



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Δ.Π.Μ.Σ: ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**‘ΑΙΤΙΩΔΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ’**

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ Β. ΣΠΑΝΟΥ

Επιβλέπων: Κουκουβίνος Χρήστος, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Δ.Π.Μ.Σ: ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**‘ΑΙΤΙΩΔΗΣ
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ
ΒΙΟΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ’**

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ Β. ΣΠΑΝΟΥ

Αφιερώνεται στους γονείς μου

Βασίλειο και Ευγενία

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, στον τομέα των Μαθηματικών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Κουκουβίνο Χρήστο για την καθοδήγηση του και την στήριξη του όλη αυτή την δύσκολη περίοδο προετοιμασίας. Καθώς και τις γνώσεις που μου μετέδωσε μέσα από τα δύο υπέροχα μαθήματα του Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Στατιστικοί Σχεδιασμοί. Επίσης, σημαντική ήταν η βοήθεια που μου προσέφερε η υποψήφια διδάκτορας Χριστίνα Παρπούλα κατά την διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου για τα εφόδια που μου προσέφεραν, καθώς και όσους με στήριξαν ηθικά, ώστε να μπορέσω να ολοκληρώσω την διπλωματική μου εργασία.

ΑΙΤΙΩΔΗΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΒΙΟΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εισαγωγή.....	9
Abstact.....	10
Βασικές Έννοιες και Ορισμοί	11
Ορισμός: Αιτιότητα- Αιτία- Αιτιατό.....	11
Ορισμός: Αιτιώδης Συνάφεια.....	11
Ορισμός: Αιτιώδης Συμπερασματολογία.....	13
Ορισμοί: Αγγλικών Όρων.....	13

Κεφάλαιο 1 Η γλώσσα των διαγραμμάτων και των δομικών εξισώσεων.....15

1.1 Γραμμικά μοντέλα δομικών εξισώσεων.....	15
1.2 Από τα γραμμικά στα μη παραμετρικά μοντέλα.....	20
1.3 Παρεμβάσεις.....	22

Κεφάλαιο 2 Αιτιώδης Συμπερασματολογία στη Στατιστική: Μια επισκόπηση.....24

2.1 Η βασική διάκριση: Αντιμετώπιση της αλλαγής.....	24
2.2 Διατύπωση της βασικής διάκρισης.....	26
2.3 Επιπτώσεις της βασικής διάκρισης.....	28
2.4 Δύο νοερά εμπόδια: μη δοκιμασμένες παραδοχές και νέα σημειογραφία.....	31
2.5 Το εμπόδιο της νέας σημειογραφίας.....	33

Κεφάλαιο 3 Δομικά υποδείγματα, Διαγράμματα, Αιτιώδης Επίδραση και Αντιπαραδείγματα.....	37
3.1 Εισαγωγή στα δομικά υποδείγματα εξισώσεων.....	37
3.2 Από τα γραμμικά στα μη παραμετρικά υποδείγματα και γραφικές παραστάσεις.....	40
3.2.1 Αναπαράσταση παρεμβάσεων.....	41
3.2.2 Εκτίμηση της επίδρασης των παρεμβάσεων.....	42
3.2.3 Αιτιώδεις επιπτώσεις από τα δεδομένα και τα γραφήματα.....	44
3.3 Αντιμετώπιση των μη υπολογισμένων συγχυτικών παραγόντων.....	49
3.3.1 Επιλογή συμμεταβλητής – το Κριτήριο της ‘Πίσω Πόρτας’.....	49
3.3.2 Γενικός έλεγχος των υπολοίπων.....	54
3.3.3 Από την αναγνώριση στην εκτίμηση.....	56
3.3.4 Θεωρία του Bayes και Αιτιότητα.....	58
3.4 Ανάλυση με αντιπαραδείγματα σε δομικά μοντέλα.....	60
3.5 Ένα παράδειγμα: Η μη συμμόρφωση στις κλινικές δοκιμές.....	64
3.5.1 Καθορισμός της ποσότητας του στόχου.....	64
3.5.2 Διαμόρφωση των υποθέσεων - Βοηθητικές μεταβλητές.....	65
3.5.3 Οριοθέτηση των Αιτιωδών Παραγόντων.....	69
3.5.4 Δοκιμασμένες επιπτώσεις των βοηθητικών μεταβλητών.....	70

Κεφάλαιο 4 Πλαίσιο πιθανού αποτελέσματος.....72

4.1 Το παράδειγμα των χαμένων στοιχείων του «Μαύρου Κουτιού».....72

4.2 Διατύπωση του προβλήματος και απομυθοποίηση του «ignorability».....74

4.3 Συνδυασμός γραφημάτων και πιθανά αποτελέσματα.....77

Κεφάλαιο 5 Αντιπαράδειγματα επί τω έργω.....80

5.1 Διαμεσολάβηση: Άμεσες και έμμεσες συνέπειες.....80

5.1.1 Άμεσα εναντίον συνολικών αποτελεσμάτων.....80

5.1.2 Φυσικά άμεσα αποτελέσματα.....81

5.1.3 Έμμεσες επιπτώσεις και φόρμουλα διαμεσολάβησης...83

5.2 Αίτια των αποτελεσμάτων και πιθανότητες της αιτιώδους συνάφειας.....85

Κεφάλαιο 6 Υποδείγματα.....	90
6.1 Υπόδειγμα Συμπερασματολογίας της Συνάφειας.....	90
6.2 Υπόδειγμα Rubin για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία.....	92
6.3 Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας.....	98
6.3.1 Χρονική σταθερότητα και αιτιώδης παροδικότητα.....	98
6.3.2 Ομοιογένεια των μονάδων.....	99
6.3.3 Ανεξαρτησία.....	100
6.3.4 Σταθερό αποτέλεσμα.....	103
6.4 Κύριοι τρόποι Συμπερασματολογίας για τυχαιοποιημένες μελέτες.....	105
6.4.1 Συμπερασματολογία του Fisher με βάση την Τυχαιοποίηση.....	106
6.4.2 Συμπερασματολογία του Neyman με βάση την Τυχαιοποίηση.....	109
6.4.3 Συμπερασματολογία με βάση το Μοντέλο που βασίζεται στο Συμπέρασμα.....	111
6.5 Ο ρόλος των Συμμεταβλητών στις τυχαιοποιημένες μελέτες...	114
Συμπεράσματα.....	117
Βιβλιογραφία.....	118

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι να μελετήσει την Αιτιώδη Συμπερασματολογία. Η μεθοδολογία της εργασίας στηρίζεται στη συλλογή δευτερογενών δεδομένων, τα οποία συλλέχθηκαν μέσα από βιβλία άρθρα σε περιοδικά αλλά και μέσα από επίσημους διαδικτυακούς τόπους. Η εργασία αποτελείται συνολικά από έξι κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αφορά τη γλώσσα των διαγραμμάτων και των δομικών εξισώσεων. Το δεύτερο αναλύει την Αιτιώδη Συμπερασματολογία στην στατιστική και το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζει δομικά υποδείγματα, διαγράμματα, αιτιώδη αποτελέσματα και αντιπαραδείγματα. Το τέταρτο κεφάλαιο αναλύει το πλαίσιο του πιθανού αποτελέσματος και το πέμπτο παρουσιάζει αντιπαραδείγματα επί τω έργω. Το έκτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζει υποδείγματα όπως το υπόδειγμα Συμπερασματολογίας της Συνάφειας, το υπόδειγμα Rubin για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία, ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας και τους κύριους τρόπους Συμπερασματολογίας για τυχαιοποιημένες μελέτες.

Η γνώση συμβάντων με αιτιώδη συνάφεια ή όχι αποτελεί εργαλείο της Στατιστικής, τόσο στη σχεδίαση όσο και στην μελέτη πειραμάτων με την χρήση κατάλληλων μοντέλων, καθώς και στην διεκπεραίωση αληθών συμπερασμάτων.

Absract

The purpose of this paper is to study Causal Inference. The research methodology was based on the collection of secondary data, collected through books, journal articles and through official websites. The study consists of six chapters. The first chapter deals with the language of diagrams and structural equations. The second analyzes Causal Inference in Statistics and the third chapter presents the structural models, diagrams, causal effects and counterfactuals. The fourth chapter analyzes the context of the probable effect and the fifth presents counterfactuals at work. The sixth and final chapter presents models, like the model of associational inference, the Rubin model for the Causal Inference, some special cases of Causal Inference and the main ways of inference for randomized studies.

Knowledge of events with causality or not, constitutes a tool of Statistics, both for the design and the study of experiments using appropriate models, and the handling of true conclusions.

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Ορισμός: Αιτιότητα- Αιτία- Αιτιατό

Καταρχήν, πριν ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας είναι αναγκαίο να κατανοηθεί η έννοια της Αιτιότητας. Αιτιότητα είναι η σχέση μεταξύ αιτίου και αιτιατού. Αιτιατό είναι το αποτέλεσμα που συνδέεται με μια αιτία. Αιτία είναι κάτι που προκαλεί κάτι άλλο. Με άλλα λόγια υπάρχει Αιτιώδης Συνάφεια δύο καταστάσεων (αιτίας και αποτελέσματος), όταν όμως είναι βέβαιο ότι η δεύτερη κατάσταση προέκυψε εξαιτίας της πρώτης, δηλαδή στο πως κάτι επιδρά στο επόμενο. Τόσο το αίτιο, όσο και το αιτιατό μπορεί να είναι γεγονότα, δηλαδή μεταβολές που επήλθαν στον αντικειμενικό κόσμο.

Ορισμός: Αιτιώδης Συνάφεια

Η Αιτιώδης Συνάφεια δεν αναφέρεται αποκλειστικά στη σχέση μεταξύ δύο και μόνο γεγονότων ή καταστάσεων, αλλά μπορεί (και συνήθως αυτό συμβαίνει) να αποτελεί μια αιτιώδη διαδοχή (μια αλυσίδα) μεταξύ αιτίων και αιτιατών. Βασικό συστατικό της Αιτιότητας (της Αιτιώδους Συνάφειας) είναι η έννοια του χρόνου, δηλαδή της διαδοχής αιτίου και αιτιατού.

Μέσα από την μελέτη της αιτιότητας κερδίζουμε γνώση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για την απόκτηση δύναμης πάνω στη φύση. Εάν δηλαδή γνωρίζουμε τα αίτια κάποιων ανεπιθύμητων γεγονότων που διαδραματίζονται στη φύση, όπως πυρκαγιές, πλημμύρες ή σεισμοί μπορούμε να προσπαθήσουμε να τα αποτρέψουμε από το να συμβούν.

Τη συζήτηση γύρω από την Αιτιότητα τη διακρίνουμε σε δύο μέρη, το ένα είναι το μεταφυσικό και το άλλο το γνωσιολογικό. Το πρώτο μέρος είναι η φύση της

σύνδεσης ανάμεσα στην αιτία και το αποτέλεσμα. Η απάντηση δηλαδή στο ερώτημα πώς η αιτία θα φέρει το αποτέλεσμα.

Το δεύτερο κομμάτι είναι το επιστημικό μέρος το οποίο ασχολείται με το ερώτημα εάν και κατά πόσο είναι δυνατή η αιτιώδης γνώση. Κι αν τελικά αυτή είναι δυνατή με ποιο τρόπο μπορεί να αποκτηθεί.

Για παράδειγμα, το πάτημα ενός διακόπτη είναι το αίτιο και το άναμμα της λάμπας είναι το αιτιατό. Η σχέση (η συνάφεια) συνίσταται στο ότι η λάμπα άναψε επειδή είχε πατηθεί ο διακόπτης και βεβαίως δεν θα είχε ανάψει αν δεν είχε πατηθεί ο διακόπτης. Όμως μπορούν (το αίτιο ή/και το αιτιατό) να μην αποτελούν γεγονότα, δηλαδή μεταβολές στον αντικειμενικό κόσμο. Για παράδειγμα η διατήρηση του σκότους σε ένα κλειστό δωμάτιο με λάμπα και διακόπτη οφείλεται στο ότι δεν πατήθηκε ο διακόπτης. Υφίσταται αιτιώδης συνάφεια ανάμεσα στη ύπαρξη (και στη διατήρηση) μιας κατάστασης και στην έλλειψη (ή στην παράλειψη) μιας δράσης (ενός γεγονότος ή μιας πράξης). Ένα γεγονός χαρακτηρίζεται ως "πράξη" όταν η μεταβολή που επέρχεται στον αντικειμενικό κόσμο οφείλεται στην ανθρώπινη βούληση.

Ορισμός: Αιτιώδης Συμπερασματολογία

Η έννοια Αιτιώδης Συμπερασματολογία είναι η διαδικασία της σκέψης που εξετάζει αν μια σχέση αιτίου και αιτιατού υπάρχει. Η εξέταση της Αιτιώδης Συνάφειας αιτίου και αιτιατού πραγματοποιείται μέσα από Αιτιώδεις υποθέσεις που προκύπτουν, είτε από την παρατήρηση, είτε από τις υπάρχουσες γνώσεις και τον επαγωγικό λόγο, είτε από τον εμπειρισμό. Υποθέσεις που διατυπώνονται εκ των προτέρων (a priori) μπορεί να υποβληθούν σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές που επιτρέπουν την εξέταση της ορθότητας τους.

Σε συνδυασμό με τις γνώσεις, τον τύπο και την ποιότητα των διαθέσιμων στοιχείων της έρευνας, τους κανόνες και τα αξιώματα βοηθούν στο να αποφανθούμε εάν υπάρχει σχέση αιτίου και αιτιατού.

Ορισμοί: Αγγλικών Όρων

Treatment: μεταβλητή προς επεξεργασία σε μελέτες παρατήρησης ή μεταβλητή μεταχείρισης ή θεραπεία.

Markov Chain Monte Carlo (MCMC): μέθοδοι (οι οποίες περιλαμβάνουν τον τυχαίο περίπατο Monte Carlo) και είναι μια κατηγορία αλγορίθμων για τη δειγματοληψία από κατανομές πιθανοτήτων που βασίζεται στην κατασκευή μίας αλυσίδας Markov που έχει την επιθυμητή κατανομή, όπως την κατανομή ισορροπίας . Η κατάσταση της αλυσίδας δημιουργείται μετά από ένα μεγάλο αριθμό βημάτων και

στη συνέχεια χρησιμοποιείται ως δείγμα της επιθυμητής κατανομής. Η ποιότητα του δείγματος βελτιώνεται ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων.

Συνήθως δεν είναι δύσκολο να κατασκευαστεί μια αλυσίδα Markov με τις επιθυμητές ιδιότητες. Το πιο δύσκολο πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί το πόσα βήματα χρειάζονται για να συγκλίνουν προς την στάσιμη κατανομή μέσα σε ένα αποδεκτό σφάλμα.

Τελεστής Laplace

Ο τελεστής Laplace συμβολίζεται με Δ , δηλαδή τον ανάδελτα αναποδογυρισμένο και ορίζουμε σε μια συνάρτηση f των τριών μεταβλητών του χώρου: $\Delta f = \nabla^2 f$.

Ο τελεστής του Laplace Δ ορίζεται με:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

Confounders = Συγχυτικοί παράγοντες

Οι συγχυτικοί παράγοντες προκύπτουν όταν οι ομάδες των εκτεθειμένων και των μη – εκτεθειμένων (του υπό μελέτη πληθυσμού) δεν είναι συγκρίσιμες εξαιτίας εγγενών στο επίπεδο κινδύνου της ασθένειας ή διαφορών στην κατανομή άλλων παραγόντων κινδύνου. Θεωρούνται κεντρικής σημασίας στο σχεδιασμό επιδημιολογικών μελετών. Είναι το συστηματικό σφάλμα. Σκοπός είναι να αποφεύγονται κατά τον σχεδιασμό.

Bias = μεροληψία, έλλειψη αντικειμενικής κρίσης, διάκριση

Κεφάλαιο 1

Η γλώσσα των διαγραμμάτων και των δομικών εξισώσεων

1.1 Γραμμικά μοντέλα δομικών εξισώσεων

Πώς μπορεί κανείς να εκφράσει μαθηματικά την κοινή αντίληψη ότι τα συμπτώματα δεν προκαλούν ασθένειες; Η πρώτη προσπάθεια να διατυπωθεί μία τέτοια σχέση μαθηματικά έγινε το 1920 από τον γενετιστή Wright (1921). Ο Wright χρησιμοποίησε έναν συνδυασμό εξισώσεων και γραφημάτων για να επικοινωνήσει τις αιτιώδεις σχέσεις. Για παράδειγμα, εάν το X αντιπροσωπεύει μια μεταβλητή της νόσου και το Y συμβολίζει ένα συγκεκριμένο σύμπτωμα της νόσου, ο Wright θα έγραφε μία γραμμική εξίσωση:

$$y = \beta x + u \quad (1.1)$$

όπου το x σημαίνει το επίπεδο (ή τη σοβαρότητα) της νόσου, το y σημαίνει το επίπεδο (ή τη σοβαρότητα) του συμπτώματος και το u αντιπροσωπεύει όλους τους παράγοντες, εκτός από την εν λόγω ασθένεια, που θα μπορούσαν ενδεχομένως να επηρεάσουν το Y . Για την ερμηνεία αυτής της εξίσωσης πρέπει κανείς να σκεφτεί μια φυσική διαδικασία κατά την οποία η φύση εξετάζει τις τιμές των x και u και, κατά συνέπεια, αναθέτει στην μεταβλητή Y την τιμή $y = \beta x + u$.

Η εξίσωση (1.1) εξακολουθεί να μην εκφράζει σωστά την αιτιώδη συνάφεια που συνάγεται από αυτή τη διαδικασία ανάθεσης, επειδή οι εξισώσεις είναι συμμετρικά αντικείμενα. Εάν γράψουμε εκ νέου την (1.1) ως:

$$x = (y - u) / \beta \quad (1.2)$$

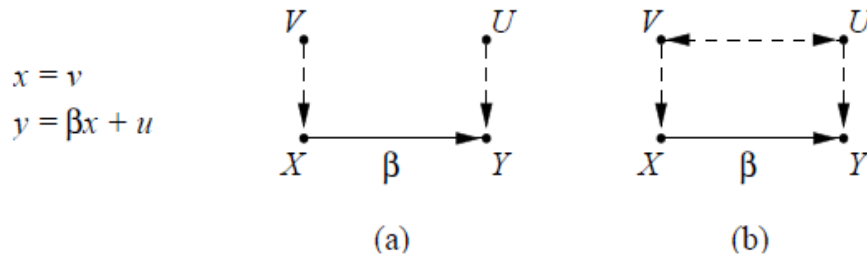
θα μπορούσε να παρερμηνευθεί και να σημαίνει ότι το σύμπτωμα επηρεάζει την ασθένεια, αντίθετα με την αντίληψη ότι δεν υπάρχει τέτοια επιρροή.

Για να αποφευχθούν τέτοιου είδους παρερμηνείες, ο Wright βελτίωσε την εξίσωση με ένα διάγραμμα, που αργότερα ονομάστηκε «**διάγραμμα διαδρομής**», στο οποίο τα βέλη προέρχονται από τις (διαφαινόμενες) αιτίες προς τα (υποτιθέμενα ως) αποτελέσματά τους, καθώς και η απουσία ενός βέλους κωδικοποιεί την απουσία μιας άμεσης επιρροής αιτιότητας μεταξύ των αντίστοιχων μεταβλητών.

Έτσι, στο παράδειγμά μας, το πλήρες μοντέλο ενός συμπτώματος και μιας νόσου θα γραφεί όπως στο Σχήμα 1: Το διάγραμμα κωδικοποιεί την πιθανή ύπαρξη (άμεση) αιτιώδους επίδρασης του X στο Y, και η απουσία της αιτιώδους επιρροής του Y επί X, ενώ οι εξισώσεις κωδικοποιούν τις ποσοτικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που εμπλέκονται και θα πρέπει να καθοριστούν από τα δεδομένα. Η παράμετρος β στην εξίσωση ονομάζεται «**συντελεστής διαδρομής**» και ποσοτικοποιεί την (άμεση) αιτιώδη επίδραση του X στο Y, με δεδομένη την αριθμητική τιμή του β , η εξίσωση ισχυρίζεται ότι **μια μονάδα αύξησης της τιμής του X θα οδηγήσει σε β μονάδες αύξησης του Y.**

Οι μεταβλητές V και U ονομάζονται «**εξωγενείς**» και αντιπροσωπεύουν τους παρατηρούμενους ή μη παρατηρούμενους παρασκηνιακούς παράγοντες τους οποίους ο κατασκευαστής του μοντέλου έχει αποφασίσει να διατηρήσει ανεξήγητους, δηλαδή τους παράγοντες που επηρεάζουν, αλλά δεν επηρεάζονται από άλλες μεταβλητές (που ονομάζονται «**ενδογενείς**») στο μοντέλο. Οι μη παρατηρούμενες εξωγενείς μεταβλητές μερικές φορές ονομάζεται «**διαταραχές**» ή «**σφάλματα**» και αποτελούν παράγοντες που παραλείπονται από το μοντέλο, αλλά κρίνονται ότι είναι σημαντικές για την εξήγηση της συμπεριφοράς των μεταβλητών στο μοντέλο. Η μεταβλητή V για παράδειγμα, αντιπροσωπεύει παράγοντες που συμβάλλουν στην ασθένεια X, οι οποίοι μπορούν ή δεν μπορούν να συσχετιστούν με το U (τους παράγοντες που επηρεάζουν το σύμπτωμα Y).

Αν η συσχέτιση θεωρείται δυνατή, είναι σύνηθες να συνδέονται οι δύο μεταβλητές, V και U με ένα διακεκομμένο διπλό βέλος, όπως φαίνεται στο Σχ. 1(b).



Σχήμα 1: Ένα απλό διαρθρωτικό μοντέλο εξίσωση και τα συναφή διαγράμματα του. Οι απαραίτητες εξωγενείς μεταβλητές συνδέονται με διακεκομμένα βέλη.

Κατά την ανάγνωση των διαγραμμάτων διαδρομής, είναι σύνηθες να χρησιμοποιούνται οι σχέσεις συγγένειας, όπως γονέας, παιδί, πρόγονος, απόγονος και η ερμηνεία των οποίων είναι συνήθως αυταπόδεικτη.

Για παράδειγμα, ένα βέλος $X \rightarrow Y$ συμβολίζει το X ως τον γονέα του Y και το Y ως το παιδί του X . Κατά τα γνωστά, μόνο οι παρατηρούμενες μεταβλητές χαρακτηρίζονται ως «γονείς» και έτσι, στο Σχήμα 1 (a), μόνο το X χαρακτηρίζεται ως γονέας του Y , δεδομένου ότι το U είναι μη παρατηρούμενο (όπως υποδεικνύεται από το διακεκομμένο βέλος). Ομοίως, οι **πρόγονοι** (και αντίστοιχα οι **απόγονοι**) από έναν δεδομένο κόμβο Y , είναι εκείνες οι μεταβλητές που μπορούν να ανιχνευθούν όταν το Y που πηγαινει αντίθετα (αντίστοιχα, κατά μήκος) από τα σταθερά βέλη στο διάγραμμα. Μια «διαδρομή» είναι μία οποιαδήποτε ακολουθία άκρων, σταθερών ή διακεκομμένων.

Για παράδειγμα, υπάρχουν δύο διαδρομές μεταξύ του X και του Y στο Σχήμα 1 (b), η μία αποτελείται από το ευθύ βέλος $X \rightarrow Y$, ενώ η άλλη ιχνογραφεί τους κόμβους X, V, U και Y .

Η σημαντική συμβολή του Wright στην αιτιώδη ανάλυση, εκτός από την εισαγωγή της γλώσσας των διαγραμμάτων διαδρομής, ήταν η ανάπτυξη των γραφικών κανόνων για τη σύνταξη της συνδιακύμανσης κάθε ζεύγους των παρατηρούμενων μεταβλητών σε όρους συντελεστών διαδρομής και συνδιακύμανσης μεταξύ των όρων σφάλματος.

Στο απλό παράδειγμά μας, μπορεί κανείς να γράψει αμέσως τις σχέσεις:

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \boldsymbol{\beta} \quad (1.3)$$

για το σχήμα 1(a), και

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \boldsymbol{\beta} + \text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad (1.4)$$

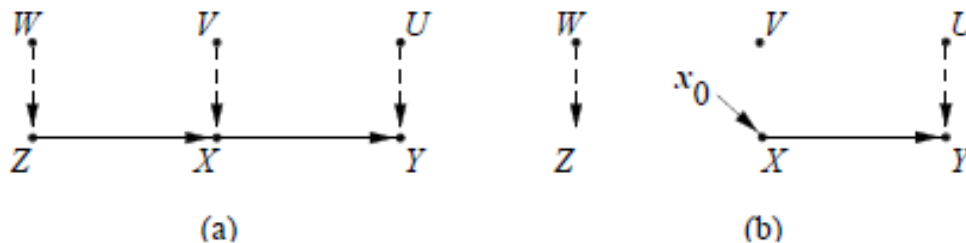
για το σχήμα 1 (b)

(αυτές μπορεί να προέρχονται φυσικά από τις εξισώσεις, αλλά, για τα μεγάλα μοντέλα, οι αλγεβρικές μέθοδοι τείνουν να συσκοτίζουν την προέλευση των προκυπτουσών ποσοτήτων). Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, (π.χ. αν $\text{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0$), οι σχέσεις αυτές μπορεί να επιτρέψουν σε κάποιον να επιλύσει για τους συντελεστές της διαδρομής υπό όρους μόνο της συνδιακύμανσης που παρατηρήθηκε, και αυτό ανέρχεται στην συναγωγή του μεγέθους των (άμεσων) αιτιωδών επιδράσεων από τις παρατηρούμενες, μη πειραματικές συσχετίσεις, με την προϋπόθεση βέβαια ότι ο ένας είναι έτοιμος να υπερασπιστεί τις αιτιώδεις υποθέσεις που κωδικοποιούνται στο διάγραμμα.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, στα διαγράμματα διαδρομής, οι αιτιώδεις υποθέσεις δεν είναι κωδικοποιημένες στις συνδέσεις, αλλά, μάλλον, στις συνδέσεις που λείπουν. Ένα βέλος δείχνει απλώς τη δυνατότητα της αιτιώδους σύνδεσης, η ισχύς της οποίας μένει να προσδιοριστεί (από τα δεδομένα).

Στο Σχήμα 1 (a), για παράδειγμα, οι υποθέσεις που μας επιτρέπουν να εντοπίσουμε το άμεσο αποτέλεσμα β κωδικοποιούνται από το διπλό βέλος που λείπει μεταξύ των V και U , υποδεικνύοντας $\text{Con}(U, V) = 0$, μαζί με το βέλος από το Y στο X που λείπει. Εάν οποιαδήποτε από αυτές τις δύο συνδέσεις είχαν προστεθεί στο διάγραμμα, δεν θα ήμασταν σε θέση να προσδιορίσουμε το άμεσο αποτέλεσμα β . Τέτοιες προσθήκες θα ισοδυναμούσαν στη χαλάρωση της υπόθεσης $\text{Con}(U, V) = 0$, ή της υπόθεσης ότι το Y δεν επηρεάζει το X , αντίστοιχα. Σημειώστε, επίσης, ότι και οι δύο υποθέσεις είναι αιτιώδεις, δεν είναι συσχέτισης, δεδομένου ότι καμία δεν μπορεί να καθοριστεί από την κοινή πυκνότητα των παρατηρούμενων μεταβλητών X και Y .

Η συσχέτιση μεταξύ των μη παρατηρούμενων όρων U και V , μπορεί να αποκαλυφθεί μόνο σε πειραματικό επίπεδο ή από άλλες αιτιώδεις υποθέσεις.



Σχήμα 2: (a) Το διάγραμμα συνδέεται με το διαρθρωτικό μοντέλο εξίσωσης (1.5). (b) Το διάγραμμα συνδέεται με το τροποποιημένο μοντέλο εξίσωσης (1.6), αντιπροσωπεύοντας την παρέμβαση $\text{do}(X = x_0)$.

Παρά το γεγονός ότι κάθε αιτιώδης υπόθεση μεμονωμένα δεν μπορεί να ελεγχθεί, το συνολικό ποσό όλων των αιτιωδών υποθέσεων σε ένα μοντέλο έχει συχνά ελέγξιμες συνέπειες. Το μοντέλο αλυσίδας του Σχήματος 2 (a), για παράδειγμα, κωδικοποιεί επτά αιτιώδεις υποθέσεις που η κάθε μία αντιστοιχεί σε ένα βέλος που λείπει ή σε ένα διπλό βέλος που λείπει ανάμεσα σε ένα ζεύγος μεταβλητών.

Καμία από αυτές τις υποθέσεις δεν είναι ελέγξιμη σε απομόνωση, αλλά το σύνολο όλων αυτών των υποθέσεων συνεπάγεται ότι το Z είναι μη συσχετισμένο με το Y σε κάθε στρώμα του X .

Τέτοιες ελέγξιμες συνέπειες μπορούν να διαβαστούν από τα διαγράμματα χρησιμοποιώντας ένα γραφικό κριτήριο γνωστό ως d - διαχωρισμός (βλέπε Pearl, 2000, σελ. 16-19) και αυτές αποτελούν την μοναδική δυνατότητα μέσω της οποίας οι υποθέσεις που ενσωματώνονται στα μοντέλα των δομικών εξισώσεων μπορούν να αντιμετωπίσουν τον εξονυχιστικό έλεγχο των μη πειραματικών δεδομένων. Με άλλα λόγια, κάθε δυνατή στατιστική δοκιμή ικανή να αναιρέσει το μοντέλο αυτό απορρέει από τις εν λόγω επιπτώσεις.

1.2 Από τα γραμμικά στα μη παραμετρικά μοντέλα

Η μοντελοποίηση των δομικών εξισώσεων αποτελούσε το κύριο όχημα για την ανάλυση των αποτελεσμάτων στην Οικονομική επιστήμη και τις Συμπεριφοριστικές και Κοινωνικές Επιστήμες (Goldberger, 1972; Duncan, 1975; Bollen, 1989). Ωστόσο, το μεγαλύτερο μέρος της μεθοδολογίας αναπτύχθηκε για την γραμμική ανάλυση και, μέχρι πρόσφατα, δεν υπάρχει συγκρίσιμη μεθοδολογία για να επεκτείνει τις ικανότητές της στα μοντέλα που περιλαμβάνουν διχοτομικές μεταβλητές ή μη γραμμικές εξαρτημένες.

Μια βασική προϋπόθεση για οποιαδήποτε τέτοια επέκταση είναι η απομάκρυνση της έννοιας του «αποτελέσματος» από την αλγεβρική αναπαράστασή της ως συντελεστή σε μια εξίσωση και ο επαναπροσδιορισμός του «αποτελέσματος» ως μιας γενικής ικανότητας μετάδοσης των αλλαγών μεταξύ των μεταβλητών. Μια τέτοια επέκταση, με βάση την προσομοίωση υποθετικών παρεμβάσεων στο μοντέλο,

παρουσιάζεται από τον Pearl (1995a, 2000) και έχει οδηγήσει σε νέους τρόπους για τον καθορισμό και την εκτίμηση των αιτιωδών αποτελεσμάτων σε μη γραμμικά και μη παραμετρικά μοντέλα (δηλαδή, στα μοντέλα στα οποία η μορφή των συναρτήσεων των εξισώσεων είναι άγνωστη).

Η κεντρική ιδέα είναι να αξιοποιηθούν τα αμετάβλητα χαρακτηριστικά των δομικών εξισώσεων χωρίς να υποπέσουν σε μια συγκεκριμένη μορφή συνάρτησης. Για παράδειγμα, η μη – παραμετρική ερμηνεία του διαγράμματος του Σχήματος 2 (a) αντιστοιχεί σε ένα σύνολο τριών συναρτήσεων, όπου η κάθε μία αντιστοιχεί σε μία εκ των παρατηρούμενων μεταβλητών:

$$\begin{aligned}z &= f_z(\mathbf{w}) \\x &= f_x(z, \mathbf{v}) \\y &= f_y(x, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{1.5}$$

όπου τα W , V και U υποτίθεται ότι είναι από κοινού ανεξάρτητες, αλλά αυθαίρετα κατανεμημένα. Κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις αναπαριστά μία αιτιώδης διεργασία (ή μηχανισμό), που καθορίζει την τιμή της αριστερής μεταβλητής (εξαγωγή) από τις μεταβλητές στα δεξιά (εισαγωγή). Η απουσία μιας μεταβλητής στην δεξιά πλευρά μιας εξίσωσης κωδικοποιεί την υπόθεση ότι δεν έχει καμία άμεση επίδραση στην αριστερή μεταβλητή. Για παράδειγμα, η απουσία της μεταβλητής Z από τα επιχειρήματα των f_y δείχνει ότι οι μεταβολές στο Z θα αφήσουν το Y αμετάβλητο, εφ' όσον οι μεταβλητές U και X παραμείνουν σταθερές.

Ένα σύστημα τέτοιων συναρτήσεων λέγεται ότι είναι **δομικό** αν θεωρηθεί ότι είναι αυτόνομο, δηλαδή, κάθε συνάρτηση θα παραμένει αμετάβλητη από πιθανές αλλαγές στη μορφή των άλλων συναρτήσεων (Simon, 1953; Holland, 1953).

1.3 Παρεμβάσεις

Η βασική ιδέα είναι να ερμηνευτεί η φράση «εάν το X ήταν x » ως η εντολή για την τροποποίηση του αρχικού μοντέλου και την αντικατάσταση στην εξίσωση του X από ένα σταθερό x , όπως στην εξίσωση (1.6), δημιουργώντας ένα νέο μοντέλο M_{x_0}

$$z = f_Z(\mathbf{w})$$

$$x = x_0 \tag{1.6}$$

$$y = f_Y(x, \mathbf{u})$$

η γραφική περιγραφή της οποίας φαίνεται στο σχήμα 2(b).

Η αντικατάσταση αυτή επιτρέπει την σταθερά x να διαφέρει από την πραγματική αξία του X (δηλαδή $f_X(z, v)$ χωρίς να καθιστά το σύστημα των εξισώσεων ασυνεπές, αποδίδοντας έτσι μια επίσημη ερμηνεία των υποθετικών – μη πραγματικών προτάσεων σε μοντέλα πολλαπλών σταδίων, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή σε μία εξίσωση μπορεί να είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή σε μία άλλη.

Η κοινή κατανομή που συνδέεται με το τροποποιημένο μοντέλο, που συμβολίζεται $P(z, y | do(x_0))$ περιγράφει την κατανομή μετά την παρέμβαση των μεταβλητών Y και Z (ονομάζεται επίσης "ελεγχόμενη" ή "πειραματική" κατανομή), για να διακρίνεται από την κατανομή προ-παρέμβασης, $P(x, y, z)$, που συνδέονται με το αρχικό μοντέλο της εξίσωσης (1.5). Για παράδειγμα, εάν το X παριστάνει μία μεταβλητή treatment, το Y μια μεταβλητή απόκρισης και Z κάποια συμμεταβλητή που επηρεάζει την μεταβλητή treatment, στη συνέχεια, η κατανομή $P(z, y | do(x_0))$ δίνει το ποσοστό των ατόμων που θα επιτύχει επίπεδο απόκρισης $Y = y$ και της συμμεταβλητής επίπεδο $Z = z$ κάτω από την υποθετική treatment, $X = x_0$ που χορηγείται ομοιόμορφα στον πληθυσμό.

Γενικά μπορούμε να ορίσουμε τυπικά την κατανομή μετά την παρέμβαση από την εξίσωση: $P_M(y|do(x)) \triangleq P_{M_x}(y)$ (1.7)

Με άλλα λόγια: Στο πλαίσιο του μοντέλου M , η κατανομή μετά την παρέμβαση στην Y ορίζεται ως η πιθανότητα ότι το μοντέλο M_x εκχωρεί σε κάθε έκβαση επίπεδο $Y = y$.

Από αυτή την κατανομή, είναι δυνατό να εκτιμηθεί η **αποτελεσματικότητα της treatment**, με τη σύγκριση αυτής της κατανομής χρησιμοποιώντας διαφορετικά επίπεδα x_0 . Ένα κοινό μέτρο της αποτελεσματικότητας της είναι η μέση διαφορά όπου x_0 και x_0' είναι δύο επίπεδα της treatment που επιλέγονται για την σύγκριση

$$E(Y | do(x_0')) - E(Y | do(x_0)) \quad (1.8)$$

Ένα άλλο μέτρο είναι η πειραματική Αναλογία Κινδύνου (Risk Ratio)

$$E(Y | do(x_0')) / E(Y | do(x_0)) \quad (1.9)$$

Η διακύμανση $Var(Y | do(x_0))$ ή οποιαδήποτε άλλη παράμετρο κατανομής, μπορούν επίσης να πραγματοποιήσουν τη σύγκριση.

Όλα αυτά τα μέτρα μπορούν να ληφθούν από την ελεγχόμενη συνάρτηση κατανομής: $P(Y = y | do(x)) = \sum_Z P(z, y | do(x))$ η οποία ονομάζεται «**Αιτιώδης Επίδραση**» (**Causal Effect**) σε Pearl (2000a, 1995a).

Αυτή η ερμηνεία των υποθετικών – μη πραγματικών προτάσεων, ως λύση στα τροποποιημένα συστήματα εξισώσεων, προβλέπει την εννοιολογική και τυπική σύνδεση μεταξύ των μοντέλων των δομικών εξισώσεων και το πλαίσιο δυναμικής-αποτελέσματος των Neyman - Rubin, καθώς και τις επεκτάσεις του Robins. Μας εξασφαλίζει επίσης ότι τα τελικά αποτελέσματα από τις δύο προσεγγίσεις θα είναι τα ίδια. Η επιλογή είναι αυστηρά ένα θέμα ευκολίας ή διορατικότητας.

Κεφάλαιο 2

Αιτιώδης Συμπερασματολογία στη Στατιστική:

Μια επισκόπηση

2.1 Η βασική διάκριση: Αντιμετώπιση της αλλαγής

Ο σκοπός της τυπικής στατιστικής ανάλυσης, που χαρακτηρίζεται από την παλινδρόμηση και άλλες τεχνικές εκτίμησης, είναι η εξαγωγή παραμέτρων μιας κατανομής από τα δείγματα που λαμβάνονται από αυτήν την κατανομή. Με τη βοήθεια αυτών των παραμέτρων, μπορεί κανείς να εξάγει συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών, να εκτιμήσει την πιθανότητα παρελθοντικών και μελλοντικών γεγονότων, καθώς και να ενημερώσει για πιθανότητα πραγματοποίησης γεγονότων υπό το φως νέων δεδομένων ή νέων μετρήσεων. Αυτές οι εργασίες μπορούν αρκετά καλά να πραγματοποιηθούν από την τυπική στατιστική ανάλυση εφ' όσον οι πειραματικές συνθήκες παραμένουν ίδιες.

Η αιτιώδης ανάλυση πηγαίνει ένα βήμα παραπέρα. Στόχος της είναι η εξαγωγή στοιχείων/απόψεων από την διαδικασία παραγωγής δεδομένων. Με τη βοήθεια αυτών των στοιχείων, μπορεί κανείς να συμπεράνει όχι μόνο την πιθανότητα των γεγονότων υπό στατικές συνθήκες, αλλά και τη δυναμική των γεγονότων σε μεταβαλλόμενες συνθήκες. Αυτή η ικανότητα συμπεριλαμβάνει την πρόβλεψη των αποτελεσμάτων των παρεμβάσεων (π.χ. θεραπεία ή αποφάσεις πολιτικής) και των αυθόρμητων μεταβολών (π.χ., επιδημίες, φυσικές καταστροφές), τον προσδιορισμό των αιτιών των αναφερθέντων γεγονότων, καθώς και την αξιολόγηση της ευθύνης και την απόδοση (π.χ., αν ένα γεγονός x ήταν απαραίτητο (ή ικανό) για την πραγματοποίηση του γεγονότος y).

Αυτή η διάκριση συνεπάγεται ότι οι έννοιες της αιτιώδους στατιστικής και οι έννοιες της στατιστικής συσχέτισης δεν αναμειγνύονται. Οι συσχετίσεις χαρακτηρίζουν τις στατικές συνθήκες, ενώ η αιτιώδης ανάλυση ασχολείται με τις μεταβαλλόμενες συνθήκες. Δεν υπάρχει τίποτα στην κοινή κατανομή των συμπτωμάτων και των ασθενειών για να μας πει ότι η θεραπεία των πρώτων θα θεραπεύσει ή δεν θα θεραπεύσει τις δεύτερες. Γενικότερα, δεν υπάρχει τίποτε σε μία συνάρτηση κατανομής για να μας πει πώς η κατανομή θα διέφερε εάν οι εξωτερικές συνθήκες είχαν αλλάξει, π.χ. από ένα περιβάλλον παρατήρησης σε ένα πειραματικό περιβάλλον, επειδή οι νόμοι της Θεωρίας των Πιθανοτήτων δεν υπαγορεύουν τον τρόπο με τον οποίο μία ιδιότητα μιας κατανομής θα πρέπει να αλλάξει όταν μεταβληθεί μία άλλη ιδιότητα.

Αντλώντας την αναλογία στην οπτική αντίληψη, οι πληροφορίες που περιέχονται σε μια συνάρτηση πιθανότητας είναι ανάλογες με μια γεωμετρική περιγραφή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, αρκεί για την πρόβλεψη του πώς αυτό το αντικείμενο θα είναι ορατό από οποιαδήποτε γωνία εκτός του αντικειμένου, αλλά είναι ανεπαρκής για την πρόβλεψη του πώς το αντικείμενο θα παραμορφωθεί εάν χειραγωγείται και πιέζεται από εξωτερικές δυνάμεις. Οι πρόσθετες πληροφορίες που απαιτούνται για την υποβολή των εν λόγω προβλέψεων (π.χ., προσαρμοστικότητα του αντικειμένου ή ελαστικότητα) είναι ανάλογες με τις πληροφορίες που παρέχουν οι αιτιώδεις υποθέσεις παρέχουν σε διάφορες μορφές - γραφήματα, διαρθρωτικές εξισώσεις ή στην απλή καθομιλουμένη. Ο ρόλος των εν λόγω πληροφοριών είναι να προσδιορίσουν τις απόψεις για τον κόσμο που παραμένει αμετάβλητος όταν μεταβάλλονται οι εξωτερικές συνθήκες, ας πούμε λόγω των θεραπειών ή των αποφάσεων πολιτικής.

Οι σκέψεις αυτές συνεπάγονται ότι το σύνθημα «**η συσχέτιση δεν σημαίνει αιτιώδη συνάφεια**» μπορεί να μεταφραστεί σε μια χρήσιμη αρχή: δεν μπορεί κανείς να τεκμηριώσει τους ισχυρισμούς αιτιότητας από τις συσχετίσεις και μόνο, **ακόμη** και σε επίπεδο πληθυσμού, **πίσω από κάθε αιτιώδη συμπέρασμα πρέπει να υπάρχει κάποια αιτιώδης υπόθεση** η οποία δεν είναι ελέγξιμη στις μελέτες παρατήρησης. Ο Cartwright (1989) εξέφρασε αυτήν την αρχή ως «όχι αιτίες μέσα, όχι αιτίες έξω», που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να μετατρέψουμε τις στατιστικές γνώσεις σε αιτιώδη γνώση.

2.2 Διατύπωση της βασικής διάκρισης

Μία χρήσιμη διαχωριστική γραμμή που κάνει τη διάκριση μεταξύ των ιδεών της συσχέτισης και της αιτιώδους συνάφειας, σαφή και εύκολη να εφαρμοστεί, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. **Μια ιδέα συσχέτισης είναι κάθε σχέση που μπορεί να οριστεί από την άποψη μιας κοινής κατανομής** (είτε πρόκειται για προσωπική ή με βάση τη συχνότητα) **των παρατηρούμενων μεταβλητών και η έννοια της αιτιώδους συνάφειας είναι κάθε σχέση που δεν μπορεί να οριστεί μόνο από την κατανομή.**

Παραδείγματα εννοιών της συσχέτισης είναι: η συσχέτιση (correlation), η παλινδρόμηση (regression), η εξάρτηση (dependence), η υπό συνθήκη ανεξαρτησία (conditional independence), η πιθανοφάνεια (likelihood), ο λόγος κινδύνου (risk ratio), ο λόγος πιθανοτήτων (risk ratio), η περιθωριοποίηση (marginalization). κλπ.

Παραδείγματα εννοιών της αιτιώδους συνάφειας είναι: η τυχαιοποίηση (randomization), η επιρροή (influence), η επίδραση (effect), ο συγχυτικός παράγοντας (confounder), η κρατούσα σταθερά (holding constant), η διαταραχή (disturbance), η τυχαία ή νόθα συσχέτιση (spurious correlation), οι βοηθητικές μεταβλητές

(instrumental variables), η παρέμβαση (intervention), η εξήγηση (explanation), η απόδοση (attribution) και ούτω καθεξής.

Ο σκοπός αυτής της διαχωριστικής γραμμής δεν είναι για να αποκλείσει αυτές τις έννοιες της αιτιώδους συνάφειας από την περιοχή της στατιστικής ανάλυσης, αλλά μάλλον, το να καθιστά εύκολο στους ερευνητές τον εντοπισμό των υποθέσεων που απαιτούνται για την τεκμηρίωση των διαφόρων τύπων των επιστημονικών ισχυρισμών τους. Κάθε ισχυρισμός που επικαλείται τις έννοιες της αιτιώδους συνάφειας θα πρέπει να προέρχεται από κάποιους χώρους που χρησιμοποιούνται οι έννοιες αυτές και δεν μπορεί να προέρχεται ή να προκύπτει από στατιστικές συσχετίσεις και μόνο.

2.3 Επιπτώσεις της βασικής διάκρισης

Η αρχή αυτή έχει εκτεταμένες συνέπειες που δεν αναγνωρίζονται γενικά στην βιβλιογραφία της τυπικής στατιστικής. Πολλοί ερευνητές, για παράδειγμα, είναι πεπεισμένοι ότι οι συγχυτικοί παράγοντες είναι σταθερά θεμελιωμένοι στην τυπική στατιστική και ότι μπορεί να τους αποδοθεί ένας ορισμός συσχέτισης λέγοντας (περίπου) ότι: «Το U είναι ένας πιθανός **συγχυτικός παράγοντας** στην εξέταση της επίδρασης της θεραπείας του X στο αποτέλεσμα Y όταν το U και το X και το U και το Y δεν είναι ανεξάρτητα». Το ότι αυτός ο ορισμός και όλες οι πολλές παραλλαγές του πρέπει να αποτύχουν, καθίσταται προφανές από τα ακόλουθα βασικά ζητήματα:

1. Οι συγχυτικοί παράγοντες ασχολούνται με τη διαφορά μεταξύ μιας συσχέτισης η οποία μετράται σε μια μελέτη παρατήρησης και μιας συσχέτισης που θα επικρατήσει κάτω από ιδανικές πειραματικές συνθήκες.
2. Οι συσχετίσεις που επικρατούν κάτω από πειραματικές συνθήκες αποτελούν ποσότητες αιτιώδους συνάφειας επειδή δεν μπορούν να συναχθούν από την κοινή κατανομή μόνο. Ως εκ τούτου, οι συγχυτικοί παράγοντες αποτελούν έννοια της αιτιώδους συνάφειας και ο ορισμός τους δεν μπορεί να βασίζεται σε στατιστικές συσχετίσεις και μόνο, δεδομένου ότι αυτές μπορούν να προέρχονται από την κοινή κατανομή.

Πράγματι, μπορεί κανείς να κατασκευάσει απλά παραδείγματα που να δείχνουν ότι το κριτήριο της συσχέτισης δεν είναι ούτε αναγκαίο ούτε επαρκές, δηλαδή, ορισμένοι παράγοντες σύγχυσης δεν μπορούν να συνδέονται με το X , ούτε με το Y και κάποιοι μη- συγχυτικοί παράγοντες μπορεί να σχετίζονται τόσο με το X , όσο και με το Y (Pearl, 2000, σελ. 185-186). Αυτό σημαίνει επίσης ότι, τα σφάλματα

των συγχυτικών παραγόντων δεν μπορούν να ανιχνευθούν ή να διορθωθούν με στατιστικές μεθόδους και μόνο, ούτε καν από τις πιο εξελιγμένες τεχνικές που σκοπό έχουν να «ελέγξουν για συγχυτικούς παράγοντες», όπως η σταδιακή επιλογή Kleinbaum et al. (1998) ή οι μέθοδοι που βασίζονται στην σύμπτυξη Grayson (1987). Θα πρέπει κανείς να κάνει κάποιες υποθέσεις σχετικά με τις αιτιώδεις σχέσεις σε ένα πρόβλημα, ιδίως για το πώς οι πιθανοί «συγχυτικοί παράγοντες» επηρεάζουν άλλες συμμεταβλητές στο πρόβλημα, πριν από την οποιαδήποτε προσαρμογή ασφαλούς διόρθωσης του συγχυτικού σφάλματος.

Επομένως, η πλούσια βιβλιογραφία στην επιδημιολογία για τον έλεγχο των συγχυτικών παραγόντων θα πρέπει να βασίζεται σε ορισμένες υποθέσεις σιωπηρής αιτιώδους συνάφειας και, δεδομένου ότι οι αναφορές στην αιτιώδη συνάφεια έχει γενικά αποφευχθεί σε μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας (π.χ. , Bishop, 1971; Whittemore, 2003), θα χρειαστεί μεγάλη προσπάθεια για την αξιολόγηση της σημασίας αυτής της εντυπωσιακής βιβλιογραφίας στη σύγχρονη αντίληψη των συγχυτικών παραγόντων ως αποτέλεσμα του σφάλματος Greenland et al. (1999b).

Μια άλλη επίπτωση από την σαφή διάκριση ανάμεσα στις έννοιες της συσχέτισης και της αιτιώδους συνάφειας είναι ότι κάθε μαθηματική προσέγγιση της αιτιώδους ανάλυσης θα πρέπει να αποκτήσει νέα σημειογραφία για την έκφραση των υποθέσεων και αξιώσεων της αιτιώδους συνάφειας. Το λεξιλόγιο του Λογισμού των Πιθανοτήτων, με τους ισχυρούς φορείς της υπόθεσης και περιθωριοποίησης, δεν επαρκεί για την έκφραση των πληροφοριών της αιτιώδους συνάφειας. Για παράδειγμα, η σύνταξη του Λογισμού των Πιθανοτήτων δεν μας επιτρέπει να εκφράσουμε το απλό γεγονός ότι « τα συμπτώματα δεν προκαλούν ασθένειες», πόσο μάλλον να συντάξουμε μαθηματικά συμπεράσματα από αυτά τα στοιχεία.

Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι τα δύο γεγονότα εξαρτώνται - πράγμα που σημαίνει ότι αν βρούμε το ένα, μπορούμε να αναμένουμε να συναντήσουμε και το άλλο, αλλά δεν μπορούμε να διακρίνουμε στατιστική εξάρτηση, ποσοτικοποιημένη από την δεσμευμένη πιθανότητα P (νόσος | σύμπτωμα) από την αιτιώδη εξάρτηση, για την οποία δεν έχουμε καμία έκφραση στον πρότυπο Λογισμό των Πιθανοτήτων.

Οι επιστήμονες που επιδιώκουν να εκφράσουν τις αιτιώδεις σχέσεις πρέπει, επομένως, να συμπληρώσουν την γλώσσα των πιθανοτήτων με ένα λεξιλόγιο για την αιτιώδη συνάφεια, δηλαδή ένα λεξιλόγιο στο οποίο η συμβολική αναπαράσταση για τη σχέση «τα συμπτώματα προκαλούν νόσο» θα είναι διαφορετική από τη συμβολική αναπαράσταση του «τα συμπτώματα σχετίζονται με τη νόσο». Μόνο μετά την πραγματοποίηση μιας τέτοιας διάκρισης μπορούμε να επισημάνουμε την προηγούμενη φράση ως «ψευδή» και την δεύτερη ως «αληθινή», έτσι ώστε να ενσωματωθούν σωστά οι πληροφορίες της αιτιώδους συνάφειας στο σχεδιασμό και την ερμηνεία των στατιστικών μελετών.

Οι προηγούμενες δύο προϋποθέσεις: (1) να ξεκινήσει η αιτιώδης ανάλυση με μη δοκιμασμένες, θεωρητικά ή κριτικά, υποθέσεις και (2) να επεκταθεί η σύνταξη του Λογισμού Πιθανοτήτων, αποτελούν τα δύο κύρια εμπόδια για την αποδοχή της αιτιώδους ανάλυσης μεταξύ των στατιστικολόγων και των επαγγελματιών με την παραδοσιακή εκπαίδευση στον τομέα της στατιστικής. Τώρα θα διερευνήσουμε λεπτομερέστερα τη φύση των δύο αυτών εμποδίων και το γιατί ήταν τόσο δύσκολο να αντιμετωπιστούν.

2.4 Δύο νοερά εμπόδια: μη δοκιμασμένες παραδοχές και νέα σημειογραφία

Υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ των υποθέσεων συσχέτισης και αιτιώδους συνάφειας. Πρώτον, οι υποθέσεις συσχέτισης ακόμη κι αν δεν έχουν δοκιμαστεί, μπορούν να εξεταστούν θεωρητικά, με δεδομένο ένα επαρκώς μεγάλο δείγμα και επαρκώς ακριβές μετρήσεις. Οι αιτιώδεις υποθέσεις, σε αντίθεση, δεν μπορούν να επαληθευτούν ούτε θεωρητικά, εκτός κι εάν καταφύγει κανείς στον έλεγχο τους πειραματικά. Αυτή η διαφορά είναι ιδιαίτερα έντονη στην Μπεϋζιανή ανάλυση. Αν και οι προϋποθέσεις που συνήθως ανατίθενται στις στατιστικές παραμέτρους κατά την Μπεϋζιανή ανάλυση, αποτελούν μη δοκιμασμένες ποσότητες, η ευαισθησία σε αυτές τις προϋποθέσεις τείνει να μειώνεται με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος. Σε αντίθεση, η ευαισθησία των προϋποθέσεων των αιτιωδών παραμέτρων, για παράδειγμα εκείνων που μετρούν την επίδραση του καπνίσματος στον καρκίνο του πνεύμονα, παραμένει μη μηδενική, ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος.

Δεύτερον, οι υποθέσεις συσχέτισης μπορούν να εκφραστούν με την οικεία γλώσσα του Λογισμού των Πιθανοτήτων κι έτσι να αποκτήσουν μία 'αύρα' επιστημονικότητας και σεβασμού. Οι αιτιώδεις υποθέσεις, όπως είδαμε πριν, στερούνται αυτής της τιμής και, συνεπώς, αμέσως μετατρέπονται σε άτυπη, ανεκδοτική ή μεταφυσική σκέψη. Και πάλι, η διαφορά αυτή γίνεται φανερή στους αναλυτές της Μπεϋζιανής θεωρίας, οι οποίοι έχουν συνηθίσει να δέχονται μη δοκιμασμένες, επικριτικές υποθέσεις και θα πρέπει συνεπώς να αποδεχθούν τις αιτιώδεις υποθέσεις με ανοιχτές αγκάλες, αλλά δεν το κάνουν. Οι υποστηρικτές της Μπεϋζιανής θεωρίας προβληματίζονται όταν η ίδια κρίση εκφράζεται στα απλά αγγλικά με έννοιες της αιτιώδους συνάφειας, όπως π.χ. στο «η θεραπεία δεν αλλάζει

το φύλο». Ένα τυπικό παράδειγμα μπορεί να δει κανείς στους Lindley και Novick (1981) και στην θεραπεία των συγχυτικών παραγόντων, στο πλαίσιο του 'Παραδόξου του Simpson' (βλ. Pearl, 2000, σελ. 174-182 για λεπτομέρειες).

Το **τρίτο εμπόδιο** στις αιτιώδεις υποθέσεις (έναντι των υποθέσεων της συσχέτισης) προέρχεται από τον φόβο της σαφήνειας. Οι υποθέσεις για τις αφηρημένες ιδιότητες των συναρτήσεων πυκνότητας ή για τις υποθετικές εξαρτήσεις μεταξύ των μεταβλητών είναι, θεωρητικά μιλώντας, μάλλον αδιαφανείς και ως εκ τούτου, τείνουν να 'συγχωρούνται', αντί να συζητιούνται. Αντιθέτως, οι υποθέσεις για το πώς οι μεταβλητές προκαλούν αιτία η μία στην άλλη είναι έντονα διαφανείς και ως εκ τούτου, τείνουν να προκαλούν αντεπιχειρήματα και αντί-υποθέσεις. Κατά ειρωνικό τρόπο, αυτό το τελευταίο χαρακτηριστικό είναι ακριβώς αυτό που συχνά αποτρέπει τους ερευνητές από την άρθρωση υποθέσεων με αιτιώδη λεξιλόγιο.

Πράγματι, δεδομένου ότι το μεγαλύτερο μέρος της επιστημονικής γνώσης είναι οργανωμένο σε αιτιώδη σχήματα, οι επιστήμονες είναι απίστευτα δημιουργικοί στην κατασκευή ανταγωνιστικών εναλλακτικών λύσεων σε οποιαδήποτε υπόθεση αιτιότητας. Οι στατιστικές υποθέσεις αντιθέτως, προστατεύονται σχετικά από τέτοιες προκλήσεις και ως εκ τούτου προσφέρουν μια ασφαλέστερη διαδρομή προς την διεξαγωγή συμπερασμάτων.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η αιτιώδης ανάλυση δεν ασχολείται με την υπεράσπιση των υποθέσεων μοντελοποίησης, με τον ίδιο τρόπο που ο διαφορικός λογισμός δεν ασχολείται με την προάσπιση της φυσικής εγκυρότητας μιας διαφορικής εξίσωσης την οποία ένας φυσικός επιλέγει να χρησιμοποιήσει. Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει κενό στην ανάλυση των πειραματικών δεδομένων που να μπορεί πιθανά να υπερασπίσει τις αιτιώδεις υποθέσεις.

Αντί αυτού, η αιτιώδης ανάλυση ασχολείται με τα συμπεράσματα που λογικά προκύπτουν από το συνδυασμό των δεδομένων και από ένα δεδομένο σύνολο υποθέσεων, μόνο στην περίπτωση που κάποιος είναι διατεθειμένος να αποδεχθεί το τελευταίο. Έτσι, **όλα τα αιτιώδη συμπεράσματα είναι κατ' ανάγκην υποθετικά** και το περισσότερο που μπορεί κανείς να απαιτήσει από μια τέτοια ανάλυση είναι:

1. Οι προτάσεις να μπορούν να υποστούν μαθηματική ανάλυση.
2. Οι προτάσεις να συνδέονται με μια ουσιαστική και ξεκάθαρη γλώσσα για να μπορούμε να κρίνουμε την αληθοφάνειά τους ή το αναπόφευκτό τους.

2.5 Το εμπόδιο της νέας σημειογραφίας

Η ανάγκη να υιοθετηθεί μια νέα σημειογραφία, ξένη προς την περιοχή της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, υπήρξε τραυματική για τα περισσότερα άτομα που εκπαιδεύονται στην στατιστική, εν μέρει επειδή η προσαρμογή μιας νέας γλώσσας είναι δύσκολη σε γενικές γραμμές και εν μέρει επειδή οι στατιστικολόγοι έχουν συνηθίσει να υποθέτουν ότι όλα τα φαινόμενα, οι διαδικασίες, οι σκέψεις και οι τρόποι εξαγωγής συμπερασμάτων δεν μπορούν να μην συλληφθούν στην ισχυρή γλώσσα της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Πώς μπορεί κάποιος να αναγνωρίσει τις εκφράσεις της αιτιώδους ανάλυσης στη στατιστική βιβλιογραφία; Όσοι είναι έμπειροι στο πιθανό αποτέλεσμα της σημειογραφίας (Neyman, 1923; Rubin, 1974; Holland, 1988), μπορούν να αναγνωρίσουν τέτοιες εκφράσεις μέσω των δεικτών που συνδέονται με υποθετικά-μη πραγματικά γεγονότα και υποθετικές -μη πραγματικές μεταβλητές, π.χ. $Yx(u)$ ή Zxy .

Η έκφραση $Yx(u)$, για παράδειγμα, ξεχωρίζει για την τιμή που το αποτέλεσμα Y θα λάβει τιμή u , εάν η θεραπεία του X ήταν στο επίπεδο x . Αν το u επιλέγεται τυχαία, το Yx είναι μία τυχαία μεταβλητή και μπορεί κανείς να μιλήσει για την

πιθανότητα ότι το Y_x θα επιτύχει μια τιμή y στον πληθυσμό P ($Y_x = y$).

Εναλλακτικά, οι Pearl (1995a) και Kaufman και Kaufman (2001) χρησιμοποίησαν εκφράσεις της μορφής $P(Y = y | \text{set}(X = x))$ ή $P(Y = y | \text{do}(X = x))$ για να υποδηλώσουν την πιθανότητα (ή τη συχνότητα) να συμβεί το γεγονός ($Y = y$) αν η κατάσταση θεραπείας $x = x$ εφαρμόστηκε ομοιόμορφα στον πληθυσμό. Ακόμα, μία τρίτη σημειογραφία που διακρίνει τις αιτιώδεις εκφράσεις παρέχεται από γραφικά μοντέλα, όπου τα βέλη μεταφέρουν τις αιτιώδεις κατευθυντικότητες.

Ωστόσο, στο μεγαλύτερο μέρος της στατιστικής βιβλιογραφίας, οι αιτιώδεις αξιώσεις εμφανίζονται σπάνια στα μαθηματικά. Εμφανίζονται μόνο στην λεκτική ερμηνεία στην οποία οι ερευνητές αποδίδουν κατά καιρούς ορισμένες συσχετίσεις και στην λεκτική περιγραφή με την οποία οι ερευνητές δικαιολογούν τις υποθέσεις. Για παράδειγμα, η υπόθεση ότι μια συµμεταβλητή δεν επηρεάζεται από μια treatment, μια απαραίτητη υπόθεση για τον έλεγχο των συγκυτικών παραγόντων Cox (1958), εκφράζεται σε απλά αγγλικά και όχι με μαθηματική έκφραση.

Η απουσία του συμβολισμού διάκρισης μεταξύ των αιτιωδών και των στατιστικών σχέσεων αρχικά φαινόταν ασήμαντη, επειδή οι ερευνητές ήταν σε θέση να συγκρατήσουν τέτοιες διακρίσεις εμμέσως στο μυαλό τους και κατάφεραν να περιορίζουν τα μαθηματικά σε συμβατικές, υποθετικές εκφράσεις πιθανότητας (Breslow and Day, 1980; Miettinen και Cook, 1981). Ωστόσο, δεδομένου ότι το πρόβλημα της πολυπλοκότητας μεγάλωσε, η σημειογραφική ανεπάρκεια του Λογισμού των Πιθανοτήτων άρχισε να εμφανίζεται και ακολούθησαν έντονες αντιπαραθέσεις στα 1980-1990 μεταξύ των συγγραφέων που έκαναν χρήση των συμβατικών στατιστικών συμβολισμών και τους ελάχιστους που προσπάθησαν να εμπλουτίσουν τον Λογισμό των Πιθανοτήτων με αιτιώδη λεξιλόγιο.

Ο Robins (1986, 1987), για παράδειγμα, έδειξε ότι οι συμβατικές μέθοδοι εκτίμησης της κατανομής της επιβίωσης υπό θεραπείες χρονικά εξαρτώμενες, (π.χ. χρόνο-εξαρτώμενη παλινδρόμηση Cox) ενδέχεται να είναι μεροληπτικές. Οι Greenland και Robins (1986) έδειξαν (με τη χρήση της ανάλυσης υποθετικών – μη πραγματικών προτάσεων) ότι οι συμβατικοί ορισμοί που εξίσωναν τους συγχυτικούς παράγοντες με την ικανότητα μη σύμπτυξης θα οδηγούσαν γενικά σε μεροληπτικές εκτιμήσεις αποτελεσμάτων. Οι Holland και Rubin (1988) κατέληξαν σε παρόμοια συμπεράσματα. Χρησιμοποιώντας διαγράμματα ως καθοδήγηση, ο Weinberg (1993) σημείωσε ότι οι επιδημιολόγοι που ακολουθούν καθιερωμένες πρακτικές και ανεπίσημα κριτήρια, συχνά κάνουν προσαρμογές για το λάθος σύνολο των συμμεταβλητών. Ομοίως, οι Robins και Greenland (1992) έδειξαν ότι η τότε επικρατούσα πρακτική της εκτίμησης των άμεσων επιπτώσεων από τον έλεγχο των ενδιάμεσων μεταβλητών, μπορεί να οδηγήσει σε μεροληπτικές εκτιμήσεις.

Και πάλι, χρησιμοποιώντας την υποθετική-μη πραγματική σημειογραφία, οι Robins και Greenland (1989); Greenland (1999) έδειξαν ότι τα συμβατικά κριτήρια για τη λήψη αποφάσεων νομικής ευθύνης (για βλάβες που προκαλούνται από την έκθεση), τα οποία βασίστηκαν στον λόγο του κινδύνου αντί του λόγου των πιθανοτήτων της αιτιώδους συνάφειας, μπορεί να είναι έντονα μεροληπτικά σχετικά με τα πρότυπα κρίσης. Έτσι, η ανεπάρκεια της σημειογραφίας των τυποποιημένων στατιστικών στοιχείων, η οποία αρχικά είχε γίνει ανεκτή και γενικά δυσδιάκριτη για τον κόσμο, είχε βαρύ τίμημα πριν η ρητή αιτιώδης σημειογραφία την αναδείξει.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρά την καταγραφή της επιτυχίας, τα μαθηματικά της αιτιώδους ανάλυσης παρέμειναν αινιγματικά για τους περισσότερους ερευνητές και οι δυνατότητές τους παραμένουν ακόμα υποχρησιμοποιούμενες στις στατιστικές που βασίζονται στις επιστήμες.

Ο λόγος γι' αυτό, μπορεί να αποδοθεί στην εχθρική και ad-hoc σημειογραφία με την οποία η αιτιώδης ανάλυση έχει υποβληθεί στην ερευνητική κοινότητα. Η επόμενη ενότητα προσφέρει μία αντίληψη που υπερνικά αυτά τα νοερά εμπόδια και παρέχει έναν φιλικό μαθηματικό μηχανισμό για την ανάλυση αιτίας-αποτελέσματος και την επίσημη βάση για την ανάλυση με υποθετικά – μη πραγματικά παραδείγματα.

Κεφάλαιο 3

Δομικά υποδείγματα, Διαγράμματα, Αιτιώδης Επίδραση και Αντιπαραδείγματα

3.1 Εισαγωγή στα δομικά υποδείγματα εξισώσεων

Κάθε σύλληψη ιδέας για την αιτιώδη συνάφεια που να αξίζει τον τίτλο της «θεωρίας», θα πρέπει να είναι σε θέση να: 1) αντιπροσωπεύει αιτιώδεις ερωτήσεις σε κάποια μαθηματική γλώσσα, 2) να παρέχει μία ακριβή γλώσσα για την επικοινωνία των υποθέσεων βάσει των οποίων θα πρέπει να απαντηθούν τα ερωτήματα, 3) να παρέχει έναν συστηματικό τρόπο για να απαντηθούν τουλάχιστον μερικά από αυτά τα ερωτήματα και να μπορούν να επισημανθούν τα άλλα ως «μη απαντημένα» και 4) να παρέχει μία μέθοδο για τον προσδιορισμό υποθέσεων ή νέων υπολογιστικών τρόπων που ενδεχομένως να χρειάζονται για να απαντηθούν αυτά τα «μη απαντημένα» ερωτήματα.

Μία «γενική θεωρία» πρέπει να κάνει πολλά περισσότερα. Εκτός από το να αγκαλιάζει όλα τα ερωτήματα που κρίνεται ότι έχουν αιτιώδη χαρακτήρα, μία γενική θεωρία πρέπει επίσης να εντάσσει οποιαδήποτε άλλη θεωρία ή μέθοδο που οι επιστήμονες έχουν αποδεχθεί ως χρήσιμη στην διερεύνηση των διαφόρων πτυχών της αιτιώδους συνάφειας. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε εναλλακτική θεωρία πρέπει να εξελιχθεί ως ειδική περίπτωση της «γενικής θεωρίας», όποτε επιβάλλονται περιορισμοί είτε στο μοντέλο, είτε στο είδος των υποθέσεων που γίνονται δεκτές, ή στην γλώσσα στην οποία οι εν λόγω υποθέσεις έχουν διατυπωθεί.

Η δομική θεωρία που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία πληροί τα παραπάνω κριτήρια. Βασίζεται στο Δομικό Μοντέλο Αιτιότητας (SCM) που

αναπτύχθηκε από τον Pearl (1995a, 2000a) και το οποίο συνδυάζει τα χαρακτηριστικά των μοντέλων των δομικών εξισώσεων (SEM) που χρησιμοποιούνται στις οικονομικές και τις κοινωνικές επιστήμες (Goldberger, 1973; Duncan, 1975), στο πλαίσιο πιθανότητα - αποτέλεσμα των Neyman (1923) και Rubin (1974), καθώς και στα γραφικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν για την πιθανολογική λογική και την αιτιώδη ανάλυση (Pearl, 1988; Lauritzen, 1996; Spirtes et al., 2000; Pearl, 2000a).

Παρά το γεγονός ότι τα βασικά στοιχεία του Δομικού Μοντέλου Αιτιότητας εισήχθησαν στα μέσα της δεκαετίας του 1990 (Pearl, 1995a) και έχουν υιοθετηθεί σε μεγάλο βαθμό από επιδημιολόγους (Greenland et al., 1999; Glymour και Greenland, 2008), στατιστικούς (Cox και Wermuth, 2004; Lauritzen, 2001) και ερευνητές των κοινωνικών επιστημών (Morgan και Winship, 2007) η δυναμική του ως μια ολοκληρωμένη θεωρία αιτιώδους συνάφειας δεν έχει ακόμη αξιοποιηθεί πλήρως. Οι συνέπειές της μέχρι τώρα περιλαμβάνουν:

1. Την ενοποίηση των προσεγγίσεων για την αιτιώδη συνάφεια ως προς την γραφική απεικόνιση, τα πιθανά αποτελέσματα, τις δομικές εξισώσεις, την ανάλυση αποφάσεων (Dawid, 2002), την παρέμβαση (Woodward, 2003), την επάρκεια των συνιστωσών (Rothman, 1976) και τις πιθανολογικές προσεγγίσεις (Suppes, 1970), με κάθε ξεχωριστή προσέγγιση να θεωρείται μια περιορισμένη έκδοση του Δομικού Μοντέλου Αιτιότητας.

2. Τον ορισμό, αξιωματικοποίηση και λογαριθμοποίηση των αντιπαραδειγμάτων και των από κοινών πιθανοτήτων των αντιπαραδειγμάτων.

3. Την αξιολόγηση των «αποτελεσμάτων των αιτιών», «των προκαλούμενων αποτελεσμάτων» και «των αιτιών των αποτελεσμάτων» σε ένα αλγοριθμικό επίπεδο ανάλυσης.

4. Την σταθεροποίηση των μαθηματικών βάσεων του μοντέλου πιθανότητας - αποτελέσματος και την διαμόρφωση των βάσεων των αντιπαραδειγμάτων ως προς τα μοντέλα δομικών εξισώσεων.

5. Την απομυθοποίηση αιτιωματικών εννοιών όπως «συγχυτικοί παράγοντες», «διαμεσολάβηση», «ignorability», «συγκρισιμότητα», «ανταλλαξιμότητα» (πληθυσμών), «super exogeneity (ισχυρή εξωγένεια)» κλπ. μέσα σε ένα ενιαίο και οικείο εννοιολογικό πλαίσιο.

6. Την εξάλειψη των μύθων και των παρανοήσεων από τις ξεπερασμένες παραδόσεις (Meek και Glymour, 1994; Greenland et al., 1999; Cole και Hernan, 2002; Arah, 2008; Shrier 2009; Pearl, 2009b).

Αυτή η ενότητα παρέχει μία μικρή και κατανοητή εισαγωγή στο δομικό πλαίσιο και το χρησιμοποιεί για να παρουσιάσει τις κυριότερες εξελίξεις στην Αιτιώδη Συμπερασματολογία που προέκυψε κατά τις τελευταίες δεκαετίες.

3.2 Από τα γραμμικά στα μη παραμετρικά υποδείγματα και γραφικές παραστάσεις

3.2.1 Αναπαράσταση παρεμβάσεων

Αυτό το χαρακτηριστικό της αμεταβλητότητας μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις **διαρθρωτικές εξισώσεις** ως βάση για τη μοντελοποίηση της αιτιώδους συνάφειας και των αντιπαραδειγμάτων. Αυτό γίνεται μέσα από ένα **μαθηματικό τελεστή που ονομάζεται $do(x)$** , ο οποίος προσομοιώνει φυσικές παρεμβάσεις με τη διαγραφή ορισμένων λειτουργιών από το μοντέλο και την αντικατάστασή τους από ένα σταθερό $X = x$, διατηρώντας το υπόλοιπο του μοντέλου αμετάβλητο.

Το κεντρικό ερώτημα στην αιτιώδη ανάλυση είναι το ζήτημα εάν μπορεί η ελεγχόμενη μετά την παρέμβαση κατανομή, $P(Y=y | do(x_0))$ να υπολογιστεί από τα δεδομένα που αναγνωρίστηκαν από την κατανομή προ-παρέμβασης, $P(z, x, y)$. Το πρόβλημα αυτό έχει λάβει ιδιαίτερη σημασία στα οικονομετρικά μοντέλα (Hurwicz, 1950? Marschak, 1950? Koopmans, 1953) και τις κοινωνικές επιστήμες (Duncan, 1975? Bollen, 1989), συνήθως σε γραμμικά μοντέλα έπρεπε να αναρωτηθούμε εάν κάποια παράμετρος μοντέλου, β , έχει μια μοναδική λύση στους όρους των παραμέτρων της P (κατανομή των παρατηρούμενων μεταβλητών).

Σε μη παραμετρικά μοντέλα, η αναγνώριση είναι πιο περίπλοκη, δεδομένου ότι η έννοια 'έχει μοναδική λύση' δεν ισχύει άμεσα για αιτιώδεις ποσότητες, όπως στην $Q(M) = P(y | do(x_0))$ τα οποία δεν έχουν καμία διακριτή παραμετρική υπογραφή, και ορίζονται διαδικαστικά προσομοιώνοντας μια παρέμβαση σε ένα αιτιώδη μοντέλο M (εξίσ. 1.7). Ο ακόλουθος ορισμός υπερνικά αυτές τις δυσκολίες:

Ορισμός 3.1 (Identifiability) (Pearl, 2000a, p. 77))

Μια ποσότητα $Q(M)$ είναι αναγνωρίσιμη, δεδομένου ενός συνόλου υποθέσεων A , αν για κάθε δύο μοντέλα M_1 και M_2 που ικανοποιούν το σύνολο A , εμείς έχουμε:

$$P(M_1) = P(M_2) \Rightarrow Q(M_1) = Q(M_2) \quad (3.1)$$

Αυτό που έχει σημασία είναι ότι οι υποθέσεις A (για παράδειγμα αυτές που κωδικοποιούνται στο διάγραμμα) θα περιορίζαν την μεταβλητότητα των στοιχείων αυτών κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ισότητα της P θα συνεπάγεται ισότητα της Q . Όταν συμβαίνει αυτό, η Q εξαρτάται από την P μόνο, και θα πρέπει, συνεπώς, να μπορεί να εκφραστεί σε όρους των παραμέτρων της P . Η αναγνωρισιμότητα είναι μια ιδιότητα που ένα μοντέλο πρέπει να πληροί για ακριβή συμπεράσματα.

Λέμε ότι το μοντέλο είναι αναγνωρίσιμο εάν είναι θεωρητικά δυνατό να γνωρίζουμε την πραγματική αξία των υποκείμενων παραμέτρων του μοντέλου αυτού, ύστερα από άπειρο αριθμό των παρατηρήσεων από αυτό. Από μαθηματική άποψη, αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι οι διαφορετικές τιμές της παραμέτρου πρέπει να δημιουργήσει διαφορετικές κατανομές πιθανοτήτων των παρατηρούμενων μεταβλητών. Οι επόμενες υποενότητες εξηγούν και υιοθετούν αυτή την ιδέα.

3.2.2 Εκτίμηση της επίδρασης των παρεμβάσεων

Για να καταλάβουμε πώς μπορούν να υπολογιστούν οι υποθετικές ποσότητες, όπως η $P(y|do(x))$ ή η $E(Y|do(x_0))$ μπορούμε να τις υπολογίσουμε από τα υπάρχοντα δεδομένα και από ένα μερικώς καθορισμένο μοντέλο, ξεκινούμε με μια απλή επίδειξη με το μοντέλο του σχήματος 2(a). Θα δείξουμε ότι, παρά την άγνοιά μας ως προς τα f_X, f_Y, f_Z και $P(u)$, η $E(Y|do(x_0))$ μας είναι γνωστή και δίνεται από την υπό όρους προσδοκία της $E(Y|X=x_0)$. Αυτό γίνεται μέσω της εξαγωγής και σύγκρισης των εκφράσεων για τις δύο αυτές ποσότητες, όπως ορίζονται από τις σχέσεις (1.5) και (1.6), αντίστοιχα. Έτσι η (1.6) γίνεται:

$$E(Y |do(x_0)) = E(f_Y(x_0, u_Y)) \quad (3.2)$$

Ενώ το προ- παρέμβασης μοντέλο στην (1.5) δίνει:

$$\begin{aligned} E(Y |X=x_0) &= E(f_Y(X, u_Y)|X=x_0) = E(f_Y(x_0, u_Y)|X=x_0) = \\ &= E(f_Y(x_0, u_Y)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Η σχέση (3.3) είναι πανομοιότυπη με την σχέση (3.2). Ως εκ τούτου,

$$E(Y |do(x_0)) = E(Y|X=x_0) \quad (3.4)$$

Αν και κάπως εμπλέκονται περισσότερο, μπορούμε να δείξουμε ότι η $P(y|do(x))$ δίνεται από τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(y | x)$. Άλλωστε η (3.4) σχέση βασίστηκε σε δύο υποθέσεις. Πρώτα, η Y είναι συνάρτηση της X και U_Y μόνο, και, αφετέρου, η U_Y είναι ανεξάρτητη από $\{U_Z, U_X\}$ και ως εκ τούτου, της X . Η τελευταία παραδοχή είναι παράλληλη με την περίφημη "ορθογωνιότητα" στα γραμμικά μοντέλα, με $Cov(X, U_Y) = 0$, το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί συχνά απερίσκεπτα, για να δικαιολογήσει την εκτίμηση των διαρθρωτικών συντελεστών

στην ανάλυση παλινδρόμησης. Φυσικά, εάν επρόκειτο να εφαρμόσουμε αυτήν την υπόθεση στα γραμμικά μοντέλα του Σχήματος 1(a) ή 1(b), θα λάβουμε την αναμενόμενη εξάρτηση μεταξύ Y και την παρέμβαση $do(x_0)$:

$$E(Y | do(x_0)) = E(f_Y(x_0, u_Y)) = E(\beta x_0 + u_Y) = \beta x_0 \quad (3.5)$$

Αυτή η ισότητα προσθέτει στον συντελεστή β μια αιτιώδη έννοια ως **‘effect coefficient’**. Είναι εξαιρετικά σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι στα διαρθρωτικά (σε αντίθεση με παλινδρόμησης) μοντέλα, ο β δεν ερμηνεύεται ως ‘συντελεστής επίδρασης’, αλλά είναι ‘αποδεδειγμένα’ χρήσιμος. Θα διατηρήσει αυτή την αιτιώδη ερμηνεία πώς το X επιλέγεται πραγματικά (μέσω της f_X στο Σχήμα 2(a)) και ανεξάρτητα από το αν U_X και U_Y συσχετίζονται (όπως στο Σχ. 1(b)) ή είναι ασυσχέτιστες (όπως στο Σχ. 1 (a)). Οι συσχετίσεις μπορεί να εμποδίζουν μόνο την ικανότητα μας να εκτιμούμε από μη πειραματικά δεδομένα, αλλά δεν θα αλλάξει τον ορισμό που δίνεται στην (3.5).

Στην βιβλιογραφία δεν αναφέρεται τίποτα για την υπό όρους επέκταση $E(Y | X = x)$. Η σύνδεση αυτή μπορεί να υφίσταται κάτω από ειδικές συνθήκες, για παράδειγμα εάν $Cov(X, U_Y) = 0$ όπως στην (3.4), αλλά κατά τα άλλα είναι άσχετη με τον καθορισμό ή ερμηνεία του β ως συντελεστή επίδρασης, ή με τους εμπειρικούς ισχυρισμούς της (1.1).

Στην επόμενη ενότητα το πρόβλημα της αναγνώρισης θα επικεντρωθεί σε μια γραφική διαδικασία. Πράγματι, δεδομένου ότι τα γραφήματα κωδικοποιούν όλες τις πληροφορίες όπου οι μη-παραμετρικές διαρθρωτικές εξισώσεις αντιπροσωπεύουν, χωρίς αλγεβρικούς ισχυρισμούς.

3.2.3 Αιτιώδεις επιπτώσεις από τα δεδομένα και τα γραφήματα

Η αιτιώδης ανάλυση γραφικών μοντέλων αρχίζει με τη συνειδητοποίηση ότι όλες οι αιτιώδεις συνάφειες είναι γνωστές, όταν το μοντέλο είναι **Μαρκοβιανό**, δηλαδή, η γραφική παράσταση είναι **ακυκλική** (δηλαδή που δεν περιέχει κατευθυνόμενους κύκλους) και όλοι οι όροι σφάλματος είναι από κοινού ανεξάρτητοι. Τα μη Μαρκοβιανά μοντέλα, όπως εκείνα που αφορούν τα συσχετιζόμενα σφάλματα (που προκύπτουν από τυχόν μη υπολογισμένους συγχυτικούς παράγοντες), επιτρέπουν την ταυτοποίηση μόνον υπό ορισμένες προϋποθέσεις, και αυτές οι προϋποθέσεις επίσης μπορούν να καθοριστούν από τη δομή του γραφήματος. Ακολουθεί ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1 (The Causal Markov Condition)

Κάθε κατανομή που παράγεται από ένα Μαρκοβιανό μοντέλο M μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως: $P(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_i P(u_i \mid pa_i)$ **(3.6)**

όπου V_1, V_2, \dots, V_n είναι οι ενδογενείς μεταβλητές στο M , και pa_i είναι οι τιμές από τους ενδογενείς «γονείς» του V_i στο αιτιώδη διάγραμμα που συνδέονται με το μοντέλο M .

Για παράδειγμα, η κατανομή που συνδέεται με το μοντέλο του Σχ. 2 (a) μπορεί να είναι παραγοντοποιημένο ως:

$$P(z, y, x) = P(z) P(x|z) P(y|x) \quad (3.7)$$

δεδομένου ότι η μεταβλητή X είναι ο (ενδογενής) γονέας του Y , η μεταβλητή Z είναι ο γονέας του X και η Z δεν έχει γονείς.

Πόρισμα 3.1 (Truncated factorization)

Για οποιαδήποτε Μαρκοβιανό μοντέλο, η κατανομή που παράγεται από μια παρέμβαση $do(X = x_0)$ σε ένα σύνολο X των ενδογενών μεταβλητών και δίνεται:

$$P(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k | do(\mathbf{x}_0)) = \prod_{i | v_i \notin X} P(\mathbf{u}_i | \mathbf{pa}_i) | X = \mathbf{x}_0 \quad (3.8)$$

όπου $P(u_i | \mathbf{pa}_i)$ είναι η προ-παρέμβαση υπό όρους πιθανότητα.

Το Πόρισμα 3.1 μας διδάσκει να αφαιρέσουμε από την σχέση (3.6) όλους τους παράγοντες που συνδέονται με τις μεταβλητές που παρενέβη (μέλη της X). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι μετά-παρέμβαση το μοντέλο είναι Μαρκοβιανό, ως εκ τούτου, ακολουθώντας το Θεώρημα 3.1, πρέπει να δημιουργήσει μια κατανομή που έχει παραγοντοποιηθεί σύμφωνα με το τροποποιημένο γράφημα, αποδίδοντας το αποκομμένο προϊόν του Πορίσματος.

Στο παράδειγμά μας του Σχ. 2(b), η κατανομή $P(z, y | do(x_0))$ που συνδέεται με το τροποποιημένο μοντέλο δίνεται από: $P(z, y | do(x_0)) = P(z)P(y|x_0)$

όπου $P(z)$ και $P(Y|x_0)$ είναι πανομοιότυπες με εκείνες που σχετίζονται με την προ-παρέμβαση κατανομή της (3.7). Όπως ήταν αναμενόμενο, η κατανομή της Z δεν επηρεάζεται από την παρέμβαση, αφού

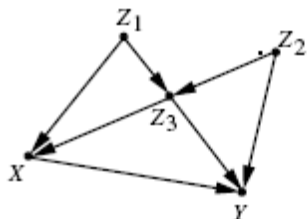
$$P(z|do(x_0)) = \sum_y P(z, y | do(x_0)) = \sum_y P(z)P(y|x_0) = P(z)$$

ενώ εκείνη του Y είναι ευαίσθητη στη x_0 , και δίνεται από

$$P(y|do(x_0)) = \sum_z P(z, y | do(x_0)) = \sum_z P(z, y | do(x_0)) = P(y|x_0)$$

Αυτό το παράδειγμα επιδεικνύει το πώς οι αιτιώδεις υποθέσεις ενσωματωμένες στο μοντέλο M μας επιτρέπουν να προβλέψουμε την μετά-παρέμβαση κατανομή από την κατανομή προ-παρέμβασης, η οποία επιπλέον μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την αιτιώδη επίδραση της X στην απόκριση Y από μη πειραματικά δεδομένα, δεδομένου ότι $P(y|x_0)$ είναι να εκτιμηθεί από τα εν λόγω

δεδομένα. Σημειώνουμε ότι δεν έχουμε κάνει καμία απολύτως υπόθεση σχετικά με τη μορφή των εξισώσεων ή την κατανομή των όρων σφάλματος. Μόνο η δομή του γραφήματος (συγκεκριμένα η ταυτότητα των γονέων της X) επιτρέπει την παραγωγή.



Σχήμα 3: Ένα Μαρκοβιανό μοντέλο που απεικονίζει την παραγωγή της αιτιώδους συνάφειας της X στην απόκριση Y , στην σχέση (3.11). Όροι σφάλματος δεν εμφανίζονται.

Ο αποκομμένος τύπος παραγοντοποίησης μας δίνει τη δυνατότητα να αντλήσουμε αιτιώδεις ποσότητες άμεσα, χωρίς να ασχολείται με τις εξισώσεις ή την εξίσωση που τροποποιήθηκε όπως στις (3.2) - (3.4). Σκεφτείτε, για παράδειγμα, το μοντέλο που φαίνεται στο Σχ. 3, στο οποίο οι μεταβλητές σφάλματος διατηρούνται έμμεσα.

Αντί της γραφής των αντίστοιχων πέντε μη παραμετρικών εξισώσεων, μπορούμε να γράψουμε την από κοινού κατανομή απευθείας ως:

$$P(x, z_1, z_2, z_3, y) = P(z_1)P(z_2)P(z_3 | z_1, z_2)P(x | z_1, z_3)P(y | z_2, z_3, x) \quad (3.9)$$

όπου κάθε οριακή ή υπό όρους πιθανότητα στη δεξιά πλευρά μπορεί άμεσα να εκτιμηθεί από τα δεδομένα.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε παρέμβει και δίνουμε όπου $X=x_0$. Η μετά-παρέμβαση κατανομή μπορεί εύκολα να γραφτεί (χρησιμοποιώντας τον Αποκομμένο τύπο Παραγοντοποίησης (3.8)), όπως:

$$P(z_1, z_2, z_3, y | do(x_0)) = P(z_1)P(z_2)P(z_3 | z_1, z_2)P(y | z_2, z_3, x_0) \quad (3.10)$$

και η αιτιώδης συνάφεια μεταξύ της X στη Y μπορεί να ληφθεί αμέσως από την περιθωριοποίηση πάνω στις μεταβλητές Z , δίνοντας:

$$P(y | do(x_0)) = \sum_{z_1, z_2, z_3} P(z_1)P(z_2)P(z_3 | z_1, z_2)P(y | z_2, z_3, x_0) \quad (3.11)$$

Σημειώστε ότι αυτός ο τύπος αντιστοιχεί ακριβώς σε αυτό που συνήθως ονομάζεται ‘**Προσαρμογή για Z_1, Z_2 και Z_3** ’ και επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε αυτόν τον τύπο από τον έλεγχο, χωρίς να σκεφτούμε για το αν Z_1, Z_2 και Z_3 είναι συγχυτικοί παράγοντες. Όμως αυτά τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν από τα γραφήματα, όταν γράφουμε τον αποκομμένο τύπο παραγοντοποίησης και περιθωριοποίησης. Ο αποκομμένος τύπος παραγοντοποίησης δεν περιορίζεται σε παρεμβάσεις σε μια μόνο μεταβλητή. Είναι εφαρμόσιμο με ταυτόχρονες ή διαδοχικές παρεμβάσεις όπως αυτές που επικαλέστηκε στην ανάλυση του χρόνου με την χρήση ποικίλων treatment και χρονομεταβλητών (Robins, 1986, Arjas και Parner 2004).

Για παράδειγμα, εάν οι X και Z_2 είναι και οι δύο μεταβλητές treatment, ενώ Z_1 και Z_3 αποτελούν μετρήσιμες συμμεταβλητές, τότε η μετά-παρέμβαση κατανομής θα ήταν:

$$P(z_1, z_3, y | do(x), do(z_2)) = P(z_1)P(z_3 | z_1, z_2)P(y | z_2, z_3, x) \quad (3.12)$$

και η αιτιώδης συνάφεια μεταξύ της ακολουθίας treatment $do(X=x), do(Z_2=z_2)$ θα πρέπει να είναι:

$$P(y | do(x), do(z_2)) = \sum_{z_1, z_3} P(z_1)P(z_3 | z_1, z_2)P(y | z_2, z_3, x) \quad (3.13)$$

Αυτό συμπίπτει με την έκφραση του Robins (1987) (G-computation formula-G-φόρμουλα υπολογισμού), η οποία προήλθε από ένα πιο περίπλοκο σύνολο υποθέσεων αντιπαραδειγμάτων. Σημειώνεται από τον Robins, ότι ο τύπος υπαγορεύει προσαρμογή για τους συμπαράγοντες (π.χ. z_3) και αυτό θα μπορούσε να επηρεαστεί από προηγούμενα treatment (π.χ. z_2).

3.3 Αντιμετώπιση των μη υπολογισμένων συγχυτικών παραγόντων

3.3.1 Επιλογή συμμεταβλητής – Το Κριτήριο της ‘Πίσω Πόρτας’

Το ακόλουθο κριτήριο που ονομάζεται «Πίσω Πόρτα» (back-door) (Pearl, 1993a), παρέχει μία γραφική μέθοδο επιλογής αποδεκτών συνόλων παραγόντων για προσαρμογή.

Για παράδειγμα, εξετάζοντας σε μια μελέτη παρατήρησης την επίδραση της X στο Y , όπως, την treatment στην απόκριση, και υποθέτοντας ότι οι παράγοντες που θεωρούνται σχετικοί με το πρόβλημα είναι δομημένοι όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, τότε κάποιοι επηρεάζουν την απόκριση, κάποιοι επηρεάζουν την treatment και κάποιοι επηρεάζουν και τα δύο. Μερικοί από αυτούς τους παράγοντες μπορεί να είναι μη μετρήσιμοι, όπως τα γενετικά γνωρίσματα ή το στυλ ζωής, άλλοι να είναι μετρήσιμοι, όπως το φύλο, η ηλικία και το επίπεδο των μισθών.

Το πρόβλημά μας είναι να επιλέξουμε ένα υποσύνολο αυτών των παραγόντων για τη μέτρηση και την προσαρμογή, δηλαδή, εάν συγκρίνουμε τα θεραπευμένα και τα μη, άτομα λαμβάνοντας τις ίδιες τιμές για τους επιλεγμένους παράγοντες, τότε έχουμε το σωστό αποτέλεσμα της προς επεξεργασία μεταβλητή (correct treatment effect) σε αυτό το υποπληθυσμό. Τέτοια σύνολα παραγόντων ονομάζονται «Επαρκή σύνολα ή Αποδεκτά σύνολα για προσαρμογή».

Ορισμός 3.2

Ένα σύνολο S είναι αποδεκτό (ή «επαρκές») για προσαρμογή, αν ισχύουν δύο προϋποθέσεις:

1. Κανένα στοιχείο του S δεν προέρχεται από το X .

2. Τα στοιχεία του S «αποκλείουν» όλα τα μονοπάτια της «Πίσω Πόρτας» από το X στο Y , δηλαδή όλα τα μονοπάτια που καταλήγουν με ένα βέλος.

Για παράδειγμα, το σύνολο $S = \{Z3\}$ αποκλείει την διαδρομή $X \leftarrow W1 \leftarrow Z1 \rightarrow Z3 \rightarrow Y$ επειδή το βέλος του κόμβου $Z3$ κατευθύνεται μέσα στο S . Ωστόσο, το σύνολο $S = \{Z3\}$ δεν μπλοκάρει τη διαδρομή $X \leftarrow W1 \leftarrow Z1 \rightarrow Z3 \leftarrow Z2 \rightarrow W2 \rightarrow Y$, διότι κανένα από τα βέλη των κόμβων $Z1$ και $Z2$ δεν κατευθύνεται στο S και ο κόμβος σύγκρουσης $Z3$ δεν είναι έξω από το S .

Με βάση το κριτήριο αυτό βλέπουμε για παράδειγμα ότι, τα σύνολα $\{Z1, Z2, Z3\}$, $\{Z1, Z3\}$ και $\{Z2, Z3\}$ το καθένα είναι επαρκές για την προσαρμογή, γιατί κάθε ένα αποκλείει όλα τα μονοπάτια της πίσω πόρτας μεταξύ του X και του Y . Το σύνολο $\{Z3\}$ ωστόσο, δεν είναι επαρκές για την προσαρμογή διότι, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, δεν μπλοκάρει τη διαδρομή $X \leftarrow W1 \leftarrow Z1 \rightarrow Z3 \leftarrow Z2 \rightarrow W2 \rightarrow Y$.

Η λογική πίσω από το κριτήριο της «Πίσω Πόρτας» έχει ως ακολούθως. Τα μονοπάτια της «Πίσω Πόρτας» στο διάγραμμα φέρουν πλασματικές συσχετίσεις από το X στο Y , ενώ οι διαδρομές που κατευθύνονται κατά μήκος των βελών από το X στο Y φέρουν αιτιώδεις συσχετίσεις. Ο αποκλεισμός των πρώην μονοπατιών (με σταθεροποίηση στο S) εξασφαλίζει ότι η μετρούμενη συσχέτιση μεταξύ X και Y είναι καθαρά αιτιολογική, δηλαδή, αντιπροσωπεύει σωστά την ποσότητα στόχο: την Αιτιώδη Επίδραση του X στο Y .

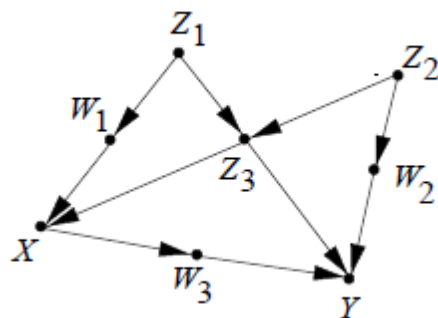
Επισημώς, η επίπτωση της εξεύρεσης παραδεκτού συνόλου S είναι ότι, η διαστρωμάτωση του S εγγυάται την αφαίρεση της μεροληψίας των συγχυτικών παραγόντων που σχετίζεται με την Αιτιώδη Επίδραση του X στο Y . Με άλλα λόγια, η διαφορά του κινδύνου σε κάθε στρώμα του S δίνει το σωστό αποτέλεσμα της αιτιώδους συνάφειας στο εν λόγω στρώμα. Στη δυαδική περίπτωση για παράδειγμα, η διαφορά του κινδύνου στο στρώμα του S δίνεται από:

$$P(Y = 1|X = 1, S = s) - P(Y = 1|X = 0, S = s)$$

ενώ η Αιτιώδη Επίδραση (του X στο Y) σε εκείνο το στρώμα δίνεται από:

$$P(Y = 1|do(X = 1), S = s) - P(Y = 1|do(X = 0), S = s).$$

Αυτές οι δύο παραστάσεις είναι ίσες όποτε το S αποτελεί ένα επαρκές σύνολο, όπως $\{Z_1, Z_3\}$ ή $\{Z_2, Z_3\}$ στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Ένα Μαρκοβιανό μοντέλο που αναπαριστά το ‘Κριτήριο από την Πίσω Πόρτα’. Χωρίς να ληφθούν υπόψη τα σφάλματα.

Ομοίως, η μέση διαφορά του κατανεμημένου κινδύνου (stratified risk difference) αναλαμβάνει όλα τα στρώματα,

$$\sum_{\mathbf{S}} [\mathbf{P}(\mathbf{Y} = 1 | \mathbf{X} = 1, \mathbf{S} = \mathbf{s}) - \mathbf{P}(\mathbf{Y} = 1 | \mathbf{X} = 0, \mathbf{S} = \mathbf{s})] \mathbf{P}(\mathbf{S} = \mathbf{s})$$

δίνει το σωστό αποτέλεσμα της αιτιώδους συνάφειας του X στο Y σε ολόκληρο τον πληθυσμό

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y} = 1 | \mathbf{do}(\mathbf{X} = 1)) - \mathbf{P}(\mathbf{Y} = 1 | \mathbf{do}(\mathbf{X} = 0)).$$

Σε γενικές γραμμές, για μεταβλητών X και Y πολλαπλών τιμών, η εξεύρεση ενός επαρκούς συνόλου S μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y} = y | \mathbf{do}(\mathbf{X} = x), \mathbf{S} = \mathbf{s}) = \mathbf{P}(\mathbf{Y} = y | \mathbf{X} = x, \mathbf{S} = \mathbf{s})$$

και

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y} = y | \mathbf{do}(\mathbf{X} = x)) = \sum_{\mathbf{S}} [\mathbf{P}(\mathbf{Y} = y | \mathbf{X} = x, \mathbf{S} = \mathbf{s})] \mathbf{P}(\mathbf{S} = \mathbf{s}) \quad (3.14)$$

Αφού όλοι οι παράγοντες στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης μπορούν να εκτιμηθούν (π.χ. με Ανάλυση παλινδρόμησης) από τα προ-παρεμβατικά δεδομένα, η αιτιώδης συνάφεια μπορεί παρομοίως να εκτιμηθεί από τα εν λόγω δεδομένα, χωρίς μεροληψία.

Είναι ενδιαφέρον ότι μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε μη αναγώγιμο επαρκές σύνολο S λαμβάνεται ως μονάδα, πληροί το κριτήριο του συσχετισμού που χρησιμοποιούν οι επιδημιολόγοι για να ορίσουν τους «συγχυτικούς παράγοντες». Με άλλα λόγια, το S πρέπει να συσχετίζεται με το X και, ταυτόχρονα, να συσχετίζεται με

το Y , δεδομένου του X . Αυτή η ανάγκη δεν ισχύει για οποιαδήποτε συγκεκριμένα μέλη του S .

Για παράδειγμα, η μεταβλητή Z_3 στο Σχήμα 4, αν και αποτελεί μέλος κάθε επαρκούς συνόλου και επομένως είναι ένας συγχυτικός παράγοντας, μπορεί να μην συσχετίζεται με το Y και X (Pearl, 2000a, σελ. 195). Αντιστρόφως, μια προεπεξεργασμένη μεταβλητή Z που συσχετίζεται και με το Y και με το X μπορεί να χρειαστεί να αποκλειστεί από την είσοδό της σε ένα επαρκές σύνολο.

Το κριτήριο της «Πίσω Πόρτας» μας επιτρέπει να γράψουμε την Εξίσωση (3.14) απευθείας, επιλέγοντας ένα επαρκές σύνολο S απευθείας από το διάγραμμα, χωρίς χειρισμό του αποκομμένου τύπου παραγοντοποίησης. Το κριτήριο επιλογής μπορεί να εφαρμοστεί συστηματικά σε διαγράμματα οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος, απελευθερώνοντας έτσι τους αναλυτές από το να εκτιμήσουν εάν «το X είναι υπό συνθήκη αγνοήσιμο δεδομένου του S », μια τρομερή διανοητική εργασία που απαιτείται στο πλαίσιο του δυνητικού – της απόκρισης (Rosenbaum και Rubin, 1983). Το κριτήριο επιτρέπει επίσης στον αναλυτή να αναζητήσει ένα βέλτιστο σύνολο συμμεταβλητών δηλαδή, ένα σύνολο S που ελαχιστοποιεί το κόστος της μέτρησης ή την μεταβλητότητα της δειγματοληψίας (Tian et al., 1998).

Εν τω συνόλω, **μπορούμε να δηλώσουμε ότι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της «Πίσω Πόρτας», η αιτιότητα έχει αφαιρέσει τους συγχυτικούς παράγοντες από το σύνολο των αιτιωματικών και αντιφατικών εννοιών της.**

3.3.2 Γενικός έλεγχος των υπολοίπων

Η προσαρμογή για τις συµµεταβλητές είναι µόνο μία από τις πολλές µεθόδους που µας επιτρέπουν να εκτιµηθούν τα αιτιώδη αποτελέσµατα σε µη πειραµατικές µελέτες. Ο Pearl (1995a) παρουσίασε παραδείγµατα στα οποία δεν υπάρχει κανένα σύνολο µεταβλητών που να επαρκεί για προσαρμογή και όπου η αιτιώδης συνάφεια είναι δυνατόν, ωστόσο, να εκτιµηθεί µε συνέπεια. Η εκτίµηση σε τέτοιες περιπτώσεις απασχολεί προσαρμογές πολλαπλών βηµάτων.

Για παράδειγµα, εάν το W_3 είναι η µόνη παρατηρούµενη συµµεταβλητή στο µοντέλο του Σχήµατος 4, τότε δεν υπάρχει επαρκές σύνολο προσαρμογής (επειδή κανένα σύνολο των παρατηρούµενων συµµεταβλητών δεν µπορεί να αποκλείσει τις διαδροµές από το X στο Y µέσω του Z_3), όµως η $P(y|do(x))$ µπορεί να υπολογιστεί σε δύο βήµατα.

Πρώτα υπολογίζουµε το $P(W_3|do(x)) = P(W_3|x)$ (λόγω του γεγονότος ότι δεν υπάρχει καµία µη αποκλεισµένη διαδροµή από την «Πίσω Πόρτα» από το X στο W_3), **δεύτερον** υπολογίζουµε το $P(y|do(W_3))$ (αφού το X αποτελεί ένα επαρκές σύνολο για την επίδραση του W_3 στο Y) και τέλος, συνδυάζουµε τα δύο αποτελέσµατα µαζί και έχουµε:

$$P(y|do(x)) = \sum_{W_3} P(W_3|do(x))P(y|do(W_3)) \quad (3.15)$$

Σε αυτό το παράδειγµα, η µεταβλητή W_3 ενεργεί ως «ενδιάµεση τεχνητή µεταβλητή» (Pearl, 1993b; Chalak και White, 2006).

Η ανάλυση που χρησιµοποιείται στην παραγωγή και την επικύρωση των αποτελεσµάτων αυτών επικαλείται µαθηµατικούς κανόνες µετασχηµατισµού των ποσοτήτων της αιτιότητας, εκπροσωπούµενη από παραστάσεις όπως: $P(Y=y|do(x))$, σε ελεύθερες παραστάσεις που προέρχονται από το $P(z, x, y)$, δεδοµένου ότι µόνο οι ελεύθερα κατασκευασµένες παραστάσεις µπορούν να εκτιµηθούν από µη -

πειραματικά δεδομένα. Όταν ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι εφικτός, εξασφαλίζεται ότι η αιτιώδης ποσότητα είναι αναγνωρίσιμη.

Οι εφαρμογές αυτού του λογισμού σε προβλήματα που αφορούν πολλαπλές παρεμβάσεις (π.χ. χρονικά μεταβαλλόμενες μεταχειρίσεις), υπό συνθήκη και υποκατάστατα πειράματα αναπτύχθηκαν από τους Pearl και Robins (1995), τους Kuroki και Miyakawa (1999) και Pearl (2000a).

Μια πρόσφατη ανάλυση (Tian και Pearl, 2002) δείχνει ότι το κλειδί για την αναγνωρισιμότητα δεν έγκειται στα μονοπάτια αποκλεισμού μεταξύ των X και Y , αλλά μάλλον, στα μονοπάτια αποκλεισμού μεταξύ του X και τους άμεσους διαδόχους του στα μονοπάτια του Y . Όλα τα υφιστάμενα κριτήρια για την αναγνώριση συνιστούν ειδικές περιπτώσεις αυτού που καθορίζεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.2 (Tian και Pearl, 2002) Μία σημαντική προϋπόθεση για τον προσδιορισμό του αιτιώδους αποτελέσματος $P(y|do(x))$ είναι ότι κάθε διαδρομή μεταξύ του X και κάποιου από τα παράγοντα του, οδηγεί σε ένα τουλάχιστον βέλος που απορρέει από μία μετρήσιμη μεταβλητή.

Για παράδειγμα, εάν το W_3 είναι η μόνη παρατηρούμενη συμμεταβλητή στο μοντέλο του Σχήματος 4, η $P(y|do(x))$ μπορεί να υπολογιστεί αφού κάθε μονοπάτι από το X στο W_3 (το μόνο παράγωγο του X) οδηγεί είτε το βέλος $X \rightarrow W_3$, ή το βέλος $W_3 \rightarrow Y$ όπου και τα δύο προέρχονται από μια μετρήσιμη μεταβλητή (W_3).

Πιο πρόσφατα αποτελέσματα επεκτείνουν αυτό το θεώρημα:

(1) παρουσιάζοντας μια αναγκαία και επαρκή προϋπόθεση για την αναγνώριση (Shpitser και Pearl, 2006) και (2) για την επέκταση της συνθήκης από το αιτιώδες αποτέλεσμα σε οποιαδήποτε μη πραγματική έκφραση (Shpitser και Pearl, 2007). Οι αντίστοιχες αμερόληπτες εκτιμήσεις για αυτές τις αιτιώδεις ποσότητες είναι αναγνώσιμες απευθείας από το διάγραμμα.

3.3.3 Από την αναγνώριση στην εκτίμηση

Η μαθηματική παραγωγή της αιτιώδους συνάφειας των υπολογισμών, όπως οι εξισώσεις (3.14) και (3.15) είναι απλώς ένα πρώτο βήμα προς τον υπολογισμό των ποσοτικών εκτιμήσεων αυτής της συνάφειας για πεπερασμένα δείγματα, χρησιμοποιώντας την πλούσια παράδοση της στατιστικής εκτίμησης και της Μπεϋζιανής καθώς και της μη Μπεϋζιανής μεθόδου. Παρά το γεγονός ότι οι υπολογισμοί που προέρχονται από τις (3.14) και (3.15) είναι μη - παραμετρικοί, αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει κανείς να μην κάνει χρήση των παραμετρικών τύπων στη φάση εκτίμησης της μελέτης. Η παραμετροποίηση είναι στην πραγματικότητα απαραίτητη, όταν ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος είναι υψηλός.

Για παράδειγμα, εάν οι παραδοχές της Gaussian (Κανονική Κατανομή), οι μηδενικές μέσες διαταραχές (σφάλματα) και οι πρόσθετες αλληλεπιδράσεις θεωρούνται λογικές, τότε το αποτέλεσμα που δίδεται στην (3.15) μπορεί να μετατραπεί ως:

$$E(Y | do(x)) = \Gamma_{W_3} X \Gamma_{W_3} \cdot X^X \quad (3.16)$$

όπου το Γ_{YZX} είναι ο (τυποποιημένος) συντελεστής Z στην παλινδρόμηση του Y στα Z και X . Πιο εξελιγμένες τεχνικές εκτίμησης αποτελούν τα «δομικά μοντέλα περιθωρίου» του (Robins, 1999) και η μέθοδος της «propensity score» των (Rosenbaum και Rubin, 1983), οι οποίες βρέθηκαν να είναι ιδιαίτερα χρήσιμες όταν η διαστασιοποίηση είναι υψηλή και τα διαθέσιμα δεδομένα είναι περιορισμένα (βλ. Pearl, 2009a, σελ. 348 - 52).

Θα πρέπει να τονιστεί, ωστόσο, ότι, σε αντίθεση με τις συμβατικές γνώσεις (για παράδειγμα Rubin, 2007, 2009), οι μέθοδοι των 'propensity scores' είναι απλώς αποτελεσματικοί εκτιμητές της δεξιάς πλευράς της (3.14) και δεν μπορεί να αναμένεται να μειωθούν τα σφάλματα στην περίπτωση που το σύνολο S δεν πληροί

το ‘Κριτήριο της Πίσω Πόρτας’ (Pearl, 2009 a, b, c). Κατά συνέπεια, η επικρατούσα πρακτική της προσαρμογής όσο περισσότερων μετρήσεων πριν την χρήση της μεταβλητής treatment, θα πρέπει να προσεγγίζεται με μεγάλη προσοχή. Ορισμένες συμμεταβλητές (όπως η Z3 στο Σχήμα 3) μπορεί να αυξήσουν το ενδεχόμενο σφάλματος, εάν συμπεριληφθούν στην ανάλυση.

Χρησιμοποιώντας την προσομοίωση και την παραμετρική ανάλυση, οι Heckman και Navarro - Lozano (2004) και Wooldridge (2009) επιβεβαίωσαν μάλιστα την πιθανότητα σφάλματος ορισμένων συμμεταβλητών στις μεθόδους ‘propensity-score’. Τα γραφικά εργαλεία που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα αποκαλύπτουν τον χαρακτήρα αυτών των συμμεταβλητών και δείχνουν ακριβώς τι θα πρέπει να δείχνουν οι συμμεταβλητές και δεν πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στις ρυθμίσεις προσαρμογής της μεθόδου ‘μέτρησης τάσεων’ κατά ζεύγη (βλέπε επίσης Pearl και Paz, 2009).

3.3.4 Θεωρία του Bayes και Αιτιότητα

Ανατρέχοντας στην παραγωγή των αιτιωδών αποτελεσμάτων βλέπουμε ότι σε καμία περίπτωση δεν απαιτείται ανάλυση αριθμητικής εκτίμησης των πιθανοτήτων. Υποθέτουμε ότι το αιτιώδες μοντέλο M διαθέτει μία συνάρτηση πιθανοτήτων $P(u)$ πάνω στις εξωγενείς μεταβλητές στον πληθυσμό U και θεωρούμε επίσης δεδομένο ότι οι συναρτήσεις $v_i = f_i(p_{a_i}, u)$ χαρτογραφούν την $P(u)$ σε μία πιθανότητα $P(v_1, v_2, \dots, v_n)$ πάνω στις ενδογενείς παρατηρούμενες μεταβλητές. Αλλά ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκε ή απαιτήθηκε οποιαδήποτε αριθμητική εκτίμηση της $P(u)$, ούτε οποιαδήποτε υπόθεση ως προς την μορφή των δομικών εξισώσεων f_i .

Το ερώτημα που τίθεται φυσικά είναι: **Από πού προέρχονται οι αριθμητικές τιμές των $P(y|do(x))$ πιθανοτήτων μετά την παρέμβαση;**

Η απάντηση είναι φυσικά ότι προέρχονται από τα δεδομένα μαζί με τις πρότυπες τεχνικές εκτίμησης που μετατρέπουν τα δεδομένα σε αριθμητικές εκτιμήσεις στατιστικών παραμέτρων (δηλαδή, πτυχές μιας κατανομής πιθανοτήτων). Οι υποκειμενικές κρίσεις απαιτήθηκαν μόνο σε ποιοτική μορφή, ώστε να ξεκινήσει η διαδικασία αναγνώρισης σκοπός της οποίας ήταν να προσδιοριστούν ποιες στατιστικές παράμετροι χρειάζεται να εκτιμηθούν.

Επιπλέον, ακόμη και οι ποιοτικές κρίσεις δεν είχαν σχέση με τις ιδιότητες των κατανομών, αλλά αναφέρονταν στις σχέσεις αιτίου-αποτελέσματος, οι οποίες θα πρέπει να είναι πιο διαφανείς, μεταδοτικές και να έχουν νόημα. Για παράδειγμα, οι κρίσεις σχετικά με την πιθανή συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών U ήταν ουσιαστικά κρίσεις για το αν οι δύο έχουν μια λανθάνουσα κοινή αιτία ή όχι.

Φυσικά, η εισροή των παραδοσιακών τεχνικών εκτίμησης στην αιτιώδη ανάλυση φέρνει μαζί της και τις παραδοσιακές συζητήσεις μεταξύ των υποστηρικτών της Μπεϋζιανής θεωρίας και των υποστηρικτών της συχνότητας, της

αντικειμενικότητας και της υποκειμενικότητας. Ωστόσο, αυτή η συζήτηση έχει να κάνει και με τα ξεχωριστά προβλήματα που αντιμετωπίζει η αιτιώδης ανάλυση, όπως ορίζεται από τη γραμμή οριοθέτησης μεταξύ της αιτιώδους και της στατιστικής ανάλυσης.

Όπως είναι γνωστό, πολλές μέθοδοι εκτίμησης στην στατιστική, επικαλούνται την υποκειμενική κρίση σε κάποιο επίπεδο. Για παράδειγμα, ποια παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων θα πρέπει να επιλεγεί, τι είδους 'εκ των προτέρων κατανομών' θα πρέπει να οριστούν στο παραμετρικό μοντέλο και πολλά άλλα.

Ωστόσο, όλες αυτές οι αποφάσεις αναφέρονται στις ιδιότητες των παραμέτρων μιας στατικής συνάρτησης κατανομής και, κατά συνέπεια, είναι εκφράσιμες στη γλώσσα της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Το νέο στοιχείο που φέρνει η αιτιώδης ανάλυση σε αυτές τις παραδόσεις, είναι η αναγκαιότητα λήψης σαφών αποφάσεων όχι σχετικά με τις ιδιότητες των κατανομών, αλλά για τις αμετάβλητες μιας κατανομής, δηλαδή την απόφαση σχετικά με τις σχέσεις αιτίου-αποτελέσματος και αυτές δεν μπορούν να εκφραστούν στη γλώσσα των Πιθανοτήτων.

Οι αιτιώδεις κρίσεις χρησιμοποιούνται σιωπηρά σε πολλά επίπεδα στους παραδοσιακούς στατιστικούς υπολογισμούς. Για παράδειγμα, οι περισσότερες αποφάσεις σχετικά με την κατά συνθήκη ανεξαρτησία προέρχονται από την κατανόηση μας των σχέσεων μεταξύ αιτίας και αποτελέσματος. Ομοίως, η τυπική απόφαση για να υποτεθεί η ανεξαρτησία μεταξύ ορισμένων στατιστικών παραμέτρων και όχι άλλων (σε μια Μπεϋζιανή εκ των προτέρων κατανομή) στηρίζονται στις αιτιώδεις πληροφορίες (Pearl, 2003).

Ωστόσο, η λογική της αιτιώδους συνάφειας για τις κρίσεις αυτές παρέμεινε σιωπηρή για πολλές δεκαετίες εξαιτίας της έλλειψης επαρκούς γλώσσας έκφρασης.

Μόνο οι πιθανοθεωρητικές επιπτώσεις τους έλαβαν επίσημη εκπροσώπηση. Η αιτιώδης ανάλυση απαιτεί τώρα ρητή άρθρωση των υποκείμενων αιτιωδών υποθέσεων, ένα λεξιλόγιο που θα διαφέρει σημαντικά από αυτό που έχουν συνηθίσει να χρησιμοποιούν οι Μπεϋζιανοί στατιστικολόγοι.

3.4 Ανάλυση με αντιπαραδείγματα σε δομικά μοντέλα

Όλα τα ζητήματα αιτιώδους χαρακτήρα δεν μπορούν να κωδικοποιηθούν σε $P(y|do(x))$ τύπο έκφρασης κατά τον ίδιο τρόπο που δεν μπορούν όλες οι αιτιώδεις ερωτήσεις να απαντηθούν από τις πειραματικές μελέτες. Για παράδειγμα, ζητήματα απόδοσης (π.χ., τι ποσοστό των περιπτώσεων θανάτου οφείλεται σε συγκεκριμένη έκθεση;) ή της ευαισθησίας (τι ποσοστό του υγιούς πληθυσμού που δεν έχει εκτεθεί, θα μπορούσε να ασθενήσει εάν είχε εκτεθεί;) δεν μπορούν να απαντηθούν από πειραματικές μελέτες και φυσικά, αυτό το είδος των ερωτήσεων δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί με την σημειογραφία τύπου $P(y|do(x))$.

Για να απαντηθούν αυτά τα ερωτήματα, απαιτείται μία συνάρτηση πιθανοτήτων στην ανάλυση των υποθετικών – μη πραγματικών προτάσεων, μία που να είναι αφιερωμένη στη σχέση «το Y θα ήταν y εάν το X ήταν x στην κατάσταση $U = u$ », συμβολίζεται ως $Y_x(u) = y$. Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν και είναι άγνωστα στους περισσότερους οικονομολόγους και φιλοσόφους, τα μοντέλα των δομικών εξισώσεων παρέχουν επίσημη ερμηνεία και συμβολικούς μηχανισμούς για την ανάλυση των σχέσεων των υποθετικών – μη πραγματικών προτάσεων.

Η βασική ιδέα είναι να ερμηνευθεί η φράση «εάν το X ήταν x » ως μία εντολή για να πραγματοποιηθεί μία ελάχιστη τροποποίηση στο τρέχον μοντέλο, το οποίο μπορεί να αποδώσει στο X μια διαφορετική τιμή, δηλαδή $X = x'$, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η καθορισμένη περίπτωση $X = x$. Μια τέτοια ελάχιστη τροποποίηση

ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της εξίσωσης για το X από ένα σταθερό x , όπως κάναμε στην Εξίσωση (1.6). Η αντικατάσταση αυτή επιτρέπει την σταθερά x να διαφέρει από την πραγματική αξία του X (δηλαδή $f_X(z, u_X)$) χωρίς να καθιστά το σύστημα των εξισώσεων ασυνεπές, αποδίδοντας έτσι μια επίσημη ερμηνεία των αντιπαραδειγμάτων σε μοντέλα πολλαπλών σταδίων, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή σε μία εξίσωση μπορεί να είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή σε μία άλλη.

Ορισμός 3.3 (Unit-level Counterfactuals, Pearl (2000a, p. 98))

Έστω M ένα δομικό μοντέλο και M_x μια τροποποιημένη έκδοση του M , με τις εξισώσεις της X να αντικαθίσταται από $X = x$. Λαμβάνοντας την απόκριση Y μέσα από τις εξισώσεις του M_x από το σύμβολο $Y_{M_x}(u)$. Και το αντιπαραδείγμα $Y_x(u)$ είναι η τιμή της απόκρισης Y σε μονάδα u , όταν για X λαμβάνει x δίνεται από:

$$Y_x(u) \triangleq Y_{M_x}(u) \tag{3.17}$$

Παρατηρούμε ότι το επίπεδο της μονάδας αντιπαραδείγμα $Y_x(u)$, η οποία στο Neyman-Rubin η προσέγγιση αντιμετωπίζεται ως μία πρωτόγονη, απροσδιόριστη ποσότητα, είναι στην πραγματικότητα μια παράγωγη ποσότητα στο δομικό πλαίσιο. Το γεγονός ότι η εξίσωση της πειραματικής μονάδας u με κάποιο σύνολο απαραίτητων συνθηκών, $U = u$ στο μοντέλο M , καθορίζουν τη συμπεριφορά του μοντέλου ή την απόκριση Y .

Συνεπώς ο παραπάνω ορισμός καταλήγει στην έκφραση $Y_{x_0}(u_x, u_y, u_z)$. Αυτή η οντότητα έχει μια σαφή αντίστροφη ερμηνεία, γι 'αυτό ξεχωρίζει για τον τρόπο που ένα άτομο με χαρακτηριστικά (u_x, u_y, u_z) θα απαντήσει, αν η treatment ήταν x_0 , από ό, τι η treatment $x = f_x(z, u_x)$ που λαμβάνονται από το συγκεκριμένο άτομο. Στο

παράδειγμα μας, δεδομένου ότι το Y δεν εξαρτάται από u_x και u_z , μπορούμε να γράψουμε:

$$Y_{x_0}(\mathbf{u}) = Y_{x_0}(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_Y, \mathbf{u}_z) = f_Y(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_Y) \quad (3.18)$$

Με έναν παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να εξάγουμε:

$$Y_{z_0}(\mathbf{u}) = f_Y(f_x(z_0, \mathbf{u}_x), \mathbf{u}_Y), \quad \mathbf{x}_{z_0, Y_0}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_x(z_0, \mathbf{u}_x) \text{ και ούτω καθεξής.}$$

Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν την αντίστροφη ανάγνωση σε κάθε δομική εξίσωση στο μοντέλο της εξίσωσης (1.5). Η εξίσωση $x = f_x(z, u_x)$ για παράδειγμα, δηλώνει τον **εμπειρικό ισχυρισμό** ότι, ανεξάρτητα από τις τιμές που λαμβάνονται από άλλες μεταβλητές του συστήματος, $z=z_0$ τότε $x=f_x(z_0, u_x)$ μόνο.

Σαφώς, η κατανομή $P(u_x, u_Y, u_z)$ προκαλεί μια καλά καθορισμένη πιθανότητα για την αντίστροφη περίπτωση $Yx_0 = y$, καθώς και την από κοινού αντίστροφη καταχώρηση, όπως $Yx_0 = y$ και $Yx_1 = y'$, οι οποίες είναι, κατ'αρχήν, μη παρατηρήσιμες εάν $x_0 \neq x_1$. Έτσι για να απαντήσουμε σε χαρακτηριστικά ερωτήματα όπως πότε $Y=y_1$ εάν $x = x_1$ δεδομένου ότι στην πραγματικότητα το $Y=y_0$ και $X=x_0$ μπορούμε να υπολογίσουμε την υπό όρους πιθανότητα $P(Y_{x_1} = y_1 | Y = y_0, X = x_0)$ η οποία είναι σαφώς καθορισμένη γνωρίζοντας τις μορφές των διαρθρωτικών εξισώσεων και τη κατανομή των εξωγενών μεταβλητών στο μοντέλο.

Για παράδειγμα, υποθέτοντας τις γραμμικές εξισώσεις (όπως στο Σχήμα 1) με $x=u_x$, $y=\beta x+u_x$, τότε για $Y=y_0$ και $X=x_0$ θα λάβουμε $U_X = x_0$ και $U_Y = y_0 - \beta x_0$ και μπορούμε να συμπεριλάβουμε μαζί με την πιθανότητα την τιμή που λαμβάνει $Y_{x_1} = \beta x_1 + U_Y = \beta(x_1 - x_0) + y_0$. Με άλλα λόγια εάν $X=x_1$ αντί για x_0 , τότε Y θα μπορούσε να αυξήσει κατά β φορές την διαφορά $(x_1 - x_0)$. Σε μη γραμμικά συστήματα, το αποτέλεσμα θα εξαρτηθεί επίσης από την κατανομή των $\{U_x, U_Y\}$.

Σε γενικές γραμμές, αν τα x και x' είναι ασυμβίβαστα τότε Yx και Yx' δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα, και αυτό μπορεί να φαίνεται χωρίς νόημα στην απόδοση της πιθανότητας όταν η " Y θα είναι y αν $x = X$ και Y θα είναι y' αν $X = x'$ ".

Τέτοιες ανησυχίες έχουν αποτελέσει πηγή στην αιτιώδη ανάλυση με την χρήση αντιπαραδειγμάτων στις από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές (Dawid, 2000).

Ο δομικός ορισμός των αντιπαραδειγμάτων παρέχει επίσης την εννοιολογική και τυπική βάση για τους Neyman-Rubin, μια προσέγγιση για την αιτιώδη συνάφεια που παίρνει μια ελεγχόμενη τυχαιοποιημένη μελέτη (CRT) ως παράδειγμα, υποθέτοντας ότι τίποτε δεν είναι γνωστό για τον ερευνητή για την επιστήμη πίσω από τα δεδομένα. Αυτή η προσέγγιση το «Μαύρο Κουτί», το οποίο έχει μέχρι στιγμής αρνηθεί τα οφέλη των γραφικών απεικονίσεων ή των δομικών αναλύσεων, αναπτύχθηκε από τους στατιστικούς που βρέθηκαν σε δυσκολία να μεταπηδήσουν τα δύο νοερά εμπόδια που συζητήθηκαν στην ενότητα 2.4

3.5 Ένα παράδειγμα: Η μη συμμόρφωση στις κλινικές δοκιμές

Για να δείξουμε την μεθοδολογία της δομικής προσέγγισης για την αιτιώδη συνάφεια, θα εξετάσουμε το πρακτικό πρόβλημα του υπολογισμού της επίδρασης της treatment σε μία τυπική κλινική δοκιμή με μερική συμμόρφωση. Η επίδραση της treatment σε μια τέτοια ρύθμιση είναι σε γενικές γραμμές μη προσδιορίσιμη, αλλά αυτό το παράδειγμα είναι κατάλληλο για την παρουσίαση των τεσσάρων σημαντικών βημάτων που θα πρέπει να είναι μέρος σε κάθε άσκηση Αιτιώδους Συμπερασματολογίας:

1. Ορίζουμε: Εκφράζουμε την ποσότητα στόχο Q ως συνάρτηση $Q(M)$ η οποία μπορεί να υπολογιστεί από οποιοδήποτε μοντέλο M .

2. Υποθέτουμε: Διατυπώνουμε υποθέσεις συνάφειας χρησιμοποιώντας συνήθη επιστημονική γλώσσα και αντιπροσωπεύουμε το δομικό μέρος τους σε γραφική μορφή.

3. Προσδιορίζουμε: Καθορίζουμε αν η ποσότητα-στόχος είναι γνωστή.

4. Υπολογίζουμε: Υπολογίζουμε την ποσότητα στόχο, αν είναι γνωστή, ή κατά προσέγγιση αν δεν είναι.

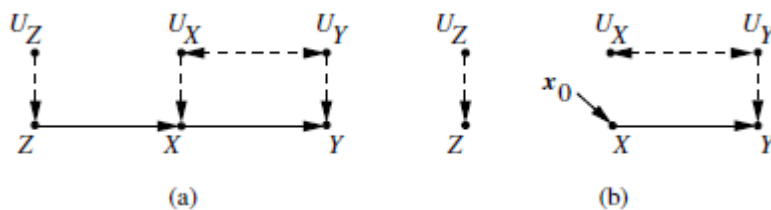
3.5.1 Καθορισμός της ποσότητας του στόχου

Η φάση καθορισμού στο παράδειγμά μας δεν μεταβάλλεται από τις ιδιαιτερότητες της πειραματικής διάταξης υπό συζήτηση. Η προσέγγιση της δομικής μοντελοποίησης επιμένει στον προσδιορισμό της ποσότητας του στόχου, στην περίπτωση μας της «αιτίας-αποτελέσματος», πριν από τον καθορισμό της διαδικασίας επιλογής της θεραπείας και χωρίς να κάνει λειτουργική μορφή ή υποθέσεις κατανομής.

Ο επίσημος ορισμός της αιτιώδους επίδρασης $P(y|do(x))$, όπως δίνεται στην εξίσωση (1.7), εφαρμόζεται καθολικά σε όλα τα μοντέλα και επικαλείται το σχηματισμό ενός υπομοντέλου M_x . Με τον καθορισμό της αιτιώδους επίδρασης διαδικαστικά, διαχωρίζοντάς την έτσι από τις παραδοσιακές παραμετρικές παραστάσεις της, η δομική θεωρία αποφεύγει τις πολλές συγχύσεις και διενέξεις που μαστίζουν την ερμηνεία των δομικών εξισώσεων και των οικονομετρικών παραμέτρων τον τελευταίο μισό αιώνα.

3.5.2 Διαμόρφωση των υποθέσεων - Βοηθητικές μεταβλητές

Η πειραματική ρύθμιση σε μία τυπική κλινική δοκιμή με μερική συμμόρφωση μπορεί να αντιπροσωπευτεί από ένα ειδικό μοντέλο του Σχήματος 5(a) και της εξίσωσης (1.5) όπου το Z παριστά μία τυχαιοποιημένη ανάθεση μεταβλητή μεταχείρισης, το X είναι η μεταβλητή μεταχείρισης που χορηγείται στην πραγματικότητα και το Y είναι η παρατηρούμενη απόκριση.



Σχήμα 5: (a) Αιτιώδης διάγραμμα που αντιπροσωπεύει μια κλινική δοκιμή με μερική συμμόρφωση. (b) Ένα διάγραμμα που αντιπροσωπεύει μια παρεμβατική μεταβλητή ελέγχου.

Ο όρος U_Y αντιπροσωπεύει όλους τους παράγοντες (μη παρατηρήσιμους) που επηρεάζει τον τρόπο που ένα άτομο ανταποκρίνεται στις μεταβλητές μεταχείρισης δηλαδή, ένα βέλος από U_Y στο Y . Ομοίως, U_X υποδηλώνει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν την συμμόρφωση με την ανάθεση και U_Z αντιπροσωπεύει την τυχαία διάταξη που χρησιμοποιείται σύμφωνα με την ανάθεση. Η εξάρτηση μεταξύ U_X και U_Y επιτρέπει σε ορισμένους παράγοντες (π.χ. κοινωνικό-οικονομική κατάσταση ή προδιάθεση για τη νόσο και τις επιπλοκές) να επηρεάζει τόσο τη συμμόρφωση όσο και την απόκριση. Στην εξίσωση (1.5) η f_X αντιπροσωπεύει τη διαδικασία με την οποία επιλέγεται το επίπεδο θεραπείας και η f_Y αντιπροσωπεύει την διαδικασία έκβασης της απόκρισης Y . Σαφώς, τέλεια συμμόρφωση θα ισοδυναμούσε με τη ρύθμιση $f_X(z, u_X) = z$, ενώ οποιαδήποτε εξάρτηση από u_X αντιπροσωπεύει μερική συμμόρφωση.

Το γραφικό μοντέλο του Σχήματος 5 (a) αντανακλά σε δύο υποθέσεις.

1. Η ανάθεση Z δεν επηρεάζει άμεσα την απόκριση Y αλλά μέσω της πραγματικής treatment που λαμβάνει, X . Αυτό το είδος της υπόθεσης ονομάζεται "αποκλεισμού", για να αποκλείει μια μεταβλητή (Z) από το να είναι καθοριστικό επιχείρημα της συνάρτησης f_Y , όπως στην εξίσωση (1.5).
2. Η μεταβλητή Z είναι ανεξάρτητη από U_Y και U_X . Αυτό εξασφαλίζεται μέσω της τυχαιοποίησης της Z , η οποία αποκλείει μια κοινή αιτία τόσο για την Z όσο και U_Y (καθώς και για την Z και U_X).

Με την κατάρτιση του διαγράμματος του Σχήματος 5(a) ένας ερευνητής κωδικοποιεί μία ξεκάθαρη προδιαγραφή των δύο αυτών υποθέσεων, και επιτρέπει στο τεχνικό μέρος της ανάλυσης να αρχίσει, σύμφωνα με την ερμηνεία που έχει δοθεί από την εξίσωση (1.5). Ο στόχος της αιτιώδους ανάλυσης σε αυτή τη ρύθμιση είναι να εκτιμηθεί η αιτιώδης επίδραση της treatment X σχετικά με το αποτέλεσμα Y , όπως

ορίζεται από το τροποποιημένο μοντέλο της εξίσωσης (1.6) και η αντίστοιχη κατανομή $P(y|do(x_0))$.

Με άλλα λόγια, αυτή η κατανομή περιγράφει την αντίδραση του πληθυσμού σε ένα υποθετικό πείραμα στο οποίο χορηγούμε την treatment σε επίπεδο $X=x_0$ ομοιόμορφα στο σύνολο του πληθυσμού και αφήνουμε στο x_0 να λαμβάνει διαφορετικές τιμές σε υποθετικά αντίγραφα του πληθυσμού. Στο Σχήμα 5(a) αποκαλύπτεται αμέσως ότι αυτή η κατανομή δεν αναγνωρίζει από την προσαρμογή τους συγχυτικούς παράγοντες.

Το κριτήριο γραφικά για την εν λόγω ταυτοποίηση (Ορισμός στο 'Κριτήριο της Πίσω Πόρτας') απαιτεί την ύπαρξη των παρατηρούμενων συνδιακυμάνσεων της "Πίσω Πόρτας" μονοπάτι $X \leftarrow U_X \leftrightarrow U_Y \rightarrow Y$, που μπλοκάρει τις πλαστές ενώσεις που δημιουργήθηκαν από αυτό το μονοπάτι. Αν U_X (ή U_Y) έχει παρατηρηθεί, η επίδραση της treatment θα ληφθεί από την στρωματοποίηση των επιπέδων της U_X .

$$P(Y = y_0 | do(x_0)) = \sum_{u_x} P(Y = y | X = x_0, U_X = u_x) P(U_X = u_x) \quad (3.19)$$

αποφέροντας έτσι την εκτίμηση χωρίς την απαίτηση της μέτρησης της U_Y και χωρίς υποθέσεις σχετικά με την εξάρτηση μεταξύ U_Y και U_X .

Ωστόσο, δεδομένου ότι U_X (και U_Y) υποτίθεται ότι δεν είναι παρατηρήσιμες, και κανένας άλλος αποκλεισμός για τις συνδιακυμάνσεις υφίσταται, ο ερευνητής μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η μη αμερόληπτη σύμμειξη δεν μπορεί να αφαιρεθεί από την προσαρμογή. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι, εν απουσία πρόσθετων υποθέσεων, δεν μπορεί να προσδιοριστεί η επίδραση της μεταβλητής μεταχείρισης σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις με οποιαδήποτε μέθοδο απολύτως (Balke και Pearl, 1997). Ως εκ τούτου, πρέπει κανείς να καταφύγει στην προσέγγιση των μεθόδων αξιολόγησης.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η επιμονή μας να επιτρέπει αυθαίρετες συναρτήσεις στην Εξίσωση (1.5) περιορίζει την ικανότητα μας να συναχθεί η επίδραση της μεταβλητής μεταχείρισης από μη πειραματικά δεδομένα (όταν U_X και U_Y δεν είναι παρατηρήσιμες).

Στα γραμμικά συστήματα, για παράδειγμα, η αιτιώδης επίδραση της X στην απόκριση Y είναι αναγνωρίσιμη, όπως μπορεί να φανεί από:

$$y = f_Y(x, u) = \beta x + u_Y \quad (3.20)$$

αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή z λαμβάνουμε την επέκταση της και έχουμε:

$$\beta = \text{cov}(Z, Y) / \text{cov}(Z, X) \quad (3.21)$$

όπου αντικαθίσταται το β με συνδυακυμάνσεις μεταξύ των παρατηρούμενων μετρήσεων. Η εξίσωση (3.21) είναι γνωστή ως η ‘καθοριστική μεταβλητή εκτίμησης’ (Bowden and Turkington, 1984). Επιπλέον, (Angrist και Imbens, 1991) έχουν δείξει ότι μια ευρύτερη κατηγορία των μη γραμμικών συναρτήσεων f_X και f_Y μπορεί να καταστήσει τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος αναγνωρίσιμη. (Angrist et al. 1996) και (Heckman and Vytlacil 2005) συνέχισαν την μελέτη εξετάζοντας μια ποικιλία αιτιώδους μέτρων αποτελέσματος, που ισχύουν για κάθε ειδικό (αν και μη αναγνωρίσιμο) τμήμα του πληθυσμού.

3.5.3 Οριοθέτηση των Αιτιωδών Παραγόντων

Όταν δεν πληρούνται οι όροι για την αναγνώριση, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να αντλήσουμε τα όρια για τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν, δηλαδή, μια σειρά από πιθανές τιμές που αντιπροσωπεύει η άγνοιά μας στην διαδικασία παραγωγής δεδομένων και που δεν θα μπορεί να βελτιωθεί με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος.

Στο παράδειγμά μας, αυτό ισοδυναμεί με οριοθέτηση της μέσης διαφοράς της εξίσωσης (1.8) υπό τον περιορισμό που προβλέπεται από την παρατηρήσιμη κατανομή ακολουθεί η εξίσωση (3.22):

$$P(x, y|z) = \sum_{u_x, u_y} P(x, y, u_x, u_y|z) = \sum_{u_x, u_y} P(y|x, u_y, u_x) P(x|z, u_y) P(u_y, u_x)$$

η οποία δημιουργήθηκε υπό όρους ανεξαρτησίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5(a).

Ακολουθώντας δημιουργείτε από το Σχήμα 5(b) το μοντέλο:

$$P(y|do(x')) - P(y|do(x'')) = \sum_u [P(y|x', u_y) - P(y|x'', u_y)] P(u_y) \quad (3.23)$$

Ο σκοπός μας είναι να οριοθετείται η παρατηρούμενη πιθανότητα $P(x, y|z)$ όπως στην εξίσωση (3.22). Ο σκοπός μας αυτό ισοδυναμεί με μια περιορισμένη άσκηση βελτιστοποίησης της εξεύρεσης των υψηλότερων και χαμηλότερων τιμών της εξίσωσης (3.23) με την επιφύλαξη στους περιορισμούς της ισότητας στην εξίσωση (3.22), όπου η μεγιστοποίηση κυμαίνεται πάνω από όλες τις πιθανές συναρτήσεις $P(y|x, u_y, u_x)$, $P(x|z, u_y)$ και $P(u_y, u_x)$ που πληρούν τους περιορισμούς.

Συνειδητοποιώντας ότι οι μονάδες σε αυτό το παράδειγμα εμπίπτουν σε 16 ισοδύναμες κλάσεις, κάθε μια αντιπροσωπεύει μία δυαδική συνάρτησης $X = f(z)$ σε συνδυασμό με μια δυαδική συνάρτηση $y = g(x)$, Balke και Pearl (1997) ήταν σε θέση να αντλούν λύσεις κλειστής μορφής για αυτά τα όρια.

Έδειξαν ότι παρά την ατέλεια των πειραμάτων, τα όρια μπορεί να αποφέρουν σημαντικές και ακριβείς πληροφορίες σχετικά με την αποτελεσματικότητα της treatment μερικές φορές.

3.5.4 Δοκιμασμένες επιπτώσεις των βοηθητικών μεταβλητών

Οι δύο υποθέσεις που εμπεριέχονται στο μοντέλο του σχήματος 5(a), ότι δηλαδή το Z είναι τυχαία μεταβλητή και δεν έχει καμία άμεση επίδραση στην Y , είναι μη ελέγξιμες σε γενικές γραμμές (Bonet, 2001). Ωστόσο, εάν η μεταβλητή της θεραπείας μπορεί να λάβει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών, ο συνδυασμός αυτών των δύο υποθέσεων αποδίδει ελέγξιμες επιπτώσεις, και αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προειδοποίηση στους ερευνητές σε πιθανές παραβιάσεις αυτών των υποθέσεων. Οι ελέγξιμες επιπτώσεις λαμβάνουν τη μορφή ανισοτήτων που περιορίζουν τις πτυχές της παρατηρούμενης δεσμευμένης κατανομής $P(x, y | z)$ από το να υπερβεί ορισμένα όρια (Pearl, 1995b).

Μία ειδικά βολική μορφή ότι οι περιορισμοί αυτοί υποθέτουν δίνεται από το ανισότητα:

$$\max_x \sum_y [\max_z P(x, y | z)] \leq 1 \quad (3.24)$$

σχετική με το ζεύγος (X, Y) . Αυτή η ανισότητα είναι έντονη για δυαδική τιμή της X , αλλά γίνεται σε πιο ήρεμο ρυθμό, όταν ο πληθάρημος X αυξάνει. Αν όλες οι μεταβλητές που παρατηρούνται είναι δυαδικές, η εξίσωση (3.24) μας συστήνει τις τέσσερις ανισότητες:

$$\begin{aligned}
P(Y = 0, X = 0 | Z = 0) + P(Y = 1, X = 0 | Z = 1) &\leq 1 \\
P(Y = 0, X = 1 | Z = 0) + P(Y = 1, X = 1 | Z = 1) &\leq 1 \\
P(Y = 1, X = 0 | Z = 0) + P(Y = 0, X = 0 | Z = 1) &\leq 1 \\
P(Y = 1, X = 1 | Z = 0) + P(Y = 0, X = 1 | Z = 1) &\leq 1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Βλέπουμε ότι η ανισότητα παραβιάζεται όταν η ελέγχουσα μεταβλητή Z καταφέρνει να παράγει σημαντικές αλλαγές στην μεταβλητή απόκρισης Y , ενώ η άμεση αιτία, X , παραμένει σταθερή. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανίχνευση των ανεπιθύμητων παρενεργειών. Οι παραβιάσεις αυτής της ανισότητας μπορεί να αποδοθεί σε μία από τις δύο δυνατότητες: είτε υπάρχει άμεση αιτιώδης επίδραση της εκχώρησης (Z) σχετικά με την απόκριση (Y), που δεν επηρεάζεται από την μεταβλητή μεταχείρισης (X), ή υπάρχει ένας κοινός αιτιώδης παράγοντας που επηρεάζει και τις δύο μεταβλητές.

Αν η εκχώρηση είναι τυχαιοποιημένη, τότε η δυνατότητα του κοινού αιτιώδη παράγοντα αποκλείεται και οποιαδήποτε παραβίαση της ανισότητας (ακόμη και κάτω από συνθήκες μερικής συμμόρφωσης) μπορεί με ασφάλεια να αποδοθεί σε κάποια άμεση επίδραση της διαδικασίας εκχώρησης σχετικά με την απόκριση του ατόμου (για παράδειγμα ψυχολογική αποστροφή προς την λήψη θεραπείας). Εναλλακτικά, αν κάποιος μπορεί να αποκλείσει τυχόν άμεσες επιπτώσεις της μεταβλητής Z στην απόκριση Y , δηλαδή μέσω της αποτελεσματικής χρήσης ενός εικονικού φαρμάκου, τότε κάθε παραβίαση που παρατηρήθηκε της ανισότητας μπορεί με ασφάλεια να αποδοθεί σε ψευδείς εξαρτήσεις μεταξύ της Z και U_Y , δηλαδή, την υποκειμενική επιλογή.

Κεφάλαιο 4

Πλαίσιο πιθανού αποτελέσματος

4.1 Το παράδειγμα των χαμένων στοιχείων του «Μαύρου Κουτιού»

Το ξεχωριστό χαρακτηριστικό της προσέγγισης του πιθανού αποτελέσματος είναι ότι, αν και οι ερευνητές πρέπει να σκέφτονται και να επικοινωνούν με τους όρους της απροσδιοριστίας, στις υποθετικές ποσότητες, όπως η $Y_x(u)$, η ίδια η ανάλυση γίνεται σχεδόν εξ ολοκλήρου μέσα στο πλαίσιο των αξιωμάτων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της παράθεσης μιας «Τέλειας» συνάρτησης πιθανότητας και στο υποθετικό και στο πραγματικό γεγονός. Αν η U αντιμετωπίζεται ως μία τυχαία μεταβλητή, τότε η τιμή του αντιπαραδείγματος $Y_x(u)$ γίνεται τυχαία μεταβλητή, καθώς συμβολίζεται ως Y_x .

Η ανάλυση του πιθανού αποτελέσματος προχωρά με την μεταβλητή μεταχείρισης της παρατηρούμενης κατανομής $P(x_1, \dots, x_n)$ ως οριακή κατανομή της επαυξημένης P^* συνάρτησης πιθανότητας, η οποία ορίστηκε από τις δύο παρατηρούμενες μεταβλητές και τις μεταβλητές αντιπαραδείγματος. Τα ερωτήματα σχετικά με την αιτιώδη συνάφεια ($P(y|do(x))$ στη δομική ανάλυση) είναι διατυπωμένα ως ερωτήματα σχετικά με την οριακή κατανομή της αντίθετης μεταβλητής ενδιαφέροντος, $P^*(Y_x=y)$. Οι νέες υποθετικές οντότητες Y_x αντιμετωπίζονται ως συνήθεις τυχαίες μεταβλητές. Για παράδειγμα, θεωρείται ότι ικανοποιούν τα αξιώματα του Λογισμού των Πιθανοτήτων, τους νόμους προσαρμογής και τα αξιώματα της υπό όρους ανεξαρτησίας.

Φυσικά, αυτές οι υποθετικές οντότητες δεν είναι εντελώς ιδιοτροπία και συνδέονται με τις παρατηρούμενες μεταβλητές μέσω περιορισμών (Robins, 1986)

$$\text{όπως: } X = x \Rightarrow Y_x = Y \quad (4.1)$$

ο οποίο ορίζει ότι, για κάθε u , αν η πραγματική αξία του X αποδεικνύεται ότι είναι x , τότε η τιμή Y που θα λάβει αν ' X ήταν x ' είναι ίση με την πραγματική αξία του Y .

Για παράδειγμα, ένα άτομο που επέλεξε την θεραπεία x και ανακτάται, θα έχει επίσης ανάκτηση αν δοθεί η θεραπεία x από το σχεδιασμό. Όταν το X είναι δυαδικό, είναι μερικές φορές πιο βολικό να γράψουμε την (4.1) ως:

$$Y = xY_1 + (1 - x)Y_0$$

Ίσως με πρόσθετους περιορισμούς θα πρέπει να συνδεθούν οι παρατηρήσιμες με τις μη-παρατηρήσιμες μεταβλητές, ένα ερώτημα που δεν μπορεί να απαντηθεί στη θεωρία του πιθανού αποτελέσματος, γιατί του λείπει ένα βασικό μοντέλο για να καθοριστούν τα αξιώματα. Η κύρια εννοιολογική διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων είναι ότι, ενώ με την διαρθρωτική προσέγγιση θεωρεί την παρέμβαση $do(x)$ ως μια λειτουργία που αλλάζει μια κατανομή, αλλά διατηρεί τις μεταβλητές ίδιες.

Η προσέγγιση του πιθανού αποτελέσματος θεωρεί ότι η μεταβλητή Y υπό $do(x)$ είναι μια διαφορετική μεταβλητή, καθώς Y_x είναι χαλαρά συνδεδεμένο με το Y μέσω της (4.1), αλλά παραμένει μη-παρατηρήσιμο, τότε $X \neq x$. Το πρόβλημα για τις ιδιότητες της Y_x , τότε γίνεται ένα από τα «ελλιπή δεδομένα» για τα οποία υπάρχουν τεχνικές εκτίμησης στην στατιστική βιβλιογραφία.

Ο Pearl (2000a, Κεφάλαιο 7) δείχνει, χρησιμοποιώντας τη δομική ερμηνεία της $Y_x(u)$, ότι είναι πράγματι θεμιτό να αντιμετωπίζονται τα αντιπαράδειγματα, όπως οι από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές από όλες τις απόψεις και ότι οι περιορισμοί συνέπειας, όπως στην (4.1) είναι αυτόματα ικανοποιημένοι με τη δομική

ερμηνεία. Επιπλέον, ότι οι ερευνητές πρέπει δεν πρέπει να ανησυχούν για τυχόν πρόσθετους περιορισμούς, εκτός από τα ακόλουθα δύο:

$$Y_{yz} = y \text{ για όλα τα } y, \text{ υποσύνολα } Z \text{ και τις τιμές } z \text{ για } Z \quad (4.2)$$

$$X_z = x \Rightarrow Y_{xz} = Y_z \text{ για όλα τα } x, \text{ υποσύνολα } Z \text{ και τις τιμές } z \text{ για } Z \quad (4.3)$$

Η εξίσωση (4.2) εξασφαλίζει ότι οι παρεμβάσεις $do(Y = y)$ οδηγεί στην κατάσταση $Y = y$, ανεξάρτητα από τις ταυτόχρονες παρεμβάσεις, $do(Z = z)$, που μπορεί να εφαρμόζονται σε άλλες μεταβλητές εκτός από την Y . Η εξίσωση (4.3) γενικεύει την (4.1) στις περιπτώσεις όπου $Z = z$ με σταθερή τιμή.

4.2 Διατύπωση του προβλήματος και απομυθοποίηση του «ignorability»

Το κύριο **μειονέκτημα** αυτής της προσέγγισης του Μαύρου Κουτιού προκύπτει στη διαμόρφωση του προβλήματος, δηλαδή, στην φάση όπου ο ερευνητής αρχίζει να αρθρώνει την «επιστήμη» ή τις «παραδοχές συνάφειας» πίσω από το πρόβλημα που αντιμετωπίζει. Οι γνώσεις αυτές πρέπει να διατυπωθούν κατά την έναρξη του κάθε προβλήματος στην αιτιώδη ανάλυση, καθώς τα αιτιώδη συμπεράσματα είναι τόσο έγκυρα, όσο οι αιτιώδεις υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζονται.

Ο αναλυτής στο πιθανό αποτέλεσμα πρέπει να εκφράζει υποθέσεις – περιορισμούς όσον αφορά την P^* , συνήθως στην μορφή των υπό όρους ανεξαρτησίας ισχυρισμών που εμπλέκονται με τις αντιπαράδειγμα μεταβλητές. Στο παράδειγμα του Σχήματος 5(a), γίνεται κατανοητό ότι η μεταβλητή Z είναι τυχαιοποιημένη και ανεξάρτητη από U_X και U_Y , ο αναλυτής στο πιθανό αποτέλεσμα θα χρησιμοποιήσει την ανεξαρτησία περιορισμός $Z \perp\!\!\!\perp \{ Y_{Z_1}, Y_{Z_2}, \dots, Y_{Z_k} \}$.

Για την περαιτέρω διατύπωση η κατανόηση ότι η Z δεν επηρεάζει άμεσα την Y , εκτός από την X , ο αναλυτής θα έγραφε α, έτσι ονομάζεται, **"ο περιορισμός του αποκλεισμού"**: $Y_{XZ} = Y_X$. Μια συλλογή από τους περιορισμούς αυτού του τύπου μπορεί μερικές φορές να είναι επαρκής ώστε να επιτρέπει μια μοναδική λύση στο ερώτημα που μας ενδιαφέρει.

Για παράδειγμα, αν κάποιος μπορεί εύλογα να υποθέσει ότι, στο Σχήμα 4, ένα σύνολο Z από συμπαραγόντες ικανοποιεί την υπό όρους ανεξαρτησία:

$$Y_x \perp\!\!\!\perp X \mid Z \quad (4.4)$$

Ο συμβολισμός αυτός είναι μια υπόθεση που ονομάζεται **'υπό όρους ignorability'** (Rosenbaum and Pearl, 1983), δηλαδή :

$$P(Y = y, X = x \mid Z = z) = P(Y = y \mid Z = z) P(X = x \mid Z = z) \text{ (Dawid, 1979).}$$

$$\begin{aligned} \text{Η αιτιώδης επίδραση } P(y|do(x)) &= P^*(Y_x = y) = \sum_Z P^*(Y_x = y|z) P(z) = \\ &= \sum_Z P^*(Y_x = y|x, z) P(z) = \sum_Z P^*(Y = y|x, z) P(z) = \sum_Z P(y|x, z) P(z) \end{aligned} \quad (4.5)$$

σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.1) και (4.4).

Η εξίσωση (4.5) δεν περιέχει αντιπαράδειγμα πρόταση και συμπίπτει με την εξίσωση (3.14). Ακόμα, η υπόθεση **'υπό όρους ignorability'** χαρακτηρίζει την Z ως μια αποδεκτή συμμεταβλητή για την προσαρμογή καθώς αντικατοπτρίζει τον Ορισμό 3.2 στο κριτήριο της **'Πίσω Πόρτας'** η οποία βασίζεται σε μια ρητή αιτιώδης δομή που κωδικοποιείται στο διάγραμμα.

Αντι για την κατασκευή νέου λεξιλογίου για την αιτιώδη ανάλυση (για παράδειγμα βέλη), σχεδόν όλες οι μαθηματικές πράξεις στο πλαίσιο αυτό διεξάγονται εντός των ασφαλών ορίων του Λογισμού Πιθανοτήτων. Ο αναλυτής μπορεί να ξεχάσει ότι Y_x συμβολίζει μία αντιπαράδειγμα ποσότητα και αντιθέτως

αντιμετωπίζεται όπως οποιαδήποτε άλλη τυχαία μεταβλητή, και το σκεπτικό ακολουθεί τις ασκήσεις ρουτίνας των πιθανοτήτων. Αυτή η περίπτωση δημιουργεί ένα υψηλό κόστος αφού αντί να φέρει τη θεωρία στο πρόβλημα, το πρόβλημα πρέπει να αναδιατυπωθεί, ώστε να ταιριάζει στη θεωρία.

Οι ερευνητές στα γραφήματα σπάνια χρησιμοποιούν την "υπό όρους ignorability" για την επιλογή των συμμεταβλητών αντιθέτως χρησιμοποιούν για παράδειγμα το 'Κριτήριο της Πίσω Πόρτας' που επιτρέπει στους ερευνητές να κατανοήσουν ποιες προϋποθέσεις πρέπει να πληρούν οι συμμεταβλητές, τι πρέπει να προσέξουν στην επιλογή τους και τι πειράματα μπορούν να πραγματοποιήσουν.

Το πιθανό αποτέλεσμα συναντά τρία πρόσθετα εμπόδια. Όταν οι αντιπαράδειγμα μεταβλητές δεν θεωρούνται ως υποπροϊόντα μιας άλλης μεταβλητής, βασίζονται στη διαδικασία του μοντέλου και βέβαια είναι δύσκολο να εξακριβωθεί αν όλες οι σχετικές αποφάσεις είναι σωστές. Για τους λόγους αυτούς στην αιτώδη ανάλυση οι επιστήμονες στον τομέα της υγείας, στατιστικοί, και οι περισσότεροι οικονομολόγοι και κοινωνικοί επιστήμονες **συνεχίζουν να χρησιμοποιούν τις δομικές εξισώσεις** (Wooldridge,2002; Stock και Watson, 2003; Heckman, 2008) **αντί του πιθανού αποτελέσματος.**

4.3 Συνδυασμός γραφημάτων και πιθανά αποτελέσματα

Η σύνθεση των αιτιωδών υποθέσεων με τη χρήση γραφημάτων συζητήθηκε στα Κεφάλαια 1, 3. Στην υποενότητα αυτή θα συστηματοποιήσουμε τη μετάφραση αυτών των υποθέσεων από τις γραφικές παραστάσεις με αντίστροφη σημειογραφία.

Τα μοντέλα των δομικών εξισώσεων ενσωματώνουν αιτιώδης πληροφορίες τόσο στις εξισώσεις, όσο και στη συνάρτηση πιθανότητας $P(u)$ όπου αποδίδονται στις εξωγενείς μεταβλητές. Κάθε οικογένεια γονέα-παιδιού (P_{A_i}, X_i) σε ένα διάγραμμα συνάφειας G αντιστοιχεί σε μια εξίσωση του μοντέλου M . Συνεπώς, τα διακεκομμένα τόξα αντικατοπτρίζουν τις υποθέσεις αποκλεισμού, δηλαδή, τους ισχυρισμούς ότι οι διαχειρίσιμες μεταβλητές που εξαιρέθηκαν από την εξίσωση δεν θα αλλάξουν το αποτέλεσμα του υποθετικού πειράματος που περιγράφεται από αυτή την εξίσωση. Οι διακεκομμένες καμπύλες κωδικοποιούν τις ανεξαρτησίες μεταξύ των όρων σφάλματος σε δύο ή περισσότερες εξισώσεις.

Για παράδειγμα, η απουσία των διακεκομμένων καμπύλων μεταξύ ενός κόμβου Y και ενός συνόλου κόμβων $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ σημαίνει ότι οι αντίστοιχες βασικές μεταβλητές, U_Y και $\{U_{Z_1}, U_{Z_2}, \dots, U_{Z_k}\}$ είναι ανεξάρτητες στην $P(u)$.

Αυτές οι υποθέσεις μπορούν να μεταφραστούν στην σημειογραφία πιθανού αποτελέσματος χρησιμοποιώντας δύο απλούς κανόνες (Pearl, 2000a, σελ. 232). Η πρώτη ερμηνεύει τα ελλείποντα βέλη στο διάγραμμα, η δεύτερη, τα ελλείποντα διακεκομμένα τόξα.

- 1) Περιορισμός αποκλεισμού: Για κάθε μεταβλητή Y που έχει γονείς PA_Y και για κάθε σύνολο των ενδογενών μεταβλητών S ασυνεχές της PA_Y , έχουμε:

$$Y_{pa_Y} = Y_{pa_Y, S} \quad (4.6)$$

2) Ανεξαρτησία: Εάν Z_1, \dots, Z_k είναι οποιοδήποτε σύνολο των κόμβων που δεν συνδέονται στη μεταβλητή απόκρισης Y μέσω διακεκομμένων τόξων και PA_1, \dots, PA_k αντίστοιχα σύνολα των γονέων τους, έχουμε:

$$Y_{pa_Y} \perp\!\!\!\perp \{Z_1, pa_1, \dots, Z_k, pa_k\} \quad (4.7)$$

Ο περιορισμός αποκλεισμού εκφράζει το γεγονός ότι κάθε σύνολο γονέων περιλαμβάνει όλα τις άμεσες αιτίες της μεταβλητής του παιδιού, ως εκ τούτου, για τον καθορισμό των γονέων της απόκρισης Y , λαμβάνεται η τιμή του Y μοναδικά, και η παρέμβαση σε οποιονδήποτε άλλο σύνολο S από (ενδογενείς) μεταβλητές δεν μπορεί πλέον να επηρεάσει την απόκριση Y . Ο περιορισμός της ανεξαρτησίας μεταφράζει την ανεξαρτησία μεταξύ U_Y και $\{U_{Z_1}, U_{Z_2}, \dots, U_{Z_k}\}$. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι, τη στιγμή που έχουμε θέσει τους γονείς τους, οι μεταβλητές $\{Y, Z_1, \dots, Z_k\}$ δημιουργούν πρόσθετες σχέσεις με τους όρους U σε αντίστοιχες εξισώσεις τους.

Ως ένα παράδειγμα, το μοντέλο που φαίνεται στο Σχήμα 5 (a) εμφανίζει τον ακόλουθο γονέα ως: $PA_Z = \{0\}, PA_X = \{Z\}, PA_Y = \{X\}$ (4.8)

Κατά συνέπεια, οι περιορισμοί αποκλεισμού μεταφράζονται σε:

$$X_Z = X_{ZY}$$

$$Z_Y = Z_{XY} = Z_X = Z$$

$$Y_X = Y_{ZX}$$

η απουσία οποιοδήποτε διακεκομμένου τόξου μεταξύ του Z και $\{Y, X\}$ μεταφράζεται σε ανεξαρτησία ως: $Z \perp\!\!\!\perp \{Y_X, X_Z\}$ (4.9)

Αυτή ακριβώς είναι η κατάσταση της τυχαιοποίησης. Το Z είναι ανεξάρτητη από όλους τους μη-απογόνους, δηλαδή ανεξάρτητη από U_X και U_Y που είναι οι εξωγενείς γονείς των Y και X , αντίστοιχα. (Υπενθυμίζεται ότι οι εξωγενείς

γονείς της κάθε μεταβλητής, δηλαδή της απόκρισης Y , μπορεί να αντικατασταθεί από την αντίστροφη μεταβλητή Y_{PA_Y} . Επειδή κρατώντας σταθερό PA_Y καθιστά Y μια ντετερμινιστική συνάρτηση του εξωγενούς γονέα U_Y .

Ο ρόλος των γραφημάτων δεν τελειώνει με τη διατύπωση των αιτιωδών υποθέσεων. Καθ' όλη την αλγεβρική παραγωγή, όπως αυτό που φαίνεται στην Εξίσωση (4.5), ο αναλυτής μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιήσει επιπλέον υποθέσεις που συνεπάγεται τις αποκλεισμού και ανεξαρτησίας υποθέσεις, αλλά δεν εμφανίζονται ρητώς στις αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις.

Κεφάλαιο 5

Αντιπαραδείγματα επί τω έργω

5.1 Διαμεσολάβηση: Άμεσες και έμμεσες συνέπειες

5.1.1 Άμεσα εναντίον συνολικών αποτελεσμάτων

Η αιτιώδης συνάφεια που έχουμε αναλύσει μέχρι τώρα, $P(y|do(x))$, μετρά την συνολική επίδραση μιας μεταβλητής (ή ένα σύνολο μεταβλητών) X στην απόκριση μιας μεταβλητή Y . Σε πολλές περιπτώσεις, η ποσότητα αυτή δεν αντιπροσωπεύει επαρκώς το αντικείμενο έρευνας και η προσοχή επικεντρώνεται όχι στο άμεσο αποτέλεσμα του X στο Y . Ο όρος «**άμεσο αποτέλεσμα**» προορίζεται για να ποσοτικοποιήσει μια επίδραση που δεν διαμεσολαβείται από άλλες μεταβλητές στο μοντέλο ή ακριβέστερα την ευαισθησία του Y σε αλλαγές στο X , ενώ όλοι οι άλλοι παράγοντες στην ανάλυση διατηρούνται σταθεροί. Φυσικά, διατηρώντας τους παράγοντες σταθερούς, όλες οι αιτιώδεις διαδρομές από το X στο Y θα επηρεαστούν, με εξαίρεση την άμεση σύνδεση $X \rightarrow Y$, η οποία δεν παρεμποδίζεται από τυχόν μεσάζοντες.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $do(x)$, και εστιάζοντας στις διαφορές των επεκτάσεων, προκύπτει ένας απλός ορισμός του ελεγχόμενου 'άμεσου αποτελέσματος' :

$$C D E \triangleq E(Y|do(x'), do(z)) - E(Y|do(x), do(z))$$

ή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον αντιπαραδείγμα συμβολισμό:

$$C D E \triangleq E(Y_{x'z}) - E(Y_{xz}) \quad (5.1)$$

όπου το Z είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο των μεσολαβούντων μεταβλητών που παρεμποδίζει όλα τα έμμεσα μονοπάτια ανάμεσα σε X και Y . Οι γραφικές προϋποθέσεις αναγνώρισης για εκφράσεις του τύπου $E(Y|do(x), do(z_1), do(z_2), \dots, do(z_k))$ προήλθαν από (Pearl, 2000a, Chapter 4) χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ‘Πίσω Πόρτας’.

5.1.2 Φυσικά άμεσα αποτελέσματα

Στα γραμμικά συστήματα, η εξίσωση (5.1) αποδίδει το συντελεστή διαδρομής του συνδέσμου από το X στο Y , ανεξάρτητα από τις τιμές στις οποίες διατηρούμε το Z , ανεξάρτητα από την κατανομή των όρων σφάλματος, και ανεξάρτητα από το αν οι συντελεστές είναι γνωστοί ή όχι. Στα μη γραμμικά συστήματα, οι τιμές στις οποίες κρατάμε το Z θα πρέπει, γενικά, να τροποποιούν το αποτέλεσμα του X στο Y και, συνεπώς, θα πρέπει να επιλέγονται προσεκτικά, ώστε να αντιπροσωπεύεται η πολιτική του στόχου υπό ανάλυση. Για παράδειγμα, δεν είναι ασυνήθιστο να βρεθούν εργοδότες που προτιμούν τους άνδρες για τις υψηλά αμειβόμενες θέσεις εργασίας (δηλαδή, υψηλή z) και τις γυναίκες για τις χαμηλά αμειβόμενες θέσεις εργασίας (χαμηλό z).

Ο Pearl (2001) έδωσε τον ακόλουθο ορισμό για το «**φυσικό άμεσο αποτέλεσμα**» :

$$DE_{x, x'}(Y) \triangleq E(Y_{x'}, z_x) - E(Y_x) \quad (5.2)$$

Εδώ, $(Y_{x'}, z_x)$ αντιπροσωπεύει την αξία που το Y θα επιτευχθεί όταν $X=x'$ και, ταυτόχρονα, τον καθορισμό Z όταν $X = x$. Ακόμα, ότι $DE_{x, x'}(Y)$ είναι το ‘φυσικό άμεσο αποτέλεσμα’ της μετάβασης από το x στο x' , που περιλαμβάνει πιθανότητες των αντιπαραδειγμάτων και δεν μπορεί να γραφεί υπό την άποψη του $do(x)$.

Ως εκ τούτου, το ‘φυσικό άμεσο αποτέλεσμα’ δεν μπορεί γενικά να προσδιοριστεί, ακόμη και με τη βοήθεια ιδανικών ελεγχόμενων πειραμάτων.

Ο Pearl (2001) έχει δείξει πάντως ότι, αν ορισμένες υποθέσεις ‘unconfoundedness’ θεωρούνται έγκυροι, το ‘φυσικό άμεσο αποτέλεσμα’ μπορεί να αντικατασταθεί ως:

$$\mathbf{DE}_{x, x'}(Y) = \sum_{\mathbf{z}} [\mathbf{E}(Y|\mathbf{do}(x', \mathbf{z})) - \mathbf{E}(Y|\mathbf{do}(x, \mathbf{z}))] \mathbf{P}(\mathbf{z}|\mathbf{do}(x)) \quad (5.3)$$

Το ‘φυσικό άμεσο αποτέλεσμα’ είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των ελεγχόμενων άμεσων αποτελεσμάτων (5.1), χρησιμοποιώντας την σχέση αιτίας και αποτελέσματος $\mathbf{P}(\mathbf{z}|\mathbf{do}(x))$ ως σταθμισμένη συνάρτηση. Μία επαρκής συνθήκη για την ταυτοποίηση της εξίσωσης (5.2) είναι ότι $Z_x \perp\!\!\!\perp Y_{x', z} \mid W$ ισχύει για κάποιο σύνολο W των μετρούμενων συμμεταβλητών. Ωστόσο, αυτή η κατάσταση από μόνη της, όπως η κατάσταση ‘ignorability’ της εξίσωσης (4.7), είναι κοντά στο νόημα για τις περισσότερες έρευνες, δεδομένου ότι δεν διατυπώνεται σε όρους γνωστών μεταβλητών.

5.1.3 Έμμεσες επιπτώσεις και φόρμουλα διαμεσολάβησης

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ο ορισμός της φυσικής άμεσης επίδρασης (5.2), μπορεί εύκολα να αντιστραφεί και να παρέχει ένα λειτουργικό ορισμό για την έμμεση επίδραση, μια έννοια που καλύπτεται από μυστήριο και αντιπαραθέσεις, γιατί είναι αδύνατο, χρησιμοποιώντας τον τελεστή $do(x)$, να απενεργοποιήσουμε την άμεση σύνδεση του X στο Y , έτσι ώστε να αφήσουμε το X να επηρεάσει το Y αποκλειστικά μέσω των έμμεσων διαδρομών.

Το ‘φυσικό έμμεσο αποτέλεσμα’, IE , της μετάβασης από το x στο x' ορίζεται ως η αναμενόμενη αλλαγή στο Y που επηρεάζεται από $X = x$ σταθερό και την αλλαγή Z σε ό, τι αξία θα είχε επιτευχθεί αν τεθεί σε $X = x'$. Αυτό, φαίνεται (Pearl, 2001) ως εξής: $IE_{x, x'}(Y) \triangleq E(Y_{x', z_{x'}}) - E(Y_x)$ (5.4)

το οποίο είναι σχεδόν πανομοιότυπο με το ‘άμεσο αποτέλεσμα’ στην εξίσωση (5.2) εκτός από την αντικατάσταση $X=x'$.

Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί ότι, γενικά, η ‘συνολική επίδραση’, TE μιας μετάβασης είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ του άμεσου αποτελέσματος της εν λόγω μετάβασης και του έμμεσου αποτελέσματος της αντίστροφης μετάβασης. Έχουμε:

$$TE_{x, x'}(Y) \triangleq E(Y_{x'} - Y_x) = DE_{x, x'}(Y) - IE_{x, x'}(Y) \quad (5.5)$$

Στα γραμμικά συστήματα, όπου η αντιστροφή των μεταβάσεων αναιρεί τα σημάδια των αποτελεσμάτων τους, έχουμε:

$$TE_{x, x'}(Y) = DE_{x, x'}(Y) + IE_{x, x'}(Y) \quad (5.6)$$

Δεδομένου ότι κάθε όρος παραπάνω βασίζεται σε ένα ανεξάρτητο ορισμό, αποτελεί επίσημη δικαιολογία για τον τύπο της πρόσθεσης που χρησιμοποιείται συνήθως στα γραμμικά συστήματα.

Για λόγους πληρότητας, έχουμε επεξηγήσει (από (5.3) και (5.6)) η έκφραση έμμεσου αποτελέσματος υπό συνθήκες ‘nonconfoundedness’:

$$\mathbf{IE}_{x, x'}(Y) = \sum_z \mathbf{E}(Y|x, z) [\mathbf{P}(z|x') - \mathbf{P}(z|x)] \quad (5.7)$$

Η έκφραση αυτή λαμβάνεται ως ο ‘**τύπος διαμεσολάβησης**’, λόγω κεντρικού ρόλου της στην ανάλυση της διαμεσολάβησης (Imai et al., 2008), η οποία έχει ένα ακανθώδες ζήτημα σε αρκετές επιστήμες (Shrout and Bolger, 2002; MacKinnon et al., 2007; Mortensen et al., 2009).

Όταν το αποτέλεσμα Y είναι δυαδικό (π.χ., ανάκτηση, ή μίσθωση) η **αναλογία** $(1 - \mathbf{IE}) / \mathbf{TE}$ αντιπροσωπεύει το κλάσμα της ανταπόκρισης των ατόμων που οφείλουν την απόκριση τους στις άμεσες διαδρομές, ενώ $(1 - \mathbf{DE}) / \mathbf{TE}$ αντιπροσωπεύει το κλάσμα που οφείλουν την απόκριση τους της Z στα μονοπάτια μεσολάβησης. Επιπλέον, παρέχει στους ερευνητές μία παραμετρική χωρίς ενδεικτική ποσότητα που ισχύει και στα γραμμικά και στα μη γραμμικά μοντέλα, ο τύπος μπορεί επίσης να χρησιμεύσει αναλυτικά για τη δοκιμή της αποτελεσματικότητας των διαφόρων τεχνικών εκτίμησης υπό διάφορους τύπους μοντέλου (Vander Weele, 2009).

5.2 Αίτια των αποτελεσμάτων και πιθανότητες της αιτιώδους συνάφειας

Η πιθανότητα ότι ένα γεγονός αποτέλεσε την αιτία ενός άλλου, καθοδηγεί πολλά από αυτά που καταλαβαίνουμε για τον κόσμο (και πώς ενεργούμε μέσα σε αυτόν). Για παράδειγμα, γνωρίζοντας είτε ήταν η ασπιρίνη που θεράπευσε τον πονοκέφαλό μου ή το τηλεοπτικό πρόγραμμα που παρακολούθησα σίγουρα θα επηρεάσουν την μελλοντική χρήση της ασπιρίνης. Δηλαδή, πρόκειται για καταστάσεις στις οποίες παρατηρούμε τόσο το αποτέλεσμα, $Y = y$ όσο και την υποτιθέμενη αιτία $X = x$ και πρέπει να αξιολογήσουμε, αντιγεγονικά ή με αντιπαραδείγματα, κατά πόσο το αποτέλεσμα ενός γεγονότος θα προέκυπτε αν απουσίαζε η αιτία του.

Οι πιθανότητες των αντιπαραδειγμάτων που σχετίζονται με το αποτέλεσμα δεν μπορούν σε γενικές γραμμές να αναγνωριστούν μέσω παρατήρησης ή ακόμα και από τις πειραματικές μελέτες. Αυτό δεν σημαίνει, ωστόσο, ότι αυτές οι πιθανότητες είναι άχρηστες ή άκυρες ως προς το εμπειρικό τους περιεχόμενο. Η οπτική της δομικής μπορεί να μας καθοδηγήσει στην πραγματικότητα προς την ανακάλυψη των συνθηκών κάτω από τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν από τα δεδομένα, ορίζοντας έτσι το εμπειρικό περιεχόμενο αυτών των αντιπαραδειγμάτων.

Ακολουθώντας την διαδικασία των 4 βημάτων της δομικής μεθοδολογίας – καθορισμός, υπόθεση, αναγνώριση και εκτίμηση – το πρώτο μας βήμα είναι να εκφράσουμε συμβολικά την ποσότητα στόχο με αντιπαραδειγματική σημειογραφία και να διασφαλίσουμε ότι αυτή έχει καθοριστεί με σαφήνεια, ότι δηλαδή μπορεί να υπολογιστεί σαφώς από κάθε πλήρως καθορισμένο μοντέλο αιτιώδους συνάφειας.

Στην περίπτωση μας, αυτό το βήμα είναι απλό. Υποθέτουμε τα δυαδικά γεγονότα, όπου τα $X = x$ και $Y = y$ αντιπροσωπεύουν την μεταβλητή μεταχείρισης (treatment) και το αποτέλεσμα αντιστοίχως και $X = x'$ και $Y = y'$ είναι οι αρνήσεις τους, η ποσότητα –στόχος μας μπορεί να μορφοποιηθεί απευθείας από την πρόταση: «Βρείτε την πιθανότητα ότι το Y θα είναι y' εάν το X ήταν x' , δεδομένου ότι, στην πραγματικότητα το Y είναι πράγματι y και το X είναι x » για να δώσει:

$$PN(x, y) = P(Y_{x'} = y' | X = x, Y = y) \quad (5.1)$$

Αυτή η αντιπαραδειγματική ποσότητα, την οποία οι Robins και Greenland (1989a) ονόμασαν «πιθανότητα αιτιώδους συνάφειας» και ο Pearl (2000a, σελ. 296) αποκάλεσε «πιθανότητα αναγκαιότητας» PN , η οποία θα πρέπει να διακρίνεται από άλλες αποχρώσεις της «αιτιώδους συνάφειας», είναι σίγουρα υπολογίσιμη από κάθε πλήρως καθορισμένο δομικό μοντέλο, δηλαδή ένα στο οποίο η $P(U)$ και όλες οι σχέσεις συνάρτησης είναι δεδομένα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε δομικό μοντέλο ορίζει μία κοινή κατανομή των αντιπαραδειγμάτων μέσω της εξίσωσης (3.17).

Έχοντας γράψει μια επίσημη παράσταση για την «πιθανότητα αναγκαιότητας», την εξίσωση (5.1), μπορούμε να προχωρήσουμε στην χάραξη και την ταυτοποίηση των φάσεων και να αναρωτηθούμε ποιες υποθέσεις θα μας επιτρέψουν να προσδιορίσουμε την «πιθανότητα αναγκαιότητας» από εμπειρικές μελέτες, είτε είναι παρατήρησης, πειραματικές ή ένας συνδυασμός αυτών. Αυτό το πρόβλημα αναλύθηκε από τον Pearl (2000a) και έδωσε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 5.1 Αν το Y είναι μονότονα σχετικό με το X , δηλαδή ισχύει $Y_1(u) \geq Y_0(u)$, τότε η «πιθανότητα αναγκαιότητας» PN είναι αναγνωρίσιμη κάθε φορά που το αιτιώδες αποτέλεσμα $P(y|do(x))$ είναι αναγνωρίσιμο και επιπλέον ισχύει:

$$PN = \frac{P(y|x) - P(y|x')}{P(y|x)} + \frac{P(y|x') - P(y|do(x'))}{P(x,y)} \quad (5.2)$$

Έτσι, η εξίσωση (5.2) παρέχει μια πιο εκλεπτυσμένη μέτρηση της αιτιώδους συνάφειας, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου η Αιτιώδη Επίδραση $P(y|do(x))$ δεν μπορεί να υπολογιστεί είτε από τις τυχαιοποιημένες δοκιμές ή από μελέτες παρατήρησης μέσω γραφικών παραστάσεων. Μπορεί επίσης να δειχθεί (Tian και Pearl, 2000) ότι η παράσταση της (5.2) παρέχει ένα κατώτερο όριο για την «πιθανότητα αναγκαιότητας» PN στην γενική, μη μονοτονική περίπτωση. Όπως και σε (Robins και Greenland, 1989b). Ειδικότερα, τα μέγιστα και κατώτερα όρια για την πιθανότητα της αναγκαιότητας δίνονται από:

$$\max \left\{ 0, \frac{P(y) - P(y|do(x'))}{P(x,y)} \right\} \leq PN \leq \min \left\{ 1, \frac{P(y'|do(x')) - P(x',y')}{P(x,y)} \right\} \quad (5.3)$$

Ο Pearl (2000a, σελ. 302) δείχνει ότι ο συνδυασμός των δεδομένων από τις μελέτες παρατήρησης και τις πειραματικές μελέτες που πραγματοποιούνται ξεχωριστά, μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ των X και Y , αλλά μπορούν ωστόσο να φέρουν το κατώτατο όριο της εξίσωσης (5.3) σε ενότητα, υπονοώντας έτσι την αιτιώδη συνάφεια με πιθανότητα ένα.

Τέτοια ακραία αποτελέσματα διαλύουν όλους τους φόβους και τους προβληματισμούς σχετικά με το εμπειρικό περιεχόμενο των αντιπαραδειγμάτων (Dawid, 2000; Pearl, 2000b). Αποδεικνύουν ότι η ποσότητα της «πιθανότητας αναγκαιότητας» PN η οποία εκ πρώτης όψεως φαίνεται να είναι υποθετική, ασαφής, μη-ελεγχόμενη και, ως εκ τούτου, ανάξια για επιστημονική ανάλυση είναι ωστόσο προσδιορίσιμη, ελέγξιμη και σε ορισμένες περιπτώσεις ακόμη και αναγνωρίσιμη.

Επιπλέον, το γεγονός ότι, υπό ορισμένο συνδυασμό των δεδομένων και χωρίς να γίνει καμία απολύτως υπόθεση, ένας σημαντικός νομικός ισχυρισμός όπως ότι «*ο ασθενής θα ήταν ζωντανός αν δεν είχε πάρει το φάρμακο*», μπορεί να διαπιστωθεί με την *πιθανότητα ίση με ένα* και αποτελεί έναν αξιόλογο φόρο τιμής στην τυπική ανάλυση.

Μια άλλη ποσότητα αντιπαραδείγματος που έχει πλήρως χαρακτηριστεί πρόσφατα, είναι η «**Επίδραση της μεταβλητής μεταχείρισης**» (Effect of Treatment on the Treated –ETT):

$$ETT = P(Y_x = y|X = x') \quad (5.4)$$

Η ETT έχει χρησιμοποιηθεί στην οικονομετρία για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των κοινωνικών προγραμμάτων για τους συμμετέχοντες (Heckman, 1992) και έχει εδώ και καιρό να είναι ο στόχος της έρευνας στην επιδημιολογία, όπου κατέληξε να είναι γνωστή ως «*Η Επίδραση της έκθεσης στους εκτεθειμένους*» (the effect of exposure on the exposed), ή «*Τυποποιημένη νοσηρότητα*» (standardized morbidity) (Miettinen, 1974; Greenland και Robins, 1986).

Οι Shpitser και Pearl (2009) έχουν αντλήσει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των εν λόγω μοντέλων στα οποία η ETT μπορεί να εντοπιστεί από πειραματικές μελέτες ή

από μελέτες παρατήρησης. Έχουν δείξει ότι, παρά τον κραυγαλέα αντιπαραδειγματικό χαρακτήρα της, (π.χ. «μόλις πήρα μία ασπιρίνη, ίσως να μην έπρεπε να την είχα πάρει.») η ETT μπορεί να αξιολογηθεί από πειραματικές μελέτες σε πολλές αν όχι όλες τις περιπτώσεις. Μπορεί επίσης να αξιολογηθεί από μελέτες παρατήρησης κάθε φορά που ένα επαρκές σύνολο συμμεταβλητών μπορεί να μετρηθεί και το οποίο πληροί το «κριτήριο της πίσω πόρτας» και, γενικότερα, σε μια ευρεία κατηγορία γραφημάτων που επιτρέπουν τον προσδιορισμό των υπό συνθήκη παρεμβάσεων.

Τα αποτελέσματα αυτά φωτίζουν περαιτέρω το εμπειρικό περιεχόμενο των αντιπαραδειγμάτων και τον ουσιαστικό ρόλο τους στην αιτιώδη ανάλυση. Αποδεικνύουν για άλλη μια φορά τον θρίαμβο της λογικής και της ανάλυσης πάνω στις παραδόσεις που a priori αποκλείουν από την ανάλυση των ποσοτήτων που δεν είναι ελέγξιμες σε απομόνωση. Πάνω απ' όλα, αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και τη βιωσιμότητα της επιστημονικής προσέγγισης στην αιτιώδη συνάφεια στην οποία το κυρίαρχο παράδειγμα είναι το μοντέλο των δραστηριοτήτων της Φύσης και όχι εκείνο του πειραματιστή.

Σε αντίθεση με το κυρίαρχο παράδειγμα των συντηρητικών στατιστικών, ξεκινάμε με τις σχέσεις που γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι δεν πρόκειται ποτέ να εκτιμηθούν, να ελεγχθούν ή να παραποιηθούν. Μόνο μετά τη συναρμολόγηση μιας σειράς τέτοιου είδους σχέσεων και κρίνοντάς τις ώστε να παρουσιάζουν πιστά τη θεωρία μας για το πώς λειτουργεί η Φύση, μπορούμε να αναρωτηθούμε αν η παράμετρος που μας ενδιαφέρει, ευκρινώς οριζόμενη με βάση αυτές τις θεωρητικές σχέσεις, μπορεί να εκτιμηθεί με συνέπεια από τα εμπειρικά δεδομένα και πώς. Συχνά μπορεί να εκτιμηθεί και σε πίστωση της προόδου της στατιστικής επιστήμης.

Κεφάλαιο 6

Υποδείγματα

6.1 Υπόδειγμα Συμπερασματολογίας της Συνάφειας

Το κατάλληλο μοντέλο για την **Συμπερασματολογία της Συνάφειας** αποτελεί απλά το τυπικό στατιστικό μοντέλο που αφορά δύο μεταβλητές σε έναν πληθυσμό. Το μοντέλο ξεκινά με έναν πληθυσμό U «μονάδων». Μία μονάδα σε ένα σύνολο U θα συμβολίζεται με u . Οι μονάδες είναι τα βασικά αντικείμενα της μελέτης σε μια έρευνα. Παραδείγματα μονάδων μπορεί να είναι ανθρώπινα υποκείμενα, εργαστηριακός εξοπλισμός, τα νοικοκυριά και τα οικόπεδα γης. Μια μεταβλητή είναι στην ουσία μια συνάρτηση πραγματικών τιμών που ορίζεται σε κάθε μονάδα U . Η τιμή μιας μεταβλητής για μια δεδομένη μονάδα u είναι ο αριθμός που της ανατίθεται από κάποια διαδικασία μέτρησης στο u . Ένας πληθυσμός μονάδων και μεταβλητών που ορίζεται σε αυτές τις μονάδες αποτελούν τα βασικά στοιχεία των μοντέλων τόσο για την συνάφεια, όσο και για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία που παρουσιάζονται εδώ. Αντιστοιχούν στις μαθηματικές έννοιες ενός συνόλου στις συναρτήσεις πραγματικών τιμών που ορίζονται στα στοιχεία του συνόλου.

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε μονάδα u στο σύνολο U συσχετίζεται μία τιμή $Y(u)$ μιας μεταβλητής Y . Ας υποθέσουμε επίσης ότι Y είναι μια μεταβλητή επιστημονικού ενδιαφέροντος υπό την έννοια ότι κάποιος επιθυμεί να καταλάβει γιατί οι τιμές του Y μεταβάλλονται με τις μονάδες στο σύνολο U . Η Y είναι η μεταβλητή απόκρισης λόγω της ιδιότητάς της ως «μεταβλητή που πρέπει να εξηγηθεί».

Πραγματοποιώντας **Συμπερασματολογία Συνάφειας** μπορεί κάποιος να είναι ικανοποιημένος με την ανακάλυψη ότι οι τιμές της Y συσχετίζονται με τις τιμές των

άλλων μεταβλητών που ορίζονται για τις μονάδες του συνόλου U . Έστω ότι A είναι μία δεύτερη μεταβλητή που ορίζεται στο U . Η διάκριση της A από την Y γίνεται θεωρώντας ότι η A είναι ένα χαρακτηριστικό των μονάδων στο U . Λογικά πάντως, η A και η Y θεωρούνται επί ίσοις όρους, δεδομένου ότι και οι δύο είναι απλά μεταβλητές που ορίζονται στο σύνολο U .

Όλοι οι πιθανότητες, οι κατανομές και οι αναμενόμενες τιμές που περιλαμβάνουν μεταβλητές υπολογίζονται πάνω στο U . Μια πιθανότητα δεν θα σημαίνει τίποτε περισσότερο ή λιγότερο από ένα ποσοστό των μονάδων στο U . Η αναμενόμενη τιμή μιας μεταβλητής είναι απλώς η μέση τιμή της πάνω σε όλο το σύνολο U . Οι δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές είναι οι μέσοι όροι των υποσυνόλων των μονάδων όπου τα υποσύνολα ορίζονται από την ρύθμιση των τιμών των μεταβλητών. Υπό αυτήν την έννοια, τα μοντέλα που περιγράφονται εδώ είναι μοντέλα πληθυσμού.

Ο ρόλος του χρόνου πρέπει να αναφερθεί εδώ. Οι πληθυσμοί των μονάδων υπάρχουν μέσα σε ένα χρονικό πλαίσιο κάποιου είδους και οι μετρήσεις των χαρακτηριστικών των μονάδων που αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές πρέπει να γίνονται σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Για την Συμπερασματολογία Συνάφειας ωστόσο, ο ρόλος του χρόνου χρησιμοποιείται απλά για να επηρεάσει τον ορισμό του πληθυσμού των μονάδων ή για να προσδιορίσει την λειτουργική έννοια μίας συγκεκριμένης μεταβλητής. Όπως θα δούμε παρακάτω, στην Αιτιώδη Συμπερασματολογία ο ρόλος του χρόνου έχει μεγαλύτερη σημασία.

Η πιο λεπτομερής πληροφορία που μπορεί κανείς να έχει στο μοντέλο που μόλις περιγράφηκε είναι ότι οι τιμές των $Y(u)$ και $A(u)$ είναι όλα τα u στο σύνολο U . Η κοινή κατανομή των Y και A στο U καθορίζεται από $\Pr(Y = y, A = a) = \text{αναλογία του } u \text{ στο } U \text{ για τις οποίες ισχύει } Y(u) = y \text{ και } A(u) = a$.

Οι παράμετροι της Συνάφειας καθορίζονται από αυτή την κοινή κατανομή. Για παράδειγμα, η δεσμευμένη κατανομή της Y με δεδομένη την A καθορίζεται από $P_r(Y = y | A = a) = \frac{P_r(Y=y, A=a)}{P_r(A=a)}$. Αυτή η δεσμευμένη κατανομή περιγράφει πώς η κατανομή των τιμών Y αλλάζει στο U , καθώς μεταβάλλεται η A . Μία τυπική παράμετρος συνάφειας είναι η παλινδρόμηση της Y στην A , δηλαδή, η δεσμευμένη μέση τιμή $E(Y | A = a)$.

Η Συμπερασματολογία της Συνάφειας συνίσταται στη διενέργεια στατιστικών συμπερασμάτων (εκτιμήσεων, δοκιμών, εκ των υστέρων κατανομών κλπ.) σχετικά με τις παραμέτρους συνάφειας που σχετίζονται με τις Y και A βάσει των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν για τις Y και A από τις μονάδες στο σύνολο U . Υπό αυτήν την έννοια, η Συμπερασματολογία της Συνάφειας είναι απλά μία μέθοδος περιγραφικής στατιστικής.

6.2 Υπόδειγμα Rubin για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία

Το μοντέλο αυτό ξεκινά με έναν πληθυσμό μονάδων U . Οι μονάδες στο μοντέλο για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία είναι τα αντικείμενα της μελέτης πάνω στα οποία μπορούν να ενεργήσουν οι αιτίες ή οι μεταβλητές μεταχείρισης. Για λόγους απλότητας θεωρούμε εδώ ότι υπάρχουν μόνο δύο αιτίες ή επίπεδα μεταχείρισης που συμβολίζονται με t (μεταβλητή μεταχείρισης=treatment) και c (ο έλεγχος).

Έστω ότι S είναι μία μεταβλητή που δηλώνει την αιτία για την οποία κάθε μονάδα στον πληθυσμό U είναι εκτεθειμένη, δηλαδή $S = t$ υποδεικνύει ότι η μονάδα έχει εκτεθεί σε t και $S = c$ υποδεικνύει την έκθεση στο c .

Σε μια ελεγχόμενη μελέτη, ο πληθυσμός S κατασκευάζεται από τον πειραματιστή. Σε μια μη ελεγχόμενη μελέτη, ο πληθυσμός S προσδιορίζεται σε κάποιο βαθμό από παράγοντες εκτός του ελέγχου του πειραματιστή. Σε κάθε περίπτωση, το κρίσιμο χαρακτηριστικό της έννοιας της αιτίας σε αυτό το μοντέλο είναι ότι η τιμή του $S(u)$ για κάθε μονάδα θα μπορούσε να ήταν διαφορετική.

Το $S(u)$ δείχνει έκθεση του u σε μια συγκεκριμένη αιτία, ενώ το $A(u)$ μπορεί να δείχνει μία ιδιότητα ή ένα χαρακτηριστικό του u . Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του $A(u)$ δεν θα μπορούσε να ήταν διαφορετική.

Ο ρόλος του χρόνου γίνεται τώρα σημαντικός λόγω του γεγονότος ότι όταν μια μονάδα εκτίθεται σε μια αιτία αυτή πρέπει να συμβεί σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ή μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Οι μεταβλητές τώρα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: προ της έκθεσης μεταβλητές - αυτών των οποίων οι τιμές έχουν καθοριστεί πριν από την έκθεση στην αιτία και σε μεταβλητές μετά την έκθεση - εκείνες των οποίων οι τιμές καθορίζονται μετά την έκθεση στην αιτία.

Ο ρόλος μιας μεταβλητή απόκρισης Y είναι για να μετρηθεί η επίδραση από την αιτία και ως εκ τούτου οι μεταβλητές απόκρισης πρέπει να εμπίπτουν στην κατηγορία μετά την έκθεση. Αυτό οδηγεί σε ένα άλλο κρίσιμο στοιχείο του μοντέλου. Οι τιμές των μεταβλητών μετά την έκθεση που ενδέχεται να επηρεασθούν από τη συγκεκριμένη αιτία, t ή c , στην οποία η μονάδα θα εκτεθεί. Αυτό δεν είναι τίποτα λιγότερο από τη δήλωση ότι κάθε αίτιο έχει ένα αποτέλεσμα, δήλωση που αποτελεί την κεντρική ιδέα της έννοιας της αιτιότητας.

Προκειμένου το μοντέλο να παρουσιάσει πιστά αυτήν την κατάσταση δεν χρειαζόμαστε μια μόνο μεταβλητή Y για να αντιπροσωπευθεί μία απάντηση, αλλά δύο μεταβλητές, Y_t και Y_c που να εκπροσωπούν δύο πιθανές απαντήσεις. Η ερμηνεία αυτών των δύο τιμών, $Y_t(u)$ και $Y_c(u)$ για μια δεδομένη μονάδα u είναι ότι $Y_t(u)$ είναι

η τιμή της απόκρισης που θα παρατηρούνταν εάν η μονάδα ήταν εκτεθειμένη στο t και $Y_c(u)$ είναι η τιμή που θα παρατηρούνταν στην ίδια μονάδα εάν είχε εκτεθεί στο c .

Ο συμβολισμός $Y_t(u)$ και $Y_c(u)$ μερικές φορές προκαλεί σύγχυση, επειδή μια μεταβλητή συνήθως αντιπροσωπεύει μια μέτρηση κάποιου είδους και μια μέτρηση συνήθως θεωρείται ως το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας που εφαρμόζεται σε μια μονάδα. Αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα.

Για τις μεταβλητές μετά την έκθεση, η μέτρηση εφαρμόζεται στα αντίστοιχα (u, t) (δηλαδή, u μετά την έκθεση στο t) ή στο (u, c) (δηλαδή, u μετά την έκθεση στο c). Ένας συμβολισμός που εκφράζει περισσότερο σχεδόν αυτήν την κοινή εξάρτηση των Y στο u και στην εκτεθειμένη αιτία είναι: $Y_t(u) = Y(u,t)$ και $Y_c(u) = Y(u,c)$. Ωστόσο, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό Y_t, Y_c , δεδομένου ότι οδηγεί σε απλούστερες εκφράσεις.

Το αποτέλεσμα της αιτίας t στο u όπως μετράται από το Y και σε σχέση με την αιτία στο c είναι η διαφορά μεταξύ $Y_t(u)$ και $Y_c(u)$. Στο μοντέλο αυτό αντιπροσωπεύεται από την αλγεβρική διαφορά:

$$Y_t(u) - Y_c(u) \tag{6.1}$$

Καλούμε την διαφορά (6.1) ως το αποτέλεσμα της αιτιώδους συνάφειας του t (σε σχέση με το c) στο u (όπως μετράται από το Y). Η έκφραση (6.1) αποτελεί τον τρόπο που το μοντέλο για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία εκφράζει την πιο βασική από όλες τις αιτιώδεις δηλώσεις. Λέει ότι η μεταχείριση του t προκαλεί το αποτέλεσμα $Y_t(u) - Y_c(u)$ στη μονάδα U (σε σχέση με την μεταχείριση του c) ή πιο απλά ότι

$$\text{το } t \text{ προκαλεί το αποτέλεσμα } Y_t(u) - Y_c(u) \tag{6.2}$$

Η Αιτιώδη Συμπερασματολογία τελικά ασχολείται με τις επιπτώσεις των αιτιών σε συγκεκριμένες μονάδες, δηλαδή, με την εξακρίβωση της τιμής του αιτιώδους αποτελέσματος στο (6.1).

Θεμελιώδες πρόβλημα της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας

Είναι αδύνατο να παρατηρήσουμε την τιμή του $Y_t(u)$ και $Y_c(u)$ στην ίδια μονάδα και, ως εκ τούτου, είναι αδύνατο να παρατηρήσουμε την επίδραση του t στο u .

Η έμφαση δίδεται στη λέξη παρατηρώ. Η αδυναμία της παρατήρησης τόσο για το $Y_t(u)$, όσο και για το $Y_c(u)$ είναι αυτονόητη σε ορισμένα παραδείγματα και λιγότερο σαφή σε άλλα. Για παράδειγμα, εάν η μονάδα u είναι ένας μαθητής της τετάρτης δημοτικού, το t αντιπροσωπεύει μια νέα χρόνια με μακρύ πρόγραμμα μαθημάτων αριθμητικής, το c αντιπροσωπεύει ένα σταθερό πρόγραμμα αριθμητικής και το Y είναι η βαθμολογία σε ένα τεστ στο τέλος του χρόνου, τότε είναι προφανές ότι θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε, είτε $Y_t(u)$, είτε $Y_c(u)$, αλλά όχι και τα δύο. Είναι σαφές ωστόσο, ότι αυτό ισχύει μόνο λόγω της αληθοφάνειας ορισμένων παραδοχών σχετικά με την κατάσταση που αυτή η πεποίθησή μου μπορεί να χρησιμοποιηθεί από οποιονδήποτε άλλο.

Η έμμεση απειλή του Θεμελιώδους Προβλήματος της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας είναι ότι η Αιτιώδης Συμπερασματολογία είναι αδύνατη. Αλλά δεν πρέπει να βγάλουμε γρήγορα συμπεράσματα. Υποστηρίζοντας ότι η ταυτόχρονη παρατήρηση του $Y_t(u)$ και του $Y_c(u)$ είναι αδύνατη, δεν σημαίνει ότι διαθέτουμε γνώση σχετικά με αυτές τις τιμές. Αυτή θα εξαρτηθεί από την κατάσταση που εξετάστηκε.

Υπάρχουν δύο γενικές λύσεις στο θεμελιώδες πρόβλημα το οποίο για λόγους ευκολίας επισημαίνουμε εδώ την επιστημονική λύση και τη στατιστική λύση.

Η επιστημονική λύση είναι να εκμεταλλευτούμε διάφορες ομοιογενείς ή αμετάβλητες υποθέσεις. Για παράδειγμα, με την προσεκτική μελέτη της συμπεριφοράς και την χρήση εργαστηριακού εξοπλισμού, ένας επιστήμονας μπορεί να υποθέσει ότι η τιμή του $Y_c(u)$ που μετράται σε προγενέστερο χρόνο είναι ίση με την τιμή $Y_c(u)$ για το τρέχον πείραμα. Το μόνο που χρειάζεται να κάνει τώρα είναι να εκθέσει το u στο t και να μετρήσει το $Y_t(u)$ και έτσι θα έχει ξεπεράσει το θεμελιώδες πρόβλημα της αιτιώδους συμπερασματολογίας. Σημειώστε, ωστόσο ότι, αυτός ο υποθετικός επιστήμονας έχει κάνει μία μη ελέγξιμη υπόθεση ομοιογένειας. Με προσεκτική δουλειά μπορεί ο ίδιος να πείσει τον εαυτό του και άλλους ότι αυτή η υπόθεση είναι σωστή, αλλά ποτέ δεν μπορεί να είναι απολύτως βέβαιος. Η επιστήμη έχει προχωρήσει πάρα πολύ με τη χρήση αυτής της προσέγγισης. Η επιστημονική λύση είναι μια συνηθισμένη πτυχή της καθημερινής μας ζωής επίσης. Όλοι την χρησιμοποιούν για να πραγματοποιήσουν αιτιώδεις εξαγωγές συμπερασμάτων που προκύπτουν στη ζωή μας.

Η στατιστική λύση είναι διαφορετική και κάνει χρήση του πληθυσμού U με έναν τυπικά στατιστικό τρόπο. Ο μέσος όρος του αιτιώδους αποτελέσματος T , ή t (σε σχέση με το c) πάνω στον πληθυσμό U είναι η αναμενόμενη τιμή της διαφοράς $Y_t(u) - Y_c(u)$ πάνω από τα u στον πληθυσμό U . Δηλαδή,

$$E(Y_t - Y_c) = T \quad (6.3)$$

Όπου T είναι η μέση τιμή του αιτιώδους αποτελέσματος. Από τους συνήθεις κανόνες των πιθανοτήτων η (6.3) μπορεί επίσης να εκφραστεί ως:

$$E(Y_t) - E(Y_c) = T \quad (6.4)$$

Αν και αυτές δεν μοιάζουν πολύ, η (6.4) αποκαλύπτει ότι οι πληροφορίες σχετικά με διάφορες μονάδες που μπορούν να παρατηρηθούν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποκτηθεί γνώση σχετικά με το T . Για παράδειγμα, εάν μερικές μονάδες εκτεθούν στο t , τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν πληροφορίες σχετικά με το $E(Y_t)$ (διότι αυτή είναι η μέση τιμή του Y_t πάνω στο U) και εάν άλλες μονάδες εκτεθούν στο c τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν πληροφορίες σχετικά με το $E(Y_c)$.

Ο τύπος (6.4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για να αποκτηθούν γνώσεις σχετικά το T . Ο ακριβής τρόπος που θα επιλεγούν οι μονάδες για την έκθεση σε t ή c είναι πολύ σημαντικός και περιλαμβάνει όλες τις συνήθεις εκτιμήσεις ενός καλού στατιστικού σχεδιασμού πειραμάτων. Το σημαντικό σημείο είναι ότι η στατιστική λύση αντικαθιστά την αδύνατο να παρατηρηθεί αιτιώδη συνάφεια του t σε μια ειδική μονάδα με την πιθανή να εκτιμηθεί μέση αιτιώδη συνάφεια του t πάνω σε έναν πληθυσμό μονάδων.

Η χρησιμότητα της επιστημονικής ή της στατιστικής λύσης στο βασικό πρόβλημα της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας εξαρτάται από την αλήθεια των διαφόρων συνόλων των μη ελέγξιμων υποθέσεων.

Είναι χρήσιμο να έχουμε έναν συμβολισμό για να εκφράσουμε το γεγονός ότι ο δείκτης της αιτιώδους μεταβλητής S καθορίζει ποια τιμή, Y_t ή Y_c παρατηρείται για μια δεδομένη μονάδα. Εάν $S(u) = t$, τότε παρατηρείται το $Y_t(u)$ και εάν $S(u) = c$, τότε παρατηρείται $Y_c(u)$. Έτσι, η παρατηρούμενη απόκριση στη μονάδα u είναι $Y_s(u)$. Η μεταβλητή απόκρισης που παρατηρείται είναι ως εκ τούτου Y_s . Ως εκ τούτου, ακόμη και αν το μοντέλο περιλαμβάνει τρεις μεταβλητές, S , Y_t και Y_c η διαδικασία της παρατήρησης περιλαμβάνει μόνο δύο, δηλαδή S και Y_s .

Η διάκριση μεταξύ (α) της διαδικασίας μέτρησης, Y , που παράγει την μεταβλητή απόκρισης, (β) των δύο εκδόσεων της μεταβλητής απόκρισης Y_t και Y_c που αντιστοιχεί σε ποια αιτία έχει εκτεθεί η μονάδα (και σε όρους του ποια αιτιώδη αποτελέσματα ορίζονται) και (γ) της παρατηρούμενης μεταβλητής απόκρισης Y_s , είναι πολύ σημαντικό. Οι διακρίσεις αυτές δεν προκύπτουν ποτέ στη μελέτη της απλής συσχέτισης, αλλά είναι ζωτικής σημασίας για την ανάλυση της αιτιώδους συνάφειας.

6.3 Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας

Αυτή η ενότητα εξετάζει μερικές απλές ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου του **Rubin** για την Αιτιώδη Συμπερασματολογία. Ο σκοπός είναι να παρουσιαστεί το πώς συγκεκριμένες υποθέσεις που προστίθενται στο μοντέλο επιτρέπουν την Αιτιώδη Συμπερασματολογία συγκεκριμένων τύπων.

6.3.1 Χρονική σταθερότητα και αιτιώδης παροδικότητα

Ένας τρόπος εφαρμογής της επιστημονικής λύση στο βασικό πρόβλημα της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας είναι **να υποθέσουμε** ότι: **α)** η τιμή της $Y_c(u)$ δεν εξαρτάται από το πότε εμφανίζεται η αλληλουχία «εφαρμόστε το c στο u και στην συνέχεια υπολογίστε την Y στο u » και **β)** η τιμή της $Y_t(u)$, δεν επηρεάζεται από την προηγούμενη έκθεση του u στην αλληλουχία του a).

Όταν αυτές οι δύο υποθέσεις είναι ευλογοφανείς, τότε πρόκειται απλά για θέμα υπολογισμού των $Y_c(u)$ και $Y_t(u)$ με έκθεση αλληλουχίας του u στο c και έπειτα στο t , υπολογίζοντας την Y μετά από κάθε έκθεση.

Η πρώτη υπόθεση είναι για την χρονική σταθερότητα, επειδή επιβεβαιώνει την σταθερότητα της απόκρισης με την πάροδο του χρόνου. Η δεύτερη υπόθεση έχει να κάνει με την αιτιώδη παροδικότητα, διότι επιβεβαιώνει ότι το αιτιώδες αποτέλεσμα c και η διαδικασία υπολογισμού που οδηγεί στην $Y_c(u)$ είναι παροδική και δεν αλλάζει το u αρκετά ώστε να επηρεάσει την $Y_t(u)$ που υπολογίζεται κατόπιν. Αυτές οι δύο υποθέσεις συχνά εφαρμόζονται σε θέματα που αφορούν τις φυσικές συσκευές και συνήθως πραγματοποιούνται και από όλους μας στην καθημερινότητά μας.

6.3.2 Ομοιογένεια των μονάδων

Ένας δεύτερος τρόπος εφαρμογής της επιστημονικής λύσης στο βασικό πρόβλημα είναι να υποθέσουμε ότι $Y_t(u_1) = Y_t(u_2)$ και $Y_c(u_1) = Y_c(u_2)$ για δύο μονάδες u_1 και u_2 . Αυτή είναι η υπόθεση της ομοιογένειας των μονάδων. Και αυτή επίσης, συχνά ισχύει για εργασίες σε επιστημονικά εργαστήρια και αποτελεί επίσης ένα εργαλείο Αιτιώδης Συμπερασματολογίας της καθημερινής μας ζωής.

Το αιτιώδες αποτέλεσμα του t θεωρείται ότι είναι η τιμή $Y_t(u_1) - Y_c(u_2)$. Ένας τρόπος με τον οποίον οι εργαστηριακοί επιστήμονες πείθουν τους εαυτούς τους ότι οι μονάδες είναι ομοιογενείς, είναι με το να τις προετοιμάσουν προσεκτικά έτσι ώστε να μοιάζουν πανομοιότυπες σε όλες τις σχετικές πτυχές. Αυτό, βέβαια, δεν μπορεί να αποδείξει ότι η υπόθεση της ομοιογένειας των μονάδων είναι έγκυρη, αλλά μπορεί να κάνει αυτή την υπόθεση ευλογοφανή.

6.3.3 Ανεξαρτησία

Η πιο γνωστή μέθοδος επιλογής των μονάδων στην πειραματική μελέτη είναι η τυχαιοποίηση. Η εικασία στη χρήση της στατιστικής λύση είναι ότι ο πληθυσμός U δεν αποτελείται από μία ή δύο μονάδες, αλλά ότι είναι «μεγάλος» υπό κάποια έννοια. Τα παρατηρούμενα δεδομένα για κάθε μονάδα είναι τιμές του ζεύγους των μεταβλητών (S, Y_S) .

Ο μέσος όρος της Αιτιώδους Επιδράσεως T είναι η διαφορά μεταξύ των δύο αναμενόμενων τιμών $E(Y_t)$ και $E(Y_c)$. Τα παρατηρούμενα δεδομένα (S, Y_S) ωστόσο, μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες μόνο για τις:

$$E(Y_S | S = t) = E(Y_t | S = t) \quad (6.5)$$

και

$$E(Y_S | S = c) = E(Y_c | S = c) \quad (6.6)$$

Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι τα $E(Y_t)$ και $E(Y_t | S = t)$ δεν είναι το ίδιο και δεν χρειάζεται να έχουν τις ίδιες τιμές γενικά [ομοίως για $E(Y_c)$ και $E(Y_c | S = c)$]. Για την διατύπωση αυτής της διαφοράς ισχύει ότι $E(Y_t)$ είναι η μέση τιμή της $Y_t(u)$ σε όλες τις u στο U , όπου $E(Y_t | S = t)$ είναι η μέση τιμή της $Y_t(u)$ μόνο για εκείνες τις μονάδες u στο U που εκτέθηκαν σε t . Δεν υπάρχει κανένας λόγος για τον οποίο θα πρέπει σε γενικές γραμμές αυτοί οι δύο μέσοι όροι να είναι ίσοι.

Για παράδειγμα, εάν $S(u) = t$ για όλες τις μονάδες για τις οποίες η $Y_t(u)$ είναι μικρή, τότε η $E(Y_t | S = t)$ θα είναι μικρότερη από την $E(Y_t)$. Υπάρχει ωστόσο, μία υπόθεση, η οποία εάν μπορεί να θεωρηθεί ευλογοφανής, καθιστά αυτές τις δύο αναμενόμενες τιμές ίσες. Είναι η υπόθεση της ανεξαρτησίας. Όταν οι μονάδες ανατίθενται τυχαία, είτε στην αιτία t ή στην αιτία c , πραγματοποιούνται ορισμένες

διεργασίες φυσικής τυχαιοποίησης, έτσι ώστε ο προσδιορισμός του σε ποια αιτία (t ή c) εκτίθενται οι μονάδες u να θεωρείται ως στατιστικά ανεξάρτητος από όλες τις άλλες μεταβλητές, συμπεριλαμβανομένων των Y_t και Y_c .

Αυτό σημαίνει ότι αν η φυσική τυχαιοποίηση αν εκτελεστεί σωστά, τότε είναι πιθανό η S να είναι ανεξάρτητη από την Y, αλλά και η Y και όλες οι άλλες μεταβλητές πάνω στο U να είναι ανεξάρτητες. Αυτή είναι η υπόθεση της ανεξαρτησίας. Αν ισχύει αυτή η υπόθεση, τότε έχουμε τις βασικές εξισώσεις:

$$E(Y_t) = E(Y_t|S = t) \quad (6.7)$$

και

$$E(Y_c) = E(Y_c|S = c) \quad (6.8)$$

Ως εκ τούτου, με την υπόθεση της ανεξαρτησίας, ο μέσος όρος της Αιτιώδους Επιδράσεως T ικανοποιεί την εξίσωση:

$$T = E(Y_S|S = t) - E(Y_S|S = c) \quad (6.9)$$

Τα δεδομένα (S, Ys) μπορούν τώρα να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του T λαμβάνοντας την διαφορά μεταξύ της μέσης τιμής της παρατηρούμενης απόκρισης Ys για τις μονάδες με S = T και για τις μονάδες με S = c. Ως εκ τούτου, εάν είναι εφικτή η τυχαιοποίηση, ο μέσος όρος της αιτιώδους επιδράσεως T μπορεί πάντα να υπολογίζεται. Αν ο πληθυσμός U είναι μεγάλος, το T μπορεί να υπολογιστεί με υψηλή ακρίβεια.

Είναι χρήσιμο να έχουμε ένα όνομα για τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (6.9), ακόμη και όταν η υπόθεση της ανεξαρτησίας δεν ικανοποιείται. Θα το ονομάσουμε «εκ πρώτης όψεως Αιτιώδη Επίδραση» του t (σε σχέση με το c) «prima facie causal effect» και δηλώνουν ότι από:

$$\text{TPF} = E(Y_t | S = t) - E(Y_c | S = c) \quad (6.10)$$

η οποία είναι αλγεβρικά ίσο με την ακόλουθη συνάρτηση της Ανάλυσης παλινδρόμησης του Y_s για την S :

$$\text{TPF} = E(Y_s | S = t) - E(Y_s | S = c) \quad (6.11)$$

Ο όρος «prima facie causal effect» είναι προσαρμοσμένος από τον Suppes και χρησιμοποιείται εδώ για να διακρίνει την (6.11) από την πραγματική μέση Αιτιώδη Επίδραση, T , που ορίζεται στην εξίσωση:

$$E(Y_t - Y_c) = T \quad (6.12)$$

ή διαφορετικά:

$$E(Y_t) - E(Y_c) = T \quad (6.13)$$

Ο όρος «prima facie causal effect» είναι μια συνειρμική παράμετρος για την από κοινού κατανομή του παρατηρούμενου ζεύγους (Y_s, S) . Σε γενικές γραμμές, η μέση Αιτιώδη Επίδραση T δεν είναι ίση με TPF. Η υπόθεση της ανεξαρτησίας, όμως, δεν επιτρέπει το συμπέρασμα ότι $T = \text{TPF}$.

6.3.4 Σταθερό αποτέλεσμα

Η τιμή της μέσης Αιτιώδους Επιδράσεως T είναι πιθανό να ενδιαφέρει για τους δικούς της λόγους ορισμένους τύπους μελετών.

Ο μέσος όρος της Αιτιώδους Επιδράσεως T είναι μία μέση τιμή και ως τέτοια απολαμβάνει όλα τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μέσων όρων. Για παράδειγμα, αν η μεταβλητότητα των Αιτιωδών Επιδράσεων $Y_t(u) - Y_c(u)$ είναι μεγάλη πάνω στο U , τότε η τιμή T μπορεί να μην αντιπροσωπεύει ιδιαίτερα καλά την Αιτιώδη Επίδραση μιας ειδικής μονάδας u_0 . Αν u_0 είναι η μονάδα του ενδιαφέροντος, τότε η T μπορεί να είναι άσχετη, ανεξαρτήτως του πόσο καλά έχει γίνει ο υπολογισμός της.

Η υπόθεση του σταθερού αποτελέσματος σημαίνει ότι η επίδραση του t σε κάθε μονάδα είναι η ίδια και στο πλαίσιο αυτής της υπόθεσης έχουμε την εξίσωση:

$$T = Y_t(u) - Y_c(u) \quad (6.14)$$

για όλα τα u στο U .

Ως εκ τούτου, με βάση την υπόθεση περί του σταθερού αποτελέσματος, T είναι το αιτιώδες αποτέλεσμα για κάθε μονάδα στον πληθυσμό U . Αυτή η υπόθεση επίσης ονομάζεται «**Προσθετικότητα**» στα στατιστικά μοντέλα πειραμάτων, διότι η treatment t προσθέτει μια σταθερή ποσότητα T στην απόκριση ελέγχου για κάθε μονάδα.

Η υπόθεση του σταθερού αποτελέσματος κάνει την τιμή του μέσου όρου της αιτιώδους επιδράσεως να σχετίζεται με κάθε μονάδα και επομένως, επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί το T για την άντληση αιτιωδών συμπερασμάτων σε επίπεδο μονάδων.

Η υπόθεση του σταθερού αποτελέσματος μπορεί να ελεγχθεί εν μέρει με τον ίδιο τρόπο που η υπόθεση της Προσθετικότητας συνήθως διερευνάται.

Για παράδειγμα, το U μπορεί να διαιρεθεί σε υποπληθυσμούς U_1, U_2, \dots , και σε κάθε U_i , η μέση Αιτιώδης Επίδραση είναι δυνατόν να εκτιμηθεί από, T_1, T_2, \dots . Αν τα T_i ποικίλλουν, η παραδοχή σταθερού αποτελέσματος δεν μπορεί να κρατήσει. Εάν τα T_i δεν διαφέρουν, τότε η παραδοχή μπορεί να είναι βάσιμη.

Η παραδοχή της σταθερής επίδρασης υπονοείται από την παραδοχή της ομοιογένειας. Δηλαδή, εάν το $Y_t(u_1) = Y_t(u_2)$ και $Y_c(u_1) = Y_c(u_2)$.

Τότε $Y_t(u_1) - Y_c(u_1) = Y_t(u_2) - Y_c(u_2)$. Ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η παραδοχή της σταθερής επίδρασης ως αποδυνάμωση της ομοιογένειας των μονάδων.

Αν κάνουμε μόνο τη παραδοχή της σταθερής επίδρασης που δεν μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η εκ πρώτης όψεως Αιτιώδης Επίδραση TPF, στην (6.3) ισούται με την μέση Αιτιώδη Επίδραση, T , στο (6.4). Για να δείτε αυτό παρατηρούμε ότι υπό την σταθερή επίδραση έχουμε:

$$Y_t(\mathbf{u}) = Y_c(\mathbf{u}) + T \quad (6.15)$$

για όλες τις μονάδες του \mathbf{u} .

Ως εκ τούτου,

$$E(Y_t | S = \mathbf{t}) = T + E(Y_c | S = \mathbf{t}) \quad (6.16)$$

και

$$TPF = T + \{E(Y_c | S = \mathbf{t}) - E(Y_c | S = \mathbf{c})\} \quad (6.17)$$

Ο όρος σε αγκύλες στην (6.17) σχέση δεν είναι μηδέν σε γενικές γραμμές, εκτός και αν η υπόθεση της ανεξαρτησίας δεν είναι αλήθεια.

6.4 Κύριοι τρόποι Συμπερασματολογίας για τυχαιοποιημένες μελέτες

Δεν χρειαζόμαστε περισσότερες υποθέσεις για να προχωρήσουμε με τις μορφές της Αιτιώδους Συμπερασματολογίας που βασίζονται αποκλειστικά στην στατιστική κατανομή η οποία προκύπτει από έναν τυχαιοποιημένο μηχανισμό ανάθεσης. Αυτές οι μορφές Συμπερασματολογίας αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο κλασικών τυχαιοποιημένων πειραμάτων (**classical randomized experiments**). Είναι χρήσιμο να περιγραφούν οι μέθοδοι για την εξαγωγή έγκυρης Αιτιώδους Συμπερασματολογίας σε αυτό το περιβάλλον πριν από την θεώρηση πιο περίπλοκων ρυθμίσεων που αφορούν σε μη τυχαιοποιημένα δεδομένα.

Βασικά, υπάρχουν **τρεις επίσημοι στατιστικοί τρόποι Αιτιώδους Συμπερασματολογίας**, ένας είναι ο **τρόπος του Bayes** και οι δύο άλλοι **τρόποι βασίζονται στην τυχαιοποίηση** (Rubin DB 1990). Από τις δύο αυτές διακριτές μορφές τυχαιοποίησης με βάση την συμπερασματολογία, η μία αναφέρεται στην μέθοδο του Neyman (Neyman. J. 1990) και η άλλη στην μέθοδο του Fisher (Fisher RA. 1918).

6.4.1 Συμπερασματολογία του Fisher με βάση την Τυχαιοποίηση

Η προσέγγιση του Fisher είναι η πιο άμεση εννοιολογικά και συνεπώς, εισάγεται πρώτη καθώς είναι στενά συνδεδεμένη με την μαθηματική ιδέα της απόδειξης δια την απαγωγή εις άτοπον.

Πρόκειται ουσιαστικά για μια «στοχαστική απόδειξη δια την εις άτοπον απαγωγή» που προσδίδει το επίπεδο σημαντικότητας (ή την p-τιμή), με ένα μέτρο αληθοφάνειας της «μηδενικής υπόθεσης», η οποία συχνά είναι ότι δεν υπάρχει καμία επίδραση της μεταβλητής μεταχείρισης απολύτως. Η μέθοδος του Fisher λειτουργεί μόνο για το σύνολο των μονάδων με $W_i = 1$ ή 0 , και όχι για τις μονάδες με $W_i = *$, οπότε σε αυτή την υποενότητα υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες εκτίθενται, είτε στην ενεργό treatment ή στην treatment ελέγχου.

Το πρώτο στοιχείο στον τρόπο Συμπερασματολογίας του Fisher είναι η μηδενική υπόθεση, στην οποία συνήθως ισχύει ότι $Y_i(1) = Y_i(0)$ για όλες τις μονάδες: η μεταβλητή μεταχείρισης δεν έχει καμία απολύτως επίδραση στα πιθανά αποτελέσματα. Στο πλαίσιο αυτής της μηδενικής υπόθεσης, όλα τα πιθανά αποτελέσματα είναι γνωστά από τις παρατηρούμενες τιμές των δυνητικών αποτελεσμάτων Y_{obs} , επειδή $Y_i(1) = Y_i(0) = Y_{obs}$. Επομένως, στο πλαίσιο της παρούσας μηδενικής υπόθεσης, η τιμή κάθε στατιστικού στοιχείου T , όπως η διαφορά των παρατηρούμενων μέσων όρων για τις μονάδες που εκτίθενται στη θεραπεία 1 και τις μονάδες που εκτίθενται στην θεραπεία 0, $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ είναι γνωστή, όχι μόνο για την παρατηρούμενη εκχώρηση, αλλά και για όλες τις πιθανές αναθέσεις W .

Ας επιλέξουμε ένα στατιστικό στοιχείο T , όπως $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ και ας υπολογίσουμε την τιμή για κάθε πιθανή εκχώρηση (αν υποθεθεί ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση) και επίσης ας υπολογίσουμε την πιθανότητα της κάθε εκχώρησης υπό τον τυχαιοποιημένο μηχανισμό εκχώρησης .

Σε πολλά κλασικά πειράματα, οι πιθανότητες ισούνται, είτε με το μηδέν ή με μια κοινή τιμή για όλες τις πιθανές αναθέσεις. Για παράδειγμα, σε ένα εντελώς τυχαίο πείραμα με $N = 2n$ μονάδες, οι n μονάδες επιλέγονται τυχαία για να λάβουν την τιμή treatment 1 και n για να λάβουν την treatment 0. Στη συνέχεια, κάθε εκχώρηση W που έχει n μονάδες 1 και n μονάδες 0 έχει πιθανότητα $\frac{1}{C_n^N}$ με

$$C_n^N = (N) \times (N - 1) \times \dots \times (n - 1) / 1 \times 2 \times (N - n) \text{ είναι}$$

ο διωνυμικός συντελεστής και όλες οι άλλες τιμές W έχουν μηδενική πιθανότητα. Γνωρίζοντας την τιμή των T για κάθε W και την πιθανότητα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα (στο πλαίσιο του μηχανισμού εκχώρησης και την μηδενική υπόθεση) κατά την οποία θα παρατηρούσαμε μια τιμή του T τόσο «ασυνήθιστη» ή περισσότερο ασυνήθιστη από την παρατηρούμενη τιμή του T , T_{obs} .

Το «ασυνήθιστο» προσδιορίζεται εκ των προτέρων, συνήθως από το πόσο αντιφατικό είναι το T_{obs} από το μηδέν. Αυτή η πιθανότητα είναι η p -τιμή ή το επίπεδο σημαντικότητας της παρατηρούμενης τιμής του στατιστικού στοιχείου T υπό την μηδενική υπόθεση: η πιθανότητα ενός αποτελέσματος (εκπροσωπούμενου από την τιμή T_{obs} του στατιστικού T) ως σπάνια ή περισσότερο πιο σπάνια από το πραγματικά παρατηρούμενο αποτέλεσμα, αν η μηδενική υπόθεση ήταν αληθής, όπου η πιθανότητα βρίσκεται πάνω από την κατανομή που προκαλείται από τον μηχανισμό εκχώρησης .

Αυτή η μορφή εξαγωγής συμπεράσματος είναι καλαίσθητη: εκτός εάν τα δεδομένα υποδηλώνουν ότι η μηδενική υπόθεση καμίας απολύτως επίδρασης της θεραπείας είναι ψευδής (για την κατάλληλη επιλογή του στατιστικού στοιχείου S), δεν είναι εύκολο να ισχυριστεί κάποιος ότι αποτελεί απόδειξη για διαφορετικές αποτελεσματικότητες των ενεργών treatment και των treatment ελέγχου.

Η προσέγγιση του Fisher μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες μηδενικές υποθέσεις, δηλαδή, μία μηδενική υπόθεση έτσι ώστε από τη γνώση του Y_{obs} , οι τιμές των $Y(1)$ και $Y(0)$ θα είναι γνωστές.

Για παράδειγμα μία προσθετική μηδενική συνάρτηση, η οποία θα ισχυρίζεται ότι για κάθε μονάδα, το $Y_i(1) = Y_i(0)$ είναι μια καθορισμένη σταθερή, π.χ. ίσον με 3. Το σύνολο των εν λόγω μηδενικών υποθέσεων που δεν οδηγούν σε μια ακραία τιμή p μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία εκτιμήσεων ανά διαστήματα του φαινομένου της αιτιώδους συνάφειας με δεδομένη την Προσθετικότητα. Η επέκταση σε άλλες στατιστικές μεθόδους και άλλους πλήρως καθορισμένους μηχανισμούς εκχώρησης, συμπεριλαμβανομένων και των μηχανισμών μη συγχυτικών παραγόντων και ακόμη και των μη αγνοήσιμων, είναι άμεση διότι όλα τα πιθανά αποτελέσματα είναι γνωστά από το Y_{obs} κι έτσι οι πιθανότητες για κάθε εκχώρηση είναι γνωστές.

Ο Fisher όμως, ποτέ δεν συζήτησε αυτές τις δυνατότητες επέκτασης. Παρατηρήστε ότι η προοπτική του Fisher δεν παρέχει καμία δυνατότητα γενίκευσης πέρα από τις μονάδες στο πείραμα, ούτε για να εξεταστούν παρεμβαίνουσες μηδενικές υποθέσεις όταν υπάρχουν πολλαπλές θεραπείες, όπως στον παραγοντικό σχεδιασμό (π.χ. Cochran και Cox, 1957). Οι περιορισμοί αυτοί δεν ισχύουν στην προσέγγιση του Neyman.

6.4.2 Συμπερασματολογία του Neyman με βάση την Τυχαιοποίηση

Ο τύπος του Neyman για την Συμπερασματολογία με βάση την τυχαιοποίηση μπορεί να θεωρηθεί ως σχέδιο συμπερασμάτων μέσω της αξιολόγησης των προσδοκιών των στατιστικών στοιχείων από την κατανομή που προκαλείται από τον μηχανισμό εκχώρησης, προκειμένου να υπολογιστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το τυπικό αποτέλεσμα της αιτιώδους συνάφειας. Η βασική ιδέα είναι η ίδια όπως και στο κλασικό άρθρο του Neyman (1934) για την Συμπερασματολογία Βάσει της τυχαιοποίησης (συχνά ονομάζεται και «Βάσει Σχεδίου ή Design Based») σε διάφορες έρευνες.

Τυπικά, κατασκευάζεται μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της εκτιμώμενης αιτιώδους συνάφειας (το τυπικό αποτέλεσμα της αιτιώδους συνάφειας, π.χ., μέσος όρος, διάμεσος). **Δεύτερον**, βρίσκεται μια αμερόληπτη, ή μεροληπτική προς τα πάνω εκτιμήτρια της διακύμανσης αυτής της αμερόληπτης εκτιμήτριας (η μεροληψία και η διακύμανση ορίζονται και οι δύο σε σχέση με την τυχαιοποιημένη κατανομή). Στην συνέχεια, γίνεται επίκληση του κεντρικού οριακού θεωρήματος για την κανονικότητα της εκτιμήτριας πάνω στην τυχαιοποίηση της κατανομής της, απ' όπου λαμβάνεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτιμώμενη αιτιώδη συνάφεια.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητό, η εκτιμώμενη αιτιώδης συνάφεια είναι συνήθως ο μέσος όρος του αιτιώδους αποτελέσματος $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$, όπου οι μέσοι όροι είναι πάνω από όλες τις μονάδες στον πληθυσμό που μελετάται και η παραδοσιακή στατιστική για την εκτίμηση αυτού του αποτελέσματος είναι η διαφορά στους παρατηρούμενους μέσους όρους του δείγματος για τις δύο ομάδες $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$, η οποία μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι αμερόληπτη για $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ σε μια εντελώς τυχαιοποιημένη σχεδίαση.

Μια συνηθισμένη επιλογή για την εκτίμηση της διακύμανσης των $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ πάνω στην κατανομή τυχαιοποίησης, σε εντελώς τυχαιοποιημένα πειράματα με $N = n_0 + n_1$ μονάδες, είναι $se^2 = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_0^2}{n_0}$ όπου s_1^2, s_2^2 είναι οι παρατηρούμενες διακυμάνσεις του δείγματος και n_0, n_1 τα μεγέθη των δειγμάτων στις δύο ομάδες treatment.

Ο Neyman (1923) έδειξε ότι το se^2 υπερεκτιμά την πραγματική διακύμανση των $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$, εκτός κι αν διατηρείται η Προσθετικότητα (δηλαδή, εκτός εάν όλα τα μεμονωμένα αποτελέσματα της αιτιώδους συνάφειας είναι σταθερά), στην οποία περίπτωση το se^2 είναι αμερόληπτο στην διακύμανση των $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$: το σταθερό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ είναι $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 \pm 1,96 se$, το οποίο σε αρκετά μεγάλα δείγματα περιλαμβάνει $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 \geq 95\%$ των πιθανών τυχαίων αναθέσεων.

Ο τύπος Συμπερασματολογίας του Neyman είναι λιγότερο άμεσος από του Fisher. Στην πραγματικότητα στοχεύει στην αξιολόγηση των εσωτερικών διαδικασιών: Σε επαναλαμβανόμενες εφαρμογές, πόσο συχνά το διάστημα $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 \pm 1,96 se$ περιλαμβάνει $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$;

Παρ' όλα αυτά, αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο για πολλά από αυτά που πραγματοποιούνται σε σημαντικούς τομείς εφαρμογής, συμπεριλαμβανομένων των ιατρικών πειραμάτων. Ωστόσο, η προσέγγιση του Neyman δεν είναι δεσμευτική, με την έννοια του να μας λέει τι πρέπει να κάνουμε για να δημιουργήσουμε μια επαγωγική διαδικασία, αλλά μάλλον μας λέει πώς να αξιολογήσουμε την προτεινόμενη διαδικασία για να εξάγουμε συμπεράσματα αιτιώδους συνάφειας.

Έτσι, πραγματικά δεν είναι κατάλληλη για να ασχοληθεί με πολύπλοκα προβλήματα, εκτός από την έννοια του να μας λέει πώς να αξιολογούμε τις προτεινόμενες απαντήσεις που λαμβάνονται μέσω διορατικότητας ή άλλης μεθόδου.

Η προσέγγιση του Fisher πάσχει επίσης από αυτό το μειονέκτημα της έλλειψης της υπαγόρευσης, στην πραγματικότητα, πολύ περισσότερο επειδή υπάρχει σχετικά πολύ μικρή καθοδήγηση στην προσέγγιση του Fisher κυρίως σχετικά με το ποιες μεθόδους στατιστικής να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο ή για το πώς να ορίσουμε την έννοια του «πιο ασυνήθιστου».

6.4.3 Συμπερασματολογία με βάση το Μοντέλο που βασίζεται στο Συμπέρασμα

Η τρίτη μορφή της Στατιστικής Συμπερασματολογίας για τους αιτιώδεις παράγοντες είναι το μοντέλο που βασίζεται στην Συμπερασματολογία, στην οποία το μοντέλο για τον μηχανισμό ανάθεσης των δεδομένων, $P(W | X, Y(0), Y(1))$, συμπληρώνεται με ένα μοντέλο για τα δεδομένα, $P(Y(0), Y(1) | X)$, το οποίο σχεδόν πάντα αναπροσαρμόζεται από άγνωστες παραμέτρους θ .

Κατά την άποψή μας, η Μπεϋζιανή έκδοση Συμπερασματολογίας με βάση το Μοντέλο που βασίζεται στο Συμπέρασμα (Rubin. DB. 1977) είναι η πιο γενική και εννοιολογικά ικανοποιητική.

Σε αυτήν την προσέγγιση, στο θ δίνεται μία εκ των προτέρων κατανομή και η Αιτιώδη Συμπερασματολογία προκύπτει από την δεσμευμένη κατανομή της αιτιώδους εκτίμησης με δεδομένα τα παρατηρούμενα δεδομένα, η οποία προκύπτει από το θεώρημα του Bayes από τα παρατηρούμενα δεδομένα και τα μοντέλα για τον μηχανισμό ανάθεσης και τα δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η αιτιώδης εκτίμηση είναι $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$, όπως και πριν. Στη συνέχεια, η εκ των υστέρων κατανομή της εκτίμησης, δηλαδή, η δεσμευμένη κατανομή της με δεδομένες τις προδιαγραφές του μοντέλου και τις παρατηρούμενες τιμές των W , X και Y , προκύπτει από την εκ των υστέρων προγνωστική κατανομή των ελλειπουσών τιμών Y_{mis} , που αξιολογήθηκαν στις παρατηρούμενες τιμές των W , X και Y_{obs} . Με μεγάλα δείγματα, η Μπεϋζιανή ανάλυση για ένα απλό ανεξάρτητο κανονικό μοντέλο συμφωνεί πολύ στενά με την προσέγγιση εμπιστοσύνης του Neyman.

Η εκ των υστέρων κατανομή των $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ είναι κανονική, με μέσο όρο $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$ και διακύμανση $\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_0^2}{n_0} - c$, όπου το $c=0$ για την Συμπερασματολογία σχετικά με τους μέσους όρους σε έναν άπειρο πληθυσμό και σε ένα πεπερασμένο πληθυσμό το c είναι ανάλογο με την διακύμανση των επιμέρους αιτιωδών αποτελεσμάτων και ως εκ τούτου είναι μηδέν όταν τα αιτιώδη αποτελέσματα είναι προσθετικά (Rubin. DB. 1990).

Για πιο πολύπλοκα προβλήματα που στερούνται απλών αναλυτικών εκ των υστέρων κατανομών, οι εκ των υστέρων κατανομές μπορούν να υπολογιστούν με τους μεθόδους Markov chain Monte Carlo (Tanner MA. 1996) που ουσιαστικά πολλαπλασιάζουν – αποδίδουν (Rubin DB. 1987) τις τιμές των πιθανών αποτελεσμάτων Y_{mis} που εκλείπουν. Η προσέγγιση της προσομοίωσης των πιθανών αποτελεσμάτων που εκλείπουν είναι πολύ έξυπνη, ακόμα και για τους μη στατιστικούς.

Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι οι παράμετροι θ των μοντέλων για τα δεδομένα (για παράδειγμα οι συντελεστές παλινδρόμησης στα κανονικά μοντέλα γραμμικής παλινδρόμησης) δεν είναι αιτιώδη αποτελέσματα.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι το Y είναι μια δυαδική μεταβλητή που δείχνει μία 5-ετή επιβίωση. Μπορεί να είναι λογικό να μοντελοποιήσουμε τα log-odds της πιθανότητας επιβίωσης ως προσθετική συνάρτηση της ομάδας treatment και των συμμεταβλητών. Από την άλλη πλευρά, τα αιτιώδη αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν μπορεί να αποτελούν άμεσες συγκρίσεις των ποσοστών επιβίωσης στο πλαίσιο νέων και ελεγχόμενων treatment. Ο ερευνητής ορίζει το αιτιώδη στοιχείο υπό εκτίμηση, αλλά η φύση επιλέγει τις μορφές των κατανομών για τις μεταβλητές. Η Μπεϋζιανή Συμπερασματολογία μέσω της προσομοίωσης είναι ιδανική για την αντιμετώπιση αυτών των ζητημάτων.

Κατά την άποψή μας, η Μπεϋζιανή προσέγγιση βάσει μοντέλου αποτελεί μακράν τον πιο άμεσο και ευέλικτο τρόπο Συμπερασματολογίας της αιτιώδους συνάφειας. Ωστόσο, οι προσεγγίσεις βάσει ενός μοντέλου επιτυγχάνουν αυτό το πλεονέκτημα προτείνοντας μία κατανομή για τα δεδομένα $P(Y(0), Y(1) | X)$ την οποία αποφεύγουν οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην τυχαιοποίηση. Μια τέτοια κατανομή μπορεί να είναι πολύ χρήσιμη, αλλά μπορεί να είναι και γεμάτη κινδύνους για τον αφελή αναλυτή δεδομένων. Τα μοντέλα θα πρέπει να επιλέγονται προσεκτικά, ώστε να αντανακλούν τα βασικά χαρακτηριστικά του προβλήματος και θα πρέπει να ελέγχονται για σημαντικές παραβιάσεις βασικών υποθέσεων και να τροποποιούνται όπου είναι απαραίτητο.

Εν ολίγοις, θα πρέπει να είναι κανείς πρόθυμος να χρησιμοποιήσει τα καλύτερα χαρακτηριστικά όλων αυτών των προσεγγίσεων Συμπερασματολογίας. Στα απλά κλασικά τυχαιοποιημένα πειράματα με φυσιολογικά δεδομένα, οι τρεις προσεγγίσεις δίνουν παρόμοιες πρακτικές απαντήσεις, αλλά δεν κάνουν το ίδιο στις πιο δύσκολες περιπτώσεις στις οποίες η κάθε προοπτική παρέχει διαφορετικές περιεκτικότητες.

Στην ιδανική περίπτωση, σε οποιοδήποτε πρακτικό πλαίσιο, οι απαντήσεις από τις προοπτικές δεν βρίσκονται σε αντίθεση, τουλάχιστον με τα κατάλληλα μοντέλα, την σωστή προετοιμασία και τα μεγάλα δείγματα.

6.5 Ο ρόλος των Συμμεταβλητών στις τυχαιοποιημένες μελέτες

Οι συμμεταβλητές είναι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν επηρεάζονται από την εκχώρηση της **treatment**, για παράδειγμα, οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές καθορίστηκαν πριν από την τυχαιοποίηση σε **treatment groups** (π.χ. έτος γέννησης, αρχική αρτηριακή πίεση ή χοληστερίνη). Στα κλασσικά τυχαιοποιημένα πειράματα, αν μία συμμεταβλητή χρησιμοποιείται στον μηχανισμό εκχώρησης, όπως με μία αποκλεισμένη μεταβλητή σε ένα τυχαιοποιημένο σχεδιασμό ομάδων, η συμμεταβλητή πρέπει να αντανακλάται στην ανάλυση επειδή επηρεάζει την κατανομή τυχαιοποίησης που προκαλείται από το μηχανισμό εκχώρησης. Επίσης, οι συμμεταβλητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αύξηση της αποτελεσματικότητας της εκτίμησης, ακόμη και όταν δεν χρησιμοποιούνται στον μηχανισμό εκχώρησης .

Το σημείο για την βελτίωση της αποτελεσματικότητας μπορεί να το δει κανείς στο πλαίσιο ενός εντελώς τυχαίου πειράματος στον τομέα της ιατρικής όπου X = αρχική τιμή χοληστερίνης και Y = τιμή χοληστερίνης μετά την θεραπεία.

Είτε από την προοπτική του Fisher, είτε του Neyman, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συμεταβλητές για να ορίσουμε ένα νέο στατιστικό στοιχείο για να εκτιμηθεί η εκτιμώμενη αιτιώδης συνάφεια.

Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη διαφορά στη μέση παρατηρούμενη μείωση της χοληστερίνης $(\bar{Y}_1 - \bar{X}_1) - (\bar{Y}_0 - \bar{X}_0)$ όπου \bar{X}_0 και \bar{X}_1 είναι οι μέσες παρατηρούμενες τιμές X για όσους εκτίθενται σε $W = 0$ και $W = 1$ αντίστοιχα – παρά τη διαφορά στις μέσες τιμές του Y , $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$, για να εκτιμηθεί το $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$. Ας υποθέσουμε ότι τα X και Y συσχετίζονται, κάτι που πρέπει να αναμένεται για την αρχική χοληστερίνη και την χοληστερίνη μετά τη θεραπεία.

Υπό το πρίσμα του Neyman, η διακύμανση της διαφοράς στην μέση διαφορά $Y-X$ θα πρέπει να είναι μικρότερη από τη διακύμανση της διαφοράς των μέσων τιμών Y , δηλαδή μικρότερες εκτιμώμενες διακυμάνσεις και συνεπώς μικρότερα χρονικά διαστήματα εμπιστοσύνης.

Από την άποψη του Fisher, αυτή η μειωμένη διακύμανση μεταφράζεται σε πιο σημαντικές τιμές p , όταν η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής. Αυτό το σημείο φαίνεται εύκολα στα παραδείγματα.

Ας λάβουμε υπόψη μια ακραία περίπτωση, όπου η νέα θεραπεία αφαιρεί ουσιαστικά 10 βαθμούς από την αρχική τιμή χοληστερίνης καθενός ασθενή, ενώ η παλιά θεραπεία δεν κάνει τίποτα. Οι παρατηρούμενες διαφορές $Y-X$ έχουν ουσιαστικά μηδενική διακύμανση σε κάθε ομάδα θεραπείας, ενώ οι τιμές του Y έχουν τις ίδιες διακυμάνσεις σε κάθε ομάδα θεραπείας όπως οι τιμές του X .

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι το διάστημα εμπιστοσύνης σύμφωνα με τον Neyman για την επίδραση της θεραπείας με βάση τον μέσο όρο αυτών που έλαβαν την αγωγή μείον της διαφοράς ελέγχου στις μεταβολές του $Y-X$ είναι πολύ μικρότερος από το αντίστοιχο διάστημα που βασίζεται στις τιμές του Y .

Επίσης, η παρατηρούμενη τιμή της διαφοράς των μεταβολών $Y-X$ είναι η πιο ακραία τιμή που μπορεί να παρατηρηθεί στην μηδενική υπόθεση του Fisher και έτσι το παρατηρούμενο αποτέλεσμα με τις μεταβολές $Y-X$ είναι τόσο σημαντικό όσο και πιθανό να συμβεί κάτι που δεν ισχύει για την διαφορά στις τιμές Y .

Συμπεράσματα

Η παραδοσιακή Στατιστική είναι ισχυρή να επινοεί τρόπους που περιγράφουν δεδομένα και συνάγουν παραμέτρους κατανομής από ένα δείγμα. Η Αιτιώδης Συμπερασματολογία απαιτεί δύο πρόσθετα συστατικά. Πρώτον μια επιστημονικά φιλική γλώσσα να αρθρώσει αιτιολογική γνώση και δεύτερον μια μαθηματική μηχανή για την επεξεργασία αυτής της γνώσης. Συνδυασμένα αυτά με τα δεδομένα σχεδιάζονται νέα Αιτιώδη Συμπεράσματα για το φαινόμενο.

Η θεωρία επικαλείται μη παραμετρικά μοντέλα εξισώσεων ως επίσημη και ουσιαστική γλώσσα για τον ορισμό αιτιωδών ποσοτήτων, την διαμόρφωση αιτιωδών υποθέσεων, τον έλεγχο της συσχέτισης τους και την εξήγηση των διαδικασιών σε αιτιώδη διάλογο. Αυτά περιλαμβάνουν: τυχαία επιλογή, άμεσα και έμμεσα αποτελέσματα, συσχέτιση προϋποθέσεων, αντιπαραδείγματα. Η αλγεβρική γλώσσα σε συνδυασμό με τις γραφικές απεικονίσεις προσφέρουν στους στατιστικούς ερευνητές μια δυνατή και ολοκληρωμένη εμπειρική έρευνα.

Βιβλιογραφία

- [1] Angrist, J. and Imbens, G. (1991). *Source of identifying information in evaluation models*. Technical Report, Discussion Paper 1568, Department of Economics, Harvard University, Cambridge, MA.
- [2] Arjas, E. and Parner, J. (2004). Causal reasoning from longitudinal data. *Scandinavian Journal of Statistics*, 31, 171–187.
- [3] Balke, A. and Pearl, J. (1997). Bounds on treatment effects from studies with imperfect compliance. *Journal of the American Statistical Association*, 92, 1172–1176.
- [4] Bishop, Y. M. M., Fienberg, S. E., and Holland, P. W. (1975), *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*, Cambridge, MA: MIT Press.
- [5] Bollen, K. A. (1989), *Structural Equations with Latent Variables*, New York: John Wiley & Sons.
- [6] Bonet, B. (2001). Instrumentality tests revisited. *In Proceedings of the Seventeenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 48–55.

- [7] Bowden, R. and Turkington, D. (1984). *Instrumental Variables*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [8] Breslow NE and Day NE (1980) Statistical Methods in Cancer Research. *The Analysis of Case - Control Studies*, Vol. I, pp.73-78.
- [9] Chalak, K. and White, H. (2006). *An extended class of instrumental variables for the estimation of causal effects*. Technical Report, Discussion Paper, UCSD, Department of Economics.
- [10] Cox, D. (1958). *The Planning of Experiments*. John Wiley and Sons, NY.
- [11] Cartwright N. (1989). *Nature's Capacities and their Measurement*, Oxford University Press.
- [12] Cochran, W.G. and Cox, G.M. (1957). *Experimental Designs*, 2nd Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [13] Duncan, O. (1975). *Introduction to Structural Equation Models*. Academic Press, New York.

- [14] Dawid, A. (2000). Causal inference without counterfactuals (with comments and rejoinder). *Journal of the American Statistical Association*, 95, 407–448.
- [15] Duncan, O. (1975). *Introduction to Structural Equation Models*. Academic Press, New York.
- [16] Fisher RA. (1918). *Statistical Methods for Research Workers*. 14th ed., pp. 382, New York: Hafner.
- [17] Goldberger, A. (1972). Structural equation models in the social sciences. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 40, 979–1001.
- [18] Greenland, S. (1999). Relation of probability of causation, relative risk, and doubling dose: A methodologic error that has become a social problem. *American Journal of Public Health*, 89, 1166–1169.
- [19] Greenland, S. and Robins, J. (1986). Identifiability, exchangeability and epidemiological confounding. *International Journal of Epidemiology*, 15, 413–419.
- [20] Greenland, S., Pearl, J. and Robins, J. (1999). Causal diagrams for epidemiologic research. *Epidemiology*, 10, 37–48.

- [21] Heckman, J. and Navarro-Lozano, S. (2004). Using matching, instrumental variables, and control functions to estimate economic choice models. *The Review of Economics and Statistics*, 86, 30–57.
- [22] Hurwicz, L. (1950). Generalization of the concept of identification. In *Statistical Inference in Dynamic Economic Models* (T. Koopmans, ed.). Cowles Commission, Monograph 10, Wiley, New York, pp. 245–257.
- [23] Holland, P. (1988). Causal inference, path analysis, and recursive structural equations models. In *Sociological Methodology* (C. Clogg, ed.). American Sociological Association, Washington, D.C., pp. 449–484.
- [24] Imai, K., Keele, L. and Yamamoto, T. (2008). *Identification, inference, and sensitivity analysis for causal mediation effects*. Technical Report, Department of Politics, Princeton University.
- [25] Koopmans, T. (1953). Identification problems in econometric model construction. In *Studies in Econometric Method* (W. Hood and T. Koopmans, eds.). Wiley, New York, pp. 27–48.
- [26] Kleinbaum DG, Kupper LL, Muller KE, Nizan A., *Applied Regression Analysis and Other Multivariate Methods*, Boston: Duxbury Press, 1998.

- [27] Kuroki, M. and Miyakawa, M. (1999). Identifiability criteria for causal effects of joint interventions. *Journal of the Royal Statistical Society*, 29, 105–117.
- [28] Lindley, D. and Novick, M. (1981). The role of exchangeability in inference. *The Annals of Statistics*, 9, 45–58.
- [29] Marschak, J. (1950). *Statistical inference in economics*. In *Statistical Inference in Dynamic Economic Models* (T. Koopmans, ed.). Wiley, New York, pp. 1–50. Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 10.
- [30] MacKinnon, D., Fairchild, A. and Fritz, M. (2007). Mediation analysis. *Annual Review of Psychology*, 58, 593–614.
- [31] Miettinen, O. (1974). Proportion of disease caused or prevented by a given exposure, trait or intervention. *Journal of Epidemiology*, 99, 325–332.
- [32] Miettinen, O. S. and Cook, E. F. (1981). Confounding: essence and detection. *Amer. J. Epidemiology* 114, 593-603.
- [33] Mortensen, L., Diderichsen, F., Smith, G. and Andersen, A. (2009). The social gradient in birthweight at term: quantification of the mediating role of maternal smoking and body mass index. *Human Reproduction* (to appear), doi:10.1093/humrep/dep211.

- [34] Neyman, J. (1923). On the application of probability theory to agricultural experiments. Essay on principles. Section 9. *Statistical Science*, 5, 465–480.
- [35] Neyman, J. (1934). *On the two different aspects of representative method: the method of stratified sampling and the method of purposive selection*. J.R. Stat. Soc Ser: A, 97, 558-606.
- [36] Neyman, J. (1990). On the application of probability theory to agricultural experiments: essay on principles, section 9. *Translated in Stat. Sci.*, 5, 465-72.
- [37] Pearl, J. (1993a). Comment: Graphical models, causality and intervention. *Statistical Science*, 8, 266–269.
- [38] Pearl, J. (1993b). *Mediating instrumental variables*. Technical Report, TR-210, Department of Computer Science, University of California, Los Angeles.
- [39] Pearl, J. (1995a). Causal diagrams for empirical research. *Biometrika*, 82, 669–710.
- [40] Pearl, J. (2000a). *Causality: Models, Reasoning, and Inference*. Cambridge University Press, New York. 2nd edition, 2009.
- [41] Pearl, J. (2000b). Comment on A.P. Dawid's, Causal inference without counterfactuals. *Journal of the American Statistical Association*, 95, 428–431.

- [42] Pearl, J. (2001). Direct and indirect effects. In *Proceedings of the Seventeenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 411–420.
- [43] Pearl, J. (2003). Statistics and causal inference: A review. *Test Journal*, 12, 281–345.
- [44] Pearl, J. (2009a). *Causality: Models, Reasoning, and Inference*. 2nd ed. Cambridge University Press, New York.
- [45] Pearl, J. (2009b). Letter to the editor: Remarks on the method of propensity scores. *Statistics in Medicine*, 28, 1415–1416.
- [46] Pearl, J. (2009c). *Myth, confusion, and science in causal analysis*. Tech. Rep. R-348, University of California, Los Angeles, CA.
- [47] Pearl, J. and Paz, A. (2009). *Confounding equivalence in observational studies*. Technical Report, TR-343, University of California, Los Angeles, CA.
- [48] Pearl, J. and Robins, J. (1995). Probabilistic evaluation of sequential plans from causal models with hidden variables. In *Uncertainty in Artificial Intelligence* 11 (P. Besnard and S. Hanks, eds.). Morgan Kaufmann, San Francisco, 444–453.

- [49] Robins, J. (1986). A new approach to causal inference in mortality studies with a sustained exposure period – applications to control of the healthy workers survivor effect. *Mathematical Modeling*, 7, 1393–1512.
- [50] Robins, J. (1987). A graphical approach to the identification and estimation of causal parameters in mortality studies with sustained exposure periods. *Journal of Chronic Diseases*, 40,139S–161S.
- [51] Robins, J. and Greenland, S. (1989a). The probability of causation under a stochastic model for individual risk. *Biometrics*, 45, 1125–1138.
- [52] Robins, J. and Greenland, S. (1989b). The probability of causation under a stochastic model for individual risk. *Biometrics*, 45, 1125–1138.
- [53] Robins, J. and Greenland, S. (1992). Identifiability and exchangeability for direct and indirect effects. *Epidemiology*, 3, 143–155.
- [54] Rosenbaum, P. and Rubin, D. (1983). The central role of propensity score in observational studies for causal effects. *Biometrika*, 70, 41–55.
- [55] Rubin, D. (1974). Estimating causal effects of treatments in randomized and nonrandomized studies. *Journal of Educational Psychology*, 66, 688–701.

- [56] Rubin DB. (1977). Assignment to treatment group on the basis of a covariate. *J. Educ. Stat.* 2, 1-26. Printer's erratum. 1978. *J. Educ. Stat.*, 3, 384.
- [57] Rubin DB. (1987). *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys*. New York. Wiley & Sons
- [58] Rubin DB. (1990). Formal modes of statistical inference for causal effects. *J. Stat. Plan. Inf.*, 25, 279-92.
- [59] Rubin DB. (1990). Comment: Neyman (1923) and causal inference in experiments and observational studies. *Stat. Sci.*, 5, 472-80.
- [60] Rubin, D. (2007). The design versus the analysis of observational studies for causal effects: Parallels with the design of randomized trials. *Statistics in Medicine*, 26, 20–36.
- [61] Rubin, D. (2009). Author's reply: Should observational studies be designed to allow lack of balance in covariate distributions across treatment group? *Statistics in Medicine*, 28, 1420–1423.
- [62] Shrout, P. and Bolger, N. (2002). Mediation in experimental and non-experimental studies: New procedures and recommendations. *Psychological Methods*, 7, 422–445.

- [63] Shpitser, I. and Pearl, J. (2006). Identification of conditional interventional distributions. In *Proceedings of the Twenty-Second Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence* (R. Dechter and T. Richardson, eds.). AUAI Press, Corvallis, OR, 437–444.
- [64] Shpitser, I. and Pearl, J. (2007). What counterfactuals can be tested. In *Proceedings of the Twenty-Third Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. AUAI Press, Vancouver, BC, Canada, 352–359. Also, *Journal of Machine Learning Research*, 9:1941–1979, 2008.
- [65] Shpitser, I. and Pearl, J. (2009). Effects of treatment on the treated: Identification and generalization. In *Proceedings of the Twenty-Fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. AUAI Press, Montreal, Quebec.
- [66] Simon, H. (1953). Causal ordering and identifiability. In *Studies in Econometric Method* (W. C. Hood and T. Koopmans, eds.). Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 49–74
- [67] Tanner MA. (1996). *Tools for Statistical Inference*. New York: Springer-Verlag. 3rd ed., pp.207.
- [68] Tian, J. and Pearl, J. (2000). Probabilities of causation: Bounds and identification. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 28, 287–313.

- [69] Tian, J. and Pearl, J. (2002). A general identification condition for causal effects. In *Proceedings of the Eighteenth National Conference on Artificial Intelligence*. AAAI Press/The MIT Press, Menlo Park, CA, 567–573.
- [70] VanderWeele, T. (2009). Marginal structural models for the estimation of direct and indirect effects. *Epidemiology*, 20, 18–26.
- [71] Tian, J., Paz, A. and Pearl, J. (1998). *Finding minimal separating sets*. Tech. Rep. R-254, University of California, Los Angeles, CA.
- [72] Whittemore, A.S., McGuire, V. (2003). Observational studies and randomized trials of hormone replacement therapy: What can we learn from them? *Epidemiology*, 14, 8–10.
- [73] Wright, S. (1921). Correlation and causation. *Journal of Agricultural Research*, 20, 557–585.
- [74] Wooldridge, J. (2009). *Should instrumental variables be used as matching variables?* Technical Report, Michigan State University, MI.