



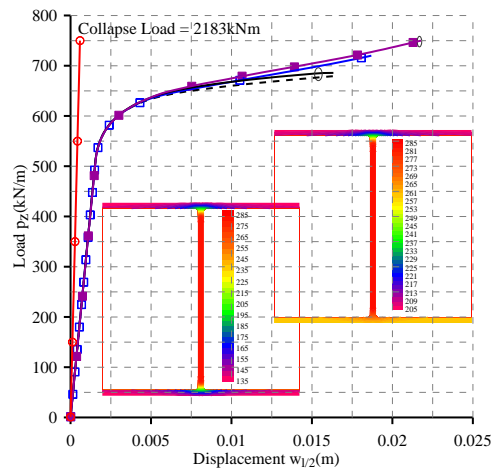
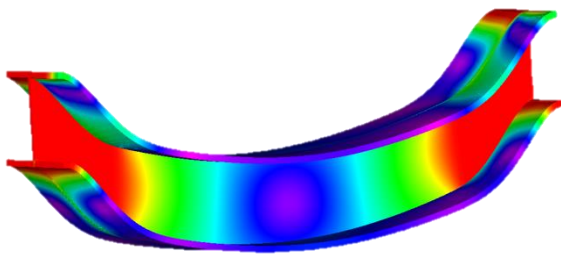
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΒΙΤΑΛΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:

ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Ε. Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΚΑΜΠΙΤΣΗΣ Α. Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Μ.Π

Αθήνα, Αύγουστος 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Εισαγωγή.....	1
1	Στοιχεία μηχανικής συνεχούς μέσου, θεωρίας ελαστικότητας και πλαστικότητας.....	3
1.1	Θεωρία παραμόρφωσης.....	3
1.1.1	Μετατοπίσεις.....	3
1.1.2	Παραμορφώσεις.....	4
1.1.3	Μεταβολή μήκους απειροστού στοιχείου.....	5
1.1.4	Μεταβολή κατεύθυνσης απειροστού στοιχείου.....	8
1.1.5	Μεταβολή όγκου απειροστού στοιχείου.....	11
1.1.6	Μεταβολή επιφάνειας απειροστού στοιχείου.....	12
1.1.7	Απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης.....	13
1.2	Θεωρία τάσης.....	14
1.2.1	Διάνυσμα τάσης.....	14
1.2.2	Τανυστής τάσης Cauchy.....	16
1.2.3	Εξισώσεις ισορροπίας.....	16
1.2.4	1 ^{ος} τανυστής Piola-Kirchoff.....	19
1.2.5	Αρχή δυνατών έργων.....	21
1.2.6	2 ^{ος} τανυστής Piola-Kirchoff.....	23
1.2.7	Φυσική σημασία τανυστών τάσης.....	25
1.2.8	Τανυστής τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεις.....	26
1.3	Συνθήκες συμβιβαστού παραμόρφωσης.....	27
1.4	Καταστατικές εξισώσεις ελαστικών υλικών.....	28
1.5	Ελαστοστατικά προβλήματα συνοριακών τιμών.....	32
1.6	Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας και κλασσικής πλαστικότητας.....	34
1.6.1	Θεωρία υπερελαστικότητας.....	34
1.6.2	Θεωρία κλασσικής πλαστικότητας.....	39
1.6.2.1	Θεωρία μικρών μετατοπίσεων – μικρών παραμορφώσεων	39
1.6.2.2	Θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων – μικρών παραμορφώσεων.....	46

1.7	Μη γραμμικότητα υλικού.....	46
1.7.1	Εισαγωγή.....	46
1.7.2	Γραμμικά ελαστικά υλικά.....	46
1.7.3	Γραμμικά ελαστικά – απολύτως πλαστικά υλικά.....	47
1.7.4	Γραμμικά ελαστικά – γραμμικά κρατυνόμενα υλικά.....	48
2	Ομοιόμορφη διάτμηση δοκού.....	51
2.1	Εισαγωγή.....	51
2.2	Διατύπωση προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης.....	59
2.3	Ολοκληρωτικές παραστάσεις – αριθμητική επίλυση.....	74
	Γεωμετρικά μη γραμμική ανελαστική ανάλυση	
3	δοκών με επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων.....	81
3.1	Διατύπωση του προβλήματος.....	81
3.1.1	Μετατοπίσεις – παραμορφώσεις – τάσεις.....	81
3.1.2	Εξισώσεις ισορροπίας και συνοριακές συνθήκες.....	85
3.1.3	Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης.....	88
3.2	Αριθμητική επίλυση.....	90
3.2.1	Αριθμητικός υπολογισμός των μετατοπίσεων και των στροφών	90
3.2.2	Αλγόριθμος επίλυσης.....	95
4	Αριθμητικά παραδείγματα.....	99
4.1	Δοκός διατομής HEA600.....	99
4.2	Συμπαγής δοκός ορθογωνικής διατομής.....	103
4.3	Δοκός διατομής I.....	103
	Συμπεράσματα.....	115
	Παράρτημα 1.....	117
	Βιβλιογραφία.....	123

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη Γεωμετρικά Μη Γραμμική Ανελαστική Ανάλυση Δοκών προσπαθώντας να αναδείξει τη σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της μη γραμμικότητας υλικού στην απόκρισή τους, καθώς επίσης και την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτό, κρίθηκε απαραίτητο η διπλωματική να έχει την εξής μορφή:

- Κεφάλαιο 1: Στοιχεία μηχανικής του συνεχούς μέσου, θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας πλαστικότητας. Αναλύονται βασικές έννοιες, ώστε στη συνέχεια να γίνουν αντιληπτά πιο σύνθετα προβλήματα.
- Κεφάλαιο 2: Ομοιόμορφη διάτμηση δοκού. Διατύπωση του προβλήματος και αριθμητική επίλυσή του.
- Κεφάλαιο 3: Γεωμετρικά μη γραμμική ανελαστική ανάλυση δοκών με επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων. Διατύπωση του προβλήματος και αριθμητική επίλυσή του.
- Κεφάλαιο 4: Αριθμητικά παραδείγματα .Παρουσιάζονται και σχολιάζονται εκτενώς τα αποτελέσματα των αναλύσεων που έγιναν και αφορούν στην ανελαστική απόκριση διαφόρων τύπων δοκών.
- Συμπεράσματα επί των αναλύσεων που προηγήθηκαν.
- Παράρτημα 1: Η πεδιακή ΒΕΜ για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης. Αναλύονται βασικές έννοιες της μεθόδου, βάσει της οποίας εκτελούνται οι αναλύσεις των αριθμητικών παραδειγμάτων που παρουσιάζονται προηγουμένως.

Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Σαπουντζάκη Ευάγγελο (Καθηγητή ΕΜΠ) και κ. Καμπίτση Ανδρέα (Υποψήφιο Διδάκτορα ΕΜΠ) για τη συνεχή βοήθεια, καθοδήγηση και επίλυση αποριών καθ' όλο το χρονικό διάστημα που διήρκησε η εργασία αυτή, καθώς επίσης και την οικογένειά μου για τη στήριξη και τη συμπαράσταση καθ' όλη τη διάρκεια του πενταετούς κύκλου σπουδών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στοιχεία Μηχανικής Συνεχούς Μέσου, Θεωρίας Ελαστικότητας και Πλαστικότητας

1.1 Θεωρία Παραμόρφωσης

1.1.1 Μετατοπίσεις

Θεωρούμε παραμορφώσιμο σώμα, το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$ καταλαμβάνει την περιοχή Q του χώρου. Στη γενική περίπτωση ο χώρος είναι τριδιάστατος. Θεωρούμε επίσης σταθερό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$. Η αρχική θέση τυχόντος σημείου P του σώματος περιγράφεται από τις χωρικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3 . Σε τυχούσα χρονική στιγμή t , η θέση του σώματος μεταβάλλεται με αποτέλεσμα να καταλαμβάνει πλέον την περιοχή Q' . Η τελική θέση του σημείου P συμβολίζεται με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Οι συντεταγμένες της τελικής θέσης του P δίδονται ως

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t) \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t) \quad \xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\alpha, \beta, \gamma)$$

Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις χωρικές συντεταγμένες και τον χρόνο. Η φυσική σημασία της υπόθεσης αυτής είναι ότι στο παραμορφώσιμο σώμα δεν αναπτύσσονται ρωγμές σε καμία χρονική στιγμή. Επιπλέον, απαιτούμε να υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του P και του P' , δηλαδή η μετατόπιση του σώματος να είναι μονοσήμαντη. Τούτο σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις συντεταγμένες της τελικής θέσης ως ανεξάρτητες συντεταγμένες του χώρου και να εκφράσουμε τις συντεταγμένες της αρχικής θέσης ως

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\alpha, \beta, \gamma)$$

Η περιγραφή των σχέσεων (1.1.1) καλείται περιγραφή Lagrange, ενώ η περιγραφή των σχέσεων (1.1.2) καλείται περιγραφή Euler. Με την περιγραφή Lagrange εστιάζουμε σε συγκεκριμένο υλικό σημείο $P(x_1, x_2, x_3)$ του σώματος και μελετούμε τη μετατόπιση του ως προς το χρόνο. Με την περιγραφή Euler εστιάζουμε σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και μελετούμε τα υλικά σημεία που διέρχονται από το σημείο αυτό σε κάθε χρονική στιγμή t .

Στην περίπτωση που μελετούμε τη θέση του σώματος σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t , τότε οι παραπάνω σχέσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

Η μετατόπιση του σημείου P ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.1.3)$$

όπου $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν τους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 του συστήματος αναφοράς, αντίστοιχα, ενώ u_1, u_2, u_3 είναι οι συνιστώσες της μετατόπισης οι οποίες ορίζονται ως

$$u_1 = \xi_1 - x_1 \quad u_2 = \xi_2 - x_2 \quad u_3 = \xi_3 - x_3 \quad (1.1.4\alpha, \beta, \gamma)$$

Το διάνυσμα \mathbf{u} μπορεί να συμβολιστεί απλά και ως $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Είναι προφανές ότι $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ και ότι οι συνιστώσες u_1, u_2, u_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις συντεταγμένες του χώρου. Το πεδίο μετατοπίσεων δεν μπορεί να είναι αυθαίρετο. Προκειμένου να ισχύει η αντιστοιχία 1-1 μεταξύ των P και P' , αποδεικνύεται ότι πρέπει να ισχύει

$$J = |\mathbf{X}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.1.5)$$

όπου \mathbf{X} είναι μητρώο διαστάσεων 3×3 το οποίο καλείται διανυσματική κλίση ή βαθμίδα παραμόρφωσης (deformation gradient), ενώ J είναι η ορίζουσα του \mathbf{X} . Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στην αρχική του θέση, ισχύει $u_1=0, u_2=0, u_3=0$. Συνεπώς, προκύπτει εύκολα ότι

$$J(t=0) = 1 \quad (1.1.6)$$

Επειδή η J πρέπει να είναι συνεχής και ως προς το χρόνο, από τις (1.1.5), (1.1.6) προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει

$$J > 0, \forall t \geq 0 \quad (1.1.7)$$

Η εξ.(1.1.7) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των P και P' για κάθε χρονική στιγμή της παραμόρφωσης/μετατόπισης του σώματος.

1.1.2 Παραμορφώσεις

Στην περίπτωση των απολύτως στερεών (απαραμόρφωτων) σωμάτων, ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων κάθε υλικού σημείου αρκεί πλήρως για την περιγραφή της κίνησής του. Σε παραμορφώσιμο σώμα ωστόσο, οι μετατοπίσεις δεν αρκούν για την περιγραφή της τελικής διαμόρφωσής του. Ακόμα κι αν είναι γνωστές οι θέσεις όλων των υλικών σημείων στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, είναι αναγκαίο να προσδιοριστούν και οι σχετικές θέσεις τους προκειμένου να αποκτηθεί

σαφής εικόνα της παραμόρφωσης του σώματος. Επομένως είναι αναγκαία η μελέτη των μεταβολών των μηκών και των γωνιών που έχουν υποστεί τα διάφορα στοιχεία του σώματος. Στη γενική περίπτωση, το σώμα θα υποστεί τόσο μεταβολές μηκών όσο και μεταβολές γωνιών. Η ανάλυση διευκολύνεται αν θεωρηθούν πολύ μικρά (απειροστά) στοιχεία αντί για στοιχεία πεπερασμένου μήκους.

1.1.3 Μεταβολή Μήκους Απειροστού Στοιχείου

Θεωρούμε το απειροστό στοιχείο PA του αρχικά απαραμόρφωτου σώματος, μήκους ds . Το P έχει συντεταγμένες $P(x_1, x_2, x_3)$ ενώ το A έχει συντεταγμένες $A(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Για το μήκος ds ισχύει

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x_1 + dx_1 - x_1)^2 + (x_2 + dx_2 - x_2)^2 + (x_3 + dx_3 - x_3)^2} \\ &\Rightarrow ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Μετά την παραμόρφωση, το PA βρίσκεται σε νέα θέση $P'A'$, όπου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Στη γενική περίπτωση θα έχουμε τόσο μεταβολή του μήκους όσο και μεταβολή της κατεύθυνσης του PA . Το παραμορφωμένο στοιχείο $P'A'$ θα έχει μήκος

$$\begin{aligned} ds' &= \sqrt{(\xi_1 + d\xi_1 - \xi_1)^2 + (\xi_2 + d\xi_2 - \xi_2)^2 + (\xi_3 + d\xi_3 - \xi_3)^2} \\ &\Rightarrow ds'^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1.1.2), (1.1.4), λαμβάνουμε

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \quad (1.1.10\alpha)$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \quad (1.1.10\beta)$$

$$d\xi_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \quad (1.1.10\gamma)$$

Έπειτα από κάποιες πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(ds'^2 - ds^2) &= \varepsilon_{11}dx_1^2 + \varepsilon_{22}dx_2^2 + \varepsilon_{33}dx_3^2 \\ &\quad + 2\varepsilon_{12}dx_1dx_2 + 2\varepsilon_{13}dx_1dx_3 + 2\varepsilon_{23}dx_2dx_3 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

όπου στην παραπάνω σχέση οι ποσότητες ε_{ij} ($i=1,2,3$, $j=1,2,3$) καλούνται τροπές (strains) και ορίζονται ως

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\gamma)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (1.1.12\delta)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.12\varepsilon)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.12\sigma)$$

Ο τανυστής παραμόρφωσης Green εκφράζεται ως

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.13)$$

όπου ε_{ij} ($i=1,2,3$, $j=1,2,3$) είναι οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green, οι οποίες ορίζονται μέσω των εξ.(1.1.12). Οι συνιστώσες ε_{21} , ε_{31} , ε_{32} ορίζονται από τις εξ.(1.1.12δ-στ) με αντιστροφή των δεικτών και ισχύει

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} \quad (1.1.14\alpha,\beta,\gamma)$$

επομένως

$$\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \right]^T = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \quad (1.1.15)$$

δηλαδή ο τανυστής παραμόρφωσης Green είναι συμμετρικός.

Ως μέτρο μεταβολής μήκους του PA (magnification factor of the extension of line element PA) ορίζεται η ποσότητα

$$MF_A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] \quad (1.1.16)$$

Με χρήση των συνημίτονων κατεύθυνσης του στοιχείου PA n_1, n_2, n_3 ($n_1 = dx_1/ds, n_2 = dx_2/ds, n_3 = dx_3/ds$) και διαιρώντας με ds^2 και τα δύο μέλη της εξ.(1.1.11), προσδιορίζεται το MF_A συναρτήσει των τροπών ως

$$MF_A = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{22}n_2^2 + \varepsilon_{33}n_3^2 + 2\varepsilon_{12}n_1n_2 + 2\varepsilon_{13}n_1n_3 + 2\varepsilon_{23}n_2n_3 \quad (1.1.17)$$

Για τη σχετική μεταβολή μήκους του PA e_A που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε, ισχύει

$$e_A = \frac{ds' - ds}{ds} \Rightarrow ds' = (1 + e_A)ds \quad (1.1.18)$$

Το MF_A συσχετίζεται εύκολα με το e_A ως

$$\begin{aligned} MF_A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{ds'^2 - ds^2}{ds^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + e_A)^2 ds^2 - ds^2}{ds^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(1 + e_A)^2 - 1 \right] \Rightarrow e_A = \sqrt{1 + 2MF_A} - 1 \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν με κάποιους περιορισμούς. Επειδή το μήκος του στοιχείου δεν μπορεί να μηδενιστεί, θα πρέπει $ds' > 0$, επομένως οι εξ.(1.1.18-19) ισχύουν με τους περιορισμούς $e_A > -1$ και $MF_A > -(1/2)$, αντίστοιχα.

Η εξ.(1.1.19) μπορεί να αναπτυχθεί σε ανάπτυγμα Taylor ως

$$e_A = MF_A - \frac{1}{2} MF_A^2 + \dots \quad (1.1.20)$$

Με τη βοήθεια της εξ.(1.1.20) είναι δυνατό να αποδοθεί φυσική σημασία στο μέτρο μεταβολής μήκους. Για $MF_A \ll 1$, ισχύει $e_A \approx MF_A$, δηλαδή το MF_A ισούται περίπου με τη σχετική μεταβολή μήκους της (τυχούσας) ίνας PA . Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική, προσδιορίζεται και η φυσική σημασία των τροπών που έχουν οριστεί μέσω των εξ.(1.1.12α-γ). Παρατηρείται ότι αν στην απαραμόρφωτη διαμόρφωση θεωρηθεί ίνα με κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_1 ,

ισχύει $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η εξ.(1.1.17) δίδει $MF_{Ax1} = \varepsilon_{11}n_1^2 \Rightarrow MF_{Ax1} = \varepsilon_{11}$, ενώ από την εξ.(1.1.20) λαμβάνουμε

$$e_{Ax1} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2 + \dots \quad (1.1.21)$$

Υποθέτοντας ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, θα έχουμε $\varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow (\varepsilon_{11})^2 \approx 0$, επομένως η εξ.(1.1.21) δίδει

$$e_{Ax1} \approx \varepsilon_{11} \quad (1.1.22)$$

Συμπεραίνεται ότι η παραμόρφωση ε_{ii} ($i = 1, 2, 3$) ισούται περίπου με τη μεταβολή μήκους απειροστής ίνας που αρχικά έχει κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_i . Οι τροπές ε_{ii} ($i = 1, 2, 3$) καλούνται ορθές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές μήκους των ινών του σώματος που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

1.1.4 Μεταβολή Κατεύθυνσης Απειροστού Στοιχείου

Η χωρική κατεύθυνση της ίνας PA πριν την παραμόρφωση προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}_A = n_{A1}\mathbf{i} + n_{A2}\mathbf{j} + n_{A3}\mathbf{k} \quad (1.1.23)$$

όπου στο παρόν εδάφιο τα συνημίτονα κατεύθυνσης συμβολίζονται με n_{A1}, n_{A2}, n_{A3} (ισχύει $n_{A1} = dx_1/ds, n_{A2} = dx_2/ds, n_{A3} = dx_3/ds$) και τα μοναδιαία διανύσματα με $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Στην παραμορφωμένη διαμόρφωση το στοιχείο βρίσκεται στη νέα θέση $P'A'$, με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Η νέα χωρική κατεύθυνση του στοιχείου προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}'_A = n'_{A1}\mathbf{i} + n'_{A2}\mathbf{j} + n'_{A3}\mathbf{k} \quad (1.1.24)$$

όπου $n'_{A1} = d\xi_1/ds', n'_{A2} = d\xi_2/ds', n'_{A3} = d\xi_3/ds'$. Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε

$$n'_{Ai} = \frac{d\xi_i}{ds} \frac{ds}{ds'}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1.25)$$

Από τις εξ.(1.1.10) προκύπτει ότι

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) n_{A1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_{A2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} n_{A3} \quad (1.1.26\alpha)$$

$$\frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_{A1} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) n_{A2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} n_{A3} \quad (1.1.26\beta)$$

$$\frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} n_{A1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} n_{A2} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) n_{A3} \quad (1.1.26\gamma)$$

Επιπλέον, η εξ.(1.1.18) δίδει

$$ds' = (1 + e_A) ds \Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + e_A} \xrightarrow{\text{εξ. (Π4.1.19)}} \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2MF_A} - 1} \quad (1.1.27)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2MF_A}}$$

Με τη βοήθεια των εξ.(1.1.26-27) προσδιορίζονται τα συνημίτονα κατεύθυνσης της τελικής θέσης συναρτήσει των μετατοπίσεων και των αρχικών (γνωστών) συνημίτονων κατεύθυνσης ως

$$n'_{A1} = \frac{1 + \partial u_1 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A1} + \frac{\partial u_1 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A2} + \frac{\partial u_1 / \partial x_3}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A3} \quad (1.1.28\alpha)$$

$$n'_{A2} = \frac{\partial u_2 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A1} + \frac{1 + \partial u_2 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A2} + \frac{\partial u_2 / \partial x_3}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A3} \quad (1.1.28\beta)$$

$$n'_{A3} = \frac{\partial u_3 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A1} + \frac{\partial u_3 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A2} + \frac{1 + \partial u_3 / \partial x_3}{\sqrt{1 + 2MF_A}} n_{A3} \quad (1.1.28\gamma)$$

Η φυσική σημασία των τροπών ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} προσδιορίζεται μελετώντας τη μεταβολή της γωνίας που υφίστανται 2 στοιχεία PA , PB . Έστω θ , η γωνία που σχηματίζουν αρχικά τα στοιχεία, και θ' η τελική γωνία που σχηματίζουν τα στοιχεία $P'A'$, $P'B'$. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων \mathbf{n}'_A και \mathbf{n}'_B που ορίζουν την κατεύθυνση των $P'A'$ και $P'B'$, αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$\mathbf{n}'_A \cdot \mathbf{n}'_B = \|\mathbf{n}'_A\| \|\mathbf{n}'_B\| \cos \theta' = 1 \cdot 1 \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \mathbf{n}'_A \cdot \mathbf{n}'_B$$

$$\Rightarrow \cos \theta' = n'_{A1}n'_{B1} + n'_{A2}n'_{B2} + n'_{A3}n'_{B3} \quad (1.1.29)$$

όπου με \cdot συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Για να απλοποιηθεί το πρόβλημα θεωρούμε την ακόλουθη υποπερίπτωση. Θεωρούμε ότι τα PA , PB να κατευθύνονται προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι ισχύει $(n_{A1}, n_{A2}, n_{A3}) = (1, 0, 0)$, $(n_{B1}, n_{B2}, n_{B3}) = (0, 1, 0)$, $MF_A = \varepsilon_{11}$, $MF_B = \varepsilon_{22}$, ενώ προφανώς για την αρχική γωνία θ , ισχύει $\theta = \pi/2$. Οι εξ.(Π4.1.28) δίδουν

$$n'_{A1} = \frac{1 + \partial u_1 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}} \quad n'_{B1} = \frac{\partial u_1 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\alpha, \beta)$$

$$n'_{A2} = \frac{\partial u_2 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}} \quad n'_{B2} = \frac{1 + \partial u_2 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\gamma, \delta)$$

$$n'_{A3} = \frac{\partial u_3 / \partial x_1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}}} \quad n'_{B3} = \frac{\partial u_3 / \partial x_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\epsilon, \sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω μεγέθη στην εξ.(1.1.29) και εκτελώντας τις πράξεις, λαμβάνουμε

$$\cos \theta' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (1.1.31)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της τροπής ε_{12} (βλ. εξ.(1.1.12δ)), τελικά προκύπτει ότι

$$\cos \theta' = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} \quad (1.1.32)$$

Επομένως αν υποθέσουμε ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, ισχύουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις.

- οι ορθές παραμορφώσεις είναι μικρές, επομένως $\varepsilon_{11} \ll 1$, $\varepsilon_{22} \ll 1$ και θα ισχύει $1/\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \approx 1$, $1/\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} \approx 1$ (βλ. εξ.(Π4.1.19-21)).
- οι γωνίες στροφής μεταξύ των δύο στοιχείων είναι μικρές, επομένως $\sin \theta' \approx \theta'$. Όμως ισχύει $\cos \theta' = \sin((\pi/2) - \theta')$, άρα $\cos \theta' \approx (\pi/2) - \theta' \Rightarrow \cos \theta' \approx \theta - \theta'$, αφού έχει ληφθεί ότι η αρχική γωνία ισούται με $\pi/2$.

Η εξ.(1.1.32) γράφεται ως

$$\theta - \theta' \approx 2\varepsilon_{12} \quad (1.1.33)$$

Η φυσική σημασία της τροπής ε_{12} είναι ότι ισούται περίπου με το μισό της μεταβολής της κάθετης γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι

παράλληλες ως προς τους άξονες Ox_1, Ox_2 . Με παρόμοια συλλογιστική μπορεί γενικά να αποδειχθεί ότι το διπλάσιο της τροπής ε_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2,3$ με $i \neq j$) ισούται περίπου με τη μεταβολή της (κάθετης) γωνίας μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες Ox_i και Ox_j . Ορίζουμε ως

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3 \quad \text{με } i \neq j \quad (1.1.34)$$

Οι ποσότητες γ_{ij} καλούνται διατμητικές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές των (κάθετων) γωνιών μεταξύ των ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

1.1.5 Μεταβολή Όγκου Απειροστού Στοιχείου

Όπως θα φανεί στη συνέχεια είναι χρήσιμο να προσδιοριστεί η αλλαγή όγκου και επιφάνειας που υφίστανται κατά την παραμόρφωση τα απειροστά στοιχεία του σώματος. Θεωρούμε κυβικό στοιχείο του σώματος πριν την παραμόρφωση με πλευρές παράλληλες ως προς τους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Προφανώς το στοιχείο θα έχει όγκο $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Για να προσδιοριστεί ο όγκος dV' του στοιχείου μετά την παραμόρφωση, εξετάζονται οι μεταβολές που έχουν υποστεί οι ακμές του. Η πλευρά $\mathbf{OA} = (dx_1, 0, 0)$ μετατρέπεται στην πλευρά $\mathbf{O'A'}$ για την οποία ισχύει

$$\mathbf{O'A'} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} dx_1 \right) \quad (1.1.35\alpha)$$

Η παραπάνω σχέση προέκυψε με εφαρμογή των εξ.(1.1.9) που συνδέουν τις προβολές του στοιχείου στους 3 άξονες του συστήματος αναφοράς πριν και μετά την παραμόρφωση. Εξετάζοντας και τις άλλες 2 ακμές που ορίζουν τον κύβο, λαμβάνουμε αντίστοιχα για τις πλευρές $\mathbf{OB} = (0, dx_2, 0)$ και $\mathbf{OG} = (0, 0, dx_3)$ τις σχέσεις

$$\mathbf{O'B'} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \quad (1.1.35\beta)$$

$$\mathbf{O'G'} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} dx_3, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} dx_3, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \quad (1.1.35\gamma)$$

Με βάση γνωστή ταυτότητα της αναλυτικής γεωμετρίας, ο όγκος dV' του παραλληλεπίπεδου στην παραμορφωμένη διαμόρφωση δίδεται ως

$$dV' = \mathbf{O'A'} \cdot (\mathbf{O'B'} \times \mathbf{O'G'}) \quad (1.1.36)$$

όπου με \times συμβολίζεται το εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Εκτελώντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$dV' = JdV \quad (1.1.37)$$

όπου J είναι η ορίζουσα της βαθμίδας της παραμόρφωσης που έχει οριστεί μέσω της εξ.(1.1.5).

1.1.6 Μεταβολή Επιφάνειας Απειροστού Στοιχείου

Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού dA πριν την παραμόρφωση και το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} επί αυτής. Έστω ότι η επιφάνεια θα έχει νέο εμβαδόν dA' με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}' επί αυτής μετά την παραμόρφωση. Προκειμένου να συσχετιστεί η παραμορφωμένη επιφάνεια με την αρχική θα προσδιορίσουμε την αλλαγή του όγκου που υφίσταται στοιχείο που ορίζεται από την εξεταζόμενη επιφάνεια και τυχαίο απειροστό διάνυσμα $\mathbf{n}_1 = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Ο όγκος του στοιχείου πριν την παραμόρφωση ισούται με

$$dV = \mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \quad (1.1.38)$$

Μετά την παραμόρφωση μεταβάλλονται γενικά τόσο το \mathbf{n}_1 όσο και τα χαρακτηριστικά (εμβαδόν, προσανατολισμός) της επιφάνειας. Ο όγκος του νέου στοιχείου ισούται με

$$dV' = \mathbf{n}'_1 \cdot (dA'\mathbf{n}') \quad (1.1.39)$$

όπου $\mathbf{n}'_1 = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ είναι το διάνυσμα \mathbf{n}_1 στην παραμορφωμένη διαμόρφωση. Με τη βοήθεια των εξ.(1.1.5), (1.1.10) συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα της παραμόρφωσης \mathbf{X} έχει την ιδιότητα να συνδέει το (τυχόν) διάνυσμα πριν την παραμόρφωση με το διάνυσμα μετά την παραμόρφωση. Πιο συγκεκριμένα ισχύει

$$\mathbf{n}'_1 = \mathbf{X}\mathbf{n}_1 \quad (1.1.40)$$

Από την εξ.(1.1.37) λαμβάνεται ότι

$$\begin{aligned} dV' = JdV &\Rightarrow \mathbf{n}'_1 \cdot (dA'\mathbf{n}') = J\mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \xrightarrow{\text{εξ.}(1.1.40)} \\ &\Rightarrow \mathbf{X}\mathbf{n}_1 \cdot (dA'\mathbf{n}') = J\mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{n}_1 , τελικά προκύπτει ότι

$$dA'\mathbf{n}' = J[\mathbf{X}]^{-T} (dA\mathbf{n}) \quad (1.1.42)$$

Παρατηρείται ότι η ο υπολογισμός της βαθμίδας παραμόρφωσης αρκεί για τον προσδιορισμό της εξεταζόμενης επιφάνειας στην παραμορφωμένη διαμόρφωση.

1.1.7 Απειροστικός Τανυστής Παραμόρφωσης

Στα εδάφια 1.1.2.1-2 δόθηκε η φυσική σημασία του τανυστή παραμόρφωσης Green, η οποία προκύπτει με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Με βάση την υπόθεση αυτή είναι δυνατό να αγνοηθούν οι μη γραμμικοί όροι των συνιστωσών του τανυστή αυτού σε όλες τις σχέσεις που υπεισέρχονται, δηλαδή ισχύει

$$\varepsilon_{ij} \ll 1 \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \approx 0, \quad \forall i, j, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.1.43,44)$$

Εναλλακτική παραδοχή με την οποία περιορίζεται περισσότερο η κλάση των προβλημάτων που μπορούν να διερευνηθούν αποτελεσματικά είναι η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Με βάση την υπόθεση αυτή, οι μη γραμμικοί όροι των μετατοπίσεων που υπεισέρχονται στις σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων (1.1.12) θεωρούνται πολύ μικροί και κατά συνέπεια μπορούν να αγνοηθούν. Ως εκ τούτου, προκύπτουν γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων, οι οποίες εκφράζονται ως

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{zz} \quad (1.1.45\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \varepsilon_{xz} \quad (1.1.45\delta, \varepsilon)$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \varepsilon_{yz} \quad (1.1.45\sigma\tau)$$

Ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης (infinitesimal strain tensor) σε περιγραφή κατά Lagrange εκφράζεται ως

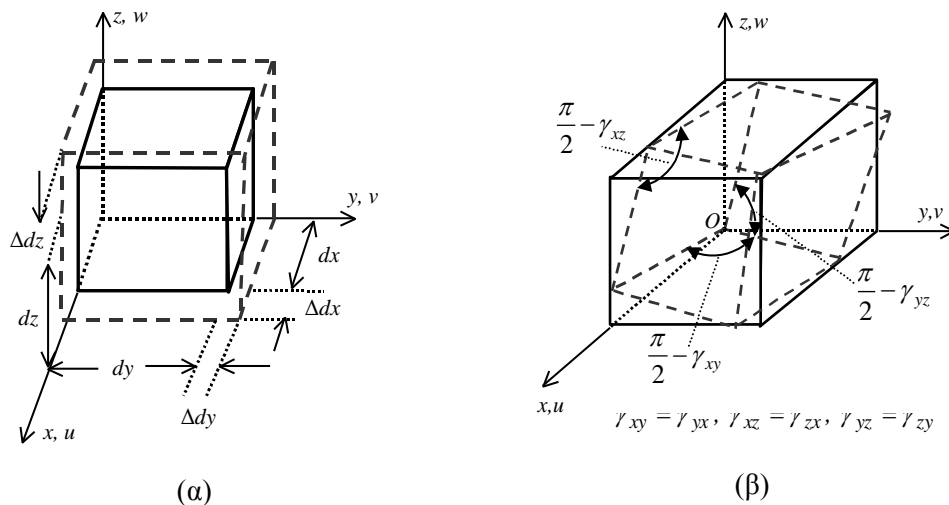
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.46)$$

όπου οι συνιστώσες ε_{ij} ($i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3$) λαμβάνονται από τις εξ.(1.1.45).

Αν τυχόν στοιχείο υποβληθεί σε στροφή στερεού σώματος και χρησιμοποιηθεί ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης, θα υπολογιστεί μη μηδενική παραμόρφωση. Αυτό το αποτέλεσμα είναι φυσικά λανθασμένο αφού οποιαδήποτε κίνηση (μετατόπιση ή στροφή) στερεού σώματος δεν προκαλεί παραμόρφωση. Συμπερασματικά, ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση που η αρχική και η τελική διαμόρφωση του σώματος διαφέρουν ελάχιστα. Επομένως, αν σε σώμα ισχύει η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων εξασφαλίζεται ότι και οι παραμορφώσεις θα είναι μικρές. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Κάτι τέτοιο καθίσταται σαφές από το

παραπάνω παράδειγμα της στροφής στερεού σώματος, όπου η αρχική και η τελική διαμόρφωση διαφέρουν αισθητά αλλά η παραμόρφωση του στοιχείου (μεταβολές μηκών και γωνιών) είναι μηδενική.

Τέλος, παρότι οι κινηματικές σχέσεις (1.1.46) που συνδέουν τις μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις έχουν προκύψει γεωμετρικά, είναι δυνατόν να δοθούν σε αυτές γεωμετρικές ερμηνείες με φυσική σημασία. Έτσι, τα ανηγμένα (αδιάστατα) μεγέθη $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$ εκφράζουν τις ανά μονάδα μήκους επιμηκύνσεις ή βραχύνσεις των εδρών (dx, dy, dz) του στοιχειώδη κύβου μετά την παραμόρφωση (Σχ.1α), δηλαδή $\varepsilon_{xx} = \Delta dx/dx$, $\varepsilon_{yy} = \Delta dy/dy$ και $\varepsilon_{zz} = \Delta dz/dz$, ενώ τα ανηγμένα μεγέθη $(\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ εκφράζουν τις μεταβολές της ορθής γωνίας την οποία σχηματίζουν ανά ζεύγη τα απειροστά τμήματα (dx, dy) , (dx, dz) και (dy, dz) , αντίστοιχα (Σχ.1β). Αναφορικά με τα πρόσημα των ανηγμένων παραμορφώσεων, οι ορθές παραμορφώσεις $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$ θεωρούνται θετικές όταν αντιστοιχούν σε επιμηκύνσεις των αντίστοιχων ακμών, ενώ οι γωνιακές παραμορφώσεις $(\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ θεωρούνται θετικές όταν προκαλούν μείωση των μεταξύ των θετικών ημιαξόνων δημιουργούμενων ορθών γωνιών του στοιχείου.



Σχήμα 1.1 Φυσική ερμηνεία ορθών (α) και γωνιακών παραμορφώσεων (β).

1.2 Θεωρία Τάσης

1.2.1 Διάνυσμα Τάσης

Εδώ και στα παρακάτω εδάφια, η χρονική στιγμή στην οποία αναφέρονται τα διάφορα μεγέθη συμβολίζεται με χρήση άνω αριστερού δείκτη. Έτσι π.χ. ο συμβολισμός ${}^I \varepsilon$ δηλώνει τον τανυστή παραμόρφωσης την χρονική στιγμή $t = t_I$.

Θεωρούμε σώμα Q την (τυχούσα) χρονική στιγμή $t = t_I$, επί του οποίου ασκούνται ορισμένες δράσεις. Θεωρούμε επίσης τυχούσα τομή, η οποία χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα Q_1 , Q_2 καθώς επίσης και στοιχειώδη επιφάνεια $d^1 A$ σε

σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ επί της τομής, με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ${}^I\mathbf{n}$ για το τμήμα Q_1 και $-{}^I\mathbf{n}$ για το τμήμα Q_2 . Ορίζουμε ως διάνυσμα τάσης ή ελκυστή (traction vector) ${}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n})$, που αντιστοιχεί στο διάνυσμα ${}^I\mathbf{n}$ και στο σημείο P , το διανυσματικό μέγεθος

$${}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n}) = \lim_{d^I A \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}}{d^I A} \quad (1.2.1)$$

όπου $d^I \mathbf{p}$ είναι η συνιστάμενη (επιφανειακή) δύναμη που ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d^I A$.

Από την Νευτώνεια Αρχή Δράσης - Αντίδρασης, η δύναμη που ασκείται στο Q_1 (επί της $d^I A$, στο σημείο P) θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκείται στο Q_2 . Επομένως από τον ορισμό της εξ.(2.1) έπεται κατευθείαν ότι

$${}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n}) = -{}^I\mathbf{t}(-{}^I\mathbf{n}) \quad (1.2.2)$$

Η παραπάνω βασική σχέση είναι γνωστή ως Αρχή του Cauchy.

Από τον παραπάνω ορισμό καθίσταται σαφές ότι ο ελκυστής δεν αποτελεί διανυσματικό πεδίο με την κλασική έννοια, αφού σε κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το σώμα δεν αντιστοιχίζεται μοναδικός ελκυστής. Για να προσδιοριστεί ο ελκυστής πρέπει να δοθούν τόσο το σημείο στο οποίο αναφέρεται όσο και το κάθετο διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας που διέρχεται από αυτό. Συνεπώς, σε σημείο του σώματος μπορούν να οριστούν άπειροι ελκυστές, καθένας από τους οποίους θα αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένη προσανατολισμένη στοιχειώδη επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο.

Εκτός από τις επιφανειακές δυνάμεις (traction forces) που υπεισέρχονται στον ορισμό του διανύσματος τάσης, πολλές φορές στα σώματα ασκούνται και μαζικές δυνάμεις (body forces), δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται απευθείας πάνω στους «κόκκους» του σώματος. Τέτοιες δυνάμεις δεν μπορούν να «εμφανιστούν» στη διεπιφάνεια κάποιας τομής στο σώμα, ενώ χαρακτηρίζονται ως δυνάμεις πεδίου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μαζικής δύναμης είναι το ίδιο βάρος του σώματος. Θεωρώντας στοιχειώδη όγκο $d^I V$ σε σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ του σώματος, ορίζεται ως μαζική δύναμη ανά μονάδα όγκου η ποσότητα

$${}^I\mathbf{f} = \lim_{d^I V \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}_f}{d^I V} \quad (1.2.3)$$

όπου $d^I \mathbf{p}_f$ είναι η συνισταμένη των μαζικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχειώδη όγκο $d^I V$. Παρατηρείται ότι το ${}^I\mathbf{f}$ αποτελεί διανυσματικό πεδίο, σε αντίθεση με τον ελκυστή ${}^I\mathbf{t}$.

1.2.2 Τανυστής Τάσης Cauchy

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αναφοράς με τη βοήθεια του οποίου περιγράφεται η κίνηση είναι σταθερό και δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια d^1A κάθετη στον άξονα Ox_1 . Προφανώς ισχύει ${}^1\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, όπου \mathbf{e}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τον άξονα Ox_1 . Ως ${}^1\sigma_{1j}$, $j = 1, 2, 3$ ορίζονται οι συνιστώσες του ελκυστή ${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1)$, δηλαδή ισχύει

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = ({}^1\sigma_{11}, {}^1\sigma_{12}, {}^1\sigma_{13}) \quad (1.2.4)$$

Γενικεύοντας, θεωρούνται και οι συνιστώσες των ελκυστών που αντιστοιχούν και στους άλλους 2 άξονες του συστήματος αναφοράς. Έτσι, λαμβάνουμε

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = {}^1\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + {}^1\sigma_{12}\mathbf{e}_2 + {}^1\sigma_{13}\mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\alpha)$$

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) = {}^1\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + {}^1\sigma_{22}\mathbf{e}_2 + {}^1\sigma_{23}\mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\beta)$$

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = {}^1\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + {}^1\sigma_{32}\mathbf{e}_2 + {}^1\sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\gamma)$$

Ο τανυστής πραγματικής τάσης ή τανυστής τάσης Cauchy (true or Cauchy stress tensor) ${}^1\boldsymbol{\sigma}$ εκφράζεται ως

$${}^1\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

όπου για εποπτικούς λόγους παραλείπεται εδώ και παρακάτω ο χρονικός δείκτης από τις συνιστώσες σ_{ij} . Συμπερασματικά η συνιστώσα σ_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ του εξεταζόμενου τανυστή ορίζεται ως το πηλίκο της στοιχειώδους δύναμης που δρα κατά τη κατά την κατεύθυνση του Ox_j διά τη στοιχειώδη επιφάνεια d^1A με (μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα \mathbf{e}_i . Σημειώνεται ότι σε κάθε σημείο του σώματος αντιστοιχεί μοναδικός τανυστής τάσης Cauchy (σε δεδομένη χρονική στιγμή).

1.2.3 Εξισώσεις Ισορροπίας

Πριν συνεχιστεί η περιγραφή των υπόλοιπων τανυστών τάσης που χρησιμοποιούνται, είναι απαραίτητο να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των ήδη ορισθέντων ελκυστών και του τανυστή τάσης Cauchy.

Για να συσχετιστεί ο (τυχόν) ελκυστής ${}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n})$ με τις συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy ${}^1\boldsymbol{\sigma}$, εξετάζεται η ισορροπία στοιχειώδους τετραέδρου, το οποίο διαθέτει για πλευρές τις στοιχειώδεις επιφάνειες που είναι κάθετες στα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 και ${}^1\mathbf{n}$. Υποθέτοντας ότι οι συνθήκες είναι ψευδοστατικές, δηλαδή οι αδρανειακές

δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν και αμελώντας τους όρους των μαζικών δυνάμεων που είναι μικρότερης τάξης από τους αντίστοιχους όρους των επιφανειακών δυνάμεων, λαμβάνονται οι ακόλουθες σχέσεις ισορροπίας

$${}^1t_1 = \sigma_{11} {}^1n_1 + \sigma_{21} {}^1n_2 + \sigma_{31} {}^1n_3 \quad (1.2.7\alpha)$$

$${}^1t_2 = \sigma_{12} {}^1n_1 + \sigma_{22} {}^1n_2 + \sigma_{32} {}^1n_3 \quad (1.2.7\beta)$$

$${}^1t_3 = \sigma_{13} {}^1n_1 + \sigma_{23} {}^1n_2 + \sigma_{33} {}^1n_3 \quad (1.2.7\gamma)$$

με ${}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) = ({}^1t_1, {}^1t_2, {}^1t_3)$ και ${}^1\mathbf{n} = ({}^1n_1, {}^1n_2, {}^1n_3)$. Οι εξ.(1.2.7) μπορούν να διατυπωθούν συνοπτικότερα με διανυσματική γραφή ως

$${}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) = [{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T {}^1\mathbf{n} \quad (1.2.8)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα φανεί παρακάτω είναι χρήσιμες στην διατύπωση συνοριακών συνθηκών προβλημάτων Μηχανικής Συνεχούς Μέσου.

Αποκόπτεται τυχόν όγκος 1V από το σώμα (στην παραμορφωμένη διαμόρφωση, την χρονική στιγμή $t = t_1$), που περικλείεται από την επιφάνεια ${}^1A = \partial {}^1V$. Ισορροπία λαμβάνεται όταν η συνισταμένη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται επί του 1V μηδενίζονται, εάν θεωρηθούν ψευδοστατικές συνθήκες. Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων γράφεται συναρτήσεως των εκλυστών ${}^1\mathbf{t}$ (που ασκούνται στην 1A) και των ανηγμένων μαζικών δυνάμεων ${}^1\mathbf{f}$ (που ασκούνται στον 1V) ως

$$\iint_{{}^1A} {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) d{}^1A + \iiint_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.9)$$

Με τη βοήθεια της εξ.(2.8), η παραπάνω εξίσωση ισορροπίας εκφράζεται ως

$$\iint_{{}^1A} [{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T {}^1\mathbf{n} d{}^1A + \iiint_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.10)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss (Gauss divergence theorem), το επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξ.(1.2.10) μετατρέπεται σε τριπλό, οπότε η εξ.(1.2.10) δίδει

$$\iiint_{{}^1V} \operatorname{div} \left([{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T \right) d{}^1V + \iiint_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} d{}^1V = \mathbf{0} \Rightarrow \iiint_{{}^1V} \left[\operatorname{div} \left([{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.11)$$

όπου $\operatorname{div}(\cdot)$ είναι η απόκλιση (divergence) του διανυσματικού πεδίου ή του ταυυστή 2ης τάξης που βρίσκεται εντός της παρένθεσης. Στην περίπτωση διανυσματικού πεδίου, ισχύει $\operatorname{div}(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \partial(\cdot) / \partial x_i$ ενώ στην περίπτωση ταυυστή

2ης τάξης ισχύει $div(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\partial(\cdot)_{ij} / \partial x_j \right) \mathbf{e}_i$. Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε όγκο 1V , προκύπτει ότι

$$div\left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma}\right]^T\right) + {}^1\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.2.12)$$

Οι εξ.(1.2.12) αποτελούν τις κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε ισχυρή μορφή. Αναλυτικά οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \xi_3} + {}^1f_1 = 0 \quad (1.2.13\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \xi_3} + {}^1f_2 = 0 \quad (1.2.13\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_3} + {}^1f_3 = 0 \quad (1.2.13\gamma)$$

Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι στις παραπάνω εξισώσεις είναι ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση της χρονικής στιγμής που εξετάζεται (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3) και όχι ως προς την αρχική διαμόρφωση (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3). Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εξαχθούν εναλλακτικά, εάν εξεταστεί η ισορροπία στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τους άξονες του συστήματος αναφοράς και με μήκη πλευρών $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$.

Η εξίσωση ισορροπίας των ροπών ως προς τυχαίο σημείο K διατυπώνεται ως

$$\iint_{{}^1A} {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) \times \mathbf{K}E d{}^1A + \iiint_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} \times \mathbf{K}B d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.14)$$

όπου $E \in {}^1A$ σημείο που διατρέχει το επιφανειακό σύνορο του όγκου και $B \in {}^1V$ σημείο που διατρέχει τον όγκο 1V . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τις εξ.(1.2.9-13), η εξ.(1.2.14) έπειτα από κάποιες πράξεις καταλήγει στην παρακάτω σχέση

$${}^1\boldsymbol{\sigma} = \left[{}^1\boldsymbol{\sigma}\right]^T \quad (1.2.15)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι ο τανυστής τάσης Cauchy είναι συμμετρικός. Αναλυτικά θα έχουμε

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (1.2.16\alpha,\beta,\gamma)$$

συμπεραίνοντας ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων περιορίζονται από εννιά σε έξι.

1.2.4 1ος Τανυστής Τάσης Piola - Kirchhoff

Ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff αναπτύχθηκε στην προσπάθεια να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας του σώματος συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης $t=0$. Η εξίσωση ισορροπίας για την τρέχουσα διαμόρφωση $t=t_I$ (2.9) δίδει

$$\iint_{A} {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n})d^1A + \iiint_{V} {}^1\mathbf{f}d^1V = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_{A} {}^1\mathbf{t} \frac{d^1A}{d^0A} d^0A + \iiint_{V} {}^1\mathbf{f} \frac{d^1V}{d^0V} d^0V = \mathbf{0} \quad (1.2.17)$$

Για να διευκολυνθεί η ανάλυση ορίζονται δύο επιπλέον μεγέθη. Πρόκειται για τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})$ και το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου ${}^1_0\mathbf{f}$ τα οποία ορίζονται ως

$${}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = \lim_{d^0A \rightarrow 0} \frac{d^1\mathbf{p}}{d^0A} \quad {}^1_0\mathbf{f} = \lim_{d^0V \rightarrow 0} \frac{d^1\mathbf{p}_f}{d^0V} \quad (1.2.18\alpha, \beta)$$

σημειώνοντας ότι ο κάτω αριστερός δείκτης συμβολίζει τη διαμόρφωση ως προς την οποία εκφράζεται το κάθε μέγεθος. Στην περίπτωση ταύτισης του πάνω αριστερού και κάτω αριστερού δείκτη, ο τελευταίος παραλείπεται. Από τους ορισμούς των σχέσεων (2.1) και (2.18α) προκύπτει η ακόλουθη βασική ιδιότητα

$${}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})d^0A = {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n})d^1A \Rightarrow {}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) \frac{d^1A}{d^0A} \quad (1.2.19\alpha)$$

Επίσης από τους ορισμούς των σχέσεων (1.2.3) και (1.2.18β) λαμβάνουμε

$${}^1_0\mathbf{f} = {}^1\mathbf{f} \frac{d^1V}{d^0V} \Rightarrow {}^1_0\mathbf{f} = J {}^1\mathbf{f} \quad (1.2.19\beta)$$

αφού από την εξ.(1.1.27) έχουμε ότι $d^1V = Jd^0V$. Η εξίσωση ισορροπίας (1.2.17) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$\iint_{A} {}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})d^0A + \iiint_{V} {}^1_0\mathbf{f}d^0V = \mathbf{0} \quad (1.2.20)$$

Η σχέση (1.2.19α) γράφεται ως (βλ. εξ.(1.2.8))

$${}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) \frac{d^1A}{d^0A} \Rightarrow {}^1_0\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = [{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T {}^1\mathbf{n} \frac{d^1A}{d^0A} \quad (1.2.21)$$

και με τη βοήθεια της εξ.(Π4.1.42) που συνδέει την απαραμόρφωτη με την παραμορφωμένη επιφάνεια τελικά λαμβάνουμε

$${}^I\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = J [{}^I\boldsymbol{\sigma}]^T [{}^I\mathbf{X}]^{-T} {}^0\mathbf{n} \Rightarrow {}^I\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = J {}^I\boldsymbol{\sigma} [{}^I\mathbf{X}]^{-T} {}^0\mathbf{n} \quad (1.2.22)$$

αφού ο τανυστής τάσης Cauchy είναι συμμετρικός.

Ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff ${}^I\mathbf{P}$ εκφράζεται ως

$${}^I\mathbf{P} = J {}^I\boldsymbol{\sigma} [{}^I\mathbf{X}]^{-T} \quad (1.2.23)$$

Από την εξ.(1.2.22) είναι φανερό ότι ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff συνδέει το κάθετο διάνυσμα ${}^0\mathbf{n}$ της (τυχούσας) απαραμόρφωτης επιφάνειας d^0A με τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^I\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})$, δηλαδή ισχύει

$${}^I\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) = {}^I\mathbf{P} {}^0\mathbf{n} \quad (1.2.24)$$

Η εξίσωση ισορροπίας (1.2.20) γράφεται συναρτήσει του τανυστή ${}^I\mathbf{P}$ ως

$$\iint_{{}^0A} {}^I\mathbf{P} {}^0\mathbf{n} d^0A + \iiint_{{}^0V} {}^I\mathbf{f} d^0V = \mathbf{0} \quad (1.2.25)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης Gauss λαμβάνουμε

$$\iiint_{{}^0V} \operatorname{div}({}^I\mathbf{P}) d^0V + \iiint_{{}^0V} {}^I\mathbf{f} d^0V = \mathbf{0} \Rightarrow \iiint_{{}^0V} [\operatorname{div}({}^I\mathbf{P}) + {}^I\mathbf{f}] d^0V = \mathbf{0} \quad (1.2.26)$$

Επειδή η ισορροπία ισχύει ανεξαρτήτως του όγκου 0V που εξετάζεται, προκύπτει η τελική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας σε διαφορική μορφή ως

$$\operatorname{div}({}^I\mathbf{P}) + {}^I\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.2.27)$$

Αναλυτικά η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως (παραλείπονται για εποπτικούς λόγους εδώ και παρακάτω οι αριστεροί δείκτες στις συνιστώσες του τανυστή ${}^I\mathbf{P}$)

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{13}}{\partial x_3} + {}^I f_1 = 0 \quad (1.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_3} + {}^I f_2 = 0 \quad (1.2.28\beta)$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{33}}{\partial x_3} + {}^1_0 f_3 = 0 \quad (1.2.28\gamma)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται ότι με τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης ή με άλλα λόγια να χρησιμοποιήσουμε περιγραφή Lagrange. Επίσης από την εξ.(1.2.23) καθίσταται σαφές ότι ο συγκεκριμένος τανυστής (σε αντίθεση με τον τανυστή τάσης Cauchy) δεν είναι κατ' ανάγκην συμμετρικός αφού αποτελεί γινόμενο συμμετρικού τανυστή και της βαθμίδας παραμόρφωσης η οποία δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρική.

1.2.5 Αρχή Δυνατών Έργων

Προτού οριστεί ο 2ο τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff που είναι χρήσιμος στη μελέτη της γεωμετρικά μη γραμμικής συμπεριφοράς παραμορφώσιμων σωμάτων, διατυπώνεται η Αρχή Δυνατών Έργων που αποτελεί τη βάση της αριθμητικής επίλυσης πολλών προβλημάτων της μηχανικής. Η Αρχή Δυνατών Έργων αποτελεί εναλλακτική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας που διέπουν τη συμπεριφορά των σωμάτων. Το βασικό πλεονέκτημά της έναντι των εξισώσεων ισορροπίας που έχουν ήδη διατυπωθεί είναι ότι πρόκειται για βαθμωτή εξίσωση, σε αντίθεση με τις εξισώσεις που έχουμε ήδη εξετάσει οι οποίες είναι σε διανυσματική μορφή.

Θεωρούμε σώμα στην παραμορφωμένη διαμόρφωσή του την χρονική στιγμή $t = t_I$. Για τυχόν όγκο 1V που αποκόπτουμε από το σώμα, έχουμε ήδη διατυπώσει την εξίσωση ισορροπίας σε ολοκληρωτική μορφή (βλ. εξ. (1.2.21)). Θεωρώντας τυχόν πεδίο μετατοπίσεων για την τρέχουσα διαμόρφωση του εξεταζόμενου σώματος $\delta^1 \mathbf{r}$

$$\delta^1 \mathbf{r} = (\delta^1 u_1, \delta^1 u_2, \delta^1 u_3) \quad (1.2.29)$$

το οποίο ωστόσο σέβεται τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, τότε λαμβάνεται η ασθενής μορφή της διανυσματικής εξίσωσης ισορροπίας (1.2.12)

$$\iiint_{{}^1V} \left[\text{div} \left(\left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) + {}^1 \mathbf{f} \right] \cdot \delta^1 \mathbf{r} d^1V = 0 \quad (1.2.30)$$

όπου το σύμβολο $\delta(\cdot)$ συμβολίζει τον τελεστή δ του λογισμού των μεταβολών (calculus of variations). Υπογραμμίζεται ότι η σχέση (1.2.30) είναι βαθμωτή καθώς εντός του ολοκληρώματος έχουμε εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\text{div}({}^1 \boldsymbol{\sigma} \delta^1 \mathbf{r}) = \left[\text{div}({}^1 \boldsymbol{\sigma}) \right]^T \delta^1 \mathbf{r} + \text{tr} \left(\left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^1 \nabla \delta^1 \mathbf{r} \right) \quad (1.2.31)$$

η εξ.(1.2.30) μετασχηματίζεται ως

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \left\{ \operatorname{div}({}^1\boldsymbol{\sigma}\delta^1\mathbf{r}) - \operatorname{tr}\left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma}\right]^T {}^1\nabla\delta^1\mathbf{r}\right) + {}^1\mathbf{f}\cdot\delta^1\mathbf{r} \right\} d^1V &= 0 \\ \Rightarrow \iiint_{V'} \left\{ \operatorname{div}({}^1\boldsymbol{\sigma}\delta^1\mathbf{r}) + {}^1\mathbf{f}\cdot\delta^1\mathbf{r} \right\} d^1V &= \iiint_{V'} \operatorname{tr}\left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma}\right]^T {}^1\nabla\delta^1\mathbf{r}\right) d^1V \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, $\operatorname{tr}(\cdot)$ είναι το ίχνος (trace) του τετραγωνικού μητρώου που βρίσκεται εντός των παρενθέσεων, το οποίο ορίζεται ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του μητρώου αυτού. Επίσης, ${}^1\nabla\delta^1\mathbf{r}$ είναι η διανυσματική κλίση του διανυσματικού πεδίου $\delta^1\mathbf{r}$ η οποία ορίζεται παρακάτω μέσω της εξ.(1.2.34). Αξιοποιώντας το θεώρημα απόκλισης Gauss για το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτει ότι

$$\iint_{A'} \left[({}^1\boldsymbol{\sigma}^1\mathbf{n}) \cdot \delta^1\mathbf{r} \right] d^1A + \iiint_{V'} ({}^1\mathbf{f} \cdot \delta^1\mathbf{r}) d^1V = \iiint_{V'} \operatorname{tr}\left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma}\right]^T {}^1\nabla\delta^1\mathbf{r}\right) d^1V \quad (1.2.33\alpha)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί εναλλακτικά, με χρήση της σχέσης (2.8), ως

$$\iint_{A'} \left[{}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) \cdot \delta^1\mathbf{r} \right] d^1A + \iiint_{V'} ({}^1\mathbf{f} \cdot \delta^1\mathbf{r}) d^1V = \iiint_{V'} \operatorname{tr}\left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma}\right]^T {}^1\nabla\delta^1\mathbf{r}\right) d^1V \quad (1.2.33\beta)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (η οποία καλείται εξίσωση χωρικού δυνατού έργου (spatial virtual work equation)), το αριστερό μέλος καλείται χωρικό δυνατό εξωτερικό έργο (spatial external virtual work) και συμβολίζεται με δ^1W_{ext} ενώ το δεξιό μέλος καλείται χωρικό δυνατό εσωτερικό έργο (spatial internal virtual work) και συμβολίζεται με δ^1W_{int} . Η ορολογία αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι ποσότητες που υπεισέρχονται στα διάφορα ολοκληρώματα είναι έργα επιφανειακών και μαζικών δράσεων ανηγμένες ως προς τις επιφάνειες και τους όγκους επί των οποίων ασκούνται, αντίστοιχα. Ο όρος «χωρικό» χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι τα έργα εκφράζονται συναρτήσει της τρέχουσας διαμόρφωσης, στην οποία χρησιμοποιούνται οι χωρικές μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3 (περιγραφή Euler).

Η ποσότητα ${}^1\nabla\delta^1\mathbf{r}$ εκφράζεται αναλυτικά ως

$${}^1\nabla\delta^1\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^1\delta u_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial^1\delta u_1}{\partial\xi_2} & \frac{\partial^1\delta u_1}{\partial\xi_3} \\ \frac{\partial^1\delta u_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial^1\delta u_2}{\partial\xi_2} & \frac{\partial^1\delta u_2}{\partial\xi_3} \\ \frac{\partial^1\delta u_3}{\partial\xi_1} & \frac{\partial^1\delta u_3}{\partial\xi_2} & \frac{\partial^1\delta u_3}{\partial\xi_3} \end{bmatrix} \quad (1.2.34)$$

Παρατηρείται ότι η ποσότητα αυτή εκφράζεται επίσης συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της τρέχουσας και όχι της αρχικής διαμόρφωσης. Εκτελώντας τις πράξεις στο δεξιό μέλος της εξ.(1.2.33β) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα συμμετρίας $\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T = {}^I \boldsymbol{\sigma}$ (βλ. εξ.(1.2.15)), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T {}^I \nabla \delta^I \mathbf{r} \right) &= \sigma_{11} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_2} + \sigma_{33} \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_3} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_1} \right) \\ &+ \sigma_{13} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_1} \right) + \sigma_{23} \left(\frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

όπου στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης παραλήφθηκαν οι αριστεροί ενδείκτες. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\delta^I W_{\text{int}} = \iiint_{V} \text{tr} \left(\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T \delta^I \boldsymbol{\varepsilon} \right) d^I V \quad (1.2.36)$$

όπου

$${}^I \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (1.2.37)$$

είναι ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης εκπεφρασμένος ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση $t = t_I$. Το ζεύγος ${}^I \boldsymbol{\sigma}$, ${}^I \boldsymbol{\varepsilon}$ καλείται συζυγές ως προς το έργο (work conjugate) αναφορικά με τον (παραμορφωμένο) όγκο του σώματος της τρέχουσας διαμόρφωσης.

1.2.6 2ος Τανυστής Τάσης Piola - Kirchhoff

Για να εκφραστεί το δυνατό εσωτερικό έργο συναρτήσει των μεταβλητών θέσης x_1, x_2, x_3 της αρχικής διαμόρφωσης, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff που έχει ήδη οριστεί. Πράγματι, εκκινώντας από την Αρχή Δυνατών Έργων της σχέσης (1.2.33β) και εκτελώντας παρόμοιους μετασχηματισμούς με αυτούς του εδαφίου 2.4, καταλήγουμε στην ακόλουθη αναδιατύπωση της Αρχής Δυνατών Έργων

$$\iint_{o_A} \left[{}^I \mathbf{t} \left({}^0 \mathbf{n} \right) \cdot \delta^I \mathbf{r} \right] d^0 A + \iiint_{o_V} \left({}^I \mathbf{f} \cdot \delta^I \mathbf{r} \right) d^0 V = \iiint_{o_V} \text{tr} \left(\left[{}^I \mathbf{P} \right]^T \delta^I \mathbf{X} \right) d^0 V \quad (1.2.38)$$

Το $\delta^I W_{\text{int}}$ πλέον εκφράζεται ως προς την αρχική διαμόρφωση, δηλαδή ισχύει

$$\delta^I W_{\text{int}} = \iiint_{o_V} \text{tr} \left(\left[\frac{I}{\rho} \mathbf{P} \right]^T \delta^I \mathbf{X} \right) d^0 V \quad (1.2.39)$$

Παρατηρείται ότι ο τανυστής $\frac{I}{\rho} \mathbf{P}$ μαζί με τη βαθμίδα παραμόρφωσης ${}^I \mathbf{X}$ αποτελούν συζυγές ζεύγος.

Ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff επινοήθηκε στην προσπάθεια να ευρεθεί ο συζυγής τανυστής τάσης του τανυστή παραμόρφωσης Green $\frac{I}{\rho} \mathbf{E}^G$. Ο τανυστής παραμόρφωσης Green έχει σημαντική φυσική σημασία (εκφράζει τις σχετικές μεταβολές μηκών και γωνιών των ινών του σώματος (βλ. εδάφια 1.1.2.1-2)) και για το λόγο αυτό είναι πιο πλεονεκτικό να εκφραστεί το δυνατό εσωτερικό έργο συναρτήσει του τανυστή παραμόρφωσης Green αντί της βαθμίδας παραμόρφωσης. Εξάλλου, οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων συνήθως εκφράζονται με τον συγκεκριμένο τανυστή παραμόρφωσης (τουλάχιστον στην περίπτωση της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων) γεγονός που καθιστά απαραίτητη την εύρεση του συζυγούς ζεύγους του. Για να οριστεί ο 2ο τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff, αρχικά ορίζεται διάνυσμα «ψευδοδύναμης» $d^0 \mathbf{p}$, με το οποίο αντιστοιχίζεται η τρέχουσα ασκούμενη δύναμη $d^I \mathbf{p}$ στην αρχική διαμόρφωση ως ακολούθως

$$d^0 \mathbf{p} = \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} d^I \mathbf{p} \quad (1.2.40)$$

Από τις σχέσεις (1.2.24) και (1.2.18α) προκύπτει άμεσα ότι

$$d^0 \mathbf{p} = \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} \frac{I}{\rho} \mathbf{P}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (1.2.41\alpha)$$

ενώ από τον ορισμό του $\frac{I}{\rho} \mathbf{P}$ (βλ. σχέση (1.2.23)) έχουμε

$$d^0 \mathbf{p} = \left\{ J \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} \frac{I}{\rho} \mathbf{P} \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-T} \right\}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (1.2.41\beta)$$

Πλέον, είναι δυνατό να οριστεί ο 2ο τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff $\frac{I}{\rho} \mathbf{S}$ ως το μέγεθος που συνδέει την απαραμόρφωτη επιφάνεια ${}^0 \mathbf{n} d^0 A$ με την «ψευδοδύναμη» $d^0 \mathbf{p}$. Από την παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$\frac{I}{\rho} \mathbf{S} = J \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-I} \frac{I}{\rho} \mathbf{P} \left[{}^I \mathbf{X} \right]^{-T} \quad (1.2.42\alpha)$$

ή

$${}^I\mathbf{S} = \left[{}^I\mathbf{X} \right]^{-1} {}^I\mathbf{P} \quad (1.2.42\beta)$$

Από την σχέση (1.2.42α) συμπεραίνεται ότι ο τανυστής ${}^I\mathbf{S}$ είναι συμμετρικός (σε αντίθεση με τον ${}^I\mathbf{P}$), δηλαδή ισχύει

$$\left[{}^I\mathbf{S} \right]^T = {}^I\mathbf{S} \quad (1.2.43)$$

Εκκινώντας από τη διατύπωση της εξ.(1.2.39) για το δυνατό εσωτερικό έργο και αξιοποιώντας την ιδιότητα (βλ. εξ.(1.1.5), (1.1.12))

$$\left[{}^I\boldsymbol{\varepsilon}^G \right] = \frac{1}{2} \left(\left[{}^I\mathbf{X} \right]^T {}^I\mathbf{X} - \mathbf{I} \right) \quad (1.2.44)$$

όπου

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.45)$$

καταλήγουμε έπειτα από πράξεις στην ακόλουθη έκφραση για το δυνατό εσωτερικό έργο

$$\delta^I W_{\text{int}} = \iiint_{oV} \text{tr} \left(\left[{}^I\mathbf{S} \right]^T \delta {}^I\boldsymbol{\varepsilon}^G \right) d^0V \quad (1.2.46)$$

Συνεπώς, οι τανυστές ${}^I\mathbf{S}$, ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}^G$ αποτελούν συζυγές ζεύγος, ενώ η Αρχή Δυνατών Έργων διατυπώνεται συναρτήσει των τανυστών αυτών ως

$$\iint_{oA} \left[\delta {}^I\mathbf{t}({}^0\mathbf{n}) \cdot \delta {}^I\mathbf{r} \right] d^0A + \iiint_{oV} \left(\delta {}^I\mathbf{f} \cdot \delta {}^I\mathbf{r} \right) d^0V = \iiint_{oV} \text{tr} \left(\left[{}^I\mathbf{S} \right]^T \delta {}^I\boldsymbol{\varepsilon}^G \right) d^0V \quad (1.2.47)$$

Στην παραπάνω σχέση απαιτείται προσοχή να μην εκφραστεί λανθασμένα το δυνατό εξωτερικό έργο συναρτήσει του ${}^I\mathbf{S}$. Ο ελκυστής $\delta {}^I\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})$ που υπεισέρχεται στο $\delta^I W_{\text{ext}}$ συσχετίζεται με τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff ${}^I\mathbf{P}$ και όχι με τον τανυστή ${}^I\mathbf{S}$, όπως εξάλλου υποδεικνύει και η σχέση (1.2.24).

1.2.7 Φυσική Σημασία των Τανυστών Τάσης

Ο τανυστής τάσης Cauchy αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε παραμορφωμένες επιφάνειες της τρέχουσας

διαμόρφωσης. Για παράδειγμα, η συνιστώσα ${}^1\sigma_{11}$ του τανυστή είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας d^1A , η οποία είναι κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της τρέχουσας διαμόρφωσης, διαιρεμένη με το εμβαδόν της d^1A .

Ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Για παράδειγμα, η συνιστώσα ${}^0P_{11}$ του τανυστή είναι η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη ως προς τον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, η οποία ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας d^1A , διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας d^0A . Η αρχική επιφάνεια d^0A είναι πάντα κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια d^1A δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα αυτόν.

Ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Η διαφορά με τον 1ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff έγκειται στο ότι η ανάλυση της τρέχουσας δύναμης σε συνιστώσες γίνεται ως προς διαφορετικό σύστημα αναφοράς. Έτσι για παράδειγμα, η συνιστώσα ${}^0S_{11}$ του τανυστή είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας d^1A διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας d^0A . Η αρχική επιφάνεια είναι απαραίτητως κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια d^1A δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα.

Συμπερασματικά, ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff «παρακολουθεί» τις στροφές (στροφή στερεού σώματος και διατμητικές παραμορφώσεις) που υφίσταται κατά την παραμόρφωση το υπό εξέταση στοιχείο όγκου, ενώ ο τανυστής τάσης Cauchy και ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff ορίζονται πάντα με βάση τους άξονες του συστήματος αναφοράς της εκάστοτε διαμόρφωσης. Η συγκεκριμένη ιδιότητα του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff τον καθιστά πολύ χρήσιμο εργαλείο στην ανάλυση μη γραμμικών προβλημάτων της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου. Τέλος, επισημαίνεται ότι μέσω των σχέσεων (1.2.23) και (1.2.42α) μπορούν να προσδιοριστεί ο 1ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff και ο τανυστής τάσης Cauchy, εάν είναι γνωστός ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff και η βαθμίδα παραμόρφωσης.

1.2.8 Τανυστής Τάσης Cauchy Μικρών Μετατοπίσεων

Σε όλες τις εκφράσεις των εξισώσεων ισορροπίας που έχουν εξαχθεί δεν έχει διατυπωθεί καμία υπόθεση σχετικά με το μέγεθος των μετατοπίσεων ή των παραμορφώσεων. Στην περίπτωση που οι μετατοπίσεις είναι μικρές, η διαφορά μεταξύ της αρχικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3) και της τελικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3) θεωρείται πολύ μικρή, συνεπώς ο τανυστής τάσης Cauchy μπορεί να εισαχθεί στις εξισώσεις ισορροπίας

εκπεφρασμένος ως προς την αρχική διαμόρφωση. Έτσι, οι σχέσεις (1.2.13) γράφονται για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ως

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} +_0 f_1 = 0 \quad (1.2.48\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} +_0 f_2 = 0 \quad (1.2.48\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} +_0 f_3 = 0 \quad (1.2.48\gamma)$$

ενώ οι σχετικές συνοριακές συνθήκες (βλ. εξ.(1.2.7)) διαμορφώνονται εδώ ως

$$o t_1 = \sigma_{11} o n_1 + \sigma_{21} o n_2 + \sigma_{31} o n_3 \quad (1.2.49\alpha)$$

$$o t_2 = \sigma_{12} o n_1 + \sigma_{22} o n_2 + \sigma_{32} o n_3 \quad (1.2.49\beta)$$

$$o t_3 = \sigma_{13} o n_1 + \sigma_{23} o n_2 + \sigma_{33} o n_3 \quad (1.2.49\gamma)$$

Η παραγωγή των συνιστωσών του ταυστή τάσης Cauchy πραγματοποιείται πλέον ως προς γνωστές μεταβλητές θέσης και όχι ως προς άγνωστες μεταβλητές της τρέχουσας διαμόρφωσης, γεγονός που συνιστά σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας. Ο ταυστής τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων και ο απειροστικός ταυστής παραμόρφωσης (βλ. εξ.(1.1.45-46)) αποτελούν συζυγές ζεύγος.

1.3 Συνθήκες Συμβιβαστού Παραμόρφωσης

Έστω ότι σε σημείο παραμορφώσιμου σώματος είναι γνωστές οι τρεις συνιστώσες (u, v, w) του διανύσματος μετατόπισης και ζητούνται οι έξι ανεξάρτητες συνιστώσες παραμόρφωσης ε_{ij} . Στην περίπτωση αυτή οι ζητούμενες συνιστώσες παραμόρφωσης υπολογίζονται άμεσα από τις εξ.(1.1.45). Αντίστροφα, αν είναι γνωστές οι έξι συνιστώσες παραμόρφωσης και ζητούνται οι τρεις συνιστώσες μετατόπισης, το πρόβλημα είναι υπερρορισμένο, δηλαδή έχουμε υπερεπάρκεια δεδομένων, μια και από τις έξι δεδομένες ανεξάρτητες τιμές πρέπει να υπολογιστούν τρεις άγνωστες τιμές με τη βοήθεια έξι ανεξάρτητων διαφορικών εξισώσεων (εξ.1.1.45). Έτσι, στην περίπτωση που είναι γνωστό το πεδίο παραμόρφωσης και ζητείται το πεδίο των μετατόπισης, για να είναι οι λύσεις (u, v, w) μονότιμες και συνεχείς συναρτήσεις, θα πρέπει να πληρούνται επιπλέον συνθήκες για τις συνιστώσες παραμόρφωσης. Οι συνθήκες αυτές, που εξάγονται από τις εξ.(1.1.45) με απαλοιφή των συνιστωσών μετατόπισης και εν συνεχεία με διαδοχικές παραγωγίσεις, ονομάζονται συνθήκες συμβιβαστού παραμόρφωσης και διατυπώνονται ως

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.3.1\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.3.1\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (1.3.1\gamma)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (1.3.1\delta)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} \quad (1.3.1\epsilon)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (1.3.1\zeta)$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι οι εξ.(1.3.1) που αποδείχθηκαν από τον Saint-Venant εκφράζουν τη μαθηματική διατύπωση της συνέχειας ενός παραμορφώσιμου σώματος. Επίσης, στην περίπτωση που το πεδίο μετατόπισης είναι δεδομένο οι εξισώσεις συμβιβαστού εξ.(1.3.1) πληρούνται ταυτοτικά, μια και οι ανηγμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται από τις μετατοπίσεις με παραγωγή και όχι αντίστροφα με ολοκλήρωση.

Η πλήρωση των εξισώσεων συμβιβαστού των παραμορφώσεων, για σώμα για το οποίο αποκλείεται η μετατόπισή του ως στερεό, αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μονοσήμαντου συνεχούς πεδίου μετατοπίσεων. Επιπροσθέτως, εάν το σώμα είναι απλά συνεκτικό (δηλαδή χωρίς οπές) τότε η πλήρωση των εξ.(1.3.1) αποτελεί και ικανή συνθήκη για μονότιμο και συνεχές πεδίο μετατόπισης. Όμως στην περίπτωση σωμάτων πολλαπλής συνοχής πρέπει στη γενική περίπτωση να ισχύουν και πρόσθετες ικανές συνθήκες, το πλήθος των οποίων ισούται με το βαθμό πολλαπλότητας συνοχής του χωρίου και οι οποίες προκύπτουν από τη φυσική θεώρηση του εκάστοτε εξεταζόμενου προβλήματος (Fung, 1965). Τέλος σημειώνεται ότι, εκτός από το συμβιβαστό των παραμορφώσεων στο εσωτερικό ενός ελαστικού σώματος, θα πρέπει να ικανοποιείται επιπλέον και το συμβιβαστό των μετατοπίσεων στο σύνορό του ανάλογα με τον τρόπο στήριξής του (συνοριακές συνθήκες).

1.4 Καταστατικές Εξισώσεις Ελαστικών Υλικών

Από τα προαναφερθέντα προέκυψε ότι για την περιγραφή της εντατικής κατάστασης απαιτούνται συνολικά έξι συνιστώσες τάσης, αν και οι διατιθέμενες διαφορικές εξισώσεις (εξισώσεις ισορροπίας, εξ.1.2.13) είναι τρεις. Επίσης, για την περιγραφή της παραμορφωσιακής κατάστασης απαιτούνται συνολικά έξι συνιστώσες παραμόρφωσης, οι οποίες συνδέονται γεωμετρικά με τις τρεις συνιστώσες μετατόπισης μέσω έξι διαφορικών εξισώσεων (εξ.1.1.45). Έτσι, απαιτείται συνολικά ο υπολογισμός δεκαπέντε αγνώστων μεγεθών (έξι συνιστώσες τάσης, έξι συνιστώσες τροπής και τρεις συνιστώσες μετατόπισης), ενώ οι

διατιθέμενες εξισώσεις είναι μόνο εννέα. Σημειώνεται ότι οι εξισώσεις συμβιβαστού που περιγράφηκαν παραπάνω δεν αποτελούν πρόσθετες εξισώσεις, αλλά δίδουν τις απαραίτητες συνθήκες συνέχειας του παραμορφώσιμου σώματος.

Συνεπώς, για την επίλυση των προβλημάτων της θεωρίας ελαστικότητας, οι διατιθέμενες εξισώσεις από μόνες τους δεν επαρκούν ούτε ποσοτικά, διότι το πρόβλημα είναι υπερστατικό και συγκεκριμένα έξι φορές στατικά αόριστο, αλλά ούτε και ποιοτικά, καθώς οι προαναφερθείσες εξισώσεις δεν εξασφαλίζουν τη συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων της έντασης και της παραμόρφωσης. Η αοριστία μπορεί να αρθεί λαμβάνοντας υπόψη τον καταστατικό (φυσικό) νόμο συμπεριφοράς του υλικού του σώματος, ο οποίος συσχετίζει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις.

Ο απλούστερος καταστατικός νόμος, που χρησιμοποιείται ευρύτατα και με αρκετή επιτυχία όσον αφορά την πραγματική απόκριση πολλών δομικών υλικών, είναι ο νόμος του Hooke, ο οποίος στη γενική του μορφή μπορεί να ληφθεί από κατάλληλες ενεργειακές θεωρήσεις. Στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικής θεωρίας απειροστών παραμορφώσεων ο γενικευμένος νόμος του Hooke λαμβάνει τη μορφή

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z) \quad (1.4.1)$$

όπου ο τανυστής τέταρτης τάξης k_{ijkl} των ελαστικών σταθερών έχει $3^4=81$ συνιστώσες.

Επειδή οι τανυστές τάσης και παραμόρφωσης είναι συμμετρικοί οι ανεξάρτητες συνιστώσες θα είναι 36, οπότε ο γενικευμένος νόμος του Hooke γράφεται ως

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.4.2)$$

ή

$$\{\Sigma\} = [K]\{E\} \quad (1.4.3)$$

όπου $[K]$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας και k_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 6$) οι ελαστικές σταθερές ή δείκτες δυσκαμψίας, ενώ για λόγους ευκολίας τα τετραγωνικά μητρώα των τάσεων $[\sigma]$ και παραμορφώσεων $[\varepsilon]$ αντικαταστάθηκαν με μονόστηλα μητρώα $\{\Sigma\}, \{E\}$ με έξι συνιστώσες, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι η εξ.(1.4.2) μπορεί να αντιστραφεί και να γραφεί ως

$$\{E\} = [K]^{-1} \{\Sigma\} = [F]\{\Sigma\} \quad (1.4.4)$$

όπου

$$[F] = [K]^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix} \quad (1.4.5)$$

είναι το μητρώο ευκαμψίας και οι συνιστώσες f_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 6$) οι δείκτες ευκαμψίας. Τα μητρώα $[K]$ και $[F]$, λόγω της ύπαρξης της συνάρτησης ανηγμένου έργου παραμόρφωσης, αποδεικνύεται ότι είναι συμμετρικά, δηλαδή $k_{ij} = k_{ji}$ και $f_{ij} = f_{ji}$. Έτσι, στη γενική περίπτωση ενός ανισότροπου γραμμικά ελαστικού σώματος οι ανεξάρτητες συνιστώσες περιορίζονται σε 21. Όταν το υλικό παρουσιάζει ένα επίπεδο συμμετρίας των μηχανικών ιδιοτήτων του ονομάζεται μονοκλινές και οι 21 σταθερές k_{ij} μειώνονται σε 13, ενώ όταν υπάρχουν τρία επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους το υλικό ονομάζεται ορθότροπο (π.χ. ξύλο) και οι σταθερές μειώνονται σε 9. Αν σε κάθε σημείο υλικού υπάρχει ένα επίπεδο πάνω στο οποίο διατηρούνται οι μηχανικές ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις, τότε το υλικό ονομάζεται εγκάρσια ισότροπο (π.χ. σύνθετα πολυμερή ενισχυμένα με υαλονήματα ή ανθρακονήματα) και οι ανεξάρτητες σταθερές μειώνονται σε 5. Τέλος, τα υλικά στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας ονομάζονται ισότροπα και οι ανεξάρτητες σταθερές είναι 2, ενώ το μητρώο δυσκαμψίας γράφεται ως

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \quad (1.4.6)$$

Από την εξ.(1.4.6) προκύπτει ότι στα ισότροπα υλικά το μητρώο δυσκαμψίας επιτρέπει τον πλήρη διαχωρισμό των ορθών από τις διατμητικές παραμορφώσεις, αφού η εξ.(1.4.2) με τη βοήθεια της εξ.(1.4.6) μπορεί να διασπασθεί σε

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} \quad (1.4.7\alpha)$$

και

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.4.7\beta)$$

ενώ ανάλογες εξισώσεις μπορούν να γραφούν και για το μητρώο ευκαμψίας $[F]$. Περαιτέρω θέτουμε

$$k_{12} = \lambda \quad k_{11} - k_{12} = 2\mu \quad (1.4.8\alpha,\beta)$$

όπου οι δύο ανεξάρτητες σταθερές λ και μ ονομάζονται σταθερές Lamé. Οι τιμές των μηχανικών σταθερών, οι οποίες χαρακτηρίζουν ένα υλικό, προσδιορίζονται από πειράματα απλού εφελκυσμού και καθαρής διάτμησης. Από τα πειράματα αυτά οι μηχανικές σταθερές που υπολογίζονται είναι το μέτρο ελαστικότητας E , ο λόγος του Poisson ν ($0 \leq \nu \leq 1/2$, για $\nu = 1/2$ το υλικό είναι ασυμπίεστο) και το μέτρο διάτμησης G , τα οποία μεγέθη συνδέονται με τις (ελαστικές) σταθερές Lamé με τις σχέσεις

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{G(2G-E)}{(E-3G)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.4.9\alpha,\beta)$$

ή αντίστροφα

$$E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \quad (1.4.10\alpha,\beta)$$

Έτσι, στην περίπτωση ισότροπου υλικού η καταστατική εξίσωση τάσεων-παραμορφώσεων σε μητρωϊκή μορφή γράφεται ως

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.4.11)$$

ή αντίστροφα

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.4.12)$$

1.5 Ελαστοστατικά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Συνοψίζοντας την προαναφερθείσα ανάλυση παρατηρούμε ότι για την επίλυση του προβλήματος της γραμμικής ελαστικότητας τα άγνωστα μεγέθη είναι

- 3 συνιστώσες μετατόπισης u, v, w
 - 6 συνιστώσες παραμόρφωσης ε_{ij}
 - 6 συνιστώσες τάσης σ_{ij}
- Συνολικά
15 άγνωστα μεγέθη

και οι διατιθέμενες διαφορικές εξισώσεις (ελλειπτικού τύπου) είναι

- 6 εξ. παραμορφώσεων–μετατοπίσεων (εξ.Π1.18)
 - 6 εξ. τάσεων–παραμορφώσεων (εξ.Π1.24)
 - 3 εξ. ισορροπίας (εξ.Π1.21)
- Συνολικά
15 εξισώσεις

Η επίλυση επομένως του γενικού προβλήματος της θεωρίας ελαστικότητας είναι “θεωρητικά” δυνατή (η λύση σε κλειστή μορφή στην πλειονότητα των περιπτώσεων είναι αδύνατη και μπορεί να προσδιοριστεί μόνο υπολογιστικά) υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες (στατικές και κινηματικές) του σώματος. Τονίζεται ότι οι συνοριακές συνθήκες για απειροστές τροπές εφαρμόζονται στο απαραμόρφωτο σύνορο του σώματος. Επίσης, για να είναι εφικτή η επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να τηρούνται και οι συνθήκες για “καλά τοποθετημένο” πρόβλημα (συνθήκες Hadamard), οι οποίες αφορούν την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και την ευστάθεια της λύσης. Σημειώνεται ότι μια λύση παρουσιάζει ευστάθεια αν μια μικρή διαταραχή στη διέγερση δεν προκαλεί σημαντικές μεταβολές στη λύση. Οι συνθήκες αυτές για απειροστές τροπές αποδεικνύεται ότι πληρούνται. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι, στην πλέον γενική περίπτωση η εξέταση της ύπαρξη λύσης είναι αρκετά περίπλοκη και αποτελεί σήμερα αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας. Έτσι, ανάλογα με τη φύση των συνοριακών συνθηκών προκύπτουν τα παρακάτω τρία θεμελιώδη προβλήματα της ελαστοστατικής.

1^ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Πρόβλημα Neumann): Ζητείται να προσδιοριστούν οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό ελαστικού σώματος που βρίσκεται σε ισορροπία, αν είναι γνωστές οι μαζικές δυνάμεις που ασκούνται σε ολόκληρο το σώμα και οι επιφανειακές δυνάμεις (διάνυσμα τάσης $T_i^{(n)}$: δεδομένο) που ασκούνται στη συνοριακή του επιφάνεια (στατικές συνοριακές συνθήκες).

2^ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Πρόβλημα Dirichlet): Ζητείται να προσδιοριστούν οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό ελαστικού σώματος που βρίσκεται σε ισορροπία, αν είναι γνωστές οι μαζικές δυνάμεις που ασκούνται σε ολόκληρο το σώμα και οι μετατοπίσεις (u_i : δεδομένες) των σημείων της συνοριακής του επιφάνειας (κινηματικές συνοριακές συνθήκες).

3^ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Μικτό Πρόβλημα): Ζητείται να προσδιοριστούν οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό ελαστικού σώματος που βρίσκεται σε ισορροπία,

αν είναι γνωστές οι μαζικές δυνάμεις που ασκούνται σε ολόκληρο το σώμα, οι μετατοπίσεις (u_i) των σημείων ενός τμήματος της συνοριακής του επιφάνειας (Γ_1) και οι επιφανειακές δυνάμεις ($T_i^{(n)}$) που ασκούνται στο υπόλοιπο τμήμα της συνοριακή του επιφάνειας (Γ_2).

Τονίζεται ότι στο 1^ο θεμελιώδες πρόβλημα οι επιφανειακές δυνάμεις πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας του σώματος. Η λύση που προκύπτει στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται συναρτήσσει δύο αυθαίρετων σταθερών (πρόβλημα Neumann, διαφορικές εξισώσεις ελλειπτικού τύπου) οι οποίες εισάγουν κίνηση απολύτως στερεού σώματος. Οι συνιστώσες των τάσεων και παραμορφώσεων όμως δεν επηρεάζονται από τις σταθερές αυτές, διότι στις σχέσεις προσδιορισμού των εν λόγω μεγεθών υπεισέρχονται μόνο οι παράγωγοι των μετατοπίσεων. Ωστόσο, κατά την υπολογιστική επίλυση του προβλήματος Neumann απαιτείται να ληφθεί ειδική μέριμνα, καθώς οι προαναφερθείσες σταθερές έχουν ως συνέπεια την εμφάνιση δυσχερειών κατά την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος (το μητρώο του συστήματος δεν αντιστρέφεται), η μόρφωση του οποίου πραγματοποιείται με αριθμητικές μεθόδους. Επίσης, σημειώνεται ότι τα ανωτέρω τρία προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν με ενιαίο τρόπο μέσω γενικής μορφής συνοριακών συνθηκών, η οποία περιλαμβάνει τις συνοριακές δυνάμεις και τις συνοριακές μετατοπίσεις και οι οποίες συσχετίζονται μέσω κατάλληλων (δεδομένων) συναρτήσεων. Η διατύπωση αυτή κατά την αριθμητική επίλυση του προβλήματος, παρότι αυξάνει το πλήθος των αγνώστων, προσδίδει σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα, ενώ διευκολύνει στην περίπτωση που οι στατικές και κινηματικές συνοριακές συνθήκες είναι συζευγμένες (πρόβλημα Robin), όπως π.χ. στη περίπτωση ελαστικών στηρίξεων.

Τέλος, αξίζει εδώ να σημειωθεί η μεγάλη αξία που έχει στην επίλυση των γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών της ελαστικότητας η αρχή της επαλληλίας (αρχή της υπέρθεσης) και η αρχή του Saint-Venant. Η αρχή της επαλληλίας επιτρέπει τα φορτία που ασκούνται σε κατασκευή να κλιμακώνονται με κάποιο φορτικό συντελεστή και να συνδυάζονται μεταξύ τους, απλοποιώντας έτσι σημαντικά την επίλυση των προβλημάτων. Η αρχή του Saint-Venant επιτρέπει την αντικατάσταση μιας φόρτισης, που εφαρμόζεται σε περιορισμένη περιοχή του σώματος, με μια ισοπολική φόρτιση, καθώς η επίδραση των δύο αυτών φορτίσεων σε περιοχές που βρίσκονται “αρκετά μακριά” από το σημείο εφαρμογής τους είναι περίπου ίδια (οι διαφορικές εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας είναι ελλειπτικού τύπου). Έτσι, είναι δυνατόν απλοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες να προκύψει ένα σημαντικά πιο εύκολο πρόβλημα. Το κόστος μιας τέτοιας απλοποίησης είναι βέβαια η αλλοίωση του εντατικού πεδίου στη γειτονική περιοχή εφαρμογής των ισοδύναμων φορτίων. Στο μεγαλύτερο τμήμα του σώματος όμως η λύση εν γένει ισχύει. Ο Saint-Venant διατύπωσε την αρχή του με σκοπό τη διατύπωση του προβλήματος ομοιόμορφης στρέψης ράβδων τυχόντος σχήματος. Ωστόσο, τονίζεται ότι η αρχή του Saint-Venant θα πρέπει να χρησιμοποιείται με ιδιαίτερη προσοχή, διότι όπως διαπιστώνεται στο κεφάλαιο 1 σε αρκετές ράβδους (π.χ. ανοικτής διατομής μικρού μήκους) η αρχή αυτή δεν τηρείται πάντα καθώς η στρέψη ενδέχεται να είναι ανομοιόμορφη.

1.6 Στοιχεία Θεωρίας Υπερελαστικότητας και Κλασσικής Πλαστικότητας

Παραπάνω εξετάζονται ξεχωριστά οι παραμορφώσεις σώματος και οι δράσεις που ασκούνται σε αυτό. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση του προβλήματος, αφού η ανάλυση της παραμόρφωσης βασίζεται αποκλειστικά σε γεωμετρικές θεωρήσεις ενώ αυτή των τάσεων στους θεμελιώδεις νόμους της Νευτώνειας Μηχανικής. Ωστόσο από φυσική διαίσθηση καθίσταται αντιληπτό ότι οι δράσεις και οι παραμορφώσεις δεν είναι ανεξάρτητες αλλά συνδέονται μεταξύ τους. Είναι αδύνατο να παραμορφωθεί κάποιο σώμα χωρίς να ασκηθεί επάνω του κάποια δράση. Επιπρόσθετα, είναι γνωστό ότι υπάρχει πολύ μεγάλη ποικιλία στον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνονται τα διάφορα υλικά στις επιβαλλόμενες δράσεις.

Η ακριβής θεωρητική αντιμετώπιση του προσδιορισμού των σχέσεων τάσεων - παραμορφώσεων θα απαιτούσε τη μελέτη των ιδιοτήτων του υλικού σε μοριακό επίπεδο. Κάτι τέτοιο ωστόσο είναι εξαιρετικά δυσχερές. Έτσι αναπτύχθηκαν φαινομενολογικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων όπου η συμπεριφορά του υλικού εξετάζεται σε μακροσκοπική κλίμακα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση βασίζεται αφενός σε αξιωματικές θεωρήσεις και μαθηματικές απλοποιήσεις, αφετέρου στην πειραματική διερεύνηση των ιδιοτήτων του υλικού. Επιπλέον, γενικά η επιβολή δράσεων σε οποιοδήποτε σώμα θα προκαλέσει και μεταβολή θερμοκρασίας εκτός από παραμορφώσεις και αντιστρόφως. Στην παρούσα διατριβή εξετάζονται μόνο καταστατικές σχέσεις στα πλαίσια ισόθερμων μεταβολών, δηλαδή οι δράσεις και οι παραμορφώσεις θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Παρακάτω παρουσιάζονται στοιχεία καταστατικής συμπεριφοράς υπερελαστικών και κλασικά πλαστικών υλικών.

1.6.1 Θεωρία Υπερελαστικότητας

Εξετάζουμε την παραμόρφωση που υφίσταται απειροστό στοιχείο σώματος κατά τη μετάβαση από την αρχική στην τελική διαμόρφωσή του. Το υλικό του στοιχείου καλείται (ιδεατά) ελαστικό (ideally elastic) όταν η ενέργεια που απαιτείται για την παραμόρφωση του είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάβαση από την αρχική (παραμορφωσιακή) διαμόρφωση στην τελική. Άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού είναι οι ακόλουθες.

- Αφού οι δράσεις εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις, έπεται ότι και οι δράσεις είναι ανεξάρτητες από τη μετάβαση από την αρχική στην τελική διαμόρφωση. Επομένως οι δράσεις εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμορφώσεις της διαμόρφωσης που εξετάζεται και είναι ανεξάρτητες από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μηδενικό. Ως αποτέλεσμα, αν σώμα φορτιστεί και στη συνέχεια αποφορτιστεί, το σώμα θα επιστρέψει στην ίδια ακριβώς κατάσταση που βρισκόταν πριν τη φόρτιση ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο θα συμβεί η αποφόρτιση.

Υπάρχουν διάφορες κλάσεις ελαστικών υλικών όπως υπερελαστικά, υποελαστικά, βισκοελαστικά κ.λ.π. Στο παρόν κεφάλαιο μόνο η υπερελαστική καταστατική συμπεριφορά. Ελαστικό υλικό χαρακτηρίζεται ως **υπερελαστικό** (hyperelastic) ή Green - ελαστικό (Green - elastic) όταν υπάρχει συνάρτηση

$F = F\left({}_0^t\varepsilon_{11}, {}_0^t\varepsilon_{22}, {}_0^t\varepsilon_{33}, {}_0^t\varepsilon_{21} = {}_0^t\varepsilon_{12}, {}_0^t\varepsilon_{31} = {}_0^t\varepsilon_{13}, {}_0^t\varepsilon_{32} = {}_0^t\varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right)$ που εξαρτάται από τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green και τις μεταβλητές θέσης της αρχικής διαμόρφωσης (x_1, x_2, x_3) , τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$d''W = F\left({}_0^t\varepsilon_{11}, {}_0^t\varepsilon_{22}, {}_0^t\varepsilon_{33}, {}_0^t\varepsilon_{12}, {}_0^t\varepsilon_{13}, {}_0^t\varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right) d'{}^0V \quad (1.6.1)$$

όπου $d'{}^0V = d'x_1 d'x_2 d'x_3$ είναι ο όγκος του εξεταζόμενου απειροστού στοιχείου στην αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση, ${}_0^t\varepsilon_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2,3$) είναι οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green (εξ.(1.1.12)), $d''W$ είναι η συνολική ενέργεια (έργο) που απαιτείται για την (ισόθερμη) παραμόρφωση του στοιχειώδους όγκου $d'{}^0V$ του στοιχείου, ενώ οι αριστεροί δείκτες των διαφόρων μεγεθών επεξηγούνται στα εδάφια 1.2.1, 1.2.4. Η συνάρτηση F καλείται συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης ή τροπικής ενέργειας ανά μονάδα αρχικού όγκου (strain energy function per unit initial volume). Στην περίπτωση που η F λαμβάνει τη μορφή

$$F = F\left({}_0^t\varepsilon_{11}, {}_0^t\varepsilon_{22}, {}_0^t\varepsilon_{33}, {}_0^t\varepsilon_{12}, {}_0^t\varepsilon_{13}, {}_0^t\varepsilon_{23}\right) \quad (1.6.2)$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών θέσης, τότε το υλικό καλείται ομογενές (homogeneous). Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται αποκλειστικά ομογενή ή κατά τμήματα ομογενή σώματα. Υπογραμμίζεται ότι η μορφή της συνάρτησης F παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής όπου εξετάζεται η παραμόρφωση του σώματος, αφού ο χρόνος εισάγεται μόνο έμμεσα στην εξ.(1.6.1) ή στην εξ.(1.6.2) μέσω των συνιστωσών της παραμόρφωσης.

Από την εξ.(1.2.46) έχει προκύψει ότι ο 2ος τανυστής τάσης Piola - Kirchhoff και ο τανυστής παραμόρφωσης Green είναι συζυγείς ως προς το έργο. Επομένως, για απειροστή μεταβολή $d(\cdot)$ ως προς το χρόνο των παραμορφωσιακών μεγεθών ισχύει

$$d(d''W) = \left({}_0^tS_{11}d{}_0^t\varepsilon_{11} + {}_0^tS_{22}d{}_0^t\varepsilon_{22} + \dots + {}_0^tS_{23}d{}_0^t\varepsilon_{23} + {}_0^tS_{32}d{}_0^t\varepsilon_{32}\right) d'{}^0V \quad (1.6.3)$$

Από την εξ.(1.6.2), με διαφορίση ως προς $d(\cdot)$ προκύπτει ότι

$$d(d''W) = \left(\frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{11}} d{}_0^t\varepsilon_{11} + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{22}} d{}_0^t\varepsilon_{22} + \dots + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{23}} d{}_0^t\varepsilon_{23} + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{32}} d{}_0^t\varepsilon_{32}\right) d'{}^0V \quad (1.6.4)$$

επομένως από τις εξ.(1.8.3-4) έπεται ότι

$${}^tS_{ij} = \frac{\partial F}{\partial {}^t\varepsilon_{ij}}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (1.6.5\alpha\text{-στ})$$

Οι 6 σχέσεις (1.6.5α-στ) είναι οι καταστατικές σχέσεις υπερελαστικού υλικού. Παρατηρείται ότι ο καθορισμός της συνάρτησης F αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό των καταστατικών σχέσεων, με τις οποίες καθίσταται δυνατό να επιλυθεί το πρόβλημα της τριδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας (15 άγνωστοι με 15 διατιθέμενες εξισώσεις).

Προκειμένου να επιλεγεί κατάλληλη μορφή της F , αρχικά εξετάζεται η πλέον γενική περίπτωση ανάπτυξής της σε δυναμοσειρά ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές της ως ακολούθως

$$\begin{aligned} F = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(A_{ij} {}^t\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(B_{ijkl} {}^t\varepsilon_{ij} {}^t\varepsilon_{kl} \right) \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \left(C_{ijklmn} {}^t\varepsilon_{ij} {}^t\varepsilon_{kl} {}^t\varepsilon_{mn} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

όπου A_{ij} , B_{ijkl} , C_{ijklmn} , ... ($i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$) είναι σταθεροί συντελεστές. Από την εξ.(1.6.6) παραλήφθηκαν αρνητικές δυνάμεις συνιστωσών του ταυιστή παραμόρφωσης, αφού για ${}^t\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ θα λαμβάναμε $d^tW \rightarrow \infty$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν έχει φυσικό νόημα. Ο σταθερός όρος παραλήφθηκε επίσης, αφού κατά τη μερική παραγωγή των εξ.(1.6.5) θα απαλειφθεί, επομένως δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό των τάσεων ενδιαφέρον. Αντικαθιστώντας την εξ.(1.6.6) στις εξ.(1.6.5), προκύπτει ότι

$${}^tS_{rs} = A + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} {}^t\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} {}^t\varepsilon_{ij} {}^t\varepsilon_{kl} \right) + \dots, \quad \forall r, s = 1, 2, 3 \quad (1.6.7)$$

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση όπου στην απαραμόρφωτη διαμόρφωση δεν υπάρχει αρχική ένταση, για την εξ.(1.6.7) θα πρέπει να ισχύει

$$A = 0 \quad (1.6.8)$$

συνεπώς η συγκεκριμένη σχέση θα γραφεί ως

$${}^tS_{rs} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} {}^t\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} {}^t\varepsilon_{ij} {}^t\varepsilon_{kl} \right) + \dots, \quad \forall r, s = 1, 2, 3 \quad (1.6.9)$$

Με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, ισχύει ${}^t\varepsilon_{ij} \ll 1$, $\forall i, j = 1, 2, 3$, επομένως οι μη γραμμικοί όροι της εξ.(1.6.9) που περιέχουν γινόμενα

δύο ή περισσότερων συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης μπορούν να αγνοηθούν. Συνεπώς προκύπτει η ακόλουθη γραμμική σχέση τάσεων - παραμορφώσεων

$${}^t\mathbf{S} = \mathbf{D}^{el} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^G \quad (1.6.10)$$

όπου στην παραπάνω σχέση υιοθετήθηκε μητρωικός - διανυσματικός συμβολισμός με $({}^t\mathbf{S})^T = ({}^tS_{11}, {}^tS_{22}, {}^tS_{33}, {}^tS_{12}, {}^tS_{13}, {}^tS_{23})$ να είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff, $({}^t\boldsymbol{\varepsilon}^G)^T = ({}^t\varepsilon_{11}, {}^t\varepsilon_{22}, {}^t\varepsilon_{33}, {}^t\gamma_{12} = 2{}^t\varepsilon_{12}, {}^t\gamma_{13} = 2{}^t\varepsilon_{13}, {}^t\gamma_{23} = 2{}^t\varepsilon_{23})$ να είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green και που συμπεριλαμβάνει τις διαμητικές παραμορφώσεις ${}^t\gamma_{12}, {}^t\gamma_{13}, {}^t\gamma_{23}$ και \mathbf{D}^e να είναι καταστατικό μητρώο σταθερών συντελεστών k_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) διαστάσεων 6×6 . Οι ποσότητες k_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) καλούνται ελαστικές σταθερές. Ο παραπάνω θεμελιώδης καταστατικός νόμος είναι γνωστός ως γενικευμένος νόμος του Hooke (generalized Hooke's law). Στην περίπτωση που υιοθετηθεί η επιπρόσθετη υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων, τότε ο νόμος του Hooke μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.6.11)$$

όπου $(\boldsymbol{\sigma})^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων (εδάφιο 1.2.8) και $(\boldsymbol{\varepsilon})^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}, \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}, \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης (εδάφιο 1.2.5).

Γενικά το καταστατικό μητρώο \mathbf{D}^{el} περιέχει $6 \times 6 = 36$ ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές k_{ij} που πρέπει να προσδιοριστούν. Ωστόσο, συνήθως τα περισσότερα υλικά διαθέτουν διευθύνσεις συμμετρίας ως προς τις οποίες οι ελαστικές σταθερές να παραμένουν αμετάβλητες. Έτσι στην πλέον γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχει καμία συμμετρία, τα υλικά χαρακτηρίζονται ως ανισότροπα (anisotropic). Υλικά με 3 επίπεδα συμμετρίας χαρακτηρίζονται ως ορθότροπα (orthotropic), ενώ στην περίπτωση όπου η μηχανική συμπεριφορά είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις το υλικό χαρακτηρίζεται ως ισότροπο (isotropic). Η ύπαρξη διευθύνσεων συμμετρίας οδηγεί σε συσχετίσεις των ελαστικών σταθερών μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μειώνεται ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών k_{ij} .

Στην παρούσα διατριβή μελετάται αποκλειστικά η ισότροπη υπερελαστική καταστατική συμπεριφορά. Με στοιχειώδεις γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, αποδεικνύεται διαδοχικά για την περίπτωση αυτή ότι για το μητρώο \mathbf{D}^{el} ισχύουν τα ακόλουθα.

- Παραμένει αμετάβλητο σε οποιαδήποτε στροφή του συστήματος αναφοράς

- Είναι συμμετρικό, δηλαδή ισχύει

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (1.6.12)$$

- Υπάρχουν μόνο 2 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Το μητρώο δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathbf{D}^{\text{el}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{12}) \end{bmatrix} \quad (1.6.13)$$

Θέτοντας

$$k_{12} = \lambda \quad k_{11} - k_{12} = 2\mu \quad (1.6.14\alpha, \beta)$$

λαμβάνονται οι (ανεξάρτητες) σταθερές του Lamé λ , μ (Lamé constants). Οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων μπορούν να αντιστραφούν και να ληφθούν οι ακόλουθες εξισώσεις συσχέτισης παραμορφωσιακών συναρτήσεων τασικών μεγεθών

$${}^t\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[{}^tS_{11} - \nu ({}^tS_{22} + {}^tS_{33}) \right] \quad (1.6.15\alpha)$$

$${}^t\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[{}^tS_{22} - \nu ({}^tS_{11} + {}^tS_{33}) \right] \quad (1.6.15\beta)$$

$${}^t\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[{}^tS_{33} - \nu ({}^tS_{11} + {}^tS_{22}) \right] \quad (1.6.15\gamma)$$

$$2 {}^t\varepsilon_{12} = {}^t\gamma_{12} = \frac{1}{G} {}^tS_{12} \quad 2 {}^t\varepsilon_{13} = {}^t\gamma_{13} = \frac{1}{G} {}^tS_{13} \quad 2 {}^t\varepsilon_{23} = {}^t\gamma_{23} = \frac{1}{G} {}^tS_{23} \quad (1.6.15\delta, \varepsilon, \sigma)$$

όπου $E = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$ είναι το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young (elastic modulus, Young's modulus), $G = \mu$ είναι το μέτρο διάτμησης (shear modulus) και

$\nu = \lambda / [2(\lambda + \mu)]$ είναι ο λόγος του Poisson (Poisson's ratio). Οι σταθερές E, G, ν δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται μέσω της σχέσης

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6.16)$$

Χρησιμοποιώντας τις σταθερές E, G, ν , οι σχέσεις (1.6.15) μπορούν να γραφούν και αντίστροφα ως

$${}^tS_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) {}^t\epsilon_{11} + \nu ({}^t\epsilon_{22} + {}^t\epsilon_{33}) \right] \quad (1.6.17\alpha)$$

$${}^tS_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) {}^t\epsilon_{22} + \nu ({}^t\epsilon_{11} + {}^t\epsilon_{33}) \right] \quad (1.6.17\beta)$$

$${}^tS_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) {}^t\epsilon_{33} + \nu ({}^t\epsilon_{11} + {}^t\epsilon_{22}) \right] \quad (1.6.17\gamma)$$

$${}^tS_{12} = 2G {}^t\epsilon_{12} = G {}^t\gamma_{12} \quad {}^tS_{13} = 2G {}^t\epsilon_{13} = G {}^t\gamma_{13} \quad {}^tS_{23} = 2G {}^t\epsilon_{23} = G {}^t\gamma_{23} \quad (1.6.17\delta, \epsilon, \sigma)$$

1.6.2 Θεωρία Κλασσικής Πλαστικότητας

Εξετάζουμε την παραμόρφωση που υφίσταται απειροστό στοιχείο σώματος κατά τη μετάβαση από την αρχική στην τελική διαμόρφωσή του. Το υλικό του στοιχείου καλείται **ελαστοπλαστικό** (elastoplastic, inelastic) όταν το έργο παραμόρφωσης εξαρτάται από τον τρόπο μετάβασης από την αρχική παραμορφωσιακή κατάσταση του στην τελική. Άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού είναι οι ακόλουθες.

- Οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων δεν είναι αμφιμονοσήμαντες όπως στην περίπτωση της ελαστικότητας, αλλά εξαρτώνται από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μη μηδενικό. Ως αποτέλεσμα, αν σώμα φορτιστεί και στη συνέχεια αποφορτιστεί, το σώμα δεν θα επιστρέψει στην ίδια ακριβώς παραμορφωσιακή κατάσταση που βρισκόταν πριν τη φόρτιση και θα αναπτύξει παραμένουσες (μόνιμες) πλαστικές παραμορφώσεις.

Όταν τα τασικά μεγέθη καθορίζονται αποκλειστικά από παραμορφωσιακά μεγέθη και την ιστορία της φόρτισης, τότε αναφερόμαστε σε ελαστοπλαστική θεωρία ανεξάρτητη του ρυθμού (ταχύτητας) παραμόρφωσης (rate - independent elastoplasticity). Αν η συμπεριφορά του υλικού εξαρτάται και από το ρυθμό της παραμόρφωσης ως προς τον χρόνο τότε αναφερόμαστε σε ελαστοπλαστική θεωρία εξαρτώμενη από το ρυθμό παραμόρφωσης (rate - dependent elastoplasticity, viscoplasticity). Στο παρόν κεφάλαιο μελετάται μόνο η πρώτη περίπτωση ελαστοπλαστικής καταστατικής συμπεριφοράς.

1.6.2.1 Θεωρία Μικρών Μετατοπίσεων - Μικρών Παραμορφώσεων

Ιστορικά η θεωρία κλασσικής πλαστικότητας (ανεξάρτητη του ρυθμού των παραμορφώσεων) αναπτύχθηκε με στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων

- μικρών παραμορφώσεων. Συνεπώς, στο παρόν εδάφιο χρησιμοποιούνται ο τανυστής τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων (εδάφιο 1.2.8) και ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης. Η θεωρία βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές.

1. Τα συνολικά παραμορφωσιακά μεγέθη του εξεταζόμενου απειροστού στοιχείου μεταξύ 2 χρονικών στιγμών $t_1, t = t_1 + dt$ ισούνται με το άθροισμα των ελαστικών (αναστρέψιμων) και ανελαστικών (μη αναστρέψιμων) παραμορφωσιακών μεγεθών, δηλαδή ισχύει

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (1.6.18\alpha)$$

όπου με το $d(\cdot)$ συμβολίζεται απειροστή μεταβολή του μεγέθους που βρίσκεται εντός της παρένθεσης ως προς τον χρόνο. Επισημαίνεται ότι δεν αποτελεί συμβολισμό ολικού διαφορικού αλλά μόνο μεταβολή ως προς το χρόνο. Επίσης, $d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{33}, d\gamma_{12}, d\gamma_{13}, d\gamma_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης και που συμπεριλαμβάνει τις διατμητικές παραμορφώσεις, σημειώνοντας ότι η παραμόρφωση πραγματοποιείται μεταξύ 2 χρονικών στιγμών $t_1, t = t_1 + dt$.

$d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = (d\varepsilon_{11}^{el}, d\varepsilon_{22}^{el}, d\varepsilon_{33}^{el}, d\gamma_{12}^{el}, d\gamma_{13}^{el}, d\gamma_{23}^{el})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από το ελαστικό μέρος των συνιστωσών του $d\boldsymbol{\varepsilon}$ και $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = (d\varepsilon_{11}^{pl}, d\varepsilon_{22}^{pl}, d\varepsilon_{33}^{pl}, d\gamma_{12}^{pl}, d\gamma_{13}^{pl}, d\gamma_{23}^{pl})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από το πλαστικό μέρος των συνιστωσών του $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Τέλος, σημειώνεται ότι εξαιτίας της ισχύος της εξ.(1.8.18α), με απλή χρονική ολοκλήρωση προκύπτει ότι αντίστοιχη σχέση ισχύει και για πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Έτσι, λαμβάνοντας $t_1 = 0$ (αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση) προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \int_0^t d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (1.6.18\beta)$$

όπου τα $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = (\varepsilon_{11}^{el}, \varepsilon_{22}^{el}, \varepsilon_{33}^{el}, \gamma_{12}^{el}, \gamma_{13}^{el}, \gamma_{23}^{el})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = (\varepsilon_{11}^{pl}, \varepsilon_{22}^{pl}, \varepsilon_{33}^{pl}, \gamma_{12}^{pl}, \gamma_{13}^{pl}, \gamma_{23}^{pl})$ περιέχουν ολικά συνολικά, ελαστικά και πλαστικά παραμορφωσιακά μεγέθη, αντίστοιχα, τα οποία πραγματοποιούνται μεταξύ της αρχικής και της τρέχουσας χρονικής στιγμής.

2. Οι τάσεις προσδιορίζονται με βάση το νόμο του Hooke (εξ.(1.6.11)) με τη θεμελιώδη διαφορά ότι η συσχέτιση γίνεται με τις αναστρέψιμες (ελαστικές) παραμορφώσεις και όχι με τις ολικές.
3. Το υλικό δεν παρουσιάζει βλάβη (ζημιά) κατά την πλαστική διαρροή (plastic flow), δηλαδή οι καταστατικές σχέσεις τάσεων - ελαστικών παραμορφώσεων παραμένουν αμετάβλητες και δεν εξαρτώνται από την εξέλιξη ή τη στάθμη των πλαστικών παραμορφώσεων.

Για να αποφανθούμε αν το υλικό έχει υποστεί πλαστική διαρροή (πλαστικοποίηση), χρησιμοποιείται συνάρτηση f της μορφής

$$f = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}), \sigma_y(\mathbf{q})) \quad (1.6.19)$$

η οποία καλείται συνάρτηση διαρροής (yield function). Στην παραπάνω σχέση \mathbf{q} είναι διάνυσμα εσωτερικών μεταβλητών (internal variables) του υλικού που καθορίζει όλες τις καταστατικές παραμέτρους που περιγράφουν την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του, $\boldsymbol{\alpha}$ είναι διάνυσμα καταστατικών παραμέτρων που περιγράφουν τη «μεταφορά» της επιφάνειας διαρροής σε νέα θέση χωρίς όμως αλλαγή του σχήματος ή του μεγέθους της (για ορισμό της επιφάνειας διαρροής βλέπε παρακάτω εξ.(1.6.20β)) και σ_y είναι καταστατική παράμετρος που ορίζει την τάση κατά την οποία το υλικό διαρρέει σε πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ συνήθως είναι μη μηδενικό κατά την ανακυκλική φόρτιση και προσδιορίζεται από τον νόμο κινηματικής κράτυνσης (kinematic hardening law). Η μεταβολή του σ_y περιγράφει την ομοιόμορφη επέκταση ή συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής και προσδιορίζεται από τον νόμο ισότροπης κράτυνσης (isotropic hardening law). Στην παρούσα διατριβή θεωρούμε ότι το υλικό δεν παρουσιάζει κινηματική κράτυνση, συνεπώς το $\boldsymbol{\alpha}$ δεν υπεισέρχεται στη συνάρτηση διαρροής.

Το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά όταν ισχύει

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) < 0 \quad (1.6.20\alpha)$$

και διαρρέει πλαστικά εάν

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0 \quad (1.6.20\beta)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί επιφάνεια στο χώρο των τάσεων και καλείται επιφάνεια διαρροής ή κριτήριο διαρροής (yield surface, yield criterion). Υπογραμμίζεται ότι η περίπτωση $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) > 0$ δεν αντιστοιχεί σε πραγματική εντατική κατάσταση του υλικού και είναι αδύνατο να συμβεί. Θεωρούμε την περίπτωση όπου έχει πραγματοποιηθεί πλαστική διαρροή (δηλαδή ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0$) και αναζητούμε την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση του εξεταζόμενου απειροστού στοιχείου για απειροστή προσαύξηση (ως προς το χρόνο) των ολικών παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}$, η οποία θεωρείται εκ των προτέρων γνωστή. Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές 2 και 3, οι σχέσεις προσαυξητικών τάσεων - παραμορφώσεων εκφράζονται ως

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \xrightarrow{\text{εξ.}(1.6.18)} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (1.6.21)$$

όπου $d\boldsymbol{\sigma} = (d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{33}, d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23})$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων που

ισχύουν σε 2 χρονικές στιγμές t_1 , $t = t_1 + dt$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι είναι αδύνατο να προσδιοριστούν οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων αν δεν καθοριστούν με οποιονδήποτε τρόπο οι πλαστικοί όροι $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}}$. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται από το ακόλουθο νόμο πλαστικής ροής (flow rule), ο οποίος είναι γνωστός και ως εξισώσεις των Prandtl - Reuss

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.6.22)$$

όπου $d\lambda$ είναι βαθμωτό μέγεθος που καλείται συντελεστής αναλογίας (proportionality factor) και $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \right)$ είναι διάνυσμα που προκύπτει από την παραγωγή της συνάρτησης διαρροής f ως προς τις συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}$. Ο νόμος αυτός δηλώνει ότι το διάνυσμα των πλαστικών παραμορφώσεων είναι παράλληλο με το διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Το $d\lambda$ δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί από το κριτήριο διαρροής και μόνο αλλά είναι αναγκαία η μελέτη της χρονικής μεταβολής της συνάρτησης διαρροής. Με διαφόριση (ως προς το χρόνο) της συνάρτησης διαρροής f λαμβάνουμε

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \quad (1.6.23)$$

όπου με « \cdot » συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Διακρίνονται οι ακόλουθες 3 περιπτώσεις.

- Εάν $df > 0$, τότε στη νέα χρονική στιγμή $t_1 + dt$ θα ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) > 0$, αφού για την χρονική στιγμή t_1 έχει ληφθεί ότι $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0$. Η περίπτωση είναι αδύνατο να ισχύει αφού έρχεται σε αντίθεση με τον περιορισμό $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) \leq 0$.
- Εάν $df < 0$, τότε στη νέα χρονική στιγμή $t_1 + dt$ θα ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) < 0$, επομένως το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά και ως εκ τούτου οι πλαστικοί όροι θα μηδενίζονται, οπότε προκύπτει ότι

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}} = \mathbf{0} \xrightarrow{\text{εξ.}(1.6.22)} d\lambda = 0 \quad (1.6.24)$$

Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως ελαστική αποφόρτιση (elastic unloading).

- Εάν $df = 0$, τότε διακρίνονται οι ακόλουθες υποπεριπτώσεις.
 1. Εάν $d\lambda = 0$, τότε από την εξ.(1.6.22) έπεται ότι $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Pl}} = \mathbf{0}$, δηλαδή οι πλαστικές παραμορφώσεις δεν αυξάνονται. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως ουδέτερη φόρτιση (neutral loading).

2. Εάν $d\lambda > 0$, τότε $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \neq \mathbf{0}$, δηλαδή έχουμε συνέχιση της πλαστικής διαρροής. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως πλαστική φόρτιση (plastic loading). Αναγκαία συνθήκη για να έχουμε πλαστική φόρτιση είναι η ισχύς της σχέσης $df = 0$, η οποία καλείται και νόμος της συνέπειας (consistency condition)

Η τιμή του $d\lambda$ έχει προσδιοριστεί σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από την πλαστική φόρτιση. Για την περίπτωση αυτή, η εξ.(1.6.23) δίδει με τη βοήθεια της εξ.(1.6.21)

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \xrightarrow{\text{εξ. (1.6.24)}} \\ &\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \end{aligned} \quad (1.6.25)$$

Προκειμένου να συνεχιστεί η παρούσα ανάλυση, είναι αναγκαίο να θεωρηθεί συγκεκριμένος νόμος μεταβολής της τάσης διαρροής σ_y (νόμος ισότροπης κράτυνσης) καθώς και συγκεκριμένο κριτήριο διαρροής. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται το κριτήριο διαρροής Von Mises, το οποίο δίδεται ως

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = \sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\mathbf{q}) \quad (1.6.26)$$

όπου σ_e είναι η δρώσα τάση (effective stress) στην περίπτωση της πλέον γενικής τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης, η οποία δίδεται ως

$$\sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 \right] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (1.6.27)$$

Θεωρούμε επίσης ότι η τάση διαρροής σ_y εξαρτάται αποκλειστικά από την ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση (total equivalent plastic strain) ε_{eq}^{pl} , η οποία θα είναι η μοναδική εσωτερική μεταβλητή του υλικού. Συνεπώς, λαμβάνουμε

$$\mathbf{q} = \left(\varepsilon_{eq}^{pl} \right) \quad \sigma_y = \sigma_y \left(\varepsilon_{eq}^{pl} \right) \quad (1.6.28,29)$$

Η ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ε_{eq}^{pl} ορίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{eq}^{pl} = \int_0^t d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (1.6.30)$$

όπου $d\varepsilon_{eq}^{pl}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ο οποίος ορίζεται ως

$$d\varepsilon_{eq}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(d\varepsilon_{xx}^{pl})^2 + (d\varepsilon_{yy}^{pl})^2 + (d\varepsilon_{zz}^{pl})^2 + \frac{1}{2} \left((d\gamma_{12}^{pl})^2 + (d\gamma_{13}^{pl})^2 + (d\gamma_{23}^{pl})^2 \right) \right]} \quad (1.6.31)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon_{eq}^{pl}) \Rightarrow d\sigma_y = h(\varepsilon_{eq}^{pl}) d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (1.6.32)$$

όπου $h(\varepsilon_{eq}^{pl})$ είναι η παράγωγος της τάσης διαρροής ως προς ε_{eq}^{pl} , η οποία καλείται μέτρο κράτυνσης (plastic modulus). Σημειώνεται ότι το μέτρο κράτυνσης $h(\varepsilon_{eq}^{pl})$ αποτελεί χαρακτηριστική καταστατική ιδιότητα του υλικού. Στην περίπτωση που $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) = \text{σταθ.}$, το σ_y μεταβάλλεται γραμμικά και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως γραμμικός ισότροπος νόμος κράτυνσης. Η περίπτωση αυτή είναι και η απλούστερη. Για $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) > 0$ έχουμε επέκταση της επιφάνειας διαρροής και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως κράτυνση (hardening), για $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) < 0$ έχουμε συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως χαλάρωση (softening), ενώ για $h(\varepsilon_{eq}^{pl}) = 0$ η επιφάνεια διαρροής δεν μεταβάλλεται και η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως ελαστική - ιδεατά πλαστική (elastic - perfectly plastic).

Για να υπολογιστεί το άγνωστο μέγεθος $d\sigma_y$ της εξ.(1.6.25), πρέπει να προσδιοριστεί ο ρυθμός μεταβολής $d\varepsilon_{eq}^{pl}$. Από τις εξ.(1.8.26-27), προκύπτουν έπειτα από κάποιες πράξεις οι ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\sigma_{11} - (1/2)(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{\sigma_e} \quad (1.6.33\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\sigma_{22} - (1/2)(\sigma_{11} + \sigma_{33})}{\sigma_e} \quad (1.6.33\beta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} = \frac{\sigma_{33} - (1/2)(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_e} \quad (1.6.33\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} = 3 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_e} \quad (1.6.33\delta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} = 3 \frac{\sigma_{13}}{\sigma_e} \quad (1.8.33\epsilon)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} = 3 \frac{\sigma_{23}}{\sigma_e} \quad (1.8.33\sigma)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1.6.24), (1.6.33), η εξ.(1.6.31) δίδει έπειτα από κάποιες πράξεις

$$d\varepsilon_{eq}^{pl} = d\lambda \quad (1.6.34)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\partial f / \partial \sigma_y = -1$ (βλέπε εξ.(1.6.26)), η εξ.(1.6.25), με τη βοήθεια της εξ.(1.6.34), γράφεται ως

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - h(\varepsilon_{eq}^{pl}) d\lambda \\ \Rightarrow df &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} \right) - \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + h \right] d\lambda \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

Επειδή εξετάζεται η περίπτωση της πλαστικής φόρτισης, έχει ήδη εξαχθεί ότι $df = 0$, συνεπώς η εξ.(1.6.35) επιτρέπει τον προσδιορισμό του $d\lambda$ ως ακολούθως

$$d\lambda = \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \right] / \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + h \right] \quad (1.6.36)$$

Μετά τον υπολογισμό του $d\lambda$ συναρτήσει των απειροστών ολικών προσαυξητικών παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}$, είναι πλέον δυνατό να προσδιοριστεί πλήρως το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο. Αντικαθιστώντας την εξ.(1.6.22) στην εξ.(1.6.21) προκύπτει

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.6.37)$$

Το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο \mathbf{D}^{el-pl} προκύπτει αντικαθιστώντας την τιμή του $d\lambda$ από την εξ.(1.6.36) στην εξ.(1.6.37). Τελικά λαμβάνουμε

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el-pl} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.6.38)$$

όπου

$$\mathbf{D}^{el-pl} = \mathbf{D}^{el} - \frac{\mathbf{D}^{el} \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\left[\mathbf{D}^{el} \right] \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right]}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\mathbf{D}^{el} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + h} \quad (1.6.39)$$

Τέλος, επισημαίνεται ότι η ελαστοπλαστική καταστατική συμπεριφορά μπορεί να εκφραστεί για πεπερασμένο χρονικό διάστημα ολοκληρώνοντας χρονικά την εξ.(1.6.21). Αξιοποιώντας την εξ.(1.6.18β) και λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα παραδοχή 3, προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^{el} \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (1.6.40)$$

1.6.2.2 Θεωρία Μεγάλων Μετατοπίσεων - Μικρών Παραμορφώσεων

Στην περίπτωση υπερελαστικού υλικού έχουμε εξάγει ότι η αντικατάσταση του τανυστή τάσης Cauchy μικρών μετατοπίσεων με τον 2ο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff και του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης με τον τανυστή παραμόρφωσης Green αρκεί για να προσδιοριστούν πλήρως οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων, όταν ισχύει η υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων. Στην κλασική πλαστικότητα, στα πλαίσια της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων ισχύει παρόμοια επέκταση με αυτήν της θεωρίας ελαστικότητας. Σε όλες τις σχέσεις που έχουν εξαχθεί, αρκεί η παραπάνω αντικατάσταση των τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων για να προσδιοριστεί πλήρως η συμπεριφορά του ελαστοπλαστικού υλικού (βλ. και [Bathe 1996, Gruttman et al. 2000, Παπαδρακάκης 1998]).

1.7 Μη γραμμικότητα υλικού

1.7.1 Εισαγωγή

Στην καθημερινή ζωή της δουλειάς του μηχανικού, κάποια υλικά συμπεριφέρονται με εξιδανικευμένο τρόπο, ώστε να είναι δυνατή η επίλυση κάποιων σύνθετων προβλημάτων. Η υπόθεση αυτή βεβαίως μπορεί να γίνει μόνο για υλικά που η συμπεριφορά τους πλησιάζει πράγματι προς την εξιδανικευμένη και βασίζεται συχνά σε δύο παραδοχές:

- Η ελαστική και η πλαστική περιοχή διαχωρίζονται απόλυτα μεταξύ τους στο όριο διαρροής, δηλαδή τα όρια αναλογίας και ελαστικότητας συμπίπτουν με το όριο διαρροής.
- Η σχέση τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων υποτίθεται γραμμική, ακόμα και στην πλαστική περιοχή.

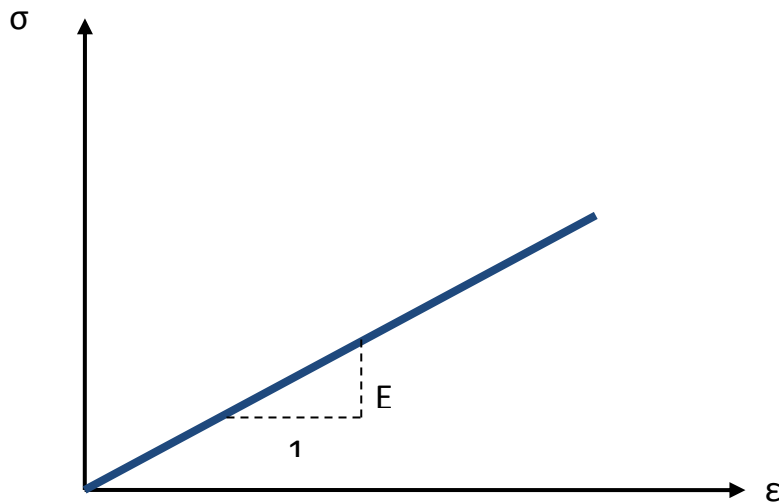
Με βάση τις δύο παραπάνω παραδοχές, ορίζονται τα εξιδανικευμένα προσομοιώματα για γραμμικά ελαστικά υλικά, γραμμικά ελαστικά – απολύτως πλαστικά υλικά και, τέλος, γραμμικά ελαστικά – γραμμικά κρατυνόμενα υλικά.

1.7.2 Γραμμικά Ελαστικά Υλικά

Υλικά στα οποία τα επίπεδα των αναπτυσσόμενων τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων είναι επαρκώς μικρά, χαρακτηρίζονται από γραμμική συμπεριφορά δηλαδή οι τάσεις σ με τις ανηγμένες παραμορφώσεις ϵ με μια σχέση της μορφής $\sigma = E \cdot \epsilon$, και ελαστική συμπεριφορά, δηλαδή οι κλάδοι φόρτισης και αποφόρτισης συμπίπτουν και μετά από πλήρη αποφόρτιση δεν υπάρχουν παραμένουσες παραμορφώσεις. Τα υλικά αυτά λέγονται γραμμικά ελαστικά και η συμπεριφορά τους περιγράφεται από μία ευθεία γραμμή, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2.

Η γραμμική ελαστική συμπεριφορά ορίζεται από το μέτρο ελαστικότητας E για μονοαξονική εντατική κατάσταση, ενώ σε περιπτώσεις πολυαξονικής έντασης για την περιγραφή της απαιτείται, εκτός του μέτρου ελαστικότητας και ο λόγος Poisson ν . Ο λόγος Poisson είναι μία σταθερά, η οποία ορίζεται ως ο λόγος της εγκάρσιας ανηγμένης παραμόρφωσης προς την αντίστοιχη διαμήκη, και

προδιορίζεται πειραματικά. Ο λόγος του Poisson του χάλυβα ισούται κατά προσέγγιση με 0.30 για την ελαστική περιοχή και 0.50 με για την πλαστική περιοχή.



Σχήμα 1.2 Γραμμική ελαστική συμπεριφορά

Επίσης σημαντικό μέγεθος για την περιγραφή μιας πολυαξονικής κατάστασης είναι το μέτρο διάτμησης G , που είναι ο λόγος της διατμητικής τάσης προς την αντίστοιχη διατμητική παραμόρφωση. Σύμφωνα με τη θεωρία ελαστικότητας, το μέτρο διάτμησης συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας και με το λόγο Poisson με τη σχέση:

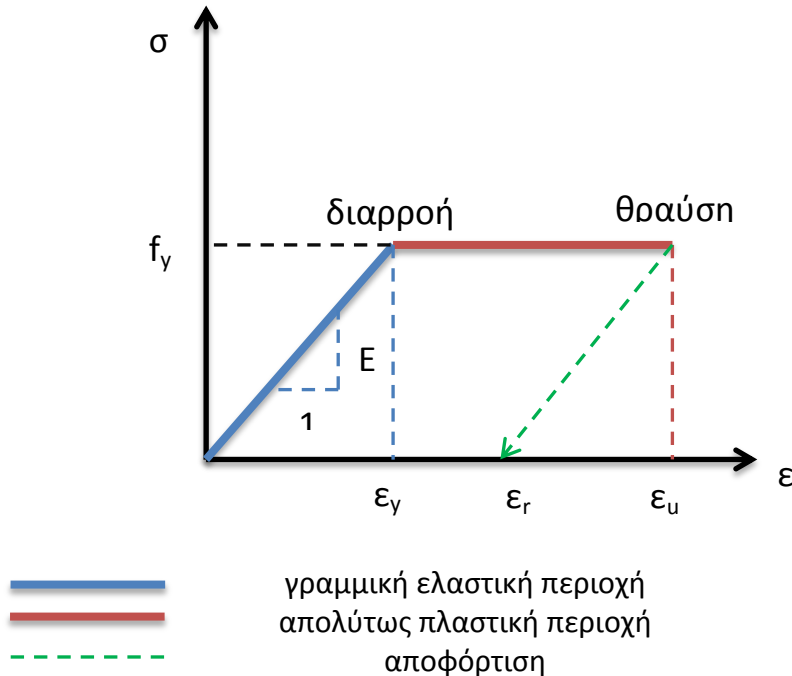
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.7.1)$$

1.7.3 Γραμμικά Ελαστικά – Απολύτως Πλαστικά Υλικά

Υλικά που χαρακτηρίζονται από γραμμικά ελαστική συμπεριφορά μέχρι κάποια τιμή των αναπτυσσόμενων τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων, τα οποία όμως μπορεί να καταπονηθούν εντονότερα, και να υπερβούν το όριο διαρροής, μπορούν απλοποιητικά να περιγραφούν με ένα διάγραμμα τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων που αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα : α) ένα έως την τάση διαρροής f_y , που αντιστοιχεί σε γραμμική ελαστική συμπεριφορά, και περιγράφεται με μια σχέση της μορφής $\sigma = E \cdot \varepsilon$, και β) άλλο ένα, οριζόντιο, από το σημείο διαρροής ως τη θραύση, όπου η παραμόρφωση αυξάνει ενώ η τάση θεωρείται σταθερή (Σχήμα 1.3). Τα υλικά αυτά λέγονται γραμμικά ελαστικά –απολύτως πλαστικά.

Η αρχική γραμμική περιοχή είναι και ελαστική, δηλαδή οι κλάδοι φόρτισης και αποφόρτισης συμπίπτουν, και μετά από πλήρη αποφόρτιση δεν υπάρχουν παραμένουσες παραμορφώσεις. Στην πλαστική περιοχή η συμπεριφορά είναι ανελαστική και κατά την αποφόρτιση ακολουθείται μία ευθεία γραμμή, παράλληλη με τον αρχικό, ελαστικό κλάδο, ενώ σε περίπτωση πλήρους αποφόρτισης παραμένουν στο δοκίμιο κάποιες παραμορφώσεις, οι λεγόμενες πλαστικές ή μίνιμες

ή παραμένουσες παραμορφώσεις. Η πλαστική παραμόρφωση ε_r , σε υλικά με γραμμική ελαστικά – απολύτως πλαστική συμπεριφορά δίνεται από τη σχέση:



Σχήμα 1.3 Γραμμική ελαστική – απολύτως πλαστική συμπεριφορά

$$E_r = \varepsilon - \varepsilon_y \quad (1.7.2)$$

όπου ε είναι η ανηγμένη παραμόρφωση τη στιγμή έναρξης της αποφόρτισης και ε_y είναι η ανηγμένη παραμόρφωση διαρροής.

Η γραμμική ελαστική – απολύτως πλαστική συμπεριφορά περιγράφεται, για μονοαξονική εντατική κατάσταση, από το μέτρο ελαστικότητας E , την τάση διαρροής f_y (ή την ανηγμένη παραμόρφωση διαρροής $\varepsilon_y = f_y / E$), και την ανηγμένη παραμόρφωση θράυσης ε_u . Σε περιπτώσεις πολυαξονικής έντασης, για την περιγραφή της συμπεριφοράς απαιτείται επιπλέον και ο λόγος Poisson ν (ή το μέτρο διάτμησης G).

1.7.4 Γραμμικά Ελαστικά – Γραμμικά Κρατυνόμενα Υλικά

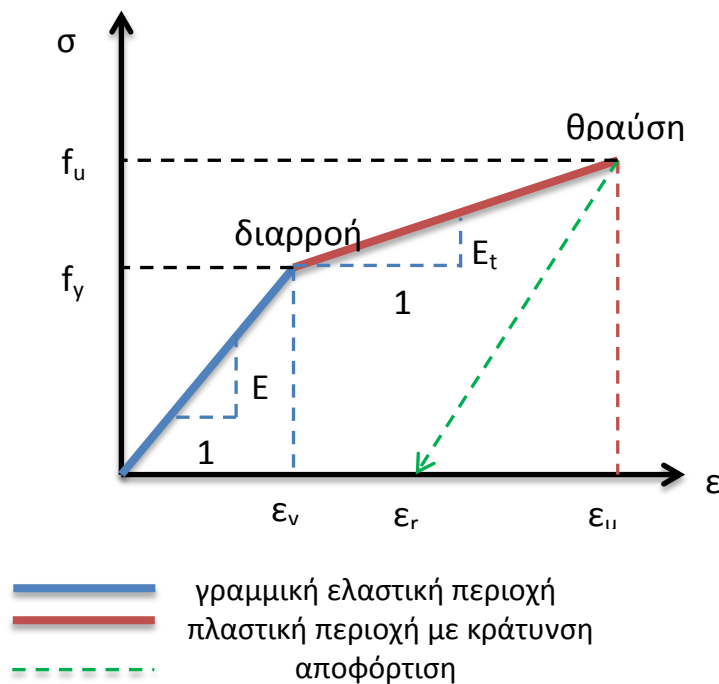
Ο χάλυβας έχει τη δυνατότητα να παραλάβει τάση μεγαλύτερη μετά τη διαρροή, ιδιότητα που είναι γνωστή ως κράτυνση. Υλικά με ασθενή κράτυνση μπορούν να εξιδανικεύονται ως γραμμικά ελαστικά – τελείως πλαστικά. Για υλικά όμως με ισχυρή κράτυνση, αυτή η προσέγγιση θα ήταν πολύ συντηρητική. Καλύτερη προσέγγιση σε αυτές τις περιπτώσεις δίνει η εξιδανίκευση με ένα διάγραμμα τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων, το οποίο μέχρι τη διαρροή συμπίπτει με εκείνο των γραμμικά ελαστικών – τελείως πλαστικών υλικών, μετά τη διαρροή όμως αποτελείται από μία δεύτερη κεκλιμένη ευθεία, με κλίση σημαντικά μικρότερη από

εκείνη της ελαστικής περιοχής, η οποία περιγράφει την κράτυνση (Σχήμα 1.4). Στο δεύτερο αυτό τμήμα ισχύει μια αναλογία μεταξύ μεταβολών των τάσεων και μεταβολών των παραμορφώσεων, με συντελεστή αναλογίας μια τιμή E_t που κυμαίνεται μεταξύ 0.005 και 0.05 επί το μέτρο ελαστικότητας E . Τα υλικά αυτά λέγονται γραμμικά ελαστικά – γραμμικά κρατυνόμενα.

Και εδώ η γραμμική περιοχή είναι και ελαστική, δηλαδή οι κλάδοι φόρτισης και αποφόρτισης συμπίπτουν και μετά από πλήρη αποφόρτιση δεν υπάρχουν παραμένουσες παραμορφώσεις. Επίσης, στην πλαστική περιοχή η συμπεριφορά είναι ανελαστική, και κατά την αποφόρτιση ακολουθείται μια ευθεία γραμμή, παράλληλη με τον αρχικό ελαστικό κλάδο, ενώ σε περίπτωση πλήρους αποφόρτισης παραμένουν στο δοκίμιο οι λεγόμενες πλαστικές ή παραμένουσες παραμορφώσεις. Η πλαστική παραμόρφωση ε_r σε υλικά με γραμμικά ελαστική – γραμμικά κρατυνόμενη συμπεριφορά δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_r = (\varepsilon - \varepsilon_y) \left(1 - \frac{E_t}{E} \right) \quad (1.7.3)$$

όπου ε είναι η ανηγμένη παραμόρφωση τη στιγμή έναρξης της αποφόρτισης.



Σχήμα 1.4 Γραμμικά ελαστική – γραμμικά κρατυνόμενη συμπεριφορά

Η γραμμικά ελαστική – γραμμικά κρατυνόμενη συμπεριφορά περιγράφεται, για μονοαξονική εντατική κατάσταση, από το μέτρο ελαστικότητας E , την τάση

διαρροής f_y (ή την ανηγμένη παραμόρφωση διαρροής $\varepsilon_y = f_y / E$), το μέτρο κράτυνσης E_t , και την τάση θραύσης f_u (ή την ανηγμένη παραμόρφωση θραύσης ε_u). Σε περιπτώσεις πολυαξονικής έντασης, για την περιγραφή της συμπεριφοράς απαιτείται επιπλέον και ο λόγος Poisson ν (ή το μέτρο διάτμησης G).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ομοιόμορφη Διάτμηση Δοκού

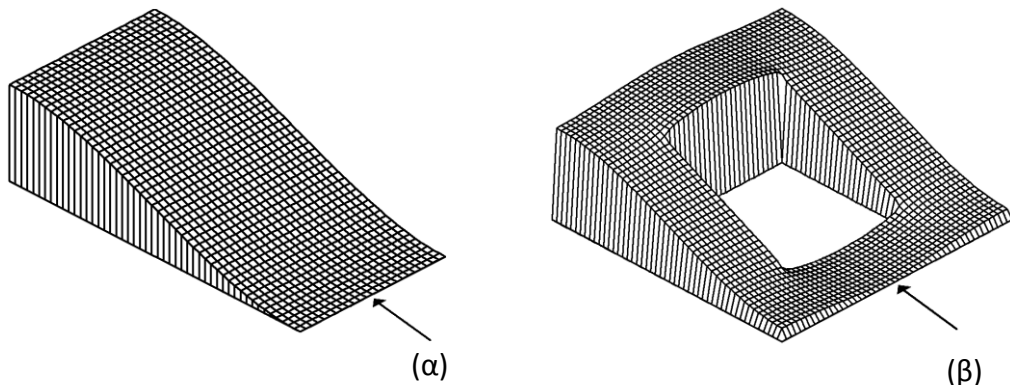
2.1 Εισαγωγή

Δοκός υποβαλλόμενη σε εγκάρσιες δυνάμεις αναπτύσσει διατμητική ένταση, η οποία συνήθως συνδυάζεται με καμπτική. Στην περίπτωση που η διεύθυνση των εξωτερικά επιβαλλόμενων εγκάρσιων δυνάμεων δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της διατομής της ράβδου αναπτύσσεται εκτός της διατμητικής και στρεπτική ένταση λόγω εκκεντρότητας, καθώς το κέντρο διάτμησης είναι το σημείο εκείνο της διατομής από το οποίο διέρχεται η εσωτερικά αναπτυσσόμενη τέμνουσα δύναμη (ολοκλήρωμα διατμητικών τάσεων). Έτσι, στην περίπτωση αυτή θα πρέπει στην εντατική κατάσταση να προστεθεί και η στρεπτική ένταση. Στη συντριπτική πλειοψηφία των κατασκευών Πολιτικού Μηχανικού συναντάται η ανάλυση μελών φορέα υποκείμενων σε διατμητική ένταση. Ο ψαθυρός (απροειδοποίητος) τρόπος αστοχίας ραβδωτών στοιχείων σκυροδέματος τα οποία δεν είναι σωστά διαστασιολογημένα για τη παραλαβή διάτμησης, καθώς και ότι ο έλεγχος έναντι τέμνουσας δύναμης κατά τη διαστασιολόγηση είναι συνήθως ο κρίσιμος σε κατασκευές που βρίσκονται σε σεισμογενείς περιοχές, όπου ο καθοριστικός συνδυασμός φόρτισης είναι ο σεισμικός, απαιτεί ακριβή ανάλυση.

Σε ραβδωτά στοιχεία από σιδηροπαγές σκυρόδεμα σταδίου II δεν ισχύει η θεωρία ελαστικότητας και για τη διαστασιολόγηση έναντι διάτμησης χρησιμοποιούνται προσεγγιστικά προσομοιώματα τύπου δικτυώματος Mörsch [ΕΚΩΣ 2000, παρ.11.2]. Ωστόσο, κατασκευές από προεντεταμένο σκυρόδεμα, μεταλλικές κατασκευές, καθώς και πολλές σύμμικτες κατασκευές σχεδιάζονται να λειτουργούν στην ελαστική περιοχή και επομένως, στις κατασκευές αυτές η ανάλυση και διαστασιολόγηση έναντι διάτμησης πραγματοποιείται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας.

Οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης στη γενική περίπτωση αναπτύσσονται ανομοιόμορφα στη διατομή ράβδου. Επομένως, η κατανομή των διατμητικών παραμορφώσεων θα είναι και αυτή ανομοιόμορφη με αποτέλεσμα η διατομή (όπως και στη στρέψη) να στρεβλώνει διατμητικά προς τη διαμήκη διεύθυνση, δηλαδή να μην ισχύει πλέον η παραδοχή Bernoulli περί επιτεδότητας διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Στην περίπτωση ράβδου που η τέμνουσα δύναμη κατά μήκος της είναι σταθερή και οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται, η εφαρμοζόμενη διατμητική φόρτιση αναλαμβάνεται μόνο από διατμητικές τάσεις οι οποίες μεγιστοποιούνται στο σύνορο. Η διάτμηση αυτή ονομάζεται ομοιόμορφη [(Love, 1944), (Sokolnikoff, 1956), (Timoshenko and Goodier, 1951)]. Αντίθετα, εάν η τέμνουσα δύναμη μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου ή/και η διατμητική στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης, η διάτμηση στη ράβδο αναπτύσσεται ανομοιόμορφα. Θεωρίες αναφορικά με την ανομοιόμορφη διάτμηση ομογενών ράβδων διατυπώνονται από τους Hofmann [1992] και Fatmi [2007a, 2007b].

Η στρέβλωση λόγω διάτμησης θεωρείται εν γένει μικρή συγκρινόμενη με την αντίστοιχη λόγω στρέψης, με αποτέλεσμα οι αναπτυσσόμενες τάσεις στρέβλωσης λόγω διάτμησης να επιτρέπεται με ικανοποιητική προσέγγιση να αγνοούνται στην ανάλυση. Έτσι, η εντατική κατάσταση (τάσεις) σε ράβδους λόγω τέμνουσας δύναμης προσδιορίζεται με τη θεώρηση ομοιόμορφης διάτμησης, ενώ στην παραμορφωσιακή κατάσταση η επιρροή της στρέβλωσης λαμβάνεται έμμεσα υπόψιν με τη βοήθεια κατάλληλων διορθωτικών συντελεστών διάτμησης. Ο Timoshenko [1921, 1922] ήταν ο πρώτος που έλαβε υπόψη την επιρροή διατμητικής παραμόρφωσης μέσω διορθωτικών συντελεστών διάτμησης, τροποποιώντας κατάλληλα τις εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου. Για το λόγο αυτό η θεωρία δοκού που λαμβάνει υπόψη την επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων είναι γνωστή ως θεωρία Timoshenko. Σημειώνεται ότι ο αντίστροφος του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης (κ) καλείται συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης ($a = 1/\kappa$).



Σχήμα 2.1. Στρέβλωση λόγω τέμνουσας δύναμης ορθογωνικής (α) και κοίλης τετραγωνικής (β) διατομής.

Το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης περιλαμβάνει τον υπολογισμό των παρακάτω μεγεθών:

- I. Υπολογισμός διατμητικών τάσεων
- II. Υπολογισμός θέσης κέντρου διάτμησης S
- III. Υπολογισμός συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης

Η ακριβής διατύπωση του προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης περιγράφεται από προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας. Η μόρφωση των προβλημάτων αυτών μπορεί να πραγματοποιηθεί με βάση το πεδίο των μετατοπίσεων ή το πεδίο των τάσεων. Η διατύπωση με τη βοήθεια του πεδίου των τάσεων προσφέρεται, καθώς έτσι λαμβάνεται ευκολότερα υπόψιν ο λόγος του Poisson ν , η επιρροή του οποίου ενδέχεται να είναι σημαντική. Σε ορισμένες διατομές απλής γεωμετρίας η λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή [Fung, 1965]. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η λύση προσδιορίζεται μόνο αριθμητικά (FDM, FEM, BEM).

Στην πράξη συνήθως οι διατμητικές τάσεις σε χοντρότοιχες διατομές με έναν άξονα συμμετρίας, π.χ. άξονας συμμετρίας ο z και εγκάρσια δύναμη Q_z ως προς τον άξονα z , υπολογίζονται σε μια οριζόντια τομή παράλληλη στο άξονα y από τη γνωστή σχέση ($\tau_{xy} = 0$)

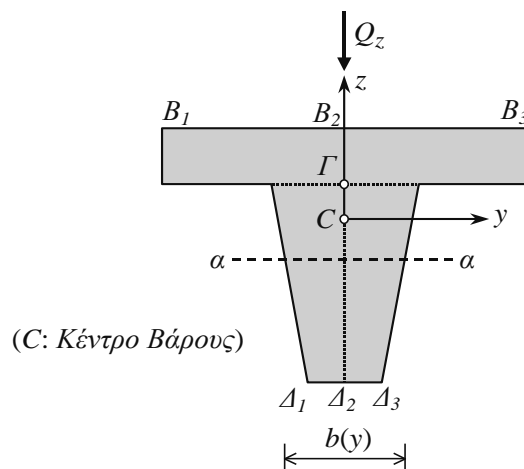
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^{cut}}{I_{yy} b} \quad (2.1.1)$$

όπου S_y^{cut} η στατική ροπή ως προς τον κεντροβαρικό άξονα y της αποκομμένης διατομής, I_{yy} η καμπτική ροπή αδράνειας της συνολικής διατομής ως προς τον κεντροβαρικό άξονα y και b το πλάτος της τομής. Στην παραπάνω σχέση τα μόνα μεταβλητά μεγέθη είναι η S_y^{cut} και το b , ενώ η αξονική δύναμη κατά μήκος της ράβδου θεωρείται σταθερή. Ωστόσο πολλές φορές στην πράξη αγνοείται το γεγονός ότι η εξίσωση (2.1.1), που προκύπτει με τη βοήθεια της τεχνικής θεωρία δοκού, είναι προσεγγιστική και παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα [(Hartmann and Katz, 2004), (Sauer, 1980)]. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (2.1.1) δίδει την ακριβή τιμή των διατμητικών τάσεων μόνο σε ράβδους ορθογωνικής διατομής με μηδενικό λόγο Poisson ($\nu = 0$). Τα κύρια μειονεκτήματα της εξίσωσης (2.1.1) είναι τα ακόλουθα:

- Η εξίσωση (2.1.1) ισχύει σε διατομές με άξονα συμμετρίας
- Η εξίσωση (2.1.1) δεν ισχύει για διατομές πολλαπλής συνοχής (δηλαδή διατομές με οπές), διότι κατά τη μόρφωσή της δεν λαμβάνονται υπόψη οι εξισώσεις συμβιβαστού.
- Η εξίσωση (2.1.1) δεν λαμβάνει υπόψιν το λόγο Poisson, ο οποίος σε χοντρότοιχες διατομές ενδέχεται να επηρεάζει σημαντικά την κατανομή και το μέγεθος των διατμητικών τάσεων.
- Η εξίσωση (2.1.1) στηρίζεται στην παραδοχή ότι οι διατμητικές τάσεις κατά το πλάτους b της τομής είναι σταθερά κατανεμημένες. Στην τομή $a-a$ της διατομής του Σχήματος 2.2 η παραδοχή αυτή δεν τηρείται. Επίσης, δεν τηρείται και σε ορθογωνικές διατομές με λόγο Poisson διάφορο του μηδενός. Μόνο η τιμή της διατμητικής ροής (επικαμπύλια ολοκλήρωση τάσεων, δύναμη ανά μήκος) κατά μήκος του πλάτους b της τομής που υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.1.1) είναι ακριβής, διότι η εξίσωση (2.1.1) προέκυψε απαιτώντας την ισορροπία τμήματος ράβδου πεπερασμένων διαστάσεων και όχι την ισορροπία κάθε στοιχειώδους κύβου της θεωρίας ελαστικότητας.
- Παρατηρώντας την (2.1.1) συμπεραίνουμε ότι στα ακραία σημεία της διατομής κατά τον άξονα z η στατική ροπή μηδενίζεται και επομένως η διατμητική τάση στα σημεία αυτά είναι μηδενική. Ωστόσο, στη διατομή του Σχήματος 2.2 οι διατμητικές τάσεις στα τμήματα B_1B_3 και A_1A_3 δεν είναι παντού μηδενικές.
- Σύμφωνα με την εξίσωση (2.1.1), στις θέσεις απότομης μεταβολής του πλάτους της διατομής οι διατμητικές τάσεις παρουσιάζουν ασυνέχεια. Έτσι, στη διατομή του Σχήματος 2.2 κατά μήκος του τμήματος B_2A_2 στο σημείο Γ η διατμητική τάση θα παρουσιάζει άλμα, το οποίο όμως στην πραγματικότητα δεν μπορεί να

υπάρχει, αφού δεν υπάρχει κάποια εξωτερική δύναμη που να επιβάλλεται στο σημείο εμφάνισης του άλματος.

Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα σε χοντρότοιχες διατομές ράβδων οι διατμητικές τάσεις θα πρέπει να υπολογίζονται από την επίλυση του ακριβούς προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης. Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται στις γωνιακές εσοχές και “απειρίζονται” (θεωρητικά) στις γωνιακές εσοχές. Κατά την ανάλυση διατομών με γωνιακές εσοχές συνιστάται πρώτον, να μην λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι τοπικές τάσεις αλλά να αξιολογείται η κατανομή των τάσεων σε ολόκληρο το σύνορο της διατομής και δεύτερον, κοντά στην περιοχή της γωνιακής εσοχής οι τάσεις να ολοκληρώνονται και να αξιολογείται η προκύπτουσα διατμητική ροή.



Σχήμα 2.2. Χοντρότοιχη διατομή μορφής πλακοδοκού μονής συμμετρίας ως προς άξονα z.

Στις λεπτότοιχες ράβδους (όπως και στη στρέψη) λόγω της ιδιαιτερότητας του πάχους τους μπορούν να γίνουν ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές αναφερόμενες στη μέση γραμμή s των τοιχωμάτων, με τη βοήθεια των οποίων η ολοκλήρωση των κυρίαρχων διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης να είναι εφικτή σε κλειστή μορφή. Οι βασικές παραδοχές στις οποίες στηρίζεται η θεωρία λεπτότοιχων ράβδων [Vlasov, 1964, 1965] για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων λόγω τέμνουσας είναι οι εξής:

- Οι διατμητικές τάσεις στη διεύθυνση του πάχους των τοιχωμάτων της διατομής θεωρούνται σταθερές.
- Οι διατμητικές τάσεις έχουν διεύθυνση παράλληλη προς τη μέση γραμμή της διατομής.
- Η φορά των διατμητικών τάσεων είναι τέτοια ώστε η συνολική δύναμη λόγω των διατμητικών τάσεων να είναι ίση με την εγκάρσια δύναμη που καταπονεί τη διατομή.
- Στα ελεύθερα άκρα των τοιχωμάτων οι διατμητικές ροές μηδενίζονται.

- e) Σε κάθε κόμβο της διατομής (τομή μέσω γραμμών) πρέπει για λόγους ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα όλων των εισερχόμενων και εξερχόμενων διατμητικών ρών να μηδενίζεται. Αυτή είναι η αιτία που η διατμητική ροή συγκρίνεται με τη ροή νερού.
- f) Για φόρτιση Q_z και θεωρώντας κύριο σύστημα αξόνων, το μέτρο των διατμητικών τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση

$$\tau_{xs} = \frac{|q_s|}{t} \quad (2.1.2)$$

όπου t το πάχος του τοιχώματος στη θέση υπολογισμού της τάσης και q_s η διατμητική ροή στα τοιχώματα της διατομής, που ορίζεται ως

$$q_s = (q_s^o) + (q_s^c) = \left(\frac{Q_z S_y^{cut}}{I_{yy}} \right) + \left(- \frac{\oint q_s^o ds}{\oint \frac{ds}{t}} \right) \quad (2.1.3)$$

Σημειώνεται ότι η διατμητική ροή q_s^c μηδενίζεται σε ανοικτές διατομές, καθώς και σε κλειστές συμμετρικές διατομές που φορτίζονται κατά τον άξονα συμμετρίας, εάν η νοητή τομή γίνει σε ένα από τα σημεία όπου ο άξονας τέμνει τη διατομή. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, στις ανοικτές διατομές το μέτρο των διατμητικών τάσεων υπολογίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.1.1), αρκεί το b να αντικατασταθεί από το πάχος t του τοιχώματος.

Επειδή δεν υπάρχουν σαφή όρια που να καθορίζουν πότε μια διατομή μπορεί να υπολογιστεί ικανοποιητικά ως λεπτότοιχη και δεδομένου ότι, στις λεπτότοιχες διατομές, λόγω της μεγάλης φέρουσας ικανότητάς τους και του μικρού εμβαδού τους, οι διατμητικές τάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές και παίζουν ισοδύναμο ρόλο με τις ορθές (για το πλήθος των φορτίσεων), η πιο ενδεδειγμένη μεθοδολογία για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων και στις λεπτότοιχες ράβδους αποτελεί η επίλυση του ακριβούς προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης.

Εφόσον οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης είναι γνωστές, η θέση του κέντρου διάτμησης και οι διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης (συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης) μπορούν να υπολογιστούν. Το κέντρο διάτμησης προκύπτει από την απαίτηση, ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της διατομής, η στρεπτική ροπή των εξωτερικά επιβαλλόμενων στο κέντρο διάτμησης εγκάρσιων δυνάμεων να ισούται με την εσωτερικά αναπτυσσόμενη στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης. Συνιστάται το σημείο υπολογισμού των στρεπτικών ροπών να είναι το κέντρο βάρους. Εάν το σημείο αυτό είναι το κέντρο διάτμησης, τότε προκύπτει ότι η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης στο κέντρο διάτμησης μηδενίζεται. Στην περίπτωση που οι διατμητικές τάσεις υπολογιστούν για μηδενικό λόγο Poisson ν , τότε το υπολογιζόμενο κέντρο διάτμησης είναι καθαρά γεωμετρικό μέγεθος και ταυτίζεται με το κέντρο στρέψης [(Weber, 1924), (Trefftz, 1935)]. Υπάρχουν επομένως δύο

ανεξάρτητοι μεταξύ τους τρόποι προσδιορισμού της θέσης των δύο αυτών σημείων της διατομής ράβδων.

Οι διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης έχουν αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας [(Kaneko, 1975), (Renton, 1991, 1997), (Hutchinson, 2001)]. Σύμφωνα με τον Timoshenko [1921, 1922], ο διορθωτικός συντελεστής διάτμησης προκύπτει ως ο λόγος της μέσης τιμής όλων των αναπτυσσόμενων στη διατομή διατμητικών τάσεων διαιρεμένη με την τιμή της διατμητικής τάσης στο κέντρο βάρους της διατομής. Προφανώς όταν το κέντρο βάρους βρίσκεται εκτός διατομής, ο προαναφερόμενος ορισμός παρουσιάζει δυσκολίες στην εφαρμογή του. Αργότερα ο Cowper [1966], μορφώνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου με ολοκλήρωση των εξισώσεων ισορροπίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας, πρότεινε ένα νέο διορθωτικό συντελεστή διάτμησης ο οποίος λάμβανε (σε σχέση με τον συντελεστή του Timoshenko) καλύτερα υπόψιν την επιρροή της στρέβλωσης κυρίως στη δυναμική ανάλυση υψίσυχνων δοκών. Οι προτεινόμενοι συντελεστές των Timoshenko και Cowper για διάφορες απλές διατομές ταυτίζονται για μηδενικό λόγο Poisson ν . Ο συντελεστής Cowper αφορά μόνο συμμετρικές διατομές προσανατολισμένες στο κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων, με αποτέλεσμα την ύπαρξη δύο συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης a_{yy} και a_{zz} . Οι Mason και Herrmann [1968] επιχείρησαν να επεκτείνουν τη μέθοδο Cowper σε μη συμμετρικές διατομές με τυχαίο προσανατολισμό του συστήματος αξόνων, με αποτέλεσμα, εκτός από τους συντελεστές a_{yy} και a_{zz} , να δώσουν και συντελεστές a_{yz} και a_{zy} άνισους όμως μεταξύ τους. Προφανώς η χρήση άνισων συντελεστών a_{yz} και a_{zy} στην ανάλυση δεν προσφέρεται, διότι μη συμμετρικοί συντελεστές διάτμησης οδηγούν και σε μη συμμετρικά μητρώα δυσκαμψίας. Οι προαναφερθέντες συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης δεν λαμβάνουν υπόψη το λόγο πλάτος b προς ύψος h της διατομής, με αποτέλεσμα η χρήση τους να οδηγεί σε ανακριβή αποτελέσματα καθώς το ύψος της διατομής μειώνεται. Έτσι, ο Stephen [1980] στηριζόμενος στη θεωρία του Cowper πρότεινε μια νέα έκφραση για τους συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης που λαμβάνει υπόψη το λόγο b/h . Ο Hutchinson [2001] χρησιμοποιώντας διαφορετική μεθοδολογία καταλήγει επίσης στη ίδια έκφραση με τον Stephen. Οι Puchegger et al. [2003] επιβεβαίωσαν πειραματικά την ακρίβεια του συντελεστή Stephen–Hutchinson για ορθογωνική διατομή με λόγο b/h μεταξύ 1 και 4. Ωστόσο ο συντελεστής των Stephen–Hutchinson, που ισχύει για συμμετρικές διατομές, καθώς αυξάνεται ο λόγος b/h παρουσιάζει ασυνέχεια και εν συνεχεία παίρνει αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα να μην λαμβάνει υπόψιν ρεαλιστικά για ορισμένους λόγους b/h την επιρροή της στρέβλωσης.

Μια διαφορετική διατύπωση των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια της ενεργειακής μεθόδου [(Bach und Baumann, 1924), (Stojek, 1964), (Gruttman and Wagner, 2001)], σύμφωνα με την οποία η ακριβής ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού, οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία ελαστικότητας, ισούται με την προσεγγιστική ενέργεια παραμόρφωσης δοκού, οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία Timoshenko. Η ενεργειακή μέθοδος δίνει για τυχούσα διατομή με τυχαίο προσανατολισμό του συστήματος αξόνων και τους

τέσσερις συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης a_{yy} , a_{zz} , a_{yz} , a_{zy} , με τους συντελεστές a_{yz} και a_{zy} συμμετρικούς ($a_{yz} = a_{zy}$), οι οποίοι λαμβάνουν υπόψιν το λόγο του Poisson ν και το λόγο πλάτους προς ύψος της διατομής b/h [(Schramm et al., 1994), (Pilkey, 2002)]. Υπογραμμίζεται ότι, οι συντελεστές που προκύπτουν με την ενεργειακή μέθοδο (επειδή λαμβάνουν υπόψιν το λόγο b/h) αποδεικνύονται ιδιαίτερα αποτελεσματικοί στην αντιμετώπιση του υπολογιστικού προβλήματος του διατμητικού κλειδώματος (shear-locking) [(Pilkey, 2002), (Wunderlich and Pilkey, 2003)]. Επίσης, η αξιοπιστία των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης στηριζόμενη στην ενεργειακή μέθοδο επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια στερεών πεπερασμένων στοιχείων [Fatmi and Zenzri, 2004]. Επομένως, η πιο ενδεδειγμένη μεθοδολογία για τη μόρφωση συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης είναι η ενεργειακή μέθοδος.

Οι συντελεστές a_{ij} , ($i, j = y, z$) αποτελούν συνιστώσες επίπεδου (2×2) συμμετρικού τανυστή δεύτερης τάξης, καθώς υπακούουν στο νόμο μετασχηματισμού επίπεδων τανυστών δεύτερης τάξης [Schramm et al., 1997]. Έτσι, σε αντιστοιχία με τον επίπεδο τανυστή καμπτικών ροπών αδράνειας, η διαγωνοποίηση του τανυστή a_{ij} , ($i, j = y, z$) [Pilkey, 2002] θα οδηγήσει σε ένα κύριο σύστημα, που καλείται κύριο διατμητικό σύστημα και το οποίο για μη συμμετρικές διατομές δεν ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων. Αποτέλεσμα αυτής της διαφοροποίησης των κυρίων αξόνων είναι οι συνιστώσες των μετατοπίσεων της δοκού ως προς τους άξονες y και z να είναι εν γένει συζευγμένες, έστω και αν το σύστημα αξόνων της διατομής ταυτίζεται με το κύριο καμπτικό σύστημα [(Schramm et al., 1997), (Pilkey, 2002)]. Εάν η διατομή είναι συμμετρική ως προς έναν άξονα, το κύριο διατμητικό σύστημα ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα. Στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες των μετατοπίσεων (βυθίσεις) ως προς τις κύριες διευθύνσεις δεν είναι πλέον συζευγμένες ($a_{yz} = a_{zy} = 0$ και $I_{yz} = I_{zy} = 0$).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού διατυπώνεται το πρόβλημα ελαστικής ομοιόμορφης διάτμησης ομογενών ή σύνθετων ράβδων σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας και επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM) [Katsikadelis, 2002]. Η σύνθετη ράβδος αποτελείται από υλικά σε επαφή, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να περικλείει πεπερασμένο αριθμό εγκλεισμάτων. Τα υλικά έχουν διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης με κοινό λόγο Poisson και είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Η ράβδος με οπές (πολλαπλής συνοχής) προκύπτει ως μερική περίπτωση με μηδενισμό του μέτρου ελαστικότητας και διάτμησης των εγκλεισμάτων, ενώ η συμπαγής ράβδος (απλής συνοχής) προκύπτει ως μερική περίπτωση θεωρώντας τα ίδια μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης των υλικών. Η ανάλυση πραγματοποιείται ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων, του οποίου οι άξονες δεν είναι κατ' ανάγκη κύριοι. Η εγκάρσια δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο διάτμησης της διατομής της ράβδου, αποφεύγοντας με τον τρόπο αυτό τη δημιουργία στρεπτικής ροπής. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο μορφώνονται με βάση το πεδίο των τάσεων δύο προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με δύο τασικές συναρτήσεις, αντίστοιχα. Τα προβλήματα αυτά, τα οποία λαμβάνουν υπόψιν το λόγο Poisson, επιλύονται με τη βοήθεια "αμιγούς" Μεθόδου Συνοριακών

Στοιχείων, δηλαδή μεθόδου η οποία χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Οι τασικές συναρτήσεις που παρουσιάζονται δεν χρειάζεται να διασπαστούν σε δύο εναλλακτικές συναρτήσεις (κύρια και συμπληρωματική) [(Weber, 1924), (Gruttmann et al., 1999)] και ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας και εξισώσεις συμβιβαστού. Ο υπολογισμός των διατμητικών τάσεων σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της διατομής της ράβδου επιτυγχάνεται με απευθείας παραγωγή των τασικών συναρτήσεων, ενώ οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης και οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης διατυπωμένοι με την ενεργειακή μέθοδο προκύπτουν από αυτές τις συναρτήσεις χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή ολοκλήρωση. Στις σύνθετες ράβδους λαμβάνονται υπόψιν οι συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες που διαχωρίζουν τα διαφορετικά υλικά, δηλαδή οι διεπιφάνειες αντιμετωπίζονται ορθώς ως σύνορα και όχι ως εσωτερικές περιοχές του εξεταζόμενου σώματος. Έτσι, οι συνοριακές συνθήκες των τασικών συναρτήσεων στις παράπλευρες επιφάνειες των υλικών προκύπτουν από τις ακόλουθες φυσικές θεωρήσεις [Muskhelishvili, 1953]:

- a) Η ελεύθερη επιφάνεια της ράβδου είναι αφόρτιση.
- b) Οι διατμητικές τάσεις ως προς το κάθετο διάνυσμα n στις διεπιφάνειες είναι ίσες κατά μέγεθος και αντίθετης φοράς.
- c) Οι συνιστώσες των μετατοπίσεων παραμένουν συνεχείς στις διεπιφάνειες, καθώς εξ ορισμού τα υλικά είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους.

Οι δύο πρώτες θεωρήσεις οδηγούν σε συζευγμένες συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann, ενώ η τρίτη εξασφαλίζει τη συνέχεια των τασικών συναρτήσεων κατά μήκος των συνόρων της σύνθετης διατομής. Σημειώνεται ότι, οι συνοριακές συνθήκες Neumann υπερέχουν των αντίστοιχων τύπου Dirichlet, καθώς σε ομογενείς ράβδους πολλαπλής συνοχής ή σε σύνθετες ράβδους δεν απαιτούνται επιπλέον περιορισμοί για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών, όπως συμβαίνει στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet λόγω αυθαίρετων σταθερών ολοκλήρωσης [(Weber, 1924), (Sauer, 1980)]. Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά όχι μόνο σε χοντρότοιχες ράβδους, αλλά και σε ομογενείς ή σύνθετες ράβδους λεπτότοιχων διατομών καθώς και σε πολυστρωματικές διατομές, χωρίς να υπόκειται στους περιορισμούς της θεωρίας Vlasov και γενικότερα των “βελτιωμένων προσομοιωμάτων” (“refined models”) [(Reddy, 1989), (Touratier, 1992), (Karama et al., 2003)]. Υπογραμμίζεται ότι, τα “refined models” δεν ικανοποιούν τις συνθήκες συνέχειας των ελκυστών στις διεπιφάνειες των στρωμάτων και υποθέτουν ότι οι διατμητικές τάσεις κατά μήκος της συντεταγμένης του πάχους των στρωμάτων παραμένουν σταθερές, με αποτέλεσμα να μην ικανοποιούνται πάντα κινηματικές ή στατικές παραδοχές. Επίσης, αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι τα περισσότερα υπάρχοντα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων της αγοράς επιλύουν ομογενείς ράβδους [NASTRAN, 1999], ενώ αυτά που επιλύουν και σύνθετες ράβδους συνήθως αγνοούν τις συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες [SectionBuilder, 2002], με πολύ λίγες εξαιρέσεις κυρίως μη εμπορικών προγραμμάτων [Debard/RDM5.01, 1997].

Ο αλγόριθμος της προτεινόμενης μεθόδου προσφέρεται για την ανάλυση διατμητικά καταπονούμενης ράβδου με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η αριθμητική μέθοδος που προτείνεται για την επίλυση των ιδιόμορφων συνοριακών

ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται αποτελεσματική. Η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της μεθόδου έχει παρουσιαστεί μέσα από παραδείγματα με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων έχει συγκριθεί με υπάρχουσες αναλυτικές ή αριθμητικές λύσεις και είναι αξιοσημείωτη [διδασκτορική διατριβή Βασίλη Μόκου]. Επίσης, η αξιοπιστία και ακρίβεια των υπολογιζόμενων συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης έχει διαπιστωθεί με τη βοήθεια στερεών πεπερασμένων στοιχείων [Fatmi and Zenzri, 2004].

2.2 Διατύπωση Προβλήματος Ομοιόμορφης Διάτμησης

Έστω ομογενής ευθύγραμμη ράβδος μήκους l σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος αποτελούμενη από ένα υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και διάτμησης G και ίδιο λόγο Poisson ν , το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή Ω του επιπέδου y, z όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό (δηλαδή η ράβδος είναι κατά τμήματα συνεχής. Χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα, θεωρείται ότι το ένα άκρο της ράβδου είναι πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο (πρόβολος), ενώ ο άξονας x του συστήματος συντεταγμένων διέρχεται από το κέντρο βάρους C των διατομών της ράβδου.

Στο ελεύθερο άκρο της, η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στατικό εγκάρσιο φορτίο Q , το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο διάτμησης της σύνθετης διατομής. Οι βυθίσεις λόγω της φόρτισης θεωρούνται μικρές και δεδομένου ότι το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό η ανάλυση της ράβδου είναι γραμμική. Κατά την επιβολή του φορτίου θεωρείται ότι το σχήμα της διατομής διατηρείται, δεν αναπτύσσονται δηλαδή εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής (distortion). Σε απόσταση x από το πακτωμένο άκρο λόγω του φορτίου Q αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις Q_y και Q_z , οι οποίες αποτελούν τις συνιστώσες του φορτίου Q (τέμνουσες) κατά τους άξονες y και z , αντίστοιχα, καθώς και καμπτικές ροπές M_y , M_z οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις

$$M_y = -Q_z(l-x) \quad (2.1.4\alpha)$$

$$M_z = Q_y(l-x) \quad (2.1.4\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η ράβδος δεν υποβάλλεται σε αξονική καταπόνηση και υιοθετώντας την παραδοχή περί επιπεδότητας των διατομών οι ορθές τάσεις που δρουν στη σύνθετη διατομή δίδονται ως [Pilkey, 2002]

$$(\sigma_{xx}) = \left[- \left(\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \right) y + \left(\frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \right) z \right] \quad (2.1.5)$$

με τα γνωστά ολοκληρώματα από την θεωρία κλασικής μηχανικής

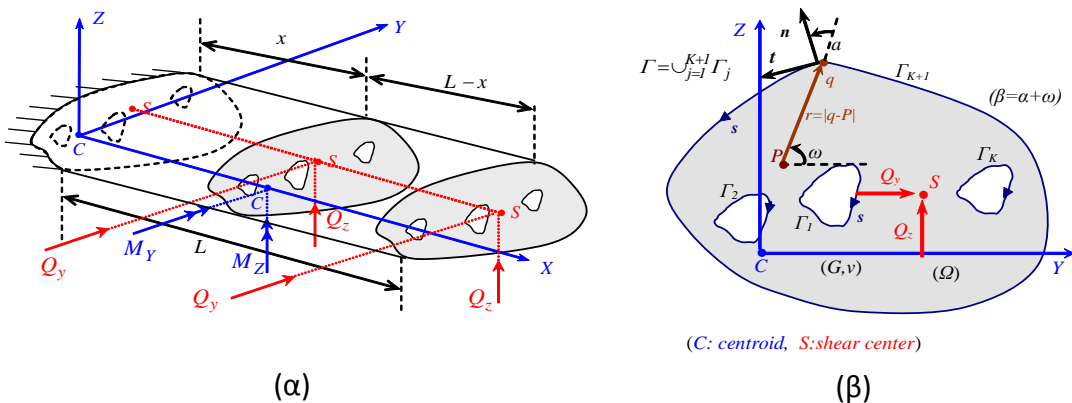
$$I_{yy} = \iint_{\Omega} z^2 d\Omega \tag{2.1.6\alpha}$$

$$I_{zz} = \iint_{\Omega} y^2 d\Omega \tag{2.1.6\beta}$$

$$I_{yz} = \iint_{\Omega} yz d\Omega \tag{2.1.6\gamma}$$

να είναι οι καμπτικές ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες y και z και το γινόμενο αδράνειας, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις (2.1.4α,β) στην (2.1.5) οι συνιστώσες των ορθών τάσεων γράφονται

$$(\sigma_{xx}) = \left[\frac{l-x}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} \left[Q_z (yI_{yz} - zI_{zz}) + Q_y (zI_{yz} - yI_{yy}) \right] \right] \tag{2.1.7}$$



Σχήμα 2.3. Ομογενής ράβδος υποβαλλόμενη σε διατμητική καταπόνηση (α) με σταθερή διατομή τυχόντος σχήματος (β).

Ακολουθώντας την παραδοχή του Saint Venant για τις ράβδους, ότι οι συνιστώσες των τάσεων (σ_{yy}) , (σ_{zz}) και (τ_{yz}) είναι πολύ μικρές και επομένως μπορούν να αγνοηθούν, το πεδίο των τάσεων περιγράφεται από τις συνιστώσες των διατμητικών τάσεων (τ_{xy}) και (τ_{xz}) . Απουσία μαζικών δυνάμεων οι δύο τελευταίες εξισώσεις ισορροπίας της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας γράφονται ως

$$\frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} = 0 \tag{2.1.8\alpha}$$

$$\frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial x} = 0 \tag{2.1.8\beta}$$

Από τις εξισώσεις (2.1.8) προκύπτει ότι οι διατμητικές τάσεις (τ_{xy}) και (τ_{xz}) είναι συναρτήσεις μόνο των συντεταγμένων y και z και επομένως είναι ίδιες για κάθε διατομή της ράβδου. Ο υπολογισμός αυτών των τάσεων θα πραγματοποιηθεί θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται ξεχωριστά στις διατμητικές δυνάμεις Q_y και Q_z , οπότε επειδή η ανάλυση είναι γραμμική οι διατμητικές τάσεις λόγω του φορτίου Q θα προκύψουν ως επαλληλία των διατμητικών τάσεων που οφείλονται στις δυνάμεις Q_y και Q_z , αντίστοιχα.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι, στην πλέον γενική περίπτωση μιας σύνθετης ράβδου αποτελούμενης από υλικά με διαφορετικούς λόγους Poisson, το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης γίνεται ιδιαίτερα περίπλοκο, επειδή στην περίπτωση αυτή δεν μπορούν να αγνοηθούν οι συνιστώσες των τάσεων (σ_{yy}) , (σ_{zz}) και (τ_{yz}) [Muskhelishvili, 1963]. Ωστόσο έχοντας υπόψιν ότι οι τιμές του λόγου Poisson για τα περισσότερα υλικά είναι σχεδόν ίδιες, ακόμη και για υλικά με σημαντικά διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας, προκύπτει ότι η προαναφερθείσα παραδοχή περί κοινού λόγου Poisson των υλικών είναι σε αρκετές περιπτώσεις ρεαλιστική.

Έτσι, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_z η πρώτη εξίσωση ισορροπίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial z} = \frac{Q_z}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} (yI_{yz} - zI_{zz}) \quad (2.1.9)$$

Χρησιμοποιώντας τον καταστατικό νόμο του Hooke για ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό οι παραμορφώσεις δίδονται συναρτήσει των τάσεων ως

$$(\varepsilon_{xx}) = \frac{(\sigma_{xx})}{E} \quad (2.1.10\alpha)$$

$$(\varepsilon_{yy}) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}) \quad (2.1.10\beta)$$

$$(\varepsilon_{zz}) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}) \quad (2.1.10\gamma)$$

$$(\gamma_{xy}) = \frac{2(1+\nu)}{E}(\tau_{xy}) \quad (2.1.10\delta)$$

$$(\gamma_{xz}) = \frac{2(1+\nu)}{E}(\tau_{xz}) \quad (2.1.10\epsilon)$$

$$(\gamma_{yz}) = 0 \quad (2.1.10\sigma\tau)$$

Οι παραμορφώσεις αυτές ικανοποιούν τέσσερις από τις συνθήκες συμβιβαστού ταυτοτικά. Οι υπόλοιπες δύο συνθήκες χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.1.7) για $Q_y = 0$ γράφονται ως

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial z} \right) = \frac{\nu Q_z I_{zz}}{(1+\nu)(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (2.1.11\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial z} \right) = \frac{\nu Q_z I_{yz}}{(1+\nu)(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (2.1.11\beta)$$

Οι διατμητικές τάσεις (τ_{xy}) και (τ_{xz}) εκφράζονται στη συνέχεια συναρτήσει μιας τασικής συνάρτησης $(\Phi(y, z))$, η οποία θεωρείται ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης και έχει επιλεγεί έτσι ώστε οι δύο συνθήκες συμβιβαστού (2.1.11α,β) να ικανοποιούνται ταυτοτικά, δηλαδή

$$(\tau_{xy}) = E \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - d_y \right] \quad (2.1.12\alpha)$$

$$(\tau_{xz}) = E \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - d_z \right] \quad (2.1.12\beta)$$

όπου d_y, d_z είναι οι y, z συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{d} που ορίζεται ως

$$\mathbf{d} = d_y \mathbf{i}_y + d_z \mathbf{i}_z = \left[\nu \left(I_{zz} y z - I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \right] \mathbf{i}_y + \left[-\nu \left(I_{zz} \frac{y^2 - z^2}{2} + I_{yz} y z \right) \right] \mathbf{i}_z \quad (2.1.13)$$

Στις εξισώσεις (2.1.13) $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες y, z αντίστοιχα, ενώ το μέγεθος B ορίζεται ως

$$B = E\Delta = E2(1+\nu)(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2) \quad (2.1.14)$$

το οποίο εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, το λόγο Poisson και τη γεωμετρία της διατομής. Προφανώς, οι συνολικές διατμητικές τάσεις στο εσωτερικό του χωρίου Ω θα δίδονται από τη σχέση

$$(\tau_\Omega) = \left[(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.15)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.1.12) στην εξίσωση (2.1.9) προκύπτει η ακόλουθη δεσπόμευση μερική διαφορική εξίσωση τύπου Poisson για την τασική συνάρτηση $(\Phi(y, z))$

$$(\nabla^2 \Phi) = 2(I_{yz}y - I_{zz}z) \quad (2.1.16)$$

όπου $(\nabla^2) \equiv (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$ είναι ο αρμονικός τελεστής .

Οι συνοριακές συνθήκες στις παράπλευρες επιφάνειες του υλικού προκύπτουν όπως προαναφέρθηκε από τις ακόλουθες φυσικές θεωρήσεις

α) Η ελεύθερη παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου είναι αφόρτιστη, επομένως οι κάθετες διατμητικές τάσεις στις εξωτερικές επιφάνειες είναι μηδενικές, δηλαδή

$$(\tau_{xn}) = (\tau_{xy})n_y + (\tau_{xz})n_z = 0 \quad (2.1.17)$$

όπου $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο σύνορο Γ της ράβδου, με $\beta = \hat{y}\mathbf{n}$, δηλαδή β είναι η γωνία μεταξύ του άξονα y και του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} . Τονίζεται ότι και στις δύο πλευρές της ισότητας της (1.17β) το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} κατευθύνεται προς μία κοινή κατεύθυνση και είναι θετικό όταν κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου Ω_j , ενώ η τρίτη φυσική θεώρηση εξασφαλίζει τη συνέχεια της τασικής συνάρτησης $(\Phi(y, z))$ στο εσωτερικό των χωρίων Ω .

Αντικαθιστώντας τις (2.1.12) στη (2.1.17) προκύπτει η συζευγμένη συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann για την τασική συνάρτηση (Φ) ως

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad \text{στο } \Gamma \quad (2.1.18)$$

όπου ο τελεστής $(\partial/\partial n)_j \equiv n_y(\partial/\partial y)_j + n_z(\partial/\partial z)_j$ δηλώνει παραγωγή ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} και $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \mathbf{n} και \mathbf{d} . Στις ελεύθερες επιφάνειες το Γ είναι το ελεύθερο σύνορο του χωρίου Ω . Τα E είναι το μέτρο ελαστικότητας των χωρίων Ω , ενώ στις ελεύθερες επιφάνειες το $E_i = 0$ (ελεύθερες επιφάνειες είναι και οι οπές). Υπογραμμίζεται ότι οι παράγωγοι της τασικής συνάρτησης ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} μεταβάλλονται ασυνεχώς κατά μήκος των εσωτερικών συνόρων.

Ομοίως, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_y και υποθέτοντας μια τασική συνάρτηση $(\Theta(y, z))$ η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης τέτοια ώστε όλες οι συνθήκες συμβιβαστού (2.1.11) να ικανοποιούνται ταυτοτικά, οι διατμητικές τάσεις (τ_{xy}) και (τ_{xz}) διατυπώνονται ως

$$(\tau_{xy}) = E \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) - e_y \right] \quad (2.1.19\alpha)$$

$$(\tau_{xz}) = E \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - e_z \right] \quad (2.1.19\beta)$$

όπου e_y, e_z είναι οι y, z συνιστώσες του διανύσματος e που ορίζεται ως

$$e = e_y i_y + e_z i_z = \left[\nu \left(I_{yy} \frac{y^2 - z^2}{2} - I_{yz} yz \right) \right] i_y + \left[\nu \left(I_{yy} yz + I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \right] i_z \quad (2.1.20)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.1.19) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων και στις συνοριακές συνθήκες (2.1.17), προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Neumann για την τασική συνάρτηση $(\Theta(y, z))$ ως

$$(\nabla^2 \Theta) = 2(I_{yz} z - I_{yy} y) \quad \text{στο } \Omega \quad (2.1.21)$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \quad \text{στο } \Gamma \quad (2.1.22)$$

Τα δύο παρουσιαζόμενα προβλήματα συνοριακών τιμών τύπου Neumann για τις τασικές συναρτήσεις $(\Phi(y, z))$ και $(\Theta(y, z))$ έχουν λύση, αν και μόνο αν ικανοποιούν αντίστοιχα τις ακόλουθες συνθήκες [Muskhelishvili, 1963]

$$\int_{\Gamma} \left[E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds = 0 \quad (2.1.23\alpha)$$

$$\int_{\Gamma} \left[E \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) - E \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) \right] ds = 0 \quad (2.1.23\beta)$$

Η εξίσωση (2.1.23α) σύμφωνα με τη συνοριακή συνθήκη (2.1.18) γράφεται ως

$$\int_{\Gamma} \left[E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds = (E - E) \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) ds \quad (2.1.24)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss προκύπτει

$$\int_{\Gamma} \left[E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds = (E - E) \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{d} \Omega \quad (2.1.25)$$

Η απόκλιση $\operatorname{div} \mathbf{d}$ ισούται με

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \frac{\partial d_y}{\partial y} + \frac{\partial d_z}{\partial z} = 2\nu (I_{zz}z - I_{yz}y) \quad (2.1.26)$$

οπότε η εξίσωση (1.25) γράφεται ως

$$\int_{\Gamma} \left[E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds = 2\nu (E - E) \left[I_{zz} \iint_{\Omega} z d\Omega - I_{yz} \iint_{\Omega} y d\Omega \right] \quad (2.1.27)$$

Τα ολοκληρώματα

$$(S_y) = \iint_{\Omega} z d\Omega \quad (2.1.28\alpha)$$

$$(S_z) = \iint_{\Omega} y d\Omega \quad (2.1.28\beta)$$

εκφράζουν τις στατικές ροπές κάμψης ως προς τους άξονες y, z του χωρίου Ω . Επειδή το σύστημα αξόνων Cyz είναι κεντροβαρικό οι στατικές ροπές (S_y) και (S_z) είναι μηδενικές, επομένως το δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.1.27) μηδενίζεται με αποτέλεσμα η συνθήκη ύπαρξης λύσης του προβλήματος Neumann για την τασική συνάρτηση $(\Phi(y, z))$ να ικανοποιείται. Ομοίως, αποδεικνύεται και η συνθήκη ύπαρξης λύσης για την τασική συνάρτηση $(\Theta(y, z))$.

Το κέντρο διάτμησης προκύπτει από την απαίτηση, ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της διατομής, η στρεπτική ροπή των εξωτερικά επιβαλλόμενων στο κέντρο διάτμησης εγκάρσιων δυνάμεων να ισούται με την εσωτερικά αναπτυσσόμενη στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης. Θεωρείται ως σημείο υπολογισμού των στρεπτικών ροπών το κέντρο βάρους, οπότε

$$y_S Q_z - z_S Q_y = M_x \rightarrow y_S Q_z - z_S Q_y = \iint_{\Omega_j} \left[(\tau_{xz}) y - (\tau_{xy}) z \right] d\Omega \quad (2.1.29)$$

Για $Q_y = 0$ και αντικαθιστώντας τις (1.12) στην (1.29) προκύπτει

$$y_S = \frac{I}{B} \iint_{\Omega} E \left[y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - y d_z + z d_y \right] d\Omega \quad (2.1.30)$$

Ομοίως, για $Q_z = 0$ και αντικαθιστώντας τις (1.19) στην (1.29) προκύπτει

$$z_S = \frac{1}{B} \iint_{\Omega} E \left[z \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - z e_y + y e_z \right] d\Omega \quad (2.1.31)$$

Οι σχέσεις (2.1.30) και (2.1.31) δίδουν τις συντεταγμένες $\{y_S, z_S\}$ του κέντρου διάτμησης ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz . Από τις εξισώσεις (2.1.29) προκύπτει ότι, εάν το σημείο υπολογισμού των στρεπτικών ροπών είναι το κέντρο διάτμησης τότε η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης μηδενίζεται.

Οι σχέσεις (2.1.30) και (2.1.31) δηλώνουν ότι η θέση του κέντρου διάτμησης είναι ανεξάρτητη της διατμητικής φόρτισης. Εάν οι τασικές συναρτήσεις υπολογιστούν για μηδενικό λόγο Poisson ν , τότε το υπολογιζόμενο από τις σχέσεις (2.1.30) και (2.1.31) κέντρο διάτμησης S ταυτίζεται με το κέντρο στρέψης M [(Weber, 1926), (Trefftz, 1935)], δηλαδή

$$y_S = y_M \quad (2.1.32\alpha)$$

$$z_S = z_M \quad (2.1.32\beta)$$

Ο Trefftz (1935) απέδειξε την ταύτιση αυτή χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο [Pilkey, 2002]. Έτσι, για σύνθετη ράβδο μήκους l στηριζόμενη ως πρόβολος που στο ελεύθερο άκρο της υποβάλλεται μόνο σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή η στρεπτική ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου αγνοώντας την παρεμπόδιση της στρεπτικής στρέβλωσης δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{in}^t = \frac{l}{2G} \iint_{\Omega} \left[(\tau_{xy}^P)^2 + (\tau_{xz}^P)^2 \right] d\Omega \quad (2.1.33)$$

όπου $(\tau_{xy}^P), (\tau_{xz}^P)$ οι πρωτογενείς στρεπτικές διατμητικές τάσεις ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz . Υπενθυμίζεται ότι οι τάσεις $(\tau_{xy}^P), (\tau_{xz}^P)$ είναι ανεξάρτητες της θέσης του συστήματος αξόνων. Εάν η ράβδος υποβάλλεται στο ελεύθερο άκρο της μόνο σε συγκεντρωμένες εγκάρσιες δυνάμεις Q_y, Q_z η καμπτική ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου αγνοώντας την παρεμπόδιση της διατμητικής στρέβλωσης δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{in}^b = \frac{l}{2G} \iint_{\Omega} \left[(\tau_{xy}^P)^2 + (\tau_{xz}^P)^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2E} \iint_{\Omega} (\sigma_{xx})^2 d\Omega \quad (2.1.34)$$

όπου $(\tau_{xy}), (\tau_{xz})$ οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης και (σ_{xx}) οι ορθές τάσεις λόγω κάμψης ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz . Επίσης, εάν η ράβδος υποβάλλεται στο ελεύθερο άκρο της ταυτόχρονα σε συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και σε συγκεντρωμένες εγκάρσιες δυνάμεις Q_y, Q_z η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου αγνοώντας την παρεμπόδιση της στρεπτικής και διατμητικής στρέβλωσης δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{in}^{tot} = \frac{l}{2G} \iint_{\Omega} \left\{ \left[(\tau_{xy}^P) + (\tau_{xy}) \right]^2 + \left[(\tau_{xz}^P) + (\tau_{xz}) \right]^2 \right\} d\Omega + \frac{1}{2E} \iint_{\Omega} (\sigma_{xx})^2 d\Omega \quad (2.1.35)$$

Στην περίπτωση που οι εγκάρσιες δυνάμεις εφαρμόζονται στο κέντρο διάτμησης, τότε εξ ορισμού δεν παράγουν πρόσθετη στρέψη στη ράβδο, οπότε η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης μπορεί να ληφθεί προσθέτοντας απλά την καμπτική και στρεπτική ενέργεια των εξισώσεων (2.1.33) και (2.1.34)

$$\Pi_{in}^{tot} = \Pi_{in}^t + \Pi_{in}^b \quad (2.1.36)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.1.33), (2.1.34) και (2.1.35) στην εξίσωση (2.1.36) προκύπτει

$$\iint_{\Omega} \left[(\tau_{xy}^P)(\tau_{xy}) + (\tau_{xz}^P)(\tau_{xz}) \right] d\Omega = 0 \quad (2.1.37)$$

Η εξίσωση (2.1.37) καλείται συνθήκη Trefftz και εκφράζει την απαίτηση που πρέπει να τηρείται ώστε η κάμψη να είναι ανεξάρτητη της στρέψης [Trefftz, 1935]. Οι πρωτογενείς στρεπτικές διατμητικές τάσεις ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων Cyz δίδονται από τις σχέσεις (2.1.10α,γ)

$$(\tau_{xy}^P) = G\theta'_x \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial y} \right) - z \right] \quad (2.1.38\alpha)$$

$$(\tau_{xz}^P) = G\theta'_x \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial z} \right) + y \right] \quad (2.1.38\beta)$$

Με τις τάσεις αυτές η συνθήκη Trefftz της εξίσωσης (2.1.37) γράφεται ως

$$\iint_{\Omega} \left[\left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial y} \right) - z \right] (\tau_{xy}) + \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial z} \right) + y \right] (\tau_{xz}) \right] d\Omega = 0 \quad (2.1.39)$$

Για $Q_y = 0$ η (1.29) δίδει

$$y_S Q_z = \iint_{\Omega} [(\tau_{xz})y - (\tau_{xy})z] d\Omega \quad (2.1.40)$$

Η σχέση (2.1.39) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\iint_{\Omega} [(\tau_{xz})y - (\tau_{xy})z] d\Omega = -\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial y} \right) (\tau_{xy}) + \left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial z} \right) (\tau_{xz}) \right] d\Omega \quad (2.1.41)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (2.1.41) εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση (θεώρημα Gauss-Green) γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial y} \right) (\tau_{xy}) + \left(\frac{\partial \varphi_O^P}{\partial z} \right) (\tau_{xz}) \right] d\Omega = \\ & \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \iint_{\Omega} (\varphi_O^P) \left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss (Παράρτημα Β-εξίσωση Β.14) για το χωρίο Ω , το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.1.42) γράφεται ως

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = (\varphi_O^P) \int_{\Gamma} [(\tau_{xn}) - (\tau_{xn})] ds \quad (2.1.43)$$

οπότε σύμφωνα με την σχέση (2.1.17β) προκύπτει

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_O^P \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (2.1.44)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.1.42) με τη βοήθεια της (2.1.9) γράφεται ως

$$\iint_{\Omega} (\varphi_O^P) \left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \iint_{\Omega} (\varphi_O^P) \frac{Q_z}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} (y I_{yz} - z I_{zz}) d\Omega \quad (2.1.45)$$

Συνδυάζοντας τις (2.1.40)–(2.1.42), (2.1.44), (2.1.45) προκύπτει

$$y_S Q_z = \iint_{\Omega} (\varphi_O^P) \frac{Q_z}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} (y I_{yz} - z I_{zz}) d\Omega \quad (2.1.46)$$

Ανάλογα προκύπτει

$$-z_S Q_y = \iint_{\Omega} (\varphi_o^P) \frac{Q_y}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} (z I_{yz} - y I_{yy}) d\Omega \quad (2.1.47)$$

Οι βασικές ροπές αδράνειας στρέβλωσης της ομογενούς διατομής Ω ως προς το κεντροβαρικό σύστημα δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{wy} = \iint_{\Omega} (\varphi_o^P) y d\Omega \quad (2.1.48\alpha)$$

$$A_{wz} = \iint_{\Omega} (\varphi_o^P) z d\Omega \quad (2.1.48\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.1.48α,β) στις (2.1.46), (2.1.47) προκύπτει

$$y_S = \frac{I_{yz} A_{wy} - I_{zz} A_{wz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (2.1.49\alpha)$$

$$z_S = \frac{I_{yy} A_{wy} - I_{yz} A_{wz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (2.1.49\beta)$$

Επειδή τα μεγέθη A_{wy} , A_{wz} εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία της σύνθετης διατομής οι συντεταγμένες $\{y_S, z_S\}$ του κέντρου διάτμησης υπολογιζόμενες από τις σχέσεις (2.1.49α,β) είναι ανεξάρτητες του λόγου Poisson ν . Οι εξισώσεις (2.1.49) δίνουν τις συντεταγμένες του κέντρου στρέψης και συνεπώς οι εξισώσεις (2.1.32) ικανοποιούνται. Αξίζει να σημειωθεί ότι την ταύτιση κέντρου στρέψης και κέντρου διάτμησης για μηδενικό λόγο Poisson απέδειξε πρώτος ο Weber [1926] εφαρμόζοντας την ταυτότητα αμοιβαιότητας Betty–Maxwell.

Η προσεγγιστική έκφραση της ενέργειας παραμόρφωσης δοκού μοναδιαίου μήκους οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία Timoshenko από τη σχέση [Pilkey, 2002]

$$\begin{aligned} \Pi_{in}^{s,appr.} &= \Pi_{in,y}^{s,appr.} + \Pi_{in,z}^{s,appr.} + \Pi_{in,yz}^{s,appr.} + \Pi_{in,zy}^{s,appr.} \\ \Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G} \iint_{A_{sy}} (\tau_{xy})_{Q_y}^2 dA_{sy} + \frac{1}{2G} \iint_{A_{sz}} (\tau_{xz})_{Q_z}^2 dA_{sz} \\ &\quad + \frac{1}{2G} \iint_{A_{szy}} (\tau_{xy})_{Q_y} (\tau_{xy})_{Q_z} dA_{szy} + \frac{1}{2G} \iint_{A_{szy}} (\tau_{xz})_{Q_z} (\tau_{xz})_{Q_y} dA_{szy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G} \iint_{A_{sy}} \left(\frac{Q_y}{A_{sy}} \right)^2 dA_{sy} + \frac{1}{2G} \iint_{A_{sz}} \left(\frac{Q_z}{A_{sz}} \right)^2 dA_{sz} \\
&\quad + \frac{1}{2G} \iint_{A_{szy}} \frac{Q_y}{A_{szy}} \frac{Q_z}{A_{szy}} dA_{szy} + \frac{1}{2G} \iint_{A_{szy}} \frac{Q_z}{A_{szy}} \frac{Q_y}{A_{szy}} dA_{szy} \\
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2G} \frac{Q_y^2}{A_{sy}^2} \iint_{A_{sy}} dA_{sy} + \frac{1}{2G} \frac{Q_z^2}{A_{sz}^2} \iint_{A_{sz}} dA_{sz} \\
&\quad + \frac{1}{2G} \frac{Q_y Q_z}{A_{szy}^2} \iint_{A_{szy}} dA_{szy} + \frac{1}{2G} \frac{Q_z Q_y}{A_{szy}^2} \iint_{A_{szy}} dA_{szy} \\
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2GA} (a_y Q_y^2 + a_z Q_z^2 + a_{yz} Q_y Q_z + a_{zy} Q_z Q_y) \\
\Pi_{in}^{s,appr.} &= \frac{1}{2AG} (a_y Q_y^2 + a_z Q_z^2 + a_{yz} Q_y Q_z + a_{zy} Q_z Q_y) \tag{2.1.50}
\end{aligned}$$

ενώ η αντίστοιχη ακριβής έκφραση της ενέργεια παραμόρφωσης δίδεται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας ως

$$\Pi_{in}^{s,exact} = \frac{1}{2G} \iint_{\Omega} \left[(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2 \right] d\Omega \tag{2.1.51}$$

με

$$A = \iint_{\Omega} d\Omega \tag{2.1.52}$$

Οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης $a_y, a_z, a_{yz} = a_{zy}$ θα προσδιοριστούν, σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο [Schramm et al., 1997], εξισώνοντας την ακριβή με την προσεγγιστική έκφραση της ενέργειας παραμόρφωσης. Έτσι, για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_y , που λαμβάνει υπόψιν την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης στις μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση y λόγω εγκάρσιας δύναμης στην ίδια διεύθυνση, θεωρούμε $\{Q_y \neq 0, Q_z = 0\}$ και $\Pi_{in}^{s,exact} = \Pi_{in}^{s,appr.}$. Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων (2.1.12) προκύπτει

$$a_y = \frac{1}{\kappa_y} = \frac{A}{E\Delta^2} E \iint_{\Omega} ((\nabla\Theta) - e) \cdot ((\nabla\Theta) - e) d\Omega \tag{2.1.53}$$

Ομοίως, για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_z θεωρούμε $\{Q_y = 0, Q_z \neq 0\}$ και

$\Pi_{in}^{s,exact} = \Pi_{in}^{s,appr.}$, οπότε σύμφωνα με την σχέση (2.1.19) προκύπτει

$$a_z = \frac{1}{\kappa_z} = \frac{A}{E\Delta^2} E \iint_{\Omega} ((\nabla\Phi) - \mathbf{d}) \cdot ((\nabla\Phi) - \mathbf{d}) d\Omega \quad (2.1.54)$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_{yz} ($= a_{zy}$), που λαμβάνει υπόψιν την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης στις μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση y λόγω εγκάρσιας δύναμης στη διεύθυνση z , θεωρούμε $\{Q_y \neq 0, Q_z \neq 0\}$ και $\Pi_{in}^{s,exact} = \Pi_{in}^{s,appr.}$. Στην περίπτωση αυτή οι συνολικές διατμητικές τάσεις δίδονται από τις εξισώσεις (2.1.12), (2.1.19) σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας ως

$$(\tau_{xy}) = E \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) - d_y \right] + E \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y} \right) - e_y \right] \quad (2.1.55\alpha)$$

$$(\tau_{xz}) = E \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) - d_z \right] + E \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} \right) - e_z \right] \quad (2.1.55\beta)$$

Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων (2.1.53), (2.1.54) και (2.1.55) προκύπτει

$$a_{yz} = \frac{1}{\kappa_{yz}} = \frac{A}{E\Delta^2} E \iint_{\Omega} ((\nabla\Phi) - \mathbf{d}) \cdot ((\nabla\Theta) - \mathbf{e}) d\Omega \quad (2.1.56)$$

Με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης $a_y, a_z, a_{yz} = a_{zy}$ για σύνθετη ράβδο να ορίζονται οι διατμητικές αντιστάσεις της θεωρίας Timoshenko ως

$$GA_{yy} = GA/a_y = \kappa_y GA \quad (2.1.57\alpha)$$

$$GA_{zz} = GA/a_z = \kappa_z GA \quad (2.1.57\beta)$$

$$GA_{yzyz} = GA/a_{yz} = \kappa_{yz} GA \quad (2.1.57\gamma)$$

Οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$[A] = \begin{bmatrix} a_y & a_{yz} \\ a_{zy} & a_z \end{bmatrix} = \frac{A}{\Delta^2} \iint_{\Omega} \{B\}^T \{B\} d\Omega \quad (2.1.58)$$

με

$$\{B\} = \{((\nabla\Phi) - \mathbf{d}) \quad ((\nabla\Theta) - \mathbf{e})\} \quad (2.1.59)$$

Το μητρώο $[A]$ είναι επίπεδος συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης [Pilkey, 2002]. Οι κύριες τιμές του τανυστή μπορούν να προσδιοριστούν από το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$[[A] - a[I]]\{x\} = \{0\} \quad (2.1.60)$$

όπου $[I]$ το μοναδιαίο μητρώο. Από την επίλυση του προβλήματος προκύπτουν τα ιδιοζεύγη $(a_i, \{x\}_i)$, $i=1,2$. Τα ιδιοδιανύσματα $\{x\}_i$, $i=1,2$ είναι τα διανύσματα βάσης του κυρίου συστήματος, που καλείται κύριο διατμητικό σύστημα, ενώ οι ιδιοτιμές a_i , $i=1,2$ είναι οι κύριοι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης, οι οποίοι αποδεικνύεται ότι είναι πάντα μεγαλύτεροι ή ίσοι της μονάδας [Schramm et al., 1997]. Σημειώνεται ότι, οι διαγώνιοι συντελεστές $a_{yz} = a_{zy}$ ως προς το κύριο διατμητικό σύστημα με αρχή το κέντρο βάρους μηδενίζονται, ενώ με αρχή το κέντρο διάτμησης μεγιστοποιούνται [Pilkey, 2002]. Η γωνία φ^S του κυρίου διατμητικού συστήματος αξόνων ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς δίδεται από τη σχέση

$$\tan 2\varphi^S = \frac{2a_{yz}}{a_y - a_z} \quad (2.1.61)$$

Στη γενική περίπτωση, η γωνία φ^S είναι διάφορη της γωνία φ^B του κυρίου καμπτικού συστήματος αξόνων, που δίδεται από τη σχέση

$$\tan 2\varphi^B = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \quad (2.1.62)$$

Αποτέλεσμα αυτής της διαφοροποίησης των κυρίων αξόνων ($\varphi^S \neq \varphi^B$) είναι οι συνιστώσες των μετατοπίσεων της ράβδου ως προς τους άξονες y και z να είναι εν γένει συζευγμένες, έστω και αν το σύστημα αξόνων της διατομής ταυτίζεται με το κύριο καμπτικό σύστημα. Εάν η διατομή είναι συμμετρική ως προς έναν άξονα, το κύριο διατμητικό σύστημα ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα και οι βυθίσεις ως προς τις κύριες διευθύνσεις δεν είναι πλέον συζευγμένες ($a_{yz} = a_{zy} = 0$ και $I_{yz} = I_{zy} = 0$) [Pilkey, 2002].

Τέλος, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_z οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων σε σημεία του συνόρου Γ προσδιορίζονται από τις υπολογιζόμενες τιμές (Φ) και $(\partial\Phi/\partial n)$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$(\tau_{xn}) = E \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \right] \quad (2.1.63\alpha)$$

$$(\tau_{xt}) = E \frac{Q_z}{B} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + d_y \sin \beta - d_z \cos \beta \right] \quad (2.1.63\beta)$$

Ομοίως, θεωρώντας ότι η ράβδος υποβάλλεται μόνο στη διατμητική δύναμη Q_y , οι συνιστώσες των διατμητικών τάσεων σε σημεία του συνόρου Γ προσδιορίζονται από τις υπολογιζόμενες τιμές (Θ) και $(\partial\Theta/\partial n)$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$(\tau_{xn}) = E \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \right] \quad (2.1.64\alpha)$$

$$(\tau_{xt}) = E \frac{Q_y}{B} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) + e_y \sin \beta - e_z \cos \beta \right] \quad (2.1.64\beta)$$

Προφανώς, οι συνολικές διατμητικές τάσεις σε σημεία του συνόρου Γ θα δίδονται από τη σχέση

$$(\tau_{\Gamma}) = \left[(\tau_{xn})^2 + (\tau_{xt})^2 \right]^{1/2} \quad (2.1.65)$$

Σημειώνεται ότι οι εφαπτομενικές παράγωγοι $(\partial\Phi/\partial t) = (\partial\Phi/\partial s)$ και $(\partial\Theta/\partial t) = (\partial\Theta/\partial s)$ υπολογίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας κατάλληλα κεντρικές, οπίσθιες ή εμπρόσθιες διαφορές. Στις σύμμικτες ράβδους η γνώση των κάθετων διατμητικών τάσεων (τ_{xn}) είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των διατμητικών συνδέσμων. Τονίζεται ότι οι περισσότερες αστοχίες στις σύμμικτες κατασκευές παρατηρούνται στις συνδέσεις των υλικών.

2.3 Ολοκληρωτικές Παραστάσεις – Αριθμητική Επίλυση

Οι ιδιόμορφες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις των τασικών συναρτήσεων $(\Phi(y, z))$ και $(\Theta(y, z))$ διατυπώνονται ως

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(p))2E &= \int_{\Gamma} (E - E) \left[(\Phi(q)) \frac{\cos a}{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \ln r \right] ds_q \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (E - E) \left[(I_{yz}y - I_{zz}z)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \cos \beta - I_{zz} \sin \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \end{aligned} \quad (2.1.66\alpha)$$

$$\begin{aligned} \pi(\Theta(p))2E &= \int_{\Gamma} (E-E) \left[(\Theta(q)) \frac{\cos a}{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \ln r \right] ds_q \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (E-E) &\left[(I_{yz}z - I_{yy}y)(2\ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \sin \beta - I_{yy} \cos \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \end{aligned} \quad (2.1.66\beta)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας N σταθερά συνοριακά στοιχεία για την προσέγγιση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και τεχνική διακριτοποίησης σε N συνοριακά κομβικά σημεία, προκύπτουν τα δύο ακόλουθα γραμμικά σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$[A^{\Phi}] \{X^{\Phi}\} = \{B^{\Phi}\} \quad (2.1.67\alpha)$$

$$[A^{\Theta}] \{X^{\Theta}\} = \{B^{\Theta}\} \quad (2.1.67\beta)$$

από την επίλυση των οποίων προκύπτουν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες $\{X^{\Phi}\}, \{X^{\Theta}\}$ αναφορικά με τις τασικές συναρτήσεις $(\Phi)_j$ και $(\Theta)_j$, αντίστοιχα, ενώ $[A^{\Phi}], [A^{\Theta}]$ είναι τετραγωνικά $N \times N$ γνωστά μητρώα συντελεστών και $\{B^{\Phi}\}, \{B^{\Theta}\}$ είναι μητρώα στήλες με διάσταση $N \times 1$ γνωστών συντελεστών.

Οι παράγωγοι ως προς το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} των τασικών συναρτήσεων $(\partial\Phi/\partial n)$ και $(\partial\Theta/\partial n)$ είναι γνωστές μόνο στα ελεύθερα σύνορα. Οι τιμές τους μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας τις ακόλουθες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις, αντίστοιχα (πρόβλημα Dirichlet)

$$(\Phi(p)) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Phi(q)) \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial\Phi(q)}{\partial n} \right) \ln r \right] ds_q + \quad (2.1.68\alpha)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(I_{yz}y - I_{zz}z)(2\ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \cos \beta - I_{zz} \sin \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q$$

$$(\Theta(p)) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Theta(q)) \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial\Theta(q)}{\partial n} \right) \ln r \right] ds_q + \quad (2.1.68\beta)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(I_{yz}z - I_{yy}y)(2\ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \sin \beta - I_{yy} \cos \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q$$

Οι παράγωγοι ως προς το εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{t} των τασικών συναρτήσεων $(\partial\Phi/\partial n)$ και $(\partial\Theta/\partial n)$ στα σύνορα υπολογίζεται με τη βοήθεια κεντρικής, εμπρόσθιας ή οπίσθιας διαφοράς, αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας τις τιμές των συναρτήσεων (Φ) , $(\partial\Phi/\partial n)$ και (Θ) , $(\partial\Theta/\partial n)$ στα σύνορα, οι τιμές των τασικών συναρτήσεων (Φ) , (Θ) καθώς και οι παράγωγοι

τους ως προς y και z σε τυχόν εσωτερικό σημείο του χωρίου Ω υπολογίζονται από τις ακόλουθες συνοριακές ολοκληρωτικές παραστάσεις, έτσι για την τασική συνάρτηση (Φ) ισχύει

$$\begin{aligned} (\Phi(P)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Phi(q)) \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right) \ln r \right] ds_q + \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[(I_{yz}y - I_{zz}z)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \cos \beta - I_{zz} \sin \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \end{aligned} \quad (2.1.69)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Phi(q)) \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right) \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{zz}z - I_{yz}y)(2 \cos \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \cos \beta) ds_q \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{zz} \sin \beta - I_{yz} \cos \beta)(2 \ln r - 1)r \cos \omega ds_q \end{aligned} \quad (2.1.70\alpha)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi(P)}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Phi(q)) \frac{\sin(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial n} \right) \frac{\sin \omega}{r} \right] ds_q \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{zz}z - I_{yz}y)(2 \sin \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \sin \beta) ds_q \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{zz} \sin \beta - I_{yz} \cos \beta)(2 \ln r - 1)r \sin \omega ds_q \end{aligned} \quad (2.1.70\beta)$$

και αντίστοιχα για την τασική συνάρτηση $(\Theta)_j$

$$\begin{aligned} (\Theta(P)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Theta(q))_j \frac{\cos a}{r} - \left(\frac{\partial \Theta(q)}{\partial n} \right) \ln r \right] ds_q + \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[(I_{yz}z - I_{yy}y)(2 \ln r - 1)r \cos a - (I_{yz} \sin \beta - I_{yy} \cos \beta)(\ln r - 1)r^2 \right] ds_q \end{aligned} \quad (2.1.71)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Theta(P)}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Theta(q)) \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Theta(q)}{\partial n} \right) \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{yy}y - I_{yz}z)(2 \cos \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \cos \beta) ds_q \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{yy} \cos \beta - I_{yz} \sin \beta)(2 \ln r - 1)r \cos \omega ds_q \end{aligned} \quad (2.1.72\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Theta(P)}{\partial y}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[(\Theta(q)) \frac{\cos(\omega - a)}{r^2} + \left(\frac{\partial \Theta(q)}{\partial n}\right) \frac{\cos \omega}{r} \right] ds_q \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{yy}y - I_{yz}z) (2 \sin \omega \cos a + (2 \ln r - 1) \sin \beta) ds_q \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (I_{yy} \cos \beta - I_{yz} \sin \beta) (2 \ln r - 1) r \sin \omega ds_q
\end{aligned} \tag{2.1.72\beta}$$

Προκειμένου να διατηρηθεί ο αμιγώς συνοριακός χαρακτήρας της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων μετατρέπονται, με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss και της δεύτερης ταυτότητας του Green (Παράρτημα Β), τα πεδιακά ολοκληρώματα των εξισώσεων (2.1.6), (2.1.30), (2.1.31), (2.1.52-54), (2.1.56) σε συνοριακά. Έτσι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss για τις ροπές αδράνειας, το γινόμενο αδρανείας και το εμβαδόν μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$I_{yy} = \int_{\Gamma} (yz^2 \cos \beta) ds \tag{2.1.73\alpha}$$

$$I_{zz} = \int_{\Gamma} (zy^2 \sin \beta) ds \tag{2.1.73\beta}$$

$$I_{yz} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (zy^2 \cos \beta) ds \tag{2.1.73\gamma}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (y \cos \beta + z \sin \beta) ds \tag{2.1.73\delta}$$

ενώ οι συντεταγμένες $\{y_S, z_S\}$ του κέντρου διάτμησης S προσδιορίζονται από τις ολοκληρωτικές σχέσεις

$$\begin{aligned}
y_S &= -\frac{1}{B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\Phi)_j (z \cos \beta - y \sin \beta) ds + \\
&\frac{1}{4B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[v I_{zz} \left(\frac{1}{2} y^4 + y^2 z^2 \right) \cos \beta + v I_{yz} \left(\frac{1}{2} z^4 + y^2 z^2 \right) \sin \beta \right]
\end{aligned} \tag{2.1.74\alpha}$$

$$\begin{aligned}
z_S &= \frac{1}{B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) (\Theta)_j (z \cos \beta - y \sin \beta) ds + \\
&\frac{1}{4B} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[v I_{yy} \left(\frac{1}{2} z^4 + y^2 z^2 \right) \sin \beta + v I_{yz} \left(\frac{1}{2} y^4 + y^2 z^2 \right) \cos \beta \right]
\end{aligned} \tag{2.1.74\beta}$$

Επίσης, εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα του Green για τις συναρτήσεις $\{(\Theta), \partial(\Theta)/\partial y\}$, $\{(\Theta), \partial(\Theta)/\partial z\}$, $\{(\Phi), \partial(\Phi)/\partial y\}$, $\{(\Phi), \partial(\Phi)/\partial z\}$, $\{(\Theta)_j, \partial(\Phi)_j/\partial y\}$ και $\{(\Theta), \partial(\Phi)/\partial z\}$ οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης a_y , a_z , $a_{yz} = a_{zy}$ προσδιορίζονται ως

$$a_y = \frac{A}{E\Delta^2} \left((4\nu + 2)(I_{yy}I_{\Theta y} - I_{yz}I_{\Theta z}) + \frac{1}{4}\nu^2(I_{yy}^2 + I_{yz}^2)I_{ed} - I_{\Theta e} \right) \quad (2.1.75\alpha)$$

$$a_z = \frac{A}{E\Delta^2} \left((4\nu + 2)(I_{zz}I_{\Phi z} - I_{yz}I_{\Phi y}) + \frac{1}{4}\nu^2(I_{zz}^2 + I_{yz}^2)I_{ed} - I_{\Phi d} \right) \quad (2.1.75\beta)$$

$$a_{yz} = \frac{A}{E\Delta^2} \left((2\nu + 2)(I_{zz}I_{\Theta z} - I_{yz}I_{\Theta y}) + 2\nu(I_{yy}I_{\Phi y} - I_{yz}I_{\Phi z}) - \frac{1}{4}\nu^2(I_{yy} + I_{zz})I_{yz}I_{ed} - I_{\Phi e} \right) \quad (2.1.75\gamma)$$

όπου $I_{\Theta e}$, $I_{\Phi e}$ και $I_{\Phi d}$ είναι συνοριακά ολοκληρώματα που ορίζονται ως

$$I_{\Theta e} = \int_{\Gamma} (\Theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) ds \quad (2.1.76\alpha)$$

$$I_{\Phi e} = \int_{\Gamma} (\Phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) ds \quad (2.1.76\beta)$$

$$I_{\Phi d} = \int_{\Gamma} (\Phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) ds \quad (2.1.76\gamma)$$

ενώ $I_{\Theta y}$, $I_{\Theta z}$, $I_{\Phi y}$, $I_{\Phi z}$ και I_{ed} είναι πεδιακά ολοκληρώματα που ορίζονται ως

$$I_{\Theta y} = E \iint_{\Omega} (\Theta) y d\Omega \quad (2.1.77\alpha)$$

$$I_{\Theta z} = E \iint_{\Omega} (\Theta) z d\Omega \quad (2.1.77\beta)$$

$$I_{\Phi y} = E \iint_{\Omega} (\Phi) y d\Omega \quad (2.1.77\gamma)$$

$$I_{\Phi z} = E \iint_{\Omega} (\Phi) z d\Omega \quad (2.1.77\delta)$$

$$I_{ed} = E \iint_{\Omega} (y^4 + z^4 + 2y^2z^2) d\Omega \quad (2.1.77\epsilon)$$

και τα οποία μπορούν να μετατραπούν σε συνοριακά ολοκληρώματα εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα του Green για τις συναρτήσεις $\{(\Theta), z^3\}$, $\{(\Theta), y^3\}$, $\{(\Phi), z^3\}$ και $\{(\Phi), y^3\}$ ως

$$I_{\Theta y} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(I_{yz} y^3 z^2 - 2I_{yy} y^4 z) \sin \beta + (3(\Theta)_j \cos \beta - y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})) y^2 \right] ds \quad (2.1.78\alpha)$$

$$I_{\Theta z} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(2I_{yz} z^4 y - I_{yy} z^3 y^2) \cos \beta + (3(\Theta)_j \sin \beta - z(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})) z^2 \right] ds \quad (2.1.78\beta)$$

$$I_{\Phi y} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(2I_{yz} y^4 z - I_{zz} y^3 z^2) \sin \beta + (3(\Phi)_j \cos \beta - y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})) y^2 \right] ds \quad (2.1.78\gamma)$$

$$I_{\Phi z} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left[(I_{yz} z^3 y^2 - 2I_{zz} z^4 y) \cos \beta + (3(\Phi)_j \sin \beta - z(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})) z^2 \right] ds \quad (2.1.78\delta)$$

$$I_{ed} = \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} (E_j - E_i) \left(y^4 z \sin \beta + z^4 y \cos \beta + \frac{2}{3} y^2 z^3 \sin \beta \right) ds \quad (2.1.78\epsilon)$$

Ενώ, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους C ως προς αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $O\tilde{y}\tilde{z}$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\tilde{y}_C = \frac{\int_{\Gamma} (\tilde{y}\tilde{z} \sin \beta) ds}{\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\tilde{y} \cos \beta + \tilde{z} \sin \beta) ds} \quad (2.1.79\alpha)$$

$$\tilde{z}_C = \frac{\int_{\Gamma} (\tilde{y}\tilde{z} \cos \beta) ds}{\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\tilde{y} \cos \beta + \tilde{z} \sin \beta) ds} \quad (2.1.79\beta)$$

Τέλος, θεωρήθηκε σκόπιμο να παρατεθούν οι εκφράσεις των διατμητικών συντελεστών a_z όπως αυτοί προτάθηκαν για ορθογωνική διατομή από τους Timoshenko [1922], Cowper [1966] και Renton[1991] καθώς και το συντελεστή που προκύπτει με τη βοήθεια της τεχνική θεωρίας, για λόγους πληρότητας και κατανόησης.

- Timoshenko: $a_z = \frac{6+5\nu}{5+5\nu}$
- Cowper: $a_z = \frac{12+11\nu}{10+10\nu}$
- Τεχνική θεωρία: $a_z = \frac{A}{I_{yy}^2} \iint_{\Omega} \left(\frac{S_y^{cut}}{b} \right)^2 d\Omega = \frac{A}{I_{yy}^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} h^2 - z^2 \right) \right]^2 b dz \rightarrow a_z = 6/5$
- Renton: $a_z = \frac{6}{5} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{144(b/h)^4}{\pi^6 (2m+1)^2 n^2 \left[(2m+1)^2 (b/2h)^2 + n^2 \right]}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γεωμετρικά Μη Γραμμική Ανελαστική Ανάλυση Δοκών με Επιρροή Διατμητικών Παραμορφώσεων

3.1 Διατύπωση του προβλήματος

3.1.1 Μετατοπίσεις – Παραμορφώσεις – Τάσεις

Ας υποθέσουμε πρισματική δοκό μήκους l (Σχ.3.1) με συμπαγή διατομή διπλής συμμετρίας, η οποία καταλαμβάνει επιφάνεια Ω του επιπέδου y, z στηριζόμενη στις καμπύλες Γ_j ($j = 1, 2, \dots, K$) οι οποίες είναι τμηματικά λείες, δηλαδή έχουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Στο Σχήμα 3.1 Cyz είναι το καθολικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο διέρχεται απ' το κέντρο βάρους της διατομής. Η σχέση κανονικής έντασης-παραμόρφωσης για το υλικό θεωρείται ελαστική-πλαστική-κρατυνόμενη με αρχικό μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G , μέτρο κράτυνσης E_t , τάση διαρροής σ_{y0} και παραμόρφωση διαρροής ε_{y0} . Η δοκός υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεως ενός κατανεμημένου ή συγκεντρωμένου αξονικού φορτίου $p_x = p_x(x)$, εγκάρσιου φορτίου $p_y = p_y(y)$, $p_z = p_z(z)$ και ροπές κάμψεως $m_y = m_y(x)$, $m_z = m_z(x)$ κατά τους άξονες y, z αντίστοιχα (Σχ.3.1).

Υπό τη δράση των προαναφερθέντων φορτίων, το πεδίο των μετατοπίσεων, λαμβάνοντας υπ' όψιν την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων, δίνεται απ' τη σχέση

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) \quad (3.1.1\alpha)$$

$$\bar{v}(x) = v(x) \quad \bar{w}(x) = w(x) \quad (3.1.1\beta, \gamma)$$

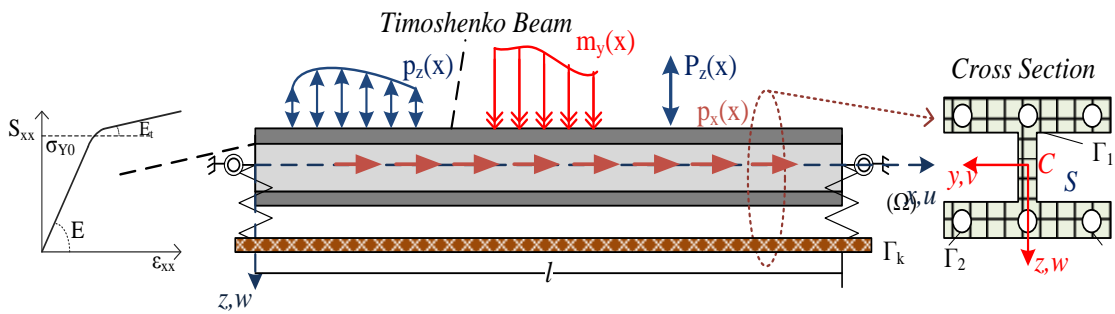
όπου $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ είναι οι συνιστώσες της εγκάρσιας μετατόπισης της δοκού σε σχέση με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων Cyz : $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες της μετατόπισης του κέντρου βάρους C και $\theta_y(x)$, $\theta_z(x)$ είναι οι γωνίες στροφής λόγω της κάμψεως της διατομής σε σχέση με το κέντρο βάρους. Αξίζει να σημειωθεί ότι, εφόσον λαμβάνεται υπ' όψιν η πρόσθετη γωνία στροφής λόγω της διατμητικής παραμόρφωσης, η γωνία στροφής δεν ισούται με την παράγωγο της μετατόπισης (δηλαδή $\theta_y \neq w'$, $\theta_z \neq v'$).

Θεωρώντας τις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων της τρισδιάστατης ελαστικότητας για μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις [Ramm and Hofmann 1995, Rothert and Gensichen 1987], οι συνιστώσες της παραμόρφωσης αποκτούν τη μορφή

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.1.2\alpha)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \quad (3.1.2\beta,\gamma)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.1.2\delta)$$



Σχήμα 3.1 x-z επίπεδο πρισματικής συμπαγούς δοκού διπλής συμμετρίας υπό αξονικό-καμπτικό φορτίο.

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της παραμόρφωση των εξ.(3.1) με τις μη γραμμικές σχέσεις έντασης-μετατόπισης του ταυιστή τάσης Green-Lagrange κι εκμεταλλευόμενοι τα συμπεράσματα της θεωρίας μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων $((\partial \bar{u} / \partial x)^2 \ll \partial \bar{u} / \partial x, (\partial \bar{u} / \partial x)(\partial \bar{u} / \partial z) \ll (\partial \bar{u} / \partial x) + (\partial \bar{u} / \partial z), (\partial \bar{u} / \partial z)(\partial \bar{u} / \partial y) \ll (\partial \bar{u} / \partial z) + (\partial \bar{u} / \partial y))$, οι συνιστώσες της συνολικής έντασης αποκτούν τη μορφή

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{du(x)}{dx} - y \frac{d\theta_z(x)}{dx} + z \frac{d\theta_y(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dv(x)}{dx} + \frac{dw(x)}{dx} \right]^2 \quad (3.1.3\alpha)$$

$$\gamma_{xy}(x) = \frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \quad \gamma_{xz}(x) = \frac{dw(x)}{dx} + \theta_y(x) \quad (3.1.3\beta,\gamma)$$

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις, χρησιμοποιώντας τον ταυιστή τάσης Piola-Kirchoff [John Wiley and Sons,1991], υποθέτοντας ισοότροπο και ομογενές υλικό χωρίς να υφίσταται καμία βλάβη κατά την πλαστικοποίησή του και αγνοώντας τις συνιστώσες S_{yy}, S_{zz}, S_{yz} , οι τάσεις ορίζονται σε όρους παραμορφώσεων ως

$$\begin{Bmatrix} dS_{xx} \\ dS_{xy} \\ dS_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* & & \\ & G & \\ & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx}^{el} \\ d\gamma_{xy}^{el} \\ d\gamma_{xz}^{el} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

όπου το $d(\cdot)$ υποδηλώνει στοιχειώδεις ποσότητες και ο εκθέτης el το ελαστικό μέρος της παραμόρφωσης και $E^* = E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$. Για την περίπτωση επίπεδης έντασης, ισχύει $E^* = E/(1-\nu^2)$, ενώ το E συνήθως χρησιμοποιείται αντί του E^* στις δοκούς [Vlasov 1963, Armenakas 2006].

Εφόσον το υλικό παραμένει ελαστικό ή στην περίπτωση ελαστικής φόρτισης

$$\{d\varepsilon_{xx} \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{xz}\}^T = \{d\varepsilon_{xx}^{el} \quad d\gamma_{xy}^{el} \quad d\gamma_{xz}^{el}\}^T \quad (3.1.5)$$

οι τάσεις ορίζονται σε όρους ολικών παραμορφώσεων με βάση το νόμο του Hooke (εξ.3.1.4), ενώ στην περίπτωση πλαστικής ροής

$$\{d\varepsilon_{xx} \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{xz}\}^T = \{d\varepsilon_{xx}^{el} \quad d\gamma_{xy}^{el} \quad d\gamma_{xz}^{el}\}^T + \{d\varepsilon_{xx}^{pl} \quad d\gamma_{xy}^{pl} \quad d\gamma_{xz}^{pl}\}^T \quad (3.1.6)$$

οι τάσεις ορίζονται σε σχέση με τις ελαστικές και τις πλαστικές παραμορφώσεις μέσω των σχέσεων (3.1.4) και (3.1.6) ως

$$\begin{Bmatrix} dS_{xx} \\ dS_{xy} \\ dS_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & & \\ & G & \\ & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} - d\varepsilon_{xx}^{pl} \\ d\gamma_{xy} - d\gamma_{xy}^{pl} \\ d\gamma_{xz} - d\gamma_{xz}^{pl} \end{Bmatrix} \quad (3.1.7)$$

όπου ο εκθέτης pl υποδηλώνει το πλαστικό μέρος της συνιστώσας της παραμόρφωσης. Το κριτήριο διαρροής Von Mises, ένας κανόνας ροής κι ένας ισοτροπικός κανόνας κράτυνσης, επιτρέπουν τον προσδιορισμό των συνιστωσών της πλαστικής παραμόρφωσης. Η συνθήκη διαρροής περιγράφεται απ'την παρακάτω σχέση

$$\Phi_{VM} = \frac{\sqrt{S_{xx}^2 + 3(S_{xy}^2 + S_{xz}^2)}}{\sigma_Y(\varepsilon_{eq}^{pl})} - 1 \leq 0 \quad (3.1.8)$$

όπου σ_Y είναι η τάση διαρροής και ε_{eq}^{pl} είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, η τιμή της οποίας ορίζεται στην [John Wiley and Sons,1991] και

είναι ίση με $d\varepsilon_{eq}^{pl} = d\lambda$, όπου $d\lambda$ ποσοτικός συντελεστής. Επίσης, το μέτρο πλαστικότητας h ορίζεται ως $h = d\sigma_Y / d\varepsilon_{eq}^{pl}$ ή $d\sigma_Y = hd\lambda$ και μπορεί να προσδιοριστεί από μία δοκιμή εφελκυσμού $h = E_t E / (E - E_t)$ (Σχ. 3.2).

Σύμφωνα με το νόμο ροής οι πλαστικές παραμορφώσεις εκφράζονται ως εξής

$$\left\{ d\varepsilon_{xx}^{pl} \quad d\gamma_{xy}^{pl} \quad d\gamma_{xz}^{pl} \right\}^T = d\lambda \left\{ \frac{\partial \Phi_{VM}}{\partial S_{xx}} \quad \frac{\partial \Phi_{VM}}{\partial S_{xy}} \quad \frac{\partial \Phi_{VM}}{\partial S_{xz}} \right\}^T \quad (3.1.9)$$

Χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα σχέση που συνδέει τις τάσεις διαρροής και τον ποσοτικό συντελεστή, εξ. (3.1.3),(3.1.5)-(3.1.7), και αξιοποιώντας τη συνθήκη πλαστικής φόρτισης ($df = 0$), οι σχέσεις τάσεων-ολικών παραμορφώσεων λαμβάνουν τη μορφή

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_{xx} \\ dS_{xy} \\ dS_{xz} \end{array} \right\} = \frac{1}{c} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} c_{11} & & sym. \\ c_{21} & c_{22} & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array} \right]}_{D^{elpl}} \left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_{xx} \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \end{array} \right\} \quad (3.1.10)$$

όπου ο όρος D^{elpl} είναι το μητρώο με συντελεστές

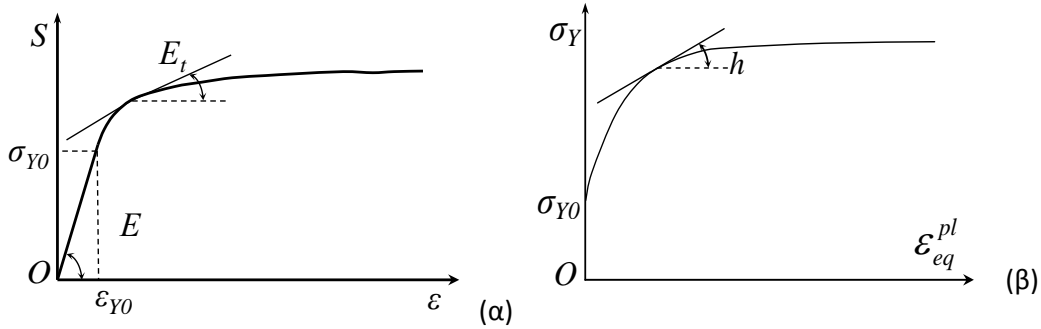
$$c = hS_e^2 + ES_{xx}^2 + 9G(S_{xy}^2 + S_{xz}^2) \quad c_{11} = E \left[hS_e^2 + 9G(S_{xy}^2 + S_{xz}^2) \right] \quad (3.1.11\alpha,\beta)$$

$$c_{21} = -3EGS_{xx}S_{xy} \quad c_{22} = G \left[hS_e^2 + ES_{xx}^2 + 9GS_{xz}^2 \right] \quad c_{31} = -3EGS_{xx}S_{xz} \quad (3.1.11\gamma,\delta,\varepsilon)$$

$$c_{32} = -9G^2S_{xy}S_{xz} \quad c_{33} = G \left[hS_e^2 + ES_{xx}^2 + 9GS_{xy}^2 \right] \quad (3.1.11\sigma,\eta)$$

$$S_e = \sqrt{S_{xx}^2 + 3(S_{xy}^2 + S_{xz}^2)} \quad (3.1.11\theta)$$

Θέτοντας στις παραπάνω σχέσεις $h = 0$, προκύπτει το μητρώο Baba and Kajita [44], ενώ αν μία εκ των διατμητικών τάσεων (μαζί με την αντίστοιχη διατμητική παραμόρφωση) παραλειφθεί, ισχύουν και οι σχέσεις των Chen and Trahair με ικανοποιητική ακρίβεια.



Σχήμα 3.2 Σχέσεις ορθών τάσεων-παραμορφώσεων (α) και τάσης διαρροής-ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης.

3.1.2 Εξισώσεις Ισορροπίας και Συνοριακές Συνθήκες

Για τον προσδιορισμό των εξισώσεων ισορροπίας και των συνοριακών συνθηκών, χρησιμοποιείται η αρχή των δυνατών έργων αγνοώντας τις μαζικές δυνάμεις

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (3.1.12)$$

όπου το $\delta(\cdot)$ υποδηλώνει δυνατές ποσότητες, W_{int} είναι η ενέργεια της δοκού λόγω ορθών και διατμητικών τάσεων και W_{ext} είναι το έργο λόγω των εξωτερικών φορτίων που ορίζεται ως

$$\delta W_{int} = \int_V (S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (3.1.13\alpha)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_l (p_x \delta u + p_y \delta v + m_y \delta \theta_y + p_z \delta w + m_z \delta \theta_z) dx + \\ & + \sum_b^{0,1} (N_b \delta u + V_{by} \delta v + V_{bz} \delta w + M_{bz} \delta \theta_z + M_{by} \delta \theta_y) \end{aligned} \quad (3.1.13\beta)$$

όπου V είναι ο όγκος και l το μήκος της δοκού στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ N_b , V_{by} , V_{bz} , M_{by} και M_{bz} είναι οι εξωτερικώς επιβαλλόμενες δυνάμεις και ροπές στα σύνορα της δοκού. Στο παρόν κεφάλαιο, η ένταση της δοκού ορίζεται ως εξής

$$N = \int_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (3.1.14\alpha)$$

$$Q_y = \int_{A_y} S_{xy} d\Omega \quad Q_z = \int_{A_z} S_{xz} d\Omega \quad (3.1.14\beta)$$

$$M_y = \int_{\Omega} S_{xz} z d\Omega \quad M_z = - \int_{\Omega} S_{xy} y d\Omega \quad (3.1.14\gamma)$$

όπου N , Q_y , Q_z είναι η αξονική δύναμη και διατμητικές δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα. Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών των τάσεων απ' τις εξισώσεις (4.1.7) και αξιοποιώντας τις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων (4.1.3), η ένταση της δοκού προκύπτει ως εξής

$$N = EA \left[u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right] \underbrace{-E \int_{\Omega} \varepsilon_{xx}^{pl} dA}_{N^{pl}} = EA \left[u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right] + N^{pl} \quad (3.1.15\alpha)$$

$$Q_z = GA_z (w'(x) + \theta_y(x)) \underbrace{-G \int_{A_z} \gamma_{xz}^{pl} dA}_{Q_z^{pl}} = GA_z (w'(x) + \theta_y(x)) + Q_z^{pl} \quad (3.1.15\beta)$$

$$Q_y = GA_y (v'(x) - \theta_z(x)) \underbrace{-G \int_{A_y} \gamma_{xy}^{pl} dA}_{Q_y^{pl}} = GA_y (v'(x) - \theta_z(x)) + Q_y^{pl} \quad (3.1.15\gamma)$$

$$M_y = EI_y \theta'_y \underbrace{-E \int_{\Omega} z \varepsilon_{xx}^{pl} dA}_{M_y^{pl}} = EI_y \theta'_y + M_y^{pl} \quad (3.1.15\delta)$$

$$M_z = EI_z \theta'_z \underbrace{-E \int_{\Omega} y \varepsilon_{xx}^{pl} dA}_{M_z^{pl}} = EI_z \theta'_z + M_z^{pl} \quad (3.1.15\epsilon)$$

όπου με το (') υποδηλώνεται παραγώγιση ως προς x , N^{pl} , Q_z^{pl} , Q_y^{pl} , M_z^{pl} και M_y^{pl} είναι το πλαστικό μέρος της έντασης, A είναι η επιφάνεια της διατομής, I_y , I_z είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες κάμψης και GA_y , GA_z είναι οι διατμητικές δυσκαμψίες της θεωρίας δοκού Timoshenko, όπου

$$A_z = \kappa_z A = \frac{I}{a_z} A \quad A_y = \kappa_y A = \frac{I}{a_y} A \quad (3.1.16\alpha,\beta)$$

είναι οι επιφάνεις διατμήσεως ως προς τους άξονες y και z , αντίστοιχα με κ_y , κ_z είναι διορθωτικοί συντελεστές και a_y , a_z είναι οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι συνιστώσες της έντασης αναφέρονται στη διεύθυνση των απειροστών στοιχείων της διατομής στην απαραμόρφωτη κατάστασή της, όπως αυτές ορίστηκαν ως προς το δεύτερο τανυστή τάσης Piola-Kirchoff [John Wiley and Sons, 1991].

Με αντικατάσταση των σχέσεων και (3.1.3) και (3.1.15) στην εξ.(3.1.12) και εκτελώντας ορισμένες πράξεις προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας.

$$EA(u'' + v'v'' + w'w'') + \frac{\partial N^{pl}}{\partial x} = -p_x \quad (3.1.17\alpha)$$

$$EA \left[\left(u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right) v' \right]' + \frac{d(N^{pl}v')}{dx} + GA_y(v' - \theta_z)' + \frac{\partial Q_y^{pl}}{\partial x} = -p_y \quad (4.1.17\beta)$$

$$EA \left[\left(u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right) w' \right]' + \frac{d(N^{pl}w')}{dx} + GA_z(w' + \theta_y)' + \frac{\partial Q_z^{pl}}{\partial x} = -p_z \quad (4.1.17\gamma)$$

$$EI_y \theta_y'' + \frac{dM_y^{pl}}{dx} - GA_z(w' + \theta_y) - Q_z^{pl} = -m_y \quad (3.1.17\delta)$$

$$EI_z \theta_z'' + \frac{dM_z^{pl}}{dx} + GA_y(v' - \theta_z) + Q_y^{pl} = -m_z \quad (3.1.17\epsilon)$$

ή σε όρους ολικών τάσεων

$$\frac{d(N^{el} + N^{pl})}{dx} = -p_x \Rightarrow \frac{dN}{dx} = -p_x \quad (3.1.18\alpha)$$

$$-\frac{d(Nv')}{dx} - \frac{dQ_y}{dx} = p_y \quad -\frac{d(Nw')}{dx} - \frac{dQ_z}{dx} = p_z \quad (3.1.18\beta,\gamma)$$

$$\frac{dM_y}{dx} - Q_z = -m_y \quad \frac{dM_z}{dx} + Q_y = -m_z \quad (3.1.18\delta,\epsilon)$$

Επίσης, η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες ως εξής

$$a_1 u(x) + a_2 N_b(x) = a_3 \quad (3.1.19\alpha)$$

$$\beta_1 v(x) + \beta_2 V_{by}(x) = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 \theta_z(x) + \bar{\beta}_2 M_{bz}(x) = \bar{\beta}_3 \quad (3.1.19\beta,\gamma)$$

$$\gamma_1 w(x) + \gamma_2 V_{bz}(x) = \gamma_3 \quad \bar{\gamma}_1 \theta_y(x) + \bar{\gamma}_2 M_{by}(x) = \bar{\gamma}_3 \quad (3.1.19\delta,\epsilon)$$

Στις εξισώσεις (3.1.19β-ε) οι ολικές κατακόρυφες αντιδράσεις V_{by} , V_{bz} και καμπτικές ροπές M_{by} , M_{bz} δίνονται απ' τις σχέσεις

$$V_{by} = EA \left[u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right] v' + N^{pl}v' + GA_y(v' - \theta_z) + Q_y^{pl} \quad (3.1.20\alpha)$$

$$V_{bz} = EA \left[u' + \frac{I}{2} (v'^2 + w'^2) \right] w' + N^{pl} w' + GA_z (w' + \theta_y) + Q_z^{pl} \quad (3.1.20\beta)$$

$$M_{by} = EI_y \theta_y' + M_y^{pl} \quad M_{bz} = EI_z \theta_z' + M_z^{pl} \quad (3.1.20\gamma, \delta)$$

Τέλος, οι συντελεστές $\alpha_j, \beta_j, \bar{\beta}_j, \gamma_j, \bar{\gamma}_j$ ($j = 1, 2, 3$) είναι συναρτήσεις ορισμένες στα άκρα της δοκού. Οι εξισώσεις (3.1.19) περιγράφουν τις πιο γενικές συνθήκες στήριξης που σχετίζονται με το πρόβλημα και μπορούν να συμπεριλάβουν και ελαστική στήριξη. Είναι προφανές ότι όλοι οι τύποι συμβατικών συνθηκών στήριξης (πάκτωση, απλή στήριξη, ελεύθερο άκρο) μπορεί να προκύψει απ' αυτές τις εξισώσεις ορίζοντας κατάλληλα αυτές τις εξισώσεις. (π.χ για ένα πακτωμένο άκρο είναι $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$, $\bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = 0$). Αφήνοντας τις πλαστικές συνιστώσες των εξισώσεων ισορροπίας, διαμορφώνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών του συγκεκριμένου προβλήματος.

3.1.3 Συντελεστές Διατμητικής Παραμόρφωσης

Η εκτίμηση των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης α_y, α_z που αντιστοιχούν στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων C_{yz} υλοποιείται σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας. Αυτοί οι συντελεστές προσδιορίζονται απ' την εξίσωση της διατμητικής ενέργειας παραμόρφωσης ανά μονάδα μήκους [Stephen, 1980] που δίνεται απ' την προσεγγιστική σχέση

$$U_{appr.} = \frac{a_y Q_y^2}{2AG} + \frac{a_z Q_z^2}{2AG} \quad (3.1.21)$$

με την ακριβή τιμή της που δίνεται απ' τη σχέση

$$U_{exact} = \int_{\Omega} \frac{(\tau_{xz})^2 + (\tau_{xy})^2}{2G} d\Omega \quad (3.1.22)$$

και προκύπτουν ως εξής [Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G. , 2005]

$$a_y = \frac{I}{\kappa_y} = \frac{A}{\Delta^2} \int_{\Omega} [(\nabla \Theta) - \mathbf{e}] \cdot [(\nabla \Theta) - \mathbf{e}] d\Omega \quad (3.1.23\alpha)$$

$$a_z = \frac{I}{\kappa_z} = \frac{A}{\Delta^2} \int_{\Omega} [(\nabla \Phi) - \mathbf{d}] \cdot [(\nabla \Phi) - \mathbf{d}] d\Omega \quad (3.1.23\beta)$$

Όπου $(\tau_{xz})_j, (\tau_{xy})_j$ είναι οι εγκάρσιες συνιστώσες της διατμητικής έντασης, $(\nabla) \equiv \mathbf{i}_y (\partial/\partial y) + \mathbf{i}_z (\partial/\partial z)$ είναι ένα συμβολικό διάνυσμα με $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα, δίνεται απ' τη σχέση, ν είναι ο συντελεστής Poisson του υλικού της διατομής, είναι διανύσματα ορισμένα ως

$$\mathbf{e} = \left(\nu I_y \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \mathbf{i}_y + \nu I_y y z \mathbf{i}_z \quad (3.1.24\alpha)$$

$$\mathbf{d} = \nu I_z y z \mathbf{i}_y - \left(\nu I_z \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \mathbf{i}_z \quad (3.1.24\beta)$$

και $\Theta(y, z), \Phi(y, z)$ οι είναι συναρτήσεις τάσεις, οι οποίες εκτιμώνται απ' τη λύση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών Neumann [47].

$$\nabla^2 \Theta = -2I_y y \text{ στο } \Omega \quad (3.1.25\alpha)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \text{ στο } \Gamma = \bigcup_{j=1}^{K+1} \Gamma_j \quad (3.1.25\beta)$$

$$\nabla^2 \Phi = -2I_z z \text{ στο } \Omega \quad (3.1.26\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \text{ στο } \Gamma = \bigcup_{j=1}^{K+1} \Gamma_j \quad (3.1.26\beta)$$

όπου \mathbf{n} είναι το ορθό διάνυσμα στο σύνορο Γ . Στην περίπτωση που αγνοούνται οι διατμητικές παραμορφώσεις, $a_z = a_y = 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνοριακές συνθήκες (εξ.(3.1.25β) και (3.1.26β)) έχουν προκύψει απ' τη φυσική θεώρηση ότι το διάνυσμα κίνησης κατά τη διεύθυνση του ορθού διανύσματος \mathbf{n} εξαφανίζεται στην ελεύθερη επιφάνεια της δοκού.

3.2 Αριθμητική επίλυση

3.2.1. Αριθμητικός υπολογισμός των μετατοπίσεων u, v, w και των στροφών θ_y, θ_z

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, το γεωμετρικά μη γραμμικό ανελαστικό πρόβλημα των δοκών Timoshenko στηριζόμενων σε ανελαστικό και χωρίς ένταση έδαφος, μείωνει τις αξονικές κι εγκάρσιες συνιστώσες της μετατόπισης $u(x), v(x), w(x)$, καθώς επίσης και τις στροφές λόγω κάμψης $\theta_y(x), \theta_z(x)$ έχοντας συνεχείς παραγώγους μέχρι $2^{\text{ας}}$ τάξεως ως προς x και ικανοποιώντας το πρόβλημα συνοριακών τιμών όπως αυτό περιγράφεται απ' την εξ.(4.1.17) και τις συνοριακές συνθήκες της εξ.(4.1.19) στα άκρα της δοκού $x=0, l$.

Αυτό το πρόβλημα συνοριακών τιμών επιλύεται με τη μέθοδο BEM [Katsikadelis JT, 2002] όπως αυτή αναπτύχθηκε στις παραγράφους [Sapountzakis and Karpitsis 2013, Sapountzakis 2000] για τη λύση εξισώσεων παραγώγων $2^{\text{ας}}$ τάξεως, μετά από την παρακάτω τροποποίηση. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για να διατηρηθούν τα πλεονεκτήματα της μεθόδου BEM, χρησιμοποιώντας απλές λύσεις και αποφεύγοντας πεπερασμένες διαφορές για την επίλυση του προβλήματος. Σύμφωνα μ' αυτή τη μέθοδο, έστω ότι $u_1(x) = u(x)$, $u_2(x) = v(x)$, $u_3(x) = w(x)$, $u_4(x) = \theta_y(x)$ και $u_5(x) = \theta_z(x)$ είναι η ζητούμενη λύση του προβλήματος. Η λύση της εξίσωσης παραγώγου 2ας τάξεως $d^2u_i/dx^2 = q''$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) και ($q = u, v, w, \theta_y, \theta_z$) δίνεται σε ολοκληρωτική μορφή ως

$$u_i(\xi) = \int_0^l \frac{d^2u_i}{dx^2} u^* dx - \left[u^* \frac{du_i}{dx} - \frac{\partial u^*}{\partial x} u_i \right]_0^l \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (3.1.27)$$

όπου u^* είναι η θεμελιώδης λύση που δίνεται απ' τον τύπο

$$u^* = \frac{1}{2} |r| \quad (3.1.28)$$

με τα $r = x - \xi$, x, ξ σημεία της δοκού. Εφόσον οι όροι EA, GA_z, GA_y, EI_y και EI_z είναι ανεξάρτητοι του x , οι εξ.(3.1.27) μπορούν να γραφούν ως εξής

$$EAu_1(\xi) = \int_0^l \left[EA \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right] \Lambda_2 dx - EA \left[\Lambda_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \Lambda_1 u_1 \right]_0^l \quad (3.1.29\alpha)$$

$$GA_y u_2(\xi) = \int_0^l \left[GA_y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right] \Lambda_2 dx - GA_y \left[\Lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \Lambda_1 u_2 \right]_0^l \quad (3.1.29\beta)$$

$$GA_z u_3(\xi) = \int_0^l \left[GA_z \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right] \Lambda_2 dx - GA_z \left[\Lambda_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} - \Lambda_1 u_3 \right]_0^l \quad (3.1.29\gamma)$$

$$EI_y u_4(\xi) = \int_0^l \left[EI_y \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \right] \Lambda_2 dx - EI_y \left[\Lambda_2 \frac{\partial u_4}{\partial x} - \Lambda_1 u_4 \right]_0^l \quad (3.1.29\delta)$$

$$EI_z u_5(\xi) = \int_0^l \left[EI_z \frac{\partial^2 u_5}{\partial x^2} \right] \Lambda_2 dx - EI_z \left[\Lambda_2 \frac{\partial u_5}{\partial x} - \Lambda_1 u_5 \right]_0^l \quad (3.1.29\epsilon)$$

όπου οι πυρήνες $\Lambda_j(r) = \Lambda_j(x, \xi)$ ($j = 1, 2$) δίνονται ως

$$\Lambda_1(r) = \frac{1}{2} \operatorname{sgnr} \quad \Lambda_2(r) = \frac{1}{2} |r| \quad (3.1.30)$$

Λύνοντας τις εξ.(3.1.17α-ε) ως προς EAu'' , $GA_y v''$, $GA_z w''$, $EI_y \theta_y''$ και $EI_z \theta_z''$ και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις εξ.(3.1.29α-ε) αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι ολοκληρωμάτων

$$EAu_1(\xi) = \int_0^l \left(-p_x(x) - \frac{dN^{pl}}{dx} - EA \left(\frac{du_2}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{du_3}{dx} \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) \right) \Lambda_2 dx - EA \left[\Lambda_2 \frac{du_1}{dx} - \Lambda_1 u_1 \right]_0^l \quad (3.1.31\beta)$$

$$GA_y u_2(\xi) = \int_0^l \left[\begin{aligned} & -GA_y \frac{du_2}{dx} - EA \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{du_2}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{du_3}{dx} \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) \frac{du_2}{dx} - \frac{dN^{pl}}{dx} \frac{du_2}{dx} \\ & - EA \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right) \right) \frac{d^2 u_2}{dx^2} - N^{pl} \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{\partial Q_z^{pl}}{\partial x} - p_y \end{aligned} \right] \Lambda_2 dx - GA_y \left[\Lambda_2 \frac{du_2}{dx} - \Lambda_1 u_2 \right]_0^l \quad (3.1.31\beta)$$

$$GA_z u_3(\xi) = \int_0^l \left[\begin{aligned} & -GA_z \frac{du_3}{dx} - EA \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{du_2}{dx} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{du_3}{dx} \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) \frac{du_3}{dx} - \frac{dN^{pl}}{dx} \frac{du_3}{dx} \\ & - EA \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right) \right) \frac{d^2 u_3}{dx^2} - N^{pl} \frac{d^2 u_3}{dx^2} - \frac{\partial Q_z^{pl}}{\partial x} - p_z \end{aligned} \right] \Lambda_2 dx - GA_z \left[\Lambda_2 \frac{du_3}{dx} - \Lambda_1 u_3 \right]_0^l \quad (3.1.31\gamma)$$

$$EI_y u_4(\xi) = \int_0^l \left(GA_z \left(\frac{du_3}{dx} + u_4 \right) + Q_y^{pl} - \frac{\partial M_y^{pl}}{\partial x} - m_y \right) A_2 dx - EI_y \left[A_2 \frac{du_4}{dx} - A_1 u_4 \right]_0^l \quad (3.1.31\delta)$$

$$EI_z u_5(\xi) = \int_0^l \left(GA_y \left(\frac{du_2}{dx} - u_5 \right) + Q_z^{pl} - \frac{\partial M_z^{pl}}{\partial x} - m_z \right) A_2 dx - EI_z \left[A_2 \frac{du_5}{dx} - A_1 u_5 \right]_0^l \quad (3.1.31\epsilon)$$

Μετά από ορισμένες ολοκληρώσεις, οι εξ.(3.1.31) παίρνουν τη μορφή

$$EA u_1(\xi) = -\int_0^l p_x A_2 dx + \int_0^l N^{pl} A_1 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^l \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] A_1 dx - \left[\left(\frac{1}{2} EA \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] + N^{pl} \right) A_2 \right]_0^l - EA \left[A_2 \frac{du_1}{dx} - A_1 u_1 \right]_0^l \quad (3.1.32\alpha)$$

$$GA_y u_2(\xi) = -\int_0^l p_y A_2 dx + GA_y \int_0^l u_2 A_1 dx + EA \int_0^l \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \right) \frac{du_2}{dx} A_1 dx + \int_0^l N^{pl} \frac{du_2}{dx} A_1 dx + \int_0^l Q_y^{pl} A_1 dx + GA_y [u_2 A_1]_0^l - \left[\left(EA \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \right) + N^{pl} \right) \frac{du_2}{dx} A_2 + \left(GA_y \left(\frac{du_2}{dx} + u_4 \right) + Q_y^{pl} \right) A_2 \right]_0^l \quad (3.1.32\beta)$$

$$GA_z u_3(\xi) = -\int_0^l p_z A_2 dx + GA_z \int_0^l u_3 A_1 dx + EA \int_0^l \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \right) \frac{du_3}{dx} A_1 dx + \int_0^l N^{pl} \frac{du_3}{dx} A_1 dx + \int_0^l Q_z^{pl} A_1 dx + GA_z [u_3 A_1]_0^l - \left[\left(EA \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \right) + N^{pl} \right) \frac{du_3}{dx} A_2 + \left(GA_z \left(\frac{du_2}{dx} - u_5 \right) + Q_z^{pl} \right) A_2 \right]_0^l \quad (3.1.32\gamma)$$

$$EI_y u_4(\xi) = GA_z \int_0^l \left(\frac{du_3}{dx} + u_4 \right) A_2 dx + \int_0^l Q_z^{pl} A_2 dx + \int_0^l M_y^{pl} A_1 dx - \int_0^l m_y A_2 dx - \left[M_y^{pl} A_2 \right]_0^l - EI_y \left[A_2 \frac{du_4}{dx} - A_1 u_4 \right]_0^l \quad (3.1.32\delta)$$

$$EI_z u_5(\xi) = GA_y \int_0^l \left(\frac{du_2}{dx} - u_5 \right) A_2 dx + \int_0^l Q_y^{pl} A_2 dx + \int_0^l M_z^{pl} A_1 dx - \int_0^l m_z A_2 dx - \left[M_z^{pl} A_2 \right]_0^l - EI_z \left[A_2 \frac{du_5}{dx} - A_1 u_5 \right]_0^l \quad (3.1.32\epsilon)$$

ενώ θέτοντας τις συνθήκες στήριξης σε μια πιο απλή μορφή, τα ολοκληρώματα παίρνουν τη μορφή

$$EAu_1(\xi) = -\int_0^l p_x \Lambda_2 dx + \int_0^l N^{pl} \Lambda_1 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^l \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \Lambda_1 dx - [N \Lambda_2 - EA \Lambda_1 u_1]_0^l \quad (3.1.32\alpha)$$

$$GA_y u_2(\xi) = -\int_0^l p_y \Lambda_2 dx + GA_y \int_0^l u_2 \Lambda_1 dx + EA \int_0^l \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \right) \frac{du_2}{dx} \Lambda_1 dx + \int_0^l N^{pl} \frac{du_2}{dx} \Lambda_1 dx + \int_0^l Q_y^{pl} \Lambda_1 dx - [V_{by} \Lambda_2 - GA_y u_2 \Lambda_1]_0^l \quad (3.1.32\beta)$$

$$GA_z u_3(\xi) = -\int_0^l p_z \Lambda_2 dx + GA_z \int_0^l u_3 \Lambda_1 dx + EA \int_0^l \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \right) \frac{du_3}{dx} \Lambda_1 dx + \int_0^l N^{pl} \frac{du_3}{dx} \Lambda_1 dx + \int_0^l Q_z^{pl} \Lambda_1 dx - [V_{bz} \Lambda_2 - GA_z u_3 \Lambda_1]_0^l \quad (3.1.32\gamma)$$

$$EI_y u_4(\xi) = GA_z \int_0^l \left(\frac{du_3}{dx} + u_4 \right) \Lambda_2 dx + \int_0^l Q_z^{pl} \Lambda_2 dx + \int_0^l M_y^{pl} \Lambda_1 dx - \int_0^l m_y \Lambda_2 dx - [M_{by} \Lambda_2 - EI_y u_4 \Lambda_1]_0^l \quad (3.1.32\delta)$$

$$EI_z u_5(\xi) = GA_y \int_0^l \left(\frac{du_2}{dx} - u_5 \right) \Lambda_2 dx + \int_0^l Q_y^{pl} \Lambda_2 dx + \int_0^l M_z^{pl} \Lambda_1 dx - \int_0^l m_z \Lambda_2 dx - [M_{bz} \Lambda_2 - EI_z u_5 \Lambda_1]_0^l \quad (3.1.32\epsilon)$$

Αν αγνοηθούν τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης, τότε $u_5 \approx u'_2$ και $u_4 \approx u'_3$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αριθμητικές μέθοδοι που απαιτούν προσέγγιση άγνωστων μεγεθών, όπως η FEM, παρουσιάζουν διατμητικό κλείδωμα, ενώ η θεωρία Timoshenko εφαρμόζεται ακόμα και σε περιπτώσεις που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η θεωρία Euler-Bernoulli [Zienkiewicz and Taylor, 2005]. Δεδομένου ότι στην παρούσα αριθμητική τεχνική γίνεται πεδιακή προσέγγιση των άγνωστων μεγεθών, τα προβλήματα περιορίζονται χρησιμοποιώντας ίδιας τάξης προσέγγιση για τις u_4, u_5 and u'_2, u'_3 . Προκειμένου να εμφανιστούν ακριβώς τα μεγέθη u'_2, u'_3 στις εξ. (3.1.32β,γ), αντίστοιχα οι ολοκληρωτικές εκφράσεις παραγωγίζονται ως προς ξ , κι έτσι προκύπτει

$$GA_y \frac{du_2(\xi)}{d\xi} = \int_0^l p_y A_I dx - GA_y u_2(\xi) - EA \left(u_1'(\xi) + \frac{1}{2} (u_2'^2(\xi) + u_3'^2(\xi)) \right) u_2'(\xi) \quad (3.1.33\alpha)$$

$$- N^{pl} u_2'(\xi) - Q_y^{pl} + \int_0^l p_{sy} A_I dx + [V_{by} A_I]_0^l$$

$$GA_z \frac{u_3(\xi)}{d\xi} = \int_0^l p_z A_I dx + GA_z u_3(\xi) + EA \left(u_1'(\xi) + \frac{1}{2} (u_2'^2(\xi) + u_3'^2(\xi)) \right) u_3'(\xi) \quad (3.1.33\beta)$$

$$- N^{pl} u_3'(\xi) - Q_z^{pl} + \int_0^l p_{sz} A_I dx + [V_{bz} A_I]_0^l$$

Ακόμη, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι τάσεις εξαρτώνται απ' τις παραγώγους των συνιστωσών της μετατόπισης, θα πρέπει και οι όροι u_1', u_4', u_5' να υπολογιστούν, ώστε να ευρεθούν οι συνολικές τάσεις (καθώς και συνιστώσες της παραμόρφωσης), κι έτσι τα ολοκληρώματα (4.1.32α,δ,ε) παραγωγίζονται ως προς ξ λαμβάνοντας την εξής μορφή

$$EA \frac{du_1(\xi)}{d\xi} = \int_0^l p_x A_I dx - N^{pl}(\xi) - \frac{1}{2} EA (u_2'^2(\xi) + u_3'^2(\xi)) + [N A_I]_0^l \quad (3.1.34\alpha)$$

$$EI_y \frac{du_4(\xi)}{d\xi} = \int_0^l m_y \Lambda_1 dx - GA_z \int_0^l \left(\frac{du_3}{dx} + u_4 \right) \Lambda_1 dx - \int_0^l Q_z^{pl} \Lambda_1 dx - M_y^{pl} + [M_{by} \Lambda_1]_0^l \quad (3.1.34\beta)$$

$$EI_z \frac{du_5(\xi)}{d\xi} = \int_0^l m_z \Lambda_1 dx - GA_z \int_0^l \left(\frac{du_2}{dx} - u_5 \right) \Lambda_1 dx - \int_0^l Q_y^{pl} \Lambda_1 dx - M_z^{pl} + [M_{bz} \Lambda_1]_0^l \quad (3.1.34\gamma)$$

Έτσι οι εξ.(3.1.32δ,ε), (3.1.33α,β) και (3.1.34α-γ) έχουν έρθει σε μία μορφή από την οποία είναι εύκολος ο υπολογισμός των άγνωστων μεγεθών. Έτσι το τμήμα $(0,l)$ διαιρείται σε L στοιχεία, σε καθένα από τα οποία οι άγνωστες ποσότητες μαζί με το πλαστικό μέρος των τάσεων διαφοροποιούνται σύμφωνα μ' ένα συγκεκριμένο νόμο (συνεχή, γραμμικό, παραβολικό κλπ).

Εδώ γίνεται η υπόθεση ότι το στοιχείο είναι γραμμικό (Σχ. 4.3) εφόσον η αριθμητική εφαρμογή είναι απλή και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ικανοποιητικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος δεν απαιτεί ούτε παραγωγή των συναρτήσεων σχήματος ούτε εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών.

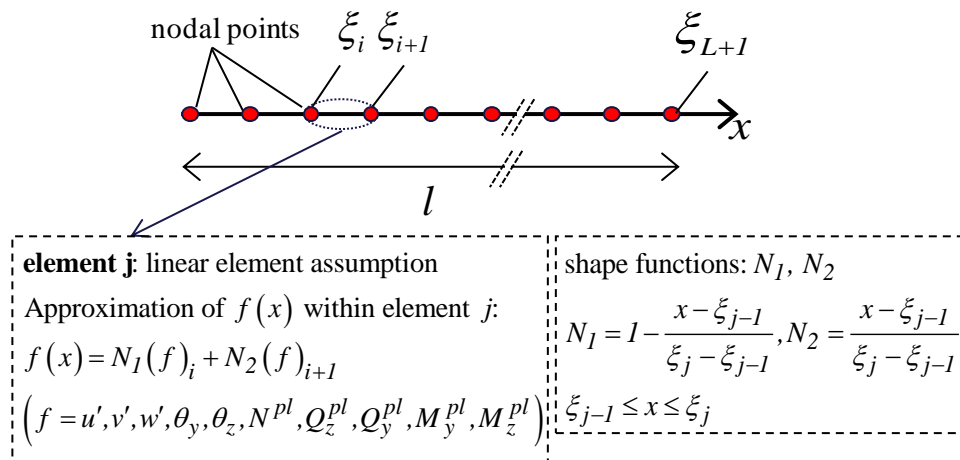
Χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα διαδικασία, προκύπτει ένα σύστημα $7(L+1)$ αλγεβρικών εξισώσεων. Έξι επιπλέον αλγεβρικές εξισώσεις προκύπτουν εφαρμόζοντας το ολοκληρωτική παράσταση (3.1.32α-γ) στα άκρα της δοκού $\xi=0,l$ ενώ και οι δέκα συνοριακές συνθήκες μαζί (εξ.(3.1.19)) σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα $7L+23$ αλγεβρικών εξισώσεων.

$$[K(d)]\{d\} = \{b_{ext}\} + \{b_{pl}(d)\} \quad (3.1.35)$$

όπου $K(d)$ είναι ένα γενικευμένο ελαστικό (γεωμετρικά) μη γραμμικό μητρώο δυσκαμψίας, $\{d\}$ είναι ένα $7L+23$ άγνωστο γενικευμένο διάνυσμα που δίνεται απ' τη σχέση

$$\{d\}^T = \left\{ \begin{array}{cccccccc} u'_{1j} & u'_{2j} & u'_{3j} & u'_{4j} & u_{4j} & u'_{5j} & u_{5j} & u_{1i} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \left(\begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, L+1 \\ i = 1, L+1 \end{array} \right) \quad (3.1.36)$$

ενώ τα $\{b_{ext}\}$, $\{b_{pl}(d)\}$ είναι διανύσματα που περιέχουν όλους τους όρους που σχετίζονται με το εξωτερικώς επιβαλλόμενο φορτίο και το πλαστικό τμήμα των τάσεων, αντίστοιχα. Τέλος, μετά την επίλυση των εξισώσεων (3.1.35), τα ολοκληρώματα (3.1.32α-γ) μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενο βήμα ώστε να προκύψουν οι συνιστώσες της αξονικής και της εγκάρσιας μετατόπισης $u_1 = u(x)$, $u_2 = v(x)$, $u_3 = w(x)$, αντίστοιχα σ' οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο ξ_i ($i = 1, 2, \dots, L+1$) της δοκού.



Σχήμα 3.3. Διακριτοποίηση τμήματος της δοκού σε γραμμικά στοιχεία, κατανομή των κόμβων και προσέγγιση των μεγεθών.

3.2.2 Αλγόριθμος επίλυσης

Το πρώτο βήμα για την επαυξητική επαναληπτική διαδικασία είναι ο προσδιορισμός του διανύσματος εξωτερικού φορτίου. Έτσι, ελέγχεται το φορτίο σε κάθε βήμα, ενώ οι στάθμες του φορτίου επιλέγονται με βάση το ιστορικό φόρτισης και τις απαιτήσεις σύγκλισης. Σε κάθε στάθμη του φορτίου, το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων (35) επιλύεται αριθμητικά με τη βοήθεια μιας επαναληπτικής διαδικασίας. Στο παρόν κεφάλαιο έχει χρησιμοποιηθεί ο τροποποιημένος

αλγόριθμος του Powell, ο οποίος αποτελεί και διαφοροποίησης της μεθόδου Newton, προϋποθέτοντας τις παρακάτω ποσότητες

α. ένα ιακωβιανό μητρώο μη γραμμικών εξισώσεων το οποίο αντιστοιχεί στο γενικευμένο μητρώο δυσκαμψίας. Αυτό το μητρώο ορίζεται επακριβώς, ώστε ν' αποφευχθούν τυχόν ανακρίβειες λόγω πεπερασμένων διαφορών, ενώ μειώνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

β. μια αρχική εκτίμηση της λύσης $\{d_{init}\}$ σε κάθε στάθμη του φορτίου. Το διάνυσμα $\{d\}$ της στάθμης του φορτίου στην οποία έχει επιτευχθεί σύγκλιση χρησιμοποιείται στο παρόν κεφάλαιο ως $\{d_{init}\} = \{d_{conv}\}$, ενώ το $\{d\} = \{0\}$ χρησιμοποιείται στην αρχική στάθμη του φορτίου.

γ. μία παράμετρος ανοχής σφάλματος tol η οποία ικανοποιεί το κριτήριο σύγκλισης. Στο παρόν κεφάλαιο, αυτή οι τιμές αυτής της παραμέτρου κυμαίνονται ως εξής $tol = 10^{-7} - 10^{-10}$.

Έπειτα, ορίζεται ένας αριθμός διατομών ελέγχου. Οι διατομές αυτές συμπίπτουν με τους κόμβους του τμήματος της δοκού που έχει διακριτοποιηθεί (Σχ.3). Πρέπει να ακολουθηθεί η μέθοδος των ινών για την ενσωμάτωση των εσωτερικών δυνάμεων και ροπών της διατομής. Κάθε διατομή διαιρείται σε τριγωνικά ή τετραεδρικά στοιχεία και χρησιμοποιούνται δισδιάστατοι κανόνες ολοκλήρωσης Gauss για την επίλυση των πλαστικών μερών των συνιστωσών των τάσεων. Αν χρησιμοποιείται ο ίδιος αριθμών σημείων Gauss σε κάθε στοιχείο, τότε ισχύει ότι $N_{dof} = N_{cells} \times N_{Gauss}$. Έτσι τα σημεία ελέγχου κάθε διατομής συμπίπτουν με τα σημεία Gauss των στοιχείων της. Σε κάθε στάθμη του φορτίου το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων (35) δεν εκφράζεται επακριβώς λόγω της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, αλλά χρησιμοποιώντας τις τιμές των τάσεων S_{xx} , S_{xy} , S_{xz} , τις πλαστικές παραμορφώσεις ε_{eq}^{pl} , ε_{xx}^{pl} , γ_{xy}^{pl} , γ_{xz}^{pl} και τις κινηματικές συνιστώσες $u'_1, u'_2, u'_3, u_4, u'_4, u_5, u'_5$ της στάθμης του φορτίου στην οποία είχε προηγηθεί σύγκλιση, στη στάθμη του φορτίου στην οποία γίνεται ο έλεγχος και adhering στα επόμενα βήματα (ο εκθέτης cur υποδηλώνει την τρέχουσα τιμή της ποσότητας η οποία υπολογίζεται απ' τον αλγόριθμο και ο εκθέτη $conv$ υποδηλώνει την τιμή στην οποία έχει συγκλίνει μία ποσότητα από προηγούμενη στάθμη φορτίου).

i) **Βήμα ελαστικής πρόβλεψης:** Σε κάθε σημείου ελέγχου της δοκού, εκτίμηση των συνιστωσών των τάσεων ως

$$S_{xx}^{Tr} = (S_{xx})_{conv} + E(\Delta u'_1) + Ez_{cell}(\Delta u'_4) - Ey_{cell}(\Delta u'_5) + E \frac{I}{2} [(\Delta u'_2) + (\Delta u'_3)]^2 \quad (3.1.37\alpha)$$

$$S_{xy}^{Tr} = (S_{xy})_{conv} + \sqrt{k_y} (G(\Delta u'_2) - G(\Delta u'_4)) \quad (3.1.37\beta)$$

$$S_{xz}^{Tr} = (S_{xz})_{conv} + \sqrt{k_z} (G(\Delta u'_3) + G(\Delta u'_5)) \quad (3.1.37\gamma)$$

όπου $\Delta u'_i = (u'_i)_{cur} - (u'_i)_{conv}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$).

ii) **Κριτήριο αστοχίας:** Σε κάθειο σημείο ελέγχου της δοκού, ικανοποιείται το κριτήριο αστοχίας Von Mises, χρησιμοποιώντας τις εξ.(3.1.8)

- Αν $\Phi_{VM}^{Tr} = \sqrt{\left(S_{xx}^{Tr}\right)^2 + 3\left(\left(S_{xy}^{Tr}\right)^2 + \left(S_{xz}^{Tr}\right)^2\right)} / \sigma_Y \left(\left(\varepsilon_{eq}^{pl}\right)_{conv}\right) - 1 \leq 0$ τότε η δοκιμή αυτή είναι και η τελική, οι συνιστώσες της πλαστικής παραμόρφωσης του συγκεκριμένου βήματος είναι μηδενικές και οι συνιστώσες της συνολικής πλαστικής παραμόρφωσης παίρνουν τιμές απ' τη στάθμη του φορτίου στην οποία είχε γίνει σύγκλιση προηγουμένως.
- Αν $\Phi_{VM}^{Tr} > 0$ τότε υπάρχει πλαστικοποίηση και πρέπει να δοθεί η αντίστοιχη πλαστικοποιημένη επιφάνεια (βήμα πλαστικής διόρθωσης). Μια μέθοδος Newton – Raphson ξεκινάει προκειμένου να ενσωματωθούν οι ανελαστικές καταστατικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας τον γενικευμένο αλγόριθμο [Ortiz and Simo, 1986]. Οι συνιστώσες της πλαστικής παραμόρφωσης εντός του βήματος μαζί με την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση αλλάζουν χρησιμοποιώντας μια προκαθορισμένη ανοχή $tol_{cp} = 10^{-5}$ στο κριτήριο σύγκλισης κι έτσι επιλύονται οι πλαστικές συνιστώσες τις παραμόρφωσης, προσθέτοντας στο προηγούμενο στάδιο σύγκλισης τα αντίστοιχα μεγέθη που προέκυψαν εντός του βήματος.

iii) Σε κάθε διατομή ελέγχου της δοκού, το πλαστικό τμήμα των τάσεων υπολογίζεται αριθμητικά με τη βοήθεια του δισδιάστατου αριθμητικού σχήματος ολοκλήρωσης.

iv) Χρήση των πλαστικών συνιστωσών των τάσεων που προέκυψαν για τον υπολογισμό του διανύσματος της εξ.(35). Εκτός από στοιχειώδεις πράξεις, αυτό το βήμα απαιτεί τον υπολογισμό γραμμικών ολοκληρωμάτων κατά μήκος της δοκού εξ.(32δ,ε), (33α,β) και (34α,γ)), ο οποίος γίνεται με τη βοήθεια ενός ημι-αναλυτικού σχήματος [Sarountzakis and Kampitsis, 2013]. Αξίζει να σημειωθεί, ότι τα γραμμικά ολοκληρώματα που εμφανίζονται στον όρο $\left[K(d)\right]_{cur} \{d\}_{cur}$ της εξ.(35) (συμπεριλαμβανομένων κι αυτών που σχετίζονται με τη γεωμετρική μη γραμμικότητα), υπολογίζονται κι αυτά ημι-αναλυτικά χωρίς δυσκολία.

v) Η επιβολή του εξωτερικού φορτίου κατά βήματα συνεχίζεται μέχρι αυτό να επιβληθεί ολόκληρο ή μέχρι να μην μπορεί ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης, που σημαίνει ότι το τελευταίο βήμα δεν μπορεί να ολοκληρωθεί (πλαστική κατάρρευση).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνιστώσες τις μετατόπισης u , v και w κατά τα στάδια ελέγχου σ' οποιοδήποτε σημείο της δοκού, λαμβάνουν νέες τιμές μετά από τη σύγκλιση σε κάθε βήμα, οι οποίες προκύπτουν απ' τις εξ.(32α-γ), αντίστοιχα.

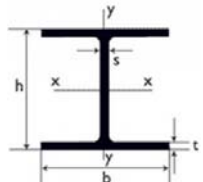
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αριθμητικά Παραδείγματα

4.1 1^ο αριθμητικό παράδειγμα: Διατομή HEA600

Στο πρώτο αριθμητικό παράδειγμα αναλύεται αμφίπακτη δοκός διατομής **HEA(600)** με διαστάσεις $h = 0.59m$, $b = 0.3m$, $s = 0.013m$, $t = 0.025m$ και $L = 6m$. Η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο με τιμή $p_y = 40MN / m$.

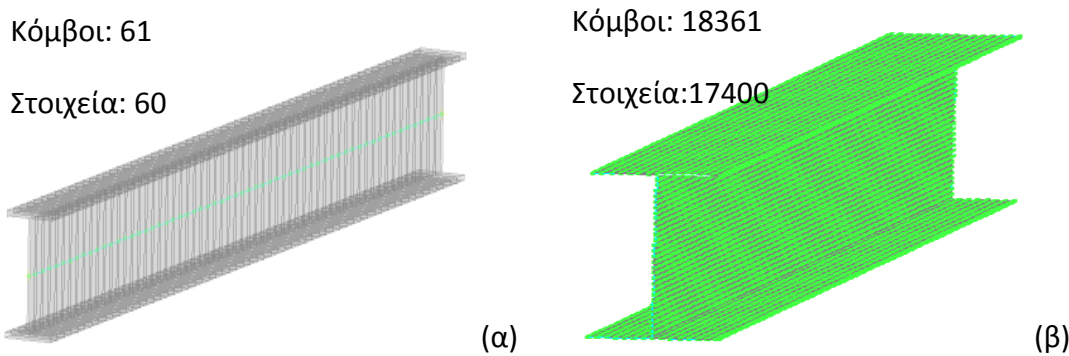
Πίνακας 4.1 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής HEA600

	Ύψος	$h = 0.59m$	Πλάτος πελμάτων	$t = 0.025m$
	Πλάτος	$b = 0.3m$	Πλάτος κορμού	$s = 0.013m$

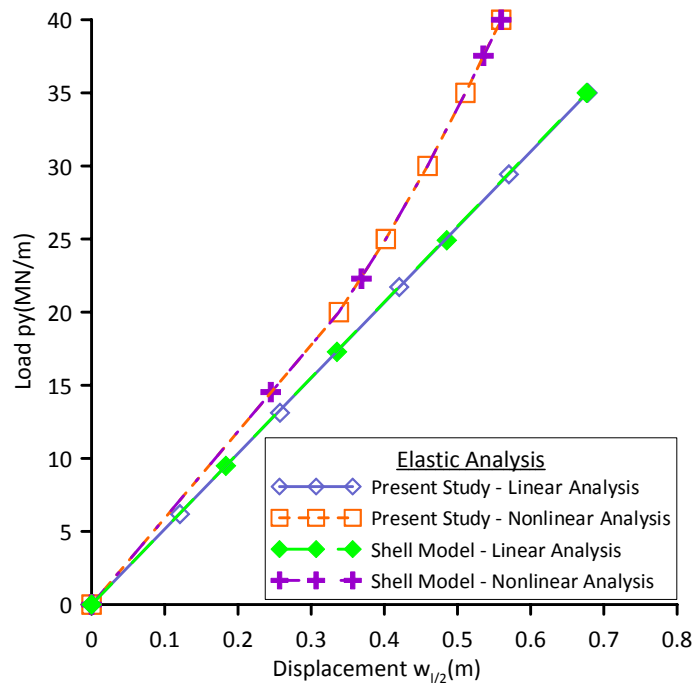
Πιο συγκεκριμένα, το υλικό λήφθηκε πλήρως ελαστικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 210GPa$, ενώ πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς τύπους προσομοιωμάτων. Ο πρώτος τύπος βασίζεται σε στοιχεία δοκού (1D-Beam Elements), ενώ ο δεύτερος τύπος προσομοίωσης βασίζεται σε στοιχεία κελύφους. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζονται οι δύο προσομοιώσεις, όπως εμφανίζονται στο γραφικό περιβάλλον του προγράμματος NX-Nastran, καθώς κι οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας που προκύπτουν μετά από διακριτοποίηση με στοιχεία δοκού και στοιχεία κελύφους, αντίστοιχα.

Για κάθε μία απ' αυτές τις περιπτώσεις, πραγματοποιήθηκε ανάλυση θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις και ανάλυση με θεώρηση μεγάλων μετατοπίσεων (επιρροή γεωμετρικής μη γραμμικότητας).

Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζονται οι καμπύλες φορτίου-μετατοπίσεως στο μέσον της δοκού, όπως αυτές εξήχθησαν από την προτεινόμενη μέθοδο για την περίπτωση πλήρως ελαστικού υλικού, λαμβάνοντας υπ' όψιν ή αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα που ελήφθησαν απ' το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων για προσομοίωση με στοιχεία κελύφους. Είναι προφανές ότι οι καμπύλες τόσο στη γραμμική όσο και στη μη γραμμική ανάλυση ταυτίζονται. Επίσης, δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στη συνολική μετατόπιση του φορέα ανάμεσα στους δύο τύπους αναλύσεων.



Σχήμα 4.1. Προσομοίωση στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων NX-Nastran με στοιχεία δοκού (α) και στοιχεία κελύφους (β), καθώς κι οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας.



Σχήμα 4.2. Καμπύλες φορτίου-μετατοπίσεως αμφίπακτης δοκού του παραδείγματος 1 για $E = 210GPa$.

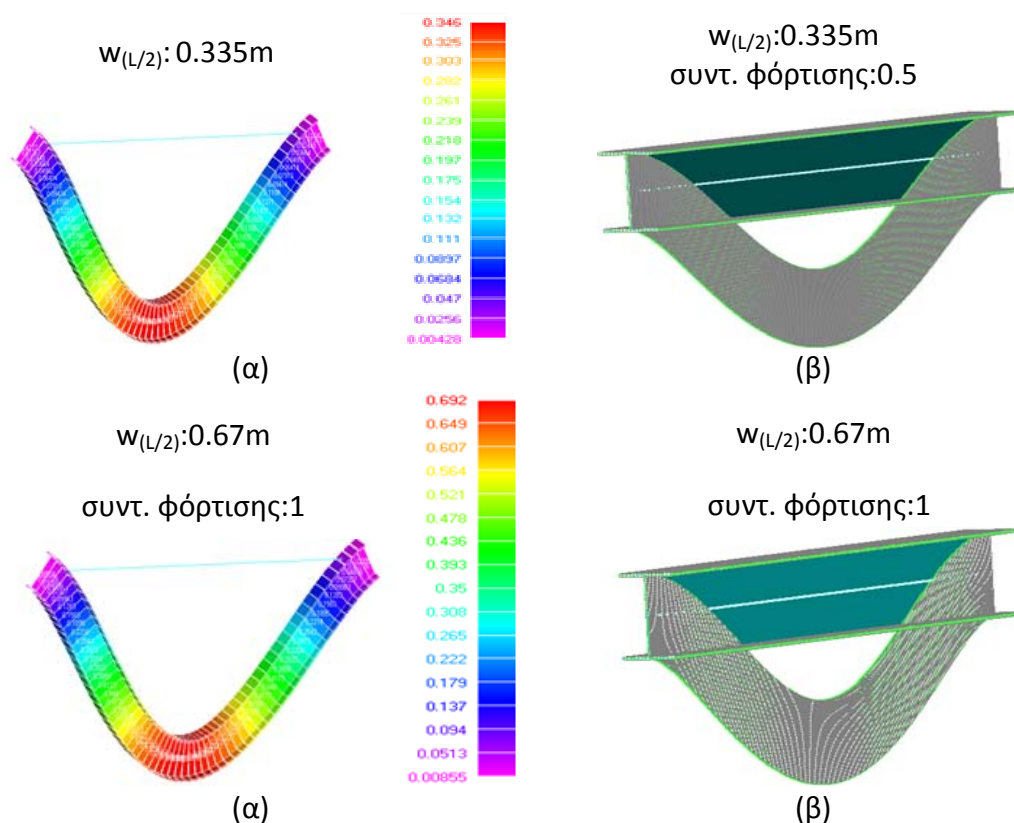
Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζεται ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης των αναλύσεων λαμβάνοντας υπ’ όψιν ή αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, με προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων. Διαπιστώνεται ότι με τη χρήση των στοιχείων δοκού και της προτεινόμενης μεθόδου, οι αναλύσεις εκτελέστηκαν ταχύτερα.

Πίνακας 4.2 Απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης των αναλύσεων

Υλικό	Ελαστικό	
	Γραμμική	Μη γραμμική
Είδος ανάλυσης	Γραμμική	Μη γραμμική
Προτεινόμενη μέθοδος	00:00:01	00:00:03
Στοιχεία δοκού	00:00:01	00:00:01
Στοιχεία κελύφους	00:01:21	00:06:35

Στα Σχήματα 4.3,4.4 απεικονίζεται η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα κατά τη διεύθυνση του φορτίου και η εγκάρσια μετατόπιση στο μέσο της δοκού - $w_{(L/2)}$, για διακριτοποίηση με στοιχεία δοκού και στοιχεία κελύφους και για διάφορες τιμές της στάθμης του φορτίου, αγνοώντας ή λαμβάνοντας υπ' όψιν την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Οι εικόνες ελήφθησαν απ' το γραφικό περιβάλλον του προγράμματος NX-Nastran.

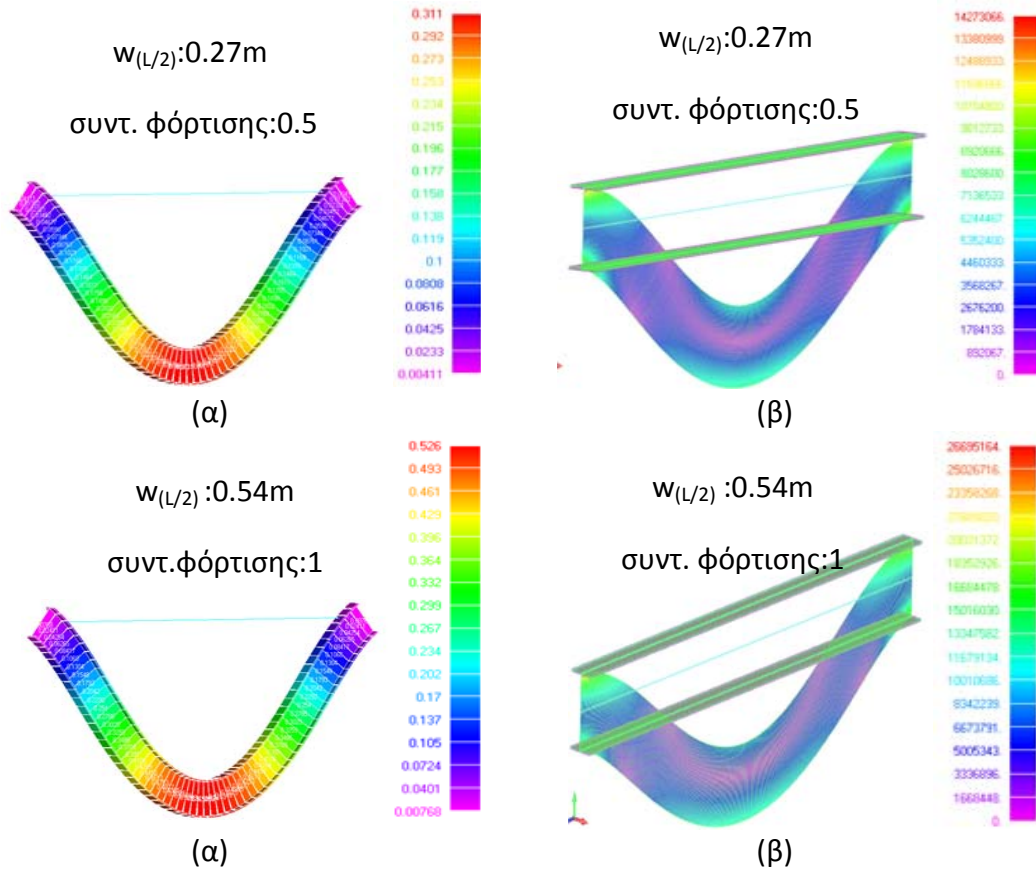
Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζεται η τιμή του φορτίου στο οποίο υποβλήθηκε η δοκός και η αντίστοιχη μετατόπιση, για τις δύο τύπους προσομοίωσης και ανάλυσης.



Σχήμα 4.3. Αμφίπακτη δοκός στην παραμορφωμένη κατάσταση με προσομοίωμα δοκού (α) και στοιχεία κελύφους (β) για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης (γραμμική ανάλυση).

Πίνακας 4.3 Φορτίο και μετατοπίσεις του φορέα

Είδος ανάλυσης	Φορτίο (MN/m)		Μετατόπιση (m)	
	Γραμμική	Μη γραμμική	Γραμμική	Μη γραμμική
Προτεινόμενη μέθοδος	40	40	0.67	0.54
Στοιχεία δοκού	40	40	0.67	0.54
Στοιχεία κελύφους	40	40	0.67	0.54



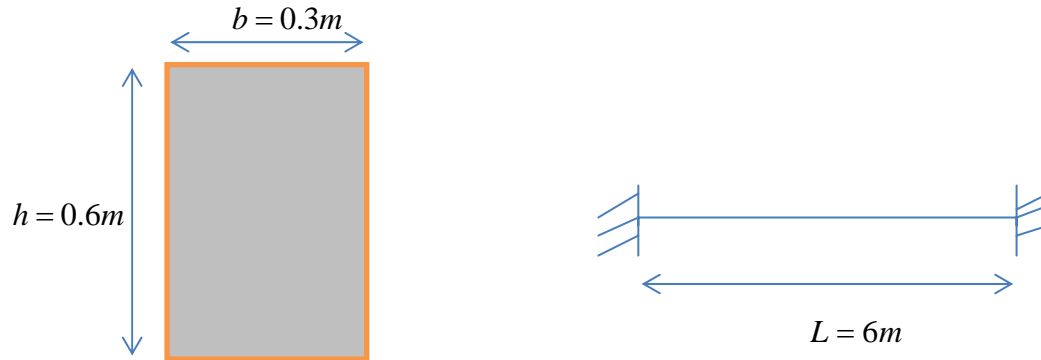
Σχήμα 4.4. Αμφίπακτη δοκός στην παραμορφωμένη κατάσταση με προσομοίωμα δοκού (α) και στοιχεία κελύφους (β) για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης (μη γραμμική ανάλυση).

Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν απ' τις προαναφερθείσες αναλύσεις είναι:

1. Απ' τη μη γραμμική ανάλυση προκύπτει μικρότερη εγκάρσια μετατόπιση της δοκού και για τους δύο τύπους προσομοίωσης.
2. Τόσο στη γραμμική όσο και στη μη γραμμική ανάλυση, οι καμπύλες φορτίου-μετατόπισης για τους δύο διαφορετικούς τύπους προσομοίωσης και χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο ταυτίζονται, επιβεβαιώνοντας έτσι την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου.
3. Υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στους χρόνους ανάλυσης για προσομοίωση με στοιχεία δοκού και χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο σε σχέση με την προσομοίωση με στοιχεία κελύφους.

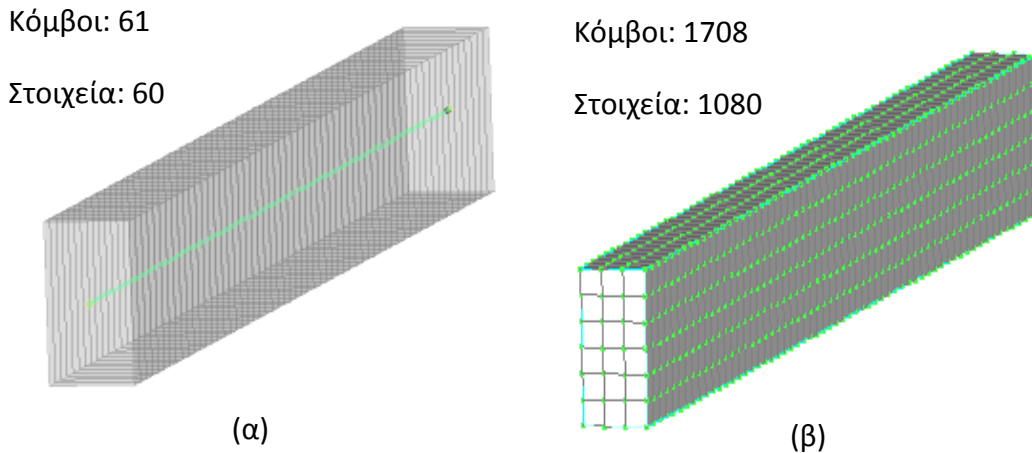
4.2 2^ο αριθμητικό παράδειγμα: Συμπαγής δοκός ορθογωνικής διατομής



Στο δεύτερο αριθμητικό παράδειγμα, αναλύεται αμφίπακτη συμπαγής ορθογωνική δοκός με διαστάσεις, $b = 0.3m$, $h = 0.6m$ και $L = 6m$. Η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο p_y .

Πιο συγκεκριμένα, αναλύθηκαν δύο περιπτώσεις υλικού, (i) ελαστικό-πλήρως πλαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 20GPa$ και (ii) ελαστοπλαστικό-γραμμικά κρατυνόμενο υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 20GPa$ και μέτρο κράτυνσης $E_t = 1GPa$. Η τάση διαρροής του υλικού λήφθηκε ίση με $\sigma_y = 20MPa$. Για κάθε μία απ' αυτές τις περιπτώσεις, πραγματοποιήθηκε ανάλυση θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις και μη γραμμικότητα υλικού (*Material Nonlinear Analysis-MNA*) και ανάλυση με επιρροή τόσο της γεωμετρικής μη γραμμικότητας όσο και της μη γραμμικότητας υλικού (*Geometrical and Material Nonlinear Analysis-GMNA*).

Προκειμένου να ελεγχθεί η ορθότητα της αριθμητικής μεθόδου, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά που ελήφθησαν από αναλύσεις στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων NX-Nastran (2007) χρησιμοποιώντας δύο τύπους προσομοιωμάτων. Ο πρώτος τύπος βασίζεται σε στοιχεία δοκού (1D-Beam Elements), ενώ ο δεύτερος τύπος προσομοίωσης βασίζεται σε 8-εδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας (3D-Solid Hexahedral (brick) Element). Στο Σχήμα 6.5 παρουσιάζονται οι δύο προσομοιώσεις όπως εμφανίζονται στο γραφικό περιβάλλον του προγράμματος NX-Nastran καθώς και οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας που προκύπτουν μετά από διακριτοποίηση με 61 στοιχεία δοκού και 1080 στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας για τους δύο τύπους προσομοίωσης, αντίστοιχα.

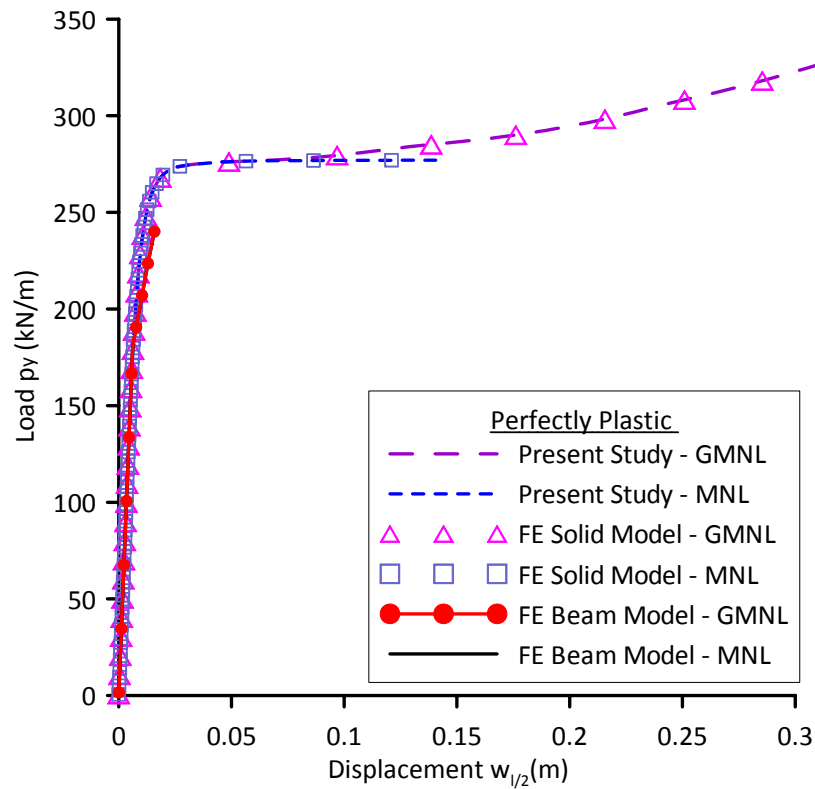


Σχήμα 4.5 Προσομοίωση στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων NX-Nastran με στοιχεία δοκού (α) και στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας (β) καθώς κι οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας.

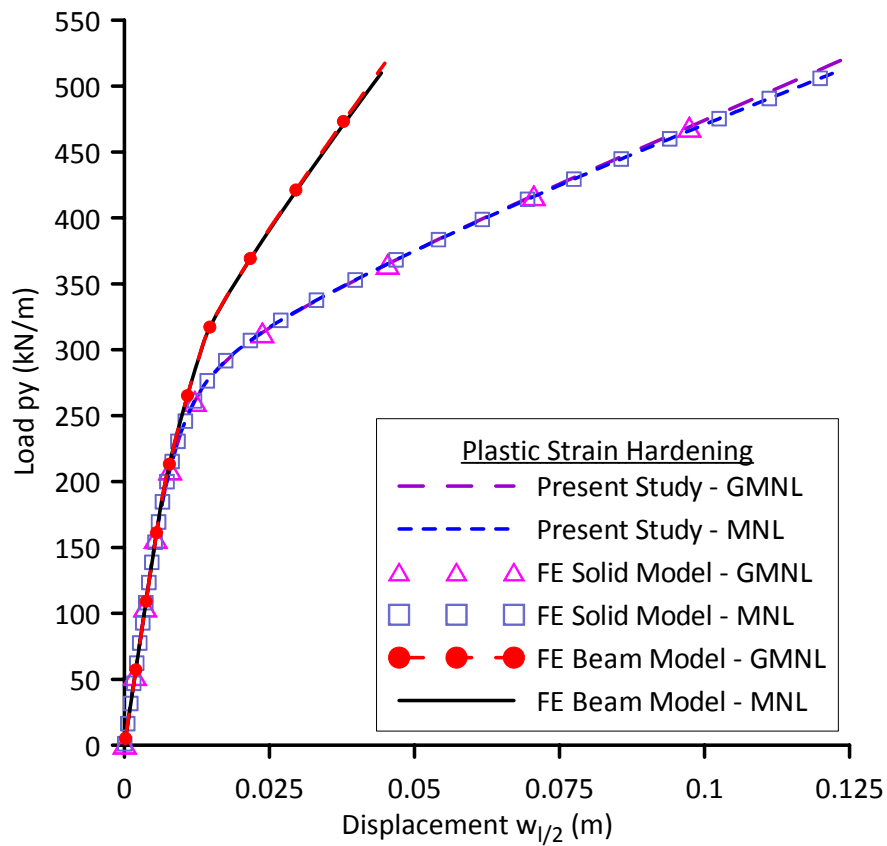
Στο Σχήμα 4.6 απεικονίζονται οι καμπύλες φορτίου-μετατόπισης στο μέσον της δοκού, όπως αυτές εξήχθησαν από την προτεινόμενη μέθοδο για την περίπτωση ελαστικού - πλήρως πλαστικού υλικού ($E_r = 0$), λαμβάνοντας υπ' όψιν ή αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα που ελήφθησαν απ' το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων για τους δύο τύπους προσομοίωσης. Ομοίως στο Σχήμα 4.7 απεικονίζονται οι καμπύλες φορτίου-μετατόπισης στο μέσον της δοκού για την περίπτωση ελαστικού - κρατυνόμενου πλαστικού υλικού για όλες τις παραπάνω αναλύσεις. Από τις καμπύλες αυτές επιβεβαιώνεται η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου στην περίπτωση τόσο γραμμικής ανάλυσης όσο και γεωμετρικά μη γραμμικής ανάλυσης.

Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προτεινόμενη μεθόδου σχεδόν ταυτίζονται με αυτά που προκύπτουν από τις αναλύσεις με 6-εδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας ενώ στην περίπτωση ελαστικού - πλήρως πλαστικού υλικού διαπιστώνεται ότι με τη χρήση των στοιχείων δοκού του προγράμματος NX-Nastran, ο φορέας αστόχησε πριν το φορτίο κατάρρευσης έχοντας ως μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση τα 0.015m.

Στον Πίνακα 4.4 παρουσιάζεται ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης των αναλύσεων για τις δύο περιπτώσεις υλικού λαμβάνοντας υπόψη η αγνοώντας τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, σε σχέση με αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις αναλύσεις με προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων. Διαπιστώνεται ότι με τη χρήση της προτεινόμενης μεθόδου οι αναλύσεις εκτελέστηκαν σημαντικά ταχύτερα απ' ότι με τη χρήση 3D 8-εδρικών στοιχείων, ενώ παράλληλα λαμβάνουμε ακρίβεια αντίστοιχη των 3D FEM αναλύσεων.



Σχήμα 4.6 Καμπύλες φορτίου-μετατοπίσεως αμφίπακτης δοκού του παραδείγματος 2, για $E_t = 0$.

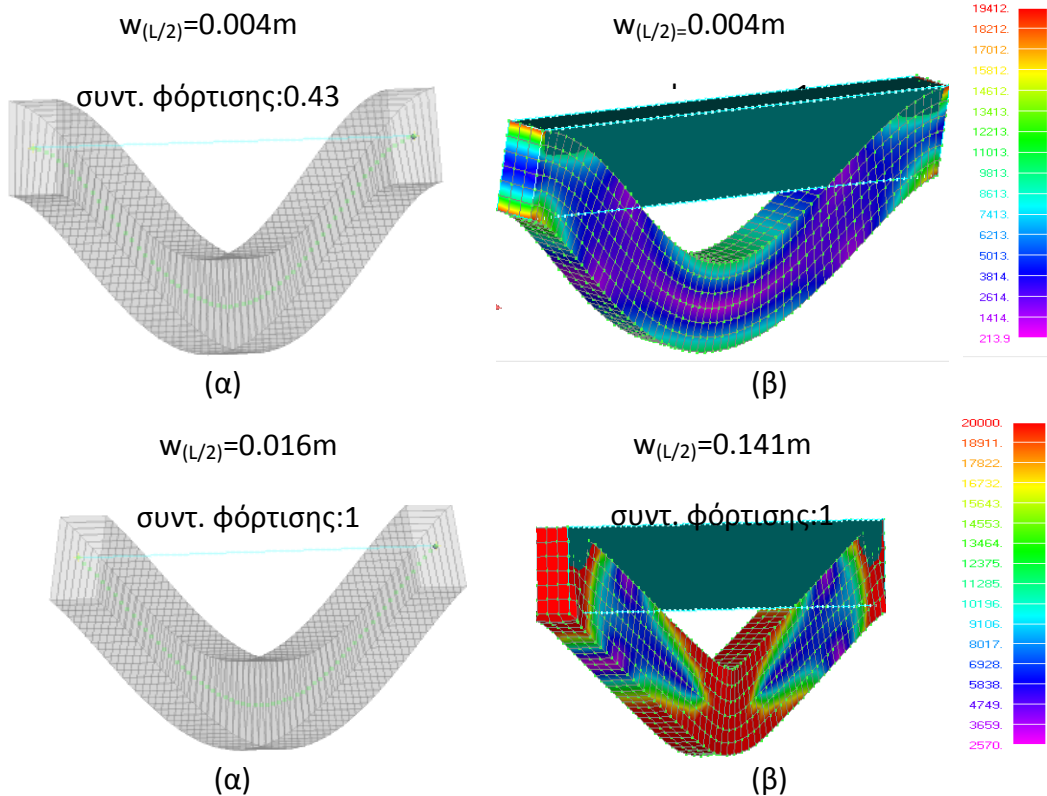


Σχήμα 4.7. Καμπύλες φορτίου-μετατοπίσεως αμφίπακτης δοκού του παραδείγματος 2, για $E_t = 1GPa$.

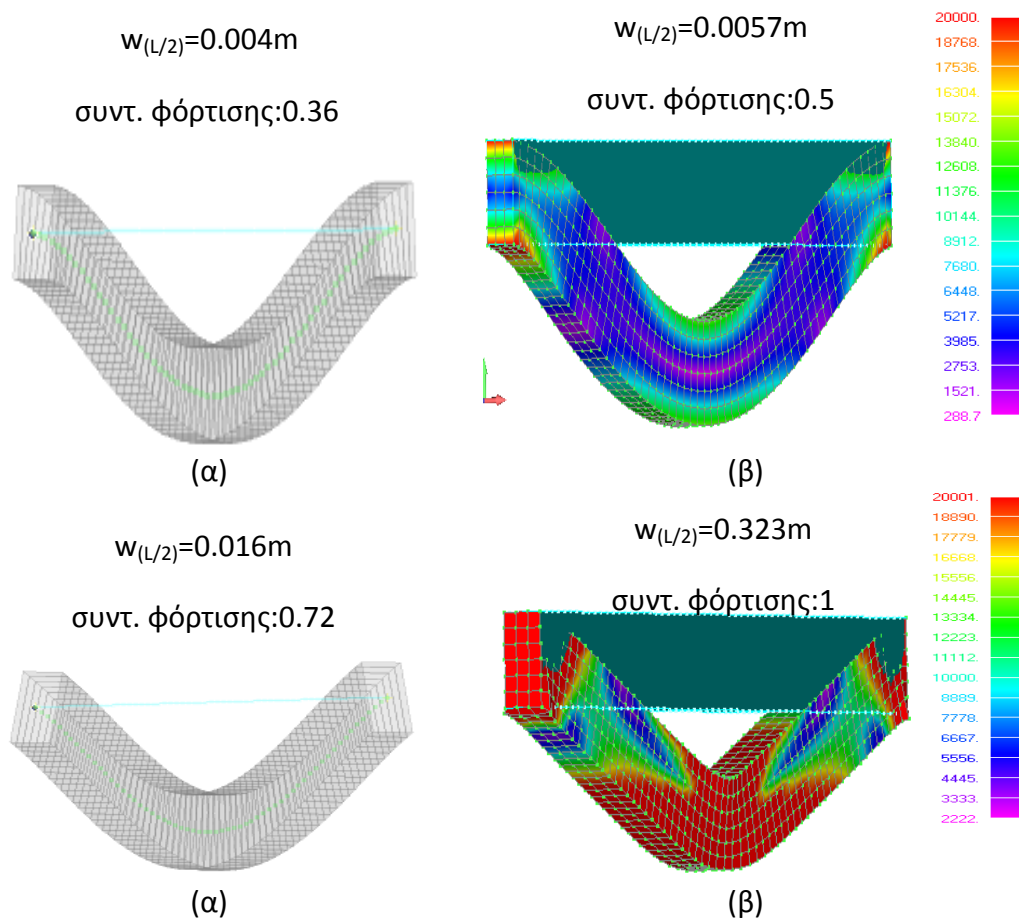
Πίνακας 4.4 Απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης αναλύσεων

Υλικό	Ελαστικό-Πλήρως πλαστικό		Ελαστικό-Γραμμικά κρατυνόμενο	
	Γραμμική	Μη γραμμική	Γραμμική	Μη γραμμική
Προτεινόμενη μέθοδος	00:00:08	00:00:12	00:00:10	00:00:17
Στοιχεία δοκού	00:00:10	00:00:05	00:00:10	00:00:15
Στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας	00:07:55	00:10:40	00:07:45	00:08:30

Στα Σχήματα 4.8,4.9 παρουσιάζεται η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα κατά τη διεύθυνση του φορτίου και η εγκάρσια μετατόπιση στο μέσο της δοκού - $w_{(L/2)}$, για διακριτοποίηση με 3D 8-εδρικά στοιχεία και στοιχεία δοκού και για διάφορες τιμές της στάθμης του φορτίου, αγνοώντας ή λαμβάνοντας υπ' όψιν την επιρροή την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, αντίστοιχα για ελαστικό-πλήρως πλαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 20GPa$. Ομοίως, Στα Σχήματα 4.10,4.11 παρουσιάζεται η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα κατά τη διεύθυνση του φορτίου και η εγκάρσια μετατόπιση στο μέσο της δοκού - $w_{(L/2)}$, για τις παραπάνω περιπτώσεις για ελαστικό-γραμμικά κρατυνόμενο υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 20GPa$ και μέτρο κράτυνσης $E_t = 1GPa$. Τέλος, στους Πίνακες 4.5,4.6 παρουσιάζονται το φορτίο κατάρρευσης κι η αντίστοιχη εγκάρσια μετατόπιση αστοχίας για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ανάλυσης. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων είναι προφανής η ακρίβεια της προτεινόμενης αριθμητικής μεθόδου.



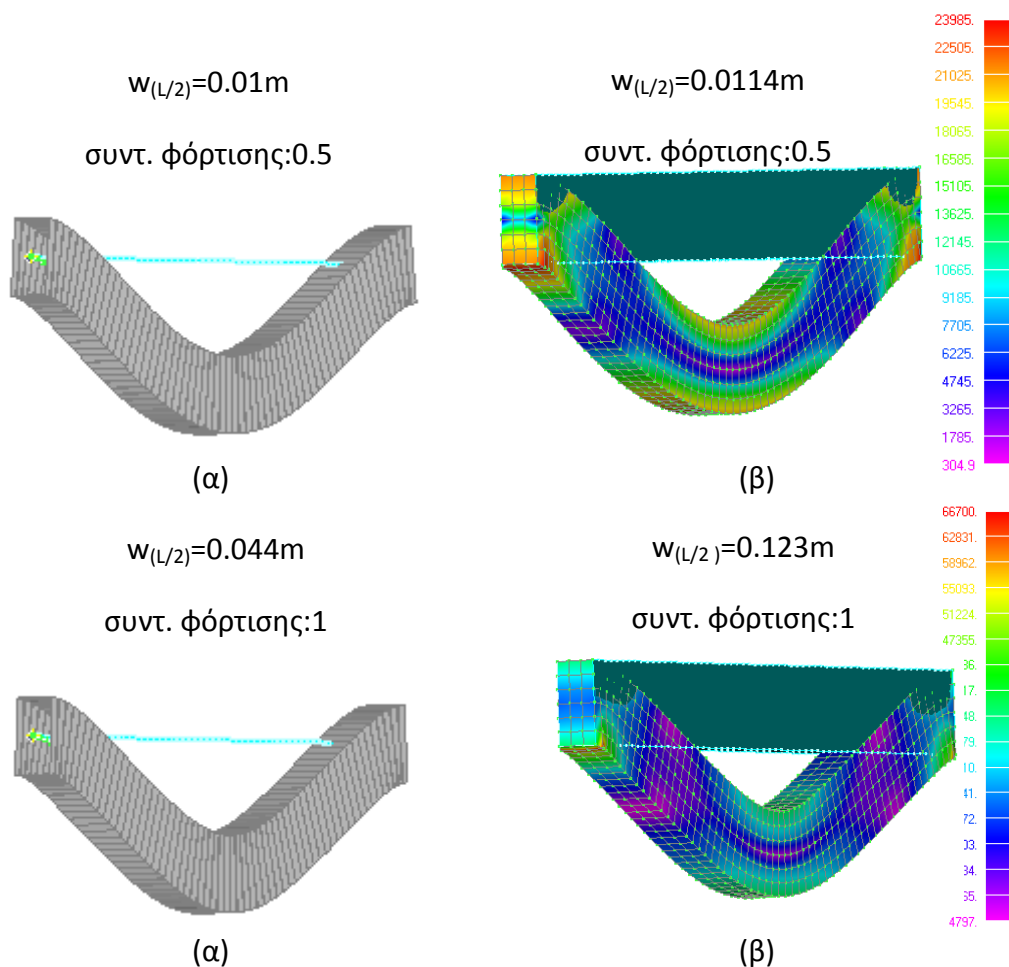
Σχήμα 4.8. Αμφίπακτη δοκός στην παραμορφωμένη κατάσταση με προσομοίωμα δοκού (α) και 3D 8-εδρικά στοιχεία (β) για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης (γραμμική ανάλυση).



Σχήμα 4.9. Αμφίπακτη δοκός στην παραμορφωμένη κατάσταση με προσομοίωμα δοκού (α) και 3D 8-εδρικά στοιχεία (β) για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης (μη γραμμική ανάλυση).

Πίνακας 4.5 Φορτίο και μετατόπιση αστοχίας του φορέα ($E_t = 0$)

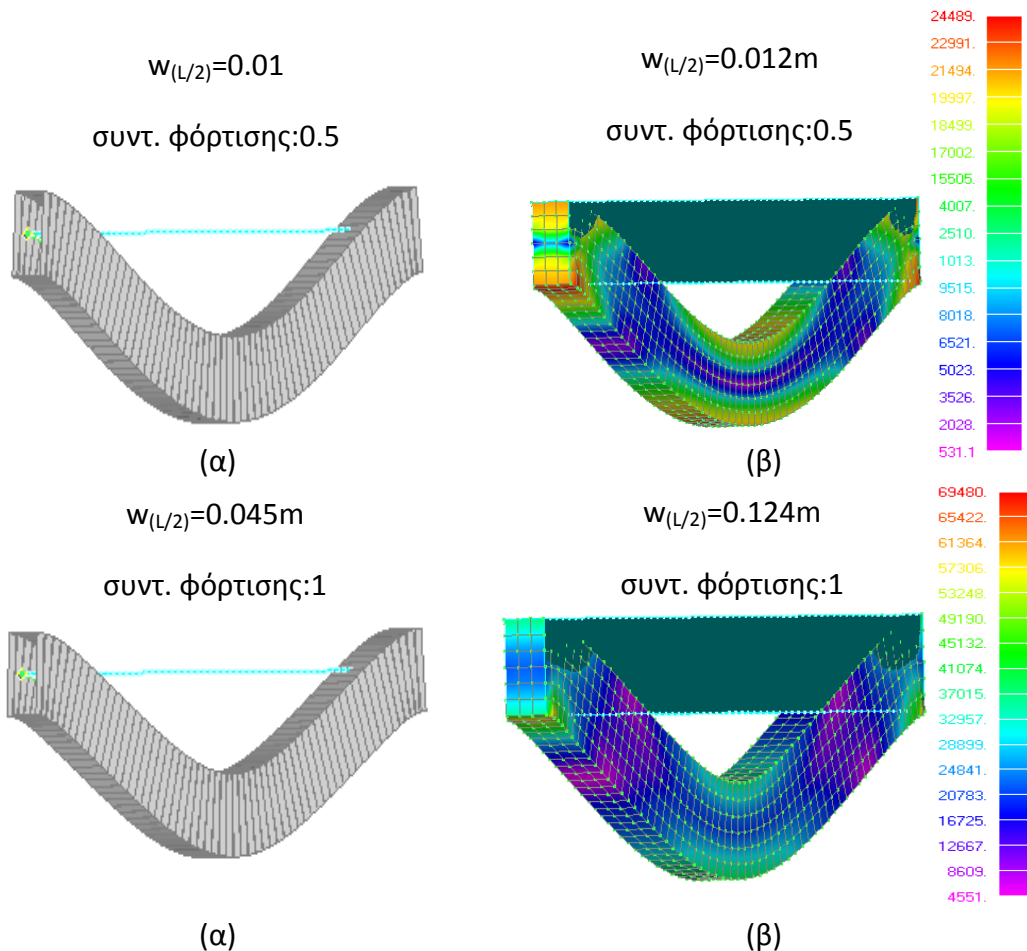
Είδος ανάλυσης	Φορτίο αστοχίας(kN/m)		Μετατόπιση αστοχίας(m)	
	Γραμμική	Μη γραμμική	Γραμμική	Μη γραμμική
Προτεινόμενη μέθοδος	278	330	0.15	0.33
Στοιχεία δοκού	240.5	240.7	0.016	0.016
Στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας	277.02	330	0.14	0.32



Σχήμα 4.10. Αμφίπακτη δοκός στην παραμορφωμένη κατάσταση με προσομοίωμα δοκού (α) και 3D 8-εδρικά στοιχεία (β) για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης (γραμμική ανάλυση).

Πίνακας 4.6 Φορτίο και μετατόπιση αστοχίας του φορέα ($E_t = 1GPa$)

Είδος ανάλυσης	Φορτίο αστοχίας(kN/m)		Μετατόπιση αστοχίας(m)	
	Γραμμική	Μη γραμμική	Γραμμική	Μη γραμμική
Προτεινόμενη μέθοδος	510	520	0.12	0.123
Στοιχεία δοκού	510	517.4	0.044	0.045
Στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας	510	520	0.123	0.123



Σχήμα 4.11. Αμφίπακτη δοκός στην παραμορφωμένη κατάσταση με προσομοίωμα δοκού (α) και 3D 8-εδρικά στοιχεία (β) για διάφορες τιμές του συντελεστή φόρτισης (μη γραμμική ανάλυση).

Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν απ' τις προαναφερθείσες αναλύσεις είναι:

1. Για ελαστικό – πλήρως πλαστικό υλικό ($E_r = 0$), προκύπτει ταύτιση των καμπυλών φορτίου – μετατόπισης για διακριτοποίηση του φορέα με στοιχεία δοκού, τόσο για γραμμική όσο και για μη γραμμική ανάλυση.
2. Επίσης, απ' τη γραμμική ανάλυση προκύπτει ότι ο φορέας αστοχεί σε φορτίο φορτίο μικρότερο απ' αυτό που του επιβάλλεται ($280kN / m$) και για τους δύο τύπους προσομοίωσης, δίνοντας όμως περίπου ίδια μετατόπιση ($0.15m$).
3. Για ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο υλικό, το φορτίο αστοχίας αυξάνεται σημαντικά, ανεξαρτήτως του τύπου προσομοίωσης και του είδους της ανάλυσης.
4. Όσον αφορά στο υπολογιστικό κόστος, υπάρχει σημαντική διαφορά κυρίως στους χρόνους ανάλυσης μεταξύ των διαφορετικών τύπων προσομοίωσης.
5. Επιβεβαιώνεται η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου, λόγω της ταύτισης των καμπυλών φορτίου-μετατόπισης.

4.3 3^ο αριθμητικό παράδειγμα: Δοκός διατομής I

Σ' αυτό το παράδειγμα εξετάζεται η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και της διατμητικής παραμόρφωσης (αξονική-διατμητική-καμπτική ένταση). Γι' αυτό το λόγο, εξετάστηκε μία δοκός διατομής I και μήκους $L = 2m$. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής που επελέγη παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.7, ενώ το υλικό της δοκού λήφθηκε ελαστικό-πλήρως πλαστικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 213.4GPa$, μέτρο διατμήσεως $G = 82GPa$ και τάση διαρροής $\sigma_{yo} = 285MPa$. Η δοκός είναι είτε πακτωμένη είτε μονόπακτη, ενώ υποβάλλεται σε μονοτονικώς αυξανόμενο ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο. Η δοκός διακριτοποιείται με 22 γραμμικά διαμήκη στοιχεία και 43 τετραεδρικά στοιχεία κελύφους (12 στρώσεις στον κορμό και 2 σε κάθε πέλμα).

Πίνακας 4.7 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής I

Ύψος	$h = 0.3m$	Πλάτος πελμάτων	$t_f = 0.02m$
Πλάτος	$b = 0.3m$	Πλάτος κορμού	$t_w = 0.01m$
Ροπή αδράνειας	$I_y = 25.0247 \times 10^{-5} m^4$	Συντελεστής διατμητικής διόρθωσης	$a_z = 5.3897$

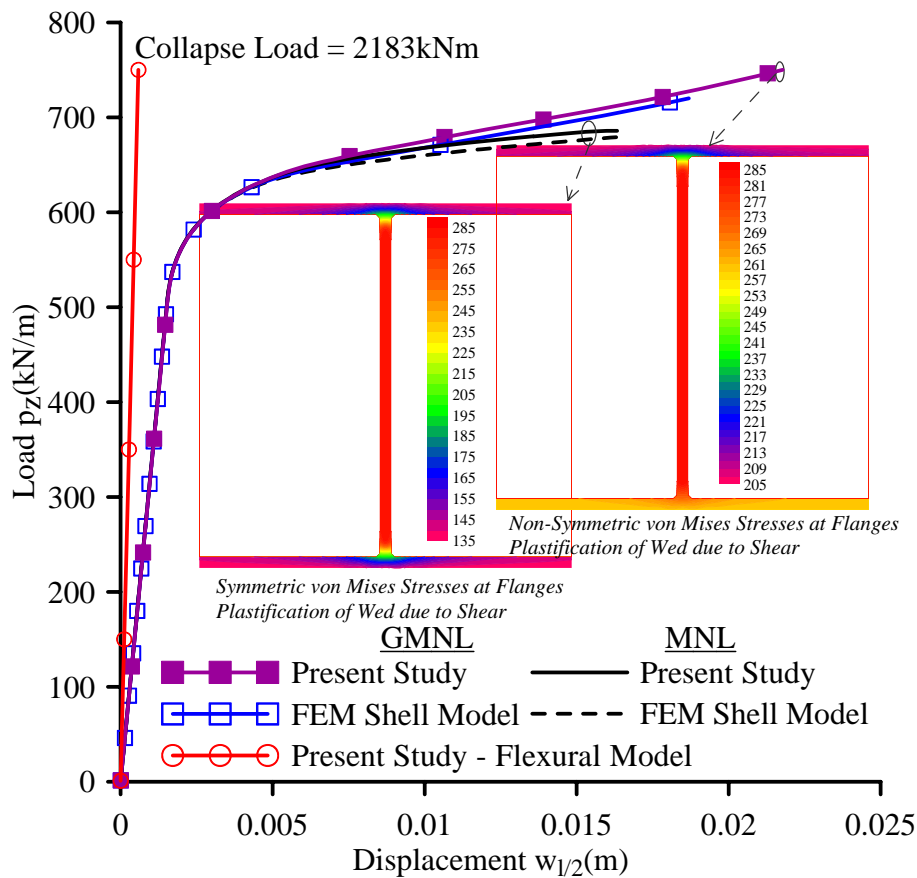
Στα Σχήματα 4.12,4.13 παρουσιάζονται οι καμπύλες φορτίου-μετατοπίσεως, για γεωμετρική μη γραμμική (GMNL) και για γραμμική ανελαστική (MNL) ανάλυση, και για τις δύο περιπτώσεις συνθηκών στηρίζεως. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με εκείνα που λήφθηκαν απ' την ανάλυση ενός μοντέλου FEM διακριτοποιημένου με 2400 τετραεδρικά στοιχεία κελύφους και παρατηρείται πλήρης ταύτιση. Στα ίδια σχήματα παρουσιάζεται και η κατανομή των τάσεων Mises σ_{VM} , όπου είναι εμφανής η πλαστικοποίηση του κορμού, καθώς επίσης και η ασυμμετρία των κανονικών τάσεων λόγω της αξονικής δύναμης που αναπτύσσεται. Σ' αυτά τα σχήματα αποτυπώνεται, ακόμη, και αμιγώς καμπτική απόκριση της δοκού. Εφόσον η δοκός αστοχεί λόγω διάτμησης, το μοντέλο Euler-Bernoulli αδυνατεί να λάβει υπ' όψιν τη μη γραμμική συμπεριφορά και υπερεκτιμά το φορτίο αστοχίας περίπου στο 320% για της πακτωμένης και στο 256% για την μονόπακτη δοκό.

Ο βασικός λόγος γι' αυτή την απόκλιση είναι η αδυναμία του αμιγώς καμπτικού μοντέλου να προβλέψει τον ακριβή μηχανισμό κατάρρευσης, αφού αγνοεί την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων. Πιο συγκεκριμένα, στα Σχήματα 4.14 α,β παρουσιάζεται η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του κορμού για γεωμετρικά μη γραμμική και γραμμική ανάλυση αντίστοιχα, υποδηλώνοντας το διατμητικό χαρακτήρα του μηχανισμού κατάρρευσης. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα ο οποίος έχει διακριτοποιηθεί με στοιχεία κελύφους FEM. Αντίθετα, στο Σχήμα 10γ φαίνεται η κατανομή των τάσεων Von Mises θεωρώντας μοντέλο αμιγώς καμπτικό δείχνοντας το μηχανισμό κατάρρευσης λόγω κάμψεως, ο οποίος προϋποθέτει τη δημιουργία τριών πλατικών αρθρώσεων, αντί για δύο στην περίπτωση του μοντέλου με συνδυασμό αξονικής-διατμητικής-καμπτικής καταπόνησης.

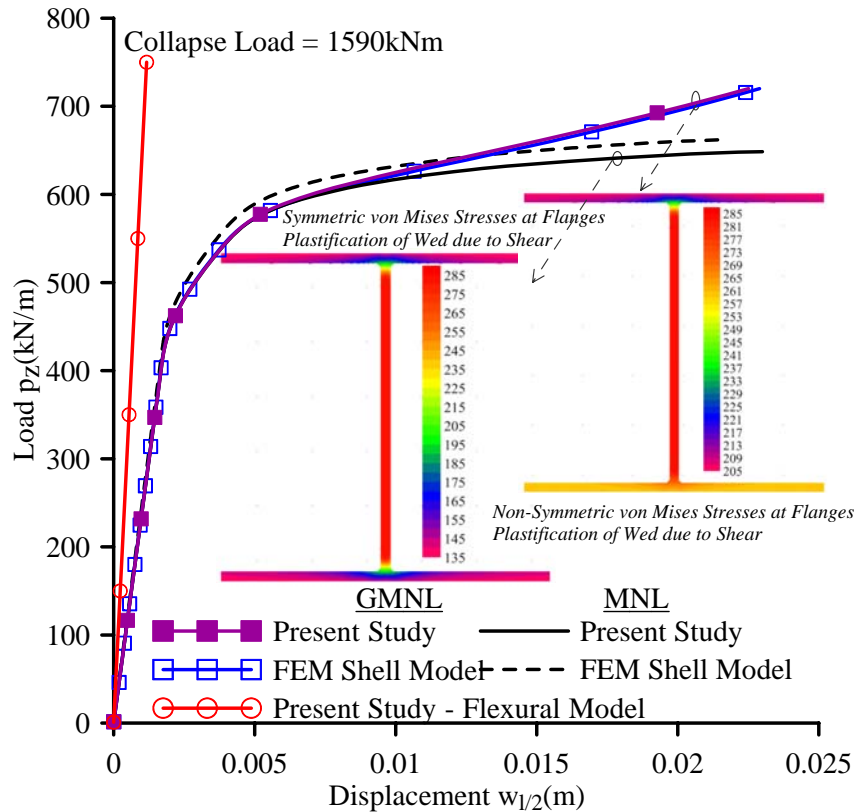
Ακόμη, από άποψη αποτελεσματικότητας, αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που οι δύο προσεγγίσεις έχουν θεμελιώδεις διαφορές, (δηλαδή 22 πεπερασμένα

στοιχεία για το συγκεκριμένο μοντέλο αντί για 2400 στοιχεία κελύφους), η διαφορά στο χρόνο υπολογισμού είναι σημαντική, ενώ τα αποτελέσματα έχουν την ίδια ακρίβεια. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι για το μοντέλο με στοιχεία κελύφους απαιτήθηκαν 30sec- 1h ανάλογα με το είδος της ανάλυσης, ενώ για το συγκεκριμένο μοντέλο απαιτήθηκαν 10sec-40sec για τα ίδια είδη ανάλυσης.

Τέλος, στα Σχήματα 4.12,4.13 παρουσιάζονται οι καμπύλες φορτίου-μετατοπίσεως του δοκού, για γεωμετρική μη γραμμική ή γραμμική ανελαστική ανάλυση και για τις δύο περιπτώσεις συνθηκών στήριξης, καθιστώντας προφανή την επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην απόκριση του συστήματος. Ακόμη, σ' αυτά τα σχήματα αποτυπώνεται και η αμιγώς καμπτική απόκριση, δείχνοντας ακόμη μία φορά τη σημασία της διατμητικής παραμόρφωσης στην απόκριση της δοκού.



Σχήμα 4.12. Καμπύλη φορτίο- μετατόπισης στο μέσον της αμφίπακτης δοκού του παραδείγματος 3.

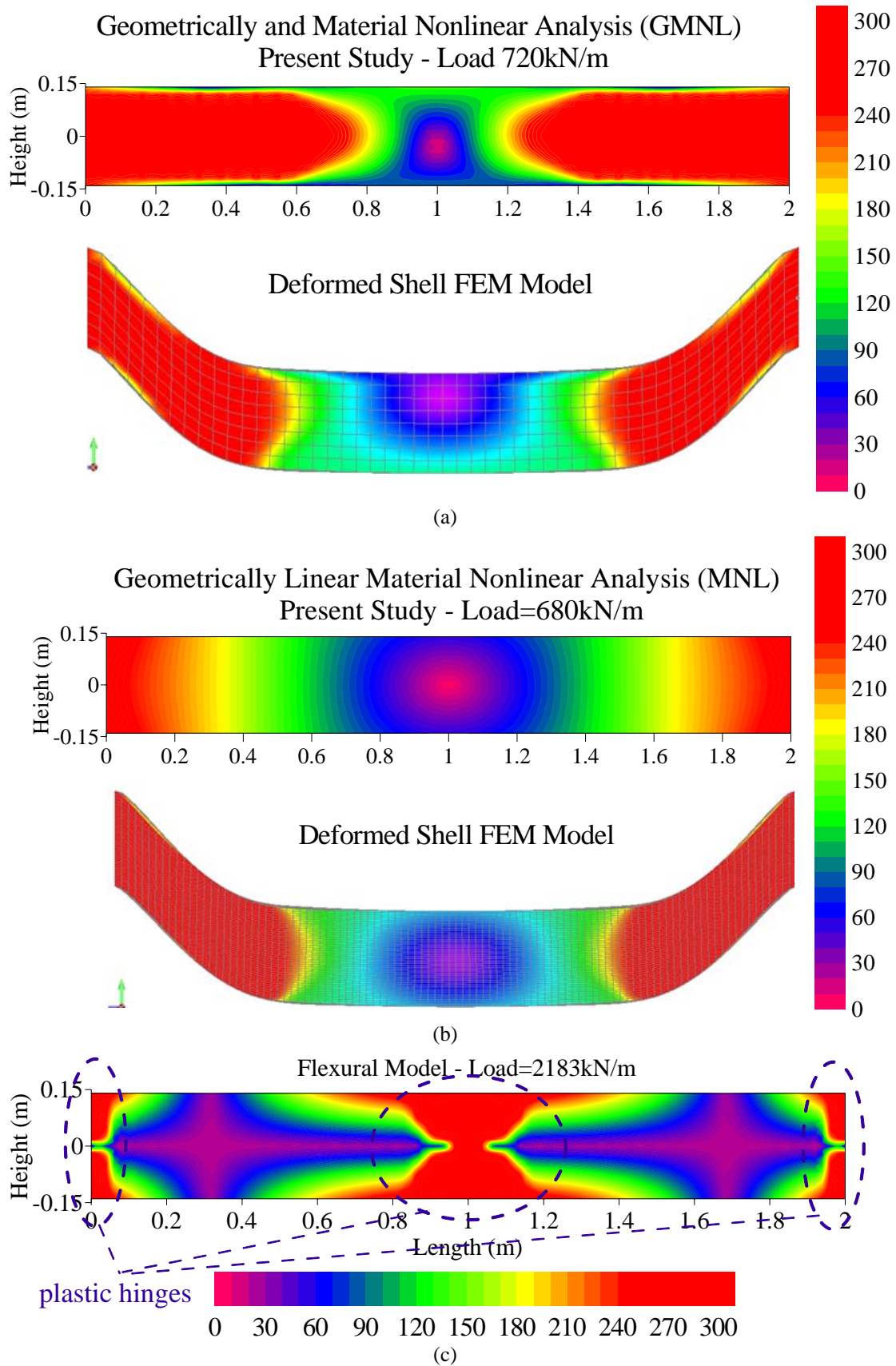


Σχήμα 4.13. Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης στο μέσον της μονόπακτης δοκού του παραδείγματος 3

Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν απ' τις προαναφερθείσες αναλύσεις είναι:

1. Απ' την ανακολουθία των αποτελεσμάτων των γραμμικών και μη γραμμικών αναλύσεων καθίσταται προφανής η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας.
2. Το συγκεκριμένο μοντέλο λαμβάνει υπ' όψιν την ταυτόχρονη επιρροή των καμπτικών-αξονικών-διατμητικών παραμορφώσεων, τονίζοντας έτσι τη σημασία αυτής της αλληλεπίδρασης στην ανελαστική ανάλυση θεωρώντας είτε μικρές είτε μεγάλες παραμορφώσεις.
3. Απαιτείται μικρός αριθμός στοιχείων προκειμένου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση.
4. Η χρήση της μεθόδου BEM επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των τάσεων, πράγμα που διευκολύνει τόσο το σχεδιασμό όσο και την ανάλυση δοκών.



Σχήμα 4.14. Διαγράμματα κατανομής τάσεων Von Mises κατά μήκος του κορμού για γεωμετρικά μη γραμμική (a) και γραμμική (b) ανάλυση για προσομοίωση με στοιχεία κελύφους. Μοντέλο καμπτικής παραμόρφωσης (c).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έπειτα από την εκτέλεση των αναλύσεων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- Η εκτέλεση γραμμικής ή μη γραμμικής ανάλυσης, δηλαδή η θεώρηση μικρών ή μεγάλων μετατοπίσεων αντίστοιχα, καθώς και η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση του φορέα.
- Το είδος του υλικού έχει καθοριστική σημασία στη συμπεριφορά του φορέα. Ειδικά για ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο υλικό, το φορτίο αστοχίας αυξάνεται σημαντικά.
- Η διακριτοποίηση του φορέα με στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας παρέχει πιο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση μ' αυτά που προκύπτουν απ' την προσομοίωσή του με γραμμικά στοιχεία.
- Υπάρχει σημαντική διαφορά στους χρόνους εκτέλεσης των αναλύσεων με γραμμικά στοιχεία και στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας.
- Η προτεινόμενη μέθοδος υπερέρχει, διότι επιτυγχάνει τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

Όπως προαναφέρθηκε, οι αναλύσεις που εκτελέστηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία ήταν στατικές. Ως αντικείμενο μελλοντικής έρευνας, θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η δυναμική απόκριση φορέων διαφόρων διατομών, για διάφορους τύπους φορτίων και συνθηκών στήριξης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Η Πεδιακή BEM για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} Τάξης

Π.1 Εισαγωγή

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, ορισμένα από τα προβλήματα συνοριακών τιμών που διατυπώνονται επιλύονται αριθμητικά με την Πεδιακή Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Domain BEM). Η μέθοδος αυτή ανήκει στην οικογένεια Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η Πεδιακή BEM μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση γραμμικών ή μη γραμμικών, στατικών ή δυναμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές, που υπόκεινται σε γραμμικές ή μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατό να επιλυθούν αριθμητικά προβλήματα συνοριακών τιμών των οποίων η θεμελιώδης λύση (fundamental solution) δεν είναι γνωστή. Καθώς η θεμελιώδης λύση δεν διατίθεται, σε τέτοια προβλήματα είναι αδύνατο να εφαρμοστεί «αμιγής» Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή μέθοδος που να χρησιμοποιεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση. Η Πεδιακή BEM περιλαμβάνει και πεδιακή διακριτοποίηση του εξεταζόμενου χωρίου, πέρα από τη συνοριακή διακριτοποίηση.

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί διάφορες διατυπώσεις Πεδιακής BEM (π.χ. βλ. την εργασία των Ingber et al. [2001]). Στην παρόν κεφάλαιο ακολουθούνται οι διατυπώσεις των Sapountzakis and Katsikadelis [1992] (βλ. και [Katsikadelis and Sapountzakis 1988], [Katsikadelis et al. 1990], [Sapountzakis and Katsikadelis 1991], [Katsikadelis and Sapountzakis 1991]) και του Sapountzakis [2000] (βλ. και [Ingber et al. 2001]), αφού τροποποιηθούν κατάλληλα. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στην άμεση αριθμητική ολοκλήρωση των πεδιακών ολοκληρωμάτων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της Πεδιακής BEM. Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην αρχική προσέγγιση του άγνωστου μεγέθους που αναζητούμε με απλές συναρτήσεις σχήματος σε κάθε στοιχείο της πεδιακής διακριτοποίησης. Τα προκύπτοντα ολοκληρώματα περιέχουν αποκλειστικά γνωστά μεγέθη και μπορούν να υπολογιστούν είτε αριθμητικά είτε αναλυτικά, σημειώνοντας ότι στην παρούσα εργασία ακολουθείται αναλυτικός προσδιορισμός.

Η πρώτη μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου είναι δυσχερές να εκφραστεί ρητά το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Μια τέτοια περίπτωση είναι η εξέταση της συμπεριφοράς ελαστοπλαστικών σωμάτων, όπου τα πλαστικά μέρη των εντατικών μεγεθών μπορούν να υπολογιστούν σε πεπερασμένο αριθμό σημείων κατά μήκος της ράβδου, ωστόσο προσδιορίζονται δυσχερώς σε κλειστή μορφή συναρτήσεων των άγνωστων μεγεθών σε κάθε σημείο. Η δεύτερη μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ρητά προσδιορισμένο ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Μια τέτοια περίπτωση είναι η εξέταση γεωμετρικά μη γραμμικής συμπεριφοράς ελαστικών σωμάτων. Συνεπώς, εδώ η πρώτη μέθοδος εφαρμόζεται στο πρόβλημα της μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστοπλαστικών ράβδων με επιρροή

δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, ενώ η δεύτερη μέθοδος εφαρμόζεται στο πρόβλημα της γεωμετρικά μη γραμμικής ανομοιόμορφης στρέψης ελαστικών ράβδων με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Παρακάτω, οι δύο μέθοδοι παρουσιάζονται για την περίπτωση συνήθους διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης, σημειώνοντας ότι η εφαρμογή τους σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 4^{ης} τάξης είναι ανάλογη, όπως επίσης και σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τα οποία περιέχουν μέχρι 2^{ης} ή 4^{ης} τάξης παραγώγους.

Οι δύο μέθοδοι περιέχουν άγνωστες ποσότητες και στο εσωτερικό του εξεταζόμενου χωρίου. Μπορούν να εφαρμοστούν δύο τεχνικές υπολογισμού των αγνώστων αυτών [Ingber et al. 2001]. Αναφορικά με την πρώτη τεχνική, οι άγνωστοι αυτοί υπολογίζονται επαναληπτικά αφού υιοθετηθεί κάποια αρχική εκτίμηση για τον υπολογισμό τους. Η τεχνική αυτή απαιτεί επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος ακόμα και στην περίπτωση γραμμικών προβλημάτων ενώ η σύγκλιση δεν είναι εγγυημένη [Ingber et al. 2001]. Αναφορικά με τη δεύτερη τεχνική, εφαρμόζεται η μέθοδος της ταξιοθεσίας (collocation method) σύμφωνα με την οποία οι ολοκληρωτικές εξισώσεις του προβλήματος εκφράζονται στις θέσεις των αγνωστων ποσοτήτων στο εσωτερικό του χωρίου. Έτσι είναι δυνατό να μορφωθεί σύστημα εξισώσεων με ίσο πλήθος αγνωστων ποσοτήτων και διατιθέμενων εξισώσεων. Η τεχνική αυτή υιοθετείται στην παρούσα διατριβή και απαιτεί επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος μόνο στην περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων.

Π1.2 Βασικές Έννοιες της Πεδιακής Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων

Θεωρούμε το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{dN(x, u, u')}{dx} = g(x), \quad x \in (0, l) \quad (\text{Π1.1.1}\alpha)$$

$$a_1 \left(\frac{du}{dx} - N(x, u, u') \right) + a_2 u = a_3, \quad x = 0, l \quad (\text{Π1.1.1}\beta)$$

όπου ο συμβολισμός $(\cdot)'$ δηλώνει παραγώγιση κατά x , $N(\cdot)$ είναι γραμμικός ή μη γραμμικός μονοδιάστατος τελεστής πρώτης τάξης, a_i ($i = 1, 2, 3$) είναι γνωστοί συντελεστές που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος, $g(x)$ είναι τυχαία κατανομημένο φορτίο ή πηγή στο εσωτερικό διάστημα $(0, l)$ και $u = u(x)$ είναι η συνάρτηση της λύσης, η οποία είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, l)$. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει συχνά στις εφαρμογές που εξετάζονται. Λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες εξισώσεις εκφράζεται εδώ ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2''(x, \xi) [N'(x, u, u') + g(x)] dx - \left[-A_1''(x, \xi) u(x) + A_2''(x, \xi) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π1.1.2})$$

όπου A_1'' , A_2'' είναι δισημειακοί πυρήνες. Μετά από κατάλληλη ολοκλήρωση κατά παράγοντες η παραπάνω έκφραση διαμορφώνεται ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2^u(x, \xi) g(x) dx - \int_0^l A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx + \left[A_2^u(x, \xi) N(x, u, u') \right]_{x=0}^{x=l} - \left[-A_1^u(x, \xi) u(x) + A_2^u(x, \xi) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π1.1.3})$$

Παραγωγίζοντας ως προς ξ την παραπάνω εξίσωση, λαμβάνουμε

$$u'(\xi) = -\int_0^l A_1^u(x, \xi) g(x) dx + N(\xi, u, u') + \left[A_1^u(x, \xi) [u'(x) - N(x, u, u')] \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π1.1.4})$$

Στη συνέχεια προχωρούμε στη διακριτοποίηση του διαστήματος $(0, l)$, διαιρώντας το διάστημα αυτό σε L στοιχεία. Οι σχέσεις (Π1.2.3-4) διατυπώνονται ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2^u(x, \xi) g(x) dx - \sum_{j=1}^L \int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx - \left[-A_1^u(x, \xi) u(x) + A_2^u(x, \xi) (u'(x) - N(x, u, u')) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π1.1.5})$$

$$u'(\xi) = -\int_0^l A_1^u(x, \xi) g(x) dx + N(\xi, u, u') + \left[A_1^u(x, \xi) [u'(x) - N(x, u, u')] \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π1.1.6})$$

Π1.3 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Όπως προαναφέρθηκε, η παρούσα μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου είναι δυσχερές να εκφραστεί ρητά το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Τα ολοκληρώματα $\int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx$ ($j = 1, 2, \dots, L$) της εξ.(Π1.1.5) προσδιορίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss (με L_{Gauss} πλήθος σημείων Gauss σε κάθε στοιχείο) ως

$$\int_{\Gamma_j} A_1^u(x, \xi) N(x, u, u') dx = \sum_{k=1}^{L_{Gauss}} A_1^u(x_{jk}, \xi) N(x_{jk}, u_{jk}, u'_{jk}) w_k \quad (\text{Π1.1.7})$$

όπου w_k ($k = 1, 2, \dots, L_{Gauss}$) είναι γνωστά βάρη της μεθόδου Gauss, ενώ x_{jk} ($k = 1, 2, \dots, L_{Gauss}$) είναι γνωστά σημεία Gauss τα οποία βρίσκονται επί του στοιχείου j ($j = 1, 2, \dots, L$). Η εξ.(Π1.1.5) διαμορφώνεται με βάση την παραπάνω σχέση ως

$$u(\xi) = \int_0^l A_2^u(x, \xi) g(x) dx - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L_{Gauss}} A_1^u(x_{jk}, \xi) N(x_{jk}, u_{jk}, u'_{jk}) w_k - \left[-A_1^u(x, \xi) u(x) + A_2^u(x, \xi) (u'(x) - N(x, u, u')) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (\text{Π1.1.8})$$

Εφαρμόζοντας σε $L \times L_{Gauss}$ σημεία ταξιθεσίας $\xi_i = x_{jk}$ ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$, $j = 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, L_{Gauss}$) τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.1.8), (Π1.1.6) καθώς και στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0$, $\xi = \xi_{L \times L_{Gauss} + 1} = l$ την ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.1.8), προκύπτουν $2L \times L_{Gauss} + 2$ εξισώσεις ως προς $2L \times L_{Gauss} + 4$ αγνώστους (πρόκειται για τις τιμές των u'_i , u_i ($i = 1, 2, \dots, L \times L_{Gauss}$) στα $L \times L_{Gauss}$ εσωτερικά κομβικά σημεία και τις συνοριακές τιμές των u , $u' - N(x, u, u')$ ($j = 1, L + 1$) στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0$, $\xi = \xi_{L \times L_{Gauss} + 1} = l$). Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις 2 συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου (βλ. εξ.(Π3.2.1β)) μορφώνουν σύστημα $2L \times L_{Gauss} + 4$ αλγεβρικών εξισώσεων με $2L \times L_{Gauss} + 4$ αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος αυτού, υπολογίζονται οι τιμές των u' , u στα $L \times L_{Gauss}$ εσωτερικά κομβικά σημεία καθώς και οι τιμές της u και $u' - N(x, u, u')$ στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των u , u' μπορούν εύκολα να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.1.8), (Π1.1.6) αντίστοιχα, για την εξεταζόμενη τιμή του ξ . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l A_1''(x, \xi) g(x) dx$, $\int_0^l A_2''(x, \xi) g(x) dx$ που υπεισέρχονται στο σύστημα εξισώσεων υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση για τις συνήθεις συναρτήσεις $g(x)$. Τέλος, στην περίπτωση που το σημείο ταξιθεσίας ξ_i βρίσκεται εντός του στοιχείου j , παρουσιάζεται ιδιομορφία στον υπολογισμό του ολοκληρώματος της εξ.(Π1.1.7). Η ομαλοποίησή του πραγματοποιείται εφαρμόζοντας την τεχνική που παρουσιάζεται στην εργασία των Katsikadelis and Sarountzakis [1988]. Έτσι, το ολοκλήρωμα της εξ.(Π1.1.7) γράφεται ως

$$\int_{\Gamma_j} A_1''(x, \xi_i) N(x, u, u') dx = \int_{\Gamma_j} A_1''(x, \xi_i) (N(x, u, u') - N(\xi_i, u_i, u'_i)) dx + N(\xi_i, u_i, u'_i) \int_{\Gamma_j} A_1''(x, \xi_i) dx \quad (\text{Π1.1.9})$$

Καθώς η ποσότητα $A_1''(x, \xi_i) (N(x, u, u') - N(\xi_i, u_i, u'_i))$ του πρώτου ολοκληρώματος της παραπάνω σχέσης έχει πεπερασμένη τιμή, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ομαλό και μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Το δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης υπολογίζεται εύκολα αναλυτικά.

Π1.4 Μέθοδος Προσέγγισης του Άγνωστου Μεγέθους

Όπως προαναφέρθηκε, η παρούσα μέθοδος πλεονεκτεί στις περιπτώσεις όπου το εξεταζόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ρητά προσδιορισμένο ως προς τα άγνωστα μεγέθη σε κάθε σημείο του χωρίου. Υιοθετείται η υπόθεση ότι το άγνωστο μέγεθος u μεταβάλλεται εντός του κάθε στοιχείου j με βάση συγκεκριμένο νόμο (π.χ. γραμμική, παραβολική, κυβική κατανομή κ.λ.π.). Με βάση το νόμο αυτό, υπολογίζεται εύκολα η μεταβολή εντός του κάθε στοιχείου j της παραγώγου u' . Ο ρητός προσδιορισμός του προβλήματος συνοριακών τιμών ως

προς τα u, u' σε κάθε σημείο του χωρίου επιτρέπει τον προσδιορισμό των ολοκληρωμάτων $\int_{\Gamma_j} A_j''(x, \xi) N(x, u, u') dx \quad (j=1, 2, \dots, L)$ της εξ.(Π1.1.5)

συναρτήσεως των άγνωστων κομβικών ποσοτήτων του νόμου μεταβολής του u . Τα ολοκληρώματα που υπεισέρχονται στις προκύπτουσες εκφράσεις υπολογίζονται στην παρούσα διατριβή αναλυτικά χωρίς δυσκολία.

Εφαρμόζοντας σε L σημεία ταξιοθεσίας $\xi_i \quad (i=1, 2, \dots, L)$ τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.1.5-6) καθώς και στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0, \xi = \xi_{L+1} = l$ την ολοκληρωτική εξίσωση (Π1.1.5), προκύπτουν $2L+2$ εξισώσεις ως προς $2L+4$ αγνώστους (πρόκειται για τις κομβικές ποσότητες του νόμου μεταβολής του u στα L κομβικά σημεία και τις συνοριακές τιμές των $u_j, u'_j - N(x_j, u_j, u'_j) \quad (j=1, L+1)$ στα άκρα της ράβδου $\xi = \xi_0 = 0, \xi = \xi_{L+1} = l$). Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις 2 συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου (βλ. εξ.(Π1.1.1β)) μορφώνουν σύστημα $2L+4$ αλγεβρικών εξισώσεων με $2L+4$ αγνώστους. Από την επίλυση του συστήματος αυτού, υπολογίζονται οι τιμές των κομβικών ποσοτήτων του νόμου μεταβολής του u στα L κομβικά σημεία καθώς και οι τιμές της u και $u' - N(x, u, u')$ στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Υπογραμμίζεται ότι οι τιμές των u, u' μπορούν εύκολα να ευρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in (0, l)$ εφαρμόζοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.1.5), (Π1.1.6) αντίστοιχα, για την εξεταζόμενη την τιμή του ξ . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^l A_1''(x, \xi) g(x) dx, \int_0^l A_2''(x, \xi) g(x) dx$ που υπεισέρχονται στο σύστημα εξισώσεων υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με αναλυτική ολοκλήρωση για τις συνήθεις συναρτήσεις $g(x)$. Τέλος, επισημαίνεται ότι οι θέσεις των σημείων ταξιοθεσίας προσδιορίζονται με βάση τις θέσεις των κομβικών σημείων του νόμου μεταβολής του u , ενώ σε περίπτωση που ο τελεστής N έχει ειδική μορφή (π.χ. δεν εξαρτάται από το u αλλά μόνο από το u'), δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν και οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις (Π1.1.5-6) για την επίλυση του προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Armenakas AE. ; 2006. Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity. Taylor & Francis Group: New York
- Baba, S., Kajita, 1982 T. Plastic analysis of torsion of a prismatic beam. International Journal for Numerical Methods in Engineering.; 18; 927-944.
- Bach, C. und Baumann, R., 1924. Elastizität und Festigkeit, Springer–Verlag, Berlin.
- Chen, G., Trahair, N.S., 1992 Inelastic nonuniform torsion of steel I-beams. Journal of Constructional Steel Research.; 23; 189-207.
- Chou, S.I., 1993. Determination of Centers of Flexure Using the Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 12, 321–324.
- Compaq Visual Fortran, 2000. Compaq Computer Corporation, Version 6.5.
- Cowper, G.R., 1966. The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, ASME, 33(2), 335–340.
- Crisfield MA. ; 1991. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1 Essentials. John Wiley and Sons; New York: USA
- Debard, Y., 1997. Logiciel de calcul des structures par la méthode des éléments finis, Version RDM5.01, Institut Universitaire de Technologie, Le Mans, France.
- Eurocode No 3, 1993. Design of steel structures, Part 1–1: General rules and rules for Buildings, European Committee for Standardization (CEN), ENV 1993–1–1/April 1992.
- ΕΚΩΣ 2000, Ελληνικός Κανονισμός Ωπλισμένου Σκυροδέματος, ΦΕΚ 1329B/6-11-2000.
- Fatmi, R.E. and Zenzri, H., 2004. Numerical Method for the Exact Elastic Beam Theory. Applications to Homogeneous and Composite Beams, International Journal of Solids and Structures, 41, 2521–2537.
- Fatmi, R.E., 2007a. Non-Uniform Warping Including the effects of Torsion and Shear Forces. Part I: A General Beam Theory, International Journal of Solids and Structures, Vol.44, pp. 5912-5929.
- Fatmi, R.E., 2007b. Non-Uniform Warping Including the effects of Torsion and Shear Forces. Part II: Analytical and numerical applications, International Journal of Solids and Structures, Vol.44, pp. 5930-5952.

- Friedman, Z. and Kosmatka, J.B., 2000. Torsion and Flexure of a Prismatic Isotropic Beam Using the Boundary Element Method, *Computers and Structures* 74, 479–494.
- Friemann, H., 1993. *Schub und Torsion in gerade Stäben*, Werner–Verlag, Düsseldorf.
- Fung, Y.C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*, Englewood Cliff, Prentice–Hall, New Jersey.
- Goodier, J.N., 1944. A Theorem on the Shearing Stress in Beams with Applications to Multicellular Sections, *Journal of Aeronautical Sciences*, 11, 272–280.
- Gruttmann, F. and Wagner, W., 2001. Shear Correction Factors in Timoshenko’s Beam Theory for Arbitrary Shaped Cross–Sections, *Computational Mechanics*, 27, 199–207.
- Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W., 1999. Shear Stresses in Prismatic Beams with Arbitrary Cross–Sections, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 865–889.
- Gruttmann, F., Wagner, W. und Sauer, R., 1998. Zur Berechnung der Schubspannungen aus Querkraften in Querschnitten Prismatischer Stäbe mit der Methode der Finiten Elemente, *Bauingenieur*, 73(11), 485–490.
- Haberl, G. and Och, F., 1974. “A Finite–Element Solution for the Torsional Rigidity and the Shear Center of Arbitrary Cross Section”, *Z. Flugwiss* 22(4), 115–119.
- Hartmann, F. and Katz, C., 2004. *Structural Analysis with Finite Elements*, Springer–Verlag, Berlin.
- Hofmann, T.J., 1992. *Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie*, Dissertation, Bericht 15, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Hutchinson, J.R., 2001. Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 68, 87–92.
- Kaneko, T., 1975. On Timoshenko’s correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics*, D 8, 1927–1936.
- Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., 2003. Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi–layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40 (6), 1525–1546.
- Katsikadelis, J.T, 2002. *Boundary Elements: Theory and Application*, Elsevier, Amsterdam–London.
- Knothe, K. und Wessels, H., 1992. *Finite Elemente*, 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin–New York.
- Koczyk, S., 1994. Wölbkrafttorsion und Querkraftschubspannungen in einem Balken bei FE–Diskretisierung seines Querschnitts, *Technische Mechanik*,

Wissenschaftliche Zeitschrift für Anwendungen der Technischen Mechanik, Universität Magdeburg, 14(1), 3–13.

- Kraus, M., 2005. Computerorientierte Berechnungsmethoden für beliebige Stabquerschnitte des Stahlbaus, Von der Fakultät für Bauingenieurwesen der Ruhr–Universität Bochum genehmigte Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor–Ingenieur.
- Ladevéze, P., Simmonds, J.G., 1998. New Concepts for Linear Beam Theory with Arbitrary Geometry and Loading, *European Journal of Mechanics, A/Solids* 17(3), 377–402.
- Love, A.E.H., 1952. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York.
- Mason, W.E. and Herrmann, L.R., 1968. Elastic Shear Analysis of General Prismatic Beams, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 94(EM4), 965–983.
- Mocos V.G. and Sapountzakis E.J., 2005. A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Composite Beams, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.42, pp. 3261–3287.
- Mocos V.G. and Sapountzakis E.J., 2005. A BEM Solution to Transverse Shear Stresses in Composite Steel – Concrete Beams, *Proc. of the Eurosteel Conference on Steel and Composite Structures, Maastricht, The Netherlands, June 8-10, 4.3*, pp.67-74.
- Mocos V.G. and Sapountzakis E.J., 2005. Shear Deformation Coefficients in Composite Beams by BEM, *Proc. of the 5th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Limassol, Cyprus, 29 June – 1 July*, pp.135-142.
- MSC/NASTRAN for Windows, 1999. Finite element modeling and postprocessing system, Help System Index, Version 4.0, USA.
- Muskhelishvili, N.I., 1963. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff Ltd.
- Nouri T. and Gay D., 1994. Shear stresses in orthotropic composite beams, *International Journal of Engineering Science*, 32, 1647–1667.
- Osgood, W.R., 1943. The Centre of Shear again, *Journal of Applied Mechanics*, 10(2), A–62–A–64.
- Pai, P.F. and Schulz, M.J., 1999. Shear correction factors and an energy–consistent beam theory, *International Journal of Solids and Structures*, 36, 1523–1540.
- Pilkey, W.D., 2002. *Analysis and Design of Elastic Beams – Computational Methods*, Wiley, New York.
- Puchegger, S., Bauer, S., Loidl, D., Kromp, K. and Peterlik, H., 2003. Experimental validation of the shear correction factor, *Journal of Sound and Vibration*, 261, 177–184.

- Ramm E., Hofmann T.J., 1995. "Stabtragwerke, Der Ingenieurbau", Ed.G. Mehlhorn, Band Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin.
- Ramm, E. und Hofmann, T.J., 1995. Stabtragwerke, Der Ingenieurbau, Ed. G. Mehlhorn, Band Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin.
- Reddy, J.N., 1989. On refined computational models of composite laminates. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 27, 361–382.
- Reissner, E. and Tsai, W.T., 1972. On the Determination of the Centers of Twist and of Shear for Cylindrical Shell Beams, Journal of Applied Mechanics, 39, 1098–1102.
- Renton, J.D., 1991. Generalized Beam Theory Applied to Shear Stiffness, International Journal of Solids and Structures, 27, 1955–1967.
- Renton, J.D., 1997. A Note on the Form of the Shear Coefficient, International Journal of Solids and Structures, 34, 1681–1685.
- Rothert H., Gensichen V., 1987. Nichtlineare Stabstatik, Springer-Verlag, Berlin.
- Sapountzakis E.J. and Mokos V.G., 2004. A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Beams, Proc. of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM 2004, Warsaw, Poland, 15 - 21 August, pp.199.
- Sapountzakis E.J. and Mokos V.G., 2005. A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Beams, Computational Mechanics, 36, 384–397.
- Sapountzakis E.J., 2000 Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method. Computers and Structures.; 77: 659-667.
- Sauer, E., 1980. Schub und Torsion bei Elastischen Prismatischen Balken, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, 29, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/München.
- Schneider-Bürger, M., 2001. Stahlbau Profile, 23. Auflage, Verlag Stahleisen, Düsseldorf.
- Schramm, U., Kitis, L., Kang, W. and Pilkey, W. D., 1994. On the Shear Deformation Coefficient in Beam Theory, Finite Elements in Analysis and Design, 16, 141–162.
- Schramm, U., Rubenchik, V. and Pilkey, W. D., 1997. Beam Stiffness Matrix Based on the Elasticity Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 211–232.
- Schwalbe, W.L., 1935. Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 15, 138–143.
- SectionBuilder, 2002. Section Builder and Designer for Concrete, Steel and Composite Sections, User's Manual and Technical Reference, Version 8.1, Computer and Structures, Inc., Berkeley, California, USA.

- Sokolnikoff, I.S., 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw–Hill, New York.
- Stephen, N.G., 1980. Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47, 121–127.
- Stojek, D., 1964. Zur Schubverformung im Biegebalken, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 44, 393–396.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1984. *Theory of Elasticity*, 3rd edn, McGraw–Hill, New York.
- Timoshenko, S.P., 1921. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine*, 41, 744–746.
- Timoshenko, S.P., 1922. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, 43, 125–131.
- Tolf, G. 1985. St. Venant Bending of an Orthotropic Beam, *Composite Structures*, 4, 1-14.
- Touratier, M., 1992. A generalization of shear deformation theories for axisymmetric multi-layered shells. *International Journal of Solids and Structures*, 29 (11), 1379–1399.
- Touratier, M., 1992. A refined theory of laminated shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, 29 (11), 1401–1415.
- Trefftz, E., 1935. Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, *ZAMM*, 15, 220–225.
- Vlasov V. *Thin-walled elastic beams*. Israel Program for Scientific Translations: Jerusalem; 1963.
- Vlasov, W.S., 1964. *Dünnwandige elastische Stäbe*, VEB Verlag für Bauwesen, Band 1, Berlin.
- Vlasov, W.S., 1965. *Dünnwandige elastische Stäbe*, VEB Verlag für Bauwesen, Band 2, Berlin.
- Weber, C., 1924. Biegung und Schub in geraden Balken, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 4, 334–348.
- Weber, C., 1926. Übertragung des Drehmoments in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 6, 85–97.
- Weinstein, A., 1947. The Centre of Shear and the Centre of Twist, *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1), 97–99.
- Wunderlich, W. and Pilkey, W.D., 2003. *Mechanics of Structures: Variational and Computational Methods*, 2nd ed., CRC Press LLC, Washington D.C.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor R.L. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier, Amsterdam.

- Κατσικαδέλης, Ι.Θ., 1999. Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Μηχανικού: Θεωρία και Εφαρμογές, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
- Παπαδρακάκης, Μ., 2000. Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.