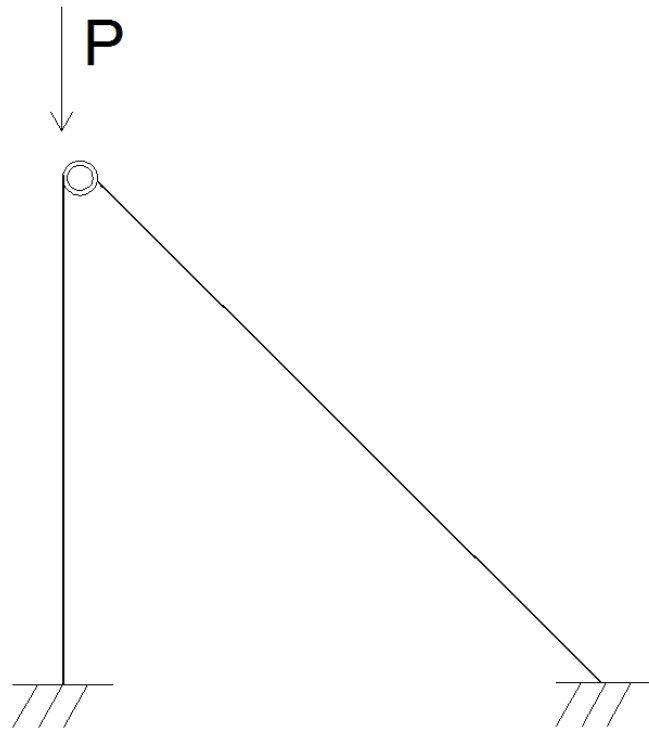




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

**ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΧΑΛΥΒΔΙΝΩΝ
ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αναστάσιος Γ. Πουλοκέφαλος

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Ραυτογιάννης

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

ΕΜΚ ΔΕ 2014/25

Ευχαριστίες

Η διπλωματική αυτή εργασία σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των σπουδών μου στη Σχολή των Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Από τη θέση αυτή, οφείλω ως μια ελάχιστη αναγνώριση να ευχαριστήσω όλα τα πρόσωπα που συνέβαλαν επιστημονικά και ηθικά για τη διεκπεραίωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ιωάννη Ραυτογιάννη για την υποστήριξη και τη συνεχή καθοδήγηση που μου παρείχε.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως το φίλο και «γιατρό των υπολογιστών» Βασίλη γιατί μου έδειξε την αξία ακόμα και του «ενός ερωτηματικού» στον προγραμματισμό, το φίλο και συνάδελφο Γιάννη για τις αμέτρητες επιστημονικές και μη, συζητήσεις που είχαμε κατά τη διάρκεια όλης της φοιτητικής μας ζωής και το φίλο και συνάδελφο Παναγιώτη γιατί είναι πάντα πρόθυμος να παράσχει την πολύτιμη βοήθεια του.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένεια μου για την αμέριστη στήριξη της σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τη μη γραμμική συμπεριφορά επίπεδων φορέων από χάλυβα βάσει της θεωρίας ελαστικής ευστάθειας. Βασικό αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας, είναι ο υπολογισμός των κρίσιμων φορτίων και η εξαγωγή των ιδιομορφών λυγισμού (γραμμική θεωρία) κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων στη μη γραμμική μας ανάλυση.

Ειδικότερα, στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στο θεωρητικό υπόβαθρο της Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας και δίνονται οι απαραίτητες πληροφορίες που χρειάζονται για την κατανόηση των υπολοίπων κεφαλαίων.

Στο κεφάλαιο 2, ασχολούμαστε με τον καμπτικό λυγισμό ευθύγραμμων ράβδων, βάσει της μη γραμμικής θεωρίας και μελετάμε τις επιδράσεις των συνοριακών συνθηκών στην παραμορφωσιακή κατάσταση των μελών.

Στο κεφάλαιο 3, αφού πρώτα προσομοιώσουμε το χαλύβδινο φορέα μας, εφαρμόζουμε την ενεργειακή μέθοδο για τη μελέτη της ελαστικής ευστάθειας του φορέα μας, σύμφωνα με τη θεωρία των μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων. Επιπρόσθετα, εξετάζουμε την επίδραση της ατέλειας στον υπό μελέτη φορέα και παραθέτουμε τους δρόμους ισορροπίας αυτού.

Στο κεφάλαιο 4, παρατίθενται συνοπτικά τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την παρούσα διπλωματική εργασία.

Τέλος, στα παραρτήματα γίνονται εκτενείς αναφορές της χρήσης των λογισμικών που χρησιμοποιήθηκαν (SAP2000 & MATLAB).

Abstract

The presented diploma thesis examines the non-linear behavior of plane steel frames according to the theory of elastic stability. Fundamental objective of the thesis is the calculation of the critical loads and the export of buckling eigenmodes, using results in our non-linear analysis.

Especially, in the first chapter an introduction on theoretical background is presented in theory of elastic stability and all the necessary details which are needed in understanding of the next chapters are given.

In the second chapter, we are dealing with the flexural buckling of straight bars according to non-linear theory and a study is performed on the effects of boundary conditions on deformations of the member.

In the third chapter, having simulated our model, the energy method for elastic stability is performed, based on theory of intermediate class of deformations. In addition, the influence of initial imperfections is examined in our model and the equilibrium paths of our model are presented.

In the fourth chapter, we summarize the conclusions exported from this thesis.

Furthermore, there are two annexes where extensive references are given regarding the utilized software suites (SAP2000 & MATLAB) in the course of the experimentation and model developing.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	13
Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας	
1.1 Γενικά.....	13
1.2 Γραμμική Θεωρία.....	14
1.3 Σχέση ροπής κάμψεως $M(x)$ – καμπυλότητας $\kappa(x)$	16
1.4 Μη Γραμμική Θεωρία-Στατική 2 ^{ης} τάξεως.....	19
1.5 Δρόμοι ισορροπίας, σημείο διακλάδωσης, κρίσιμο φορτίο.....	21
1.6 Μορφές ελαστικής ισορροπίας.....	23
1.7 Βασικές μέθοδοι μελέτης ελαστικής ευστάθειας.....	25
1.7.1 Μέθοδος του Euler.....	25
1.7.2 Ενεργειακή μέθοδος.....	27
1.8 Η επιρροή των αρχικών ατελειών.....	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	33
Καμπτικός Λυγισμός Ευθύγραμμων Ράβδων	
2.1 Παραδοχή σημάνσεως.....	33
2.2 Διαφορική εξίσωση καμπτικού λυγισμού.....	34
2.3 Θλιβόμενο μέλος.....	37
2.4 Εφελκυτόμενο μέλος.....	41
2.5 Μέλος με μηδενική αξονική δύναμη.....	45
2.6 Αριθμητικό παράδειγμα υπολογισμού κρίσιμου φορτίου.....	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	53
Προσομοίωση και Ανάλυση Φορέα	
3.1 Εισαγωγή.....	53
3.2 Προσδιορισμός φορέα.....	53
3.2.1 Ενεργειακό δυναμικό φορέα.....	55
3.2.2 Αξονικές τάσεις φορέα – στατική επίλυση.....	56
3.2.3 Επιρροή συνοριακών συνθηκών.....	57
3.3 Εφαρμογή ενεργειακής μεθόδου.....	60
3.3.1 Αρχή στασίμου τιμής.....	64
3.3.2 Εναλλακτικός τρόπος ανάλυσης του πλαισίου σύμφωνα με τη Μη Γραμμική Θεωρία.....	65
3.3.2.1 Ανάλυση λυγισμού σύμφωνα με τη Γραμμική Θεωρία.....	66
3.3.2.2 Χρήση ιδιομορφών λυγισμού στη Μη Γραμμική Θεωρία.....	71
3.4 Μη γραμμική ανάλυση στο SAP2000	79
3.5 Επιρροή ατέλειας στο κρίσιμο φορτίο.....	81
3.6 Δρόμοι ισοροπίας-Διάγραμμα P-δ.....	82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	85
Συμπεράσματα	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	
Παράρτημα Α: Χρήση SAP2000 version 15.....	89
Παράρτημα Β: Χρήση MATLAB R2013b.....	95
Βιβλιογραφία.....	105

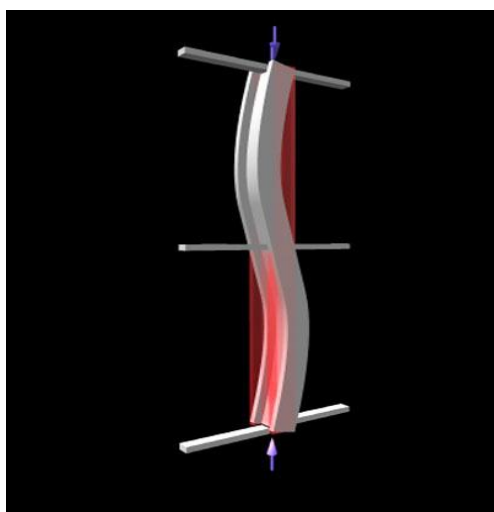
Κεφάλαιο 1
Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας

Κεφάλαιο 1

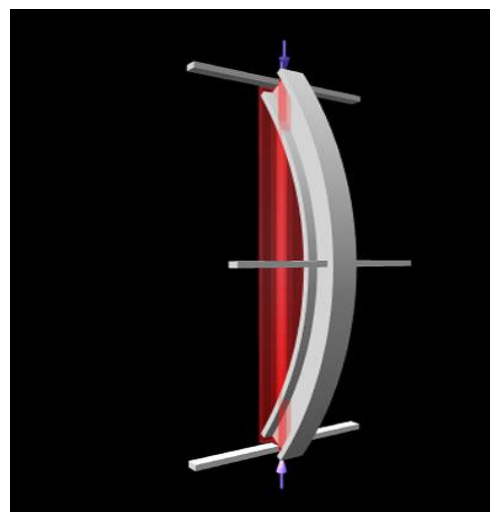
Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας

1.1 Γενικά

Οι αστοχίες στις συνήθεις κατασκευές στα έργα του πολιτικού μηχανικού, ανήκουν σε μια εκ των ακόλουθων δυο κατηγοριών. Σε εκείνες που οφείλονται στην **αστοχία υλικών** και σε εκείνες που σχετίζονται με την **έλλειψη ευστάθειας**. Για την πρώτη περίπτωση, οι προβλέψεις μπορεί να είναι επαρκείς, αναλύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στην αρχική μη παραμορφωμένη κατάσταση · για τη δεύτερη όμως δεν ισχύει το ίδιο. Η πρόβλεψη της αστοχίας λόγω αστάθειας της κατασκευής, απαιτεί τη διαμόρφωση εξισώσεων ισορροπίας ή κινηματικών εξισώσεων στην παραμορφωμένη κατάσταση της κατασκευής. Η παραμορφωμένη κατάσταση που προκύπτει, δεν είναι εξαρχής γνωστή, αλλά εξαρτάται από τις προς επίλυση παραμορφώσεις, επομένως το πρόβλημα που προκύπτει είναι μη γραμμικό.



ως προς τον ασθενή άξονα



ως προς τον ισχυρό άξονα

Σχήμα 1.1 Παραδείγματα παραμορφωμένης κατάστασης

Κύριο μέλημα του πολιτικού μηχανικού, είναι ο σχεδιασμός ασφαλών κατασκευών με τη μέγιστη εξοικονόμηση υλικού άρα και κατά επέκταση του κόστους της κατασκευής. Η

τεχνολογική εξέλιξη και η συνεχής βελτίωση των μέσων που διαθέτει ο πολιτικός μηχανικός έχουν εξελίξει θεαματικά την ποιότητα και την αντοχή των δομικών υλικών. Πλέον υπάρχει η δυνατότητα -μέσω σύγχρονων μεθόδων κατεργασίας- της παραγωγής δομικών μελών σε κάθε επιθυμητό σχήμα και πάχος διατομής. Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών που επιτρέπει την ανάπτυξη ακριβέστερων μεθόδων ανάλυσης, οδηγούν στη χρησιμοποίηση μικρότερων συντελεστών ασφαλείας, χρησιμοποιώντας ελαφρύτερα δομικά στοιχεία με πιο οριακή εκμετάλλευση του υλικού. Η ευελιξία αυτή στον σχεδιασμό κάνει την κατασκευή **πιο εύκαμπτη**, τόσο σε επίπεδο φορέα, όσο και τοπικά, σε επίπεδο μέλους ή διατομής. Συνέπεια αυτού, είναι η εμφάνιση μεγαλύτερων παραμορφώσεων κατά τη φόρτιση των εκάστοτε φορέων. Οι έντονες αυτές παραμορφώσεις έχουν δυο σημαντικές συνέπειες. Αφενός ότι η κατασκευή αναμένεται να οδηγηθεί σε αστοχίες που είναι γνωστές με τον γενικό όρο «αστάθεια» ή «λυγισμός» και συνδέονται με απότομη και έντονη αύξηση της παραμόρφωσης για μικρή αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου, αφετέρου στο γεγονός ότι επηρεάζεται σημαντικά η παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα συγκριτικά με την απαραμόρφωτη · επομένως η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία οδηγεί σε σοβαρά σφάλματα και πρέπει να αποφεύγεται. Η ανάγκη διατύπωσης των εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση, η οποία δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους στατικής ανάλυσης, οδηγώντας σε κατάργηση της αναλογίας μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης παραμόρφωσης. Η κατάργηση της αναλογίας αυτής είναι γνωστή ως γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά.

1.2 Γραμμική Θεωρία

Όπως προαναφέρθηκε, η ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων έχει διευκολύνει την ανάλυση των φορέων, δίνοντας τη δυνατότητα προσέγγισής τους, τόσο με τη **γραμμική θεωρία**, όσο και με τη **μη γραμμική**. Η γραμμική θεωρία αντιπροσωπεύει ουσιαστικά την απλούστερη δυνατή συμπεριφορά μιας κατασκευής, ενώ η μη γραμμική εισάγει γεωμετρίες ή μη γραμμικούς νόμους των υλικών με σκοπό την επίτευξη ακριβέστερων αποτελεσμάτων.

Συγκεκριμένα όταν έχουμε σημαντική αύξηση των παραμορφώσεων, η γραμμική θεωρία απέχει σημαντικά από την πραγματική συμπεριφορά και η σχέση που συνδέει τα εξωτερικά φορτία με τις αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις γίνεται μη γραμμική (*μη γραμμικότητα γεωμετρίας*). Το ίδιο

ισχύει και για τη συμπεριφορά του υλικού. Από ένα επίπεδο έντασης και πάνω, η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται από μη γραμμική σχέση τάσεων[σ]-παραμορφώσεων[ϵ] (*μη γραμμικότητα υλικού*).

Άρα οι κύριες προϋποθέσεις της ύπαρξης γραμμικής συμπεριφοράς είναι:

- a) Το υλικό συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό μέσο.
- b) Οι πραγματοποιούμενες μετατοπίσεις όλων των σημείων του φορέα είναι πολύ μικρές.

Οι βασικές παραδοχές της γραμμικής (κλασσικής) θεωρίας στατικής ευστάθειας για ελαστικά συστήματα, αποτελούμενα από ράβδους πρισματικής διατομής και ευθύγραμμου άξονα, είναι οι ακόλουθες:

1. Το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το ελαστικό σύστημα είναι ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό, ακολουθώντας το νόμο του Hooke.
2. Το διάγραμμα τάσεως-ανηγμένης παραμόρφωσης θεωρείται το ίδιο, τόσο για την περίπτωση της θλίψης, όσο και για την περίπτωση του εφελκυσμού.
3. Ισχύει η παραδοχή Bernoulli-Navier. Επίπεδες διατομές κάθετες ως προς τον απαραμόρφωτο άξονα μιας ράβδου προ κάμψης, παραμένουν επίπεδες αλλά και κάθετες ως προς τον παραμορφωμένο πια άξονα, μετά την κάμψη.
4. Τα εξωτερικά εγκάρσια φορτία ενεργούν επί επιπέδου, διερχομένου από το κέντρο διάτμησης της διατομής και παράλληλου ως προς τον κύριο άξονα αδράνειας αυτής. Αυτό αποκλείει οποιαδήποτε στροφή ή στρέψη της διατομής (περί τον άξονα του μέλους), η οποία επομένως υπόκειται μόνο σε κάμψη ενός εκ των κύριων επιπέδων της.
5. Οι συνιστώσες των μετακινήσεων κατά τον άξονα της ράβδου και εγκαρσίως προς αυτόν (βέλος κάμψης) είναι μικρές συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής. Για αυτό το λόγο η γραμμική θεωρία λυγισμού είναι θεωρία μικρών βελών. Έτσι η ανηγμένη παραμόρφωση ϵ , η αξονική μετατόπιση u , η καμπυλότητα κ ($=1/R$) και εγκάρσια μετατόπιση w συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

όπου x , η συντεταγμένη κατά μήκος του άξονα της ράβδου.

6. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης επί του βέλους κάμψης αμελείται.

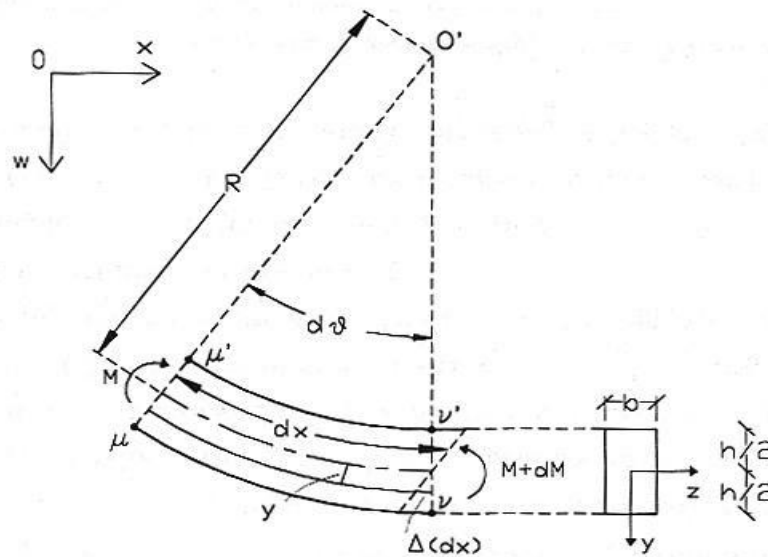
7. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού υπολογίζονται θεωρώντας ότι η στατική παραμόρφωση οφείλεται μόνο σε κάμψη. Αγνοείται δηλαδή η αξονική παραμόρφωση που πιθανόν να προηγήθηκε.

1.3 Σχέση ροπής κάμψεως $M(x)$ – καμπυλότητας $\kappa(x)$

Με τη θεώρηση ότι ο θετικός άξονας των x κατευθύνεται προς τα δεξιά και ο θετικός άξονας w έχει φορά προς τα κάτω, η καμπυλότητα του άξονα της δοκού $\kappa(x)$ είναι θετική, αν η δοκός καμπτόμενη στρέφει τα κοίλα προς κάτω και αρνητική αν η δοκός στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Συνεπώς η δοκός του σχήματος 1.2, κάμπτεται με αρνητική καμπυλότητα. Όπως είναι γνωστό από την Αντοχή των Υλικών, η αρνητική καμπυλότητα συνδέεται με θετική ροπή κάμψεως σύμφωνα με τη σχέση:

$$\kappa = \frac{1}{R(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1.1)$$

όπου $\kappa(x)$ η καμπυλότητα του άξονα της δοκού στη θέση x , $M(x)$ η αναπτυσσόμενη στη θέση αυτή ροπή κάμψεως και EI η καμπτική αντίσταση της διατομής, θεωρούμενη σταθερή σε όλο το μήκος της, εφόσον η δοκός έχει διατομή πρισματική (σταθερή). Η καμπτική αντίσταση EI αποτελείται από το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας του υλικού E και της ροπής αδράνειας της διατομής I , θεωρώντας στο εξής ότι η I αντιστοιχεί στον κύριο άξονα της διατομής ως προς τον οποίο λαμβάνει χώρα η κάμψη. Ο τύπος (1.1) ισχύει για γραμμικά ελαστικό υλικό (υλικό Hooke).



Σχήμα 1.2 Παραμόρφωση στοιχείου dx λόγω κάμψης

Υποθέτουμε ότι από την επίδραση των θετικών ροπών κάμψεως, το στοιχείο dx , κάμπτεται σύμφωνα με το τόξο του κύκλου με διατομές $\mu\mu'$ και $\nu\nu'$, οι οποίες παραμένουν επίπεδες και κάθετες στις διαμήκειες ίνες της δοκού, σύμφωνα με τις παραδοχές του κεφαλαίου 1.2. Ο προεκτάσεις των 2 καμπτόμενων διατομών (που απέχουν μεταξύ τους dx) τέμνονται στο σημείο O' , το οποίο είναι και το κέντρο καμπυλότητας με ακτίνα καμπυλότητας R . Η σχηματιζόμενη γωνία μεταξύ των δυο διατομών $\mu\mu'$ και $\nu\nu'$ θεωρείται $d\theta$. Εξαιτίας της καμπτικής παραμόρφωσης του dx , θεωρούμε ότι η $\nu\nu'$ στρέφεται κατά $d\theta$ ως προς τη διατομή $\mu\mu'$, με αντίθετη φορά από αυτή των δεικτών του ρολογιού · επομένως η στροφή είναι αρνητική. Ως εκ τούτου για μια ίνα που βρίσκεται σε απόσταση y κάτω από την κεντροβαρική γραμμή ισχύει:

$$\Delta(dx) = -yd\theta \quad (1.2)$$

το μείον (-) στη σχέση (1.2), οφείλεται στο γεγονός ότι η αύξηση του x κατά τη θετική διεύθυνση δίνει αρνητική γωνία $d\theta$. Έτσι για την παραπάνω ίνα έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx} \quad (1.3)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke:

$$\sigma = \varepsilon E \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M(x)y}{EI} \quad (1.4)$$

Από (1.3) και (1.4) έχουμε:

$$\frac{M(x)}{EI} = -\frac{d\theta}{dx} \quad (1.5)$$

Αλλά από σχήμα 1.2 ξέρουμε ότι $dx=Rd\theta$ και από την (1.5) καταλήγουμε στην (1.1).

Γνωρίζοντας ακόμα ότι:

$$\tan\theta = \frac{dw}{dx} = w', \text{ λόγω της θεωρίας των μικρών βελών, μπορούμε να θεωρήσουμε για μικρές}$$

γωνίες ότι ισχύει:

$$\tan\theta = \theta = \frac{dw}{dx} \quad (1.6)$$

Παραγωγίζοντας την (1.6) έχουμε το εξής:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (1.7)$$

Από (1.1), (1.5) και (1.7) προκύπτει η σχέση ροπής κάμψεως $M(x)$ -καμπυλότητας $\kappa(x)$ για γραμμικώς ελαστικό υλικό:

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = -EIw'' \quad (1.8)$$

Αναφορικά με την τέμνουσα δύναμη, από την ισορροπία των ροπών κάμψης και σύμφωνα με το σχήμα 1.2, έχουμε:

$$M - (M + dM) - qdx \frac{dx}{2} + (V + dV)dx - (N + dN) \frac{dw}{dx} dx = 0 \quad (1.9)$$

Αμελώντας τα διαφορικά ανωτέρας τάξης, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$V = \frac{dM}{dx} + N \frac{dw}{dx} \quad (1.10)$$

η οποία (1.10) με τη βοήθεια της (1.8) γίνεται:

$$V(x) = -EIw'''(x) - Pw'(x) \quad (1.11)$$

με $-P$ για την περίπτωση της θλίψης και $+P$ για την περίπτωση του εφελκυσμού.

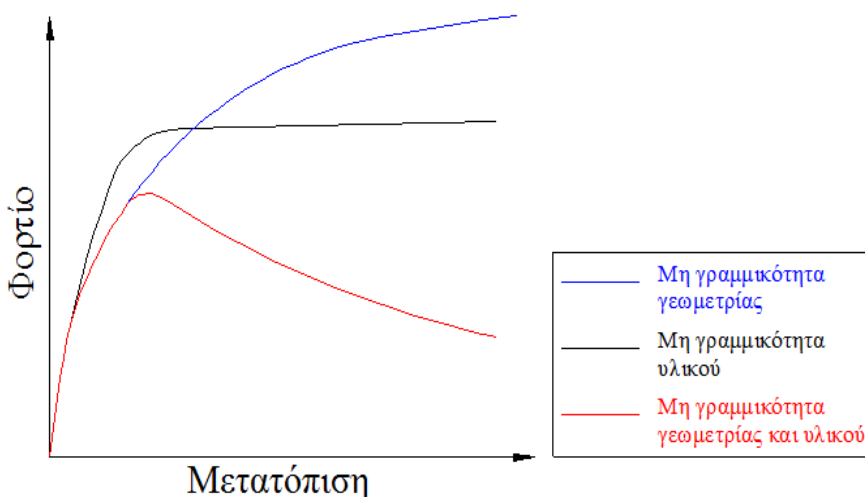
1.4 Μη Γραμμική Θεωρία - Στατική 2^{ης} τάξεως

Σε αρκετές περιπτώσεις πάντως, η γραμμική ανάλυση πλησιάζει σε ικανοποιητικό βαθμό την πραγματική κατάσταση ενώ δεν απαιτούνται ειδικές γνώσεις και μεγάλος υπολογιστικός φόρτος. Εν αντιθέσει, το πλεονέκτημα της μη γραμμικής ανάλυσης είναι η σαφέστερη κατανόηση της πραγματικής συμπεριφοράς της κατασκευής. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία λυγισμού της Αντοχής των Υλικών, ο υπολογισμός των κρίσιμων φορτίων είναι βασισμένη στη γραμμική θεωρία λυγισμού ή ευστάθειας, γνωστής και ως θεωρίας των μικρών βελών. Κατά των στατικό υπολογισμό ραβδωτών φορέων, συναντάται επίσης και η έκφραση «στατική δευτέρας τάξεως», που σημαίνει ότι στο έργο από τις καμπτικές ροπές λαμβάνεται υπ' όψιν και το καμπτικό έργο που οφείλεται στις αξονικές δυνάμεις.

Αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (1.2), τις δυο κύριες προϋποθέσεις της ύπαρξης γραμμικής συμπεριφοράς, **a** και **b**.

Στην περίπτωση που καταλύεται η προϋπόθεση **a**, η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από μη γραμμικότητα υλικού.

Στην περίπτωση που καταλύεται η προϋπόθεση **b**, παρατηρείται μη γραμμικότητα γεωμετρίας. Εάν καταλύονται και οι δυο, υπάρχει ταυτόχρονα μη γραμμικότητα υλικού και μη γραμμικότητα γεωμετρίας.



Σχήμα 1.3 Διάγραμμα P-Δ

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ασχοληθούμε με τη διερεύνηση χαλύβδινων φορέων σε φαινόμενα λυγισμού, βασιζόμενοι στη **Μη Γραμμική Ανάλυση Ελαστικής Ευστάθειας**, εισάγοντας και κάποιες γεωμετρικές ατέλειες. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η μη γραμμικότητα σχετίζεται με τη φύση του υλικού και τη γεωμετρία. Επειδή εμείς ασχολούμαστε με το χάλυβα που θεωρείται (εξιδανικευμένα) γραμμικώς ελαστικό υλικό, η μη γραμμικότητα, είναι γεωμετρικής φύσεως.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι η γραμμική θεωρία ευστάθειας από γραμμικώς ελαστικό υλικό είναι μη γραμμική ανάλυση (στατική 2^{ης} τάξεως) διότι η ισορροπία λαμβάνεται στην παραμορφωμένη κατάσταση. Συνεπώς, η ανάλυση ευστάθειας είναι αυτή καθ' αυτή μη γραμμική ανάλυση. Στη μη γραμμική θεωρία πάντως, η μη γραμμικότητα ευστάθειας εκφράζεται ουσιαστικά με ακριβέστερες εκφράσεις των σχέσεων της ανηγμένης παραμόρφωσης και της καμπυλότητας (κεφάλαιο 1.2, παραδοχή (5)).

Οι παραδοχές (1) και (4) της γραμμικής θεωρίας, ισχύουν και στη μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας. Αυτή με τη σειρά της διακρίνεται στη θεωρία *μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων* και στη θεωρία *μεγάλων μετατοπίσεων*. Η πρώτη αναφέρεται σε μια ενδιάμεση κατηγορία παραμόρφωσης (intermediate class of deformation), γνωστή και ως θεωρία ευστάθειας *μετρίως μεγάλων στροφών* (moderately large rotations). Σύμφωνα με αυτή, οι ακριβέστερες εκφράσεις της ανηγμένης παραμόρφωσης και της καμπυλότητας είναι:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right], \quad \kappa = - \frac{d^2w}{dx^2} \quad (1.12)$$

Στις παραπάνω σχέσεις η ανηγμένη παραμόρφωση ε , είναι μικρή συγκριτικά με τη μονάδα, όπως και στη γραμμική θεωρία. Το χαρακτηριστικό όμως, της κατηγορίας παραμόρφωσης αυτής είναι ότι η κλίση (γωνία στροφής) dw/dx είναι μετρίου μεγέθους, ενώ η ποσότητα $\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$, είναι ακόμα μικρότερη αλλά σίγουρα όχι αμελητέα συγκριτικά με τη μονάδα. Εάν ε και $\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ στις

σχέσεις (1.12) είναι μικρές ποσότητες σε σχέση με τη μονάδα, τότε η ποσότητα $\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2$ μπορεί αμεληθεί ως ανωτέρας τάξης. Επομένως οι σχέσεις (1.12) απλοποιούνται ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2, \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (1.13)$$

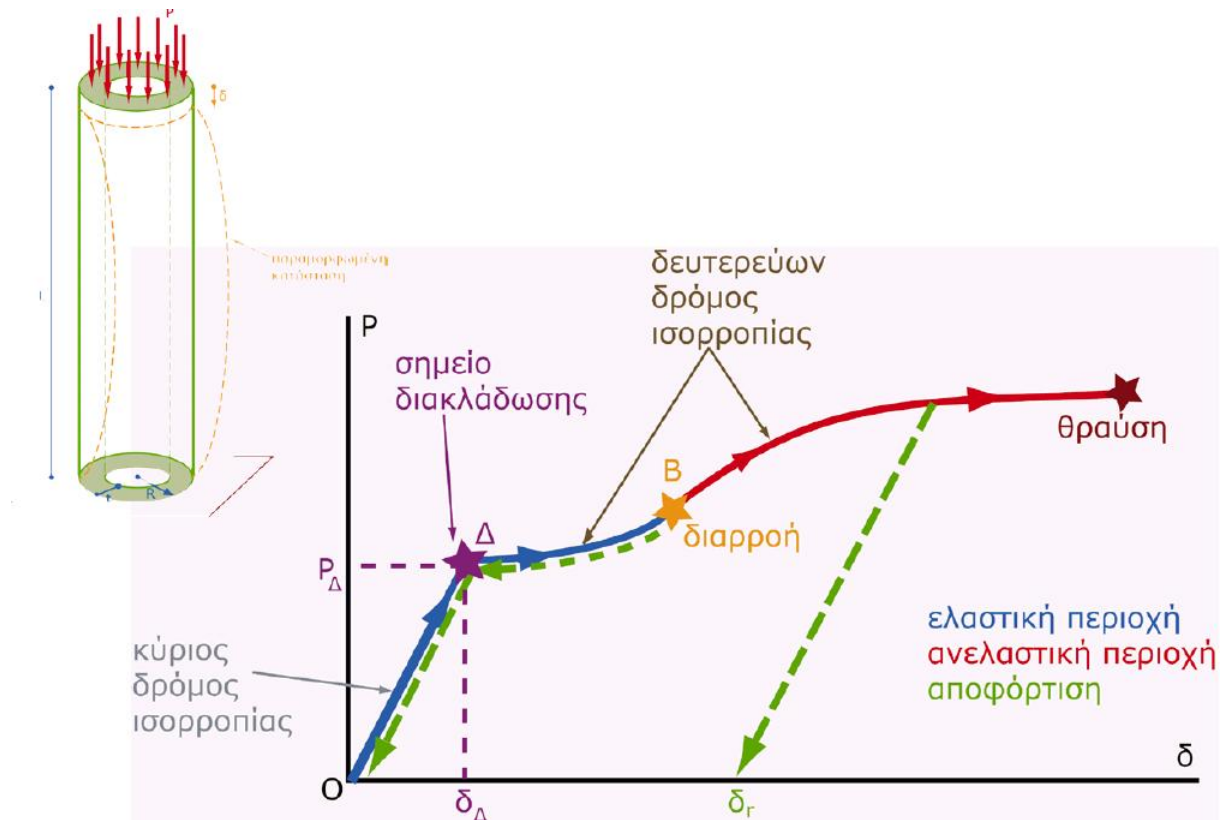
Η μη γραμμική θεωρία ευστάθειας μεγάλων μετατοπίσεων βασίζεται και στην ακριβέστερη έκφραση της καμπυλότητας. Βάση αυτής έχουμε την ακόλουθο έκφραση:

$$\kappa = \frac{-\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.14)$$

Η θεωρία αυτή είναι γνωστή και ως «στατική 3^{ης} τάξεως». Ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων σύμφωνα με τη σχέση (1.14), συνδέεται με τη θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων (large deformations) που στην ξένη βιβλιογραφία είναι γνωστή ως θεωρία «Elastica». Η μη γραμμική θεωρία που βασίζεται στη σχέση (1.14) είναι επίσης γνωστή και ως *ευστάθεια σε μεγάλες μετατοπίσεις* ή *ευστάθεια σε μεγάλη διαταραχή*, (stability in the large). Η μη γραμμική θεωρία με την οποία θα ασχοληθούμε είναι των *μετρίως μεγάλων στροφών* βασίζεται στις σχέσεις (1.13) και είναι πρακτικώς πολύ επαρκής.

1.5 Δρόμοι ισορροπίας, σημείο διακλάδωσης, κρίσιμο φορτίο

Τα διαγράμματα φόρτισης-μετατόπισης αποτελούνται από γραμμικά και μη γραμμικά τμήματα. Τα διαγράμματα καλούνται και δρόμοι (ή διαδρομές) ισορροπίας (equilibrium paths). Κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας παριστάνει μια συγκεκριμένη κατάσταση ισορροπίας (equilibrium state) ενός συστήματος ή αλλιώς ενός συγκεκριμένου σχηματισμού ισορροπίας (equilibrium configuration). Το σύνολο όλων των καταστάσεων ισορροπίας συνιστά το δρόμο ισορροπίας. Στη γραμμική θεωρία της κλασσικής στατικής όλοι οι δρόμοι ισορροπίας είναι ευθείες γραμμές. Στη μη γραμμική θεωρία, προφανώς αυτό δεν ισχύει.



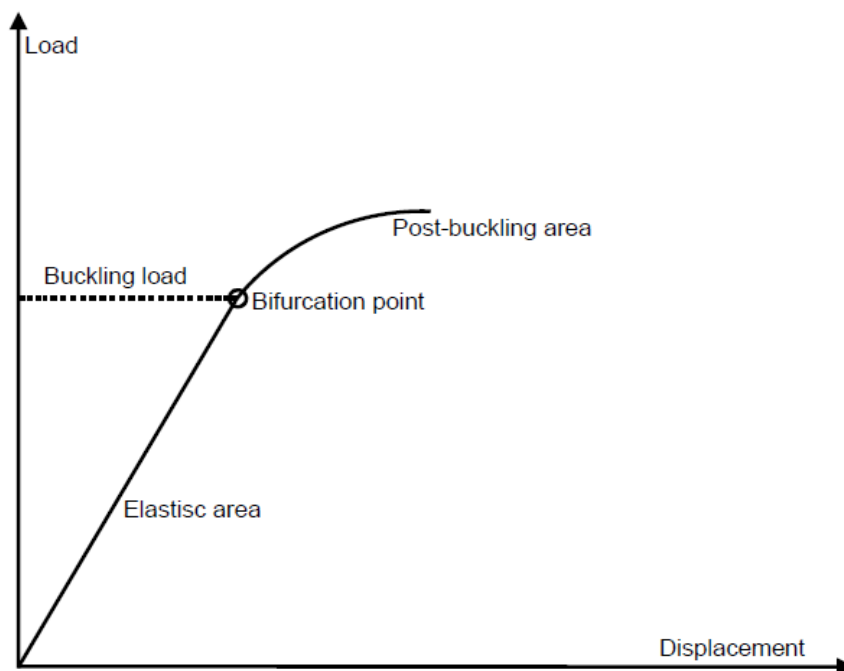
Σχήμα 1.4 Δρόμος ισορροπίας μακρύ κυλίνδρου με παχιά τοιχώματα

Ο πρώτος κλάδος που έχει ως αφετηρία την αρχή των αξόνων καλείται κύριος (ή θεμελιώδης) δρόμος (ή κλάδος) ισορροπίας (primary or fundamental path), ο δε δεύτερος κλάδος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (secondary path). Ο κύριος κλάδος ισορροπίας μέχρι του κρίσιμου σημείου λέγεται προλυγισμικός (prebuckling path), ενώ αντίθετα ο δευτερεύων, μεταλυγισμικός (post-buckling path). Το σημείο τομής των δυο κλάδων λέγεται σημείο διακλάδωσης (bifurcation or branching point), συμβολίζεται δε συνήθως με ένα μικρό κύκλο. Γενικώς, τα σημεία στα οποία οι δρόμοι (ή κλάδοι) τέμνονται μεταξύ τους καλούνται σημεία διακλαδώσεως (βλέπε σχήμα 1.4). Σε αυτά τα σημεία μπορεί να τέμνονται και περισσότεροι των δυο δρόμων ισορροπίας.

Κρίσιμο φορτίο

Γενικώς, **λυγισμός** είναι το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο ένα ελαστικό σύστημα μεταπίπτει από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη απείρως γειτονική, που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή του φορτίου επιβολής. Το φορτίο αυτό, είναι το **κρίσιμο φορτίο**. Το

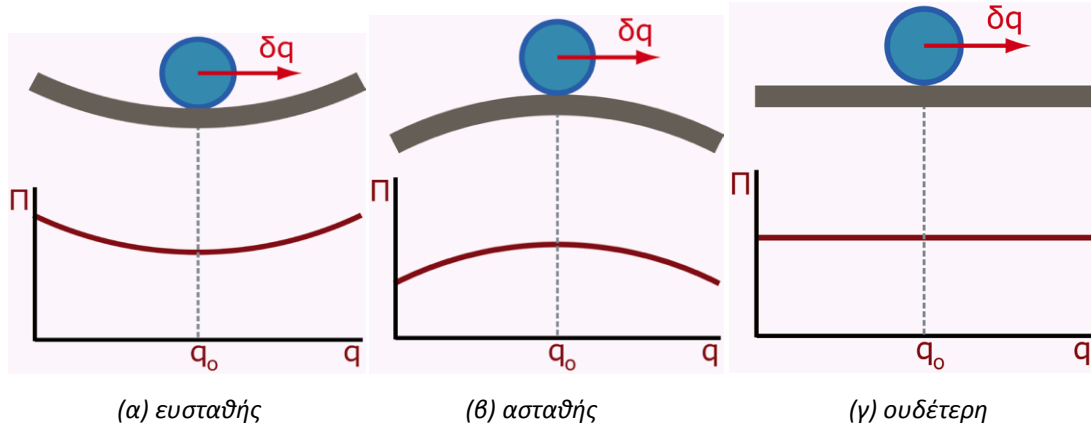
φαινόμενο αυτό λαμβάνει χώρα, είτε μέσω οριακού σημείου, είτε μέσω σημείου διακλάδωσης. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, ότι κρίσιμο φορτίο είναι το φορτίο εκείνο, για το οποίο η αρχική μορφή ευσταθούς ισορροπίας οποιουδήποτε ελαστικού συστήματος παύει να είναι ευσταθής. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της ευθύγραμμης ράβδου, για φόρτιση μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής $P \geq P_{cr}$, η ευθύγραμμη μορφή της ράβδου είναι ασταθής, ενώ καμπυλωμένη, που αντιστοιχεί στο δευτερεύοντα κλάδο ισορροπίας, είναι ευσταθής.



Σχήμα 1.5 Κρίσιμο φορτίο λυγισμού-Σημείο διακλάδωσης

1.6 Μορφές ελαστικής ισορροπίας

Οι διάφορες μορφές/καταστάσεις ελαστικής ισορροπίας (ευσταθής, ασταθής, ουδέτερη) μπορούν να παρασταθούν γραφικά με απλοϊκό τρόπο, θεωρώντας την ισορροπία μιας τελείως άκαμπτης σφαίρας σε ποικίλες θέσεις μιας ομαλής επιφάνειας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6 Μορφές ελαστικής ισορροπίας

Αν η σφαίρα ισορροπεί και στις τρεις θέσεις του σχήματος, μετά από προσεκτική εξέταση, διαπιστώνει κανείς την ύπαρξη ουσιαστικών διαφορών μεταξύ των τριών αυτών θέσεων ισορροπίας. Για την περίπτωση (α), αν η σφαίρα μετακινηθεί ελαφρώς από την αρχική της θέση ισορροπίας, θα επιστρέψει στη θέση αυτή, όταν αφαιρεθεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση. Μια τέτοια συμπεριφορά χαρακτηρίζεται ως μορφή ευσταθούς ισορροπίας. Στην περίπτωση (β), αν η σφαίρα μετακινηθεί ελαφρώς από την αρχική της θέση, είναι φανερό ότι μετά την αφαίρεση του αιτίου που προκάλεσε τη μετακίνηση, δε θα επιστρέψει στην αρχική θέση, αλλά συνεχώς θα απομακρύνεται από την αρχική θέση ισορροπίας. Τέλος στην περίπτωση (γ) έχουμε μια τρίτη μορφή ισορροπίας. Εδώ η σφαίρα μετά από μικρή μετακίνηση, ούτε επιστρέφει στην αρχική θέση, ούτε συνεχίζει να κινείται απομακρυνόμενη από αυτή. Αντίθετα παραμένει στη θέση στην οποία την μετακίνησε η εφαρμοσθείσα δύναμη. Αυτή η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι στις παραπάνω περιπτώσεις, η σφαίρα μετακινείται σε ορισμένη διεύθυνση. Αν τώρα θεωρήσουμε τη μετακίνηση σε μια επιφάνεια, είναι πιθανό η σφαίρα ως προς μια διεύθυνση, να βρίσκεται σε ευσταθή θέση ισορροπίας και ως προς μια άλλη σε ασταθή θέση ισορροπίας. Τέλος, να σημειώσουμε ότι η συμπεριφορά μιας θλιβόμενης αξονικά (λυγηρής) ράβδου, είναι παρόμοια με εκείνη της στερεάς σφαίρας, όπως αναλύθηκε αυτή προηγουμένως.

1.7 Βασικές μέθοδοι μελέτης ελαστικής ευστάθειας

Για τον προσδιορισμό των κρίσιμων φορτίων των κατασκευών εφαρμόζονται επιτυχώς διάφοροι μέθοδοι, που μπορούν να ενταχθούν στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

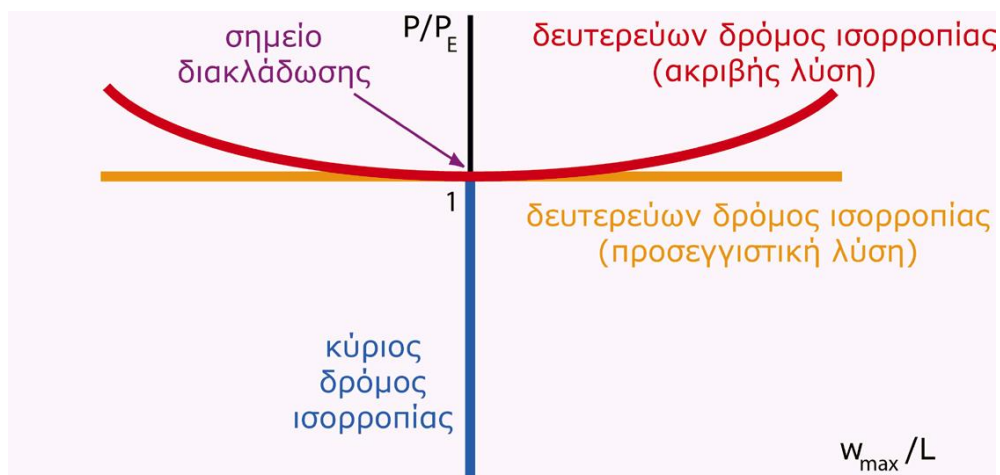
1. Την κλαστική μέθοδο ισορροπίας του Euler (Euler's classical approach), γνωστή και ως στατική μέθοδο ισορροπίας (static equilibrium approach) ή μέθοδο της γειτονικής ισορροπίας (adjacent equilibrium approach).
2. Την ενεργειακή μέθοδο (energy approach) ή μέθοδο δυναμικής ενέργειας (potential energy approach), η οποία είναι επίσης στατική μέθοδος.
3. Την δυναμική ή κινηματική μέθοδο (dynamic or kinetic approach).

Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσεται η Αρχή των Δυνατών Έργων στη Στατική. Η Αρχή των Δυνατών Έργων στη Δυναμική και η Αρχή του Hamilton ανήκουν στην τρίτη κατηγορία. Κύρια χαρακτηριστικά της πρώτης μεθόδου του Euler και της τρίτης κατηγορίας μεθόδων είναι ότι εφαρμόζονται τόσο σε συντηρητικά, όσο και σε μη συντηρητικά συστήματα ελαστικά συστήματα. Για την τρίτη κατηγορία, η Αρχή του Hamilton μπορεί να εφαρμοσθεί και σε μη συντηρητικά συστήματα κατόπιν κατάλληλης τροποποίησής της. Αντίθετα, η δεύτερη κατηγορία μεθόδων εφαρμόζεται σε συντηρητικά συστήματα, εκτός της Αρχής των Δυνατών Έργων στη Στατική, η οποία εφαρμόζεται και σε μη συντηρητικά συστήματα.

1.7.1 Μέθοδος του Euler

Στη μέθοδο αυτή γίνεται διερεύνηση το κατά πόσο είναι δυνατό να υπάρξει εκτός της αρχικής παραμορφωσιακής κατάστασης του συστήματος (κύριος δρόμος ισορροπίας), και άλλη (ή άλλες) παραμορφωσιακή κατάσταση, δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας, απείρως γειτονική της πρώτης, καθώς το φορτίο αυξάνει στατικώς μέχρι κάποια **τιμή**. Δηλαδή ερευνάται αν υπάρχουν δυο ή περισσότεροι σχηματισμοί ισορροπίας ενός συστήματος που αντιστοιχούν σε αυτή την **τιμή** του φορτίου. Αν αυτό είναι εφικτό τότε η **τιμή** αυτή ισούται με την **κρίσιμη τιμή** του φορτίου. Κλασικό παράδειγμα είναι η περίπτωση μιας ευθύγραμμης ράβδου που θλίβεται

αξονικά. Καθώς το φορτίο αυξάνει στατικά, η θλιβόμενη ράβδος παραμένει ευθύγραμμη. Για κάποια τιμή του φορτίου μια ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή της ράβδου, που από πλευράς παραμόρφωσης είναι απείρως γειτονική της ευθύγραμμης μορφής, αποτελεί επίσης ένα σχηματισμό ισορροπίας. (βλέπε Σχήμα 1.7) Όπως προαναφέρθηκε ένας τέτοιος γειτονικός σχηματισμός ισορροπίας υπάρχει και ανήκει στο δευτερεύοντα κλάδο ευσταθούς ισορροπίας. Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζεται ότι πάντοτε ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου πραγματοποιείται βάσει του απείρως γειτονικού σχηματισμού ισορροπίας που ανήκει στο δευτερεύοντα κλάδο ισορροπίας, σύμφωνα με το οποίο μορφώνεται η διαφορική εξίσωση ισορροπίας.



Σχήμα 1.7 Ακριβείς δρόμοι ισορροπίας θλιβόμενης ράβδου

Από μαθηματικής πλευράς το πρόβλημα ευστάθειας είναι γραμμικό και ανάγεται σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών (eigenvalue problem). Ιδιοτιμές (eigenvalue) είναι οι τιμές των διαδοχικών φορτίων λυγισμού, ενώ οι ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) ή ιδιομορφές (eigenmodes) είναι οι κανονικές μορφές (normal modes) λυγισμού, κάθε μια εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή. Σημείωση, ότι στα συντηρητικά συστήματα όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. **Η μικρότερη ιδιοτιμή, που μας ενδιαφέρει από πρακτικής πλευράς, αντιστοιχεί στο**

κρίσιμο φορτίο, η δε ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτήν, είναι η **πρώτη κανονική μορφή λυγισμού**. Παρακάτω θα ασχοληθούμε αρκετά με αυτό.

1.7.2 Ενεργειακή μέθοδος

Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή της μεθόδου, καλό είναι να θυμίσουμε ότι μια δύναμη καλείται **συντηρητική**, αν το έργο που εκτελείται από αυτήν κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, είναι ανεξάρτητο του δρόμου (τροχιάς), εξαρτώμενο αποκλειστικά από την αρχική και την τελική θέση του σημείου εφαρμογής της δύναμης. Σε αυτήν την περίπτωση η δύναμη προκύπτει από δυναμικό πεδίο (potential force). Εν αντιθέσει, όταν μια δύναμη δεν προκύπτει από δυναμικό πεδίο (non-potential force) είναι **μη συντηρητική** (π.χ δύναμη τριβής). Το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων εξαρτάται από ολόκληρη την τροχιά που ακολουθεί το σημείο εφαρμογής της μη συντηρητικής δύναμης και όχι από την αρχική και την τελική του θέση.

Η ενεργειακή μέθοδος, με την οποία και θα ασχοληθούμε στην παρούσα διπλωματική εργασία, εφαρμόζεται σε συντηρητικά συστήματα, στα οποία όλες οι δυνάμεις απορρέουν από δυναμικό (συντηρητικές δυνάμεις). Το συνολικό δυναμικό (total potential) U^T , οποιουδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων U , που καλείται ελαστική ενέργεια ή ενέργεια παραμόρφωσης (strain energy) και το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων Ω .

$$U^T = U + \Omega \quad (1.15)$$

Το συνολικό δυναμικό U^T , για την περίπτωση των ομοβάθμιων συστημάτων είναι συνάρτηση (μη γραμμική) γενικευμένων συντεταγμένων, μέσω των οποίων μπορεί να καθορισθεί οποιαδήποτε δυνατή παραμορφωσιακή κατάσταση, και εξωτερικών δυνάμεων.

Η δυναμική ενέργεια (ή το συνολικό δυναμικό) ενός ελαστικού συστήματος, ευρισκόμενου σε κάποια παραμορφωσιακή κατάσταση, ορίζεται ως το έργο που εκτελείται από όλες τις

εσωτερικές δυνάμεις και εξωτερικές δυνάμεις, αν το σύστημα μετακινηθεί από την ανωτέρω παραμορφωσιακή κατάσταση σε κάποια άλλη, η οποία λαμβάνεται ως αφετηρία και η συνηθίζεται να είναι η αφόρτιστη κατάσταση.

Είναι φανερό ότι η δυναμική ενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την ενέργεια παραμόρφωσης U που έχει αποταμιευθεί στο φορτισμένο σύστημα. Αυτό, γιατί αν το σύστημα μετακινηθεί από τη φορτισμένη κατάσταση στην αφόρτιστη, το έργο που θα εκτελεστεί ταυτίζεται με την ενέργεια παραμόρφωσης. Εξ άλλου, η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, είναι αρνητική, διότι κάθε φορτίο που δρα στο σύστημα εκτελεί αρνητικό έργο, καθώς το σύστημα από τη φορτισμένη κατάσταση, επιστρέφει στην αρχική αφόρτιστη κατάσταση. Έτσι, παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση συγκεντρωμένων δυνάμεων P_i ($i=1,2,\dots,n$), η δυναμική ενέργεια δίδεται από τη σχέση:

$$\Omega = -\sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad (1.16)$$

δ_i ($i=1,2,\dots,n$) τα αντίστοιχα βέλη (μεταθέσεις) στις θέσεις εφαρμογής των δυνάμεων.

Παρατηρούμε, ότι η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων δεν ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που πραγματοποιείται από αυτές, καθώς αυξάνουν βαθμιαίως από το μηδέν μέχρι της τελικής τους τιμής.

Για παράδειγμα, η δυναμική ενέργεια μιας δοκού μήκους l , που φορτίζεται από συγκεντρωμένο φορτίο P (στο a) και κατανεμημένο φορτίο q σε μήκος $(l-a)$, δίνεται από την έκφραση:

$$U^T = U + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \int_a^l q w dx - P w(a)$$

Θέτοντας $M=-EIw''$ (όπως αποδείξαμε στο 1.3),

$$U^T = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx - \int_a^l q w dx - P w(a)$$

Ενεργειακά κριτήρια

Δυο σπουδαίας σημασίας ενεργειακά κριτήρια που χρησιμοποιούνται ευρύτατα είναι τα ακόλουθα:

1. **Κριτήριο Ισορροπίας:** Ένα συντηρητικό σύστημα υπό στατική φόρτιση ισορροπεί σε κάποια θέση, όταν το συνολικό δυναμικό U^T , έχει στάσιμο τιμή (stationary value) στη θέση αυτή, δηλαδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη γειτονική θέση παραμόρφωσης. Γνωστό και ως Αρχή της στασίμου τιμής της δυναμικής ενέργειας (Principle of stationary potential energy).

2. **Κριτήριο Ευστάθειας:** Μια κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι ευσταθής για διαταραχές μικρών μεγεθών (stability in «small»), όταν το συνολικό δυναμικό U^T , που αντιστοιχεί σε αυτή, παρουσιάζει σχετικό-τοπικό ελάχιστο. Αυτό το κριτήριο είναι γνωστό και ως θεώρημα του Lagrange-Dirichlet, διότι ο πρώτος το διετύπωσε και ο δεύτερος το ανέπτυξε.

1.8 Η επιρροή των αρχικών ατελειών

Από πειράματα που έγιναν για την επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων των μεθόδων ανάλυσης, διαπιστώθηκε το εξής παράδοξο. Σε κάποιες περιπτώσεις, τα θεωρητικά κρίσιμα φορτία είναι πολύ κοντά στα πειραματικά φορτία λυγισμού, ενώ σε άλλες απέχουν σημαντικά τα αποτελέσματα. Στην δεύτερη περίπτωση, τα πειραματικά φορτία λυγισμού ήταν πάντοτε μικρότερα από τα θεωρητικά κρίσιμα φορτία, με αποκλίσεις που δεν ξεπερνούν το 30%. Τα αίτια αυτών των αποκλίσεων, μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων, αποτέλεσαν αντικείμενο επιστημονικών αμφισβητήσεων σε διεθνή κλίμακα, για αρκετό χρονικό διάστημα. Χαρακτηριστική, η περίπτωση των αξονικώς θλιβόμενων κυλινδρικών κελυφών, των

οποίων τα πειραματικά μετρούμενα φορτία λυγισμού ήταν κατά 20% μικρότερα, από τα θεωρητικώς υπολογισμένα. Σήμερα είναι γενικώς αποδεκτό ότι η βασική αιτία της ασυμφωνίας αυτής, μεταξύ των θεωρητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων, οφείλεται εν πολλοίς σε μικρές αναπόφευκτες εκτροπές στο αρχικό παραδεκτό σχήμα μιας κατασκευής ή στις πάντοτε μικρές εγγενείς ανωμαλίες κατασκευαστικής φύσεως, ή ακόμα και στις εκκεντρότητες των φορτίσεων. Τα αίτια αυτά, γεωμετρικής ή κατασκευαστικής φύσεως ή έκκεντρου φορτίσεως είναι γνωστά ως αρχικές ατέλειες (initial imperfections). Οι ατέλειες σε οποιαδήποτε πραγματικά συστήματα (κατασκευές), ακόμα και αν θεωρούνται τέλεια, είναι αναπόφευκτες.

Στο σημείο αυτό αξίζει να διευκρινιστεί ότι η τελειότητα ενός συστήματος είναι έννοια σχετική, άμεσα εξαρτώμενη από την άποψη υπό την οποία εξετάζεται το σύστημα. Πράγματι, μπορεί να ορισθεί ότι ένα σύστημα είναι τέλει από δυο διαφορετικές απόψεις. Από τη μια, από άποψη κατάστασης και γεωμετρίας (καίτοι μπορεί να συνδέεται με οριακό σημείο), και από την άλλη από άποψη ευστάθειας (συνδεόμενης με ασταθές σημείο διακλάδωσης). Στη δεύτερη περίπτωση, το κρίσιμο φορτίο ακαριαίου λυγισμού λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του. Η διάκριση αυτή διαπιστώνεται εύκολα στην περίπτωση ενός απλού εκ δυο ράβδων πλαισίου. Αυτό, όταν είναι τελείως ορθογωνικό (γεωμετρικά τέλειο), χάνει την ευστάθεια του μέσω οριακού σημείου (δηλαδή είναι ατελές από άποψη ευστάθειας), ενώ για κάποια ελαφρώς μεγαλύτερη της ορθής γωνίας χάνει την ευστάθεια του μέσω σημείου διακλάδωσης με τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του κρίσιμου φορτίου. Η διάκριση αυτή, δεν υπάρχει στη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, που ταυτίζεται με διακλαδική ανάλυση (bifurcational).

Κεφάλαιο 2
Καμπτικός Λογισμός Ευθύγραμμων Ράβδων

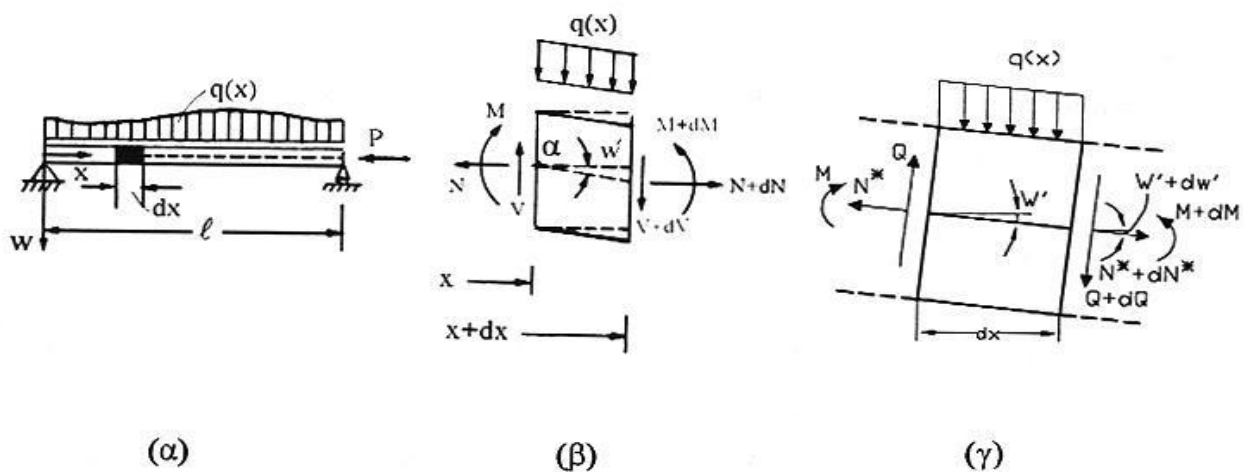
Κεφάλαιο 2

Καμπτικός Λυγισμός Ευθύγραμμων Ράβδων

2.1 Παραδοχή σημάνσεως

Προτού αναλύσουμε τους φορείς μας και πριν ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς, είναι αναγκαίο να ορίσουμε τις θετικές φορές των εντατικών μεγεθών $M(x)$ (ροπή κάμψης), $V(x)$ (τέμνουσα δύναμη), $N(x)$ (αξονική δύναμη), καθώς και των κινηματικών μεγεθών, $w(x)$ (βέλος κάμψης) και $w'(x)$ (στροφή διατομής). Όλα τα παραπάνω θα γίνουν με τη βοήθεια του σχήματος 2.1.

Γενικώς, οι θετικές φορές των εντατικών μεγεθών και των μεγεθών μετατοπίσεως ή των κινηματικών μεγεθών, καθορίζονται αυτόματα, μετά την επιλογή ενός συστήματος ορθογωνίων συντεταγμένων κατά το οποίο ο άξονας x , ταυτίζεται με τον άξονα του μέλους. Συνήθως ο (διαμήκης) άξονας x , διέρχεται από τα κέντρα βάρους των διατομών του μέλους, ενώ ο άξονας των (εγκαρσίων) βελών w είναι κάθετος στον άξονα x .



Σχήμα 2.1 Δοκός υπό εγκάρσια φόρτιση και αξονική θλίψη (α), ισορροπία στοιχείου dx με κατακόρυφες παρειές (β) και κεκλιμένες παρειές (γ)

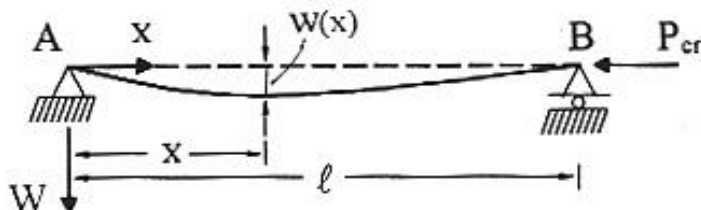
Ως παράδειγμα θεωρούμε, για ευκολία κατανόησης, την αμφιέρειστη δοκό του σχήματος 2.1 (α), υποκείμενη σε εγκάρσια καταναμημένη φόρτιση $q(x)$ και συγχρόνως αξονική θλίψη λόγω φορτίου P που εφαρμόζεται στο δεξιό στήριγμα της δοκού. Με τη βοήθεια του σχήματος 2.1 (β), θεωρούμε επίσης, την ισορροπία ενός στοιχείου dx με παρειές κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού.

Ακολουθως, ορίζουμε θετική την αξονική μετατόπιση $u(x)$, όταν κατευθύνεται προς τη θετική φορά του άξονα x και θετική την εγκάρσια μετατόπιση $w(x)$ όταν αυτή κατευθύνεται προς τη θετική φορά του άξονα w . Θετική γωνία $w'(x)$ ($=dw/dx$), ορίζεται αυτή κατά την οποία ο θετικός άξονας x στρεφόμενος κατά μια ορθή γωνία συμπίπτει με τον θετικό άξονα w .

Στη συνέχεια για να ορίσουμε τις θετικές φορές των κινηματικών μεγεθών παίρνουμε το στοιχειώδες τμήμα dx όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Στη διατομή που απέχει $x+dx$ (από το αριστερό στήριγμα της δοκού) η αξονική δύναμη $N+dN$ είναι θετική όταν έχει τη φορά του θετικού άξονα x . Αντίστοιχα, η τέμνουσα δύναμη $V+dV$ (η οποία είναι κάθετη στον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού) είναι θετική όταν έχει φορά προς τον θετικό άξονα w . Τέλος, η ροπή κάμψεως $M+dM$ είναι θετική όταν έχει φορά αντίθετη της φοράς του.

2.2 Διαφορική εξίσωση καμπτικού λυγισμού

Όπως γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (κεφ. 1), κύριο χαρακτηριστικό της αναλύσεως σε ευστάθεια ή λυγισμό ενός φορέα είναι ότι οι εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνονται στην παραμορφωμένη κατάσταση (λόγω κάμψεως), αντίθετα με ό,τι συνέβαινε στην κλασσική στατική. Θεωρούμε την ισορροπία της αξονικά θλιβόμενης ράβδου στην καμπυλωμένη μορφή όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 Καμπυλωμένη μορφή θλιβόμενης ράβδου

Θα πρέπει για οποιαδήποτε διατομή της καμπυλωμένης ράβδου να έχουμε ισορροπία μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής καμπτικής ροπής. Έτσι για τυχούσα διατομή στη θέση x έχουμε:

$$M_{εξ} = M_{εσ} \quad (2.1)$$

Από το σχήμα γίνεται αντιληπτό ότι η ροπή που προκαλεί το φορτίο Pcr ισούται με:

$$M_{εξ} = Pcr w(x) \quad (2.2)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει τη ροπή κάμψης και την καμπυλότητα, που αποδείξαμε στην παράγραφο 1.3, $[M(x) = -EIw'']$ η (2.2) γίνεται:

$$EIw'' + Pcr w(x) = 0 \quad (2.3)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση, είναι ομογενής 2^{ης} τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Αν παραγωγίσουμε τη σχέση (2.3) δυο φορές ως προς x , παίρνουμε:

$$EIw'''' + Pcr w'' = 0 \quad (2.4)$$

ή αλλιώς

$$w'''' + k^2 w'' = 0, \text{ όπου } k^2 = \frac{Pcr}{EI} \quad (2.5)$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές τη σχέση (2.5) βρίσκουμε:

$$w''(x) + k^2 w(x) = \Gamma'x + \Delta' \quad (2.6)$$

όπου Γ' και Δ' , σταθερές ολοκλήρωσης. Η παραπάνω εξίσωση (2.6), είναι γραμμική μη ομογενής, συνήθης διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξεως. Η γενική λύση της οποίας είναι το άθροισμα των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς και της μιας ειδικής. Δηλαδή:

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x) \quad (2.7)$$

Η αντίστοιχη ομογενής της (2.6) είναι:

$$w''(x) + k^2 w(x) = 0 \quad (2.8)$$

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ψάχνουμε λύση της μορφής:

$$w(x) = C e^{\rho x} \quad (2.9)$$

Η (2.8) λόγω της (2.9) γίνεται:

$$\rho^2 + k^2 = 0 \quad (2.10)$$

Από την οποία προκύπτει:

$$\rho = \pm ik \text{ με } i = \sqrt{-1} \quad (2.11)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης:

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx \quad (2.12)$$

Συμπεραίνουμε ότι τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος ικανοποιούν την εξίσωση (2.8). Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης $w_h(x)$ είναι:

$$w_h(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.13)$$

Και η ειδική λύση:

$$w_p(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (2.14)$$

όπου C_1, C_2, C_3 προσδιοριστέες σταθερές.

Εισάγοντας τη σχέση (2.14) στη (2.6) έχουμε:

$$(2.6) \stackrel{(2.14)}{\implies} C_1 = 0, C_2 = \frac{\Gamma'}{k^2}, C_3 = \frac{\Delta'}{k^2} \text{ οπότε η (2.14) γίνεται:}$$

$$w_p(x) = \Gamma x + \Delta \quad (2.15)$$

Έτσι η (2.7) γίνεται:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + \Gamma x + \Delta \quad (2.16)$$

όπου οι σταθερές A, B, Γ και Δ προσδιορίζονται από ισάριθμες συνθήκες στηρίξεως.

Η εξίσωση (2.16) αποτελεί την εξίσωση του βέλους κάμψης για μέλη που υπόκεινται σε θλίψη. Αν η δοκός μας υπόκειται σε αξονικό εφελκυσμό, αντί για τη διαφορική εξίσωση (2.4) θα είχαμε:

$$w'''' - k^2 w'' = 0 \quad (2.17)$$

Με παρόμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε στην περίπτωση της θλίψης, καταλήγουμε στην εξίσωση του βέλους κάμψης για εφελκυόμενα μέλη:

$$w(x) = A \sinh kx + B \cosh kx + \Gamma x + \Delta \quad (2.18)$$

Οι σταθερές A, B, Γ και Δ προσδιορίζονται από ισάριθμες συνθήκες στηρίξεως.

Τέλος, όταν το μέλος είναι αξονικά αφόρτιστο ($N=0$), όπου N αξονική δύναμη, η εξίσωση του βέλους κάμψης είναι:

$$w(x) = Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta \quad (2.19)$$

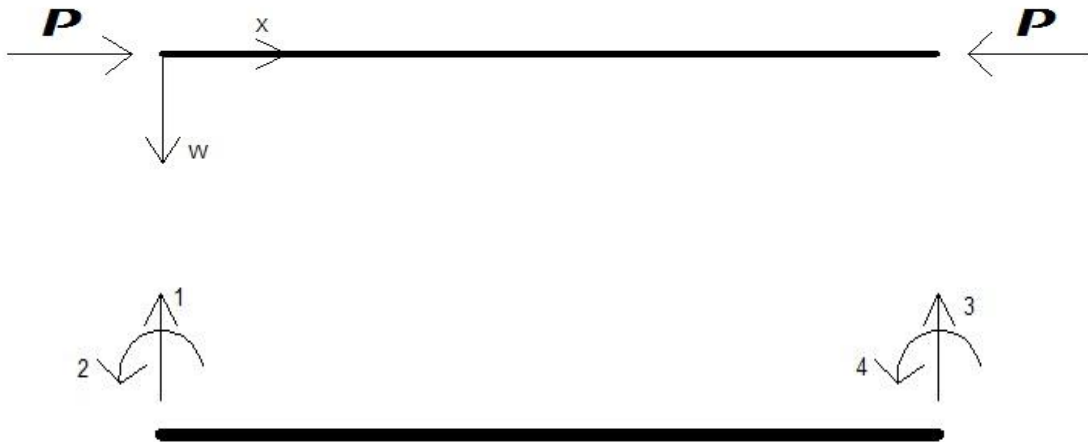
Οι σταθερές A, B, Γ και Δ προσδιορίζονται από ισάριθμες συνθήκες στηρίξεως.

2.3 Θλιβόμενο μέλος

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο 2.2, η εξίσωση του βέλους κάμψης για θλιβόμενα μέλη περιγράφεται από τη σχέση (2.16):

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + \Gamma x + \Delta \quad (2.16)$$

Έστω λοιπόν, η δοκός μήκους L που υπόκειται σε αξονική θλίψη του σχήματος 2.2, με βέλος κάμψης τη σχέση (2.16):



Σχήμα 2.3 Θλιβόμενο μέλος

Η πρώτη παράγωγος της σχέσης (2.16) μας δίνει τη στροφή:

$$w'(x) = A \cos(kx) k - B \sin(kx) k + \Gamma \quad (2.20)$$

Και η δεύτερη παράγωγος την καμπυλότητα:

$$w''(x) = -A \sin(kx) k^2 - B \cos(kx) k^2 \quad (2.21)$$

Η ροπή δίνεται από τη σχέση (1.8):

$$M(x) = -EIw'' = -EI(-A \sin(kx) k^2 - B \cos(kx) k^2) \quad (2.22)$$

Η τέμνουσα από τη σχέση (1.11):

$$V(x) = -EIw''''(x) - Pw'(x) = \quad (2.23)$$

$$= -EI(-A \cos(kx)k^3 + B \sin(kx)k^3 + k^2 (A \cos(kx)k - B \sin(kx)k + \Gamma))$$

$$\text{με } k^2 = \frac{P}{EI} \Leftrightarrow P = k^2 EI$$

Συνοριακές συνθήκες

- $-w(0) = w_1 \rightarrow -B - \Delta = 0$
- $-w'(0) = w_1' \rightarrow -Ak - \Gamma = 0$
- $-w(L) = w_2 \rightarrow -A \sin(kL) - B \cos(kL) - \Gamma L - \Delta = 0$
- $-w'(L) = w_2' \rightarrow -A \cos(kL) + B \sin(kL)k - \Gamma = 0$
- $V(0) = V_1 \rightarrow -EI[-Ak^3 + k^2(Ak + \Gamma)] = 0 \rightarrow -EIk^2\Gamma = 0$
- $-M(0) = M_1 \rightarrow EIBk^2 = 0$
- $-V(L) = V_2 \rightarrow$

$$\rightarrow EI\{-A \cos(kL)k^3 + B \sin(kL)k^3 + k^2[A \cos(kL)k - B \sin(kL)k + \Gamma]\} = 0$$

$$\rightarrow EIk^2\Gamma = 0$$

- $M(L) = M_2 \rightarrow -EI[-A \sin(kL)k^2 - B \cos(kL)k^2] = 0$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -k & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(kL) & -\cos(kL) & -L & -1 \\ -k \cos(kL) & k \sin(kL) & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -EIk^2 & 0 \\ 0 & -EIk^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EIk^2 & 0 \\ EI k^2 \sin(kL) & EI k^2 \cos(kL) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν τα μητρώα $[w]$ και $[U]$:

$$[w] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -k & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(kL) & -\cos(kL) & -L & -1 \\ -k \cos(kL) & k \sin(kL) & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -EIk^2 & 0 \\ 0 & -EIk^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EIk^2 & 0 \\ EI k^2 \sin(kL) & EI k^2 \cos(kL) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την παρακάτω σχέση (2.24) μορφώνεται το μητρώο ακαμψίας $[k_e]$ αρχικώς χωρίς να συμπεριλάβουμε τους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στην αξονική μετατόπιση. Στη συνέχεια δημιουργούμε και το συνολικό μητρώο ακαμψίας του μέλους μας $[k_e^{tot}]$.

$$\{F\} = \frac{[U][w]^{-1}}{[k_e]} \{u\} \quad (2.24)$$

Επιλύοντας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και κάνοντας χρήση του λογισμικού MATLAB έχουμε τα εξής:

$$[w]^{-1} = inv[w]$$

και

$$[k_e] = [U][w]^{-1}$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} \\ \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk(-\sin(kL)+kL\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} \\ \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} \\ \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk(-\sin(kL)+kL\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} \end{bmatrix}$$

$$[k_e^{tot}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & 0 \\ 0 & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk(-\sin(kL)+kL\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EIk^3 \sin(kL)}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & 0 \\ 0 & \frac{EIk^2(-1+\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & \frac{EIk(-\sin(kL)+kL\cos(kL))}{-2+2\cos(kL)+kL\sin(kL)} & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Εφελκυτόμενο μέλος

Από την παράγραφο 2.2, είδαμε ότι η εξίσωση του βέλους κάμψης για εφελκυτόμενα μέλη περιγράφεται από τη σχέση (2.18):

$$w(x) = A \sinh kx + B \cosh kx + \Gamma x + \Delta \quad (2.18)$$

Έστω λοιπόν, η δοκός μήκους L , που υπόκειται σε αξονικό εφελκυσμό του σχήματος 2.4, με βέλος κάμψης τη σχέση (2.18):



Σχήμα 2.4 Εφελκυτόμενο μέλος

Η πρώτη παράγωγος της σχέσης (2.18) μας δίνει τη στροφή:

$$w'(x) = A \cosh(kx) k - B \sinh(kx) k + \Gamma \quad (2.25)$$

Και η δεύτερη παράγωγος την καμπυλότητα:

$$w''(x) = A \sinh(kx) k^2 + B \cosh(kx) k^2 \quad (2.26)$$

Η ροπή δίνεται από τη σχέση (1.8):

$$M(x) = -EIw'' = -EI(A \sinh(kx) k^2 + B \cosh(kx) k^2) \quad (2.27)$$

Η τέμνουσα από τη σχέση (1.11):

$$V(x) = -EIw''''(x) - Pw'(x) = \quad (2.28)$$

$$= -EI(A \cosh(kx)k^3 + B \sinh(kx)k^3 - k^2(A \cosh(kx)k - B \sinh(kx)k + \Gamma))$$

$$\text{με } k^2 = \frac{P}{EI} \Leftrightarrow P = k^2 EI$$

Συνοριακές συνθήκες

- $-w(0) = w_1 \rightarrow -B - \Delta = 0$
- $-w'(0) = w_1' \rightarrow -Ak - \Gamma = 0$
- $-w(L) = w_2 \rightarrow -A \sinh(kL) - B \cosh(kL) - \Gamma L - \Delta = 0$
- $-w'(L) = w_2' \rightarrow -A \cosh(kL)k - B \sinh(kL)k - \Gamma = 0$
- $V(0) = V_1 \rightarrow -EI[Ak^3 - k^2(Ak + \Gamma)] = 0 \rightarrow EIk^2\Gamma = 0$
- $-M(0) = M_1 \rightarrow EIBk^2 = 0$
- $-V(L) = V_2 \rightarrow$

$$EI\{A \cosh(kL)k^3 + B \sinh(kL)k^3 - k^2[A \cosh(kL)k + B \sinh(kL)k + \Gamma]\} = 0$$

$$\rightarrow EIk^2\Gamma = 0$$

- $M(L) = M_2 \rightarrow -EI[A \sinh(kL) + B \cosh(kL)k^2] = 0$

Δημιουργούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -k & 0 & -1 & 0 \\ -\sinh(kL) & -\cosh(kL) & -L & -1 \\ -k\cosh(kL) & -k\sinh(kL) & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & EIk^2 & 0 \\ 0 & EIk^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EIk^2 & 0 \\ -EI k^2 \sinh(kL) & -EIk^2 \cosh(kL) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω εξάγονται και τα μητρώα $[w]$ και $[U]$ όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο 2.3.

$$[w] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -k & 0 & -1 & 0 \\ -\sinh(kL) & -\cosh(kL) & -L & -1 \\ -k\cosh(kL) & -k\sinh(kL) & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & EIk^2 & 0 \\ 0 & EIk^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EIk^2 & 0 \\ -EI k^2 \sinh(kL) & -EIk^2 \cosh(kL) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.24) προκύπτει το μητρώο ακαμψίας για το εφελκόμενο μέλος, με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε και για την περίπτωση του θλιβόμενου μέλους.

$$\{F\} = \frac{[U][w]^{-1}}{[k_e]} \{u\} \quad (2.24)$$

Επιλύοντας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και κάνοντας χρήση του λογισμικού MATLAB έχουμε τα εξής:

$$[w]^{-1} = inv[w]$$

και

$$[k_e] = [U][w]^{-1}$$

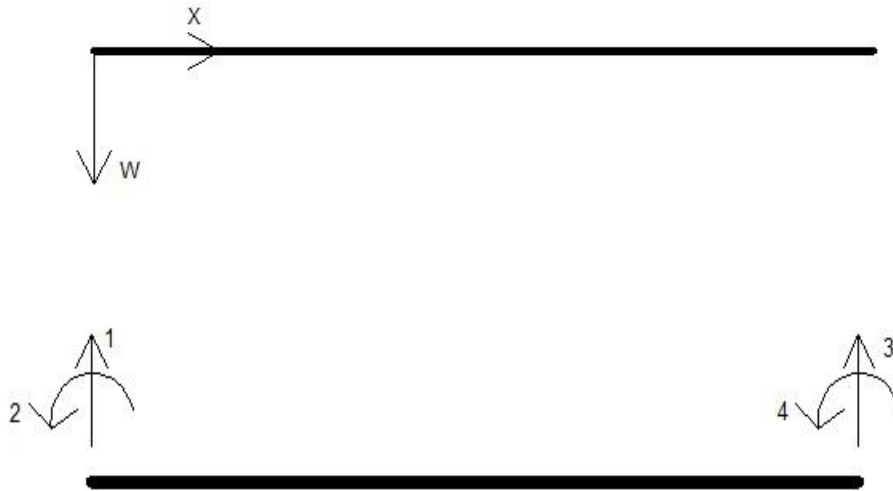
$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EIk^3 \sinh(kL)}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^3 \sinh(kL)}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \\ \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-\sinh(kL) + kL \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-kL + \sinh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \\ \frac{EIk^3 \sinh(kL)}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^3 \sinh(kL)}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \\ \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-kL + \sinh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-\sinh(kL) + kL \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \end{bmatrix}$$

$$[K_e^{tot}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EIk^3 \sinh(kL)}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \\ 0 & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-\sinh(kL) + kL \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-kL + \sinh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EIk^3 \sinh(kL)}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \\ 0 & \frac{EIk^2(-1 + \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-\sinh(kL) + kL \cosh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} & \frac{EIk(-kL + \sinh(kL))}{-2 + 2 \cosh(kL) - kL \sinh(kL)} \end{bmatrix}$$

2.5 Μέλος με μηδενική αξονική δύναμη (N=0)

Όταν ένα μέλος είναι αξονικά αφόρτιστο, τότε η εξίσωση του βέλους κάμψης του, δίνεται από τη σχέση (2.19), όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.2:

$$w(x) = Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.5 Μέλος με μηδενική αξονική (N=0)

Η πρώτη παράγωγος της σχέσης (2.19) μας δίνει τη στροφή:

$$w'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + \Gamma \quad (2.29)$$

Και η δεύτερη παράγωγος την καμπυλότητα:

$$w''(x) = 6Ax + 2B \quad (2.30)$$

Η ροπή δίνεται από τη σχέση (1.8):

$$M(x) = -EIw'' = -EI(6Ax + 2B) \quad (2.31)$$

Η τέμνουσα από τη σχέση (1.11) με P=0:

$$V(x) = -EIw'''(x) = -6EIA \quad (2.32)$$

Συνοριακές συνθήκες

- $-w(0) = w_1 \rightarrow -\Delta = 0$
- $-w'(0) = w_1' \rightarrow -\Gamma = 0$
- $-w(L) = w_2 \rightarrow -AL^3 - BL^2 - \Gamma L - \Delta = 0$
- $-w'(L) = w_2' \rightarrow -3AL^2 - 2BL - \Gamma = 0$
- $V(0) = V_1 \rightarrow -6EIA = 0$
- $-M(0) = M_1 \rightarrow 2EIB = 0$
- $-V(L) = V_2 \rightarrow 6EIA = 0$
- $M(L) = M_2 \rightarrow -EI(6AL + 2B) = 0$

Με ανάλογη διαδικασία που ακολουθήσαμε και στις περιπτώσεις της θλίψης και του εφελκυσμού δημιουργούνται οι παρακάτω σχέσεις και τα αντίστοιχα μητρώα.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -L^3 & -L^2 & -L & -1 \\ -3L^2 & -2L & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6EI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2EI & 0 & 0 \\ 6EI & 0 & 0 & 0 \\ -6EIL & -2EI & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$[w] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -L^3 & -L^2 & -L & -1 \\ -3L^2 & -2L & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} -6EI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2EI & 0 & 0 \\ 6EI & 0 & 0 & 0 \\ -6EIL & -2EI & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από τη σχέση 2.24 και με τη βοήθεια του MATLAB ($[U][w]^{-1}$) προκύπτουν τα γνωστά μητρώα ακαμψίας για μέλη, αξονικώς αφόρτιστα:

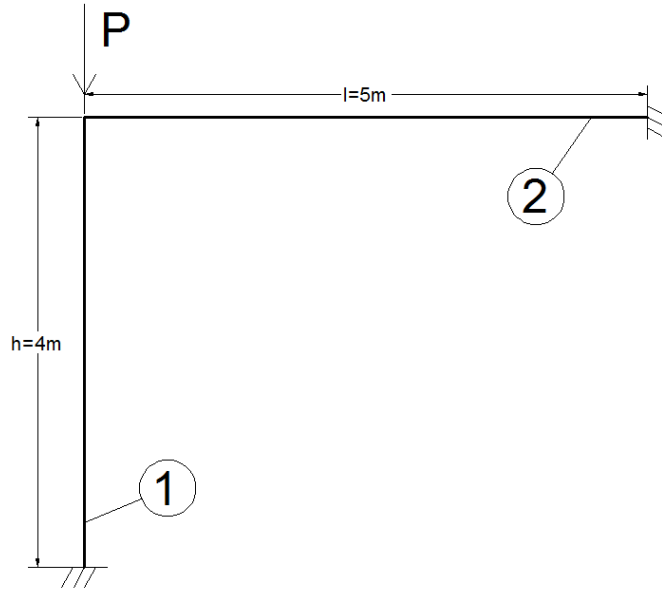
$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Εισάγοντας και το βαθμό ελευθερίας της αξονικής μετατόπισης, προκύπτει το ολικό μητρώο ακαμψίας του μέλους $[K_e^{tot}]$.

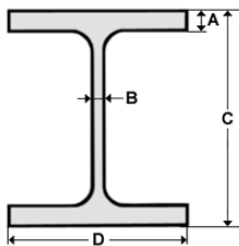
$$[K_e^{tot}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

2.6 Αριθμητικό παράδειγμα υπολογισμού κρίσιμου φορτίου

Έστω ο φορέας του σχήματος 2.6, αποτελούμενος από δυο χαλύβδινες διατομές 1 και 2, με αντίστοιχα μήκη 4m και 5m. Επιδιώκουμε να βρούμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (P_{cr}), του φορέα αυτού.



Σχήμα 2.6 Πλαίσιο από χάλυβα

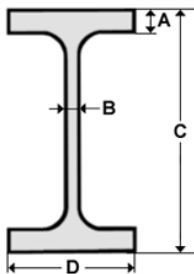


Σχήμα 2.7 Διατομή 1 HEB 220

Χαρακτηριστικά διατομής HEB 220

$$I_1 = 8090 \text{ cm}^4 \quad A_1 = 91 \text{ cm}^2$$

$$A = 16 \text{ mm} , B = 9.5 \text{ mm} , C = 220 \text{ mm} , D = 220 \text{ mm}$$



Σχήμα 2.8 Διατομή 2 IPE 300

Χαρακτηριστικά διατομής IPE 300

$$I_2 = 8360 \text{ cm}^4 \quad A_2 = 53.8 \text{ cm}^2$$

$$A = 10.7 \text{ mm} , B = 7.1 \text{ mm} , C = 300 \text{ mm} , D = 150 \text{ mm}$$

Από τη στατική επίλυση του πλαισίου, παρατηρούμε ότι το υποστύλωμα 1 (HEB 220) αναλαμβάνει όλη την αξονική δύναμη P και πρόκειται για ένα θλιβόμενο μέλος. Αντίθετα η δοκός 2, δεν επηρεάζεται καθόλου αξονικά από τη δύναμη P. Άρα είναι αξονικά αφόρτιστο μέλος (N=0). Στις προηγούμενες παραγράφους 2.3 και 2.5, είδαμε τα πρότυπα μητρώα ακαμψίας για θλιβόμενα και αξονικά αφόρτιστα μέλη. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι ο φορέας του σχήματος μας (σχ.2.6) έχει **3 βαθμούς ελευθερίας** (2 μετακινήσεις και 1 στροφή) στον κόμβο συμβολής των δυο διατομών. Μπορούμε τώρα εύκολα, να μορφώσουμε το συνολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα μας με απλή πρόσθεση των δυο μητρώων ακαμψίας των επιμέρους μελών.

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{l} - \frac{EI_1 k^3 \sin kh}{z} & 0 & \frac{EI_1 k^2 (\cos kh - 1)}{z} \\ 0 & \frac{EA_1}{h} & \frac{6EI_2}{l^2} \\ \frac{EI_1 k^2 (\cos kh - 1)}{z} & \frac{6EI_2}{l^2} & \frac{4EI_2}{l} + \frac{EI_1 k (kh \cos kh - \sin kh)}{z} \end{bmatrix}$$

όπου z βοηθητική μεταβλητή για λόγους ευκρίνειας συμβολισμού,

$$\text{με } z = -2 + 2 \cos kh + kh \sin kh$$

$$\text{και } k^2 = P/EI$$

Από το μηδενισμό της ορίζουσας [3X3] του πίνακα αυτού και με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB προκύπτει ότι:

$$\rightarrow k = 1,3088 \rightarrow kh = 1,3088 \cdot 4 = 5,2352$$

Και από τη σχέση $k^2 = P/EI$, όπου E το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα ($E = 210GPa$).

$$\rightarrow P_{cr} = \mathbf{29127kN}$$

Κεφάλαιο 3
Προσομοίωση και Ανάλυση Φορέα

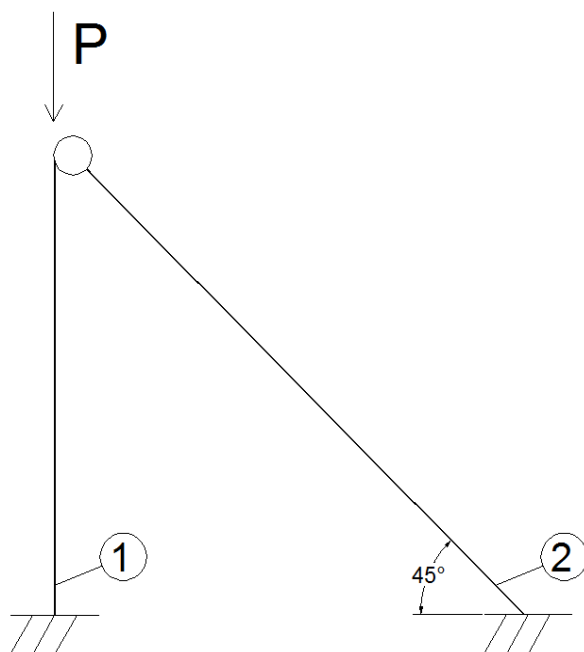
Κεφάλαιο 3

Προσομοίωση και Ανάλυση Φορέα

3.1 Εισαγωγή

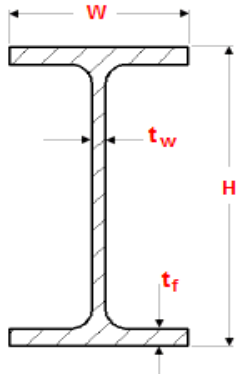
Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο φορέα βασισμένοι στη μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας. Ειδικότερα, η θεωρία στην οποία θα βασιστούμε, είναι η *θεωρία των μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων* και η ανάλυση του φορέα μας θα γίνει με την *ενεργειακή μέθοδο* μελέτης ελαστικής ευστάθειας. Στόχος της μελέτης, είναι η απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης του φορέα μας (μη γραμμική συμπεριφορά). Η μελέτη και η ανάλυση του φορέα μας, πραγματοποιήθηκε με χρήση των λογισμικών MATLAB και Sap2000. Όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω, κατά τη διάρκεια της μελέτης, συναντήθηκαν προβλήματα, μαθηματικής φύσεως, άρα δοκιμάστηκε η χρήση εναλλακτικών λογισμικών. Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό, ότι έχει γίνει εκτενής αναφορά στο κεφάλαιο 1, για τη *θεωρία των μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων* αλλά και για την *ενεργειακή μέθοδο ανάλυσης ελαστικής ευστάθειας*.

3.2 Προσδιορισμός φορέα



Σχήμα 3.1 Φορέας αποτελούμενος από τις δοκούς 1 και 2

Επιλέξαμε και για τις δυο δοκούς 1 και 2, τη χρήση της πρότυπης διατομής IPE 100. Τα βασικά χαρακτηριστικά της διατομής φαίνονται παρακάτω.



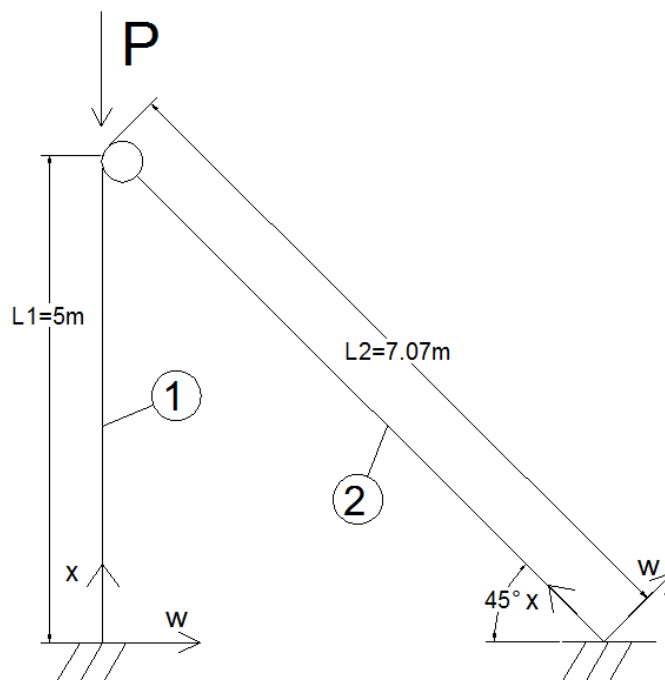
Σχήμα 3.2 Διατομή IPE 100

Χαρακτηριστικά διατομής IPE 100

$$I_y=171\text{cm}^4, I_z=15.92\text{cm}^4, A=10.32\text{cm}^2$$

$$H=100\text{mm}, w=55\text{mm}, t_w=4.1\text{mm}, t_f=5.7\text{mm}$$

Στο σχήμα 3.3 φαίνονται γεωμετρικές λεπτομέρειες του υπό μελέτη φορέα μας (μήκη δοκών), καθώς διακρίνεται και η εκλογή των τοπικών αξόνων x και w για τα επιμέρους μέλη. Επίσης, στο σημείο της συμβολής των δυο δοκών θεωρήσαμε εσωτερική άρθρωση.



Σχήμα 3.3 Λεπτομέρειες του υπό μελέτη φορέα

3.2.1 Ενεργειακό δυναμικό φορέα

Σε πολυβάθμια συστήματα το συνολικό ενεργειακό δυναμικό U^T , είναι συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου P και των γενικευμένων συντεταγμένων (μέσω των οποίων μπορεί να καθορισθεί οποιαδήποτε παραμορφωσιακή κατάσταση του φορέα). Οι γενικευμένες συντεταγμένες μπορεί να είναι μετατοπίσεις ή σχηματισμοί. Όπως είδαμε αναλυτικά και στο κεφάλαιο 1, παράγραφος 1.7.2, η γενική σχέση που περιγράφει τα παραπάνω είναι:

$$U^T = U + \Omega \quad (1.15)$$

Η αναλυτική έκφραση της σχέσης (1.15), σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία λυγισμού, η οποία λαμβάνει υπόψη τις επιρροές από τις αξονικές τάσεις των μελών του φορέα δίνεται από τη σχέση:

$$U^T = U + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^l (N\varepsilon + M\kappa) dx - \int_a^l q w dx - P w(a) \quad (3.1)$$

$$\text{με } N = EA \varepsilon \quad \text{και } M = EI \kappa$$

όπου ε ανηγμένη παραμόρφωση, κ καμπυλότητα, E μέτρο ελαστικότητας, A εμβαδόν διατομής, I ροπή αδράνειας διατομής.

Στη δική μας περίπτωση, το **συνολικό δυναμικό του υπό μελέτη φορέα, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους μελών**. Ανατρέχοντας στη θεωρία των μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων, παίρνουμε τις αναλυτικές σχέσεις που περιγράφουν τις έννοιες της ανηγμένης παραμόρφωσης και της καμπυλότητας.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad \kappa = - \frac{d^2w}{dx^2} \quad (1.13)$$

Επομένως η σχέση (3.1) με τη βοήθεια της (1.13) και προσαρμόζοντάς τη, στην περίπτωση μας (δηλαδή με μη ύπαρξη κατανεμημένου φορτίου q) γίνεται:

$$U^T = \frac{1}{2} EA \int_0^l \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 + \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - P\delta \quad (3.2)$$

με δ την κατακόρυφη μετατόπιση στο σημείο επιβολής του συγκεντρωμένου φορτίου P .

Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι η σχέση (3.2) αναφέρεται σε μέλος με συγκεκριμένο μήκος l και όχι στο σύνολο του φορέα. Το συνολικό δυναμικό του φορέα μας, όπως προαναφέραμε, θα δημιουργηθεί από άθροιση των επιμέρους μελών.

3.2.2 Αξονικές τάσεις φορέα – στατική επίλυση

Αρχικά, προσομοιώσαμε το μοντέλο μας στο λογισμικό SAP 2000 εισάγοντας από βιβλιοθήκες την πρότυπη διατομή IPE 100 για χάλυβα S275. Αναλυτικά για τη χρήση του SAP 2000 στο **παράρτημα Α**. Όπως γίνεται αντιληπτό από το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων, σχήμα 3.4 και τα δυο μέλη του φορέα μας 1 και 2, με αντίστοιχα μήκη $L1=500\text{cm}$ και $L2=707.2\text{cm}$, θλιβονται. Η στατική επίλυση για μοναδιαία φόρτιση έδειξε την παρακάτω αναλογία και επομένως γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το μέλος 1 αναλαμβάνει $0.74 P$ και το μέλος 2 αναλαμβάνει $0.37 P$.

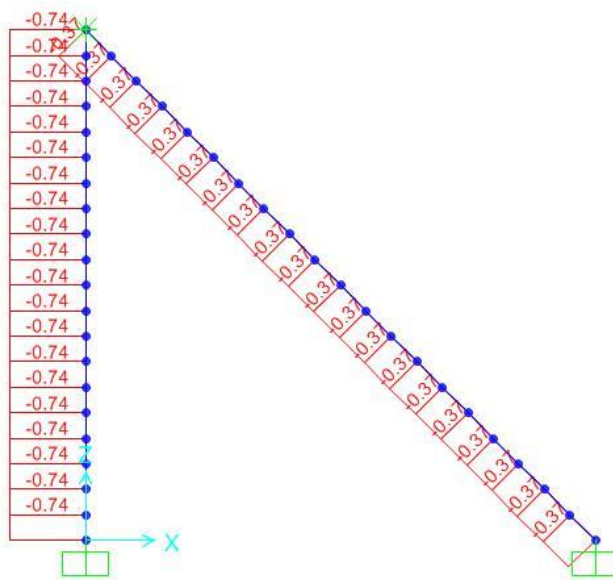
Αφού πρόκειται για θλιβόμενα μέλη, η γενική μορφή της συνάρτησης που περιγράφει το βέλος κάμψης του μέλους δίνεται από τη σχέση (παράγραφος 2.3):

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + \Gamma x + \Delta \quad (2.16)$$

Στο σημείο αυτό και λόγω της μη γραμμικής θεωρίας λυγισμού, εισάγουμε για πρώτη φορά τη συνάρτηση που περιγράφει την αξονική παραμόρφωση του μέλους, η οποία είναι της μορφής:

$$u(x) = Ex + Z \quad (3.3)$$

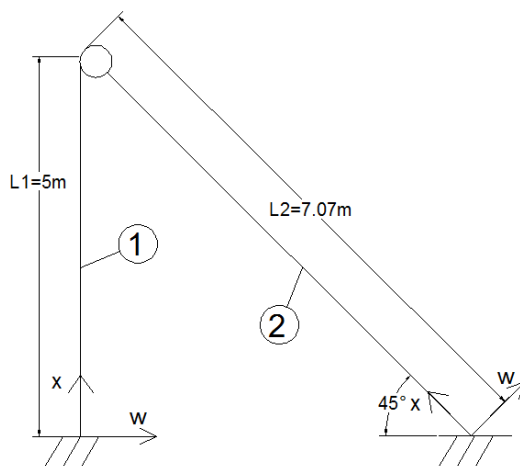
με E και Z , προσδιοριστέες σταθερές.



Σχήμα 3.4 Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων για $P=1kN$

3.2.3 Επιρροή συνοριακών συνθηκών

Καταρχάς σχηματίζουμε τις συναρτήσεις των μελών για το βέλος κάμψης και την αξονική παραμόρφωση έχοντας εκλέξει τους τοπικούς άξονες.



Σχήμα 3.5 Λεπτομέρειες του υπό μελέτη φορέα

Μέλος 1 ($0 \leq x_1 \leq L_1 = 5m$)

$$w_1(x_1) = A_1 \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1 + \Gamma_1 x_1 + \Delta_1 \quad (3.4)$$

$$u_1(x_1) = E_1 x_1 + Z_1 \quad (3.5)$$

Μέλος 2 ($0 \leq x_2 \leq L_2 = 7,072m$)

$$w_2(x_2) = A_2 \sin k_2 x_2 + B_2 \cos k_2 x_2 + \Gamma_2 x_2 + \Delta_2 \quad (3.6)$$

$$u_2(x_2) = E_2 x_2 + Z_2 \quad (3.7)$$

Συνοριακές συνθήκες

$$\bullet w_1(0) = 0 \rightarrow B_1 + \Delta_1 = 0 \quad (3.8)$$

$$\bullet u_1(0) = 0 \rightarrow Z_1 = 0 \quad (3.9)$$

$$\bullet w_2(0) = 0 \rightarrow B_2 + \Delta_2 = 0 \quad (3.10)$$

$$\bullet u_2(0) = 0 \rightarrow Z_2 = 0 \quad (3.11)$$

$$\bullet w_1'(0) = 0 \rightarrow A_1 k_1 + \Gamma_1 = 0 \quad (3.12)$$

$$\bullet M_1(L_1) = 0 \rightarrow -EI w_1''(L_1) = 0 \rightarrow w_1''(L_1) = 0 \rightarrow -A_1 k_1^2 \sin k_1 L_1 - B_1 k_1^2 \cos k_1 L_1 = 0 \rightarrow B_1 = -A_1 \tan k_1 L_1 \quad (3.13)$$

$$\bullet w_2'(0) = 0 \rightarrow A_2 k_2 + \Gamma_2 = 0 \quad (3.14)$$

$$\bullet M_2(L_2) = 0 \rightarrow -EI w_2''(L_2) = 0 \rightarrow w_2''(L_2) = 0 \rightarrow -A_2 k_2^2 \sin k_2 L_2 - B_2 k_2^2 \cos k_2 L_2 = 0 \rightarrow B_2 = -A_2 \tan k_2 L_2 \quad (3.15)$$

$$\bullet w_1(L_1) = -\cos \frac{\pi}{4} u_2(L_2) \quad (3.16)$$

$$\bullet u_1(L_1) = \cos \frac{\pi}{4} w_2(L_2) \quad (3.17)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει τα 2 μήκη, L_1 και L_2 .

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{L_1}{L_2} \rightarrow L_2 = L_1 \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow L_2 = \sqrt{2} L_1 \quad (3.18)$$

Προχωράμε σε κάποιες γρήγορες αντικαταστάσεις στις σχέσεις (3.4) και (3.6).

$$(3.4) \xrightarrow{(3.8),(3.12),(3.13)} w_1(x_1) = A_1 \sin k_1 x_1 - A_1 \tan k_1 L_1 \cos k_1 x_1 - A_1 k_1 x_1 + A_1 \tan k_1 L_1 \rightarrow$$

$$w_1(x_1) = A_1 [\sin k_1 x_1 - k_1 x_1 + \tan k_1 L_1 (1 - \cos k_1 x_1)] \quad (3.19)$$

$$(3.6) \xrightarrow{(3.10),(3.14),(3.15)} w_2(x_2) = A_2 \sin k_2 x_2 - A_2 \tan k_2 L_2 \cos k_2 x_2 - A_2 k_2 x_2 + A_2 \tan k_2 L_2 \rightarrow$$

$$w_2(x_2) = A_2 [\sin k_2 x_2 - k_2 x_2 + \tan k_2 L_2 (1 - \cos k_2 x_2)] \quad (3.20)$$

Αναλύοντας τη σχέση (3.16) και με δεδομένο ότι από (3.11), $Z_2=0$, έχουμε:

$$w_1(L_1) = -\cos \frac{\pi}{4} u_2(L_2) \rightarrow A_1 \sin k_1 L_1 - A_1 \tan k_1 L_1 \cos k_1 L_1 - A_1 k_1 L_1 + A_1 \tan k_1 L_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_2 L_2 \xrightarrow{(3.18), \tan k_1 L_1 = \sin k_1 L_1 / \cos k_1 L_1}$$

$$E_2 L_1 = A_1 k_1 L_1 - A_1 \tan k_1 L_1 \rightarrow E_2 = A_1 \left(k_1 - \frac{\tan k_1 L_1}{L_1} \right) \quad (3.21)$$

Αναλύοντας τη σχέση (3.17) και με δεδομένο ότι από (3.9), $Z_1=0$, έχουμε:

$$u_1(L_1) = \cos \frac{\pi}{4} w_2(L_2) \rightarrow$$

$$E_1 L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (A_2 \sin k_2 L_2 - A_2 \tan k_2 L_2 \cos k_2 L_2 - A_2 k_2 L_2 + A_2 \tan k_2 L_2)$$

$$\xrightarrow{(3.18), \tan k_2 L_2 = \sin k_2 L_2 / \cos k_2 L_2} E_1 = A_2 \left(\frac{\sqrt{2} \tan k_2 L_2}{2 L_1} - k_2 \right) \quad (3.22)$$

Επομένως έχουμε τώρα, τις συναρτήσεις της παραμορφωσιακής γεωμετρικής κατάστασης των μελών στην πιο απλοποιημένη μορφή, έχοντας ουσιαστικά 2 άγνωστες παραμέτρους (A_1 και A_2).

Για το μέλος 1:

$$w_1(x_1) = A_1[\sin k_1 x_1 - k_1 x_1 + \tan k_1 L_1 (1 - \cos k_1 x_1)] \quad (3.19)$$

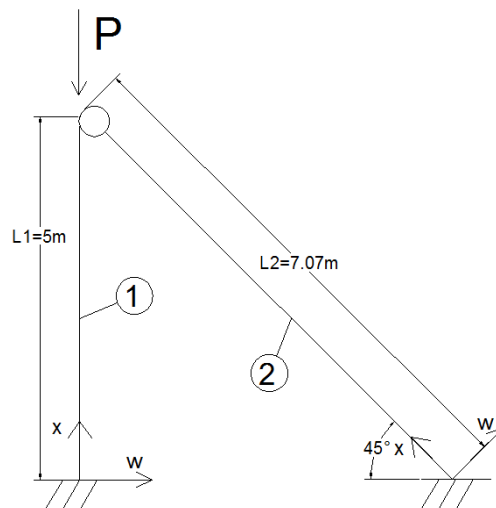
$$u_1(x_1) = A_2 \left(\frac{\sqrt{2} \tan k_2 L_2}{2L_1} - k_2 \right) x_1 \quad (3.23)$$

Για το μέλος 2:

$$w_2(x_2) = A_2[\sin k_2 x_2 - k_2 x_2 + \tan k_2 L_2 (1 - \cos k_2 x_2)] \quad (3.20)$$

$$u_2(x_2) = A_1 \left(k_1 - \frac{\tan k_1 L_1}{L_1} \right) x_2 \quad (3.24)$$

3.3 Εφαρμογή ενεργειακής μεθόδου



Σχήμα 3.6 Λεπτομέρειες του υπό μελέτη φορέα

Έχοντας, συμπυκνώσει τις προσδιοριστέες σταθερές των μελών από 12 σε 2 με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών · είμαστε έτοιμοι για να εφαρμόσουμε την ενεργειακή μέθοδο για τη μελέτη της ελαστικής ευστάθειας του φορέα μας και για την εύρεση των ιδιομορφών λυγισμού

της αντίστοιχης φόρτισης. Αυτή η διαδικασία θα πραγματοποιηθεί με χρήση του λογισμικού MATLAB. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη χρήση του MATLAB μπορείτε να βρείτε στο **παράρτημα Β**.

Αρχικός στόχος μας, είναι η εύρεση του ενεργειακού δυναμικού του φορέα μας. Ουσιαστικά πρόκειται για τον τύπο (3.2) της παραγράφου 3.2.1.

$$U^T = \frac{1}{2} EA \int_0^l \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 + \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - P\delta \quad (3.2)$$

Εισάγουμε στο MATLAB τις σχέσεις που περιγράφουν την παραμορφωσιακή κατάσταση του προβλήματος, όπως αυτές απλοποιήθηκαν μετά τη επεξεργασία των συνοριακών συνθηκών του φορέα μας.

$$w_1(x_1) = A_1 [\sin k_1 x_1 - k_1 x_1 + \tan k_1 L_1 (1 - \cos k_1 x_1)] \quad (3.19)$$

$$u_1(x_1) = A_2 \left(\frac{\sqrt{2} \tan k_2 L_2}{2L_1} - k_2 \right) x_1 \quad (3.23)$$

$$w_2(x_2) = A_2 [\sin k_2 x_2 - k_2 x_2 + \tan k_2 L_2 (1 - \cos k_2 x_2)] \quad (3.20)$$

$$u_2(x_2) = A_1 \left(k_1 - \frac{\tan k_1 L_1}{L_1} \right) x_2 \quad (3.24)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε τις διαστάσεις βασικών μεγεθών που εισήχθησαν στο λογισμικό. Αυτές οι διαστάσεις, διαπιστώθηκε ότι ήταν οι καλύτερες από άποψη υπολογιστικής ευχέρειας. Για τα μήκη L_1, L_2 αλλά και τις αποστάσεις x_i τα εκατοστά (cm), για τη ροπή αδράνειας (cm^4), για το εμβαδόν (cm^2) και για το μέτρο ελαστικότητας ($E = 21000 \text{ kN/cm}^2$).

Επιπλέον, για το έργο των εξωτερικών δυνάμεων, η κατακόρυφη μετατόπιση δ , ορίστηκε ως η τιμή $u_1(L_1) = u_1(500)$.

Η τιμή του συνολικού ενεργειακού δυναμικού που προκύπτει, είναι μια αριθμητική παράσταση με πάρα πολλούς όρους και η πλήρης και αναλυτική παράθεση της, είναι δύσκολη. Παρόλα αυτά θα παρασταθεί ο γενικός τρόπος έκφρασης της, στον οποίο ο όγκος της συμπυκνώνεται αισθητά. Για το πώς προέκυψε η γενική μορφή, γίνεται εκτενής αναφορά στο **παράρτημα Β**. Επίσης,

σημειώνουμε ότι η τιμή του ενεργειακού δυναμικού διαθέτει 5 άγνωστους (A_1, A_2, k_1, k_2, P), οι οποίοι ουσιαστικά είναι 3, καθώς οι τιμές των k_1 και k_2 , είναι συναρτήσεις του επιβαλλόμενου φορτίου P .

Όπου $k_1^2 = \frac{N_1}{EI_1}$ και $k_2^2 = \frac{N_2}{EI_2}$, με N_1 και N_2 η αξονική ένταση των μελών 1 και 2 αντίστοιχα, η οποία είναι συναρτήσεις του φορτίου P . Επιπλέον, επειδή οι διατομές των μελών μας είναι όμοιες (IPE 100), οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας είναι ίσες, άρα $I_1=I_2$. Θεωρούμε ότι και τα 2 μέλη, είναι καταλλήλως προσανατολισμένα ώστε να λειτουργεί ο ισχυρός άξονας της διατομής ($I = I_1 = I_2 = 171cm^4$).

Γενικός τρόπος έκφρασης της $V (= U^T)$

Αλλάξαμε προς χάριν εποπτείας το συμβολισμό του ενεργειακού δυναμικού από U^T σε V .

$$V(Q_i, P) = A_i Q_i + \frac{1}{2} A_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{6} A_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \frac{1}{24} A_{ijkl} Q_i Q_j Q_k Q_l \quad (3.25)$$

Όπου $A_i, A_{ij}, A_{ijk}, A_{ijkl}$ μητρώα σταθερών τιμών των άγνωστων συντελεστών (Q_i, Q_j, Q_k, Q_l) των συναρτήσεων της παραμορφωσιακής κατάστασης του φορέα.

Το μητρώο A_i είναι το μητρώο που αντιστοιχεί στα εξωτερικά φορτία και στην περίπτωση μας ισούται με:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 P [k_2 - \tan(707 * k_2)/1000] \end{bmatrix}$$

και για το μητρώο Q_i έχουμε:

$$Q_i = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Άρα η πράξη $[A_i]^T [Q_i]$ δίνει το πρώτο σκέλος της εξίσωσης (3.25).

Προχωράμε στο μητρώο A_{ij} , το οποίο είναι το αντίστοιχο μητρώο ακαμψίας του φορέα κατά τη γραμμική ανάλυσή του.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} - \left(Ea \left(\frac{707k_1 \tan(500k_1)}{125} \right) \dots - 250k_1^4 \right) \dots & 0 \\ 0 & \dots (EI_2(k_2^3 \sin(1414k_2) / (2\cos(707k_2)^2 \dots)) \end{bmatrix}$$

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η πλήρης απεικόνιση των μητρώων στο χαρτί είναι σχεδόν αδύνατη. Η παραπάνω απεικόνιση είναι ενδεικτική και οι παραπάνω όροι πάρθηκαν από το MATLAB.

Ισχύει επίσης $A_{ij} = K_{ij}^0$. Για το δεύτερο όρο της σχέσης (3.25) ισχύει:

$$\frac{1}{2} A_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T [K_{ij}^0] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

προς αποφυγή παρερμηνειών να επισημάνουμε ότι τα A_1 και A_2 , είναι οι σταθερές των συναρτήσεων της παραμορφωσιακής κατάστασης του φορέα μας και δεν ταυτίζονται με το μητρώο A_i .

Ο μηχανισμός σύμπτυξης για τα μη γραμμικά προβλήματα μας έδωσε τα μητρώα A_{ijk} και A_{ijkl} .

$$[A_{ijk} Q_k] = [K_{ij}^1] = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

όπου S_1, S_2, S_3, S_4 βοηθητικές μεταβλητές συμβολισμού.

Παραθέτουμε ενδεικτικά την τιμή της μεταβλητής S_4 που είναι και η πιο απλή.

$$S_4 = -(A_1 * E * a * ((707 * k_2^2 * \tan(500 * k_2))/250 - 1414 * k_1 * k_2^2 - (707 * k_1 * k_2^2)/\cos(707 * k_2)^2 - (3 * k_2 * \tan(500 * k_1) * \tan(707 * k_2))/500 + 3 * k_1 * k_2 * \tan(707 * k_2) + (707 * k_2^2 * \tan(500 * k_1))/(500 * \cos(707 * k_2)^2)))/2$$

Όπου a , ο συμβολισμός του εμβαδού της διατομής όπως το εισάγαμε στο MATLAB.

Για το μητρώο A_{ijkl} έχουμε:

$$[A_{ijkl}Q_kQ_l] = [K_{ij}^2] = \begin{bmatrix} S'_1 & 0 \\ 0 & S'_2 \end{bmatrix}$$

όπου S'_1, S'_2 βοηθητικές μεταβλητές συμβολισμού.

Με τη διαδικασία αυτή παραστήσαμε το συνολικό δυναμικό του φορέα μας με το γενικό τρόπο έκφρασης του, στην απλοποιημένη εποπτική μορφή.

3.3.1 Αρχή στασίμου τιμής

Ισορροπία σε μια παραμορφωμένη θέση ενός φορέα, προκύπτει όταν η V (ενεργειακό δυναμικό ή πιο ελεύθερα ενέργεια) έχει στάσιμο τιμή.

$$\delta V = \frac{dV}{dQ_i} \delta Q_i = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dQ_i} = 0 \rightarrow \text{οι εξισώσεις ισορροπίας του φορέα μας.}$$

όπου $\frac{dV}{dQ_i}$, πρώτη παράγωγος της ενέργειας ως προς τις σταθερές σχήματος (στην περίπτωση μας A_1 και A_2).

$$\text{Άρα } \mathbf{V}_i = \mathbf{A}_i + \left(\mathbf{K}_{ij}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{ij}^1 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{ij}^2 \right) \mathbf{Q}_j \quad (3.26)$$

με $K_{ij}^T = K_{ij}^0 + \frac{1}{2} K_{ij}^1 + \frac{1}{6} K_{ij}^2$, το εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας του φορέα μας.

Όπως προαναφέραμε, ισορροπία προκύπτει όταν η V έχει στάσιμο τιμή. Στην περίπτωση μας, πρέπει V_1 και V_2 να είναι ταυτόχρονα ίσες με το μηδέν.

$$V_1 = \frac{dV}{dA_1} = 0 \quad (3.27)$$

$$V_2 = \frac{dV}{dA_2} = 0 \quad (3.28)$$

Κατά την επίλυση του συστήματος των σχέσεων (3.27) και (3.28), παρουσιάστηκε ένα ανυπέρβλητο, όπως εντέλει αποδείχτηκε, εμπόδιο. Η μαθηματική επίλυση του μη γραμμικού συστήματος δεν κατέστη εφικτή. Πέρα από την πολυπλοκότητα των σχέσεων, η απομόνωση των σταθερών A_1 και A_2 αποδείχτηκε εξαιρετικά δύσκολη. Εν συνεχεία, ο ακριβής προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου δεν ήταν δυνατό να υπολογιστεί με σαφήνεια. Οι σχέσεις (3.27) και (3.28), έχουν το ζητούμενο φορτίο P σε μορφές εντός και εκτός τριγωνομετρικών αριθμών · δηλαδή υπάρχουν μορφές όπως οι παρακάτω:

$$\dots (707 * A_2^2 * k_2^2 * \tan(500 * k_1)) / (1000 * \cos(707 * k_2)^2) \dots$$

$$\dots 500 * A_2 * P * (k_2 - \tan(707 * k_2) / 1000) \dots$$

Τα k_1, k_2 είναι τιμές στις οποίες υπεισέρχεται το επιβαλλόμενο φορτίο P .

Όπου $k_1^2 = \frac{N_1}{EI_1}$ και $k_2^2 = \frac{N_2}{EI_2}$, με N_1 και N_2 η αξονική ένταση των μελών 1 και 2.

Όπως είδαμε από την στατική επίλυση (παράγραφος 3.2.2), $N_1 = -0,74 P$ και $N_2 = -0,37 P$. Εκτός της προσπάθειας επίλυσης του συστήματος με τη χρήση του MATLAB, δοκιμάστηκε και η χρήση του λογισμικού Origin. Το Origin είναι ένα μαθηματικό πρόγραμμα που προσεγγίζει τέτοια προβλήματα γραφικά, και όχι τόσο αναλυτικά, αλλά και πάλι η επίλυση του συστήματος δεν κατέστη εφικτή. Ο όγκος των δεδομένων στις σχέσεις και η πολυπλοκότητα αυτών, καθιστούν οποιαδήποτε διαδικασία μαθηματικής επίλυσης από δύσκολη έως ανέφικτη. Επομένως, ο ακριβής προσδιορισμός του μη γραμμικού κρίσιμου φορτίου και των ιδιομορφών λυγισμού βάσει της μη γραμμικής θεωρίας, με αυτή την «αυστηρή» προσέγγιση, αποδείχτηκε μη εφικτός.

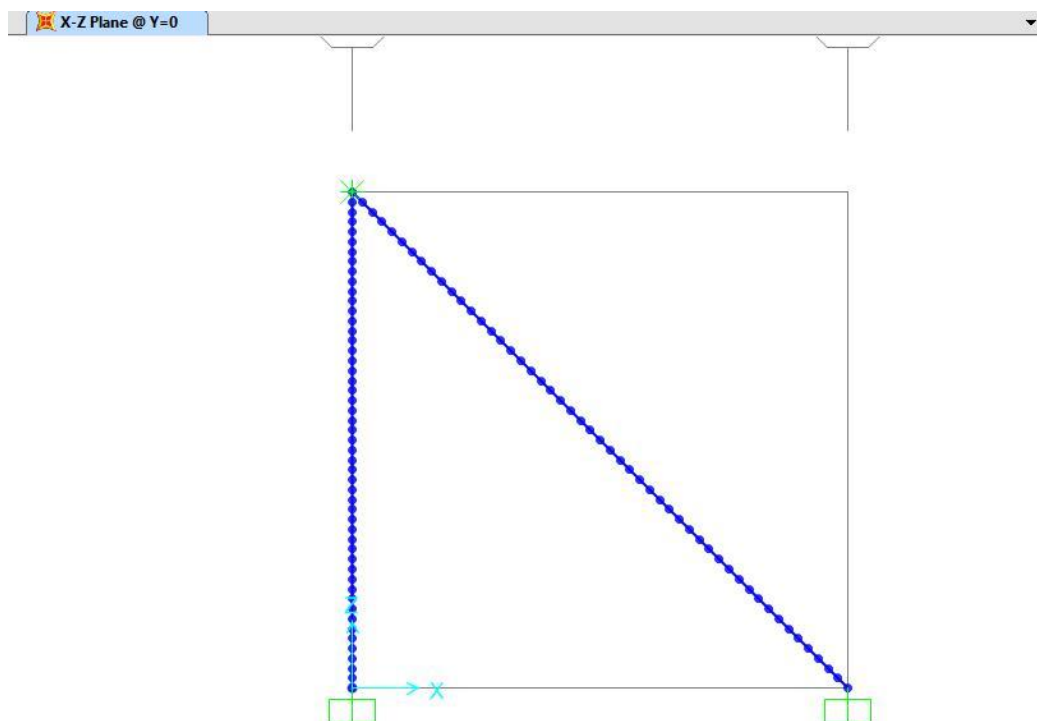
3.3.2 Εναλλακτικός τρόπος ανάλυσης του πλαισίου σύμφωνα με τη Μη Γραμμική Θεωρία

Προκειμένου να ξεπεραστούν τα προβλήματα που συναντήθηκαν κατά τη διαδικασία εύρεσης στασίμου τιμής του ενεργειακού δυναμικού (βλέπε παράγραφο 3.3.1), αποφασίστηκε η χρήση δεδομένων από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού του φορέα μας. Συγκεκριμένα, αποφασίστηκε η χρησιμοποίηση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, όπως αυτά προκύπτουν από τη γραμμική

ανάλυση λυγισμού του φορέα μας (buckling analysis). Οι τιμές των φορτίων αυτών, είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της μη γραμμικής ανάλυσης. Αυτό συμβαίνει γιατί κατά τον προσδιορισμό των κρίσιμων φορτίων με βάση τη μη γραμμική θεωρία λυγισμού λαμβάνεται υπόψη η αξονική βράχυνση των θλιβόμενων μελών. Εν συνεχεία, θα εισάγουμε τα φορτία που πήραμε από τη γραμμική ανάλυση, στη μη γραμμική προσέγγιση που έχουμε πραγματοποιήσει κάνοντας χρήση του λογισμικού MATLAB και από εκεί θα προκύψουν τα δεδομένα της παραμορφωσιακής κατάστασης του φορέα μας, σύμφωνα με τις αρχές της μη γραμμικής θεωρίας λυγισμού.

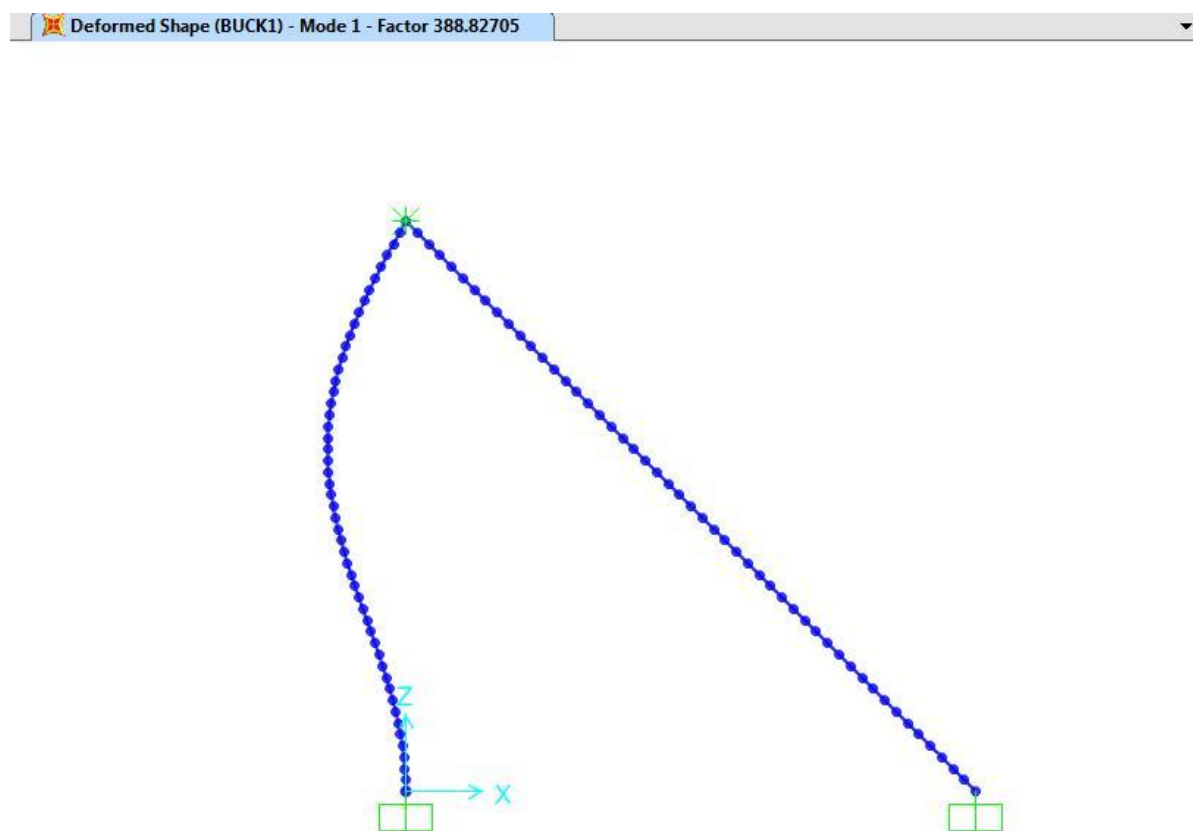
3.3.2.1 Ανάλυση λυγισμού σύμφωνα με τη Γραμμική Θεωρία

Η διενέργεια της ανάλυσης σε λυγισμό (buckling analysis) του φορέα μας, βάσει της γραμμικής θεωρίας, πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού SAP 2000. Αναλυτικά για τη χρήση του SAP 2000 στο **παράρτημα Α**.



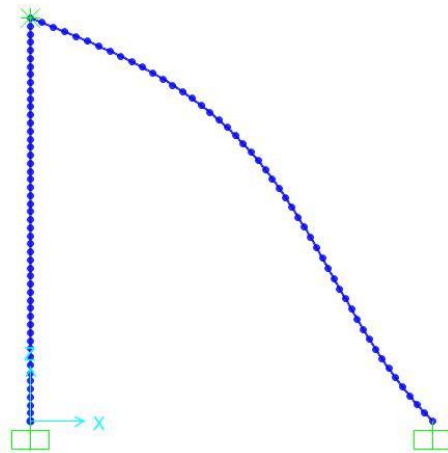
Σχήμα 3.7 Υπό μελέτη φορέας στο SAP2000

Οι διαστάσεις των μελών είναι cm (500cm για το κάθετο μέλος 1 – 707cm για το λοξό μέλος 2). Επιπλέον για την ορθή διενέργεια της ανάλυσης σε λυγισμό (buckling analysis) στο SAP 2000, είναι απαραίτητη η τοποθέτηση εσωτερικών κόμβων. Τοποθετήσαμε 50 εσωτερικούς κόμβους σε κάθε μέλος (σχήμα 3.7). Η ανάλυση σε λυγισμό έγινε για κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο P, το οποίο εφαρμόζεται στον κοινό κόμβο των 2 μελών. Από την ανάλυση σε λυγισμό προέκυψαν 6 ιδιομορφές λυγισμού.



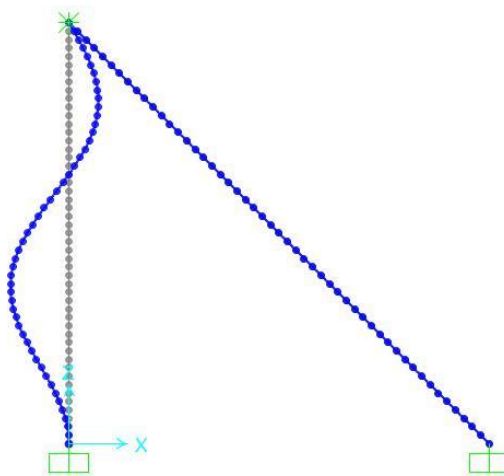
Σχήμα 3.8 1^η Ιδιομορφή (Mode 1)

Για την 1^η ιδιομορφή το κρίσιμο φορτίο είναι $P_{cr1} = 388.82705 \text{ kN}$.



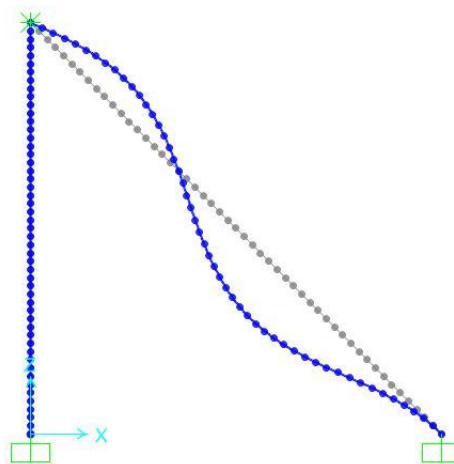
Σχήμα 3.9 2^η Ιδιομορφή (Mode 2)

Για τη 2^η ιδιομορφή το κρίσιμο φορτίο είναι $P_{cr2} = 390.68147 \text{ kN}$.



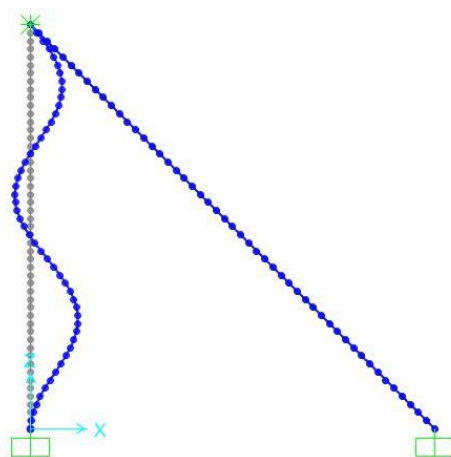
Σχήμα 3.10 3^η Ιδιομορφή (Mode 3)

Για την 3^η ιδιομορφή το κρίσιμο φορτίο είναι $P_{cr3} = 1130.16745 \text{ kN}$.



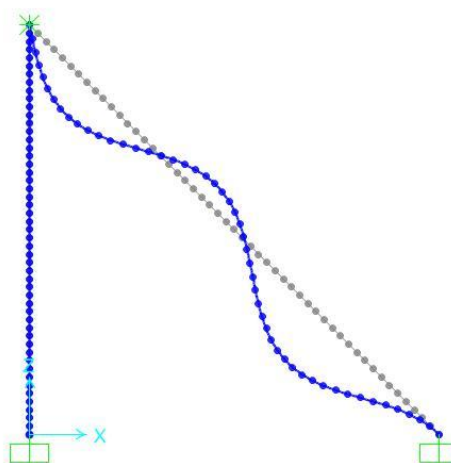
Σχήμα 3.11 4^η Ιδιομορφή (Mode 4)

Για την 4^η ιδιομορφή το κρίσιμο φορτίο είναι $P_{cr4} = 1145.03915$ kN.



Σχήμα 3.12 5^η Ιδιομορφή (Mode 5)

Για την 5^η ιδιομορφή το κρίσιμο φορτίο είναι $P_{cr5} = 2196.98758$ kN.



Σχήμα 3.13 6^η Ιδιομορφή (Mode 6)

Για την 6^η ιδιομορφή το κρίσιμο φορτίο είναι $P_{cr6} = 2252.88738 \text{ kN}$.

Στα σχήματα 3.10, 3.11, 3.12 και 3.13 φαίνεται με «γκρίζο χρώμα» και η απαραμόρφωτη κατάσταση του εκάστοτε μέλους του φορέα μας. Η παραπάνω παράθεση των ιδιομορφών λυγισμού, γίνεται για καθένα μέλος ξεχωριστά, θεωρώντας ότι το άλλο μέλος βρίσκεται στην αρχική του, απαραμόρφωτη κατάσταση. Κάτι τέτοιο, προφανώς δεν ανταποκρίνεται στην πραγματική συμπεριφορά του φορέα μας. Επιπλέον, γίνεται αντιληπτό από την παραπάνω απεικόνιση των ιδιομορφών λυγισμού, ότι δεν λαμβάνεται υπόψη η αξονική παραμόρφωση που επιδέχεται ο φορέας κατά την επιβολή των κρίσιμων φορτίων. Αυτό συμβαίνει επειδή η ανάλυση που πραγματοποιεί το SAP 2000, γίνεται σύμφωνα με τις αρχές της γραμμικής θεωρίας λυγισμού (αγνοούνται οι αξονικές παραμορφώσεις). Περισσότερες λεπτομέρειες για την ανάλυση σε λυγισμό με τη χρήση του SAP 2000, στο **παράρτημα Α**.

3.3.2.2 Χρήση ιδιομορφών λυγισμού στη Μη Γραμμική Θεωρία

Έχοντας υπολογίσει τα κρίσιμα φορτία λυγισμού για τις πρώτες 6 ιδιομορφές, με τη βοήθεια του SAP 2000 (παράγραφος 3.3.2.1), βάσει της γραμμικής θεωρίας λυγισμού, θα εισάγουμε τις τιμές των φορτίων αυτών στην ενεργειακή προσέγγιση που έχουμε πραγματοποιήσει στο MATLAB, η οποία είναι βασισμένη στις αρχές της μη γραμμικής θεωρίας λυγισμού.

Στόχος μας, είναι η εύρεση των σταθερών \mathbf{A}_1 και \mathbf{A}_2 που περιγράφουν την παραμορφωσιακή κατάσταση του φορέα για τις εκάστοτε φορτίσεις. Οι σταθερές αυτές θα προκύψουν από σύγκλιση της σχέσης (3.26), έχοντας βασική προϋπόθεση τη συνθήκη ισορροπίας από την αρχή της στασίμου τιμής (3.29).

$$V_i = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{dV}{dA_1} = 0 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{dV}{dA_2} = 0 \quad (3.29)$$

$$V_i = A_i + \left(K_{ij}^0 + \frac{1}{2} K_{ij}^1 + \frac{1}{6} K_{ij}^2 \right) Q_j \quad (3.26)$$

με $K_{ij}^T = K_{ij}^0 + \frac{1}{2} K_{ij}^1 + \frac{1}{6} K_{ij}^2$, το εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας του φορέα μας.

Οι αρχικές τιμές των σταθερών \mathbf{A}_1 και \mathbf{A}_2 που θα εισαχθούν στη σχέση (3.26) θα προκύψουν από την προσέγγιση των συνήθων γραμμικών προβλημάτων:

$$A_{ij} Q_i = A_i \quad (3.30)$$

Με $Q_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$, $A_{ij} = K_{ij}^0$ μητρώο ακαμψίας γραμμικής θεωρίας και A_i – μητρώο εξωτερικών φορτίων.

Οι αρχικές τιμές των σταθερών \mathbf{A}_1 και \mathbf{A}_2 εισάγονται στη συνέχεια στο εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας του φορέα μας K_{ij}^T και από τη μετέπειτα επίλυση της σχέσης (3.26) με την απαίτηση της σχέσης (3.29), προκύπτουν νέες τιμές για τις μεταβλητές \mathbf{A}_1 και \mathbf{A}_2 (μητρώο Q_j). Ύστερα και μέσω επαναληπτικής διαδικασίας, οι νέες αυτές τιμές, αντικαθίστανται στο εφαπτομενικό

μητρώο ακαμψίας του φορέα μας K_{ij}^T και ακολουθείται η προηγούμενη διαδικασία έως ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη σύγκλισης για το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου του ενεργειακού δυναμικού του φορέα μας (αρχή στασίμου τιμής). Αναλυτικές λεπτομέρειες για την παραπάνω διαδικασία, καθώς επίσης και μέρος του πηγαίου κώδικα παρουσιάζονται στο **παράρτημα Β**.

1^η Ιδιομορφή ($P_{cr1} = 388.82705 \text{ kN}$) - Μη Γραμμική Ανάλυση

Για $P_{cr1} = 388.82705 \text{ kN}$, έχουμε $k_1 = 8.9513 \cdot 10^{-3}$ και $k_2 = 6.3296 \cdot 10^{-3}$. Μετά από 51 επαναλήψεις υπολογίστηκαν οι σταθερές A_1 και A_2 , $A_1 = -0.2550$ και $A_2 = 0,7738$. Έχοντας το κρίσιμο φορτίο αλλά και τις τιμές των σταθερών σχήματος, έχουμε τις συναρτήσεις της παραμορφωμένης κατάστασης του φορέα μας, για την 1^η ιδιομορφή:

$$w_1(x_1) = -0.2550[\sin(8.9513 \cdot 10^{-3} \cdot x_1) - 8.9513 \cdot 10^{-3} \cdot x_1 + \tan(8.9513 \cdot 10^{-3} \cdot 500) (1 - \cos(8.9513 \cdot 10^{-3} \cdot x_1))] \quad (3.31)$$

$$u_1(x_1) = 0,7738 \left(\frac{\sqrt{2}\tan(6.3296 \cdot 10^{-3} \cdot 707)}{2 \cdot 707} - 6.3296 \cdot 10^{-3} \right) x_1 \quad (3.32)$$

$$w_2(x_2) = 0,7738[\sin(6.3296 \cdot 10^{-3} \cdot x_2) - 6.3296 \cdot 10^{-3} \cdot x_2 + \tan(6.3296 \cdot 10^{-3} \cdot 707) (1 - \cos(6.3296 \cdot 10^{-3} \cdot x_2))] \quad (3.33)$$

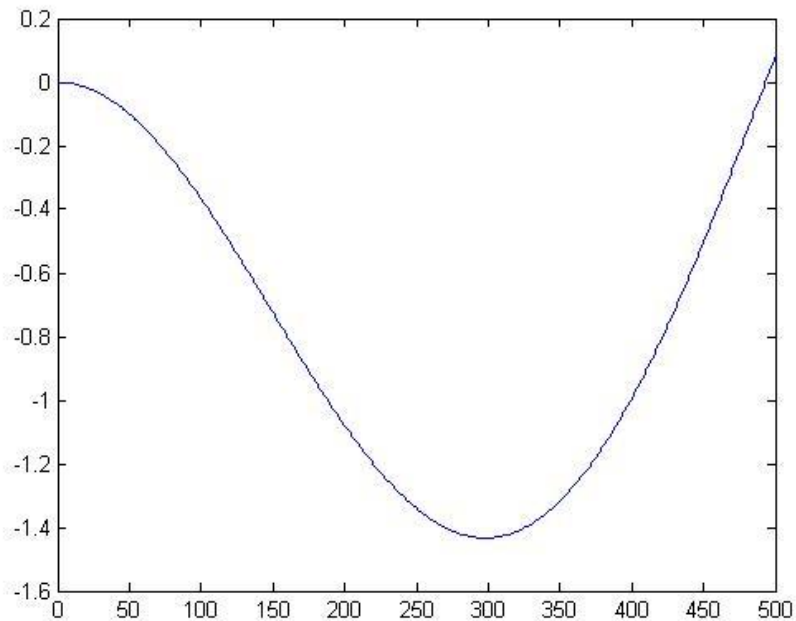
$$u_2(x_2) = -0.2550 \left(8.9513 \cdot 10^{-3} - \frac{\tan(8.9513 \cdot 10^{-3} \cdot 500)}{500} \right) x_2 \quad (3.34)$$

Τα $x_1, x_2, w_1(x_1), u_1(x_1), w_2(x_2), u_2(x_2)$ στις παραπάνω σχέσεις είναι ορισμένα σε εκατοστά (cm).

Μέγιστο βέλος:

$w_{1max} \cong -1.45cm$ στη
θέση $x_1 \cong 300cm$

Παρατηρούμε ότι η γενική μορφή του βέλους κάμψης του μέλους 1, ταυτίζεται με την αντίστοιχη απεικόνιση της 1^{ης} ιδιομορφής όπως αυτή προέκυψε από το SAP2000.



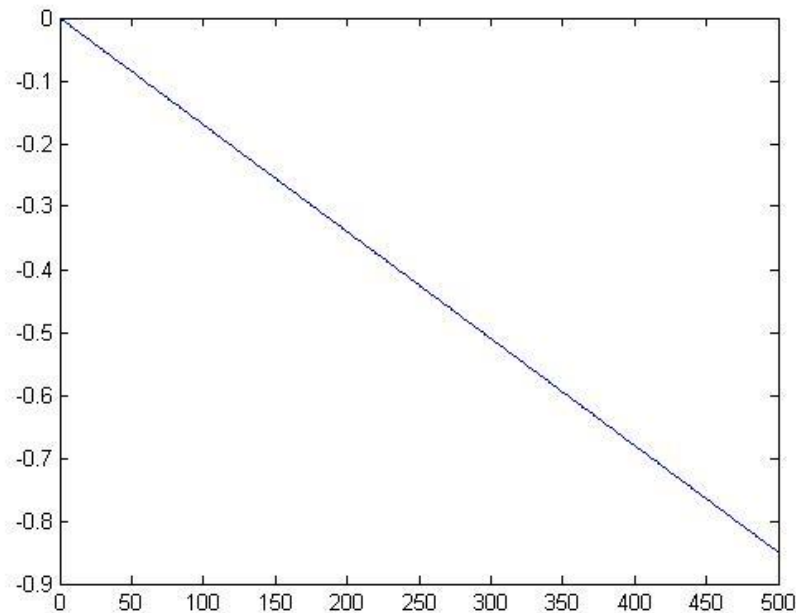
Σχήμα 3.14 Διάγραμμα $x_1, w_1(x_1)$ για P_{cr1}

Μέγιστη βύθιση:

Από το διάγραμμα του σχήματος 3.15, βλέπουμε ότι στην κορυφή του κατακόρυφου μέλους 1, η μετατόπιση είναι:

$$u_{1max}(500) = -0.85cm$$

Έχουμε βύθιση του μέλους κατά 8.5mm.

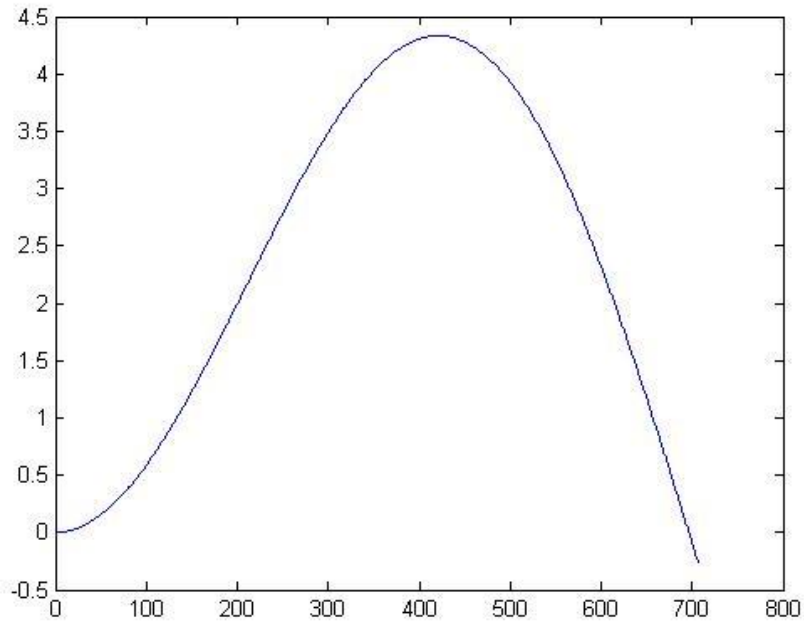


Σχήμα 3.15 Διάγραμμα $x_1, u_1(x_1)$ για P_{cr1}

Μέγιστο βέλος:

$w_{2max} \cong 4.35cm$ στη
θέση $x_2 \cong 440cm$

Παρατηρούμε ότι στην 1^η ιδιομορφή, η λοξή δοκός (μέλος 2), έχει παραμορφωθεί και αυτή. Μάλιστα το μέγιστο βέλος είναι σημαντικά μεγαλύτερο από αυτό του μέλους 1. Κάτι τέτοιο είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι το μήκος L_2 είναι αρκετά μεγαλύτερο του L_1 . ($707cm > 500cm$)



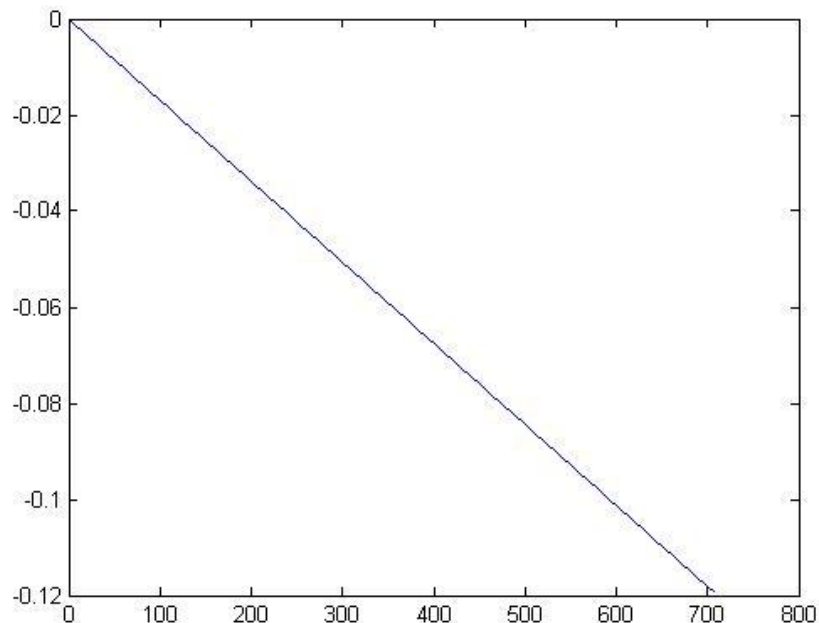
Σχήμα 3.16 Διάγραμμα $x_2, w_2(x_2)$ για P_{cr1}

Μέγιστη βύθιση:

Από το διάγραμμα του σχήματος 3.17, βλέπουμε ότι στην κορυφή της λοξής δοκού (μέλος 2), η αξονική μετατόπιση είναι:

$u_{2max}(707) = -0.12 cm,$

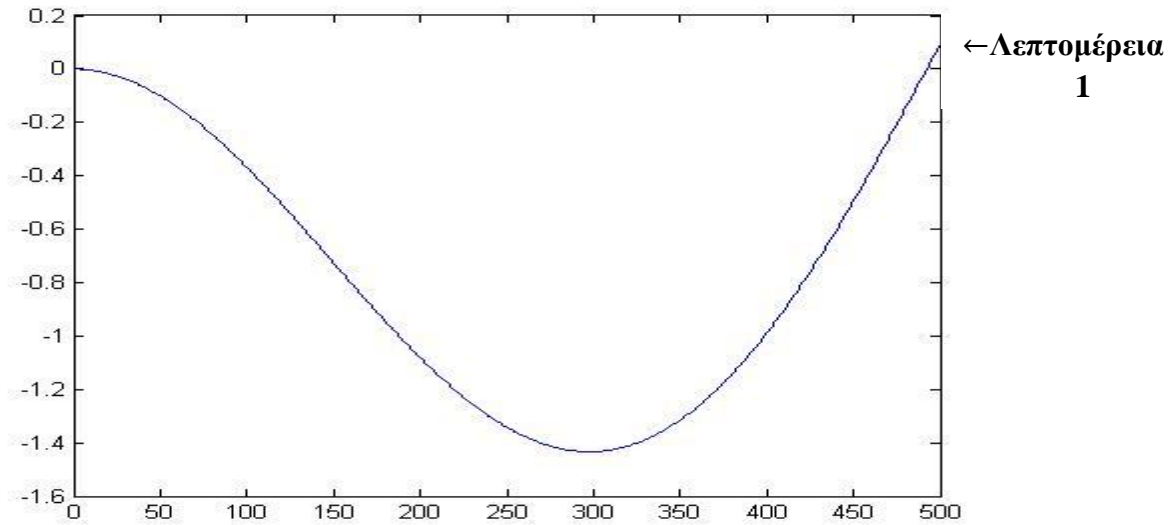
δηλαδή έχουμε αξονική βράχυνση της τάξεως των 1.2mm.



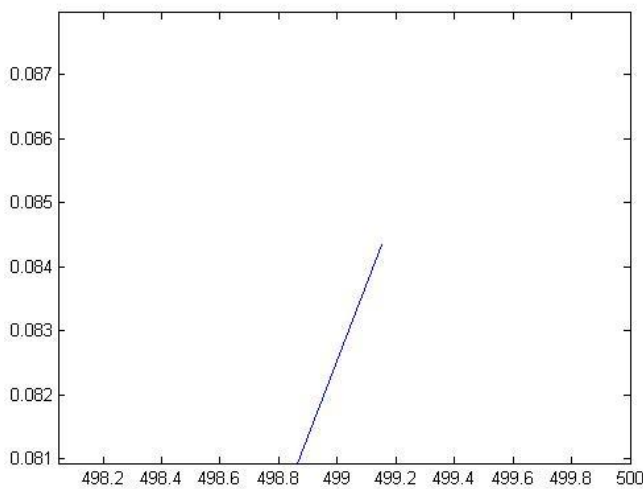
Σχήμα 3.17 Διάγραμμα $x_2, u_2(x_2)$ για P_{cr1}

Συνθέτοντας τα διαγράμματα των σχημάτων 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, μπορούμε να σχηματίσουμε τη συνολική παραμορφωμένη απεικόνιση του φορέας μας.

Για το μέλος 1 ($L_{αρχ}=500\text{cm}$):



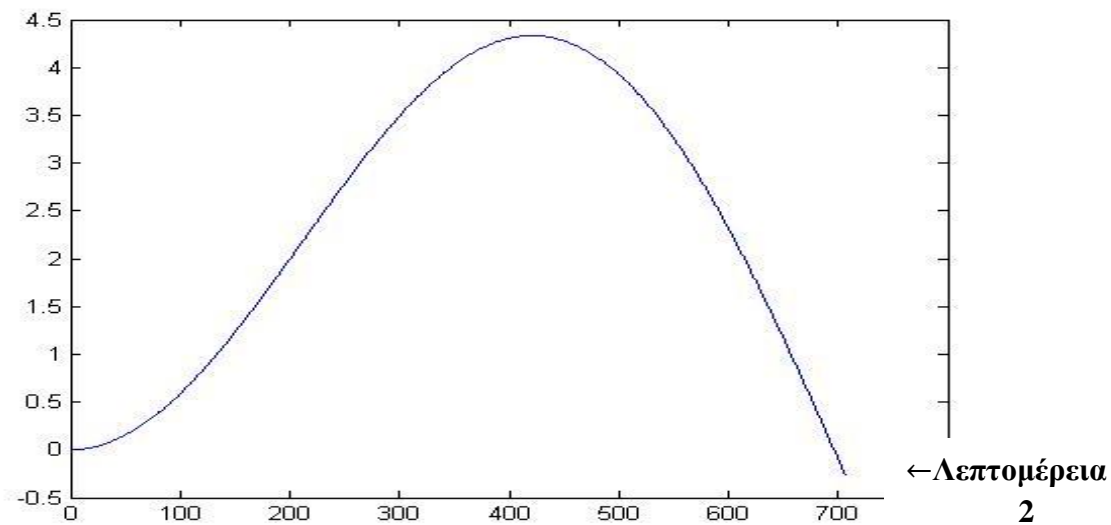
Σχήμα 3.18 Παραμορφωμένη κατάσταση για το μέλος 1



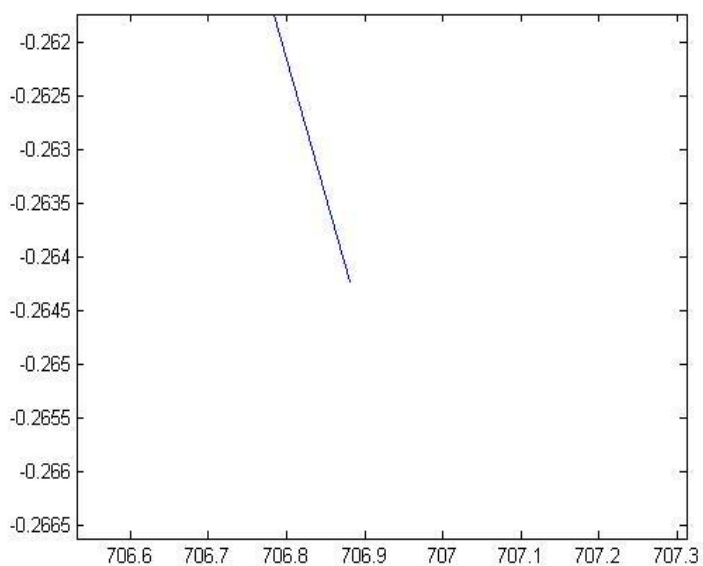
Στη **λεπτομέρεια 1** φαίνεται ότι μετά τη σύνθεση των συναρτήσεων του βέλους κάμψης και της αξονικής παραμόρφωσης, η παραμορφωσιακή κατάσταση του μέλους 1 (1^η ιδιομορφή) ακολουθεί τις θεωρήσεις της μη γραμμικής θεωρίας, λαμβάνοντας υπόψη της, την αξονική βράχυνση που προκαλείται από την επιβολή του συγκεντρωμένου φορτίου P_{cr1} .

Σχήμα 3.19 Λεπτομέρεια 1

Για το μέλος 2 ($L_{αρχ}=707cm$):



Σχήμα 3.20 Παραμορφωμένη κατάσταση για το μέλος 2



Σχήμα 3.21 Λεπτομέρεια 2

Σημείωση:

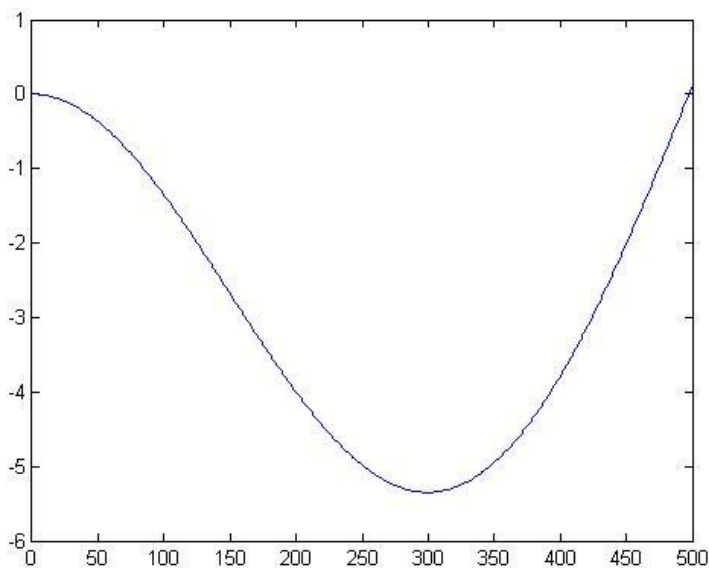
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι τα κρίσιμα φορτία που πήραμε από την ανάλυση λυγισμού στο SAP 2000, είναι ελαφρώς μεγαλύτερα σε σχέση με τα πραγματικά κρίσιμα φορτία που προκύπτουν από τη μη γραμμική ανάλυση του φορέα · τα οποία ανταποκρίνονται περισσότερο στην πραγματικότητα. Επομένως ο φορέας μας, στην πραγματικότητα έχει ήδη εισέλθει σε κατάσταση διαρροής προτού η τιμή του φορτίου φτάσει στα **388.82705 kN** ($=P_{cr1}$) . Στη μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας ενός φορέα, το κρίσιμο φορτίο που μας ενδιαφέρει είναι αυτό της 1^{ης} ιδιομορφής.

2^η Ιδιομορφή ($P_{cr2} = 390.68147$ kN) – Μη Γραμμική Ανάλυση

Μέγιστο βέλος:

$w_{1max} \cong -5cm$ στη
θέση $x_1 \cong 300cm$

Η απότομη αύξηση του βέλους κάμψης δείχνει ότι ο φορέας μας είναι σε κατάσταση διαρροής.



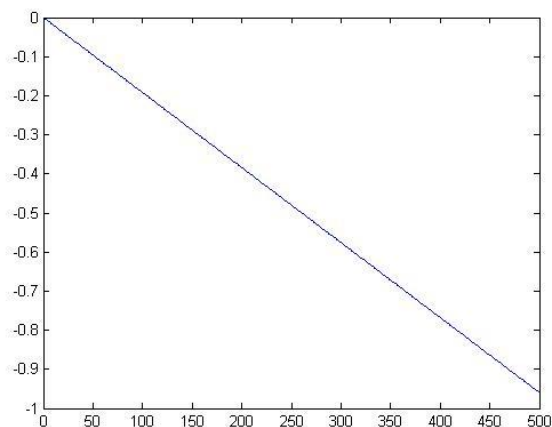
Σχήμα 3.22 Διάγραμμα $x_1, w_1(x_1)$ για P_{cr2}

Μέγιστη βύθιση:

Στο σχήμα 3.23 παρατηρούμε την αξονική παραμόρφωση που έχει υποστεί το κάθετο μέλος (μέλος 1).

$$u_{1max}(500) \cong -0.95cm$$

Έχουμε κατακόρυφη βύθιση του μέλους 1 κατά 9.5mm.

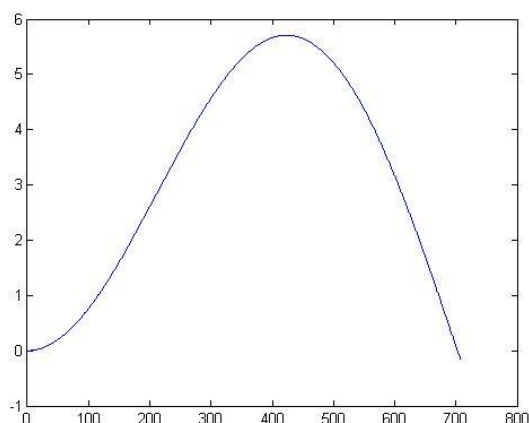


Σχήμα 3.23 Διάγραμμα $x_1, u_1(x_1)$ για P_{cr2}

Μέγιστο βέλος:

Στο σχήμα 3.24 απεικονίζεται το διάγραμμα του βέλους κάμψης του λοξού μέλους (μέλος 2).

$$w_{2max} \cong 5.8cm \text{ στη θέση } x_2 \cong 420cm$$



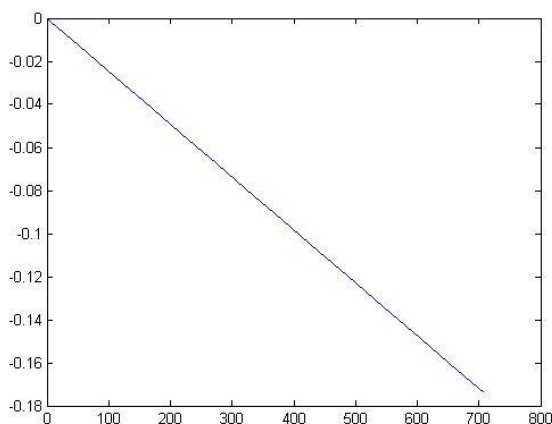
Σχήμα 3.24 Διάγραμμα $x_2, w_2(x_2)$ για P_{cr2}

Μέγιστη βύθιση:

Στο σχήμα 3.25 παρατηρούμε την αξονική μετατόπιση που έχει υποστεί το λοξό μέλος (μέλος 2).

$$u_{2max}(707) \cong -0.175cm$$

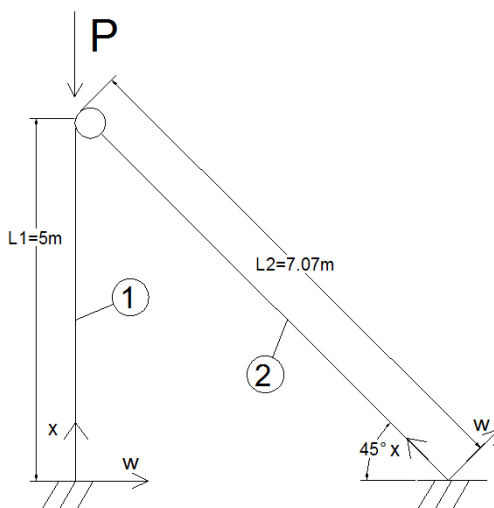
Έχουμε αξονική βράχυνση της τάξεως των 1.75mm.



Σχήμα 3.25 Διάγραμμα $x_2, u_2(x_2)$ για P_{cr2}

3.4 Μη γραμμική ανάλυση στο SAP2000

Προκειμένου να προσδιορισθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του φορέα μας, πραγματοποιήσαμε μια μη γραμμική στατική ανάλυση με τη βοήθεια του λογισμικού SAP2000. Περισσότερα για το SAP2000 στο **παράρτημα Α**. Η μη γραμμική ανάλυση έγινε με χρήση πολλαπλών βημάτων (multiple states), κατά τις αρχές της ανάλυσης pushover. Για την ακρίβεια, δόθηκε μέγιστη τιμή φορτίου P , τα 400kN και ο ελάχιστος αριθμός βημάτων ορίστηκε στα 200. Άρα το κάθε βήμα ισοδυναμεί με αύξηση της τάξεως των 2kN. Ζητούμενο από αυτήν την ανάλυση, είναι η συμπεριφορά της αξονική παραμόρφωσης δ , του κατακόρυφου μέλους του φορέα μας (μέλος 1).

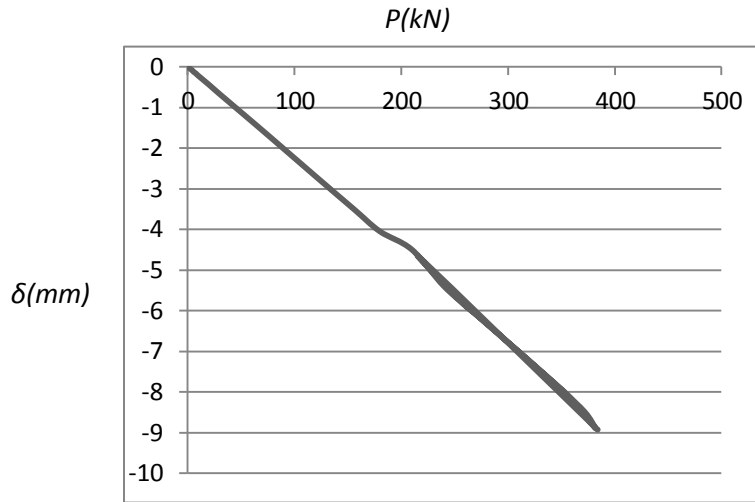


Σχήμα 3.26 Υπό μελέτη φορέας

Η μη γραμμική ανάλυση εκτελέστηκε για 192 βήματα (steps) και μετά υπήρξε τερματισμός αυτής, λόγω εισόδου του φορέα μας στην κατάσταση διαρροής. Το κρίσιμο φορτίο λοιπόν, βρέθηκε στα $P_{cr} = 384\text{kN}$ ($192 \cdot 2\text{kN}$). Ήταν κάτι αναμενόμενο, αν σκεφτεί κανείς ότι η γραμμική ανάλυση έδωσε πρώτο κρίσιμο φορτίο $P_{cr1}=388.83\text{kN}$. Ως γνωστό, η τιμή του μη γραμμικού φορτίου διαρροής είναι ελαφρώς μικρότερη από αυτή της γραμμικής. Στη συνέχεια, παίρνοντας τις τιμές της μετατόπισης δ , για τα 192 αυτά βήματα και με τη χρήση excel φτιάξαμε το διάγραμμα P- δ του φορέα μας (όπου δ η αξονική μετατόπιση του μέλους 1).

Η μετατόπιση δ που αντιστοιχεί στο βήμα 192 βρέθηκε ίση με $-8.997mm \cong -9mm$.

Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή είναι παραπλήσια με την αντίστοιχη τιμή που έχουμε υπολογίσει από τη μη γραμμική προσέγγιση που κάναμε με τη βοήθεια του MATLAB για την 1^η ιδιομορφή ($P_{cr1}=388.827kN$).

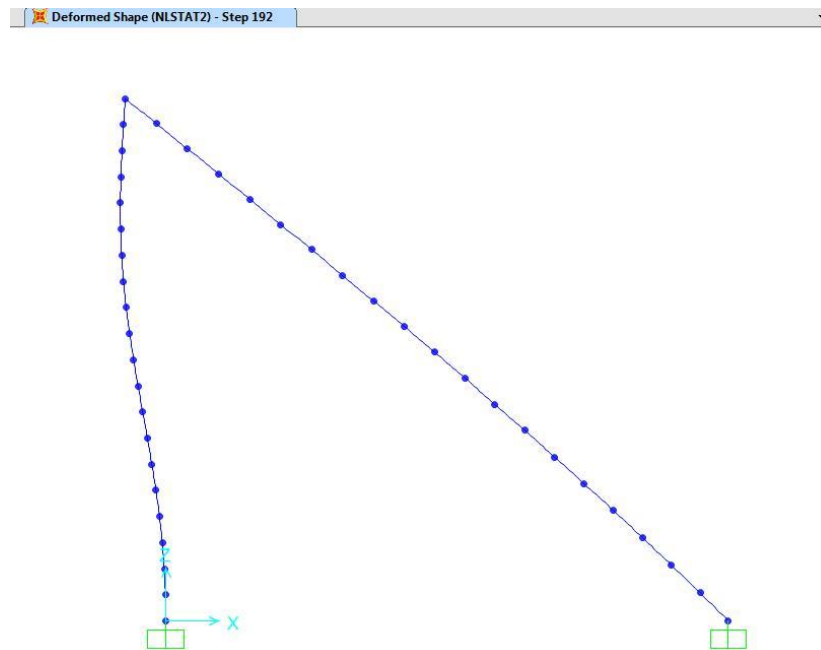


Σχήμα 3.27 Διάγραμμα P - δ

$$u_{1max}(500) = -0.85cm$$

$$= -8.5mm$$

Στο σχήμα 3.28 φαίνεται η παραμορφωμένη εικόνα του φορέα μας για το βήμα 192 (step 192), όπως αυτή βρέθηκε από τη μη γραμμική στατική ανάλυση (non linear static analysis) στο SAP2000.



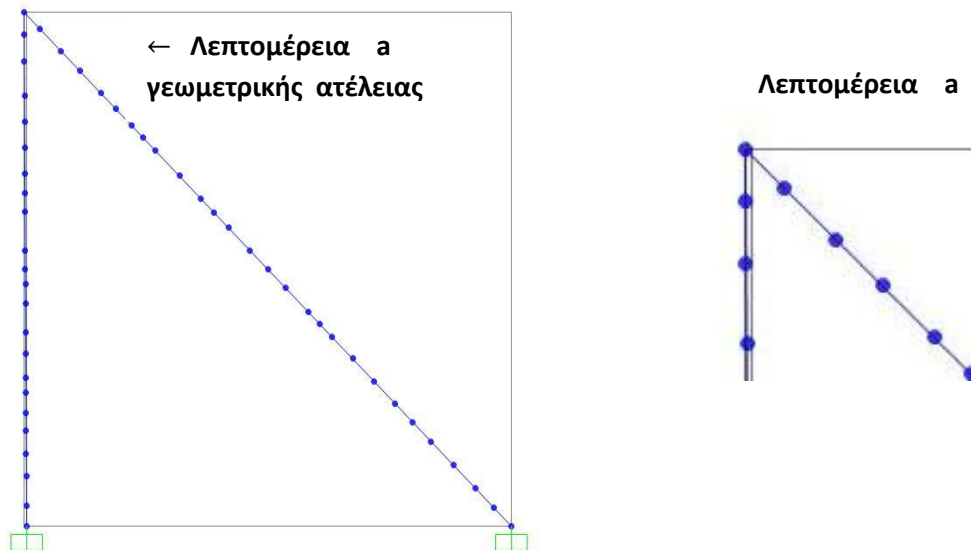
Σχήμα 3.28 Deformed Shape-Step 192

3.5 Επιρροή ατέλειας στο κρίσιμο φορτίο

Ο φορέας όπως μελετήθηκε σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις είναι απαλλαγμένος από αρχικές ατέλειες. Για την σημασία των αρχικών ατελειών έχει γίνει αναφορά στο κεφάλαιο 1 και συγκεκριμένα στην παράγραφο 1.8. Στην προκειμένη περίπτωση θα υπολογίσουμε το κρίσιμο φορτίο, υλοποιώντας τη μη γραμμική ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου 3.4, εισάγοντας στο φορέα μια αρχική γεωμετρική ατέλεια. Συγκεκριμένα θα δώσουμε στο κατακόρυφο μέλος μια κλίση 1/200 και το λοξό μέλος 2 θα ακολουθήσει και αυτό με τη σειρά του την αλλαγή της κλίσης.

Πραγματοποιώντας ακριβώς την ίδια ανάλυση με αυτή της προηγούμενης παραγράφου, παρατηρούμε μια φυσιολογική μείωση του κρίσιμου φορτίου. Πιο συγκεκριμένα η παραπάνω διαδικασία σταματά στο βήμα 185 (step 185), το οποίο αντιστοιχεί στην κρίσιμη οριακή τιμή φορτίου $P_{cr} = 370kN$ (αντίστοιχη τιμή τέλειου συστήματος 384kN).

Επομένως, η κρίσιμη τιμή του τέλειου συστήματος υπέστη μια μείωση της τάξεως του -3,6% για αντίστοιχη αύξηση της κλίσης του κατακόρυφου μέλους κατά 1/200. Η ατέλεια αυτή είναι αρνητική για το φορέα μας καθώς μειώνει την τιμή του κρίσιμου φορτίου.

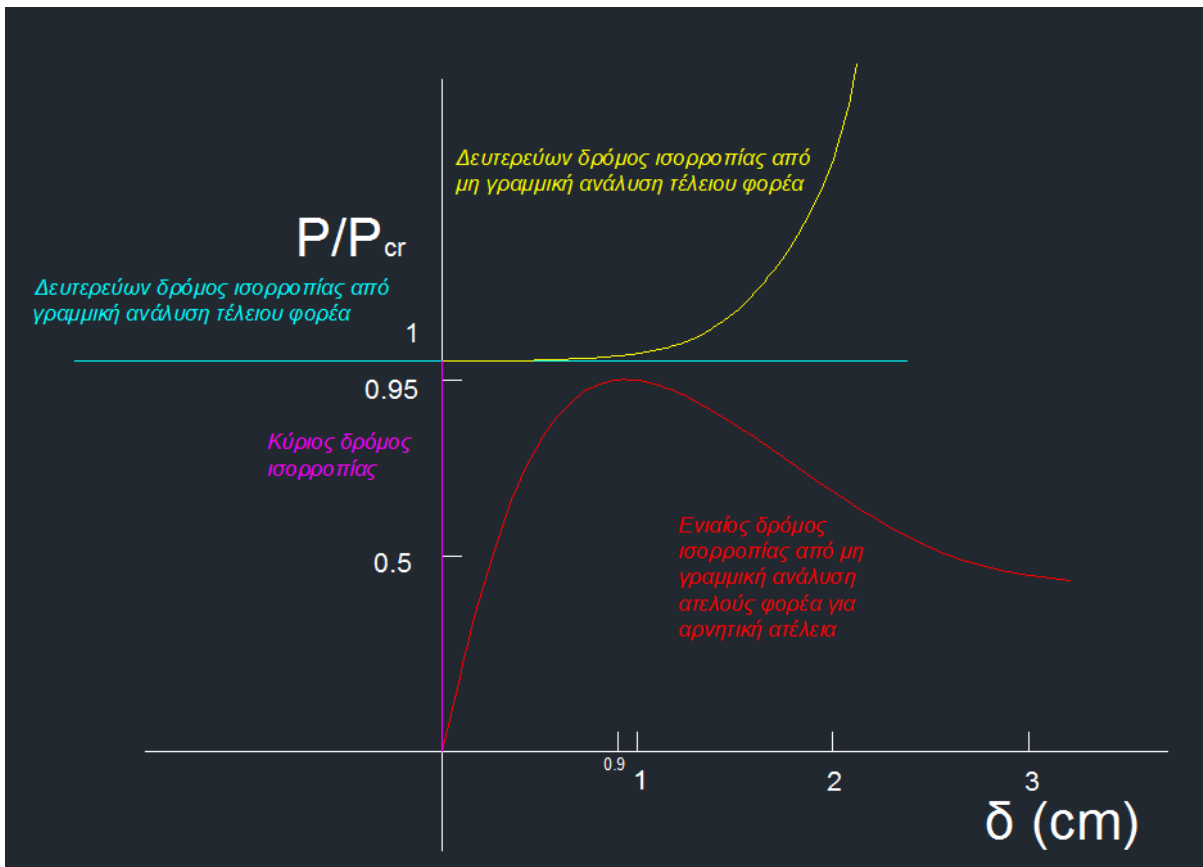


Σχήμα 3.29 Φορέας με γεωμετρική ατέλεια – Λεπτομέρεια ατέλειας

3.6 Δρόμοι ισορροπίας-Διάγραμμα P-δ

Έχοντας ολοκληρώσει την ανάλυση του φορέα μας, είμαστε σε θέση να παραστήσουμε γραφικά τους δρόμους ισορροπίας του φορέα μας. Επιλέγουμε να τους παραστήσουμε θεωρώντας δ την αξονική μετατόπιση του κατακόρυφου μέλους τού φορέα μας. Αυτό γιατί προφανώς οι μη γραμμικές αναλύσεις με τη χρήση του SAP2000 για το τέλειο και το ατελές σύστημα, πραγματοποιήθηκαν ζητώντας τη συγκεκριμένη μετατόπιση. Για την τιμή του κρίσιμου μη γραμμικού φορτίου P_{cr} , ορίστηκε αυτή που προέκυψε από τη γραμμική ανάλυση ($P_{cr}=388.83kN$) και όχι η ελαφρώς μικρότερη που προέκυψε από τη μη γραμμική ανάλυση (384kN). Αυτό γιατί η μη γραμμική ανάλυση που διενεργήθηκε κάνοντας χρήση του MATLAB, πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τα φορτία που προέκυψαν από τη γραμμική ανάλυση, όπως έχουμε ήδη επισημάνει. Για το διάγραμμα του σχήματος 3.30 χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω:

$$P_{cr\alpha\tau\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\varsigma} = 370kN, P_{cr} = 388.83kN, P_{cr\alpha\tau\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\varsigma}/P_{cr} = 0.951, \delta \text{ από τις εκάστοτε αναλύσεις.}$$



Σχήμα 3.30 Δρόμοι ισορροπίας του υπό μελέτη φορέα

Κεφάλαιο 4
Συμπεράσματα

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε η συμπεριφορά ευθύγραμμων μεμονωμένων ράβδων, καθώς και η συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου χαλύβδινου φορέα, σε φαινόμενα δευτέρας τάξεως σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας. Ο φορέας μας είναι από χάλυβα τύπου S275 και τα μέλη αυτού αποτελούνται από πρότυπες διατομές IPE 100. Ειδικότερα, για την ανάλυσή μας βασιστήκαμε στη θεωρία των *μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων*. Η ανάλυση μας ακολούθησε την *ενεργειακή μέθοδο* μελέτης ελαστικής ευστάθειας με την αρχή της στάσιμου τιμής να αποτελεί το κριτήριο της ισορροπίας.

Κατά την εκτέλεση της ενεργειακής μεθόδου, αντιμετωπίσαμε σοβαρά μαθηματικά προβλήματα, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε σύνθετους φορείς με μεγάλο όγκο αριθμητικών δεδομένων, η ισορροπία μέσω της αρχής της στάσιμου τιμής ($\delta V=0$) είναι δύσκολα πραγματοποιήσιμη και το ζητούμενο κρίσιμο μη γραμμικό φορτίο είναι δύσκολο να υπολογισθεί με ακρίβεια.

Στη συνέχεια και προκειμένου να ξεπεράσουμε αυτά τα προβλήματα αυτά, αντλήσαμε δεδομένα από τη γραμμική ανάλυση που είναι σαφώς απλούστερη διαδικασία. Διενεργώντας αρχικώς, την ανάλυση σε λυγισμό βάσει της γραμμικής θεωρίας εξάγαμε τις ιδιομορφές λυγισμού και στη συνέχεια προσδιορίσαμε την παραμορφωμένη κατάσταση του πλαισίου σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία · είδαμε στην πράξη την ειδοποιό διαφορά των δυο θεωριών. Σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία λυγισμού, αγνοείται η βράχυνση των θλιβόμενων μελών του φορέα μας και ο προσδιορισμός των κρίσιμων φορτίων γίνεται θεωρώντας έργα μόνο από ροπές κάμψης. Αντίθετα και όπως είδαμε από τα αποτελέσματα της μη γραμμικής μας ανάλυσης, λαμβάνεται υπόψη η βράχυνση των θλιβόμενων μελών και έχουμε μείωση των μηκών του φορέα μας, η οποία μάλιστα για υψηλές τιμές φόρτισης είναι σημαντική και αισθητή.

Κατά την παραπάνω ανάλυση σε λυγισμό βάσει της μη γραμμικής θεωρίας, αντιληφθήκαμε την πραγματική συμπεριφορά του φορέα μας και προσεγγίσαμε την πραγματική του παραμορφωσιακή κατάσταση. Η γραμμική ανάλυση δίνει τις ιδιομορφές λυγισμού, μεμονωμένες

και ξεχωριστές για το εκάστοτε μέλος του φορέα, πράγμα το οποίο απέχει παρασάγγας από την «πραγματική» μη γραμμική συμπεριφορά. Για να γίνει πιο κατανοητό το παραπάνω αναφέρουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση της πρώτης ιδιομορφής (πρώτο κρίσιμο φορτίο), παρατηρήσαμε ότι και τα δυο μέλη του φορέα είχαν υποστεί σημαντικές παραμορφώσεις.

Επιπλέον, εκτελώντας μη γραμμική ανάλυση με χρήση του λογισμικού Sap2000, εξάγαμε το κρίσιμο μη γραμμικό φορτίο του φορέα μας, το οποίο ήταν ελαφρώς μικρότερο συγκριτικά με το αντίστοιχο κρίσιμο γραμμικό φορτίο. Αυτό ήταν κάτι το οποίο αναμέναμε καθώς η πραγματική συμπεριφορά του φορέα μας προτού εισέλθει στην «κατάσταση διαρροής» είναι πολύ κοντά στη γραμμική θεωρία. Τα αποτελέσματα της γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης για την ελαστική περιοχή είναι πολύ κοντά.

Τέλος, μελετήθηκε η επίδραση στην συμπεριφορά του χαλύβδινου φορέα κατά την εισαγωγή μιας γεωμετρικής ατέλειας. Το συμπέρασμα που προέκυψε από τη μελέτη αυτή, είναι ότι η ατέλεια έχει σημαντική επίδραση στο κρίσιμο φορτίο, άρα και στην αντοχή του φορέα μας. Συγκεκριμένα για μια διαφορά της κλίσης $1/200$ ως προς τον κατακόρυφο άξονα Z, η συνολική επίδραση στο κρίσιμο φορτίο ήταν της τάξεως του -3.6% , ποσοστό που κάθε άλλο παρά αμελητέο δεν είναι.

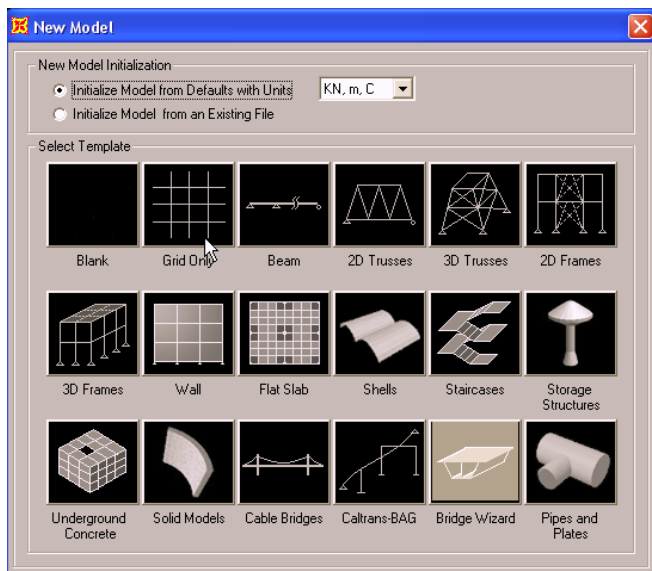
Παραρτήματα

Παράρτημα Α

Χρήση SAP2000 version 15

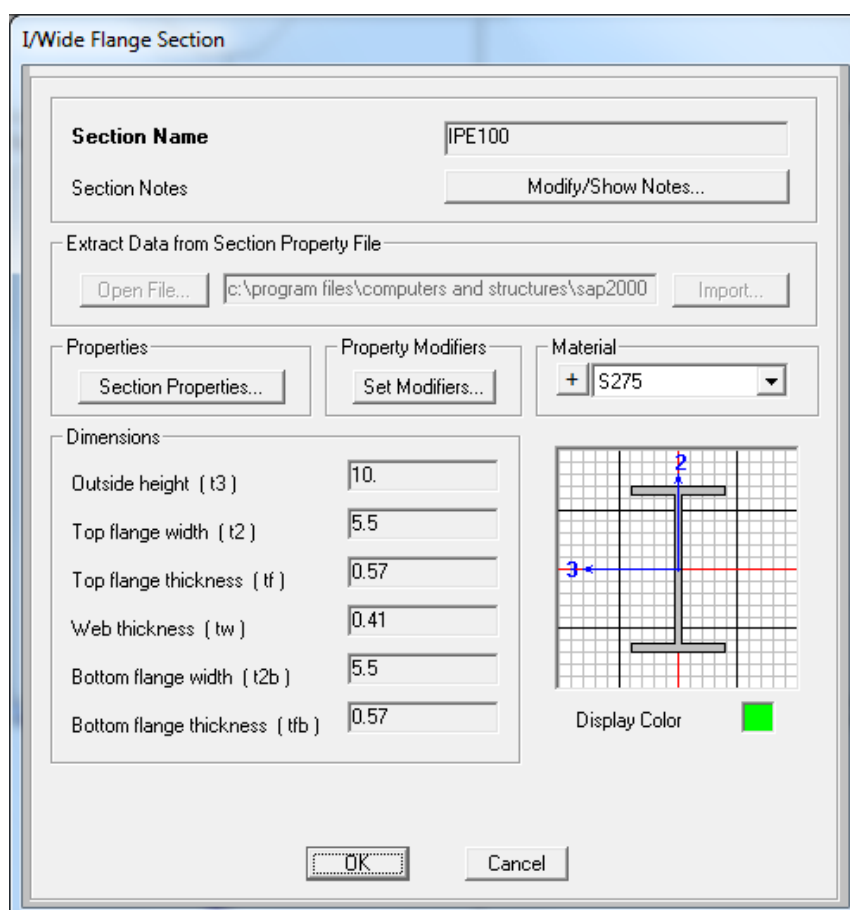
Το πρόγραμμα SAP2000 είναι ένα ευρέως διαδεδομένο λογισμικό ανάλυσης φορέων, που συνεχώς εξελίσσεται και χρόνια με τα χρόνια, αυξάνει θεαματικά τις δυνατότητες που παρέχει στο χρήστη. Με το πρόγραμμα αυτό μπορούν να πραγματοποιηθούν αναλύσεις πολλών ειδών · από απλές και σύνθετες στατικές αναλύσεις, απλών και σύνθετων φορέων, μέχρι πολύπλοκες σεισμικές αναλύσεις. Το εξαιρετικό γραφικό του περιβάλλον, δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη, της γρήγορης και πλήρους κατανόησης της λειτουργίας προγράμματος καθώς επίσης του παρέχει άμεσο και εύκολο εποπτικό έλεγχο.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η έκδοση 15 του προγράμματος. Το πρόγραμμα SAP2000 δίνει τη δυνατότητα ο φορέας και οι αντίστοιχες φορτιστικές καταστάσεις να δοθούν είτε μέσω αρχείου δεδομένων είτε με γραφικό τρόπο από το γραφικό του περιβάλλον. Εμείς δημιουργήσαμε το φορέα μας γραφικά, ορίζοντας αρχικώς τις διαστάσεις του κάναβου σχεδίασης και τις μονάδες μέτρησης των κύριων μεγεθών μας. Επιλέξαμε να ορίσουμε ως βασικές μονάδες μέτρησης τα Ν για τις δυνάμεις και τα mm για τα μήκη.



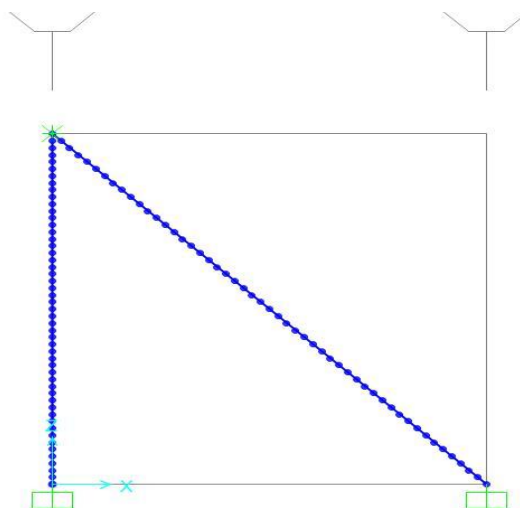
Σχήμα Α.1 Εισαγωγή κάναβου σχεδίασης στο SAP2000v15

Εν συνεχεία, έπρεπε να ορίσουμε τα υλικά μας όπως μας είναι γνωστά από τους Ευρωκώδικες. Αυτό γιατί τα αρχικά δεδομένα του προγράμματος είναι σχεδιασμένα σύμφωνα με τους Αμερικάνικους κανονισμούς. Ορίσαμε λοιπόν αρχικά το υλικό μας (Define Materials). Συγκεκριμένα ορίσαμε ως ποιότητα χάλυβα, το χάλυβα S275, με όριο διαρροής f_y , τα 275 N/mm^2 για διατομές με ονομαστικό πάχος στοιχείου $t \leq 40 \text{ mm}$ και τα 255 N/mm^2 για διατομές με $t \geq 40 \text{ mm}$. Ύστερα έπρεπε να εισάγουμε και τις διατομές με τις οποίες θα εργαστούμε. Από τις section properties και ειδικότερα από τα frames sections, βρήκαμε τις βιβλιοθήκες με όλες τις πρότυπες διατομές χάλυβα και εισάγαμε αυτήν με την οποία πρόκειται να εργαστούμε (IPE 100).



Σχήμα Α.2 Εισαγωγή διατομής IPE100 στο SAP2000v15

Μετά έγινε ο σχεδιασμός του φορέα μας, πράγμα το οποίο στο γραφικό περιβάλλον του SAP2000 είναι εύκολη και γρήγορη διαδικασία. Έχοντας επιλέξει συμμετρικό τετραγωνικό κάναβο διαστάσεων 5000mm/5000mm (5m/5m), και υλικό σχεδίασης IPE 100 (S275), πραγματοποιήθηκε η σχεδίαση του φορέα μας. Στη συνέχεια, τοποθετήσαμε τις συνθήκες στήριξης του φορέα μας και όλους του επιμέρους εσωτερικούς κόμβους. Η εισαγωγή των εσωτερικών κόμβων ήταν απαραίτητη για τις αναλύσεις που ακολούθησαν.



Σχήμα Α.3 Υπό μελέτη φορέας με εσωτερικούς κόμβους

Στατική ανάλυση φορέα

Η στατική ανάλυση του φορέα μας έγινε με την τοποθέτηση μοναδιαίου κατακόρυφου φορτίου P στον κοινό κόμβο σύνδεσης των 2 μελών. Η διαδικασία αυτή είναι μια απλή γραμμική στατική ανάλυση (Linear Static). Προτού βέβαια ξεκινήσει οποιαδήποτε ανάλυση, πρέπει να ορίσουμε το επίπεδο στο οποίο επιθυμούμε να πραγματοποιηθεί αυτή. Στη δική μας περίπτωση το επίπεδο αυτό είναι το X-Z, καθώς σε αυτό έχουμε σχεδιάσει το φορέα μας, καθώς επίσης είναι και το επίπεδο στο οποίο, μας ενδιαφέρουν οι αντιδράσεις αυτού. Το ζητούμενο διάγραμμα που μας ενδιέφερε από την ανάλυση αυτή, ήταν αυτό των αξονικών δυνάμεων. Το διάγραμμα αυτό έχει δοθεί στο κεφάλαιο 3, παράγραφο 3.2.2.

Ανάλυση σε λυγισμό (Buckling Analysis)

Η ανάλυση σε λυγισμό (buckling analysis) στο SAP2000 είναι μια πιο σύνθετη διαδικασία. Η ανάλυση βασίζεται στις αρχές της γραμμικής θεωρίας και τα αποτελέσματα της είναι αρκετά ικανοποιητικά. Η διαδικασία αυτής της ανάλυσης, δεν είναι αρχικώς ορισμένη ως «βασική» από το πρόγραμμα άρα πρέπει να την ορίσουμε εμείς (ο χρήστης).

Αρχικά και πριν ορίσουμε την ανάλυση πρέπει να ορίσουμε νέο είδος φορτίου. Το απαραίτητο νέο είδος φορτίου, ορίζεται από τη μπάρα στο μενού επιλογών και συγκεκριμένα:

Define→*Load Patterns*→*Add New Load Pattern*

Εδώ το νέο φορτίο πρέπει να είναι «ζωντανό» (*LIVE*) καθώς στη διαδικασία της ανάλυσης σε λυγισμό το φορτίο δεν πρέπει να έχει μια συγκεκριμένη τιμή, όπως στη διαδικασία της απλής στατικής ανάλυσης.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τη ανάλυση σε λυγισμό.

Define→*Load Cases*→*Add New Load Case*

Από εκεί εισάγουμε τον τύπο της ανάλυσης Load Case Type και τις επιμέρους λεπτομέρειες αυτής. Για παράδειγμα, επιλέγουμε ως αρχικές συνθήκες του φορέα μας την απαραμόρφωτη κατάσταση «μηδενικές αρχικές συνθήκες» (zero initial conditions) και θέτουμε ως φορτίο εφαρμογής, το νέο «ζωντανό» (*LIVE*) φορτίο που ορίσαμε προηγουμένως. Έπειτα ακολουθεί η τοποθέτηση του φορτίου μας στο φορέα μας. Η τοποθέτηση γίνεται με απλό τρόπο και μπορεί να γίνει είτε επικόμβια, είτε πάνω σε δοκό μέσω τοπικού συστήματος συντεταγμένων. Στην περίπτωση μας έγινε επικόμβια ορίζοντας την απαραίτητη διεύθυνση φόρτισης.

Assign→*Joint Loads*→*Forces*

Αφού τελειώσουμε με αυτό, είμαστε έτοιμοι για την διενέργεια της ανάλυσης μας. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής (κρίσιμα φορτία και ιδιομορφές λυγισμού) έχουμε παρατεθεί αναλυτικά στο κεφάλαιο 3, παράγραφο 3.3.2.1.

Μη γραμμική ανάλυση στο SAP2000

Προκειμένου να προσδιορισθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του φορέα μας, πραγματοποιήσαμε μια μη γραμμική στατική ανάλυση με τη βοήθεια του λογισμικού SAP2000. Στόχος μας, ήταν η εύρεση του μη γραμμικού κρίσιμου φορτίου καθώς και η σύγκριση του με το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο, που εξάγαμε από την προηγούμενη ανάλυση του φορέα μας, σε λυγισμό βάσει της γραμμικής θεωρίας. Όπως ήταν αναμενόμενο το κρίσιμο μη γραμμικό φορτίο, υπολογίστηκε ελαφρώς μικρότερο, σε σχέση με το αντίστοιχο γραμμικό ($384\text{kN} < 388.83\text{kN}$).

Ο ορισμός της ανάλυσης αυτής, έγινε με ανάλογο τρόπο με αυτόν της ανάλυσης σε λυγισμό:

Load Case Data - Nonlinear Static

Load Case Name: NLSTAT2 Notes: Load Case Type: Static

Initial Conditions: Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State

Modal Load Case: All Modal Loads Applied Use Modes from Case: MODAL

Load Type	Load Name	Scale Factor
Load Pattern	P	1.
Load Pattern	P	1.

Other Parameters: Load Application: Full Load Results Saved: Multiple States Nonlinear Parameters: User Defined

Σχήμα Α.4 Εισαγωγή δεδομένων μη γραμμικής ανάλυσης στο SAP2000v15

Εδώ δόθηκαν τα παραπάνω δεδομένα (σχήμα Α.4) με την ειδική επιλογή των πολλαπλών βημάτων (multiple states), *minimum και maximum saved states τα 200*. Η εισαγόμενη τελική τιμή του φορτίου P ήταν τα 400000N ($= 400\text{kN}$). Τα αποτελέσματα της διαδικασίας αυτής

παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3, παράγραφο 3.4. Το πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε εδώ ήταν ότι δεν καταφέραμε να εξάγουμε απευθείας από το πρόγραμμα το ζητούμενο διάγραμμα P-δ. Ενώ είχαμε τις 192 αποθηκευμένες τιμές (192 steps), δεν κατέστη δυνατή η απευθείας εξαγωγή του διαγράμματος για την ζητούμενη κατακόρυφη αξονική μετατόπιση δ , του κατακόρυφου μέλους του φορέα μας. Για το λόγο αυτό, εισάγαμε τις τιμές σε ένα φύλλο εργασίας excel και από εκεί εξάγαμε το ζητούμενο διάγραμμα.

Η ίδια ακριβώς μεθοδολογία ακολουθήθηκε και για την περίπτωση του ατελούς φορέα, δίνοντας του κλίση $1/200$ ως προς τον κατακόρυφο άξονα Z.

Παράρτημα Β

Χρήση MATLAB R2013b

α) Λίγα λόγια για το MATLAB

Το *MATLAB* (*MATrix LABORatory/Math Works Inc.*) είχε φτιαχτεί αρχικά ως πακέτο γραμμικής άλγεβρας για υπολογισμούς με πίνακες. Στη συνέχεια εξελίχθηκε και πλέον έχει βρει εφαρμογές σε πολλά γνωστικά πεδία. Το MATLAB παρέχει ένα δυναμικό, εύχρηστο και ανοικτό υπολογιστικό περιβάλλον για υλοποίηση επιστημονικών εφαρμογών σε ένα μεγάλο φάσμα πεδίων, όπως στη Γραμμική Άλγεβρα, Στατιστική, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Αριθμητική Ανάλυση και Επιστημονικό Υπολογισμό, Επεξεργασία Σημάτων και Εικόνας, Θεωρία Ελέγχου, Θεωρία Βελτιστοποίησης και Γραφικά. Έχει υλοποιηθεί σε πολλές λειτουργικές πλατφόρμες (όπως Windows, Macintosh OS και Unix) και δύο βασικές εκδόσεις, την επαγγελματική και την εκπαιδευτική (student edition). Το περιβάλλον του MATLAB υποστηρίζει ένα μεγάλο αριθμό ενδογενών λειτουργιών και συναρτήσεων καθώς και εξωτερικές βιβλιοθήκες (Toolboxes) για εξειδικευμένες περιοχές εφαρμογών. Υποστηρίζει επίσης μια ευέλικτη, απλή και δομημένη γλώσσα προγραμματισμού (script language) με πολλές ομοιότητες με την Pascal και παρέχει δυνατότητες εύκολης δημιουργίας, διασύνδεσης και χρήσης βιβλιοθηκών σε κώδικα γραμμένο στη γλώσσα αυτή (M files). Το MATLAB εκτελεί από απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς μέχρι και προγράμματα με εντολές παρόμοιες με αυτές που υποστηρίζει μια γλώσσα υψηλού επιπέδου. Συγκεκριμένα εκτελεί απλές μαθηματικές πράξεις, αλλά εξίσου εύκολα χειρίζεται μιγαδικούς αριθμούς, δυνάμεις, ειδικές μαθηματικές συναρτήσεις, πίνακες, διανύσματα και πολυώνυμα. Μπορεί επίσης να αποθηκεύει και να ανακαλεί δεδομένα, να δημιουργεί και να εκτελεί ακολουθίες εντολών που αυτοματοποιούν διάφορους υπολογισμούς και να σχεδιάζει γραφικά. Οι λειτουργίες του MATLAB διακρίνονται στις *τυποποιημένες*, δηλαδή σε αυτές που χειρίζονται αριθμητικά δεδομένα και εξάγουν αριθμητικά αποτελέσματα, και στις συναρτήσεις του *Symbolic Toolbox*, οι οποίες χειρίζονται και υπολογίζουν *συμβολικές* εκφράσεις, δηλαδή επεξεργάζονται μαθηματικά σύμβολα.

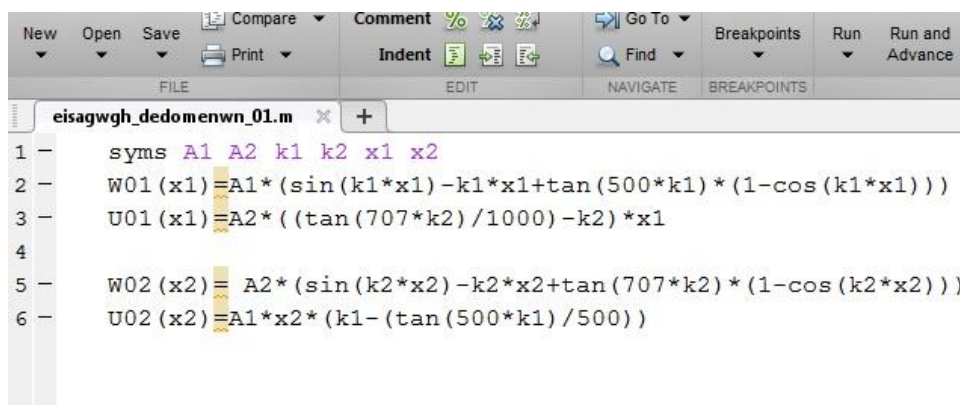
b) Στόχος χρήσης του MATLAB

Ο προγραμματισμός και η διενέργεια της ενεργειακής μεθόδου μελέτης ελαστικής ευστάθειας καθώς επίσης και της παραμορφωμένης κατάστασης του πλαισίου βάσει της μη γραμμικής θεωρίας για τον υπό μελέτη φορέα.

c) Εισαγωγή δεδομένων

Εισάγαμε στο MATLAB τις σχέσεις που περιγράφουν την παραμορφωσιακή κατάσταση του προβλήματος, όπως αυτές απλοποιήθηκαν μετά τη επεξεργασία των συνοριακών συνθηκών του φορέα μας. Όλες οι διεργασίες υλοποιήθηκαν με χρήση m.files για μεγαλύτερη ευελιξία και καλύτερο έλεγχο του προγράμματος μας. Στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι η σειρά εκτέλεσης των m.files είναι αύξουσα με αφετηρία το πρόθεμα **a01** των m.files και τέλος Όλα τα αρχεία περιέχονται στο CD που συνοδεύει την παρούσα διπλωματική εργασία.

Τα αρχικά δεδομένα δόθηκαν ορίζοντας τις μεταβλητές μας συμβολικές (symbolic).



```
1 - syms A1 A2 k1 k2 x1 x2
2 - W01(x1)=A1*(sin(k1*x1)-k1*x1+tan(500*k1)*(1-cos(k1*x1)))
3 - U01(x1)=A2*((tan(707*k2)/1000)-k2)*x1
4
5 - W02(x2)=A2*(sin(k2*x2)-k2*x2+tan(707*k2)*(1-cos(k2*x2)))
6 - U02(x2)=A1*x2*(k1-(tan(500*k1)/500))
```

Σχήμα B.1 Εισαγωγή δεδομένων στο MATLAB (m.file)

d) Υπολογισμός Ενεργειακού Δυναμικού

Για τον υπολογισμό του ενεργειακού δυναμικού φτιάξαμε ένα m.file το οποίο εκτελεί κάποιες πράξεις που εισάγονται στην εξίσωση εύρεσης του ενεργειακού δυναμικού (a02_voh8htiko_gia_energeiako_dunamiko.m). Στη συνέχεια και με την εκτέλεση του

a03_euresh_energeiakou_dunamikou.m υπολογίζουμε την εξίσωση του ενεργειακού δυναμικού του φορέα μας.

```

FILE          EDIT          NAVIGATE  BREAKPOINTS  RUN
Vpak_i.m  x  Vpak_ijkl.m  x  pro_sub_pak.m  x  a03_euresh_energeiakou_dunamikou.m  x  +
1 -      syms a1 a2 E I1 I2 P
2 -      % Για το Μέλος 1
3 -      V1(x1) == (1/2)*E*a1*(int(ee1,x1,0,500))+(1/2)*E*I1*(int(KK1,x1,0,500))
4 -      % Για το Μέλος 2
5 -      V2(x2) == (1/2)*E*a2*(int(ee2,x2,0,707))+(1/2)*E*I2*(int(KK2,x2,0,707))
6
7 -      %Για το σύνολο του φορέα μας
8 -      Vtot == V1(x1)+V2(x2)
9 -      V == Vtot-P*U01(500)

```

Σχήμα Β.2 Υπολογισμός ενεργειακού δυναμικού του υπό μελέτη φορέα

$$\begin{aligned}
 V = & 500*A2*P*(k2 - \tan(707*k2)/1000) + (E*a1*(A2^2/(2000*\cos(707*k2)^2) - A2^2/2000 + \\
 & 500*A2^2*k2^2+125*A1^4*k1^4-(25*A1^4*k1^3*\tan(500*k1))/48+ (375*A1^4*k1^4)/\cos(500*k1)^2+ \\
 & (375*A1^4*k1^4)/(8*\cos(500*k1)^4)- A2^2*k2*\tan(707*k2) + (A1^2*A2*k1^2*\tan(707*k2))/2 - \\
 & 500*A1^2*A2*k1^2*k2 - (55*A1^4*k1^3*\tan(500*k1))/(96*\cos(500*k1)^2) - \\
 & (250*A1^2*A2*k1^2*k2)/\cos(500*k1)^2 - (3*A1^2*A2*k1*\tan(500*k1)*\tan(707*k2))/2000 + \\
 & (3*A1^2*A2*k1*k2*\tan(500*k1))/2 + (A1^2*A2*k1^2*\tan(707*k2))/(4*\cos(500*k1)^2))/2 + \\
 & (E*a2*((707*A1^2)/(250000*\cos(500*k1)^2) - (707*A1^2)/250000 + 707*A1^2*k1^2 + \\
 & (707*A2^4*k2^4)/4 - (25*A2^4*k2^3*\tan(707*k2))/48 + (2121*A2^4*k2^4)/(4*\cos(707*k2)^2) + \\
 & (2121*A2^4*k2^4)/(32*\cos(707*k2)^4) - (707*A1^2*k1*\tan(500*k1))/250 - \\
 & (707*A1*A2^2*k2^2*\tan(500*k1))/500 + 707*A1*A2^2*k1*k2^2 - \\
 & (55*A2^4*k2^3*\tan(707*k2))/(96*\cos(707*k2)^2)+ (707*A1*A2^2*k1*k2^2)/(2*\cos(707*k2)^2) + \\
 & (3*A1*A2^2*k2*\tan(500*k1)*\tan(707*k2))/1000 - (3*A1*A2^2*k1*k2*\tan(707*k2))/2 - \\
 & (707*A1*A2^2*k2^2*\tan(500*k1))/(1000*\cos(707*k2)^2))/2 - (A1^2*E*I1*((k1^3*\sin(1000*k1))/4 - \\
 & 250*k1^4))/(2*\cos(500*k1)^2) - (A2^2*E*I2*((k2^3*\sin(1414*k2))/2 - 707*k2^4))/(4*\cos(707*k2)^2)
 \end{aligned}$$

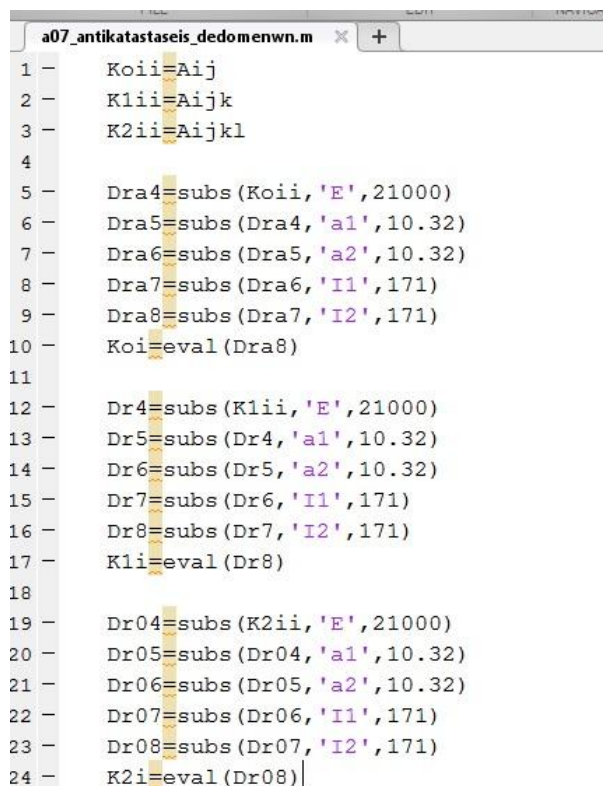
(μαθηματική έκφραση του ενεργειακού δυναμικού a_1, a_2 – εμβαδόν διατομών, E – μέτρο ελαστικότητας)

ε) Γενικός τρόπος έκφρασης της V

Για το γενικό τρόπο έκφρασης της εξίσωσης του ενεργειακού δυναμικού του φορέα μας είναι απαραίτητη η εύρεση συγκεκριμένων μητρώων μέσω ενός μηχανισμού σύμπτυξης της εξίσωσης V. Τα μητρώα αυτά υπολογίζονται με την εκτέλεση του *a05_genikh_morph_V.m*.

ϛ) Αντικαταστάσεις δεδομένων

Στο σημείο αυτό κάναμε αντικατάσταση κάποιων δεδομένων της ανάλυσης μας για να αρχίσει η διαδικασία υπολογισμού των συναρτήσεων των ιδιομορφών μας (παραμορφωσιακής κατάστασης). Τα δεδομένα που εισάγαμε είναι για το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα $E=21000\text{kN/cm}^2$ και για τις όμοιες διατομές IPE 100, $I_1=I_2=171\text{cm}^4$ για τη ροπή αδράνειας και για το εμβαδόν $a_1=a_2=10.32\text{cm}^2$.



```
a07_antikatastaseis_dedomenwn.m x +
1 - K011=Aij
2 - K111=Aijk
3 - K211=Aijkl
4
5 - Dra4=subs(K011,'E',21000)
6 - Dra5=subs(Dra4,'a1',10.32)
7 - Dra6=subs(Dra5,'a2',10.32)
8 - Dra7=subs(Dra6,'I1',171)
9 - Dra8=subs(Dra7,'I2',171)
10 - K01=eval(Dra8)
11
12 - Dr4=subs(K111,'E',21000)
13 - Dr5=subs(Dr4,'a1',10.32)
14 - Dr6=subs(Dr5,'a2',10.32)
15 - Dr7=subs(Dr6,'I1',171)
16 - Dr8=subs(Dr7,'I2',171)
17 - K11=eval(Dr8)
18
19 - Dr04=subs(K211,'E',21000)
20 - Dr05=subs(Dr04,'a1',10.32)
21 - Dr06=subs(Dr05,'a2',10.32)
22 - Dr07=subs(Dr06,'I1',171)
23 - Dr08=subs(Dr07,'I2',171)
24 - K21=eval(Dr08)|
```

Σχήμα Β.3 Αντικαταστάσεις δεδομένων

g) Εύρεση συναρτήσεων παραμορφωσιακής κατάστασης

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα στην παράγραφο 3.3.1, κάναμε χρήση των τιμών των φορτίων που πήραμε από τη γραμμική ανάλυση με τη χρήση του SAP2000 (βλέπε παράρτημα Α). Αυτό έγινε επειδή συναντήσαμε κάποια ανυπέρβλητα μαθηματικά εμπόδια. Το βασικό μας πρόβλημα έχει να κάνει με την μαθηματική επίλυση ενός πολύπλοκου μη γραμμικού συστήματος, έχοντας βασικό εμπόδιο τη μορφή γνωστών-αγνώστων σταθερών και μεταβλητών σε πεπλεγμένες και μη εκφράσεις τριγωνομετρικών αριθμών. Με το MATLAB η επίλυση αυτή δεν κατέστη εφικτή.

Παίρνοντας λοιπόν τις τιμές του P_{cr} από τη γραμμική ανάλυση, αυτό που χρειάστηκε να κάνουμε ήταν η κατασκευή ενός κριτηρίου σύγκλισης για την αρχή της στασίμου τιμής. Φτιάξαμε λοιπόν, έναν μαθηματικό αλγόριθμο σύγκλισης κάνοντας χρήση της εντολής *abs* (απόλυτη τιμή), της επαναληπτικής εντολής *while* (ενώ) και της εντολής *if* (αν). Παρακάτω παραθέτουμε τον αλγόριθμο για το πρώτο κρίσιμο φορτίο P_{cr1} . Για τις υπόλοιπες κρίσιμες τιμές, ο «όμοιος» αλγόριθμος (με διαφορετικές τιμές φορτίου P) βρίσκεται στο CD που συνοδεύει τη διπλωματική εργασία.

```
a08_sub_Pcr1.m x +
1 % Αντικαθιστώντας το Pcr1 από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού του φορέα
2 %  $k_i^2 = N_i / EI_i$  (με  $N_i$  αξονική τάση μέλους και  $I_i$  ροπή αδράνειας του μέλους i)
3
4 - Aisc=subs(Ai,'P',388.83)
5 - Aiss=subs(Aisc,'k1',8.9513*10^(-3))
6 - Ais=subs(Aiss,'k2',6.3296*10^(-3))
7 - Koic=subs(Koi,'P',388.83)
8 - Kois=subs(Koic,'k1',8.9513*10^(-3))
9 - Koiss=subs(Kois,'k2',6.3296*10^(-3))
10 - Klis=subs(Kli,'k1',8.9513*10^(-3))
11 - Kliss=subs(Klis,'k2',6.3296*10^(-3))
12 - K2is=subs(K2i,'k1',8.9513*10^(-3))
13 - K2iss=subs(K2is,'k2',6.3296*10^(-3))
14
15 - Koisse=eval(Koiss)
16 - Klisse=eval(Kliss)
17 - K2isse=eval(K2iss)
```

Σχήμα Β.4 a08_sub_Pcr1_part_1

```

18
19 % Έναρξη διαδικασίας εύρεσης στάσιμου τιμής
20 Qiid=Koisse\Ais
21 Qii=eval(Qiid)
22 AX1=Qii(1)
23 AX2=Qii(2)
24
25 % Κριτήριο σύγκλισης κάνοντας χρήση εντολής abs-απόλυτη τιμή
26 chicago=0
27 count=1
28 while chicago~=1
29
30 Kttt1=subs(Klisse,'A1',AX1)
31 Kt1=subs(Kttt1,'A2',AX2)
32
33 Kttt2=subs(K2isse,'A1',AX1)
34 Kt2=subs(Kttt2,'A2',AX2)
35
36 Kttot=Koisse+1/2*Kt1+1/6*Kt2
37
38 Qiiid=Kttot\Ais
39 Qiii=eval(Qiiid)
40 AY1=Qiii(1)
41 AY2=Qiii(2)
42
43 zx1=abs(AX1)
44 zx2=abs(AX2)
45
46 zy1=abs(AY1)
47 zy2=abs(AY2)
48
49 if zx1>=zy1
50 z1=zx1-zy1
51 else
52 z1=zy1-zx1
53 end
54
55 if zx2>=zy2
56 z2=zx2-zy2
57 else
58 z2=zy2-zx2
59 end
60
61 if z1<10^(-11) & z2<10^(-11)
62 chicago=1
63 else
64 AX1=AY1
65 AX2=AY2
66 count=count+1
67 end
68
69 end

```

Σχήμα Β.4 a08_sub_Pcr1_part_2

Για την πρώτη ιδιομορφή (P_{cr1}) μετά από 51 επαναλήψεις ικανοποιήθηκε το κριτήριο σύγκλισης και υπολογίστηκαν οι σταθερές A_1 και A_2 , $A_1 = -0.2550$ και $A_2 = 0,7738$.

Για την 3^η, 4^η, 5^η και 6^η ιδιομορφή, επειδή η τιμή του φορτίου αυξήθηκε σημαντικά μειώσαμε την απαιτούμενη αριθμητική τιμή σύγκλισης της διαφορών των δυο διαδοχικών τιμών των σταθερών μας από 10^{-11} σε 10^{-13} . Τα αποτελέσματα όλων των κρίσιμων φορτίων έχουν παρατεθεί στο κεφάλαιο 3, παράγραφο 3.3.2.2.

h) Εξαγωγή γραφικών παραστάσεων

Για καλύτερο έλεγχο και για πιο εύκολη εποπτεία, η διαδικασία εξαγωγής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων σχήματος W_i και U_i έγινε σε ξεχωριστά m.files για κάθε περίπτωση του κρίσιμου φορτίου. Στην περίπτωση της 1^{ης} ιδιομορφής, έχουμε δημιουργήσει και την γραφική παράσταση της σύνθεσης των δυο παραμορφώσεων. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, έχουμε δημιουργήσει τις γραφικές απεικονίσεις, όπως τις έχουμε παρουσιάσει στο κεφάλαιο 3, παράγραφο 3.3.2.2. Παρακάτω στο σχήμα B.5, παραθέτουμε τον κώδικα για την κατασκευή των διαγραμμάτων τις τιμές της 1^{ης} ιδιομορφής (P_{cr1}).

```
a14_diagrams_Pcr1.m x +
1      % Εισαγωγή τιμών A1 και A2 για Pcr1 από a08_sub_Pcr1
2
3      % x1 σε cm
4 -    x1=0:1:500;
5
6 -    w=subs(W01,'A1',AY1);
7 -    W1=subs(w,'k1',8.9513*10^(-3))
8
9 -    u=subs(U01,'A2',AY2);
10 -   U1=subs(u,'k2',6.3296*10^(-3))
11
```

Σχήμα B.5 a08b_diagrams_Pcr1_part_1

```

11
12 % Μετατροπή συμβολικών εκφράσεων σε μορφή συνάρτησης/πίνακα
13
14 - A=eval(W1)
15 - C=eval(U1)
16 - L_1=0:1:500;
17 - D=L_1+C
18
19 % Κατασκευή διαγραμμάτων {x1,W1(x1)} και {x1,U1(x1)}
20 - plot(x1,A)
21 - figure
22 - plot(x1,C)
23
24 % Κατασκευή κοινού διαγράμματος/ιδιομορφής
25 - figure
26 - plot(D,A)
27
28 % x2 σε cm
29 - x2=0:1:707;
30
31 - w2=subs(W02,'A2',AY2);
32 - W2=subs(w2,'k2',6.3296*10^(-3))
33
34 - u2=subs(U02,'A1',AY1);
35 - U2=subs(u2,'k1',8.9513*10^(-3))
36
37 % Μετατροπή συμβολικών εκφράσεων σε μορφή συνάρτησης/πίνακα
38 - AA=eval(W2)
39 - CC=eval(U2)
40 - L_2=0:1:707
41 - DD=L_2+CC
42
43 % Κατασκευή διαγραμμάτων {x2,W2(x2)} και {x2,U2(x2)}
44 - figure
45 - plot(x2,AA)
46 - figure
47 - plot(x2,CC)
48
49 % Κατασκευή κοινού διαγράμματος/ιδιομορφής
50 - figure
51 - plot(DD,AA)
52

```

Σχήμα B.5 a08b_diagrams_Pcr1_part_2

Οι τιμές των μεταβλητών k_1 και k_2 είναι οι τιμές που έχουν χρησιμοποιηθεί και νωρίτερα στο πρόγραμμα και οι τιμές τους προκύπτουν από τη σχέση $k_i^2 = N_i / EI_i$, I_i τη ροπή αδράνειας του μέλους, E το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα και N_i , την αξονική δύναμη του εν λόγω μέλους.

Τέλος, θα αναφέρουμε ότι η σειρά εκτέλεσης των *m.files* είναι όπως παρουσιάζεται παραπάνω στο παράρτημα, με τη διαφορά ότι για κάθε P_{cr} αφού υπολογίζεται η τιμή των σταθερών A_i στη συνέχεια εξάγουμε τις γραφικές παραστάσεις και μετά προχωράμε στην ανάλυση του επόμενου κρίσιμου φορτίου. Δηλαδή:

... a08_sub_ P_{cr1} **→ a08b_diagrams_** P_{cr1} **→ a09_sub_** P_{cr2} **→ a09b_diagrams_** P_{cr2} ...

Βιβλιογραφία

1. Timoshenko, St. Gere, J. (1961), Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill Co. Inc., New York.
2. Κουνάδης, Α. Ν. (1997), Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας, β' έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.
3. Κουνάδης, Α. Ν. (2004), Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας, β' έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.
4. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Ι. Ιωαννίδης, Ι. (2005), Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
5. Παπαδόπουλος, Ε. Εγχειρίδιο MATLAB SIMULINK, 2.3.08.6 Εισαγωγή στη Θεωρία και Τεχνολογία του Αυτομάτου Ελέγχου, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών.
6. Ευρωκώδικας 3, Σχεδιασμός Μεταλλικών Κατασκευών (ENV 1993).
7. Μαρινάκης, Γ. «Σημειώσεις σεμιναριακών διαλέξεων προγραμματισμού Η/Υ σε περιβάλλον MATLAB (version 7.0.1 - release 14)».
8. Γαντές, Χ. Σημειώσεις του μαθήματος του 9^{ου} εξαμήνου Ε.Μ.Π τμήμα Πολιτικών Μηχανικών «Μη γραμμική ανάλυση μεταλλικών κατασκευών».
9. Παπαλοΐζου, Α. Πολυκάρπου, Π. Κωμοδρόμος, Π. «Σημειώσεις για το πρόγραμμα SAP2000 Version 10». Πανεπιστήμιο Κύπρου, Πολυτεχνική Σχολή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Περιβάλλοντος.

10. Ioannidis, G. Raftoyiannis, I. and Kounadis, A. (2005), “Imperfect frames exhibiting bifurcational instability”, Eurosteel Conference on Steel and Composite Structures, Maastricht, The Netherlands, 8-10 June 2005, Proceedings, Vol. A, pg 1.4-89 to 1.4-96.

11. Παπαδρακάκης, Μ. Κατσικαδέλης, Ι.Θ. Σαπουντζάκης, Ε. Ι. Νερατζάκη, Μ. Ν. (2008) «Σύγχρονες Μέθοδοι Αναλύσεως Φορέων». ΕΜΠ Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, τομέας δομοστατικής.