



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ
ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ
ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕΣΩ ΣΥΖΥΓΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ**

Μεταπτυχιακή Εργασία

Παναγιώτης Γκατσώνης

Επιβλέπων: Δρ. Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2014

ΣΥΝΟΨΗ

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη του ροϊκού πεδίου και ο υπολογισμός των αεροδυναμικών συντελεστών μιας αεροτομής σε ασυμπίεστη ροή, καθώς και η βελτιστοποίηση του σχήματός της, με χρήση συζυγών μεθόδων (adjoint methods).

Το πρώτο μέρος της εργασίας, που αφορά στον υπολογισμό των αεροδυναμικών συντελεστών, περιλαμβάνει την παραμετροποίηση της αεροτομής με χρήση πολυώνυμων Bezier, τη διακριτοποίηση του πεδίου με τη δημιουργία κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος, την επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν το ροϊκό πεδίο και τελικά τον υπολογισμό των ζητούμενων συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας.

Στο δεύτερο μέρος, που αφορά στη βελτιστοποίηση της αεροτομής, αρχικά αναφέρονται οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται, η μέθοδος της απότομης καθόδου και οι προσεγγιστικές μέθοδοι Newton. Στη συνέχεια, περιγράφεται η συνεχής συζυγής μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, που απαιτείται από τις προαναφερθείσες μεθόδους και στο τέλος, παρατίθενται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

Ο πυρήνας της εργασίας είναι το ελεύθερο πακέτο λογισμικού Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής OpenFOAM, του οποίου το πλεονέκτημα έγκειται στο ότι είναι ανοικτό λογισμικό και κατά συνέπεια επιτρέπει τον πλήρη έλεγχο της υπολογιστικής διαδικασίας και την ενσωμάτωση υπορουτίνων από το χρήστη. Ο κώδικας για την πρόλεξη του πεδίου ροής και οι υπορουτίνες του OpenFOAM για τη συζυγή μέθοδο αναπτύχθηκαν από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Δρ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την καθοδήγηση που μου παρείχε, καθώς και σε όλα τα μέλη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών και ιδίως στους Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή - Κιαχαγιά και Υπ. Διδάκτορα Ιωάννη Καββαδία για τη βοήθεια που μου πρόσφεραν στην καλύτερη κατανόηση των μεθόδων και την αντιμετώπιση των δυσκολιών που προέκυψαν.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦ. 1° ΠΡΟΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ.....	5
1.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	5
1.2 ΑΕΡΟΤΟΜΗ UI-1720.....	6
1.3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ.....	7
1.4 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΡΟΗΣ.....	10
ΚΕΦ. 2° ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ - ΕΠΙΛΥΤΗΣ.....	14
2.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	14
2.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ.....	15
2.2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΥΡΒΗΣ SPALART – ALLMARAS.....	17
2.2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΥΡΒΗΣ $k - \omega$ SST.....	19
2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΩΣΗΣ – ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ.....	21
2.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ.....	23
2.4.1 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	23
2.4.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLE.....	26
ΚΕΦ. 3° ΜΕΤΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	28
3.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	28
3.2 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ.....	28
3.3 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ SPALART - ALLMARAS.....	30
3.4 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ $k - \omega$ SST.....	32
3.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	33
ΚΕΦ. 4° ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ.....	39
4.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	39
4.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	39
4.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	42
4.3.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	42
4.3.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ALM.....	43
4.4 Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ.....	45
ΚΕΦ. 5° ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	49
5.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	49
5.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ.....	52
ΚΕΦ. 6° ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ.....	59
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Α»	63
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Β».....	66
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Γ»	71
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Δ»	72
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	73

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία τριάντα χρόνια, η ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών είχε κομβικές συνέπειες σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, δίνοντας τεράστια ώθηση στην εξέλιξη της επιστήμης και της τεχνολογίας. Η Μηχανική των Ρευστών ήταν ένα από τα πρώτα επιστημονικά πεδία που ενσωμάτωσαν τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές για την επίλυση των πολύπλοκων εξισώσεων ροής, αναπτύσσοντας τον κλάδο της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής. Η ανάπτυξη του κλάδου αυτού σε συνδυασμό με τη διάδοση των προσωπικών ηλεκτρονικών υπολογιστών έδωσαν τη δυνατότητα στο Μηχανικό, τόσο στο χώρο της εφαρμογής όσο και στο χώρο της έρευνας, να επιλύει αριθμητικά πολύπλοκα προβλήματα, τα οποία μέχρι πρότινος αντιμετωπιζόνταν μόνο με ημιεμπειρικές μεθόδους και κοστοβόρα πειράματα.

Υπό το πρίσμα αυτό καθορίστηκε και το πλαίσιο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, που αποσκοπεί στη **σύνθεση** των γνώσεων που αποκομίστηκαν στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής για την αντιμετώπιση των επιμέρους υπολογιστικών προβλημάτων, από την αρχική δημιουργία πλέγματος επίλυσης μέχρι την τελική βελτιστοποίηση, μέσω της **εφαρμογής** τους στο κεντρικό πρόβλημα της Αεροδυναμικής, τον υπολογισμό των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών μιας αεροτομής και, στη συνέχεια, τη βελτιστοποίησή της.

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη, το πρώτο, που περιλαμβάνει τα τρία πρώτα Κεφάλαια και αφορά στον υπολογισμό των αεροδυναμικών συντελεστών και το δεύτερο, που περιλαμβάνει τα υπόλοιπα Κεφάλαια και αφορά στη βελτιστοποίηση. Η δομή της εργασίας αναφέρεται στη συνέχεια.

Το 1ο Κεφάλαιο αφορά στην προεπεξεργασία (pre-processing) και περιλαμβάνει την παραμετροποίηση της αεροτομής και τη διακριτοποίηση του πεδίου με τη δημιουργία του κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος.

Στο 2ο Κεφάλαιο αναφέρονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το ροϊκό πεδίο και ο τρόπος επίλυσής τους.

Στο 3ο Κεφάλαιο, που περιλαμβάνει τη μετεπεξεργασία (post-processing) παρατίθενται και αναλύονται τα αποτελέσματα της επίλυσης των εξισώσεων του

πεδίου.

Το 4ο και το 5ο Κεφάλαιο αφορούν στη βελτιστοποίηση, περιλαμβάνοντας τη βασική θεωρία και τις εξισώσεις που εφαρμόζονται καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν αντίστοιχα.

Στο 6ο Κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη της εργασίας και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

Τέλος, στα τέσσερα Παραρτήματα παρατίθενται επικουρικά στοιχεία, όπως πίνακες με γεωμετρικά δεδομένα, τιμές υπολογιζόμενων συντελεστών και διαγράμματα σύγκλισης.

ΜΕΡΟΣ Α'

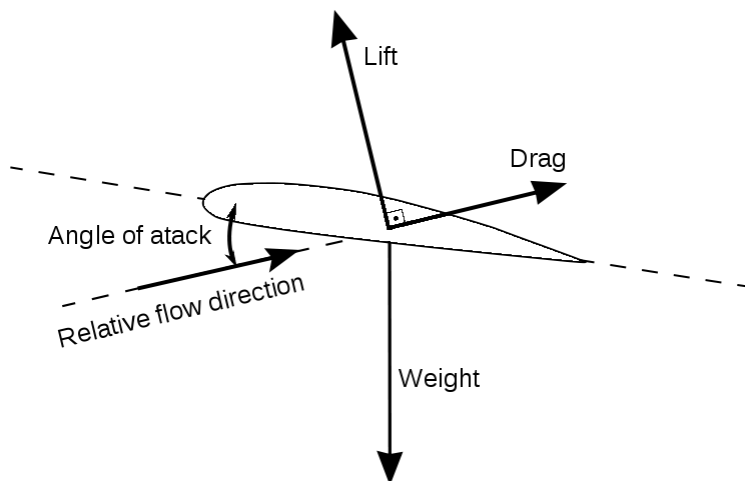
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΠΡΟΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Οι δυνάμεις που επενεργούν σε μια αεροτομή που βρίσκεται μέσα σε ένα ροϊκό πεδίο είναι το βάρος, η άντωση (lift) και η οπισθέλκουσα (drag). Οι δύο τελευταίες είναι οι αεροδυναμικές δυνάμεις, οι οποίες οφείλονται στη ροή του αέρα γύρω από την αεροτομή, με την άντωση να είναι κάθετη στην επ' άπειρο ροή και την οπισθέλκουσα παράλληλη σε αυτή.



Σχήμα 1.1 Δυνάμεις σε μια αεροτομή

Πειραματικά έχει αποδειχθεί ότι η άντωση και η οπισθέλκουσα ενός σώματος εξαρτώνται από τέσσερις παράγοντες:

- i. το σχήμα του σώματος
- ii. τη μέγιστη κατοπτική επιφάνεια
- iii. το τετράγωνο της ταχύτητας
- iv. την πυκνότητα του αέρα

Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης, η εξάρτηση της άντωσης (L) και της οπισθέλκουσας (D) από τους παραπάνω παράγοντες εκφράζεται με τις σχέσεις:

$$L = \frac{1}{2} \rho u^2 S c_L \quad (1.1)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho u^2 S c_D \quad (1.2)$$

όπου ρ : πυκνότητα αέρα

u : ταχύτητα επ' άπειρο (ελεύθερης) ροής

S : μέγιστη κατοπτική επιφάνεια (χορδή)

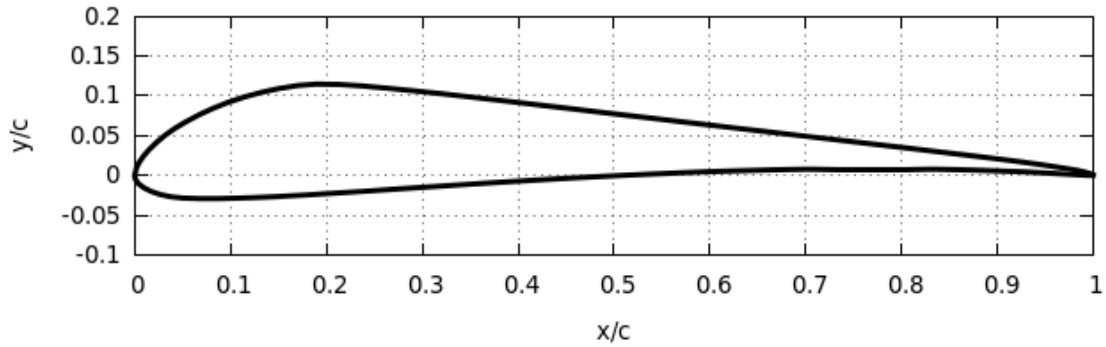
και c_L : συντελεστής άντωσης (αδιάστατο μέγεθος)

c_D : συντελεστής οπισθέλκουσας (αδιάστατο μέγεθος).

Συνεπώς, ο υπολογισμός των ζητούμενων δυνάμεων συνδέεται με τον υπολογισμό των αδιάστατων συντελεστών τους.

1.2 ΑΕΡΟΤΟΜΗ UI-1720

Ως βάση για την υπολογιστική διαδικασία χρησιμοποιήθηκε η αεροτομή UI-1720 του Πανεπιστημίου του Ιλινόις (University of Illinois) [11], [32], [33]. Είναι μια αεροτομή υψηλής άντωσης (high-lift), στην οποία δεν εμφανίζεται αποκόλληση του οριακού στρώματος μέχρι τη γωνία προσβολής των 16° , μετά την οποία εμφανίζεται απώλεια στήριξης (stall). Στο Παράρτημα «Α» παρατίθενται οι συντεταγμένες των σημείων του περιγράμματός της.



Σχήμα 1.2 Αεροτομή UI-1720

1.3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Η παραμετροποίηση της αεροτομής έγινε με την προσέγγισή της με πολυώνυμα Bezier. Μια καμπύλη Bezier καθορίζεται από ένα σύνολο σημείων ελέγχου P_0, \dots, P_n (Bezier Control Points), όπου n η τάξη της καμπύλης, με το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου να είναι πάντα τα άκρα της καμπύλης. Η παραμετρική μορφή της καμπύλης Bezier περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) P_i, \quad t \in [0,1] \quad (1.3)$$

όπου

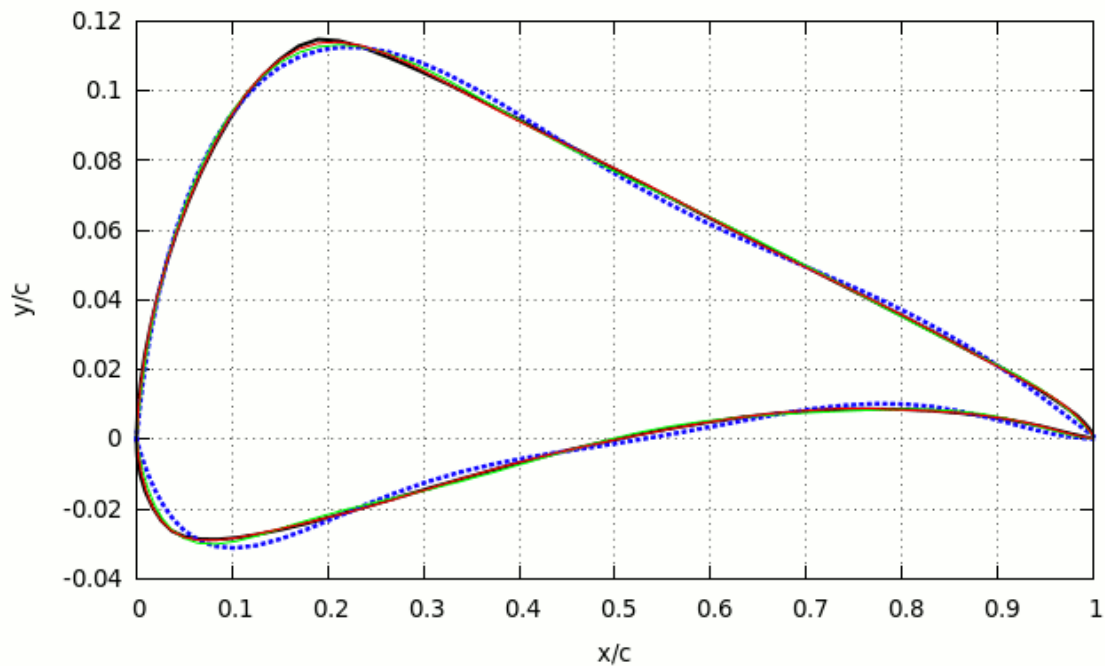
$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i=0, \dots, n$$

τα πολυώνυμα Bernstein, τα οποία υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο:

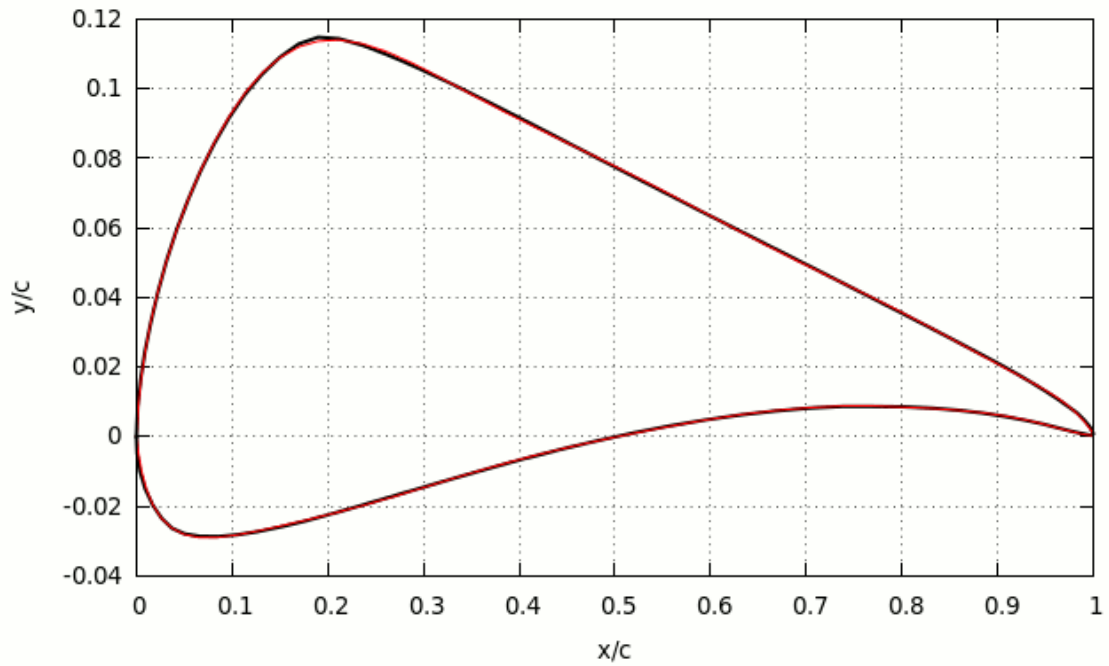
$$\begin{aligned} B_{0,0}(t) &= 1, B_{0,1}(t) = 1-t, B_{0,2}(t) = (1-t)^2 \\ B_{l,i}(t) &= (1-t)B_{l-1,i}(t) + tB_{l-1,i-1}(t), \text{ για } l \geq 1 \text{ και } i=1, \dots, l+1 \\ B_{l,0}(t) &= (1-t)^{l+1}, B_{l,l+2}(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Η προσέγγιση μιας δεδομένης αεροτομής με μια καμπύλη Bezier για τον προσδιορισμό των σημείων ελέγχου γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

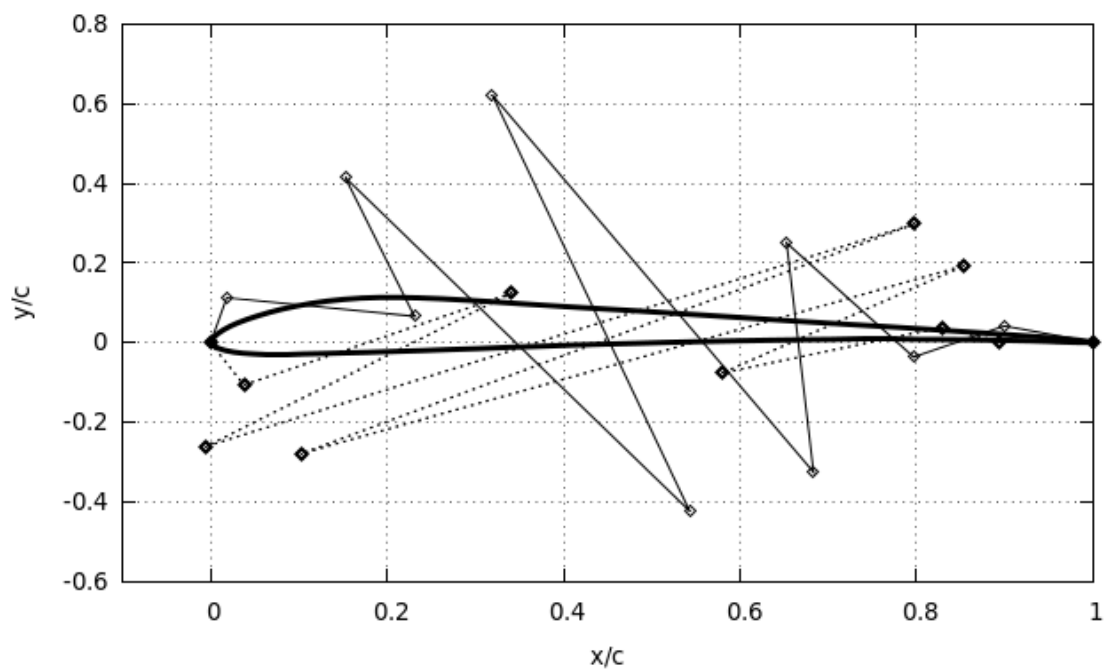
Παραμετροποιώντας την αεροτομή με καμπύλες Bezier 7, 9 και 11 σημείων ελέγχου σε κάθε πλευρά (υπερπίεσης - (p)ressure και υποπίεσης - (s)unction) και συγκρίνοντάς τις, προκύπτει το διάγραμμα του Σχήματος 1.3, από το οποίο φαίνεται ότι η καμπύλη με 11 σημεία προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό το περίγραμμα της αεροτομής. Η καμπύλη των 11 σημείων ελέγχου θα χρησιμοποιείται στο εξής έναντι της αρχικής UI-1720 για όλους τους υπολογισμούς και θα αναφέρεται ως αεροτομή UI*-1720. Οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου παρατίθενται στο Παράρτημα «Α».



Σχήμα 1.3 Σύγκριση αεροτομής UI-1720 με καμπύλες Bezier 7,9,11 σημείων. Με έντονη μαύρη γραμμή αποτυπώνεται η αρχική αεροτομή, με διακεκομμένη μπλε η καμπύλη Bezier 7 σημείων, με πράσινη η καμπύλη 9 σημείων και με κόκκινη η καμπύλη 11 σημείων. Το σχήμα δεν σχεδιάστηκε με κλίμακα, για καλύτερη ευκρίνεια.



Σχήμα 1.4 Σύγκριση αεροτομής UI-1720 με την αεροτομή που προέκυψε από καμπύλες Bezier 11 σημείων ελέγχου. Με έντονη μαύρη γραμμή αποτυπώνεται η αρχική αεροτομή και με κόκκινη οι καμπύλες 11 σημείων. Σχήμα χωρίς κλίμακα.

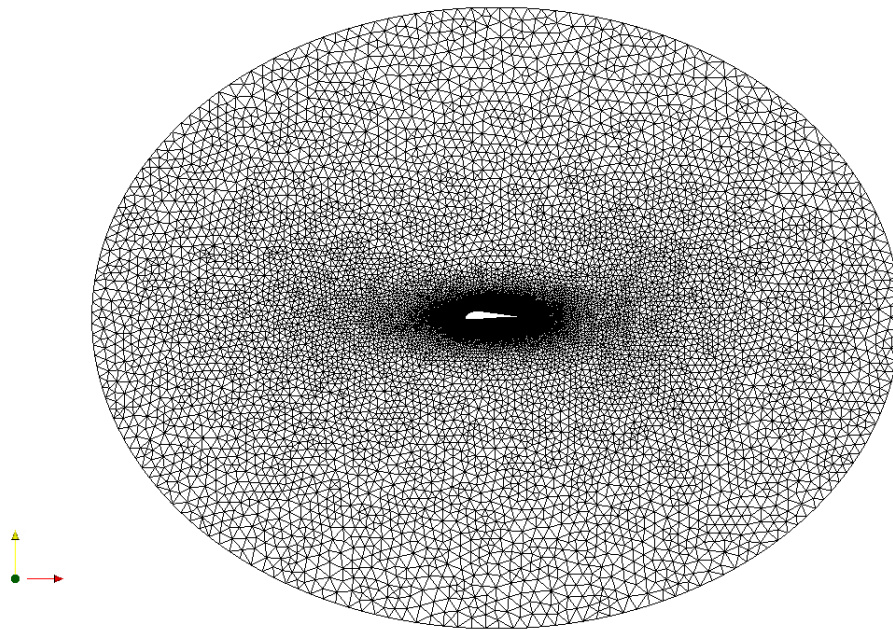


Σχήμα 1.5 Καμπύλες Bezier 11 σημείων ελέγχου. Με διακεκομμένη έντονη γραφή σημειώνονται τα σημεία ελέγχου της πλευράς υπερπίεσης, ενώ με απλή συνεχή γραφή της πλευράς υποπίεσης.

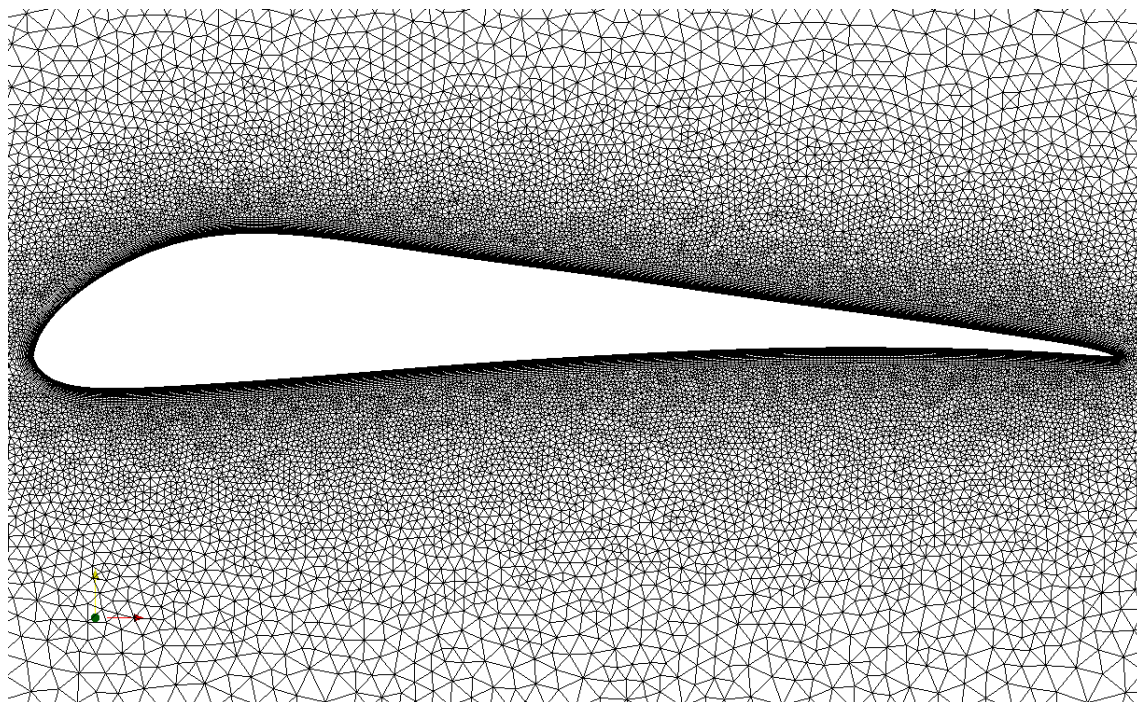
1.4 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΡΟΗΣ

Το επόμενο βήμα, μετά την παραμετροποίηση της αεροτομής, για τον υπολογισμό μιας αριθμητικής λύσης των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή γύρω από την αεροτομή είναι η διακριτοποίηση του προβλήματος με τη δημιουργία κατάλληλου πλέγματος (grid/mesh). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας <gpost09.for>, αναπτυγμένος από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών. Το πλέγμα που δημιουργήθηκε είναι ένα υβριδικό πλέγμα (hybrid grid). Κοντά στην επιφάνεια της αεροτομής δημιουργήθηκε ένα δομημένο πλέγμα (structured grid), για την καλύτερη ανάλυση του οριακού στρώματος, ενώ πιο μακριά δημιουργήθηκε μη-δομημένο πλέγμα (unstructured grid) με τριγωνικά στοιχεία. Η γένεση του δομημένου πλέγματος γίνεται με την επίλυση των εξισώσεων Poisson, ενώ η γένεση του μη-δομημένου πλέγματος γίνεται με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου (Advancing Front Method) [7], [15].

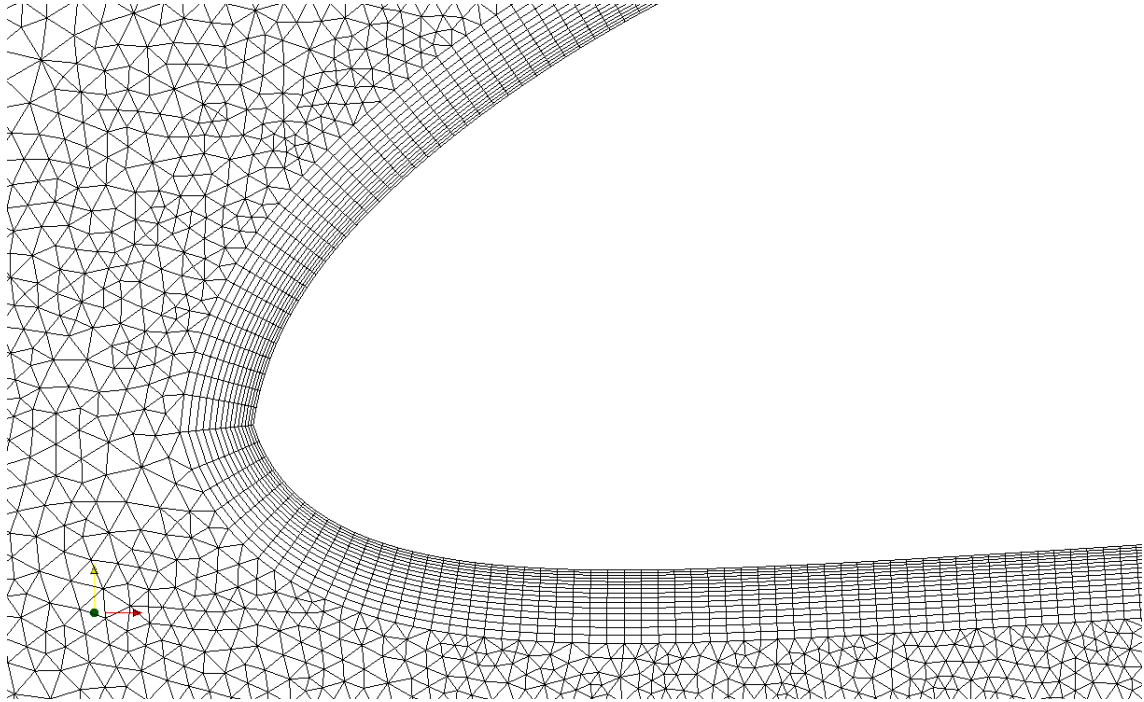
Το πλέγμα που δημιουργήθηκε γύρω από την αεροτομή UI*-1720 φαίνεται στα Σχήματα 1.6 έως 1.9. Αποτελείται από 136946 κόμβους (points) και 174088 κυψέλες (cells), εκ των οποίων 9000 τετράπλευρα και 165088 τρίγωνα, ενώ σε κάθε πλευρά της αεροτομής (suction – pressure) εφάπτονται 300 τετράπλευρα. Συγκριτικά, στα Σχήματα 1.10 και 1.11 φαίνεται το πλέγμα γύρω από τη βασική αεροτομή UI-1720. Παρατηρώντας ειδικά τα Σχήματα 1.8 και 1.11, παρατηρείται μια ακμή στην ακμή προσβολής της παραμετροποιημένης αεροτομής, που οφείλεται σε ασυνέχεια των παραγώγων των πολυώνυμων Bezier κάθε πλευράς της αεροτομής στο συγκεκριμένο σημείο.



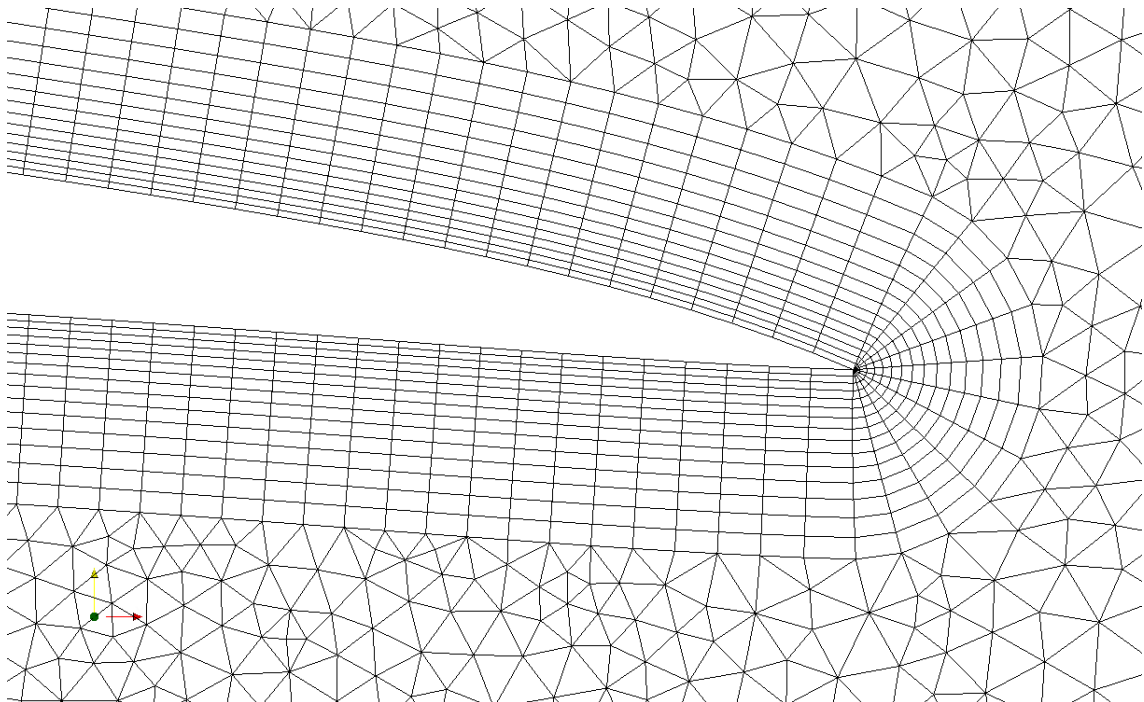
Σχήμα 1.6 Υπολογιστικό πλέγμα αεροτομής UI*-1720



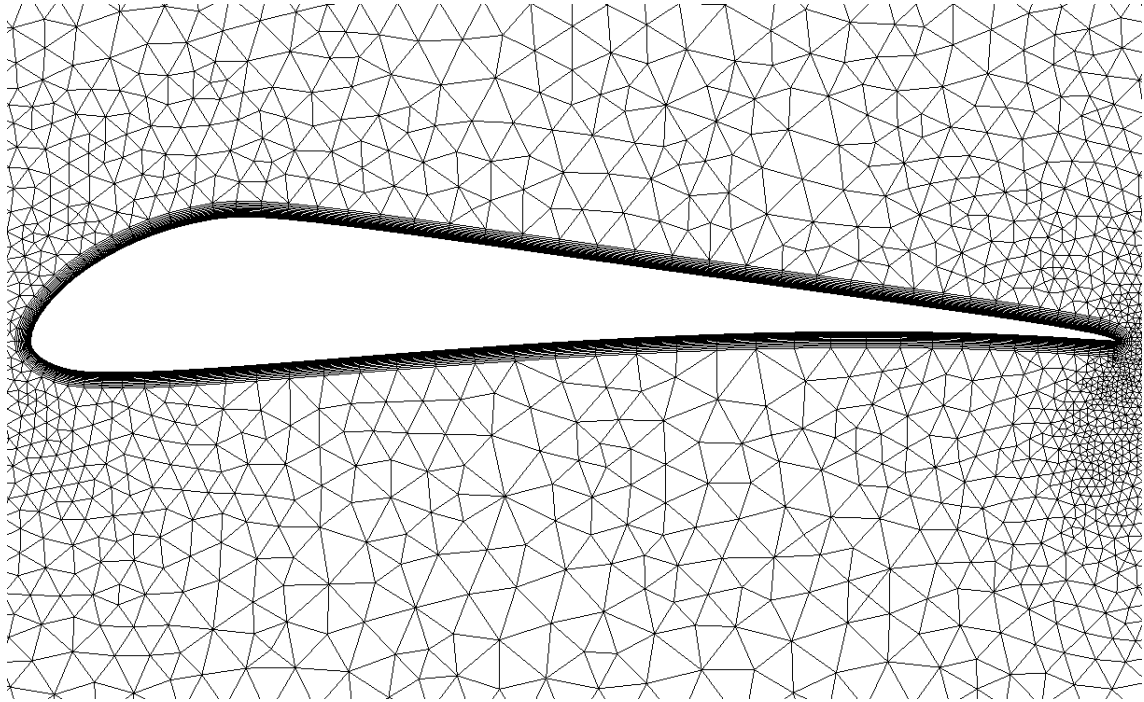
Σχήμα 1.7 Πλέγμα πλησίον της αεροτομής UI*-1720



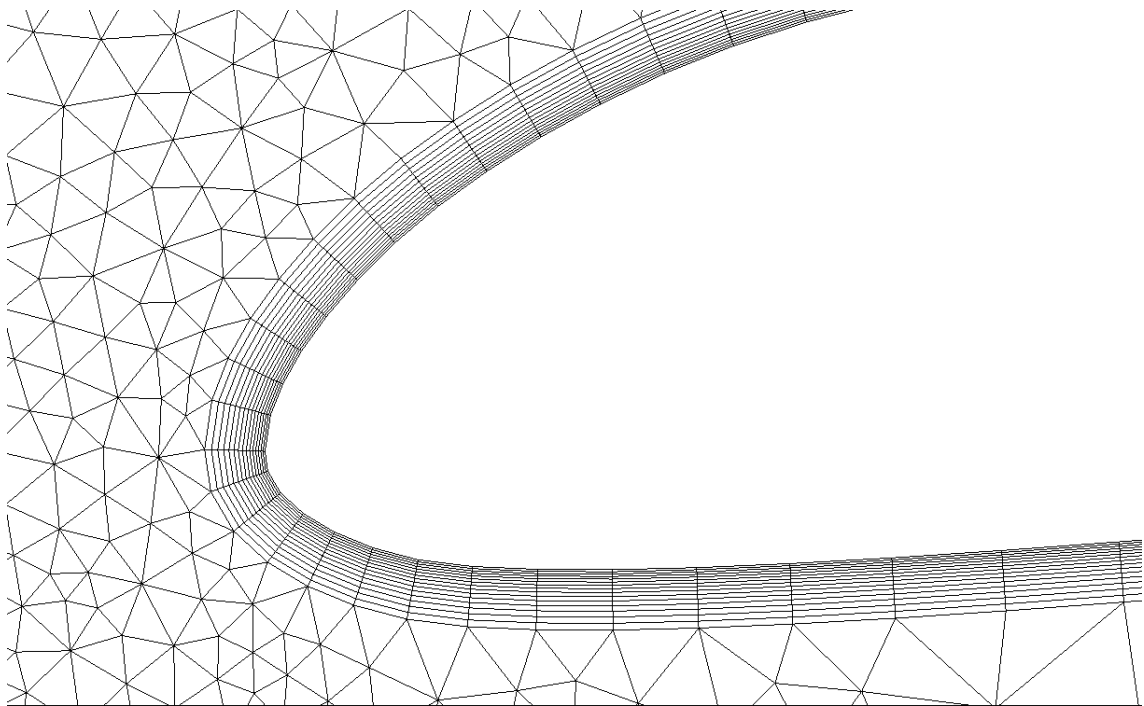
Σχήμα 1.8 Πλέγμα στην ακμή προσβολής (Leading Edge) της αεροτομής UI*-1720.



Σχήμα 1.9 Πλέγμα στην ακμή εκφυγής (Trailing Edge) της αεροτομής UI*-1720



Σχήμα 1.10 Πλέγμα πλησίον της αεροτομής UI-1720



Σχήμα 1.11 Πλέγμα στην ακμή προσβολής (Leading Edge) της αεροτομής UI-1720. Δεν εμφανίζεται κάποια ασυνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ - ΕΠΙΛΥΤΗΣ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Οι εξισώσεις που εκφράζουν το πεδίο ροής γύρω από την αεροτομή είναι η εξίσωση συνέχειας και οι εξισώσεις ορμής (Navier – Stokes). Οι εξισώσεις αυτές για μόνιμη, ασυμπίεστη, στρωτή ροή είναι οι εξής:

- Εξίσωση Συνέχειας

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

- Εξίσωση Ορμής

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.2)$$

όπου \vec{u} η ταχύτητα του ρευστού, με u , v , w τις τρεις συνιστώσες της στις κατευθύνσεις x , y , z αντίστοιχα, p η πίεση του ρευστού διαιρεμένη με την πυκνότητα ρ και ν η κινηματική συνεκτικότητα.

Επιπλέον, ο τανυστής συνεκτικών τάσεων διαιρεμένος με την πυκνότητα τ_{ij} αναπτύσσεται ως εξής:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \nu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3} \nu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \nu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \quad (2.3)$$

Σημειώνεται ότι στο εξής όπου αναφέρονται πιέσεις και τάσεις, θα θεωρούνται πάντα διαιρεμένες με την πυκνότητα.

Όσον αφορά τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, στην επιφάνεια της αεροτομής ισχύουν:

$$u_i = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} n_i = 0$$

Στο επ' άπειρο όριο υπάρχει ελεύθερη ροή, οπότε

$$u_i = u_{\infty i}$$

$$p = p_{\infty}$$

και, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τις διαφορές πιέσεων, τίθεται

$$p_{\infty} = 0$$

2.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ

Για την προσομοίωση της τύρβης [3], εισάγονται στις εξισώσεις Navier – Stokes οι μέσες χρονικές τιμές και οι όροι διακύμανσης των φυσικών μεγεθών, κατά τη γενική μορφή

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$$

όπου

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \Phi dt$$

και προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις Navier – Stokes μέσω των τιμών (Reynolds Averaged Navier Stokes – RANS):

- Εξίσωση Συνέχειας

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

- Εξίσωση Ορμής

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

όπου

$$\bar{\sigma}_{ij} = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

ο τανυστής συνεκτικών τάσεων και

$$\bar{\tau}_{ij} \equiv -\overline{u_i' u_j'}$$

οι τυρβώδεις τάσεις Reynolds.

Η επίλυση των ανωτέρω εξισώσεων απαιτεί τη μοντελοποίηση των τάσεων Reynolds σε όρους ποσοτήτων μέσης ροής. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν και συγκρίθηκαν είναι το μοντέλο Spalart – Allmaras και το k – ω SST, τα οποία περιγράφονται περιληπτικά στη συνέχεια. Και τα δυο μοντέλα βασίζονται στην υπόθεση του Boussinesq για τις τάσεις Reynolds:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\nu_t \left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.6)$$

με ν_t την τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα, κατ' αναλογία με τη μοριακή συνεκτικότητα ν , k την κινητική ενέργεια τύρβης και

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

2.2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΥΡΒΗΣ SPALART – ALLMARAS

Το μοντέλο τύρβης Spalart – Allmaras [15], [16], [34] ανήκει στην κατηγορία μοντέλων τύρβης μιας εξίσωσης και χρησιμοποιείται ιδιαίτερα για τη μελέτη αεροδυναμικών ροών. Το μοντέλο ουσιαστικά είναι μια εξίσωση μεταφοράς για την τυρβώδη συνεκτικότητα, μέσω της ποσότητας $\tilde{\nu}$:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] \quad (2.7)$$

με την κινηματική τυρβώδη συνεκτικότητα να υπολογίζεται ως

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$$

όπου

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}}$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

Επιπλέον,

$$\tilde{S} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

$$\Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$$

όπου Ω το μέγεθος της στροβιλότητας, d η απόσταση κάθε κόμβου από την πλησιέστερη επιφάνεια και

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6}$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r)$$

$$r = \min \left[\frac{\tilde{v}}{\tilde{\sigma} \kappa^2 d^2}, 10 \right]$$

$$f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\tilde{v}_{wall} = 0$$

$$\tilde{v}_{farfield} = 0.1 \nu$$

και οι σταθερές:

$$\sigma = 2/3$$

$$\kappa = 0.41$$

$$c_{b1} = 0.1355$$

$$c_{b2} = 0.622$$

$$c_{v1} = 7.1$$

$$c_{t3} = 1.2$$

$$c_{t4} = 0.5$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$$

$$c_{w2} = 0.3$$

$$c_{w3} = 2$$

2.2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΥΡΒΗΣ $k - \omega$ SST

Το μοντέλο τύρβης $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport) [17], [34] ανήκει στην κατηγορία μοντέλων δύο εξισώσεων. Είναι ουσιαστικά ένας συνδυασμός του μοντέλου $k - \omega$ για τη ροή κοντά στην επιφάνεια της αεροτομής και του μοντέλου $k - \epsilon$ για την ελεύθερη ροή. Το πρώτο εξασφαλίζει μεγαλύτερη ακρίβεια στην περιοχή του τυρβώδους οριακού στρώματος, ενώ το δεύτερο εξαλείφει την ευαισθησία στις τιμές του ω στην ελεύθερη ροή. Το μοντέλο $k - \omega$ SST εμφανίζει πολύ καλή συμπεριφορά σε ροές με ισχυρές αντίξοες βαθμίδες πίεσης και αποκόλληση της ροής. Οι εξισώσεις που το περιγράφουν είναι η εξίσωση μεταφοράς για την κινητική ενέργεια της τύρβης k και για έναν ειδικό ρυθμό καταστροφής των τυρβώδων στροβιλισμών ω :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_k v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{v_t} P - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_\omega v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

όπου

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\tau_{ij} = v_t \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

και η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται ως:

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}$$

Κάθε σταθερά αποτελεί έναν συνδυασμό μιας εσωτερικής (1) και μιας εξωτερικής (2) σταθεράς, κατά τη σχέση:

$$\varphi = F_1 \varphi_1 + (1 - F_1) \varphi_2$$

Επιπρόσθετα:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4)$$

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2)$$

$$\arg_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right)$$

όπου d η απόσταση από την πλησιέστερη επιφάνεια και Ω το μέγεθος της στροβιλότητας, με

$$\Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$$

και

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Στην κ-εξίσωση, αντί του όρου P χρησιμοποιείται ο όρος

$$\min(P, 10\beta^* \omega k)$$

προκειμένου να αποφευχθεί ο υπολογισμός τυρβώδους ροής σε περιοχές ανακοπής της.

Οι οριακές συνθήκες στη ροή γύρω από την αεροτομή επιλέγονται:

$$\omega_{\text{farfield}} = 5 \frac{U_\infty}{L}$$

$$k_{\text{farfield}} = 10^{-6} U_\infty^2$$

και

$$\omega_{\text{wall}} = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta d_1)^2}$$

$$k_{\text{wall}} = 0$$

όπου L το χαρακτηριστικό μήκος κλίμακας τύρβης:

$$L = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega}$$

Οι σταθερές είναι

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$$

$$\sigma_{k1} = 0.85 \quad \sigma_{k2} = 1.0$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0.5 \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856$$

$$\beta_1 = 0.075 \quad \beta_2 = 0.0828$$

$$\beta^* = 0.09$$

$$\kappa = 0.41$$

$$\alpha_1 = 0.31$$

2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΩΣΗΣ – ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ

Η επίλυση των ανωτέρω εξισώσεων και ο υπολογισμός των πιέσεων και ταχυτήτων του πεδίου ροής γύρω από την αεροτομή επιτρέπουν τον προσδιορισμό της άντωσης L και της οπισθέλκουσας D που επενεργούν στην αεροτομή, από τις σχέσεις:

$$L = - \iint_A p \sin\theta \, dA + \iint_A \tau_w \cos\theta \, dA \quad (2.10)$$

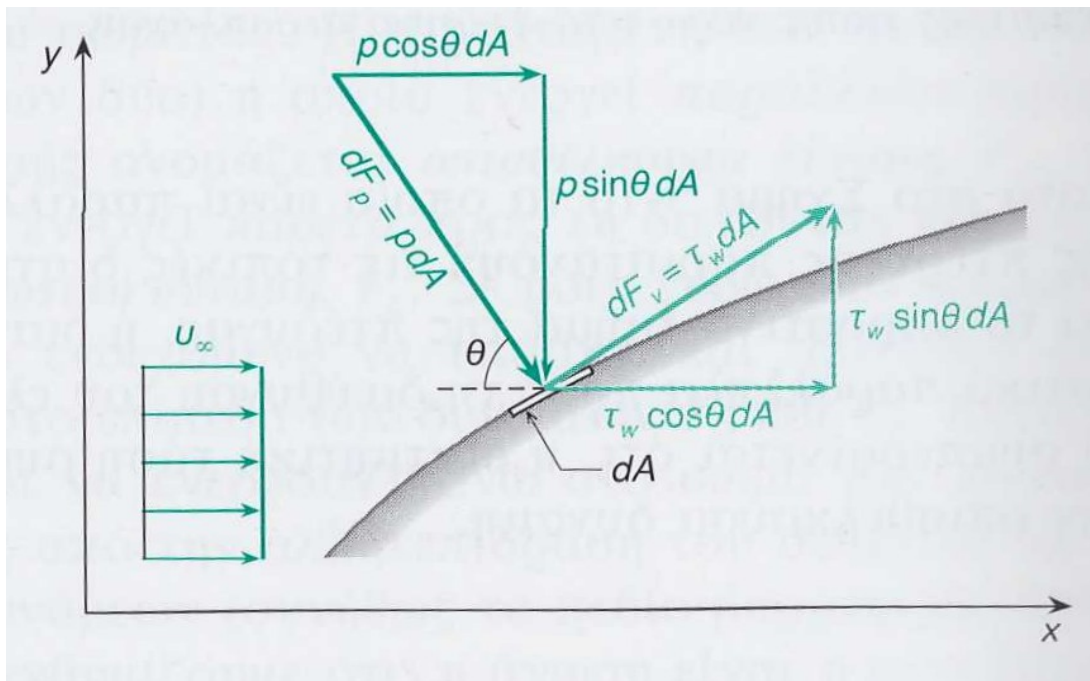
$$D = \iint_A p \cos\theta \, dA + \iint_A \tau_w \sin\theta \, dA \quad (2.11)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις, p είναι η πίεση που ασκείται σε κάθε στοιχειώδες τμήμα dA της επιφάνειας της αεροτομής, τ_w η διατμητική τάση και $(90^\circ - \theta)$ η γωνία του στοιχειώδους τμήματος ως προς τη διεύθυνση της κύριας ροής. Είναι προφανές ότι στις σχέσεις αυτές, οι πρώτοι όροι αποτελούν δυνάμεις πίεσης (μορφής) και οι δεύτεροι συνεκτικές δυνάμεις (τριβής).

Στη συνέχεια υπολογίζονται εύκολα οι αντίστοιχοι συντελεστές άντωσης και οπισθέλκουσας από τις σχέσεις:

$$c_L = \frac{2L}{\rho u^2 S} \quad (2.12)$$

$$c_D = \frac{2D}{\rho u^2 S} \quad (2.13)$$



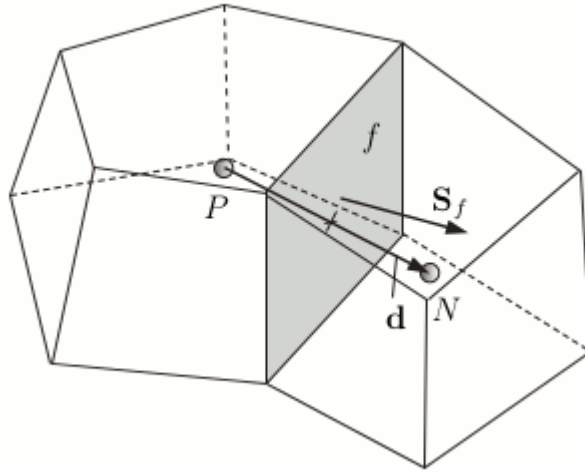
Σχήμα 2.1 Δυνάμεις σε στοιχειώδη επιφάνεια αεροτομής [2]

2.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Η επίλυση των ανωτέρω εξισώσεων γίνεται αριθμητικά, με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων, με τη βοήθεια του λογισμικού OpenFOAM. Το OpenFOAM είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού κώδικα, σε γλώσσα προγραμματισμού C++, για την επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου και ιδίως προβλημάτων Υπολογιστικής Μηχανικής. Το γεγονός ότι είναι ελεύθερο επιτρέπει, πέρα από τη χρήση των υπάρχοντων επιλυτών, τόσο την τροποποίηση και προσαρμογή τους όσο και τη δημιουργία και ενσωμάτωση επιπρόσθετων. Κατά συνέπεια, παρέχεται πλήρης ευελιξία σε όλα τα βήματα επίλυσης, επιλέγοντας τα σχήματα διακριτοποίησης των διαφορικών εξισώσεων, τις μεθόδους επίλυσης για κάθε άγνωστη μεταβλητή, τα κριτήρια σύγκλισης, τον αλγόριθμο για την επίλυση των εξισώσεων για ταχύτητα και πίεση, τους συντελεστές χαλάρωσης [18].

2.4.1 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η βάση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων είναι η ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων ροής σε κάθε πεπερασμένο υπολογιστικό όγκο, που αρκετές φορές ταυτίζεται με την υπολογιστική κυψέλη του υπολογιστικού πλέγματος. Προκειμένου να επιτευχθεί η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων, απαιτείται η μετατροπή τους σε αλγεβρικές· τούτο πραγματοποιείται με τη γραμμικοποίηση σε πρώτη φάση των μη-γραμμικών εξισώσεων, θεωρώντας τους μη γραμμικούς όρους γνωστούς από την προηγούμενη επανάληψη και, στη συνέχεια, τη διακριτοποίησή τους με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι φυσικοί νόμοι του προβλήματος.



Σχήμα 2.2 Παράμετροι διακριτοποίησης μεθόδου πεπερασμένων όγκων [19].

Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται ένας τυπικός όγκος ελέγχου, με το κέντρο P (cell center) όπου εκτελούνται όλοι οι υπολογισμοί. Επίσης, φαίνεται ένας από τους γειτονικούς όγκους ελέγχου με κέντρο N και η κοινή τους έδρα f. \vec{S}_f είναι το κάθετο στην έδρα f διάνυσμα, με μέτρο ίσο με την επιφάνειά της και d είναι η απόσταση των δυο κέντρων, $d = |\vec{PN}|$ και $|\vec{fN}|$ η απόσταση της έδρας f από το κέντρο N.

Στη συνέχεια, παρατίθενται οι διακριτοποιημένοι όροι των εξισώσεων Navier - Stokes [18].

- Εξίσωση Συνέχειας

$$\int_V \nabla \cdot \vec{u} dV = \sum_f \vec{S}_f \cdot \vec{u}_f \quad (2.14)$$

όπου, με χρήση σχήματος κεντρικών διαφορών,

$$\vec{u}_f = f_x \vec{u}_P + (1 - f_x) \vec{u}_N$$

και

$$f_x = \frac{|\vec{fN}|}{|\vec{PN}|}.$$

- Εξίσωση Ορμής – Όρος Μεταφοράς

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{u} \vec{u}) dV = \sum_f \vec{S}_f \cdot (\vec{u})_f \vec{u}_f \quad (2.15)$$

όπου για το \vec{u}_f γίνεται και πάλι χρήση σχήματος κεντρικών διαφορών, ενώ το $(\vec{u})_f$ είναι η γνωστή από την προηγούμενη επανάληψη ταχύτητα στην έδρα f.

- Εξίσωση Ορμής – Όρος Διάχυσης

$$\int_V \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}) dV = \sum_f \nu_f \vec{S}_f \cdot (\nabla \vec{u})_f \quad (2.16)$$

Στην περίπτωση που το πλέγμα είναι ορθογώνιο, δηλαδή $\vec{S}_f // \vec{PN}$, είναι:

$$\vec{S}_f \cdot (\nabla \vec{u})_f = |\vec{S}_f| \frac{\vec{u}_N - \vec{u}_P}{d}$$

ενώ στην περίπτωση που δεν είναι ορθογώνιο, προστίθεται ένας ρητός όρος παρεμβολής των κλίσεων των ταχυτήτων στα κέντρα των κυψελών.

- Οριακές Συνθήκες

Για την ταχύτητα, οι οριακές συνθήκες είναι συνθήκες Dirichlet, οπότε στους οριακούς όγκους ελέγχου τίθεται

$$\vec{u}_f = 0 \quad \text{στην επιφάνεια της αεροτομής και}$$

$$\vec{u}_f = \vec{u}_\infty \quad \text{στο επ' άπειρο όριο.}$$

Αντίστοιχα και για την πίεση, στο επ' άπειρο όριο, όπου ισχύει μηδενική οριακή συνθήκη Dirichlet, τίθεται

$$p_f = 0$$

ενώ, στην επιφάνεια της αεροτομής, όπου ισχύει μηδενική οριακή συνθήκη Neumann, δηλαδή $\vec{n} \cdot (\nabla p)_f = 0$, εφαρμόζονται οι εξής σχέσεις:

$$p_f = p_p$$

$$\vec{S}_f \cdot (\nabla p)_f = 0$$

2.4.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLE

Η εξίσωση ορμής, με βάση τα ανωτέρω, συνοψίζεται στην εξής ημι-διακριτή μορφή:

$$\alpha_P u_{P,i} = \sum_f \alpha_N u_{N,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i \quad (2.17)$$

όπου οι συντελεστές α_P , α_N προκύπτουν από τη διακριτοποίηση της υποενότητας 2.4.1 και b_i το διάνυσμα τυχόν όρων πηγής που προκύπτουν.

Η απουσία της πίεσης από την εξίσωση συνέχειας έχει ως συνέπεια τη μη ύπαρξη ρητής έκφρασης για τον υπολογισμό της. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη χρήση του αλγόριθμου SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), ο οποίος είναι ευρέως χρησιμοποιούμενος για προβλήματα μόνιμης (steady-state) ροής. Ο επαναληπτικός αυτός αλγόριθμος εφαρμόζει την τεχνική της «διόρθωσης πίεσης» (pressure correction) και παρουσιάζεται συνοπτικά στη συνέχεια [24].

Έστω p και u_i τα πεδία πίεσης και ταχύτητας που ικανοποιούν τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής. Έστω επίσης p^* το πεδίο πίεσης που προέκυψε από την προηγούμενη επανάληψη και u_i^* το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει από την επαναληπτική επίλυση της εξίσωσης ορμής με βάση το p^* , το οποίο όμως δεν ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας. Τα βήματα του αλγόριθμου SIMPLE είναι τα εξής:

1. Επίλυση της εξίσωσης

$$\alpha_P u_{P,i}^* = \sum_f \alpha_N u_{N,i}^* - \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + b_i^*$$

ως προς το u_i^* , με βάση το p^* και το ρυθμό ροής μάζας m_f , που απαιτείται για τον υπολογισμό των α_P , α_N , της προηγούμενης επανάληψης του αλγόριθμου (ή την αρχικοποίηση).

2. Υπολογισμός του όρου

$$\hat{u}_{P,j} = \frac{1}{\alpha_P} H_{P,j}(v^*)$$

όπου

$$H_{p,j}(v^*) = \sum_f \alpha_N u_{N,j}^* + b_j$$

και γραμμική παρεμβολή των τιμών του στις έδρες των κυψελών.

3. Επίλυση της εξίσωσης

$$\sum_f \hat{u}_{f,j} S_{f,j} = \sum_f \frac{1}{\alpha_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} S_j \right)_f$$

για τον υπολογισμό του πεδίου πιέσεων p .

4. Υπολογισμός του ρυθμού ροής μάζας m_f από την εξίσωση

$$m_f = u_{f,j} S_{f,j} = \hat{u}_{f,j} S_{f,j} - \frac{1}{\alpha_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} S_j \right)_f.$$

5. Εφαρμογή ρητής υποχαλάρωσης στο πεδίο πιέσεων, δηλαδή

$$p_{new} = \alpha p + (1 - \alpha) p^*$$

με κατάλληλη επιλογή του συντελεστή χαλάρωσης α . Το νέο πεδίο πιέσεων p_{new} θα χρησιμοποιηθεί αντί της p^* στον επόμενο κύκλο του αλγόριθμου.

6. Ανανέωση των πεδίων ταχυτήτων u_i στα κέντρα των κυψελών, από τη σχέση

$$u_{p,i} = \hat{u}_{p,i} - \frac{1}{\alpha_p} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

χρησιμοποιώντας το νέο πεδίο πιέσεων p_{new} .

7. Επίλυση των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης χωριστά από τις εξισώσεις μέσων τιμών ροής.

8. Έλεγχος σύγκλισης. Επανάληψη των βημάτων από την αρχή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

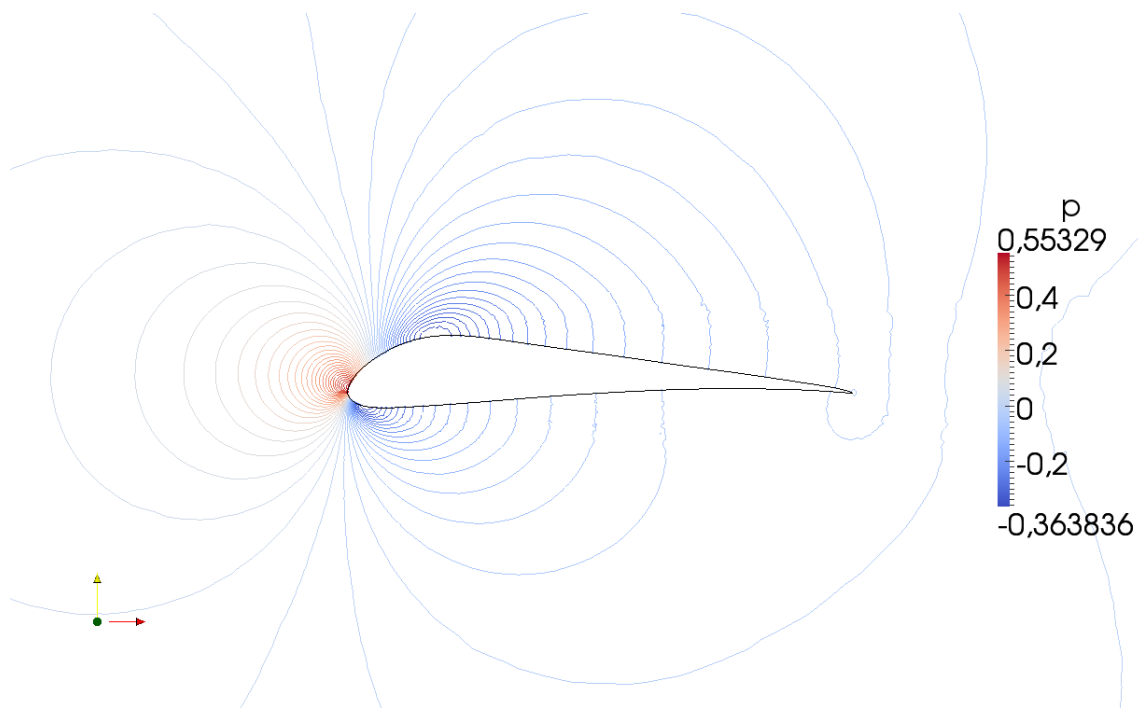
ΜΕΤΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

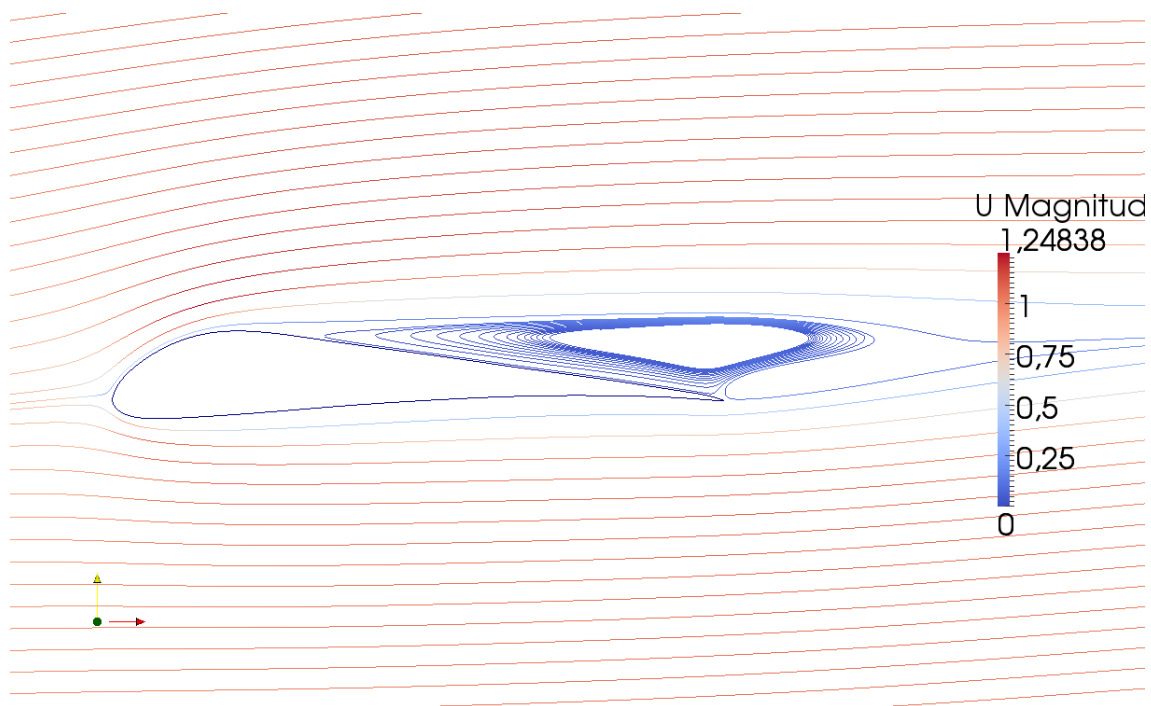
Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα αποτελέσματα της επίλυσης των εξισώσεων ροής του προηγούμενου κεφαλαίου για τις περιπτώσεις που απαιτήθηκαν, μέχρι τον υπολογισμό τελικά των πολικών της αεροτομής, δηλαδή των καμπύλων των συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας. Στο Παράρτημα «B» παρατίθενται διαγράμματα σύγκλισης για επιλεγμένες περιπτώσεις.

3.2 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ

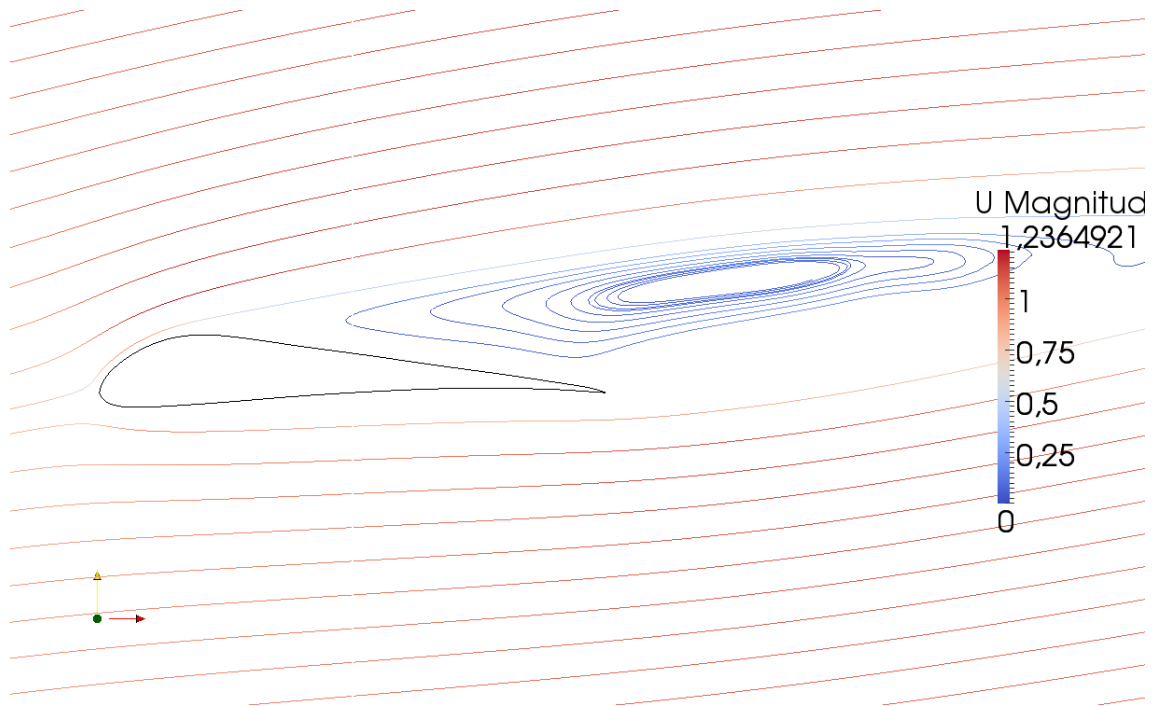
Οι υπολογισμοί για τη στρωτή ροή έγιναν για αριθμό Reynolds $Re=1000$. Στο Σχήμα 3.1 φαίνονται οι ισοϋψείς καμπύλες στατικής πίεσης για γωνία προσβολής 0° . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2, ήδη από μικρές γωνίες προσβολής αρχίζει να εμφανίζεται περιοχή ανακυκλοφορίας, η οποία μεγαλώνει μέχρι τη γωνία προσβολής 9° (Σχήμα 3.3), με το οριακό στρώμα τελικά να αποκολλάται στις 10° , οπότε και δεν υπάρχει πλέον σύγκλιση.



Σχήμα 3.1 Ισοΰψεις πίεσης για γωνία προσβολής $\alpha=0^\circ$



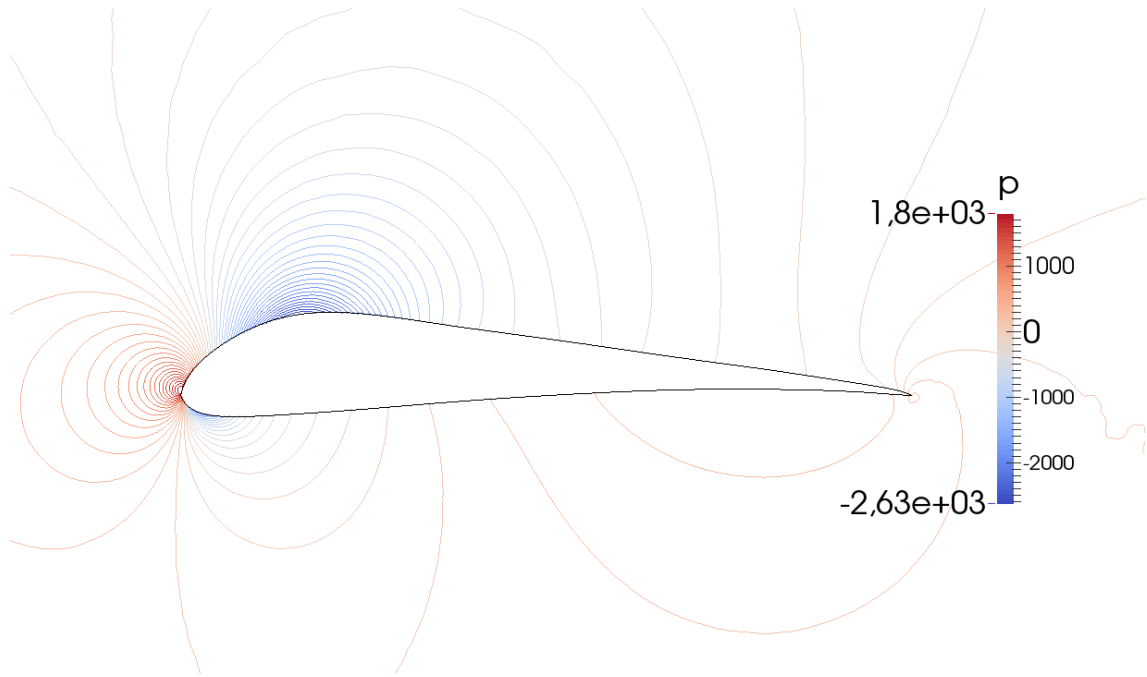
Σχήμα 3.2 Ροϊκές γραμμές για γωνία προσβολής $\alpha=4^\circ$



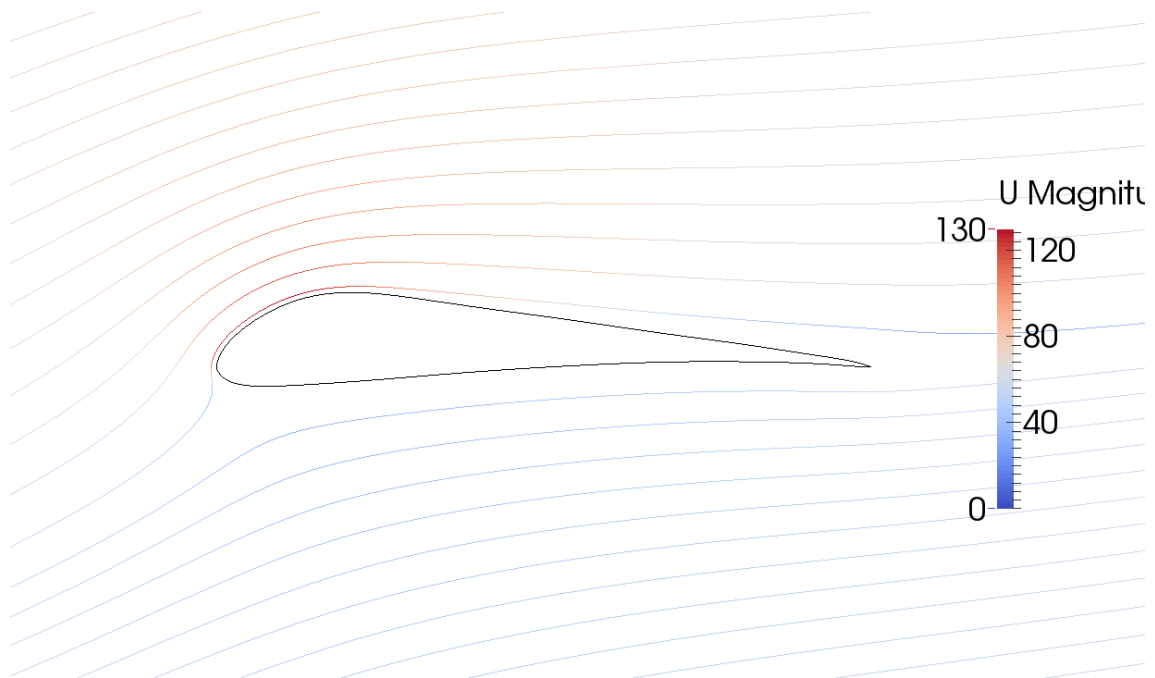
Σχήμα 3.3 Ροϊκές γραμμές για γωνία προσβολής $\alpha=9^\circ$

3.3 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ SPALART - ALLMARAS

Οι υπολογισμοί για την τυρβώδη ροή έγιναν για αριθμό Reynolds $Re=4 \cdot 10^6$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του μοντέλου Spalart – Allmaras, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.5, δεν παρουσιάζεται αποκόλληση του οριακού στρώματος μέχρι τις 15° .



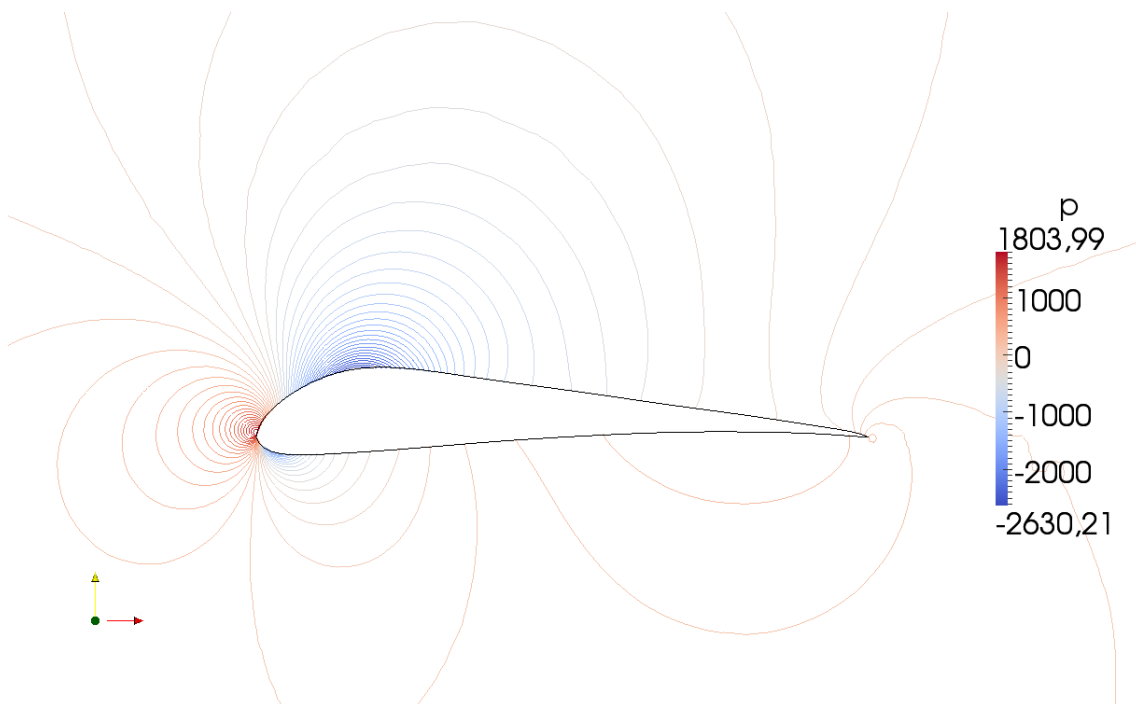
Σχήμα 3.4 Ισοϋψείς πίεσης για γωνία προσβολής $\alpha=0^\circ$



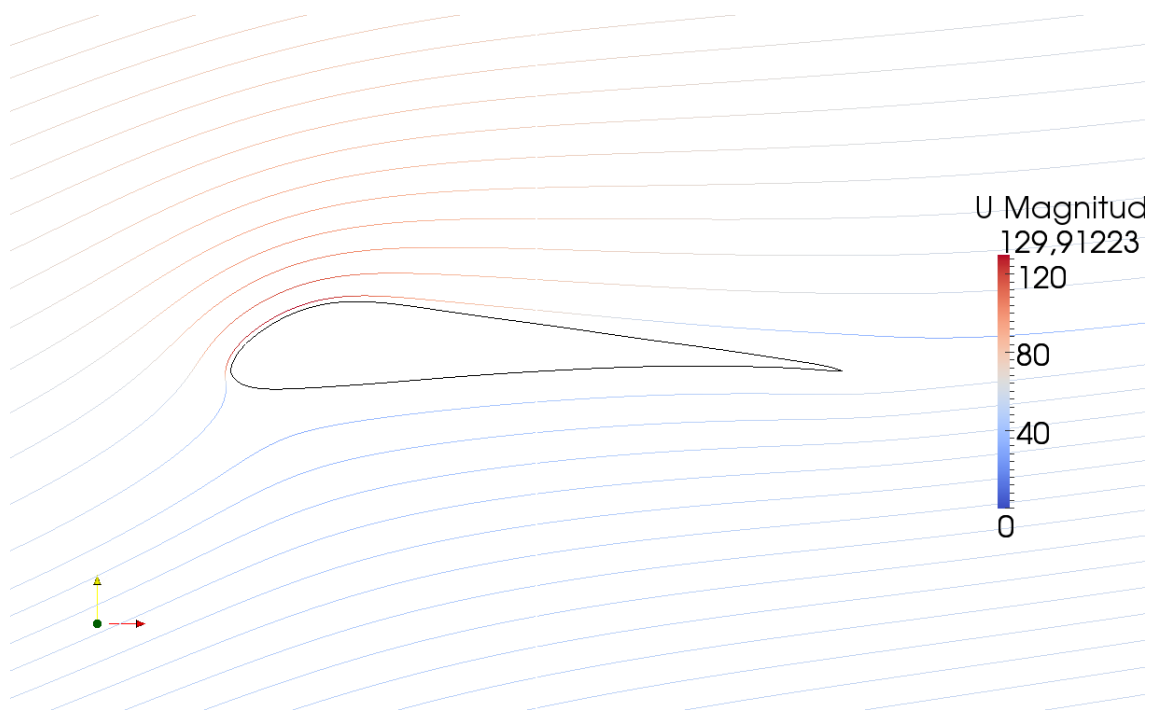
Σχήμα 3.5 Ροϊκές γραμμές για γωνία προσβολής $\alpha=15^\circ$

3.4 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ $k - \omega$ SST

Οι υπολογισμοί και για το μοντέλο τύρβης $k - \omega$ SST έγιναν για τον ίδιο αριθμό Reynolds $Re=4 \cdot 10^6$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.7, δεν παρουσιάζεται αποκόλληση του οριακού στρώματος μέχρι τις 15° , αλλά εμφανίζεται απότομα στις 16° , οπότε και δεν υπάρχει σύγκλιση (Παρ. «B» Σχήμα B3.3).



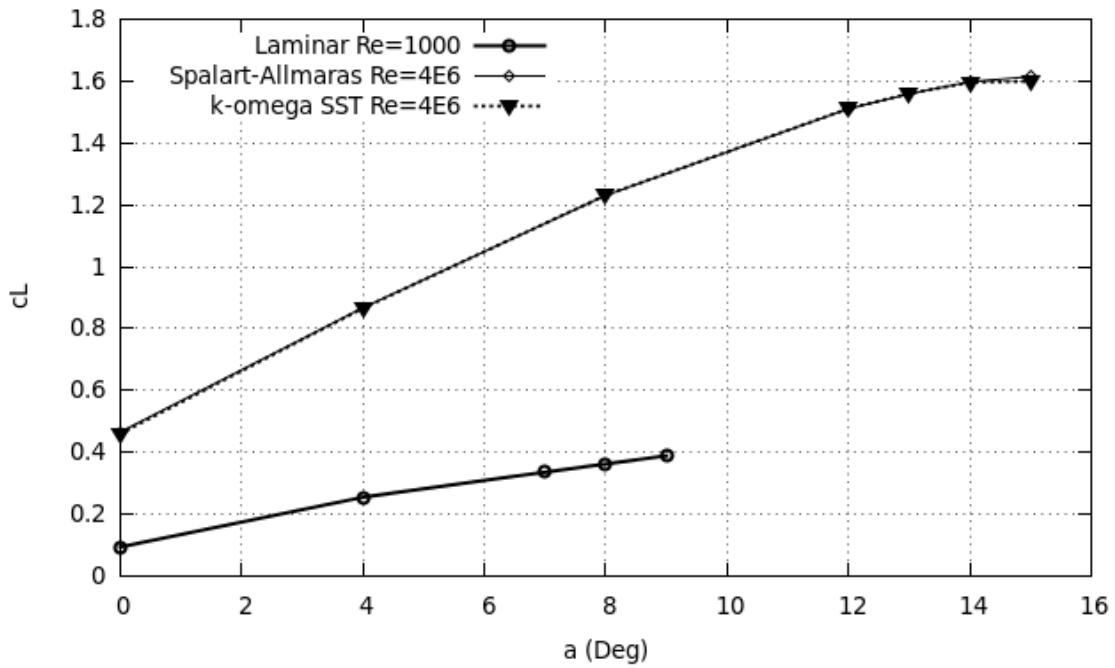
Σχήμα 3.6 Ισοϋψείς πίεσης για γωνία προσβολής $\alpha=0^\circ$



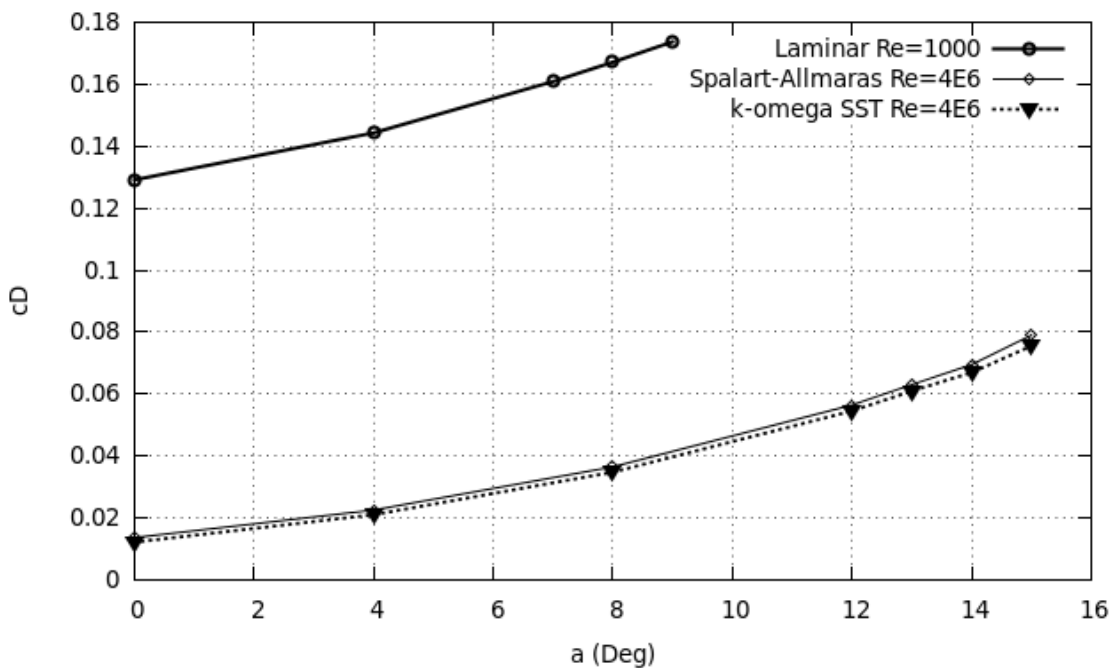
Σχήματα 3.7 Ροϊκές γραμμές για γωνία προσβολής $\alpha=15^\circ$

3.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

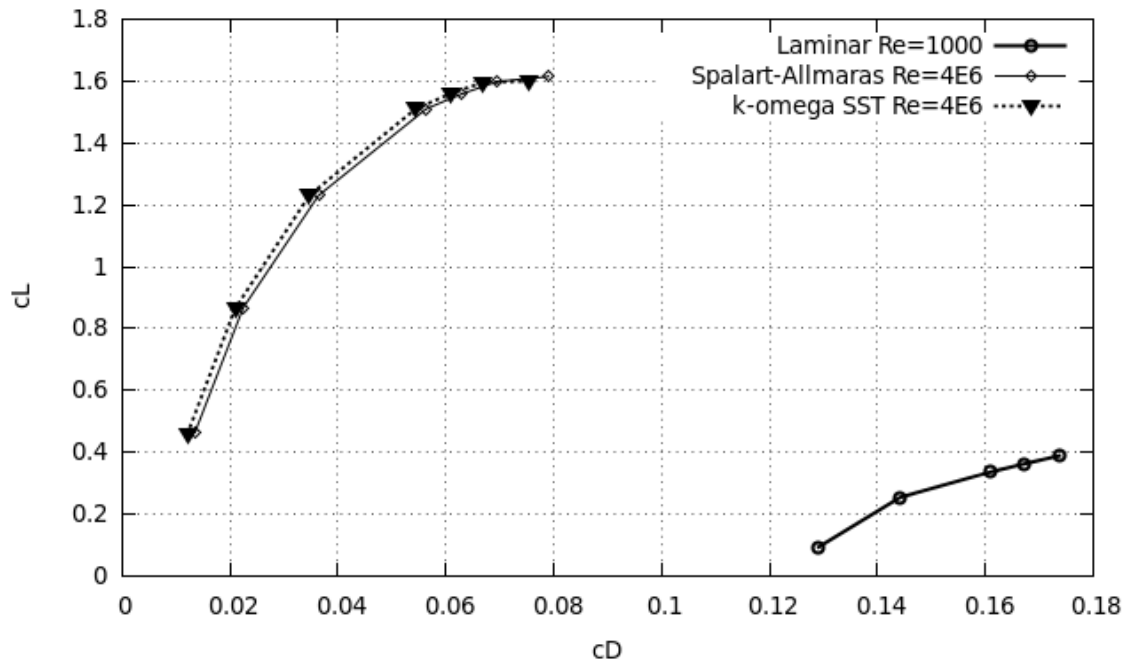
Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, στη στρωτή ροή, λόγω της μεγάλης καμπυλότητας της αεροτομής, ήδη για μικρές γωνίες προσβολής αρχίζει να εμφανίζεται ανακυκλοφορία που καταλήγει σε αποκόλληση του οριακού στρώματος μετά τη γωνία προσβολής των 9° . Αντίθετα, όπως είναι αναμενόμενο, η τύρβη έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση εμφάνισης ανακυκλοφορίας και, κατά συνέπεια, και αποκόλλησης του οριακού στρώματος· τόσο για το μοντέλο Spalart – Allmaras όσο και για το μοντέλο k- ω SST η αποκόλληση εμφανίζεται απότομα, μετά τις 15° . Συνέπεια όλων αυτών είναι οι διαφορές των c_L , c_D μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής, όπως φαίνεται στα συγκριτικά διαγράμματα 3.8, 3.9, 3.10. Οι πίνακες των τιμών των συντελεστών περιλαμβάνονται στο Παράρτημα «Γ».



Σχήμα 3.8 Συγκριτικές Καμπύλες c_L συναρτήσει της γωνίας προσβολής α



Σχήμα 3.9 Συγκριτικές Καμπύλες c_D συναρτήσει της γωνίας προσβολής α



Σχήμα 3.10 Συγκριτικές Καμπύλες c_L συναρτήσει c_D .

ΜΕΡΟΣ Β'

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της αεροτομής UI*-1720 αφορά στην τροποποίηση του σχήματός της, με κατάλληλη μετακίνηση των Bezier σημείων ελέγχου, ώστε να βελτιωθούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως οι συντελεστές c_L , c_D , όπως εκφράζονται μέσω μιας αντικειμενικής συνάρτησης.

Η μέθοδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκε είναι προσεγγιστική μέθοδος Newton (Quasi-Newton), ενσωματωμένη από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών ως πρόσθετη εφαρμογή στο λογισμικό OpenFOAM. Ως αιτιοκρατική μέθοδος, χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, τιμές της οποίας καλείται να υπολογίσει ή να προσεγγίσει. Ο υπολογισμός της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method) [25], [26], [27], [28], [29], [30]. Στην παρούσα εργασία, η βελτιστοποίηση έγινε για την αεροτομή μέσα σε στρωτή ροή.

4.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Η πιο γνωστή και βασική κατηγορία επαναληπτικών αλγορίθμων εύρεσης της βέλτιστης λύσης ενός συστήματος εξισώσεων είναι η κατηγορία των μεθόδων βασισμένων στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης (gradient-based methods).

Αρχικά, το πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται στη μορφή ελαχιστοποίησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης $F(\vec{x})$, δηλαδή το πρόβλημα είναι είτε ενός στόχου, όπως η ελαχιστοποίηση του c_D , είτε πολλαπλών

στόχων διατυπωμένων όμως στη μορφή μιας αντικειμενικής συνάρτησης, όπως η ελαχιστοποίηση του $(c_D + 1/c_L)$, χωρίς η λύση να υπόκειται σε περιορισμούς ισότητας ή ανισότητας. Η συγκεκριμένη κατηγορία απαιτεί, κατ' ελάχιστον, τον υπολογισμό της κλίσης $\nabla F(\vec{x})$ ή μια προσέγγισή της.

Όλες οι μέθοδοι βασισμένες στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης επικεντρώνονται στον προσδιορισμό της επόμενης προσέγγισης της λύσης χρησιμοποιώντας την τρέχουσα λύση και μια κατεύθυνση ανίχνευσης (search direction), σύμφωνα με την αναδρομική σχέση:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n \quad (3.1)$$

όπου

n ο αριθμός της επανάληψης

\vec{x}^n η τρέχουσα λύση

\vec{x}^{n+1} η επόμενη λύση

η μια βαθμωτή ποσότητα που ρυθμίζει το μήκος βήματος (step length)

\vec{p}^n η κατεύθυνση ανίχνευσης, που υπολογίζεται από τη γενική σχέση

$$\vec{p}^n = -(B^n)^{-1} \nabla F(\vec{x}^n) \quad (3.2)$$

με το B^n να είναι ένα συμμετρικό και αντιστρέψιμο μητρώο, χαρακτηριστικά της κάθε μεθόδου, με το ζητούμενο εκφράζεται μαθηματικά ως:

$$\min_{\eta^n > 0} F(\vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n)$$

Στη συνέχεια, αναπτύσσονται συνοπτικά η μέθοδος της απότομης καθόδου, η μέθοδος Newton και η μέθοδος BFGS που ανήκει στην ομάδα των προσεγγιστικών μεθόδων Newton. Επισημαίνεται ότι η τελευταία είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε, ωστόσο για την αρχικοποίησή της χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της απότομης καθόδου.

- *Μέθοδος Απότομης Καθόδου*

Η μέθοδος της απότομης καθόδου αποτελεί την απλούστερη μέθοδο ανίχνευσης κατά γραμμή. Στη μέθοδο αυτή, ως κατεύθυνση ανίχνευσης επιλέγεται το αντίθετο του τοπικού διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\vec{p}^n = -\nabla F(\vec{x}^n) \quad (3.3)$$

δηλαδή το B^n στη σχέση (3.2) είναι το μοναδιαίο μητρώο.

Χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι απαιτεί τον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε νέα θέση, χωρίς να απαιτεί υπολογισμό δεύτερων παραγώγων.

- *Μέθοδος Newton*

Η μέθοδος Newton αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους αντιπροσώπους των μεθόδων ανίχνευσης κατά γραμμή, λόγω του πολύ καλού ρυθμού σύγκλισης. Στη μέθοδο αυτή, η κατεύθυνση ανίχνευσης για την τρέχουσα επανάληψη προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{p}^n = -(\nabla^2 F(\vec{x}^n))^{-1} \nabla F(\vec{x}^n) \quad (3.4)$$

δηλαδή το B^n στη σχέση (3.2) είναι το μητρώο Hess ($\nabla^2 F(\vec{x}^n)$). Η σχέση αυτή γράφεται με την προϋπόθεση ότι το μητρώο Hess είναι θετικά ορισμένο, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός του αντίστροφού του.

Η δυσκολία της μεθόδου Newton έγκειται στην απαίτηση υπολογισμού του μητρώου Hess της αντικειμενικής συνάρτησης, γεγονός που μεταφράζεται σε μεγαλύτερες υπολογιστικές δυσκολίες και αυξημένο υπολογιστικό κόστος.

- *Μέθοδος Quasi-Newton*

Η προσεγγιστική μέθοδος Newton (Quasi-Newton) αποτελεί παραλλαγή της ακριβούς μεθόδου Newton, η οποία διατηρεί τον πολύ καλό ρυθμό σύγκλισης, παρακάμπτοντας τον υπολογισμό του μητρώου Hess. Στη μέθοδο αυτή, το B^n αποτελεί μια προσέγγιση του μητρώου Hess, συνήθως μέσω αναδρομικών τύπων που

υπολογίζουν το μητρώο Hess της νέας επανάληψης B^{n+1} με βάση το γνωστό μητρώο της προηγούμενης B^n . Η αρχικοποίηση B^0 είναι γενικά επιλογή του χρήστη.

Στην παρούσα εργασία, για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno (BFGS) [9], κατά την οποία

$$B^{n+1} = B^n + \frac{(\vec{y}^n - B^n \vec{s}^n)(\vec{y}^n - B^n \vec{s}^n)^T}{(\vec{y}^n - B^n \vec{s}^n)^T \vec{s}^n} \quad (3.5)$$

όπου

$$\vec{s}^n = \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n$$

$$\vec{y}^n = \nabla F(\vec{x}^{n+1}) - \nabla F(\vec{x}^n)$$

και ικανοποιείται η σχέση

$$B^{n+1} \vec{s}^n = \vec{y}^n$$

4.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

4.3.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Η γεωμετρία του προβλήματος και οι φυσικές συνθήκες επιβάλλουν έναν αριθμό περιορισμών στη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Οι περιορισμοί αυτοί μαθηματικά διατυπώνονται με τη μορφή ισοτήτων ή ανισοτήτων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς εκφράζεται μαθηματικά από τις εξής συνιστώσες [9]:

- α. Ελαχιστοποίηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης

$$\min F(\vec{x}), \quad F: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$$

όπου $\vec{x} \in \mathcal{R}^n$ το διάνυσμα μεταβλητών σχεδιασμού.

β. Ικανοποίηση K_2 περιορισμών ανισότητας της μορφής

$$c_i(\vec{x}) \leq 0, \quad i=1, \dots, K_2 \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad i \in I$$

όπου I σύνολο τιμών του δείκτη i με περιορισμούς ανισότητας.

γ. Ικανοποίηση K_1 περιορισμών ισότητας της μορφής

$$c_i(\vec{x}) = 0, \quad i=K_2+1, \dots, K_2+K_1 \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad i \in E$$

όπου E σύνολο τιμών του δείκτη i με περιορισμούς ισότητας.

Το ανωτέρω πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί στη μορφή μιας συνάρτησης Lagrange, ως εξής:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = F(\vec{x}) - \sum_{i \in E \cup I} \lambda_i c_i(\vec{x})$$

όπου με $\vec{\lambda}$ εκφράζεται το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange λ_i .

4.3.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ALM

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση με περιορισμούς είναι η επαυξημένη μέθοδος με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange (Augmented Lagrange Multiplier Method – ALM) [9]. Με τη μέθοδο αυτή εξασφαλίζεται μεγαλύτερη αξιοπιστία και απόδοση, καθώς στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης συμμετέχουν και οι παράμετροι – συνθήκες βέλτιστης λύσης, μειώνοντας την εξάρτηση από βοηθητικές παραμέτρους, όπως οι συντελεστές ποινής.

Για τη μέθοδο ALM, διατυπώνεται η επαυξημένη συνάρτηση Lagrange στη μορφή:

$$\Phi^*(\vec{x}, \vec{\lambda}, \omega_p) = F(\vec{x}) + \sum_{i \in E} \left(-\lambda_i c_i(\vec{x}) + \omega_p c_i^2(\vec{x}) \right) + \sum_{i \in I} \left(-\lambda_i \psi_i + \omega_p \psi_i^2 \right) \quad (3.6)$$

όπου

$$\psi_i = \max \left[c_i(\vec{x}), \frac{\lambda_i}{2\omega_p} \right]$$

και ω_p ένας συντελεστής ποινής.

Στη γενική μορφή, ο αλγόριθμος ALM για προβλήματα βελτιστοποίησης παίρνει την παρακάτω μορφή:

1. Επιλέγονται η αρχική τιμή του διανύσματος των ελεύθερων μεταβλητών \vec{x}^0 , η αρχική τιμή του διανύσματος των πολλαπλασιαστών λ_i^0 (συνήθως μηδενική), η αρχική τιμή (μικρή) του συντελεστή ποινής ω_p , η τιμή του πολλαπλασιαστή γ με τον οποίο θα πολλαπλασιάζεται η τιμή του ω_p σε κάθε νέο κύκλο και η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του συντελεστή ποινής ω_p^{max} .

2. Ελαχιστοποιείται η επαυξημένη συνάρτηση Lagrange $\Phi^*(\vec{x}, \vec{\lambda}, \omega_p)$ λύνοντας ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, εν προκειμένω με τη μέθοδο BFGS (Quasi-Newton).

3. Ελέγχεται η σύγκλιση της μεθόδου. Τυπικό κριτήριο είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $F(\vec{x})$ να μεταβάλλεται ελάχιστα σε σχέση με την τιμή αυτής στον προηγούμενο κύκλο και συγχρόνως να ικανοποιούνται οι περιορισμοί ισότητας.

4. Ανανεώνονται οι τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\lambda_i \leftarrow \lambda_i - 2\omega_p c_i(\vec{x}), \quad i \in E$$

$$\lambda_i \leftarrow \lambda_i - 2\omega_p \max \left[c_i(\vec{x}), \frac{\lambda_i}{2\omega_p} \right], \quad i \in I$$

Στη συνέχεια, ανανεώνεται η τιμή του συντελεστή ποινής, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\omega_p \leftarrow \min(\gamma \omega_p, \omega_p^{max})$$

5. Επιστροφή στο δεύτερο βήμα.

4.4 Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ

Οι συζυγείς μέθοδοι (adjoint methods) είναι υπολογιστικές μέθοδοι υπολογισμού της κλίσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των ζητούμενων βασικών εξισώσεων Navier – Stokes. Η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method) βασίζεται σε μια επαυξημένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία συντίθεται από την αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και από το ολοκλήρωμα σε όλο το χωρίο των εξισώσεων ροής, πολλαπλασιασμένων με τη συνάρτηση των συζυγών μεταβλητών. Προκειμένου να καταστεί η μεταβολή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ανεξάρτητη της μεταβολής των μεγεθών του πεδίου ροής, εντοπίζονται οι ποσότητες που πρέπει να μηδενιστούν. Κατ' αυτόν τον τρόπο σχηματίζονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις και οριακές συνθήκες, οι οποίες, στη συνέχεια, για να επιλυθούν γραμμικοποιούνται και μετά διακριτοποιούνται, όπως και οι εξισώσεις ροής [9], [22], [23], [24].

Οι ισχύουσες εξισώσεις Navier – Stokes (2.1) και (2.2) επαναλαμβάνονται ως εξής:

$$R^p \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.7)$$

$$R_i^u \equiv u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (3.8)$$

με $\vec{U} = [p, u_i]^T$ το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής. Για τα υπόλοιπα των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής ισχύει η αντιστοιχία

$$R_1^U = R^p \quad \text{και} \quad R_{i+1}^U = R_i^u$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος εκφράζεται μαθηματικά από τη συνάρτηση:

$$F_{obj} = F_{obj}(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b}) \quad (3.9)$$

όπου \vec{b} οι μεταβλητές σχεδιασμού, που εν προκειμένω είναι τα m Bezier σημεία ελέγχου, καθώς οι μεταβλητές σχεδιασμού επιδρούν άμεσα στην αντικειμενική

συνάρτηση και έμμεσα, μέσω των μεταβλητών της ροής.

Η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση (augmented objective function) ορίζεται ως [23]:

$$F_{aug} \equiv F_{obj} + \int_{\Omega} \Psi_l R_l d\Omega = F_{obj} + \int_{\Omega} u_i^a R_i^u d\Omega - \int_{\Omega} p^a R^p d\Omega \quad (3.10)$$

όπου $\vec{\Psi} = [p^a, u_i^a]^T$ πολλαπλασιαστές Lagrange, οι οποίοι ταυτίζονται με τα πεδία των συζυγών μεταβλητών (adjoint variables).

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m}$, οι οποίες εκφράζουν τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Όμως, όλοι οι επιπλέον όροι της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης είναι εξ ορισμού μηδενικοί, οπότε οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ταυτίζονται με εκείνες της επαυξημένης $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$. Συνεπώς, διαφορίζοντας την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση και με χρήση του θεωρήματος Green – Gauss τελικά προκύπτει [22], [23], [24]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i^a \frac{\delta R_i^u}{\delta b_m} d\Omega - \int_{\Omega} p^a \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} (u_i^a R_i^u - p^a R^p) \frac{\delta d\Omega}{\delta b_m} = \\ &= \frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i^a \frac{\delta R_i^u}{\delta b_m} d\Omega - \int_{\Omega} p^a \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_S (u_i^a R_i^u - p^a R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \end{aligned} \quad (3.11)$$

όπου S το όριο του πεδίου ροής Ω , n_k το μοναδιαίο κάθετο σε αυτό διάνυσμα και δx_k η μετατόπιση ενός κόμβου.

Στη συνέχεια, εισάγεται η αντικειμενική συνάρτηση, η οποία για αεροδυναμικές δυνάμεις θα γράφεται στη γενική μορφή:

$$(\min) F_{obj} = \int_{S_w} f dS_w \quad (3.12)$$

όπου f η δύναμη που ασκείται σε κάθε σημείο της αεροτομής με σύνορο S_w .

Ενδεικτικά, στην περίπτωση που μελετάται η μεγιστοποίηση της άντωσης, η f θα είναι:

$$f = - \left[p n_j - v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i \right] r_i \quad (3.13)$$

όπου r_i μοναδιαίο διάνυσμα δεξιόστροφα κάθετο στην επ' άπειρο ταχύτητα.

Η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει από την έκφραση [23]:

$$\frac{\delta F_{obj}}{\delta b_m} = \int_{S_w} \frac{\partial f}{\partial b_m} dS_w + \int_{S_w} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w + \int_{S_w} f \frac{\delta(dS_w)}{\delta b_m} \quad (3.14)$$

Πλέον, απαλείφοντας από την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση τα χωρικά ολοκληρώματα που εμπεριέχουν μεταβολές των μεταβλητών ροής, καθώς αυτός είναι ο σκοπός της συζυγούς μεθόδου προκειμένου να αποφευχθεί το υψηλό κόστος υπολογισμού τους, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις [22], [23], [24]:

$$R^{pa} \equiv \frac{\partial u_j^a}{\partial x_j} = 0 \quad (3.15)$$

$$R_i^{ua} \equiv u_j^a \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} + \frac{\partial p^a}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (3.16)$$

ή

$$\nabla \cdot \vec{u}^a = 0 \quad (3.17)$$

$$-\nabla \cdot (\vec{u} \vec{u}^a) + (\vec{u}^a \nabla) \cdot \vec{u} = -\nabla p^a + \nabla \cdot (v \nabla \vec{u}^a) \quad (3.18)$$

με τις συζυγείς οριακές συνθήκες [22], [23], [24]:

$$u_i^a = 0$$

$$\frac{\partial p^a}{\partial x_i} n_i = 0$$

στην επιφάνεια της αεροτομής και

$$u_i^a = 0$$

$$p^a = 0$$

στο επ' άπειρο όριο του χωρίου.

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι συζυγείς εξισώσεις είναι αντίστοιχες με τις πρωτεύουσες, οπότε διακριτοποιούνται και επιλύονται με τον ίδιο τρόπο.

Οι παράγωγοι ευαισθησίας για την περίπτωση της μεγιστοποίηση της άντωσης τελικά είναι [22], [23], [24]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_{S_w} \left[\frac{\partial p}{\partial x_k} n_j - v \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i dS_w \\
 & + \int_{S_w} \left[p \frac{\delta}{\delta b_m} (n_j dS_w) - v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w) \right] r_i \\
 & + \int_{S_w} \left[p^a n_j - v \left(\frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} \right) n_i \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_m} dS_w
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Είναι χαρακτηριστικό ότι όλα τα ολοκληρώματα υπολογίζονται πάνω στην αεροτομή.

Οι μεταβολές των γεωμετρικών ποσοτήτων $\frac{\partial x_k}{\partial b_m}$ και $\frac{\delta}{\delta b_m} (n_i dS_w)$ υπολογίζονται με βάση την παραμετροποίηση που έχει προηγηθεί.

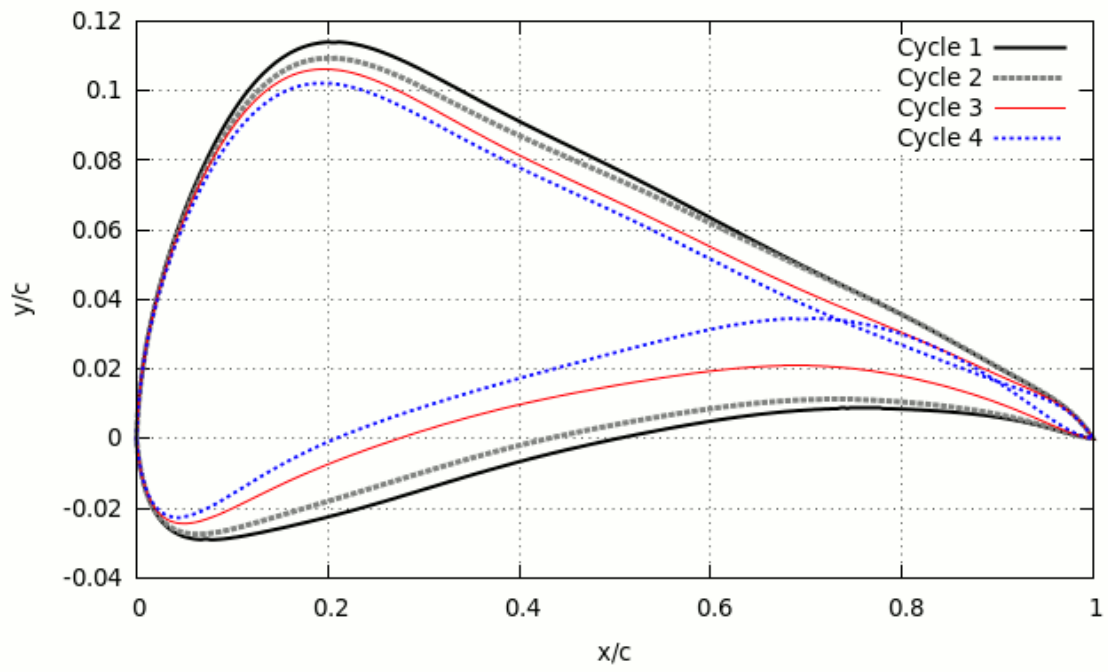
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

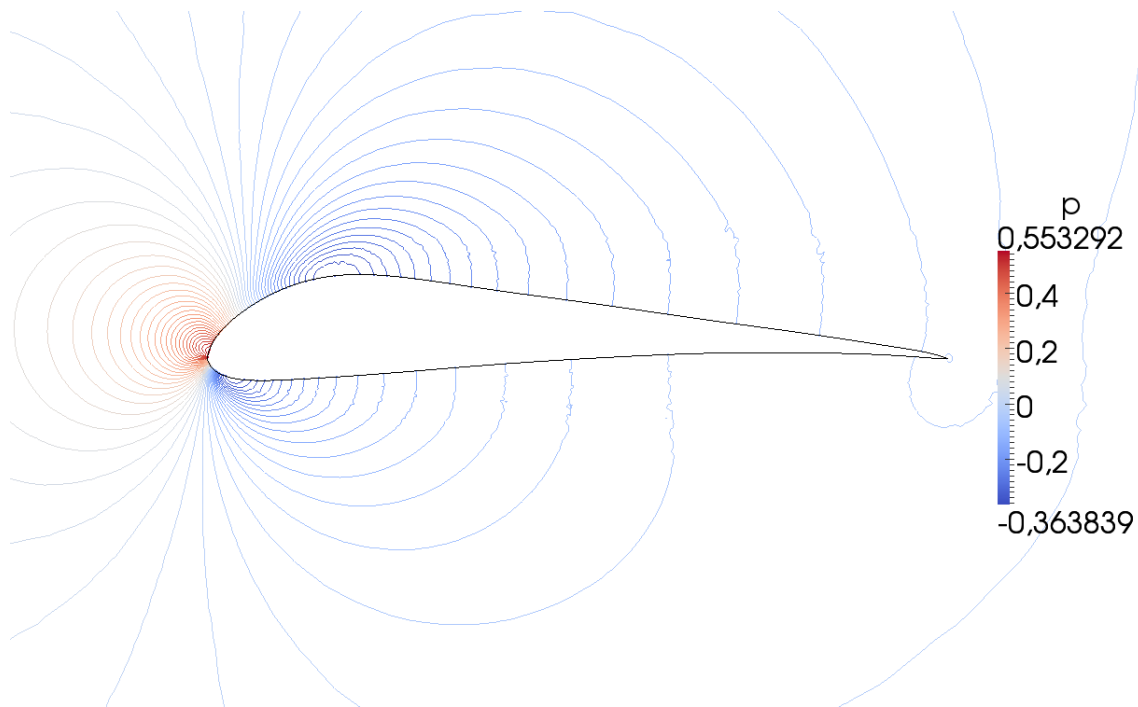
5.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Το πρώτο πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά στη βελτιστοποίηση του συντελεστή άντωσης c_L , χωρίς περιορισμούς. Συνεπώς, η αντικειμενική συνάρτηση είναι η άντωση L και το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του L , το οποίο διατυπώνεται ως $\min(-L)$.

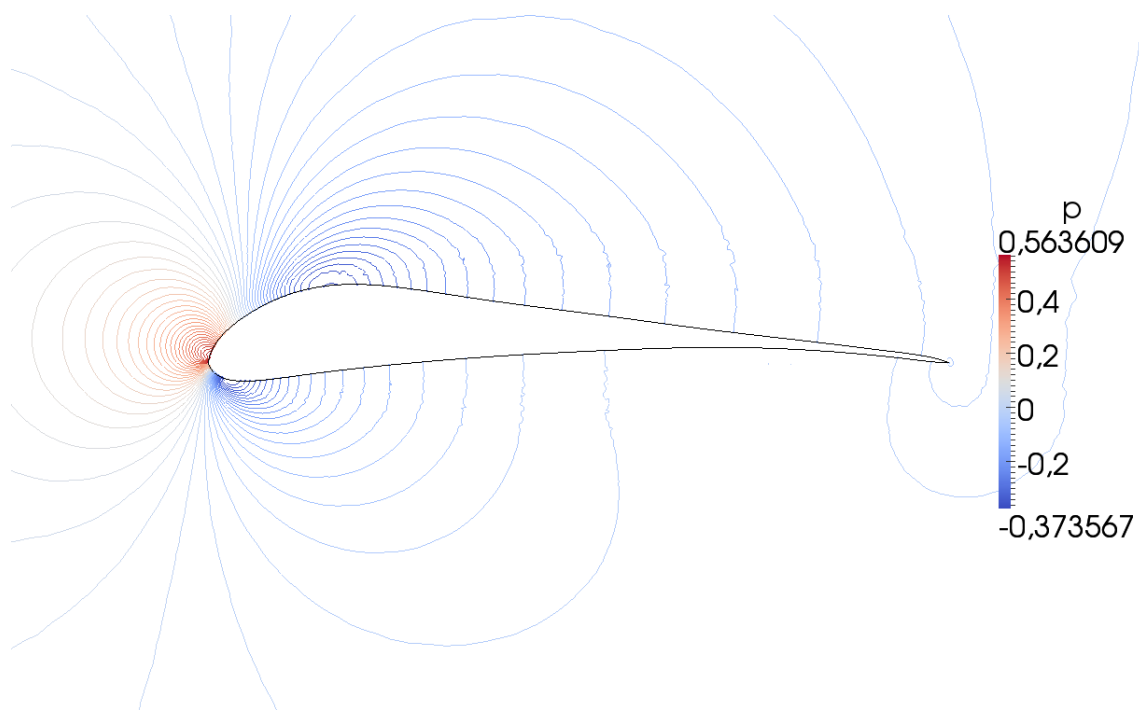
Η μορφή της αεροτομής, οι ισοϋψείς πίεσης της αρχικής και της βέλτιστης αεροτομής και οι συντελεστές άντωσης και οπισθέλκουσας για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης φαίνονται στα Σχήματα 5.1 έως 5.4, απ' όπου προκύπτει ότι η βελτιστοποίηση είχε ως αποτέλεσμα όχι μόνο την αύξηση της άντωσης, αλλά και μια μικρή μείωση της οπισθέλκουσας. Επισημαίνεται ότι ο πρώτος κύκλος αφορά την αρχική αεροτομή και ότι η γωνία προσβολής είναι 0° . Επίσης, τονίζεται ότι στον τέταρτο κύκλο υπάρχει επικάλυψη των δύο πλευρών (sunction, pressure). Είναι λοιπόν σαφές ότι για τη διατήρηση ενός πραγματικού σχήματος αεροτομής και την αποφυγή επικαλύψεων των δύο πλευρών επιβάλλεται η εισαγωγή στο πρόβλημα βελτιστοποίησης περιορισμών, όπως γίνεται στην επόμενη ενότητα. Οι τιμές των διαγραμμάτων περιλαμβάνονται στο Παράρτημα «Δ».



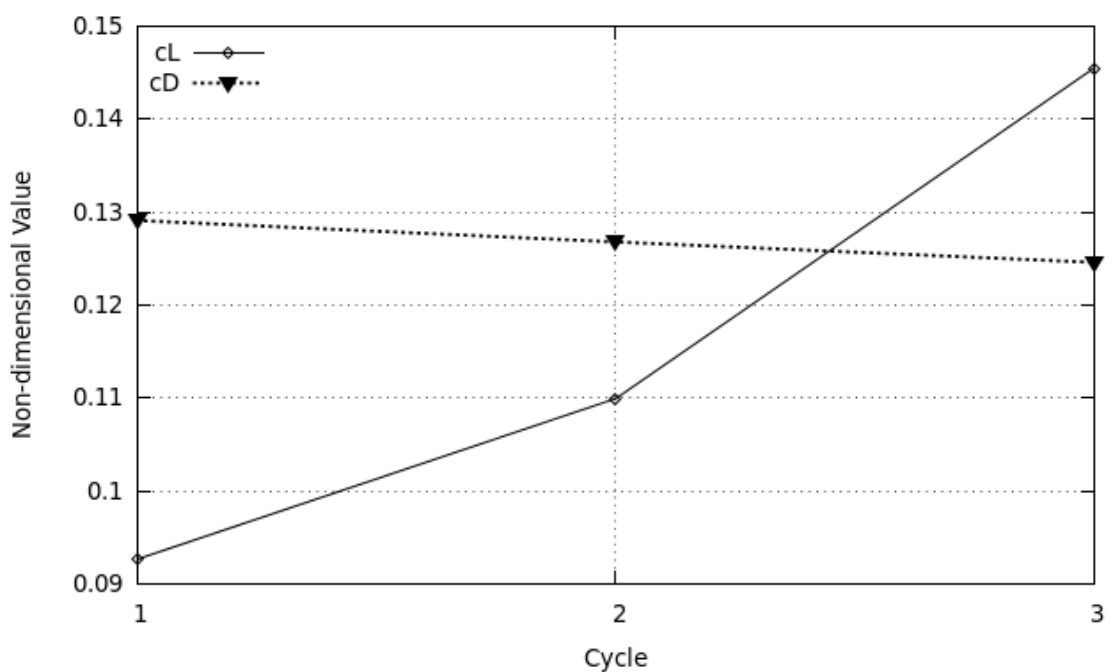
Σχήμα 5.1 Μορφή αεροτομής μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης



Σχήμα 5.2 Ισοϋψείς πίεσης της αρχικής αεροτομής (πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης)



Σχήμα 5.3 Ισοϋψείς πίεσης της βέλτιστης αποδεκτής αεροτομής (τρίτος κύκλος βελτιστοποίησης)



Σχήμα 5.4 Εξέλιξη συντελεστών ανά κύκλο βελτιστοποίησης

5.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

Το δεύτερο πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά στη βελτιστοποίηση των συντελεστών άντωσης c_L και οπισθέλκουσας c_D κατά τη σχέση

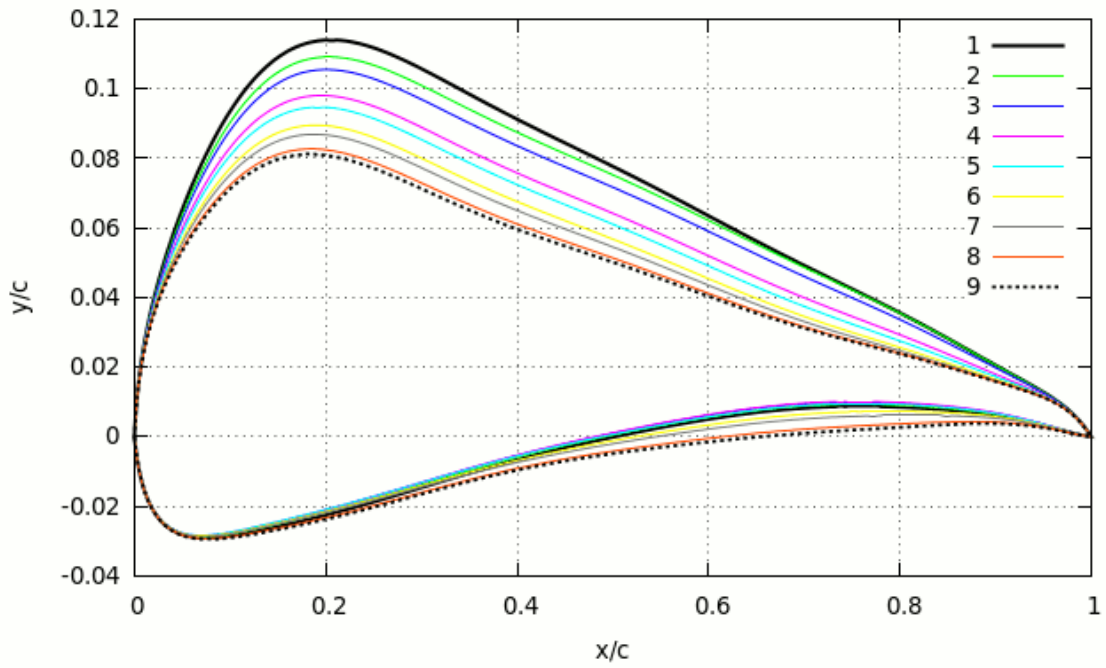
$$c_D + \frac{\beta}{2} (c_L - c_L^{tar})^2$$

με γεωμετρικούς περιορισμούς, ώστε να αποφευχθεί μια πολύ λεπτή αεροτομή. Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στην ελαχιστοποίηση της ακόλουθης αντικειμενικής συνάρτησης για διάφορες τιμές του β .

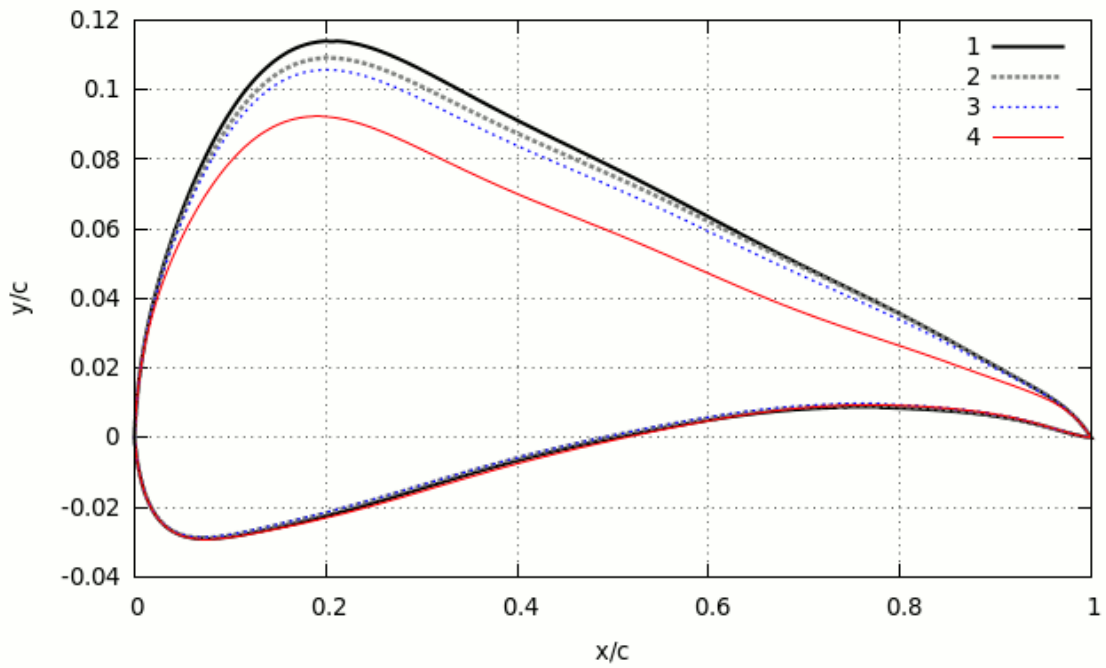
$$\min \left(D + \frac{\beta}{2} (L - L^{tar})^2 \right)$$

Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, η μορφή της αεροτομής, οι ισοϋψείς πίεσης της αρχικής και των βέλτιστων αεροτομών για τις επιλεγείσες τιμές του β και οι συντελεστές άντωσης και οπισθέλκουσας σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, φαίνονται στα Σχήματα 5.5 έως 5.15. Οι τιμές των συντελεστών των διαγραμμάτων περιλαμβάνονται στο Παράρτημα «Δ». Επισημαίνεται ότι ο πρώτος κύκλος αφορά την αρχική αεροτομή και η γωνία προσβολής είναι 0° .

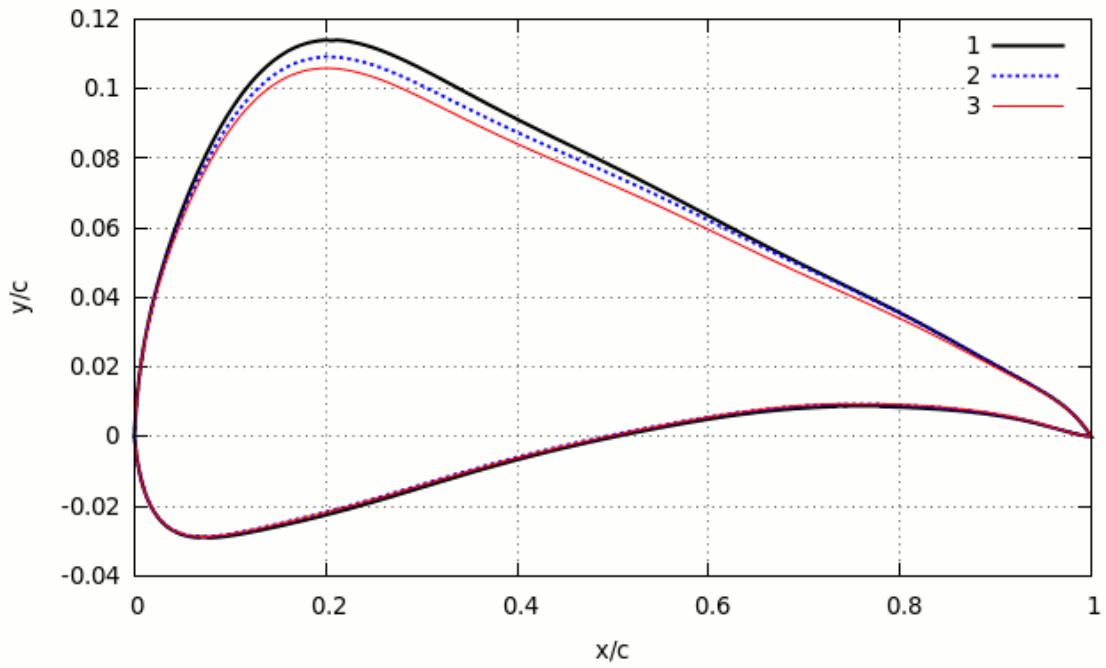
Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, στην πρώτη βελτιστοποίηση υπάρχει ταύτιση των συντελεστών ανεξαρτήτως β , ενώ στη συνέχεια όσο μειώνεται το β αυξάνεται η βαρύτητα του c_D έναντι του c_L και αυξάνεται και ο αριθμός των κύκλων που απαιτούνται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Έτσι, για $\beta=0.5$ και $\beta=0.75$ η βελτιστοποίηση έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του c_D και ταυτόχρονα τη σημαντική αύξηση του c_L , ενώ για $\beta=0.25$ επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη μείωση του c_D με μια μικρή αύξηση του c_L .



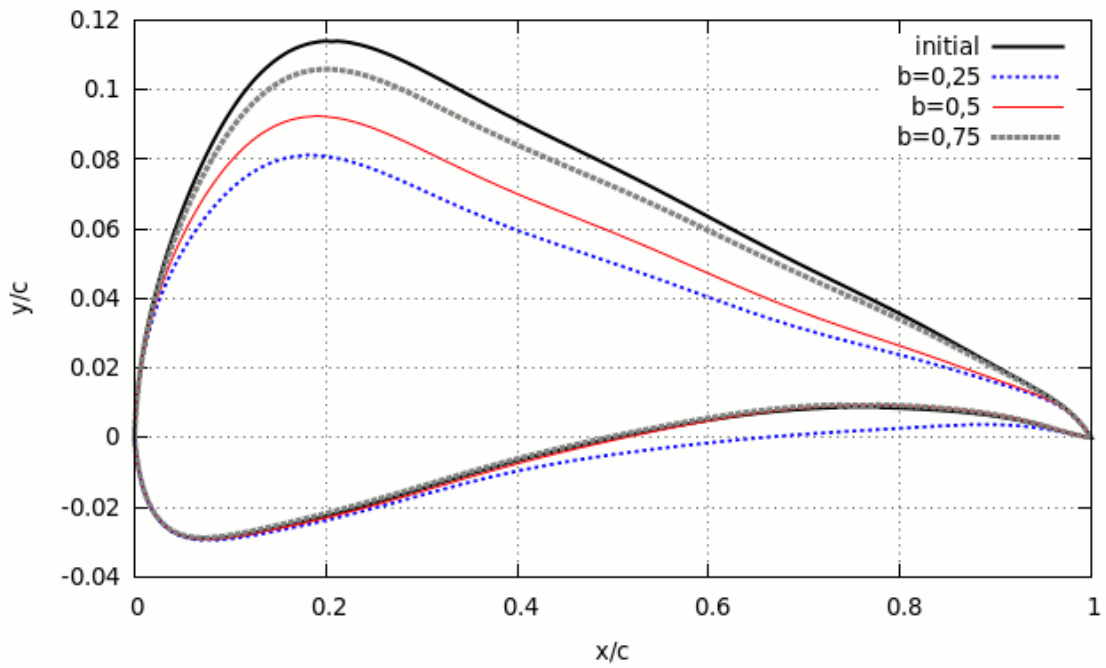
Σχήμα 5.5 Μορφή αεροτομής μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, $\beta=0.25$



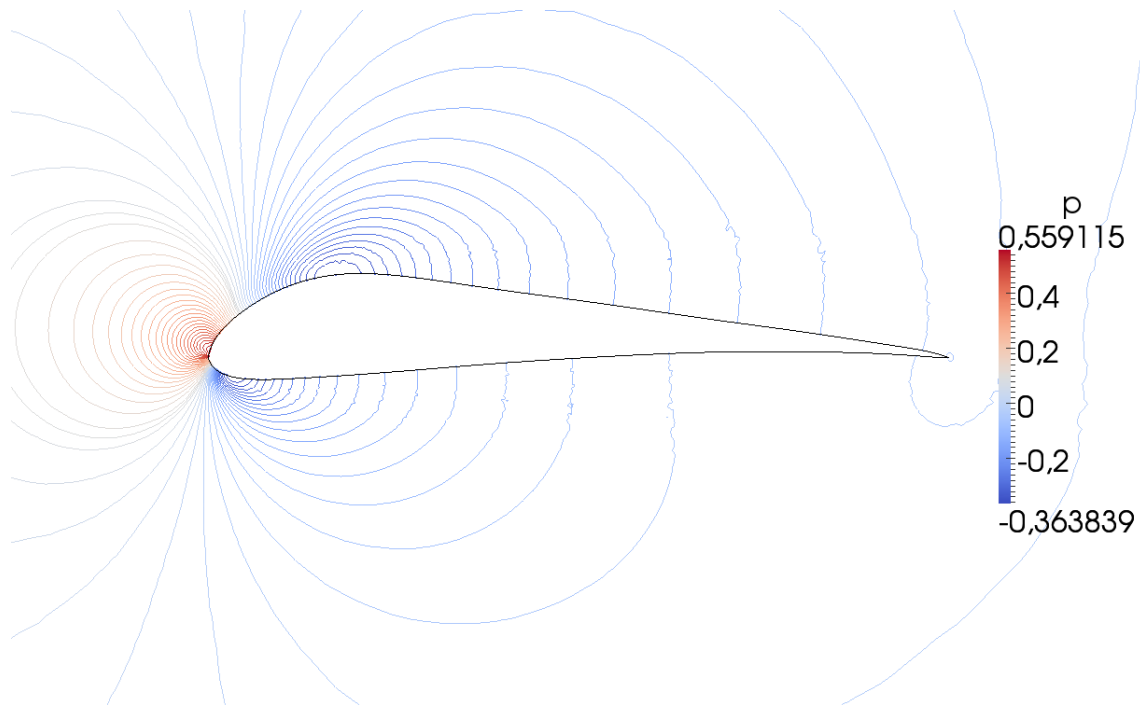
Σχήμα 5.6 Μορφή αεροτομής μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, $\beta=0.5$



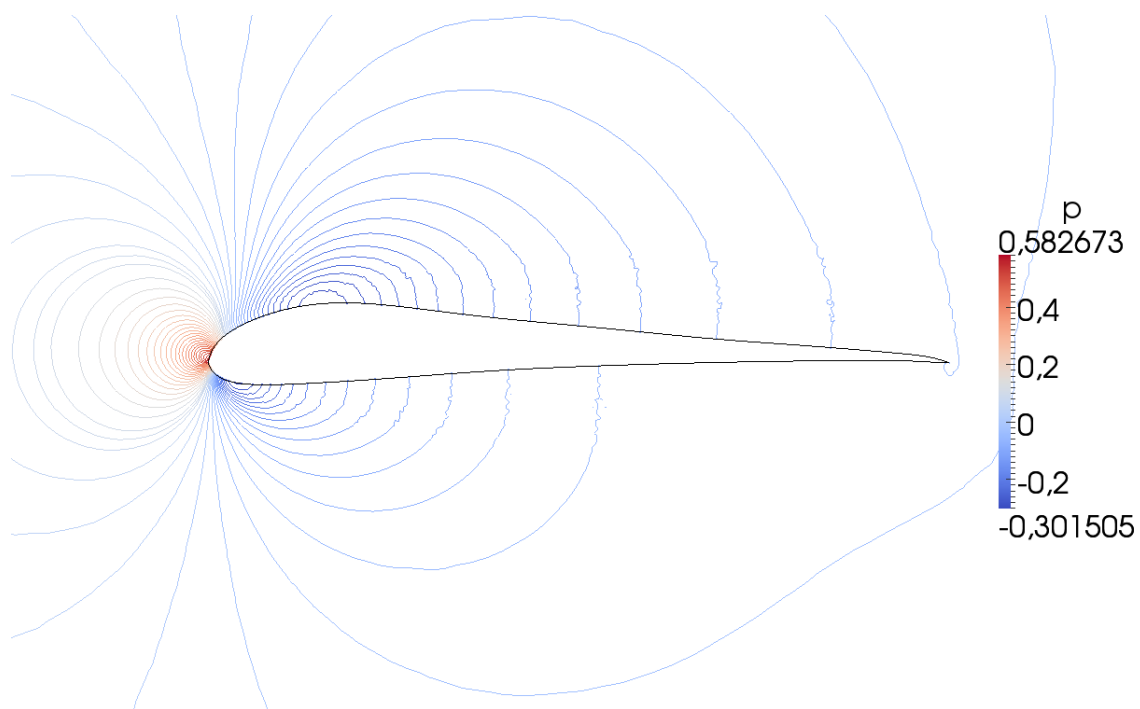
Σχήμα 5.7 Μορφή αεροτομής μετά από κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, $\beta=0.75$



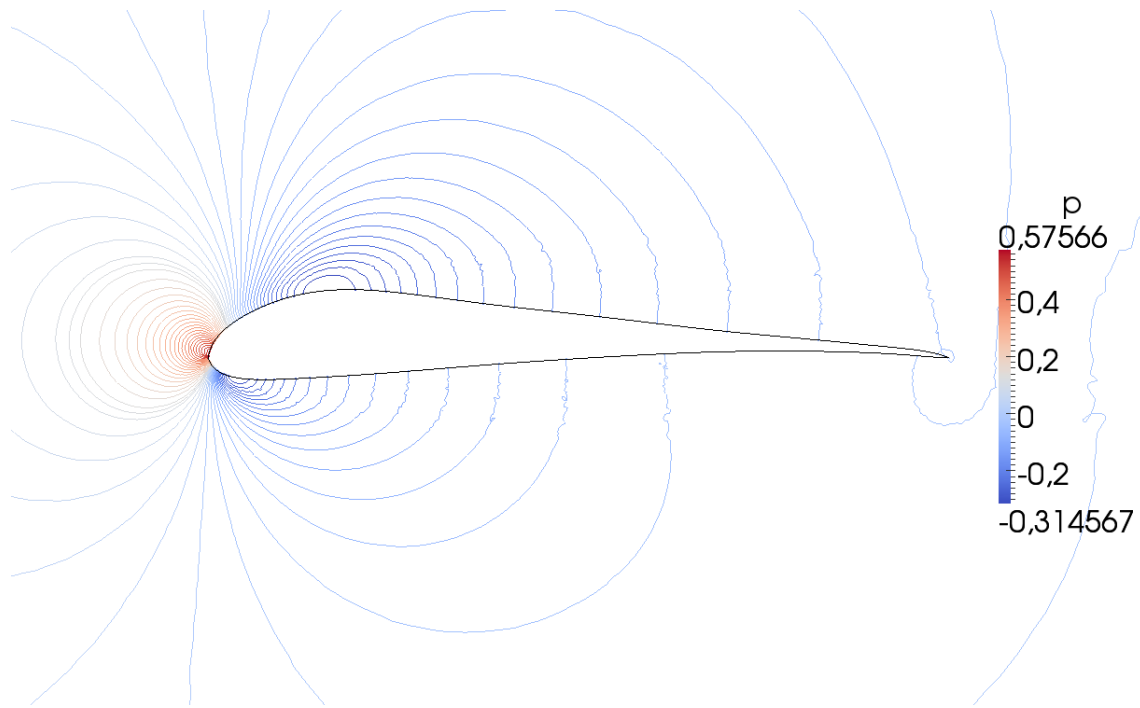
Σχήμα 5.8 Σύγκριση αρχικής και βέλτιστων αεροτομών για κάθε β



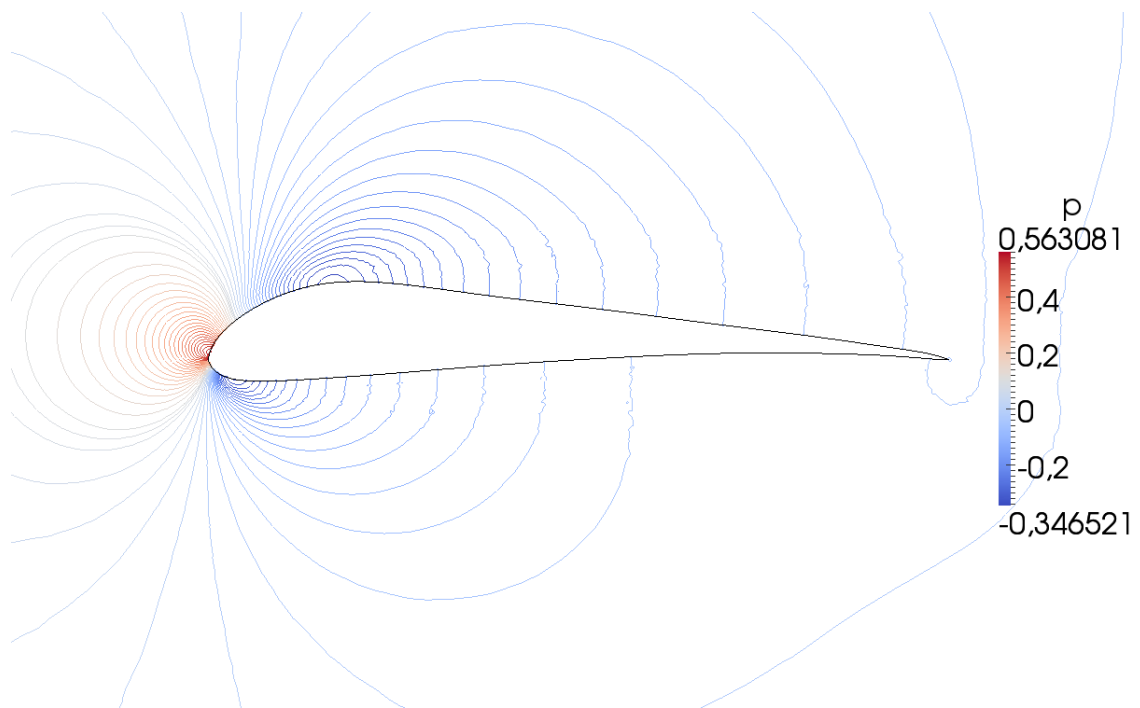
Σχήμα 5.9 Ισοϋψείς πίεσης της αρχικής αεροτομής



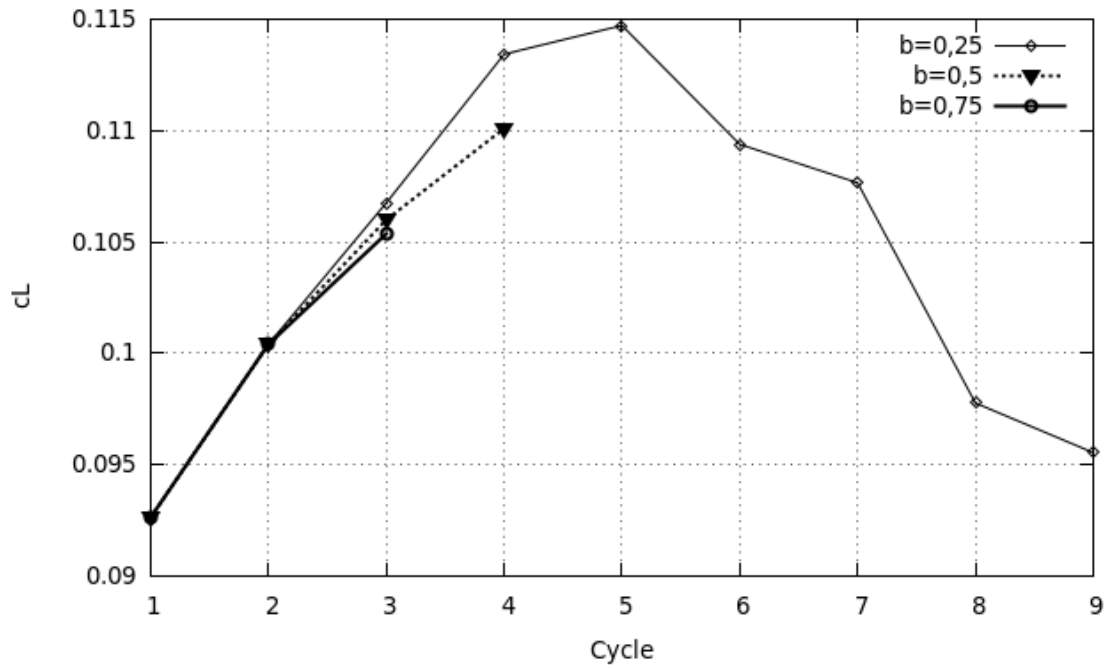
Σχήμα 5.10 Ισοϋψείς πίεσης της βέλτιστης αεροτομής για $\beta=0.25$



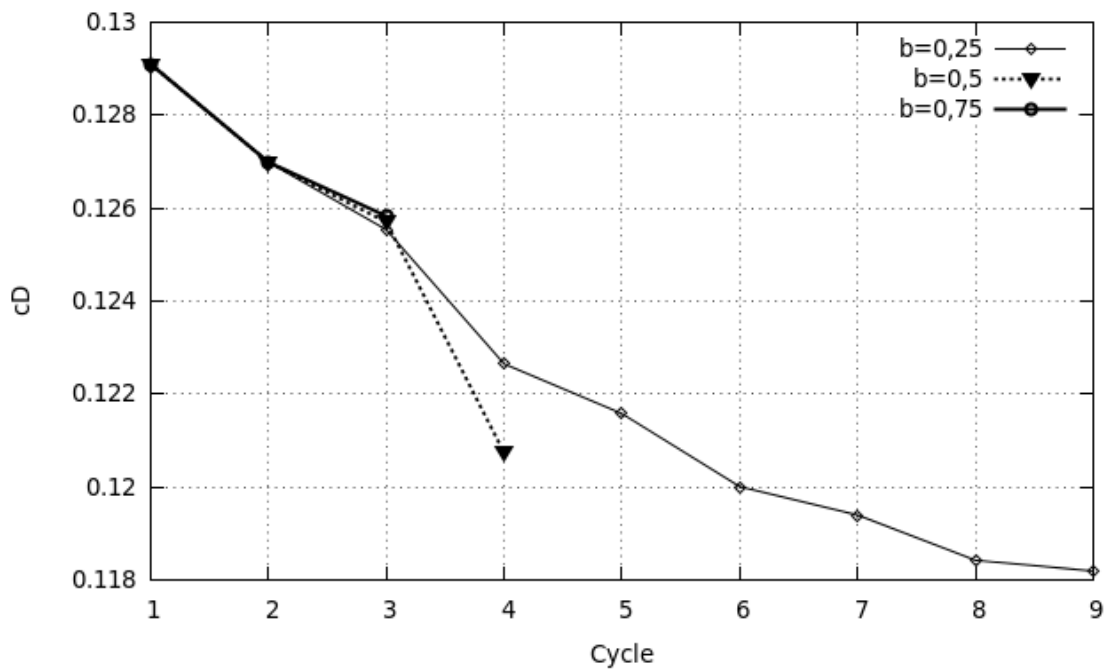
Σχήμα 5.11 Ισοϋψείς πίεσης της βέλτιστης αεροτομής για $\beta=0.5$



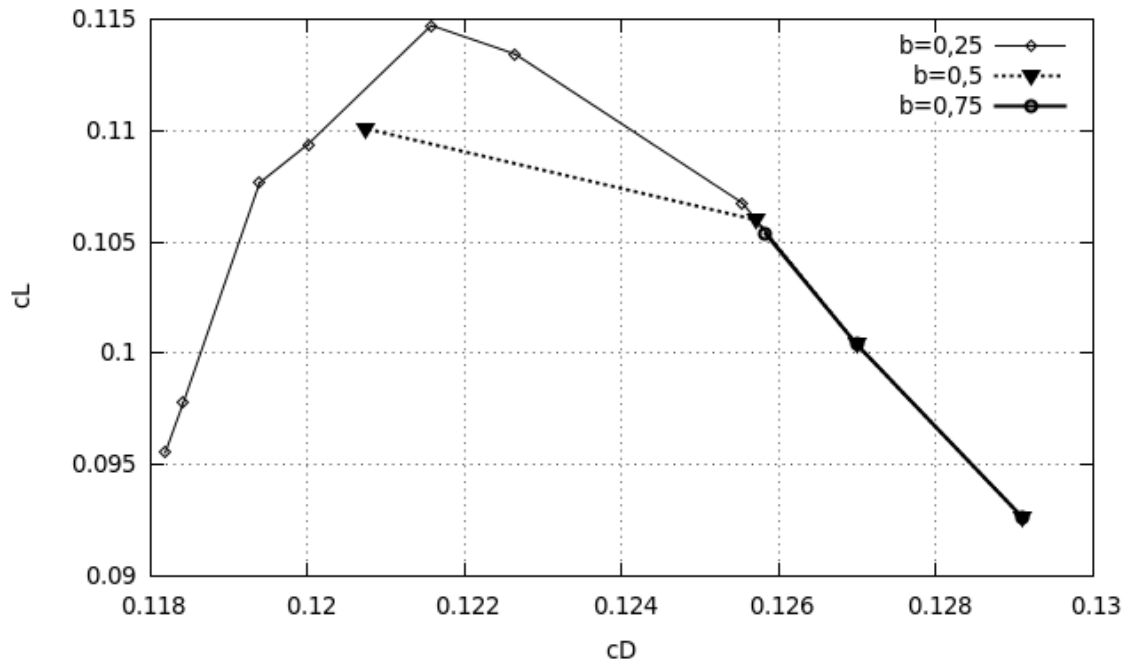
Σχήμα 5.12 Ισοϋψείς πίεσης της βέλτιστης αεροτομής για $\beta=0.75$



Σχήμα 5.13 Σύγκριση c_L ανά κύκλο βελτιστοποίησης



Σχήμα 5.14 Σύγκριση c_D ανά κύκλο βελτιστοποίησης



Σχήμα 5.15 Σύγκριση c_L/c_D ανά κύκλο βελτιστοποίησης (από δεξιά προς αριστερά)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας ήταν η εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων για τη μελέτη του ροϊκού πεδίου και τον υπολογισμό των αεροδυναμικών συντελεστών μιας αεροτομής σε ασυμπίεστη ροή, καθώς και τη βελτιστοποίηση του σχήματός της, με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Στο πλαίσιο αυτό, εφαρμόστηκαν τα ακόλουθα:

- Παραμετροποίηση της αεροτομής με χρήση πολυωνύμων Bezier.
- Διακριτοποίηση του χωρίου ροής γύρω από την παραμετροποιημένη αεροτομή με τη δημιουργία κατάλληλου πλέγματος επίλυσης, χρησιμοποιώντας τον κώδικα <gpost09.for>, ο οποίος αναπτύχθηκε από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών.
- Επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes για μόνιμη, ασυμπίεστη στρωτή και τυρβώδη ροή, με εφαρμογή των μοντέλων Spalart – Allmaras και $k - \omega$ SST, με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και υπολογισμός των αεροδυναμικών συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας, κάνοντας χρήση του ελεύθερου λογισμικού OpenFOAM.
- Βελτιστοποίηση της παραμετροποιημένης αεροτομής για στρωτή ροή χρησιμοποιώντας προσεγγιστική μέθοδο Newton (BFGS) και τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό OpenFOAM, με εκτέλεση υπορουτίνων αναπτυγμένων από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Α»

A-1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ UI-1720

UNIVERSITY OF ILLINOIS UI-1720 AIRFOIL

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
.001315	.008783	.000641	-.004765
.004278	.016285	.003744	-.010051
.008823	.024374	.009317	-.015090
.014903	.032750	.016852	-.019595
.022485	.041600	.026156	-.023426
.031535	.050676	.037148	-.026336
.042013	.059526	.050349	-.027964
.053853	.068029	.066134	-.028652
.067001	.076378	.084314	-.028739
.081427	.084347	.104783	-.028238
.097028	.091809	.127428	-.027264
.113747	.098496	.152142	-.025869
.131515	.104303	.178825	-.024080
.150220	.109141	.207351	-.021964
.169782	.112966	.237571	-.019588
.190065	.114861	.269333	-.017032
.211962	.114427	.302510	-.014343
.236269	.112518	.336888	-.011606
.262692	.109755	.372308	-.008850
.290930	.106398	.408554	-.006147
.320743	.102581	.445456	-.003531
.351885	.098396	.482784	-.001121
.384161	.093938	.520319	.001121
.417351	.089273	.557841	.003117
.451242	.084460	.595155	.004825
.485627	.079562	.632003	.006280
.520305	.074650	.668183	.007402
.555064	.069731	.703456	.008209
.589703	.064859	.737634	.008670
.624014	.060074	.770477	.008696
.657818	.055368	.801785	.008590
.690895	.050763	.831385	.008222
.723085	.046265	.859062	.007608
.754179	.041927	.884651	.006794
.784032	.037709	.908004	.005800
.812464	.033731	.928974	.004725
.839327	.029913	.947394	.003637
.864469	.026323	.963198	.002536
.887774	.022946	.976253	.001635
.909105	.019755	.986498	.001008
.928386	.016725	.994139	.000574
.945505	.013875	.999232	.000340
.960402	.011253		
.973009	.008816		
.983287	.006801		
.991189	.004605		
.996716	.002736		
.999999	.000954		

A-2 BEZIER CONTROL POINTS

- ΚΑΜΠΥΛΗ 7 ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΛΕΥΡΑ

PRESSURE

0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.11777769778528013	-0.11623816486284276
0.39320644246856440	0.11982100147255284
0.42773541173817131	-0.11457772058663898
0.69560016056707674	7.29210130593611339E-002
0.82327391934483574	-3.08520090510367600E-004
0.99923200000000001	3.4000000000000024E-004

SUNCTION

0.0000000000000000	0.0000000000000000
5.93387262327662590E-002	0.17787354464722771
0.39214450407623413	0.14727065584872034
0.41414883883799947	2.24424787201036591E-002
0.68045705581436522	7.66519118450035425E-002
0.82422400667084172	3.70750882227972103E-002
0.99999899999999997	9.5399999999999987E-004

- ΚΑΜΠΥΛΗ 9 ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΛΕΥΡΑ

PRESSURE

0.0000000000000000	0.0000000000000000
6.72567083248557518E-002	-0.11606847373482465
0.35505811377864993	0.14123199117673887
0.19707356742170790	-0.22540630708931855
0.65622543763482977	0.20239840558265290
0.52056454975264188	-0.11066265432865378
0.78181104199050999	5.70218694122673272E-002
0.86710689747149239	2.05135090010347956E-003
0.99923200000000001	3.4000000000000024E-004

SUNCTION

0.0000000000000000	0.0000000000000000
3.22789902970677112E-002	0.12131129096088658
0.28408855518606280	0.19414815394762353
0.28307663892967305	6.82669613692756250E-002
0.52940510718558453	3.73088477112630823E-002
0.58711779481415149	0.12927614000844112
0.74392810446426694	-1.64319257707265520E-003
0.87308977307806224	4.45414658267034025E-002
0.99999899999999997	9.5399999999999987E-004

- ΚΑΜΠΥΛΗ 11 ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΛΕΥΡΑ

PRESSURE

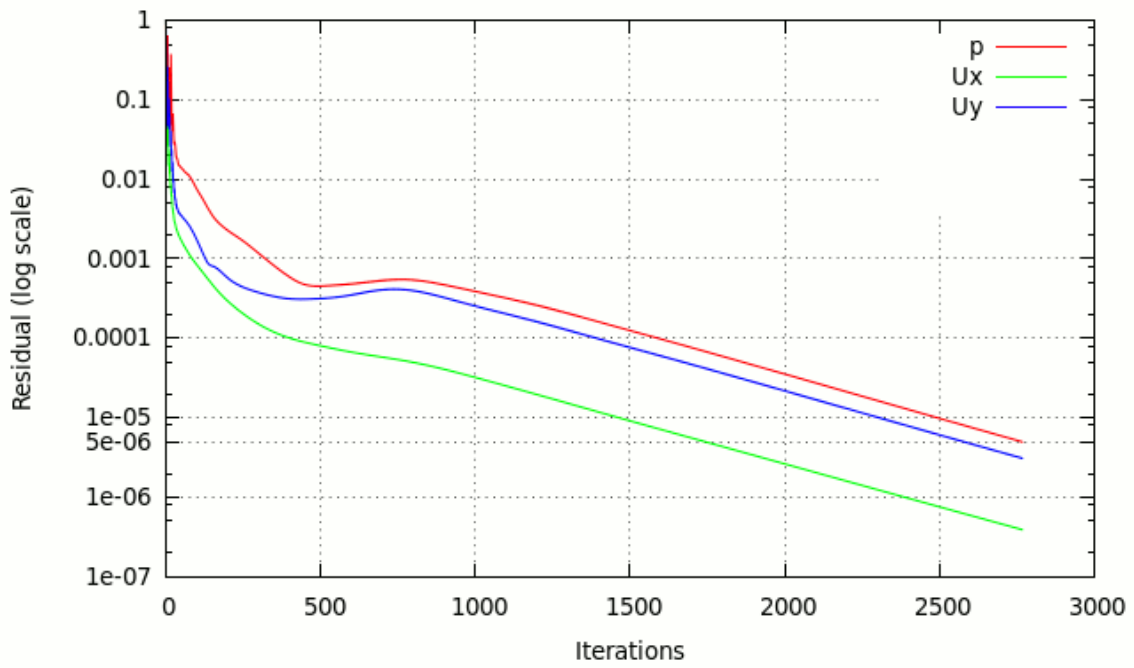
0.0000000000000000	0.0000000000000000
3.78792895025239496E-002	-0.10594140236382746
0.34108614265654524	0.12477104615530718
-4.45521207919785667E-003	-0.26000463563924980
0.79734719103853102	0.29851208240679150
0.10424212210532779	-0.27760454553849523
0.85394777564174618	0.19378794893827844
0.57962923230924090	-7.61500179941974747E-002
0.82891837344519637	3.88737477244943813E-002
0.89402057243934063	3.33469648549094633E-003
0.99923200000000001	3.4000000000000024E-004

SUNCTION

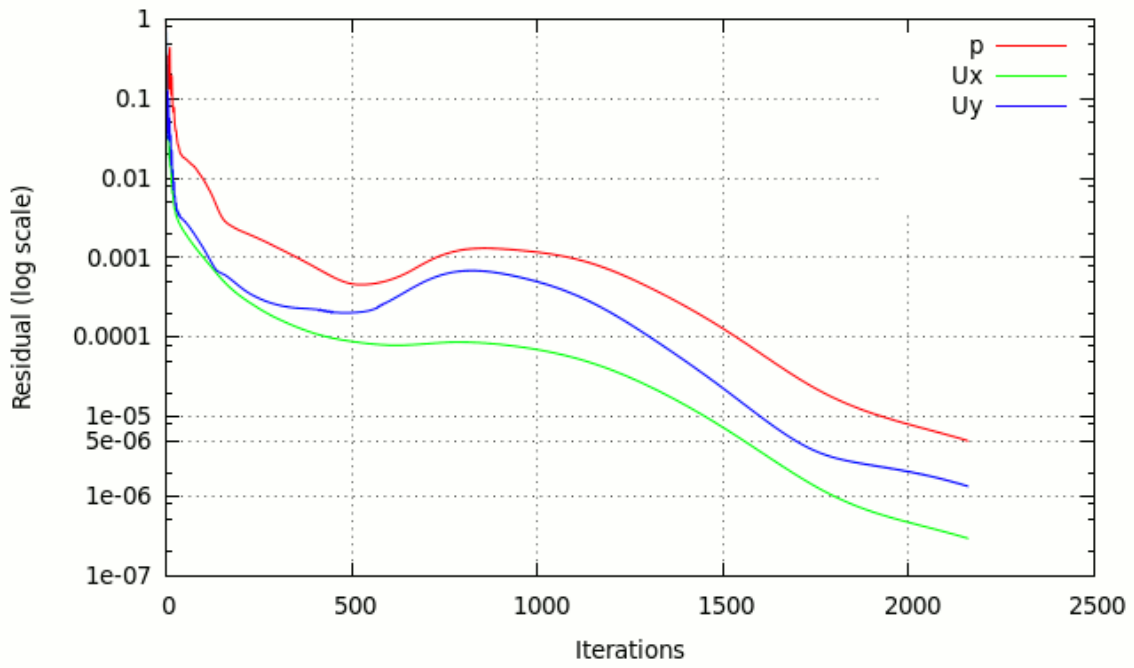
0.0000000000000000	0.0000000000000000
1.83412849853247795E-002	0.11299872579504280
0.23094756297256880	6.64939782304952431E-002
0.15256328757545123	0.41518919953656341
0.54284762480643600	-0.42281031294606464
0.31932654032366514	0.62202682822524535
0.68312567304452187	-0.32518317022139476
0.65268247094541110	0.25049031204538125
0.79657824267331989	-3.58972103146336097E-002
0.89942182880878985	4.20847997330071819E-002
0.99999899999999997	9.5399999999999987E-004

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Β»
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

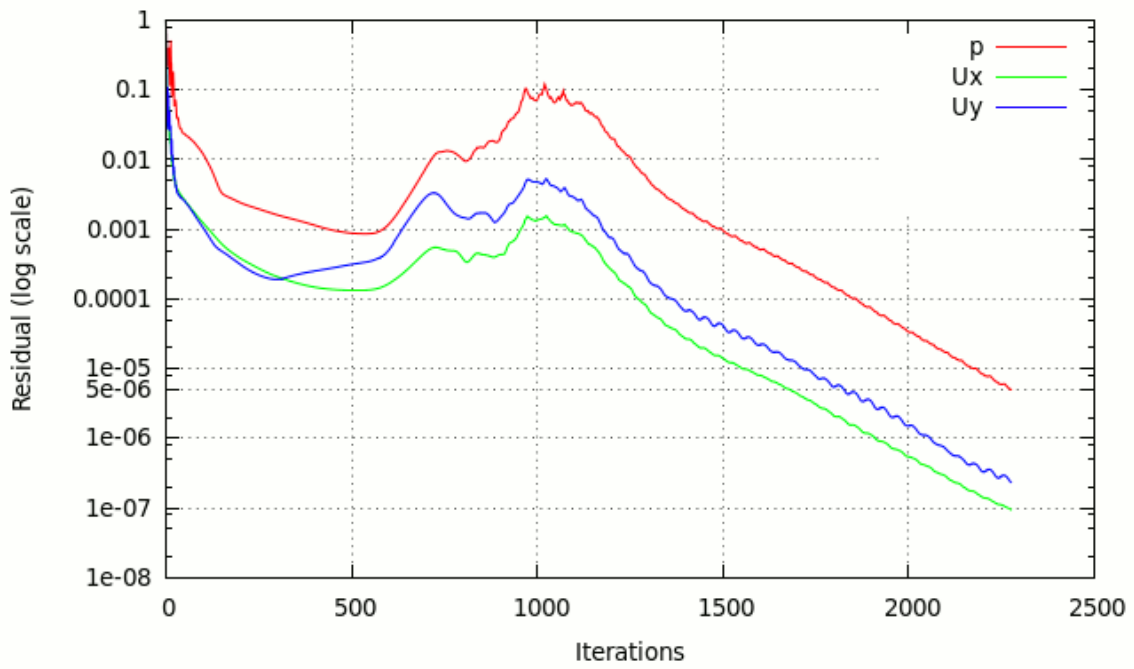
B-1 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ



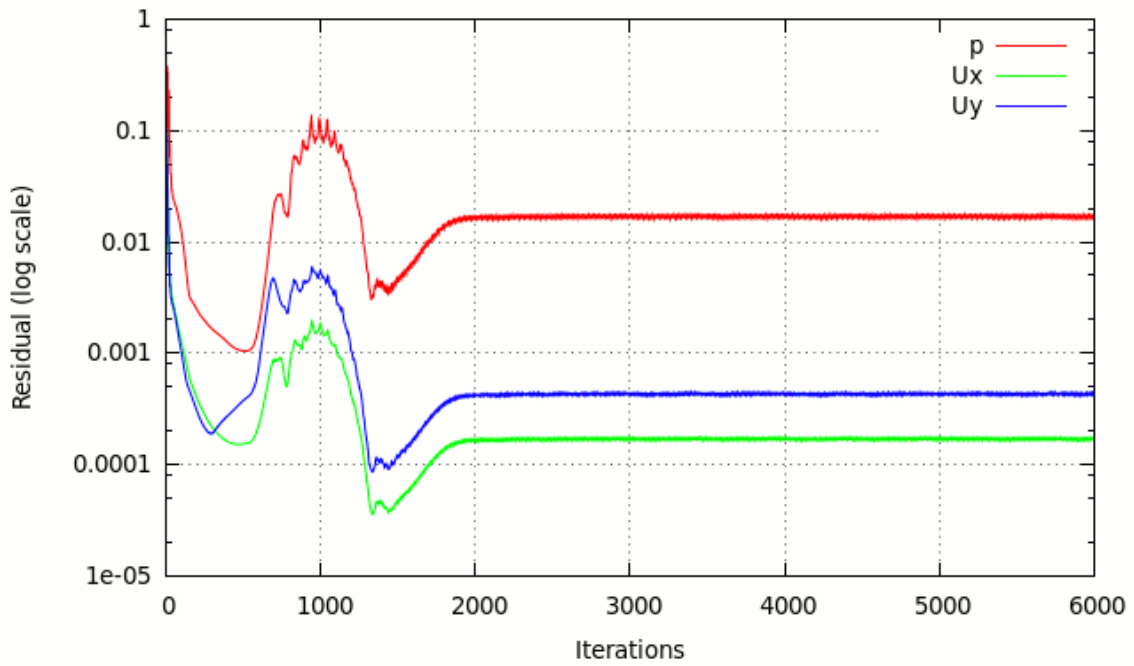
Σχήμα B1.1 Σύγκλιση για $\alpha=0^\circ$



Σχήμα B1.2 Σύγκλιση για $\alpha=4^\circ$

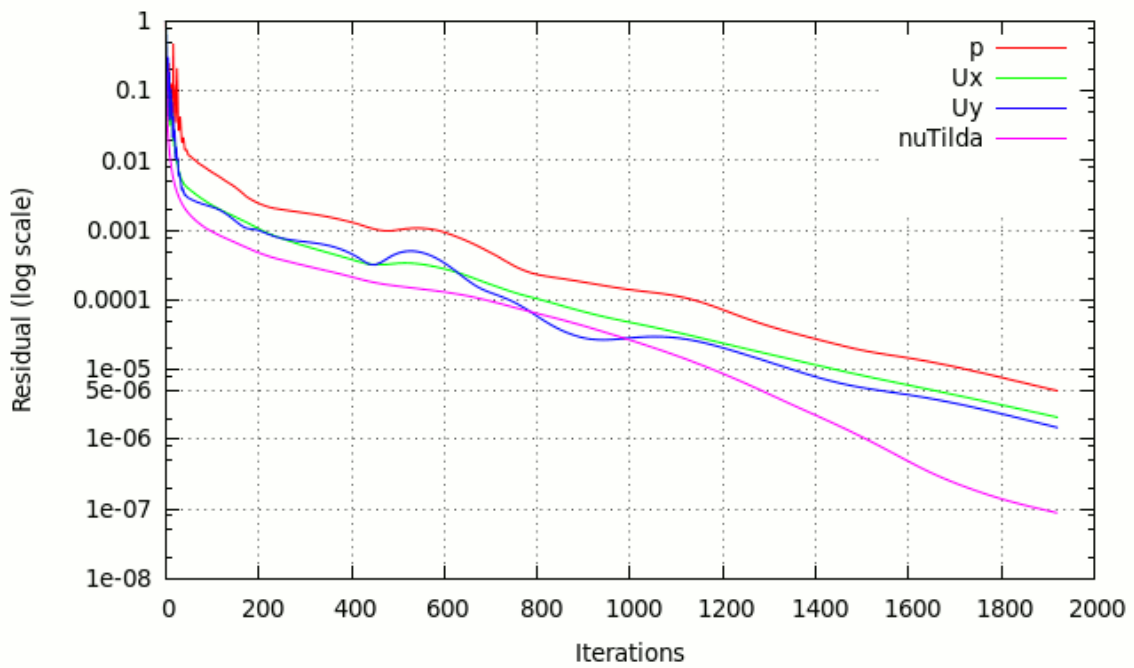


Σχήμα B1.3 Σύγκλιση για $\alpha=9^\circ$

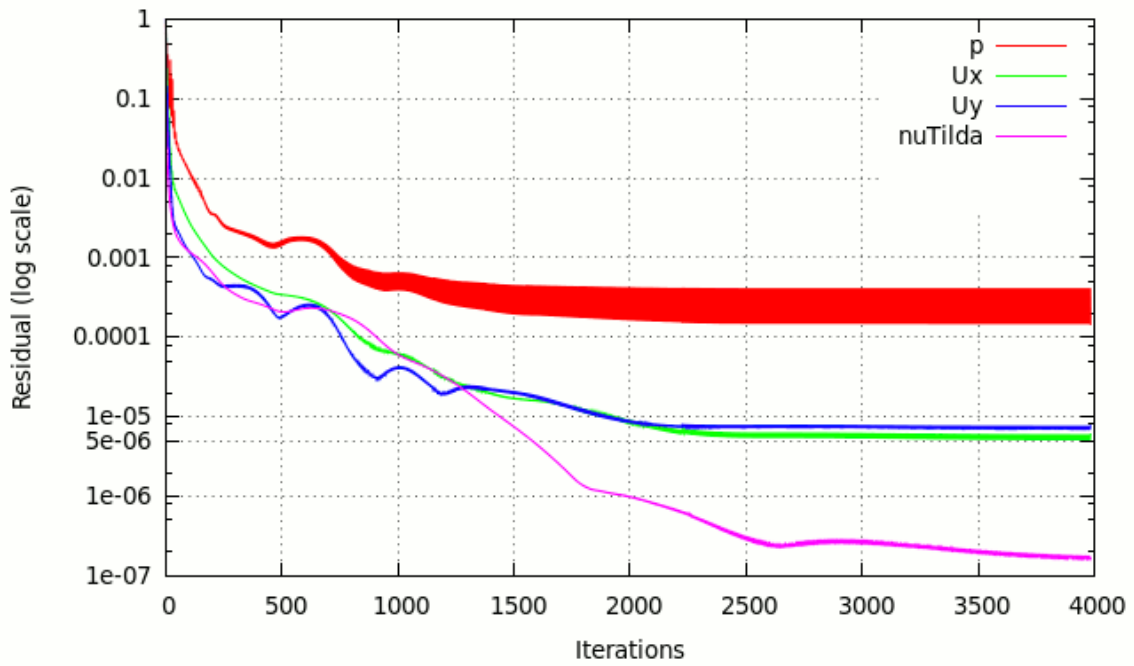


Σχήμα B1.4 Σύγκλιση για $\alpha=10^\circ$

B-2 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ SPALART – ALLMARAS

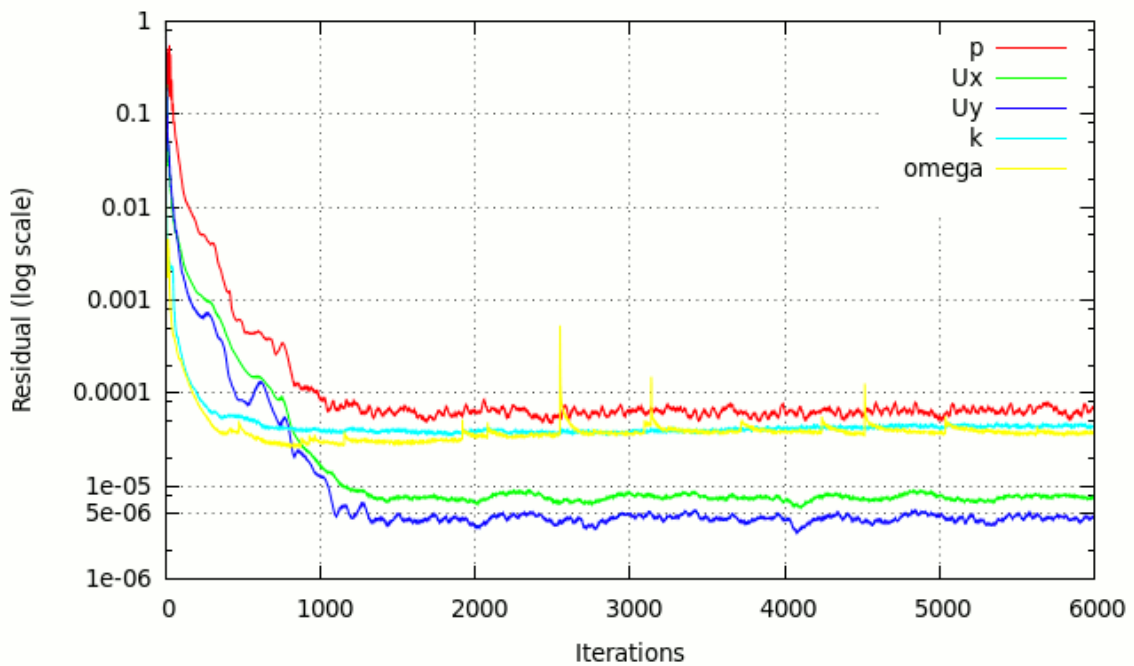


Σχήμα B2.1 Σύγκλιση για $\alpha=0^\circ$

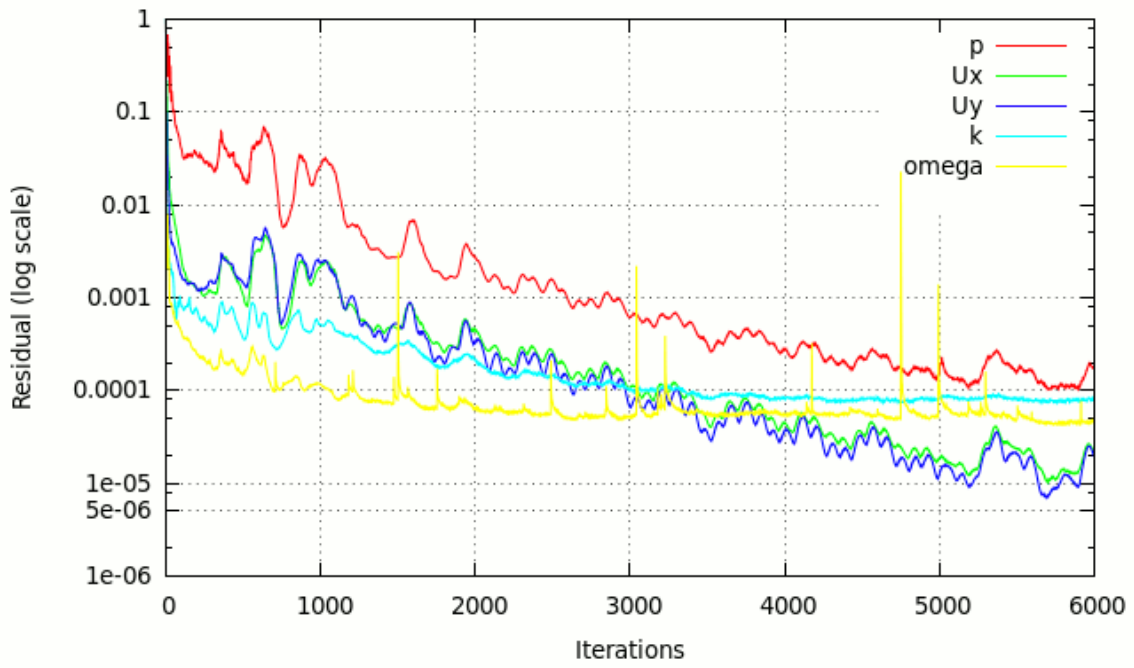


Σχήμα B2.2 Σύγκλιση για $\alpha=15^\circ$

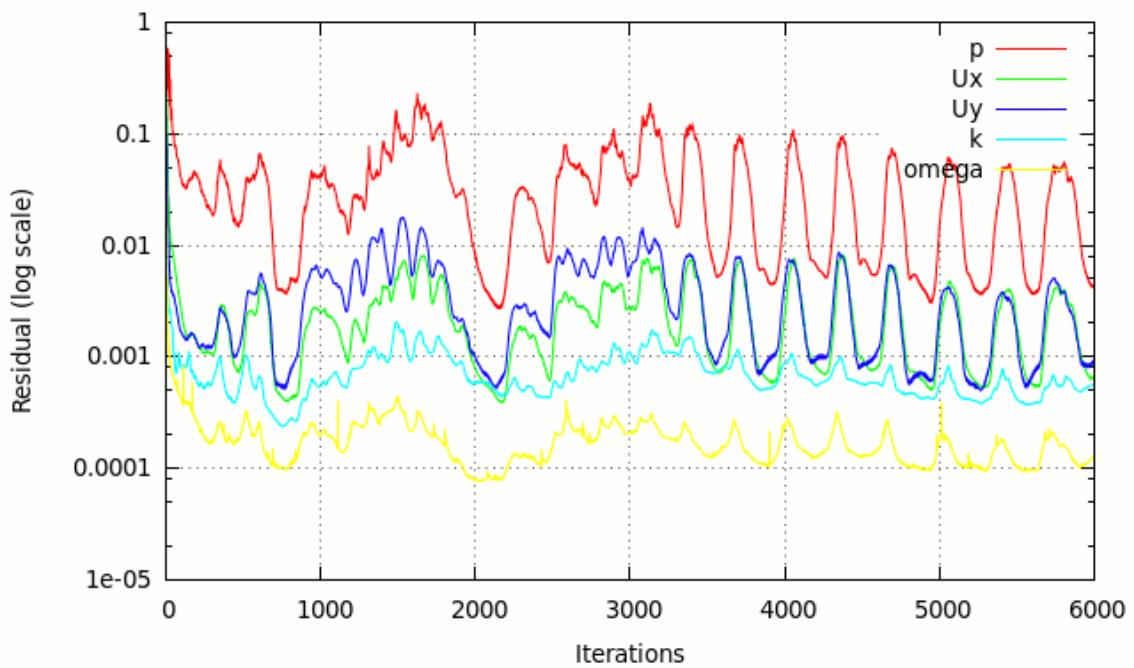
B-3 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ $k - \omega$ SST



Σχήμα B3.1 Σύγκλιση για $\alpha=0^\circ$



Σχήμα B3.2 Σύγκλιση για $\alpha=15^\circ$



Σχήμα B3.3 Σύγκλιση για $\alpha=16^\circ$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Γ»

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

- Στρωτή Ροή

ΑοΑ	Cd	Cl
0	0.1291	0.0926165
4	0.144275	0.253732
7	0.160876	0.335148
8	0.167106	0.361544
9	0.173708	0.387805

- Τυρβώδης Ροή – Μοντέλο Spalart – Allmaras

ΑοΑ	Cd	Cl
0	0.0135049	0.464566
4	0.0224319	0.866809
8	0.0364016	1.23005
12	0.056363	1.51042
13	0.0629667	1.55854
14	0.0694135	1.59771
15	0.0789167	1.61475

- Τυρβώδης Ροή – Μοντέλο k – ω SST

ΑοΑ	Cd	Cl
0	0.0120997	0.460115
4	0.0209584	0.865375
8	0.0347125	1.23109
12	0.0544663	1.51114
13	0.0609284	1.55982
14	0.0668935	1.59612
15	0.0755115	1.59982

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ «Δ»

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

- Βελτιστοποίηση c_L χωρίς περιορισμούς

Cycle	Cd	Cl
1	0.1291	0.092619
2	0.126786	0.109915
3	0.124585	0.145503

- Βελτιστοποίηση $c_D + \frac{\beta}{2}(c_L - c_L^{tar})^2$ με περιορισμούς

$\beta=0.25$

Cycle	Cd	Cl
1	0.1291	0.092619
2	0.126986	0.100401
3	0.125533	0.10675
4	0.122643	0.113432
5	0.121573	0.114721
6	0.120001	0.109377
7	0.119388	0.107653
8	0.118415	0.0977563
9	0.118186	0.0955284

$\beta=0.5$

Cycle	Cd	Cl
1	0.1291	0.092619
2	0.126986	0.100401
3	0.125701	0.105998
4	0.12073	0.110097

$\beta=0.75$

Cycle	Cd	Cl
1	0.1291	0.092619
2	0.126986	0.100401
3	0.125828	0.105364

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Τσαγγάρης Σ., *Μηχανική των Ρευστών*, Συμεών, 1995
- [2] Παπαϊωάννου Α., *Μηχανική των Ρευστών I, II*, Αθανασόπουλος-Παπαδάμης & ΣΙΑ, 1993
- [3] Μαρκάτος Ν., *Τυρβώδη Φαινόμενα Μεταφοράς και Μαθηματικά Πρότυπα Προσομοίωσής τους*, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού ΕΜΠ, 2012
- [4] Μπεργελές Γ., *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, Συμεών, 2006
- [5] Μαρκάτος Ν., *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Παπασωτηρίου, 1995
- [6] Rozikidis Κ., *Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική*, Τζιόλας, 2006
- [7] Γιαννάκογλου Κ.Χ., *Γένεση και Προσαρμογή Αριθμητικών Πλεγμάτων*, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού ΕΜΠ, 1999
- [8] Γιαννάκογλου Κ.Χ., *Προχωρημένες Υπολογιστικές Μέθοδοι και Αλγόριθμοι Επίλυσης*, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού ΕΜΠ, 2002
- [9] Γιαννάκογλου Κ.Χ., *Μέθοδοι Αιτιοκρατικής και Στοχαστικής Βελτιστοποίησης και Εφαρμογές*, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού ΕΜΠ, 2012
- [10] Abbott & Von Duenkoff, *Theory of wing sections*, Dover Publications, 1959
- [11] Sivier, K., Ormsbee, A., and Awker, R., *Low-Speed Aerodynamic Characteristics of a 13.1-Percent-Thick, High-Lift Airfoil*, SAE Technical Paper 740366, 1974
- [12] Hoerner S. F., *Fluid Dynamic Drag*, Hoerner, 1965
- [13] Hoerner S. F., *Fluid Dynamic Lift*, Hoerner, 1985
- [14] Kermode A. C., *Mechanics of Flight*, Prentice Hall, 1996
- [15] Tannehill, Anderson, Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1997

- [16] Javaherchi T, *Review of Spalart-Allmaras Turbulence Model and its Modifications*, University of Washington, 2010
- [17] Menter F. R., Kuntz M., Langtry R., *Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model*, Begell House Inc, 2003
- [18] *OpenFOAM User Guide*, OpenFOAM Foundation, 2013
- [19] *OpenFOAM Programmer's Guide*, OpenFOAM Foundation, 2013
- [20] Jasak H., *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, PhD Thesis, Imperial College, 1996
- [21] Juretic F., *Error Analysis in Finite Volume CFD*, PhD Thesis, Imperial College, 2004
- [22] Παπαδημητρίου Δ., *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση περυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*, Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006
- [23] Ζυμάρης Α. Σ., *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές*, Διδακτορική Διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2010
- [24] Papoutsis-Kiachagias E. M., *Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape or Topology Optimization and Robust Design*, PhD Thesis, Lab of Thermal Turbomachines, 2013
- [25] Papadimitriou D. I., Giannakoglou K. C., *A Continuous Adjoint Formulation with Emphasis to Aerodynamic-Turbomachinery Optimization*, ECCOMAS CFD 2006 Conference, Egmond Aan Zee, 2006
- [26] Papadimitriou D. I., Giannakoglou K. C., *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*, Computers and Fluids, Vol. 36, pp. 325 - 341, 2007
- [27] Papadimitriou D. I., Giannakoglou K. C., *Aerodynamic Shape Optimization using Adjoint and Direct Approaches*, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol.15(4), pp. 447-448, 2008

- [28] Zymaris A. S., Papadimitriou D. I., Giannakoglou K. C., *Continuous adjoint approach to the Spalart Allmaras turbulence model, for incompressible flows*, *Computers and Fluids*, Vol.38, pp. 1528 - 1538, 2009
- [29] Zymaris A. S., Papadimitriou D. I., Giannakoglou K. C., *Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization*, *Journal of Computational Physics* Vol. 229(13), pp. 5228 - 5245, July, 2010
- [30] Kavvadias I. S., Karpouzas G., Papoutsis-Kiachagias E. M., Papadimitriou D. I., Giannakoglou K. C., ””, EUROGEN 2013, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, October 7 - 9, 2013
- [31] Schildt H., *C++ The Complete Reference*, McGraw Hill/Osborne, 2003
- [32] UIUC Applied Aerodynamics Group, Airfoil Coordinates Database, http://aerospace.illinois.edu/m-selig/ads/coord_database.html#D
- [33] NASA, Technical Reports Server (NTRS), <http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19770021125>
- [34] NASA Langley Research Center, Turbulence Modeling Resource, <http://turbmodels.larc.nasa.gov/>
- [35] CFD Online, Turbulence Modeling, http://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_modeling
- [36] The OpenFOAM Foundation, <http://www.openfoam.org/>
- [37] <http://www.cplusplus.com/>
- [38] <http://www.wikipedia.org/>