Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Χώροι Banach με λίγους τελεστές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΖΗΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ-ΙΩΑΝΝΑ
Διπλωματούχος ΣΕΜΦΕ

Επιβλέπων:
Σπυρίδων Αργυρός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Σεπτέμβριος 2014

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ. Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Χώροι Banach με λίγους τελεστές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΖΗΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ-ΙΩΑΝΝΑ
Διπλωματούχος ΣΕΜΦΕ

Τριμελής Επιτροπή
Σ. Αργυρός, Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπων)
K. Beanland, Assoc.Professor, Washinghton and Lee Univ.
Β. Κανελλόπουλος, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Επταμελής επιτροπή
Σ. Αργυρός, Καθηγητής ΕΜΠ
K. Beanland, Assoc.Professor
Β. Κανελλόπουλος, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Ι. Γάσπαρης, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
Σ. Μερκουράκης, Καθηγητής ΕΚΠΑ
Ι. Πολυράκης, Καθηγητής ΕΜΠ
Θ. Ρασσιάς, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, Σεπτέμβριος 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το θεματικό περιεχόμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτελεί αντικείμενο μελέτης της θεωρίας χώρων Banach και θεωρίας Τελεστών. Ειδικότερα, η έρευνα που πραγματοποιήθηκε οδήγησε σε τέσσερις ερευνητικές εργασίες, τα αποτελέσματα των οποίων αναπτύσσονται στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Ένας χώρος Banach λέμε ότι έχει λίγους τελεστές αν κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στον X είναι της μορφής $\lambda I + S$, όπου λ ένας πραγματικός αριθμός, $I : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής και $S : X \to X$ ένας αυστηρά ιδιάζων τελεστής, δηλαδή ο S έχει την ιδιότητα ότι για κάθε κλειστό και απειροδιάστατο υπόχωρο Y του X, ο περιορισμός του S στον Y, $S|_Y$, δε μπορεί να ειναι ισομορφισμός. Το 1993 οι W.T. Gowers, B. Maurey ([33]) κατασκεύασαν έναν απειροδιάστατο χώρο Banach X_{GM} με αυτή την ιδιότητα. Σαν συνέπεια, ο X_{GM} είναι αδιάσπαστος δηλαδή δε μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ άθροισμα δύο κλειστών και απειροδιάστατων υποχώρων του. Επιπλέον, ο X_{GM} είναι ο πρώτος καθολικά αδιάσπαστος χώρος, δηλαδή έχει την ιδιότητα ότι κάθε κλειστός και απειροδιάστατος υπόχωρός του είναι αδιάσπαστος.

Το "scalar plus compact" πρόβλημα έθετε το ερώτημα του αν υπάρχει απειροδιάστατος χώρος Banach με την ιδιότητα ότι κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστής είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού συν ένα συμπαγή τελεστή. Υπένθυμίζουμε ότι ένας τελεστής $T : X \to X$ λέγεται συμπαγής αν το σύνολο $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X, όπου με B_X συμβολίζουμε την μοναδιάια μπάλα του X. Το παραπάνω πρόβλημα αποτέλεσε το Ερώτημα 1 στη λίστα των ανοικτών προβλημάτων της θεωρίας χώρων Banach του O J. Lindenstrauss το 1975 ([38]), ενώ ήταν γνωστό από νωρίτερα. Το ενδιαφέρον για αυτό το πρόβλημα οφείλεται, μεταξύ των άλλων, στο γεγονός ότι κάθε συμπαγής τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο [18]. Επομένως, ένας χώρος Banach με την ιδιότητα ότι κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστή είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού συν ένα συμπαγή τελεστή, έχει την ιδιότητα ότι κάθε φραγμένος τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο. Επιπλέον, με βάση τα παραπάνω ένας τέτοιος χώρος είναι αδιάσπαστος καθώς είναι γνωστό ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι αυστηρά ιδιάζων.

Το 2011 οι Σ. Αργυρός και R. Haydon ([10]) απάντησαν καταφατικά στο "scalar plus compact" πρόβλημα δημιουργώντας έναν καθολικά αδιάσπαστο χώρο Banach X_{AH} με την ιδιότητα ότι κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστής είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού συν ένα συμπαγή τελεστή ([10]). Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν αποτελεί μία γενικευμένη παραλλαγή της μέθοδου κατασκευής $\mathcal{L}_\infty$ χώρων Banach των J. Bourgain-B. Delbaen [23] με χρήση σύγχρονων τεχνικών ορισμού νόρμας τύπου Tsirelson([16]).

Οι χώροι των Bourgain-Delbaen ([23]) είναι παραδείγματα διαχωρίσιμων $\mathcal{L}^\infty$ χώρων που δεν περιέχουν ισομορφικά τον c_0. Είναι γνωστό ([37]) ότι κάθε διαχωρίσιμος $\mathcal{L}_\infty$ χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1 έχει συζυγή ισόμορφο με τον ℓ_1. Στα κεφάλαια που ακολουθούν παρουσιάζονται κατασκευές $\mathcal{L}^\infty$ χώρων με επιπρόσθετες ιδιότητες. Πιο συγκεριμένα, το πρώτο μέρος της διδακτορικής διατριβής αφιερώνεται στην απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος που αποδεικνύεται στην εργασία [29].

Θεώρημα 0.1. *Για κάθε $1 < r < \infty$ υπάρχει διαχωρίσιμος $\mathcal{L}^\infty$ χώρος $\mathfrak{X}_r$ που είναι ℓ_r κορεσμένος.*

Ο R. Haydon ([34]) απέδειξε ότι οι Bourgain-Delbaen χώροι ([23]) είναι ℓ_r κορεσμένοι για κάποιο $1 < r < \infty$. Η μέθοδος κατασκευής που ακολουθούμε για να αποδείξουμε το Θεώρημα 0.1 συνδυάζει με κατάλληλο τρόπο την Bourgain-Delbaen μέθοδο με τις εναλλακτικές τεχνικές ορισμού νόρμας τύπου Tsirelson([3], [16]) και έχει σαν αποτέλεσμα μία λιγότερη ¨τεχνική¨ απόδειξη από την αντίστοιχη στο [34].

Το δεύτερο μέρος της διατριβής αφορά χώρους Banach με διαχωρίσιμο συζυγή οι οποίοι εμφυτεύονται σε $\mathcal{L}^\infty$ χώρους με πολύ λίγους τελεστές. Το περιεχόμενο του δεύτερου μέρους σχετίζεται με δύο ερευνητικές εργασίες, η πρώτη εκ των οποίων είναι δημοσιευμένη ([6]) ενώ η δεύτερη είναι υπο προετοιμασία ([7]). Ακριβέστερα, οι D. Freeman, E. Odell, Th. Schlumprecht ([27]) τροποποιώντας με διαφορετικό τρόπο τη μέθοδο των Bourgain-Delbaen απέδειξαν ότι αν X είναι ένας χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή, τότε ο X εμφυτεύεται σε έναν $\mathcal{L}_\infty$ χώρο Banach με συρρικνούσα βάση και συζυγή ισόμορφο με τον ℓ_1. Συνδυάζοντας μία κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου στο [27] με τη μέθοδο των Argyros-Haydon προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα που αποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 2.

Θεώρημα 0.2. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή X^*. Τότε ο X εμφυτεύεται σε έναν $\mathcal{L}_\infty$ χώρο Banach με διαχωρίσιμο συζυγή, που συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :*

1. *Ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/X$ είναι καθολικά αδιάσπαστος και έχει την scalar-plus-compact ιδιότητα.*
2. *Αν ο ℓ_1 δεν περιέχεται συμπληρωματικά στον X^* τότε ο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έχει την scalar-plus-compact ιδιότητα.*

Σημειώνουμε ότι αυτό περιλαμβάνει και την περίπτωση που ο ℓ_1 δεν περιέχεται ισομορφικά στον συζυγή X^*.

Το παραπάνω θεώρημα στην ειδική περίπτωση που ο X είναι διαχωρίσιμος ομοιόμορφα κυρτός είναι το κεντρικό αποτέλεσμα της ερευνητικής εργασίας ([6]) και δείχνει ότι η δομή του υποχώρου σε έναν χώρο Banach με την "scalar plus compact" ιδιότητα μπορεί να είναι αρκετά πλούσια ακόμα και να περιέχει unconditional βασικές ακολουθίες, γεγονός που δεν είναι εφικτό στην περίπτωση του [10], καθώς ο χώρος που κατασκευάζεται είναι καθολικά αδιάσπαστος. Για παράδειγμα, από το Θεώρημα 0.2 προκύπτει ότι υπάρχει $\mathcal{L}^\infty$ χώρος με την scalar-plus-compact ιδιότητα που περιέχει τον χώρο Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$.

Μία ακόμη συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι ότι κάθε διαχωρίσιμος ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach εμφυτεύεται σε έναν αδιάσπαστο χώρο Banach με διαχωρίσιμο συζυγή. Αναφορικά με το τελευταίο υπενθυμίζουμε ότι στο [15] οι Σ. Αργυρός και Θ. Ραικόφτσαλης απέδειξαν ότι κάθε διαχωρίσιμος αυτοπαθής χώρος Banach εμφυτεύεται σε ένα διαχωρίσιμο αυτοπαθή και αδιάσπαστο χώρο. Τέλος, σημειώνουμε ότι παραμένει ανοικτό αν κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει τον c_0 εμφυτεύεται σε έναν $\mathcal{L}^\infty$ χώρο με την scalar-plus-compact ιδιότητα.

Στο Κεφάλαιο 3 αναπτύσσουμε τα αποτελέσματα της τέταρης εργασίας ([46]) που πρόσφατα υποβλήθηκε για δημοσίευση. Σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται μία μέθοδος δημιουργίας ευθέων αθροισμάτων με εξωτερική νόρμα που προέρχεται από την μέθοδο των Bourgain-Delbaen ([23]). Πιο συγκεκριμένα, δοσμένης μιας ακολουθίας διαχωρίσιμων χώρων Banach, $(X_n)_n$, ορίζουμε το $\mathcal{L}^\infty$ ευθύ άθροισμα,

$(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ και τροποποιώντας κατάλληλα τη μέθοδο στο [23] παρουσιάζουμε τη μέθοδο κατασκευής τους.

Αναφέρουμε ότι στο [5] οι Σ. Αργυρός και Β. Φελουζής όρισαν τα Schauder αθροίσματα μίας ακολουθίας διαχωρίσιμων χώρων Banach $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus X_n)_{GM}$ όπου η εξωτερική νόρμα προέρχεται από τη μέθοδο κατασκευής των Gowers- Maurey [33]. Επίσης, στο[14] οι Σ. Αργυρός και Θ. Ραικόφτσαλης μελέτησαν περαιτέρω τους χώρους $\mathfrak{X}_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_p)_{GM}$ για $1 \le p < \infty$, $\mathfrak{X}_0 = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus c_0)_{GM}$ καθώς και τον χώρο των φραγμένων, γραμμικών τελεστών τους. Ειδικότερα, στην ίδια εργασία αποδεικνύεται ότι αν $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_p$ ή $\mathfrak{X}_0$ ο χώρος $\mathfrak{X}^n = (\sum_{i=1}^n \oplus \mathfrak{X})_\infty$ έχει τουλάχιστον $n+1$, μη ισόμορφους ανά δύο συμπληρωματικούς υποχώρους και τίθεται σαν ανοικτό πρόβλημα το ερώτημα αν είναι ακριβώς $n+1$. Παρά το γεγονός ότι δε δίνουμε καταφατική απάντηση σε αυτό το ερώτημα, ακολουθώντας τα γενικό βήματα της εργασίας [10] παρουσιάζουμε μία μέθοδο κατασκευής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χώρων Banach που έχουν ακριβώς $n+1$,μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.

Πιο συγκεκριμένα, εξειδικεύουμε τη μέθοδο κατασκευής των ευθέων αθροισμάτων $(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ στην περίπτωση που η εξωτερική Bourgain-Delbaen νόρμα προέρχεται από την παραλλαγή των Argyros-Haydon ([10]) και μελετάμε τις ειδικές περιπτωσεις $\mathcal{Z}_p = (\sum_n \oplus \ell_p)_{AH}$, για $1 < p < \infty$. Σαν εφαρμογή έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

Θεώρημα 0.3. *Για κάθε $1 \le p < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $\mathcal{Z}_p^n = (\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{Z}_p)_\infty$ έχει ακριβώς $n+1$, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.*

Ανάλογα αποτελέσματα χώρων Banach με ακριβώς n- συμπληρωματικούς υπόχωρους έχουν προηγηθεί στο παρελθόν με τη χρήση διαφορετικών τεχνικών. Για την ακρίβεια, ο P. Wojtasczszyk στο [44] και οι P. Wojtasczszyk, I.S. Edelstein στο [25] απέδειξαν ότι κάθε συμπληρωματικός υπόχωρος του $\sum_{i=1}^n \oplus \ell_{p_i}$ είναι της μορφής $\sum_{k=1}^r \oplus \ell_{p_{i_k}}$ και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο διαχωρίσιμος χώρος $\sum_{i=1}^n \oplus \ell_{p_i}$ έχει ακριβώς $2^n - 1$ συμπληρωματικούς υποχώρους. Επίσης, όπως επισημαίνεται στο [26], οι W.T. Gowers, B. Maurey στο [32] κατασκεύασαν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έναν χώρο Banach X_n που έχει ακριβώς n, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους ενώ για την απόδειξη αυτού χρησιμοποίησαν αποτελέσματα από K-theory. Ο δικός μας τρόπος προσέγγισης στηρίζεται σε επιχειρήματα και τεχνικές που αναπτύχθηκαν στις εργασίες [10] και [14].

Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτήν την ενότητα θα υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα που θα θεωρούμε γνωστά για τη συνέχεια. Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό των διαχωρίσιμων $\mathcal{L}_\infty$ χώρων Banach.

Ορισμός 0.4. Ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach X λέγεται $\mathcal{L}_\infty$ αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία υποχώρων του, $(X_n)_n$, πεπερασμένης διάστασης ώστε η ένωσή τους $\cup_n X_n$ είναι πυκνή στον X και ο X_n είναι C-ισόμορφος με τον $\ell_\infty(dim X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπενθυμίζουμε ότι δύο χώροι Banach X, Y λέγονται C-ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ που ικανοποιεί τη σχέση $\|T\|\|T^{-1}\| \leq C$.

Συνεχίζουμε με το ακόλουθο κριτήριο που αποδεικνύεται στο [16] και έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές κατασκευές καθολικά αδιάσπαστων χώρων ([10],[7],[46]).

Λήμμα 0.5. *Έστω X χώρος Banach. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο χώρος X καθολικά αδιάσπαστος.*
2. *Για κάθε Y, Z απειροδιάστατους και κλειστούς υποχώρους του X ισχύει ότι $\mathrm{dist}(S_Y, S_Z) = 0$.*
3. *Για κάθε Y, Z απειροδιάστατους και κλειστούς υποχώρους του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν στοιχεία $y \in Y$, $z \in Z$ έτσι ώστε $\|y - z\| < \varepsilon \|y + z\|$.*

Οι χώροι που θα κατασκευαστούν στις επόμενες ενότητες έχουν Schauder διάσπαση που ορίζεται ως ακολούθως :

Έστω X χώρος Banach και $(X_n)_{n=1}^\infty$ μία ακολουθία απειροδιάστατων υποχώρων του X. Η $(X_n)_n$ λέγεται Schauder διάσπαση του X και συμβολίζεται ως $X = \sum_{n=1}^\infty \oplus X_n$, αν για κάθε στοιχείο x του X υπάρχουν μοναδικά $x_n \in X_n$ ώστε $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Στην ειδική περίπτωση που $\dim X_n < \infty$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, η Schauder διάσπαση του X, $(X_n)_n$, λέγεται FDD για τον X ενώ αν $\dim X_n = 1$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ τότε η $(X_n)_n$ λέγεται Schauder βάση του X.

Μία ακολουθία $(z_n)_n$ στον X λέγεται Schauder βασική αν είναι Schauder βάση για τον υπόχωρο $\overline{\langle z_n : \ n \in \mathbb{N} \rangle}$. Επιπλέον, λέγεται unconditional αν οποτεδήποτε η σειρά $\sum_n a_n z_n$ συγκλίνει για κάποια ακολουθία $(a_n)_n$ πραγματικών αριθμών συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_n \varepsilon_n a_n z_n$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$.

Είναι γνωστό ότι κάθε χώρο Banach με unconditional Schauder βάση δεν είναι αδιάσπαστος. Για την ακρίβεια, η δομή ενός τέτοιου χώρου είναι αρκετά διαφορετική από τη δομή ενός καθολικά αδιάσπαστου χώρου όπως φαίνεται και από την ακόλουθη ειδική περίπτωση της διχοτομίας του Gowers ([31]):

Θεώρημα 0.6. *Ένας χώρος Banach περιέχει είτε unconditional Schauder βασική ακολουθία ή καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο.*

Από [40] έχουμε ότι η $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Schauder διάσπαση του X αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ και προβολές $P_{[1,n]} : X \to X$ ώστε $\|P_{[1,n]}\| \leq C$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $P_{[1,n]} \circ P_{[1,m]} = P_{[1,\min\{n,m\}]}$ για κάθε n, m και $X = \overline{\cup_n P_{[1,n]}(X)}$. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι η Schauder διάσπαση του X, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, έχει σταθερά C. Επίσης, η Schauder διάσπαση $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ του X λέγεται συρρίκνουσα αν $X^* = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} P^*_{[1,n]}(X^*)}$ όπου $P^*_{[1,n]} : X^* \to X^*$ οι συζυγείς προβολές στον X^*.

Συμβολίζουμε με $c_{00}(\oplus_{n=1}^{\infty} X_n)$ το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία $x \in \oplus_n X_n$ με την ιδιότητα ότι αν $x = \sum_n x_n$ τότε το σύνολο supp$x = \{n : \ \ x_n \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο. Το μικρότερο διάστημα που περιέχει το supp$x$ λέγεται range και συμβολίζεται ως ran$x$. Αν $X_n = \mathbb{R}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $c_{00}(\mathbb{N}) = c_{00}(\oplus_{n=1}^{\infty} X_n)$.

Μία ακολουθία $(x_k)_k$ σε ένα χώρο X με Schauder διάσπαση $(X_n)_n$ λέγεται οριζόντια block(ως προς την $(X_n)_n$) αν υπάρχουν $p_1 < q_1 < \ldots < p_k < q_k < p_{k+1} < \ldots$ φυσικοί αριθμοί ώστε supp$x_k \subset (p_k, q_k]$. Στην περίπτωση που η Schauder διάσπαση είναι FDD η $(x_k)_k$ λέγεται απλώς block. Η $(x_k)_k$ λέγεται νορμαρισμένη αν $\|x_k\| = 1$ για κάθε k και ημινορμαρισμένη αν $\|x_k\| \geq \frac{1}{2}$ για κάθε k. Εύκολα αποδεικνύεται το ακόλουθο κριτήριο.

Λήμμα 0.7. *Η Schauder διάσπαση $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο Banach X είναι συρρίκνουσα αν και μόνο αν κάθε ημινορμαρισμένη (οριζόντια) block ακολουθία είναι ασθενώς μηδενική.*

Κεφάλαιο 1

$\mathcal{L}^\infty$ χώροι ℓ_r κορεσμένοι

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της εργασίας More ℓ_r Saturated $\mathcal{L}^\infty$ spaces([29]) που πραγματοποιήθηκε σε συνεργασία με τους Ι. Γάσπαρη και Μ. Παπαδιαμάντη. Στόχος του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστεί μία μέθοδος κατασκευής, για $1 < r < \infty$, $\mathcal{L}^\infty$ χώρων που επιπλέον είναι ℓ_r κορεσμένοι. Ο τρόπος προσέγγισης στηρίζεται, όπως στο [10], στο συνδυασμό της Bourgain-Delbaen μεθόδου κατασκευής εξωτικών $\mathcal{L}^\infty$ χώρων([23]), με νόρμες τύπου Tsirelson που είναι ισοδύναμες με κάποια ℓ_r νόρμα (όπως [3], [16], [19]). Υπενθυμίζουμε ότι στο [34], οι κλασσικοί Bourgain-Delbaen χώροι $\mathfrak{X}_{a,b}$ με $a < 1$, $b < \frac{1}{2}$ και $a + b > 1$ αποδείχθηκε ότι είναι ℓ_p κορεσμένοι για p που προσδιορίζεται από τη συνθήκες $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $a^q + b^q = 1$.

Το κεφάλαιο χωρίζεται στις ακόλουθες θεματικές ενότητες. Στη δεύτερη, δοθέντος ενός $r \in (1, \infty)$, κατασκευάζουμε ένα χώρο Banach $\mathfrak{X}_r$. Για αυτό, επιλέγουμε πρώτα ένα φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ και μία πεπερασμένη ακολουθία $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ θετικών πραγματικών με $b_1 < 1$, $b_2, b_3, \ldots, b_n < \frac{1}{2}$ ώστε $\sum_{i=1}^n b_i^{r'} = 1$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Ο ορισμός του $\mathfrak{X}_r$ συνδυάζει τη μέθοδο των Bourgain-Delbaen με τον χώρο τύπου Tsirelson $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b})$ που, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, είναι ισόμορφος με τον ℓ_r. Ειδικότερα, δείχνουμε ότι αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \theta$, ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b})$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \theta)$, ο οποίος είναι γνωστό ότι είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p \in (1, \infty)$ (δες [16]). Αξίζει να σημειωθεί ότι για $n = 2$ οι χώροι $\mathfrak{X}_r$ ουσιαστικά ταυτίζονται με τους κλασσικούς χώρους Bourgain-Delbaen $\mathfrak{X}_{a,b}$. Επομένως, αυτή η κατασκευή των $\mathcal{L}^\infty$ ℓ_r κορεσμένων χώρων, μπορεί να θεωρηθεί μία γενίκευση της μεθόδου των Bourgain-Delbaen. Τονίζουμε ότι για $n = 2$, η απόδειξη ότι ο $\mathfrak{X}_r$ είναι ℓ_r κορεσμένος, διαφέρει από την αντίστοιχη του R. Haydon ([34]) για τον $\mathfrak{X}_{a,b}$.

Πιο συγκεκριμένα, ο $\mathfrak{X}_r$ έχει μία φυσιολογική FDD (M_k). Δοθέντος μίας νορμαρισμένης skipped block βάσης (u_k) της (M_k) με τα support των u_k να απέχουν αρκετά, είναι σχετικά εύκολο να αποδειχθεί ότι η $(u_k)_k$ κυριαρχεί την $(e_k)_k$, που είναι συνήθη βάση του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b})$. Το ίδιο συμβαίνει για κάθε νορμαρισμένη block της $(u_k)_k$. Για να κατασκευάσουμε μία νορμαρισμένη block βάση της $(u_k)_k$ $(e_k)_k$, επιλέγουμε μία ακολουθία $I_1 < I_2 < \ldots$ από successive πεπερασμένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε $\lim_k \|\sum_{i \in I_k} u_i\| = \infty$. Αυτή η επιλογή είναι εφικτή καθώς η $(e_k)_k$ κυριαρχείται από την $(u_k)_k$. Θέτουμε $v_k = \|\sum_{i \in I_k} u_i\|^{-1} \sum_{i \in I_k} u_i$ και δείχνουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(v_k)_k$ κυριαρχείται από την $(e_k)_k$. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, εισάγουμε σε αυτή τη κατασκευή τη μέθοδο ανάλυσης στοιχείων μίας πεπερασμένης block της $(e_k)_k$ ως προς ένα συναρτησιακό που ανήκει στο norming σύνολο του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ (δες [20]). Το υπόλοιπο της ενότητας περιλαμβάνει την απόδειξη της κεντρικής ιδιότητας του $\mathfrak{X}_r$, δηλαδή ότι είναι ℓ_r κορεσμένος.

Στην Ενότητα 3, ορίζουμε τη δενδροειδή ανάλυσητ ων συναρτησιακών $\{e^*_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ που είναι 1-norming υποσύνολο της μοναδιαία μπάλας $\mathfrak{X}^*_r$. Η δενδροειδής ανάλυση είναι παρόμοια με αυτήν που συναντάται στου χώρους τύπου Tsirelson και mixed Tsirelson [16]. Στις επόμενες ενότητες αποδεικνύουμε τις άνω και κάτω εκτιμήσεις block ακολουθιών του χώρου $\mathfrak{X}_r$.

Στην τελευταία ενότητα δείχνουμε ότι για κάθε block (ως προς την $(M_k)_k$) υπάρχει περαιτέρω νορμαρισμένη block $(x_k)_k$ ώστε κάθε νορμαρισμένη block της $(x_k)_k$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα του Zippin [45].

1.1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τον χώρο $\mathfrak{X}_r$ συνδυάζοντας την Bourgain-Delbaen μέθοδο κατασκευής [23] με κατασκευές τύπου Tsirelson [3], [16].

Πρίν προχωρήσουμε, θα υπενθυμίσουμε κάποιους ορισμούς και συμβολισμούς από το [10]. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $0 < b_1, b_2, ..., b_n < 1$ με $\sum_{i=1}^n b_i > 1$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $r' \in (1, \infty)$ ώστε $\sum_{i=1}^n {b_i}^{r'} = 1$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$. Ορίζουμε $W[(\mathcal{A}_n, \bar{b})]$ ως το μικρότερο υποσύνολο W του $c_{00}(\mathbb{N})$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. $\pm e^*_k \in W$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$,
2. οποτεδήποτε $f_i \in W$ και $\operatorname{maxsupp} f_i < \operatorname{minsupp} f_{i+1}$ για κάθε i, έχουμε ότι $\sum_{i \le a} b_i f_i \in W$ για κάθε $a \le n$.

Λέμε ότι ένα στοιχείο f του $W[(\mathcal{A}_n, \bar{b})]$ είναι τύπου 0 αν $f = \pm e^*_k$ για κάποιο k και τύπου I διαφορετικά. Ένα στοιχείο τύπου I λέμε ότι έχει βάρος b_a για κάποιο $a \le n$ αν $f = \sum_{i=1}^a f_i$ για κατάλληλη ακολουθία (f_i) successive στοιχείων του $W[\mathcal{A}_n, \bar{b}]$.
Ι *Tsirelson* χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ ορίζεται ως η πλήρωση του c_{00} ως προς τη νόρμα

$$\|x\| = \sup\{\langle f, x\rangle : f \in W[\mathcal{A}_n, \bar{b}]\}.$$

Η νόρμα αυτή ορίζεται εναλλακτικά ως η μικρότερη συνάρτηση $x \mapsto \|x\|$ που ικανοποιεί το ακόλουθο:

$$\|x\| = \max\left\{\|x\|_\infty, \sup \sum_{i=1}^n b_i \|E_i x\|\right\},$$

όπου το supremum θεωρείται πάνω σε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε $E_1 < E_2 < \cdots < E_n$.

Τώρα παρουσιάζουμε τα βασικά στοιχεία που πλαισιώνουν την κατασκευή τύπου Bourgain-Delbaen που θα χρησιμοποιήσουμε.
Η μέθοδος που ακολουθεί μπορεί να χαρακτηριστεί ως η δυική κατασκευή της κατασκευής που παρουσιάζεται στο [10]. Αυτός ο χαρακτηρισμός στηρίζεται στο γεγονός ότι στο [10] ο Bourgain-Delbaen χώρος X ορίζεται ως ο προσυζυγής του $\ell_1(\Gamma)$ για κάποιο αριθμήσιμο Γ, όπου θεωρούμε τον $\ell_1(\Gamma)$ με βάση διαφορετική από τη συνήθη.

Έστω $(\Gamma_q)_{q\in\mathbb{N}}$ μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία πεπερασμένων συνόλων και συμβολίζουμε την ένωσή τους με Γ, $\Gamma = \cup_{q\in\mathbb{N}}\Gamma_q$.
Θέτουμε $\Delta_0 = \Gamma_0$ και $\Delta_q = \Gamma_q \setminus \Gamma_{q-1}$ για $q = 1, 2, \ldots$
Υποθέτουμε ακόμη ότι για κάθε $\gamma \in \Delta_q$, $q \geq 1$, έχουμε ορίσει ένα γραμμικό συναρτησιακό $c^*_\gamma : \ell^\infty(\Gamma_{q-1}) \to \mathbb{R}$. Στην συνέχεια, για $n < m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) ορίζουμε με επαγωγή, ένα γραμμικό τελεστή $i_{n,m} : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma_m)$ ως εξής :
Για $m = n + 1$, ορίζουμε $i_{n,n+1} : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma_{n+1})$ με τον κανόνα

$$(i_{n,n+1}(x))(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma), \text{ αν } \gamma \in \Gamma_n \\ c^*_\gamma(x), \text{ αν } \gamma \in \Delta_{n+1} \end{cases}$$

για κάθε $x \in \ell^\infty(\Gamma_n)$.
Υποθέτοντας ότι οι $i_{n,m}$ έχουν οριστεί, θέτουμε $i_{n,m+1} = i_{m,m+1} \circ i_{n,m}$. Με βάση τον παραπάνω ορισμό, για κάθε $n < l < m$ ισχύει ότι $i_{n,m} = i_{l,m} \circ i_{n,l}$. Τέλος, συμβολίζουμε με $i_n : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \mathbb{R}^\Gamma$ το όριο $i_n = \lim_{m\to\infty} i_{n,m}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n < m$ έχουμε ότι $\|i_{n,m}\| \leq C$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|i_n\| \leq C$ και άρα ο τελεστής $i_n : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma)$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Επιπλέον, θέτοντας $X_n = i_n[\ell^\infty(\Gamma_n)]$, έχουμε ότι $X_n \overset{C}{\approx} \ell^\infty(\Gamma_n)$ και η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία υποχώρων του $\ell^\infty(\Gamma)$. Τέλος, θέτουμε $\mathfrak{X}_{BD} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} \hookrightarrow \ell^\infty(\Gamma)$ εφοδιασμένη με την supremum νόρμα. Εξ' ορισμού, ο $\mathfrak{X}_{BD}$ είναι $\mathcal{L}^\infty$ χώρος.

Συμβολίζουμε με $r_n : \ell^\infty(\Gamma) \to \ell^\infty(\Gamma_n)$ τους φυσιολογικούς τελεστές περιορισμού, δηλαδή $r_n(x) = x|_{\Gamma_n}$. ΘΑ χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό $r_n : \ell^\infty(\Gamma_m) \to \ell^\infty(\Gamma_n)$ για τους τελεστές περιορισμού από τον $\ell^\infty(\Gamma_m)$ στον $\ell^\infty(\Gamma_n)$ για $n < m$.

Συμβολισμοί-Έννοιες 1.1.

(i) Συμβολίζουμε με e^*_γ τον περιορισμό του μοναδιαίου διανύσματος $e^*_\gamma \in \ell^1(\Gamma)$ στον χώρο $\mathfrak{X}_{BD}$.

(ii) Επεκτείνουμε το συναρτησιακό $c^*_\gamma : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \mathbb{R}$ σε ένα συναρτησιακό $c^*_\gamma : \mathfrak{X}_{BD} \to \mathbb{R}$ με τον κανόνα $c^*_\gamma(x) = (c^*_\gamma \circ r_{q-1})(x)$ για $\gamma \in \Delta_q$.

Όπως στο [10] και στο [23], για λόγους πρακτικότητας επιλέγουμε να εργαστούμε με μία FDD του $\mathfrak{X}_{BD}$ (αντί με μία Schauder βάση).

Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ θέτουμε $M_q = i_q[\ell^\infty(\Delta_q)]$.

Στην ακόλουθη πρόταση αποδεικνύεται ότι η $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$ είναι πράγματι FDD για τον $\mathfrak{X}_{BD}$.

Πρόταση 1.1. *Η ακολουθία $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$ είναι FDD για τον $\mathfrak{X}_{BD}$.*

Απόδειξη. Για $q \geq 0$ ορίζουμε απεικονίσεις $P_{\{q\}} : \mathfrak{X}_{BD} \to M_q$ ως

$$P_{\{q\}}(x) = i_q(r_q(x)) - i_{q-1}(r_{q-1}(x))$$

Είναι εύκολα εξέγξιμο ότι ο τελεστής $P_{\{q\}}$ είναι προβολή επί του M_q και μάλιστα για κάθε $q_1 \neq q_2$ και $x \in M_{q_2}$ έχουμε ότι $P_{\{q_1\}}(x) = 0$. Επίσης, $\|P_q\| \leq 2C$. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται προβολές πάνω σε διαστήματα $I = (p, q]$ ώστε $P_I(x) = \sum_{i=p+1}^{q} P_{\{i\}}(x)$ με τον κανόνα

$$P_I(x) = i_q(r_q(x)) - i_p(r_p(x))$$

Σημειώνουμε ότι $\|P_I\| \leq 2C$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $(M_q)_q$ είναι FDD που παράγει τον $\mathfrak{X}_{BD}$. □

Για $x \in \mathfrak{X}_{BD}$ συμβολίζουμε με supp$x$ το σύνολο supp$x = \{q : P_{\{q\}}(x) \neq 0\}$ και με ran$x$ το μικρότερο διάστημα του $\mathbb{N}$ που περιέχει το supp$x$.

Ορισμός 1.2. Μία block ακολουθία $(x_i)_{i=1}^\infty$ στον $\mathfrak{X}_{BD}$ λέγεται skipped (ως προς την $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$), αν υπάρχει υπακολουθία $(q_i)_{i=1}^\infty$ του $\mathbb{N}$ ώστε $\max\operatorname{supp} x_i < q_i < \min\operatorname{supp} x_{i+1}$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Για τη συνέχεια ξεκαθαρίζουμε ότι οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε skipped block ακολουθία εννοούμε ότι είναι skipped block ως προς την $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$.

Έστω $q \geq 0$. Για κάθε $\gamma \in \Delta_q$ θέτουμε $d^*_\gamma = e_\gamma \circ P_{\{q\}}$. Τότε η οικογένεια $(d^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ αποτελείται από τα διορθογώνια συναρτησιακά της FDD $(M_q)_{q\geq 0}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για $\gamma \in \Delta_q$,

$$\begin{aligned} d^*_\gamma(x) &= P_q(x)(\gamma) = i_q(r_q(x))(\gamma) - i_{q-1}(r_{q-1}(x))(\gamma) = \\ &= r_q(x)(\gamma) - c^*_\gamma(r_{q-1}(x)) = x(\gamma) - c^*_\gamma(x) = \\ &= e^*_\gamma(x) - c^*_\gamma(x). \end{aligned}$$

Οι ακολουθίες $(\Delta_q)_{q\in\mathbb{N}}$ και $(c^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ορίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως στο [10], (Ενότητα 4, Θεώρημα 3.5).

Ακολουθεί ένας ακόμη χρήσιμος συμβολισμός. Για επιλεγμένα $n \in \mathbb{N}$ και $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ με $0 < b_1, b_2, \ldots, b_n < 1$, κάθε $\gamma \in \Delta_q$ θα χαρακτηρίζεται από τους ακόλουθους δείκτεσ:

(α) $\operatorname{rank}\gamma = q$,

(β) ηλικία του γ που συμβολίζουμε με $a(\gamma) = a$ έτσι ώστε $2 \leq a \leq n$,

(γ) το βάρος του γ που συμβολίζουμε με $w(\gamma) = b_a$.

Για να προχωρήσουμε στην κατασκευή, Θα πρέπει πρώτα να επιλέξουμε ένα φυσικό αριθμό n και μία φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $b_1, \ldots, b_n$ ώστε $b_1 < 1$, $b_i < \frac{1}{2}$, για κάθε $i = 2, \ldots, n$ και $\sum_{i=1}^n b_i > 1$. Έστω $r \in (1, \infty)$ ώστε $\sum_{i=1}^n b_i^{r'} = 1$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Τώρα θα ορίσουμε το χώρο $\mathfrak{X}_r$ με χρήση της Bourgain-Delbaen κατασκευής που περιγράφηκε προηγουμένως.

Θέτουμε $\Delta_0 = \emptyset$, $\Delta_1 = \{0\}$ και επαγωγικά ορίζουμε για κάθε $q > 1$ το σύνολο Δ_q.

Υποθέτουμε ότι τα σύνολο Δ_p έχουν οριστεί για κάθε $p \leq q$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} \Delta_{q+1} &= \big\{(q+1, a, p, \eta, \varepsilon e^*_\xi) : \ 2 \leq a \leq n, p \leq q, \ \varepsilon = \pm 1, \ e^*_\xi \in S_{\ell^1(\Gamma_q)}, \ \xi \in \Gamma_q \setminus \Gamma_p, \\ &\quad\ \eta \in \Gamma_p, \ b_{a-1} = w(\eta)\big\} \end{aligned}$$

Για $\gamma \in \Delta_{q+1}$ είναι άμεσο ότι με βάση τα προηγούμενα ότι η πρώτη συντεταγμένη είναι η τάξη $\operatorname{rank}(\gamma)$ του γ, ενώ η δεύτερη είναι η ηλικία $a(\gamma)$ του γ. Τα συναρτησιακά $(c^*_\gamma)_{\gamma\in\Delta_{q+1}}$ ορίζονται με μοναδικό τρόπο για $\gamma \in \Delta_{q+1}$. Για την ακρίβεια, έστω $x \in \ell^\infty(\Gamma_q)$.

(i) Για $\gamma = (q+1, 2, p, \eta, \varepsilon e^*_\xi)$ θέτουμε

$$c^*_\gamma(x) = b_1 x(\eta) + b_2 \varepsilon e^*_\xi\big(x - i_{p,q}(r_p(x))\big).$$

(ii) Για $\gamma = (q+1, a, p, \eta, \varepsilon e^*_\xi)$ με $a > 2$ θέτουμε

$$c^*_\gamma(x) = x(\eta) + b_a \varepsilon e^*_\xi\big(x - i_{p,q}(r_p(x))\big).$$

Τώρα πια μπορούμε να ορίσουμε τις ακολουθίες (i_q), (Γ_q), (X_q) όπως πριν και θέτουμε $\mathfrak{X}_r = \overline{\bigcup_{q\in\mathbb{N}} X_q}$. Θα δείξουμε ότι η (i_q) είναι ομοιόμορφα φραγμένη από μία σταθερά $C > 0$ και άρα ο χώρος $\mathfrak{X}_r$ είναι ένας υπόχωρος του $\ell_\infty(\Gamma)$. Η σταθερά C προσδιορίζεται όπως στο [10] Θεώρημα 3.4 και προκύπτει ότι $C = \frac{1}{1-2b_2}$. Επομένως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\|i_m\| \le C$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|P_I\| \le 2C$ για κάθε I διάστημα του $\mathbb{N}$.

Παρατήρηση 1.1. *Στην περίπτωση που $n = 2$, δηλαδή $\bar{b} = (b_1, b_2)$, ο χώρος $\mathfrak{X}_\mathfrak{r}$ στην ουσία ταυτίζεται με τον Bourgain-Delbaen χώρο $\mathfrak{X}_{b_1,b_2}$, καθώς κάθε $\gamma \in \Gamma$ είναι ηλικίας 2.*

Παρατήρηση 1.2. *Όπως θα αποδειχθεί στην Πρόταση 1.15, η επιλογή του r, που εξαρτάται από τα επιλεγμένα n και $\bar{b}$, έχει σαν αποτέλεσμα ότι $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b}) \cong \ell_r$. Επίσης, τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των χώρων τύπου Tsirelson που θα χρησιμοποιηθούν είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα στο [10]. Η βασική διαφορά είναι ότι στη δική μας περίπτωση θα χρειαστεί μία μόνο οικογένεια $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ για κάποια κατάλληλα n και $\bar{b}$.*

1.2 Η ανάλυση των συναρτησιακών $(e^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$

Σε αυτή την ενότητα αρχικά θα ορίσουμε την ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ όπως παρουσιάστηκε στο [10] (Ενότητα 4). Η μόνη διαφορά στη δική μας περίπτωση είναι ότι τα συναρτησιακά e^*_γ έχουν βάρος που εξάρτάται από την ηλικία τους η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2.

1.2.1 Η εκτιμήτρια ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ

Για $q \in \mathbb{N}$ κάθε στοιχείο $\gamma \in \Delta_{q+1}$ δέχεται μία μοναδική ανάλυση που ορίζεται ως εξής:
Έστω $a(\gamma) = a \le n$. Με χρήση επαγωγής βρίσκουμε μία ακολουθία $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \cup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(i) $p_1 < q_1 < \cdots < p_a < q_a = q$.

(ii) $\varepsilon_i = \pm 1,\ \operatorname{rank}\xi_i \in (p_i, q_i]$ για $1 \le i \le a$ και $\operatorname{rank}\eta_i = q_i + 1$ για κάθε $2 \le i \le a$.

(iii) $\eta_a = \gamma$, $\eta_i = (\operatorname{rank}\eta_i, i, p_i, \eta_{i-1}, \varepsilon_i e^*_{\xi_i})$ για κάθε $i > 2$
$\eta_2 = (\operatorname{rank}\eta_2, 2, p_2, \varepsilon_1\xi_1, \varepsilon_2 e^*_{\xi_2})$ και $(p_1, q_1] = (1, \operatorname{rank}\xi_1]$.

Ορισμός 1.3. Έστω $q \in \mathbb{N}$ και $\gamma \in \Gamma_q$. Τότε η ακολουθία $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \cup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες λέγεται ανάλυση του γ.

Επιπρόσθετα, ακολουθώντας παρόμοια επιχειρήματα με το [10] (Πρόταση 4.6) δείχνουμε ότι,

$$e^*_\gamma = \sum_{i=2}^a d^*_{\eta_i} + \sum_{i=1}^a b_i\varepsilon_i e^*_{\xi_i} \circ P_{(p_i,q_i]} = \sum_{i=2}^a e^*_{\eta_i} \circ P_{\{q_i+1\}} + \sum_{i=1}^a b_i\varepsilon_i e^*_{\xi_i} \circ P_{(p_i,q_i]}.$$

Η ανάλυση του γ που δίνεται στη παραπάνω μορφή λέγεται εκτιμήτρια ανάλυση του γ. Θέτουμε $g_\gamma = \sum_{i=2}^{a} d^*_{\eta_i}$ και $f_\gamma = \sum_{i=1}^{a} b_i \varepsilon_i e^*_{\xi_i} \circ P_{(p_i,q_i]}$.

1.2.2 Η r - ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ

Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $\gamma \in \Delta_{q+1}$ με ηλικία $a(\gamma) = a \leq n$ και ανάλυση $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \bigcup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ η ανάλυση του γ. Η r-ανάλυση του e^*_γ ορίζεται ως εξής :

(α) Αν $r \leq p_1$, τότε η r-ανάλυση του e^*_γ ταυτίζεται με την ανάλυση του e^*_γ.

(β) Αν $r \geq q_a$, η r-ανάλυση του e^*_γ δεν ορίζεται και τότε λέμε ότι το e^*_γ είναι r-αδιάσπαστο.

(γ) Αν $p_1 < r < q_a$, ορίζουμε $i_r = \min\{i : r < q_i\}$. Σημειώνουμε ότι αυτό είναι καλά ορισμένο και η r-ανάλυση του e^*_γ είναι η τριπλέτα

$$\{(p_i, q_i]\}_{i \geq i_r}, \{\varepsilon_i \xi_i\}_{i \geq i_r}, \{\eta_i\}_{i \geq \max\{2, i_r\}}.$$

όπου p_{i_r} είναι είτε το ίδιο ή r στην περίπτωση που $r > p_{i_r}$.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια της δενδροειδούς ανάλυσης του e^*_γ που είναι παρόμοια με αυτή που ορίζεται στα συναρτησιακά των Mixed Tsirelson χώρων (δες [16] Κεφάλαιο II.1). Όπως θα φανεί στη συνέχεια η ανάλυση και η r-ανάλυση του e^*_γ αποτελούν το πρώτο επίπεδο της δενδροειδούς ανάλυσης του e^*_γ που πρόκειται να παρουσιάσουμε.

Για τα επόμενα, συμβολίζουμε με $(\mathcal{T}, " \preceq ")$ ένα πεπερασμένο, μερικά διατεταγμένο σύνολο που είναι δένδρο. Τα στοιχεία του είναι πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών με τη μερική διάταξη $t \preceq s$ αν και μόνο αν t είναι αρχικό διάστημα του s. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$, συμβολίζουμε με S_t τους αμέσους επόμενους του t ως προς τη μερική διάταξη που ορίστηκε προηγουμένως.

Υποθέτουμε τώρα ότι $(p_t, q_t]_{t \in \mathcal{T}}$ είναι ένα δένδρο από διαστήματα του $\mathbb{N}$ ώστε $t \preceq s$ αν και μόνο αν $(p_t, q_t] \supset (p_s, q_s]$ και t, s ασύμβατα αν και μόνο αν $(p_t, q_t] \cap (p_s, q_s] = \emptyset$. Για μία τέτοια οικογένεια $(p_t, q_t]_{t \in \mathcal{T}}$ και t, s ασύμβατα γράφουμε $t < s$ αν και μόνο αν $(p_t, q_t] < (p_s, q_s]$ (δηλαδή $q_t < p_s$).

1.2.3 Η δενδροειδής ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ

Έστω $\gamma \in \Delta_{q+1}$ με $a(\gamma) = a \leq n$. Μία οικογένεια της μορφής $\mathcal{F}_\gamma = \{\xi_t, (p_t, q_t]\}_{t \in \mathcal{T}}$ λέγεται δενδροειδής ανάλυση του e^*_γ αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα :

1. Το $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο δέντρο με μοναδική ρίζα το $\emptyset$.
2. Θέτουμε $\xi_\emptyset = \gamma$,$(p_\emptyset, q_\emptyset] = (1, q]$ και έστω $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \bigcup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ η ανάλυση του $\xi_\emptyset$. Θέτουμε $S_\emptyset = \{(1), (2), \ldots, (a)\}$ και για κάθε $s = (i) \in S_\emptyset$, $\{\xi_s, (p_s, q_s]\} = \{\xi_i, (p_i, q_i]\}$.
3. Υποθέτουμε ότι για $t \in \mathcal{T}$ $\{\xi_t, (p_t, q_t]\}$ έχει οριστεί. Ένα από τα επόμενα ισχύει:

(α΄) Αν το $e^*_{\xi_t}$ είναι p_t-διασπάσιμο, έστω

$$\{(p_i,q_i]\}_{i\geq i_{p_t}},\{\varepsilon_i\xi_i\}_{i\geq i_{p_t}},\{\eta_i\}_{i\geq \max\{2,i_{p_t}\}}$$

η p_t-ανάλυση του $e^*_{\xi_t}$. Θέτουμε $S_t=\{(t^\frown i): i\geq i_{p_t}\}$ και

$$S_t^{p_t}=\begin{cases} S_t, \text{ αν } \eta_{i_{p_t}} \text{ υπάρχει} \\ S_t\diagdown\{(t^\frown i_{p_t})\}, \text{ διαφορετικά}\end{cases}$$

Τότε, για κάθε $s=(t^\frown i)\in S_t$, θέτουμε $\{\xi_s,(p_s,q_s]\}=\{\xi_i,(p_i,q_i]\}$ όπου $\{\varepsilon_i\xi_i,(p_i,q_i]\}$ είναι μέλος της p_t-ανάλυσης του $e^*_{\xi_t}$.

(β΄) το $e^*_{\xi_t}$ είναι p_t-αδιάσπαστο και τότε λέμε ότι το ξ_t αποτελεί μεγιστικό κόμβο του $\mathcal{F}_\gamma$.

Συμβολισμοί-Έννοιες 1.2. *Για τα επόμενα θα χρειαστεί το ακόλουθο:*
Για κάθε $t\in\mathcal{T}$, $e^*_{\xi_t}=f_t+g_t$, *όπου* $f_t=\sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s e^*_{\xi_s}\circ P_{(p_s,q_s]}$, $g_t=\sum_{s\in S_t^{p_t}} d^*_{\eta_s}$ *και για* $s=(t^\frown i)\in S_t^{p_t}$, $\eta_{(t^\frown i)}=(\operatorname{rank}\eta_{(t^\frown i)},i,p_{(t^\frown i)},\eta_{(t^\frown i-1)},\varepsilon_{(t^\frown i)}e^*_{\xi_{(t^\frown i)}})$.
Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, $f_t=f_{\xi_t}$ *και* $g_t=g_{\xi_t}$.

Λήμμα 1.4. *Έστω* $x\in\mathfrak{X}_r$ *και* $\gamma\in\Gamma$. *Τότε,*

$$e^*_\gamma(x)=\prod_{\emptyset\preceq s\preceq t_x}(\varepsilon_s b_s)(f_{t_x}+g_{t_x})(x),$$

όπου $t_x=\max\{t:\mathit{ran}x\subseteq(p_t,q_t]\}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_\gamma=\{\xi_t,(p_t,q_t]\}_{t\in\mathcal{T}}$ η δενδροειδής ανάλυση του γ.
Αν $\{t:\operatorname{ran}x\subseteq(p_t,q_t]\}=\emptyset$, τότε $e^*_\gamma(x)=f_\emptyset(x)+g_\emptyset(x)$ και η ισότητα ισχύει.
Αν $\{t:\operatorname{ran}x\subseteq(p_t,q_t]\}\neq\emptyset$, μπορούμε να βρούμε $\{t_1\prec t_2\prec\ldots\prec t_m\}\in\mathcal{T}$ ώστε $t_1\in S_\emptyset$ και $t_m=t_x$.
Για κάθε $t\in\mathcal{T}$ με $t\prec t_x$, $g_t(x)=0$. Πράγματι, για κάθε $s\in S_t^{p_t}$, $d^*_{\eta_s}(x)=e^*_{\eta_s}\circ P_{\{q_s+1\}}(x)=0$ επειδή $\operatorname{ran}x\subseteq(p_{t_x},q_{t_x}]\subseteq(p_s,q_s]$.
Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} e^*_\gamma(x) &= f_\emptyset(x)=\sum_{s\in S_\emptyset} b_s\varepsilon_s e^*_{\xi_s}\circ P_{(p_s,q_s]}(x)=b_{t_1}\varepsilon_{t_1}e^*_{\xi_{t_1}}(x)\\ &= b_{t_1}\varepsilon_{t_1}f_{t_1}(x)=b_{t_1}\varepsilon_{t_1}b_{t_2}\varepsilon_{t_2}e^*_{\xi_{t_2}}\circ P_{(p_{t_2},q_{t_2}]}(x)=b_{t_1}b_{t_2}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}e^*_{\xi_{t_2}}(x)\\ &= b_{t_1}b_{t_2}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}f_{t_2}(x)=\ldots=\prod_{\emptyset\preceq s\preceq t_x}(\varepsilon_s b_s)(f_{t_x}+g_{t_x})(x)\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $\varepsilon_\emptyset=b_\emptyset=1$. □

Πόρισμα 1.5. *Αν* $(f_{t_x},(p_{t_x},q_{t_x}])$ *είναι μεγιστικός κόμβος, τότε* $e^*_\gamma(x)=0$.

Απόδειξη. Έστω $(f_{t_x},(p_{t_x},q_{t_x}])$ ένας μεγιστικός κόμβος. Τότε $f_{t_x}(x)=0$, $g_{t_x}(x)=0$ και άρα από Λήμμα 1.4 καταλήγουμε ότι $e^*_\gamma(x)=0$. □

1.3 Η κάτω εκτίμηση

Ορισμός 1.6. Ένα συναρτησιακό $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ λέγεται proper συναρτησιακό αν δέχεται δενδροειδή ανάλυση $(\phi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ώστε για κάθε μη μεγιστικό κόμβο $t \in \mathcal{T}$ το σύνολο $\{\phi_s : s \in S_t\}$ έχει τουλάχιστον δύο μη μηδενικά στοιχεία.

Συμβολίζουμε με $W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ το υποσύνολο του $W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ που αποτελείται από όλα τα proper συναρτησιακά. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ ισχύει ότι $\phi_t = \sum_{s\in S_t} b_s\phi_s$ όπου $\{b_s\}_{s\in S_t} \subseteq \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και $b_\emptyset = 1$.

Λήμμα 1.7. *Το σύνολο $W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ 1-νορμάρει τον χώρο $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ υπάρχει $g \in W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ ώστε $|\phi(m)| \leq g(m)\ \forall m \in \mathbb{N}$. Επειδή η βάση είναι 1-unconditional αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Έστω $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ και έστω $\{\phi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ η δενδροειδής ανάλυση του ϕ. Παρατηρούμε ότι για $m \in \mathrm{supp}\phi$, υπάρχει ένας μεγιστικός κόμβος $t_m \in \mathcal{T}$ ώστε $\phi_{t_m} = \varepsilon_m e^*_m$ και $\phi(m) = \varepsilon_m \prod\limits_{t<t_m} b_t$.

Για κάθε $m \in \mathrm{supp}\phi$ θέτουμε $K_m = \{t \in \mathcal{T} : t < t_m$ και $\#S_t > 1\}$. Είναι εύκολο να ελεγθεί ότι το συναρτησιακό $g = \sum\limits_{m\in\mathrm{supp}\phi} (\prod\limits_{t\in K_m} b_t)e^*_m$ ανήκει στο $W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Επίσης, επειδή $b_t < 1$ για κάθε $t \in \mathcal{T}$ προκύπτει ότι $|\phi(m)| \leq g(m)\ \forall m \in \mathbb{N}$. □

Λήμμα 1.8. *Έστω $\phi \in W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ και $l \in \mathbb{N}$. Αν $\max\mathrm{supp}\,\phi = l$, τότε $h(\mathcal{T}_\phi) \leq l$.*

Απόδειξη. Έστω θ_n ο αριθμός των κόμβων στο n-οστό επίπεδο του $\mathcal{T}_\phi$. Επειδή το ϕ είναι proper συνεπάγεται ότι $\theta_{n+1} > \theta_n$ για καθε $n \in \mathbb{N}$. Με εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι $h(\mathcal{T}_\phi) > l$, δηλαδή $h(\mathcal{T}_\phi) = l + k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\theta_1 = 1,\ \theta_2 \geq 2,\ \ldots\ ,\ \theta_{l+k} \geq l + k$$

Επειδή το $l + k$- επίπεδο του $\mathcal{T}_\phi$ αποτελείται από συναρτησιακά της μορφής e^*_i συμπεραίνουμε ότι $\max\mathrm{supp}\,\phi \geq l + k > l$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 1.9. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ και έστω $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων ώστε supp$x_k \subset (q_k + k, q_{k+1})$. Τότε για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι*

$$\|\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})} \leq C\|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\|_\infty \tag{1.1}$$

όπου $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ και C ένα άνω φράγμα για τις νόρμες των τελεστών i_m του $\mathfrak{X}_r$.

Απόδειξη. Έστω $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Από Λήμμα 1.7 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το συναρτησιακό ϕ είναι proper. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή πάνω στο ύψος του δέντρου $\mathcal{T}_\phi$.

Αν $h(\mathcal{T}_\phi) = 0$ (δηλαδή f μεγιστικό), τότε το ϕ είναι της μορφής $\phi = \varepsilon_k e^*_k$ με $\varepsilon_k = \pm 1$. Ακόμη διαπιστώνουμε ότι, $|\phi(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k)| = |a_k| = a_k$. Από [10] (Πρόταση 4.8), μπορούμε να επιλέξουμε $\gamma \in \Gamma_{q_{k+1}-1} \backslash \Gamma_{q_k+k}$ ώστε $|x_k(\gamma)| \geq \frac{1}{C}\|x_k\| = \frac{1}{C}$. Τότε, $|\phi(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k)| = a_k \leq C|a_k||x_k(\gamma)| = C|e^*_\gamma(a_k x_k)| \leq C|e^*_\gamma(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k)|$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ με $h(\mathcal{T}_\phi) = h > 0$ και $\max\mathrm{supp}\,\phi = l_0$, υπάρχει $\gamma \in \Gamma$, ώστε:

1. $\gamma \in \Gamma_{q_{l_0+1}+h} \setminus \Gamma_{q_{l_0+1}}$
2. $h(\mathcal{T}_\phi) = h(\mathcal{F}_\gamma) \le l_0$
3. $|\phi(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k)| \le C|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)|$ για κάθε $l \ge l_0$

Από την υπόθεση (1) έπεται ότι $x_{l_0} < \operatorname{rank}\gamma < x_{l_0+1}$, ενώ από την υπόθεση (2) συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{minsupp} x_{l_0+1} - \operatorname{maxsupp} x_{l_0} > h(\mathcal{T}_\phi)$. Πράγματι,

$$x_{l_0} < q_{l_0+1} < \operatorname{rank}\gamma \le q_{l_0+1} + h \le q_{l_0+1} + l_0 < q_{l_0+1} + (l_0+1) < x_{l_0+1}$$

$$\text{και } \operatorname{minsupp} x_{l_0+1} - \operatorname{maxsupp} x_{l_0} > l_0 + 1 > l_0 \ge h(\mathcal{F}_\gamma).$$

Έστω $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ με $h(\mathcal{T}_\phi) = h+1$, $l_0 = \operatorname{maxsupp}\phi$ και έστω $(\phi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ η δενδροειδής ανάλυση του ϕ. Τότε, το ϕ είναι της μορφής $\phi = \sum_{s\in S_\emptyset} b_s\phi_s$, $\#S_\emptyset \le n$. Παρατηρούμε ότι $s \in S_\emptyset$, $h(\mathcal{T}_{\phi_s}) = h$. Θέτουμε $p_1 = 1$, για κάθε $s \in S_\emptyset \diagdown \{1\}$ $p_s = \min\{q_k + k : k \in \text{supp}\phi_s\}$ και για κάθε $s \in S_\emptyset$, θέτουμε $r_s = q_{l_s+1} + h$ όπου $l_s = \operatorname{maxsupp}\phi_s$.
Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\xi_s \in \Gamma_{r_s} \setminus \Gamma_{q_{l_s}+1}$ με $h(\mathcal{T}_{\phi_s}) = h(\mathcal{F}_{\xi_s})$ ώστε

$$\begin{aligned}
|\phi_s(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k)| &= |\phi_s(\sum_{k\in\text{supp}\phi_s} a_k e_k)| \le C\varepsilon_s \sum_{k\in\text{supp}\phi_s} a_k x_k(\xi_s) \\
&= C\varepsilon_s e^*_{\xi_s}(\sum_{k\in\text{supp}\phi_s} a_k x_k) = C\varepsilon_s e^*_{\xi_s} \circ P_{(p_s,r_s]}(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k),
\end{aligned}$$

με ε_s ώστε $\varepsilon_s e^*_{\xi_s}(\sum_{k\in\text{supp}\phi_s} a_k x_k) = |\sum_{k\in\text{supp}\phi_s} a_k x_k(\xi_s)|$.

Έστω $\gamma \in \Gamma$ με ανάλυση $\{p_s, r_s, \varepsilon_s e^*_{\xi_s}\}_{s\in S_\emptyset} \bigcup \{\eta_s\}_{s\in S_\emptyset \diagdown \{1\}}$ όπου $\eta_s \in \Delta_{r_s+1}$. Τονίζουμε ότι $\operatorname{rank}\xi_s \in (q_{l_s+1}, r_s] \subset (p_s, r_s]$. Είναι άμσο ότι για κάθε $s \in S_\emptyset \diagdown \{1\}$, $d^*_{\eta_s}(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k) = 0$. Πράγματι,

$$\text{supp} x_{l_s} < q_{l_s+1} < q_{l_s+1} + (h+1) = r_s + 1 \le q_{l_s+1} + (l_s+1) < \text{supp} x_{l_s+1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
|\phi(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k)| &\le \sum_{s\in S_\emptyset} |b_s\phi_s(\sum_{k\in\text{supp}\phi_s} a_k e_k)| \le C \sum_{s\in S_\emptyset} b_s\varepsilon_s e^*_{\xi_s} \circ P_{(p_s,r_s]}(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k) \\
&\le C|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)|
\end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι $h(\mathcal{T}_\phi) = h(\mathcal{F}_\gamma) \le l_0$ και $x_{l_0} < \operatorname{rank}\gamma < x_{l_0+1}$. □

Πόρισμα 1.10. *Για κάθε block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ υπάρχει περαιτέρω block που ικανοποιεί την ανισότητα (1.1).*

1.4 Η άνω εκτίμηση

Έστω $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$. Από Πόρισμα 1.10, μπορούμε να υποθέσουμε (περνώντας σε περαιτέρω block υπακολουθία της $(y_l)_l$), ότι η $(y_l)_l$ ικανοποιεί την ανισότητα (1.1).
Συνεπώς,

$$\|\sum_{l=1}^m y_l\|_\infty \geq \frac{1}{C}\|\sum_{l=1}^m e_l\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}$$

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, θέτουμε $M_j=\{1,2,\ldots,n\}^j$. Εύκολα ελέγχεται ότι για κάθε j το συναρτησιακό $f_j=\sum_{s\in M_j}(\prod_{i=1}^j b_{s_i})e_s^*$ ανήκει στο $W(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ όπου s_i είναι η i-συντεταγμένη του s, για $i=1,2,\ldots,n$ και $\sum_{s\in M_j}\prod_{i=1}^j b_{s_i}=(\sum_{i=1}^n b_i)^j$. Επειδή $\#M_j=n^j$, προκύπτει ότι
$\|\sum_{l=1}^{n^j} e_l\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}=\|\sum_{s\in M_j} e_s\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}\geq f_j(\sum_{l=1}^{n^j} e_l)=(\sum_{i=1}^n b_i)^j$.

Επίσης, για $m\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο υπάρχει $j\in\mathbb{N}$ ώστε $n^{j+1}>m\geq n^j$. Τα παραπάνω σε συνδυασμό μτ το γεγονός ότι η βάση του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ είναι unconditionl μας οδηγούν στο ακόλουθο συμπέρασμα

$$\|\sum_{l=1}^m y_l\|_\infty \geq \frac{1}{C}\|\sum_{l=1}^m e_l\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}\geq \frac{1}{C}\|\sum_{l=1}^{n^j} e_l\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}=(\sum_{i=1}^n b_i)^j$$

Καταλήγουμε ότι $\|\sum_{l=1}^m y_l\|_\infty \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ ας $\sum_{i=1}^n b_i>1$.

Σε αυτό το σημείο, θα επιλέξουμε μία block ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Έστω $\varepsilon>0$ και μία φθίνουσα ακολουθία $(\varepsilon_k)_k$ θετικών πραγματικών ώστε $(\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k)<\varepsilon$. Έστω ακόμη μία αύξουσα ακολουθία $(n_k)_k$ θετικών ακεραίων και μία ακολουθία $(F_k)_k$ από succesive υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε να ισχύουν τα εξής :

1. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n_k}<\varepsilon_k$.
2. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$, $\|\sum_{l\in F_k} y_l\|>n_k$. Αυτό προκύπτει ότι είναι εφικτό από το παραπάνω σχόλιο.

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει μία skipped block ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της μορφής $x_k=\sum_{l\in F_k}\lambda_l y_l$, όπου $\lambda_l=\frac{1}{\|\sum_{l\in F_k} y_l\|}$. Παρατηρούμε ότι $|\lambda_l|<\varepsilon_k$ για κάθε $l\in F_k$.

Έστω $\gamma\in\Gamma$ με δενδροειδή ανάλυση $\mathcal{F}_\gamma=\{\xi_t,(p_t,q_t]\}_{t\in\mathcal{T}}$.
Για κάθε $k\in\mathbb{N}$, θέτουμε $t_k=\max\{t:\mathrm{ran}x_k\subset(p_t,q_t]\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε x_k, υπάρχουν τουλάχιστον δύο επόμενοι του t_k, έστω s_1, s_2, ώστε τα αντίστοιχα διαστήματα $(p_{s_1},q_{s_1}]$, $(p_{s_2},q_{s_2}]$ να τέμνουν το $\mathrm{ran}x_k$. Για μεταγενέστερη χρήση, θα συμβολίζουμε με $(p_{s_0},q_{s_0}]$ το πρώτο διάστημα (στη φυσιολογική διάταξη που ορίζουν τα ξένα ανά δύο διαστήματα του $\mathbb{N}$) που τέμνει το x_k. Σημειώνουμε ότι το s_0 δεν είναι απαραίτητα το πρώτο στοιχείο του S_t.
Για το ζεύγος γ, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και για κάθε $t\in\mathcal{T}$ ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα: $D_t=\bigcup_{s\succeq t}\{k:s=t_k\}$, $K_t=D_t\setminus\cup_{s\in S_t}D_s=\{k:t=t_k\}$ και $E_t=\{s\in S_t:D_s\neq\emptyset\}$.

Θέτουμε $x_k=x_k'+x_k''+x_k'''$ ώστε

$$x_k'=x_k\,|_{(p_{s_0},q_{s_0}]},\quad x_k''=x_k\,|_{\bigcup_{s\in S_{t_k},s\neq s_0}(p_s,q_s]}\ \text{ και } x_k'''=x_k-x_k'-x_k''.$$

Παρατήρηση 1.3. 1. *Τα σύνολα D_t,K_t,E_t προσδιορίζονται με βάση το επιλεγμένο ζεύγος $\gamma,(x_k)_k$. Για διαφορετικό ζεύγος, τα σύνολα αυτά είναι πιθανόν να διαφέρουν. Για παράδειγμα, έστω $k \in K_t$, για το ζεύγος $\gamma,(x_k)_k$. Τότε $t = t_k$ για x_k. Από τον ορισμό του x'_k, υπάρχει $s_k \in S_t$ ώστε $x'_k = x_k \mid_{(p_{s_k},q_{s_k}]}$. Επομένως, για το ζεύγος $\gamma,(x'_k)_k$ το ίδιο k ανήκει στο K_{s_k}.*

2. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $|g_{t_k}(x_k)| \leq 2Cn\varepsilon_k$.*
Πράγματι, από τον ορισμό της $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}|g_{t_k}(x_k)| &\leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}}|d^*_{\eta_s}(x_k)| \leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}}|e^*_{\eta_s}\circ P_{\{q_s+1\}}(\sum_{l\in F_k}\lambda_l y_l)| \leq \\ &\leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}}\|e^*_{\eta_s}\|\|P_{\{q_s+1\}}\||\lambda^s_l|\|y^s_l\| \leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}} 2C\varepsilon_k \leq \\ &\leq 2C\varepsilon_k(\sharp S_{t_k}) \leq 2Cn\varepsilon_k.\end{aligned}$$

3. *Είναι άμεσο ότι $g_{t_k}(x_k) = g_{t_k}(x'''_k)$, $f_{t_k}(x'''_k) = 0$ και επίσης, για κάθε $t \prec t_k$, $g_t(x'''_k) = 0$.*

Λήμμα 1.11. *Για τα ζεύγη $\gamma,(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $\gamma,(x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $\#(K_t \cup E_t) \leq n$.*

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathcal{T}$ και $k \in K_t$.
Θέτουμε $s_k = \max\{s \in S_t : (p_s,q_s] \cap \mathrm{ran}x'_k \neq \emptyset\}$. Από τον ορισμό του t_k, έχουμε ότι $\#S_t \geq 2$. Θα δείξουμε ότι $s_k \notin E_t$.
Πράγματι, από τον ορισμό των t_k, s_k συνεπάγεται ότι $(p_{t_k},q_{t_k}] \cap \mathrm{ran}x'_k = \mathrm{ran}x'_k$ και $(p_{s_k},q_{s_k}] \cap \mathrm{ran}x'_k = (p_{s_k},q_{s_k}]$. Επειδή $s_k \in S_{t_k}$, $(p_{s_k},q_{s_k}] \subseteq (p_{t_k},q_{t_k}]$. Επομένως, $(p_{s_k},q_{s_k}] \subseteq \mathrm{ran}x'_k$.
Άρα μπορούμε να ορίσουμε μία 1-1 απεικόνιση $G : K_t \to S_t \backslash E_t$ και συμπεραίνουμε ότι $\#K_t + \#E_t \leq \#S_t \leq n$.
Η απόδειξη για το ζεύγος $\gamma,(x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ γίνεται με παρόμοιο τρόπο. □

Πρόταση 1.12. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω. Τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ υπάρχουν $\phi_1,\phi_2 \in W(\mathcal{A}_n,\overline{b})$ ώστε για κάθε ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών και για κάθε $l \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι,*

$$|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)| \leq \frac{1}{b_n}(\phi_1+\phi_2)(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k) + 2Cn\varepsilon(\sum_{k=1}^{l} a_k^r)^{\frac{1}{r}} \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma \in \Delta_{q+1}$ με $a(\gamma) = a \leq n$ και δενδροειδή ανάλυση $\mathcal{F}_\gamma = \{\xi_t,(p_t,q_t]\}_{t\in\mathcal{T}}$, όπου $\xi_\emptyset = \gamma$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{l}\mathrm{ran}x_k \subset (p_\emptyset,q_\emptyset]$.

Ισχυρισμός 1. *Για τα ζεύγη $\gamma,(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $\gamma,(x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ υπάρχουν $\phi_1,\phi_2 \in W(\mathcal{A}_n,\overline{b})$ ώστε για κάθε ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών και για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι*

$$|f_\emptyset(\sum_{k=1}^{l} a_k x'_k)| \leq \frac{2C}{b_n}\phi_1(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k) \tag{1.3}$$

$$|f_\emptyset(\sum_{k=1}^{l} a_k x''_k)| \leq \frac{2C}{b_n}\phi_2(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k) \tag{1.4}$$

Απόδειξη ισχυρισμού. Θα αποδείξουμε μόνο την ανισότητα 1.3. Η απόδειξη για την 1.4 γίνεται με παρόμοια επιχειρήματα. Υπενθυμίζουμε ότι $f_t = \sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s(f_s + g_s)\circ P_{(p_s,q_s]}$ για κάθε $t \in \mathcal{T}$ μη μεγιστικό. Από τον ορισμό των $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ προκύπτει ότι $g_s \circ P_{(p_s,q_s]}(x'_k) = 0$ για κάθε $s \in S_t$. Συνεπώς,
$f_t(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k) = (\sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s \circ P_{(p_s,q_s]})(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k)$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στα επίπεδα του δέντρου $\mathcal{T}$, δηλαδή θα δείξουμε ότι για καθε $t\in\mathcal{T}$ υπάρχει $\phi_1^t \in W(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ με supp$\phi_1^t \subseteq D_t$ ώστε

$$|f_t(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k)| \leq \frac{2C}{b_n}\phi_1^t(\sum_{k\in D_t} a_k e_k)$$

.
Έστω $0 < h \leq \max\{|t| : t\in\mathcal{T}\}$
Υποθέτουμε ότι η πρόταση έχει αποδειχθεί για κάθε t με $|t| = h$.
Έστω $t\in\mathcal{T}$ με $|t| = h-1$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεισ:

1. Αν f_t είναι μεγιστικός κόμβος ($f_t(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k) = 0$) έχουμε ότι $K = D_t$ και άρα για κάθε $k\in D_t$ από Πόρισμα 1.5 $f_t(x'_k) = 0$ επειδή $t = t_k$.

2. Αν f_t είναι μεγιστικός κόμβος, τότε
   $f_t(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k) = (\sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s\circ P_{(p_s,q_s]})(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k) =$
   $= \sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s(\sum_{k\in D_s} a_k x'_k) + \sum_{k\in K_t}(\sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s)(a_k x'_k)$.
   Επειδή για κάθε $k\in K_t$, $g_t(x'_k) = 0$ έχουμε ότι

   $$|f_t(x'_k)| = |x'_k(\xi_t)| \leq \|x'_k\| \leq 2C = 2Ce^*_k(e_k).$$

   Επιπλέον, για κάθε $s\in E_t$ ισχύει ότι $|s| = h-1$. Για $k\in D_s$, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

   $$|\sum_{s\in S_t} b_s f_s(x'_k)| = |b_s f_s(x'_k)| \leq b_s\frac{2C}{b_n}\phi_1^s(e_k),$$

   όπου $\phi_1^s \in W(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ και supp$\phi_1^s \subseteq D_s$.
   Θέτουμε $\phi_1^t = (\sum_{s\in E_t} b_s\phi_1^s + \sum_{k\in K_t} b_k e^*_k)$.
   Από Λήμμα 1.11, έχουμε ότι $\phi_1^t \in W(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ και $|f_t(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k)| \leq \frac{2C}{b_n}\phi_1^t(\sum_{k\in D_t} a_k e_k)$.

□

Υπενθυμίζουμε ότι $e^*_\gamma(\sum_{k=1}^l a_k x_k) = g_\emptyset(\sum_{k=1}^l a_k x_k) + f_\emptyset(\sum_{k=1}^l a_k x_k)$.
Επειδή

$$g_\emptyset(\sum_{k=1}^{l} a_k x'_k) = g_\emptyset(\sum_{k=1}^{l} a_k x''_k) = g_\emptyset(\sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k x'''_k) = f_\emptyset(\sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k x'''_k) = 0$$

συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}|e_\gamma^*(\sum_{k=1}^l a_k x_k)| &\leq |g_\emptyset(\sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k x_k''')| + |f_\emptyset(\sum_{k=1}^l a_k x_k')| \\ &+ |f_\emptyset(\sum_{k=1}^l a_k x_k'')| + |f_\emptyset(\sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k x_k''')|\end{aligned}$$

Από Παρατήρηση 1.3 έχουμε ότι,

$$|g_\emptyset(\sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k x_k''')| \leq \sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k|g_\emptyset(x_k''')| \leq 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k\varepsilon_k.$$

Από Λήμμα 1.4 και Παρατήρηση 1.3 προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}|f_\emptyset(\sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k x_k''')| &\leq \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k(\prod_{t<t_k} b_t)|g_{t_k}(x_k''')| \leq \\ &\leq 2C\frac{1}{2}n \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\varepsilon_k \leq 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\varepsilon_k.\end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^l a_k x_k(\gamma)| &\leq 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k\varepsilon_k + \frac{2C}{b_n}\phi_1(\sum_{k=1}^l a_k e_k) \\ &+ \frac{2C}{b_n}\phi_2(\sum_{k=1}^l a_k e_k) + 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\varepsilon_k \\ &\leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)(\sum_{k=1}^l a_k e_k) + 2Cn\sum_{k=1}^l a_k\varepsilon_k \\ &\leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)(\sum_{k=1}^l a_k e_k) + 2Cn\max\{a_k : k\in\mathbb{N}\}(\sum_{k=1}^l \varepsilon_k) \\ &\leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)(\sum_{k=1}^l a_k e_k) + 2Cn\varepsilon(\sum_{k=1}^l a_k^r)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ℓ_r νόρμα κυριαρχεί την c_0 νόρμα. □

Παρατήρηση 1.4. *Από [16] Θεώρημα I.4, γνωρίζουμε ότι* $\|\sum a_k e_k\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})} \geq M(\sum a_k^r)^{\frac{1}{r}}$. *Αυτό σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση έχει σαν συνέπεια ότι*

$$|\sum_{k=1}^l a_k x_k(\gamma)| \leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)(\sum_{k=1}^l a_k e_k) + \frac{2Cn\varepsilon}{M}\|\sum_{k=1}^l a_k e_k\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}.$$

Για $\varepsilon = \frac{M}{nb_n}$,

$$|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)| \leq \frac{6C}{b_n} \| \sum_{k=1}^{l} a_k e_k \|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})}.$$

Επομένως,

$$\| \sum_{k=1}^{l} a_k x_k \|_\infty \leq \frac{6C}{b_n} \| \sum_{k=1}^{l} a_k e_k \|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})}. \tag{1.5}$$

Πόρισμα 1.13. *Για κάθε block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ υπάρχει περαιτέρω block ακολουθία που ικανοποιεί την ανισότητα (1.5).*

1.5 Το κεντρικό αποτέλεσμα

Πρόταση 1.14. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$. Αν η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί επιπλέον ότι $\operatorname{minsupp} x_{k+1} > \operatorname{maxsupp} x_k + k$ και τις συνθήκες της Πρότασης 1.12, τότε είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του χώρου Tsirelson $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ για n και $\bar{b}$ που προσδιορίνται όπως παραπάνω.*

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια των προτάσεων 1.9, 1.12 και της Παρατήρησης 1.4. □

Πρόταση 1.15. *Ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p \in (1, \infty)$.*

Απόδειξη. Με παρόμοιο τρόπο όπως στο [16] Θεώρημα I.4, για κάθε νορμαρισμένη block ακολουθία $(x_k)_k$ της βάσης $(e_j)_j$ και για κάθε ακολουθία (a_k) πραγματικών αριθμών ισχύει ότι, $\|\sum a_k x_k\| \leq \frac{2}{b_n}\|\sum a_k e_k\|$. Από το θεώρημα του Zippin [45] προκύπτει ότι ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p \in (1, \infty)$. □

Παρατήρηση 1.5. *Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ενοτήτων 4 και 5 μπορούμε να δώσουμε μία εναλλάκτική απόδειξη. Πράγματι, έστω $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ μία skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$. Τότε υπάρχει μία περαιτέρω block ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τα πορίσματα 1.10 και 1.13. Είναι άμεσο ότι η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα της Πρότασης 1.14.*

Παρατηρούμε ότι κάθε block ακολουθία $(z_k)_k$ της $(x_k)_k$ είναι επίσης skipped block και ικανοποιεί την Πρόταση 1.14, άρα είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του χώρου $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Συνεπάγεται ότι κάθε block ακολουθία $(z_n)_n$ της $(x_k)_k$ είναι ισοδύναμη με την $(x_k)_k$. Από το θεώρημα του Zippin [45] προκύπτει ότι ο χώρος $\overline{<(x_k)_k>}$ είναι ισόμορφος με κάποιον ℓ_p. Επομένως, $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b}) \cong \ell_p$ για κάποιο $p \in (1, \infty)$.

Για να προσδιορίσουμε επακριβώς το p, χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.16. *Ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_r όπου $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ και $\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1$.*

Απόδειξη. Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για $x \in c_{00}$, $\|x\| \leq \|x\|_r$ χρησιμοποιώντας επαγωγή πάνω στην πληθικότητα του συνόλου $\operatorname{supp} x$. Αν $|\operatorname{supp} x| = 1$, είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $y \in c_{00}$ με $|\operatorname{supp} y| \leq n$ και έστω $x \in c_{00}$ με $|\operatorname{supp} x| = n + 1$. Τότε είτε $\|x\| = \|x\|_\infty$ ή $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} b_i \|E_i x\|$ για κάποια κατάλληλα υποσύνολα $E_1 < E_2 < \ldots < E_n$. Στην πρώτη περίπτωση ισχύει καθώς για $p \in [r, \infty)$ $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$. Επομένως αρκεί αποδείξουμε τη δεύτερη περίπτωση.

Επειδή για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, η πληθικότητα του supp$E_i x$ είναι προφανώς μικρότερη από την πληθικότητα του supp$x$, η επαγωγική υπόθεση σε συνδυασμό με την ανισότητα $H\ddot{o}lder's$ συνεπάγεται ότι

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \|E_i x\|_r \leq (\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'})^{\frac{1}{r'}} (\sum_{i=1}^{n} \|E_i x\|_r^r)^{\frac{1}{r}} = \|x\|_r.$$

Από το παραπάνω και την Πρόταση 1.15 προκύπτει ότι ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p \in [r, \infty)$.
Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ θέτουμε $M_l = \{1, 2, \ldots, n\}^l$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για κάθε $l \in \mathbb{N}$ το συναρτησιακό $f_l = \sum_{s \in M_l} (\prod_{i=1}^{l} b_{s_i}) e_s^*$ ανήκει στο $W(\mathcal{A}_n, \overline{b})$ όπου s_i είναι η i-συντεταγμένη του s, για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $\sum_{s \in M_l} \prod_{i=1}^{l} b_{s_i} = (\sum_{i=1}^{n} b_i)^l$. Θέτουμε $a_s = \prod_{i=1}^{l} b_{s_i}$ και $x_l = \sum_{s \in M_l} a_s^{\frac{r'}{r}} e_s$. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $\|x_l\| = 1$. Πράγματι,

$$\|x_l\| \leq \|x_l\|_r = (\sum_{s \in M_l} a_s^{r'})^{\frac{1}{r}} = (\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'})^{\frac{l}{r}} = 1 = f_l(x_l) \leq \|x_l\|.$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $p' > r$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_l\|_{p'} < \varepsilon$. Αν ο ισχυρισμός είναι σωστός τότε το p ταυτίζεται με το r.

Απόδειξη ισχυρισμού: Πρέπει να παρατηρήσουμε αρχικά ότι για $p' > r$, $\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{r'}{r} p'} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)}$ για κάποιο $0 < \delta < 1$. Όμως για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ $b_i < 1$, και άρα

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)} < \sum_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $(\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)})^l < \varepsilon^{p'}$. Για αυτό το l έχουμε ότι,

$$\|x_l\|_{p'} = (\sum_{s \in M_l} a_s^{\frac{r'}{r} p'})^{\frac{1}{p'}} = (\sum_{s \in M_l} a_s^{r'(1+\delta)})^{\frac{1}{p'}} = (\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)})^{\frac{l}{p'}} < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 1.17. *Για κάθε $r \in (1, \infty)$ ο χώρος $\mathfrak{X}_r$ είναι ℓ_r κορεσμένος.*

Απόδειξη. Όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη παρατήρηση, για κάθε skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ υπάρχει περαιτέρω block ακολουθία $(x_k)_k$ με την ιδιότητα ότι ο χώρος $\overline{<(x_k)_k>}$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_r. □

Παρατήρηση 1.6. *Από το προηγούμενο θεώρημα $\mathfrak{X}_r$ είναι $\mathcal{L}^\infty$ χώρος που δεν περιέχει τον ℓ_1. Επομένως από τα αποτελέσματα των D.Lewis-C.Stegall [37] και A. Pelczyński [42] συνεπάγεται ότι ο συζυγής $\mathfrak{X}_r^*$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_1. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο επιχείρημα του D. Alspach [1] και να δείξουμε άμεσα ότι η (M_q) είναι συρρικνούσα FDD για τον $\mathfrak{X}_r$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $(e_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ είναι βάση για τον $\mathfrak{X}_r^*$ ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1.*

Κεφάλαιο 2

HI εμφυτεύσεις $\mathcal{L}^\infty$ χώρων και χώροι Banach με πολύ λίγους τελεστές

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε το Θεώρημα 0.2 που αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα της υπο προετοιμασίας εργασίας ([7]) και επιπλέον γενικεύει το αποτέλεσμα της δεύτερης δημοσιευμένης εργασίας ([6]). Ειδικότερα, συνδυάζοντας το αποτέλεσμα από το [27] (Θεώρημα Α) με μία τροποποίηση της μεθόδου στο [10], παρουσιάζουμε για δοσμένο χώρο Banach X με διαχωρίσιμο συζυγή μία μέθοδο κατασκευής ενός BD $\mathcal{L}^\infty$ χώρου, $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, ο οποίος περιέχει υπόχωρο $\overline{X}$ ισόμορφο με τον X και έχει επιπλέον την ιδιότητα ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος (HI) και ικανοποιεί την "scalar plus compact" ιδιότητα. Επιπλέον, αν υποθέσουμε περαιτέρω ότι ο αρχικός χώρος Banach X έχει την ιδιότητα ότι ο συζυγής του X^* δεν περιέχει συμπληρωματικά τον ℓ_1, αποδεικνύουμε ότι ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ που κατασκευάζεται με την παραπάνω μέθοδο ικανοποιεί την "scalar plus compact" ιδιότητα.

Το κεφάλαιο χωρίζεται σε 10 θεματικές ενότητες. Στην Ενότητα 1 δίνονται οι απαραίτητες έννοιες και ορισμοί αναφορικά με τις οικογένειες Schreier $(\mathcal{S}_{\xi_j})_j$, τους γενικευμένους μέσους όρους, τους ειδικούς κυρτούς συνδυασμούς και τους βοηθητικούς Mixed Tsirelson χώρους $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j}, \frac{1}{m_j})_j$ ([17]) τα οποία αποτελούν τα βασικά συστατικά της μεθόδου κατασκευής του χώρου $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και αποτελούν γενικευμένες εκδοχές των αντίστοιχων στοιχείων της μεθόδου κατασκευής στο [10].

Στην Ενότητα 2, ορίζουμε τον χώρο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ για χώρο Banach X με διαχωρίσιμο συζυγή. Για τον ορισμό χρειάζεται να θεωρήσουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο επέκτασης του [27] ότι ο X εμφυτεύεται σε έναν $\mathcal{L}^\infty$ Bourgain-Delbaen χώρο $\mathfrak{X}$ που περιέχει ισομορφικά τον X. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα πρώτα συμπερασμάτα που προκύπτουν από τη μελέτη της νέας κλάσης χώρων.

Στην Ενότητα 3 αποδεικνύουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και ότι ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έχει συρρίκουσα FDD αν ισχύει το ίδιο και για τον $\mathfrak{X}$.

Στις ενότητες 4 εώς 7 εισάγουμε τα βασικά συστατικά της μεθόδου κατασκευής καθολικά αδιάσπαστων χώρων Banach ([10], [17], [17]) και ορίζουμε τροποποιημένες εκδοχές τους που θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε το πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$. Ειδικότερα, ορίζουμε τους X-ημινορμαρισμένων (ε, j) ειδικούς κυρτούς συνδυασμούς, τις X-RIS block ακολουθίες, τα X-ακριβή ζεύγη και τις X-εξαρτημένες ακολουθίες. Επίσης, παρουσιάζονται εκτιμήσεις των νορμών τέτοιων στοιχείων.

Στην Ενότητα 8 αποδεικνύουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος, ενώ στην Ενότητα 9 αποδεικνύουμε ότι για κάθε γραμμικό και φραγμένο τελεστή στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε ο τελεστής $Q\circ(T-\lambda I)$ να είναι συμπαγής, όπου $Q:\mathcal{L}^\infty_{X,hi}\to\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ είναι η απεικόνιση πηλίκο.

Στην Ενότητα 10 διαπιστώνουμε ότι ο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ικανοποιεί την "scalar plus compact" ιδιότητα στην περίπτωση που ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται συμπληρωματικά στον X^*. Είναι ερώτημα αν το αποτέλεσμα γενικεύεται για διαχωρίσιμους χώρους Banach με μη διαχωρίσιμο συζυγή. Στην ειδική περίπτωση που $X=\ell^1$ στο [11] το αντίστοιχο αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί.

Στην Ενότητα 11 αποδεικνύουμε ότι το πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ έχει την "scalar plus compact" ιδιότητα και ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος 0.2 το οποίο αποτελεί ανάλογο του αποτελέσματος στο [24]. Τέλος αφήνουμε σαν ερώτημα αν το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί στην ευρύτερη κλάση χώρων Banach X με διαχωρίσιμο συζυγή που δεν περιέχουν $\mathcal{L}^\infty$ υπόχωρο.

2.2 Schreier Οικογένειες και Mixed Tsirelson χώροι

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε ορισμούς και γνωστά αποτελέσματα αναφορικά με τις οικογένειες Schreier και τους γενικευμένους μέσους όρους ([17], [9]) οι οποίες χρειάζονται για τις κατασκευές που θα ακολουθήσουν.

2.2.1 Schreier Οικογένεις

Υπενθυμίζουμε τους ακόλουθους ορισμούς από το [2].

Μία οικογένεια $\mathcal{M}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ λέγεται

1. *Συμπαγής* αν το σύνολο $\{\chi_A:\ A\in\mathcal{M}\}$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2. *Κληρονομική* αν για κάθε $A\in\mathcal{M}$ και $B\subset A$ ισχύει ότι $B\in\mathcal{M}$.

3. *Spreading* αν για κάθε $A=\{t_1<t_2<\cdots<t_r\}\in\mathcal{M}$ και $B=\{t'_1<t'_2<\cdots<t'_r\}$ ώστε $t_i\le t'_i$ για $i=1,2,\dots,r$ έχουμε ότι $B\in\mathcal{M}$. Επίσης, αναφέρουμε ότι κάθε σύνολο B που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα λέγεται spread του συνόλου A.

Ορισμός 2.1. Μία πεπερασμένη ακολουθία $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ λέγεται *συςςεσσιε* αν $\max E_i<\min E_{i+1}$ για κάθε $1\le i<n$. Μία πεπερασμένη ακολουθία διανυσμάτων $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ στο c_{00} λέγεται successive αν η ακολουθία $(\mathrm{supp}f_1,\mathrm{supp}f_2,\dots,\mathrm{supp}f_n)$ υποσυνολων του $\mathbb{N}$ είναι successive.

Ορισμός 2.2. Έστω $\mathcal{M}$ μία οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Μία πεπερασμένη οικογένεια $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ successive υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ λέγεται $\mathcal{M}$-admissible αν υπάρχει σύνολο $\{m_1<m_2<\cdots<m_n\}\in\mathcal{M}$ ώστε $m_1\le E_1<m_2\le E_2<\cdots<m_n\le E_n$ (δηλαδή $m_i\le\min E_i$ για κάθε $i\le n$ και $\max E_i<m_{i+1}$ για κάθε $i<n$).

Ορισμός 2.3. Έστω $\mathcal{M}$ μία οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Μία πεπερασμένη οικογένεια $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ από ξένα ανά δύο πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ λέγεται $\mathcal{M}$-allowable αν $(\min E_1, \ldots \min E_n) \in \mathcal{M}$.

Μία πεπερασμένη ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ από διανύσματα του $c_{00}(\mathbb{N})$ λέγεται $\mathcal{M}$-admissible (αντίστοιχα $\mathcal{M}$-allowable) αν η ακολουθία συνόλων $(\mathrm{supp} f_1, \mathrm{supp} f_2, \ldots, \mathrm{supp} f_n)$ είναι $\mathcal{M}$-admissible (αντίστοιχα $\mathcal{M}$-allowable).

Παρατήρηση 2.1. *Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{M}$ είναι μία spreading οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ μία πεπερασμένη ακολουθία από successive υποσύνολα του $\mathbb{N}$, τότε η $(E_1, \ldots, E_n)$ είναι $\mathcal{M}$-admissible αν και μόνο αν η $(E_1, \ldots, E_n)$ είναι $\mathcal{M}$- allowable.*

Για $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ η σύνθεση των $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$, όπως παρουσιάστηκε στο [3], ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} * \mathcal{N} \;\; = \;\; & \Big\{ F \subset \mathbb{N} : \text{ υπάρχουν } s \in \mathbb{N}, \;\; F_1, F_2, \ldots, F_s \in \mathcal{N} \text{ και} \\ & \{m_1 < m_2 < \cdots < m_s\} \in \mathcal{M} \text{ έτσι ώστε } m_1 \leq F_1 < m_2 \leq F_2 \\ & < \cdots < m_s \leq F_s \text{ και } \;\; F = \bigcup_{i=1}^{s} F_i \Big\} \cup \Big\{ \emptyset \Big\}.\end{aligned}$$

Για μία οικογένεια $\mathcal{M}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και ένα φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $\mathcal{M}^n$ τη σύνθεση $\mathcal{M}^n = \underbrace{\mathcal{M} * \mathcal{M} * \cdots * \mathcal{M}}_{n \text{ τιμες}}$. Επίσης συμβολίζουμε με $i(\mathcal{M})$ τον Cantor Bendixson δείκτη της οικογένειας $\mathcal{M}$ (δες [36]). Έχει αποδειχθεί στο [17] ότι για $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$i(\mathcal{M} * \mathcal{N}) \leq i(\mathcal{M}) \cdot i(\mathcal{N}).$$

Για $A \subset \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $[A]^\infty$, το σύνολο όλων άπειρων υποσυνόλων του A και με $[A]^{<\infty}$, το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A. Επίσης, για $\mathcal{F}$ οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ και για $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ συμβολίζουμε με $\mathcal{F}[M]$ το σύνολο $\{F \subset M : \; F \in \mathcal{F}\}$.

Από [28] έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 2.4. *Έστω $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ δύο κληρονομικές και συμπαγείς οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε η $\mathcal{N}$ είναι επιπλέον spreading και $i(\mathcal{M}) < i(\mathcal{N})$. Τότε, για κάθε $P \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [P]^\infty$ ώστε $\mathcal{M}[L] \subset \mathcal{N}$.*

Η πρώτη σε κατάταξη οικογένεια Schreier είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{S} = \{F \subset \mathbb{N} : \; \#F \leq \min F\} \cup \{\emptyset\}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{S}$ είναι συμπαγής, κληρονομική και spreading.

Οι οικογένειες Schreier $(\mathcal{S}_\xi)_{\xi<\omega_1}$ ορίζονται επαγωγικά ως εξής :

$$\mathcal{S}_0 = \Big\{ \{t\} : \quad t \in \mathbb{N} \Big\} \cup \{\emptyset\}.$$

Έστω $\xi < \omega_1$ και υποθέτουμε ότι η $\mathcal{S}_\zeta$ έχει οριστεί για κάθε $\zeta < \xi$. Αν $\xi = \zeta + 1$ θέτουμε

$$\mathcal{S}_\xi = \mathcal{S} * \mathcal{S}_\zeta.$$

Ειδικότερα, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$.

Αν ξ είναι οριακός διατακτικός, τότε βρίσκουμε μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη οριακών διατακτικών ώστε $\sup\limits_n \xi_n = \xi$ και θέτουμε

$$\mathcal{S}_\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{F \in \mathcal{S}_{\xi_n} :\ n \leq F\}.$$

Με χρήση επαγωγής αποδεικνύεται ότι κάθε οικογένεια $\mathcal{S}_\xi$ είναι συμπαγής, κληρονομική και spreading.

Οι modified Schreier οικογένειες $\mathcal{S}_\xi^M$, ορίζονται επαγωγικά ώς εξής :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0^M &= \Big\{\{t\} : \quad t \in \mathbb{N}\Big\} \cup \{\emptyset\} \\
\mathcal{S}_{\xi+1}^M &= \Big\{F \subset \mathbb{N} :\ \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N} \text{ και ξένα ανά δύο σύνολα} \\
&\quad F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{S}_\xi^M \text{ έτσι ώστε } k \leq F_i \text{ για } i = 1, 2, \ldots, k \text{ και} \\
&\quad F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big\}
\end{aligned}$$

και αν $\xi < \omega_1$ είναι οριακός διατακτικός και $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία διατακτικών που ορίζει την $\mathcal{S}_\xi$ θέτουμε

$$\mathcal{S}_\xi^M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{F \in \mathcal{S}_{\xi_n}^M :\ n \leq F\}$$

Παρατήρηση 2.2. *Όπως και στην περίπτωση των $\mathcal{S}_\xi$, με χρήση επαγωγής αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{S}_\xi^M$ είναι συμπαγής, κληρονομική,spreading και επιπλέον $\mathcal{S}_\xi \subset \mathcal{S}_\xi^M$. Επίσης, όπως αποδεικνύεται στο [4] για κάθε $n < \omega$ έχουμε ότι $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n^M$. Είναι άγνωστο αν η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $\xi < \omega_1$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι ο δείκτης Cantor-Bendixson της modified Shreier οικογένειας $\mathcal{S}_\xi^M$, $i(\mathcal{S}_\xi^M)$, ισούται με ω^ξ.*

Το επόμενο λήμμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.4.

Λήμμα 2.5. *Έστω $\zeta, \xi < \omega_1$ και $q < \omega$ ώστε $\zeta \cdot q < \xi$. Τότε, για κάθε $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $(\mathcal{S}_\zeta^M)^q[L] \subset \mathcal{S}_\xi$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathcal{S}_\zeta^q[L] \subset \mathcal{S}_\xi$.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή και αποτελεί μία βασική ιδιότητα που ικανοποιούν οι Schreier και Modified Schreier οικογένειες.

Λήμμα 2.6. *Έστω $\zeta < \xi < \omega_1$. Τότε υπάρχει $d = d(\zeta, \xi) \in \mathbb{N}$ ώστε κάθε στοιχείο F της οικογένειας $\mathcal{S}_\zeta$ με την ιδιότητα ότι $F \geq d$, ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{S}_\xi$. Επιπλέον, το ίδιο ισχύει και για τις modified Schreier οικογένειες (δηλαδή υπάρχει $d^M = d^M(\zeta, \xi) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $F \in \mathcal{S}_\zeta^M$ με $F \geq d^M$, να συνεπάγεται ότι $F \in \mathcal{S}_\xi^M$.*

Λήμμα 2.7. *Έστω $\zeta < \xi < \omega_1$ και $n_0 = d(\zeta, \xi)$ όπως στο προηγούμενο λήμμα. Τότε, $\mathcal{S}_\zeta \subset \mathcal{S}_{\xi+n_0}$. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τις οικογένειες $\mathcal{S}_\xi^M$, $\xi < \omega_1$. Επομένως για κάθε $\zeta < \xi$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{S}_\zeta \subset \mathcal{S}_{\xi+k_0}$ και $\mathcal{S}_\zeta^M \subset \mathcal{S}_{\xi+k_0}^M$.*

Απόδειξη. Έστω $F \in \mathcal{S}_\zeta$. Αν $\min F \geq n_0$, τότε από Λήμμα 2.6 έχουμε ότι $F \in \mathcal{S}_\xi \subset \mathcal{S}_{\xi+n_0-1}$ και το συμπέρασμα έπεται. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\min F < n_0$. Σε αυτή τη περίπτωση γράφουμε το F στη μορφή $F = F_1 \cup F_2$ όπου $F_1 = F \cap \{1, \ldots, n_0 - 1\}$ και $F_2 = F \setminus F_1$. Επαγωγικά, δείχνουμε ότι $F_1 \in \mathcal{S}_{\xi+n_0-1}$. Επιπλέον, εφόσον $\min F_2 > n_0$ είναι άμεσο ότι $F_2 \in \mathcal{S}_{\xi+n_0-1}$. Τέλος, επειδή το F είναι η ένωση δύο successive συνόλων του $\mathcal{S}_{\xi+n_0-1}$, από τον ορισμό των οικογενειών Schreier προκύπτει ότι $F \in \mathcal{S}_{\xi+n_0}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Η απόδειξη για τις Modified οικογένειες γίνεται παρόμοια. □

2.2.2 $\mathcal{S}_\xi$-φραγμένοι χώροι

Ο ορισμός των $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένων χώρων που ακολουθεί είναι μία τροποποίηση του αντίστοιχου ορισμού από το [17] (Ορισμός 13.1).

Ορισμός 2.8. Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X είναι S_ξ φραγμένος αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

1. Ο χώρος X δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1.

2. Για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $x^* \in B_{X^*}$
$$\{n \in L : \ |x^*(x_n)| > \varepsilon\} \in S_\xi.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν X είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ^1, τότε υπάρχει διατακτικός $\xi < \omega_1$ ώστε ο X να είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος. Σε αυτό το γεγονός θα στηριχθούν οι κατασκευές που θα ακολουθήσουν. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη χρειάζεται να εισάγουμε επιπλέον έννοιες και να υπενθυμίσουμε γνωστά αποτελέσματα. Ξεκινάμε με τον ορισμό του ℓ_ξ^1 spreading model (δες [12]).

Ορισμός 2.9. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη ακομουθία σε ένα χώρο Banach X και έστω ξ ένας αριθμήσιμος διατακτικός. Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγει ℓ_ξ^1 spreading model αν υπάρχει $C \geq 0$ ώστε $\|\sum_{n\in F} a_n x_n\| \geq C \sum_{n\in F} |a_n|$ για καθε $F \in \mathcal{S}_\xi$ και κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in F}$.

Παρατήρηση 2.3. *Με βάση τον ℓ^1-Bourgain δείκτη (δες [22]) προκύπτει ότι ένας διαχωρίσιμος χώρος X περιέχει ισομορφικά τον ℓ^1 αν για κάθε $\xi < \omega_1$, ο X έχει ℓ_ξ^1 spreading model. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ℓ^1-Bourgain δείκτης ενός χώρου που έχει ℓ_ξ^1 spreading model είναι τουλάχιστον ω^ξ.*

Θα χρειαστούμε ακόμη τα ακόλουθα συνδυαστικά αποτελέσμα από το [28] και το [13].

Πρόταση 2.10. *[28] Έστω $\mathcal{F}$ μία κληρονομική οικογένεια του $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ και $\xi < \omega_1$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $G \in [L]^\infty$ ώστε $G \in \mathcal{F} \setminus S_\xi$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\mathcal{S}_\xi[M] \subset \mathcal{F}$.*

Ορισμός 2.11. [13] Μία νορμαρισμένη ακολουθία (x_n) σε ένα χώρο Banach λέγεται convexly unconditional αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $C(\delta) > 0$ ώστε κάθε γραμμικός συνδυασμός $x = \sum a_n x_n$ με $\sum_n |a_n| = 1$ να ικανοποιεί ότι $\|\sum \pm a_n x_n\| > C(\delta)$ αν $\|x\| > \delta$.

Πρόταση 2.12. *[13] Κάθε νορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία σε ένα χώρο Banach έχει υπακολουθία που είναι convexly unconditional.*

Τα παραπάνω βοηθούν να συμπεράνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.13. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ^1. Τοτε υπάρχει $\xi < \omega_1$ ώστε για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $x^* \in B_{X^*}$*

$$\{n \in L : \ |x^*(y_n)| > \varepsilon\} \in \mathcal{S}_\xi.$$

Απόδειξη. Επειδή ο χώρος X είναι διαχωρισιμος και δεν περιέχει τον ℓ^1 από Παρατήρηση 2.3 έχουμε ότι ο ℓ^1-Bourgain δείκτης του X είναι το πολύ ω^{ξ_0} για κάποιο $\xi_0 < \omega_1$. Ισχυριζόμαστε ότι ο χώρος X είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος για κάθε $\xi > \xi_0$. Πράγματι, αν όχι τότε υπάρχει $\xi_0 < \xi < \omega_1$ ώστε ο X δεν είναι S_ξ φραγμένος και βρίσκουμε μία νορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ένα $\varepsilon > 0$ που ικανοποιούν την απαγωγη σε άτοπο. Από Πρόταση 2.19 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (x_n) είναι convexly unconditional. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \left\{F \in [\mathbb{N}]^{<\infty} \quad \exists\, x^* \in B_{X^*} \text{ έτσι ώστε } |x^*(x_n)| > \varepsilon \ \forall n \in F\right\}$$

Είναι άμεσο ότι η $\mathcal{F}_\varepsilon$ είναι κληρονομική οικογένεια και επειδή η (x_n) είναι ασθενώς μηδενική συνεπάγεται επιπλέον ότι η $\mathcal{F}_\varepsilon$ είναι συμπαγής. Για κάθε $M \in [L]^\infty$ υπάρχει $G \in \mathcal{F}_\varepsilon[M]$ ώστε $G \notin \mathcal{S}_\xi$, γεγονός που οφείλεται στην επιλογή της (x_n). Από Πρόταση 2.10 υπάρχει $M \in [L]^\infty$ ώστε $\mathcal{S}_\xi[M] \subset \mathcal{F}_\varepsilon$. Εφόσον η (x_n) είναι convexly unconditional συνεπάγεται ότι η $(x_n)_{n\in M}$ παράγει ℓ^1_ξ spreading model. Επομένως, ο ℓ^1-Bourgain δείκτης του X είναι μεγαλύτερος από ω^ξ (δες [12]), που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

□

2.2.3 Ειδικοί Κυρτοί Συνδυασμοί

Σε αυτήν την ενότητα θα εισάγουμε την έννοια των γενικευμένων μέσων όρων όπως παρουσιάστηκε στο [13], [17]. Υπευνθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό από το [17], Κεφάλαιο 9.

Συμβολίζουμε με $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τη συνήθη βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$. Για κάθε $\xi < \omega_1$ και $L \in [\mathbb{N}]$ ορίζουμε μία block ακολουθία $(\xi_n^L)_{n\in\mathbb{N}}$ κυρτών συνδυασμών της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ο ορισμός γίνεται επαγωγικά πάνω στο ξ ως εξής :
Για $\xi = 0$ θέτουμε $\xi_n^L = e_{l_n}$ όπου $L = \{l_1 < l_2 < l_3 < \ldots\}$.
Έστω $0 < \xi < \omega_1$ και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(\zeta_n^L)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει οριστεί για κάθε $\zeta < \xi$ και $L \in [\mathbb{N}]$.
Αν $\xi = \zeta + 1$ τότε

$$\xi_1^L = \frac{1}{l_1}\sum_{i=1}^{l_1} \zeta_i^L$$

όπου $l_1 = \min L$. Υποθέτουμε ότι $\xi_1^L < \xi_2^L < \ldots < \xi_n^L$ έχουν οριστεί. Έστω $L_n = \{l \in L : l > \max \operatorname{supp} \xi_n^L\}$ και $k_n = \min L_n$.

$$\xi_{n+1}^L = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \zeta_i^{L_n} (= \xi_1^{L_n})$$

Αν ξ είναι οριακός διατακτικός και $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία μη οριακών διατακτικών ώστε $\text{supp}\xi_n = \xi$, τότε η ακολουθία $(\xi_n^L)_{n\in\mathbb{N}}$ για $L = \{l_1 < l_2 < l_3 < \ldots\}$ ορίζεται ως :

$$\xi_1^L = [\xi_{l_1}]_1^L.$$

Αν $\xi_1^L < \xi_2^L < \ldots < \xi_n^L$ έχουν οριστεί, θέτουμε $L_n = \{l \in L : l > \max\text{supp}\xi_n^L\}$, $k_n = \min L_n$ και

$$\xi_{n+1}^L = [\xi_{k_n}]_1^{L_n}$$

Η πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύεται στο [8] (δες ακόμη [17]).

Πρόταση 2.14. *Για κάθε $\eta < \zeta < \omega_1$ διατακτικούς, $M \in [\mathbb{N}]$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε*

$$\sup_{F\in\mathcal{S}_\eta} \sum_{k\in F} \zeta_L^1(k) < \varepsilon \ \text{ για κάθε } L \in [N]^\infty.$$

Για να ορίσουμε τους ειδικούς κυρτούς συνδυασμούς σε ένα χώρο Banach X με FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε την ακόλουθη έννοια.

Ορισμός 2.15. Έστω $\zeta, \xi < \omega_1$ αριθμήσιμοι διατακτικοί ώστε $\zeta + 1 < \xi$. Έστω ακόμη $\varepsilon > 0$ και F ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ με $F \in \mathcal{S}_\xi$. Λέμε ότι μία πεπερασμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in F}$ θετικών πραγματικών είναι $(\xi, \zeta, \varepsilon, F)$ ειδικοί συντελεστές αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) η $(a_n)_{n\in F}$ ειναι φθίνουσα και $\sum_{n\in F} a_n = 1$,

(ii) Για κάθε $P \subset F$ ώστε $P \in \mathcal{S}_\zeta^M$ ισχύει ότι $\sum_{n\in P} a_n < \varepsilon$.

Από Πρόταση 2.14 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.16. *Έστω $\xi, \zeta < \omega_1$ διατακτικοί ώστε $\zeta + 1 < \xi$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε για κάθε $L \in [N]^\infty$ αν θέσουμε $\eta = \zeta + 1$, η πεπερασμένη ακολουθία $(\eta_1^L(i))_{i=1}^{\max supp(\zeta_1^L)}$ είναι $(\xi, \zeta, \varepsilon, F)$ ειδικοί συντελεστές.*

Ορισμός 2.17. Έστω X ένας χώρος Banach με FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω ακόμη $\zeta + 1 < \xi < \omega_1$ διατακτικοί και $\varepsilon > 0$. Ένας κυρτός συνδυασμός $\sum_{n\in F} a_n x_n$ στον X λέγεται $(\varepsilon, \xi, \zeta)$ ειδικός κυρτός συνδυασμός (scc) αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) $F \in \mathcal{S}_\xi$, η ακολουθία $(a_n)_{n\in F}$ είναι φθίνουσα και $\sum_{n\in F} a_n = 1$.

(ii) Για κάθε $P \in \mathcal{S}_\zeta^M$ έχουμε ότι $\sum_{n:t_n\in P} a_n < \varepsilon$ όπου $t_n = \min\text{supp}x_n$ για κάθε n.

Πόρισμα 2.18. *(Ύπαρξη $(\varepsilon, \xi, \zeta)$ scc) Έστω X χώρος Banach με FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον X, $\varepsilon > 0$ και $\zeta + 1 < \xi < \omega_1$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε για κάθε $L \in [N]^\infty$ υπάρχει $(\varepsilon, \xi, \zeta)$ scc της $(x_n)_{n\in L}$ στον X.*

Απόδειξη. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Βρίσκουμε υπακολουθία $(x_n)_{n\in N}$ της $(x_n)_{n\in M}$ έτσι ώστε $n+1 > \min\text{supp}x_n$ για κάθε $n \in N$. Από Πρόταση 2.16 για κάθε $L \in [N]^\infty$ υπάρχει $F \subset L$ πεπερασμένο με $F \in \mathcal{S}_\xi$ και $(a_n)_{n\in F}$ ακολουθία θετικών πραγματικών που είναι $(\xi, \zeta, \frac{\varepsilon}{2}, F)$ ειδικοί συντελεστές. Εύκολα ελέγχεται ότι το στοιχείο $\sum_{n\in F} a_n x_n$ είναι ο ζητούμενος $(\varepsilon, \xi, \zeta)$ scc της $(x_n)_{n\in L}$. □

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τις πρώτες εκτιμήσεις ειδικών κυρτών συνδυασμών σε $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένους χώρους και θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη της δομής των $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ χώρων σε επόμενες ενότητες.

Λήμμα 2.19. *Έστω X χώρος Banach με συρρικνούσα FDD και $\xi < \omega_1$ διατακτικός ώστε ο X είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος. Έστω ακόμη $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ασθενώς μηδενική νορμαρισμένη ακολουθία στον X. Τότε για κάθε $\zeta > \xi+1$, $\varepsilon > 0$ και κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε για κάθε κυρτό συνδυασμό $\sum_{n\in G} r_n x_n$ της $(x_n)_{n\in N}$ και κάθε $x^* \in B_{X^*}$, υπάρχει $G_{x^*} \in \mathcal{S}_\xi$ ώστε*

$$|x^*(\sum_{n\in F} r_n x_n)| \leq \varepsilon \sum_{n\in F} r_n + \sum_{n\in G_{x^*}} r_n.$$

Απόδειξη. Έστω $\zeta > \xi+1$, $\varepsilon > 0$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Από Ορισμό 2.8 για το ε υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε για κάθε $x^* \in B_{X^*}$

$$G_{x^*} = \{n \in N : \ \ |x^*(x_n)| > \varepsilon\} \in \mathcal{S}_\xi.$$

Έστω $\sum_{n\in G} r_n x_n$ ένας κυρτός συνδυασμός της $(x_n)_{n\in N}$. Επειδή η $(x_n)_n$ είναι νορμαρισμένη, από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι για κάθε $x^* \in B_{X^*}$,

$$\begin{aligned}
|x^*(\sum_{n\in G} r_n x_n)| &\leq |x^*(\sum_{n\in G_{x^*}} r_n x_n)| + |x^*(\sum_{n\notin G_{x^*}} r_n x_n)| \\
&\leq \sum_{n\in G_{x^*}} r_n |x^*(x_n)| + \sum_{n\notin G_{x^*}} r_n |x^*(x_n)| \\
&\leq \sum_{n\in G_{x^*}} r_n + \varepsilon \sum_{n\notin G_{x^*}} r_n \leq \varepsilon \sum_{n\in F} r_n + \sum_{n\in G_{x^*}} r_n.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.20. *Έστω X ένας χώρος Banach με συρρικνούσα FDD και $\xi < \omega_1$ διατακτικός ώστε ο X είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος και έστω ακόμη $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ασθενώς μηδενική και νορμαρισμένη ακολουθία στον X. Τότε για κάθε $\zeta > \xi+1$, $\varepsilon > 0$ και κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει ένας κυρτός συνδυασμός $\sum_{n\in G} r_n x_n$ της $(x_n)_{n\in M}$ ώστε $\|\sum_{n\in G} r_n x_n\| < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Πρώτα επιλέγουμε $N \in [M]^\infty$ ώστε να ικανοποιείται το Λήμμα 2.19. Από Πρόταση 2.16, για $\zeta > \xi+1$, N και $\varepsilon/2$ υπάρχουν $(\zeta, \xi, \frac{\varepsilon}{2}, F)$ ειδικοί συντελεστές $(r_n)_{n\in F}$. Ισχυριζόμαστε ότι ο κυρτός συνδυασμός $\sum_{n\in F} r_n x_n$ της $(x_n)_{n\in N}$ είναι ο ζητούμενος. Πράγματι όπως πριν, από Λήμμα 2.19 για M, $\frac{\varepsilon}{2}$ και $\sum_{n\in F} r_n x_n$ έχουμε ότι για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ υπάρχει $G_{x^*} \in \mathcal{S}_\xi$ ώστε

$$|x^*(\sum_{n\in F} r_n x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n\in F} r_n + \sum_{n\in G_{x^*}} r_n + \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 2.4. *Ειδικότερα για κάθε $\zeta > \xi+1$, $\varepsilon > 0$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $N \in [M]^\infty$ ώστε για κάθε $(\varepsilon, \xi, \zeta)$ ειδικό κυρτό συνδυασμό $\sum_{n\in G} r_n x_n$ της $(x_n)_{n\in N}$ να ισχύει ότι $\|\sum_{n\in G} r_n x_n\| < \varepsilon$.*
Πράγματι, για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ από Πόρισμα 2.18 υπάρχει ένα περαιτέρω άπειρο υποσύνολο N του M ώστε η $(x_n)_{n\in N}$ έχει την ιδιότητα ότι $n+1 > \min supp x_n$ για κάθε $n \in N$. Το συμπέρασμα έπεται χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με το Πόρισμα 2.20 και το γεγονός ότι η οικογένεια $\mathcal{S}_\xi$ είναι spreading.

2.2.4 Χώροι Mixed Tsirelson

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j}, \frac{1}{m_j})_j$ όπου $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \omega_1$ είναι διατακτικοί και $1 < m_1 < m_2 < \ldots$ ακέραιοι. Ο $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j}, \frac{1}{m_j})_j$ ορίζεται να είναι η πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ ως προς τη νόρμα

$$\|x\| = \{f(x) \,:\, x \in W\}$$

όπου W είναι ένα συμμετρικό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας B_{ℓ_∞} που ορίζεται από τις παραμέτρους (ξ_j) και (m_j). Κάθε στοιχείο $f \in W$ είτε είναι μονοσύνολο $\pm e_q^*$ για κάποιο $q \in \mathbb{N}$ ή γράφεται στη μορφή $f = m_j^{-1} \sum_{i=1}^k f_i$ για κάποιο $j \in \mathbb{N}$, όπου $(f_i)_{i=1}^k$ είναι $S^M_{\xi_j}$ allowable. Σε αυτή τη περίπτωση ορίζουμε το βάρος της f, $w(f)$, ως $w(f) = m_j$.

Το σύνολο W είναι το μικρότερο υποσύνολο του $c_{00}(\mathbb{N})$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. Το W είναι συμμετρικό και για κάθε $f \in W$ και $I \subseteq \mathbb{N}$ διάστημα ο περιορισμός $f|_I$ ανήκει στο W.
2. $\pm e_q^* \in W$ για κάθε $q \in \mathbb{N}$.
3. Αν $f_1, \ldots, f_k$ είναι $S^M_{\xi_{2j}}$-allowable στοιχεία του W τότε $f = \frac{1}{m_{2j}} \sum_{i=1}^k f_i \in W$.

Για τις κατασκευές αυτού του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε τον χώρο $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j$. Έστω $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία φυσικών αριθμών ώστε

$$m_1 = 4, \qquad m_{j+1} \geq {m_j}^2 \quad \text{για κάθε } j \geq 1.$$

Ορίζουμε $q_j = 2\log_2(m_j)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και επαγωγικά επιλέγουμε μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία διατακτικών $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$\xi_j > \xi_{j-1} \cdot 2^{2m_j}$$

και $\mathcal{S}_{\xi_j} \supset \mathcal{S}_{\xi_{j-1}}$ (δες Λήμμα 2.7), όπου θέτουμε $\xi_0 = \xi < \omega_1$. Από Λήμμα 2.7 προκύπτει ότι $\mathcal{S}^M_{\xi_j} \supset \mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

Για τη συνέχεια θα χρειαστεί να ορίσουμε και μία άλλη ακολουθία διατακτικών $(\zeta_j)_j$ ώστε $\xi_j < \zeta_j < \xi_{j+1}$. Για την ακρίβεια, επιλέγουμε $\zeta_j > (\xi_j + 1) \cdot q_{j+1} + 1$ ώστε $(\zeta_j + 1)q_{j+1} < \xi_{j+1}$ και $\mathcal{S}_{\zeta_j} \supset \mathcal{S}_{\xi_j+1}$ (Λήμμα 2.7). Είναι γνωστό ότι $\mathcal{S}_\xi \subset \mathcal{S}_{\xi+1}$ για κάθε διατακτικό $\xi < \omega_1$, όπως για $\zeta < \xi$ δεν γνωρίζουμε ότι $\mathcal{S}_\zeta \subset \mathcal{S}_\xi$. Από την επιλογή των $(\xi_j)_j$ $(\zeta_j)_j$ συνεπάγεται ότι $\xi + 1 < \xi_j < \zeta_j$, $\mathcal{S}_{\xi_j} \subset \mathcal{S}_{\xi_{j+1}}$ και $\mathcal{S}_{\xi_j} \subset \mathcal{S}_{\zeta_j}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

Ο χώρος Banach $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j$ είναι αυτοπαθής και δεν περιέχει ισομορφικά τον c_0 και ℓ_p για καθε $1 \leq p < \infty$. Επίσης, έχει νορμαρισμένη Schauder βάση που συμβολίζουμε με $(e_i)_i$.

Εκτιμήσεις στη βάση του $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \dfrac{1}{m_j})_j]$

Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό από το [17] (Κεφάλαιο 3).

Ορισμός 2.21 (Το δέντρο $\boldsymbol{T_f}$ για συναρτησιακό $\boldsymbol{f \in W}$). Έστω $f \in W$. Με δέντρο της f (ή δέντρο που αντιστοιχεί στην ανάλυση της f) εννοούμε μία πεπερασμένη ακολουθία $T_f = (f_t)_{t\in\mathcal{A}}$, όπου $\mathcal{A}$ είναι ένα πεπερασμένο δέντρο με μοναδική ρίζα $0 \in \mathcal{A}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. $f_0 = f$ και $f_t \in W$ για κάθε $t \in \mathcal{A}$.
2. Κάθε $t \in \mathcal{A}$ είναι μεγιστικό αν και μόνο αν $f_t = \pm e_n^*$.
3. Για κάθε $t \in \mathcal{A}$ που δεν είναι μεγιστικό, αν $S_t = \{s_1, \ldots, s_d\}$ είναι το σύνολο όλων των αμέσως επόμενων του t, υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ ώστε η οικογένεια $(f_{s_1}, \ldots, f_{s_d})$ είναι $\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}$ allowable και $f_t = \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{d} f_{s_i}$.

Είναι άμεσο ότι κάθε $f \in W$ έχει δέντρο το οποίο δεν είναι απαραίτητα μοναδικό.

Οι πρώτες εκτιμήσεις πάνω στη βάση του χώρου $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ βασίζονται στο ακόλουθο λήμμα που είναι ανάλογο του λήμματος 3.16 στο [17] (Κεφάλαιο 3). Υπενθυμίζουμε ότι $q_j = 2\log_2 m_j$.

Λήμμα 2.22. *Έστω $f \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$.*

(i) Για $j = 2, 3, \ldots$ έχουμε ότι $\{k \in \mathbb{N} : \ |f(e_k)| > \frac{1}{m_j}\} \in (\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{\log_2 m_j - 1}$.

(ii) Αν $j = 2, 3, \ldots$ ώστε υπάρχει $T_f = (f_t)_{t\in\mathcal{A}}$ δέντρο της f με $w(f) \neq m_j$ για κάθε $t \in \mathcal{A}$ τότε $\{k \in \mathbb{N} : \ |f(e_k)| > \frac{1}{m_j^2}\} \in (\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{q_j - 1}$.

Πρόταση 2.23. *Έστω $\varepsilon > 0$, $j \in \mathbb{N}$ με $j > 1$ ώστε $\varepsilon < \frac{1}{m_j}$. Έστω ακόμη στοιχείο $x = \sum_{k\in F} a_k e_k$ στον $T[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ που είναι $(\varepsilon, \xi_j, \zeta_{j-1})$ scc όπου $F \subset L$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα :*

(i) Αν L άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε $(\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{\log_2 m_j}[L] \subset \mathcal{S}^M_{\zeta_{j-1}}$ (Λήμμα 2.5) ώστε $F \subset L$ και $f \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$, τότε

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \varepsilon \ \text{ αν } f = \pm e_q^* \\ \frac{1}{m_i} \ \text{ αν } w(f) = m_i, \ i \geq j \\ \frac{2}{m_i m_j} \ \text{ αν } w(f) = m_i, i < j \end{cases}$$

και άρα $|f(x)| \leq \frac{1}{m_j}$.

(ii) Αν L άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε $(\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{q_j}[L] \subset \mathcal{S}^M_{\zeta_{j-1}}$ και $f \in W[(S^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ με ανάλυση $\mathcal{T}_f = (f_t)_{t\in\mathcal{A}}$ ώστε $w(f) \neq m_j$ για κάθε $t \in \mathcal{A}$ και $\varepsilon \leq \frac{1}{m_j^2}$ τότε $|f(x)| \leq \frac{1}{m_j^2}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το (i). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι supp$f \subset F \subset L$ και $f(e_k) \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως, αν $f = e_q^*$ για $q \in F$ τότε $f(x) = a_q < \varepsilon$ επειδή $\{q\} \in \mathcal{S}^M_0 \subset \mathcal{S}^M_{\zeta_{j-1}}$.
Αν $w(f) = m_i$ για $i \geq j$ τότε έχουμε ότι $f(x) \leq \frac{1}{m_i}$ επειδή $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{m_i}$ και $\sum_{k\in F} a_k = 1$.

Έστω $f \in W$ με $w(f) = m_i$ για $i < j$. Τότε $f = \frac{1}{m_i}(f_1 + f_2 + \cdots + f_d)$ για κάποια $\mathcal{S}^M_{\xi_i+1}$ allowable ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_d)$ στο W. Για $t = 1, 2, \ldots, d$ θέτουμε

$$D_t = \{q \in \mathbb{N} : \ f_t(e_q) > \frac{1}{m_j}\} \ \text{ και } \ D = \bigcup_{t=1}^{d} D_t.$$

Από Λήμμα 2.22 έχουμε ότι $D_t \in (\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{\log_2 m_j - 1}$ για κάθε $t = 1, 2, \ldots, d$. Συνεπώς, αφού η ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_d)$ είναι $\mathcal{S}^M_{\xi_i+1}$ allowable και άρα $\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1}$ allowable (εφόσον $i \leq j-1$) επειδή $D_t \subset \operatorname{supp} f_t$ για κάθε $t = 1, 2, \ldots, d$ συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(D_1, D_2, \cdots, D_d)$ είναι $\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1}$ allowable. Άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$D \in \mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1} * (\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{\log_2 m_j - 1} = (\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{\log_2 m_j}. \tag{2.1}$$

Επειδή $D \subset L$ και το στοιχείο x είναι $(\varepsilon, \xi_j, \zeta_{j-1})$ scc, συνεπάγεται ότι $\sum_{q \in D} a_q < \varepsilon$. Συμπεραίνουμε ότι,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{m_i} \sum_{t=1}^{d} f_t(\sum_{k \in F} a_k e_k) = \frac{1}{m_i} \left(\sum_{t=1}^{d} f_t|_D(\sum_{k \in F} a_k e_k) + \sum_{t=1}^{d} f_t|_{\mathbb{N} \setminus D}(\sum_{k \in F} a_k e_k) \right) \\ &\leq \frac{1}{m_i} \left(\sum_{k \in D} a_k + \frac{1}{m_j} \right) < \frac{1}{m_i}(\varepsilon + \frac{1}{m_j}) \\ &\leq \frac{1}{m_i}(\frac{1}{m_j} + \frac{1}{m_j}) = \frac{2}{m_i m_j}. \end{aligned}$$

Το (ii) αποδεικνύεται παρόμοια. □

2.3 Η (X, hi) μέθοδος επέκτασης BD-$\mathcal{L}_\infty$ χώρων

2.3.1 Η μέδοθος επέκτασης

Ένα από τα κεντρικά εργαλεία για τις κατασκευές αυτού του κεφαλαίου είναι μία μέθοδος επέκτασης που παρουσιάστηκε στο [27]. Αυτή η μέθοδος μας δίνει τη δυνατότητα να εμφυτεύσουμε τον αρχικό χωρο X σε έναν BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρο $\mathfrak{X}$ και στη συνέχεια τροποποιώντας τη μέθοδο στο [10] ορίζουμε ένα νέο BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρο, που συμβολίζεται με $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ο οποίος περιέχει τον X ισομορφικά αλλά διαθέτει επιπλέον ιδιότητες από τον $\mathfrak{X}$.

Για να περιγράψουμε τα βασικά βήματα της μεθόδου κατασκευής του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, χρειάζεται πρώτα να υπενθυμίσουμε τη μέθοδο κατασκευής $\mathcal{L}_\infty$ χώρων όπως παρουσιάστηκε στο [10].

Έστω $(\Delta_n)_n$ μία ακολουθία πεπερασμένων και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Ένας χώρος Banach $\mathfrak{X}$ λέγεται BD-$\mathcal{L}^\infty$ (που αντιστοιχεί στην $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$) αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Ο $\mathfrak{X}$ είναι ένας υπόχωρος του $\ell^\infty(\Gamma)$ όπου $\Gamma = \cup_{n=0}^\infty \Delta_n$.

(ii) Θέτοντας $\Gamma_n = \cup_{k=0}^n \Delta_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μία οικογένεια $(i_{n,m})_{n \leq m}$ ομοιόμορφα φραγμένων τελεστών $i_{n,m} : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma_m)$ ώστε $i_{n,n} = Id_{\ell^\infty(\Gamma_n)}$ και για κάθε $k \leq n \leq m$ να ισχύει ότι $i_{k,m} = i_{n,m} \circ i_{k,n}$.

(iii) $\mathfrak{X} = \overline{\cup_{n=0}^\infty X_n}$ όπου $X_n = i_n(\ell^\infty(\Gamma_n))$ και $i_n = \lim_{m \to \infty} i_{n,m}$. Επιπλέον, η ακολουθία $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $M_n = i_n(\ell^\infty(\Delta_n))$ είναι μία FDD για τον $\mathfrak{X}$ με τις αντίστοιχες προβολές $P_{\{n\}}(x) = i_n(x|_{\Gamma_n}) - i_{n-1}(x|_{\Gamma_{n-1}})$.

Έστω X ένας χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή. Από [27] (Θεώρημα A) ο X εμφυτεύεται σε έναν BD-$\mathcal{L}^{\infty}$ χώρο $\mathfrak{X}$ που αντιστοιχεί σε κάποια ακολουθία $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\mathfrak{X} \subset \ell_\infty(\cup_n \Delta_n)$ και έχεισυζυγή $\mathfrak{X}^*$ ισόμορφο με τον ℓ^1. Επιπλέον, η FDD του $\mathfrak{X}$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σέβεται τη δομή του X. Για την ακρίβεια μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο $\{x \in X : \text{supp}x \text{ πεπερασμένο}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Ορισμός 2.24. Έστω $\mathfrak{X}$ ένας χώρος Banach με FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ένας υπόχωρος X του $\mathfrak{X}$ λέγεται *ομαλά εμφυτεύσιμος* στον $\mathfrak{X}$ ως προς την FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν ισχύει ότι το σύνολο $c_{00}(\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n) \cap X$ είναι πυκνό στον X, με άλλα λόγια το σύνολο που αποτελέιται από στοιχεία του X με πεπερασμένο support είναι πυκνό στον X.

Επομένως, αν X χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή, τότε από M. Zippin ([45]) ο X εμφυτεύεται σε ένα χώρο Banach W με συρρικνούσα βάση. Από W.B. Johnson, H.P. Rosenthal και Zippin στο [35] (όπως και στο [41], Λήμμα 3.1) μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο W έχει μία FDD $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι συρρικνούσα και X είναι ομαλά εμφυτεύσιμος υπόχωρος του W, ως προς την $(E_n)_n$. Από D. Freeman, E. Odell Th. Schlumprecht στο [27] (Θεώρημα A ,δες ακόμη [7]), ο παραπάνω W εμφυτεύεται σε έναν BD-$\mathcal{L}^{\infty}$ χώρο $\mathfrak{X}$ με συρρικνούσα FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε κάθε E_n εμφυτεύεται στο M_{k_n} για κάποια αύξουσα ακολουθία φυσικών $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Όλα τα παραπάνω περιέχονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.25. *Έστω X χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή. Τότε ο X περιέχεται ισομορφικά σε έναν BD χώρο $\mathfrak{X}$ με συρρικνούσα FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε η ισομορφική εικόνα του X είναι ομαλά εμφυτεύσιμος υπόχωρος του $\mathfrak{X}$, ως προς την $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Στη συνέχεια, οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε χώρο X που είναι υπόχωρος ενός BD χώρου με συρρικνούσα FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα εννοούμε επιπλέον ότι ο X είναι ομαλά εμφυτεύσιμος, ως προς την $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Έστω X, $\mathfrak{X}$ όπως στο Θεώρημα 2.25 και $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η FDD του $\mathfrak{X}$, που αντιστοιχεί στην $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τροποποιώντας κατάλληλα την μέθοδο επέκτασης στο [27] που επίσης χρησιμοποιήθηκε στο [7](Κεφάλαιο 2), κατασκευάζουμε ένα χώρο $\mathcal{L}_X^{\infty}$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) Ο $\mathcal{L}_X^{\infty}$ είναι BD-$\mathcal{L}^{\infty}$ χώρος με διαχωρίσιμο συζυγή.

(ii) Αν $(\overline{\Delta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ξένων ανά δύο και πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{L}_X^{\infty} \subset \ell^{\infty}(\overline{\Gamma})$ όπου $\overline{\Gamma} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Delta}_n$, τότε $\overline{\Delta}_{2k-1} = \Delta_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Υπάρχει ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $\Phi : \mathcal{L}_X^{\infty} \to \mathfrak{X}$, που ορίζεται ως $\Phi(y) = y|_{\Gamma}$ και ένας υπόχωρος $\overline{X}$ του $\mathcal{L}_X^{\infty}$ ώστε $\Phi|_{\overline{X}}$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των $\overline{X}$ και X.

Ο χώρος $\mathcal{L}_X^{\infty}$ μπορεί να αποκτήσει επιπλέον ιδιότητες ανάλογα με τον τρόπο που ορίζονται τα σύνολα $\overline{\Delta}_{2k}$. Στη δική μας περίπτωση,τα σύνολα ορίζονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κατασκευής καθολικά αδιάσπαστου χώρου στο [10] και ο χώρος $\mathcal{L}_X^{\infty}$ θα συμβολίζεται ως $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$. Όπως θα αποδείξουμε σε επόμενες ενότητες ο χωρος πηλίκο $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}/_{\overline{X}}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος και έχει την "scalar-plus-compact" ιδιότητα. Επιπλέον, σε ειδικές περιπτώσεις χώρων X, ο $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$ έχει την "scalar-plus-compact" ιδιότητα.

Για τη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε γράμματα όπως ξ, ζ για να συμβολίζουμε διατακτικούς ενώ με $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\overline{\Gamma}$.

2.3.2 Η κατασκευή του χώρου $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$

Έστω X ένας χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή και έστω $\mathfrak{X}$ ένας BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρος με συρρίκνουσα FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που αντιστοιχεί σε μία ακολουθία συνόλων $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε τον X ομαλά εμφυτεύσιμο υπόχωρο του $\mathfrak{X}$). Από Πρόταση 2.20, υπάρχει διατακτικός $\xi < \omega_1$ ώστε ο χώρος $\mathfrak{X}$ είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος. Έστω ακολουθία διατακτικών $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ώστε $\xi < \xi_j < \omega_1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(m_j)_{j=1}^\infty$ όπως στην υποενότητα 1.4.

Παρατήρηση 2.5. *Στην ειδική περίπτωση που ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός αποδεικύεται ([17]) ότι ο διατακτικός ξ είναι μικρότερος του ω. Επομένως, στη θέση των διατακτικών $(\xi_j)_j$ μπορούμε να επιλέξουμε μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_j)_j$ που ικανοποιούν αντίστοιχες συνθήκες με αυτές που ορίζονται στο [17].*

Θα ορίσουμε τα σύνολα $\overline{\Delta}_{2n}$ χρησιμοποιώντας τις Schreier Οικογένειες $(\mathcal{S}_{\xi_j})_{j=1}^\infty$ και μία κωδικοποίηση $\sigma : \overline{\Gamma} \to \mathbb{N}$ (δες [10]). Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma \in \overline{\Delta}_{2n}$, το στοιχείο γ αναπαρίσταται ως $\gamma = (2n, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_j, b^*)$ όπου $\operatorname{rank}\gamma = 2n$, $\eta \in \overline{\Delta}_{2p}$ με $p < n$, $b^* \in B_{\ell^1(\overline{\Gamma}_{2n-1}\setminus\overline{\Gamma}_{2p})}$, $\text{weight}(\gamma) = m_j$, $\text{age}(\gamma) = |\mathcal{F}_\gamma|$ με $\mathcal{F}_\gamma \in \mathcal{S}_{\xi_j}$ και $\|e^*_\gamma|_{\overline{X}}\| \leq 2$.

Θέτουμε $\overline{\Delta}_0 = \overline{\Gamma}_0$, $\overline{\Delta}_n = \overline{\Gamma}_n \setminus \overline{\Gamma}_{n-1}$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$ και $\overline{\Delta}_{2n-1} = \Delta_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Ακολουθώντας την Bourgain-Delaben μέθοδο (όπως έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 1), για $n \leq m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε με επαγωγή έναν γραμμικό τελεστή (όπως σε προηγούμενα κεφάλαια) $\bar{i}_{n,m} : \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_m)$ ως :

Για $m = n$ ορίζουμε $\bar{i}_{n,n} : \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)$ ως $\bar{i}_{n,n} = Id_{\ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)}$.

Για $m = n+1$ ορίζουμε $\bar{i}_{n,n+1} : \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_{n+1})$ με τον κανόνα

$$\bar{i}_{n,n+1}(x)(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma), \text{ αν } \gamma \in \overline{\Gamma}_n \\ \bar{c}^*_\gamma(x), \text{ αν } \gamma \in \overline{\Delta}_{n+1} \end{cases}$$

για κάθε $x \in \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)$ όπου $\bar{c}^*_\gamma : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \mathbb{R}$ είναι ένας γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι οι τελεστές $\bar{i}_{n,m}$ έχουν οριστεί και θέτουμε $\bar{i}_{n,m+1} = \bar{i}_{m,m+1} \circ \bar{i}_{n,m}$. Είναι άμεση συνέπεια ότι για κάθε $n < l < m$, $\bar{i}_{n,m} = \bar{i}_{l,m} \circ \bar{i}_{n,l}$. Έστω $\bar{i}_n : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \mathbb{R}^\Gamma$ το όριο $\bar{i}_n = \lim_{m\to\infty} \bar{i}_{n,m}$. Θέτουμε $Y_n = \bar{i}_n[\ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)]$ και $\mathcal{L}^\infty_{X,hi} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n}$. Συμβολίζουμε με $\overline{R}_n : \ell^\infty(\overline{\Gamma}) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)$ τον τελεστή περιορισμού $\overline{R}_n(x) = x|_{\overline{\Gamma}_n}$ και ορίζουμε προβολές $\overline{P}_{\{n\}} : \mathcal{L}^\infty_{X,hi} \to \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ως $\overline{P}_{\{n\}}(x) = \bar{i}_n(\overline{R}_n(x)) - \bar{i}_{n-1}(\overline{R}_{n-1}(x))$. Αν I διάστημα της μορφής $(m, n]$, ορίζουμε $\overline{P}_I = \sum_{i=m+1}^n \overline{P}_{\{i\}}$. Επιπλέον, όπως στο [10] για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}$ ορίζουμε ένα γραμμικό συναρτησιακό $\bar{d}^*_\gamma$ ας $\bar{d}^*_\gamma = e^*_\gamma - \bar{c}^*_\gamma = e^*_\gamma \circ \overline{P}_{\{\operatorname{rank}\gamma\}}$ και θέτουμε $\overline{M}_n = \bar{i}_n[\ell^\infty(\overline{\Delta}_n)]$. Αν υποθέσουμε ότι οι τελεστές $\bar{i}_{n,m}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ που ορίζεται παραπάνω είναι BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρος με FDD την $(\overline{M}_n)_n$. (δες [10])

Ορισμός 2.26. Ορίζουμε τελεστή $\Phi : \mathcal{L}^\infty_{X,hi} \to \mathfrak{X}$ ώστε $\Phi(y) = y|_{\cup_{j=1}^\infty \overline{\Delta}_{2j-1}}$, για κάθε $y \in \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$.

Επαγωγικά θα ορίσουμε τα σύνολα $\overline{\Delta}_n$, τα συναρτησιακά $\bar{c}^*_\gamma$ για κάθε $\gamma \in \overline{\Delta}_n$ και ταυτοχρόνως τελεστές

$$T_n : c_{00}(\bigoplus_{n=1}^\infty M_n) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n).$$

Ξεκινάμε επιλέγοντας μία ακολουθία φυσικών αριθμών $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και για κάθε p, n έστω $B_{n,p}$ το σύνολο που αποτελείται από γραμμικούς συνδυασμούς $b^* = \sum_{\eta\in\overline{\Gamma}_n\setminus\overline{\Gamma}_p} a_\eta e_\eta^*$, ώστε $\sum_{\eta\in\overline{\Gamma}_n\setminus\overline{\Gamma}_p} |a_\eta| \leq 1$ και κάθε συντελεστής a_η είναι ρητός με παρονομαστή που διαιρεί το $N_n!$. Η ακολουθία N_n μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε το σύνολο $B_{n,p}$ να είναι 2^{-n}-πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $\ell^1(\overline{\Gamma}_n \setminus \overline{\Gamma}_p)$. Θα εισάγουμε στην επαγωγή και τον ορισμό της συνάρτησης κωδικοποίησης $\sigma : \overline{\Gamma} \to \mathbb{N}$ (όπως στο [10]) έτσι ώστε $\sigma(\gamma) > \operatorname{rank}\gamma$ για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}$.
Θέτουμε $\overline{\Delta}_1 = \Delta_1$.
Υποθέτουμε ότι για κάθε $k < 2n$, τα σύνολα $\overline{\Delta}_k$, τα συναρτησιακά $(c_\gamma^*)_{\gamma\in\overline{\Delta}_k}$ και οι τελεστές T_k έχουν οριστεί ώστε να ικανοποιούν τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $2k < 2n$, κάθε $\gamma \in \overline{\Delta}_{2k}$ έχει βάρος, $w(\gamma)$, και ηλικά $\operatorname{age}(\gamma)$ με $a(\gamma) = |\mathcal{F}_\gamma|$ όπου $\mathcal{F}_\gamma \in S_{\xi_j}$ αν $w(\gamma) = m_j$. Ακόμη έχουμε ορίσει $\sigma(\gamma) \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma(\gamma) > 2k$.

2. Για κάθε $2k-1 < 2n$, $\overline{\Delta}_{2k-1} = \Delta_k$ και για κάθε $\gamma \in \overline{\Delta}_{2k-1}$ θέτουμε $w(\gamma) = 1$ και $\overline{c}_\gamma^* : \ell^\infty(\overline{\Gamma}_{2n-2}) \to \mathbb{R}$ ώστε $\overline{c}_\gamma^*(x) = c_\gamma^*(\Phi(x))$.

3. Για κάθε $k < 2n$, $T_k(x) = \overline{x}_k$ όπου

$$\overline{x}_k = \begin{cases} \overline{x}_{2l-2} + x|_{\Delta_l} & \text{αν } \ k = 2l-1 \\ \overline{i}_{2l-1,2l}(\overline{x}_{2l-1}), & \text{αν } \ k = 2l \end{cases}$$

Ορίζουμε,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{2n} = & \bigcup_{j=1}^{n} \{(m_{2j}, b^*) : b^* \in B_{2n-1,0}\} \\ & \cup \bigcup_{p=1}^{2n-1} \bigcup_{j=1}^{\lfloor p/2 \rfloor} \Big\{(2n, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_{2j}, b^*) : \eta \in \overline{\Delta}_{2p},\ w(\eta) = m_{2j},\ \mathcal{F}_\eta \in S_{\xi_{2j}} \\ & \qquad \text{μη μεγιστικό}, \mathcal{F}_\eta \leq \operatorname{rank}\eta,\ b^* \in B_{2n-1,2p} \text{ και} \\ & \qquad \|e_\eta^* + m_{2j}^{-1}(b^* \circ \overline{R}_{2n-1} - b^* \circ \overline{i}_{2p,2n-1} \circ \overline{R}_{2p})|_{T_{2n-1}(X)}\| \leq 2\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cup \bigcup_{j=1}^{\lfloor (2n+1)/2 \rfloor} \Big\{(m_{2j-1}, e_\beta^*) : \beta \in \overline{\Gamma}_{2n-1} \text{ και } w(\beta) = m_{4i-2} > m_{2j-1}^2\Big\} \\ & \cup \bigcup_{p=1}^{2n-1} \bigcup_{j=1}^{\lfloor (p+1)/2 \rfloor} \Big\{(2n, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_{2j-1}, e_\beta^*) : \eta \in \overline{\Delta}_{2p}, w(\eta) = m_{2j-1}, \mathcal{F}_\eta \in S_{\xi_{2j-1}} \\ & \qquad \text{μη μεγιστικό }, \mathcal{F}_\eta \leq \operatorname{rank}\eta,\ \beta \in \overline{\Gamma}_{2n-1} \setminus \overline{\Gamma}_{2p}, \\ & \qquad w(\beta) = m_{4\sigma(\eta)} \ \text{ και} \\ & \qquad \|e_\eta^* + m_{2j}^{-1}(e_\beta^* \circ \overline{R}_{2n-1} - e_\beta^* \circ \overline{i}_{2p,2n-1} \circ \overline{R}_{2p})|_{T_{2n-1}(X)}\| \leq 2\Big\}. \end{aligned}$$

Για $\gamma \in \overline{\Delta}_{2n}$,

1. Αν το γ είναι της μορφής (m_j, b^*) ορίζουμε
$$\mathcal{F}_\gamma = \{2n\} \text{ και } \overline{c}^*_\gamma = m_j^{-1}(b^* \circ \overline{R}_{2n-1} - b^* \circ \overline{i}_{2p,2n-1} \circ \overline{R}_{2p}).$$

2. Αν το γ είναι της μορφής $(2n, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_j, b^*)$, ορίζουμε
$$\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_\eta \cup \{2n\} \text{ και } \overline{c}^*_\gamma = e^*_\eta + m_j^{-1}(b^* \circ \overline{R}_{2n-1} - b^* \circ \overline{i}_{2p,2n-1} \circ \overline{R}_{2p}).$$

Τέλος, ορίζουμε τελεστή $T_{2n} : c_{00}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_{2n})$ ως
$$T_{2n}(x) = \overline{i}_{2n-1,2n}(\overline{x}_{2n-1})$$
για κάθε $x \in c_{00}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n)$, όπου $\overline{x}_{2n-1} = T_{2n-1}$.

Παρατήρηση 2.6. *Ο ορισμός των συνόλων $B_{n,p}$ συνεπάγεται την ακόλουθη χρήσιμη παρατήρηση. Αν $b^* \in B_{\ell^1(\Gamma_n\setminus\Gamma_p)}$ με ρητούς συντελεστές τότε υπάρχει $n' \geq n$ ώστε $b^* \in B_{n',p}$. Πράγματι, το b^* είναι της μορφής $b^* = \sum_{\eta\in\overline{\Gamma}_{2n-1}\setminus\overline{\Gamma}_p} a_\eta e^*_\eta$, ώστε $\sum_{\eta\in\overline{\Gamma}_{2n-1}\setminus\overline{\Gamma}_p} |a_\eta| \leq 1$ και κάθε a_η είναι ρητός $a_\eta = \frac{k_\eta}{m_\eta}$. Επειδή η ακολουθία $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αυστηρά αύξουσα, υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $\max_\eta m_\eta < N_l$ και είναι άμεσο ότι το l ικανοποιεί την υπόθεση (δηλαδή είναι το ζητούμενο $n' \geq n$).*

2.3.3 Το ομοιόμορφο φράγμα των τελεστών $\{\overline{i}_{m,n}\}_{m\leq n}$

Όπως στο [10] θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 2.27. *Για κάθε $n \leq m$, $\|\overline{i}_{n,m}\| \leq 2$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε με επαγωγή πάνω στο m για κάθε $n \leq m$. Για $m = 1$ είναι άμεσο ότι $\|\overline{i}_{0,1}\| = 0 \leq 2$. Υποθέτουμε ότι για δοσμένο m και για κάθε $n \leq m$, ισχύει ότι $\|\overline{i}_{n,m}\| \leq 2$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \leq m+1$ $\|\overline{i}_{n,m+1}\| \leq 2$. Έστω ότι $n = m$ και έστω $x \in B_{\ell^\infty(\overline{\Gamma}_m)}$. Από τον ορισμό των τελεστών $\overline{i}_{m,n}$, αρκεί να δείξουμε ότι $|\overline{c}^*_\gamma(x)| \leq 2$ για κάθε $\gamma \in \overline{\Delta}_{m+1}$. Αν $m+1 = 2k-1$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $|\overline{c}^*_\gamma(x)| = c^*_\gamma(x|_{\cup_{j=1}^{k-1}\overline{\Delta}_{2j-1}})$ και άρα ισχύει. Έστω τώρα ότι $m+1 = 2l$ για κάποιο $l \in \mathbb{N}$. Τότε το στοιχείο γ είναι της μορφής $\gamma = (m+1, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_j, b^*)$ ώστε $\eta \in \overline{\Delta}_{2p}$ με $2p < m$ και $b^* \in \overline{\Gamma}_m \setminus \overline{\Gamma}_p$. Εύκολα βλέπουμε ότι
$$c^*_\gamma(x) = e^*_\eta(x) + \frac{1}{m_j}(b^* \circ \overline{R}_m - b^* \circ \overline{i}_{2p,m} \circ \overline{R}_{2p})$$
και άρα χρησιμοποιώντας την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε ότι
$$|c^*_\gamma(x)| \leq \|x\| + \frac{1}{m_j}(\|x\| + \|\overline{i}_{2p,m}(x)\|) \leq 2.$$

Έστω $n < m$, $x \in B_{\ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)}$ και $\gamma \in \Delta_{m+1}$. Αν $m+1 = 2l-1$ για κάποιο l, παρόμοι αόπως παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ισχύει. Έστω λοιπόν ότι $m+1 = 2l$ για κάποιο $l \in \mathbb{N}$. Τότε το γ αναπαρίσταται ως $\gamma = (2l, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_j, b^*)$ και $\overline{c}^*_\gamma = e^*_\eta + \frac{1}{m_j}(b^* \circ \overline{R}_n - b^* \circ \overline{i}_{2p,n} \circ \overline{R}_{2p})$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

1. $2p \geq m$
   Τότε ισχύει ότι
   $$\overline{R}_n \circ \bar{i}_{m,n}(x) - \bar{i}_{2p,n} \circ \overline{R}_{2p} \circ \bar{i}_{m,n}(x) = \bar{i}_{m,n}(x) - \bar{i}_{m,n}(x) = 0,$$
   επομένως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $|\overline{c}^*_\gamma(\bar{i}_{m,n}(x))| \leq 2$.

2. $2p < m$
   Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ότι $\overline{R}_n \circ \bar{i}_{m,n}(x) - \bar{i}_{2p,n} \circ \overline{R}_{2p}(x) = \bar{i}_{m,n}(x) - \bar{i}_{2p,n}(x|_{\overline{\Gamma}_{2p}})$. Αυτό σε συνδυασμό με την επαγωγική μας υπόθεση συνεπάγεται ότι
   $$\begin{aligned}|\overline{c}^*_\gamma(\bar{i}_{m,n}(x))| &\leq |\bar{i}_{m,n}(x)(\eta)| + \frac{1}{m_j}\|\bar{i}_{m,n}(x)\| + \frac{1}{m_j}\|\bar{i}_{2p,n}(x|_{\overline{\Gamma}_{2p}})\| \\ &\leq 1 + \frac{4}{m_j} \leq 2.\end{aligned}$$
   Η απλούστερη περίπτωση που το στοιχείο γ είναι της μορφής $\gamma = (m_j, b^*)$ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

□

Το γεγονός ότι για κάθε k, m οι τελεστές $\bar{i}_{k,m}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι συνεπάγεται ότι οι τελεστές T_n είναι φραγμένοι. Αυτό βέβαια δε συνεπάγεται ότι οι T_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι στον $\mathfrak{X}$. Στην ακόλουθη πρόταση φαίνεται ο λόγος που χρειαζόμαστε να υποθέσουμε ότι ο χώρος Banach X είναι ομαλά εμφυτεύσιμος υπόχωρος του BD χώρου $\mathfrak{X}$.

Πρόταση 2.28. *Οι εναγόμενοι τελεστές $T_n|_X$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Επιπλέον, υπάρχει γραμμικός και φραγμένος τελεστής $\overline{T} : X \to \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $\Phi(\overline{T}(x)) = x$ για κάθε $x \in X$ και επομένως $\Phi|_{\overline{T}(X)}$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των $\overline{T}(X)$ και X.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι οι $T_n : c_{00}(\bigoplus_{n=1}^\infty M_n) \to \ell^\infty(\overline{\Gamma}_n)$ ορίζονται ως

$$T_n(x) = \overline{x}_n = \begin{cases}\overline{x}_{2k-2} + x|_{\Delta_k} & \text{αν } n = 2k-1 \\ \bar{i}_{2k-1,2k}(\overline{x}_{2k-1}), & \text{αν } n = 2k\end{cases}$$

Έστω $x \in X \cap c_{00}(\bigoplus_{n=1}^\infty M_n)$ και $n_0 = \max \mathrm{supp} x$, (ως προς την FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Εύκολα βλέπουμε ότι για $n > 2n_0 - 1$, $\bar{i}_n T_n(x) = \bar{i}_{2n_0} T_{2n_0}(x)$. Ορίζοντας

$$\overline{T}_n : X \cap c_{00}(\bigoplus_{n=1}^\infty M_n) \to \sum_{k=1}^n \bigoplus \overline{M}_k$$

με τον κανόνα $x \to \bar{i}_n T_n(x)$, είναι άμεσο ότι η ακολουθία $\{\overline{T}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in X \cap c_{00}(\bigoplus_{n=1}^\infty M_n)$. Επομένως, αν $\overline{T} = w^* - \lim \overline{T}_n$, ο τελεστής $T : X \to \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Για $\gamma \in \overline{\Gamma}$, έχουμε ότι

$$\overline{T}(x)(\gamma) = \overline{d}^*_\gamma(\overline{T}x) + \overline{c}^*_\gamma(\overline{T}x).$$

Στην περίπτωση που $\gamma \in \Gamma$, τότε $e^*_\gamma(\overline{T}x) = e^*_\gamma(x)$ και επομένως $\|x\|_{\mathfrak{X}} \leq \|\overline{T}(x)\|$. Διαφορετικά, $\gamma \in \Delta_{2n}$ για κάποιο n και ισχύει ότι

$$\overline{d}^*_\gamma(\overline{T}x) = \overline{d}^*_\gamma(T_{2n-1}(x)) = 0.$$

Από τον ορισμό του Δ_{2n}, προκύπτει ότι $|\overline{T}(x)(\gamma)| = |c^*_\gamma(T_{2n-1}x)| \leq 2\|x\|_{\mathfrak{X}}$ τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\|x\|_{\mathfrak{X}} \leq \|\overline{T}(x)\| \leq 2\|x\|_{\mathfrak{X}}.$$

Τέλος, επειδή ο X είναι ομαλά εμφυτεύσιμος συνεπάγεται ότι το σύνολο $X \cap c_{00}(\bigoplus_{n=1}^\infty M_n)$ είναι πυκνό στον X και επομένως ο $\overline{T}$ είναι φραγμένος. Επιπλέον, εφόσον $\Phi(y) = y|_\Gamma$ για κάθε $y \in \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, συμπεραίνουμε ότι $\Phi(\overline{T}(x)) = x$ για κάθε $x \in X$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατηρήσεις.

1. *Από τον ορισμό των προβολών $\overline{P}_I$, όπου I είτε είναι μονοσύνολο ή της μορφής $I = (m, n]$ για κάποιο $m > 0$ και $n > m$, έχουμε ότι $\|\overline{P}_I\| \leq 4$. Αν $I = (n, \infty)$, τότε $\|\overline{P}_I\| \leq 3$ ενώ για $I = (0, n]$ για $n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι $\|\overline{P}_I\| = \|\bar{i}_n\| \leq 2$.*

2. *Για $\gamma \in \overline{\Delta}_{2n}$ της μορφής $\gamma = (2n, \eta, \mathcal{F}_\eta, m_j, b^*)$, όπου $b^* \in \ell^1(\overline{\Gamma}_{2n-1} \setminus \overline{\Gamma}_{2p})$, έχουμε την ακόλουθη ισότητα*

$$\overline{c}^*_\gamma = e^*_\eta + \frac{1}{m_j}(b^* \circ \overline{R}_{2n-1} - b^* \circ \bar{i}_{2p,2n-1} \circ \overline{R}_{2p}) = e^*_\eta + \frac{1}{m_j} b^* \circ \overline{P}_{(2p,2n-1]}.$$

Συμβολισμοί-Έννοιες 2.1. *1. Με $\overline{X}$ συμβολίζουμε την ισομορφική εικόνα του X στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ μέσω του τελεστή $\overline{T} : X \to \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$.*

2. Μία ακολουθία $(x_n)_n$ στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ λέγεται skipped block ακολουθία, αν υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, supp$x_n < 2k_n <$ suppx_{n+1}.

2.3.4 Η ανάλυση του συναρτησιακού e^*_γ, για $\gamma \in \overline{\Gamma}$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και σε προηγούμενα κεφάλαια, για $\gamma \in \Gamma$ το συναρτησιακό e^*_γ έχει μία ανάλυση [10]. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}$,

$$\overline{d}^*_\gamma = e^*_\gamma - \overline{c}^*_\gamma.$$

Επειδή οι τελεστές $\bar{i}_{n,m}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι συνεπάγεται ότι $\|\overline{d}^*_\gamma\| \leq 2$ για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}$. Έστω $\gamma \in \overline{\Delta}_{2n_0}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ με βάρος $w(\gamma) = m_{j_0}$. Με παρόμοιο τρόπο όπως στα στοιχεία του Γ προσδιορίζουμε με επαγωγή μία συλλογή $\{2p_i, 2q_i - 1, \eta_i, b^*_i\}_{i=1}^d$ από πεπερασμένες ακολουθίες που έχουν τις παρακάτω ιδιότητες :

(i) $2p_1 < 2q_1 < 2p_2 < 2q_2 < \ldots < 2p_d < 2q_d = 2n_0$.

(ii) $\eta_i \in \overline{\Delta}_{2q_i}$ και $b^*_i \in B_{2q_i-1,2p_i}$ για κάθε $1 \leq i \leq d$.

(iii) $\eta_d = \gamma$, $\eta_i = (2p_i, \eta_{i-1}, \mathcal{F}_{\eta_{i-1}}, m_{j_0}, b^*_i)$ για $1 < i \leq d$ και $\eta_1 = (m_{j_0}, b^*_1)$.

(iv) Η ακολουθία $\{\mathcal{F}_{\eta_i}\}_{i=1}^d$ είναι αύξουσα και το σύνολο $\mathcal{F}_{n_i}$ δεν είναι μεγιστικό στοιχείο της οικογένειας $S_{\xi_{j_0}}$ για κάθε $i < d$.

(v) $\{2q_i\}_{i=1}^d \in S_{\xi_{j_0}}$ (εφόσον $w(\gamma) = m_{j_0}$).

Ορισμός 2.29. Για $\gamma \in \cup_n \overline{\Delta}_{2n}$, η συλλογή $\{2p_i, 2q_i - 1, \eta_i, b_i^*\}_{i=1}^d$ που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες λέγεται ανάλυση του γ.

Σημειώνουμε ότι όταν το σύνολο $\mathcal{F}_\gamma$ είναι μεγιστικό στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{S}_\xi$, τότε το γ είναι μεγιστικό στοιχείο στο σύνολο $\overline{\Gamma}$ με την έννοια ότι δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί περαιτέρω ώστε να παραχθεί ένα νέο συναρτησιακό του συνόλου Γ.

Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο όπως την Πρόταση 4.5 στο [10], διαπιστώνεται το ακόλουθο.

Πρόταση 2.30. *Έστω $\gamma \in \overline{\Delta}_{2n_0}$ με ανάλυση $\{2p_i, 2q_i - 1, \eta_i, b_i^*\}_{i=1}^d$. Τότε,*

$$e_\gamma^* = \sum_{i=1}^d \overline{d}_{\eta_i}^* + \frac{1}{m_{j_0}} \sum_{i=1}^d b_i^* \circ \overline{P}_{(2p_i, 2q_i - 1]}.$$

Παρατηρήσεις. *(1). Εξ' ορισμού έχουμε ότι για κάθε $1 \le i_0 < d$ η ανάλυση του η_{i_0} είναι η συλλογή $\{2p_i, 2q_i - 1, \eta_i, b_i^*\}_{i=1}^{i_0}$ και άρα,*

$$e_{\eta_{i_0}}^* = \sum_{i=1}^{i_0} \overline{d}_{\eta_i}^* + \frac{1}{m_{j_0}} \sum_{i=1}^{i_0} b_i^* \circ \overline{P}_{(2p_i, 2q_i - 1]}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $e_{\gamma^*} = e_{\eta_{i_0}^*} + \frac{1}{m_h} \sum_{i=i_0+1}^d b_i^* \circ \overline{P}_{(2p_i, 2q_i - 1]}$ για κάθε $1 \le i_0 < d$.
(2). Επιπλέον, κάθε b_i^* είναι πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός στοιχείων του $\overline{\Gamma}$ δηλαδή $b^* = \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma^*$ όπου $F \subset \overline{\Gamma}$ πεπερασμένο, $a_\gamma \ge 0$ και $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma = 1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{L}_{X,hi}^\infty$, υπάρχει $\gamma_0 \in \overline{\Gamma}$ ώστε $|b^*(x)| \le |x(\gamma_0)|$. Πράγματι, έστω $\gamma_0 \in \overline{\Gamma}$ με την ιδιότητα ότι $|x(\gamma_0)| = \max\{|x(\gamma)| : \gamma \in F\}$. Από την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma = 1$, προκύπτει ότι $|b^*(x)| \le \sum_{\gamma \in F} a_\gamma |e_\gamma^*(x)| \le |x(\gamma_0)|$ και άρα το ζητούμενο.

Στην επόμενη πρόταση (παρόμοια όπως στο [10]) παρουσιάζεται μία χρήσιμη ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του $\overline{\Gamma}$ με περιττό βάρος.

Πρόταση 2.31. *[Tree-like ιδιότητα] Έστω $\gamma, \gamma' \in \overline{\Delta}_{2n}$ με το ίδιο περιττό βάρος $\frac{1}{m_{2j-1}}$ και με ανάλυση $(p_i, e_{\eta_i}^*, \beta_i)_{1 \le i \le a}$ και $(p_i', e_{\eta_i'}^*, \beta_i')_{1 \le i \le a'}$ αντίστοιχα. Αν $a \ge a'$ τότε υπάρχει $1 \le \ell \le a$ ώστε $\beta_i = \beta_i'$ για κάθε $i < \ell$ και $w(\eta_j) \ne w(\eta_i')$ για κάθε j και κάθε $\ell < i \le a'$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $1 \le \ell \le a'$ το μεγαλύτερο ώστε $\beta_i' = \beta_i$ για κάθε $i < \ell$. Αν $\ell = a'$ τότε η πρόταση ισχύει. Αν $\ell < a'$ τότε έχουμε ότι $\beta_\ell' \ne \beta_\ell$, και συνεπάγεται ότι $w(\eta_\ell) = m_{4\sigma(\beta_\ell)} \ne m_{4\sigma(\beta_\ell')} = w(\eta_\ell')$. Σχετικά με τις ηλικίες διαπιστώνουμε ότι $a(\beta_i) = i$ και $a(\beta_j') = j$ για κάθε $1 \le j \le a$ και $1 \le i \le a'$. Συνεπώς, οποτεδήποτε $i \ne j$ έχουμε ότι $w(\eta_j) = m_{4\sigma(\beta_j)} \ne m_{4\sigma(\beta_i')} = w(\eta_i')$. Αν $j > \ell$ τότε η ανάλυση του ξ_j είναι $(p_i, e_{\eta_i}^*, \beta_i)_{1 \le i \le j-1}$ ενώ η ανάλυση του β_j' είναι $(p_i', e_{\eta_i'}^*, \beta_i')_{1 \le i \le j-1}$. Τα στοιχεία β_j και β_j' έχουν διαφορετική ανάλυση $\beta_\ell' \ne \beta_\ell$ και άρα $\beta_j \ne \beta_j'$. Επομένως, $w(\eta_j) = m_{4\sigma(\beta_j)} \ne m_{4\sigma(\beta_j')} = w(\eta_j')$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

2.4 Rapidly Increasing Ακολουθίες (RIS) στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τις ακόλουθίες RIS και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τρείς τύπους RIS, όπως στο [10]. Η χρήση αυτών των ακολουθιών είναι απαραίτητη για τη μελέτη τόσο των τελεστών των χώρων αλλά και για την απόδειξη ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/\overline{X}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος.

Ορισμός 2.32. Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ λέγεται rapidly increasing ακολουθία (RIS), αν υπάρχει μία σταθερά $C>0$ και μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\|x_k\|\le C$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

(ii) $j_{k+1}>\max\operatorname{ran}x_k$.

(iii) $|x_k(\gamma)|\le Cm_i^{-1}$ όποτεδήποτε $w(\gamma)=m_i$ και $i<j_k$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις έννοιες τοπικό support και τοπικό βάρος για στοιχεία x στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ τα οποία θα χρειαστούν ώστε να ορίσουμε τις δύο κατηγορίες RIS. Οι έννοιες αυτές ορίστηκαν για πρώτη φορά στο [10].

Ορισμός 2.33. Έστω x ένα στοιχείο του $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ και έστω $q=\max\operatorname{ran}x$. Ορίζουμε το τοπικό support του x να είναι το σύνολο $\operatorname{supp}u=\{\gamma\in\overline{\Gamma}_q:\ x(\gamma)\neq 0\}$.

Λήμμα 2.34. *Έστω $\gamma\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma)=m_h$ και έστω $x\in\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Υποθέτουμε ότι $w(\gamma')\neq m_h$ για κάθε $\gamma'\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ στο τοπικό support του x. Τότε, $|x(\gamma)|\le\frac{4\|x\|}{m_h}$.*

Απόδειξη. Έστω $q=\max\operatorname{ran}x$. Τότε $x=\bar{i}_q(x\restriction\overline{\Gamma}_q)$ και διακρίνουμε σε περιπτώσεις. Αν $\operatorname{rank}\gamma\le q$, τότε από υπόθεση έχουμε ότι $x(\gamma)=0$. Διαφορετικά, $\operatorname{rank}\gamma>q$ και έστω $\{2p_i,2q_i-1,\beta_i,b_i^*\}_{i=1}^l$ η ανάλυση του γ. Επιλέγουμε $i_0\le l$ να είναι το μεγαλύτερο με την ιδιότητα ότι $\operatorname{rank}\beta_{i_0}\le q$. Για $i\ge i_0$ προκύπτει ότι $i>\max\operatorname{ran}x$ και άρα $d^*_{\beta_i}(x)=0$. Επίσης, για κάθε $i>i_0$, $\overline{P}_{(2p_i,2q_i-1]}(x)=0$. Επομένως,

$$e^*_\gamma=\sum_{i=1}^{l}\overline{d}^*_{\beta_r}+\frac{1}{m_h}\sum_{i=1}^{l}b_i^*\circ\overline{P}_{(2p_i,2q_i-1]}.$$

Από Παρατήρηση 2.3.4 (1) έχουμε ότι

$$x(\gamma)=\begin{cases}e^*_{\beta_{i_0-1}}(x)+\frac{1}{m_h}b^*_{i_0}\circ\overline{P}_{(2p_{i_0},2q_{i_0}-1]}(x), & \text{αν }\ i_0>1\\ \frac{1}{m_n}b_1^*\circ\overline{P}_{(2p_1,2q_1-1]}(x), & \text{αν }\ i_0=1\end{cases}$$

Επειδή $\operatorname{rank}\beta_{i_0-1}<q$, ισχύει ότι $x(\beta_{i_0-1})=0$ και άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι

$$|x(\gamma)|\le\frac{4\|x\|}{m_h}.$$

□

Ορισμός 2.35. Έστω $(x_k)_{k\in I}$ skipped block ακολουθία $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Η $(x_k)_{k\in I}$ λέμε ότι έχει φραγμένα τοπικά βάρη αν υπάρχει j_1 ώστε $w(\gamma)\le m_{j_1}$ για κάθε γ στο τοπικό support του x_k για κάθε k.
Η $(x_k)_{k\in I}$ λέμε ότι έχει rapidly increasing τοπικά βάρη αν για κάθε k και κάθε στοιχείο γ στο τοπικό support του x_{k+1}, ισχύει ότι $w(\gamma) > m_{i_k}$ όπου $i_k = \max \mathrm{supp} x_k$.

Με παρόμοιο τρόπο όπως στο [10] (Πρόταση 5.10) αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Πρόταση 2.36. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Αν η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει είτε φραγμένα τοπικά βάρη ή rapidly increasing τοπικά βάρη τότε είναι RIS.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει rapidly increasing τοπικά βάρη και έστω m_{j_k} το ελάχιστο βάρος των στοιχείων γ που εμφανίζονται στο τοπικό support του x_k. Παρατηρούμε ότι $j_{k+1} > \max \mathrm{ran} x_k$ για κάθε k και επιπλέον αν $i < j_k$ και γ στοιχείο του $\overline{\Gamma}$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$, τότε $|x_k(\gamma)| \le \frac{4\|x_k\|}{m_i}$ από Λήμμα 2.34. Επομένως, η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι RIS εξ' ορισμού με σταθερά $C = 4\sup_k \|x_k\|$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει φραγμένα τοπικά βάρη και έστω $j_1\in\mathbb{N}$ ώστε $w(\gamma)\ge m_{j_1}$ για κάθε γ στο τοπικό support του x_k για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Για $k\ge 1$, ορίζουμε $j_{k+1} = 1+\max\mathrm{supp} x_k$. Έστω $\gamma\in\overline{\Gamma}$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$ όπου $i < j_k$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις. Αν $i > j_1$, τότε $|x_k(\gamma)| \le \frac{4\|x_k\|}{m_i}$ από Λήμμα 2.34. Αν $i \le j_1$, τότε $|x_k(\gamma)| \le \|x_k\| \le \frac{m_{j_1}}{m_i}\|x_k\|$. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση η ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι RIS με σταθερά $C = m_{j_1}\sup_k\|x_k\|$. □

Υπενθυμίζουμε το ακόλουθο λήμμα από [10].

Λήμμα 2.37. *Έστω i ένας θετικός ακέραιος και έστω x στοιχείο του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ με την ιδιότητα ότι $\|x\|\le C$ και $|x(\xi)|\le\delta$ οποτεδήποτε το βάρος του ξ είναι m_i. Τότε για κάθε s και κάθε στοιχείο γ βάρους m_i έχουμε ότι*

$$|e^*_\gamma(\overline{P}_{(s,\infty)}x)| \le 2\delta + \frac{4C}{m_i}$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma)=m_i$ και ανάλυση $\{2p_r, 2q_r-1, \eta_r, b^*_r\}_{r=1}^d$ ώστε $\{2q_r\}_{r=1}^d \in \mathcal{S}_{\xi_i}$ και

$$e^*_\gamma = \sum_{r=1}^d \overline{d}^*_{\eta_r} + \frac{1}{m_i}\sum_{r=1}^d b^*_r\circ\overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}.$$

Αν $s\ge 2q_d$ τότε $\overline{P}^*_{(s,\infty)}e^*_\gamma = 0$. Αν $0 < s < 2q_1$, έχουμε ότι

$$\overline{P}^*_{(s,\infty)}e^*_\gamma = e^*_\gamma - \overline{P}^*_{(0,s]}e^*_\gamma = e^*_\gamma - \frac{1}{m_i}\overline{P}^*_{(0,s]}b^*_1$$

και άρα

$$|e^*_\gamma(\overline{P}_{(s,\infty)}x)| \le \delta + \frac{1}{m_i}\|b^*_1\|\|\overline{P}_{(0,s]}\|\|x\| \le \delta + \frac{2C}{m_i}.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει r_0 με $1\le r_0 < d$ ώστε $2p_{r_0} \le s < 2q_{r_0}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$e^*_\gamma = e^*_{\eta_{r_0-1}} + \sum_{r=r_0}^d d^*_{\eta_r} + \frac{1}{m_i}\sum_{r=r_0}^d b^*_r\circ\overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}$$

και επομένως,

$$\overline{P}^*_{(s,\infty)}e^*_\gamma = e^*_\gamma - \overline{P}^*_{(0,s]}e^*_\gamma = e^*_\gamma - e^*_{\eta_{r_0-1}} - \frac{1}{m_i}\overline{P}^*_{(2p_{r_0},s]}b^*_{r_0}.$$

Επειδή $w(\eta_r) = w(\gamma)$ για κάθε r προκύπτει ότι

$$|e^*_\gamma(\overline{P}_{(s,\infty)}x)| \le 2\delta + \frac{1}{m_i}\|\overline{P}_{(2p_{r_0},s]}\|\|x\| \le 2\delta + \frac{4C}{m_i}.$$

$\square$

Λήμμα 2.38. *Έστω x στοιχείο του $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ με πεπερασμένο support, $\|x\| \le C$ και $i_0 = \max \text{supp}x + 1$. Τότε για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_j$, $j \ge i_0$, και για κάθε φυσικό αριθμό s έχουμε ότι*

$$|e^*_\gamma \circ \overline{P}_{(s,\infty)}x| < \frac{3C}{m_{i_0}}.$$

Απόδειξη. Έστω $s \in \mathbb{N}$ και $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ όπως στην υπόθεση με ανάλυση $\{2p_i, 2q_i, \eta_i, b^*_i\}_{i=1}^l$ ώστε

$$e^*_\gamma = \sum_{i=1}^l \overline{d}^*_{\eta_i} + \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^l b^*_i \circ \overline{P}_{(2p_i,2q_i]}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $w(\eta_i) = m_j = w(\gamma)$ για κάθε i. Από τον ορισμό των συνόλων $\overline{\Delta}_{2n}$ προκύπτει ότι $\text{rank}\,\eta_1 = 2q_1 > j > \max \text{supp}x$ και αφόσον $\text{rank}\,\eta_i > \text{rank}\,\eta_1$ για κάθε i συμπεραίνουμε ότι $\sum_{i=1}^l \overline{d}^*_{\eta_i}(x) = 0$. Επομένως, $|\overline{P}_{(s,\infty)}x(\gamma)| = \frac{1}{m_j}|\sum_{i=1}^l b^*_i \circ \overline{P}_{(2p_i,2q_i-1]}(\overline{P}_{(s,\infty)}x)|$. Παρατηρούμε ότι για $i > 1$ ισχύει ότι $\min \text{supp}b^*_i = 2p_i > 2q_1$ και επιπλέον $b^*_i \circ \overline{P}_{(2p_i,2q_i-1]} \circ \overline{P}_{(s,\infty)} = b^*_i \circ \overline{P}_{(\max\{2p_i,s\},2q_i-1]}$. Με παρόμοια επιχειρήματα όπως παραπάνω έχουμε προκύπτει ότι $b^*_i\overline{P}_{(\max\{2p_i,s\},2q_i-1]}(x) = 0$ για κάθε $i > 1$. Καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση,

$$\begin{aligned}
|\overline{P}_{(s,\infty)}x(\gamma)| &= \frac{1}{m_j}|b^*_1 \circ \overline{P}_{(2p_1,2q_1-1]}(\overline{P}_{(s,\infty)}x)| \\
&= \frac{1}{m_j}|b^*_1 \circ \overline{P}_{(\max\{2p_1,s\},\infty)}(x)| \\
&\le \frac{1}{m_j}\|\overline{P}_{(\max\{2p_1,s\},\infty)}\|\|x\| \le \frac{3C}{m_j} \le \frac{3C}{m_{i_0}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Στο επόμενο λήμμα γίνονται οι πρώτες εκτιμήσεις πάνω σε X-RIS ακολουθίες του χώρου.

Λήμμα 2.39. *Έστω $(x_k)_k$ RIS ώστε $\|x_k\| \le C$ και έστω $(j_k)_k$ η ακολουθία φυσικών αριθμών που προέρχεται από τον ορισμό. Τότε για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$ και για κάθε φυσικό αριθμό s, ισχύει ότι*

$$|e^*_\gamma \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(x_k)| \le \begin{cases} 6Cm_i^{-1} & \text{αν } i < j_k \\ 3Cm_i^{-1} & \text{αν } i \ge j_{k+1}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$ και $i < j_k$. Από τον Ορισμό 2.32(iii) και το Λήμμα 2.37 για $\delta = \frac{C}{m_i}$, προκύπτει ότι $|\langle e_\gamma^*, \overline{P}_{(s,\infty)}(x_k)\rangle| \leq 6Cm_i^{-1}$. Για $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$ και $i \geq j_{k+1}$ παρατηρούμε ότι $j_{k+1} > \max \mathrm{supp} x_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Το ζητούμενο προκύπτει εφαρμόζωντας το Λήμμα 2.38 για κάθε x_k και για $i_0 = j_{k+1}$. □

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε ένα Λήμμα που αποδειχθεί αρκετά χρήσιμο για τη συνέχεια. Για δοσμένη ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, συμβολίζουμε με $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ την ακολουθία $(\min \mathrm{supp} x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.40. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ block ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και στοιχείο $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$ και ανάλυση $\{2p_r, 2q_r - 1, \eta_r, b_r^*\}_{r=1}^l$. Τότε υπάρχουν σύνολα I_0, $(J_r)_{r=1}^l$, $(I_r)_{r=1}^l$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες :*

(i) $e_\gamma^*(x_k) = 0$ για κάθε k ώστε $t_k \notin I_0 \cup (\cup_r J_r)$.

(ii) $I_r \subset J_r$, $\#J_r \leq \#I_r + 2$ για κάθε $1 \leq r \leq l$. Τα σύνολα I_0, J_r για κάθε r είναι ξένα ανά δύο. Επιπλέον, για κάθε επιλογή πραγματικών $(a_k)_k$ ισχύει ότι

$$e_\gamma^*(\sum_k a_k x_k) = e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in I_0} a_k x_k) + \frac{1}{m_i}\sum_{r=1}^{l} b_r^* \circ \overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}(\sum_{k:t_k\in J_r} a_k x_k).$$

(iii) Τα σύνολα $I_0 \setminus \{\min I_0\}$ ανήκουν στην οικογενεια $\mathcal{S}_{\xi_i}$ και το σύνολο $\{J_r : r \leq l\} \setminus \{\min J_1\}$ είναι $\mathcal{S}_{\xi_i}$ admissible.

Απόδειξη. Θέτουμε $I_0 = \{t_k : \exists\, r \leq d$ ώστε το σύνολο $\mathrm{ran} x_k$ περιέχει το $\mathrm{rank}\,\eta_r\}$ και για κάθε $r \leq l$ θέτουμε $J_r = \{t_k \notin I_0 : \mathrm{ran} x_k \cap \mathrm{ran} b_r^* \neq \emptyset\}$ και $I_r = \{t_k \in J_r : \mathrm{ran} x_k \subset \mathrm{ran} b_r^*\}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$e_\gamma^* = \sum_{r=1}^{d} \overline{d}_{\eta_r}^* + \frac{1}{m_i}\sum_{r=1}^{d} b_r^* \circ \overline{P}_{(2k_r,2l_r-1]}.$$

(i). Έστω k ώστε $t_k \notin I_0 \cup (\cup_r J_r)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε r, $\mathrm{ran} x_k \cap \mathrm{ran} b_r^* = \emptyset$ και $\overline{d}_\eta^*(x_k) = 0$.
(ii). Έστω $r \leq l$ και k_0 ώστε $t_{k_0} \in J_r \setminus I_r$. Τότε επειδή η ακολουθία $(x_k)_k$ είναι block, έχουμε ότι είτε $k_0 = \min\{k : t_k \in J_r\}$ ή $k_0 = \max\{k : t_k \in J_r\}$. Επομένως, $\#J_r \leq \#I_r + 2$ και από τον ορισμό των συνόλων προκύπτει ότι $I_0 \cap J_r = \emptyset$. Έστω $r < r'$ και $t_k \in J_r \cap J_{r'}$. Τότε, $\max \mathrm{ran} b_r^* \in \mathrm{ran} x_k$ και $\min \mathrm{ran} b_{r'}^* \in \mathrm{ran} x_k$. Επομένως, $\mathrm{ran}\eta_r \in \mathrm{ran} x_k$ και άρα $t_k \in I_0$, το οποίο είναι άτοπο και άρα καταλήγουμε ότι $J_r \cap J_{r'} = \emptyset$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω το (ii) αποδείχθηκε.
(iii). Παρατηρούμε ότι το σύνολο $I_0 \setminus \{\min I_0\}$ είναι spread του $\{2q_r\}_{r=1}^l$ και άρα ανήκει στο $\mathcal{S}_{\xi_i}$. Παρόμοια, το σύνολο $\{\min J_r : r \leq l\} \setminus \{\min J_1\}$ είναι spread του $\{2q_r\}_{r=1}^l$ και συμπεραίνουμε το ζητούμενο. □

Γενικεύουμε τον Ορισμό 2.17 ως εξής. Έστω $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ αύξουσες ακολουθίες διατακτικών και $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών που προσδιορίζεται όπως παραπάνω. Για την επιλεγμένη συλλογή $(\xi_j, \zeta_j, m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ορίζουμε τον (ε, j) ειδικό κυρτό συνδυασμό (scc) σε ένα χώρο Banach X με FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.41. Έστω X χώρος Banach με FDD και έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον X. Λέμε ότι το στοιχείο της μορφής $\sum_{k\in F} a_k x_k$ είναι (ε, j) scc της $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον X αν είναι $(\xi_j, \zeta_{j-1}, \varepsilon)$ ειδικός κυρτός συνδυασμός (scc) της $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Από Πόρισμα 2.18, είναι άμεσο το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.42. *(Ύπαρξη scc) Έστω X χώρος Banach με FDD $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ η παραπάνω επιλεγμένη αύξουσα ακολουθία διατακτικών. Έστω ακόμη $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον X, $\varepsilon > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ με $j > 1$. Τότε για κάθε $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $N \in [M]^{\infty}$ ώστε για κάθε $L \in [N]^{\infty}$ υπάρχει (ε, j) scc της $(x_n)_{n\in L}$ στον X.*

Παρατήρηση 2.7. *Εύκολα ελέγχεται ότι για κάθε block ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω και κάθε $\zeta < \omega_1$ με $\zeta_{j-1} + 1 < \zeta \le \xi_j$ υπάρχει (ε, j) scc $\sum_{k\in F} a_k x_k$ με την επιπλέον ιδιότητα ότι $\{t_k = \min supp x_k : k \in F\} \in \mathcal{S}_{\zeta}$.*

Η ύπαρξη scc στους χώρους $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ προκύπτει από Πόρισμα 2.42.

Πρόταση 2.43. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ block ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ ώστε $\|x_k\| \le C$ για κάθε k και $t_1 > 4$. Έστω ακόμα $\varepsilon > 0$, $j \in \mathbb{N}$ με $j > 1$ ώστε $\varepsilon \le \frac{1}{m_j}$ και στοιχείο $x = \sum_{k\in F} a_k x_k$ στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ που είναι (ε, j) scc της $(x_k)_k$. Τότε για κάθε $i < j$ και $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$, έχουμε ότι*

$$|\sum_{k\in F} a_k x_k(\gamma)| \le \frac{2C}{m_i}$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma \in \cup_n \overline{\Delta}_{2n}$ με ανάλυση $\{2k_r, 2l_r - 1, \eta_r, b_r^*\}_{r=1}^d$ ώστε $e_\gamma^* = \sum_{r=1}^{d} \overline{d}^*_{\eta_r} + \frac{1}{m_i} \sum_{r=1}^{d} b_r^* \circ \overline{P}_{(2k_r, 2l_r - 1]}$. Έστω I_0, $(J_r)_{r=1}^l$, $(I_r)_{r=1}^l$ όπως στο Λήμμα 2.40. Συνεπάγεται ότι

$$|e_\gamma^*(\sum_{k\in F} a_k x_k)| \le |e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in I_0} a_k x_k)| + |e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in \cup_r I_r} a_k x_k)| + |e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in \cup_r J_r\setminus I_r} a_k x_k)|.$$

Επιπλέον, από Λήμμα 2.40 έχουμε ότι $I_0 \in \mathcal{S}_{\xi_i+1}$ και ότι η πεπερασμένη ακολουθία $\{J_r\}_{r=1}^l$ είναι $\mathcal{S}_{\xi_i+1}$ admissible. Παρόμοια το σύνολο $\cup_r(J_r \setminus I_r)$ μπορεί να γραφτεί ως η ένωση τεσσάρων ξένων ανά δύο συνόλων του $\mathcal{S}_{\xi_i}$ και άρα είναι στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{S}^M_{\xi_i+1}$. Επειδή, $i < j$ έχουμε ότι $I_0, \cup_r(J_r \setminus I_r) \in \mathcal{S}_{\zeta^M_{j-1}}$. Επομένως, $\sum_{k:t_k\in I_0} a_k < \varepsilon$, $\sum_r \sum_{k:t_k\in J_r\setminus I_r} a_k \le \varepsilon$ και άρα προκύπτουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις.

$$|e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in I_0} a_k x_k)| \le \sum_{k:t_k\in I_0} a_k \|x_k\| \le C\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in \cup_r J_r\setminus I_r} a_k x_k)| &\le \frac{1}{m_i} \sum_{r=1}^{d} |b_r^* \circ \overline{P}_{(2k_r, 2l_r-1]}(\sum_{k:t_k\in J_r\setminus I_r} a_k x_k)| \\
&\le \frac{1}{m_i} \sum_{r=1}^{d} \sum_{k:t_k\in J_r\setminus I_r} a_k \|\overline{P}_{(2k_r, 2l_r-1]}\| \|x_k\| \le \frac{4C}{m_i}\varepsilon
\end{aligned}$$

Επειδή τα σύνολα $(I_r)_r$ είναι ξένα ανά δύο και $\sum_{k\in F} a_k \leq 1$, έχουμε ότι

$$|e_\gamma^*(\sum_{k:t_k\in\cup_r I_r} a_k x_k)| = \frac{1}{m_i}\sum_{r=1}^{d} b_r^*(\sum_{k:t_k\in I_r} a_k x_k) \leq (\sum_{k:t_k\in\cup_r I_r} a_k)\frac{C}{m_i} \leq \frac{C}{m_i}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι

$$|e_\gamma^*(\sum_{k\in F} a_k x_k)| \leq \varepsilon C + \frac{C}{m_i} + \frac{4C}{m_i}\varepsilon < \frac{C}{2m_i} + \frac{C}{m_i} + \frac{C}{2m_i} = \frac{2C}{m_i}.$$

□

Πρόταση 2.44. *Έστω $(x_k)_k$ μία νορμαρισμένη block ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε k, το στοιχείο x_k είναι $(\frac{1}{m_{j_k}}, j_k)$ scc στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ ώστε η $(x_k)_{k\in M}$ είναι 2-RIS.*

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (i), (ii) του ορισμού προκύπτουν άμεσα. Έστω λοιπόν $\gamma \in \overline{\Gamma}\backslash\Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_i$ όπου $i < j_k$. Από Πρόταση 2.43 συνεπάγεται ότι $|x_k(\gamma)| \leq \frac{2}{m_i}$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε $M \in [\mathbb{N}]$ ώστε να ισχύει ότι $j_{k+1} > \max \mathrm{supp} x_k$ για κάθε $k \in M$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι η $(x_k)_{k\in M}$ είναι 2-RIS. □

2.5 Η βασική Ανισότητα που ικανοποιούν οι RIS και οι συνέπειες της

Όπως στο [10] θα αποδείξουμε μία βασική σχέση που ικανοποιούν οι RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$.

Πρόταση 2.45. *(Basic inequality) Έστω I πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και $(x_k)_{k\in I}$ RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $\|x_k\| \leq C$ για κάθε k. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\min \mathrm{supp} x_{\min I} > 6$ και ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_k και $s \in \mathbb{N}$ ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη*

$$\|\Phi(\overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I}\lambda_k x_k))\|_{\mathfrak{X}} < 4C\max_{k\in I}|\lambda_k|.$$

Τότε για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}$, υπάρχουν $k_0 \in I$ και ένα συναρτησιακό $g^* \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ έτσι ώστε:

1. *Είτε $g^* = 0$ ή $w(\gamma) = w(g^*)$ και θέτοντας $t_k = \min \mathrm{supp} x_k$ έχουμε ότι $\mathrm{supp} g^* \subset \{t_k : k \in I,\ k \geq k_0\}$.*
2. *Ισχύει ότι $|e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I}\lambda_k x_k)| \leq 4C|\lambda_{k_0}| + 6Cg^*(\sum_k |\lambda_k| e_{t_k})$.*

Επιπέον, αν υπάρχει j_0 έτσι ώστε

$$|e_\eta^*(\sum_{k\in J}\lambda_k x_k)| \leq C\max_{k\in J}|\lambda_k|,$$

για κάθε υποδιάστημα J του I και κάθε στοιχείο $\eta \in \overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ βάρους m_{j_0}, τότε το συναρτησιακό g^* ανήκει στο σύνολο $W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_{j\neq j_0}]$

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι αν $\gamma \in \Gamma$, έχουμε ότι

$$e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I} \lambda_k x_k) = e_\gamma^*(\Phi(\overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I} \lambda_k x_k)).$$

Επομένως, για $g^* = 0$ και για k_0 τέτοιο ώστε $|\lambda_{k_0}| = \max_{k\in I} |\lambda_k|$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω λοιπόν $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στην τάξη rank του γ.
Αν $\operatorname{rank}\gamma = 1$, τότε $P_{(s,\infty)}^* e_\gamma^* = 0$ οποτεδήποτε $s \geq 1$, άρα

$$e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I} \lambda_k x_k) = \begin{cases} 0 & \text{αν } s \geq 1 \\ \lambda_1 x_1(\gamma) & \text{αν } s = 0 \end{cases}$$

Επομένως, σε αυτή τη περίπτωση το συμπέρασμα ισχύει για $k_0 = 1$ και $g^* = 0$.
Υποθέτουμε ότι για κάθε $q < 2n$ και για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}$ με $\operatorname{rank}\gamma \leq q$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω $\gamma \in \overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_h$ και τάξη $\operatorname{rank}\gamma = 2n$. Αν $(j_k)_k$ είναι η αύξουσα ακολουθία που αντιστοιχεί στην $(x_k)_k$ από τον ορισμό, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

1. $h < j_k$ για κάθε $k \in I$.

2. $h \geq j_{k+1}$ για κάθε $k \in I$.

3. Υπάρχει $l \in I$ ώστε $j_l \leq h < j_{l+1}$.

Θα αποδείξουμε την τελευταία περίπτωση. Οι υπόλοιπες δύο αποδεικνύονται με ανάλογα επιχειρήματα. Χωρίζουμε το άθροισμα προς k σε τρία κομμάτια ως εξής :

$$\begin{aligned} e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I} \lambda_k x_k) &= \sum_{k<l} \lambda_k e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(x_k) + e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\lambda_l x_l) \\ &+ e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)} \sum_{k>l} \lambda_k x_k \end{aligned}$$

και θα δώσουμε εκτίμηση για το κάθε κομμάτι ξεχωριστά. Για $k < l$ παρατηρούμε ότι $h \geq j_l \geq j_{k+1}$, άρα

$$|e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\lambda_k x_k)| \leq 3Cm_h^{-1}|\lambda_k| \leq 3Cm_{j_k}^{-1}|\lambda_k|,$$

από Λήμμα 2.39. Επομένως,

$$|\sum_{I\ni k<l} \lambda_k e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(x_k)| \leq 3C\sum_{k<l} m_{j_k}^{-1}|\lambda_k| \leq 3C\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{-1} \max_{k<l}|\lambda_k| \leq C\max_{k<l}|\lambda_k|.$$

Για το δεύτερο κομμάτι, αρχικά διαπιστώνουμε ότι

$$|\langle e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\lambda_l x_l)\rangle| \leq \|\overline{P}_{(s,\infty)}\||\lambda_l|\|x_l\| \leq 3C|\lambda_l|.$$

Άρα,

$$|\sum_{I\ni k\leq l} \lambda_k e_\gamma^* \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(x_k)| \leq C\max_{k<l}|\lambda_k| + 3C|\lambda_l| \leq 4C|\lambda_{k_0}|,$$

για κατάλληλα επιλεγμένο $k_0 \leq l$.

Για το τρίτο κομμάτι θέτουμε $I' = \{k \in I : \ k > l\}$ και $x'_k = \overline{P}_{(s,\infty)} x_k$. Έστω ακόμη $\{2p_r, 2q_r - 1, \eta_r, b^*_r\}_{r=1}^d$ η ανάλυση του γ όπου $\{2q_r\}_{r=1}^d \in \mathcal{S}_{\xi_h}$ και

$$e^*_\gamma = \sum_{r=1}^d \overline{d}^*_{\eta_r} + \frac{1}{m_h} \sum_{r=1}^d b^*_r \circ \overline{P}_{(2p_r, 2q_r - 1]}.$$

Για την ακολουθία $(x'_k)_{k\in I'}$ βρίσκουμε I_0, I_r, J_r για κάθε $r \leq d$, από Λήμμα 2.40. Επειδή για κάθε k ώστε $t_k \in I'$, έχουμε ότι $h < j_{l+1} \leq j_k$ από Λήμμα 2.39 συμπεραίνουμε ότι

$$|e^*_\gamma(\sum_{k:t_k\in I'} \lambda_k x'_k)| \leq 6Cm_h^{-1} \sum_{k\in I_0} |\lambda_k| + m_h^{-1} |\sum_{r=1}^d \langle b^*_r \circ \overline{P}_{(\max\{s,2p_r\},\infty)}(\sum_{k:t_k\in I_r} \lambda_k x_k)|.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε r, το συναρτησιακό b^*_r είναι κυρτός συνδυασμός των μονοσυνόλων $\pm e^*_\alpha$ με $2p_r < \operatorname{rank} \alpha < 2q_r$, άρα από Παρατήρηση 2.3.4 (2) υπάρχει στοιχείο α_r του συνόλου $\overline{\Gamma}$ που ικανοποιεί τήν ακόλουθη σχέση

$$|b^*_r \circ \overline{P}_{(\max\{s,2p_r\},\infty)}(\sum_{k:t_k\in I_r} \lambda_k x_k)| \leq |e^*_{\alpha_r} \circ \overline{P}_{(\max\{s,2p_r\},\infty)}(\sum_{k:t_k\in I_r} \lambda_k x_k)|.$$

Για κάθε r, εφαρμόζουμε την επαγωγική μας υπόθεση για το στοιχείο $\alpha_r \in \overline{\Gamma}$ και την RIS $(x_k)_{k\in I_r}$ και βρίσκουμε $k_r \in I_r$, $g^*_r \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ με suppot που περιέχεται στο σύνολο $\{t_k : \ k \in I_r \ \text{ με } \ k > k_r\}$ έτσι ώστε

$$|e^*_{\alpha_r} \circ \overline{P}_{(\max\{s,2p_r\},\infty)}(\sum_{k:t_k\in I_r} \lambda_k x_k)| \leq 4C|\lambda_{k_r}| + 6Cg^*_r(\sum_{k:t_k\in I_r} |\lambda_k| e_{t_k}).$$

Θέτουμε $g^* = \frac{1}{m_h}(\sum\limits_{k:t_k\in I_0} e^*_{t_k} + \sum\limits_{r=1}^d (e^*_{t_{k_r}} + g^*_r))$. Επειδή $\{2q_r\}_{r=1}^d \in \mathcal{S}_{\xi_h}$ από το Λήμμα 2.40 συμπεραίνουμε ότι τα σύνολα $I_0 \setminus \{\min I_0\}$, $\cup_{r\geq 2}\{t_{k_r}\}$, $\{\min \operatorname{supp} g^*_r\}_{r\geq 2}$ ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{S}_{\xi_h}$. Θέτουμε

$$G = I_0 \cup (\cup_r \{t_{k_r}\}) \cup (\cup_r \{\min \operatorname{supp} g^*_r\}).$$

Πρατηρούμε ότι το σύνολο G γράφεται ως ένωση έξι ξένων ανά δύο $\mathcal{S}_{\xi_h}$ συνόλων και εφόσον $t_{\min I} > 6$ προκύπτει ότι $G \in \mathcal{S}^M_{\xi_h+1}$. Άρα $g^* \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ και το συμπέρασμα ισχύει.
Αν υπάρχει j_0 που ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη της πρότασης, το συμπέρασμα αποδεικνύεται με την ίδια επαγωγή πάνω στην τάξη $\operatorname{rank} \gamma$. Αν $w(\gamma) \neq m_{j_0}$ τότε με πάρομοιο τρόπο όπως πρίν βρίσκουμε $g^* \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_{j\neq j_0}]$. Αν $w(\gamma) = m_{j_0}$ ακολουθούμε το εξής απλούστερο επιχείρημα : Έστω $l \in I$ ώστε $\overline{P}_{(s,\infty)} x_k = 0$ για κάθε $k < l$. Θέτουμε $J = \{k \in I : \ k > l\}$ και από την επιπλέον συνθήκη έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} |e^*_\gamma \circ \overline{P}_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I} \lambda_k x_k)| &\leq |\lambda_l| \|\overline{P}_{(s,\infty)}\| \|x_l\| + |e^*_\gamma(\sum_{k\in J} \lambda_k x_k)| \\ &\leq 4C|\lambda_{k_0}| \end{aligned}$$

Για $g^* = 0$ το συμπέρασμα ισχύει. □

Η παραπάνω ανισότητα μας δίνει τη δύνατότητα να κάνουμε τις ακόλουθες πρώτες εκτιμήσεις πάνω σε ειδικούς κυρτούς συνδυασμούς των RIS.

Πρόταση 2.46. *Έστω $(x_k)_k$ C-RIS ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, $\varepsilon > 0$, $j \in \mathbb{N}$ με $j > 1$ και $\varepsilon < \frac{1}{m_j^2}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία της $(x_k)_k$ ώστε για κάθε (ε, j) scc της μορφής $\sum\limits_{k\in F} a_k x_k$ να ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $\gamma \in \overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_h$ έχουμε ότι,*

$$|\sum_{k\in F} a_k x_k(\gamma)| \leq \begin{cases} 16Cm_h^{-1}m_j^{-1} & \text{αν } h < j \\ 4Cm_j^{-2} + 6Cm_h^{-1} & \text{αν } h \geq j \end{cases}$$

   Ειδικότερα, $\|\sum\limits_{k\in F} a_k x_k\| \leq \frac{10C}{m_j}$.

2. *Αν λ_k είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $|\lambda_k| \leq 1$ και*

$$|\sum_{k\in J} \lambda_k a_k x_k(\gamma)| \leq Ca_1,$$

   για κάθε γ βάρους m_j και κάθε διάστημα $J \subset F$, τότε

$$\|\sum_{k\in F} \lambda_k a_k x_k\| \leq \frac{10C}{m_j^2}.$$

Απόδειξη. Από Πρόταση 2.4 και ειδικότερα από Λήμμα 2.5 βρίσκουμε αρχικά ένα άπειρο υποσύνολο $L \subset \mathbb{N}$ ώστε $(\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{\log_2 m_j}[L] \subset \mathcal{S}^M_{\zeta_{j-1}}$. Επειδή ο $\mathfrak{X}$ είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος και $\xi < \zeta_j < \xi_j$, από Παρατήρηση 2.4 υπάρχει υπακολουθία της $(x_n)_{n\in L}$ ώστε για κάθε (ε, j) scc $\sum\limits_{k\in F} a_k x_k$ της $(x_k)_k$ να ισχύει ότι

$$\|\Phi(\sum_{k\in F} a_k x_k)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon C.$$

Έστω $\gamma \in \overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_h$, $j \in \mathbb{N}$ και έστω $\sum\limits_{k\in F} a_k x_k$ (ε, j) scc της $(x_k)_k$. Από βασική ανισότητα, υπάρχει $g^* \in W[(\mathcal{S}^M_{\xi_j+1}, \frac{1}{m_j})_j]$ (είτε 0 ή βάρους m_h) που ικανοποιεί ότι

$$|\sum_{k\in F} a_k x_k(\gamma)| \leq 4C|a_{k_0}| + 6Cg^*(\sum_{k\in F} a_k e_{t_k})$$

όπου $k_0 = \min F$ αφού η $(a_k)_k$ είναι φθίνουσα. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $x = \sum\limits_{k\in F} a_k e_{t_k}$ είναι (ε, j) scc δηλαδή $(\varepsilon, \xi_j, \zeta_{j-1})$ scc και άρα από Πρόταση 2.23 (i) καταλήγουμε ότι

$$|g^*(\sum_{k\in F} a_k e_{t_k})| \leq \begin{cases} 2m_j^{-1}m_h^{-1} & \text{αν } h < j \\ m_h^{-1} & \text{αν } h \geq j. \end{cases}$$

Επειδή το μονοσύνολο $\{t_{k_0}\}$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{S}^M_{\zeta_{j-1}}$ προκύπτει το (1).

Το δεύτερο αποδεικνύεται με παρόμοια επιχειρήματα επιλέγοντας $L \subset \mathbb{N}$ ώστε $(\mathcal{S}^M_{\xi_{j-1}+1})^{q_j}[L] \subset \mathcal{S}^M_{\zeta_{j-1}}$.χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.23 (ii). □

Πρόταση 2.47. *Αν ο BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρος $\mathfrak{X}$ που περιέχει τον X έχει συρρικνούσα FDD, τότε ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έχει συρρικνούσα FDD.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι η FDD $(\overline{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του χώρου $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ δεν είναι συρρικνούσα. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει $y^* \in B_{(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*}$, μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία $(z_n)_n$ στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, $\delta > 0$ και $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $y^*(z_n) > \delta$, για κάθε $n \in M$. Για κάθε k μπορούμε να θεωρήσουμε το στοιχείο x_k είναι ημινορμαρισμένος $(\frac{1}{m_{2j_k}}, 2j_k)$ ειδικός κυρτός συνδυασμός (scc) της $(z_n)_n$. Περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $(x_k)_k$ είναι 2-RIS. Έστω $j \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{20}{m_j} < \delta$ και $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \frac{1}{m_j^2}$. Από Πρόταση 2.46 υπάρχει (ε, j) scc $\sum_{k\in F} a_k x_k$ ώστε $\|\sum_{k\in F} a_k x_k\| < \delta$ και επειδή $F \subset M$ με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε σε άτοπο. □

Σημειώνουμε ότι στη δική μας περίπτωση ο BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρος $\mathfrak{X}$ που περιέχει τον X έχει συρρικνούσα FDD και άρα με βάση την παραπάνω πρόταση, ο συζυγής $(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$ είναι ισόμορφος με τον $\ell_1(\overline{\Gamma})$.

2.6 X-scc και X-Rapidly Increasing Ακολουθίες

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε την ύπαρξη ημινορμαρισμένων ειδικών κυρτών συνδυασμών στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ καθώς και κάποιες βασικές εκτιμήσεις αυτών που θα χρειαστούν ώστε να δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/\overline{X}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε μία ειδική μορφή scc, που συμβολίζονται ως X-scc, και ορίζονται ως εξής :

Ορισμός 2.48. Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ νορμαρισμένη block ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και $x = \sum\limits_{k\in F} a_k x_k$. Το στοιχείο x λέγεται ημινορμαρισμένος X-(ε, j) scc αν ικανοποιεί τον Ορισμό 2.41 με την επιπλέον ιδιότητα ότι $\mathrm{dist}(x, \overline{X}) > \frac{1}{12}$.

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη ημινορμαρισμένων X-scc στον χώρο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.49. *Έστω $(x_r)_{r=1}^\infty$ μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $\mathrm{dist}(x_r, \overline{X}) > c > 0$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπακολουθία $(x_r)_{r\in L_0}$ ώστε $2j \leq \max \mathrm{ran} x_{\min L_0}$ και με την ιδιότητα ότι για κάθε κυρτό συνδυασμό $\sum\limits_{r\in F} a_r x_r$ της $(x_r)_{r\in L_0}$ ώστε $\{\min \mathrm{supp} x_r : r \in F\} \in \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$, υπάρχει στοιχείο $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j}$ που ικανοποιεί ότι $\|e^*_\gamma|_{\overline{X}}\| < \delta$ και*

$$\sum_{r\in F} a_r x_r(\gamma) \geq \frac{c}{2m_{2j}}.$$

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ ώστε $2j \leq \max \mathrm{ran} x_1$. Επειδή $\mathrm{dist}(x_r, \overline{X}) \geq c$ για κάθε k, υπάρχει συναρτησιακό $\overline{b}_r^* \in B_{\ell^1(\overline{\Gamma})}$ ώστε $\overline{b}_r^*(x_r) \geq c$ και $\overline{b}_r^*|_{\overline{X}} = 0$. Επίσης, υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ και $x^* \in B_{\ell^1(\overline{\Gamma})}$ ώστε η ακολουθία $(\overline{b}_r^*)_{k \in M}$ να είναι w^*-συγκλίνουσα στο x^*. Επειδή η ακολουθία $(x_r)_{r \in M}$ είναι ασθενώς μηδενική, μπορούμε να βρούμε $L \in [M]$ ώστε $\sum_{k \in L} |x^*(x_r)| < \frac{c}{8}$ και $x^*|_{\overline{X}} = 0$. Συνεπάγεται ότι $(\overline{b}_r^* - x^*)(x_r) > \frac{7c}{8}$ και $(\overline{b}_r^* - x^*)|_{\overline{X}} = 0$.
Επειδή η $(\overline{b}_r^* - x^*)_{k \in L}$ είναι w^* μηδενική (ως προς τον $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$) και η $(x_r)_{r \in L}$ είναι ασθενώς μηδενική, εφαρμόζουμε ένα sliding hump επιχείρημα και βρίσκουμε $L' \subset L$, θετικούς αριθμούς δ_r ώστε $\sum_r \delta_r < \frac{\delta}{16}$, $k_1 < n_1 < k_r < n_r < k_{r+1} < \ldots$ φυσικούς αριθμούς και συναρτησιακά $(x_r^*)_{r \in L'}$ ώστε για κάθε r, $x_r^* \in \ell_1(\overline{\Gamma}_{2n_r - 1, 2k_r})$ και ικανοποιεί τα ακόλουθα

$$\|\overline{b}_r^* - x^* - x_r^*\| < \frac{\delta_r}{2}, \;\; x_r^*(x_{r'}) = 0 \;\forall r \neq r' \in L' \text{ και } \|x_r^*|_{\overline{X}}\| < \frac{\delta_r}{2}.$$

Επειδή για κάθε $k > n$, τα σύνολα $\overline{B}_{k,n}$ είναι 2^{-k} πυκνα της μοναδιαίας μπάλας $B_{\ell_1(\overline{\Gamma}_k \setminus \overline{\Gamma}_n)}$ μπορούμε να επιλέξουμε $L_0 \in [L']$ και συναρτησιακά $(b_r^*)_{r \in L_0}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) η ακολουθία $(b_r^*)_{r \in L_0}$ είναι skipped block, $\min \mathrm{ran} b_{\min L}^* > 2j$ και για κάθε r, $b_r^* \in B_{2n_r - 1, 2k_r}$, $\|b_r^* - x_r^*\| \leq \frac{\delta_r}{2}$ και άρα $\|b_r^*|_{\overline{X}}\| < \delta_r$.

(ii) Για κάθε $r \neq r'$ στο L_0, $b_r^*(x_{r'}) = 0$ και $b_r^*(x_r) \geq \frac{c}{2}$.

Έστω $F = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \subset L_0$ ώστε $\{\min \mathrm{supp} x_r : \; r \in F\} \in \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$. Από τον ορισμό των συνόλων $\overline{\Delta}_{2n}$ μπορούμε να βρούμε $\eta_{r_1} \in \Delta_{2n_{r_1}}$ της μορφής $(m_{2j}, b_{r_1}^*)$. Χρησιμοποιώντας το συναρτησιακό $b_{r_2}^*$ επιλέγουμε η_{r_2} της μορφής $(2n_{r_2}, \eta_{r_0}, m_{2j}, b_{r_1}^*)$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε στοιχείο $\gamma \in \overline{\Gamma}$ με ανάλυση $\{2k_{r_i}, 2n_{r_i} - 1, \eta_{r_i}, b_{r_i}^*\}_{i=1}^a$ έτσι ώστε $\overline{d}_{\eta_{r_i}}^*(x_r) = 0 \;\forall i$ για κάθε $r \in F$. Εύκολα ελέγχεται ότι το στοιχείο γ ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.50. *Ο χώρος $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$ έχει $(\overline{X}, m_{2j}^{-1}, \mathcal{S}_{\xi_{2j}})$ κάτω εκτίμηση για κάθε $j \in \mathbb{N}$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, $j \in \mathbb{N}$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skipped block ακολουθία στον $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$ με την ιδιότητα ότι $\mathrm{dist}(x_n, X) > \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ και μία υπακολουθία $(x_n)_{n \in L}$ με $\min \mathrm{supp} x_{\min L} > k_0$ έτσι ώστε για κάθε $F \in \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$ και κάθε κυρτό συνδυασμό $\sum_{n \in F} a_n x_n$ της $(x_n)_{n \in L}$ ισχύει ότι $\| \sum_{n \in F} a_n x_n \| \geq \frac{\varepsilon}{2 m_{2j}}$.*

Απόδειξη. Έστω $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skipped block ακολουθία στον $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$ με την ιδιότητα ότι $\mathrm{dist}(x_n, X) > \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το συμπέρασμα είναι άμεσο για $k_0 = 2j$ από Πρόταση 2.49. □

Πρόταση 2.51. *Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία στον $\mathcal{L}_{X,hi}^{\infty}$ ώστε $d(x_n, X) > c > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμα $\varepsilon > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{c}{2} \geq \frac{1}{m_{2j}}$. Τότε, υπάρχει block ακολουθία $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $\|y_k\| \leq 1$ για κάθε k και υπάρχει (ε, j) scc στοιχείο της μορφής $\sum\limits_{k \in F} a_k y_k$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα :*

1. $\| \sum\limits_{k \in F} a_k y_k \| \geq \frac{1}{2}$.

2. *Η οικογένεια $\{\mathrm{supp} x_i : \; \mathrm{supp} x_i \subset \mathrm{supp} y_k\}$ είναι $\mathcal{S}_{\zeta_{2j-1}+1}$ admissible για κάθε $k \in F$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $t_k = \min \mathrm{supp} x_k$ για $k = 1, 2, \ldots$ και $T = \{t_k : k \in \mathbb{N}\}$. Επειδή $(\zeta_{2j-1} + 1) \cdot q_{2j} < \xi_{2j}$ από Λήμμα 2.5 υπάρχει $T' \in [T]$ ώστε $S^{q_{2j}}_{\zeta_{2j-1}+1}[T'] \subset \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε περνώντας σε υπακολουθία της $(x_k)_k$, ότι $S^{q_{2j}}_{\zeta_{2j-1}+1}[T] \subset S_{\xi_{2j}}$. Στη συνέχεια υποθέτουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι το συμπέρασμα της πρότασης δεν ισχύει και κατασκευάζουμε block ακολουθίες $(y^l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ για $0 \le l \le q_{2j}$ ώστε να ισχύουν τα εξής :

(i) Για $1 \le l \le q$, η $(y^l_k)_k$ είναι block ακολουθία της $(y^{l-1}_k)_k$ και κάθε στοιχείο y^l_k είναι κυρτός συνδυασμός της ακολουθίας $(x_k)_k$.

(ii) Για κάθε $l \ge 1, k$ η οικογένεια $\{\mathrm{supp} x_i : \mathrm{supp} x_i \subset \mathrm{supp} y^l_k\}$ είναι $S^l_{\zeta_{2j-1}+1}$ admissible.

(iii) $\frac{c}{2m_{2j}} \le \|y^l_k\| < \frac{1}{2^l}$ για κάθε $1 \le l \le q_{2j}$.

Παρατηρούμε ότι το (iii) συνεπάγεται ότι $\frac{c}{2m_{2j}} < \frac{1}{2^{q_{2j}}}$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Οι block ακολουθίες $(y^l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ για $0 \le l \le q$ κατασκευάζονται επαγωγικά ως εξής : Θέτουμε $y^0_k = x_k$ για κάθε k. Έστω $1 < l < q_{2j}$ και ότι οι ακολουθίες $(y^{l-1}_k)_k$ έχουν οριστεί. Από Παρατήρηση 2.7 επιλέγουμε την $(y^l_k)_k$ ως block της $(y^{l-1}_k)_k$ έτσι ώστε κάθε y^l_k είναι (ε, j) scc της $(y^{l-1}_k)_k$ και η οικογένεια $\{\mathrm{supp} y^{l-1}_i : \mathrm{supp} y^{l-1}_i \subset \mathrm{supp} y^l_k\}$ είναι $\mathcal{S}_{\zeta_{2j-1}+1}$ admissible. Παρατηρούμε ότι για κάθε k, η οικογένεια $\{\mathrm{supp} x_i : \mathrm{supp} x_i \subset \mathrm{supp} y^{l-1}_k\}$ είναι $\mathcal{S}^{l-1}_{\zeta_{2j-1}+1}$ admissible και επομένως η οικογένεια $\{\mathrm{supp} x_i : \mathrm{supp} x_i \subset \mathrm{supp} y^l_k\}$ είναι $\mathcal{S}_{\zeta_{2j-1}+1} * \mathcal{S}^{l-1}_{\zeta_{2j-1}+1} = \mathcal{S}^l_{\zeta_{2j-1}+1}$ admissible. Επίσης, από την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε ότι κάθε στοιχείο y^l_k είναι κυρτός συνδυασμός της $(x_k)_k$ και άρα από Πόρισμα 2.50 έχουμε ότι $\|y^l_k\| \ge \frac{c}{2m_{2j}}$. Αν υποθέσουμε ότι $\|y^l_k\| \ge \frac{1}{2^l}$ για κάποιο k, επειδή $y^l_k = \sum_{i\in F} a_i y^{l-1}_i$ προκύπτέι ότι $\|\sum_{i\in F} a_i (2^{l-1} y^{l-1}_i)\| \ge \frac{1}{2}$. Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\|y^{l-1}_i\| < \frac{1}{2^{l-1}}$ για κάθε i. Ο συνδυασμός των παραπάνω οδηγεί σε άτοπο και άρα καταλήγουμε ότι $\|y^l_k\| < \frac{1}{2^l}$ για κάθε k. ☐

Λήμμα 2.52. *Έστω x στοιχείο στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon$. Τότε $\|x\| < 3\mathrm{dist}(x, \overline{X}) + 4\varepsilon$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $y \in \overline{X}$ ώστε $\|x - y\| < \mathrm{dist}(x, \overline{X}) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του τελεστή Φ, προκύπτει ότι

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathfrak{X}} < \mathrm{dist}(x, \overline{X}) + \varepsilon.$$

Επομένως, $\|\Phi(y)\|_{\mathfrak{X}} < \mathrm{dist}(x, \overline{X}) + 2\varepsilon$ και επειδή $\|y\| \le 2\|\Phi(y)\|_{\mathfrak{X}}$ για κάθε $y \in \overline{X}$, συμπεραίνουμε ότι $\|y\| < 2\mathrm{dist}(x, \overline{X}) + 4\varepsilon$. Συνεπώς,

$$\|x\| < \mathrm{dist}(x, \overline{X}) + \|y\| + \varepsilon < 3\mathrm{dist}(x, \overline{X}) + 4\varepsilon.$$

☐

Πόρισμα 2.53. *Έστω Y block υπόχωρος του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ που παράγεται από μία νορμαρισμένη block ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με την ιδιότητα ότι $\mathrm{dist}(x_n, \overline{X}) > c > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε $\varepsilon \le \frac{1}{16}$. Τότε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m_{2j}} \le \frac{c}{2}$ υπάρχει ημινορμαρισμένος $(\varepsilon, 2j)$ X-scc στον Y.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon \leq \frac{1}{16}$ και $j \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{m_{2j}} \leq \frac{c}{2}$. Από Πόρισμα 2.50 έχουμε ότι ο χώρος $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ ικανοποιεί $(\overline{X}, m_{2j}^{-1}, \mathcal{S}_{\xi_{2j}})$ κάτω εκτίμηση. Επειδή $q_{2j} = 2\log_2 m_{2j}$ είναι άμεσο ότι $\frac{c}{2m_{2j}} \geq \frac{1}{2^{q_{2j}}}$ και αφού $(\zeta_{2j-1}+1)\cdot q_{2j} < \xi_{2j}$ από Πρόταση 2.51 υπάρχει στοιχείο $y = \sum\limits_{k\in F} a_k y_k$ που είναι ημινορμαρισμένος $(\varepsilon, 2j)$-scc μιας ακολουθίας $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που είναι block της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από Λήμμα 2.52, συνεπάγεται ότι

$$\operatorname{dist}(y, \overline{X}) > \frac{1}{3}(\|y\| - 4\varepsilon) > \frac{1}{6} - \frac{4}{3}\varepsilon \geq \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \geq \frac{1}{12}$$

και άρα το στοιχείο y είναι X-scc στον Y. $\square$

Ορισμός 2.54. Μία ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ λέγεται X-rapidly increasing ακολουθία (X-RIS), αν η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι RIS και υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $\operatorname{dist}(x_k, \overline{X}) > c$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί τα παραπάνω συμβολίζεται με (c, C)-RIS.

Πόρισμα 2.55. *Έστω Z block υπόχωρος του $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ που παράγεται από μία νορμαρισμένη block ακολουθία $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ που έχει την ιδιότητα ότι $\operatorname{dist}(x_l, \overline{X}) > c > 0$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $(\frac{1}{12}, 2)$-RIS στον Z.*

Απόδειξη. Έστω $(j_k)_k$ μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών ώστε $\frac{1}{m_{j_1}} \leq \frac{c}{2}$. Από Πόρισμα 2.53 έχουμε ότι για κάθε k υπάρχει ημινορμαρισμένος $(\frac{1}{m_{j_k}}, j_k)$ X-scc y_k της $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Από Πρόταση 2.44 υπάρχει υπακολουθία της $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που είναι $(\frac{1}{12}, 2)$-RIS στον Z. $\square$

2.7 X-ακριβή ζεύγη και X-Εξαρτημένες ακολουθίες στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τις απαραίτητες έννοιες με στόχο να αποδείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/\overline{X}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος και έχει την "scalar-plus-compact" ιδιότητα. Για να γίνει αυτό θα χρειαστεί να κάνουμε περαιτέρω υποθέσεις για τον αρχικό χώρο X.

Στη συνέχεια ορίζουμε ειδικά στοιχεία στον χώρο X, τα ακριβή ζεύγη και τις εξαρτημένες ακολουθίες, τα οποία αποτελούν τροποποιημένες εκδοχές αντίστοιχων εννοιών που ορίστηκαν στο [10].

Ορισμός 2.56. Έστω $C > 0$, $\delta \in \{0, 1\}$, $j \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon_j < 2$. Ένα ζεύγος $(x, \gamma) \in \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \times (\overline{\Gamma} \setminus \Gamma)$ λέγεται $(C, j, \varepsilon_j, \delta)$ ακριβές ζεύγος αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

1. $\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon_j$, $\|e^*_{\gamma}|_{\overline{X}}\| < \varepsilon_j$.
2. $w(\gamma) = m_j$, $\|x\| \leq C$, $x(\gamma) = \delta$.
3. Για κάθε $\gamma' \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma') = m_i$ όπου $i \neq j$, ισχύει οτι

$$|x(\gamma')| \leq \begin{cases} Cm_i^{-1} & \text{αν } i < j \\ Cm_j^{-1} & \text{αν } i > j. \end{cases}$$

Επιπλέον, ένα ζεύγος (x, γ) στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ είναι X-ακριβές ζεύγος αν είναι $(C, j, \varepsilon_j, \delta)$ ακριβές ζεύγος και υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $\operatorname{dist}(x, \overline{X}) > c > 0$.

Παρατήρηση 2.8. *Από Λήμμα 2.37 συμπεραινουμε ότι αν $(x,\gamma)\in\mathcal{L}^\infty_{X,hi}\times(\overline{\Gamma}\setminus\Gamma)$ είναι ένα $(C,j,\varepsilon_j,\delta)$ ακριβές ζεύγος, τότε για κάθε $s\in\mathbb{N}$ και για κάθε $\gamma'\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma')=m_i$ όπου $i\neq j$, ισχύει ότι*

$$|e^*_\gamma(\overline{P}_{(s,\infty)}(x))|\leq\begin{cases}6Cm_i^{-1} & \text{αν } i<j\\ 6Cm_j^{-1} & \text{αν } i>j.\end{cases}$$

Λήμμα 2.57. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία skipped block (c,C)-RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Τότε για $j\in\mathbb{N}$ και $\varepsilon\leq\frac{1}{m_{2j}^2}$, υπάρχουν $\theta>0$, $F\in\mathcal{S}_{\xi_{2j}}$ και $\gamma\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ έτσι ώστε αν θέσουμε $x=\theta m_{2j}\sum_{k\in F}a_kx_k$ το ζεύγος (x,γ) είναι $(\frac{32C}{c},2j,\varepsilon,1)$ ακριβές ζεύγος.*

Απόδειξη. Έστω $j\in\mathbb{N}$ και $\varepsilon>0$. Επειδή ο $\mathfrak{X}$ είναι $\mathcal{S}_\xi$ φραγμένος από Παρατήρηση 2.4 μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία της $(x_k)_k$, ότι για κάθε ημινορμαρισμένος $(\varepsilon,2j)$ X-ειδικός κυρτός συνδυασμός της $(x_k)_k$, $\sum_{k\in F}a_kx_k$, έχουμε ότι $\|\Phi(\sum_{k\in F}a_kx_k)\|_{\mathfrak{X}}<\varepsilon$ και $2j\leq\min\operatorname{ran}x_1$. Από Πρόταση 2.49 βρίσκουμε στοιχείο $\gamma\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma)=m_{2j}$ και $\|e^*_\gamma|_{\overline{X}}\|<\varepsilon$ ώστε

$$\sum_{k\in F}a_kx_k(\gamma)\geq\frac{c}{2m_{2j}}.$$

Θέτουμε $x=\theta m_{2j}\sum_{k\in F}a_kx_k$ με την ιδιότητα ότι $x(\gamma)=1$ και αφού $\varepsilon\leq\frac{1}{m_{2j}^2}$, από Πρόταση 2.46 συμπεραίνουμε ότι για $\gamma'\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ με βάρος $w(\gamma')=m_i\neq m_{2j}$ ισχύει ότι

$$|x(\gamma')|=|\theta|m_{2j}|\sum_{k\in F}a_kx_k(\gamma')|\leq\begin{cases}\frac{32C}{c}m_i^{-1} & \text{αν } i<2j\\ \frac{8C}{c}m_{2j}^{-1}+\frac{12C}{c}m_{2j}m_i^{-1} & \text{αν } i>2j.\end{cases}$$

Επειδή $i>2j$ και άρα $m_i>m_{2j}^2$, έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.58. *Έστω $(x_k)_k$ μία (c,C)-RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Τότε υπάρχει ένα $(\frac{32C}{c},2j,\frac{1}{m_{2j}^2},1)$ ακριβές ζεύγος (x,η) στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $x\in\langle(x_k)_k\rangle$ και $\operatorname{dist}(x,\overline{X})>\frac{1}{4}$.*

Απόδειξη. Από Λήμμα 2.57 για κάθε $j\in\mathbb{N}$ υπάρχει ένα $(\frac{32C}{c},2j,\frac{1}{m_{2j}^2},1)$ ακριβές ζεύγος (x,η) όπου το στοιχείο x είναι της μορφής $x=\theta m_{2j}\sum_{k\in F}a_kx_k$. Επίσης όπως προκύπτει από την απόδειξη του παραπάνω λήμματος $\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}}<\frac{1}{16}$ και από Λήμμα 2.52 συμπεραίνουμε ότι

$$\operatorname{dist}(x,\overline{X})>\frac{1}{3}(\|x\|-\frac{1}{4}).$$

Επειδή $\|x\|\geq x(\gamma)=1$, το συμπέρασμα έπεται. □

Παρατήρηση 2.9. *Έστω $(x_n)_n$ μία νορμαρισμένη block ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $\operatorname{dist}(x_n,\overline{X})>c>0$ για κάθε n. Από Πόρισμα 2.53, υπάρχει ακολουθία $(y_k)_k$ στην γραμμική θήκη $<x_n:\ n\in\mathbb{N}>$ η οποία είναι $(\frac{1}{12},2)$- RIS. Από Λήμμα 2.57 και Πόρισμα 2.58 για κάθε $C>0$ ($C\leq 768$) και $j\in\mathbb{N}$ υπάρχει $(C,2j,\frac{1}{m_{2j}^2},1)$ X-ειδικό ζεύγος (x,γ) με την ιδιότητα ότι $x\in<x_n:\ n\in\mathbb{N}>$ και $\operatorname{dist}(x,\overline{X})>\frac{1}{4}$.*

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της εξαρτημένης ακολουθίας στον χώρο $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ που αποτελεί μία γενικευμένη παραλλαγή της αντίστοιχης έννοιας στο [10].

Ορισμός 2.59. Μία ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$, $(x_k)_{k=1}^l$, λέγεται $(C, 2j_0-1, \delta, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots < p_l < q_l$, στοιχεία $\eta_k \in \overline{\Gamma}_{2q_k-1} \setminus \overline{\Gamma}_{2p_k}$ και $\gamma_k \in \overline{\Delta}_{2q_k}$ $(1 \leq k \leq l)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) $\{\min \mathrm{supp} x_k\}_{k=1}^l \in \mathcal{S}_{\xi_{2j_0-1}}$, $\min \mathrm{supp} x_1 > m_{2j_0-1}$.

(ii) Για κάθε k, $\mathrm{ran} x_k \subset (2p_k, 2q_k-1]$.

(iii) Το στοιχείο $\gamma = \gamma_l$ του $\overline{\Delta}_{2q_l}$ έχει βάρος m_{2j_0-1} και ανάλυση $\{2p_k, 2q_k-1, \gamma_k, e^*_{\eta_k}\}_{k=1}^l$.

(iv) Το στοιχείο x_1 είναι της μορφής $x_1 = \theta_1 m_{4j_1-2} \sum\limits_{i\in F_1} a_i^1 x_i^1$ και η ακολουθία $(x_i^1)_i$ είναι C'-RIS με $\theta_1 C' \leq C$. Επιπλέον το ζεύγος (x_1, η_1) είναι $(C, 4j_1-2, \varepsilon_{j_1}, \delta)$ ειδικό ζεύγος με $m_{4j_1-2} > m^2_{2j_0-1}$ και το στοιχείο $\sum\limits_{i\in F_1} a_i^1 x_i^1$ είναι $(\frac{1}{m^2_{4j_1-2}}, 4j_1-2)$ scc.

(v) Για κάθε $1 < k \leq l$ το στοιχείο x_k είναι της μορφής $x_k = \theta_k m_{4j_k} \sum\limits_{i\in F_k} a_i^k x_i^k$ και η ακολουθία $(x_i^k)_i$ είναι C'-RIS με $\theta_k C' \leq C$. Επιπλέον το ζεύγος (x_k, η_k) είναι $(C, 4j_k, \varepsilon_{j_k}, \delta)$ ειδικό ζεύγος και το στοιχείο $\sum\limits_{i\in F_k} a_i^k x_i^k$ είναι $(\frac{1}{m^2_{4j_k}}, 4j_k)$ scc.

(vi) Για κάθε $k \geq 1$, $j_{k+1} = \sigma(\gamma_k)$ και $\sum\limits_{k=1}^{l} \varepsilon_{j_k} < \varepsilon$.

Ακόμη, λέμε ότι μία ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ $(x_k)_{k=1}^l$ είναι $(C, 2j_0-1, \delta, \varepsilon)$ X-εξαρτημένη ακολουθία αν είναι $(C, 2j_0-1, \delta, \varepsilon)$ εξαρτημένη όπως ορίζεται παραπάνω και επιπρόσθετα υπάρχει σταθερά $c > 0$ έτσι ώστε $\mathrm{dist}(x_k, \overline{X}) > c$ για κάθε k. Στη συνέχεια οποτεδήποτε αναφερομαστε σε $(c, C, 2j-1, \delta, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία $(x_k)_k$ θα εννοούμε ότι η $(x_k)_k$ είναι $(C, 2j-1, \delta, \varepsilon)$ X-εξαρτημένη ακολουθία που ικανοποιεί την επιπλέον ιδιότητα με τη σταθερά $c > 0$.

Παρατηρήσεις. *1. Αν το στοιχείο $\sum\limits_{k\in F} a_k x_k$ είναι $(\delta, 2j_0-1)$ X-scc της $(C, 2j_0-1, \delta, \varepsilon)$ X-εξαρτημένης ακολουθίας $(x_k)_{k=1}^l$, τότε $\|\sum\limits_{k\in F} a_k x_k\| \geq \frac{1}{m_{2j_0-1}}$.*

Πράγματι, έστω $\gamma = \gamma_l$ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j_0-1}$ όπως στον Ορισμό 2.59(iii). Εφόσον $\mathrm{ran} x_k \subset (2p_k, 2q_k-1]$ και $\mathrm{rank}\,\gamma_k = 2q_k$ συμπεραίνουμε ότι $\overline{d}^*_{\gamma_k}(x_i) = 0$ για κάθε k, i. Επομένως,

$$\|\sum_{k\in F} a_k x_k\| \geq e^*_{\gamma}(\sum_{k\in F} a_k x_k) = \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_{k\in F} a_k x_k(\eta_k) = \frac{1}{m_{2j_0-1}}.$$

2. Αν μία ακολουθία $(x_k)_{k=1}^l$ είναι $(C, 2j_0-1, 1, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία τότε για κάθε $(\varepsilon, 2j_0-1)$ scc x της $(x_k)_{k=1}^l$ της μορφής $x = \sum_{k\in F} a_k x_k$ ισχύει ότι $\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon$. Πράγματι, αν $(\eta_k)_{k=1}^l$ ακολουθία από στοιχεία του $\overline{\Gamma}$ που προέρχονται από τον Ορισμό 2.59 ώστε κάθε (x_k, η_k) να είναι $(C, 4j_k, \varepsilon_{j_k}, \delta)$ ειδικό ζεύγος, παρατηρούμε ότι

$$\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}} \leq \sum_{k\in F} a_k \|\Phi(x_k)\|_{\mathfrak{X}} \leq \sum_{k\in F} \varepsilon_{j_k} < \varepsilon.$$

Το ακόλουθο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.59.

Λήμμα 2.60. *Μία εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{x,hi}$ είναι RIS. Επιπλέον, κάθε X-εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{x,hi}$ είναι X-RIS.*

Λήμμα 2.61. *Έστω $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μία C-RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{x,hi}$, $\varepsilon > 0$ και $j \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμη στοιχείο $x = \sum_{i\in F} a_i x_i$ που είναι (ε, j) scc στον $\mathcal{L}^\infty_{x,hi}$ με την ιδιότητα ότι $\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon$ και $\min_{i\in F} t_i > 2$. Αν $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j_0-1} < m_j$ και ανάλυση $\{2p_r, 2q_r - 1, \gamma_r, e^*_{\eta_r}\}_{r=1}^l$ έτσι ώστε $w(\eta_r) > m_j$ για κάθε r, τότε $|\sum_r e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}(x)| \le 4C\varepsilon + 6C\frac{1}{m_j^2}$.*

Απόδειξη. Όπως στο Λήμμα 2.40 θέτουμε

$$I_0 = \{t_i :\ i \in F,\ \mathrm{ran} x_i \ \text{ περιέχει} \cap \mathrm{rank}\,\gamma_r\}$$

και $J_r = \{t_i :\ i \in F \setminus I_0,\ \mathrm{ran} x_i \cap \mathrm{rank}\,\eta_r \neq \emptyset\}$. Παρατηρούμε ότι,

$$|x(\gamma)| \le |e^*_\gamma(\sum_{i\in I_0} a_i x_i)| + \frac{1}{m_{2j_0-1}} |\sum_r e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}(\sum_{i\in J_r} a_i x_i)|$$

Για κάθε r εφαρμόζουμε τη βασική ανισότητα για κάθε $e^*_{\eta_r}$ με $s = 2p_r$ και βρίσκουμε i_r ώστε $t_{i_r} \in J_r$ και συναρτησιακά $g^*_r \in W(\mathcal{S}_{\xi_{j+1}}, \frac{1}{m_j})$ με $w(g^*_r) = w(\eta_r)$ και $\mathrm{supp} g^*_r \subset \{t_i :\ t_i \in J_r,\ i > i_r\}$ έτσι ώστε

$$|e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}(\sum_{i:t_i\in J_r} a_i x_i)| \le 4C|a_{i_r}| + 6C|g^*_r(\sum_{i:t_i\in J_r} a_i e_{t_i})|.$$

Από Λήμμα 2.40 έχουμε ότι τα σύνολα J_r είναι ξένα ανά δύο και επιπλέον η ένωση $\cup_r J_r \setminus \{\min J_1\}$ είναι $\mathcal{S}_{\xi_{2j_0-1}}$ admissible και άρα $\mathcal{S}_{\xi_{j-1}}$ admissible εφόσον $2i_0 - 1 < j$. Επίσης, παρατηρούμε ότι το σύνολο $G = \{t_{i_r} :\ 1 \le r \le l\}$ είναι ένωση δύο ξένων ανά δύο σύνολων που ανήκουν στην $\mathcal{S}_{\xi_j}$ και άρα $G \in \mathcal{S}_{\xi_{j-1}+1} \subset \mathcal{S}_{\zeta_{j-1}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\sum_r a_{i_r} = \sum_{t_i\in G} a_i < \varepsilon$. Εφόσον $w(\eta_r) = w(g^*_r) > m_j$ για κάθε r, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση από Λήμμα 2.46, καταλήγουμε ότι

$$\sum_{r:w(\eta_r)<m_j} |e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p_r,2q_r-1]}(\sum_{i:t_i\in J_r} a_i x_i)| \le \sum_r (4Ca_{i_r} + \frac{6C}{w(\eta_r)}) = 4C\varepsilon + \frac{6C}{m_j^2}$$

□

Λήμμα 2.62. *Έστω $(x_k)_{k=1}^l$ μία $(c, C, 2j_0 - 1, 1, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{x,hi}$ με $\varepsilon < \frac{1}{m^2_{2j_0-1}}$ και $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος m_{2j_0-1}. Έστω ακόμη $\sum_{k=1}^l a_k x_k$ ένας κυρτός συνδυασμός της $(x_k)_{k=1}^l$ με $a_1 > a_2 > \ldots > a_l$. Τότε $|\sum_{k=1}^{l}(-1)^k a_k x_k(\gamma)| \le 4Ca_1$.*

Απόδειξη. Έστω $(\gamma_r)_{r=1}^l$, $(\eta_r)_{r=1}^l$, $(p_r)_{r=1}^l$, $(q_r)_{r=1}^l$, $(j_r)_{r=1}^l$ και $\gamma = \gamma_l$ με βάρος m_{2j_0-1} όπως στον Ορισμό 2.59 με ανάλυση $\{2p_r, 2q_r - 1, \gamma_r, e^*_{\eta_r}\}_{r=1}^l$. Έστω ακόμη στοιχείο $\gamma' \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = w(\gamma') = m_{2j_0-1}$ και ανάλυση της μορφής $\{2p'_r, 2q'_r - 1, \gamma'_r, e^*_{\eta'_r}\}_{r=1}^{l'}$ όπου $w(\eta'_1) = m_{4j'_1-2}$ και $w(\eta_r) = m_{4j_r}$ για κάθε $1 < r \leq l'$. Κάνοντας χρήση της tree-like ιδιότητας συμπεραίνουμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $1 \leq k_0 \leq l'$ έτσι ώστε $(2p'_r, 2q'_r, \eta'_r, \gamma'_r) = (2p_r, 2q_r, \eta_r, \gamma_r)$ για $r < k_0$ ενώ $j_r \neq j'_i$ για κάθε $k_0 < i \leq l'$ και κάθε $1 \leq r \leq l$. Επομένως, για $1 < k < k_0$, έχουμε ότι

$$x_k(\gamma') = x_k(\gamma) = \frac{1}{m_{2j_0-1}} e^*_{\eta_k} \circ \overline{P}_{(2p_k,2q_k-1]} x_k = \frac{1}{m_{2j_0-1}} x_k(\eta_k) = \frac{1}{m_{2j_0-1}}.$$

Επειδή η $(a_k)_{k=1}^l$ είναι φθίνουσα $|\sum\limits_{k<k_0} (-1)^k a_k x_k(\gamma')| \leq \frac{2a_1}{m_{2j_0-1}}$. Επιπλέον αν $k_0 \in F$ έχουμε την άμεση εκτίμηση ότι $|x_{k_0}(\gamma')| \leq \|x_{k_0}\| \leq C$ και άρα

$$|\sum_{k \leq k_0} (-1)^k a_k x_k(\gamma')| \leq |\sum_{k<k_0} (-1)^k a_k x_k(\gamma')| + |a_{k_0} x_{k_0}| \leq \frac{2a_1}{m_{2j_0-1}} + a_1 C \leq 2a_1 C.$$

Για κάθε $r > k_0$, υπενθυμίζουμε ότι $w(\eta'_r) \neq w(\eta_k)$ για κάθε k και $x_k = \theta_k m_{4j_k} \sum\limits_{i \in F_k} a_i^k x_i^k$ όπου το στοιχείο $\sum\limits_{i \in F_k} a_i^k x_i^k$ είναι $(\frac{1}{m^2_{4j_k}}, 4j_k)$ scc της C'- RIS $(x_i^k)_i$ με $\theta_k C' \leq C$ και $\|\Phi(\sum\limits_{i \in F_k} a_i^k x_i^k)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon_k C' = \frac{C'}{m^2_{4j_k}}$, για κάθε k. Για κάθε $k \in F$, εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.40 στα $(x_i^k)_i$, γ' και ορίζουμε τα σύνολα I_k, $\cup_r J_r^k$ που ικανοποιούν το ακόλουθο

$$\begin{aligned}
|e^*_{\gamma'}(x_k)| &\leq \theta_k m_{4j_k} \sum_{i:t_i \in I_k} a_i^k |x_i^k(\gamma')| \\
&\quad + \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_r |e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(\theta_k m_{4j_k} \sum_{i:t_i \in J_r^k} a_i^k x_i^k)| \\
&= \theta_k m_{4j_k} \sum_{i:t_i \in I_k} a_i^k |x_i^k(\gamma')| + \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_r |e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(x_k)|.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε σύνολο $I_k \setminus \{\min I_k\}$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{S}_{\xi_{2j_0-1}}$ και άρα κάθε σύνολο I_k είναι στοιχείο της $\mathcal{S}_{\xi_{2j_0-1}+1}$. Επειδή $2j_0 - 1 < 4j_k$ για κάθε k έχουμε ότι $\mathcal{S}_{\xi_{2j_0-1}+1} \subset \mathcal{S}_{\xi_{4j_k}+1} \subset \mathcal{S}_{\zeta_{4j_k}}$ και επομένως $\sum_{i:t_i \in I_k} a_i^k \leq \frac{1}{m^2_{4j_k}}$ για κάθε k. Επιπλέον έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\sum_r e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(x_k) = &\sum_{r:w(\eta'_r)<w(\eta_k)} e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(x_k) \\
&+ \theta_k m_{4j_k} \sum_{r:w(\eta'_r)>m_{4j_k}} e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(\sum_{i \in F_k} a_i^k x_i^k)
\end{aligned}$$

Εφόσον κάθε (x_k, η_k) είναι $(C, 4j_k, 1, \varepsilon_{j_k})$ ακριβές ζεύγος από Παρατήρηση 3.35 συνεπάγεται ότι

$$\sum_{r:w(\eta'_r)<w(\eta_k)} |e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(x_k)| \leq \sum_{r:w(\eta'_r)<w(\eta_k)} \frac{6C}{m_{4j'_r}}.$$

Από Λήμμα 2.61 για κάθε k έχουμε ότι,

$$\sum_{r:w(\eta'_r)>m_{4j_k}} |e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r,2q'_r-1]}(\sum_{i \in F_k} a_i^k x_i^k)| \leq \frac{4C'}{m^2_{4j_k}} + \frac{6C'}{m^2_{4j_k}} = \frac{10C}{m^2_{4j_k}}.$$

Επομένως για κάθε k ισχύει ότι

$$\sum_r |e^*_{\eta_r} \circ \overline{P}_{(2p'_r, 2q'_r-1]}(x_k)| \leq \sum_{r: w(\eta'_r) < w(\eta_k)} \frac{6C}{m_{4j'_r}} + \theta_k \frac{10C'}{m_{4j_k}}$$

και επειδή $\theta_k C' \leq C$ για κάθε k έχουμε ότι

$$|e^*_{\gamma'}(x_k)| \leq \frac{C}{m_{4j_k}} + \frac{1}{m_{2j_0-1}} \left(\sum_{r: w(\eta'_r) < w(\eta_k)} \frac{6C}{m_{4j'_r}} + \frac{10C}{m_{4j_k}} \right).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$|\sum_{k > k_0} (-1)^k a_k x_k(\gamma')| \leq a_{k_1} \sum_{k > k_0} |e^*_{\gamma'}(x_k)| \leq \frac{5Ca_{k_1}}{m^2_{2j_0-1}} \leq 2Ca_{k_1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} |\sum_{k=1}^{l} (-1)^k a_{k_i} x_k(\gamma')| &\leq |\sum_{k \leq k_0} (-1)^k a_k x_k(\gamma')| + |\sum_{k > k_0} (-1)^k a_{k_i} x_{k_i}(\gamma')| \\ &< 2a_1 C + 2a_1 C = 4Ca_1. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.63. *Έστω $(x_k)_{k=1}^l$ μία $(c, C, 2j_0 - 1, 1, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{x,hi}$ και έστω ακόμη στοιχείο $\sum_{k \in F} a_k x_k$ που είναι $(\frac{1}{m^2_{2j_0-1}}, 2j_0 - 1)$ scc της $(x_k)_k$. Αν $F = \{k_1, \ldots, k_{n_0}\}$,*

$$\|\sum_{i=1}^{n_0} a_{k_i} x_{k_i}\| \geq \frac{1}{m_{2j_0-1}} \quad \textit{και} \quad \|\sum_{i=1}^{n_0} (-1)^i a_{k_i} x_{k_i}\| \leq \frac{40C}{m^2_{2j_0-1}}.$$

Απόδειξη. Η πρώτη εκτίμηση προέρχεται από Παρατήρηση (2.7)(2). Για το δεύτερο μέρος, από την άνω εκτίμηση της Πρότασης 2.62 συμπεραίνουμε ότι για κάθε στοιχείο $\gamma \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j_0-1}$ έχουμε ότι

$$|\sum_{i=1}^{n_0} (-1)^i a_{k_i} x_{k_i}(\gamma)| \leq 4Ca_{k_1}.$$

Επειδή η ακολουθία $(x_k)_k$ είναι X-RIS το επιπλέον τμήμα της Πρότασης 2.46 ικανοποιείται. Επομενως,

$$\|\sum_{i=1}^{n_0} (-1)^i a_{k_i} x_{k_i}\| \leq \frac{40C}{m^2_{2j_0-1}}.$$

□

Παρατήρηση 2.10. *Αν* $x = \sum_{k\in F} a_k x_k$ *είναι* $(\frac{1}{m^2_{2j_0-1}}, 2j_0 - 1)$ *scc της* $(c, C, 2j_0 - 1, 1, \varepsilon)$ *εξαρτημένης ακολουθίας* $(x_k)_{k=1}^l$ *στον* $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ *με* $\varepsilon < \frac{1}{m^2_{2j_0-1}}$*, τότε* $\operatorname{dist}(x, \overline{X}) > \frac{1}{4m_{2j_0-1}}$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Πράγματι, από την Παρατήρηση 2.7, το Πόρισμα 2.52 και την άνω εκτίμηση από το Πόρισμα 2.63 συμπεραίνουμε ότι* $\operatorname{dist}(x, \overline{X}) \geq \frac{1}{3}(\|x\| - 4\varepsilon) > \frac{1}{3}(\frac{1}{m_{2j_0-1}} - 4\frac{1}{m^2_{2j_0-1}}) > \frac{1}{4m_{2j_0-1}}$.

Για την απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος χρησιμοποιούμε παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιούνται στο Λήμμα 2.62.

Λήμμα 2.64. *Έστω* $(x_k)_{k=1}^l$ *μία* $(C, 2j_0 - 1, 0, \varepsilon)$ *εξαρτημένη ακολουθία στον* $\mathcal{L}^{\infty}_{x,hi}$ *και έστω* $\sum_{k\in F} a_k x_k$ *που είναι* $(2j_0 - 1, \frac{1}{m^2_{2j_0-1}})$ *scc της* $(x_k)_k$*. Τότε,*

$$\|\sum_{k\in F} a_k x_k\| \leq \frac{30C}{m^2_{2j_0-1}}.$$

2.8 Ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/\overline{X}$

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/\overline{X}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος, χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές με τις αντίστοιχες κατασκευές από το [16], [10]. Για τη συνέχεια συμβολίζουμε με Q την κανονική απεικόνιση πηλίκο $Q : \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \to \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/\overline{X}$.

Πρόταση 2.65. *Έστω* $(z_l^1)_{l\in\mathbb{N}}$, $(z_l^2)_{l\in\mathbb{N}}$ *δύο νορμαρισμένες skipped block ακολουθίες στον* $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ *έτσι ώστε* $\operatorname{dist}(z_l^i, \overline{X}) > c > 0$ *για κάθε* l*,* $i = 1, 2$*. Τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *μπορούμε να βρούμε δύο στοιχεία* $z_1 \in [z_l^1 : l \in \mathbb{N}]$, $z_2 \in [z_l^2 : l \in \mathbb{N}]$ *έτσι ώστε* $\|z_1 - z_2\| < \varepsilon\|z_1 + z_2\|$ *και* $\operatorname{dist}(z_1 - z_2, \overline{X}) < \varepsilon \operatorname{dist}(z_1 + z_2, \overline{X})$.

Απόδειξη. Θέτουμε $Z_1 = [z_l^1 : l \in \mathbb{N}]$, $Z_2 = [z_l^2 : l \in \mathbb{N}]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ από Παρατήρηση 2.9 μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε ακολουθίες $(w_k)_{k=1}^l$, $(\eta_k)_{k=1}^l$, $(\gamma_k)_{k=1}^l$ και φυσικούς αριθμούς $p_1 < q_1 < \ldots < p_l < q_l$ έτσι ώστε η ακολουθία $(w_k)_{k=1}^l$ είναι $(\frac{1}{4}, C, 2j_0 - 1, 1, \delta)$ εξαρτημένη ακολουθία και $w_k \in Z_1$ για k περιττό, ενώ $w_k \in Z_2$ για k άρτιο. Επιλέγουμε j_0 ώστε $\frac{160C}{m_{2j_0-1}} < \varepsilon$ και $\delta < \frac{1}{m^2_{2j_0-1}}$. Έστω $\sum_{k\in F} a_k w_k$ ένα $(\frac{1}{m^2_{2j_0-1}}, 2j_0 - 1)$ scc της $(w_k)_k$, όπου $F = \{k_1, \ldots, k_{n_0}\}$. Θέτουμε $z_1 = \sum_{i \text{ περιττό}} a_{k_i} w_{k_i}$ και $z_2 = \sum_{i \text{ άρτιο}} a_{k_i} w_{k_i}$. Από Πόρισμα 2.63 συνεπάγεται ότι

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{40C}{m^2_{2j_0-1}}, \quad \|z_1 + z_2\| \geq \frac{1}{m_{2j_0-1}}$$

ενώ από Παρατήρηση 2.10 καταλήγουμε ότι $\operatorname{dist}(z_1 + z_2, \overline{X}) > \frac{1}{4m_{2j_0-1}}$. Συνεπώς,

$$\frac{\|z_1 - z_2\|}{\|z_1 + z_2\|} \leq \frac{40C}{m_{2j_0-1}} < \varepsilon$$

και άρα

$$\operatorname{dist}(z_1 - z_2, \overline{X}) \leq \|z_1 - z_2\| \leq \frac{40C}{m^2_{2j_0-1}} = \varepsilon\frac{4}{m_{2j_0-1}} = \varepsilon \operatorname{dist}(z_1 + z_2, \overline{X})$$

$\square$

Πόρισμα 2.66. *Έστω Z_1, Z_2 δύο απειροδιάστατοι υπόχωροι του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Αν $Q|_{Z_1}$, $Q|_{Z_2}$ δεν είναι συμπαγείς, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν δύο στοιχεία $z_1 \in Z_1$ και $z_2 \in Z_2$ που ικανοποιούν ότι $\operatorname{dist}(z_1, \overline{X}) > \frac{1}{20}$, $\operatorname{dist}(z_2, \overline{X}) > \frac{1}{20}$, $\|z_1 - z_2\| < \varepsilon\|z_1 + z_2\|$ και*

$$\operatorname{dist}(z_1 - z_2, \overline{X}) < \varepsilon \operatorname{dist}(z_1 + z_2, \overline{X}).$$

Απόδειξη. Επειδή $Q|_{Z_i}$ δεν ειναι συμπαγής για $i = 1, 2$ υπάρχουν νορμαρισμένες ακολουθίες $(z^1_n)_n$, $(z^2_n)_n$ στους Z_1, Z_2 αντίστοιχα και skipped block ακολουθίες $(y^1_n)_n$ και $(y^2_n)_n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες

1. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $\operatorname{dist}(z^i_n, \overline{X}) > c$ για κάθε $i = 1, 2$ και n.
2. Ισχύει ότι $\sum\limits_n \|z^i_n - y^i_n\| < \frac{c}{2}$ και άρα $\operatorname{dist}(y^i_n, \overline{X}) > \frac{c}{2}$ για $i = 1, 2$ και για κάθε n.

Από Πρόταση 2.65 για τις skipped block ακολουθίες $(y^i_n)_n$, $i = 1, 2$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν στοιχεία $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ με τις ζητούμενες ιδιότητες. ☐

Πόρισμα 2.67. *Έστω Z ένας υπόχωρος του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε υπόχωρο W του Z ο τελεστής $Q|_W$ δεν είναι συμπαγής. Τότε ο χώρος Z είναι καθολικά αδιάσπαστος.*

Πρόταση 2.68. *Ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ είναι καθολικά αδιάσπαστος.*

Απόδειξη. Έστω W_1, W_2 δύο απειροδιάστατοι υπόχωροι του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$. Έστω ακόμη $\varepsilon > 0$ και $(w^1_n)_n$, $(w^2_n)_n$ δύο νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες στους υποχώρους W_1 και W_2 αντίστοιχα με σταθερά $C_0 > 0$. Επιλέγουμε ακολουθίες $(z^1_n)_n$, $(z^2_n)_n$ στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έτσι ώστε $Q(z^i_n) = w^i_n$ για κάθε n και $i = 1, 2$. Θέτοντας $\widetilde{z}^i_k = z^i_{n_{2k}} - z^i_{n_{2k-1}}$, μπορούμε να υποθέσουμε (περνώντας σε υπακολουθία, αν είναι απαραίτητο) ότι η ακολουθία $(\widetilde{z}^i_k)_k$ είναι ασθενώς μηδενική. Πρόκυπτει το ακόλουθο

$$\operatorname{dist}(\widetilde{z}^i_k, \overline{X}) = \|Q(z^i_{n_{2k}}) - Q(z^i_{n_{2k-1}})\| = \|w^i_{n_{2k}} - w^i_{n_{2k-1}}\| > \frac{1}{C_0}\|w^i_{n_{2k}}\| = \frac{1}{C_0}.$$

για κάθε n, $i = 1, 2$.
Θέτουμε $Z_1 = \overline{\langle (\widetilde{z}^1_k)_k \rangle}$, $Z_2 = \overline{\langle (\widetilde{z}^2_k)_k \rangle}$ και παρατηρούμε ότι οι τελεστές $Q|_{Z_1}$, $Q|_{Z_2}$ δεν είναι συμπαγείς. Το συμπέρασμα έπεται από Πόρισμα 2.66. ☐

2.9 Ο χώρος των γραμμικών και φραγμένων τελεστών του $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να να αποδειχθεί το Θεώρημα 2.76, δηλαδή ότι για κάθε γραμμικό και φραγμένο τελεστή T πάνω στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ έτσι ώστε ο τελεστής $Q \circ (T - \lambda I)$ να είναι συμπαγής, όπου με Q θα συμβολίζουμε την κανονική απεικόνιση πηλίκο.

Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι $\operatorname{dist}(Tx_i, \langle x_i, \overline{X} \rangle) \to 0$ για κάθε RIS $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη ενός πραγματικού αριθμού λ με την ιδιότητα ότι $\|Q \circ Tx_i - \lambda Q(x_i)\| \to 0$. Το δεύτερο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι ο αριθμός λ είναι μοναδικός, δηλαδή δεν εξαρτάται από την αρχική RIS $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, και ικανοποιεί το Θεώρημα 2.76.

Ξεκινάμε με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.69. *Έστω $T : \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \to \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ ένας γραμμικός, φραγμένος τελεστής και έστω $(x_k)_k$ μία φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Αν $\operatorname{dist}(x_k, \overline{X}) \to 0$, τότε $\operatorname{dist}(Tx_k, \overline{X}) \to 0$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν η ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει norm στο μηδέν, τότε επειδή ο τελεστής T είναι φραγμένος, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Επομένως, υποθέτουμε ότι η $(x_n)_n$ είναι νορμαρισμένη και επειδή η FDD είναι συρρικνούσα προκύπτει ότι η $(x_n)_n$ είναι ασθενώς μηδενική. Ακόμη το γεγονός ότι $\operatorname{dist}(x_n, X) \to 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ακολουθία $(y_n)_n$ στον X έτσι ώστε $\|x_n - y_n\| \to 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\operatorname{dist}(Ty_n, \overline{X}) \to 0$. Υποθέτουμε με εις άτοπο ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\operatorname{dist}(Ty_n, \overline{X}) > \delta > 0$ (περνώντας σε υπακολουθία). Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(Ty_n)_n$ είναι ασθενώς μηδενική και άρα για κάθε $j \in \mathbb{N}$, περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να βρούμε skipped block ακολουθία $(w_n)_n$ που ικανοποιεί ότι $\sum_n \|w_n - Ty_n\| < \frac{\delta}{8m_{2j}}$. Επομένως,

$$\operatorname{dist}(w_n, \overline{X}) \geq \operatorname{dist}(Ty_n, \overline{X}) - \sum_n \|w_n - Ty_n\| > \frac{\delta}{2}.$$

Από Πόρισμα 2.50 υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε κυρτό συνδυασμό $\sum_{n \in G} r_n w_n$ της $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\operatorname{minsupp} w_1 > k_0$, $G \in \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$ ισχύει ότι $\|\sum_{n\in G} r_n w_n\| \geq \frac{\delta}{4m_{2j}}$ και άρα

$$\|\sum_{n\in G} r_n T y_n\| \geq \|\sum_{n\in G} r_n w_n\| - \sum_{n\in G} r_n \|w_n - Ty_n\| > \frac{\delta}{4m_{2j}} - \frac{\delta}{8m_{2j}} = \frac{\delta}{8m_{2j}}.$$

Επειδή ο $\mathfrak{X}$ είναι $\mathcal{S}_{\xi}$ φραγμένος από Πόρισμα 2.20 για $\varepsilon < \frac{\delta}{8m_{2j}\|T\|}$ υπάρχει κυρτός συνδυασμός $\sum_{n\in F} r_n y_n$ όπου $F \in \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$ ώστε $\|\sum_{n\in F} r_n y_n\| < \varepsilon$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\frac{\delta}{8m_{2j}} \leq \|\sum_{n\in F} a_n T y_n\| \leq \|T\|\varepsilon < \frac{\delta}{8m_{2j}},$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Παρατήρηση 2.11. *Αν $\operatorname{dist}(x_i, \overline{X}) \to 0$ τότε $\operatorname{dist}(Tx_i, \overline{X}) \to 0$ και επομένως $\operatorname{dist}(Tx_i, < x_i, \overline{X} >) \to 0$.*

Λήμμα 2.70. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Έστω ακόμη $(x_i)_i$ μία block ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία $(x_i)_{i\in M}$ και φυσικοί αριθμοί $0 = 2k_1 < 2l_1 < 2k_2 < 2l_2 \ldots$ έτσι ώστε για κάθε $i \in M$, $\operatorname{ran} x_i \subset (2k_i, 2l_i - 1]$ και $\|(I - \overline{P}_{(2k_i, 2l_i-1]})(Tx_i)\| < \varepsilon$.*

Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω, αν T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$, για κάθε $(x_i)_i$ block ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ μπορούμε να υποθέτουμε στη συνέχεια, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η ακολουθία των εικόνων $(Tx_i)_i$ είναι επίσης block. Επίσης, θα χρειαστούμε τροποποιημένες εκδοχές της έννοιας του $(0, 2j, \varepsilon_j)$ ακριβές ζεύγους και της $(0, 2j-1)$ εξαρτημένης ακολουθίας.

Ορισμός 2.71. Λέμε ότι το ζεύγος (z, η) είναι $(C, 2j, \varepsilon_j, 0)$ σχεδόν ακριβές ζεύγος αν το ζεύγος (z, η) ικανοποιεί τις ιδιότητες στον Ορισμό 3.27 με τη διαφορά ότι $0 \neq z_(\eta) = \delta > 0$.

Ορισμός 2.72. Λέμε ότι μία ακολουθία $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι $(c, C, 2j-1, 0, \varepsilon)$ σχεδόν εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ αν τα ζεύγη (z_i, η_i) είναι $(C, 4j_i, \varepsilon_i, 0)$ σχεδόν ακριβή ζεύγη.

Παρατήρηση 2.12. *Έστω $(z_i)_i$ είναι $(c, C, 2j-1, 0, \varepsilon)$ σχεδόν εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Εξόρισμού υπάρχουν $\eta_i \in \overline{\Gamma}$ ώστε τα ζεύγη (z_i, η_i) να είναι σχεδόν ειδικά ζεύγη με $x_i(\eta_i) = \delta_i > 0$ και έστω $\sum_{k\in F} a_i z_i$ ένα $(\frac{1}{m^*_{2j-1}}, 2j-1)$ scc της $(z_i)_i$. Ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης στο Λήμμα 2.62 διαπιστώνουμε ότι $\|\sum_{i\in F} a_i z_i\| \leq \frac{10}{m^2_{2j-1}}(3C + \frac{1}{m_{2j-1}}\sum_{i\in F}\delta_i)$.*

Λήμμα 2.73. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και έστω $(x_i)_i$ X-RIS ώστε $\mathrm{dist}(Tx_i, \langle x_i, \overline{X}\rangle) > \delta > 0$ για κάθε i. Τότε για κάθε $j, p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x \in [x_i : i \in \mathbb{N}]$, $q > p$ και $\gamma \in \overline{\Delta}_{2q}$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα*

1. *Το ζεύγος (x, γ) είναι $(13C, 2j, \frac{1}{m^2_{2j}}, 0)$ σχεδον ακριβές ζεύγος όπου $x = m_{2j}\sum\limits_{i\in F} a_i x_i$ και το στοιχείο $\sum\limits_{i\in F} a_i x_i$ είναι $(\frac{1}{m^2_{2j}}, 2j)$ scc της $(x_i)_i$.*
2. *ran$x$, ran$T_x \subset (2p, 2q]$ και $Tx(\gamma) > \frac{\delta}{4}$.*

Απόδειξη. Έστω $j, p \in \mathbb{N}$. Επειδή ο $\mathfrak{X}$ είναι S_ξ φραγμένος, από Παρατήρηση 2.4 μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία, ότι για κάθε $(\frac{1}{m^2_{2j}}, 2j)$ scc της $(x_i)_i$ της μορφής $\sum\limits_{i\in F} a_i x_i$ ισχύει ότι $\|\Phi(\sum\limits_{i\in F} a_i x_i)\|_{\mathfrak{X}} \leq \frac{1}{m^2_{2j}}$. Από Hahn Banach έστω $\tilde{b}^*_i \in B_{\ell_1(\overline{\Gamma})}$ ώστε

$$\tilde{b}^*_i(x_i) = 0, \quad \tilde{b}^*_i|_{\overline{X}} = 0 \quad \text{ και } \ \tilde{b}^*_i(Tx_i) > \frac{\delta}{2}.$$

Η ακολουθία $(\tilde{b}^*_i)_i$ έχει υπακολουθία που είναι w^*-συγκλίνουσα σε ένα $z^* \in \ell_1(\overline{\Gamma})$. Επειδή οι ακολουθίες $(x_i)_i$, $(Tx_i)_i$ είναι ασθενώς μηδενικές μπορούμε να υποθέσουμε περνώντας σε υπακολουθίες ότι $\sum_i z^*(x_n) < \frac{\delta}{16}$ και $\sum_i z^*(x_n) < \frac{\delta}{16}$. Η ακολουθία των διαφορών $(\tilde{b}^*_i - z^*)_i$ είναι w^*-μηδενική και με sliding hump επιχειρήματα όπως στην Πρόταση 2.49 βρίσκουμε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$, φυσικούς αριθμούς $2p < 2k_1 < 2l_1 < 2k_2 < \ldots$ και συναρτησιακά $(b^*_i)_{i\in L}$ με $b^*_i \in B_{2l_i-1, 2k_i}$ ώστε

$$\sum_i \|b^*_i|_{\overline{X}}\| < \frac{1}{m_{2j}}, \ \sum_i b^*_i(x_i) < \frac{1}{m_{2j}}, \ \ b^*_i(Tx_i) > \frac{\delta}{4}.$$

Μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι ranx_i, ran$Tx_i \subset (2k_i, 2l_i - 1]$ και έστω στοιχείο $\sum\limits_{i\in F} a_i x_i$ που είναι $(\frac{1}{m^2_{2j}}, 2j)$ scc της $(x_i)_{i\in L}$ έτσι ώστε $2j < \min \mathrm{ran} x_{\min F}$. Γράφουμε το σύνολο F στη μορφή $F = \{i_1, \ldots, i_{n_0}\}$ και θέτουμε $x = m_{2j}\sum\limits_{i\in F} a_i x_i$. Επιλέγουμε στοιχείο $\eta_1 \in \overline{\Delta}_{2l_{i_1}}$ της μορφής $\eta_1 = (m_{2j}, b^*_{i_1})$. Θέτουμε $p_r = k_{i_r}$, $q_r = l_{i_r}$ και επαγωγικά επιλέγουμε στοιχεία $\eta_r \in \overline{\Delta}_{2l_r}$ για $1 < r \leq n_0$ έτσι ώστε για κάθε r, $\eta_r = (2q_r, \eta_{r-1}, \mathcal{F}_{\eta_l}, m_{2j}, b^*_{i_r})$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{2q_r\}_{1\leq r\leq n_0}$ είναι spread της $\{t_{i_r} : i_r \in F\}$ το οποίο ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{S}_{\xi_{2j}}$. Επομένως, για κάθε $1 \leq r < n_0$ το σύνολο $\mathcal{F}_{\eta_r}$ είναι ένα μη μεγιστικό στοιχείο της $\mathcal{S}_{\xi_{2j}}$ και άρα κάθε η_r είναι καλά ορισμένο. Για $1 \leq r \leq n_0$, και έστω γ είναι το στοιχείο του συνόλου $\overline{\Gamma}$ με ανάλυση $\{2p_r, 2q_r - 1, \eta_l, b^*_{i_l}\}_{1\leq l\leq n_0}$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$x(\gamma) = \sum_{r=1}^{n_0} d^*_{\eta_r}(x) + \frac{1}{m_{2j}}\sum_{r=1}^{n_0} b^*_{i_r} \circ \overline{P}_{(2p_r, 2q_r-1]}(x) < \frac{1}{m_{2j}}$$

αφού $d^*_{\eta_k}(x_{i_r}) = 0$ για κάθε r, k. Επίσης, έχουμε ότι

$$\|\Phi(x)\|_{\mathfrak{X}} = m_{2j}\|\Phi(\sum_{i\in F} a_i x_i)\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon C m_{2j} < \frac{C}{m_{2j}^2}$$

και επειδή $d^*_{\eta_i}|_{\overline{X}} = 0$ για κάθε i προκύπτει ότι

$$\|e^*_\gamma|_{\overline{X}}\| = \frac{1}{m_{2j}}\sum_r \|b^*_{i_r}|_{\overline{X}}\| < \frac{1}{m_{2j}^2}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.46 συμπεραίνουμε ότι το ζεύγος (x,γ) είναι $(16C, 2j, \frac{1}{m_{2j}^2}, 0)$ σχεδόν ακριβές ζεύγος. Τέλος, παρατηρούμε ότι για $i = i_l \in F$ $(l \le n_0)$,

$$Tx_{i_r}(\eta) = \frac{1}{m_{2j}} b^*_{i_r}(Tx_{i_l}) > \frac{\delta}{4m_{2j}}.$$

Συνεπώς,

$$Tx(\eta) = m_{2j}\sum_{i\in F} a_i Tx_i(\eta) > \frac{\delta}{4}.$$

□

Πρόταση 2.74. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και έστω $(x_i)_i$ X-RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$. Τότε* $\mathrm{dist}(Tx_i, \langle x_i, \overline{X}\rangle) \to 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε με εις άτοπο ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\mathrm{dist}(Tx_i, \langle x_i, \overline{X}\rangle) > \delta$$

για κάθε i, περνώντας σε υπακολουθία. Έστω j_0 που θα προσδιοριστεί αργότερα και έστω $j > j_0$ έτσι ώστε $m_{2j-2} > m_{2j_0-1}^2$. Για $p_1 = 0$ και $j_1 = 2j-1$ από Λήμμα 2.73 υπάρχουν $0 < l_1$ και ένα $(16C, 4j_1 - 2, \frac{1}{m_{4j_1-2}^2}, 0)$ σχεδόν ακριβές ζεύγος (z_1, η_1) με $z_1(\eta_1) < \frac{1}{m_{4j_1-2}}$ έτσι ώστε

$$\eta_1 \in \overline{\Gamma}_{2l_1-1}\setminus\overline{\Gamma}_{2k_1},\quad \mathrm{ran} z_1, \mathrm{ran} Tz_1 \subset (0, 2l_1 - 1] \text{ και } Tz_1(\eta_1) > \frac{\delta}{4}.$$

Έστω $\gamma_1 \in \overline{\Delta}_{2l_1}$ της μορφής $\gamma_1 = (m_{2j_0-1}, e^*_{\eta_1})$ και $\mathcal{F}_{\gamma_1} = \{2l_1\}$. Εφαρμόζοντας επαγωγικά το Λήμμα 2.73 για κάθε $i \ge 2$ ώστε $\mathcal{F}_{\gamma_{i-1}} \in S_{\xi_{2j_0-1}}$ μη μεγιστικό και για $p_i = 2l_{i-1}$, $j_i = \sigma(\gamma_{i-1})$ βρίσκουμε $p_i < k_i < l_i$, $(16C, 4j_i, \frac{1}{m_{4j_i}^2}, 0)$ σχεδόν ακριβή ζεύγη (z_i, η_i) με $z_i(\eta_i) < \frac{1}{m_{4j_i}}$ και στοιχεία $\gamma_i \in \overline{\Delta}_{2l_i}$ της μορφής $\gamma_i = (2k_i, \gamma_{i-1}, \mathcal{F}_{\gamma_{i-1}}, m_{2j_0-1}, e^*_{\eta_i})$ που ικανοποιούν ότι

$$\eta_i \in \overline{\Gamma}_{2l_i-1}\setminus\overline{\Gamma}_{2k_i},\ \mathrm{ran} z_i, \mathrm{ran} Tz_i \subset (2k_i, 2l_i - 1],\quad Tz_i(\eta_i) > \frac{\delta}{4}.$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι η ακολουθία $(z_i)_{i=1}^n$ είναι $(16C, 2j_0-1, \frac{1}{m_{2j_0-1}^2}, 0)$ σχεδόν εξαρτημένη ακολουθία και έστω $(\frac{1}{m_{2j_0-1}^2}, 2j_0-1)$ scc $z = \sum_{i\in F} a_i z_i$ της $(z_i)_{i\leq n}$. Από Παρατήρηση 2.12 προκύπτει ότι,

$$\|Tz\| \leq \frac{481C\|T\|}{m_{2j_0-1}^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\gamma_n \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ και

$$e_{\gamma_n}^* = \sum_{i=1}^n \overline{d}_{\gamma_i}^* + \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_{i=1}^n e_{\eta_i}^* \circ \overline{P}_{(2k_i, 2l_i-1]}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $m_{4j_i} > m_{4j_1-2} > m_{2j_0-1}^2$ και άρα

$$\|Tz\| \geq Tz(\gamma_n) = \sum_{i\in F} a_i T z_i(\gamma) = \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_{i\in F} a_i T z_i(\eta_i) > \frac{\delta}{4m_{2j_0-1}}.$$

Αν ο φυσικός j_0 επιλεγεί ώστε $m_{2j_0-1} > 1924C\|T\|\delta^{-1}$, το παραπάνω οδηγεί σε άτοπο. $\square$

Η επόμενη πρόταση βασίζεται στην $\mathcal{L}^\infty$ δομή του χώρου $\mathcal{L}_{X,hi}^\infty$ και αποτελεί ανάλογο αντίστοιχου αποτελέσματος στο [10] (Πρόταση 5.11).

Πρόταση 2.75. *Έστω $T : \mathcal{L}_{X,hi}^\infty \to \mathcal{L}_{X,hi}^\infty$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής και $Q : \mathcal{L}_{X,hi}^\infty \to \mathcal{L}_{X,hi}^\infty / \overline{X}$ η κανονική απεικόνιση πηλίκο. Αν $\|Q \circ T(x_k)\| \to 0$ για κάθε X-RIS $(x_k)_k$ τότε $\|Q \circ T(x_k)\| \to 0$ για κάθε φραγμένη block ακολουθία $(x_k)_k$ στον $\mathcal{L}_{X,hi}^\infty$.*

Απόδειξη. Έστω $(x_k)_k$ μία φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{L}_{X,hi}^\infty$. Αν $\mathrm{dist}(x_k, \overline{X}) \to 0$, τότε από Πρόταση 2.69 προκύπτει ότι $\mathrm{dist}(T(x_k), \overline{X}) \to 0$ και άρα ισχύει. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ έτσι ώστε $\mathrm{dist}(x_k, \overline{X}) > c > 0$ για κάθε k (περνώντας σε υπακολουθία). Παρατηρούμε ότι $x_k = \bar{i}_{q_k}(u_k)$ όπου $u_k = x_k|_{\overline{\Gamma}_{q_k}}$ στοιχείο του υποσυνόλου $\overline{\Gamma}_{q_k} \setminus \overline{\Gamma}_{q_{k-1}}$. Για κάθε k και $N \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το u_k σε δύο κομμάτια v_k^N, w_k^N ως εξής

$$v_k^N(\gamma) = \begin{cases} u_k(\gamma) & \text{αν } w(\gamma) \leq m_N \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$w_k^N(\gamma) = \begin{cases} u_k(\gamma) & \text{αν } w(\gamma) > m_N \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θέτουμε $y_k^N = \bar{i}_{q_k}(v_k^N)$ και $z_k^N = \bar{i}_{q_k}(w_k^N)$. Εξ' ορισμού προκύπτει ότι οι ακολουθίες $(y_k^N)_k$, $(z_k^N)_k$ είναι φραγμένες και υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathrm{dist}(Tx_k, \overline{X}) > \varepsilon$. Είναι άμεσο ότι για κάθε N, η ακολουθία $(y_k^N)_k$ έχει φραγμένα τοπικά βάρη και από Πρόταση 2.36 συνεπάγεται ότι είναι RIS. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ είτε $\overline{\lim}\mathrm{dist}(y_k^N, \overline{X}) > 0$ ή $\overline{\lim}\mathrm{dist}(y_k^N, \overline{X}) = 0$. Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει $M_N \in [\mathbb{N}]$ ώστε η υπακολουθία $(y_k^N)_{k\in M_N}$ να είναι X-RIS και άρα από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{dist}(Ty_k^N, \overline{X}) \to 0$. Στη δεύτερη περίπτωση, από Πρόταση 2.69 υπάρχει $M_N \in [\mathbb{N}]$ ώστε για την υπακόλουθία $(y_k^N)_{k\in M_N}$ να έχουμε ότι $\mathrm{dist}(Ty_k^N, \overline{X}) \to 0$. Με επιχείρημα διαγωνιοποίησης προκύπτει ότι $\mathrm{dist}(Ty_{k_n}^n, \overline{X}) \to 0$ για

$k_n \to \infty$.
Παρατηρούμε ότι $\mathrm{dist}(Tz^n_{k_n}, \overline{X}) \geq \mathrm{dist}(Tx_{k_n}, \overline{X}) - \mathrm{dist}(Ty^n_{k_n}, \overline{X}) > \delta > 0$. Από Πρόταση 2.69 προκύπτει ότι $\mathrm{dist}(z^n_{k_n}, \overline{X}) > \delta' > 0$. Θέτουμε $n_1 = 1$ και $n_{j+1} = q_{k_{n_j}}$ για $j > 1$. Παρατηρούμε ότι η υπακολουθία $(z_{k_{n_j}})_j$ έχει αυστηρά αύξοντα τοπικά βάρη και άρα από Πρόταση 2.36 είναι X-RIS. Από τα δεδομένα συνεπάγεται ότι $\|Q \circ T(z^{n_j}_{k_{n_j}})\| \to 0$ και άρα με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε ότι $\|Q \circ T(x_{k_{n_j}})\| \to 0$ το οποίο είναι άτοπο.

□

Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύεται η βασική ιδιότητα που έχει ο χώρος των γραμμικών και φραγμένων τελεστών του $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$ για χώρο X διαχωρίσιμο συζυγή χωρίς καμία περαιτέρω υπόθεση.

Θεώρημα 2.76. *Έστω T γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε ο τελεστής $Q \circ (T - \lambda I)$ να είναι συμπαγής, όπου $Q : \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \to \mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/_{\overline{X}}$ είναι η κανονική απεικόνιση πηλίκο.*

Απόδειξη. Έστω $(x_i)_i$ μία (c, C)-RIS στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Από Πρόταση 2.74 υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_i ώστε $\|Q \circ (T - \lambda_i I)(x_i)\| \to 0$. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $(\lambda_i)_i$ συγκλίνει σε έναν αριθμό λ.
Πράγματι, αν όχι τότε μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία, ότι $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| > \delta$ για κάθε i. Θέτουμε $y_i = x_{2i-1} + x_{2i}$ για κάθε i. Εύκολα βλέπουμέ ότι η ακολουθία $(y_i)_i$ είναι RIS και από Παρατήρηση 2.11 και Πρόταση 2.74 υπάρχουν αριθμοί μ_i έτσι ώστε $\|Q \circ (T - \mu_i I)(y_i)\| \to 0$. Συνεπάγεται ότι,

$$\begin{aligned} \|Q[(\lambda_{2i-1} - \mu_i)x_{2i-1} + (\lambda_{2i} - \mu_i)x_{2i}]\| &\leq \|Q \circ (T - \lambda_{2i-1} I)(x_{2i-1})\| \\ &+ \|Q \circ (T - \lambda_{2i} I)(x_{2i})\| \\ &+ \|Q \circ (T - \mu_i I)y_i\| \to 0. \end{aligned}$$

Επειδή η ακολουθία $(x_i)_i$ είναι skipped block συμπεραίνουμε ότι είναι ασθενώς μηδενική και άρα η ακολουθία $(Qx_i)_i$ είναι ασθενώς μηδενική. Όμως $\|Q(x_i)\| > c$ και άρα, περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι Schauder βασική. Αυτό συνεπάγεται οτι υπάρχει σταθερά $d > 0$ ώστε $\|a_{2i}Q(x_{2i})\| + \|a_{2i-1}Q(x_{2i-1})\| \leq d\|a_{2i}Q(x_{2i}) + a_{2i-1}Q(x_{2i-1})\|$ για κάθε i και κάθε πραγματικούς αριθμούς a_{2i}, a_{2i-1}. Από τα παραπάνω προκύπτει οτι $|\lambda_{2i-1} - \mu_i| \to 0$ και $|\lambda_{2i} - \mu_i| \to 0$, επομένως $|\lambda_{2i-1} - \lambda_{2i}| \to 0$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση. Μένει να δειχθεί ότι ο αριθμός λ είναι ανεξάρτητος της επιλογής της X-RIS στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \cap Q^{\overline{\Gamma}}$. Πράγματι, αν $(x_i)_i$ και $(x'_i)_i$ είναι X-RIS με $\|Q \circ (T - \lambda I)(x_i)\| \to 0$ και $\|Q \circ (T - \lambda' I)(x'_i)\| \to 0$, μπορούμε να βρούμε φυσικούς αριθμούς $i_1 < i_2 < \ldots$ ώστε η ακολουθία $(y_k)_k$ που ορίζεται ως

$$y_k = \begin{cases} x_{i_k} & \text{αν } k \text{ περιττός} \\ x'_{i_k} & \text{αν } k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

είναι επίσης X-RIS. Χρησιμοποιώντας παρόμοια το παραπάνω επιχείρημα προκύπτει ότι $\lambda = \lambda'$. Επομένως, υπάρχει αριθμός λ ώστε $\|Q \circ (T - \lambda I)(x_i)\| \to 0$ για κάθε $(x_i)_i$ X-RIS στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \cap Q^{\overline{\Gamma}}$. Από Πρόταση 2.75 έχουμε ότι $\|Q \circ (T - \lambda I)(x_i)\| \to 0$ για κάθε φραγμένη block ακολουθία $(x_i)_i$ στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi} \cap Q^{\overline{\Gamma}}$. Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής $Q \circ (T - \lambda I)$ είναι συμπαγής. □

2.10 Το quotient compact κριτήριο

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τις ικανές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ο χώρος X έτσι ώστε ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ να έχει πολύ λίγους τελεστές. Ο τρόπος προσέγισής μας σέβεται τη δομή του χώρου πηλίκου $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_X$ όπως μελετήθηκε σε προηγούμενη ενότητα.

Ορισμός 2.77. Έστω X χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή. Ο χώρος X λέμε ότι ικανοποιεί το quotient compact κριτήριο (qcc), αν για κάθε χώρο Banach Z με βάση (Schauder) που περιέχει τον X (ισομορφικά) και έχει διαχωρίσιμο συζυγή και κάθε $\mathcal{L}^\infty$ χώρο $\mathfrak{X}$ με συζυγή $\mathfrak{X}^*$ διαχωρίσιμο, ισχύει το ακόλουθο:
Ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $T : \mathfrak{X} \to Z$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο τελεστής $Q \circ T : \mathfrak{X} \to Z/_X$ είναι συμπαγής, όπου Q είναι η κανονική απεικόνιση πηλίκο επί του $Z/_X$.

Πρόταση 2.78. *Κάθε διαχωρίσιμος αυτοπαθής χώρος X ικανοποιεί το qcc.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο τελεστής $Q \circ T : \mathfrak{X} \to Z/_X$ είναι συμπαγής, οπου $T : \mathfrak{X} \to Z$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Θα δείξουμε ότι ο T είναι συμπαγής. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία φραγμένη ακολουθία στον $\mathfrak{X}$. Επειδή ο τελεστής $Q \circ T$ είναι συμπαγής υπάρχει στοιχείο $z \in Z$ ώστε $Q \circ T(x_n) \to Q(z)$ και άρα $Q\circ T(x_n) - Q(z) \to 0$. Επομένως, υπάρχει ακολουθία $(z_n)_n$ στον X ώστε $\|T(x_n) - z - z_n\| \to 0$. Επειδή ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει υπακολουθία της $(z_n)_n$, $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και στοιχείο $z' \in X$ ώστε $z_{n_k} \xrightarrow{w} z'$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι $T(x_{n_k}) \xrightarrow{w} (z + z')$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο τελεστής T είναι ασθενώς συμπαγής και άρα ο συζυγής τελεστής $T^* : Z^* \to \mathfrak{X}^*$ είναι ασθενώς συμπαγής. Επειδή ο συζυγής $\mathfrak{X}^*$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_1 και ο ℓ_1 έχει την ιδιότητα schur προκύπτει ότι ο T^* και άρα και ο T είναι συμπαγείς. □

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι κάθε χώρος Banach X με διαχωρίσιμο συζυγή έτσι ώστε ο ℓ^1 δεν είναι ισόμορφος με ένας συμπληρωματικό υπόχωρο του X^* ικανοποιεί qcc. Από Θεώρημα 2.76 συνεπάγεται ότι για κάθε χώρο Banach X που ανήκει σε αυτή την κλάση, ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έχει πολύ λίγους τελεστές.

Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό από [30].

Ορισμός 2.79. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και $A, B \subset X$. Θα λέμε ότι το σύνολο A σχεδόν απορροφά το σύνολο B αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 0$ έτσι ώστε $B \subset \lambda A + \varepsilon B_X$.

Εν συνεχεία, δοθέντος ενός χώρου Banach Z και ενός υποχώρου X του Z συμβολίζουμε με Q την κανονική απεικόνιση πηλίκο $Q : Z \to Z/_X$.

Λήμμα 2.80. *Έστω Z χώρος Banach με βάση Schauder $(z_n)_n$ και έστω X κλειστός υπόχωρος του Z. Αν K είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του Z ώστε η εικόνα $Q[K]$ είναι norm συμπαγές, τότε θέτοντας $W = \mathrm{conv}\{W_1 \cup B_X\}$ όπου $W_1 = \overline{\mathrm{conv}}\{\pm\frac{1}{n}z_n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο W σχεδόν απορροφά το σύνολο K.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε με εις άτοπο ότι το σύνολο W δεν απορροφά το σύνολο K και άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in K$ ώστε το στοιχείο x_n δεν ανήκει στο σύνολο $nW + \varepsilon B_Z$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(x_n)_n$ στο συνολο K έτσι ώστε για κάθε n, $\mathrm{dist}(x_n, nW) > \varepsilon$. Επειδή το σύνολο $Q[K]$ είναι norm συμπαγές, μπορούμε να υποθέσουμε περνώντας σε υπακολουθία ότι υπάρχει στοιχείο $x \in Z$ ώστε $\mathrm{dist}(x_n - x, X) \to 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $(z_i)_i$ είναι βάση (Schauder) για τον Z, βρίσκουμε ένα πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό της μορφής $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i z_i$ έτσι ώστε $\|x - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i z_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ και έστω $\lambda > 0$ ώστε $\mathrm{dist}(x_n - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i z_i, \lambda B_X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $\mathrm{dist}(x_n, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i z_i + \lambda B_X) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Είναι άμεσο ότι υπάρχει $\lambda' > 0$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i z_i \in \lambda' W_1$. Θέτοντας $\lambda'' = \lambda + \lambda'$ παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i z_i + \lambda B_X \subset \lambda'' W$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{dist}(x_n, \lambda'' W) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επειδή $\mathrm{dist}(x_n, nW) > \varepsilon$ για $n \geq \lambda''$, καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Το ακόλουθο Λήμμα στηρίζεται σε μία βασική ιδιότητα του χώρου ℓ^1, γνωστή ως lifting ιδιότητα.

Λήμμα 2.81. *Έστω $T : X \to \ell^1$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής που δεν είναι συμπαγής. Τότε ο ℓ^1 είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X. Επιπλέον ο τελεστής $T^* : \ell^\infty \to X^*$ ¨φιξάρει¨ κόπια του ℓ^∞ στον X^*.*

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο κλασσικό αποτέλεσμα από τον H. P. Rosenthal([43]).

Πρόταση 2.82. *Έστω X χώρος Banach και $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to X$ έτσι ώστε $\overline{\lim}_n \|T(e_n)\| > \delta > 0$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ έτσι ώστε ο τελεστής $T|_{\ell^\infty(M)} : \ell^\infty(M) \to X$ είναι ισόμορφισμός.*

Λήμμα 2.83. *Έστω Z χώρος Banach με βάση Schauder και διαχωρίσιμο συζυγή, X υπόχωρος του Z και $\mathfrak{X}$ ένας $\mathcal{L}^\infty$ χώρος ώστε $\mathfrak{X}^* \simeq \ell^1$. Έστω ακόμα $T : \mathfrak{X} \to Z$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής ώστε ο $Q \circ T : \mathfrak{X} \to Z/_X$ είναι συμπαγής τελεστής. Τότε, $T^{**}[B_{\mathfrak{X}^{**}}] \subset \overline{Z + X^{**}}$.*

Απόδειξη. Επειδή ο τελεστής $Q \circ T$ είναι συμπαγής, θέτοντας $K = T[B_{\mathfrak{X}}]$ το σύνολο $Q[K]$ είναι norm συμπαγές. Από Λήμμα 2.80 προκύπτει ότι το σύνολο $W = \mathrm{conv}(W_1 \cup B_X)$ σχεδόν απορροφά το σύνολο K. Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε

$$T[B_{\mathfrak{X}}] \subset \lambda W + \varepsilon B_Z.$$

Επειδή ο τελεστής $T^{**} : \mathfrak{X}^{**} \to Z^{**}$ είναι w^*-συνεχής, συνεπάγεται ότι

$$T^{**}[B_{\mathfrak{X}^{**}}] = \overline{T[B_{\mathfrak{X}}]}^{w^*}$$

και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αριθμός λ_n έτσι ώστε

$$T^{**}[B_{\mathfrak{X}^{**}}] \subset \lambda_n \overline{W}^{w^*} + \frac{1}{n} B_{Z^{**}}.$$

Επειδή το σύνολο W_1 norm συμπαγές έχουμε ότι $\overline{W}^{w^*} \subset \overline{Z + X^{**}}$ και άρα

$$T^{**}[B_{\mathfrak{X}^{**}}] \subset \cap_n(\lambda_n \overline{Z + X^{**}} + \frac{1}{n} B_{Z^{**}}) = \overline{Z + X^{**}}.$$

□

Θεώρημα 2.84. *Έστω Z χώρος Banach με βάση Schauder και διαχωρίσιμο συζυγή, X υπόχωρος του Z και $\mathfrak{X}$ ένας $\mathcal{L}^\infty$ χώρος ώστε $\mathfrak{X}^* \simeq \ell^1$. Έστω ακόμα $T : \mathfrak{X} \to Z$ γραμμικός, φραγμένος, μη συμπαγής τελεστής. Αν ο τελεστής $Q \circ T : \mathfrak{X} \to Z/_X$ είναι συμπαγής, τότε ο ℓ^1 είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X^*.*

Απόδειξη. Επειδή ο T δεν είναι συμπαγής συνεπάγεται (από κλασσικά αποτελέσματα) ότι οι τελεστές $T^* : Z^* \to \mathfrak{X}^*$ και $T^{**} : \mathfrak{X}^{**} \to Z^{**}$ δεν είναι συμπαγείς. Επειδή $\mathfrak{X}^* \simeq \ell^1$ και ο τελεστής $Q \circ T$ είναι συμπαγής, από Λήμμα 2.83 προκύπτει ότι $T^{**}[B_{\mathfrak{X}^{**}}] \subset \overline{Z + X^{**}}$ και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον T^{**} ως ένα τελεστή από τον ℓ^∞ στον $\overline{Z + X^{**}}$. Επιπλέον επειδή ο T^* δεν είναι συμπαγής, από Λήμμα 2.81 συνεπάγεται ότι ο T^{**} ¨φιξάρει¨ μία κόπια του ℓ^∞ στον $\overline{Z + X^{**}}$. Έστω $\overline{Q} : \overline{Z + X^{**}} \to \overline{Z + X^{**}}/_{X^{**}}$ η κανονική απεικόνιση πηλίκο και $(e_n)_{n\in M}$ η μοναδιαία βάση του c_0 σε αυτή τη κόπια του ℓ^∞. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\|\overline{Q} \circ T^{**}(e_k)\| \to 0.$$

Πράγματι, αν όχι από Πρόταση 2.82 έχουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\overline{Z + X^{**}}/_{X^{**}}$ περιέχει ισομορφικά τον ℓ^∞ το οποίο είναι άτοπο καθώς ο χώρος $\overline{Z + X^{**}}/_{X^{**}}$ είναι διαχωρίσιμος. Επομενως, $\mathrm{dist}(T^{**}(e_n), X^{**}) \to 0$ και άρα υπάρχει ακολουθία $(x_n^{**})_{n\in M}$ στον X^{**} έτσι ώστε $\sum_n \|x_n^{**} - T^{**}(e_n)\| < 1$. Επειδή ο T^{**} είναι ισομορφική εμφύτευση προκύπτει ότι οι ακολουθίες $\{T^{**}(e_n)\}_{n\in M}$ και $(x_n^{**})_{n\in M}$ είναι ισοδύναμες με τη βάση του c_0 και άρα ο c_0 εμφυτεύεται ισομορφικά στον X^{**}. Από ένα κλασσικό αποτέλεσμα των Bessaga-Pelczynski ([24]) συμπεραίνουμε ότι ο ℓ^1 είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X^*. □

Το παραπάνω θεώρημα έχει σαν συνέπεια το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.85. *Έστω X χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή ωστε ο ℓ^1 δεν είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X^*. Τότε, ο X ικανοποιεί το qcc.*

Απόδειξη. Έστω $T : \mathfrak{X} \to Z$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής ώστε ο τελεστής $Q \circ T$ είναι συμπαγής. Αν υποθέσουμε ότι ο τελεστής T δεν είναι συμπαγής τότε από Θεώρημα 2.84 οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Από Θεώρημα 2.76 και Πόρισμα 2.85 προκύπτει το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.86. *Κάθε χώρος Banach X με διαχωρίσιμο συζυγή ωστε ο ℓ^1 δεν είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X^*, εμφυτεύεται σε έναν $\mathcal{L}^\infty$ χώρο με διαχωρίσιμο συζυγή και την ¨scalar-plus-compact¨ ιδιότητα.*

Παρατήρηση 2.13. *Σημειώνουμε ότι υπάρχουν BD-$\mathcal{L}^\infty$ που έχουν πολύ λίγους τελεστές και μη διαχωρίσιμο συζυγή. Πράγματι, στο [11] κατασκευάζεται BD-$\mathcal{L}^\infty$ χώρος με την ¨scalar-plus-compact¨ ιδιότητα που περιέχει ισομορφικά τον ℓ^1. Επομένως δε μπορεί να έχει διαχωρίσιμο συζυγή.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν X διαχωρίσιμος χώρος Banach που περιέχει $\mathcal{L}^\infty$ υπόχωρο, τότε ο ℓ_1 είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X^*. Επομένως, η κλάση χώρων Banach X με διαχωρίσιμο συζυγή που δεν περιέχει $\mathcal{L}^\infty$ υπόχωρο, είναι ευρύτερη της κλάσης χώρων Banach για τους οποίους ισχύει ότι ο ℓ_1 δεν είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του συζυγή τους. Επιπλέον, το επόμενο αποτέλεσμα του W.B. Johnson δείχνει ότι η πρώτη κλάση είναι αυστηρά μεγαλύτερη της δεύτερης. Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ένα κλασσικό αποτέλεσμα του J. Lindenstrauss ([39],Θεώρημα $1.d.3$, δες ακόμη [41]) με βάση το οποίο για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X, υπάρχει ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach Z έτσι ώστε ο χώρος πηλίκο Z^{**}/Z να είναι ισόμορφος με τον χώρο X. Στην περίπτωση που $X = \ell_1$ παρατηρούμε ότι ο συζυγής χώρος Z^* έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Πράγματι, από τη lifting ιδιότητα του ℓ_1 συνεπάγεται ότι ο ℓ_1 είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του Z^{**}. Επίσης, όπως παρουσιάστηκε στο [23], δεν υπάρχει διαχωρίσιμος συζυγής W^* που περιέχει ισομορφικά έναν απειροδιάστατο $\mathcal{L}^\infty$ χώρο. Επομένως, αν θέσουμε $W = Z^*$, ο W δεν μπορεί να περιέχει $\mathcal{L}^\infty$ υπόχωρο ενώ ο συζυγής W^* περιέχει τον ℓ_1 συμπληρωματικά.

Το παραπάνω αποτέλεσμα από [23], έχει ευκολότερη απόδειξη στην περίπτωση που περιοριστούμε σε απειροδιάστατους $\mathcal{L}^\infty$ χώρους με διαχωρίσιμο συζυγή. Πράγματι, έστω Y ένας $\mathcal{L}^\infty$ χώρος με διαχωρίσιμο συζυγή και W^* ένας διαχωρίσιμος συζυγής χώρος. Αν $T : Y \to W^*$ είναι μία ισομορφική εμφύτευση, τότε ο συζυγής $T^* : W^{**} \to \ell_1$ είναι επί. Θεωρούμε τον τελεστή $T^*|_W : W \to \ell_1$ και παρατηρούμε ότι δε μπορεί να είναι συμπαγής. Αυτό συνεπάγεται (Λήμμα 2.81) ότι ο ℓ_1 είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του W. Άρα ο συζυγής W^* δε μπορεί να είναι διαχωρίσιμος το οποίο είναι άτοπο.

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν συζυγείς χώροι που περιέχει τον ℓ_1 ισομορφικά αλλά όχι συμπληρωματικά. Αυτό σημαίνει ότι η κλάση χώρων που δεν περιέχουν τον ℓ_1 συμπληρωματικά είναι μεγαλύτερη της κλάσης χώρων που δεν περιέχουν τον ℓ_1 ισομορφικά. Σαν παράδειγμα για το τελευταίο αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα από τους S.Argyros, R. Haydon and Th. Raikoftsalis στο οποίο κατασκευάζεται ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach X με την ιδιότητα ότι ο συζυγής X^* είναι αδιάσπαστος και περιέχει τον ℓ_1.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε τα ακόλουθα προβλήματα που προκύπτουν από τα παραπάνω.

Πρόβλημα 2.1. *Έστω X χώρος Banach που δεν περιέχει $\mathcal{L}^\infty$ χώρο και έχει διαχωρίσιμο συζυγή. Είναι σωστό ότι ο χώρος $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έχει πολύ λίγους τελεστές;*

Σημειώνουμε ότι μία καταφατική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα έχει σαν συνέπεια ότι κάθε χώρος X που δεν περιέχει $\mathcal{L}^\infty$ χώρο και έχει διαχωρίσιμο συζυγή εμφυτεύεται σε αδιάσπαστο χώρο.

Πρόβλημα 2.2. *Έστω X χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή και Y, Z δύο υπόχωροι του X έτσι ώστε ο Y είναι $\mathcal{L}^\infty$ χώρος και ο τελεστής $Q|_Y : Y \to X/_Z$ είναι συμπαγής. Υπάρχει υπόχωρος του Z ισόμορφος με $\mathcal{L}^\infty$ χώρο;*

2.11 Ο χώρος των γραμμικών και φραγμένων τελεστών του χώρου πηλίκου $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ έχει τη ¨scalar-plus-compact¨ ιδιότητα, δηλαδή ότι κάθε γραμμικός και φραγμένος τελεστής T πάνω στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ είναι της μορφής $\lambda I + K$,όπου λ ένας αριθμός, I ο ταυτοτικός τελεστής στο πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ και K ένας συμπαγής τελεστής στο πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$.

Συμβολίζουμε με $M = (M_n)_n$ την FDD του χώρου $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και με $M^* = (M^*_n)_n$ την FDD του χώρου $(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$. Ο συζυγής χώρος $(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$ εκτός από την FDD $(M^*_n)_n$ διαθέτει και την unconditional FDD $(\langle e^*_\gamma : \gamma \in \overline{\Delta}_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Η $M^* = (M^*_n)_n$ σεβεται την w^*-τοπολογία του $(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$. Ειδικότερα, αν $(z^*_n)_n$ είναι ημινορμαρισμένη w^*-μηδενική ακολουθία στον $(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$, τότε για κάθε φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο μηδέν υπάρχει block ακολουθία (ως προς την $(M^*_n)_n$), $(g^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και υπακολουθία $(z^*_{n_k})_k$ έτσι ώστε $\|z^*_{n_k} - g^*_k\| < \varepsilon_k$. Παρ' όλα αυτά, η ακολουθία $(g^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεν είναι απαραίτητα block ως προς την FDD $(\langle e^*_\gamma : \gamma \in \overline{\Delta}_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως, για να προσεγγίσουμε την $(z^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με block ακολουθία, πρέπει να θεωρήσουμε την ακολουθία διαφορών $(z^*_{n_{2k+1}} - z^*_{n_{2k}})_{k\geq 1}$ η οποία προσεγγίζεται από μία ακολουθία $(b^*_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που είναι block και ως προς τις δύο FDD του $(\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$. Αυτό το γεγονός θα χρησιμοποιηθεί ισχυρά στα αποτελέσματα αυτής της ενότητας.

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι χρήσιμη για τη συνέχεια.

Παρατήρηση 2.14. *Έστω $Q : \mathcal{L}^\infty_{X,hi} \to \mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ η κανονική απεικόνιση πηλίκο. Τότε ο συζυγής τελεστής $Q^* : (\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}})^* \to (\mathcal{L}^\infty_{X,hi})^*$ είναι ισομορφική εμφύτευση και*

$$Q^*[(\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}})^*] = \{b^* : b^*|_{\overline{X}} = 0\}$$

Επίσης είναι άμεσο ότι αν $b^* \in Q^*[(\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}})^*]$ ώστε $\|b^*\| \leq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathcal{L}^\infty_{X,hi}$, $b^*(x) \leq \|Q(x)\|$.

Λήμμα 2.87. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στο πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$. Αν για κάθε skipped block X-RIS $(x_k)_k$ στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ισχύει ότι $\|T \circ Q(x_k)\| \to 0$, τότε ο τελεστής T είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε με εις άτοπο ότι δεν ισχύει τότε υπάρχει μία ασθενώς μηδενική ακολουθία $(w_n)_n$ στο πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\|T(w_{2n}) - T(w_{2n+1})\| > \varepsilon$ για κάθε n. Έστω $(y_n)_n$ ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $Q(y_n) = w_n$ για κάθε n. Είναι άμεσο ότι $\mathrm{dist}(y_n, \overline{X}) = \|Q(y_n)\| = \|w_n\| = 1$ για κάθε n και επειδή ο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ έχει συρρικνούσα FDD, περνώντας σε υπακολουθία, προκύπτει ότι η ακολουθία των διαφορών $(y_{2n} - y_{2n+1})_n$ είναι ασθενώς μηδενική. Θέτουμε $x_n = y_{2n} - y_{2n+1}$ και παρατηρούμε ότι η $(x_n)_n$ είναι block ακολουθία ενώ $\|T \circ Q(x_n)\| = \|T(w_{2n}) - T(w_{2n+1})\| > \varepsilon$ για κάθε n. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $(T \circ Q(x_n))_n$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Πράγματι, αν όχι τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $(x_n)_n$ είναι ασθενώς μηδενική, υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ ώστε $\|T \circ Q(x_{n_k})\| \to 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Όπως στην Πρόταση 2.69 για κάθε n και $N \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το στοιχείο x_n σε δύο κομμάτια $x_n = y^N_n + z^N_n$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

1. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ και $M \in [\mathbb{N}]$ έτσι ώστε $\|T \circ Q(y^N_n)\| > \delta$ για κάθε $n \in M$.
   Σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε $\|Q(y^N_n)\| > \delta'$ για κάθε $n \in M$ και άρα η ακολουθία $(y^N_n)_{n\in M}$ είναι X-RIS. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $\|T \circ Q(y^N_n)\| \to 0$, το οποίο είναι άτοπο.

2. $\|T \circ Q(y^n_{k_n})\| \to 0$ όπου $k_n \to \infty$.
   Σε αυτή τη περίπτωση, περνώντας σε υπακολουθία, έχουμε ότι $\|T \circ Q(z^n_{k_n})\| \geq \|T \circ Q(x_{k_n})\| - \|T \circ Q(y^n_{k_n})\| > \delta > 0$ και άρα υπάρχει $\delta' > 0$ έτσι ώστε $\|Q(z^n_{k_n})\| > \delta'$. Όπως στην Πρόταση 2.69 βρίσκουμε υπακολουθία $(z^{n_j}_{k_{n_j}})_j$ η οποία είναι X-RIS (καθώς έχει αυστηρά αύξοντα τοπικά βάρη) και άρα πάλι από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι $\|T \circ Q(z^{n_j}_{k_{n_j}})\| \to 0$, το οποίο είναι άτοπο.

□

Πρόταση 2.88. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στο πηλίκο $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/_{\overline{X}}$ και $(x_n)_n$ μία (c, C)-RIS στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$. Τότε $\mathrm{dist}(T \circ Q(x_n), \langle Q(x_n)\rangle) \to 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε με εις άτοπο ότι υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\mathrm{dist}(T \circ Q(x_n), \langle Q(x_n)\rangle) > \delta$$

για κάθε n (περνώντας σε υπακολουθία). Από Hahn-Banach, υπάρχουν $z_n^* \in (\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/_{\overline{X}})^*$ ώστε $\|z_n^*\| \leq 1$,

$$z_n^*(T \circ Qx_n) > \delta \quad \text{και} \quad z_n^*|_{\langle Q(x_n)\rangle} = 0.$$

Είναι άμεσο ότι η ακολουθία $(z_n^*)_n$ είναι w^* συγκλίνουσα σε κάποιο στοιχείο $z^* \in (\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}/_{\overline{X}})^*$. Επειδή η $(x_n)_n$ είναι ασθενώς μηδενική συνεπάγεται ότι οι ακολουθίες $(T \circ Qx_n)_n$ και $(Qx_n)_n$ είναι ασθενώς μηδενικές και επειδή $\|Q(x_n)\| > c$ μπορούμε να επιλέξουμε $M \in [\mathbb{N}]$ και ε_0 που θα προσδιοριστεί αργότερα ώστε

$$\sum_{n \in M} |z^*(T \circ Qx_n)| < \varepsilon_0 \quad \text{και} \quad \sum_{n \in M} \|z^*|_{\langle Q(x_n)\rangle}\| < \varepsilon_0.$$

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάση της γενικότητας, ότι η ακολουθία $(z_n^*)_n$ είναι w^* συγκλίνουσα στο 0 και άρα η ακολουθία $(Q^* z_n^*)_n$ στον $(\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi})^*$ είναι w^* συγκλίνουσα στο 0. Με sliding hump επιχείρημα βρίσκουμε ακολουθία $(b_n^*)_n$ στον $(\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi})^*$, $\tilde{p}_n < \tilde{q}_n < \tilde{p}_{n+1}$ φυσικούς αριθμούς και μία φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών $(\varepsilon_n)_n$ με $\sum_n \varepsilon_n < \varepsilon_0$ ώστε

$$\|b_n^* - Q^*(z_n^*)\| < \varepsilon_n, \; b_n^* \in \sum_{n=2p_n+1}^{q_n} \oplus M_n^* \;\; \text{και} \quad \|b_n^*|_{\overline{X}}\| < \varepsilon_n.$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι $\mathrm{ran} x_n \subset (2\tilde{p}_n, 2\tilde{q}_n - 1]$ προσεγγίζοντας κάθε x_n με στοιχείο που έχει ρητούς συντελεστές μπορούμε να έχουμε επιπλέον ότι $b_n^* \in B_{2\tilde{q}_n - 1, 2\tilde{p}_n}$ (αλλάζοντας την επιλογή φυσικών $\tilde{p}_1 < \tilde{q}_1 < \ldots$ όπως στην Παρατήρηση 2.6).
Έστω $(y_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^{\infty}_{X,hi}$, $\|y_n\| \leq C'$ για κάθε n, ώστε $Q(y_n) = T \circ Q(x_n)$. Παρατηρούμε ότι περνώντας σε υπακολουθία, η ακολουθία $(y_{n_{2k}} - y_{n_{2k-1}})_k$ είναι ασθενώς μηδενική και επίσης $Q(y_{n_{2k}} - y_{n_{2k-1}}) = T \circ Q(x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}})$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\|(z^*_{n_{2k}} - z^*_{n_{2k-1}})\big|_{\langle Q(x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}})\rangle}\| = \|(Q^* z^*_{n_{2k}} - Q^* z^*_{n_{2k-1}})\big|_{\langle x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\rangle}\| \\
&\leq \|(b^*_{n_{2k}} - b^*_{n_{2k-1}})\big|_{\langle x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\rangle}\| + \varepsilon_{n_{2k}} + \varepsilon_{n_{2k-1}}.
\end{aligned}$$

Επειδή $z^*_{n_k}(Qx_{n_k}) = 0$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
&\|(b^*_{n_{2k}} - b^*_{n_{2k-1}})\big|_{\langle x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\rangle}\| \leq |(b^*_{n_{2k}} - b^*_{n_{2k-1}})\Big(\frac{x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}}{\|x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\|}\Big)| \\
&= \frac{|b^*_{n_{2k}}(x_{n_{2k}})|}{\|x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\|} + \frac{|b^*_{n_{2k-1}}(x_{n_{2k-1}})|}{\|x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\|} \leq 4\frac{|b^*_{n_{2k}}(x_{n_{2k}})|}{\|x_{n_{2k}}\|} + 4\frac{|b^*_{n_{2k-1}}(x_{n_{2k-1}})|}{\|x_{n_{2k-1}}\|} \\
&\leq 4\frac{z^*_{n_{2k}}(Qx_{n_{2k}})}{\|x_{n_{2k}}\|} + 4\frac{z^*_{n_{2k-1}}(Qx_{n_{2k-1}})}{\|x_{n_{2k-1}}\|} + 4\varepsilon_{n_{2k}} + 4\varepsilon_{n_{2k-1}} < 8\varepsilon_{n_{2k}}.
\end{aligned}$$

Επομένως,
$$\|(z^*_{n_{2k}} - z^*_{n_{2k-1}})\big|_{\langle Q(x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}})\rangle}\| \leq 10\varepsilon_{n_k}.$$

Μέχρι τώρα έχουμε κατασκευάσει δύο ακολουθίες $(\widetilde{x}_k)_k$, $(\widetilde{y}_k)_k$ στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και δύο ακολουθίες $(\widetilde{b}^*_k)_k$, $(\widetilde{z}^*_k)_k$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Η ακολουθία $(\widetilde{x}_k)_k$ είναι skipped block, $\widetilde{x}_k = x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}$ και $\|\widetilde{x}_k\| \leq 2C$ για κάθε k .
2. Η ακολουθία $(\widetilde{y}_k)_k$ είναι skipped block, κάθε $\widetilde{y}_k$ προσεγγίζει το στοιχείο $y_{n_{2k}} - y_{n_{2k-1}}$ και $\|\widetilde{y}_k\| \leq 2C'$ για κάθε k.
3. Θέτουμε $\widetilde{b}^*_k = b^*_{n_{2k}} - b^*_{n_{2k-1}}$, $p_k = \tilde{p}_{2k-1}$, $q_k = \tilde{q}_{2k}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε k $\widetilde{b}^*_k \in B_{2q_k-1,2p_k}$.
4. Θέτουμε $\widetilde{z}^*_k = z^*_{n_{2k}} - z^*_{n_{2k-1}}$ και παρατηρούμε ότι η $(Q^*\widetilde{z}^*_k)_k$ είναι w^*-συγκλίνουσα στο 0.

Παρατήρηση 2.15. *(i) Αν $C_0 = \max\{2C, 2C'\}$ τότε οι ακολουθίες $(\widetilde{x}_k)_k$ και $(\widetilde{y}_k)_k$ είναι φραγμένες από τη σταθερά C_0 και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon_0 < \frac{\delta}{16^2 C_0}$.*

(ii) Η ακολουθία $(\widetilde{b}^*_k)_k$ είναι block ως προς και τις δύο FDD $(\langle e^*_\gamma : \gamma \in \overline{\Delta}_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(M^*_n)_n$.

(iii) $\widetilde{b}^*_k = \widetilde{b}^*_k \circ \overline{P}_{(2p_k,2q_k-1]}$, για κάθε k.

Οι ακολουθίες $(\widetilde{x}_k)_k$, $(\widetilde{y}_k)_k$, $(\widetilde{b}^*_k)_k$ και $(\widetilde{z}^*_k)_k$ (περνώντας σε υπακολουθίες) ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες, όπου $(\widetilde{\varepsilon}_k)_k$ είναι φθίνουσα ακολουθία φυσικών με $\sum_k \widetilde{\varepsilon}_k < \varepsilon_0$:

1. $Q(\widetilde{y}_k) = T \circ Q\widetilde{x}_k$ για κάθε k.
2. $\widetilde{z}^*_k(T \circ Q\widetilde{x}_k) > \delta$, $\sum_{l\neq k} \widetilde{z}^*_k(T \circ Q\widetilde{x}_l) < \widetilde{\varepsilon}_k$.
3. $|\widetilde{z}^*_k(\mathbb{R}Q\widetilde{x}_k)| < \widetilde{\varepsilon}_k$ και $\|\widetilde{b}^*_k - Q^*(\widetilde{z}^*_k)\| < \widetilde{\varepsilon}_k$.

Ισχυριζόμαστε ότι οι παραπάνω συνθήκες οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο τελεστής $T \circ Q$ δεν είναι φραγμένος. Η βασική ιδέα είναι να κατασκευάσουμε μία $(0, 2j-1)$ σχεδόν εξαρτημένη ακολουθία στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις από Λήμμα 2.64 καταλήγουμε σε άτοπο.
Για να συνεχίσουμε χρειαζόμαστε να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα που αποτελεί ανάλογο του λήμματος 2.73:

Λήμμα 2.89. *Έστω $(\widetilde{x}_k)_k$, $(\widetilde{y}_k)_k$, $(\widetilde{b}^*_k)_k$ και $(\widetilde{z}^*_k)_k$ όπως παραπάνω. Τότε για κάθε $j, p \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x \in [\widetilde{x}_k : k \in \mathbb{N}]$, $y \in [\widetilde{y}_k : k \in \mathbb{N}]$, $q > p$ και $\eta \in \overline{\Delta}_{2q}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες :*

1. *$x = m_{2j} \sum\limits_{k\in F} a_k \widetilde{x}_k$ και $y = m_{2j} \sum\limits_{k\in F} a_k \widetilde{y}_k$ όπου $F \in \mathcal{S}_{\xi_{2j}}$.*
2. *(x, η) είναι $(16C_0, 2j, \frac{1}{m^2_{2j}}, 0)$ σχεδόν ακριβές ζεύγος.*
3. *$y(\eta) > \delta - \varepsilon_0 C_0 (> \frac{\delta}{2})$.*

Απόδειξη. Έστω $j \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι για p_k, q_k όπως παραπάνω, $\text{ran}\widetilde{x}_k, \text{ran}\widetilde{y}_k \subset (2p_k, 2q_k - 1]$. Επειδή ο χώρος $\mathfrak{X}$ είναι $\mathcal{S}_{\xi_{2j}}$ φραγμένος από Παρατήρηση 2.4 μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία, ότι για κάθε $(\frac{1}{m_{2j}^2}, 2j)$ scc της $(\widetilde{x}_k)_k$, της μορφής $\sum\limits_{i\in F} a_i\widetilde{x}_i$ ισχύει ότι $\|\Phi(\sum\limits_{k\in F} a_k\widetilde{x}_k)\|_{\mathfrak{X}} \leq \frac{C_0}{m_{2j}^2}$. Για την ακολουθία $(\widetilde{b}_k^*)_k$ που ορίστηκε παραπάνω έχουμε ότι

$$\widetilde{b}_k^*(\mathbb{R}\widetilde{x}_k) < \widetilde{\varepsilon}_k, \quad \|\widetilde{b}_k^*|_{\overline{X}}\| < \widetilde{\varepsilon}_k$$

και

$$\widetilde{b}_k^*(\widetilde{y}_k) = \widetilde{b}_k^*(\overline{P}_{(2p_k,2q_k-1]}\widetilde{y}_k) \geq Q^*\widetilde{z}_k^*(\widetilde{y}_k) - \|\widetilde{b}_k^* - Q^*z_k^*\|\|\widetilde{y}_k\| > \delta - \widetilde{\varepsilon}_k C_0.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία, ότι $2q_1 > 2j$ και έστω $(\frac{1}{m_{2j}^2}, 2j)$ scc $\sum\limits_{i\in F} a_i\widetilde{x}_i$ της $(\widetilde{x}_k)_k$. Θέτουμε $x = m_{2j}\sum\limits_{k\in F} a_k\widetilde{x}_k$ και χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στο Λήμμα 2.73 επιλέγουμε επαγωγικά $\beta_i \in \Delta_{2q_i}$ με βάρος $w(\beta_i) = m_{2j}$ και κατασκευάζουμε στοιχείο $\eta \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ με ανάλυση $\{2p_k, 2q_k - 1, \beta_k, \widetilde{b}_k^*\}_{k=1}^l$ για κατάλληλο φυσικό αριθμό l ώστε το σύνολο $\mathcal{F}_{\beta_i}$ να μην είναι μεγιστικό στοιχείο της οικογένειας $S_{\xi_{2j}}$ για κάθε $i < l$. Είναι άμεσο ότι $w(\eta) = m_{2j}$ και είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι το ζεύγος (x, η) είναι $(16C_0, 2j, \frac{1}{m_{2j}^2}, 0)$ σχεδόν ειδικό ζεύγος (με $x(\eta) = \sum\limits_{k\in F}\widetilde{\varepsilon}_k$). Επίσης, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\widetilde{y}_k(\eta) = e_\eta^*(\overline{P}_{(2p_k,2q_k-1]}\widetilde{y}_k) = \frac{1}{m_{2j}}\widetilde{b}_k^*(\overline{P}_{(2p_k,2q_k-1]}\widetilde{y}_k) > \frac{1}{m_{2j}}(\delta - \widetilde{\varepsilon}_k C_0).$$

Θέτουμε $y = m_{2j}\sum\limits_{k\in F} a_k\widetilde{y}_k$ και παρατηρούμε ότι

$$y(\eta) = m_{2j}\sum_{k\in F} a_k\widetilde{y}_k(\eta) > \delta - \varepsilon_0 C_0 > \frac{\delta}{2}.$$

□

Συνεχίζουμε την απόδειξη για την Πρόταση 2.88.
Έστω $j_0 \in \mathbb{N}$ που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια και επιλέγουμε j_1 ώστε $m_{4j_1-2} > m_{2j_0-1}^2$.

Από Λήμμα 2.89 για $j = 2j_1 - 2$ υπάρχει ένα $(16C_0, 4j_1 - 2, \frac{1}{m_{4j_1-2}^2}, 0)$ σχεδόν ακριβές ζεύγος (z_1, η_1) ώστε $z_1 = m_{4j_1-2}\sum\limits_{k\in F_1} a_k x_k$ όπου $\sum\limits_{k\in F_1} a_k\widetilde{x}_k$ είναι $(\frac{1}{m_{4j_1-2}^2}, 4j_1 - 2)$ scc της $(\widetilde{x}_k)_k$ και $\eta_1 \in \overline{\Gamma}_{2l_1-1} \setminus \overline{\Gamma}_{2k_1}$. Αν $w_1 = m_{4j_1-2}\sum\limits_{k\in F_1} a_k\widetilde{y}_k$ τότε συνεπάγεται ότι

$$\text{ran}w_1 \subset (2k_1, 2l_1 - 1] \text{ και } \quad w_1(\eta_1) > \delta - \sum_{k\in F_1}\widetilde{\varepsilon}_k C_0.$$

Έστω $\gamma_1 \in \Delta_{2l_1}$ της μορφής $\gamma_1 = (m_{2j_0-1}, e_{\eta_1}^*)$. Για $i \geq 2$ και $j_i = \sigma(\gamma_{i-1})$ εφαρμόζοντας επαγωγικά το Λήμμα 2.89 κατασκευάζουμε $(16C_0, 4j_i, \frac{1}{m_{4j_i}^2}, 0)$ σχεδόν ακριβή ζεύγη (z_i, η_i) έτσι ώστε $z_i(\eta_i) = \sum\limits_{k\in F_i} e_k$,

$z_i = m_{4j_i} \sum\limits_{k\in F_i} a_k \widetilde{x}_k$, $\eta_i \in \overline{\Gamma}_{2l_i-1} \setminus \overline{\Gamma}_{2k_i}$,$(F_i)_i$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα, $w_i = m_{4j_i} \sum\limits_{k\in F_i} a_k \widetilde{y}_k$ και ικανοποιούν ότι

$$\mathrm{ran} w_i \subset (2k_1, 2l_1 - 1] \text{ και } \quad w_i(\eta_i) > \delta - \sum_{k\in F_i} \widetilde{\varepsilon}_k C_0$$

Για κατάλληλο n ώστε το σύνολο $\mathcal{F}_{\gamma_i}$ δεν είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{S}_{\xi_{2j_0-1}}$ για κάθε $i \leq n$, προκύπτει ότι η ακολουθία $(z_i)_{i\leq n}$ που κατασκευάστηκε είναι $(16C_0, 2j_0 - 1, \frac{1}{m^2_{2j_0-1}}, 0)$ σχεδόν εξαρτημένη ακολουθία. (Ορισμός 2.72).
Έστω στοιχείο $z = \sum\limits_{i\in F} a_i z_i$ που είναι $(\frac{1}{m^2_{2j_0-1}}, 2j_0 - 1)$ scc της ακολουθίας $(z_i)_{i\leq n}$. Από Παρατήρηση 2.12 προκύπτει ότι

$$\|z\| \leq \frac{(480C_0 + \varepsilon_0)}{m^2_{2j_0-1}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(T \circ Q) z_i = m_{4j_i} \sum_{k\in F_i} a_k (T \circ Q) \widetilde{x}_k = m_{4j_i} \sum_{k\in F_i} a_k Q(\widetilde{y}_k) = Q(m_{4j_i} \sum_{k\in F_i} a_k \widetilde{y}_k) = Q(w_i)$$

όπου $w_i \in \langle (\widetilde{y}_k)_k \rangle$. Συνεπώς,

$$T \circ Q(z) = T \circ Q(\sum_{i\in F} a_i z_i) = \sum_{i\in F} a_i (T \circ Q) z_i = Q(\sum_{i\in F} a_i w_i).$$

Επίσης, $\|w_i\| \leq m_{4j_i} \sum\limits_{k\in F_i} a_i \|y_k\| < m_{4j_i} C_0$.

Για κάθε i, το στοιχείο $e^*_{\eta_i}$ έχει ανάλυση της μορφής $\{2p_k, 2q_k - 1, \beta_k, \widetilde{b}^*_k\}_{k=1}^{\ell_i}$ έτσι ώστε

$$e^*_{\eta_i} = \sum_k \overline{d}^*_{\beta_k} + \frac{1}{m_{4j_i}} \sum_k \widetilde{b}^*_k \circ \overline{P}_{(2p_k, 2q_k-1]}.$$

Θέτουμε $x^*_i = \sum\limits_k \overline{d}^*_{\beta_k} + \frac{1}{m_{4j_i}} \sum\limits_k Q^* z^*_k$ και παρατηρούμε ότι

$$\|e^*_{\eta_i} - x^*_i\| \leq \frac{1}{m_{4j_i}} \sum_{k\in F_i} \|\widetilde{b}^*_k - Q^* z^*_k\| < \frac{1}{m_{4j_i}} \sum_{k\in F_i} \widetilde{\varepsilon}_k.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $z^*_k|_{\overline{X}} = \overline{d}_{\beta^*_k}|_{\overline{X}} = 0$ για κάθε k, εύκολα βλέπουμε ότι το συναρτησιακό x^*_i ανήκει στον $Q^*(\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}})^*$. Επίσης, από Παρατήρηση 2.15(iii) προκύπτει ότι

$$e^*_{\eta_i} = e^*_{\eta_i} \circ \overline{P}_{(2k_i, 2l_i-1]}.$$

Έστω γ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j_0-1}$ και ανάλυση $\{k_i, l_i, e^*_{\eta_i}, \gamma_i\}_{i\in F}$ όπως στον Ορισμό 2.59.
Έστω ακόμη $c^* = \sum\limits_{i\in F} \overline{d}^*_{\gamma_i} + \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum\limits_{i\in F} x^*_i$. Παρατηρούμε ότι $c^* \in Q^*(\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}})^*$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$\|e^*_\gamma - c^*\| < \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_{i\in F} \|x^*_i - e^*_{\eta_i}\| < \frac{\delta}{2}.$$

Επειδή η $(\widetilde{b}_k^* - Q^*\widetilde{z}_k^*)_k$ είναι w^*-μηδενική και η $(\widetilde{y}_k)_k$ είναι ασθενώς μηδενική, μπορούμε να υποθέσουμε, κάνοντας μία πιο προσεκτική επιλογή της $(z_i)_i$ και άρα και της $(w_i)_i$, ότι $\|x_i^* - e_{\eta_i}^*(w_l)\| < \frac{\varepsilon_0}{m_{4j_i}}$ για κάθε $i \neq l$, από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\|(e_\gamma^* - c^*)(w_l)\| < \frac{1}{m_{2j_0-1}}\big(\varepsilon_0 C_0 + \sum_{i\neq l} \frac{\varepsilon_0}{m_{4j_i}} C_0\big) < \frac{2\varepsilon_0 C_0}{m_{2j_0-1}}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} |c^*(\sum_{i\in F} a_i w_i)| &\geq \sum_{i\in F} a_i c^*(w_i) \geq \sum_{i\in F} a_i \left(e_\gamma^*(w_i) - \|(e_\gamma^* - c^*)\,(w_i)\|\right) \\ &\geq \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_{i\in F} a_i(w_i(\eta_i) - 2\varepsilon_0 C_0) \\ &\geq \frac{\delta}{2m_{2j_0-1}}, \end{aligned}$$

όπου στις τελευταίες ανισότητες χρησιμοποιήσαμε ότι $\sum\limits_{k\in F} \widetilde{\varepsilon}_k < \varepsilon_0$ και ότι $\varepsilon_0 < \frac{\delta}{16C_0}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\|T\circ Q(z)\| = \|Q(\sum_{i\in F} a_i w_i)\| \geq \frac{\delta}{2m_{2j_0-1}}(1+\frac{\delta}{2})^{-1}.$$

Όμως $\|T\circ Q(z)\| \leq \|T\|\|Qz\| \leq \|T\|\frac{480C_0+\varepsilon_0}{m_{2j_0-1}^2}$ και άρα επιλέγοντας κατάλληλα τον φυσικό j_0 οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Με παρόμοια επιχειρήματα της απόδειξης στην Πρόταση 2.88 προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.90. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στο πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει X-RIS ακολουθία $(x_n)_n$ στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$ ώστε $\|T\circ Q(x_n)\| \nrightarrow 0$. Τότε υπάρχει αριθμός λ ώστε θέτοντας $S = T - \lambda I$ να ισχύει ότι $\|S\circ Q(x_n)\| \to 0$. Επιπλέον, $\|S\circ Q(y_n)\| \to 0$ για κάθε X-RIS στον $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}$.*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει το ακόλουθο θέωρημα που αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας.

Θεώρημα 2.91. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στο πηλίκο $\mathcal{L}^\infty_{X,hi}/_{\overline{X}}$. τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε ο τελεστής $(T - \lambda I)$ είναι συμπαγής.*

Κεφάλαιο 3

Bourgain-Delbaen $\mathcal{L}^{\infty}$ αθροίσματα χώρων Banach, $(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την εργασία με τίτλο ¨Bourgain-Delbaen $\mathcal{L}^{\infty}$ sums of Banach spaces¨ που έχει υποβληθεί σε δημοσίευση ([46]). Σε αυτή την εργασία αναπτύσσουμε μία μέθοδο κατασκευής ευθέων αθροισμάτων $(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ για ακολουθίες $(X_n)_n$ διαχωρίσιμων χώρων Banach όπου η εξωτερική νόρμα προέρχεται από την Bourgain-Delaben μέθοδο κατασκευής. Επιπλέον, τροποποιούμε κατάλληλα τη μέθοδο χρησιμοποιώντας την Bourgain Delbaen νόρμα που προέρχεται από την κατασκευή των Argyros-Haydon, όπου και συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα ως $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus X_n)_{AH}$, και μελετάμε τις ειδικές περιπτώσεις $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_p)_{AH}$, για $1 \leq p < \infty$.

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται στις ακόλουθες ενότητες. Στην Ενότητα 2, δοσμένης μίας ακολουθίας διαχωρίσιμων χώρων Banach $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ορίζουμε το Bourgain Delbaen (BD) -$\mathcal{L}^{\infty}$-άθροισμα της $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{Z} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus X_n)_{BD}$. Αυτός ο χώρος ορίζεται με βάση μία ακολουθία από ξένα ανά δύο και πεπερασμένα σύνολα $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τα οποία, όπως έχουμε δεί στα προηγούμενα κεφάλαια, συνοδεύουν την Bourgain-Delaben μέθοδο ([23]). Ο $\mathcal{Z}$ έχει μία Schauder διάσπαση $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$και υπάρχει μία σταθερά $C > 0$ ώστε $Z_n \simeq^C (X_n \oplus \ell_\infty(\Delta_n))_\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Στην Ενότητα 3 μελετάμε το συζυγή $\mathcal{Z}^*$ και δείχουμε ότι αν η Schauder διάσπαση $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Z}$ είναι συρρικνούσα τότε ο $\mathcal{Z}^*$ είναι ισόμορφος με τον $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus (X_n^* \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$. Στην Ενότητα 4 περιγράφουμε λεπτομερώς την κατασκευή του $\mathcal{Z} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus X_n)_{AH}$ όπου η εξωτερική Bourgain Delbaen νόρμα προέρχεται από την κατασκευή των Argyros-Haydon στο [10].

Οι ενότητες 5,6 και 7 περιέχουν τμηματικά την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος

Θεώρημα 3.1. *Έστω $(X_n, \|\cdot\|_n)_n$ μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banah και έστω $\mathcal{Z} = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{AH}$. Τα επόμενα ισχύουν:*

1. *Ο χώρος $\mathcal{Z}$ έχει συρρίκων Schauder διάσπαση $(Z_n)_n$.*

2. *Κάθε block (ως προς την $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$) ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παράγει καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο, δηλαδή ο υπόχωρος $\overline{< x_n : \ n \in \mathbb{N} >}$ του Z είναι καθολικά αδιάσπαστος (HI).*

3. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είτε ο ℓ_1 δεν περιέχεται ισομορφικά στον X_n^* ή ο X_n έχει την ιδιότητα Schur. Τότε για κάθε γραμμικό και φραγμένο τελεστή T πάνω στον $\mathcal{Z}$ υπάρχει ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο τελεστής $T - \lambda I$ πάνω στον $\mathcal{Z}$ να είναι οριζόντια συμπαγής, δηλαδή για κάθε φραγμένη block (ως προς την $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ακολουθία $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον Z, $\|(T-\lambda I)z_k\| \to 0$.*

Στην Ενότητα 8 αποδεικνύουμε ότι ο $\mathcal{Z}_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_p)_{AH}$ για $1 \leq p < \infty$ είναι strictly quasi prime και περιέχει ισομορφικά τον ℓ_p ως συμπληρωματικό υπόχωρο. Υπενθυμίζουμε (όπως ορίστηκε για πρώτη φορά στο [10]) ότι ένας χώρος Banach X είναι strictly quasi prime αν υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X με ισόμορφος με τον X ώστε ο X να δέχεται μία μοναδική μη τετριμμένη διάσπαση ως $Y \oplus X$. Στην Ενότητα 9 αποδεικνύουμε το Θεώρημα 0.3 ως βασική εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε.

3.2 Πως ορίζεται το BD-$\mathcal{L}^\infty$-άθροισμα χώρων Banach

Ξεκινάμε εισάγωντας τους πρώτους συμβολισμούς και έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε.

Συμβολισμοί-Έννοιες 3.1. *Έστω $(E_n, \|\cdot\|_{E_n})_{n=1}^\infty$ μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach. Θα μελετήσουμε ευθέα αθροίσματα της μορφής $(\sum_{n\in I} \oplus E_n)_\infty$, όπου I διάστημα του $\mathbb{N}$ ή $I = \mathbb{N}$ και θα συμβολίζουμε τα στοιχεία τους με $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$. Για $\overrightarrow{x} \in (\sum_{n\in I} \oplus E_n)_\infty$ συμβολίζουμε με $\overrightarrow{x}(n)$ την n-οστή συντεταγμένη του $\overrightarrow{x}$ στο E_n και η νόρμα ορίζεται ως $\|\overrightarrow{x}\|_\infty = \sup_{n\in I} \|\overrightarrow{x}(n)\|_{E_n}$. Οι συζυγείς τέτοιων αθροισμάτων είναι της μορφής $(\sum_{n\in I} E_n^*)_1$, τα στοιχεία τους θεωρούνται συναρτήσεις και συμβολίζονται με $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}$, κ.λ.π. Για ένα στοιχείο $\overrightarrow{f}$ ορίζουμε $\|\overrightarrow{f}\|_1 = \sum_{n\in I} \|\overrightarrow{f}(n)\|_{E_n^*}$ και για $\overrightarrow{x} \in (\sum_{k\in I} \oplus E_k)_\infty$ συμβολίζουμε με $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ τη δράση που είναι το εσωτερικό γινόμενο $\sum_{n\in I} \overrightarrow{f}_n(\overrightarrow{x}_n)$, όπου $\overrightarrow{f}_n = \overrightarrow{f}(n)$ και $\overrightarrow{x}_n = \overrightarrow{x}(n)$.*

Για I πεπερασμένο διάστημα του $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε με R_I τους τελεστές περιορισμού $R_I : (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_\infty \to (\sum_{n\in I} \oplus E_n)_\infty$ που ορίζονται ως $R_I(\overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{z}(n))_{n\in I}$. Με R_I^* συμβολίζουμε τους τελεστές περιορισμού πάνω σε συζυγή αθροίσματα, δηλαδή $R_I^* : (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n^*)_1 \to (\sum_{n\in I} \oplus E_n^*)_1$

Για I, J διαστήματα του $\mathbb{N}$ λέμε ότι τα I, J είναι successive και γράφουμε $I < J$ αν $\max I \leq \min J$. Έστω $I_1 < I_2 < I_3$ ώστε $\max I_i + 1 = \min I_{i+1}$ για κάθε $i = 1, 2$. Για διανύσματα $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3$ ώστε $\overrightarrow{x}_i \in (\sum_{k\in I_i} \oplus E_n)_\infty$ συμβολίζουμε με $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ το διάνυσμα $\overrightarrow{y} \in (\sum_{n=\min I_1}^{\max I_3} \oplus E_n)_\infty$ που ορίζεται ως $\overrightarrow{y}(n) = \overrightarrow{x_i}(n)$ αν $n \in I_i$. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται τα διανύσματα της μορφής $(\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3)$ στον $(\sum_n \oplus E_n^*)_1$ όπου $\overrightarrow{f}_i \in (\sum_{k\in I_i} \oplus E_n^*)_1$.

Ακολουθεί ο ορισμό της νέας κλάσης χώρων Banach που θα μελετήσουμε.

Ορισμός 3.2. Έστω $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach. Ένα χώρος Banach $\mathcal{Z}$ ονομάζεται Bourgain Delbaen(BD)-$\mathcal{L}^\infty$-άθροισμα της ακολουθίας $(X_n, \|\cdot\|_n)_n$, και συμβολίζεται ως $\mathcal{Z} = (\sum_{n=1}^\infty \oplus X_n)_{BD}$, αν υπάρχει μία ακολουθία $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ξένα ανά δύο σύνολα του $\mathbb{N}$ ώστε να ισχύουν τα σκόλουθα:

1. Ο χώρος $\mathcal{Z}$ είναι ισόμορφος με υπόχωρο του $(\sum_{n=1}^\infty \oplus (X_n \oplus \ell_\infty(\Delta_n))_\infty)_\infty$.

2. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ και για κάθε n, υπάρχουν γραμμικοί τελεστές

$$i_n : \sum_{k=1}^n \oplus (X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k)) \to (\sum_{n=1}^\infty \oplus (X_n \oplus \ell_\infty(\Delta_n))_\infty)_\infty$$

έτσι ώστε

(α') $\|i_n\| \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β') Για $\overrightarrow{x} \in \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ έχουμε ότι $R_{[1,n]}(i_n(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{x}$, $R_{(n,\infty)}(i_n(\overrightarrow{x})) \in \sum_{k=n+1}^\infty \oplus \ell_\infty(\Delta_k)$ ενώ για κάθε $l \geq n+1$ ισχύει ότι $i_l(R_{[1,l]} i_n(\overrightarrow{x})) = i_n(\overrightarrow{x})$.

3. Θέτοντας $Y_n = i_n[\sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k))]$, η ένωση $\cup_n Y_n$ είναι πυκνή στον $\mathcal{Z}$.

Για I διάστημα του $\mathbb{N}$, θα γράφουμε $\sum_{k\in I} \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ αντί για $(\sum_{k\in I} \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))_\infty)_\infty$.

3.2.1 Η γενικη κατασκευη

Σε αυτό το σημείο θα υπενθυμίσουμε τα βασικά συστατικά της μεθόδου κατασκευής που θα ακολουθήσουμε τα οποία προέρχονται από την κλασσική Bourgain-Delbaen(BD) μέθοδο κατασκευής [23].

Έστω $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach και έστω ακόμη $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από ξένα ανά δύο και πεπερασμένα διαστήματα του $\mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με Γ την ένωση $\Gamma = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n$ και χρησιμοποιούμε γράμματ όπως γ, ξ, η για να συμβολίσουμε τα στοιχεία του συνόλου Γ. Για κάθε $\gamma \in \Delta_n$ ορίζουμε ένα γραμμικό συναρτησιακό $c_\gamma^* : \sum_{k=1}^{n-1}(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)) \to \mathbb{R}$ και για $n < m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε με επαγωγή έναν γραμμικό τελεστή

$$i_{n,m} : \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)) \to \sum_{k=1}^m \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$$

ως εξής : Για $m = n+1$ και $\overrightarrow{x} \in \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k))$

$$i_{n,n+1}(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}_{n+1})$$

όπου $\overrightarrow{x}_{n+1} = (0_{X_{n+1}}, (c_\gamma^*(\overrightarrow{x}))_{\gamma\in\Delta_{n+1}}) \in X_{n+1} \oplus \ell_\infty(\Delta_{n+1})$.

Υποθέτοντας ότι οι τελεστές $i_{n,m}$ έχουν οριστεί, θέτουμε $i_{n,m+1} = i_{m,m+1} \circ i_{n,m}$. Είναι άμεσο ότι για κάθε $n < l < m$ ισχύει ότι $i_{n,m} = i_{l,m} \circ i_{n,l}$.

Παρατήρηση 3.1. ***Το αξίωμα ομοιομόρφου φράγματος των*** $(i_{n,m})_{n\leq m}$. *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σταθερά* $C > 0$ *ώστε* $\|i_{n,m}\| \leq C$ *για κάθε* $n \leq m$. *Ορίζουμε* $i_n : \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k)) \to \ell_\infty[(X_n, \ell_\infty(\Delta_n))]$ *ως το όριο*

$$i_n = \varinjlim_{m\to\infty} i_{n,m}.$$

Συνεπάγεται ότι οι τελεστές i_n *είναι φραγμένοι από τη σταθερά* C *και επειδή* $\|i_n(\overrightarrow{x})\|_\infty \geq \|\overrightarrow{x}\|_\infty$ *οι τελεστές* i_n *είναι ισομορφικές εμφυτεύσεις.*

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = i_n[\sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))]$ *και* $\mathcal{Z} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n}$. *Είναι άμεσο ότι* $Y_n \subset Y_{n+1}$, *κάθε* Y_n *είναι* C*-ισόμορφος με το ευθύ άθροισμα* $\sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ *και με βάση τον Ορισμό 3.2 συμπεραίνουμε ότι* $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{BD}$. *Θεωρώντας τον* $\mathcal{Z}$ *ως κλειστό υπόχωρο του* $(\sum_{n=1}^\infty \oplus(X_n \oplus \ell_\infty(\Delta_n))_\infty)_\infty$, *περιορίζουμε τους τελεστές* $R_{[1,n]} : \mathcal{Z} \to \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k))$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και την εικόνα των* i_n *πάνω στον* $\mathcal{Z}$, $i_n : \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k)) \to \mathcal{Z}$. *Επίσης, επεκτείνουμε κάθε συναρτησιακό* $c_\gamma^* : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ *για κάθε* $\gamma \in \Delta_n$ *με τον κανόνα* $c_\gamma^*(z) = c_\gamma^*(R_{[1,n]} z)$.

Από τον ορισμό των i_n συνεπάγεται ότι για $x = i_n(\overrightarrow{u}) \in Y_n$,

$$\|x\| = \max\{\|\overrightarrow{u}\|_\infty, \sup_{\gamma\in\Gamma} |c_\gamma^*(x)|\}.$$

Για κάθε n, ορίζουμε προβολές $P_{[1,n]} : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ ως $P_{[1,n]} = i_n \circ R_{[1,n]}|_{\mathcal{Z}}$ όπου $ImP_{[1,n]} = Y_n$. Ακολουθεί μία εύκολη παρατήρηση.

Λήμμα 3.3. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in Y_n$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m < n$ ισχύει ότι $P_{[1,m]}x = 0$. Τότε υπάρχει $\overrightarrow{u} \in \sum_{k=m+1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ ώστε $x = i_n(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{u})$.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι $x = P_{[1,n]}(x) = i_n(\overrightarrow{y})$ όπου $\overrightarrow{y} = R_{[1,n]}(x) \in \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$. Επειδή $P_{[1,m]}x = 0_{\mathcal{Z}} = i_m(R_{[1,m]}x)$ έχουμε ότι $R_{[1,m]}x = \overrightarrow{0}_{1,m}$ και άρα $\overrightarrow{y} = (\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{u})$ όπου $\overrightarrow{u} = R_{[m+1,n]}(x) \in \sum_{k=m+1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$. □

3.2.2 Η Schauder διασπαση του χωρου $\mathcal{Z}$

Για $n \le m$ ορίζουμε $P_{(n,m]} = i_m R_{[1,m]}|_{\mathcal{Z}} - i_n R_{[1,n]}|_{\mathcal{Z}}$. Επειδή οι i_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι (ιδιότητα *b*) προκύπτει ότι $\|P_I\| < 2C$ για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{N}$. Επίσης από ιδιότητα (*d*) του ορισμού 3.2 για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι $P_{[1,n]} \circ P_{[1,m]} = P_{[1,\min\{m,n\}]}$. Επειδή $\mathcal{Z} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} P_{[1,n]}[\mathcal{Z}]}$, θέτωντας $Z_1 = P_{[1,1]}$ και $Z_n = P_{\{n\}}[\mathcal{Z}]$, όπου $P_{\{n\}} = P_{[1,n]} - P_{[1,n-1]}$ για $n > 1$, εύκολα προκύπτει ότι η $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία Schauder διάσπαση του χώρου $\mathcal{Z}$.

Σημειώνουμε ότι για κάθε $k \le m$ ένα στοιχείο x ανήκει στον $\sum_{n=k}^m \oplus Z_n$ αν και μόνο αν $x \in Y_m$ και $P_{[1,k]}x = 0$. Τέλος αναφέρουμε ότι από Λήμμα 3.3

$$Z_n = \{(z = i_n(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{u}) : \quad \overrightarrow{u} \in X_n \oplus \ell_\infty(\Delta_n)\}.$$

Έστω $P_{[1,n]}^* : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{Z}^*$ οι συζυγείς προβολές. Ορίζουμε $\mathcal{Z}_{[1,n]}^* = ImP_{[1,n]}^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάνουμε τις ακόλουθες πρώτες παρατηρήσεις.

Λήμμα 3.4. *Για κάθε n, οι περιορισμοί των τελεστών $i_n^* : \mathcal{Z}_{[1,n]}^* \to (\sum_{k=1}^n (X_k^* \oplus \ell_1(\Delta_k))_1)_1$ είναι ισομορφικές εμφυτεύσεις και ικανοποιούν ότι $\|z^*\| \le \|i_n^*(z^*)\|_1 \le C\|z^*\|$ για κάθε $z^* \in Z_{[1,n]}^*$.*

Απόδειξη. Επειδή $\|i_n^*\| = \|i_n\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα. Επομένως, μένει να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{Z}_{[1,n]}^*$ με $\|f\| = 1$ ισχύει ότι $\|i_n^*(f)\| \ge 1 - \varepsilon$ για καθε $\varepsilon > 0$. Έστω $z^* \in \mathcal{Z}_{[1,n]}^*$ με $\|z^*\| = 1$ και $\varepsilon > 0$. Έστω ακόμη $z \in \mathcal{Z}$ με $\|z\| = 1$ και $|z^*(z)| \ge 1 - \varepsilon$. Από την υπόθεση $z^* = P_{[1,n]}^* u^*$ για κάποιο $u^* \in \mathcal{Z}^*$ και έστω $\overrightarrow{x} = R_{[1,n]}(z)$. Παρατηρούμε ότι

$$u^*(i_n \overrightarrow{x}) = u^*(i_n R_{[1,n]} z) = u^* P_{[1,n]} z = P_{[1,n]}^* u^*(z) = z^*(z) \ge 1 - \varepsilon$$

και επίσης $\|i_n^*(z^*)\|_1 \ge |i_n^* z^*(\overrightarrow{x})| = |z^*(i_n \overrightarrow{x})| = |u^* P_{[1,n]} i_n \overrightarrow{x}| = |u^*(i_n \overrightarrow{x})| \ge 1 - \varepsilon$. Επειδή οι τελεστές i_n είναι ισομορφικές εμφυτεύσεις προκύπτει ότι οι τελεστές $i_n^*|_{Z_{[1,n]}^*}$ είναι επί και συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο. □

Το επόμενο Λήμμα αποδεικνύει ότι για κάθε $l \ge n$ ο τελεστής $i_l^* : \mathcal{Z}^* \to (\sum_{k=1}^l (X_k^* \oplus \ell_1(\Delta_k))_1)_1$ επεκτείνει φυσιολογικά τον $i_n^*|_{\mathcal{Z}_{[1,n]}^*} : \mathcal{Z}_{[1,n]}^* \to (\sum_{k=1}^n (X_k^* \oplus \ell_1(\Delta_k))_1)_1$.

Λήμμα 3.5. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f \in Z^*_{[1,n]}$. Τότε για κάθε $l \geq n$ ισχύει ότι $i^*_l(f) = (i^*_n(f), \overrightarrow{0}_{n+1,l})$.*

Απόδειξη. Έστω $g \in \mathcal{Z}^*$ ώστε $f = P^*_{[1,n]}g$. Για $\overrightarrow{x} \in \sum_{k=1}^n \oplus X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)$ έχουμε ότι $i^*_l f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{0}_{n+1,l}) = f(i_l(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{0}_{n+1,l})) = P^*_{[1,n]}g(i_l(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{0}_{n+1,l})) = g(i_n\overrightarrow{x}) = g(P_{[1,n]}i_n\overrightarrow{x}) = i^*_n f(\overrightarrow{x})$. Επίσης, για στοιχείο $\overrightarrow{x} \in \sum_{k=n+1}^l \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} i^*_l f(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{x}) &= f(i_l(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{x})) = (P^*_{[1,n]}g)(i_l(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{0}_{n+1,l})) \\ &= g(i_n(\overrightarrow{0}_{1,n})) = 0. \end{aligned}$$

□

3.3 Ο συζυγής του $(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$

Πριν προχωρήσουμε στη κεντρική κατασκευή θα ερευνήσουμε τι μπορεί να είναι ο συζυγής των χώρων της μορφής $(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$. Πρώτα σταθεροποιούμε μία οικογένεια $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαχωρίσιμων χώρων Banach και θέτουμε $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ τον χώρο που ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια γνωρίζουμε αρκετά καλά τον συζυγή του $\mathcal{Z}$ στην περίπτωση που η Schauder διάσπαση είναι συρρικνούσα.

Για τα επόμενα, θα χρειαστεί να ορίσουμε τον ακόλουθο τελεστή

$$\Phi : \overline{\cup_{n=1}^\infty Z^*_{[1,n]}} \to (\sum_{n=1}^\infty \oplus(X^*_n \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$$

ως εξής:

Για $f \in \mathcal{Z}^*$, ορίζουμε $\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} i^*_n P^*_{[1,n]}(f)$. Από Λήμμα 3.5 και Λήμμα 3.4 προκύπτει ότι ο Φ είναι καλά ορισμένος και μπορεί να επεκταθεί σε ισομορφισμό επί $\Phi : \overline{\cup_{n=1}^\infty Z^*_{[1,n]}} \to (\sum_{n=1}^\infty \oplus(X^*_n \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$.

Πρόταση 3.6. *Αν υποθέσουμε ότι η διάσπαση $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Z}$ είναι συρρικνούσα, ο συζυγής $\mathcal{Z}^*$ είναι ισόμορφος με $(\sum_{n=1}^\infty \oplus(X^*_n \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν η διάσπαση είναι συρρικνούσα τότε εξ' ορισμού $\mathcal{Z}^* = \overline{\cup_{n=1}^\infty \mathcal{Z}^*_{[1,n]}}$ και άρα ο ισομορφισμός $\Phi : \mathcal{Z}^* \to (\sum_{n=1}^\infty \oplus(X^*_n \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$ που ορίζεται παραπάνω ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν αφορούν χώρους $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ με συρρικνούσα Schauder διάσπαση και θα αποδειχθούν χρήσιμα σε επόμενες ενότητες όπου και θα μελετήσουμε τους τελεστές πάνω στον $\mathcal{Z}$. Υπενθυμίζουμε ότι για I διάστημα του $\mathbb{N}$, με R^*_I συμβολίζουμε τον (φυσιολογικό) τελεστή περιορισμού $R^*_I : (\sum_{n=1}^\infty \oplus(X^*_n \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1 \to (\sum_{n\in I} \oplus(X^*_n \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$.

Λήμμα 3.7. *Έστω $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{Z}^*$ και $m < n$. Έστω ακόμη $x \in Y_n$ ώστε $\|x\| \leq 1$, $P_{[1,m]}(x) = 0$ και $|f(x)| \geq \varepsilon$. Τότε υπάρχουν $l \geq n$ και $\overrightarrow{z} \in \sum_{k=m+1}^l \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ ώστε $\|\overrightarrow{z}\|_\infty \leq 1$ και $|\Phi f(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{0}_{l+1})| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Ειδικότερα, $\|R^*_{[m+1,l]}(\Phi f)\|_1 \geq \frac{\varepsilon}{2}$*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ ώστε $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Έτσω ακόμη $l \geq n$ και $g \in Z^*_{[1,l]}$ ώστε $\|f - g\| \leq \delta$. Από Λήμμα 3.3 έχουμε ότι $x = i_l(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{z})$ με $\overrightarrow{z} \in (\sum_{k=m+1}^{l} \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$. Προκύπτει ότι $\|\overrightarrow{z}\|_\infty \leq \|x\| \leq 1$ ενώ από Λήμμα 3.5 συμπεραίνουμε ότι

$$|\Phi g(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{0}_{l+1})| = |(i_l^* g)(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{z})| = |g(x)| \geq |f(x)| - \|f - g\| \geq \varepsilon - \delta.$$

Επομενως, $|\Phi f(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{0}_{l+1})| \geq |\Phi g(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{0}_{l+1})| - \|\Phi\| \|f - g\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. □

Πόρισμα 3.8. *Έστω $\varepsilon > 0$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$ και $f_k \in \mathcal{Z}^*$ ώστε $|f_k(x_k)| \geq \varepsilon$. Τότε υπάρχουν successive διαστήματα I_k του $\mathbb{N}$ ώστε $\|R^*_{I_k}(\Phi f_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.*

Απόδειξη. Επειδή η $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι block μπορούμε να βρούμε $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots$ ώστε $x_k \in Y_{n_k}$ και $P_{[1,m_k]} x_k = 0$. Από Λήμμα 3.7 για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $l_k \geq n_k$ ώστε θέτοντας $I_n = (m_k, l_n]$ έχουμε ότι

$$\|R^*_{I_k}(\Phi f_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να έχουμε ότι η $(I_k)_k$ είναι ακολουθία από sucessive διαστήματα και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνεται μία γενική ιδιότητα που αφορά ευθέα αθροίσματα της μορφής $(\sum \oplus W_n)_1$ (με εξωτερική ℓ_1 νόρμα) και θα εφαρμοστεί στα ευθέα αθροίσματα $(\sum_{k\in\mathbb{N}} \oplus (X_k^* \oplus \ell^1(\Delta_n))_1)_1$ αργότερα.

Πρόταση 3.9. *Έστω $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία χώρων Banach και $W = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus W_n)_1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ακολουθία $(\overrightarrow{w_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$ και μία ακολουθία $(I_k)_{n\in\mathbb{N}}$ από successive διαστήματα του $\mathbb{N}$ ώστε $\|\overrightarrow{w_k}|_{\sum_{n\in I_k} W_n}\| \geq \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε η $(\overrightarrow{w_k})_{n\in\mathbb{N}}$ δε μπορει να είναι ασθενώς μηδενική.*

Απόδειξη. Έστω με εις άτοπο απαγωγή ότι η $(\overrightarrow{w_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική. Μορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, περνώντας σε υπακολουθία, ότι $\overrightarrow{w_k} \in (\sum_{n=1}^{\max I_k} W_n)_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $k_1 = 1$ και επιλέγουμε $\overrightarrow{f_1} \in (\sum_{n\in I_1} \oplus W_n^*)_\infty$ ώστε $\|\overrightarrow{f_1}\|_\infty \leq 1$ και $\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{w_1}) \geq \varepsilon$. Επειδή η $(\overrightarrow{w_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική υπάρχει $N_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $\min N_1 = k_2 > k_1$ και $\sum_{k\in N_1} |\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{w_k})| < \frac{\varepsilon}{2^2}$. Επιλέγουμε $\overrightarrow{f_2} \in (\sum_{n\in I_{k_2}} \oplus W_n^*)_1$ ώστε $\|f_2\|_\infty \leq 1$ και $\overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{w_{k_2}}) \geq \varepsilon$. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο επαγωγικα βρίσκουμε $1 = k_1 < k_2 < \ldots$ και στοιχεία $(\overrightarrow{f_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ώστε $\overrightarrow{f_j} \in (\sum_{n\in I_{k_j}} \oplus W_n^*)_\infty$, $\|\overrightarrow{f_j}\|_\infty \leq 1$, $\overrightarrow{f_j}(\overrightarrow{w_{k_j}}) > \varepsilon$ και $\sum_{i=j+1}^{\infty} \overrightarrow{f_j}(\overrightarrow{w_{k_i}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Θέτουμε $\overrightarrow{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \overrightarrow{f_j}$. Παρατηρούμε ότι $\|f\|_\infty \leq 1$ και επειδή $\overrightarrow{w_{k_j}} \in (\sum_{n=1}^{\max I_{k_j}} W_n)_1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w_{k_j}}) &= \sum_{i=1}^{j} \overrightarrow{f_i}(\overrightarrow{w_{k_j}}) \geq \overrightarrow{f_j}(\overrightarrow{w_{k_j}}) - \sum_{i\neq j} |\overrightarrow{f_i}(\overrightarrow{w_{k_j}})| \\
&\geq \varepsilon - \sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \geq \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η $(\overrightarrow{w_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική. □

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά χώρους $(\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ όπου οι διαχωρίσιμοι χώροι X_n ικανοποιούν επιπλέον ιδιότητες.

Πρόταση 3.10. *Έστω $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{BD}$ με συρρικνούσα Schauder διάσπαση ώστε είτε ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον X_n^* για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ο X_n έχει την ιδιότητα Schur για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμη $T : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Τότε για κάθε $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπακολουθία $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ώστε $\|P_{[1,q]}T(z_j)\| \to 0$.*

Απόδειξη. Θα ασχοληθούμε πρώτα με την περίπτωση που ο X_n έχει την ιδιότητα Shur για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$. Επειδή η $(Tz_k)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική, για κάθε $q \in \mathbb{N}$ η $(P_{[1,q]}Tz_k)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης ασθενώς μηδενική. Για κάθε $1 \leq i \leq q$ χρησιμοποιώντας το γνωστό sliding hump επιχείρημα και την ιδιότητα Schur των X_i συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_j)_j$ ώστε $\|P_{\{i\}}Tx_j\| \to 0$ και άρα έπαιτε το ζητούμενο.

Στην περίπτωση που ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται στον X_n^* για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υποθέτουμε με εις άτοπο ότι υπάρχει $q \in \mathbb{N}$ και $\delta > 0$ ώστε $\|P_{[1,q]}T(z_k)\| \geq \delta$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από Hahn-Banach μπορούμε να βρούμε $w_k^* \in \mathcal{Z}^*$ ώστε $|w_k^*(P_{[1,q]}T(z_k))| \geq \delta$. Παρατηρούμε ότι $T^* \circ P_{[1,q]}^* : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{Z}^*$ και θέτοντας $z_k^* = T^* \circ P_{[1,q]}^*(w_k^*)$ είναι άμεσο ότι $|z_k^*(z_k)| \geq \delta$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει υπακολουθία $(z_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1.

Πράγματι, αν όχι από ένα γνωστό αποτέλεσμα του Rosenthal ([40], Θεώρημα $2.e.5$) μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία, ότι η $(z_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς Cauchy. Επειδή η $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε $k_1 < k_2 < \ldots$ ώστε θέτοντας $\tilde{z}_i^* = z_{k_{2i}}^* - z_{k_{2i-1}}^*$ να ισχύει ότι $|\tilde{z}_i^*(z_{k_{2i-1}})| \geq \frac{\delta}{2}$. Παρατηρούμε ότι η $(\tilde{z}_i^*)_i$ είναι ασθενώς μηδενική και από Πόρισμα 3.8 υπάρχει ακολουθία $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από successive διαστήματα του $\mathbb{N}$ ώστε $\|R_{I_i}^*(\Phi(\tilde{z}_i^*))\|_1 \geq \frac{\delta}{4}$. Από Πρόταση 3.9 έχουμε ότι η $\Phi(\tilde{z}_i^*)_i$ δε μπορεί να είναι ασθενώς μηδενική και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι η $(P_{[1,q]}^*(w_{n_k}^*))_k$ είναι ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1 και άρα ο ℓ_1 εμφυτεύεται στον $Z_{[1,q]}^*$. Επειδή ο $Z_{[1,q]}^*$ είναι ισόμορφος με τον $(\sum_{n=1}^q (X_n^* \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in [1,q]$ ώστε ο ℓ_1 να εμφυτεύεται στον $X_{n_0}^*$, άτοπο. $\square$

3.4 Η περιγραφή των Bourgain-Delbaen συνόλων

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε τη λεπτομερή περιγραφή των BD συνόλων Δ_n καθώς και των συναρτησιακών $c_\gamma^* : \sum_{k=1}^{n-1} \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)) \to \mathbb{R}$, για $\gamma \in \Delta_n$. Για αυτό το σκοπό θα σταθεροποιήσουμε μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach $(X_n, \|\cdot\|_n)$ και δύο φυσικούς αριθμούς a, b ώστε $0 < a \leq 1$ και $0 < b < \frac{1}{2}$. Τα σύνολα Δ_n ορίζονται με επαγωγή και ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε σύνολο Δ_n είναι πεπερασμένο και γράφεται ως ένωση δύο ξένων ανά δύο συνόλων

$$\Delta_n = \Delta_n^0 \cup \Delta_n^1.$$

(ii) Κάθε στοιχείο γ του Δ_n^0 αναπαρίσταται ως $\gamma = (n, a, f, p, 0)$ για κάποιο $p \leq n$ και ένα f συναρτησιακό που προέρχεται από ένα αρχικά επιλεγμένο και πεπερασμένο υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας $B_{X_p^*}$, ενώ κάθε στοιχείο $\gamma \in \Delta_n^1$, αναπαρίσταται ως $\gamma = (n, b, \eta, p, \xi)$ για κάποιο $\eta \in \Delta_p^1$, $p < n-1$ και $\xi \in \Delta_k$ με $p \leq k \leq n-1$.

Για $\gamma \in \Delta_n$ συμβολίζουμε με e^*_γ το μοναδιαίο διάνυσμα της συνήθης βάσης του $\ell_1(\Delta_n)$. Ταυτίζουμε τον X^*_n με τον $(X^*_n \oplus \{0\})_1$ και τον $\ell_1(\Delta_n)$ με τον $(\{0\} \oplus \ell_1(\Delta_n))_1$ με τις ισομετρίες $X^*_n \ni x^* \mapsto \overrightarrow{x}^* = (x^*, 0)$ και αντίστοιχα $e^*_\gamma \mapsto \overrightarrow{e_\gamma}^* = (0, e^*_\gamma)$. Είναι άμεσο ότι $\|x^*\|_{X^*_n} = \|\overrightarrow{x}^*\|_1$ και $\|\overrightarrow{e_\gamma}^*\|_1 = \|e^*_\gamma\|_1$.

Για $m \leq n$, $\overrightarrow{f} \in (X^*_m \oplus \ell_1(\Delta_m))$ και $\overrightarrow{y} \in \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ συμβολίζουμε με $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})$ τη φυσιολογική δράση $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}(m))$.

Έστω $\overrightarrow{x} \in \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $k \leq n$ τα σύνολα Δ_k έχουν οριστεί καθως επίσης και οι τελεστές $(i_{m,l})_{m\leq l\leq n}$. Για $\gamma = (n+1, x^*, p, 0) \in \Delta^0_{n+1}$ ορίζουμε

$$c^*_\gamma(\overrightarrow{x}) = a\overrightarrow{x}^*(\overrightarrow{x}),$$

ενώ για $\gamma = (n+1, b, \eta, p, \xi) \in \Delta^1_{n+1}$ ορίζουμε

$$c^*_\gamma(\overrightarrow{x}) = a\overrightarrow{e_\eta}^*(\overrightarrow{x}) + b\overrightarrow{e_\xi}^*(\overrightarrow{x} - (i_{p,n-1}R_{[1,p]}\overrightarrow{x})).$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω κάθε στοιχείο $\gamma \in \Delta_n$ έχει τη μορφή είτε $\gamma = (n, a, f, p, 0)$ ή $\gamma = (n, b, \eta, p, \xi)$. Όπως είδαμε και σε προηγούμενα κεφάλαια κάθε συντεταγμένη αντιπροσωπεύει ένα διαφορετικό χαρακτηριστικό που ορίζει μοναδικά το γ. Υπενθυμίζουμε ότι η πρώτη συντεταγμένη είναι η τάξη του γ, δηλαδή $\mathrm{rank}(\gamma) = n$ ανν $\gamma \in \Delta_n$ ενώ η δεύτερη είναι το βάρος του γ, $w(\gamma) = a$ ή b.

3.4.1 Argyros Haydon BD-σύνολα

Σε αυτή το σημείο θα τροποποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία και θα παρουσιάσουμε την γενικευμένη παραλλαγή "Bourgain Delbaen" συνόλων που παρουσιάστηκε από τους Σ. Αργυρός και R. Haydon στο [10]. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε σταθεροποιήσει μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Επιλέγουμε δύο αυστηρά αύξουσες ακολουθίες $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $n_j \geq m_j^2$ που ικανοποιούν τις Υποθέσεις 2.3 του [10].

Για κάθε $I = [m, n]$ πεπερασμένο διάστημα του $\mathbb{N}$ ταυτίζουμε τον χώρο $(\sum_{k\in I} \oplus X^*_k)_1$ με τον χώρο $(\sum_{k\in I} \oplus(X^*_k \oplus \{0\})_1)_1$ μέσω της ισομετρίας

$$\overrightarrow{f} = (x^*_m, \ldots, x^*_n) \mapsto \overrightarrow{f} = (\overrightarrow{x}^*_m, \ldots, \overrightarrow{x}^*_n)$$

Παρόμοια ταυτίζουμε τους $(\sum_{k\in I} \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$, $(\sum_{k\in I} \oplus(\{0\} \oplus \ell_1(\Delta_k))_1)_1$, δηλαδή για $\overrightarrow{b}^* = (b^*_m, \ldots, b^*_n)$ ώστε $b^*_k = \sum_{\gamma\in\Delta_k} a_\gamma e^*_\gamma$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{b}^* = (\overrightarrow{b}^*_m, \ldots, \overrightarrow{b}^*_n)$ όπου $\overrightarrow{b^*_k} = \sum_{\gamma\in\Delta_k} a_\gamma \overrightarrow{e^*_\gamma}$ είναι στην ουσία το ίδιο στοιχείο.

Επιλέγουμε F_n 1-norming αριθμήσιμο και συμμετρικό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του X^*_n (αυτό είναι δυνατό καθώς ο X_n είναι διαχωρίσιμος). Συμβολίζουμε με F^m_n τα πρώτα m-στοιχεία του F_n και για κάθε $p < n$ ορίζουμε ένα υποσύνολο $K_{n,p}$ του $(\sum_{k=p+1}^n \oplus X^*_k)_1$ ως εξής

$$K_{n,p} = \{\overrightarrow{f} = (x^*_{p+1}, \ldots, x^*_n) : \ x^*_k \in F^n_k \cup \{0\}, \ \sum_k \|x^*_k\|_{X^*_k} \leq 1\}.$$

Όπως στο [10] (Ενότητα 4) επιέγουμε μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, θέτουμε $G_n = \{q \in \mathbb{Q} : \ q = \frac{k}{l} \ \ l\text{διιδες } N_n!\}$ και ορίζουμε ένα υοσύνολο $B_{n,p}$ του $(\sum_{k=p+1}^n \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$ ως εξής

$$B_{n,p} = \{\overrightarrow{b^*} = (b^*_{p+1}, \ldots, b^*_n) : \ \ b^*_k = \sum_{\gamma\in\Delta_k} a_\gamma e^*_\gamma, \ a_\gamma \in G_n \sum_{\gamma\in\Gamma_n\setminus\Gamma_p} |a_\gamma| \leq 1\}$$

Ό επαγωγικός ορισμός των Δ_n περιλαμβάνει σε κάθε βήμα και τον ορισμό μίας απεικόνισης $\sigma : \Delta_n \to \mathbb{N}$ ώστε $\min\{\sigma(\gamma) : \gamma \in \Delta_n\} \geq \max\{\sigma(\gamma) : \gamma \in \Delta_{n-1}\}$. Επειδή τα Δ_n είναι πεπερασμένα αυτό είναι εφικτό και συνεπάγεται ότι $\sigma(\gamma) > n$ για κάθε $\gamma \in \Delta_n$.

Έστω $\Delta_1^0 = \emptyset$, $\Delta_1 = \Delta_1^1 = \{1\}$ και $\sigma(1) = 2$. Υποθέτοντας ότι τα σύνολα Δ_k και η $\sigma : \Delta_k \to \mathbb{R}$ έχουν οριστεί για κάθε $k \leq n$, ορίζουμε $\Delta_{n+1} = \Delta_{n+1}^0 \cup \Delta_{n+1}^1$ έτσι ώστε

$$\Delta_{n+1}^0 = \{(n+1, p, \overrightarrow{f}, 0) : \ \overrightarrow{f} \in K_{n,p}\}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1}^1 = &\Big\{(n+1, m_{2j}, p, \overrightarrow{b^*}) : \ \ 2j \leq n+1, \ \ p < n \ \ , \overrightarrow{b^*} \in B_{n,p}\Big\} \\ &\cup \Big\{(n+1, \eta, m_{2j}, p, , \overrightarrow{b^*}) : \ 2j \leq n+1, \ \ p < n, \ \eta \in \Delta_p^1, \ w(\eta) = m_{2j}, \\ &\qquad\qquad , \overrightarrow{b^*} \in B_{n,p}\Big\} \\ &\cup \Big\{(n+1, m_{2j-1}, \overrightarrow{e_\eta^*}) : \ \ 2j \leq n+2, \ \ \eta \in \Delta_k, \ \ k \leq n, \\ &\qquad\qquad w(\eta) = m_{4i-2} > m_{2j-1}^2\Big\} \\ &\cup \Big\{(n+1, \eta, m_{2j-1}, p, \overrightarrow{e_\xi^*}) : \ \ 2j \leq n+2, \ \ \eta \in \Delta_p^1, \ \ w(\eta) = m_{2j-1}, \ , \\ &\qquad\qquad \xi \in \Delta_k, \ p < k \leq n, \ \ w(\xi) = m_{4\sigma(\eta)}\Big\}.\end{aligned}$$

Ορίζουμε $\sigma : \Delta_{n+1} \to \mathbb{N}$ ώστε $\min\{\sigma(\gamma) : \gamma \in \Delta_{n+1}\} \geq \max\{\sigma(\gamma) : \gamma \in \Delta_n\}$. Τα συναρτησιακά c_γ^* για $\gamma \in \Delta_n$ ορίζονται ακριβως όπως στην προηγούμενη ενότητα πέρνωντας περιπτώσεις στις παραμέτρους a, b. Ειδικότερα, το a ισούται πάντα με 1 και άρα $w(\gamma) = 1$ για κάθε $\gamma \in \Delta_n^0$, $n \in \mathbb{N}$, ενώ $b = m_j$ οποτεδήποτε $\gamma \in \Delta_n^1$ και $w(\gamma) = m_j$.

Παρατήρηση 3.2. *1. Σημειώνουμε ότι για κάθε $p \leq n$ και $\overrightarrow{f} \in K_{p,n}$ έχουμε ότι $\|\overrightarrow{f}\|_1 \leq 1$. Πράγματι, έστω $\overrightarrow{f} = (x_{p+1}^*, \ldots, x_n^*)$ ώστε $x_k^* \in F_k^m \cup \{0_{X_k^*}\}$ και $\sum_k \|x_k^*\|_{X_k^*} \leq 1$. Παρατηρούμε ότι $\|\overrightarrow{x_k^*}\|_1 = \|x_k^*\|_{X_k^*}$ και επειδή $\|\overrightarrow{f}\|_1 = \sum_k \|\overrightarrow{x_k^*}\|_1$ έχουμε το ζητούμενο. Με παρόμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι $\|\overrightarrow{b}^*\|_1 \leq 1$ για κάθε $\overrightarrow{b^*} \in B_{p,n}$.*

2. Έστω $\overrightarrow{b}^* = (b_{m+1}^*, \ldots, b_n^*) \in (\sum_{k=m+1}^n \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$ ώστε $\|b^*\|_1 \leq 1$ και $b_k^* = \sum_{\gamma \in \Delta_k} r_\gamma e_\gamma^*$ όπου r_γ είναι ένας ρητός αριθμός για κάθε γ. Τότε υπάρχει $q > n$ ώστε $\overrightarrow{b}^* \in B_{q,m}$. Πράγματι, επειδή η ακολουθία $(N_j)_j$ έίναι αυστηρά αύξουσα, υπάρχει $q \geq n$ ώστε ο μέγιστος παρονομαστής του r_γ είναι μικρότερος από N_q για κάθε $\gamma \in \cup_{k=m+1}^n \Delta_k$. Το συμπέρασμα έπεται από τον ορισμό του $B_{q,m}$.

3.5 Argyros Haydon $\mathcal{L}^\infty$ αθροίσματα χώρων Banach $(\sum_n \oplus X_n)_{AH}$

Για την επιλεγμένη ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach, $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, συμβολίζουμε με $(\sum \oplus X_n)_{AH}$ το BD $\mathcal{L}^\infty$ άθροισμα της $(X_n, \|\cdot\|_n)$ με βάση τη μέθοδο κατασκευής που προέρχεται από την κατασκευή στο [10] και περιγράφηκε στην Ενότητα 4.1. Για να εξασφαλίζουμε ότι οι χώροι $(\sum \oplus X_n)_{AH}$ είναι καλά ορισμένοι αρκεί να ελέγξουμε αν ικανοποιούν το αξίωμα ομοιομόρφου φράγματων των τελεστών $i_{n,m} : \sum_{k=1}^n \oplus (X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)) \to \sum_{k=1}^m \oplus (X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$.

Πρόταση 3.11. *$\|i_{n,m}\| \leq 2$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$.*

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε με χρήση επαγωγής πάνω στο m και για κάθε $n \leq m$. Για $m = 1$, είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και ένα $n \leq m$ έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $k \leq n$ και $l \leq m$, $\|i_{k,l}\| \leq 2$. Για να δείξουμε ότι $\|i_{n,m+1}\| \leq 2$ αρκεί να δείξουμε ότι για $\overrightarrow{z} \in \sum_{k=1}^{n}(X_k \oplus \ell^\infty(\Delta_k))$ με $\|\overrightarrow{z}\| \leq 1$, $|c_\gamma^*(i_{n,m}\overrightarrow{z})| \leq 2$ για κάθε $\gamma \in \Delta_{m+1}$.

Έστω $\gamma \in \Delta_{m+1}^0$ της μορφής $\gamma = (m+1, \overrightarrow{f}, p, 0)$ όπου $\overrightarrow{f} \in K_{p,m}$ και από Παρατήρηση 3.2 $\|\overrightarrow{f}\|_1 \leq 1$. Συνεπάγεται ότι $|c_\gamma^*(i_{n,m}\overrightarrow{z})| = |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{z})| \leq 1$.

Έστω τώρα $\gamma \in \Delta_{m+1}^1$ της μορφής $\gamma = (m+1, \eta, m_j, p, \overrightarrow{b^*})$ όπου $\overrightarrow{b^*} \in B_{p,m}$. Από το ορισμό του c_γ^* έχουμε ότι

$$c_\gamma^*(i_{n,m}\overrightarrow{z}) = \overrightarrow{e_\eta}^*(i_{n,m}\overrightarrow{z}) + \frac{1}{m_j}\overrightarrow{b^*}[i_{n,m}\overrightarrow{z} - i_p R_{[1,p]}(i_{n,m}\overrightarrow{z})].$$

Παρατηρούμε ότι για $p \geq n$, από τον ορισμό των $i_{n,m}$ προκύπτει ότι $i_{n,m}\overrightarrow{z} = i_p R_{[1,p]}(i_{n,m}\overrightarrow{z})$ και άρα άπό επαγωγική υπόθεση ισχύει. Στην περίπτωση που $p < n$ ισχύει ότι $\overrightarrow{e_\eta}^*(i_{n,m}\overrightarrow{z}) = \overrightarrow{e_\eta}^*(\overrightarrow{z})$ ανδ

$$\overrightarrow{b^*}[i_{n,m}\overrightarrow{z} - i_p R_{[1,p]}(i_{n,m}\overrightarrow{z})] = \overrightarrow{b^*}[i_{n,m}\overrightarrow{z} - i_{p,m}(R_{[1,p]}\overrightarrow{z})].$$

Από Παρατήρηση 3.2 ισχύει ότι $\|\overrightarrow{b^*}\|_1 \leq 1$ ενώ με χρήση της επαγωγικής μας υπόθεσης καταλήγουμε ότι

$$c_\gamma^*(i_{n,m}\overrightarrow{z}) \leq \|\overrightarrow{z}\| + \frac{1}{m_j}(\|i_{n,m}\overrightarrow{z}\| + \|i_{p,m}\overrightarrow{z}\|) \leq 2.$$

□

Συμπεραίνουμε ότι $\|i_n\| \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από Παρατήρηση 3.1 θέτοντας $\mathcal{Z} = \overline{\cup_n Y_n}$ όπου $Y_n = i_n[\sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))]$ είναι άμεσο ότι $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{AH}$.

Συμβολισμοί-Έννοιες 3.2. *Όπως σημειώθηκε στην Ενότητα 2 περιορίζουμε τους τελεστές $R_{[1,n]} : \mathcal{Z} \to \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$. Για $\gamma \in \Delta_{n+1}$ επεκτείνουμε το συναρτησιακό $c_\gamma^* : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ ως $c_\gamma^*(z) = c_\gamma^*(R_{[1,n]}z)$. Παρομοίως, μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε $\overrightarrow{f} : \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)) \to \mathbb{R}$ σε ένα συναρτησιακό $\overrightarrow{f} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ (με τον κανόνα $\overrightarrow{f}(z) = \overrightarrow{f}(R_{[1,n]}z)$)).*

Θεωρούμε κάθε στοιχείο $\overrightarrow{f} \in (\sum_{k=m}^n \oplus(X_k^* \oplus \ell_1(\Delta_k))_1)_1$ φυσιολογικά ως φραγμένο φραμμικό συναρτησιακό $\overrightarrow{f} : \sum_{k=1}^n \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k)) \to \mathbb{R}$ και άρα με βάση το παραπάνω ως φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\overrightarrow{f} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$.

Αυτό αφορά κάθε συναρτησιακό $\overrightarrow{e_\gamma}^*$, για $\gamma \in \Delta_n$, $\overrightarrow{x}^*$,για $x^* \in X_n^*$, $\overrightarrow{b^*} \in B_{p,n}$, $\overrightarrow{f} \in K_{n,p}$ με $p < n$. Επιπλέον, από Λήμμα 3.2 οι επεκτάσεις των παραπάνω συναρτησιακών ανήκουν στη μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{Z}^*$.

Υενθυμίζουμε ότι $P_{(m,n]} = i_n R_{[1,n]} - i_m R_{[1,m]}$ για κάθε $m \leq n$. Για $\gamma \in \Delta_n$ ορίζουμε $d_\gamma^* : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ ως $d_\gamma^* = \overrightarrow{e_\gamma^*} \circ P_{\{n\}}$. Από Σημείωση 3.2 προκύπτει ότι $d_\gamma^* = \overrightarrow{e_\gamma^*} - c_\gamma^*$. Το αξίωμα ομοιομόρφου φράγματος των τελεστών $i_{k,m}$ συνεπάγεται ότι $\|i_n\| \leq 2$, $\|P_{[1,n]}\| \leq 4$, $\|P_{(n,\infty)}\| \leq 3$ για $n \in \mathbb{N}$ ενώ $\|d_\gamma^*\| \leq 3$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$.

Η ακόλουθη πρόταση είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό νόρμας στοιχείων του $\mathcal{Z}$. Η απόδειξη περιέχει παρόμοια επιχειρήματα από το [10] (Πρόταση 4.5).

Πρόταση 3.12. *Για κάθε $\gamma \in \Delta_{n+1}$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $0 < p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots < p_a < q_a = n+1$ με $a \leq n_j$, στοιχεία $(\xi_i)_{i=1}^a$ με $\xi_a = \gamma$, $\xi_i \in \Delta_{q_i+1}$, $w(\xi_i) = w(\gamma)$ και συναρτησιακά $\overrightarrow{b_i^*} \in B_{p_i,q_i}$ ώστε*

$$\overrightarrow{e_\gamma^*} = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^a \overrightarrow{b_i^*} \circ P_{(p_i,q_i]}$$

Η ακολουθία $\{p_i, q_i, \xi_i, b_i^*\}_{i=1}^a$ λέγεται ανάλυση του γ. Σημειώνουμε ότι για $\gamma \in \Delta_n^0$ (δηλαδή $w(\gamma) = 1$) το στοιχείο γ κάνουμε την παραδοχή ότι δέχεται τετριμμένη ανάλυση που αποτελέι το μονοσύνολο $\{e_\gamma^*\}$.

Συμβολισμοί-Έννοιες 3.3. *Για λόγους συνέχειας με την υπάρχουσα ορολογία για κάθε $p \leq n$ ταυτίζουμε φυσιολογικά τν χώρο $(\sum_{k=p}^n \oplus X_k)_\infty$ με τον $(\sum_{k=p}^n \oplus (X_k \oplus \{0\})_\infty)_\infty$ ως*

$$\overrightarrow{x} = (x_p, \ldots, x_n) \to \overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x}_p, \ldots, \overrightarrow{x}_n)$$

όπου $\overrightarrow{x}_k = (x_k, 0) \in (X_k \oplus \{0\})_\infty$. Με παρόμοιο τρόπο ταυτίζουμε τον $(\sum_{k=p}^n \oplus \ell_\infty(\Delta_k))_\infty$ με τον $(\sum_{k=p}^n \oplus (\{0\} \oplus \ell_\infty(\Delta_k))_\infty)_\infty$.

Παρατήρηση 3.3. *Έστω $m \leq n$ και $z \in \mathcal{Z}$ ώστε ran$z = (m,n]$ (ή ισοδύναμα $z \in Y_n$ και $P_{[1,m]}(z) = 0$). Αό Λήμμα 3.3 υπάρχει $\overrightarrow{u} \in \sum_{k=m+1}^n \oplus (X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ ώστε $z = i_n(\overrightarrow{u})$. Με χρήση της παραπάνω ταύτισης, γράφουμε το $\overrightarrow{u}$ ως $\overrightarrow{u}' + \overrightarrow{u}''$ έτσι ώστε $\overrightarrow{u}' \in (\sum_{k=m+1}^n \oplus X_k)_\infty$ ενώ $\overrightarrow{u}'' \in (\sum_{k=m+1}^n \oplus \ell_\infty(\Delta_k))_\infty$. Πράγματι, αν $\overrightarrow{u}(k) = (x_k, y_k)$ Θέτουμε $\overrightarrow{u}' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ και $\overrightarrow{u}'' = (y_{m+1}, \ldots, y_n)$. Θετουμε επίσης $z' = i_n(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{u}')$ και $z'' = i_n(\overrightarrow{0}_{1,m}, \overrightarrow{u}'')$. Είναι άμεσο ότι $z = z' + z''$. Επισης, διαπιστώνουμε ότι*

$$\|\overrightarrow{u}'\|_\infty = \sup\{|\overrightarrow{x}^*(\overrightarrow{u})| : \ x^* \in X_k^*, \ \ m+1 \leq k \leq n\}$$

και

$$\|\overrightarrow{u}''\|_\infty = \sup\{|\overrightarrow{e_\gamma}^*(\overrightarrow{u})| : \ \gamma \in \Delta_k, \ \ m+1 \leq k \leq n\}.$$

Από Σημείωση 3.2 για $x^* \in X_k^*$ ή $\gamma \in \Delta_k$ με $m+1 \leq k \leq n$ ισχύει ότι $\overrightarrow{x}^*(z) = \overrightarrow{x}^*(u) = x^*(x_k)$ και παρόμοια $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \overrightarrow{e_\gamma}^*(u) = e_\gamma^*(y_k) = y_k(\gamma)$. Επομένως, το $\overrightarrow{u}''$ μπορεί να γραφτεί εναλλακτικά ως $(\overrightarrow{u}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_n \setminus \Gamma_m}$ όπου $\overrightarrow{u}_\gamma = \overrightarrow{e_\gamma}^*(\overrightarrow{u})$.

Ορισμός 3.13. Έστω $z \in \mathcal{Z}$ με $\max \mathrm{ran}(z) = n$ και έστω $\overrightarrow{u} \in \sum_{k=1}^n \oplus (X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ ώστε να ισχύει ότι $z = i_n(\overrightarrow{u})$. Ορίζουμε $\mathrm{supp}_{loc}(z) = \overrightarrow{u}$. Λέμε ότι το local support του z δεν έχει βάρος αν $(\overrightarrow{u}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_n} = \overrightarrow{0}_{1,n}$ όπου $\overrightarrow{u}_\gamma = \overrightarrow{e_\gamma}^*(\overrightarrow{u})$ όπως στην Παρατήρηση 3.3.

Η βασική ιδέα που περιέχει το ακόλουθο Λήμμα στηρίζεται σε επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν στο [10] (Λήμμα 7.2).

Λήμμα 3.14. *Έστω $z \in \mathcal{Z}$ ώστε ran$z \subset (p,q]$. Τότε υπάρχει $\gamma \in \Gamma$ με $\mathrm{rank}(\gamma) > p$ ώστε $|\overrightarrow{e_\gamma}^*(z)| > \frac{1}{2}\|z\|$*

Απόδειξη. Έστω $\mathrm{supp}_{loc}(z) = \overrightarrow{u}$ όπου $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}' + (\overrightarrow{u}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_q \setminus \Gamma_p}$ όπως στην Παρατήρηση 3.3. Επειδή $z = i_q(\overrightarrow{0}_{1,p}, \overrightarrow{u})$ και $\|i_q\| \leq 2$ έχουμε ότι $\|\overrightarrow{u}\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|z\|$. Σημειώνουμε ότι

$$\|\overrightarrow{u}\|_\infty = \max\{\|\overrightarrow{u}'\|_\infty, \|(\overrightarrow{u}_\gamma)_\gamma\|_\infty\}.$$

Στην περίπτωση που $\|\overrightarrow{u}\|_\infty = \|(\overrightarrow{u}_\gamma)_\gamma\|_\infty$ από Παρατήρηση 3.3 υπάρχει $p+1 \leq k \leq q$ και $\gamma \in \Delta_k$ ώστε $|\overrightarrow{e_\gamma}^*(\overrightarrow{u})| = \|\overrightarrow{u}\|_\infty$. Επομένως,

$$\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \overrightarrow{e_\gamma}^*(\overrightarrow{u}) \geq \frac{1}{2}\|x\|$$

Έστω τώρα ότι $\|\overrightarrow{u}\|_\infty = \|\overrightarrow{u}'\|_\infty$. Από Παρατήρηση 3.3 και το Hahn Banach υπάρχει $x^* \in B_{X_k^*}$ με $p+1 \leq k \leq q$ ώστε $|\overrightarrow{x}^*(\overrightarrow{u})| = \|\overrightarrow{u}\|_\infty$. Επειδή το F_k είναι 1-norming στην μπάλα $B_{X_k^*}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x^* \in F_k$ και έστω $l \geq p$ ώστε $x^* \in F_k^l$. Θέτουμε $\overrightarrow{f} = (\overrightarrow{x}^*, \overrightarrow{0}_{k+1,l})$ και παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό $\overrightarrow{f}$ ανήκει $K_{l,k-1}$. Επιπλέον $\overrightarrow{f}(z) = \overrightarrow{x}^*(\overrightarrow{u})$. Έστω $\gamma \in \Delta_{l+1}$ με αναπαράσταση $\gamma = (l+1, \overrightarrow{f}, n, 0)$. Είναι άμεσο ότι $d_\gamma^*(z) = 0$, άρα και σε αυτή τη περίπτωση $|\overrightarrow{e_\gamma}^*(z)| = |c_\gamma^*(z)| = |\overrightarrow{f}(z)| = \|\overrightarrow{u}\| \geq \frac{1}{2}\|z\|$, επομένως το λήμμα αποδείχθηκε. □

3.5.1 Rapidly Increasing ακολουθίες (RIS) στον $\mathcal{Z} = (\sum_n X_n)_{AH}$.

Για τη συνέχεια οποτεδήποτε γράφουμε $\mathcal{Z}$ θα εννοούμε τον χώρο $\mathcal{Z} = (\sum \oplus X_n)_{AH}$ για την επιλεγμένη ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Υπενθυμίζουμε ότι ο $\mathcal{Z}$ έχει μία Schauder διάσπαση $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς την οποία ορίζουμε το range στοιχείων του $\mathcal{Z}$ και τις block ακολουθίες του $\mathcal{Z}$. Θα ορίσουμε block ακολουθίες ειδικού τύπου που θα μας βοηθήσουν να μελετήσουμε τους τελεστές σε επόμενη ενότητα.

Ξεκινάμε με το ακόλουθο Λήμμα που αφορά γενικά τις block ακολουθίες στον $\mathcal{Z}$.

Λήμμα 3.15. *Έστω $(z_n)_{n\in I}$ για $I \subset \mathbb{N}$ διάστημα, μία block ακολουθία ώστε $\|z_n\| \leq C$ για κάθε $n \in I$ και έστω $(a_n)_{n\in I}$ μία ακολουθία πραγματικών. Τότε για κάθε $\overrightarrow{f} \in K_{m,p}$ με $p < m$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\overrightarrow{f}(\sum_n a_n z_n)| \leq C|a_{n_0}|$.*

Απόδειξη. Έστω $\overrightarrow{f} \in K_{m,p}$ της μορφής $\overrightarrow{f} = (x_{p+1}^*, \ldots, x_n^*)$ όπου $x_k^* \in F_k^n \oplus \{0\}$ για κάθε $p+1 \leq k \leq m$ και $\sum_k \|x_k^*\|_{X_k^*} \leq 1$. Υπενθυμίζουμε ότι $\|\overrightarrow{x_k^*}\| \leq \|\overrightarrow{x_k^*}\|_1 = \|x_k^*\|_{X_k^*}$. Επειδή η $(z_n)_n$ είναι block για κάθε k υπάρχει n_k όχι απαραίτητα διαφορετικό ώστε $\overrightarrow{x_k^*}(\sum_n a_n z_n) = \overrightarrow{x_k^*}(a_{n_k} z_{n_k})$. Θέτουμε $a_{n_0} = \max\{a_{n_k} : k = p+1, \ldots, n\}$. Συνεπάγεται ότι $|\overrightarrow{f}(\sum_k a_k z_k)| \leq C|a_{k_0}| \sum_k \|\overrightarrow{x_k^*}\| \leq C|a_{k_0}|$. □

Συνεχίζουμε με τον ορισμό των Rapidly Increasing ακολουθιών (RIS).

Ορισμός 3.16. Θα λέμε μία block ακολουθία $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}$ C-RIS όπου $C > 0$ σταθερά αν υπάρχει μία αυστηρά σύξουσα ακολουθία $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε

1. $\|z_k\| \leq C$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$
2. $j_{k+1} > \operatorname{maxran} z_k$
3. $|\overrightarrow{e_\gamma^*}(z_k)| \leq \frac{C}{m_i}$ αν $w(\gamma) = m_i$ με $i < j_k$.

Λήμμα 3.17. *Έστω $x \in \mathcal{Z}$ ώστε $\operatorname{maxran} x = q$ και το σύνολο supp$_{loc}(x)$ δεν έχει βάρος. Τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_j$ ισχύει ότι $|\overrightarrow{e_\gamma^*}(x)| \leq \frac{3\|x\|}{m_j}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη χρησιμοποιεί παρόμοια επιχειρήματα με Λήμμα 5.7 στο [10]. Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για $\gamma \in \Gamma$ ώστε $\operatorname{rank}\gamma > q$ ισχύει ότι $d_\gamma^*(x) = 0$ και $P_{(r,\infty)}(x) = 0$ για κάθε $r > q$. Έστω $\gamma \in \Gamma$ με $w(\gamma) = m_j$ και ανάλυση $\{p_i, q_i, b_i^*, \xi_i\}_{i=1}^l$, $l \leq n_j$ ώστε $\overrightarrow{e_\gamma}^* = \sum_i d_{\eta_i}^* + \frac{1}{m_j}\sum_i \overrightarrow{b_i}^* \circ P_{(p_i,q_i]}$. Έστω i το μεγαλύτερο με την ιδιότητα ότι $p_i \leq q$. Για κάθε $i' > i$, έχουμε ότι $p_{i'} > q$ και $q_{i'} > p_{i'} > q$ άρα $P_{(p_{i'},q_{i'}]}(z) = 0$ και $d_{\xi_{i'}}^*(z) = 0$. Αν $i = 1$ τότε $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \frac{1}{m_j}\overrightarrow{b_1}^*(P_{(p_1,q_1]}z)$. Διαφορετικά $i - 1 \geq 1$ και $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \overrightarrow{e_{\eta_{i-1}}}^*(z) + \frac{1}{m_j}\overrightarrow{b_i}^*(P_{(p_i,q_i]}z)$. Αν θέσουμε $\overrightarrow{u} = \operatorname{supp}_{loc}(z)$ τότε είναι άμεσο ότι $\overrightarrow{e_{\eta_{i-1}}}^*(z) = \overrightarrow{e_{\eta_{i-1}}}^*(\overrightarrow{u}) = 0$ καθώς $\operatorname{rank}(\eta_{i-1}) = q_{i-1} + 1 < p_i < q$. Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \frac{1}{m_j}\overrightarrow{b_i}^*(P_{(p_i,q_i]}z) = \frac{1}{m_j}\overrightarrow{b_i}^*(P_{(p_i,\infty)}z) \leq \frac{3\|z\|}{m_j}$. □

Πόρισμα 3.18. *Έστω$(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$, φραγμένη από μία σταθερά $C > 0$ και υποθέτουμε ότι το supp$_{loc}(z_k)$ δεν έχει βάρος για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(z_i)_i$ που είναι $3C$-RIS.*

Απόδειξη. Έστω p_k, q_k ώστε $\operatorname{ran} z_k = (p_k, q_k]$ και έστω $\overrightarrow{u}_k = \operatorname{supp}_{loc}(z_k) \in \sum_{i=p_k}^{q_k} \oplus(X_i \oplus \ell_\infty(\Delta_i))$. Μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία ότι $p_{k+1} > q_k + 1$ για κάθε k. Θέτουμε $j_k = p_k$ και διαπιστώνουμε ότι η $(j_k)_k$ είναι αυστηρά αύξουσα και επιπλέον $j_{k+1} > \operatorname{maxran} x_k$. Επίσης, για $\gamma \in \Gamma$ με $w(\gamma) = m_j$ από Λήμμα 3.17 προκύπτει ότι $|\overrightarrow{e_\gamma}^*(z_k)| \leq 3C/m_j$. Επειδή $\|z_k\| \leq C \leq 3C$, και οι τρεις συνθήκες του ορισμού RIS ικανοποιούνται και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Η ακόλουθη πρόταση που αποτελεί ανάλογο της Πρότασης 5.4 στο [10], αποκαλύπτει τη σύνδεση ανάμεσα στις RIS του $\mathcal{Z}$ με τη συνήθη βάση, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, του mixed Tsirelson χώρου $T(\mathcal{A}_{3n_j}, \frac{1}{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$, γεγονός που δίνει τη δυνατότητα αναγκαίων εκτιμήσεων.

Θεωρούμε το norming σύνολο $W = W[(\mathcal{A}_{3n_j}, \frac{1}{m_j})_{j\in\mathbb{N}}]$ ως υποσύνολο του $c_{00}(\mathbb{N})$, για κάθε $f \in W$ ορίζουμε το συνολο $\operatorname{supp} f = \{k \in \mathbb{N} : \ f(k) \neq 0\}$ ενώ οποτεδήποτε το συναρτησιακό f είναι της μορφής $f = \frac{1}{m_j}\sum_{k=1}^n f_i$ για κάποια $(f_i)_{i=1}^n \subset W$ ορίζουμε το βάρος της f ως $\operatorname{weight}(f) = m_j$.

Πρόταση 3.19. *Έστω $(z_k)_{k\in I}$ μία C-RIS στον $\mathcal{Z}$ και $\gamma \in \Gamma$. Τότε για κάθε ακολουθία πραγματικών $(a_k)_k$ και $s \in \mathbb{N}$ υάρχει $k_0 \in I$ και ένα συναρτησιακό $f \in W[(\mathcal{A}_{3n_j}, \frac{1}{m_j})_{j\in\mathbb{N}}]$ έτσι ώστε*

1. *Είτε $f = 0$ ή $w(\gamma) = weight(f)$, supp$f \subset \{k \in I : \ k > k_0\}$.*
2. $|\overrightarrow{e_\gamma^*} \circ P_{(s,\infty)}(\sum_{k=1}^\infty a_k z_k)| \leq 4C|a_{k_0}| + 6Cf(\sum_{k=1}^\infty |a_k| e_k)$

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$|\overrightarrow{e_\xi}^*(\sum_{k\in I}^\infty a_k z_k)| \leq C \max_{k\in I} |a_k|,$$

για κάθε $J \subset I$ και κάθε $\xi \in \Gamma$ με $w(\xi) = m_{j_0}$, τότε η f μπορεί να επιλεγεί από το $W[(\mathcal{A}_{3n_j}, \frac{1}{m_j})_{j\neq j_0}]$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα το συμπέρασμα χωρίς την επιπλέον συνθήκη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το γ είναι στοιχείο του Δ_n^0 για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με αναπαράσταση $\gamma = (n, \overrightarrow{g}, p, 0)$ όπου $p < n$, $\overrightarrow{g} \in K_{p,n-1}$. Τότε, $\overrightarrow{e_\gamma}^* = d_\gamma^* + c_\gamma^*$ όπου $d_\gamma^* = \overrightarrow{e_\gamma}^* \circ P_{\{n\}}$ και $c_\gamma^* = \overrightarrow{g}$. Σημειώνουμε ότι αν $s > n$ τότε $\overrightarrow{e_\gamma}^* \circ P_{(s,\infty)} = 0$

και ισχύει με τετριμμένο τρόπο. Έστω τώρα $s \leq n$ και $w_k = P_{(s,\infty)} z_k$ για κάθε k. Επειδή η $(w_k)_k$ είναι block από Λήμμα 3.15 υάρχει $k_1 \in I$ ώστε $c^*_\gamma(\sum_{k\in I} a_k w_k) \leq C|a_{k_1}|$. Επίσης, υπάρχει $k_2 \in I$ όχι απαραίτητα ίδιο με το k_1 ώστε $d^*_\gamma(\sum_{k\in I} a_k w_k) = d^*_\gamma(a_{k_2} w_{k_2})$. Έστω $k_0 \in I$ ($k_0 = k_1$ ορ $k_0 = k_2$) ώστε $|a_{k_0}| = \max\{|a_{k_1}|, |a_{k_2}|\}$. Επειδή $\|P_{(s,\infty)}\| \leq 3$, $\|d^*_\gamma\| \leq 3$ προκύπτει ότι

$$|\overrightarrow{e_\gamma}^* \circ P_{(s,\infty)}(\sum_{k\in I} a_k z_k)| \leq 4C|a_{k_0}|.$$

Θέτοντας $f = 0$ το συμπέρασμα ισχύει. Συνεχίζουμε την απόδειξη με επαγωγή πάνω στην τάξη του $\mathrm{rank}(\gamma) = n$ με παρόμοιο τρόπο όπως στο [10] (Πρόταση 5.4). Με παρόμοια επαγωγή αποδεικνύεται και η επιπλέον συνθήκη. □

Η βασική ανισότητα έχει σαν συνέπεια το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πόρισμα 3.20. *Έστω $(z_k)_{k=1}^{n_{j_0}}$ μία C-RIS στον $\mathcal{Z}$. Τότε $\|n_{j_0}^{-1}\sum_{k=1}^{n_{j_0}} z_k\| \leq \frac{10C}{m_{j_0}}$. Επιπλέον, αν $(\lambda_k)_{k=1}^{n_{j_0}}$ είναι πραγματικοί ώστε $|\lambda_k| \leq 1$ και*

$$|\overrightarrow{e_\gamma}^*(\sum_{k\in J} \lambda_k z_k)| \leq C \max_{k\in J} |\lambda_k|$$

για κάθε γ βάρους $m_{j_0}^{-1}$ και κάθε διάστημα $J \subset \{1, 2, \dots, n_{j_0}\}$, τότε

$$\|n_{j_0}^{-1} \sum_k \lambda_k z_k\| \leq \frac{10C}{m_{j_0}^2}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τη βασική ανισότητα για πραγματικούς $n_{j_0}^{-1}\lambda_k$ και για διάστημα $I = \{1, 2, \dots, n_{j_0}\}$. Από εκτιμήσεις που προέρχονται από το χώρο $W(\mathcal{A}_{3n_j}, \frac{1}{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ (δες [10], Ενότητα 2.4) έχουμε ότι

$$|\overrightarrow{e_\gamma}^*(n_{j_0}^{-1}\sum_{k=1}^{n_{j_0}} z_k)| \leq \frac{10C}{m_{j_0}}$$

για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Παρατηρούμε ότι για $f \in B_{X_l^*}$ υπάρχει το πολύ ένα $k_l \in I$ ώστε $|\overrightarrow{f}(n_{j_0}^{-1}\sum_{k=1}^{n_{j_0}} z_k)| = |\overrightarrow{f}(n_{j_0}^{-1} z_{k_l})| \leq \frac{C}{n_{j_0}}$. Επειδή $n_{j_0} \geq m_{j_0}^2$ συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα η απόδειξη για το πρώτο ολοκληρώθηκε. Για το δεύτερο εφαρμόζουμε την επιπλέον συνθήκη της βασικής ανισότητας και χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις από το $W(\mathcal{A}_{3n_j}, \frac{1}{m_j})_{j\neq j_0}$ καταλήγουμε ότι $|\overrightarrow{e_\gamma}^*(n_j^{-1}\sum_k \lambda_k z_k)| \leq \frac{10C}{m_{j_0}^2}$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Με παρόμοιο τρόο όπως παραπάνω, φτάνουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.21. *Έστω $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{AH}$ όπου $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach. Έστω ακόμη Y ένας χώρος Banach και $T : \mathcal{Z} \to Y$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής με την ιδιότητα ότι $\|Tz_n\| \to 0$ για κάθε RIS $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}$. Τότε $\|Tw_k\| \to 0$, για κάθε φραγμένη block ακολουθία $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}$.*

Απόδειξη. Έστω $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$ και έστω σταθερά $C > 0$ ώστε $\|z_k\| \leq C$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(z_{k_i})_i$ ώστε $\|T(z_{k_i})\| \to 0$. Έστω p_k, q_k ώστε $\mathrm{ran} z_k = (p_k, q_k]$ και έστω $\overrightarrow{u}_k = \mathrm{supp}_{loc}(z_k)$. Κάθε z_k γράφεται στη μορφή $z_k = z'_k + z''_k$ όπου $\mathrm{ran} z'_k = \mathrm{ran} z''_k = \mathrm{ran} z_k$ όπως στην Παρατήρηση 3.3. Παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες $(z'_k)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(z''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένες και επιπλέον από τον ορισμό του z'_k συμπεραίνουμε ότι το $\mathrm{supp}_{loc}(z'_k)$ δεν έχει βάρος. Από πόρισμα 3.18 υπάρχει υπακολουθία $(z'_k)_{k\in M}$ η οποία είναι $3C$-RIS, επομένως από την υπόθεση η $(T(z'_k))_{k\in M}$ είναι norm μηδενική. Για κάθε $k \in M$ και $N \in \mathbb{N}$ διασπάμε κάθε στοιχείο $z''_k = w_k^N + y_k^N$ με παρόμοιο τρόπο όπως στην Πρόταση 5.11 στο [10]. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε $\overrightarrow{w}_k^N, \overrightarrow{y}_k^N \in (\sum_{i=p_k+1}^{q_k} \oplus \ell_\infty(\Delta_i))_\infty$ ώστε $\overrightarrow{w}_k^N(\gamma) = \overrightarrow{u}_\gamma$ αν $w(\gamma) \leq m_N$ ή 0 διαφορετικά , ενώ $\overrightarrow{y}_k^N(\gamma) = \overrightarrow{u}_\gamma$ αν $w(\gamma) > m_N$ ή 0 διαφορετικά. Συνεπάγεται ότι $\overrightarrow{w}_k^N + \overrightarrow{y}_k^N = (\overrightarrow{u}_\gamma)_\gamma$ και θέτουμε $w_k^N = i_{q_k}(\overrightarrow{0}_{1,p_k}, \overrightarrow{w}_k^N)$ και $y_k^N = i_{q_k}(\overrightarrow{0}_{1,p_k}, \overrightarrow{y}_k^N)$. Για τις φραγμένες block ακολουθίες $(w_k^N)_{k\in M}$, $(y_k^N)_{k\in M}$ βρίσκουμε υπακολουθίες $(w_{k_{N_j}}^{N_j})_j$, $(y_{k_{N_j}}^{N_j})_j$ ώστε η $(y_{k_{N_j}}^{N_j})_j$ είναι RIS και $\|T(w_{k_{N_j}}^{N_j})\| \to 0$ (δες [10], Πρόταση 5.11). Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $\|T(z''_{k_{N_j}})\| \to 0$ και επειδή $\|T(z'_{k_{N_j}})\| \to 0$ καταλήγουμε ότι $\|T(z_{k_{N_j}})\| \to 0$. □

Πόρισμα 3.22. *Έστω $\mathcal{Z} = (\sum_n \oplus X_n)_{AH}$ όπου $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach. Τότε ο συζυγής $\mathcal{Z}^*$ είναι ισόμορφος με τον $(\sum_{n=1}^\infty \oplus(X_n^* \oplus \ell_1(\Delta_n))_1)_1$.*

Απόδειξη. Από Πόρισμα 3.20 προκύπτει ότι κάθε φραγμένη RIS είναι ασθενώς μηδενική. Από Πρόταση 3.21 συνεπάγεται ότι κάθε φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$ είναι ασθενώς μηδενική και άρα η διάσπαση $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρίκων. το συμπέρασμα έπεται από Πρόταση 3.6. □

3.6 Η HI-ιδιότητα σε block υποχωρους του $\mathcal{Z} = (\sum_n X_n)_{AH}$

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα βασικά συστατικά που περιέχονται σε πολλές κατασκευές καθολικά αδιάσπαστων (Hereditarily Indecomposable) χώρων Banach(όπως [10], [5], [7]). Όπως έχουμε ήδη σημειώσει θα ακολουθήσουμε την Argyros-Haydon HI μέθοδο στο [10], υιοθετώντας πολλά από τα επιχειρήματα και διατηρώντας σε πολλά σημεία τις ίδιες εκτιμήσεις. Αυτό μας βοηθάει να παρατήσουμε, όπως προκύπτει από τον ορισμό των Δ_n, ότι στην περίπτωση που $X_n = \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $\mathcal{Z} = (\sum \oplus X_n)_{AH}$ ταυτίζεται με τον Argyros-Haydon χώρο $\mathfrak{X}_K$. Επομένως, για οποιαδήποτε ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ο χώρος $\mathcal{Z}$ περιέχει πάντα τελείως φυσιολογικά τον χώρο $\mathfrak{X}_K$ και άρα έχει $\mathcal{L}_\infty$ καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο. Όπως θα δούμε στην συνέχεια η HI ιδιότητα χαρακτηρίζει κάθε block υπόχωρο του $\mathcal{Z}$ το οποίο και αποκαλύπτει την επίδραση της εξωτερικής HI νόρμας (δες [5], [14]).

Συνεχίζουμε παραθέτοντας τον ορισμό των $C - \ell_1^n$-μέσων όρων.

Ορισμός 3.23. Έστω $C > 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι ένα στοιχείο $z \in \mathcal{Z}$ είναι $C - \ell_1^n$ μέσος όρος αν

1. $\|z\| \geq 1$

2. Υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία block $(z_i)_{i=1}^n$ στον Z, ώστε $\|z_i\| \leq C$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και $z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$.

Η απόδειξη της ύπαρξης των ℓ^1 μέσων όρων στον $\mathcal{Z}$ απαιτεί περαιτέρω μελέτη του χώρου $\mathcal{Z}$.

Πρόταση 3.24. *Έστω $(z_k)_{n\in\mathbb{N}}$ μία φραγμένη block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$. Τότε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία πεπεράσμένη ακολουθία $(z_{k_i})_{i=1}^{n_{2j}}$ ώστε $2j \leq \operatorname{maxran} z_{k_1}$ και ένα στοιχείο $\gamma \in \Gamma$ βάρους $w(\gamma) = m_{2j}$ ώστε*

$$|\overrightarrow{e_\gamma^*}(\sum_{i=1}^{n_{2j}} z_{k_i})| \geq \frac{1}{2m_{2j}} \sum_{k=1}^{n_{2j}} \|z_{k_i}\|$$

Απόδειξη. Έστω $j \in \mathbb{N}$ και $p_k < l_k < p_{k+1} < l_{k+1} < \ldots$ ώστε $\operatorname{ran} z_k \subset (p_k, l_k]$. Από Λήμμα 3.14 για κάθε k, βρίσκουμε $\xi_k \in \Delta_{q_k}$ με $q_k \geq p_k + 1$ ώστε $\overrightarrow{e_{\xi_k}}^*(z_k) \geq \frac{1}{2}\|z_k\|$. Θέτουμε $\overrightarrow{b}_k^* = (\overrightarrow{0}_{p_k+1,q_k-1}, \overrightarrow{e_{\xi_k}}^*)$ και παρατηρούμε ότι $b_k^* \in B_{q_k,p_k}$ και $P^*_{(p_k,q_k]}\overrightarrow{b}_k^*(z_k) = \overrightarrow{e_{\xi_k}}^*(z_k)$ για κάθε k. Επιλέγουμε αρχικά $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $2j \leq \operatorname{maxran} z_{k_1}$ και $\eta_{k_1} = (q_{k_1} + 1, m_{2j}, \overrightarrow{b}_{k_1}^*)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $1 < i < n_{2j}$ τα στοιχεια z_{k_l}, η_{k_l} έχουν οριστεί για κάθε $l < i$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό k_i ώστε $\operatorname{rank} \eta_{k_{i-1}} < p_{k_i}$ και έστω στοιχείο $\eta_{k_i} = (q_{k_i} + 1, \eta_{k_i-1}, m_{2j}, \overrightarrow{b}_{k_i}^*)$. Παρατηρούμε ότι $d^*_{\eta_{k_i}}(z_{k_l}) = 0$ για κάθε i, l. Έστω $\gamma \in \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j}$ και ανάλυση $\{p_{k_i}, q_{k_i}, \eta_{k_i}, \overrightarrow{b}_{k_i}^*\}_{i=1}^{n_{2j}}$. Από τα παραπάνω υπολογίζουμε άμεσα ότι $\overrightarrow{e_\gamma^*}(\sum_{i=1}^{n_{2j}} z_{k_i}) = \frac{1}{m_{2j}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} \overrightarrow{e_{\xi}}_{k_i}^*(z_{k_i})$ και άρα ικανοποιείται το συμπέρασμα. □

Όπως στο [10] (Λήμμα 8.2), το παραπάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με κλασσικά επιχειρήματα από Λήμμα 2.2 στο [10] έχει σαν συνέπεια το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.25. *Έστω Y ένας block υπόχωρος του $\mathcal{Z}$. Τότε για κάθε $C > 1$ και $n \in \mathbb{N}$, ο Y περιέχει έναν $C - \ell_1^n$ μέσο όρο.*

Στη συνέχεια γενικεύουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.24 για ασθενώς μηδενικές ακολουθίες.

Λήμμα 3.26. *Έστω $(z_k)_k$ μία ασθενώς μηδενική ακολουθία στον $\mathcal{Z}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ακολουθία από successive διαστήματα του $\mathbb{N}$, $(J_k)_k$ ώστε $\|P_{J_k}(z_k)\| \geq \delta$. Τότε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ υπάρχουν στοιχεία $(z_{k_i})_{i=1}^{n_{2j}}$ ώστε $2j \leq \operatorname{maxran} z_{k_1}$ και $\gamma \in \Gamma$ με βάρος m_{2j} ώστε $|\overrightarrow{e_\gamma^*}(\sum_{i=1}^{n_{2j}} z_{k_i})| \geq \frac{\delta}{4m_{2j}}$.*

Απόδειξη. Έστω $j \in \mathbb{N}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\operatorname{ran} z_k \subset [1, l_k]$ όπου $l_k \geq \max J_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\xi_k \in \Delta_{q_k}$ με $q_k \geq \min J_k$ (από Λήμμα 3.14) ώστε $\overrightarrow{e_{\xi_k}}^*(P_{J_k} z_k) \geq \frac{\delta}{2}$. Θέτουμε $p_k = \min J_k - 1$ και $\overrightarrow{b}_k^* = (\overrightarrow{0}_{p_k+1,q_k-1}, \overrightarrow{e_{\xi_k}}^*) \in B_{q_k,p_k}$ για κάθε k. Επιλέγουμε επαγωγικά z_{k_i}, η_{k_i} όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.24 με την επιπλέον απαίτηση σε κάθε επαγωγικό βήμα $r = i + 1 > 1$ το στοιχείο z_{k_r} να επιλέγεται ώστε $|\overrightarrow{e_\eta}_{k_i}^*(z_{k_r})| < \frac{\delta}{4m_{2j}}$. Επειδή η $(z_k)_k$ είναι ασθενώς μηδενική μία τέτοια επιλογή είναι εφικτή. Έστω $\gamma \in \Gamma$ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j}$ και ανάλυση $\{p_{k_i}, q_{k_i}, \eta_{k_i}, \overrightarrow{b}_{k_i}^*\}_{i=1}^{n_{2j}}$. Για κάθε $1 \leq i \leq n_{2j}$, εύκολα βλέπουμε ότι $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z_{k_i}) = \overrightarrow{e_\eta}_{k_{i-1}}^*(z_{k_i}) + \frac{1}{m_{2j}} \overrightarrow{b}_{k_i}^*(P_{J_{k_i}} z_{k_i}) \geq \frac{\delta}{4m_{2j}}$. Καταλήγουμε ότι

$$|\overrightarrow{e_\gamma^*}(\sum_{i=1}^{n_{2j}} z_{k_i})| \geq \frac{\delta}{4m_{2j}}.$$

□

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό των ακριβή ζεύγων.

Ορισμός 3.27. Έστω $C > 0$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ και $j \in \mathbb{N}$. Ένα ζεύγος $(z,\gamma) \in \mathcal{Z} \times \Gamma$ λέγεται (C,j,ε) ακριβές ζεύγος αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

1. $w(\gamma) = m_j^{-1}$, $\|z\| \leq C$, $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \varepsilon$.
2. $d_\xi^*(z) \leq \frac{C}{m_j}$ για κάθε $\xi \in \Gamma$.
3. Για $\gamma' \in \Gamma$ με $w(\gamma') = m_i^{-1}$ και $i \neq j$, τότε

$$|\overrightarrow{e_{\gamma'}}^*(z)| \leq \begin{cases} Cm_i^{-1} & \text{αν } i < j \\ Cm_j^{-1} & \text{αν } i > j. \end{cases}$$

Τα επόμενα αποτελέσματα αυτής της ενότητας είναι παρόμοια με αντίστοιχα από το [10], γι' αυτό αντί για πλήρεις αποδείξεις θα αρκεστούμε σε συνοπτικές περιγραφές των βασικών βημάτων και κεντρικών επιχειρημάτων που χρησιμοποιούνται.

Το ακόλουθο λήμμα έινατ ανάλογο της Πρότασης 8.6 από το [10].

Λήμμα 3.28. *Έστω Y ένας block υπόχωρος του $\mathcal{Z}$. Τότε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $(65, 2j, 1)$ ακριβές ζεύγος (z,η) στον Y.*

Απόδειξη. Έστω $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και σταθερά $C > 1$. Από Λήμμα 3.25 για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας C-$\ell_1^{n_{j_k}}$ μέσος όρος z_k στον Y. Με παρόμοια επιχειρήματα όπως στο Λήμμα 8.4 από το [10] αποδεικνύουμε ότι η $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι $2C$-RIS (περνώντας σε υπακολουθία). Σημειώνουμε ότι $\|z_k\| \geq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ενώ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ από Πρόταση 3.24 μπορούμε (περνώντας σε υπακολουθία) να βρούμε $\eta \in \Gamma$ με βάρος $w(\eta) = m_{2j}$ ώστε $|\overrightarrow{e_\eta}^*(\sum_{k=1}^{n_{2j}} z_k)| \geq \frac{n_{2j}}{4m_{2j}}$.

Για κατάλληλο $\theta \in \mathbb{R}$ με $|\theta| \leq 2$ έχουμε ότι $\overrightarrow{e_\eta}^*(z) = 1$ όπου $z = \theta \sum_{k=1}^{n_{2j}} m_{2j} n_{2j}^{-1} z_k$. Χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις που προέρχονται από τη βασική ανισότητα (Πρόταση 3.19) είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι το ζεύγοε (z,η) είναι το ζητούμενο $(32C, 2j, 1)$ ακριβές ζεύγος με $z \in Y$. Επειδή το συμπέρασμα ισχύει για κάθε $C > 1$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Ενδιαφέρον για την HI ιδιότητα παρουσιάζουν πεπερασμένες ακολουθίες από (C, j_k, ε) ακριβή ζεύγη $(z_k, \eta_k)_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$ που ικανοποιούν επιπλέον ιδιότητες. Αυτές οι ακολουθίες λέγονται εξαρτημένες και ορίζονται στη συνέχεια (δες [10]).

Ορισμός 3.29. Μία πεπρασμένη ακολουθία $(z_k)_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$ στον $\mathcal{Z}$ λέγεται $(C, 2j_0-1, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία αν υπάρχουν $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots < p_{n_{2j_0-1}} < q_{n_{2j_0-1}}$, στοιχεία $(\eta_k)_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$ και $(\xi_k)_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$ ώστε $\eta_k \in \Gamma_{q_k} \setminus \Gamma_{p_k}$, $\xi_k \in \Delta_{q_k}$ και ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

1. $\mathrm{ran} z_k \subset (p_k, q_k - 1]$.
2. το (z_1,η_1) είναι $(C, 4j_1 - 2, \varepsilon)$ ακριβές ζεύγος, ενώ για κάθε $k > 1$ το (z_k,η_k) είναι $(C, 4j_k, \varepsilon)$ ακριβές ζεύγος.
3. το στοιχείο $\gamma = \eta_{n_{2j_0-1}}$ έχει βάρος m_{2j_0-1} και ανάλυση

$$\{p_i, q_i, \xi_i, \overrightarrow{e_{\eta_i}}^*\}_{i=1}^{n_{2j_0-1}}.$$

Από τον ορισμό των συνόλων Δ_n και του (C, j, ε) ακριβές ζεύγους προκύπτει ότι $w(\eta_1) = m_{4j_1-2} > n^2_{2j_0-1}$ και $w(\eta_{i+1}) = m_{4j_{i+1}}$ όπου $j_{i+1} = \sigma(\xi_i)$ για $1 \le i \le n_{2j_0-1}$.

Με παρόμοιο τρόπο όπως στο Λήμμα 6.4 στο [10] αποδεικνύεται ότι κάθε $(C, 2j_0 - 1, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία είναι C-RIS. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη βασική ανισότητα (Πρόταση 3.20) και να πάρουμε εκτιμήσεις αναφορικά με μέσους όρους εξαρτημένων ακολουθιών του $\mathcal{Z}$.

Πρόταση 3.30. *Έστω $(z_k)_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$ μία $(C, 2j_0-1, \varepsilon)$ εξαρτημένη ακολουθία. Θέτουμε $z = \frac{1}{n_{2j_0-1}} \sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} z_k$ και $\tilde{z} = \frac{1}{n_{2j_0-1}} \sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} (-1)^k z_k$. Τέλος, για J υποδιάστημα του $[1, n_{2j_0-1}]$ θέτουμε $\tilde{z}_J = \sum_{k\in J} (-1)^k z_k$. Τα επόμενα ισχύουν:*

1. *Αν $\varepsilon = 1$, $\|z\| \ge \frac{1}{m_{2j_0-1}}$ και $\|\tilde{z}\| \le \frac{40C}{m^2_{2j_0-1}}$.*

2. *Αν $\varepsilon = 0$, $\|z\| \le \frac{30C}{m^2_{2j_0-1}}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη χρησιμοποιεί επιχειρήματα από την Πρόταση 6.6 και το Λήμμα 8.9 στο [10] και θα περιγράψουμε τα βασικά βήματα μόνο για το (i). Για το πρώτο κομμάτι, έστω p_k, q_k, η_k, ξ_k όπως προκύπτουν από τον ορισμό της εξαρτημένης ακολουθίας και έστω γ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j_0-1}$ και ανάλυση $\{p_k, q_k, \xi_k, \overrightarrow{e_{\eta_k}}^*\}_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$. Επειδή $\operatorname{ran} z_k \subset (p_k, q_k - 1]$ και $\xi_k \in \Delta_{q_k}$ προκύπτει ότι $d^*_{\xi_k}(z_l) = 0$ για κάθε k, l. Συνεπώς, $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \overrightarrow{e_{\eta_k}}^*(\frac{n^{-1}_{2j_0-1}}{m_{2j_0-1}} \sum_k z_k) = \frac{1}{m_{2j_0-1}}$.

Για το δεύτερο τμήμα του (i) υπολογίζουμε τη δράση $\overrightarrow{e_\gamma}^*(\tilde{z})$ για κάθε γ με βάρος $w(\gamma) = m_{2j_0-1}$. Χρησιμοποιώντας μία ιδιότητα των στοιχείων του Γ με περιττό βάρος που απορρέει από την κωδικοποίηση σ (δες [10], Λήμμα 4.6) συμπεραίνουμε ότι για κάθε J υποδιάστημα του $[1, n_{2j_0-1}]$ και κάθε γ βάρους m_{2j_0-1} $|\overrightarrow{e_\gamma}^*(\tilde{z}_J)| \le 4C$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η $(z_k)_k$ ως εξαρτημένη ακολουθία είναι C-RIS και μάλιστα ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη του Πορίσματος 3.20 (αντικαθιστώντας το C με $4C$). Καταλήγουμε ότι $\|\tilde{z}\| \le \frac{10\cdot 4C}{m^2_{2j_0-1}} = \frac{40C}{m^2_{2j_0-1}}$. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύεται όπως το Λήμμα 8.10 στο [10].

Πόρισμα 3.31. *Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία block ακολουθία στον $\mathcal{Z}$. Τότε ο υπόχωρος $Z = \overline{< x_n : n \in \mathbb{N} >}$ του $\mathcal{Z}$ είναι HI.*

Απόδειξη. Έστω Y_1, Y_2 δύο κλειστοι υπόχωροι του Z, $\varepsilon > 0$ και $j_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_{2j_0-1}\varepsilon > 2600$. Έστω ακόμη $j_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_{4j_1-2} > n^2_{2j_0-1}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι Y_1, Y_2 είναι block υπόχωροι. Αό Λήμμα 3.28 υπάρχει ένα $(65, m_{4j_1-2}, 1)$ ακριβές ζεύγος (z_1, η_1) με $z_1 \in Y_1$. Έστω $q_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\eta_1 \in \Delta_{q_1}$ και για $p_1 > \max\{q_1, \max\operatorname{ran} z_1\}$ ορίζουμε $\xi_1 \in \Delta_{p_1}$ ως $\xi_1 = (p_1, 2j_0 - 1, \overrightarrow{e_{\eta_1}}^*)$. Για $j_2 = \sigma(\xi_1)$ από Λήμμα 3.28 βρίσκουμε ένα $(65, 4j_2, 1)$ ακριβές ζεύγος (z_2, η_2) με $z_2 \in Y_2$ ώστε $\min\operatorname{ran} z_2 > p_1$. Έστω $q_2 > p_1$ ώστε $\eta_2 \in \Delta_{q_2}$ και για $p_2 > \max\{q_2, \max\operatorname{ran} x_2\}$ ορίζουμε $\xi_2 \in \Delta_{p_2}$ ως $\xi_2 = (p_2, \xi_1, 2j_0 - 1, \overrightarrow{e_{\eta_2}}^*)$. Επαγωγικά, κατασκευάζουμε μία $(65, 2j_0 - 1, 1)$ εξαρτημένη ακολουθία $(z_k)_{k=1}^{n_{2j_0-1}}$ ώστε $z_k \in Y_1$ για k περιττό, ενώ $z_k \in Y_2$ για k άρτιο. Θέτωντας $z_1 = \sum_{k\ odd} z_k \in Y_1$ και $z_2 = \sum_{keven} z_k \in Y_2$ από Πρόταση 3.30 συμπεραίνουμε ότι με κατάλληλη επιλογή του j_0, $\|z_1 - z_2\| < \varepsilon\|z_1 + z_2\|$. $\square$

3.7 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές πάνω στον Z

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τον χώρο των γραμμικών και φραγμένων τελεστών πάνω στον $\mathcal{Z} = (\sum_n X_n)_{AH}$ για μία επιλεγμένη ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach, $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θα υιοθετήσουμε πολλές από τις τεχνικές που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 7 στο [10].

Ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.32. Ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής K πάνω στον $\mathcal{Z}$ λέγεται οριζόντια συμπαγής αν για κάθε φραγμένη block(ως προς την $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ακολουθία $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον Z, $\|K(z_k)\| \to 0$, ή ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\|K|_{\mathcal{Z}_{(k_\varepsilon,\infty)}}\| < \varepsilon$, όπου $\mathcal{Z}_{(k_\varepsilon,\infty)} = \sum_{n=k_\varepsilon+1}^{\infty} Z_n = P_{(k_\varepsilon,\infty)}[\mathcal{Z}]$.

Για τη συνέχεια θα χρειαστεί να εισάγουμε νέους συμβολισμούς και υποθέσεις. Για ένα σύνολο A συμβολίζουμε με $span_{\mathbb{Q}}A$ το σύνολο που όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του A με ρητούς συντελεστές. Είναι επίσης γνωστό ([40]) ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος έχει M-βάση ώστε το σύνολο των διορθογωνίων είναι w^* πυκνό (και ισχυρότερα 1-norming) για τον συζυγή. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $(x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ την M-βάση του X_n και με $\{(x^*_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}\}$ το σύνολο των διορθογωνίων της βάσης. Επίσης θα υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας με βάση το προηγούμενο σχόλιο, ότι $F_n = B^*_{X_n} \cap span_{\mathbb{Q}}\{x^*_{n,i} : \ i \in \mathbb{N}\}$ και θέτουμε $D_n = span_{\mathbb{Q}}\{x_{n,i} : \ \ i \in \mathbb{N}\}$. Τέλος για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $\ell^{\mathbb{Q}}_\infty(\Delta_n)$ το σύνολο $span_{\mathbb{Q}}\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ όπου e_n είναι τα συνήθη μοναδιαία διανυσματα.

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας θα αφορούν για χάριν ευκολίας έναν πυκνό υπόχωρο του $\mathcal{Z}$ που παρουσιάζεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.33. *Για κάθε $z \in \mathcal{Z}$ με ran$z = (n,l]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $w \in \mathcal{Z}$ ώστε ran$z$ = ran$w$, $\|z - w\| < \varepsilon$ και αν $\overrightarrow{v}$ = supp$_{loc}(w)$ τότε $\overrightarrow{v} \in \sum_{k=n+1}^{l} \oplus(D_k \oplus \ell^{\mathbb{Q}}_\infty(\Delta_k))$.*

Απόδειξη. Έστω $\overrightarrow{u} \in \sum_{k=n+1}^{l} \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ ώστε $\mathrm{supp}_{loc}(z) = (\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{u})$. Διασπάμε το $\overrightarrow{u}$ ως $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{u}''$ ώστε $\overrightarrow{u}' \in (\sum_{k=n+1}^{l} \oplus X_k)_\infty$ και $\overrightarrow{u}'' \in (\sum_{k=n+1}^{l} \oplus \ell_\infty(\Delta_k))_\infty$. Για κάθε k βρίσκουμε $v_k \in span_{\mathbb{Q}}\{x_{k,i} : \ i \in \mathbb{N}\}$, $y_k \in \ell_\infty(\Delta_k)$ με ρητές συντεταγμένες ώστε

$$\|\overrightarrow{u}'(k) - v_k\|_k \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ και } \ \|\overrightarrow{u}''(k) - y_k\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω $w = i_n(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{v})$ όπου $\overrightarrow{v}(k) = (v_k, y_k)$. Παρατηρούμε ότι $\|z - w\| \leq 2\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|_\infty < \varepsilon$ και συνδυάζοντας τα παραπάνω η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ☐

Θέτουμε $Y'_n = \{x = i_n(\overrightarrow{u}) : \quad \overrightarrow{u} \in \sum_{k=1}^{n} \oplus(D_k \oplus \ell^{\mathbb{Q}}_\infty(\Delta_k))\}$. Άμεση συνέπεια του παραπάνω λήμματος είναι ότι η ένωση $\cup_n Y'_n$ είναι πυκνή $\mathcal{Z}$.

Για τα επόμενα χρειαζόμαστε τον ακόλουθο συμβολισμό.

Συμβολισμοί-Έννοιες 3.4. *Για $n < l$ διασπάμε κάθε $\overrightarrow{f} \in (\sum_{k=n}^{l} \oplus(X^*_k \oplus \ell_1(\Delta_k)))_1$ ως $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}' + \overrightarrow{f}''$ ώστε $\overrightarrow{f}' \in (\sum_{k=n}^{l} \oplus X^*_k)_1$ και $\overrightarrow{f}'' \in (\sum_{k=n}^{l} \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$. Η διάσπαση γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως η διάσπαση στο local support στοιχείων του $\mathcal{Z}$ (Παρατήρηση 3.3), δηλαδή για*

$$\overrightarrow{f}(k) = (x^*_k, b^*_k) \in (X^*_k \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$$

θέτουμε $\overrightarrow{f}' = (x^*_n, \ldots, x^*_l)$ και $\overrightarrow{f}'' = (b^*_n, \ldots, b^*_l)$.

Παρατήρηση 3.4. *Έστω* $\overrightarrow{f} \in (\sum_{k=n}^{l} \oplus(X_k^* \oplus \ell_1(\Delta_k)))_1$ *ώστε* $\overrightarrow{f}'(k) \in F_k$ *για κάθε* $n \leq k \leq l$, *με* $\overrightarrow{f}'$ *όπως ορίστηκε παραπάνω. Τότε υπάρχει* $\gamma \in \Gamma$ *ώστε* $\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \overrightarrow{f}'(z)$ *για κάθε* $z \in Y_l'$. *Πράγματι, για κάθε* $n \leq k \leq l$ *έστω* $m_k \geq l$ *ώστε* $f'(k) \in F_k^{m_k}$ *και έστω* $m = \max\{m_k : k = n, \ldots, l\}$. *Παρατηρούμε ότι* $m > l$, $\overrightarrow{f}' \in K_{m,n}$ *και έστω* $\gamma = (m+1, n, \overrightarrow{f}', 0) \in \Delta_{m+1}^0$. *Επειδή* $m + 1 > l$ *για* $z \in Y_l'$ *προκύπτει ότι* $d_\gamma^*(z) = 0$ *και άρα* $e_\gamma^*(z) = c_\gamma^*(z) = \overrightarrow{f}'(z)$.

Λήμμα 3.34. *Έστω* $n < l$ *και* $z, w \in \mathcal{Z}$ *ώστε* ran$z$, ran$w \subset (n, l]$ *και* $\operatorname{dist}(w, \mathbb{R}z) > \delta$. *Αν υποθέσουμε ότι* $z \in Y_l'$ *τότε υπάρχει* $q \geq l$, $\overrightarrow{b}^* \in B_{q,n}$ *ώστε* $\overrightarrow{b}^*(z) = 0$ *και* $\overrightarrow{b}^*(w) > \frac{\delta}{4}$.

Απόδειξη. Έστω $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \sum_{k=n+1}^{l} \oplus(X_k \oplus \ell_\infty(\Delta_k))$ ώστε

$$\operatorname{supp}_{loc}(z) = (\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{u}) \text{ και } \operatorname{supp}_{loc}(w) = (\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{v}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{u}\|_\infty = \|(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{v}) - \lambda(\overrightarrow{0}_{1,n}, \overrightarrow{u})\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|z - \lambda w\| > \frac{\delta}{2}.$$

Επομένως, $\operatorname{dist}(\overrightarrow{v}, \mathbb{R}\overrightarrow{u}) \geq \frac{\delta}{2}$. Από Hahn Banach υπάρχει $\overrightarrow{f} \in (\sum_{k=n+1}^{l} \oplus(X_k^* \oplus \ell_1(\Delta_k)))_1$ ώστε $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = 0$ και $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \geq \frac{\delta}{2}$. Από Παρατήρηση 3.4 έχουμε ότι $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}' + \overrightarrow{f}''$ όπου $\overrightarrow{f}' \in (\sum_{k=n+1}^{l} \oplus X_k^*)_1$ και ακόμη $\overrightarrow{f}'' \in (\sum_{k=n+1}^{l} \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$. Επειδή $z \in Y_l'$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\overrightarrow{f}'(k) \in F_k$ και $\overrightarrow{f}''(k) \in \ell_1^{\mathbb{Q}}(\Delta_k)$ για κάθε $n + 1 \leq k \leq l$. Από Παρατήρηση 3.4 υπάρχει $m \geq l$ και $\gamma \in \Delta_{m+1}^0$ ώστε για $x \in \mathcal{Z}$, $\overrightarrow{e_\gamma}^*(x) = \overrightarrow{f}'(x)$. Θέτουμε $\overrightarrow{b}^* = (\frac{1}{2}\overrightarrow{f}'', \overrightarrow{0}_{n+1,m}, \frac{1}{2}\overrightarrow{e_\gamma}^*)$. Συμπεραίνουμε ότι $\overrightarrow{b}^* \in (\sum_{k=n+1}^{m+1} \oplus \ell_1(\Delta_k))_1$, $\|\overrightarrow{b}^*\|_1 \leq 1$ και παρατηρούμε ότι κάθε συντεταγμένη $\overrightarrow{b}^*(k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{e_\gamma^* : \gamma \in \Delta_k\}$ με ρητούς συντελεστές. Από Παρατήρηση 3.2(2) υπάρχει $q \geq m + 1$ ώστε $\overrightarrow{b}^* \in B_{q,n}$. Επιπλέον, $\overrightarrow{b}^*(z) = \frac{1}{2}\overrightarrow{f}''(z) + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_\gamma}^*(z) = \frac{1}{2}\overrightarrow{f}(z) = 0$ και παρομοίως $\overrightarrow{b}^*(w) = \frac{1}{2}\overrightarrow{f}(w) \geq \frac{\delta}{4}$. □

Μέχρι και το τέλος αυτής της ενότητας $\mathcal{Z} = (\sum \oplus X_n)_{BD}$ ώστε η $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία επιλεγμένη ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach με την επιπλέον υπόθεση ότι είτε ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται στον X_n^* για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ο X_n έχει την Schur ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδεικνύεται όπως το Λήμμα 7.2 στο [10].

Λήμμα 3.35. *Έστω* T *ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής* $\mathcal{Z}$ *και* $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *μία* C*-RIS στον πυκνό υπόχωρο* $\cup_n Y_n'$ *ώστε* $\operatorname{dist}(Tw_k, \mathbb{R}w_k) > \delta > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Τότε για κάθε* $j, p \in \mathbb{N}$, *υπάρχουν* $z \in [w_k : k \in \mathbb{N}]$ *και* $\eta \in \Delta_q$ *με* $q > p$ *ώστε το* (z, η) *είναι* $(16C, 2j, 0)$ *ακριβές ζεύγος,* $\|I - P_{(p,q]}Tz\| \leq \delta m_{2j}^{-1}$ *και* $P_{(p,q]}^* e_\eta^*(Tz) > \frac{\delta}{8}$.

Απόδειξη. Έστω $j, p \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζωντας την Πρόταση 3.10 επαναληπτικά, μπορούμε να υποθέσουμε περνώντας σε υπακολουθία ότι υπάρχουν $p < r_1 < l_1 < \ldots < r_k < l_k < r_{k+1} < \ldots$ ώστε ran$w_k \subset (r_k, l_k]$ και $\|(I - P_{(r_k,l_k]})Tw_k\| \leq \frac{\delta}{80m_{2j}}$ για κάθε k. Αυτό συνεπάγεται ότι $\operatorname{dist}(P_{(r_k,l_k]}Tw_k, \mathbb{R}w_k) > \frac{7\delta}{16}$ για κάθε k. Από Λήμμα 3.34 βρίσκουμε $q_k \geq l_k$ και $\overrightarrow{b}_k^* \in B_{q_k,r_k}$ ώστε $\overrightarrow{b}_k^*(w_k) = 0$ και $\overrightarrow{b}_k^*(P_{(r_k,l_k]}Tw_k) > \frac{7\delta}{64}$.

Περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $r_k < q_k + 1 < r_{k+1} < \ldots$ και έστω $z = \frac{m_{2j}}{n_{2j}} \sum_{k=1}^{n_{2j}} w_k$. Υποθέτωντας ότι $2j < r_1$, μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε $\xi_k \in \Delta_{q_k+1}$ με βάρος $w(\xi_k) = m_{2j}^{-1}$ και να κατασκευάσουμε ένα στοιχείο $\eta \in \Gamma$ με ανάλυση $\{r_k, q_k, \xi_k, \overrightarrow{b}_k^*, \}_{k=1}^{n_{2j}}$. Παρόμοια με το Λήμμα 7.2 στο [10] ελέγχουμε ότι το ζεύγος (z, η) είναι το ζητούμενο. $\square$

Η ακόλουθη πρόταση είναι το ανάλογο της Πρότασης 7.3 στο [10] και για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα.

Λήμμα 3.36. *Έστω $T : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Τότε για κάθε RIS $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}$ ισχύει ότι $\mathrm{dist}(Tw_k, \mathbb{R}w_k) \to 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί για κάθε RIS στον πυκνό υπόχωρο $\cup_n Y_n'$. Υποθέτουμε με εις άτοπο ότι υπάρχει RIS $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\cup_n Y_n'$ και $\delta > 0$ ώστε $\mathrm{dist}(Tw_k, \mathbb{R}w_k) > \delta$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω j_0 που θα προσδιοριστεί αργότερα και j_1 ώστε $m_{4j_1-2} > n_{2j_0-1}^2$. Εφαρμόζωντας το Λήμμα 3.35 για $j = 2j_1 - 1$ και $p_1 = 1$ βρίσκουμε $q_1 > 1$ και ένα $(16C, 4j_1 - 2, 0)$ ακριβές ζεύγος (z_1, η_1) ώστε $\eta_1 \in \Delta_{q_1}$, $\|I - P_{(1,q_1]}Tz_1\| \le \delta m_{4j_1-2}^{-1}$ και $(\overrightarrow{e_{\eta_1}}^*(P_{(p_1,q_1]}Tz_1) > \frac{\delta}{8}$. Θέτουμε $\xi_1 = (q_1 + 1, m_{2j_0-1}, \overrightarrow{e_{\eta_1}}^*)$, $j_2 = \sigma(\xi_1)$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.35 για $j = 4j_2$ και $p_2 = q_1 + 1$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots$ και μία ακολουθία $(z_i, \eta_i)_{i=1}^{l}$ ώστε κάθε (z_i, η_i) είναι $(16C, 4j_i, 0)$ ακριβές ζεύγος με $\mathrm{ran} z_i \subset (p_i, q_i]$, $\eta_i \in \Delta_{q_i}$, $\|I - P_{(p_i,q_i]}Tz_i\| \le \delta m_{4j_i}^{-1}$ και $\overrightarrow{e_{\eta}}_i^*(P_{(p_i,q_i]}Tz_i) > \frac{\delta}{8}$. Προκύπτει ότι η $(z_i)_{i=1}^{n_{2j_0-1}}$ είναι μία $(16C, 2j_0 - 1, 0)$ εξαρτημένη ακολουθία και έστω $\gamma \in \Gamma$ με ανάλυση $\{p_i, q_i, \xi_i, \overrightarrow{e_{\eta_i}}^*\}_{i=1}^{n_{2j_0-1}}$. Είναι άμεσο ότι $d_{\xi_i}^*(z_j) = 0$ για κάθε i, j ενώ για κάθε i

$$\overrightarrow{e_{\gamma}}^*(Tz_i) \ge \frac{1}{m_{2j_0-1}}(\overrightarrow{e_{\eta}}_i^*(P_{(p_i,q_i]}Tz_i) - \|I - P_{(p_i,q_i]}Tz_i\|) > \frac{\delta}{8m_{2j_0-1}} - \frac{\delta}{n_{2j_0-1}}.$$

Θέτοντας $z = \frac{1}{n_{2j_0-1}} \sum_{i=1}^{n_{2j_0-1}} z_i$ έχουμε ότι

$$\overrightarrow{e_{\gamma}}^*(Tz) = n_{2j_0-1}^{-1} \sum_{i=1}^{n_{2j_0-1}} \overrightarrow{e_{\gamma}}^*(Tz_i) > \frac{\delta}{16m_{2j_0-1}}.$$

Από Πόταση 3.30 συνεπάγεται ότι $\|Tz\| \le \frac{30\cdot 16C\|T\|}{m_{2j_0-1}^2}$. Για κατάλληλο j_0 καταλήγουμε ότι $\overrightarrow{e_{\gamma}}^*(Tz) > \|Tz\|$ που είναι άτοπο. $\square$

Όλα τα παραπάνω οδήγουν στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.37. *Έστω T ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής πάνω στον $\mathcal{Z}$. Τότε υπάρχει ένας αριθμός λ ώστε ο τελεστής $T - \lambda I$ να είναι οριζόντια συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη RIS στον $\mathcal{Z}$. Από Λήμμα 3.36 υπάρχουν λ_k πραγματικοί αριθμοί ώστε $\|Tw_k - \lambda_k w_k\| \to 0$. Όπως στο [10], Θεώρημα 7.4 δείχνουμε ότι η ακολουθία $(\lambda_k)_k$ συγκλίνει σε έναν αρθμό λ που δεν εξαρτάται από την επιλογή της $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Από Πρόταση συμπεραίνουμε ότι $\|(T - \lambda I)z_k\| \to 0$, για κάθε φραγμένη block ακολουθία $(z_k)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}$. $\square$

3.8 Quasi Prime AH-$\mathcal{L}^\infty$ αθροίσματα χώρων Banach

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε χώρους της μορφής $(\sum_\oplus X_n)_{AH}$ για δεδομένες ακολουθίες διαχωρίσιμων χώρων Banach. Για $1 \leq p < \infty$ θέτουμε $\mathcal{Z}_p = (\sum_n \oplus \ell_p)_{AH}$. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι συνέπεια αποτελεσμάτων της προηγούμενης ενότητας.

Πόρισμα 3.38. *(i) Ο $\mathcal{Z}_p$ δεν είναι ισόμορφος με τον ℓ_p.*

(ii) Για κάθε γραμμικό και φραγμένο τελεστή T πάνω στον $\mathcal{Z}_p$ υπάρχει αριθμός λ ώστε ο τελεστής $T - \lambda I$ να είναι οριζόντια συμπαγής.

Απόδειξη. Το (i) είναι συνέπεια της Πρότασης 3.31 με βάση την οποία ο χώρος $\mathcal{Z}_p$ περιέχει καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο και άρα δε μπορεί να είναι ισόμορφος με τον ℓ_p. Το (ii) είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 3.37. □

Όπως φαίνεται στην επόμενη πρόταση ο ℓ_p είναι ισόμορφος με συμπληρωματικούς υποχώρους του $\mathcal{Z}_p$.

Πρόταση 3.39. *Για κάθε $k_0 \in \mathbb{N}$ η εικόνα $P_{[1,k_0]}(\mathcal{Z}_p)$ είναι ισόμορφη με τον ℓ_p.*

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η εικόνα είναι ισόμορφη με τον $(\sum_{k=1}^{k_0} \oplus(\ell_p \oplus \ell_\infty(\Delta_k)))_\infty$ που είναι ισόμορφος με τον ℓ_p. □

Παρατήρηση 3.5. *Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι ο χώρος $(\sum_{k=m}^{k} \oplus(\ell_p \oplus \ell_\infty(\Delta_k)))_\infty$ είναι ισομορφός με τον ℓ_p για κάθε $m \leq k$. Από Λήμμα 3.3 συμπεραίνουμε ότι ο $P_{[m,k]}(\mathcal{Z}_p)$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάθε $m \leq k$.*

Για να δείξουμε ότι οι χώροι $\mathcal{Z}_p$ είναι strictly quasi prime χρειαζόμαστε τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 3.40. *Έστω $1 \leq p < \infty$ και $\mathcal{Z}_p \simeq U \oplus V$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε είτε $P_{[1,k_0]}|_U$ ή $P_{[1,k_0]}|_V$ είναι ισομορφική εμφύτευση.*

Απόδειξη. Έστω $P : \mathcal{Z}_p \to \mathcal{Z}_p$ προβολή επί του U. Από Πόρισμα 3.38 υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε $P = \lambda I + K$, όπου K ένας οριζόντια συμπαγής τελεστής πάνω στον $\mathcal{Z}_p$. Αν $\lambda = 0$ τότε $U = K[\mathcal{Z}_p]$ και από τον ορισμό του οριζόντια συμπαγή τελεστή το συμπέρασμα ισχύει για τον U. Διαφορετικά, $\lambda \neq 0$ και ισχυριζόμαστε ότι σε αυτή τη περίπτωση $P_{[1,k_0]}|_V$ είναι ισομορφική εμφύτευση. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο θα βρούμε μία νορμαρισμένη ακολουθία $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον V και μία block ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}_p$ ώστε $\|v_n - x_n\| \to 0$. Επειδή $\|K(x_n)\| \to 0$ προκύπτει ότι $\|K(v_n)\| \to 0$. Όμως $|\lambda| - \|K(v_n)\| \leq \|P(v_n)\|$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\lambda = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Για $1 \leq p < \infty$ και $k \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε με $\mathcal{Z}_{p(k,\infty)}$ τον υπόχωρο $P_{(k,\infty)}[\mathcal{Z}_p]$ ενώ με $\mathcal{Z}_{p[1,k]}$ τον υπόχωρο $P_{[1,k]}[\mathcal{Z}_p]$. Το ακόλουθο λήμμα αποδεικνύεται με ανάλογα επιχειρήματα όπως το Λήμμα 3 στο [14].

Λήμμα 3.41. *Έστω $1 \leq p < \infty$, Y υπόχωρος $\mathcal{Z}_p$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $P_{[1,k_0]}|_Y$ είναι ισομορφική εμφύτευση. Τα ακόλουθα ισχύουν:*

1. *Αν $p = 1$ και Y συμπληρωματικός στον $\mathcal{Z}_1$ μέσω μίας προβολής P, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P(z)\| < \varepsilon\|x\|$ για κάθε $z \in \mathcal{Z}_{1(k_\varepsilon,\infty)}$.*

2. *Αν $p > 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P_{(k_\varepsilon,\infty)}(y)\| < \varepsilon\|y\|$ για κάθε $y \in Y$.*

Απόδειξη. Υποθέτοντας με εις άτοπο ότι το (1) δεν ισχύει, βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ στοιχείο $x_k \in \mathcal{Z}_{1(k,\infty)}$ ώστε $\|z_k\| = 1$ και $\|P(z_k)\| \geq \varepsilon$. Μπορούμε να υποθέσουμε, με sliding hump επιχείρημα, ότι η ακολουθία $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι block. Αυτό συνεπάγεται ότι οι ακολουθίες $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $(P(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενικές. Επειδή ο Y από υπόθεση εμφυτεύεται στον $Z_{1[1,k_0]}$ που είναι ισόμορφος με τον ℓ_1, από την ιδιότητα Schur του ℓ_1 καταλήγουμε ότι $\|P(z_k)\| \to 0$, άτοπο.

Υποθέτοντας με εις άτοπο ότι το (2) δεν ισχύει, βρίσκουμε $\varepsilon > 0$, μία νορμαρισμένη ακολουθία $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον Y και μία ακολουθία από successive διαστηματα $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}$ ώστε $\|P_{I_k}(y_k)\| \geq \varepsilon$. Επειδή ο Y εμφυτεύεται στον $\mathcal{Z}_{p[1,k_0]} \simeq \ell_p$, περνώντας σε υπακολουθία υποθέτουμε ότι η ακολουθία $z_k = y_{2k} - y_{2k-1}$ είναι ασθενώς μηδενική και περνώντας σε περεταίρω υπακολουθία υποθέτουμε ότι η $(z_k)_k$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p. Επομένως υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n z_k\| \leq C\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $j \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{\varepsilon}{16m_{2j}} > C\frac{n_{2j}^{\frac{1}{p}}}{n_{2j}}$. Περνώντας σε υπακόλουθία υποθέτουμε ότι $\|P_{(\min I_{k+1},\infty)}y_k\| \to 0$ και άρα έχουμε ότι $\|P_{I_{2k}}z_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από Λήμμα 3.26 για το j, $J_k = I_{2k}$ και $\delta = \varepsilon/2$ υπάρχουν στοιχεία $(z_{k_i})_{i=1}^{n_{2j}}$ και $\gamma \in \Gamma$ βάρους $w(\gamma) = m_{2j}$ ώστε $|e_\gamma^*(\sum_{i=1}^{n_{2j}} z_{k_i})| \geq \frac{\varepsilon n_{2j}}{16m_{2j}}$. Προκύπτει ότι $\|\frac{1}{n_{2j}}\sum_{i=1}^{n_{2j}} z_{k_i}\| \geq \frac{\varepsilon}{16m_{2j}} > C\frac{n_{2j}^{\frac{1}{p}}}{n_{2j}}$ το οποίο είναι άτοπο.

□

Πρόταση 3.42. *Οι χώροι $\mathcal{Z}_p$, για $1 \leq p < \infty$, είναι strictly quasi prime.*

Απόδειξη. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_p$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{Z} \simeq V \oplus U$ και έστω $P : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ ώστε $ImP = V$. Από Λήμμα 3.40 μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ο V δεν περιέχει HI υπόχωρο και άρα από Λήμμα 3.41 υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|PP_{(k_0,\infty)}|_V\| \leq 1$ και $\|P_{(k_0,\infty)}P|_{\mathcal{Z}_{(k_0,\infty)}}\| \leq 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι τελεστές $P : P_{[1,k_0]}(V) \to V$ και $P_{[1,k_0]} : V \to P_{[1,k_0]}(V)$ είναι αντιστρέψιμοι καθώς και ο τελεστής $S = P_{[1,k_0]}P : P_{[1,k_0]}(V) \to P_{[1,k_0]}(V)$. Έστω $Q : \mathcal{Z}_{[1,k_0]} \to V$ που ορίζεται ως $Q = S^{-1} \circ P_{[1,k_0]}P|_{\mathcal{Z}_{[1,k_0]}}$. Εύκολα ελεγχεται ότι ο Q είναι προβολή επί του $P_{[1,k_0]}(V) \simeq V$ και επειδή $\mathcal{Z}_{[1,k_0]} \simeq \ell_p$ συμπεραίνουμε ότι $V \simeq \ell_p$. Η ακόλουθη παραγοντοποίηση

$$\mathcal{Z}_{(k_0,\infty)} \overset{I-P}{\to} U \overset{P_{(k_0,\infty)}}{\to} \mathcal{Z}_{(k_0,\infty)}$$

δείχνει ότι ο $\mathcal{Z}_{(k_0,\infty)}$ είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του U. Για την ακρίβεια, από Παρατήρηση 3.5 συμπεραίνουμε ότι ο ℓ_p είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του U. Συνεπώς, $U \simeq \ell_p \oplus Z \simeq \ell_p \oplus \ell_p \oplus Z \simeq \ell_p \oplus U \simeq V \oplus U \simeq \mathcal{Z}_p$. □

3.9 Συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathcal{Z}_p^n$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τους συμπληρωματικούς υποχώρους του $\mathcal{Z}_p^n = \sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{Z}_p(i)$, εφοδιασμένο με την εξωτερική supremum νόρμα. Επειδή ο $\mathcal{Z}_p$ είναι strictly quasi prime είναι άμεσο ότι $\mathcal{Z}_p^n \simeq \ell_p \oplus \mathcal{Z}_p^n$. Επομένως, ενδιαφερομάστε για τους συμπληρωματικούς υποχωρους του $\mathcal{Z}_p^n$ που δεν είναι ισόμορφοι με τον ℓ_p.

Συμβολισμοί-Έννοιες 3.5. *Για την συνέχεια, για $I \subset \mathbb{N}$ και $L \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ συμβολίζουμε με $P_I^L : \mathcal{Z}_p^n \to \mathcal{Z}_p^n$, τις προβολές που ορίζονται ως $P_I^L(\sum_{i=1}^n z_i) = \sum_{i \in L} P_I(z_i)$, για $\sum_{i=1}^n z_i \in \mathcal{Z}_p^n$. Στην περίπτωση που $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ γράφουμε απλά P_I^n. Για χάριν ευκολίας, αν Y υπόχωρος του $\mathcal{Z}_p^n$ γράφουμε Y_I αντί για $P_I^n(Y)$. Επίσης, λέμε ότι μία ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}_p^n$ είναι block αν ισχύει ότι $\max_{i=1,\ldots,n}\{\mathrm{ran} x_k(i)\} < \min_{i=1,\ldots,n}\{\mathrm{ran} x_{k+1}(i)\}$, όπου $x_k(i) \in \mathcal{Z}_p(i)$.*

Το ακόλουθο λήμμα είναι μία γενικευμένη εκδοχή του συμπερασμάτος που παρουσιάζεται στο Λήμμα 3.41.

Λήμμα 3.43. *Έστω $1 \le p < \infty$, Y υπόχωρος του $\mathcal{Z}_p^n$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $P_{[1,k_0]}^n|_Y$ ισομορφική εμφύτευση. Τα επόμενα ισχύουν:*

1. *Αν $p = 1$ και ο Y είναι συμπληρωματικός στον $\mathcal{Z}_1^n$ μέσω της προβολής P, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υάρχει $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P(x)\| < \varepsilon\|x\|$ για κάθε $x \in P_{(k_\varepsilon,\infty)}^n[\mathcal{Z}_1^n]$.*
2. *Αν $p > 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P_{(k_\varepsilon,\infty)}^n(y)\| < \varepsilon\|y\|$ για κάθε $y \in Y$.*

Απόδειξη. Το (1) αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως το Λήμμα 3.41(1). Για το (2),υποθέτουμε με εις άτοπο ότι δεν ισχύει και βρίσκουμε $\varepsilon > 0$, μία νορμαρισμένη ακολουθία $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον Y και μία ακολουθία από successive διαστήματα $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}$ ώστε $\|P_{I_k}^n(y_k)\| \ge \varepsilon$. Για κάθε k, έστω $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P_{I_k}^n(y_k)(n_k)\| \ge \varepsilon$. Έστω M άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε $n_k = n_0$ για κάθε $k \in M$. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα από Λήμμα 3.41(2) καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Συμβολισμοί-Έννοιες 3.6. *Έστω $T : \mathcal{Z}_p^n \to \mathcal{Z}_p^n$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Τότε, ο T γράφεται στη μορφή $T = (T_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, όπου $T_{i,j} : Z_{p(j)} \to \mathcal{Z}_{p(i)}$. από Πρόταση 3.38(1) για κάθε $1 \le i, j \le n$ υπάρχουν αριθμοί $\lambda_{i,j}$ ώστε $T_{i,j} = \lambda_{i,j} I_{i,j} + K_{i,j}$, όπου $I_{i,j} : \mathcal{Z}_{p(j)} \to \mathcal{Z}_{p(i)}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και $K_{i,j} : \mathcal{Z}_{p(j)} \to \mathcal{Z}_{p(i)}$ είναι οριζόντια συμπαγής τελεστής. Θέτοντας $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, $\Lambda I = (\lambda_{i,j} I_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ και $K = (K_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ έχουμε ότι $T = \Lambda I + K$.*

Για $x \in \mathcal{Z}_p$, συμβολίζουμε με $\tilde{x}_i$ το στοιχείο του $\mathcal{Z}_p^n$ που ορίζεται ως $\tilde{x}_i(j) = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \ne j \\ x, & \text{αν } i = j. \end{cases}$

Λήμμα 3.44. *Έστω $m \le n$ και $T : \mathcal{Z}_p^n \to \mathcal{Z}_p^m$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής της μορφής $T = \Lambda I + K$ όπως στη Σημείωση 3.6. Τα επόμενα ισχύουν:*

1. *Αν $m = n$ και T προβολή, τότε $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ προβολή επί του $\mathbb{R}^n$.*
2. *Αν $n > m$, τότε ο T δε μπορεί να είναι ισομορφική εμφύτευση.*

Απόδειξη. Για το πρώτο υποθέτουμε με εις άτοπο ότι $\Lambda^2 \ne \Lambda$. Τότε υπάρχει $\tilde{0} \ne \tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\Lambda^2(\tilde{a}) \ne \Lambda(\tilde{a})$. Μπορούμε να υποθέσουμε (διαιρώντας με τη μέγιστη συντεταγμένη) ότι $|a_i| \le 1$ για κάθε $1 \le i \le n$ και ότι υπάρχει i_0 ώστε $|a_{i_0}| = 1$. Θεωρούμε τη supremum νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $0 < \epsilon = \|\Lambda^2(\tilde{a}) - \Lambda(\tilde{a})\|_\infty$. Σημειώνουμε ότι $P^2 = \Lambda^2 I + K'$, όπου $K' = (\Lambda I)K + K(\Lambda I) + K^2$. Τότε οι τελεστές K, K' έχουν τη μορφή $K = (K_{i,j})_{i,j}$, $K' = (K'_{i,j})_{i,j}$ όπου $K_{i,j}, K'_{i,j}$ είναι οριζόντια συμπαγείς τελεστές. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathcal{Z}_{p(k_0,\infty)}$ ώστε $\|x\| = 1$ και αν $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i$ να έχουμε ότι $\|K(\tilde{x})\| < \frac{\epsilon}{4}$, $\|K'(\tilde{x})\| \leq \frac{\epsilon}{4}$. Είναι άμεσο ότι το $\tilde{x}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{Z}^n_{p(k_0,\infty)}$, $\|\tilde{x}\| = 1$ και

$$\|P^2(\tilde{x}) - P(\tilde{x})\| \geq \|\Lambda^2 I(\tilde{x}) - \Lambda I(\tilde{x})\| - \|K(\tilde{x}) - K'(\tilde{x})\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2},$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $P^2 = P$.

Για το δεύτερο παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [14], Προταση 3. $\square$

Πρόταση 3.45. *Έστω W ένας απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $\mathcal{Z}_p^n$. Τότε είτε $W \simeq \ell_p$ ή υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο $L \subset \{1, \ldots, n\}$ ώστε ο W να είναι ισόμορφος με τον $\mathcal{Z}_p^L (= \sum_{i \in L} \oplus \mathcal{Z}_p)$.*

Απόδειξη. Έστω $P : \mathcal{Z}_p^n \to \mathcal{Z}_p^n$ προβολή επί του W, δηλαδή $P[\mathcal{Z}_p^n] = W$. Από Λήμμα 3.44 (1), έχουμε ότι ο $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j}$ είναι προβολή στον $\mathbb{R}^n$. Από γνωστά αποτελέσματα γραμμικής άλγεβρας υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ της μορφής $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ώστε $A \Lambda A^{-1} = (\tilde{\lambda}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ όπου $\tilde{\lambda}_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ ή } 1, & \text{αν } i = j \\ 1, & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$ Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο τελεστή $\tilde{A} = (a_{i,j} I_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ και θέτουμε $\tilde{P} = \tilde{A} P \tilde{A}^{-1}$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο $\tilde{P} : \mathcal{Z}_p^n \to \mathcal{Z}_p^n$ είναι προβολή της μορφής $\tilde{P} = (\tilde{\lambda}_{i,j} I_{i,j})_{i,j} + \tilde{K}$ όπου $\tilde{K} = \tilde{A} K \tilde{A}^{-1} = (\tilde{K}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Προκύπτει ότι ο $\tilde{K}_{i,j}$ είναι οριζόντια συμπαγής για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και $W \simeq \tilde{P}[\mathcal{Z}_p^n]$. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = \tilde{P}$ (άρα $\tilde{K} = K$, $\tilde{\Lambda} = \Lambda$).

Θέτουμε $L = \{i : \ \mu_{i,i} \neq 0\}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

Περίπτωση 1: $L = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $P = K$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $P^n_{[1,k_0]}|_W$ ισομορφική εμφύτευση. Πράγματι, αν όχι μπορούμε να βρούμε μία νορμαρισμένη ακολουθία $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ και μία block ακολουθία $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ στον $\mathcal{Z}_p^n$ ώστε $\|x_k - w_k\| \to 0$. Επειδή $\|K(x_k)\| \to 0$ έχουμε ότι $\|w_k\| = \|P(w_k)\| = \|K(w_k)\| \to 0$ και άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Από Λήμμα 3.43 υπάρχει $\ell_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|P P^n_{(l_0,\infty)}|_W\| < \frac{1}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι $W \simeq W^n_{[1,l_0]}$ και θέτοντας $T : P^n_{[1,l_0]} \circ P|_{W^n_{[1,l_0]}} : W^n_{[1,l_0]} \to W^n_{[1,l_0]}$ έχουμε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος και $T^{-1} \circ P^n_{[1,l_0]} \circ P|_{P^n_{[1,l_0]}\mathcal{Z}_p^n} : \mathcal{Z}^n_{p[1,l_0]} \to W^n_{[1,l_0]}$ είναι προβολή επί του $W^n_{[1,l_0]}$. Επειδή $\mathcal{Z}^n_{p[1,l_0]} \simeq \ell_p$, έχουμε ότι $W \simeq \ell_p$.

Περίπτωση 2: $L \neq \emptyset$. Σε αυτή τη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι $W \simeq \mathcal{Z}_p^L$. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι $W \simeq \mathcal{Z}_p^L \oplus Y$, όπου $Y \simeq \ell_p$ και επειδή ο $\mathcal{Z}_p$ είναι stritly quasi prime, δηλαδή $\mathcal{Z}_p \simeq \mathcal{Z}_p \oplus \ell_p$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. Υπενθυμίζουμε ότι $K = (K_{i,j})_{i,j}$ όπου κάθε $K_{i,j}$ είναι οριζόντια συμπαγής. Επομένως, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|K|_{\mathcal{Z}^n_{p(k_0,\infty)}}\| < \frac{1}{4}$. Συνεπάγεται ότι ο τελεστής

$$P^L_{(k_0,\infty)} \circ P|_{\mathcal{Z}^L_{p(k_0,\infty)}} : \mathcal{Z}^L_{p(k_0,\infty)} \to \mathcal{Z}^L_{p(k_0,\infty)}$$

είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, προκύπτει ότι $\mathcal{Z}_p^L \simeq \mathcal{Z}^L_{p(k_0,\infty)}$ και ότι ο $\mathcal{Z}^L_{p(k_0,\infty)}$ είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του W. Συνεπώς, $W \simeq \mathcal{Z}_p^L \oplus Y$. Εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχει $\ell_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $P^n_{[1,l_0]}|_Y$ ισομορφική εμφύτευση. Χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της Περίπτωσης 1 και το Λήμμα 3.43 καταλήγουμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με συμληρωματικό υπόχωρο του ℓ_p και άρα ο Y είναι ισόμορφος με τον ℓ_p. $\square$

Από Λήμμα 3.44(2) και Πρόταση 3.45 έχουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 3.46. *Οι χώροι $\mathcal{Z}_p^n$, για $1 \leq p < \infty$ έχουν ακριβώς $n+1$, μη ισόμορφους ανά δύο, συμπληρωματικούς υποχώρους.*

Βιβλιογραφία

[1] D. Alspach, *The dual of the Bourgain-Delbaen space*, Israel J. Math. **117** (2000), 239–259.

[2] D. Alspach and S.A. Argyros, *Complexity of weakly null sequences*, Dissertationes Mathematicae, **321**, 1–44, 1992.

[3] S.A. Argyros and I. Deliyanni, *Banach spaces of the type of Tsirelson*, arXiv (math/9207206v1), (1992).

[4] S.A. Argyros, I. Deliyanni, D. Kutzarova, and A. Manoussakis. *Modified mixed Tsirelson spaces*, J. of Func. Anal., **159**, 43–109, 1998.

[5] S.A. Argyros and V. Felouzis, *Interpolating Hereditarily Indecomposable Banach spaces*, Journal AMS, **13**(2001), 243-294.

[6] S.A. Argyros, D. Freeman, R. Haydon, E. Odell, Th. Raikoftsalis, Th.Schlumprecht, and D. Zisimopoulou, *Embedding uniformly convex spaces into spaces with very few operators*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 3, 825–849.

[7] S.A. Argyros, D. Freeman, R. Haydon, E. Odell, Th. Raikoftsalis, Th.Schlumprecht, and D. Zisimopoulou, *HI extensions of $\mathcal{L}_\infty$ spaces and spaces with very few operators,* preprint.

[8] S.A. Argyros and I.Gasparis. Unconditional structures of weakly null sequences. *Trans. AMS*, **353**, 2019–2058, 2001.

[9] S.A. Argyros, Gilles Godefroy and Haskell P. Rosenthal, *Descriptive Set Theory and Banach Spaces*, Handbook of the Geometry Of Banach Spaces , vol. **2** (2003), 1009-1065.

[10] S. A. Argyros and R.G.Haydon, *A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$ space that solves the scalar-plus-compact-problem*, Acta Math. **206** (2011), no. 1, 1–54.

[11] S.A. Argyros, R.G. Haydon and Th. Raikoftsalis *A $\mathcal{L}^\infty$ with few operators containing ℓ^1*, Mathematische Annalen 2011 **351**(1), pp. 149-186.

[12] S.A. Argyros, A. Manoussakis, and A.M. Pelczar, *On the hereditary proximity to ℓ^1* J. Funct. Anal **261**(5), (2011), 1145–1203.

[13] S.A. Argyros, S. Mercourakis, and A. Tsarpalias, *Convex unconditionality and summability of weakly null sequences*, Isr. J. Math, **107**, 157–193, 1998.

[14] S.A. Argyros and Th. Raikoftsalis, *Banach spaces with non trivial decomposition*, Proceedings of Amer. Math. Soc., vol. **136**,3611–3620, (2008).

[15] S.A. Argyros and Th. Raikoftsalis, *The cofinal property of the reflexive indecomposable Banach spaces,* Annales de l''institut Fourier, Vol. **62** (2012), no. 1, 1–45.

[16] S.A. Argyros and S. Todorcevic, *Ramsey methods in analysis,* Advanced Courses in mathematics CRM Barcelona (2005).

[17] S.A.Argyros and A.Tolias, *Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **170** (2004), no. 806, vi+114 pp.

[18] N. Aronszajn and K.T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Annals of Math. (2)**60** (1954), 345–350.

[19] S.F. Bellenot, *Tsirelson superspaces and ℓ_p*, Journal of Funct. Anal., **69** (1986), no. 2,207–228.

[20] J. Bernués and I. Deliyanni, *Families of finite subsets of $\mathbb{N}$ of low complexity and Tsirelson type spaces*, Math. Nachr., **222** (2001), 15–29.

[21] Bessaga, C.; A.Pełczyński, A. Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. (Russian summary) Bull. Acad. Polon. Sci. Se'r. Sci. Math. Astr. Phys. **6** 1958 pp. 249–250.

[22] J. Bourgain, *On convergent sequences of continious functions*, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B **32** (1980),235-249.

[23] J. Bourgain and F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces,* Acta Math. **145** (1980), no. 3-4, 155–176.

[24] J. Bourgain and G. Pisier, *A construction of $\mathcal{L}_\infty$-spaces and related Banach spaces*, Bol. Soc. Bras. Mat. **14**(1983), 109-123.

[25] I. S. Edelstein, P. Wojtaszczyk, *On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces*, Studia Math, **56** (1976), no.3, 263–276.

[26] V. Ferenzi and M. E. Galego, *Some results on the Schroeder-Dernstein property for separable Banach spaces*, Canad. J. Math., **59** (2007), no. 1, 63–84.

[27] D. Freeman, E. Odell, and Th. Schlumprecht, *The universality of ℓ_1 as a dual space,* Mathematische Annalen, **351**(2011), no. 1, 149–186.

[28] I. Gasparis, *A dichotomy theorem for subsets of the power set of the natural numbers*, Proc. A.M.S. **129** (2000), 759–764.

[29] I. Gasparis, M. Papadiamantis, D.Z. Zisimopoulou, *More ℓ_r Saturated $\mathcal{L}^\infty$ spaces*, Serdica, Vol. **36**, no. 2 (2010) , pp. 149-170.

[30] Grothendieck, A. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. (French) Amer. J. Math. **74**, (1952), pp. 168–186.

[31] W. T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. no. 6 (1996), 1083-1093.

[32] W.T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem,* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851–874.

[33] W.T. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. vol. **307**, 543–568, (1997).

[34] R. Haydon, *Subspaces of the Bourgain-Delbaen space*, Studia Math., **139** (2000), no. 3, 275–293.

[35] W.B. Johnson, H.P. Rosenthal, and M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions, and weaker structures in Banach spaces*, Istrael. J. Math. **9** (1971), 488–506.

[36] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory, Graduate Texts in Mathematics*, Springer, **156** (1995).

[37] D. Lewis and C. Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell^1(\Gamma)$*, J. Funct. Anal., **12** (1971), 167–177.

[38] J. Lindenstrauss, *Some open problems in Banach space thery*, Séminaire Choquet. Initiation à l' analyse, **15** (1975-1976), Expose 18, 9 pp.

[39] Lindenstrauss, J.; Rosenthal, H. P. *The $\mathcal{L}_p$ spaces*, Israel J. Math. **7** (1969), 325–349.

[40] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, I. Sequences spaces, Springer-Verlag, Berlin (1977).*

[41] E. Odell and Th. Shlumprecht, *Trees and branshes in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, (2002), no. 10,4085–4108.

[42] A. Pelczyński, *On Banach spaces containing $L_1(\mu)$*, Studia Math., **30** (1968), 231–246.

[43] H. P. Rosenthal, *On reletiverly disjoint families of measures with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37** (1970), 13–36.

[44] P. Wojtaszczyk, *On complemented subspaces and unconditional bases in $\ell_p \oplus \ell_q$*, Studia Math, **47** (1973), 197–206.

[45] M. Zippin, *On perfectly homogeneous bases in Banach spaces*, Israel J. of Math., **4** (1966), 265–272.

[46] D. Zisimopoulou, *Bourgain-Delbaen $\mathcal{L}^\infty$ sums of Banach spaces*, arxiv 1402.6564