ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

Σχεδιασμός βέλτιστου τερματικού συνδετήρα πολυμερών σχοινιών υψηλής αντοχής για ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων

Διπλωματική εργασία

ΧΡΗΣΤΟΣ ΒΑΚΟΥΦΤΣΗΣ

Επιβλέπων : Αναπληρωτής Καθηγητής Β. Σπιτάς

Αθήνα 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διπλωματική εργασία αποτελεί το τελευταίο αλλά και πιό σημαντικό κομμάτι στην εκπαίδευση ενός μηχανικού. Μέσα από τις πολλές δυσκολίες και τις μεγάλες απαιτήσεις, ένας σπουδαστής μετατρέπεται σε έναν νέο μηχανικό, ο οποίος έχει ακόμα πολλά να μάθει αλλά είναι πλέον σε θέση να αντιμετωπίσει τα διάφορα προβλήματα βασιζόμενος στις δυνάμεις του. Σε αυτό το τελευταίο κομμάτι των σπουδών μου, είχα δίπλα μου τον επιβλέποντα καθηγητή μου Δρ. Β. Σπιτά τον οποίο ευχαριστώ για την υπομονή ,τον χρόνο που αφιέρωσε σε μένα και τις γνώσεις που μου έδωσε. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πολύ καλό μου φίλο και συνεργάτη Ν. Κομητόπουλο, χωρίς την στήριξη και την βοήθεια του οποίου δεν θα μπορούσα να ολοκληρώσω την εργασία αυτή, τον φίλο Π. Σπυριδάκο για την βοήθειά του στην εποπτεία του κειμένου αλλά κάι όλη την ομάδα του εργαστηρίου στοιχείων μηχανών με τους οποίους περάσαμε πάρα πολλές στιγμές, καλές και κακές, σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την συνεχή στήριξη και πίστη τους σε εμένα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσεται και περιγράφεται μια μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης γεωμετρίας ενός συνδετήρα σχοινιών παράλληλων ινών με σκοπό την εξάλειψη φαινομένων συγκέντρωσης τάσεων , τα οποία οδηγούν στην καταστροφή του σχοινιού σε φορτία μικρότερα του ονομαστικού. Στόχος της εργασίας είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης γεωμετρίας που οδηγεί στην επιθυμητή κατανομή ορθών τάσεων , σε μία σταθερή κατανομή διατμητικών τάσεων και εξαλείφει φαινόμενα συγκεντρωσης ορθών τάσεων στην είσοδο του συνδετήρα. Για την ανάλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε ένα αξονοσυμμετρικό μοντέλο με δύο παραμέτρους και αναλύθηκε σε ένα εύρος των δύο παραμέτρων. Στην συνέχεια αφού τα διαφορετικά μοντέλα αξιολογήθηκαν, ακολούθησε μια διαδικασία αριθμητικής παρεμβολής μέσω της οποίας το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μετασχηματίστηκε σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

ABSTRACT

The present study concerns the shape optimization of a socket-type cable termination, in order to define the optimum geometry which leads into a linearly decreasing axial stress along the cable. The goal of this paper is to prove that it is possible to create a single material termination which obtains the aforementioned distribution of stresses due to its geometry and at the same time eliminates the stress concentration effect at the cable entry. The importance of the casing's geometry and its impact on the distribution of the stresses is revealed in the analysis of casings different geometry. An axisymmetric model with two design parameters was developed and analyzed. After the analysis in a range for the two parameters of the problem an interpolation method was used, in order to transform the mechanical optimization problem into a mathematical minimization problem.

Περιεχόμενα

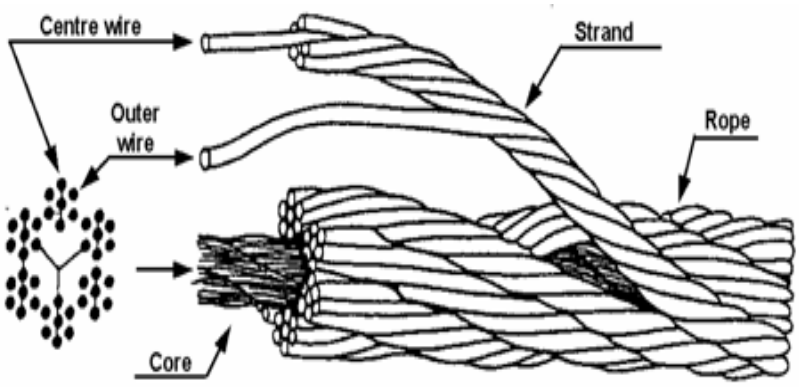
Κεφάλαιο 1

1.1 Γενική Περιγραφή Σχοινιών

Τα σχοινιά (ή σχοινία) είναι μακριές, εύκαμπτες κατασκευές από ίνες, συνήθως φυτικές ή συνθετικές, που χρησιμεύουν κυρίως για τη στήριξη ή τη συγκράτηση αντικειμένων, καθώς και για την μετάδοση ελκτικών ή ανθιστάμενων δυνάμεων. Το σχήμα του σχοινιού είναι κυλινδρικό και μπορεί να αποτελείται από πλεγμένες ίνες σε μια ή περισσότερες ομάδες.

Κατόπιν ειδικής κατεργασίας οι ίνες στρίβονται συνήθως προς τα δεξιά και σχηματίζουν έτσι το γνωστό "κλώσμα" (yarn). Στη συνέχεια τα κλώσματα στρίβονται προς τ᾽ αριστερά, αντίθετα δηλαδή της φοράς συστροφής των ινών και σχηματίζουν έτσι το "έμβολο" (strand). Τρία συνήθως τέτοια έμβολα στριβόμενα προς τα δεξιά δημιουργούν ένα "δεξιόστροφο μονόπλοκο σχοινί", (hawser-laid rope). Τα συνηθέστερα σχοινιά του εμπορίου είναι δεξιόστροφα μονόπλοκα. Η εναλλαγή της φοράς συστροφής των ινών, κλωσμάτων και εμβόλων εξασφαλίζει τη διατήρηση της μορφής του σχοινιού.

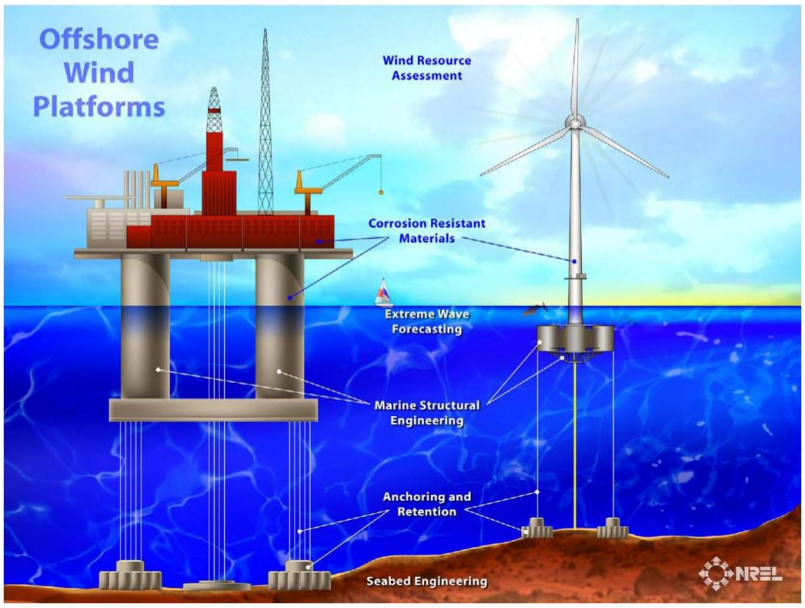
Σχοινιά από τέσσερα έμβολα καλούμενα "εντέταρτα" (shroud-laid ropes) κατασκευάζονται πολύ σπάνια. Στο είδος όμως αυτό τα έμβολα στρίβονται γύρω από ένα άλλο κεντρικό έμβολο από το ίδιο υλικό που καλείται "μήτρα" (core) η οποία αφενός διευκολύνει τη κανονική στροφή των εμβόλων, αφετέρου διατηρεί τη μορφή του σχοινιού. Επειδή το μήκος της μήτρας είναι σαφώς μικρότερο του μήκους των εμβόλων που στρέφονται περί αυτής συνεπάγεται πως όταν η ασκούμενη τάση υπερβεί το όριο αντοχής του σχοινιού τότε αυτό θα κοπεί σε σημείο της μήτρας.
Τρία δεξιόστροφα μονόπλοκα σχοινιά στριβόμενα προς τ᾽ αριστερά δημιουργούν ένα "δίπλοκο σχοινί", (cable-laid rope). Δίπλοκα σχοινιά είναι ο "τόνος" και ο κάβος που χρησιμοποιούνται σε βαριές εργασίες, ως πρυμνήσια ασφαλείας κλπ. Τα δίπλοκα σχοινιά είναι γενικά ασθενέστερα από τα μονόπλοκα του αυτού μεγέθους, αλλα όμως περισσότερο ελαστικά και απορροφούν λιγότερο νερό.



Σχήμα 1.1:Δομή σχοινίων

Σχήμα 1.2:Δομή σχοινίων παράλληλων ινών

Ανάμεσα στις πολλές και ολένα αυξανόμενες εφαρμογές των σχοινιών,οι πιό συχνες είναι στον τομεά της ναυτιλίας και των θαλάσίων έργων όπου χρησιμοποιούνται για την πρόσδεση και στερέωση πλωτών και άλλων κατασκευών (πλατφόρμες άντλησης πετρελαίου,ανεμογενήτριες παραθαλάσιων αιολικών πάρκων κ.α) (σχήμα 1.3). Σε αυτές τις εφαρμογές χρησιμοποιούνται κυρίως σχοινιά απο ίνες πολυμερούς,τα οποία συνδυάζουν υψηλές αντοχές με χαμηλό βάρος.Κατά αυτόν τον τρόπο ,λόγω της σχετικά μικρής πυκνότητας του πολυμερούς υλικού των ινών,το σχοινί έχει ουδέτερη πλευστότητα σε υποβρύχιες και θαλάσιες εφαρμογές,κάτι που αποτελεί ίσως το σημαντικότερο πλεονέκτημα για αυτου του είδους τις εφαρμογές.Αυτο γιατί εναλλακτικά μέσα πρόσδεσης όπως αλυσίδες η συρματόσχοινα ,οδηγούν σε μεγαλύτερες φορτίσεις λόγω του μεγάλου βάρους τους (για εφαρμογές οπου τα μήκη είναι αρκετές εκατοντάδες μέτρα το βάρος παίζει σημαντικό ρόλο).Επίσης σε περίπτωση αστοχίας τέτοια μέσα στερέωσης μπορεί να προκαλέσουν , βυθιζόμενα ,ζημιές σε αρκετά ακριβό εξοπλισμό.



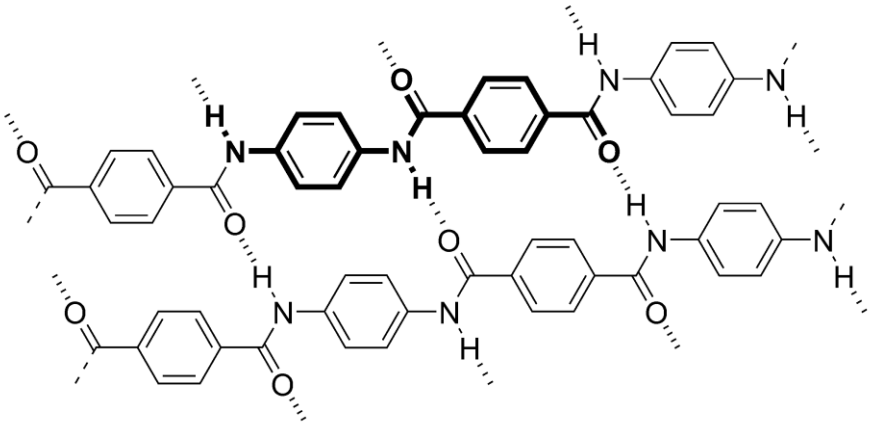
Σχήμα 1.3:Συνηθισμένες εφαρμογές σχοινιών

1.2 Υλικά Σχοινιών

Τα πιο συνηθισμένα υλικά είναι θερμοπλαστικά πολυμερή όπως πολυαιθυλένιο, πολυπροπυλένιο ή υγρά κρυσταλλικά πολυμερή όπως το Kevlar και το Vectran.

- **Kevlar**

Το Kevlar είναι ένα υγρό ημι-κρυσταλλικό πολυμερές. Χαρακτηριστικά του είναι η υψηλή του αντοχή (αντοχή σε εφελκυσμό 3620 MPa) σε συνδυασμό με τον υψηλό λόγο αντοχής προς βάρος (πυκνότητα 1,44).

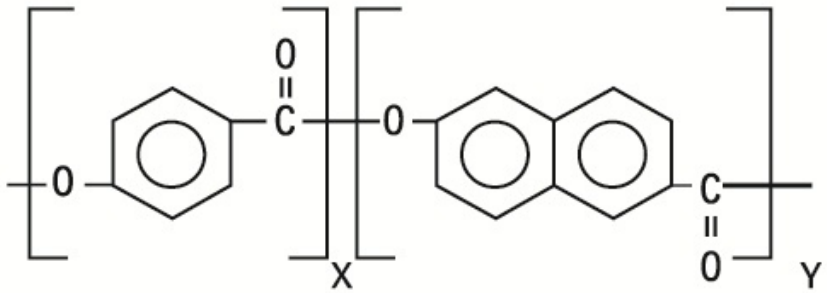


Σχήμα 1.4:Μοριακός τύπος Kevlar

Χρησιμοποιείται σε πολλές πολλές εφερμογές,κυρίως όπου απαιτείται υψηλή αντοχή σε συνδυασμό με χαμηλό βάρος,καθώς και για την παραγωγή ινών για σχοινία ηψηλής αντοχής.

- **Vectran**

Είναι ένα υγρό κρυσταλλικό πολυμερές απο το οποίο κατασκευάζονται ίνες υψηλής αντοχής.Οι ίνες αυτές έχουν μεγάλη αντοχή και μέτρο ελαστικότητας,εμφανίζουν χαμηλό ερπησμό και καλές θερμικές ιδιότητες σε υψηλές θερμοκρασίες.Είναι ανθεκτικές στην υγρασία και γενικότερα σε ακραία περιβάλλοντα ενώ συνήθως διαθέτουν μια επικάλυψη απο κάποιο πολυεστέρα που βελτιώνει την αντοχή τους και λειτουργεί σαν μονωτής απο το νερό.



Σχήμα 1.4:Μοριακός τύπος Vectran

Παρά την μεγάλη πρόοδο που έχει επιτευχθεί στην τεχνολογία των υλικών ,δημιουργώντας νέα υλικά με εξαιρετικές ιδιότητες και αυξημένη αντοχή,το πιο αδύναμο σημείο του σχοινιού βρίσκεται στο άκρο του εκεί όπου ανάλογα με τον τρόπο στερέωσης του,εμφανίζονται καταστροφικά φαινόμενα τα οποία δεν επιτρέπουν το σχοινί να φορτιστεί με φορτίο ίσο με αυτό της ονομαστικής του αντοχής.Με άλλα λόγια η αντοχή του σχοινιού δεν εξαρτάται μόνο απο τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού απο το οποίο κατασκευάζονται οι ίνες και τον τρόπο πλέξης τους,αλλά είναι άμεσα εξαρτώμενη απο τον μηχανισμό με τον οποίο το σχοινι στερεώνεται και μάλιστα ο παράγοντας αυτός έχει σημαντική επίδραση καθώς σε αυτό το σημείο εμφανίζεται συνήθως η αστοχία.Παρακάτω περιγράφονται οι πιο συνηθισμένοι τρόποι στερέωσης.

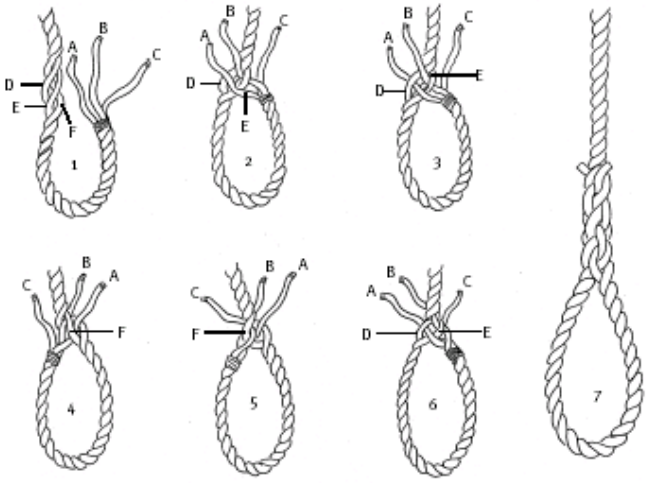
- **Πολυπροπυλένιο- Πολυαιθυλένιο**

Είναι δύο θερμοπλαστικά πολυμερή που χρησιμοποιούνται σε μια ευρεία ποικιλία εφαρμογών, είναι ασυνήθιστα ανθεκτικά σε πολλά χημικά διαλυτικά, οξέα και βάσεις.Είναι αρκετά φθηνά υλικά ,με υψηλή αντοχή και για αυτό τον λόγο χρησιμοποιούνται σε πολλες εφαρμογές διαφόρων κλάδων (ρούχα,ιατρικά αναλώσιμα κ.α) καθώς και για την κατασκευή ινών για σχοινία υψηλής αντοχής. Το Dyneema και το Spectra χρησιμοποιούνται κυρίως για την κατασκευή ινών λόγω της μεγάλης αντοχής σε εφελκυσμό (2.4 GPa) και της μικρής σχετικής πυκνότητας (0.97). Οι προηγούμενες ιδιότητες σε συνδυασμό με την ουδέτερη πλευστότητα που έχουν, τα καθιστά ιδανικά για ναυτικές και υποβρύχιες εφαρμογές.

1.3 Τρόποι Στερέωσης

- **'Θηλιά' (eye termination)**

Ο συγκεκριμένος τύπος πρόσδεσης αποτελεί ίσως τον πιο συνηθισμένο και ευρέως χρησιμοποιούμενο τρόπο πρόσδεσης για κάθε είδους σχοινί,ενώ χρησιμοποιείται πάρα πολύ συχνά σε εφαρμογές που έχουν σχέση με την ναυτιλία (σχήμα 1.5).



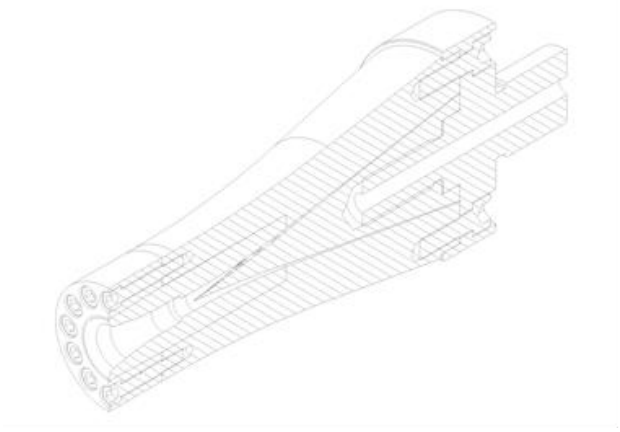
Σχήμα 1.5:Περιγραφή πλέξης των ινών για την δημιουργία της θηλίας

Το βασικότερο πλεονέκτημα αυτού του τύπου πρόσδεσης είναι το γεγονός οτι δεν απαιτείται η χρήση άλλων εξαρτημάτων ,παρα μόνο το ίδιο το σχοινί με το οποίο σχηματίζεται η απαραίτητη για την πρόσδεση θηλία.

Παρά την μεγάλη αντοχή του σε καταπόνηση και κόπωση ο συγκεκριμένος τύπος πρόσδεσης παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα. Κατ'αρχάς απαιτείται αρκετός χρόνος και δουλειά από έμπειρο τεχνίτη, ώστε το τελικό αποτέλεσμα να έχει υψηλή αντοχή και αξιοπιστία. Παρ'όλα αυτά ακόμα και σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατή η επίτευξη του βέλτιστου αποτελέσματος κάθε φορά. Επίσης λόγω της μορφής της θηλίας ,υπάρχουν σημεία του σχοινιού τα οποία φορτίζονται περισσότερο απο άλλα. Αυτή η τοπική υπερφόρτιση μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία του υλικού σε φορτία πολύ μικρότερα απο το ονομαστικό. Τέλος ένα αρκετά σημαντικό πρόβλημα εμφανίζεται για σχοινία μεγάλης διαμέτρου,όπου απαιτείται μεγάλο μήκος καλωδίου (αρκετά μέτρα) καθιστώντας την μέθοδο αρκετά δαπανηρή και δύσκολη στην υλοποίηση.

- **Συνδετήρας (θήκη)**

Εναλλακτικά η στερέωση του σχοινιού μπορεί να γίνει ευκολότερα ,με μειωμένο κόστος και αρκετά πιο σύντομα με την χρήση ενός συνδετήρα στο άκρο του σχοινιού. Η γεωμετρία του συνδετήρα συνήθως είναι κωνική ενώ τα υλικά που χρησιμοποιούνται είναι μαλακά μέταλλα. Παρακάτω παρουσιάζεται ένας συνηθισμένος τύπος συνδετήρα (σχήμα 1.6).

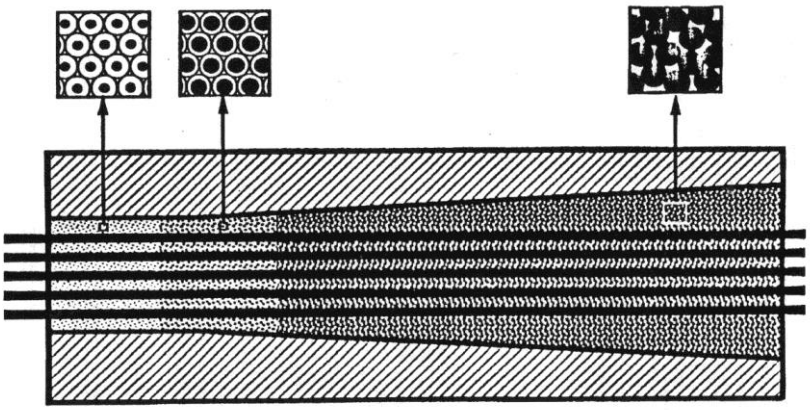


Σχήμα 1.6:Συνδετήρας (θήκη)

Στόν συνδετήρα που φαίνεται παραπάνω το σχοινί εισέρχεται μέσα στο αρσενικής γεωμετρίας στέλεχος το οποίο συναρμόζεται με τον θηλυκής γεωμετρίας συνδετήρα. Το σχοινί συσφίγγεται και ισορροπεί λόγω δυνάμεων τριβής που αναπτύσονται απο την περιφεριακή πίεση απο τον συνδετήρα. Το βασικότερο μειονέκτημα του παραπάνω σχεδίου είναι η εμφάνιση συγκεντρώσεων τάσης οι οποίες οφείλονται στην αναντιστοιχία στις ενδοτικότητες του συνδετήρα και του σχοινιού,με αποτέλεσμα την τοπική υπερφόρτιση και αστοχία του σχοινιού.

Η EMPA με την πατέντα no.5.713.169 [2] πρότεινε ένα βελτιωμένο σχέδιο προκειμένου να μειώσει την συγκέντρωση τάσεων λόγω της αναντιστοιχίας στις ενδοτικότητες. Η EMPA πρότεινε την χρήση ενός υλικού διαβαθμισμένου μέτρου ελαστικότητας ωστε πετύχει μια σταθερή ενδοτικότητα κατα μήκος του συνδετήρα (σχήμα 1.7). Η συγκεκριμένη ιδέα βελτιώνει σημαντικά την συμπεριφορά του συνδετήρα και θεωρητικά θα μπορούσε να εξαλείψει την ανεπιθύμητη συγκέντρωση τάσεων. Αυτό θα απαιτούσε ένα υλικό με ομοιόμορφα μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας,κάτι που είναι πρακτικά πολύ δύσκολο να υλοποιηθεί. Για αυτό τον λόγο χρησιμοποιήθηκε ένας διαβαθμισμένος συνδετήρας

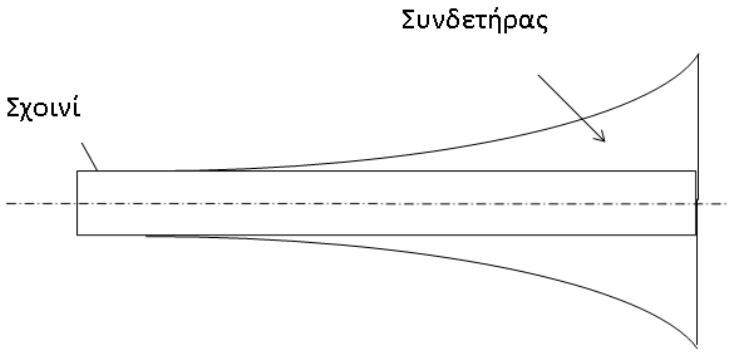
αποτελούμενος από 5-7 ζώνες διαφορετικών υλικών με διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας.



Σχήμα 1.7:Σχέδιο διαβαθμισμένης θήκης (EMPA)

Ωστόσο και το παραπάνω σχέδιο δεν καταφέρνει να εξαλείψει τις συγκεντρώσεις τάσεων ,οι οποίες τώρα εμφανίζονται στις περιοχές ανάμεσα στα διαφορετικά υλικά λόγω της αναντιστοιχίας στα μέτρα ελαστικότητας.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης γεωμετρίας για την δημιουργία ενός συνδετήρα για σχοινία παράλληλων ινών απο ένα υλικό με ελαστικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές του υλικού του σχοινιού. Κατά αυτό τον τρόπο, μετά την συναρμολόγηση, είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένα συμπαγές σώμα το οποίο θα αποτελείται απο το σχοινί και τον συνδετήρα και θα έχει παρόμοια μηχανική συμπεριφορά (σχήμα 1.8). Η έγχυση ρητίνης μέσα στον συνδετήρα μπορεί να διευκολύνει την ομογενοποίηση και την δημιουργία ενός συμπαγούς σώματος.

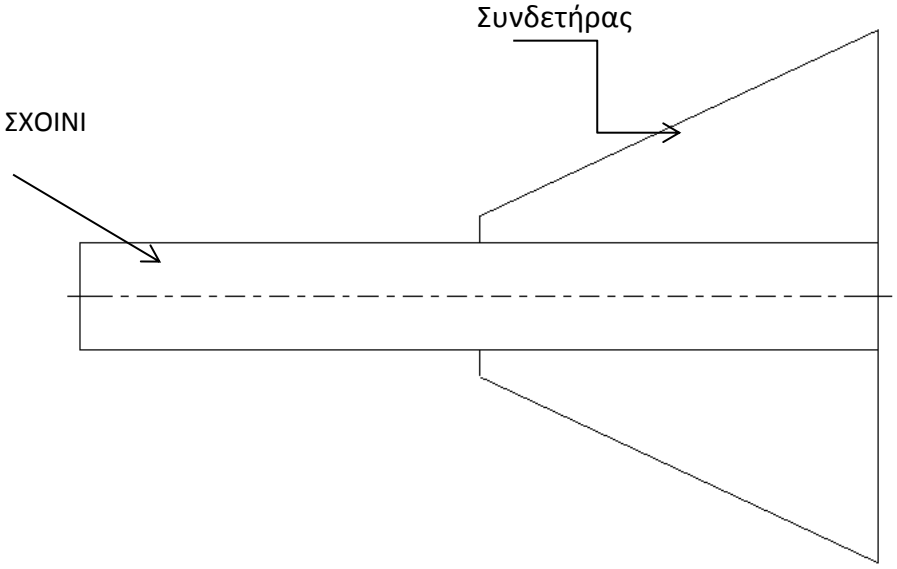


Σχήμα 1.8:Σχέδιο προτεινόμενης θήκης

Κεφάλαιο 2:Περιγραφή του μοντέλου του συνδετήρα

2.1 Ανάλυση της μηχανικής του συνδετήρα

Ένας αρκετά συνηθισμένος τύπος συνδετήρα είναι αυτός που εμφανίζεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1:Γεωμετρία συνδετήρα

Το σχοινί εισέρχεται και συσφίγγεται στον συνδετήρα. Η πίεση σύσφιξης δημιουργεί,λόγω τριβής μεταξύ της εσωτερικής επιφάνειας του συνδετήρα και της επιφάνειας του σχοινιού,διατμητικές τάσεις μέσω των οποίων συγκρατείται το σχοινί.

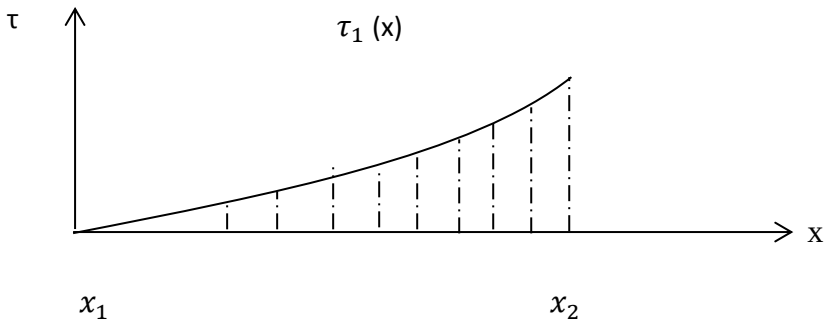
Τα βασικά μειονεκτήματα αυτού του σχεδίου,που είναι και υπεύθυνα τις περισσότερες φορές για την αστοχία του σχοινιού,είναι δυο.

Πρώτον δημιουργείται συγκέντρωση τάσεων (ορθών) στην είσοδο του σχοινιού, στην αρχή του συνδετήρα, λόγω της διαβάθμισης που δημιουργεί ο συνδετήρας (συγκέντρωση τάσεων λόγω αλλαγής της γεωμετρίας). Το συγκεκριμένο φαινόμενο είναι εύκολο να αντιμετωπιστεί με μία ομαλά μεταβαλλόμενη γεωμετρία συνδετήρα. Έτσι όσο η ορθές τάσεις είναι μικρότερές από την οριακή τιμή αντοχής δεν υπάρχει πρόβλημα.

Το δεύτερο και σημαντικότερο μειονέκτημα αυτού του τύπου συνδετήρα είναι η εμφάνιση μιας μη ομοιόμορφης κατανομής διατμητικών τάσεων κατά μήκος του σχοινιού η οποία οδηγεί σε συγκέντρωση διατμητικών τάσεων σε κάποια σημεία και αστοχία σε φορτία πολύ μικρότερα απο το ονομαστικό. Αυτή η συγκέντρωση τάσεων προκαλείται διότι η ενδοτικότητα του συνδετήρα αυξάνεται κατα μήκος του, ενώ η ενδοτικότητα του σχοινιού παραμένει σταθερή. Αυτή η αναντιστοιχία στις ενδοτικότητες δημιουργεί μια ανομοιόμορφη κατανομή διατμητικών τάσεων και οδηγεί στην ανεπιθύμητη συγκέντρωση τάσεων.

Προκειμένου να αντιμετοπιστεί το φαινόμενο αυτό ,είναι απαραίτητο η κατανομή των διατμητικών τάσεων να είναι ομοιόμορφη και σταθερή.

Η πιό συνηθισμένη κατανομή διατμητικών τάσεων που δημιουργείται είναι η παρακάτω:

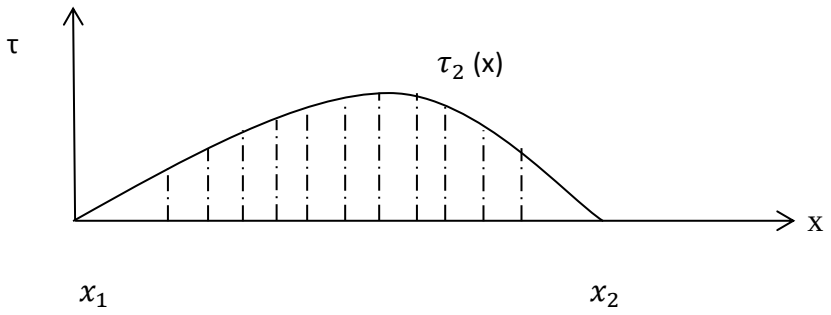


Σχήμα 2.2:Κατανομή διατμητικών τάσεων

Το εμβαδόν κάτω απο την καμπύλη που περιφράφει την κατανομή των διατμητικών τάσεων ισούται με την δύναμη που συγκρατεί το σχοινί.Αυτή η δύναμη είναι δεδομένη και υπολογίζεται:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \tau_1(x) 2\,\pi \mathrm{rdx} = \mathrm{const}$$

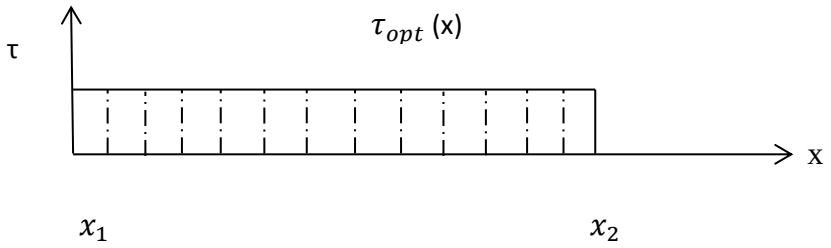
Για οποιαδήποτε άλλη κατανομή διατμητικών τάσεων το εμβαδόν είναι δεδομένο και σταθερό.



Σχήμα 2.3:Κατανομή διατμητικών τάσεων

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \tau_2(x) 2\,\pi \mathrm{rdx} = \mathrm{const}$$

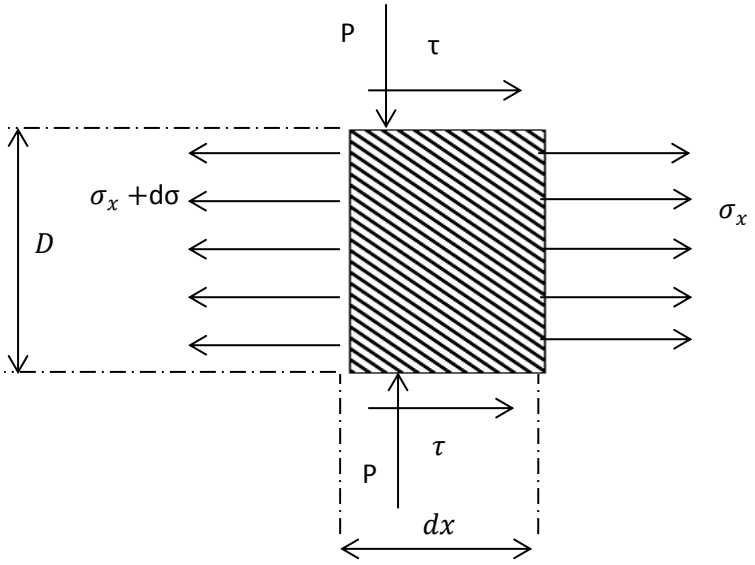
Εύκολα μπορεί κανείς να καταλάβει ότι η βέλτιστη κατανομή διατμητικών τάσεων είναι η κατανομή αυτή με την μικρότερη μέγιστη τιμή και με δεδομένη την δύναμη F που απαιτείται για την συγκράτηση του σχοινιού (δεδομένο εμβαδό) , η βέλτιστη είναι μια σταθερή κατανομή.



Σχήμα 2.4:Σταθερή κατανομή διατμητικών τάσεων

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \tau_3(x) 2\,\pi \mathrm{rdx} = \mathrm{const}$$

Προκειμένου να γίνει καλύτερα κατανοητός ο μηχανισμός συγκέντρωσης τάσεων και η σχέση που έχει με την κατανομή ορθών τάσεων κατα μήκος του σχοινιού,μελετάται η ισορροπία μια στοιχειώδους λωρίδας πάχους dx (σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5:Ισορροπία στοιχειώδους λωρίδας σχοινίου

Ας θεωρήσουμε την στοιχειώδη λωρίδα σχοινιού του σχήματος και ας μελετήσουμε την ισορροπία της. Η λωρίδα αυτή ισορροπεί υπό την επίδαρση των παρακάτω δυνάμεων:

Μίας αξονικής δύναμης προς τα αριστερά η οποία οφείλεται στις ορθές τάσεις(σ_x +dσ) που αναπτύσσονται στην αριστερή πλευρά του σχοινιού και ισούται με $\pi R^2(\sigma_x$ +dσ).
Μίας αξονικής δύναμης προς τα δεξιά η οποία οφείλεται στις ορθές τάσεις σ_x που αναπτύσονται στο στη δεξιά πλευρά του σχοινιού και ισούται με $\pi R^2(\sigma_x)$.
Δύο δυνάμεων προς τα δεξιά ,οι οποίες οφείλονται στις διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται λόγω τριβής μεταξύ της επιφάνειας του σχοινιού και της εσωτερικής επιφάνειας της θήκης. Το μέτρο αυτών των δύο δυνάμεων είναι ίσο με $\tau 2\pi R dx$.

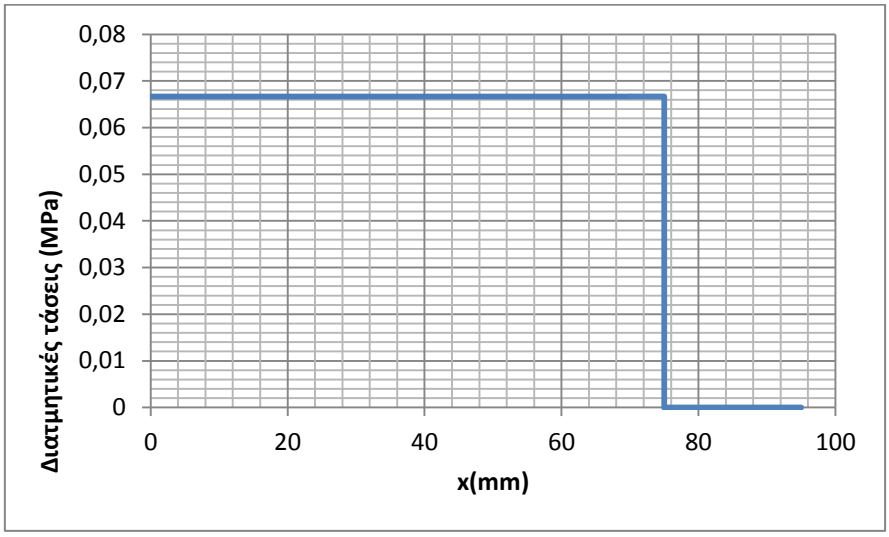
Τέλος, στην στοιχειώδη λωρίδα του σχήματος ασκούνται δύο ακτινικές δυνάμεις ,ίδιου μέτρου $\rho 2\pi$Rdx και αντίθετης φοράς (όπως φαίνονται στο παραπάνω σχήμα). Αυτές οι δυνάμεις οφείλονται στην πίεση που δέχεται το σχοινί από την επιφάνεια της θήκης και αναφέρονται για λόγους πληρότητας, αφού έχουν ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά οπότε η συνισταμένη τους είναι μηδέν και για αυτό τον λόγο μπορούν να αμεληθούν από την ανάλυση.
Έτσι η εξίσωση ισορροπίας για την στοιχειώδη λωρίδα είναι η παρακάτω

$$\tau\pi D dx + \frac{1}{4}\pi D^2 d\sigma_x = 0 \tag{2.1}$$

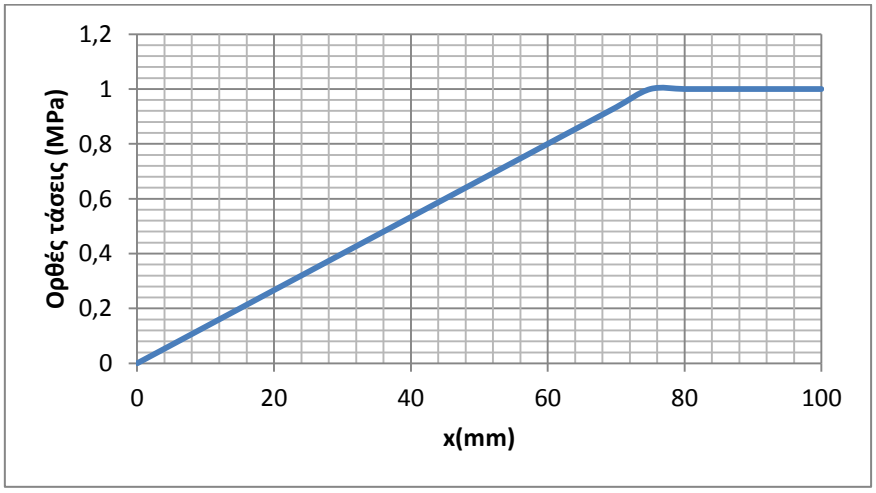
$$2\tau dx = -\frac{D}{2}\, d\sigma_x \tag{2.2}$$

$$\tau = \frac{d\sigma_x}{dx}\frac{D}{4} \tag{2.3}$$

Από την παραπάνω εξίσωση καταλαβαίνουμε άμεσα την επίδραση της κατανομής των ορθών τάσεων στη δημιουργία των διατμητικών καθώς και στην κατανομή τους. Η συγκέντρωση διατμητικών τάσεων οφείλεται στην ανομοιόμορφη κατανομή τους κατα μήκος του σχοινιού. Για μια σταθερή κατανομή διατμητικών τάσεων απαιτείται,όπως φαίνεται και απο την παραπάνω εξίσωση,μια γραμμική πτώση των ορθών τάσεων.



Σχήμα 2.6:Βέλτιστη κατανομή διατμητικών τάσεων



Σχήμα 2.7:Βέλτιστη κατανομή ορθών τάσεων

Αυτή η γραμμική κατανομή ορθών τάσεων οδηγεί στην επιθυμητή σταθερή κατανομή διατμητικών τάσεων

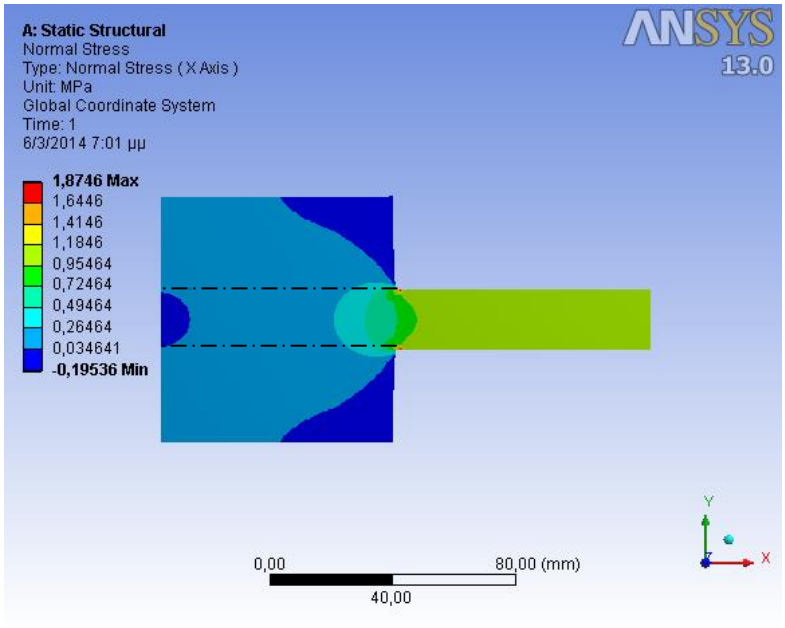
$$\frac{dy}{dx} = \text{const}, \quad \sigma = ax, \quad \frac{dy}{dx} = \text{const}$$

και θα αποτελέσει μέτρο σύγκρισης όλων των μοντέλων διαφορετικών γεωμετριών αυτής της εργασίας.

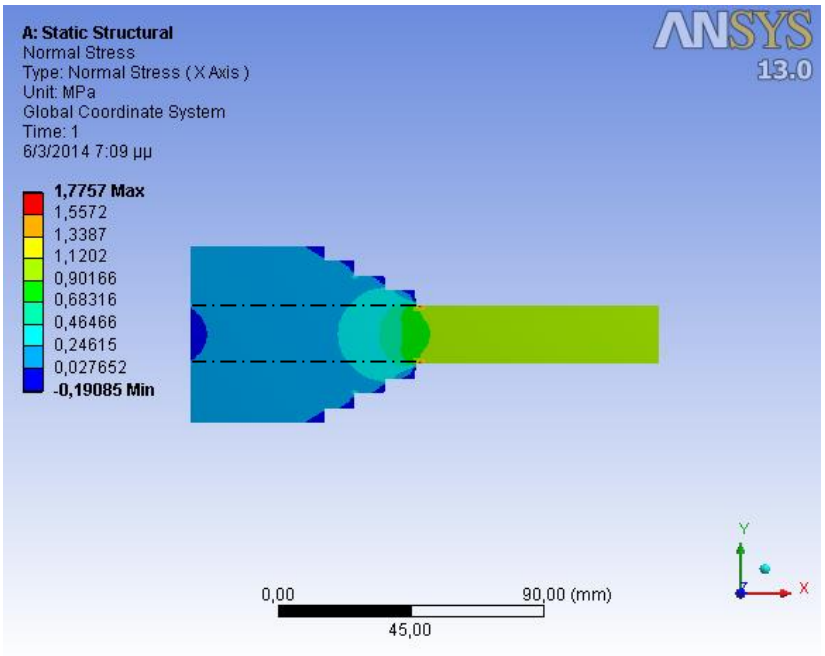
Το σχέδιο συνδετήρα που προτείνεται στην παρούσα εργασία είναι ένας συνδετήρας αποτελούμενος από ένα υλικό σταθερού μέτρου ελαστικότητας, ο οποίος θα πετυχαίνει την επιθυμητή κατανομή ορθών τάσεων που περιγράφηκε προηγουμένως μεταβάλοντας την ενδοτικότητα του συνδετήρα μέσα απο την γεωμετρία του.

2.2 Επίδραση της γεωμετρίας

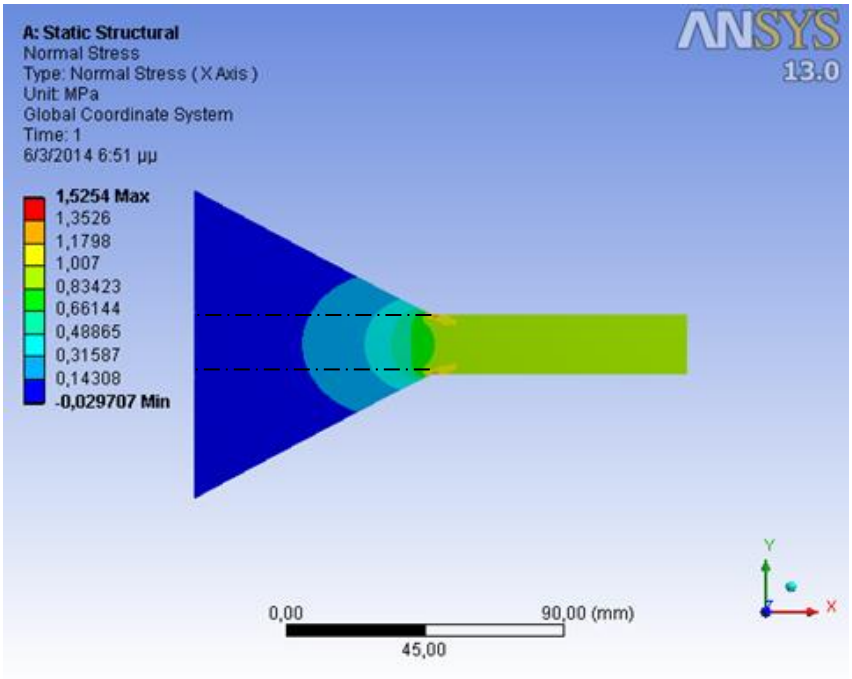
Η επίδραση της γεωμετρίας,στην ενδοτικότητα του συνδετήρα και κατά συνέπεια στην κατανομή των τάσεων μπορεί να γίνει εμφανής, αρχικά συγκρίνοντας τρείς απλές αλλά αρκετά διαφορετικές γεωμετρίες και εξετάζοντας την κατανομή ορθών και διατμητικών τάσεων που προκαλούν κατα μήκος του σχοινιού (σμήματα 2.8-2.10)



Σχήμα 2.8:Συνδετήρας κυλινδρικής γεωμετρίας

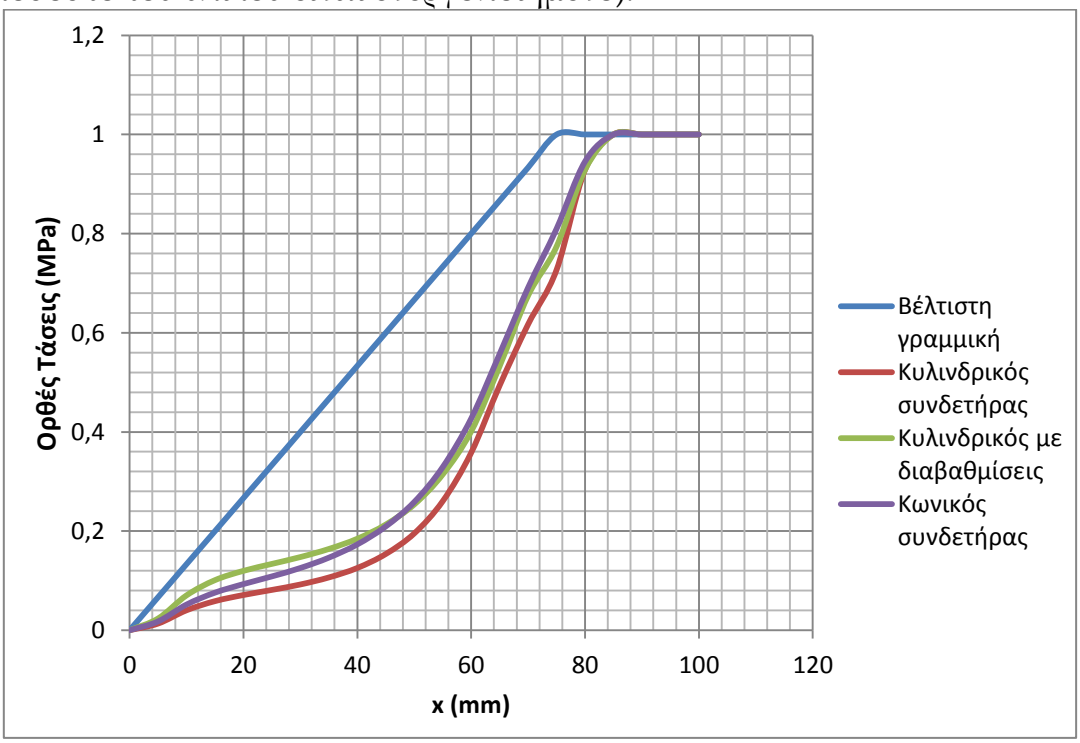


Σχήμα 2.9:Συνδετήρας κυλινδρικής γεωμετρίας με διαβαθμίσεις

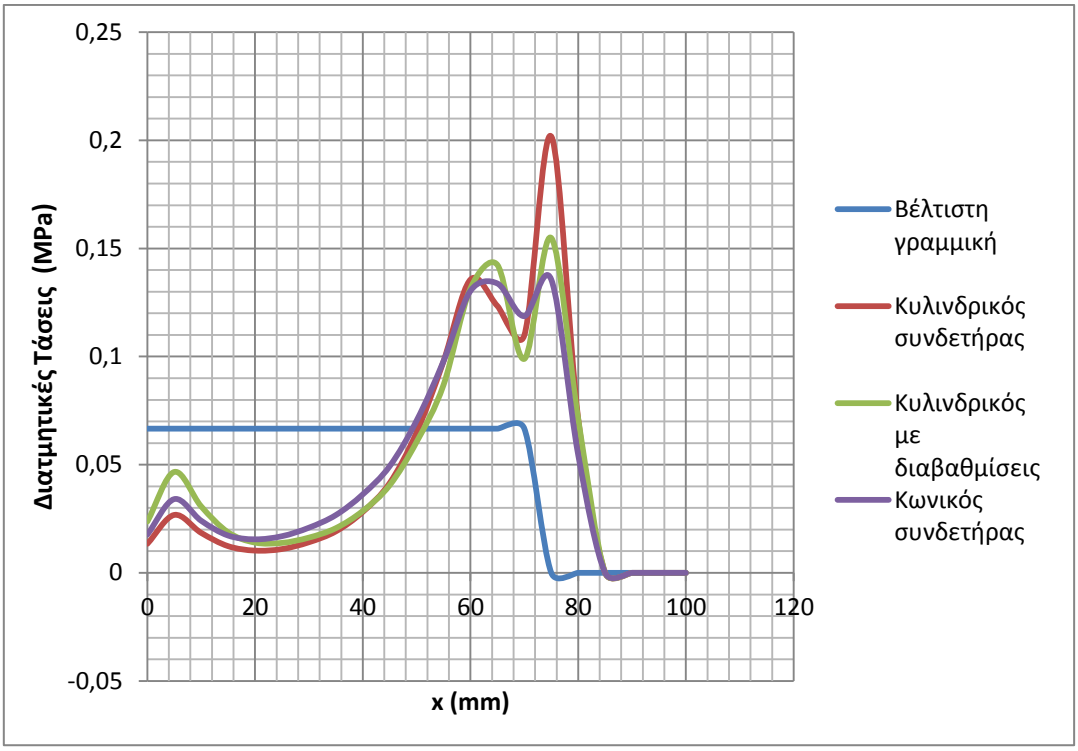


Σχήμα 2.10:Συνδετήρας κωνικής γεωμετρίας

Απο την σύγκριση των διαφορετικών γεωμετριών ,παρατηρείται μεγάλη συγκέντρωση τάσεων στην είσοδο του συνδετήρα, η οποία οφείλεται στην διαβάθμιση που δημιουργείται απο τον συνδετήρα (απότομη κλίση). Επίσης είναι εμφανές οτι μόνο ενα μικρό κομμάτι του υλικού του συνδετήρα συμμετέχει στην μεταφορά των τάσεων (μικρό ποσοστό του υλικού είναι ενεργοποιημένο).



Σχήμα 2.11:Κατανομές ορθών τάσεων

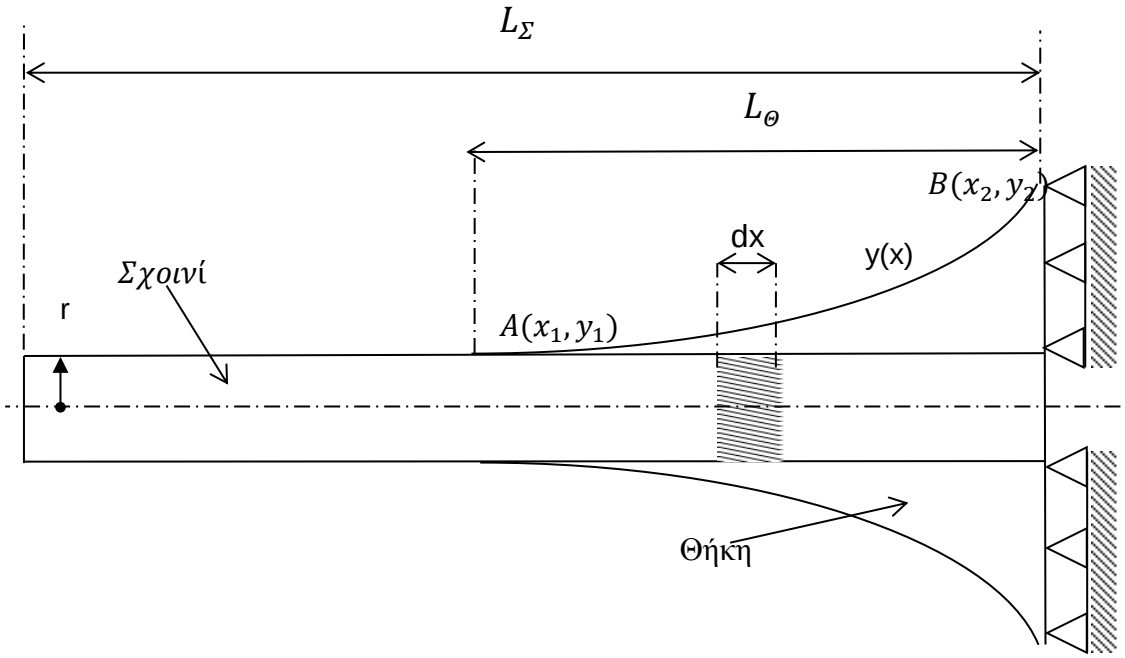


Σχήμα 2.12:Κατανομές διατμητικών τάσεων

Τα παραπάνω διαγράμματα δείχνουν την επίδραση μικρών αλλαγών στη γεωμετρία στην κατανομή των τάσεων και στην ανεπιθύμητη συγκέντρωση των διατμητικών τάσεων. Τέλος η σύγκριση με την βέλτιστη κατανομή τάσεων δείχνει την αδυναμία αυτών των 'απλών ' γεωμετριών να την προσεγγίσουν. Για αυτό το λόγο στη ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιήθηκαν αρκετά διαφορετικές γεωμετρίες.

2.3 Περιγραφή της γεωμετρίας του μοντέλου

Η βασική ιδέα είναι η διερεύνηση της δυνατότητας ενός συνδετήρα μεταβλητού πάχους να πετύχει μια μεταβλητή ενδοτικότητα κατα μήκος της τέτοια ώστε να προσεγγίσει όσο το δυνατόν περισσότερο την βέλτιστη γραμμικά μειούμενη κατανομή ορθών τάσεων. Η γεωμετρία του συνδετήρα περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.13:Γεωμετρία μοντέλου συνδετήρα

Το σχοινί μοντελοποιείται σαν ένας κύλινδρος σταθερής ακτίνας r σε όλο του το μήκος (μήκος L_Σ),ενώ ο συνδετήρας μοντελοποιείται σαν ένας κύλινδρος μήκους L_Θ και μεταβλητού πάχους y(x). Η γεωμετρία του συνδετήρα περιγράφεται απο μία εξίσωση spline:

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (2.4)$$

η οποία δίνει την τιμή του πάχους του συνδετήρα σε κάθε θέση. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι ο προσδιορισμός της εξίσωσης εκείνης ,άρα και της γεωμετρίας του συνδετήρα, η οποία καταφέρνει να πετύχει την επιθυμητή κατανομή ορθών τάσεων στο σχοινί.

Οι αρχικές διαστάσεις που επιλέχθηκαν για την μοντελοποίηση είναι οι παρακάτω

- Ακτίνα σχοινιού r=10mm
- Μήκος σχοινιού L_{Σ} =150mm
- Μήκος συνδετήρα L_{Θ}=75mm

Με βάση τις παραπάνω διαστάσεις, μπορούν αμέσως να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες του σημείου Α(x_1, y_1) του σχήματος.Το σημείο Α x_1=75, $y_1 = 10$ είναι το αρχικό σημείο του συννδετήρα. Για να εξαλειφθεί η συγκέντρωση ορθών τάσεων στην αρχή του συνδετήρα, επιλέχθηκε η κλίση της σε αυτό το σημείο να είναι ίση με μηδέν ,έτσι ώστε η αλλαγή στην γεωμετρία να γίνεται όσο πιο ομαλά είναι δυνατό.

Οπότε:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 3a_3x_1^2 + 2a_2x_1 + a = 0 \qquad (2.5)$$

Για να μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως η εξίσωση spline που περιγράφει την γεωμετρία, αφού περιέχει τέσσερις αγνώστους, χρειάζονται ακόμα δύο εξισώσεις. Αυτές οι δύο θα προκύψουν απο τις συντεταγμένες στο τελικό σημείο του συνδετήρα Β και την κλίση της σε αυτό το σημείο. Με βάση τις διαστάσεις που ορίστηκαν νωρίτερα, μπορεί άμεσα να προσδιοριστεί η τετμημένη του σημείου x_2=150. Η τεταγμένη του σημείου Β y_2αλλά και η κλίση της καμπύλης σε αυτό το σημείο αποτελούν τις δύο παραμέτρους του προβλήματος που θα μελετηθεί στην εργασία. Η ανάλυση του προβλήματος έγινε σε ένα εύρος για τις δύο μεταβλητές y_2[30,90] και $\frac{dy}{dx}$ [0,3], οι συνδυασμοί των οποίων έδωσαν τις διαφορετικές γεωμετρίες που μελετήθηκαν.

Συνοψίζοντας τις εξισώσεις που προσδιορίζουν την γεωμετρία , προκύπτει το παρακάτω σύστημα με δύο μεταβλητές y_2, $\frac{dy}{dx}\Big|_B$

$$421875a_3 + 5625a_2 + 75a_1 + a_0 = 10 \qquad (2.6)$$

$$16875a_3 + 150a_2 + a_1 = 0 \qquad (2.7)$$

$$3375000a_3 + 22500a_2 + 150a_1 + a_0 = y_2 \qquad (2.8)$$

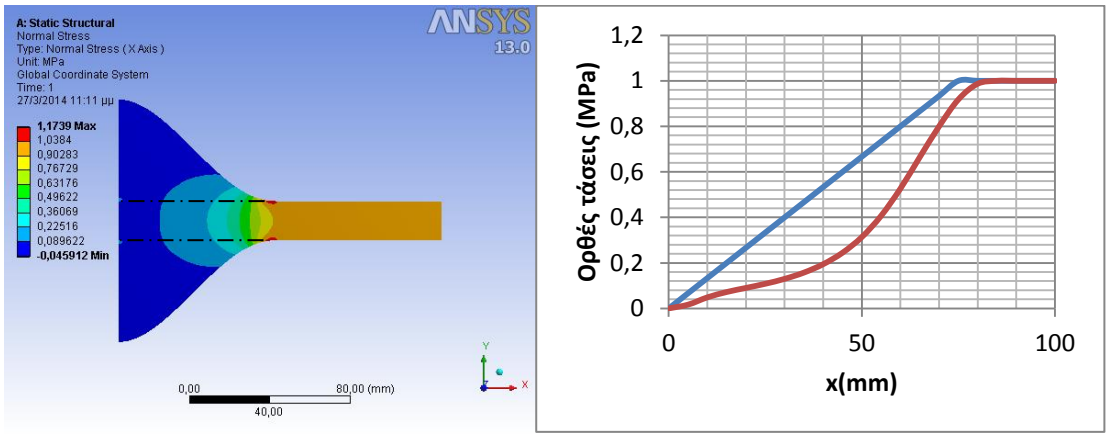
$$67500a_3 + 300a_2 + a_1 = \frac{dy}{dx}_B \qquad (2.9)$$

Το παραπάνω σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους επιλύθηκε χρησιμοποιώντας το λογισμικό της MATLAB για τις διαφορετικές τιμές των y_2 και $\frac{dy}{dx}\ |_B$ και προσδιορίστηκαν οι άγνωστοι a_0, a_1, a_2, a_3 για κάθε περίπτωση. Με γνωστή την εξίσωση της spline σχεδιάστηκαν οι διαφορετικές γεωμετρίες συνδετήρα με χρήση του σχεδιαστικού προγράμματος Autodesk Inventor και στην συνέχεια αναλύθηκαν στο Ansys Workbench 13.0.

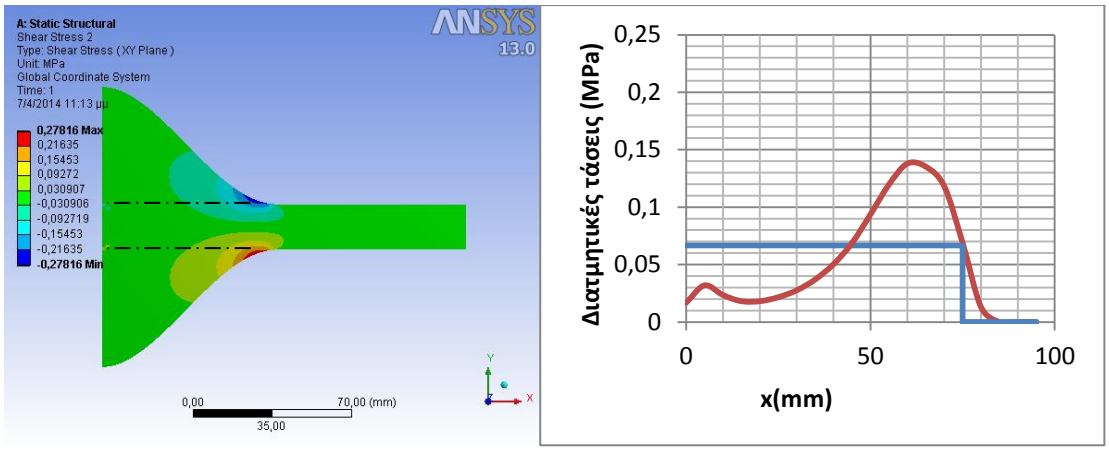
2.4 Αποτελέσματα της ανάλυσης

Το πρόβλημα της βελτιστοποιήσης της γεωμετρίας του συνδετήρα, μελετήθηκε σε ένα εύρος για τις δύο παραμέτρους του προβλήματος, το τελικό ακτινικό πάχος του συνδετήρα y_2και την κλίση της γεωμετρίας στο τέλος του συνδετήρα κάτι που ορίζεται απο την παράγωγο της εξίσωσης Spline, που προσδιορίζει την γεωμετρία του συνδετήρα, στο τελικό σημείο της $\frac{dy}{dx}\ |_B$. Για την πρώτη παράμετρο του προβλήματος y_2 επιλέχθηκε να γίνει μελέτη από 30mm εως 90mm,ενω για την κλίση επιλέχθηκε η μελέτη να γίνει για κλίσεις από μηδέν εώς 3. Για κάθε διαφορετικό συνδυασμό παραμέτρων σχεδιάστηκαν και αναλύθηκαν οι διαφορετικές γεωμετρίες. Αξίζει να σημειωθεί ότι ορισμένοι συνδυασμοί των παραμέτρων δημιουργούν γεωμετρίες οι οποίες είναι μη αποδεκτές (κυρίως για ακραίες τιμές των παραμέτρων δημιουργούνται γεωμετρίες που δεν επιτρέπουν τη συναρμογή του συνδετήρα με το σχοινί) και για αυτόν τον λόγο ο σχεδιασμός και η ανάλυση τους παραλείφθηκαν.

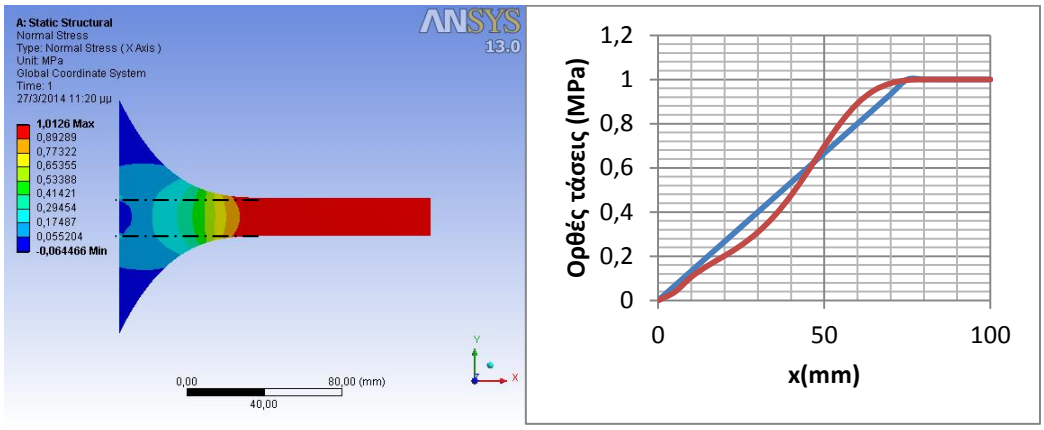
Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων για ορισμένες ενδεικτικές γεωμετρίες :



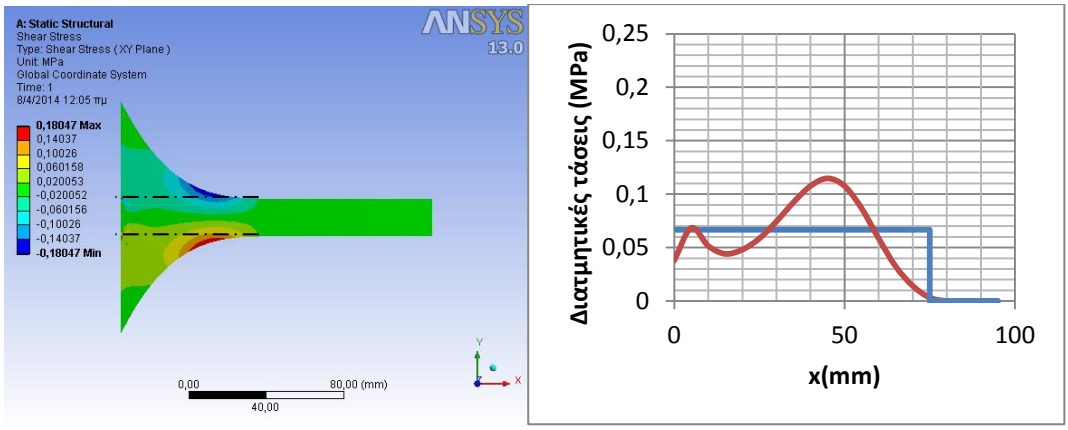
Σχήμα 2.14: Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 0



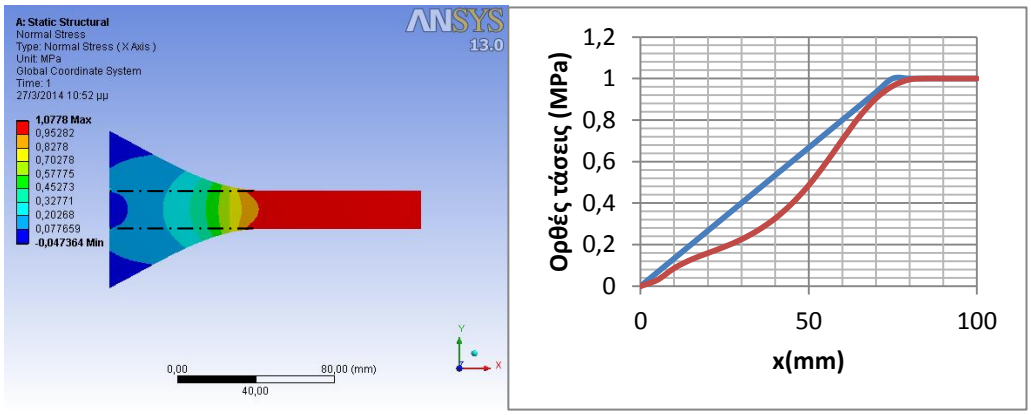
Σχήμα 2.15: Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 0



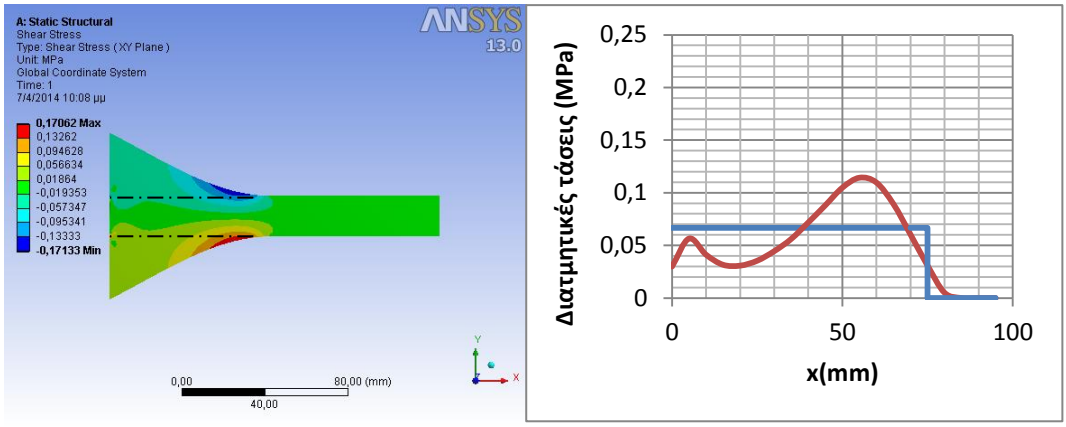
Σχήμα 2.16: Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 2.



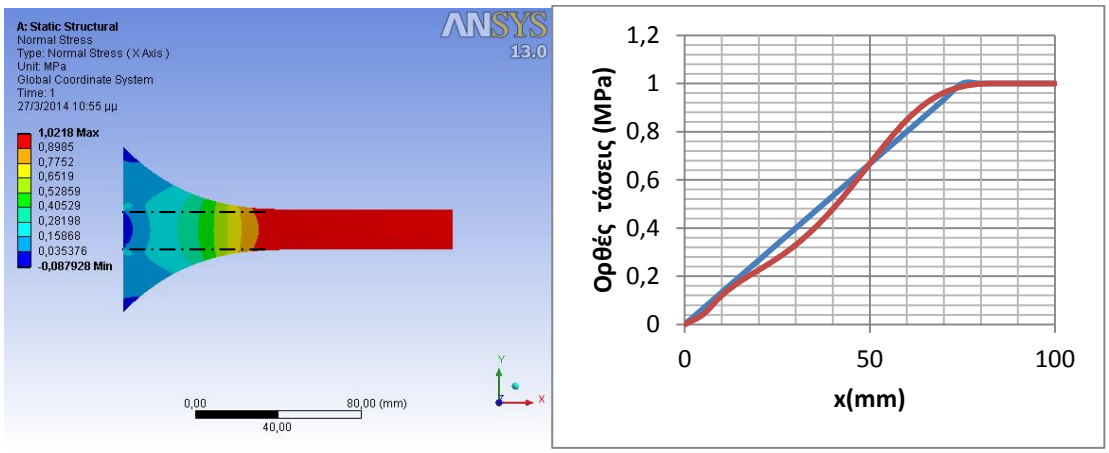
Σχήμα 2.17:Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 2



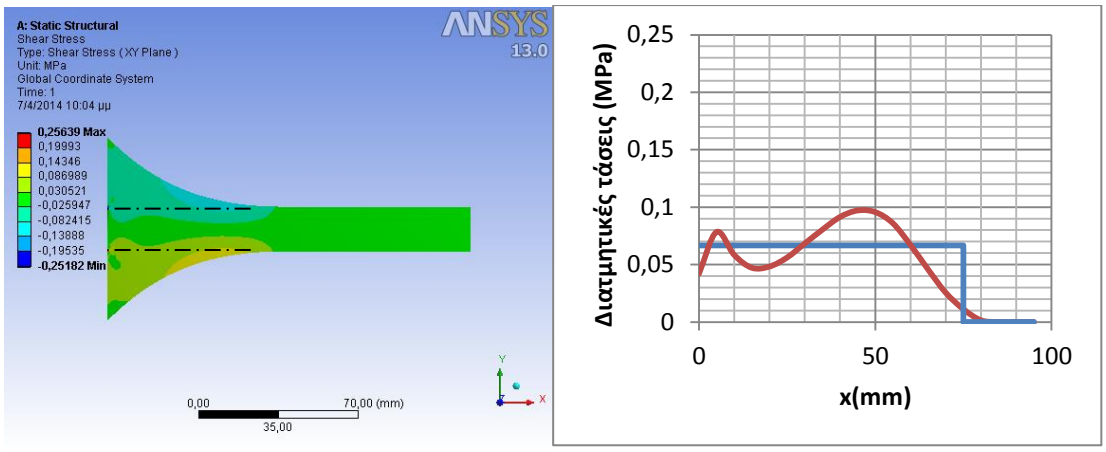
Σχήμα 2.18: Ορθές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 0,5



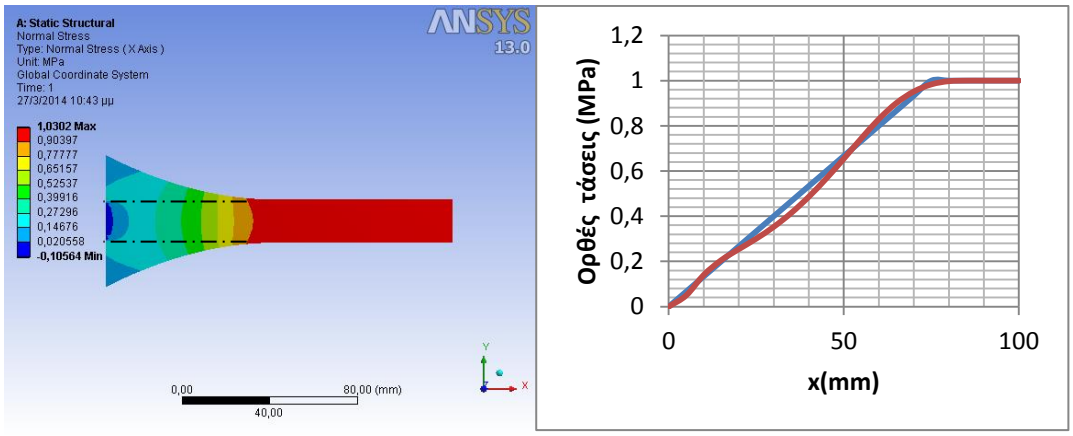
Σχήμα 2.19:Διατμητικές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 0.5



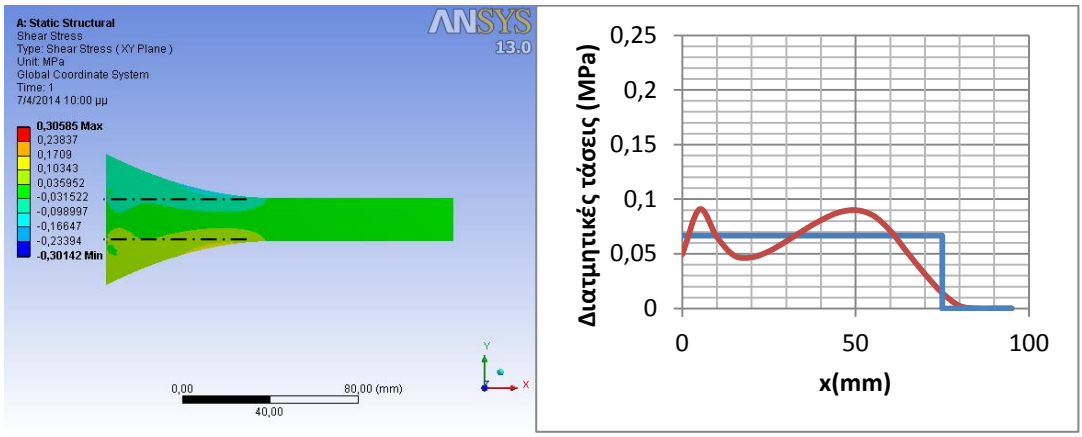
Σχήμα 2.20: Ορθές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 1



Σχήμα 2.21:Διατμητικές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 1



Σχήμα 2.22: Ορθές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0.5



Σχήμα 2.23:Διατμητικές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0.5

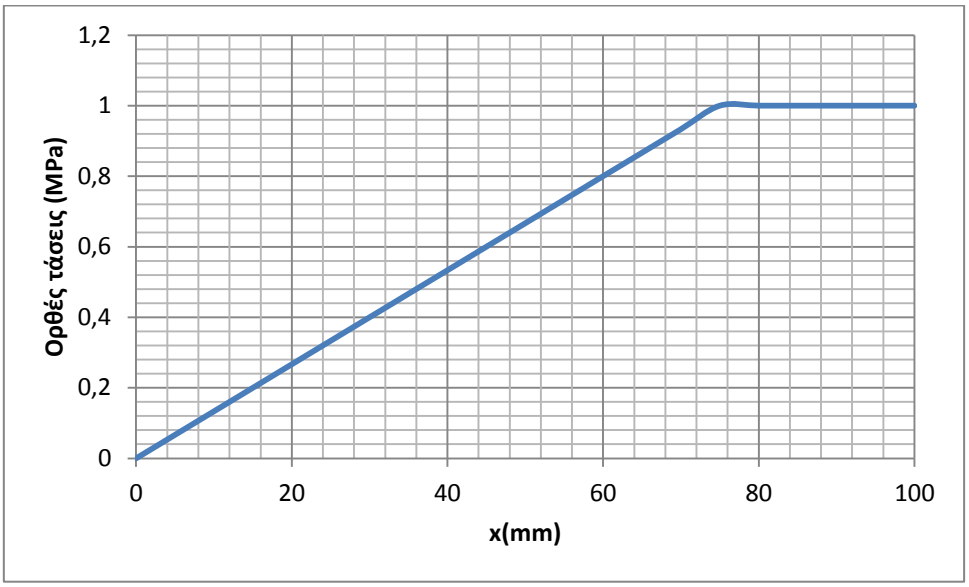
Απο την σύγκριση των παραπάνω αναλύσεων γίνεται φανερό ότι η συγκέντρωση ορθών τάσεων έχει μειωθεί αρκετά σε σύγκριση με τα αρχικά μοντέλα, κάτι αναμενόμενο λόγω της μηδενικής κλίσης της γεωμετρίας του συνδετήρα στην αρχή του.

Επίσης είναι εμφανές ότι μικρές αλλαγές στη γεωμετρία επιφέρουν πολύ μεγάλες αλλαγές στην κατανομή των τάσεων(ορθές και διατμητικές) αλλά και στο ποσοστό του υλικού του συνδετήρα που συμμετέχει στην μεταφορά των τάσεων. Έτσι παρ'ότι για ορισμένες γεωμετρίες η κατανομή των τάσεων απέχει πολύ από την βέλτιστη,υπάρχουν άλλες οι οποίες οδηγούν σε κατανομές τάσεων πολύ κοντά στην βέλτιστη επιθυμητή.

Τέλος αυτό που είναι εμφανές από την σύγκριση των κατανομών των τάσεων είναι το γεγονός ότι οι γεωμετρίες που οδηγούν σε κατανομές τάσεων κοντά στις βέλτιστες είναι αυτές στις οποίες ένα μεγάλο ποσοστό του υλικού συμμετέχει στην μεταφορά τάσεων (μεγάλο ποσοστό του υλικού είναι 'ενεργοποιημένο').

2.5 Διαδικασία αξιολόγησης

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως κατά την ανάλυση του μηχανισμού που δημιουργεί την συγκέντρωση διατμητικών τάσεων κατά μήκος του σχοινιού,η βέλτιστη κατανομή των ορθών τάσεων που οδηγεί σε μια σταθερή κατανομή διατμητικών είναι μια γραμμικά μειούμενη κατανομή.



Σχήμα 2.24:Βέλτιστη κατανομή ορθών τάσεων

Προκειμένου να αξιολογηθούν τα διαφορετικά γεωμετρικά μοντέλα (διαφορετικές γεωμετρίες συνδετήρα) έγινε σύγκριση της κατανομής των ορθών τάσεων που δημιουργούν κατά μήκος του σχοινιού με την βέλτιστη γραμμικά μειούμενη. Σαν μέτρο αξιολόγησης ο υπολογισμός της ρίζας της μέσης τετραγωνικής απόκλισης (root mean square) ή RMS της απόκλισης ανάμεσα σε κάθε κατανομή τάσεων και στην βέλτιστη , έγινε για κάθε μοντέλο.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{xi} - \sigma_{li})^2}$$

όπου

σ_{xi} είναι η τιμή της ορθής τάσης στην θέση i

σ_{li} είναι η τιμή της ορθής τάσης στην θέση i που αντιστοιχεί στην βέλτιστη γραμμική κατανομή τάσεων

Αυτή η ποσότητα εκφράζει για κάθε διαφορετικό συνδετήρα την απόκλιση που έχει η κατανομή των ορθών τάσεων κατα μήκος του σχοινιού από την βέλτιστη γραμμική.

Κατά αυτό τον τρόπο δημιουργήθηκε ένας μαθηματικός παράγοντας αξιολόγησης της κάθε γεωμετρίας με βέλτιστη αυτή την γεωμετρία θήκης με το ελάχιστο RMS.

Με αυτό τον τρόπο η διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης γεωμετρίας συνδετήρα μετασχηματίζεται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης του RMS. Για να γίνει βέβαια αυτό είναι απαραίτητη η εύρεση μια μαθηματικής σχέσης (συνάρτησης) που να συνδέει το RMS με τις δύο μεταβλητές του προβλήματος.

Έχοντας κάνει όλες τις αναλύσεις και έχοντας όλες τις κατανομές των ορθών τάσεων για τις διαφορετικές γεωμετρίες ,υπολογίστηκε για κάθε γεωμετρία θήκης το RMS και παρατίθεται στο παρακάτω πίνακα σαν συνάρτηση των παραμέτρων του προβλήματος.

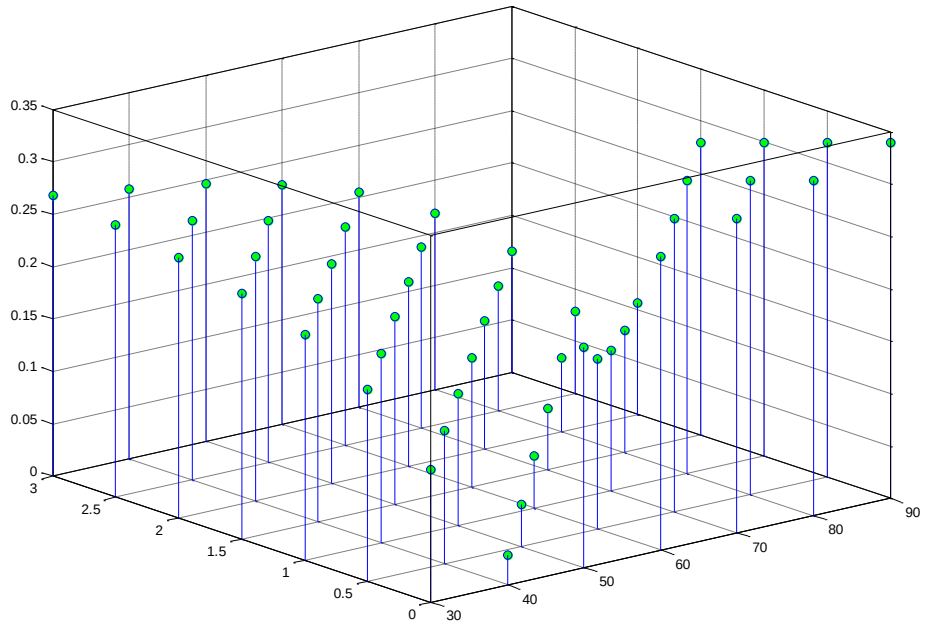
$\frac{dy}{dx}\Big\vert_B$ / y_2	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
30	0,12642	0,02828	0,21012	0,28	0,3	0,32	0,34
40	0,18314	0,12785	0,04048	0,16341	0,28	0,3	0,32
50	0,21521	0,18107	0,12686	0,05075	0,13497	0,28	0,3
60	0,23567	0,21338	0,17927	0,12487	0,0599	0,1171527	0,28
70	0,24984	0,23397	0,21096	0,17664	0,12226	0,0712590	0,106170
80	0,26014	0,24814	0,23184	0,20836	0,1731	0,1193388	0,0785101
90	0,26802	0,25877	0,24652	0,22967	0,20557	0,1697252	0,1163391

Σχήμα 2.25: Πίνακας τιμών του RMS

Κεφάλαιο 3: Βελτιστοποίηση της Γεωμετρίας του Συνδετήρα

3.1 Αριθμητική παρεμβολή RMS της απόκλισης των κατανομών των ορθών τάσεων

Οι τιμές του RMS που υπολογίστηκαν για κάθε διαφορετικής γεωμετρίας συνδετήρα, μπορούν να παρασταθούν σαν σημεία στον τρισδιάστατο χώρο.



Σχήμα 3.1: Απεικόνιση του RMS συναρτήσει των δύο παραμέτρων του προβλήματος

Η τιμή του RMS εξαρτάται από την τιμή των δύο πάραμέτρων του προβλήματος. Άρα μπορεί κανείς να υποθέσει οτι υπάρχει μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η γραφική παράσταση της οποίας να περνά απο τα παραπάνω σημεία. Η συνάρτηση αυτή περιγράφει ή καλύτερα μπορει να προβλέψει την τιμή του RMS για οποιαδήποτε συνδυασμό των δύο παραμέτρων του προβλήματος. Άν ήταν γνωστή αυτή η συνάρτηση , θα μπορούσε να υπολογιστεί το ελάχιστό της μέσα στο εύρος των δύο μεταβλητών, το οποίο θα αντιστοιχούσε σε μια γεωμετρία θήκης που θα έδινε μια κατανομή ορθών τάσεων με την ελάχιστη δυνατή απόκλιση απο την βέλτιστη. Προκειμένου να βρεθεί η ζητούμενη συνάρτηση,εξετάστηκε η χρήση διάφορων μεθόδων αριθμητικής παρεμβολής.

Δεδομένου ενός αριθμού σημείων, παρεμβολή ονομάζεται η εύρεση μίας συνάρτησης η οποία επιτρέπει την παρεμβολή (εισαγωγή) κι άλλων σημείων ανάμεσα ή και πέρα απο τα ήδη υπάρχοντα.

Το πρόβλημα της εύρεσης ενός τύπου (εξίσωση) απο αυτά τα σημεία έχει άπειρες λύσεις,υπάρχουν δηλαδή άπειρες συναρτήσεις που να δίνουν σαν αποτελέσματα τις ζητούμενες τιμές. Το γεγονός αυτό κάνει το πρόβλημα ιδιαίτερα δύσκολο και για αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή του τύπου της συνάρτησης καθώς πολλές φορές η διαδικασία της παρεμβολής μπορεί να καταλήξει σε ιδιαίτερα πολύπλοκες και δύσχρηστες εκφράσεις.

Οι πιό συνηθισμένες μέθοδοι παρεμβολής χρησιμοποιούν πολυώνυμα ,τα οποία έχουν πολύ καλές ιδιότητες τόσο στην παραγώγιση,όσο και στην ολοκλήρωση.Τα πιό συνηθισμένα πολυώνυμα παρεμβολής είναι τα παρακάτω:

- Πολυώνυμα Lagrange
- Πολυώνυμα Hermite
- Παρεμβολή με κυβικές Splines

Οι παραπάνω αριθμητικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται κυρίως για την παρεμβολή καμπυλών, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την παρεμβολή επιφανειών με μικρές μετατροπές. Και οι τρεις μέθοδοι χρησιμοποιούν πολυώνυμα για την παρεμβολή και κάθε μια από αυτές έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Η τμηματικά συνεχής κατά Lagrange παρεμβολή παράγει ασυνέχεια στην κλίση της καμπύλης παρεμβολής στα κομβικά σημεία. Το ότι η ασυνέχεια αυτή παύει να υφίσταται αν χρησιμοποιηθεί η τμηματικά συνεχής κατά Hermite παρεμβολή αντισταθμίζεται από το γεγονός οτι πρέπει να είναι γνωστές οι τιμές της πρώτης παραγώγου. Και στις δύο όμως μεθόδους , η δεύτερη παράγωγος στα κομβικά σημεία παραμένει ασυνεχής. Η αριθμητική ολοκλήρωση με τμηματικά συνεχείς κυβικές splines εξασφαλίζει τη συνέχεια πρώτης και δεύτερης παραγώγου ,ωστόσο απαιτεί υποθέσεις για την πρώτη παράγωγο στο πρώτο και το τελευταίο σημείο. Ένα άλλο βασικό μειονέκτημα της παρεμβολής επιφανειών με πολυώνυμα είναι η αδυναμία τους να προσεγγίσουν με καλή ακρίβεια επιφάνειες με αρκετές καμπυλότητες, καθώς και η δυσκολία στην παρεμβολή αρκετά μεγάλου αριθμού σημείων με ικανοποιητική ακρίβεια.

Τα εμπορικά λογισμικά αριθμητικής παρεμβολής,αν και προσεγγίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια προβλήματα παρεμβολής καμπυλών,η ακρίβεια τους μειώνεται σε προβλήματα παρεμβολής επιφανειών και

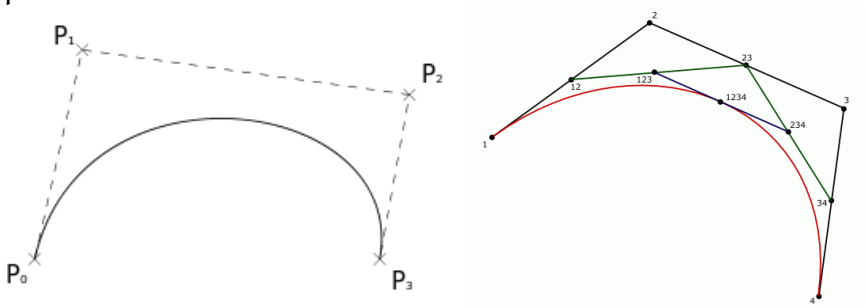
εμφανίζεται περιορισμός όσον αφορά τον μέγιστο αριθμό σημείων που γίνεται η παρεμβολή,κατι που συνδεέται με την πολυπλοκότητα των συναρτήσεων που παράγουν. Συμπερασματικά τέτοια λογισμικά μπορούν να κάνουν παρεμβολή μόνο με χαμηλού βαθμού πολυώνυμα και με κακή ακρίβεια,ενώ πολλές φορές η προσπάθεια αύξησης της ακρίβειας οδηγεί σε πολύπλοκες συναρτήσεις.

Τα παραπάνω μειονεκτήματα των απλών μεθόδων παρεμβολής σε συνδυασμό με την αδυναμία των εμπορικών λογισμικών να πετύχουν την επιθυμητή ακρίβεια οδήγησε στην χρήση πιο πολύπλοκων αριθμητικών μεθόδων. Η μέθοδος που επιλέχθηκε είναι η παρεμβολή με μια επιφάνεια Bezier-Bernstein.

Οι καμπύλες Bezier-Bernstein αποτελούν έναν πολύ απλό και ευέλικτο τρόπο να προσεγγιστεί μια γεωμετρική μορφή χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Η βασική ιδιότητα των καμπυλών (αλλά και των επιφανειών που παράγονται με βάση την θεωρία του Bezier) αυτών είναι οτι η καμπύλη ξεκινά απο το πρώτο σημείο ελέγχου και τερματίζει στο τελευταίο.

Οι καμπύλες και οι επιφάνειες Bezier-Bernstein χρησιμοποιούνται για την αριθμητική προσέγγιση γεωμετρικών μορφών και δεν έχουν την δυνατότητα να κάνουν παρεμβολή. Για τον λόγο αυτό δημιουργήθηκε ειδικός αλγόριθμος βασισμένος στην θεωρία Bezier-Bernstein που κάνει παρεμβολή. Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος που λειτουργεί ο αλγόριθμος αυτός,είναι αναγκαία η παρουσίαση της θεωρίας Bezier.

Μία καμπύλη Bézier ορίζεται από ένα σύνολο σημείων ελέγχου από P_0 έως P_n, όπου n ο βαθμός της καμπύλης (n = 1 για γραμμική, 2 για τετραγωνική, 3 για κυβική, κλπ.). Το πρώτο και τελευταίο σημείο ελέγχου είναι πάντα τα δύο σημεία που αποτελούν τα άκρα της καμπύλης. Ωστόσο, τα ενδιάμεσα σημεία ελέγχου (αν υπάρχουν) γενικά δεν κείτονται στην καμπύλη.



Σχήμα 3.2: Γραφική απεικόνιση καμπυλών Bezier

Αλγόριθμος de Casteljau

Ο αλγόριθμος de Casteljau αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την σχεδίαση καμπυλών αλλά και επιφανειών. Ο αναδρομικός αυτός αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθεί μια καμπύλη ή μια επιφάνεια Bezier. Μαθηματικά εκφράζεται με την παρακάτω σχέση:

$$r_i^a(t) = (1-t)r_i^{a-1}(\mathrm{t}) + t\, r_{i+1}^{a-1}(\mathrm{t})$$

Ο παραπάνω αναδρομικός τύπος έχει δύο μεταβλητές, το a και το i.Όταν γίνεται ο υπολογισμός με το χέρι είναι χρήσιμο να καταγράφονται οι συντελεστές σχηματίζοντας ένα τρίγωνο όπως αυτό που ακολουθεί:

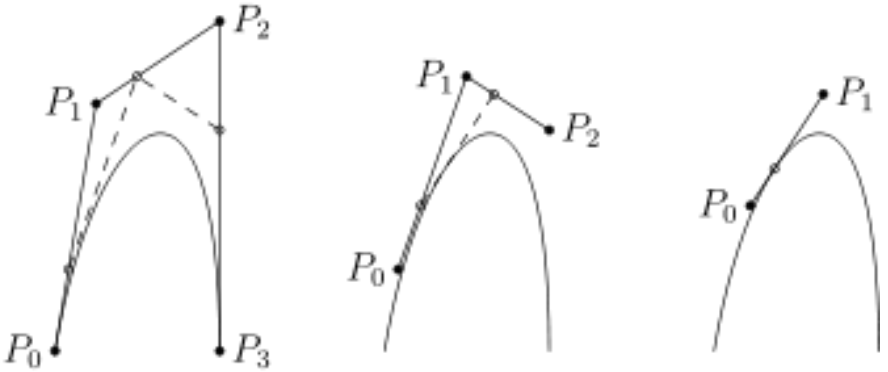
$$\begin{bmatrix} \mathrm{r}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{r}_\mathrm{n} & \cdots & \mathrm{r}_0^\mathrm{n} \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω σχηματισμός ονομάζεται και σχηματισμός de Casteljau και αναδρομικά η κάθε στήλη δημιουργεί την επόμενη στα δεξιά της με ένα στοιχείο λιγότερο καταλήγοντας στο $r_0^N(\mathrm{t})$ που είναι και η ζητούμενη καμπύλη Bezier. Έτσι ο παραπάνω επαναληπτικός αλγόριθμος παράγει εύκολα και αναδρομικά μια καμπύλη Bezier με N+1 σημεία ελέγχου.Η γεωμετρική ερμηνεία του αλγόριθμου του De Casteljau είναι απλή.

Θεωρούμε μία καμύλη Μπεζιέ με σημεία ελέγχου P_0 έως P_n. Ενώνοντας τα συνεχόμενα σημεία δημιουργείται το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης.

Στη συνέχεια, υποδιαιρούμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα του πολυγώνου αυτού με ρυθμό t : (1-t) και συνδέουμε τα σημεία που παίρνουμε. Με το τρόπο αυτό φτάνουμε σε ένα νέο πολύγωνο το οποίο έχει ένα τμήμα λιγότερο.

Η ακόλουθη εικόνα δείχνει αυτήν τη διαδικασία για μία κυβική καμπύλη Bezier:



Σχήμα 3.3: Περιγραφή γραφικής κατασκευής καμπύλης Bezier

Bezier-Bernstein

Παρά την απλότητα του αλγορίθμου de Casteljau η καμπύλες Bezier συνήθως εκφράζονται μαθηματικά με χρήση των πολυωνύμων Bernstein με την παρακάτω αναλυτική έκφραση:

$$r_0^t(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, B_i^N(t)$$

η οποία είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων θέσης των σημείων ελέγχου και των συντελεστών οι οποίοι προσδιορίζονται απο τα πολυώνυμα Bernstein τα οποία δίνονται απο την παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{B}_i^N(t) = \binom{N}{i} t^i (1-t)^{N-i}$$

Όπου

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

Οι συντελεστές-πολυώνυμα Bernstein μπορούν να παρασταθούν και σε μητρωική μορφή:

$$\begin{bmatrix} B_0^0(t) & \cdots & B_0^N(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_N^N(t) \end{bmatrix}$$

Οπότε έχοντας υπολογίσει τα πολυώνυμα Bernstein,τα σημεία μιας καμπύλης Bezier μπορούν να υπολογιστούν απο τις παρακάτω σχέσεις:

$$x^N(t) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(\mathrm{t}) \; x_i$$

$$y^N(t) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(\mathrm{t}) \; y_i$$

$$z^N(t) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(\mathrm{t}) \; z_i$$

Μητρωική Γραφή Καμπύλης Bezier

Μια πίο κομψή και βολική απεικόνιση της θεωρίας Bezier γίνεται μέσα απο την μητρωική γραφή της η οποία δίνει κάθε σημείο της καμπύλης Bezier απο την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{P(t)} = \sum_{i=0}^{n} P_i \, C_i^N(\mathrm{t})$$

ενώ οι συντεταγμένες του κάθε σημείου δίνονται:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i C_i^N(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N} y_i C_i^N(t)$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^{N} z_i C_i^N(t)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & \cdots & m_{0,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N,0} & \cdots & m_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}$$

και τα στοιχεία $m_{i,j}$ ορίζονται ως:

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i}$$

Αντίστοιχα μπορεί να παρασταθεί μια επιφάνεια Bezier:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j}$$

Όπου

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (i-u)^{n-i}$$

$$B_j^m(v) = \frac{m!}{j!(m-j)!} v^j (j-v)^{m-j}$$

Εάν τεθεί

$$M = \begin{bmatrix} m_{0,0} & \cdots & m_{0,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N,0} & \cdots & m_{N,N} \end{bmatrix}$$

τότε η σχέση που δίνει την επιφάνεια Bezier γίνεται

$$P(u,v) = [\, u^0, u^1, u^2, \cdots, u^{n-1}] \; M^T \; P_{i,j} \; M \begin{bmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^{m-1} \end{bmatrix}$$

3.2 Αλγόριθμος παρεμβολής Bezier

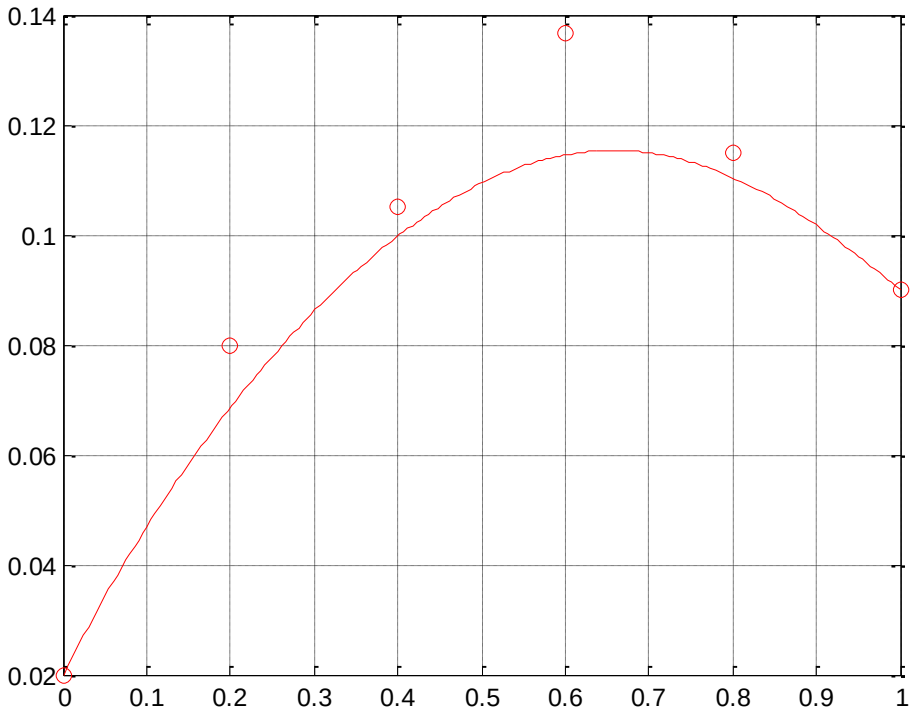
Ωστόσο,όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως,οι καμπύλες και οι επιφάνειες Bezier χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση σημείων και όχι για παρεμβολή. Προκειμένου να γίνει παρεμβολή των ζητούμενων σημείων με την θεωρία Bezier-Bernstein δημιουργήθηκε ένας επαναληπτικός αλγόριθμος ο οποίος δημιουργεί ένα σύνολο ψευδο-σημείων ελέγχου κατά τέτοιο τρόπο ώστε η παραγόμενη απο αυτά επιφάνεια να περνά απο τα ζητούμενα προς παρεμβολή σημεία. Προκειμένου να γίνει αυτό επαναληπτικά απαιτείται ένας μηχανισμός ο οποίος να μεταβάλλει τα σημεία ελέγχου και παράλληλα να ελέγχει την επίδραση των αλλαγών στην παραγόμενη επιφάνεια. Ο μηχανισμός αυτός πρέπει επίσης να εξασφαλίζει την σύγκλιση του αλγορίθμου,λαμβάνοντας κάποιο είδος ανάδρασης μετά απο κάθε επανάληψη και να μεταβάλλει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν τα σημεία ελέγχου,αφού αν τα σημεία μεταβάλλονται κατά μιά σταθερή ποσότητα καθε φορά τότε η παρεμβολή των σημείων θα είναι δύσκολη και αργή διαδικασία. Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου για την περίπτωση της παρεμβολής μια καμπύλης σε ένα σύνολο σημείων. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για την παρεμβολή μίας επιφάνειας σε ένα 3-D πρόβλημα.

<u>Βημα 1</u>

Εισαγωγή των σημείων προς παρεμβολή (target points)

<u>Βήμα 2</u>

Ο αλγόριθμος σε αυτό μόνο το βήμα χρησιμοποιεί τα σημεία (target points) ως σημεία ελέγχου (control points) και εφαρμόζοντας την θεωρία Bezier-Bernstein σε μητρωική μορφή δημιουργεί μια καμπύλη ή επιφάνεια. Η καμπύλη ή η επιφάνεια που δημιουργείται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, περνά από ελάχιστα σημεία, κυρίως στα άκρα της επιφάνειας, ενώ τα εσωτερικά σημεία ελέγχου καθορίζουν μόνο την καμπυλότητα της επιφάνειας.



Σχήμα 3.4: Καμπύλη Bezier με σημεία ελέγχου τα σημεία προς προσέγγιση

Βήμα 3

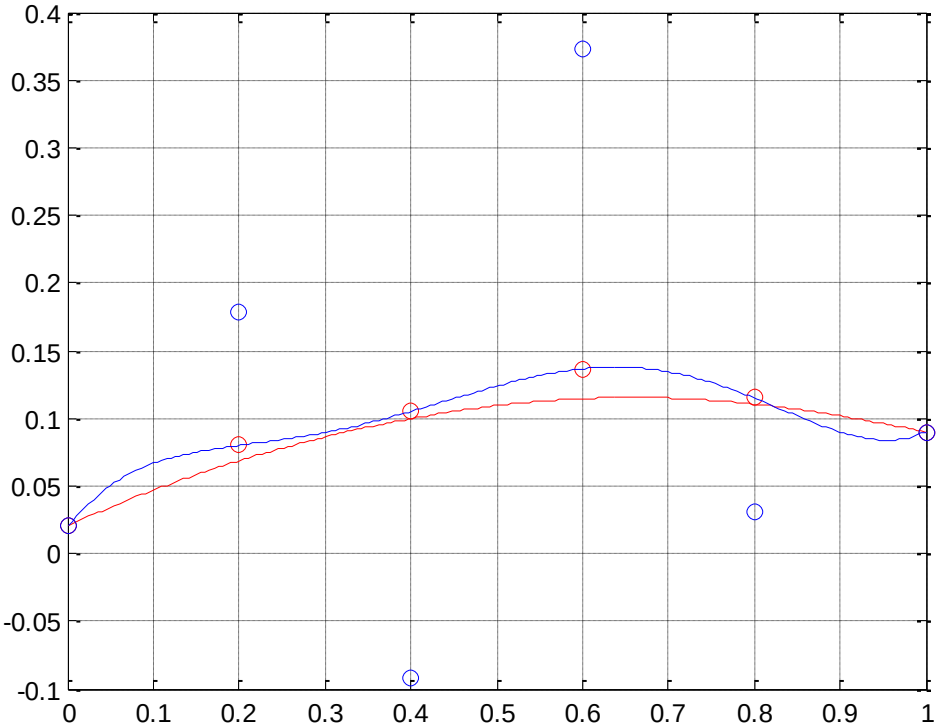
Υπολογίζεται η απόσταση ανάμεσα στα ζητούμενα προς προσέγγιση σημεία(target points) και στα αντίστοιχα προς αυτά (σημεία με ίδιες τιμές των αδιάστατων μεταβλητών)σημεία της επιφάνειας. Στην συνέχεια μεταβάλονται τα σημεία ελέγχου(control points) κατά αυτή την απόσταση και παράγεται ένα νεο σύνολο σημείων ελέγχου.

Βήμα 4

Με τα νέα σημεία ελέγχου δημιουργείται μια νέα επιφάνεια και υπολογίζεται ξανά η απόσταση ανάμεσα στα ζητούμενα προς προσέγγιση σημεία και τα αντίστοιχα σημεία της επιφάνειας.

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται έως ότου η απόκλιση όλων των σημείων της επιφάνειας από τα ζητούμενα σημεία προσεγγισης γίνει μικρότερη από ένα όριο που θέτει ο χρήστης.

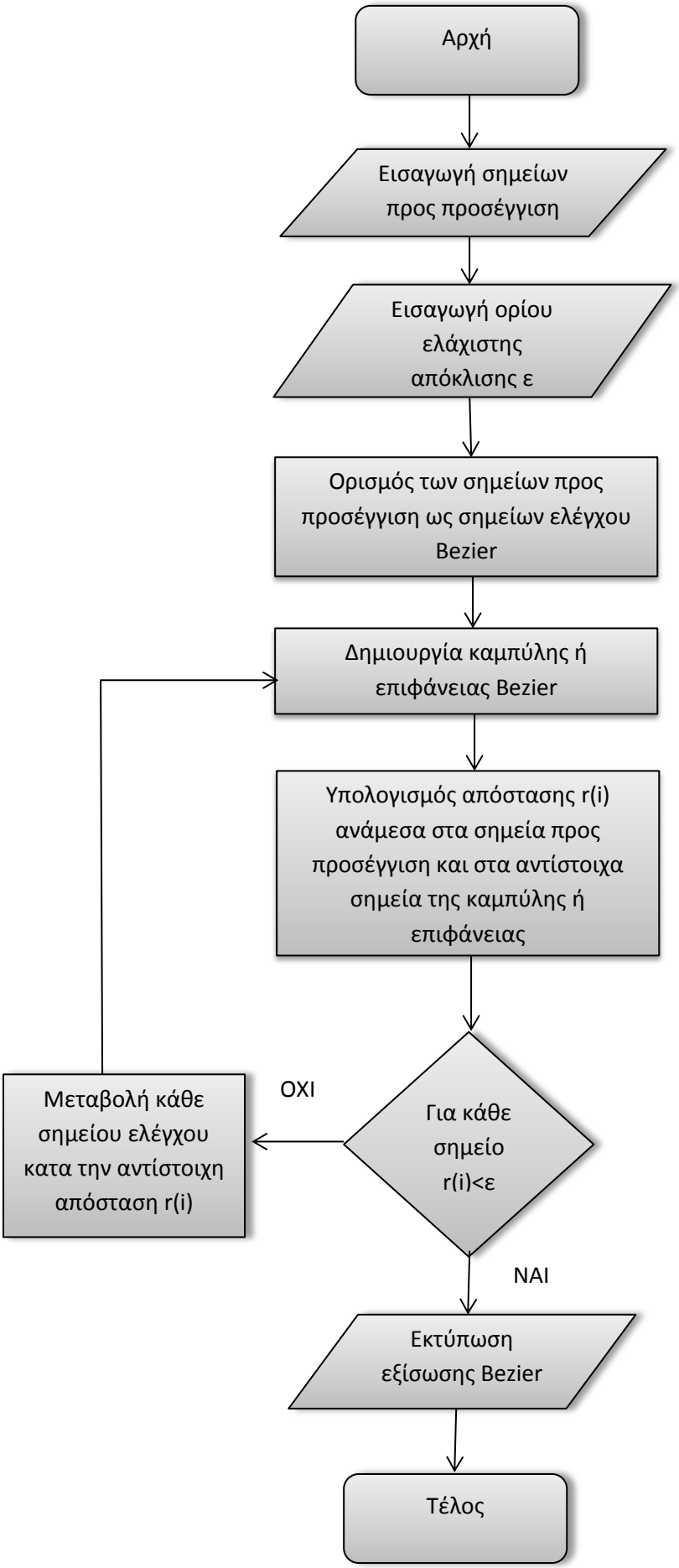
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η προσέγγιση που έγινε στα σημεία (σημεία με κόκκινο) με χρήση του αλγορίθμου σε σύγκριση με την καμπύλη Bezier.



Σχήμα 3.5: Σύγκριση καμπυλών

Με κόκκινο παριστάνεται η καμπύλη Bezier και με μπλέ χρώμα η καμπύλη που προκύπτει με χρήση του αλγορίθμου παρεμβολής. Με μπλέ χρώμα παριστάνονται τα σημεία ελέγχου που παράγουν την καμπύλη ενώ με κόκκινο τα ζητούμενα προς προσέγγιση σημεία.

Το βασικό πλεονέκτημα του συγκεκριμένου αλγορίθμου είναι ο τρόπος που γίνεται η μεταβολή των σημείων ελέγχου καθώς εξασφαλίζεται η σύγκλιση και η προσέγγιση των σημείων με μεγάλη ακρίβεια. Η δυνατότητα σύγκλισης του αλγορίθμου μπορεί να γίνει αντιληπτή αν εξεταστεί η χειρότερη περίπτωση που μπορεί να αντιμετωπίσει κατα τις επαναλήψεις την περίπτωση δηλαδή η επιφάνεια να περάσει κάτω απο τα σημεία ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση η απόσταση των σημείων γίνεται αρνητική οπότε μεταβάλλοντας τα σημεία ελέγχου κατά μια αρνητική ποσότητα η καμπύλη ή η επιφάνεια τείνει να επανέλθει στα ζητούμενα προς παρεμβολή σημεία


Αρχή
Εισαγωγή σημείων προς προσέγγιση
Εισαγωγή ορίου ελάχιστης απόκλισης ε
Ορισμός των σημείων προς προσέγγιση ως σημείων ελέγχου Bezier
Δημιουργία καμπύλης ή επιφάνειας Bezier
Υπολογισμός απόστασης r(i) ανάμεσα στα σημεία προς προσέγγιση και στα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης ή επιφάνειας
Για κάθε σημείο r(i)<ε
ΟΧΙ
Μεταβολή κάθε σημείου ελέγχου κατα την αντίστοιχη απόσταση r(i)
ΝΑΙ
Εκτύπωση εξίσωσης Bezier
Τέλος

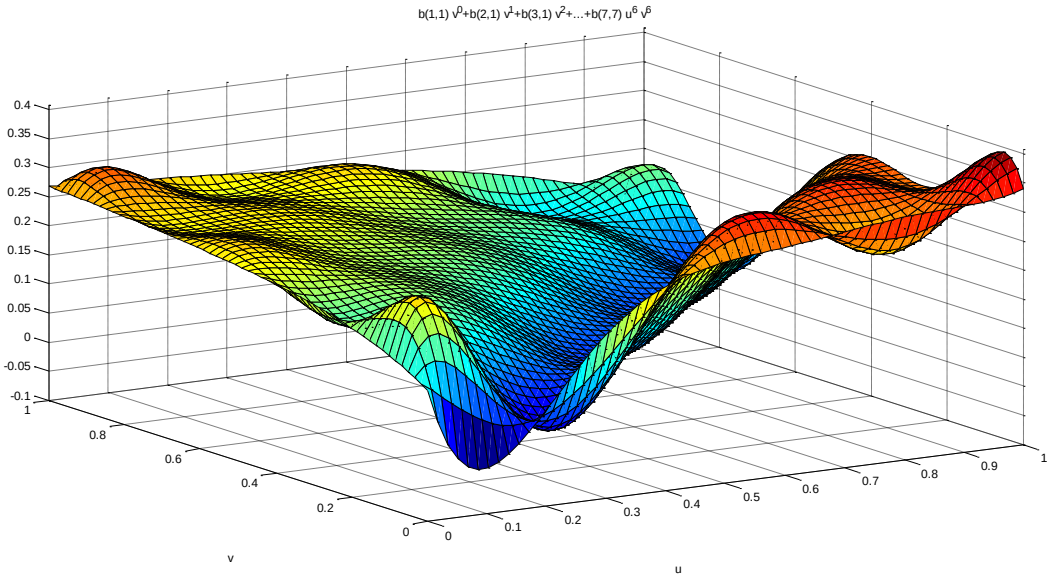
3.3 Παρεμβολή ααποτελεσμάτων

Με βάση τον αλγόριθμο που περιγράφηκε προηγουμένως έγινε παρεμβολή στα σημεία του RMS με σκοπό να βρεθεί η μαθηματική έκφραση που περιγράφει το RMS συναρτήσει των δύο παραμέτρων του προβλήματος.

$\frac{dy}{dx}$ l_B / y_2	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
30	0,12642	0,02828	0,21012	0,28000	0,30000	0,32000	0,34000
40	0,18314	0,12785	0,04048	0,16341	0,28000	0,30000	0,32000
50	0,21521	0,18107	0,12686	0,05075	0,13497	0,28000	0,30000
60	0,23567	0,21338	0,17927	0,12487	0,0599	0,11715	0,28000
70	0,24984	0,23397	0,21096	0,17664	0,12226	0,07125	0,106170
80	0,26014	0,24814	0,23184	0,20836	0,17310	0,11933	0,07851
90	0,26802	0,25877	0,24652	0,22967	0,20557	0,16972	0,11633

Σχήμα 3.7: Πίνακας τιμών του RMS

Έτσι προέκυψε η παρακάτω εξίσωση. Η εξίσωση αυτή περνά από όλα τα σημεία με ακρίβεια πέμπτου δεκαδικού ψηφίου και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.8: Επιφάνεια παρεμβολής στα σημεία του RMS

Η εξίσωση της παραπάνω επιφάνειας είναι έκτου βαθμού ως προς u και έκτου βαθμού ως προς v:

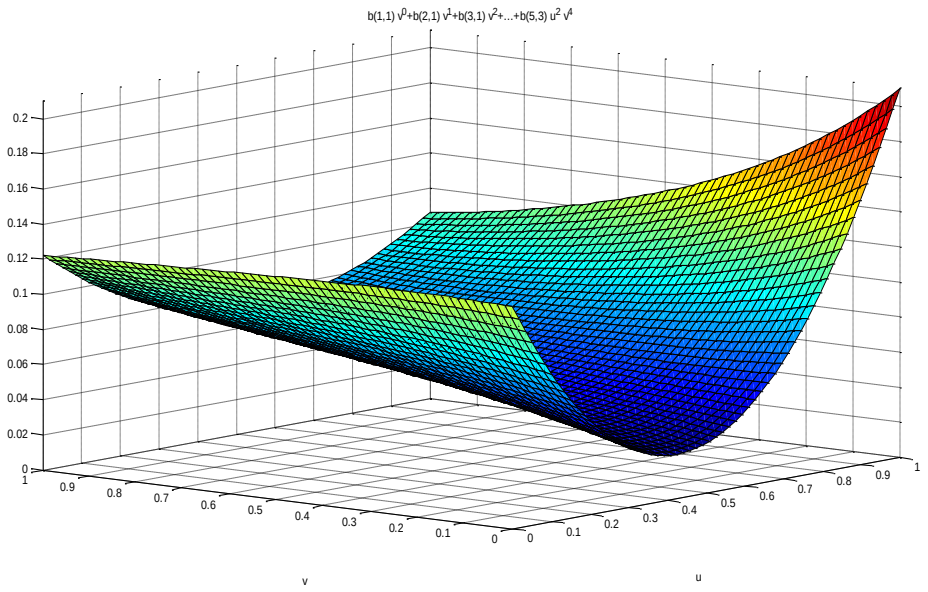
$$z(u,v) = \sum_{i=1}^{7}(\sum_{j=1}^{7} B_{i,j}\, v^{j-1})u^{i-1}$$

όπου ο πίνακας B είναι ο παρακάτω όπως προκύπτει απο τη MATLAB:

0,126	-3,8716	32,36164	-96,5996	139,8649	-99,1602	27,61884
0,460926	220,5494	-2554,86	10038,74	-17723,5	14467,16	-4446,25
-0,89841	-2011,58	24125,03	-98424,8	179081,8	-149606	46805
1,302262	7213,456	-87738,1	364403	-673860	570675,1	-180551
-1,29739	-12285,7	150608,6	-632216	1181249	-1009551	321901,4
0,797112	9965,959	-122781	519021,2	-976642	840087	-269379
-0,2225	-3098,91	38308,26	-162727	307755,5	-265975	85643,13

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση ,αν και περνά απ'όλα τα σημεία με πολύ καλή ακρίβεια,εμφανίζει αυξημένες καμπυλότητες σε ορισμένα σημεία οι οποίες οφείλονται στην φύση των πολυωνυμικών συναρτήσεων και στον μεγάλο βαθμό της συνάρτησης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η παραπάνω μαθηματική έκφραση να περιγράφει την φυσική συμπεριφορά του RMS αλλά όχι με πολύ καλή ακρίβεια.

Προκειμένου να βελτιωθεί η ακρίβεια με την οποία περιγράφεται το φυσικό φαινόμενο,απαιτείται είτε η παρεμβολή λιγότερων σημείων (έτσι ώστε να μειωθεί ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης και να δημιουργηθεί μια πιο ομαλή επιφάνεια),είτε να ακολουθηθεί κάποια διαδικαία εξομάλυνσης (smoothing). Ωστόσο είναι εμφανές απο τον πίνακα του RMS ότι οι μικρές τιμές του (τιμές που αντιστοιχούν σε γεωμετρίες που οδηγούν σε κατανομές τάσεων κοντά στις βέλτιστες) βρίσκονται σε μια διαγώνια περιοχή του πίνακα. Αυτό το γεγονός επιτρέπει να γίνει παρεμβολή μόνο εκείνων των σημείων που βρίσκονται σε αυτή την διαγώνιο και να αμεληθούν τα υπόλοιπα σημεία τα οποία έχουν αρκετά μεγαλύτερες τιμές RMS, χωρίς αυτό να δημιουργεί πρόβλημα στην διαδικασία της βελτιστοποίησης. Έτσι έγινε μια νέα παρεμβολή,πιο εστιασμένη, σε λιγότερα σημεία και προέκυψε η παρακάτω επιφάνεια με σχέση:



Σχήμα 3.9: Επιφάνεια παρεμβολής στα επιλεγμένα σημεία της διαγωνίου του RMS

$$z(u,v) = \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{3} B_{i,j}\, v^{j-1}\right)u^{i-1}$$

όπου ο πίνακας B είναι ο παρακάτω:

0,126423	-0,47622786	0,559929864
0,0134843	0,40303159	-0,653927096
-0,0382281	-0,14322773	0,41714171
0,03155699	-0,06109	-0,114024945
-0,0109732	0,08959643	-0,037294955

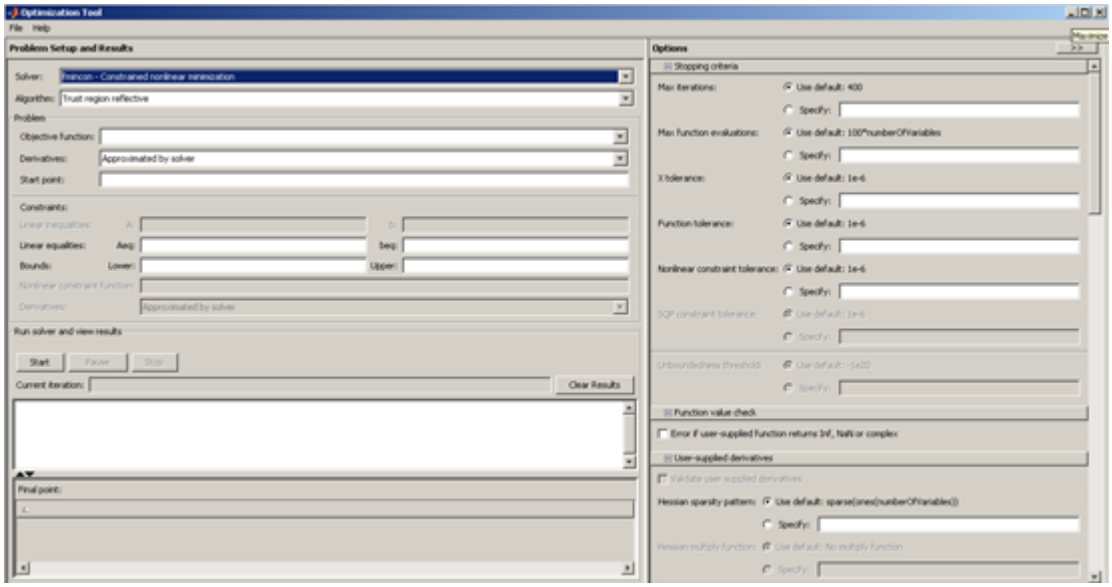
Η συνάρτηση που προέκυψε ,είναι μικρότερου βαθμού και αρκετά πιο ομαλή όπως αναμένονταν. Έχοντας πλέον αυτή την μαθηματική σχέση είναι δυνατόν να γίνει έλαχιστοποίηση της με κάποιο αλγόριθμο ελαχιστοποίησης και να βρεθεί ο συνδυασμός των παραμέτρων του προβλήματος που οδηγεί στην βέλτιστη γεωμετρία θήκης.

3.4 Διαδικασία ελαχιστοποίησης της συνάρτησης του RMS

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εύρεση της βέλτιστης γεωμετρίας συνδετήρα που οδηγεί σε μία σταθερή κατανομή διατμητικών τάσεων, εξαλείφοντας με αυτόν τον τρόπο τις συγκεντρώσεις τάσεων και αυξάνοντας το φορτίο που μπορεί να αντέξει το σχοινί. Αυτό είναι ένα πρόβλημα μηχανικής το οποίο όμως μπορεί να μετατραπεί σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης του RMS που βρέθηκε προηγουμένως.

Η συνάρτηση αυτή είναι μια απλή πολυωνυμική συνάρτηση της οποίας το ελάχιστο είναι εύκολο να βρεθεί χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο ελαχιστοποίησης.Το γεγονός ότι η συνάρτηση αυτή είναι αρκετά ομαλή ,κάνει την διαδικασία της ελαχιστοποίησης ακόμα πιο εύκολη ,αφού διευκολύνει την σύγκλιση του αλγορίθμου και μειώνει την πιθανότητα ο αλγόριθμος να 'κολήσει ' σε κάποιο τοπικό ελάχιστο.

Προκειμένου να γίνει η ελαχιστοποίηση επιλέχθηκε η συνάρτηση fmincon της MATLAB. Η fmincon κάνει ελαχιστοποίηση της ζητούμενης συνάρτησης δύο μεταβλητών υπό περιορισμούς.



Σχήμα 3.10:Επιφάνεια εργασίας MATLAB για ελαχιστοποίηση

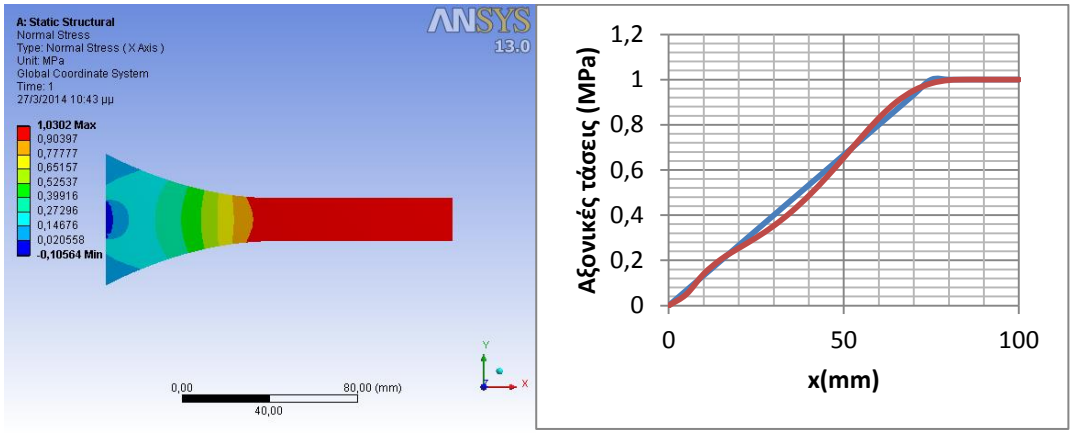
3.5 Αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση fmincon βρέθηκαν οι τιμές των παραμέτρων οι οποίες ελαχιστοποιούν την ζητούμενη εξίσωση. Το ζεύγος αυτών των τιμών είναι :

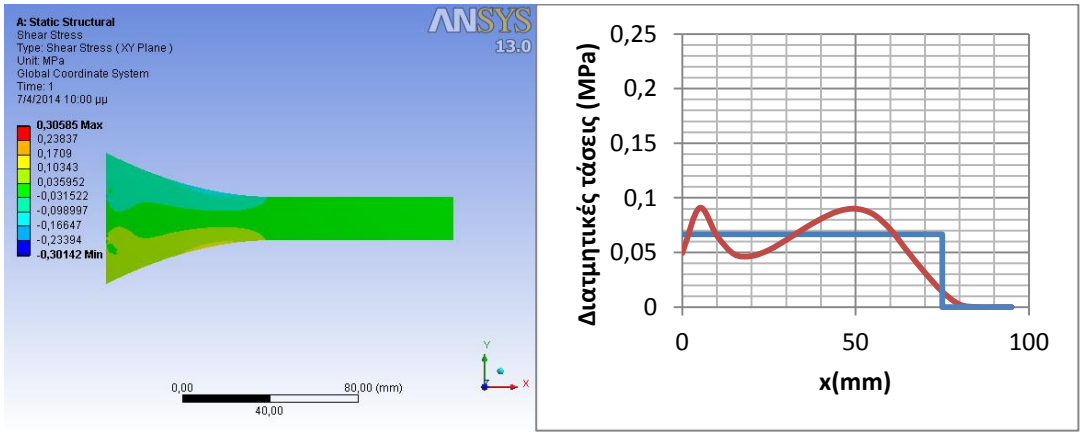
y_2=30

$$\frac{dy}{dx}\ |_B = 0.5$$

Αυτές οι τιμές δημιουργούν την βέλτιστη γεωμετρία συνδετήρα. Η βέλτιστη αυτή γεωμετρία , αλλά και οι κατανομές τάσεων που δημιουργεί παρουσιάζονται παρακάτω σε σύγκριση με τις βέλτιστες κατανομές τάσεων.

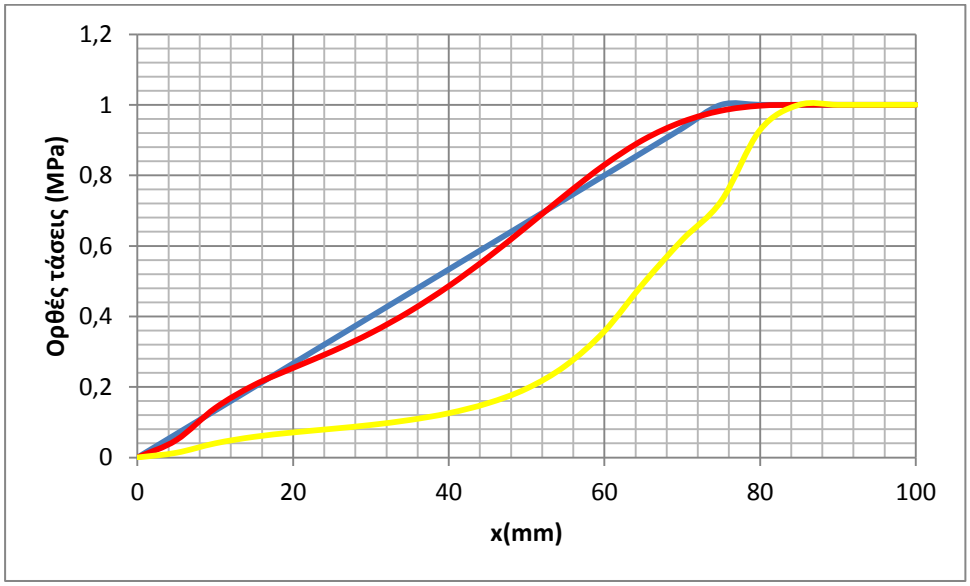


Σχήμα 3.11: Ορθές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0.5

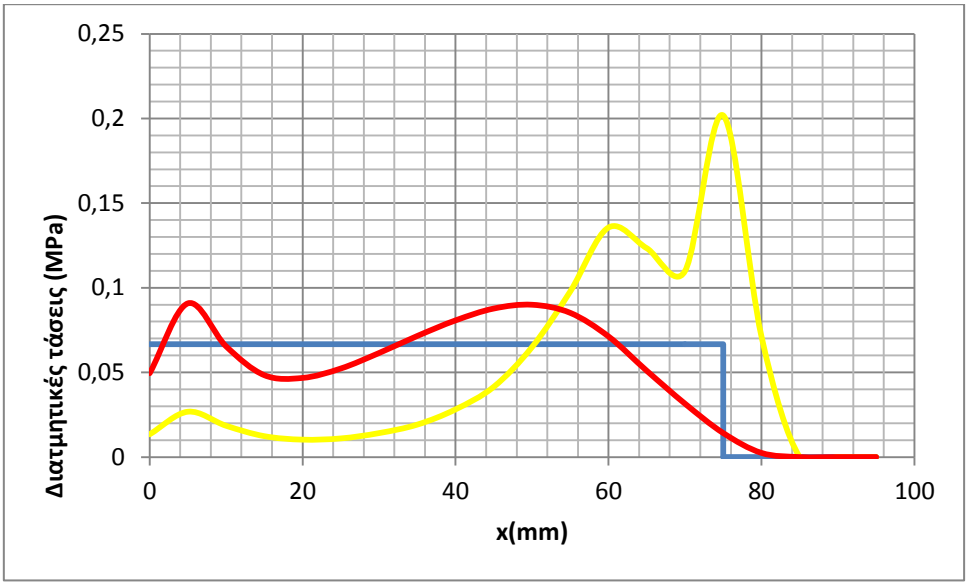


Σχήμα 3.12:Διατμητικές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0.5

Παρακάτω παρατίθενται τα οποία παρουσιάζουν τις κατανομές τάσεων (ορθές και διατμητικές) της βέλτιστης γεωμετρίας που προέκυψε και μετά από την διαδικασία της βελτιστοποίησης (κόκκινο χρώμα) σε σύγκριση με τις βέλτιστες(μπλέ χρώμα) αλλά και σε σύγκριση με τις κατανομές της κλασσικής κυλινδρικής γεωμετρίας συνδετήρα (κίτρινο χρώμα).



Σχήμα 3.13: Ορθές τάσεις



Σχήμα 3.14:Διατμητικές τάσεις

Αρχικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συγκέντρωση ορθών τάσεων στην είσοδο του σχοινιού έχει μειωθεί σημαντικά λόγω της ομαλής αλλαγής της γεωμετρίας του συνδετήρα. Επίσης παρατηρούμε ότι η γεωμετρία αυτή του συνδετήρα οδηγεί σε μία κατανομή ορθών τάσεων που είναι πάρα πολύ κοντά στην βέλτιστη γραμμική, καθώς και σε μία κατανομή διατμητικών τάσεων με πολύ μικρές αποκλίσεις απο την βέλτιστη σταθερή. Τέλος είναι εμφανές ότι όλο το υλικό του συνδετήρα είναι ενεργοποιημένο και συμμετέχει στην μεταφορά των τάσεων από το σχοινί στον συνδετήρα, κάτι το οποίο είναι απαραίτητο για την εξάλειψη των συγκεντρώσεων τάσεων που οδηγούν στην καταστροφή του σχοινιού.

Παρ'όλα αυτά είναι εμφανές ότι η γεωμετρία που προέκυψε από την διαδικασία της βελτιστοποίησης , παρ'ότι είναι η βέλτιστη γεωμετρία συνδετήρα, δεν οδηγεί σε μία απολύτως γραμμική κατανομή ορθών τάσεων (την βέλτιστη κατανομή ορθών τάσεων) κάτι που ήταν το ζητούμενο αυτής της εργασίας. Επίσης η κατανομή των διατμητικών τάσεων , αν και πολύ βελτιωμένη, έχει μικρές αποκλίσεις από την βέλτιστη σταθερή. Αυτό είναι αποτέλεσμα ορισμένων περιορισμών που υπάρχουν όσον αφορά την δυνατότητα μίας κυβικής spline να περιγράψει ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών γεωμετρίων. Με άλλα λόγια υπάρχει περίπτωση να υπάρχει μια διαφορετική γεωμετρία συνδετήρα που να οδηγεί σε καλύτερες κατανομές τάσεων (πιο κοντά στις βέλτιστες) αλλά δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί με μια κυβική spline. Για τον λόγο αυτό προτείνεται σαν μελλοντικό σχέδιο η αντικατάσταση της spline από μια διαφορετική καμπύλη (π.χ μια καμπύλη Bezier) και διερεύνηση της πιθανότητας ύπαρξης μιας καλύτερης γεωμετρίας συνδετήρα η οποία οδηγεί σε καλύτερες κατανομές τάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Γ.Τ. Τσαμασφύρος, «Μηχανική Παραμορφωσίμου Σώματος Ι», *εκδόσεις Συμμετρία*, Αθήνα 1991

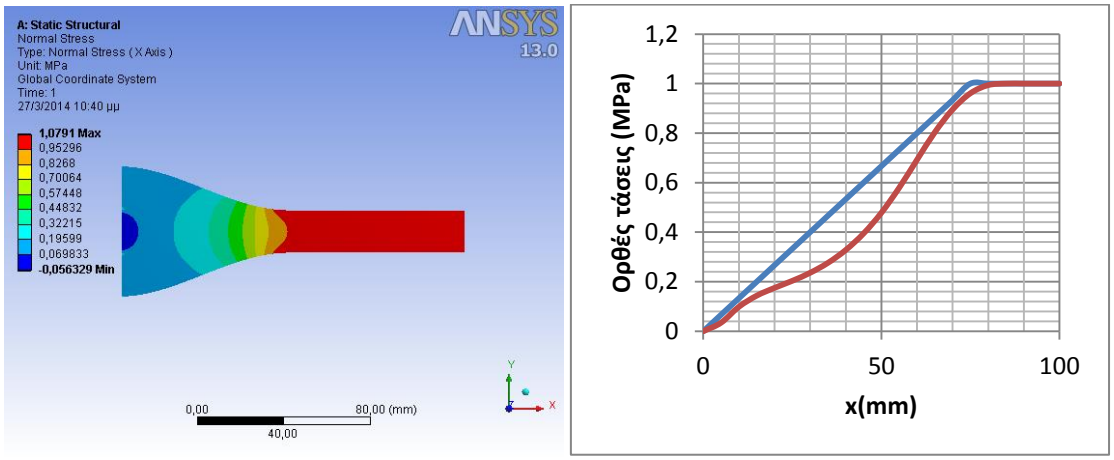
[2] Meier, U., Meier, H., Kim P., (1998), Anchorage device for high – performance fiber composite cables, US Patent No 5,713,169

[3] Spitas,V, Spitas,C, Zouridaki,E , Modelling of a novel optimized termination for high tenacity cables, 4th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering,(2010)

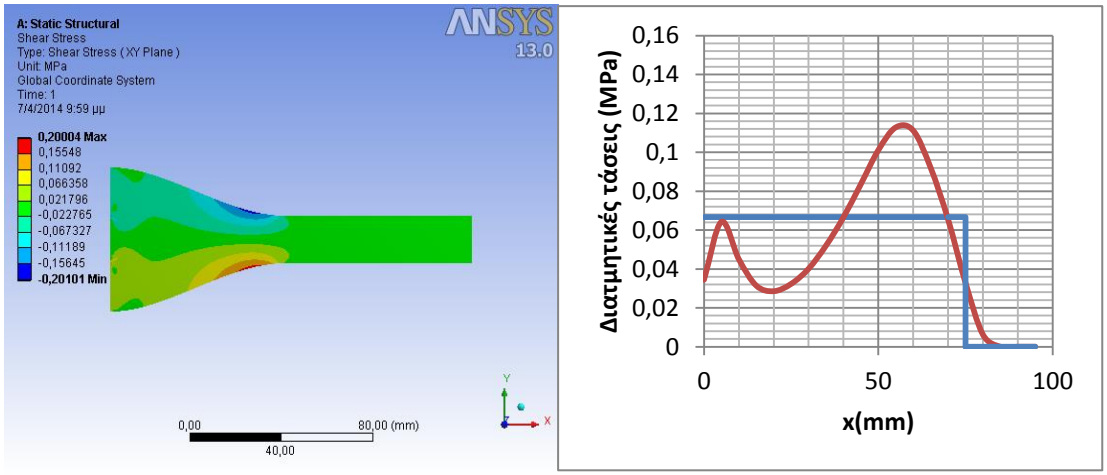
[4] Κ.Χ Γιαννάκογλου 'Αριθμητική ανάλυση για μηχανικούς'

[5] *Ansys Help*

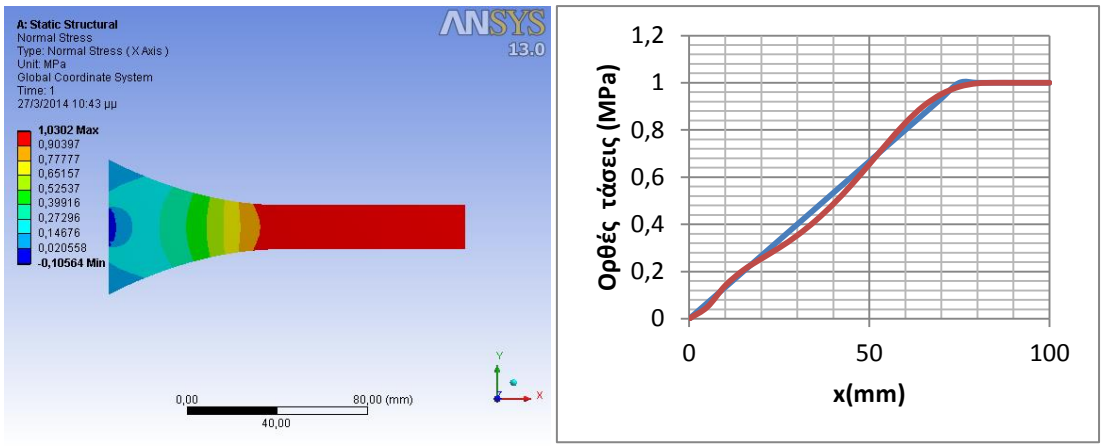
[6] Wilkipedia-the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Plastic



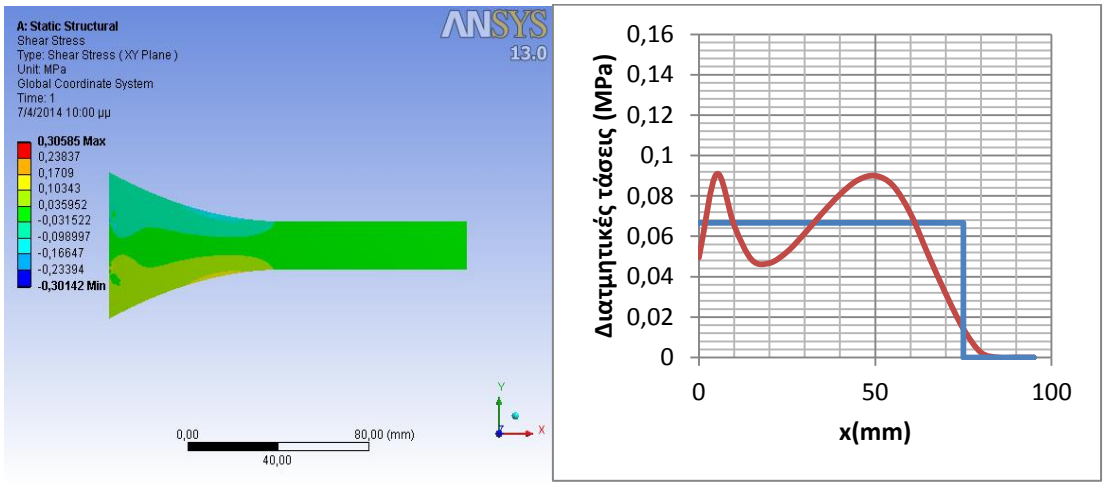
Ορθές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0



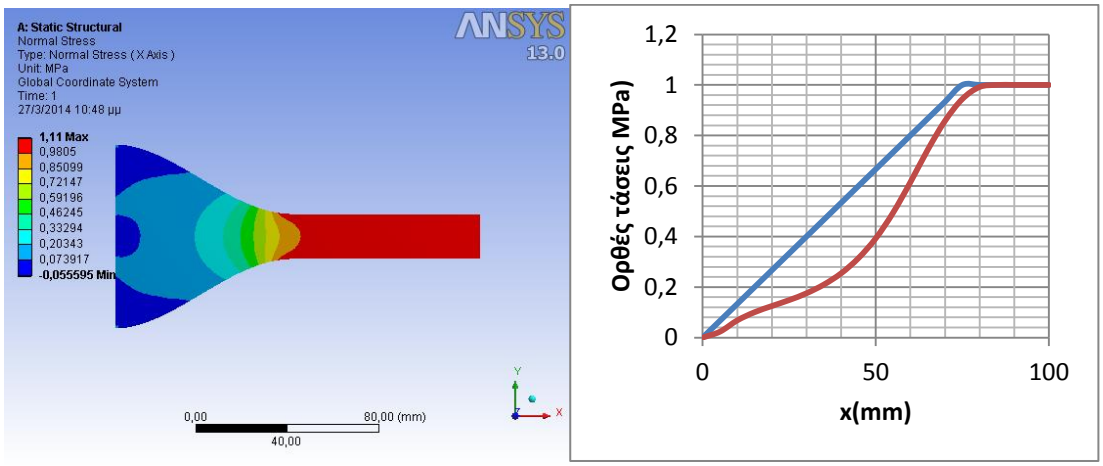
Διατμητικές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0



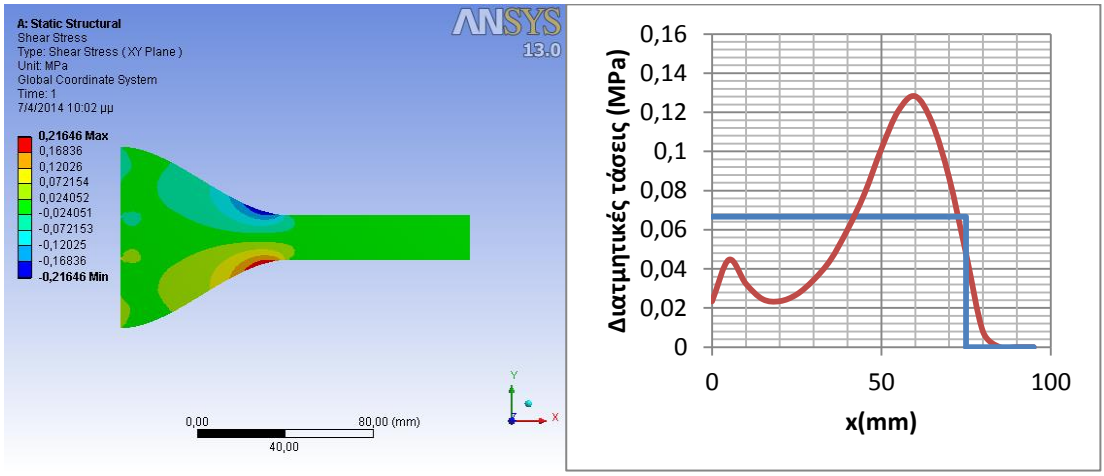
Ορθές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0.5



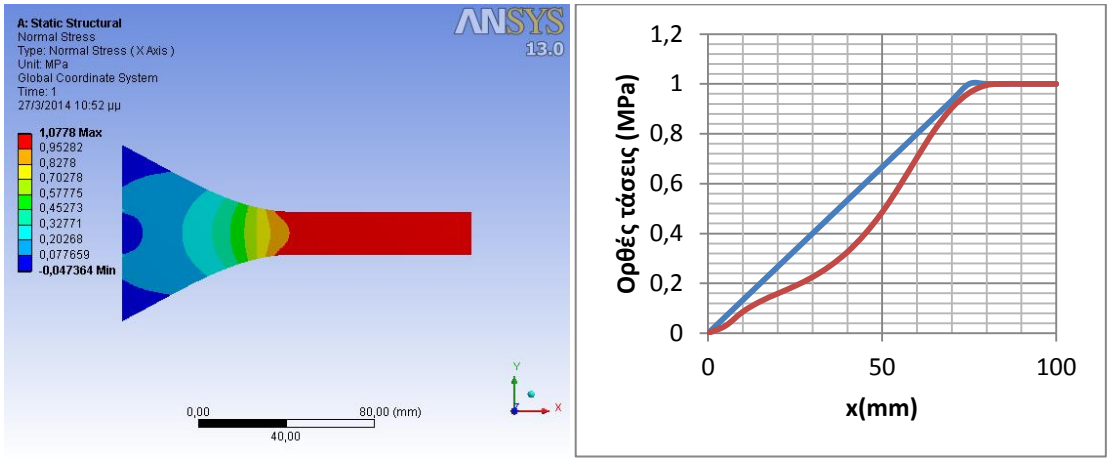
Διατμητικές τάσεις για y_2 =30 mm , κλίση 0.5



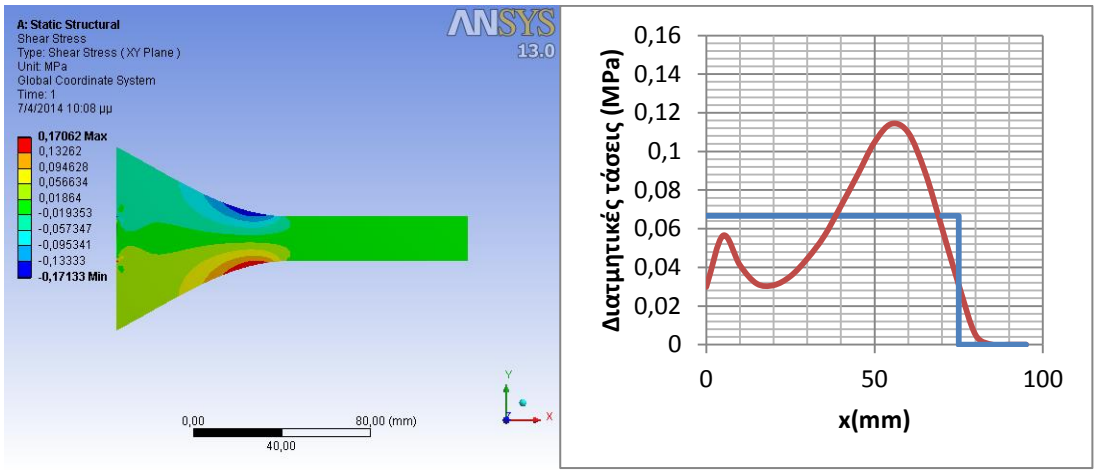
Ορθές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 0



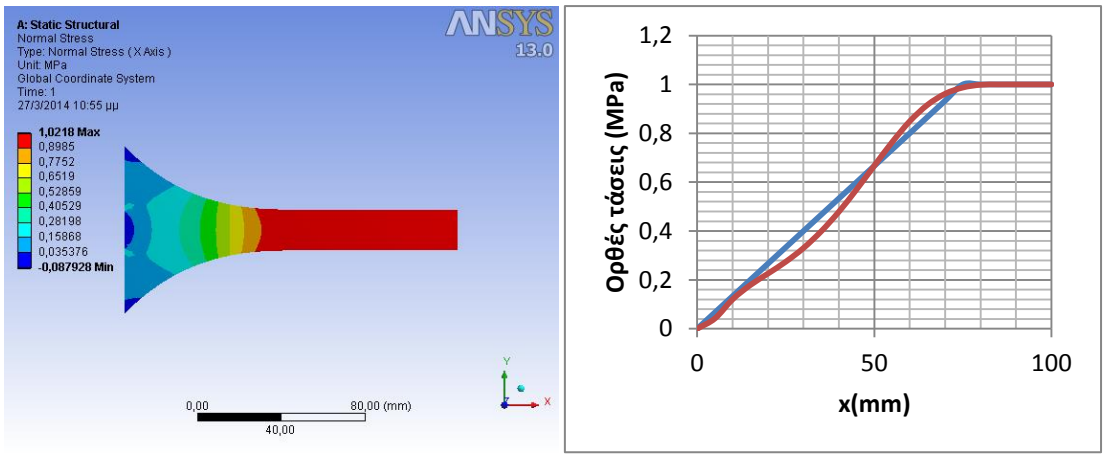
Διατμητικές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 0



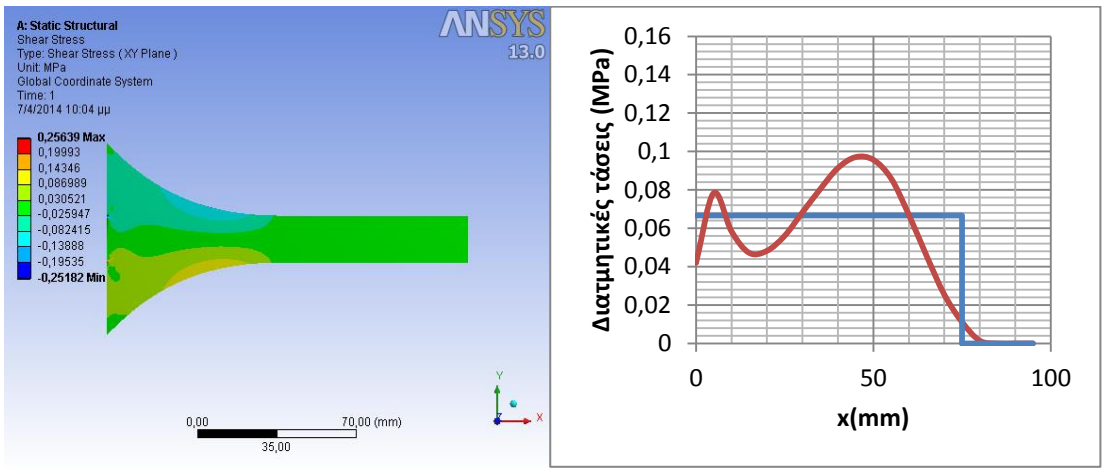
Ορθές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 0.5



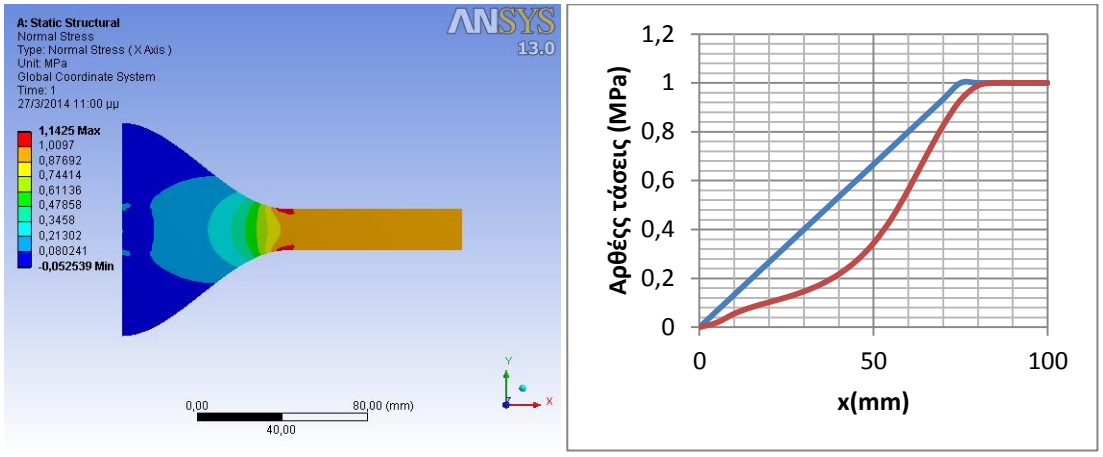
Διατμητικές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 0.5



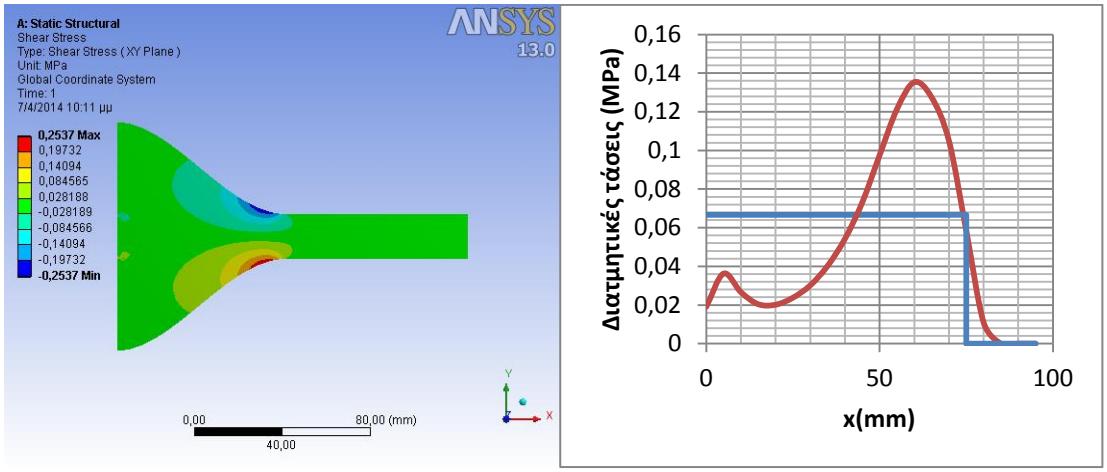
Ορθές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 1



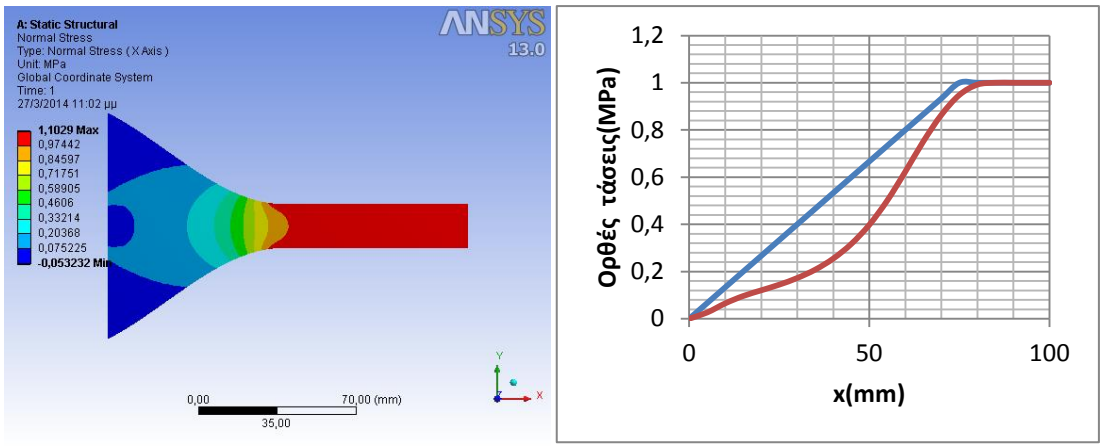
Διατμητικές τάσεις για y_2 =40 mm , κλίση 1



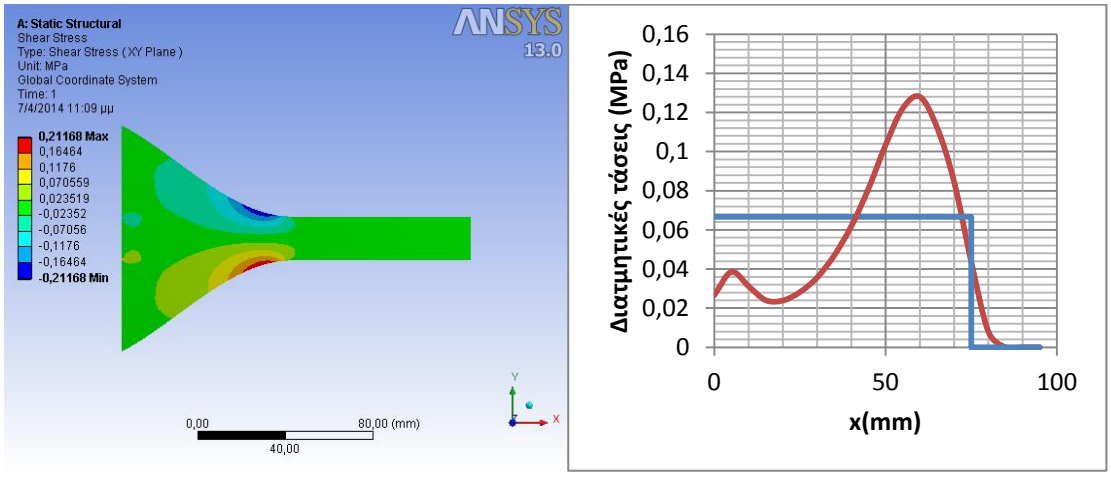
Ορθές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 0



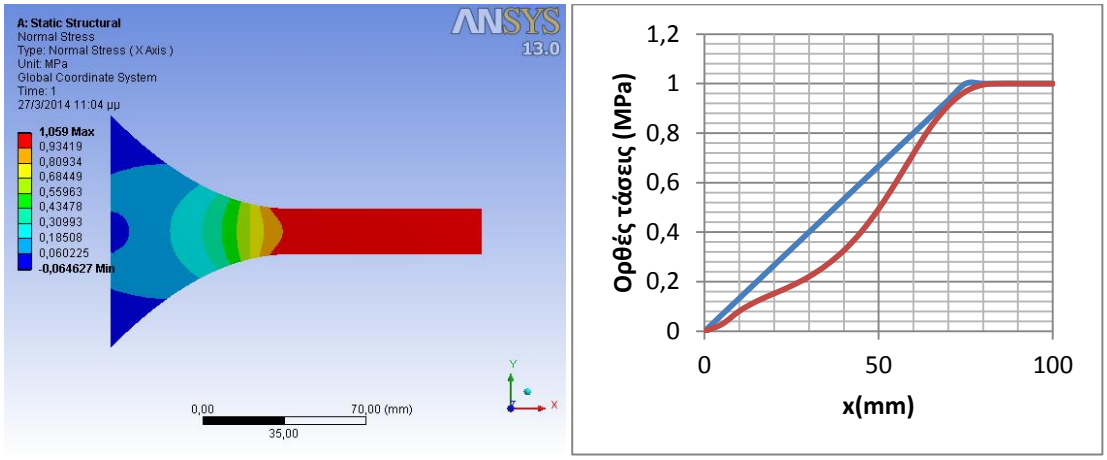
Διατμητικές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 0



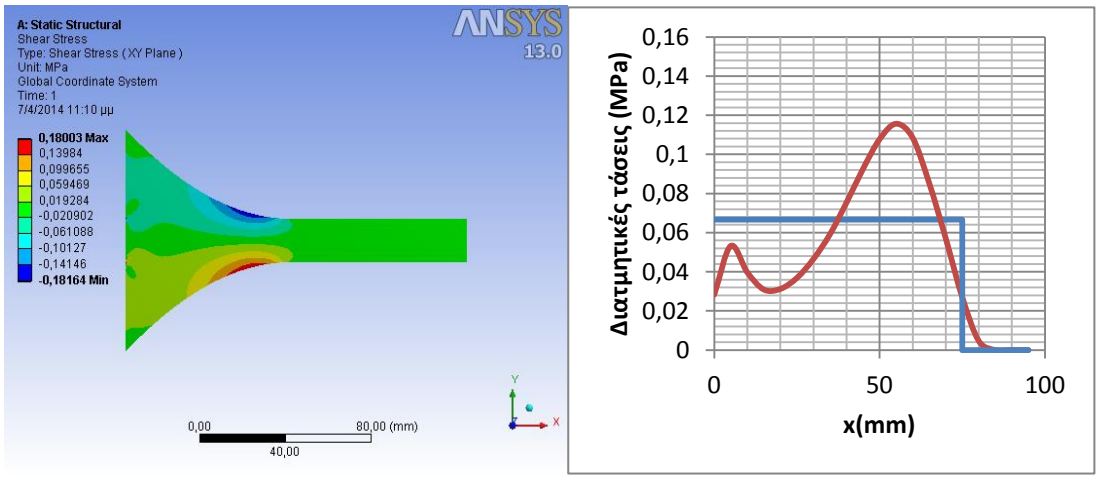
Ορθές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 0.5



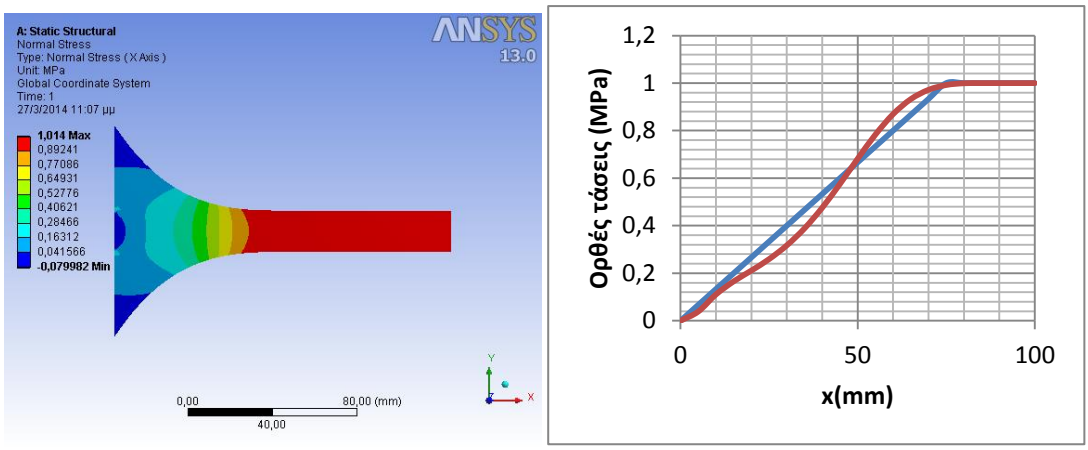
Διατμητικές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 0.5



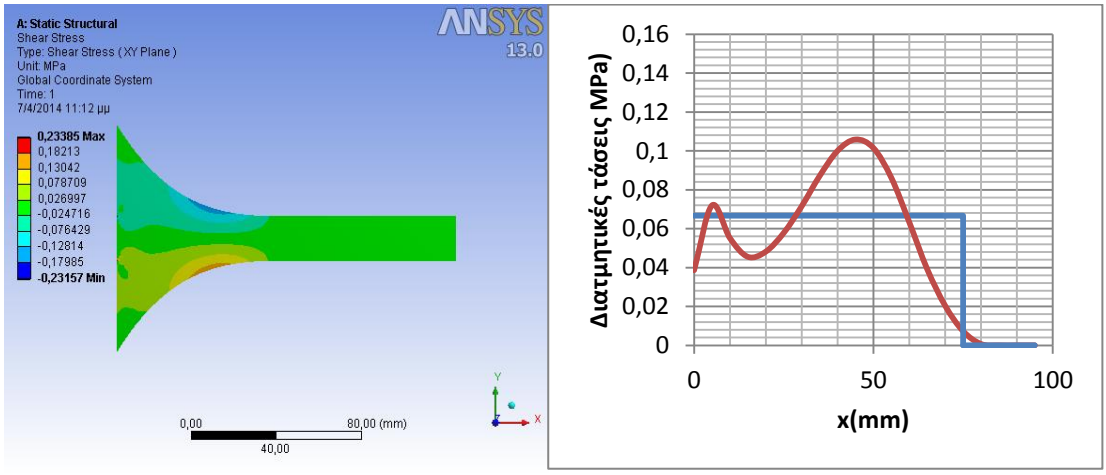
Ορθές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 1



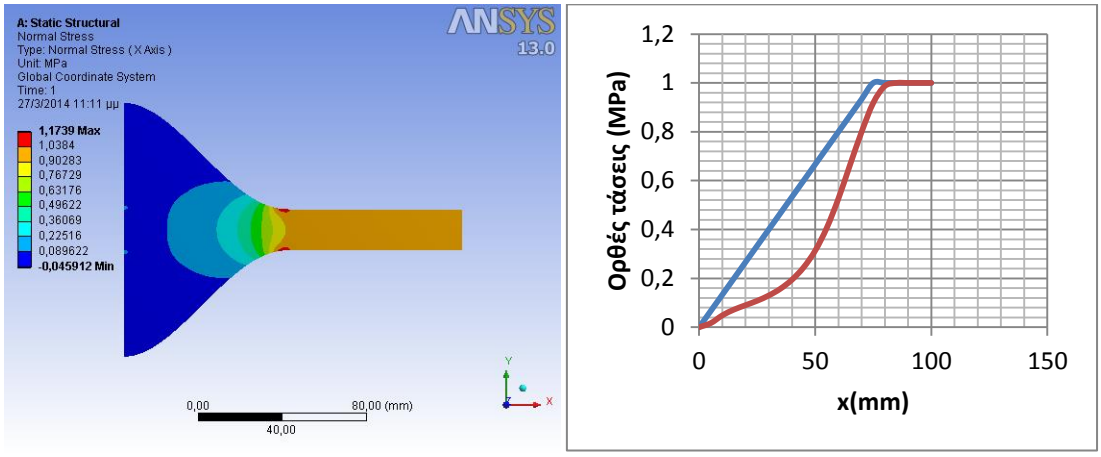
Διατμητικές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 1



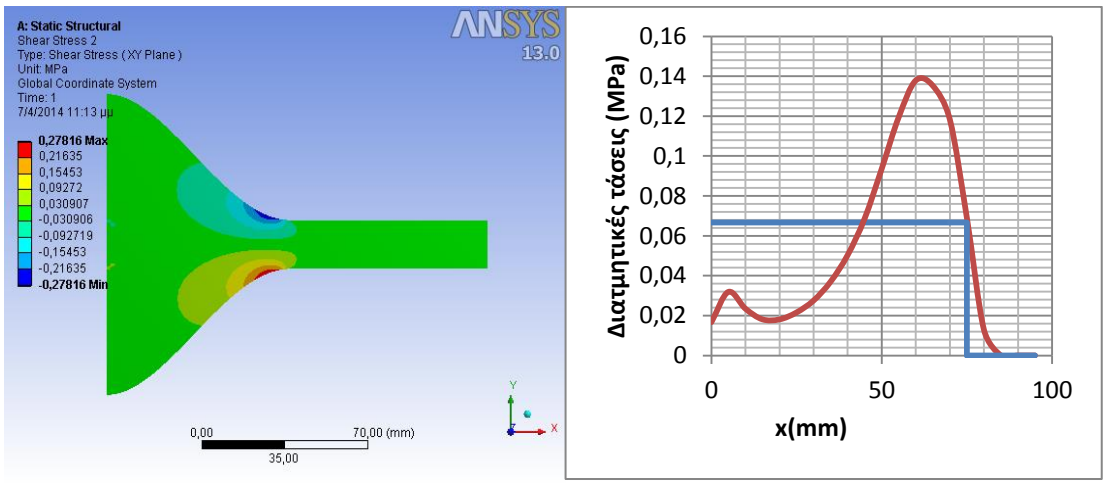
Ορθές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 1.5



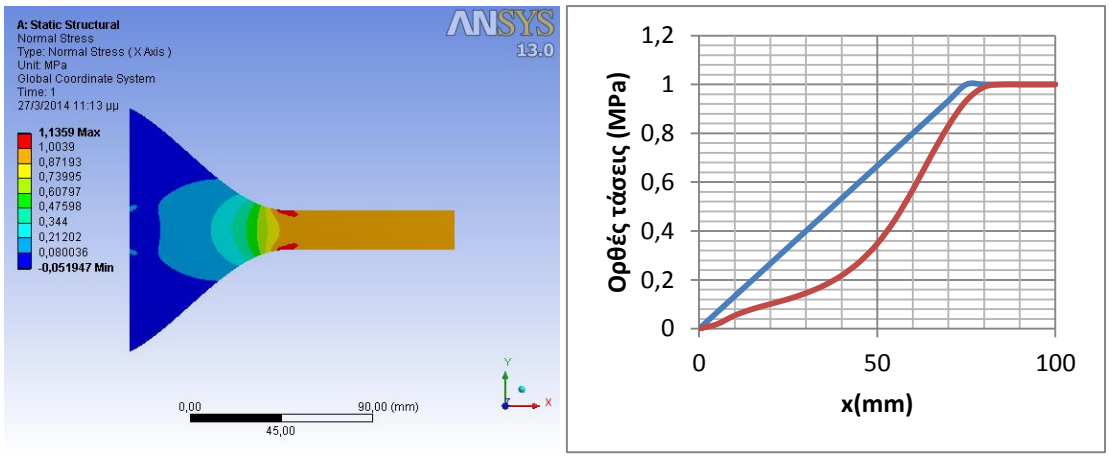
Διατμητικές τάσεις για y_2 =50 mm , κλίση 1.5



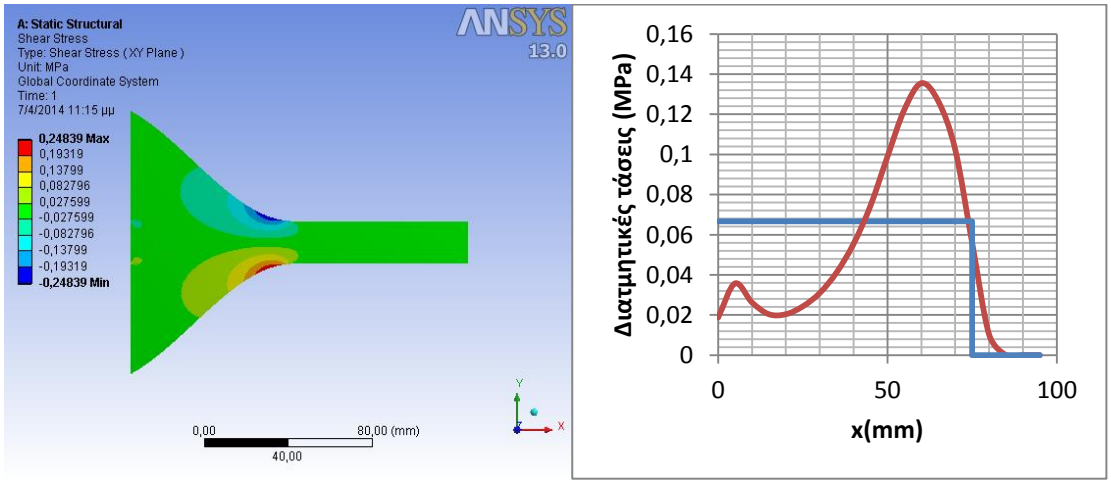
Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 0



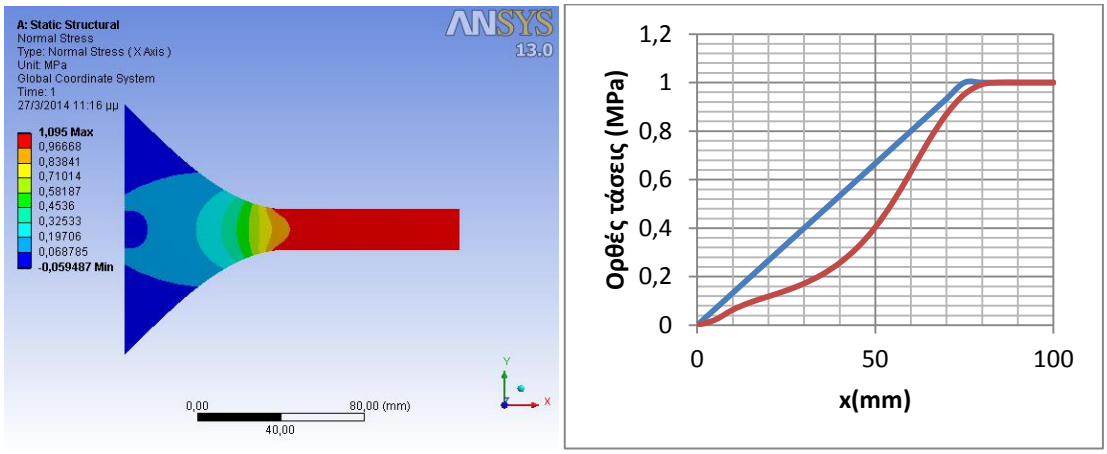
Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 0



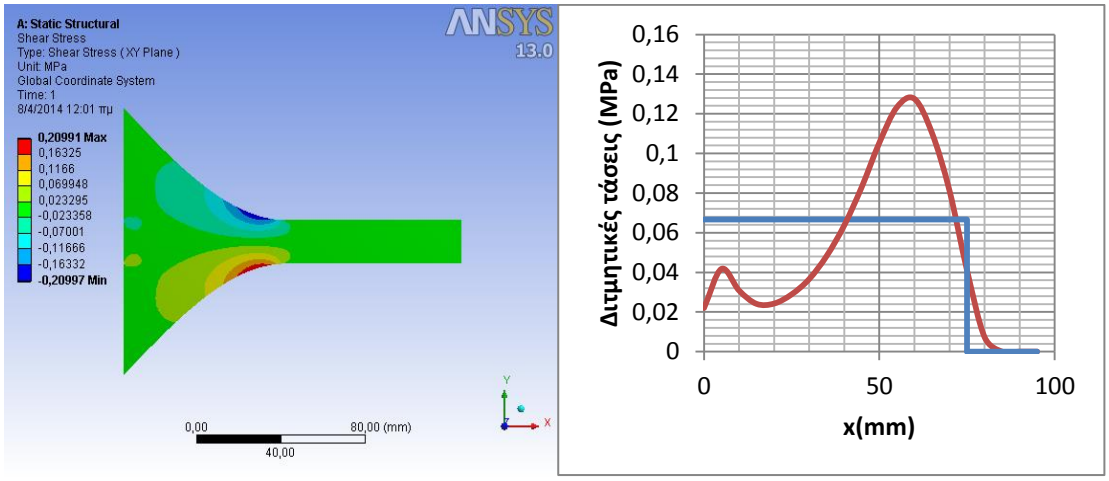
Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 0.5



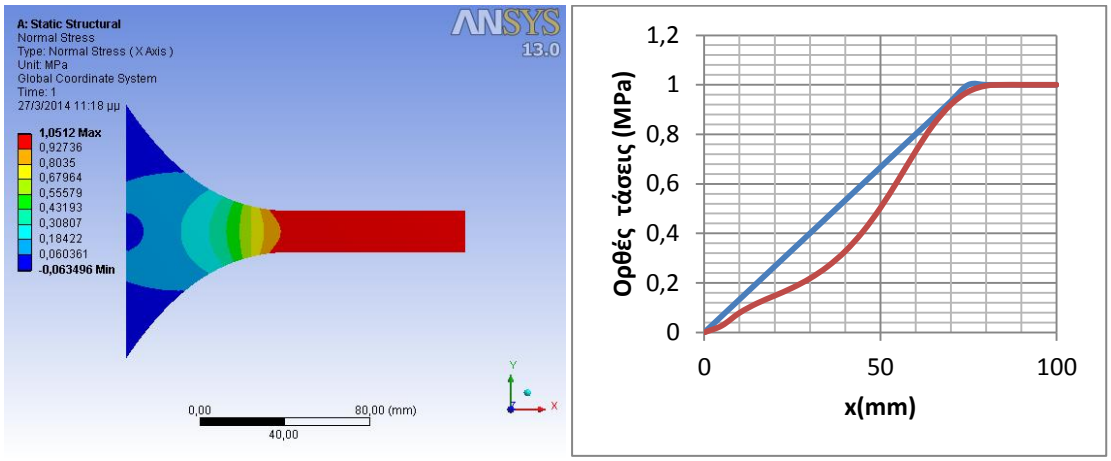
<u>Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 0.5</u>



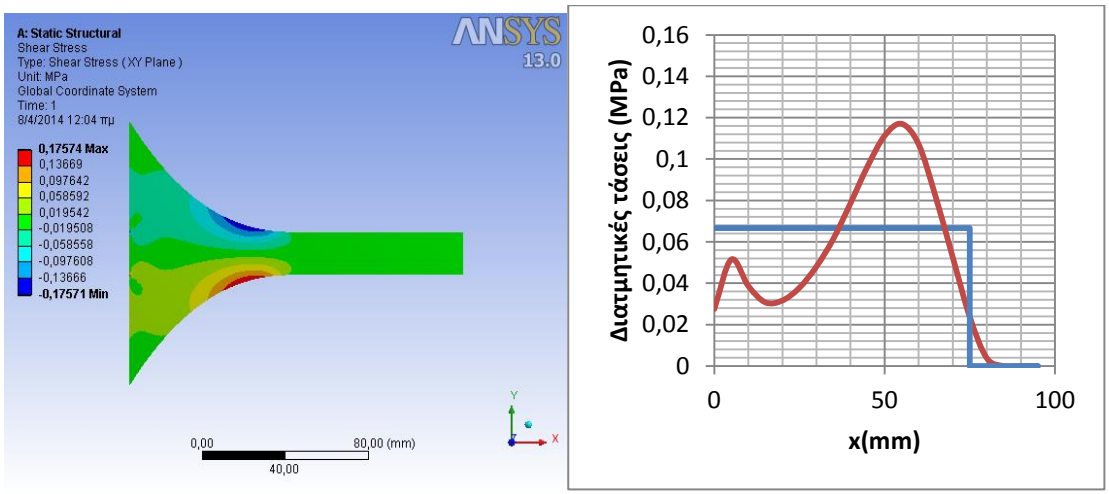
Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 1



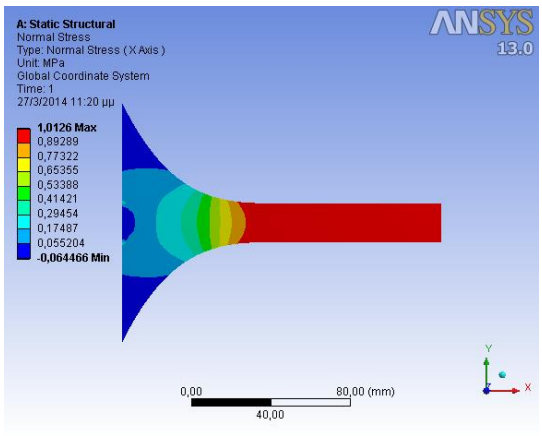
Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 1

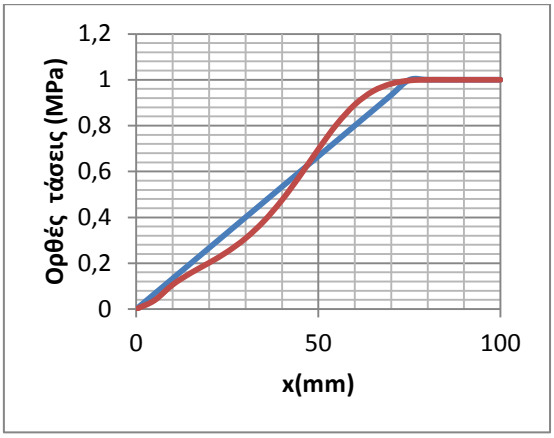


Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 1.5

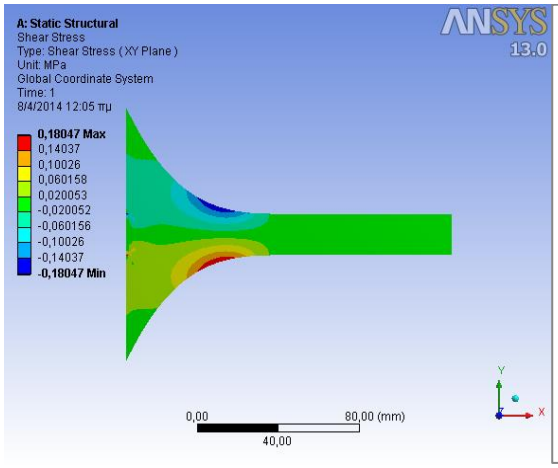


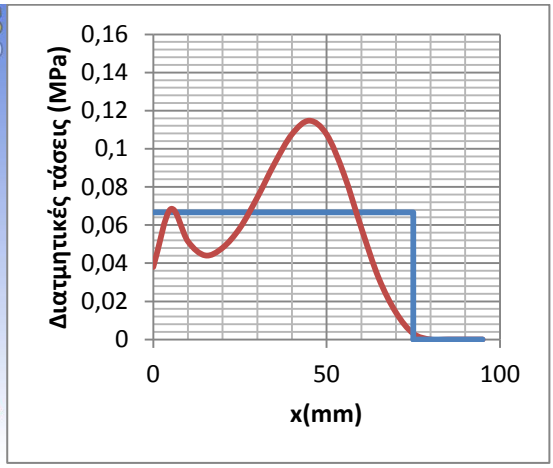
Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 1.5



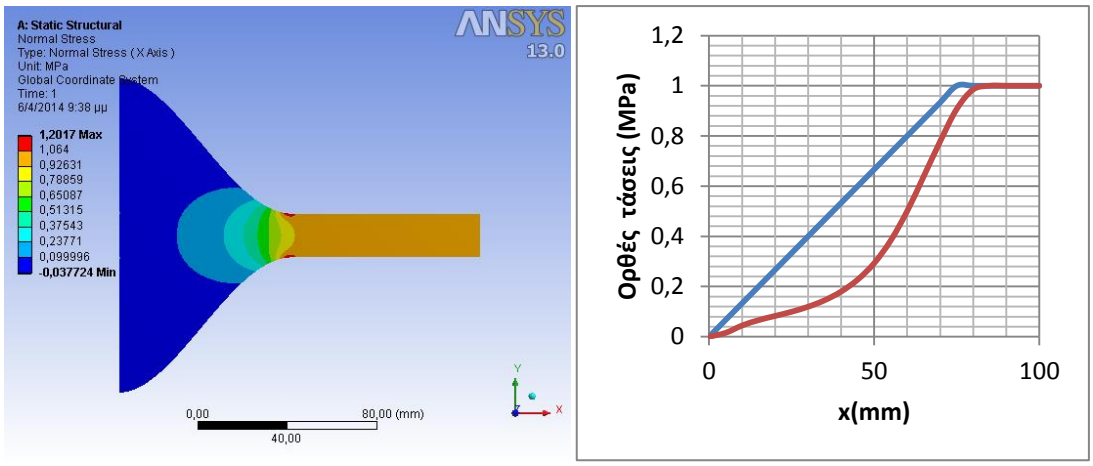


Ορθές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 2

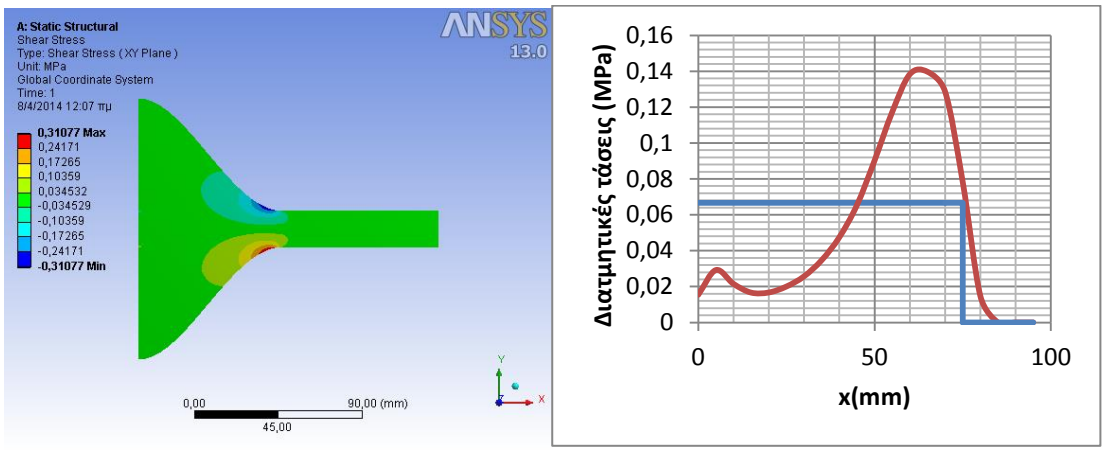




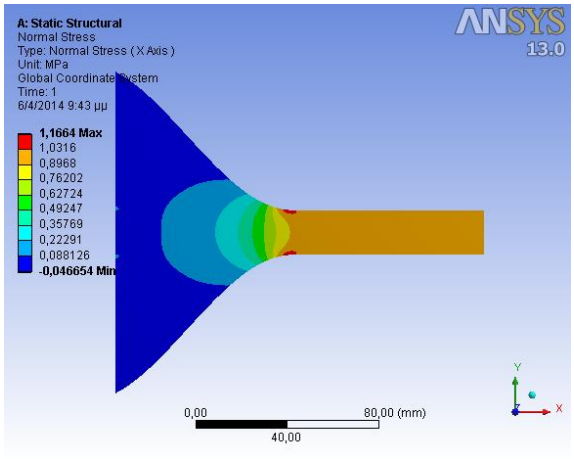
Διατμητικές τάσεις για y_2 =60 mm , κλίση 2

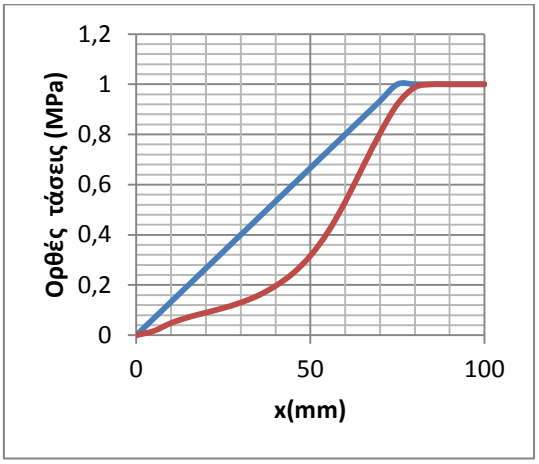


Ορθές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 0

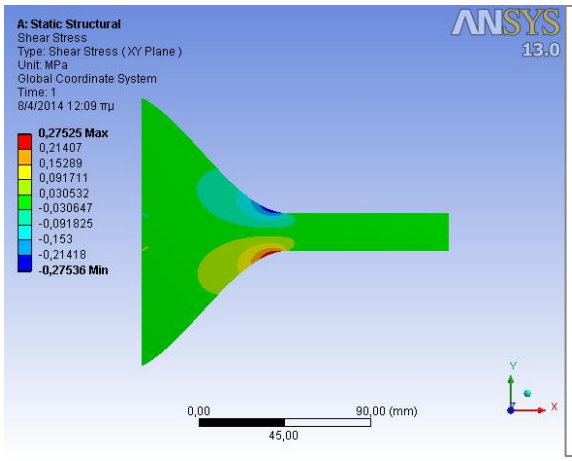


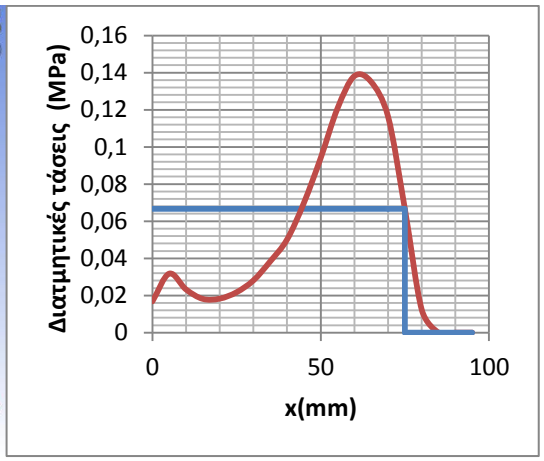
Διατμητικές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 0



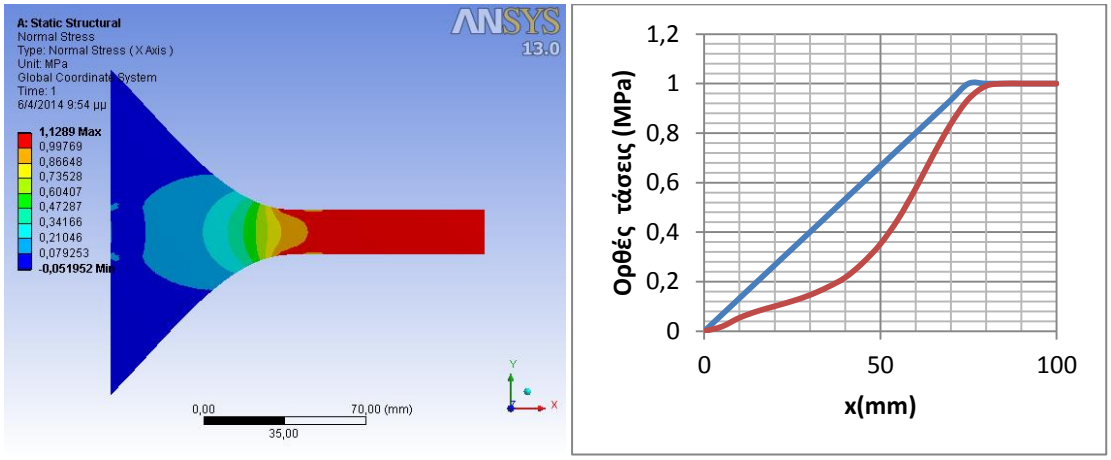


Ορθές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 0.5

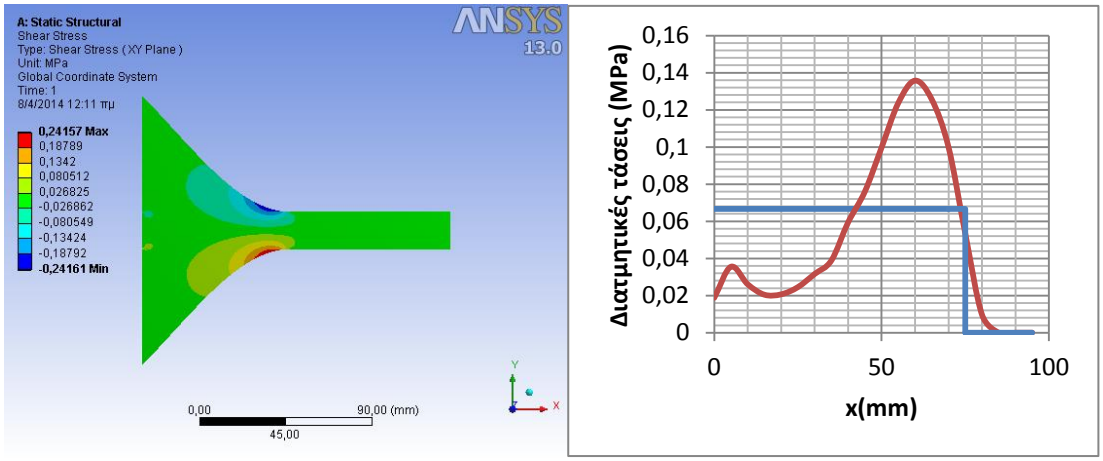




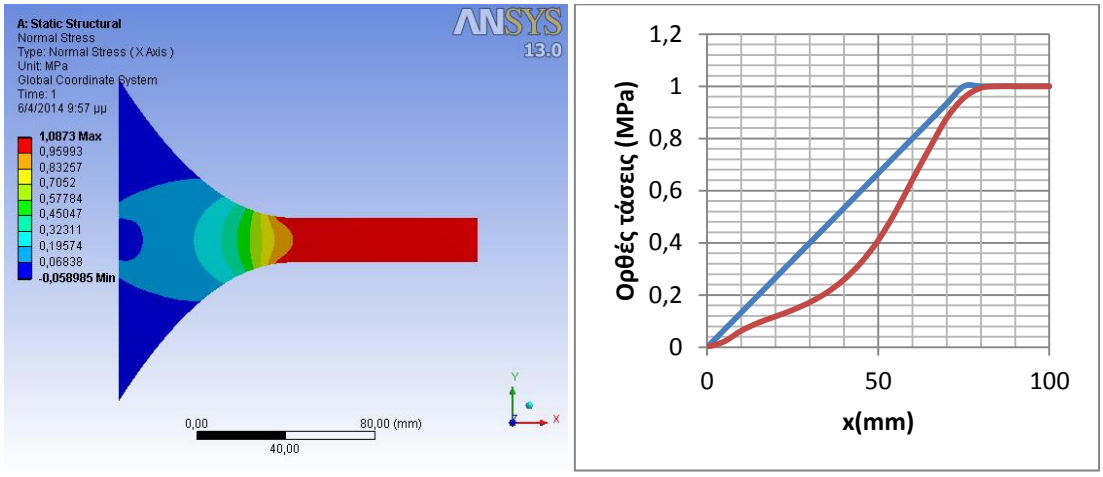
Διατμητικές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 0.5



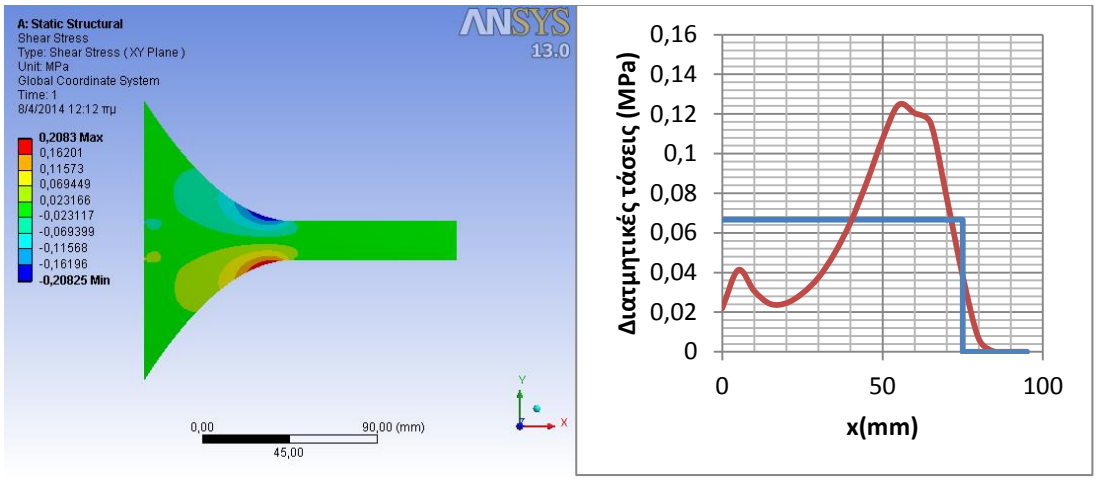
Ορθές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 1



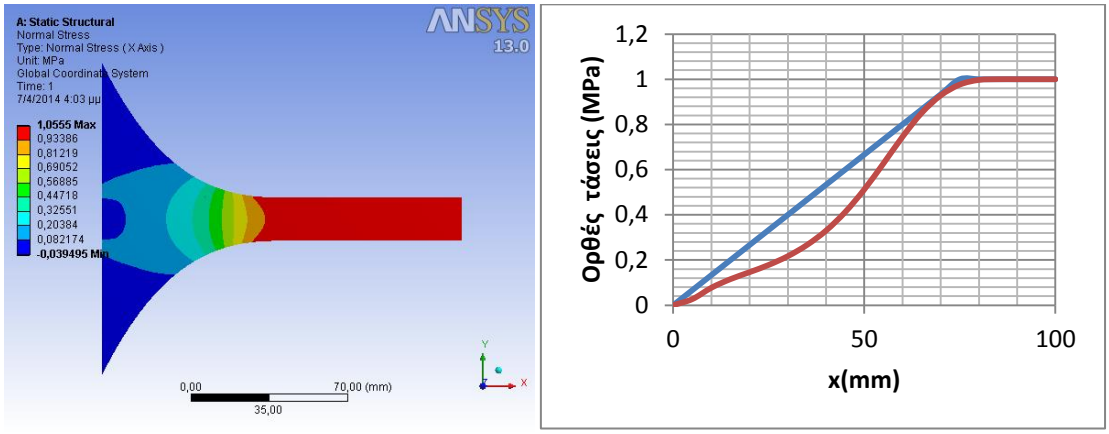
Διατμητικές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 1



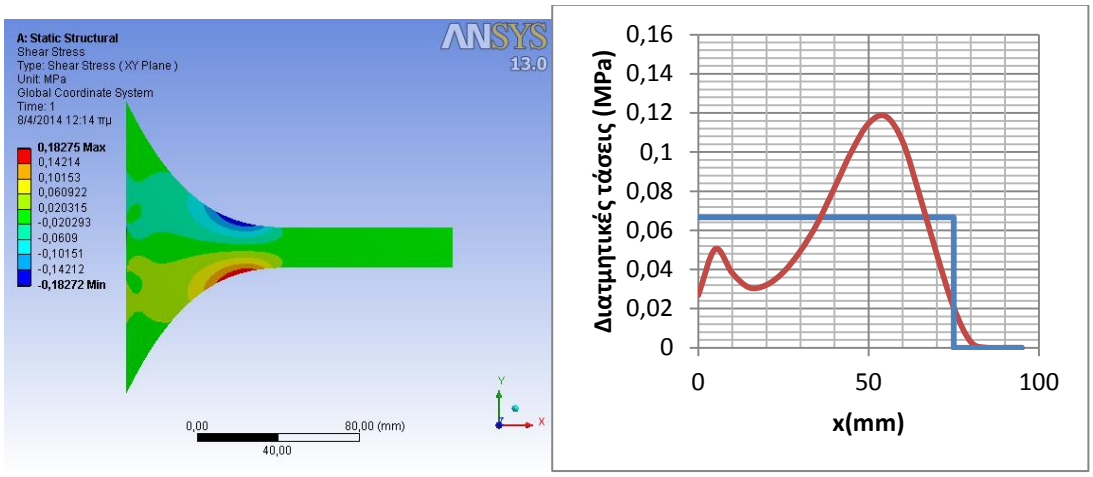
Ορθές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 1.5



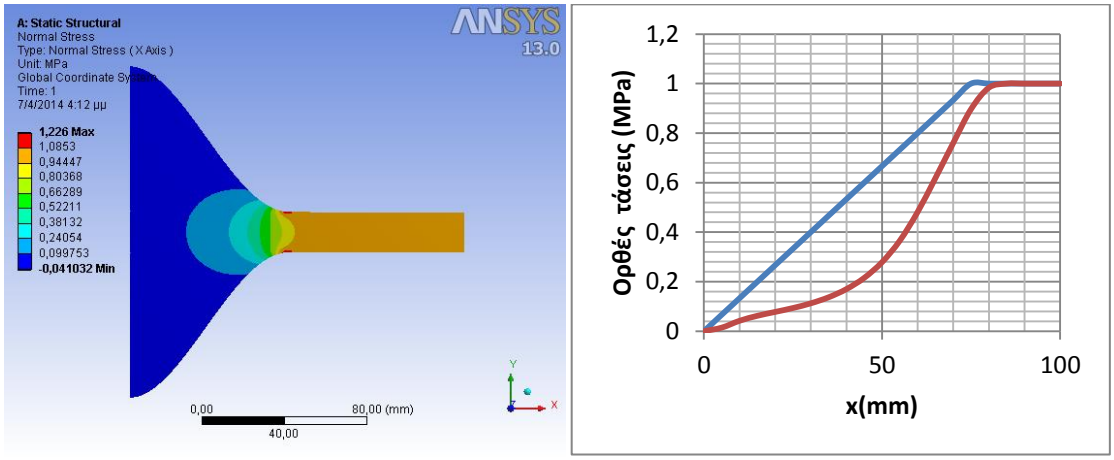
Διατμητικές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 1.5



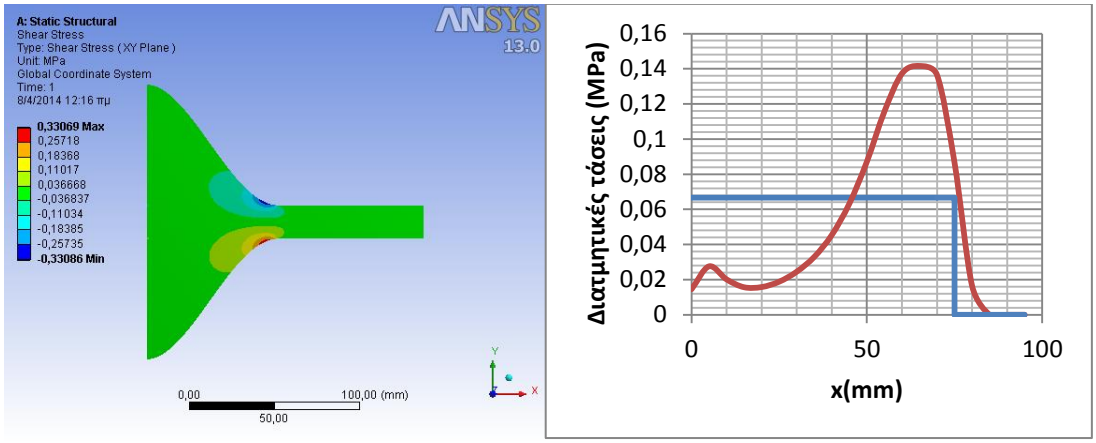
Ορθές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 2



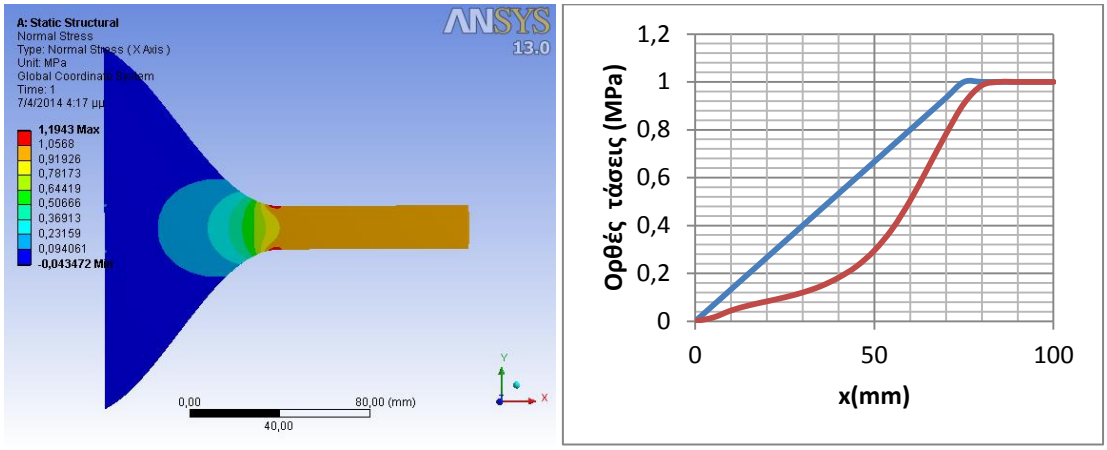
Διατμητικές τάσεις για y_2 =70 mm , κλίση 2



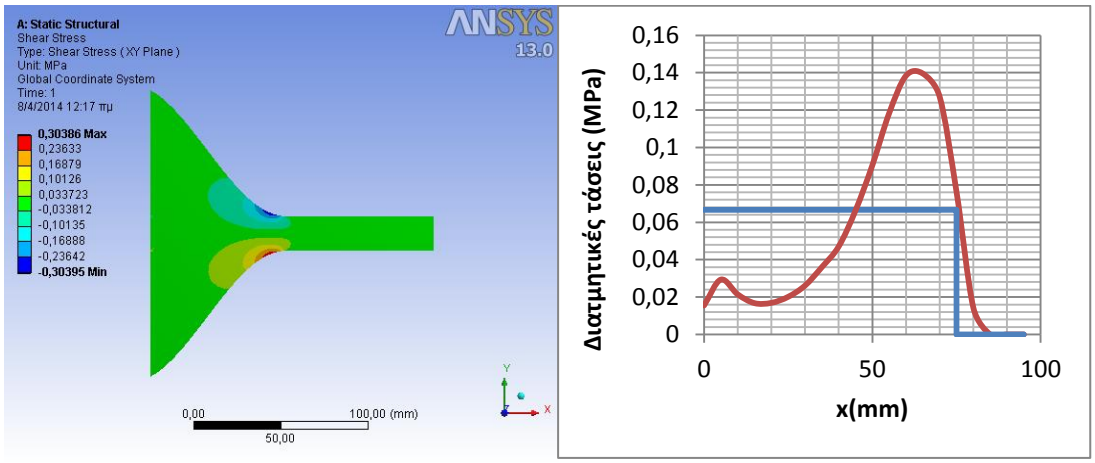
Ορθές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 0



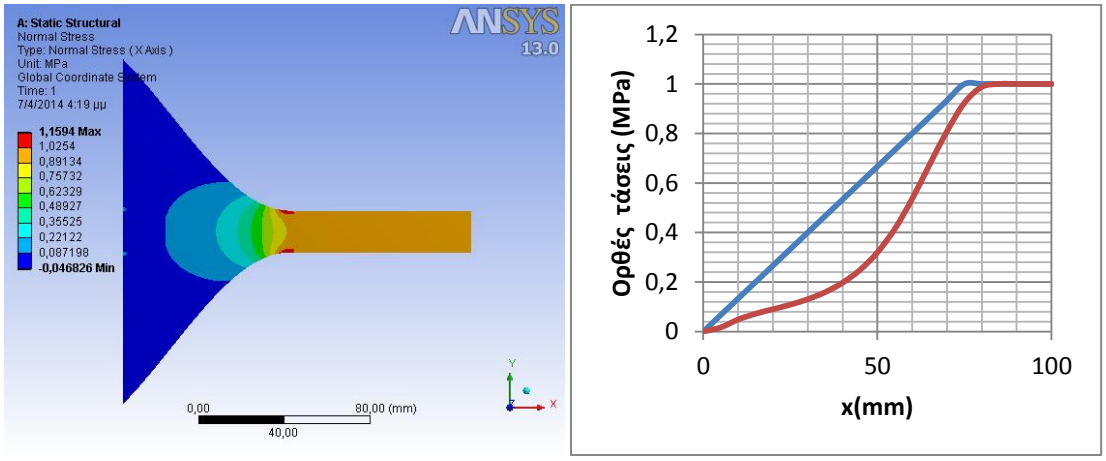
Διατμητικές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 0



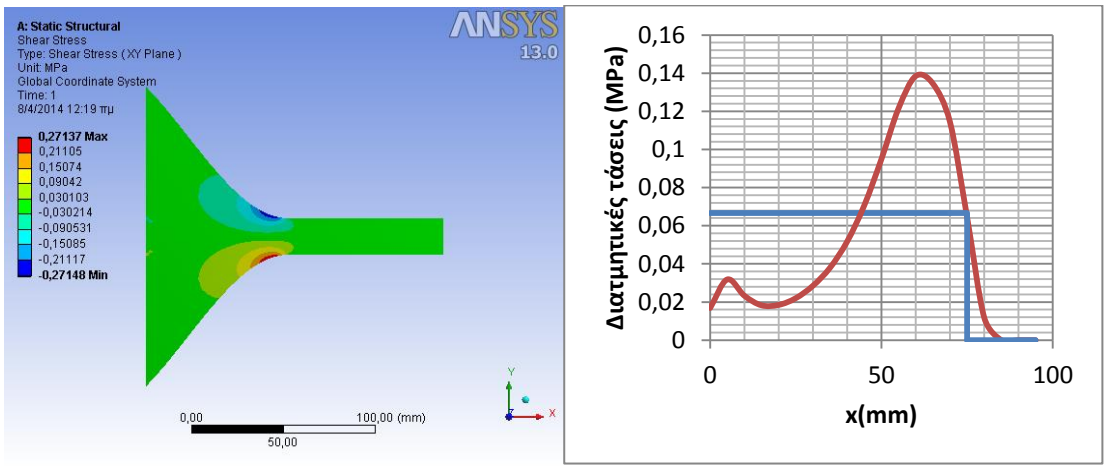
Ορθές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 0.5



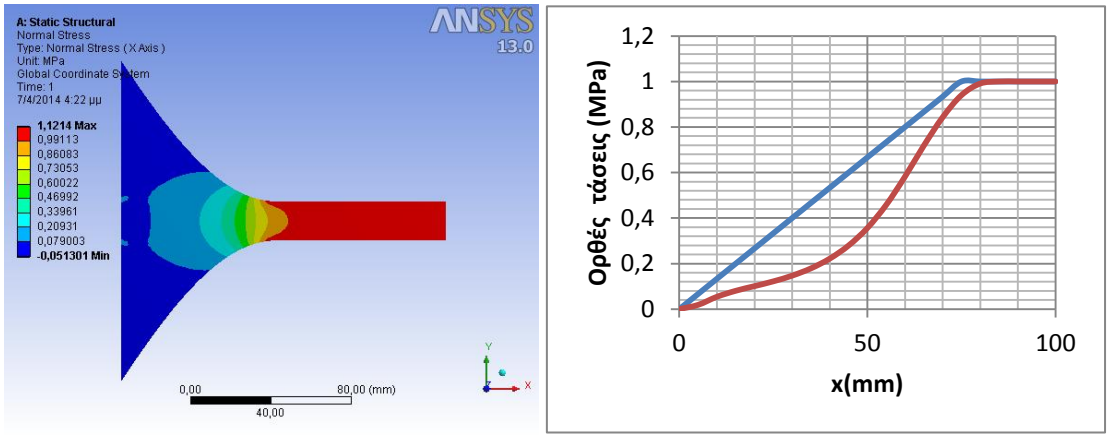
Διατμητικές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 0.5



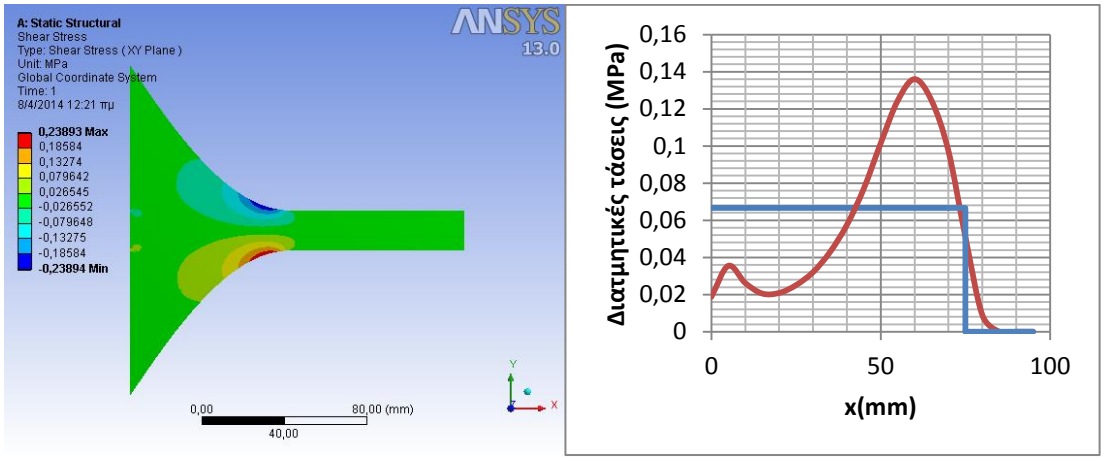
Ορθές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 1



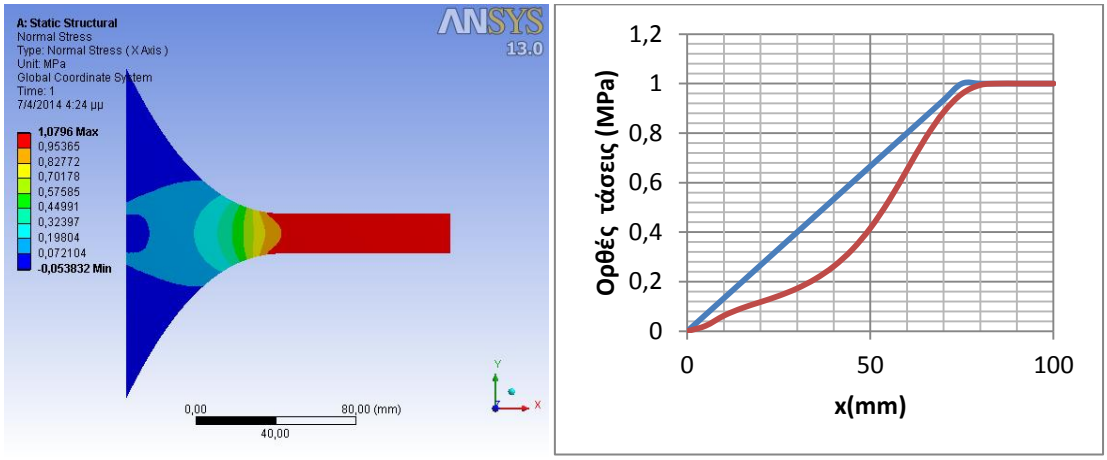
Διατμητικές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 1



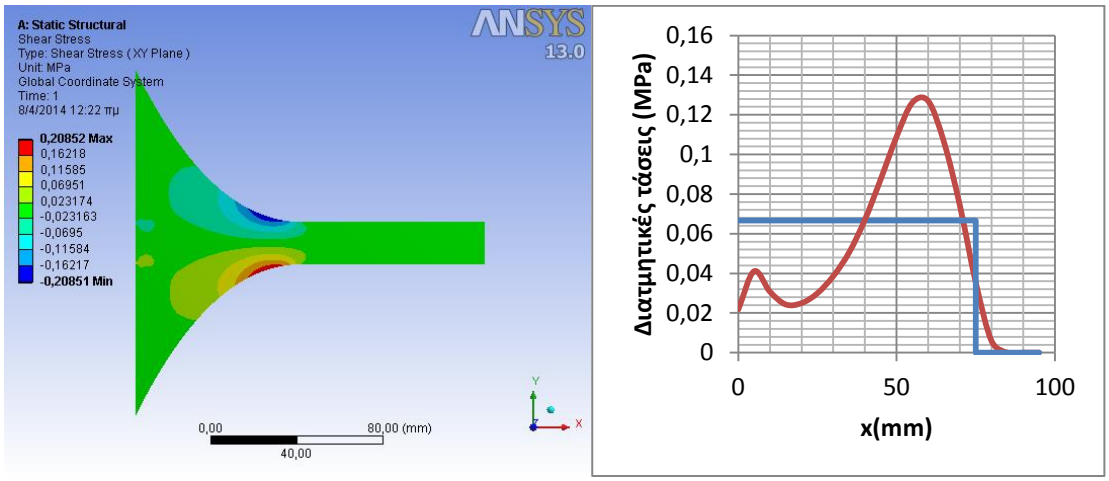
Ορθές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 1.5



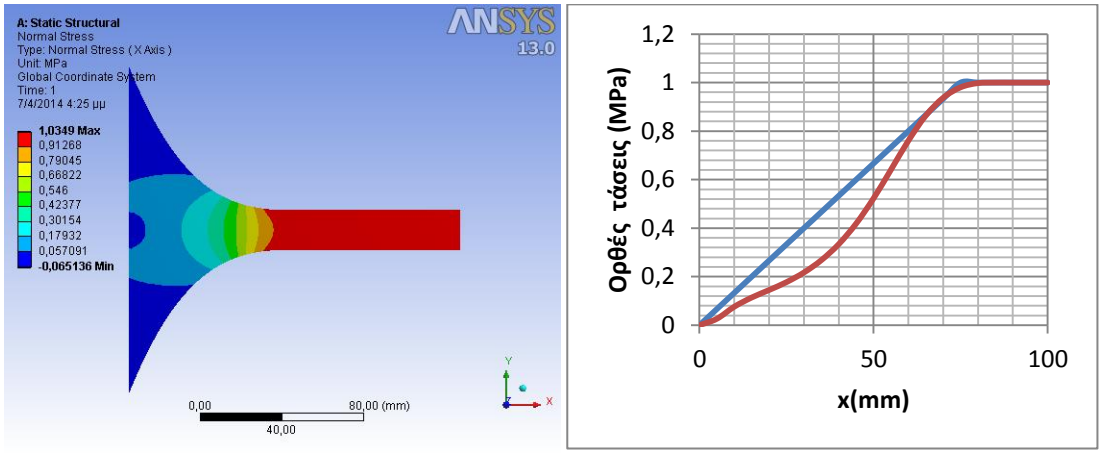
Διατμητικές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 1.5



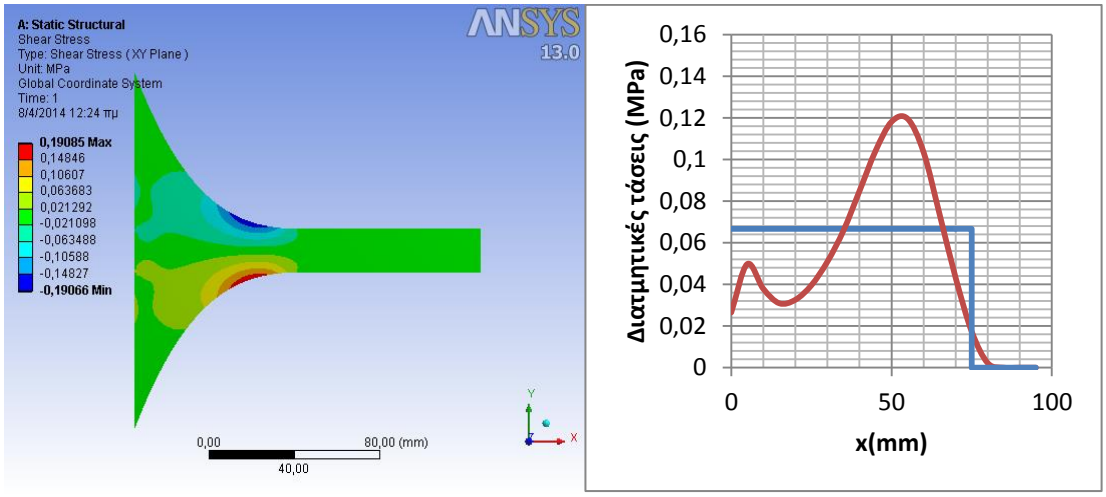
Ορθές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 2



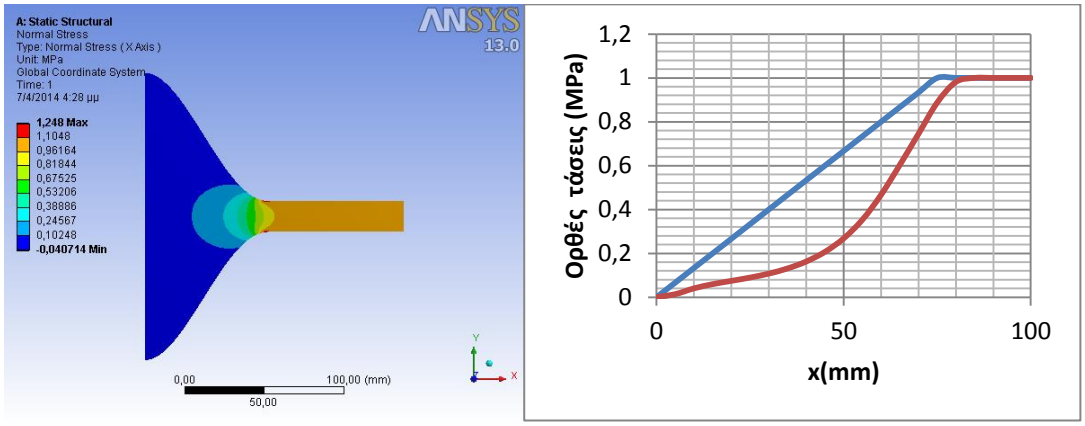
Διατμητικές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 2



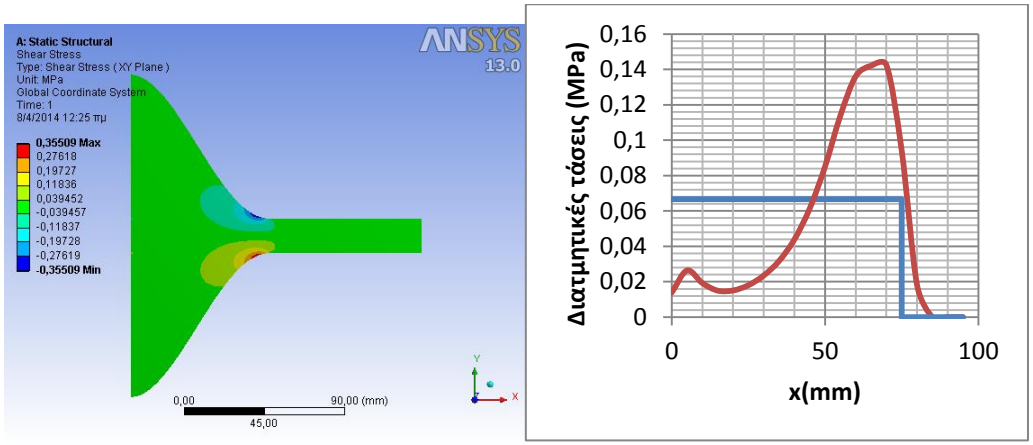
Ορθές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 2.5



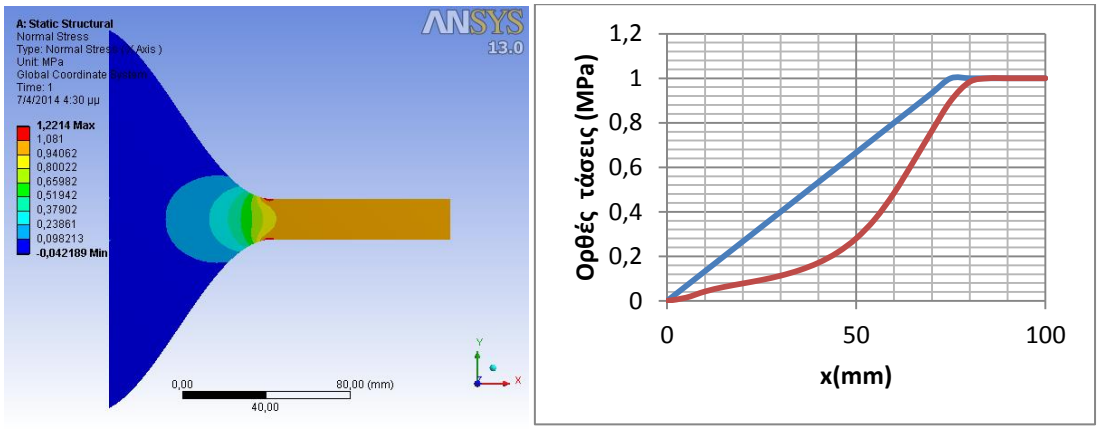
Διατμητικές τάσεις για y_2 =80 mm , κλίση 2.5



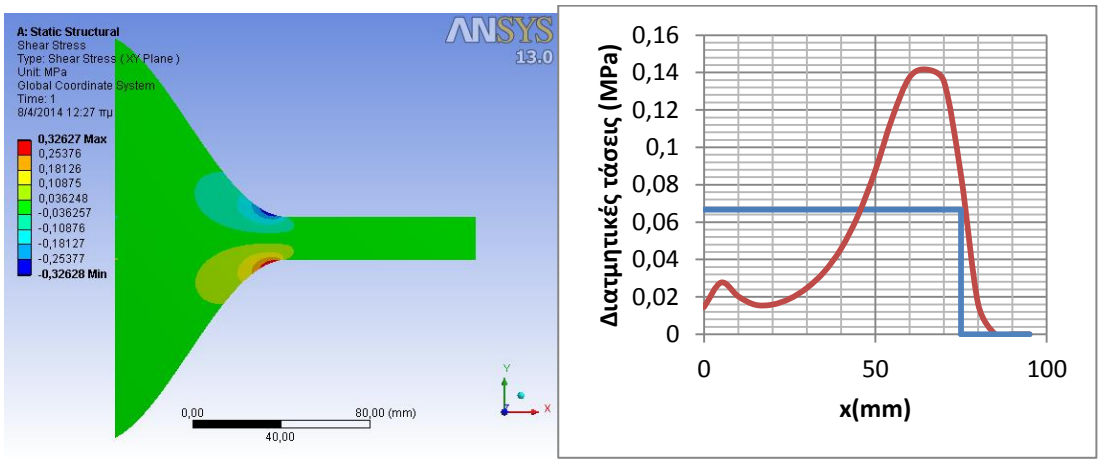
Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 0



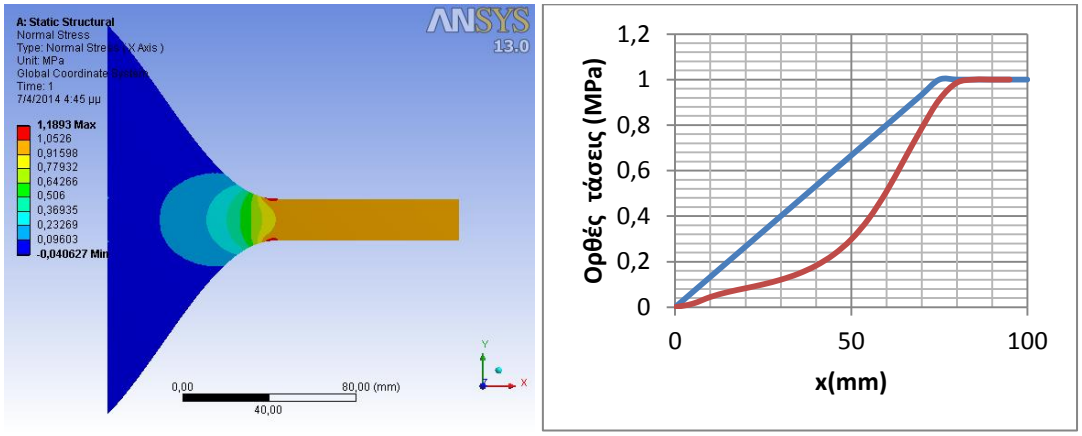
Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 0



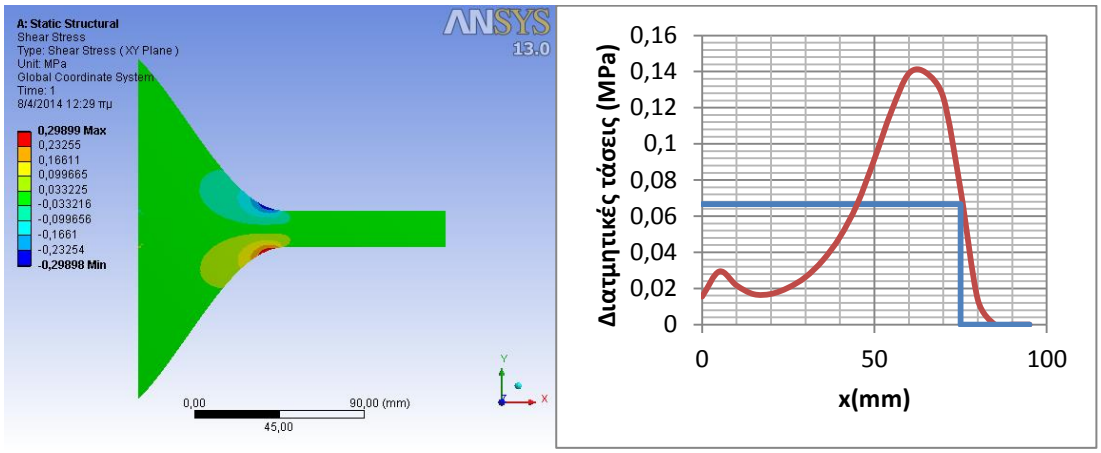
Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 0.5



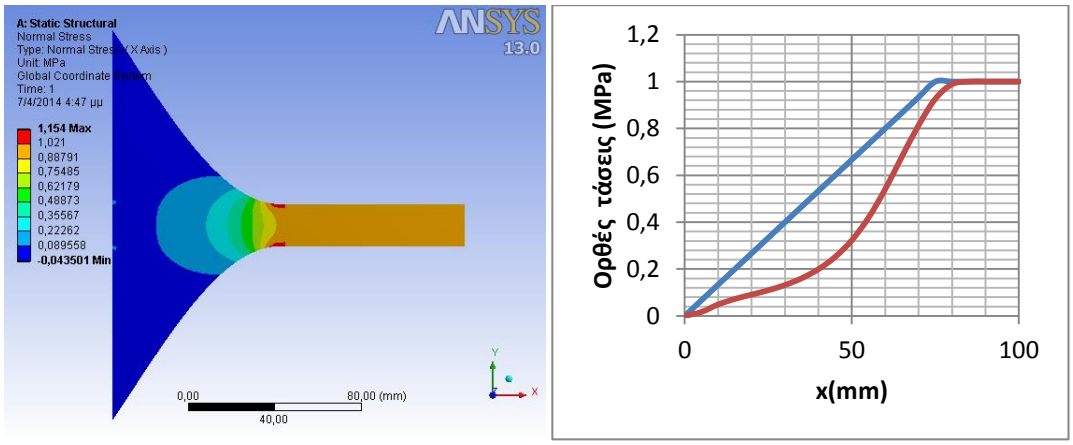
Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 0.5



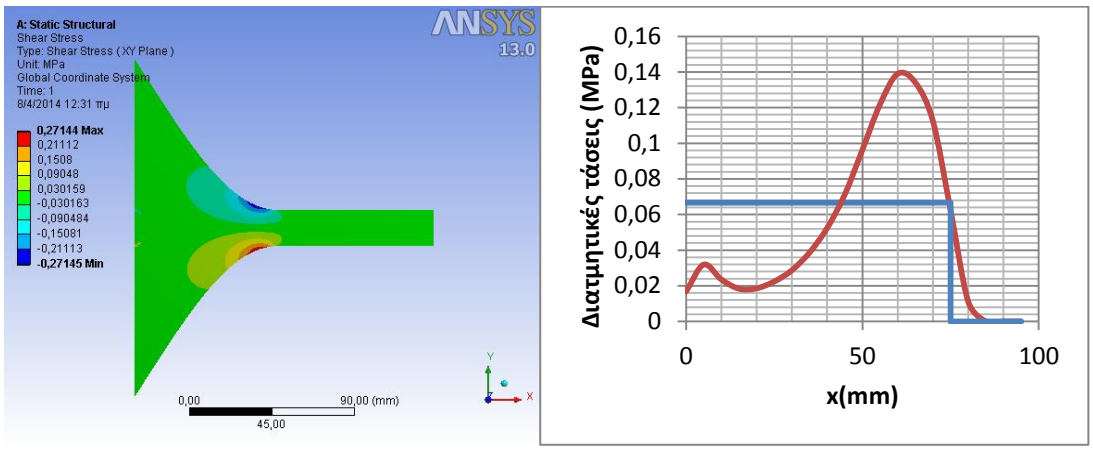
Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 1



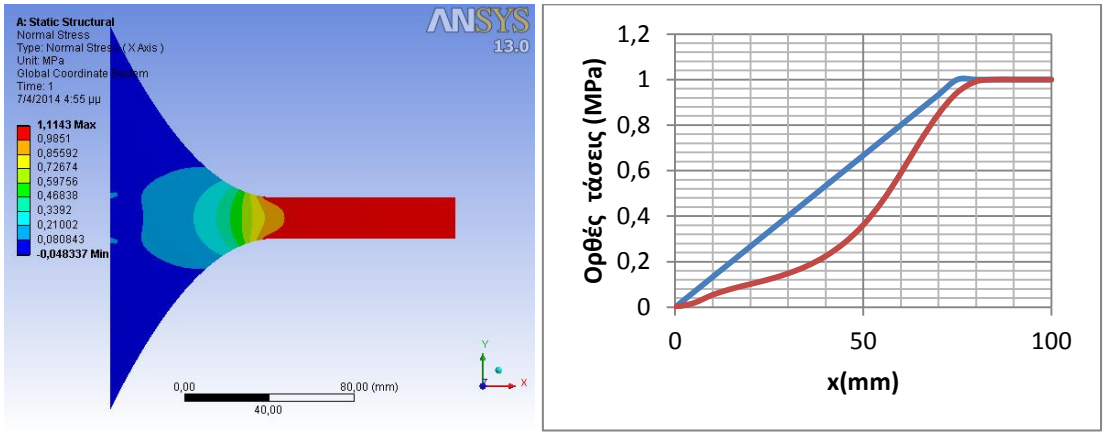
Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 1



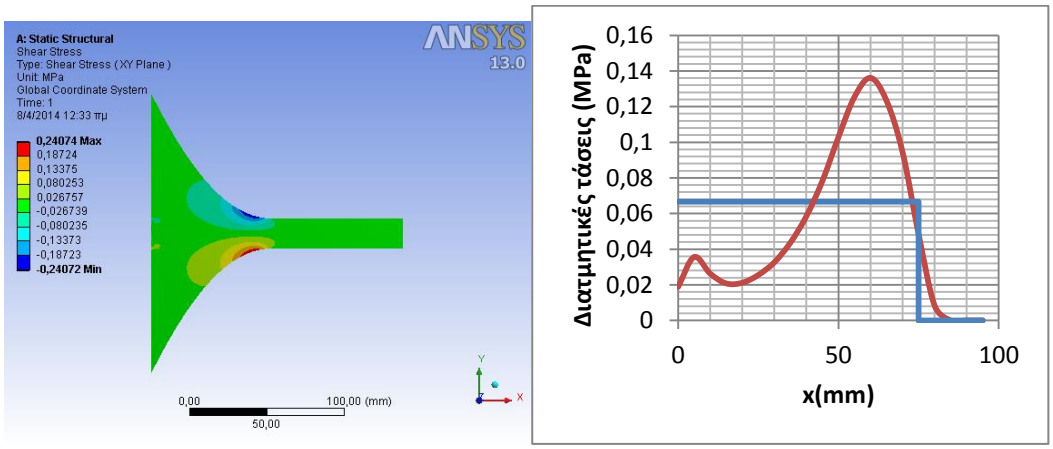
Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 1.5



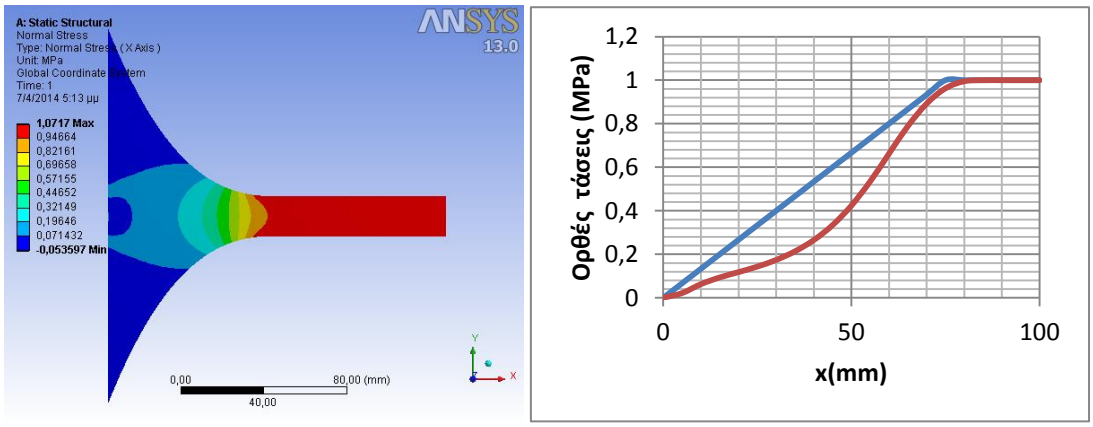
Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 1.5



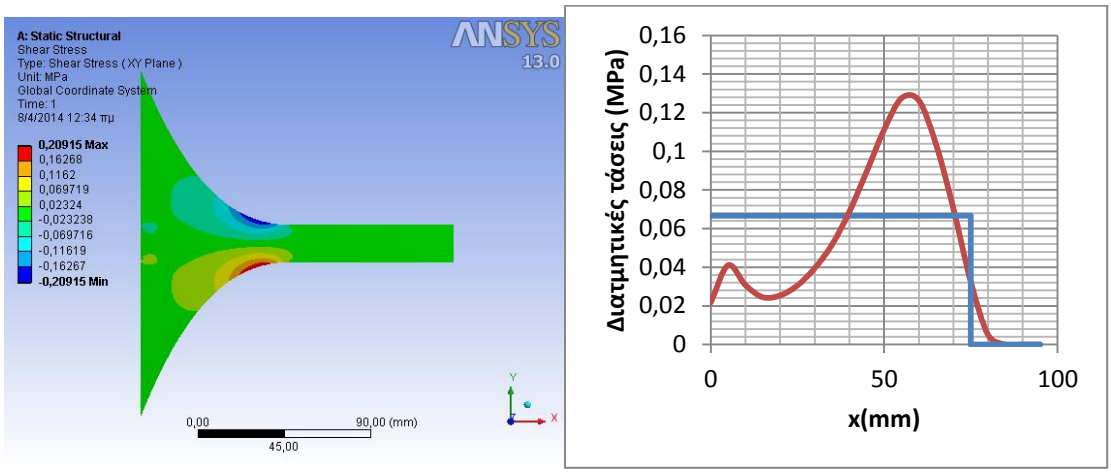
Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 2



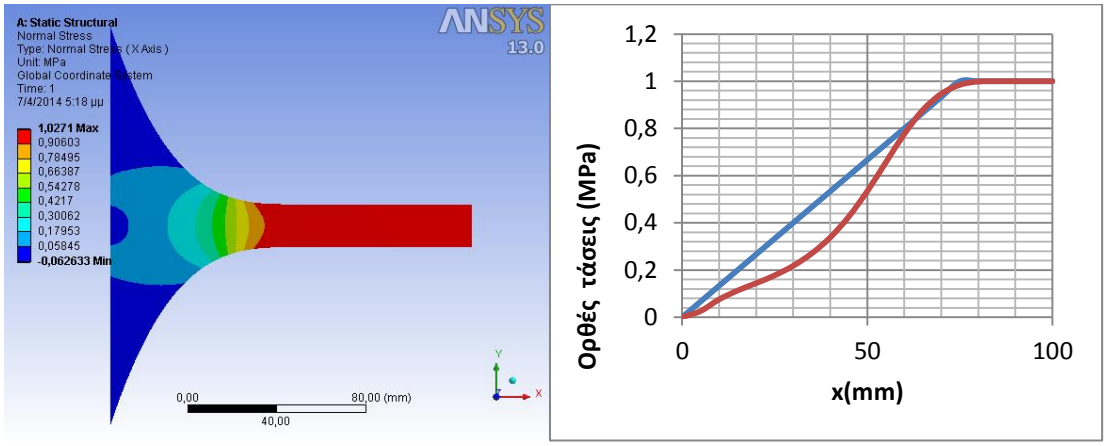
Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 2



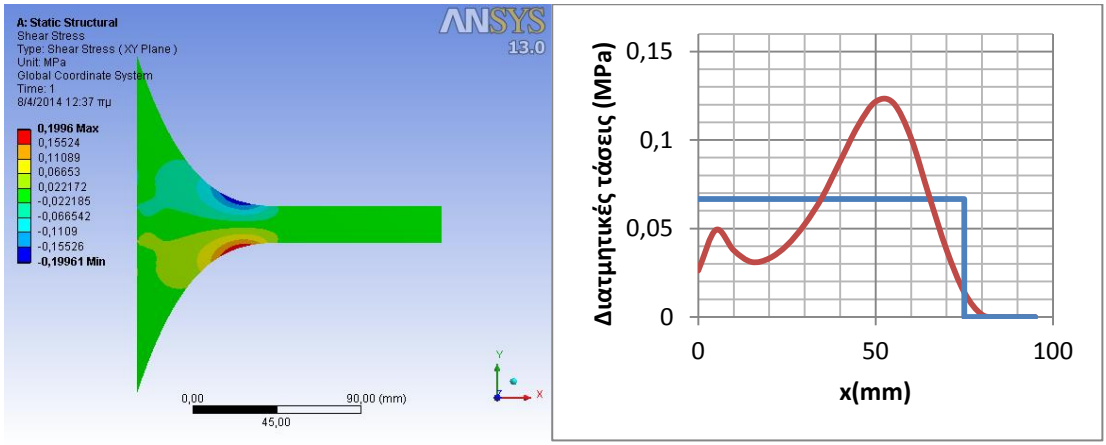
Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 2.5



Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 2.5



Ορθές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 3



Διατμητικές τάσεις για y_2 =90 mm , κλίση 3

Κωδικάς παρεμβολής Bezier

```
nco=7;                          %Αριθμός σημείων ελέγχου
e=0.00001;                      %Μέγιστη τιμή απόκλισης

zo=[…]                          %σημεία προς παρεμβολή

                                %Υπολογισμός μητρώων Bezier
for i=0:nco-1
 for j=0:nco-1

    fact1=factorial(nco-1)/(factorial(j)*factorial(nco-1-j));
  if i>j
    fact2=0;
  else
   fact2=factorial(j)/(factorial(i)*factorial(j-i));
  end

  m(i+1,j+1)=(-1)^(j-i)*fact1*fact2;
 end
end
zb=zo;
mastermetr=0;                   % Μετρητής επαναλήψεων
n=100000;                       % Αριθμός επαναλήψεων

                                %Δημιουργία επιφάνειας Bezier
for w=1:n;
mastermetr=mastermetr+1;
p=m'*zb*m;

for i=1:nco
 for j=1:nco
   u=(i-1)/(nco-1);
   v=(j-1)/(nco-1);
  z(i,j)=[1,u,u^2,u^3,u^4,u^5,u^6]*p*[1;v;v^2;v^3;v^4;v^5;v^6];
 end
end
                                % Αξιολόγηση επιφάνειας
metr=0;
for i=1:nco
 for j=1:nco
    r(i,j)=z(i,j)-zo(i,j);
   if abs(r(i,j))>e
     zb(i,j)=zb(i,j)-r(i,j);
    metr=metr+1;
   end
 end
end

    if metr==0
     break
    end
end
```