

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



## ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική εργασία

### ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΕΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

*Μανώλης Αλυσανδράτος*

Αρ. Μητρώου 09102211

Υπεύθυνος καθηγητής *Γεράσιμος Σπαθής*

Ιούλιος 2014

## Περιεχόμενα

|   |    |
|---|----|
| 1. Εισαγωγή .....                                 | 3  |
| 2. Βασικοί Ορισμοί.....                           | 4  |
| Μηχανική συμπεριφορά υλικών.....                  | 6  |
| 3. Εισαγωγή στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα ..... | 8  |
| Πείραμα ερπυσμού .....                            | 8  |
| Βασικά στοιχεία και συνδυασμοί.....               | 9  |
| Διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις.....       | 16 |
| 4. Μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα.....             | 21 |
| 4.α. Σταθερή τάση .....                           | 21 |
| 4.β. Μεταβλητή τάση .....                         | 30 |
| 5. Σύγκριση υποθέσεων και παραδείγματα.....       | 43 |
| Παράδειγμα 1 .....                                | 51 |
| Παράδειγμα 2 .....                                | 58 |
| 6. Επίλογος .....                                 | 62 |
| Βιβλιογραφία .....                                | 64 |

## 1. Εισαγωγή

Ιξωδοελαστικότητα είναι η διπλή ιδιότητα των υλικών να εμφανίζουν ελαστικά αλλά και ιξώδη χαρακτηριστικά. Τα ελαστικά υλικά έχουν την ιδιότητα να επιστρέφουν στην αρχική γεωμετρική τους μορφή όταν απομακρυνθεί η τάση που τους εφαρμόζεται. Από την άλλη, τα ιξώδη υλικά αντιστέκονται στην διατμητική ροή και υπό την επίδραση τάσης η τροπή τους μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Έτσι, η ιξωδοελαστικότητα ως θεωρία, συνδυάζει αυτές τις δύο ιδιότητες για να μας δώσει μια καλύτερη περιγραφή των υλικών, αφού τα περισσότερα βιομηχανικά υλικά που χρησιμοποιούνται δεν παρουσιάζουν μόνο ελαστική συμπεριφορά αλλά έχουν και ιδιότητες ανελαστικής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα ιξωδοελαστικών υλικών είναι το γυαλί, τα κεραμικά, τα βιολικά και γενικότερα όλα τα μη μεταλλικά υλικά.

Ιστορικά, η θεωρία της ιξωδοελαστικότητας άρχισε να εξελίσσεται από τον 19<sup>ο</sup> αιώνα από φυσικούς όπως ο Μάξγουελ, ο Μπόλτζμαν και ο Κέλβιν, οι οποίοι έκαναν πειράματα ερπυσμού με υλικά όπως το γυαλί και διάφορα μέταλλα. Πραγματική ανάπτυξη της θεωρίας, όμως, έγινε στα τέλη του 20<sup>ου</sup> αιώνα όπου η μελέτη της κατέστη αναγκαία δεδομένου της ευρείας χρήσης συνθετικών πολυμερών στη βιομηχανία.

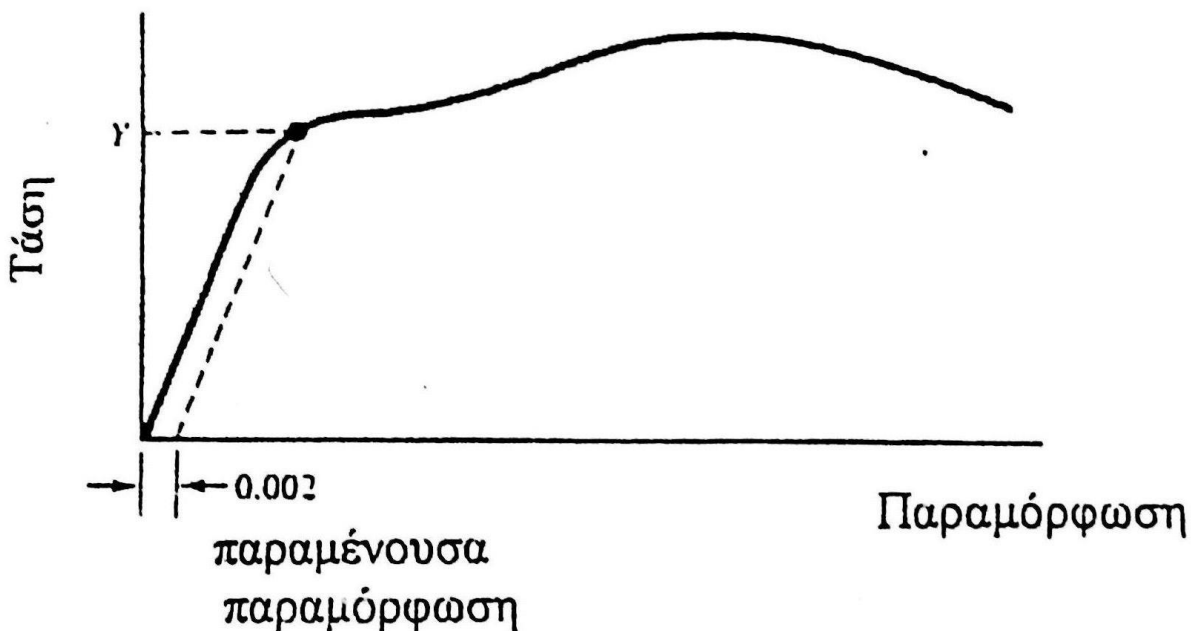
## 2. Βασικοί Ορισμοί

Πριν ξεκινήσουμε να εμβαθύνουμε, είναι αναγκαίο να αναφέρουμε κάποιους βασικούς ορισμούς που θα χρησιμοποιούνται συχνά.

- Τάση:  $\sigma = \frac{F}{A_0}$
- Ανηγμένη παραμόρφωση ή τροπή:  $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$
- Μέτρο ελαστικότητας:  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

Όπου  $F$  η δύναμη που εφαρμόζεται,  $A_0$  το εμβαδόν της διατομής που εφαρμόζεται η δύναμη,  $l_0$  το αρχικό μήκος της ράβδου και  $l$  το τελικό μήκος της ράβδου.

Για να ελέγξουμε τη σχέση μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων, θα πρέπει να αναλύσουμε το πείραμα του εφελκυσμού.



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Το παραπάνω διάγραμμα αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα εφελκυσμού και αναφέρεται στον μαλακό χάλυβα. Αν το αναλύσουμε, βλέπουμε ότι αποτελείται από μια αρχική ευθεία, η οποία αναλογεί στην ελαστική συμπεριφορά του υλικού. Η κλίση της ευθείας ισοδυναμεί με το μέτρο ελαστικότητας  $E$  του Young από τον νόμο του Hooke και η σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης σε αυτό το σημείο είναι ακόμα γραμμική. Όταν, όμως, η τάση ξεπεράσει μία τιμή η οποία ονομάζεται **όριο αναλογίας**, η σχέση τάσης-παραμόρφωσης παύει να είναι γραμμική και η συμπεριφορά του υλικού γίνεται ανελαστική.

Περαιτέρω, πρέπει να σημειωθεί πως αν το υλικό είναι φορτισμένο με τιμή μικρότερη του ορίου αναλογίας και μετά αποφορτιστεί, επιστρέφει στην αρχική του μορφή ακολουθώντας ακριβώς την ίδια πορεία της αρχικής καμπύλης φόρτισης. Αν, όμως, φορτίσουμε τον χάλυβα με τάση μεγαλύτερη του ορίου αναλογίας, δεν θα επιστρέψει στην αρχική του γεωμετρία αν αποφορτιστεί. Η τιμή που ξεκινάει αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται **όριο ελαστικότητας** και για τα περισσότερα υλικά αυτού του τύπου είναι πολύ κοντά στο όριο αναλογίας. Τα υλικά αυτά ονομάζονται γραμμικά ελαστικά. Το όριο ελαστικότητας όμως έχει ένα μεγάλο μειονέκτημα. Είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί. Έτσι, εισάγεται μία νέα έννοια, η **τάση διαρροής  $Y$** , όπου εάν το υλικό αποφορτιστεί, παραμένει μία πολύ μικρή παραμόρφωση της τάξης του 0,002.

Στη συνέχεια, παρατηρώντας το διάγραμμα μετά την τάση διαρροής, βλέπουμε μια μικρή πτώση στην τιμή της τάσης, η οποία στην συνέχεια θα αυξηθεί μέχρι το υλικό να φτάσει εν τέλει στην θραύση. Η περιοχή αυτή, όπου η τάση αυξάνεται μέχρι να αστοχήσει το υλικό, λέγεται **κράτνωση** και αντιπροσωπεύει πληθώρα υλικών.

Παρόλο που το παραπάνω πείραμα και διάγραμμα αντιπροσωπεύουν ένα ευρύ φάσμα από υλικά, δεν τα χαρακτηρίζει όλα. Ορισμένα υλικά όπως τα ελαστομερή, έχουν όριο ελαστικότητας πολύ μεγαλύτερο από το όριο αναλογίας αλλά, όταν αποφορτίζονται επιστρέφουν στην αρχική τους γεωμετρία ακολουθώντας και αυτά την αρχική καμπύλη φόρτισης. Τα ανελαστικά υλικά από την άλλη, όταν αποφορτιστούν, επιστρέφουν στην αρχική τους μορφή αλλά με διαφορετική πορεία από την αρχική καμπύλη φόρτισης.

## Μηχανική συμπεριφορά υλικών

Πριν συνεχίσουμε στον ορισμό της ιξωδοελαστικότητας είναι σημαντικό να αναφέρουμε τα είδη της μηχανικής συμπεριφοράς που παρουσιάζουν τα υλικά.

### **1. Ελαστική συμπεριφορά**

Όπως αναφέρθηκε ήδη προηγουμένως, ελαστική είναι η συμπεριφορά των υλικών να επιστρέφουν στην αρχική τους γεωμετρική κατάσταση μετά το πέρας της φόρτισης που τους εφαρμόζεται. Αυτό γίνεται δίχως απώλεια ενέργειας και έτσι, το υλικό ακολουθεί ακριβώς την ίδια καμπύλη που είχε στην φόρτιση. Ο τρόπος που εκφράζονται στην μηχανική οι ελαστικές ιδιότητες είναι με το μοντέλο του ελατηρίου και η ανηγμένη παραμόρφωση είναι συναρτήσει της τάσης:

$$\varepsilon_{zz} = f(\sigma_{zz})$$

$$\text{Και επειδή } E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\text{Παίρνω } f(\sigma_{zz}) = \frac{\sigma_{zz}}{E} \text{ αν το υλικό είναι γραμμικό ελαστικό}$$

$$\text{Και } f(\sigma_{zz}) \neq \frac{\sigma_{zz}}{E} \text{ αν το υλικό είναι μη-γραμμικό ελαστικό.}$$

### **2. Πλαστική συμπεριφορά**

Αυτή η συμπεριφορά των υλικών, εμφανίζεται στην περίπτωση όπου μετά την αποφόρτισή τους, οι παραμορφώσεις είναι μόνιμες. Αυτό βεβαίως για να συμβεί πρέπει να ξεπεράσουμε το όριο ελαστικότητας.

### **3. Ιξώδης συμπεριφορά**

Η ιξώδης συμπεριφορά, εμφανίζεται όταν κατά την διάρκεια μοναξονικής φόρτισης υπάρχει εξάρτηση μεταξύ του ρυθμού παραμόρφωσης και της εφαρμοζόμενης τάσης. Αυτό δίνει συμπεριφορά του υλικού παρεμφερή με τα υγρά. Η εξάρτηση αυτή δίνεται από την σχέση:

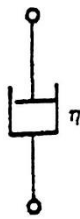
$$\frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{zz} = g(\sigma_{zz})$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Στην περίπτωση αυτή, κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης προκύπτουν απώλειες ενέργειας και μετά την απομάκρυνση του φορτίου δεν επέρχεται άμεσα επαναφορά στις αρχικές γεωμετρικές συνθήκες. Και αυτή η συμπεριφορά χωρίζεται σε γραμμική και μη-γραμμική. Για την γραμμική ιξώδη συμπεριφορά ισχύει η σχέση:

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\eta}, \quad \text{όπου } \eta \text{ ο συντελεστής ιξώδους.}$$

Αντιστοίχως, το μηχανικό ανάλογο στα προβλήματα με ιξώδες είναι ο απορροφητήρας και συμβολίζεται ως εξής:



Ιξώδες  
Newtonian

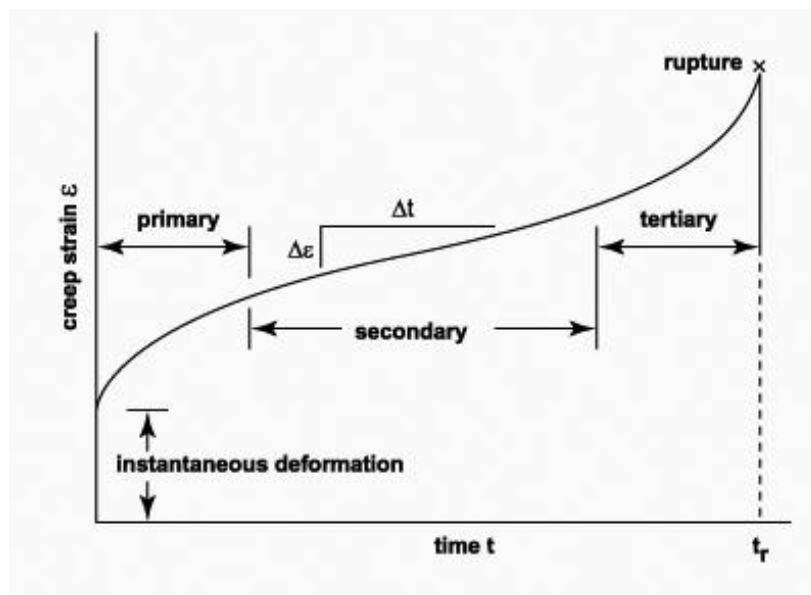


μη-γραμμικό ιξώδες  
Stokes

### 3. Εισαγωγή στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα

#### Πείραμα ερπυσμού

Αφού αναλύθηκαν η ελαστικότητα και το ιξώδες, μπορεί πλέον να γίνει κατάλληλος συνδυασμός μεταξύ τους, για να αναπτυχθεί η θεωρία της ιξωδοελαστικότητας. Για να γίνει αυτό, πρέπει να εξεταστεί το πείραμα του ερπυσμού (creep), δηλαδή η συμπεριφορά του υλικού υπό σταθερή τάση. Και πάλι θα αναλυθεί ένα διάγραμμα όπου αυτή τη φορά θα είναι η τροπή σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Όπως φαίνεται και στο σχήμα, υπάρχουν τέσσερις χαρακτηριστικές περιοχές:

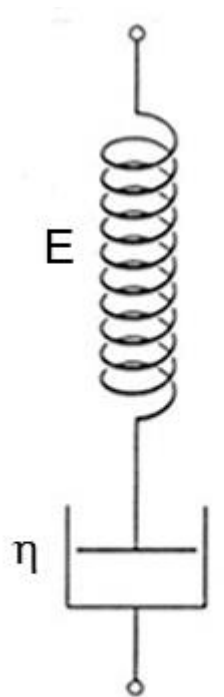
- 1) Αρχική ελαστική απόκριση (instantaneous deformation): Αμέσως μετά την φόρτιση αναπτύσσεται μια ακαριαία ελαστική παραμόρφωση  $\epsilon_e$ . Αν συνεχιστεί η φόρτιση, το υλικό περνάει στην επόμενη περιοχή του γραφήματος .
- 2) Πρωτογενής ερπυσμός (primary): Σε αυτήν την φάση ο ρυθμός που αυξάνεται η τροπή είναι μεγάλος στην αρχή ενώ μετά μειώνεται συνεχώς. Η όλη χρονική διάρκεια αυτής της περιοχής είναι αρκετά μικρή, έτσι, θα λαμβάνεται υπόψιν κυρίως όταν το φορτίο δρα για λίγο χρόνο. Διαφορετικά, θεωρείται αμελητέο.
- 3) Δευτερογενής ερπυσμός (secondary): Στην περιοχή αυτή του διαγράμματος ο ρυθμός αύξησης της ανηγμένης παραμόρφωσης είναι σχεδόν σταθερός και όπως φαίνεται στο σχήμα η καμπύλη μοιάζει με ευθεία.
- 4) Τριτογενής ερπυσμός (tertiary): Στην τέταρτη και τελευταία περιοχή, ο ρυθμός μεταβολής της τροπής επιταχύνει έως ότου το υλικό υποστεί θραύση.



## Βασικά στοιχεία και συνδυασμοί

### 1. Στοιχείο Maxwell

Έχοντας τα δύο βασικά στοιχεία, δηλαδή το ελατήριο για την ελαστικότητα και τον απορροφητήρα για το ιξώδες, αυτό που μένει είναι ο τρόπος που θα συνδυαστούν. Ο πρώτος είναι το στοιχείο Maxwell. Σύμφωνα με αυτό, συνδέεται ένα πρότυπο ελατήριο, το οποίο ακολουθεί το νόμο του Hooke ( $\sigma = \varepsilon E$ ), **σε σειρά** με ένα απορροφητήρα για τον οποίο ισχύει  $P = k \frac{du}{dt}$ , όπου  $P$  η δύναμη που του εφαρμόζεται. Αυτό, με όρους τάσης γράφεται  $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon}$ . Η σχηματική αναπαράσταση φαίνεται παρακάτω.



Maxwell

Όπως είναι προφανές, η τάση που ασκείται είναι κοινή για το ελατήριο ( $\sigma_S$ ) και για τον απορροφητήρα ( $\sigma_D$ ). Η ανηγμένη παραμόρφωση, όμως, θα είναι το άθροισμα των δύο ξεχωριστά. Έτσι, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\sigma = \sigma_S = \sigma_D$$

$$\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Για το άθροισμα της 2<sup>ης</sup> σχέσης ισχύει:

$$\sigma_S = \varepsilon_S E \Leftrightarrow \varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E} \quad \text{για το ελατήριο και}$$

$$\dot{\varepsilon}_D = \frac{\sigma_D}{\eta} \quad \text{για τον απορροφητήρα}$$

Οπότε, με παραγωγή της σχέσης των παραμορφώσεων θα προκύψει η σχέση:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_S + \dot{\varepsilon}_D$$

και με αντικατάσταση:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_S}{E} + \frac{\sigma_D}{\eta}$$

Η τελευταία σχέση είναι η καταστατική εξίσωση για το στοιχείο Maxwell.

### Πείραμα ερπυσμού σε στοιχείο Maxwell

Υποβάλουμε ένα υλικό με χαρακτηριστικά στοιχείου Maxwell σε ερπυσμό. Αυτό σημαίνει ότι επιβάλλουμε ακαριαία δύναμη στην αρχική χρονική στιγμή για  $t=0$ , το οποίο γράφεται  $\sigma(t)=\sigma_0 u(t)$ , όπου  $u(t)$  είναι η συνάρτηση βήματος. Αντικαθιστούμε στις παραπάνω σχέσεις για το στοιχείο Maxwell την προηγούμενη εξίσωση και παίρνουμε:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \frac{d}{dt} u(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} u(t)$$

και

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \delta(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} u(t)$$

και με ολοκλήρωση δίνεται:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) u(t)$$

Αν παρασταθεί γραφικά το πείραμα του ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell σε άξονες  $\varepsilon(t)$  και  $t$ , παρατηρείται ότι το υλικό ξεκινάει με συμπεριφορά στερεού ελαστικού και στη συνέχεια όσο περνάει ο χρόνος προσεγγίζει την συμπεριφορά ιξώδους υγρού.

Πείραμα χαλάρωσης σε στοιχείο Maxwell

Στο πείραμα χαλάρωσης, αντί για αρχική ακαριαία τάση, επιβάλλεται αρχική ακαριαία παραμόρφωση  $\varepsilon_0$ . Παρομοίως, η αντίστοιχη εξίσωση θα είναι  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t)$ . Έτσι, με κατάλληλη αντικατάσταση στις εξισώσεις για το στοιχείο Maxwell θα δώσει:

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt} u(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\sigma + \frac{E}{\eta} \sigma = \varepsilon_0 E \delta(t)$$

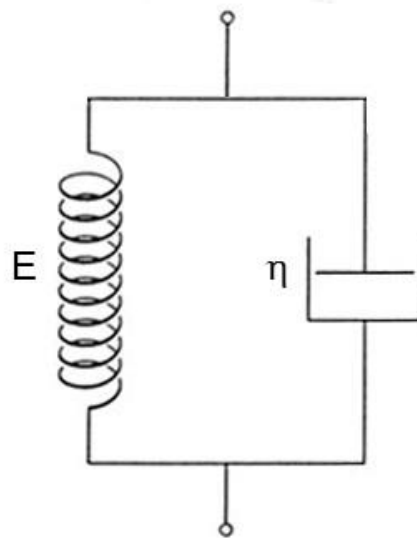
$$d(\sigma e^{\frac{E}{\eta}t}) = \varepsilon_0 E e^{\frac{E}{\eta}t} \delta(t) dt$$

και ολοκληρώνοντας:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-\frac{E}{\eta}t} u(t)$$

## 2. Στοιχείο Kelvin

Στην περίπτωση αυτή, η συσχέτιση των στοιχείων είναι διαφορετική. Όπως φαίνεται και στο σχήμα παρακάτω, αντί να συνδεθούν σε σειρά, συνδέονται **παράλληλα**. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο στοιχεία θα έχουν κοινή παραμόρφωση αλλά η τάση θα δίνεται από το άθροισμά τους.



Voigt-Kelvin

Έτσι, οι σχέσεις που θα προκύψουν θα είναι:

$$\varepsilon = \varepsilon_S = \varepsilon_D \quad \text{και}$$

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D$$

Με αντικατάσταση θα πάρουμε:

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \dot{\varepsilon}$$

Η οποία σχέση είναι η καταστατική εξίσωση για το στοιχείο Kelvin.

Πείραμα ερπυσμού σε στοιχείο Kelvin

Υποβάλλοντας ένα στοιχείο Kelvin σε ερπυσμό, ασκείται σε αυτό ακαριαία τάση, η οποία σε συνάρτηση με τον χρόνο γράφεται  $\sigma(t)=\sigma_0 u(t)$ . Αντικαθιστώντας αυτήν στις σχέσεις για το στοιχείο Kelvin θα έχουμε:

$$\sigma_0 u(t) = \varepsilon E + \eta \dot{\varepsilon}$$

$$\frac{\sigma_0}{\eta} u(t) = \varepsilon \frac{E}{\eta} + \dot{\varepsilon}$$

η διαφορική εξίσωση που προκύπτει αν λυθεί μας δίνει:

$$e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \frac{d}{dt} \left( \varepsilon e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right) = \frac{\sigma_0}{\eta} u(t)$$

$$d(\varepsilon e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t}) = \frac{\sigma_0}{\eta} e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t} u(t) dt$$

και με κατάλληλη ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right) u(t)$$

Με γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης παρατηρείται πως όσο περνάει ο χρόνος, το υλικό συμπεριφέρεται όλο και περισσότερο σαν γραμμικά ελαστικό στερεό.

Πείραμα χαλάρωσης σε στοιχείο Kelvin

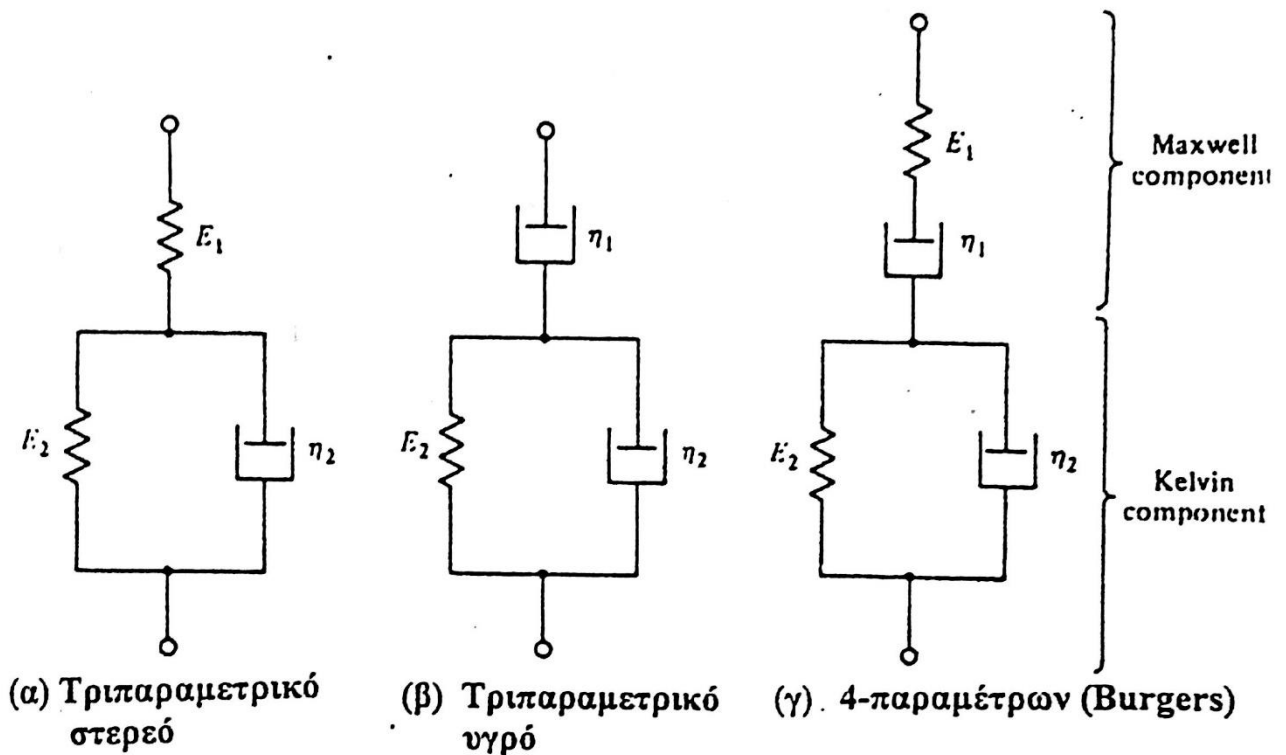
Επιβάλλεται στο στοιχείο Kelvin ακαριαία παραμόρφωση  $\varepsilon_0$  η οποία, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση για το στοιχείο Maxwell, γράφεται  $\varepsilon(t)=\varepsilon_0 u(t)$  και με αντικατάσταση στις σχέσεις του στοιχείου Kelvin παίρνουμε:

$$\sigma = \varepsilon_0 [\eta \delta(t) + E u(t)]$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η συμπεριφορά του στοιχείου Kelvin σε χαλάρωση είναι ανορθόδοξη και δεν μπορεί να περιγράψει κάποιο πραγματικό υλικό. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως τα προαναφερθέντα πρότυπα είναι εξιδανίκευση πιο περίπλοκων συμπεριφορών υλικών. Έτσι, με βάση τα δύο αυτά στοιχεία (Kelvin και Maxwell), μπορούμε να κάνουμε συνδυασμούς και να φτιάξουμε πιο σύνθετα προβλήματα, που αντιστοιχούν σε πιο περίπλοκες συμπεριφορές ιξωδοελαστικών υλικών.

### 3. Σύνθετα πρότυπα ιξωδοελαστικότητας

Τα πιο δημοφιλή ιξωδοελαστικά μοντέλα που δημιουργούνται από τα στοιχεία Maxwell και Kelvin είναι το τριπαραμετρικό στερεό, το τριπαραμετρικό υγρό και το μοντέλο των τεσσάρων παραμέτρων ή αλλιώς μοντέλο Burgers. Η διάταξή τους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το πρώτο πρότυπο είναι ένα ελατήριο συνδεδεμένο σε σειρά με ένα στοιχείο Kelvin, το δεύτερο είναι ένας απορροφητήρας συνδεδεμένος σε σειρά με ένα στοιχείο Kelvin και το τελευταίο είναι ένα στοιχείο Maxwell συνδεδεμένο σε σειρά με ένα στοιχείο Kelvin.

## Μέτρο ένδοσης και μέτρο χαλάρωσης

### Μέτρο ένδοσης

Αν εξεταστούν προσεκτικά οι εξισώσεις των στοιχείων Maxwell και Kelvin για το πείραμα του ερπυσμού παρατηρείται ότι η ανηγμένη παραμόρφωση σε συνάρτηση με τον χρόνο μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t)$$

Όπου  $J(t)$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του υλικού και λέγεται μέτρο ένδοσης. Έτσι, για το στοιχείο Maxwell προκύπτει:

$$J(t) = \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right)$$

Και για το στοιχείο Kelvin:

$$J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right)$$

### Μέτρο χαλάρωσης

Πράττοντας ομοίως για το πείραμα της χαλάρωσης, η εξάρτηση της τάσης από τον χρόνο μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) u(t)$$

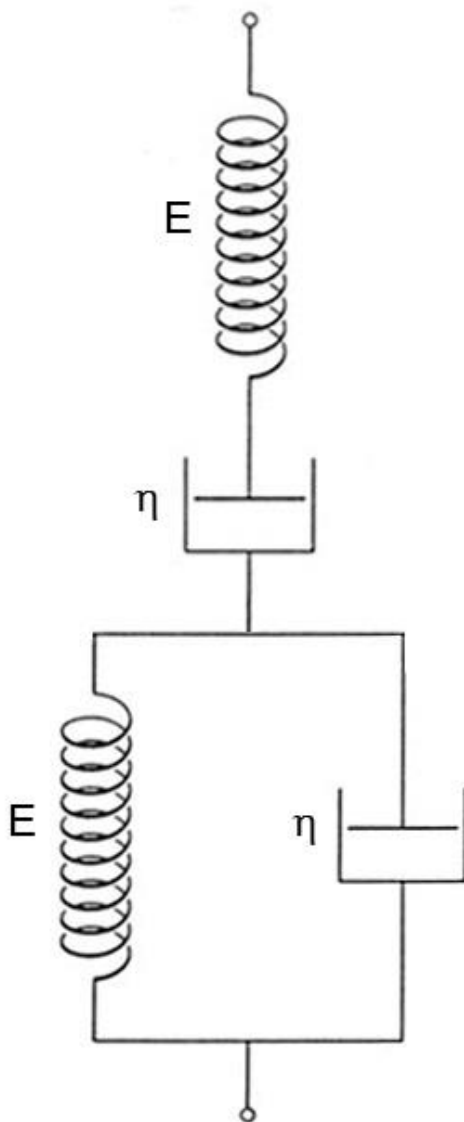
Όπου  $Y(t)$  είναι η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης. Έτσι, για το στοιχείο Maxwell θα ισχύει:

$$Y(t) = E e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία που υπολογίστηκαν οι παραπάνω σχέσεις, μπορούν να υπολογιστούν το μέτρο ένδοσης και το μέτρο χαλάρωσης για κάθε πιθανό συνδυασμό από ελατήρια και απορροφητήρες.

Διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις

Θα γίνει κατασκευή των καταστατικών εξισώσεων (διαφορικές και ολοκληρωτικές) για τα ιξωδοελαστικά μοντέλα, χρησιμοποιώντας το μοντέλο των τεσσάρων παραμέτρων ή αλλιώς Burgers. Όπως προαναφέρθηκε, στο σύνθετο αυτό πρότυπο, περιλαμβάνονται ένα στοιχείο Maxwell και ένα στοιχείο Kelvin συνδεδεμένα σε σειρά.



Πρότυπο 4-παραμέτρων (Burgers)



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Οπότε έχουμε:

$$\sigma = \sigma_M = \sigma_K$$

Και

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_K$$

Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση του μοντέλου Maxwell θα προκύψει:

$$D\varepsilon_M = \frac{D\sigma_M}{E_1} + \frac{\sigma_M}{\eta_1}$$

Όπου,  $D = \frac{\partial}{\partial t}$  και οι δείκτες 1 και M αντιστοιχούν στο πρότυπο Maxwell.

Έτσι, με πράξεις θα δίνεται:

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma_M}{E_1} + \frac{\sigma_M}{\eta D_1}$$

Ομοίως, μετά από πράξεις, για το μοντέλο Kelvin:

$$\varepsilon_K = \frac{\sigma_K}{E_2 + \eta_2 D}$$

Όπου οι δείκτες 2 και K αντιστοιχούν στο πρότυπο Kelvin.

Αν πάρουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις και τις συνδυάσουμε με τις δύο αρχικές του μοντέλου Burgers, τότε θα καταλήξουμε στην σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta D_1} + \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2 + \eta_2 D}$$

Και από την παραπάνω εξίσωση, αν συνεχίσουμε τις πράξεις, με απαλοιφή των παρονομαστών και με την διπλή παραγωγή να είναι ως προς τον χρόνο, θα καταλήξουμε στην διαφορική εξίσωση:

$$E_1 \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} + E_1 E_2 \eta_1 \dot{\varepsilon} = \eta_1 \eta_2 \ddot{\sigma} + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1 + E_1 \eta_1) \dot{\sigma} + E_1 E_2 \sigma$$

Που μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\sigma + \left( \frac{\eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\varepsilon}$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού είναι η καταστατική για το μοντέλο Burgers και μπορεί να γραφτεί συνοπτικά ως:

$$P \sigma = Q \varepsilon$$

Όπου, P και Q είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές και ισοδυναμούν αντιστοίχως με:

$$P = \sum_{j=0}^m p_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \sum_{j=0}^m p_j D^j$$

Και

$$Q = \sum_{j=0}^n q_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \sum_{j=0}^n q_j D^j$$

Για λύσεις της καταστατικής διαφορικής εξίσωσης για το μοντέλο Burgers θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που βρέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για το μέτρο ένδοσης και για το μέτρο χαλάρωσης. Οπότε, αν υποθέσουμε πως σε ένα υλικό εφαρμόζεται μια συνάρτηση  $\sigma(t)$ , χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του μέτρου ένδοσης δίνει  $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t)$ , με την παραδοχή όμως ότι η συνάρτηση τάσης είναι μια διαδοχή άπειρων βημάτων  $d\sigma(t')$ . Άρα, σε μια χρονική στιγμή  $t'$  ένα τέτοιο βήμα θα προκαλεί μία παραμόρφωση  $d\varepsilon(t)$  που θα υπολογίζεται από την συνάρτηση του μέτρου ένδοσης για το χρονικό διάστημα  $(t - t')$  και η σχέση που θα το υπολογίζει θα είναι η ακόλουθη:  $d\varepsilon(t) = J(t - t') d(t') u(t - t')$ . Την συνολική παραμόρφωση θα μας δώσει το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^t J(t - t') \left[ \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} \right] dt'$$

Παρατηρείται ότι η συνάρτηση βήματος έχει αντικατασταθεί από την μονάδα. Αυτό συμβαίνει επειδή για κάθε βήμα ολοκλήρωσης ισχύει  $t > t'$ .

Ομοίως, υπολογίζεται και η ολοκληρωτική σχέση για την τάση. Έτσι προκύπτει:

$$\sigma(t) = \int_{0^-}^t Y(t - t') \left[ \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} \right] dt'$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Οι δύο τελευταίες ολοκληρωτικές σχέσεις είναι γνωστές και ως ολοκληρώματα μνήμης ή ολοκληρώματα υπέρθεσης Boltzmann. Ακόμα, πρέπει να επισημανθεί ότι για να ισχύσουν, είναι απαραίτητο οι συναρτήσεις  $Y(t)$  και  $J(t)$  να μην αλλάζουν με τον χρόνο.

Έχοντας ως δεδομένο τις ολοκληρωτικές και διαφορικές καταστατικές εξισώσεις που δημιουργήσαμε πιο πάνω, μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους. Για να επιτευχθεί αυτό είναι αναγκαία η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace, που δίνεται από τον τύπο:

$$L\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = f(s)$$

στον τύπο:

$$P\sigma = Q\varepsilon$$

έτσι προκύπτει:

$$\bar{P}(s)\bar{\sigma}(s) = \bar{Q}(s)\bar{\varepsilon}(s)$$

με

$$\bar{P}(s) = \sum_{j=0}^m p_j s^j$$

και

$$\bar{Q}(s) = \sum_{j=0}^n q_j s^j$$

Αν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Laplace στις σχέσεις:

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^t J(t-t') \left[ \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} \right] dt'$$

και

$$\sigma(t) = \int_{0^-}^t Y(t-t') \left[ \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} \right] dt'$$

θα δώσει:

Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

$$L\{\varepsilon(t)\} = L\{J(t)\}L\left\{\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}\right\}$$

και

$$L\{\sigma(t)\} = L\{Y(t)\}L\left\{\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t}\right\}$$

στη συνέχεια προκύπτει:

$$\bar{\varepsilon}(s) = [\bar{J}(s)][s \bar{\sigma}(s)]$$

και

$$\bar{\sigma}(s) = [\bar{Y}(s)][s \bar{\varepsilon}(s)]$$

και λόγω της εξίσωσης που δημιουργήθηκε προηγουμένως:

$$\bar{P}(s) \bar{\sigma}(s) = \bar{Q}(s) \bar{\varepsilon}(s)$$

θα προκύψει:

$$\frac{\bar{\varepsilon}(s)}{\bar{\sigma}(s)} = \frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)} \Rightarrow$$

$$s \bar{J}(s) = \frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)}$$

ή

$$\frac{1}{s \bar{Y}(s)} = \frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)}$$

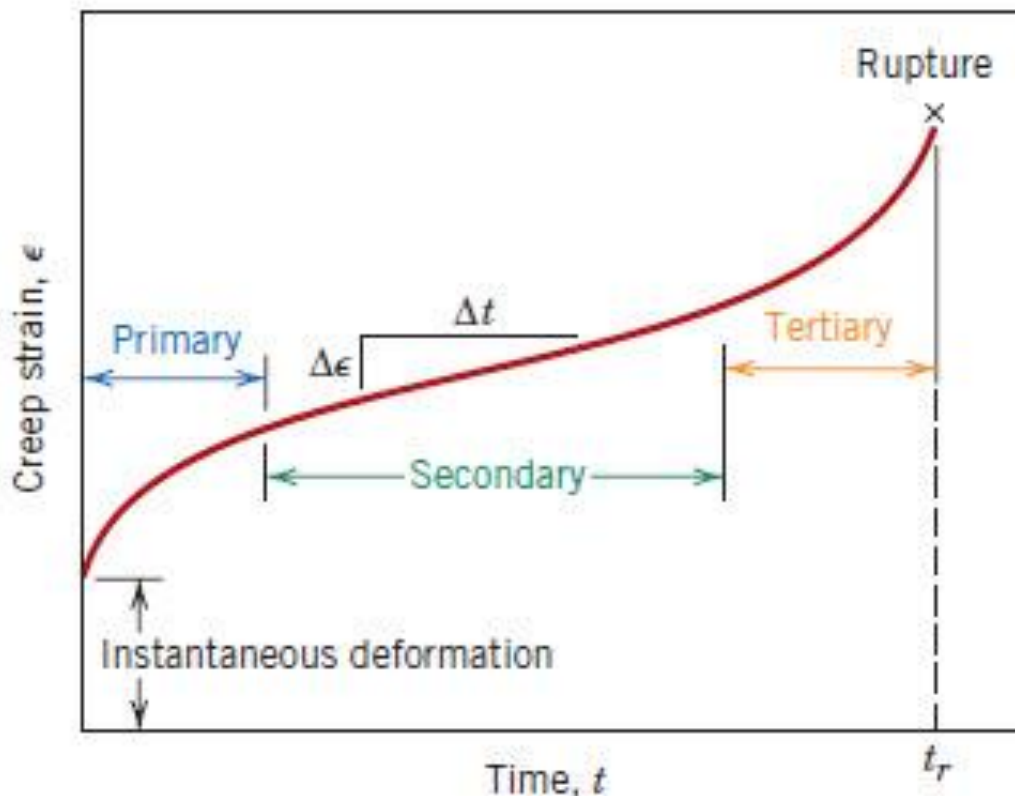
Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις και με χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, μπορούν πάντα να υπολογιστούν οι συναρτήσεις  $J(t)$  και  $Y(t)$ , αν και εφόσον είναι γνωστά τα  $P$  και  $Q$ .

#### 4. Μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύθηκε η γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών. Οι πραγματικές συμπεριφορές των υλικών όμως δεν μπορούν να αντιπροσωπευθούν από αυτά τα μοντέλα επαρκώς. Για να προσεγγισθούν πιο ρεαλιστικά, θα χρειαστεί να εισαχθούν μη γραμμικές εξισώσεις ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης.

##### 4.α. Σταθερή τάση

Όπως έγινε και στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα, θα εργαστούμε πάνω στο πείραμα του ερπυσμού όπου η παραμόρφωση αυξάνεται λόγω σταθερής τάσης ενώ η θερμοκρασία παραμένει αμετάβλητη.



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Όπως φαίνεται στο πάνω σχήμα ιδανικού ερπυσμού και έχει ήδη ειπωθεί στην προηγούμενη ενότητα, η καμπύλη ξεκινάει με μία ακαριαία ελαστική παραμόρφωση που είναι αποτέλεσμα της ξαφνικής τάσης. Στη συνέχεια η καμπύλη χωρίζεται σε τρία χαρακτηριστικά μέρη, τον πρωτογενή ερπυσμό, τον δευτερογενή ερπυσμό και τον τριτογενή ερπυσμό, τον οποίο δεν θα εξετάσουμε επειδή θα υποθέσουμε ότι το πείραμα δεν θα διαρκέσει τόσο ώστε να καταλήξει σε αυτό το στάδιο. Ακόμα, θα υποθέσουμε πως η σταθερή αξονική τάση είναι κάτω από το όριο διαρροής που αντιστοιχεί στην θερμοκρασία που βρίσκεται. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αρχική ακαριαία παραμόρφωση είναι εντελώς ελαστική.

Για να εκφραστούν τα παραπάνω σε μαθηματική μορφή, θα γράψουμε την ανηγμένη παραμόρφωση σαν άθροισμα από τρία μέρη, τα οποία θα είναι συναρτήσει της σταθερής τάσης. Έτσι προκύπτει:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_s(t) + \varepsilon_t(t)$$

Όπου

$$\varepsilon_e = \text{παράγοντας ελαστικής παραμόρφωσης}$$

$$\varepsilon_s(t) = \text{παράγοντας παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού}$$

$$\varepsilon_t(t) = \text{παράγοντας παραμόρφωσης προσωρινού ερπυσμού}$$

Από τα παραπάνω, ο παράγοντας ελαστικής παραμόρφωσης  $\varepsilon_e$  είναι εντελώς ανεξάρτητος του χρόνου, ο παράγοντας παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού  $\varepsilon_s(t)$  είναι γραμμικός στο χρόνο  $t$ , άρα, μεταβάλλεται σταθερά. Τέλος, ο παράγοντας παραμόρφωσης προσωρινού ερπυσμού  $\varepsilon_t(t)$  είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία είναι μηδέν για  $t=0$  και το όριό της όταν τείνει στο άπειρο ( $t \rightarrow \infty$ ) έχει μηδενική παράγωγο. Ακόμα, πρέπει να επισημανθεί πως ενώ οι παράγοντες  $\varepsilon_s(t)$  και  $\varepsilon_t(t)$  δρουν κατά την συνολική διάρκεια, ο παράγοντας  $\varepsilon_t(t)$  επικρατεί στον πρωτογενή ερπυσμό και ο παράγοντας  $\varepsilon_s(t)$  επικρατεί στον δευτερογενή ερπυσμό. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί από το προηγούμενο σχήμα.

Στη συνέχεια θα εκφραστούν οι προηγούμενοι τρεις παράγοντες συναρτήσει των  $\tau_0$  και  $t$ , όπου  $\tau_0$  είναι η σταθερή αξονική τάση που ασκείται στο πείραμα του ερπυσμού και  $t$  είναι η μεταβλητή του χρόνου. Έτσι θα προκύψει:

$$\varepsilon_e = f_e(\tau_0)$$

$$\varepsilon_s = f_s(\tau_0) t$$

$$\varepsilon_t = f_t(\tau_0) g(t)$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Οι παραπάνω συναρτήσεις της τάσης ( $f_e(\tau_0), f_s(\tau_0)$ ) και του χρόνου ( $g(t)$ ) μπορούν να εκφραστούν με ένα ευρύ φάσμα μη γραμμικών εξισώσεων ώστε να μπορέσουν να αντιπροσωπεύσουν μη γραμμικά μοντέλα τα οποία με την σειρά τους εκφράζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια κάποια ιξωδοελαστικά υλικά. Δεν πρέπει όμως να ξεχάσουμε την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση του χρόνου στο μηδέν πρέπει να είναι ίση με την πρώτη παράγωγο στο άπειρο, τα οποία πρέπει να κάνουν μηδέν ( $g(0) = \dot{g}(\infty) = 0$ ).

Όπως έγινε και στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα, τα μοντέλα που θα εξεταστούν αποτελούνται από ελατήρια και απορροφητήρες. Έτσι, οι συναρτήσεις  $f_e(\tau_0)$ ,  $f_s(\tau_0)$  και  $f_t(\tau_0)$  θα είναι γραμμικές ως προς την τάση  $\tau_0$ , αλλά η συνάρτηση του χρόνου  $g(t)$  θα εκφραστεί εκθετικά. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι αυτό του τετραπαραμετρικού μοντέλου ή αλλιώς Burgers. Έτσι, από τις εξισώσεις που κατασκευάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα οι συναρτήσεις της τάσης θα πάρουν την εξής μορφή:

$$f_e(\tau_0) = \frac{\tau_0}{E_1}$$

$$f_s(\tau_0) = \frac{\tau_0}{\eta_1}$$

$$f_t(\tau_0) = \frac{\tau_0}{E_2}$$

Ενώ η συνάρτηση του χρόνου:

$$g(t) = 1 - e^{-\frac{t}{t_\varepsilon}}$$

όπου  $t_\varepsilon$  είναι ο χρόνος καθυστέρησης βάση της παραμόρφωσης.

Στην συνέχεια, θα θεωρήσουμε την συνάρτηση της ακαριαίας ελαστικής παραμόρφωσης  $f_e(\tau_0)$  γραμμική ως προς το  $\tau_0$ , (αυτό σημαίνει ότι θα έχει πάντα την μορφή  $f_e(\tau_0) = \frac{\tau_0}{E}$ ), όμως, θα εξετάσουμε διάφορες παραλλαγές για τις υπόλοιπες συναρτήσεις ( $f_s(\tau_0)$ ,  $f_t(\tau_0)$  και  $g(t)$ ), κατασκευάζοντας έτσι ιξωδοελαστικά συναρτησιακά μοντέλα που θα μας δίνουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις ιδιότητες των ιξωδοελαστικών υλικών.

## Παράγοντας παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού

Καταρχάς, θα εξετάσουμε τον παράγοντα παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού  $f_s(\tau_0)$ . Υπάρχουν τρεις επικρατείς εκφράσεις που χρησιμοποιούνται πιο συχνά και όλες τους περιέχουν δύο μεταβλητές που αντιστοιχούν στο υλικό. Οι μεταβλητές αυτές αλλάζουν ανάλογα με την θερμοκρασία αλλά εδώ θα θεωρηθούν σταθερές. Οι εκφράσεις αυτές είναι:

$$f_s(\tau_0) = A \tau_0^n$$

$$f_s(\tau_0) = B e^{\alpha\tau_0}$$

$$f_s(\tau_0) = C \sinh(\beta\tau_0)$$

Αν εξετάσουμε την πρώτη έκφραση (  $f_s(\tau_0) = A \tau_0^n$  ) και την βάλουμε στη εξίσωση του παράγοντα παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού (  $\varepsilon_s = f_s(\tau_0) t$  ) θα δώσει:

$$\varepsilon_s(t) = A \tau_0^n t$$

όπου  $A$  είναι ο αμοιβαίος συντελεστής ιξώδους και  $n$  η δύναμη της τάσης.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση που αποκαλείται *νόμος δύναμης τάσης* είναι αυτή που χρησιμοποιείται πιο ευρέως για τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού, μιας και εύκολα μπορεί να αναχθεί στις τρεις διαστάσεις (κάτι το οποίο δεν θα εξετάσουμε). Ακόμα, η συγκεκριμένη συνάρτηση με κατάλληλες τιμές για τα  $A$  και  $n$ , μπορεί να προσομοιώσει πολύ καλά τα πειραματικά δεδομένα. Αυτό όμως, αρχίζει να μην ισχύει αν η τάση πάρει πολύ μεγάλες τιμές, για αυτό αν θέλουμε να εξετάσουμε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να μελετήσουμε την δεύτερη έκφραση του παράγοντα παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού (  $f_s(\tau_0) = B e^{\alpha\tau_0}$  ) όπου με κατάλληλες τιμές για τα  $B$  και  $\alpha$  η συνάρτηση αυτή προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα. Η εξίσωση που θα προκύψει για την ανηγμένη παραμόρφωση είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_s(\tau_0) = B e^{\alpha\tau_0} t$$

και ονομάζεται *εκθετικός νόμος τάσης*.

Αν θέλουμε, μπορούμε να συνδυάσουμε τους δύο παραπάνω νόμους για να καλύψουμε όλο το εύρος τιμών του  $\tau_0$ . Αυτό όμως θα έχει συνολικά τρεις παραμέτρους, κάτι το οποίο το κάνει υπερβολικά περίπλοκο. Για αυτό το λόγο, θα χρησιμοποιήσουμε την τρίτη έκφραση για τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού (  $f_s(\tau_0) = C \sinh(\beta\tau_0)$  ), η οποία για την τάση γράφεται ως εξής:

$$\varepsilon_s(\tau_0) = C \sinh(\beta\tau_0) t$$



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Η προαναφερόμενη εξίσωση συσχετίζεται πολύ με την πρώτη για τον νόμο δύναμης τάσης και ονομάζεται νόμος υπερβολικού ημιτόνου. Παρόλα τα οφέλη, οι δύο τελευταίοι νόμοι δεν μπορούν εύκολα να επεκταθούν στις τρεις διαστάσεις, έτσι, η χρήση τους είναι περιορισμένη.

Επιστρέφοντας στην πιο βασική έκφραση, δηλαδή, τον νόμο δύναμης τάσης ( $\epsilon_s(t) = A \tau_0^n t$ ), παρατηρείται, ότι για θλιπτικές τάσεις θα πρέπει το δεύτερο μέρος της εξίσωσής να είναι αρνητικό. Για να επιτευχθεί αυτό χρειάζεται το  $n$  να παίρνει περιττές τιμές (π.χ.  $n = 1, 3, 5, \dots$ ) αλλά επειδή το  $n$  προκύπτει από την προσαρμογή της καμπύλης, σπανίως είναι περιττός θετικός ακέραιος. Έτσι, ο νόμος δύναμης τάσης πολλές φορές γράφεται ως εξής:

$$\epsilon_s(t) = A |\tau_0|^n (\text{sgn } \tau_0) t$$

όπου τώρα το  $n$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θετική τιμή και  $\text{sgn } \tau_0$  είναι η συνάρτηση πρόσημου η οποία δίνεται ως εξής:

$$\text{sgn } \tau_0 \begin{cases} -1 & \tau_0 < 0 \\ 0 & \tau_0 = 0 \\ +1 & \tau_0 > 0 \end{cases} = 2[u(\tau_0)] - 1$$

όπου το  $[u(\tau_0)]$  είναι η συνάρτηση βήματος για την τάση.

Άλλη εναλλακτική έκφραση για τον νόμο τάσης δύναμης είναι η εξής:

$$\epsilon_s(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n t$$

η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι όσο το  $n$  τείνει προς το 1 ( $n \rightarrow 1$ ), η παράμετρος ερπυσμού  $\lambda_c$  πλησιάζει τον συντελεστή ιξώδους.

Ακόμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση πρόσημου για να τροποποιήσουμε την προηγούμενη εξίσωση ακριβώς όπως τροποποιήσαμε την  $f_s(\tau_0) = A \tau_0^n$ , ώστε να έχουμε την δυνατότητα να βάλουμε στο  $n$  οποιονδήποτε θετικό αριθμό που θα προκύψει από την προσαρμογή της καμπύλης, για να επιτρέψουμε την ύπαρξη αρνητικού στελέχους κατά την θλίψη.

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Η εξίσωση που θα προκύψει είναι η εξής:

$$\varepsilon_s(t) = \left(\frac{|\tau_0|}{\lambda_c}\right)^n (\text{sgn } \tau_0)t$$

όπου όπως είναι προφανές, για  $\tau_0 > 0$  η τελευταία εξίσωση γίνεται ίση με την προηγούμενη.

Μια άλλη έκφραση για τον παράγοντα παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού που συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_s(t) = A_r \left(\frac{\tau_0}{\tau_r}\right)^n t \quad \text{με} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

όπου  $\tau_r$  οποιαδήποτε σχετική τάση.

Ο λόγος που κατασκευάστηκε η τελευταία εξίσωση είναι επειδή οι προηγούμενες τέσσερις εκφράσεις για τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού έχουν περίπλοκες διαστάσεις για τα  $A$  και  $\lambda_c$  κάτι που τις κάνει αρκετά περίπλοκες, ενώ εδώ, οι διαστάσεις του  $A_r$  είναι απλά  $\text{sec}^{-1}$  και το  $n$  μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να λειτουργεί σωστά για αρνητικές τάσεις.

Εν κατακλείδι, παρά τα οφέλη και των πέντε εκφράσεων για τον παράγοντα παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού, αυτή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η έκφραση:

$$\varepsilon_s(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n t$$

για λόγους φυσικής και μαθηματικής απλότητας. Σε περιπτώσεις, όμως, αρνητικής τάσης, η έκφραση που θα χρησιμοποιηθεί είναι η παρακάτω:

$$\varepsilon_s(t) = \left(\frac{|\tau_0|}{\lambda_c}\right)^n (\text{sgn } \tau_0)t$$

### Παράγοντας παραμόρφωσης προσωρινού ερπυσμού

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τον τρίτο και τελευταίο παράγοντα από την εξίσωση της ανηγμένης παραμόρφωσης, δηλαδή τον παράγοντα παραμόρφωσης προσωρινού ερπυσμού  $\varepsilon_t(t)$  και τελικά θα τους προσθέσουμε όλους μαζί για να βγάλουμε την τελική εξίσωση.

Πιο πάνω ορίσαμε την εξίσωση:

$$\varepsilon_t = f_t(\tau_0) g(t)$$

και όπως στην περίπτωση του σταθερού ερπυσμού, θα εκφράσουμε και εδώ την συνάρτηση τάσης  $f_t(\tau_0)$  ως συνάρτηση τάσης-δύναμης. Έτσι θα προκύψει:

$$f_t(\tau_0) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p$$

όπου  $p$  περιττός θετικός ακέραιος μεταξύ 1 και  $n$  ( $1 \leq p \leq n$ ) και  $n$  η δύναμη που χρησιμοποιείται στον νόμο τάσης-δύναμης για τον σταθερό ερπυσμό.

Για την εξίσωση του χρόνου επικρατούν οι δύο παρακάτω εκφράσεις:

$$g(t) = 1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}$$

και

$$g(t) = t^{1/q}$$

Η πρώτη έκφραση είναι η ίδια που αναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας, για την οποία είναι αναγκαίο να ισχύει το εξής:

$$g(0) = \dot{g}(\infty) = 0.$$

Αν ενώσουμε, λοιπόν, την πρώτη έκφραση για το  $g(t)$  και την  $f_t(\tau_0)$  θα προκύψει:

$$\varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p \left[1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}\right]$$

που είναι και η επικρατέστερη μορφή για το  $\varepsilon_t(t)$ . Περαιτέρω, από αυτήν την εξίσωση παρατηρείται ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά δίνεται αν  $t \rightarrow \infty$  το οποίο μας δίνει τη σχέση:

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

$$\varepsilon_t(\infty) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p$$

η οποία με την σειρά της για  $p = 1$  μας δείχνει ότι η σταθερά προσωρινού ερπυσμού  $\mu_c$  είναι ένας απόλυτος ελαστικός συντελεστής (όρισμα ελαστικότητας). Επίσης, όπως ήταν αναμενόμενο τα  $\mu_c$  και  $p$  είναι σχετικά ανεπηρέαστα από την θερμοκρασία. Αντιθέτως, ο χρόνος παραμόρφωσης  $t_e$  είναι πολύ ευαίσθητος στην μεταβολή της θερμοκρασίας, αφού ισούται με τον λόγο του συντελεστή ιξώδους προς το όρισμα ελαστικότητας.

Η δεύτερη και πιο απλή έκφραση για τον χρόνο,  $g(t) = t^{1/q}$ , σε συνδυασμό με την  $f_i(\tau_0)$  θα μας δώσει την εξίσωση:

$$\varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p t^{1/q}$$

για την οποία επίσης ισχύει ότι  $g(0) = \dot{g}(\infty) = 0$ . Επιπλέον, να επισημάνουμε ότι στην παρούσα έκφραση όπως και στην προηγούμενη για την εξίσωση του χρόνου, η ασυμπτωτική συμπεριφορά και η συμπεριφορά όταν  $g(\infty) \rightarrow \infty$ , δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως μη γραμμικές συμπεριφορές.

## Ολικός ερπυσμός

Αφού αναλύθηκαν και οι τρεις παράγοντες παραμόρφωσης για το πείραμα του ερπυσμού, θα προχωρήσουμε στη σύνταξη της ολικής εξίσωσης. Έτσι, από όλες τις εκφράσεις για τον κάθε παράγοντα, θα πάρω αντιστοίχως τις πιο αντιπροσωπευτικές.

Ο παράγοντας ελαστικής παραμόρφωσης δεν θα συμμετέχει, μιας και είναι ανεξάρτητος του χρόνου. Για τον παράγοντα παραμόρφωσης σταθερού ερπυσμού θα χρησιμοποιήσω την έκφραση:

$$\varepsilon_s(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n t$$

και για τον παράγοντα παραμόρφωσης προσωρινού ερπυσμού θα χρησιμοποιήσω την ακόλουθη έκφραση:

$$\varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p \left[1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}\right]$$

επειδή μας δίνει καλύτερα αποτελέσματα για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα.

Έτσι, η εξίσωση ολικού ερπυσμού θα έχει την μορφή:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_s(t) + \varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n t + \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p \left[1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}\right]$$

στην οποία συνήθως θα ισχύει  $p < n$ . Αν όμως θέσουμε  $p = n$  τότε προκύπτει μια πολύ πιο απλοποιημένη μορφή της παραπάνω εξίσωσης η οποία μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\varepsilon_c(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^n J(t)$$

όπου  $J(t)$  είναι η αδιάστατη συνάρτηση του μέτρου ένδοσης και δίνεται από τον τύπο:

$$J(t) = \gamma t + \left[1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}\right]$$

με

$$\gamma = \left(\frac{\mu_c}{\lambda_c}\right)^n$$

#### 4.β. Μεταβλητή τάση

Αφού καταλήξαμε σε μια γενική και αντιπροσωπευτική εξίσωση για την ανηγμένη παραμόρφωση στον ερπυσμό με σταθερή τάση, επόμενο βήμα είναι η επέκταση αυτών των αποτελεσμάτων σε ακόμα περισσότερα προβλήματα. Αυτό θα επιτευχθεί θέτοντας την τάση μεταβαλλόμενη βάση του χρόνου  $\tau(t)$ .

#### Σκλήρυνση παραμόρφωσης (Strain-Hardening)

Η υπόθεση που χρησιμοποιείται πιο συχνά είναι η *σκλήρυνση παραμόρφωσης*. Για αρχή, θα ορίσουμε ότι με μεταβλητή τάση, ο ρυθμός μεταβολής του ακαριαίου ερπυσμού θα είναι συναρτησει της ανηγμένης παραμόρφωσης ακαριαίου ερπυσμού αλλά και της ακαριαίας τάσης. Επομένως, θα προκύψει η εξίσωση:

$$\dot{\epsilon}(t) = f[\epsilon(t), \tau(t)]$$

όπου το  $\epsilon(t)$  εκφράζει, είτε την ολική παραμόρφωση ερπυσμού  $\epsilon_e(t)$ , είτε κάποιον από τους παράγοντες που την αποτελούν (π.χ.  $\epsilon_s(t)$ ,  $\epsilon_l(t)$ ). Σε κάθε περίπτωση, όμως, δεν θα περιλαμβάνεται ο παράγοντας ελαστικής παραμόρφωσης. Επιπλέον, αυτό που παρατηρούμε από την προαναφερθείσα εξίσωση, είναι ότι δεν υπάρχει αποκλειστική εξάρτηση από το χρόνο επειδή ο παράγοντας  $\epsilon(t)$  είναι πιθανό να εξαρτάται και από κάποια χωρική μεταβλητή. Οπότε, το σύμβολο της παραγώγου θα εκφράζει μερική παραγωγή ως προς τον χρόνο ( $\partial/\partial t$ ). Εντούτοις, τα προβλήματα που θα εξετάσουμε, θα περιορίζονται στην μία διάσταση, κι επομένως, δεν θα υπάρχει μεταβλητή εξάρτηση στον χώρο. Άρα, η μερική παράγωγος θα γίνει ολική ( $d/dt$ ).

Ο τύπος  $\dot{\epsilon}(t) = f[\epsilon(t), \tau(t)]$  ονομάζεται *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* και στην ουσία μας δείχνει πως αν φέρουμε κάποια εξίσωση ερπυσμού (που έχουμε εξάγει για κάποια συγκεκριμένη τάση  $\tau_l(t)$ ) στην μορφή αυτού του τύπου, τότε, αυτή η εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε παραλλαγή της τάσης  $\tau(t)$ .

Όπως έχει παρατηρηθεί, ο τύπος της *υπόθεσης σκλήρυνσης παραμόρφωσης* είναι πολύ αποδοτικός για σταθερά κατασκευαστικά υλικά, δηλαδή για υλικά που κάτω από παραμορφώσεις λόγω ερπυσμού, αλλάζει ελάχιστα η εσωτερική μικροδομή τους.

Στη συνέχεια, θα αναλυθούν τέσσερις περιπτώσεις που αντιστοιχούν στον εκάστοτε παράγοντα ερπυσμού. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

1. Για το παράγοντα σταθερού ερπυσμού
2. Για τον εκθετικό παράγοντα προσωρινού ερπυσμού
3. Για τον ολικό ερπυσμό
4. Για τον παράγοντα χρόνου-δύναμης προσωρινού ερπυσμού

### **A. Παράγοντας σταθερού ερπυσμού**

Η πρώτη χρήση της υπόθεσης σκλήρυνσης παραμόρφωσης θα γίνει για τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού. Έτσι, εφαρμόζοντας τον τύπο

$$\dot{\epsilon}(t) = f[\epsilon(t), \tau(t)]$$

στην έκφραση

$$\epsilon_s(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n t$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, θα προκύψει η σχέση:

$$\dot{\epsilon}_s(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ειδική περίπτωση σκλήρυνσης παραμόρφωσης, αφού ουσιαστικά είναι σαν να μην υπάρχει παραμόρφωση. Για αυτό το λόγο, θα ορίσουμε μια άλλη σχέση, εξίσου έγκυρη, η οποία ισχύει και για μεταβλητή τάση.

Η εξίσωση θα είναι:

$$\dot{\epsilon}_s(t) = \left(\frac{\tau(t)}{\lambda_c}\right)^n$$

Και σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\epsilon_s(t) = \int_{0^-}^t \left(\frac{\tau(t')}{\lambda_c}\right)^n dt'$$

### B. Εκθετικός παράγοντας προσωρινού ερπυσμού

Σε αυτή την πιο περίπλοκη περίπτωση, θα εξετάσουμε τον παράγοντα προσωρινού ερπυσμού σε εκθετική μορφή ως προς τον χρόνο. Έτσι, θα πάρουμε την αντίστοιχη εξίσωση για αυτόν τον παράγοντα

$$\varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p \left[1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}\right]$$

και θα την παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο. Αυτό θα μου δώσει την εξίσωση:

$$\dot{\varepsilon}_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}$$

Ο σκοπός είναι να φέρουμε την τελευταία εξίσωση σε μορφή που να συνάδει με την υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να διώξουμε με κάποιον τρόπο τον παράγοντα  $e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}$  και γενικότερα το  $t$  από την εξίσωση. Για να επιτευχθεί αυτό, θα πάρω τον παράγοντα προσωρινού ερπυσμού και θα λύσω ως προς  $e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}$ . Αυτό δίνει:

$$e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)} = -\left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^{-p} \varepsilon_t(t) + 1$$

και με αντικατάσταση στην προηγούμενη θα προκύψει:

$$\dot{\varepsilon}_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p \left[-\left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^{-p} \varepsilon_t(t) + 1\right]$$

το οποίο με πράξεις θα δώσει:

$$\dot{\varepsilon}_t(t) = -\frac{\varepsilon_t(t)}{t_\varepsilon} + \frac{1}{t_\varepsilon} \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p$$

που είναι και η μορφή στην οποία θέλαμε να καταλήξουμε. Τέλος, αν αντικαταστήσουμε το  $\tau_0$  με  $\tau(t)$  θα πάρουμε την τελική σχέση για τον παράγοντα προσωρινής παραμόρφωσης, που θα είναι στην διαφορική μορφή:

$$\dot{\varepsilon}_t(t) + \frac{1}{t_\varepsilon} \varepsilon_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \left[\frac{\tau(t)}{\mu_c}\right]^p$$



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Η τελευταία διαφορική εξίσωση μπορεί να συμπυχθεί στην μορφή

$$Q \varepsilon_t = P f_t(\tau)$$

όπου  $P, Q$  ζεύγος διαφορικών τελεστών που δίνονται από τις σχέσεις:

$$Q = 1 + t_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$$

$$P = 1$$

και  $f_t(\tau)$  η συνάρτηση δύναμης της τάσης  $\tau(t)$  που ισούται με:

$$f_t(\tau) = \left( \frac{\tau}{\mu_c} \right)^p$$

Οι διαφορικοί τελεστές  $P, Q$  μας θυμίζουν δικαίως αυτούς που είχαμε εξάγει στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα. Η σημαντική διαφορά, είναι ότι εδώ, οι τελεστές αυτοί λειτουργούν ως μη γραμμικές συναρτήσεις της τάσης. Σε περίπτωση όμως που θέλουμε να πάρουμε την γραμμική μορφή της εξίσωσης, πρέπει απλά να θέσουμε όπου

$$p = 1$$

$$t_\varepsilon = \frac{\eta}{E}$$

$$\mu_c = E$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Επιστρέφοντας στην διαφορική μορφή του παράγοντα προσωρινού ερπυσμού, μπορούμε να εξάγουμε την ολοκληρωτική μορφή. Έτσι, αν θέσουμε  $p = 1$  στην εξίσωση

$$\dot{\varepsilon}_t(t) + \frac{1}{t_\varepsilon} \varepsilon_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \left[ \frac{\tau(t)}{\mu_c} \right]^p$$

μπορούμε να γράψουμε το πρώτο μέλος ως

$$e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)} \varepsilon(t) \right]$$

το οποίο θα μας δώσει

$$\varepsilon_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \int_{0^-}^t e^{\left(\frac{t'-t}{t_\varepsilon}\right)} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

που είναι και η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης που αναζητούσαμε.

Περαιτέρω, με κατάλληλες πράξεις και ολοκλήρωση κατά μέλη μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη σχέση στην μορφή

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t \left[ 1 - e^{\left(\frac{t'-t}{t_\varepsilon}\right)} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

η οποία μπορεί εναλλακτικά μπορεί να γραφτεί

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t J(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

όπου  $J(t)$  είναι το μέτρο ένδοσης όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο και ισούται με:

$$J(t) = 1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}$$

### Γ. Ολικός ερπυσμός

Έχοντας υπολογίσει τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού  $\varepsilon_s(t)$  και τον παράγοντα προσωρινού ερπυσμού  $\varepsilon_t(t)$ , θα τους αθροίσουμε για να κατασκευάσουμε την εξίσωση ολικού ερπυσμού  $\varepsilon_c(t)$ . Έτσι, για το  $\varepsilon_t(t)$  θα πάρουμε την εξίσωση

$$\varepsilon_s(t) = \int_{0^-}^t \left( \frac{\tau(t')}{\lambda_c} \right)^n dt'$$

η οποία είναι η ολοκληρωτική μορφή. Και όπως κάναμε με την αντίστοιχη εξίσωση του προσωρινού ερπυσμού, θα την ολοκληρώσουμε κατά μέλη. Αυτό θα μας δώσει:

$$\varepsilon_s(t) = \int_{0^-}^t (t - t') \left( \frac{\tau(t')}{\lambda_c} \right)^n dt'$$

Για τον παράγοντα προσωρινού ερπυσμού θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t \left[ 1 - e^{\left( \frac{t'-t}{t_\varepsilon} \right)} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

Τέλος, θέτοντας  $p = n$  και αντικαθιστώντας στην σχέση

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_s(t) + \varepsilon_t(t)$$

αυτές που ορίσαμε ακριβώς πιο πάνω, καταλήγουμε στο πολύ βολικό ολοκλήρωμα

$$\varepsilon_c(t) = \int_{0^-}^t J(t - t') \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^n dt'$$

όπου,  $J(t)$  είναι η συνάρτηση του μέτρου ένδοσης ακριβώς όπως ορίστηκε πιο πάνω, πριν την υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης, στον υπολογισμό του ολικού ερπυσμού και ισούται με:

$$J(t) = \gamma t + \left[ 1 - e^{\left( \frac{-t}{t_\varepsilon} \right)} \right]$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Τέλος, αν επιθυμούμε, μπορούμε να εισάγουμε και τον παράγοντα γραμμικής ελαστικής παραμόρφωσης για πιο έγκυρα αποτελέσματα. Αυτό θα μας δώσει:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\tau}{E} + \int_{0^-}^t J(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^n dt'$$

Η παραπάνω τελική σχέση αντιπροσωπεύεται από το μη γραμμικό τετραπαραμετρικό μοντέλο Burgers.

**Δ. Παράγοντας χρόνου δύναμης προσωρινού ερπυσμού**

Στην τέταρτη και τελευταία περίπτωση που θα αναλύσουμε, θα προσεγγίσουμε τον προσωρινό ερπυσμό διαφορετικά. Αυτή τη φορά, η συνάρτηση τάσης-δύναμης θα πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση χρόνου-δύναμης. Για αυτόν τον λόγο, δεν θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση για τον προσωρινό ερπυσμό σταθερής τάσης που χρησιμοποιούσαμε ως τώρα, δηλαδή:

$$\varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p \left[1 - e^{\left(\frac{-t}{\tau_\varepsilon}\right)}\right]$$

αλλά θα πάρουμε την δεύτερη έκφραση που υπολογίσαμε στην αντίστοιχη ενότητα, δηλαδή:

$$\varepsilon_t(t) = \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p t^{1/q} \quad \text{για } p = 1,3,5, \dots, q > 1$$

Έτσι, με πράξεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(t)^q &= \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^{pq} t \\ \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_t(t)]^q &= \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^{pq} \\ \dot{\varepsilon}_t(t) &= \frac{1}{q} \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^{pq} [\varepsilon_t(t)]^{-(q-1)} \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση παρατηρείται ότι ο ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης  $\dot{\varepsilon}_t(t)$  μειώνεται όταν αυξάνεται η παραμόρφωση  $\varepsilon_t(t)$ , κάτι που ικανοποιεί την υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης. Τέλος, θέλοντας να γενικεύσω περισσότερο την προηγούμενη σχέση θα τεθεί όπου  $\tau_0$  το  $\tau(t)$ . Έτσι, η προτελευταία σχέση, που είναι ίση με την τελευταία, θα δώσει:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_t(t)]^q = \left(\frac{\tau(t)}{\mu_c}\right)^{pq}$$

η οποία στην ολοκληρωτική της μορφή θα είναι:

$$\varepsilon_t(t) = \left[ \int_{0^-}^t \left(\frac{\tau(t')}{\mu_c}\right)^{pq} dt' \right]^{1/q}$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

και με ολοκλήρωση κατά μέλη:

$$\varepsilon_t(t) = \left[ \int_{0^-}^t (t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right)^{pq} dt' \right]^{1/q}$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση, μας δείχνει ότι η συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\varepsilon_t^q$  είναι ένα μη γραμμικό ολοκλήρωμα μνήμης στην ιστορία φόρτισης της συνάρτησης της τάσης  $\left( \frac{\tau}{\mu_c} \right)^{pq}$  με  $J(t) = t$ . Όμως, δεν έχει κάποιο αντιπροσωπευτικό ιξωδοελαστικό μοντέλο που μπορεί να την περιγράψει επαρκώς.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι αν εφαρμόσουμε την υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης στους παράγοντες της ανηγμένης παραμόρφωσης του ερπυσμού ξεχωριστά, τα ολοκληρώματα μνήμης που θα προκύψουν, μπορούν να εκφραστούν από κάποια μοντέλα. Εντούτοις, δεν θα μπορέσουμε να βρούμε αντιπροσωπευτικά μοντέλα για τα υπόλοιπα. Επίσης, αν χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση για την ολική παραμόρφωση του ερπυσμού, θα βρούμε συνισταμένες σχέσεις οι οποίες θα αδυνατούν να εκφραστούν σε ολοκληρωτική μορφή αλλά και να αντιπροσωπευτούν από κάποιο ιξωδοελαστικό μοντέλο. Όπως είναι προφανές, η αναγωγή από την γραμμική στην μη γραμμική θεωρία της ιξωδοελαστικότητας μπορεί να επιτευχθεί με παραπάνω από έναν τρόπους, όπου ο καθένας τους θα έχει τα προτερήματα αλλά και μειονεκτήματά του.

### Σκλήρυνση χρόνου (Time-Hardening)

Μια άλλη υπόθεση που θα εξετάσουμε είναι αυτή της σκλήρυνσης χρόνου. Όπως είναι γνωστό, κάποια υλικά, κατά την διάρκεια του ερπυσμού υποβάλλονται σε ευκαταφρόνητες μικροσκοπικές αλλαγές στην δομή τους. Οι λόγοι που συμβαίνει αυτό μπορεί να είναι είτε από την παραμόρφωση λόγω ερπυσμού, είτε από κάποια χημική αλλαγή λόγω αύξησης της θερμοκρασίας. Για κάθε περίπτωση όμως, θα θέσουμε ότι για μεταβλητή τάση, ο ρυθμός μεταβολής του ερπυσμού σε οποιονδήποτε χρόνο  $t$ , θα είναι συνάρτηση της ακαριαίας τάσης και του χρόνου. Βάσει των προηγούμενων θα ισχύει η συνάρτηση:

$$\dot{\epsilon}(t) = f[\tau(t), t]$$

η οποία ονομάζεται *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου* και μας δείχνει ότι αν φέρουμε τον νόμο ερπυσμού, για κάποιο υλικό, επηρεαζόμενο από το χρόνο με κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση τάσης  $\tau_i(t)$  στην μορφή αυτή, τότε, η μορφή αυτή μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε συνάρτηση τάσης  $\tau(t)$ . Γενικά, καλύτερη προσέγγιση γίνεται αν συνδυάσουμε και τις δύο υποθέσεις σκλήρυνσης, αλλά αυτό θα εξεταστεί παρακάτω.

Θα εργαστούμε ομοίως με την *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* και θα εξάγουμε τους παράγοντες του ερπυσμού έναν έναν ξεχωριστά. Ξεκινώντας με τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού και χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο θα πάρω:

$$\dot{\epsilon}_s(t) = \left(\frac{\tau_0}{\lambda_c}\right)^n$$

Αυτός όμως ο τύπος παραμερίστηκε επειδή τον θεωρήσαμε ειδική περίπτωση, αφού δεν περιέχει παραμόρφωση, αλλά ούτε κάποια εξάρτηση και από τον χρόνο. Το ίδιο ισχύει και στην *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου*. Επομένως, με ανάλογη χρήση της υπόθεσής μας θα καταλήξουμε στον ίδιο τύπο για τον παράγοντα σταθερού ερπυσμού με μεταβλητή τάση, δηλαδή:

$$\dot{\epsilon}_s(t) = \left(\frac{\tau(t)}{\lambda_c}\right)^n$$

Στην συνέχεια, για την εκθετική μορφή του παράγοντας προσωρινού ερπυσμού, χρησιμοποιούμε ξανά την σχέση

$$\dot{\epsilon}_t(t) = \frac{1}{t_\epsilon} \left(\frac{\tau_0}{\mu_c}\right)^p e^{\left(\frac{-t}{t_\epsilon}\right)}$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Εδώ όμως δεν χρειάζεται να αλλάξουμε κάτι, επειδή η εξάρτηση από τον χρόνο που απαιτείται από την υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου, υπάρχει ήδη μέσα στην εξίσωση.

Άρα, με κατάλληλη αντικατάσταση της σταθερής τάσης  $\tau_0$  με  $\tau(t)$  θα πάρουμε την διαφορική μορφή:

$$\dot{\epsilon}_t(t) = \frac{1}{t_e} \left( \frac{\tau(t)}{\mu_c} \right)^p e^{\left( \frac{-t}{t_e} \right)}$$

η οποία μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\dot{\epsilon}_t(t) = \left[ \frac{\tau(t)}{\eta(t)} \right]^p$$

όπου

$$\eta(t) = \mu_c t_e^{1/p} e^{t/pt_e}$$

είναι ένας συντελεστής ιξώδους που αυξάνει με τον χρόνο.

Για την ολοκληρωτική μορφή του παράγοντα προσωρινού ερπυσμού θα εργαστούμε όπως προηγουμένως. Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_t(t) &= \frac{1}{t_e} \left( \frac{\tau(t)}{\mu_c} \right)^p e^{\left( \frac{-t}{t_e} \right)} \\ \epsilon_t(t) &= \frac{1}{t_e} \int_{0^-}^t e^{\left( \frac{-t'}{t_e} \right)} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt' \\ \epsilon_t(t) &= - \int_{0^-}^t \frac{\partial}{\partial t'} e^{\left( \frac{-t'}{t_e} \right)} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt' \end{aligned}$$

το οποίο με ολοκλήρωση κατά μέλη και κατάλληλες πράξεις θα μας δώσει:

$$\epsilon_t(t) = \int_{0^-}^t \left[ e^{\left( \frac{-t'}{t_e} \right)} - e^{\left( \frac{-t}{t_e} \right)} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

που αντιστοίχως με χρήση της συνάρτησης του μέτρου ένδοσης

$$J(t) = 1 - e^{\left( \frac{-t}{t_e} \right)}$$



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t [J(t) - J(t')] \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

Είναι σημαντικό να επισημανθεί πως αν συγκρίνουμε την προηγούμενη εξίσωση με την αντίστοιχη για την υπόθεση *σκληρότητας παραμόρφωσης*

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t J(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

παρατηρείται από τους παράγοντες που περιέχουν το μέτρο ένδοσης, δηλαδή:

$$[J(t) - J(t')]$$

και

$$J(t-t')$$

ότι ο πρώτος, σε αντίθεση με τον δεύτερο, αναφέρεται σε υλικά που επηρεάζονται με την πάροδο χρόνου.

Τέλος, έχοντας τους δύο παράγοντες ερπυσμού μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ολικό ερπυσμό. Έτσι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\varepsilon_s(t) = \int_{0^-}^t \left( \frac{\tau(t')}{\lambda_c} \right)^n dt'$$

που είναι η ολοκληρωτική μορφή της

$$\dot{\varepsilon}_s(t) = \left( \frac{\tau(t)}{\lambda_c} \right)^n$$

καθώς και την εξίσωση

$$\varepsilon_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \int_{0^-}^t e^{\left(\frac{-t'}{t_\varepsilon}\right)} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

θα πάρουμε:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_s(t) + \varepsilon_t(t)$$

$$\varepsilon_c(t) = \int_{0^-}^t \left[ \gamma + \frac{1}{t_\varepsilon} e^{\left(\frac{-t'}{t_\varepsilon}\right)} \right] \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^n dt'$$

όπου

$$\gamma = \left( \frac{\mu_c}{\lambda_c} \right)^n$$

Παρόλο που κάθε όρος στην εξίσωση που φτιάξαμε για τον ολικό ερπυσμό επαληθεύει την *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου*, όπως και στην περίπτωση της *σκλήρυνσης παραμόρφωσης*, το ίδιο δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση της εξίσωσης ολικού ερπυσμού με σταθερή τάση. Αν θέλουμε να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, θα πρέπει να γυρίσουμε πίσω στις εξισώσεις

$$\varepsilon_c(t) = \left( \frac{\tau_0}{\mu_c} \right)^n J(t) \quad , \quad J(t) = \gamma t + \left[ 1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)} \right]$$

και να τις παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο. Αυτό θα μας δώσει:

$$\dot{\varepsilon}_c(t) = \left( \frac{\tau_0}{\mu_c} \right)^n \left[ \gamma + \frac{1}{t_\varepsilon} e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)} \right]$$

το οποίο με αντικατάσταση του  $\tau_0$  με  $\tau(t)$  και ολοκλήρωση, θα μας δώσει την σχέση:

$$\varepsilon_c(t) = \int_{0^-}^t \left[ \gamma + \frac{1}{t_\varepsilon} e^{\left(\frac{-t'}{t_\varepsilon}\right)} \right] \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^n dt'$$

η οποία είναι η ίδια εξίσωση στην οποία καταλήξαμε με μερική εφαρμογή της *υπόθεσης σκλήρυνσης χρόνου* στους παράγοντες του ολικού ερπυσμού ξεχωριστά. Το συμπέρασμα αυτό είναι μεγάλης σημασίας, αφού έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που είχαμε για την *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης*, την οποία όταν την εφαρμόζαμε στην ολική εξίσωση ερπυσμού, έδινε διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά που θα έδινε αν αθροίζαμε τους παράγοντες με την υπόθεση ξεχωριστά.

## 5. Σύγκριση υποθέσεων και παραδείγματα

Έχοντας αναλύσει διεξοδικά τις δύο υποθέσεις για την σκλήρυνση, καταλήξαμε σε τρεις εξισώσεις, δύο για την *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* (μία εφαρμόζοντας την υπόθεση στους παράγοντες της παραμόρφωσης ξεχωριστά και μία όταν την εφαρμόζουμε στην ολική παραμόρφωση) και μία για την *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου*.

Αυτό που μένει να κάνουμε είναι να τις συγκρίνουμε μεταξύ τους με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα. Για αυτόν τον λόγο, θα γίνει χρήση της εξίσωσης βήματος, όπου θα ξεκινάμε με σταθερή τάση  $\tau_0$  και στην συνέχεια θα καταλήγουμε σε τάση  $k \tau_0$  όπου ο  $k > 1$ . Η εξίσωση που το περιγράφει είναι η εξής:

$$\tau(t) = \tau_0 \{ [u(t)] - [u(t - t_1)] + k[u(t - t_1)] \}$$

Και για να περιγράψουμε τις υποθέσεις μας, θα χρησιμοποιήσουμε, για την *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* την εξίσωση:

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t J(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

και για την *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου* την εξίσωση:

$$\varepsilon_t(t) = \int_{0^-}^t [J(t) - J(t')] \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt'$$

όπου

$$J(t) = 1 - e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)}$$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Η πρακτική εφαρμογή του προβλήματος σύγκρισης θα γίνει με το πρόγραμμα *Wolfram Mathematica 7*. Οι σταθερές που θα χρησιμοποιήσουμε στο πρόβλημά μας είναι οι εξής:

$$k=5, t_e=20, \tau_0=5, \gamma=7 \cdot 10^{-3}, p=1,5, \mu_c=2 \cdot 10^3 \text{ και } dt=0,1$$

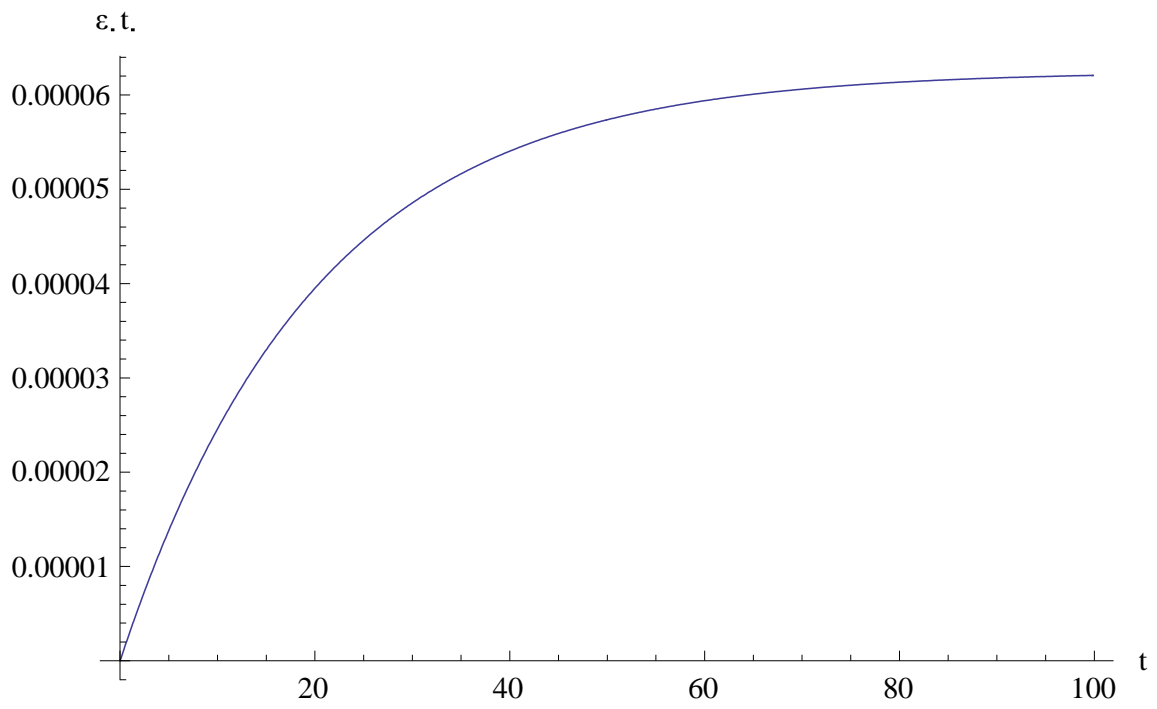
Για αρχή, θα υπολογίσουμε την παραμόρφωση συναρτήσει του χρόνου  $\varepsilon(t)$ , με σταθερή τάση, για  $\tau_0$  και  $k$   $\tau_0$  ξεχωριστά. Ο κατάλληλος κώδικας για την *Mathematica* είναι ο εξής:

```
str = Table[{t = dti;  
j[t_] := 1 - Exp[-t/tε];  
τ[tt_] := kHeavisideTheta[tt];  
εt[t_] := Integrate[(j[t] - j[tt])D[HeavisideTheta[tt](k/μc)p, tt], {tt, 0, t}];  
t, εt[dti]], {i, 0, 1000}];
```

Και το διάγραμμα που θα δώσει είναι:

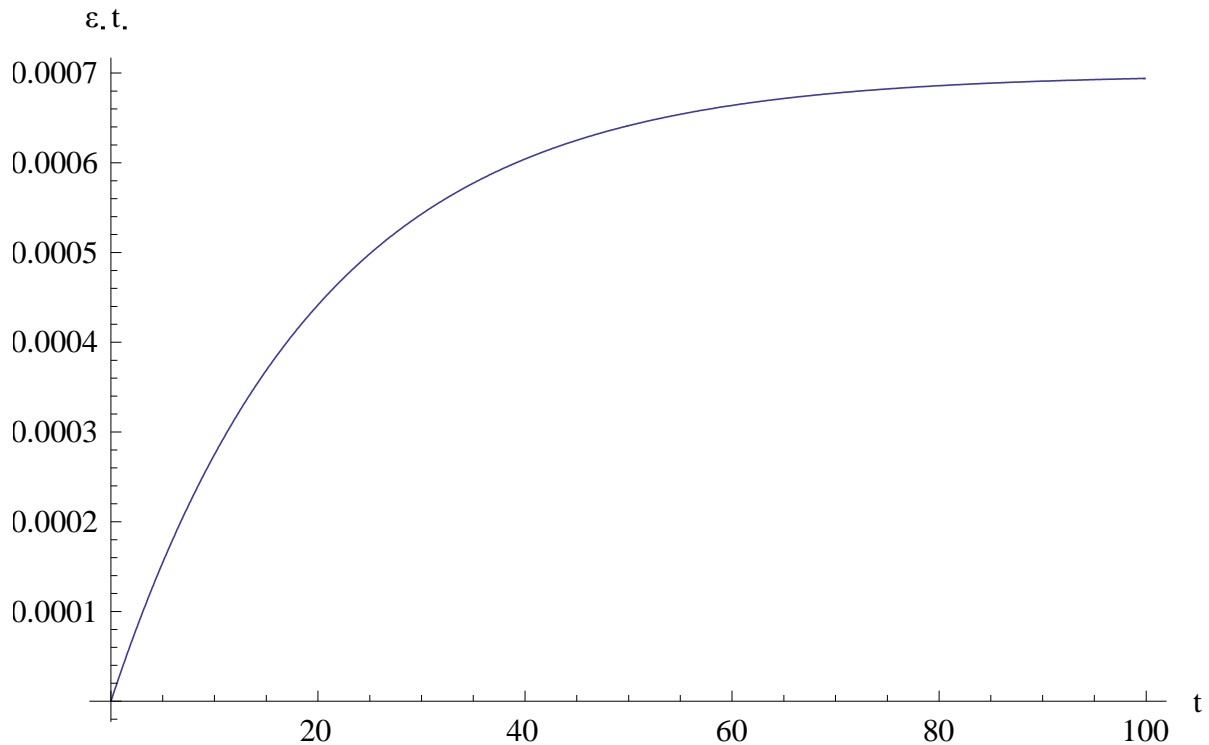
για  $\tau_0$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

και



για  $k \tau_0$ .

Ακόμα, είναι σημαντικό να τονίσουμε πως δεν έχει σημασία ποια υπόθεση θα χρησιμοποιήσουμε για να προσδιορίσουμε το διάγραμμα για σταθερή τάση αφού και οι δύο θα μας δώσουν το ίδιο.

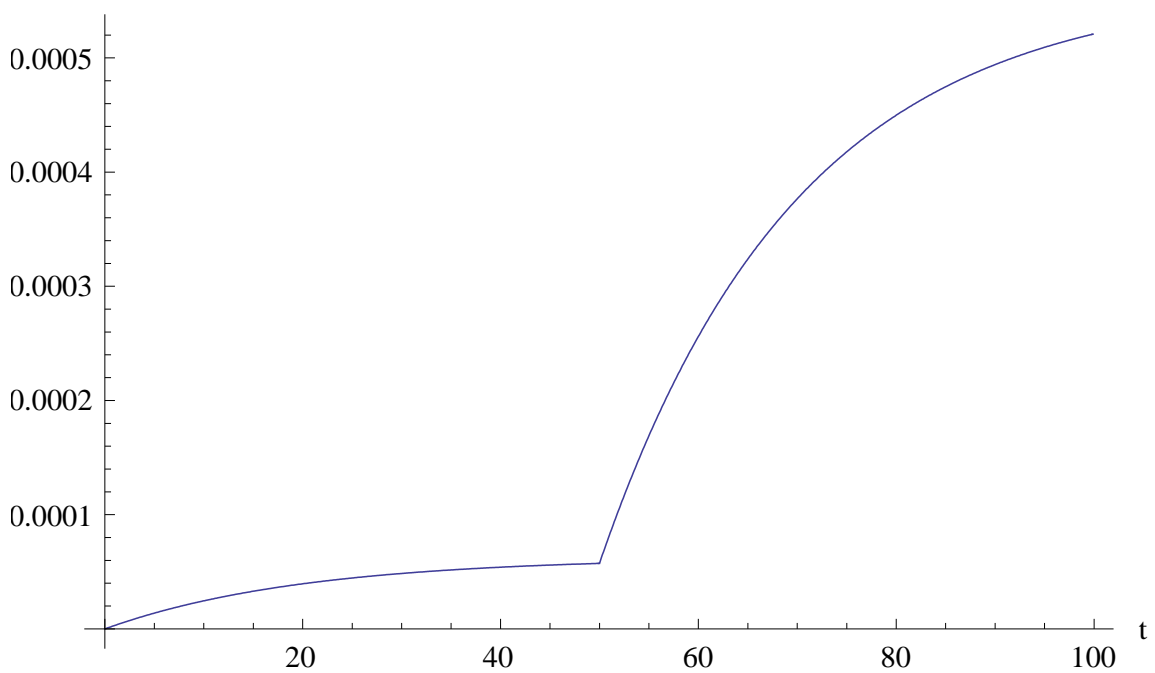
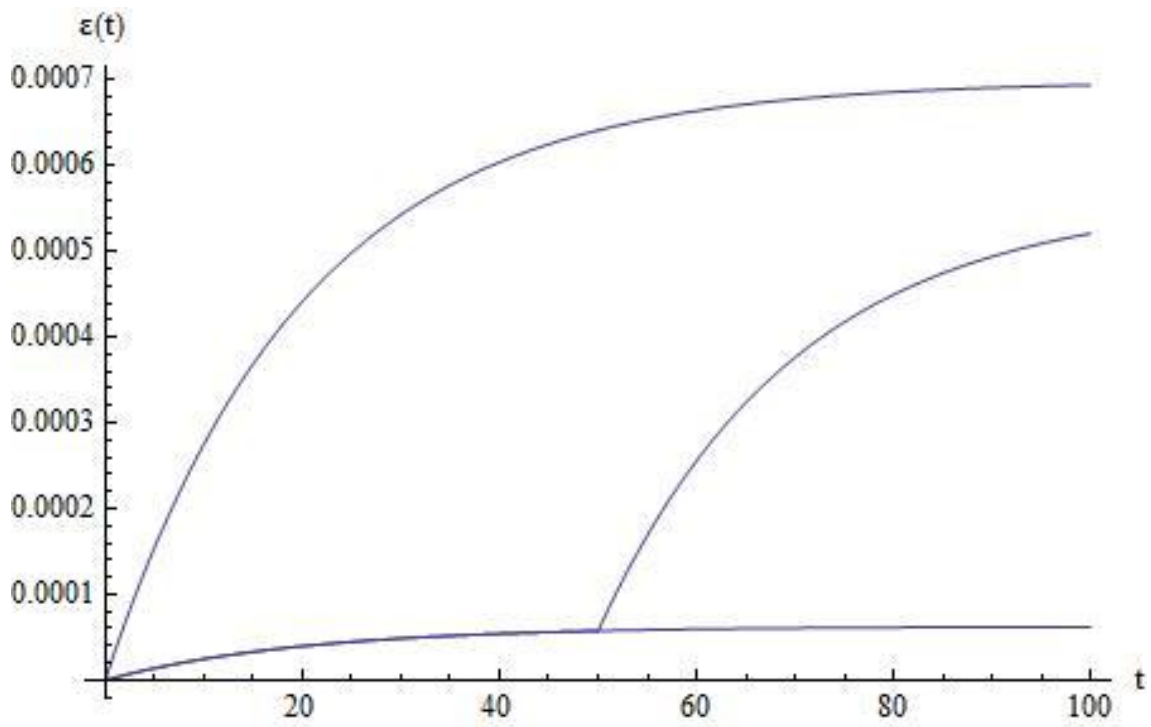
Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την συνάρτηση βήματος που αναφέραμε παραπάνω θα δούμε πως εξελίσσεται γραφικά η υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης με «βήμα» στο  $t_1$ . Έτσι, με τον κατάλληλο κώδικα στην *Mathematica* για  $t_1 = 50$  ισχύει:

```
strain = Table[{t = dti;
j[t_] := 1 - Exp[-t/τε];
tasi[tt_] := τ0(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]
+ kHeavisideTheta[tt - t1]);
εt[t_] := Integrate[j[t - tt]D[(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]
+ k HeavisideTheta[tt - t1])(τ0/μc)^p, tt], {tt, 0, t}];
t, εt[dti]}, {i, 0, 1000}];
```

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Και προκύπτει το γράφημα:

και αν θέλω να το συγκρίνω με το αρχικά διαγράμματα για  $\tau_0$  και  $k \tau_0$  χωρίς το βήμα θα έχω:

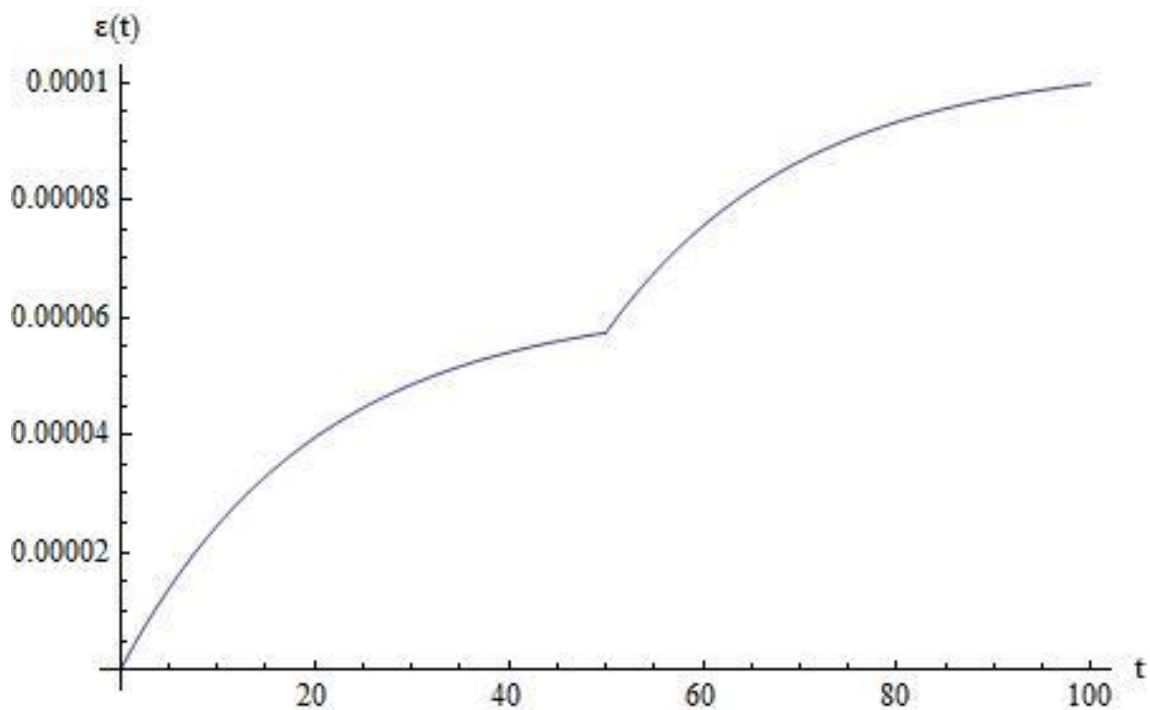


## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Αντίστοιχα, για την υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου, ο κατάλληλος κώδικας είναι:

```
str = Table[{t = dti;  
j[tt_] := 1 - Exp[-t/τε];  
τ[tt_] := τ0(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]  
+ k0HeavisideTheta[tt - t1]);  
εt[tt_] := Integrate[(j[t]  
- j[tt])D[(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]  
+ k0HeavisideTheta[tt - t1])(τ0/μc)p, tt], {tt, 0, t}];  
t, εt[dti]], {i, 0, 1000}];
```

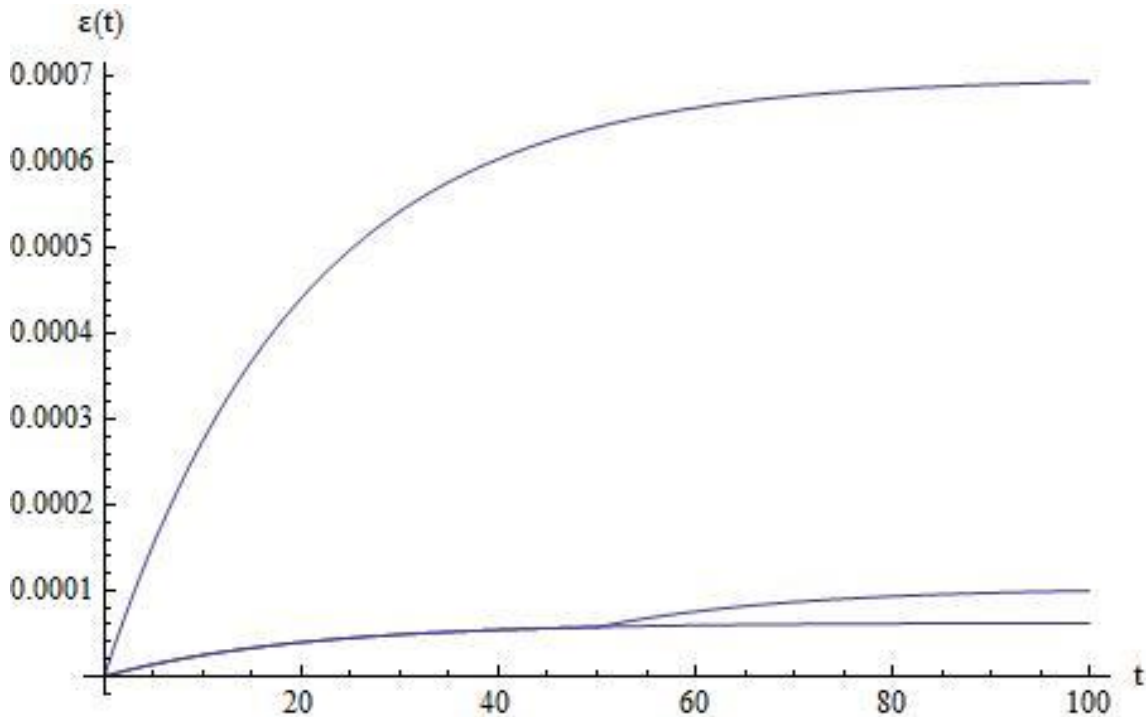
ο οποίος μας δίνει το γράφημα:



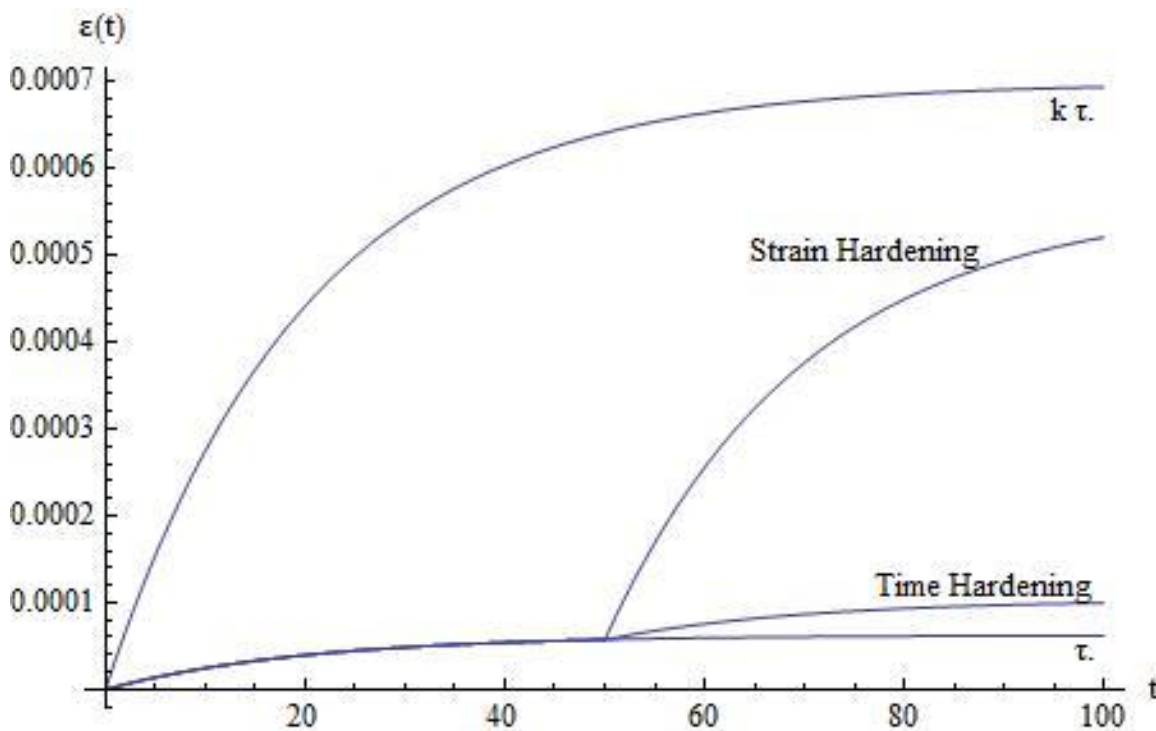


## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

το οποίο αν θέλω να το συγκρίνω με τα αρχικά διαγράμματα για  $k \tau_0$  και  $\tau_0$  χωρίς το βήμα θα πάρω:



Πιο ενδιαφέρον όμως είναι αν συγκρίνω στους ίδιους άξονες την εξέλιξη και των δύο υποθέσεων. Κάτι τέτοιο θα μου δώσει το γράφημα:



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Αν παρατηρήσουμε το παραπάνω διάγραμμα, διακρίνεται πως μετά το βήμα στο  $t_1$  η καμπύλη για την *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης*, είναι όμοια με την αρχική καμπύλη χωρίς βήμα, μετατοπισμένη παράλληλα προς τα δεξιά. Ενώ η καμπύλη για την *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου* είναι ακριβώς ίδια με την αρχική αλλά αυτή την φορά παράλληλα μετατοπισμένη προς τα κάτω.

Παράδειγμα 1

Ας εξετάσουμε τώρα, το ίδιο πρόβλημα αλλά με διαφορετικές σταθερές και διαφορετική εξίσωση  $J(t)$ . Αυτή τη φορά, οι σταθερές θα είναι:

$$k=1,5, t_e=0,1, \tau_0=2, \gamma=7 \cdot 10^{-3}, p=3, \mu_c=2 \cdot 10^3 \text{ και } dt=0,1, M = \left(\tau_0/\mu_c\right)^p$$

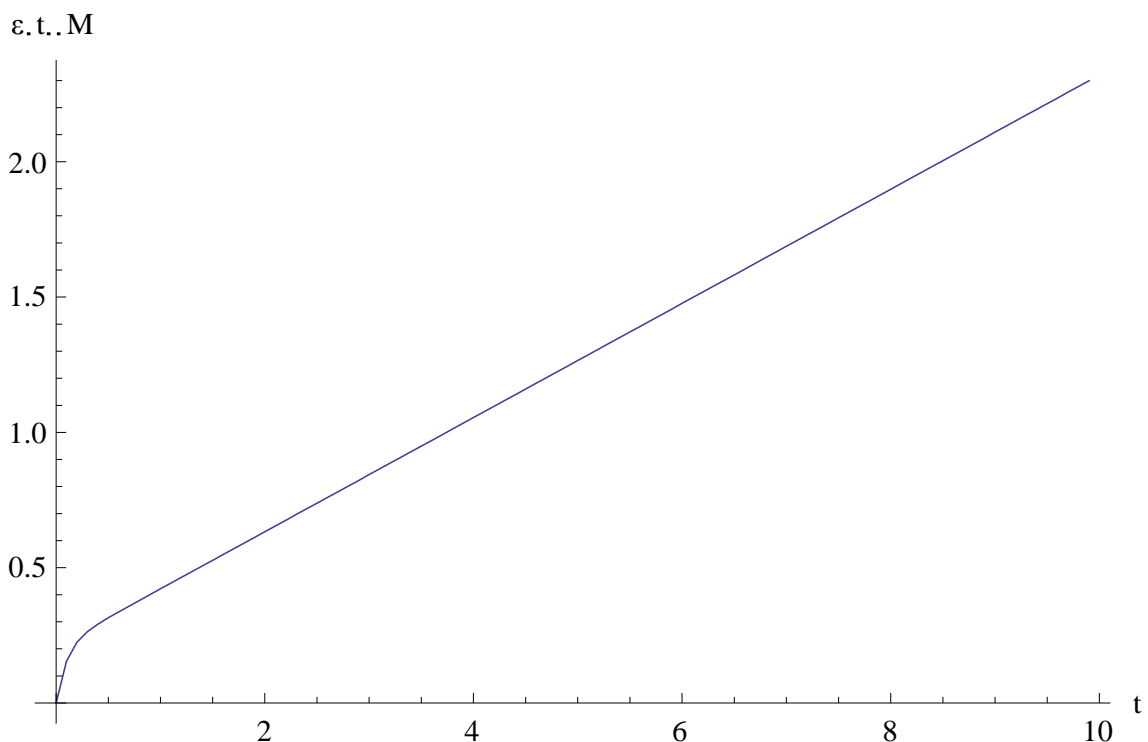
Και η εξίσωση  $J(t)$  θα είναι:

$$J(t) = t + 1 - e^{-10t}$$

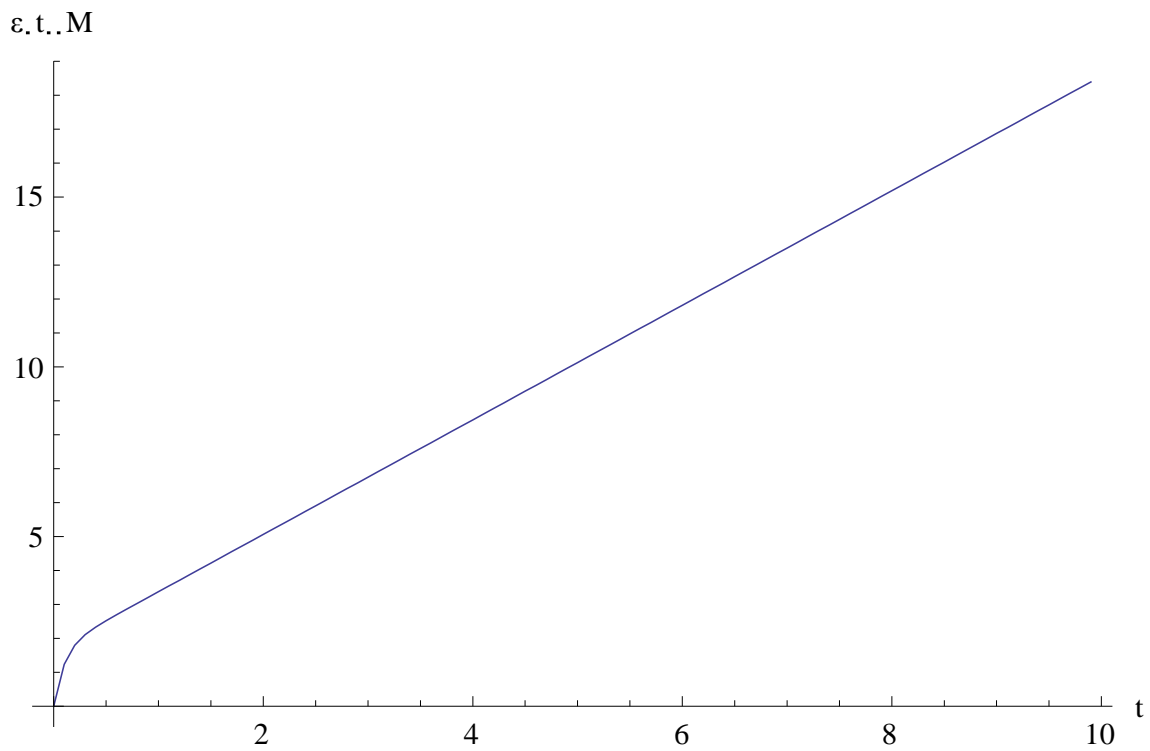
Οπότε, ο κατάλληλος κώδικας που προκύπτει θα είναι:

```
str = Table[{t = dti;
j[t_] := t + 1 - Exp[-10t];
τ[tt_] := kHeavisideTheta[tt];
εt[t_] := Integrate[(j[t] - j[tt])D[HeavisideTheta[tt](k/μc)^p, tt], {tt, 0, t}];
t, εt[dti]], {i, 0, 1000}];
```

και για  $\tau_0$  θα έχει γραφική παράσταση:

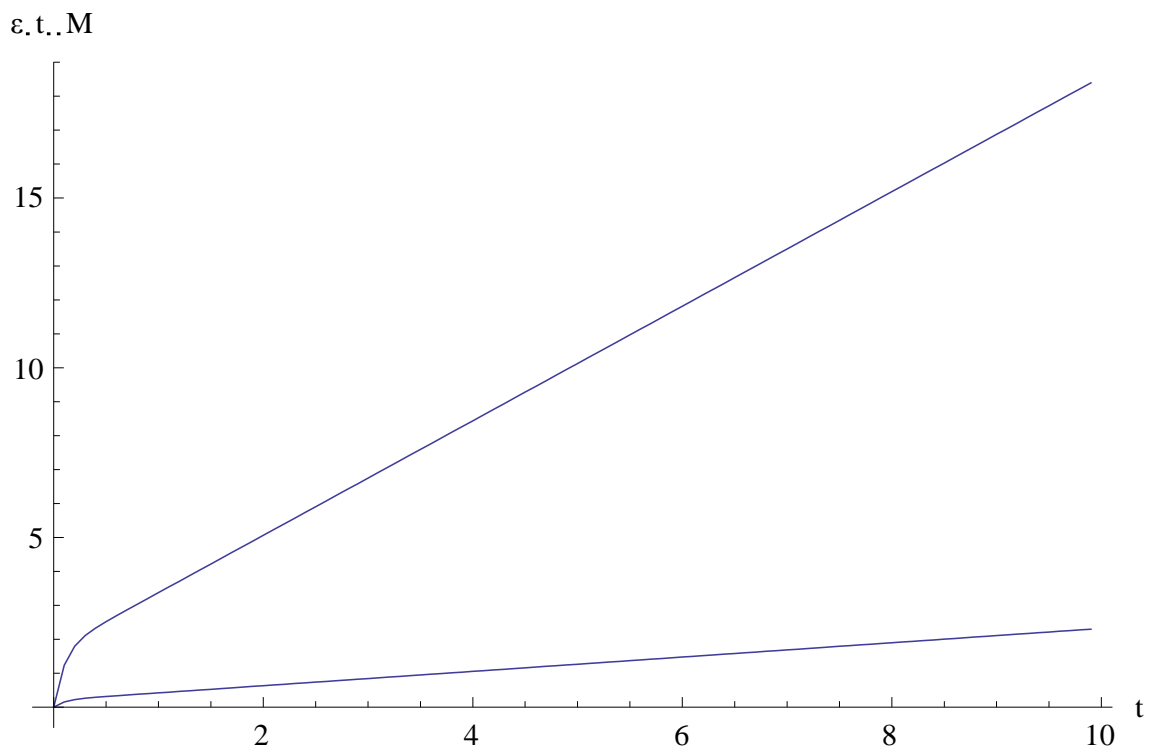


## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών



ενώ για  $k \tau_0$  θα έχει γραφική παράσταση:

Συνδυασμένα στο ίδιο γράφημα προκύπτει:

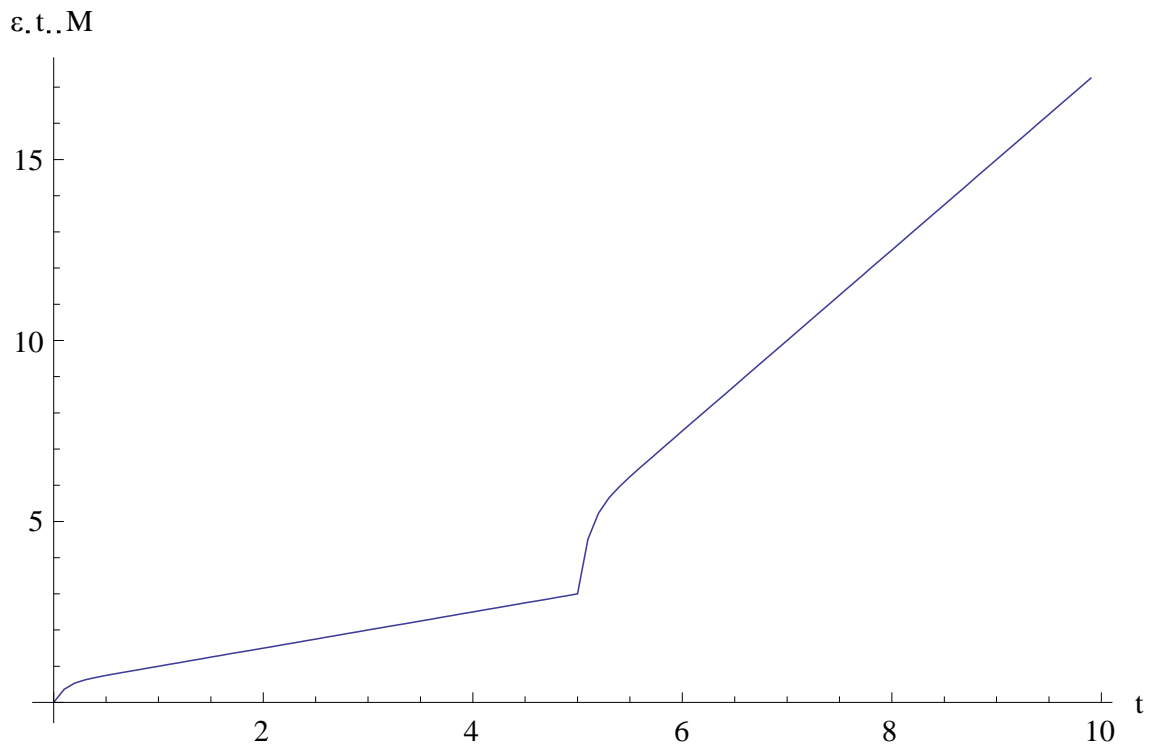


## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Ακολουθώντας, θα εφαρμόσουμε όπως και στην προηγούμενη σύγκριση, την συνάρτηση βήματος και θα δούμε πώς εξελίσσεται γραφικά η υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης με «βήμα» στο  $t_1$ . Έτσι, ο κατάλληλος κώδικας στην γλώσσα *Mathematica* για  $t_1 = 1$  θα είναι:

```
strain = Table[{t = dti;  
j[t_] := t + 1 - Exp[-10t];  
tasi[tt_] := τ0 (HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]  
+ k HeavisideTheta[tt - t1]);  
εt[t_] := Integrate[j[t  
- tt] D[(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]  
+ k HeavisideTheta[tt - t1]) (τ0/μc)^p, tt], {tt, 0, t}];  
t, εt[dti]], {i, 0, 1000}];
```

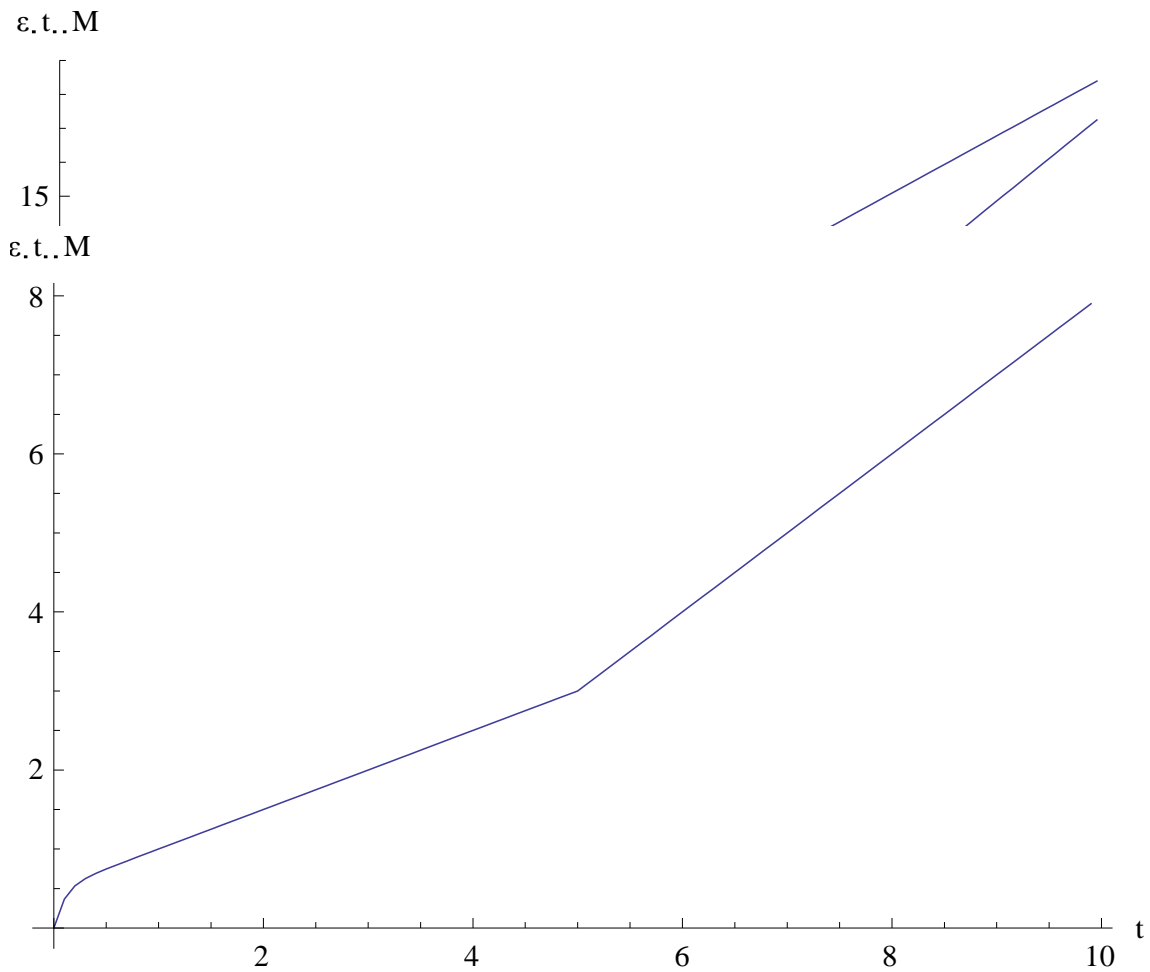
Και το γράφημά του:





## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Και αν το συγκρίνουμε με την αρχική καμπύλη για  $k \tau_0$  θα δείχνει ως εξής:



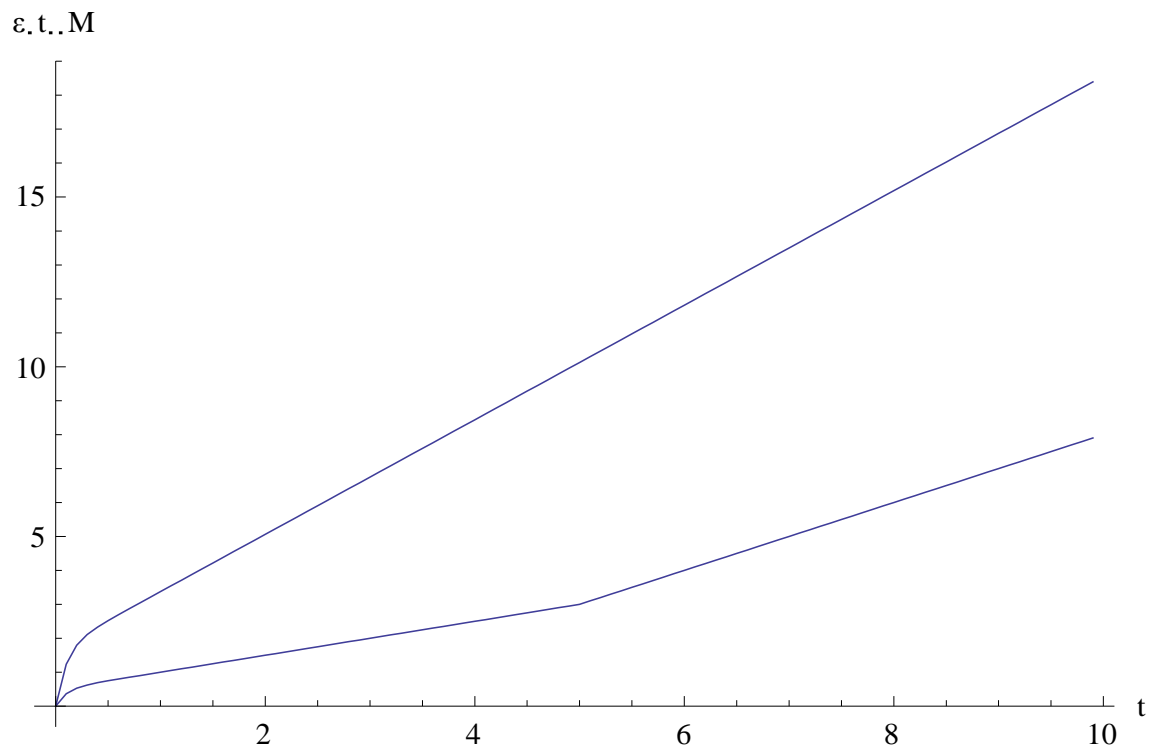
Αντίστοιχα, για την υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου, ο κατάλληλος κώδικας θα είναι:

```
str = Table[{t = dti;
j[t_] := t + 1 - Exp[-10t];
τ[tt_] := τ0(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]
+ k0HeavisideTheta[tt - t1]);
εt[t_] := Integrate[(j[t]
- j[tt]) D[(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]
+ k0 HeavisideTheta[tt - t1]) (τ0/μc)^p, tt], {tt, 0, t}];
t, εt[dti]], {i, 0, 1000}];
```

με αντίστοιχο γράφημα:

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

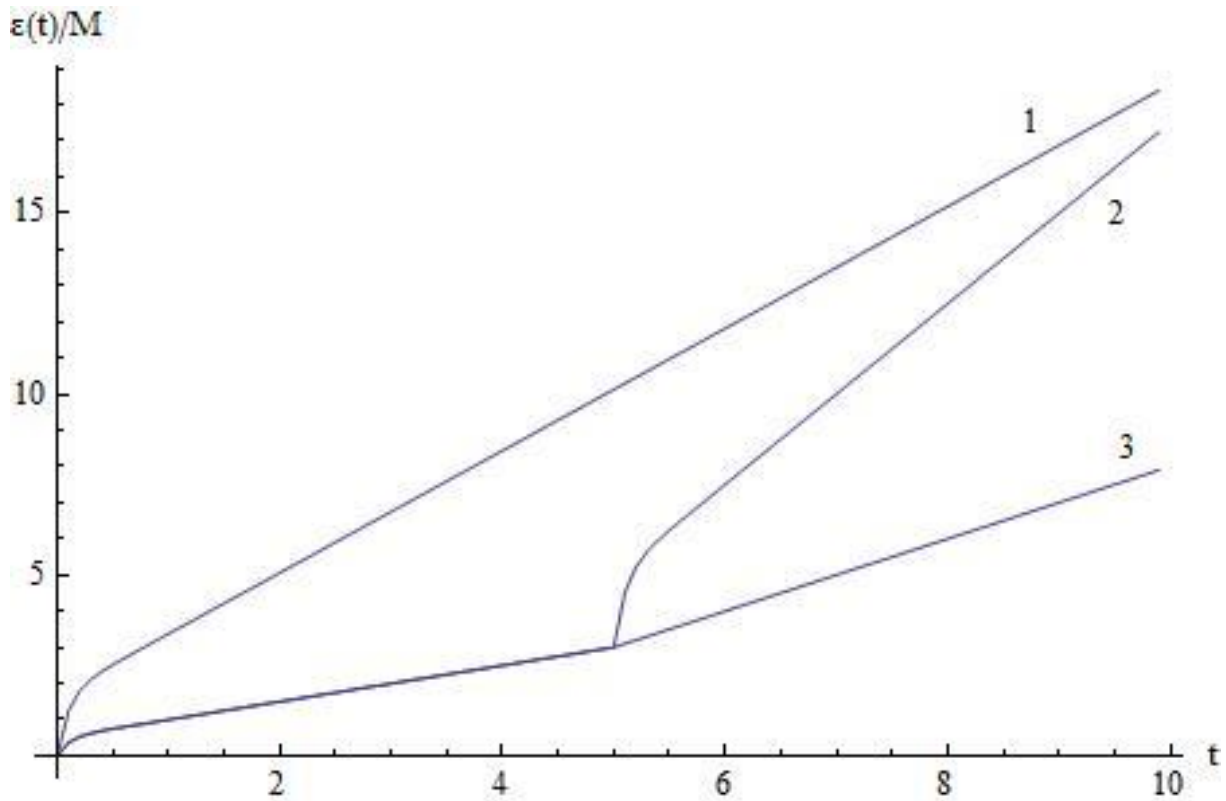
Αν συγκρίνουμε και αυτή την καμπύλη με την αρχική για  $k \tau_0$  θα λάβω:



Και τέλος, η γραφική παράσταση με τις δύο υποθέσεις και την αρχική καμπύλη για  $k \tau_0$  θα είναι:



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών



Μελετώντας το τελευταίο και πιο ενδιαφέρον διάγραμμα, παρατηρούμε ότι η καμπύλη 2, που αντιστοιχεί στην υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης, μετά το βήμα στο  $t_i$  παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές από την καμπύλη 3, η οποία αντιστοιχεί στην υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου. Επιπροσθέτως, είναι εμφανές και σε αυτήν την περίπτωση όπως και με την προηγούμενη, ότι η καμπύλη 2 της υπόθεσης σκλήρυνσης παραμόρφωσης είναι μια παράλληλη οριζόντια μετατόπιση της αρχικής καμπύλης για  $k \tau_0$  (καμπύλη 1) προς τα δεξιά. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η καμπύλη 3 που αντιστοιχεί στην υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου είναι μια παράλληλη κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης 1 που αντιστοιχεί στην αρχική για  $k \tau_0$ .

Η βασική ερώτηση που προκύπτει, είναι ποια είναι η καλύτερη υπόθεση από τις δύο. Αυτό, όμως, δεν μπορεί να απαντηθεί εύκολα. Συνίσταται να χρησιμοποιείται η υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης για τα σταθερά κατασκευαστικά υλικά και η υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου για τα ασταθή κατασκευαστικά υλικά, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητα το σωστό για όλες τις περιπτώσεις.

## Παράδειγμα 2

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό στο οποίο χρησιμοποιούμε και τις δύο υποθέσεις ταυτόχρονα αλλά με κάποιο συντελεστή εξάρτησης.

Η συνάρτηση για την ανηγμένη παραμόρφωση είναι η εξής:

$$\varepsilon_t(t) = \frac{1}{t_\varepsilon} \left\{ a e^{\left(\frac{-t}{t_\varepsilon}\right)} \int_{0^-}^t e^{\left(\frac{t'}{t_\varepsilon}\right)} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt' + (1 - a) \int_{0^-}^t e^{\left(\frac{-t'}{t_\varepsilon}\right)} \left[ \frac{\tau(t')}{\mu_c} \right]^p dt' \right\}$$

όπου ο συντελεστής  $\alpha$  είναι υπεύθυνος για το πόσο εξαρτάται το πρόβλημά μας από τον πρώτο παράγοντα, ο οποίος εκφράζει την υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης ή από τον δεύτερο παράγοντα, ο οποίος εκφράζει την υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου. Θα λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα για σταθερή τάση  $\tau_0$  η οποία σε χρόνο  $t_1$  θα μηδενιστεί. Αυτό σημαίνει ότι στην συνάρτηση βήματος που αναφέρθηκε στο αρχικό παράδειγμα, ισχύει ότι  $k = 0$ . Ακόμα, θα δοκιμασθεί για περιπτώσεις όπου ο συντελεστής  $\alpha$  είναι  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,5$  και  $\alpha = 1$ .

Αυτό σε γλώσσα *Mathematica* γράφεται ως εξής:

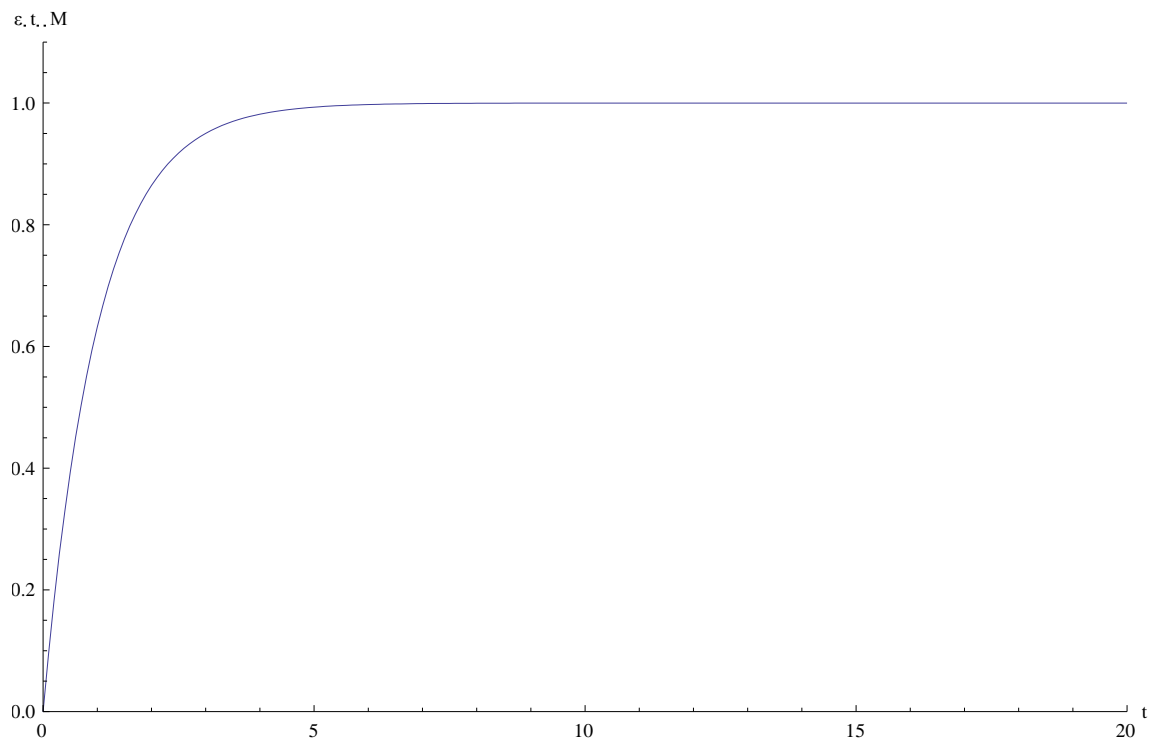
```
strainc = Table[{t = dti;
tasi[tt_] := τ0(HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt - t1]);
str[t_] := (1/τϵ)(αExp[-t/τϵ]Integrate[Exp[tt/τϵ](HeavisideTheta[tt]
- HeavisideTheta[tt - t1])(τ0/μc)^p, {tt, 0, t}] + (1
- α)Integrate[Exp[-tt/τϵ](HeavisideTheta[tt] - HeavisideTheta[tt
- t1])(τ0/μc)^p, {tt, 0, t}]);
t, str[dti]}, {i, 0, 1000}];
```

Όλα τα γραφήματα θα είναι ως προς τους άξονες  $\varepsilon_i/M$  και  $t$  με  $M = (\tau_0/\mu_c)^p$ .

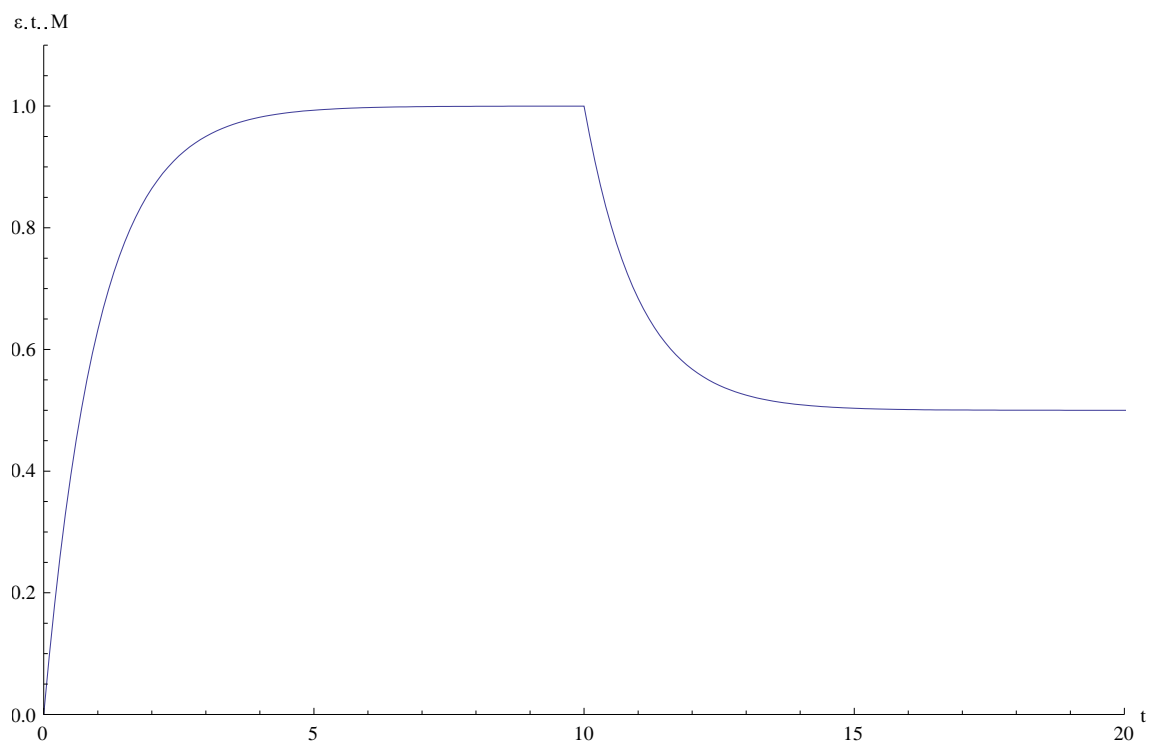
Επομένως, θα προκύψει:

για  $\alpha = 0$

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

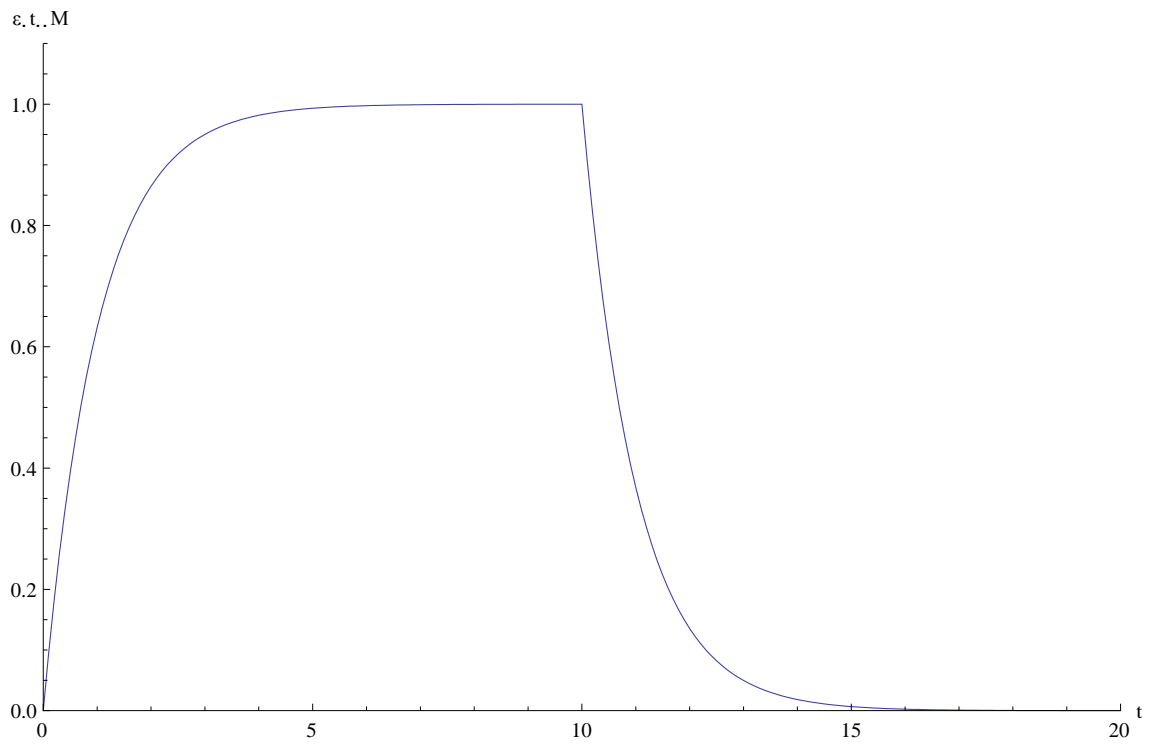


για  $\alpha = 0,5$

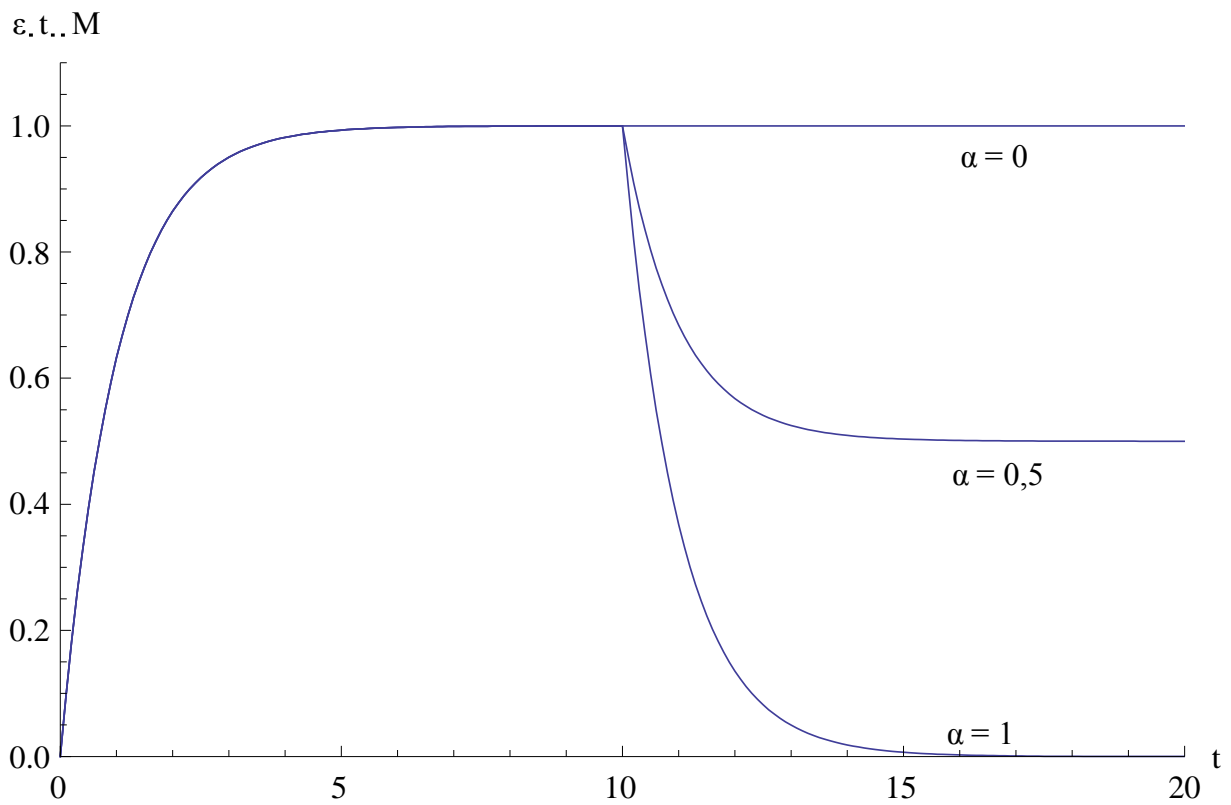


# Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

και για  $\alpha = 1$



Και το γράφημα με όλες τις περιπτώσεις μαζί είναι:



## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Όπως είναι εμφανές, στην τελευταία γραφική παράσταση με όλες τις περιπτώσεις μαζί, η παραμόρφωση ξεκινάει και μέχρι το πρώτο βήμα  $\tau_1$  έχει την κλασσική μορφή ερπυσμού. Στη συνέχεια, για την περίπτωση όπου επικρατεί η *υπόθεση σκλήρυνση χρόνου* ( $\alpha = 0$ ), το  $\varepsilon_t$  παραμένει σταθερό χωρίς κάποια ένδειξη μείωσης. Αντιθέτως, για την περίπτωση όπου ο συντελεστής  $\alpha$  γίνεται  $1$  ( $\alpha = 1$ ) και επικρατεί η *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης*, η καμπύλη πέφτει απότομα με εκθετικό ρυθμό και σταθεροποιείται στο μηδέν. Για την ενδιάμεση περίπτωση, όμως, όπου για τον συντελεστή  $\alpha$  ισχύει  $\alpha = 0,5$  και επιδρά πάνω στο υλικό η *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* αλλά και η *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου*, η γραφική παράσταση κάνει ένα «σκαλοπάτι» στο  $\tau_1$  και σταθεροποιείται στην μισή τιμή από αυτήν που είχε πριν τον χρόνο  $\tau_1$ .

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου* τείνει να κρατήσει τις τιμές του  $\varepsilon_t / (\tau_0 / \mu_c)^p$  σταθερές μετά το πέρας της εφαρμογής τάσης, ενώ η *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* τις μηδενίζει.

## 6. Επίλογος

Έχοντας μελετήσει διεξοδικά την θεωρία της ιξωδοελαστικότητας για γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα, καταλήγουμε σε πολύ βασικά συμπεράσματα για την συμπεριφορά αρκετών ομάδων υλικών (όπως πολυμερή και σύνθετα) που χρησιμοποιούνται σε κατασκευαστικά και μη έργα.

Μονομερής μελέτη της ελαστικότητας ή του ιξώδους δεν είναι αρκετή για να χαρακτηρίσει ουσιαστικά τις ιδιότητες αυτών των υλικών. Άρα, η σωστότερη αντιμετώπιση είναι να συνδυάσουμε τις δύο αυτές θεωρίες σε μία, και με κατάλληλα μοντέλα για την κάθε περίπτωση, να βρούμε τις βασικές ιξωδοελαστικές ιδιότητες που θα μας δώσουν τις πιο αντιπροσωπευτικές ανταποκρίσεις που θα έχουν τα υλικά αυτά κάτω από συνεχείς ή απότομες φορτίσεις.

Στην συνέχεια, έγινε κατανοητό πως η γραμμική μόνο μελέτη της θεωρίας της ιξωδοελαστικότητας δεν είναι αρκετή για να μας δώσει τα πιο αντιπροσωπευτικά συμπεράσματα. Έτσι, η μη γραμμική μελέτη κρίθηκε απαραίτητη για την βαθύτερη κατανόηση της ιξωδοελαστικής θεωρίας. Στην διαδικασία αυτήν, το βάρος έπεσε σε δύο υποθέσεις οι οποίες δρουν ξεχωριστά στους παράγοντες της εξίσωσης του ερπυσμού, ή αποκλειστικά στην συνολική εξίσωση. Αυτές είναι, η *υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης* και η *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου*.

Μετά από αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και λύση τους στο πρόγραμμα Mathematica, συμπεράναμε για αυτές τις υποθέσεις, ότι αν γίνει χρήση της συνάρτησης βήματος για την συνάρτηση της τάσης  $\tau$  και εκφράσουμε γραφικά την ολική ανηγμένη παραμόρφωση και με τις δύο θεωρίες, η καμπύλη της *υπόθεσης σκλήρυνσης παραμόρφωσης* μετά το πρώτο βήμα (της εξίσωσης βήματος), θα είναι ίδια με την καμπύλη για σταθερή τάση (χωρίς βήμα) αλλά μετατοπισμένη παράλληλα προς τα δεξιά. Επιπροσθέτως, η καμπύλη για την *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου* μετά το πρώτο βήμα, θα είναι ίδια με την καμπύλη για σταθερή τάση, χωρίς βήμα, αλλά αυτή τη φορά μετατοπισμένη παράλληλα προς τα κάτω.

Ακόμα, είδαμε ότι είναι δυνατό οι δύο υποθέσεις σκλήρυνσης να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα, αλλά με κάποιον συντελεστή εξάρτισης που θα καθορίζει ποια από τις δύο υποθέσεις θα επικρατεί.

## Μη γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών

Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ότι καμία από τις δύο υποθέσεις σκλήρυνσης δεν είναι καλύτερη από την άλλη, αλλά θα πρέπει να χρησιμοποιούνται και οι δύο συνδυαστικά ή μεμονωμένα για να μπορούμε να έχουμε τα καλύτερα αποτελέσματα. Το μόνο που μπορεί να ειπωθεί πάνω σε αυτό το ζήτημα είναι ότι η υπόθεση σκλήρυνσης παραμόρφωσης είναι πιο αντιπροσωπευτική για σταθερά κατασκευαστικά υλικά, ενώ για τα πιο ασταθή κατασκευαστικά υλικά είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται η *υπόθεση σκλήρυνσης χρόνου* (και πολλές φορές σε συνδυασμό με την άλλη υπόθεση).

## Βιβλιογραφία

- Christensen, R. M., 1982. *THEORY OF VISCOELASTICITY An Introduction Second Edition*. London: Academic Press INC.
- Phan-Thien, N., 2002. *Understanding Viscoelasticity (Basics of Rheology)*. s.l.:Springer.
- Shames, I. H. & Cozzarelli, F. A., 1997. *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. s.l.:s.n.
- Shaw, M. & William, M., 2005. *Introduction to Polymer Viscoelasticity*. Third Edition επιμ. s.l.:Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, INC.
- Sneddon, I. & Ulam, S., 1960. *The Theory Of Linear Viscoelasticity (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics)*. s.l.:Pergamon Press.
- Κοντού, Ε. & Σπαθής, Γ., 2001. *Ανελαστική συμπεριφορά των υλικών*. Αθήνα : Έκδοση Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
- Κοντού, Ε. & Σπαθής, Γ., 1993. *Μηχανικές Ιδιότητες Πολυμερών και Σύνθετων Υλικών*. Αθήνα: Τομέας Μηχανικής Ε.Μ.Π..
- Τσαμασφύρος, Γ., 1990. *Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων*. s.l.:Συμμετρία.