



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες
σε Αυθαίρετους Γράφους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Χρήστου Σ. Σακαρίδη

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες
σε Αυθαίρετους Γράφους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Χρήστου Σ. Σακαρίδη

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 15η Ιουλίου 2014.

.....
Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κων/νος Τζαφέστας
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γεράσιμος Ποταμιάνος
Αν. Καθηγητής Π.Θ.

Αθήνα, Ιούλιος 2014

.....
Χρήστος Σ. Σακαρίδης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Χρήστος Σ. Σακαρίδης, 2014

Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Το επιστημονικό πεδίο της Όρασης Υπολογιστών έχει δώσει πληθώρα τεχνικών για την αυτόματη κατάτμηση εικόνων και την ανίχνευση των κύριων αντικειμένων τους, μεταξύ των οποίων περίοπτη θέση κατέχουν οι γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες. Πολύ πρόσφατα, το πλαίσιο εργασίας των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών μεταφέρθηκε στην περίπτωση αυθαίρετων γεωμετρικών γράφων, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερη γενικότητα σε σχέση με τις συμβατικές εικόνες λόγω της απουσίας περιορισμών στη χωρική δομή τους. Δημιουργήθηκε λοιπόν μέσω ορισμένων προσεγγίσεων μια μέθοδος βασισμένη σε ιδέες της Όρασης Υπολογιστών για κατάτμηση γράφων. Αυτή η γενικότητα όμως της δομής των γράφων φάνηκε να δυσχεραίνει τη σύγκλιση του αλγορίθμου, η οποία εξαρτάται σημαντικά από την ποιότητα των προσεγγίσεων των συνεχών τελεστών πάνω στη διακριτή γραφοθεωρητική δομή.

Με την παρούσα εργασία, επιχειρούμε να θεμελιώσουμε νέες, καλύτερα τεκμηριωμένες προσεγγίσεις για κάθε όρο του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών πάνω σε γράφους, ώστε να προσδώσουμε εξασφαλισμένη σύγκλιση στο επαναληπτικό σχήμα του αλγορίθμου. Η μελέτη μας εστιάζεται αφενός στον όρο κλίσης, τόσο στο μέτρο όσο και στην κατεύθυνσή του, και αφετέρου στον όρο καμπυλότητας. Προτείνουμε καινούργιες μεθόδους υπολογισμού τους και επαληθεύουμε τη σύγκλιση αυτών αναλύοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά των αντίστοιχων σφαλμάτων. Εισάγεται το φιλτράρισμα εξομάλυνσης των προσεγγίσεων για τη βελτίωση της ακρίβειάς τους. Επιπρόσθετα, μεταχειριζόμαστε προσεκτικά τον υπολογισμό των μεγεθών που περιλαμβάνονται στην αρχικοποίηση του αλγορίθμου. Σε όλες τις περιπτώσεις, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ακριβή αποτύπωση των συνεχών αναλόγων μέσω των διακριτών προσεγγίσεων. Η επίδραση των παραμέτρων του αλγορίθμου στην επίδοσή του αναλύεται πειραματικά και παρουσιάζονται οι διαφορές στην ποιότητα των αποτελεσμάτων ανάλογα με τον τρόπο δημιουργίας των γράφων.

Λέξεις-κλειδιά: γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες - γεωμετρικοί τυχαίοι γράφοι - κατάτμηση γράφων - προσέγγιση κλίσης σε γράφους - υπολογισμός καμπυλότητας σε γράφους - φιλτράρισμα εξομάλυνσης σε γράφους - σχηματισμός γράφων μέσω watershed - αρχικοποίηση αλγορίθμου γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε γράφους - τριγωνοποίηση Delaunay

Abstract

The scientific field of Computer Vision has given an abundance of techniques for automatic segmentation of images and detection of their main objects, among which geodesic active contours stand out. The geodesic active contour framework has very recently been applied to the case of arbitrary geometric graphs, which have greater generality than regular images due to the absence of constraints in their spatial structure. This led to the creation of a method for graph segmentation based on Computer Vision concepts. However, the aforementioned generality in the structure of the graphs seemed to impede the algorithm's proper convergence, which depends to a great extent on the quality of the continuous operators' approximations based on the discrete graph-theoretic structure.

In this thesis, we attempt to establish new, better justified approximations for every term of the geodesic active contours' model on graphs, in order to ensure the convergence of the algorithm's iterative scheme. Our study focuses on the gradient term, both its magnitude and its direction, and the curvature term. We propose novel methods for their calculation and confirm their convergence by analyzing the asymptotic behavior of the respective errors. Smoothing filtering of the approximations is introduced to improve their accuracy. Additionally, we treat the calculation of magnitudes related to the initialization of the algorithm very carefully. In all cases, great emphasis is put on the accurate transition from the continuous analogs to the discrete approximations. The effect of the algorithm's parameters on its performance is analyzed experimentally and the differences in the quality of the results between graphs with different formation methods are depicted.

Keywords: geodesic active contours - random geometric graphs - graph segmentation - gradient approximation on graphs - curvature calculation on graphs - smoothing filtering on graphs - graph formation through watershed - initialization of geodesic active contour algorithm on graphs - Delaunay triangulation

Ευχαριστίες

Στο διάστημα κατά το οποίο εκπόνησα τη διπλωματική αυτή εργασία, δεν στάθηκα σε καμία περίπτωση μόνος μου. Κατ' αρχάς, είχα την τύχη οι προσπάθειές μου να επιβλέπονται από τον κύριο Πέτρο Μαραγκό, έναν άνθρωπο που αποτέλεσε για εμένα το παράδειγμα ενός οργανωμένου, αφοσιωμένου και χαρισματικού επιστήμονα μηχανικού. Στηρίζοντας και ενισχύοντας με κάθε μέσο την έναρξη και την πρόοδο της εργασίας σε συνθήκες που πολλές φορές ήταν αντίξοες, μου έδωσε την ευκαιρία να γευτώ για πρώτη φορά πώς μοιάζει η πραγματική επιστημονική έρευνα. Είναι επιθυμία και στόχος μου να βρίσκομαι στο πλευρό τέτοιων ανθρώπων, από τους οποίους μόνο να κερδίσει κανείς μπορεί.

Από κοντά, θέλω να εξάρω και την καθοριστική βοήθεια και συμβολή του Κίμωνα Δρακόπουλου, διδακτορικού φοιτητή στο M.I.T. ο οποίος είχε εκπονήσει υπό την επίβλεψη του κυρίου Μαραγκού τη διπλωματική εργασία πάνω στην οποία στηρίχθηκε σε μεγάλο βαθμό η δική μου. Τον ευχαριστώ για τις ιδέες του, τις συμβουλές του, το υλικό που απλόχερα μου πρόσφερε και την «τεχνογνωσία» του που μοιράστηκε μαζί μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά τους δικούς μου ανθρώπους για τη συμπαράσταση και την ψυχική στήριξη που μου έδωσαν καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Στην Ιωάννα,
Χρήστος

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	10
1.1	Γενικό Επιστημονικό Υπόβαθρο	10
1.2	Κύριες Ερευνητικές Κατευθύνσεις της Εργασίας	11
2	Γεωμετρικοί Τυχαίοι Γράφοι και Δημιουργία τους από Ει- κόνες	13
2.1	Ορισμός και Συμβολισμοί	13
2.2	Σχηματισμός Γράφων από Εικόνες	14
3	Γενικά Στοιχεία για Αλγόριθμο Γεωδαιτικών Ενεργών Κα- μυλών και Σύνδεση με Κλίση και Καμπυλότητα	18
3.1	Γενική Μορφή του Αλγορίθμου Γεωδαιτικών Ενεργών Καμυλών . . .	18
3.2	Αναλυτική Διατύπωση Αλγορίθμου με Επιπεδοσύνολα - Κλίση και Καμπυλότητα	20
4	Προσέγγιση Κλίσης σε Γράφους	24
4.1	Αναλογία με Συνεχή Λογισμό	24
4.2	Προσέγγιση για Γεωμετρικούς Τυχαίους Γράφους	25
4.3	Σφάλμα Λόγω Απόστασης μεταξύ Κορυφών	29
4.4	Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Κατευθυνόμενων Παραγώγων - Ειδι- κή Περίπτωση	31
4.5	Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Διανυσμάτων Κατεύθυνσης - Ειδική Περίπτωση	33
4.6	Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Κατευθυνόμενων Παραγώγων - Γενι- κή Περίπτωση	35
4.7	Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Διανυσμάτων Κατεύθυνσης - Γενική Περίπτωση	41
4.8	Ασυμπτωτική Συμπεριφορά του Συνολικού Σφάλματος	42
4.9	Γενικός Σχολιασμός και Σύνδεση με Άλλες Προσεγγίσεις	43
4.10	Πειραματικά Αποτελέσματα για Προσέγγιση Κλίσης και Σύγκριση με Αναλυτικά Αποτελέσματα	45

4.11	Φιλτράρισμα Μέσης και Ενδιάμεσης Τιμής και Σύγκριση με Στοιχειώδη Προσέγγιση	50
4.12	Πειραματική Μελέτη Ασυμπτωτικής Συμπεριφοράς Σφάλματος	55
5	Προσέγγιση Καμπυλότητας σε Γράφους	59
5.1	Επισκόπηση Αρχικής Ιδέας [1] για Προσέγγιση Καμπυλότητας	59
5.2	Προσέγγιση Καμπυλότητας με Νέα Γεωμετρική Κατασκευή	63
5.3	Προσεγγιστικός Υπολογισμός Καμπυλότητας μέσω Προσέγγισης Κλίσης	66
5.4	Πειραματικά Αποτελέσματα για Προσέγγιση Καμπυλότητας και Σύγκριση με Αναλυτικά Αποτελέσματα	69
5.5	Πειραματική Μελέτη Ασυμπτωτικής Συμπεριφοράς Σφάλματος	84
6	Αρχικοποίηση του Αλγορίθμου Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών σε Γράφους	97
6.1	Προσέγγιση Συνάρτησης Τερματισμού σε Γράφους	98
6.2	Αρχικοποίηση Ενσωματώνουσας Συνάρτησης	105
7	Συνολική Εφαρμογή του Αλγορίθμου Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών σε Γράφους	107
7.1	Ειδικά Σημεία και Λεπτομέρειες της Υλοποίησης του Αλγορίθμου	107
7.2	Ανίχνευση Σχημάτων σε Γράφους	109
7.3	Ανίχνευση Αντικειμένων Γκρίζων Εικόνων σε Γράφους	124
7.4	Εφαρμογή σε Γράφους με Δομή Τριγωνοποίησης Delaunay	129
7.5	Επίδραση Παραμέτρων στο Αποτέλεσμα του Αλγορίθμου - Γενικός Σχολιασμός	133
7.6	Εφαρμογή σε Ανεμολογικά Δεδομένα	138
7.7	Εφαρμογή σε Δεδομένα Τηλεπικοινωνιακού Δικτύου	142
8	Συμπεράσματα	147
8.1	Βασικές Συνεισφορές	147
8.2	Μελλοντικοί Προσανατολισμοί Έρευνας	150

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικό Επιστημονικό Υπόβαθρο

Ζούμε σε μια εποχή στην οποία η πρόσβαση στην πληροφορία έχει γίνει ευκολότερη και ταχύτερη από ποτέ, χάρη στην καθιέρωση των υπολογιστών και του διαδικτύου ως βασικών εργαλείων της καθημερινότητάς μας. Η πληροφορία αυτή είναι σε μεγάλο βαθμό οπτική, με το συνολικό μέγεθός της να φθάνει σε δυσθεώρητα επίπεδα. Έτσι, μαζί με τη διάδοση των υπολογιστών και τη σταδιακή μετάβαση των οπτικών δεδομένων προς τη ψηφιακή μορφή, γεννήθηκε και άνθησε παράλληλα η επιστήμη της Όρασης Υπολογιστών και της Ψηφιακής Ανάλυσης Εικόνων ως απότοκο της ανάγκης για αποτελεσματική και αποδοτική επεξεργασία των δεδομένων αυτών, με στόχο μεταξύ άλλων την εξαγωγή συμπερασμάτων με αυτόματο τρόπο για το περιεχόμενό τους. Στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται ευρύτατα τα τελευταία χρόνια σε συμβατικές εικόνες για αυτό το σκοπό συγκαταλέγεται και το γενικότερο πλαίσιο εργασίας των ενεργών καμπυλών (active contours), μέσα στο οποίο εξέχουσα θέση κατέχουν οι γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες (geodesic active contours - G.A.C.s). Οι τεχνικές αυτές επιτελούν μια κατάτμηση του συνόλου της εικόνας σε επιμέρους ομοιογενείς περιοχές που διαφοροποιούνται από το υπόβαθρο.

Μια άλλη ταχέως εξελισσόμενη προσέγγιση στην επεξεργασία πληροφορίας επικεντρώνεται στους γράφους ως μοντέλο αναπαράστασης και οργάνωσης των δεδομένων. Σε αυτό το πλαίσιο, οι μονάδες των δεδομένων αντιμετωπίζονται ως κορυφές του γράφου και συνδέονται με ακμές ανά δύο σε μια προσπάθεια να κωδικοποιηθούν οι μεταξύ τους συσχετίσεις. Αυτή η δομή είναι πολύ συνηθισμένη στην μοντελοποίηση δικτύων κάθε είδους (επικοινωνιακών, κοινωνικών ή υπολογιστικών) και η γενικότητά της την έφερε στο προσκήνιο και στο πεδίο της Όρασης Υπολογιστών. Η θεώρηση του γράφου και των συστατικών του μελών ως «αντικειμένων» εντοπισμένων σε συγκεκριμένες θέσεις μέσα σε έναν Ευκλείδειο χώρο επιτρέπει τη μοντελοποίηση των συμβατικών εικόνων ως γράφων. Με αυτό το τέχνασμα, όλη η πλατιά

ανεπτυγμένη θεωρία αλγορίθμων πάνω σε γράφους μπορεί να μεταφερθεί και στην ανάλυση εικόνων. Ιδιαίτερη θέση σε αυτή τη θεωρία κατέχουν οι γραφοθεωρητικές τομές (graphcuts), που εφαρμόστηκαν κατά κόρον την τελευταία περίοδο για την κατάτμηση εικόνων.

Στην κατεύθυνση της γενίκευσης του πεδίου εφαρμογής των παραπάνω μεθόδων, μελετήθηκε πολύ πρόσφατα η περίπτωση στην οποία οι γράφοι δεν έχουν κανονική δομή στο χώρο, αλλά οι θέσεις των κορυφών τους μπορούν να έχουν οποιαδήποτε - τυχαία - κατανομή. Αυτή η γενίκευση επιτρέπει την αντίστροφη μεταφορά ιδεών από αυτήν που περιγράφηκε παραπάνω: μέθοδοι όπως οι γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες που είχαν θεμελιωθεί στο πλαίσιο των συμβατικών εικόνων με ορθοκανονικό πλέγμα εικονοστοιχείων κατορθώθηκε να γενικευτούν για τυχαίους γράφους, με τις κατάλληλες προσαρμογές. Οι γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες λοιπόν λαμβάνουν τη μορφή ενός αλγορίθμου κατάτμησης γράφων (graph segmentation). Φυσικά, η επέκταση σε γράφους συντελεί και στη γενίκευση της προέλευσης των υπό επεξεργασία δεδομένων, τα οποία πλέον δε σχετίζονται απαραίτητα με την κλασσική συνάρτηση φωτεινότητας που ορίζεται στις εικόνες. Αντ' αυτού, μπορούν να παριστάνουν τη μεταβολή οποιουδήποτε μεγέθους το οποίο ορίζεται στο χώρο που αυτά ανήκουν και μπορεί να κωδικοποιηθεί με τη βοήθεια μιας συνεχούς μεταβλητής. Οι απαιτήσεις λοιπόν για το βαθμό γνώσης του εξεταζόμενου μεγέθους χαλαρώνουν και τα πεδία των δυνατών εφαρμογών διευρύνονται.

1.2 Κύριες Ερευνητικές Κατευθύνσεις της Εργασίας

Η προσπάθειά μας σε αυτή την εργασία επικεντρώνεται στην προσαρμογή του μοντέλου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε τυχαίους γράφους. Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην ακρίβεια των επιμέρους προσεγγίσεων όπως αυτές μεταφέρονται από τη συνεχή περίπτωση, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί κατά το δυνατόν η ορθή συμπεριφορά σύγκλισης του συνολικού σχήματος. Με αυτό το κίνητρο, το σφάλμα που εισάγεται από κάθε στάδιο υπολογισμών αναλύεται θεωρητικά και μελετάται επίσης πειραματικά, για να επαληθευθεί η αποφυγή ασταθειών κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Αρχικά, στα κεφάλαια 2 και 3 γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των βασικών εννοιών και δομών που χρησιμοποιούνται στην εργασία. Αυτές είναι αφενός οι γεωμετρικοί τυχαίοι γράφοι, για τους οποίους παρουσιάζονται μέθοδοι για τη δημιουργία τους από συμβατικές εικόνες, και αφετέρου ο αλγόριθμος των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών και η υλοποίησή του με επιπεδοσύνολα, η οποία περιλαμβάνει τους κομβικούς όρους της κλίσης και της καμπυλότητας.

Στο κεφάλαιο 4 μελετάται μια νέα προσέγγιση για την κλίση συναρτήσεων που ορίζονται στις κορυφές γεωμετρικών τυχαίων γράφων. Αποδεικνύεται η σύγκλιση της

προσέγγισης στο όριο των μεγάλων γράφων και έπειτα προσδιορίζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά του σφάλματος, θεσπίζοντας ένα ασυμπτωτικό άνω φράγμα για το σφάλμα ως προς το μέγεθος του γράφου. Η νέα προσέγγιση συνδέεται με άλλες που έχουν προταθεί μέσα από την έκφρασή τους σε μια ενιαία μορφή. Εισάγεται επίσης η ιδέα του φιλτραρίσματος εξομάλυνσης της προσέγγισης με φίλτρα μέσης ή ενδιάμεσης τιμής και επαληθεύεται πειραματικά τόσο η σύγκλιση της προσέγγισης και όσο και η συμβολή του φιλτραρίσματος στη μείωση του σφάλματος.

Το κεφάλαιο 5 αφιερώνεται στον όρο καμπυλότητας. Δίνονται δύο εναλλακτικές μέθοδοι για την προσέγγισή του, η πρώτη ως βελτίωση μιας προηγούμενης προταθείσας προσέγγισης απαλλαγμένη από τις θεωρητικές αδυναμίες της τελευταίας και η δεύτερη βασισμένη στην προσέγγιση της κλίσης. Η θεωρητική ανάλυση συνοδεύεται από εκτενή πειραματικά αποτελέσματα, όπου εξετάζεται η ποιότητα των προσεγγίσεων, αναδεικνύεται η σημασία του φιλτραρίσματος εξομάλυνσης και προκύπτει εμπειρικά η σύγκλιση των προσεγγίσεων στις ευνοϊκότερες περιπτώσεις.

Στο κεφάλαιο 6 προτείνεται μια τροποποιημένη μέθοδος για τον υπολογισμό της συνάρτησης τερματισμού πάνω σε γράφους, η οποία κωδικοποιεί την ένταση των ακμών της εικόνας. Ακόμα, δίνεται ένας απλός τρόπος υπολογισμού του προσημασμένου μετασχηματισμού απόστασης πάνω σε γράφους, απαραίτητου για την αρχικοποίηση του αλγορίθμου.

Στο κεφάλαιο 7 εφαρμόζεται ο αλγόριθμος γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών πάνω σε γράφους, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων. Παρατίθενται απλά παραδείγματα από την ανίχνευση δυαδικών αντικειμένων σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους αλλά και αποτελέσματα από την εκτέλεση σε γκριζες εικόνες πάνω σε γράφους, εξετάζοντας την επίδραση των παραμέτρων στην επίτευξη ορθής σύγκλισης. Συγκριτικά αποτελέσματα δίνονται και για μια άλλη δομή γράφων, την τριγωνοποίηση Delaunay, η οποία δίνει καλύτερη ποιότητα ανίχνευσης. Τέλος, δοκιμάζουμε την ορθή λειτουργία του αλγορίθμου σε ανεμολογικά δεδομένα αλλά και δεδομένα από δίκτυο κινητής τηλεφωνίας.

Το τελικό κεφάλαιο 8 ανακεφαλαιώνει και συνοψίζει τα κυριότερα σημεία συνεισφοράς της παρούσας εργασίας καθώς και τις βασικές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα πάνω στο θέμα.

Κεφάλαιο 2

Γεωμετρικοί Τυχαίοι Γράφοι και Δημιουργία τους από Εικόνες

Στην μελέτη μας για τον αλγόριθμο γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών πάνω σε γράφους, κυρίαρχο ρόλο παίζει η δομή του γράφου πάνω στον οποίο ορίζονται τα προς κατάτμηση δεδομένα. Υπό την ευρεία έννοια, ακόμα και οι συνήθεις διδιάστατες εικόνες (raster images) ανάγονται σε γράφους, με τον ορισμό μιας γειτονιάς για κάθε εικονοστοιχείο πάνω σε αυτές. Ωστόσο, η δομή ενός τέτοιου γράφου αντιστοιχεί σε ένα κανονικό πλέγμα (regular grid) και δεν μπορεί να ταιριάζει με συλλογές δεδομένων που έχουν ληφθεί σε τυχαίες θέσεις πάνω στο διδιάστατο επίπεδο. Για αυτό το λόγο, προσανατολιζόμαστε σε ένα είδος γράφου το οποίο θα χαρακτηρίζεται από τυχαιότητα στον τρόπο δημιουργίας του. Μια τέτοια κατηγορία γράφων είναι οι γεωμετρικοί τυχαίοι γράφοι.

2.1 Ορισμός και Συμβολισμοί

Ένας γεωμετρικός τυχαίος γράφος ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμοί 2.1.1 Έστω n σημεία τοποθετημένα με τυχαίο τρόπο σε ένα φραγμένο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$, μέσω ομοιόμορφης κατανομής στο χωρίο αυτό, ανεξάρτητα και ισόνομα μεταξύ τους. Το σύνολο \mathcal{V} των σημείων αυτών αποτελεί το σύνολο των κορυφών του γράφου. Το σύνολο \mathcal{E} των - μη κατευθυνόμενων - ακμών του γράφου ορίζεται μέσω της ακτίνας του, ρ , ως εξής: δύο κορυφές v και w συνδέονται με ακμή όταν και μόνο όταν η μεταξύ τους Ευκλείδεια απόσταση είναι μικρότερη ή ίση από την ακτίνα, δηλαδή $d(v, w) \leq \rho$. Ο γεωμετρικός τυχαίος γράφος \mathcal{G} είναι το ζεύγος των συνόλων αυτών: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Θα τον συμβολίζουμε εφεξής και ως $\mathcal{G}(n, \rho)$. Μία κορυφή του \mathcal{G} θα συμβολίζεται εναλλακτικά είτε ως v είτε ως \mathbf{v} , με το δεύτερο συμβολισμό να χρησιμοποιείται όταν δηλώνεται το διάνυσμα θέσης της κορυφής.

Πολύ συχνά, η ακτίνα των γράφων θα εξαρτάται από το πλήθος των κορυφών τους μέσω μιας συνάρτησης $\rho(n)$, προκειμένου να ισχύουν διάφορες προτάσεις που διατυπώνονται περί σύγκλισης προσεγγίσεων πάνω στους γράφους. Επίσης, πέρα από τις ίδιες τις θέσεις των κορυφών του γράφου και τις ακμές που τις συνδέουν, σημαντική θέση στο σχηματισμό του αλγορίθμου κατέχει και η συνάρτηση φωτεινότητας $I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ που ορίζεται πάνω στις κορυφές του γράφου και αντιπροσωπεύει τη γνώση που έχουμε για τη μεταβολή ενός μεγέθους σε όλο το γράφο. Οι τιμές της I αποτελούν, όπως θα δούμε, τη βάση πάνω στην οποία στηρίζεται ο αλγόριθμος γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών προκειμένου να διαχωρίσει τις διάφορες ομογενείς περιοχές του γράφου. Σε αυτό το σημείο, εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν γεωμετρικό - τυχαίο ή μη - γράφο από μια πλήρη αρχική εικόνα και να αναθέσουμε τιμές για τη συνάρτηση φωτεινότητας πάνω στις κορυφές του.

2.2 Σχηματισμός Γράφων από Εικόνες

Τα αρχικά δεδομένα αντιστοιχούν σε μια εικόνα σε μορφή κανονικού πλέγματος, $I_0 : \{1, \dots, W\} \times \{1, \dots, H\} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Μπορούμε (αγνοώντας το γεγονός της δειγματοληψίας) να θεωρήσουμε ότι κάθε εικονοστοιχείο (i, j) της εικόνας αντιστοιχεί σε μια σταθερή τιμή της συνάρτησης φωτεινότητας, $I_0(i, j)$, για όλο το τετράγωνο $P(i, j) = [i - 1, i] \times [j - 1, j] \subset \mathbb{R}^2$. Έτσι, ολόκληρη η εικόνα «καταλαμβάνει» το χωρίο $D = [0, W] \times [0, H]$.

Κατασκευή με Τυχαίο Τρόπο

Μέσα στο D τοποθετούμε σε πρώτη φάση $m < WH$ σημεία όπως περιγράφηκε στους Ορισμούς 2.1.1, τα οποία προορίζονται να αποτελέσουν τις κορυφές του υπό κατασκευή γράφου. Κάθε σημείο εμπίπτει στο τετράγωνο $P(i, j)$ ενός εικονοστοιχείου. Στην περίπτωση που στο ίδιο τετράγωνο $P(i, j)$ περιέχονται περισσότερα του ενός σημεία, κρατάμε μόνο ένα από αυτά και απορρίπτουμε τα υπόλοιπα. Με αυτό τον τρόπο, προκύπτει ένα σύνολο \mathcal{V} με $n \leq m$ κορυφές, καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό εικονοστοιχείο της εικόνας I_0 . Μπορεί λοιπόν να οριστεί η συνάρτηση φωτεινότητας I του γράφου σε κάθε κορυφή \mathbf{v} ως εξής:

$$I(\mathbf{v}) = I_0(i, j), \quad \mathbf{v} \in P(i, j). \quad (2.1)$$

Οι κορυφές συνδέονται στη συνέχεια με ακμές σύμφωνα τη μέθοδο της ενότητας 2.1 για κάποια τιμή της ακτίνας ρ και προκύπτει τελικά ο βασισμένος στην εικόνα I_0 γεωμετρικός τυχαίος γράφος $\mathcal{G}(n, \rho)$.

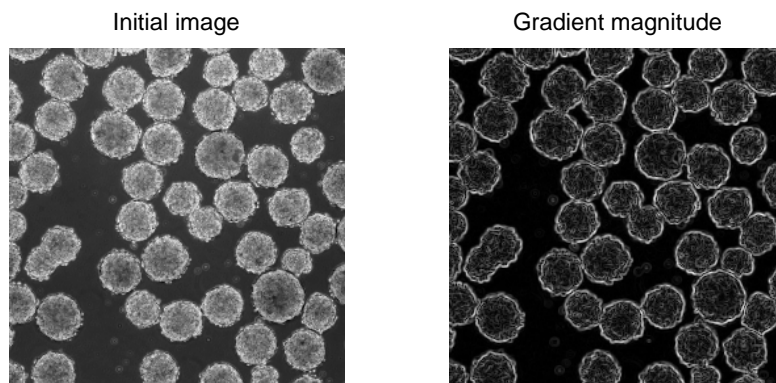
Κατασκευή μέσω Κατάτμησης Εικόνων με Μετασχηματισμό Watershed

Μια διαφορετική επιλογή που έχουμε για την εξαγωγή γεωμετρικού γράφου από την αρχική εικόνα I_0 συνίσταται στην εφαρμογή του Μετασχηματισμού Watershed σε αυτήν. Αναλυτικότερα, υπολογίζεται το μέτρο της κλίσης της I_0 , $\|\nabla I_0\|$, με κάποια από τις κλασικές μεθόδους (π.χ. τελεστής Sobel) και εφαρμόζεται Μετασχηματισμός Watershed κατευθείαν πάνω σε αυτό χωρίς οποιαδήποτε περαιτέρω προεπεξεργασία. Αυτή η διαδικασία οδηγεί σε υπερκατάτμηση της εικόνας σε πολλές μικρές περιοχές. Συμβολίζουμε με n το πλήθος των περιοχών αυτών, χωρίς να προσμετράμε την περιοχή που αντιστοιχεί στον υδροκρίτη.

Η ιδέα για την κατασκευή του γράφου είναι η τοποθέτηση των κορυφών του στα εικονοστοιχεία εκείνα που αποτελούν τα κεντροειδή των περιοχών της υπερκατατετμημένης εικόνας. Το κεντροειδές κάθε περιοχής ορίζεται ως ύστατη διάβρωση (ultimate erosion) αυτής και μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχηματισμού απόστασης του σχήματος της περιοχής. Συγκεκριμένα, το κεντροειδές κάθε περιοχής τοποθετείται στο σημείο μεγίστου του εσωτερικού μετασχηματισμού απόστασής της. Κατ' αυτό τον ντετερμινιστικό τρόπο λαμβάνουμε τις n κορυφές του γράφου, στις οποίες ανατίθενται οι τιμές φωτεινότητας των αντίστοιχων pixels της αρχικής εικόνας I_0 . Ακολουθεί η τοποθέτηση των ακμών με την ίδια λογική όπως προηγουμένως.

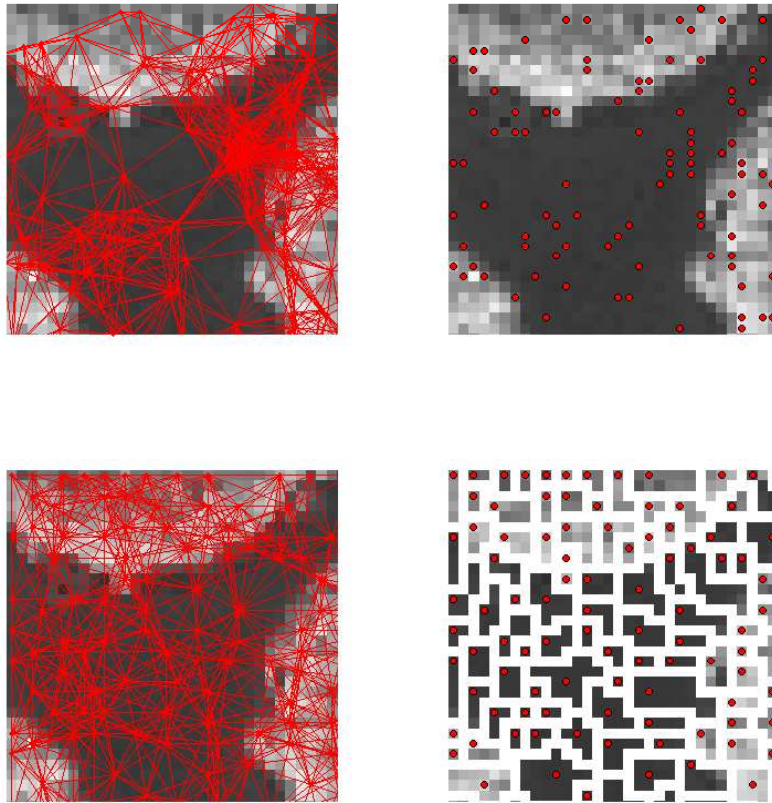
Ενδεικτικά στάδια από την δημιουργία γεωμετρικού γράφου από εικόνα με τυχαίο τρόπο ή μέσω watershed παρουσιάζονται στα Σχήματα 2.1 και 2.2. Ο αριθμός των κόμβων στην περίπτωση του τυχαίου γράφου επιλέχθηκε έτσι ώστε να είναι πολύ κοντά στον αριθμό των κόμβων που παράγονται μέσω watershed, ώστε να μπορεί να γίνει «ευθεία» σύγκριση των μεθόδων.

Είναι σαφές από το Σχήμα 2.2 ότι η μέθοδος του watershed παράγει για την ίδια εικόνα έναν πολύ ομογενέστερο γράφο σε σχέση με τη μέθοδο της τυχαίας τοποθέτησης των κορυφών. Συγκεκριμένα, ενώ οι τυχαία τοποθετημένες κορυφές φέρονται να σχηματίζουν πυκνώματα και αραιώματα στο πεδίο της εικόνας, τα κεντροειδή των περιοχών του watershed κατανέμονται πολύ πιο ομοιόμορφα πάνω στην εικόνα, αφού οι θέσεις τους εξαρτώνται από την αρχική μορφή της συνάρτησης φωτεινότητάς της. Αυτή η ομοιογένεια ενδέχεται να δρα ευεργετικά σε ό,τι αφορά την εφαρμογή του αλγορίθμου των γεωδαιτικών ενεργών χαμυλών πάνω στο γράφο και την ακρίβεια των απαιτούμενων προσεγγίσεων. Ωστόσο, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε και το αυξημένο αρχικό υπολογιστικό κόστος που εισάγει η μέθοδος αυτή σε σύγκριση με την κατασκευή του γράφου με τυχαίο τρόπο.



Σχήμα 2.1: Αριστερά: αρχική εικόνα I_0 , Δεξιά: μέτρο της κλίσης της εικόνας $\|\nabla I_0\|$

Comparison of two methods for image-dependent graph creation



Σχήμα 2.2: Συγκριτικά αποτελέσματα των δύο μεθόδων για δημιουργία γράφου από εικόνα. Η πάνω σειρά αντιστοιχεί στην τυχαία μέθοδο και η κάτω σειρά στην μέθοδο του watershed, ενώ η απεικόνιση γίνεται για το πάνω αριστερό τμήμα της εικόνας I_0 . Πάνω Αριστερά: άποψη του γράφου με κορυφές και ακμές, Πάνω Δεξιά: pixels της εικόνας που αντιστοιγήθηκαν με κορυφές του γράφου με κόκκινο χρώμα, Κάτω Αριστερά: άποψη του γράφου με κορυφές και ακμές, Κάτω Δεξιά: pixels της εικόνας που αντιστοιγήθηκαν με κορυφές του γράφου με κόκκινο χρώμα και όρια περιοχών watershed με λευκό χρώμα

Κεφάλαιο 3

Γενικά Στοιχεία για Αλγόριθμο Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών και Σύνδεση με Κλίση και Καμπυλότητα

3.1 Γενική Μορφή του Αλγορίθμου Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών

Έστω μια καμπύλη $\vec{C}(p, t)$ που εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Το βασικό μοντέλο για την εφαρμογή της ιδέας των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών (G.A.C.s) μέσω της εξέλιξης αυτής της καμπύλης είναι:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = V \vec{N}_o \quad (3.1)$$

όπου με \vec{N}_o έχουμε συμβολίσει το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στην καμπύλη διάνυσμα. Για να προχωρήσουμε στην παρουσίαση της αναλυτικής έκφρασης της ταχύτητας εξέλιξης της καμπύλης, V , πρέπει πρώτα να εστιάσουμε σε ένα κρίσιμο μέγεθος που υπεισέρχεται σε αυτήν, τη συνάρτηση g .

Η συνάρτηση g εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα I σε κάθε σημείο του γράφου και σχετίζεται με την ισχύ των ακμών που ενδέχεται να υπάρχουν σε αυτά. Έτσι, λειτουργεί ιδανικά ως παράγοντας τερματισμού του αλγορίθμου όταν η καμπύλη φτάνει κοντά στα πραγματικά διαχωριστικά όρια των συνεκτικών περιοχών των δεδομένων. Ορισμένες βασικές απαιτήσεις για τη μορφή της συνάρτησης g είναι να λαμβάνει θετικές τιμές στο διάστημα $[0, +\infty)$, να είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό και να ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \quad (3.2)$$

Ως όρισμα της g χρησιμοποιείται μια ομαλοποιημένη εκδοχή του μέτρου της κλίσης σε κάθε σημείο του γράφου, $\|\nabla I_\sigma(x, y)\|$, με μια τυπική έκφραση της συνάρτησης να είναι η ακόλουθη:

$$g(x, y) = g(\|\nabla I_\sigma(x, y)\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla I_\sigma(x, y)\|^2}{\lambda^2}}, \quad \lambda > 0. \quad (3.3)$$

Η ομαλοποιημένη κλίση, που αντιπροσωπεύει ουσιαστικά την ένταση των ακμών, λαμβάνεται μετά από Γκαουσιανό φιλτράρισμα σε κλίμακα σ των αρχικών δεδομένων:

$$\|\nabla I_\sigma(x, y)\| = \|\nabla (G_\sigma * I)(x, y)\| \quad (3.4)$$

Έχοντας υπ' όψιν τα παραπάνω στοιχεία, η ταχύτητα V με την οποία κινείται η \vec{C} στην κατεύθυνση του \vec{N}_o προσδιορίζεται βάσει της σχέσης

$$V = g(I)\beta - \operatorname{div} \left(g(I)\vec{N}_o \right), \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Από την ιδιότητα της απόκλισης

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}, \quad (3.6)$$

η (3.5) μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$V = g(I)\beta - \left[g(I) \operatorname{div} \vec{N}_o + \nabla g(I) \cdot \vec{N}_o \right]. \quad (3.7)$$

Αν επιπλέον λάβουμε υπ' όψιν ότι η απόκλιση του \vec{N}_o ταυτίζεται με την καμπυλότητα κ της \vec{C} , τότε παίρνουμε:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = \left(g(I)\beta - g(I)\kappa - \nabla g(I) \cdot \vec{N}_o \right) \vec{N}_o. \quad (3.8)$$

Έτσι, οι δυνάμεις που κινούν την καμπύλη κατά την εξέλιξή της είναι, με τη σειρά που εμφανίζονται στην (3.8), η δύναμη «μπαλονιού», η δύναμη καμπυλότητας και η δύναμη ελατηρίου. Το πρόσημο του όρου β καθορίζει εάν η δύναμη «μπαλονιού» στην οποία συμμετέχει τείνει να διαστείλει (+) ή να συστείλει (-) την καμπύλη. Επίσης, το απόλυτο μέγεθος του β ρυθμίζει τη σχετική επίδραση της δύναμης «μπαλονιού» ως προς τις υπόλοιπες δυνάμεις που καθορίζουν την κίνηση της καμπύλης. Η δύναμη καμπυλότητας τείνει να ομαλοποιήσει τη μορφή της καμπύλης, εξαλείφοντας μικρές εσοχές και προεξοχές στο σχήμα της. Η δύναμη ελατηρίου τείνει να επαναφέρει την καμπύλη πάνω στις ακμές των δεδομένων του γράφου, συμβάλλοντας στον τερματισμό της διαδικασίας με την καμπύλη σταθεροποιημένη στα όρια μεταξύ των συνεκτικών περιοχών του γράφου.

3.2 Αναλυτική Διατύπωση Αλγορίθμου με Επιπεδοσύνολα - Κλίση και Καμπυλότητα

Στην πράξη, η εφαρμογή του αλγορίθμου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών δεν γίνεται απευθείας μέσω της καμπύλης \vec{C} αλλά εμπλέκει μια πραγματική συνάρτηση $\Phi(x, y, t)$ δύο χωρικών μεταβλητών που εξελίσσεται στο χρόνο. Η συνάρτηση αυτή συχνά καλείται «level function», ακριβώς γιατί ενσωματώνει τις ενεργές καμπύλες ως επιπεδοσύνολά της (levelsets). Συγκεκριμένα, οι καμπύλες προκύπτουν σε κάθε επανάληψη των υπολογισμών ως οι ισοϋψείς μηδενικής στάθμης της «ενσωματώνουσας» συνάρτησης Φ και οι περιοχές προς ανίχνευση ταυτίζονται με το εσωτερικό του μηδενικού επιπεδοσυνόλου της όταν ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει.

Αν συμβολίσουμε με $\Gamma(t)$ το μηδενικό επιπεδοσύνολο της Φ τη χρονική στιγμή t , τότε αυτό ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x, y, t) = 0\}. \quad (3.9)$$

Για να προσδιορίσουμε τη μερική διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας εξελίσσεται η Φ ώστε το $\Gamma(t)$ να ταυτίζεται με την καμπύλη \vec{C} όπως αυτή περιγράφηκε προηγουμένως, παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο την (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} &= 0 \\ \xrightarrow{(3.1)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -V \left(\nabla \Phi \cdot \vec{N}_o \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\nabla \Phi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]^T$.

Στο σημείο αυτό, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον τρόπο που ορίζεται η συνάρτηση Φ , οι οποίες συνεπάγονται διαφορετική αντιμετώπιση για το διάνυσμα \vec{N}_o στην (3.10). Συγκεκριμένα, εάν επιλεγεί να ισχύει $\Phi < 0$ στο εσωτερικό της καμπύλης, τότε θα είναι $\vec{N}_o = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$, ενώ αν επιλεγεί $\Phi > 0$ στο εσωτερικό της καμπύλης, τότε θα ισχύει ότι $\vec{N}_o = -\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$. Έτσι, λαμβάνουμε τα εξής γενικά μοντέλα εξέλιξης της Φ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} -V \|\nabla\Phi\|, \quad \Phi(x, y, t) < 0 \quad \forall (x, y) \in \text{interior}(\Gamma(t)). \\ V \|\nabla\Phi\|, \quad \Phi(x, y, t) > 0 \quad \forall (x, y) \in \text{interior}(\Gamma(t)). \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Τώρα, μένει να εξετάσουμε πώς μεταφέρονται οι διάφοροι όροι της ταχύτητας V (όπως εμφανίζονται στην (3.8)) στα «πλαίσια» της συνάρτησης Φ . Αρχίζοντας από τον όρο της καμπυλότητας, έχουμε ότι η καμπυλότητα της $\vec{C}(t)$ στο σημείο της (x, y) δίνεται από τη σχέση:

$$\kappa = \left\{ \begin{array}{l} \text{div} \left(\frac{\nabla\Phi(x, y, t)}{\|\nabla\Phi(x, y, t)\|} \right), \quad \Phi < 0 \text{ στο εσωτερικό του } \Gamma(t). \\ -\text{div} \left(\frac{\nabla\Phi(x, y, t)}{\|\nabla\Phi(x, y, t)\|} \right), \quad \Phi > 0 \text{ στο εσωτερικό του } \Gamma(t). \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

Αν επιπλέον λάβουμε υπ' όψιν μας ότι $\|\nabla\Phi\| = ((\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2)^{\frac{1}{2}}$, τότε μπορούμε μετά από λίγη άλγεβρα να εξαγάγουμε την εξής έκφραση για την καμπυλότητα συναρτήσει των παραγώγων έως και δεύτερης τάξης της Φ :

$$\kappa = \pm \frac{\Phi_{xx}(\Phi_y)^2 - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_{yy}(\Phi_x)^2}{((\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.13)$$

με το πρόσημο να καθορίζεται όπως και στην (3.12).

Ο όρος μπαλονιού δεν περιλαμβάνει το διάνυσμα \vec{N}_o οπότε δεν υφίσταται κάποια τροποποίηση, ενώ ο όρος ελατηρίου χρήζει προσοχής λόγω της μεταβολής του προσήμου στη σχέση μεταξύ του $\nabla\Phi$ και του \vec{N}_o ανάλογα με την περίπτωση που χειριζόμαστε.

Στην παρούσα εργασία, θα αρχικοποιούμε γενικά την ενεργή καμπύλη ώστε να περικλείει κατά το δυνατόν το σύνολο των περιοχών προς ανίχνευση. Προκειμένου η καμπύλη να εξελιχθεί ταχύτερα προς τα όρια των περιοχών αυτών, η δύναμη «μπαλονιού» πρέπει να έχει δράση συστολής (shrinkage) και άρα ο όρος β θα λαμβάνει αρνητικό πρόσημο. Επιπλέον, θα αναθέτουμε αρχικά στη συνάρτηση Φ τις τιμές της προσημασμένης συνάρτησης απόστασης (signed distance function) από την καμπύλη, έστω $\phi_0(x, y)$. Συνδυάζοντας λοιπόν τις σχέσεις (3.7), (3.11) και (3.12), η

μερική διαφορική εξίσωση εξέλιξης της Φ - με τις γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες ως επιπεδοσύνολά της - παίρνει την τελική μορφή:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{cases} g(I) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \right) - \beta \right] \|\nabla \Phi\| + \nabla g(I) \cdot \nabla \Phi, \\ \Phi(x, y, t) < 0 \quad \forall (x, y) \in \operatorname{interior}(\Gamma(t)) \\ \\ g(I) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \right) + \beta \right] \|\nabla \Phi\| + \nabla g(I) \cdot \nabla \Phi, \\ \Phi(x, y, t) > 0 \quad \forall (x, y) \in \operatorname{interior}(\Gamma(t)) \end{cases}, \quad (3.14)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y), \quad \beta < 0.$$

Είναι εμφανές με βάση τα παραπάνω ότι δύο βασικές πτυχές του αλγορίθμου G.A.C.s σε γράφους είναι ο υπολογισμός σε κάθε βήμα:

1. της κλίσης $\nabla \Phi$ της ενσωματώνουσας συνάρτησης, τόσο ως προς το μέτρο της όσο και ως προς την κατεύθυνσή της ως διανύσματος.
2. της καμπυλότητας κ που συνδέεται με την εξελισσόμενη συνάρτηση Φ μέσω της σχέσης (3.12).

Ιδανικά, εάν γνωρίζαμε τις τιμές της συνάρτησης Φ σε όλο το χωρίο $D = [0, 1]^2$ εντός του οποίου τοποθετούνται οι κορυφές του γράφου, θα υπολογίζαμε αναλυτικά την κλίση της. Στην πράξη, έχουμε σε κάθε βήμα του αλγορίθμου δεδομένες τις τιμές της Φ σε ένα αραιό υποσύνολο \mathcal{V} του D , που αντιστοιχεί στις κορυφές του \mathcal{G} . Θα πρέπει λοιπόν να επιχειρήσουμε μια προσέγγιση της κλίσης σε κάθε κορυφή του γράφου στηριζόμενοι μόνο σε αυτές τις τιμές.

Αναφορικά με την καμπυλότητα, ας συμβολίσουμε χάριν συντομίας $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = \frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|}$. Και πάλι, αν γνωρίζαμε το πεδίο \mathbf{F} σε όλο το χωρίο $D = [0, 1]^2$, θα υπολογίζαμε εύκολα την καμπυλότητα ως

$$\kappa = \pm \operatorname{div} \mathbf{F} = \pm \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right). \quad (3.15)$$

Όμως, αν υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει μια προσέγγιση για τις τιμές της κλίσης της συνάρτησης Φ με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, γνωρίζουμε μόνο τις προσεγγιστικές τιμές του πεδίου \mathbf{F} στο αραιό υποσύνολο \mathcal{V} του D . Θα πρέπει λοιπόν να στηριχθούμε και πάλι σε αυτές μόνο τις τιμές για να προσεγγίσουμε την απόκλιση του \mathbf{F} σε κάθε σημείο του \mathcal{V} .

Με άλλα λόγια, θα επιχειρήσουμε μια προσέγγιση «δεύτερης τάξης» για την καμυλότητα, με την έννοια ότι χρησιμοποιούμε ορισμένες προσεγγιστικές ήδη τιμές - αυτές της κλίσης - ως «αρχή» για τον προσεγγιστικό υπολογισμό ενός μεγέθους (εδώ της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου). Το γεγονός αυτό μας προδιαθέτει αρνητικά όσον αφορά στην ποιότητα της τελικής προσέγγισης της καμυλότητας, η οποία σε κάθε περίπτωση θα υποφέρει αναπόφευκτα και από το σφάλμα των αρχικών προσεγγιστικών τιμών που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς.

Τέλος, σημειώνουμε ότι στις προσεγγίσεις που θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια για την κλίση και την καμυλότητα, οι υπολογισμοί των μεγεθών σε κάθε κορυφή v του \mathcal{G} θα βασίζονται μόνο στις τιμές των αντίστοιχων αρχικών μεγεθών πάνω στις γειτονικές κορυφές της v .

Κεφάλαιο 4

Προσέγγιση Κλίσης σε Γράφους

Η κεντρική ιδέα γύρω από την οποία περιστρέφονται οι προσπάθειες για την προσέγγιση της κλίσης πραγματικής συνάρτησης σε τυχαίους γράφους συνοψίζεται στην εκμετάλλευση της πληροφορίας που διαθέτουμε σε κάθε κορυφή για τη μεταβολή της συνάρτησης αποκλειστικά στις κατευθύνσεις των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή αυτή. Στη συνεχή περίπτωση βέβαια, υπάρχει πληροφορία σε όλες τις κατευθύνσεις γύρω από ένα σημείο του επιπέδου για τη μεταβολή της συνάρτησης, η οποία αντιστοιχεί στις κατευθυνόμενες παραγώγους της στο σημείο αυτό. Επίσης, η μεταβολή της συνάρτησης είναι γνωστή απειροστά κοντά στο εξεταζόμενο σημείο λόγω της συνέχειας που υποτίθεται, ενώ στους γράφους που μελετάμε κάθε κορυφή χωρίζεται από μια μικρή αλλά πεπερασμένη απόσταση από τις γειτονικές της. Αυτές οι δύο επισημάνσεις εξηγούν την εισαγωγή ενός σφάλματος στην όποια προσέγγιση επιχειρείται για την κλίση πάνω σε γράφους, το οποίο εξαρτάται από την πυκνότητα των γράφων, με άλλα λόγια από το μέγεθός τους και από την ακτίνα τους. Τα παραπάνω πρέπει να είναι συνεχώς κατά νου για την ανάλυση της νέας προσέγγισης της κλίσης που ακολουθεί.

4.1 Αναλογία με Συνεχή Λογισμό

Αρχικά, αποδεικνύουμε ένα χρήσιμο λήμμα από το συνεχή λογισμό δύο μεταβλητών, το οποίο μας οδηγεί κατόπιν εύκολα στην ακριβή διατύπωση της «διακριτής» προσέγγισης που προτείνουμε.

Λήμμα 4.1.1 Το διάνυσμα της κλίσης μιας συνάρτησης $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο \mathbf{x} , διαφορίσιμης στο σημείο αυτό, δίνεται από τη σχέση

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{2\pi} D_\phi u(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\phi d\phi}{\pi} \quad (4.1)$$

όπου \mathbf{e}_ϕ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση ϕ και $D_\phi u(\mathbf{x})$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της u στο \mathbf{x} στην κατεύθυνση ϕ .

Απόδειξη

Το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} D_\phi u(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\phi d\phi \quad (4.2)$$

μέσω του ορισμού της κατευθυνόμενης παραγώγου,

$$D_\phi u(\mathbf{x}) = \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{e}_\phi \rangle, \quad (4.3)$$

γίνεται

$$\int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{e}_\phi \rangle \mathbf{e}_\phi d\phi$$

και αν συμβολίσουμε με θ την κατεύθυνση του διανύσματος της κλίσης, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} D_\phi u(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\phi d\phi &= \int_0^{2\pi} \|\nabla u(\mathbf{x})\| \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi \rangle \mathbf{e}_\phi d\phi = \\ &= \|\nabla u(\mathbf{x})\| \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi \rangle \mathbf{e}_\phi d\phi = \pi \|\nabla u(\mathbf{x})\| \mathbf{e}_\theta = \pi \nabla u(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

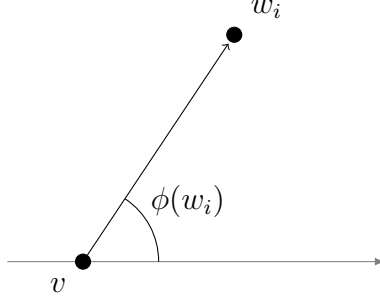
που ολοκληρώνει την απόδειξη.

4.2 Προσέγγιση για Γεωμετρικούς Τυχαίους Γράφους

Με βάση το Λήμμα 4.1.1, θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την κλίση μιας συνάρτησης ορισμένης σε ένα γεωμετρικό τυχαίο γράφο προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (4.1) με ένα άθροισμα Riemann. Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα αυτό συγκλίνει υπό συγκεκριμένες συνθήκες στο διάνυσμα κλίσης επί έναν παράγοντα π .

Για το σκοπό αυτό προχωρούμε στους ακόλουθους απαραίτητους ορισμούς:

Ορισμοί 4.2.1 Ορίζουμε έναν γεωμετρικό τυχαίο γράφο $\mathcal{G}(n, \rho(n))$. Συμβολίζουμε με $d(v, w)$ την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο κορυφών v και w του \mathcal{G} και με \mathbf{e}_{vw} το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ακμής vw με αρχή την κορυφή v . Για ευκολία, ορίζουμε ως $\phi(w) \in [0, 2\pi]$ τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα αυτό



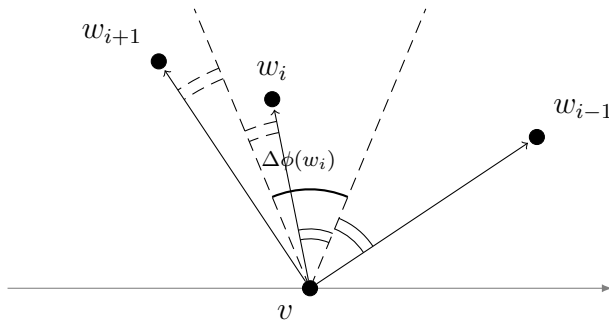
Σχήμα 4.1: Γωνία $\phi(w_i)$ του διανύσματος \mathbf{e}_{vw_i}

με τον άξονα x του επιπέδου πάνω στο οποίο ορίζεται ο \mathcal{G} . Με $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών του \mathcal{G} που συνδέονται με ακμή με την κορυφή v (γειτονιά Vincent). Τον πληθικό αριθμό του συνόλου $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)$ θα τον παριστάνουμε εφεξής ως N . Ορίζουμε έναν υποδείκτη i για κάθε κορυφή w του $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)$ με τον ακόλουθο τρόπο: γράφουμε το σύνολο $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v) = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ ώστε οι γωνίες των ακμών $\phi(w_i)$ να είναι σε αύξουσα σειρά, δηλαδή $\phi(w_1) \leq \phi(w_2) \leq \dots \leq \phi(w_N)$. Με βάση αυτή τη διάταξη, ορίζεται μια σημαντική έννοια για την κατασκευή της προτεινόμενης προσέγγισης, η γωνία που «καταλαμβάνει» ο κάθε γείτονας της v γύρω από την τελευταία, ως εξής:

$$\Delta\phi(w_i) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi(w_{i+1}) - (\phi(w_N) - 2\pi)}{2}, \quad w_i = w_1. \\ \frac{(\phi(w_1) + 2\pi) - \phi(w_{i-1})}{2}, \quad w_i = w_N. \\ \frac{\phi(w_{i+1}) - \phi(w_{i-1})}{2}, \quad w_i \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v) \setminus \{w_1, w_N\}. \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Πρόταση 4.2.1 Έστω διαφορίσιμη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και γεωμετρικός τυχαίος γράφος \mathcal{G} με πλήθος κορυφών n και ακτίνα $\rho(n) \in \omega(n^{-1/2}) \cap o(1)$. Τότε, για κάθε κορυφή v του \mathcal{G} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} \mathbf{e}_{vw_i} \Delta\phi(w_i)}{\pi} = \nabla u(v). \quad (4.5)$$

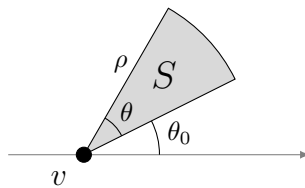


Σχήμα 4.2: Γωνία $\Delta\phi(w_i)$ που «καταλαμβάνει» ο w_i γύρω από τον v

Απόδειξη

Αρχικά, δείχνουμε ότι η λεπτότητα $\lambda = \sup_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \{\Delta\phi(w)\}$ της διαμέρισης του $[0, 2\pi]$ που ορίζεται με βάση τις ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή v μηδενίζεται στο όριο των μεγάλων γράφων.

Έστω $S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + \theta)$ ο κυκλικός τομέας με κέντρο την κορυφή v , ακτίνα ρ και πλευρικά όρια τα τμήματα που ορίζονται από τις ευθείες που διέρχονται από την v με κατευθύνσεις θ_0 και $\theta_0 + \theta$. Μπορούμε τότε να ορίσουμε για κάθε κορυφή του γράφου τη δυαδική τυχαία μεταβλητή



Σχήμα 4.3: Τομέας $S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + \theta)$

$$X_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & w_i \in S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + \theta) \\ 0, & w_i \notin S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + \theta) \end{array} \right\}, \theta \in (0, 2\pi], i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

η οποία δείχνει κατά πόσον η κορυφή w_i ανήκει στη γειτονιά της v και μάλιστα εμπίπτει στον τομέα S .

Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο $W = \mathcal{V}(\mathcal{G}) \cap S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + \theta)$, για τον πληθικό αριθμό του οποίου ισχύει $X = \text{card}(W) = \sum_{i=1}^n X_i$.

Λόγω της ομοιόμορφης κατανομής της θέσης κάθε κορυφής στο $[0, 1] \times [0, 1]$, παίρνουμε ότι

$$P(X_i = 1) = \int \int_{S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + \theta)} dx dy = \text{Area}(S) = \frac{\rho^2 \theta}{2}.$$

Επομένως, η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = n \frac{\rho^2 \theta}{2}.$$

Επειδή απαιτήσαμε $\rho(n) \in \omega(n^{-1/2})$, είναι $E[X] \in \omega(n(n^{-1/2})^2) = \omega(1)$, δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X] = +\infty.$$

Συνεπώς,

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v))(\forall \theta > 0)(\exists y, z \in \mathcal{V}(\mathcal{G})) :$$

$$\begin{aligned} & (\theta_{vw} < \theta_{vy} < \theta_{vw} + \theta) \wedge (\theta_{vw} - \theta < \theta_{vz} < \theta_{vw}) \Rightarrow \\ & 0 < \theta_{vy} - \theta_{vz} < 2\theta \Rightarrow |\theta_{vy} - \theta_{vz}| < 2\theta \Rightarrow \\ & \Delta\phi(w) \leq \frac{|\theta_{vy} - \theta_{vz}|}{2} < \theta \Rightarrow \lambda = \sup_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \{\Delta\phi(w)\} \leq \theta, \end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda \rightarrow 0$ με πιθανότητα 1.

Τώρα, το άθροισμα

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^N \frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} \mathbf{e}_{vw_i} \Delta\phi(w_i) \quad (4.6)$$

στο αριστερό μέλος της (4.5) μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}(w_i) \Delta\phi(w_i)$$

όπου η συνάρτηση \mathbf{f} ορίζεται ως $\mathbf{f}(w) = \frac{u(w) - u(v)}{d(v, w)} \mathbf{e}_{vw}$ για ένα γείτονα w της κορυφής v .

Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του διανύσματος $\mathbf{f}(w)$ καθώς το μέγεθος του \mathcal{G} τείνει στο άπειρο, με την παραδοχή χ.β.γ. ότι η κατεύθυνσή του παραμένει σταθερή.

Είναι $\rho(n) \in o(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(n) = 0$, άρα έπεται από το κριτήριο παρεμβολής και την ανισότητα $0 \leq d(v, w_i) \leq \rho(n)$ ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(v, w_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Άρα,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(w) &= \lim_{d(v, w) \rightarrow 0} \mathbf{f}(w) = \mathbf{e}_{vw} \lim_{d(v, w) \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{v} + d(v, w)\mathbf{e}_{vw}) - u(\mathbf{v})}{d(v, w)} \Rightarrow \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(w) = D_{\mathbf{e}_{vw}} u(v) \mathbf{e}_{vw}. \end{aligned}$$

Άρα, το άθροισμα \mathcal{S} συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} D_\phi u(v) \mathbf{e}_\phi d\phi$, που ολοκληρώνει την απόδειξη, αν λάβουμε υπ' όψιν και το Λήμμα 4.1.1.

4.3 Σφάλμα Λόγω Απόστασης μεταξύ Κορυφών

Προχωρούμε στην ανάλυση του σφάλματος που εισάγεται στον υπολογισμό της κλίσης λόγω της προσέγγισης του ολοκληρώματος \mathcal{I} (εξίσωση (4.2)) από ένα πεπερασμένο, στην πράξη, άθροισμα \mathcal{S} . Η λογική με την οποία προσδιορίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σφάλματος είναι η διαδοχική αντικατάσταση των παραγόντων κάθε όρου του \mathcal{S} με τους αντίστοιχους παράγοντες του \mathcal{I} και η φραγή του μέτρου της εκάστοτε προκύπτουσας διαφοράς. Η διαδικασία αυτή ολοκληρώνεται όταν το \mathcal{S} ανάγεται τελικά στο \mathcal{I} . Το συνολικό σφάλμα \mathcal{E} μπορεί να φραγεί τότε ασυμπτωτικά μέσω τριγωνικής ανισότητας για τις επιμέρους συνιστώσες του.

Αν ορίσουμε τη γωνία

$$\omega(w_i) = \frac{\phi(w_i) + \phi(w_{i-1})}{2},$$

τότε το τμήμα του «χώρου» που καταλαμβάνει κάθε γείτονας w_i του v γύρω από τον τελευταίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[\omega(w_i), \omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)]$. Έτσι, καθένας από τους N όρους του αθροίσματος (4.6) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} \mathbf{e}_{vw_i} \Delta\phi(w_i) = \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)} \frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} \mathbf{e}_{vw_i} d\phi \equiv \tilde{I}_i. \quad (4.7)$$

Αντικαθιστούμε αρχικά το πληλίκιο διαφορών $\frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)}$ με την κατευθυνόμενη παράγωγο $D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v)$ χρησιμοποιώντας προσέγγιση Taylor για την u στην κορυφή v στην κατεύθυνση \mathbf{e}_{vw_i} :

$$\begin{aligned} u(w_i) &= u(v) + d(v, w_i) D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) + O(d^2(v, w_i)) \Rightarrow \\ \frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} &= D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) + \frac{O(d^2(v, w_i))}{d(v, w_i)} \Rightarrow \\ \frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} - D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) &\in O(d(v, w_i)). \end{aligned}$$

Επειδή όμως ισχύει $d(v, w_i) \leq \rho(n)$, έπεται ότι

$$\frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} - D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) \in O(\rho(n)). \quad (4.8)$$

Άρα, η (4.7) γίνεται

$$\tilde{I}_i = \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)} D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) \mathbf{e}_{vw_i} d\phi + O(\rho(n)) \Delta\phi(w_i) \mathbf{e}_{vw_i}. \quad (4.9)$$

Αθροίζοντας τις εξισώσεις (4.9) για όλους τους γείτονες w_i του v , λαμβάνουμε:

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^N \left(\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)} D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) \mathbf{e}_{vw_i} d\phi \right) + \sum_{i=1}^N O(\rho(n)) \Delta\phi(w_i) \mathbf{e}_{vw_i}. \quad (4.10)$$

Στην (4.10) ορίζουμε

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{i=1}^N \left(\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)} D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) \mathbf{e}_{vw_i} d\phi \right) \quad (4.11)$$

και

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{i=1}^N O(\rho(n)) \Delta\phi(w_i) \mathbf{e}_{vw_i}. \quad (4.12)$$

Για το μέτρο του \mathcal{E}_1 ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_1\| &\leq O(\rho(n)) \sum_{i=1}^N \Delta\phi(w_i) \|\mathbf{e}_{vw_i}\| = \\ O(\rho(n)) \sum_{i=1}^N \Delta\phi(w_i) &= 2\pi O(\rho(n)), \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το ασυμπτωτικό άνω φράγμα

$$\|\mathcal{E}_1\| = \left\| \mathcal{S} - \sum_{i=1}^N \left(\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} D_{\mathbf{e}_{vw_i}} u(v) \mathbf{e}_{vw_i} d\phi \right) \right\| \in O(\rho(n)). \quad (4.13)$$

4.4 Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Κατεύθυνόμενων Παραγώγων - Ειδική Περίπτωση

Ως επόμενο όρο στην «ακολουθία» μεταξύ \mathcal{S} και \mathcal{I} , ορίζουμε το

$$\mathcal{S}_2 = \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left[\left(\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi \right) \mathbf{e}_{vw_i} \right]. \quad (4.14)$$

Ακόμα, γράφουμε το \mathcal{S}_1 στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\mathcal{S}_1 = \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \cos(\theta - \phi(w_i)) \Delta\phi(w_i) \mathbf{e}_{vw_i}, \quad (4.15)$$

Από τις Εξισώσεις (4.15) και (4.14), απομονώνουμε τους όρους των αντίστοιχων αθροισμάτων,

$$\cos(\theta - \phi(w_i)) \Delta\phi(w_i) \mathbf{e}_{vw_i}$$

και

$$\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi \mathbf{e}_{vw_i}. \quad (4.16)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι αυτοί έχουν την ίδια κατεύθυνση ως διανύσματα και διαφέρουν μόνο στον συντελεστή που πολλαπλασιάζει το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{e}_{vw_i} . Θα συγκρίνουμε αρχικά τη διαφορά μεταξύ των όρων, ώστε στη συνέχεια να μεταβούμε στη συνολική διαφορά των δύο αθροισμάτων.

Υποθέτοντας ότι οι ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή v είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες ως προς την κατεύθυνσή τους στο διάστημα $[0, 2\pi)$, προκύπτει ότι

$$\Delta\phi(w_i) = \Delta\phi = \frac{2\pi}{N}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ακόμη, ισχύει για κάθε γείτονα w_i της v ότι $\phi(w_i) = \omega(w_i) + \frac{\Delta\phi}{2}$. Άρα, το ολοκλήρωμα στον όρο (4.16) γίνεται

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi = -[\sin(\theta - \phi)]_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} = \\
& = -\sin(\theta - \omega(w_i) - \Delta\phi) + \sin(\theta - \omega(w_i)) = \\
& = 2 \cos\left(\theta - \omega(w_i) - \frac{\Delta\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 2 \cos(\theta - \phi(w_i)) \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Όμως, γνωρίζουμε από το ανάπτυγμα κατά Taylor του ημιτόνου ότι

$$\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \frac{\Delta\phi}{2} + O\left[\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)^3\right] = \frac{\Delta\phi}{2} + O(\Delta\phi^3).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi = 2 \cos(\theta - \phi(w_i)) \left(\frac{\Delta\phi}{2} + O(\Delta\phi^3)\right) = \\
& = \cos(\theta - \phi(w_i))\Delta\phi + O\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)^3\right] = \cos(\theta - \phi(w_i))\Delta\phi + O(N^{-3}).
\end{aligned}$$

Με βάση την παραπάνω λογική, για το σφάλμα

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 \tag{4.17}$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{E}_2\| = \|\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2\| = \\
& = \|\nabla u(v)\| \left\| \sum_{i=1}^N \cos(\theta - \phi(w_i))\Delta\phi \mathbf{e}_{vw_i} - \sum_{i=1}^N \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} \cos(\theta - \phi) d\phi \mathbf{e}_{vw_i} \right\| \Rightarrow \\
& \|\mathcal{E}_2\| \leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left(\left| \cos(\theta - \phi(w_i))\Delta\phi - \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} \cos(\theta - \phi) d\phi \right| \|\mathbf{e}_{vw_i}\| \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_2\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N O(N^{-3}) \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_2\| &\in \|\nabla u(v)\| O(N^{-2})\end{aligned}\quad (4.18)$$

4.5 Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Διανυσμάτων Κατεύθυνσης - Ειδική Περίπτωση

Ορίζουμε την τελευταία συνιστώσα του σφάλματος ως

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{S}_2 - \mathcal{I}. \quad (4.19)$$

Επίσης, αναλύουμε το \mathcal{I} ως εξής:

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} D_\phi u(v) \mathbf{e}_\phi d\phi = \|\nabla u(v)\| \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \phi) \mathbf{e}_\phi d\phi \quad (4.20)$$

Βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα στο τελευταίο σκέλος της (4.20) μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο, λόγω της περιοδικότητας της ολοκληρούμενης συνάρτησης:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \phi) \mathbf{e}_\phi d\phi = \sum_{i=1}^N \left(\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi} \cos(\theta - \phi) \mathbf{e}_\phi d\phi \right).$$

Άρα, αν, όπως στην ενότητα 4.4, απομονώσουμε κάθε όρο των αθροισμάτων στα \mathcal{S}_2 και \mathcal{I} , δηλαδή τον όρο (4.16) και τον όρο

$$\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi} \cos(\theta - \phi) \mathbf{e}_\phi d\phi, \quad (4.21)$$

τότε μπορούμε πρώτα να φράξουμε την κάθε διαφορά μεταξύ αντιστοίχων όρων των αθροισμάτων και έπειτα να φράξουμε το άθροισμα αυτών των διαφορών, που είναι το \mathcal{E}_3 . Η παραπάνω διαφορά είναι

$$\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi} \cos(\theta - \phi) (\mathbf{e}_{v_{w_i}} - \mathbf{e}_\phi) d\phi. \quad (4.22)$$

Τώρα, η μέγιστη τιμή του μέτρου της διανυσματικής ποσότητας $\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi$ λαμβάνεται όταν η γωνία μεταξύ των δύο αυτών μοναδιαίων διανυσμάτων γίνεται μέγιστη, κάτι που συμβαίνει όταν η γωνία ϕ αποκλίνει μέγιστα από την γωνία $\phi(w_i) = \arg(\mathbf{e}_{vw_i})$. Με δεδομένο όμως ότι το διάστημα μεταβολής της ϕ είναι το $[\omega(w_i), \omega(w_i) + \Delta\phi]$, παρατηρούμε ότι η μέγιστη αυτή «απόκλιση» είναι ίση με $\frac{\Delta\phi}{2}$.

Σε αυτή την οριακή περίπτωση, μπορούμε με τριγωνομετρία να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi\| &= 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{4}\right) \|\mathbf{e}_\phi\| = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{4}\right).\end{aligned}$$

Άρα, θα ισχύει ότι

$$\|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi\| \leq 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{4}\right), \quad \forall \phi \in [\omega(w_i), \omega(w_i) + \Delta\phi], \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.23)$$

Περνώντας στο συνολικό σφάλμα \mathcal{E}_3 , λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_3\| &= \|\mathcal{S}_2 - \mathcal{I}\| = \\ &= \|\nabla u(v)\| \left\| \sum_{i=1}^N \left[\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} \cos(\theta - \phi) (\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi) d\phi \right] \right\| \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left\| \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} \cos(\theta - \phi) (\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi) d\phi \right\| \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} |\cos(\theta - \phi)| \|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi\| d\phi \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{4}\right) d\phi = \\ &= \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) d\phi \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left[\frac{4\pi}{N} \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right] = 4\pi \|\nabla u(v)\| \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_3\| &\in \|\nabla u(v)\| O\left(\frac{\pi}{2N}\right) \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\in \|\nabla u(v)\| O(N^{-1}).\end{aligned}\tag{4.24}$$

4.6 Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Κατευθυνόμενων Παραγώγων - Γενική Περίπτωση

Στις ενότητες 4.4 και 4.5, υποθέσαμε χάρin ευκολίας ότι οι ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή v είναι ομοιόμορφα κατανομημένες ως προς την κατεύθυνσή τους. Τώρα, αίρουμε αυτή την απλουστευτική υπόθεση και εξετάζουμε τη συμπεριφορά του σφάλματος στη γενική περίπτωση των τυχαία κατανομημένων προσπιπτουσών ακμών.

Οι όροι που χρήζουν διαφορετικού χειρισμού απ' ότι προηγουμένως είναι μόνο οι \mathcal{E}_2 και \mathcal{E}_3 . Προχωρούμε αρχικά στη φραγή του \mathcal{E}_2 , ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτήν της ενότητας 4.4.

Πλέον, το ολοκλήρωμα που περιέχεται στην (4.16) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi &= -[\sin(\theta - \phi)]_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} = \\ &= 2 \cos\left(\theta - \omega(w_i) - \frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right).\end{aligned}$$

Παρόμοια με προηγουμένως, ισχύει ότι

$$\sin\left(\frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right) = \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} + O(\Delta\phi(w_i)^3).\tag{4.25}$$

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta - \omega(w_i) - \frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right) &= \cos\left[\theta - \phi(w_i) - \left(\omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i)\right)\right] \\ &= \cos(\theta - \phi(w_i)) \cos\left(\omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i)\right) +\end{aligned}$$

$$+ \sin(\theta - \phi(w_i)) \sin\left(\omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i)\right)$$

Όμως, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi(w_i) = \frac{\phi(w_{i+1}) - \phi(w_{i-1})}{2} \\ \omega(w_i) = \frac{\phi(w_i) + \phi(w_{i-1})}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i) = \frac{\phi(w_{i+1}) - \phi(w_i)}{4} + \frac{\phi(w_{i-1}) - \phi(w_i)}{4} \Rightarrow \\ & \left| \omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i) \right| \leq \left| \frac{\phi(w_{i+1}) - \phi(w_i)}{4} \right| + \left| \frac{\phi(w_{i-1}) - \phi(w_i)}{4} \right| \Rightarrow \\ & \left| \omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i) \right| \leq \frac{\phi(w_{i+1}) - \phi(w_{i-1})}{4} \Rightarrow \\ & \left| \omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i) \right| \leq \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Με βάση την παραπάνω ανισότητα (4.26), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i)\right) &= 1 + O\left(\left(\omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i)\right)^2\right) \\ &= 1 + O\left(\left(\frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right)^2\right) = 1 + O(\Delta\phi(w_i)^2) \end{aligned}$$

και, αντίστοιχα με παραπάνω,

$$\sin\left(\omega(w_i) + \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} - \phi(w_i)\right) = O(\Delta\phi(w_i)).$$

Άρα, το ολοκλήρωμα υπό εξέταση γίνεται

$$\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi =$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left\{ \cos(\theta - \phi(w_i)) [1 + O(\Delta\phi(w_i)^2)] + \sin(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)) \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} + O(\Delta\phi(w_i)^3) \right\} = \\
& \quad \cos(\theta - \phi(w_i)) \Delta\phi(w_i) + \cos(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^3) + \\
& \quad + \cos(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^5) + \sin(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^2) + \\
& \quad + \sin(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^4) = \\
& \quad \cos(\theta - \phi(w_i)) \Delta\phi(w_i) + \cos(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^3) + \\
& \quad + \sin(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^2).
\end{aligned}$$

Με την ίδια διαδικασία όπως στην ενότητα 4.4, λαμβάνουμε

$$\|\mathcal{E}_2\| = \|\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2\| \leq$$

$$\|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left(\left| \cos(\theta - \phi(w_i)) \Delta\phi(w_i) - \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) d\phi \right| \|\mathbf{e}_{vw_i}\| \right) \Rightarrow$$

$$\|\mathcal{E}_2\| \in \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left| \cos(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^3) + \sin(\theta - \phi(w_i)) O(\Delta\phi(w_i)^2) \right| \Rightarrow$$

$$\|\mathcal{E}_2\| \in \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \left(|\cos(\theta - \phi(w_i))| O(\Delta\phi(w_i)^3) + |\sin(\theta - \phi(w_i))| O(\Delta\phi(w_i)^2) \right) \Rightarrow$$

$$\|\mathcal{E}_2\| \in \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N O(\Delta\phi(w_i)^2) \quad (4.27)$$

Συνεπώς, για τη μέση τιμή του μέτρου του \mathcal{E}_2 θα ισχύει

$$\begin{aligned} E [\|\mathcal{E}_2\|] &\in \|\nabla u(v)\| E \left[\sum_{i=1}^N O(\Delta\phi(w_i)^2) \right] \Rightarrow \\ E [\|\mathcal{E}_2\|] &\in \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N O(E[\Delta\phi(w_i)^2]) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Για να εκφράσουμε το ανωτέρω ασυμπτωτικό φράγμα συναρτήσει μόνο του αριθμού γειτόνων N της κορυφής v , θα υπολογίσουμε την εμφανιζόμενη μέση τιμή $E[\Delta\phi(w_i)^2]$, ορίζοντας την τυχαία μεταβλητή

$$\Phi \equiv \Delta\phi(w_i)$$

και προσδιορίζοντας την κατανομή της.

Το ενδεχόμενο $\Phi > \phi$ πραγματοποιείται όταν και μόνο όταν όλοι οι υπόλοιποι γείτονες της v εκτός του w_i κείνται εντός κυκλικού τομέα $S(v, \rho, \theta_0, \theta_0 + 2\pi - 2\phi)$ ο οποίος δεν περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τον w_i . Άρα, για την πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου έχουμε

$$\begin{aligned} P(\Phi > \phi) &= \left[\frac{\text{Area}(S)}{\pi\rho^2} \right]^{N-1} \Rightarrow \\ P(\Phi > \phi) &= \left[\frac{(\pi - \frac{2\phi}{2})\rho^2}{\pi\rho^2} \right]^{N-1} = \left(1 - \frac{\phi}{\pi} \right)^{N-1} \Rightarrow \\ F_\Phi(\phi) &= 1 - \left(1 - \frac{\phi}{\pi} \right)^{N-1}, \quad \phi \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Φ είναι

$$f_\Phi(\phi) = \frac{N-1}{\pi} \left(1 - \frac{\phi}{\pi} \right)^{N-2}, \quad \phi \in [0, \pi]. \quad (4.30)$$

Πλέον, μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της μέσης τιμής $E[\Phi^2]$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό:

$$E[\Phi^2] = \int_0^\pi \phi^2 f_\Phi(\phi) d\phi = \frac{N-1}{\pi} \int_0^\pi \phi^2 \left(1 - \frac{\phi}{\pi} \right)^{N-2} d\phi.$$

Αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέσουμε $u = 1 - \frac{\phi}{\pi}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
E[\Phi^2] &= (N-1)\pi^2 \int_0^1 (1-u)^2 u^{N-2} du = \\
&= (N-1)\pi^2 \left[\frac{u^{N-1}}{N-1} - 2\frac{u^N}{N} + \frac{u^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 = \\
&= (N-1)\pi^2 \left(\frac{1}{N-1} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N+1} \right) \Rightarrow \\
E[\Phi^2] &= \frac{2\pi^2}{N(N+1)} \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Μέσω της (4.31), η (4.28) δίνει

$$\begin{aligned}
E[\|\mathcal{E}_2\|] &\in \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N O\left(\frac{2\pi^2}{N(N+1)}\right) = \|\nabla u(v)\| N O\left(\frac{2\pi^2}{N(N+1)}\right) \Rightarrow \\
E[\|\mathcal{E}_2\|] &\in \|\nabla u(v)\| O\left(\frac{1}{N+1}\right). \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Μέχρι τώρα, αντιμετωπίσαμε στη μελέτη μας το πλήθος των γειτόνων της κορυφής v , N , ως μια απλή παράμετρο. Στην πραγματικότητα, η ποσότητα αυτή αποτελεί μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί διωνυμική κατανομή:

$$\text{Bin}(N | n-1, \pi\rho^2(n)). \tag{4.33}$$

Η τυχαία μεταβλητή N αποτελεί το όρισμα της κατανομής και χωρίζεται με κάθετο από τις δύο παραμέτρους της κατανομής, που αντιστοιχούν στο πλήθος των συνολικών «υποψήφιων» γειτόνων της v και στην πιθανότητα για τον καθένα από αυτούς να βρεθεί όντως στη γειτονιά της v . Συγκεκριμένα, η πιθανότητα η κορυφή v να έχει k γείτονες δίνεται από τον τύπο

$$P(N = k) = \binom{n-1}{k} (\pi\rho^2(n))^k (1 - \pi\rho^2(n))^{n-1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{4.34}$$

Όμως, στην έκφραση (4.32), δεν περιλαμβάνεται η ίδια η τυχαία μεταβλητή N αλλά μια συνάρτησή της, η $g(N) = \frac{1}{N+1}$. Η μέση τιμή της τελευταίας υπολογίζεται ακολουθώντας:

$$\begin{aligned}
E[g(N)] &= \sum_{k=0}^{n-1} g(k)P(N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} (\pi\rho^2(n))^k (1 - \pi\rho^2(n))^{n-1-k} \\
&= \frac{1}{n\pi\rho^2(n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(k+1)k!(n-(k+1))!} (\pi\rho^2(n))^{k+1} (1 - \pi\rho^2(n))^{n-(k+1)} \\
&\xrightarrow{m=k+1} E[g(N)] = \frac{1}{n\pi\rho^2(n)} \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} (\pi\rho^2(n))^m (1 - \pi\rho^2(n))^{n-m} \\
&= \frac{1}{n\pi\rho^2(n)} \left[(\pi\rho^2(n) + 1 - \pi\rho^2(n))^n - \binom{n}{0} (\pi\rho^2(n))^0 (1 - \pi\rho^2(n))^n \right] \\
&\Rightarrow E[g(N)] = \frac{1}{n\pi\rho^2(n)} [1 - (1 - \pi\rho^2(n))^n]. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Εφόσον η ακτίνα του γράφου φράσσεται ασυμπτωτικά σύμφωνα με την υπόθεση της Πρότασης 4.2.1 ώστε να συγκλίνει η προσέγγιση της κλίσης που λαμβάνουμε, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \pi\rho^2(n))^n = 0 &\Rightarrow 1 - (1 - \pi\rho^2(n))^n \in \Theta(1) \\
&\xrightarrow{(4.35)} E[g(N)] \in \Theta\left(\frac{1}{n\pi\rho^2(n)}\right). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Με βάση την (4.36), η (4.32) γίνεται:

$$E[\|\mathcal{E}_2\|] \in \|\nabla u(v)\| O\left(\frac{1}{n\rho^2(n)}\right). \tag{4.37}$$

4.7 Σφάλμα Λόγω Δειγματοληψίας Διανυσμάτων Κατεύθυνσης - Γενική Περίπτωση

Ο όρος (4.22) παίρνει στη γενική περίπτωση τη μορφή

$$\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \cos(\theta - \phi) (\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi) d\phi. \quad (4.38)$$

Αντίστοιχα με την ενότητα 4.5, βλέπουμε ότι το μέτρο του παράγοντα $\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi$ μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων. Όμως, η γωνία αυτή είναι φραγμένη:

$$|\phi - \phi(w_i)| \leq \Delta\phi(w_i), \forall \phi \in [\omega(w_i), \omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)].$$

Άρα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi\| &\leq \|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_{\phi(w_i)+\Delta\phi(w_i)}\| \Rightarrow \\ \|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi\| &\leq 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right), \forall \phi \in [\omega(w_i), \omega(w_i) + \Delta\phi(w_i)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως στην ειδική περίπτωση, καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} \|\mathbf{e}_{vw_i} - \mathbf{e}_\phi\| d\phi \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_i)+\Delta\phi(w_i)} 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right) d\phi \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\leq \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N 2\Delta\phi(w_i) \sin\left(\frac{\Delta\phi(w_i)}{2}\right) \Rightarrow \\ \|\mathcal{E}_3\| &\in \|\nabla u(v)\| \sum_{i=1}^N O(\Delta\phi(w_i)^2), \end{aligned} \quad (4.40)$$

που είναι το ίδιο φράγμα με αυτό που προσδιορίστηκε προηγουμένως για το σφάλμα $\|\mathcal{E}_2\|$. Επομένως, με τον ίδιο τρόπο όπως στην ενότητα 4.6, συναγεται ότι

$$E [\|\mathcal{E}_3\|] \in \|\nabla u(v)\| O\left(\frac{1}{N+1}\right). \quad (4.41)$$

Ομοίως λοιπόν με την ενότητα 4.6, φτάνουμε στο ακόλουθο ασυμπτωτικό φράγμα για τη μέση τιμή του μέτρου της συνιστώσας \mathcal{E}_3 του σφάλματος:

$$E [\|\mathcal{E}_3\|] \in \|\nabla u(v)\| O\left(\frac{1}{n\rho^2(n)}\right). \quad (4.42)$$

4.8 Ασυμπτωτική Συμπεριφορά του Συνολικού Σφάλματος

Για το συνολικό σφάλμα \mathcal{E} έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} - \mathcal{I} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \Rightarrow$$

$$\|\mathcal{E}\| \leq \|\mathcal{E}_1\| + \|\mathcal{E}_2\| + \|\mathcal{E}_3\|. \quad (4.43)$$

Έχοντας φτάσει στα τελικά αποτελέσματα των εννοιών 4.3, 4.6 και 4.7, μπορούμε με βάση την (4.43) να αποκτήσουμε ένα ασυμπτωτικό άνω φράγμα για το μέτρο του συνολικού σφάλματος, $\|\mathcal{E}\|$:

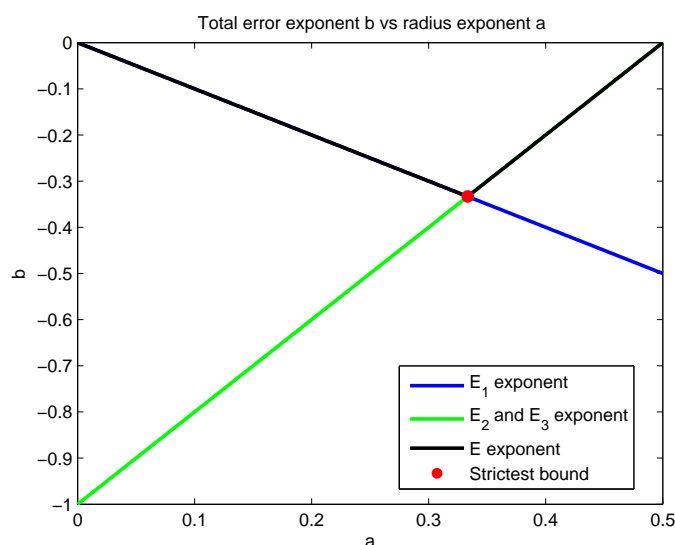
$$\|\mathcal{E}\| \in O\left(\max\{\rho(n), n^{-1}\rho(n)^{-2}\}\right) \quad (4.44)$$

Έχοντας υπό όψιν μας τα ασυμπτωτικά φράγματα που προαπαιτούνται για την ακτίνα του γράφου ώστε να συγκλίνει η προσέγγιση της κλίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ειδική έκφραση της ακτίνας ως συνάρτησης του «μεγέθους» του γράφου (η οποία δεν καλύπτει βεβαίως όλες τις περιπτώσεις):

$$\rho(n) = c\frac{1}{n^a}, \quad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad c > 0. \quad (4.45)$$

Τότε, η (4.44) γίνεται

$$\|\mathcal{E}\| \in O\left(\max\{n^{-a}, n^{-1+2a}\}\right), \quad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$



Σχήμα 4.4: Μεταβολή του εκθέτη b του πλήθους κορυφών του γράφου στο ασυμπτωτικό φράγμα του σφάλματος συναρτήσει του εκθέτη a στην ακτίνα

$$\|\mathcal{E}\| \in \begin{cases} O(n^{-a}), & a \in (0, \frac{1}{3}] \\ O(n^{-1+2a}), & a \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \end{cases}. \quad (4.46)$$

Παρατηρούμε ότι το αυστηρότερο ασυμπτωτικό άνω φράγμα στο σφάλμα επιτυγχάνεται για την τιμή $\hat{a} = \frac{1}{3}$ και είναι $O(n^{-\frac{1}{3}})$. Αυτό το συμπέρασμα αποτελεί μια ένδειξη για την τιμή της ακτίνας που είναι προτιμότερο να επιλέγεται για τους πειραματισμούς καθώς και για την τελική εφαρμογή σε πλήρη «κλίμακα» του αλγορίθμου ενεργών καμπυλών σε γράφους πάνω σε πραγματικά δεδομένα. Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται διαγραμματικά στο Σχήμα 4.4.

4.9 Γενικός Σχολιασμός και Σύνδεση με Άλλες Προσεγγίσεις

Η προσέγγιση της κλίσης που επιχειρούμε μπορεί να καταταγεί στην κατηγορία των σταθμισμένων αθροισμάτων. Στην προσπάθεια να μιμηθούμε το συνεχές ανάλογο που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.1, χρησιμοποιούμε λόγους μεταβολής της συνάρτησης γύρω από την υπό εξέταση κορυφή ως πρώτης τάξεως προσεγγίσεις των κατευθύνσιμων παραγώγων της στις κατευθύνσεις των προσπιπτουσών ακμών. Με τους λόγους αυτούς σταθμίζουμε τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των ακμών, τα οποία μπορούμε να δούμε και ως «ανταγωνιστές» - στα πλαίσια του

σταθμισμένου αθροίσματος - για την απονομή του ρόλου του διανύσματος κλίσης.

Ένας κρίσιμος επιπλέον όρος στάθμισης είναι η γωνία $\Delta\phi(w_i)$ που αποδίδεται σε κάθε διάνυσμα ακμής ή ισοδύναμα σε κάθε γείτονα w_i της κορυφής. Με τη γωνία αυτή ανατίθεται ουσιαστικά και από ένα τμήμα του διαστήματος $[0, 2\pi]$ σε κάθε γείτονα, ως σύνολο κατευθύνσεων για τις οποίες η «πλησιέστερη» πληροφορία για τη μεταβολή της συνάρτησης είναι αυτή που προέρχεται από το συγκεκριμένο γείτονα. Μπορούμε να αντιληφθούμε αυτή την ερμηνεία μέσω ενός μονοδιάστατου διαγράμματος Voronoi για έναν κύκλο γύρω από την κάθε κορυφή, στον οποίο τοποθετούνται οι γείτονες της κορυφής ανάλογα με τη γωνία της ακμής τους με αυτήν, $\phi(w_i)$. Τότε, σε κάθε γείτονα θα ανατεθεί ένα κυκλικό τόξο γύρω από αυτόν, το οποίο ακριβώς θα έχει γωνία $\Delta\phi(w_i)$. Έτσι, αν ένας γείτονας w_i διακρίνεται από μεγάλη γωνία $\Delta\phi(w_i)$, το βάρος του στο σταθμισμένο άθροισμα θα είναι μεγαλύτερο, καθώς θεωρούμε ότι «ενσωματώνει» πληροφορία μεγαλύτερης βαρύτητας σε σχέση με τον υπολογισμό της κλίσης απ' ότι ένας άλλος γείτονας w_j με μικρότερη γωνία $\Delta\phi(w_j)$.

Η συνεισφορά αυτή των γωνιών $\Delta\phi(w_i)$ στη στάθμιση του αθροίσματος που προσεγγίζει το διάνυσμα κλίσης είναι δυνατό να μη ληφθεί υπ' όψιν και η αγνόησή τους μας οδηγεί προς άλλες προσεγγίσεις της κλίσης, όπως θα δούμε παρακάτω. Στην περίπτωση αυτή, το σταθμισμένο άθροισμα απλοποιείται αρχικά ως εξής:

$$\frac{\sum_{i=1}^N \frac{u(w_i) - u(v)}{d(v, w_i)} \mathbf{e}_{vw_i}}{N}. \quad (4.47)$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να πάρει τη γενικότερη μορφή

$$\frac{\sum_{i=1}^N \left[\frac{|u(w_i) - u(v)|}{d(v, w_i)} \right]^p \operatorname{sgn}(u(w_i) - u(v)) \mathbf{e}_{vw_i}}{\sum_{i=1}^N \left[\frac{|u(w_i) - u(v)|}{d(v, w_i)} \right]^{p-1}} \quad (4.48)$$

όταν η παράμετρος p λαμβάνει τιμή 1. Με βάση την εξίσωση (4.48), μπορούμε να διαλέξουμε και διαφορετικές τιμές για το p , αλλάζοντας τη βαρύτητα με την οποία οι απόλυτοι λόγοι μεταβολής σταθμίζουν τα διανύσματα των ακμών. Όσο μεγαλύτερη τιμή λαμβάνει το p , τόσο μεγαλύτερο βάρος αποκτούν τα διανύσματα ακμών με μεγαλύτερους λόγους μεταβολής σε σχέση με τα υπόλοιπα διανύσματα.

Αν ορίσουμε

$$w^* = \arg \max_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \left\{ \frac{|u(w) - u(v)|}{d(v, w)} \right\},$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι στο όριο $p \rightarrow +\infty$, η (4.48) δίνει:

$$\frac{|u(w^*) - u(v)|}{d(v, w^*)} \operatorname{sgn}(u(w^*) - u(v)) \mathbf{e}_{vw^*}. \quad (4.49)$$

Με αυτό τον τρόπο, έχουμε υπό μία έννοια ενοποιήσει την προσέγγιση που προτείνουμε με την προσέγγιση της κλίσης μέσω της (4.49), η οποία έχει αναλυθεί στο [1], μέσα από τη ρύθμιση μιας απλής παραμέτρου p . Στην τελευταία περίπτωση, το μέτρο της κλίσης προσεγγίζεται με βάση το μέγιστο λόγο μεταβολής της συνάρτησης μεταξύ της εξεταζόμενης κορυφής και των γειτόνων της:

$$\|\nabla u(v)\| \approx \max_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \left\{ \frac{|u(w) - u(v)|}{d(v, w)} \right\}. \quad (4.50)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον μια στοιχειώδη ομοιογένεια για το γράφο, που σημαίνει ότι οι αποστάσεις $d(v, w_i)$ των γειτόνων από την κορυφή v δε διαφέρουν πολύ μεταξύ τους. Αγνοώντας λοιπόν και τις αποστάσεις αυτές στη στάθμιση των διανυσμάτων ακμών, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα με προηγουμένως και για $p \rightarrow +\infty$ να λάβουμε

$$\|\nabla u(v)\| \approx \max_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \{|u(w) - u(v)|\}. \quad (4.51)$$

Οι προσεγγίσεις αυτές του μέτρου της κλίσης είναι πιο εύρωστες από αυτήν που αναλύσαμε στις προηγούμενες ενότητες, αν και έχουν σημαντικές αδυναμίες σε ό,τι αφορά στην κατεύθυνση της κλίσης. Ο λόγος είναι ότι «επιλέγουν» έναν μόνο γείτονα της κορυφής για τον υπολογισμό της κλίσης, αγνοώντας την πληροφορία από όλες τις υπόλοιπες κατευθύνσεις που αντιστοιχούν στις ακμές από τους άλλους γείτονες. Συνεπώς, η χρήση των τελευταίων προσεγγίσεων για τον υπολογισμό του μέτρου της κλίσης και της νέας προσέγγισης για την κατεύθυνση της κλίσης αποτελεί μια λογική επιλογή.

4.10 Πειραματικά Αποτελέσματα για Προσέγγιση Κλίσης και Σύγκριση με Αναλυτικά Αποτελέσματα

Θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποτελέσματα από την εφαρμογή της αναλυθείσας προσέγγισης πάνω σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους μεγέθους της τάξης των 10^3

έως 10^4 κορυφών. Τα πειράματα διεξήχθησαν σε περιβάλλον MATLAB. Στόχος μας είναι αφ' ενός να οπτικοποιήσουμε την ποιότητα με την οποία προσεγγίζεται η κλίση, συγκρίνοντας τη μέθοδο που προτείνεται και με αναλυτικά αποτελέσματα, αφ' ετέρου να δείξουμε την ασυμπτωτική πορεία του σφάλματος προς το μηδέν, αναπαριστώντας τις «μέσες» τιμές του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (M.S.E.) και ενός σχετικού σφάλματος για αυξανόμενο μέγεθος γράφων, όπως προέκυψαν από αρκετές εκτελέσεις του αλγορίθμου για κάθε μέγεθος. Στα πειράματα που ακολουθούν, η ακτίνα των γράφων ορίστηκε σε όλες τις περιπτώσεις ως $\rho(n) = \frac{3}{5}n^{-1/3}$.

Παραθέτουμε κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από τον υπολογισμό του διανυσματικού πεδίου της κλίσης γνωστών αναλυτικών συναρτήσεων οι οποίες λαμβάνουν τιμές πάνω στις κορυφές γεωμετρικού τυχαίου γράφου \mathcal{G}_1 με μέγεθος $n = 5500$ κορυφών.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι εξής:

$$1. u_1(x, y) = \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2} \right] \text{ και}$$

$$2. u_2(x, y) = \sin [2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)].$$

Η μορφή τους παρουσιάζεται στα Σχήματα 4.5 και 4.6 για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων τους.

Υπολογίζουμε αναλυτικά τις κλίσεις αυτών των συναρτήσεων,

$$1. \nabla u_1(x, y) = -\frac{u_1(x, y)}{\sigma^2} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$2. \nabla u_2(x, y) = 2\pi \cos [2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

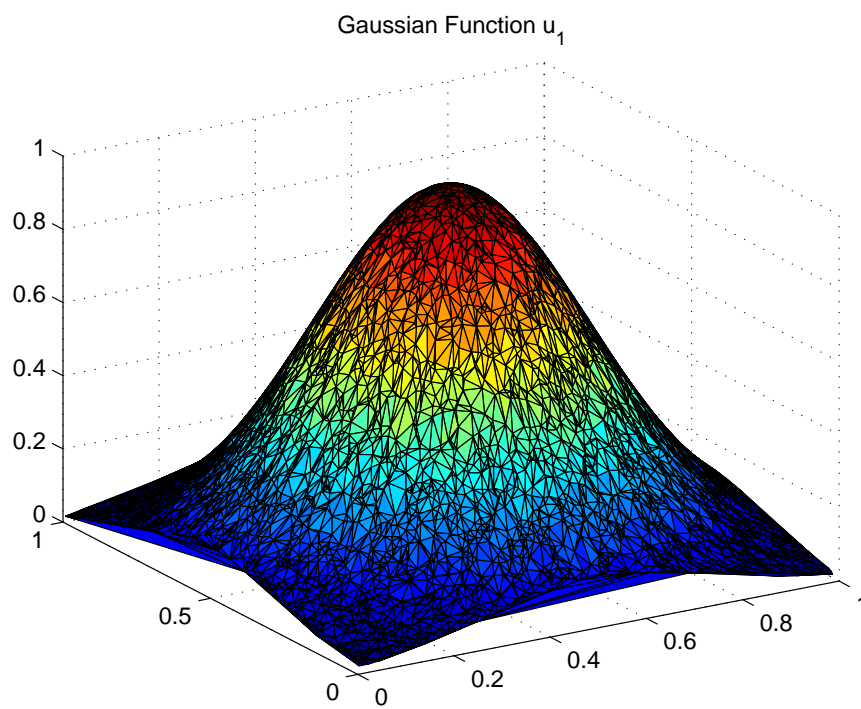
καθώς και τα μέτρα αυτών,

$$1. \|\nabla u_1(x, y)\| = \frac{u_1(x, y)}{\sigma^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \text{ και}$$

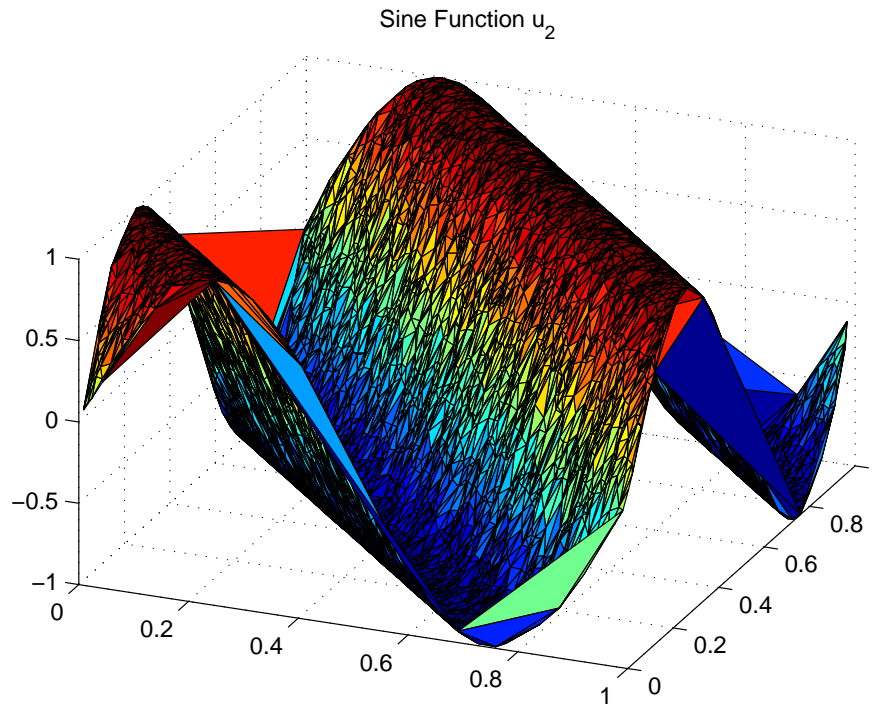
$$2. \|\nabla u_2(x, y)\| = 2\pi |\cos [2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)]| \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίζουμε και απεικονίζουμε στα Σχήματα 4.7 - 4.10 τις αναλυτικές τιμές της κλίσης και του μέτρου της για τις δύο συναρτήσεις πάνω στα σημεία των κορυφών του \mathcal{G}_1 και αντιπαραθέτουμε σε αυτές τα αποτελέσματα με βάση την προτεινόμενη προσέγγιση.

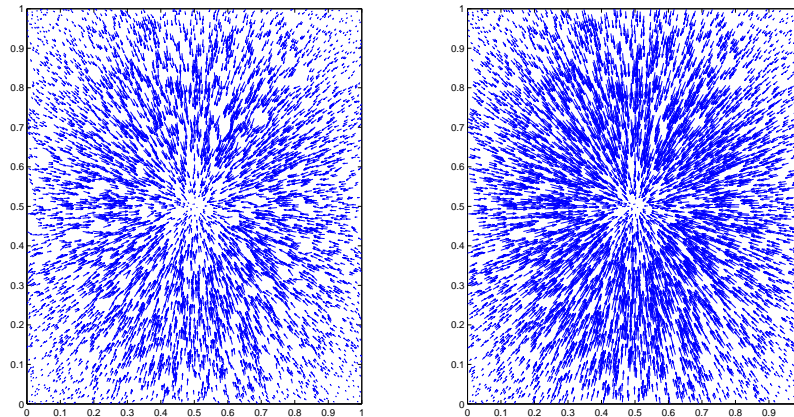
Όπως είναι εμφανές, η προσέγγιση αποτυπώνει τη γενική μεταβολή της κλίσης στη συνολική έκταση του γράφου, ωστόσο σε «μικροσκοπικό» επίπεδο, δηλαδή για γειτονικές κορυφές, μπορεί να παρουσιάζει αισθητές αποκλίσεις. Εξαιτίας αυτής της έντονης τοπικής διακύμανσης, προέκυψε η ιδέα για average ή median filtering του αρχικού αποτελέσματος ώστε να εξομαλυνθεί το διανυσματικό πεδίο και να προσεγγίσει έτσι καλύτερα την πραγματική κλίση. Η προσθήκη αυτή και τα αποτελέσματά της μελετώνται στο επόμενο μέρος.



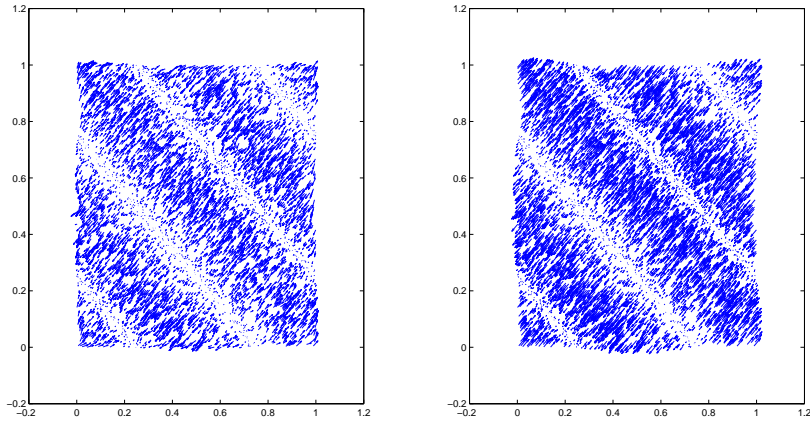
Σχήμα 4.5: Η Γκαουσιανή συνάρτηση $u_1(x, y)$ ορισμένη στο γράφο \mathcal{G}_1 για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



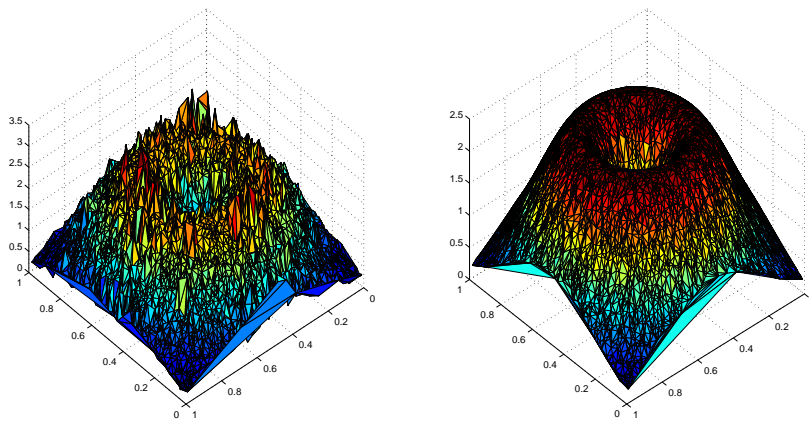
Σχήμα 4.6: Η ημιτονοειδής συνάρτηση $u_2(x, y)$ ορισμένη στο γράφο \mathcal{G}_1 για $\omega_1 = \omega_2 = 1$



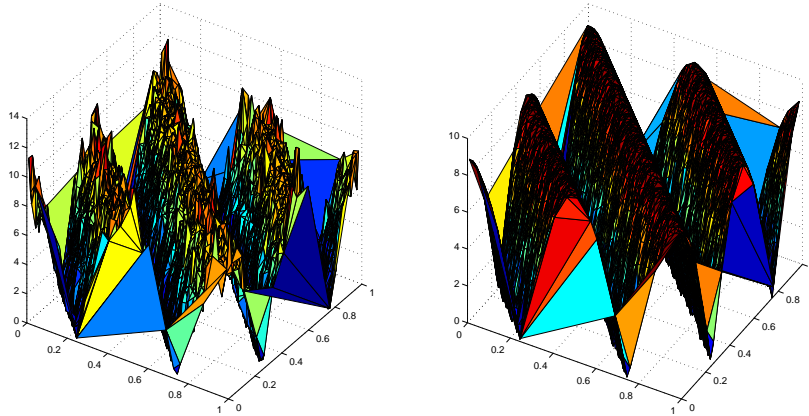
Σχήμα 4.7: Πεδίο κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Αριστερά: προσεγγιστικό, Δεξιά: πραγματικό.



Σχήμα 4.8: Πεδίο κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$ - Αριστερά: προσεγγιστικό, Δεξιά: πραγματικό.



Σχήμα 4.9: Μέτρο κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Αριστερά: προσεγγιστικό, Δεξιά: πραγματικό.



Σχήμα 4.10: Μέτρο κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$ - Αριστερά: προσεγγιστικό, Δεξιά: πραγματικό.

4.11 Φιλτράρισμα Μέσης και Ενδιάμεσης Τιμής και Σύγκριση με Στοιχειώδη Προσέγγιση

Εδώ, δοκιμάζουμε την ιδέα του φιλτραρίσματος μέσης τιμής (average filtering) ή ενδιάμεσης τιμής (median filtering) του διανύσματος κλίσης που προκύπτει από την προσέγγιση που παίρνουμε. Στόχος μας είναι η ομαλοποίηση του τελικού διανυσματικού πεδίου που θα χρησιμοποιηθεί για τον αλγόριθμο των ενεργών καμπυλών σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους.

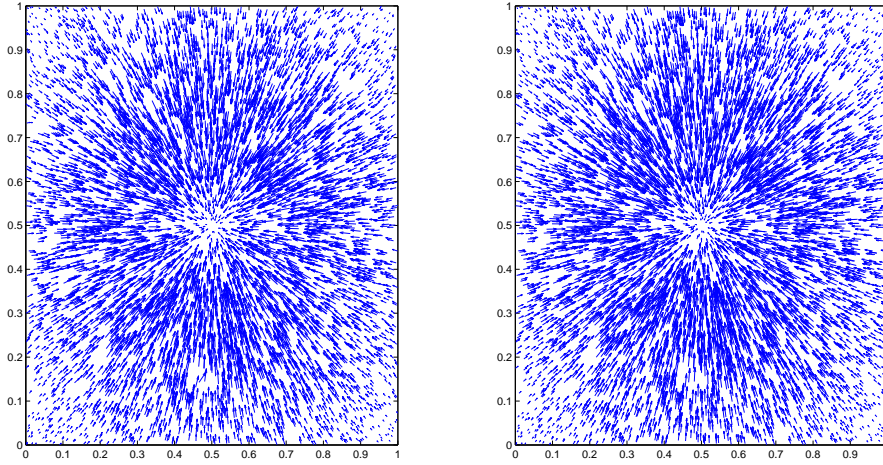
Η διαδικασία του φιλτραρίσματος στηρίζεται και αυτή στη γειτονιά Vincent μοναδιαίας κλίμακας που ορίζεται πάνω στο γράφο και παίρνει ως είσοδο τις τιμές της κλίσης που έχουν προκύψει σε κάθε κορυφή μέσω της προσέγγισης του σταθμισμένου αθροίσματος. Αν συμβολίσουμε με

$$\mathbf{g}(v) = (g_1(v), g_2(v)) = \frac{\mathcal{S}(v)}{\pi}, \quad v \in \mathcal{V}(\mathcal{G}) \quad (4.52)$$

την προσέγγιση που λαμβάνουμε αρχικά σε κάθε κορυφή v του γράφου, τότε τροποποιούμε την αρχική αυτή προσέγγιση μέσω της σχέσης

$$\mathbf{g}_{av}(v) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \mathbf{g}(w)}{\text{card}(\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v))} \quad (4.53)$$

για να υλοποιήσουμε το φίλτρο μέσης τιμής και μέσω της σχέσης



Σχήμα 4.11: Πεδίο κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με average φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.

$$\mathbf{g}_{med}(v) = \text{median}_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \{g_1(w)\} \mathbf{e}_x + \text{median}_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \{g_2(w)\} \mathbf{e}_y \quad (4.54)$$

για να υλοποιήσουμε το φίλτρο ενδιάμεσης τιμής.

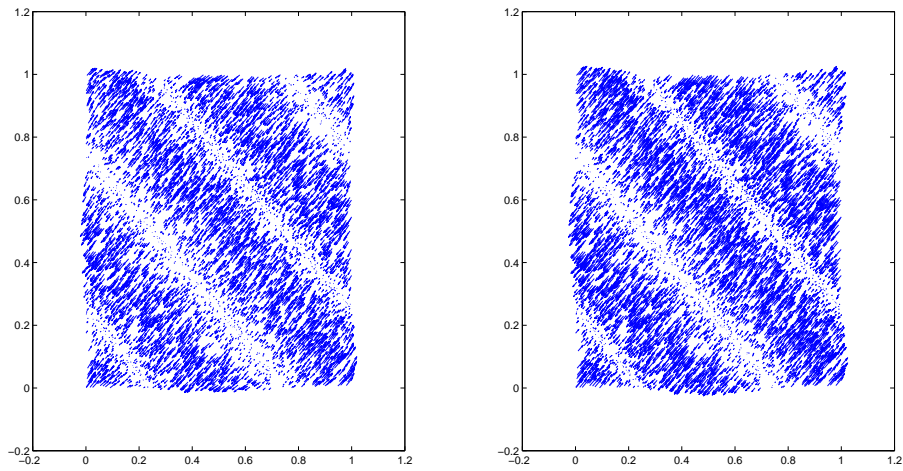
Παραθέτουμε αποτελέσματα από την εφαρμογή του average filter (Σχήματα 4.11 έως 4.14) καθώς και του median filter (Σχήματα 4.15 έως 4.18) στην εκτίμηση της κλίσης των συναρτήσεων που μελετήσαμε και προηγούμενα (της Γκαουσιανής $u_1(x, y)$ και της ημιτονοειδούς $u_2(x, y)$) πάνω στις κορυφές ενός γεωμετρικού τυχαίου γράφου \mathcal{G}_1 με μέγεθος $n = 5500$.

Συγκεκριμένα, αντιπαραθέτουμε τα ακριβή διανυσματικά πεδία με αυτά που προκύπτουν μετά την εφαρμογή του εκάστοτε φιλτραρίσματος, καθώς και τις τιμές του μέτρου των διανυσμάτων για τις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν.

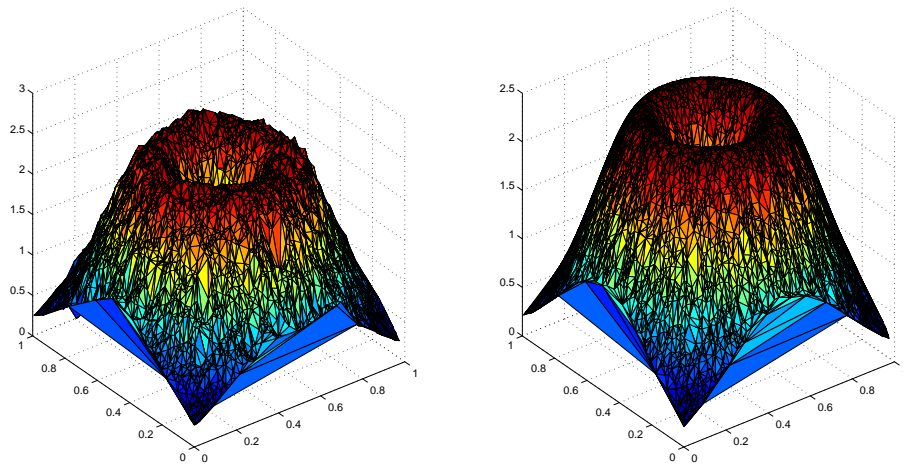
Είναι προφανές ότι η εκτίμηση που αποκτούμε μετά το εκάστοτε φιλτράρισμα είναι πολύ ομαλότερη της αρχικής και δεν υποφέρει σημαντικά από απότομες διακυμάνσεις σε μικρή κλίμακα. Τα δύο φίλτρα φαίνεται να έχουν παρόμοια απόδοση στο βαθμό «διόρθωσης» της προσέγγισης. Επομένως, κρίνεται θεμιτό να χρησιμοποιηθεί μια από αυτές τις τροποποιημένες εκτιμήσεις στα μετέπειτα στάδια του αλγορίθμου, όπως για παράδειγμα στον υπολογισμό της καμπυλότητας. Το αναμενόμενο κόστος που συνεπάγεται αυτή η επιλογή είναι για κάθε βήμα του αλγορίθμου

$$n E \{\text{deg}(v)\} = n \Theta (n \rho(n)^2) = n^{2-2a},$$

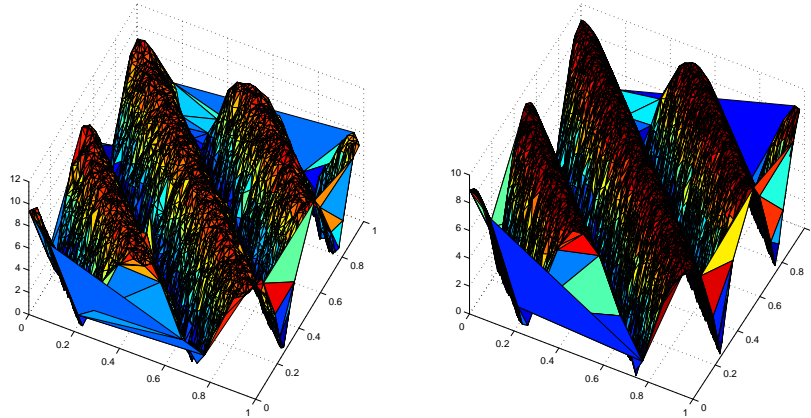
όταν η ακτίνα εξαρτάται από το μέγεθος του γράφου μέσω της σχέσης (4.45).



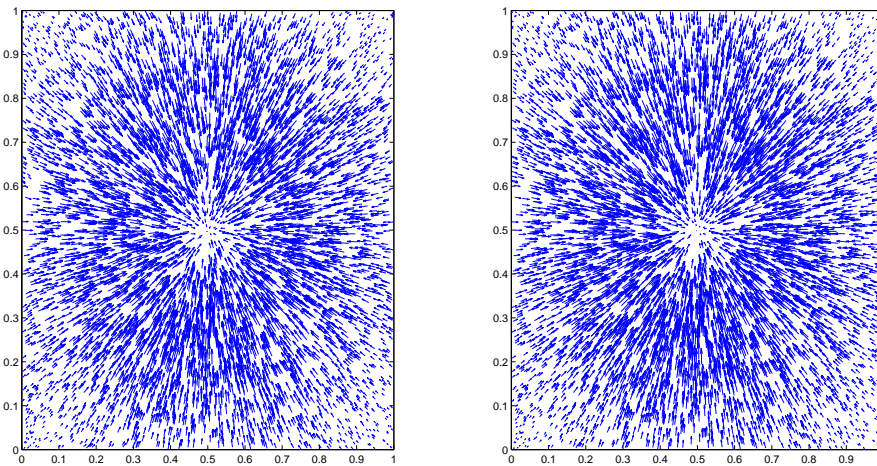
Σχήμα 4.12: Πεδίο κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με average φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.



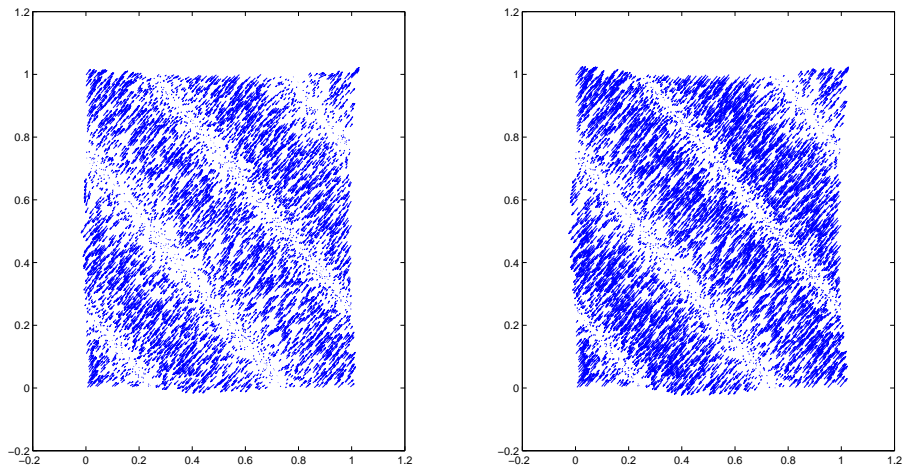
Σχήμα 4.13: Μέτρο της κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με average φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.



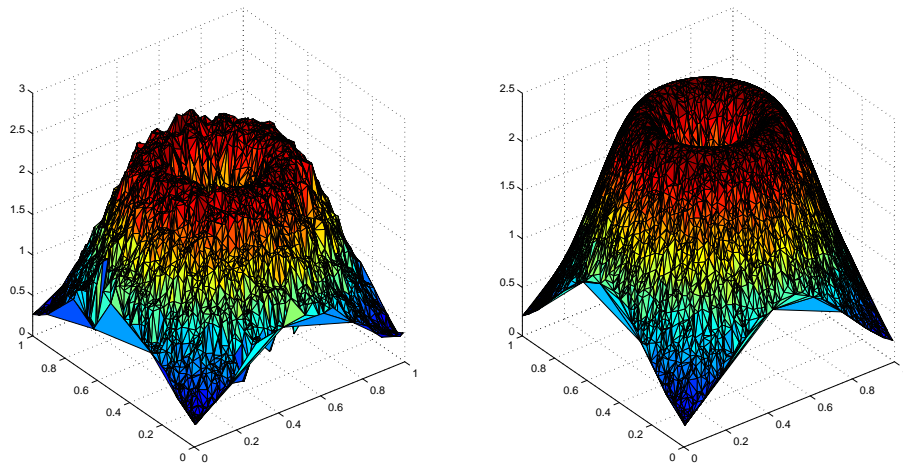
Σχήμα 4.14: Μέτρο της κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με average φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.



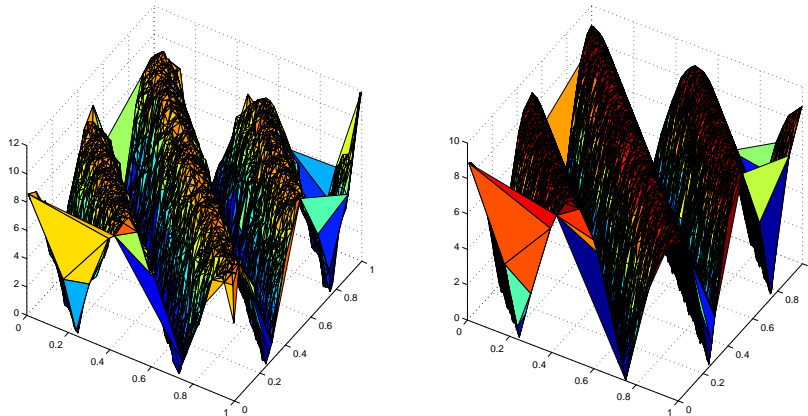
Σχήμα 4.15: Πεδίο κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με median φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.



Σχήμα 4.16: Πεδίο κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με median φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.



Σχήμα 4.17: Μέτρο της κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με median φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.



Σχήμα 4.18: Μέτρο της κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$ - Αριστερά: προσεγγιστικό με median φίλτρο, Δεξιά: πραγματικό.

4.12 Πειραματική Μελέτη Ασυμπτωτικής Συμπεριφοράς Σφάλματος

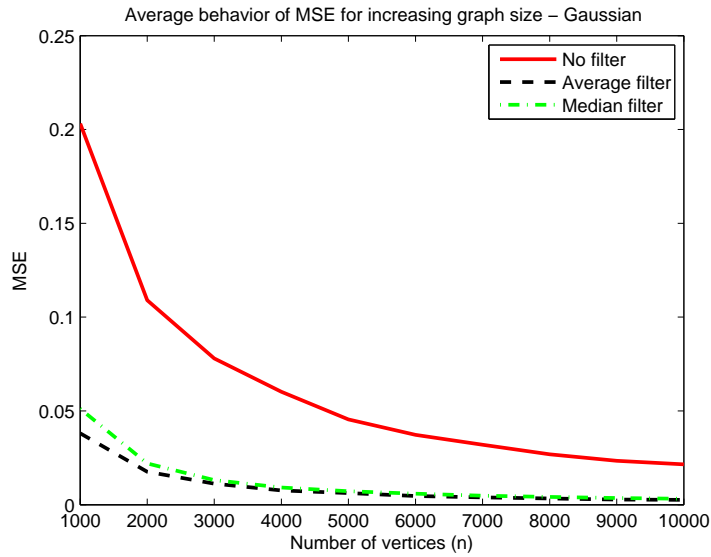
Για να ελέγξουμε και πειραματικά ότι η προτεινόμενη προσέγγιση συγκλίνει στο πραγματικό διανυσματικό πεδίο της κλίσης συναρτήσεων που ορίζονται σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους, αποτυπώνουμε την «εξέλιξη» του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (M.S.E.) αυτής καθώς προχωρούμε σε όλο και μεγαλύτερους γράφους. Ακριβέστερα, απεικονίζουμε τη μέση τιμή του M.S.E. ως προς το πλήθος κορυφών n , όπου για κάθε τιμή του n έγιναν υπολογισμοί για 10 διαφορετικούς γράφους.

Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε προκειμένου να αξιολογήσουμε την προσέγγιση και ως προς μια δεύτερη μετρική, το «σχετικό» σφάλμα e_r της προσέγγισης, που υπολογίζεται ως ο λόγος της ενέργειας του σήματος σφάλματος προς την ενέργεια του σήματος της αναλυτικής έκφρασης της κλίσης πάνω στις κορυφές των γράφων:

$$e_r = \frac{E_{error}}{E_{analytical}} \quad (4.55)$$

Στα Σχήματα 4.19 έως 4.22 παριστάνεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των δύο αυτών μετρικών του σφάλματος για τις συναρτήσεις $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$. Σε κάθε σχήμα έχουν συμπεριληφθεί και οι τρεις δυνατές περιπτώσεις:

1. προσέγγιση της κλίσης χωρίς φιλτράρισμα ακολούθως,
2. προσέγγιση με φιλτράρισμα μέσης τιμής, και



Σχήμα 4.19: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$

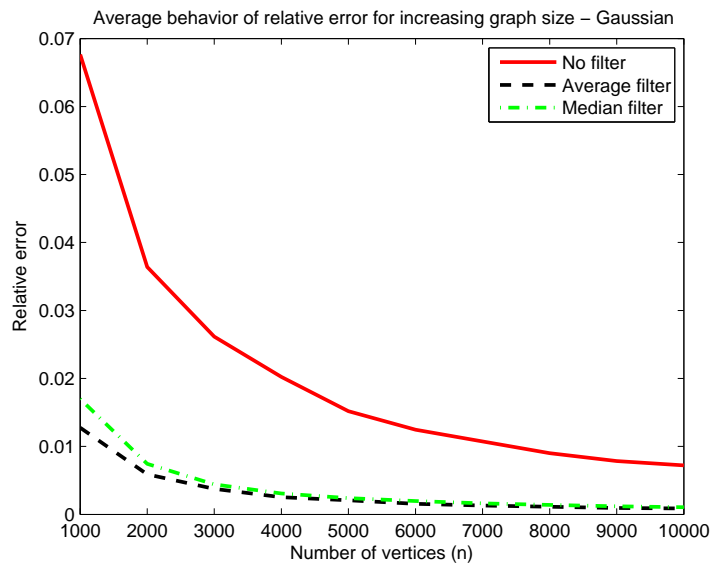
3. προσέγγιση με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής.

Κατ' αρχάς, επιβεβαιώνεται πλήρως η σύγκλιση της προσέγγισης της κλίσης στις πραγματικές τιμές μέσα και από τις δύο μετρικές, ανεξάρτητα από τη χρήση ή μη φίλτρου.

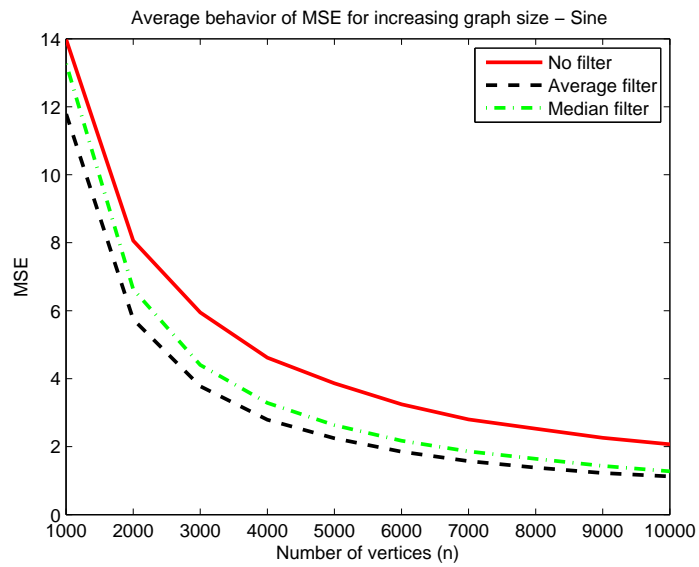
Επιπλέον, είναι αισθητή από τα Σχήματα 4.19 και 4.21 η πτώση στο M.S.E. όταν χρησιμοποιείται φίλτρο μέσης ή ενδιάμεσης τιμής, επαληθεύοντας έτσι και βάσει μιας κοινής μετρικής τη θετική διαίσθηση που δημιουργείται από τα Σχήματα 4.11 - 4.18. Αυτή η μείωση παρατηρείται σε όλα τα μεγέθη γράφων και για αμφότερες τις συναρτήσεις - δείγματα που χρησιμοποιήσαμε, οπότε είναι ασφαλές να συμπεράνουμε ότι τα αποτελέσματα και των δύο φίλτρων είναι ευεργετικά στη γενική περίπτωση.

Και με τη μετρική του σχετικού σφάλματος, η βελτίωση στο μέγεθος του σφάλματος με τη χρήση average ή median φίλτρου επιβεβαιώνεται. Μάλιστα παρατηρούμε (ειδικά για την u_1) ότι η μείωση δεν αντιστοιχεί σε ένα σταθερό ποσοστό της ενέργειας του σήματος της ακριβούς έκφρασης της κλίσης για όλα τα μεγέθη. Αντίθετα, το σχετικό σφάλμα όταν εφαρμόζεται φίλτρο μάλλον αποτελεί σταθερό κλάσμα του αντίστοιχου στην περίπτωση χωρίς φίλτρο.

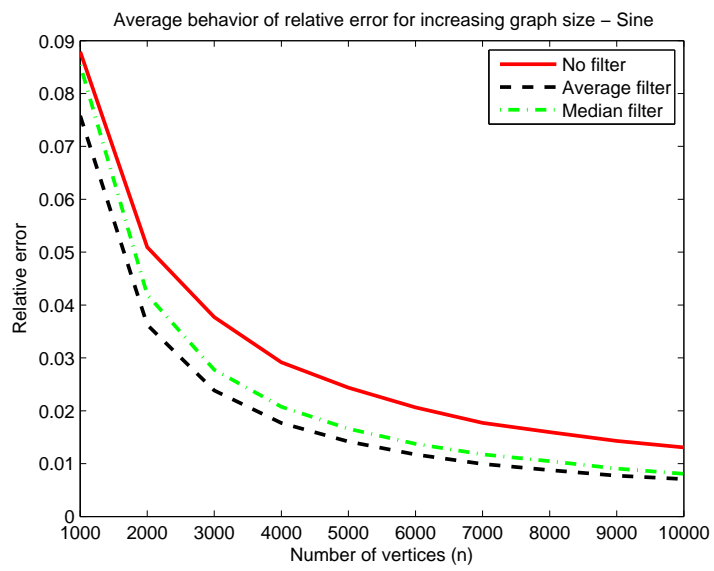
Τέλος, αξιωματικά σημειωθεί ότι οι μετρικές των σφαλμάτων είναι σε όλες τις περιπτώσεις κατάτι μικρότερες στην περίπτωση του average φίλτρου απ' ότι στην περίπτωση του median φίλτρου.



Σχήμα 4.20: Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της κλίσης της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



Σχήμα 4.21: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$



Σχήμα 4.22: Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της κλίσης της $u_2(x, y)$ για $\omega_1 = \omega_2 = 1$

Κεφάλαιο 5

Προσέγγιση Καμπυλότητας σε Γράφους

5.1 Επισκόπηση Αρχικής Ιδέας [1] για Προσέγγιση Καμπυλότητας

Στο [1], προτείνεται η προσέγγιση της απόκλισης που υπεισέρχεται στην (3.15) μέσω ενός αθροίσματος Riemann. Συγκεκριμένα, ένας εναλλακτικός ορισμός της απόκλισης στις δύο διαστάσεις είναι μέσω του ακόλουθου ορίου:

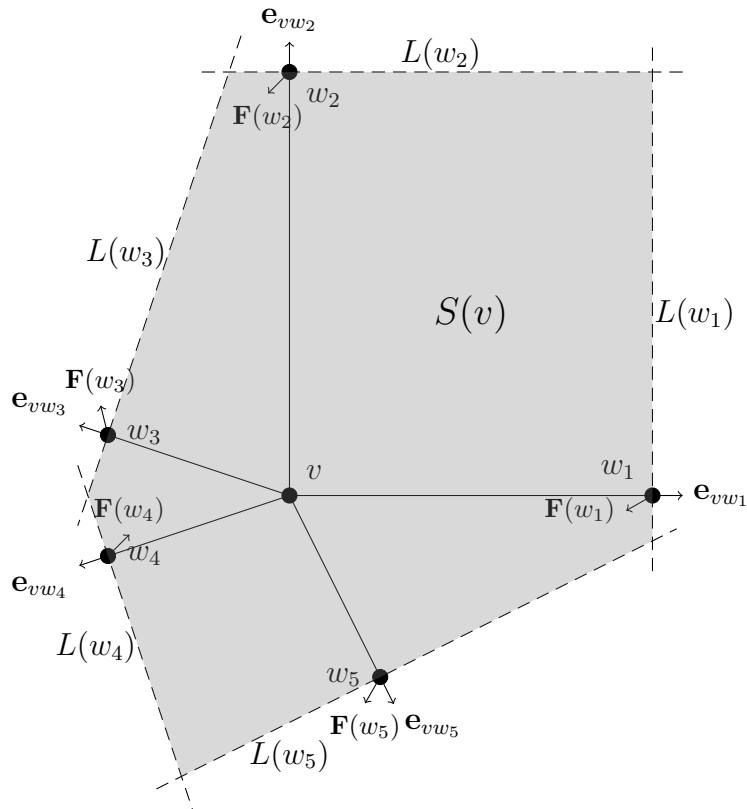
$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \lim_{S \rightarrow \{\mathbf{v}\}} \frac{\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl}{|S|} \quad (5.1)$$

Το S είναι χωρίο που περικλείει την κορυφή \mathbf{v} . Με $|S|$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του S , με $\Gamma(S)$ το σύνορό του και με \mathbf{n} το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\Gamma(S)$.

Με βάση την (5.1), η καμπυλότητα στην κορυφή v προσεγγίζεται από το πεπερασμένο άθροισμα

$$\frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{F}(w_i) \cdot \mathbf{e}_{vw_i} L(w_i)}{|S(v)|} \quad (5.2)$$

Στην παραπάνω έκφραση, το σύνορο $\Gamma(S)$ του χωρίου $S(v)$ ορίζεται ως ένα πολύγωνο, του οποίου οι πλευρές ορίζονται από ευθείες διερχόμενες από τις γειτονικές

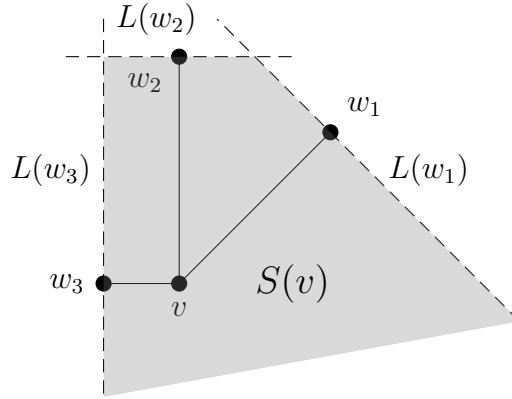


Σχήμα 5.1: Η γεωμετρία της αναλυόμενης προσέγγισης της καμπυλότητας σε μια κορυφή v : χωρίο $S(v)$, τμήματα $L(w_i)$, διανύσματα \mathbf{e}_{vw_i} και $\mathbf{F}(w_i)$

κορυφές w_i της v και κάθετες στα αντίστοιχα διανύσματα \mathbf{e}_{vw_i} . Τα άκρα της πλευράς που αντιστοιχεί στο γείτονα w_i ταυτίζονται με τα σημεία τομής της αντίστοιχης ευθείας με τις ευθείες των γειτόνων w_{i-1} και w_{i+1} , ακολουθώντας το συμβολισμό του Κεφαλαίου 1. Έτσι, μπορεί να υπολογιστεί το μήκος της κάθε πλευράς, $L(w_i)$, και το εμβαδόν του $S(v)$, $|S(v)|$. Τα παραπάνω γίνονται καλύτερα αντιληπτά στο Σχήμα 5.1.

Η ιδέα πίσω από την προσέγγιση της (5.2) είναι ότι στο όριο των μεγάλων γράφων και με τις ίδιες υποθέσεις που έγιναν στο Κεφάλαιο 1 για τη σύγκλιση της προσέγγισης της κλίσης, το άθροισμα θα συγκλίνει στο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην (5.1) δίνοντας έτσι τη σωστή τιμή για την καμπυλότητα. Όμως, θα δούμε ευθύς αμέσως ορισμένα προβλήματα από τα οποία πάσχει η παραπάνω προσέγγιση, ακόμα και όταν αντιμετωπίζουμε μεγάλους, πυκνούς γράφους.

Κατ' αρχάς, με τον τρόπο που ορίζεται το χωρίο $S(v)$ στην (5.2), υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι φραγμένο, διότι οι ευθείες που αντιστοιχούν σε διαδοχικούς γείτονες w_i και w_{i+1} δεν τέμνονται. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο



Σχήμα 5.2: Παράδειγμα κορυφής v για την οποία το χωρίο $S(v)$ δεν είναι καλά ορισμένο

Σχήμα 5.2. Βλέπουμε τότε ότι ούτε τα μήκη $L(w_i)$ και $L(w_{i+1})$ είναι πεπερασμένα, οπότε, αν δε μεσολαβήσουν περαιτέρω τροποποιήσεις, η προσέγγιση της (5.2) δεν είναι καλώς ορισμένη.

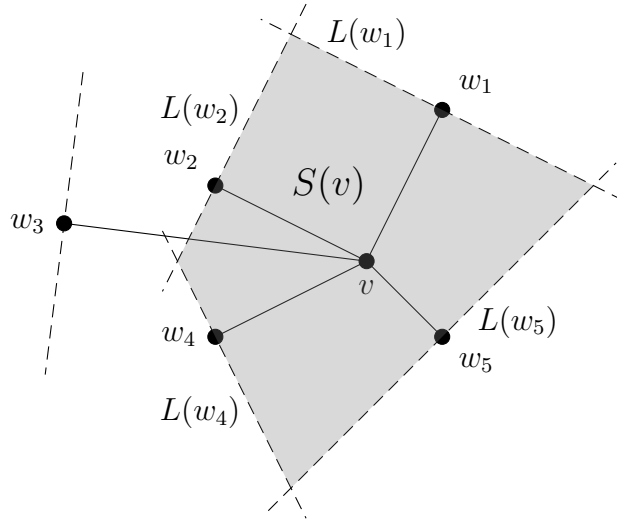
Παρατηρούμε, με τη βοήθεια και του Σχήματος 5.2, ότι το «ανεπιθύμητο» αυτό σενάριο συναντάται σε μια κορυφή v όταν και μόνο όταν

$$(\exists i \in \{1, \dots, N\})(\phi(w_{(i \bmod N)+1}) - \phi(w_i) \geq \pi). \quad (5.3)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η περίπτωση αυτή είναι πολύ συχνή στα «όρια» του γράφου, δηλαδή στις κορυφές εκείνες που βρίσκονται εγγύτερα στις πλευρές του τετραγώνου $[0, 1]^2$. Αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός ότι σε αυτές τις περιοχές χάνεται η ισοτροπικότητα του γράφου και μια κορυφή είναι πιθανότερο να έχει γείτονες με γωνίες $\phi(w_i)$ οι οποίες ανήκουν σε συγκεκριμένο υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$ παρά σε άλλο (ανάλογα με την πλευρά του τετραγώνου κοντά στην οποία βρίσκεται η κορυφή). Μάλιστα, το φαινόμενο αυτό δεν αναιρείται σε μεγάλους γράφους, αφού ανεξάρτητα από το πλήθος των κορυφών, θα υπάρχει ένα υπολογίσιμο πλήθος από αυτές στα όρια του γράφου. Φυσικά, δεν αποκλείεται να συναντώνται τέτοιες περιπτώσεις και στο «εσωτερικό» του γράφου, αλλά εκεί με την αύξηση του μεγέθους του γράφου γίνεται ολοένα και πιο απίθανο ένα τέτοιο σενάριο.

Παραθέτουμε εδώ μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (5.3) σε μια κορυφή v :

Πρόταση 5.1.1 Η (5.3) ισχύει αν και μόνο αν το διάνυσμα θέσης της κορυφής v δεν μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός «περισσότερων από δύο» διανυσμάτων θέσης των γειτόνων αυτής $w_i, i = 1, \dots, N$, με την εξής έννοια:

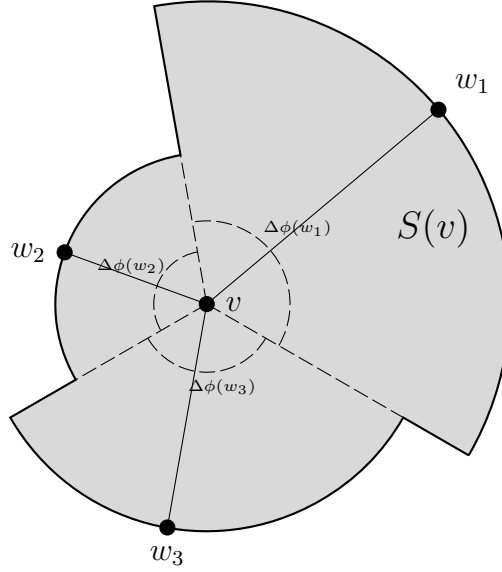


Σχήμα 5.3: Παράδειγμα κορυφής v για την οποία ένας γείτονας (εδώ ο w_3) δε συμμετέχει στο σχηματισμό του χωρίου $S(v)$

$$\begin{aligned}
 & \left(\forall \Lambda = \left\{ \lambda_i : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \lambda_j \lambda_k \lambda_\ell > 0 \text{ για κάποια } j, k, \ell \text{ με } j \neq k, k \neq \ell, \ell \neq j \right\} \right) \\
 & \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{w}_i \neq \mathbf{v} \right) \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Επιπλέον, μπορεί να ενσκήψει και μια άλλη «παθογενής» κατάσταση όταν εφαρμόζεται η προσέγγιση της (5.2). Συγκεκριμένα, ενδέχεται η μεγάλη ανομοιογένεια στις αποστάσεις των γειτόνων της κορυφής v από αυτήν να συντελέσει στο σχηματισμό του πολυγώνου $\Gamma(S(v))$ χωρίς τη συμμετοχή ορισμένων ευθυγράμμων τμημάτων $L(w_i)$ ως πλευρών αυτού, διότι οι γειτονικές ευθείες που αντιστοιχούν στους γείτονες w_{i-1} και w_{i+1} τέμνονται μεταξύ τους εγγύτερα στη v απ' ό τι ο γείτονας w_i . Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.3.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση, το μήκος $L(w_i)$ είναι μηδενικό και επομένως η συνεισφορά του όρου $\mathbf{F}(w_i) \cdot \mathbf{e}_{vw_i} L(w_i)$ στο συνολικό άθροισμα της (5.2) απλώς είναι μηδενική, χωρίς περαιτέρω συνέπειες στον υπολογισμό της προσέγγισης. Εντούτοις, ιδανικά κάθε γείτονας μιας κορυφής πρέπει να συμμετέχει στον υπολογισμό της καμπυλότητας σε αυτήν. Αυτή η απαίτηση δεν ικανοποιείται πάντα στη μελετώμενη προσέγγιση.



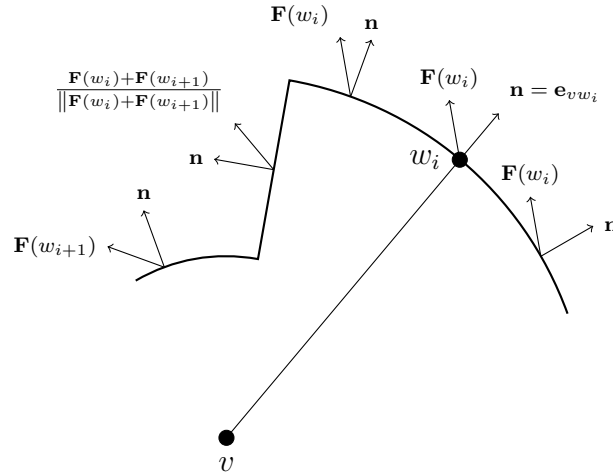
Σχήμα 5.4: Η γεωμετρία της βελτιωμένης προσέγγισης της καμπυλότητας σε μια κορυφή v : χωρίο $S(v)$ ως ένωση κυκλικών τομέων, κυκλικά τόξα και ενδιάμεσα ευθύγραμμα τμήματα του συνόρου $\Gamma(S)$

5.2 Προσέγγιση Καμπυλότητας με Νέα Γεωμετρική Κατασκευή

Η βελτίωση που μπορεί να εφαρμοστεί για τη θεραπεία των προαναφερθέντων προβλημάτων στην ενότητα 5.1 περιλαμβάνει την οριοθέτηση του χωρίου $S(v)$ με διαφορετικό σκεπτικό, ώστε να είναι πάντα φραγμένο και να περιλαμβάνει όλους τους γείτονες της v . Οι απαιτήσεις αυτές ικανοποιούνται λαμβάνοντας ως χωρίο $S(v)$ την ένωση των κυκλικών τομέων $S(v, d(v, w_i), \omega(w_i), \omega(w_{i+1}))$ με τον τρόπο που ορίστηκαν στην ενότητα 4.2, για όλους τους γείτονες w_i της v . Ο ορισμός αυτός γίνεται περισσότερο κατανοητός με το Σχήμα 5.4.

Αμέσως, μπορούμε να δούμε ότι με αυτή την τροποποίηση, το εμβαδόν του $S(v)$ τείνει να μηδενιστεί στο όριο των μεγάλων γράφων, όπως συμβαίνει και στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (5.1), όταν ισχύει η υπόθεση της Πρότασης 4.2.1 για τα ασυμπτωτικά φράγματα της ακτίνας ρ των γράφων:

$$\left\{ \begin{array}{l} |S(v)| \leq \pi \left[\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \{d(v, w_i)\} \right]^2 \leq \pi \rho(n)^2 \\ \rho(n) \in \omega(n^{-1/2}) \cap o(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(n)^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |S(v)| = 0. \quad (5.5)$$



Σχήμα 5.5: Η εικόνα των διανυσμάτων \mathbf{F} και \mathbf{n} σε ένα τμήμα της καμπύλης $\Gamma(S)$ το οποίο αντιστοιχεί σε ένα γείτονα w_i της κορυφής v

Ειδικότερα, μπορούμε να εκφράσουμε το εμβαδόν του $S(v)$ ως εξής:

$$|S(v)| = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} d^2(v, w_i). \quad (5.6)$$

Προχωρούμε στη μελέτη του αριθμητή που θα προσεγγίσει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.1). Το σύνολο $\Gamma(S)$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.4, αποτελείται τώρα από:

1. κυκλικά τόξα ακτίνων $d(v, w_i)$ με γωνίες $\Delta\phi(w_i)$ γύρω από την κορυφή v .
2. ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $|d(v, w_{i+1}) - d(v, w_i)|$ σε ακτινικές διευθύνσεις - γωνιών $\omega(w_{i+1})$ - γύρω από την v , τα οποία «ενώνουν» τα διαδοχικά κυκλικά τόξα.

Το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} μπορεί να οριστεί σχετικά εύκολα με βάση την παραπάνω μορφή του $\Gamma(S)$, ωστόσο χρειάζεται μεγαλύτερη επιμέλεια στην επιλογή του διανύσματος \mathbf{F} κατά μήκος της καμπύλης του συνόρου. Για το σκοπό αυτό, παραθέτουμε το Σχήμα 5.5, όπου γίνεται σαφής η προσέγγιση για έναν ενδεικτικό γείτονα w_i της v .

Έτσι, το διάνυσμα \mathbf{F} λαμβάνεται σταθερό κατά μήκος του κυκλικού τόξου του w_i και ίσο με την τιμή του πάνω στον w_i , $\mathbf{F}(w_i)$. Επιπλέον, σε όλο το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα τόξα του w_i και του w_{i+1} , το \mathbf{F} λαμβάνεται ίσο με το κανονικοποιημένο άθροισμα των $\mathbf{F}(w_i)$ και $\mathbf{F}(w_{i+1})$:

$$\frac{\mathbf{F}(w_i) + \mathbf{F}(w_{i+1})}{\|\mathbf{F}(w_i) + \mathbf{F}(w_{i+1})\|} \quad (5.7)$$

Με αυτές τις επιλογές για το διάνυσμα \mathbf{F} , μπορούμε τώρα να εξαγάγουμε την αναλυτική έκφραση για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl$, υπολογίζοντας τη

συνεισφορά κάθε τμήματος της καμπύλης $\Gamma(S)$. Συμβολίζουμε με \vec{C}_a την καμπύλη του κυκλικού τόξου του γείτονα w_i και με \vec{C}_l την καμπύλη του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ των τόξων του w_i και του w_{i+1} . Βλέπουμε ότι, αν θεωρήσουμε ως αρχή την κορυφή v , οι καμπύλες αυτές παραμετροποιούνται ως

$$\vec{C}_a(\phi) = d(v, w_i) (\cos \phi, \sin \phi), \quad \phi \in [\omega(w_i), \omega(w_{i+1})] \quad (5.8)$$

και

$$\vec{C}_l(t) = [(1-t)d(v, w_i) + td(v, w_{i+1})] (\cos(\omega(w_{i+1})), \sin(\omega(w_{i+1}))), \quad t \in [0, 1]. \quad (5.9)$$

Άρα, τα αντίστοιχα επιμέρους επικαμπύλια ολοκληρώματα $I_a(w_i)$ και $I_l(w_i)$ πάνω σε αυτές τις καμπύλες γίνονται:

$$\begin{aligned} I_a(w_i) &= \int_{\vec{C}_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl = d(v, w_i) \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_{i+1})} \mathbf{F}(w_i) \cdot \mathbf{n} \, d\phi = \\ &= d(v, w_i) \mathbf{F}(w_i) \cdot \left(\int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_{i+1})} \cos \phi \, d\phi, \int_{\omega(w_i)}^{\omega(w_{i+1})} \sin \phi \, d\phi \right) = \\ &= d(v, w_i) \mathbf{F}(w_i) \cdot (\sin(\omega(w_{i+1})) - \sin(\omega(w_i)), -\cos(\omega(w_{i+1})) + \cos(\omega(w_i))) \end{aligned} \quad (5.10)$$

και

$$\begin{aligned}
I_l(w_i) &= \int_{\bar{c}_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl = (d(v, w_{i+1}) - d(v, w_i)) \int_0^1 \frac{\mathbf{F}(w_i) + \mathbf{F}(w_{i+1})}{\|\mathbf{F}(w_i) + \mathbf{F}(w_{i+1})\|} \cdot \mathbf{n} \, dt = \\
&= (d(v, w_{i+1}) - d(v, w_i)) \frac{\mathbf{F}(w_i) + \mathbf{F}(w_{i+1})}{\|\mathbf{F}(w_i) + \mathbf{F}(w_{i+1})\|} \cdot (\sin(\omega(w_{i+1})), -\cos(\omega(w_{i+1}))).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Προσθέτοντας τις συνεισφορές από όλους τους γείτονες w_i και τις επιμέρους καμπύλες τους που δίνονται από τις εξισώσεις (5.10) και (5.11), λαμβάνουμε την τελική μορφή της προσέγγισης της καμπυλότητας στην κορυφή v βασιζόμενη στην (5.1):

$$\hat{\kappa}(v) = \frac{\sum_{i=1}^N I_a(w_i) + I_l(w_i)}{\sum_{i=1}^N \frac{\Delta\phi(w_i)}{2} d^2(v, w_i)}. \tag{5.12}$$

Στη συνέχεια, επιλέγουμε να επικεντρωθούμε στον κλασικό ορισμό της απόκλισης που δόθηκε στην (3.15), και όχι σε αυτόν της (5.1), ως βάση για την προσέγγιση της καμπυλότητας με έναν εναλλακτικό τρόπο. Έτσι, ξεφεύγουμε από την ανάγκη μιας γεωμετρικής κατασκευής και μπορούμε να κάνουμε χρήση των αποτελεσμάτων για την προσέγγιση της κλίσης, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

5.3 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Καμπυλότητας μέσω Προσέγγισης Κλίσης

Στο Κεφάλαιο 4, αναπτύξαμε και μελετήσαμε μέθοδο για την προσέγγιση της κλίσης μιας πραγματικής συνάρτησης u ορισμένης στις κορυφές ενός γράφου \mathcal{G} . Με αυτό τον τρόπο, εκτελούμε τον πρώτο απαραίτητο υπολογισμό για τον αλγόριθμο των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε γράφους, αυτόν των τιμών της κλίσης της συνάρτησης Φ , $\nabla\Phi$, σε κάθε κορυφή του \mathcal{G} . Έτσι, αποκτούμε σε πρώτο στάδιο τις προσεγγιστικές τιμές του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} στις κορυφές του \mathcal{G} :

$$\mathbf{F}(v) = (F_1(v), F_2(v)) \tag{5.13}$$

Καθεμία από τις δύο συνιστώσες του \mathbf{F} αποτελεί μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη πάνω στο γράφο. Επομένως, μπορούμε σε δεύτερο στάδιο, όπως προηγουμένως για τη συνάρτηση Φ , να υπολογίσουμε και για τις συναρτήσεις F_1 και F_2 τις κλίσεις τους

$$\nabla F_1 = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} \right]^T \quad \nabla F_2 = \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \right]^T \quad (5.14)$$

με την ίδια προσέγγιση. Μετά από το σημείο αυτό, ο υπολογισμός της καμπυλότητας είναι τετριμμένος, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της (5.14) στο άθροισμα του δεξιού μέλους της σχέσης (3.15).

Πρόταση 5.3.1 Έστω συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές διαφορίσιμη και γεωμετρικός τυχαίος γράφος \mathcal{G} όπως ορίστηκε στην Πρόταση 4.2.1. Ας συμβολίσουμε με $\tilde{\mathbf{F}}(v) = (\tilde{F}_1(v), \tilde{F}_2(v)) = \frac{\widetilde{\nabla u(v)}}{\|\widetilde{\nabla u(v)}\|}$ την προσέγγιση του πεδίου \mathbf{F} για

την u στην κορυφή v που ορίζεται μέσω της Πρότασης 4.2.1, και με $(\widetilde{\nabla F_1(v)})$ και $(\widetilde{\nabla F_2(v)})$ τις αντίστοιχες προσεγγίσεις των κλίσεων των συναρτήσεων \tilde{F}_1 και \tilde{F}_2 στην κορυφή v . Τότε, όταν η κλίση $\nabla u(v)$ είναι μη μηδενική, η προσέγγιση $\tilde{\kappa}(v) = \left(\frac{\partial \tilde{F}_1(v)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{F}_2(v)}{\partial y} \right)$ της καμπυλότητας στην κορυφή v συγκλίνει στην πραγματική τιμή του μεγέθους:

$$\nabla u(v) \neq \mathbf{0} \implies \tilde{\kappa}(v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \kappa(v) = \frac{\partial F_1(v)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(v)}{\partial y} \quad (5.15)$$

Απόδειξη

Με βάση την Πρόταση 4.2.1, η προσέγγιση $\widetilde{\nabla u(v)}$ της κλίσης της u συγκλίνει στην πραγματική κλίση:

$$\widetilde{\nabla u(v)} \rightarrow \nabla u(v). \quad (5.16)$$

Από αυτό συνεπάγεται άμεσα ότι

$$\left\| \widetilde{\nabla} u(v) \right\| \rightarrow \|\nabla u(v)\|. \quad (5.17)$$

Επίσης, με βάση την υπόθεση για μη μηδενική κλίση της u στην v , ορίζεται κανονικά στην v το πεδίο \mathbf{F} και οι συνιστώσες του F_1 και F_2 είναι διαφορίσιμες στην v , ως πηλίκο διαφορίσιμων στο σημείο αυτό συναρτήσεων με μη μηδενικό παρονομαστή. Επομένως, ισχύει και για αυτές τις συναρτήσεις η σύγκλιση της προσέγγισης της κλίσης τους όπως αποδείχθηκε στην Πρόταση 4.2.1:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla} \widetilde{F}_1(v) &\rightarrow \nabla F_1(v) \\ \widetilde{\nabla} \widetilde{F}_2(v) &\rightarrow \nabla F_2(v) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Από τις (5.16) και (5.17), συνάγουμε ότι το προσεγγιστικό πεδίο $\tilde{\mathbf{F}}$ συγκλίνει στο πραγματικό στην κορυφή v :

$$\tilde{\mathbf{F}}(v) \rightarrow \mathbf{F}(v) \iff \left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}_1(v) \rightarrow F_1(v) \\ \tilde{F}_2(v) \rightarrow F_2(v) \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

Έτσι, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{\nabla \tilde{F}_1(v)} \right) &\rightarrow \left(\nabla \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}_1(v) \right) \right) \\ \xrightarrow{(5.19)} \left(\widetilde{\nabla \tilde{F}_1(v)} \right) &\rightarrow \widetilde{\nabla F_1(v)} \xrightarrow{(5.18)} \\ \left(\widetilde{\nabla \tilde{F}_1(v)} \right) &\rightarrow \nabla F_1(v), \end{aligned} \quad (5.20)$$

όπου η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει διότι είμαστε στο όριο $n \rightarrow +\infty$. Αντίστοιχα, μπορούμε να συνάγουμε ότι:

$$\left(\widetilde{\nabla \tilde{F}_2(v)} \right) \rightarrow \nabla F_2(v) \quad (5.21)$$

Άρα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \widetilde{F}_1(v)}{\partial x} \right) &\rightarrow \frac{\partial F_1(v)}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial \widetilde{F}_2(v)}{\partial y} \right) &\rightarrow \frac{\partial F_2(v)}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.22)$$

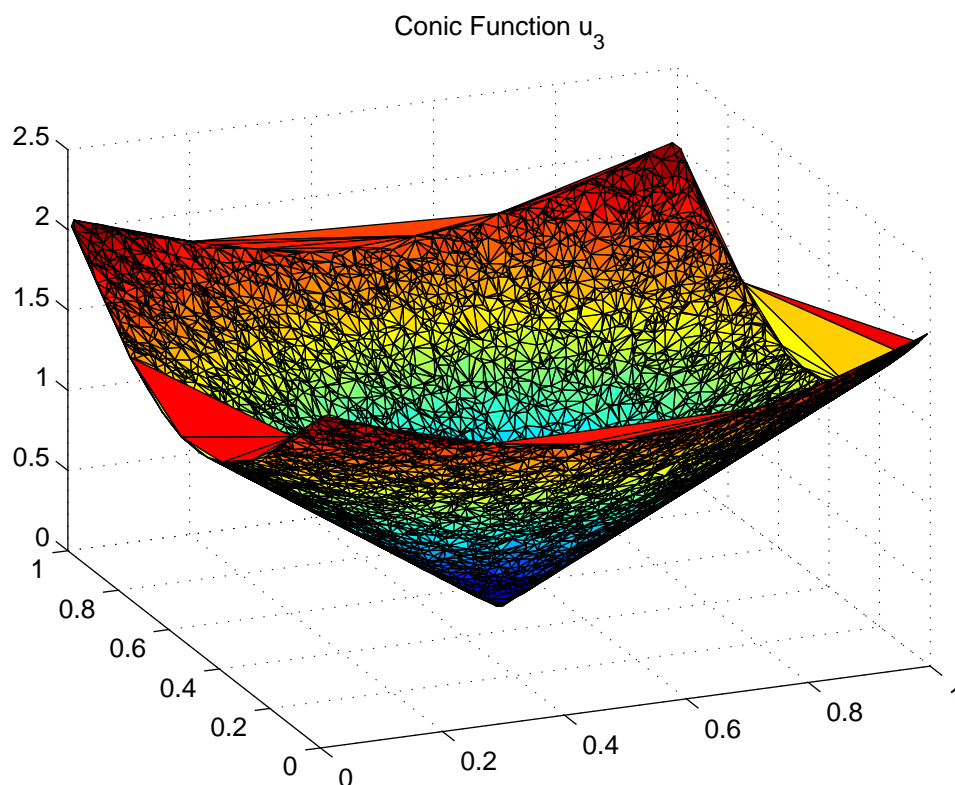
Προκύπτει λοιπόν ότι η προσέγγιση συγκλίνει στη σωστή τιμή της καμπυλότητας:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\kappa}(v) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{F}_1(v)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \widetilde{F}_2(v)}{\partial y} \right) \right] \xrightarrow{(5.22)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\kappa}(v) &= \frac{\partial F_1(v)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(v)}{\partial y} = \kappa(v). \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο, επεκτείνουμε τη χρήση της προταθείσας προσέγγισης της κλίσης και για τον υπολογισμό της καμπυλότητας. Βέβαια, επειδή οι υπολογισμοί για την καμπυλότητα στηρίζονται, όπως έχει προαναφερθεί, εξ αρχής σε ένα προσεγγιστικό διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} , δεν αναμένουμε να υπάρχει αντίστοιχη ασυμπτωτική συμπεριφορά και ταχύτητα σύγκλισης του σφάλματος στις τιμές της καμπυλότητας με αυτή που εξαγάγαμε για το σφάλμα στις τιμές της κλίσης. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2 εξακολουθούν να χρησιμεύουν για τη μελέτη του σφάλματος της καμπυλότητας, καθώς ισχύουν ακέραια για καθένα από τα δύο επιμέρους στάδια της διαδικασίας της προσέγγισης. Πάνω σε αυτή τη βάση θα επιχειρηθεί στην επόμενη χρονική φάση να μελετηθεί η συμπεριφορά του συνολικού σφάλματος στην καμπυλότητα.

5.4 Πειραματικά Αποτελέσματα για Προσέγγιση Καμπυλότητας και Σύγκριση με Αναλυτικά Αποτελέσματα

Θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποτελέσματα από την εφαρμογή των δύο αναλυθεισών προσεγγίσεων της καμπυλότητας πάνω σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους μεγέθους της τάξης των 10^3 έως 10^4 κορυφών. Τα πειράματα διεξήχθησαν σε περιβάλλον MATLAB. Στόχος μας είναι αφ' ενός να οπτικοποιήσουμε την ποιότητα με την οποία προσεγγίζεται η καμπυλότητα, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των μεθόδων που προτείνονται και με αναλυτικά αποτελέσματα, αφ' ετέρου να δείξουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σφάλματος, χρησιμοποιώντας τις ίδιες μετρικές όπως στην



Σχήμα 5.6: Η κωνική συνάρτηση $u_3(x, y)$ ορισμένη στο γράφο \mathcal{G}_1 για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$

ενότητα 4.12. Στα πειράματα που ακολουθούν, η ακτίνα των γράφων ορίστηκε σε όλες τις περιπτώσεις ως $\rho(n) = \frac{3}{5}n^{-1/3}$.

Παραθέτουμε κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα από τον υπολογισμό της καμπυλότητας γνωστών αναλυτικών συναρτήσεων οι οποίες λαμβάνουν τιμές πάνω στις κορυφές γεωμετρικού τυχαίου γράφου \mathcal{G}_1 με μέγεθος $n = 7000$ κορυφών.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι η Γκαουσιανή $u_1(x, y)$ που χρησιμοποιήθηκε και στο κεφάλαιο 4 και μια κωνική συνάρτηση,

$$u_3(x, y) = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}}.$$

Η μορφή της u_1 παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4, ενώ η u_3 φαίνεται στο Σχήμα 5.6 για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της.

Οι κλίσεις των συναρτήσεων αυτών υπολογίζονται αναλυτικά:

$$1. \nabla u_1(x, y) = -\frac{u_1(x, y)}{\sigma^2} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$2. \nabla u_3(x, y) = \frac{1}{u_3(x, y)} \begin{bmatrix} \frac{x - x_0}{\alpha^2} \\ \frac{y - y_0}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Με βάση τα παραπάνω και τη σχέση (3.15), προσδιορίζουμε τις αναλυτικές εκφράσεις για την καμπυλότητα των ισοϋψών των δύο συναρτήσεων

$$1. \kappa(u_1(x, y)) = -\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \text{ και}$$

$$2. \kappa(u_3(x, y)) = \frac{\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^4 b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\alpha^2 b^4}}{\left[\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^4} + \frac{(y - y_0)^2}{b^4} \right]^{\frac{3}{2}}},$$

οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για σύγκριση με τα εκάστοτε προσεγγιστικά αποτελέσματα.

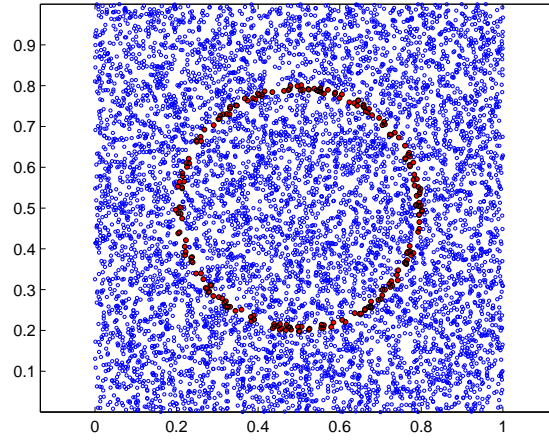
Επιπλέον, για να αποκτήσουμε εποπτεία της ποιότητας των αποτελεσμάτων πάνω σε μία συγκεκριμένη ισοϋψή καμπύλη των παραπάνω συναρτήσεων, ορίζουμε με προσεγγιστικό τρόπο τις κορυφές του γράφου που ανήκουν στο περίγραμμα ενός επιπεδοσυνόλου κάθε συνάρτησης και παριστάνουμε τα αποτελέσματα της προσέγγισης από κοινού με τα αναλυτικά μόνο πάνω σε αυτές τις κορυφές. Συγκεκριμένα, οι καμπύλες ορίζονται ως το σύνολο των κορυφών στις οποίες η εκάστοτε συνάρτηση λαμβάνει μια συγκεκριμένη τιμή με ένα μικρό περιθώριο «ανοχής» ϵ γύρω από την τιμή αυτή. Το επίπεδο για την u_1 ελήφθη ίσο με 0.5 και για την u_3 1. Έτσι, λαμβάνουμε μια κυκλική καμπύλη \vec{C}_1 για την u_1 και μια ελλειπτική καμπύλη \vec{C}_3 για την u_3 , όπως φαίνεται στα Σχήματα 5.7 και 5.8.

Γνωρίζουμε όμως ότι η καμπυλότητα πάνω σε έναν κύκλο είναι σταθερή και ίση με το αντίστροφο της ακτίνας του. Επίσης, για την πραγματική ελλειπτική καμπύλη \vec{C}_3 που προσεγγίζεται στο Σχήμα 5.8, η εξίσωσή της είναι:

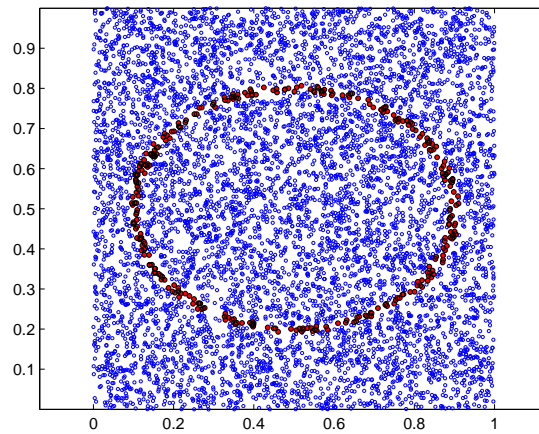
$$u_3(x, y) = 1 \Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5.23)$$

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε την εξής παραμετροποίηση για την \vec{C}_3 :

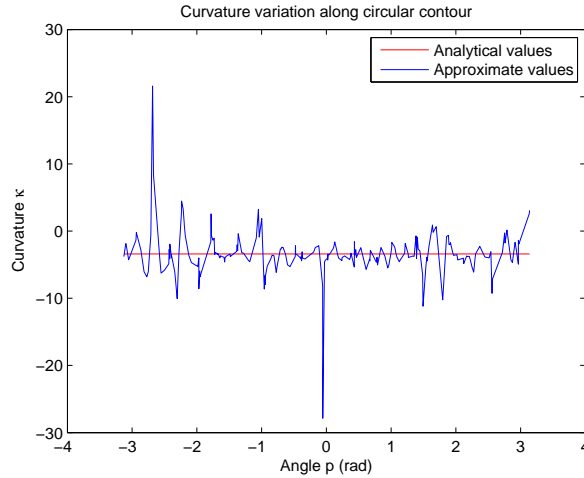
$$\vec{C}_3(p) = (\alpha \cos p - x_0, b \sin p - y_0), \quad p \in [0, 2\pi], \quad (5.24)$$



Σχήμα 5.7: Κυκλική ισοϋψής καμπύλη της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



Σχήμα 5.8: Ελλειπτική ισοϋψής καμπύλη της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



Σχήμα 5.9: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοϋψούς της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές χωρίς φιλτράρισμα, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.

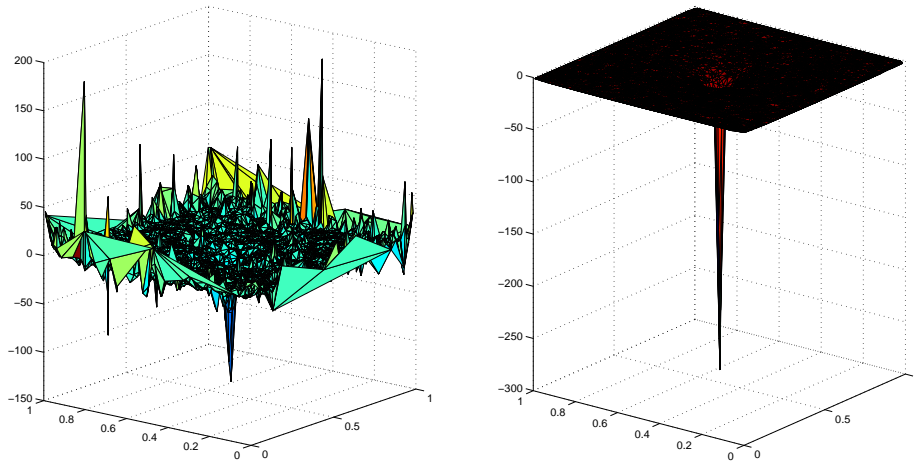
με την παράμετρο p να εκφράζει τη γωνία από το κέντρο (x_0, y_0) της έλλειψης. Έχοντας εκφράσει παραμετρικά την \vec{C}_3 , η καμπυλότητά της μπορεί να γραφτεί [2] συναρτήσει της γωνίας p ως

$$\kappa(p) = ab [\alpha^2 \sin^2 p + b^2 \cos^2 p]^{-\frac{3}{2}} \quad (5.25)$$

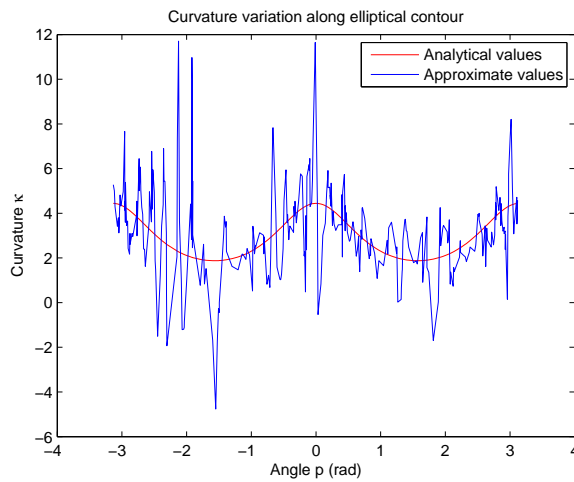
Άρα, μπορούμε να παριστάνουμε την καμπυλότητα κατά μήκος των \vec{C}_1 και \vec{C}_3 συναρτήσει της γωνίας p από το κέντρο τους, «ευθυγραμμίζοντας» αναλυτικά και προσεγγιστικά αποτελέσματα για ευκολία στη σύγκριση. Ας σημειωθεί ακόμα ότι η καμπυλότητα για τη συνάρτηση u_1 λαμβάνει αρνητικές τιμές, καθώς η απόκλιση του πεδίου \mathbf{F} για αυτήν είναι παντού αρνητική.

Παρουσιάζουμε λοιπόν αρχικά στα Σχήματα 5.9 - 5.12 τα αποτελέσματα της προσέγγισης της καμπυλότητας με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.3 (στο εξής Μέθοδος 1) για τις u_1 και u_3 , τόσο σε όλο το γράφο \mathcal{G}_1 όσο και αποκλειστικά για τις καμπύλες \vec{C}_1 και \vec{C}_3 , όπως αυτά προκύπτουν χωρίς κάποιο εξομαλυντικό φιλτράρισμα σε οποιοδήποτε από τα δύο στάδια της προσέγγισης. Σε κάθε διάγραμμα αντιπαρατίθενται και οι αναλυτικές τιμές.

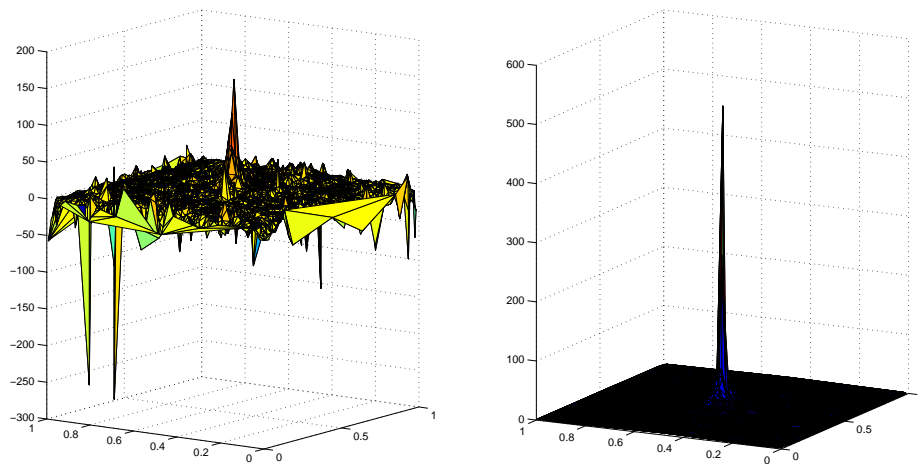
Διαπιστώνουμε ότι οι αποκλίσεις που σημειώνονται στις προσεγγιστικές τιμές της καμπυλότητας σε σχέση με τις πραγματικές δεν είναι αποδεκτές, με κριτήριο την ορθή λειτουργία και σύγκλιση του αλγορίθμου συνολικά. Ειδικότερα, η καμπυλότητα λαμβάνει ακόμα και τιμές με αντίθετο πρόσημο από το πραγματικό της σε αρκετά



Σχήμα 5.10: Μέθοδος 1 - Καμπυλότητα των ισοϋψών της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$
 - Αριστερά: προσεγγιστική χωρίς φιλτράρισμα, Δεξιά: πραγματική.



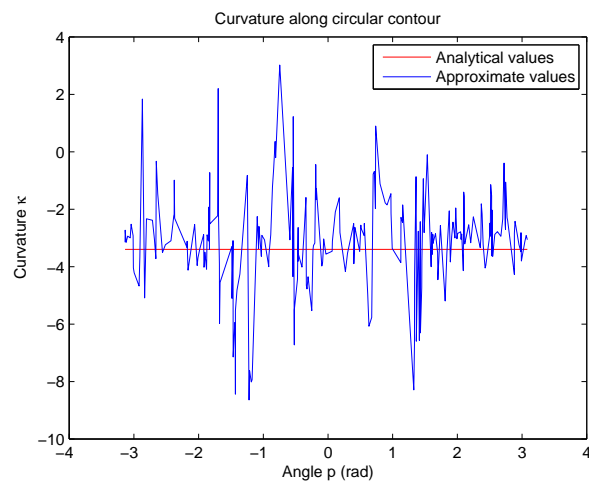
Σχήμα 5.11: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοϋψούς της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές χωρίς φιλτράρισμα, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



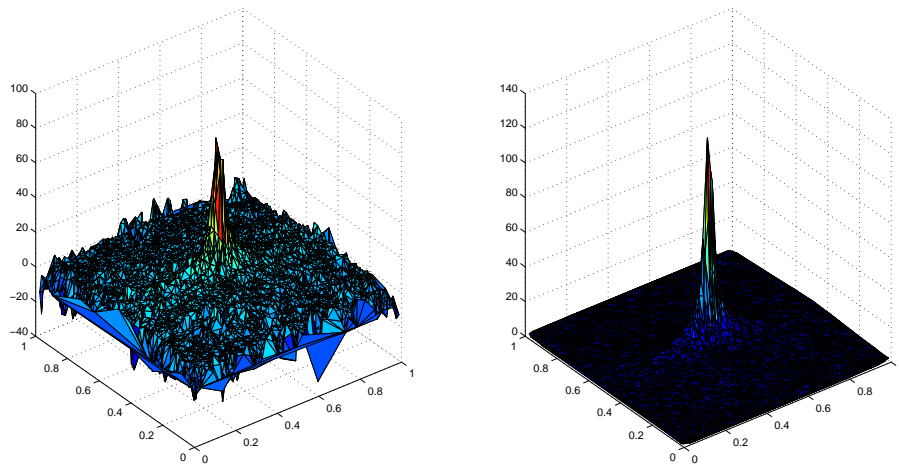
Σχήμα 5.12: Μέθοδος 1 - Καμπυλότητα των ισοϋψών της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Αριστερά: προσεγγιστική χωρίς φιλτράρισμα, Δεξιά: πραγματική.

σημεία. Βέβαια, μπορούμε να διακρίνουμε π.χ. στο Σχήμα 5.9 ότι οι διακυμάνσεις αυτές πραγματοποιούνται με «κέντρο» την πραγματική τιμή, ενώ και στο Σχήμα 5.11 η γενικότερη μεταβολή των προσεγγιστικών τιμών φαίνεται να ακολουθεί τη διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος της ελλειπτικής καμπύλης. Επίσης, στα Σχήματα 5.10 και 5.12 παρατηρούμε ότι η προσέγγιση κατορθώνει να αποτυπώσει την κύρια «αιχμή» της καμπυλότητας στο κέντρο του γράφου, παρ' όλες τις υπόλοιπες αδικαιολόγητες επιμέρους απότομες μεταβολές. Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν και για την προσέγγιση που αναλύσαμε στην ενότητα 5.2 (στο εξής Μέθοδος 2), για την οποία παραθέτουμε ενδεικτικά τα Σχήματα 5.13 και 5.14.

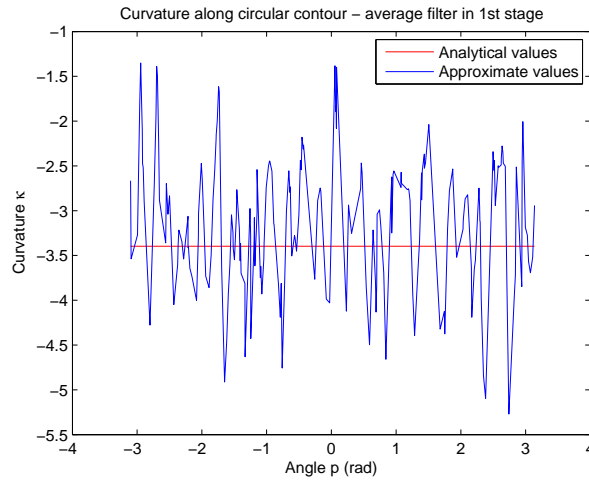
Λογική συνέπεια των παραπάνω είναι να εφαρμόσουμε φίλτρα εξομάλυνσης στη διαδικασία της προσέγγισης, ώστε να αμβλύνουμε τις παρατηρούμενες διακυμάνσεις, εγκαταλείποντας οριστικά την προσέγγιση της καμπυλότητας χωρίς φιλτράρισμα μέσης ή ενδιάμεσης τιμής. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5, η προσέγγιση της καμπυλότητας αποτελείται από δύο στάδια, σε καθένα από τα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε φιλτράρισμα εξομάλυνσης στα αντίστοιχα αποτελέσματα. Το πρώτο στάδιο δίνει ως αποτέλεσμα το πεδίο της κλίσης, οπότε το όποιο φιλτράρισμα σε αυτό ταυτίζεται με όσα αναλύθηκαν στην ενότητα 4.11. Το δεύτερο στάδιο διαφοροποιείται στις δύο μεθόδους. Στη Μέθοδο 1, λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα τις κλίσεις των συνιστωσών του πεδίου \mathbf{F} , οπότε το φιλτράρισμα εξομάλυνσης εφαρμόζεται σε αυτές όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.11 και κατόπιν λαμβάνεται το άθροισμα της σχέσης (3.15) με τις φιλτραρισμένες εκδοχές των δύο όρων για τον τελικό υπολογισμό της καμπυλότητας. Στη Μέθοδο 2, το φιλτράρισμα εφαρμόζεται απευθείας στις προσεγγιστικές



Σχήμα 5.13: Μέθοδος 2 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοψούς της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές χωρίς φιλτράρισμα, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



Σχήμα 5.14: Μέθοδος 2 - Καμπυλότητα των ισοψών της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Αριστερά: προσεγγιστική χωρίς φιλτράρισμα, Δεξιά: πραγματική.



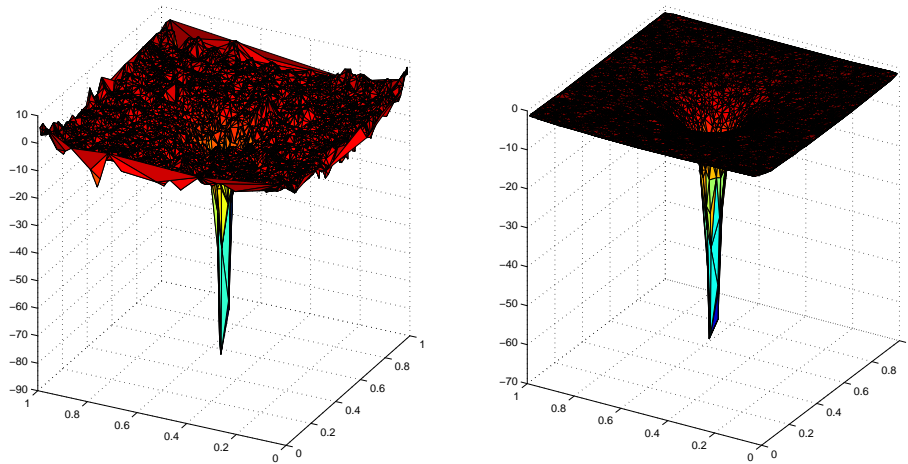
Σχήμα 5.15: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοϋψούς της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα μέσης τιμής στο 1^ο στάδιο, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.

τιμές της καμπυλότητας.

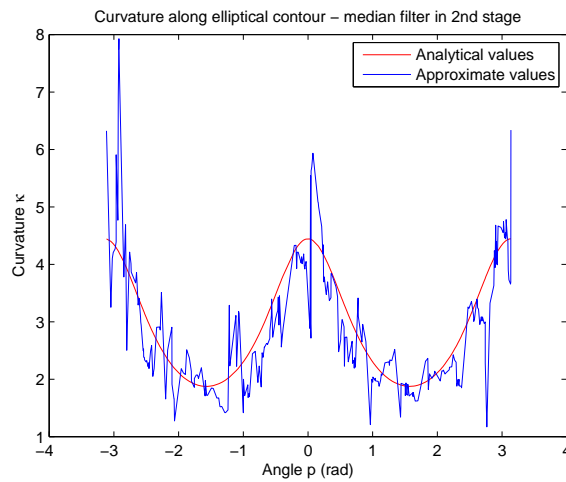
Οι δυνατές επιλογές που έχουμε σχετικά με την εφαρμογή του φιλτραρίσματος είναι ο τύπος του φίλτρου (μέσης ή ενδιάμεσης τιμής) και το/-α στάδιο/-α στα οποία θα εφαρμοστεί το φίλτρο. Έτσι, παρουσιάζουμε στα Σχήματα 5.15 - 5.24 τα αποτελέσματα για διάφορους από τους προκύπτοντες συνδυασμούς στην προσέγγιση της καμπυλότητας με τη Μέθοδο 1 για τις συναρτήσεις u_1 και u_3 , τόσο σε όλο το γράφο όσο και πάνω στις καμπύλες \vec{C}_1 και \vec{C}_3 αντίστοιχα. Επίσης, ορισμένα ενδεικτικά αποτελέσματα για τη Μέθοδο 2 φαίνονται στα Σχήματα 5.25 - 5.27.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η εφαρμογή φιλτραρίσματος εξομάλυνσης είναι ευεργετική ως προς την ακρίβεια της προσέγγισης σε σχέση με την προσέγγιση χωρίς φιλτράρισμα που παρουσιάστηκε προηγουμένως. Συγκεκριμένα, το εύρος διακύμανσης των προσεγγιστικών τιμών γύρω από τις πραγματικές μειώνεται δραστικά και εξαλείφονται οι απότομες αιχμές - spikes με δυσανάλογα μεγάλο πλάτος. Η μορφή της προσεγγιστικής συνάρτησης της καμπυλότητας τόσο για την u_1 όσο και για την u_3 αντικατοπτρίζει αρκετά πιστά την πραγματική εκδοχή της, μόνο που λόγω της εξομάλυνσης έχουν απαλειφθεί αισθητά οι πολύ μεγάλες τιμές που αντιστοιχούν στην «αιχμή» στο κέντρο του γράφου (όπου εντοπίζεται το ακρότατο αμφότερων των συναρτήσεων). Ακόμα, η προσέγγιση διατηρεί γενικά το ίδιο πρόσημο με την αναλυτική τιμή, ενώ είναι ενθαρρυντική η μεταβολή με όμοιο τρόπο με αυτόν της αναλυτικής πρόβλεψης κατά μήκος της έλλειψης στα Σχήματα 5.17, 5.21, 5.23 και 5.26.

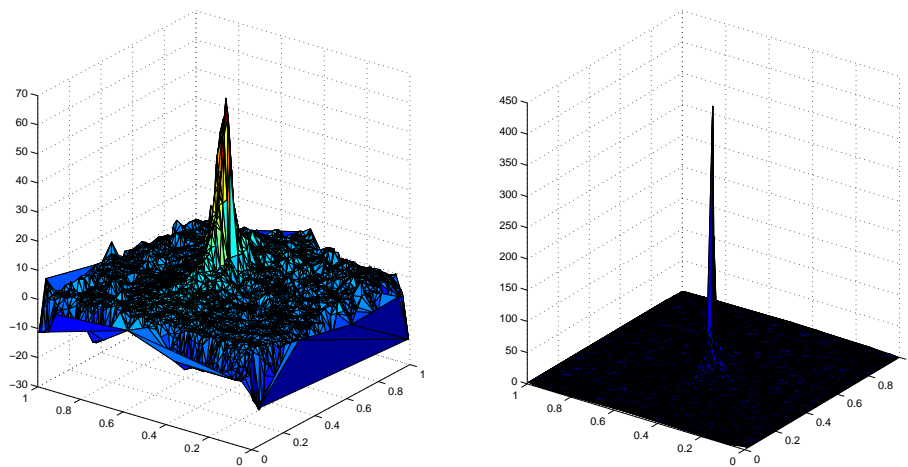
Επιπρόσθετα, είναι εμφανές ότι το φιλτράρισμα δύο σταδίων δίνει ποιοτικώς καλύτερα αποτελέσματα για την καμπυλότητα απ' ότι το φιλτράρισμα σε ένα μόνο στάδιο, είτε



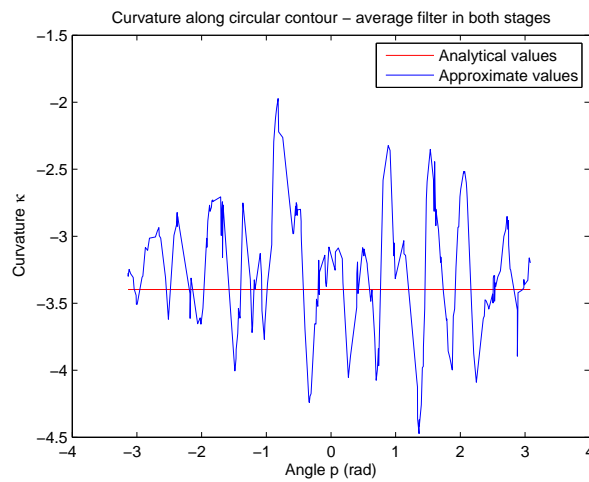
Σχήμα 5.16: Μέθοδος 1 - Καμπυλότητα των ισοϋψών της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$
 - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα μέσης τιμής στο 1^ο στάδιο, Δεξιά: πραγματική.



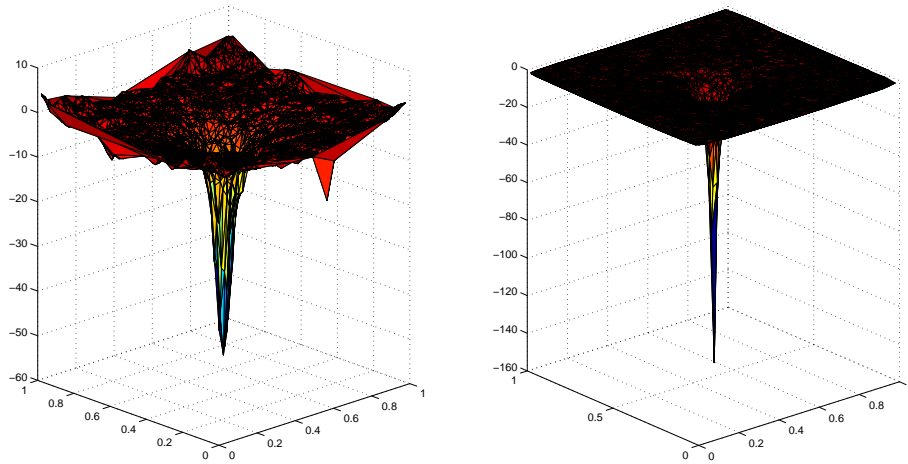
Σχήμα 5.17: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοϋψούς της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής στο 2^ο στάδιο, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



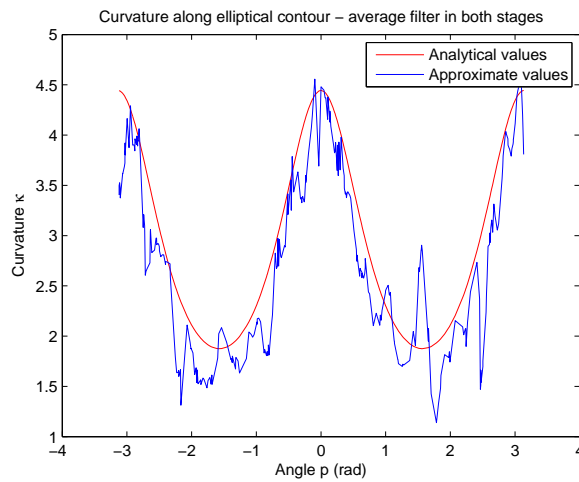
Σχήμα 5.18: Μέθοδος 1 - Καμπυλότητα των ισοϋψών της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής στο 2^ο στάδιο, Δεξιά: πραγματική.



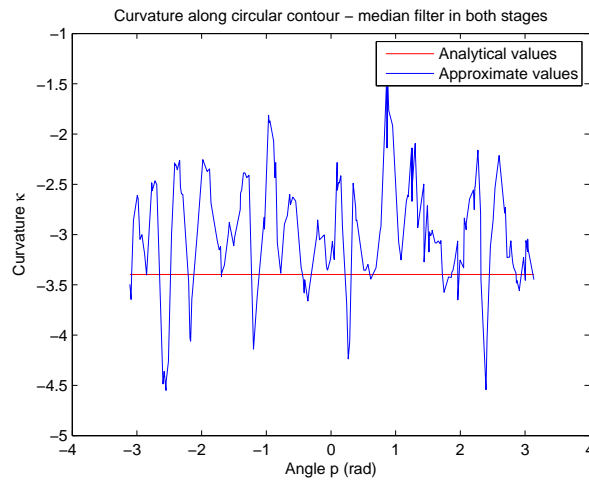
Σχήμα 5.19: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοϋψούς της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα μέσης τιμής και στα δύο στάδια, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



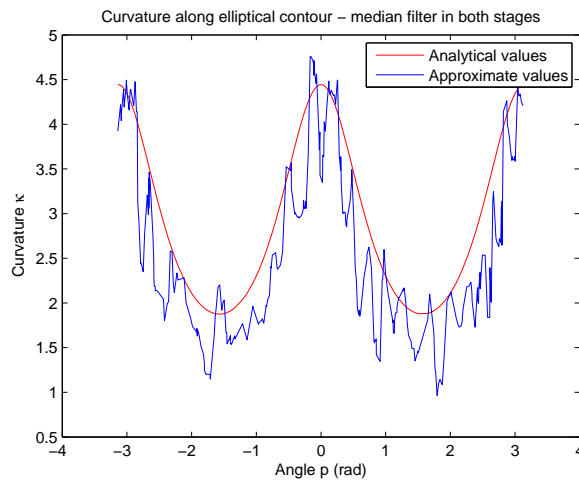
Σχήμα 5.20: Μέθοδος 1 - Καμπυλότητα των ισοϋψών της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$
 - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα μέσης τιμής και στα δύο στάδια, Δεξιά: πραγματική.



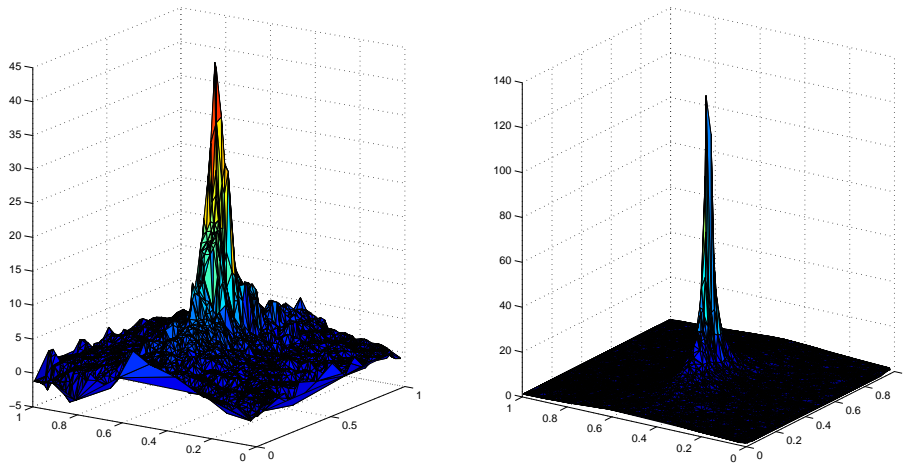
Σχήμα 5.21: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοϋψούς της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα μέσης τιμής και στα δύο στάδια, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



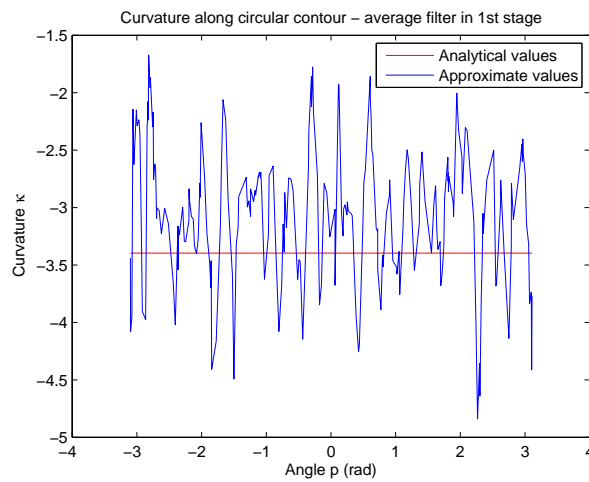
Σχήμα 5.22: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοΐψους της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής και στα δύο στάδια, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



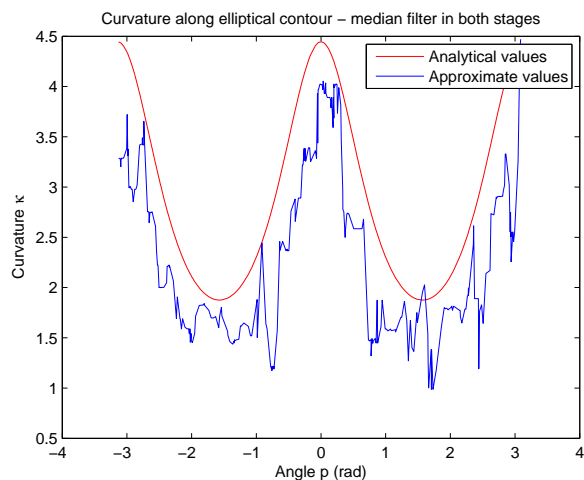
Σχήμα 5.23: Μέθοδος 1 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοΐψους της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής και στα δύο στάδια, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



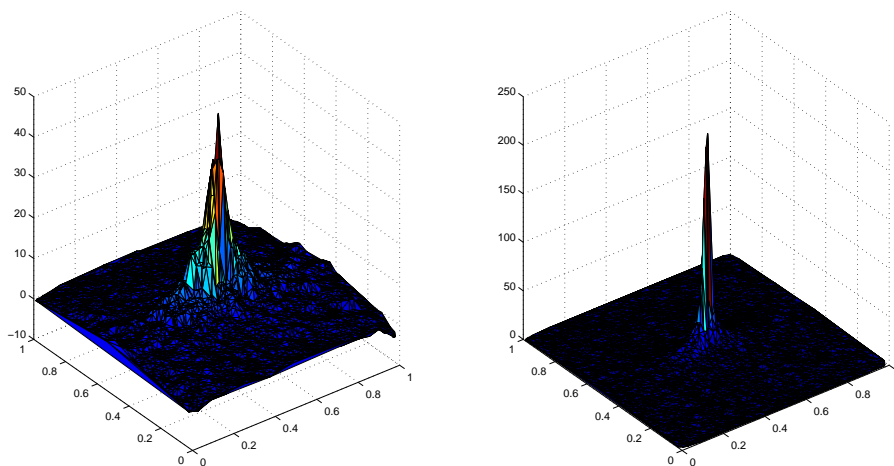
Σχήμα 5.24: Μέθοδος 1 - Καμπυλότητα των ισοψών της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής και στα δύο στάδια, Δεξιά: πραγματική.



Σχήμα 5.25: Μέθοδος 2 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοψούς της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα μέσης τιμής στο 1^ο στάδιο, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



Σχήμα 5.26: Μέθοδος 2 - Διακύμανση της καμπυλότητας κατά μήκος ισοψύσους της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Μπλε: προσεγγιστικές τιμές με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής και στα δύο στάδια, Κόκκινο: πραγματικές τιμές.



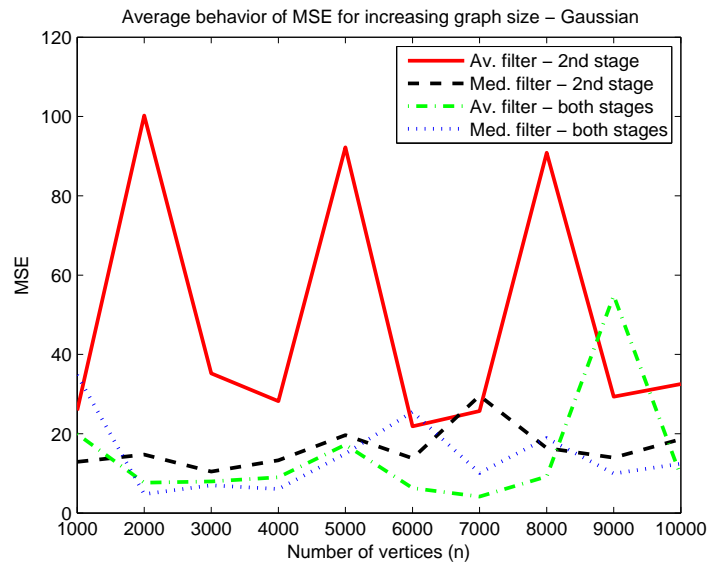
Σχήμα 5.27: Μέθοδος 2 - Καμπυλότητα των ισοψών της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής και στα δύο στάδια, Δεξιά: πραγματική.

αυτό είναι το πρώτο είτε το δεύτερο, όποιο φίλτρο και αν χρησιμοποιείται. Το μέγεθος των αποκλίσεων μειώνεται τότε σε επίπεδα που καθιστούν επιτρεπτή τη χρήση της προσέγγισης για την εφαρμογή του αλγορίθμου και, όσον αφορά στα διαγράμματα που αντιστοιχούν στις καμπύλες \vec{C}_1 και \vec{C}_3 , η απόκλιση ερμηνεύεται εν μέρει και από το γεγονός ότι οι κορυφές - δείγματα δεν ανήκουν ακριβώς στις καμπύλες αλλά βρίσκονται σε έναν στενό δακτύλιο γύρω από αυτές. Δεν διακρίνουμε ιδιαίτερη διαφορά στην επίδοση μεταξύ του average και του median φίλτρου όταν χρησιμοποιούνται και στα δύο στάδια της προσέγγισης, εκτός από ένα μικρό bias των αποτελεσμάτων για φίλτρο median προς τιμές της καμπυλότητας μικρότερες κατά την απόλυτη έννοια.

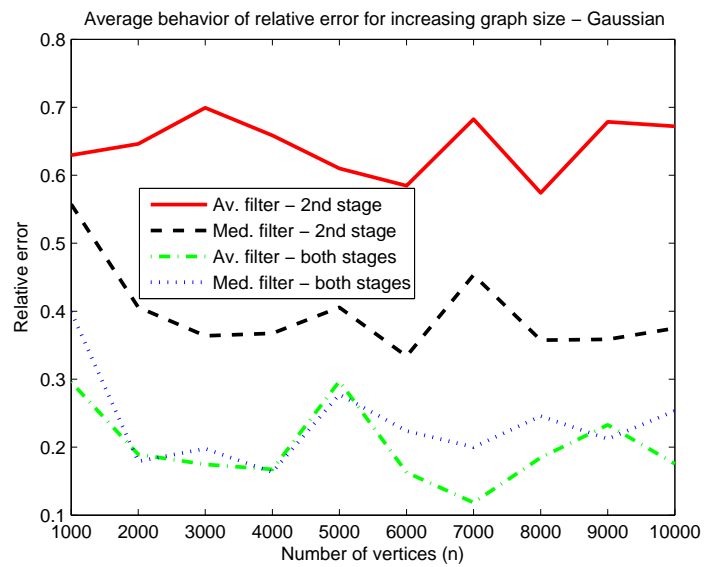
5.5 Πειραματική Μελέτη Ασυμπτωτικής Συμπεριφοράς Σφάλματος

Για να εξετάσουμε πειραματικά κατά πόσον οι προτεινόμενες προσεγγίσεις για την καμπυλότητα συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές πάνω σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους, αποτυπώνουμε την «εξέλιξη» του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (M.S.E.) και του σχετικού σφάλματος e_r με την ίδια μέθοδο όπως στην ενότητα 4.12. Έχοντας υπ' όψιν και τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, αποτυπώνουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά μόνο για τις περιπτώσεις φιλτραρίσματος σε ένα μόνο στάδιο ή και στα δύο στάδια, καθώς αυτές έδωσαν ποιοτικότερες προσεγγίσεις, και παραλείπουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για κανένα φιλτράρισμα. Έτσι, παραθέτουμε στα Σχήματα 5.28 - 5.31 ενδεικτικά αποτελέσματα της Μεθόδου 1 για διάφορους προκύπτοντες συνδυασμούς, τόσο με φίλτρο μέσης τιμής όσο και με ενδιάμεσης, και στα Σχήματα 5.32 - 5.35 αντίστοιχα αποτελέσματα της Μεθόδου 2.

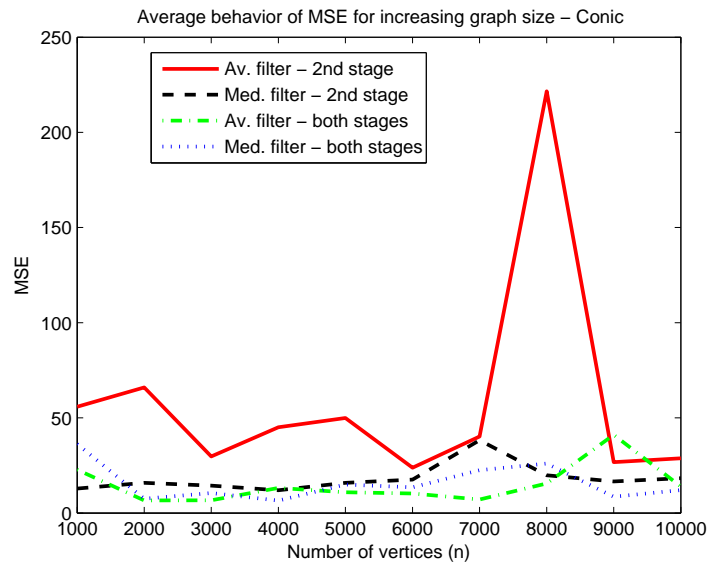
Είναι ξεκάθαρο ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του σφάλματος και για τις δύο μετρικές απέχει από την ομαλή σύγκλιση προς το μηδέν. Ειδικά όσον αφορά στο M.S.E., παρατηρούμε μια τάση αυξομειώσης για αυξανόμενα μεγέθη γράφων, χωρίς να υπάρχει σαφής συνολική πορεία προς μικρότερες τιμές. Βέβαια, η συμπεριφορά αυτή έχει μια εξήγηση για τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν: με δεδομένες τις πολύ μεγάλες πραγματικές τιμές της καμπυλότητας για τις u_1 και u_3 στην κεντρική περιοχή του γράφου, μια σημαντική ποσοστιαία απόκλιση της προσέγγισης πάνω σε κορυφές αυτής της περιοχής οδηγεί σε μεγάλες τιμές του M.S.E., χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα σημαντική απόκλιση σε όλη την υπόλοιπη έκταση του γράφου. Μάλιστα, καθώς το μέγεθος του γράφου μεγαλώνει, ολοένα και περισσότερες κορυφές θα εμπίπτουν σε αυτή την «ιδιάζουσα» περιοχή, οπότε οι τιμές του M.S.E. μπορεί να αυξάνονται ακόμα περισσότερο. Αυτή η ιδιομορφία συνδέεται και με την υπόθεση που έγινε για την απόδειξη της Πρότασης 5.3.1 περί μη μηδενισμού της κλίσης, καθώς στο σημείο (0.5, 0.5) του επιπέδου αμφότερες οι συναρτήσεις των παραδειγμάτων παρουσιάζουν ακρότατο και άρα μηδενίζεται η κλίση τους.



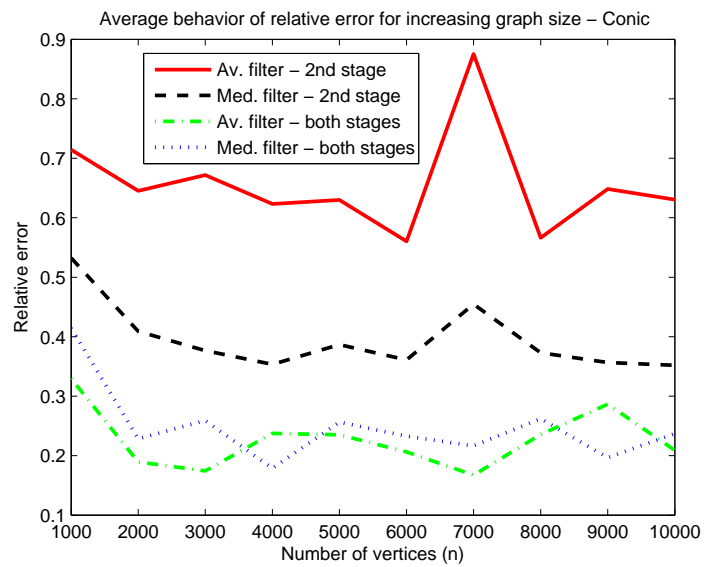
Σχήμα 5.28: Μέθοδος 1 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



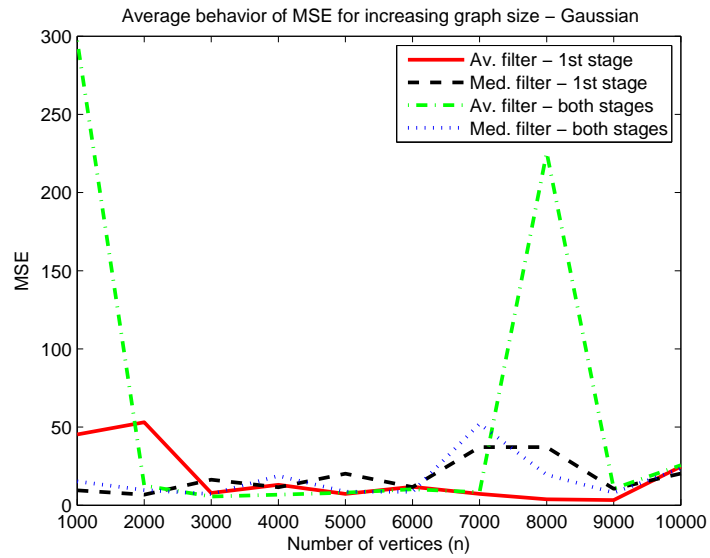
Σχήμα 5.29: Μέθοδος 1 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



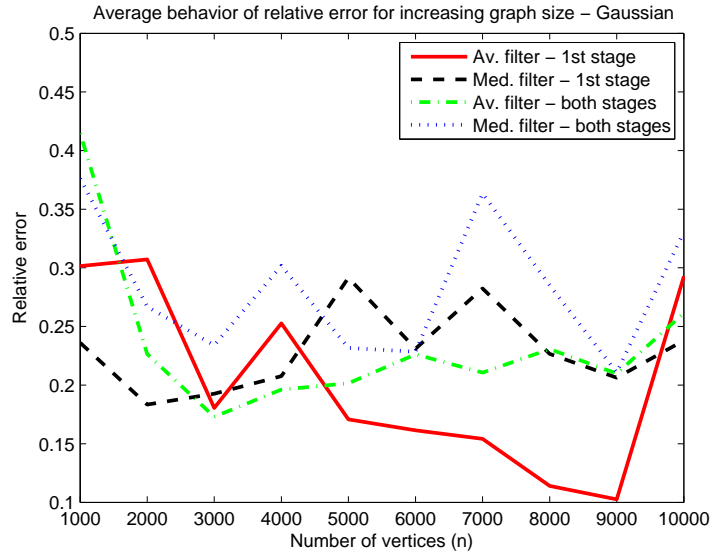
Σχήμα 5.30: Μέθοδος 1 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



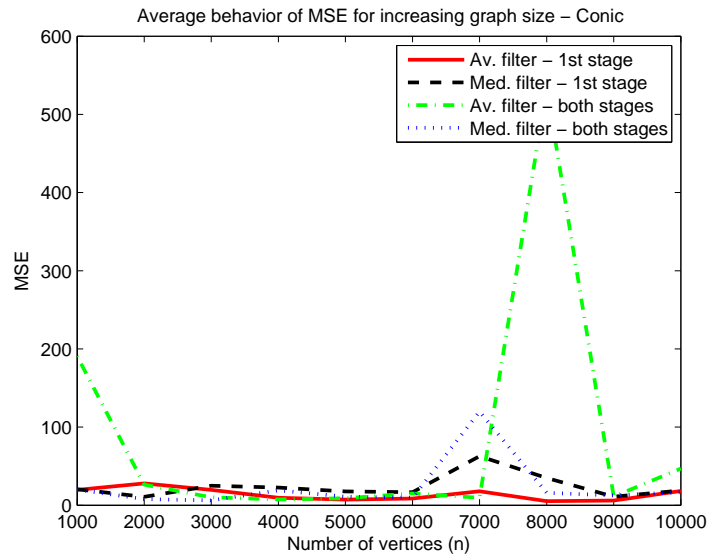
Σχήμα 5.31: Μέθοδος 1 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



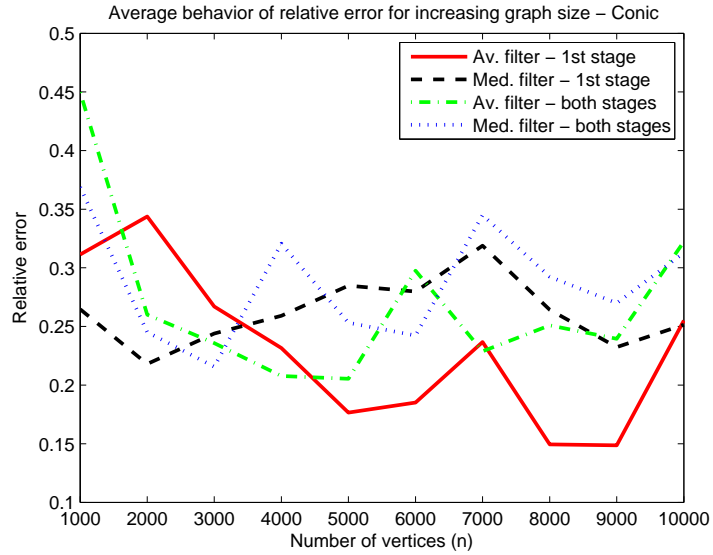
Σχήμα 5.32: Μέθοδος 2 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



Σχήμα 5.33: Μέθοδος 2 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.25$



Σχήμα 5.34: Μέθοδος 2 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



Σχήμα 5.35: Μέθοδος 2 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$

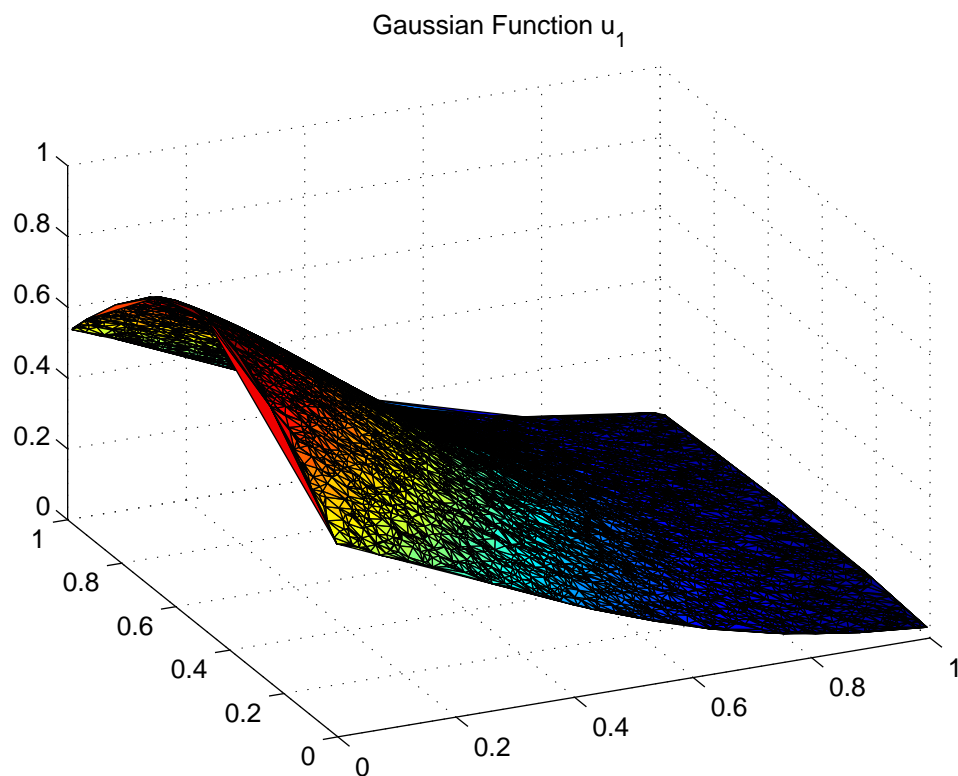
Παρ' όλα αυτά, οι τιμές του e_r παραμένουν σε όλες τις περιπτώσεις κάτω από 100%. Μάλιστα, για τη Μέθοδο 1, στις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται φιλτράρισμα δύο σταδίων ή απλώς φίλτρο median στο δεύτερο στάδιο, βλέπουμε μια τάση μείωσης του e_r για μεγαλύτερους γράφους, ενώ ταυτόχρονα τείνει να παραμένει κάτω από τα επίπεδα του 40%, ξεκινώντας από σαφώς υψηλότερες τιμές για 1000 κορυφές. Εν ολίγοις, το φίλτρο median παρουσιάζει σαφώς σταθερότερη συμπεριφορά στη Μέθοδο 1 από το average και είναι το μόνο από τα δύο που δεν είναι «απαγορευτικό» να χρησιμοποιηθεί σε αυτήν μόνο στο δεύτερο στάδιο. Από την άλλη πλευρά, στη Μέθοδο 2, διαπιστώνουμε ότι το e_r διατηρείται κάτω από 40% για όλο το εύρος του πλήθους κορυφών χωρίς κάποια σαφή τάση μείωσης. Επίσης, για τη Μέθοδο 2 το φίλτρο μέσης τιμής οδηγεί σε εφάμιλλη έως καλύτερη ασυμπτωτική συμπεριφορά του e_r από το ενδιάμεσης τιμής, ενώ το φιλτράρισμα δύο σταδίων δεν υπερέχει έναντι του φιλτραρίσματος μόνο στο πρώτο στάδιο.

Για να άρουμε την επίδραση των μεγάλων τιμών της καμπυλότητας εξαιτίας ακροτάτων των αναλυτικών συναρτήσεων - δειγμάτων, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα πειράματα για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων των συναρτήσεων u_1 και u_3 . Οι τιμές αυτές εγγυώνται την απουσία ακροτάτου εντός του χωρίου $[0, 1]^2$ στο οποίο κείται οι κορυφές του γράφου. Στα Σχήματα 5.36 και 5.37 παρουσιάζεται η μορφή των νέων συναρτήσεων για εποπτικούς λόγους.

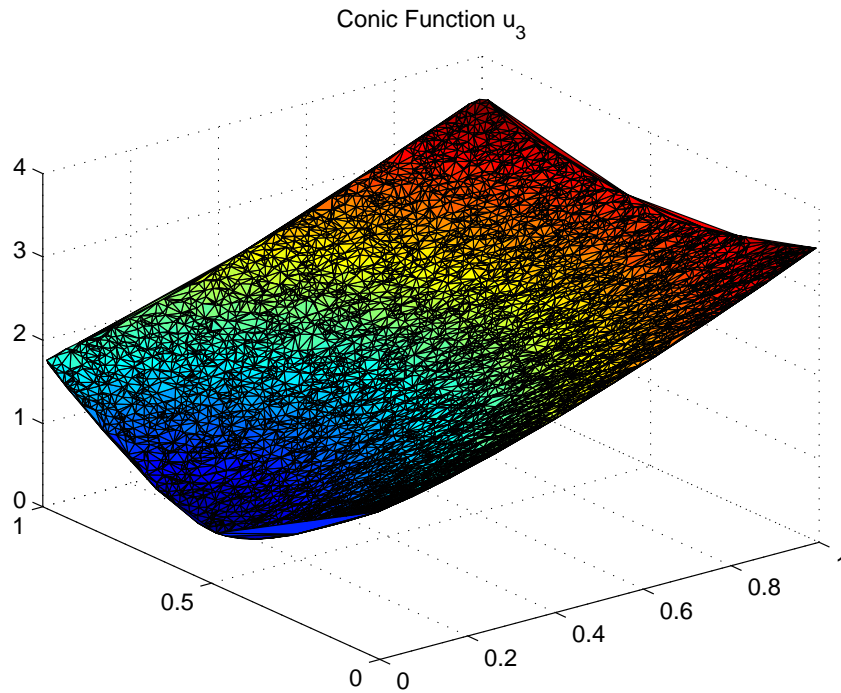
Στη συνέχεια, στα Σχήματα 5.38 και 5.39 δίνονται ενδεικτικά τα αποτελέσματα για την προσέγγιση της καμπυλότητας με τη Μέθοδο 1 στις νέες συναρτήσεις από κοινού με την αναλυτική μορφή της καμπυλότητας για την περίπτωση φιλτραρίσματος μέσης τιμής και στα δύο στάδια, σε αντιστοιχία με τα διαγράμματα της ενότητας 5.4.

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τις δύο μετρικές του σφάλματος που χρησιμοποιούμε, όταν η καμπυλότητα υπολογίζεται πάνω στις νέες συναρτήσεις χωρίς ακρότατα, γίνεται στα Σχήματα 5.40 - 5.43 για τη Μέθοδο 1 και στα Σχήματα 5.44 - 5.47 για τη Μέθοδο 2. Με δεδομένα τα συμπεράσματα από τα Σχήματα 5.28 - 5.31 για τη φτωχή επίδοση του φιλτραρίσματος σε ένα μόνο στάδιο στη Μέθοδο 1, απεικονίζουμε στα αντίστοιχα σχήματα το εκάστοτε σφάλμα μόνο για τις περιπτώσεις φιλτραρίσματος και στα δύο στάδια, ενώ για τη Μέθοδο 2 οι περιπτώσεις που παριστάνονται αντιστοιχούν ακριβώς με τα Σχήματα 5.32 - 5.35.

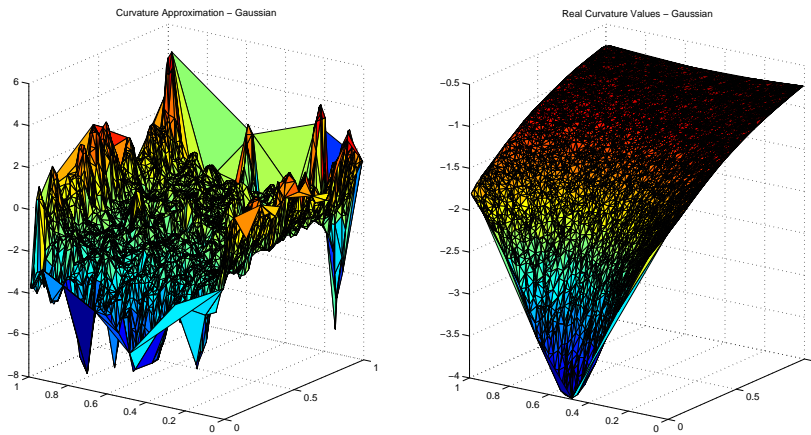
Καθίσταται πλέον σαφές ότι για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις που χρησιμοποιήσαμε, η προσέγγιση της καμπυλότητας με τη Μέθοδο 1 οδεύει σε κάθε περίπτωση σε μικρότερες τιμές σφάλματος για μεγαλύτερα μεγέθη γράφων όταν εφαρμόζεται φιλτράρισμα εξομάλυνσης και στα δύο στάδια της προσέγγισης. Αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει και για τη Μέθοδο 2, για την οποία επεκτείνεται και για φιλτράρισμα μόνο στο πρώτο στάδιο, αν και τότε η μείωση είναι βραδύτερη. Επιπλέον, το φίλτρο median εμφανίζεται κατά πολύ αποδοτικότερο του average, καθώς οδηγεί σε κάθε περίπτωση σε ταχύτερη μείωση του σφάλματος, προς επίρρωση των παρατηρήσεων που έγιναν προηγουμένως για το θέμα του τύπου του φίλτρου. Μεταξύ των δύο μεθόδων και για



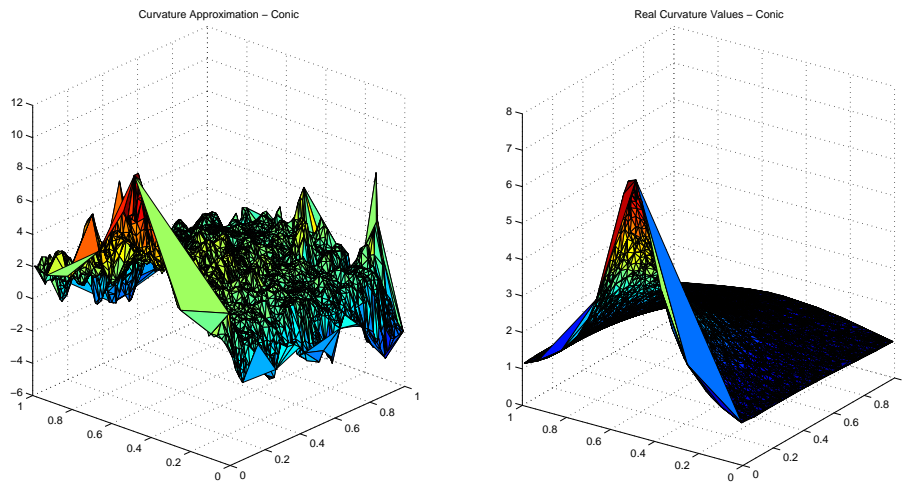
Σχήμα 5.36: Η Γκαουσιανή συνάρτηση $u_1(x, y)$ ορισμένη στο γράφο \mathcal{G}_1 για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.5$



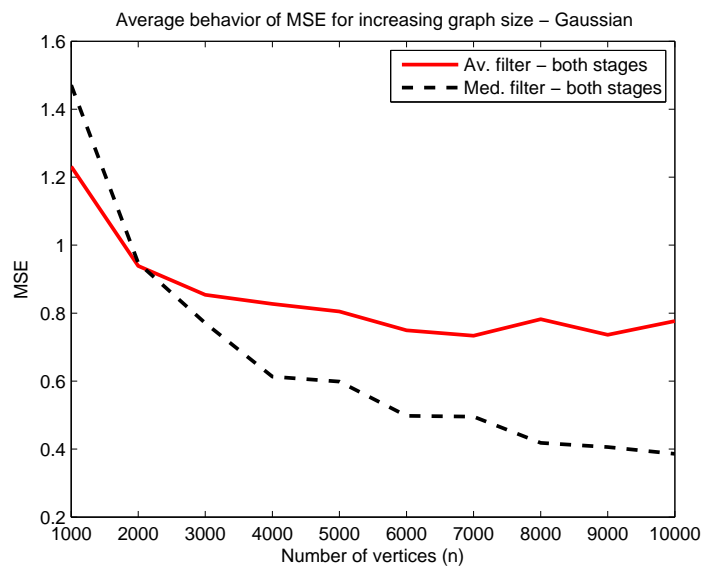
Σχήμα 5.37: Η κωνική συνάρτηση $u_3(x, y)$ ορισμένη στο γράφο \mathcal{G}_1 για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



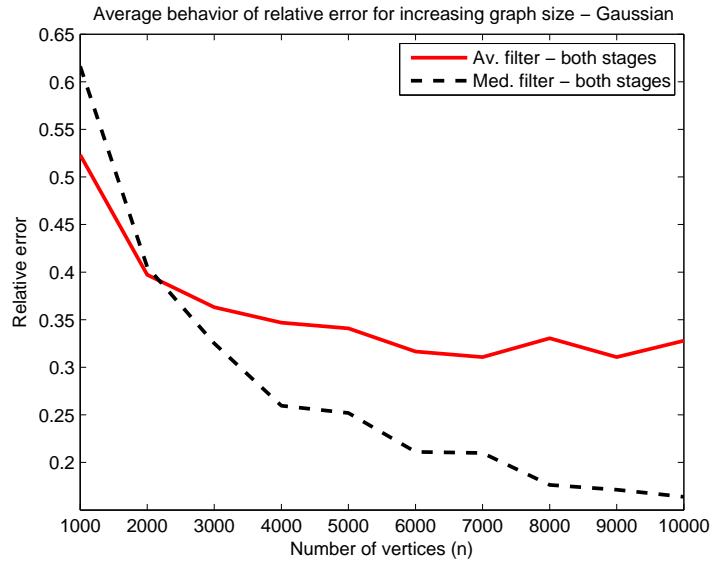
Σχήμα 5.38: Καμπυλότητα των ισοϋψών της $u_1(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.5$ - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα μέσης τιμής και στα δύο στάδια, Δεξιά: πραγματική.



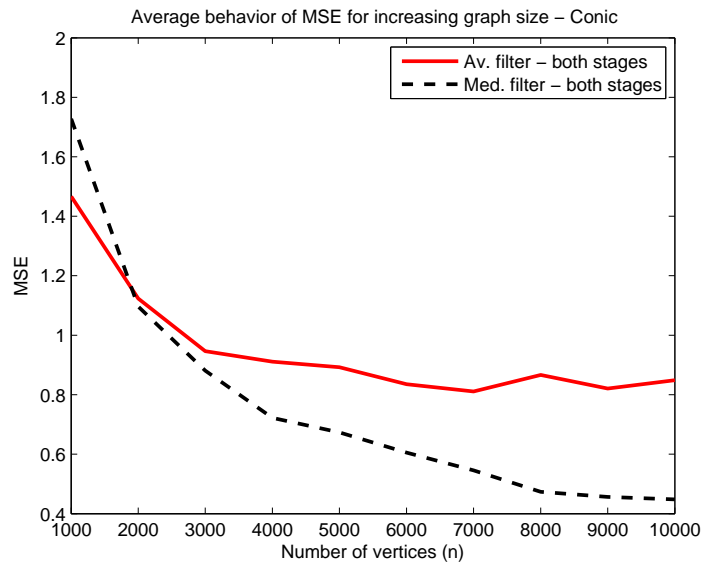
Σχήμα 5.39: Καμπυλότητα των isoψών της $u_3(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$ - Αριστερά: προσεγγιστική με φιλτράρισμα μέσης τιμής και στα δύο στάδια, Δεξιά: πραγματική.



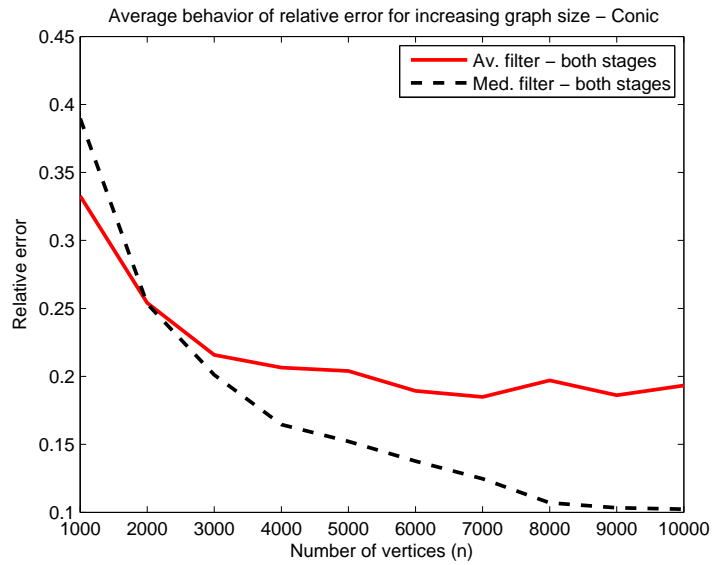
Σχήμα 5.40: Μέθοδος 1 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.5$



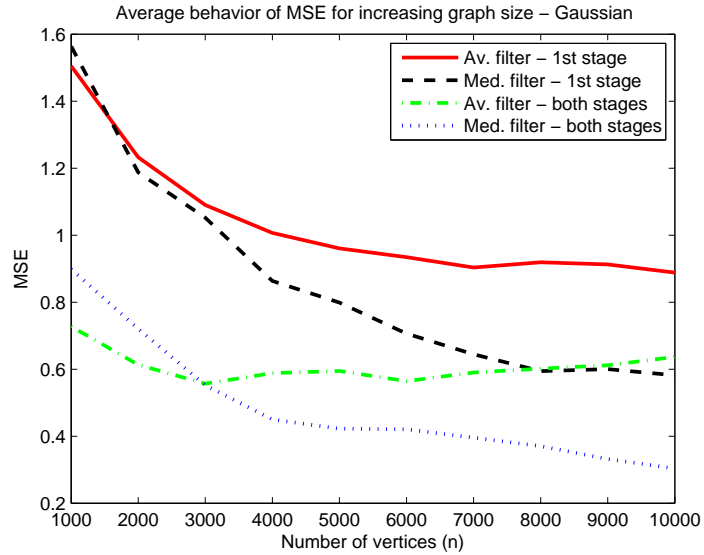
Σχήμα 5.41: Μέθοδος 1 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.5$



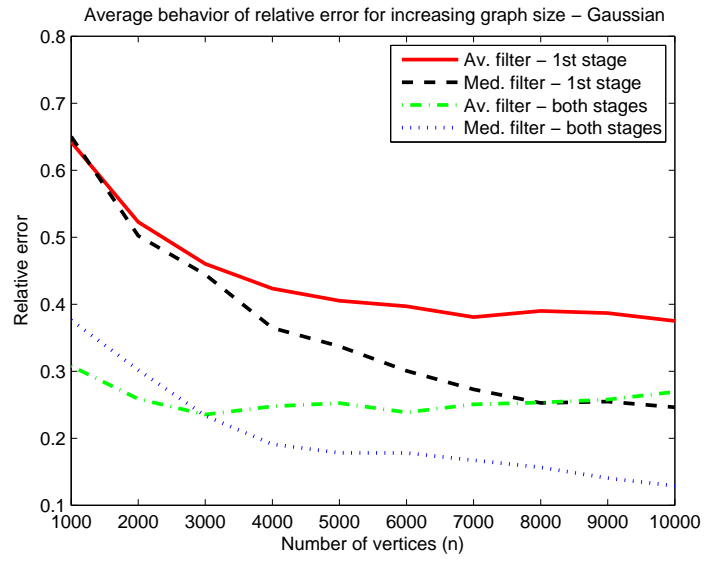
Σχήμα 5.42: Μέθοδος 1 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



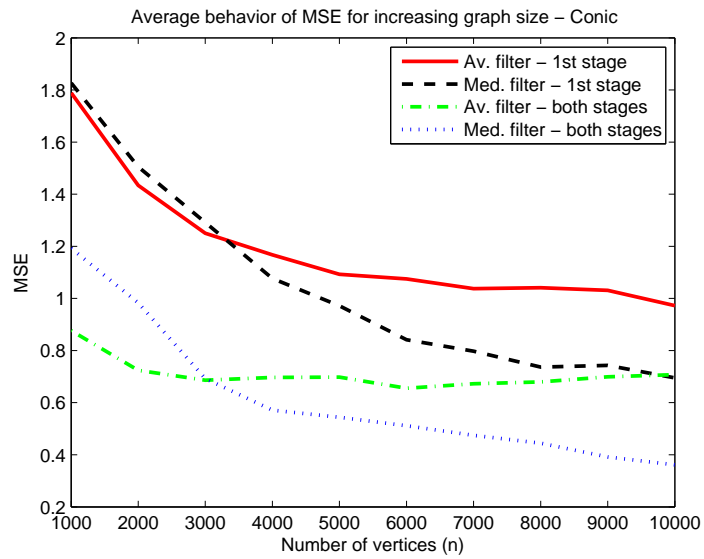
Σχήμα 5.43: Μέθοδος 1 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



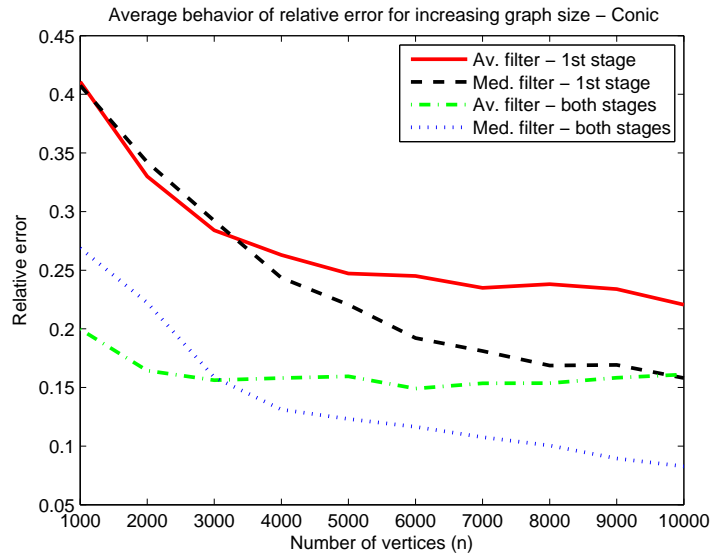
Σχήμα 5.44: Μέθοδος 2 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.5$



Σχήμα 5.45: Μέθοδος 2 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_1(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$ και $\sigma = 0.5$



Σχήμα 5.46: Μέθοδος 2 - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$



Σχήμα 5.47: Μέθοδος 2 - Σχετικό σφάλμα προσέγγισης της καμπυλότητας της $u_3(x, y)$ για $x_0 = -0.25$, $y_0 = 0.5$, $\alpha = 0.4$ και $b = 0.3$

τη βέλτιστη περίπτωση (φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής και στα δύο στάδια), διακρίνουμε μια μικρή υπεροχή της Μεθόδου 2 για αμφοτέρους τις μετρικές και τις συναρτήσεις - δείγματα.

Βασιζόμενοι στο σχετικό σφάλμα, μπορούμε να κάνουμε μια εμπειρική υπόθεση σύγκλισης της προσέγγισης ειδικά σε ό,τι αφορά στο φίλτρο ενδιάμεσης τιμής. Ωστόσο, η σύγκλιση προς το μηδέν είναι πολύ πιο αργή απ' ό,τι στην περίπτωση της προσέγγισης της κλίσης.

Συμπερασματικά, παρ' ό,τι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του σφάλματος δεν είναι η ιδανική, έχουμε ορισμένα ενθαρρυντικά δείγματα όταν φιλτράρουμε για εξομάλυνση και στα δύο στάδια της προσέγγισης. Άλλωστε, δε θα ήταν φρόνιμο να αναμένουμε οι προσεγγίσεις «δεύτερης τάξης» που επιχειρήσαμε για την καμπυλότητα να συγκλίνουν το ίδιο ομαλά και γρήγορα με την προσέγγιση της κλίσης, για τους λόγους που αναφέραμε στην ενότητα 3.2. Μένει λοιπόν να εξεταστεί και θεωρητικά η ακριβής συμπεριφορά του σφάλματος στον υπολογισμό της καμπυλότητας, ώστε στη συνέχεια να προχωρήσουμε στην τελική εφαρμογή του επαναληπτικού αλγορίθμου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών.

Κεφάλαιο 6

Αρχικοποίηση του Αλγορίθμου Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών σε Γράφους

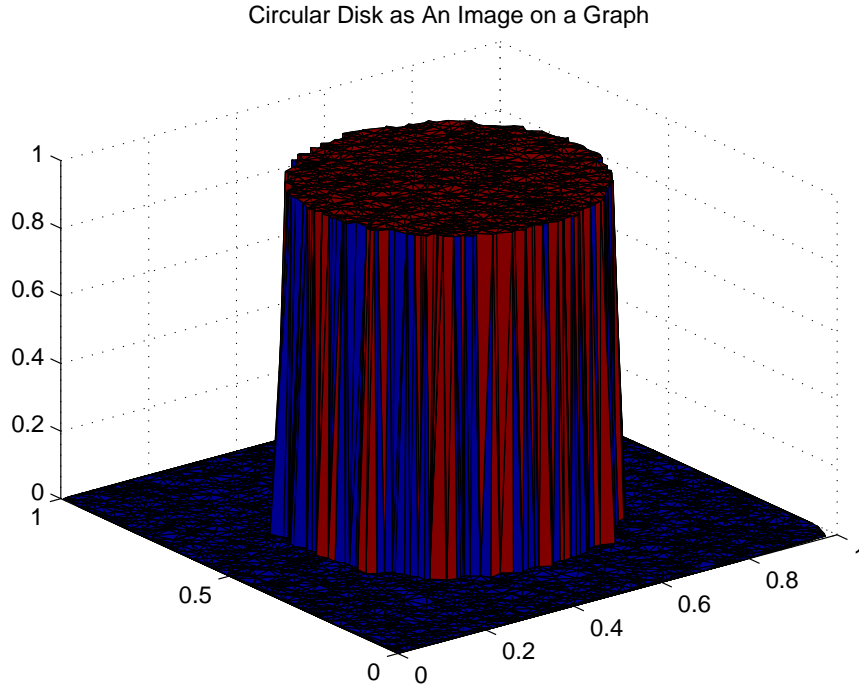
Πρωτίστης σημασίας ζήτημα για την επιτυχημένη εφαρμογή του αλγορίθμου των ενεργών καμπυλών σε τυχαίους γράφους είναι η προσεκτική αρχικοποίησή του. Επαναλαμβάνουμε εδώ το συνεχές μοντέλο μερικής διαφορικής εξίσωσης του αλγορίθμου για συνήθεις εικόνες που δόθηκε με την εξίσωση (3.14), ώστε να εστιάσουμε στη συνέχεια στα σημεία του που σχετίζονται με την αρχικοποίηση πάνω σε γράφους:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{cases} g(I) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \right) - \beta \right] \|\nabla \Phi\| + \nabla g(I) \cdot \nabla \Phi, \\ \Phi(x, y, t) < 0 \quad \forall (x, y) \in \operatorname{interior}(\Gamma(t)) \\ \\ g(I) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \right) + \beta \right] \|\nabla \Phi\| + \nabla g(I) \cdot \nabla \Phi, \\ \Phi(x, y, t) > 0 \quad \forall (x, y) \in \operatorname{interior}(\Gamma(t)) \end{cases}, \quad (6.1)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y), \quad \beta < 0.$$

Με βάση την (6.1), τα μεγέθη του αλγορίθμου που υπολογίζονται στο αρχικό στάδιο είναι:

1. η συνάρτηση τερματισμού g , που εξαρτάται από τις τιμές της εικόνας πάνω στο γράφο με τον τρόπο που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3.
2. η αρχική ενσωματώνουσα συνάρτηση των καμπυλών ϕ_0 , που προκύπτει από τον προσημασμένο μετασχηματισμό απόστασης των κορυφών του γράφου από την αρχική καμπύλη.



Σχήμα 6.1: Η δυαδική εικόνα I ενός κυκλικού δίσκου πάνω στο γράφο \mathcal{G}_1

6.1 Προσέγγιση Συνάρτησης Τερματισμού σε Γράφους

Για να ελέγχουμε την επιτυχία των διάφορων μεθόδων που μελετάμε εδώ στην προσέγγιση της συνάρτησης g , θα τις εφαρμόζουμε πάνω σε μια απλή δυαδική εικόνα I η οποία αναπαριστά έναν κυκλικό δίσκο. Η εικόνα αυτή ορίζεται πάνω στο γράφο \mathcal{G}_1 ως εξής:

$$I(v_1, v_2) = \begin{cases} 1, & \sqrt{(v_1 - 0.5)^2 + (v_2 - 0.5)^2} \leq 0.3 \\ 0, & \sqrt{(v_1 - 0.5)^2 + (v_2 - 0.5)^2} > 0.3 \end{cases}, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{V}(\mathcal{G}_1). \quad (6.2)$$

Ο γράφος \mathcal{G}_1 έχει μέγεθος $n = 5500$ κορυφές και η ακτίνα του λαμβάνεται $\rho(n) = \frac{3}{5}n^{-1/3}$. Στο Σχήμα 6.1, παρουσιάζουμε την εικόνα I πάνω στον \mathcal{G}_1 .

Στο [1], οι συγγραφείς παραθέτουν όλα τα βήματα για μια διαδικασία προσέγγισης της συνάρτησης τερματισμού g πάνω σε τυχαίους γράφους, στηριζόμενοι στην έκ-

φραση (3.4) που ισχύει στη συνεχή περίπτωση. Τα βήματα αυτά συνοπτικά είναι τα εξής:

1. Γκαουσιανό φιλτράρισμα σε κλίμακα σ της αρχικής εικόνας I του γράφου μέσω κατάλληλα ορισμένης «γραφοθεωρητικής» εκδοχής της συνέλιξης και εξαγωγή της ομαλοποιημένης εικόνας I_σ .
2. Υπολογισμός του μέτρου της κλίσης της ομαλοποιημένης εικόνας, $\|\nabla I_\sigma\|$, μέσω της εκάστοτε προσέγγισης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό κλίσης συναρτήσεων σε γράφους.
3. Υπολογισμός της συνάρτησης $g(\|\nabla I_\sigma\|)$ με χρήση της (3.3) για κατάλληλα επιλεγμένη τιμή της παραμέτρου λ .

Για το αρχικό φιλτράρισμα, χρησιμοποιείται η ιστροπική διδιάστατη Γκαουσιανή συνάρτηση με τυπική απόκλιση σ :

$$G_\sigma(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sigma > 0. \quad (6.3)$$

Για την υλοποίηση του Γκαουσιανού φιλτραρίσματος, ορίζεται ένα διακριτό ανάλογο της συνεχούς συνέλιξης που ενεργεί πάνω στις κορυφές του γράφου \mathcal{G} , υπολογίζοντας σε κάθε κορυφή \mathbf{v} το αποτέλεσμα με τη μορφή αθροίσματος γινομένων:

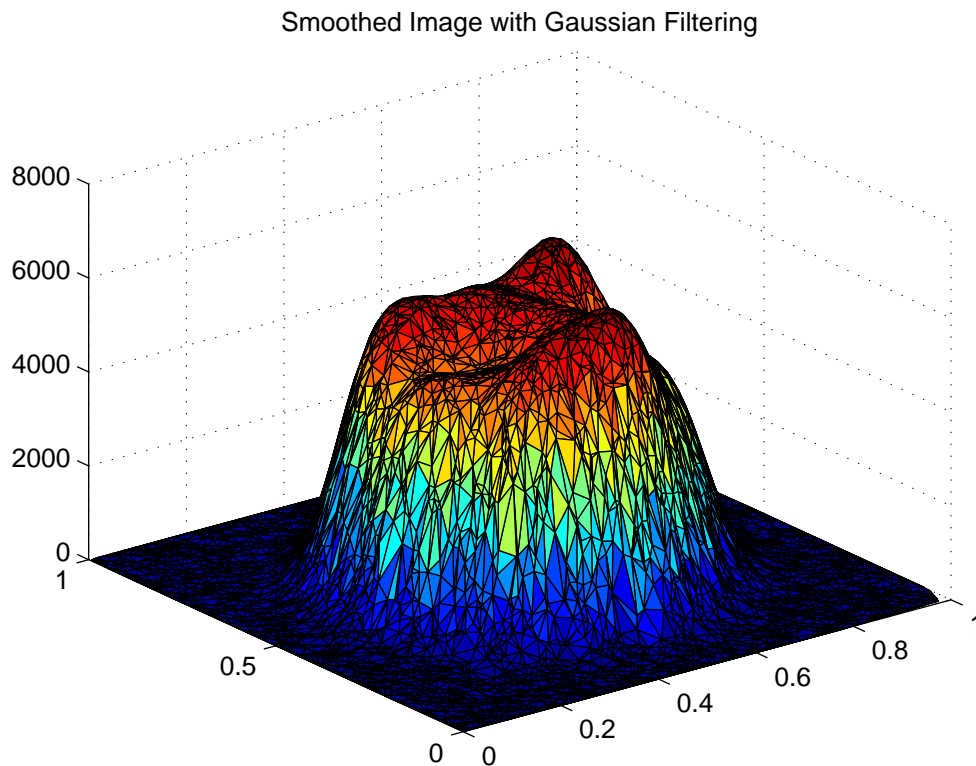
$$I_\sigma(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(\mathcal{G})} I(\mathbf{w}) G_\sigma(\mathbf{v} - \mathbf{w}). \quad (6.4)$$

Θα συμβολίζουμε στο εξής την «γραφοθεωρητική» συνέλιξη της (6.4) με το συνήθη τελεστή της συνέλιξης, $*$. Τότε, η ομαλοποιημένη εικόνα γράφεται ως:

$$I_\sigma(\mathbf{v}) = (I * G_\sigma)(\mathbf{v}). \quad (6.5)$$

Στη συνέχεια, το βήμα 2 του υπολογισμού της συνάρτησης g μπορεί να γίνει με την προσέγγιση που προτείναμε στο κεφάλαιο 4 για την κλίση της συνάρτησης I_σ , εφαρμόζοντας και φιλτράρισμα εξομάλυνσης για καλύτερα αποτελέσματα.

Εφαρμόζουμε την ανωτέρω μέθοδο πάνω στην εικόνα I όπως ορίστηκε στην (6.2), επιλέγοντας τιμές για τις παραμέτρους τέτοιες ώστε η g να λαμβάνει κατά δυνατόν τιμές κοντά στο 1 στις ομαλές περιοχές και κοντά στο 0 στις ακμές (δηλαδή στο περίγραμμα του δίσκου). Σκοπός μας είναι να εντοπίσουμε τυχόν αδυναμίες και

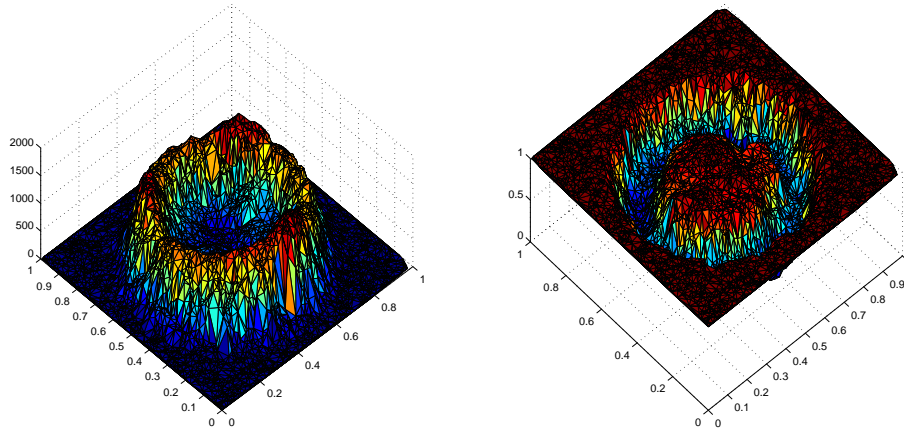


Σχήμα 6.2: Ομαλοποιημένη εκδοχή I_σ της αρχικής εικόνας I μετά από Γκαουσιανό φιλτράρισμα σε κλίμακα $\sigma = 0.05$

σημεία προς βελτίωση στην προαναφερθείσα ακολουθία βημάτων. Η εξομαλυμένη εικόνα I_σ φαίνεται στο Σχήμα 6.2 και το μέτρο της κλίσης της από κοινού με τη συνάρτηση g δίνονται στο Σχήμα 6.3.

Είναι εμφανές από το Σχήμα 6.2 ότι το φιλτράρισμα της σχέσης (6.4) εξομαλύνει όντως την εικόνα, αλλά της μεταβάλλει το εύρος τιμών, μεγαλώνοντας την τάξη μεγέθους των τιμών της «φωτεινότητας». Επιπλέον, στο εσωτερικό του αρχικού κυκλικού δίσκου, η εξομάλυνση δε γίνεται ομοιόμορφα, με συνέπεια να υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις στις τιμές της I_σ στην περιοχή αυτή. Ο συνδυασμός των δύο αυτών γεγονότων έχει ως αποτέλεσμα να υπολογιστούν μεγάλες τιμές για το μέτρο της κλίσης και στο εσωτερικό του δίσκου, παρ' όλο που αποτελεί ομαλή περιοχή της αρχικής εικόνας. Κατ' επέκταση, η g δε λαμβάνει εκεί τιμές κοντά στο 1 όπως θα έπρεπε θεωρητικά, αλλά μεταβάλλεται έντονα μεταξύ του 0 και του 1. Αυτό είναι φανερό ότι επηρεάζει αρνητικά και το στάδιο υπολογισμού της κλίσης της g που είναι απαραίτητη για την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Μια πρώτη βελτίωση που μπορούμε να δοκιμάσουμε για την αντιμετώπιση των



Σχήμα 6.3: Αριστερά: μέτρο κλίσης $\|\nabla I_\sigma\|$ της εξομαλυμένης εικόνας, Δεξιά: συνάρτηση g για $\lambda = 1000$

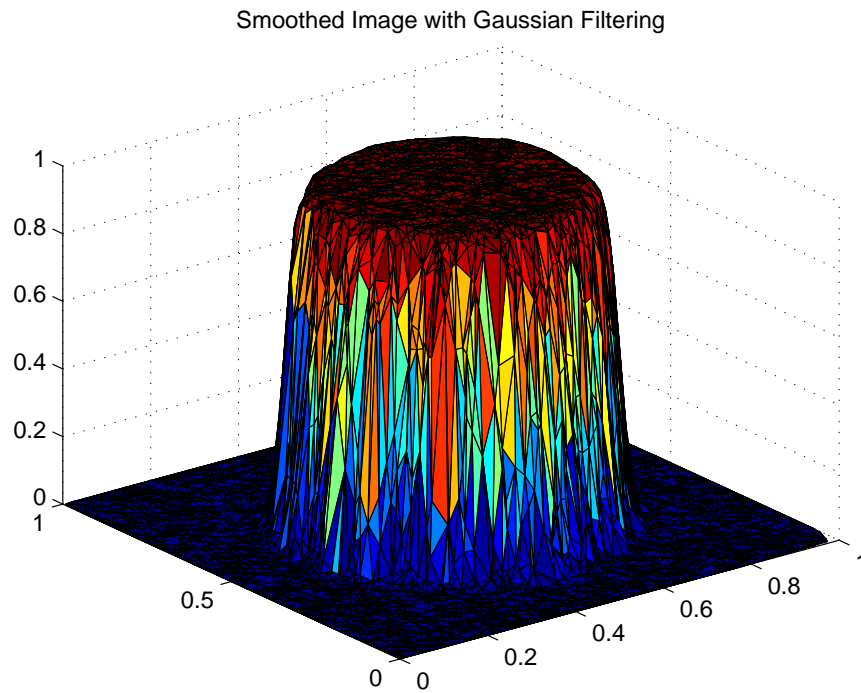
παραπάνω προβλημάτων είναι η προσθήκη ενός όρου κανονικοποίησης στην εξίσωση (6.4) του Γκαουσιανού φιλτραρίσματος πάνω σε γράφους:

$$I_\sigma(\mathbf{v}) = \frac{\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(g)} I(\mathbf{w}) G_\sigma(\mathbf{v} - \mathbf{w})}{\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(g)} G_\sigma(\mathbf{v} - \mathbf{w})}. \quad (6.6)$$

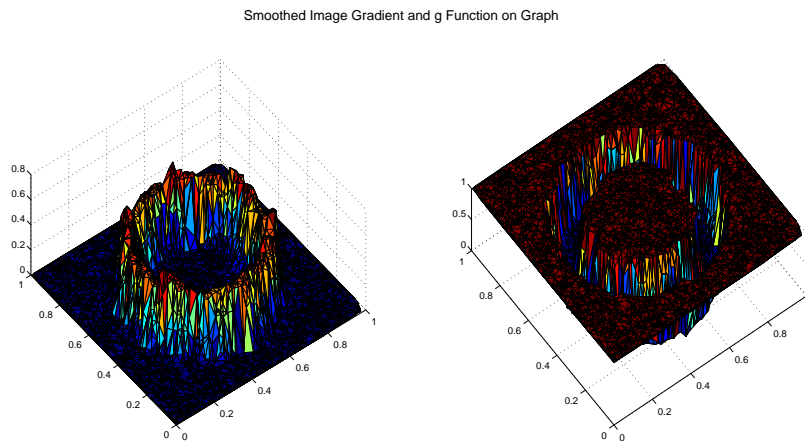
Με αυτό τον τρόπο, επιχειρούμε να εξασφαλίσουμε την «ομοιόμορφη» εφαρμογή του φίλτρου στην εικόνα, αναιρώντας την εγγενή ανομοιομορφία που εισάγεται από την τυχαία φύση του γράφου. Τα - αντίστοιχα με προηγουμένως - αποτελέσματα από την εφαρμογή του τροποποιημένου φίλτρου στην εικόνα I παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.4 και 6.5.

Γίνεται αντιληπτό ότι με την εφαρμογή κανονικοποιημένου φιλτραρίσματος, η μέθοδος δίνει σε μεγάλο βαθμό τα επιθυμητά αποτελέσματα, μετά και από κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων. Η μορφή της συνάρτησης g στο Σχήμα 6.5 είναι πολύ κοντά στην ιδανική για μια απλή εικόνα όπως η I , με τιμές σχεδόν ακριβώς 1 για τις ομαλές περιοχές και κοντά στο 0 για το περίγραμμα του δίσκου που αποτελεί τη μοναδική ακμή της εικόνας.

Από την άλλη πλευρά, παρατηρούμε ότι τόσο η μέθοδος που προτείνεται στο [1] όσο και η προαναφερθείσα τροποποίησή της μέσω κανονικοποίησης περιλαμβάνουν δύο στάδια προσέγγισης των ακριβών συνεχών τους αναλόγων. Συγκεκριμένα, τόσο



Σχήμα 6.4: Ομαλοποιημένη εκδοχή I_σ της αρχικής εικόνας I μετά από Γκαουσιανό φιλτράρισμα με κανονικοποίηση σε κλίμακα $\sigma = 0.02$



Σχήμα 6.5: Αριστερά: μέτρο κλίσης $\|\nabla I_\sigma\|$ της εξομαλυμένης εικόνας, Δεξιά: συνάρτηση g για $\lambda = 0.05$

στο βήμα 1 όσο και στο βήμα 2, λαμβάνονται προσεγγίσεις αφενός για τη συνέλιξη και αφετέρου για την κλίση συνεχών συναρτήσεων. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να επηρεάζει αρνητικά την ακρίβεια του αλγορίθμου, καθώς η συνάρτηση g παίρνει μέρος στους υπολογισμούς κάθε βήματός του και επομένως επιδρά καταλυτικά στην κίνηση των ενεργών καμπυλών. Ο περιορισμός των προσεγγίσεων σε λιγότερα στάδια της διαδικασίας είναι πιθανό να βοηθήσει στον υπολογισμό ακριβέστερων τιμών για την g . Ακολούθως, δίνουμε ακόμη μια τροποποιημένη μέθοδο για τον υπολογισμό της g , στην οποία λαμβάνεται μόνο μία προσέγγιση, αυτή της συνέλιξης.

Εκμεταλλευόμαστε τη γραμμικότητα των τελεστών της κλίσης, ∇ , και της συνέλιξης, $*$, η οποία συνεπάγεται ότι:

$$\nabla I_\sigma = \nabla (I * G_\sigma) = I * \nabla G_\sigma, \quad (6.7)$$

προκειμένου να εφαρμόσουμε τον τελεστή της κλίσης μόνο στην Γκαουσιανή συνάρτηση G_σ που έχει γνωστές αναλυτικά μερικές παραγώγους και έτσι δεν απαιτεί κάποια προσέγγιση. Οι παράγωγοι αυτές είναι:

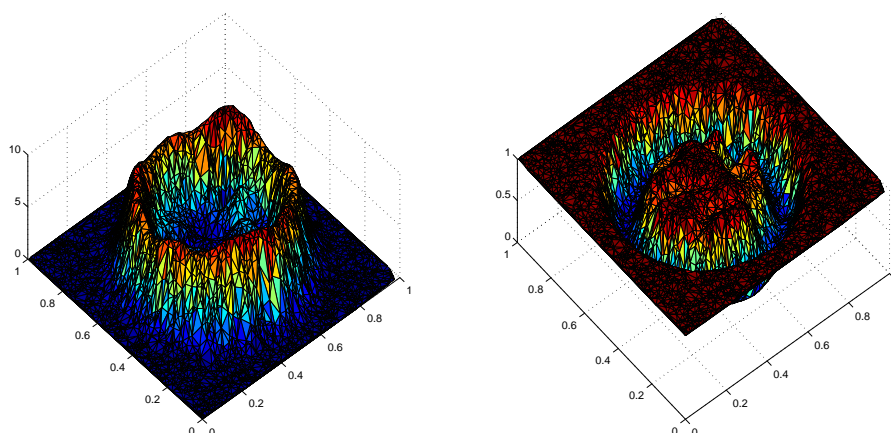
$$\frac{\partial G_\sigma}{\partial x}(x, y) = -\frac{xG_\sigma(x, y)}{\sigma^2} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial G_\sigma}{\partial y}(x, y) = -\frac{yG_\sigma(x, y)}{\sigma^2} \quad (6.9)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται αντίστοιχα με την (6.6) η γραφοθεωρητική συνέλιξη των παραγώγων αυτών με την αρχική εικόνα I με επιπρόσθετη κανονικοποίηση και έτσι υπολογίζεται απευθείας η κλίση της εξομαλυμένης εικόνας, ∇I_σ :

$$\nabla I_\sigma(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(g)} I(\mathbf{w}) \frac{\partial G_\sigma}{\partial x}(\mathbf{v} - \mathbf{w})}{\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(g)} G_\sigma(\mathbf{v} - \mathbf{w})} \\ \frac{\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(g)} I(\mathbf{w}) \frac{\partial G_\sigma}{\partial y}(\mathbf{v} - \mathbf{w})}{\sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(g)} G_\sigma(\mathbf{v} - \mathbf{w})} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Μετά από αυτό το σημείο, ο υπολογισμός του μέτρου $\|\nabla I_\sigma\|$, και κατ' επέκταση της συνάρτησης g μέσω της (3.3), είναι τετριμμένος. Η μόνη λοιπόν προσέγγιση που



Σχήμα 6.6: Αριστερά: μέτρο κλίσης $\|\nabla I_\sigma\|$ της εξομαλυμένης εικόνας με κανονικοποιημένο φιλτράρισμα με Γκαουσιανές παραγωγούς κλίμακας $\sigma = 0.05$, Δεξιά: συνάρτηση g για $\lambda = 5$

επιτελούμε είναι στο στάδιο της συνέλιξης, όπου υποχρεωτικά οι υπολογισμοί γίνονται πάνω στο διακριτό σύνολο σημείων $\mathcal{V}(\mathcal{G})$. Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της νέας μεθόδου για τον υπολογισμό της g δίνονται στο Σχήμα 6.6.

Διακρίνουμε ότι η ποιότητα του υπολογισμού της συνάρτησης g είναι ανεκτή αλλά όχι εφάμιλλη με το απλό κανονικοποιημένο Γκαουσιανό φιλτράρισμα. Αυτό πιθανότατα οφείλεται στην ευαισθησία που εισάγουν οι παράγωγοι της Γκαουσιανής στον υπολογισμό, λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανομοιομορφία της δομής του γράφου, με την κανονικοποίηση να μην μπορεί πλέον να αντισταθμίσει επαρκώς την όποια απόκλιση. Αντίθετα, η αρχική μέθοδος με τον προσεγγιστικό υπολογισμό της κλίσης αποδεικνύεται μάλλον πιο εύρωστη στο περιβάλλον των τυχαίων γράφων και υπερέρχει, εφόσον συμπεριληφθεί σε αυτήν και η αναλυθείσα κανονικοποίηση.

Σε κάθε περίπτωση, ο τελευταίος υπολογισμός που απαιτείται στο αρχικό στάδιο του αλγορίθμου σχετικά με τη συνάρτηση τερματισμού είναι η εύρεση του πεδίου κλίσης της, καθώς υπεισέρχεται και αυτό στην προσομοιούμενη μερική διαφορική εξίσωση (6.1). Δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε την προσέγγιση της κλίσης του κεφαλαίου 4 για τη συνάρτηση g πάνω στο γράφο, συνοδευμένη από φιλτράρισμα μέσης ή ενδιάμεσης τιμής για εξομάλυνση του αποτελέσματος.

6.2 Αρχικοποίηση Ενσωματώνουσας Συνάρτησης

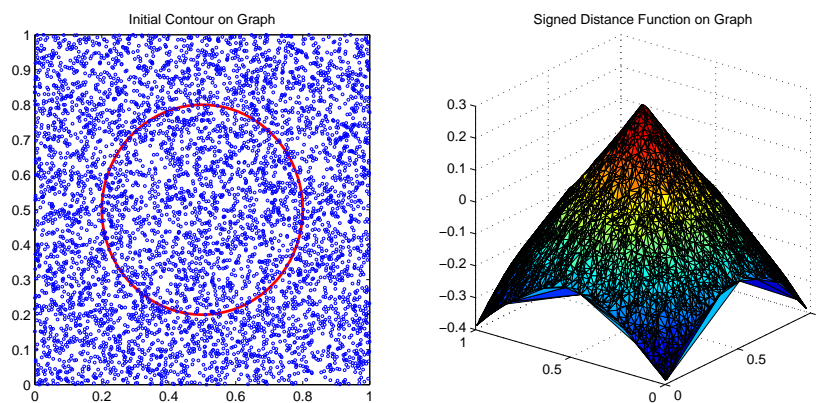
Η συνάρτηση ϕ_0 που εμφανίζεται στην αρχική συνθήκη της εξίσωσης εξέλιξης των καμπυλών, (6.1), υπολογίζεται για τις κορυφές του γράφου ως ο προσημασμένος μετασχηματισμός απόστασης από την αρχική καμπύλη $\Gamma(0)$. Επιλέγοντας η ϕ_0 να λαμβάνει θετικές τιμές στο εσωτερικό της $\Gamma(0)$, θα έχουμε για μια κορυφή $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ του γράφου:

$$\phi_0(v_1, v_2) = \begin{cases} \inf_{(x,y) \in \Gamma(0)} \|(v_1 - x, v_2 - y)\|, & (v_1, v_2) \in \text{interior}(\Gamma(0)). \\ - \inf_{(x,y) \in \Gamma(0)} \|(v_1 - x, v_2 - y)\|, & (v_1, v_2) \in \text{exterior}(\Gamma(0)). \\ 0, & (v_1, v_2) \in \Gamma(0). \end{cases} \quad (6.11)$$

Η σχέση (6.11) μπορεί να υλοποιηθεί προσεγγιστικά σε ένα γεωμετρικό τυχαίο γράφο με τον εξής τρόπο: βρίσκουμε τα σύνολα των κορυφών που ανήκουν στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της καμπύλης, έστω X και $X^c = \mathcal{V}(\mathcal{G}) \setminus X$. Παίρνουμε τις γραφοθεωρητικές διαστολές τους και από αυτές αφαιρούμε τα αρχικά σύνολα, απομονώνοντας το εξωτερικό και το εσωτερικό «περίγραμμα» της καμπύλης πάνω στο γράφο, X_o και X_i αντίστοιχα. Υλοποιούμε τότε τον προσημασμένο μετασχηματισμό απόστασης για κάθε κορυφή $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ μέσω της σχέσης

$$\phi_0(\mathbf{v}) = \begin{cases} \frac{\min_{\mathbf{w} \in X_o} \|(v_1 - w_1, v_2 - w_2)\| + \min_{\mathbf{w} \in X_i} \|(v_1 - w_1, v_2 - w_2)\|}{2}, & \mathbf{v} \in X. \\ - \frac{\min_{\mathbf{w} \in X_o} \|(v_1 - w_1, v_2 - w_2)\| + \min_{\mathbf{w} \in X_i} \|(v_1 - w_1, v_2 - w_2)\|}{2}, & \mathbf{v} \in X^c. \end{cases} \quad (6.12)$$

Ένα παράδειγμα υπολογισμού της συνάρτησης ϕ_0 για μια κυκλική καμπύλη $\Gamma(0)$ φαίνεται στο Σχήμα 6.7.



Σχήμα 6.7: Αριστερά: αρχική κυκλική καμπύλη $\Gamma(0)$ επί γεωμετρικού τυχαίου γράφου ορισμένου στο χωρίο $D = [0, 1]^2$, Δεξιά: αρχική μορφή ενσωματώνουσας συνάρτησης ϕ_0 πάνω στο γράφο

Κεφάλαιο 7

Συνολική Εφαρμογή του Αλγορίθμου Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών σε Γράφους

Σε αυτό το κεφάλαιο, συνδυάζουμε όλα τα επιμέρους αποτελέσματα των κεφαλαίων 4 - 6, ώστε να εκτελέσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών «προσαρμοσμένο» πάνω στη δομή των γεωμετρικών γράφων. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να διακριτοποιήσουμε την εξίσωση (3.14) ώστε η εξέλιξη της ενσωματώνουσας συνάρτησης των καμπυλών, Φ , να γίνεται σε διακεκριμένα χρονικά βήματα με απόσταση Δt μεταξύ τους, τα οποία αντιστοιχούν στις επαναλήψεις του αλγορίθμου.

Σύμφωνα και με όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3, αν επιλέξουμε η συνάρτηση Φ να έχει θετικές τιμές στο εσωτερικό των ενεργών καμπυλών, τότε η εξίσωση μερικών διαφορών που κυβερνά την εξέλιξη της Φ και άρα την κίνηση των καμπυλών είναι:

$$\Phi_r = \Phi_{r-1} + \Delta t \left\{ g(I) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi_{r-1}}{\|\nabla \Phi_{r-1}\|} \right) + \beta \right] \|\nabla \Phi_{r-1}\| + \nabla g(I) \cdot \nabla \Phi_{r-1} \right\},$$

$r \in \mathbb{N}, \Delta t > 0, \beta < 0, \Phi_0 = \phi_0.$

(7.1)

7.1 Ειδικά Σημεία και Λεπτομέρειες της Υλοποίησης του Αλγορίθμου

Η εξίσωση (7.1) ενσαρκώνει την ακριβή θεωρητική μορφή του αλγορίθμου. Ωστόσο, χρειάζεται να προσθέσουμε μερικά στάδια επεξεργασίας σε κάθε βήμα προ-

κειμένου να εξασφαλίσουμε την ομαλή κίνηση των καμπυλών προς τα όρια των αντικειμένων προς ανίχνευση.

Κατ' αρχάς, διαπιστώσαμε ότι η νέα προσέγγιση της κλίσης που προτάθηκε στο κεφάλαιο 4 είναι μεν πολύ ακριβής ως προς την κατεύθυνση που δίνει για το διάνυμα κλίσης, χωλαίνει δε ως προς το μέτρο του. Εκτενέστερα, για όχι τόσο ομαλές συναρτήσεις όσο αυτές που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο 4, η προσέγγιση αυτή μπορεί να δώσει υπερβολικά μεγάλες τιμές στο μέτρο της κλίσης και με έντονη τοπική διακύμανση, ακόμα και μετά από φιλτράρισμα εξομάλυνσης, επηρεάζοντας αρνητικά την ομαλή εξέλιξη της Φ . Για αυτό το λόγο και σύμφωνα με όσα αναλύσαμε στην ενότητα 4.9, επιλέξαμε να περιορίσουμε τη χρήση της προσέγγισης αυτής μόνο στον υπολογισμό της κατεύθυνσης της κλίσης στα διάφορα στάδια, εξομαλύνοντάς την με φίλτρο ενδιάμεσης τιμής. Όσο για το μέτρο της κλίσης για μια πραγματική συνάρτηση u στην κορυφή v ενός γράφου, βασιζόμαστε στην πιο εύρωστη προσέγγιση που δόθηκε στην εξίσωση (4.51), την οποία επαναλαμβάνουμε και εδώ:

$$\max_{w \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(v)} \{|u(w) - u(v)|\}. \quad (7.2)$$

Με αυτό τον τρόπο, εξασφαλίζουμε ότι το μέτρο κλίσης της Φ που υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη δεν θα ξεπερνά ποτέ το μέγιστο εύρος διακύμανσής της.

Επίσης, όσον αφορά στην καμπυλότητα, πέρα από την εφαρμογή εξομαλυντικού φιλτραρίσματος ενδιάμεσης τιμής δύο σταδίων που είδαμε στο κεφάλαιο 5 ότι βελτιώνει την ποιότητα της προσέγγισης, επεξεργαζόμαστε περαιτέρω τις τιμές της σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου. Επειδή η Φ επιλέγεται να λαμβάνει θετικό πρόσημο εντός των καμπυλών, θα έχει γενικά τη μορφή κοίλης συνάρτησης, που σημαίνει αρνητική απόκλιση του διανυσματικού πεδίου κλίσης της. Ως εκ τούτου, για να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο η καμπυλότητα να λαμβάνει πολύ μεγάλες (κατ' απόλυτη έννοια) αρνητικές τιμές που μπορεί να αλλοιώσουν τη Φ , εφαρμόζουμε στα αποτελέσματα επιπλέον φιλτράρισμα μέγιστης τιμής εντός της γειτονιάς κάθε κορυφής, αντίστοιχα δηλαδή με την ενότητα 4.11.

Η προσέγγιση της συνάρτησης g γίνεται με την «κανονικοποιημένη» συνέλιξη της εικόνας με Γκαουσιανή συνάρτηση που αναλύθηκε στην ενότητα 6.1.

Ξανατονίζουμε εδώ ότι η αρχική μορφή της Φ ως προσημασμένος μετασχηματισμός απόστασης, ϕ_0 , λαμβάνεται με τις κατάλληλες προσαρμογές ώστε η αρχική καμπύλη να περικλείει όλα τα προς ανίχνευση αντικείμενα. Επιπρόσθετα, όταν το χωρίο D στο οποίο ορίζεται ο γράφος λαμβάνει μεγαλύτερες διαστάσεις από αυτές του μοναδιαίου τετραγώνου, επιτελούμε μια κλιμάκωση στις τιμές της ϕ_0 , έτσι ώστε αυτές να κυμαίνονται σε μικρό εύρος γύρω από το 0. Αυτή η τροποποίηση, σε συνδυασμό με την προσέγγιση που χρησιμοποιούμε για το μέτρο της κλίσης, συντελεί στην βραδύτερη εξέλιξη της Φ και στην αποφυγή απότομων μεταβολών της.

Τέλος, αφού υπολογιστεί σε κάθε βήμα η Φ_r με βάση την (7.1), εξομαλύνεται στη συνέχεια και αυτή με φίλτρο ενδιάμεσης τιμής, προτού χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς του επόμενου βήματος.

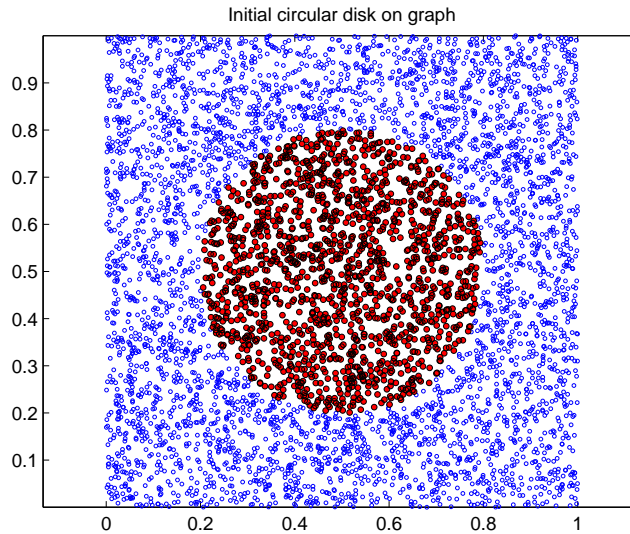
Αναφορικά με τον τερματισμό του αλγορίθμου, σημειώνουμε ότι με δεδομένο το υπόβαθρο των γράφων που πραγματευόμαστε, δεν υφίστανται ιδανικές ακμές στις εικόνες οι οποίες να οδηγούν σε πλήρη σταθεροποίηση της συνάρτησης Φ . Γι' αυτό το λόγο, εντάσσουμε στον αλγόριθμο ένα κριτήριο τερματισμού, το οποίο υπολογίζει σε πόσες συνολικά κορυφές η Φ έχει αλλάξει πρόσημο για ένα «παράθυρο» των πιο πρόσφατων επαναλήψεων. Με αυτό τον τρόπο, προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε τη μεταβολή της καμπύλης, έτσι ώστε όταν αυτή δεν ξεπερνά πλέον ένα συγκεκριμένο κατώφλι, να τερματίζει ο αλγόριθμος.

7.2 Ανίχνευση Σχημάτων σε Γράφους

Ξεκινούμε από την απλούστερη περίπτωση αντικειμένων σε γράφους, δηλαδή απλών σχημάτων. Τα σχήματα αυτά αναπαρίστανται ως δυαδικές εικόνες πάνω στους γράφους: η συνάρτηση φωτεινότητας I παίρνει την τιμή 1 στις κορυφές του γράφου που ανήκουν στο εκάστοτε σχήμα ή σχήματα και 0 σε όλες τις υπόλοιπες κορυφές, όπως για παράδειγμα στην εξίσωση (6.2). Οι γράφοι που χρησιμοποιούνται έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά μεγέθη με αυτά που επελέγησαν στην ενότητα 4.10. Ας σημειωθεί επίσης ότι για τα πειράματα αυτής της ενότητας και των επόμενων που ακολουθούν προτιμήθηκε η Μέθοδος 1 για την προσέγγιση της καμπυλότητας, ενώ όμοια αποτελέσματα λαμβάνουμε και με τη Μέθοδο 2. Επιπλέον, οι παράμετροι του αλγορίθμου ρυθμίστηκαν ως εξής:

- $\Delta t = 0.005$
- $\beta = -20$
- $\sigma = 0.02$
- $\lambda = 0.05$

Δοκιμάζουμε πρώτα τη λειτουργία του αλγορίθμου για συνεκτικά σχήματα, όπως ένας κυκλικός δίσκος ή ένα τρίγωνο, με τα αποτελέσματα να δίνονται στα Σχήματα 7.1 - 7.4. Αρχικά, παρουσιάζουμε το σύνολο των κορυφών που ανήκουν στο εκάστοτε σχήμα με κόκκινο χρώμα και στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα στιγμιότυπα από την εκτέλεση του αλγορίθμου με τις διαδοχικές μορφές που παίρνει η ενεργή καμπύλη να παριστάνονται με κόκκινο χρώμα. Το τελευταίο στιγμιότυπο αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση στο τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης, με τον εξής συμβολισμό: με πράσινες κουκίδες παριστάνονται οι κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, με κόκκινες



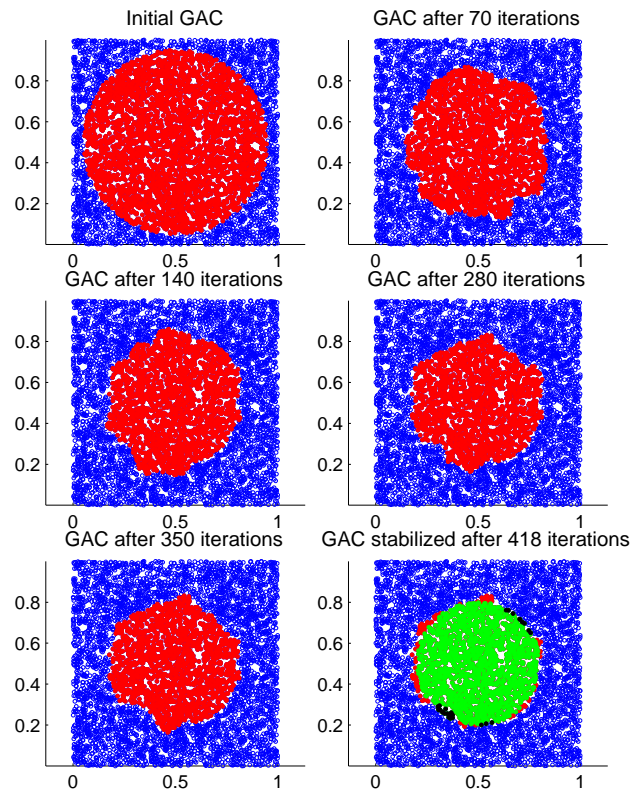
Σχήμα 7.1: Ο αρχικός κυκλικός δίσκος πάνω στο γράφο

κουκίδες οι κορυφές που ανιχνεύθηκαν χωρίς στην πραγματικότητα να ανήκουν στο αντικείμενο, με μαύρες κουκίδες οι κορυφές που ανήκουν στο αντικείμενο αλλά δεν ανιχνεύθηκαν από τον αλγόριθμο και με μπλε κουκίδες οι κορυφές που δεν ανήκουν στο αντικείμενο και ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν από τον αλγόριθμο.

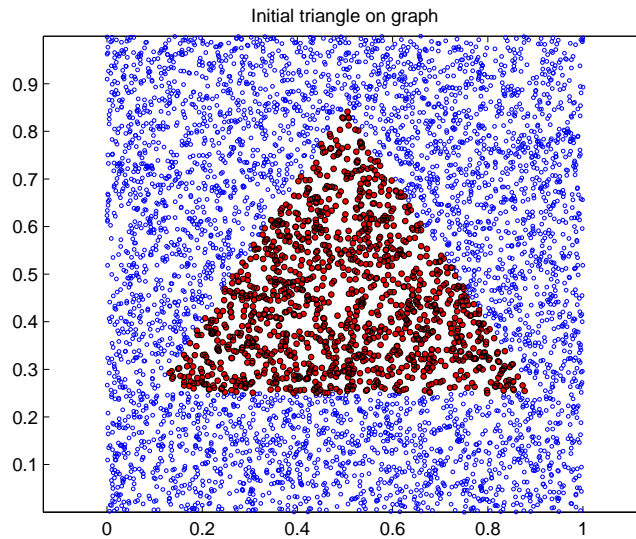
Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος ανιχνεύει με αρκετά μεγάλη επιτυχία αυτά τα απλά σχήματα, χωρίς βέβαια να αποτυπώνει ακριβέστατα το περίγραμμά τους. Μπορούμε να δούμε ότι στις οξείες γωνίες του τριγώνου με το υπόβαθρο, η ενεργή καμπύλη γίνεται σαφώς πιο λεία. Αυτό δε θα πρέπει να μας προβληματίζει, διότι στην προεπεξεργασία της εικόνας με Γκαουσιανό φιλτράρισμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης g , η εφαρμογή του γραμμικού φίλτρου στην αρχική εικόνα στρογγυλοποιεί τις γωνίες και μεταβάλλει προς το ομαλότερο το σχήμα του περιγράμματος του τριγώνου.

Επίσης, παρουσιάζεται για λόγους καλύτερης εποπτείας στο Σχήμα 7.5 και η συνάρτηση Φ για το τρίγωνο όπως έχει διαμορφωθεί μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Περνάμε στη δοκιμή ανίχνευσης πολυπλοκότερων σχημάτων, υπό την έννοια ότι έχουμε περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες ορισμένες πάνω στο γράφο. Ένα τέτοιο σενάριο περιλαμβάνει δύο όμοιους κυκλικούς δίσκους που απέχουν μεταξύ τους μια απόσταση συγκρίσιμη με την ακτίνα τους. Ο αλγόριθμος καταφέρνει να εντοπίσει τα δύο κύρια αντικείμενα του γράφου διαχωρίζοντάς τα με επιτυχία, παρ' όλα τα μικρά λάθη στην ακριβή ανίχνευση των περιγραμμάτων τους, όπως φαίνεται στα Σχήματα 7.6 και 7.7. Παρουσιάζουμε ακόμη στο Σχήμα 7.8 την εξέλιξη του λάθους στην ανίχνευση με την πρόοδο των επαναλήψεων του αλγορίθμου, δείχνοντας τη φθίνουσα πορεία του. Το λάθος αυτό έχει υπολογιστεί προσεγγίζοντας τη διαφορά



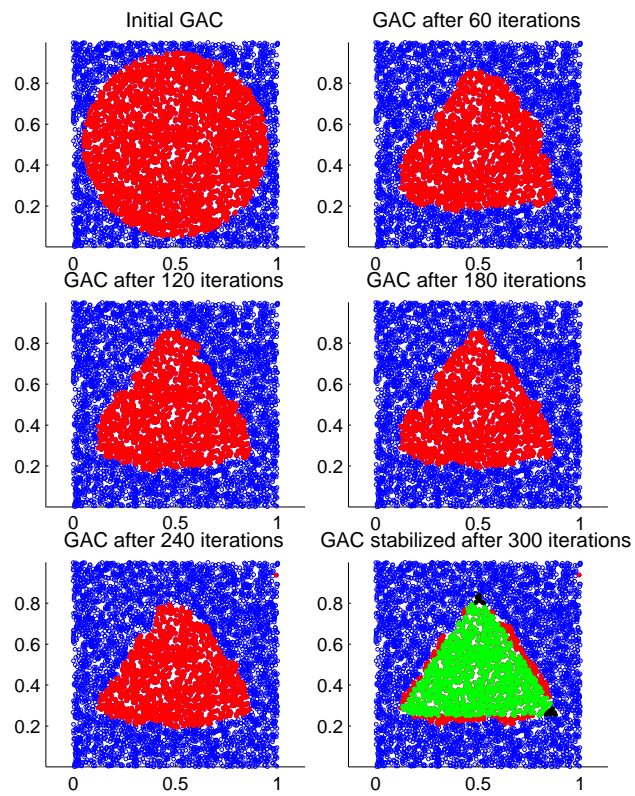
Σχήμα 7.2: Εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από την αρχική της μορφή πάνω αριστερά προς το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης του κυκλικού δίσκου κάτω δεξιά. Κάτω Δεξιά: Πράσινο: κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, Κόκκινο: Κορυφές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα, Μαύρο: κορυφές που λανθασμένα δεν ανιχνεύθηκαν, Μπλε: κορυφές που ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν



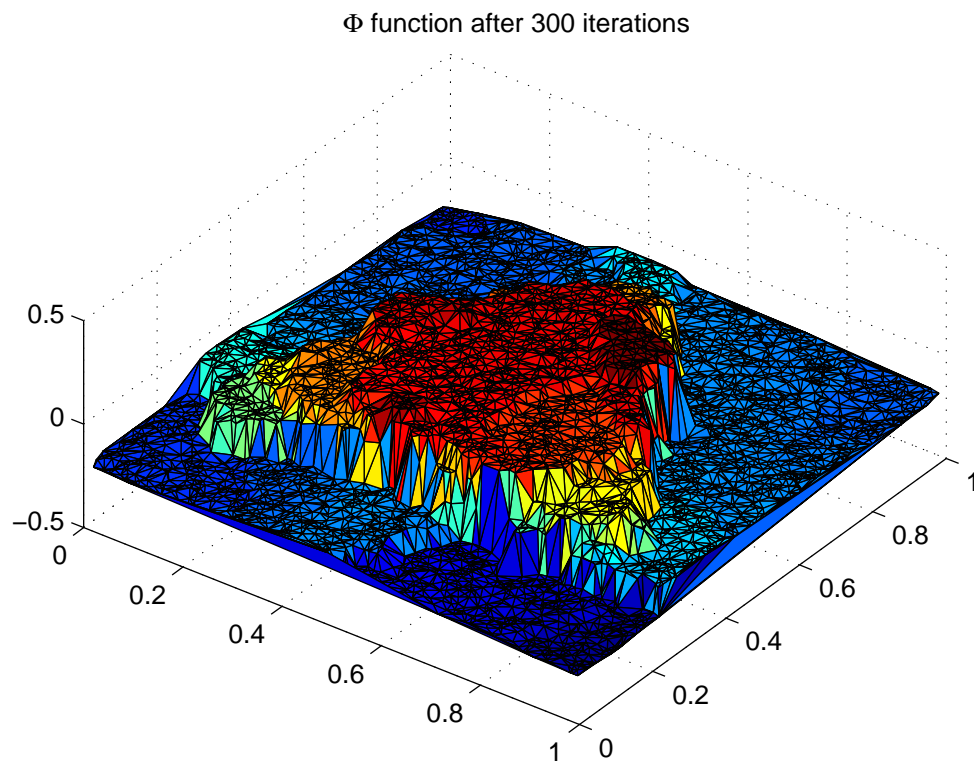
Σχήμα 7.3: Το αρχικό τρίγωνο πάνω στο γράφο

στα εμβαδά των αρχικών σχημάτων και του εσωτερικού της καμπύλης με τον αριθμό των κορυφών στον οποίο η τρέχουσα ανίχνευση είναι λανθασμένη διαιρεμένο με το συνολικό πλήθος κορυφών του γράφου.

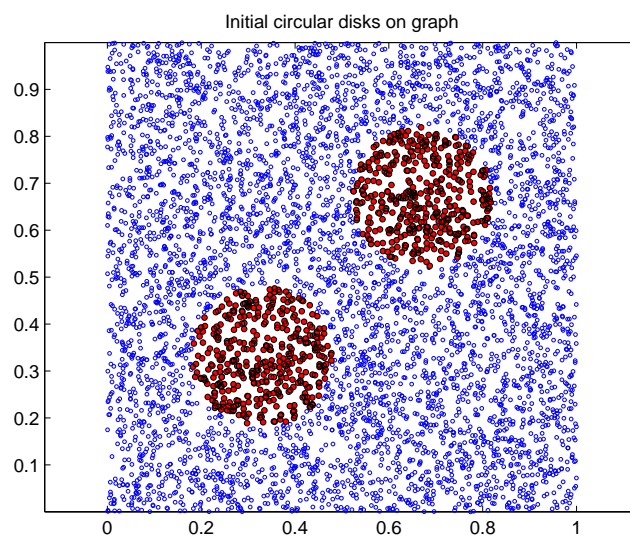
Ας δούμε πώς συμπεριφέρεται ο αλγόριθμος όταν τα αντικείμενα της εικόνας (εδώ οι κυκλικοί δίσκοι) είναι πολύ πλησίον το ένα στο άλλο, σε απόσταση συγκρίσιμη με την ακτίνα ρ του γράφου. Σε μια τέτοια περίπτωση, όπως αυτή που παριστάνεται στο Σχήμα 7.9, η κλίμακα σ του Γκαουσιανού φίλτρου γίνεται συγκρίσιμη με την απόσταση των αντικειμένων και ως εκ τούτου η μορφή της εξομαλυμένης εικόνας θα οδηγήσει στη μη «αποτύπωση» της ενδιάμεσης λωρίδας μεταξύ των δύο σχημάτων στις τιμές της συνάρτησης g (Σχήμα 7.10). Όμως, αφού η συνάρτηση g είναι αυτή που ενσωματώνει όλη την πληροφορία σχετικά με την αρχική εικόνα κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, είναι αναμενόμενο ότι μια τέτοια ατέλεια στον υπολογισμό της θα επηρεάσει αρνητικά την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου. Πράγματι, βλέπουμε στο Σχήμα 7.11 την αδυναμία της ενεργής καμπύλης να χωριστεί σε δύο τμήματα, διατηρώντας ένα στενό ισθμό στο σημείο μεταξύ των δύο κυκλικών δίσκων.



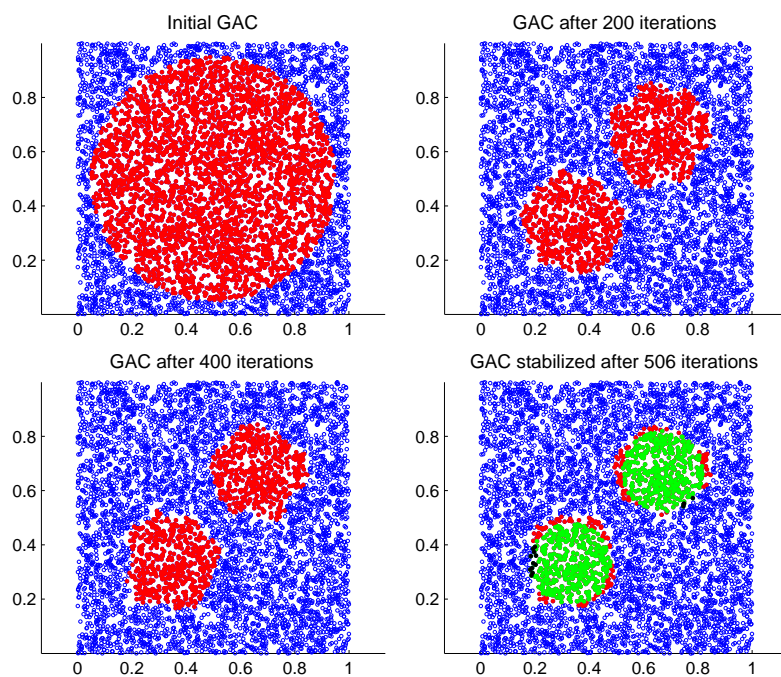
Σχήμα 7.4: Εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από την αρχική της μορφή πάνω αριστερά προς το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης του τριγώνου κάτω δεξιά. Κάτω Δεξιά: Πράσινο: κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, Κόκκινο: Κορυφές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα, Μαύρο: κορυφές που λανθασμένα δεν ανιχνεύθηκαν, Μπλε: κορυφές που ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν



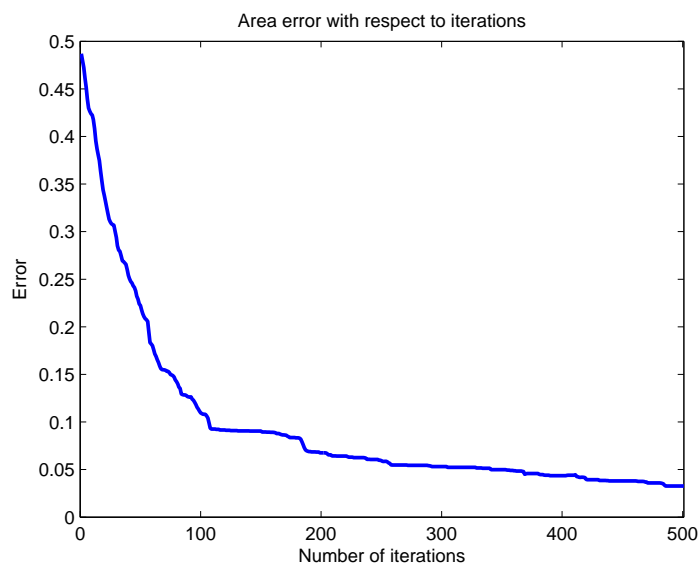
Σχήμα 7.5: Η συνάρτηση Φ για το τρίγωνο του Σχήματος 7.3 μετά από 300 επαναλήψεις του αλγορίθμου



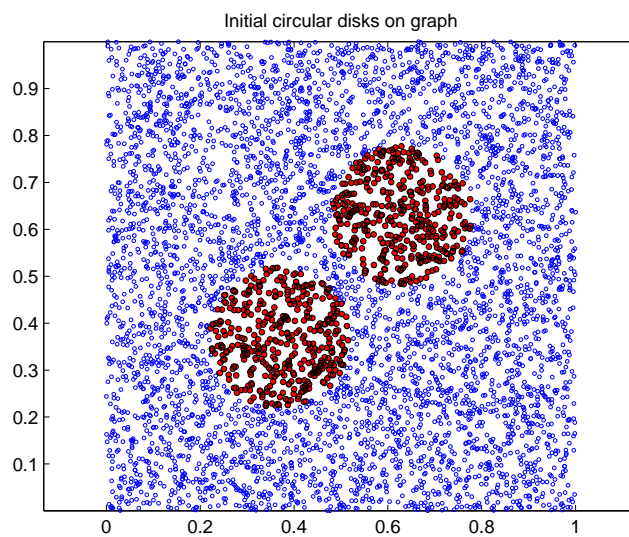
Σχήμα 7.6: Οι δύο αρχικοί κυκλικοί δίσκοι πάνω στο γράφο



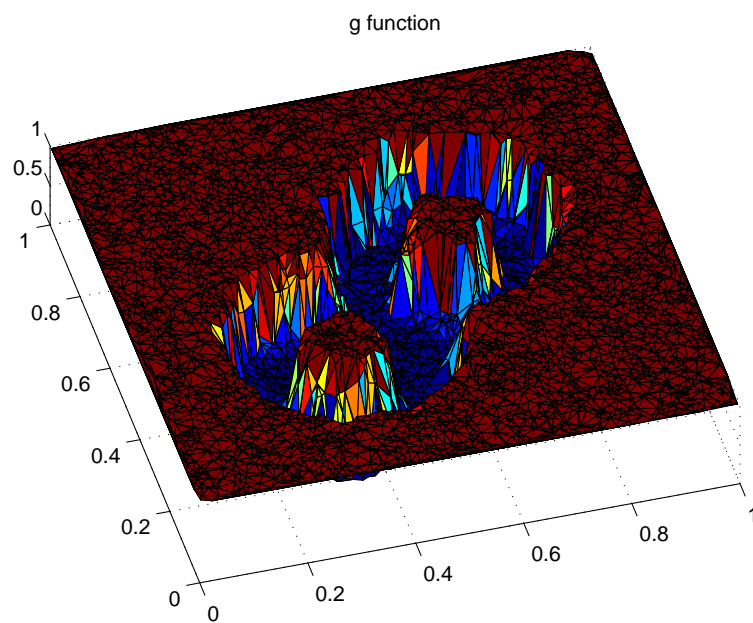
Σχήμα 7.7: Εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από την αρχική της μορφή πάνω αριστερά προς το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης των δύο κυκλικών δίσκων του Σχήματος 7.6 κάτω δεξιά. Κάτω Δεξιά: Πράσινο: κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, Κόκκινο: Κορυφές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα, Μαύρο: κορυφές που λανθασμένα δεν ανιχνεύθηκαν, Μπλε: κορυφές που ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν



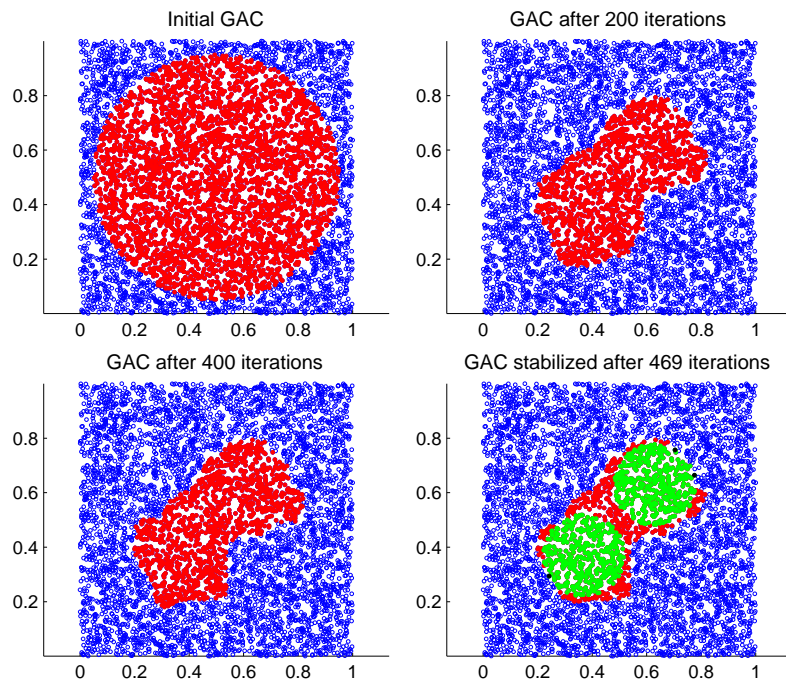
Σχήμα 7.8: Η εξέλιξη του λάθους στην ανίχνευση των κυκλικών δίσκων του Σχήματος 7.6



Σχήμα 7.9: Οι δύο αρχικοί κυκλικοί δίσκοι σε κοντινή απόσταση πάνω στο γράφο



Σχήμα 7.10: Η συνάρτηση g για τους κυκλικούς δίσκους του Σχήματος 7.9 για $\sigma = 0.02$ και $\lambda = 0.05$



Σχήμα 7.11: Εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από την αρχική της μορφή πάνω αριστερά προς το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης των δύο κυκλικών δίσκων του Σχήματος 7.9 κάτω δεξιά. Κάτω Δεξιά: Πράσινο: κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, Κόκκινο: Κορυφές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα, Μαύρο: κορυφές που λανθασμένα δεν ανιχνεύθηκαν, Μπλε: κορυφές που ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν

Διαχωρισμός Κοντινών Δυαδικών Αντικειμένων

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, γίνεται φανερό το «όριο» στη διακριτική ικανότητα του αλγορίθμου, που σχετίζεται με την ακτίνα του γράφου και την εξομάλυνση των αντικειμένων από το Γκαουσιανό φίλτρο. Αντικείμενα που βρίσκονται σε απόσταση ακόμα και λίγο μεγαλύτερη από την ακτίνα είναι πολύ δύσκολο, αν όχι ανέφικτο, να ανιχνευθούν ως διακεκριμένες «συστάδες» από τον αλγόριθμο, ακόμα και αν υπάρχουν ανάμεσά τους κάποιες κορυφές που δεν ανήκουν σε αυτά. Θα επιχειρήσουμε να ποσοτικοποιήσουμε τα συμπεράσματα αυτά, ώστε με μια προσεκτική μεταβολή των σχετιζόμενων παραμέτρων του γράφου και του αλγορίθμου των G.A.C.s, να επιτύχουμε το διαχωρισμό των κυκλικών δίσκων του Σχήματος 7.9, στους οποίους έχουμε επικεντρωθεί, από τον αλγόριθμο.

Έστω d η ελάχιστη απόσταση που χωρίζει τα δύο εκάστοτε σχήματα προς ανίχνευση. Εφαρμόζοντας Γκαουσιανό φιλτράρισμα κλίμακας σ στην εικόνα επί του γράφου, προκαλούμε εξομάλυνση των αρχικών βηματικών ακμών στο περίγραμμα των σχημάτων, οι οποίες τώρα θα εξαπλωθούν σε έκταση περίπου σ εκατέρωθεν της αρχικής τους θέσης. Ως εκ τούτου, τα εξομαλυμένα αντικείμενα θα απέχουν πλέον ελάχιστη απόσταση περίπου $d - 2\sigma$.

Το ζητούμενο για την επίτευξη του διαχωρισμού είναι η συνάρτηση g να λαμβάνει τιμές κοντά στο 1 μεταξύ των δύο σχημάτων, δηλαδή η κλίση της εξομαλυμένης εικόνας να υπολογίζεται περίπου μηδενική. Για να υπάρχουν λοιπόν κορυφές στη λωρίδα μεταξύ των δύο αντικειμένων (αν υποθέσουμε ότι αυτά δεν έχουν ενωθεί λόγω της εξομάλυνσης) στις οποίες η προσέγγιση της κλίσης της εξομαλυμένης εικόνας I_σ πάνω στο γράφο να δίνει περίπου 0, θα πρέπει οι κορυφές αυτές να μην έχουν κανένα γείτονα που να εμπίπτει στα εξομαλυμένα αντικείμενα. Η τελευταία απαίτηση ισχύει όταν οι κορυφές αυτές απέχουν περισσότερο από ρ και από τα δύο εξομαλυμένα αντικείμενα, κάτι που σημαίνει ότι τα εξομαλυμένα αντικείμενα απέχουν περισσότερο από 2ρ μεταξύ τους. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, μια αναγκαία συνθήκη για διαχωρισμό των δύο αντικειμένων είναι:

$$d > 2\sigma + 2\rho. \quad (7.3)$$

Στην πράξη, για να εξασφαλίσουμε ότι οι κορυφές αυτές θα υφίστανται και επιπλέον θα συνδέονται με ακμές μεταξύ τους ώστε να «διαχωρίζουν» πλήρως τα δύο σχήματα, χρειάζεται η προσθήκη ενός μικρού περιθωρίου $\delta(\rho) > 0$ στην ανισότητα (7.3), το οποίο εξαρτάται από την ακτίνα του γράφου.

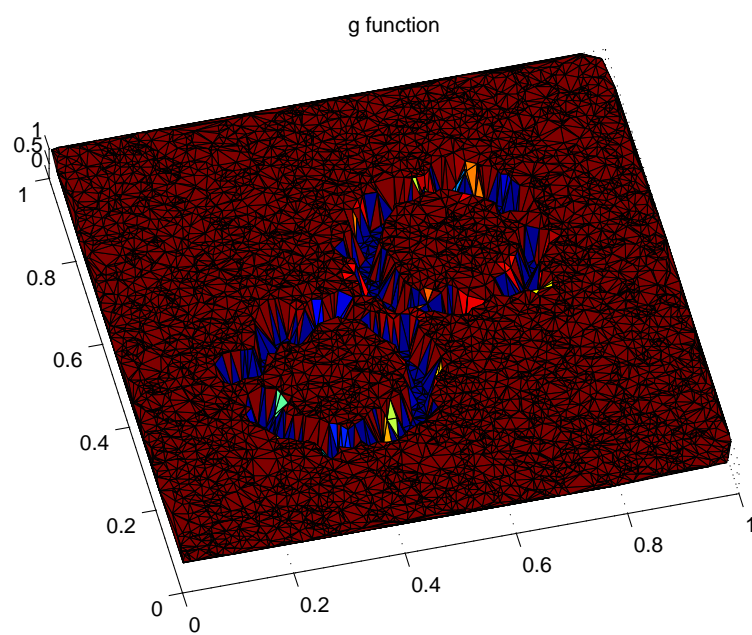
Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμά μας που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 7.9. Τα κέντρα των δίσκων έχουν τοποθετηθεί στα σημεία (0.33, 0.33) και (0.67, 0.67) ενώ οι ακτίνες τους είναι ίσες με 0.15, οπότε η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κορυφών τους θα είναι $d \approx 0.068$. Επιπλέον, η παράμετρος σ ρυθμίστηκε στην τιμή 0.02 και

η ακτίνα του γράφου με βάση το μέγεθός του και την παραμετροποίηση που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι $\rho \approx 0.034$. Επομένως, $2\sigma + 2\rho \approx 0.108$ και η συνθήκη (7.3) δεν ικανοποιείται. Είναι λοιπόν επακόλουθο να μην μπορούν να διαχωριστούν οι δύο δίσκοι από τον αλγόριθμο ακόμα και μετά από αρκετές επαναλήψεις, όπως φάνηκε στο Σχήμα 7.11.

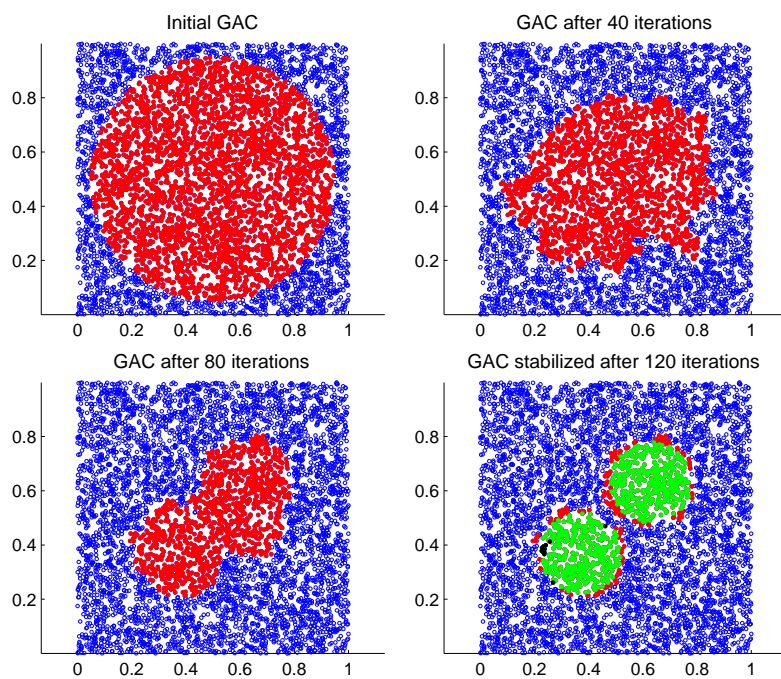
Πρέπει να επιδιώξουμε τη μείωση τόσο του σ όσο και της ακτίνας ρ ώστε να μην υπερβαίνουμε το κατώφλι που εξαγάγαμε παραπάνω. Βέβαια, μια τέτοια μείωση δεν είναι καθόλου ανώδυνη, διότι επιφέρει αφενός (όσον αφορά στην ακτίνα) ελαττωμένη συνεκτικότητα στο γράφο και άρα προβλήματα στο επαναληπτικό σχήμα του αλγορίθμου, αφετέρου (όσον αφορά στο σ) αδρότερη εκτίμηση της κλίσης της εικόνας και συνακόλουθα πιθανά «κενά» στην κλίση πάνω στις ακμές των αντικειμένων, με αντίστοιχες ανωμαλίες στην g . Κατάληξαμε μετά από αρκετές δοκιμές στις τιμές:

- $\sigma = 0.005$
- $\lambda = 0.1$
- $\rho = 0.45n^{-1/3} \approx 0.0255$
- $\beta = -40$
- $\Delta t = 0.005$

Για τους ίδιους κυκλικούς δίσκους με αυτούς του Σχήματος 7.9, εκτελούμε ξανά τον αλγόριθμο με τις νέες τιμές για τις παραμέτρους. Με βάση αυτές τις τιμές, είναι $2\sigma + 2\rho \approx 0.061 < d$ και η (7.3) ικανοποιείται. Η νέα μορφή της συνάρτησης g αποτυπώνεται στο Σχήμα 7.12 και φανερώνει τόσο το θετικό στοιχείο της ύπαρξης μιας διαχωριστικής λωρίδας μεταξύ των δύο δίσκων όσο και το αρνητικό στοιχείο των κενών στην κλίση (gaps in gradient). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.13, ο αλγόριθμος καταφέρνει τελικά να διαχωρίσει τους κυκλικούς δίσκους διατηρώντας και τη μορφή του περιγράμματός τους. Σημειώνουμε ότι ο σχετικά μικρός αριθμός επαναλήψεων οφείλεται στη σκόπιμη επιλογή μεγαλύτερης τιμής του παράγοντα β της δύναμης μπαλονιού απ' ό,τι προηγουμένως.



Σχήμα 7.12: Η συνάρτηση g για τους κυκλικούς δίσκους του Σχήματος 7.9 για $\sigma = 0.005$ και $\lambda = 0.1$



Σχήμα 7.13: Εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από την αρχική της μορφή πάνω αριστερά προς το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης των δύο κυκλικών δίσκων του Σχήματος 7.9 κάτω δεξιά. Κάτω Δεξιά: Πράσινο: κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, Κόκκινο: Κορυφές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα, Μαύρο: κορυφές που λανθασμένα δεν ανιχνεύθηκαν, Μπλε: κορυφές που ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν

7.3 Ανίχνευση Αντικειμένων Γκριζών Εικόνων σε Γράφους

Το πλαίσιο που αυξάνει κατά ένα βαθμό τη δυσκολία στην επιτυχή εφαρμογή του αλγορίθμου είναι οι γκριζες εικόνες ορισμένες πάνω σε γράφους. Σε αυτού του είδους τις εικόνες, η συνάρτηση φωτεινότητας λαμβάνει τιμές μέσα από ένα διάστημα του \mathbb{R} , π.χ. από το $[0, 1]$. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, οι εικόνες αυτές μπορούν να προέλθουν από συνηθισμένες εικόνες με ορθοκανονικό πλέγμα εικονοστοιχείων, πάνω στις οποίες ορίζεται ένας γράφος, είτε με τυχαίο τρόπο είτε μέσω watershed. Θα δοκιμάσουμε εδώ τη λειτουργία του αλγορίθμου και για τις δύο μεθόδους δημιουργίας του γράφου, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που δίνουν. Η εικόνα πάνω στην οποία θα πειραματιστούμε έχει απλή και ξεκάθαρη δομή, περιέχοντας 4 κύρια αντικείμενα - νομίσματα που δεν αλληλοεπικαλύπτονται μεταξύ τους, και φαίνεται στο Σχήμα 7.14.

Ανίχνευση σε Τυχαίο Γράφο

Ακολουθώντας το συμβολισμό του κεφαλαίου 2, διαλέγουμε τον αρχικό αριθμό κορυφών $m = 6000$, ώστε μετά από την αφαίρεση των επιπλέον κορυφών να προκύψει ο τελικός αριθμός τους n κοντά στις 5700. Έτσι, εξασφαλίζουμε ότι ο τυχαίος γράφος που ορίζεται πάνω στην εικόνα θα έχει ίδιες περίπου κορυφές με αυτόν που θα κατασκευαστεί μέσω watershed όπως θα δούμε σε λίγο, καθώς το πλήθος κορυφών του τελευταίου είναι ντετερμινιστικό και δεν μπορεί να ρυθμιστεί. Η συνάρτηση φωτεινότητας όπως έχει μεταφερθεί πάνω στο γράφο απεικονίζεται στο Σχήμα 7.15. Μπορούμε να διακρίνουμε καθαρά τα 4 νομίσματα ως μοιόμορφες περιοχές της εικόνας.

Η ακτίνα του γράφου λαμβάνεται $\rho(n) = \frac{3}{5}n^{-1/3}$. Για την καμπυλότητα, χρησιμοποιήθηκε και εδώ η Μέθοδος 1. Επιπλέον, οι παράμετροι του αλγορίθμου ρυθμίστηκαν ως εξής:

- $\Delta t = 0.005$
- $\beta = -2$
- $\sigma = 0.02$
- $\lambda = 0.03$

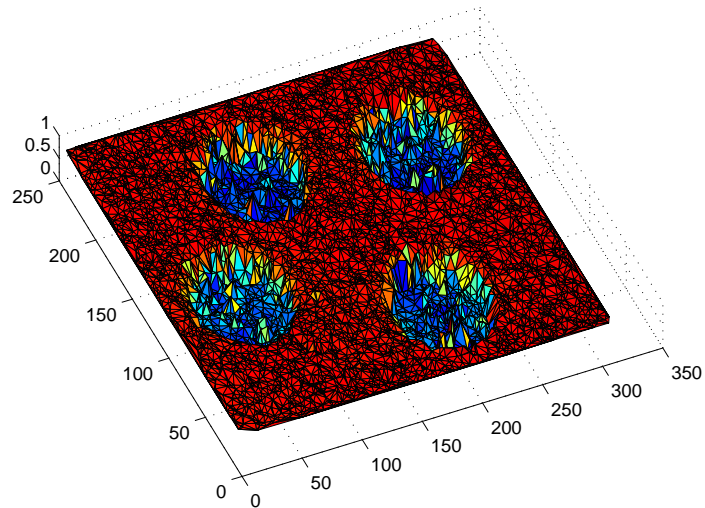
Τονίζουμε ότι η παράμετρος σ που καθορίζει την κλίμακα του Γκαουσιανού φίλτρου και η ακτίνα $\rho(n)$ του γράφου εκφράζονται παραπάνω με σχετικό τρόπο, ως κλάσμα της μικρότερης από τις δύο διαστάσεις της αρχικής εικόνας, οι οποίες ταυτίζονται με τις διαστάσεις του ορθογώνιου χωρίου D .

Initial coins' grayscale image

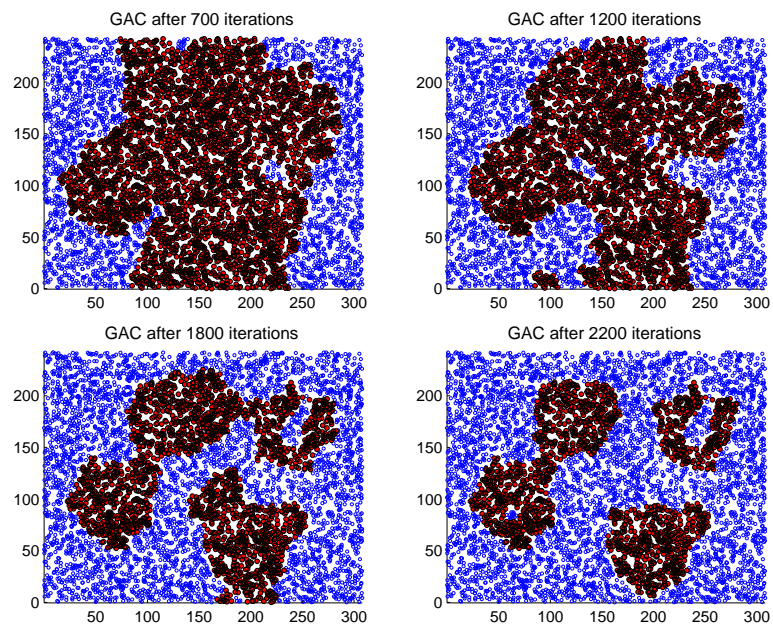


Σχήμα 7.14: Η αρχική γκριζα εικόνα με τα νομίσματα πριν τη δημιουργία του γράφου

Graph version of image function



Σχήμα 7.15: Η εικόνα με τα νομίσματα ορισμένη πάνω στο γεωμετρικό τυχαίο γράφο



Σχήμα 7.16: Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου - Πάνω Αριστερά: 700 επαναλήψεις, Πάνω Δεξιά: 1200 επαναλήψεις, Κάτω Αριστερά: 1800 επαναλήψεις, Κάτω Δεξιά: τελική μορφή της καμπύλης μετά από 2200 επαναλήψεις

Στο Σχήμα 7.16, παρουσιάζουμε στιγμιότυπα από διαδοχικές φάσεις της εξέλιξης της ενεργής καμπύλης πάνω στο γράφο. Με κόκκινες κουκίδες σημειώνονται οι κορυφές που σε κάθε στάδιο περικλείονται από την καμπύλη.

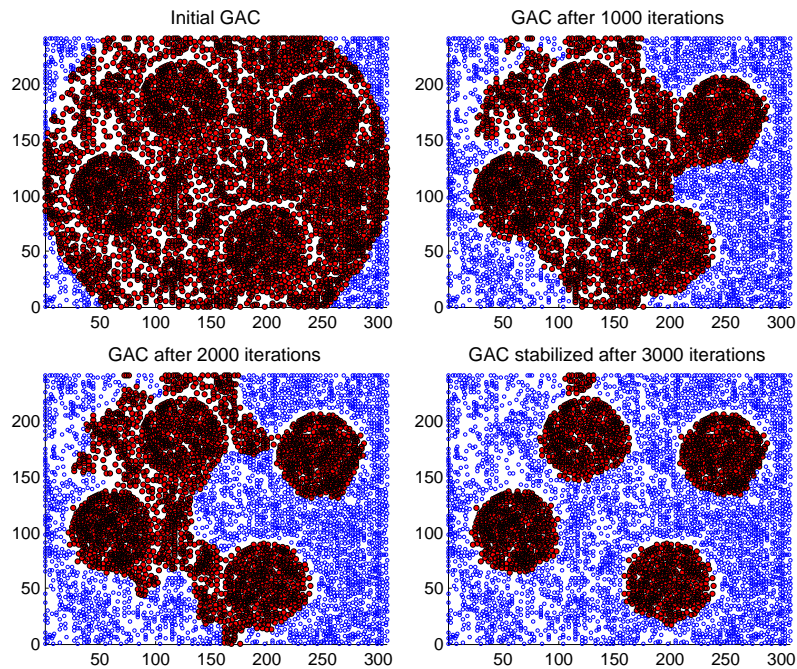
Βλέπουμε ότι η καμπύλη κινείται με επιτυχία προς τα όρια των νομισμάτων, πολύ βραδύτερα βέβαια από την περίπτωση των δυαδικών εικόνων της ενότητας 7.2. Αυτό οφείλεται στην εσκεμμένη επιλογή μικρότερης κατ' απόλυτη τιμή παραμέτρου β , ώστε η σύγκλιση στη νέα, δυσκολότερη περίπτωση να γίνει ομαλά και να αποφευχθούν ταχείες μεταβολές που θα απομάκρυναν την καμπύλη από τα αντικείμενα. Έτσι, η τελική μορφή της ανταποκρίνεται στα 4 κύρια αντικείμενα της εικόνας. Εντούτοις, ο αλγόριθμος δεν καταφέρνει να «αιχμαλωτίσει» την ακριβή κυκλική μορφή των αντικειμένων, ούτε να διαχωρίσει πλήρως δύο από τα νομίσματα που βρίσκονται κοντινότερα το ένα στο άλλο. Οι αιτίες για τη δεύτερη αδυναμία είναι ταυτόσημες με αυτές που αναλύθηκαν στην ενότητα 7.2 για τους κοντινούς κυκλικούς δίσκους. Τέλος, παρατηρούμε ότι σε κάποια αντικείμενα έχουν δημιουργηθεί «τρύπες» στο εσωτερικό τους, που επίσης μαρτυρά ότι ο αλγόριθμος δεν κατόρθωσε να διατηρήσει ακέραια την τοπολογία της εικόνας. Τα προαναφερθέντα προβλήματα είναι λογικά, αν σκεφτεί κανείς την τυχαία και ακανόνιστη φύση του γράφου που χρησιμοποιείται εδώ, ο οποίος αποτελεί το υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται ο αλγόριθμος.

Ανίχνευση σε Γράφο Δημιουργημένο από Watershed

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό watershed στην αρχική εικόνα όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2, λαμβάνουμε ένα γράφο με περίπου 5100 κορυφές. Το μέγεθος αυτό είναι παρόμοιο με το μέγεθος του τυχαίου γράφου της προηγούμενης ενότητας, κάτι που επιτρέπει την ευθεία σύγκριση των δύο μεθόδων. Για την καμπυλότητα, χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος 1.

Στην κατεύθυνση της επίτευξης ορθής τοπολογίας για το αποτέλεσμα της ανίχνευσης, στηρίζομαστε στη μελέτη που έγινε στην ενότητα 7.2 για την περίπτωση κοντινών αντικειμένων. Για να μεταφέρουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα στο παρόν πλαίσιο ενός γράφου που έχει οριστεί μέσω μιας αρχικής εικόνας, θεωρούμε ότι κάθε pixel ισοδυναμεί με ένα τετράγωνο μοναδιαίων διαστάσεων, επομένως ο γράφος βρίσκεται εντός ορθογωνίου χωρίου D διαστάσεων W επί H . Συνεπώς, όλοι οι υπολογισμοί μηκών που γίνονται όπως προηγουμένως θα ακολουθούνται από μια κλιμάκωση με τη σταθερά $s = \min\{W, H\}$. Με βάση τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση τυχαίου γράφου, είναι $2\rho + 2\sigma \approx 26.56$, ενώ η ελάχιστη απόσταση d των δύο νομισμάτων στα αριστερά της εικόνας είναι $d \approx 28$. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (7.3) τηρείται μεν αλλά οριακά, καθώς το περιθώριο δ είναι πολύ μικρό, επομένως είναι λογική η αδυναμία του αλγορίθμου να διαχωρίσει τα δύο νομίσματα στο Σχήμα 7.16.

Προσπαθούμε λοιπόν να δώσουμε ένα μεγαλύτερο περιθώριο στην ανισότητα (7.3), μειώνοντας το σ σε 0.008 και μεταβάλλοντας το λ σε 0.07, αφήνοντας αμετάβλητη



Σχήμα 7.17: Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου - Πάνω Αριστερά: αρχική μορφή της καμπύλης, Πάνω Δεξιά: 1000 επαναλήψεις, Κάτω Αριστερά: 2000 επαναλήψεις, Κάτω Δεξιά: τελική μορφή της καμπύλης μετά από 3000 επαναλήψεις

την παραμετροποίηση της ακτίνας του γράφου, δηλαδή $\rho(n) = \frac{3}{5}n^{-1/3}$. Τώρα, είναι $2\rho + 2\sigma \approx 20.75$, και με τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες όπως στο πείραμα με τον τυχαίο γράφο, εκτελούμε τον αλγόριθμο.

Οι διαδοχικές φάσεις εξέλιξης της καμπύλης πάνω στο γεωμετρικό γράφο απεικονίζονται στο Σχήμα 7.17. Σημειώνουμε ότι ο σχηματισμός μέσω watershed προσδίδει στο γράφο μια κανονικότερη φύση και δομή, η οποία είναι εμφανής στο Σχήμα 7.17, εν μέρει λόγω του κβαντισμού που υφίσταται στις συντεταγμένες των κορυφών.

Ο αλγόριθμος, με το συγκεκριμένο σύνολο παραμέτρων, οδηγεί την καμπύλη στα 4 αντικείμενα με αξιοσημείωτη επιτυχία. Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει αφενός στην ακριβέστατη αποτύπωση των περιγραμμάτων των νομισμάτων από την καμπύλη και αφετέρου στον πλήρη διαχωρισμό των νομισμάτων. Η συστάδα κορυφών που επιφύεται στο άνω τμήμα του πάνω αριστερά νομίσματος στην τελική καμπύλη οφείλεται σε μια λεπτή γραμμή θορύβου στην αρχική εικόνα που λόγω του μικρότερου σ δεν εξομαλύνθηκε αρκετά, αλλά δεν επηρεάζει κατά τα άλλα την ανίχνευση των νομισμάτων. Είναι

εμφανές ότι η λειτουργία του αλγορίθμου είναι κατά πολύ βελτιωμένη σε σχέση με την περίπτωση του τυχαίου γράφου και αυτό οφείλεται στην κωδικοποίηση περισσότερης πληροφορίας για την αρχική γκριζα εικόνα μέσα από την τοποθέτηση των κορυφών του γράφου στα κέντρα των περιοχών που προκύπτουν από το watershed. Μπορούμε να αντιληφθούμε τη συνάρτηση φωτεινότητας που ορίζεται πάνω στο συγκεκριμένο γράφο ως μια απλοποίηση της αρχικής πλήρους εικόνας, αφού έχει διατηρηθεί μία μόνο τιμή για κάθε μικρή ομογενή περιοχή της αρχικής εικόνας που προκύπτει από το μετασχηματισμό watershed.

7.4 Εφαρμογή σε Γράφους με Δομή Τριγωνοποίησης Delaunay

Στις ενότητες 7.2 και 7.3, όλα τα πειράματα που πραγματοποιήσαμε αφορούσαν σε γεωμετρικούς τυχαίους γράφους ή σε γράφους που οι κορυφές τους ορίζονταν μέσω watershed αλλά πάλι οι ακμές τους άγονταν βάσει της ίδιας αρχής με τους γεωμετρικούς τυχαίους γράφους, δηλαδή της εγγύτητας των κορυφών. Αυτός ο τρόπος δημιουργίας των γράφων έχει ορισμένα εγγενή μειονεκτήματα. Έχουμε ήδη δει ότι αρκετά αποτελέσματα για τη σύγκλιση των προσεγγίσεων αλλά και η επιτυχημένη εκτέλεση του αλγορίθμου εξαρτώνται σημαντικά από την επιλογή κατάλληλης ακτίνας ρ . Συγχρόνως, οι γεωμετρικοί τυχαίοι γράφοι δεν είναι επίπεδοι, υπό την έννοια ότι αρκετές ακμές τους τέμνονται μεταξύ τους [3]. Αυτό έχει συνέπεια να υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση στο βαθμό κάθε κορυφής, δηλαδή στον αριθμό των γειτόνων τους που συμμετέχουν στον υπολογισμό των προσεγγίσεων, ανάλογα με την πυκνότητα με την οποία έχουν κατανεμηθεί οι κορυφές σε κάθε περιοχή του χωρίου D . Είδαμε ότι στην περίπτωση των γράφων που παράγονται μέσω watershed, αυτές οι ανομοιογένειες διορθώνονται σε κάποιο βαθμό, θα θέλαμε όμως αυτό να επιτυγχάνεται και για τυχαίους γράφους.

Μια δυνατή εναλλακτική λύση είναι ο ορισμός των ακμών του γράφου ώστε να σχηματίζουν μια τριγωνοποίηση Delaunay του συνόλου των κορυφών του. Η τριγωνοποίηση Delaunay συνδέεται άμεσα με το διάγραμμα Voronoi του συνόλου κορυφών $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ του γράφου [3, 4], καθώς δύο κορυφές v και w συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν τα πολύγωνα Voronoi τους έχουν κοινή πλευρά. Έτσι, η τριγωνοποίηση Delaunay αποτελεί το δυϊκό γράφο του διαγράμματος Voronoi.

Ο τρόπος σχηματισμού του γράφου ως τριγωνοποίησης Delaunay επιβάλλει μια ομοιομορφία στον τρόπο σύνδεσης των κορυφών, παρόλο που ενδέχεται να συνδέονται και κορυφές που απέχουν αρκετά μεταξύ τους, ιδίως στο περίγραμμα του γράφου. Αυτό το γεγονός μας προδιαθέτει θετικά όσον αφορά στην ακρίβεια των προσεγγίσεων και κατ' επέκταση την επιτυχή λειτουργία του αλγορίθμου. Θα πρέπει όμως να επιστημονούμε ότι λόγω της επιπεδότητας της τριγωνοποίησης Delaunay, επάγεται

το φράγμα $3n - 6$ για το πλήθος $\text{card}(\mathcal{E})$ των ακμών του γράφου [4], που σημαίνει ότι ο αριθμός γειτόνων κάθε κορυφής παραμένει πεπερασμένος καθώς το πλήθος των κορυφών τείνει να απειρισθεί, αναιρώντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4 για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σφάλματος.

Έχοντας τα παραπάνω υπ' όψιν μας, επαναλαμβάνουμε ορισμένα από τα πειράματα των ενοτήτων 7.2 και 7.3 με τριγωνοποιήσεις Delaunay αντί για γεωμετρικούς τυχαίους γράφους ως υπόστρωμα και παρουσιάζουμε στη συνέχεια ενδεικτικά κάποια από τα αποτελέσματα. Στο Σχήμα 7.18, φαίνεται η εξέλιξη των καμπυλών για τους κυκλικούς δίσκους του Σχήματος 7.6, με το ίδιο σύνολο παραμέτρων όπως προγουμένως. Είναι φανερό η βελτίωση της επίδοσης του αλγορίθμου σε σχέση με την περίπτωση γεωμετρικού τυχαίου γράφου, με το περίγραμμα των δίσκων να αποτυπώνεται πολύ πιστά. Αυτή η συμπεριφορά μεταφράζεται και σε υψηλότερα επίπεδα ακρίβειας του αλγορίθμου.

Στη συνέχεια, πειραματιζόμαστε και πάλι με την γκριζα εικόνα του Σχήματος 7.14 για να κρίνουμε εάν αυτή η «υπεροχή» της τριγωνοποίησης Delaunay επεκτείνεται και σε γκριζες εικόνες πάνω στους γράφους. Αρχικά, λαμβάνουμε τυχαίο γράφο και το σύνολο παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκε στην αντίστοιχη περίπτωση της ενότητας 7.3 και εκτελούμε τον αλγόριθμο, με τα αποτελέσματα να απεικονίζονται στο Σχήμα 7.19.

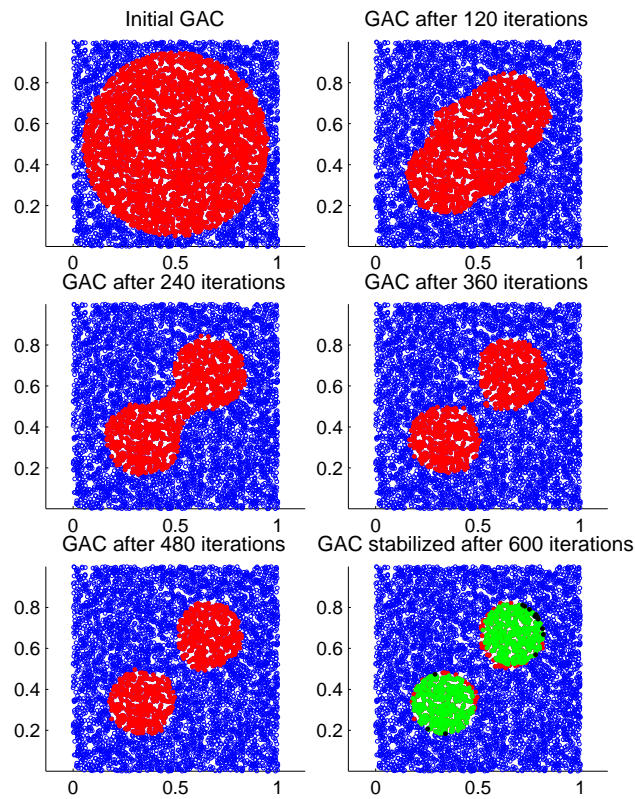
Παρατηρούμε ότι η ανίχνευση των νομισμάτων ως κύριων αντικειμένων του γράφου στέφεται με μεγάλη επιτυχία, καθώς αυτά αποτυπώνονται με αρκετά ικανοποιητική ακρίβεια, ειδικά σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για γεωμετρικό τυχαίο γράφο (Σχήμα 7.16). Η ορθή σύγκλιση του αλγορίθμου επιβεβαιώνεται και από την τελική μορφή της συνάρτησης Φ , η οποία φαίνεται στο Σχήμα 7.20.

Τέλος, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο στην τριγωνοποίηση Delaunay που προκύπτει από watershed της αρχικής εικόνας με το ακόλουθο σύνολο παραμέτρων:

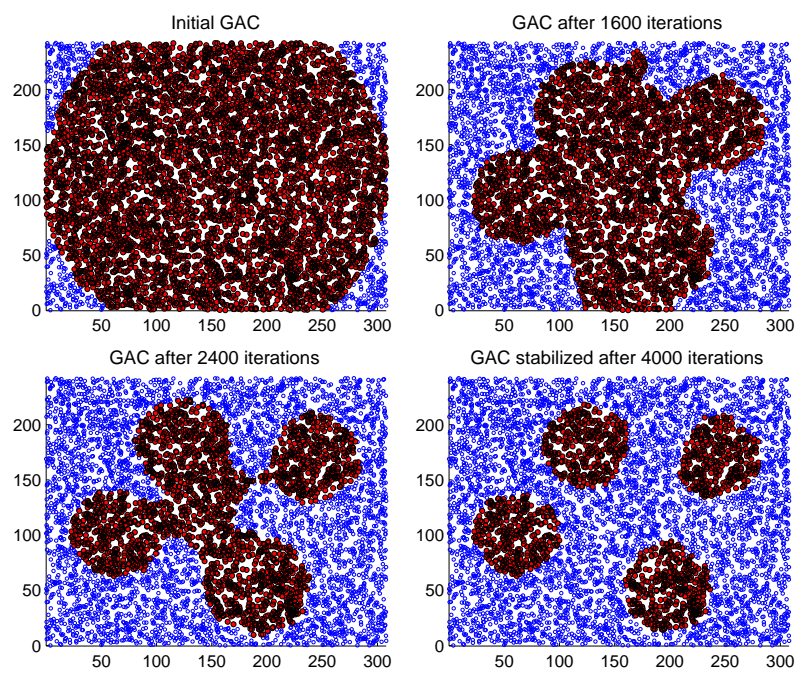
- $\Delta t = 0.005$
- $\beta = -2$
- $\sigma = 0.01$
- $\lambda = 0.07$

Τα στιγμιότυπα από την εξέλιξη των ενεργών καμπυλών φαίνονται στο Σχήμα 7.21. Η ανίχνευση των νομισμάτων είναι απόλυτα επιτυχής, υπερβαίνοντας σε ποιότητα τόσο την περίπτωση τυχαίου γράφου με μορφή τριγωνοποίησης Delaunay (Σχήμα 7.19) όσο και την περίπτωση γεωμετρικού γράφου με κορυφές από μετασχηματισμό watershed (Σχήμα 7.17).

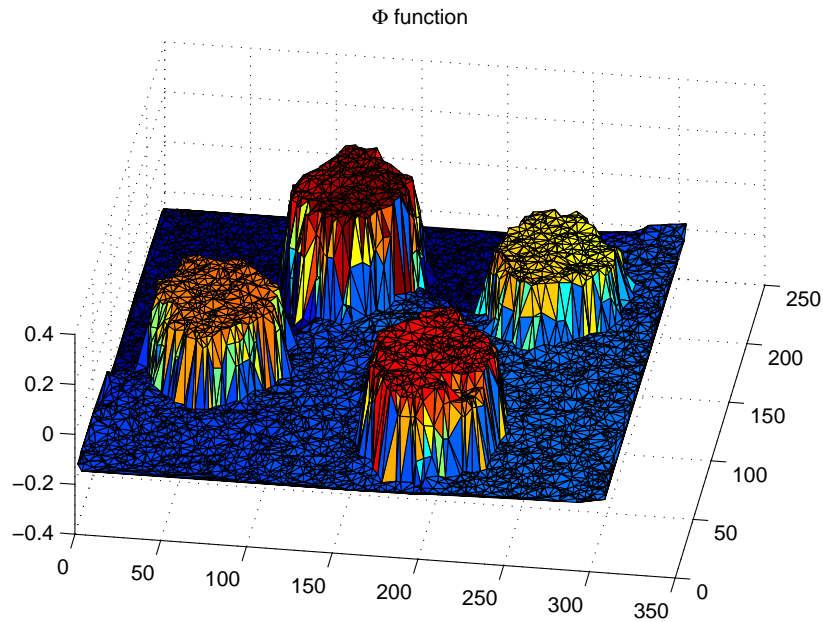
Μπορούμε να αποφανθούμε με βάση τα ανωτέρω αποτελέσματα ότι η τριγωνοποίηση Delaunay υπερέχει σε ένα βαθμό του γεωμετρικού τυχαίου γράφου ως γραφοθεωρητική δομή πάνω στην οποία μπορεί να εκτελεστεί ο αλγόριθμος των γεωδαιτικών



Σχήμα 7.18: Εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από την αρχική της μορφή πάνω αριστερά προς το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης των δύο κυκλικών δίσκων του Σχήματος 7.6 κάτω δεξιά. Κάτω Δεξιά: Πράσινο: κορυφές που ανιχνεύθηκαν επιτυχώς, Κόκκινο: Κορυφές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα, Μαύρο: κορυφές που λανθασμένα δεν ανιχνεύθηκαν, Μπλε: κορυφές που ορθώς δεν ανιχνεύθηκαν. Η ακρίβεια στην ανίχνευση ανέρχεται σε 98.6%.



Σχήμα 7.19: Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου - Πάνω Αριστερά: αρχική μορφή της καμπύλης, Πάνω Δεξιά: 1600 επαναλήψεις, Κάτω Αριστερά: 2400 επαναλήψεις, Κάτω Δεξιά: τελική μορφή της καμπύλης μετά από 4000 επαναλήψεις

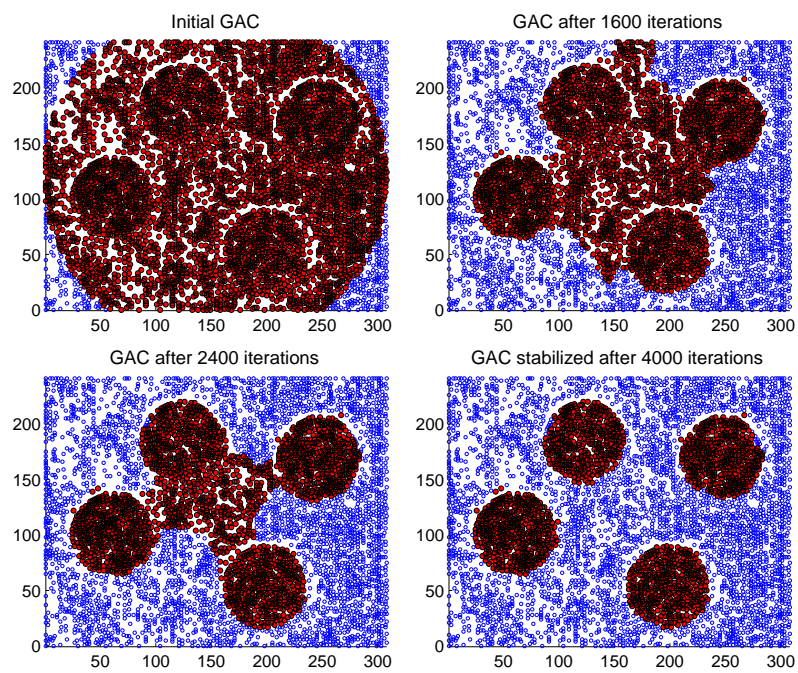


Σχήμα 7.20: Η συνάρτηση Φ για την εικόνα του Σχήματος 7.14 σε τριγωνοποίηση Delaunay μετά από 4000 επαναλήψεις του αλγορίθμου

ενεργών καμπυλών. Ωστόσο, η υπεροχή αυτή πρέπει να τεκμηριωθεί και σε θεωρητικό επίπεδο, με μελέτη των σφαλμάτων των προσεγγίσεων για τη συγκεκριμένη δομή, όπως έγινε στο κεφάλαιο 4 για γεωμετρικούς τυχαίους γράφους.

7.5 Επίδραση Παραμέτρων στο Αποτέλεσμα του Αλγορίθμου - Γενικός Σχολιασμός

Υψιστης σημασίας για την ορθή εφαρμογή του αλγορίθμου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών και την επιτυχή κατάτμηση του γράφου σε αντιστοιχία με τα κύρια αντικείμενα της εικόνας είναι η ανάθεση κατάλληλης τιμής στο «χρονικό» βήμα Δt της διακριτοποιημένης μορφής του αλγορίθμου (7.1). Η αύξηση της τιμής του Δt πέραν ενός ορίου διαπιστώσαμε ότι οδηγεί σε αστάθειες τον αλγόριθμο, με τις ενεργές καμπύλες να κινούνται προς τελείως διαφορετικά σημεία από τα περιγράμματα των αντικειμένων και τη συνάρτηση Φ να αποκτά μορφή πολύ διαφορετική από την επιθυμητή που έχει όταν ο αλγόριθμος συγκλίνει. Αυτή η συμπεριφορά συνδέεται και με την επισήμανση των Osher and Sethian [5], στην ανάλυσή τους για την εφαρμογή της ιδέας των ενεργών καμπυλών σε διακριτό χωρικό πλέγμα με βήμα Δx , ότι ο λόγος $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ πρέπει να διατηρείται αρκούντως μικρός ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του



Σχήμα 7.21: Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου - Πάνω Αριστερά: αρχική μορφή της καμπύλης, Πάνω Δεξιά: 1600 επαναλήψεις, Κάτω Αριστερά: 2400 επαναλήψεις, Κάτω Δεξιά: τελική μορφή της καμπύλης μετά από 4000 επαναλήψεις

διακριτού σχήματος. Αξίζει λοιπόν ασυζητητί να θυσιάσουμε από την ταχύτητα του αλγορίθμου, με ένα αρκετά μικρό βήμα Δt , προκειμένου να κατοχυρώσουμε ότι ο αλγόριθμος δε θα αποκλίνει από το ορθό αποτέλεσμα. Στην περίπτωση των τυχαίων γράφων που μελετάμε, δεν υπάρχει κανονικότητα στο χωρικό πλέγμα, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε την απόσταση μεταξύ δύο κορυφών που συνδέονται με ακμή ως το χωρικά μεταβλητό «στοιχειώδες» μήκος Δx του πλέγματος που ορίζεται μέσω του γράφου. Η απόσταση αυτή είναι τυχαία μεταβλητή, έστω R , η οποία έχει την ακόλουθη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \frac{\pi r^2}{\pi \rho^2} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^2, & 0 \leq r \leq \rho \\ 1, & r \geq \rho \end{cases} \quad (7.4)$$

Από την (7.4), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της R , η οποία προκύπτει $E[R] = \frac{2}{3}\rho$ και δίνει μια καλή εκτίμηση της κλίμακας του χωρικού πλέγματος στο γράφο. Συνεπώς, καταλήγουμε με βάση και σχετικές δοκιμές ότι οι «ασφαλείς» τιμές για το Δt για τους γράφους με τους οποίους πειραματιζόμαστε κυμαίνονται γενικά κάτω από την τάξη μεγέθους του 10^{-2} .

Βασικό ρόλο στη σωστή λειτουργία του αλγορίθμου παίζει και η επιτυχημένη ρύθμιση της σχετικής «ισχύος» της δύναμης μπαλονιού συγκριτικά με τις δυνάμεις καμυλότητας και ελατηρίου, μέσω του παράγοντα β . Αν στο β δοθεί πολύ μικρή τιμή κατά την απόλυτη έννοια, δηλαδή μεταξύ 0 και -1 , τότε η ώθηση που θα έδινε η δύναμη μπαλονιού στην καμπύλη να συσταλεί, κινώντας την γρηγορότερα προς το περίγραμμα των αντικειμένων, πρακτικά καταργείται. Αυτό επιβραδύνει σημαντικά τη σύγκλιση του αλγορίθμου και αφήνει την ενεργή καμπύλη να κινείται για μεγάλο διάστημα μακριά από τα περιγράμματα των αντικειμένων, με συχνό επακόλουθο να μην καταφέρνει να τα πλησιάσει χωρίς λάθη. Από την άλλη πλευρά, η ανάθεση υπερβολικά μεγάλης τιμής στο β σε μια βεβιασμένη προσπάθεια να οδηγήσουμε την καμπύλη κατευθείαν πάνω στα περιγράμματα των αντικειμένων παρατηρήσαμε ότι προξενεί την εμφάνιση οπών στο εσωτερικό των περιοχών προς ανίχνευση, αλλοιώνοντας έτσι την επιθυμητή τοπολογία της καμπύλης. Αυτές οι οπές δημιουργούνται εξαιτίας της αχρείαστα μεγάλης συνεισφοράς του όρου μπαλονιού $g(I)\beta \|\nabla\Phi_{r-1}\|$ που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της (7.1), όταν το β έχει πολύ μεγάλη αρνητική τιμή. Ο όρος αυτός έχει αρνητικό πρόσημο και, εάν σε κάποιο σημείο του εσωτερικού των αντικειμένων (όπου η g δεν είναι κοντά στο 0) η κλίση δεν υπολογιστεί περίπου μηδενική, τότε θα «βυθίσει» την επόμενη εκδοχή της ενσωματώνουσας συνάρτησης, Φ_r , σε αρνητικά επίπεδα. Διαπιστώσαμε ότι για την αποφυγή τέτοιων φαινομένων, ο παράγοντας β πρέπει να μην ξεπερνά σε κάθε περίπτωση τα επίπεδα του -50 για τους γράφους και τις εικόνες που μελετάμε. Τώρα, όσον αφορά στην ακριβή επιλογή της τιμής του

β μεταξύ των δύο ορίων που θέσαμε παραπάνω, αυτή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την πολυπλοκότητα της εικόνας πάνω στο γράφο. Για παράδειγμα, για τα απλά σχήματα της ενότητας 7.2 το β κυμαίνεται περί το -20 , ενώ για τις γκρίζες εικόνες στην ενότητα 7.3 που είναι σαφώς συνθετότερες, πρέπει να επιλέγεται ασθενέστερο β , γύρω στο -2 έως -5 .

Οι παραπάνω παράμετροι επηρεάζουν τη συμπεριφορά του επαναληπτικού σχήματος του αλγορίθμου από βήμα σε βήμα, καθώς υπεισέρχονται αποκλειστικά στην εξίσωση μερικών διαφορών (7.1) η οποία προσομοιώνει το μοντέλο των ενεργών καμπυλών μέσω επιπεδοσυνόλων. Στις προηγούμενες ενότητες όμως, συναντήσαμε και ένα άλλο είδος παραμέτρων, που σχετίζονται περισσότερο με την αρχικοποίηση του αλγορίθμου όσο και με την κατασκευή της ακριβούς δομής του γράφου πάνω στον οποίο εκτελείται ο αλγόριθμος.

Δύο από τις παραμέτρους της δεύτερης κατηγορίας είναι οι παράμετροι σ και λ που εμπλέκονται στον υπολογισμό της συνάρτησης έντασης των ακμών g , η οποία δρα ως παράγοντας τερματισμού του αλγορίθμου. Η αρχική εξομάλυνση της εικόνας I που ορίζεται πάνω στο γράφο είναι αναγκαία προκειμένου να εξαχθούν μόνο οι κύριες ακμές της εικόνας που περιβάλλουν τα σημαντικότερα αντικείμενα του γράφου. Ως εκ τούτου, απαιτείται εκ των πραγμάτων η επιλογή μιας κλίμακας σ για το Γκαουσιανό φίλτρο η οποία να υπερβαίνει ένα μικρό θετικό κατώφλι, ώστε να αμβλύνονται λεπτομέρειες μικρής κλίμακας πάνω στην εικόνα που πρέπει να αγνοηθούν κατά την εξέλιξη των ενεργών καμπυλών. Παράλληλα, είδαμε στην ενότητα 7.2 πώς η τιμή του σ καθορίζει πόσο θα «επεκταθούν» τα αρχικά αντικείμενα, εισάγοντας ένα όριο στο βαθμό της εξομάλυνσης το οποίο σχετίζεται με την αποφυγή της συνένωσης κοντινών αντικειμένων στην εξομαλυμένη εικόνα. Επομένως, και εδώ η ρύθμιση του σ πρέπει να γίνεται εντός ενός διαστήματος και το διάστημα εκείνο που έδωσε καλά αποτελέσματα είναι το $[0.005, 0.05]$, εκφρασμένο σχετικά ως προς τις διαστάσεις του γράφου. Η παράμετρος λ παίζει επικουρικό ρόλο στον τελικό υπολογισμό της συνάρτησης g , κλιμακώνοντας το μέτρο της κλίσης της εξομαλυμένης εικόνας που δέχεται ως όρισμα η συνάρτηση. Έτσι, ρυθμίζεται κατά το δυνατόν ώστε το πεδίο τιμών της g να καταλαμβάνει όλο το διάστημα $[0, 1]$, αντιστοιχίζοντας τα σημεία των ακμών σε τιμές όσο γίνεται εγγύτερα στο 0 και τις ομοιογενείς περιοχές σε τιμές σχεδόν ίσες με 1. Η προτιμότερη τιμή του λ διαφέρει λοιπόν από εικόνα σε εικόνα και γενικά, για τιμές φωτεινότητας εντός του $[0, 1]$, εμπίπτει στο εύρος 0.02 έως 1.

Επιπλέον, η παράμετρος που δημιουργεί τις συνδέσεις των κορυφών του γράφου με ακμές είναι η ακτίνα ρ του γράφου. Αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα κρίσιμο για τον αλγόριθμο, διότι καθορίζει από πόσους και ποιους γείτονες θα παίρνει πληροφορία κάθε κορυφή σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, ώστε να υπολογίζονται σε αυτήν τα κύρια μεγέθη της εξίσωσης εξέλιξης (7.1). Σε όλη την εργασία, έχουμε συναρτήσει την ακτίνα με το πλήθος των κορυφών του γράφου n μέσω της σχέσης (4.45), σε μια προσπάθεια να συμβαδίζουμε με τα θεωρητικά αποτελέσματα του κεφαλαίου

4 για τη σύγκλιση της προσέγγισης της κλίσης. Υπάρχει όμως το περιθώριο ρύθμισης της ακτίνας εντός μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς c , το οποίο μας δίνει την ελευθερία να τη φέρουμε στην επιθυμητή τιμή. Μια πολύ μικρή τιμή της ακτίνας σε σχέση με το πλήθος κορυφών συνεπάγεται την ύπαρξη λιγότερων γειτόνων για κάθε κορυφή καθώς ο γράφος είναι αραιότερος, με συνέπεια οι προσεγγίσεις που επιτελούμε πάνω στο γράφο να στηρίζονται σε λιγότερα στοιχεία. Ωστόσο εξασφαλίζεται ότι οι υπολογισμοί εκτελούνται βάσει μόνο της πολύ κοντινής περιοχής κάθε κορυφής, κάτι επιθυμητό για τους τοπικούς υπολογισμούς μεγεθών που εκτελούμε. Μεγαλύτερες τιμές στην ακτίνα δίνουν πυκνότερους γράφους, με τους υπολογισμούς σε κάθε κορυφή να γίνονται πιο «λεπτομερείς», αν και η γειτονιά μεγαλώνει σε έκταση και περιλαμβάνει γείτονες σε όχι επαρκώς μικρή απόσταση από την κορυφή. Είδαμε επίσης ότι στην περίπτωση κοντινών αντικειμένων, μια σχετικά μεγάλη ακτίνα του γράφου μπορεί να οδηγήσει σε ατέλειες στον υπολογισμό της g και εντέλει σε ημιτελή ανίχνευση των αντικειμένων χωρίς αυτά να διαχωρίζονται. Συμπερασματικά, η επιλογή της ακτίνας καλό είναι να γίνεται με κριτήριο την εκάστοτε εικόνα προς κατάτμηση και σε γενικές γραμμές, για τα μεγέθη γράφων που χρησιμοποιήθηκαν, η τιμή της κυμαίνεται μεταξύ 0.02 και 0.04 σχετικά προς τις διαστάσεις του γράφου. Σημειώνουμε τέλος ότι στο όριο των μεγάλων γράφων και με την προϋπόθεση ότι τηρούνται τα ασυμπτωτικά φράγματα για την ακτίνα που εξαγάγαμε στο κεφάλαιο 4, ο αναμενόμενος αριθμός γειτόνων κάθε κορυφής τείνει στο άπειρο και κείται σε απόσταση από την κορυφή που τείνει στο 0, οπότε συμβιβάζονται οι αντικρουόμενες απαιτήσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Συμπληρωματικά με τα παραπάνω, επισημαίνουμε και εδώ τη σημασία του τρόπου δημιουργίας του γράφου για την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου. Αναφερόμαστε τόσο στον καθορισμό της θέσης των κορυφών, για τον οποίο είδαμε την τυχαία τοποθέτηση με ομοιόμορφη κατανομή εντός του χωρίου της αρχικής εικόνας και την τοποθέτηση σε αντιστοιχία με τις περιοχές του μετασχηματισμού watershed της εικόνας, όσο και στον κανόνα με βάση τον οποίο οι κορυφές συνδέονται με ακμές, όπου μελετήσαμε εκτενώς τους γεωμετρικούς τυχαίους γράφους και αντιπαραθέσαμε σε αυτούς τις τριγωνοποιήσεις Delaunay ως εναλλακτική επιλογή. Συνοπτικά, διαπιστώσαμε ότι ο σχηματισμός του γράφου μέσω watershed - όταν είναι διαθέσιμη η πλήρης αρχική εικόνα - και η τριγωνοποίηση Delaunay δίνουν γενικά ποιοτικότερα αποτελέσματα.

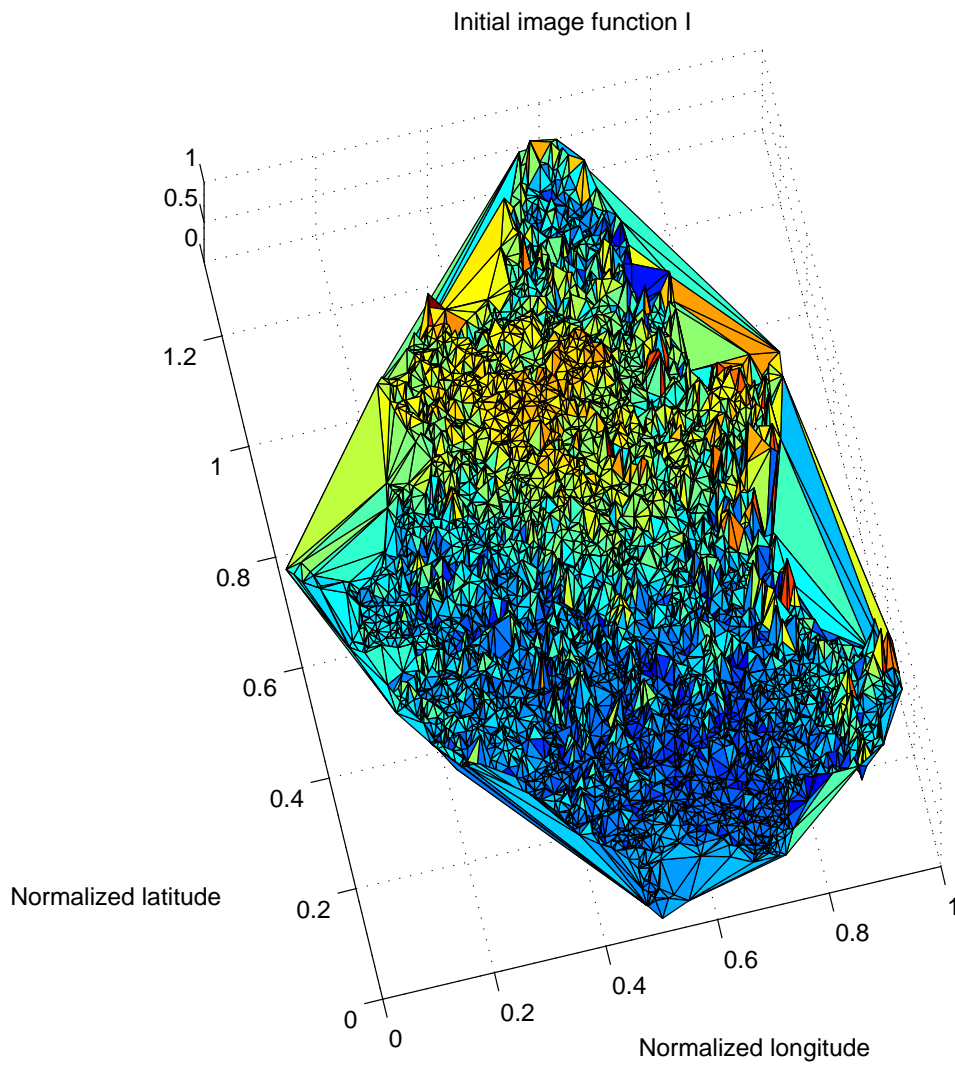
Γενικότερα, είναι φανερό ότι υπάρχει ένα trade-off μεταξύ της ταχύτητας σύγκλισης του αλγορίθμου και της ικανότητας διαχωρισμού αντικειμένων από τη μία και της διατήρησης της ακριβούς μορφής των περιγραμμάτων των ανιχνευόμενων αντικειμένων από την άλλη. Είναι πάντως προτιμότερο να πραγματοποιήσουμε περισσότερες επαναλήψεις εφόσον είναι εξασφαλισμένο ότι θα φτάσουμε τελικά στη σωστή κατάτμηση του γράφου παρά να κινήσουμε τις ενεργές καμπύλες με μεγαλύτερη ταχύτητα, χάνοντας κάποια μέρη των κύριων αντικειμένων.

7.6 Εφαρμογή σε Ανεμολογικά Δεδομένα

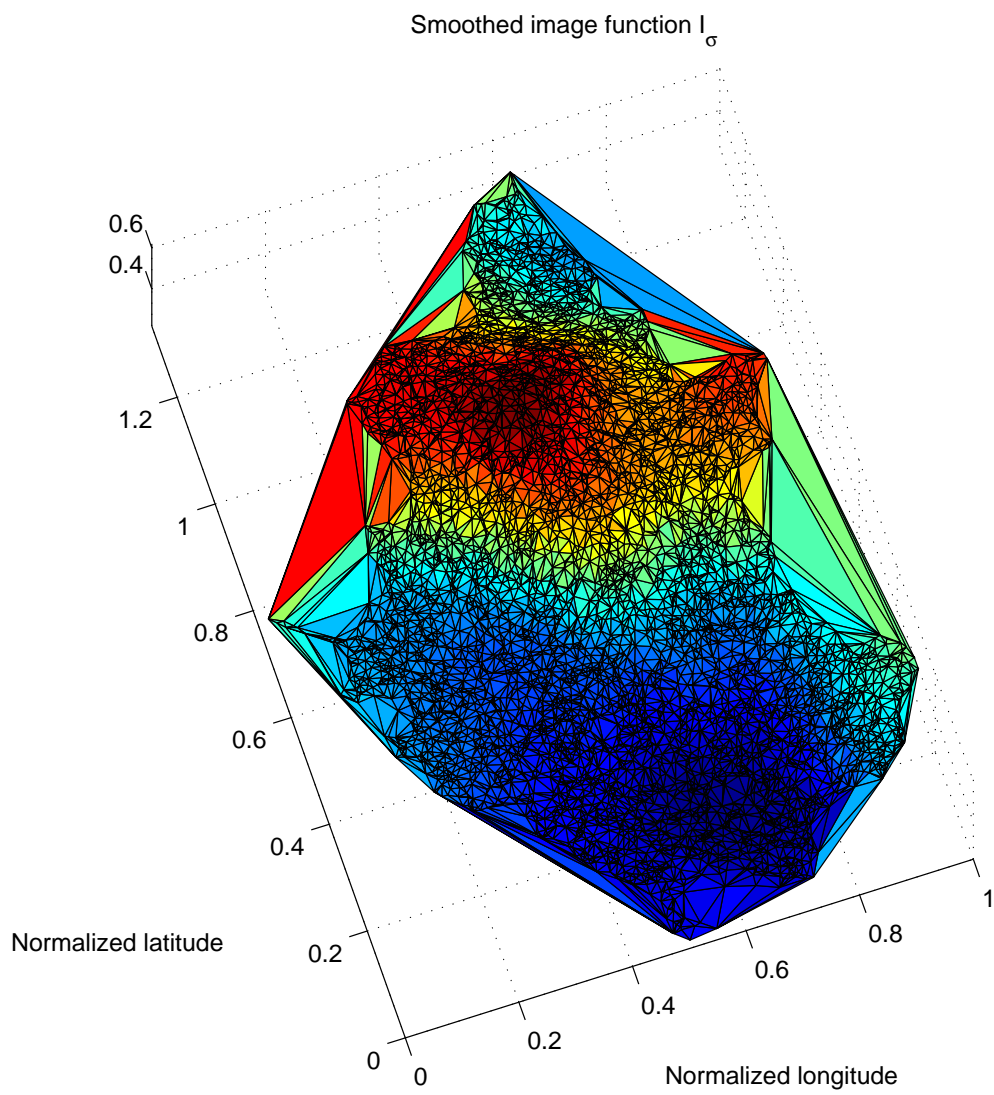
Από την ιστοσελίδα της Ρυθμιστικής Αρχής Ενέργειας (P.A.E.), η οποία περιλαμβάνει μια διεπαφή με τη μορφή Γεωπληροφοριακού Χάρτη της Ελλάδας, συλλέξαμε αναρτημένα ανεμολογικά δεδομένα από όλη την επικράτεια της Ελλάδας. Τα δεδομένα αυτά συνίστανται στις γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων μέτρησης και στην τιμή της ταχύτητας του ανέμου για κάθε σημείο, εκφρασμένη σε m/s . Αυτή η πληροφορία έχει καθοριστική σημασία για τον εντοπισμό θέσεων με υψηλό αιολικό δυναμικό κατά την εγκατάσταση νέων σταθμών παραγωγής αιολικής ενέργειας.

Για αυτό το σκοπό, μπορούμε να εφαρμόσουμε στα ανεμολογικά αυτά δεδομένα τον αλγόριθμο των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών ώστε να προσδιορίσουμε κάποιες περιοχές πάνω στο γράφο - χάρτη που χαρακτηρίζονται από ομοιόμορφη ένταση του ανέμου. Για λόγους απλότητας, περιορίσαμε το συνολικό αριθμό σημείων μετρήσεων σε $n = 5500$, προερχόμενα μόνο από την περιφέρεια της Ηπείρου, το σχήμα της οποίας είναι συνεκτικό και κατάλληλο για την εύκολη εφαρμογή του αλγορίθμου. Κανονικοποιήσαμε τόσο τις τιμές της ταχύτητας ανέμου ώστε να εμπίπτουν στο διάστημα $[0, 1]$ όσο και τις γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων. Επίσης, κατασκευάζουμε το γράφο ως τριγωνοποίηση Delaunay των σημείων, λόγω της ακριβέστερης ανίχνευσης που επέφερε στα παραδείγματα της ενότητας 7.4. Τα αρχικά λοιπόν δεδομένα πάνω στο γράφο παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.22. Είναι εμφανείς οι έντονες τοπικές διακυμάνσεις της ταχύτητας του ανέμου, που καθιστούν ακόμα πιο επιτακτικό το Γκαουσιανό φιλτράρισμα ομαλοποίησης. Έτσι, επιλέγουμε σχετικά μεγάλη κλίμακα $\sigma = 0.05$ και $\lambda = 0.8$, με τα εξομαλυμένα δεδομένα να φαίνονται στο Σχήμα 7.23.

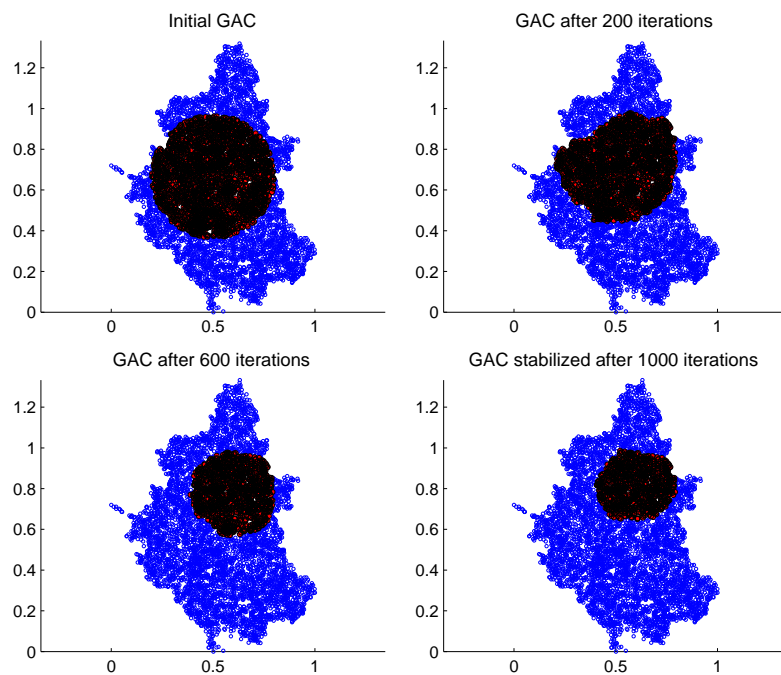
Επιλέγοντας προσεκτικά το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.005$ και τον παράγοντα της δύναμης μπαλονιού $\beta = -5$, εκτελέσαμε τον αλγόριθμο στα ανωτέρω δεδομένα και αυτός «εντόπισε» μια συνεκτική περιοχή περίπου 900 κόμβων στο βορειοανατολικό τμήμα της Ηπείρου. Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης επιδεικνύεται στο Σχήμα 7.24. Με βάση τα αρχικά δεδομένα, διαπιστώνουμε ότι όντως αυτή η ζώνη αντιστοιχεί σε μια γεωγραφική περιοχή με σχετικά ομοιόμορφη και αρκετά υψηλή ταχύτητα του ανέμου, κάτι που επιβεβαιώνει την επιτυχή ανίχνευση.



Σχήμα 7.22: Η «εικόνα» I της ταχύτητας ανέμου πάνω στο γράφο που ορίστηκε στην περιφέρεια της Ηπείρου



Σχήμα 7.23: Η εξομαλιωμένη ταχύτητα ανέμου I_σ για $\sigma = 0.05$



Σχήμα 7.24: Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου - Πάνω Αριστερά: αρχική μορφή της καμπύλης, Πάνω Δεξιά: 200 επαναλήψεις, Κάτω Αριστερά: 600 επαναλήψεις, Κάτω Δεξιά: τελική μορφή της καμπύλης μετά από 1000 επαναλήψεις

7.7 Εφαρμογή σε Δεδομένα Τηλεπικοινωνιακού Δικτύου

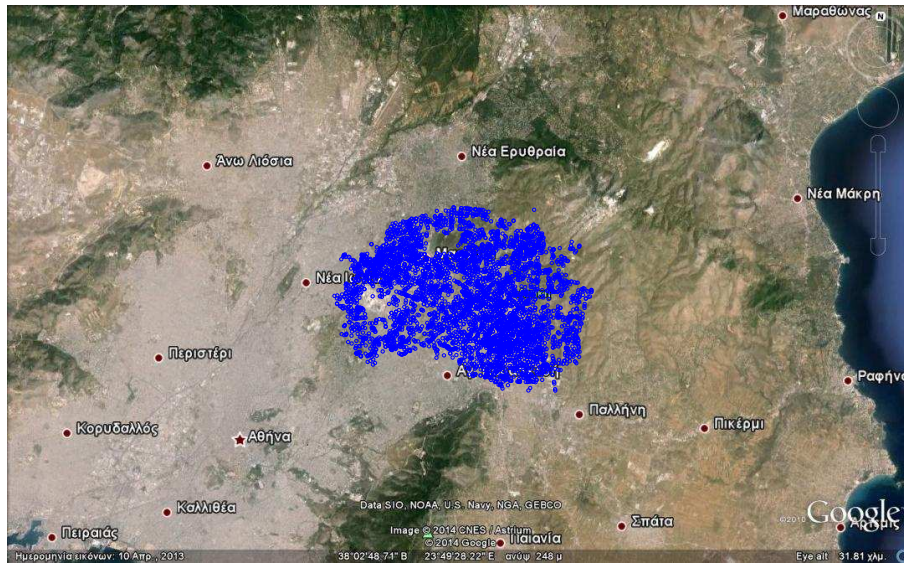
Προμηθευτήκαμε δεδομένα μετρήσεων πεδίου για τη στάθμη της ισχύος του σήματος 4G του δικτύου κινητής τηλεφωνίας μιας εταιρείας σε μια περιοχή που αντιστοιχεί στο βορειοανατολικό τμήμα του Λεκανοπεδίου Αττικής. Τα δεδομένα αυτά συνίστανται στις γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων μέτρησης και στην ισχύ του σήματος P , εκφρασμένη όμως σε μονάδες Decibel-milliwatts (dBm) με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$I = 10 \log_{10} \frac{P}{1mW} \quad (7.5)$$

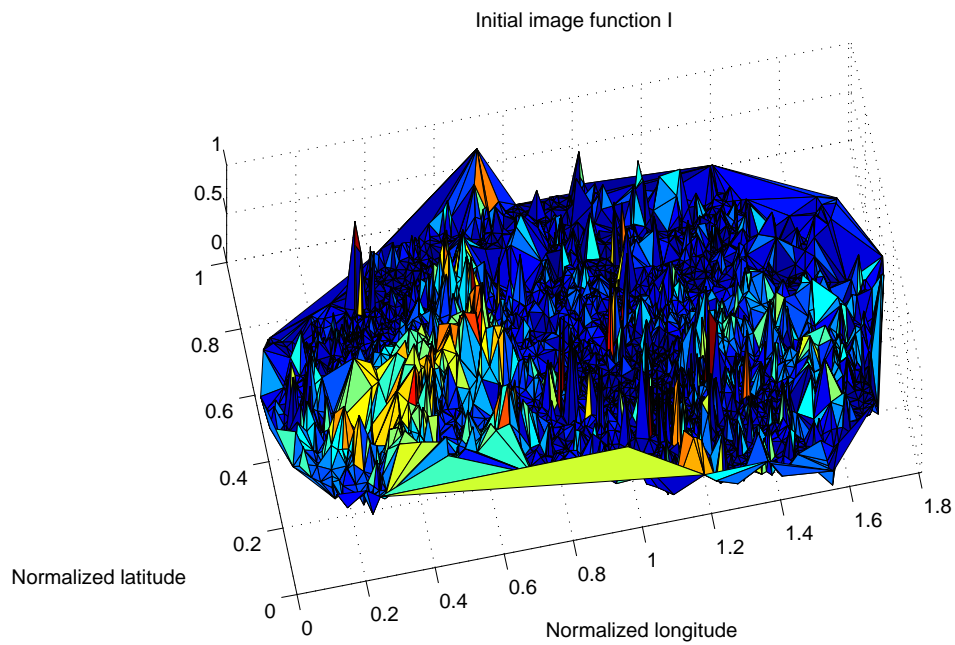
Η γνώση της ισχύος του σήματος αποτελεί πρωτεύον κριτήριο για τον καθορισμό της ποιότητας παροχής τηλεπικοινωνιακών υπηρεσιών στη μελετώμενη περιοχή. Έτσι, επιχειρούμε να εφαρμόσουμε στα τηλεπικοινωνιακά αυτά δεδομένα τον αλγόριθμο των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών με σκοπό να εντοπίσουμε πιθανές περιοχές με ομοιόμορφα χαμηλή ή υψηλή στάθμη του σήματος πάνω στο γράφο. Για λόγους απλότητας, περιορίσαμε το συνολικό αριθμό σημείων μετρήσεων σε $n \approx 5500$. Δυστυχώς, η πυκνότητα των μετρήσεων δεν ήταν ομοιόμορφη σε όλη την έκταση που μελετάμε και για αυτό το λόγο υπάρχουν κάποια «κενά» στο εσωτερικό του γράφου. Προτιμότερη λοιπόν δομή για το γράφο κρίθηκε η τριγωνοποίηση Delaunay, στην οποία κορυφές εκατέρωθεν των «κενών» συνδέονται γενικά με ακμές. Κανονικοποιήσαμε τόσο τις τιμές της ισχύος του σήματος ώστε να εμπίπτουν στο διάστημα $[0, 1]$ όσο και τις γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων.

Απεικονίζουμε τα σημεία των μετρήσεων πάνω σε χάρτη της Αττικής στο Σχήμα 7.25. Τα αρχικά δεδομένα πάνω στο γράφο παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.26. Χρησιμοποιούμε κλίμακα $\sigma = 0.03$ για το Γκαουσιανό φίλτρο και $\lambda = 0.02$, με τα εξομαλυσμένα δεδομένα να φαίνονται στο Σχήμα 7.27.

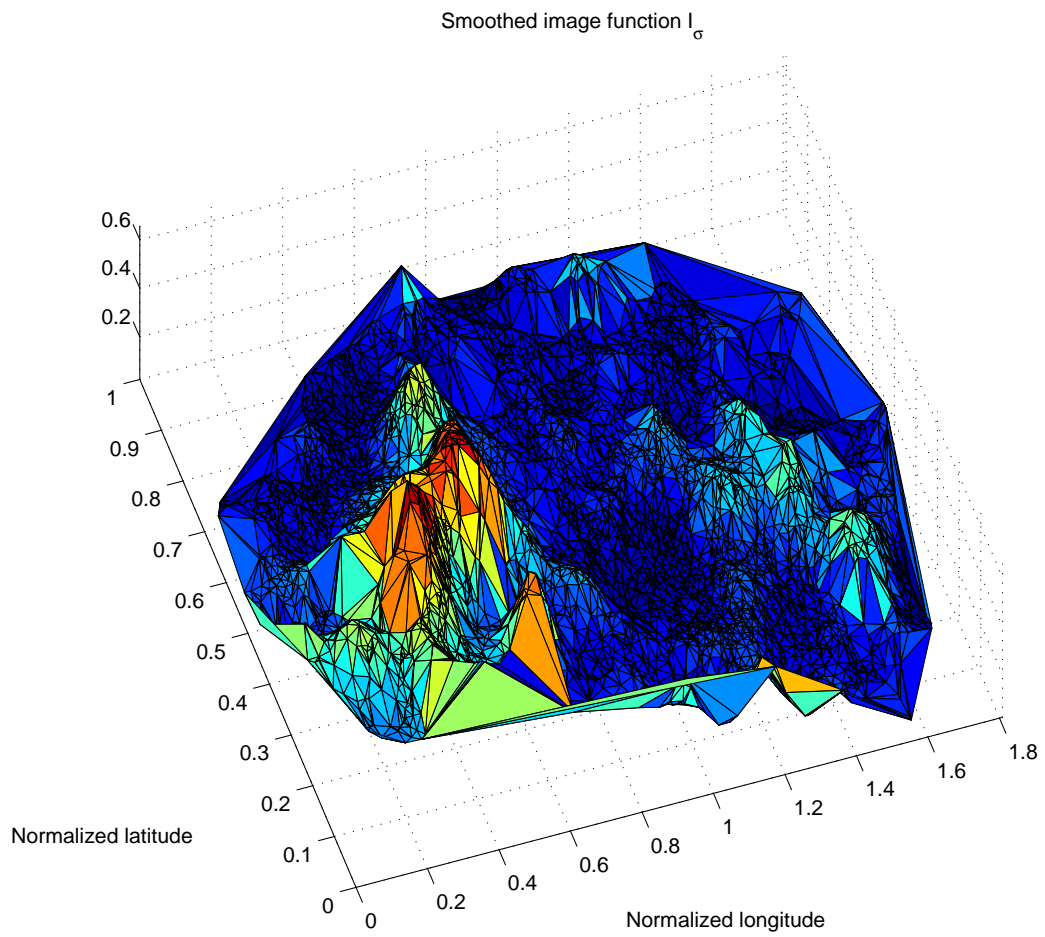
Για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, χρειάστηκε να επιλέξουμε πολύ μικρό χρονικό βήμα $\Delta t = 10^{-4}$ για να αποφύγουμε αστάθειες, κάτι που απαίτησε πολύ μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων μέχρι την τελική σύγκλιση. Ο δε παράγοντας της δύναμης μαλονιού ρυθμίστηκε ως $\beta = -20$. Ο αλγόριθμος εκτελέστηκε στα τηλεπικοινωνιακά δεδομένα και «εντόπισε» μετά από 40000 επαναλήψεις μια συνεκτική περιοχή περίπου 600 κόμβων στο κεντροδυτικό τμήμα της περιοχής των μετρήσεων. Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης επιδεικνύεται στο Σχήμα 7.28. Με βάση τα αρχικά δεδομένα, διαπιστώνουμε ότι όντως αυτή η ζώνη αντιστοιχεί στην περιοχή που διαχωρίζεται από το υπόβαθρο, λόγω της ιδιαίτερα αυξημένης στάθμης του σήματος σε αυτήν σε σχέση με τα σημεία που την περιβάλλουν. Η ανιχνευθείσα περιοχή παρουσιάζεται πάνω σε χάρτη της Αττικής με κόκκινο χρώμα στο Σχήμα 7.29.



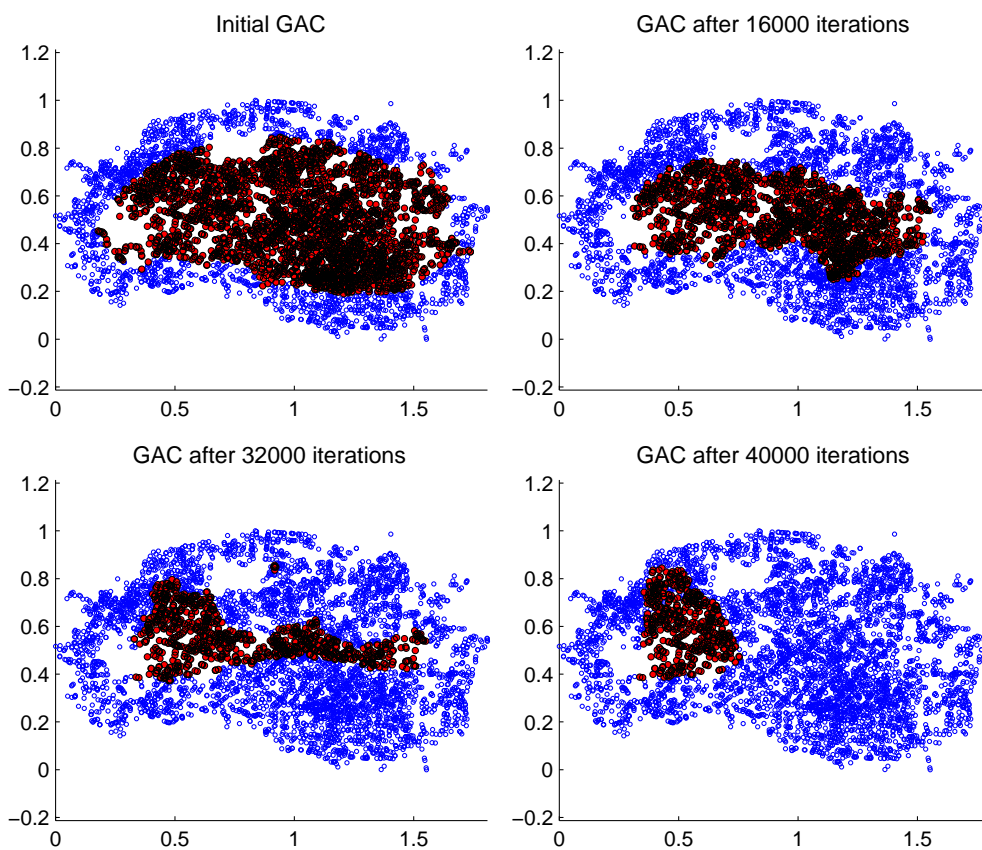
Σχήμα 7.25: Τα σημεία των μετρήσεων για το σήμα ως μπλε κύκλοι πάνω στο χάρτη της Αττικής



Σχήμα 7.26: Η «εικόνα» I της ισχύος του σήματος πάνω στο γράφο που ορίστηκε για τα σημεία των μετρήσεων στο βορειοανατολικό Λεκανοπέδιο Αττικής

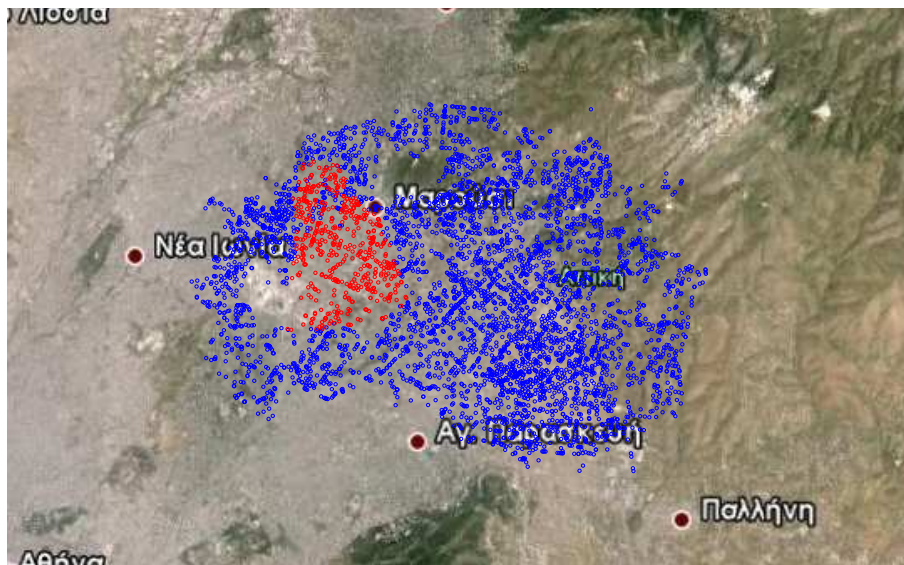


Σχήμα 7.27: Η εξομαλυμένη ισχύς σήματος I_σ για $\sigma = 0.03$



Σχήμα 7.28: Η εξέλιξη της ενεργής καμπύλης από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου - Πάνω Αριστερά: αρχική μορφή της καμπύλης, Πάνω Δεξιά: 16000 επαναλήψεις, Κάτω Αριστερά: 32000 επαναλήψεις, Κάτω Δεξιά: τελική μορφή της καμπύλης μετά από 40000 επαναλήψεις

Detected region on map



Σχήμα 7.29: Η τελική περιοχή ανίχνευσης του αλγορίθμου πάνω στο χάρτη της Αττικής με κόκκινα σημεία, έναντι των υπόλοιπων σημείων με μπλε χρώμα

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα

8.1 Βασικές Συνεισφορές

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αναλύσαμε και επεξεργαστήκαμε σε μεγαλύτερο βάθος απ' ό,τι είχε γίνει προηγουμένως τον αλγόριθμο των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών εφαρμοζόμενο σε αυθαίρετους γράφους. Εκτενέστερα, επικεντρωθήκαμε στον τρόπο με τον οποίο οι διάφοροι όροι και τελεστές που περιλαμβάνονται στην εξίσωση του συνεχούς μοντέλου πρέπει να «μεταφερθούν» στο πλαίσιο όπου η υποκείμενη δομή είναι ένας τυχαίος γράφος. Επιχειρήσαμε δε να μεταχειριστούμε αυστηρότερες και καλύτερα τεκμηριωμένες προσεγγίσεις για αυτή τη μετάβαση, ώστε να κατορθώσουμε να «κληροδοτήσουμε» στο επαναληπτικό σχήμα που κατασκευάζεται τις άριστες ιδιότητες σύγκλισης που χαρακτηρίζουν τον αλγόριθμο στο ορθοκανονικό πλέγμα των συμβατικών εικόνων. Τελικά, δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα και προσοχή στην επιλογή κατάλληλων τιμών για τις παραμέτρους που ρυθμίζουν τη λειτουργία του αλγορίθμου, καταφέραμε να του δώσουμε μια αρκετά ευσταθή συμπεριφορά για τις απλές περιπτώσεις που μελετήθηκαν αρχικά και να εξασφαλίσουμε την καλή λειτουργία του και για γράφους με πραγματικά δεδομένα. Επιλέγοντας μάλιστα μια ελαφρώς διαφορετική αρχή για τη δημιουργία των ακμών του γράφου, ήτοι την τριγωνοποίηση Delaunay, ή σχετίζοντας τις θέσεις των κορυφών του γράφου με την πληροφορία από μια αρχική συμβατική εικόνα όταν αυτή είναι διαθέσιμη (με μετασχηματισμό watershed), επιτύχαμε ακόμα ομαλότερη σύγκλιση και μεγαλύτερη ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης.

Συγκεκριμένα, οι συνεισφορές μας συνοψίζονται στα εξής σημεία:

- Δώσαμε μια μέθοδο για τον καθορισμό των θέσεων των κορυφών του γράφου στον οποίο πρόκειται να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος πέραν της τυχαίας τοποθέτησής τους, μέσω της επεξεργασίας της αρχικής πλήρους εικόνας, εάν η τελευταία είναι γνωστή. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζει μετασχηματισμό watershed απευθείας στην αρχική εικόνα και ορίζει τις κορυφές ως κεντροειδή (με την έννοια

της ύστατης διάβρωσης) των περιοχών που προκύπτουν. Έτσι, η δομή του προκύπτοντος γράφου συνοψίζει και απλοποιεί τη συνολική πληροφορία της μεταβολής της συνάρτησης φωτεινότητας και ο αλγόριθμος των G.A.C.s στο γράφο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του κλασσικού, με απώτερο όφελος την επιτάχυνση στους υπολογισμούς λόγω του σημαντικά μικρότερου μεγέθους του γράφου σε σχέση με την αρχική εικόνα.

- Θεμελιώσαμε μια καινούργια προσέγγιση του διανύσματος της κλίσης συναρτήσεων που ορίζονται στις κορυφές τυχαίων γράφων. Η προσέγγιση αυτή τεκμηριώνεται ως διακριτοποίηση του συνεχούς αναλόγου της που δίνει την ακριβή τιμή της κλίσης και χρησιμοποιεί πληροφορία από όλους τους γειτονικούς κόμβους κάθε κορυφής αλλά και από τη γεωμετρική διάταξη αυτών για να υπολογίσει το διάνυσμα κλίσης. Επιπλέον, δείξαμε τη σύγκλιση της προσέγγισης αυτής στην ακριβή τιμή της κλίσης για γεωμετρικούς τυχαίους γράφους, εκμεταλλευόμενοι τον παραλληλισμό με τη συνεχή περίπτωση και θέτοντας κάποιους χαλαρούς περιορισμούς στην ακτίνα των γράφων ως προς το μέγεθός τους. Συνδέσαμε επίσης τη νέα προσέγγιση με μια προηγούμενη προταθείσα μέσω ενός κοινού μαθηματικού φορμαλισμού στον οποίο «εντάσσονται» αμφότερες.
- Θέλοντας να προχωρήσουμε πέρα από το παραπάνω αποτέλεσμα σύγκλισης και να αναλύσουμε περισσότερο τον τρόπο με τον οποίο η προσέγγιση της κλίσης σε κάθε κορυφή τείνει στην πραγματική τιμή της καθώς το μέγεθος του υποκείμενου γράφου αυξάνεται, αποσυνθέσαμε το εισαγόμενο σφάλμα στις επιμέρους συνιστώσες του. Προσεγγίζοντας καθεμία από αυτές ξεχωριστά και φράσσοντας το μέτρο τους (πάντα όσον αφορά τη μέση τιμή του καθώς είναι έμφυτη η έννοια της τυχειότητας), κατορθώσαμε να εξάγουμε ένα ασυμπτωτικό άνω φράγμα του σφάλματος, εκφρασμένο ως προς το πλήθος των κορυφών και την ακτίνα του γράφου. Λαμβάνοντας μάλιστα μια συγκεκριμένη έκφραση της ακτίνας συναρτήσεως του μεγέθους του γράφου, καταλήξαμε σε μια βέλτιστη παραμετροποίηση για αυτήν υπό την έννοια της επιβολής του αυστηρότερου δυνατού φράγματος.
- Εκμεταλλευτήκαμε την προσέγγιση για την κλίση που κατασκευάσαμε προκειμένου να φτάσουμε σε μια «δεύτερης τάξης» προσέγγιση της καμπυλότητας χωρίς πολλούς επιπλέον υπολογισμούς, ακολουθώντας μια διαφορετική οδό για το πρόβλημα μέσω της συσχέτισης της καμπυλότητας με την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου. Αποδείξαμε δε τη σύγκλιση αυτής της προσέγγισης για γεωμετρικούς τυχαίους γράφους προσθέτοντας έναν περιορισμό στις συνθήκες που είχαν ληφθεί για την αντίστοιχη απόδειξη στην κλίση.
- Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα του υπολογισμού της καμπυλότητας από μια ολοκληρωτική οπτική γωνία, αναλύσαμε προηγούμενες ιδέες πάνω στο θέμα

και εμπνεόμενοι από αυτές, προτείναμε μια τροποποιημένη προσέγγιση. Αυτή είναι αυστηρότερα θεμελιωμένη και καλώς ορισμένη για οποιονδήποτε συνεκτικό γράφο, ενώ κάνει χρήση των ίδιων χαρακτηριστικών της διάταξης των γειτόνων κάθε κορυφής όπως η ιδέα μας για την κλίση.

- Αναδείξαμε την αξία του φιλτραρίσματος εξομάλυνσης στο επίπεδο της γειτονιας κάθε κορυφής για τα περισσότερα σχέλη του αλγορίθμου, ως αντισταθμιστικού παράγοντα στις εγγενείς ανομοιογένειες των τυχαίων γράφων. Παρουσιάσαμε τη βελτίωση της ακρίβειας της προσέγγισης της κλίσης όταν φιλτράρεται με φίλτρο μέσης ή ενδιάμεσης τιμής και, ειδικά για την καμπυλότητα, δείξαμε πειραματικά ότι η εφαρμογή φιλτραρίσματος και στα δύο στάδια υπολογισμών της προσέγγισης μπορεί να εξαλείψει σημαντικά τις αποκλίσεις και να επιφέρει τη σύγκλιση στο όριο των μεγάλων γράφων. Τα πλεονεκτήματα αυτά του εξομαλυντικού φιλτραρίσματος επεκτείνονται και στο συνολικό επαναληπτικό σχήμα του αλγορίθμου, οδηγώντας μας να το χρησιμοποιήσουμε ως τελικό στάδιο επεξεργασίας σε κάθε επανάληψη.
- Βελτιώσαμε τη διαδικασία εξαγωγής της εξομαλυμένης μορφής των δεδομένων του γράφου κατά το στάδιο του αρχικού υπολογισμού της συνάρτησης έντασης των ακμών. Αυτό επιτεύχθηκε με τη χρήση μιας κανονικοποιημένης εκδοχής του αυθεντικού Γκαουσιανού φίλτρου που προορίζεται για αυτή την επεξεργασία, η οποία και πάλι αναιρεί τις τοπικές αποκλίσεις στους υπολογισμούς λόγω της ανομοιόμορφης δομής του γράφου.
- Μελετήσαμε την εφαρμογή του αλγορίθμου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε τυχαίους γράφους για απλές περιπτώσεις εικόνων με δυαδικά αντικείμενα και γκριζών εικόνων με σαφή δομή. Μέσα από αυτά τα απλά παραδείγματα, προσδιορίσαμε την επίδραση των διαφόρων παραμέτρων του αλγορίθμου στο αποτέλεσμα της ανίχνευσης και καθορίσαμε εμπειρικά τα διαστήματα τιμών που δίνουν ορθά αποτελέσματα και συντελούν στην ευσταθή λειτουργία του αλγορίθμου. Ειδικότερα, εξαγαγάμε μια εμπειρική συνθήκη για ορισμένες παραμέτρους που απαιτείται για το διαχωρισμό κοντινών περιοχών από τον αλγόριθμο. Έτσι, εξασφαλίσαμε γενικά μια καλή συμπεριφορά σύγκλισης του αλγορίθμου για αυτές τις απλές περιπτώσεις.
- Καταδείξαμε την υψηλότερη αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου στις περιπτώσεις που αφενός ο γράφος έχει δημιουργηθεί μέσω watershed στην αρχική συμβατική εικόνα και όχι με τυχαίο τρόπο και αφετέρου οι ακμές του σχηματίζουν τριγωνοποίηση Delaunay και δεν αντιστοιχούν σε γεωμετρικό τυχαίο γράφο. Έτσι, ελέγξαμε τη λειτουργία του αλγορίθμου σε πραγματικά ανεμολογικά δεδομένα από περιοχή της Ελλάδας - σχηματίζοντας το γράφο ως τριγωνοποίηση Delaunay των δεδομένων - και διαπιστώσαμε τη σύγκλιση του

σε περιοχή που διαφοροποιείται από το υπόβαθρο ως ζώνη υψηλότερης έντασης του ανέμου. Επιπλέον, εκτελέσαμε τον αλγόριθμο πάνω σε πραγματικά δεδομένα για δίκτυο κινητής τηλεφωνίας στην Αττική, εντοπίζοντας μια ζώνη στην οποία το σήμα διαφοροποιούνταν προς υψηλότερες γενικά τιμές σε σχέση με το υπόβαθρο.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, κρίνουμε ότι έχει επιτευχθεί η δημιουργία ενός αρκετά ευσταθούς - με κριτήριο τα πειραματικά δεδομένα - πλαισίου εργασίας για την εφαρμογή της ιδέας των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε αυθαίρετους γράφους. Τονίζεται βέβαια ότι η ευστάθεια αυτή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την κατάλληλη επιλογή παραμέτρων και στηρίζεται καθοριστικά στις ευεργετικές ιδιότητες του φιλτραρίσματος εξομάλυνσης που εφαρμόζεται σε κάθε επανάληψη επί των προσεγγίσεων.

8.2 Μελλοντικοί Προσανατολισμοί Έρευνας

Υπάρχει πληθώρα ανοικτών θεμάτων στο πεδίο που μελετήσαμε, τα οποία χρήζουν βαθύτερης ανάλυσης και ισχυρότερης θεμελίωσης. Επίσης, είναι μεγάλα τα περιθώρια για περαιτέρω γενίκευση των ιδεών που αναπτύχθηκαν.

Συγκεκριμένα, είναι χρήσιμο να μελετηθεί η επέκταση του αλγορίθμου και για γράφους που κείνται σε χώρους περισσότερων διαστάσεων (π.χ. τρισδιάστατων) και να εξεταστεί με ποιο τρόπο τα αποτελέσματα σύγκλισης που αποδείχθηκαν για την περίπτωση των δύο διαστάσεων μεταφέρονται σε αυτό το ευρύτερο πλαίσιο. Έτσι, το πεδίο των εφαρμογών του αλγορίθμου θα επεκταθεί σημαντικά, προς σύνολα δεδομένων τα οποία έχουν μεγαλύτερη διαστατικότητα και δεν μπορούν να ενταχθούν σε δύο μόνο διαστάσεις, όπως οι κλασσικές εικόνες.

Επιπρόσθετα, έχει ενδιαφέρον η εκτενέστερη θεωρητική μελέτη και άλλων δομών γράφων, όπως η τριγωνοποίηση Delaunay ή ο γράφος σχετικής γειτονιάς [3, 4], οι οποίες εμφανίζουν μεγαλύτερη κανονικότητα στη χωρική κατανομή των ακμών τους απ' ότι οι απλοϊκότεροι στην κατασκευή τους γεωμετρικοί τυχαίοι γράφοι, στους οποίους και επικεντρωθήκαμε. Αυτή η εμβάθυνση μπορεί να ερμηνεύσει πληρέστερα την καλύτερη επίδοση του αλγορίθμου στην περίπτωση που ο υποκείμενος γράφος έχει τέτοια δομή, όπως και διαπιστώσαμε από τα πειράματά μας.

Τέλος, η εξέλιξη του σφάλματος ανίχνευσης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου είναι σκόπιμο να αναλυθεί διεξοδικότερα, ώστε να προκύψουν και θεωρητικά συμπεράσματα για την ασυμπτωτική του συμπεριφορά σε περιπτώσεις που είναι γνωστό το επιθυμητό αποτέλεσμα της ανίχνευσης.

Βιβλιογραφία

- [1] K. Drakopoulos and P. Maragos, “Active contours on graphs: Multiscale morphology and graphcuts,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 6, no. 7, pp. 780–794, November 2012.
- [2] Πέτρος Μαραγκός, *Όραση Υπολογιστών*, ΕΜΠ, 2005.
- [3] L. Vincent, “Graphs and mathematical morphology,” *Signal Processing*, vol. 16, pp. 365–388, 1989.
- [4] J. W. Jaromczyk and G. T. Toussaint, “Relative neighborhood graphs and their relatives,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, no. 9, September 1992.
- [5] S. Osher and J. A. Sethian, “Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 79, pp. 12–49, 1988.
- [6] H. J. A. M. Heijmans, P. Nacken, A. Toet, and L. Vincent, “Graph morphology,” *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 3, no. 1, pp. 24–38, March 1992.
- [7] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro, “Geodesic active contours,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 22, no. 1, pp. 61–79, 1997.
- [8] L. D. Cohen and R. Kimmel, “Global minimum for active contour models: A minimal path approach,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 24, no. 1, pp. 57–78, 1997.
- [9] J. Cousty, L. Najman, and J. Serra, “Some morphological operators in graph spaces,” in *Proc. International Symposium on Mathematical Morphology*, 2009.
- [10] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, and M. Couprie, “Watershed cuts: Minimum spanning forests and the drop of water principle,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 8, pp. 1362–1374, August 2009.

- [11] —, “Watershed cuts: Thinnings, shortest path forests and topological watersheds,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 32, no. 5, pp. 925–939, May 2010.
- [12] C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot, “Power watershed: A unifying graph-based optimization framework,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 33, no. 7, pp. 1384–1399, July 2011.
- [13] V.-T. Ta, A. Elmoataz, and O. Lezoray, “Nonlocal pdes-based morphology on weighted graphs for image and data processing,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, no. 6, pp. 1504–1516, June 2011.
- [14] J. Shi and J. Malik, “Normalized cuts and image segmentation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 8, pp. 888–905, August 2000.
- [15] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih, “Fast approximate energy minimization via graph cuts,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 23, no. 11, pp. 1222–1239, November 2001.
- [16] Y. Boykov and V. Kolmogorov, “Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts,” in *Proc. International Conference on Computer Vision*, 2003, pp. 26–33.
- [17] —, “An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 9, pp. 1124–1137, September 2004.
- [18] W. Schwalm, B. Moritz, M. Giona, and M. Schwalm, “Vector difference calculus for physical lattice models,” *Physical Review*, vol. 59, no. 1, pp. 1217–1233, January 1999.