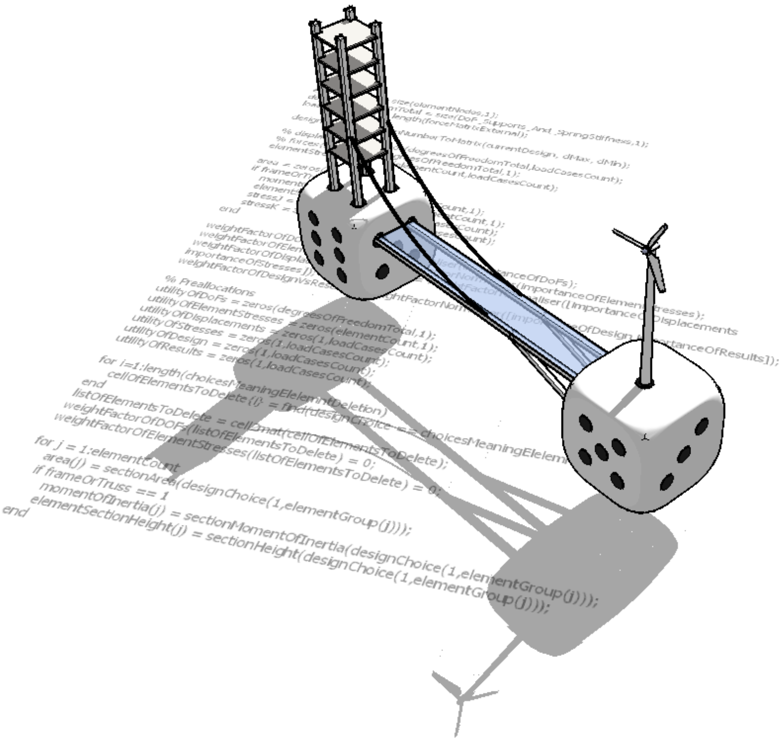
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών με Χρήση Θεωρίας Παιγνίων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεράσιμος Παναγιωτακόπουλος



Επιβλέπων Καθηγητής: Βλάσης Κουμούσης, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2014

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία αποτελεί μια προσπάθεια εισαγωγής της θεωρίας παιγνίων σε προβλήματα της επιστήμης του δομοστατικού πολιτικού μηχανικού και πιο συγκεκριμένα της βελτιστοποίησης του σχεδιασμού των κατασκευών. Αντικείμενο του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών είναι να αποκτήσει μια κατασκευή τον καλύτερο συνδυασμό των επιθυμητών χαρακτηριστικών της, δηλαδή ασφάλειας, λειτουργικότητας και οικονομικότητας. Μια τέτοια προσπάθεια απαιτεί φυσικά την καλή κρίση του μηχανικού, καθώς και την κατανόηση του προβλήματος. Η θεωρία παιγνίων παρέχει χρήσιμες συμβουλές αναφορικά με την ανάλυση καταστάσεων και λήψη αποφάσεων. Συνεπώς, μπορεί, αν χρησιμοποιηθεί κατάλληλα, να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο στα χέρια του μηχανικού, τόσο στο βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών, όσο και σε άλλες εφαρμογές που απαιτούν καλή κρίση.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων, ούτως ώστε ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με το αντικείμενό της. Πρώτα εξηγούνται οι βασικές έννοιές της, όπως για παράδειγμα η ωφέλεια, που αποτελεί ένα μέγεθος που ποσοτικοποιεί την ικανοποίηση που προσδίδει σε κάθε άτομο ένα γεγονός. Έπειτα, ο αναγνώστης εξοικειώνεται με την Ισορροπία Nash, που αποτελεί ένα σύνολο στρατηγικών που αποτελούν ταυτόχρονα καλύτερη απάντηση η καθεμία στις υπόλοιπες. Εν συνεχεία παρουσιάζονται ορισμένοι κλάδοι, όπως η θεωρία δημοπρασιών και τα συστήματα ψηφοφορίας, στη μελέτη των οποίων η θεωρία παιγνίων έχει γνωρίσει μεγάλη άνθιση και παίζει καθοριστικό ρόλο. Το κεφάλαιο αυτό είναι πλήρως απαλλαγμένο από μαθηματικούς υπολογισμούς και έχει αποκλειστικό στόχο να εξοικειώσει με τις βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων.

Το Κεφάλαιο 3 είναι περισσότερο προσανατολισμένο σε μαθηματικούς υπολογισμούς. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους είναι δυνατή η εύρεση Ισορροπίας Nash. Οι κυριότερες μέθοδοι που αναφέρονται είναι η διαδοχική διαγραφή κυριαρχούμενων στρατηγικών και η μέθοδος της πίσω επαγωγής, όσον αφορά σε Ισορροπίες Nash με χρήση καθαρών στρατηγικών, ενώ αναφέρεται και η μετατροπή σε ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας, όσον αφορά σε Ισορροπίες Nash με χρήση μικτών στρατηγικών.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών που επιλύει η παρούσα εργασία, και εισάγεται η προτεινόμενη μεθοδολογία, η Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας. Η μέθοδος αυτή παρέχει τη δυνατότητα ευρύτερης επιλογής αντικειμενικής συνάρτησης, ξεφεύγοντας από το κλασικό πρόβλημα του οικονομικότερου δυνατού σχεδιασμού, ενώ παράλληλα επιτρέπει τη χρήση περιορισμών που αφορούν οποιαδήποτε πιθανή μεταβλητή σχεδιασμού, συμπεριλαμβανομένων και των οικονομικών πόρων. Σύμφωνα με τη Μέθοδο Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας, το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών προσομοιώνεται ως παίγνιο, με παίκτες τον αμυνόμενο, που υπερασπίζεται το φορέα, διαχειριζόμενος την δυσκαμψία των υλικών του και τον επιτιθέμενο, ο οποίος διαλέγει τον τρόπο που θα επιτεθεί στο φορέα, επιλέγοντας ανάμεσα σε κάποια προκαθορισμένα σενάρια φόρτισης που περιγράφουν οι οικείοι κανονισμοί ή και άλλες πρόσθετες φορτίσεις. Παράλληλα, η μέθοδος αντιστοιχεί ωφέλεια στους δύο παίκτες ανάλογα με τα αποτελέσματα (σε όρους τάσεων, μετακινήσεων και χρηματικών δαπανών) που προκύπτουν από τις κινήσεις τους. Το παίγνιο προσομοιώνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι πλήρως ανταγωνιστικό, παρεμποδίζοντας κάθε δυνατότητα συνεργασίας μεταξύ των δύο παικτών. Εν συνεχεία, το παίγνιο λύνεται με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων και τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής. Με αυτό τον τρόπο εντοπίζονται ταυτόχρονα ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής, καθώς και η κρίσιμη φόρτιση που θα δεχτεί στην Ισορροπία Nash.

Το Κεφάλαιο 5 είναι αφιερωμένο στους ευρετικούς αλγορίθμους. Η εγγενής δυσκολία της μεθοδολογίας έγκειται στην συνδυαστική έκρηξη όλων των πιθανών παραλλαγών που καθορίζουν το χώρο των λύσεων, η πλήρης αντιμετώπιση των οποίων απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη υπολογιστή, σε σημείο που, παρά τη θεωρητική της ισχύ, η χρήση της να καθίσταται ασύμφορη. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στο γεγονός πως, ακόμα και για μικρού μεγέθους προβλήματα, οι πιθανές στρατηγικές που είναι διαθέσιμες στον αμυνόμενο είναι μεν πεπερασμένες, αλλά έχουν πολύ μεγάλο πλήθος. Η θεωρία παιγνίων προϋποθέτει τη σειριακή εξέταση κάθε στρατηγικής, γεγονός που καθιστά ασύμφορη τη μέθοδο στην κλασική της μορφή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν τρεις ευρετικοί αλγόριθμοι (heuristics), οι οποίοι έχουν στόχο να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση εξετάζοντας κατάλληλα επιλεγόμενο τμήμα του χώρου των λύσεων σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, εκχωρώντας την βεβαιότητα της εύρεσης της μαθηματικά βέλτιστης λύσης, διατηρώντας όμως καλές προϋποθέσεις εύρεσης καλών λύσεων στη περιοχή της θεωρητικά βέλτιστης λύσης. Ένας εκ των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκε αφορά στην Προσομοιωμένη Ανόπτηση, (simulated annealing), ενώ οι υπόλοιποι δύο αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Συνδυάζοντας τη Μέθοδο Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας (maximization of minimum utility) και τους ευρετικούς αλγορίθμους, προκύπτει ένα ισχυρό εργαλείο διακριτής βελτιστοποίησης, ικανό για επίλυση πλήθους προβλημάτων. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται ένα πλήθος αριθμητικών εφαρμογών που αφορούν προβλήματα διαστασιολόγησης, τοπολογίας, σχήματος και ελαχιστοποίηση μετακίνησης με οικονομικούς περιορισμούς. Η εγκυρότητα της μεθόδου επαληθεύεται επιλύοντας ήδη γνωστά προβλήματα από τη βιβλιογραφία. Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα της μεθόδου ταυτίζονται με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας.

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και προτείνονται ιδέες για μελλοντική έρευνα. Τόσο η Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας όσο και οι ευρετικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επιτάχυνση της μεθόδου έχουν λειτουργήσει ικανοποιητικά. Η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί να λύσει κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης, υπό την προϋπόθεση πως είναι διαθέσιμος ο αντίστοιχος επιλύτης. Ο φορέας προς βελτιστοποίηση επιτρέπεται να είναι δικτύωμα, πλαίσιο ή οποιαδήποτε άλλης μορφής. Παράλληλα, η προτεινόμενη μεθοδολογία καθιστά δυνατή τη μελέτη πλήθους σεναρίων φόρτισης. Βέβαια, οι ευρετικοί αλγόριθμοι χρίζουν περαιτέρω βελτίωσης, γεγονός που αναμένεται να μειώσει ακόμα περισσότερο το χρόνο εκτέλεσης.

Λέξεις - Κλειδιά: Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών, Θεωρία Παιγνίων, Ισορροπία Nash, συνάρτηση ωφέλειας, ελαχιστοποίηση βάρους, βελτιστοποίηση τοπολογίας, βελτιστοποίηση σχήματος, οικονομικοί περιορισμοί, ευρετικοί αλγόριθμοι, προσομοιωμένη ανόπτηση.

Abstract

The present M. Sc. Thesis is an attempt to implement Game Theory in civil engineering problems and especially to structural optimization. The aim of structural optimization is to supply a given structure with the optimal combination of its desired attributes, namely safety, serviceability and cost effectiveness by varying a number of design variables. Of course, such a task requires good engineering judgment as well as solid understanding of the problem. Game theory provides with useful advice regarding the features of analysis and decision making. It is therefore possible for game theory, if used in an appropriate way, to become a useful tool in the hands of an engineer, both in structural optimization and in other applications that require calculated decisions.

The remaining work is organized as follows: In Chapter 2 an introduction to game theory is made, so that the readers can familiarize themselves with its objective. At first the most basic concepts are explained, such as utility, which measures the pleasure that one enjoys because of a certain event, something that will be exploited for the purposes of this thesis. The reader is also familiarized with the concept of Nash Equilibrium, a set of strategies, each one of them simultaneously being a best response to the rest. Furthermore, some other important branches are presented, in the analysis of which game theory has played a decisive role, such as theory of auctions and voting systems. This chapter is absolutely free from mathematical calculations and its exclusive aim is to get the reader accustomed to the basic concepts of game theory.

Chapter 3 is more mathematically oriented. In this chapter, the various ways to discover a Nash Equilibrium are discussed. The main methods are the iterative deletion of dominated alternatives and the backward induction, as far as pure strategy equilibria are concerned, and transformation to an equivalent linear complementarity problem, when searching for mixed strategy equilibria.

In Chapter 4 the problem addressed in the present thesis is discussed that regards structural optimization. Also, the suggested methodology is introduced, named Maximization of Minimum Utility Method. This method allows a wider choice of objective function, surpassing the limits of the classic problem of the most economic design, while at the same time allowing the usage of limitations regarding any design variable, funding included. According to the Maximization of Minimum Utility Method, the discrete problem of structural optimization is simulated as a game, played by the defending player, who defends the structure, managing the stiffness of the materials and cross sections at hand, and the attacking player, who decides upon the way to attack the structure, by choosing among some predefined load combinations, usually described by code regulations. Furthermore, the method

assigns utility to both players, depending on the results (in terms of stresses, displacements and funding) of their combined decisions. The game is simulated as a zero sum game, in order to make it fully competitive, hindering any possibility of cooperation between the players. The game is then solved using game theory and the backward induction method. In this way both the optimal design of the given structure and the critical loading case at Nash Equilibrium are simultaneously identified.

Chapter 5 is devoted to heuristic algorithms. The inherent problem of the method lies in the combinatorial explosion of the set of the possible alternatives that define the solution space, the accurate analysis of which demands huge computational time and computer memory, rendering the method inefficient, despite its theoretical power. This flaw is due to the fact that even in small scale problems, the number of possible strategies available to the defending player is just too big to handle. Game theory requires serial analysis of every particular solution, which renders inefficient the above method in its classic form. For this reason three heuristic algorithms were employed, aiming to identify the optimal solution by examining only a small fraction of the solution space in a very short time period. This comes at the cost of giving up the certainty of finding the mathematically optimal solution, but preserving sufficient conditions for finding satisfactory solutions in the area of the theoretically optimal solution. One of the algorithms in use was the well-known Simulated Annealing algorithm, whereas the remaining two algorithms were developed just for the present thesis.

By combining the maximization of minimum utility method with heuristic algorithms a powerful discrete optimization tool emerges, which is capable of solving numerous kinds of optimization problems. A code in Matlab is written, containing both the maximization of minimum utility method and the heuristic algorithms employed. The code was used in order to solve a number of structural optimization problems, which are discussed in chapter 6. These problems regard weight minimization, topology, shape optimization and displacement minimization with budget constraints. The validity of the suggested method is verified by solving already known problems from references. In all cases, the results of the suggested method match the results of the references.

In Chapter 7 the conclusions of the thesis are presented, as well as some ideas for future work. Both the maximization of minimum utility method and the heuristic algorithms employed to accelerate the method have worked successfully. The suggested methodology can be applied to any kind of structural optimization problem. The method can be applied in any kind of structure, trusses, frames or any other structure, provided that the corresponding solver is available. Moreover, the method can also apply to structures with several loading cases. Of course, the heuristic algorithms used can be improved. Undoubtedly, this will accelerate the method even more.

Keywords: Structural Optimization, Game Theory, Nash equilibrium, utility function, weight minimization, topology optimization, shape optimization, budget limitation, heuristic algorithms, simulated annealing.

Περιεχόμενα

Πρόλογος και Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια σύζευξης δύο επιστημονικών κλάδων με λίγες εφαρμογές μέχρι στιγμής και συγκεκριμένα της θεωρίας παιγνίων και της επιστήμης του δομοστατικού πολιτικού μηχανικού. Η παρούσα εργασία φιλοδοξεί αφενός να αποτελέσει μια βάση για περισσότερες έρευνες και μια πιο σφαιρική αντίληψη του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών, αφετέρου να παρακινηθούν περισσότεροι φοιτητές να εντρυφήσουν στη θεωρία παιγνίων και να ασχοληθούν ερευνητικά με το αντικείμενο και τις εφαρμογές του στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω βαθύτατα τον Επιβλέποντα Καθηγητή κ. Β. Κουμούση, τόσο για τη σύλληψη της ιδέας πως η θεωρία παιγνίων μπορεί να εφαρμοστεί στην επιστήμη των πολιτικών μηχανικών, όσο και για μια εξαιρετική καθοδήγηση σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, καθώς και για την αστείρευτη παροχή ιδεών και βιβλιογραφικών βοηθημάτων.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή και Ακαδημαϊκό μου Σύμβουλο κ. Ε. Σαπουντζάκη, για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές του καθ΄ όλο το διάστημα των σπουδών μου, την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας και τα πρώτα ερευνητικά μου βήματα.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα και τον Καθηγητή της Σχολής Χημικών Μηχανικών κ. Χ. Κυρανούδη, για ένα πολύ χρήσιμο και ιδιαιτέρως διαφωτιστικό εξαμηνιαίο μάθημα πάνω σε ευρετικούς αλγορίθμους, καθώς και για τις προτάσεις του στα θέματα που με απασχόλησαν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους, τους γονείς μου, καθώς και την Α. Παναγιωτακοπούλου, τη Σ. Τζαβίδη και το Μ. Χουρδάκη, καθένας εκ των οποίων συνέβαλε με το δικό του, ξεχωριστό τρόπο στην εργασία αυτή.

Στην οικογένειά μου

1 Εισαγωγή

1.1 Περί Θεωρίας Παιγνίων

Η θεωρία Παιγνίων είναι ο κλάδος που ασχολείται με την ανάλυση και αξιολόγηση των παιγνίων, υπό την προϋπόθεση πως οι παίκτες συμπεριφέρονται λογικά. Ως παίγνιο θεωρείται μια οποιαδήποτε κατάσταση στην οποία δύο ή και περισσότερα άτομα, οι παίκτες, καλούνται να λάβουν μία ή περισσότερες αποφάσεις, ανάλογα με τις οποίες θα συμβεί και ένα γεγονός, το οποίο έχει διαφορετική αξία για κάθε παίκτη. Ο ορισμός αυτός δίνει σημαντικά ευρύτερο πεδίο στην έννοια «παίγνιο» από τον όρο «παιχνίδι», που χρησιμοποιείται σαφώς περισσότερο στην καθημερινή ζωή και έχει κυρίως ψυχαγωγικούς σκοπούς.

Παραδείγματα Παιγνίων:

- Δύο υποψήφιοι δήμαρχοι καθορίζουν την πολιτική τους στρατηγική.
- Δύο υποψήφιοι αγοραστές πλειοδοτούν για ένα έργο τέχνης.
- Δύο οδηγοί συνεννοούνται για την προτεραιότητα σε ένα δρόμο.
- Δύο παιδιά παίζουν «Πέτρα, ψαλίδι, χαρτί».
- Δύο σκακιστές παίζουν μια παρτίδα σκάκι.
- Δύο στρατηγοί καθοδηγούν τους στρατούς τους στον πόλεμο.

Το παίγνιο λοιπόν είναι υπερσύνολο του παιχνιδιού και μπορεί να είναι είτε πολύ απλό είτε πολύ σύνθετο, ενώ είναι δυνατό να αφορά από ασήμαντα έως ακόμα και πολύ σοβαρά θέματα, όπως ανθρώπινες ζωές, οικονομίες κρατών κλπ.

Στις μέρες μας η θεωρία παιγνίων θεωρείται σημαντικός κλάδος της επιστήμης. Πολλές από τις οικονομικές αποφάσεις βασίζονται σε πορίσματα από τη θεωρία παιγνίων, ενώ οι περισσότερες χώρες διαθέτουν αντίστοιχους ειδικούς για να συμβουλεύουν σε θέματα λήψης αποφάσεων εξωτερικής πολιτικής, κλπ.

1.2 Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών

Κάθε κατασκευή οφείλει να πληροί συγκεκριμένα κριτήρια. Οφείλει κυρίως να είναι λειτουργική, δηλαδή να εξυπηρετεί το σκοπό για τον οποίο κατασκευάστηκε. Επιπλέον, οφείλει να είναι ασφαλής, ικανοποιώντας ορισμένες προδιαγραφές ασφαλείας στους χρήστες και το περιβάλλον της. Πέραν της λειτουργικότητας και της ασφάλειας, ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που οφείλει να έχει κάθε κατασκευή είναι η οικονομικότητα. Η οικονομία πόρων είναι πολύ σημαντικό θέμα, εξίσου σημαντικό με τους υπόλοιπους στόχους που τίθενται κατά τη μελέτη της κατασκευής. Αυτό γίνεται ιδιαιτέρως αισθητό στις μέρες μας, καθώς με την τεράστια ώθηση στον κλάδο της πληροφορικής, έχουν αναπτυχθεί μεγάλο πλήθος από εμπορικά λογισμικά, τα οποία εξασφαλίζουν σε μεγάλο βαθμό τόσο την ασφάλεια, όσο και τη λειτουργικότητα της κάθε κατασκευής. Συνεπώς, είναι επόμενο η έμφαση πλέον να δίνεται στο κομμάτι της οικονομικότητας.

Δυστυχώς, τα παραπάνω επιθυμητά χαρακτηριστικά των κατασκευών είναι αντικρουόμενα, καθώς κινούνται προς διαφορετική κατεύθυνση. Για παράδειγμα, αυξάνοντας κανείς τις διατομές προσδίδει εν γένει μεγαλύτερη δυσκαμψία στην κατασκευή, συνεπώς και μεγαλύτερη ασφάλεια. Ταυτόχρονα όμως, αυξάνει το κόστος της. Έτσι, κάποιες ασφαλείς λύσεις προκύπτουν να είναι εξαιρετικά αντιοικονομικές, ενώ ορισμένες φτηνές λύσεις ενδέχεται να είναι επικίνδυνες.

Το χάσμα αυτό μεταξύ των αντικρουόμενων βουλήσεων για ασφάλεια και οικονομικότητα έρχεται να γεφυρώσει ο βέλτιστος σχεδιασμός των κατασκευών. Ο κλάδος αυτός έχει ως στόχο να αναλύσει τα προβλήματα των κατασκευών, ούτως ώστε να καταλήξει σε λύσεις που συνδυάζουν όλα τα βασικά χαρακτηριστικά που οφείλει να έχει κάθε κατασκευή. Πολύ σημαντικό ρόλο στον κλάδο αυτό παίζει συχνά η κρίση του μηχανικού, καθώς απαιτείται να λάβει ένα πλήθος αποφάσεων, με στόχο να καταλήξει στη βέλτιστη δυνατή λύση.

Σε αυτό το σημείο, η θεωρία παιγνίων μπορεί να αποτελέσει πολύτιμο εργαλείο για το μηχανικό. Ανέκαθεν έπαιζε έναν τέτοιο ρόλο, καθώς είχε ιδιαίτερη συμβουλευτική αξία σε προβλήματα που απαιτούσαν την ανάλυση καταστάσεων και τη λήψη αποφάσεων. Όπως θα γίνει φανερό, είναι δυνατό να παίξει έναν ανάλογο ρόλο και στο βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών.

1.3 Στόχοι της Εργασίας

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία αποτελεί μια προσπάθεια εισαγωγής της Θεωρίας Παιγνίων σε προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού και ειδικότερα της βελτιστοποίησης του σχεδιασμού των κατασκευών. Πιο συγκεκριμένα, εισάγεται η Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας, η οποία καθιστά δυνατή την επίλυση του διακριτού προβλήματος βελτιστοποίησης των κατασκευών. Η μέθοδος αυτή παρέχει τη δυνατότητα ευρύτερης επιλογής αντικειμενικής συνάρτησης, ξεφεύγοντας από το κλασικό πρόβλημα του οικονομικότερου δυνατού σχεδιασμού, ενώ παράλληλα επιτρέπει τη χρήση περιορισμών που αφορούν οποιαδήποτε πιθανή μεταβλητή σχεδιασμού, συμπεριλαμβανομένων και των οικονομικών πόρων. Σύμφωνα με τη Μέθοδο Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας, το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών προσομοιώνεται ως παίγνιο, με παίκτες τον αμυνόμενο, που υπερασπίζεται το φορέα, διαχειριζόμενος την δυσκαμψία των υλικών του και τον επιτιθέμενο, ο οποίος διαλέγει τον τρόπο που θα επιτεθεί στο φορέα, επιλέγοντας ανάμεσα σε κάποια προκαθορισμένα σενάρια φόρτισης που περιγράφουν οι οικείοι κανονισμοί ή και άλλες πρόσθετες φορτίσεις. Παράλληλα, η μέθοδος αντιστοιχεί ωφέλεια στους δύο παίκτες ανάλογα με τα αποτελέσματα (σε όρους τάσεων, μετακινήσεων και χρηματικών δαπανών) που προκύπτουν από τις κινήσεις τους. Το παίγνιο προσομοιώνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι πλήρως ανταγωνιστικό, παρεμποδίζοντας κάθε δυνατότητα συνεργασίας μεταξύ των δύο παικτών. Εν συνεχεία, το παίγνιο λύνεται με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων. Με αυτό τον τρόπο εντοπίζονται ταυτόχρονα ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής, καθώς και η κρίσιμη φόρτιση που θα δεχτεί στην Ισορροπία Nash.

Η εγγενής δυσκολία της Μεθόδου έγκειται στην συνδυαστική έκρηξη όλων των πιθανών παραλλαγών που καθορίζουν το χώρο των λύσεων, η πλήρης αντιμετώπιση των οποίων απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη υπολογιστή, σε σημείο που, παρά τη θεωρητική της ισχύ, η χρήση της να καθίσταται ασύμφορη. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στο γεγονός πως, ακόμα και για μικρού μεγέθους προβλήματα, οι πιθανές στρατηγικές που είναι διαθέσιμες στον αμυνόμενο είναι μεν πεπερασμένες, αλλά έχουν πολύ μεγάλο πλήθος. Η θεωρία παιγνίων προϋποθέτει τη σειριακή εξέταση κάθε στρατηγικής, γεγονός που καθιστά ασύμφορη τη μέθοδο στην κλασική της μορφή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν τρεις ευρετικοί αλγόριθμοι (heuristics), οι οποίοι έχουν στόχο να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση εξετάζοντας κατάλληλα επιλεγόμενο τμήμα του χώρου των λύσεων σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, παραιτούμενοι από τη βεβαιότητα εύρεσης της μαθηματικά βέλτιστης λύσης, διατηρώντας όμως καλές προϋποθέσεις εύρεσης καλών λύσεων στη περιοχή της θεωρητικά βέλτιστης λύσης. Ένας εκ των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκε αφορά στην Προσομοιωμένη Ανόπτηση, (simulated annealing), ενώ οι υπόλοιποι δύο αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Συνδυάζοντας τη Μέθοδο Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας (maximization of minimum utility) και τους ευρετικούς αλγορίθμους, προκύπτει ένα ισχυρό εργαλείο διακριτής βελτιστοποίησης, ικανό για επίλυση πλήθους προβλημάτων. Η εγκυρότητα της μεθόδου επαληθεύεται επιλύοντας ήδη γνωστά προβλήματα από τη βιβλιογραφία. Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα της μεθόδου ταυτίζονται με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας.

Ένας δεύτερος στόχος είναι η ανάδειξη της θεωρίας παιγνίων ως μέθοδο λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων. Η θεωρία παιγνίων είναι ένας σημαντικός κλάδος της επιστήμης, ο οποίος όμως δε είναι οικείος στους πολιτικούς μηχανικούς, καθώς το αντικείμενό του δεν αφορά άμεσα το γνωστικό πεδίο τους και βασίζεται στα διακριτά μαθηματικά. Η παρούσα εργασία στοχεύει να αναδείξει ορισμένα από τα αντικείμενα στα οποία δραστηριοποιείται η θεωρία παιγνίων, καθώς και να εξοικειώσει τον αναγνώστη με ορισμένα από τα βασικά εργαλεία της. Για αυτό το λόγο, δύο κεφάλαια της παρούσας εργασίας αφιερώνονται αποκλειστικά στη Θεωρία Παιγνίων. Το μεν πρώτο εξοικειώνει τον αναγνώστη με τις βασικές έννοιες, ενώ το δεύτερο τον εξοικειώνει με ορισμένα υπολογιστικά εργαλεία, κάνοντας χρήση μαθηματικών υπολογισμών.

2 Θεωρία Παιγνίων – Βασικές Έννοιες

2.1 Λογική συμπεριφορά

Σημειώνεται πως η θεωρία παιγνίων έχει έννοια και δίνει σωστές συμβουλές μόνο στην περίπτωση που οι παίκτες σκοπεύουν να συμπεριφερθούν «λογικά». Τι είναι όμως αυτό που καθορίζει τη λογική συμπεριφορά;

Σε αντίθεση με άλλες επιστήμες, η θεωρία παιγνίων δεν ενδιαφέρεται στο ελάχιστο να κρίνει καθαυτές τις επιλογές των παικτών. Όπως αναφέρεται χαρακτηριστικά [1], «η θεωρία παιγνίων θεωρεί απολύτως αποδεκτό για κάποιον παίκτη να προτιμάει την καταστροφή του σύμπαντος από το να κουνήσει το δάχτυλό του», όμως αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι η συνέπεια στις αποφάσεις του κάθε ατόμου. Αν δηλαδή προτιμάει το γεγονός Α από το γεγονός Β, και ταυτόχρονα προτιμάει το γεγονός Β από το γεγονός Γ, τότε αναγκαστικά οφείλει να προτιμάει το Α από το Γ, αλλιώς είναι ασυνεπής. Το τι αντιπροσωπεύουν τα παραπάνω γεγονότα δεν επηρεάζει τη θεωρία παιγνίων, αρκεί να ακολουθεί το άτομο μια συνεπή συμπεριφορά στις προτιμήσεις του όσον αφορά τα γεγονότα αυτά. Αυτό βέβαια δεν αντανακλά τη συμπεριφορά των ατόμων που κατά κανόνα διακατέχονται από ηθικές, κοινωνικές, εθνικές, και λοιπές αρχές που καθορίζουν το πλαίσιο της συμπεριφοράς τους.

2.2 Βασικά Παίγνια

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούν ενδεικτικά ορισμένα βασικά παίγνια, τα οποία έχουν ιδιαίτερη σημασία για την εξοικείωση με τη θεωρία παιγνίων. Όλα τα παρακάτω παίγνια παίζονται από 2 παίκτες, την Alice και τον Bob.

2.2.1 Matching Pennies

Στο παίγνιο αυτό η Alice και ο Bob επιλέγουν ταυτόχρονα μια πλευρά νομίσματος, κορόνα ή γράμματα. Αν επιλέξουν την ίδια πλευρά, τότε κερδίζει η Alice. Αν επιλέξουν διαφορετική πλευρά, τότε κερδίζει ο Bob.

Ο Πίνακας 2.1 αποτελεί την αναπαράσταση σε κανονική μορφή του παιγνίου Matching Pennies. Αποτελεί τον λεγόμενο **πίνακα απολαβών** (payoff table) του παιγνίου. Ο πίνακας απολαβών λειτουργεί ως εξής: Η Alice επιλέγει μια γραμμή και ο Bob επιλέγει μια στήλη. Έτσι, ορίζεται μονοσήμαντα ένα αποτέλεσμα απολαβών (a,b), εκ των οποίων η Alice θα λάβει το a και ο Bob θα λάβει το b. Η επιλογή του κάθε παίκτη καλείται και στρατηγική ή κίνηση, ενώ τα πιθανά αποτελέσματα στα οποία ενδέχεται να καταλήξουν οι παίκτες καλούνται ενδεχόμενα.

Alice \ Bob	Κορώνα	Γράμματα
Κορώνα	(+1, -1)	(-1, +1)
Γράμματα	(-1, +1)	(+1, -1)

Πίνακας 2.1: Πίνακας Απολαβών για Matching Pennies

Παρατηρούμε πως στο συγκεκριμένο παίγνιο οι παίκτες ανταγωνίζονται πλήρως ο ένας τον άλλο και δεν υπάρχει κάποια κατάσταση που να τους αφήνει όλους ικανοποιημένους. Όσο απλοϊκό κι αν δείχνει το παραπάνω παίγνιο, παραλλαγές του παίζονται και στην πραγματικότητα. Για παράδειγμα, ένας υπάλληλος που επιλέγει μια μέρα για να κλέψει το αφεντικό του, και το αφεντικό που τον υποψιάζεται και επιλέγει μια μέρα για να ελέγξει τον υπάλληλό του, παίζουν μια παραλλαγή του Matching Pennies με περισσότερες επιλογές για κάθε παίκτη. Το αφεντικό κερδίζει όταν οι δύο μέρες συμπίπτουν, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση κερδίζει ο υπάλληλος.

2.2.2 Rock – Paper – Scissors

Ίσως το πιο γνωστό παίγνιο είναι το πέτρα – ψαλίδι – χαρτί, το οποίο δίνει τρεις επιλογές σε κάθε παίκτη, με απολαβές όπως δείχνει ο Πίνακας 2.2. Σύμφωνα με τους κανόνες, η πέτρα σπάει το ψαλίδι, το ψαλίδι κόβει το χαρτί και το χαρτί τυλίγει την πέτρα, ενώ αν οι δύο παίκτες κάνουν την ίδια επιλογή, τότε το αποτέλεσμα είναι ισόπαλο.

Alice \ Bob	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	(0, 0)	(+1, -1)	(-1, +1)
Ψαλίδι	(-1, +1)	(0, 0)	(+1, -1)
Χαρτί	(+1, -1)	(-1, +1)	(0, 0)

Πίνακας 2.2: Πίνακας Απολαβών για πέτρα – ψαλίδι – χαρτί

2.2.3 Driving Game

Στο παίγνιο αυτό η Alice και ο Bob είναι δύο οδηγοί, των οποίων τα αυτοκίνητα βρίσκονται το ένα απέναντι από το άλλο και πρέπει να συνεννοηθούν για το πώς θα περάσουν. Αν κάνουν και οι δύο δεξιά ή και οι δύο αριστερά, τότε θα τα καταφέρουν. Αν όχι, θα τρακάρουν. Ο Πίνακας 2.3 συνοψίζει τα πιθανά αποτελέσματα του παιγνίου αυτού.

Παρατηρούμε πως, σε αντίθεση με τα παίγνια Matching Pennies και Rock – Paper – Scissors, εδώ οι δύο παίκτες δεν ανταγωνίζονται αλλά προσπαθούν να συνεργαστούν με τον συμπαίκτη τους, ώστε να κερδίσουν και οι δύο (win-win situation). Υπάρχουν δύο ζεύγη στρατηγικών, τα (αριστερά, αριστερά), (δεξιά, δεξιά), τα οποία αφήνουν ικανοποιημένους και τους δύο παίκτες.

Alice \ Bob	Αριστερά	Δεξιά
Αριστερά	(+1, +1)	(-1, -1)
Δεξιά	(-1, -1)	(+1, +1)

Πίνακας 2.3: Πίνακας Απολαβών για Driving Game

2.2.4 Chicken

Όπως και στο Driving Game, έτσι και στο Chicken, η Alice και ο Bob είναι δύο οδηγοί, που ανταγωνίζονται για το ποιος θα περάσει πρώτος από ένα στενό πέρασμα. Οι δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα να οδηγήσουν είτε γρήγορα, είτε αργά (δηλαδή να δειλιάσουν, εξ ου και το όνομα chicken). Αν δειλιάσουν και οι δύο, τότε αμφότεροι καταφέρνουν να περάσουν ανέπαφοι. Αν οδηγήσουν και οι δύο γρήγορα, τότε θα συγκρουστούν. Αν ο ένας οδηγήσει γρήγορα και ο άλλος δειλιάσει, τότε αυτός που οδήγησε γρήγορα θα περάσει πρώτος και αυτός που δείλιασε θα αναγκαστεί να περιμένει, όπως δείχνει και ο Πίνακας 2.4.

Alice \ Bob	Αργά	Γρήγορα
Αργά	(3, 3)	(0, 4)
Γρήγορα	(4, 0)	(-1, -1)

Πίνακας 2.4: Πίνακας Απολαβών για Chicken

2.2.5 Battle of the Sexes

Στο παίγνιο αυτό η Alice και ο Bob είναι ένα παντρεμένο ζευγάρι στο μήνα του μέλιτος, που συζητά για το πώς θα περάσει το απόγευμά του. Η Alice προτείνει να πάνε να παρακολουθήσουν χορό, ενώ ο Bob προτείνει έναν αγώνα μποξ. Το μεσημέρι το ζευγάρι χάνεται μέσα στην πολυκοσμία και δεν μπορεί να επικοινωνήσει, οπότε η Alice και ο Bob πρέπει να αποφασίσουν ξεχωριστά για το πού θα συναντηθούν. Πρώτη προτεραιότητα και των δύο είναι να περάσουν το απόγευμα μαζί, ενώ δεύτερη προτεραιότητα αποτελεί να συναντηθούν στον τόπο που προτιμούν. Ο Πίνακας 2.5 δίνει τις απολαβές που προκύπτουν, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω επιθυμίες των δύο παικτών.

Alice \ Bob	Χορός	Μποξ
Χορός	(2, 1)	(0, 0)
Μποξ	(0, 0)	(1, 2)

Πίνακας 2.5: Πίνακας Απολαβών για Battle of the Sexes

2.2.6 Prisoners’ Dilemma

Το Δίλημμα των Φυλακισμένων (Prisoners’ Dilemma) αποτελεί ίσως το πιο διάσημο και πολυσυζητημένο παίγνιο:

Δίλημμα των φυλακισμένων: Ο Bob και η Alice έχουν διαπράξει ένα έγκλημα και έχουν συλληφθεί, όμως ο δικαστής δε διαθέτει τα απαιτούμενα στοιχεία για να τους καταδικάσει. Γι’ αυτό το λόγο δίνεται στον κάθε παίκτη ξεχωριστά η ευκαιρία να ομολογήσει (εγωιστική συμπεριφορά), καταδίδοντας το συνένοχό του. Αν ο ένας εκ των δύο ομολογήσει και ο άλλος μείνει πιστός στο συνένοχό του (αλτρουιστική συμπεριφορά), τότε αυτός που ομολόγησε φεύγει ελεύθερος ενώ αυτός που μένει πιστός θα αντιμετωπίσει ποινή φυλάκισης 10 ετών. Αν και οι δύο ομολογήσουν, τότε θα αντιμετωπίσουν ποινή φυλάκισης 9 ετών έκαστος, ενώ αν κανείς δεν ομολογήσει, θα αντιμετωπίσουν ποινή φυλάκισης ενός έτους. Σημειώνεται πως ο Bob και η Alice ενδιαφέρονται αποκλειστικά να ελαχιστοποιήσουν το χρόνο που θα περάσουν στη φυλακή.

Ο Πίνακας 2.6 αποτελεί την κανονική μορφή του παιγνίου, το οποίο παρουσιάζει το εξής παράδοξο. Προσεγγίζοντας το παίγνιο από την πλευρά της Alice, προσπαθούμε να βρούμε την καλύτερη απάντησή της σε κάθε πιθανή κίνηση του Bob. Αν η Alice γνώριζε εκ των προτέρων πως ο Bob θα ομολογήσει, τότε είναι καλύτερο γι’ αυτήν να ομολογήσει, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα φυλακιστεί για 9 χρόνια, ενώ αν έδειχνε αλτρουισμό θα φυλακιζόταν για 10 χρόνια. Ο ίδιος συλλογισμός ευσταθεί και στην περίπτωση που η Alice γνωρίζει εκ των προτέρων πως ο Bob θα συμπεριφερθεί αλτρουιστικά. Ξανά η Alice θα πρέπει να προτιμήσει την ομολογία, καθώς προτιμάει να αφεθεί ελεύθερη από το να φυλακιστεί για 1 χρόνο. Συνεπώς, ανεξαρτήτως του τι θα κάνει ο Bob, η Alice είναι προτιμότερο να ομολογήσει. Καθώς ο Bob σκέφτεται λογικά, θα καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα. Οπότε, οι δύο παίκτες θα ομολογήσουν, καταλήγοντας να δεχθούν ποινή φυλάκισης 9 ετών έκαστος. Το παράδοξο του παιγνίου προκύπτει παρατηρώντας πως, εάν οι δύο παίκτες συνεργάζονταν και συμπεριφερόντουσαν αλτρουιστικά, τότε θα φυλακίζονταν μόλις για 1 χρόνο ο καθένας, γεγονός που αναμφισβήτητα θα προτιμούσαν και οι δύο.

Alice \ Bob	Εγωισμός	Αλτρουισμός
Εγωισμός	(-9, -9)	(0, -10)
Αλτρουισμός	(-10, 0)	(-1, -1)

Πίνακας 2.6 Πίνακας Απολαβών για Prisoners’ Dilemma

2.3 Κατηγοριοποίηση Παιγνίων

Τα παίγνια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν, ανάλογα με τη συμπεριφορά που αναμένεται να έχουν οι παίκτες. Έτσι, διακρίνονται σε:

- **Παίγνια Σταθερού Αθροίσματος**: Όταν κάποιο παίγνιο ανήκει σε αυτή την κατηγορία, τότε, για καθένα από τα πιθανά ενδεχόμενα, το άθροισμα των απολαβών των δύο παικτών είναι κάποιος σταθερός αριθμός c. Και σε αυτή την περίπτωση οι δύο παίκτες ανταγωνίζονται, για το ποιος θα πάρει καλύτερο μερίδιο του c. Όμως, ενδέχεται να υπάρχουν ενδεχόμενα (π.χ. «δίκαιη» μοιρασιά από $\frac{c}{2}$ στον κάθε παίκτη) που να ικανοποιούν μερικώς και τους δύο παίκτες.
- **Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος**: Όταν κάποιο παίγνιο ανήκει σε αυτή την κατηγορία, τότε, για καθένα από τα πιθανά ενδεχόμενα, το άθροισμα των απολαβών των δύο παικτών είναι 0. Φυσικά, τα παίγνια αυτά μπορούν να ενταχτούν στην κατηγορία των παιγνίων σταθερού αθροίσματος, όμως έχουν ιδιαίτερη σημασία, οπότε αναφέρονται ξεχωριστά. Τέτοιου είδους παίγνια χαρακτηρίζονται και πλήρως ανταγωνιστικά, καθώς το κέρδος του ενός παίκτη εξισώνεται με την απώλεια του άλλου. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν παίγνια όπως το Matching Pennies και το Rock – Paper – Scissors. Η πλήρως ανταγωνιστική φύση τους τα καθιστά ευκολότερα στην ανάλυση και αποκλείει την εμφάνιση παραδόξων (βλ. Prisoners’ Dilemma). Επιπλέον, είναι

η κατηγορία παιγνίων η οποία έχει αναλυθεί περισσότερο, ενώ τα περισσότερα σημαντικά θεωρήματα προέκυψαν από τη μελέτη των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος και στη συνέχεια επεκτάθηκαν ώστε να αφορούν περισσότερες κατηγορίες.

- **Παίγνια μη Σταθερού Αθροίσματος**: Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα παίγνια στα οποία το άθροισμα των απολαβών των παικτών δεν είναι σταθερό για κάθε ενδεχόμενο. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα περισσότερα παίγνια, όπως το Driving Game, το Battle of the Sexes και το Prisoners' Dilemma. Η αναμενόμενη συμπεριφορά των παικτών ποικίλλει. Τις περισσότερες φορές η συνεργασία είναι επιθυμητή, δεν είναι όμως πάντα και εφικτή.

2.4 Ωφέλεια

Η έννοια της ωφέλειας (utility) αποδίδεται στον John von Neumann και είναι ίσως από τις βασικότερες έννοιες της θεωρίας παιγνίων, καθώς διευκολύνει σημαντικά το χειρισμό και την ανάλυσή τους. Δημιουργήθηκε με στόχο να μετρήσει την ικανοποίηση (ή την ευτυχία) που αποκτά ένα άτομο ως συνέπεια κάποιου γεγονότος.

Πιο συγκεκριμένα, η ωφέλεια είναι μια αυθαίρετη κλίμακα μέτρησης ευτυχίας, η οποία στοχεύει να ποσοτικοποιήσει την επίδραση ενός γεγονότος στην ευτυχία κάποιου ατόμου. Όπως κάθε μέγεθος, έτσι και η ωφέλεια έχει τη δική της μονάδα μέτρησης, η οποία είναι το 1 util. Φυσικά, τα utils δεν έχουν φυσική υπόσταση, χρησιμεύουν απλώς ως μονάδες μέτρησης της ωφέλειας. Η αντιστοίχιση ενός μεγέθους σε ωφέλεια που αποκομίζει κάποιο άτομο αποτελεί τη συνάρτηση ωφέλειας (utility function) του ατόμου. Για παράδειγμα, στο δίλημμα των φυλακισμένων, που παρουσιάστηκε παραπάνω, η αντιστοίχιση του χρόνου φυλάκισης σε ωφέλεια δίνεται από τον τύπο $u(x) = -x$, όπου x ο χρόνος φυλάκισης και $u(x)$ η ωφέλεια που προκύπτει από τη φυλάκιση. Σύμφωνα με τη θεωρία παιγνίων, οι άνθρωποι, έστω και χωρίς να το συνειδητοποιούν, προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση ωφέλειάς τους. Πολλές φορές αυτό συμπίπτει με άλλους, προφανείς στόχους. Για παράδειγμα, στο δίλημμα των φυλακισμένων, η προσπάθεια των 2 παικτών να φυλακιστούν για όσο το δυνατό μικρότερο χρονικό διάστημα ισοδυναμεί με το να προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν τη συνάρτηση ωφέλειάς τους, υπό την προϋπόθεση πως είναι η $u(x) = -x$, ή κάθε άλλη γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, αφού κάνει τον κάτοχό της να προτιμάει αυστηρά τα λιγότερα χρόνια φυλάκισης από τα περισσότερα. Όμως δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αν το ένα έτος φυλάκισης αντιστοιχεί σε 1util ή σε 100 utils, ούτε έχει σημασία το πρόσημο, αρκεί πάντα τα λιγότερα χρόνια φυλάκισης να δίνουν μεγαλύτερη ωφέλεια από τα περισσότερα.

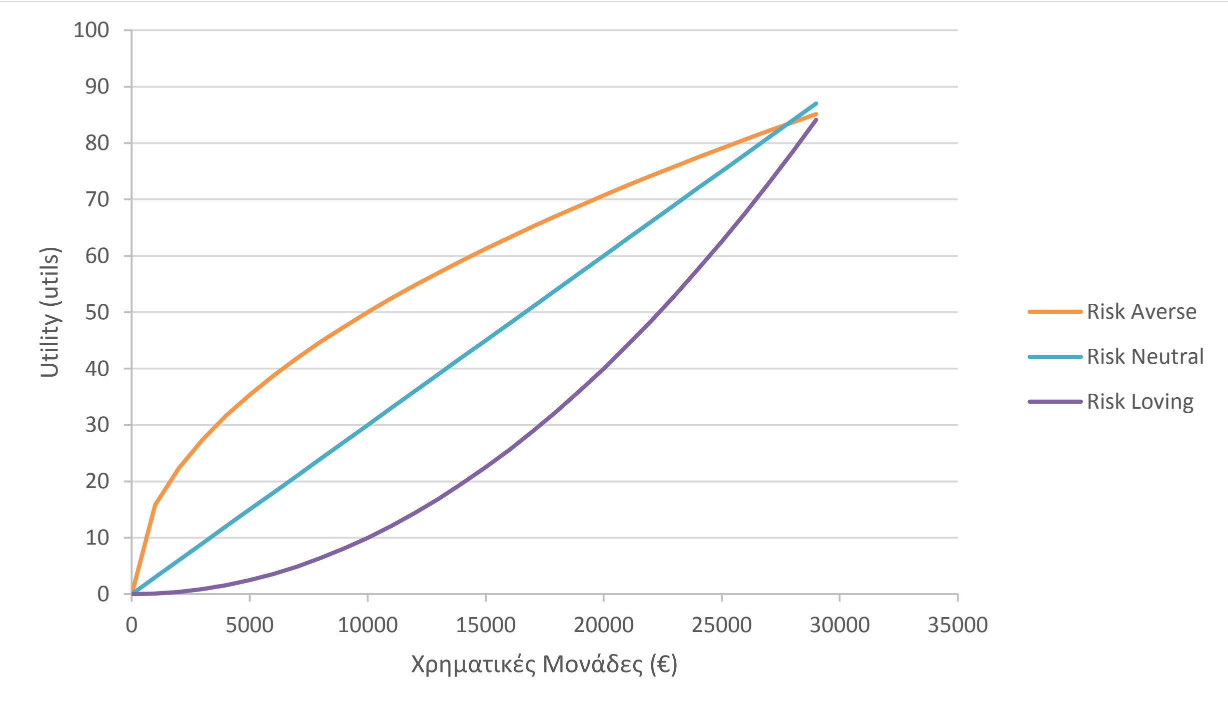
Σημαντικό στοιχείο για τη συνάρτηση ωφέλειας είναι πως είναι μη συγκρίσιμη για διαφορετικά άτομα. Καθώς ο τρόπος μέτρησης της ευτυχίας είναι εντελώς υποκειμενικός, δεν έχει κανένα νόημα να συγκριθούν μεταξύ τους οι συναρτήσεις ωφέλειας του Bob και της Alice. Ευτυχώς, αυτό δεν είναι απαραίτητο, καθώς στα περισσότερα παίγνια, ο κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τη δική του συνάρτηση ωφέλειας, οπότε καμία απόφασή του δε θα προκύψει από εσφαλμένη σύγκριση ωφελειών διαφορετικών ατόμων.

2.5 Αξιολόγηση στην κλίμακα ωφέλειας

Όπως προαναφέρθηκε, η κλίμακα ωφέλειας είναι εντελώς αυθαίρετη. Όμως, για λόγους συνέπειας και λογικής συμπεριφοράς, είναι αναγκαίο τα διάφορα γεγονότα να είναι διατεταγμένα στην κλίμακα ωφέλειας ανάλογα με τις προτιμήσεις του ατόμου. Αν η κλίμακα αυτή αντιπροσωπεύει ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε είναι λογικό το a να αντιστοιχεί στο χειρότερο δυνατό γεγονός και το b στο καλύτερο δυνατό. Πώς όμως αξιολογείται οποιοδήποτε άλλο ενδιάμεσο γεγονός;

Ας υποθέσουμε πως για στην κλίμακα ωφέλειας κάποιου ατόμου το χειρότερο γεγονός αντιστοιχεί σε ωφέλεια 0 και το καλύτερο γεγονός σε ωφέλεια 100 utils. Ας υποθέσουμε επίσης πως υπάρχει γεγονός που θα αποφέρει στο άτομο ωφέλεια 50 utils. Μπορεί να προταθεί στο άτομο, αντί για το συγκεκριμένο γεγονός, να του δοθεί ένα λαχείο, με πιθανότητα p να του συμβεί το καλύτερο δυνατό γεγονός και να λάβει 100 utils, ενώ με πιθανότητα 1-p να του συμβεί το χειρότερο δυνατό γεγονός και να κερδίσει 0 utils. Όσο η πιθανότητα p είναι μικρότερη από 50%, είναι λογικό το άτομο να προτιμάει το ενδιάμεσο γεγονός από το λαχείο. Όταν όμως η πιθανότητα p ξεπεράσει το 50%, τότε το άτομο θα προτιμήσει το λαχείο από το ενδιάμεσο γεγονός. Για πιθανότητα ακριβώς 50% το άτομο είναι αδιάφορο μεταξύ του γεγονότος και του λαχείου. Το σημείο στο οποίο το άτομο αλλάζει την απόφασή του απότομα από «όχι» σε «ναι» αποτελεί και την πραγματική ωφέλεια που δίνει στο άτομο το συγκεκριμένο γεγονός.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που το άτομο είναι *risk neutral*, δηλαδή είναι εντελώς αδιάφορο μεταξύ ενός γεγονότος και του αντίστοιχου λαχείου. Υπάρχουν όμως και άτομα τα οποία είναι απρόθυμα να ρισκάρουν και προτιμούν πιο σίγουρες λύσεις. Αυτό είναι ιδιαίτερα σύνηθες όταν διακυβεύονται μεγάλα χρηματικά ποσά. Για παράδειγμα, πόσοι θα αγόραζαν για 1.000.000€ ένα λαχείο που κατά 50% δίνει 2.000.000€ και κατά 50% δε δίνει τίποτα; Αν ολόκληρη η περιουσία κάποιου ατόμου είναι 1.000.000€, θα ήθελε να τη ρισκάρει όλη, μόνο και μόνο για να τη διπλασιάσει με πιθανότητα 50%, κινδυνεύοντας να χάσει τα πάντα; Επίσης, οι άνθρωποι επιλέγουν να ασφαλίσουν τα σημαντικά περιουσιακά τους στοιχεία. Κάτι τέτοιο σίγουρα δεν τους συμφέρει οικονομικά, διαφορετικά οι ασφαλιστικές εταιρίες θα ζημιώνονταν μακροπρόθεσμα, όμως οι άνθρωποι προτιμούν να «αγοράσουν» σιγουριά έστω και γνωρίζοντας πως θα έχουν μια μικρή χρηματική απώλεια. Για τους περισσότερους ανθρώπους, από ένα σημείο και μετά, η κάθε επιπλέον χρηματική μονάδα προσφέρει λιγότερη ωφέλεια από την προηγούμενη. Αυτός ο τύπος ατόμου χαρακτηρίζεται ως άτομο που αντιπαθεί το ρίσκο, *risk averse*. Τέλος, υπάρχει και ο τύπος *risk loving*, ο οποίος αποκομίζει επιπλέον ωφέλεια επειδή συναρπάζεται από το ρίσκο. Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζονται ενδεικτικά συναρτήσεις ωφέλειας και για τους τρεις τύπους ατόμων. Επισημαίνεται πως, καθώς γίνεται λόγος για 3 διαφορετικά άτομα, δεν έχει κανένα νόημα η σύγκριση των συναρτήσεων ωφέλειας, παρά μόνο η μορφή της καθεμίας ξεχωριστά. Παρατηρείται πως η συνάρτηση ωφέλειας στρέφει τα κοίλα προς τα άνω για τον τύπο Risk Loving, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω για τον Risk Averse, ενώ είναι γραμμική για τον Risk Neutral.



Σχήμα 2.1: Συναρτήσεις ωφέλειας για διάφορους τύπους ατόμων

2.6 Θεωρία της αποκαλυπτόμενης προτίμησης

Έχει συζητηθεί ιδιαίτερα η σχέση της θεωρίας παιγνίων με την ηθική. Ιδιαίτερη αφορμή για αυτό αποτέλεσε η συμβουλή που προκύπτει από τη θεωρία παιγνίων στην Alice και τον Bob να συμπεριφερθούν εγωιστικά στο δίλημμα των φυλακισμένων, καταλήγοντας σε ένα αποτέλεσμα εμφανώς χειρότερο από αυτό που θα προέκυπτε με αμοιβαίο αλτρουισμό. Η θεωρία παιγνίων έχει δεχτεί αρκετή κριτική επειδή «αποτρέπει τους ανθρώπους από τη συνεργασία για να αποκομίσουν προσωπικό όφελος». Επίσης, έχουν αναπτυχθεί διάφορα σοφίσματα, τα οποία προσπαθούν να αποδείξουν πως είναι λογικό να μην ομολογήσει κανείς στο δίλημμα των φυλακισμένων. Αυτό όμως που διαφεύγει από τα περισσότερα σοφίσματα, είναι η θεωρία της *αποκαλυπτόμενης προτίμησης* (theory of revealed preference).

Για να παιχτεί σωστά το δίλημμα των φυλακισμένων, πρέπει οι πίνακες απολαβών να είναι αυτοί που αναφέρει ο Πίνακας 2.6. Οι ακριβείς ποινές φυλάκισης δεν ενδιαφέρουν, όμως είναι σημαντική η διάταξή τους. Είναι απαραίτητο να είναι η διάταξη ακριβώς όπως δείχνει ο Πίνακας 2.6, ώστε ο Bob και η Alice να έχουν κίνητρο να προτιμούν να ομολογήσουν από το να μείνουν πιστοί στο συνένοχό τους. Γι’ αυτό το λόγο γίνεται η υπόθεση πως οι δύο παίκτες ενδιαφέρονται αποκλειστικά να ελαχιστοποιήσουν το χρόνο παραμονής τους στη φυλακή, αγνοώντας άλλα συναισθήματα όπως ενοχή, τύψεις, φόβος, κλπ. Γίνεται η υπόθεση πως πριν κατασκευαστεί ο Πίνακας 2.6, οι δύο παίκτες έχουν ερωτηθεί, και μας έχουν αποκαλύψει την ωφέλεια που θα τους απέφερε το κάθε δυνατό γεγονός. Μπορεί λοιπόν να ειπωθεί πως ο Πίνακας 2.6 έχει κατασκευαστεί γνωρίζοντας εκ των προτέρων τις προτιμήσεις των δύο παικτών, και όχι το αντίστροφο. Συνεπώς, σε ένα παίγνιο πρέπει να λαμβάνεται υπόψη αποκλειστικά ο πίνακας απολαβών, καθώς συνοψίζει πλήρως το παίγνιο. Οποιαδήποτε άλλη πληροφορία δίνεται είτε πρέπει να αγνοηθεί, είτε έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον πίνακα απολαβών (αποκαλυπτόμενη προτίμηση). Εάν, για παράδειγμα, στο δίλημμα των φυλακισμένων, οι δύο παίκτες ζουν σύμφωνα με έναν απαράβατο κώδικα τιμής, ο οποίος επηρεάζει τις αποφάσεις τους, τότε αυτό έπρεπε να έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον πίνακα απολαβών. Στην περίπτωση που οι δύο παίκτες νιώθουν πως το να προδώσουν το συνένοχό τους είναι κάτι τόσο ντροπιαστικό, που ισοδυναμεί με 10 πρόσθετα χρόνια φυλάκισης, τότε δεν παίζουν Prisoners’ Dilemma, αλλά Prisoners’ Delight (η χαρά των φυλακισμένων), ένα τελείως διαφορετικό παίγνιο, με πίνακα απολαβών όπως δείχνει ο Πίνακας 2.7. Τότε, με λογική ανάλογη με αυτή που ακολουθήθηκε στο Prisoners’ Dilemma, προκύπτει ότι οι δύο συνένοχοι είναι λογικό να συμπεριφερθούν αλτρουιστικά, με αποτέλεσμα να πετύχουν το βέλτιστο αποτέλεσμα και για τους δύο, να φυλακιστούν αμφότεροι από ένα χρόνο.

Το ηθικό δίδαγμα αυτής της ενότητας είναι πως κάθε παίγνιο αντιπροσωπεύεται πλήρως από τον πίνακα απολαβών που το χαρακτηρίζει. Ο πίνακας απολαβών είναι το αποκλειστικό αντικείμενο, το οποίο βοηθά τον παίκτη να επιλέξει τη στρατηγική του. Αντίθετα, η ιστορία που συνοδεύει το κάθε παίγνιο δεν είναι σημαντική, καθώς τίποτα από όσα γράφει δεν μπορεί να αντικαταστήσει τις απολαβές των παικτών, όπως περιγράφονται στον αντίστοιχο πίνακα.

Alice \ Bob	Εγωισμός	Αλτρουισμός
Εγωισμός	(-19, -19)	(-10, -10)
Αλτρουισμός	(-10, -10)	(-1, -1)

Πίνακας 2.7 Πίνακας Απολαβών για Prisoners’ Delight

2.7 Τυχαιότητα στη λήψη αποφάσεων

Σε παραπάνω ενότητα αναλύθηκε διεξοδικά και προέκυψε μια λογική λύση για το παίγνιο Prisoners' Dilemma. Η μία στρατηγική ήταν σαφώς χειρότερη από την άλλη, συνεπώς αποκλείστηκε. Σε κάποια άλλα παίγνια όμως, όπως για παράδειγμα στο Matching Pennies ή στο Rock – Paper – Scissors, η καλύτερη στρατηγική δεν μπορεί να επιλεγεί τόσο εύκολα. Αν η Alice γνώριζε εκ των προτέρων τι θα έπαιζε ο Bob, θα της ήταν πολύ εύκολο να αποφασίσει. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο, αν η κίνηση της Alice του ήταν γνωστή, τότε ο Bob θα κέρδιζε σίγουρα.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως ο παίκτης του οποίου η σκέψη «διαβάζεται» πιο εύκολα έχει σημαντικό μειονέκτημα. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα, τι συμβουλεύει η θεωρία παιγνίων την Alice όταν παίζει Matching Pennies, όταν αντιμετωπίζει έναν αντίπαλο σαν τον Bob, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει πολύ καλά τον τρόπο σκέψης της;

Σίγουρα πρέπει να παρεμποδιστεί ο Bob, ώστε να μην μπορεί να αντιληφθεί ποια στρατηγική θα ακολουθήσει η Alice, ώστε να απαντήσει ανάλογα. Ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι με τη βοήθεια κάποιας συσκευής που λειτουργεί με τυχαίο τρόπο. Για παράδειγμα, αν η Alice στρίψει ένα νόμισμα και επιλέξει το αποτέλεσμα του στριψίματος ως τη στρατηγική που θα ακολουθήσει, τότε ο Bob πλέον δεν μπορεί με κανένα τρόπο να εκμεταλλευτεί το γεγονός ότι γνωρίζει καλά την Alice. Ομοίως, για το παίγνιο Rock – Paper – Scissors, η Alice μπορεί να ρίξει ένα ζάρι, και να αντιστοιχίσει τους αριθμούς 1, 2 στην «πέτρα», τους 3, 4 στο «ψαλίδι» και τους 5, 6 στο «χαρτί», κάνοντας τις επιλογές της απρόβλεπτες, και άρα μη επιτρέποντας στον Bob να υιοθετήσει επιτυχημένα κάποια στρατηγική εναντίον της.

Σημειώνεται πως από τη στιγμή που η Alice μοιράζει εξίσου τις επιλογές της σε πέτρα, ψαλίδι, χαρτί, ο Bob είναι τελείως αδιάφορος μεταξύ οποιασδήποτε δικής του στρατηγικής. Είτε παίζει 100% μια συγκεκριμένη στρατηγική, είτε μιμηθεί την Alice και επιλέγει εντελώς τυχαία ανάμεσα στις τρεις στρατηγικές του, το προσδοκώμενο αποτέλεσμα θα παραμείνει το ίδιο, να κερδίζει, να χάνει, και να έρχεται ισόπαλος με πιθανότητα 33.33%. Η ίδια στρατηγική μπορεί να γενικευτεί για κάθε παίγνιο στο οποίο κάποιος παίκτης φοβάται πως η στρατηγική του θα είναι προβλέψιμη. Με τη χρήση μιας οποιαδήποτε γεννήτριας τυχαίων αριθμών, η στρατηγική του παίκτη καθίσταται απρόβλεπτη, συνεπώς μη εκμεταλλεύσιμη.

Όταν ένας παίκτης επιλέγει πάντα κάποια κίνηση, τότε λέγεται ότι χρησιμοποιεί *καθαρή στρατηγική* (pure strategy). Όταν όμως ο παίκτης επιλέγει ανάμεσα σε περισσότερες από μία κινήσεις χρησιμοποιώντας έναν τυχαίο μηχανισμό, τότε λέγεται πως χρησιμοποιεί *μικτή στρατηγική* (mixed strategy).

2.8 Ισορροπία Nash

Η *Ισορροπία Nash* (Nash Equilibrium) αποδίδεται στον John Nash και αποτελεί πιθανότατα την πλέον σημαντική έννοια της θεωρίας παιγνίων, πάνω στην οποία βασίζονται τα περισσότερα σύγχρονα επιτεύγματα του κλάδου.

Ως Ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο δύο παικτών ορίζεται ένα ζεύγος στρατηγικών, οι οποίες αποτελούν ταυτόχρονα την καλύτερη δυνατή απάντηση η μία στην άλλη. Σε ένα παίγνιο που παίζεται με n παίκτες, η Ισορροπία Nash είναι μία n-άδα στρατηγικών (μία για κάθε παίκτη), καθεμία από τις οποίες αποτελεί την καλύτερη κίνηση του αντίστοιχου παίκτη δεδομένων των n-1 στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών.

Για παράδειγμα, στο παίγνιο Driving Game, τα ζεύγη στρατηγικών (Αριστερά, Αριστερά) και (Δεξιά, Δεξιά) αποτελούν το καθένα ξεχωριστά μια Ισορροπία Nash. Στο παίγνιο Battle of the sexes, τα ζεύγη στρατηγικών (Χορός, Χορός) και (Μποξ, Μποξ) επίσης αποτελούν Ισορροπίες Nash. Στο δίλημμα των φυλακισμένων, το ζεύγος στρατηγικών (Ομολογεί, Ομολογεί) αποτελεί Ισορροπία Nash.

Παρατηρήσεις:

- Στα παραπάνω παίγνια, για καθένα από αυτά τα ζεύγη επιλογών, οι προτεινόμενες στρατηγικές είναι καλύτερες απαντήσεις η μία στην άλλη. Δηλαδή, κανείς παίκτης δεν έχει το κίνητρο για να αλλάξει την επιλογή του, γνωρίζοντας την κίνηση του αντιπάλου του.
- Είναι δυνατόν κάποια παίγνια να έχουν παραπάνω από μία Ισορροπία Nash, όπως φαίνεται μετά από μια προσεκτική μελέτη των παιγνίων Driving Game, Chicken και Battle of the Sexes.
- Κάποια παίγνια φαίνεται να μην έχουν καμία Ισορροπία Nash, όπως για παράδειγμα το Matching Pennies και το Rock – Paper – Scissors. Όμως αυτό δεν είναι εντελώς αληθές (βλ. Θεώρημα παρακάτω).
- Κάποια άλλα παίγνια, όπως για παράδειγμα το σκάκι, είναι βέβαιο πως έχουν Ισορροπίες Nash, αλλά είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν.
- Αν υπάρχει κάποιος «σωστός» τρόπος να παιχτεί ένα οποιοδήποτε παίγνιο, τότε αυτός σίγουρα αποτελεί Ισορροπία Nash. Σε διαφορετική περίπτωση, τουλάχιστον μία στρατηγική δε θα ήταν η καλύτερη απάντηση δεδομένων των υπόλοιπων στρατηγικών, οπότε τουλάχιστον ένας παίκτης θα είχε κίνητρο να διαφοροποιήσει το παίξιμό του.
- Όταν κάποιοι παίκτες παίζουν πολλές φορές το ίδιο παίγνιο, αρχικά δοκιμάζουν στρατηγικές, μη έχοντας κατανοήσει ποια είναι η καλύτερη στρατηγική τους. Σταδιακά όμως μαθαίνουν και βελτιώνονται. Όταν, τελικά, τελειοποιήσουν τις στρατηγικές τους και παίζουν όσο καλύτερα μπορούν, τότε το σύνολο των στρατηγικών που υιοθετούν και

επαναλαμβάνουν κάθε φορά που παίζουν αποτελεί Ισορροπία Nash. Σε διαφορετική περίπτωση κάποιος εκ των παικτών θα προτιμούσε να αλλάξει τις στρατηγικές του και να αποσταθεροποιήσει το παίγνιο. Το παραπάνω ισχύει τόσο με σκεπτόμενους οργανισμούς που βρίσκονται σε θέση να αντιλαμβάνονται πλήρως το παίγνιο, όπως ανθρώπους, όσο και για μη σκεπτόμενους, όπως ψάρια, έντομα, κλπ., τα οποία δρουν ενστικτωδώς. Σε αυτές τις περιπτώσεις, λόγω φυσικής επιλογής, οι οργανισμοί των οποίων τα γονίδια είναι προγραμματισμένα με εσφαλμένο τρόπο (όσον αφορά την αντιμετώπιση κρίσιμων για τον οργανισμό παιγνίων) θα εξαφανιστούν λόγω φυσικής επιλογής.

Αναλογιζόμενος κανείς όλα τα παραπάνω, αντιλαμβάνεται πως η εύρεση των Ισορροπιών Nash σε ένα Παίγνιο έχει εξέχουσα σημασία για τη μελέτη και κατανόηση του παιγνίου. Το παρακάτω θεώρημα παρέχει θεωρητική βοήθεια και σιγουριά για την ύπαρξη Ισορροπιών Nash.

Θεώρημα (Nash, 1950): *Σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash, υπό την προϋπόθεση πως επιτρέπεται η χρήση μικτών στρατηγικών.*

Με τον όρο πεπερασμένο παίγνιο εννοείται κάθε παίγνιο, του οποίου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών είναι πεπερασμένο. Σε αυτή την περίπτωση, επιτρέποντας τη χρήση μικτών στρατηγικών (οι οποίες φυσικά είναι άπειρες), διασφαλίζεται η ύπαρξη τουλάχιστον μίας Ισορροπίας Nash. Παρ' όλα αυτά, πολλές ακόμα ερωτήσεις, όπως το πώς βρίσκεται μια Ισορροπία Nash, πόσες Ισορροπίες Nash υπάρχουν σε ένα παίγνιο, κλπ. παραμένουν αναπάντητες από το παραπάνω θεώρημα.

2.9 Στρατηγική Ασφαλείας

Η Στρατηγική Ασφαλείας είναι μια πολύ σημαντική έννοια της θεωρίας παιγνίων. Υπάρχει μία για κάθε παίκτη, και διασφαλίζει στον παίκτη μια ελάχιστη ποσότητα ωφέλειας. Αρχικά, η στρατηγική ασφαλείας αναπτύχθηκε για παίγνια μηδενικού αθροίσματος, όμως στη συνέχεια αναπτύχθηκε και πλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε πιο περίπλοκα παίγνια.

Η έννοια της στρατηγικής ασφαλείας γίνεται πιο εύκολα κατανοητή σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Έστω πως η Alice και ο Bob παίζουν ένα τέτοιο παίγνιο, και έστω πως η Alice έχει ένα πλεονέκτημα απέναντι στον Bob, καθώς έχει την ικανότητα να γνωρίζει πώς θα σκεφτεί ο Bob. Αυτή η ικανότητα της Alice είναι φυσικά καταστροφική για τον Bob, καθώς η Alice πλέον μπορεί εύκολα να επιλέξει την καλύτερη δυνατή απάντηση απέναντι στη στρατηγική του Bob, όποια και αν είναι αυτή. Σε αυτή την περίπτωση λέγεται πως όποια στρατηγική και αν διαλέξει ο Bob, θα του συμβεί το χειρότερο δυνατό σενάριο, καθώς η Alice θα τη μαντέψει. Τότε, το καλύτερο που μπορεί να κάνει ο Bob είναι να περιορίσει την Alice, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική ασφαλείας του (security strategy).

Γενικεύοντας τα παραπάνω, η στρατηγική ασφαλείας είναι μια στρατηγική που μπορεί κάθε παίκτης να ακολουθήσει σε οποιοδήποτε παίγνιο, μεγιστοποιώντας την ωφέλειά του, θεωρώντας πως ο αντίπαλος πάντα επιλέγει την καλύτερη απάντηση απέναντι στη στρατηγική του. Για παράδειγμα, η στρατηγική ασφαλείας του κάθε παίκτη στο Matching Pennies είναι η χρήση κάποιου τυχαίου μηχανισμού για την επιλογή με 50% πιθανότητα «Κορώνα» και με 50% πιθανότητα «Γράμματα». Ακόμα και αν η Alice γνωρίζει πώς ο Bob παίρνει τις αποφάσεις του, δεν μπορεί με κανένα τρόπο να προβλέψει το αποτέλεσμα που θα προκύψει εάν ο Bob στρίψει ένα νόμισμα, ενώ η γνώση ότι κάθε στρατηγική του Bob επιλέγεται με πιθανότητα 50% δεν της παρέχει καμία στρατηγική που να της επιτρέπει να τον εκμεταλλευτεί.

Η στρατηγική του Bob του εξασφαλίζει μια ελάχιστη ποσότητα ωφέλειας. Αυτή είναι η ωφέλεια που θα προκύψει όταν ο Bob μεγιστοποιεί την ωφέλειά του, φοβούμενος πάντα το χειρότερο δυνατό σενάριο (minimax value). Μια άλλη σημαντική έννοια είναι η ωφέλεια που θα αποκόμιζε ο Bob, αν προσπαθούσε να ελαχιστοποιήσει το κέρδος του, δεδομένου ότι του συμβαίνει πάντα το καλύτερο δυνατό σενάριο (maximin value). Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος η minimax value του ενός παίκτη αποτελεί το αντίθετο της maximin value του αντιπάλου του, και το αντίστροφο.

Θεώρημα Minimax (von Neumann, 1928): Για κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες (έστω Α και Β), υπάρχει μια ποσότητα V^* και ένα προφίλ μικτών στρατηγικών για κάθε παίκτη, ούτως ώστε:

- Δεδομένης της στρατηγικής του Παίκτη Β, η μέγιστη δυνατή ωφέλεια για τον Παίκτη Α είναι V^*.
- Δεδομένης της στρατηγικής του Παίκτη Α, η μέγιστη δυνατή ωφέλεια για τον Παίκτη Β είναι $-V^*$.

Μια απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παρατίθεται στο Παράρτημα.

2.10 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Επαναλαμβανόμενα καλούνται τα παίγνια στα οποία οι παίκτες καλούνται να παίξουν ένα υπό-παίγνιο παραπάνω από μία φορά. Κάθε παίκτης γνωρίζει πως θα παίξουν παραπάνω από μία φορά με τους ίδιους αντιπάλους, και γνωρίζει πως οι αντίπαλοί του το γνωρίζουν επίσης.

Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια χωρίζονται σε τρεις επιμέρους κατηγορίες, τα πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια, στα οποία όλοι οι παίκτες γνωρίζουν εκ των προτέρων πως θα παίξουν για Ν φορές, τα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια στα οποία οι παίκτες παίζουν επ' άπειρον, και τα υπό πιθανότητα συνεχιζόμενα παίγνια, τα οποία έχουν μια (γνωστή) πιθανότητα p να συνεχιστούν και αντίστοιχα πιθανότητα 1-p να τερματιστούν. Κάθε κατηγορία επαναλαμβανόμενων παιγνίων είναι διαφορετική από τις υπόλοιπες και χρίζει ξεχωριστής μελέτης. Στα πλαίσια του παρόντος κειμένου η μελέτη θα περιοριστεί στην περίπτωση που δύο παίκτες παίζουν Prisoners' Dilemma. Στο εξής, οι διαθέσιμες επιλογές των παικτών «Εγωισμός» και «Αλτρουισμός» θα καλούνται με την πιο «επίσημη» ονομασία τους, «Hawk» και «Dove», αντίστοιχα.

Ας υποτεθεί πως δύο παίκτες παίζουν για ένα πλήθος φορών το παίγνιο Prisoners' Dilemma. Στόχος τους φυσικά είναι να ελαχιστοποιήσουν τα χρόνια που θα περάσουν στη φυλακή, όχι όμως σε κάθε παίγνιο ξεχωριστά, αλλά αθροιστικά για τις συνολικές φορές που θα παίξουν. Σε καθένα από τα μεμονωμένα Prisoners' Dilemma που θα παίξουν έχουν την επιλογή είτε να παίξουν για το ατομικό συμφέρον, παίζοντας «Hawk», είτε να προσπαθήσουν να συνεργαστούν με τον αντίπαλο, παίζοντας «Dove». Το ζήτημα είναι εάν υπάρχει κάποιος τρόπος στο νέο παίγνιο, ώστε οι δύο παίκτες να συνεργαστούν μεταξύ τους.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να διευκρινιστεί πως οι παίκτες δε χρειάζεται μόνο να αποφασίζουν τι θα κάνουν σε κάθε Prisoners' Dilemma όταν έρχεται η ώρα να το παίξουν. Μπορούν να διαμορφώσουν μια συνολική στρατηγική που να εφαρμόζουν συνολικά στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Έχουν αναπτυχθεί αρκετές τέτοιες στρατηγικές, ορισμένες από τις οποίες αναπτύσσονται παρακάτω.

- **Hawk**: Ο παίκτης που ακολουθεί αυτή τη στρατηγική παίζει «Hawk» σε καθένα από τα Prisoners' Dilemma που καλείται να παίξει, μένοντας πιστός στη γνωστή δοκιμασμένη στρατηγική του μεμονωμένου Prisoners' Dilemma και αδιαφορώντας για οτιδήποτε κάνει ο αντίπαλος.
- **Dove**: Ο παίκτης που ακολουθεί αυτή τη στρατηγική παίζει «Dove» σε καθένα από τα Prisoners' Dilemma που καλείται να παίξει. Αυτή η τακτική προσβλέπει ίσως στο να δείξει καλή θέληση, προσπαθώντας να πείσει τον αντίπαλο να ανταποκριθεί, χωρίς όμως ποτέ να τιμωρεί την «προδοσία».
- **Grim**: Ο παίκτης που ακολουθεί αυτή τη στρατηγική ξεκινά παίζοντας «Dove», και συνεχίζει παίζοντας «Dove», μέχρις ότου ο αντίπαλος να παίξει «Hawk». Από τη στιγμή που ο αντίπαλος θα παίξει για πρώτη φορά «Hawk», τότε ο παίκτης τιμωρεί τον αντίπαλό του για την προδοσία της εμπιστοσύνης του, γυρίζοντας αυτόματα και αμετάκλητα στη στρατηγική «Hawk».
- **Tit for Tat**: Ο παίκτης που ακολουθεί αυτή τη στρατηγική ξεκινά παίζοντας «Dove» και στη συνέχεια αντιγράφει την κίνηση του αντιπάλου του. Δηλαδή, αν ο αντίπαλος παίξει κι αυτός «Dove», τότε ο παίκτης θα παίξει «Dove» στην επόμενή του κίνηση, αν όμως ο αντίπαλος παίξει «Hawk», τότε η επόμενη κίνηση του παίκτη θα είναι επίσης «Hawk». Η διαφορά της συγκεκριμένης

στρατηγικής σε σχέση με τη στρατηγική «**Dove**» είναι πως δε θα αφήσει ατιμώρητη κάποια προδοσία. Όμως, σε αντίθεση με τη στρατηγική «**Grim**», μόλις ο αντίπαλος «μετανιώσει» και παίξει «Dove», η στρατηγική «**Tit for Tat**» θα τον συγχωρέσει, γυρίζοντας και η ίδια σε «Dove» την επόμενη φορά.

- **Tat for Tit**: Ο παίκτης που ακολουθεί αυτή τη στρατηγική ξεκινά παίζοντας «Hawk» και εν συνεχεία παίζει την ίδια κίνηση που έπαιξε και την προηγούμενη φορά, εκτός αν ο αντίπαλος παίξει ο ίδιος «Hawk». Η στρατηγική αυτή ξεκινά επιθετικά, «συμμορφώνεται» μόλις ο αντίπαλος παίξει «Hawk», και εν συνεχεία αντεπιτίθεται την επόμενη φορά που ο αντίπαλος θα παίξει «Hawk», κ.ο.κ.

Όλες οι στρατηγικές διακρίνονται σε ευγενικές και μοχθηρές, ανάλογα με το αν παίζουν «Dove» ή «Hawk», αντίστοιχα, στην πρώτη επανάληψη. Η στρατηγική που τελικά θα επιλεγεί μπορεί να είναι μία ή σύνθεση περισσοτέρων από τις παραπάνω ή άλλες στρατηγικές. Η τελική επιλογή εξαρτάται από το είδος του επαναλαμβανόμενου παιγνίου, καθώς και από τους πίνακες απολαβών, και το πόσο θελκτική είναι μια πιθανή συνεργασία με τον αντίπαλο.

2.11 Θεωρία Δημοπρασιών

Οι δημοπρασίες αποτελούν τον κλάδο στον οποίο η θεωρία παιγνίων έχει σημειώσει τη μεγαλύτερη πρόοδο. Σε αυτό τον κλάδο η θεωρία παιγνίων αποτελεί το πλέον σημαντικό εργαλείο για την επίλυση εφαρμοσμένων προβλημάτων.

Δημοπρασία είναι η κατάσταση κατά την οποία δύο ή περισσότεροι αγοραστές (παίκτες) ερίζουν για την απόκτηση ενός αγαθού που κατέχει μια τρίτη πλευρά, ο πωλητής. Κάθε παίκτης υποβάλλει μια προσφορά, και εκείνος που υποβάλλει την πιο ικανοποιητική προσφορά για τον πωλητή κερδίζει τη δημοπρασία και το αγαθό, με το αντίστοιχο κόστος που προκύπτει από τη δημοπρασία. Το πρόβλημα του πωλητή είναι πως δε γνωρίζει το ακριβές ποσόν που ο κάθε αγοραστής θα ήταν διατεθειμένος να προσφέρει, γιατί δεν είναι καθόλου σίγουρος αν ο αγοραστής θα απαντούσε με ειλικρίνεια σε μια ευθεία ερώτηση. Ο λόγος για τον οποίο οι δημοπρασίες είναι σημαντικές είναι πως είναι μηχανισμοί κατάλληλα σχεδιασμένοι, ώστε να είναι βέλτιστη στρατηγική για τους αγοραστές να λένε την αλήθεια, φανερώνοντας την πραγματική τους εκτίμηση για το αγαθό.

Υπάρχουν πολλά είδη δημοπρασιών, η καθεμιά με τους δικούς της κανόνες, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, όπως φαίνεται παρακάτω:

- **Βρετανική Δημοπρασία**: Αυτός είναι ο πιο ευρέως διαδεδομένος τύπος δημοπρασιών. Η δημοπρασία ξεκινά από μια χαμηλή τιμή, και ο δημοπρατών προσκαλεί τους αγοραστές να ανεβάσουν την προφορά τους. Οι προσφορές συνεχίζονται μέχρι το σημείο που κανείς δεν είναι διατεθειμένος να ξεπεράσει την τελευταία προσφορά που ακούστηκε. Σε αυτό το σημείο παραδοσιακά ο δημοπρατών φωνάζει «Going, going, gone!» και το αγαθό κατοχυρώνεται στον αγοραστή που έκανε την τελευταία προσφορά, ο οποίος πλέον υποχρεούται να την καταβάλλει.

- **Ιαπωνική Δημοπρασία**: Αυτός ο τύπος δημοπρασίας μοιάζει αρκετά στη βρετανική δημοπρασία. Αρχικά οι υποψήφιοι αγοραστές είναι όρθιοι και ο δημοπρατών ανακοινώνει κάποια χαμηλή τιμή, η οποία σταδιακά αυξάνεται. Οι αγοραστές έχουν την επιλογή είτε να μείνουν όρθιοι και να παραμείνουν στη δημοπρασία, είτε να καθίσουν και να αποσυρθούν. Σε περίπτωση που κάποιος αγοραστής καθίσει, πλέον δεν επιτρέπεται να ξανασηκωθεί αργότερα. Σε αντίθεση με τη βρετανική δημοπρασία, δεν μπορούν να αυξήσουν οι ίδιοι την τιμή απότομα, απλώς επιλέγουν να μείνουν όρθιοι ή να καθίσουν στο άκουσμα κάποιας τιμής. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μείνει όρθιος μόνο ένας εκ των αγοραστών, ο οποίος τελικά θα κερδίσει το αγαθό στην τελευταία τιμή που ανακοινώθηκε.
- **Ολλανδική Δημοπρασία**: Αυτός ο τύπος δημοπρασίας λειτουργεί αντίστροφα από τους δύο προηγούμενους. Η δημοπρασία ξεκινάει από μια πολύ υψηλή τιμή, η οποία σταδιακά μειώνεται. Ο πρώτος εκ των αγοραστών που θα φωνάξει «mine!» θα πάρει το αγαθό στην τιμή που αναφέρθηκε τελευταία.
- **Δημοπρασία Σφραγισμένων Προσφορών Πρώτης Τιμής**: Σε αυτό τον τύπο δημοπρασίας κάθε αγοραστής υποβάλλει έναν κλειστό φάκελο με την προσφορά του στον αγοραστή. Στο τέλος της διαδικασίας όλοι οι φάκελοι ανοίγονται, και το αγαθό καταλήγει στον αγοραστή που υπέβαλε την υψηλότερη προσφορά, την οποία καλείται να πληρώσει. Σε περίπτωση που δύο αγοραστές υποβάλουν την ίδια προσφορά, τότε ο νικητής προκύπτει με κλήρωση.
- **Δημοπρασία Σφραγισμένων Προσφορών Δεύτερης Τιμής**: Αυτός ο τύπος δημοπρασίας είναι ίδιος με τη δημοπρασία σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής, με τη διαφορά ότι ο νικητής δεν καλείται να πληρώσει τη δική του προσφορά, αλλά την υψηλότερη προσφορά που έγινε από αγοραστή που τελικά δεν πήρε το αγαθό, η οποία κατά κανόνα θα είναι χαμηλότερη από τη δική του, εκτός αν έχει υποβάλει την ίδια προσφορά και κάποιος άλλος, ο οποίος στη συνέχεια έχασε την κλήρωση. Σε αυτή την περίπτωση ο νικητής θα κληθεί να πληρώσει τη δική του προσφορά.
- **Δημοπρασία που Όλοι Πληρώνουν**: Σε αυτό τον τύπο δημοπρασίας όλοι υποβάλλουν μια προσφορά, και το αγαθό κερδίζει αυτός που υποβάλλει την υψηλότερη. Η διαφορά με τους υπόλοιπους τύπους δημοπρασιών είναι πως όλοι οι αγοραστές είναι υποχρεωμένοι να καταβάλλουν την προσφορά που υπέβαλαν, ακόμα και αν δεν κέρδισαν τελικά το αγαθό. Για παράδειγμα, όταν πολλά άτομα δωροδοκούν κάποιον διεφθαρμένο δικαστή ή πολιτικό, συμμετέχουν σε μια άτυπη Δημοπρασία που όλοι πληρώνουν [2].

Στη θεωρία δημοπρασιών δύο είναι τα κυρίαρχα προβλήματα που εξετάζονται. Το πρώτο πρόβλημα αφορά τους παίκτες. Δεδομένης της δημοπρασίας, οι παίκτες καλούνται να αποφασίσουν τι προσφορά θα υποβάλουν για το δημοπρατούμενο αγαθό. Στους υπολογισμούς τους πρέπει να συμπεριληφθούν οι κανόνες της δημοπρασίας, το πλήθος των αντιπάλων, καθώς και η αξία που έχει το αγαθό για τον καθένα τους. Σημειώνεται ότι τις περισσότερες φορές ο κάθε παίκτης αξιολογεί με το δικό του τρόπο το αγαθό, είτε γιατί η αξία του αγαθού είναι υποκειμενική όπως π.χ. ισχύει για ένα έργο τέχνης, είτε γιατί η αξία του αγαθού δεν είναι άμεσα εκτιμήσιμη, όπως για παράδειγμα τα δικαιώματα εκμετάλλευσης μιας πετρελαιοπηγής, της οποίας τα αποθέματα είναι άγνωστα.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά αυτόν που δημοπρατεί το αγαθό. Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν πολλά είδη δημοπρασιών που μπορεί να οργανώσει. Καλείται λοιπόν να επιλέξει το είδος εκείνο το οποίο θα μεγιστοποιήσει τις απολαβές του. Σε αυτό το ερώτημα δίνει απάντηση το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: *Έστω n αγοραστές, οι οποίοι είναι Risk Neutral, για καθένα εκ των οποίων το δημοπρατούμενο αγαθό έχει μια ανεξάρτητη αξία η οποία ανήκει στην ίδια αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας F. Έστω οποιεσδήποτε δύο δημοπρασίες για τις οποίες ισχύει ότι:*

- *Στην ισορροπία, το αγαθό πάντα κατανέμεται με τον ίδιο τρόπο*
- *Κάθε αγοραστής για τον οποίο η αξία του αγαθού είναι μηδενική έχει και μηδενική αναμενόμενη ωφέλεια.*

Τότε, και οι δύο δημοπρασίες δίνουν τα ίδια αναμενόμενα έσοδα (expected revenue) στον πωλητή, και σε κάθε περίπτωση κάποιος υποψήφιος αγοραστής με αξιολόγηση v θα κληθεί να πληρώσει το ίδιο χρηματικό ποσό κατά μέσο όρο.

Βέβαια, αυτό ισχύει στην περίπτωση που όλοι οι αγοραστές βρίσκονται σε θέση να αντιληφθούν την κατάσταση και να προσαρμόσουν αντίστοιχα τη στρατηγική τους, κάτι που είναι δύσκολο να συμβεί σε πραγματικές καταστάσεις. Επίσης, το παραπάνω παύει να ισχύει στην περίπτωση που οι παίκτες είναι risk averse, ή έχουν περιορισμένους οικονομικούς πόρους [3].

2.12 Συστήματα Ψηφοφορίας

Τα συστήματα ψηφοφορίας είναι ένας ακόμη κλάδος που μελετάται από τη θεωρία παιγνίων. Η σημασία των συστημάτων ψηφοφορίας είναι αδιαμφισβήτητη, καθώς η συχνότητα με την οποία διεξάγονται διαδικασίες που χρειάζονται ψηφοφορία είναι πολύ μεγάλη. Συνεπώς, ένα καλό σύστημα ψηφοφορίας είναι πολύ πιθανόν να αντιπροσωπεύει καλύτερα τις απόψεις των ψηφοφόρων και να αφήνει ένα γενικότερο αίσθημα δικαιοσύνης.

Η διαδικασία της ψηφοφορίας περιλαμβάνει ένα σύνολο από δυνατά αποτελέσματα (εναλλακτικές). Επίσης, υπάρχει ένα σύνολο ψηφοφόρων (παικτών), καθένας εκ των οποίων έχει τις δικές του προτιμήσεις για τις δυνατές εναλλακτικές. Ως σύστημα ψηφοφορίας νοείται μια συνάρτηση, η οποία δέχεται ως δεδομένο το σύνολο των προτιμήσεων ενός πληθυσμού και δίνει ως αποτέλεσμα την τελική κατάταξη των εναλλακτικών, χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο κριτήριο κατάταξης. Δηλαδή, συμπτύσσει τις αποφάσεις όλων των ψηφοφόρων, σε μία και μόνο μία ψήφο, την τελική ψήφο του κοινού. Τα κυριότερα συστήματα ψηφοφορίας είναι τα παρακάτω:

- **Σύστημα Πλειοψηφίας (Plurality)**: Επιλέγεται η εναλλακτική η οποία τυγχάνει μεγαλύτερης αποδοχής, δηλαδή παίρνει τις περισσότερες ψήφους από τις υπόλοιπες. Αυτό είναι και το πιο συνηθισμένο σύστημα ψηφοφορίας στις εκλογές, αν και πολύ συχνά συναντώνται παραλλαγές αυτού. Το σύστημα αυτό φαντάζει ως το πλέον λογικό και δίκαιο, εντούτοις, παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα.
- **Αθροιστική Ψηφοφορία (Cumulative Voting)**: Κάθε ψηφοφόρος διαθέτει ένα πεπερασμένο πλήθος ψήφων, τις οποίες μπορεί να κατανείμει με προκαθορισμένο τρόπο ανάμεσα στις επιλογές που επιθυμεί. Έπειτα, όμοια με το σύστημα πλειοψηφίας, επικρατεί η εναλλακτική που συγκεντρώνει τις περισσότερες ψήφους.
- **Πλειοψηφία δι' αποκλεισμού (Plurality with Elimination)**: Σε αυτό το σύστημα, απαιτείται ένα ορισμένο ποσοστό ψήφων για να καθοριστεί ο τελικός νικητής. Αν η ψηφοφορία δε δώσει σε καμία εναλλακτική το απαιτούμενο ποσοστό, τότε αποκλείονται από τη διαδικασία σύμφωνα με έναν προκαθορισμένο τρόπο ένα πλήθος εναλλακτικών, οι οποίες δε συγκέντρωσαν το απαραίτητο ποσοστό. Εν συνεχεία η ψηφοφορία επαναλαμβάνεται ανάμεσα στις εναπομείνασες εναλλακτικές και η διαδικασία συνεχίζεται, μέχρις ότου κάποια εναλλακτική συγκεντρώσει τις απαιτούμενες ψήφους. Αυτό το σύστημα ψηφοφορίας χρησιμοποιείται στις δημοτικές εκλογές, στις οποίες, εάν κανείς υποψήφιος δε συγκεντρώσει το 50% των ψήφων, τότε οι εκλογές επαναλαμβάνονται μεταξύ των υποψηφίων που κατέλαβαν τις δύο πρώτες θέσεις, σύμφωνα με το σύστημα πλειοψηφίας. Το σύστημα αυτό εφαρμόζεται σε πολλές περιπτώσεις, όπως π.χ. στις δημοτικές εκλογές.
- **Κανόνας του Borda (Borda Rule)**: Σύμφωνα με αυτό το σύστημα, κάθε ψηφοφόρος αντιστοιχεί ένα βαθμό σε καθεμία από τις n εναλλακτικές ανάμεσα στις οποίες ψηφίζει. Η εναλλακτική παίρνει το βαθμό n-1, η αμέσως επόμενη παίρνει το βαθμό n-2, κ.ο.κ., ενώ η απολύτως τελευταία προτίμηση παίρνει το βαθμό 0. Εν συνεχεία αθροίζονται οι βαθμοί που παίρνει η κάθε

εναλλακτική από κάθε ψηφοφόρο. Η εναλλακτική που συγκέντρωσε τη μεγαλύτερη βαθμολογία είναι η νικήτρια.

- **Διαδοχικοί Αποκλεισμοί (Successive Elimination)**: Το σύνολο των εναλλακτικών τοποθετείται σε μία σειρά. Εν συνεχεία, διεξάγεται ψηφοφορία ανάμεσα στις δύο πρώτες εναλλακτικές, από την οποία νικήτρια βγαίνει αυτή που συγκέντρωσε τις περισσότερες ψήφους. Η εναλλακτική που ηττήθηκε αποκλείεται από την ψηφοφορία, ενώ διεξάγεται νέα ψηφοφορία μεταξύ της νικήτριας και της τρίτης εναλλακτικής. Η διαδικασία συνεχίζεται, μέχρις ότου μείνει μόνο μία εναλλακτική. Αυτό το σύστημα ψηφοφορίας εφαρμόζεται συχνά στο κοινοβούλιο (π.χ. αρχικά ψηφίζεται αν θα περάσει ή όχι κάποιο νομοσχέδιο, αν υπερψηφιστεί διεξάγεται νέα ψηφοφορία για το αν θα περάσει στην αρχική του μορφή ή με κάποια παραλλαγή, κ.ο.κ.).

Δυστυχώς, κανένα σύστημα ψηφοφορίας δεν είναι τέλειο, καθώς καθένα παρουσιάζει ορισμένες εγγενείς αδυναμίες. Ανεξαρτήτως του συστήματος που θα χρησιμοποιηθεί, υπάρχουν καταστάσεις, στις οποίες μία ή περισσότερες πλευρές θα αισθάνονται αδικημένες. Επίσης, ένα άλλο πρόβλημα που παρουσιάζουν τα περισσότερα εκλογικά συστήματα, είναι ότι δίνουν επαρκή κίνητρα στους ψηφοφόρους να αποκρύψουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις, με στόχο να ψηφίσουν στρατηγικά. Αν υπήρχε το τέλειο εκλογικό σύστημα, τότε τα χαρακτηριστικά που θα ήταν επιθυμητό να έχει, θα ήταν τα ακόλουθα:

1. **Αποδοτικότητα κατά Pareto (Pareto Efficiency)**: Όταν όλοι οι ψηφοφόροι συμφωνούν για τη σχετική κατάταξη ανάμεσα σε δύο εναλλακτικές, τότε το σύστημα επιλέγει την ίδια σχετική κατάταξη. Δηλαδή, αν όλοι προτιμούν την εναλλακτική Α από την εναλλακτική Β, τότε στην τελική κατάταξη των εναλλακτικών η Α πρέπει να βρίσκεται παραπάνω από τη Β. Το παραπάνω φαντάζει αυτονόητο, εντούτοις, υπάρχουν συστήματα ψηφοφορίας που δεν ικανοποιούν αυτό το χαρακτηριστικό (π.χ. διαδοχικοί αποκλεισμοί).
2. **Ανεξαρτησία από Άσχετες Εναλλακτικές (Independence of Irrelevant Alternatives)**: Όταν ικανοποιείται το παραπάνω χαρακτηριστικό, τότε η σχετική θέση μεταξύ δύο εναλλακτικών εξαρτάται μόνο από τις σχετικές θέσεις τους στις προτιμήσεις των ψηφοφόρων. Δηλαδή, η ύπαρξη μιας εναλλακτικής Γ δεν μπορεί να επηρεάσει τη σχετική θέση των εναλλακτικών Α και Β. Αυτή η αρχή παραβιάζεται από τα περισσότερα εκλογικά συστήματα, όπως π.χ. το σύστημα πλειοψηφίας.
3. **Όχι «Δικτατορία» (Non Dictatorship)**: Με τον όρο όχι «Δικτατορία» εννοείται η απουσία δικτάτορα από το σύστημα. Ένα δικτατορικό σύστημα αγνοεί τις προτιμήσεις όλων των ψηφοφόρων πλην ενός, του δικτάτορα. Οι προτιμήσεις του δικτάτορα προάγονται από το σύστημα ψηφοφορίας ως οι τελικές προτιμήσεις του πληθυσμού. Φυσικά, αν σε κάποιο σύστημα ψηφοφορίας οι προτιμήσεις κάποιου ψηφοφόρου αποτελέσουν συμπωματικά και την τελική

προτίμηση του πληθυσμού, αυτό δεν τον καθιστά δικτάτορα. Η ειδοποιός διαφορά του δικτάτορα από τον παραπάνω ψηφοφόρο έγκειται στο γεγονός ότι ο δικτάτορας προάγει συστηματικά τις προτιμήσεις του, ακόμα και στην περίπτωση που το σύνολο των ψηφοφόρων έχει αντίθετες προτιμήσεις. Σε ένα δικτατορικό σύστημα ψηφοφορίας, η αποδοτικότητα κατά Pareto και η ανεξαρτησία από άσχετες εναλλακτικές ισχύουν τετριμμένα, όταν το σύνολο των ψηφοφόρων συμφωνεί με το δικτάτορα.

Δυστυχώς, κανένα από τα παραπάνω εκλογικά συστήματα δε διαθέτει και τα τρία επιθυμητά χαρακτηριστικά. Μάλιστα, το ακόλουθο θεώρημα [4] «εξασφαλίζει» ότι ποτέ δεν πρόκειται να υπάρξει τέτοιο σύστημα.

Θεώρημα (Arrow, 1951): *Οποιοδήποτε εκλογικό σύστημα (με παραπάνω από 3 υποψήφιες εναλλακτικές) το οποίο είναι αποδοτικό κατά Pareto και ανεξάρτητο από άσχετες εναλλακτικές είναι «δικτατορικό».*

Κατά συνέπεια, προκύπτει ως πόρισμα πως το ιδανικό σύστημα ψηφοφορίας αποτελεί ουτοπία. Καθώς η δικτατορία δεν αποτελεί δημοκρατική επιλογή, στα συνήθη εκλογικά συστήματα είθισται να τηρείται η αποδοτικότητα κατά Pareto, αναγκαστικά σε βάρος της ανεξαρτησίας από άσχετες εναλλακτικές.

3 Θεωρία Παιγνίων – Εύρεση Ισορροπίας Nash

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν συγκεκριμένες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί, προκειμένου να ανακαλύπτονται οι Ισορροπίες Nash. Παράλληλα, θα εξεταστούν ορισμένα παίγνια, τα οποία και θα αναλυθούν με τις παραπάνω τεχνικές.

3.1 Κανονική Μορφή Παιγνίου

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτυχθούν ορισμένες σημαντικές τεχνικές που εφαρμόζονται σε περίπτωση που δίνεται η κανονική μορφή του παιγνίου. Οι πλέον σημαντικές τεχνικές είναι η εύρεση καλύτερης απάντησης και η διαδοχική διαγραφή κυριαρχούμενων στρατηγικών. Τέλος, για την περίπτωση χρήσης μικτών στρατηγικών, θα παρουσιαστεί η διαδικασία με την οποία παράγεται το προφίλ μικτών στρατηγικών.

3.1.1 Εύρεση Καλύτερης Απάντησης

Η μέθοδος εύρεσης καλύτερης απάντησης είναι ο πλέον αναλυτικός τρόπος εύρεσης Ισορροπιών Nash σε κάποιο παίγνιο, δεδομένης της κανονικής του μορφής, όπως για παράδειγμα αυτής του παιγνίου που περιγράφει ο Πίνακας 3.1. Όμως, αυτός ο τρόπος χρησιμεύει μόνο για την εύρεση Ισορροπιών Nash που περιλαμβάνουν αποκλειστικά καθαρές στρατηγικές.

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	(6,9)	(7,1)	(3,3)
Μέση	(5,5)	(4,0)	(6,6)
Κάτω	(1,3)	(2,8)	(5,5)

Πίνακας 3.1: Κανονική Μορφή Παιγνίου (1)

Σύμφωνα με τη μέθοδο εύρεσης καλύτερης απάντησης, εργαζόμαστε ως εξής: Για κάθε γραμμή, δηλαδή για κάθε δυνατή επιλογή του Παίκτη 1, βρίσκεται η καλύτερη απάντηση του Παίκτη 2, και σημειώνεται με μπλε χρώμα. Ακολούθως, για κάθε στήλη, δηλαδή για κάθε δυνατή επιλογή του Παίκτη 2, βρίσκεται η καλύτερη απάντηση του Παίκτη 1, και σημειώνεται με κόκκινο χρώμα. Εξ ορισμού, κάθε Ισορροπία Nash αποτελεί ένα ζεύγος στρατηγικών που αποτελούν την καλύτερη απάντηση η μία στην άλλη. Συνεπώς, όταν σε κάποιο τετράγωνο του πίνακα είναι χρωματισμένες και οι δύο αποκρίσεις, τότε το ζεύγος των στρατηγικών που αντιστοιχούν στο τετράγωνο αυτό αποτελεί μια Ισορροπία Nash. Ο Πίνακας 3.2 δείχνει πώς πραγματοποιείται αυτή η διαδικασία. Όπως είναι φανερό, αμφότερα τα ζεύγη (Πάνω, Αριστερά) και (Μέση, Δεξιά) αποτελούν Ισορροπίες Nash.

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	(6,9)	(7,1)	(3,3)
Μέση	(5,5)	(4,0)	(6,6)
Κάτω	(1,3)	(2,8)	(5,5)

Πίνακας 3.2: Εύρεση Καλύτερης Απάντησης

3.1.2 Διαδοχική Διαγραφή Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

Για να γίνει κατανοητή η παρακάτω μέθοδος, πρέπει πρώτα να εξηγηθεί η έννοια της κυριαρχούμενης στρατηγικής. Θα λέγεται ότι μια στρατηγική s_i του παίκτη i για ένα παίγνιο κυριαρχεί (ισχυρά) μιας άλλης στρατηγικής s_i', όταν ισχύει:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}), \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Όπου s_{-i} μια οποιαδήποτε απάντηση των υπόλοιπων παικτών, η οποία ανήκει στο S_{-i}, το σύνολο (ή προφίλ) δυνατών απαντήσεων των υπόλοιπων παικτών. Δηλαδή, για κάθε δυνατή απάντηση των υπόλοιπων παικτών, η στρατηγική s_i προσφέρει στον παίκτη i αυστηρά μεγαλύτερη ωφέλεια από τη στρατηγική s_i'. Σε αυτή την περίπτωση θα λέγεται πως η στρατηγική s_{-i} είναι (ισχυρά) κυριαρχούμενη από τη στρατηγική s_i.

Ομοίως, θα λέγεται ότι μια στρατηγική s_i του παίκτη i για ένα παίγνιο κυριαρχεί ασθενώς μιας άλλης στρατηγικής s_i', όταν ισχύει:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Η διαφορά της ασθενούς κυριαρχίας σε σχέση με την αυστηρή είναι πως επιτρέπεται και η ισότητα σε κάποιες ή και όλες από τις δυνατές απαντήσεις των υπόλοιπων παικτών. Σε αυτή την περίπτωση θα λέγεται πως η στρατηγική s_{-i} είναι ασθενώς κυριαρχούμενη από τη στρατηγική s_i. Κάθε στρατηγική είναι ασθενώς κυριαρχούμενη από τον εαυτό της, όμως σε κάθε παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον μία μη ισχυρά κυριαρχούμενη στρατηγική για κάθε παίκτη. Τέλος, όταν κάποια στρατηγική κυριαρχεί σε όλες τις υπόλοιπες, τότε η στρατηγική αυτή αποκαλείται κυρίαρχη στρατηγική.

Σημειώνεται πως μια στρατηγική είναι πιθανόν να μην είναι κυριαρχούμενη από κάποια άλλη καθαρή στρατηγική, αλλά από μια μικτή στρατηγική. Για παράδειγμα, στο παίγνιο που περιγράφει ο Πίνακας 3.3 η στρατηγική «Μέση» δεν κυριαρχείται από καμία καθαρή στρατηγική. Όμως, αν εξεταστεί η μικτή στρατηγική s_i, σύμφωνα με την οποία η στρατηγική «Πάνω» παίζεται με πιθανότητα 50%, η στρατηγική «Μέση» παίζεται με 0% και η στρατηγική «Κάτω» με 50%, τότε προκύπτει πως κυριαρχεί ισχυρά της στρατηγικής «Μέση», καθώς η ωφέλειά της προκύπτει ως εξής:

$$u(s_i, s_{-i}) = (0.5 \cdot 5 + 0.5 \cdot 1,\ \ 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4,\ \ 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 9) = (3,\ \ 3,\ \ 6)$$

Οπότε το προφίλ της μικτής στρατηγικής $(0.5,\ \ 0,\ \ 0.5)$ για τον Παίκτη 1 δίνει ωφέλεια $(3,\ \ 3,\ \ 6)$, οπότε η στρατηγική «Μέση», η οποία δίνει ωφέλεια $(2,\ \ 2,\ \ 5)$ είναι ισχυρά κυριαρχούμενη.

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	(5,2)	(2,2)	(3,4)
Μέση	(2,3)	(2,6)	(5,1)
Κάτω	(1,3)	(4,4)	(9,5)

Πίνακας 3.3: Κανονική Μορφή Παιγνίου (2)

Είναι λογικό λοιπόν σε μια Ισορροπία Nash ο παίκτης i να μην επιλέγει ποτέ την κυριαρχούμενη στρατηγική s_i', καθώς, εάν την επέλεγε, θα ήταν προτιμότερο να αλλάξει τη στρατηγική του σε s_i, η οποία κυριαρχεί στην s_i'. Κάνοντας τον παραπάνω συλλογισμό, ένας παίκτης μπορεί να απορρίψει εντελώς ορισμένες από τις στρατηγικές που έχει στη διάθεσή του, διαγράφοντάς τις από τον πίνακα απολαβών. Όταν οι παίκτες γνωρίζουν πως οι υπόλοιποι παίκτες είναι λογικοί, τότε μπορούν να λάβουν τις αποφάσεις τους με βάση τον αναθεωρημένο πίνακα απολαβών, συμπεριλαμβάνοντας στη διαδικασία λήψης απόφασης ότι οι υπόλοιποι παίκτες δεν πρόκειται να επιλέξουν κάποια ισχυρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Σε αυτή τη λογική βασίζεται και η τεχνική της διαδοχικής διαγραφής κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Ο Πίνακας 3.4 παρουσιάζει μία κανονική μορφή παιγνίου. Παρατηρούμε πως η στρατηγική Αριστερά του Παίκτη 2 κυριαρχείται από τη μικτή στρατηγική (0, 0.50, 0.50). Συνεπώς, ο Παίκτης 2 μπορεί κάλλιστα να τη διαγράψει από τις επιλογές του. Ο Πίνακας 3.5 παρουσιάζει την επικαιροποιημένη μορφή του παιγνίου, στην οποία θα καταλήξει και ο Παίκτης 1, αν γνωρίζει πως ο Παίκτης 2 είναι λογικός. Παρατηρούμε ότι πλέον, η στρατηγική «Μέση» του Παίκτη 1 κυριαρχείται ισχυρά από τη στρατηγική «Πάνω», οπότε μπορεί και αυτή να διαγραφεί, καταλήγοντας στη μορφή που δείχνει ο Πίνακας 3.6. Πλέον, η στρατηγική «Κέντρο» κυριαρχείται από τη Στρατηγική «Δεξιά» για τον Παίκτη 2. Ο Πίνακας 3.7 δείχνει τη μορφή που θα πάρει πλέον το παίγνιο, όταν διαγραφεί και η στρατηγική «Κέντρο». Πλέον η επιλογή του Παίκτη 2 είναι μία, η στρατηγική «Δεξιά», οπότε ο Παίκτης 1 θα επιλέξει την καλύτερη απάντηση που διαθέτει, δηλαδή τη στρατηγική «Πάνω», διαγράφοντας την κυριαρχούμενη στρατηγική «Κάτω». Έτσι, καταλήγουμε (Πίνακας 3.8) στη μοναδική Ισορροπία Nash του παιγνίου, που προκύπτει εάν ο Παίκτης 1 παίξει «Πάνω» και ο Παίκτης 2 παίξει «Δεξιά».

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	(2,1)	(5,6)	(6,7)
Μέση	(3,3)	(4,5)	(5,2)
Κάτω	(8,2)	(6,1)	(4,4)

Πίνακας 3.4: Κανονική Μορφή Παιγνίου (3)

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	(5,6)	(6,7)
Μέση	(4,5)	(5,2)
Κάτω	(6,1)	(4,4)

Πίνακας 3.5: Διαγραφή Στρατηγικής «Αριστερά»

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	(5,6)	(6,7)
Κάτω	(6,1)	(4,4)

Πίνακας 3.6: Διαγραφή Στρατηγικής «Μέση»

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Δεξιά
Πάνω	(6,7)
Κάτω	(4,4)

Πίνακας 3.7: Διαγραφή Στρατηγικής «Κέντρο»

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Δεξιά
Πάνω	(6,7)

Πίνακας 3.8: Διαγραφή Στρατηγικής «Κάτω»

Η παραπάνω μέθοδος δεν απλοποιεί πάντα το παίγνιο τόσο πολύ όσο στο προηγούμενο παράδειγμα, ώστε να είναι προφανής η Ισορροπία Nash. Κάποιες φορές, το παίγνιο έχει περισσότερες στρατηγικές που δεν κυριαρχούνται ούτε από καθαρές ούτε από μικτές στρατηγικές. Όμως, η παραπάνω μέθοδος τις περισσότερες φορές απλοποιεί σημαντικά το παίγνιο και το φέρνει σε μορφή στην οποία πλέον δεν υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές. Σε αυτό το σημείο μπορεί κανείς να εργαστεί όπως στην ενότητα 3.1.3, κάνοντας χρήση μικτών στρατηγικών στην Ισορροπία Nash.

Σημειώνεται πως ορισμένες φορές υπάρχουν και άλλοι τρόποι, οι οποίοι καταλήγουν επίσης στο ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή, κάποιες φορές, υπάρχουν περισσότερες από μία ισχυρά κυριαρχούμενες στρατηγικές, οι οποίες μπορούν να διαγραφούν. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά με την οποία διαγράφονται οι κυριαρχούμενες στρατηγικές δεν έχει απολύτως καμία σημασία, το αποτέλεσμα παραμένει ανεπηρέαστο. Όμως, δεν ισχύει το ίδιο στην περίπτωση διαγραφής ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών. Ως παράδειγμα αναφέρεται το παίγνιο που παρουσιάζει ο Πίνακας 3.9. Τα ζεύγη στρατηγικών (Κάτω, Αριστερά), (Κάτω, Δεξιά) και (Πάνω, Δεξιά) αποτελούν Ισορροπίες Nash, καθώς κανείς εκ των δύο παικτών δεν μπορεί να ανεβάσει τις απολαβές του παίζοντας διαφορετική στρατηγική. Όμως, οι στρατηγικές «Πάνω» και «Αριστερά» είναι ασθενώς κυριαρχούμενες από τις στρατηγικές «Κάτω» και «Δεξιά», αντίστοιχα. Είναι φανερό πως, ανάλογα με τη σειρά με την οποία διαγράφονται οι στρατηγικές αυτές, το παίγνιο καταλήγει σε διαφορετική Ισορροπία Nash. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τις παραπάνω αναλύσεις είναι πως οι παίκτες μπορούν με βεβαιότητα να διαγράψουν τις ισχυρά κυριαρχούμενες στρατηγικές τους, όμως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διαγραφή των ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών, καθώς ενδέχεται να χαθούν ορισμένες Ισορροπίες Nash κατά τη διαγραφή.

Παίκτης 1/Παίκτης 2	Αριστερά	Δεξιά
Πάνω	(0,0)	(0,1)
Κάτω	(1,0)	(0,0)

Πίνακας 3.9: Κανονική Μορφή Παιγνίου (4)

3.1.3 Χρήση Μικτών Στρατηγικών

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιαστεί η αναγκαιότητα χρήσης μικτών στρατηγικών και εν συνεχεία θα προσδιοριστεί τρόπος τόσο για τον υπολογισμό Ισορροπιών Nash με χρήση μικτών στρατηγικών όσο και για τον υπολογισμό της αναμενόμενης ωφέλειας που δίνει κάποιο προφίλ μικτής στρατηγικής.

Είναι φανερό πως σε κάποια παίγνια οι βέλτιστες στρατηγικές των παικτών δεν είναι ξεκάθαρες. Για παράδειγμα, στο παίγνιο Matching Pennies δεν υπάρχει καμία Ισορροπία Nash με χρήση καθαρών στρατηγικών. Επίσης, υπάρχουν κάποια άλλα παίγνια, όπως π.χ. το Battle Of The Sexes ή το Driving Game, στα οποία υπάρχουν περισσότερες από μία Ισορροπίες Nash. Οι μικτές στρατηγικές αποτελούν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο, το οποίο βοηθά τους παίκτες να αποφασίσουν ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν. Όπως θα γίνει φανερό και στη συνέχεια, όταν και οι δύο παίκτες υιοθετήσουν το κατάλληλο προφίλ μικτών στρατηγικών, τότε προκύπτει εξ ορισμού μια νέα Ισορροπία Nash.

Όταν χρησιμοποιείται κάποια μικτή στρατηγική, ο βασικός στόχος δεν είναι να μπερδευτεί ο αντίπαλος, καθώς οι μικτές στρατηγικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε παίγνια στα οποία οι παίκτες καλούνται να συνεργαστούν μεταξύ τους (π.χ. Driving Game). Ο κυριότερος στόχος είναι να καταστεί ο αντίπαλος αδιάφορος ανάμεσα στις στρατηγικές του, ώστε η τελική του επιλογή να μην έχει σημασία γι' αυτόν. Όταν ο αντίπαλος πράττει με τη σειρά του το ίδιο, τότε οι δύο παίκτες δεν μπορούν να κερδίσουν τίποτα περισσότερο από οποιαδήποτε διαφοροποίηση της στρατηγικής τους, οπότε εξ ορισμού καταλήγουμε σε μια Ισορροπία Nash.

Είναι πολύ εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως στο «Matching Pennies» και στο «Driving Game» προκύπτει Ισορροπία Nash αν ο κάθε παίκτης παίζει κάθε στρατηγική του με πιθανότητα 50%. Όμως, σε κάποια παίγνια η απάντηση είναι λιγότερο προφανής. Για να επιλεγεί η σωστή κατανομή πιθανοτήτων στις διάφορες διαθέσιμες στρατηγικές, ο παίκτης εργάζεται ως εξής. Εξετάζει την αναμενόμενη ωφέλεια που θα αποφέρουν στον αντίπαλό του οι διάφορες καθαρές στρατηγικές του, υπό την προϋπόθεση πως το δικό του προφίλ μικτής στρατηγικής είναι παραμετρικά γνωστό. Εν συνεχεία, απαιτεί κάθε καθαρή στρατηγική του αντιπάλου να δίνει στον αντίπαλο την ίδια αναμενόμενη ωφέλεια (ώστε ο αντίπαλος να είναι τελικά αδιάφορος μεταξύ των καθαρών στρατηγικών του). Επιλύοντας τις εξισώσεις που θα προκύψουν, προσδιορίζεται και το προφίλ μικτής στρατηγικής του παίκτη.

Παράδειγμα: Να βρεθεί μια Ισορροπία Nash με χρήση μικτών στρατηγικών για το παίγνιο «Battle Of the sexes» (Πίνακας 2.5).

Το παίγνιο εξετάζεται πρώτα από την πλευρά της Alice. Η Alice αρχικά υποθέτει πως παίζει τη στρατηγική «Χορός» με πιθανότητα p και τη στρατηγική «Μποξ» με πιθανότητα $1 - p$. Τότε, αν ο Bob επιλέξει «Χορό», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Χορός) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p$$

Αντίστοιχα, αν ο Bob επιλέξει «Μποξ», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Μποξ) = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 2 = 2 - 2p$$

Η Alice καθιστά τον Bob αδιάφορο ανάμεσα στις στρατηγικές του εξισώνοντας τις αναμενόμενες ωφέλειες που του παρέχει η καθεμία, έτσι προκύπτει η πιθανότητα p:

$$u(Χορός) = u(Μποξ) \Rightarrow p = 2 - 2p \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς, η Alice μπορεί να παίζει «Χορό» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και «Μποξ» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Καθώς το παίγνιο είναι συμμετρικό, ο Bob μπορεί αντίστοιχα να επιλέγει «Χορό» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και «Μποξ» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Επειδή η Alice και ο Bob γίνονται αδιάφοροι για οποιαδήποτε στρατηγική τους, προκύπτει Ισορροπία Nash. Γεννάται όμως το ερώτημα, ποια είναι η αναμενόμενη ωφέλεια για τον κάθε παίκτη;

Για να απαντηθεί το ερώτημα χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \cdot \Pr(a \mid s)$$

Όπου $\Pr(a \mid s) = \prod_{j \in N} s_j(a_j)$ είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός εκ των δυνατών συμβάντων. Στην περίπτωση που η Alice και ο Bob χρησιμοποιούν τις μικτές στρατηγικές που περιγράφηκαν παραπάνω, προκύπτει ο Πίνακας 3.10.

Γεγονός	Πιθανότητα Πραγματοποίησης	Ωφέλεια Alice	Ωφέλεια Bob	Αναμενόμενη Ωφέλεια Alice	Αναμενόμενη Ωφέλεια Bob
(Χορός, Χορός)	2/9	2	1	4/9	2/9
(Χορός, Μποξ)	4/9	0	0	0	0
(Μποξ, Χορός)	1/9	0	0	0	0
(Μποξ, Μποξ)	2/9	1	2	2/9	4/9
Σύνολο	1	-	-	2/3	2/3

Πίνακας 3.10: Πίνακας Αναμενόμενης Ωφέλειας (Battle Of the Sexes)

Παρατηρείται πως η αναμενόμενη ωφέλεια των δύο παικτών είναι $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, η οποία είναι χαμηλότερη από την ωφέλεια που προσφέρουν οι άλλες 2 Ισορροπίες Nash, (Χορός, Χορός) και (Μποξ, Μποξ). Δηλαδή, παρ' όλο που ο Bob προτιμά «Μποξ» από «Χορό», θα ήταν προτιμότερο γι' αυτόν να υποχωρήσει και να παίξει την Ισορροπία Nash (Χορός, Χορός), η οποία του αποφέρει ωφέλεια 1. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα, κατά πόσο συμφέρει τους παίκτες να ακολουθήσουν αυτή τη μικτή στρατηγική, αντί να συνεννοηθούν να παίξουν μία από τις δύο Ισορροπίες Nash που προκύπτουν από καθαρές στρατηγικές;

Οι λόγοι για τους οποίους μπορεί κάποιος να υιοθετήσει ένα προφίλ μικτών στρατηγικών είναι πολλοί. Κατ' αρχάς, σε κάποια παίγνια η έννοια της συνεργασίας δεν υφίσταται, καθώς εκ φύσεων είναι ανταγωνιστικά (π.χ. Matching Pennies). Σε τέτοιου είδους παίγνια η χρήση μικτών στρατηγικών είναι επιβεβλημένη. Στο παίγνιο Battle Of the Sexes η έννοια της συνεργασίας υφίσταται μερικώς, καθώς οι δύο παίκτες προσπαθούν να συναντηθούν. Όμως οι αποφάσεις τους είναι ανεξάρτητες, οπότε δεν υπάρχει ξεκάθαρος τρόπος να βοηθήσουν ο ένας τον άλλο. Ακόμα κι αν ο Bob αποφασίσει πως είναι διατεθειμένος να υποχωρήσει, δεν είναι σίγουρος ότι η Alice δε θα υποχωρήσει επίσης. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο παίκτες θα πάρουν από 0, κάτι που είναι χειρότερο από τα $\frac{2}{3}$ της μικτής στρατηγικής. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι πως στο παραπάνω παίγνιο, όταν και οι δύο παίκτες υιοθετούν το προφίλ μικτής στρατηγικής που προτείνεται, τότε τα $\frac{5}{9}$ των φορών αποτυγχάνουν να συναντηθούν! Αν η συνεννόηση ήταν επιτρεπτή, τότε οι παίκτες ποτέ δε θα επέλεγαν να μη συναντηθούν και θα επέλεγαν από κοινού με 50% πιθανότητα «Χορό» και με 50% πιθανότητα «Μποξ», απολαμβάνοντας έτσι αναμενόμενη ωφέλεια 1.5, ξεπερνώντας έτσι τη μοναδιαία ωφέλεια που θα έπαιρνε ένας εκ των δύο παικτών αν υποχωρούσε.

3.1.4 Εύρεση Στρατηγικής Ασφαλείας

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να γίνει διαχωρισμός μεταξύ της μικτής στρατηγικής που καθιστά τον αντίπαλο αδιάφορο μεταξύ των στρατηγικών του και της στρατηγικής ασφαλείας του κάθε παίκτη. Είναι δυνατόν κάποιος παίκτης (επιτιθέμενος) να αδιαφορήσει για τις δικές του απολαβές και να θέσει ως στόχο του να ελαχιστοποιήσει τις απολαβές του αντιπάλου του (αμυνόμενος). Αυτό ενδέχεται να συμβαίνει για διάφορους λόγους. Για παράδειγμα, ενδέχεται να θέλει να «τιμωρήσει» τον αμυνόμενο, είτε για παραδειγματισμό (βλ. Επαναλαμβανόμενα Παίγνια), είτε για άλλους, αδιάφορους επί του παρόντος λόγους. Σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης που φοβάται αυτή την επίθεση μπορεί να αμυνθεί παίζοντας τη στρατηγική ασφάλειάς του.

Όταν ο επιτιθέμενος θέτει ως αποκλειστικό στόχο του την τιμωρία του αντιπάλου του, τότε αναγκαστικά ο πίνακας απολαβών των δύο παικτών πρέπει να αλλάξει, εξαιτίας της θεωρίας της αποκαλυμμένης προτίμησης. Ο επιτιθέμενος, στην προσπάθειά του να τιμωρήσει τον αμυνόμενο, «αποκηρύσσει» την ωφέλεια που καταγράφεται στον πίνακα απολαβών του και φανερώνει τις νέες του προτιμήσεις, οι οποίες είναι εκ διαμέτρου αντίθετες με αυτές του αμυνόμενου. Συνεπώς, όταν ο αμυνόμενος προσπαθεί να εντοπίσει τη στρατηγική ασφάλειάς του, μπορεί να καταστήσει τον επιτιθέμενο αδιάφορο ανάμεσα στις στρατηγικές του, αναλογιζόμενος όμως μια τροποποιημένη μορφή του παιγνίου, σύμφωνα με την οποία η ωφέλεια του επιτιθέμενου είναι εξ ολοκλήρου αντίθετη της ωφέλειας του ίδιου του αμυνόμενου. Δηλαδή, το παίγνιο, ανεξαρτήτως της μορφής που είχε προηγουμένως, μετατρέπεται σε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Πλέον, ο παίκτης που αμύνεται μπορεί να συμπεριφερθεί όπως στην ενότητα 3.1.3.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η στρατηγική ασφαλείας της Alice για το παίγνιο «Battle Of the sexes» (Πίνακας 2.5).

Αν η Alice (αμυνόμενος) θέλει να εντοπίσει τη στρατηγική ασφαλείας της, τότε θα πρέπει να αναθεωρήσει τον πίνακα απολαβών, σύμφωνα με την αντίληψή της για τη συνάρτηση ωφέλειας του Bob (επιτιθέμενος). Ο Πίνακας 3.11 δείχνει την επικαιροποιημένη μορφή του παιγνίου, σύμφωνα με τις εκτιμώμενες προτιμήσεις του Bob. Πλέον, η Alice μπορεί εύκολα να καταστήσει τον Bob αδιάφορο απέναντι στις στρατηγικές του, παίζοντας έτσι ταυτόχρονα τη στρατηγική ασφαλείας της.

Alice \ Bob	Χορός	Μποξ
Χορός	(2, -2)	(0, 0)
Μποξ	(0, 0)	(1, -1)

Πίνακας 3.11: Πίνακας Απολαβών για Τροποποιημένο Battle of the Sexes

Η Alice αρχικά υποθέτει πως παίζει τη στρατηγική «Χορός» με πιθανότητα p και τη στρατηγική «Μποξ» με πιθανότητα $1-p$. Τότε, αν ο Bob επιλέξει «Χορό», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Χορός) = p \cdot (-2) + (1-p) \cdot 0 = -2p$$

Αντίστοιχα, αν ο Bob επιλέξει «Μποξ», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Μποξ) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot (-1) = p - 1$$

Η Alice καθιστά τον Bob αδιάφορο ανάμεσα στις στρατηγικές του εξισώνοντας τις αναμενόμενες ωφέλειες που του παρέχει η καθεμία, έτσι προκύπτει η πιθανότητα p:

$$u(Χορός) = u(Μποξ) \Rightarrow -2p = p - 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Συνεπώς, η στρατηγική ασφαλείας της Alice συνίσταται στο να παίζει «Χορό» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και «Μποξ» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Ανεξαρτήτως του τι θα επιλέξει ο Bob, η αναμενόμενη ωφέλειά της Alice θα είναι $\frac{2}{3}$, κάτι που μπορεί πολύ εύκολα να εξακριβωθεί με απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς.

Παρατήρηση: Η αναμενόμενη ωφέλεια της Alice δείχνει να είναι σταθερή και ίση με $\frac{2}{3}$, είτε επιλέξει τη στρατηγική ασφαλείας της, είτε επιλέξει τη μικτή στρατηγική που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1.3. Όμως, αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Το μόνο που αποδείχθηκε στο αντίστοιχο παράδειγμα της ενότητας 3.1.3 είναι πως το ζεύγος μικτών στρατηγικών με προφίλ $\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash με αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $\frac{2}{3}$ για κάθε παίκτη. Όμως, η θεώρηση αυτή έγινε υπό τη θεώρηση ότι ο Bob προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του. Αν ο στόχος του είναι να ελαχιστοποιήσει την ωφέλεια της Alice, τότε μπορεί να τα καταφέρει καλύτερα, παίζοντας ως απάντηση στο προφίλ $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ της Alice την καθαρή στρατηγική του «Μποξ», περιορίζοντάς την σε αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $\frac{1}{3}$. Επομένως, μόνο η στρατηγική ασφαλείας της Alice της διασφαλίζει αναμενόμενη ωφέλεια $\frac{2}{3}$.

Μέχρι στιγμής, το παίγνιο εξετάστηκε από την πλευρά του αμυνόμενου, αγνοώντας την πλευρά του επιτιθέμενου. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν ήδη οι βάσεις για την πλήρη κατανόηση των κινήσεων του επιτιθέμενου. Αρχικά ο επιτιθέμενος οφείλει να αναθεωρήσει την ωφέλειά του, ώστε να μετατρέψει το παίγνιο σε κατηγορία μηδενικού αθροίσματος. Έπειτα, αντιλαμβανόμενος ότι η ελαχιστοποίηση της ωφέλειας του αντιπάλου ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση της δικής του στρατηγικής, δεν μπορεί να κάνει τίποτα καλύτερο από το να παίξει με τη σειρά του τη δική του στρατηγική ασφαλείας, για το παίγνιο που περιγράφεται από το νέο πίνακα απολαβών. Στο παράδειγμα που εξετάστηκε παραπάνω μπορεί να επαληθευτεί εύκολα πως η στρατηγική ασφαλείας του Bob συνίσταται στο να παίξει «Χορό» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και «Μποξ» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Σε αυτή την περίπτωση η Alice είναι αδιάφορη ανάμεσα στις στρατηγικές της, και περιορίζεται σε αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $\frac{2}{3}$.

3.1.5 Μετατροπή σε Πρόβλημα Γραμμικής Συμπληρωματικότητας

Ένας πιο σύγχρονος τρόπος προσέγγισης είναι η εύρεση της Ισορροπίας Nash μέσω μετατροπής της κανονικής μορφής παιγνίου σε πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας (Linear Complementarity Problem – LCP). Αρχικά αποδεικνύεται [5] η ισοδυναμία των δύο προβλημάτων, και έπειτα μπορεί να επιλυθεί το αντίστοιχο πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας, κάνοντας χρήση των ανεπτυγμένων αλγοριθμικών τεχνικών.

Για να αποδειχτεί η ισοδυναμία της κανονικής μορφής του παιγνίου με το πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας γίνονται ορισμένες διαφοροποιήσεις σε σχέση με όσα έχουν εξηγηθεί μέχρι στιγμής. Αρχικά, ο πίνακας απολαβών δε χρησιμοποιείται στη μορφή που έχει παρουσιαστεί ως τώρα, αλλά διασπάται σε δύο επιμέρους μητρώα A’ και B’, καθένα εκ των οποίων αποτελεί τις απολαβές του αντίστοιχου παίκτη. Με αυτό τον τρόπο ο χειρισμός του πίνακα απολαβών γίνεται πιο απλός, καθώς πλέον επιτρέπονται οι μητρωικές πράξεις. Επιπλέον, σε αναλογία με τα κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης, στα οποία επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση κάποιας συνάρτησης, έτσι και στην παρούσα υποενότητα δε θα γίνεται λόγος για πίνακες απολαβών, αλλά για μητρώα απωλειών. Φυσικά, ως απώλεια νοείται το αντίθετο της ωφέλειας, οπότε η μοναδική διαφοροποίηση των δύο μητρώων αφορά στο πρόσημο. Τέλος, για να έχει ισχύ η μέθοδος που θα παρουσιαστεί, είναι υποχρεωτικό τα στοιχεία των μητρώων απωλειών να είναι θετικά. Είναι εύκολο να αποδειχτεί, ότι αν ένα οποιοδήποτε ζεύγος στρατηγικών είναι Ισορροπία Nash για τους πίνακες απωλειών A’ και B’, τότε εξακολουθεί να είναι Ισορροπία Nash και για τους πίνακες απωλειών A και B, όπου A και B δύο νέοι πίνακες απωλειών, οι οποίοι διαφέρουν από τους A’ και B’ κατά δύο σταθερές ποσότητες α και β, αντίστοιχα. Οι ποσότητες α και β επιλέγονται με τέτοιον τρόπο, ούτως ώστε όλα τα στοιχεία των μητρώων απωλειών A και B να προκύπτουν θετικοί αριθμοί.

Έστω $\overline{x}$, $\overline{y}$ τα προφίλ μικτών στρατηγικών των δύο παικτών, τα οποία αποτελούν Ισορροπία Nash. Σε αυτή την περίπτωση, οι απώλειες του παίκτη A υπολογίζονται ως $l_A = \overline{x}^T A \overline{y}$, ενώ οι απώλειες του παίκτη B υπολογίζονται ως $l_B = \overline{x}^T B' \overline{y}$. Προφανώς, καθώς τα $\overline{x}$, $\overline{y}$ αποτελούν Ισορροπία Nash θα ισχύει για κάθε δυνατό ζεύγος στρατηγικών x, y ότι:

$$\overline{x}^T A' \overline{y} \le x^T A' \overline{y} \ ,$$

$$\overline{x}^T B' \overline{y} \le \overline{x}^T B' y$$

Το γεγονός ότι τα μητρώα A’ και B’ αναφέρονται σε απώλειες καθορίζει και τη φορά των ανισοτήτων. Επίσης, είναι φανερό πως οι ίδιες ανισότητες ισχύουν είτε γίνεται λόγος για τα μητρώα A’ και B’, είτε για τα μητρώα A και B, αφού η Ισορροπία

Nash ισχύει και για τα δύο είδη μητρώων απωλειών. Επιπλέον, καθώς το x είναι προφίλ μικτής στρατηγικής, θα ισχύει:

$$\overline{x}^{\mathrm{T}} A \overline{y} \leq A_{i\cdot} \overline{y}$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}} B \overline{y} \leq \overline{x}^{\mathrm{T}} B_{\cdot j}$$

Όπου $A_{i\cdot}$ είναι η i-οστή γραμμή και $B_{\cdot j}$ η j-οστή στήλη των μητρώων απωλειών A και B. Αν υποθέσουμε πως ο παίκτης A επιλέγει ανάμεσα από M στρατηγικές, ενώ ο παίκτης B επιλέγει ανάμεσα από N στρατηγικές, τότε ισχύει:

$$A\overline{y} \geq \left(\overline{x}^{\mathrm{T}} A \overline{y}\right) e_M$$

$$B^{\mathrm{T}} \overline{x} \geq \left(\overline{x}^{\mathrm{T}} B \overline{y}\right) e_N$$

Όπου e_r το διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^r$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μονάδα. Θέτοντας $\overline{\xi} = \dfrac{\overline{x}}{\overline{x}^{\mathrm{T}} B \overline{y}}$ και $\overline{\eta} = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}^{\mathrm{T}} A \overline{y}}$, και εισάγοντας στις ανισώσεις μεταβλητές χαλάρωσης (slack variables), προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\xi} \\ \overline{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -e_M \\ -e_N \end{Bmatrix}$$

Με περιορισμούς $\begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{Bmatrix} \geq 0$, $\begin{Bmatrix} \overline{\xi} \\ \overline{\eta} \end{Bmatrix} \geq 0$. Για κάθε μεταβλητή ισχύει πως είτε θα μηδενίζεται, οπότε ο περιορισμός θα είναι ενεργός, είτε δε θα μηδενίζεται, οπότε θα μηδενίζεται η αντίστοιχη μεταβλητή χαλάρωσης. Συνεπώς, θα ισχύει:

$$\overline{u}_1 \overline{\xi}_1 = \ldots = \overline{u}_N \overline{\xi}_N = \overline{v}_1 \overline{\eta}_1 = \ldots = \overline{v}_N \overline{\eta}_N = 0$$

Οι οποίες είναι οι γνωστές συνθήκες συμπληρωματικότητας. Συνεπώς, η αναζήτηση των προφίλ $\overline{x}$, $\overline{y}$, που αποτελούν Ισορροπία Nash, οδηγεί στο πρόβλημα συμπληρωματικότητας που περιγράφηκε παραπάνω. Με την επίλυση του προβλήματος LCP και την εύρεση των $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{u}, \overline{v}$ είναι δυνατόν να προσδιοριστούν τα $\overline{x}$, $\overline{y}$, με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\overline{x} = \frac{\overline{\xi}}{\sum \overline{\xi}_i}$$

$$\overline{y} = \frac{\overline{\eta}}{\sum \overline{\eta}_i}$$

Τέλος, για την επίλυση του προβλήματος γραμμικής συμπληρωματικότητας προτείνεται ενδεικτικά ο αλγόριθμος Lemke – Hawson [6].

Παράδειγμα: Να βρεθεί η Ισορροπία Nash στο παίγνιο Prisoners' Dilemma.

Αρχικά κατασκευάζονται τα μητρώα απωλειών. Ο Πίνακας 2.6 (πίνακας απολαβών) διασπάται σε δύο μητρώα απωλειών, τα A' και B'.

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να είναι αυστηρώς θετικά όλα τα στοιχεία των μητρώων απωλειών, προστίθεται η σταθερή ποσότητα 1 σε όλα τα στοιχεία των δύο μητρώων:

$$A = A' + 1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = B' + 1 = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, το πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 10 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Με περιορισμούς:

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \geq 0 \text{ , } \bar{u}_1\bar{\xi}_1 = \bar{u}_2\bar{\xi}_2 = \bar{v}_1\bar{\eta}_1 = \bar{v}_2\bar{\eta}_2 = 0$$

Από την επίλυση του παραπάνω LCP προβλήματος προκύπτει:

$$\bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1 = \bar{u}_2 = \bar{v}_2 = 1,$$

$$\bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = \bar{u}_1 = \bar{v}_1 = 0$$

Οπότε, πλέον τα προφίλ μικτών στρατηγικών μπορούν να προσδιοριστούν ως:

$$\bar{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ , } \bar{y} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

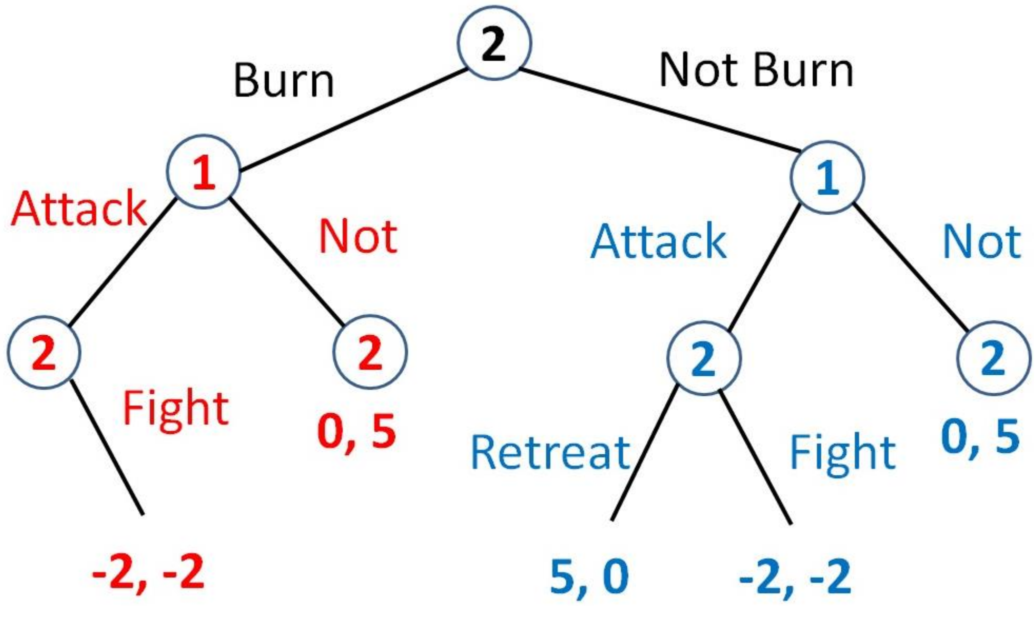
Δηλαδή αμφότεροι οι παίκτες επιλέγουν με πιθανότητα 100% την επιλογή «Hawk» και με πιθανότητα 0% την επιλογή «Dove». Τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης φυσικά επαληθεύουν το ήδη γνωστό αποτέλεσμα του Prisoners’ Dilemma.

3.2 Δενδροειδής Μορφή Παιγνίου

Η δενδροειδής μορφή είναι ένας διαφορετικός τρόπος απεικόνισης του παιγνίου, σε σχέση με την κανονική μορφή. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν οι παίκτες πρόκειται να εκτελέσουν περισσότερες από μία κινήσεις εναλλάξ, απαντώντας δηλαδή ο ένας στον άλλο.

Η δενδροειδής μορφή ονομάζεται έτσι ακριβώς επειδή το σχέδιό της θυμίζει δένδρο. Αποτελείται από κόμβους και κλαδιά. Κάθε κόμβος φέρει το όνομα ενός παίκτη και εκφράζει πως, όταν το παίγνιο φτάσει εκεί, ο αντίστοιχος παίκτης καλείται να πάρει μια απόφαση, για αυτό και ονομάζεται και κόμβος απόφασης (decision node). Κάθε κλαδί αντιστοιχεί σε μια στρατηγική που έχει διαθέσιμη ο παίκτης. Η δενδροειδής μορφή είναι σαφώς πιο παραστατική από την κανονική μορφή, και μπορεί να φανεί ξεκάθαρα η ροή του παιγνίου.

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται η κανονική μορφή ενός παιγνίου, στο οποίο ο Παίκτης 2 είναι αρχηγός ενός στρατού που εισέρχεται σε νησί, το στρατό του οποίου καθοδηγεί ο Παίκτης 1. Όπως φαίνεται και στο δένδρο, οι δύο παίκτες έχουν αρκετές στρατηγικές. Αρχικά ο παίκτης 2 καλείται να αποφασίσει αν θέλει να κάψει τη γέφυρα που ενώνει το νησί με την ενδοχώρα. Εν συνεχεία, ο παίκτης 1 καλείται να αποφασίσει αν θέλει να επιτεθεί στον παίκτη 2, ή να επιτρέψει την προέλασή του. Τέλος, ο παίκτης 2 καλείται και πάλι να αποφασίσει, αν, σε περίπτωση που δεχτεί επίθεση, θα πολεμήσει ή θα υποχωρήσει (αν δεν έχει επιλέξει να κάψει τη γέφυρα).



Σχήμα 3.1: Δενδροειδής Μορφή Παιγνίου [3]

Για την ανάλυση του παραπάνω παιγνίου χρησιμοποιείται η μέθοδος της **πίσω επαγωγής** (**backward induction**). Καθώς το παίγνιο μπορεί να γίνει χαοτικό, αν ξεκινήσει κανείς να το αναλύει από την αρχή προς το τέλος, η λογική της πίσω επαγωγής είναι να εξεταστεί το παίγνιο από το τέλος προς την αρχή. Σύμφωνα με τη μέθοδο της πίσω επαγωγής, εξετάζονται πρώτα οι τελευταίοι κόμβοι απόφασης του παιγνίου. Καθώς οι προκύπτουσες ωφέλειες αναγράφονται στο τέλος, και λαμβάνοντας υπόψη πως οι δύο παίκτες έχουν αποκλειστικό στόχο να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους, είναι εύκολο να εξαχθεί συμπέρασμα αναφορικά με ποια απόφαση θα πάρουν οι παίκτες στον τελευταίο κόμβο απόφασης. Έπειτα, καθώς είναι πλέον γνωστή η κατάληξη του παιγνίου, αν φτάσει σε κάποιον από τους τελευταίους κόμβους απόφασης, αυτοί πλέον μπορούν να αντικατασταθούν από τις προκύπτουσες ωφέλειες. Μετά την αντικατάσταση αυτή, το παίγνιο πλέον έχει απλοποιηθεί, καθώς έχουν εξαφανιστεί τα τελευταία κλαδιά. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία είναι δυνατόν να απλοποιηθεί εξ ολοκλήρου το παίγνιο, μέχρις ότου οι στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι παίκτες είναι απολύτως προφανείς.

Παράδειγμα: Να αναλυθεί το παίγνιο στο Σχήμα 3.1 με τη μέθοδο της πίσω επαγωγής.

Παρατηρούμε πως ανάλογα με την απόφαση του παίκτη 2, το παίγνιο θα εξελιχτεί είτε στο κόκκινο είτε στο μπλε υπό-παίγνιο. Θα αναλυθεί το καθένα ξεχωριστά, και θα εξεταστεί ποιο από τα δύο υπό-παίγνια θα δώσει στον παίκτη 1 μεγαλύτερη ωφέλεια.

Έστω πως αναλύεται πρώτα το μπλε υπό-παίγνιο. Αρχικά εξετάζεται ο κόμβος απόφασης του παίκτη 2, στον οποίο καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε υποχώρηση (retreat) και πόλεμο (fight). Καθώς ο παίκτης 2 θα λάβει ωφέλεια 0 στην πρώτη περίπτωση και -2 στη δεύτερη περίπτωση, μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε πως θα προτιμήσει τη στρατηγική της υποχώρησης. Συνεπώς, ο συγκεκριμένος κόμβος απόφασης του παίκτη 2 αντιστοιχεί σε ωφέλεια (5, 0) για τους δύο παίκτες. Στον άλλο κόμβο του παίκτη 2, δεν υπάρχει καμία απόφαση να ληφθεί, οπότε μπορεί αμέσως να αντικατασταθεί από την ωφέλεια (0, 5). Εν συνεχεία, εξετάζεται ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1. Έχει τη δυνατότητα να επιλέξει είτε επίθεση (attack), είτε όχι επίθεση (not). Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως αν ο παίκτης 1 επιλέξει την πρώτη στρατηγική, θα αποκομίσει ωφέλεια 5, ενώ αν επιλέξει τη δεύτερη, θα αποκομίσει ωφέλεια 0. Καθώς είναι λογικός παίκτης, θα επιλέξει τη στρατηγική της επίθεσης. Συνεπώς, ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1 μπορεί να αντικατασταθεί από την ωφέλεια (5, 0), η οποία είναι και η ωφέλεια που θα αποκομίσουν τελικά οι δύο παίκτες, αν παιχτεί το μπλε υπό-παίγνιο.

Το κόκκινο υπό-παίγνιο είναι όμοιο με το μπλε, με τη σημαντική διαφορά πως ο παίκτης 2 έχει στερήσει από τον εαυτό του τη στρατηγική υποχώρησης. Πλέον, η μοναδική του επιλογή είναι ο πόλεμος, ο οποίος αποφέρει στους δύο παίκτες ωφέλεια (-2, -2). Συνεπώς, στον κόμβο απόφασης του παίκτη 1, πλέον η στρατηγική επίθεσης του δίνει ωφέλεια -2, ενώ η στρατηγική μη επίθεσης του αποφέρει ωφέλεια 0. Είναι προφανές, πως σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης 2 θα επιλέξει τη στρατηγική μη επίθεσης. Συνεπώς, ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1 μπορεί να αντικατασταθεί από την ωφέλεια (0, 5), η οποία είναι και η ωφέλεια που θα αποκομίσουν τελικά οι δύο παίκτες, αν παιχτεί το κόκκινο υπό-παίγνιο.

Η ανάλυση τελειώνει στην αρχική απόφαση που έχει να λάβει ο παίκτης 2. Εκεί, καλείται να επιλέξει ποιο από τα 2 υπό-παίγνια θα προτιμήσει να παιχτεί. Καθώς η ωφέλεια που θα του επιφέρει το κόκκινο υπό-παίγνιο είναι 5, ενώ η ωφέλεια που θα του αποφέρει το μπλε υπό-παίγνιο είναι 0, τότε είναι λογικό ο παίκτης 2 να κάψει τη γέφυρα, στερώντας από τον εαυτό του τη δυνατότητα οπισθοχώρησης και εξαναγκάζοντας τον παίκτη 1 να αλλάξει τη στρατηγική του. Στην τελική λύση του παιγνίου ο παίκτης 2, καίει τη γέφυρα, και ο παίκτης 1 δεν επιτίθεται, καθώς σε περίπτωση επίθεσης ο παίκτης 2 θα αναγκαζόταν να πολεμήσει, με ολέθριες συνέπειες για τον παίκτη 1. Μάλιστα, ο παίκτης 2 θα επέλεγε να κάψει τη γέφυρα, ακόμα και αν αυτό του κόστιζε σε ωφέλεια, υπό την προϋπόθεση πως η απώλεια ωφέλειας από το κάψιμο της γέφυρας δεν ξεπερνά τα 5 utils.

3.3 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Σε αυτή την ενότητα θα βρεθούν Ισορροπίες Nash για επαναλαμβανόμενα παίγνια. Για την απλοποίηση του προβλήματος θα υποτεθεί πως η Alice και ο Bob παίζουν Prisoners’ Dilemma (Πίνακας 2.6), είτε για συγκεκριμένο αριθμό φορών, είτε επ' άπειρον, είτε θα σταματούν να παίζουν υπό πιθανότητα. Θα εξεταστεί ποια ζεύγη από τις στρατηγικές που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 2.10 μπορούν να αποτελέσουν Ισορροπία Nash. Επίσης, θα γίνει φανερό με ποιον τρόπο μπορούν οι δύο παίκτες να συνεργάζονται σε επαναλαμβανόμενα παίγνια, ακόμα και σε παίγνια όπως το Prisoners’ Dilemma, το οποίο στην περίπτωση που παίζεται μόλις μία φορά αποτρέπει τους παίκτες από τη συνεργασία.

Φυσικά, οι παίκτες πρέπει να αντιμετωπίσουν το σύνολο των Prisoners’ Dilemma ως ένα μεγάλο, ενιαίο παίγνιο. Στόχο τους θα πρέπει να αποτελεί η μεγιστοποίηση της ωφέλειας από όλα τα παίγνια, και όχι από το καθένα ξεχωριστά.

3.3.1 Πεπερασμένα Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Όταν οι παίκτες παίζουν για πεπερασμένο αριθμό φορών (έστω N), τότε είναι δυνατόν να κατασκευαστεί η δενδροειδής μορφή του παιγνίου. Σε αυτή την περίπτωση, είναι ιδιαίτερα πολύτιμη η συνεισφορά της μεθόδου της Πίσω – Επαγωγής.

Τη N-οστή φορά, δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση ανάμεσα στο κλασικό Prisoners’ Dilemma και τη N-οστή επανάληψη του υπό-παιγνίου. Συνεπώς, οι δύο παίκτες είναι λογικό να επιλέξουν «Hawk», καθώς το παίγνιο θα λήξει εκεί.

Τη (N-1) – οστή φορά, η Alice γνωρίζει πως στην επόμενη επανάληψη ο Bob θα παίξει «Hawk». Επίσης, η Alice γνωρίζει πως ο Bob γνωρίζει ότι στην επόμενη επανάληψη η Alice επίσης θα παίξει «Hawk». Συνεπώς, δεν μπορεί η αμοιβαία συνεργασία να αποτελεί βέλτιστη στρατηγική, καθώς δεν υπάρχει κανενός είδους τιμωρία για τον παίκτη που θα αποφύγει να συνεργαστεί. Συνεπώς είναι προτιμότερο και για τους δύο παίκτες να επιλέξουν και πάλι «Hawk».

Ανάλογος συλλογισμός καθιστά βέλτιστο για τους δύο παίκτες να επιλέξουν τη στρατηγική «Hawk» και τη (N-2) – οστή φορά, όπως και όλες τις υπόλοιπες φορές, μέχρι και την πρώτη. Η μέθοδος της Πίσω – Επαγωγής καθιστά βέλτιστο για τους δύο παίκτες τη χρήση της στρατηγικής «Hawk» καθ’ όλη τη διάρκεια του παιγνίου.

Όπως θα φανεί στην επόμενη ενότητα, το γεγονός ότι οι παίκτες παίζουν εν γνώσει τους για πεπερασμένο αριθμό φορών επηρεάζει δραστικά τη στρατηγική των δύο παικτών, καθώς και τις Ισορροπίες Nash που προκύπτουν. Μάλιστα, από την άποψη της θεωρίας παιγνίων, το πλήθος N των επαναλήψεων του υπό-παιγνίου δεν έχει απολύτως καμία επίδραση στη διαμόρφωση της στρατηγικής των δύο παικτών.

Το παραπάνω έρχεται σε αντίθεση με την ανθρώπινη διαίσθηση. Θα ήταν αναμενόμενο, αν το υπό-παίγνιο πρόκειται να παιχτεί για ένα σημαντικό πλήθος επαναλήψεων, π.χ. 1.000.000 φορές, να αποπειραθεί τουλάχιστον ο ένας παίκτης να συνεργαστεί με τον αντίπαλό του, παίζοντας «Dove» για ένα συγκεκριμένο πλήθος φορών, π.χ. για 1000 φορές συνεχόμενες κι έπειτα να γυρίσει τη στρατηγική του μόνιμα σε «Hawk», αν ο αντίπαλος αρνηθεί επανειλημμένα να προσφέρει τη συνεργασία του. Ένας τέτοιος συλλογισμός είναι φυσικά ανθρώπινος, και είναι πολύ πιθανόν να είχε καλύτερα αποτελέσματα στην πραγματικότητα από τη στρατηγική που προτείνεται από τη θεωρία παιγνίων. Παρ’ όλα αυτά, η ψυχρή λογική της θεωρίας παιγνίων καταρρίπτει τον παραπάνω συλλογισμό. Η στρατηγική που προτείνεται μπορεί υπό προϋποθέσεις να αποδώσει μεγαλύτερη ωφέλεια, όμως δεν ακολουθεί τις αρχές του Θεωρήματος Minimax. Επιπλέον, είναι εκμεταλλεύσιμο, καθώς ο αντίπαλος μπορεί να επωφεληθεί από τα συνεχόμενα «Dove», χωρίς να τα ανταποδώσει. Τέλος, μια τέτοια στρατηγική δεν μπορεί ποτέ να οδηγήσει σε Ισορροπία Nash, καθώς κάθε παίκτης έχει επαρκές κίνητρο να διακόψει τη συνεργασία, χωρίς να μπορεί να τιμωρηθεί.

Σημειώνεται πως όσα ειπώθηκαν παραπάνω είναι απολύτως αληθή όταν οι παίκτες παίζουν το υπό-παίγνιο Prisoners’ Dilemma, το οποίο έχει μόλις μία Ισορροπία Nash. Όταν το υπό-παίγνιο έχει περισσότερες από μία Ισορροπίες Nash, τα πράγματα περιπλέκονται και είναι δυνατόν η συνεργασία να αποτελεί βέλτιστη επιλογή. Για παράδειγμα, έστω το υπό-παίγνιο που περιγράφει ο Πίνακας 3.12, το οποίο θα παιχτεί για 2 επαναλήψεις. Με προσεκτική παρατήρηση αντιλαμβάνεται κανείς πως οι δύο πρώτες στρατηγικές των παικτών αντιστοιχούν στις στρατηγικές ενός Prisoners' Dilemma (απλώς με διαφορετικές απολαβές), ενώ έχει προστεθεί και μια τρίτη στρατηγική για κάθε παίκτη. Όπως είναι προφανές, το υπό-παίγνιο έχει δύο Ισορροπίες Nash, το (Αριστερά, Αριστερά) και το (Δεξιά, Δεξιά).

Παίκτης 1 \ Παίκτης 2	**Αριστερά**	**Κέντρο**	**Δεξιά**
Αριστερά	(1, 1)	(5, 0)	(0, 0)
Κέντρο	(0, 5)	(4, 4)	(0, 0)
Δεξιά	(0, 0)	(0, 0)	(3, 3)

Πίνακας 3.12: Κανονική Μορφή Παιγνίου (5) [3]

Είναι λογικό, ότι όταν το υπό-παίγνιο πρόκειται να παιχτεί περισσότερες από μία φορές, οι δύο παίκτες θα επιδιώξουν να παίξουν την Ισορροπία Nash (Δεξιά, Δεξιά), καθώς αποφέρει μεγαλύτερη ωφέλεια από την Ισορροπία (Αριστερά, Αριστερά). Όμως, οι δύο παίκτες μπορούν να καταφέρουν κάτι ακόμα καλύτερο, αν συνεργαστούν. Πράγματι ο Παίκτης 1 μπορεί να επιλέξει αρχικά τη στρατηγική «Κέντρο» (εφάμιλλη του «Dove» στο κλασσικό Prisoners' Dilemma), με την πρόθεση να τιμωρήσει τον Παίκτη 2, αν αυτός προσπαθήσει να τον εκμεταλλευτεί, παίζοντας «Αριστερά». Η τιμωρία που θα επιβάλλει ο Παίκτης 1 συνίσταται στο να παίξει την Ισορροπία Nash (Αριστερά, Αριστερά), μειώνοντας έτσι την ωφέλεια του Παίκτη 2. Σε διαφορετική περίπτωση, αν ο Παίκτης 2 συνεργαστεί, ο Παίκτης 1 θα τον «ανταμείψει», παίζοντας την Ισορροπία (Δεξιά, Δεξιά). Αν ο Παίκτης 2 γνωρίζει τη στρατηγική του Παίκτη 1, τότε η καλύτερη απάντησή του είναι να συνεργαστεί μαζί του, πράττοντας ανάλογα. Συνεπώς, μια άλλη Ισορροπία Nash ολόκληρου του παιγνίου είναι να παιχτεί (Κέντρο, Κέντρο) στην πρώτη επανάληψη και (Δεξιά, Δεξιά) στη δεύτερη.

3.3.2 Απείρως Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Είναι προφανές πως όταν το παίγνιο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές, σημασία δεν έχει η αθροιστική ωφέλεια, αλλά η μέση ωφέλεια. Φυσικά, ακόμα και στην απείρως επαναλαμβανόμενη εκδοχή του Prisoners' Dilemma, το ζεύγος στρατηγικών (**Hawk**, **Hawk**) αποτελεί Ισορροπία Nash για το παίγνιο. Η μέση ωφέλεια που αποκομίζει καθένας εκ των παικτών είναι -9.

Όμως, αυτή η Ισορροπία Nash δεν είναι μοναδική. Πλέον η απόπειρα συνεργασίας μεταξύ των παικτών δεν είναι κυριαρχούμενη στρατηγική. Η Alice και ο Bob μπορούν να προσπαθήσουν να συνεργαστούν ο ένας με τον άλλο, απειλώντας όμως με τιμωρία μόνιμη, βλοσυρή (**Grim**) ή προσωρινή, οφθαλμό έναντι οφθαλμού (**Tit For Tat**) τον αντίπαλό τους, σε περίπτωση που δε συνεργαστεί. Οι περισσότερες από τις στρατηγικές που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 2.10 μπορούν να αποτελέσουν Ισορροπία Nash όταν υιοθετούνται ταυτόχρονα και από τους δύο αντιπάλους. Έτσι, Ισορροπίες Nash αποτελούν και τα ζεύγη (**Grim**, **Grim**), (**Tit for Tat**, **Tit for Tat**), (**Tat for Tit**, **Tat for Tit**). Όμως, παραδόξως, το ζεύγος στρατηγικών (**Dove**, **Dove**) δεν αποτελεί Ισορροπία Nash, καθώς καθένας εκ των δύο παικτών μπορεί να κερδίσει περισσότερα αλλάζοντας τη στρατηγική του από «**Dove**» σε «**Hawk**» ή «**Tat for Tit**», εκμεταλλευόμενος την αφέλεια της μεθόδου. Επιπλέον, κάποιες στρατηγικές μπορούν να διασταυρωθούν και μεταξύ τους και να καταλήξουν σε Ισορροπία Nash, όπως για παράδειγμα το ζεύγος (**Grim**, **Tit For Tat**).

Στα περισσότερα ζεύγη στρατηγικών είναι εύκολο να υπολογιστεί η μέση ωφέλεια που απολαμβάνει καθένας εκ των δύο παικτών. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως στο ζεύγος (**Hawk**, **Hawk**) η μέση ωφέλεια είναι (-9, -9), ενώ στο ζεύγος (**Dove**, **Dove**) η μέση ωφέλεια είναι (-1, -1). Όταν όμως οι δύο αντίπαλοι υιοθετούν στρατηγικές των οποίων οι αποφάσεις μεταβάλλονται, ο υπολογισμός της μέσης ωφέλειας γίνεται περισσότερο πολύπλοκος.

Αρχικά, στον υπολογισμό της μέσης ωφέλειας, έχει σημασία μόνο το απείρως επαναλαμβανόμενο κομμάτι. Έτσι, όταν η στρατηγική «**Grim**» αντιμετωπίζει τη στρατηγική «**Hawk**», η μέση ωφέλεια των δύο παικτών δε θα επηρεαστεί από το γεγονός ότι ο ένας παίκτης θα παίξει αρχικά «Dove» και ο δεύτερος «Hawk», γιατί αυτή η αρχική διαφορά στις ωφέλειες θα εξανεμιστεί, μόλις και οι δύο παίκτες παίζουν μόνιμα «Hawk», οπότε η μέση ωφέλεια θα είναι και πάλι (-9, -9), ακριβώς σαν να αντιμετώπιζε η στρατηγική «**Hawk**» τον εαυτό της. Ομοίως, όταν η στρατηγική «**Tat for Tit**» αντιμετωπίζει τον εαυτό της, αρχικά οι δύο παίκτες θα παίξουν «Hawk» και στη συνέχεια θα παίζουν μόνιμα «Dove», απολαμβάνοντας μέση ωφέλεια (-1, -1). Όταν η στρατηγική «**Tat for Tit**» αντιμετωπίζει τη στρατηγική «**Tit for Tat**», τότε αρχικά ο πρώτος παίκτης παίζει «Hawk» και ο δεύτερος «Dove», εν συνεχεία παίζουν και οι δύο «Hawk», και έπειτα παίζει ο πρώτος παίκτης «Dove» και ο δεύτερος «Hawk». Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται επ’ άπειρον, οπότε το παίγνιο εμφανίζει μια περιοδικότητα, με περίοδο 3 Prisoners’ Dilemma. Οπότε η μέση ωφέλεια κάθε παίκτη είναι $\frac{0+(-9)+(-10)}{3}=-\frac{19}{3}$.

Ο Πίνακας 3.13 παρουσιάζει την κανονική μορφή του απείρως επαναλαμβανόμενου Prisoners’ Dilemma, στο οποίο οι δύο παίκτες διαθέτουν μόνο τις πέντε καθαρές στρατηγικές που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 2.10. Η μέση ωφέλεια κάθε παίκτη έχει υπολογιστεί σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράφηκε στην παραπάνω παράγραφο, ενώ έχουν βρεθεί όλες οι Ισορροπίες Nash με τη μέθοδο εύρεσης καλύτερης απάντησης.

Αν κάποιος επιχειρήσει να διαγράψει τις κυριαρχούμενες στρατηγικές στο παρόν παίγνιο, θα αντιληφθεί γρήγορα πως δεν υπάρχει καμία ισχυρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Όμως υπάρχουν ορισμένες ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές, η διαδοχική διαγραφή των οποίων απλοποιεί σημαντικά το παίγνιο.

Όμως, είναι αναγκαίο να θυμάται κανείς πως με τη διαδοχική διαγραφή ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών, υπάρχει περίπτωση να χαθούν ορισμένες Ισορροπίες Nash. Αρχικά, είναι εμφανές πως η στρατηγική «**Dove**» είναι ασθενώς κυριαρχούμενη. Αν διαγραφεί, καθώς πλέον δεν υπάρχει καμία «αφελής» στρατηγική, η στρατηγική «**Hawk**» γίνεται επίσης ασθενώς κυριαρχούμενη. Καμία στρατηγική δεν είναι καλύτερη απάντηση στην «**Hawk**» από τον εαυτό της, όμως υπάρχουν άλλες στρατηγικές που αποδίδουν εξίσου καλά εναντίον της «**Hawk**», και τα πηγαίνουν καλύτερα σε άλλες, ευγενικές στρατηγικές, όπως η «**Tit for Tat**». Εν συνεχεία, το παίγνιο απλοποιείται ακόμα περισσότερο, καθώς η στρατηγική «**Grim**» αποδίδει καλύτερα από την «**Tit for Tat**» απέναντι στη στρατηγική «**Tat for Tit**», ενώ αποδίδουν εξίσου καλά απέναντι στις υπόλοιπες, μη διαγραφείσες στρατηγικές. Μετά τη διαγραφή της επίσης ασθενώς κυριαρχούμενης «**Tit for Tat**», απομένουν μόνο οι στρατηγικές «**Grim**» και «**Tat for Tit**», καμία από τις οποίες δεν κυριαρχεί στην άλλη. Παρά το γεγονός ότι η «**Grim**» αποδίδει καλύτερα από την «**Tat for Tit**», όταν οι δύο στρατηγικές αντιμετωπίζουν η μία την άλλη, εξακολουθεί να υστερεί από την «**Tat for Tit**» ως αντίπαλος του εαυτού της. Συνεπώς, το απλοποιημένο παίγνιο έχει δύο Ισορροπίες Nash, τα ζεύγη (**Grim**, **Grim**) και (**Tat for Tit**, **Tat for Tit**).

Όμως, η εύρεση της καλύτερης στρατηγικής δεν είναι τόσο απλή. Στο παραπάνω παίγνιο έγινε η απλοϊκή υπόθεση πως οι διαθέσιμες στρατηγικές ήταν μόλις 5. Στην πραγματικότητα, είναι πολύ περισσότερες. Η ύπαρξη μερικών επιπλέον στρατηγικών αναιρεί το γεγονός ότι κάποιες στρατηγικές είναι κυριαρχούμενες, συνεπώς αλλάζει εντελώς την ανάλυση του παιγνίου. Όπως είναι φανερό, στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει κάποια στρατηγική που να ξεχωρίζει από τις υπόλοιπες, καθώς καθεμία έχει τα δικά της ιδιαίτερα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Alice\ Bob	**Dove**	**Hawk**	**Grim**	**Tit for Tat**	**Tat for Tit**
Dove	(-1, -1)	(-10, 0)	(-1, -1)	(-1, -1)	(-10, 0)
Hawk	(0, -10)	(-9, -9)	(-9, -9)	(-9, -9)	(-4.5, -9.5)
Grim	(-1, -1)	(-9, -9)	(-1, -1)	(-1, -1)	(-4.5, -9.5)
Tit for Tat	(-1, -1)	(-9, -9)	(-1, -1)	(-1, -1)	(-6.33, -6.33)
Tat for Tit	(0, -10)	(-9.5, -4.5)	(-9.5, -4.5)	(-6.33, -6.33)	(-1, -1)

Πίνακας 3.13: Πίνακας Απολαβών για Απείρως Επαναλαμβανόμενο Prisoners' Dilemma

3.3.3 Υπό Πιθανότητα Συνεχιζόμενα Παίγνια

Όταν το υπό-παίγνιο επαναλαμβάνεται πεπερασμένο αριθμό φορών, τότε η συνεργασία των παικτών δεν μπορεί να είναι Ισορροπία Nash. Όταν το υπό-παίγνιο παίζεται άπειρες φορές, τότε υπάρχει λόγος να αποπειραθούν οι παίκτες να συνεργαστούν. Η περίπτωση στην οποία το παίγνιο συνεχίζεται υπό κάποια πιθανότητα αποτελεί μια ενδιάμεση κατάσταση. Το αν οι παίκτες θα πρέπει τελικά να συνεργαστούν ή όχι θα προκύψει ανάλογα με την πιθανότητα συνέχισης του παιγνίου p, και τις απολαβές των παικτών για τις στρατηγικές που έχουν στη διάθεσή τους.

Έστω πως εξετάζεται η γενικότερη μορφή του Prisoners' Dilemma που περιγράφει ο Πίνακας 3.14. Η διαφορά σε σχέση με το παίγνιο που αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.2.6 έγκειται μόνο στις απολαβές. Για να αντιστοιχεί πράγματι το παίγνιο σε Prisoners' Dilemma, θα πρέπει να ισχύει $b > d > a > c$. Οι παραπάνω αριθμοί ενδέχεται να είναι και θετικοί, χωρίς αυτό να επηρεάζει καθόλου τη μορφή του παιγνίου. Εξακολουθεί να ισχύει πως η στρατηγική «Hawk» κυριαρχεί ισχυρά της στρατηγικής «Dove» και πως το αποτέλεσμα (a, a), στο οποίο θα καταλήξουν οι δύο παίκτες είναι χειρότερο και για τους δύο από το αποτέλεσμα (d, d), στο οποίο θα κατέληγαν με αμοιβαία συνεργασία.

Παίκτης 1 \ Παίκτης 2	Hawk	Dove
Hawk	(a, a)	(b, c)
Dove	(c, b)	(d, d)

Πίνακας 3.14: Πίνακας Απολαβών για Prisoners' Dilemma (Γενική Μορφή)

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, έτσι και τώρα, ο λόγος για τον οποίο μπορεί να συνεργαστούν οι δύο παίκτες, είναι η επικείμενη τιμωρία, σε περίπτωση που συμπεριφερθούν εγωιστικά.

Στην περίπτωση που και οι δύο παίκτες συμπεριφέρονται αλτρουιστικά, οι απολαβές τους θα είναι:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \cdot d = d \cdot \left(1 + p + p^2 + p^3 + \ldots\right) = \frac{d}{1-p}$$

Στην περίπτωση που κάποιος παίκτης αποφασίσει να συμπεριφερθεί εγωιστικά, τότε ο συμπαίκτης του θα τον τιμωρήσει συμπεριφερόμενος επίσης εγωιστικά, οπότε η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u_2 = b + \sum_{n=1}^{\infty} p^n \cdot d = b + a \cdot \left(p + p^2 + p^3 + \ldots\right) = b + \frac{a \cdot p}{1-p}$$

Για να υπάρχουν επαρκή κίνητρα για συνεργασία, θα πρέπει οι δύο παίκτες να έχουν μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφέλεια συμπεριφερόμενοι αλτρουιστικά από ό,τι συμπεριφερόμενοι ατομιστικά. Συνεπώς:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow \frac{d}{1-p} > b + \frac{a \cdot p}{1-p} \Leftrightarrow p > \frac{b-d}{b-a}$$

Επομένως, όταν η πιθανότητα συνέχισης του παιγνίου είναι μεγαλύτερη από $\frac{b-d}{b-a}$, τότε η συνεργασία είναι η βέλτιστη στρατηγική, καθώς η αναμενόμενη τιμωρία αναμένεται να επιφέρει μεγαλύτερη ζημία στον παίκτη που δε συνεργάστηκε από την ωφέλεια που του απέφερε η διακοπή της συνεργασίας. Στο παράδειγμα που αναφέρει ο Πίνακας 2.6, έχουμε $a=-9,\ b=0,\ d=-1$. Συνεπώς, όταν η πιθανότητα συνέχισης του παιγνίου είναι μεγαλύτερη από $\frac{b-d}{b-a}=\frac{0-(-1)}{0-(-9)}=\frac{1}{9}$, τότε η επ' άπειρον συνεργασία μπορεί να αποτελέσει Ισορροπία Nash, καθώς η απειλή της τιμωρίας είναι ικανοποιητικά ισχυρή για να αποτρέψει εγωιστικές συμπεριφορές που θα αποσταθεροποιούσαν την Ισορροπία.

3.4 Υποβολή Προσφοράς σε Δημοπρασίες

Στην παρούσα ενότητα θα εξεταστεί ποια θα πρέπει να είναι συμπεριφορά των παικτών, όταν συμμετέχουν σε μια δημοπρασία για κάποιο αγαθό. Θα εξεταστούν διάφοροι τύποι δημοπρασίας, για καθέναν εκ των οποίων θα γίνει μια εκτίμηση της συμπεριφοράς που θα πρέπει να έχουν οι παίκτες, κάνοντας όπου χρειάζεται ορισμένες απλοποιήσεις. Για τους υπολογισμούς που θα γίνονται στο εξής, ισχύουν οι εξής υποθέσεις:

- Στη δημοπρασία συμμετέχουν Ν παίκτες, καθένας εκ των οποίων δρα εντελώς ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.
- Για κάθε παίκτη i, το δημοπρατούμενο αγαθό έχει και διαφορετική αξία v_i. Ο παίκτης γνωρίζει πόσο αξίζει το αγαθό γι' αυτόν, αλλά αγνοεί πόσο αξίζει για οποιονδήποτε άλλο.
- Ο πωλητής γνωρίζει πως για το αγαθό έχει αξία για τους αγοραστές την οποία όμως αγνοεί. Για τον ίδιο, το αντικείμενο έχει αξία 0.
- Καθένας εκ των παικτών ενδιαφέρεται αποκλειστικά για το κέρδος, αγνοώντας οποιοδήποτε άλλο συναίσθημα (εγωισμός, υπερηφάνεια, ζήλια, κλπ.). Αυτό είναι δημοσίως γνωστό για όλους.
- Είναι επίσης δημοσίως γνωστό για όλους πως ο πωλητής και οι αγοραστές είναι απολύτως λογικοί.

Οι βρετανικές δημοπρασίες, οι ιαπωνικές δημοπρασίες και οι δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών δεύτερης τιμής είναι ευχερέστερες στον υπολογισμό, καθώς οι παίκτες έχουν μία (ασθενώς) κυρίαρχη στρατηγική. Αποδεικνύεται πως αυτά τα τρία είδη δημοπρασιών είναι πρακτικά ισοδύναμα. Επίσης, οι ολλανδικές δημοπρασίες και οι δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής είναι επίσης ισοδύναμες μεταξύ τους.

Στις βρετανικές δημοπρασίες ο αγοραστής i πρέπει να συνεχίζει να ανεβάζει την προσφορά του, μέχρις ότου είτε να νικήσει, είτε κάποιος να προσφέρει περισσότερα χρήματα από την αξία v_i που έχει το αντικείμενο για τον αγοραστή i. Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής i πρέπει να σταματήσει να προσφέρει και να αποσυρθεί από τη δημοπρασία. Τελικά, όταν η προσφορά ξεπεράσει οριακά την αξία που έχει για τον προτελευταίο αγοραστή, τότε θα έχει μείνει μόνο ένας αγοραστής και το αγαθό αναμένεται να πουληθεί οριακά στην αξία που έχει για τον προτελευταίο αγοραστή.

Ανάλογη είναι η κατάσταση και για τις ιαπωνικές δημοπρασίες. Είναι κυρίαρχη στρατηγική για κάθε αγοραστή να μένει όρθιος μέχρις ότου αναγραφεί η αξία που έχει για τον ίδιο το αγαθό. Σε αυτή την περίπτωση οφείλει να κάτσει, διαφορετικά ρισκάρει να κερδίσει τη δημοπρασία, αλλά να χάσει σε ωφέλεια, καθώς το αγαθό που θα κερδίσει θα του προσφέρει μικρότερη ωφέλεια από τα χρήματα που δαπάνησε για να το αποκτήσει. Ομοίως, αναμένεται στο τέλος το αγαθό να πουληθεί στην αξία v_s, όπου s ο αγοραστής για τον οποίο το αγαθό έχει τη δεύτερη υψηλότερη αξία.

Η λογική των παικτών δε μεταβάλλεται ούτε στις δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών δεύτερης τιμής. Και σε αυτή την περίπτωση, είναι κυρίαρχη στρατηγική για τους αγοραστές να γράψουν στο φάκελο την πραγματική αξία που έχει για αυτούς το αγαθό. Εάν ο αγοραστής i κερδίσει τη δημοπρασία, τότε θα πληρώσει τιμή χαμηλότερη από την αντίστοιχη αξία v_i, ενώ αν χάσει τη δημοπρασία, αυτό σημαίνει ότι κάποιος άλλος αγοραστής υπέβαλε μεγαλύτερη προσφορά από v_i, κάτι που δε θα μπορούσαν να ανταγωνιστούν ακόμα και αν η προσφορά του άλλου αγοραστή ήταν φανερή. Τελικά, το αγαθό καταλήγει στον αγοραστή για τον οποίο έχει τη μεγαλύτερη αξία, ενώ ο αγοραστής αυτός καταλήγει να πληρώσει v_s, όπου s ο αγοραστής για τον οποίο το αγαθό έχει τη δεύτερη υψηλότερη αξία.

Οι ολλανδικές δημοπρασίες και οι δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής είναι πιο περίπλοκες, καθώς, σε αντίθεση με τα είδη των δημοπρασιών που εξετάστηκαν παραπάνω, δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική. Είναι όμως εύκολο να αποδειχτεί πως τα δύο είδη δημοπρασιών είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Πράγματι, η μόνη απόφαση που έχει να πάρει ένας αγοραστής που συμμετέχει σε μια ολλανδική δημοπρασία είναι να καθορίσει την τιμή εκείνη, κάτω από την οποία είναι διατεθειμένος να φωνάξει «Mine!» και να τελειώσει τη δημοπρασία. Όταν ένας αγοραστής συμμετέχει σε μια δημοπρασία σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής, η μόνη απόφαση που έχει να πάρει, είναι ποια τιμή να γράψει στο φάκελο. Αν ο αγοραστής i είναι διατεθειμένος να κάνει την προσφορά b_i, ελπίζοντας να κερδίσει τη δημοπρασία, τότε σίγουρα είναι διατεθειμένος να σταματήσει και μια ολλανδική δημοπρασία, όταν η τιμή φτάσει στο b_i.

Παρ' όλα αυτά, σε αντίθεση με τα προηγούμενα είδη δημοπρασιών, ο υπολογισμός της καλύτερης προσφοράς που μπορούν να υποβάλλουν οι παίκτες είναι δυσχερής. Είναι βέβαιο πως η προσφορά των παικτών δεν μπορεί να είναι η πραγματική αξία που έχει για αυτούς το αγαθό, καθώς το αναμενόμενο κέρδος των παικτών θα είναι μηδενικό σε κάθε περίπτωση, είτε κερδίσουν, είτε χάσουν τη δημοπρασία. Για να αποκομίσουν κέρδος οι αγοραστές οφείλουν να χαμηλώσουν την προσφορά τους, ούτως ώστε, στην περίπτωση που κερδίσουν τη δημοπρασία, να αποκομίσουν κάποια θετική διαφορά ωφέλειας. Παράλληλα, χαμηλώνοντας την προσφορά τους, υπάρχει ο κίνδυνος κάποιος άλλος αγοραστής να υποβάλει μια προσφορά μεγαλύτερη από τη δική τους, αλλά χαμηλότερη από τη χρηματική τους αξία, στερώντας τους έτσι τη δυνατότητα να κερδίσουν.

Τελικά, η προσφορά που πρέπει να υποβάλει ο κάθε αγοραστής επηρεάζεται, εκτός από την ιδιωτική αξία που έχει το αγαθό για αυτόν, από το πόσους αγοραστές θα πρέπει να αντιμετωπίσει, καθώς και από το τι πιστεύει για τις δικές τους ιδιωτικές αξίες. Για την ανάλυση που θα γίνει παρακάτω, γίνεται η απλοποιητική υπόθεση πως συμμετέχουν μόλις δύο υποψήφιοι αγοραστές σε μια δημοπρασία σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής. Επίσης, είναι δημοσίως γνωστό πως οι ιδιωτικές αξίες των παικτών είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f.

Παράδειγμα: Έστω ότι οι αξίες v_1, v_2 που έχει το αντικείμενο για τους παίκτες είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\mathrm{f(x)} = 1,\ \ 0 \leq \mathrm{x} \leq 1$. Θα αποδειχτεί πως το ζεύγος στρατηγικών $\left(\frac{v_1}{2},\ \frac{v_2}{2}\right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash, για δημοπρασίες σφραγισμένων προσφορών πρώτης τιμής.

Στόχος των παικτών είναι να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ωφέλειά τους. Αυτή υπολογίζεται ως το καθαρό κέρδος που αποκομίζουν οι αγοραστές, στην περίπτωση που κερδίσουν τη δημοπρασία, πολλαπλασιασμένο επί την πιθανότητα να κερδίσουν τη δημοπρασία. Έστω πως ο αγοραστής 2 προσφέρει $\frac{v_2}{2}$, ενώ ο αγοραστής 1 προσφέρει s_1. Ο αγοραστής 1 θα κερδίσει εφόσον $\frac{v_2}{2} < s_1 \Rightarrow \frac{v_2}{2} < 2s_1$, ενώ θα χάσει στην αντίθετη περίπτωση. Τότε η αναμενόμενη ωφέλεια του αγοραστή 1 θα είναι:

$$u_1 = \left(v_1 - s_1\right) \cdot \int_0^{2s_1} f\left(v_2\right) dv_2 = \left(v_1 - s_1\right) \cdot 2s_1 = 2s_1 v_1 - s_1^2$$

Για να μεγιστοποιηθεί η u_1 θα πρέπει:

$$\frac{du_1}{ds_1} = 0 \Rightarrow 2s_1 v_1 - 2s_1 = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{v_1}{2}$$

Συνεπώς, όταν ο αγοραστής 2 υποβάλλει προσφορά ίση με $\frac{v_2}{2}$, τότε η καλύτερη απάντηση του παίκτη 1 είναι να προσφέρει $\frac{v_1}{2}$. Καθώς το παίγνιο είναι συμμετρικό, ισχύει και το αντίστροφο. Συνεπώς, το ζεύγος στρατηγικών $\left(\frac{v_1}{2}, \quad \frac{v_2}{2} \right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash.

Ανάλογη στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί και σε δημοπρασίες με περισσότερους από δύο αγοραστές. Αποδεικνύεται [7] ότι σε μια δημοπρασία με n αγοραστές, των οποίων οι αξίες ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1), η n-άδα στρατηγικών $\left(\frac{n-1}{n} v_1 \quad ..., \quad \frac{n-1}{n} v_n \right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash.

Σημειώνεται πως η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε παραπάνω χρησιμεύει μόνο στην επαλήθευση της Ισορροπίας Nash, και όχι στην εύρεσή της. Δυστυχώς, ο υπολογισμός της ισορροπίας παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες και ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

4 Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών

4.1 Θεωρία Παιγνίων – Ultimatum Game

Το Ultimatum Game [8] διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1982 από τον A. Rubinstein. Το συγκεκριμένο παίγνιο μπορεί να περιγραφεί πολύ απλά, παρουσιάζει όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον, τόσο από λογικής πλευράς, όσο και από κοινωνικής, καθώς όπως θα δούμε, τα αποτελέσματα που προκύπτουν με λογικούς συλλογισμούς δεν επαληθεύονται και στην πραγματικότητα, όπως αποδεικνύεται με πάρα πολλά πειράματα που έχουν διεξαχθεί [9], [10]. Η περιγραφή του Ultimatum Game έχει ως εξής:

«Ένας φιλάνθρωπος δωρίζει σε δύο άγνωστους μεταξύ τους ανθρώπους (έστω Α και Β) ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό Χ, το οποίο καλούνται να μοιραστούν ως εξής: Ο Α καλείται να προτείνει έναν και μόνο έναν τρόπο διαμοίρασης του ποσού (x χρηματικές μονάδες στον Α και Χ-x χρηματικές μονάδες στον Β), και ο Β καλείται είτε να αποδεχτεί την προσφορά, είτε να αρνηθεί, χωρίς όμως να δικαιούται να αντιπροτείνει κάτι διαφορετικό. Αν ο Β αποδεχτεί την προσφορά του Α, τότε οι δύο παίκτες μοιράζονται το χρηματικό ποσό με τον τρόπο που συμφώνησαν. Αν όμως ο Β απορρίψει την προσφορά του Α, τότε κανείς εκ των 2 παικτών δεν παίρνει κάτι, και τα χρήματα επιστρέφονται στο φιλάνθρωπο».

Η Θεωρία Παιγνίων καλείται να αναλύσει το παιχνίδι ώστε να είναι σε θέση να ορίσει ποια στρατηγική θα πρέπει να ακολουθήσει ο καθένας από τους δύο παίκτες. Για να είναι δυνατή η επίλυση του παιγνίου, θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές:

1) Οι δύο παίκτες είναι άγνωστοι μεταξύ τους και αποφασίζουν ανεξάρτητα, ενώ γνωρίζουν και οι δύο πως αποκλείεται να αλληλοεπιδράσουν στο μέλλον.
2) Οι δύο παίκτες ενδιαφέρονται αποκλειστικά για τα χρήματα, προτιμώντας αυστηρά περισσότερα χρήματα από λιγότερα.
3) Η υπόθεση (2) είναι δημοσίως γνωστή.

Θα δούμε την επίλυση μίας εκ των παραλλαγών του Ultimatum Game, στην οποία Χ=10€, ενώ οι επιτρεπτές προσφορές μοιρασιάς που μπορεί να προτείνει ο Α περιορίζονται στις (9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (5,5), (4,6), (3,7), (2,8), (1,9). Δηλαδή υποχρεούται να προσφέρει τουλάχιστον 1€ στον Β, ενώ ταυτόχρονα η μεταβλητή x γίνεται πλέον διακριτή, ενώ στο αρχικό πρόβλημα είναι συνεχής στο διάστημα [0, Χ]. Το παίγνιο πλέον μπορεί να επιλυθεί με 2 τρόπους, είτε διατυπώνοντάς το στην κανονική του μορφή και διαγράφοντας τις κυριαρχούμενες στρατηγικές του κάθε παίκτη, καταλήγοντας έτσι στην Ισορροπία Nash, είτε με τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής.

4.1.1 Εύρεση Ισορροπίας Nash

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει το παίγνιο στην κανονική του μορφή.

Α/Β	**Αποδοχή**	**Απόρριψη**
Πρόταση για (9,1)	(9,1)	(0,0)
Πρόταση για (8,2)	(8,2)	(0,0)
Πρόταση για (7,3)	(7,3)	(0,0)
Πρόταση για (6,4)	(6,4)	(0,0)
Πρόταση για (5,5)	(5,5)	(0,0)
Πρόταση για (4,6)	(4,6)	(0,0)
Πρόταση για (3,7)	(3,7)	(0,0)
Πρόταση για (2,8)	(2,8)	(0,0)
Πρόταση για (1,9)	(1,9)	(0,0)

Πίνακας 4.1: Ultimatum Game (κανονική μορφή)

Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως της στρατηγικής του παίκτη Α (δηλαδή σε κάθε γραμμή), η στρατηγική του παίκτη Β «**Απόρριψη**» προσφέρει στον παίκτη Β χαμηλότερες χρηματικές απολαβές από ό,τι η στρατηγική «**Αποδοχή**», οπότε είναι ισχυρώς κυριαρχούμενη. Συνεπώς, η Θεωρία Παιγνίων συμβουλεύει τον παίκτη Β να μην επιλέξει ποτέ τη στρατηγική «**Απόρριψη**», συνεπώς να επιλέγει «**Αποδοχή**» ανεξαρτήτως της επιλογής του Παίκτη Α. Ο Πίνακας 4.2 παρουσιάζει την επικαιροποιημένη μορφή του παιχνιδιού, μετά τη διαγραφή της στρατηγικής «**Απόρριψη**» από τις επιλογές του Παίκτη Β.

Α/Β	**Αποδοχή**
Πρόταση για (9,1)	(9,1)
Πρόταση για (8,2)	(8,2)
Πρόταση για (7,3)	(7,3)
Πρόταση για (6,4)	(6,4)
Πρόταση για (5,5)	(5,5)
Πρόταση για (4,6)	(4,6)
Πρόταση για (3,7)	(3,7)
Πρόταση για (2,8)	(2,8)
Πρόταση για (1,9)	(1,9)

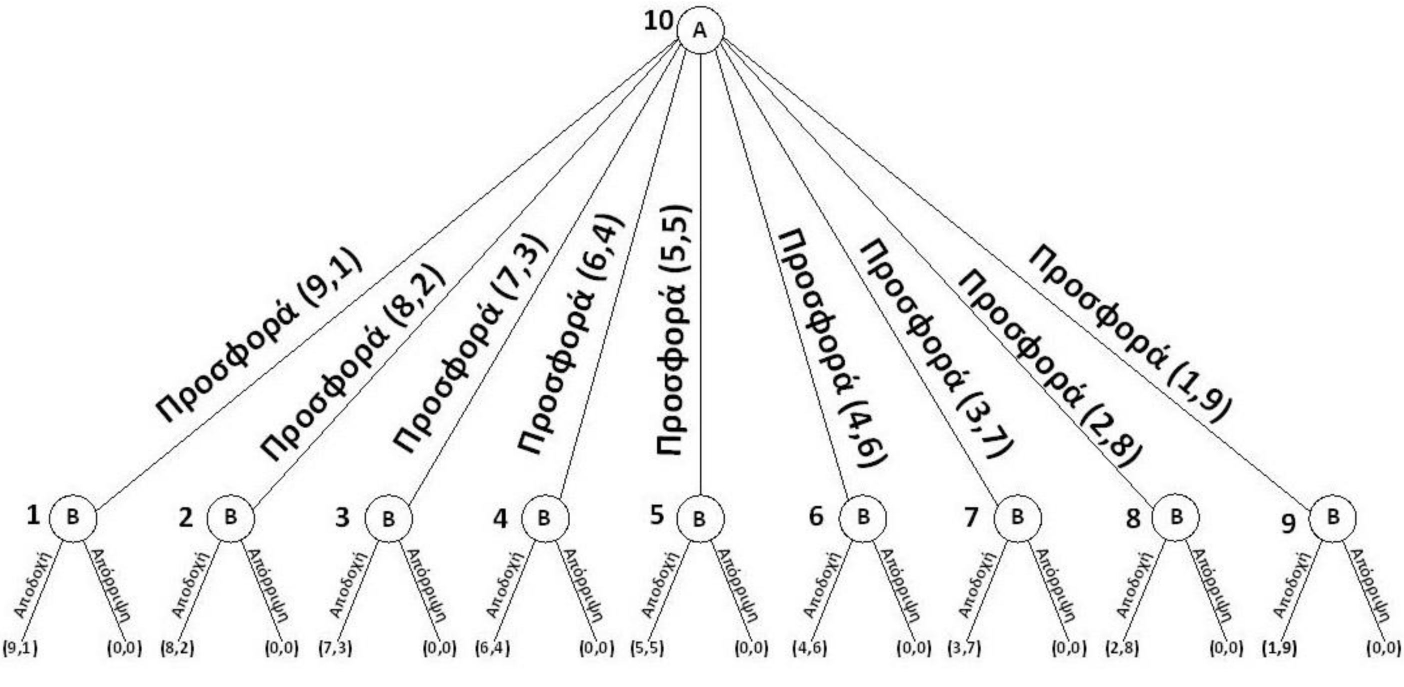
Πίνακας 4.2: Ultimatum Game (Μετά τη διαγραφή της στρατηγικής «απόρριψη»)

Από την υπόθεση (3), γνωρίζουμε πως ο παίκτης Α γνωρίζει πως ο παίκτης Β θα καταλήξει σε αυτό το συλλογισμό. Συνεπώς μπορεί να επιλέξει στρατηγική γνωρίζοντας την επικαιροποιημένη μορφή του παιγνίου. Προφανώς, θα επιλέξει τη στρατηγική που του αποφέρει τις περισσότερες χρηματικές μονάδες, δηλαδή την «**Πρόταση για (9,1)**», καθώς όλες οι υπόλοιπες στρατηγικές είναι ισχυρώς κυριαρχούμενες από αυτή τη στρατηγική. Το ζεύγος στρατηγικών («**Πρόταση για (9,1)**», «**Αποδοχή**») αποτελεί και την Ισορροπία Nash, στο οποίο οφείλουν να καταλήξουν οι δύο παίκτες αν συμπεριφερθούν λογικά.

4.1.2 Επίλυση με τη μέθοδο της Πίσω-Επαγωγής

Σύμφωνα με τη μέθοδο της Πίσω-Επαγωγής, το παίγνιο καταγράφεται σε δενδροειδή μορφή. Κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει μια απόφαση που πρέπει να πάρει ένας εκ των δύο παικτών και κάθε κλαδί αντιπροσωπεύει τις δυνατές αποφάσεις. Στη συνέχεια, κάθε κλαδί του δέντρου αντικαθίσταται με την τιμή που πρόκειται να πάρει, υπό την προϋπόθεση πως ο παίκτης που πρέπει να πάρει μια απόφαση θα συμπεριφερθεί λογικά, προσπαθώντας να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια.

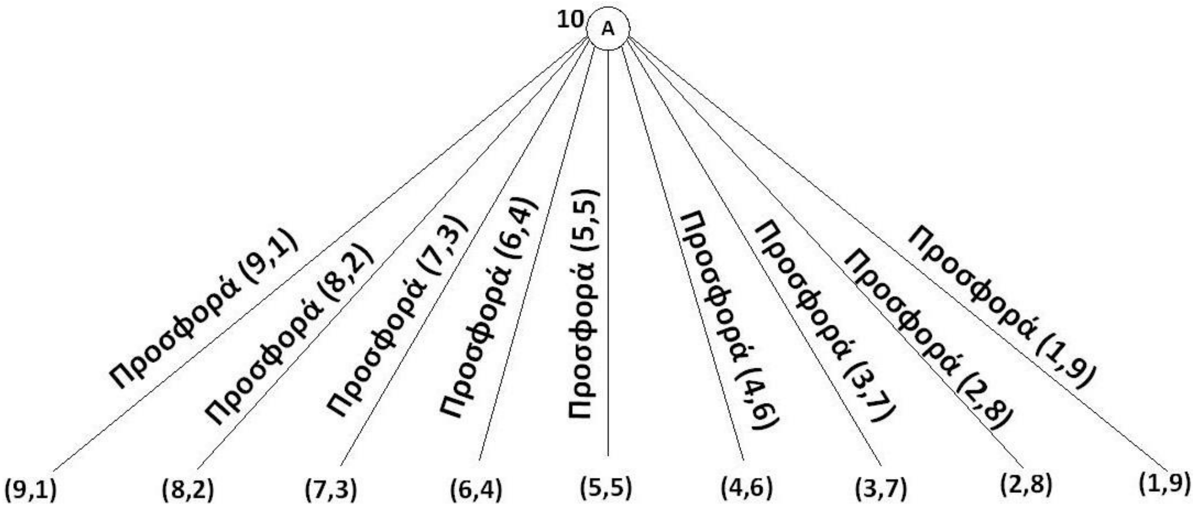
Στην περίπτωση του διασκευασμένου Ultimatum Game που παρουσιάστηκε παραπάνω, η δενδροειδής μορφή του παιγνίου φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Φυσικά το παίγνιο ξεκινάει από τον κόμβο απόφασης 10, στον οποίο ο παίκτης Α καλείται να προτείνει μια μοιρασιά του χρηματικού ποσού. Ανάλογα με την επιλογή του, το παιχνίδι θα οδηγηθεί σε ένα από τα παρακλάδια (κόμβοι απόφασης 1-9), ενώ ο δρόμος που θα ακολουθηθεί στη συνέχεια θα αποφασιστεί από τον παίκτη Β. Εν συνεχεία, βρίσκουμε για κάθε κόμβο του δέντρου ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική του κάθε παίκτη, ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω. Σε κάθε κόμβο δίνεται ένας αριθμός, ούτως ώστε να μπορεί να γίνεται λόγος γι' αυτόν, ενώ μέσα σε κάθε κόμβο γράφεται το όνομα του παίκτη που πρέπει να πάρει κάποια απόφαση. Έτσι, στον κόμβο 1, καλείται ο παίκτης Β να αποφασίσει αν θα δεχτεί ή θα απορρίψει την πρόταση του παίκτη Α για μοιρασιά (9,1).



Σχήμα 4.1: Ultimatum Game – Δενδροειδής Απεικόνιση

Είναι προφανές ότι *αν ο παίκτης Β βρεθεί στον κόμβο 1, είναι προτιμότερο να επιλέξει «**Αποδοχή**» παρά «**Απόρριψη**», αφού στην πρώτη περίπτωση θα πληρωθεί μία χρηματική μονάδα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση δε θα λάβει καμία πληρωμή*. Έχοντας εκτελέσει τον παραπάνω συλλογισμό και γνωρίζοντας ότι ο Β είναι λογικός παίκτης, μπορούμε να πούμε πως *κάθε φορά που το παίγνιο φτάνει στον κόμβο 1, ο παίκτης Β θα επιλέγει «**Αποδοχή**» και ο παίκτης Α θα πληρώνεται 9 χρηματικές μονάδες, ενώ ο παίκτης Β θα πληρώνεται μία χρηματική μονάδα.* Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε τον κόμβο 1 (και όλα τα παρακλάδια του) με την ωφέλεια που θα πάρουν οι 2 παίκτες, αν το παίγνιο φτάσει σε αυτό το σημείο.

Ο ίδιος συλλογισμός ισχύει και για τους κόμβους 2-9. Κάθε φορά ο παίκτης Β προτιμάει να πληρωθεί κάποιο ποσό από το να μην πληρωθεί απολύτως τίποτα, οπότε πάντα επιλέγει «**Αποδοχή**», συνεπώς και αυτοί οι κόμβοι μπορούν να αντικατασταθούν από τις ωφέλειες στις οποίες αντιστοιχούν. Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται η ενημερωμένη μορφή του παιγνίου, στην οποία οι κόμβοι απόφασης 2-9 έχουν αντικατασταθεί. Παρατηρείται πως ο παίκτης Β δεν παίρνει καμία απόφαση στο νέο αυτό παίγνιο. Είναι αποκλειστικά ένα πρόβλημα απόφασης για τον παίκτη Α, ο οποίος καλείται να επιλέξει μεταξύ των εναλλακτικών που διαθέτει. Φυσικά, θα επιλέξει τη στρατηγική που μεγιστοποιεί τη δική του ωφέλεια, δηλαδή τη στρατηγική «**Πρόταση για (9,1)**», την οποία όπως έχουμε ήδη εξακριβώσει, ο παίκτης Β θα αποδεχτεί. Η λύση στην οποία καταλήγουμε είναι («**Πρόταση για (9,1)**», «**Αποδοχή**»), η οποία φυσικά είναι η ίδια στην οποία είχαμε καταλήξει και με τον πρώτο τρόπο επίλυσης, αναλύοντας το παίγνιο στην κανονική του μορφή.



Σχήμα 4.2: Ultimatum Game (ανανεωμένη μορφή)

4.1.3 Τι συμβαίνει στην πραγματικότητα;

Έχουν διεξαχθεί πάρα πολλά πειράματα [9], [10] στα οποία καλούνται άτομα να παίξουν το Ultimatum Game ώστε να μελετηθεί η συμπεριφορά τους. Για να είναι ακριβή αυτά τα πειράματα, διασφαλίζονται τα παρακάτω βασικά στοιχεία:

- Τα άτομα που συμμετέχουν στα πειράματα έχουν κατανοήσει καλά τους κανόνες του παιχνιδιού. Αυτό επιτυγχάνεται παρέχοντάς τους τη δυνατότητα

να παίξουν πολλές φορές δοκιμαστικά, ούτως ώστε να εξοικειωθούν με τη διαδικασία.
- Οι αμοιβές αντιστοιχούν σε πραγματικά χρήματα, ούτως ώστε οι παίκτες να έχουν επαρκές κίνητρο να παίξουν με τον τρόπο που θεωρούν καλύτερο.
- Οι παίκτες δεν πρέπει να γνωρίζονται ή να πρόκειται να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους στο μέλλον. Το παραπάνω ισχύει για το Ultimatum Game μιας φάσης, αν και στο Ultimatum Game περισσότερων φάσεων αυτό είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί (ή έστω να το κατανοούν οι παίκτες).

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων εν γένει δεν επαληθεύουν τη θεωρία. Από τη μία τα άτομα που καλούνται να παίξουν το ρόλο του παίκτη Α κάνουν πιο μοιρασμένες προσφορές (π.χ. 5-5) σε σχέση με τη θεωρητικά σωστή προσφορά (9-1), από την άλλη, μεγάλο ποσοστό των ατόμων που καλούνται να παίξουν το ρόλο του παίκτη Β αρνούνται αρκετά συχνά προσφορές που θεωρούν άδικες (π.χ. 7-3), προτιμώντας να πάρουν 0 χρηματικές μονάδες σύνολο παρά να αφήσουν τον παίκτη Α να αποκτήσει περισσότερες χρηματικές μονάδες από τους ίδιους.

Τα παραπάνω γεγονότα δεν αναιρούν σε καμία περίπτωση την εγκυρότητα του αποτελέσματος στο οποίο καταλήξαμε στις παραπάνω υποενότητες. Η θεωρητική λύση του παιγνίου είναι αυτή που περιγράφηκε παραπάνω. Όμως, η ανθρώπινη συμπεριφορά είναι πολύ δύσκολο να προβλεφθεί με αντίστοιχη ακρίβεια. Συγκεκριμένα, η δεύτερη παραδοχή («οι παίκτες ενδιαφέρονται αποκλειστικά για τα χρήματα») παύει να ισχύει. Όσο η παραδοχή αυτή ήταν σε ισχύ, μπορούσαμε με ασφάλεια να πούμε πως η συνάρτηση ωφέλειας των ατόμων ταυτιζόταν με τις χρηματικές τους απολαβές. Όταν όμως εμπλέκονται ανθρώπινα συναισθήματα, όπως ζήλια, πληγωμένη υπερηφάνεια, οργή και πείσμα [9], [10], τότε ο καθορισμός της συνάρτησης ωφέλειας του κάθε ατόμου δυσχεραίνει σημαντικά. Όμως, αδιαμφισβήτητα τέτοιοι παράγοντες επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Χαρακτηριστικά παρατηρείται πως κάποιοι παίκτες απορρίπτουν προσφορές που θεωρούν ότι τους προσβάλλουν. Αυτές βέβαια διαφέρουν ανάλογα με τον κάθε παίκτη. Κάποιοι αρνούνται να δεχτούν οποιουδήποτε είδους «άδικη» προσφορά κάτω από 50-50, ενώ κάποιοι άλλοι έχουν το δικό τους ξεχωριστό όριο χαμηλότερης αποδεκτής προσφοράς. Επίσης, οι συμπεριφορές μεταβάλλονται και ανάλογα με το μέγεθος του χρηματικού ποσού που διακυβεύεται, επαληθεύεται δηλαδή το φαινόμενο “The size of the pie matters”. Παρατηρείται δηλαδή πως καθώς το χρηματικό ποσό μεγαλώνει τα άτομα τείνουν να αποδέχονται όλο και πιο άδικες προσφορές. Για παράδειγμα, όταν το χρηματικό ποσό που οι δύο παίκτες καλούνται να μοιραστούν αποτελεί σημαντικό ποσοστό του μηνιαίου εισοδήματός τους, τότε ο παίκτης Α γίνεται πιο επιθετικός (δηλαδή προτείνει πιο άδικες μοιρασιές), ενώ ο παίκτης Β τείνει να αποδέχεται όλο και πιο άδικες προσφορές.

Η θεωρία παιγνίων, αν και δίνει τη λύση στο θεωρητικό πρόβλημα, αδυνατεί να λάβει υπόψη της παράγοντες που δε γνωρίζει, όπως την ανθρώπινη συμπεριφορά. Το πώς πρέπει να συμπεριφερθεί κανείς σε ένα Ultimatum Game στην πραγματική ζωή είναι αντικείμενο ενός άλλου κλάδου, της συμπεριφορικής θεωρίας παιγνίων (Behavioral game theory) και ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

4.2 Παρουσίαση του προβλήματος

Έστω ένας υπό μελέτη φορέας, για το σχεδιασμό του οποίου είναι αναγκαίο να προσδιοριστούν συγκεκριμένες ποσότητες. Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ το διάνυσμα των παραπάνω ποσοτήτων, οι οποίες καλούνται και **μεταβλητές σχεδιασμού** (**design variables**). Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να είναι οποιεσδήποτε ποσότητες που αφορούν το σχεδιασμό του φορέα. Για παράδειγμα, μπορεί $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ να είναι οι συντεταγμένες των κόμβων του φορέα, $(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+I})$ να είναι οι διατομές των μελών του. Ο μηχανικός καλείται να αποφασίσει ποιος είναι ο βέλτιστος δυνατός σχεδιασμός του φορέα, δεδομένων των περιορισμών που του επιβάλλονται από τη φύση, τους κανονισμούς, το χρήστη, κλπ.

Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να ποικίλλουν και ανάλογα με τη φύση τους αλλάζει και το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει ο μηχανικός. Για παράδειγμα, αν οι μεταβλητές σχεδιασμού αφορούν αποκλειστικά τις διατομές των μελών, τότε καλείται να λύσει ένα πρόβλημα διαστασιολόγησης (**size optimization**). Στην περίπτωση που κάποια μέλη και κάποιοι κόμβοι επιτρέπεται να σβηστούν τελείως, τότε καλείται να λύσει ένα πρόβλημα τοπολογίας (**topology optimization**). Αν οι μεταβλητές σχεδιασμού αποτελούν συνδυασμό συντεταγμένων του φορέα και διατομών των μελών, τότε ο μηχανικός καλείται να λύσει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σχήματος και διαστασιολόγησης (**shape and size optimization**). Με την προτεινόμενη μέθοδο είναι δυνατόν με χρήση της θεωρίας παιγνίων να επιλυθούν και αυτά τα προβλήματα αλλά και συνδυασμοί αυτών (δηλαδή ταυτόχρονος προσδιορισμός και συντεταγμένων φορέα αλλά και διαστάσεων διατομής) με τη χρήση συγκεκριμένων παραδοχών.

4.3 Παραδοχές της μεθόδου

- Όλες οι οικογένειες προβλημάτων που καλείται να επιλύσει ο μηχανικός προσεγγίζονται με το ίδιο παίγνιο. Στο παίγνιο αυτό, ο πρώτος παίκτης είναι ο αμυνόμενος, ο οποίος καθορίζει το σχεδιασμό του φορέα, ενώ ο δεύτερος παίκτης είναι ο επιτιθέμενος, ο οποίος καθορίζει τη φόρτιση του φορέα. Στην πράξη, το ρόλο του αμυνόμενου καλείται να παίξει ο μηχανικός, τον οποίο η θεωρία παιγνίων θα συμβουλέψει για να παίξει όσο καλύτερα γίνεται στο παίγνιο. Ο επιτιθέμενος παίκτης φυσικά θα είναι ένας άξιος αντίπαλος, του οποίου οι κινήσεις θα είναι οι καλύτερες δυνατές. Το ρόλο του επιτιθέμενου παίκτη μπορεί να πάρει η Φύση ή οποιοσδήποτε υποθετικός αντίπαλος, καθώς αυτό δεν επηρεάζει την πορεία του παιχνιδιού.

- Θεωρείται πως οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να πάρουν **μόνο διακριτές τιμές**. Η παραδοχή αυτή είναι ρεαλιστική τόσο σε επίπεδο τοπολογίας όσο και σε επίπεδο διαστασιολόγησης. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι διατομές που χρησιμοποιούνται είτε είναι προκατασκευασμένες (για παράδειγμα, οι διατομές HEA, HEB των μεταλλικών κατασκευών), είτε υπόκεινται αναγκαστικά σε στρογγυλοποίηση για κατασκευαστικούς λόγους (π.χ. στις κατασκευές από σκυρόδεμα). Ανάλογη είναι η κατάσταση και στις συντεταγμένες των φορέων.
- Η φόρτιση του φορέα μπορεί να επιλεγεί από ένα πλήθος περιπτώσεων φόρτισης. Αυτή η παραδοχή επίσης είναι ρεαλιστική, καθώς οι κανονισμοί επιβάλλουν ορισμένες περιπτώσεις φόρτισης για τις οποίες η κατασκευή πρέπει να μελετηθεί. Φορτίσεις μικρότερες από τις κανονιστικές δεν πρόκειται να επηρεάσουν το σχεδιασμό της κατασκευής και άρα αγνοούνται, ενώ φορτίσεις μεγαλύτερες από τις κανονιστικές θα οδηγήσουν σε υπερσυντηρητικό σχεδιασμό, κάτι που επίσης πρέπει να αποφύγει ο μηχανικός εκτός αν του ζητηθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως το πλήθος των φορτίσεων είναι πεπερασμένο και γνωστό εκ των προτέρων, με εξαίρεση το ίδιο βάρος του φορέα στην περίπτωση που οι διατομές των μελών δεν είναι ακόμη γνωστές.
- Η βέλτιστη λύση εξαρτάται από το χρήστη, το άτομο που ωφελείται από την κατασκευή (βλ. Ενότητα 2.6, θεωρία αποκαλυπτόμενης προτίμησης). Αυτό ίσως ακούγεται λίγο παράδοξο στην αρχή, όμως είναι σωστό. Κάθε άτομο αντιλαμβάνεται με διαφορετικό τρόπο το ίδιο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, κάποιος πιο ευκατάστατος είναι πιο πιθανό να είναι διατεθειμένος να πληρώσει κάποιο χρηματικό ποσό για να «αγοράσει» επιπλέον ασφάλεια για την κατασκευή του, ενώ κάποιος λιγότερο ευκατάστατος να είναι πιο πιθανό να είναι ικανοποιημένος με μια πιο φθηνή λύση (performance based design). Καθώς κατά κανόνα η βέλτιστη λύση δε θα είναι καλύτερη από τις υπόλοιπες λύσεις σε όλους τους τομείς (δηλαδή είναι απίθανο η πιο ασφαλής λύση να είναι και η πιο φθηνή), εξάγεται το συμπέρασμα πως η βέλτιστη λύση θα προκύψει μέσα από συμβιβασμούς. Οπότε ανάλογα με τη συνάρτηση ωφέλειας του εκάστοτε χρήστη θα προκύψει και διαφορετική βέλτιστη λύση.

4.4 Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας

Σύμφωνα με τη ΜΜΕΩ, το πρόβλημα ανάγεται σε δύο απλά στάδια:

1. Την κατασκευή του μητρώου απολαβών των παικτών.
2. Την ανάλυση του παιγνίου με σκοπό την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής για τον αμυνόμενο (δηλαδή το μηχανικό).

4.4.1 Κατασκευή Μητρώου Απολαβών – Υπολογισμός Ωφέλειας

Στο πρώτο βήμα, προβλέπεται το τι θα συμβεί για κάθε περίπτωση σχεδιασμού και φόρτισης. Δηλαδή, με βάση τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του φορέα και τη φόρτιση που επιλέγεται, εκτελείται μια ανάλυση, η οποία θα δώσει αποτελέσματα μετακινήσεων, τάσεων και εντατικών μεγεθών. Επίσης, καθώς πλέον είναι γνωστά τα χαρακτηριστικά της κατασκευής, μπορεί να υπολογιστεί ο συνολικός όγκος του υλικού και κατά συνέπεια το κόστος της κατασκευής. Χρειάζεται όμως να προσδιοριστεί ένας τρόπος συσχετισμού του κόστους της κατασκευής και των αποτελεσμάτων της φόρτισης (μετακινήσεις, τάσεις). Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται μια προτεινόμενη συνάρτηση χρησιμότητας μετακινήσεων, της οποίας η μαθηματική έκφραση είναι η ακόλουθη:

$$u_{di}(d_i) = \begin{cases} -a_{di1} \cdot |d_i|, & |d_i| \leq d_{i,\lim} \\ -a_{di1} \cdot d_{i,\lim} - P_{di} - a_{di2} \cdot \left| |d_i| - d_{\lim} \right|^k, & |d_i| > d_{i,\lim} \end{cases}$$

Όπου:

$u_{di}(d_i)$: είναι η συνάρτηση ωφέλειας για μία συγκεκριμένη μετακίνηση d_i.

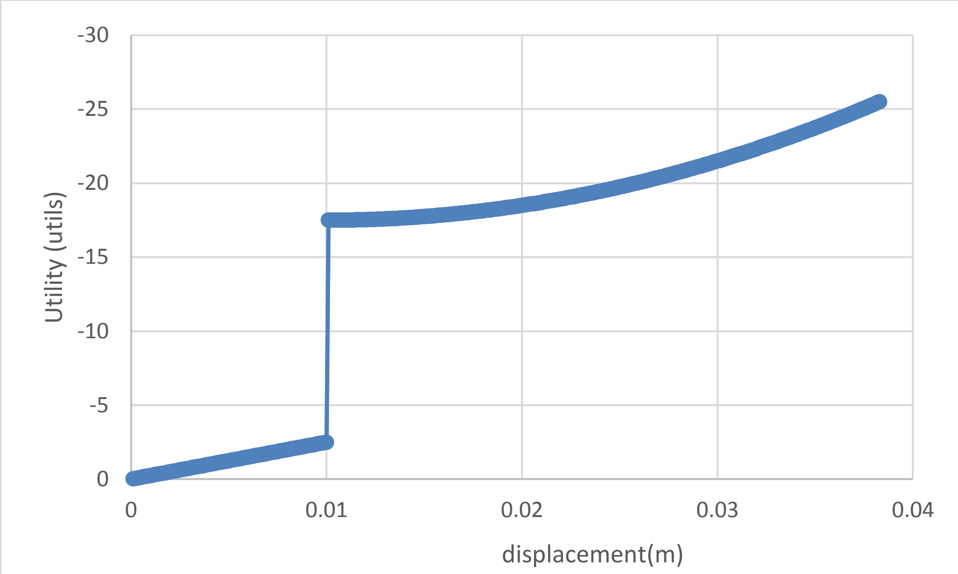
$d_{i,\lim}$: είναι ένα όριο μετακίνησης κάθε βαθμού ελευθερίας το οποίο επιθυμείται να μην ξεπεραστεί.

P_{di}: είναι μια πρόσθετη ποινή που επιβάλλεται ανάλογα με το κατά πόσο είναι ανεκτό να ξεπεραστεί το όριο μετακίνησης για το συγκεκριμένο βαθμό ελευθερίας. Αν είναι απαγορευτικό να ξεπεραστεί, τότε τοποθετείται μια πολύ μεγάλη τιμή, ενώ αν είναι αδιάφορο, τοποθετείται μηδέν ή δίνεται στη μεταβλητή $d_{i,\lim}$ μια πολύ μεγάλη τιμή. Για ενδιάμεσες καταστάσεις δίνεται και ενδιάμεση τιμή στο P_{di}.

a_{di1}: συντελεστής που δείχνει τη γραμμική μεταβολή της ωφέλειας για μικρές τιμές της μετακίνησης d_i. Είναι αυστηρά θετικός και υποδηλώνει πως ο αμυνόμενος προτιμάει μικρότερες μετακινήσεις από μεγαλύτερες.

a_{di2}: συντελεστής που δείχνει τη μη γραμμική μεταβολή της χρησιμότητας για τιμές της μετακίνησης d_i μεγαλύτερες από το αντίστοιχο επιθυμητό όριο. Είναι αυστηρά θετικός και υποδηλώνει πως ο αμυνόμενος προτιμάει μικρότερες μετακινήσεις από μεγαλύτερες. Η τιμή του επηρεάζει το αποτέλεσμα μόνο στην περίπτωση που ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας επιτρέπεται να υπερβεί το όριο που του τέθηκε χωρίς αυτό να συνεπάγεται υπερβολική ποινή (penalty).

k: δείκτης που δείχνει τον τρόπο μη γραμμικής μεταβολής της χρησιμότητας για τιμές της μετακίνησης d_i μεγαλύτερες από το αντίστοιχο επιθυμητό όριο. Η τιμή του επηρεάζει το αποτέλεσμα μόνο στην περίπτωση που ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας επιτρέπεται να υπερβεί το όριο που τέθηκε χωρίς αυτό να συνεπάγεται υπερβολική ποινή (penalty).



Σχήμα 4.3: Συνάρτηση χρησιμότητας μετακινήσεων

Ανάλογη συνάρτηση χρησιμότητας προτείνεται για τις τάσεις:

$$u_{\sigma i}(\sigma_i) = \begin{cases} -a_{\sigma i1} \cdot |\sigma_i|, & |\sigma_i| \leq \sigma_{i,\lim} \\ -a_{\sigma i1} \cdot \sigma_{i,\lim} - P_{\sigma i} - a_{\sigma i2} \cdot \big||\sigma_i| - \sigma_{\lim}\big|^k, & |\sigma_i| > \sigma_{i,\lim} \end{cases}$$

Το σύνολο των αποτελεσμάτων συνοψίζεται με τον εξής τρόπο:

$$u_{\mathrm{res}} = w_d \cdot u_d + w_\sigma \cdot u_\sigma$$

Όπου:

$$u_d = \sum w_{d,i} u_{d,i}$$

$$u_\sigma = \sum w_{\sigma,i} u_{\sigma,i}$$

Οι ποσότητες $w_{d,i}$, $w_{\sigma,i}$ είναι συντελεστές βαρύτητας των μετακινήσεων και τάσεων, αντίστοιχα και εκφράζουν το πόσο σημαντικό ρόλο παίζει η τιμή της κάθε μετακίνησης ή τάσης στην τελική αποτίμηση του αποτελέσματος από πλευράς μετακινήσεων ή τάσεων, αντίστοιχα. Καθώς οι ποσότητες αυτές δεν μπορεί να είναι ίδιες για οποιαδήποτε κατασκευή, δίνονται από το χρήστη και εκφράζουν την ατομική του προτίμηση. Καθώς είναι συντελεστές βαρύτητας, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sum w_{d,i} = 1$$

και

$$\sum w_{\sigma,i} = 1$$

Όμως, στις προτιμήσεις του παίκτη Α πρέπει να συμπεριληφθεί και το γεγονός πως εκτός από μικρότερες μετακινήσεις από μεγαλύτερες, επιδιώκει και κατά το δυνατόν χαμηλότερο κόστος, άρα και ελαφρύτερους φορείς από βαρύτερους. Συνεπώς πρέπει να προσδιοριστεί και η χρησιμότητα που αποκομίζει ο χρήστης εξαιτίας του βάρους της κατασκευής:

$$u_{\text{des}} = \begin{cases} -v \cdot V, & c \cdot V \leq \text{Budget} \\ -v \cdot V - P_{\text{Budget}}, & c \cdot V > \text{Budget} \end{cases}$$

Όπου V είναι ο συνολικός όγκος της κατασκευής, v είναι ένας θετικός συντελεστής που υποδηλώνει την προτίμηση του παίκτη Α σε ελαφρύτερους φορείς από βαρύτερους, P_{Budget} είναι ποινή που επιβάλλεται μόνο στην περίπτωση που ξεπεραστεί ένα επιτρεπόμενο όριο κόστους και c είναι το κόστος ανά μονάδα όγκου της κατασκευής.

Η συνολική χρησιμότητα του παίκτη Α θα είναι αποτέλεσμα της ταυτόχρονης δράσης των χρησιμοτήτων λόγω σχεδιασμού και αποτελεσμάτων. Ο βαθμός με τον οποίο επιδρά το καθένα στο τελικό αποτέλεσμα δεν μπορεί παρά να εξαρτάται από το χρήστη και είναι αυτό που σε μεγάλο βαθμό θα καθορίσει το τελικό αποτέλεσμα του βέλτιστου σχεδιασμού:

$$U_A = w_{\text{res}} \cdot u_{\text{res}} + w_{\text{des}} \cdot u_{\text{des}}$$

Όπου w_{res}, w_{des} είναι οι συντελεστές βαρύτητας που αποδίδει ο χρήστης στα αποτελέσματα της ανάλυσης και το σχεδιασμό, αντίστοιχα. Φυσικά οφείλουν να ικανοποιούν την ιδιότητα

$$w_{\text{res}} + w_{\text{des}} = 1$$

Μέχρι στιγμής έχει γίνει λόγος αποκλειστικά στη συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Α (δηλαδή του μηχανικού ή του χρήστη). Η συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Β, που επιβάλλει τη φόρτιση λαμβάνεται ίση και αντίθετη με τη συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Α ώστε το όφελος του ενός παίκτη να είναι ζημία του αντιπάλου.

$$U_B = -U_A$$

Η παραπάνω σχέση ίσως να δείχνει αντιφατική, καθώς η συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Α εμπεριέχει δείκτες και ποσότητες που είναι προσωπικά χαρακτηριστικά του παίκτη Α, και άρα δεν είναι λογικό να βρίσκονται και στη συνάρτηση χρησιμότητας άλλου παίκτη. Επιπλέον, θα περίμενε κανείς πως ο επιτιθέμενος θα αδιαφορούσε για το βάρος και το κόστος της κατασκευής και θα επικεντρωνόταν αποκλειστικά στο κατά πόσο η φόρτιση επιφέρει σημαντικές ζημιές στην κατασκευή. Παρ’ όλα αυτά οι παραπάνω ισχυρισμοί δεν είναι απόλυτοι.

Κατ' αρχάς, ο επιτιθέμενος δεν αποτελεί πραγματικό πρόσωπο, αλλά βοηθητικό παίκτη (ψεύδο-παίκτης). Καθώς δεν είναι φυσικό πρόσωπο, η μεθοδολογία επιλέγει από μόνη της τη συνάρτηση χρησιμότητάς του με τρόπο που να καθιστά όσο το δυνατό πιο απλή την επίλυση του παιγνίου που προκύπτει, χωρίς φυσικά να υστερεί σε ρεαλισμό.

Επιπλέον, η παραδοχή ότι οι συναρτήσεις χρησιμότητας των παικτών είναι ίσες και αντίθετες κατατάσσει το παίγνιο στην κατηγορία παιγνίων μηδενικού αθροίσματος. Σε αυτή την κατηγορία παιγνίων κάθε αποτέλεσμα είναι εκ διαμέτρου αντίθετο για τους δύο παίκτες, υπό την έννοια πως «ό,τι κερδίζει ο ένας παίκτης, το χάνει ο άλλος». Με αυτό τον τρόπο αποκλείεται οποιαδήποτε δυνατότητα συνεργασίας των δύο παικτών με στόχο την πραγματοποίηση ενός γεγονότος που συμφέρει σχετικά και τους δύο. Αυτός ο συλλογισμός είναι πέρα για πέρα ρεαλιστικός, καθώς σε καμία περίπτωση ο μηχανικός δε θεωρεί πως μπορεί να «συνεργαστεί» με τη φόρτιση του φορέα του για ένα αποτέλεσμα αρεστό σε όλους. Οι απολαβές του παίκτη Α για κάθε σχεδιασμό του φορέα και για κάθε φόρτισή του σχηματίζουν το μητρώο απολαβών του παιγνίου, από την επίλυση του οποίου θα προκύψει η βέλτιστη στρατηγική του Παίκτη Α.

4.4.2 Επίλυση με τη βοήθεια της Θεωρίας Παιγνίων

Στο δεύτερο βήμα, και αφού πλέον έχει κατασκευαστεί πλήρως ο πίνακας απολαβών για κάθε δυνατό συνδυασμό σχεδιασμού – φόρτισης, προσδιορίζεται η στρατηγική την οποία θα πρέπει να ακολουθήσει ο αμυνόμενος, ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση χρησιμότητάς του. Για την επίλυση του παιγνίου πρέπει να ληφθούν υπόψη τα ακόλουθα σημαντικά σημεία:

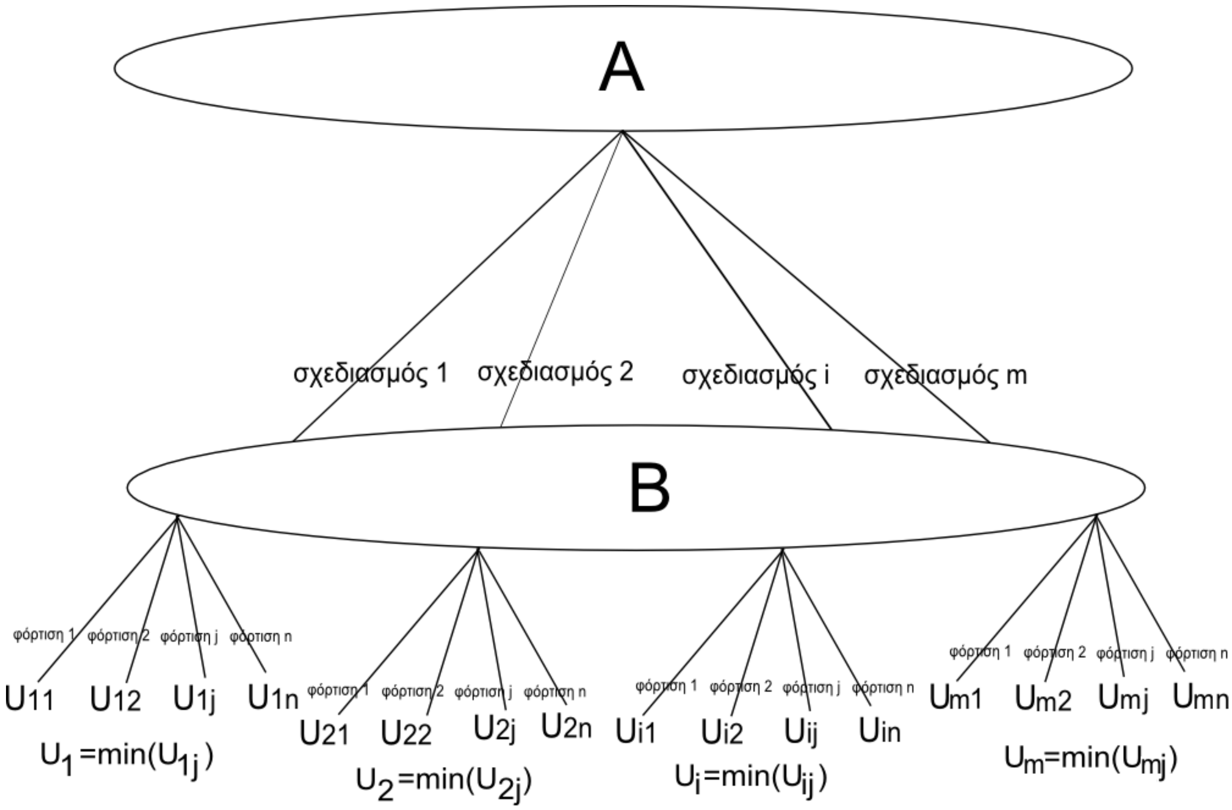
- Ο αμυνόμενος παίζει πρώτος, καθώς πρώτα θα σχεδιαστεί και θα κατασκευαστεί ο φορέας και ύστερα θα επιβληθεί η φόρτιση. Αυτό διαφοροποιεί σημαντικά το παίγνιο από άλλα παρόμοια (π.χ. δίλημμα των φυλακισμένων, matching pennies, και άλλα) στα οποία οι δύο παίκτες κινούνται ταυτόχρονα. Σε αντίθεση όμως με άλλα παιχνίδια (όπως το σκάκι στο οποίο η πρώτη κίνηση συνεπάγεται και πλεονέκτημα), εδώ η πρώτη κίνηση τοποθετεί τον αμυνόμενο σε μειονεκτική θέση. Σίγουρα, αν ο μηχανικός γνώριζε με βεβαιότητα και εκ των προτέρων τη φόρτιση του φορέα, ο σχεδιασμός του θα ήταν και αναλόγως προσανατολισμένος, δίνοντας περισσότερη έμφαση στα μέλη που φορτίζονται περισσότερο και λιγότερη σε άλλα που ενδεχομένως μένουν αφόρτιστα. Καθώς όμως δεν μπορεί εκ των προτέρων να γνωρίζει τη φόρτιση, αναγκαστικά καταφεύγει σε πιο συντηρητικούς σχεδιασμούς.
- Η χρήση μικτών στρατηγικών (mixed strategies) δεν έχει έννοια στο συγκεκριμένο παίγνιο. Υπενθυμίζεται πως με τον όρο μικτή στρατηγική αναφερόμαστε στην περίπτωση που οι αποφάσεις κάποιου παίκτη

λαμβάνονται με τη χρήση κάποιας συσκευής που λειτουργεί με τυχαίο τρόπο (π.χ. στρίψιμο ενός νομίσματος). Ο λόγος για τον οποίο υιοθετείται η χρήση μικτών στρατηγικών είναι η επιθυμία να καταστεί αδύνατο για τον αντίπαλο να προβλέψει την κίνηση του παίκτη που υιοθετεί τη μικτή στρατηγική, με τελικό στόχο ο αντίπαλος να είναι αδιάφορος μεταξύ δύο ή περισσότερων δικών του στρατηγικών. Όμως, στην προκειμένη περίπτωση, το γεγονός ότι ο αμυνόμενος παίζει πρώτος και ο επιτιθέμενος το γνωρίζει, αναγκαστικά κατατάσσει το παίγνιο σε κατηγορία τέλειας πληροφόρησης (perfect information game), στο οποίο οι μικτές στρατηγικές δεν έχουν νόημα.

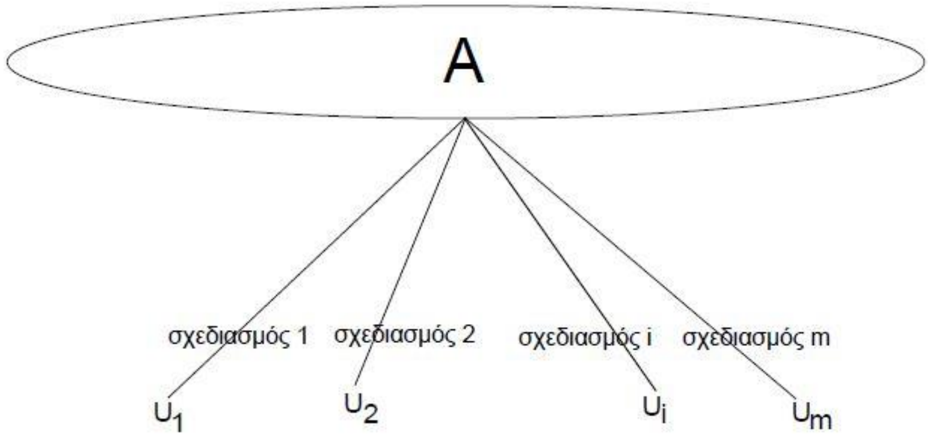
Για την επίλυση του παιγνίου πρώτα θα παρασταθούν οι στρατηγικές και οι αντίστοιχες απολαβές γραφικά με δενδροειδή μορφή και εν συνεχεία θα επιλυθεί με τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής. Στο Σχήμα 4.4 απεικονίζεται το παίγνιο σε δενδροειδή μορφή. Στην κορυφή βρίσκεται ο κόμβος απόφασης του παίκτη Α, και αμέσως μετά ακολουθεί ο κόμβος απόφασης του παίκτη Β. Ακριβώς από κάτω, για κάθε συνδυασμό σχεδιασμού – φόρτισης, αναγράφεται η χρησιμότητα του παίκτη Α (αν δεν επρόκειτο για παίγνιο μηδενικού αθροίσματος θα αναγραφόταν και η χρησιμότητα του παίκτη Β, όμως εδώ είναι γνωστό ότι $U_B = -U_A$).

Σύμφωνα με τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής, και σε αναλογία με την επίλυση του Ultimatum Game που παρουσιάστηκε παραπάνω, η επίλυση του παιγνίου ξεκινάει αντίστροφα από την κανονική ροή του παιγνίου, δηλαδή από κάτω προς τα πάνω. Ο παίκτης Β πρέπει να αποφασίσει την απάντησή του για κάθε πιθανή στρατηγική του παίκτη Α. Αν ο παίκτης Α έχει τη δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα σε m διαφορετικούς σχεδιασμούς και ο παίκτης Β για κάθε σχεδιασμό μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε n φορτίσεις, τότε το πλήθος των καθαρών στρατηγικών (pure strategies) του παίκτη Β είναι m·n, όμως το διάνυσμα των στρατηγικών που τελικά θα επιλέξει θα αποτελείται από m στοιχεία, ένα ως απάντηση σε κάθε σχεδιασμό του παίκτη Α. Είναι προφανές πως σε κάθε σχεδιασμό, ο παίκτης Β θα επιλέξει να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια, δηλαδή να ελαχιστοποιήσει την ωφέλεια του παίκτη Α. Ορίζοντας λοιπόν ως $U_i = \min(U_{ij})$, είναι δυνατόν να αντικατασταθεί ο κόμβος απόφασης του παίκτη Β με την ωφέλεια U_i που θα αποκομίσει ο παίκτης Α, για κάθε σχεδιασμό i, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.5. Πλέον, η επίλυση του παιγνίου είναι πολύ απλή. Ο παίκτης Α προφανώς θα επιλέξει το σχεδιασμό i, του οποίου η αντίστοιχη ωφέλεια U_i είναι η μέγιστη.

Η φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος στο οποίο καταλήξαμε είναι η εξής: Ο σχεδιασμός που επιλέγεται είναι αυτός που έχει το καλύτερο «χειρότερο δυνατό σενάριο» (the best worst case scenario). Αυτό είναι απόλυτα λογικό αν το σκεφτεί κανείς. Για να είναι κανείς υπέρ της ασφαλείας, χρειάζεται να ελέγχει κάθε φορά τι είναι το χειρότερο που μπορεί να συμβεί, κάνοντας πάντα ρεαλιστικές παραδοχές και ακολουθώντας τις κανονιστικές διατάξεις. Όταν κάποιος καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε πολλές δυνατές επιλογές, είναι λογικό επακόλουθο να κοιτάξει ποια είναι η χειρότερη δυνατή περίπτωση για κάθε επιλογή (worst case scenario) και στη συνέχεια να διαλέξει την επιλογή αυτή, της οποίας η χειρότερη δυνατή περίπτωση είναι η καλύτερη από όλες τις υπόλοιπες (best worst case scenario). Όλα αυτά έρχονται ταυτόχρονα σε συμφωνία και με όσα συμβουλεύει η θεωρία παιγνίων, καθώς ο Παίκτης Α επί της ουσίας παίζει τη στρατηγική ασφαλείας του, σύμφωνα με το minimax Theorem. Στην παραπάνω λογική οφείλεται και το όνομα της μεθόδου, καθώς επιδιώκει την επιλογή της λύσης η οποία μεγιστοποιεί την ελάχιστη ωφέλεια που μπορεί να απολαύσει ο αμυνόμενος, δεδομένων των δυνατών κινήσεων του επιτιθέμενου.



Σχήμα 4.4 : Δενδροειδής απεικόνιση παιγνίου



Σχήμα 4.5: Αντικατάσταση του κόμβου απόφασης του παίκτη Β

4.4.3 Επίλυση κλασικών προβλημάτων βελτιστοποίησης με ΜΜΕΩ

Τα όσα παρουσιάστηκαν παραπάνω συνθέτουν μια μέθοδο ικανή να λύσει προβλήματα βελτιστοποίησης, αρκεί να διαθέτει ένα μηχανισμό, ο οποίος να μετατρέπει τις μεταβλητές σχεδιασμού σε αντικειμενική συνάρτηση. Δημιουργείται όμως το ακόλουθο ερώτημα. Πώς θα λυθεί ένα συγκεκριμένο πρόβλημα; Υποθέτοντας πως κάποιος στοχεύει να ελαχιστοποιήσει το βάρος μιας κατασκευής υπό κάποιους περιορισμούς, χωρίς να γνωρίζει πόσο ακριβώς τον ενοχλεί αν κάποια μετακίνηση θα είναι της τάξης του 10^{-10} ή του 10^{-6}, πώς θα χρησιμοποιήσει τη ΜΜΕΩ για να λύσει το πρόβλημά του;

Η απάντηση στο παραπάνω εύλογο ερώτημα είναι η ακόλουθη: Η ίδια η εκφώνηση του προβλήματος δίνει τις απαντήσεις στις ερωτήσεις που θέτει η ΜΜΕΩ. Αν, για παράδειγμα, το ζητούμενο πρόβλημα είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους του φορέα υπό περιορισμούς τάσεων και μετακινήσεων, τότε οι διάφοροι συντελεστές της μεθόδου πρέπει να λάβουν τιμές ως εξής:

Μετακινήσεις: Οι μετακινήσεις είναι αδιάφορες για το συγκεκριμένο πρόβλημα, δηλαδή η επιρροή τους στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ανύπαρκτη έως μηδαμινή. Η μόνη περίπτωση στην οποία κάποια μετακίνηση παίζει καθοριστικό ρόλο, είναι όταν ξεπερνά την οριακή της τιμή. Τότε, η λύση θεωρείται εντελώς απαράδεκτη, καθώς παραβιάζεται ένας εκ των περιορισμών λειτουργικότητας. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, οι τιμές των παραμέτρων που αφορούν τις μετακινήσεις δίνονται ως εξής:

- Η παράμετρος a_{di1} πρέπει να πάρει μια τιμή, η οποία να μην επηρεάζει σημαντικά την αντικειμενική συνάρτηση. Αν αναμένουμε πως οι μετακινήσεις θα είναι σχετικά μικρές και σε κάθε περίπτωση μικρότερες από άνω όριο πχ 1m, τότε μια τιμή της a_{di1} γύρω στα 10^{-5} θα είναι επαρκής. Αποφεύγεται να μηδενιστεί η a_{di1}, γιατί στην περίπτωση που βρεθούν δύο λύσεις με ίδιο όγκο, αν όλα τα άλλα στοιχεία τους είναι ίδια, θα είναι λογικό να προτιμηθεί η λύση με τις μικρότερες μετακινήσεις.

- Η παράμετρος P_{di} είναι αυτή που σε συνδυασμό με την a_{di1} θα καθορίσει την επιρροή της κάθε μετακίνησης στη συνάρτηση ωφέλειας. Για πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους συνίσταται μια πολύ μεγάλη τιμή, της τάξης του 100000. Με αυτό τον τρόπο οποιαδήποτε μετακίνηση που ξεπερνά το αντίστοιχο επιτρεπτό όριο αυτόματα θα θέτει την τρέχουσα λύση εκτός συναγωνισμού, καθώς θα της προσάπτει μια πολύ αρνητική τιμή.
- Οι παράμετροι a_{di2}, k, δεν επηρεάζουν καθόλου τη λύση για το συγκεκριμένο πρόβλημα, καθώς εκφράζουν τη συμπεριφορά της λύσης για την περίπτωση που ξεπερνιέται κάποια οριακή τιμή, πράγμα που από την εκφώνηση κρίνεται απαράδεκτο. Ενδεικτικά προτείνεται $a_{di2} = a_{di1}$, $k = 1$.

Τάσεις: Ακριβώς ό,τι ισχύει για τις μετακινήσεις, ισχύει και για τις τάσεις. Δεν πρέπει να επηρεάζουν καθόλου την αντικειμενική συνάρτηση, εκτός αν παραβιάζεται κάποιος περιορισμός. Συνεπώς, προτείνονται ανάλογες τιμές των παραμέτρων με τις αντίστοιχες που αφορούν τις μετακινήσεις. Η μόνη διαφορά έγκειται στην τάξη μεγέθους. Υποθέτοντας πως οι τάσεις θα είναι της τάξεως των 100MPa, μια εύλογη τιμή για την παράμετρο $a_{\sigma i1}$ θα ήταν $a_{\sigma i1} = 10^{-9}$. Με αυτό τον τρόπο μηδενίζεται η συνεισφορά των τάσεων στη συνάρτηση ωφέλειας (δηλαδή, στην αντικειμενική συνάρτηση). Για τις υπόλοιπες παραμέτρους ισχύουν τα ίδια με παραπάνω. Ενδεικτικά προτείνεται $P_{di} = 100000$, $a_{\sigma i2} = a_{\sigma i1}$, $k = 1$.

Βάρος: Το βάρος του φορέα είναι αυτό που για το συγκεκριμένο πρόβλημα προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Συνεπώς, οφείλει να έχει τον κυρίαρχο ρόλο στην τιμή της συνάρτησης ωφέλειας, και ακόμα και η μικρότερη διαφοροποίηση στην τιμή του πρέπει να τη μεταβάλλει, ούτως ώστε να ξεχωρίζει η ελαφρύτερη λύση από τη βαρύτερη. Για το λόγο αυτό, πρέπει να γίνει μια πρώτη εκτίμηση του όγκου της κατασκευής. Αυτό θα γίνει εξετάζοντας τον όγκο από την ελαφρύτερη δυνατή λύση. Καθώς η επιρροή των μετακινήσεων στη συνάρτηση ωφέλειας είναι της τάξης του 10^{-9} και των τάσεων της τάξης του 10^{-6}, τότε αν ο όγκος της κατασκευής βρίσκεται κοντά στα 0.5-1m^3, τότε μια τιμή $v = 5$ είναι πολύ καλή, καθώς η επιρροή του όγκου της κατασκευής στην αντικειμενική συνάρτηση είναι πολλές τάξεις μεγέθους πάνω από την επιρροή τάσεων και μετακινήσεων, μετατρέποντας τη συνάρτηση ωφέλειας σε μια συνάρτηση η οποία βρίσκεται πολύ κοντά στην αντικειμενική συνάρτηση ενός κλασικού προβλήματος ελαχιστοποίησης βάρους.

Budget: Από τη στιγμή που τα προβλήματα ελαχιστοποίησης δε διαθέτουν οικονομικούς περιορισμούς (κάτι τέτοιο δε θα είχε νόημα, καθώς η ελαφρύτερη λύση στοχεύει ούτως ή άλλως στη μέγιστη οικονομία), τότε οι παράμετροι που αφορούν το budget δε θα πρέπει να επηρεάσουν τη συνάρτηση ωφέλειας. Γι' αυτό το λόγο προτείνεται μια οποιαδήποτε τιμή στο budget, ενώ πρέπει να αγνοηθεί τελείως η ποινή για την περίπτωση που ξεπεραστούν οι διαθέσιμοι πόροι, δηλαδή $P_{\mathrm{Budget}} = 0$.

Συντελεστές Βαρύτητας: Προτείνεται κάθε μετακίνηση να έχει τον ίδιο συντελεστή βαρύτητας με τις υπόλοιπες, εκτός αν το πρόβλημα διατυπώνει σαφώς ότι μας ενδιαφέρουν μόνο συγκεκριμένες μετακινήσεις. Ομοίως με τις τάσεις, στις οποίες το αναμενόμενο είναι να ενδιαφέρουν όλα τα μέλη εξίσου. Αναφορικά με τους συντελεστές w_d και w_σ, προτείνεται ο καθένας να παίρνει την τιμή ½, καθώς δε θέλουμε να μεταβληθούν οι σχετικές επιρροές μετακινήσεων και τάσεων. Εξαίρεση θα αποτελούσε ένα πρόβλημα για το οποίο υπάρχουν μόνο περιορισμοί τάσεων και όχι μετακινήσεων, οπότε οι παραπάνω συντελεστές μπορούν κάλλιστα να πάρουν τιμές 0 και 1, αντίστοιχα. Το ίδιο συμβαίνει και με τους συντελεστές w_{res} και w_{des}, για καθέναν από τους οποίους προτείνεται η τιμή ½. Χρειάζεται προσοχή στον καθορισμό των τιμών των συντελεστών βαρύτητας, ιδιαίτερα αν κάποιος από αυτούς πρόκειται να μηδενιστεί ή να πάρει μια μικρή τιμή, γιατί τότε ενδέχεται η παραβίαση του αντίστοιχου περιορισμού να μην επιφέρει το αναμενόμενο penalty, καθώς η επιρροή του στην τελική συνάρτηση ωφέλειας θα περάσει μέσα από αρκετούς συντελεστές βαρύτητας οι οποίοι θα την ελαχιστοποιήσουν, αν είναι πολύ μικροί.

Επισημαίνεται πως οι προτεινόμενες τιμές σε καμία περίπτωση δεν είναι οι μοναδικές σωστές. Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι σχετικές τιμές μεταξύ των συντελεστών, παρά οι απόλυτες τιμές τους.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό πώς μπορεί να καταστρωθεί η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος βελτιστοποίησης. Ναι μεν απαιτείται λίγη προσοχή στον καθορισμό των τιμών όλων των παραμέτρων, όμως, αν αυτή η διαδικασία γίνει σωστά, τότε η σωστή επίλυση του προβλήματος θεωρείται εγγυημένη.

5 Αλγοριθμικές Τεχνικές

Σε αυτή την ενότητα γίνεται μια αναφορά στις πρακτικές δυσκολίες επίλυσης του προβλήματος, καθώς και στους τρόπους με τους οποίους αυτές οι δυσκολίες ξεπερνώνται. Αναφέρονται συνοπτικά οι ευρετικοί αλγόριθμοι, καθώς και η ανάγκη χρησιμοποίησής τους. Τέλος, παρουσιάζονται αλγόριθμοι που μπορούν να λύσουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης με την παραπάνω μεθοδολογία. Εκτός από τους κλασικούς ευρετικούς αλγορίθμους, παρουσιάζονται και δύο νέοι αλγόριθμοι, οι οποίοι βασίζονται σε στοιχεία της βιβλιογραφίας, χωρίς όμως να προϋπάρχουν στην μορφή που δίνονται στην παρούσα εργασία.

5.1 Ανάγκη για Ευρετικούς Αλγορίθμους

Στις παραπάνω ενότητες αναπτύσσεται μια μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης του σχεδιασμού των κατασκευών. Αυτή συνίσταται στην εύρεση της γραμμής του πίνακα κανονικής μορφής του αντίστοιχου παιγνίου με το μεγαλύτερο ελάχιστο στήλης. Για να καταστεί δυνατό κάτι τέτοιο, πρέπει να κατασκευαστεί ο πίνακας κανονικής μορφής του παιγνίου. Δηλαδή, πρέπει να απαριθμηθούν όλες οι δυνατές επιλογές των σχεδιασμών ανάμεσα στις οποίες μπορεί να διαλέξει ο αμυνόμενος (οι στρατηγικές) και εν συνεχεία για καθεμία εξ αυτών να πραγματοποιηθούν αναλύσεις για κάθε πιθανή περίπτωση φόρτισης, ώστε να κατασκευαστεί ο πίνακας ωφελειών και να έρθει το παίγνιο στην κανονική του μορφή, ώστε μετά να προχωρήσουμε στην επίλυση.

Το μειονέκτημα της παραπάνω διαδικασίας είναι εμφανές. Όταν η κατασκευή έχει m ομάδες μελών, N δυνατές επιλογές για κάθε μέλος και L δυνατές περιπτώσεις φόρτισης, οι πιθανοί σχεδιασμοί είναι N^m και οι στατικές αναλύσεις που πρέπει να εκτελεστούν είναι $N^m \cdot L$. Το μέγεθος αυτό είναι μη αποδεκτά μεγάλο. Για παράδειγμα, αν $m = 8$, $N = 20$, $L = 5$, τότε συνολικά πρέπει να εκτελεστούν $20^8 \cdot 5 = 1.28 \cdot 10^{11}$ στατικές αναλύσεις. Όταν η μία στατική επίλυση χρειάζεται γύρω στα 0.015 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί για ένα μέτριο σε μέγεθος φορέα, τότε ο συνολικός χρόνος ανάλυσης ανέρχεται στα $1.28 \cdot 10^{11} \cdot 0.015 = 1.92 \cdot 10^9$ δευτερόλεπτα, δηλαδή περίπου 61 χρόνια! Το εγγενές πρόβλημα αυτής της μεθόδου είναι πως όσο και αν μειωθεί ο χρόνος της ανάλυσης, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου παραμένει τεράστια. Το πλήθος των ομάδων μελών είναι το πιο σημαντικό από όλα, καθώς αυξάνει εκθετικά το μέγεθος του προβλήματος. Για παράδειγμα, αν στο πρόβλημα που παρουσιάσαμε παραπάνω οι ομάδες μελών γίνουν 9 αντί για 8, τότε ο εκτιμώμενος χρόνος επίλυσης θα ξεπεράσει τα 1200 χρόνια! Επιπλέον, εκτός από το χρονικό πρόβλημα, ένας μέτριος υπολογιστής αντιμετωπίζει και προβλήματα μνήμης, όταν καλείται να αποθηκεύσει μητρώα με πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων (π.χ. στο διαθέσιμο υπολογιστή το Matlab είχε περιορισμό $7 \cdot 10^9$ στοιχείων ενός πίνακα), με αποτέλεσμα η επίλυση του προβλήματος να καθίσταται αδύνατη.

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι πρέπει να ληφθούν κατάλληλα μέτρα, ώστε τα προβλήματα να επιλύονται σε πραγματικό χρόνο. Τα μέτρα αυτά πρέπει να έχουν στόχο όχι να επιταχύνουν κάποια συγκεκριμένη διαδικασία αυτή καθαυτή (π.χ. τη στατική επίλυση), γιατί για πολύ μεγάλα προβλήματα ο χρόνος επίλυσης πάλι θα είναι μη αποδεκτός, αλλά να αλλάξει η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος χωρίς να μεταβληθεί ο τρόπος προσέγγισής του.

Ένα πρώτο βήμα αποτελεί η επίλυση δεδομένου φορέα με πολλές περιπτώσεις φόρτισης. Για καθεμία εκ των δυνατών επιλογών του μηχανικού και για κάθε περίπτωση φόρτισης, ο φορέας που προκύπτει επιλύεται με τη μέθοδο της άμεσης δυσκαμψίας. Όμως, ο φορέας είναι ο ίδιος σε κάθε περίπτωση φόρτισης, δηλαδή το τελικό μητρώο δυσκαμψίας του δεν αλλάζει επειδή εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρία και τα μέλη του φορέα, αλλά όχι από τη φόρτιση. Γι' αυτό το λόγο, είναι σκόπιμο όλες οι αναλύσεις που αφορούν τον ίδιο φορέα να εκτελεστούν ταυτόχρονα, αποφεύγοντας έτσι μεγάλο πλήθος επαναλαμβανόμενων πράξεων. Με αυτό τον τρόπο, το μητρώο δυσκαμψίας αντιστρέφεται μόλις μία φορά για κάθε σχεδιασμό, οπότε επί της ουσίας το πλήθος των αναλύσεων σχεδόν ανεξαρτητοποιείται του πλήθους των περιπτώσεων φόρτισης και περιορίζεται στο πλήθος των σχεδιασμών.

Το παραπάνω βήμα συντομεύει το χρόνο επίλυσης του προβλήματος, όμως αυτό δεν είναι αρκετό. Και πάλι, αν εκτελέσει κανείς τους υπολογισμούς αγνοώντας το πλήθος των περιπτώσεων φόρτισης, προκύπτουν μη αποδεκτοί χρόνοι επίλυσης. Η ανάγκη για ταχύτερη επίλυση παραμένει και γι' αυτό το λόγο καταφεύγουμε στους ευρετικούς αλγορίθμους.

5.2 Ευρετικοί Αλγόριθμοι

Οι *ευρετικοί* αλγόριθμοι (heuristic algorithms) [11], ανήκουν στην κατηγορία των προσεγγιστικών αλγορίθμων, οι οποίοι βρίσκουν το παγκόσμιο βέλτιστο ή μια πολύ καλή προσέγγιση αυτού, με ταυτόχρονη μείωση των απαιτήσεων σε υπολογιστικό χρόνο και μνήμη. Έρχονται σε αντίθεση με την άλλη κατηγορία αλγορίθμων, τους *ακριβείς* (exact algorithms), οι οποίοι εξετάζουν ολόκληρο το χώρο των λύσεων με σκοπό να καταλήξουν στο παγκόσμιο άριστο με ντετερμινιστικό τρόπο και παρουσιάζουν τις δυσκολίες που αναλύθηκαν παραπάνω.

Οι ευρετικοί αλγόριθμοι αποτελούν στρατηγικές περιήγησης στο χώρο των λύσεων χωρίς να εξετάζεται το σύνολό τους. Καθοριστικό ρόλο για τον τρόπο περιήγησης παίζει η εμπειρία και οι γνώσεις που διαθέτουμε για το πρόβλημα που στοχεύουμε να επιλύσουμε, ανάλογα φυσικά με το εκάστοτε πρόβλημα. Φυσικά και έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι που στοχεύουν στην επίλυση κάθε προβλήματος (π.χ. γενετικοί αλγόριθμοι, προσομοιωμένη ανόπτηση), όμως είναι δυνατό να αναπτυχθούν ειδικευμένοι ευρετικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι να είναι στοχευμένοι στην επίλυση αποκλειστικά ενός προβλήματος, εκμεταλλευόμενοι τις ιδιαιτερότητες που μόνο το συγκεκριμένο πρόβλημα παρουσιάζει. Εδώ φαίνεται και πόσο σημαντική είναι η εμπειρία που διαθέτουμε για το συγκεκριμένο πρόβλημα, καθώς και κατά πόσο μπορεί αυτή να εκφραστεί σε κάποια αλγοριθμική τεχνική.

Βασικό μειονέκτημα των ευρετικών αλγορίθμων αποτελεί το γεγονός πως καταλήγουν στην καλύτερη λύση από αυτές που εξετάζονται, δηλαδή σε ένα τοπικό βέλτιστο, το οποίο βεβαίως είναι πιθανό να είναι και παγκόσμιο βέλτιστο, αν και αυτό δεν είναι δυνατό να αποδειχτεί. Το σύνολο των λύσεων που δεν εξετάζονται είναι πολύ πιθανό να περιέχει το παγκόσμιο βέλτιστο, με συνέπεια τελικά αυτό να μην επιλέγεται [11]. Όμως, αυτό το μειονέκτημα αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι σε αποδεκτό χρονικό διάστημα προσφέρουν μια τιμή που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του παγκόσμιου βέλτιστου, ενώ υπάρχει μεγάλη πιθανότητα η τιμή αυτή να είναι όντως το παγκόσμιο βέλτιστο.

Στις επόμενες υποενότητες θα αναπτυχθούν οι τρεις αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των αριθμητικών εφαρμογών, καθώς μια ακριβής επίλυση θα ήταν ασύμφορη από χρονικής άποψης. Οι πρώτοι δύο αλγόριθμοι αναπτύχθηκαν από το γράφοντα και αφορούν την επίλυση του προβλήματος ελάχιστου βάρους και των ομοειδών με αυτό, ενώ ο τρίτος αλγόριθμος είναι αυτός της προσομοιωμένης ανόπτησης, γνωστός από τη βιβλιογραφία [11], και με ευρύτατη χρήση σε μεγάλο πλήθος προβλημάτων. Πριν όμως από αυτό, καλό είναι να μελετηθεί ο χώρος των λύσεων, ούτως ώστε να γίνει δυνατή η διαχείρισή του.

5.2.1.1 Ο Χώρος των Λύσεων

Όπως έχει εξηγηθεί αναλυτικά παραπάνω, οι μεταβλητές σχεδιασμού εν γένει είναι οι διατομές των μελών κάποιου φορέα. Σε συγκεκριμένα προβλήματα, μεταβλητές σχεδιασμού ενδέχεται να είναι και οι συντεταγμένες των κόμβων του φορέα, όπως για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σχήματος. Όμως, όπως θα γίνει φανερό και στις αριθμητικές εφαρμογές, ακόμα και αυτό είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε πολλά προβλήματα ελαχίστου βάρους, στα οποία αποκλειστικά ως μεταβλητές σχεδιασμού έχουμε τις διατομές των μελών.

Στα πλαίσια των προβλημάτων που επιλύονται στην παρούσα εργασία, κάθε ομάδα μελών μπορεί να πάρει τη διατομή της από μια λίστα διατομών (π.χ. πίνακες HEA, HEB, κλπ). Φυσικά, είναι δυνατόν διαφορετικά μέλη να παίρνουν διατομές από διαφορετικές λίστες, όμως αυτό δυσχεραίνει τη διατύπωση του χώρου των λύσεων, κατά συνέπεια και την επίλυση του προβλήματος. Γι’ αυτό το λόγο, επιλέγεται να συγχωνευτούν όλες οι λίστες, σε μία Μεγάλη Λίστα, ή αλλιώς Master List. Η λίστα αυτή δημιουργείται ως εξής. Πρώτα τοποθετούνται τα στοιχεία της λίστας από την οποία παίρνει τις διατομές της η πρώτη ομάδα μελών, εν συνεχεία τοποθετούνται τα στοιχεία της λίστας από τα οποία παίρνει τις διατομές της η δεύτερη ομάδα μελών, και συνεχίζουμε έτσι για κάθε ομάδα μελών. Αν κάποιες ομάδες μελών παίρνουν τιμές από την ίδια λίστα, κάτι που φυσικά είναι πολύ συνηθισμένο, τότε αυτή η λίστα δεν τοποθετείται πολλές φορές στη Master List, αλλά μόνο μία.

Τέλος, επισημαίνεται πως τα στοιχεία της κάθε λίστας, οφείλουν να τοποθετηθούν διατεταγμένα ανά λίστα στη Master List. Σε διαφορετική περίπτωση, κάποιοι από τους αλγόριθμους που παρουσιάζονται παρακάτω, ενδέχεται να μη λειτουργήσουν σωστά. Επίσης, για τη σωστή εποπτεία του προβλήματος, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε σε ποια σημεία της Master List γίνεται η μετάβαση από μία λίστα διατομών σε μία άλλη.

Παράδειγμα Κατασκευής Master List: Έστω ένας φορέας, που αποτελείται από 3 ομάδες μελών. Η πρώτη και η τρίτη ομάδα μελών ανήκουν στις 3 πρώτες διατομές HEB, ενώ η δεύτερη ομάδα μελών παίρνει διατομές από τη λίστα με τις 2 τελευταίες διατομές HEA. Τότε θα ισχύουν τα εξής:

$L_1 = L_3$ = [HEB100, HEB120, HEB140], L_2 = [HEA900, HEA1000]

H Master List θα πρέπει να προκύψει ως εξής:

ML = [HEB100, HEB120, HEB140, HEA900, HEA1000]

Εναλλακτικά, για ευκολότερη διαχείριση, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό σε κάθε διατομή:

HEB100 → 1

HEB120 → 2

HEB140 → 3

HEA900 → 4

HEA1000 → 5

Οπότε ML = [1, 2, 3, 4, 5]

Κάθε σχεδιασμός θα έχει τη μορφή ενός διανύσματος, του οποίου το στοιχείο i θα υποδηλώνει τη διατομή της Master List που αντιστοιχεί στην ομάδα μελών i. Για παράδειγμα, το διάνυσμα [3, 4, 1] αντιστοιχεί σε ένα σχεδιασμό, στον οποίο η πρώτη ομάδα μελών παίρνει τη διατομή HEB140 (θέση 3 στη Master List), η δεύτερη ομάδα μελών παίρνει τη διατομή HEA900, ενώ η τρίτη ομάδα μελών παίρνει τη διατομή HEB100. Το σύνολο των δυνατών λύσεων αποτελεί το χώρο των λύσεων, των οποίων θα έπρεπε να εξερευνήσει εξ ολοκλήρου ένας ακριβής αλγόριθμος. Ο Πίνακας 5.1 δείχνει το χώρο των λύσεων για το παραπάνω πρόβλημα, ο οποίος έχει διαστάσεις 18x3. Φυσικά, ο χώρος λύσεων γιγαντώνεται, καθώς αυξάνονται οι ομάδες μελών και οι δυνατές επιλογές για καθεμία.

α/α	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1	1	4	1
2	1	4	2
3	1	4	3
4	1	5	1
5	1	5	2
6	1	5	3
7	2	4	1
8	2	4	2
9	2	4	3
10	2	5	1
11	2	5	2
12	2	5	3
13	3	4	1
14	3	4	2
15	3	4	3
16	3	5	1
17	3	5	2
18	3	5	3

Πίνακας 5.1: Παράδειγμα Χώρου Λύσεων

Παρατηρούμε ότι ο χώρος λύσεων, όσο μεγάλος και αν είναι, μπορεί να περιγραφεί πλήρως από δύο μόνο διανύσματα, το πρώτο και το τελευταίο του. Ορίζοντας λοιπόν τα διανύσματα $d_{\min} = [1, 4, 1]$ και $d_{\max} = [3, 5, 3]$, περιγράφεται εξ ολοκλήρου ο χώρος λύσεων, καθώς κάθε άλλο στοιχείο που ανήκει σε αυτόν, βρίσκεται ανάμεσα στα $d_{\min}$ και $d_{\max}$. Επίσης παρατηρούμε ότι ο χώρος των λύσεων είναι μονοσήμαντα ορισμένος, δηλαδή η θέση (ο αύξων αριθμός) της κάθε λύσης ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί η λύση δύο προβλημάτων που αφορούν στη διαχείριση του χώρου των λύσεων και παίζουν σημαντικό ρόλο στη σωστή λειτουργία των αλγορίθμων που παρουσιάζονται, αλλά και στην οικονομία μνήμης του υπολογιστή ανεξαρτήτως αλγορίθμου επίλυσης.

Το πρώτο πρόβλημα είναι η εύρεση του αύξοντα αριθμού μιας λύσης, δεδομένου του χώρου λύσεων ($d_{\min}$, $d_{\max}$)και του διανύσματος της συγκεκριμένης λύσης d_0. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, όταν θέλουμε να δώσουμε ταυτότητα σε μια συγκεκριμένη λύση. Παρακάτω παρουσιάζονται τα βήματα του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος.

Το δεύτερο πρόβλημα είναι το αντίθετο του πρώτου. Δεδομένου δηλαδή του αύξοντα αριθμού μιας λύσης, να προσδιοριστούν επακριβώς τα στοιχεία του διανύσματός της. Το πρόβλημα αυτό είναι εξίσου σημαντικό με το πρώτο. Η μετατροπή του διανύσματος της λύσης σε αριθμό και το αντίστροφο χρησιμεύουν ιδιαίτερα στο δεύτερο αλγόριθμο, όπου χρειάζεται να δημιουργηθεί μια γειτονιά της λύσης d_0.

Ο τρόπος επίλυσης των δύο αυτών προβλημάτων γίνεται πιο εύκολα κατανοητός, εάν αντιληφθεί κανείς το χώρο των λύσεων ως ένα σύστημα αρίθμησης, όμως με δύο σημαντικές διαφορές από τα καθιερωμένα συστήματα αρίθμησης.

Πρώτον, η βάση του συστήματος δεν είναι σταθερός αριθμός, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση των ψηφίων. Δηλαδή, ενώ σε ένα κλασικό σύστημα αρίθμησης με βάση β, το στοιχείο m στη θέση i από δεξιά αντιστοιχεί στον αριθμό $m \cdot \beta^{i-1}$ του δεκαδικού συστήματος, στην περίπτωση του χώρου των λύσεων, το ίδιο στοιχείο αντιστοιχεί σε κάτι διαφοροποιημένο, καθώς δεν μπορεί να οριστεί ένας αριθμός β που να λειτουργεί ως βάση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι επιλογές κάθε ομάδας μελών εν γένει γίνονται από διαφορετική λίστα, με διαφορετικό πλήθος επιλογών.

Η δεύτερη σημαντική διαφοροποίηση αφορά στο γεγονός ότι κάθε σύστημα αρίθμησης αντιστοιχεί στον αριθμό 1 του δεκαδικού συστήματος επίσης τον αριθμό 000…0001, ανεξαρτήτως της βάσης β. Στο πρόβλημα που παρουσιάζεται όμως εδώ, αυτό δεν μπορεί να συμβεί, για δύο λόγους. Κάθε στοιχείο του διανύσματος της λύσης αντιστοιχεί σε μία θέση διατομής στη Master List. Επειδή στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, στην οποία και εκτελούνται όλα τα προγράμματα της παρούσης εργασίας, η αρίθμηση των θέσεων των διανυσμάτων και πινάκων ξεκινά από το 1 και όχι από το 0, μηδενικό στοιχείο διανύσματος θα κατέληγε σε σφάλμα ή θα ήθελε περαιτέρω επεξεργασία για να αντιστοιχηθεί στη σωστή θέση. Επιπλέον, αφού κάθε ομάδα μελών παίρνει διατομές από «τυχαίες» θέσεις της Master List, δεν υπάρχει κανένας λόγος εν γένει ο ελαφρύτερος σχεδιασμός (δηλαδή η λύση με αύξοντα αριθμό 1) να είναι η [0, 0, …, 1]. Αυτό επαληθεύεται και από το παράδειγμα που δόθηκε παραπάνω, για το οποίο η ελαφρύτερη λύση ήταν η [1,4,1].

Αν όλες οι λίστες είχαν ακριβώς το ίδιο πλήθος επιλογών β, και αν γινόντουσαν οι κατάλληλες τροποποιήσεις ώστε η λύση με αύξοντα αριθμό 1 να αντιστοιχούσε όντως σε κάποιο διάνυσμα [0, 0, …, 1], τότε τα δύο παραπάνω προβλήματα θα «εκφυλίζονταν» στην μετατροπή δεκαδικού συστήματος σε σύστημα με βάση β, και το αντίστροφο. Η επίλυση δηλαδή των προβλημάτων 1 και 2 αποτελεί μια γενίκευση μετατροπής από δεκαδικό σε άλλο, εντελώς τυχαίο σύστημα αρίθμησης, με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν παραπάνω και το αντίστροφο.

Η επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Στο πρόβλημα 1, αρχικά ο δεδομένος σχεδιασμός μετασχηματίζεται, ούτως ώστε να βρεθεί ποια θα ήταν τα ψηφία του, στην περίπτωση που ο χώρος λύσεων αντιστοιχούσε τη λύση στον αύξοντα αριθμό 1 τη λύση [0, 0, …, 1]. Εν συνεχεία, πραγματοποιείται η μετατροπή από το μεταβλητό σύστημα αρίθμησης στο δεκαδικό, ώστε να προσδιοριστεί ο αύξων αριθμός του δεδομένου σχεδιασμού. Ακριβώς η αντίστροφη διαδικασία πραγματοποιείται στο πρόβλημα 2.

Παρακάτω παρατίθενται οι λύσεις των προβλημάτων 1 και 2, τόσο υπό μορφή βημάτων αλγορίθμου, ώστε να είναι δυνατός ο προγραμματισμός τους σε οποιαδήποτε γλώσσα, όσο και σε μορφή κώδικα στη γλώσσα Matlab, στην οποία έχουν δημιουργηθεί οι αντίστοιχες συναρτήσεις.

Σημείωση: Επειδή στη γλώσσα Matlab η ακρίβεια των αριθμών είναι της τάξης του 10^{-13}, κάτι που ενδέχεται να ξεπεραστεί σε περίπτωση πολύπλοκων προβλημάτων, στα οποία το μέγεθος του πίνακα αναμένεται να ξεπεράσει το 10^{13}, χρησιμοποιείται η εντολή uint64, η οποία χρησιμοποιεί μη αρνητικό ακέραιο αριθμό (unsigned integer 64 bit). Με αυτό τον τρόπο γίνεται δυνατή η επακριβής αποθήκευση αριθμού της τάξης του 10^{19}.

Πρόβλημα 1

Δεδομένα: $\boldsymbol{d}_{\min}, \boldsymbol{d}_{\max}, \boldsymbol{d}_0$

Ζητούμενα: $designNumber$

Αλγόριθμος Επίλυσης:

1. Θέσε $groupCount =$ (το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος $\boldsymbol{d}_{\min}$).
2. Θέσε $\boldsymbol{power} = \boldsymbol{d}_{\max} - \boldsymbol{d}_{\min} + \mathbf{1}$
3. Θέσε $\boldsymbol{designDigits} = \boldsymbol{d}_0 - \boldsymbol{d}_{\min} + [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$
4. $designNumber = \sum_{j=1}^{groupCount-1} \left\{ \boldsymbol{designDigits}(j) \cdot \prod_{i=j+1}^{groupCount} \boldsymbol{power}(j) \right\}$

Επίλυση με Matlab:

```
function designNumber = solveProblem1(d0, dMax, dMin)

groupCount = length(dMin);
columnPower = dMax - dMin + 1;
designDigits(1:groupCount) = d0 - dMin(1:groupCount);
designDigits(groupCount) = designDigits(groupCount) + 1;
designNumber = designDigits(groupCount);
for j = 1 : groupCount-1
    designNumber = designNumber + ...
    uint64(prod(columnPower(j+1:groupCount))) * designDigits(j);
end
```

Πρόβλημα 2

Δεδομένα: $\boldsymbol{d}_{\min}$, $\boldsymbol{d}_{\max}$, $designNumber$

Ζητούμενα: $\boldsymbol{d}_0$

Αλγόριθμος Επίλυσης:

1. Θέσε $groupCount =$ (το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος $\boldsymbol{d}_{\min}$).
2. Θέσε $\boldsymbol{power} = \boldsymbol{d}_{\max} - \boldsymbol{d}_{\min} + \mathbf{1}$
3. Για j από 1 μέχρι $groupCount$, θέσε:

$$\boldsymbol{temp}(j) = \left(\left\lceil \frac{designNumber}{\prod_{i=j+1}^{groupCount} \boldsymbol{power}(j)} \right\rceil + 1 \right) \bmod \boldsymbol{power}(j)$$

4. Αν $\boldsymbol{temp}(j) = 0$, τότε θέσε $\boldsymbol{temp}(j) = \boldsymbol{power}(j)$
5. Θέσε $\boldsymbol{designDigits} = \boldsymbol{temp} - \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$
6. Θέσε $\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{designDigits} + \boldsymbol{d}_{\min} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Επίλυση με Matlab:

```
function d0 = solveProblem2(designNumber, dMax, dMin)

groupCount = length(dMax);
columnPower = dMax - dMin + 1;
temp = zeros(1,groupCount);
for j = 1:groupCount
      S = 0;
      M = uint64(prod(columnPower(j+1:groupCount)));
      m = mod(designNumber,M);
      if m > 0
          S = 1;
      end
      divisionResult = (designNumber - m) / M + S;
      temp(j) = mod(divisionResult,columnPower(j));
      if temp(j) == 0
        temp(j) = columnPower(j);
      end
end
designDigits = temp - 1;
designDigits(groupCount) = designDigits(groupCount) + 1;
d0 = temp + dMin - 1; ...
```

Με τις λύσεις των παραπάνω προβλημάτων ολοκληρώνονται οι απαιτούμενες προκαταρκτικές γνώσεις που χρειάζονται για την υλοποίηση των ευρετικών αλγορίθμων, οι οποίοι θα παρουσιαστούν στις αμέσως επόμενες υποενότητες.

5.2.1.2 Αλγόριθμος Κυριαρχίας

Η ιδέα για αυτό τον αλγόριθμο γεννήθηκε παρατηρώντας πως κάποιες από τις δυνατές λύσεις έχουν δυσανάλογα μεγάλο βάρος, ή είναι προφανές πως θα καταλήξουν σε παραβίαση κάποιου περιορισμού. Γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι κάποιες λύσεις είναι πολύ κακές, γεννάται η επιθυμία να αποφευχθεί η εξέτασή τους, καθώς αυτή αποβαίνει εξαιρετικά χρονοβόρα για μεγάλο πλήθος κακών λύσεων. Ο Αλγόριθμος Κυριαρχίας (Domination Algorithm) έχει ως στόχο να χρησιμοποιήσει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εξέταση μιας λύσης για να καταλήξει σε συμπεράσματα αναφορικά με το αν χρειάζεται ή όχι να εξεταστούν οι υπόλοιπες λύσεις, στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους.

Παρατηρούμε ότι κάθε δυνατή λύση i χωρίζει το χώρο των λύσεων σε τρεις περιοχές:

1. Λύσεις αυστηρά βαρύτερες από την i, για τις οποίες κάθε στοιχείο του διανύσματος των λύσεων αυτών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του αντίστοιχου στοιχείου της λύσης i.
2. Λύσεις αυστηρά ελαφρύτερες από την i, για τις οποίες κάθε στοιχείο του διανύσματος των λύσεων αυτών είναι μικρότερο ή ίσο του αντίστοιχου στοιχείου της λύσης i.
3. Λύσεις μη άμεσα συγκρίσιμες με την i, καθώς δεν ανήκουν σε καμία από τις παραπάνω κατηγορίες.

Ο αλγόριθμος κυριαρχίας χρησιμοποιεί μια νέα παράμετρο, ένα κατώφλι ωφέλειας, το οποίο χωρίζει τις λύσεις που έχουν υπερβεί κάποιο περιορισμό, από τις λύσεις που δεν παραβιάζουν κάποια συνθήκη. Αυτή η μεταβλητή είναι εύκολο να εισαχθεί, με βάση τα penalties που έχουν οριστεί για τις υπερβάσεις μετακινήσεων και παραμορφώσεων. Έτσι, όταν εξετάζεται η λύση i και προσδιορίζεται η φόρτιση για την οποία η προκύπτουσα ωφέλεια είναι η μικρότερη, συγκρίνοντας την προκύπτουσα ωφέλεια με το κατώφλι ωφέλειας, μπορούμε να συμπεράνουμε αν έχουν τηρηθεί όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος. Ο αλγόριθμος κυριαρχίας στηρίζεται σε δύο ιδέες, οι οποίες βοηθούν στην επιτάχυνση της διαδικασίας εξερεύνησης του χώρου των λύσεων. Έστω i η λύση που μόλις εξετάστηκε, και έστω u_i η προκύπτουσα ωφέλεια από την κρίσιμη περίπτωση φόρτισης για τη λύση i. Αν συμβολίσουμε με K το κατώφλι ωφέλειας, οι βασικές ιδέες του αλγορίθμου κυριαρχίας είναι οι εξής:

1. Αν $u_i > K$, τότε η συγκεκριμένη λύση είναι αποδεκτή. Η εξέταση των λύσεων που ανήκουν στην κατηγορία 1, δηλαδή είναι αυστηρά βαρύτερες από την i, κρίνεται περιττή και συνεπώς οι λύσεις αυτές αποκλείονται. Δηλαδή, η λύση i κυριαρχεί πάνω σε όλες τις αυστηρά βαρύτερές της.
2. Αν $u_i < K$, τότε η συγκεκριμένη λύση είναι μη αποδεκτή, καθώς παραβιάζεται κάποιος περιορισμός. Η εξέταση των λύσεων που ανήκουν στην κατηγορία 2, δηλαδή είναι αυστηρά ελαφρύτερες από την i, κρίνεται περιττή και συνεπώς

οι λύσεις αυτές αποκλείονται. Δηλαδή, η λύση i κυριαρχεί πάνω σε όλες τις αυστηρά ελαφρύτερες της.

Παρατηρήσεις:

- Η περίπτωση $u_i = K$ φυσικά δεν έχει κανένα νόημα. Οι περιορισμοί είτε ικανοποιούνται, έστω και οριακά, είτε δεν ικανοποιούνται, και το κατώφλι δημιουργείται για να δώσει απάντηση σε ακριβώς αυτή την ερώτηση. Αν λοιπόν προκύψει $u_i = K$, τότε το συμπέρασμα είναι πως έχει δοθεί λάθος τιμή στη μεταβλητή K, η οποία θα πρέπει να έχει οριστεί ώστε να ισχύει $u_i \ll K$, ακόμα και αν οι περιορισμοί ικανοποιούνται οριακά.
- Για τις λύσεις που ανήκουν στην κατηγορία 3, δεν μπορεί να προκύψει κανένα απολύτως συμπέρασμα κυριαρχίας ή μη, οπότε δεν πρέπει να αποκλειστούν. Η εξέτασή τους θα γίνει στη συνέχεια, εκτός εάν αποκλειστούν ως συνέπεια κυριαρχίας τους από κάποια άλλη λύση, i'. Φυσικά, οι περιοχές 1, 2 και 3 του χώρου λύσεων εξαρτώνται από την εκάστοτε λύση i, στην οποία αναφερόμαστε.
- Η ιδέα «2» εν γένει δεν είναι σωστή. Δηλαδή είναι δυνατό ελαφρύνοντας κάποιο μέλος, η ανακατανομή δυνάμεων που θα γίνει να μειώσει κάποιες τάσεις, οι οποίες πριν ενδεχομένως να υπερέβαιναν το επιτρεπτό όριο. Το ίδιο, αν και ακόμα πιο σπάνια, συμβαίνει και με τις μετακινήσεις. Παρ' όλα αυτά, ο αλγόριθμος εξακολουθεί να έχει μεγάλη αξία. Οι στρατηγικές στις οποίες βασίζονται οι ευρετικοί αλγόριθμοι δεν είναι υποχρεωτικά σωστές, γι' αυτό και καταλήγουν πολλές φορές σε προσεγγιστικές λύσεις. Αν η ιδέα «2» δεν εφαρμοζόταν και εφαρμοζόταν μόνο η «1», τότε ο αλγόριθμος από προσεγγιστικός θα μετατρεπόταν σε ακριβής, και το αποτέλεσμα που θα έδινε θα ήταν ντετερμινιστικά το παγκόσμιο βέλτιστο. Όμως, η ιδέα «2» είναι αυτή που πραγματικά επιταχύνει τον αλγόριθμο. Από το πλήθος των λύσεων που τελικά αποκλείονται, εκτιμάται ότι μόλις ένα 5% οφείλεται στην ιδέα «1», ενώ το υπόλοιπο 95% αποκλείεται λόγω της ιδέας «2». Βέβαια τα παραπάνω νούμερα είναι απλώς ενδεικτικά, και ενδέχεται να διαφοροποιούνται, ανάλογα με το κάθε πρόβλημα. Επίσης, το γεγονός ότι οι περιπτώσεις στις οποίες η ιδέα «2» αποδεικνύεται εσφαλμένη είναι κατά πολύ λιγότερες σε σχέση με τις περιπτώσεις στις οποίες η ιδέα «2» είναι σωστή, δικαιολογεί την επιλογή αυτής της ιδέας, στα πλαίσια ενός ευρετικού αλγορίθμου.
- Παρατηρείται ότι η σειρά με την οποία εξετάζονται οι λύσεις επηρεάζει το συνολικό χρόνο επίλυσης. Η αρχική κατάταξη των λύσεων είναι εντελώς ακατάλληλη ως σειρά εξέτασης λύσεων για τον αλγόριθμο κυριαρχίας. Αυτό συμβαίνει γιατί στην αρχική τους τοποθέτηση οι λύσεις είναι έτσι διατεταγμένες, ούτως ώστε όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την ιδέα «2», όλες οι λύσεις που είναι αυστηρά ελαφρύτερες από την i έχουν

ήδη εξεταστεί. Ακυρώνεται εντελώς δηλαδή η ιδέα «2». Γι' αυτό το λόγο, κρίνεται σκόπιμο να ανακατευθούν οι λύσεις πριν την έναρξη των αναλύσεων, ώστε η εξέταση να γίνει με τυχαία σειρά.

Παρακάτω παρατίθεται με μορφή βημάτων ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης βάρους με τη χρήση του αλγορίθμου κυριαρχίας.

Βήμα 1: Αρχικοποιήσεις. Μην αποκλείσεις καμία λύση. Θέσε $w_{min} = +\infty$, $u_{max} = -\infty$

Βήμα 2: Ανακάτεψε τις λύσεις, θέσε $i = 1$.

Βήμα 3: Αν η λύση i δεν έχει αποκλειστεί, προχώρησε στο Βήμα 4. Αλλιώς προχώρησε στο Βήμα 11.

Βήμα 4: Υπολόγισε το βάρος w_i της λύσης i.

Βήμα 5: Αν $w_i \leq w_{min}$, προχώρησε στο Βήμα 6. Αλλιώς προχώρησε στο Βήμα 9.

Βήμα 6: Ανάλυσε τη λύση i και υπολόγισε την ωφέλειά της, u_i.

Βήμα 7: Αν $u_i > K$, προχώρησε στο Βήμα 8. Αλλιώς προχώρησε στο Βήμα 10.

Βήμα 8: Αν $u_i > u_{max}$, θέσε $winner = i$, $u_{max} = u_i$, $w_{min} = w_i$.

Βήμα 9: Απόκλεισε όλες τις αυστηρά βαρύτερες λύσεις από τη λύση i και προχώρησε στο Βήμα 11.

Βήμα 10: Απόκλεισε όλες τις αυστηρά ελαφρύτερες λύσεις από τη λύση i.

Βήμα 11: Θέσε $i = i + 1$ και επανάλαβε τα Βήματα 3-11 μέχρις ότου να έχουν αποκλειστεί όλες οι λύσεις εκτός από μία.

Βήμα 12: Εμφάνισε τη λύση που επικράτησε.

5.2.1.3 Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης

Ο Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης ανήκει στην κατηγορία των αλγορίθμων Τοπικής Έρευνας (Local Search), και πιο συγκεκριμένα στην κατηγορία των αλγορίθμων μέγιστης κατάβασης. Οι αλγόριθμοι Τοπικής Έρευνας δεδομένης μιας λύσης, εξετάζουν μια «γειτονιά» αυτής, με στόχο να προσδιοριστεί κάποιο τοπικό ελάχιστο της γειτονιάς. Με βάση το τοπικό ελάχιστο, δημιουργείται μια νέα γειτονιά, της οποίας αναζητείται πάλι κάποιο τοπικό ελάχιστο, και ούτω καθεξής. Ο τρόπος ορισμού της γειτονιάς και η μέθοδος με την οποία προσδιορίζεται το τοπικό ελάχιστο αποτελούν ξεχωριστά χαρακτηριστικά του κάθε αλγορίθμου.

Οι αλγόριθμοι μέγιστης κατάβασης εν γένει λειτουργούν ως εξής: Επιλέγεται με κάποιο τρόπο μια αρχική λύση s. Εν συνεχεία εκτελείται μια κίνηση που να δημιουργεί τη γειτονιά N(s). Ο αλγόριθμος αναζητά μια λύση s’, η οποία είναι η καλύτερη από όλες τις εναλλακτικές λύσεις της γειτονιάς N(s) [11]. Εν συνεχεία δημιουργείται η γειτονιά N(s’) και ακολουθείται η ίδια διαδικασία, για έναν αριθμό κύκλων.

Στις παραπάνω παραγράφους αναφέρθηκε η έννοια της γειτονιάς μιας λύσης, χωρίς όμως να εξηγηθεί περαιτέρω. Γειτονιά N(s) μιας δεδομένης λύσης s καλείται ένα σύνολο λύσεων που ανήκουν στο χώρο των λύσεων και διαφέρουν με μικρές αλλαγές από την s [11]. Είναι απαραίτητο μια γειτονιά να είναι εσωτερικά συνδεδεμένη (προσεγγιστικότητα των λύσεων), ενώ είναι καλό η γειτονιά να έχει μικρό μέγεθος, και να δημιουργείται με σχετικά απλό τρόπο.

Στο πρόβλημά μας, η γειτονιά ορίζεται ως εξής:

Έστω $s=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{bmatrix}$ ένας σχεδιασμός που ανήκει στο χώρο των λύσεων. Γειτονιά μεγέθους $\left(m^-,m^+\right)$ καλείται ο χώρος N(s) στον οποίο ανήκουν όλες οι λύσεις $s'=\begin{bmatrix} s'_1 & s'_2 & \dots & s'_n \end{bmatrix}$ που ανήκουν στο χώρο των λύσεων, για τις οποίες ισχύει:

$$-m^- \le s_i - s'_i \le m^+,\ \forall i=1,2,\dots,n$$

Με αυτό τον τρόπο, η γειτονιά περιέχει λύσεις που είναι και αυστηρά ελαφρύτερες από την s, και αυστηρά βαρύτερες, αλλά και μη άμεσα συγκρίσιμες με την s.

Ο αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης λειτουργεί ως εξής: Αρχικά επιλέγεται ως βασική λύση η βαρύτερη λύση που ανήκει στο χώρο των λύσεων, η $\boldsymbol{d}_{\max}$. Δημιουργείται λοιπόν μια γειτονιά λύσεων N($\boldsymbol{d}_{\max}$), μεγέθους $\left(m^-,m^+\right)$ η οποία μπορεί να εξεταστεί αναλυτικά, καθώς το πλήθος των λύσεων που περιέχει είναι πολύ μικρό σε σχέση με το συνολικό πλήθος των λύσεων. Από τις λύσεις που ανήκουν στη γειτονιά λύσεων, επιλέγεται η απολύτως καλύτερη. Καθώς ενδέχεται πολλές λύσεις να είναι αποδεκτές και να έχουν το ίδιο βάρος, επιλέγεται η λύση με τις μικρότερες μετακινήσεις και τάσεις, ανάλογα με τη συνολική ωφέλεια που αυτές δίνουν. Δηλαδή, παρ’ όλο που στο πρόβλημα minimum weight οι μετακινήσεις και οι τάσεις δεν ενδιαφέρουν αρκεί να μην υπερβαίνουν κάποιο όριο, σε αυτό τον αλγόριθμο έχει νόημα να χρησιμοποιηθούν ως tiebreakers. Η καλύτερη λύση s’ από τη γειτονιά λύσεων N($\boldsymbol{d}_{\max}$) θα αποτελέσει τη βάση για μια νέα γειτονιά λύσεων N(s’), μεγέθους $\left(m^-,m^+\right)$, για την οποία πάλι θα προσδιοριστεί η καλύτερη λύση s’’. Η ίδια διαδικασία θα επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου η καλύτερη λύση κάποιας επανάληψης να συμπίπτει με την καλύτερη λύση της προηγούμενης. Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος τερματίζεται, καθώς δεν μπορεί να βελτιώσει περαιτέρω τη λύση.

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο ντετερμινιστικής πλοήγησης στο χαοτικό χώρο των λύσεων. Παρέχει ικανοποιητική λύση σε σύντομο χρονικό διάστημα, εξετάζοντας μικρό μέρος των λύσεων, ενώ αποφεύγει να μπει σε διαδικασία σύγκρισης και αποκλεισμού λύσεων που δεν έχει εξετάσει. Ταυτόχρονα, ο αλγόριθμος διατηρεί τη δυνατότητα να αυξήσει τις διαστάσεις κάποιων μελών, καθώς η γειτονιά των λύσεων εκτείνεται και προς τα κάτω και προς τα πάνω.
- Κρατώντας μικρές τις διαστάσεις της γειτονιάς είναι δυνατό να εξαχθεί πολύ γρήγορα μια πρώτη λύση (η οποία ενδέχεται να είναι και η βέλτιστη), ενώ αυξάνοντας το μέγεθος της γειτονιάς (πληρώνοντας όμως το αντίστοιχο τίμημα σε υπολογιστικό χρόνο) η ισχύς του αλγορίθμου είναι εύκολο να αυξηθεί.
- Βέβαια, καθώς η ευαισθησία του κάθε φορέα εν γένει δεν είναι η ίδια για κάθε μεταβολή στις μεταβλητές σχεδιασμού, είναι πιθανό ο αλγόριθμος να παγιδευτεί σε κάποιο τοπικό ελάχιστο, ιδιαίτερα όταν η μεταβλητή m^{+} είναι μικρός αριθμός, οπότε ο αλγόριθμος χάνει τη δυνατότητα να ενισχύσει «πολύ» κάποια μέλη ώστε να ελαφρύνει κάποια άλλα και να φτάσει έτσι στη βέλτιστη λύση, όταν αυτό απαιτείται.
- Αν και μειώνει πολύ σημαντικά τον όγκο του προβλήματος, ο αλγόριθμος εν γένει ενδέχεται να εμφανίσει τα ίδια μειονεκτήματα με το αρχικό πρόβλημα. Όταν οι ομάδες μελών είναι πάρα πολλές, τότε ακόμα και για πολύ μικρές τιμές των $\left(m^{-}, m^{+}\right)$, το μέγεθος της προκύπτουσας γειτονιάς μπορεί να γίνει εξαιρετικά μεγάλο. Αυτό σημαίνει πως κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ενδέχεται να προκύψουν σοβαρά προβλήματα χρόνου αλλά και μνήμης υπολογιστή. Πιθανόν το μέγεθος του προβλήματος μπορεί να μειωθεί περαιτέρω αν για τον έλεγχο της γειτονιάς χρησιμοποιηθεί ο προηγούμενος αλγόριθμος κυριαρχίας, όμως αυτό είναι κάτι που δεν έχει αποδειχτεί ακόμα.

Παρακάτω παρατίθεται με μορφή βημάτων ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης βάρους με τη χρήση του αλγορίθμου σταδιακής απομείωσης.

Βήμα 1: Αρχικοποιήσεις. Θέσε $w_{min} = +\infty$.

Βήμα 2: Θέσε όπου s τη βαρύτερη λύση.

Βήμα 3: Φτιάξε τη γειτονιά της $N(s)$, μεγέθους $\left(m^{-}, m^{+}\right)$.

Βήμα 4: Ταξινόμησε τις λύσεις της γειτονιάς σε αύξουσα σειρά βάρους. Εξέτασε μόνο τις λύσεις s_i για τις οποίες ισχύει $w(s_i) \le w_{\min}$.

Βήμα 5: Βρες την καλύτερη λύση $s' \in N(s)$, θέσε $w_{\min} = w(s')$.

Βήμα 6: Αν $s' \neq s$, γύρισε στο Βήμα 3, αλλιώς η s’ είναι η βέλτιστη λύση.

5.2.1.4 Αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτησης

Ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης (simulated annealing), που προτάθηκε για πρώτη φορά από [12], [13] λειτουργεί με εντελώς διαφορετικό τρόπο από τους άλλους δύο αλγορίθμους που αναπτύχθηκαν στις παραπάνω υποενότητες. Σε αντίθεση με τους άλλους αλγορίθμους, ο αλγόριθμος αυτός έχει καθαρά πιθανοτικό χαρακτήρα, ενώ χρησιμοποιεί την εμπειρία που αποκτά κατά τη διάρκεια του προβλήματος για να αποδέχεται ή όχι λύσεις. Μια άλλη σημαντική διαφοροποίηση της προσομοιωμένης ανόπτησης είναι ότι είναι διατεθειμένη να δεχτεί και λύσεις χειρότερες από την τρέχουσα, ανάλογα με το πόσο χειρότερη είναι η νέα λύση, κι ανάλογα με το στάδιο στο οποίο βρίσκεται ο αλγόριθμος.

Η προσομοιωμένη ανόπτηση βασίζεται σε μία βοηθητική παράμετρο, τη θερμοκρασία, η οποία σταδιακά μειώνεται. Χρησιμοποιείται ο όρος θερμοκρασία, γιατί ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης έχει πάρει στοιχεία από τη μεταλλουργία, στην οποία γίνεται ανόπτηση των μετάλλων. Επί της ουσίας όμως, το μέγεθος της θερμοκρασίας δεν έχει άμεση σχέση με την έννοια της θερμοκρασίας. Αντιθέτως, επί της ουσίας εκφράζει το αντίστροφο της εμπειρίας που διαθέτει ο αλγόριθμος.

Πολύ σημαντικό στοιχείο στην προσομοιωμένη ανόπτηση αποτελεί η λήψη απόφασης για το αν μια νέα λύση s’ η οποία είναι χειρότερη από την s (δηλαδή $u(s') < u(s)$) πρέπει να γίνει αποδεκτή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η συνάρτηση αποδοχής, η οποία ορίζεται ως:

$$P(s', s, T) = \begin{cases} 1 & , a \cdot u(s') \geq a \cdot u(s) \\ e^{\frac{a \cdot [u(s') - u(s)]}{T}} & , a \cdot u(s') < a \cdot u(s) \end{cases}$$

Όπου *α* μια παράμετρος που παίρνει την τιμή 1, αν ο αλγόριθμος στοχεύει σε μεγιστοποίηση της δοθείσας συνάρτησης, ή -1, αν στοχεύει σε ελαχιστοποίηση. Είναι προφανές πως καθώς η θερμοκρασία μειώνεται, μειώνεται και συνάρτηση αποδοχής, δηλαδή η πιθανότητα να επιλεγεί κάποια χειρότερη λύση από την τρέχουσα.

Να σημειωθεί ότι για να έχει νόημα ο αλγόριθμος, η λύση s’ οφείλει να είναι γειτονική της s. Όμως εδώ, η γειτονιά έχει την ίδια έννοια αλλά ορίζεται με διαφορετικό τρόπο από ό,τι στον αλγόριθμο σταδιακής απομείωσης. Η διαδικασία παραγωγής λύσης s’ γειτονικής της s έχει ως εξής:

- Επιλέγεται τυχαία μία από τις ομάδες μελών.
- Για την ομάδα μελών που επιλέχτηκε, εκλέγεται τυχαία μια νέα διατομή από τις επιτρεπόμενες τιμές της Master List. Οι υπόλοιπες ομάδες μελών διατηρούν τις διατομές που είχαν και με τη λύση s.

Μεταβάλλεται δηλαδή μόνο ένα από τα στοιχεία της λύσης, όμως η μεταβολή αυτή δεν αντιμετωπίζει κάποιο περιορισμό. Αυτό διαφοροποιεί σημαντικά τη λογική με την οποία θα τρέξει ο αλγόριθμος.

Εκτός από τα παραπάνω, ο αλγόριθμος χρειάζεται να προσδιορίσει την αρχική θερμοκρασία του συστήματος, το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελούνται σε κάθε θερμοκρασία, καθώς και μία συνάρτηση ψύξης, η οποία θα μεταφέρει το σύστημα από την υψηλότερη θερμοκρασία στη χαμηλότερη. Η βιβλιογραφία είναι γεμάτη από μεγάλο πλήθος ερευνών σχετικών με το σωστό καθορισμό των παραπάνω παραμέτρων με στόχο τη μέγιστη δυνατή αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου, ενδεικτικά αναφέρεται το [14]. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, ο κώδικας που συντάχθηκε εκλέγει τις παραμέτρους με τον εξής τρόπο:

- Η μέγιστη θερμοκρασία είτε δίδεται από το χρήστη είτε εκλέγεται από τον αλγόριθμο, μετά από στατιστική επεξεργασία. Εκλέγονται δειγματικά ορισμένες λύσεις, ώστε να εκτιμηθεί η τάξη μεγέθους των διαφορών, και εν συνεχεία εκλέγεται η μέγιστη θερμοκρασία ως $\frac{1}{20}\hat{\Delta}$, όπου $\hat{\Delta}$ είναι η τιμή των διαφορών που κρίθηκε αντιπροσωπευτική του δείγματος.
- Το πλήθος επαναλήψεων που εκτελούνται σε κάθε θερμοκρασία μπορεί είτε να δοθεί από το χρήστη κατά την κλήση του αλγορίθμου, είτε εκλέγεται ως $\lambda \cdot m$, όπου m το πλήθος των μεταβλητών, δηλαδή των διαφορετικών ομάδων μελών.
- Ως σύστημα ψύξης εκλέγεται μια γραμμική συνάρτηση, η οποία μεταβάλλει τη θερμοκρασία του συστήματος από τη μέγιστη θερμοκρασία στη μηδενική, σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Ο αριθμός των βημάτων είτε δίνεται από το χρήστη, είτε εκλέγεται αυτόματα από τον αλγόριθμο ως ποσό ανάλογο του πλήθους των μεταβλητών της λύσης.

Παρακάτω παρατίθεται με μορφή βημάτων ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης.

Βήμα 1: Επίλεξε $T_{\max}$, $N_{\max}$, σύστημα ψύξης.

Βήμα 2: Επίλεξε τυχαία την τρέχουσα λύση s και αξιολόγησέ την.

Βήμα 3: Θέσε $\text{best} = s$, $u_{\max} = u(s)$

Βήμα 4: Θέσε $T = T_{\max}$.

Βήμα 5: Θέσε $N = 1$.

Βήμα 6: Επίλεξε τυχαία μια νέα λύση s’ γειτονική της s και αξιολόγησέ τη.

Βήμα 7: Επίλεξε τυχαία έναν αριθμό $R \in [0,1]$

Βήμα 8: Αν $P(s', s, T) \geq R$ τότε θέσε $s = s'$

Βήμα 9: Αν $u(s') > u_{\max}$, τότε Θέσε $\text{best} = s'$, $u_{\max} = u(s')$.

Βήμα 10: Θέσε $N = N + 1$.

Βήμα 11: Αν $N \leq N_{\max}$, γύρισε στο Βήμα 6, αλλιώς προχώρησε.

Βήμα 12: Χαμήλωσε τη θερμοκρασία σύμφωνα με το σύστημα ψύξης. Θέσε $T = T'$

Βήμα 13: Αν $T > 0$, γύρισε στο βήμα 5, αλλιώς προχώρησε.

Βήμα 14: Η βέλτιστη λύση που εντοπίστηκε είναι η best με $u(\text{best}) = u_{\max}$.

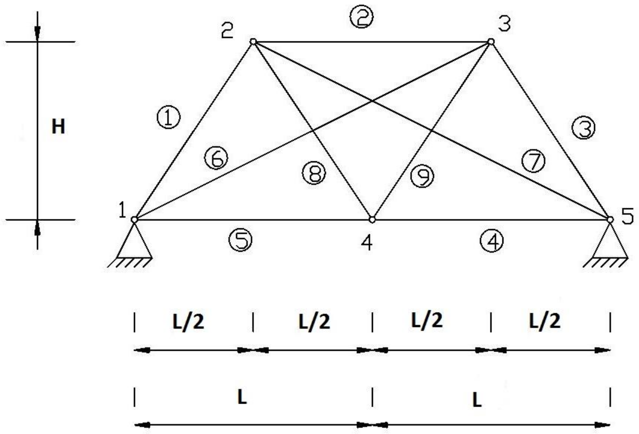
Σημειώνεται πως για την παραγωγή κάθε τυχαίου αριθμού που απαιτείται χρησιμοποιείται γεννήτρια τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

6 Αριθμητικά Παραδείγματα

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Αυτές αφορούν προβλήματα ελαχιστοποίησης κόστους, βελτιστοποίησης τοπολογίας, βελτιστοποίησης σχήματος, και ελαχιστοποίησης μετακίνησης με οικονομικό περιορισμό.

Για την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων συντάχθηκε κώδικας σε γλώσσα Matlab. Μεταξύ άλλων, κατασκευάστηκε ρουτίνα εκτέλεσης στατικών αναλύσεων με τη μέθοδο της άμεσης δυσκαμψίας, ρουτίνα υπολογισμού ελάχιστης ωφέλειας για κάθε σχεδιασμό, καθώς και ρουτίνες για κάθε ευρετικό αλγόριθμο από αυτούς που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 5. Σημειώνεται πως στο Matlab βρίσκεται ήδη ενσωματωμένη μια ρουτίνα που εκτελεί προσομοιωμένη ανόπτηση, όμως αυτή δεν ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθεί, καθώς αφορούσε αποκλειστικά στο συνεχές πρόβλημα.

6.1 Παράδειγμα 1 (Πρόβλημα Διαστασιολόγησης)



Δίνεται το δικτύωμα του σχήματος. Ζητείται ο ελαφρύτερος δυνατός σχεδιασμός της κατασκευής που να ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς:

1. Κάθε μέλος του φορέα παραμένει στην ελαστική περιοχή.
2. Η κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 4 να μην ξεπερνά τα 10mm.
3. Η οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 2 να μην ξεπερνά τα 7.5mm.

Ο Πίνακας 6.1 παρουσιάζει τις περιπτώσεις φόρτισης, ενώ ο Πίνακας 6.2 φανερώνει με ποιο τρόπο τα μέλη κατηγοριοποιούνται σε ομάδες μελών. Οι διατομές των μελών θα επιλεγούν:

i. Από τους πίνακες των μεταλλικών διατομών Li (Πίνακας 6.3).
ii. Από το σύνολο $\{15, \quad 16, \quad \dots \quad 40\}$ cm^2.

Δίνονται: $L = 8\mathrm{m}$, $H = 6\mathrm{m}$, $E = 210000000\ \mathrm{kN/m^2}$, χάλυβας S235.

Κόμβος		Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3
2	F_x	600	100	0
	F_y	0	0	0
3	F_x	0	100	0
	F_y	0	0	0
4	F_x	0	0	0
	F_y	0	-200	-400

Πίνακας 6.1: Περιπτώσεις Φόρτισης

Ομάδα	Μέλη
1	1, 2, 3
2	4, 5
3	6, 7
4	8, 9

Πίνακας 6.2: Ομαδοποίηση Μελών

α/α	Όνομα Διατομής	Εμβαδόν (cm^2)
1	120 x 80 x 8	15.49
2	120 x 80 x 10	19.13
3	120 x 80 x 12	22.69
4	130 x 65 x 8	15.09
5	130 x 65 x 10	18.63
6	150 x 90 x 10	23.15
7	150 x 90 x 11	25.34
8	150 x 100 x 10	24.15
9	150 x 100 x 12	28.71
10	150 x 100 x 14	33.19
11	160 x 80 x 10	23.18
12	160 x 80 x 12	27.54
13	200 x 100 x 10	29.24
14	200 x 100 x 12	34.80
15	200 x 100 x 14	40.28

Πίνακας 6.3: Διατομές Li

Επίλυση:

Ο Πίνακας 6.4 και ο Πίνακας 6.5 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και σε κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Να σημειωθεί πως στην περίπτωση που ο συντελεστής βαρύτητας λαμβάνεται ίσος με μηδέν, οι αντίστοιχες οριακές τιμές d_{lim} και σ_{lim} παύουν να έχουν νόημα (γι' αυτό και τοποθετείται επιτρεπτή μετακίνηση 1m στους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας). Τέλος, ο Πίνακας 6.6 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητας, όπως αυτοί περιγράφονται στην ενότητα 4.4.1, και σύμφωνα με τις οδηγίες που δίνονται στην ενότητα 4.4.3, ενώ ο Πίνακας 6.7 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις χρησιμότητας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Σύμφωνα με την πλήρη, αναλυτική επίλυση, αρχικά απαριθμούνται όλοι οι δυνατοί σχεδιασμοί (δηλαδή κάθε ομάδα μελών με κάθε διατομή). Στη συνέχεια πραγματοποιούνται οι αντίστοιχες στατικές επιλύσεις. Έπειτα, με τη βοήθεια των παραμέτρων και των συντελεστών βαρύτητας που ορίστηκαν, υπολογίζεται ο πίνακας χρησιμοτήτων του παιγνίου. Τέλος, με βάση την ενότητα 4.4.2, το παίγνιο επιλύεται και προκύπτει ο βέλτιστος σχεδιασμός. Βέβαια, για την ταχύτερη εκτέλεση του προγράμματος χρησιμοποιείται ο ευρετικός αλγόριθμος κυριαρχίας, όπως αυτός περιγράφηκε στην ενότητα 5.2.1.2.

Ο Πίνακας 6.8 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα στις περιπτώσεις (i) και (ii) καθώς και τη σύγκριση με τη λύση που δίνει το εμπορικό πρόγραμμα Femap. Παρατηρείται ότι οι λύσεις της μεθοδολογίας προσεγγίζουν πολύ καλά τις αναλυτικές λύσεις. Οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές, και γίνονται ακόμη μικρότερες καθώς το διάστημα των επιλογών γίνεται πυκνότερο. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση αφορά τη λειτουργία του αλγορίθμου κυριαρχίας, καθώς εξέτασε μόλις το 1.85% του χώρου των λύσεων στο πρώτο πρόβλημα και το 3.49% στο δεύτερο!

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	d_{lim}(m)
1	0	1
2	0	1
3	1/2	0.075
4	0	1
5	0	1
6	0	1
7	0	1
8	1/2	0.01
9	0	1
10	0	1

Πίνακας 6.4: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας

Μέλος	Συντ. Βαρύτητας$(w_{d,i})$	$\sigma_{\lim}$(MPa)
1	1/9	235
2	1/9	235
3	1/9	235
4	1/9	235
5	1/9	235
6	1/9	235
7	1/9	235
8	1/9	235
9	1/9	235

Πίνακας 6.5: Συντελεστής Βαρύτητας και οριακές τιμές Τάσεων για κάθε μέλος

w_d	1/2	w_{res}	1/2
w_σ	1/2	w_{des}	1/2

Πίνακας 6.6: Συντελεστές Βαρύτητας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού και Αποτελεσμάτων

a_{d1}	0.001	$a_{\sigma 1}$	$50 \cdot 10^{-9}$	v	40
a_{d2}	0.001	$a_{\sigma 2}$	$100 \cdot 10^{-9}$	c	1.30
P_d	1000	P_σ	1000	P_{Budget}	0
k	2	k	2	Budget	1000000

Πίνακας 6.7: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού

	Femap	(i) Διατομή Li	(i) A (cm²)	(i) Απόκλιση	(ii) A (cm²)	(ii) Απόκλιση
Ομάδα 1	24.97	150 x 100 x 10	24.15	-	25	-
Ομάδα 2	15	130 x 65 x 8	15.09	-	15	-
Ομάδα 3	15	130 x 65 x 8	15.09	-	15	-
Ομάδα 4	20.42	120 x 80 x 12	22.69	-	21	-
Όγκος (m³)	0.1497	-	0.1515	+1.21%	0.1506	+0.60%
Ποσοστό Λύσεων (%)	-	-	1.85	-	3.49	-

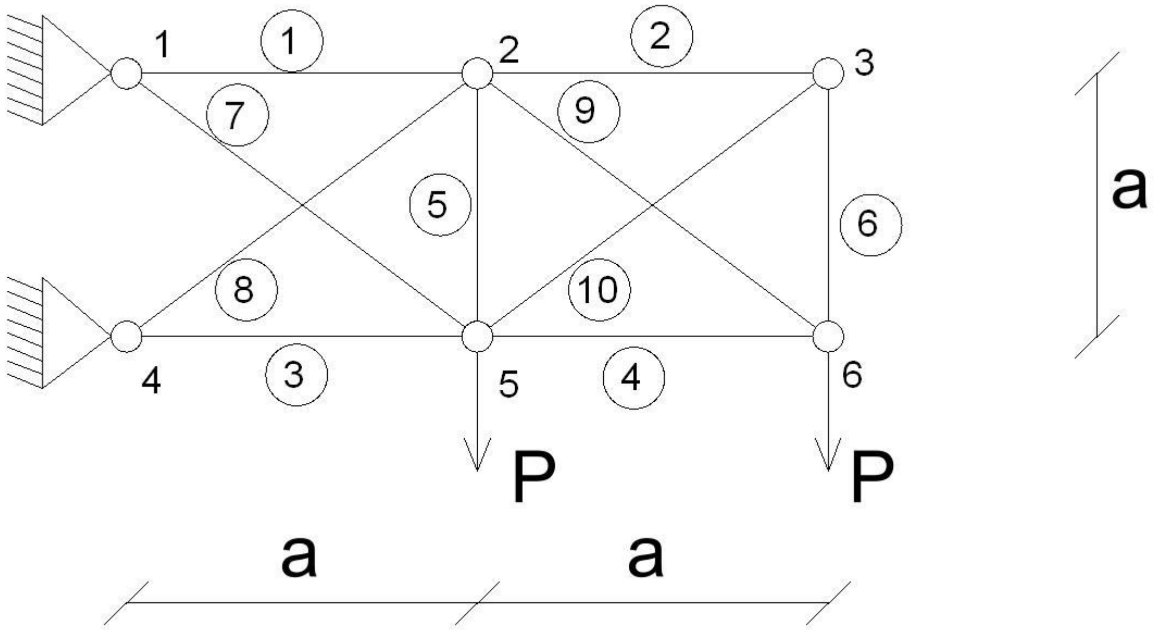
Πίνακας 6.8: Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων

6.2 Παράδειγμα 2 (Πρόβλημα Τοπολογίας)

Για το δικτύωμα του σχήματος ζητείται η βέλτιστη τοπολογία, από πλευράς οικονομικότητας σχεδιασμού. Κάθε μέλος σχεδιάζεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα (κάθε ομάδα μελών απαρτίζεται μόνο από το αντίστοιχο μέλος). Η φόρτιση του δικτυώματος είναι αποκλειστικά αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Περιορισμοί:

- Δεν επιτρέπεται να διαρρεύσει κανένα μέλος.
- Μέγιστη μετακίνηση: $2\text{in}\left(5.08\text{cm}\right)$.



Η τάση διαρροής είναι $f_y = 25000\,psi\ \left(172.25\text{MPa}\right)$ και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 10^7\text{psi}\left(68.948\text{GPa}\right)$. Το ειδικό βάρος είναι $\gamma = 0.1\text{lb/in}^3\left(27.1447\text{kN/m}^3\right)$

Δίνονται:

$a = 360\text{in}\left(9.144\text{m}\right)$, $P = 100\text{kips}\left(444.82\text{kN}\right)$.

Ο Πίνακας 6.9 παρουσιάζει το σύνολο των διατομών που επιτρέπεται να πάρει κάθε μέλος. Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα κάποια μέλη να μη κατασκευαστούν καθόλου (εμβαδόν διατομής 0.00).

α/α	A(in^2)	A(cm^2)
1	0.00	0.00
2	1.62	10.45
3	1.8	11.61
4	1.99	12.84
5	2.13	13.74
6	2.38	15.35
7	2.62	16.90
8	2.63	16.97
9	2.88	18.58
10	2.93	18.90
11	3.09	19.94
12	3.13	20.19
13	3.38	21.81
14	3.47	22.39
15	3.55	22.90
16	3.63	23.42
17	3.84	24.77
18	3.87	24.97
19	3.88	25.03
20	4.18	26.97
21	4.22	27.23
22	4.49	28.97
23	4.59	29.61
24	4.8	30.97
25	4.97	32.06
26	5.12	33.03
27	5.74	37.03
28	7.22	46.58
29	7.97	51.42
30	11.5	74.19
31	13.5	87.10
32	13.9	89.68
33	14.2	91.61
34	15.5	100.00
35	16	103.23
36	16.9	109.03
37	18.8	121.29
38	19.9	128.39
39	22	141.94
40	22.9	147.74
41	26.5	170.97
42	30	193.55
43	33.5	216.13

Πίνακας 6.9: Δυνατές Διατομές μελών. American Institute of Steel Construction Manual (Arora 1989) [15]

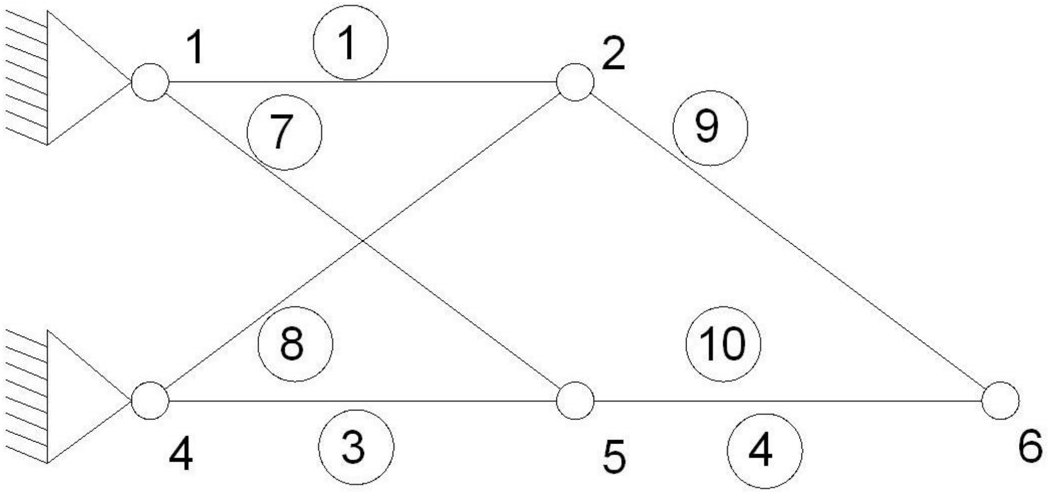
Επίλυση:

Καθώς επιλύεται πρόβλημα τοπολογίας, προστίθεται στη Master List ως πρώτη επιλογή διατομής η μηδενική. Όταν αυτή επιλέγεται, τότε το αντίστοιχο μέλος αμελείται κατά τη στατική επίλυση. Όταν όλα τα μέλη που συντρέχουν σε έναν κόμβο αμελούνται, τότε ο κόμβος διαγράφεται.

Ο Πίνακας 6.10 και ο Πίνακας 6.11 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και σε κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Ο Πίνακας 6.12 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητας, όπως αυτοί περιγράφονται στην ενότητα 4.4.1, και σύμφωνα με τις οδηγίες που δίνονται στην ενότητα 4.4.3, ενώ ο Πίνακας 6.13 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Καθώς το μέγεθος του προβλήματος είναι μεγάλο (43^{10}), για την επίλυση θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης, ο οποίος ξεχωρίζει από τους υπόλοιπους αλγορίθμους της παρούσης εργασίας αναφορικά με την ευχέρεια διαχείρισης πολύ μεγάλων χώρων επίλυσης.

Ο Πίνακας 6.14 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Παρατηρούμε πως η προτεινόμενη λύση συμπίπτει με αυτήν που προτείνεται από [15]. Στη βιβλιογραφία [16] παρατίθεται μια ακόμη λύση, όμως παραβιάζεται ο περιορισμός της μέγιστης μετακίνησης (2.05in). Αναφέρεται πως η μέγιστη μετακίνηση της λύσης [15] είναι 2.07in, όμως ο παραπάνω ισχυρισμός είναι εσφαλμένος, καθώς αναφέρεται στη μετακίνηση που θα είχε ο κόμβος 3, αν ήταν συνδεδεμένος με τους υπόλοιπους κόμβους με μέλη πολύ μικρής διατομής. Στην πραγματικότητα όμως, αυτός ο κόμβος έχει σβηστεί, και δεν έχει νόημα να γίνεται λόγος για τη μετακίνηση που θα είχε, εάν υπήρχε. Και οι τρεις μεθοδολογίες συμφωνούν πάντως αναφορικά με την τοπολογία της τελικής λύσης, η οποία προκύπτει σβήνοντας τα μέλη 2, 5, 6 και 10, καθώς και τον κόμβο 3 και παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Βέλτιστη Τοπολογία του Δικτυώματος

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	$d_{\lim}$(in)
1	0	2
2	0	2
3	0	2
4	1/4	2
5	0	2
6	1/4	2
7	0	2
8	0	2
9	0	2
10	1/4	2
11	0	2
12	1/4	2

Πίνακας 6.10: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας

Μέλος	Συντ. Βαρύτητας ($w_{\sigma,i}$)	$\sigma_{\lim}$(psi)
1	1/10	25000
2	1/10	25000
3	1/10	25000
4	1/10	25000
5	1/10	25000
6	1/10	25000
7	1/10	25000
8	1/10	25000
9	1/10	25000
10	1/10	25000

Πίνακας 6.11: Συντελεστής Βαρύτητας και οριακές τιμές Τάσεων για κάθε μέλος

w_d w_σ	$1/2$ $1/2$	w_{res} w_{des}	$1/2$ $1/2$

Πίνακας 6.12: Συντελεστές Βαρύτητας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού και Αποτελεσμάτων

a_{d1}	10^{-5}	$a_{\sigma 1}$	10^{-9}	v	1
a_{d2}	10^{-5}	$a_{\sigma 2}$	10^{-9}	c	0
P_d	100000	P_σ	100000	P_{Budget}	0
k	1	k	1	Budget	1000000

Πίνακας 6.13: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού

A (in^2)	Λύση 1 **[16]**	Λύση 2 **[15]**	ΜΜΕΩ
A_1	30.00	30.00	30.00
A_2	0.00	0.00	0.00
A_3	26.50	19.90	19.90
A_4	14.20	15.50	15.50
A_5	0.00	0.00	0.00
A_6	0.00	0.00	0.00
A_7	7.97	7.22	7.22
A_8	19.90	22.00	22.00
A_9	18.80	22.00	22.00
A_{10}	0.00	0.00	0.00
Βάρος (lb)	4921.25	4962.10	4962.10
$\boldsymbol{w_{d,12}}$	-2.0294	-1.9997	-1.9997

Πίνακας 6.14: Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων

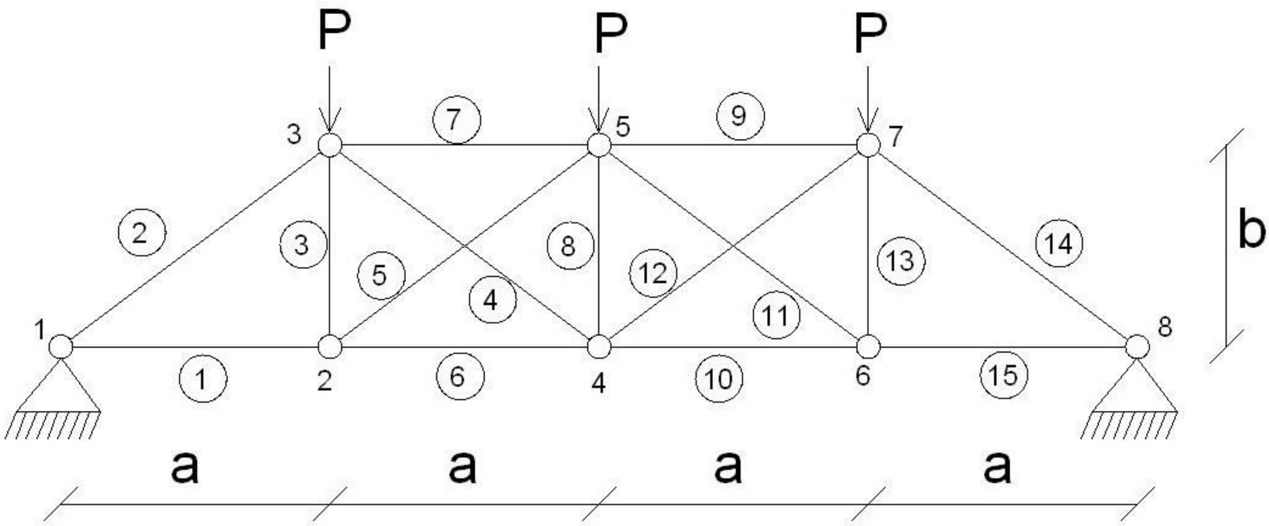
6.3 Παράδειγμα 3 (Πρόβλημα Τοπολογίας)

Για το δικτύωμα του σχήματος ζητείται η βέλτιστη τοπολογία, από πλευράς οικονομικότητας σχεδιασμού. Η φόρτιση του δικτυώματος είναι αποκλειστικά αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο Πίνακας 6.15 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο είναι οργανωμένες οι ομάδες μελών, ούτως ώστε να σχεδιαστεί συμμετρικά ο φορέας. Οι διατομές των μελών θα επιλεγούν από το σύνολο $\{0.1,\ 0.2,\ \ldots\ 1.6\}\left(\text{in}^2\right)$, το οποίο περιέχει 16 ισαπέχοντα στοιχεία.

Περιορισμοί:

- Δεν επιτρέπεται να διαρρεύσει κανένα μέλος.
- Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στις μετακινήσεις.



Η τάση διαρροής είναι $f_y = 345\,\text{MPa}$ και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 207\text{GPa}$.

Δίνονται: a = 1.016m, b = 0.762m, P = 89kN.

Ομάδα Μελών	Μέλη
1	1, 15
2	2, 14
3	3, 13
4	4, 12
5	5, 11
6	6, 10
7	7, 9
8	8

Πίνακας 6.15: Ομάδες Μελών

Επίλυση:

Ο Πίνακας 6.16 και ο Πίνακας 6.17 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και σε κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Ο Πίνακας 6.18 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητας, όπως αυτοί περιγράφονται στην ενότητα 4.4.1, και σύμφωνα με τις οδηγίες που δίνονται στην ενότητα 4.4.3, ενώ ο Πίνακας 6.19 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης, αλλά και ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης, και θα συγκριθούν τα αποτελέσματά τους. Ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης εκτελείται με μέγεθος γειτονιάς (1, 1), ενώ ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης εργάζεται εκτελώντας 1000 κύκλους δοκιμών για καθεμιά από 1000 διαφορετικές θερμοκρασίες.

Ο Πίνακας 6.20 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων των δύο αλγορίθμων, καθώς και μια τρίτη λύση της βιβλιογραφίας [17], [18], [19]. Παρατηρούμε πως οι δύο αλγόριθμοι συγκλίνουν σε δύο διαφορετικές λύσεις. Την καλύτερη εκ των δύο τη βρίσκει ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης, ο οποίος καταλήγει σε λύση ίδιας τοπολογίας και ίδιου όγκου με τη λύση στις βιβλιογραφικές αναφορές, η οποία όμως δε δίνεται. Η βέλτιστη τοπολογία φαίνεται στο Σχήμα 6.2.

Εδώ φαίνεται και η πραγματική ταυτότητα του αλγόριθμου σταδιακής απομείωσης, αφού με εξαιρετικά «ελαφριές» παραμέτρους γειτονιάς καταλήγει σε μια πολύ καλή λύση (κατά 2.5% χειρότερη από τη βέλτιστη) μετά από μόλις 58 δευτερόλεπτα και 4500 στατικές αναλύσεις, την ίδια στιγμή που ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης χρειάζεται περίπου 130 λεπτά και 1000000 στατικές αναλύσεις ώστε να καταλήγει συστηματικά στην ακριβή λύση. Να σημειωθεί όμως πως ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης εγκλωβίζεται πολύ έντονα στη λύση που προτείνει, καθώς δίνει το ίδιο αποτέλεσμα, ακόμα και μεγαλώνοντας αρκετά τη γειτονιά των λύσεων. Μπορεί κανείς να πει πως ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί ένα αξιόπιστο εργαλείο για να βρεθεί γρήγορα μια καλή λύση, αλλά όχι αρκετά αξιόπιστο ώστε να καταλήγει συστηματικά στη βέλτιστη λύση.

Τέλος, για την καλύτερη κατανόηση του τρόπου λειτουργίας του αλγόριθμου σταδιακής απομείωσης, ο Πίνακας 6.21 και το Σχήμα 6.3 παρουσιάζουν την εξελικτική πορεία των λύσεων κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο ο αλγόριθμος προχωρά σε κάθε επανάληψη, ξεκινώντας από την πιο βαριά και αντιοικονομική λύση, και συνεχίζοντας με την ελαφρύτερη λύση κάθε υπογειτονιάς που παράγεται για την τρέχουσα λύση.

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	$d_{\lim}$(in)
1	0	2
2	0	2
3	0	2
4	0	2
5	0	2
6	0	2
7	0	2
8	0	2
9	0	2
10	0	2
11	0	2
12	0	2
13	0	2
14	0	2
15	0	2
16	0	2

Πίνακας 6.16: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας

Μέλος	Συντ. Βαρύτητας ($w_{\sigma,i}$)	$\sigma_{\lim}$(MPa)
1	1/15	345
2	1/15	345
3	1/15	345
4	1/15	345
5	1/15	345
6	1/15	345
7	1/15	345
8	1/15	345
9	1/15	345
10	1/15	345
11	1/15	345
12	1/15	345
13	1/15	345
14	1/15	345
15	1/15	345

Πίνακας 6.17: Συντελεστής Βαρύτητας και οριακές τιμές Τάσεων για κάθε μέλος

w_d	0	w_{res}	1/2
w_σ	1	w_{des}	1/2

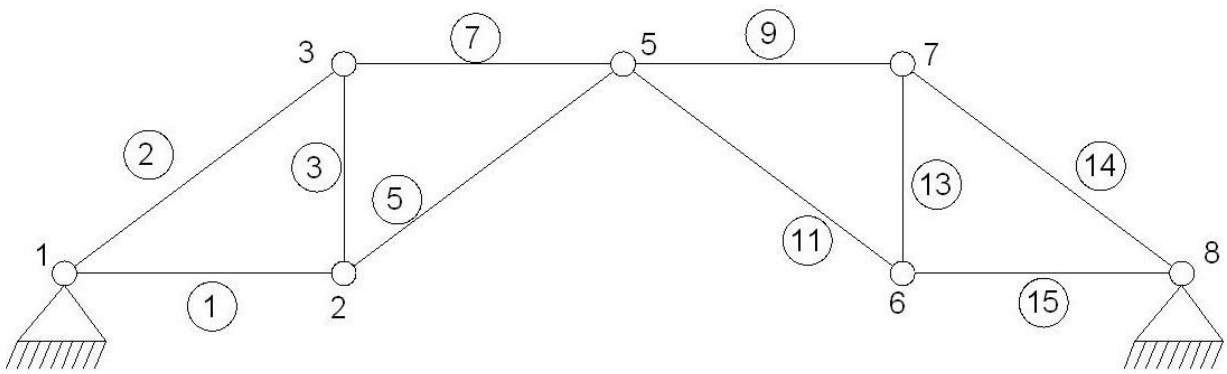
Πίνακας 6.18: Συντελεστές Βαρύτητας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού και Αποτελεσμάτων

a_{d1} a_{d2} P_d k	10^{-5} 10^{-5} 100000 1	$a_{\sigma1}$ $a_{\sigma2}$ P_σ k	10^{-9} 10^{-9} 100000 1	v c P_{Budget} Budget	5 0 0 1000000

Πίνακας 6.19: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού

A (cm^2)	Λύση **[18]**	Προσομοιωμένη Ανόπτηση	Σταδιακή Απομείωση
A_1	?	1.94	0.65
A_2	?	6.45	6.45
A_3	?	1.29	1.29
A_4	?	0.00	0.65
A_5	?	2.58	1.94
A_6	?	0.00	0.65
A_7	?	5.16	5.81
A_8	?	0.00	1.29
Όγκος (cm^3)	3933	3932.895	4031.218
Ποσοστό Λύσεων (%)	?	0.0143	0.0000645

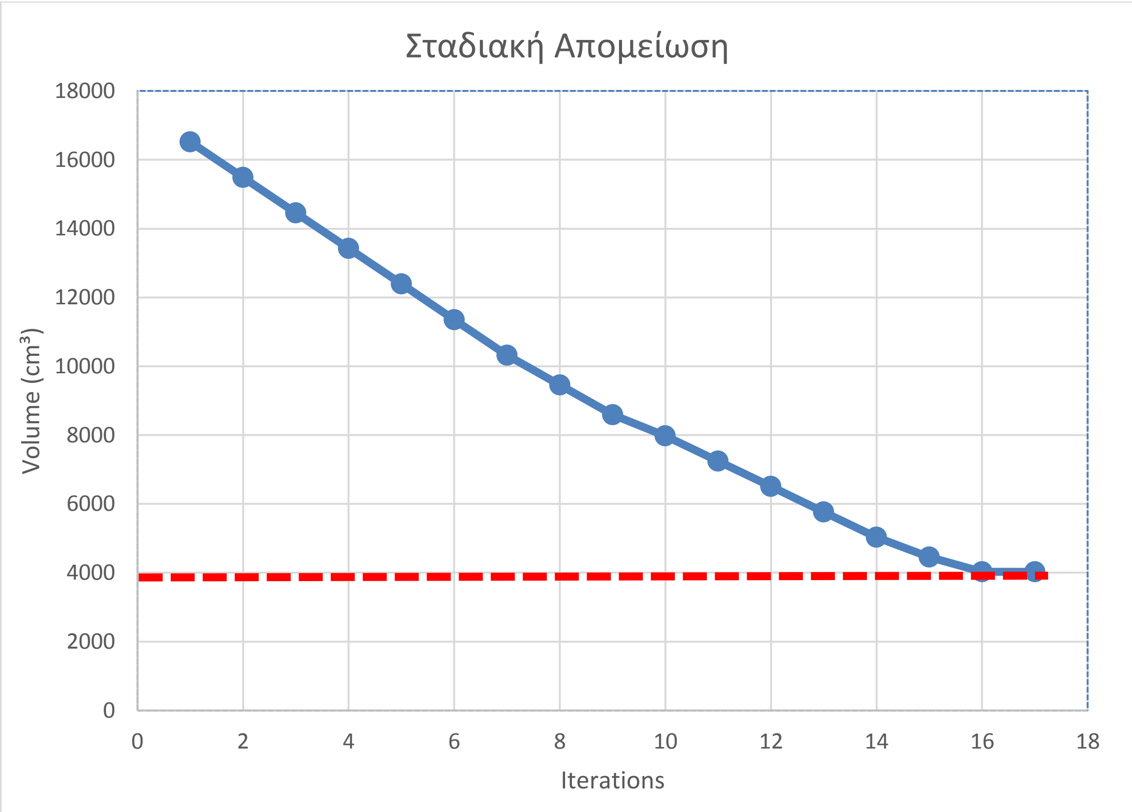
Πίνακας 6.20: Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων



Σχήμα 6.2: Βέλτιστη Τοπολογία του Δικτυώματος

α/α	1	2	3	4	5	6	7	8
1	17	17	17	17	17	17	17	17
2	16	16	16	16	16	16	16	16
3	15	15	15	15	15	15	15	15
4	14	14	14	14	14	14	14	14
5	13	13	13	13	13	13	13	13
6	12	12	12	12	12	12	12	12
7	11	11	11	11	11	11	11	11
8	10	11	10	10	10	10	10	10
9	9	11	9	9	9	9	9	9
10	8	11	8	8	8	8	10	8
11	7	11	7	7	7	7	10	7
12	6	11	6	6	6	6	10	6
13	5	11	5	5	5	5	10	5
14	4	11	4	4	4	4	10	4
15	3	11	3	3	4	3	10	3
16	2	11	3	2	4	2	10	3
17	2	11	3	2	4	2	10	3

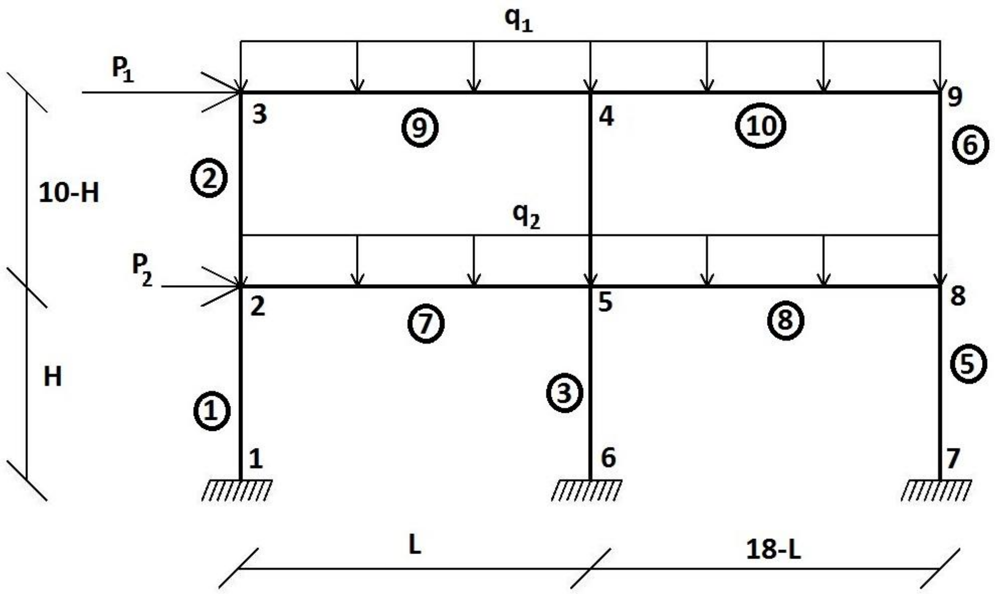
Πίνακας 6.21: Εξελικτική πορεία λύσεων του Αλγορίθμου Σταδιακής Απομείωσης



Σχήμα 6.3: Εξελικτική πορεία λύσεων του Αλγορίθμου Σταδιακής Απομείωσης

6.4 Παράδειγμα 4 (Βελτιστοποίηση Σχήματος)

Για το πλαίσιο του σχήματος ζητείται ο προσδιορισμός του βέλτιστης θέσης του κόμβου 5, από πλευράς οικονομικότητας σχεδιασμού. (Σημείωση: Σε κάθε σχεδιασμό όλα τα μέλη πρέπει να είναι οριζόντια ή κατακόρυφα, δηλαδή ανάλογα με τη θέση του κόμβου 5 μεταβάλλονται αντίστοιχα οι συντεταγμένες των κόμβων 2, 4, 6 και 8).



Περιπτώσεις Φόρτισης:

1. $P_1 = 240\text{kN}$, $P_2 = 120\text{kN}$, $q_1 = 50\text{kN/m}$, $q_2 = 50\text{kN/m}$
2. $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $q_1 = 250\text{kN/m}$, $q_2 = 250\text{kN/m}$

Ομάδες Μελών	Μέλη	Διατομές
1	1,2	Επιλογή από διατομές HEA
2	3,4	Επιλογή από διατομές HEA
3	5,6	Επιλογή από διατομές HEA
4	7,8	Επιλογή από διατομές IPE
5	9,10	Επιλογή από διατομές IPE

Περιορισμοί:

- Δεν επιτρέπεται να διαρρεύσει κανένα μέλος.
- Η οριζόντια μετακίνηση στους κόμβους 2, 3, 8 και 9 να μην ξεπερνά τα 20cm.

Ο χάλυβας είναι S450 και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 210\text{GPa}$. Το κόστος του δομικού χάλυβα είναι $c = 1.3€/\text{kg}$.

Οι συντεταγμένες του κόμβου 5 θα ικανοποιούν τους περιορισμούς:

$6 \le x_5 \le 12$, $3 \le y_5 \le 7$

Επίλυση:

Η βελτιστοποίηση θα γίνει σε δύο στάδια, με σκοπό να μειωθεί ο δειγματικός χώρος και ταυτόχρονα να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια στα αποτελέσματα. Για να επιτευχθεί αυτό, το πρόβλημα θα λυθεί σε δύο στάδια. Αρχικά, θα επιλεγεί ένας κάνναβος που θα καλύπτει μεγάλο χώρο, αλλά οι τιμές του θα απέχουν κάπως μεταξύ τους. Με βάση τον πρώτο κάνναβο θα λυθεί αρχικά το πρόβλημα. Εν συνεχεία, και λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του προβλήματος που μόλις λύθηκε, θα δημιουργηθεί ένας δεύτερος κάνναβος, ο οποίος θα καταλαμβάνει μικρότερη έκταση, αλλά θα είναι πυκνότερος από τον πρώτο. Φυσικά, η βάση για τον δεύτερο κάνναβο θα είναι η λύση που βρέθηκε στο πρώτο στάδιο του προβλήματος.

Ο Πίνακας 6.22 και ο Πίνακας 6.23 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και σε κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Ο Πίνακας 6.24 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητας, όπως αυτοί περιγράφονται στην ενότητα 4.4.1, και σύμφωνα με τις οδηγίες που δίνονται στην ενότητα 4.4.3, ενώ ο Πίνακας 6.25 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις χρησιμότητας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Για την επίλυση του προβλήματος εξετάζεται ξεχωριστά κάθε ζεύγος συντεταγμένων του κάθε καννάβου. Κάθε φορά που σταθεροποιείται η θέση του κόμβου 5, είναι επακριβώς γνωστή η γεωμετρία του φορέα. Έπειτα, για το δεδομένο φορέα, επιλύεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους χωρίς διαγραφή μελών και κόμβων. Το πλήθος των σημείων του καννάβου είναι μεγάλο, όμως το μέγεθος του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι σχετικά μικρό. Η ταχύτητα επίλυσης αυξάνει σημαντικά με χρήση του ευρετικού αλγορίθμου σταδιακής απομείωσης, οπότε υπάρχει δυνατότητα να εξετάζονται πολλές πιθανές θέσεις για τον κόμβο 5.

Ο αρχικός κάνναβος που μελετήθηκε έδινε στο x_5 τη δυνατότητα να μεταβάλλεται από 6m έως 12m, με βήμα 0.3m, ενώ αντίστοιχα επέτρεπε στο y_5 να μεταβάλλεται από 3m έως 7m, με βήμα 0.2m. Από αυτό τον κάνναβο προκύπτει πως η πιο ευνοϊκή θέση του κόμβου 5 είναι η $x_5 = 9\mathrm{m}$, $y_5 = 3.80\mathrm{m}$ (Πίνακας 6.26). Αυτή η λύση αποτέλεσε και τη βάση για τον δεύτερο στάδιο επίλυσης, με τον πυκνωμένο κάνναβο, ο οποίος επέτρεπε στο x_5 τη δυνατότητα να μεταβάλλεται από 8.70m έως 9.30m, με βήμα 0.05m, ενώ αντίστοιχα επέτρεπε στο y_5 να μεταβάλλεται από 3.60m έως 4.00m, με βήμα 0.05m. Η νέα λύση βελτιώνει ανεπαίσθητα τη λύση του αρχικού καννάβου, θεωρώντας πως το βέλτιστο σχήμα προκύπτει όταν $x_5 = 9\text{m}$, $y_5 = 3.70\text{m}$. Να σημειωθεί πως οι 2 λύσεις, καθώς και μερικές ακόμα λύσεις για τις οποίες $x_5 = 9\text{m}$ και $y_5 \in (3.70, \quad 4.00)$, διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους. Η διαφορές που έχουν είναι εξαιρετικά μικρές, της τάξης του 0.00000003% και οφείλονται σε μικροδιαφορές στις μετακινήσεις, οι οποίες, όταν δεν ξεπερνούν ένα όριο, επηρεάζουν ελάχιστα την τελική ωφέλεια.

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	$d_{\lim}$(m)
1	0	1
2	0	1
3	0	1
4	1/4	0.2
5	0	1
6	0	1
7	1/4	0.2
8	0	1
9	0	1
10	0	1
11	0	1
12	0	1
13	0	1
14	0	1
15	0	1
16	0	1
17	0	1
18	0	1
19	0	1
20	0	1
21	0	1
22	1/4	0.2
23	0	1
24	0	1
25	1/4	0.2
26	0	1
27	0	1

Πίνακας 6.22: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας

Μέλος	Συντ. Βαρύτητας ($w_{\sigma,i}$)	$\sigma_{\lim}$(MPa)
1	1/10	440
2	1/10	440
3	1/10	440
4	1/10	440
5	1/10	440
6	1/10	440
7	1/10	440
8	1/10	440
9	1/10	440
10	1/10	440

Πίνακας 6.23: Συντελεστής Βαρύτητας και οριακές τιμές Τάσεων για κάθε μέλος

w_d	1/2	w_{res}	1/2
w_σ	1/2	w_{des}	1/2

Πίνακας 6.24: Συντελεστές Βαρύτητας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού και Αποτελεσμάτων

a_{d1}	10^{-5}	$a_{\sigma1}$	10^{-9}	v	1
a_{d2}	10^{-5}	$a_{\sigma2}$	10^{-9}	c	1.3
P_d	100000	P_σ	100000	P_{Budget}	0
k	1	k	1	Budget	1000000

Πίνακας 6.25: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού

Ομάδα Μελών	Στάδιο 1	Στάδιο 2
1	HEA 240	HEA 240
2	HEA 320	HEA 320
3	HEA 240	HEA 240
4	IPE 750 x 173	IPE 750 x 173
5	IPE 750 x 173	IPE 750 x 173
Όγκος (m^3)	1.0748	1.0748
Κόστος (€)	10968	10968

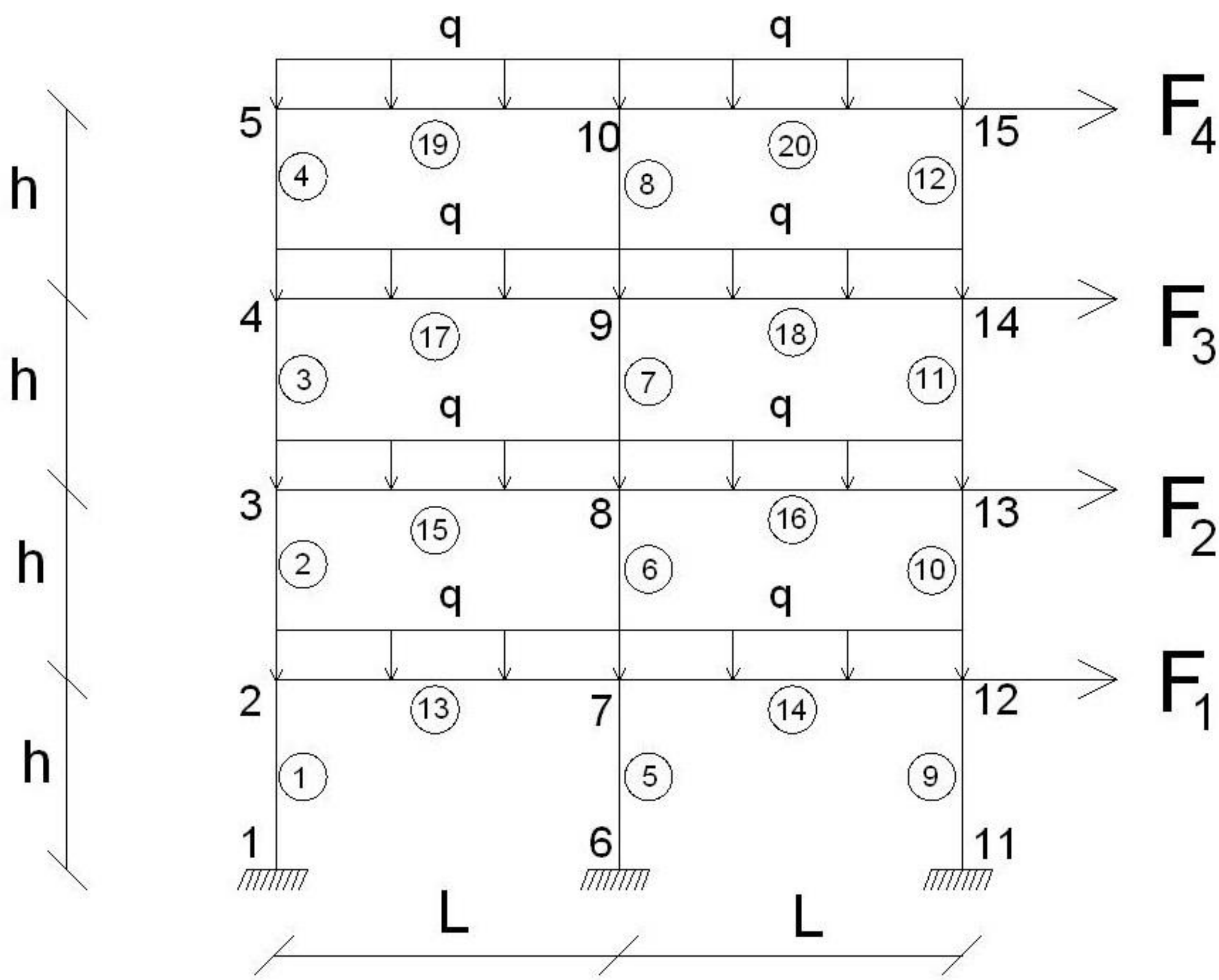
Πίνακας 6.26: Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων

6.5 Παράδειγμα 5 (Πρόβλημα με Οικονομικό Περιορισμό)

Για το τετραώροφο πλαίσιο δύο ανοιγμάτων του σχήματος ζητούνται τα εξής:

Α) Ελαχιστοποίηση βάρους (οικονομικότερος δυνατός σχεδιασμός)

Β) Ελαχιστοποίηση της οριζόντιας μετακίνησης του κόμβου 15, με maximum χρηματική δαπάνη 19000€.



Στην πρώτη περίπτωση μοναδικός περιορισμός είναι να μην ξεπεραστεί το όριο διαρροής για κανένα μέλος (χάλυβας S355). Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει ο πρόσθετος περιορισμός του budget (19000€).

Περιπτώσεις φόρτισης:

Το κατανεμημένο φορτίο ανά όροφο θεωρείται σταθερό στα 50kN/m. Μεταβάλλοντας τα συγκεντρωμένα φορτία δημιουργούνται οι τρεις ακόλουθες περιπτώσεις φόρτισης (Πίνακας 6.27).

Ομάδες Μελών:

Για μεγαλύτερη ευελιξία, κάθε υποστύλωμα (από πάνω έως κάτω) και κάθε όροφος αποτελεί ανεξάρτητη ομάδα μελών (Πίνακας 6.28)

Ο χάλυβας είναι S355 και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 210\text{GPa}$. Το ειδικό βάρος του δομικού χάλυβα είναι 7850kg/m^3, ενώ το κόστος του είναι $c = 1.3€/\text{kg}$.

Δίνονται: $h = 3\text{m}$, $L = 8\text{m}$.

Φορτίο	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3
F_1	250	100	450
F_2	250	200	350
F_3	250	300	250
F_4	250	400	150

Πίνακας 6.27: Περιπτώσεις Φόρτισης

Ομάδες Μελών	Μέλη	Διατομές
1	1,2,3,4	Επιλογή από διατομές HEA
2	5,6,7,8	Επιλογή από διατομές HEA
3	9,10,11,12	Επιλογή από διατομές HEA
4	13,14	Επιλογή από διατομές IPE
5	15,16	Επιλογή από διατομές IPE
6	17,18	Επιλογή από διατομές IPE
7	19,20	Επιλογή από διατομές IPE

Πίνακας 6.28: Ομάδες Μελών

Επίλυση:

Α) Ελαχιστοποίηση Βάρους

Ο Πίνακας 6.29 και ο Πίνακας 6.30 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και σε κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Ο Πίνακας 6.31 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητα, ενώ ο Πίνακας 6.32 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Β) Ελαχιστοποίηση Μετακίνησης

Η φύση του προβλήματος αλλάζει εντελώς, η αντιμετώπισή του όμως από τη ΜΜΕΩ παραμένει εντελώς ίδια. Η βελτιστοποίηση θα γίνει με κάποιες διαφοροποιήσεις στις παραμέτρους του προβλήματος.

Έτσι, ο Πίνακας 6.34 και ο Πίνακας 6.30 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και σε κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Ο Πίνακας 6.31 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητας, ενώ ο Πίνακας 6.33 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Ο Πίνακας 6.30 είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στο ερώτημα (Α), όπως και ο Πίνακας 6.31, ενώ ο Πίνακας 6.34 διαφέρει από τον αντίστοιχο του ερωτήματος (Α) μόνο στο συντελεστή βαρύτητας της βαθμού ελευθερίας 43, που αντιστοιχεί στην οριζόντια μετακίνηση του κόμβου 15. Ο Πίνακας 6.33 είναι αυτός που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διαφοροποίηση, σε σχέση με τον αντίστοιχο του ερωτήματος (Α), καθώς εδώ συμβαίνουν οι περισσότερες αλλαγές:

- Ορίζεται το κόστος του χάλυβα, καθώς και το budget.
- Μειώνεται δραματικά (από 5 σε 10^{-9}) ο συντελεστής ωφέλειας του κόστους του όγκου, ώστε να μην επηρεάζει αισθητά την αντικειμενική συνάρτηση, παρά μόνο σε περιπτώσεις που υπερβαίνεται το διαθέσιμο χρηματικό ποσό.
- Αυξάνει δραματικά (από 10^{-5} σε 0.1) ο συντελεστής ωφέλειας των μετακινήσεων, ώστε να επηρεάζει αισθητά σε κάθε μεταβολή την αντικειμενική συνάρτηση.

Παρατηρούμε πώς με τη μεταβολή ορισμένων παραμέτρων λύνεται εντελώς διαφορετικό πρόβλημα με την ίδια ευχέρεια!

Για την επίλυση του κάθε προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης, εκτελώντας 1000 κύκλους δοκιμών για καθεμιά από 1000 διαφορετικές θερμοκρασίες. Υπενθυμίζεται πως ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης έχει το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι συμπεριφέρεται εξίσου καλά για κάθε τύπο προβλήματος που επιλύεται. Ο Πίνακας 6.35 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις λύσεις των 2 προβλημάτων.

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	d_{lim}(m)
1	0	2
2	0	2
3	0	2
4	0	2
5	0	2
6	0	2
7	0	2
8	0	2
9	0	2
10	0	2
11	0	2
12	0	2
13	0	2
14	0	2
15	0	2
16	0	2
17	0	2
18	0	2
19	0	2
20	0	2
21	0	2
22	0	2
23	0	2
24	0	2
25	0	2
26	0	2
27	0	2
28	0	2
29	0	2
30	0	2
31	0	2
32	0	2
33	0	2
34	0	2
35	0	2
36	0	2
37	0	2

38	0	2
39	0	2
40	0	2
41	0	2
42	0	2
43	0	2
44	0	2
45	0	2

Πίνακας 6.29: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας (A)

Μέλος	Συντ. Βαρύτητας ($w_{\sigma,i}$)	σ_{lim}(MPa)
1	1/20	345
2	1/20	345
3	1/20	345
4	1/20	345
5	1/20	345
6	1/20	345
7	1/20	345
8	1/20	345
9	1/20	345
10	1/20	345
11	1/20	345
12	1/20	345
13	1/20	345
14	1/20	345
15	1/20	345
16	1/20	345
17	1/20	345
18	1/20	345
19	1/20	345
20	1/20	345

Πίνακας 6.30: Συντελεστής Βαρύτητας και οριακές τιμές Τάσεων για κάθε μέλος (A), (B)

w_d	0	w_{res}	1/2
w_σ	1	w_{des}	1/2

Πίνακας 6.31: Συντελεστές Βαρύτητας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού και Αποτελεσμάτων (A), (B)

a_{d1}	10^{-5}	$a_{\sigma1}$	10^{-9}	v	5
a_{d2}	10^{-5}	$a_{\sigma2}$	10^{-9}	c	0
P_d	100000	P_σ	100000	P_{Budget}	0
k	1	k	1	Budget	1000000

Πίνακας 6.32: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού (A)

a_{d1} a_{d2} P_d k	10 10 0 1	$a_{\sigma 1}$ $a_{\sigma 2}$ P_σ k	10^{-9} 10^{-9} 100000 1	v c P_{Budget} Budget	10^{-9} 1.30 1000000 19000

Πίνακας 6.33: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού (B)

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	d_{lim}(m)
1	0	2
2	0	2
3	0	2
4	0	2
5	0	2
6	0	2
7	0	2
8	0	2
9	0	2
10	0	2
11	0	2
12	0	2
13	0	2
14	0	2
15	0	2
16	0	2
17	0	2
18	0	2
19	0	2
20	0	2
21	0	2
22	0	2
23	0	2
24	0	2
25	0	2
26	0	2
27	0	2
28	0	2
29	0	2
30	0	2
31	0	2
32	0	2
33	0	2
34	0	2
35	0	2
36	0	2
37	0	2
38	0	2

39	0	2
40	0	2
41	0	2
42	0	2
43	1	2
44	0	2
45	0	2

Πίνακας 6.34: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας (Β)

Ομάδα Μελών	Πρόβλημα (Α)	Πρόβλημα (Β)
1	HEA 100	HEA 100
2	HEA 900	HEA 1000
3	HEA 320	HEA 1000
4	IPE 600	IPE 450
5	IPE 500	IPE 750 x 173
6	IPE 750 x 147	IPE 750 x 147
7	IPE 450	IPE 500
Όγκος (m^3)	1.4519	1.8548
Κόστος (€)	14816	18928
U_{43} (cm)	5.72	2.57
Κρίσιμη Φόρτιση	2	2

Πίνακας 6.35: Συγκεντρωτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων

7 Συμπεράσματα – Ιδέες για μελλοντική Έρευνα

7.1 Σύνοψη της Μεθόδου

Συνοψίζοντας, με βάση τη μεθοδολογία που προηγήθηκε αλλά και τα λυμένα παραδείγματα, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

Πλεονεκτήματα

- Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε προσεγγίζει πολύ καλά την αναλυτική λύση. Πράγματι, οι αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν ήταν πολύ μικρές, της τάξης του 1%, και αυτό οφειλόταν στο γεγονός πως η αναλυτική λύση προσδιορίζει τη λύση μέσα σε διάστημα αριθμών.
- Η μεθοδολογία έχει γενική χρήση, και μπορεί να προσεγγίσει και προβλήματα που είναι δύσκολο να επιλυθούν με αναλυτική μέθοδο (π.χ. βελτιστοποίηση σχήματος). Εφαρμόζεται εξίσου καλά σε κάθε φορέα, είτε πλαίσιο, είτε δικτύωμα, ενώ μπορεί να λάβει υπόψη της όλων των ειδών τους περιορισμούς, μετακινήσεων, τάσεων, χρηματικών αποθεμάτων, ενώ μπορεί να λάβει υπόψη ακόμα περισσότερους με μικρές τροποποιήσεις και χωρίς ουσιαστική αλλαγή στην επίλυση. Επιπλέον, μπορεί εξίσου άνετα να χειριστεί φορείς με παραπάνω από μία περίπτωση φόρτισης, περιπτώσεις που δε συναντώνται στα βιβλιογραφικά παραδείγματα.
- Η μεθοδολογία δίνει μια πιο πρακτική λύση σε πραγματικά προβλήματα σε σχέση με την αναλυτική λύση. Σίγουρα η αναλυτική λύση τις περισσότερες φορές δίνει μια καλή υπόδειξη για το ποια διατομή πρέπει να επιλεγεί από έναν πίνακα με διακριτές επιλογές, όμως η προφανής απάντηση δεν είναι πάντα η σωστή. Πολλές φορές η βέλτιστη λύση περιλαμβάνει την επιλογή σε κάποιο μέλος διατομή μικρότερη από την αναλυτική της τιμή και μεγαλύτερη διατομή σε άλλο μέλος. Η επιλογή αμέσως μεγαλύτερης διατομής από την αναλυτική είναι μεν συντηρητική και ασφαλής, όμως όχι βέλτιστη.

Μειονεκτήματα

- Οι πολλές παράμετροι που απαιτούνται ακόμα και για μια απλή επίλυση, καθιστούν ορισμένες φορές δύσκολη τη χρήση της μεθοδολογίας, ιδιαίτερα από κάποιον ανεξοικείωτο χρήστη. Το πλήθος των παραμέτρων είναι εγγενής αδυναμία της μεθόδου και προκύπτει από την ανάγκη να εκφυλιστεί μια στατική ανάλυση σε έναν και μόνο αριθμό, την ωφέλεια που προσδίδει. Σίγουρα ο χρήστης δεν είναι εύκολο να γνωρίζει ακριβώς τη χρησιμότητα που του προσφέρει η κάθε μετακίνηση και τάση ξεχωριστά, όμως για την περίπτωση που το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει είναι συνηθισμένο (size optimization, shape optimization, κλπ.), τότε υπάρχει απλός τρόπος (βλ. ενότητα 4.4.3) για να αποφασίσει τι τιμή θα δώσει σε κάθε μεταβλητή. Σε περίπτωση που το πρόβλημα ξεφεύγει από τα συνηθισμένα, τότε η φύση των μεταβλητών είναι τέτοια ώστε η μεθοδολογία πάλι θα μπορέσει να δώσει την απάντηση, όμως θα πρέπει να δοθούν κατάλληλες τιμές σε πολλές παραμέτρους, πράγμα που απαιτεί πολλή προσοχή.

- Η μεθοδολογία που παρουσιάζεται δίνει λύση σε όλα τα προβλήματα, ακόμα και σε αυτά που δεν επιδέχονται λύση! Ο λόγος είναι απλός, οι περιορισμοί δίνονται κάθε φορά με τη μορφή μιας ποινής (penalty) σε περίπτωση που ξεπεραστεί κάποια οριακή τιμή με σκοπό οι κακοί σχεδιασμοί να αποκλειστούν στο τέλος. Όμως, σε προβλήματα τα οποία η ίδια η εκφώνηση καθιστά άλυτα (πχ πολύ μικρό budget, πολύ μεγάλα φορτία, κλπ.) τότε όλοι οι σχεδιασμοί θα είναι κακοί και η μεθοδολογία θα δώσει κάποιο αποτέλεσμα, το οποίο όμως ενδέχεται να είναι εντελώς εσφαλμένο (δηλαδή να μην είναι η καλύτερη λύση δεδομένων των συνθηκών). Γι’ αυτό το λόγο χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων, καθώς και στη συνάρτηση ωφέλειας, η οποία πάντα θα πρέπει να έχει υπερβολικά αρνητική τιμή αν κάποιος περιορισμός έχει ξεπεραστεί.

7.2 Κριτική των αλγοριθμικών Τεχνικών

Οι αλγοριθμικές τεχνικές που αναπτύχθηκαν αντιμετωπίζουν ικανοποιητικά το πρόβλημα που δημιουργεί το υπερβολικά μεγάλο μέγεθος του χώρου των λύσεων. Παρακάτω ακολουθεί μια σύνοψη για τον κάθε αλγόριθμο ξεχωριστά, καθώς και ιδέες για μελλοντική βελτίωσή τους.

Ο **Αλγόριθμος Κυριαρχίας** ήταν ο πρώτος χρονολογικά αλγόριθμος που εφαρμόστηκε για την επίλυση των προβλημάτων με την προτεινόμενη μεθοδολογία. Βασίζεται στη λογική Branch and Bound, η οποία στοχεύει με ένα πολύ μικρό πλήθος αναλύσεων να καταλήξει σε λογικά συμπεράσματα για ολόκληρο το χώρο λύσεων, «κλαδεύοντας» τα πολύ άσχημα παρακλάδια του.

Η μεθοδολογία αυτή είναι σωστά βασισμένη και μειώνει σημαντικά το χρόνο επίλυσης σβήνοντας πολύ μεγάλο μέρος των λύσεων, ωστόσο εμφανίζει ορισμένα μειονεκτήματα. Το γεγονός ότι απαιτεί τη δημιουργία ολόκληρου του χώρου των λύσεων καθιστά την τεχνική αυτή ασύμφορη υπολογιστικά για προβλήματα μεγάλου μεγέθους, καθώς θα προκύψουν προβλήματα τόσο στο χρόνο ανάλυσης, όσο και στη μνήμη του υπολογιστή. Επιπλέον, ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο αλγόριθμος προϋποθέτει τη σειριακή προσπέλαση των πιθανών λύσεων, κάτι που καθυστερεί σημαντικά την περάτωση των αναλύσεων.

Υπό τις παρούσες συνθήκες, ο αλγόριθμος αυτός κρίνεται ακατάλληλος για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων. Παρ’ όλα αυτά, ενδεχόμενη βελτίωση του αλγορίθμου αυτού (π.χ. με παράλληλο προγραμματισμό ή με κάποια προγραμματιστικά τρικ) ενδέχεται να καταστήσει τον αλγόριθμο κυριαρχίας ως ένα σημαντικό κομμάτι του οπλοστασίου επίλυσης μεγάλων προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Ο **Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης** δημιουργήθηκε για να καλύψει τα κενά που εμφάνιζε ο Αλγόριθμος Κυριαρχίας, βασιζόμενος στη λογική Look Ahead. Κάνοντας κάποιες καλές υποθέσεις αναφορικά με τη συμπεριφορά του φορέα, ανάλογα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν, βρίσκει ένα μονοπάτι μέσα στο χαοτικό χώρο των λύσεων, εξερευνώντας μόνο γειτονιές λύσεων, περιορίζοντας έτσι τους ορίζοντες της ανάλυσης στις λύσεις που είναι πιο πιθανό να είναι βέλτιστες.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημά του είναι πως μπορεί σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα να δώσει μια πολύ καλή λύση, η οποία έχει ρεαλιστικές πιθανότητες να είναι η απολύτως βέλτιστη. Ένα άλλο πλεονέκτημα του αλγορίθμου είναι ότι δίνει αναλυτικά το μονοπάτι των λύσεων, μέσω του οποίου καταλήγει στη λύση που προτείνει. Με αυτό τον τρόπο μπορεί κανείς να έχει μια εικόνα για τη συμπεριφορά και τις ανάγκες του φορέα.

Παρ’ όλα αυτά, ο αλγόριθμος παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα. Ίσως το πιο σοβαρό από αυτά να είναι το γεγονός ότι ο αλγόριθμος δεν έχει τη δυνατότητα να κάνει «τολμηρά άλματα», δηλαδή να μεταβάλλει απότομα προς τα πάνω ή προς τα κάτω τη διατομή ενός ή περισσοτέρων μελών. Γι’ αυτό το λόγο κάποιες φορές εγκλωβίζεται σε τοπικά ακρότατα, και αδυνατεί να εντοπίσει το παγκόσμιο βέλτιστο. Επιπλέον, για φορείς με πολύ μεγάλο αριθμό ομάδων μελών, αντιμετωπίζει τα ίδια προβλήματα που αντιμετωπίζει και ο Αλγόριθμος Κυριαρχίας, καθώς η κάθε γειτονιά γίνεται ασύμφορα μεγάλη (αφού στον υπολογισμό του μεγέθους της γειτονιάς το πλήθος των ομάδων μελών βρίσκεται στον εκθέτη). Τέλος, ορισμένες φορές η αναλυτική προσπέλαση κάθε λύσης της γειτονιάς μπορεί να καθυστερήσει λίγο τον αλγόριθμο.

Συνοψίζοντας, ο Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης κρίνεται κατάλληλος για εύρεση πολύ καλής λύσης σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα (ευρετικός χαρακτήρας), όμως εμφανίζει αδυναμίες στην εύρεση του παγκόσμιου βέλτιστου. Μια πιθανή ιδέα για τη βελτίωση της απόδοσής του θα ήταν ίσως η εισαγωγή κάποιας πιθανότητας αυτόματης και αυθαίρετης μεταβολής της λύσης (ανάλογης με τη μετάλλαξη στους γενετικούς αλγορίθμους), ώστε να προκύψει μια τυχαιότητα η οποία θα επιτρέψει στον αλγόριθμο να ξεφύγει από πιθανούς εγκλωβισμούς. Ακόμη, ενδεχόμενος συνδυασμός του Αλγορίθμου Σταδιακής Απομείωσης με τον Αλγόριθμο Κυριαρχίας πιθανόν να επιταχύνει την επαναληπτική διαδικασία αναζήτησης λύσης στην κάθε γειτονιά.

Ο **Αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτησης** είναι γνωστός και καταξιωμένος αλγόριθμος, του οποίου η αξία φυσικά δεν εξαρτάται από τα αποτελέσματα που δίνει με την παρούσα μεθοδολογία. Παρ’ όλα αυτά, τα αποτελέσματα του ήταν πολύ ενθαρρυντικά, καθώς σχεδόν σε κάθε περίπτωση έδινε συστηματικά το παγκόσμιο βέλτιστο που αναζητιόταν. Πολύ μεγάλο προσόν του αλγορίθμου (ειδικά σε σύγκριση με τους υπόλοιπους που εφαρμόστηκαν στα πλαίσια της εργασίας) είναι η δυνατότητά του να χειριστεί ακόμα και τα πιο μεγάλα προβλήματα, χωρίς κανένα πρόβλημα μνήμης υπολογιστή.

Το μοναδικό μειονέκτημα του αλγορίθμου ήταν ο χρόνος εκτέλεσης, καθώς ήταν σημαντικά μεγαλύτερος από τους χρόνους εκτέλεσης των άλλων αλγορίθμων. Πιθανώς αυτό να οφείλεται και σε κακή επιλογή των παραμέτρων (σύστημα ψύξης, πλήθος κύκλων, κλπ.), ίσως όμως να είναι και εγγενές προϊόν της μεθόδου, καθώς σε αντίθεση με τους υπόλοιπους αλγορίθμους, ο τρόπος λειτουργίας του αλγορίθμου είναι αμιγώς πιθανοτικός, χωρίς να αντιλαμβάνεται τις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες του φορέα.

Καθώς ο κώδικας και οι επιλογές των παραμέτρων του αλγορίθμου έχουν γίνει με προγραμματισμό από το γράφοντα, σίγουρα η απόδοση του αλγορίθμου θα βελτιωνόταν στην περίπτωση που με κάποιο τρόπο συνδεόταν η επίλυση του προβλήματος με την υπορουτίνα simulated annealing που υπάρχει στο πολύ ισχυρό toolbox του Matlab. Αυτό δεν κατέστη δυνατό, καθώς η ρουτίνα που υπήρχε εκτελούσε προσομοιωμένη ανόπτηση για προβλήματα ελαχιστοποίησης με συνεχείς μεταβλητές σχεδιασμού, όμως ενδέχεται με κάποια προγραμματιστικά τρικ να είναι δυνατό να εκμεταλλευτεί κανείς τη σημαντικά μεγαλύτερη ισχύ της συγκεκριμένης υπορουτίνας.

7.3 Ιδέες για μελλοντική Έρευνα

Κατά τη μελέτη του παρόντος θέματος προέκυψαν ειδικά ζητήματα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, η διερεύνηση των οποίων δεν ήραν εφικτή στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Τέτοια θέματα αφορούσαν αφ’ ενός τη βελτίωση των αναπτυχθέντων υπολογιστικών εργαλείων, αφ’ ετέρου τη μελέτη περισσότερων θεμάτων, στα οποία η θεωρία παιγνίων εφαρμόζεται στο αντικείμενο του πολιτικού μηχανικού. Τέτοια θέματα είναι τα παρακάτω:

- Ο Αλγόριθμος Κυριαρχίας λειτουργεί, αλλά με απόδοση χαμηλότερη από την αναμενόμενη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αφιερώνεται πολύς χρόνος στη σειριακή εξέταση όλων των λύσεων, γεγονός που τον καθιστά εξαιρετικά χρονοβόρο. Επίσης, η ανάγκη δημιουργίας ολόκληρου του χώρου λύσεων προκαλεί σοβαρά προβλήματα μνήμης υπολογιστή. Παρ’ όλα αυτά, η λογική του αλγόριθμου είναι στο πνεύμα της θεωρίας παιγνίων. Εκτιμάται πως ο αλγόριθμος κυριαρχίας μπορεί να βελτιωθεί, πιθανώς με διαφορετική προγραμματιστική λογική (π.χ. παράλληλος προγραμματισμός). Σε αυτή την περίπτωση αναμένεται να δώσει πολύ καλά αποτελέσματα, σε πραγματικό χρόνο, ακόμα και για μεγάλου μεγέθους προβλήματα, όμως ο ισχυρισμός αυτός μένει ακόμα να αποδειχθεί.

- Σε αντίθεση με τα προβλήματα ελαχιστοποίησης βάρους, τοπολογίας και οικονομικών περιορισμών, το πρόβλημα βελτιστοποίησης σχήματος δείχνει να αντιμετωπίζεται λιγότερο καλά από τη ΜΜΕΩ. Αυτό οφείλεται πιθανόν στο γεγονός ότι έχει αρκετά «συνεχή» χαρακτήρα, ενώ η ΜΜΕΩ λειτουργεί καλύτερα σε πιο διακριτά προβλήματα.
- Η θεωρία παιγνίων ενδέχεται να έχει εφαρμογή και στη θεωρία πλαστικότητας, στην εύρεση του κρίσιμου μηχανισμού κατάρρευσης. Η τελική επιλογή του μηχανισμού κατάρρευσης μπορεί να γίνει με τη διεξαγωγή κάποιας ψηφοφορίας. Είτε οι πιθανοί μηχανισμοί κατάρρευσης είτε οι υποψήφιες θέσεις πλαστικής άρθρωσης μπορούν να είναι οι υποψήφιες εναλλακτικές, ανάμεσα στις οποίες καλούνται να διαλέξουν οι ψηφοφόροι, το ρόλο των οποίων μπορούν να παίξουν οι διάφορες φορτίσεις της κατασκευής. Εκτιμάται πάντως πως και σε αυτή την περίπτωση θα χρειαστεί η ανάπτυξη ευρετικών αλγορίθμων, καθώς οι πιθανές εναλλακτικές ενδέχεται να γίνουν πάρα πολλές.
- Ένα κλασικό πρόβλημα που καλούνται να απαντήσουν πολλοί μηχανικοί είναι η υποβολή προσφοράς για την ανάληψη έργου. Συνήθως, η διαδικασία αντιστοιχεί πλήρως σε δημοπρασία πρώτης τιμής, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2, με μοναδική διαφορά ότι τη δημοπρασία θα κερδίσει ο υποψήφιος που θα υποβάλει τη χαμηλότερη προσφορά. Το κεφάλαιο 3, δίνει μερικές πρώτες συμβουλές, αλλά σε καμία περίπτωση το πρόβλημα δε λύνεται πλήρως, καθώς οι απλοποιήσεις είναι πολλές. Προτείνεται η εκτενής μελέτη του θέματος, με ενσωμάτωση πιθανών αβεβαιοτήτων στις γνώσεις του υποψήφιου, με στόχο τη διαμόρφωση κάποιας στρατηγικής, πρακτικά εφαρμόσιμης σε τέτοιες διαδικασίες.

Βιβλιογραφία

[1] K. Binmore, Game Theory: A Very Short Introduction, New York: Oxford University Press Inc., 2007.

[2] K. Binmore, Playing for Real, New York: Oxford University Press, Inc., 2007.

[3] O. M. Jackson, K. Leyton-Brown και Y. Shoham, «Coursera, Game Theory Online Class,» 2013-2014. [Ηλεκτρονικό]. Available: https://www.coursera.org/course/gametheory.

[4] K. Arrow, «A difficulty in the concept of social welfare,» *Journal of Political Economy,* αρ. 4, 1950.

[5] K. G. Murty, Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming, 1988.

[6] C. E. Lemke και J. T. Howson, «Equilibrium Points of Bimatrix Games,» *SIAM Journal on Applied Mathematics,* τόμ. 12, αρ. 2, pp. 413-423, 1964.

[7] O. M. Jackson, K. Leyton-Brown και Y. Shoham, «Coursera, Game Theory 2 Online Class,» 2014. [Ηλεκτρονικό]. Available: https://www.coursera.org/course/gametheory2.

[8] A. Rubinstein, «Perfect Equilibrium in a Bargaining Model,» *Econometrica,* τόμ. 50, pp. 97-109, 1982.

[9] N. J. Bearden, Ultimatum Bargaining Experiments: The State of the Art, 2001.

[10] G. Kirchsteiger, «The role of envy in ultimatum games,» *Journal of Economic Behavior and Organization,* τόμ. 25, αρ. 1994, pp. 373-389, 1993.

[11] Χ. Κυρανούδης, Μηχανική Συστημάτων Εφοδιαστικής Διαχείρισης, Αθήνα: ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ, 2013.

[12] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt και M. P. Vecchi, «Optimization by Simulated Annealing,» *Science,* τόμ. 220, αρ. 4598, pp. 671-680, 1983.

[13] V. Černý, «Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm,» *Journal of Optimization Theory and Applications,* τόμ. 45, pp. 41-51, 1985.

[14] M.-W. Park και Y.-D. Kim, «A Systematic Procedure for Setting Parameters in Simulated Annealing Algorithms,» *Computers & Operations Research,* τόμ. 25, αρ. 3, pp. 207-217, 1998.

[15] S. D. Rajan, «Sizing, shape and topology design optimization of trusses using genetic algorithm,» *Journal of Structural Engineering,* τόμ. 121, αρ. 10, pp. 1480-1487, 1995.

[16] W. Tang, L. Tong και Y. Gu, «Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* τόμ. 62, p. 1737–1762, 2005.

[17] U. Kirsch, «On the relationship between optimum structural topologies and geometries,» *Structural and Multidisciplinary Optimization,* τόμ. 2, αρ. 1, pp. 39-45, 1990.

[18] S. Ruiyi, G. Liangjin και F. Zijie, «Truss Topology Optimization Using Genetic Algorithm with Individual Identification Technique,» σε *World Congress on Engineering*, London, 2009.

[19] R. J. Balling, R. R. Briggs και K. Gillman, «Multiple Optimum Size/Shape/Topology Designs for Skeletal Structures Using a Genetic Algorithm,» *Journal of Structural Engineering,* τόμ. 132, pp. 1158-1165, 2006.

[20] L. J. Li, Z. B. Huang και F. Liu, «A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables,» *Computers and Structures,* τόμ. 87, p. 435–443, 2009.

[21] S. Rajeev και C. S. Krishnamoorthy, «Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms,» *Journal of Structural Engineering,* τόμ. 118, pp. 1233-1250, 1992.

[22] J. Von Neumann και O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton: Princeton University Press, 1953.

[23] L. Brouwer, «Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten,» *Mathematische Annalen,* τόμ. 71, pp. 97-115, 1911.

Παράρτημα: Απόδειξη Θεωρήματος Minimax

Η παρακάτω απόδειξη αφορά ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, δύο παικτών, με μητρώο απολαβών A για τον Παίκτη Α και $-A$ για τον Παίκτη Β. Έστω πως ο Παίκτης Α επιλέγει από το σύνολο καθαρών στρατηγικών $\{a_1 \quad \dots \quad a_m\}$, ενώ ο Παίκτης Β επιλέγει από το σύνολο καθαρών στρατηγικών $\{\beta_1 \quad \dots \quad \beta_n\}$. Αν ο Παίκτης Α χρησιμοποιήσει το προφίλ μικτών στρατηγικών x και ο Παίκτης Β χρησιμοποιήσει το προφίλ μικτών στρατηγικών y, τότε η ωφέλεια που θα αποκομίσει ο Παίκτης Α ορίζεται ως:

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{i,j} y_j$$

Έστω $\underline{m} = \max_{x \in X_m} \min_{y \in Y_n} V(x,y)$, $\overline{m} = \min_{y \in Y_n} \max_{x \in X_m} V(x,y)$ οι ποσότητες minimax και maximin για τον παίκτη Α.

Πρόταση: $\text{Minimax} \le \text{Maximin}$, $\underline{m} \le \overline{m}$.

<u>Απόδειξη:</u>

$\max_{x \in X_m} V(x,y) \ge \max_{x \in X_m} \min_{y \in Y_n} V(x,y) = \underline{m}$.

Άρα και $\overline{m} = \min_{y \in Y_n} \max_{x \in X_m} V(x,y) \ge \underline{m}$

Συνεπώς $\underline{m} \le \overline{m}$.

Ορίζονται οι ποσότητες:

$$c_i(x,y) = \left[V(a_i,y) - V(x,y)\right] \cdot H\left(V(a_i,y) - V(x,y)\right)$$

$$d_j(x,y) = \left[V(x,y) - V(x,\beta_j)\right] \cdot H\left(V(x,y) - V(x,\beta_j)\right)$$

Όπου $H(x)$ η συνάρτηση Heaviside, η οποία παίρνει την τιμή 1 για $x > 0$ και 0 σε διαφορετική περίπτωση. Τότε, η ποσότητα c_i εκφράζει κατά πόσο η καθαρή στρατηγική a_i είναι καλύτερη (αν είναι καλύτερη) από το προφίλ μικτών στρατηγικών x. Ομοίως, η ποσότητα d_j εκφράζει κατά πόσο η καθαρή στρατηγική β_j είναι καλύτερη (αν είναι καλύτερη) από το προφίλ μικτών στρατηγικών y.

Ορίζεται η συνάρτηση $T(x,y) = \left(x'(x,y), y'(x,y)\right)$ με

$$x_i' = \frac{x_i + c_i\left(x, y\right)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k\left(x, y\right)},\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$y_j' = \frac{y_j + d_j\left(x, y\right)}{1 + \sum_{k=1}^{m} d_k\left(x, y\right)},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Αρχικά, αποδεικνύεται πως για τη συνάρτηση $T\left(x, y\right)$ το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών ταυτίζονται. Αυτό είναι αρκετά εύκολο να αποδειχτεί. Φυσικά, το πεδίο τιμών της $T\left(x, y\right)$ είναι το $X_m \times Y_n$. Παρατηρώντας πως όλοι οι όροι του x_i' είναι μη αρνητικές ποσότητες, είναι προφανές πως $x_i' \geq 0$. Επιπλέον, ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i' = \left(\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k\left(x, y\right)} \right) \sum_{i=1}^{m} \left(x_i + c_i\left(x, y\right) \right) = 1$$

Καθώς όλα τα x_i' είναι μη αρνητικές ποσότητες, είναι λογικό πως $x_i' \leq 1, \forall i$. Ανάλογοι συλλογισμοί ισχύουν και για το y_j', είναι εύκολο να αποδειχτεί πως $y_j' \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{m} y_j' = 1$. Επομένως, ισχύει ότι $T\left(x, y\right) : X_m \times Y_n \to X_m \times Y_n \subset \mathbb{R}^{m+n}$.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί το ακόλουθο θεώρημα:

Brouwer's Fixed Point Theorem: Έστω $K \subset \mathbb{R}^p$ ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο. Αν $f : K \to K$ συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει $\hat{x} \in K : f\left(\hat{x}\right) = \hat{x}$.

Το θεώρημα του Brouwer ισχύει για τη συνάρτηση T, συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\left(\hat{x}, \hat{y}\right) : T\left(\hat{x}, \hat{y}\right) = \left(\hat{x}, \hat{y}\right)$.

Θα αποδειχτεί ότι το $\left(\hat{x}, \hat{y}\right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash για το παίγνιο. Καθώς ισχύει πως $V\left(\hat{x}, \hat{y}\right) = \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i V\left(a_i, \hat{y}\right)$ και $0 \leq \hat{x}_i \leq 1,\ \forall i$, προκύπτει πως υπάρχει τουλάχιστον ένα i_0 για το οποίο να ισχύει ταυτόχρονα $\hat{x}_{i_0} > 0$ και $V\left(\hat{x}, \hat{y}\right) \geq V\left(a_i, \hat{y}\right)$ δηλαδή $c_{i_0}\left(\hat{x}, \hat{y}\right) = 0$. Όμως επιπλέον ισχύει:

$$T\left(\hat{x}_{i_0}\right)=\left(\hat{x}_{i_0}\right)\Rightarrow\frac{\hat{x}_{i_0}+c_{i_0}\left(\hat{x},\hat{y}\right)}{1+\sum_{k=1}^{m}c_k\left(\hat{x},\hat{y}\right)}=\hat{x}_{i_0}\Rightarrow\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m}c_k\left(\hat{x},\hat{y}\right)}=1\Rightarrow\sum_{k=1}^{m}c_k\left(\hat{x},\hat{y}\right)=0$$

Καθώς $c_i\left(\hat{x},\hat{y}\right)\geq 0$, για να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει ότι $c_i\left(\hat{x},\hat{y}\right)=0,\ \forall i$. Δηλαδή, επιστρέφοντας στη φυσική ερμηνεία του c_i, το προφίλ μικτής στρατηγικής $\hat{x}$ δεν υστερεί από καμία καθαρή στρατηγική a_i απέναντι στη στρατηγική $\hat{y}$. Δηλαδή, το προφίλ μικτής στρατηγικής $\hat{x}$ ανήκει στο σύνολο των καλύτερων απαντήσεων στη στρατηγική $\hat{y}$. Με ανάλογο συλλογισμό αποδεικνύεται και το αντίστροφο, δηλαδή ότι το προφίλ μικτής στρατηγικής $\hat{y}$ ανήκει στο σύνολο των καλύτερων απαντήσεων στη στρατηγική $\hat{x}$. Συνεπώς, το ζεύγος $\left(\hat{x},\hat{y}\right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash. Οπότε:

$$\overline{m}=\min_{y\in Y_n}\max_{x\in X_m}V\left(x,y\right)\leq\max_{x\in X_m}V\left(x,\hat{y}\right)=V\left(\hat{x},\hat{y}\right)=\min_{y\in Y_n}V\left(\hat{x},y\right)\leq\max_{x\in X_m}\min_{y\in Y_n}V\left(x,y\right)=\underline{m}$$

Επειδή όμως ταυτόχρονα ισχύει ότι $\underline{m}\leq\overline{m}$, προκύπτει ότι $\underline{m}=\overline{m}=V^*$. Η ποσότητα V^* είναι και η τελική αξία του παιγνίου, η οποία θα προκύψει από το ζεύγος στρατηγικών $\left(\hat{x},\hat{y}\right)$.