



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων
Μηχανικών

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
*Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία
και Επιστήμη*

Τίτλος Μεταπτυχιακής Εργασίας

*Διάδοση Ακουστικών Κυμάτων σε Στοχαστικό Θαλάσσιο
Περιβάλλον*

Εκπόνηση: Ζαχαρίας Καπελώνης
Επιβλέπων: Γεράσιμος Αθανασούλης

Αθήνα, Νοέμβρης 2010

Ευχαριστώ πολύ όλους όσους βοήθησαν στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας και στις παράλληλες σπουδές μου. Ειδικότερα, θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Μάκη Αθανασούλη, για την υποδειγματική καθοδήγηση και συνεργασία καθώς και για τον πλούσιο χρόνο που διέθεσε στη προσπάθεια αυτή.

Σύνοψη

Παράγονται οι βασικές στοχαστικές ακουστικές εξισώσεις και γίνεται μια επισκόπηση στις μεθόδους μοντελοποίησης της διάδοσης σε στοχαστικά ακουστικά μέσα. Η μέθοδος που είναι γνωστή ως *smoothing perturbation* και η *ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων*, εφαρμόζονται σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα ακουστικής διάδοσης, όπου το μέσο έχει μία τοπική, ασθενώς στοχαστική, ανομοιογένεια. Δείχνουμε ότι οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες στο συγκεκριμένο πρόβλημα, καθώς, για ειδικές μορφές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης των στοχαστικών ανομοιογενειών του μέσου, καταλήγουν σε κοινές αναλυτικές λύσεις. Μελετάται η επίδραση της ανομοιογένειας στα ακουστικά κύματα και σχολιάζονται οι δύο μέθοδοι.

Λέξεις κλειδιά: ακουστική διάδοση, θεωρία διαταραχών, μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων, στοχαστικά μέσα, στοχαστική μοντελοποίηση.

Abstract

The main acoustic equations are derived while introducing the appropriate stochastic dependencies. The area of modeling propagation of scalar waves in stochastic media is surveyed. Approximations of the smoothing and multiple-scale methods are introduced and then applied on an acoustic field propagating through a 1-D weakly stochastic slab. Analytic solutions, using a specific form of the acoustic medium correlation function, point out that both methods are equivalent for this specific problem. The physical effects of the stochastic inhomogeneity on the propagating waves are analyzed and finally the two methods are compared.

Keywords: acoustic wave propagation, mean-field equation, multiple-scales analysis, perturbation theory, random media, smoothing method, stochastic modeling.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	9
ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΘΑΛΑΣΣΙΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ	11
1.1 Φαινομενολογία	13
1.1.1. Ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον.....	13
1.2 Φυσική των ακουστικών κυμάτων στη θάλασσα - εξισώσεις και άξονες μαθηματικής μοντελοποίησης της ακουστικής διάδοσης	17
1.2.1. Φυσική των ακουστικών κυμάτων, βασικές εξισώσεις.....	17
1.3 Στοχαστικά χαρακτηριστικά ακουστικών φαινομένων στο θαλάσσιο περιβάλλον – Πηγές στοχαστικότητας	26
1.3.1. Ακουστικές πηγές.....	26
1.3.2. Επιφάνεια της θάλασσας.....	26
1.3.3. Θαλάσσιος πυθμένας.....	27
1.3.4. Στόχοι και τυχαίοι σκεδαστές.....	28
1.3.5. Θερμοκρασία.....	28
1.4 Στοχαστική μοντελοποίηση ακουστικής διάδοσης – Βασικές εξισώσεις	31
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΕΣΑ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	33
2.1 Χρήση Θεωρίας Διαταραχών (Perturbation Theory) για τη μοντελοποίηση στοχαστικών κυματικών μέσων	37
2.1.1. Συνήθης Μέθοδος Θεωρίας Διαταραχών - Προσέγγιση Born (Regular Perturbation - Born approximation).....	39
2.1.2. Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων (Multiple Scales Analysis).....	44
2.1.3. Μέθοδος Εξομάλυνσης (Smoothing perturbation method).....	48
2.2 Άλλες μέθοδοι	62
ΜΕΛΕΤΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΕΣΑ (ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ)	63
3.1. Κυματική διάδοση σε άπειρο μονοδιάστατο μέσο που παρουσιάζει τοπική στοχαστική ανομοιογένεια – Διατύπωση του προβλήματος	64
3.2. Επεξεργασία του προβλήματος συνοριακών τιμών – Υπολογισμός του μέσου πεδίου πίεσης σε ασθενώς στοχαστικά μέσα	69
3.2.1. Αναδιατύπωση με χρήση της Smoothing method.....	70
3.2.2. Αναδιατύπωση με χρήση της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων (multiple scales).....	86
3.3. Επίδραση στοχαστικών ανομοιογενειών του θαλασσιού περιβάλλοντος στο ακουστικό πεδίο, αριθμητικά αποτελέσματα	90
3.3.1. Βασικές στοχαστικές επιδράσεις.....	90
3.3.2. Προσδιορισμός πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών της στοχαστικής ανομοιογένειας.....	93
3.3.3. Αριθμητικά αποτελέσματα.....	96

ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....	99
4.1. Σχολιασμός των αποτελεσμάτων.	100
4.2. Σχολιασμός των μεθόδων.	102
4.3. Μελλοντική μελέτη.	103
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	105
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	111
A. Υπολογισμός συνάρτησης <i>Green</i> για την εξίσωση <i>Helmholtz</i>	111

Πρόλογος

Το φυσικό περιβάλλον χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερος μεγάλη πολυπλοκότητα με αποτέλεσμα η δυναμική του να μην είναι πάντοτε προβλέψιμη ή και κατανοητή. Από τα μέσα, περίπου, του 20^{ου} αιώνα, έγινε κατανοητό ότι τα φαινόμενα που συμβαίνουν στη φύση είναι, κατά την αντίληψη μας τουλάχιστον, τυχαία και έτσι για να μοντελοποιηθούν ρεαλιστικά πρέπει να ληφθούν υπόψη όλα τα στοχαστικά χαρακτηριστικά που συνδέονται με αυτά.

Έτσι και η θάλασσα, εξαιτίας του μεγάλου αριθμού αλληλεπιδράσεων, εμφανίζει συχνά τυχαίες (ή φαινομενικά τυχαίες) συμπεριφορές. Στη μελέτη της υδροακουστικής, το νερό αντιμετωπίζεται ως ακουστικό μέσο, δηλαδή η ύλη στην οποία διαδίδεται το ακουστικό κύμα. Τα χαρακτηριστικά του νερού που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί (χώρο-χρονικά) ένα ακουστικό φαινόμενο, είναι ουσιωδώς η θερμοκρασία, που σχετίζεται ουσιαστικά με την ομοιογένεια του νερού, και τα φυσικά σύνορα της ελεύθερης επιφάνειας και του θαλάσσιου πυθμένα. Αυτά τα μεγέθη είναι στη πραγματικότητα τυχαίες συναρτήσεις, που συμμετέχουν στις ακουστικές εξισώσεις και επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων ακουστικής διάδοσης. **Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατανόηση της επίδρασης των στοχαστικών ανομοιογενειών στην εξέλιξη του ακουστικού φαινομένου, καθώς επίσης και η μελέτη και σύγκριση των διαφορετικών τεχνικών μοντελοποίησης που είναι διαθέσιμες.**

Το **πρώτο κεφάλαιο**, ξεκινά με μία σύντομη εισαγωγή στα θαλάσσια ακουστικά φαινόμενα. Δίνεται κάποια σημασία στη παραγωγή των βασικών κυματικών εξισώσεων, που είναι η εξίσωση *D' Alembert* και η εξίσωση *Helmholtz*, σε ακουστικά μέσα μεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών. Έπειτα εντοπίζονται οι τυχειότητες που συνδέονται με τα σχετικά προβλήματα και τέλος παράγονται οι στοχαστικές ακουστικές εξισώσεις που καθορίζουν τα φαινόμενα που θα μας απασχολήσουν.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο**, γίνεται αρχικά μία επισκόπηση στο σύνολο της σχετικής βιβλιογραφίας και παρατίθενται οι σημαντικότερες βιβλιογραφικές πηγές. Στη συνέχεια, μελετώνται μέθοδοι επίλυσης των στοχαστικών ακουστικών εξισώσεων που κάνουν χρήση της θεωρίας διαταραχών. Δίνεται βάρος στις τρεις κυρίαρχες μεθόδους, οι οποίες χρησιμοποιούνται για επίλυση προβλημάτων σε μέσους κυματικούς αριθμούς. Οι τρεις αυτές μέθοδοι αναπτύσσονται αναλυτικά, ενώ περισσότερο βάρος έχει δοθεί στα σημεία που θα μας απασχολήσουν στην εφαρμογή.

Στο **τρίτο κεφάλαιο**, γίνεται μία εφαρμογή των μεθόδων που εξετάστηκαν προηγουμένως σε μία απλή περίπτωση, με σκοπό την αναλυτική επίλυση. Αρχικά διατυπώνεται το πρόβλημα ακουστικής διάδοσης σε μονοδιάστατο στοχαστικό μέσο, και στη συνέχεια εφαρμόζονται τεχνικές που αναπτύχθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα λύνεται χρησιμοποιώντας την *smoothing perturbation method* και στη συνέχεια *multiple-scale analysis*.

Στο **τελευταίο κεφάλαιο**, γίνεται μία σύντομη επισκόπηση και συζήτηση των αποτελεσμάτων και οι διαφορετικές μέθοδοι συγκρίνονται όσον αφορά το συγκεκριμένο πρόβλημα. Τέλος δίνονται άξονες όσον αφορά τη περαιτέρω μελέτη σχετικών προβλημάτων.

1.

Εισαγωγή - Κυματικά φαινόμενα στο στοχαστικό θαλάσσιο περιβάλλον

Το θαλάσσιο περιβάλλον συνιστά ένα αεικίνητο δυναμικό μέσο, στο οποίο λαμβάνουν χώρα μία σειρά από κυματικά φαινόμενα. Στην επιφάνεια παρατηρεί κανείς τους *κυματισμούς βαρύτητας* οι οποίοι έχουν διάφορες πηγές προέλευσης (πχ. άνεμος, σεισμοί) και τα *τριχοειδή κύματα* εξαιτίας της επιφανειακής τάσης που διεγείρονται συνήθως από τον άνεμο ή τη διαταραχή της επιφάνειας (πχ. από τη βροχή ή κάποιο πλωτό σώμα). Στο εσωτερικό του μέσου διαδίδονται *ηλεκτρομαγνητικά* και *ακουστικά* κύματα, καθώς επίσης και *εσωτερικά υδάτινα κύματα* πυκνότητας. Τέλος στον θαλάσσιο πυθμένα διαδίδονται *σεισμικά* (ελαστικά) *κύματα* τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν είτε από σεισμική δραστηριότητα, είτε από την δράση κάποιου ακουστικού κύματος στην υπερκείμενη υδάτινη μάζα.

Εξαιτίας των φυσικών χαρακτηριστικών του, το θαλάσσιο περιβάλλον είναι πλούσιο σε ήχους από διάφορες πηγές. Οι ακουστικές πηγές στη θάλασσα μπορούν να διαχωριστούν σε φυσικές και ανθρωπογενείς. Οι πρώτες σχετίζονται με γεωφυσικές διεργασίες (πχ. βροχή, θραύση κυματισμών και πάγων, τεκτονική δραστηριότητα) και ήχους που παράγονται από ζωντανούς οργανισμούς (πχ. ήχοι θαλάσσιων θηλαστικών, οστεϊχθύων, καρκινοειδών κα.), Au&Hastings 2008, Webb et al (2008). Οι ανθρωπογενείς πηγές συνδέονται με τη θαλάσσια και παράκτια δραστηριότητα του ανθρώπου. Ο ήχος χρησιμεύει στη μετάδοση ή/και ανάκτηση πληροφορίας, επειδή τα ακουστικά κύματα εξασθενούν πολύ λιγότερο σε σχέση με τα ηλεκτρομαγνητικά (που χρησιμοποιούνται κυρίως στην ατμόσφαιρα). Οι πηγές που χρησιμοποιούνται για τέτοιες εφαρμογές, εμπίπτουν στην *υδροακουστική τεχνολογία* που χρησιμοποιείται για τη παρακολούθηση, κατανόηση και εκμετάλλευση του θαλασσίου περιβάλλοντος (πχ. συστήματα ηχοεντοπισμού, ακουστική τομογραφία, *sub-bottom profilers* κα.), καθώς επίσης και για τις υποβρύχιες επικοινωνίες (πχ. υδροακουστικά *modem*), Godin & Palmer 2008. Ήχος μπορεί να παράγεται εκούσια και από άλλες εφαρμογές και τότε μπορεί να θεωρηθεί ως θόρυβος (πχ. ήχοι πλοίων και άλλων πλωτών κατασκευών).

Ο τρόπος με τον οποίο διαδίδεται ο ήχος στο θαλάσσιο περιβάλλον, εξαρτάται από τις ακουστικές ιδιότητες της υδάτινης μάζας και από τα δύο φυσικά της σύνορα, την επιφάνεια της θάλασσας και τον πυθμένα. Τα παραπάνω εξαρτώνται από τη δυναμική του συστήματος, η οποία (σε ρεαλιστική θεώρηση) έχει τυχαία χαρακτηριστικά. Όπως έχει φανεί και σε άλλες

εφαρμογές, Klyatskin 2005, έτσι και στα ακουστικά προβλήματα η τυχαιότητα έχει υπολογίσιμη επίδραση στην έκβαση του φαινομένου, με αποτέλεσμα να έχει νόημα η **ανάπτυξη και μελέτη στοχαστικών μοντέλων ακουστικής διάδοσης**.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η μελέτη προβλημάτων ακουστικής διάδοσης σε ρεαλιστικά μοντέλα του θαλάσσιου χώρου είναι ιδιαίτερα σημαντική, τόσο για τη κατανόηση των φυσικών διεργασιών, όσο και για την επίλυση ειδικών προβλημάτων σε τεχνολογικές εφαρμογές. Στη παρούσα μελέτη, θα γίνει μία προσπάθεια διερεύνησης του φαινομένου της ακουστικής διάδοσης σε μέσα που εμφανίζουν τυχαία χαρακτηριστικά, όπως συμβαίνει και με το θαλάσσιο περιβάλλον. Σκοπός της εργασίας είναι η κατανόηση των διαφόρων μεθόδων μοντελοποίησης των αντίστοιχων φαινομένων και η εφαρμογή κάποιων από αυτές σε ένα σχετικά απλό πρόβλημα προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν κατά το δυνατόν οι ειδικές επιπλοκές.

Στη συνέχεια θα γίνει μία σύντομη εισαγωγή στη φαινομενολογία των ακουστικών κυμάτων στη θάλασσα και τη βασική φυσική των φαινομένων ακουστικής διάδοσης. Έπειτα ακολουθεί μία σύντομη βιβλιογραφική αναδρομή στις κύριες μεθόδους μοντελοποίησης της ακουστικής διάδοσης σε μέσα στα οποία τα πεδία που επηρεάζουν τη διάδοση (πχ. πυκνότητα, ταχύτητα του ήχου, συντελεστής διάθλασης κλπ.) είναι στοχαστικά.

1.1 Φαινομενολογία.

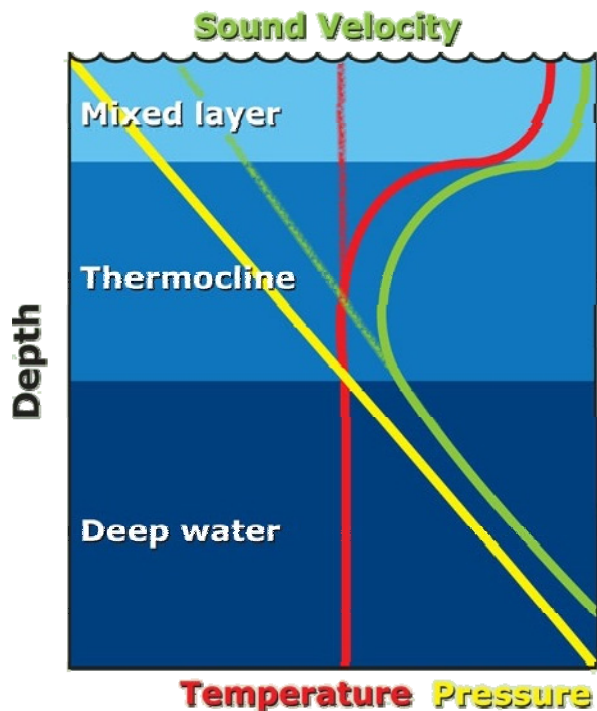
Τα *ακουστικά κύματα* είναι διαταραχές της πίεσης που διαδίδονται σε ένα ρευστό ή στερεό μέσο. Η γένεση των ακουστικών κυμάτων οφείλεται σε κάποια διαδικασία που διεγείρει το ακουστικό μέσο μεταβάλλοντας τη πυκνότητά του. Αυτό μπορεί να γίνει για παράδειγμα με ένα αδρανειακό ταλαντωτή ή μία κρούση/έκρηξη. Η δυναμική του υλικού μέσου επιτρέπει τη διάδοση της διαταραχής και σε άλλα σημεία. Αναλόγως με τη διέγερση και τα χαρακτηριστικά του μέσου, το ακουστικό κύμα μπορεί να διαδοθεί με μία συγκεκριμένη συχνότητα ή μία διαμόρφωση συχνότητων (*frequency modulation*). Εάν η συχνότητα διάδοσης είναι στο εύρος αντίληψης του ανθρώπινου αυτιού⁽¹⁾ το κύμα ονομάζεται και *ήχος*, ενώ αν είναι κάτω ή πάνω από αυτό, ονομάζεται *υπόηχος* και *υπέρηχος* αντίστοιχα.

1.1.1. Ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον.

Τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον καλύπτουν ευρύ φάσμα συχνοτήτων, εξαιτίας των ποικίλων ακουστικών πηγών. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι συναντώνται συχνότητες από 0.1 Hz που αντιστοιχούν σε τεκτονικά ή υποβρύχια κατολισθητικά φαινόμενα, (Brekhovskikh & Lysanov 2003), έως συχνότητες που υπερβαίνουν τα 200kHz, από βιοακουστικά φαινόμενα (Montagu 1963) ή και ανθρωπογενείς εφαρμογές.

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο διαδίδονται τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον, πρέπει να μελετηθεί ο τρόπος διαμόρφωσης της ταχύτητας του ήχου στην υδάτινη μάζα. Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται θεμελιωδώς από τη θερμοκρασία, τη πίεση και την αλατότητα. Η πίεση αυξάνεται γραμμικά με το βάθος, ενώ η αλατότητα και η θερμοκρασία ακολουθούν μέσα εποχικά προφίλ αναλόγως με τη περιοχή (κυρίως θαλάσσια λεκάνη και γεωγραφικό πλάτος). Ειδικότερα, η θερμοκρασία σχεδόν σταθεροποιείται στη περιοχή 2-4 °C κάτω από τα ~500 m ενώ στο ανώτερο στρώμα το μεταβάλλεται μεταξύ δύο ακραίων μέσων καταστάσεων, του θερινού και χειμερινού προφίλ. Το προφίλ της αλατότητας ακολουθεί ουσιαστικά τη διαλυτότητα του άλατος στο θαλασσινό νερό με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται σύμφωνα με το θερμοκλινές μέχρι τα 500 περίπου μέτρα και στη συνέχεια να αυξάνεται γραμμικά με το βάθος, εξαιτίας της αύξησης της πίεσης (η οποία επίσης αυξάνει τη διαλυτότητα). Έτσι η ταχύτητα του ήχου σε σχέση με το βάθος διαμορφώνεται σύμφωνα με το σχήμα που ακολουθεί (Εικόνα 1).

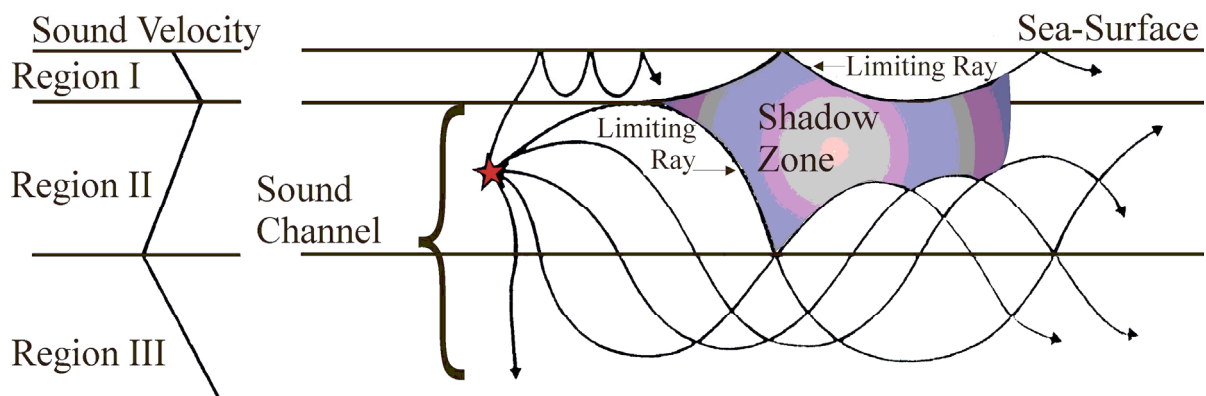
⁽¹⁾ Το ακουστικό εύρος είναι 20 Hz - 20 kHz για έναν υγιή νέο άνθρωπο (Cutnell & Johnson. 2006) και περιορίζεται με την ηλικία εξασθενώντας κυρίως στις υψηλές συχνότητες.



Εικόνα 1: Διαμόρφωση του προφίλ της ταχύτητας του ήχου (πράσινη καμπύλη), εξαιτίας των προφίλ θερμοκρασίας (κόκκινη καμπύλη) και πίεσης (κίτρινη καμπύλη). Οι ασθενείς χρωματισμοί αντιστοιχούν στο χειμερινό προφίλ.

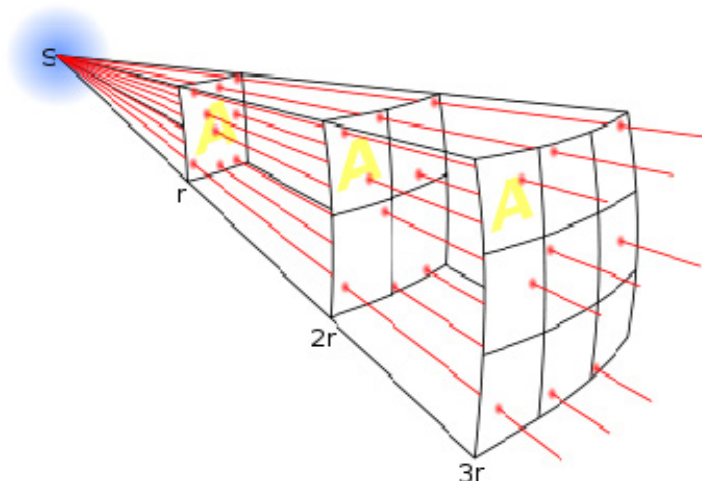
Η διαμόρφωση της ταχύτητας του ήχου σε σχέση με το βάθος έχει σαν αποτέλεσμα τη διάθλαση των ακουστικών κυμάτων, τα οποία «στρέφουν» τα μέτωπά τους προς περιοχές χαμηλότερης ταχύτητας. Αυτό σημαίνει, ότι όταν υπάρχει ένα τοπικό ελάχιστο στη συνάρτηση της ταχύτητας του ήχου σε σχέση με το βάθος, τότε το διαδιδόμενο κύμα θα διαθλάται συνεχώς στρεφόμενο προς τον νοητό άξονα της ελάχιστης ταχύτητας. Το συγκεκριμένο φαινόμενο, σε συνδυασμό με τα φυσικά σύνορα της επιφάνειας της θάλασσας και του πυθμένα έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται **φαινόμενα κυματοδήγησης**. Αντίστροφα, όταν εμφανίζονται μέγιστα στο προφίλ της ταχύτητας (συνήθως σε θερινά προφίλ) εμφανίζεται το αντίθετο φαινόμενο, όπου δημιουργείται η λεγόμενη **ζώνη σκιάς (shadow zone)**. Εξαιτίας της δομής των ωκεανών, το προφίλ της ταχύτητας του ήχου εμφανίζει σε όλες σχεδόν τις θάλασσες του πλανήτη ένα τοπικό ελάχιστο σε βάθος περίπου 700 μέτρων. Ο νοητός άξονας που χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο ελάχιστο επιτρέπει τη διάδοση ακουστικών κυμάτων σε πολύ μεγάλες αποστάσεις (τάξης 10^3 km) και αναφέρεται βιβλιογραφικά ως βαθύ ακουστικό κανάλι (DSC – Deep Sound Channel ή SOFAR channel – Sound Fixing and Ranging channel). Η ιδιότητα του θαλάσσιου περιβάλλοντος να λειτουργεί ως κυματοδηγός, έχει χρησιμότητα σε πολλές εφαρμογές της υδροακουστικής τεχνολογίας (πχ. ακουστική τομογραφία) ενώ χρησιμοποιείται και από τους θαλάσσιους οργανισμούς (πχ. επικοινωνία μεταξύ απομακρυσμένων πληθυσμών κητωδών). Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 2) απεικονίζεται οι δρόμοι διάδοσης⁽²⁾ των ακουστικών κυμάτων, εξαιτίας της διαμόρφωσης της ταχύτητας του ήχου και της αρχικής γωνίας εκπομπής (βιβλιογραφικά *γωνία εκτόξευσης*).

⁽²⁾ Σημειώνεται ότι η θεώρηση του δρόμου διάδοσης ως ακτίνα είναι υψίσυχη προσέγγιση στο πλαίσιο της θεωρίας ακτίνων και δεν είναι ακριβής για κύματα χαμηλών συχνοτήτων.



Εικόνα 2: Δρόμοι διάδοσης ακουστικών κυμάτων εξαιτίας του προφίλ της ταχύτητας του ήχου (αριστερό τμήμα της εικόνας). Παρατηρείται η κυματοδήγηση με άξονες τα τοπικά ελάχιστα του προφίλ καθώς και η δημιουργία «ζώνης σκιάς» γύρω από το τοπικό μέγιστο.

Τα ακουστικά κύματα εξασθενούν ενεργειακά καθώς απομακρύνονται από την πηγή, και αυτό οφείλεται σε δύο λόγους. Ο ένας έχει να κάνει με τη γεωμετρία του κυματικού πεδίου (που κατ' επέκταση συνδέεται με τα χαρακτηριστικά της διέγερσης), και είναι γνωστός με τον όρο **γεωμετρική εξασθένιση**. Αν θεωρήσουμε έναν ακουστικό παλμό που διαδίδεται σφαιρικά γύρω από την πηγή, καταλαβαίνουμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από αυτή, η ίδια ενέργεια, καλύπτει μεγαλύτερη συνολική επιφάνεια με αποτέλεσμα η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας να ελαττώνεται. Για την ακρίβεια, η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας μεταβάλλεται με αντίστροφο ρυθμό σε σχέση με η συνολική επιφάνεια που καταλαμβάνει το κύμα, όπως πχ. βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 3).



Εικόνα 3: Γεωμετρική εξασθένιση του σφαιρικού ακουστικού κύματος. Παρατηρούμε μια τομή του κύματος, όπου διακρίνεται εύκολα πως η ενέργεια ελαττώνεται τετραγωνικά ως προς την απόσταση (δηλαδή με τον αντίστροφο ρυθμό αύξησης της συνολικής επιφάνειας.).

Πέρα από τη γεωμετρική εξασθένιση, σημαντικό ρόλο στα υδροακουστικά φαινόμενα έχει και η **εξασθένιση λόγω απορρόφησης** του ήχου από το μέσο. Το φαινόμενο οφείλεται ουσιαστικά σε θερμικές απώλειες κατά τη διάδοση του κύματος. Οι απώλειες αυτές ποσοτικοποιούνται κάνοντας χρήση του συντελεστή απορρόφησης, ο οποίος είναι συνάρτηση της κατάστασης του υλικού (για περίπτωση του νερού, της αλατότητας και της θερμοκρασίας) και της συχνότητας του ακουστικού κύματος. Όσον αφορά τη συχνότητα, τα

υψίσυχνα κύματα εξασθενούν πολύ γρηγορότερα και η επίδραση αυτή είναι τόσο σημαντική, που καθορίζει ουσιαστικά τα όρια δυνατοτήτων της σχετικής τεχνολογίας.

Όταν το ακουστικό κύμα διαδίδεται ακολουθώντας πολύπλοκες διαδρομές, η εξασθένιση εξαιτίας των παραπάνω επιδράσεων δεν είναι καθόλου προφανής. Για την ακρίβεια, είναι πολύ συχνά το ζητούμενο μέγεθος κατά τη μοντελοποίηση ακουστικών φαινομένων (πχ. συναρτήσεις ακουστικών κώνων σε ενεργά ηχοβολιστικά).

Παρακάτω, στην ενότητα 1.3 θα δούμε ότι η πραγματικότητα απέχει περαιτέρω από τη παραπάνω ιδεατή προσέγγιση η οποία αποτελεί (στη καλύτερη περίπτωση) μία αρκετά καλή προσέγγιση της μέσης κατάστασης για το φυσικό περιβάλλον. Συγκεκριμένα θα φανεί πως τόσο η ταχύτητα του ήχου όσο και τα φυσικά σύνορα, διαθέτουν τυχαία χαρακτηριστικά τα οποία πρέπει να ληφθούν υπόψη για τη ρεαλιστική μοντελοποίηση ειδικών φαινομένων. Πριν γίνει όμως αυτό θα προηγηθεί μία εισαγωγή στη φυσική της ακουστικής διάδοσης και θα παραχθούν οι βασικές κυματικές εξισώσεις.

1.2 Φυσική των ακουστικών κυμάτων στη θάλασσα - εξισώσεις και άξονες μαθηματικής μοντελοποίησης της ακουστικής διάδοσης.

1.2.1. Φυσική των ακουστικών κυμάτων, βασικές εξισώσεις.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, με τον όρο *ακουστικό κύμα*, εννοείται η διάδοση μίας διαταραχής ή ταλάντωσης της πίεσης σε ένα υλικό μέσο. Στη περίπτωση ρευστού μέσου, η διάδοση γίνεται με τη μορφή επιμήκων κυμάτων πυκνότητας. Στα στερεά μέσα, τα ακουστικά κύματα είναι ισοδύναμα των σεισμικών και η διάδοσή τους μπορεί να γίνει (όπως και στα ρευστά) στη μορφή επιμήκων κυμάτων πυκνότητας (*P-waves*) ή/και στη μορφή εγκάρσιων κυμάτων μεταβαλλόμενης διατμητικής τάσης κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης (*S-waves*).

Η φυσική περιγραφή και μαθηματική μοντελοποίηση των ακουστικών κυμάτων σε μοριακό επίπεδο ξεκινά πάντοτε (και είναι στενά συνδεδεμένη) με ένα μοντέλο για το υλικό. Σε αντίθεση με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα ακουστικά κύματα προϋποθέτουν τη παρουσία ύλης. Τα περισσότερο εξελιγμένα από τα εν λόγω μοντέλα, λαμβάνουν υπόψη διαδοχικές κρούσεις στη μικροδομή του υλικού (πχ. κρυσταλλικά πλέγματα, δομή ρευστών κλπ.) στην οποία λαμβάνεται υπόψη και η εγγενής τυχαία θερμική κίνηση (ουσιαστικά η εντροπία) του υλικού υπό τις επικρατούσες συνθήκες. Το τελευταίο είναι απαραίτητο, καθώς διαφορετικά η ταχύτητα του ήχου επηρεάζεται μη ρεαλιστικά από το πλάτος της διαταραχής (διέγερσης) και επιπλέον δεν υποστηρίζονται κύματα αραιώσης. Έτσι στα μοντέλα αυτά, μία διαταραχή ενός η περισσότερων μορίων του υλικού διαδίδεται μέσω διαδοχικών κρούσεων με σεβασμό πάντοτε στους μοριακούς/ατομικούς δεσμούς που επικρατούν στο υλικό και την εντροπία. Επειδή η διαταραχή της ταχύτητας εξαιτίας του ακουστικού κύματος είναι συνήθως κατά πολύ μικρότερη της θερμικής ταχύτητας (πχ. της τάξεως του εκατομμυριοστού για τα αέρια), τα ακουστικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα που είναι συνάρτηση της θερμικής κατάστασης του υλικού και όχι του πλάτους της διαταραχής που τα προκαλεί. Όπως αναμένεται, σε ασυνήθως μεγάλα πλάτη διαταραχών που συναντώνται σε βίαια εκρηκτικά φαινόμενα, φαίνεται να υπάρχει εξάρτηση της ταχύτητας του ακουστικού κύματος από το πλάτος της διέγερσης (βλ. Ingard 2008). Τέτοιου τύπου (μοριακές) προσεγγίσεις έχουν αξία όταν χρειάζεται να μελετηθεί η ακουστική σε πολύ μικρή κλίμακα (πχ. ακουστικές κρούσεις).

Στο σύνολο, σχεδόν, των εφαρμογών, εξαιτίας της κλίμακας στην οποία συμβαίνει το φαινόμενο ακουστικής διάδοσης, μπορεί να γίνει η υπόθεση του συνεχούς για το μέσο. Με την υπόθεση αυτή, τα μεγέθη πυκνότητας, πίεσης και ταχύτητας μίας «στοιχειώδους μάζας» στο εσωτερικό του μέσου, μπορούν να θεωρηθούν συνεχείς συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου. Συνεπώς, οι *εξισώσεις της ακουστικής*, θα διέπονται από τις εξισώσεις διατήρησης για τη μάζα και τη ταχύτητα.

Τα ακουστικά φαινόμενα είναι γενικώς μη-γραμμικά και έτσι οι εξισώσεις της ακουστικής είναι γενικώς μη γραμμικές. Η μη-γραμμικότητα αυξάνεται με το πλάτος της διαταραχής και την απόσταση της διάδοσης του κύματος, ενώ συνήθως γίνεται σημαντική (μετρήσιμη) για μεγάλες τιμές των σχετικών μεγεθών. Σε ορισμένες περιπτώσεις, επιπλέον ιδιαιτερότητες του μέσου επιτρέπουν σημαντικές μη γραμμικότητες, όπως για παράδειγμα η ασύμμετρη (μη ομοιόμορφη) συμπεριφορά σε συμπίεσεις και εκτονώσεις (πχ. φυσαλίδες), Rossing 2007. Η μελέτη των μη-γραμμικών ακουστικών φαινομένων, είναι σημαντική σε διάφορες φυσικές και τεχνολογικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη μελέτη μηχανικών ταλαντώσεων μεγάλου πλάτους, ακουστικών κώνων από ενεργά ηχοβολιστικά, εκρηκτικών φαινομένων

(πχ. shock waves), ακουστικής διάδοσης σε μείγματα υλικών, θερμοακουστικών μηχανών, κα. Η προσέγγιση των μη-γραμμικών ακουστικών προβλημάτων μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους, αναλόγως με το υπό εξέταση φαινόμενο (βλ. Kinsler et al 1999). Όσον αφορά την υδροακουστική, για τα περισσότερα μη-γραμμικά φαινόμενα, χρησιμοποιείται συνήθως κάποια παραλλαγή της μη-γραμμικής εξίσωσης Burger (*Burger's equation*) ή η εξίσωση KZK (*Khoklov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation*) που αποτελούν απλούστερες (αλλά συχνά ικανοποιητικές) προσεγγίσεις της «πλήρους» μη-γραμμικής ακουστικής εξίσωσης για τη μελέτη ειδικών προβλημάτων. Τέλος, για ακουστικά φαινόμενα με ασθενείς μη-γραμμικότητες, γίνεται εκτενής χρήση της θεωρίας διαταραχών. **Η παρούσα μελέτη θα ασχοληθεί αποκλειστικά με γραμμικά ακουστικά φαινόμενα**, καθώς η σχετική προσέγγιση κρίνεται ικανοποιητική για τις περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη μη-γραμμική ακουστική, ο αναγνώστης παραπέμπεται ενδεικτικά στα Sachdev 1987, Enflo & Hedberg 2004 και Debnath 2005.

Για ένα μεγάλο ποσοστό των εφαρμογών της ακουστικής και για πολλά φαινόμενα ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα, η μικρότητα της διαταραχής που προκαλούν τα ακουστικά κύματα νομιμοποιεί τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης, ώστε να προκύψει η **γραμμική ακουστική εξίσωση** ή **εξίσωση D'Alembert** (Vallis 2006). Η γραμμική ακουστική εξίσωση, αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία απλώς ως **ακουστική εξίσωση**. Στη συνέχεια θα περιγραφεί συνοπτικά η σχετική διαδικασία.

1.2.1.1. Βασικές εξισώσεις I - Η ακουστική εξίσωση (εξίσωση D' Alembert).

- **Συμβολισμός και βασικές παραδοχές.**

Για λόγους τάξης, παραθέτονται αρχικά οι βασικές συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια της παραγράφου.

Οι κύριες συναρτήσεις (πεδία), είναι η πυκνότητα $\rho : \rho(\mathbf{x}, t)$, η ταχύτητα $\mathbf{v} : \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ και η πίεση $p : p(\mathbf{x}, t)$, ορισμένες στο σημείο \mathbf{x} τη χρονική στιγμή t . Αυτά τα βασικά μεγέθη αναπτύσσονται περαιτέρω ως:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t),$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + \tilde{p}(\mathbf{x}, t),$$

όπου ο δείκτης 0 αντιστοιχεί στη βασική κατάσταση του ρευστού, ενώ οι όροι \sim συμβολίζουν τη διαταραχή εξαιτίας του ακουστικού κύματος. **Η βασική κατάσταση θεωρείται αμετάβλητη στη χρονική κλίμακα** του ακουστικού φαινομένου, ενώ για πολλές εφαρμογές, είναι λογικό να θεωρηθεί ότι οι **όροι των διαταραχών (\sim) είναι μικρού πλάτους⁽³⁾**. Όπως θα φανεί, η διαδικασία που ακολουθεί ισχύει **απαράλλακτη** και στη περίπτωση που τα βασικά μεγέθη είναι **αργές** συναρτήσεις του χρόνου. Εξαιτίας όμως της μεγάλης ταχύτητας των ακουστικών κυμάτων και της φύσης των περισσότερων εφαρμογών, η βασική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή χωρίς σημαντικές επιπτώσεις, όπως θα γίνει και στη συνέχεια

⁽³⁾ Στα ακουστικά κύματα η συγκεκριμένη παραδοχή δεν είναι ιδιαίτερα αυστηρή, καθώς οι ταλαντώσεις στη πίεση είναι αρκετές συνήθως τάξεις μικρότερες από τη μέση πίεση του περιβάλλοντος.

για λόγους απλότητας. Για τον ίδιο λόγο, θα υποθεθεί τέλος ότι $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = 0$, δηλαδή ότι με εξαίρεση την επίδραση του ακουστικού κύματος, το ρευστό είναι γενικώς ακίνητο.

- **Παραγωγή της ομογενούς εξίσωσης D' Alembert σε μέσο μεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών.**

Εφόσον τα ακουστικά κύματα είναι διαδιδόμενες διαταραχές της πυκνότητας, για τη περιγραφή τους είναι απαραίτητη, μία εξίσωση που συνδέει τη πίεση με τη πυκνότητα. Κάνοντας τη παραδοχή ότι **δε συμβαίνει μεταφορά θερμικής ενέργειας μεταξύ γειτονικών στοιχείων του ρευστού**⁽⁴⁾, η **καταστατική εξίσωση** μπορεί να προκύψει από το ανάπτυγμα Taylor για τη συνάρτηση της πίεσης:

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \rho(\mathbf{x}, t)} \right)_{\rho_0} (\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0(\mathbf{x})) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial \rho^2(\mathbf{x}, t)} \right)_{\rho_0} (\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0(\mathbf{x}))^2 + \dots ,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι λαμβάνονται σε περιβάλλον σταθερής εντροπίας, που αντιστοιχεί στη κατάσταση του ρευστού απουσία της ακουστικής διαταραχής. Για μικρό πλάτος διαταραχής, θα ισχύει $|\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0(\mathbf{x}, t)| \ll 1$, οπότε οι όροι δεύτερης και ανώτερης τάξης μπορούν να αγνοηθούν ως αμελητέοι. Από τη παραπάνω διαδικασία προκύπτει η απλούστερη (γραμμική) σχέση μεταξύ πίεσης και πυκνότητας:

$$p(\mathbf{x}, t) - p_0(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \rho(\mathbf{x}, t)} \right]_{\rho_0} [\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0(\mathbf{x})] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tilde{p}(\mathbf{x}, t) = c(\mathbf{x})^2 \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

όπου $c(\mathbf{x})^2 = [\partial p(\mathbf{x}, t) / \partial \rho(\mathbf{x}, t)]_{\rho_0}$, θα προκύψει στη συνέχεια ότι είναι η **φασική ταχύτητα** διάδοσης του ήχου στο ρευστό.

Για τη περιγραφή της δυναμικής του ρευστού, χρειάζεται μια σχέση που να συνδέει τη κίνηση του ρευστού (ταχύτητα) με τη συμπίεση και την αραιώσή του (πυκνότητα). Ακολουθώντας συνήθεις τεχνικές βρίσκουμε την **εξίσωση της συνέχειας** για τη μάζα:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) .$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα για τη πυκνότητα και τη ταχύτητα στο δεξιό μέλος και αποκόπτοντας όρους δεύτερης⁽⁵⁾ και ανώτερης τάξης, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\rho_0(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) . \quad (2)$$

⁽⁴⁾ Η παραδοχή αυτή είναι αρκετά ακριβής καθώς το ρευστό θα θεωρηθεί επιπλέον μη συνεκτικό και το πλάτος της ακουστικής διαταραχής θεωρείται μικρό.

⁽⁵⁾ Τα γινόμενα όρων διαταραχών είναι όροι δεύτερης τάξης.

Τέλος θα χρειαστούμε και την εξίσωση Navier-Stokes (*εξίσωση διατήρησης της ορμής*) για συμπίεστο μη συνεκτικό ρευστό:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = - \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \nabla p(\mathbf{x}, t) .$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της ταχύτητας στον δεύτερο όρο, της πυκνότητας στον όρο του δεξιού μέλους και αποκόπτοντας όρους δεύτερης και ανώτερης τάξης, καταλήγουμε στη γραμμική εξίσωση για την ορμή:

$$\rho_0(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \nabla p(\mathbf{x}, t) . \quad (3)$$

Για να καταλήξουμε σε **μία** βασική εξίσωση, παίρνουμε αρχικά την απόκλιση της τελευταίας σχέσης, δρώντας εσωτερικά με τον τελεστή ∇ και στα δύο μέλη:

$$\rho_0(\mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) = - \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) . \quad (3b)$$

Έπειτα, λαμβάνοντας τη μερική παράγωγο της εξίσωσης (2) ως προς το χρόνο, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = - \rho_0(\mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) , \quad (2b)$$

και παρατηρώντας ότι έχουν εμφανιστεί κοινοί όροι και στις δύο εξισώσεις (υπογραμμισμένοι όροι), τις αφαιρούμε κατά μέλη:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \\ &= \frac{\partial^2 [\rho_0(\mathbf{x}) + \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)]}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (4)$$

Από το δεξιό μέλος και την εξ. (1), έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &\stackrel{(1)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \right] = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \frac{\partial^2 [\rho_0(\mathbf{x}) + \tilde{p}(\mathbf{x}, t)]}{\partial t^2} = \\ &= \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} , \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην (4), καταλήγουμε στη γνωστή *ακουστική εξίσωση* (ή *εξίσωση D' Alembert*) για το ακουστικό πεδίο της πίεσης:

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές επί του συστήματος (1), (2), (3) και σε ορισμένες περιπτώσεις κάνοντας επιπλέον παραδοχές, μπορεί κανείς να καταλήξει σε κυματικές εξισώσεις, αντίστοιχες της (5), για τη ταχύτητα σωματιδίου, το δυναμικό ταχύτητας, το δυναμικό μετατόπισης και άλλα μεγέθη. Οι εξισώσεις παράγονται συνοπτικά στο Janssen et al 1994. Στη συνέχεια, η μελέτη θα επικεντρωθεί στο πεδίο πίεσης $p(\mathbf{x}, t)$.

- **Η Μη-ομογενής εξίσωση D' Alembert.**

Η εξίσωση (5) που παράχθηκε προηγουμένως, ισχύει για περιοχές του χώρου όπου απουσιάζει οποιαδήποτε ακουστική διέγερση. Προκειμένου βέβαια να υπάρχει ακουστικό πεδίο, η παρουσία μίας τέτοιας διέγερσης είναι απαραίτητη.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η επίδραση μίας πηγής μπορεί να εκφρασθεί από κατάλληλες χρονικά εξαρτώμενες οριακές συνθήκες τις οποίες χρησιμοποιούμε σε συνδυασμό με την εξίσωση (5). Τέτοιες περιπτώσεις είναι όταν για παράδειγμα ο ήχος προέρχεται από την ταλάντωση ενός συνόρου του χωρίου επίλυσης, ή περιπτώσεις που μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει κάτι τέτοιο. Άλλες φορές, είναι προτιμότερο η πηγή να ενσωματωθεί άμεσα στη κυματική εξίσωση, χρησιμοποιώντας όρους διέγερσης στην εξίσωση συνέχειας όταν η διαταραχή προέρχεται από την εισροή/εκροή μάζας, ή/και στην εξίσωση Euler όταν η διαταραχή οφείλεται στη δράση κάποιου σώματος.

Εισάγοντας τους κατάλληλους όρους στις σχέσεις (2), (3):

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{x}) (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = G(\mathbf{x}, t) \quad (2c)$$

$$\rho_0(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (3c)$$

και ακολουθώντας (απαράλλακτη) τη προηγούμενη διαδικασία (εξισώσεις (2) έως (5)), καταλήγει κανείς στη **μη-ομογενή ακουστική εξίσωση**:

$$\boxed{\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t)}, \quad (6)$$

$$\text{όπου } f(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t),$$

πραγματική πεδιακή συνάρτηση που αντιστοιχεί στην συνολική ακουστική διέγερση εξαιτίας μεταβολής στο ισοζύγιο μάζας (πχ. mass injection) και στη παρουσία αδρανειακού κινητού

(πχ. ταλαντωτής). Η μερική παράγωγος ως προς t και το gradient, οφείλονται στους μετασχηματισμούς που περιγράφηκαν στις εξισώσεις (2b) και (3b).

Τέλος, σημειώνεται ότι στη πραγματικότητα η συνάρτηση $f(\mathbf{x}, t)$ έχει και έναν τρίτο όρο, ο οποίος αντιστοιχεί στην ακουστική διέγερση, εξαιτίας διατμητικών και εσωτερικών τριβών στο ρευστό. Η διέγερση αυτή εντοπίζεται ουσιαστικά στον όρο $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))$ της εξίσωσης Euler και οφείλεται στη παρουσία τύρβης. Τέτοια φαινόμενα δε θα μας απασχολήσουν εδώ, και η αναφορά γίνεται για λόγους πληρότητας. Περισσότερα για ακουστική διέγερση εξαιτίας τύρβης, στο Kinsler et al, 1999.

1.2.1.2. Βασικές εξισώσεις II - Η εξίσωση Helmholtz (η εξίσωση D' Alembert στο πεδίο των συχνοτήτων).

Επειδή η ταχύτητα του ήχου στο μέσο έχει θεωρηθεί ανεξάρτητη του χρόνου, έχει νόημα η μελέτη των συναρτήσεων διέγερσης και πίεσης στο πεδίο των συχνοτήτων. Διατυπώνοντας τους σχετικούς αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier,

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega, \quad f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (6),

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 (\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}) d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}) d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \right) \cdot e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) &= \hat{f}(\mathbf{x}, \omega), \end{aligned}$$

ή

$$\boxed{\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) + k(\mathbf{x}, \omega)^2 \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{f}(\mathbf{x}, \omega)}, \quad (7)$$

όπου $k(\mathbf{x}, \omega) = \omega / c(\mathbf{x})$, ο **κυματικός αριθμός**. Με ω συμβολίζεται η κυκλική συχνότητα, και με $c(\mathbf{x})$, όπως ειπώθηκε, η ταχύτητα του ήχου. Η τελευταία σχέση είναι η γνωστή **μη-ομογενής εξίσωση Helmholtz** για το πεδίο πίεσης. Η εξίσωση Helmholtz είναι γενικώς απλούστερη στην επίλυσή της από την ακουστική εξίσωση (6), υπό την προϋπόθεση ότι είναι εφικτός ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για την $f(\mathbf{x}, t)$. Στις ακουστικές εφαρμογές, η πηγή θεωρείται συχνά *narrow-band*, δηλαδή ότι παράγει μικρό εύρος συχνοτήτων, με αποτέλεσμα να ευνοούνται οι σχετικοί μετασχηματισμοί.

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση αρμονικής χρονικής εξάρτησης, όπου η πηγή θεωρείται **μονοχρωματική**, δηλαδή ότι παράγει μία μόνο συχνότητα ή ισοδύναμα η κυκλική συχνότητα ω είναι σταθερή, η εξίσωση *Helmholtz* απλοποιείται:

$$\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}; \omega) + k(\mathbf{x}; \omega)^2 \hat{p}(\mathbf{x}; \omega) = \hat{f}(\mathbf{x}; \omega) . \quad (8)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier που εφαρμόστηκε προηγουμένως, δείχνει ευθέως ότι εξίσωση *Helmholtz* είναι η ακουστική εξίσωση στο πεδίο των συχνοτήτων. Σε ισοδυναμία με τη παραπάνω διαδικασία, κανείς μπορεί από την ακουστική εξίσωση να καταλήξει άμεσα στην εξίσωση (8) υποθέτοντας εξαρχής την αρμονική εξάρτηση (πηγή) από το χρόνο και αναζητώντας αντίστοιχες λύσεις. Ορίζοντας λοιπόν τα δύο πεδία μέσω της μιγαδικής τους αναπαράστασης⁽⁶⁾:

$$p(\mathbf{x}; t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad f(\mathbf{x}; t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\},$$

και κάνοντας την αντικατάσταση στην ακουστική εξίσωση (6):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\text{Re} \left\{ \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-j\omega t} \right\} \right) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\text{Re} \left\{ \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-j\omega t} \right\} \right) &= \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-j\omega t} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{Re} \left\{ \left[\nabla^2 \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) - \frac{(-j\omega)^2}{c^2(\mathbf{x})} \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) \right] \cdot e^{-j\omega t} \right\} &= \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-j\omega t} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{Re} \left\{ \nabla^2 \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) + k(\mathbf{x}; \omega)^2 \overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) \right\} &= \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}, \omega) \right\}. \end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι:

$$\overset{\circ}{p}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) + j \cdot p_{\text{Im}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{f}(\mathbf{x}, \omega) + j \cdot f_{\text{Im}}(\mathbf{x}, \omega),$$

η παραπάνω σχέση γίνεται:

⁽⁶⁾ Ένα σύντομο σχόλιο σχετικά με τη μιγαδική αναπαράσταση των αρμονικών πεδιακών συναρτήσεων. Οποιαδήποτε συνάρτηση $\varphi(\mathbf{x}, t)$ που είναι αρμονική ως προς μία συχνότητα ω , μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_c(\mathbf{x}, \omega) \cos(\omega t) + \varphi_s(\mathbf{x}, \omega) \sin(\omega t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\varphi}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-j\omega t} \right\},$$

όπου $\varphi_c(\mathbf{x}, \omega)$, $\varphi_s(\mathbf{x}, \omega)$, πραγματικές συναρτήσεις και $\overset{\circ}{\varphi}(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_c(\mathbf{x}, \omega) + j\varphi_s(\mathbf{x}, \omega)$, το **μιγαδικό πλάτος** ή **μιγαδικό πεδίο**. Τα μιγαδικά πεδία, χωρίς να έχουν κάποια ιδιαίτερη φυσική σημασία, είναι εξαιρετικά χρήσιμα στη διαχείριση της αρμονικής εξάρτησης καθώς η χρονική εξάρτηση περιορίζεται στον εκθετικό όρο, με αποτέλεσμα η n-οστή παράγωγος του πεδίου ως προς τη χρονική μεταβλητή προκύπτει από την αλγεβρική σχέση:

$$\frac{\partial^n \varphi(\mathbf{x}, t)}{t^n} = \text{Re} \left\{ (-j\omega)^n \cdot \overset{\circ}{\varphi}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{-j\omega t} \right\}.$$

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Αθανασούλης & Μπελιμπασάκης 2006, Kinsler et al 1999 και Ingard 2008.

$$\nabla^2 \hat{p}(\mathbf{x}; \omega) + k(\mathbf{x}; \omega)^2 \hat{p}(\mathbf{x}; \omega) = \hat{f}(\mathbf{x}; \omega),$$

δηλαδή προέκυψε και πάλι η σχέση (8).

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, σε πολλές εφαρμογές, οι ακουστικές πηγές θεωρούνται ως οριακές συνθήκες ή σημειακές, με αποτέλεσμα να είναι $f(\mathbf{x}, t) = 0$ σχεδόν παντού. Στη περίπτωση αυτή, τα ακουστικά κύματα περιγράφονται από τις ομογενείς εξισώσεις D' *Alembert* και *Helmholtz* που είδαμε νωρίτερα (εξισώσεις (6) και (8) αντίστοιχα).

1.2.1.2. Διάδοση σε φραγμένα/στρωματοποιημένα μέσα - Προβλήματα Συνοριακών τιμών.

Εάν το ακουστικό μέσο είναι φραγμένο ή/και εμφανίζει ασυνέχειες σε κάποιες επιφάνειες, πρέπει να οριστούν κατάλληλες οριακές συνθήκες για τις παραπάνω εξισώσεις, ώστε να μη παραβιάζεται η φυσική για τα εμπλεκόμενα πεδία. Σε μη φραγμένα χωρία, πρέπει επιπλέον να οριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης καθώς η χωρική μεταβλητή τείνει στο άπειρο.

Ένα σύνηθες σύνορο σε υδροακουστικά προβλήματα στη θάλασσα, είναι η επιφάνεια, όπου στις περισσότερες εφαρμογές ορίζεται η συνθήκη $p(\eta(x_1, x_2, t)) = 0$, όπου $\eta(x_1, x_2, t)$ η ανύψωση της επιφάνειας. Συχνά, η επιφάνεια θεωρείται αδιατάρακτη, δηλαδή $\eta(x_1, x_2, t) = 0$, με αποτέλεσμα το πρόβλημα να απλοποιείται σημαντικά, καθώς γίνονται εφικτοί συγκεκριμένοι μετασχηματισμοί (Jenssen et al 1994). Η απαίτηση της μηδενικής πίεσης (ισοδύναμα παραδοχή της ακουστικής μόνωσης) στην επιφάνεια είναι συχνά θεμιτή εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς πυκνότητας μεταξύ της θάλασσας και της ατμόσφαιρας.

Στη περίπτωση που ο ήχος διαδίδεται σε μέσο που αποτελείται από στρώσεις, ένα κλάσμα του ακουστικού κύματος θα διαπεράσει την ασυνέχεια και το υπόλοιπο (εάν παραλειφθούν οι απώλειες) θα ανακλαστεί. Για μέσα αυτού του τύπου, πρέπει να οριστούν κατάλληλες οριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, απαιτείται **η συνέχεια του ακουστικού πεδίου της πίεσης και της ταχύτητας των στοιχείων του ρευστού στη διεπιφάνεια**. Μία τέτοια περίπτωση θα εξετάσουμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3 όπου βρίσκονται οι εφαρμογές.

1.2.1.3. Λύσεις ακουστικών εξισώσεων.

Γενικώς, τα ακουστικά φαινόμενα μπορούν να ορίσουν προβλήματα δύο τύπων, αναλόγως με τη ζητούμενη ποσότητα. Η μία περίπτωση είναι το **ευθύ πρόβλημα**, όπου τα ακουστικά χαρακτηριστικά του μέσου διάδοσης είναι γνωστά και για μία επίσης γνωστή πηγή (ή γνωστό προσπίπτον κύμα) ζητείται να υπολογιστεί το ακουστικό πεδίο (ή/και το σκεδασμένο ακουστικό πεδίο). Η δεύτερη περίπτωση είναι το λεγόμενο **αντίστροφο πρόβλημα**, όπου το ακουστικό πεδίο είναι γνωστό και ζητείται να υπολογιστούν τα ακουστικά χαρακτηριστικά του μέσου (ή/και κάποιου σκεδαστή).

Σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιπτώσεις, το πρόβλημα θα τεθεί με βάση κάποια εξίσωση της ακουστικής (συνήθως την εξίσωση *Helmholtz* (8) ή την εξίσωση D' *Alembert* (6)) και τις κατάλληλες οριακές ή/και αρχικές συνθήκες. Η ποικιλομορφία των δυνατών

προβλημάτων καθιστά αδύνατη τη συστηματική επίλυση των συγκεκριμένων εξισώσεων για κάθε περίπτωση. Επιπλέον, αναλυτικές λύσεις δεν είναι διαθέσιμες για καμία από τις (6), (8), εκτός από ειδικές περιπτώσεις που σπανιότατα συναντώνται σε ρεαλιστικές εφαρμογές. Ως εκ τούτου, η μέθοδος επίλυσης που θα χρησιμοποιηθεί στη κάθε περίπτωση, εξαρτάται από τη διάσταση του προβλήματος, τα χαρακτηριστικά του μέσου (γεωμετρία, μεταβολές στο πεδίο του κυματαριθμού/ταχύτητας του ήχου), τις συνοριακές συνθήκες, τη γεωμετρία του πιθανού πομπού/δέκτη, το εύρος και τη περιοχή του εύρους συχνοτήτων.

Γενικώς, προτιμάται (όταν αυτό είναι εφικτό) η χρήση της εξίσωσης *Helmholtz*, καθώς με τον τρόπο αυτό μειώνεται κατά μία διάσταση το πρόβλημα (κατά τη διάσταση του χρόνου). Ιδίως δε σε φαινόμενα όπου το ακουστικό πεδίο έχει στενό συχνοτικό περιεχόμενο (*narrow-band*) ή ακόμη καλύτερα μία μόνο συχνότητα, η *Helmholtz* χρησιμοποιείται αποκλειστικά ως θεωρητική βάση για τη κατασκευή των βασικών μοντέλων, όπως είναι αυτά της θεωρίας ακτίνων, η ολοκλήρωση στο πεδίο του κυματαριθμού, οι κανονικές ιδιομορφές και η παραβολική εξίσωση. Τα μοντέλα αυτά είναι γενικώς ημί-αναλυτικά και χρησιμοποιούνται για την επίλυση ακουστικών προβλημάτων. Το κάθε ένα από αυτά βασίζεται σε συγκεκριμένες παραδοχές, έχει διαφορετικό εύρος συχνοτήτων όπου λειτουργεί καλά, ενώ σημαντική επίδραση έχουν και τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος. Επειδή τα μοντέλα αυτά δε θα μας απασχολήσουν στο υπόλοιπο τη μελέτης, δε θα αναπτυχθούν περαιτέρω για λόγους οικονομίας έκτασης. Ένα καλό βιβλίο που παρουσιάζει αρκετά όλα τα παραπάνω (και μερικά ακόμη) μοντέλα, είναι το Jensen et al 1994.

1.3 Στοχαστικά χαρακτηριστικά ακουστικών φαινομένων στο θαλάσσιο περιβάλλον – Πηγές στοχαστικότητας.

Στη παράγραφο 1.2.1, παρουσιάστηκαν οι βασικές εξισώσεις και συνθήκες που περιγράφουν τη φυσική πολλών ακουστικών φαινομένων στο θαλάσσιο περιβάλλον. Εκεί, φάνηκε πως τα ακουστικά μοντέλα καθορίζονται από τη ταχύτητα του ήχου στο νερό, τα σύνορα της επιφάνειας της θάλασσας και του πυθμένα και την ακουστική πηγή (εφόσον αυτή υπάρχει). Στο ίδιο κεφάλαιο είχε αναφερθεί και η τυχαιότητα που χαρακτηρίζει τις συγκεκριμένες συναρτήσεις και η σημασία της αποτελεσματικής παραμετροποίησης των φυσικών μοντέλων. Στη παρούσα ενότητα θα γίνει μία προσπάθεια αναγνώρισης της «εγγενούς» αυτής τυχαιότητας και αναζήτηση τρόπων παραμετροποίησης και αναδιατύπωσης των βασικών εξισώσεων και οριακών συνθηκών ώστε να ενσωματώνουν τη στοχαστική ιδιότητα. Για το λόγο αυτό θα θεωρηθούν γνωστές ορισμένες βασικές έννοιες από τη *θεωρία πιθανοτήτων*, όπως αυτή των *τυχαίων συναρτήσεων* και των *στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων*. Για υπενθύμιση των βασικών πιθανοθεωρητικών εννοιών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Paroulis 1965, ενώ για στοχαστικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον, στο Αθανασούλης 2000.

1.3.1. Ακουστικές πηγές.

Μία βασική παράμετρος στα ακουστικά φαινόμενα είναι η πηγή των ακουστικών κυμάτων. Όπως αναφέρθηκε, μία πηγή μπορεί να είναι ανθρωπογενής ή φυσική. Οι *ανθρωπογενείς πηγές* έχουν συνήθως συγκεκριμένες ακουστικές ιδιότητες (ένταση και φάσμα εκπεμπόμενων συχνοτήτων) που εξαρτώνται από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά τους. Εξαιτίας των υλικών που χρησιμοποιούνται και της μεθόδου κατασκευής, τα χαρακτηριστικά αυτά εμφανίζουν τυχαίες διακυμάνσεις ανά πομπό ή/και ανά χρήση. Οι *φυσικές πηγές* επηρεάζονται ακόμη πιο έντονα και με πιο σαφή τρόπο από τυχαία φαινόμενα, όπως για παράδειγμα η βροχή στην επιφάνεια της θάλασσας, οι θαλάσσιοι οργανισμοί, το σπάσιμο πάγων κ.α. Συνήθως δε, πολλές φυσικές πηγές δρουν ταυτόχρονα με αποτέλεσμα να εμφανίζεται το φαινόμενο του *περιβάλλον θορύβου (ambient noise)*, ο οποίος συχνά εμφανίζει συγκεκριμένη πιθανοθεωρητική δομή ανά θαλάσσια περιοχή και εποχή. Ως θόρυβος λειτουργούν φυσικά (συνήθως ακούσια) και ανθρωπογενείς εφαρμογές, όπως για παράδειγμα οι ήχοι των πλοίων, η άλλου τύπου παράκτια/θαλάσσια δραστηριότητα.

Έτσι, οι ακουστικές πηγές που δρουν σε μία θαλάσσια περιοχή, έχει αρκετές φορές νόημα να μοντελοποιηθούν κάνοντας χρήση μίας κατάλληλης *τυχαίας συνάρτησης*. Γενικώς, μία τέτοια συνάρτηση θα είναι της μορφής $f(x, t; \theta)$, θα εξαρτάται δηλαδή από τη θέση και το χρόνο. Θα ισοδυναμεί λοιπόν σε μια *στοχαστική διέγερση* στο ακουστικό πρόβλημα. Σε ορισμένες βέβαια περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στη μοντελοποίηση ακουστικών παλμών ή αρμονικών ακουστικών κυμάτων, οι στοχαστικές πηγές μπορούν να αντιστοιχηθούν σε *στοχαστικές αρχικές ή/και οριακές συνθήκες*.

1.3.2. Επιφάνεια της θάλασσας.

Η επιφάνεια της θάλασσας αποτελεί συχνά συνοριακή συνθήκη στον ορισμό των ακουστικών προβλημάτων. Εξαιτίας της τυχαίας φόρτισης που ασκείται στην επιφάνεια από το τυρβώδες

πεδίο ανέμου αλλά και άλλες πηγές, η συνάρτηση που περιγράφει την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι και αυτή μία *τυχαία συνάρτηση* της μορφής $\eta(x_1, x_2, t; \theta)$.

Συχνά, στη μοντελοποίηση φαινομένων ακουστικής διάδοσης, η αλληλεπίδραση των ακουστικών κυμάτων με την επιφάνεια είναι σπάνια, με αποτέλεσμα η παραδοχή ότι αυτή είναι αδιατάρακτη να είναι καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Στις περιπτώσεις όμως που η παραδοχή αυτή δεν ισχύει, η τυχαία ανύψωση πρέπει να ληφθεί υπόψη με τη κατάλληλη μορφή της άνω συνοριακής συνθήκης. Παράδειγμα αποτελεί η κυματοδήγηση (κυρίως υψηλών συχνοτήτων) στο *επιφανειακό κανάλι (surface duct)* εξαιτίας χαμηλών επιφανειακών θερμοκρασιών, όπου οι ανακλάσεις στην επιφάνεια είναι συχνές.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, γίνεται η παραδοχή ότι η επιφάνεια της θάλασσας είναι πλήρως ανακλαστική, δηλαδή ότι η πίεση πάνω από αυτήν είναι μηδέν (*pressure release condition*), με αποτέλεσμα να μη «δραπετεύει» ο ήχος. Στη περίπτωση αυτή, ικανή άνω συνθήκη για το *πρόβλημα στοχαστικών συνοριακών συνθηκών*, θα ήταν πχ. για το πεδίο πίεσης:

$$p(\eta(x_1, x_2, t; \theta)) = 0 .$$

1.3.3. Θαλάσσιος πυθμένας.

Στη θαλάσσια ακουστική, ο πυθμένας μπορεί να μοντελοποιηθεί με διάφορους τρόπους, ανάλογα με τον τύπο της εφαρμογής. Σε πολλές από τις εφαρμογές αυτές, έχει νόημα ο ορισμός του ως τυχαίας συνάρτησης. Οι δύο βασικές διαφοροποιήσεις είναι το αν θα γίνει η θεώρηση του σκληρού πυθμένα (πλήρως ανακλαστικός πυθμένας) ή αυτός μοντελοποιηθεί ως ημιάπειρο σύνορο.

Στη πρώτη περίπτωση, ο πυθμένας θα περιγράφεται από μία συνάρτηση βάθους, η οποία σε πολλές εφαρμογές μπορεί να θεωρηθεί στοχαστική συνάρτηση της θέσης, δηλαδή της μορφής $h(x_1, x_2; \theta)$. Παραδείγματα περιπτώσεων που αυτή η θεώρηση έχει αξία (και όχι πχ. η χρήση κάποιας ντετερμινιστικής συνάρτησης που προέρχεται από μετρήσεις βαθυμετρίας), είναι όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμες ακριβείς μετρήσεις βαθυμετρίας, ή όταν λύνεται το αντίστροφο πρόβλημα και κάποιος θέλει να συμπεράνει τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά του πυθμένα εξαιτίας πχ. φυτοκάλυψης ή ειδικών γεωμορφών (*sea-bed reconstruction*). Σπάνια, ο ορισμός του πυθμένα γίνεται στη μορφή $h(x_1, x_2, t; \theta)$, σε συνάρτηση δηλαδή και με το χρόνο. Αυτό έχει νόημα πχ. σε περιπτώσεις που μελετάται η ακουστική εξαιτίας τεκτονικών φαινομένων (δηλαδή τυχαίων μετατοπίσεων του θαλάσσιου πυθμένα).

Όπως αναφέρθηκε, ο πυθμένας μπορεί να μοντελοποιηθεί και ως ημι-άπειρο σύνορο. Τότε, το άνω σύνορό του μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε ντετερμινιστικά, είτε σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν προηγουμένως. Όσον αφορά το ημιάπειρο χωρίο, και αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ντετερμινιστικά (πχ. συνάρτηση για τη πυκνότητα, διάφορες στρώσεις κλπ) ή να θεωρηθεί στοχαστικό, εξαιτίας της ιζηματολογικής σύστασής του.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί, ότι σε περίπτωση των μη επίπεδων συνόρων, η περαιτέρω μαθηματική διαχείριση του ακουστικού προβλήματος δυσκολεύει σημαντικά. Αυτό ισχύει εξίσου για τον πυθμένα και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Η θεώρηση του

σωματοποιημένου πυθμένα αποτελεί άλλο ένα «στοιχείο» πολυπλοκότητας, το οποίο αντιμετωπίζεται συνήθως με διακριτά μοντέλα (Jensen et al 1994).

1.3.4. Στόχοι και τυχαίοι σκεδαστές.

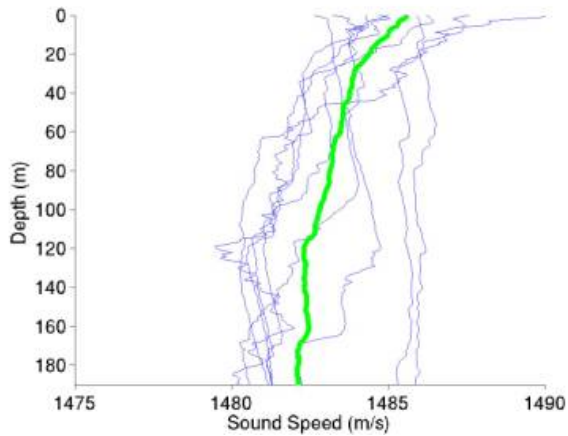
Πέρα από το πυθμένα και τη θαλάσσια επιφάνεια, ο ήχος μπορεί να ανακλαστεί και σε *ακουστικούς στόχους* ή τυχαίους *σκεδαστές*. Οι *στόχοι* αντιστοιχούν σε σαφείς οντότητες ή συστήματα που παρακολουθούνται από κάποια υδροακουστική διάταξη (πχ. σμήνη ψαριών ή άλλοι οργανισμοί, υποβρύχια, θαλάσσια θηλαστικά) ενώ με τον όρο *τυχαίοι σκεδαστές* εννοείται οτιδήποτε μπορεί να προκαλέσει ανάκλαση του ήχου και βρίσκεται διασκορπισμένο στο θαλάσσιο περιβάλλον (πχ. ψάρια, φυσαλίδες, πυκνή λάσπη κα.).

Στη περίπτωση των ακουστικών στόχων, η τυχειότητα έγκειται συνήθως στην επιφάνεια (σχήμα) του στόχου ή στην *ακουστική του διατομή* (δηλαδή την αποτελεσματικότητά του στο να ανακλά τον ήχο). Η πιθανοθεωρητική δομή αυτών των χαρακτηριστικών μπορεί, εάν είναι γνωστή, να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση κάποιου αντικειμένου ή οργανισμού (πχ. σμήνη ψαριών), ενώ εάν είναι άγνωστη μπορεί να υπολογιστεί μέσω μετρήσεων στην επίδρασή του στο ακουστικό πεδίο. Αντίστοιχα, για τους τυχαίους σκεδαστές, τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά της (χώρο-χρονικής) κατανομής τους στο υδάτινο περιβάλλον αλλά και των ακουστικών τους χαρακτηριστικών, χρησιμεύουν στη μοντελοποίηση της επίδρασής τους στη διάδοση του ήχου, που είναι συνήθως το φαινόμενο που μελετάται σε αυτές τις περιπτώσεις.

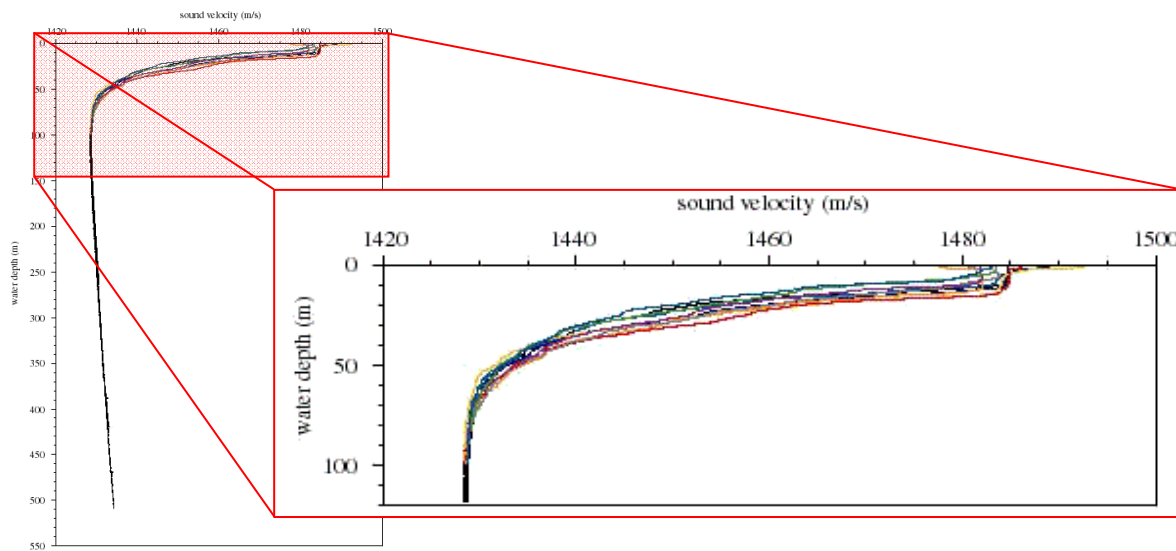
1.3.5. Θερμοκρασία.

Η ανάλυση για τη κατανομή της ταχύτητας του ήχου στη θάλασσα στη παράγραφο 1.1.1 αποτελεί μία ιδεατή περιγραφή, η πραγματικότητα είναι κάπως διαφορετική. Στο θαλάσσιο μέσο (όπως και σε όλα τα φυσικά συστήματα) λειτουργεί ένα πολύπλοκο πλέγμα διεργασιών με αποτέλεσμα τα διάφορα μεγέθη να εμφανίζουν αποκλίσεις από την ιδεατή κατάσταση. Έτσι τα πεδία πίεσης, θερμοκρασίας και αλατότητας εμφανίζουν τυχαίες διακυμάνσεις στο χώρο και το χρόνο με συνέπεια να συμβαίνει το ίδιο και με το πεδίο ταχύτητας του ήχου. Αντίστοιχα με τους ορισμούς των πεδίων στην ενότητα 1.2, θα είναι: $\rho(\mathbf{x},t;\theta)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x},t;\theta)$, $p(\rho(\mathbf{x},t;\theta))$ και τελικά $c(\mathbf{x},t;\theta)$. Έτσι, η θερμοκρασία συμμετέχει ως *στοχαστική παράμετρος* στις ακουστικές εξισώσεις.

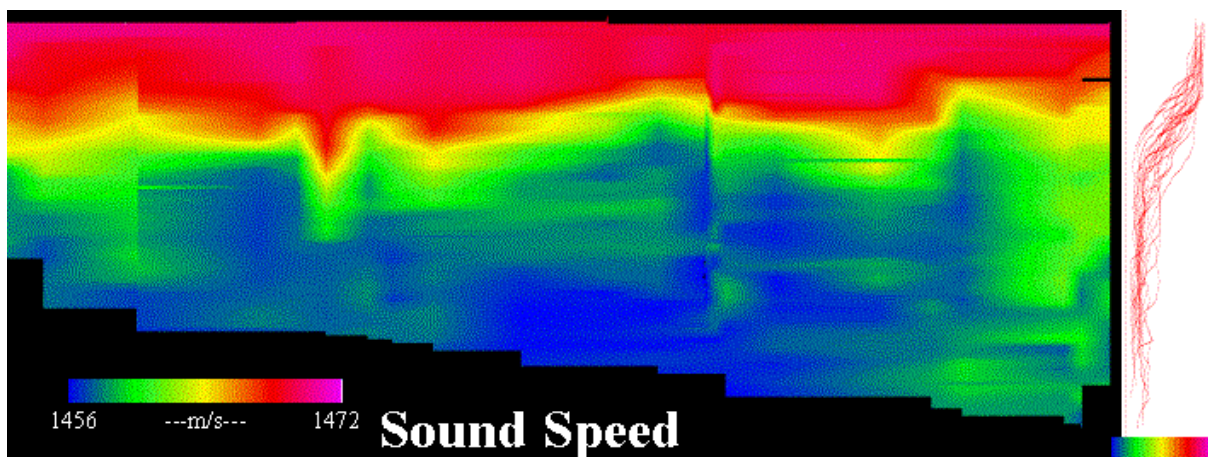
Στις ωκεανογραφικές μελέτες, το προφίλ ταχύτητας του ήχου μετράται είτε άμεσα με όργανα που υπολογίζουν τη ταχύτητα με χρόνους άφιξης (ακρίβεια ~ 0.02 m/s), είτε έμμεσα από μετρήσεις CTD (θερμοκρασίας βάρους και αλατότητας) και χρησιμοποιώντας εμπειρικές εξισώσεις (Mackenzie 1981) (ακρίβεια ~ 0.4 m/s). Στα παρακάτω σχήματα (Εικόνες 4, 5, 6) απεικονίζονται μετρήσεις ταχύτητας ήχου που χρησιμοποιήθηκαν για μελέτες.



Εικόνα 4: Μετρήσεις της ταχύτητας του ήχου στη θαλάσσια στήλη στο στενό Haro, το μήνα Ιούλιο στο διάστημα 1990 – 2002). Με πράσινο η μέση τιμή (Jones & Wolfson 2006).



Εικόνα 5: Καθημερινές μετρήσεις (7 ημέρες) της ταχύτητας του ήχου στη στήλη του νερού, σε σταθερό σημείο της λίμνης Tahoe (Gardner et al 1998).



Εικόνα 6: Χωρική παρεμβολή μετρήσεων ταχύτητας ήχου στη θαλάσσια στήλη, κατά μήκος τομής 200km. Δεξιά, υπέρθεση των προφίλ που χρησιμοποιήθηκαν στη παρεμβολή (Clarke & Llewellyn 2004).

Οι παραπάνω εικόνες, δείχνουν ότι η ταχύτητα του ήχου είναι γενικώς τυχαία συνάρτηση του βάθους, ενώ το ίδιο ισχύει και στις υπόλοιπες διαστάσεις (μήκος/πλάτος, χρόνος). Η τυχειότητα εμφανίζεται εντονότερα κοντά στην επιφάνεια, όπου η υδροδυναμική δραστηριότητα είναι ισχυρότερη. Αυτό έχει μεγάλο αντίκτυπο στις εφαρμογές, καθώς η πλειοψηφία των υδροακουστικών οργάνων χρησιμοποιούνται από πλωτές κατασκευές με αποτέλεσμα τα φαινόμενα να επιδρούν στις όποιες μετρήσεις.

Η πιθανοθεωρητική περιγραφή του πεδίου ταχύτητας του ήχου, έχει σημασία στη ρεαλιστική μοντελοποίηση των φαινομένων διάδοσης, τόσο στο ευθύ, όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα. Στο ευθύ πρόβλημα, δίνεται η δυνατότητα της μελέτης της επίδρασης των στοχαστικών διακυμάνσεων στο ακουστικό πεδίο, ενώ στο αντίστροφο, προσδιορίζονται τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά του πεδίου ταχύτητας και κατ' επέκταση, των φυσικών ιδιοτήτων της υδάτινης μάζας (πχ. θερμοκρασία).

1.4 Στοχαστική μοντελοποίηση ακουστικής διάδοσης – Βασικές εξισώσεις.

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να αναδιατυπωθούν οι βασικές ακουστικές εξισώσεις που αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.2, λαμβάνοντας υπόψη όσα ειπώθηκαν παραπάνω σχετικά με τη εγγενή τυχαιότητα του θαλάσσιου περιβάλλοντος. Για λόγους οικονομίας έκτασης, η παραγωγή των εξισώσεων δε θα επαναληφθεί καθώς η διαδικασία παραμένει απaráλλακτη. Ξεκινώντας λοιπόν πάλι από το αρχικό σύστημα των εξισώσεων κίνησης (1a,b), και έχοντας ορίσει καταλλήλως τα στοχαστικά πεδία, καταλήγει κανείς στη **στοχαστική εξίσωση D' Alembert**,

$$\boxed{\nabla^2 p(\mathbf{x},t;\theta) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x};\theta)} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x},t;\theta)}{\partial t^2} = f(\mathbf{x},t;\theta)} \quad (9)$$

και για αρμονική πηγή την **στοχαστική εξίσωση Helmholtz**,

$$\boxed{\nabla^2 p(\mathbf{x};\theta) + k(\mathbf{x};\theta)^2 p(\mathbf{x};\theta) = f(\mathbf{x};\theta)} \quad (10)$$

όπου αντίστοιχα με πριν, είναι $k(\mathbf{x};\theta)^2 = \omega(\theta)^2 / c^2(\mathbf{x};\theta)$, με $\omega(\theta)$ τη στοχαστική κυκλική συχνότητα εξαιτίας της στοχαστικής πηγής.

Επίσης, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, ορίζοντας το εκάστοτε πρόβλημα, θα χρειαστεί να ορίσουμε τη κατάλληλη συνθήκη για τα (πιθανόν) στοχαστικά πεδία ανύψωσης της θαλάσσιας επιφάνειας $\eta(x_1, x_2, t; \theta)$ και του θαλάσσιου πυθμένα $h(x_1, x_2; \theta)$.

Για την επίλυση των εξισώσεων (9), (10), δυστυχώς δεν αρκεί η τεχνογνωσία επίλυσης των αντίστοιχων ντετερμινιστικών προβλημάτων. Στην ενότητα που ακολουθεί θα εξετάσουμε ορισμένες μεθόδους για την επίλυση στοχαστικών ακουστικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα **θα εστιάσουμε σε προβλήματα που τα ακουστικά μέσα διαθέτουν στοχαστικό κυματικό αριθμό**, καθώς αυτός «καθορίζει» τα βασικά χαρακτηριστικά του μέσου.

2.

Μοντελοποίηση ακουστικής διάδοσης σε στοχαστικά μέσα – Βιβλιογραφική επισκόπηση και παραγωγή βασικών εξισώσεων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε πως οι φυσικές παράμετροι που εμπλέκονται στα μοντέλα για την ακουστική διάδοση στη θάλασσα, αποτελούν στη πραγματικότητα στοχαστικές ποσότητες οι οποίες περιγράφονται αποτελεσματικά με όρους της *θεωρίας πιθανοτήτων*. Εύκολα κανείς μπορεί να συμπεράνει ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα ακουστικής και γενικότερα *κυματικής διάδοσης*, όπως για παράδειγμα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται στην ατμόσφαιρα ή τα επιφανειακά και εσωτερικά κύματα στις υδάτινες μάζες. Μία μεγάλη υπο-οικογένεια φαινομένων της κυματικής, συνίσταται από τα φαινόμενα *διάδοσης κυμάτων σε στοχαστικά μέσα*, τα οποία και θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια. Με τον όρο «*στοχαστικά μέσα*» εννοούμε «*στοχαστικώς ανομοιογενή μέσα*», επειδή ο βαθμός ομοιογένειας καθορίζει τα χαρακτηριστικά αυτά που σχετίζονται με τη κυματική διάδοση (πχ. θερμοκρασία, δείκτης διάθλασης, βαθυμετρία, διηλεκτρική σταθερά κλπ). Τα χαρακτηριστικά αυτά εμφανίζουν τυχαίες μεταβολές που περιγράφονται από στοχαστικές συναρτήσεις ή στοχαστικά πεδία. Τα προβλήματα κυματικής διάδοσης σε μέσα με στοχαστικά σύνορα, στοχαστικές πηγές και στοχαστικά σώματα / στόχους παρουσιάζουν επίσης μεγάλο ενδιαφέρον αλλά είναι έξω από τους σκοπούς της παρούσας μελέτης.

Εξαιτίας του μεγάλου εύρους των εφαρμογών της *κυματικής* στη τεχνολογία αλλά και του ενδιαφέροντος για τη μελέτη φυσικών φαινομένων, οι προσπάθειες ανάπτυξης μεθόδων μοντελοποίησης της επίδρασης των εμπλεκόμενων τυχαιοτήτων εντοπίζονται αρκετά πίσω, στη δεκαετία του 1940. Η χρονολογία αυτή είναι αρκετά σεβαστή, αν αναλογιστεί κανείς ότι τότε η θεωρία πιθανοτήτων βρισκόταν ακόμα σε εμβρυακό στάδιο. Οι περισσότερες από τις πρωτότυπες εργασίες ασχολήθηκαν με την ανάλυση «γενικών» κυματικών εξισώσεων για βαθμωτά ή/και διανυσματικά κύματα, αφήνοντας συνήθως υπόνοιες για τις πιθανές εφαρμογές (βλ. βιβλιογραφικές αναφορές στη συνέχεια του κεφαλαίου). Τα κύρια προβλήματα που αποτέλεσαν το κίνητρο για τη μελέτη *κυμάτων σε στοχαστικά μέσα* σχετίζονται κυρίως με τις τότε ραγδαία αναπτυσσόμενες εφαρμογές της ραδιοφυσικής, ατμοσφαιρικής οπτικής, καθώς επίσης και της υποθαλάσσιας ακουστικής εξαιτίας κυρίως του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου. Όπως θα φανεί παρακάτω, λόγω της μαθηματικής «συγγένειας» των φαινομένων, σημαντικό μέρος των τεχνικών μοντελοποίησης προήλθε από

(ή και αναπτύχθηκε για) το πεδίο της *κβαντικής φυσικής* (ειδικά: *quantum field theory*), όπου είχαν προηγηθεί σημαντικές προόδους. Σημειώνεται τέλος, ότι μέχρι και σήμερα το αντικείμενο της *κυματικής διάδοσης σε στοχαστικά μέσα* αποτελεί ενεργό πεδίο έρευνας και συντηρεί μία ευρεία κοινότητα (βλέπε για παράδειγμα το περιοδικό Taylor & Francis: “*Waves in Random and Complex Media*”). Η κοινότητα αυτή, επιχειρεί να αντιμετωπίσει όλο και πιο σύνθετα προβλήματα με λιγότερες παραδοχές, χρησιμοποιώντας μαθηματικά εργαλεία που δεν ήταν διαθέσιμα (ή επαρκώς διαδεδομένα / κατανοητά) παλαιότερα.

Ένα βασικό ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί προτού κάποιος αρχίσει να εξετάζει τις διαθέσιμες μεθόδους μοντελοποίησης, είναι: **«τι μπορούμε να περιμένουμε ως «λύση» ενός στοχαστικού μοντέλου κυματικής διάδοσης προκειμένου το όποιο αποτέλεσμα να είναι αξιοποιήσιμο;»**. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στη περίπτωση ενός ντετερμινιστικού μοντέλου, το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι συνήθως μία συνάρτηση που περιγράφει το κυματικό πεδίο, κάποιο ολοκληρο-διαφορικό μετασχηματισμό του ή έστω κάποιο μέγεθος το οποίο βοηθά στη περιγραφή του φαινομένου διάδοσης (πχ. το πεδίο *Transmission Loss* στην ακουστική). Αν η πεδιακή αυτή συνάρτηση συμβολιστεί γενικά ως μία βαθμωτή συνάρτηση $u(x,t)$, με x το κατάλληλο διάνυσμα θέσης και t τον χρόνο, τότε το αντίστοιχο στοχαστικό πεδίο θα είναι το $u(x,t;\theta)$, όπου θ το στοχαστικό όρισμα, το οποίο **ορίζει μία οικογένεια από πεδία** που αντιστοιχούν σε μία οικογένεια φυσικών προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά προέρχονται από το σύνολο των δυνατών καταστάσεων που μπορεί να ισχύουν για το μέσο διάδοσης.

Το αρχικό ερώτημα λοιπόν, ανάγεται στο περισσότερο ακριβές: **«ποιος είναι ο τρόπος περιγραφής της πληροφορίας που περιέχει μία τυχαία πεδιακή συνάρτηση της μορφής $u(x,t;\theta)$;»**. Όπως γνωρίζουμε, η πλήρης περιγραφή μίας στοχαστικής συνάρτησης, περιλαμβάνει τις από κοινού κατανομές πιθανότητας όλων των τάξεων. Δεδομένου ότι η γνώση (προσδιορισμός) όλων αυτών των κατανομών πιθανότητας είναι συνήθως δύσκολος, συνήθως περιοριζόμαστε στη μερική περιγραφή των στοχαστικών πεδίων, μέσω της μέσης τιμής τους, της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, και ορισμένων άλλων ροπών, συνήθως χαμηλών τάξεων. Πράγματι, η προσέγγιση που επιχειρείται στη σχετική βιβλιογραφία περιλαμβάνει συνήθως την παραγωγή εξισώσεων ή ρητών εκφράσεων για τις ροπές της πεδιακής συνάρτησης⁽⁷⁾. Πέρα από τη διαχείριση της μαθηματικής / υπολογιστικής δυσκολίας, η χρήση μεθόδων και εξισώσεων που χρησιμοποιούν τις ροπές των στοχαστικών πεδίων έχει και πειραματική σημασία, καθώς αυτές μπορούν να «μετρηθούν» χρησιμοποιώντας διαθέσιμες μετρητικές διατάξεις.

Είναι αξιοσημείωτο, ότι ακόμη και με τον περιορισμό στον υπολογισμό μόνο των ροπών, τα σχετικά προβλήματα που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα σύνθετα και για σχετικά απλές εφαρμογές. Ο λόγος για τη δυσκολία αυτή πηγάζει, εν μέρει, από την αδυναμία αναλυτικής επίλυσης των ντετερμινιστικών εξισώσεων, η οποία αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1.2, ενώ αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι ακουστικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές ως προς τη στοχαστική παράμετρο (αυτό θα φανεί καλύτερα στη συνέχεια). Εάν η αναλυτική λύση του ντετερμινιστικού προβλήματος είναι διαθέσιμη, τότε υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού των ροπών κάθε τάξης για τη λύση του αντίστοιχου στοχαστικού, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούν να υπολογιστούν και διαφόρων τάξεων κατανομές πιθανότητας.

⁽⁷⁾ Κάνοντας συγκεκριμένες παραδοχές (closure conditions για το άπειρο σύστημα των ροπών), κάποιος μπορεί να πάρει εξισώσεις για τις διαφόρων τάξεων κατανομές πιθανότητας (Er 1997, Roberts & Spanos 1999).

Εφόσον λοιπόν αναλυτικές εκφράσεις για τις λύσεις των εξισώσεων τη ακουστικής γενικώς δεν είναι διαθέσιμες, απαιτείται ο χειρισμός του εκάστοτε προβλήματος με κάποια μέθοδο που να επιτρέπει τον υπολογισμό των μεγεθών που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί σκοπεύοντας σε **προβλήματα κυματικής διάδοσης σε στοχαστικά μέσα**, εμφανίζουν ενδιαφέρουσα ποικιλία. Μία μεγάλη οικογένεια από τις μεθόδους αυτές, κάνει χρήση της **Θεωρίας Διαταραχών (Perturbation Theory)**, με την **εξαρχής παραδοχή ασθενών διακυμάνσεων στη στοχαστική ανομοιογένεια του μέσου**. Πέρα από την αρκετά αυστηρή παραδοχή, οι παραπάνω μέθοδοι έχουν το ελάττωμα ότι παράγουν γενικώς μη-ομοιόμορφες (non-uniform) λύσεις, με την έννοια ότι η ακρίβεια της προσέγγισης μεταβάλλεται στο πεδίο ορισμού. Σημειώνεται, ότι το πλήθος των εν λόγω μεθόδων οφείλεται, σε σημαντικό βαθμό, στη προσπάθεια αντιμετώπισης της συγκεκριμένης ιδιομορφίας. Πέρα από τα όποια προβλήματα, οι μέθοδοι που κάνουν χρήση της θεωρίας διαταραχών είναι οι περισσότερο διαδεδομένες εξαιτίας της σχετικής ευκολίας που προσφέρουν στη παραγωγή αποτελεσμάτων. Είναι προφανές, ότι εάν το μέσο χαρακτηρίζεται από ισχυρές στοχαστικές ανομοιογένειες ή/και απαιτείται ομοιόμορφη λύση όσον αφορά το σφάλμα, οι παραπάνω μέθοδοι είναι μη-εφαρμόσιμες. Για την αντιμετώπιση τέτοιου τύπου προβλημάτων, έχουν γίνει προσπάθειες προς την ανάπτυξη διαφορετικών μεθόδων προσέγγισης, οι οποίες είναι δυσκολότερες από μαθηματική άποψη και έτσι δεν είναι διαδεδομένες βιβλιογραφικά συγκριτικά με τις προηγούμενες.

Στο κεφάλαιο αυτό, **θα γίνει μία σύντομη παρουσίαση τριών βασικών μεθόδων που κάνουν που κάνουν χρήση της θεωρίας διαταραχών** (δίνοντας παράλληλα τις απαραίτητες βιβλιογραφικές κατευθύνσεις), ενώ περισσότερο βάρος θα δοθεί στα σημεία που θα μας απασχολήσουν στις εφαρμογές του τρίτου κεφαλαίου. Όσον αφορά τις non-perturbative μεθόδους, δε θα μας απασχολήσουν άμεσα στη παρούσα μελέτη (βλ. κεφάλαιο 4). Για τις μεθόδους αυτές, θα γίνει μία συνοπτική εισαγωγή και ο αναγνώστης παραπέμπεται στις αναφορές που δίνονται αμέσως μετά, καθώς και αυτές της ενότητας 2.2.

Η παρακάτω παρουσίαση, αποτελεί μία σύντομη εισαγωγή σε ορισμένες μεθόδους μοντελοποίησης της διάδοσης κυμάτων σε στοχαστικά μέσα, ώστε ο αναγνώστης να σχηματίσει μία γενική εικόνα για τις βασικές τεχνικές μοντελοποίησης και να τεκμηριωθεί επαρκώς η εφαρμογή που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Προκειμένου να κατανοήσει κανείς το σύνολο των μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί, απαιτείται τριβή με μεγάλο αριθμό δημοσιεύσεων και βιβλίων. Πέρα από τις πρωτότυπες αναφορές της κάθε μεθόδου (οι οποίες και παρατίθενται στις αντίστοιχες παραγράφους), μεγάλη αξία έχουν και συλλογικές επισκοπήσεις (surveys) του αντικειμένου, όπου συνήθως γίνεται περισσότερο συστηματική προσέγγιση.

Για το σκοπό αυτό προτείνονται τα παρακάτω **βιβλία**:

Chernov (1960) - Κλασικό βιβλίο που μελετά τη διάδοση ακουστικών κυμάτων σε μέσα με τυχαίες ανομοιογένειες χρησιμοποιώντας τη θεωρία ακτίνων (για υψηλές δηλαδή συχνότητες).

Tatarski (1961) - Μελέτη διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στη τυρβώδη ατμόσφαιρα, με επεκτάσεις σε ραδιοφυσική και ακουστική υψηλών συχνοτήτων. Επίσης κλασικό.

Ishimaru (1978) - Μελέτη διάδοσης και σκέδασης κυμάτων σε τυχαία μέσα, εξετάζει μεγάλο εύρος φυσικών φαινομένων σε διάφορους τύπους σκεδαστών κάνοντας χρήση θεωρίας διαταραχών και άλλων μεθόδων.

- Sobczyk (1985) - Από τα περισσότερο ολιστικά βιβλία, εισάγει μεθόδους διαχείρισης βαθμωτών και διανυσματικών κυματικών πεδίων σε στοχαστικά μέσα, ενώ μελετά τη διάδοση σε συνεχή αλλά και σε διακριτά μέσα, πλούσιο σε βιβλιογραφικές αναφορές.
- Tatarskii et al (1993) - Σχετικά σύγχρονη συλλογή από δημοσιεύσεις όπου μπορεί να δει κανείς μία αξιολογη ποικιλία από τις διαφορετικές μεθόδους.
- Shapiro & Hubral (1999) - Μελετά ελαστικά κύματα σε τυχαίως στρωματοποιημένα μέσα με σεισμικές εφαρμογές, ενώ τα πρώτα κεφάλαια συνιστούν μία πολύ ενδιαφέρουσα συνοπτική εισαγωγή στα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν και εδώ.

Επίσης, παρατίθενται ορισμένες σημαντικές **δημοσιεύσεις** επισκόπησης (survey papers):

- Molyneux (1968) - Μία ενδιαφέρουσα σύγκριση μεταξύ μίας μεθόδου που χρησιμοποιεί θεωρία διαταραχών και μίας που κάνει χρήση επαναλήψεων.
- Frish (1968) - Κλασικό survey, παρόμοιο με το προηγούμενο αλλά περισσότερο συστηματικό και αναλυτικό.
- Barabanenkov et al (1971) - Μελέτη μεθόδων θεωρίας διαταραχών σε φαινόμενα μεγάλης χωρικής κλίμακας, θεωρία πολλαπλής σκέδασης.
- Chow (1975) - Αναλυτική εισαγωγή στις μεθόδους που χρησιμοποιούν θεωρία διαταραχών και μεταξύ τους σύγκριση.
- Keller (1977) - Σύντομη περιγραφή των βασικών μεθόδων που κάνουν χρήση θεωρίας διαταραχών, το πρώτο μέρος της δημοσίευσης είναι αφιερωμένο στα ντετερμινιστικά προβλήματα.
- McCoy (1972) - Σχετικά δύσκολο στο διάβασμα, η εισαγωγή του αποτελεί ένα πολύ καλό survey στις επαναληπτικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για προβλήματα που μας ενδιαφέρουν.
- Sobczyk (1986) - Αρκετά συνοπτική παρουσίαση μεθόδων της θεωρίας διαταραχών καθώς επίσης και μεθόδων που χρησιμοποιούν το χαρακτηριστικό συναρτησιακό. Μπορεί να χαρακτηριστεί ως «περίληψη» ενός μέρους του Sobczyk 1985.
- Nair&White (1991) - Μελέτη υπίσυχων κυμάτων σε στοχαστικά μέσα, στην εισαγωγή γίνεται ένα σύντομο survey στις σχετικές μεθόδους και παρατίθεται μία καλή συλλογή από πρωτότυπες και σημαντικές δημοσιεύσεις.

2.1 Χρήση Θεωρίας Διαταραχών (Perturbation Theory) για τη μοντελοποίηση στοχαστικών κυματικών μέσων.

Όπως αναφέρθηκε, οι εξισώσεις της ακουστικής (και οι άλλες κυματικές εξισώσεις) είναι μη γραμμικές ως προς τη παράμετρο που σχετίζεται με την ομοιογένεια του μέσου όπου συμβαίνει η διάδοση. Για παράδειγμα, υπενθυμίζεται ότι τα τυχαία πεδία ταχύτητας κύματος $c(\mathbf{x}, \theta)$ και κυματικού αριθμού $k(\mathbf{x}, \theta)$, βρίσκονται σε τετραγωνική μορφή στις στοχαστικές εξισώσεις *D'Alembert* (εξ. 1.9) και *Helmholtz* (εξ. 1.10) αντίστοιχα. Κάνοντας τη παρατήρηση αυτή, η σκέψη εύκολα οδηγείται σε τεχνικές της *θεωρίας διαταραχών*, οι οποίες εφαρμόζονται στη διαχείριση (ασθενών) μη-γραμμικοτήτων (πχ. μέθοδος *KBM* για επιφανειακούς κυματισμούς). **Στην ενότητα αυτή θα διατρέξουμε μία σειρά από μεθόδους που κάνουν χρήση της θεωρίας διαταραχών, με σκοπό τη μοντελοποίηση κυματικής διάδοσης σε στοχαστικά μέσα.** Εξαιτίας της έμφασης στην *υδροακουστική*, η προσέγγιση θα γίνεται κατά κανόνα για βαθμωτά κύματα σε συνεχή μέσα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι ίδιες μέθοδοι δεν έχουν επεκτάσεις και σε διανυσματικά κύματα ή/και διακριτά μέσα⁽⁸⁾.

Η *Θεωρία Διαταραχών* εφαρμόζεται σε προβλήματα όπου ένα «μέρος» τους εξαρτάται (ή μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτάται) πολυωνυμικά από μία εξαιρετικά μικρή ποσότητα (ουσιωδώς πολύ μικρότερη του 1) και περιλαμβάνει μαθηματικές μεθόδους για τον υπολογισμό μίας προσέγγισης της λύσης. Η προσέγγιση αυτή, προέρχεται από ένα απλούστερο πρόβλημα το οποίο περιγράφει ασυμπτωτικά το αρχικό, αλλά είναι καταλληλότερο για επίλυση και διερεύνηση. Για περισσότερα σχετικά με τη *Θεωρία Διαταραχών*, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο *Nayfeh 1973* ή το απλούστερο (και με περισσότερες εφαρμογές) *Nayfeh 1981*, ενώ για *Στοχαστικές Μεθόδους Διαταραχών* υπάρχει το αρκετά δύσκολο *Skorokhod et al 2002* (το οποίο όμως δε συνδέεται ιδιαίτερα με τις μεθόδους που ακολουθούν).

Σε μία μεγάλη οικογένεια κυματικών προβλημάτων, η ανομοιογένεια του μέσου χαρακτηρίζεται από **ασθενείς τυχαίες διακυμάνσεις**, με την έννοια ότι αυτές αποτελούν μικρές αποκλίσεις από τη μέση κατάσταση (η οποία μπορεί και να μεταβάλλεται χωροχρονικά). **Για τα προβλήματα λοιπόν που ισχύει η συγκεκριμένη συνθήκη**, είναι εφικτή η αναδιατύπωσή και ο αποτελεσματικός χειρισμός τους με χρήση της *θεωρίας διαταραχών*. Όπως είναι γνωστό, οι τεχνικές της *θεωρίας διαταραχών* περιλαμβάνουν σε κάποια φάση το *truncation* του αναπτύγματος διαταραχών, με τον ισχυρισμό ότι το απειροάθροισμα που αποκόβεται έχει αμελητέα επίδραση. Το γεγονός αυτό, συχνά οδηγεί σε non-uniform λύσεις, δηλαδή λύσεις που προσεγγίζουν ανομοιογενώς τη πραγματική λύση του προβλήματος στο πεδίο ορισμού. Αυτό, όπως αναφέρθηκε, συμβαίνει και στα προβλήματα που μας απασχολούν, και αποτελεί -μαζί με την παραδοχή περί ασθενών διακυμάνσεων- το κύριο αντεπιχείρημα σχετικά με τη χρήση τους (βλέπε *Sobczyk 1986*). Από την άλλη, οι μέθοδοι αυτές είναι (για προσεγγίσεις μικρής τάξης) ευκολότερες και προσφέρουν τα περισσότερα αποτελέσματα σε επίπεδο εφαρμογών. Για τους παραπάνω λόγους, όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι μέθοδοι διαταραχών έχουν διερευνηθεί και εξελιχθεί διεξοδικά, με σκοπό περιορισμό των βασικών αδυναμιών τους. Πάντοτε βέβαια απαιτείται η δέουσα προσοχή ως προς το εύρος των εφαρμογών, ώστε να υπάρχει επίγνωση της ακρίβειας του αποτελέσματος.

⁽⁸⁾ Η γενικότητα δε παραβιάζεται ασκόπως. Τα βαθμωτά κύματα σε συνεχή μέσα μπορούν γενικώς να περιγράψουν μία μεγάλη οικογένεια κυματικών φαινομένων, επιτρέποντας ταυτόχρονα μια σχετικά συστηματική προσέγγιση.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές μέθοδοι που εφαρμόζονται σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων σε στοχαστικά μέσα και κάνουν χρήση θεωρίας διαταραχών για τη διαχείριση της στοχαστικότητας. Η παρουσίαση είναι, ως αναφέρθηκε, κατά το δυνατόν σύντομη. Για μια αρκετά συστηματική επισκόπηση στο σύνολο των μεθόδων διαταραχών στη στοχαστική κυματική διάδοση, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Chow 1975.

Η παρουσίαση μεθόδων των εφαρμοσμένων μαθηματικών, είναι χρήσιμο να γίνεται μέσω απλών παραδειγμάτων, ώστε να τονίζεται με σαφήνεια ο γενικός μηχανισμός, που αποτελεί και τη καρδιά της μεθόδου. Η χρήση πιο σύνθετων (και συνήθως εξειδικευμένων) παραδειγμάτων μπορεί εύκολα να προκαλέσει σύγχυση όσον αφορά το πού σταματάει η μέθοδος και το πού αρχίζει ο ειδικός χειρισμός του εκάστοτε προβλήματος, όπως μπορεί να διαπιστωθεί και στη βιβλιογραφία. Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορεί να έχει και η χρήση ιδιαίτερα γενικών εξισώσεων καθώς η πολυπλοκότητα αυξάνεται προκειμένου να περιλαμβάνει μεγαλύτερο σύνολο περιπτώσεων. Για τους λόγους αυτούς, στη παρακάτω περιγραφή θα βασιστούμε στις στοχαστικές εξισώσεις *D'Alembert* και *Helmholtz* (εξ. 1.9 και εξ. 1.10 αντίστοιχα), σε απλά μέσα (από άποψη γεωμετρίας και σύστασης). Οι εξισώσεις αυτές, πέρα από τη συγγένεια με τις εφαρμογές του επόμενου κεφαλαίου, είναι αρκετά γενικές ώστε να περιγράφουν, δυνητικά, ένα μεγάλο εύρος φαινομένων.

2.1.1. Συνήθης Μέθοδος Θεωρίας Διαταραχών - Προσέγγιση Born (Regular Perturbation - Born approximation).

Πολλά λοιπόν κυματικά φαινόμενα, μοντελοποιούνται από την εξίσωση *Helmholtz* και τις κατάλληλες συνθήκες. Ανατρέχοντας στη παράγραφο 1.3.2, βλέπουμε ότι όταν η διάδοση συμβαίνει σε μέσα που εμφανίζουν τυχαίες ανομοιογένειες, τότε χρησιμοποιείται η ισοδύναμη **στοχαστική εξίσωση *Helmholtz*** (εξ. 1.10), η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για το βαθμωτό κυματικό πεδίο $u(\mathbf{x}; \theta)$, στον \mathbb{R}^3 :

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}; \theta) + k(\mathbf{x}; \theta)^2 u(\mathbf{x}; \theta) = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

όπου $k(\mathbf{x}; \theta)$ το στοχαστικό πεδίο του κυματικού αριθμού και $f(\mathbf{x})$ η διέγερση η οποία έχει θεωρηθεί ντετερμινιστική για λόγους απλότητας. Για περισσότερα σχετικά με την στοχαστική εξίσωση *Helmholtz*, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο κεφάλαιο 1 και τις εκεί βιβλιογραφικές αναφορές.

Η *συνήθης μέθοδος της θεωρίας διαταραχών (Regular Perturbation)* είναι γνωστή σε προβλήματα σκέδασης και ως *προσέγγιση Born* (Born&Wolf 1959). Βασίζεται στη παραδοχή ότι **οι μεταβολές μίας παραμέτρου της διαφορικής εξίσωσης είναι εξαιρετικά μικρές**, δηλαδή αποτελούν διαταραχές από μία ομαλή κατάσταση. Σαν αποτέλεσμα, **η λύση της διαφορικής αναμένεται να αποτελεί επίσης μικρή διαταραχή της λύσης που αντιστοιχεί στο πρόβλημα για την ομαλή παράμετρο**. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος είναι αποδοτική στη μοντελοποίηση της ασθενούς (μικρής) στοχαστικότητας, όταν είναι γνωστή η λύση των αντίστοιχων ντετερμινιστικών προβλημάτων. Η λογική είναι αντίστοιχη με τα ασθενώς μη-γραμμικά προβλήματα που λύνονται εφόσον είναι γνωστά τα αντίστοιχα γραμμικά.

Για την εφαρμογή λοιπόν της *προσέγγισης Born* στο στοχαστικό μοντέλο που έχουμε εδώ, γίνεται **η παραδοχή ότι οι στοχαστικές διακυμάνσεις στο μέσο είναι ασθενείς**. Η στοχαστική ανομοιογένεια του μέσου, είναι ενσωματωμένη στον κυματικό αριθμό με τον τρόπο που περιγράφεται στην ενότητα 1.3.2. Έτσι, εφόσον οι στοχαστικές διακυμάνσεις είναι ασθενείς, ο κυματικός αριθμός **μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της μορφής**:

$$k(\mathbf{x}; \theta)^2 = k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(\mathbf{x}; \theta)), \quad (2)$$

όπου το $\mu(\mathbf{x}; \theta)$ είναι γνωστό τυχαίο πεδίο, το $\varepsilon \ll 1$ μία πολύ μικρή αδιάστατη θετική ποσότητα που καθορίζει τη «μικρότητα» των στοχαστικών ανομοιογενειών του μέσου και k_0 το ντετερμινιστικό μέρος του κυματικού αριθμού, που εδώ θεωρείται σταθερό για λόγους απλότητας⁽⁹⁾.

Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος της παραδοχής, οι ασθενείς στοχαστικές διακυμάνσεις του συντελεστή $k(\mathbf{x}; \theta)$ θα έχουν σαν αποτέλεσμα ασθενείς στοχαστικές διακυμάνσεις στο κυματικό πεδίο, σε σχέση με τη λύση της ντετερμινιστικής εξίσωσης. Με βάση αυτό, το πεδίο

⁽⁹⁾ Το k_0 μπορεί επίσης να είναι συνάρτηση της θέσης, όπως θα δούμε και στις εφαρμογές του επόμενου κεφαλαίου.

γράφεται στη μορφή αναπτύγματος Taylor σε δυνάμεις της μικρής ποσότητας ε , γύρω από τη λύση του ντετερμινιστικού προβλήματος:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}; \theta) &= u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot u_1(\mathbf{x}; \theta) + \varepsilon^2 \cdot u_2(\mathbf{x}; \theta) + \dots + \varepsilon^K \cdot u_K(\mathbf{x}; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}) = \\ &= u_0(\mathbf{x}) + \sum_{\kappa=1}^K \varepsilon^\kappa \cdot u_\kappa(\mathbf{x}; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}), \quad K \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3)$$

όπου $u_0(\mathbf{x})$ είναι το ντετερμινιστικό τμήμα της λύσης και $u_\kappa(\mathbf{x}; \theta)$ η κ -τάξης στοχαστική επίδραση.

Αντικαθιστώντας τις υποθέσεις (2), (3) στην εξίσωση (1), η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[u_0(\mathbf{x}) + \sum_{\kappa=1}^K \varepsilon^\kappa u_\kappa(\mathbf{x}; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}) \right] + \\ + k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(\mathbf{x}; \theta)) \left[u_0(\mathbf{x}) + \sum_{\kappa=1}^K \varepsilon^\kappa u_\kappa(\mathbf{x}; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}) \right] = f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αναπτύσσοντας τα γινόμενα και εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης, προκύπτει το παρακάτω, άπειρο, σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_0(\mathbf{x}) + k_0^2 u_0(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 u_1(\mathbf{x}; \theta) + k_0^2 u_1(\mathbf{x}; \theta) &= -k_0^2 \mu(\mathbf{x}; \theta) u_0(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 u_2(\mathbf{x}; \theta) + k_0^2 u_2(\mathbf{x}; \theta) &= -k_0^2 \mu(\mathbf{x}; \theta) u_1(\mathbf{x}; \theta) \\ &\vdots \\ \nabla^2 u_\kappa(\mathbf{x}; \theta) + k_0^2 u_\kappa(\mathbf{x}; \theta) &= -k_0^2 \mu(\mathbf{x}; \theta) u_{\kappa-1}(\mathbf{x}; \theta) \end{aligned} \quad (4)$$

Στο σύστημα αυτό, παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση περιγράφει το πεδίο που θα υπήρχε αν απουσίαζε η στοχαστική ανομοιογένεια (δηλαδή το «αντίστοιχο» ντετερμινιστικό πρόβλημα), ενώ οι επόμενες εξισώσεις περιγράφουν τις διαφόρων τάξεων σκεδάσεις. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό από τα δεξιά μέλη των στοχαστικών εξισώσεων του συστήματος. Βλέπουμε, ότι σε κάθε τάξη, το πεδίο που αποτελεί τη λύση της προηγούμενης εξίσωσης, συνδυάζεται με το στοχαστικό πεδίο $k_0^2 \mu(\mathbf{x}; \theta)$ και λειτουργεί ως όρος διέγερσης για το πεδίο της αμέσως επόμενης τάξης. Δηλαδή το $u_1(\mathbf{x}; \theta)$ παράγεται από τη σκέδαση του $u_0(\mathbf{x})$ πάνω στις ανομοιογένειες του μέσου, το $u_2(\mathbf{x}; \theta)$ από το $u_1(\mathbf{x}; \theta)$, κ.ο.κ.

Παρατηρούμε επίσης, ότι όλες οι εξισώσεις του συστήματος (4), αποτελούνται από τον τελεστή *Helmholtz* $\nabla^2(\bullet) + k_0^2(\bullet)$, που δρα πάνω στο εκάστοτε πεδίο, και διαφοροποιούνται ουσιαστικά στο δεξιό μέλος. Οι οριακές συνθήκες ισχύουν προφανώς για το άθροισμα (3) και έτσι στην εκάστοτε εφαρμογή πρέπει να κατασκευαστούν αντίστοιχα αναπτύγματα⁽¹⁰⁾. Στη προκειμένη περίπτωση, για συντομία, θεωρούμε ότι η λύση ορίζεται

⁽¹⁰⁾ Αυτό μπορεί να αποφευχθεί, όπως θα δούμε στο τρίτο κεφάλαιο, με τον κατάλληλο μετασχηματισμό του προβλήματος

στον ελεύθερο χώρο, με κοινές συνθήκες για όλους τους όρους. Αυτό σημαίνει, ότι η *συνάρτηση Green* που λύνει το ντετερμινιστικό πρόβλημα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη λύση των υπόλοιπων εξισώσεων, χρησιμοποιώντας, κάθε φορά, τον κατάλληλο όρο διέγερσης. Έτσι, ορίζοντας $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*)$ τη *συνάρτηση Green* για τον τελεστή *Helmholtz* στο χωρίο που μας ενδιαφέρει (εδώ ο \mathbb{R}^3) το σύστημα (4) μπορεί να λυθεί σειριακά, ξεκινώντας από τη πρώτη εξίσωση.

$$\begin{aligned}
u_0(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) f(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* \\
u_1(\mathbf{x}; \theta) &= -k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) \mu(\mathbf{x}^*; \theta) u_0(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* \\
u_2(\mathbf{x}; \theta) &= -k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) \mu(\mathbf{x}^*; \theta) u_1(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* \\
&\vdots \\
u_\kappa(\mathbf{x}; \theta) &= -k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) \mu(\mathbf{x}^*; \theta) u_{\kappa-1}(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* .
\end{aligned}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις στο παραπάνω σύστημα, το ανάπτυγμα (3) για τη λύση γίνεται:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}; \theta) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) f(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* - \\
&\quad - \varepsilon \cdot k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{**}) f(\mathbf{x}^*) \mu(\mathbf{x}^{**}; \theta) d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot k_0^4 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x}^{***} | \mathbf{x}^{**}) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{***}) f(\mathbf{x}^*) \mu(\mathbf{x}^{**}; \theta) \mu(\mathbf{x}^{***}; \theta) d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} d\mathbf{x}^{***} + O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{5}$$

Η συνάρτηση $\mu(\mathbf{x}; \theta)$ συνήθως είναι γνωστή μέσω των ροπών της. Έτσι, προκειμένου η (5) να είναι υπολογίσιμη, εφαρμόζεται ο τελεστής της μέσης τιμής, οπότε καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)] &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) f(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* - \\
&\quad - \varepsilon \cdot k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{**}) f(\mathbf{x}^*) \mathbf{E}^\theta [\mu(\mathbf{x}^{**}; \theta)] d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot k_0^4 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x}^{***} | \mathbf{x}^{**}) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{***}) f(\mathbf{x}^*) \mathbf{E}^\theta [\mu(\mathbf{x}^{**}; \theta) \mu(\mathbf{x}^{***}; \theta)] d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} d\mathbf{x}^{***} + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

η οποία είναι μία έκφραση του μέσο κυματικό πεδίο, συναρτήσει πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών του μέσου διάδοσης, δηλαδή των ροπών της τυχαίας συνάρτησης που περιγράφει την ανομοιογένεια. Αν τώρα **θεωρήσουμε ότι το άθροισμα όρων από μία τάξη και πάνω είναι αμελητέο**, τότε η τελευταία σχέση μπορεί να υπολογιστεί. Όταν χρησιμοποιούνται οι όροι μέχρι πρώτης τάξης η προσέγγιση είναι γνωστή ως *single-scattering* ή *first-order Born approximation*. Επειδή συχνά στις εφαρμογές, η μέση τιμή της συνάρτησης $\mu(\mathbf{x}; \theta)$ θεωρείται μηδενική (το γιατί θα το καταλάβουμε αργότερα), στα

κυματικά προβλήματα συνήθως χρησιμοποιείται η *second-order approximation*, για την οποία έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)] &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) f(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* - \\ &\quad - \varepsilon \cdot k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{**}) f(\mathbf{x}^*) \mathbf{E}^\theta [\mu(\mathbf{x}^{**}; \theta)] d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot k_0^4 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x}^{***} | \mathbf{x}^{**}) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{***}) f(\mathbf{x}^*) \mathbf{E}^\theta [\mu(\mathbf{x}^{**}; \theta) \mu(\mathbf{x}^{***}; \theta)] d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} d\mathbf{x}^{***} \end{aligned}$$

όπου προφανώς, για $\mathbf{E}^\theta [\mu(\mathbf{x}; \theta)] = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)] &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) f(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x}^* - \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot k_0^4 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}^{**} | \mathbf{x}^*) G(\mathbf{x}^{***} | \mathbf{x}^{**}) G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^{***}) f(\mathbf{x}^*) \mathbf{E}^\theta [\mu(\mathbf{x}^{**}; \theta) \mu(\mathbf{x}^{***}; \theta)] d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^{**} d\mathbf{x}^{***} \end{aligned}$$

η παραδοχή που έγινε δηλαδή σε αυτό το σημείο, είναι ότι το στοχαστικό κυματικό πεδίο $u(\mathbf{x}; \theta)$ μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος (3). Θα είναι δηλαδή:

$$u(\mathbf{x}; \theta) \approx u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \cdot u_2(\mathbf{x}; \theta). \quad (6)$$

Το φυσικό νόημα της συγκεκριμένης παραδοχής, είναι ότι το στοχαστικό πεδίο συνίσταται από τη λύση του ντετερμινιστικού προβλήματος και τη σκέδαση αυτού στην ανομοιογένεια του μέσου (όπως φαίνεται καθαρά στο σύστημα (4)). Τονίζεται ξανά, ότι τόσο η εξίσωση για τον κυματικό αριθμό (εξ. (2)), όσο και για τη μορφή της λύσης (εξ. (3)) είναι αυθαίρετες υποθέσεις που κάνουμε στο πλαίσιο της θεωρίας διαταραχών. Κατά πόσο οι υποθέσεις αυτές είναι εύλογες (κατά πόσο τελικά ή σειρά της λύσης συγκλίνει και μάλιστα γρήγορα), θα φανεί από το αποτέλεσμα, όπου περιμένουμε οι πρώτοι όροι να περιγράφουν με ικανοποιητική ακρίβεια τη συμπεριφορά του πεδίου σε κάποιο ειδικό πρόβλημα.

Σε πολλές περιπτώσεις προβλημάτων, ο υπολογισμός του μέσου πεδίου με τη προσέγγιση *Born*, έχει σαν αποτέλεσμα την **εμφάνιση όρων που έχουν αφύσικη συμπεριφορά** (απειρισμούς) στο άπειρο. Η αιτία μπορεί να φανεί στο σύστημα (4), όπου βλέπουμε ότι οι εξισώσεις πρώτης και ανώτερης τάξης διεγείρονται ουσιαστικά στην ιδιοσυχνότητα του διαφορικού τελεστή (Jeffrey & Kawahara 1982) Οι όροι αυτοί συναντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο *secular terms*. Εξαιτίας της παρουσίας των συγκεκριμένων όρων, η χρήση της μεθόδου πρέπει να περιορίζεται σε αυστηρώς μικρά πεδία ορισμού, όπως γίνεται και βιβλιογραφικά. Ακόμη και τότε, η μέθοδος έχει τη κακή προσεγγιστική ιδιότητα, **να μην έχει σταθερό σφάλμα σε όλο το πεδίο ορισμού**. Οι περισσότερες μέθοδοι διαταραχών προσπαθούν ουσιαστικά να αντιμετωπίσουν αυτήν ακριβώς την ιδιομορφία.

Πέρα από τα μειονεκτήματά της, η προσέγγιση *Born* προτιμάται συχνά εξαιτίας της ευθύτητας υπολογισμού από άποψη ευκολίας και σαφήνειας. Προϋπόθεση για να γίνει αυτό, είναι η περιοχή επίλυσης να είναι περιορισμένη σε έκταση, ώστε τα σφάλματα από τους secular όρους να μην είναι σημαντικά.

- Σχόλιο για τη προσέγγιση Rytov.

Όπως βλέπουμε στη βιβλιογραφία, μία άλλη μέθοδος της θεωρίας διαταραχών που χρησιμοποιείται πολύ συχνά ως εναλλακτική της προσέγγισης *Born*, και έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με αυτήν, είναι η **προσέγγιση Rytov**. Πρόκειται για μία μέθοδο που ξεκινά από το Rytov 1937, και αναπτύσσεται σταδιακά από τους Obukhov 1953, Chernov 1960, Rytov 1966 και Barabanenkov et al 1971.

Η λογική της μεθόδου, είναι ανάλογη με αυτή της προσέγγισης *Born*, με κύρια διαφοροποίηση ότι αντί να αναπτυχθεί όλο το στοχαστικό πεδίο ως προς το μικρό ε (εξίσωση (3)), αναπτύσσεται μόνο η φάση του. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος συχνά αναφέρεται και ως **λογαριθμική μέθοδος διαταραχών**. Μετά από μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε μία εξίσωση για τη μέση τιμή της φάσης, απ' όπου τελικά παίρνουμε και τη λύση για το όλο πεδίο.

Η προσέγγιση *Rytov*, εμφανίζει επίσης secular όρους, αλλά σε αυτήν το σφάλμα αυξάνεται πολύ πιο αργά σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή (Sobczyk 1985). Όπως βέβαια πολύ σωστά σημειώνει ο Keller 1969, η προσέγγιση *Rytov* έχει μικρότερα σφάλματα μόνο στη περίπτωση που εφαρμόζεται σε μονοχρωματικά κύματα. Όταν έχουμε πιο πολύπλοκα πεδία, η προσέγγιση πρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε κύμα χωριστά και αυτό κατά περίπτωση μπορεί να προκαλέσει σημαντική αύξηση των σφαλμάτων αλλά και υπολογιστικά προβλήματα. Η προσέγγιση *Born* εφαρμόζεται σε όλο το πεδίο οπότε δεν έχει αυτόν τον περιορισμό. Τέλος μεγάλη σημασία έχει και το συγκεκριμένο φαινόμενο που μελετάμε, καθώς η μία προσέγγιση υπερέχει της άλλης κατά περίπτωση, τόσο όσον αφορά το μέγεθος που μελετάμε Beydoun & Tarantola 1987 (πχ. ανακλώμενο πεδίο, συνολικό πεδίο, coherence κλπ), όσο και το «χωρικό» setup του προβλήματος Linn & Fiddy 1992, 1993 (πχ. διάδοση σε free-space, σε slab κλπ). Πέρα από τις παραπάνω αναφορές, μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή και σύγκριση των δύο μεθόδων, μπορεί κανείς να βρει και στους Piperakis, Skarsoulis & Makrakis 2006.

Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό από τις παραπάνω δημοσιεύσεις, **η προσέγγιση Rytov είναι μία υψίσυχη προσέγγιση** που εφαρμόζεται κυρίως στη μελέτη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και υπερήχων. Εδώ όπως αναφέρθηκε, μας απασχολούν ενδιάμεσοι κυματικοί αριθμοί και έτσι η συγκεκριμένη προσέγγιση δε θα μας απασχολήσει περαιτέρω στη παρούσα μελέτη. Πέραν τούτου, η παραπάνω αναφορά έγινε εξαιτίας της εκτεταμένης χρήσης της αντί της *Born* σε περιπτώσεις που έχουμε σχετικά μεγάλες αποστάσεις διάδοσης και η δεύτερη δε δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα εξαιτίας των secular όρων.

2.1.2. Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων (Multiple Scales Analysis).

Μία αρκετά δημοφιλής μέθοδος της θεωρίας διαταραχών που χρησιμοποιείται συχνά στη περιγραφή ταλαντώσεων και δίνει ομοιόμορφες λύσεις σε όλο το domain, βασίζεται στη χρήση πολλαπλών κλιμάκων στο πεδίο ορισμού (Multiple scales methods). Για μία εκτενή παρουσίαση των σχετικών τεχνικών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Kevorkian & Cole 1996, (ενημερωμένη έκδοση του “κλασσικού” Cole 1968).

Η γενική λογική της μεθόδου βασίζεται στη θεώρηση, ότι **το φαινόμενο που εξετάζουμε λαμβάνει χώρα σε διαφορετικές κλίμακες επί της ανεξάρτητης μεταβλητής**, η μελέτη του οποίου διευκολύνεται όταν **μία βασική παράμετρος εμφανίζει ασθενείς διακυμάνσεις**. Έτσι, το πρόβλημα μπορεί να αποδομηθεί σε **φαινομενικώς ανεξάρτητα προβλήματα** διαφορετικών τάξεων, τα οποία βέβαια έχουν τη κατάλληλη μορφή, ώστε να μην ακυρώνονται οι απαραίτητες αλληλεπιδράσεις.

Επί της ουσίας, θα εξετάσουμε και πάλι την εξίσωση *Helmholtz*,

$$\nabla^2 u(x; \theta) + k(x; \theta)^2 u(x; \theta) = 0, \quad (7)$$

όπου για συντομία έχουμε περιορίσει το πρόβλημα σε μονοδιάστατο ομογενές. Η απουσία διέγερσης θα αντιμετωπιστεί με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Επίσης αυτή τη φορά θα θεωρήσουμε το περισσότερο εύλογο (σε σχέση με τη προσέγγιση Born) ανάπτυγμα για τον κυματικό αριθμό:

$$k(x; \theta)^2 = k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(x; \theta))^2, \quad (8)$$

όπου όμοια με πριν, το $\mu(x; \theta)$ είναι γνωστό τυχαίο πεδίο, το $\varepsilon \ll 1$ μία πολύ μικρή αδιάστατη θετική ποσότητα που καθορίζει τη «μικρότητα» των στοχαστικών ανομοιογενειών του μέσου και k_0 το ντετερμινιστικό μέρος του κυματικού αριθμού. Θα απαιτήσουμε και πάλι να ισχύει $E^\theta [\mu(x; \theta)] = 0$.

Σύμφωνα με την ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων, θα κάνουμε την υπόθεση ότι, **μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φαινόμενο που περιγράφεται από την εξίσωση (7) λαμβάνει χώρα σε διαφορετικές χωρικές κλίμακες, οι οποίες επίσης ορίζονται από το ε** . Θα είναι δηλαδή:

$$x = \sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^\kappa \cdot x_\kappa + O(\varepsilon^{K+1}). \quad (9)$$

Τότε, για τη συνάρτηση $u(x; \theta)$ που εξαρτάται από το x , θα ισχύει:

$$u(x; \theta) = \sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^\kappa \cdot u_\kappa(x_0, x_1, x_2, \dots, x_K; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}), \quad (10)$$

όπου το στοιχείο $u_\kappa(x_0, x_1, x_2, \dots, x_K; \theta)$ κάθε τάξης της $u(x; \theta)$ θα εξαρτάται από όλες τις κλίμακες της χωρικής μεταβλητής.

Παρατηρώντας την εξίσωση (10), βλέπουμε ότι για τον τελεστή παραγώγισης ως προς τη μεταβλητή x , $d / dx (\bullet)$, ισχύει:

$$\frac{d}{dx} (\bullet) = \sum_{\kappa=0}^K \left(\varepsilon^{\kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} (\bullet) \right) + O(\varepsilon^{K+1}), \quad (11)$$

κατ' επέκτασή:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (\bullet) &= \sum_{\kappa=0}^K \left(\varepsilon^{\kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left[\left(\sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^{\kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} + O(\varepsilon^{K+1}) \right) (\bullet) \right] \right) + O(\varepsilon^{K+1}) \\ &= \left(\sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^{\kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} + O(\varepsilon^{K+1}) \right)^2 (\bullet) \end{aligned}, \quad \text{ΚΟΚ.} \quad (12)$$

Τώρα, ειδικά για το πρόβλημα που έχουμε εδώ, είναι:

$$k(x; \theta)^2 = k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(x; \theta))^2 = k_0^2 (1 + 2\varepsilon \mu(x; \theta) + \varepsilon^2 \mu^2(x; \theta)), \quad (13)$$

και επειδή απαιτήσαμε να ισχύει, $E^{\theta} [\mu(x; \theta)] = 0$, περιμένουμε ότι κατά μέση τιμή, ο κυματικός αριθμός εμφανίζει μόνο δεύτερης τάξης διαταραχές, με αποτέλεσμα το ίδιο να ισχύει και για το κυματικό πεδίο (Mei 2006) ⁽¹¹⁾, Για το λόγο αυτό, θα περιορίσουμε αντίστοιχα την (9) στη παρακάτω μορφή:

$$x = x_0 + \varepsilon^2 \cdot x_2. \quad (14)$$

Αυτό, στη πράξη, σημαίνει ότι επιτρέπουμε μόνο δεύτερης τάξης αλληλεπιδράσεις στην σχέση (7). Έτσι, η σχέση (10) γίνεται:

$$u(x; \theta) = u(x_0, x_2; \theta) = \sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^{\kappa} \cdot u_{\kappa}(x_0, x_2; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}). \quad (15)$$

Για τον ίδιο λόγο, θα ισχύει επίσης:

$$\mu(x; \theta) = \mu(x_0, x_2; \theta)$$

⁽¹¹⁾ Αυτή η μη προφανής υπόθεση, δεν είναι απαραίτητο να γίνει εξαρχής. Τότε, στη πορεία, οι συντελεστές πρώτης τάξης προκύπτουν μηδενικοί (ή κατά περίπτωση απαιτούμε να είναι μηδενικοί για να έχουμε λύση), και το πρόβλημα εμπίπτει στην ίδια κατάσταση. Έχοντας αυτό υπόψη, η υπόθεση χρησιμοποιείται στο σημείο αυτό επειδή συντομεύει σημαντικά την έκταση των πράξεων.

Αντίστοιχα, από την εξίσωση (12), έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(\bullet) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 (\bullet) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}(\bullet) + \varepsilon^2 \cdot 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2}(\bullet) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (16)$$

Αντικαθιστούμε την $u(x; \theta)$ από την εξίσωση (17) στην (7), λαμβάνοντας υπόψη την (13), στην οποία πρώτα απορρίπτουμε τους όρους τέταρτης και ανώτερης τάξης καθώς περιλαμβάνουν αλληλεπιδράσεις που έχουμε θεωρήσει αμελητέες.

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}(\bullet) + \varepsilon^2 \cdot 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2}(\bullet) \right] \left[\sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^\kappa \cdot u_\kappa(x_0, x_2; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}) \right] + \\ &+ k_0^2 (1 + 2\varepsilon \cdot \mu(x_0, x_2; \theta) + \varepsilon^2 \cdot \mu^2(x_0, x_2; \theta)) \left[\sum_{\kappa=0}^K \varepsilon^\kappa \cdot u_\kappa(x_0, x_2; \theta) + O(\varepsilon^{K+1}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης στη παραπάνω εξίσωση, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] u_0(x_0, x_2; \theta) = 0 \\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] u_1(x_0, x_2; \theta) = -2k_0^2 \mu(x_0, x_2; \theta) u_0(x_0, x_2; \theta) \\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] u_2(x_0, x_2; \theta) = \\ &= -k_0^2 \left[2\mu(x_0, x_2; \theta) u_1(x_0, x_2; \theta) + \mu^2(x_0, x_2; \theta) u_0(x_0, x_2; \theta) \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} u_0(x_0, x_2; \theta) \end{aligned} \quad (17)$$

Παρατηρούμε, ότι η πρώτη εξίσωση είναι μία ντετερμινιστική εξίσωση, εφόσον οι οριακές συνθήκες που ισχύουν για αυτή είναι επίσης ντετερμινιστικές. Πράγματι, για το κύμα μηδενικής τάξης, θεωρείται ότι θα είναι (Mei 2006):

$$u_0(x_0, x_2; \theta) = u_0(x_0, x_2), \quad (18)$$

που αντιστοιχεί στον προσπίπτον κυματισμό. Αντικαθιστώντας στη (17) και εφαρμόζοντας τον τελεστή της μέσης τιμή σε όλο το σύστημα:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] u_0(x_0, x_2) &= 0 \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] \mathbf{E}^\theta [u_1(x_0, x_2; \theta)] &= 0 \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] \mathbf{E}^\theta [u_2(x_0, x_2; \theta)] &= \\
&= -k_0^2 \left[2\mathbf{E}^\theta [\mu(x_0, x_2; \theta)u_1(x_0, x_2; \theta)] + \mathbf{E}^\theta [\mu^2(x_0, x_2; \theta)]u_0(x_0, x_2) \right] - \\
&\quad - 2\frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} u_0(x_0, x_2)
\end{aligned} \tag{19}$$

το οποίο έχει απλοποιηθεί σημαντικά, καθώς η πρώτη εξίσωση παραμένει ίδια με το $u_0(x_0, x_2)$ να έρχεται από την εξίσωση (15) και η δεύτερη δίνει τετριμμένη λύση για το $\mathbf{E}^\theta [u_1(x_0, x_2; \theta)]$:

$$\mathbf{E}^\theta [u_1(x_0, x_2; \theta)] = 0 \tag{20}$$

και για τη τελευταία σχέση είναι:

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] \mathbf{E}^\theta [u_2(x_0, x_2; \theta)] = -k_0^2 \left[2\frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} + \mathbf{E}^\theta [\mu^2(x_0, x_2; \theta)] \right] u_0(x_0, x_2) - 2k_0^2 \mathbf{E}^\theta [\mu(x_0, x_2; \theta)u_1(x_0, x_2; \theta)]} \tag{21}$$

όπου, η $u_0(x_0, x_2)$ έχει γνωστή μορφή, και η $u_1(x_0, x_2; \theta)$ δίνεται από τη λύση της δεύτερης σχέσης του συστήματος (17) χρησιμοποιώντας τη κατάλληλη συνάρτηση green για τον τελεστή του συστήματος (19) και τις οριακές συνθήκες. Η (21) είναι ουσιαστικά μία σχέση για το μέσο πεδίο περίθλασης, αν κανείς αναλογιστεί ότι (από τις (14), (15)):

$$u(x; \theta) = u_0(x_0, x_2) + \varepsilon^2 \cdot u_2(x_0, x_2; \theta),$$

οπότε:

$$\mathbf{E}^\theta [u(x; \theta)] = u_0(x_0, x_2) + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [u_2(x_0, x_2; \theta)].$$

Η περαιτέρω επεξεργασία της (21) απαιτεί αντικατάσταση ειδικών μορφών για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτό θα γίνει στο κεφάλαιο 3, όπου θα εξετάσουμε μία συγκεκριμένη εφαρμογή.

2.1.3. Μέθοδος Εξομάλυνσης (Smoothing perturbation method).

Στην ενότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη τελευταία από τις δημοφιλείς (βιβλιογραφικά), προσεγγίσεις της μοντελοποίησης της (γραμμικής) κυματικής διάδοσης σε στοχαστικά μέσα ενδιάμεσων κυματικών μέσω της θεωρίας διαταραχών. Αυτή προέρχεται από τους Ament 1952, και Bourret 1962, ενώ αναδιατυπώθηκε από τους Keller 1964 και Karal & Keller 1964 στη μορφή που χρησιμοποιείται συνήθως σήμερα. Η προσέγγιση είναι γνωστή με την ονομασία *smoothing method* επειδή δίνει εξομαλυσμένα αποτελέσματα (Sobczyk 1986). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αποσύνθεση του στοχαστικού τελεστή σε ντετερμινιστικό και (μικρό) στοχαστικό μέρος και την εκτέλεση κατάλληλων μετασχηματισμών ώστε να καταλήξουμε με μία *εξίσωση για το μέσο πεδίο* (*mean-field equation*), αντίστοιχη με αυτές που είδαμε προηγουμένως. Παρακάτω, η παραγωγή της εξίσωσης για το μέσο κυματικό πεδίο θα γίνει συστηματικά ακολουθώντας τη μέθοδο του Keller 1964. Με τη μέθοδο αυτή, καταλήγουμε σε μία γενικευμένη εξίσωση για τη μέση τιμή του πεδίου ως προς του εμπλεκόμενους τελεστές. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος αυτή επέκτεινε σημαντικά το εύρος εφαρμογής της πρωτότυπης μεθόδου από τους Ament και Bourret σε προβλήματα διάδοσης σε διακριτά μέσα (Chow & Keller 1972) αλλά και επιδράσεις τυχαίων συνόρων (Chow 1973).

2.1.3.1. Διατύπωση του προβλήματος σε γενική μορφή.

Η μέθοδος είναι γενικότερα εφαρμόσιμη σε φαινόμενα που σχετίζονται με κυματική διάδοση σε στοχαστικά μέσα, τα οποία μπορούν να περιγραφούν από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τυχαίους συντελεστές. Αν με $u(\mathbf{x}, t; \theta)$, $\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, συμβολιστεί το άγνωστο στοχαστικό πεδίο⁽¹²⁾, με $L(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ ο *στοχαστικός γραμμικός διαφορικός τελεστής* που μοντελοποιεί την κυματική διάδοση, και $g(\mathbf{x}, t; \theta)$ το στοχαστικό πεδίο που περιγράφει τη διέγερση, τότε η εξίσωση του προβλήματος θα έχει τη παρακάτω μορφή:

$$L(\mathbf{x}, t; \theta)u(\mathbf{x}, t; \theta) = g(\mathbf{x}, t; \theta), \quad \mathbf{x} \in D, \quad t > t_0. \quad (22)$$

Η διέγερση $g(\mathbf{x}, t; \theta)$ θεωρείται στοχαστική, καθώς η συγκεκριμένη θεώρηση δεν προκαλεί ιδιαίτερες επιπλοκές, ενώ αυξάνει σημαντικά τη γενικότητα του μοντέλου και είναι περισσότερο ρεαλιστική. Σημειώνεται, ότι η τυχαιότητα της διέγερσης δεν συνδέεται κατ' ανάγκη με τη τυχαιότητα του τελεστή $L(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ η οποία σχετίζεται με το περιβάλλον που συμβαίνει το φαινόμενο.

Συγκεκριμένα, ο τελεστής $L(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ θεωρείται διαφορικός ως προς τα ορίσματα \mathbf{x}, t και η τυχαιότητά του οφείλεται σε στοχαστικές ποσότητες (π.χ., στοχαστικά πεδία) που περιλαμβάνονται ως συντελεστές. Η μορφή του $L(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ εξαρτάται από τη κυματική εξίσωση που χρησιμοποιείται στο μοντέλο (πχ. τελεστής *D'Alembert*, τελεστής *Helmholtz*). Επίσης, οι χώροι συναρτήσεων εξειδικεύονται κατά περίπτωση, ανάλογα με το πρόβλημα και τη μαθηματική θεώρηση που ακολουθείται. Τέλος, για την πλήρη περιγραφή του

⁽¹²⁾ Επειδή το παρόν κείμενο ασχολείται με ακουστικά πεδία, η συνάρτηση $u(\mathbf{x}, t; \theta)$ μπορεί να θεωρείται βαθμωτή. Αναλόγως με τον τύπο της κυματικής εξίσωσης και το υπό εξέταση πρόβλημα, η συνάρτηση $u(\mathbf{x}, t; \theta)$ μπορεί να απλουστευθεί όσον αφορά το όρισμά της, όπως για παράδειγμα να προκύψει ανεξάρτητη του χρόνου ή ανεξάρτητη μίας η περισσότερων χωρικών διαστάσεων (βλέπε και προηγούμενο κεφάλαιο).

προβλήματος, πρέπει να οριστούν οι αρχικές και οριακές συνθήκες. Αν με ∂D συμβολιστεί το σύνορο του χωρίου D (στο οποίο ορίζεται η λύση), και με $I(\bullet)$ και $B(\bullet)$ οι τελεστές αρχικών και οριακών συνθηκών αντίστοιχα, η εξίσωση (22) συμπληρώνεται από τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} Iu(\mathbf{x}, t; \theta) \Big|_{t=t_0} &= v_0(\mathbf{x}; \theta), & \mathbf{x} \in \partial D \\ Bu(\mathbf{x}, t; \theta) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D} &= b_0(\mathbf{x}, t; \theta) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D}, & t \geq t_0 \end{aligned} \quad (23)$$

Η εξίσωση (22) μαζί με τις αρχικές και οριακές συνθήκες (23), συνιστούν το μαθηματικό μοντέλο του υπό εξέταση φαινομένου. Χρησιμοποιώντας πιο συνεπή συμβολισμό, ο πλήρης τελεστής του προβλήματος είναι ο $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet) = [L(\mathbf{x}, t; \theta), I, B]^T(\bullet)$, και το πρόβλημα διατυπώνεται:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t; \theta)u(\mathbf{x}, t; \theta) = \begin{bmatrix} L(\mathbf{x}, t; \theta) \\ I \\ B \end{bmatrix} u(\mathbf{x}, t; \theta) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}, t; \theta) \\ v_0(\mathbf{x}; \theta) \\ b_0(\mathbf{x}, t; \theta) \end{bmatrix}.$$

Για λόγους λιτότητας και ευκολίας χειρισμού, στη συνέχεια του κειμένου θα εργασθούμε με τον τελεστή $L(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$, ενώ στα σημεία που απαιτείται θα λαμβάνονται υπόψη οι συνθήκες (23), και θα γίνεται σχετική αναφορά.

2.1.3.2. Εξίσωση για το μέσο κυματικό πεδίο.

Η smoothing method, βασίζεται στη παραδοχή ότι **οι τυχαίες διακυμάνσεις είναι ασθενείς**, προκειμένου να εφαρμοστούν τεχνικές της θεωρίας διαταραχών στην εξίσωση (22). Σε συμφωνία με όσα έχουν αναφερθεί, η παραδοχή ότι οι τυχαίες διακυμάνσεις είναι ασθενείς (πέριξ μίας ντετερμινιστικής κατάστασης), ισοδυναμεί με την εξάρτηση της στοχαστικής ανομοιογένειας από μία μικρή, αδιάστατη ποσότητα ε . Κατ' επέκταση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και ο τελεστής $L(\mathbf{x}, t; \theta) = L_\varepsilon(\mathbf{x}, t; \theta)$ εξαρτάται το ε και αναπτύσσεται στη μορφή⁽¹³⁾:

$$L_\varepsilon(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet) = [L_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot L_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3)](\bullet), \quad (24)$$

όπου $L_0(\mathbf{x}, t)(\bullet)$ είναι ντετερμινιστικός γραμμικός τελεστής, $L_n(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ με $n=1, 2$, είναι στοχαστικοί τελεστές και $\varepsilon \ll 1$ είναι, όπως αναφέρθηκε, μία μικρή (αδιάστατη) ποσότητα που καθορίζει την τάξη μεγέθους των στοχαστικών επιδράσεων. Με $O(\varepsilon^m)$, συμβολίζεται το άθροισμα των όρων m -οστής και ανώτερης τάξης.

⁽¹³⁾ Τονίζεται εδώ, ότι η παραπάνω μορφή για τον τελεστή $L(\theta)$ είναι μία υπόθεση που γίνεται και η οποία δεν οφείλει να είναι αποτελεσματική για όλα τα διαφορετικά κυματικά προβλήματα. Πέραν τούτου, θα φανεί στη συνέχεια ότι η συγκεκριμένη μορφή εφαρμόζεται επιτυχώς σε μεγάλο εύρος προβλημάτων.

Στην ειδική περίπτωση όπου η διέγερση $g(\mathbf{x}, t; \theta)$ εξαρτάται επίσης από τη μικρή ποσότητα ε , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$g_\varepsilon(\mathbf{x}, t; \theta) = g_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot g_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \quad (25)$$

Η θεώρηση αυτή για το πεδίο $g(\mathbf{x}, t; \theta)$ περιορίζει σημαντικά τη πολυπλοκότητα του συμβολισμού και την έκταση των εκφράσεων που ακολουθούν, ενώ αποτελεί και τη μορφή που θα μας απασχολήσει στις εφαρμογές του τρίτου κεφαλαίου. Για το λόγο αυτό και κυρίως την οικονομία έκτασης, η συγκεκριμένη παραδοχή θα διατηρηθεί και στη συνέχεια της ενότητας⁽¹⁴⁾.

Χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω αναπτύγματα για τον $L(\mathbf{x}, t; \theta)$ και τη $g(\mathbf{x}, t; \theta)$, η σχέση (22) μπορεί να αναδιατυπωθεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} \left[L_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon L_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 L_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \right] u(\mathbf{x}, t; \theta) = \\ = \left[g_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot g_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Θέτοντας $\varepsilon = 0$ στη παραπάνω σχέση, προκύπτει μία ειδική λύση η οποία, επειδή εξαρτάται μόνο από τον ντετερμινιστικό τελεστή $L_0(\mathbf{x}, t)$, είναι και αυτή ντετερμινιστική και συμβολίζεται ως $u_0(\mathbf{x}, t)$:

$$u_0(\mathbf{x}, t) : L_0(\mathbf{x}, t)u_0(\mathbf{x}, t) = g_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D, \quad t > t_0. \quad (27)$$

Οι συνθήκες που ισχύουν για την τελευταία εξίσωση, είναι προφανώς οι ίδιες που ισχύουν για το αρχικό σύστημα, αν τις εκφράσουμε σε μορφή αναπτυγμάτων αντίστοιχα με την (25) και θέσουμε $\varepsilon = 0$. Θα είναι δηλαδή:

$$\begin{aligned} Iu(\mathbf{x}, t; \theta) \Big|_{t=t_0} &= v_0(\mathbf{x}; \theta), \quad \mathbf{x} \in \partial D \\ Bu(\mathbf{x}, t; \theta) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D} &= b_0(\mathbf{x}, t; \theta) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D}, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι ο **αντίστροφος τελεστής** $L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)$ υπάρχει και είναι μοναδικός, και εφαρμόζοντας τον στα δύο μέλη της εξ. (26):

$$\begin{aligned} L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\left\{ L_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon L_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 L_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \right\} u(\mathbf{x}, t; \theta) \right] = \\ = L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[g_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot g_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

⁽¹⁴⁾ Η εναλλακτική και γενικότερη προσέγγιση όπου η $g(\mathbf{x}, t; \theta)$ δεν εξαρτάται (κατ' ανάγκη) από κάποια μικρή ποσότητα, μπορεί να αντιμετωπιστεί με εντελώς ανάλογη διαδικασία.

$$\begin{aligned}
& u(\mathbf{x}, t; \theta) + L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\left\{ \varepsilon L_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 L_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \right\} u(\mathbf{x}, t; \theta) \right] = \\
& = u_0(\mathbf{x}, t) + L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\varepsilon \cdot g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot g_2(\mathbf{x}, t; \theta) + O(\varepsilon^3) \right] \quad \Rightarrow \\
& u(\mathbf{x}, t; \theta) = u_0(\mathbf{x}, t) + L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\varepsilon \cdot g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot g_2(\mathbf{x}, t; \theta) \right] - \\
& \quad - L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\left\{ \varepsilon L_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 L_2(\mathbf{x}, t; \theta) \right\} u(\mathbf{x}, t; \theta) \right] + O(\varepsilon^3) .
\end{aligned} \tag{28}$$

Εφόσον ο σκοπός είναι να κατασκευάσουμε μία ρητή έκφραση για το στοχαστικό πεδίο $u(\mathbf{x}, t; \theta)$, η πεπλεγμένη εξάρτησή του (δηλαδή η εξάρτησή του από τον εαυτό του) θα ενσωματωθεί στους όρους τρίτης και ανώτερης τάξης (τους οποίους, όπως θα δούμε αργότερα, αγνοούμε). Για να γίνει αυτό, η εξίσωση (28) αναπτύσσεται με τη **μέθοδο των επαναλήψεων**. Εκτελώντας την πρώτη επανάληψη και κρατώντας όρους μέχρι και δεύτερης τάξης, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t; \theta) & = u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_2(\mathbf{x}, t; \theta) - \\
& \quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) u(\mathbf{x}, t; \theta) \right] - \\
& \quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_2(\mathbf{x}, t; \theta) u(\mathbf{x}, t; \theta) \right] + O(\varepsilon^3) = \\
& = u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_2(\mathbf{x}, t; \theta) - \\
& \quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) u_0(\mathbf{x}, t) \right] - \\
& \quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) \right] + \\
& \quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) u(\mathbf{x}, t; \theta) \right] \right] \right] - \\
& \quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_2(\mathbf{x}, t; \theta) u_0(\mathbf{x}, t) \right] + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πεπλεγμένη εξάρτηση του στοχαστικού πεδίου συνεχίζει να υφίσταται στους όρους δεύτερης τάξης. Προκειμένου να προκύψει ρητή έκφραση για το πεδίο, εκτελείται και **δεύτερη επανάληψη**:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t; \theta) & = u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_2(\mathbf{x}, t; \theta) - \\
& \quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) u_0(\mathbf{x}, t) \right] - \\
& \quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) \right] + \\
& \quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) u_0(\mathbf{x}, t) \right] \right] \right] - \\
& \quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_2(\mathbf{x}, t; \theta) u_0(\mathbf{x}, t) \right] + O(\varepsilon^3) .
\end{aligned} \tag{29}$$

Εξαιτίας των επαναλήψεων, το πεδίο $u(\mathbf{x}, t; \theta)$ έχει γραφεί συναρτήσει της λύσης του ντετερμινιστικού προβλήματος $u_0(\mathbf{x}, t)$ συν όρους τρίτης και ανώτερης τάξης. Δεδομένου τώρα ότι ο οι εμπλεκόμενοι τελεστές είναι γνωστοί ή υπολογίσιμοι και το ντετερμινιστικό

πρόβλημα λύνεται με τεχνικές που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 1.2, η έκφραση (29) είναι η σχέση που αναζητούσαμε και μπορεί να λειτουργήσει για τον υπολογισμό ροπών.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον πιθανοθεωρητικό τελεστή της μέσης τιμής $E^\theta[\bullet]$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} E^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] &= u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\ &\quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)u_0(\mathbf{x}, t)] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)u_0(\mathbf{x}, t)]] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[L_2(\mathbf{x}, t; \theta)u_0(\mathbf{x}, t)] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Με τη λήψη κατάλληλων γινομένων της (29) και την εφαρμογή του $E^\theta[\bullet]$, προκύπτουν αντίστοιχες σχέσεις για ροπές ανώτερης τάξης.

Επειδή στις εφαρμογές οι τελεστές $L_1(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$, $L_2(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ προκύπτει ότι είναι **στοχαστικοί πολλαπλασιαστικοί τελεστές** και δεδομένου ότι το πεδίο $u_0(\mathbf{x}, t)$ είναι ντετερμινιστικό, ισχύουν οι παρακάτω πράξεις:

$$E^\theta[L_n(\mathbf{x}, t; \theta)u_0(\mathbf{x}, t)] = E^\theta[L_n(\mathbf{x}, t; \theta)]u_0(\mathbf{x}, t), \quad n = 1, 2,$$

όπου $E^\theta[L_n(\mathbf{x}, t; \theta)](\bullet)$ είναι **νέοι ντετερμινιστικοί πολλαπλασιαστικοί τελεστές**.

Έτσι, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} E^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] &= u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\ &\quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) [E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)]u_0(\mathbf{x}, t)] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)u_0(\mathbf{x}, t)]] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) [E^\theta[L_2(\mathbf{x}, t; \theta)]u_0(\mathbf{x}, t)] + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{30}$$

η οποία είναι μία έκφραση για το μέσο πεδίο $E^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)]$. Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την (29) για να κατασκευαστούν τα κατάλληλα γινόμενα και έπειτα εφαρμόζοντας το τελεστή της μέσης τιμής, προκύπτουν ροπές ανώτερης τάξης. Αν και η σχέση (30) τυπικά επαρκεί για τον υπολογισμό, είναι χρήσιμο να υπάρχει και μία εξίσωση για το μέσο πεδίο. Μία τέτοια εξίσωση μπορεί να χρησιμεύσει στον υπολογισμό της σχέσης διασποράς για το στοχαστικό πεδίο ή/και ως βάση για διαφορετικές μεθόδους επίλυσης στη περίπτωση που η σχέση (30)

δεν είναι πρακτική. Η εξίσωση αυτή για το μέσο πεδίο αποτελεί μέσο επίλυσης και σε άλλους μεθόδους και βιβλιογραφικά αναφέρεται συνήθως ως *mean-field equation*.

Για να κατασκευαστεί η *mean-field equation*, χρειάζεται μια έκφραση που να περιέχει μόνο τη μέση τιμή του άγνωστου στοχαστικού πεδίου, $\mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)]$. Παρατηρώντας τη σχέση (30), βλέπουμε πως ένας τρόπος για να γίνει αυτό, είναι η αντικατάσταση του πεδίου $u_0(\mathbf{x}, t)$ με μία έκφρασή του ως προς το μέσο πεδίο $\mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)]$. Στην ίδια σχέση, παρατηρούμε ότι οι λύνοντας ως προς $u_0(\mathbf{x}, t)$, η πεπλεγμένη εξάρτηση του $u_0(\mathbf{x}, t)$ εντοπίζεται σε όρους πρώτης και ανώτερης τάξης. Έτσι, εφαρμόζοντας επαναλήψεις ως προς το $u_0(\mathbf{x}, t)$, αυτό θα αντικατασταθεί τελικά με συναρτήσεις του μέσου πεδίου $\mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)]$ (δηλαδή του όρου μηδενικής τάξης). Λύνοντας λοιπόν τη σχέση (30) ως προς το $u_0(\mathbf{x}, t)$ και εφαρμόζοντας **μία επανάληψη**, προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_0(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta[g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\ &\quad + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] u_0(\mathbf{x}, t) \right] + O(\varepsilon^2) = \\ &= \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta[g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\ &\quad + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό, αν δεν είχε προηγηθεί το averaging (αν είχε χρησιμοποιηθεί δηλαδή η σχέση (29) και γινόταν το averaging μετά), οι μέσες τιμές θα εφαρμοζόντουσαν σε γινόμενα των πολλαπλασιαστικών τελεστών και του στοχαστικού πεδίου τα οποία είναι συσχετισμένα. Οι συσχετίσεις αυτές ουσιαστικά έχουν ενσωματωθεί στους όρους ανώτερης τάξης. Εάν οι όροι αυτοί αποκοπούν, τότε η συγκεκριμένη διαδικασία που ακολουθήθηκε, **ισοδυναμεί ουσιαστικά με τη παραδοχή της τοπικής ανεξαρτησίας (local independence)** που γίνεται κατά πολύ σαφή τρόπο στο derivation από τους Ament 1952 και Bourret 1962. Η αναφορά αυτή γίνεται εδώ, επειδή όπως πολύ σωστά επισημαίνεται στο Van Kampen 1976, η διαδικασία είναι παραπλανητική ως προς τη συγκεκριμένη παραδοχή.

Αντικαθιστώντας τη τελευταία σχέση στη προηγούμενη (εξαιρώντας στην αντικατάσταση τον όρο μηδενικής τάξης) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] &= u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta[g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta[g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\ &\quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] u_0(\mathbf{x}, t) \right] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) \right] + \\ &\quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) u_0(\mathbf{x}, t) \right] \right] \right] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^\theta[L_2(\mathbf{x}, t; \theta)] u_0(\mathbf{x}, t) \right] + O(\varepsilon^3) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] &= u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\
&\quad - \varepsilon \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 \cdot L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_2(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Στα δύο μέλη της εξίσωσης εφαρμόζεται ο τελεστής $L_0(\mathbf{x}, t)(\bullet)$:

$$\begin{aligned}
L_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] &= L_0(\mathbf{x}, t) u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot \mathbf{E}^0 [g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^0 [g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\
&\quad - \varepsilon \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^0 \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] \right] - \\
&\quad - \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_2(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (27) και μαζεύοντας τους όρους που περιέχουν το μέσο πεδίο στο ίδιο μέλος, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
&L_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] + \\
&+ \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] - \\
&- \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^0 \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] \right] + \\
&+ \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_2(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^0 [u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] = \\
&= g_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot \mathbf{E}^0 [g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^0 [g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] + \\
&+ \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^0 [g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] - \\
&- \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^0 [L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

(31)

οπότε προκύπτει η ζητούμενη έκφραση για το μέσο πεδίο. Πρόκειται για μία γραμμική ολοκληροδιαφορική ντετερμινιστική εξίσωση που εμπλέκει μέσες τιμές των δράσεων του

αναπτύγματος του τελεστή $L(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ και του αντίστροφου τελεστή $L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)(\bullet)$ στο μέσο κυματικό πεδίο $E^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)]$. Στο δεξιό μέλος, εντοπίζεται η διέγερση που αποτελείται το $g_0(\mathbf{x}, t)$, που είναι το ντετερμινιστικό μέρος της διέγερσης του αρχικού προβλήματος, και όρους ανώτερης τάξης που εμπλέκουν μέσες τιμές των στοχαστικών συναρτήσεων $g_1(\mathbf{x}, t; \theta)$, $g_2(\mathbf{x}, t; \theta)$ και δράσεις των τελεστών $L_1(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ και $L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)(\bullet)$. Το φυσικό νόημα της εξίσωσης αυτής θα σχολιαστεί στο τρίτο κεφάλαιο, όπου γίνεται και η εφαρμογή της.

Η σχέση μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω, **κάνοντας τη συνήθη υπόθεση ότι** $E^\theta[L_1(\mathbf{x}, t; \theta)](\bullet) = Z(\bullet)$, ο μηδενικός τελεστής. Η παραδοχή αυτή ισοδυναμεί με τη θεώρηση των στοχαστικών διαταραχών ως θόρυβο επί της μέσης κατάστασης. Τότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
 & L_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\
 & - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \left[L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] \right] \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \cdot \left[\mathbf{E}^\theta[L_2(\mathbf{x}, t; \theta)] \mathbf{E}^\theta[u(\mathbf{x}, t; \theta)] \right] = \\
 & = g_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \cdot \mathbf{E}^\theta[g_1(\mathbf{x}, t; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta[g_2(\mathbf{x}, t; \theta)] - \\
 & - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta \left[L_1(\mathbf{x}, t; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}, t) g_1(\mathbf{x}, t; \theta) \right] + O(\varepsilon^3).
 \end{aligned}$$

(32)

Αποκόπτοντας τους όρους που είναι ανώτεροι της δεύτερης τάξης στις δύο τελευταίες σχέσεις και αντικαθιστώντας τους γενικευμένους τελεστές $L_0(\mathbf{x}, t)(\bullet)$, $L_1(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$, $L_2(\mathbf{x}, t; \theta)(\bullet)$ και $L_0^{-1}(\mathbf{x}, t)(\bullet)$ με αυτούς που αντιστοιχούν στο διαθέσιμο πρόβλημα, κάποιος μπορεί να πάρει την **εξίσωση για τη μέση τιμή του πεδίου**. Οι ντετερμινιστική αυτή εξίσωση μπορεί να λυθεί με ειδική κατά περίπτωση προσέγγιση (αν είναι καταλληλότερη από τον ευθύ υπολογισμό της σχέσης (30)) ή να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή της εξίσωσης διασποράς του κυματικού πεδίου.

2.1.3.3. Εξίσωση για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του στοχαστικού κυματικού πεδίου.

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη έκφραση και εξίσωση για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του στοχαστικού πεδίου. Σημειώνεται ότι η διαδικασία που ακολουθούμε είναι εντελώς ανάλογη με αυτή της προηγούμενης ενότητας και έτσι μπορεί κανείς να αποφύγει την άλγεβρα και να προχωρήσει απ' ευθείας στο τέλος της ενότητας όπου δίνονται οι γενικές μορφές για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

Η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** του πεδίου $u(\mathbf{x}, t; \theta)$, μπορεί να ληφθεί με διαφορετικούς τρόπους, αναλόγως με τη μεταβλητή ως προς την οποία διερευνάται η συσχέτιση. Για παράδειγμα, εφόσον η παρούσα μελέτη ασχολείται με ακουστικά πεδία, μία λύση της εξίσωσης D' *Alembert*, θα είναι της μορφής $u(\mathbf{x}, t; \theta)$. Τότε η συνάρτηση συσχέτισης μπορεί να οριστεί ως προς το χώρο, το χρόνο ή και το συνδυασμό τους. Θα είναι δηλαδή :

$$R_{uu}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = E^\theta \left[u(\mathbf{x}_1, t_1; \theta) u(\mathbf{x}_2, t_2; \theta) \right].$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί πάντοτε να «περιοριστεί» στις απλούστερες περιπτώσεις, με την εξίσωση των κατάλληλων ορισμάτων. Αν και στη συνέχεια της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά η εξίσωση Helmholtz (και άρα το ακουστικό πεδίο θα είναι συνάρτηση μόνο της θέσης), το παρόν εδάφιο πρέπει να διατηρηθεί, κατά το δυνατόν, γενικό, ώστε οι εξισώσεις που προκύπτουν να είναι λειτουργικές για οποιοδήποτε αντιστρέψιμο γραμμικό τελεστή.

Για απλοποίηση του συμβολισμού, ορίζουμε το διάνυσμα $\zeta = (\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$. Έτσι, θα είναι $\zeta_1 = (\mathbf{x}_1, t_1)$, $\zeta_2 = (\mathbf{x}_2, t_2)$ και η συνάρτηση συσχέτισης μπορεί να γραφεί στη «γενική» μορφή:

$$R_{uu}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = R_{uu}(\zeta_1; \zeta_2) = E^\theta \left[u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta) \right],$$

η οποία, όπως αναφέρθηκε, περιέχει και όλες τις απλούστερες περιπτώσεις. Έπειτα, στην ειδική περίπτωση συγκεκριμένου τελεστή, οι μεταβλητές $\zeta_{1,2}$, μπορούν να αντιστοιχηθούν στο κατάλληλο όρισμα (πχ. x_1, x_2 για το μονοδιάστατο τελεστή *Helmholtz*).

Όσον αφορά την εξαγωγή της συνάρτησης συσχέτισης, η προσέγγιση θα γίνει όπως και προηγουμένως, δηλαδή κατασκευαστικά. Αρχικά, κατασκευάζεται το γινόμενο $u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta)$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (29) όπου για οικονομία στην έκταση έχουμε θεωρήσει τους όρους της διέγερσης μηδενικούς:

$$\begin{aligned} u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta) &= \\ &= \left[u_0(\zeta_1) - \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \right] u_0(\zeta_1) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2 \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_1) \{ L_2(\zeta_1; \theta) - L_1(\zeta_1; \theta) L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \} \right] u_0(\zeta_1) + O(\varepsilon^3) \right] \times \\ &\quad \times \left[u_0(\zeta_2) - \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \right] u_0(\zeta_2) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2 \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2) \{ L_2(\zeta_2; \theta) - L_1(\zeta_2; \theta) L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \} \right] u_0(\zeta_2) + O(\varepsilon^3) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) = \\
& = \left[\begin{aligned} & 1 - \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) + L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1; \theta) \right] \\ & + \varepsilon^2 \cdot \left[\begin{aligned} & L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1; \theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) - \\ & - L_0^{-1}(\zeta_1)L_2(\zeta_1; \theta) + \\ & + L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1; \theta)L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1; \theta) - \\ & - L_0^{-1}(\zeta_2)L_2(\zeta_2; \theta) + \\ & + L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \cdot \{u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2)\} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της μέσης τιμής, προκύπτει (όπως και στη περίπτωση του μέσου πεδίου), μία σχέση που εξαρτάται από το γινόμενο $\{u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2)\}$:

$$\begin{aligned}
& \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle = \\
& = \left[\begin{aligned} & 1 - \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \\ & + \varepsilon^2 \cdot \left[\begin{aligned} & L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1; \theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\ & - L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \\ & + L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1; \theta)L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\ & - L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \\ & + L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2; \theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \cdot \{u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2)\} + O(\varepsilon^3) \quad (33)
\end{aligned}$$

Ακολουθώντας όμοια διαδικασία, η averaged σχέση λύνεται ως προς τον «ανεπιθύμητο» όρο:

$$\begin{aligned}
& \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle = \\
& = \left[1 - \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \right] \cdot \{u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2)\} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2) = \\
& = \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \cdot \\
& \quad \cdot \{u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2)\} + O(\varepsilon^2) = \\
& = \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \cdot \\
& \quad \cdot \underbrace{\left\{ \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + O(\varepsilon) \right\}}_{u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2)} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2) = \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + \\ + \varepsilon \cdot \left[\begin{array}{l} L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + \\ + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \end{array} \right] \cdot \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + O(\varepsilon^2)$$

και η τελευταία έκφραση αντικαθίσταται στο δεξιό μέλος της σχέσης (33):

$$\langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle = \\ = u_0(\zeta_1)u_0(\zeta_2) + \\ \left[\begin{array}{l} - \varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \\ \left[\begin{array}{l} L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\ - L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \\ + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta)L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\ - L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \\ + L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \end{array} \right] \end{array} \right] \cdot \\ \cdot \left\{ \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + \right. \\ \left. + \varepsilon \cdot \left[\begin{array}{l} L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + \\ + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \end{array} \right] \cdot \langle u(\zeta_1; \theta)u(\zeta_2; \theta) \rangle + O(\varepsilon^2) \right\} + O(\varepsilon^3) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \langle u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta) \rangle = \\
& = u_0(\zeta_1) u_0(\zeta_2) - \\
& \quad \left[\varepsilon \cdot \left[L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \right. \\
& \quad \quad \left[\begin{aligned}
& L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \\
& - L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \\
& - L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \end{aligned} \right] \\
& \quad \left. + \varepsilon^2 \cdot \left[\begin{aligned}
& L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \\
& - L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \\
& - L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \end{aligned} \right] \right] \\
& \quad \cdot \langle u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta) \rangle + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)$ και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, καταλήγει κανείς:

$$\begin{aligned}
& L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2) \langle u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta) \rangle = \\
& = L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2) u_0(\zeta_1) u_0(\zeta_2) - \\
& \quad \left[\varepsilon \cdot \left[L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \right] \right] \\
& \quad \quad \left[\begin{aligned}
& L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \\
& - L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \\
& - L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \end{aligned} \right] \\
& \quad \left. + \varepsilon^2 \cdot \left[\begin{aligned}
& L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \\
& - L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_1) \langle L_1(\zeta_1; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \\
& - L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \\
& + L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)L_0^{-1}(\zeta_2) \langle L_1(\zeta_2; \theta) \rangle L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \end{aligned} \right] \right] \\
& \quad \cdot \langle u(\zeta_1; \theta) u(\zeta_2; \theta) \rangle + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι οι τελεστές $L_0(\zeta_1)$, $L_0(\zeta_2)$ μπορούν να εναλλάσσονται ελεύθερα, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
& L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2)\langle u(\zeta_1;\theta)u(\zeta_2;\theta)\rangle = \\
& = g(\zeta_1)g(\zeta_2) - \\
& \quad \left[\begin{array}{l} \varepsilon \cdot [L_0(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle + L_0(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle] \\ L_0(\zeta_1) \left\{ \begin{array}{l} \langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \\ + \langle L_1(\zeta_2;\theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \\ - \langle L_2(\zeta_2;\theta)\rangle \end{array} \right\} \\ + \varepsilon^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle \\ + \langle L_1(\zeta_1;\theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \\ - \langle L_2(\zeta_1;\theta)\rangle \\ + \langle L_1(\zeta_1;\theta)L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1;\theta)\rangle \end{array} \right\} \\ + 2\langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle\langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \end{array} \right] \cdot \langle u(\zeta_1;\theta)u(\zeta_2;\theta)\rangle + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

ή

$$\boxed{[L_0(\zeta_1)L_0(\zeta_2) + K(\zeta_1, \zeta_2)] R_{uu}(\zeta_1; \zeta_2) = g(\zeta_1)g(\zeta_2) + O(\varepsilon^3)}, \quad (34)$$

όπου

$$\begin{aligned}
K(\zeta_1, \zeta_2) = & \left[\begin{array}{l} \varepsilon \cdot [L_0(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle + L_0(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle] \\ L_0(\zeta_1) \left\{ \begin{array}{l} \langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle L_0^{-1}(\zeta_2)\langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \\ + \langle L_1(\zeta_2;\theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \\ - \langle L_2(\zeta_2;\theta)\rangle \end{array} \right\} \\ + \varepsilon^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle L_0^{-1}(\zeta_1)\langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle \\ + \langle L_1(\zeta_1;\theta)L_0^{-1}(\zeta_2)L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \\ - \langle L_2(\zeta_1;\theta)\rangle \\ + \langle L_1(\zeta_1;\theta)L_0^{-1}(\zeta_1)L_1(\zeta_1;\theta)\rangle \end{array} \right\} \\ + 2\langle L_1(\zeta_1;\theta)\rangle\langle L_1(\zeta_2;\theta)\rangle \end{array} \right]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Η σχέση (34) είναι η αντίστοιχη έκφραση της (31), για τη συνάρτηση συσχέτισης του στοχαστικού κυματικού πεδίου. Όπως και προηγουμένως, **κάνοντας τη συνήθη υπόθεση ότι** $\langle L_1(\zeta;\theta)\rangle = 0$, η σχέση απλοποιείται σημαντικά καθώς ο τελεστής $K(\zeta_1, \zeta_2)$ παίρνει τη μορφή:

$$K(\zeta_1, \zeta_2) = \varepsilon^2 \cdot \begin{bmatrix} L_0(\zeta_1) \left\{ \begin{array}{l} +\langle L_1(\zeta_2; \theta) L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\ -\langle L_2(\zeta_2; \theta) \rangle \end{array} \right\} \\ +L_0(\zeta_2) \left\{ \begin{array}{l} +\langle L_1(\zeta_1; \theta) L_0^{-1}(\zeta_2) L_1(\zeta_2; \theta) \rangle \\ +\langle L_1(\zeta_1; \theta) L_0^{-1}(\zeta_1) L_1(\zeta_1; \theta) \rangle \\ -\langle L_2(\zeta_1; \theta) \rangle \end{array} \right\} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που δίνεται από τις σχέσεις (34) και (36), συμφωνεί με τα αποτελέσματα των Chen & Soong 1971, οι οποίοι τη κατασκευάζουν με ισοδύναμες τεχνικές.

Στη παρούσα ενότητα, έγινε η παραγωγή των συναρτήσεων για τη μέση τιμή και την αυτοσυσχέτιση του στοχαστικού πεδίου (εξισώσεις (31) και (34) αντίστοιχα), ενώ κατασκευάστηκαν και ρητές εκφράσεις για τα δύο πιθανοθεωρητικά μεγέθη. Όπως φάνηκε, και οι δύο προέκυψαν με όμοια τεχνική, ακολουθώντας τη μέθοδο του Keller 1964. Έτσι αντίστοιχα, για κάθε τάξης ροπές, κάποιος πρέπει να ξεκινήσει από την εξίσωση (29), να κατασκευάσει το σχετικό γινόμενο και να προχωρήσει σε απαλοιφή του γινομένου των λύσεων του ντετερμινιστικού προβλήματος προκειμένου να πάρει μία εξίσωση για τη ζητούμενη ροπή. Πρέπει να σημειωθεί, ότι οι φόρμουλες για ανώτερης τάξης ροπές γίνονται ιδιαίτερα πολύπλοκες, λαμβάνοντας υπόψη και την αντικατάσταση των ειδικών τελεστών ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που η συγκεκριμένη τεχνική χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό μόνο του μέσου πεδίου. ενώ βιβλιογραφικά δε βρέθηκε κάποια αναφορά για τη χρήση της σε ανώτερης τάξης ροπές.

Η αξία της μεθόδου του Keller, έγκειται στο γεγονός ότι είναι αποτελεσματική για κάθε πρόβλημα της μορφής (22) & (23), **με την προϋπόθεση ότι οι στοχαστικές διακυμάνσεις του μέσου είναι ασθενείς**. Σε προβλήματα της υδροακουστικής, αυτό σημαίνει το σύνολο των γραμμικών προβλημάτων που περιγράφονται από την ακουστική εξίσωση *D' Alembert* και την εξίσωση *Helmholtz*. Αξιοσημείωτο είναι ότι πουθενά δε γίνεται υπόθεση για μέση ομοιογένεια του μέσου, άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι μορφές των εξισώσεων για μεταβαλλόμενα ακουστικά χαρακτηριστικά (ταχύτητα διάδοσης για τη *D' Alembert* και κυματικός αριθμός για τη *Helmholtz*, βλέπε κεφάλαιο 1.2.1).

2.2 Άλλες μέθοδοι.

Πέρα από τις μεθόδους διαταραχών που παρουσιάστηκαν στη προηγούμενη ενότητα, η μοντελοποίηση κυματικών φαινομένων σε στοχαστικά μέσα μπορεί να γίνει και με διαφορετικούς τρόπους. Επειδή αυτές οι μέθοδοι που ακολουθούν δεν χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές του επόμενου κεφαλαίου (βλ. συζήτηση), αναφέρονται εν συντομία.

Μία οικογένεια μεθόδων, βασίζεται στη προσπάθεια κατασκευής **εξισώσεων για το χαρακτηριστικό συναρτησιακό** του στοχαστικού πεδίου. Οι εξισώσεις αυτές είναι παρόμοιες με τη mean-field equation, αλλά δε προϋποθέτουν ασθενείς στοχαστικές διακυμάνσεις. Εφόσον λυθούν έχουμε ουσιαστικά όλη τη πληροφορία για το στοχαστικό πεδίο και μπορούμε να κατασκευάσουμε ροπές (συναρτησιακή παραγωγή του χ.σ.) ή/και κατανομές πιθανότητας (συναρτησιακή ολοκλήρωση του χ.σ.). Δυστυχώς, οι μέθοδοι αυτές είναι αρκετά δυσκολότερες από μαθηματική άποψη καθώς οι εξισώσεις που προκύπτουν για το χαρακτηριστικό συναρτησιακό απαιτούν, για την επίλυσή τους, μαθηματικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν μόλις τις τελευταίες δεκαετίες και δεν έχουν χρησιμοποιηθεί συστηματικά σε τέτοιου τύπου εφαρμογές (Sobczyk 1985). Γενικώς **οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν το χαρακτηριστικό συναρτησιακό θεωρείται ότι οδηγούν σε πληρέστερη αναπαράσταση του φαινομένου**. Πέραν τούτου, η χρήση τους στη βιβλιογραφία είναι ιδιαίτερα περιορισμένη εξαιτίας της δυσκολίας όσον αφορά παραγωγή τελικών αποτελεσμάτων.

Άλλες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τέτοιου τύπου προβλήματα, βασίζονται στην αναπαράσταση του στοχαστικού πεδίου ή της εξίσωσης με άπειρα συστήματα (cumulant expansions και hierarchy systems αντίστοιχα). Οι αναπαραστάσεις αυτές **δεν προϋποθέτουν (τουλάχιστον εξαρχής) ασθενείς ανομοιογένειες στο μέσο διάδοσης**. Συνήθως, προκειμένου να παραχθούν αξιοποιήσιμα αποτελέσματα, οι μέθοδοι υποχρεούνται τελικά σε συγκεκριμένες παραδοχές (πχ. truncation, closure conditions, ανεξαρτησία/ασθενής εξάρτηση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών). Οι παραδοχές αυτές μπορεί κατά περίπτωση να είναι ηπιότερες, αυστηρότερες η και ισοδύναμες με αυτές της θεωρίας διαταραχών. Αυτό που είναι σημαντικό, είναι ότι οι παραδοχές δεν εισάγονται εξαρχής στην ανάλυση και έτσι πιθανόν να διατηρούνται ορισμένες σημαντικές αλληλεπιδράσεις, ενώ επιτρέπουν φυσικά και τη διερεύνηση τρόπων επίλυσης χωρίς τις συγκεκριμένες υποθέσεις (Adomian 1983).

3.

Μελέτη φαινομένων ακουστικής διάδοσης σε ανομοιογενή στοχαστικά μέσα (σε μια διάσταση)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί το φαινόμενο της διάδοσης ακουστικών κυμάτων σε μέσα που εμφανίζουν στοχαστική ανομοιογένεια. Το μεγάλο εύρος των εφαρμογών και των μεθόδων προσέγγισης, οδηγούν σε μία τεράστια ποικιλία προβλημάτων. Θα εξεταστεί το πρόβλημα σε μία διάσταση και για σταθερή μέση τιμή του κυματικού αριθμού σε όλο μήκος του μέσου. Οι παραπάνω απλοποιήσεις, σκοπεύουν στην κατασκευή τελικών εξισώσεων, οι οποίες θα μπορούν να δώσουν (κάποιες) αναλυτικές λύσεις, προκειμένου να υπάρχει δυνατότητα διερεύνησης της πλήρους πληροφορίας που επιτρέπει η εκάστοτε μέθοδος στοχαστικής μοντελοποίησης. Αυτό, επιτρέπει να εστιάσουμε στη μελέτη της επίδρασης των στοχαστικών χαρακτηριστικών του μέσου στο κυματικό φαινόμενο. Επιπλέον, η ύπαρξη αναλυτικών λύσεων επιτρέπει και την επιβεβαίωση αριθμητικών αποτελεσμάτων τα οποία μπορούν να εξαχθούν ακόμη και σε περιπτώσεις όπου ο αναλυτικός υπολογισμός είναι αδύνατος. Τέλος, αναφέρεται ότι, σε γενικές γραμμές, οι απλοποιήσεις αυτές φαίνεται να επιδρούν στο «ντετερμινιστικό» μέρος της μοντελοποίησης⁽¹⁵⁾, δηλαδή τη δουλειά που έπεται της *mean-field equation* (η οποία είναι ντετερμινιστική) και όχι τη στοχαστική ιδιότητα του προβλήματος. Έτσι, η λογική της μεθόδου παραμένει κοινή, και τα παρακάτω αποτελέσματα μπορούν να χρησιμεύσουν και σε διαδικασίες επίλυσης πολυπλοκότερων προβλημάτων.

⁽¹⁵⁾ Έχοντας προφανώς επίγνωση για τα φαινόμενα που δεν εμφανίζονται λόγω διάστασης (πχ. διάθλαση).

3.1. Κυματική διάδοση σε άπειρο μονοδιάστατο μέσο που παρουσιάζει τοπική στοχαστική ανομοιογένεια – Διατύπωση του προβλήματος.

Έστω μονοδιάστατο στοχαστικό ακουστικό μέσο, άπειρου μήκους. Το μέσο συνίσταται από τρεις περιοχές, δύο ημι-άπειρες ομογενείς, $D^- = (-\infty, a)$ και $D^+ = (b, +\infty)$, ανάμεσα στις οποίες παρεμβάλλεται μία τρίτη ανομοιογενής ζώνη, $D^\# \equiv D = [a, b]$. Η στοχαστικότητα εντοπίζεται σε τυχαίες διαταραχές των ακουστικών ιδιοτήτων στην ενδιάμεση περιοχή.

Θα θεωρηθεί ότι το ακουστικό πεδίο πίεσης ικανοποιεί τη στοχαστική μονοδιάστατη ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$\boxed{\frac{d^2 p(x, \theta)}{dx^2} + k^2(x, \theta) p(x, \theta) = 0}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty) \quad (1)$$

όπου $p(x, \theta)$ το πεδίο πίεσης και $k(x, \theta)$ το στοχαστικό πεδίο του κυματικού αριθμού, με x τη χωρική μεταβλητή και θ το στοχαστικό όρισμα. Υποθέτουμε ότι:

$$k(x, \theta) = k_0 n(x, \theta), \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty), \quad (2)$$

όπου $k_0 = \text{const.}$ και $n(x, \theta)$, είναι *τυχαίο πεδίο* που αντιστοιχεί στο δείκτη διάθλασης του μέσου. Όπως αναφέρθηκε, οι στοχαστικές διακυμάνσεις παρουσιάζονται μόνο στην ενδιάμεση περιοχή D , οπότε θα ισχύει:

$$n(x, \theta) = 1 \text{ στο } D^- \cup D^+.$$

Επιπλέον, θα απαιτήσουμε η μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου $n(x, \theta)$ να είναι ίση με τη μονάδα στην ενδιάμεση περιοχή, δηλαδή:

$$E^0 [n(x, \theta)] = 1, \quad x \in (a, b), \quad (3)$$

με σκοπό η μέση τιμή του κυματικού αριθμού να είναι παντού σταθερή :

$$E^0 [k(x, \theta)] = E^0 [k_0 n(x, \theta)] = k_0, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty), \quad (4)$$

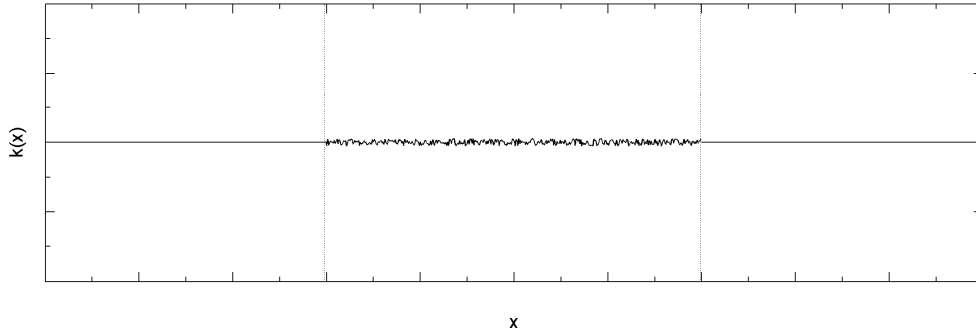
οπότε, η σταθερά k_0 αντιστοιχεί στη μέση τιμή του κυματικού αριθμού σε όλο το μήκος του μέσου.

Στα σημεία a, b , θα απαιτήσουμε να ισχύει:

$$n(a, \theta) = n(b, \theta) = 1,$$

ώστε να αποφύγουμε την εμφάνιση στοχαστικών συνθηκών στα a, b . Επιπλέον θα απαιτήσουμε η $n(a, \theta)$ να πηγαίνει γρήγορα στη τιμή 1 στα δύο σημεία, ώστε να μπορούμε να τη θεωρούμε ομοιόμορφη στο (a, b) χωρίς να προκαλούνται περαιτέρω επιπλοκές στη συνέχεια της μελέτης.

Σε συμφωνία με τα παραπάνω, το πραγματικό μέρος μίας δειγματικής συνάρτησης της $k(x, \theta)$, απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 7):



Εικόνα 7: Μία πραγματοποίηση της τυχαίας συνάρτησης του κυματικού αριθμού.

Επειδή το μέσο είναι χωρισμένο σε περιοχές και, επί πλέον, η συνάρτηση $k(x, \theta)$ εμφανίζει στοχαστικές ανομοιογένειες στην ενδιάμεση περιοχή, πρέπει να ισχύουν οι κατάλληλες **συνθήκες συναρμογής** στα σημεία a, b . Οι συνθήκες αυτές εξασφαλίζουν ότι δεν παραβιάζεται η φυσική του φαινομένου που μελετάται. Συγκεκριμένα, απαιτείται η **συνέχεια του ακουστικού πεδίου της πίεσης και της ταχύτητας σωματιδίου στα δύο σημεία**. Σύμφωνα με τις εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} p(x, \theta) = \lim_{x \rightarrow a^+} p(x, \theta), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} p(x, \theta) = \lim_{x \rightarrow b^+} p(x, \theta) \quad (4a)$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{dp(x, \theta)}{dx} \right), \\ \lim_{x \rightarrow b^-} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) &= \lim_{x \rightarrow b^+} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (4b)$$

Τέλος, πρέπει προσδιοριστεί η συμπεριφορά του ακουστικού να πεδίου για τις τρεις περιοχές του πεδίου ορισμού. Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει το πρόβλημα της ανάκλασης/διάθλασης προσπίπτοντος απλού αρμονικού κύματος, θα είναι:

$$\begin{aligned} p(x, \theta) &= A_0 \cdot \exp(ik_0 x) + A_R(\theta) \cdot \exp(-ik_0 x), & x \in D^- \\ p(x, \theta) &= A_0 \cdot \exp(ik_0 x) + \varphi(x, \theta), & x \in D \\ p(x, \theta) &= A_T(\theta) \cdot \exp(ik_0 x), & x \in D^+ \end{aligned} \quad (5a)$$

όπου A_0 είναι το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος (δεδομένο) και $A_R(\theta)$, $A_T(\theta)$ είναι οι στοχαστικοί *συντελεστές ανάκλασης* (reflection) και *διάδοσης* (transmission) αντίστοιχα (μέρος της λύσης). Το $\varphi(x, \theta)$ αντιστοιχεί στο **στοχαστικό πεδίο περίθλασης** που προέρχεται από τη αλληλεπίδραση του κυρίως (incident field) με στις στοχαστικές ανομοιογένειες.

- Στο χωρίο D^- , η λύση συνίσταται από το *προσπίπτον κύμα* και το *ανακλώμενο κύμα* (κινούμενο προς το $-\infty$) το οποίο δημιουργείται λόγω της στοχαστικής ανομοιογένειας του μέσου στην ενδιάμεση περιοχή D .
- Στο χωρίο D , η λύση συνίσταται από το *προσπίπτον κύμα*, και το στοχαστικό πεδίο $\varphi(x, \theta)$ περίθλασης (ανάκλασης στη μία διάσταση), εξαιτίας της τοπικής ανομοιογένειας.
- Στο χωρίο D^+ η λύση συνίσταται μόνο από το *διαδιδόμενο κύμα* (transmitted wave). Η συνθήκη εξασφαλίζει ότι στο χωρίο D^+ δεν υπάρχει κύμα με κατεύθυνση προς το $-\infty$.

Για τη διατύπωση των συνθηκών συναρμογής, απαιτούνται επιπλέον, οι παράγωγοι του πεδίου για τις τρεις περιοχές. Αυτές προκύπτουν άμεσα, με τη παραγωγή των (5a):

$$\begin{aligned} \frac{dp(x, \theta)}{dx} &= ik_0 A_0 \cdot \exp(ik_0 x) - ik_0 A_R(\theta) \cdot \exp(-ik_0 x), & x \in D^- \\ \frac{dp(x, \theta)}{dx} &= ik_0 A_0 \cdot \exp(ik_0 x) + \frac{d\varphi(x, \theta)}{dx}, & x \in D \\ \frac{dp(x, \theta)}{dx} &= ik_0 A_T(\theta) \cdot \exp(ik_0 x), & x \in D^+ \end{aligned} \quad (5b)$$

Εξετάζοντας τη συμπεριφορά του πεδίου στα σημεία a , b σύμφωνα με τις εξισώσεις (5a,b) και απαιτώντας να ικανοποιούνται οι συνθήκες συναρμογής (4a,b), κανείς καταλήγει σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (boundary value problem) για το στοχαστικό πεδίο $\varphi(x, \theta)$. Παρακάτω βλέπουμε τη συγκεκριμένη διαδικασία.

- **Στο σημείο $x = a$:**

-Για το πεδίο $p(x, \theta)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} p(x, \theta) &= \lim_{x \rightarrow a^+} p(x, \theta) \Leftrightarrow \\ \cancel{A_0 \cdot \exp(ik_0 a)} + A_R(\theta) \cdot \exp(-ik_0 a) &= \cancel{A_0 \cdot \exp(ik_0 a)} + \varphi(a, \theta) \Leftrightarrow \\ \varphi(a, \theta) &= A_R(\theta) \cdot \exp(-ik_0 a) \end{aligned} \quad (6a)$$

-Και για την παράγωγο $\frac{dp(x, \theta)}{dx}$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{i k_0 A_0 \cdot \exp(i k_0 a)} - i k_0 A_R(\theta) \cdot \exp(-i k_0 a) = \cancel{i k_0 A_0 \cdot \exp(i k_0 a)} + \left. \frac{d\varphi(x, \theta)}{dx} \right|_{x=a} \quad (6a)$$

$$\varphi'(a, \theta) + i k_0 \varphi(a, \theta) = 0, \quad (6b)$$

όπου με $\varphi'(a, \theta)$, εννοείται η παράγωγος της $\varphi(x, \theta)$ ως προς x , υπολογισμένη στο σημείο a .

• Στο σημείο $x = b$:

-Για το πεδίο $p(x, \theta)$:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} p(x, \theta) = \lim_{x \rightarrow b^+} p(x, \theta) \Leftrightarrow$$

$$A_0 \cdot \exp(i k_0 b) + \varphi(b, \theta) = A_T(\theta) \cdot \exp(i k_0 b) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(b, \theta) = (A_T(\theta) - A_0) \cdot \exp(i k_0 b) \quad (7a)$$

-Και για την παράγωγο $\frac{dp(x, \theta)}{dx}$:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \left(\frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) = \lim_{x \rightarrow b^+} \left(\frac{dp(x, \theta)}{dx} \right) \Leftrightarrow$$

$$i k_0 A_0 \cdot \exp(i k_0 b) + \left. \frac{d\varphi(x, \theta)}{dx} \right|_{x=b} = i k_0 A_T(\theta) \cdot \exp(i k_0 b) \quad (7a)$$

$$\varphi'(b, \theta) - i k_0 \varphi(b, \theta) = 0, \quad (7b)$$

όπου με $\varphi'(b, \theta)$, εννοείται η παράγωγος της $\varphi(x, \theta)$ ως προς x , υπολογισμένη στο σημείο b .

Αντικαθιστώντας τη μορφή για τη λύση (5a) για το ενδιάμεσο χωρίο D στην εξίσωση (1), βρίσκουμε ότι:

$$\frac{d^2 [A_0 \cdot \exp(i k_0 x) + \varphi(x, \theta)]}{dx^2} + k^2(x, \theta) [A_0 \cdot \exp(i k_0 x) + \varphi(x, \theta)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2 \varphi(x, \theta)}{dx^2} + k^2(x, \theta) \varphi(x, \theta) = (k_0^2 - k^2(x, \theta)) A_0 \cdot \exp(i k_0 x) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \varphi(x, \theta)}{dx^2} + k_0^2 n^2(x, \theta) \varphi(x, \theta) = A_0 k_0^2 (1 - n^2(x, \theta)) \cdot \exp(ik_0 x), \quad x \in D \quad (8)$$

Το πρόβλημα, μπορεί τώρα να αναδιατυπωθεί στο χωρίο (a, b) , ως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών για το πεδίο $\varphi(x, \theta)$. **Με δεδομένα** τα A_0 , k_0 και το πεδίο $n(x, \theta)$, **να υπολογιστεί** το στοχαστικό πεδίο $\varphi(x, \theta)$, που υπακούει στην εξίσωση (8) και τις συνοριακές συνθήκες (6b), (7b):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi(x, \theta)}{dx^2} + k_0^2 n^2(x, \theta) \varphi(x, \theta) &= A_0 k_0^2 (1 - n^2(x, \theta)) \cdot \exp(ik_0 x) \\ \varphi'(a, \theta) + ik_0 \varphi(a, \theta) &= 0 \\ \varphi'(b, \theta) - ik_0 \varphi(b, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \Delta E \\ \Sigma \Sigma \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{ΠΣΤ} \end{array} \right.$$

Παρατηρείται ότι, όσον αφορά το ειδικό setup του προβλήματος που εξετάζουμε, προς το παρόν δεν έχει γίνει καμία παραδοχή όσον αφορά το φαινόμενο κυματικής διάδοσης, με εξαίρεση τις παραδοχές που περιλαμβάνονται στη παραγωγή της εξίσωσης *Helmholtz* (βλέπε κεφάλαιο 1).

Στην ενότητα που ακολουθεί, θα δούμε την εφαρμογή μεθόδων που κάνουν χρήση της θεωρίας διαταραχών για τη διαχείριση του ΠΣΤ και τον υπολογισμό χρήσιμων μεγεθών/συναρτήσεων. Θα δούμε επίσης πού οι μέθοδοι αυτές αποτυγχάνουν και θα κατανοήσουμε έτσι βαθύτερα τις διάφορες παραλλαγές.

3.2. Επεξεργασία του προβλήματος συνοριακών τιμών – Υπολογισμός του μέσου πεδίου πίεσης σε ασθενώς στοχαστικά μέσα.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, τα κυματικά προβλήματα σε στοχαστικά μέσα, εμφανίζουν περισσότερες δυσκολίες κατά την επίλυσή τους, σε σχέση με τα αντίστοιχα ντετερμινιστικά. Στο ίδιο κεφάλαιο, παρουσιάστηκαν ορισμένες τεχνικές / μέθοδοι με σκοπό την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών και σκιαγραφήθηκε ένα γενικό πλαίσιο στοχαστικής μοντελοποίησης τέτοιου τύπου φαινομένων, δίνοντας πάντοτε έμφαση στις επί τόπου αδυναμίες. Στη παρούσα ενότητα, ορισμένες από τις τεχνικές αυτές θα εφαρμοστούν, με σκοπό τη μελέτη του προβλήματος συνοριακών τιμών ΠΣΤ. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι, προφανώς, προς τη παραγωγή αναλυτικών λύσεων, στο βαθμό που αυτό επιτρέπεται από τη κάθε μέθοδο. Η διερεύνηση θα επιτρέψει την επί τόπου παρατήρηση της ευκολίας εφαρμογής, αλλά και των ειδικών χαρακτηριστικών της κάθε μεθόδου, καθώς επίσης και την παράλληλη σύγκριση. Η αναλυτική λύση δε, θα δώσει πληροφορίες για τη στοχαστική επίδραση στην μονοδιάστατη ακουστική διάδοση.

Αρχικά θα εφαρμοστεί η smoothing perturbation method (ενότητα 2.1.3.) στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) και στη συνέχεια θα εξετάσουμε πως λειτουργεί η ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων (ενότητα 2.1.2), η οποία είναι πρακτικότερο να εφαρμοστεί στο πλήρες πρόβλημα υπολογισμού του πεδίου πίεσης για το διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Οι συγκεκριμένες μέθοδοι, επιλέχθηκαν επειδή είναι οι αποτελεσματικότερες από τις μεθόδους διαταραχών για τη διαχείριση προβλημάτων μέσω κυματικών αριθμών. Έτσι, οι εφαρμογές τους ξεπερνούν τα όρια της ακουστικής και μπορούν έως ένα βαθμό να εφαρμοστούν και σε κυματισμούς ελεύθερης επιφάνειας και άλλα φαινόμενα όπου το μήκος κύματος δεν είναι αναγκαστικά πολύ μικρότερο του μήκους συσχέτισης της ανομοιογένειας.

3.2.1. Αναδιατύπωση με χρήση της Smoothing method.

Πρώτα θα εφαρμοστεί η smoothing method. Όλες οι βασικές εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν επαναλαμβάνονται εν συντομία.

3.2.1.1. Παραγωγή της mean - field equation.

Σύμφωνα με τη smoothing method, για γραμμικά φαινόμενα όπου οι στοχαστικές διακυμάνσεις είναι ασθενείς, ένα πρόβλημα της μορφής:

$$L(x, \theta)u(x, \theta) = g(x, \theta),$$

μπορεί να αναδιατυπωθεί χρησιμοποιώντας αναπτύγματα μίας πολύ μικρής ποσότητας ε , τόσο για τον στοχαστικό διαφορικό τελεστή $L(x, \theta)$, όσο και για τον όρο στοχαστικής διέγερσης $g(x, \theta)$:

$$\begin{aligned} [L_0(x) + \varepsilon \cdot L_1(x; \theta) + \varepsilon^2 \cdot L_2(x; \theta) + O(\varepsilon^3)] u(x, \theta) &= \\ &= g_0(x) + \varepsilon \cdot g_1(x; \theta) + \varepsilon^2 \cdot g_2(x; \theta) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Τότε, μετά από επεξεργασία (όπως παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2) και εισάγοντας ουσιαστικά τη παραδοχή της local-independence, η μέθοδος καταλήγει στη παρακάτω εξίσωση για τη μέση τιμή του πεδίου $u(x, \theta)$:

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{x}) \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)] + \varepsilon \cdot \mathbf{E}^\theta [L_1(\mathbf{x}; \theta)] \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)] + \\ + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_1(\mathbf{x}; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{E}^\theta [L_1(\mathbf{x}; \theta)] \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)]] - \\ - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_1(\mathbf{x}; \theta)] [L_0^{-1}(\mathbf{x}) [L_1(\mathbf{x}; \theta) \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)]]] + \\ + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_2(\mathbf{x}; \theta)] \mathbf{E}^\theta [u(\mathbf{x}; \theta)] &= \\ &= g_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \mathbf{E}^\theta [g_1(\mathbf{x}; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [g_2(\mathbf{x}; \theta)] + \\ &+ \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_1(\mathbf{x}; \theta)] L_0^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{E}^\theta [g_1(\mathbf{x}; \theta)]] - \\ &- \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_1(\mathbf{x}; \theta) L_0^{-1}(\mathbf{x}) g_1(\mathbf{x}; \theta)] + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (10)$$

όπου $L_0^{-1}(\mathbf{x})$ ο αντίστροφος τελεστής του $L_0(\mathbf{x})$ για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε μία αντίστοιχη εξίσωση για τη μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου σκέδασης που μας απασχολεί στο ΠΣΤ, εφαρμόζουμε την αντίστοιχη διαδικασία. Αρχικά, εισάγουμε την παραδοχή ότι οι στοχαστικές διακυμάνσεις του μέσου είναι ασθενείς, θέτοντας:

$$n(\mathbf{x}; \theta) = 1 + \varepsilon \cdot \mu(\mathbf{x}; \theta) + \varepsilon^2 \cdot \mu(\mathbf{x}; \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (11)$$

όπου $\varepsilon \ll 1$ και $\mu(x; \theta)$ τυχαίο πεδίο, με πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά που καθορίζονται από το μέσο διάδοσης. Εφόσον έχουμε κάνει τη παραδοχή ότι οι στοχαστικές διακυμάνσεις είναι ασθενείς, το άθροισμα $\sum_1^\infty \varepsilon^k \mu(x; \theta)$ οφείλει να είναι αρκετά μικρότερο της μονάδας. Αυτό με τη σειρά του, προϋποθέτει ότι το στοχαστικό πεδίο $\mu(x; \theta)$ είναι τάξης πολύ μικρότερης του $1/\varepsilon$. Έχοντας υπ' όψη τα παραπάνω, το γινόμενο $\varepsilon^k \mu(x; \theta)$ εκφράζει την κ-τάξης στοχαστική απόκλιση των ακουστικών χαρακτηριστικών του μέσου από το k_0 .

Αντικαθιστούμε την (11) στη ΔΕ του ΠΣΤ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi(x; \theta)}{dx^2} + k_0^2 \left[1 + \varepsilon \mu(x; \theta) + \varepsilon^2 \mu(x; \theta) + O(\varepsilon^3) \right]^2 \varphi(x; \theta) \\ = A_0 k_0^2 \left(1 - \left[1 + \varepsilon \mu(x; \theta) + \varepsilon^2 \mu(x; \theta) + O(\varepsilon^3) \right]^2 \right) \cdot \exp(i k_0 x), \end{aligned}$$

κάνουμε τις πράξεις και **αποκόβουμε τους όρους τρίτης και ανώτερης τάξης**, οι οποίοι θεωρούμε ότι είναι αμελητέοι στο πλαίσιο της θεωρίας διαταραχών:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 \right) + \varepsilon \cdot (2\mu(x; \theta) k_0^2) + \varepsilon^2 \cdot ((2\mu(x; \theta) + \mu^2(x; \theta)) k_0^2) \right] \varphi(x, \theta) = \\ = - \varepsilon \cdot (2A_0 k_0^2 \mu(x; \theta) \exp(i k_0 x)) - \varepsilon^2 \cdot (A_0 k_0^2 (2\mu(x; \theta) + \mu^2(x; \theta)) \exp(i k_0 x)). \end{aligned} \quad (12)$$

Τώρα, συγκρίνοντας τη τελευταία σχέση με την εξίσωση (9), εύκολα βλέπουμε, ότι:

$$\begin{aligned} L_0(x) (\bullet) &= \frac{d^2}{dx^2} (\bullet) + k_0^2 (\bullet), \\ L_1(x; \theta) (\bullet) &= [2\mu(x; \theta) k_0^2] (\bullet), \\ L_2(x; \theta) (\bullet) &= [(2\mu(x; \theta) + \mu^2(x; \theta)) k_0^2] (\bullet), \end{aligned} \quad (13a)$$

και

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 0, \\ g_1(x; \theta) &= -2A_0 k_0^2 \mu(x; \theta) \exp(i k_0 x), \\ g_2(x; \theta) &= -A_0 k_0^2 (2\mu(x; \theta) + \mu^2(x; \theta)) \exp(i k_0 x). \end{aligned} \quad (13b)$$

Όπως ειπώθηκε στο κεφάλαιο 2, η αντιστροφή του διαφορικού τελεστή $L_0(x)$, προϋποθέτει μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $L_0(x) u_0(x) = g_0(x)$, η οποία εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες. Εδώ, η εξίσωση του αντίστοιχου ντετερμινιστικού προβλήματος είναι η:

$$\frac{d^2}{dx^2} u_0(x) + k_0^2 u_0(x) = 0, \quad (14)$$

και επειδή το k_0 είναι σταθερό παντού, η λύση της (14) περιμένουμε να είναι κύμα διαδιδόμενο προς το $+\infty$, το οποίο ισοδυναμεί ουσιαστικά με το αντίστοιχο πρόβλημα στον ελεύθερο χώρο (free-space). Ο $L_0^{-1}(x, t)$ θα είναι ένας ολοκληρωτικός τελεστής στο πεδίο ορισμού, με πυρήνα τη συνάρτηση Green της παραπάνω εξίσωσης. Αντικαθιστώντας τη μορφή της λύσης και έπειτα από τους απαραίτητους υπολογισμούς οι οποίοι παρατίθενται στο Παράρτημα Α, (για συναρτήσεις Green του τελεστή *Helmholtz* βλ. και Duffy 2001), βρίσκουμε ότι για τη περίπτωση μας,

$$L_0^{-1}(x) = \int_a^b G(x, y)(\bullet) dy, \quad (15)$$

$$\text{όπου } G(x, y) = -\frac{i}{2k_0} \exp(ik_0|x-y|), \quad [\text{σχέση (Π-Α8)}].$$

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ, θεωρήσαμε ότι η μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου του κυματικού αριθμού είναι σταθερή (εξίσωση (4)).

$$E^0[k(x, \theta)] = E^0[k_0 n(x, \theta)] = k_0$$

ή

$$E^0[n(x, \theta)] = E^0[1 + \varepsilon \mu(x, \theta) + \varepsilon^2 \mu(x, \theta) + O(\varepsilon^3)] = 1.$$

Για να ικανοποιήσουμε τη τελευταία σχέση, **θα γίνει η παραδοχή ότι:**

$$E^0[\mu(x, \theta)] = 0. \quad (16)$$

Αυτή όπως είδαμε σε αρκετά σημεία του 2^{ου} κεφαλαίου, είναι μία συνήθης παραδοχή που ταυτίζει τις στοχαστικές ανομοιογένειες με μικρό-διαταραχές γύρω από τη μέση κατάσταση του μέσου. Τέτοιου τύπου παραδοχές είναι εύλογες στο πλαίσιο των ασθενών στοχαστικών διακυμάνσεων οι οποίες σχεδόν πάντοτε αντιπροσωπεύουν τύρβη ή θόρυβο στα φυσικά συστήματα. Σημειώνεται, ότι η συγκεκριμένη παραδοχή μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας, καθώς σε περίπτωση που η μέση τιμή του $\mu(x, \theta)$ είναι μη μηδενική, τότε (εξαιτίας της γραμμικότητας) αυτή μπορεί να ενσωματωθεί σε μία χωρική μεταβολή του k_0 . Τότε θα έχουμε τη ντετερμινιστική συνάρτηση $k_0(x)$ και μπορούμε να θεωρήσουμε και πάλι ότι $E^0[\mu(x, \theta)] = 0$. Αυτό προφανώς δημιουργεί επιπλοκές στον αναλυτικό υπολογισμό της συνάρτησης Green και για το λόγο αυτό αποφεύγεται, επειδή σκοπός εδώ είναι η παραγωγή αναλυτικών λύσεων για το μέσο πεδίο.

Σύμφωνα με τη τελευταία παραδοχή, στο διάστημα (a, b) θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\theta [L_1(x, \theta)](\bullet) &= Z(\bullet) = 0(\bullet), \\ \mathbf{E}^\theta [L_2(x, \theta)](\bullet) &= k_0^2 \mathbf{E}^\theta [\mu^2(x, \theta)](\bullet), \end{aligned} \quad x \in (a, b). \quad (17)$$

Εφόσον η μέση τιμή του πολλαπλασιαστικού τελεστή $L_1(x, \theta)$ είναι μηδενική, η σχέση (10) για τη μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου, απλουστεύεται σημαντικά (βλέπε σχέση 2.32). Αντικαθιστώντας για το πεδίο $\varphi(x, \theta)$ που αναζητούμε εδώ:

$$\begin{aligned} L_0(x) \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] - \\ - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta \left[L_1(x; \theta) \left[L_0^{-1}(x) \left[L_1(x; \theta) \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] \right] \right] \right] + \\ + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_2(x; \theta)] \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] = \\ = g_0(x) + \varepsilon \cdot \mathbf{E}^\theta [g_1(x; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [g_2(x; \theta)] \\ - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [L_1(x; \theta) L_0^{-1}(x) g_1(x; \theta)] \end{aligned} \quad (18)$$

καταλήγουμε σε μία εξίσωση για τη μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου περίθλασης (ανάκλασης για τη μία διάσταση). Η ειδική μορφή της εξίσωσης εξαρτάται από τους εμπλεκόμενους τελεστές και τους όρους της διέγερσης οι οποίοι προέρχονται από την αναδιατύπωση σε μορφή προβλήματος συνοριακών τιμών. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13a) και (15), για να κάνουμε τις απαραίτητες αντικαταστάσεις και αποκόπτοντας όρους τρίτης και ανώτερης τάξης:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)]}{dx^2} + k_0^2 \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] \right] + \\ + \varepsilon^2 \cdot 4k_0^4 \mathbf{E}^\theta \left[\mu(x, \theta) \left[\int_a^b \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|x-y|} \mu(y, \theta) \mathbf{E}^\theta [\varphi(y, \theta)] dy \right] \right] + \\ + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \mathbf{E}^\theta \left[(2\mu(x, \theta) + \mu^2(x, \theta)) \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] \right] = \\ = \varepsilon \cdot \mathbf{E}^\theta [g_1(x; \theta)] + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [g_2(x; \theta)] - \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta \left[2\mu(x; \theta) k_0^2 \int_a^b \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|x-y|} g_1(y; \theta) dy \right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)]}{dx^2} + k_0^2 \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \mathbf{E}^\theta [\mu^2(x, \theta)] \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)] \right] + \\ + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b e^{ik_0|x-y|} \mathbf{E}^\theta [\mu(x, \theta) \mu(y, \theta)] \mathbf{E}^\theta [\varphi(y, \theta)] dy = \\ = \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [g_2(x; \theta)] - \varepsilon^2 ik_0 \cdot \int_a^b e^{ik_0|x-y|} \mathbf{E}^\theta [\mu(x; \theta) g_1(y; \theta)] dy \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Για οικονομία συμβολισμού, θέτουμε:

$$\Phi(x) = \mathbf{E}^\theta [\varphi(x, \theta)],$$

$$R_{\mu\mu}(x, y) = \mathbf{E}^\theta [\mu(x, \theta)\mu(y, \theta)],$$

και η εξίσωση για τη μέση τιμή (*mean-field equation*), γίνεται:

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x))\Phi(x) + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y)\Phi(y) dy =$$

$$= \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}^\theta [g_2(x; \theta)] - \varepsilon^2 ik_0 \cdot \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) \mathbf{E}^\theta [\mu(x; \theta)g_1(y; \theta)] dy$$

(MF)

Με **συνοριακές συνθήκες για το μέσο πεδίο περίθλασης** που έρχονται από τη λήψη μέσης τιμής στις συνοριακές συνθήκες (ΣΣ) του (ΠΣΤ):

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(a) + ik_0 \Phi(a) &= 0 \\ \Phi'(b) - ik_0 \Phi(b) &= 0 \end{aligned} \right| \quad \text{(MF-ΣΣ)}$$

Η εξίσωση (MF) για το μέσο ακουστικό πεδίο περίθλασης, είναι μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση, που εμπλέκει τα στοχαστικά χαρακτηριστικά του μέσου διάδοσης μέσω της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{\mu\mu}(x, y)$, η οποία θεωρείται γνωστή. **Οι όροι της διέγερσης του δεξιού μέλους, όπως είδαμε στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου, έχουν προκύψει από την μετατροπή του προβλήματος σε πρόβλημα συνοριακών τιμών.** Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (13a) για να κάνουμε τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, θα καταλήξουμε τελικά στη παρακάτω εξίσωση:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x)) \right] \Phi(x) + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y)\Phi(y) dy =$$

$$= -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 e^{ik_0 x} R_{\mu\mu}(x, x) - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \exp(ik_0 y) dy,$$

(MF2)

για την οποία επίσης ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (MF-ΣΣ).

Στο πρώτο κεφάλαιο όπου μας απασχόλησε η γενική μελέτη των ακουστικών εξισώσεων, είδαμε ότι όταν η περιοχή της λύσης που μας ενδιαφέρει βρίσκεται μακριά από την ακουστική πηγή του προβλήματος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την εξίσωσή μας ομογενή, και να μοντελοποιήσουμε τη πηγή με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με τη γεωμετρία και τα λοιπά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Έτσι και εδώ, αν θεωρήσουμε ότι εξετάζουμε μία περιοχή ανάμεσα στα σημεία a, b αλλά όχι ιδιαίτερα κοντά σε κάποιο από αυτά, μπορούμε να βρούμε την **τοπική** λύση από την ομογενή εξίσωση:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x)) \right] \Phi(x) + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \Phi(y) dy = 0.$$

(MF3)

Η επιλογή αυτή δεν είναι κάποια παραδοχή που κάνουμε, αλλά ένα βήμα προς την επίλυση της (MF2), καθώς χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα, μας δίνεται στη συνέχεια η δυνατότητα να υπολογίσουμε τη λύση σε όλο το πεδίο ορισμού.

3.2.1.2. Διερεύνηση αναλυτικών λύσεων.

Όπως αναφέρθηκε, ο υπολογισμός αναλυτικών λύσεων είναι ιδιαίτερα σημαντικός, καθώς πέραν του ότι περιέχουν όλη τη πληροφορία για τη διαθέσιμη εξίσωση, επιτρέπουν και τον έλεγχο διαθέσιμων αριθμητικών σχημάτων (τα οποία υπολογίζουν και πιο πολύπλοκες λύσεις). Σε προβλήματα λοιπόν όπου η εύρεση γενικών αναλυτικών λύσεων δεν είναι εφικτή, οι εξισώσεις μπορούν να απλουστευθούν μέσω παραδοχών σχετικά με τη μορφή ή το εύρος ορισμένων από τις παραμέτρους. Τότε, οι αναλυτικές λύσεις που θα βρεθούν, δε θα περιγράφουν τη γενική λύση του προβλήματος, αλλά την ειδική λύση σύμφωνα με τη συγκεκριμένη παραδοχή.

Το φαινόμενο που μελετάμε εδώ, μόλις είδαμε ότι καταλήγει τελικά στην επίλυση της εξίσωσης (MF3):

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x,x)) \Phi(x) + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b e^{ik_0|x-y|} R_{\mu\mu}(x,y) \Phi(y) dy = 0,$$

εφόσον βρισκόμαστε «επαρκώς» μακριά από τα σημεία a, b . Η σχέση αυτή μπορεί να μας δώσει το μέσο πεδίο περίθλασης $\Phi(x)$. Το πεδίο αυτό, **περιμένουμε να εμφανίζει μία μεταβολή στο μέσο κυματικό αριθμό, εξαιτίας της ανομοιογένειας, καθώς επίσης και μία διαμόρφωση πλάτους, καθώς εισχωρούμε στο ανομοιογενές μέσο.** Έτσι, το πεδίο $\Phi(x)$ περιμένουμε να έχει τη γενική μορφή:

$$\boxed{\Phi(x) = A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)x)}, \quad (19)$$

όπου το $k_*(\varepsilon)$ αντιστοιχεί στο κυματικό αριθμό για το μέσο πεδίο περίθλασης, και η περιβάλλουσα $A(x, \varepsilon)$ καθορίζει τη διαμόρφωση του πλάτους. Όπως βλέπουμε, και για τις δύο συναρτήσεις έχει γίνει η εύλογη υπόθεση ότι θα εξαρτώνται (όπως και η στοχαστική ανομοιογένεια) από την αδιάστατη ποσότητα ε .

Αντικαθιστώντας τη μορφή της λύσης στην εξίσωση (MF3):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)x)] + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x,x)) A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)x) + \\ + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x,y) A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)y) dy = 0 \Leftrightarrow \\ \left[\frac{d^2 A(x, \varepsilon)}{dx^2} + \frac{dA(x, \varepsilon)}{dx} 2ik_*(\varepsilon) - A(x, \varepsilon) \cdot k_*^2(\varepsilon) \right] \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)x) + \\ + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x,x)) A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)x) + \\ + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x,y) A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)y) dy = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^2 A(x, \varepsilon)}{dx^2} + \frac{dA(x, \varepsilon)}{dx} 2ik_*(\varepsilon) - \right. \\
& \quad \left. - A(x, \varepsilon) \cdot (k_*^2(\varepsilon) - k_0^2 - \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x)) \right] \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)x) + \\
& \quad + \varepsilon^2 \cdot i2k_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)y) dy = 0 \Leftrightarrow \\
& \frac{d^2 A(x, \varepsilon)}{dx^2} + \frac{dA(x, \varepsilon)}{dx} 2ik_*(\varepsilon) - A(x, \varepsilon) \cdot (k_*^2(\varepsilon) - k_0^2 - \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x)) + \\
& + \varepsilon^2 \cdot i2k_0^3 \int_a^b A(y, \varepsilon) \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)(y-x)) dy = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Εάν στη τελευταία σχέση, αναζητήσουμε λύσεις για τη περίπτωση που η περιβάλλουσα $A(x, \varepsilon)$ είναι σταθερή συνάρτηση, έστω A_{con} , οι δύο πρώτοι όροι θα μηδενιστούν, και θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
& A_{con} \cdot (k_*^2(\varepsilon) - k_0^2 - \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x)) - \\
& - \varepsilon^2 \cdot i2A_{con} k_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)(y-x)) dy = 0 \Rightarrow \\
& k_*^2(\varepsilon) = k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot \left(k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x) + i2k_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)(y-x)) dy \right) \Rightarrow \\
& k_*(\varepsilon) = \sqrt{k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot \left(k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x) + i2k_0^3 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)(y-x)) dy \right)} = \\
& = k_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \underbrace{\left(R_{\mu\mu}(x, x) + i2k_0 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)(y-x)) dy \right)}_{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Αν στη παραπάνω σχέση θέσουμε ως λ τους όρους δεύτερης τάξης, και αναπτύξουμε τη ρίζα σε ανάπτυγμα Taylor, βρίσκουμε ότι:

$$k_*(\varepsilon) = k_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda + O(\varepsilon^4) \right).$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε το λ και αποκόπτουμε τους όρους τέταρτης τάξης:

$$\boxed{k_*(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{1}{2} k_0 R_{\mu\mu}(x, x) + ik_0^2 \int_a^b \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \cdot \exp(ik_*(\varepsilon)(y-x)) dy \right)}, \tag{21}$$

όπου βλέπουμε, ότι ο κυματικός αριθμός προκύπτει να είναι ίσος με το k_0 , συν όρους δεύτερης τάξης. Η απουσία πρωτοτάξιων όρων, συνδέεται με την παραδοχή που έγινε νωρίτερα για τη μέση τιμή της στοχαστικής ανομοιογένειας, δηλαδή ότι $E^0[\mu(x, \theta)] = 0$. Η παραδοχή αυτή έχει τελικά σαν αποτέλεσμα την απουσία πρωτοτάξιων φαινομένων περίθλασης. Υπενθυμίζεται ότι η συγκεκριμένη παραδοχή, μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας (βλ. κεφάλαιο 3.1), θεωρώντας το k_0 συνάρτηση του x , οπότε όμως η εύρεση αναλυτικών λύσεων για τη γενική περίπτωση είναι αδύνατη.

Η $R_{\mu\mu}(x, y)$ θεωρείται γνωστή, και έτσι η μόνη άγνωστη ποσότητα στη τελευταία εξίσωση είναι το $k_*(\varepsilon)$. Για να προχωρήσουμε με τους υπολογισμούς, θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ανομοιογένειας $\mu(x, \theta)$ του μέσου, δίνεται από τη σχέση:

$$R_{\mu\mu}(x, y) = R_{\mu\mu}(x - y) = \sigma_\mu^2 \exp(-\beta |x - y|), \quad (22)$$

που σημαίνει ότι η τιμή της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητη της θέσης, αλλά εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων. Η παραδοχή αυτή δεν είναι ιδιαίτερα αυστηρή, αν η στοχαστική ανομοιογένεια θεωρηθεί ως ομοιόμορφος θόρυβος γύρω από τη μέση κατάσταση. Στη περίπτωση που μελετάμε εδώ, έχουμε κάνει την επιπλέον παραδοχή ότι η στοχαστική ανομοιογένεια σβήνει ομαλά στο σύνορο του domain. Αυτό, έρχεται σε σύγκρουση με τη σχέση (22), αλλά μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε εφόσον θεωρήσουμε ότι η περιοχή μετάβασης είναι εξαιρετικά μικρή, όπως και θα κάνουμε στη συνέχεια. Τέλος, η συνάρτηση (22) έχει τη «κακή» ιδιότητα να μην είναι διαφορίσιμη με τη μέσο-τετραγωνική έννοια. Πέραν τούτου, η επιλογή της έγινε με σκοπό τη συμφωνία με τη βιβλιογραφία (βλ. Sobczyk 1985, Chen & Soong 1971, Mei 2006), ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Αντικαθιστώντας την (22) στη σχέση (21), βρίσκουμε:

$$k_*(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{1}{2} k_0 \sigma_\mu^2 + i k_0^2 \sigma_\mu^2 \int_a^b \exp(i k_0 |x - y|) \exp(-\beta |x - y|) \cdot \exp(i k_*(\varepsilon)(y - x)) dy \right) \quad (23)$$

Αν ορίσουμε με k_2 το συντελεστή των δευτεροτάξιων όρων, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$k_*(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^2 \cdot k_2,$$

και για το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, ισχύει:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_a^b \exp(ik_0|x-y|)\exp(-\beta|x-y|)\exp(i(k_0 + \varepsilon^2 k_2)(y-x))dy = \\
&= \underbrace{\int_a^x \exp(ik_0|x-y|)\exp(-\beta|x-y|)\exp(i(k_0 + \varepsilon^2 k_2)(y-x))dy}_{I_1(x)} + \\
&\quad + \underbrace{\int_x^b \exp(ik_0|x-y|)\exp(-\beta|x-y|)\exp(i(k_0 + \varepsilon^2 k_2)(y-x))dy}_{I_2(x)},
\end{aligned} \tag{24}$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή αυτής της ενότητας, θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε κάποια περιοχή ανάμεσα στα σημεία a, b , αλλά όχι κοντά σε οποιοδήποτε από αυτά. Επιλέγοντας επιπλέον, η $R_{\mu\mu}(x, y)$ να έχει σχετικά μικρή διασπορά, κάτι λογικό για τη περίπτωση που μελετάμε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση σβήνει αρκετά γρήγορα, με αποτέλεσμα οι τιμές στα σύνορα να είναι πρακτικά μηδενικές και να μην επιδρούν στην τιμή του ολοκληρώματος. Με αυτό υπ' όψη, υπολογίζουμε τα $I_1(x), I_2(x)$.

Επειδή στο (a, x) , $a < x$, για το πρώτο ολοκλήρωμα, είναι:

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_a^x \exp(ik_0(x-y))\exp(-\beta(x-y))\exp(i(k_0 + \varepsilon^2 k_2)(y-x))dy = \\
&= \exp((- \beta - ik_*(\varepsilon))x) \int_a^x \exp((\beta + i\varepsilon^2 k_2)y)dy = \\
&= \frac{1}{(\beta + i\varepsilon^2 k_2)}.
\end{aligned} \tag{25a}$$

Αντίστοιχα, στο (x, b) , $x < b$, οπότε το δεύτερο ολοκλήρωμα, θα είναι:

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_x^b \exp(ik_0(y-x))\exp(-\beta(y-x))\exp(i(k_0 + \varepsilon^2 k_2)(y-x))dy = \\
&= \exp((\beta - i(2k_0 + \varepsilon^2 k_2))x) \int_x^b \exp((- \beta + i(2k_0 + \varepsilon^2 k_2))y)dy = \\
&= -\frac{1}{(-\beta + i(2k_0 + \varepsilon^2 k_2))}.
\end{aligned} \tag{25b}$$

Χρησιμοποιώντας τις (24), (25a,b), η (23) γίνεται:

$$k_*(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} k_0 \sigma_\mu^2 + \varepsilon^2 \cdot ik_0^2 \sigma_\mu^2 \left[\frac{1}{\beta + i\varepsilon^2 k_2} - \frac{1}{-\beta + i(2k_0 + \varepsilon^2 k_2)} \right].$$

Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και παρονομαστές των κλασμάτων με τους κατάλληλους συζυγείς μιγαδικούς:

$$\begin{aligned}
k_*(\varepsilon) &= k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} k_0 \sigma_\mu^2 + \varepsilon^2 \cdot i k_0^2 \sigma_\mu^2 \left[\frac{\beta - i \varepsilon^2 k_2}{\beta^2 + \varepsilon^4 k_2^2} + \frac{\beta + i(2k_0 + \varepsilon^2 k_2)}{\beta^2 + (2k_0 + \varepsilon^2 k_2)^2} \right] = \\
&= k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} k_0 \sigma_\mu^2 + \varepsilon^2 \cdot i k_0^2 \sigma_\mu^2 \left[\frac{\beta}{\beta^2 + \varepsilon^4 k_2^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + (2k_0 + \varepsilon^2 k_2)^2} \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \sigma_\mu^2 \left[\frac{\varepsilon^2 k_2}{\beta^2 + \varepsilon^4 k_2^2} - \frac{(2k_0 + \varepsilon^2 k_2)}{\beta^2 + (2k_0 + \varepsilon^2 k_2)^2} \right],
\end{aligned}$$

Για τους επί μέρους όρους της παραπάνω σχέσης, μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω απλοποιήσεις:

$$\frac{1}{\beta^2 + \varepsilon^4 k_2^2} \approx \frac{1}{\beta^2}, \quad \text{επειδή} \quad \beta^2 \gg \varepsilon^4 k_2^2$$

$$\frac{1}{\beta^2 + (2k_0 + \varepsilon^2 k_2)^2} \approx \frac{1}{\beta^2 + 4k_0^2}, \quad \text{επειδή} \quad k_0 \gg \varepsilon^2 k_2$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned}
k_*(\varepsilon) &= k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} k_0 \sigma_\mu^2 + \varepsilon^2 \cdot i k_0^2 \sigma_\mu^2 \left[\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\beta^2 + 4k_0^2} \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \sigma_\mu^2 \left[-\frac{2k_0}{\beta^2 + 4k_0^2} \right] + O(\varepsilon^4) = \\
&= k_0 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{1}{2} k_0 \sigma_\mu^2 - k_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{2k_0}{\beta^2 + 4k_0^2} \right) + \varepsilon^2 \cdot i k_0^2 \sigma_\mu^2 \left[\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\beta^2 + 4k_0^2} \right] + O(\varepsilon^4) = \\
&= k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{(\beta^2 + 4k_0^2) k_0 \sigma_\mu^2 - 4k_0^2 k_0 \sigma_\mu^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)} + \varepsilon^2 \cdot i k_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{2(\beta^2 + 2k_0^2)}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)} + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

όπου αν αποκόψουμε τους όρους που είναι ανώτεροι της τρίτης τάξης, καταλήγουμε:

$$\boxed{k_*(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{k_0 \beta^2 \sigma_\mu^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)} + i \cdot 2k_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)} \right)}. \quad (26)$$

Η παραπάνω είναι μία έκφραση για τη σταθερά διάδοσης του μέσου πεδίου περίθλασης, εξαιτίας της στοχαστικής ανομοιογένειας του μέσου διάδοσης. Ο όρος δεύτερης τάξης αντιστοιχεί ουσιαστικά στη μεταβολή που υφίσταται το μέσο κύμα σε σχέση με το αντίστοιχο ντετερμινιστικό που θα είχαμε χωρίς τη στοχαστική ανομοιογένεια. Όπως προαναφέρθηκε, η

απουσία πρωτοτάξιων όρων, συνδέεται με την παραδοχή που κάναμε νωρίτερα για τη μέση τιμή της στοχαστικής ανομοιογένειας, δηλαδή ότι $E^{\theta}[\mu(x, \theta)] = 0$.

Αντικαθιστούμε στη μορφή που υποθέσαμε για τη λύση, ώστε να βρούμε το πεδίο περίθλασης. Υπενθυμίζεται ότι στον τρέχων υπολογισμό, θεωρήθηκε ότι η περιβάλλουσα του πεδίου ισούται με τη σταθερή συνάρτηση A_{con} .

$$\Phi(x; \varepsilon) = A_{con} \cdot \exp\left[-\varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_{\mu}^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)} x\right] \exp\left[i\left(k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{k_0 \beta^2 \sigma_{\mu}^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)}\right) x\right]. \quad (27)$$

Η παραπάνω σχέση είναι έως ένα βαθμό η λύση που αναζητούμε. Παρατηρούμε ότι σε σχέση με το προσπίπτον κύμα εμφανίζεται μία δευτεροτάξια αύξηση στη συχνότητα, ενώ έχει εμφανιστεί και μία (φθίνουσα) διαμόρφωση του πλάτους (επίσης δευτεροτάξια), η οποία «βαθμονομείται» ουσιαστικά από το A_{con} . Οι φυσικές ιδιότητες που περιέχονται στην εξίσωση (27) θα μελετηθούν περαιτέρω στην ενότητα 3.3 και το τέταρτο κεφάλαιο.

Η τιμή του $k_*(\varepsilon)$ που υπολογίσαμε στην σχέση (26), προέκυψε θεωρώντας τη περιβάλλουσα σταθερή. Στη πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει, και μάλιστα περιμένουμε το $k_*(\varepsilon)$, γενικώς, να είναι $k_*(x, \varepsilon)$, δηλαδή αργή συνάρτηση του x (ουσιαστικά του $\varepsilon^2 x$), κοντά στα σύνορα a, b (όπου βέβαια όπως εξηγήσαμε η (27) δεν ισχύει). Το γεγονός αυτό δεν μας προκαλεί ιδιαίτερα προβλήματα εάν θεωρήσουμε ότι το $|a - b|$ είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το μήκος κύματος του πεδίου και το μήκος συσχέτισης των στοχαστικών διαταραχών, ενώ απέχουμε επαρκώς από τα δύο σύνορα. Άλλωστε αυτή είναι ακριβώς η υπόθεση που κάναμε και η σχέση (26) μας έδωσε τον κυματικό αριθμό για το μεγαλύτερο μέρος της ανομοιογενούς ζώνης, δηλαδή στο (a', b') .

Για να πάρουμε τη πλήρη λύση και να προσδιορίσουμε επακριβώς το A_{con} , μένει να ορίσουμε τα προβλήματα στα (a, a') και (b', b) . Στα διαστήματα αυτά, θα χρησιμοποιήσουμε «ολόκληρη» τη mean-field eq. (MF2), όπου περιλαμβάνονται οι επιδράσεις των συνόρων. **Παρακάτω ορίζεται το πρόβλημα για το (a, a') .**

Αρχικά θα θεωρήσουμε τη πλήρη μορφή της λύσης,

$$\Phi(x; \varepsilon) = A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x). \quad x \in (a, a') \quad (28)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε όπως είδαμε την εξίσωση (MF2), η οποία επαναλαμβάνεται εδώ για πρακτικούς λόγους:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 R_{\mu\mu}(x, x)) \right] \Phi(x) + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \Phi(y) dy =$$

$$= -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 e^{ik_0 x} R_{\mu\mu}(x, x) - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) R_{\mu\mu}(x, y) \exp(ik_0 y) dy.$$

Όπως και προηγουμένως θεωρούμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για τις στοχαστικές ανομοιογένειες του μέσου,

$$R_{\mu\mu}(x, y) = R_{\mu\mu}(x - y) = \sigma_\mu^2 \exp(-\beta|x - y|).$$

Η μορφή για τη λύση μας, εξίσωση (28), και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των ανομοιογενειών του μέσου, αντικαθίστανται στην (MF2):

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \sigma_\mu^2) \right] (A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x)) +$$

$$+ \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) \sigma_\mu^2 \exp(-\beta|x-y|) (A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(y, \varepsilon)y)) dy =$$

$$= -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 e^{ik_0 x} \sigma_\mu^2 - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_0 y) dy \Rightarrow$$

$$\left[A''(x, \varepsilon) + A'(x, \varepsilon) 2i(k_*(x, \varepsilon) + k'_*(x, \varepsilon)) - \right.$$

$$\left. -A(x, \varepsilon) \left\{ k_*^2(x, \varepsilon) + k'_*(x, \varepsilon) (k'_*(x, \varepsilon)x^2 + 2k_*(x, \varepsilon)x - 2i) - ixk_*''(x, \varepsilon) \right\} \right] \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x) +$$

$$+ (k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \sigma_\mu^2) A(x, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x) +$$

$$+ \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) (A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_*(y, \varepsilon)y)) dy =$$

$$= -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 e^{ik_0 x} \sigma_\mu^2 - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_0 y) dy \Rightarrow$$

$$\left[A''(x, \varepsilon) + A'(x, \varepsilon) 2i(k_*(x, \varepsilon) + k'_*(x, \varepsilon)) - \right.$$

$$\left. -A(x, \varepsilon) \left\{ k_*^2(x, \varepsilon) + k'_*(x, \varepsilon) \left(k'_*(x, \varepsilon)x^2 + 2k_*(x, \varepsilon)x - \right) - (2i + k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \sigma_\mu^2) \right\} - ixk_*''(x, \varepsilon) \right] \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x) +$$

$$+ \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_*(y, \varepsilon)y) dy =$$

$$= -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 e^{ik_0 x} \sigma_\mu^2 -$$

$$- i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \exp(ik_0 x) \int_a^{a'} \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_0(y-x)) dy \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \left[A''(x, \varepsilon) + A'(x, \varepsilon) 2i(k_*(x, \varepsilon) + k'_*(x, \varepsilon)) - \right. \\
& \left. - A(x, \varepsilon) \left\{ k_*^2(x, \varepsilon) + k'_*(x, \varepsilon) \left(\begin{aligned} & k'_*(x, \varepsilon)x^2 + 2k_*(x, \varepsilon)x - \\ & -(2i + k_0^2 + \varepsilon^2 \cdot k_0^2 \sigma_\mu^2) \end{aligned} \right) - ixk''_*(x, \varepsilon) \right\} \right] \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x) + \\
& + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_*(y, \varepsilon)y) dy = \\
& = -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 e^{ik_0 x} \sigma_\mu^2 - \\
& - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \exp(ik_0 x) \times \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta(x-a))] + \frac{1}{-\beta + i2k_0} [\exp((\beta - i2k_0)(x-a')) - 1] \right\}
\end{aligned} \tag{29}$$

Η οποία όπως βλέπουμε, είναι ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τα $A(x, \varepsilon)$ και $k_*(x, \varepsilon)$. Προκειμένου να προχωρήσουμε στους υπολογισμούς και επειδή το μέγεθος που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι η διαμόρφωση του πλάτους $A(x, \varepsilon)$, θα κάνουμε μία **αδιαβατική παραδοχή** θεωρώντας το $k_*(x, \varepsilon)$ γνωστή (και αργή) συνάρτηση του x στο διάστημα (a, a') που θα ξεκινάει (εξαιτίας του τρόπου που θέσαμε το πρόβλημα) από το $k_*(a, \varepsilon) = k_0$ και θα καταλήγει στο σταθερό $k_*(a', \varepsilon) = k_*(\varepsilon)$ που υπολογίσαμε στο προηγούμενο βήμα. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης για το $k_*(x, \varepsilon)$, είναι η:

$$k_*(x, \varepsilon) = \frac{k_*(\varepsilon) - k_0}{2} + \frac{k_*(\varepsilon) - k_0}{2} \cdot \tanh\left(\frac{10 \cdot x}{a' - a} - \frac{a' + a}{a' - a}\right), \quad x \in (a, a') \tag{30}$$

Εξαιτίας της αδιαβατικής παραδοχής, οι παράγωγοι του $k_*(x, \varepsilon)$ αγνοούνται, και η εξίσωση (29) γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \left[A''(x, \varepsilon) + A'(x, \varepsilon) 2ik_*(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon) k_*^2(x, \varepsilon) \right] \cdot \exp(ik_*(x, \varepsilon)x) + \\
& + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_*(y, \varepsilon)y) dy = \\
& = \left[\begin{aligned} & -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 \sigma_\mu^2 - \\ & - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \left\{ \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta(x-a))] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{-\beta + i2k_0} [\exp((\beta - i2k_0)(x-a')) - 1] \right\} \end{aligned} \right] \exp(ik_0 x)
\end{aligned}$$

Καθώς το $k_*(x, \varepsilon)$ είναι $k_*(x, \varepsilon) = k_0 + O(\varepsilon^2)$, μπορούμε στο πλαίσιο αποκοπής όρων τρίτης και ανώτερης τάξης να απλοποιήσουμε περαιτέρω τη τελευταία σχέση :

$$\begin{aligned}
& \left[A''(x, \varepsilon) + A'(x, \varepsilon)2ik_*(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)k_*^2(x, \varepsilon) \right] \cdot \exp(ik_0x) + \\
& + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_0y) dy = \\
& = \left[-\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 \sigma_\mu^2 - \right. \\
& \left. - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \left\{ \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta(x-a))] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{-\beta + i2k_0} [\exp((\beta - i2k_0)(x-a')) - 1] \right\} \right] \exp(ik_0x) \Rightarrow \\
& \left[A''(x, \varepsilon) + A'(x, \varepsilon)2ik_*(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)k_*^2(x, \varepsilon) \right] + \\
& + \varepsilon^2 \cdot 2ik_0^3 \sigma_\mu^2 \int_a^{a'} A(y, \varepsilon) \cdot \exp(ik_0|x-y|) \exp(-\beta|x-y|) \exp(ik_0(y-x)) dy = \\
& = -\varepsilon^2 \cdot A_0 k_0^2 \sigma_\mu^2 - \\
& - i\varepsilon^2 2A_0 k_0^3 \sigma_\mu^2 \left\{ \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta(x-a))] + \frac{1}{-\beta + i2k_0} [\exp((\beta - i2k_0)(x-a')) - 1] \right\} \Rightarrow
\end{aligned} \tag{31}$$

Η οποία είναι μία ολόκληρο-διαφορική εξίσωση για τη περιβάλλουσα $A(x, \varepsilon)$. Το μόνο που μένει να προσδιοριστεί, είναι η συνθήκη στα σημεία a, a' . Εκεί θα απαιτήσουμε συνέχεια τιμής και παραγώγου με τη λύση που βρήκαμε για το ενδιαμέσο τμήμα (a', b') . Θα είναι δηλαδή:

- Για το a :

Από τις (MF-ΣΣ), βλέπουμε κατευθείαν ότι:

$$A'(a, \varepsilon) + ik_0 A(a, \varepsilon) = 0 \tag{32a}$$

- Για το a' :

$$\begin{aligned}
A(x, \varepsilon) &= A_{con} \cdot \exp\left[-\frac{(x-a_1)}{l}\right] \\
A'(x, \varepsilon) &= -\frac{A_{con}}{l} \cdot \exp\left[-\frac{(x-a_1)}{l}\right]
\end{aligned}$$

Όπου $\frac{1}{l} = \varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)}$

Οπότε καταλήγουμε στη μικτή:

$$A'(a', \varepsilon) + \frac{A_{con}}{l} A(a', \varepsilon) = 0 \quad (32b)$$

Οπότε το πρόβλημα για την $A(x, \varepsilon)$ ορίζεται από τη (31) και τις συνθήκες (32a), (32b).

Σημειώνεται ότι για την επίλυση των προβλημάτων στα δυο άκρα, πρέπει, δουλέψουμε αριθμητικά (εξαιτίας του ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος της (31)). Οδηγούμαστε έτσι σε ένα ημι-αναλυτικό σχήμα επίλυσης, όπου η $A(x, \varepsilon)$ βρίσκεται αναλυτικά στο διάστημα $(-\infty, a) \cup (a', b') \cup (b, +\infty)$ και προσδιορίζεται με αριθμητικές μεθόδους στα διαστήματα (a, a') και (b', b) .

3.2.2. Αναδιατύπωση με χρήση της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων (multiple scales).

Τώρα θα δούμε εν συντομία, τι αποτελέσματα βρίσκουμε, εάν, ξεκινώντας ξανά από το αρχικό πρόβλημα, εφαρμόσουμε τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.1.2. Η διαδικασία βασίζεται στα, Mei&Phil 2002 , Mei&Hancock 2003, Mei&Phil 2002.

3.2.2.1. Επεξεργασία και διερεύνηση αναλυτικών λύσεων.

Στην αρχή του κεφαλαίου, δώσαμε τη βασική εξίσωση για το πρόβλημά μας,

$$\frac{d^2 p(x, \theta)}{dx^2} + k^2(x, \theta) p(x, \theta) = 0, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty) \quad (33)$$

όπου $k(x; \theta)^2 = k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(x; \theta))^2$, και στα a, b ισχύουν οι συνθήκες για συνέχεια στο πεδίο πίεσης και ταχύτητας που αναφέρθηκαν και προηγουμένως.

Αν αυτή τη φορά θεωρήσουμε ότι το φαινόμενο συμβαίνει σε δύο κλίμακες χώρου, δηλαδή:

$$x = x_0 + \varepsilon^2 \cdot x_2,$$

Η εξίσωση (33) γίνεται:

$$\frac{d^2 p(x_0, x_2, \theta)}{dx^2} + k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(x_0, x_2, \theta))^2 p(x_0, x_2, \theta) = 0. \quad (34)$$

Υπενθυμίζεται ότι θεωρήσαμε $x_1 = 0$, επειδή λόγω της υπόθεσης που έχουμε κάνει νωρίτερα, ότι $E^0[\mu(x, \theta)] = 0$, τα φαινόμενα πρώτης τάξης απουσιάζουν (κατά μέση τιμή), όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2.

Τώρα αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα

$$p(x_0, x_2, \theta) = p_0(x_0, x_2) + \varepsilon \cdot p_1(x_0, x_2, \theta) + \varepsilon^2 \cdot p_2(x_0, x_2, \theta) + \dots$$

και το αντικαταστήσουμε στην (34)⁽¹⁶⁾:

¹⁶ Υπενθυμίζεται από το κεφάλαιο 2, ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bullet) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} (\bullet) + \varepsilon^2 \cdot 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} (\bullet)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} (\bullet) + \varepsilon^2 \cdot 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} (\bullet) + k_0^2 (1 + \varepsilon \mu(x_0, x_2, \theta))^2 \right] \times \\ \times \left[p_0(x_0, x_2) + \varepsilon \cdot p_1(x_0, x_2, \theta) + \varepsilon^2 \cdot p_2(x_0, x_2, \theta) + O(\varepsilon^3) \right] = 0.$$

Εάν διαχωρίσουμε τις τάξεις και κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις, θα καταλήξουμε τελικά στο παρακάτω σύστημα:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] p_0(x_0, x_2) = 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] p_1(x_0, x_2; \theta) = -2k_0^2 \mu(x_0, x_2, \theta) p_0(x_0, x_2) \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right] p_2(x_0, x_2; \theta) = -k_0^2 \left[2\mu(x_0, x_2, \theta) p_1(x_0, x_2; \theta) + \mu^2(x_0, x_2, \theta) p_0(x_0, x_2) \right] - \\ - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} p_0(x_0, x_2)$$

Η συνάρτηση Green που λύνει το πρόβλημα είναι η ίδια ακριβώς που υπολογίσαμε και προηγουμένως, βλέπε σχέση (15).

Για το κύμα μηδενικής τάξης θεωρούμε τη μορφή:

$$p_0(x_0, x_2) = A(x_2) \exp(ik_0 x_0), \quad \text{όπου } A(0) = A_0.$$

Για τη δεύτερη εξίσωση, έχουμε:

$$p_1(x_0, x_2; \theta) = -2k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) \mu(y, x_2; \theta) p_0(y, x_2) dy, \quad (35)$$

η οποία είναι μία τυχαία συνάρτηση. Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή της μέσης τιμής:

$$\mathbf{E}^\theta \left[p_1(x_0, x_2; \theta) \right] = -2k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) \mathbf{E}^\theta \left[\mu(y, x_2; \theta) \right] p_0(y, x_2) dy = 0,$$

βλέπουμε ότι η $p_1(x_0, x_2; \theta)$ έχει μηδενική μέση τιμή.

Για το δεύτερης τάξης πρόβλημα, θα υπολογίζουμε πρώτα χωριστά τους όρους του δεξιού μέλους.

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} p_0(x_0, x_2) = 2ik_0 \exp(ik_0 x_0) \frac{\partial A(x_2)}{\partial x_2}$$

$$2k_0^2 \mu(x_0, x_2, \theta) p_1(x_0, x_2; \theta) = -4A(x_2) k_0^4 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) \mu(x_0, x_2, \theta) \mu(y, x_2; \theta) \exp(ik_0 y) dy$$

$$k_0^2 \mu^2(x_0, x_2, \theta) p_0(x_0, x_2) = k_0^2 A(x_2) \mu^2(x_0, x_2, \theta) \exp(ik_0 x_0)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της μέσης τιμής, στο πρόβλημα δεύτερης τάξης, και αντικαθιστώντας τα παραπάνω στο δεξιό μέλος:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^0 [p_2(x_0, x_2; \theta)]}{\partial x_0^2} + k_0^2 \mathbf{E}^0 [p_2(x_0, x_2; \theta)] &= -\frac{\partial A(x_2)}{\partial x_2} 2ik_0 \exp(ik_0 x_0) + \\ &+ A(x_2) 4k_0^4 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) R_{\mu\mu}(x_0, y, x_2) \exp(ik_0 y) dy - \\ &- A(x_2) k_0^2 R_{\mu\mu}(x_0, x_0, x_2) \exp(ik_0 x_0). \end{aligned}$$

Προκειμένου να λύνεται η εξίσωση, θα εξισώσουμε του secular όρους (δηλαδή το δεξιό μέλος) με το 0. Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση Green, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x_2)}{\partial x_2} + \\ + A(x_2) \left[k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0 |x-y|) R_{\mu\mu}(x_0, y, x_2) \exp(-ik_0(x_0-y)) dy - \frac{1}{2} ik_0 R_{\mu\mu}(x_0, x_0, x_2) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Τώρα, εφόσον προσδιορίσουμε την $R_{\mu\mu}(x_0, y, x_2)$, το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μία συνάρτηση του x_2 .

Αν θέσουμε:

$$k_2(x_2) = k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0 |x-y|) R_{\mu\mu}(x_0, y, x_2) \exp(-ik_0(x_0-y)) dy - \frac{1}{2} ik_0 R_{\mu\mu}(x_0, x_0, x_2), \quad (37)$$

τότε η (36) λύνεται, και δίνει:

$$A(x_2) = A(0) \exp(-i \operatorname{Im}[k_2(x_2)] x_2) \exp(-\operatorname{Re}[k_2(x_2)] x_2)$$

Ειδικά για τη μορφή της $R_{\mu\mu}(x_0, y, x_2)$ που υποθέσαμε και νωρίτερα στη smoothing-method,

$$R_{\mu\mu}(x_0, y, x_2) = \sigma_{\mu}^2(x_2) \exp(-\beta |x_0 - y|),$$

η σχέση (37) γίνεται:

$$k_2(x_2) = -\frac{1}{2} i k_0 \sigma_{\mu}^2(x_2) + k_0^2 \sigma_{\mu}^2(x_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i k_0 |x - y|) \exp(-\beta |x_0 - y|) \exp(-i k_0 (x_0 - y)) dy \quad (38)$$

η οποία είναι ίδια με τον δευτεροτάξιο συντελεστή (k_2) της σχέσης (23) που βρήκαμε στη προηγούμενη ενότητα με τη smoothing method.

Στο σημείο αυτό, η ανάλυση δεν χρειάζεται να επαναληφθεί, καθώς ισχύουν αυτούσια, όλα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως. Αν κάνουμε τις πράξεις θα βρούμε όπως και πριν τις σχέσεις (26) και (27) αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα της παρούσας ενότητας βασίζονται και είναι σε συμφωνία με αυτά του Mei 2006.

3.3. Επίδραση στοχαστικών ανομοιογενειών του θαλασσίου περιβάλλοντος στο ακουστικό πεδίο, αριθμητικά αποτελέσματα.

Στις προηγούμενες ενότητες, εξετάσαμε το πρόβλημα ακουστικής διάδοσης σε μονοδιάστατο στοχαστικό μέσο και καταλήξαμε σε αναλυτικές εκφράσεις για τη συμπεριφορά του μέσου κυματικού πεδίου, συναρτήσει των πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών του μέσου διάδοσης.

Στη τρέχουσα ενότητα, θα παραχθούν ορισμένα ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση της τυχαίας ανομοιογένειας του θαλάσσιου περιβάλλοντος στα διαδιδόμενα ακουστικά κύματα. Για να γίνει αυτό, σε πρώτη φάση θα χρησιμοποιηθεί η αναλυτική λύση για τη παραγωγή μεγεθών που εξηγούν την επίδραση των στοχαστικών χαρακτηριστικών στο ακουστικό φαινόμενο. Συγκεκριμένα, πρόκειται για μεγέθη που καθορίζουν την διεισδυτικότητα των κυμάτων στο μέσο διάδοσης αλλά και τη μεταβολή που αυτά υφίστανται στο μήκος κύματος. Έπειτα, προκειμένου να είναι εφικτοί οι αριθμητικοί υπολογισμοί, θα γίνει μία διεργασία ώστε η ασθενής στοχαστική ανομοιογένεια που υποθέσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (για τον κυματικό αριθμό), να συνδεθεί με τις τυχαίες μεταβολές στη ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Το βήμα αυτό είναι απαραίτητο ώστε να μεταφερθούν καταλλήλως οι στοχαστικές ανομοιογένειες που παρατηρούνται (μέσω μετρήσεων ή/και κατάλληλης μοντελοποίησης) στο θαλάσσιο περιβάλλον (Dozier & Tappert 1977) και οι οποίες είναι αυτές που μπορούν τελικά να μετρηθούν με τις διαθέσιμες μετρητικές διατάξεις.

3.3.1. Βασικές στοχαστικές επιδράσεις.

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει ως τώρα, το μέσο ακουστικό πεδίο περιγράφεται από την:

$$E^{\theta} [p(x; \varepsilon)] = A_* \cdot \exp \left[-\varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_{\mu}^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)} x \right] \exp \left[i \left(k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{k_0 \beta^2 \sigma_{\mu}^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)} \right) x \right]. \quad (39)$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι το x είναι επαρκώς μακριά από τα σύνορα της ανομοιογενούς ζώνης (βλ. 3.2.1.2) και το A_* είναι σταθερά που ρυθμίζεται από την επίδραση των συνόρων (βλ. τέλος κεφαλαίου 3.2.1.2). Επίσης υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που έχει θεωρηθεί για τη στοχαστική ανομοιογένεια, έχει τη μορφή:

$$R_{\mu\mu}(x, y) = R_{\mu\mu}(x - y) = \sigma_{\mu}^2 \exp(-\beta |x - y|),$$

Η οποία έχει μήκος συσχέτισης (*correlation length*):

$$l_{\mu, cor} = \frac{\int_0^{\infty} R_{\mu\mu}(x - y) d(x - y)}{R_{\mu\mu}(0)} = \frac{1}{\beta} \quad (40)$$

Παρατηρούμε, ότι στην σχέση (39), αντιστοιχεί η σταθερά διάδοσης (*propagation constant*):

$$k(\varepsilon^2) = -\varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)} + i \left(k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{k_0 \beta^2 \sigma_\mu^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)} \right), \quad (41)$$

όπου έχουμε τον κυματικό αριθμό:

$$\kappa = k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{k_0 \beta^2 \sigma_\mu^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)}, \quad (42)$$

και τη σταθερά εξασθένησης (*attenuation constant*):

$$d_{atten} = \varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)}. \quad (43)$$

Για το προσπίπτον κύμα (αυτό που έρχεται από το $-\infty$), είχαμε υποθέσει ότι ισχύει:

$$p_{inc}(x) = A_0 \exp(ik_0 x). \quad (44)$$

Συγκρίνοντας τη τελευταία σχέση με τις δύο προηγούμενες, βλέπουμε πως σε σχέση με το «αρχικό κύμα», έχουμε δύο τύπου αλλοιώσεις. Η μία αλλοίωση είναι στο μήκος κύματος, όπου από την σχέση (42) βλέπουμε ότι αυτό έχει ελαττωθεί εξαιτίας της δευτεροτάξιας αύξησης στον κυματικό αριθμό (το κλάσμα στον δεξιό όρο είναι πάντοτε θετικό). Η δεύτερη αλλοίωση φαίνεται στη σχέση (43) όπου βλέπουμε ότι έχουν παρουσιαστεί φαινόμενα εξασθένησης στο πλάτος του κύματος, καθώς αυτό εισχωρεί στην ανομοιογένεια.

Όσον αφορά τη μεταβολή στον κυματαριθμό, αυτή μπορεί να ποσοτικοποιηθεί εύκολα, αν ορίσουμε το αδιάστατο:

$$wn_{mod}(k_0) = \kappa / k_0 = 1 + \varepsilon^2 \sigma_\mu^2 \cdot \frac{\beta^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)}. \quad (45)$$

Αν στη παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ για να εμφανίσουμε το μήκος κύματος και $l_{\mu,cor} = 1 / \beta$, το μήκος συσχέτισης των στοχαστικών ανομοιογενειών, βρίσκουμε:

$$wn_{mod}(\lambda_0) = 1 + \varepsilon^2 \sigma_\mu^2 \cdot \frac{\lambda_0^2}{2(\lambda_0^2 + 8 \cdot \pi^2 l_{\mu,cor}^2)} \quad (46)$$

όπου μένει να προσδιοριστούν τα $\varepsilon^2 \sigma_\mu^2$, $l_{\mu,cor}$, που είναι δεδομένα του περιβάλλοντος. Από την (46) μπορεί προφανώς να υπολογιστεί και η αντίστοιχη επίδραση στο μήκος κύματος σύμφωνα με τη σχέση $k_0 = 2\pi / \lambda_0$.

Όσον αφορά την εξασθένηση που βλέπουμε στη σχέση (43), αυτή συνδέεται ουσιαστικά με την «διαφάνεια» του μέσου διάδοσης. Για τη μελέτη της συγκεκριμένης ιδιότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα μεγέθη, όπως πχ. αυτό του συντελεστή απορρόφησης ή της σταθεράς εξασθένησης που έχουμε στη παραπάνω σχέση. Για τα θαλάσσια κυματικά φαινόμενα (ακουστικά, υδάτινα, ηλεκτρομαγνητικά), συχνά χρησιμοποιείται η έννοια του localization distance (ή localization length), το οποίο ορίζεται ως:

$$L_d = 1 / d_{atten} , \quad (47)$$

δηλαδή, για τη περίπτωση που έχουμε εδώ, είναι:

$$L_d = \frac{1}{2\varepsilon^2\sigma_\mu^2} \cdot \frac{(1 + 4k_0^2 / \beta^2)}{(k_0^2 / \beta)(1 + 2k_0^2 / \beta^2)} , \quad (48)$$

ενώ, πολλαπλασιάζοντας με k_0 , μπορούμε να πάρουμε το αδιάστατο localization distance:

$$L_d k_0 = \frac{1}{2\varepsilon^2\sigma_\mu^2} \cdot \frac{(1 + 4k_0^2 / \beta^2)}{(k_0 / \beta)(1 + 2k_0^2 / \beta^2)} . \quad (49)$$

Αντικαθιστώντας όπως και προηγουμένως τα $\beta = 1 / l_{\mu,cor}$ και $k_0 = 2\pi / \lambda_0$, βρίσκουμε:

$$L_d k_0 = \frac{1}{2\varepsilon^2\sigma_\mu^2} \cdot \frac{1 + 16 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0)^2}{4 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0) (1 + 8 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0)^2)} \quad (50)$$

όπου μένει πάλι να προσδιοριστούν τα $\varepsilon^2\sigma_\mu^2$, $l_{\mu,cor}$, που είναι δεδομένα του περιβάλλοντος.

Από τις σχέσεις (41) και (47), παρατηρούμε ευθέως, ότι για $x = L_d$, το πλάτος που αντιστοιχεί στο κυματικό πεδίο, είναι:

$$A_{L_d} = Amp\left(E^\theta\left[p(L_d; \varepsilon)\right]\right) = e^{-1} \cdot A_* \approx 0.37 \cdot A_* , \quad (51)$$

δηλαδή αντιστοιχεί περίπου στο **37% του αρχικού πλάτους** A_* . Όπως ειπώθηκε, το πλάτος αυτό εξαρτάται από την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων κοντά στα σύνορα a, b . Εδώ θα γίνει η εύλογη υπόθεση, ότι το A_* ίδιας τάξης με το A_0 .

Τώρα, αντίστοιχα με τη σχέση (51), μπορούμε να ορίσουμε το μήκος L_p , για το οποίο ισχύει:

$$A_{L_p} = Amp\left(E^\theta\left[p(L_p; \varepsilon)\right]\right) = p \cdot A_* , \quad p \in [0,1]$$

δηλαδή:

$$A_* \exp(-d_{atten} \cdot L_p) = p \cdot A_* \Leftrightarrow \exp(-d_{atten} \cdot L_p) = p \Leftrightarrow L_p = |\ln(p)| \cdot \frac{1}{d_{atten}} \Leftrightarrow$$

$$L_p = |\ln(p)| \cdot L_d = |\ln(p)| \cdot \frac{1}{2\varepsilon^2 \sigma_\mu^2} \cdot \frac{(1 + 4k_0^2 / \beta^2)}{(k_0^2 / \beta)(1 + 2k_0^2 / \beta^2)}. \quad (52)$$

Ενώ κάνοντας για άλλη μία φορά την αντικατάσταση $\beta = 1/l_{\mu,cor}$ και $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, βρίσκουμε:

$$L_p(\lambda_0) = |\ln(p)| \cdot \frac{1}{2\varepsilon^2 \sigma_\mu^2} \cdot \frac{1 + 16 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0)^2}{4 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0^2) (1 + 8 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0)^2)} \quad (53)$$

στην οποία μένει να προσδιοριστούν τα $\varepsilon^2 \sigma_\mu^2$, $l_{\mu,cor}$. Αντιστοίχως με τις προηγούμενες σχέσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε το αδιάστατο $L_p k_0$

3.3.2. Προσδιορισμός πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών της στοχαστικής ανομοιογένειας.

Στην προηγούμενη ενότητα, υπολογίσαμε μεγέθη που προσδιορίζουν την επίδραση των στοχαστικών ανομοιογενειών, στο ακουστικό κύμα. Τα μεγέθη αυτά, δηλαδή οι σχέσεις (46), (50), (53) και άλλες παρεμφερείς, απαιτούν όπως είδαμε τον προσδιορισμό των $\varepsilon^2 \sigma_\mu^2$ και $l_{\mu,cor}$. Αυτά με τη σειρά τους προέρχονται από τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής διαταραχής $\varepsilon \cdot \mu(x; \theta)$ στον κυματικό αριθμό, που υποθέσαμε στα κεφάλαια που προηγήθηκαν.

Στο υδροακουστικό πρόβλημα που εξετάζουμε, η στοχαστική ανομοιογένεια στον κυματικό αριθμό αντιστοιχεί σε διαταραχές της ταχύτητας του ήχου στο νερό, τις διαταραχές δηλαδή που μπορούμε και να μετρήσουμε στη πράξη με κατάλληλα όργανα (CTD, XBT, κα.). Προκειμένου λοιπόν να υπολογίσουμε τις παραπάνω σχέσεις, πρέπει πρώτα να εκφράσουμε τα $\varepsilon^2 \sigma_\mu^2$ και $l_{\mu,cor}$, συναρτήσει των αντίστοιχων μεγεθών που αναφέρονται στις διαταραχές της ταχύτητας του ήχου για τις οποίες υπάρχουν διαθέσιμες μετρήσεις.

Θεωρούμε τον κυματικό αριθμό:

$$k(x; \theta) = k_0 + \tilde{k}(x; \theta), \quad (54)$$

όπου k_0 ο μέσος κυματικός αριθμός (που στη περίπτωση μας έχει θεωρηθεί πραγματική σταθερά), και $\tilde{k}(x; \theta)$ με μέση τιμή μηδέν, η ασθενής στοχαστική διαταραχή γύρω από τη μέση κατάσταση. Θα είναι:

$$\tilde{k}(x;\theta) = k(x;\theta) - k_0 = \frac{\omega}{c_0 + \tilde{c}(x;\theta)} - \frac{\omega}{c_0},$$

όπου αντίστοιχα έχουμε θεωρήσει τη σταθερή μέση ταχύτητα του ήχου και $\tilde{c}(x;\theta)$ με μηδενική μέση τιμή, τη στοχαστική διαταραχή της. Η κυκλική συχνότητα ω θεωρείται στο πρόβλημά μας σταθερή, καθώς η στοχαστικότητα προέρχεται από μεταβολές στη ταχύτητα του ήχου και όχι από τη, ακουστική πηγή. Από τη τελευταία σχέση, βρίσκουμε:

$$\tilde{k}(x;\theta) = \frac{\omega}{c_0 + \tilde{c}(x;\theta)} - \frac{\omega}{c_0} = -\frac{\omega \tilde{c}(x;\theta)}{c_0(c_0 + \tilde{c}(x;\theta))} = -k_0 \cdot \frac{\tilde{c}(x;\theta)}{c_0 + \tilde{c}(x;\theta)}.$$

Τώρα, επειδή στα φαινόμενα που μας ενδιαφέρουν το $\tilde{c}(x;\theta)$ είναι το πολύ της τάξης του 0.5% του c_0 (Jones & Wolfson 2006), μπορούμε από τη προηγούμενη σχέση να θεωρήσουμε ότι:

$$\tilde{k}(x;\theta) = -k_0 \cdot \frac{\tilde{c}(x;\theta)}{c_0}. \quad (55)$$

Στις προηγούμενες ενότητες, θεωρήσαμε ότι $k(x;\theta) = k_0(1 + \varepsilon \mu(x;\theta))$, δηλαδή ότι $\tilde{k}(x;\theta) = k_0 \cdot \varepsilon \cdot \mu(x;\theta)$, οπότε από τη (55) βρίσκουμε:

$$\mu(x;\theta) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\tilde{c}(x;\theta)}{c_0} \stackrel{\times \mu(y;\theta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\mu(x;\theta) \mu(y;\theta) = \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \tilde{c}(x;\theta) \tilde{c}(y;\theta),$$

και εφαρμόζοντας τον τελεστή της μέσης τιμής στη τελευταία σχέση:

$$\boxed{R_{\mu\mu}(x-y) = \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \cdot R_{\tilde{c}\tilde{c}}(x-y)} \quad (56)$$

Βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης για τις τυχαίες συναρτήσεις $\mu(x;\theta)$ και $\tilde{c}(x;\theta)$. Η ομοιογένεια των τυχαίων μεταβλητών έχει υποτεθεί στο πλαίσιο των παραδοχών που έγιναν στη προηγούμενη ενότητα, κατά την αναλυτική επεξεργασία. Για $x = y$, προκύπτει ότι:

$$\boxed{\sigma_\mu^2 = \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \cdot \sigma_{\tilde{c}}^2} \quad (57)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η διακύμανση της ταχύτητας ακολουθεί κανονική κατανομή και ορίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης $(-\alpha \cdot \sigma_{\tilde{c}}, \alpha \cdot \sigma_{\tilde{c}})$, τότε θα είναι:

$$\alpha \cdot \sigma_{\tilde{c}} = q \cdot c_0,$$

όπου $q \cdot c_0$ το μέγιστο εύρος της διαταραχής. Θα είναι δηλαδή:

$$\sigma_{\tilde{c}}^2 = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^2 \cdot c_0^2 \stackrel{(57)}{\Leftrightarrow} \boxed{\varepsilon^2 \sigma_{\mu}^2 = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^2} \quad (58)$$

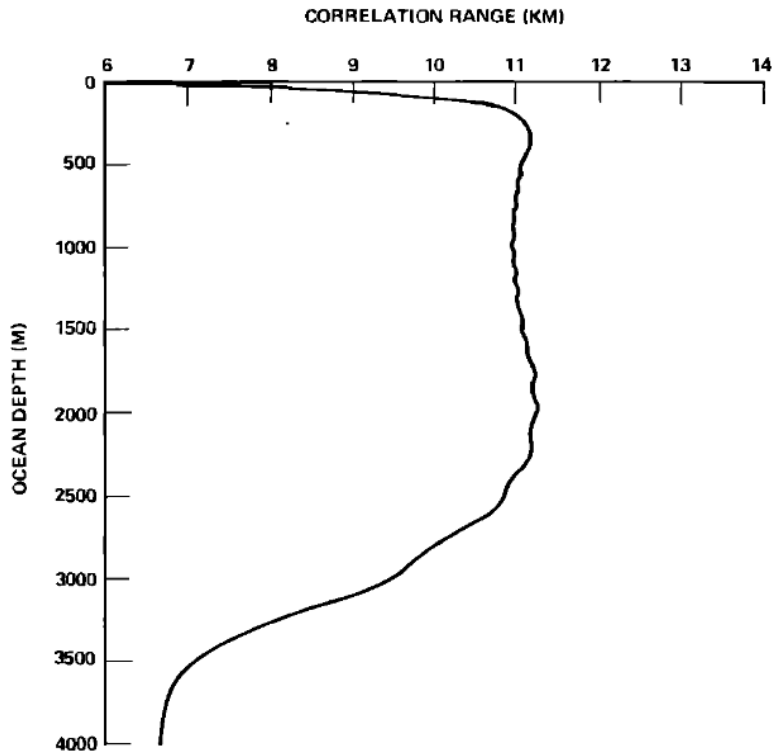
Οπότε καταλήξαμε σε μία σχέση για το $\varepsilon^2 \sigma_{\mu}^2$, συναρτήσει γνωστών μεγεθών. Ενδεικτικά για διακυμάνσεις της τάξης του 0.5% (Jones & Wolfson 2006), $q = 0.005$, ενώ επειδή θεωρήσαμε κανονική κατανομή, είναι λογικό να θέσουμε $\alpha = 2.5$ που περιλαμβάνει περίπου το 99% της κατανομής.

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε μία αντίστοιχη σχέση για το $l_{\mu,cor}$. Ξεκινάμε και πάλι από τη σχέση (56), και κατασκευάζουμε βήμα προς βήμα το μέγεθος $l_{\mu,cor}$ (βλ. σχέση (40)) στο αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned} R_{\mu\mu}(x-y) &= \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \cdot R_{\tilde{c}\tilde{c}}(x-y) \stackrel{(x-y)=r}{\Leftrightarrow} |R_{\mu\mu}(r)| = \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \cdot |R_{\tilde{c}\tilde{c}}(r)| \Leftrightarrow \\ \int_0^{\infty} |R_{\mu\mu}(r)| dr &= \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \cdot \int_0^{\infty} |R_{\tilde{c}\tilde{c}}(r)| dr \Leftrightarrow \frac{\int_0^{\infty} |R_{\mu\mu}(r)| dr}{\sigma_{\mu}^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 c_0^2} \cdot \frac{\int_0^{\infty} |R_{\tilde{c}\tilde{c}}(r)| dr}{\sigma_{\tilde{c}}^2} \stackrel{(40),(57)}{\Leftrightarrow} \\ l_{\mu,cor} &= \frac{1/\cancel{\varepsilon^2 c_0^2}}{\cancel{\varepsilon^2 c_0^2} \sigma_{\tilde{c}}^2} \cdot \frac{\int_0^{\infty} |R_{\tilde{c}\tilde{c}}(r)| dr}{\int_0^{\infty} |R_{\mu\mu}(r)| dr} \Leftrightarrow \\ &\boxed{l_{\mu,cor} = l_{\tilde{c},cor}} \end{aligned} \quad (59)$$

όπου καταλήγουμε ότι τα μήκη συσχέτισης για τις τυχαίες συναρτήσεις $\mu(x;\theta)$ και $\tilde{c}(x;\theta)$, ταυτίζονται.

Θα θεωρήσουμε ότι **οι στοχαστικές διακυμάνσεις στη ταχύτητα του ήχου οφείλονται σε διακυμάνσεις της θερμοκρασίας εξαιτίας της επίδρασης στοχαστικών εσωτερικών κυμάτων**. Τότε, το μήκος συσχέτισης για τη τυχαία συνάρτηση $\tilde{c}(x;\theta)$, μπορεί να μετρηθεί με τη χρήση κατάλληλων μετρητικών διατάξεων ή και να υπολογιστεί μοντελοποιώντας τα εσωτερικά κύματα (Dozier & Tappert 1977). Τότε, το μήκος συσχέτισης σε σχέση με το βάθος έχει τη μορφή του σχήματος που ακολουθεί (Σχήμα 1):



Εικόνα 7: Το μήκος συσχέτισης της στοχαστικής ανομοιογένειας σε σχέση με το βάθος (Dozier & Tappert 1977).

Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ενδεικτικές τιμές για το $l_{\mu,cor}$, έχουμε στο διάστημα (500,11000) m.

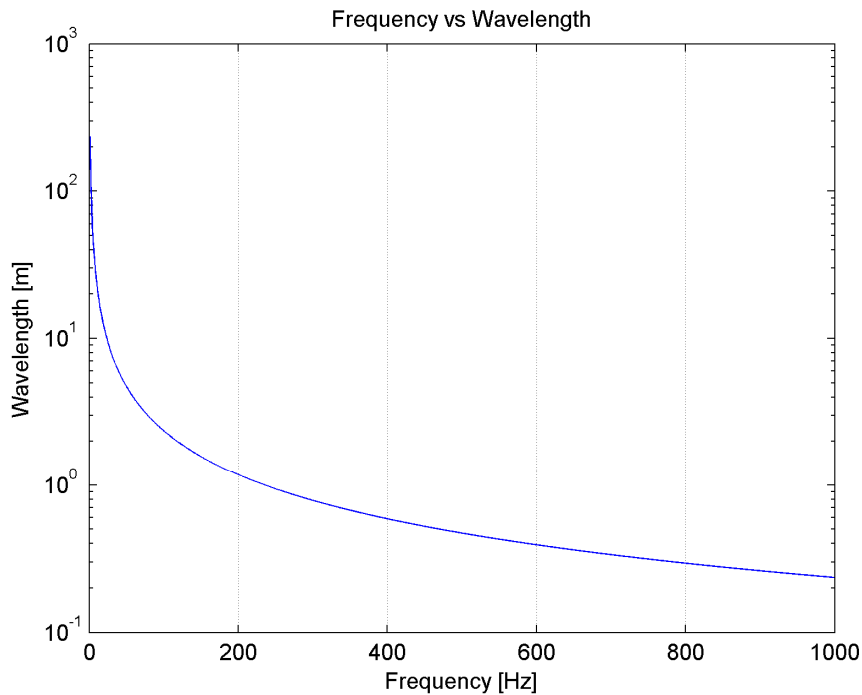
3.3.3. Αριθμητικά αποτελέσματα.

Στη παρούσα ενότητα, χρησιμοποιούνται οι προηγούμενες σχέσεις για τον υπολογισμό της επίδρασης των στοχαστικών χαρακτηριστικών του θαλασσίου περιβάλλοντος στα ακουστικά κύματα. Οι υπολογισμοί γίνονται για κύματα 50 Hz – 1 kHz, ενώ τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά έχουν ρυθμιστεί σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας. Υπενθυμίζεται, ότι εκεί **θεωρήσαμε πως η στοχαστική ανομοιογένειας στη ταχύτητα του ήχου προέρχεται από την επίδραση τυχαίων εσωτερικών κυμάτων**. Στη συνέχεια, παρατίθενται τα σχήματα όπου περιγράφεται η στοχαστική επίδραση, με σύντομα επεξηγηματικά σχόλια. Περαιτέρω συζήτηση γίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο.

Όσον αφορά την επίδραση στον κυματικό αριθμό, από τη σχέση (46) είδαμε ότι:

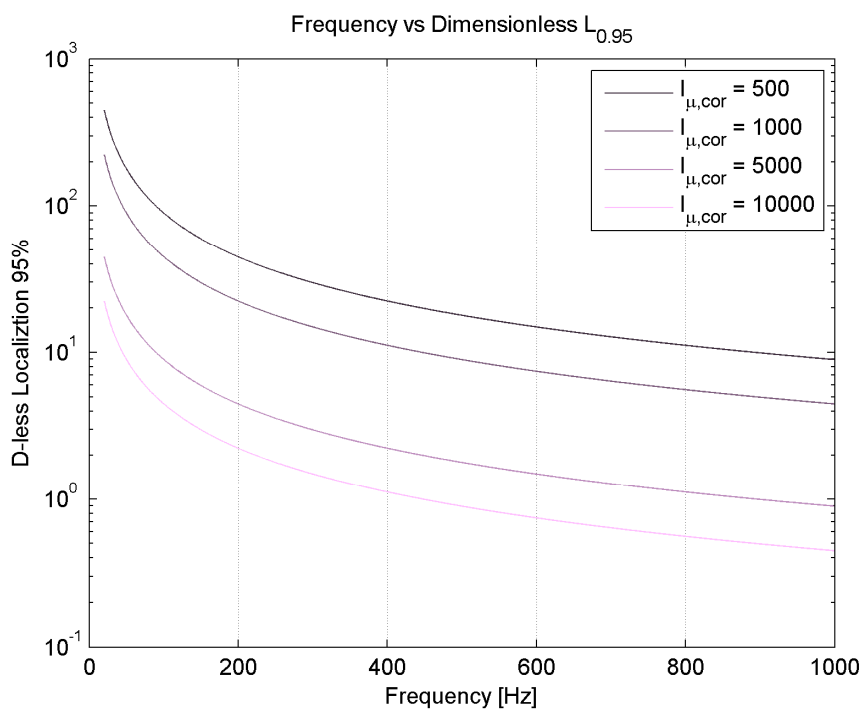
$$wn_{\text{mod}}(\lambda_0) = 1 + \varepsilon^2 \sigma_\mu^2 \cdot \frac{\lambda_0^2}{2(\lambda_0^2 + 8 \cdot \pi^2 l_{\mu,cor}^2)},$$

η οποία έχει άνω φράγμα το $wn_{\text{mod},up} = 1 + (\varepsilon^2 \sigma_\mu^2) / 2 = 1 + O(10^{-6})$ αν λάβουμε υπόψη μας όσα είδαμε στη προηγούμενη ενότητα (ασθενείς ανομοιογένεια κλπ.). Για το λόγο αυτό, **η μεταβολή που υφίσταται ο κυματικός αριθμός (και άρα και το μήκος κύματος) θα θεωρηθεί αμελητέα.**



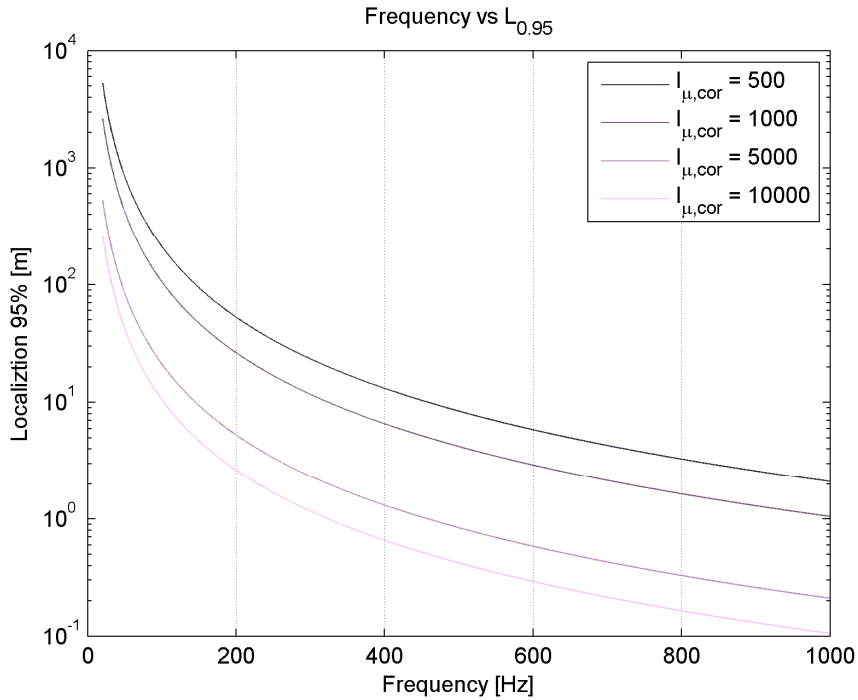
Εικόνα 8: Η σχέση μεταξύ συχνότητας και μήκους κύματος. Ο κατακόρυφος άξονας είναι λογαριθμικός.

Παραπάνω (Εικόνα 8) παρατίθεται η σχέση μεταξύ συχνότητας και μήκους κύματος, ως διάγραμμα αναφοράς για τα σχήματα που ακολουθούν.



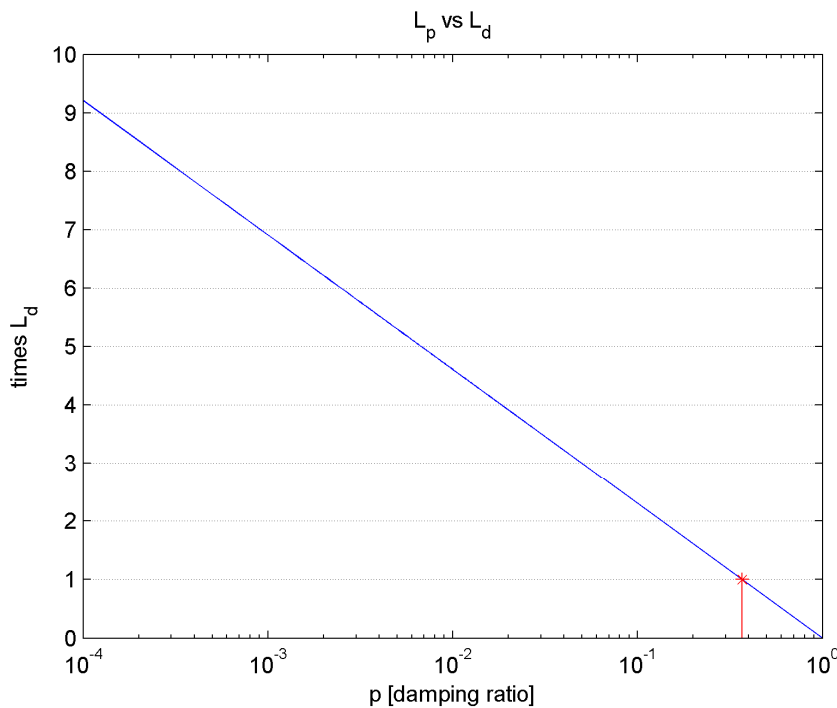
Εικόνα 9: Η σχέση μεταξύ συχνότητας και του αδιάστατου $L_{0.95} \cdot k_0$, για διαφορετικά μήκη συσχέτισης της στοχαστικής ανομοιογένειας. Ο κατακόρυφος άξονας είναι λογαριθμικός.

Στο σχήμα που προηγείται (Εικόνα 9) βλέπουμε το αδιάστατο Localization 95%, σε σχέση με τη συχνότητα του κύματος. Πρόκειται ουσιαστικά για την απόσταση (σε μήκη κύματος), όπου έχει αποσβεστεί το 95% του αρχικού πλάτους.



Εικόνα 10: Η σχέση μεταξύ συχνότητας και του $L_{0.95}$ (σε m), για διαφορετικά μήκη συσχέτισης της στοχαστικής ανομοιογένειας. Ο κατακόρυφος άξονας είναι λογαριθμικός.

Παραπάνω (Εικόνα 10) έχουμε το αντίστοιχο σχήμα με το προηγούμενο (Εικόνα 9), για το $L_{0.95}$, το οποίο είναι σε m.



Εικόνα 10: Η σχέση μεταξύ του $L_d = 1 / d_{atten}$ και του συντελεστή μεταβολής πλάτους p . Ο οριζόντιος άξονας είναι λογαριθμικός. Με κόκκινο το μήκος L_d , που αντιστοιχεί στο $1/e$ του αρχικού πλάτους (βλ. σχέση (51)).

Τέλος (Εικόνα 10), η σχέση μεταξύ των Localization Distance ($1 / d_{atten}$) και Localization%.

4.

Συζήτηση

Στις ενότητες που προηγήθηκαν, εξετάσαμε τις βασικές μεθόδους της θεωρίας διαταραχών, που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της διάδοσης σε ασθενώς στοχαστικά μέσα. Αυτές αναπτύχθηκαν, όπως είδαμε, ώστε να αντιμετωπίσουν τη κακή ιδιότητα της προσέγγισης Born, να δίνει μη ομοιόμορφο σφάλμα προσέγγισης στο πεδίο ορισμού. Για την εφαρμογή του τρίτου κεφαλαίου, χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι που κυριαρχούν, βιβλιογραφικά, σε προβλήματα μέσων-υψηλών κυματικών αριθμών, δηλαδή η *smoothing method* και η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων. Εξαιτίας του εύρους του κυματικού αριθμού που επιτρέπουν, οι συγκεκριμένες μέθοδοι είναι εφαρμόσιμες και στην ανάλυση άλλου τύπου κυματικών φαινομένων, όπως για παράδειγμα αυτά των επιφανειακών κυματισμών (πχ. Mei & Phill 2003).

Στη παρούσα ενότητα, αρχικά θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, ώστε να κατανοήσουμε ποια είναι η επίδραση των στοχαστικών ανομοιογενειών του μέσου διάδοσης στο μέσο ακουστικό πεδίο. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσουν ορισμένα σχόλια σχετικά με τις δύο μεθόδους που εφαρμόστηκαν, αλλά και γενικότερα για τις μεθόδους που κάνουν χρήση της θεωρίας διαταραχών. Τέλος, θα δοθούν ορισμένες βασικές διευθύνσεις για δυνατότητες περαιτέρω μελέτης των σχετικών φαινομένων.

4.1. Σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, και οι δύο μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε έδωσαν τα ίδια αποτελέσματα για τις δύο πρώτες τάξεις. Η λύση που πήραμε για το μέσο στοχαστικό πεδίο στην ανομοιογενή ζώνη, είναι η ακόλουθη (σχέση (3.39)):

$$E^{\theta}[p(x; \varepsilon)] = A_* \cdot \exp \left[-\varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_{\mu}^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)} x \right] \exp \left[i \left(k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{k_0 \beta^2 \sigma_{\mu}^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)} \right) x \right]. \quad (1)$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι το x είναι επαρκώς μακριά από τα σύνορα της ανομοιογενούς ζώνης (βλ. 3.2.1.2) και το A_* είναι σταθερά που ρυθμίζεται από την επίδραση των συνόρων (βλ. τέλος κεφαλαίου 3.2.1.2).

Στη συνέχεια, στην ενότητα 3.3, είδαμε ότι για τη παραπάνω λύση έχουμε ένα νέο συντελεστή διάδοσης, στον οποίο αντιστοιχεί ο κυματικός αριθμός:

$$k = k_0 + \varepsilon^2 \cdot \frac{k_0 \beta^2 \sigma_{\mu}^2}{2(\beta^2 + 4k_0^2)}, \quad (2)$$

και η σταθερά εξασθένησης:

$$d_{atten} = \varepsilon^2 \cdot 2k_0^2 \sigma_{\mu}^2 \frac{\beta^2 + 2k_0^2}{\beta(\beta^2 + 4k_0^2)}. \quad (3)$$

Από τη σχέση (2), βλέπουμε ότι ο κυματικός αριθμός υφίσταται μία δευτεροτάξια αύξηση, όπως φαίνεται και από τον συντελεστή μεταβολής (3.48). Η αύξηση του κυματικού αριθμού ισοδυναμεί, προφανώς, με την ελάττωση του μήκους κύματος. Εφόσον από την αρχή της μελέτης δε περιοριστήκαμε σε κάποιο συγκεκριμένο κυματικό αριθμό, το φαινόμενο αυτό, δηλαδή η **ελάττωση του μήκους κύματος του ακουστικού πεδίου πίεσης**, περιμένουμε να συμβαίνει σε όλο το εύρος όπου ισχύουν οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιήσαμε, δηλαδή για μέσες-υψηλές τιμές του κυματικού αριθμού. Όπως πολύ σωστά τονίζουν οι Mei & Phil 2002, **αυτή είναι μία χαρακτηριστική διαφορά των στοχαστικών κυματικών μέσων, από αυτά που χαρακτηρίζονται από ντετερμινιστικές περιοδικές ανομοιογένειες και τα οποία προκαλούν αντίστοιχα φαινόμενα σε στενές μπάντες συχνοτήτων** (Eltert & Molyneux 1972).

Βέβαια, όπως είδαμε στην αρχή της ενότητας 3.3.3, στη περίπτωση των ασθενών στοχαστικών ανομοιογενειών η μεταβολή είναι αμελητέα καθώς ο συντελεστής μεταβολής έχει άνω φράγμα το $\omega n_{\text{mod}, \text{wp}} = 1 + O(10^{-6})$. Έτσι οι σχετικές επιδράσεις μπορούν να αγνοηθούν για τη συγκεκριμένη περίπτωση που μας απασχόλησε εδώ.

Στη διατύπωση του προβλήματος υποθέσαμε σταθερό πλάτος A_0 και έτσι το αρχικό κύμα δεν περιέχει φαινόμενα εξασθένησης. Από τις σχέσεις (1), (3), βλέπουμε ότι **η διάδοση μέσω της στοχαστικής ζώνης έχει σαν αποτέλεσμα την εξασθένηση της ενέργειας του**

κυματικού πεδίου καθώς αυτό εισχωρεί στην ανομοιογένεια. Αυτό είναι λογικό και αναμενόμενο, και η εξασθένιση οφείλεται στη συνεχή ανάκλαση μέρους της ενέργειας του πεδίου, πάνω στις μικροδιαταραχές του ακουστικού μέσου.

Στην ενότητα 3.3.3, υπολογίσαμε το αδιάστατο μήκος συσχέτισης,

$$L_d k_0 = \frac{1}{2\varepsilon^2 \sigma_\mu^2} \cdot \frac{1 + 16 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0)^2}{4 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0) (1 + 8 \cdot \pi^2 (l_{\mu,cor} / \lambda_0)^2)} \quad (4)$$

το οποίο είδαμε ότι αντιστοιχεί στην απόσταση όπου έχουμε περίπου στο 37% απόσβεση σε σχέση με το αρχικό πλάτος. Βλέπουμε, ότι όταν το μήκος κύματος του ακουστικού κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος συσχέτισης των στοχαστικών ανομοιογενειών του μέσου, δηλαδή όταν ισχύει: $(l_{\mu,cor} / \lambda_0) \ll 1$, τότε το $L_d k_0$ είναι μεγάλο, δηλαδή το μέσο είναι «διαυγές» για τα κύματα. Αντίθετα όταν $(l_{\mu,cor} / \lambda_0) \gg 1$, δηλαδή όταν τα κύματα έχουν μικρό μήκος σε σχέση με την ανομοιογένεια, τότε το $L_d k_0$ είναι μικρό, και τα κύματα δε μπορούν να εισχωρήσουν βαθιά στην ανομοιογένεια.

Το χαρακτηριστικό αυτό, έρχεται σε συμφωνία με τα όσα γνωρίζουμε για την απόσβεση των ακουστικών κυμάτων σε σχέση με το μήκος κύματος και τις σχετικές παραμετροποιήσεις που γίνονται για τους ωκεανούς.

4.2. Σχολιασμός των μεθόδων.

Όσον αφορά τη **smoothing method**, αυτή έχει το βασικό προτέρημα ότι καταλήγει (μέσω της αλγεβρικής διαδικασίας) σε μία γενική μορφή για τη **mean-field equation**. Αυτή παράγεται συστηματικά (όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2), και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε γραμμικό κυματικό πρόβλημα όπου οι στοχαστικές διακυμάνσεις είναι ασθενείς, χωρίς να χρειάζεται κάθε φορά να γίνεται όλη η ανάλυση εξαρχής. Πράγματι σε πολλές δημοσιεύσεις, η ανάλυση ξεκινά με μία αναφορά στο Keller 1964, απ' όπου η mean-field equation προσαρμόζεται άμεσα με τον κατάλληλο τελεστή (πχ. Helmholtz, D' Alembert), ώστε να περιγράψει ακουστικά, υδάτινα, ελαστικά ή ακόμη και διανυσματικά κύματα σε διαφόρων τύπων στοχαστικά μέσα. Επίσης, η συγκεκριμένη μέθοδος δίνει τη δυνατότητα για τη **συστηματική παραγωγή εξισώσεων για τις ροπές κάθε τάξης**, όπως είδαμε στην ενότητα 2.1.3. Βέβαια στην ίδια ενότητα είδαμε και ότι οι τελικές σχέσεις γίνονται αρκετά πολύπλοκες από τη δεύτερη μόλις ροπή. Τέλος, η αλγεβρική διαχείριση, καμουφλάρει έως ένα βαθμό το πρόβλημα (Howe 1971) ενώ και οι βασικές εμπλεκόμενες παραδοχές δεν είναι ευθέως σαφείς όπως φαίνεται αν αντιπαραβάλλουμε το Keller 1964 με το Van Kampen 1976.

Η **μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων**, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο εύρος προβλημάτων (βλέπε πχ. Keller & Papanicolaou 1971 για μια εφαρμογή στο time-domain), ενώ η κατασκευαστική λογική της **επιτρέπει τη συνεχή παρακολούθηση της διαδικασίας**, με αποτέλεσμα την βαθύτερη κατανόηση της προσέγγισης. Από την άλλη, το formulation πρέπει να γίνεται εξ αρχής για το κάθε πρόβλημα, ακόμη και σε πολύ παρόμοια setup. Τέλος η μέθοδος αυτή έχει το θετικό ότι **αποτελεί ουσιαστικά μία από τις «κλασσικές» μεθόδους** της θεωρίας διαταραχών, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πρακτικά ανεξάντλητες σχετικές βιβλιογραφικές πηγές, τόσο σε θεωρητικό επίπεδο, όσο και σε εφαρμογές.

Είδαμε, ότι και οι δύο μέθοδοι που παρουσιάστηκαν **μπορούν να εφαρμοστούν σχετικά εύκολα**, τουλάχιστον για μικρές τάξεις προσέγγισης. Επίσης και οι δύο **καλύπτουν ένα σημαντικό εύρος εφαρμογών**, που περιλαμβάνει τη διάδοση κυμάτων σε ασθενώς στοχαστικά μέσα. Όσον αφορά την αποδοτικότητα των δύο μεθόδων, είδαμε πως για το συγκεκριμένο πρόβλημα, **και οι δύο έδωσαν όμοια αποτελέσματα μέχρι τους όρους δεύτερης τάξης που χρησιμοποιήθηκαν**. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς η κοινή συμπεριφορά χρησιμοποιώντας διαφορετικές τεχνικές, δείχνει (χωρίς βέβαια να αποδεικνύει) πως οι επιλογές και χειρισμοί που έγιναν στη κάθε μέθοδο δεν επηρέασαν διαφορετικά το αποτέλεσμα. Για τους λόγους που περιγράφηκαν, οι συγκεκριμένες μέθοδοι είναι και οι περισσότερο διαδεδομένες για τη διαχείριση σχετικών προβλημάτων, μαζί με τις προσεγγίσεις *Born* και *Rytov*.

Πέρα από τα καλά χαρακτηριστικά τους, οι δύο μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν (και γενικότερα οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν θεωρία διαταραχών) έχουν και ορισμένες αδυναμίες. Ένα κοινό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν, είναι η ραγδαία **αύξηση της πολυπλοκότητας** και της έκτασης των εκφράσεων, **όταν διατηρούνται όροι ανώτερης τάξης**, ενώ από την άλλη, η αποκοπή όρων ανώτερης τάξης οδηγεί στην **απουσία αλληλεπιδράσεων από τη τελική λύση**. Η πολυπλοκότητα αυξάνεται επίσης όταν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε εξισώσεις για **ροπές ανώτερης τάξης** (βλέπε ενότητα 2.1.3.3.). Τέλος, όλες οι μέθοδοι βασίζονται στην **αυστηρή παραδοχή των ασθενών διακυμάνσεων**, δηλαδή αποκλείουν ένα πολύ μεγάλο σύνολο προβλημάτων.

4.3. Μελλοντική μελέτη.

Όπως είδαμε, οι μέθοδοι διαταραχών είναι εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία αλλά έχουν και σημαντικές αδυναμίες. Για τους λόγους αυτούς, η μελέτη και ανάπτυξη εναλλακτικών μεθόδων που αντιμετωπίζουν τα προβλήματα που συζητήθηκαν, έχει πολύ μεγάλη αξία.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς αυτή τη κατεύθυνση, παρουσιάζει η *Adomian Decomposition Method* (Adomian 1983). Αυτή κατασκευάζει ένα ανάπτυγμα για το άγνωστο πεδίο, χωρίς όμως να απαιτεί ασθενείς διακυμάνσεις, ανεξαρτησία τυχαίων συναρτήσεων, closure approximations, ή μαρκοβιανές διαδικασίες. Επιπλέον, το σχετικό ανάπτυγμα φαίνεται να συγκλίνει γρήγορα σε πολλά προβλήματα (Datta 1989). Παρά τα πολύ καλά αυτά χαρακτηριστικά της, η μέθοδος δε φαίνεται να έχει εφαρμοστεί (τουλάχιστον με συστηματικό τρόπο) σε προβλήματα διάδοσης σε στοχαστικά μέσα.

Άλλη μία εξαιρετικά ενδιαφέρουσα οικογένεια από μεθόδους, είναι αυτές που κάνουν χρήση του χαρακτηριστικού συναρτησιακού. Η μαθηματική τους δυσκολία αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι συγκρατούν όλη τη πληροφορία που περιέχει η αρχική εξίσωση του προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2, οι εξισώσεις που προκύπτουν δεν λύνονται με συστηματικό τρόπο και έτσι πρέπει κατά περίπτωση να γίνουν συγκεκριμένες παραδοχές. Στο Sobczyk 1985, υπάρχει μία πολύ ενδιαφέρουσα περιήγηση στις σχετικές τεχνικές και τις διάφορες απλοποιητικές παραδοχές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να διευκολυνθεί η περαιτέρω ανάλυση.

5.

Βιβλιογραφία

Αθανασούλης Γ. Α., και, Μπελιμπασάκης Κ., 2007, *Κυματικά φαινόμενα στο Θαλάσσιο Περιβάλλον*, Σημειώσεις για το μάθημα Κυματικά Φαινόμενα στο Θαλάσσιο Περιβάλλον, Έκδοση ΕΜΠ, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Ζωγράφου, Αθήνα.

Αθανασούλης Γ. Α., 2000, *Στοχαστική Μοντελοποίηση και Πρόβλεψη Θαλασσίων Συστημάτων*, Σημειώσεις για το μάθημα Στοχαστική Μοντελοποίηση και Πρόβλεψη Θαλασσίων Συστημάτων, Έκδοση ΕΜΠ, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Ζωγράφου, Αθήνα.

Adomian, G., 1983, Stochastic Systems, *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 169, Academic Press, New York.

Au, W.L., Hastings, M.C., 2008, *Principles of Marine Bioacoustics*, Modern Acoustics and Signal Processing, Springer Verlag, New York.

Barabanenkov, Y.N., Kravtsov, S.M., Rytov, S.M., Tamarkii, V.I., 1971, *Status of the Theory of Wave Propagation in Randomly-inhomogeneous Media*, Soviet Physics Uspekhi, 13(5): 551-680.

Beydoun, W. B., and Tarantola, A., 1988, *First Born and Rytov approximations: Modeling and inversion conditions in a canonical example*, J. Acoust. Soc. Am. 83 (3):1045-1055.

Born, M., and Wolf, E., 1956, *Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge University Press.

Bourret, R.C, 1962, *Stochastically Perturbed Fields, with Applications to Wave Propagation in Random Media*, Il nuovo climento 26(1): 1-31.

Brekhovskikh, L.M., and, Lysanov, Yu.P., 1982, *Fundamentals of Acoustics*, Modern Acoustics and Signal Processing, AIP Press, Springer Verlag, New York.

Chen, K.K, Soong, T.T, 1971, *Covariance properties of waves propagating in a random medium*, J. Acoust. Soc. Amer. 49(5):1639–1642.

- Chernov, L.A. 1960, *Wave Propagation in a Random Medium*, McGraw-Hill, New York.
- Chow, P.L., and, Keller, J.B., 1972, *Wave Propagation in a Random Lattice*, J. Math. Phys. 13, 1404; doi:10.1063/1.1666154 (8 pages)
- Chow, P.L., 1973, *Thermoelastic Wave Propagation in a Random Medium and Some Related Problems*, International Journal of Engineering Science, 11(9):953-971.
- Chow, P.L., 1975, *Perturbation methods in stochastic wave propagation*, Siam Review, 17(1): 57-81.
- Clarke, J.E., and, Llewellyn, K., 2004, *Makkovik Bank Survey, Labrador Sea*, CCGS Amudsen EM300, Ocean Mapping Group Survey, University of New Brunswick.
- Cole, J. D., 1968, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass. (Rev. ed. J. Kevorkian and J. D. Cole 1981 Springer, New York.)
- Cutnell, J.D., and, Johnson, K.W., 2006, *Physics*, John Wiley and Sons Inc.
- Datta, B.K., 1989, *A New Approach to the Wave Equation – An Application of the Decomposition Method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 142(1):6-12.
- Debnath, L., 2005, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser, Boston, USA.
- Dozier, L.B., and, Tappert, F.D., 1977, *Statistics of Normal Mode Amplitudes in a Random Ocean I Theory*, Courant Institute , New York University, New York.
- Duffy, D.G., 2001, *Green's Functions with Applications, Studies in Advanced Mathematics*, Chapman and Hall/CRC.
- Eltert, J.F., and, Molyneux, J.E, 1972, *The long-distance propagation of shallow water waves over an ocean of random depth*, Journal of Fluid Mechanics, 53(1):1-15 Cambridge University Press.
- Enflo, B.O., and, Hedberg, C.M., 2004, *Theory of Nonlinear Acoustics in Fluids*, Fluid Mechanics and its Applications, Vol. 67, Kluwer Academic Publishers, USA.
- Er, G.K., 1998, *Multi-Gaussian closure method for randomly excited non-linear systems*, Int. J. Non-Linear mechanics 33(2): 201-214.
- Frish, U., 1968, *Wave Propagation in Random Media*, J. of Probabilistic Methods in Applied Math., Vol.1, Bharucha-Reid, A.T. (ed.), Academic Press Inc., New York.
- Gardner, J.V., Myer, L.A., and, John, H., 1998, *The bathymetry of lake Tahoe, California-Nevada*, Cruise Report, Rv Island Surveyer, Cruise IS-98.
- Godin, O.A., and, Palmer, D.R., 2008, *History of Russian Underwater Acoustics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

- Howe, M.S., 1971, *Wave propagation in random Media*, J. Fluid Mech. 45(4):769-783.
- Ishimaru, A., 1978, *Wave Propagation and Scattering in Random Media, Volumes I,II*, Academic Press, New York.
- Jeffrey, A., and, Kawahara, T., 1982, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Pitman Advanced Publishing Program.
- Jensen, F.B, Kuperman, W.A., Porter, M.B., and, Schmidt, H., 1994, *Computational Ocean Acoustics*, AIP press, New York.
- Jones, C.D., and, Wolfson, M.A., 2006, *Acoustic Environment of the Haro Strai: Preliminary Propagation Modeling and Data Analysis*, Technical Memorandum, APL-UW TM 3-06, Applied Physics Laboratory, University of Washington.
- Karal, F.C., & Keller, J. B., 1964, *Elastic, electromagnetic and other waves in a random medium*, J. Math. Phys. 5(4): 537-547.
- Keller, J.B., 1964, *Stochastic Equations and wave propagation in random media*, Proceedings of the 16th Symposium in Applied Mathematics: 145-170
- Keller, J.B., 1969, *Accuracy and validity of the Born and Rytov approximations*, J. Opt. Soc. Am. 59: 1003–1004.
- Keller, J.B., 1977, *Survey of Wave Propagation and Underwater Acoustics*, Wave Propagation and Underwater Acoustics, Springer-Verlag, Berlin.
- Kevoorkian, J., Cole, J.D., 1996, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer, New York.
- Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B., Sanders, J.V., 1999, *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley and Sons, Inc.
- Klyatskin, V.I., 2005, *Stochastic Equations Through the Eye of the Physicist – Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations*, Elsevier.
- Linn, F.C., Fiddy, M.A., 1992, *The Born-Rytov controversy: I. Comparing analytical and approximate expressions for the one-dimensional deterministic case*, J. Opt. Soc. Am. A. 9(7): 1102-1110
- Linn, F.C., Fiddy, M.A., 1993, *Born-Rytov controversy. II. Applications to nonlinear and stochastic scattering problems in one-dimensional half-space media*, J. Opt. Soc. Am. A. 10(9): 1971-1983.
- McCoy, J.J, 1972, *Higher-Order Moments of the Inverse of a Linear Stochastic Operator*, Journal of the optical society of America, 62(1):30-40.
- Mei, C.C., and, Phil, J.H., 2002, *Localization of Nonlinear Dispersive Waves in Weakly Random Media*, Proc. R. Soc. Lond. A., 458(1):119-134.

- Mei, C.C., and, Hancock, M.J., 2003, *Weakly Nonlinear Surface Waves over a Random Seabed*, J. Fluid Mech., 475(1):247-268.
- Mei, C.C., 2006, *Multiple Scattering by an Extended Region of Inhomogeneities*, Lecture notes for the Lesson: Wave Propagation, 1.138J, 2.062J, 18.376J, MIT.
- Molyneux, J., E., 1968, *Analysis of "Dishonest" Methods in the Theory of Wave Propagation in a Random Medium*, Journal of the optical society of America, 58(7): 951-957
- Montagu, A., 1963, *The Dolphin in History – Papers delivered by Ashley Montagu and John C. Lilly at a symposium at the Clark Library, 13 October 1962*, William Andrews Clark Memorial Library, University of California, Los Angeles.
- Nair, B., White, B. S., 1991, *High-frequency wave propagation in random media - A unified approach*, SIAM Journal on Applied Mathematics 51(2): 374-411.
- Nayfeh, A.H., 1973, *Perturbation Methods*, Wiley-VCH Verlag.
- Nayfeh, A.H., 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons Inc.
- Obukhov, A.M., 1953, *Effect of weak inhomogeneities in the atmosphere on sound and light propagation*, Izv. Akad. Nauk Ser. Geofiz., 2:155-165
- Papanicolau, G., Keller, J.B., 1971, *Stochastic Differential Equations with Applications to Random Harmonic Oscillators and Wave Propagation in Random Media*, SIAM J. Appl. Math., 21(2):287-305
- Papoulis, A., 1965, *Probability Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo.
- Piperakis G.S., Skarsoulis E.K., Makrakis G.N, 2006, *Rytov approximation of tomographic receptions in weakly range-dependent ocean environments*, J. Acoust. Soc. Am. 120(1):120-134
- Roberts, J. B. and, Spanos, P. D., 1999, *Random Vibration and Statistical Linearization*. Chichester etc., John Wiley & Sons Inc.
- Rossing, T.D., (ed.), 2007, *Springer Handbook of Acoustics*, Springer Science and Business Media, LLC, New York.
- Rytov, S.M., 1937, *Diffraction of Light on Ultrasonic Waves*, Izv. AN SSSR, Ser. Fizika, 2(1), (in Russian)
- Rytov, S.M., 1966, *Introduction to Statistical Radiophysics*, Izd., Nauka, Moskow.
- Sachdev, P.L., 1987, *Nonlinear Diffusive Waves*, Cambridge University Press.
- Shapiro, S.A., and, Hubral, P., 1999, *Elastic Waves in Random Media – Fundamentals of Seismic Stratigraphic Filtering*, Lecture Notes in Earth Sciences, Springer-Verlag, Berlin.

Skorokhod, A.V., Hoppensteadt, F.C., and, Salehi, H., 2002, *Random Perturbation Methods with Applications in Science and Engineering*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 150, Springer-Verlag Inc., New York.

Sobczyk, K., 1985, *Stochastic Wave Propagation*, Fundamental Studies in Engineering 6, Elsevier, PWN – Polish Scientific Publishers.

Sobczyk, K., 1986, *Stochastic waves: The existing results and new problems*, Probabilistic Engng. Mech. 1(3):167-176.

Tatarski, V.I., 1961, *Wave Propagation in a Turbulent Medium*, McGraw-Hill.

Tatarskii, V.I., Ishimaru, A., and, Zavorotny V.U. (eds.), 1993, *Wave Propagation in Random Media WP in Random Media (scintillation)*, Invited Papers, University of Washington, Seattle.

Vallis, G.K., 2006, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics – Fundamentals and Large Scale Circulation*, Cambridge University Press.

Van Kampen, N.G., 1976, *Stochastic differential equations*, Physics Reports 24(3):171-228

Webb, J.F., Popper, A.N, Fay, R.R, (eds.), 2008, *Fish Bioacoustics*, Springer Handbook of Ausitory Research, Springer Science and Business Media, LLC.

Παραρτήματα

A. Υπολογισμός συνάρτησης *Green* για την εξίσωση *Helmholtz*.

Η εξίσωση του προβλήματος που θέλουμε να λύσουμε είναι η:

$$\frac{d^2}{dx^2}u_0(x) + k_0^2 u_0(x) = 0, \quad (\text{A1})$$

με το x να ανήκει στο (a, b) . Στα σύνορα a, b , απαιτούμε η λύση να είναι κύμα διαδιδόμενο προς το $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα.

Για να βρούμε τη συνάρτηση *Green* $G(x, y)$, διατυπώνουμε την αντίστοιχη εξίσωση:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, y) + k_0^2 G(x, y) = 0, \quad (\text{A2})$$

- Όταν $x < y$, έχουμε τη λύση:

$$G^-(x, y) = A \exp(-ik_0(x-y)) + B \exp(ik_0(x-y)), \quad (\text{A3a})$$

όπου θα απαιτήσουμε να ισχύει $B = 0$, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη στο $x = a$.

- Αντίστοιχα όταν $y < x$, έχουμε τη λύση:

$$G^+(x, y) = C \exp(-ik_0(x-y)) + D \exp(ik_0(x-y)), \quad (\text{A3b})$$

οπότε και θα απαιτήσουμε να ισχύει $C = 0$, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη στο $x = b$.

Στο σημείο $x = y$, απαιτούμε η συνάρτηση *Green* να είναι συνεχής, οπότε από τις (A3a,b), έχουμε ότι:

$$G^-(x, x) = G^+(x, x) \Leftrightarrow A \exp(-ik_0(x-x)) = D \exp(ik_0(x-x)) \Leftrightarrow \boxed{A = D},$$

δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} G^-(x, y) &= A \exp(-ik_0(x-y)), \\ G^+(x, y) &= A \exp(ik_0(x-y)). \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Προκειμένου η $G(x, y)$ να είναι συνεχής στο σημείο $x = y$, η παράγωγός της πρέπει να εμφανίζει ασυνέχεια στο ίδιο σημείο.

$$G^{+'}(x, x) - G^{-'}(x, x) = 1 . \quad (\text{A5})$$

Από τις (A4) υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\begin{aligned} G^{-'}(x, y) &= -ik_0 A \exp(-ik_0(x-y)), \\ G^{+'}(x, y) &= ik_0 A \exp(ik_0(x-y)), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

και κάνοντας της αντικατάσταση, βρίσκουμε:

$$ik_0 A + ik_0 A = 1 \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2ik_0} = -\frac{i}{2k_0}}. \quad (\text{A7})$$

Από τις (A4), (A7), έχουμε ότι:

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{i}{2k_0} \exp(ik_0(y-x)), & x < y \\ -\frac{i}{2k_0} \exp(ik_0(x-y)), & y < x \end{cases}$$

ή πιο συνοπτικά:

$$\boxed{G(x, y) = -\frac{i}{2k_0} \exp(ik_0 |x-y|)} \quad (\text{A8})$$

