Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Δ.Π.Μ.Σ. Υπολογιστικής Μηχανικής
Σχολη Μηχανολογων Μηχανικων
Μοναδα Παραλληλης Υπολογιστικης
Ρευστοδυναμικης & Βελτιστοποιησης

Συμβολή στη Μείωση του Κόστους των Μεθόδων Στιβαρού Αεροδυναμικού Σχεδιασμού μέσω της Συζυγούς Τεχνικής

Μεταπτυχιακή Εργασία
του

Νικόλαου Μαγουλά

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

2013

Συμβολή στη Μείωση του Κόστους των Μεθόδων Στιβαρού Αεροδυναμικού Σχεδιασμού μέσω της Συζυγούς Τεχνικής

Μεταπτυχιακή εργασία
του

Νικόλαου Μαγουλά

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

2013

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία επικεντρώνεται στο στιβαρό σχεδιασμό (robust design) αεροδυναμικών μορφών, δηλαδή στο σχεδιασμό - βελτιστοποίηση μορφών με ικανοποιητική απόδοση σε εύρος συνθηκών λειτουργίας. Επιλέγοντας ως διαδικασία βελτιστοποίησης μία μέθοδο βασισμένη στην κλίση της συνάρτησης στόχου, δηλαδή μία αιτιοκρατική μέθοδο (π.χ. τη μέθοδο της απότομης καθόδου) προκύπτει η απαίτηση για τον υπολογισμό έως και δεύτερων μικτών παραγώγων συναρτήσεων-στόχων αεροδυναμικών μορφών ως προς: (α) τις μεταβλητές σχεδιασμού που καθορίζουν την αεροδυναμική μορφή και (β) τις μεταβλητές περιβάλλοντος που καθορίζουν τις μη-σταθερές συνθήκες του προβλήματος ροής. Το υψηλό κόστος υπολογισμού αυτών των παραγώγων οδήγησε στην προσπάθεια μείωσης του υπολογιστικού κόστους.

Πιο συγκεκριμένα, στη λογική της ιδέας που διέπει τη μέθοδο των στατιστικών ροπών, υιοθετείται συνάρτηση-στόχος που εκφράζει αφενός μεν την αεροδυναμική απόδοση στις μέσες συνθήκες λειτουργίας, αφετέρου δε την απόκλιση της απόδοσης αυτής σε ενδεχόμενη αλλαγή των συνθηκών λειτουργίας (αλλαγή τιμών των μεταβλητών περιβάλλοντος). Αυτή η συνάρτηση-στόχος εμπεριέχει τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης (λ.χ. της οπισθέλκουσας) ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος.

Η χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου απαιτεί τη διαφόριση της παραπάνω συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Έτσι προκύπτει η ανάγκη υπολογισμού πρώτων και δεύτερων παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η εργασία εστιάζει στην εύρεση του οικονομικότερου τρόπου υπολογισμού όλων των απαραίτητων παραγώγων και στον προγραμματισμό της μεθόδου στιβαρού σχεδιασμού σε στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού. Για την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε μεμονωμένη αεροτομή.

Contribution in Reducing the Cost for Methods of Robust Aerodynamic Design using the Adjoint Technique

MSc Thesis
by

Nikolaos Magoulas

Supervisor: K.C. Giannakoglou
Professor NTUA

2013

Abstract

This MSc thesis focuses on the robust design of aerodynamic shapes, meaning the design of shapes with good/optimal performance in a range of operational conditions. The demand to calculate up to second-order mixed derivatives of the selected objective functions with respect to: (a) design variables (which determine the aerodynamic shape) and (b) variables determining flow operation conditions (enviromental variables) led to research which focused on the reduction in the computational cost.

In particular, a cost function based on the concept of the method of moments is introduced, which not only depicts the aerodynamic performance at the design or nominal point, but also the variation in performance when the operation conditions are changed. Then, the first- and second-order mixed sensitivity derivatives of the objective function are computed.

The thesis focuses firstly on the most cost-efficient way of calculating the required sensitivities and secondly on the programming of a robust design method for laminar flow of incompressible fluids. An application to the flow problems of an isolated airfoil is used to assess the method.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας Καθηγητή Ε.Μ.Π., κύριο Κυριάκο Γιαννάκογλου για το χρόνο που μου αφιέρωσε και τη δυνατότητα που μου έδωσε να εργαστώ σε ένα τόσο ενδιαφέρον και συναρπαστικό αντικείμενο.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο Διδάκτορα κύριο Ευάγγελο Παπουτσή για το χρόνο που μου αφιέρωσε, το ενδιαφέρον του και την πολύτιμη βοήθειά του.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Δρ. Δημήτρη Παπαδημητρίου και υποψήφιο Διδάκτορα Ιωάννη Καββαδία για τη βοήθεια που μου προσέφεραν.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Στιβαρός Σχεδιασμός 1

1.2 Λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε 3

1.3 Δομή της εργασίας 5

2 Στιβαρός σχεδιασμός για στρωτές ροές ασυμπίεστου ρευστού **7**

2.1 Εισαγωγικά Σχόλια 7

2.2 Η μέθοδος των Στατιστικών Ροπών 8

2.3 Εξισώσεις που διέπουν ασυμπίεστες και στρωτές ροές 9

2.4 Υπολογισμός πρώτης παραγώγου 10

2.4.1 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών 11

2.4.2 Αντικειμενικές συναρτήσεις 12

2.4.3 Διατύπωση των συνεχών συζυγών πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών 13

2.4.4 Συζυγείς οριακές συνθήκες 17

2.5 Τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας 21

2.5.1 Τελική έκφραση της πρώτης παραγώγου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού 21

2.5.2 Τελική έκφραση της πρώτης παραγώγου ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος 21

2.5.3 Τελική μορφή του συζυγούς προβλήματος 22

2.6 Υπολογισμός της δεύτερης μικτής παραγώγου 27

2.7 Ευθεία διαφόριση των εξισώσεων ροής 29

2.7.1 Το πεδίο μεταβλητών της ευθείας διαφόρισης 29

2.7.2 Οριακές συνθήκες του προβλήματος της ευθείας διαφόρισης . . 30

2.8 Ευθεία διαφόριση των συζυγών εξισώσεων 31

2.8.1 Το πεδίο των μεταβλητών AV-DD 31

2.8.2 Οριακές συνθήκες του προβλήματος AV-DD 32
2.8.3 Τελική μορφή του προβλήματος AV-DD 34
2.9 Τελική έκφραση της δεύτερης παραγώγου 35
2.9.1 Δύναμη αντίστασης 35
2.9.2 Συντελεστής αντίστασης 35
2.10 Υπολογιστικό κόστος της μεθόδου 37

3 Εφαρμογή - Πιστοποίηση των παραγώγων 39
3.1 Εισαγωγικά σχόλια 39
3.2 Παράμετροι εφαρμογής και συνθήκες ροής 40
3.3 Γένεση του πλέγματος και επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα . . 40
3.4 Η πρώτη παράγωγος 43
3.4.1 Το συζυγές πρόβλημα 43
3.4.2 Πιστοποίηση αποτελεσμάτων 43
3.5 Η δεύτερη παράγωγος 47
3.5.1 Η ευθεία διαφόριση του ευθέος προβλήματος 47
3.5.2 Η ευθεία διαφόριση του συζυγούς προβλήματος 49
3.5.3 Πιστοποίηση αποτελεσμάτων 49

4 Συμπεράσματα - Σχόλια 53

Α΄ Υπολογισμός παραγώγων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών 55

Β΄ Υπολογισμός των παραγώγων χωρικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων 57
Β΄.1 Παραγώγιση μονοδιάστατου ολοκληρώματος 57
Β΄.2 Παραγώγιση χωρικού ολοκληρώματος 58
Β΄.3 Παραγώγιση επιφανειακού ολοκληρώματος 58

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στιβαρός Σχεδιασμός

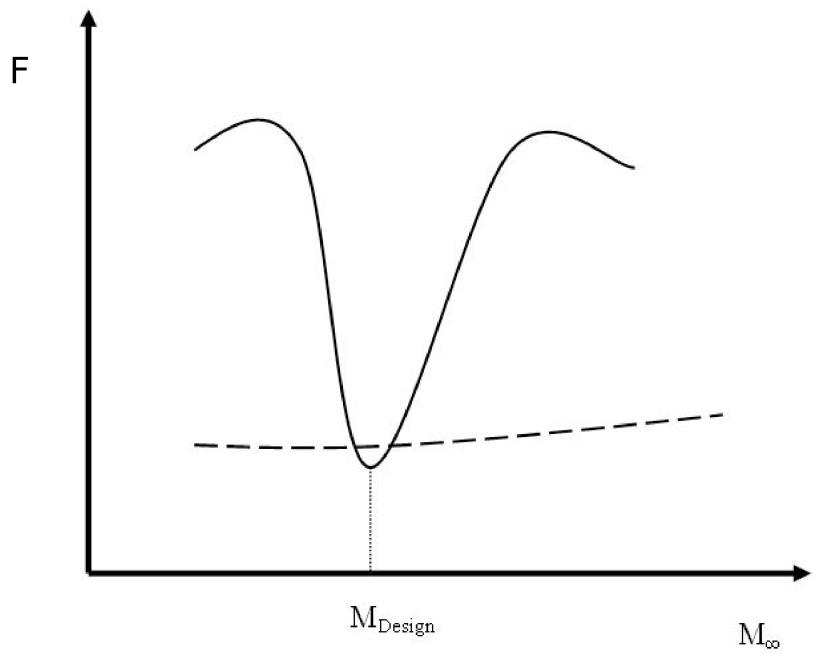
Τον τελευταίο καιρό υπάρχει έντονο ενδιαφέρον στο μηχανολογικό χώρο για το σχεδιασμό αεροδυναμικών ή υδροδυναμικών μορφών που να αποδίδουν ικανοποιητικά, όχι μόνο στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας, αλλά και σε ένα εύρος συνθηκών λειτουργίας. Η διαδικασία εύρεσης τέτοιων μορφών ονομάζεται **στιβαρός σχεδιασμός (robust design)**.

Ο στιβαρός σχεδιασμός έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορους τύπους προβλημάτων. Ενδεικτικά αναφέρονται προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού αεροτομών [17], [18], [20], [21] αλλά και προβλήματα δομικού σχεδιασμού πτερύγων [19]. Η κύρια μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση της συνάρτησης-κόστους του προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού είναι η μέθοδος του Six Sigma Design. Γίνεται δηλαδή η παραδοχή της κανονικής κατανομής των μεταβλητών που καθορίζουν τις συνθήκες λειτουργίας **(μεταβλητές περιβάλλοντος - enviromental variables)**. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται η μεταβλητότητα της απόδοσης της αεροδυναμικής μορφής σε ενδεχόμενη μεταβολή των μεταβλητών περιβάλλοντος. Μερικά παραδείγματα μεταβλητών περιβάλλοντος, σε προβλήματα αεροτομών, είναι ο αριθμός Mach και η γωνία της επ΄ άπειρο ροής. Έπειτα από τη διατύπωση της συνάρτησης-κόστους του προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού, συνήθως χρησιμοποιείται κάποια στοχαστική μέθοδος (εξελικτικοί αλγόριθμοι [18], [20], [21], μέθοδος Monte Carlo [17], [19], νευρωνικά δίκτυα [17], μεταπρότυπα , surrogate models [19], polynomial chaos [24]) για την ελαχιστοποίησή της. Αντίθετα, στην παρούσα διπλωματική εργασία θα εφαρμοστεί η αιτιοκρατική μέθοδος των στατιστικών ροπών (method of moments) με σκοπό την ελάττωση του υπολογιστικού κόστους. Αυτό αποτελεί στοιχείο πρωτοτυπίας της παρούσας εργασίας.

Αν F είναι η **αντικειμενική συνάρτηση** κλασικού προβλήματος βελτιστοποίησης (λ.χ. ο συντελεστής απωλειών C_D ή ο λόγος του συντελεστή απωλειών προς το συντελεστή άνωσης $\frac{C_D}{C_L}$, αν αναφερόμαστε σε αεροτομή ή οι απώλειες ολικής πίεσης όταν αναφερόμαστε σε αγωγό), ορίζεται η τροποποιημένη **συνάρτηση-στόχος** $\hat{F}$ του προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού ως εξής

$$\hat{F} = \omega_1 \mu_F + \omega_2 \sigma_F \tag{1.1}$$

όπου μ_F η μέση εκτιμώμενη τιμή της συνάρτησης F και σ_F η μεταβλητότητα της F γύρω από τη μέση εκτιμώμενη τιμή της. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η συνάρτηση $\hat{F}$ εκφράζει τη μέση απόδοση της F αλλά και τη μεταβλητότητά της σε ενδεχόμενη αλλαγή τιμών των μεταβλητών περιβάλλοντος. Η επιλογή της $\hat{F}$ έγινε με βάση την ιδέα του Six Sigma Design και τις προτάσεις της βιβλιογραφίας [17] για τα προβλήματα στιβαρού σχεδιασμού.



Σχήμα 1.1: Ενδεικτική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης (από εργασία [2]) για λ.χ. αεροτομή που προέκυψε από διαδικασία κλασικής βελτιστοποίησης (συνεχής γραμμή) και για μία άλλη αεροτομή που προέκυψε από εφαρμογή μεθόδου στιβαρού σχεδιασμού (διακεκομμένη γραμμή).

Αναλυτικές εκφράσεις των μεγεθών μ_F, σ_F θα δοθούν στο Κεφάλαιο 2. Όπως θα γίνει εμφανές με βάση την προσέγγιση που θα επιλεγεί, οι εκφράσεις αυτές εξαρτώνται

από τις τιμές των πρώτων παραγώγων της συνάρτησης F ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος. Συνεπώς, για να εφαρμοστεί η μέθοδος της απότομης καθόδου για την επίλυση του προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πρώτων παραγώγων της F ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος καθώς και ο υπολογισμός των παραγώγων αυτών ως προς τις μεταβλητές που ελέγχουν τη γεωμετρία της αεροδυναμικής μορφής (μεταβλητές σχεδιασμού). Οι παράγωγοι της συνάρτησης F ως προς τους συνδυασμούς των μεταβλητών περιβάλλοντος και των μεταβλητών σχεδιασμού θα ονομάζονται **μικτές** παράγωγοι. Πιο συγκεκριμένα, η μικτή παράγωγος που απαιτείται για την εφαρμογή της μεθόδου της απότομης καθόδου είναι η μικτή δεύτερη παράγωγος της F ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος και τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Μεγάλη έμφαση θα δοθεί στην εύρεση του οικονομικότερου τρόπου για τον υπολογισμό των ανωτέρω παραγώγων μιας και λόγω της τάξης τους, αλλά και του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού (σε πραγματικό πρόβλημα ενδέχεται να είναι και τριψήφιος αριθμός) το υπολογιστικό κόστος μπορεί να αυξηθεί σημαντικά. Συγκεκριμένα, η προτεινόμενη μέθοδος θα εκμεταλλευτεί το γεγονός της εμφάνισης εσωτερικών γινομένων μεταξύ των πινάκων των παραγώγων δεύτερης τάξης και διανυσμάτων, ώστε να γίνει απευθείας ο υπολογισμός του γινομένου και να αποφευχθεί ο ξεχωριστός υπολογισμός των πινάκων των οποίων το υπολογιστικό κόστος είναι κατά μία τάξη μεγαλύτερο.

1.2 Λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε - Επέκταση και δημιουργία νέου

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία χρησιμοποιήθηκε και επεκτάθηκε κώδικας αναπτυγμένος στο περιβάλλον του OpenFOAM. Το λογισμικό αυτό είναι γραμμένο στη γλώσσα προγραμματισμού C++ και η αντικειμενοστραφής λογική ανάπτυξής του βοηθάει στη γρήγορη συγγραφή κώδικα για την επίλυση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αυτό το πλεονέκτημα του περιβάλλοντος OpenFOAM σε συνδυασμό με τη χρήση της συνεχούς διατύπωσης των μεθόδων ευθείας διαφόρισης και συζυγούς τεχνικής οδήγησε στην επιλογή της χρησιμοποίησής του για τις ανάγκες της εργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, προϋπάρχον λογισμικό χρησιμοποιήθηκε για:

- Τη γένεση διδιάστατου πλέγματος αεροτομής (το μοναδικό τμήμα του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε το οποίο δε βασίζεται στο OpenFOAM, αλλά σε λογισμικό που ανεπτύχθηκε στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και

Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ).

- Την επίλυση των Navier-Stokes εξισώσεων στρωτής ροής για ασυμπίεστο ρευστό. Ο αλγόριθμος επίλυσης που επιλέχθηκε είναι ο Simple ενώ ο επιλύτης (solver) του OpenFOAM που επιλύει σύμφωνα με αυτόν τον αλγόριθμο είναι ο simpleFoam.

- Την επίλυση των συζυγών εξισώσεων που αντιστοιχούν στις εξισώσεις Navier-Stokes στρωτής ροής για ασυμπίεστο ρευστό. Ο αλγόριθμος επίλυσης είναι επίσης ο Simple.

- Την παραμετροποίηση της επιφάνειας της αεροτομής χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bezier-Bernstein.

- Τον υπολογισμό του διανύσματος της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των πολυωνύμων Bezier-Bernstein, μέσω της συζυγούς μεθόδου.

- Τον υπολογισμό του διανύσματος της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των πολυωνύμων Bezier-Bernstein με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με στόχο την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων της συζυγούς μεθόδου.

Το ανωτέρω λογισμικό επεκτάθηκε για:

- Τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος στην είσοδο του πεδίου ροής.

- Την επίλυση των εξισώσεων της ευθείας διαφόρισης (DD) της ροής του ρευστού. Προγραμματίστηκαν οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες που περιλαμβάνουν τις τιμές των πρώτων παραγώγων και την τυπική απόκλιση των μεταβλητών σχεδιασμού.

- Την επίλυση των εξισώσεων της ευθείας διαφόρισης των συζυγών εξισώσεων (το σχήμα που αργότερα θα ορισθεί ως AV-DD). Αντίστοιχα προγραμματίστηκαν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες του προβλήματος.

- Τον υπολογισμό της δεύτερης μικτής παραγώγου, ύστερα από τη διαφόριση της έκφρασης της πρώτης παραγώγου όπως αυτή προέκυψε από τη συζυγή ανάλυση.

1.3 Δομή της εργασίας

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία επικεντρώνεται στο στιβαρό σχεδιασμό **πρώτης τάξης ακρίβειας** σε συνεχή μορφή (που σημαίνει ότι οι παράγωγοι που εμφανίζονται είναι έως πρώτης τάξης ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος και οι μικτές έως δεύτερης τάξης), όπου έγινε και η πιστοποίηση της μεθόδου με εφαρμογή. Συγκεκριμένα η δομή της εργασίας έχει ως εξής

- Κεφάλαιο 2
  Αναλύεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για τις εξισώσεις Navier-Stokes σε στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού και αναπτύσσεται η έκφραση της παραγώγου για τις μεταβλητές σχεδιασμού και περιβάλλοντος. Στη συνέχεια παράγεται η έκφραση της δεύτερης μικτής παραγώγου και αναπτύσσονται οι κατάλληλες εξισώσεις για να υπολογιστούν τα άγνωστα μεγέθη που εμφανίζονται σ΄ αυτή, ενώ γίνεται εφαρμογή των εξισώσεων και των παραγώγων που αναπτύσσονται στο κεφάλαιο για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις.

- Κεφάλαιο 3
  Πιστοποιούνται τα αποτελέσματα της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2. Συγκεκριμένα, πιστοποιείται η ακρίβεια της πρώτης παραγώγου τόσο ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού όσο ως προς τις περιβάλλοντος και, στη συνέχεια, πιστοποιούνται τα αποτελέσματα της δεύτερης μικτής παραγώγου.

- Κεφάλαιο 4
  Παρουσιάζεται ανακεφαλαίωση της δουλειάς που έγινε σε αυτή τη μεταπτυχιακή εργασία και σύνοψη των αποτελεσμάτων της. Τέλος, γίνονται προτάσεις για μελλοντική εργασία πάνω στο ίδιο αντικείμενο.

Κεφάλαιο 2

Στιβαρός σχεδιασμός με τη χρήση συνεχών μέθοδων για στρωτές ροές ασυμπίεστου ρευστού

2.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί αναλυτικά ο τρόπος εύρεσης των απαραίτητων μεγεθών για στιβαρό σχεδιασμό χρησιμοποιώντας σε συνεχή μορφή τη μέθοδο της **ευθείας διαφόρισης (Direct Differentiation method- DD)** και τη **συζυγή τεχνική (Adjoint Variables method - AV)**.

Αρχικά, θα γίνει μία σύντομη παρουσίαση της μεθόδου στιβαρού σχεδιασμού που μελετάται σ΄ αυτήν την εργασία, η οποία είναι βασισμένη στη μέθοδο των στατιστικών ροπών πρώτης-τάξης ακρίβειας. Από την ανάλυση αυτή γίνεται φανερό ποιες είναι οι απαραίτητες παράγωγοι της συνάρτησης-στόχου που πρέπει να υπολογιστούν για να εφαρμοστεί η μέθοδος.

Συγκεκριμένα, θα βρεθεί η έκφραση της πρώτης παραγώγου μέσω της συζυγούς τεχνικής για αλλαγές της γεωμετρίας των στερεών τοιχωμάτων (μεταβλητές σχεδιασμού $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$), αλλά και για μεταβολές των συνοριακών συνθηκών στην είσοδο (μεταβλητές περιβάλλοντος $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_M)$), όπως είναι η γωνία εισόδου της αδιατάρακτης ροής ή το μέτρο της ταχύτητας της ροής.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η διαφόριση της πρώτης παραγώγου, ώστε να βρεθεί η δεύτερη μικτή παράγωγος. Αυτή η δεύτερη παράγωγος απαιτεί την επίλυση δύο ακόμα συστημάτων εξισώσεων, την ευθεία διαφόριση των εξισώσεων ροής DD καθώς και την ευθεία διαφόριση των συζυγών εξισώσεων AV-DD. Με την εύρεση της δεύτερης μικτής

παραγώγου γίνονται πλέον γνωστά όλα τα μεγέθη ώστε να γίνει εφικτός ο στιβαρός σχεδιασμός με ,λ.χ., τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

2.2 Στιβαρός Σχεδιασμός - Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών

Για να γίνει ο στιβαρός σχεδιασμός απαιτείται να οριστεί μία κατάλληλη **συνάρτηση-στόχος** $\hat{F}$, η οποία θα είναι η

$$\hat{F} = \omega_1 \mu_F + \omega_2 \sigma_F \tag{2.1}$$

όπου F είναι η **αντικειμενική συνάρτηση** κλασικής βελτιστοποίησης (όπως η δύναμη αντίστασης F_D ή ο συντελεστής αντίστασης C_D), μ_F είναι η μέση τιμή της συνάρτησης-στόχου σε ένα εύρος λειτουργίας και σ_F η τυπική απόκλισή της. Γράφοντας την αντικειμενική συνάρτηση σε ανάπτυγμα Taylor πρώτης-τάξης, τα μ_F και σ_F δίνονται ως

$$\mu_F \;=\; F, \quad \sigma_F \;=\; \sqrt{\left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu}\right]^2 \sigma_\mu^2} \tag{2.2}$$

όπου για τον (επαναλαμβανόμενο) δείκτη ισχύει ότι $\mu = 1, ..., M$. Η τυπική απόκλιση σ_μ αφορά το εύρος μεταβολής της μεταβλητής περιβάλλοντος c_μ και είναι γνωστό από τις συνθήκες τους προβλήματος.

Έχοντας επιλέξει ως μέθοδο βελτιστοποίησης τη μέθοδο της απότομης καθόδου, πρέπει να υπολογιστεί η κλίση της συνάρτησης-στόχου του στιβαρού σχεδιασμού. Η παράγωγος αυτή μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.1 και 2.2 και παραγωγίζοντας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_m,

$$\frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} \;=\; \omega_1 \left(\frac{\delta F}{\delta b_m}\right) + \omega_2 \left(\frac{\frac{\delta F}{\delta c_\mu}\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m}\sigma_\mu^2}{\sqrt{\left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu}\right]^2 \sigma_\mu^2}}\right) \tag{2.3}$$

Έτσι, για να υπολογιστεί η παράγωγος πρέπει να είναι γνωστές οι ακόλουθες ποσότητες

$$\frac{\delta F}{\delta b_m}, \quad \left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu}\right]^2 \sigma_\mu^2, \quad \frac{\delta F}{\delta c_\mu}\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m}\sigma_\mu^2 \tag{2.4}$$

Από τα παραπάνω άγνωστα μεγέθη, τα $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ και $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ μπορούν να υπολογιστούν απευθείας

μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Μελετώντας τον όρο $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m}\sigma_\mu^2$ παρατηρούμε ότι αποτελείται από την άθροιση των γινομένων της πρώτης, δεύτερης μικτής παραγώγου και της διασποράς των αντίστοιχων μεταβλητών. Για να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, ορίζεται το βοηθητικό διάνυσμα r_μ σύμφωνα με τη σχέση

$$r_\mu = \left\langle \frac{\delta F}{\delta c_\mu}\sigma_\mu^2 \right\rangle \tag{2.5}$$

(χωρίς να εφαρμόζεται η άθροιση όταν εμφανίζονται οι αγκύλες $\langle\rangle$). Στη συνέχεια, προβάλλεται το διάνυσμα r_μ πάνω στη δεύτερη μικτή παράγωγο και τελικά ο επιθυμητός όρος γίνεται

$$\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m}\frac{\delta F}{\delta c_\mu}\sigma_\mu^2 = \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} r_\mu \tag{2.6}$$

Ο υπολογισμός του όρου $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m}$ θα γίνει μέσω της παραγώγισης της σχέσης που εκφράζει την πρώτη παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αυτή προκύπτει από τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Με αυτό τον τρόπο γίνονται γνωστά όλα τα απαραίτητα μεγέθη για να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης-στόχου του στιβαρού σχεδιασμού, $\frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m}$, και μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της απότομης καθόδου.

2.3 Εξισώσεις που διέπουν ασυμπίεστες και στρωτές ροές

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ασχολείται αποκλειστικά με τη στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού. Οι εξισώσεις που διέπουν τέτοια προβλήματα ροής είναι οι εξισώσεις Navier Stokes για ασυμπίεστο ρευστό και αναφέρονται παρακάτω σε τανυστική γραφή για δύο ή τρεις διαστάσεις

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.7α'}$$

$$R_i^v = v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2\,(, 3) \tag{2.7β'}$$

όπου με v_i συμβολίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας, p η πίεση και ν η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού που θεωρείται σταθερή. Ως διάνυσμα των μεταβλητών ροής θεωρείται το $\mathbf{U} = [p, v_i]^T$ ενώ για τα υπόλοιπα των (διακριτοποιημένων) εξισώσεων ροής ισχύει $R_1^{\mathrm{U}} = R^p$ και $R_{i+1}^{\mathrm{U}} = R_i^v$.

Οι οριακές συνθήκες που συμπληρώνουν το σύστημα των εξισώσεων είναι Dirichlet για την ταχύτητα και την πίεση στο επ΄ άπειρο όριο, δηλαδή

$$v_i = v_{0i} \tag{2.8α΄}$$

$$p = 0 \tag{2.8β΄}$$

ενώ στα στερεά τοιχώματα εφαρμόζεται μηδενική συνθήκη Dirichlet για την ταχύτητα (συνθήκη μη-ολίσθησης) και μηδενική Neumann για την πίεση, δηλαδή

$$v_i = 0 \tag{2.9α΄}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0 \tag{2.9β΄}$$

2.4 Υπολογισμός πρώτης παραγώγου - Η συνεχής συζυγής μέθοδος

Υπάρχουν πολλοί τρόποι υπολογισμού των παραγώγων συναρτήσεων-στόχου είτε για παράδειγμα με πεπερασμένες διαφορές είτε με τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων [6], [7] είτε με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης. Ωστόσο, η ανάπτυξη μεθόδων οι οποίες στηρίζονται στη θεωρία ελέγχου επιτρέπουν τον υπολογισμό των απαραίτητων παραγώγων με σημαντικά μικρότερο υπολογιστικό κόστος (CPU cost), μιας και το κόστος υπολογισμού είναι πρακτικά ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών ως προς τις οποίες γίνεται η παραγώγιση. Οι μέθοδοι αυτές αποκαλούνται **συζυγείς (adjoint - AV)**.

Οι συζυγείς μέθοδοι είναι δύο ειδών, η διακριτή συζυγής μέθοδος (discrete adjoint method) [4], [10], [11] και η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method) [3]. Από τη μία πλευρά, χρησιμοποιείται η διακριτή συζυγής μέθοδος, με βάση την οποία διακριτοποιούνται οι εξισώσεις ροής και στη συνέχεια διαμορφώνεται απευθείας το συζυγές πρόβλημα σε διακριτοποιημένη μορφή. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται ξεκάθαρο ότι στη διακριτή συζυγή μέθοδο η βάση της όλης ανάπτυξης είναι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής. Κατά τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μέθοδος, οι συζυγείς εξισώσεις διαμορφώνονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις της ροής σε διαφορική μορφή και έπειτα διακριτοποιούνται προκειμένου να επιλυθούν αριθμητικά, ενώ ουσιαστικό είναι το γεγονός ότι η προκύπτουσα συζυγής εξίσωση δεν εξαρτάται άμεσα από τη διακριτοποίηση του ευθέος προβλήματος [12], [13], [14], [15], [16]. Για αυτή

τη μεταπτυχιακή εργασία επιλέχθηκε η χρήση της συνεχούς διατύπωσης της συζυγούς μεθόδου.

Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της μεθόδου είναι να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, οι οποίες εκφράζουν τις μεταβολές της αντικειμενικής συνάρτησης F ως προς ενδεχόμενες μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού b_m. Αντίστοιχα, μπορούν να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ των μεταβλητών περιβάλλοντος c_μ, στην περίπτωση που γίνεται στιβαρός σχεδιασμός.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής μεθόδος για ασυμπίεστες και στρωτές ροές, σύμφωνα με την ανάπτυξη που έχει γίνει στη διδακτορική εργασία [3], στην οποία η μέθοδος αποτελεί αντικείμενο λεπτομερούς ανάλυσης.

2.4.1 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών

Αφετηρία για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος αποτελεί η διατύπωση της επαυξημένης συνάρτησης, F_{aug}. Αυτή δημιουργείται με την πρόσθεση στην αντικειμενική συνάρτηση των εξισώσεων ροής πολλαπλασιασμένων με τους πολλαπλασιαστές Lagrange. Έτσι αυτή είναι,

$$F_{aug} = F + \int_\Omega \Psi_l R_l^{\mathrm{U}} d\Omega \tag{2.10}$$

όπου το $\mathbf{\Psi} = [q, u_i]^T$ είναι το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών, με q τη συζυγή πίεση και u_i τις συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας αντιστοίχως ενώ $R^{\mathbf{U}}$ είναι τα υπόλοιπα των εξισώσεων ροής ή κατάστασης (τα οποία είναι μηδέν αφού ικανοποιούνε τις εξισώσεις κατάστασης και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες). Η έκφραση 2.10 μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως

$$F_{aug} = F + \int_\Omega q R^p d\Omega + \int_\Omega u_i R_i^v d\Omega \tag{2.11}$$

Δεδομένου ότι τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της εξίσωσης 2.11 είναι εξ' ορισμού μηδενικά, αντί της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, μπορεί να υπολογίστεί η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ ως

$$\frac{\delta F_{auf}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \frac{\delta}{\delta b_m} \int_\Omega q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_m} \int_\Omega u_i R_i^v d\Omega \tag{2.12}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds για την παραγώγιση χωρικού ολοκληρώματος (Παράρτημα Β') η σχέση 2.12 καταλήγει σε

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_\Omega q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_\Omega u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_S \left(qR^p + u_i R_i^v\right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \tag{2.13}$$

όπου S είναι το όριο του χωρίου της ροής ($S = \partial\Omega$). Να σημειωθεί ότι για την εύρεση της παραγώγου $\frac{\delta F_{aug}}{\delta c_\mu}$ μέσω της συζυγούς μεθόδου ακολουθείται ακριβώς η ίδια διαδικασία. Έτσι, στα επόμενα, στη θέση της μεταβλητής b_m μπορεί να βρίσκεται και η μεταβλητή c_μ, χωρίς να απαιτείται κάποια διαφορετική μεταχείριση.

2.4.2 Αντικειμενικές συναρτήσεις

Στη γενικότερη περίπτωση, μία αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αποτελείται από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στο εσωτερικό του χωρίου ροής Ω, αλλά και στο σύνορο S του χωρίου ροής, έχοντας τη μορφή

$$F = \int_\Omega F_\Omega d\Omega + \int_S F_S dS \tag{2.14}$$

Η παράγωγος ευαισθησίας για το χωρικό ολοκλήρωμα της αντικειμενικής συνάρτησης 2.14, εφαρμόζοντας και πάλι το Θεώρημα Reynolds, είναι

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \int_\Omega F_\Omega d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} d\Omega + \int_S F_\Omega \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \tag{2.15}$$

Η διαφόριση της αντικειμενικής συνάρτησης που είναι ορισμένη πάνω στο όριο S, σύμφωνα με αυτά που αναφέρονται στο Παράρτημα Β′ για την παραγώγιση επιφανειακού ολοκληρώματος, είναι

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \int_S F_S dS = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \tag{2.16}$$

και, τελικά, η διαφόριση της αντικειμενικής συνάρτησης καταλήγει σε

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} d\Omega + \int_S F_\Omega \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ & + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \end{aligned} \tag{2.17}$$

ενώ οι μεταβολές $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial b_m} + \widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}} \tag{2.18α'}$$

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial b_m} + \widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial b_m}} \tag{2.18β'}$$

όπου $\widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial b_m}}$ και $\widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}}$ είναι οι άμεσες μεταβολές της αντικειμενικής συνάρτησης από τις μεταβλητές σχεδιασμού ή περιβάλλοντος (συνήθως είναι μηδενικές για τις μεταβλητές σχεδιασμού). Συνοψίζοντας η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta b_m} &= \int_\Omega \widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}} d\Omega + \int_S \widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial b_m}} dS \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial b_m}\right) d\Omega \\ &+ \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial b_m}\right) dS \\ &+ \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS\end{aligned} \tag{2.19}$$

Η αντικατάσταση των εξισώσεων 2.18 στην εξίσωση 2.17 έγινε με στόχο την ομαδοποίηση όρων που θα εμφανιστούν αργότερα στην παραγωγή των συζυγών εξισώσεων, των οριακών συνθηκών και της τελικής έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας.

2.4.3 Διατύπωση των συνεχών συζυγών πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών

Στη διατύπωση της μεταβολής της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης (2.13), εμφανίζονται οι ποσότητες $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial R^p}{\partial b_m}$. Για τις περιπτώσεις των ροών που μελετώνται εδώ, αυτές είναι

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m}\right) \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = \frac{\partial v_j}{\partial b_m}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial b_m}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m}\right)\right]$$
$$i = 1, 2\,(, 3) \tag{2.21}$$

Στην εξίσωση 2.21 δεν εμφανίζεται ο όρος $\frac{\partial \nu}{\partial b_m}$, αφού η κινηματική συνεκτικότητα ν είναι σταθερή σε όλο το πεδίο της ροής και δεν μεταβάλλεται.

Στόχος είναι οι όροι της εξίσωσης 2.13 να παραγοντοποιηθούν και να γραφούν ως γινόμενα των άγνωστων ποσοτήτων $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$, ώστε αυτές οι ποσότητες να απαλειφθούν αργότερα. Έτσι το ολοκλήρωμα $\int_\Omega q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega$ της εξίσωσης 2.13, με βάση την εξίσωση 2.20, και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green-Gauss γίνεται

$$\int_\Omega q \frac{\partial}{\partial b_m}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) d\Omega = \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_j dS - \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \tag{2.22}$$

Αντίστοιχα, για το άλλο ολοκλήρωμα της 2.13, $\int_\Omega u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega$, η εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss σε κάθε όρο δίνει,

$$\int_\Omega u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right) d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_\Omega \frac{\partial\left(u_i v_j\right)}{\partial x_j}\left(u_i v_j\right)\frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \tag{2.23}$$

$$\int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial b_m}\right) d\Omega = \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_\Omega \frac{\partial ui}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right)\right] d\Omega &= -\int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right) n_j dS + \int_\Omega \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right) d\Omega \\ &= -\int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m}\right) n_j dS + \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \\ &\quad - \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ομοίως

$$-\int_\Omega \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m}\right)\right] d\Omega = -\int_S \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m}\right) n_j dS + \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_i dS - \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \tag{2.26}$$

Από τον πρώτο όρο της εξίσωσης 2.21, $\frac{\partial v_j}{\partial b_m}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, θα εμφανίστει το ολοκλήρωμα του όρου $u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial b_m}$ ο οποίος είναι ήδη γραμμένος ως γινόμενο της άγνωστης ποσότητας $\frac{\partial v_j}{\partial b_m}$ και έτσι δεν θα χρειαστεί να γίνουν περαιτέρω πράξεις. Ακόμα, το χωρικό ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.23 γράφεται ως

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i v_j)\frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j} u_i \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \tag{2.27}$$

Όμως, το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι μηδέν, αφού σύμφωνα με την εξίσωση 2.7α΄ (εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό) ο όρος $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$ είναι μηδενικός. Αντικαθιστώντας όλες τις προηγούμενες σχέσεις στην εξίσωση 2.13 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} =& \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_S \left[u_i v_j n_j + \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_j - q n_i\right]\frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\ &- \int_S \nu \frac{\partial}{\partial b_m}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) n_j u_i dS \\ &+ \int_\Omega \left[-v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial q}{\partial x_i}\right]\frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\ &+ \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS\end{aligned} \tag{2.28}$$

και αντικαθιστώντας τη γενική έκφραση της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, σχέση 2.19, η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης λαμβάνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_S \left[u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& + \int_\Omega \left[-v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS + \int_\Omega \left(-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \\
& - \int_S \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_\Omega \widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}} d\Omega + \int_S \widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial b_m}} dS
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

Με αυτόν τον τρόπο γράφτηκε η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτώμενη (α) των αγνώστων μεταβολών $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ στο εσωτερικό αλλά και στα όρια του χωρίου ροής και (β) των γνωστών μεταβολών $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ στα όρια του χωρίου ροής. Οι συντελεστές με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι μεταβολές των ροϊκών ποσοτήτων αποτελούνται από το ροϊκο πεδίο (που είναι γνωστό) και το συζυγές πεδίο (που θα βρεθεί από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων). Ακόμα, εμφανίζονται οι όροι που περιέχουν την άμεση εξάρτηση της αντικειμενικής συνάρτησης από τις μεταβλητές σχεδιασμού (ή και περιβάλλοντος), που είναι γνωστοί.

Απαλείφοντας τα ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τις μεταβολές των ροϊκών μεγεθών στην εξίσωση 2.29 επιτυγχάνεται η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας να συναρτάται μόνο των μεταβολών των γεωμετρικών ποσοτήτων στα όρια του πεδίου. Αυτό καθιστά πολύ γρήγορο τον υπολογισμό της παραγώγου.

Οι πεδιακές εξισώσεις που πρέπει να λυθούν για να βρεθεί το συζυγές πεδίο, προκύπτουν από την απαλοιφή των χωρικών ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στην 2.29. Έτσι, οι συζυγείς εξισώσεις είναι

$$
R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} = 0 \tag{2.30}
$$

$$
R_i^u = -v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, 2\,(, 3) \tag{2.31}
$$

Ικανοποιώντας τις συζυγείς εξισώσεις η έκφραση της παραγώγου απλοποιείται σε

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_S \left[u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& + \int_S \left(u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_S \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\
& + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_S \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_\Omega \frac{\widetilde{\partial F_\Omega}}{\partial b_m} d\Omega + \int_S \frac{\widetilde{\partial F_S}}{\partial b_m} dS
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Το κόστος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων είναι περίπου το ίδιο με αυτό του προβλήματος ροής μιας και πρόκειται για εξισώσεις αντίστοιχης πολυπλοκότητας με αυτές των καταστατικών εξισώσεων. Το μεγάλο πλεονέκτημα όμως της μεθόδου σε σύγκριση με άλλες μεθόδους υπολογισμού της παραγώγου (όπως ευθεία διαφόριση ή πεπερασμένες διαφορές) είναι ότι το κόστος της είναι ανεξάρτητο των N μεταβλητών σχεδιασμού καθώς η επίλυση των συζυγών εξισώσεων και οι οριακές συνθήκες (όπως θα γίνει εμφανές στη συνέχεια) εξαρτώνται μόνο από το ροϊκό πεδίο που είναι ήδη γνωστό και όχι από τις μεταβολές μεγεθών που προκαλούν οι μεταβλητές σχεδιασμού. Επιπλέον για την εύρεση της παραγώγου, το κόστος υπολογισμού των επιφανειακών ολοκληρωμάτων και των μεταβολών $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ είναι αμελητέο μπροστά στο κόστος της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων ροης. Έτσι, με μία μόλις ισοδύναμη επίλυση ροής (IEP) υπολογίζονται οι τιμές των διανυσμάτων της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης.

Για την τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας, πρέπει να εξαχθούν και οι συζυγείς οριακές συνθήκες όπως περιγράφεται παρακάτω.

2.4.4 Συζυγείς οριακές συνθήκες

Για να βρεθούνε οι οριακές συνθήκες στο επ΄ άπειρο όριο, θα γίνει ο διαχωρισμός του ορίου σε δύο μικρότερα: (α) σε εκείνα τα μέρη του ορίου όπου υπάρχει είσοδος ρευστού στο πεδίο ροής και θα ονομάζονται **όρια εισόδου** και (β) σε εκείνα τα μέρη του ορίου όπου το ρευστό απομακρύνεται από πεδίο ροής και θα ονομάζονται **όρια εξόδου**.

Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εισόδου

Στα όρια εισόδου S_I του ρευστού στο χωρίο ισχύει ότι $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$. Επομένως όλα τα ολοκληρώματα της παραγώγου που εξαρτώνται από τις γεωμετρικές μεταβολές του προ-

βλήματος απαλείφονται από την έκφραση 2.32. Από τα ολοκληρώματα που απομένουν, αυτό που περιλαμβάνει τον όρο $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ απαλείφεται, αφού οι μεταβλητές σχεδιασμού b_m αφορούν μόνο στη γεωμετρία και όχι τις οριακές συνθήκες, λ.χ. της ροής (δηλαδή $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$). Στο στιβαρό σχεδιασμό όμως, αυτός ο όρος μπορεί να μην είναι μηδενικός για κάποιες από τις μεταβλητές περιβάλλοντος c_μ. Σε αυτήν την περίπτωση συνεισφέρει κανονικά το ολοκλήρωμα στην παράγωγο, αφού είναι γνωστός και ο όρος $\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}$. Σε κάθε περίπτωση, απομένουν δύο άγνωστα ολοκληρώματα, τα οποία είναι

$$-\int_{S_I} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_I} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \tag{2.33}$$

όπου

$$\phi_{1,ij} = \nu u_i n_j, \quad \phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \tag{2.34}$$

Για να απαλειφθούν αυτά τα δύο ολοκληρώματα πρέπει να επιβληθούν στην είσοδο του πεδίου οι συνθήκες

$$\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{2.35α'}$$

$$\phi_2 = 0 \tag{2.35β'}$$

Οι παραπάνω συνθήκες ισοδυναμούν με το να επιβληθεί η κάθετη στο όριο συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας ίση με

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \tag{2.36}$$

και να μηδενιστεί η εφαπτομενική συνιστώσα

$$u_{\langle t \rangle} = 0 \tag{2.37}$$

όπου

$$u_{\langle n \rangle} = u_i n_i, \quad u_{\langle t \rangle} = u_i t_i \tag{2.38}$$

Η οριακή συνθήκη της συζυγούς πίεσης στην είσοδο του χωρίου είναι η μηδενική παράγωγος στο όριο.

Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εξόδου

Στα όρια εξόδου S_O της ροής, όπως και στα όρια εισόδου, ο όρος $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ είναι μηδέν και επομένως απαλείφονται όλα τα ολοκληρώματα που τον περιλαμβάνουν. Ακόμα επειδή η πίεση στην έξοδο είναι σταθερή, ο όρος $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ είναι μηδέν και απαλείφεται το αντίστοιχο ολοκλήρωμα από την εξίσωση 2.32.

Οι εναπομείναντες όροι της παραγώγου είναι οι

$$-\int_{S_O} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dS + \int_{S_O} \phi_{3,i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \tag{2.39}$$

με το $\phi_{1,ij}$ να δίνεται από την εξίσωση 2.34 και

$$\phi_{3,i} = u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} \tag{2.40}$$

Υπολογιστικά πειράματα έχουν δείξει ότι το πρώτο ολοκλήρωμα της 2.39 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο, ενδεχομένως επειδή το πεδίο ταχύτητας στη θέση S_O διέπεται από ικανοποιητική ομοιογένεια.

Για να απαλειφθεί και το δεύτερο ολοκλήρωμα της 2.39, πρέπει να επιβληθεί η συνθήκη $\phi_{3,i} = 0$. Αυτή είναι μία διανυσματική συνθήκη, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη στο τοίχωμα και μία εφαπτομενική σε αυτό. Αυτές προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης 2.40 με το μοναδιαίο κάθετο και το μοναδιαίο εφαπτομενικό ως προς την επιφάνεια διάνυσμα. Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle n \rangle}} \tag{2.41α'}$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle t \rangle}} \tag{2.41β'}$$

Από τη δεύτερη συνθήκη έχει απεμπλακεί η συζυγής πίεση q. Οι δύο παραπάνω εξισώσεις, μαζί με την τρίτη "πληροφορία" (που υπολογίζεται από το εσωτερικό του πεδίου με προεκβολή μιας συνιστώσας του διανύσματος της συζυγούς ταχύτητας), αρκούν για να προσδιοριστούν πλήρως οι οριακές συνθήκες εξόδου του συζυγούς πεδίου ροής σε κάθε κύκλο ενός επαναληπτικού αλγορίθμου.

Στις περιπτώσεις όπου η έξοδος του χωρίου ροής και, συνεπώς, και το τοπικό πλέγμα δεν έχει καθόλου ή έχει μικρή καμπυλότητα, η οποία μπορεί να αμεληθεί, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω και να γίνουν

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + 2\nu \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle n \rangle}} \tag{2.42α'}$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \left(\frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle t \rangle}} \tag{2.42β'}$$

Στη δεύτερη εξίσωση, ο όρος $\frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial t}$ μπορεί να αμεληθεί αφού υπάρχει ομοιομορφία καθ' ύψος στην έξοδο του πεδίου.

Συζυγείς οριακές συνθήκες στα στερεά όρια

Στα στερεά όρια S_W ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης, δηλαδή ότι $v_i = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι η ολική μεταβολή της ταχύτητας στις θέσεις αυτές είναι μηδενική, δηλαδή $\frac{\delta v_i}{\delta b_m}$. Στην περίπτωση, όμως, που το στερεό όριο είναι μέρος της παραμετροποίησης μέσω των b_m, τότε για την άμεση μεταβολή της ταχύτητας ισχύει ότι

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \tag{2.43}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της 2.32, με βάση την παραπάνω εξίσωση και επειδή η ταχύτητα στα τοιχώματα είναι πάντα μηδέν (άρα $\frac{\partial F_S}{\partial v_i} = 0$), γίνεται

$$-\int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \tag{2.44}$$

Από τους υπόλοιπους όρους της 2.32, όσοι περιλαμβάνουν τις γεωμετρικές μεταβολές $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ είναι γνωστοί και οι μοναδικές άγνωστες ποσότητες είναι οι $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial}{\partial b_m} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Για να απαλειφθούν αυτοί οι όροι πρέπει οι συντελεστές τους, ϕ_2 και $\phi_{1,ij}$ αντιστοίχως, να μηδενιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τις συνθήκες

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \tag{2.45α'}$$

$$u_{\langle t \rangle} = 0 \tag{2.45β'}$$

Η εφαρμογή αυτών των οριακών συνθηκών έχει ως αποτελέσμα την εμφάνιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων στην έκφραση της παραγώγου [3]

$$-\int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS - \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \tag{2.46}$$

Με αυτόν τον τρόπο συμπληρώνονται οι απαραίτητες οριακές συνθήκες για να επιλυθεί το συζυγές πρόβλημα.

2.5 Τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

2.5.1 Τελική έκφραση της πρώτης παραγώγου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού

Έχοντας απαλείψει τις συζυγείς εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες από την εξίσωση 2.32, η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = &\int_\Omega \frac{\widetilde{\partial F_\Omega}}{\partial b_m} d\Omega + \int_S \frac{\widetilde{\partial F_S}}{\partial b_m} dS + \int_{S_W} \left(\frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &- \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &+ \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ &- \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\ &- \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \end{aligned} \tag{2.47}$$

Η εξίσωση 2.47 αφορά την πρώτη παράγωγο για γεωμετρικές μεταβολές του σχήματος των τοιχωμάτων της ροής που προκαλλούνται λόγω των μεταβλητών σχεδιασμού.

2.5.2 Τελική έκφραση της πρώτης παραγώγου ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος

Αντίστοιχα η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας για τις μεταβλητές περιβάλλοντος είναι

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta c_\mu} = \int_\Omega \widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial c_\mu}} d\Omega + \int_S \widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial c_\mu}} dS + \int_{S_I} \left[u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} dS \tag{2.48}$$

όπου το τρίτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης προέκυψε κατά τη διαδικασία της εύρεσης των συζυγών οριακών συνθηκών.

Επιλύοντας τις εξισώσεις ροής και τις συζυγείς εξισώσεις, τα πεδία ροής και των συζυγών μεταβλητών καθίστανται γνωστά. Συνεπώς, όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στη 2.47 και 2.48 είναι γνωστές (καθώς και οι μεταβολές των γεωμετρικών ποσοτήτων, $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$, στα στερεά τοιχώματα και της ταχύτητας στην είσοδο λόγω των μεταβλητών περιβάλλοντος, $\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}$, είναι γνωστές).

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η εφαρμογή της συζυγούς μεθόδου με την τελική έκφραση της παραγώγου και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στις περιπτώσεις που η αντικειμενική συνάρτηση είναι η δύναμη αντίστασης F_D ή ο συντελεστής αντίστασης C_D.

2.5.3 Τελική μορφή του συζυγούς προβλήματος

Η δύναμη αντίστασης ως αντικειμενική συνάρτηση

Όταν στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της αεροδυναμικής αντίστασης η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται από το ολοκλήρωμα των τάσεων και πιέσεων που ασκούνται στο σώμα, προβεβλημένων στην κατεύθυνση της αδιατάρακτης ροής. Δηλαδή, η αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα της μορφής

$$F = \int_{S_W} F_{S_W} dS \tag{2.49}$$

με την ποσότητα F_{S_W} να δίνεται από τη σχέση

$$F_{S_W} = \rho \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + p \delta_i^j \right] r_i n_j \tag{2.50}$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{r}$ να συμβολίζει την κατεύθυνση της αδιατάρακτης ροής. Η παράγωγος $\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k}$ που εμφανίζεται στην έκφραση 2.47 είναι

$$\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} = \rho \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] r_i n_j \tag{2.51}$$

Ο συντελεστής αντίστασης ως αντικειμενική συνάρτηση

Η έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης, που δίνει την τιμή του συντελεστή αντίστασης, είναι η ίδια με αυτήν της δύναμης αντίστασης διαιρεμένη με το συντελεστή $\frac{1}{2}\rho A|U|^2$, όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, A μία χαρακτηριστική επιφάνεια του σώματος που μελετάται (λ.χ. η επιφάνεια μίας αεροτομής) και $|U|$ το μέτρο της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής. Έτσι, τελικά, η έκφραση του συντελεστή αντίστασης είναι

$$C_D = \int_{S_W} \frac{2}{A|U|^2} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + p\delta_i^j \right] r_i n_j dS \tag{2.52}$$

και η χωρική παράγωγός του που προκύπτει από το θεώρημα παραγώγισης επιφανειακού ολοκληρώματος

$$\int_{S_W} \frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} dS = \frac{2}{A|U|^2} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] r_i n_j \tag{2.53}$$

Όταν μελετάται όμως ο συντελεστής αντίστασης είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψη και η μεταβολή του συντελεστή λόγω της αλλαγής της γωνίας πρόσπτωσης της ροής στο σώμα όσο και λόγω της αλλαγής του μέτρου της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής. Δηλαδή, πρέπει να βρεθεί η συνεισφορά του όρου $\widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial c_\mu}}$.

Πιο συγκεκριμένα, η μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης εκφράζεται μέσω του διανύσματος r_i και η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής μέσω του $\frac{1}{|U|^2}$. Έτσι, θεωρώντας τις αντίστοιχες μεταβολές $\frac{\partial F_S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial c_\mu}$ και $\frac{\partial F_S}{\partial |U|}\frac{\partial |U|}{\partial c_\mu}$, η αναλυτική έκφραση της άμεσης συνεισφοράς των μεταβλητών περιβάλλοντος είναι

$$\begin{aligned} \widetilde{\frac{\partial F_S}{\partial c_\mu}} = \frac{\partial F_S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial c_\mu} + \frac{\partial F_S}{\partial |U|}\frac{\partial |U|}{\partial c_\mu} =& \frac{2}{A|U|^2} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + p\delta_i^j \right] \frac{\partial r_i}{\partial c_\mu} n_j \\ &+ \frac{4}{A|U|^3} \left[-\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + p\delta_i^j \right] \frac{\partial |U|}{\partial c_\mu} r_i n_j \end{aligned} \tag{2.54}$$

Επιβολή των οριακών συνθηκών

Στα όρια εισόδου του πεδίου οι συζυγείς οριακές συνθήκες 2.36 και 2.37 είναι

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad u_{\langle t \rangle} = 0 \tag{2.55}$$

ενώ στα όρια εξόδου του πεδίου οι εξισώσεις 2.41 γίνονται

$$
\begin{aligned}
q &= u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j \\
0 &= u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + \nu \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

Για τις οριακές συνθήκες στα στερεά όρια, στην περίπτωση που η δύναμη ή ο συντελεστής αντίστασης αποτελούν την αντικειμενική συνάρτηση, θα γίνει μία διαφορετική προσέγγιση. Στα στερεά όρια για αυτές τις δύο συναρτήσεις, εκτός από τους όρους της εξίσωσης 2.18β΄ έχουμε και τον όρο $\frac{\partial F_{S_W}}{\partial v^{(1)}} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial b_m}$, όπου $v^{(1)}$ είναι η παράγωγος $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Έτσι, πριν την επιβολή των οριακών συνθηκών στα τοιχώματα, η έκφραση της παραγώγου είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = &\int_{S_W} \rho \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i n_j dS \\
&- \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
&+ \int_{S_W} (u_j n_j + \rho r_j n_j) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] u_i n_j dS \\
&+ \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
&- \int_{S_W} \rho \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] r_i n_j dS
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Για να γίνει απαλοιφή των ολοκληρωμάτων που περιέχουν τους όρους $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$ αρκεί να τεθεί η παρακάτω οριακή συνθήκη

$$
u_i = -\rho r_i \tag{2.58}
$$

Με αυτό τον τρόπο αλληλοαναιρούνται αυτά τα ολοκληρώματα, αλλά απαλείφεται και το ολοκλήρωμα που πολλαπλασιάζει τον όρο $\frac{\partial p}{\partial b_m}$. Αντίστοιχα για το συντελεστή αντίστασης η έκφραση της παραγώγου είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_{S_W} \frac{2}{A|U|^2} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} \left(u_j n_j + \frac{2 r_j n_j}{A|U|^2} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] u_i n_j dS \\
& + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& - \int_{S_W} \frac{2\nu}{A|U|^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] r_i n_j dS
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

και για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα αυτή τη φορά η κατάλληλη οριακή συνθήκη είναι

$$
u_i = -\frac{2 r_i}{A|U|^2} \tag{2.60}
$$

Τελική έκφραση της πρώτης παραγώγου

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η τελική έκφραση της παραγώγου για τη δύναμη αντίστασης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_{S_W} \rho \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

Αντίστοιχα η παράγωγος ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος που ορίζονται στην είσοδο του πεδίου ροής είναι

$$
\frac{\delta F}{\delta c_\mu} = \int_{S_I} \left[u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_j \right) - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} dS \tag{2.62}
$$

Όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι ο συντελεστής αντίστασης η παράγωγος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta b_m} =& \int_{S_W} \frac{2}{A|U|^2}\left[-\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_i^j\right]\frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i n_j dS \\ &- \int_{S_W}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - q n_i\right]\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ &+ \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \end{aligned} \tag{2.63}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta c_\mu} =& \int_{S_I}\left[u_i v_j n_j + \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}n_j\right) - q n_i\right]\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} dS \\ &+ \int_{S_W}\frac{2}{A|U|^2}\left[-\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+p\delta_i^j\right]\frac{\partial r_i}{\partial c_\mu} n_j dS \\ &+ \int_{S_W}\frac{4}{A|U|^3}\left[-\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+p\delta_i^j\right]\frac{\partial |U|}{\partial c_\mu} r_i n_j dS \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.6 Υπολογισμός της δεύτερης μικτής παραγώγου

Για να βρεθεί η δεύτερη μικτή παράγωγος θα γίνει η διαφόριση της παραγώγου των μεταβλητών σχεδιασμού ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος, δηλαδή αναζητείται η έκφραση

$$\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} = \frac{\delta}{\delta c_\mu}\left(\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}\right) \tag{2.65}$$

Η τελική μορφή της δεύτερης μικτής παραγώγου θα δοθεί αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, την έκφραση της παραγώγου από τη σχέση 2.48. Η ανάλυση για τον κάθε όρο δίνει (να σημειωθεί ότι δε λαμβάνονται υπόψη χωρικές μεταβολές)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta c_\mu}\int_{S_W}\left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_\Omega n_k\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS &= \int_{S_W}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial c_\mu}\right) + \frac{\partial F_\Omega}{\partial c_\mu}n_k\right]\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS \\
&= \int_{S_W}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial c_\mu} + \widetilde{\frac{\partial F_{S_W}}{\partial c_\mu}}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial c_\mu} + \widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial c_\mu}}\right)n_k\right]\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS \\
&= \int_{S_W}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial v_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial v_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}\right)\right. \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial c_\mu} + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial p}{\partial c_\mu}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\widetilde{\frac{\partial F_{S_W}}{\partial c_\mu}}\right) \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial c_\mu} + \widetilde{\frac{\partial F_\Omega}{\partial c_\mu}}\right)n_k\right]\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta c_\mu}\int_{S_W}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - qn_i\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS \\
&\qquad = \int_{S_W}\left[\nu\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial c_\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial c_\mu}\right)\right]n_j - \frac{\partial q}{\partial c_\mu}n_i\right]\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS \\
&\qquad + \int_{S_W}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)n_j - qn_i\right]\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m}dS
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\frac{\delta}{\delta c_\mu}\int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS = \int_{S_W}\left(\frac{\partial u_i}{\partial c_\mu}R_i^v + u_i\frac{\partial R_i^v}{\partial c_\mu}\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \tag{2.68}$$

$$\frac{\delta}{\delta c_\mu}\int_{S_W} qR^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS = \int_{S_W}\left(\frac{\partial q}{\partial c_\mu}R^p + q\frac{\partial R^p}{\partial c_\mu}\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta c_\mu}\int_{S_W} \nu\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\
&\quad = \int_{S_W} \nu\left(\frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}+\frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial c_\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\
&\quad + \int_{S_W} \nu\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial c_\mu}\right)\right]\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta c_\mu}\int_{S_W} \nu\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \\
&\quad = \int_{S_W} \nu\left(\frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}+\frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial c_\mu}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS \\
&\quad + \int_{S_W} \nu\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial c_\mu}\right)\right]\frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} dS
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Όπως έγινε φανερό στην αρχή του κεφαλαίου, το μέγεθος που αναζητείται είναι το $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} r_\mu$. Έτσι, αθροίζοντας όλους τους παραπάνω όρους και πολλαπλασιάζοντας με r_μ, η τελική έκφραση αυτού του μεγέθους δίνεται ως

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} r_\mu = & \int_{S_W} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial v_i} \right) \hat{v}_i + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial v_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \right) \hat{p} + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_k} \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \hat{v}_i + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \hat{p} \right) n_k \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} \widehat{F_\Omega} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \widehat{\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k}} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j - \hat{q} n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} \left(\hat{u}_i R_i^v + \hat{q} R^p \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \left(u_i R_i^{\hat{v}} + q R^{\hat{p}} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& - \int_{S_W} \nu \left(\frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p \partial v_i} \hat{v}_i + \frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p^2} \hat{p} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \nu \left(\frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p \partial v_i} \hat{v}_i + \frac{\partial^2 F_{S_W}}{\partial p^2} \hat{p} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta n_i n_j}{\delta b_m} dS \\
& - \int_{S_W} \nu \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta n_i n_j}{\delta b_m} dS
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Το σύμβολο ˆ πάνω από κάποια ποσότητα δηλώνει τη μερική παράγωγο $\frac{\partial}{\partial c_\mu}$ αυτής της ποσότητας πολλαπλασιασμένης με το r_μ. Συνεπώς, για να υπολογιστεί η δεύτερη μικτή παράγωγος προβεβλημένη πάνω στο διάνυσμα r_μ απαιτείται η γνώση των πεδίων $(\hat{v}_i, \hat{p})$ και $(\hat{u}_i, \hat{q})$. Ο τρόπος υπολογισμού αυτών των δύο πεδίων περιγράφεται παρακάτω.

2.7 Ευθεία διαφόριση των εξισώσεων ροής

Για να υπολογιστεί το πεδίο των μεταβλητών $(\hat{v}_i, \hat{p})$ θα πρέπει να εφαρμοστεί ευθεία διαφόριση στις καταστατικές εξισώσεις και, έπειτα, να γίνει πρόβολή τους στο διάνυσμα r_μ. Αυτή η διαδικασία περιγράφεται παρακάτω.

2.7.1 Το πεδίο μεταβλητών της ευθείας διαφόρισης

Η διαφόριση των καταστατικών εξισώσεων ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος c_μ δίνει

$$\frac{\partial R^p}{\partial c_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial c_\mu}\right) = 0 \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_i^v}{\partial c_\mu} =& \frac{\partial v_j}{\partial c_\mu}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial c_\mu}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial c_\mu}\right)\right) = 0 \\ & i = 1, 2\,(, 3)\end{aligned} \tag{2.74}$$

και πολλαπλασιάζοντας με το r_μ οι εξισώσεις γίνονται

$$R^{\hat{p}} = \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.75}$$

$$R^{\hat{v}_i} = \hat{v}_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} - \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad i = 1, 2\,(, 3) \tag{2.76}$$

2.7.2 Οριακές συνθήκες του προβλήματος της ευθείας διαφόρισης

Οι οριακές συνθήκες για τα μεγέθη $\hat{v}_i$ και $\hat{p}$, πρέπει να είναι συμβατές με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος ροής, από τις οποίες προκύπτουν. Από τον ολικό ρυθμό μεταβολής, $\frac{\delta}{\delta c_\mu}$, των οριακών συνθηκών του προβλήματος ροής εξάγονται οι εκφράσεις των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών, οι οποίες και αποτελούν μέρος των οριακών συνθηκών που "κλείνουν" το σύστημα των εξισώσεων 2.75 και 2.76.

Επ΄ άπειρο όριο

Στο επ΄ άπειρο όριο S_∞ η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}$, που είναι γνωστή, και πολλαπλασιάζοντας με r_μ βρίσκεται η οριακή συνθήκη Dirichlet για το ζητούμενο μέγεθος $\hat{v}_i$

$$\hat{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} r_\mu \tag{2.77}$$

ενώ η πίεση παραμένει μηδενική, επομένως και για την $\hat{p}$ ισχύει συνθήκη Dirichlet,

$$\hat{p} = 0 \tag{2.78}$$

Στερεά όρια

Στα στερεά όρια S_W για τη μεταβολή της πίεσης ισχύει ότι ισχύει και στα όρια εισόδου, δηλαδή $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} n_j = 0$. Για την ολική μεταβολή της ταχύτητας ισχύει $\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} = 0$, αφού η ταχύτητα στα στερεά όρια είναι πάντα μηδενική. Συνεπώς, για την άμεση μεταβολής της ταχύτητας θα έχουμε

$$\hat{v_i} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta c_\mu} r_\mu \tag{2.79}$$

Όταν οι μεταβλητές περιβάλλοντος δεν επηρεάζουν τη γεωμετρία του χωρίου η μεταβολή της ταχύτητας είναι μηδέν. Πολλές φορές όμως χρειάζεται να γίνει στιβαρός σχεδιασμός για μεταβλητές που επηρεάζουν τη γεωμετρία, όπως π.χ. στην περίπτωση κατασκευαστικών αποκλίσεων και, τότε, οι οριακές συνθήκες στα στερεά όρια δεν θα είναι μηδενικές.

Η εφαρμογή της μεθόδου είναι πολύ απλή και ευθεία καθώς είναι ανεξάρτητη της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει επιλεχθεί. Η μοναδική ιδιαιτερότητα της μεθόδου είναι ότι απαιτεί να έχει υπολογιστεί εκ των προτέρων η πρώτη παράγωγος ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος, ώστε να συνδυαστούν με τα γνωστά μεγέθη $\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu}$, $\frac{\delta x_k}{\delta c_\mu}$ και σ_μ.

2.8 Ευθεία διαφόριση των συζυγών εξισώσεων

Αντίστοιχα με τη δουλειά που έγινε για να βρεθούν οι εξισώσεις 2.75 και 2.76 θα γίνει και εδώ με σκοπό να βρεθεί το πεδίο των προβεβλημένων παραγώγων των συζυγών μεταβλητών, δηλαδή των μεγεθών $(\hat{u}_i, \hat{q})$ (στο εξής μεταβλητές AV-DD).

2.8.1 Το πεδίο των μεταβλητών AV-DD

Η παραγώγιση των εξισώσεων 2.30 και 2.31 των συζυγών πεδίων δίνει και ο πολλαπλασιασμός τους με r_μ παράγει την τελική έκφραση των εξισώσεων του AV-DD προβλήματος

$$R^{\hat{q}} = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 F_\Omega}{\partial p \partial v_j}\hat{v}_j + \frac{\partial^2 F_\Omega}{\partial p^2}\hat{p} + \widehat{\frac{\partial F_\Omega}{\partial p}} = 0 \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} R^{\hat{u}_i} = & -\hat{v}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \hat{u}_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} \\ & -\nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial^2 F_\Omega}{\partial p \partial v_i}\hat{p} + \frac{\partial^2 F_\Omega}{\partial v_i^2}\hat{v}_i + \widehat{\frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i}} = 0 \\ & i = 1, 2\,(, 3) \end{aligned} \tag{2.81}$$

2.8.2 Οριακές συνθήκες του προβλήματος AV-DD

Κατ΄ αντιστοιχία με την ευθεία διαφόριση του προβλήματος ροής, η ευθεία διαφόριση του συζυγούς προβλήματος απαιτεί την εξαγωγή οριακών εξισώσεων συμβατών με τις συζυγείς οριακές εξισώσεις. Έτσι, μέσω του ολικού ρυθμού μεταβολής, θα προκύψουν οι εκφράσεις για τις άμεσες μεταβολές των συζυγών μεταβλητών.

Οριακές συνθήκες στα όρια εισόδου

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις των οριακών συνθηκών εισόδου του συζυγούς προβλήματος βρίσκονται οι οριακές συνθήκες εισόδου του AV-DD προβλήματος, οι οποίες είναι

$$\hat{u}_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial^2 F_{S_I}}{\partial p \partial v_i}\hat{v}_i - \frac{\partial^2 F_{S_I}}{\partial p^2}\hat{p} - \widehat{\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p}} \tag{2.82α΄}$$

$$\hat{u}_{\langle t \rangle} = 0 \tag{2.82β΄}$$

Αντίστοιχα, η συνθήκη για τη συζυγή πίεση στα όρια εισόδου είναι η μηδενική συνθήκη Neumann, επομένως

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \tag{2.83}$$

Οριακές συνθήκες στα όρια εξόδου

Παραγωγίζοντας την έκφραση της συζυγούς πίεσης στα όρια εξόδου προκύπτει η τιμή της AV-DD πίεσης

$$\hat{q} = \hat{u}_{\langle n\rangle} v_{\langle n\rangle} + u_{\langle n\rangle}\hat{v}_{\langle n\rangle} + 2\nu\frac{\partial \hat{u}_{\langle n\rangle}}{\partial n} + \frac{\partial^2 F_{S_O}}{\partial v_{\langle n\rangle}\partial v_i}\hat{v}_i + \frac{\partial^2 F_{S_O}}{\partial v_{\langle n\rangle}\partial p}\hat{p} + \widehat{\frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle n\rangle}}} \tag{2.84}$$

Για τη συζυγή ταχύτητα είχε επιλεχθεί, για την εφαπτομένική της συνιστώσα, δυναμική συνθήκη Dirichlet, ενώ για την κάθετη συνιστώσα στο όριο, συνθήκη μηδενικής παραγώγου. Έτσι η διαφόριση των συζυγών οριακών συνθηκών της συζυγούς ταχύτητας στην έξοδο δίνει

$$\frac{\partial \hat{u}_{\langle n\rangle}}{\partial x_j} n_j = 0 \tag{2.85α'}$$

$$0 = \hat{u}_{\langle t\rangle} v_{\langle n\rangle} + u_{\langle t\rangle}\hat{v}_{\langle n\rangle} + \nu\left(\frac{\partial \hat{u}_{\langle t\rangle}}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_{\langle n\rangle}}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 F_{S_O}}{\partial v_{\langle t\rangle}\partial v_i}\hat{v}_i + \frac{\partial^2 F_{S_O}}{\partial v_{\langle t\rangle}\partial p}\hat{p} + \widehat{\frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{\langle t\rangle}}} \tag{2.85β'}$$

Οριακές συνθήκες στα στερεά τοιχώματα

Η συζυγής πίεση στα στερεά τοιχώματα ικανοποιεί μηδενική συνθήκη Neumann. Αντίστοιχη θα είναι και η συνθήκη για τη μετάβολή της, δηλαδή

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \tag{2.86}$$

Για την ολική παράγωγο της συζυγούς ταχύτητας στα τοιχώματα ισχύει ότι

$$\frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} r_\mu = \hat{u}_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\delta x_k}{\delta c_\mu} r_\mu = 0 \tag{2.87}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι, στη γενική περίπτωση, η εφαπτομενική συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας έχει επιλεχθεί να είναι μηδενική και η κάθετη στο όριο συνιστώσα ίση με $\frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}$, τότε η επίλυση της σχέσης 2.87 για τις δύο συνιστώσες δίνει

$$\hat{u}_{\langle n\rangle} = -\frac{\partial^2 F_{S_I}}{\partial p \partial v_i}\hat{v}_i - \frac{\partial^2 F_{S_I}}{\partial p^2}\hat{p} - \widehat{\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\delta x_k}{\delta c_\mu} r_\mu \tag{2.88α'}$$

$$\hat{u}_{\langle t\rangle} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\delta x_k}{\delta c_\mu} r_\mu \tag{2.88β'}$$

2.8.3 Τελική μορφή του προβλήματος AV-DD

Παρακάτω θα αναπτυχθεί η μέθοδος για τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν σ΄ αυτή την εργασία, όπως αντίστοιχα έγινε και για το συζυγές πρόβλημα. Να σημειωθεί πως οι οριακές συνθήκες και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδιες εκτός από τις οριακές συνθήκες στα στερεά τοιχώματα.

Στις οριακές συνθήκες στα όρια εισόδου εμφανίζεται η παράγωγος του συναρτησιακού πάνω στο όριο. Όμως το συναρτησιακό της δύναμης αντίστασης δεν ορίζεται πάνω στο όριο, επομένως για την ταχύτητα ισχύει

$$\hat{u}_i = 0 \tag{2.89}$$

ενώ για την πίεση ισχύει

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \tag{2.90}$$

Αντίστοιχα, ούτε στα όρια εξόδου ορίζεται το συναρτησιακό της δύναμης αντίστασης, οπότε οι οριακές συνθήκες είναι

$$\hat{q} = \hat{u}_j v_j + u_{\langle n\rangle}\hat{v}_{\langle n\rangle} + 2\nu\frac{\partial \hat{u}_{\langle n\rangle}}{\partial n} \tag{2.91}$$

$$0 = \hat{u}_{\langle t\rangle} v_{\langle n\rangle} + u_{\langle t\rangle} v_{\langle n\rangle} + \nu\frac{\partial \hat{u}_{\langle t\rangle}}{\partial n} \tag{2.92}$$

Τέλος, οι οριακές συνθήκες για τα στερεά τοιχώματα είναι

$$\hat{u}_i = 0 \tag{2.93}$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \tag{2.94}$$

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες ισχύουν όταν την αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί η δύναμη αντίστασης. Όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι ο συντελεστής αντίστασης πρέπει να ληφθεί υπόψη και η μεταβολή του r_i και του $|U|$, δηλαδή η οριακή συνθήκη της ταχύτητας γίνεται

$$\hat{u}_i = -\frac{2\hat{r}_i}{A|U|^2} + \frac{4r_i|\hat{U}|}{A|U|^3} \tag{2.95}$$

Να σημειωθεί ότι οι μεταβλητές περιβάλλοντος επιλέχθηκε να μη μεταβάλλουν τα τοιχώματα, οπότε και η μεταβολές τους είναι μηδέν, δηλαδή $\frac{\delta x_k}{\delta c_\mu}$.

2.9 Τελική έκφραση της δεύτερης παραγώγου

Η τελική έκφραση της δεύτερης μικτής παραγώγου για το συντελεστή και τη δύναμη αντίστασης θα υπολογιστεί συνδιάζοντας τις εξισώσεις 3.56, 3.58 και την έκφραση 3.66 για τη δεύτερη παράγωγο.

2.9.1 Δύναμη αντίστασης

Η έκφραση της δεύτερης μικτής παραγώγου με αντικειμενική συνάρτηση τη δύναμη αντίστασης F_D είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} r_\mu = & \int_{S_W} \rho \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j - \hat{q} n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} \left(\hat{u}_i R_i^v + \hat{q} R^q \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \left(u_i R_i^{\hat{v}} + q R^{\hat{p}} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS
\end{aligned} \tag{2.96}$$

2.9.2 Συντελεστής αντίστασης

Στην περίπτωση που η αντικειμενική συνάρτηση είναι ο συντελεστής αντίστασης C_D πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι μεταβολές λόγω της αλλαγής κατεύθυνσης της ροής r_i και του μέτρου της αδιατάρακτης ροής $|U|$. Έτσι, τελικά η έκφραση της παραγώγου είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} r_\mu = & \int_{S_W} \frac{2}{A|U|^2} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} r_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j - \hat{q} n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& - \int_{S_W} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} \left(\hat{u}_i R_i^v + \hat{q} R^q \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \left(u_i R_i^{\hat{v}} + q R^{\hat{p}} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_{S_W} \frac{2}{A|U|^2} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \hat{r}_i n_j dS \\
& + \int_{S_W} \frac{4}{A|U|^3} \left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j \right] \frac{\delta x_k}{\delta b_m} |\hat{U}| r_i n_j dS
\end{aligned} \tag{2.97}
$$

2.10 Υπολογιστικό κόστος της μεθόδου

Η μέθοδος πρώτης-τάξης, δεύτερης-ροπής (FOSM) που αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο έχει παρουσιαστεί και παλαιότερα στη βιβλιογραφία [22], [23]. Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, όπως είχε παρουσιαστεί μέχρι τώρα, ήταν $2M + 1$ **ισοδύναμες επιλύσεις ροής (ΙΕΡ)**, όπου M είναι το πλήθος των μεταβλητών περιβάλλοντος. Με τον τρόπο που υλοποιήθηκε η μέθοδος στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία το κόστος καθίσταται πλέον ανεξάρτητο του M. Συγκεκριμένα, το κόστος είναι ακριβώς 4 ΙΕΡ, πράγμα που κάνει τη μέθοδο κατάλληλη για στιβαρό σχεδιασμό με επιλογή μεγάλου αριθμού μεταβλητών περιβάλλοντος. Οι 4 ΙΕΡ προκύπτουν από:

- 1 ΙΕΡ για την επίλυση των εξισώσεων ροής του ρευστού
- 1 ΙΕΡ για την επίλυση των εξισώσεων της συζυγούς ροής
- 1 ΙΕΡ για την επίλυση των προβεβλημένων εξισώσεων της ευθείας διαφόρισης του προβλήματος ροής του ρευστού
- 1 ΙΕΡ για την επίλυση των προβεβλημένων εξισώσεων της ευθείας διαφόρισης του προβλήματος της συζυγούς ροής

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή - Πιστοποίηση των παραγώγων

3.1 Εισαγωγικά σχόλια

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν εφαρμογές των μεθόδων που αναπτύχθηκαν προηγουμένως και προγραμματίστηκαν στο περιβάλλον ανάπτυξης του OpenFOAM, ενώ στη συνέχεια θα γίνει σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για να επιβεβαιωθεί η πιστότητα των αποτελεσμάτων.

Συγκεκριμένα, στόχος είναι να δειχθεί ότι η συζυγής μέθοδος, στη μορφή στην οποία εδώ προγραμματίστηκε, μπορεί να υπολογίσει με υψηλή ακρίβεια τις παραγώγους ευαισθησίας τόσο των μεταβλητών σχεδιασμού όσο και των μεταβλητών περιβάλλοντος, οι οποίες είναι απαραίτητες για τους υπολογισμούς των προβλημάτων DD και AV-DD. Στη συνέχεια, αυτά θα επιλυθούν και θα βρεθεί η δεύτερη μικτή παράγωγος η οποία θα συγκριθεί με τα αποτελέσματα των πεπερασμένων διαφορών.

Η επίλυση του προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού δεν θα γίνει στην παρούσα εργασία, καθώς πρωταρχικός στόχος είναι η επιβεβαίωση της ακρίβειας των παραγώγων ευαισθησίας προτού αυτές ενταχθούν σε κάποιο κύκλο βελτιστοποίησης της συνάρτησης-στόχου του στιβαρού σχεδιασμού.

3.2 Παράμετροι εφαρμογής και συνθήκες ροής

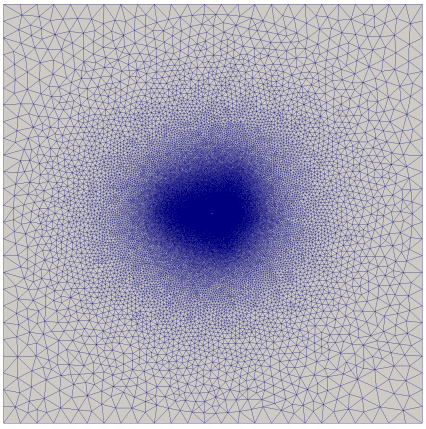
Η εφαρμογή αφορά μία μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012 σε συνθήκες στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού και υπό γωνία προσβολής. Η παραμετροποίηση της γεωμετρίας της αεροτομής γίνεται μέσω πολυωνύμων Bézier–Bernstein, ο αριθμός Reynolds είναι 1000 και η γωνία προσβολής 3 μοίρες ή αντίστοιχα 0.05 rad (είναι σημαντικό να είναι γνωστή η γωνία σε μονάδες rad, καθώς οι τιμές της παραγώγου που υπολογίζονται μέσω της συζυγούς μεθόδου είναι σε rad και όχι μοίρες). Οι μεταβλητές περιβάλλοντος είναι η γωνία α και το μέτρο της ταχύτητας $|U|$ της αδιατάρακτης ροής, καθώς επίσης η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση x, v_x, και η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση y, v_y. Είναι προφανές ότι οι τέσσερις επιλεχθείσες μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η γνώση των παραγώγων για δύο από αυτές (λ.χ. των παραγώγων ως προς α και $|U|$) επιτρέπει, μέσω του κανόνα της αλυσίδας, να υπολογιστούν άμεσα και οι παράγωγοι ως προς τις άλλες δύο (συνιστώσεις της ταχύτητας). Παρόλα αυτά υπολογίζονται και πιστοποιούνται και οι τέσσερις

Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούνται δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, η δύναμη αντίστασης F_D και ο συντελεστής αντίστασης C_D. Αν και εκ πρώτης όψεως οι δύο αυτές αντικειμενικές συναρτήσεις φαίνεται να είναι το ίδιο πράγμα, καθώς ο συντελεστής αντίστασης είναι η τιμή της δύναμης αντίστασης διαιρεμένη με το συντελεστή $\frac{1}{2}\rho A|U|^2$ υπάρχει μία ουσιαστική διαφορά μεταξύ τους. Στην περίπτωση που μελετάται η δύναμη αντίστασης, η γωνία α πάνω στην οποία προβάλλεται η συνολική δύναμη και το μέτρο της αδιατάρακτης ροής $|U|$ που δέχεται η αεροτομή δεν αλλάζει. Αντίθετα όταν μελετάται ο συντελεστής αντίστασης λαμβάνεται υπόψη τόσο η μεταβολή της γωνίας προσβολής της αεροτομής όσο και αλλαγή του μέτρου της αδιατάρακτης ροής.

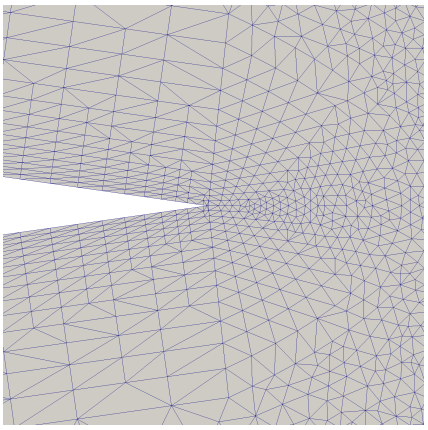
Αρχικά θα γίνει μία παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ροής του αέρα γύρω από την αεροτομή, δηλαδή της επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes για στρωτή ροή.

3.3 Γένεση του πλέγματος και επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα

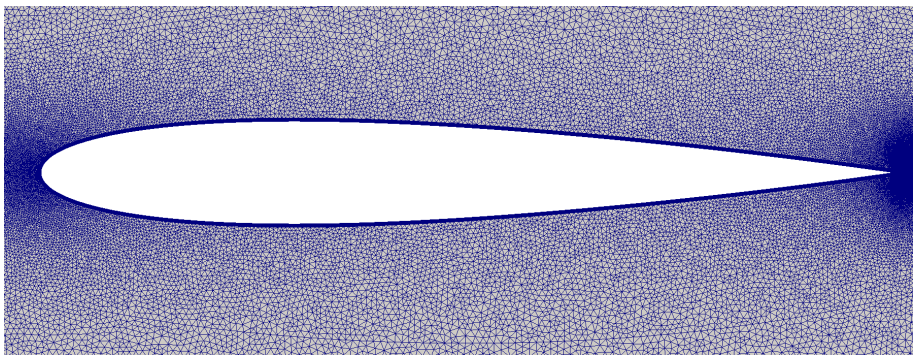
Η διακριτοποίηση του χωρίου της ροής έγινε με προϋπάρχοντα κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών ο οποίος παρήγαγε το πλέγμα σε μορφή αναγνώσιμη από τον οικείο κώδικα του εργαστηρίου. Στη συνέχεια έγινε μετατροπή των αρχείων εξόδου του κώδικα σε gmesh και από εκεί σε μορφή αναγνώσιμη από το OpenFoam.



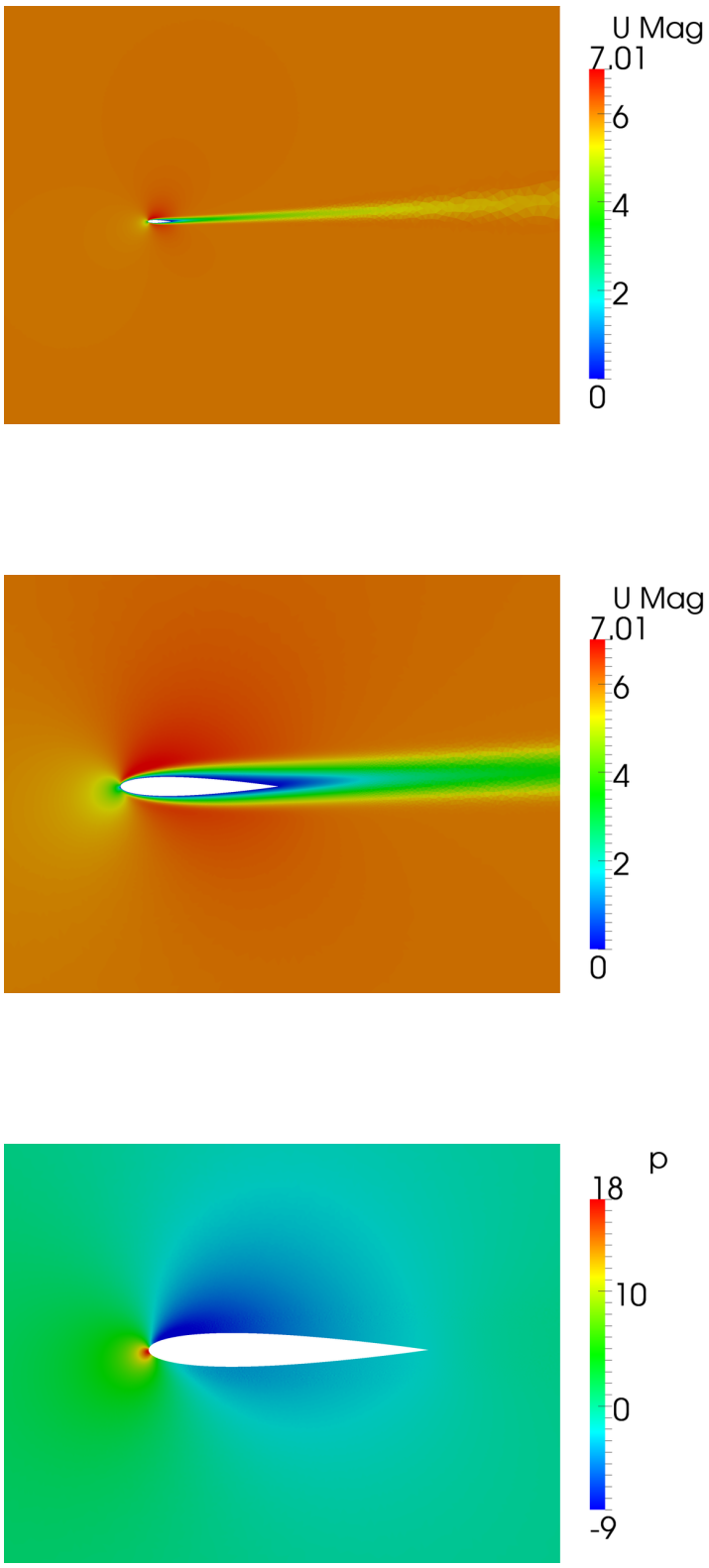
Σχήμα 3.1: Το σύνολο του χωρίου προσομοίωσης, όπου διακρίνεται το επ΄ άπειρο όριο. Η αεροτομή βρίσκεται στο κέντρο του σχήματος, χωρίς όμως να γίνεται διακριτή.



Σχήμα 3.2: Λεπτομέρειες της χωρικής διακριτοποίησης στο χείλος εκφυγής της πτέρυγας.



Σχήμα 3.3: Η χωρική διακριτοποιημένη περιοχή γύρω από την αεροτομή.



Σχήμα 3.4: Τα πεδία ταχύτητας και πίεσης κοντά στην αεροτομή.

Το όριο του χωρίου της προσομοίωσης μακριά από την αεροτομή αποτελεί ένα τετράγωνο, του οποίου η αριστερή και κάτω πλευρά αποτελούν τα όρια εισόδου της ροής και η δεξιά και πάνω τα όρια εξόδου της ροής. Η διακριτοποίηση του χωρίου έγινε με τριγωνικά στοιχεία. Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζονται τα πεδία των μεταβλητών της ροής

3.4 Η πρώτη παράγωγος

3.4.1 Το συζυγές πρόβλημα

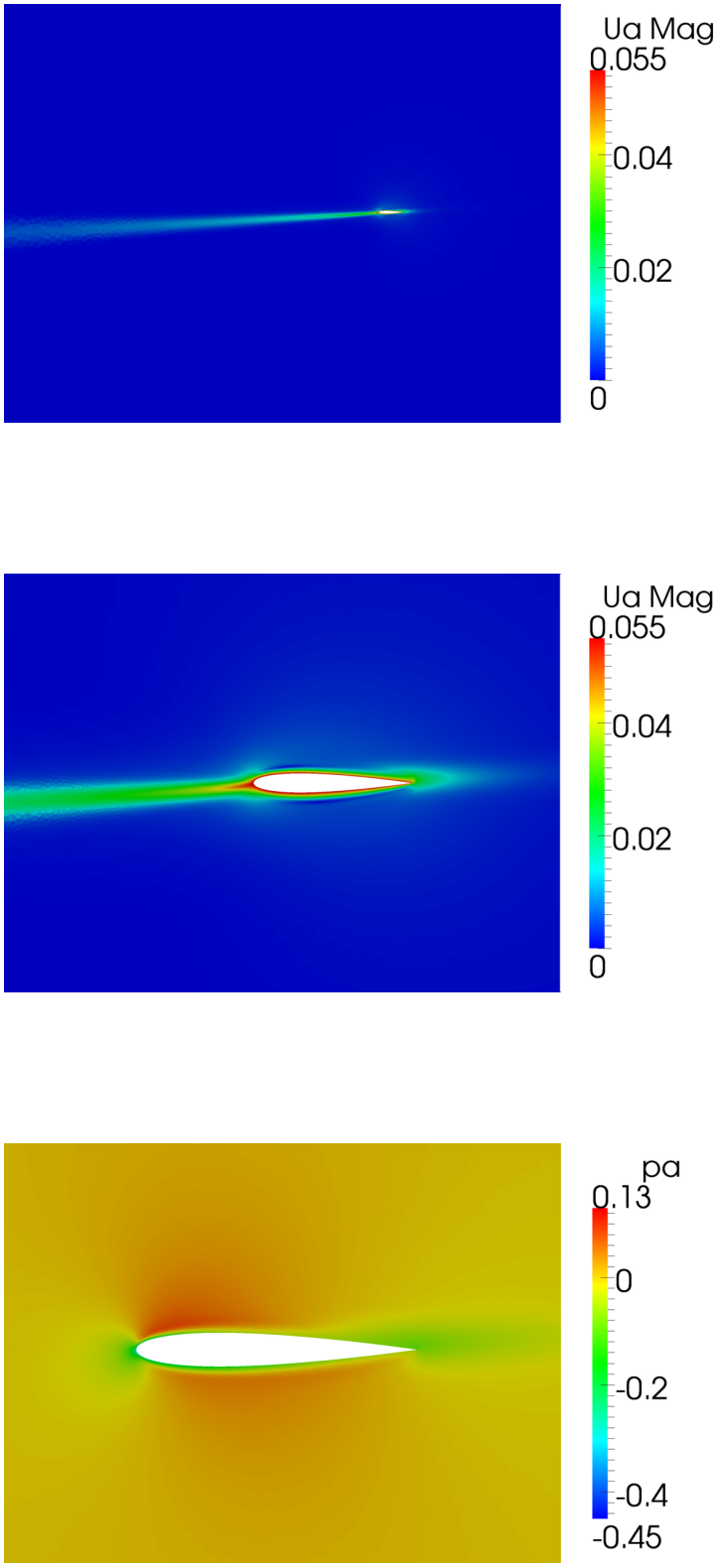
Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, στόχος της συζυγούς μεθόδου είναι να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τόσο οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τη γεωμετρία της αεροτομής (μεταβλητές σχεδιασμού) όσο και οι παράγωγοι ως προς τις συνθήκες της ροής (μεταβλητές περιβάλλοντος). Στα σχήματα 3.8 απεικονίζονται οι τιμές των πεδίων των συζυγών μεταβλητών.

Το χαρακτηριστικό της ροής το οποίο γίνεται άμεσα αντιληπτό είναι ότι ο ομόρρους της συζυγούς ροής βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά απ΄ αυτόν της ροής του ρευστού, δηλαδή ανάντι της αεροτομής. Το γεγονός αυτό είναι αποτέλεσμα του αντίθετου προσήμου των όρων μεταφοράς στις εξισώσεις της συζυγούς ταχύτητας, το οποίο ερμηνεύεται ότι η πληροφορία στο συζυγές πρόβλημα μεταφέρεται ανάποδα από τη ροή.

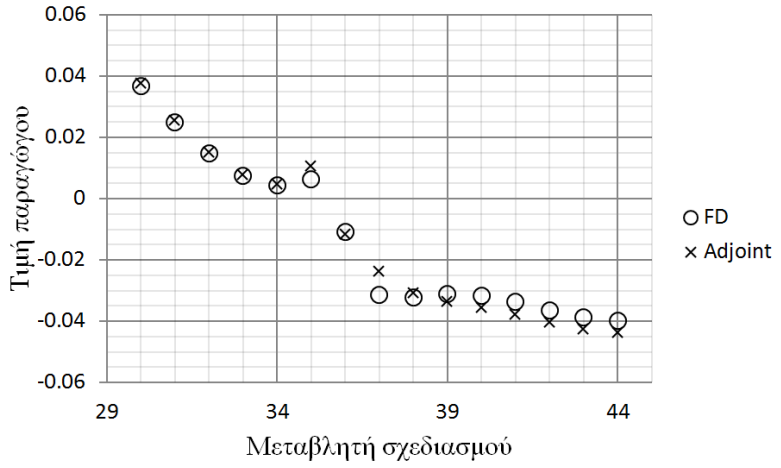
3.4.2 Πιστοποίηση αποτελεσμάτων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποιες από τις υπολογισμένες παραγώγους ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις συντεταγμένες των πολυωνύμων Bézier. Ο συνολικός αριθμός των σημείων Bézier που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 24, 12 για κάθε πλευρά της αεροτομής. Ωστόσο οι συνολικές μεταβλητές σχεδιασμού ήταν 48, γιατί για κάθε σημείο ελέγχου βρέθηκε η παράγωγος ως προς την κάθε συντεταγμένη του σημείου (x και y). Οι τιμές ¨αναφοράς¨, αυτές με τις οποίες συγκρίνονται οι τιμές των παραγώγων, προέρχονται από υπολογισμό των παραγώγων μέσω πεπερασμένων διαφορών, αφού πρώτα ελέχθηκε η ευαισθησία των τελευταίων ως προς το βήμα μεταβολής ε. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6 υπάρχει πάρα πολύ καλή ταύτιση των τιμών μεταξύ των δύο μεθόδων.

Όσον αφορά στο κομμάτι του υπολογισμού των παραγώγων ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος, πρώτα απ΄ όλα θα χρησιμοποιηθεί ως αντικειμενική συνάρτηση η δύναμη αντίστασης, στους υπολογισμούς της οποίας δεν λαμβάνονται υπόψη οι μεταβολές $\frac{\partial r_i}{\partial c_\mu}$ και $\frac{\partial |U|}{\partial c_\mu}$. Οι τιμές, λοιπόν, των παραγώγων φαίνονται στον πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.5: Τα πεδία συζυγούς ταχύτητας και πίεσης κοντά στην αεροτομή.



Σχήμα 3.6: Ενδεικτικές τιμές των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας της αεροτομής με τη συζυγή μέθοδο (Adjoint) και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (FD). Οι μεταβλητές σχεδιασμού 30-35 αντιστοιχούν στη μετακίνηση των σημείων ελέγχου Bézier, κατά την y διεύθυνση, στην πλευρά πίεσης της αεροτομής κοντά στο χείλος εκφυγής και οι 36-44, αντιστοίχως, στην πλευρά υποπίεσης κοντά στο χείλος πρόσπτωσης.

Μεταβλητή περιβάλλοντος	**Παράγωγος FD**	**Παράγωγος Adjoint**
α	-1.17	-1.20
$\lvert U \rvert$	0.68	0.68
v_x	0.65	0.69
v_y	-0.17	-0.16

Πίνακας 3.1: Τιμές παραγώγων ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος με αντικειμενική συνάρτηση τη δύναμη αντίστασης

Επίσης σ΄ αυτή την περίπτωση η ταύτιση των υπολογιζόμενων παραγώγων είναι πάρα πολύ υψηλή και, έτσι, τα αποτελέσματα της συζυγούς μεθόδου μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστα.

Μένει ακόμα να υπολογιστούν οι παράγωγοι του συντελεστή αντίστασης C_D. Σ΄ αυτήν την περίπτωση, οι άμεσες μεταβολές $\widetilde{\frac{\partial C_D}{\partial c_\mu}}$ πρέπει να ληφθούν υπόψη. Για να γίνει αυτό, αρχικά, πρέπει να βρεθούν αναλυτικά οι μεταβολές $\frac{\partial r_i}{\partial c_\mu}$ και $\frac{\partial |U|}{\partial c_\mu}$ (εξ. 2.64) για καθεμιά από τις τέσσερις μεταβλητές σχεδιασμού α, U, v_x και v_y. Έτσι για την πρώτη μεταβλητή είναι

$$\frac{\partial r_i}{\partial \alpha} = \left[\frac{\partial cos\alpha}{\partial \alpha}, \frac{\partial sin\alpha}{\partial \alpha}\right] = [-sin\alpha, cos\alpha] \tag{3.1α΄}$$

$$\frac{\partial |U|}{\partial \alpha} = 0 \tag{3.1β'}$$

Οι μεταβολές για το μέτρο της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής είναι,

$$\frac{\partial r_i}{\partial |U|} = 0 \tag{3.2α'}$$

$$\frac{\partial |U|}{\partial |U|} = 1 \tag{3.2β'}$$

Αντίστοιχα για τη μεταβλητή v_x είναι,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_i}{\partial v_x} &= \left[\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\right), \frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\right)\right] \\ &= \left[\frac{\sqrt{v_x^2+v_y^2} - \frac{v_x^2}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}}{v_x^2+v_y^2}, \frac{-v_x v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}(v_x^2+v_y^2)}\right]\end{aligned} \tag{3.3α'}$$

$$\frac{\partial |U|}{\partial v_x} = \frac{\partial \sqrt{v_x^2+v_y^2}}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \tag{3.3β'}$$

και για τη μεταβλητή v_y είναι,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_i}{\partial v_y} &= \left[\frac{\partial}{\partial v_y}\left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\right), \frac{\partial}{\partial v_y}\left(\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\right)\right] \\ &= \left[\frac{-v_x v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}(v_x^2+v_y^2)}, \frac{\sqrt{v_x^2+v_y^2} - \frac{v_y^2}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}}{v_x^2+v_y^2}\right]\end{aligned} \tag{3.4α'}$$

$$\frac{\partial |U|}{\partial v_y} = \frac{\partial \sqrt{v_x^2+v_y^2}}{\partial v_y} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \tag{3.4β'}$$

Έχοντας λοιπόν γνωστές τις παραπάνω μεταβολές μπορούν να υπολογιστούν και οι παράγωγοι ευαισθησίας του C_D, οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 3.2.

Όπως φαίνεται και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα των υπολογιζόμενων τιμών των παραγώγων είναι εξαιρετικά. Επίσης παρατηρείται ότι οι απόλυτες τιμές των παραγώγων είναι σημαντικά χαμηλότερες από αυτές της δύναμης αντίστασης πράγμα που βρίσκεται σε αντιστοιχία με τη διαφορά της τιμής των δύο συναρτησιακών. Σημαντικότερη παρατήρηση όμως είναι τα αντίθετα πρόσημα στις παραγώγους των ίδιων

Μεταβλητή περιβάλλοντος	**Παράγωγος FD**	**Παράγωγος Adjoint**
α	0.10	0.10
v_x	-0.011	-0.011
v_y	0.018	0.016
$\|U\|$	-0.010	-0.010

Πίνακας 3.2: Τιμές παραγώγων ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος με αντικειμενική συνάρτηση το συντελεστή αντίστασης

μεταβλητών για τα δύο συναρτησιακά. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη του πολύ σημαντικού ρόλου που παίζουν στις τιμές των παραγώγων οι άμεσες μεταβολές $\widetilde{\frac{\partial F}{\partial c_\mu}}$ των μεταβλητών περιβάλλοντος.

Έχοντας λοιπόν υπολογισμένες τις παραγώγους των μεταβλητών περιβάλλοντος c_μ και θεωρώντας τις παρακάτω τιμές της διασποράς σ_μ της κάθε μεταβλητής (σύμφωνα με τη λογική ότι το εύρος λειτουργίας μίας μεταβλητής περιβάλλοντος έχει μέγεθος $6\sigma_\mu$) είναι δυνατός ο υπολογισμός των πεδίων DD και AV-DD που είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό της δεύτερης μικτής παραγώγου.

Μεταβλητή περιβάλλοντος	**Τυπική απόκλιση**
α	0.006
$\|U\|$	0.083
v_x	0.05
v_y	0.025

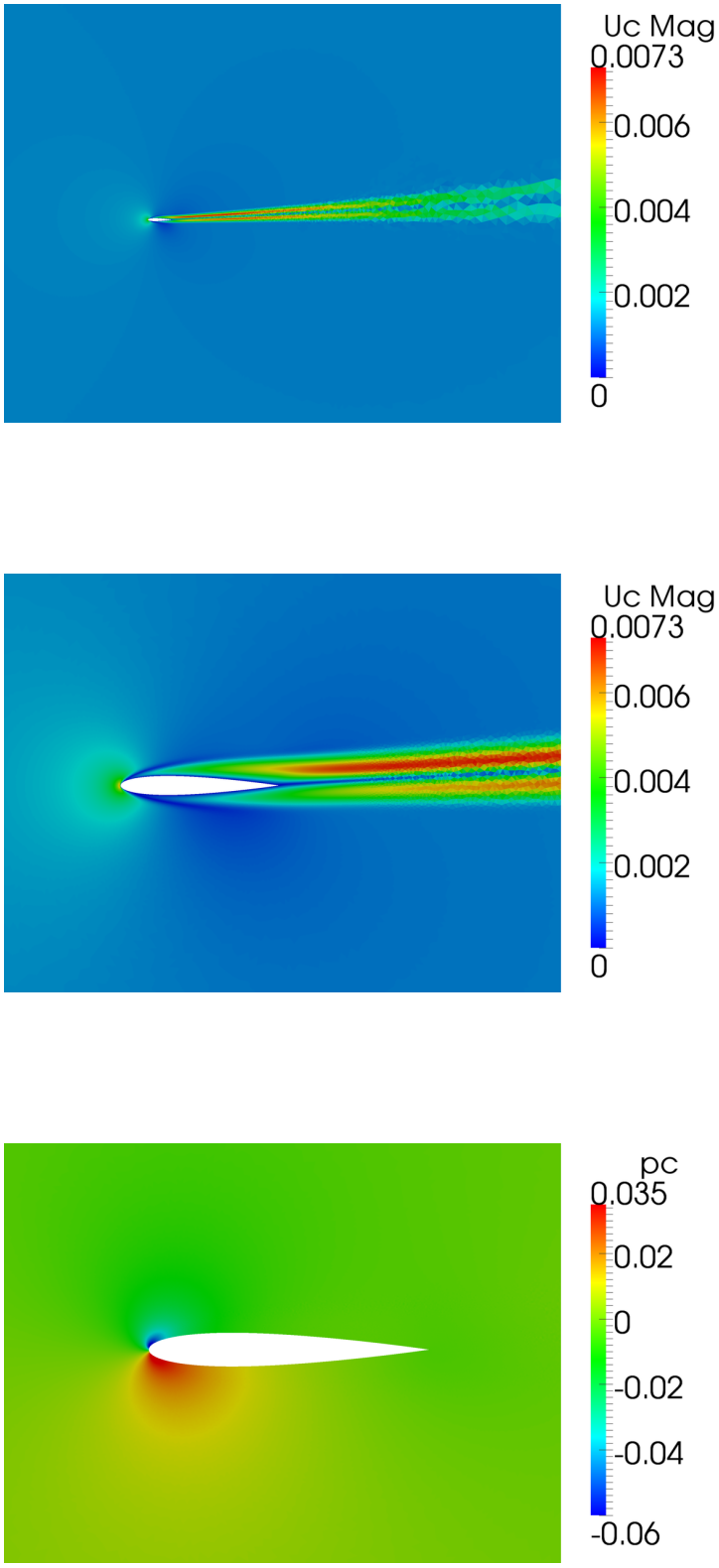
Πίνακας 3.3: Πίνακας των τυπικών αποκλίσεων των μεταβλητών περιβάλλοντος

3.5 Η δεύτερη παράγωγος

3.5.1 Η ευθεία διαφόριση του ευθέος προβλήματος

Όπως φάνηκε στην παράγραφο 2.6 είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πεδίων $(\hat{v}_i, \hat{p})$. Το πλεονέκτημα του στιβαρού σχεδιασμού με τη μέθοδο FOSM, της μεθόδου που προτείνεται σε αυτή τη διπλωματική, είναι ακριβώς ότι απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό ευθείας διαφόρισης DD στον οποίο περιλαμβάνεται το σύνολο των κατα κατεύθυνση μεταβολών $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial c_\mu} r_\mu$ που προκαλούν οι μεταβλητές περιβάλλοντος στη ροή.

Τα πεδία των μεταβλητών της ευθείας διαφόρισης έχουν τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα ;;.Χαρακτηριστικό στοιχείο του πεδίου της ταχύτητας είναι ότι ο ομόρρους είναι από την ίδια πλευρά με αυτό της ροής και ¨χωρισμένος' σε δύο μέρη.



Σχήμα 3.7: Τα πεδία DD ταχύτητας και πίεσης κοντά στην αεροτομή.

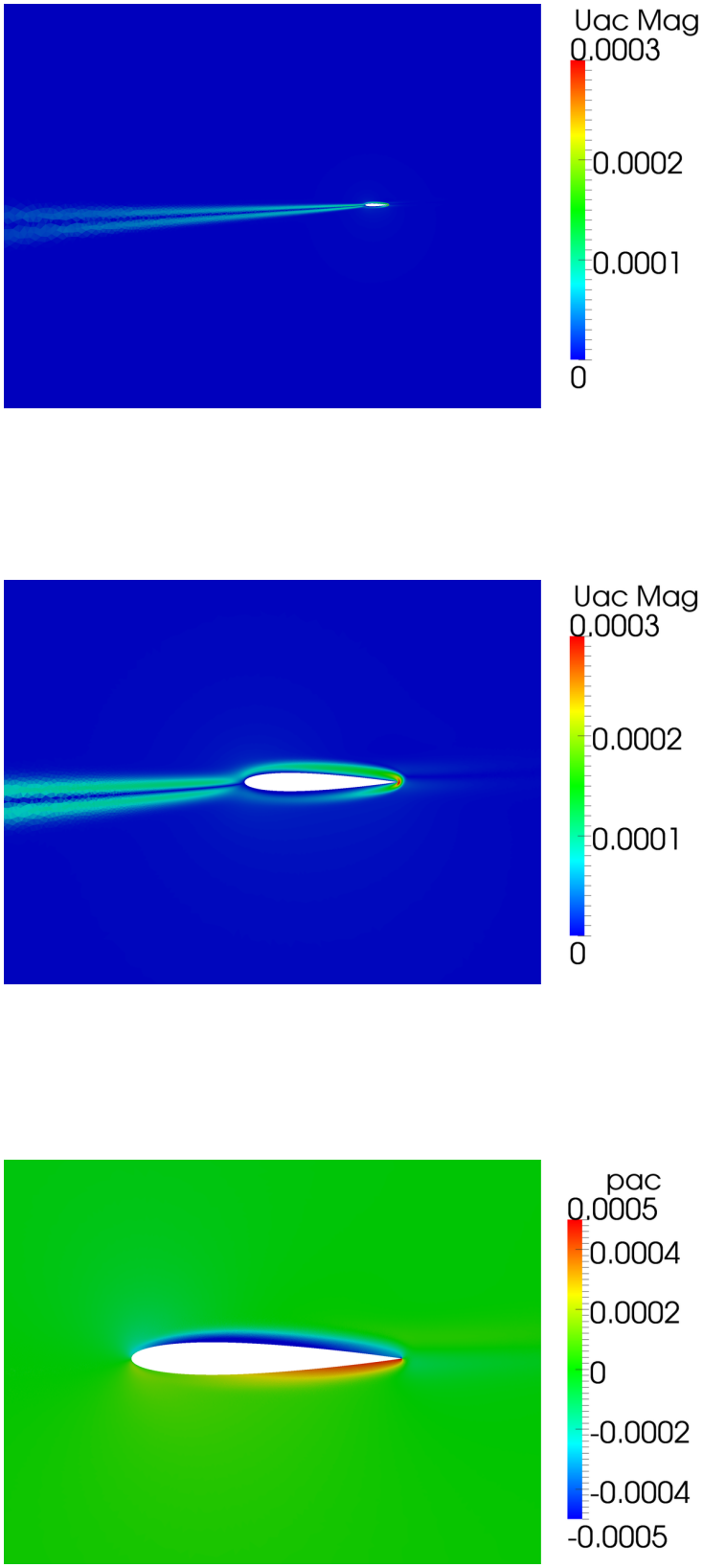
3.5.2 Η ευθεία διαφόριση του συζυγούς προβλήματος

Γνωρίζοντας λοιπόν τα πεδία της ευθείας διαφόρισης, απομένει μόνο να υπολογιστούν τα πεδία $(\hat{u}_i, \hat{q})$ του AV-DD προβλήματος για να υπολογιστεί η δεύτερη μικτή παράγωγος. Τα πεδία των μεταβλητών AV-DD έχουν τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα ;; Αντίστοιχα με την ευθεία διαφόριση του προβλήματος ροής και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ο διαχωρισμός του ομόρρου της συζυγούς ταχύτητας.

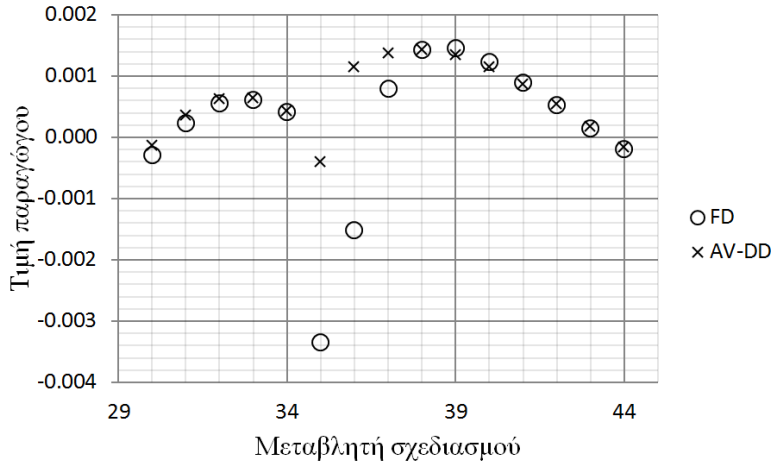
3.5.3 Πιστοποίηση αποτελεσμάτων

Έχοντας υπολογίσει τα πεδία $(\hat{u}_i, \hat{q})$ γίνονται γνωστά όλα τα απαραίτητα μεγέθη ώστε να υπολογιστεί η δεύτερη μικτή παράγωγος σύμφωνα με την παράγραφο 2.6. Στη συνέχεια, θα γίνει σύγκριση των υπολογισμένων παραγώγων με την μέθοδο που παρουσιάστηκε και τις πεπερασμένες διαφορές. Συγκεκριμένα, θα γίνει σύγκριση των μεγεθών $\frac{\partial^2 F}{\partial c_\mu \partial b_m} r_\mu$ τα οποία προκύπτουν άμεσα μέσω του τύπου 2.72, ενώ για τις πεπερασμένες διαφορές υπολογίζεται πρώτα το $\frac{\partial^2 F}{\partial c_\mu \partial b_m}$ και μετά πολλαπλασιάζεται με το r_μ, ώστε να γίνει η σύγκριση. Σ΄ αυτό το σημείο γίνεται άμεσα αντιληπτό το υψηλό κόστος των υπολογισμών των πεπερασμένων διαφορών, το οποίο είναι $4NM$. Γι΄ αυτόν ακριβώς το λόγο, επιλέχθηκε η σύγκριση της δεύτερης παραγώγου να γίνει μόνο για μία μεταβλητή περιβάλλοντος, τη γωνία α. Επίσης η εμφάνιση του όρου $\widehat{\frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k}}$ στην έκφραση της παραγώγου καθιστά δύσκολο τον αριθμητικό υπολογισμό της τιμής του και για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα επιλέχθηκε η αντικειμενική συνάρτηση να είναι μόνο η δύναμη αντίστασης η οποία δεν περιλαμβάνει άμεσες μεταβολές.

Όπως γίνεται φανερό η ταύτιση των αποτελεσμάτων και σε αυτή την περίπτωση είναι πάρα πολύ καλή. Αποκλίσεις παρουσιάζονται στο χείλος πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής, κάτι όμως που δεν προκαλεί ιδιαίτερο πρόβλημα σε σχήματα βελτιστοποίησης αφού συνήθως αυτά τα τμήματα της αεροτομής παραμένουν σταθερά.



Σχήμα 3.8: Τα πεδία των μεταβλητών AV-DD κοντά στην αεροτομή.



Σχήμα 3.9: Πιστοποίηση των δεύτερων μικτών παραγώγων στιβαρού σχεδιασμού με τη μέθοδο AV-DD. Η σύγκριση γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (FD). Η ταύτιση των αποτελεσμάτων είναι πάρα πολύ καλή με αποκλίσεις να εμφανίζονται στο χείλος πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα - Σχόλια

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αποτελούσε ο στιβαρός σχεδιασμός αεροδυναμικών μορφών με τη μέθοδο των στατιστικών ροπών. Συγκεκριμένα αναπτύχθηκε μέθοδος η οποία βασίζεται στη βελτίωση της μέσης τιμής και τις τυπικής απόκλισης μίας αντικειμενικής συνάρτησης με -πρώτης τάξης ακρίβειας- υπολογισμούς ως προς τις συνθήκες του προβλήματος (δηλαδή μία μέθοδος πρώτης-τάξης, δεύτερης-ροπής). Απαίτηση αυτή της μεθόδου είναι η εύρεση μέχρι και δεύτερων μικτών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος και σχεδιασμού.

Αφού έγινε κατανοητό ποιες είναι οι απαραίτητες παράγωγοι που πρέπει να υπολογιστούν και επιλέχθηκαν οι συνθήκες ροής που θα μελετηθούν (στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού), αναπτύχθηκαν οι κατάλληλες μέθοδοι που θα μπορούσαν να υπολογίσουν αυτές τις παραγώγους, δίνοντας προσοχή στο να μειωθεί όσο το δυνατόν περισσότερο το υπολογιστικό κόστος. Έτσι χρησιμοποιήθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης τόσο ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού όσο και ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος. Επιπλέον ήταν αναγκαίος ο υπολογισμός της δεύτερης μικτής παραγώγου. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε η ευθεία διαφόριση των εξισώσεων της ροής και η ευθεία διαφόριση των συζυγών εξισώσεων για να γίνουν γνωστά τα απαραίτητα πεδία. Σε αυτό το σημείο ολοκληρώθηκαν οι απαραίτητοι υπολογισμοί και επιβεβαιώθηκαν τα αποτελέσματα των παραγώγων έχοντας τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Δείχθηκε η ακρίβεια υπολογισμού των πρώτων παραγώγων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ και ως προς τις μεταβλητές περιβάλλοντος $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου χρησιμοποιώντας ως μέσω σύγκρισης τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η ακρίβεια των υπολογισμών ελέχθηκε για δύο

αντικειμενικές συναρτήσεις: (α) τη δύναμη αντίστασης F_D και (β) το συντελεστή αντίστασης C_D, όπου και στις δύο περιπτώσεις τα αποτελέσματα ήταν εξαιρετικής ακρίβειας.

- Δείχθηκε η ακρίβεια υπολογισμού των δεύτερων μικτών παραγώγων $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m}$ με αντικειμενική συνάρτηση τη δύναμη αντίστασης. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ήταν και πάλι πάρα πολύ καλή με μερικές αποκλίσεις να εμφανίζονται στο χείλος προσβολής και εκφυγής της αεροτομής.

Ο στιβαρός σχεδιασμός αεροδυναμικών μορφών με τη μέθοδο των στατιστικών ροπών εκτείνεται σε μεγάλο πεδίο έρευνας και μπορεί να επεκταθεί πολύ περισσότερο από τα στενά όρια μίας μεταπτυχιακής εργασίας. Συγκεκριμένα η έρευνα μπορεί να συνεχιστεί σε πεδία όπως:

- Υπολογισμό και προγραμματισμό για στιβαρό σχεδιασμό υψηλότερης ακρίβειας (μέθοδος δεύτερης-τάξης, δεύτερης-ροπής) ασυμπίεστης και στρωτής ροής Navier-Stokes, όπου μπορούν να υπολογιστούν παράγωγοι που θα είναι πιο αντιπροσωπευτικές για την αντικειμενική συνάρτηση σε μεγαλύτερο εύρος λειτουργίας των μεταβλητών περιβάλλοντος.

- Επέκταση σε τυρβώδεις ροές με χρήση μοντέλων τύρβης ενός ή περισσότερων εξισώσεων, απευθείας αριθμητικής επίλυσης (DNS) και σε ροές με μεταφορά θερμότητας.

- Ένταξη των γεωμετρικών αποκλίσεων στις μεταβλητές περιβάλλοντος. Αυτό απαιτεί την εύρεση των μεγαλύτερων τάξεων παραγώγων λαμβάνοντας υπόψη τις μετακινήσεις των ορίων του πεδίου της ροής.

Παράρτημα Α΄

Υπολογισμός παραγώγων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί ο τρόπος υπολογισμού των παραγώγων με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, τόσο για την πρώτη όσο και για τη δεύτερη μικτή παράγωγο ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και περιβάλλοντος.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences Method) αποτελεί τον απλούστερο τρόπο υπολογισμού των παραγώγων μίας συνάρτησης κόστους $F(\mathbf{U}(\mathbf{b},\mathbf{c}),(\mathbf{b},\mathbf{c}))$ [4], όπου $\mathbf{U}$ είναι οι μεταβλητές της ροής και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_M)$ και $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_N)$ οι μεταβλητές σχεδιασμού και περιβάλλοντος αντίστοιχα. Με χρήση κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας (που είναι και η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος) η m-ιοστή παράγωγος των μεταβλητών σχεδιασμού είναι

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \frac{F(..., b_{m-1}, b_m + \varepsilon_b, b_{m+1}, ...) - F(..., b_{m-1}, b_m - \varepsilon_b, b_{m+1}, ...)}{2\varepsilon_b} \tag{A΄.1}$$

ενώ η μ-ιοστή παράγωγος ως προς τις μετραβλητές περιβάλλοντος είναι

$$\frac{\delta F}{\delta c_\mu} = \frac{F(..., c_{\mu-1}, c_\mu + \varepsilon_c, c_{\mu+1}, ...) - F(..., c_{\mu-1}, c_\mu - \varepsilon_c, c_{\mu+1}, ...)}{2\varepsilon_c} \tag{A΄.2}$$

με $m = 1, ..., M$ και $\mu = 1, ..., N$ το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού και περιβάλλοντος αντίστοιχα.

Η προσέγγιση της δεύτερης μικτής παραγώγου γίνεται κι αυτή με σχήμα κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας και είναι

$$\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} = \frac{F(..., b_m + \varepsilon_b, ..., c_\mu + \varepsilon_c, ...) - F(..., b_m - \varepsilon_b, ..., c_\mu + \varepsilon_c, ...)}{4\varepsilon_b \varepsilon_c} - \frac{F(..., b_m + \varepsilon_b, ..., c_\mu - \varepsilon_c, ...) - F(..., b_m - \varepsilon_b, ..., c_\mu - \varepsilon_c, ...)}{4\varepsilon_b \varepsilon_c} \quad (\text{Α΄}.3)$$

Όπως γίνεται φανερό η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, καθώς για να βρεθεί η πρώτη παράγωγος απαιτούνται 2 υπολογισμοί του πεδίου ροής, δηλαδή συνολικά $2N+2M$ ισοδύναμες επιλύσεις ροής (ΙΕΡ). Αντίστοιχα, κάθε δεύτερη μικτή παράγωγος απαιτεί 4 υπολογισμούς του πεδίου ροής για κάθε ένα συνδυασμό μεταβλητών (b_m, c_μ), δηλαδή το ολικό κόστος της είναι $4NM$ ΙΕΡ. Έτσι το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου καθίσταται απαγορευτικό όταν το μέγεθος των M ή N είναι μεγάλο, όπως συμβαίνει στο πεδίο της αεροδυναμικής/υδροδυναμικής όπου αν ζητηθούν χάρτες ευαισθησίας τότε ο κάθε κόμβος αποτελεί και μεταβλητή σχεδιασμού. Συγκριτικά, υπενθυμίζεται ότι η συζυγής μέθοδος απαιτεί μόλις μία ΙΕΡ για να βρεθεί το διάνυσμα των πρώτων παραγώγων, ενώ αν απαιτηθεί στιβαρός σχεδιασμός μόλις άλλες δύο ΙΕΡ σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε σ΄ αυτή την εργασία. Ένα ακόμα μειονέκτημα της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών είναι η εξάρτηση των υπολογιζόμενων παραγώγων από την ποσότητα ε. Συνεπώς, για να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος, πρώτα είναι απαραίτητη η δοκιμή διάφορων τιμών της ποσότητας ε για να πιστοποιηθεί η τιμή της παραγώγου.

Όμως το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι αποτελεί την απλούστερη μέθοδο από την άποψη της μαθηματικής θεμελίωσης, σε αντίθεση με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης και φυσικά τη συζυγή μέθοδο. Επιπλέον η μέθοδος βασίζεται στο ήδη υπάρχον λογισμικό επίλυσης της ροής, γένεσης πλέγματος και υπολογισμού της αντικειμενικής συνάρτησης, των οποίων η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων και η ακρίβειά τους έχει ελεγχθεί και πιστοποιηθεί πολλές φορές στο παρελθόν.

Για τους παραπάνω λόγους η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται ως μέθοδος πιστοποίησης των υπολογιζόμενων παραγώγων που έχουνε προκύψει από άλλες μεθόδους και δε συστήνεται για προβλήματα βελτιστοποίησης ή υπολογισμού μεγάλου αριθμού παραγώγων.

Παράρτημα Β΄

Υπολογισμός των παραγώγων χωρικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων

Στο κεφάλαιο 2, για τη συνεχή διατύπωση της συζυγούς μεθόδου, χρειάστηκε πολλές φόρες να υπολογιστεί ο ολικός ρυθμός μεταβολής $\frac{\delta}{\delta b_m}$ ολοκληρωμάτων, είτε χωρικών είτε επιφανειακών. Στη συνέχεια, θα δοθούν οι κανόνες που διέπουν την παραγώγιση χωρικών ολοκληρωμάτων καθώς και ο τρόπος υπολογισμού της παραγώγου κλειστών επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

Β΄.1 Παραγώγιση μονοδιάστατου ολοκληρώματος - Ο κανόνας του Leibniz

Στην περίπτωση ολοκλήρωσης σε χώρο μία διάστασης ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η παραγώγιση του ολοκληρώματος δίνεται από τον κανόνα του Leibniz. Συγκεκριμένα, έστω ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_{x_0(b)}^{x_1(b)} F(x,b)dx \tag{B΄.1}$$

με $F = F(x,b)$ συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $X \in \Re$ και $(x_0(b), x_1(b)) \in X$. Έστω ότι η $F(x,b)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη κατά b και, επιπλέον, οι συναρτήσεις $x_0(b)$ και $x_1(b)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες κατά b στο X. Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz, η παράγωγος του ολοκληρώματος της Β΄.1 δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{x_0(b)}^{x_1(b)} F(x,b)dx = \int_{x_0(b)}^{x_1(b)} \frac{\partial(F(x,b))}{\partial b}dx + f(x_1(b),b)\frac{\delta x_1(b)}{\delta b} - f(x_0(b),b)\frac{\delta x_0(b)}{\delta b} \tag{B΄.2}$$

Β΄.2 Παραγώγιση χωρικού ολοκληρώματος - Γενίκευση του κανόνα του Leibniz

Ο κανόνας του Leibniz που διατυπώθηκε προηγουμένως αναφέρεται στην παραγώγιση μονοδιάστατου ολοκληρώματος. Ο κανόνας αυτός όμως μπορεί να επεκταθεί σε χωρικά ολοκληρώματα μεγαλύτερης διάστασης, όπου είναι γνωστός με την ονομασία Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds (είτε Θεώρημα Μεταφοράς των Leibniz - Reynolds) [25].

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα, αν $F = F(\mathbf{x}, b)$ συνάρτηση ορισμένη στο $\Omega(b)$ με όριο $S(b) = \partial\Omega(b)$ και αναζητείται η παράγωγος ως προς b του ολοκληρώματος της F στο $\Omega(b)$, δηλαδή το

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{\Omega(b)} F dV \tag{B΄.3}$$

αυτή θα ισούται με

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{\Omega(b)} F dV = \int_{\Omega(b)} \frac{\partial F}{\partial b}dV + \int_{S(b)} F\frac{\delta \mathbf{x}}{\delta b}\cdot d\mathbf{S} \tag{B΄.4}$$

ή, με τανυστική γραφή,

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{\Omega(b)} F dV = \int_{\Omega(b)} \frac{\partial F}{\partial b}dV + \int_{S(b)} F\frac{\delta x_k}{\delta b}n_k dS \tag{B΄.5}$$

όπου $\mathbf{n}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια S. Με αυτόν τον τρόπο έγινε δυνατή η γραφή της παραγώγου του ολοκληρώματος με όρους της άμεσης μεταβολής της συνάρτησης F (πρώτο ολοκλήρωμα) και της μεταβολής του συνόρου του χώρου ολοκλήρωσης (δεύτερο ολοκλήρωμα).

Β΄.3 Παραγώγιση επιφανειακού ολοκληρώματος

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε ο τρόπος εύρεσης της παραγώγου χωρικού ολοκληρώματος με τη βοήθεια του Θεωρήματος Μεταφοράς του Reynolds. Πολλές

φορές, όμως, στη ρευστομηχανική χρειάζεται να βρεθεί η παράγωγος ενός συναρτησιακού κατά μήκος μίας μεταβαλλόμενης επιφάνειας (όπως π.χ. η επιφάνεια μιας αεροτομής). Αυτό σημαίνει ότι ζητείται η μεταβολή του επιφανειακού ολοκληρώματος

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, b)\cdot d\mathbf{S} \tag{Β΄.6}$$

όπου $\mathbf{F}(\mathbf{x}, b)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο και $d\mathbf{S}$ ένα απειροστό στοιχείο πάνω στην επιφάνεια S. Εναλλακτικά το ολοκλήρωμα της σχέσης Β΄.6 μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} F_k(x_i, b) n_k dS \tag{Β΄.7}$$

Εάν η επιφάνεια $S(b)$ είναι μία κλειστή επιφάνεια τότε η παράγωγος του επιφανειακού ολοκληρώματος ισούται με

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, b) d\mathbf{S} = \int_{S(b)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S(b)} (\nabla\cdot\mathbf{F})\frac{\delta \mathbf{x}}{\delta b}\cdot d\mathbf{S} \tag{Β΄.8}$$

Για να αποδειχθεί η σχέση Β΄.8 θα εφαρμοστεί στη σχέση Β΄.6 το θεώρημα απόκλισης,

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, b) d\mathbf{S} = \frac{\delta}{\delta b}\int_{\Omega(b)} \nabla\cdot\mathbf{F} d\Omega \tag{Β΄.9}$$

η οποία, εφαρμόζοντας το θεώρημα Reynolds, γίνεται

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, b) d\mathbf{S} = \int_{\Omega(b)} \frac{\partial}{\partial b}\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) d\Omega + \int_{S(b)} \left(\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right)\frac{\delta \mathbf{x}}{\delta b}\right)\cdot d\mathbf{S} \tag{Β΄.10}$$

και επειδή $\frac{\partial}{\partial b}\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) = \nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα απόκλισης στο δεύτερο ολοκλήρωμα και η σχέση Β΄.10 να καταλήξει σε

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, b) d\mathbf{S} = \int_{S(b)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S(b)} \left(\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right)\frac{\delta \mathbf{x}}{\delta b}\right)\cdot d\mathbf{S} \tag{Β΄.11}$$

η οποία είναι και η ζητούμενη έκφραση Β΄.8. Εναλλακτικά η έκφραση αυτή μπορεί να γραφεί σε τανυστική μορφή ως

$$\frac{\delta}{\delta b}\int_{S(b)} F_k(x_i, b) n_k dS = \int_{S(b)} \frac{\partial F_k}{\partial b} n_k dS + \int_{S(b)} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\frac{\delta x_i}{\delta b} n_k dS \tag{Β΄.12}$$

Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση μη-κλειστής επιφάνειας $S(b)$ η έκφραση υπολογισμού της παραγώγου είναι διαφορετική. Καθώς όμως οι μη-κλειστές επιφάνειες είναι κάτι

που δεν αφορά την παρούσα εργασία, το θέμα δεν αναπτύσσεται περαιτέρω.

Βιβλιογραφία

[1] Δ.Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ, *Συζυγείς διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος.* Διδακτορική εργασία, Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2007.

[2] Ε.Μ. ΠΑΠΟΥΤΣΗΣ-ΚΙΑΧΑΓΙΑ, *Συζυγείς Μέθοδοι για το Στιβαρό Σχεδιασμό Αεροδυναμικών Μορφών με Υπολογισμό Τρίτων Παραγώγων. Εφαρμογή σε Μονοδιάστατους Αγωγούς.* Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2009.

[3] Α.Σ. ΖΥΜΑΡΗΣ, *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές.* Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2010.

[4] Κ.Χ ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική.* ΕΜΠ, 2005.

[5] C. HÍRSCH, *Numerical Computation of internal and external flows. Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows*, 1990.

[6] W. SQUIRE,G. TRAP, *(Paper)Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.

[7] W. THEODORE, *Gamelin Complex Analysis.* Springer, 2001.

[8] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *Direct, Adjoint and Mixed Approaches for the Computation of Hessian in Airfoil Design Problems.* International Journal for Numerical Methods in Fluids,Vol. 53, pp. 455-469, 2007.

[9] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *Computation of the Hessian Matrix in Aerodynamic Inverse Design using Continuous Adjoint Formulations.* Computers and Fluids, 2007.

[10] D.I. PAPADIMITRIOU,A.S. ZYMARIS, K.C. GIANNAKOGLOU, *Discrete and Continuous Adjoint Formulations for Turbomachinery Applications.* EUROGEN 2005, Munich, September 12-1, 2005.

[11] V.G. ASOUTI, A.S. ZYMARIS, D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *Continuous and Discrete Adjoint Approaches for Aerodynamic Shape Optimization with Low Number preconditioning.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, Pages 1485-1504, 2008.

[12] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *A Continuous Adjoint Method with Objective Function Derivatives Based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows.* Computers and Fluids, Vol. 36, Pages 325-341, 2007.

[13] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *Total Pressure Losses Minimization in Turbomachinery Cascades, Using a New Continuous Adjoint Formulation.* Proc. IMechE, Part A: Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery). Vol. 221, Pages 865-872, 2007.

[14] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *A Continuous Adjoint Method for the Minimization of Losses in Cascade Viscous Flows.* 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA-2006-0116, Reno, NV, USA, Jan 9-11, 2006.

[15] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLOU, *Compressor blade optimization using a continuous adjoint formulation.* ASME TURBO EXPO, GT2006/90466, Barcelona, 2006.

[16] K.C. GIANNAKOGLOU, D.I. PAPADIMITRIOU, *Formulation and application of the continuous adjoint method in aerodynamics and turbomachinery.* Von-Karman Institute Lecture Series, 2006.

[17] M. MARTINELLI, R. DUVIGNEAU, *Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing.* 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference.

[18] K. SHIMOYAMMA, *Robust Aerodynamic Airfoil Design Optimization Against Wind Variations for Mars Exploratory Airplaine.* IAC-06-A3.P.3.07.

[19] P. R. ADDURIA and R. C. PENMETSA, *System reliability analysis for mixed uncertain variables.* Structural Safety, Volume 31, Issue 5, Pages 375-382, 2009.

[20] B. EPSTEIN and S. PEIGIN, *Robust Hybrid Approach to Multiobjective Constrained Optimization in Aerodynamics.* AIAA Journal 42 (8), Pages 1572-1581, 2004.

[21] D.S. LEE , L.F. GONZALEZ , K. SRINIVAS , J. PERIAUX, *Robust evolutionary algorithms for UAV/UCAV aerodynamic and RCS design optimisation.*Computers and Fluids 37, Pages 547-564, 2008.

[22] E. M. PAPOUTSIS-KIACHAGIAS, D. I. PAPADIMITRIOU and K. C. GIANNAKOGLOU, *Robust design in aerodynamics using third-order sensitivity analysis based on discrete adjoint. Application to quasi-1D flows.* International Journal for Numerical Methods in Fluids 69, Pages 691–709, 2012.

[23] D. I. PAPADIMITRIOU and K. C. GIANNAKOGLOU, *Third-order sensitivity analysis for robust aerodynamic design using continuous adjoint.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, Published online in Wiley Online Library, 2012.

[24] J. FISCHER, R. BHATTACHARYA, *On Stochastic LQR Design and Polynomial Chaos.* American Control Conference, Pages 95-100, 2008.

[25] L.G. LEAL, *Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes.* Page 912, 2007.