη παρ' όλο που θεωρητικά καλύπτει ένα σημαντικό ποσοστό των αβεβαιοτήτων που προκύπτουν από τις δοκιμές.

B. Στην παράγραφο 6.3.2 (2) του EN1990:2002 [12] αναφέρεται πως στις περισσότερες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σχέση από την οποία προκύπτει η τιμή σχεδιασμού των αποτελεσμάτων των δράσεων  $E_d$  η απλοποίηση  $E_d = E \{ \gamma_{F,i} * F_{rep,i}; a_d \}$ , όπου  $\gamma_{F,i} = \gamma_{f,i} * \gamma_{sd}$  αντί της σχέσης:

$$E_d = \gamma_{sd} * E \{ \gamma_{f,i} * F_{rep,i}; a_d \}.$$

Δεν αναφέρεται όμως στη συγκεκριμένη παράγραφο ποιες είναι αυτές οι περιπτώσεις ή ποιες είναι οι ειδικές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει αυτή η απλοποίηση. Αυτό υπονοείται σε επόμενη παράγραφο [6.3.2 (4)], ότι δηλαδή η παραπάνω απλοποίηση δεν ισχύει σε περιπτώσεις μη γραμμικής ανάλυσης. Θα έπρεπε λοιπόν να διευκρινιστεί στην παράγραφο 6.3.2 (2) το σε ποιες περιπτώσεις δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση που παρατίθεται.

Το ίδιο ισχύει και για την παράγραφο 6.3.5 (2), όπου αναφέρεται πως μπορεί να γίνει

στη σχέση  $R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R \{ X_{d,i}; a_d \} = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R \left\{ \eta_i \frac{X_{k,i}}{\gamma_{m,i}}; a_d \right\}$ , από την οποία προκύπτει η τιμή

σχεδιασμού των αντιστάσεων, η απλοποίηση  $R_d = R \left\{ \eta_i \frac{X_{k,i}}{\gamma_{M,i}}; a_d \right\}$ , όπου  $\gamma_{M,i} = \gamma_{m,i} * \gamma_{Rd}$ .

Ούτε εδώ όμως προσδιορίζεται το πότε μπορεί να γίνει αυτή η απλοποίηση, αλλά υπονοείται στην παράγραφο 6.3.5 (4) ότι εφαρμόζεται στην περίπτωση γραμμικής ανάλυσης.

Γ. Ο πίνακας C3 του EN 1990:2002 [12] χρειάζεται ορισμένες διευκρινίσεις:

Πρώτον, προτείνεται στον εν λόγω πίνακα για τον υπολογισμό της τιμής σχεδιασμού μιας μεταβλητής που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή η σχέση  $\mu e^{-\alpha \beta V}$ , η οποία ισχύει εάν ο συντελεστής διασποράς  $V$  της μεταβλητής είναι μικρότερος του 0,2. Δε διευκρινίζεται ποια σχέση θα χρησιμοποιηθεί εάν προκύψει  $V > 0,2$ . Γενικά, η παραπάνω προσεγγιστική σχέση χρησιμοποιείται εν γένει και για  $V > 0,2$ , αλλά η αντίστοιχη ακριβής σχέση υπολογισμού της τιμής σχεδιασμού μιας μεταβλητής που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή είναι η εξής:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+V^2}} e^{-\alpha \beta \sqrt{\ln(1+V^2)}} \text{ και ισχύει για κάθε τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας } V.$$

Δεύτερον, για την περίπτωση κατανομής Gumbel προτείνεται για τον υπολογισμό τιμών σχεδιασμού η σχέση  $u - \frac{1}{\alpha} \ln[-\ln \Phi(-\alpha \beta)]$ , όπου  $u = \mu - \frac{0,577}{\alpha}$  και  $\alpha = \frac{\pi}{\sigma \sqrt{6}}$ . Δε

διευκρινίζεται όμως ποια είναι η συνάρτηση  $\Phi$ . Αναφορές σε συνάρτηση  $\Phi$  σε άλλα σημεία του EN 1990 (π.χ. παράγραφος C5 (1), πίνακας C4) υποδηλώνουν ότι πρόκειται για τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, πράγμα που μας οδηγεί στο να υποθέσουμε πως πρόκειται και εδώ για την ίδια συνάρτηση.

Τρίτον, θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι σχέσεις του εν λόγω πίνακα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο στην περίπτωση που γνωρίζουμε τη μέση τιμή  $\mu$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma$  της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει, ή αν έχουμε επαρκή αριθμό παρατηρήσεων ώστε αυτές οι παράμετροι να μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια. Δηλαδή δε συνιστάται η χρήση αυτών των σχέσεων σε συνδυασμό με τη μέση τιμή  $m$  και την τυπική απόκλιση  $s$  ενός δείγματος της μεταβλητής, διότι κάτι τέτοιο ενέχει επιπλέον στατιστικές αβεβαιότητες. Εάν το δείγμα που έχουμε είναι σχετικά μικρό, τότε θα πρέπει να ακολουθηθεί για τον προσδιορισμό τιμών σχεδιασμού η διαδικασία που περιγράφεται στο Παράρτημα D του EN 1990.

Τέλος, θα έπρεπε να διευκρινίζεται ρητά σ' αυτό το σημείο σε ποια περίπτωση μεταβλητής χρησιμοποιείται η κάθε κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, η κανονική κατανομή χρησιμοποιείται συνήθως για τα περισσότερα μόνιμα φορτία (π.χ. ίδια βάρη), για γεωμετρικά δεδομένα και σε κάποιες περιπτώσεις για ιδιότητες υλικών, η λογαριθμοκανονική κατανομή για ιδιότητες υλικών και γεωμετρικά δεδομένα και η κατανομή Gumbel για κινητά φορτία.

Δ. Η παράγραφος D7.1 (5) του EN 1990:2002 [12] ορίζει δύο περιπτώσεις για το συντελεστή διασποράς  $V$  μίας μεταβλητής:

1. « $V$  άγνωστος», εάν δεν υπάρχει προηγούμενη γνώση για το συντελεστή διασποράς και
2. « $V$  γνωστός», εάν υπάρχει πλήρης γνώση για το συντελεστή διασποράς

Σχετικά με αυτές τις περιπτώσεις αναφέρεται επίσης στην παράγραφο D7.2 (2) πως η περίπτωση « $V$  γνωστός» θα πρέπει να χρησιμοποιείται εάν ο  $V$  (ή ένα ρεαλιστικό άνω όριο του) είναι γνωστός από προηγούμενη γνώση και η περίπτωση « $V$  άγνωστος» εάν ο  $V$  δεν

είναι γνωστός από προηγούμενη γνώση και άρα θα πρέπει να υπολογιστεί από το δείγμα. Υπονοείται δηλαδή πως, εάν ο συντελεστής διασποράς είναι γνωστός από τη βιβλιογραφία ή από προηγούμενες δοκιμές (εδώ πρέπει να σημειωθεί πως χρειάζεται μεγάλος αριθμός δοκιμών  $n$  για να έχουμε πλήρη γνώση του  $V$ , συνήθως  $n > 100$ ), χρησιμοποιείται αυτή η γνωστή τιμή του και όχι αυτή που προκύπτει από το δείγμα και βρισκόμαστε στην περίπτωση « $V$  γνωστός». Εάν δεν υπάρχουν τέτοια στοιχεία βρισκόμαστε στην περίπτωση « $V$  άγνωστος» και χρησιμοποιούμε στους υπολογισμούς την τιμή του  $V$  που προκύπτει από το δείγμα. Τα παραπάνω θα πρέπει να διευκρινιστούν ρητά στον κανονισμό.

Στην παράγραφο D7.1 (5) αναφέρεται επίσης ότι ο συντελεστής διασποράς  $V$ , όταν είναι άγνωστος, θα πρέπει να λαμβάνεται όχι μικρότερος του 0,10. Δηλαδή, στην περίπτωση « $V$  άγνωστος», εάν από το δείγμα προκύψει τιμή του  $V$  μικρότερη από 0,10, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς την τιμή  $V=0,10$  αντί αυτής που έχει προκύψει από το δείγμα. Άρα λοιπόν και αυτό το σημείο του EN 1990:2002 [12] χρήζει σαφέστερης διατύπωσης.

Ε. Στους πίνακες D1 και D2 του EN 1990:2002 [12] παρατίθενται διάφορες τιμές των συντελεστών  $k_n$  και  $k_{d,n}$  αντίστοιχα για διάφορα μεγέθη δείγματος και για δύο περιπτώσεις, συντελεστής διασποράς  $V$  γνωστός από προηγούμενη γνώση και συντελεστής διασποράς  $V$  άγνωστος. Οι συντελεστές  $k_n$  και  $k_{d,n}$  υπεισέρχονται στον υπολογισμό της 5% χαρακτηριστικής τιμής και της 0,1% τιμής σχεδιασμού αντίστοιχα, με βάση πειραματικά δεδομένα. Η μόνη σχετική αναφορά για το πώς προκύπτουν αυτοί οι συντελεστές βρίσκεται στη σημείωση της παραγράφου D7.1 (1), όπου αναφέρεται πως οι εκφράσεις της παραγράφου D7 χρησιμοποιούν μεθόδους του Bayes. Η αναφορά της σχέσης από την οποία προκύπτουν αυτοί οι συντελεστές θα ήταν ιδιαίτερα διαφωτιστική, καθώς θα επέτρεπε την εκτίμηση οποιουδήποτε ποσοστημορίου (όχι μόνο του 5% και του 0,1%) και για οποιοδήποτε μέγεθος δείγματος.

Συγκεκριμένα, οι συντελεστές  $k_n$  και  $k_{d,n}$  προκύπτουν από την εκτίμηση ποσοστημορίων με την ειδική περίπτωση της μεθόδου του Bayes κατά την οποία θεωρείται ότι δεν υπάρχει προηγούμενη γνώση για το υλικό, οπότε και αυτή η μέθοδος ταυτίζεται με τη μέθοδο πρόβλεψης. Οι σχετικές σχέσεις αυτής της μεθόδου λοιπόν, από τις οποίες προκύπτουν οι συντελεστές  $k_n$  και  $k_{d,n}$  είναι οι εξής:

Για γνωστό συντελεστή διασποράς  $V$ :  $k = -u_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1}$ , όπου  $u_p$  το αντίστοιχο  $p$ -ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής (π.χ. για την 5% χαρακτηριστική τιμή  $p=5\%$  και για την 0,1% τιμή σχεδιασμού  $p=0,1\%$ ) και  $n$  το μέγεθος του δείγματος.

Για άγνωστο συντελεστή διασποράς  $V$ :  $k = -t_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1}$ , όπου  $t_p$  το αντίστοιχο  $p$ -ποσοστημόριο της κατανομής  $t$  του Student και  $n$  το μέγεθος του δείγματος.

ΣΤ. Οι πίνακες D1 και D2 του EN 1990:2002 [12] επιτρέπουν την εξαγωγή συμπεράσματος για το υλικό ακόμα και από πολύ μικρό αριθμό δειγμάτων. Συγκεκριμένα, για γνωστό συντελεστή διασποράς  $V$  επιτρέπουν τον υπολογισμό χαρακτηριστικής τιμής και τιμής σχεδιασμού ακόμα και από μία δοκιμή. Για άγνωστο  $V$  επιτρέπουν τον υπολογισμό της μεν χαρακτηριστικής τιμής ακόμα και με 3 δοκιμές, της δε τιμής σχεδιασμού με 4 δοκιμές. Η εξαγωγή συμπερασμάτων όμως με τόσες λίγες δοκιμές ενέχει πολλές στατιστικές αβεβαιότητες, ειδικά εάν δεν υπάρχει προηγούμενη γνώση για το υλικό, και δε θα έπρεπε να επιτρέπεται. Προτείνουμε λοιπόν για την περίπτωση γνωστού  $V$

τουλάχιστον 3 δοκιμές για τη χαρακτηριστική τιμή και 6 δοκιμές για την τιμή σχεδιασμού ενώ για την περίπτωση άγνωστου  $V$  προτείνουμε για τη μεν χαρακτηριστική τιμή τουλάχιστον 10 δοκιμές ενώ για την τιμή σχεδιασμού πολύ περισσότερες (με 20 δοκιμές προκύπτει μια αρκετά αξιόπιστη προσέγγιση).

Z. Στον πίνακα D2 του EN 1990:2002 [12] παρατίθενται τιμές του συντελεστή  $k_{d,n}$  για διάφορα μεγέθη δείγματος  $n$  και για δύο περιπτώσεις, συντελεστής διασποράς  $V$  γνωστός από προηγούμενη γνώση και συντελεστής διασποράς  $V$  άγνωστος. Οι τιμές αυτές

του  $k_{d,n}$  έχουν προκύψει από τη σχέση  $k = -u_p \sqrt{\frac{1}{n}} + 1$  για γνωστό  $V$  και από τη σχέση

$k = -t_p \sqrt{\frac{1}{n}} + 1$  για άγνωστο  $V$ , όπου  $u_p$  και  $t_p$  στη συγκεκριμένη περίπτωση τα 0,1%

ποσοστημόρια της τυπικής κανονικής κατανομής και της κατανομής  $t$  του Student αντίστοιχα. Όμως για άπειρο μέγεθος δείγματος προτείνεται η τιμή  $k_{d,n}=3,04$  αντί της  $k_{d,n}=3,09$  που είναι η προκύπτουσα από τις παραπάνω σχέσεις. Η τιμή  $k_{d,n}=3,04$  έχει προκύψει από τη σχέση  $\alpha_R \beta$  για  $\alpha_R=0,8$ , που είναι η προτεινόμενη τιμή του παράγοντα ευαισθησίας για ιδιότητες υλικών και  $\beta=3,8$ , που είναι η προτεινόμενη τιμή του δείκτη αξιοπιστίας για τη συνήθη κατηγορία αξιοπιστίας RC2 και περίοδο αναφοράς 50 έτη. Δηλαδή  $\alpha_R \beta = 0,8 * 3,8 = 3,04$ .

Άρα θα πρέπει να διευκρινιστεί σ' αυτό το σημείο του κανονισμού πως, για άπειρο μέγεθος δείγματος (ή ισοδύναμα για γνωστές μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  του υλικού) χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της τιμής σχεδιασμού μιας ιδιότητας υλικού το συντελεστή  $k_{d,n} = \alpha_R \beta$ , πράγμα που μπορεί να οδηγήσει ανάλογα με την περίοδο αναφοράς και την κατηγορία αξιοπιστίας στην οποία εμπίπτει η κατασκευή σε διαφορετικό ποσοστημόριο της τιμής σχεδιασμού από το 0,1%. Αυτό σημαίνει πως, ακόμα και για μικρότερα μεγέθη δείγματος, εάν έχουμε διαφορετική κατηγορία αξιοπιστίας από την RC2 και διαφορετική περίοδο αναφοράς από τα 50 έτη, ο πίνακας D2 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή τιμών σχεδιασμού ιδιοτήτων υλικών, μιας και αναφέρεται σε διαφορετικό ποσοστημόριο από το ζητούμενο.

H. Όσον αφορά τον υπολογισμό των επιμέρους συντελεστών ασφαλείας:

Όπως αναφέρεται στην παράγραφο 6.3 του EN 1990:2002 [12], ορίζονται 4 ανεξάρτητοι επιμέρους συντελεστές ασφαλείας:

1.  $\gamma_f$ , που καλύπτει την πιθανότητα δυσμενούς απόκλισης της τιμής κάποιας δράσης από την αντιπροσωπευτική της τιμή
2.  $\gamma_{sd}$ , που καλύπτει τις αβεβαιότητες του προσομοιώματος υπολογισμού των αποτελεσμάτων των δράσεων
3.  $\gamma_m$ , που καλύπτει την πιθανότητα δυσμενούς απόκλισης της τιμής κάποιας ιδιότητας υλικού από τη χαρακτηριστική της τιμή
4.  $\gamma_{Rd}$ , που καλύπτει τις αβεβαιότητες του προσομοιώματος υπολογισμού των αντιστάσεων

Για το συντελεστή  $\gamma_f$  κάποιας μεταβλητής δράσης αναφέρεται στην παράγραφο C7 (7) ότι μπορεί να προκύψει από τη διαίρεση της τιμής σχεδιασμού της με την αντιπροσωπευτική ή χαρακτηριστική της τιμή.

Για το συντελεστή  $\gamma_m$  (ή  $\gamma_M$  στην περίπτωση που η υπό εξέταση ιδιότητα του υλικού αντιπροσωπεύει την αντίστασή του) αναφέρεται στην παράγραφο D7.1 (3) ότι μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας τη μέθοδο προσδιορισμού χαρακτηριστικών τιμών και τιμών σχεδιασμού υλικών από πειραματικά δεδομένα των παραγράφων D7.2 και D7.3.

Για τους συντελεστές  $\gamma_{sd}$  και  $\gamma_{rd}$  που καλύπτουν αβεβαιότητες προσομοιωμάτων υπολογισμού δε δίνεται καμία οδηγία για το πώς μπορούν να προκύψουν.

Τα παραπάνω υπονοούν πως οι συντελεστές  $\gamma_f$  και  $\gamma_m$  μπορούν να υπολογιστούν από τη διαίρεση της τιμής σχεδιασμού μίας μεταβλητής με τη χαρακτηριστική ή την αντιπροσωπευτική της τιμή, ενώ δεν υπάρχει καμία υπόδειξη για το πώς προκύπτουν οι συντελεστές  $\gamma_{sd}$  και  $\gamma_{rd}$ . Ο τρόπος υπολογισμού των επιμέρους συντελεστών ασφαλείας θα πρέπει λοιπόν να διευκρινιστεί περαιτέρω στον κανονισμό

Θ. Η παράγραφος D7.2 (3) του EN 1990:2002 [12], όπου αναφέρεται πως ο επιμέρους συντελεστής  $\gamma_m$  θα πρέπει να επιλέγεται στην περίπτωση που θέλουμε να εξάγουμε τιμή σχεδιασμού μιας ιδιότητας υλικού από τη χαρακτηριστική της τιμή σύμφωνα με το πεδίο εφαρμογής των αποτελεσμάτων των δοκιμών χρήζει επεξήγησης. Η πρόταση αυτή είναι αρκετά αόριστη και στην ουσία δε διευκρινίζει το πώς μπορεί να επιλεγεί ο συντελεστής  $\gamma_m$  σ' αυτήν την περίπτωση.

Ι. Στην παράγραφο 6.5.4 του EN 1990:2002 [12] αναφέρεται πως για οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας οι επιμέρους συντελεστές  $\gamma_M$  ιδιοτήτων υλικών θα πρέπει να λαμβάνονται ίσοι με 1,00 εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά στα EN1992 έως EN1999. Αυτή η πρόταση έρχεται σε σύγκρουση με τον πίνακα C2 (πίνακας 4.5 της παρούσας διπλωματικής εργασίας), όπου παρατίθενται τιμές του δείκτη αξιοπιστίας  $\beta$  μεταξύ άλλων και για μη αναστρέψιμες οριακές καταστάσεις λειτουργικότητας, οι οποίοι αν χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό επιμέρους συντελεστών ασφαλείας υλικών θα οδηγήσουν εν γένει σε τιμές του  $\gamma_M$  διάφορες του 1,00.

## 6.2 Συμπεράσματα

Άρα συμπεραίνουμε πως το EN 1990:2002 [12] εμπεριέχει αρκετές ασάφειες που χρήζουν διευκρίνισης.

Όσον αφορά την αξιοπιστία των έργων Πολιτικού Μηχανικού, απόλυτη αξιοπιστία υπό την έννοια ότι κάποιο έργο δεν πρόκειται να αστοχήσει ποτέ δεν υπάρχει. Δηλαδή, προκειμένου να μπορεί να υλοποιηθεί το έργο από οικονομικής άποψης, δεχόμαστε μια μικρή πιθανότητα αστοχίας η οποία αναφέρεται σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Ανάλογα με το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας προκύπτει για κάθε μεταβλητή που υπεισέρχεται το σχεδιασμό ο αντίστοιχος συντελεστής ασφαλείας και η τιμή σχεδιασμού της. Αυτές οι παράμετροι είναι εν γένει διαφορετικές για την ίδια μεταβλητή αλλά διαφορετικό επίπεδο αξιοπιστίας ή περίοδο αναφοράς.

Οι συντελεστές ασφαλείας προκύπτουν για κάθε μεταβλητή από τη διαίρεση της τιμής σχεδιασμού της με τη χαρακτηριστική της τιμή.

Η σχέση που δίνει το συντελεστή ασφαλείας  $\gamma$  για μία μεταβλητή αξιοποιώντας πειραματικές μετρήσεις της είναι η εξής:

$$\gamma = \frac{1 - k_n V_X}{1 - k_{d,n} V_X} \text{ για κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές και}$$

$$\gamma = e^{(k_{d,n} - k_n) S_Y} \text{ για λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες μεταβλητές,}$$



όπου  $V_X$  ο συντελεστής μεταβλητότητας της μεταβλητής,  $s_Y$  η διασπορά της και  $k_n, k_{d,n}$  συντελεστές που εξαρτώνται από τα αντίστοιχα ποσοστημόρια της χαρακτηριστικής τιμής και της τιμής σχεδιασμού της μεταβλητής αντίστοιχα ως εξής:

$$k = -u_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \text{ για γνωστό από προηγούμενη γνώση συντελεστή μεταβλητότητας } V \text{ και}$$

$$k = -t_p \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \text{ εάν ο συντελεστής μεταβλητότητας } V \text{ ληφθεί ίσος με αυτόν του δείγματος.}$$

Όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος και  $u_p$  και  $t_p$  τα αντίστοιχα  $p$ -ποσοστημόρια της τυπικής κανονικής κατανομής και της κατανομής  $t$  του Student αντίστοιχα. Η πιθανότητα  $p$  που χρησιμοποιείται για κάθε συντελεστή είναι, για τον μεν  $k_n$  η πιθανότητα μη υπέρβασης της χαρακτηριστικής τιμής της μεταβλητής, για τον δε  $k_{d,n}$  η πιθανότητα μη υπέρβασης της τιμής σχεδιασμού της μεταβλητής.

Εάν γνωρίζουμε τις στατιστικές παραμέτρους της μεταβλητής, και άρα δε χρησιμοποιούμε πειραματικά δεδομένα αλλά τη γνώση μας αυτή, τότε ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από τις ίδιες σχέσεις για  $k_n = -u_p$  και  $k_{d,n} = \alpha\beta$ , όπου  $\alpha$  ο παράγοντας ευαισθησίας της μεταβλητής και  $\beta$  ο συντελεστής αξιοπιστίας της κατασκευής.

Ανάλογες σχέσεις μπορούν να εξαχθούν και για άλλες περιπτώσεις κατανομών της υπό εξέταση μεταβλητής.

Εάν η μέση τιμή της μεταβλητής είναι μικρή ή εάν η μεταβλητή παρουσιάζει μεγάλη διασπορά, είναι πιθανό η χρήση κανονικής κατανομής να δώσει αρνητικές τιμές για ποσοστημόρια με πιθανότητα μικρότερη του 50%. Αυτό δε συμβαίνει με τη χρήση λογαριθμοκανονικής κατανομής.

Η λογαριθμοκανονική κατανομή έχει την τάση να υποεκτιμά την πιθανότητα εμφάνισης μεγάλων αρνητικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή (δηλαδή τιμών της μεταβλητής πολύ μικρότερων από τη μέση τιμή) και να υπερεκτιμά την πιθανότητα εμφάνισης μεγάλων θετικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή (δηλαδή τιμών της μεταβλητής πολύ μεγαλύτερων από τη μέση τιμή). Δηλαδή, όταν χρησιμοποιούμε τη λογαριθμοκανονική κατανομή για εκτίμηση ποσοστημορίων, προκύπτουν μεγαλύτερες τιμές απ' ό,τι από τον υπολογισμό των ίδιων ποσοστημορίων με χρήση κανονικής κατανομής. Γι' αυτό το λόγο η λογαριθμοκανονική κατανομή δίνει συνήθως πιο ευμενή αποτελέσματα κατά την εκτίμηση αντοχών υλικών απ' ό,τι η κανονική κατανομή, μιας και προκύπτουν μεγαλύτερες αντοχές.

## 7 Βιβλιογραφία

1. Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., Σβέρκος Α. (1999). «Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής». Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
2. Βάγιας Ι. (2010). «Σύμμικτες κατασκευές από χάλυβα και οπλισμένο σκυρόδεμα». Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα.
3. Βάγιας Ι., Ερμόπουλος Ι., Ιωαννίδης Γ. (2011). «Σχεδιασμός δομικών έργων από χάλυβα με βάση τα τελικά κείμενα των Ευρωκωδίκων». Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα.
4. Γεωργιακώδης Φ., Γιαλαμάς Β., Δίκαιος Δ., Κόκλα Α.-Μ. (1999). «Στατιστική». Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
5. Κιόχος Π. (1993). «Στατιστική». Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.
6. Κουγιουμτζής Δ. (2010). «Στατιστική για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς». Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης,  
<http://users.auth.gr/~dkugiu/Teach/ElectricEngineer/all.pdf>
7. Μαλακάτας Ν. (2008). «Βάσεις σχεδιασμού». Παρουσίαση από την ημερίδα του ΤΕΕ της 1<sup>ης</sup> Οκτωβρίου 2008: Σχεδιασμός φορέων από σκυρόδεμα με βάση τον Ευρωκώδικα 2, Αθήνα
8. Μαλακάτας Ν., Τρέζος Κ. (2011). «Σημειώσεις για τη χρήση των Ευρωκωδίκων EN 1990: Βάσεις σχεδιασμού των φερουσών κατασκευών, EN 1991: Δράσεις επί των κατασκευών». ΙΕΚΕΜ-ΤΕΕ, Αθήνα
9. Παπαδόπουλος Γ. «Οι κατανομές  $\chi^2$ , t και F». Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών,  
<http://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/distributions13.pdf>
10. Spiegel M., Stephens L. (2000). «Θεωρία και προβλήματα Στατιστικής». Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη.
11. Calgaro J.-A. (2008). “EN 1990-Section 6, Annexes A1 and A2” Proceedings of the JRC “Eurocodes: Background and applications” workshop, Brussels
12. CEN (2002). EN 1990 Eurocode “Basis of structural design”
13. Denton S., Gulvanessian H. (2010). “Understanding key concepts of EN1990” Proceedings of the ICE “Bridge Design to Eurocodes: UK Implementation” conference, London, UK
14. European Communities-Joint Research Centre (JRC) (2008). Booklet “B2-The role of EN 1990: The key head Eurocode”
15. Gayton N., Mohamed A., Sorensen J. D., Pendola M., Lemaire M. (2003). “Calibration methods for reliability-based design codes.” Structural Safety, 24(1), 91-121
16. Gulvanessian H., Calgaro J., Holický M. (2002). “Designer’s guide to EN 1990 Eurocode: Basis of structural design”. Thomas Telford, London, UK
17. Holický M. (2013). “Introduction to Probability and Statistics for Engineers”. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
18. ISO (1998). “ISO 2394- General principles on reliability for structures”.
19. ISO (2001). “ISO 13822-Basis of design of structures-Assessment of existing structures”.
20. JCSS (Joint Committee on Structural Safety) (2001). “Probabilistic model code”. JCSS Internet publications, <http://www.jcss.byg.dtu.dk>

21. Karmazínová M. (2012). “Design Assisted by Testing – A Powerful Tool for the Evaluation of Material Properties and Design Resistances from Test Results.” *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 6(2), 376-385.
22. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Holický M., Vrouwenvelder T. (ed), Chapter I-Basic concepts of structural reliability. Prague, Czech Republic
23. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Holický M., Vrouwenvelder T. (ed), Chapter II-Elementary methods of structural reliability I. Prague, Czech Republic
24. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Holický M., Marková J. (ed), Chapter III-Reliability differentiation. Prague, Czech Republic
25. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Holický M. (ed), Appendix C to Chapter V-Bayesian method for fractile estimation. Prague, Czech Republic
26. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Holický M. (ed), Annex A-Basic statistical concepts and techniques. Prague, Czech Republic
27. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Holický M., Vrouwenvelder T., Arteaga A. (ed), Annex B-Elementary methods of structural reliability II. Prague, Czech Republic
28. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F/PP-134007 “Development of skills facilitating implementation of Eurocodes” (2005).”Implementation of Eurocodes-Handbook 2: Reliability Backgrounds”. In: Krovše I. (ed), Chapter IV-Design assisted by testing. Prague, Czech Republic
29. Ministry of Economics of the Republic of Latvia. “Twinning Latvia EN 1990: Basis of structural design”.  
[http://www.em.gov.lv/images/modules/items/item\\_file\\_20748\\_ec\\_0\(2\).pdf](http://www.em.gov.lv/images/modules/items/item_file_20748_ec_0(2).pdf)
30. Spehl P. (2008). “EN1990: Sections 3 and 4” Proceedings of the JRC “Eurocodes: Background and applications” workshop, Brussels
31. Wikipedia, [http://el.wikipedia.org/wiki/Κανονική\\_κατανομή](http://el.wikipedia.org/wiki/Κανονική_κατανομή)
32. Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Skewness>

# Παράρτημα Α. Πίνακας από υπολογιστικό φύλλο EXCEL για τον προσδιορισμό παραμέτρων υλικών από πειραματικά δεδομένα



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών  
National Technical University of Athens  
Metal Structures Lab

Ημερομηνία

Date

Αναθεώρηση

Revision

## ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ/ TOTAL RESULTS OF TEST

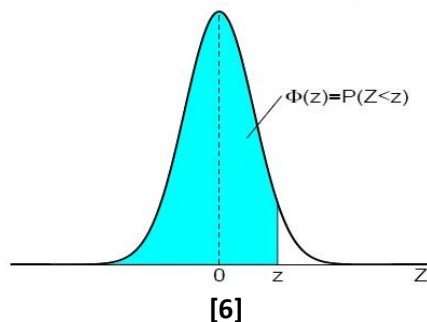
Κωδικός δοκιμίου	Μήκος δοκιμίου	Πλάτος δοκιμίου	Πάχος δοκιμίου	Εμβαδόν διατομής	Μέτρο ελαστικότητας	Αντίσταση υλικού (π.χ. τάση διαρροής/ θραύσης)	Ανηγγμένη παραμόρφωση
Specimen code	Specimen length	Width of specimen	Thickness of specimen	Cross-section area	Modulus of elasticity	Material resistance (e.g. yield stress)	Strain
	L	D	t	A	E	χ	ε
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm <sup>2</sup> ]	[GPa]	[MPa]	[%]
ΤΤ-4-01	124,2	10,1	4,5	45,00	16,7	270,05	4,14
ΤΤ-4-02	130,3	10,2	4,6	46,36	14,1	247,00	3,99
ΤΤ-4-03	124,9	10,2	4,4	44,43	16,1	242,01	3,82
ΤΤ-4-04	125,7	10,0	4,5	45,21	16,6	200,17	3,02
ΤΤ-4-05	50,0	10,1	4,5	45,58	16,2	263,87	11,02
ΤΤ-4-06	50,0	20,1	4,1	82,05	17,6	307,70	11,23
ΤΤ-4-07	50,0	20,1	4,2	83,45	18,7	299,29	10,54
ΤΤ-4-08	50,0	20,1	4,4	88,15	16,4	300,21	11,06
ΤΤ-4-09	50,0	20,1	4,2	84,00	17,6	282,80	10,08
ΤΤ-4-10	50,0	20,0	4,0	79,04	20,0	296,43	10,81
ΤΤ-4-11	50,0	25,2	4,3	108,72	18,1	292,73	12,61
ΤΤ-4-12	50,0	25,1	4,2	105,10	16,8	310,77	13,30
ΤΤ-4-13	50,0	25,0	4,1	103,17	17,6	305,02	12,65
ΤΤ-4-14	197,0	25,0	4,1	102,52	16,4	291,08	3,10
ΤΤ-4-15	50,0	26,4	4,4	116,92	19,1	275,41	13,14

Στατιστική ανάλυση / Statistical analysis								
Ανάλυση με:/Type of distribution:		Λογαριθμοκανονική κατανομή/Lognormal distribution						
Συντελεστής διασποράς $V_x$ /Coefficient of variation $V_x$ :		άγνωστος/unknown						
Συντελεστής διασποράς της αντίστασης (συμπληρώνεται εάν είναι γνωστός από προηγούμενη γνώση) / Coefficient of variation of the resistance (to be filled in only if it is known from previous knowledge):								
Πιθανότητα μη υπέρβασης χαρακτηριστικής τιμής/Probability of observing a value lower than the characteristic value:		5,00%						
Πιθανότητα μη υπέρβασης της τιμής σχεδιασμού/Probability of observing a value lower than the design value:		0,10%						
Συντελεστής $\eta_d$ :	1,00							
		D	t	A	$\epsilon$	E	X	lnX
Πλήθος δειγμάτων / Number of specimens	n	15	15	15	15	15	15	15
Μέση τιμή/Mean	m	18,508	4,287	78,647	8,97	17,2	277,2	5,62
Διακύμανση/ Variance	$s^2$	42,741	0,034	710,739	16,30	2,08	925,2	0,01
Τυπική απόκλιση/ Standard deviation	s	6,538	0,185	26,660	4,04	1,44	30,4	0,12
Συντ. διασποράς / Coefficient of variation	V	0,353	0,043	0,339	0,45	0,08	0,110	
Συντελεστής k για τη χαρακτηριστική τιμή / k factor for the characteristic value	$k_n$						1,82	
Συντελεστής k για την τιμή σχεδιασμού / k factor for the design value	$k_{d,n}$						3,91	
Χαρακτηριστική τιμή / Characteristic value	$X_k$						223,5	
Επιμέρους συντ. ασφαλείας του υλικού / Partial factor for material property	$\gamma_m$						1,28	
Αποτελέσματα / Results								
Κωδικός	Πλάτος δοκιμίου	Πάχος δοκιμίου	Εμβαδόν διατομής	Μέτρο ελαστικότητας	Χαρακτηριστική τιμή ιδιότητας/ αντίστασης	Επιμέρους συντελεστής ασφαλείας	Τιμή σχεδιασμού ιδιότητας/ αντίστασης	
Code	Width of parallel section	Thickness	Cross-section area	Modulus of elasticity	Characteristic value of material resistance/property	Partial factor for property	Design value of property/ resistance	
	mean	mean	mean	mean	5,00% ποσοστημόριο/ fractile	-	0,10% ποσοστημόριο/ fractile	
	D	t	A	E	$X_k$	$\gamma_m$	$X_d$	
	[mm]	[mm]	[mm <sup>2</sup> ]	[GPa]	[MPa]	-	[MPa]	
<b>TT-4</b>	<b>18,51</b>	<b>4,29</b>	<b>78,65</b>	<b>17,2</b>	<b>223,5</b>	<b>1,28</b>	<b>174,4</b>	

Προσδιορισμός $\gamma_m$ και $X_d=R_d$ με χρήση του δείκτη αξιοπιστίας $\beta$ /Calculation of $\gamma_m$ and $X_d=R_d$ using the reliability index $\beta$			
Ανάλυση με:/Type of distribution:		Λογαριθμοκανονική κατανομή/Lognormal distribution	
Δείκτης αξιοπιστίας $\beta$ :	3,8		
Μέση τιμή του πληθυσμού $\mu$ :/Population mean $\mu$ :	277		
Τυπική απόκλιση του πληθυσμού $\sigma$ :/ Population standard deviation $\sigma$ :	30		
Παράγοντας ευαισθησίας $a_R$ :/Sensitivity factor $a_R$ :	0,8		
Πιθανότητα μη υπέρβασης χαρακτηριστικής τιμής/Probability of observing a value lower than the characteristic value:	5,00%		
	$R_k$	$\gamma_m$	$R_d$
	[MPa]	-	[MPa]
	231,8	1,16	199,3
Σχόλια:	Πρότυπο συμμόρφωσης: EN 1990:02		
Remarks:	Corresponding standard:		

## Παράρτημα Β. Πίνακες κατανομών

Πίνακας Β.1: Πίνακας τυπικής κανονικής κατανομής



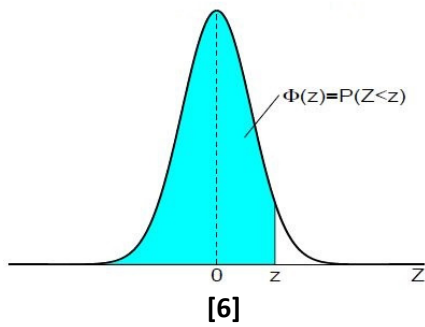
Ο πίνακας δίνει την πιθανότητα  $P(Z < z)$  όταν  $Z \sim N(0,1)$

π.χ. για  $z=0,1+0,01=0,11 \leftrightarrow P(Z < z)=\Phi(z)=0,5438$

Ισχύει  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$  και  $P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$

<b>z</b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0,0</b>	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
<b>0,1</b>	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
<b>0,2</b>	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
<b>0,3</b>	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
<b>0,4</b>	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
<b>0,5</b>	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
<b>0,6</b>	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
<b>0,7</b>	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
<b>0,8</b>	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
<b>0,9</b>	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
<b>1,0</b>	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
<b>1,1</b>	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
<b>1,2</b>	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
<b>1,3</b>	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
<b>1,4</b>	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
<b>1,5</b>	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
<b>1,6</b>	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
<b>1,7</b>	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
<b>1,8</b>	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
<b>1,9</b>	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
<b>2,0</b>	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
<b>2,1</b>	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
<b>2,2</b>	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
<b>2,3</b>	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
<b>2,4</b>	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
<b>2,5</b>	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
<b>2,6</b>	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
<b>2,7</b>	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736

Πίνακας Β.1: Πίνακας τυπικής κανονικής κατανομής



Ο πίνακας δίνει την πιθανότητα  $P(Z < z)$  όταν  $Z \sim N(0,1)$

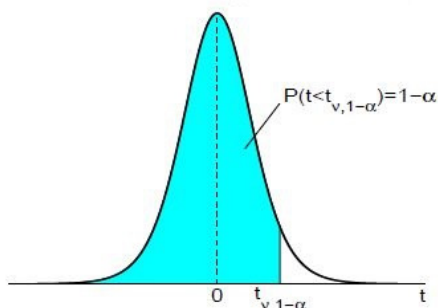
π.χ. για  $z=0,1+0,01=0,11 \leftrightarrow P(Z < z)=\Phi(z)=0,5438$

Ισχύει  $\Phi(-z) = 1-\Phi(z)$  και  $P(Z > z) = 1-P(Z < z) = 1-\Phi(z)$

<b>z</b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>2,8</b>	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
<b>2,9</b>	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
<b>3,0</b>	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
<b>3,1</b>	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
<b>3,2</b>	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
<b>3,3</b>	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
<b>3,4</b>	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
<b>3,5</b>	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

<b>Φ(z)=P(Z&lt;z)</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,001</b>	<b>0,005</b>	<b>0,01</b>	<b>0,025</b>	<b>0,05</b>	<b>0,10</b>
<b>z=u<sub>p</sub></b>	3,29	3,09	2,576	2,326	1,96	1,645	1,282

Πίνακας Β.2: Πίνακας κατανομής t του Student [6]



Ο πίνακας δίνει το ποσοστημόριο  $t_p = t_{v,1-\alpha}$  για  $v$  βαθμούς ελευθερίας έτσι ώστε

$$P(t < t_p) = p = 1 - \alpha$$

π.χ. για  $p = 95\% = 1 - \alpha$  και μέγεθος δείγματος  $n = 10 \leftrightarrow v = n - 1 = 9$  έχουμε  $t_p = t_{9,95\%} = 1,833$

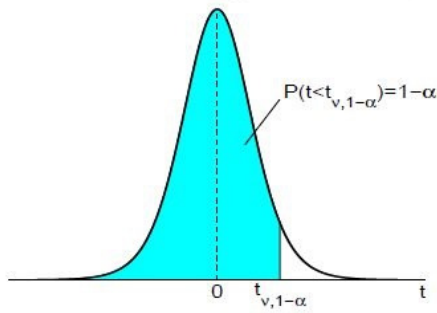
Ισχύει  $t_{v,1-\alpha} = -t_{v,\alpha}$ ,

π.χ.  $t_{v,5\%} = -t_{v,95\%} = -1,833$

v	1- $\alpha$						
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622



Πίνακας Β.2: Πίνακας κατανομής t του Student [6]



Ο πίνακας δίνει το ποσοστημόριο  $t_p = t_{v,1-\alpha}$  για  $v$  βαθμούς ελευθερίας έτσι ώστε

$$P(t < t_p) = p = 1 - \alpha$$

π.χ. για  $p = 95\% = 1 - \alpha$  και μέγεθος δείγματος  $n = 10 \leftrightarrow v = n - 1 = 9$  έχουμε  $t_p = t_{9, 95\%} = 1,833$

Ισχύει  $t_{v, 1-\alpha} = -t_{v, \alpha}$ ,

π.χ.  $t_{v, 5\%} = -t_{v, 95\%} = -1,833$

v	1-α						
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
<b>34</b>	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
<b>36</b>	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
<b>38</b>	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
<b>40</b>	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
<b>50</b>	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
<b>60</b>	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
<b>100</b>	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
<b>120</b>	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
<b>150</b>	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145	3,357
<b>200</b>	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
<b>300</b>	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592	3,118	3,323
<b>400</b>	1,284	1,649	1,966	2,336	2,588	3,111	3,315
∞	1,282	1,646	1,962	2,33	2,581	3,098	3,300