Γιώργος Μπίρμπας

# Χώρος Urysohn

Διπλωματική εργασία

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ Π0ΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2010

Αυτή η διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των υποχρεώσεων μου για την απόκτηση πτυχίου από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβείου Πολυτεχνείου στην κατεύθυνση του Μαθηματικού Εφαρμογών.

Αποφασιστικό ρόλο για τη συγγραφή της έπαιξε η συνεργασία μου με τον επιβλέποντα καθηγητή Αλέξανδρο Αρβανιτάκη τον οποίο και ευχαριστώ .

Γιώργος Μπίρμπας

**Περιεχόμενα**

## ΜΕΡΟΣ 1ο

## Εισαγωγή – Ιστορική Επισκόπηση

Η παρούσα εργασία αφορά σε μία από τις κατασκευές του καθολικού χώρου $\mathbb{U}$ του Urysohn ([6]), καθώς και σε εκείνες τις ιδιότητες του που τον χαρακτηρίζουν.

Η εργασία αυτή επιμερίζει την παρουσίαση της κατασκευής του χώρου $\mathbb{U}$ και των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του σε έξι μέρη. Σκοπός μας είναι μία πλήρης έκθεση του ζητήματος μέσω μίας αναλυτικής παράθεσης όλων των τεχνικών σημείων και των υπολογιστικών λεπτομερειών που συνθέτουν τις σχετικές αποδείξεις. Αιτία για την επιλογή μας αυτή είναι η ομολογούμενη απουσία από την σύγχρονη βιβλιογραφία μιας πλήρους έκθεσης του ζητήματος, καθώς από εργασίες σχετικές με το θέμα οι κρίσιμες λεπτομέρειες συνήθως απουσιάζουν ([5], 3.5. Remark.).

Κρίναμε σκόπιμο , πριν από την παρουσίαση του καθαρά μαθηματικού μέρους της εργασίας, να αναφερθούμε σε μερικά σχετικά ιστορικά γεγονότα. Προς τούτο, παραθέτουμε ένα βιογραφικό σημείωμα του Pavel Urysohn και μία σύντομη ιστορική ανασκόπηση συμβάντων και χρονολογικών λεπτομερειών, που αφορούν στις προσπάθειες των μαθηματικών της εποχής, σχετικά με το ζήτημα της ύπαρξης ενός διαχωρίσιμου χώρου που περιέχει ισομετρικά όλους τους διαχωρίσιμους χώρους.

Τέλος, σημειώνουμε ότι οι αριθμοί μέσα σε αγκύλες [ ] παραπέμπουν στην βιβλιογραφία που παραθέτουμε μετά το 6ο Μέρος της εργασίας.

# Pavel Samuilovich Urysohn

(Βιογραφικό σημείωμα)

Ο Pavel Urysohn γεννήθηκε στην Οδησσό της Ουκρανίας στις 3 Φεβρουαρίου του 1898. Προερχόμενος από οικονομικά ευκατάστατη οικογένεια, ολοκλήρωσε τα μαθητικά του χρόνια σε ιδιωτικό σχολείο της Μόσχας. Το 1915 εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας, ξεκινώντας τις σπουδές στη φυσική και παράλληλα δημοσίευσε την πρώτη του εργασία με θέμα την ακτινοβολία των αγωγών Coolidge. Το ενδιαφέρον του για τη φυσική άρχισε με τον καιρό να φθίνει και μετά την παρουσία του στις διαλέξεις των Luzin και Egorov (που έγιναν στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας κατά τη διάρκεια της φοίτησης του) αποφάσισε να επικεντρωθεί στα μαθηματικά. Το 1919 αποφοίτησε, συνεχίζοντας ωστόσο τις σπουδές του, έχοντας ως στόχο το διδακτορικό πτυχίο. Εκείνη την περίοδο ασχολήθηκε κυρίως με τον τομέα της ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα με θέματα ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις αποτέλεσαν τον κεντρικό κορμό της μεταδιδακτορικής του εργασίας για την οποία και βραβεύτηκε, κερδίζοντας παράλληλα μια θέση στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας. Σύντομα στράφηκε σε ζητήματα τοπολογίας. Τα ζητήματα αυτά, είχαν σχέση με δυο ερωτήματα που του είχε θέσει ο Egorov και αφορούσαν στην εύρεση ενός γενικού εγγενή τοπολογικού ορισμού μιας καμπύλης (ή επιφάνειας), που όταν περιοριστεί στο επίπεδο ταυτίζεται με την κατά Cantor έννοια του συνεχούς και η οποία δεν είναι πουθενά πυκνή στο επίπεδο. Τα ερωτήματα αυτά ήταν πολύ δύσκολα και παρέμεναν αναπάντητα για αρκετό χρονικό διάστημα. Τον Αύγουστο του 1921 ο Urysohn κατάφερε να δώσει κάποιες απαντήσεις και βάσει αυτών, κατά τη διάρκεια του επόμενου χρόνου, προχώρησε στην εξέλιξη της θεωρίας διαστάσεων στην τοπολογία. Ήταν μια συναρπαστική εποχή για τους μαθηματικούς της Μόσχας οι οποίοι παρακολουθούσαν μέσω συχνών διαλέξεων τα αποτελέσματα που προέκυπταν από την πρόοδο του Urysohn. Ένα μέρος των αποτελεσμάτων δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1922 και παρουσιάστηκε ολοκληρωμένα αργότερα μέσω ενός άρθρου που ο Lebesgue δημοσίευσε στο Comptes Rendus της Ακαδημίας Επιστημών στο Παρίσι.

Ο Urysohn δημοσίευσε μια πλήρη εκδοχή της εργασίας του περί θεωρίας διαστάσεων στο Fundamenta mathematicae το 1923. Κατά τη διάρκεια του ίδιου χρόνου επισκέφτηκε το Göttingen και κατά την παρουσία του στο Göttingen Mathematical Society, όπου και παρουσίασε μέρος της δουλειάς του, κατάφερε να κεντρίσει το ενδιαφέρον του Hilbert. Κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου έμαθε, μέσω μιας δημοσίευσης που είχε γίνει το 1913, πως ένας άλλος μαθηματικός, ο Brouwer, είχε επίσης ασχοληθεί με το συγκεκριμένο ζήτημα. Ο Urysohn, βρήκε ένα λάθος στην εργασία του Brouwer και κατασκεύασε ένα αντιπαράδειγμα που αντέκρουε ένα μέρος των αποτελεσμάτων του. Οι δυο μαθηματικοί συναντήθηκαν στο German Mathematical Society στο Marburg όπου και έδωσαν διαλέξεις. Ο Urysohn σημείωσε το λάθος του Brouwer καθώς και το αντιπαράδειγμα που είχε κατασκευάσει κάτι που ανάγκασε τον Brouwer να αναθεωρήσει τις απόψεις του περί του συγκεκριμένου ζητήματος της τοπολογίας.

Προς το καλοκαίρι του 1924 ο Urysohn και ο Aleksandrov, ξεκίνησαν ένα ταξίδι με προορισμό την Ευρώπη. Μέσα στο διάστημα αυτό, επισκέφτηκαν τον Hausdorff και λίγο καιρό μετά την αναχώρηση τους (στις 3 Αυγούστου του 1924) του έστειλαν ένα γράμμα το οποίο ανακοίνωνε πως ο Urysohn κατάφερε να κατασκευάσει έναν *πλήρη διαχωρίσιμο καθολικό μετρικό χώρο*. Στην απάντηση του ο Hausdorff ανέφερε πως είχε αρχίσει να ασχολείται και εκείνος με το συγκεκριμένο ζήτημα και παρουσίαζε την δική του εκδοχή της κατασκευής του χώρου αυτού. Το γράμμα έκλεινε με την επιθυμία του Hausdorff οι δυο μαθηματικοί να τον επισκεφτούν ξανά το επόμενο καλοκαίρι. Όμως, στις 17 Αυγούστου του 1924 και ενώ συνέχιζε το ταξίδι του στην Ευρώπη, ο Urysohn πνίγηκε σε μια από τις ακτές της Βρετανίας. Μετά τον θάνατο του ο Brouwer και ο Aleksandrov αποφάσισαν να διαχειριστούν το σύνολο της δουλειάς του έτσι ώστε να διασφαλιστεί η προσφορά του στον τομέα της τοπολογίας.

## Χώρος του Urysohn

(Σύντομη ιστορική ανασκόπηση)

Το 1905, ο M.Fréchet ορίζει την έννοια «μετρικός χώρος» (ο όρος ''μετρικός χώρος'' προήλθε από τον Hausdorff (1914)) και αποδεικνύει ότι, κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά στον χώρο $l_\infty$. Σε μία μεταγενέστερη εργασία του (21 Αυγούστου 1924), ο M.Fréchet θέτει το ερώτημα αν ήταν δυνατό μια τέτοιου είδους εμφύτευση να επιτευχτεί με έναν διαχωρίσιμο χώρο στη θέση του (μη διαχωρίσιμου) χώρου $l_\infty$. O M.Fréchet είχε εκφράσει τον προβληματισμό του αυτό, ένα μήνα περίπου πριν την δημοσίευση της εργασίας του, στους Aleksandrov και Urysohn.

Στις 3 Αυγούστου του 1924, ο Aleksandrov και ο Urysohn έστειλαν στον Hausdorff ένα γράμμα, στο οποίο ανακοινωνόταν, χωρίς να δίνεται καμία λεπτομέρεια, η κατασκευή ενός πλήρους διαχωρίσιμου μετρικού χώρου που περιέχει ισομετρικά όλους τους διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους. Το γράμμα δεν περιείχε καμία αναφορά στον M.Fréchet, ενώ παράλληλα είναι άγνωστο αν ο Hausdorff είχε έρθει σε επαφή με το συγκεκριμένο ζήτημα στο παρελθόν.

Από διασωθέντα κείμενα αδημοσίευτων σημειώσεων πληροφορούμαστε πως ο Hausdorff, εντυπωσιασμένος από τα αποτελέσματα του Urysohn, ξεκίνησε την δική του κατασκευή λίγες ημέρες αργότερα. Στις 9 Αυγούστου του 1924 απέδειξε εκ νέου την καθολικότητα του χώρου $l_\infty$ (χωρίς να κάνει κάποια αναφορά στον Fréchet), σημειώνοντας ότι ο $l_\infty$ δεν είναι διαχωρίσιμος και πως ο Urysohn κατάφερε να πετύχει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα για έναν διαχωρίσιμο χώρο.

Στις 10 Αυγούστου του 1924, ο Hausdorff ξεκινάει μια νέα κατασκευή ενός καθολικού διαχωρίσιμου μετρικού χώρου και αποδεικνύει ότι ο χώρος αυτός περιέχει ισομετρικά όλους τους διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους. Παράλληλα αρχίζει να σχεδιάζει την απόδειξη της ομοιογένειας του χώρου αυτού αλλά δεν καταφέρνει να την ολοκληρώσει. Στις 11 Αυγούστου του 1924 στέλνει ένα λεπτομερές αντίγραφο της προόδου του στους Aleksandrov και ο Urysohn, θέτοντας παράλληλα μερικά ερωτήματα πάνω σε λεπτομέρειες της κατασκευής του Urysohn. Παρότι πιθανότατα ο Urysohn διάβασε το όλο κείμενο, δεν έστειλε κάποια απάντηση (σημειώνουμε ότι πέθανε λίγες μέρες αργότερα, στις 17 Αυγούστου του 1924).

Στα μέσα του Αυγούστου του 1924, ο Hausdorff προχωρά στη δημοσίευση της δικής του κατασκευής (η οποία παρουσιάζεται γραμμένη με έναν πιο επίσημο τρόπο) και συνεχίζει την απόδειξη της ομοιογένειας του χώρου. Αν και η απόδειξη τελικά δεν ολοκληρώνεται, τα μέρη τα οποία λείπουν δεν είναι δύσκολο να συμπληρωθούν.

Ο καθολικός Urysohn χώρος ανακοινώνεται επίσημα στο C. R. Acad. στο Παρίσι στις 2 Φεβρουαρίου του 1925. Η ανακοίνωση περιλαμβάνει ένα προσχέδιο της απόδειξης καθώς και άλλες ιδιότητες του χώρου όπως η καθολικότητα των σφαιρών και ένα παράδειγμα ενός μετρικού χώρου τεσσάρων σημείων που δεν μπορεί να εμφυτευτεί ισομετρικά μέσα στον $l_2$. Όλες οι λεπτομέρειες δημοσιεύονται στο Bulletin Sci. Math. το 1927 μέσα από μια εργασία που οργανώθηκε από τον Aleksandrov. Στην εργασία δεν γίνεται κάποια αναφορά στην προσέγγιση του Hausdorff . Ο ίδιος Hausdorff δεν δημοσίευσε τίποτα σχετικό και πιθανότατα δεν ασχολήθηκε ξανά με το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Εξήντα περίπου χρόνια αργότερα (1986), ο M.Katětov παρουσίασε, στο Topological Symposium της Πράγας, την δική του κατασκευή σχετικά με τους καθολικούς (και όχι απαραίτητα διαχωρίσιμους) μετρικούς χώρους.

Τα αποτελέσματα της εργασίας του Katětov, απαντούσαν σε κάποια από τα ερωτήματα που είχε θέσει ο Urysohn όπως, η ύπαρξη ενός μη πλήρους καθολικού διαχωρίσιμου μετρικού χώρου που είναι $\omega - ομοιογενής$. Η προσέγγιση του Katětov χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον V. V. Uspenskii ως βάση για μερικά πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα που αφορούσαν στον καθολικό χώρο του Urysohn.

## ΜΕΡΟΣ 2ο

## Βασικές Έννοιες - Στοιχεία Γενικής Θεωρίας

Σε αυτό το μέρος της εργασίας παραθέτουμε στοιχεία από τη θεωρία συνόλων και τη θεωρία μετρικών χώρων, που είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη των μερών που ακολουθούν. Για τις έννοιες των οποίων ο ορισμός δεν δίνεται ή για αποτελέσματα που αναφέρονται ή χρησιμοποιούνται αλλά δεν αποδεικνύονται εδώ, παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε οποιοδήποτε προπτυχιακό εγχειρίδιο σχετικό με σύνολα ή με μετρικούς χώρους.

Οι έννοιες που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι κυρίως η αριθμησιμότητα ενός συνόλου, οι πλήρεις και οι διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι και ιδιότητες των εννοιών αυτών.

Σημειώνουμε ότι, κάποια από τα αποτελέσματα που ακολουθούν δίνονται σε μορφή προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις του θέματος που παρουσιάζουμε, ενώ παράλληλα συνοδεύονται από κατάλληλα σχόλια ή παρατηρήσεις που διευκολύνουν την ανάπτυξη της όλης εργασίας.

## Αριθμήσιμα σύνολα

Σταθεροποιούμε τα σύμβολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ για τα σύνολα των φυσικών $1,2,\dots,n,\dots$, ρητών και πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα. Ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου $A$ θα συμβολίζεται ως $card(A)$.

**Ορισμός 2.1. – Παρατηρήσεις.** Ένα σύνολο $A$ λέγεται *αριθμήσιμο*, αν είναι πεπερασμένο (ή κενό) σύνολο ή αν υπάρχει μία συνάρτηση $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ ένα προς ένα (:1-1) και επί.

Σχετικά με τον ορισμό ενός αριθμήσιμου συνόλου παρατηρούμε τα εξής:

Αν $D$ αριθμήσιμο σύνολο και $f: \mathbb{N} \longrightarrow D$ 1-1 και επί τότε, για κάθε $d \in D$, υπάρχει μοναδικό $n = n(d)$ ώστε,

$$d_n := f\big(n(d)\big) = f(n) = d.$$

Αυτό σημαίνει ότι ένα αριθμήσιμο σύνολο $D$ επιδέχεται μία αρίθμηση των στοιχείων του, δηλαδή μπορεί να γραφεί ως

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}.$$

Επιπλέον, για κάθε $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subseteq \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του αριθμήσιμου $D$, αφού για $1 \leq i \leq n$, $c_i = d_k$ για κάποιο $k = k(i) \equiv k_i$, είναι δυνατόν να επιλέξουμε μία νέα αρίθμηση των στοιχείων του $C$, ώστε το $C$ να γράφεται ως

$$C = \left\{d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_n} \middle| k_1 < k_2 < \dots < k_n\right\}.$$

Επίσης, από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι, αν $A, B$ σύνολα και $h: A \longrightarrow B$ συνάρτηση 1-1 και επί, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$A \text{ αριθμήσιμο} \Leftrightarrow B \text{ αριθμήσιμο}.$$

Για το αριθμήσιμο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ισχύει η αρχή της μαθηματικής επαγωγής, (η οποία, ως γνωστόν, ισοδυναμεί με την Αρχή της καλής διάταξης), καθώς και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής που θα μας φανούν χρήσιμα παρακάτω.

**Πρόταση 2.2.**

(Αρχή της καλής διάταξης)

*Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο ως προς τη φυσική του διάταξη.*

(Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής)

*Κάθε φυσικός αριθμός αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.*

**Πρόταση 2.3.** *Κάθε υποσύνολο $B$ ενός αριθμήσιμου συνόλου $A$ είναι αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.*

Αν το $B$ είναι πεπερασμένο (ή κενό), τότε το $B$ είναι αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι το $B$, άρα και το $A$, είναι άπειρο, οπότε υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ 1-1 και επί. Θέτουμε $M = f^{-1}(B)$. Τότε το $M$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f|_M: M \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί.

Από την ιδιότητα της καλής διάταξης των φυσικών αριθμών (Πρόταση 2.2), το $M$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω $k_1$. Το σύνολο $M\backslash\{k_1\}$ δεν είναι κενό (αφού το $M$ είναι άπειρο σύνολο) και ως υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω $k_2$, και, με αυτόν τον τρόπο, επαγωγικά προκύπτει μία αρίθμηση των στοιχείων του συνόλου $M$. Συγκεκριμένα, $M = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\}$.

Θέτουμε $g: \mathbb{N} \longrightarrow M$ με $g(n) = k_n$. Λόγω της γνήσια αύξουσας διάταξης των στοιχείων του $M$ η συνάρτηση $g$ είναι 1-1 και επί και επομένως, η συνάρτηση $f|_M \circ g: \mathbb{N} \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί. Άρα, το $B$ είναι αριθμήσιμο. ∎

Σύμφωνα με την επόμενη πρόταση, ο έλεγχος της αριθμησιμότητας ενός συνόλου μπορεί να περιοριστεί στην «1-1» ή στην «επί» ιδιότητα κατάλληλης συνάρτησης.

**Πρόταση 2.4.** *Έστω $A$ ένα μη κενό σύνολο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το $A$ είναι αριθμήσιμο.*

(β) *Υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ επί.*

(γ) *Υπάρχει συνάρτηση $g: A \longrightarrow \mathbb{N}$ ένα προς ένα.*

*Απόδειξη.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1, αρκεί να αποδείξουμε τις συνεπαγωγές (β)⟹(α) και (γ)⟹(α).

(β)⟹(α) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το σύνολο $A$ είναι άπειρο. Αφού η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ επί, για κάθε $a \in A$ υπάρχουν $n_a \in \mathbb{N}$ ώστε $f(n_a) = a$. Για κάθε ένα $a \in A$ που θεωρούμε, επιλέγουμε ακριβώς ένα $n_a$ ώστε $f(n_a) = a$ και συγκροτούμε το σύνολο $B = \{n_a \in \mathbb{N} : f(n_a) \in A\}$.

Το $B$ είναι υποσύνολο του αριθμήσιμου $\mathbb{N}$ επομένως, από την Πρόταση 2.3, το σύνολο $B$ είναι αριθμήσιμο και η συνάρτηση $f|_B: B \longrightarrow A$ είναι 1-1 και επί από τη κατασκευή της (η «1-1» ιδιότητα της συνάρτησης $f|_B$ αιτιολογείται ως εξής: αν για $n_b \neq n_a$, ίσχυε $f|_B(n_b) = b = a = f|_B(n_a)$ τότε θα προέκυπτε ότι, δεδομένου ενός $a \in A$ , εκτός του $n_a$ ώστε $f(n_a) = a$, είχε επιλεγεί και δεύτερο στοιχείο $n_b \neq n_a$ ώστε $f(n_b) = a$, άτοπο). Άρα υπάρχει $h: \mathbb{N} \longrightarrow B$ 1-1 και επί και επομένως η σύνθεση $f|_B \circ h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ είναι 1-1 και επί, οπότε το σύνολο $A$ είναι αριθμήσιμο.

(γ)$\Longrightarrow$(α) Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g\colon A \longrightarrow \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση $f\colon A \longrightarrow g(A)$ είναι 1-1 και επί και το σύνολο $f(A) \subseteq \mathbb{N}$ αριθμήσιμο (Πρόταση 2.3). Οπότε υπάρχει $h\colon f(A) \longrightarrow \mathbb{N}$ 1-1 και επί. Τότε, η συνάρτηση $f \circ h\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ είναι 1-1 και επί και συνεπώς το σύνολο $A$ είναι αριθμήσιμο. ■

Η συνολοθεωρητική έννοια της αριθμησιμότητας «κληρονομείται» στα καρτεσιανά γινόμενα πεπερασμένου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων καθώς και στις ενώσεις αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων. Σχετικά είναι τα επόμενα αποτελέσματα.

**Πρόταση 2.5.** *Το σύνολο* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *είναι αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη*

Θεωρούμε την απεικόνιση $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ με $f(n,m) = 2^n \cdot 3^m$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4, αρκεί δείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, η οποία να είναι 1-1. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ με } f(n,m) = 2^n \cdot 3^m.$$

Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι 1-1. Πράγματι, αν $f(n_1,m_1) = f(n_2,m_2) = a$, τότε

$$\mathbb{N} \ni a = 2^{n_1} \cdot 3^{m_1} = 2^{n_2} \cdot 3^{m_2} \Longrightarrow n_1 = n_2 \quad \text{και} \quad m_1 = m_2,$$

διότι, κάθε φυσικός αριθμός αναλύεται κατά *μοναδικό τρόπο* σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής). ■

**Πόρισμα 2.6.** *Τα σύνολα* $\mathbb{Q}^{+}$, $\mathbb{Q}^{-}$ *των θετικών και αρνητικών ρητών είναι αριθμήσιμα.*

*Απόδειξη*

Το σύνολο $\mathbb{Q}^{+}$ μπορεί να περιγραφεί ως εξής

$$\mathbb{Q}^{+} = \left\{\frac{n}{m} : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \textit{και}\ n, m\ \textit{πρώτοι μεταξύ τους}\right\}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $f: \mathbb{Q}^{+} \times \mathbb{Q}^{+} \longrightarrow \mathbb{N}$ με $f\left(\frac{n}{m}\right) = 2^{n} \cdot 3^{m}$, η οποία, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2.5, είναι συνάρτηση 1-1, άρα το $\mathbb{Q}^{+}$ είναι αριθμήσιμο. Όμοια αποδεικνύεται η αριθμησιμότητα του $\mathbb{Q}^{-}$. ∎

**Πρόταση 2.7.** *Αν* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *είναι (πεπερασμένου πλήθους) αριθμήσιμα σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενό τους* $\prod_{1 \leq i \leq n} A_i \equiv A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

*Απόδειξη.*

Θα δείξουμε τον ισχυρισμό της πρότασης για δύο σύνολα ($n = 2$), χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό (β) της Πρότασης 2.4. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται εύκολα με εφαρμογή της πεπερασμένης μαθηματικής επαγωγής.

Έστω $A, B$ δυο αριθμήσιμα σύνολα. Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ τότε $A \times B = \emptyset$ και το $A \times B$ είναι αριθμήσιμο. Αν $A, B$ μη κενα συνολα, τοτε υπαρχουν απεικονίσεις $h: \mathbb{N} \longrightarrow A$ και $g: \mathbb{N} \longrightarrow B$ επί. Κατά συνέπεια η απεικόνιση $f_1: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times B$ με $f_1(n, m) = (h(n), g(m))$ είναι επί. Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο (Πρόταση2.5), οπότε υπάρχει $f_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ επί. Τελικά, η απεικόνιση $f_1 \circ f_2: \mathbb{N} \longrightarrow A \times B$ είναι επί, άρα το σύνολο $A \times B$ είναι αριθμήσιμο. ∎

**Πρόταση 2.8.** *Έστω $I$ αριθμήσιμο σύνολο δεικτών και οικογένεια $\{A_i\}_{i\in I}$ αριθμήσιμων συνόλων $A_i$. Τότε η ένωση $\cup_{i\in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

*Απόδειξη.*

Χρησιμοποιούμε και πάλι τον χαρακτηρισμό (β) της Πρότασης 2.4. Αφού τα σύνολα $I$ και $A_i$, για κάθε $i \in I$, είναι αριθμήσιμα, υπάρχουν απεικονίσεις $g: \mathbb{N} \longrightarrow I$ και $f_i: \mathbb{N} \longrightarrow A_i$ οι οποίες είναι επί. Τότε, η ένωση $\cup_{i\in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, διότι η $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \cup_{i\in I} A_i$ με $g(n,m) = f_{g(n)}(m)$ είναι επί. Πράγματι, αν $a \in \cup_{i\in I} A_i$, υπάρχουν $i_a \in I, n_a \in \mathbb{N}$ και $m_a \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a \in A_{i_a} \quad , \quad f_{i_a}(m_a) = a \quad \text{και} \quad g(n_a) = i_a$$

άρα, $a = f_{g(n_a)}(m_a) = g(n_a, m_a)$. ■

**Πόρισμα 2.9.** *Τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ldots \times \mathbb{Q}}_{n\ \varphi o \rho\ \acute{\varepsilon} \varsigma}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι αριθμήσιμα.*

*Απόδειξη.*

Επειδή $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο από την Πρόταση 2.8. Αφού τώρα το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, το $\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ldots \times \mathbb{Q}}_{n\ \varphi o \rho\ \acute{\varepsilon} \varsigma}$ είναι αριθμήσιμο λόγω της Πρότασης 2.7. ■

Το επόμενο αποτέλεσμα, παρ' όλο που ισχύει και για τυχαίο αριθμήσιμο σύνολο στη θέση του $\mathbb{Q}$, εδώ παρατίθεται ακριβώς με τη μορφή που θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα.

**Πρόταση 2.10.** *Αν* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *πεπερασμένο σύνολο, τότε το σύνολο* $F(A) = \{f | f: A \longrightarrow \mathbb{Q}\}$ *των συναρτήσεων με ρητές τιμές στο* $A$ *είναι αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.*

Σύμφωνα με την ισοδυναμία στον Ορισμό 2.1 και το Πόρισμα 2.9, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$h: F(A) \longrightarrow \mathbb{Q}^n \quad \text{με} \quad h(f) = \big(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\big)$$

είναι 1-1 και επί.

Αν $f, g \in F(A)$, τότε λόγω του κοινού πεδίου ορισμού τους $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ισχύει $f = g \Leftrightarrow f(a_i) = g(a_i) \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n$.

Οπότε η $h$ είναι 1-1, διότι

$$h(f) = h(g) \Longrightarrow \big(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\big) = \big(g(a_1), g(a_2), \dots, g(a_n)\big)$$

$$\Longrightarrow f(a_i) = g(a_i) \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n \Longrightarrow f = g.$$

Επιπλέον, η $h$ είναι και επί διότι, αν $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$, τότε ορίζουμε στο $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ τη συνάρτηση $f$ με $f(a_i) = q_i \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n$, οπότε υπάρχει $f \in F(A)$ ώστε να ισχύει $h(f) = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$. ■

**Πρόταση 2.11.** *Έστω* $D \neq \emptyset$ *αριθμήσιμο σύνολο και* $\Pi(D)$ *το σύνολο των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του συνόλου* $D$*. Τότε, το σύνολο* $\Pi(D)$ *είναι αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.*

Έστω $P \subseteq \mathbb{N}$ το σύνολο πρώτων φυσικών αριθμών, το οποίο είναι αριθμήσιμο (Πρόταση 2.3) και πεπερασμένο σύνολο $C \in \Pi(D)$. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του Ορισμού 2.1, τα σύνολα $P, D$ και $C$ γράφονται

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \quad , \quad D = \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$$

$$C = \left\{d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_n} \middle| k_1 < k_2 < \cdots < k_n\right\}.$$

Τότε, λόγω του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής, η απεικόνιση

$$h: \Pi(D) \longrightarrow \mathbb{N}: C = \left\{d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_n}\right\} \mapsto h(C) = {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot {p_n}^{k_n}$$

είναι 1-1 και επομένως το σύνολο Π(D) είναι αριθμήσιμο. ■

## Πλήρεις και Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

**Ορισμοί-Ιδιότητες 2.12.** Έστω μετρικοί χώροι $(X, \rho)$ και $(Y, d)$, ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $X$, σημείο $x_0 \in X$ και σύνολο $A \subseteq X$.

*Η ακολουθία $x_n$ συγκλίνει στο σημείο $x_0$* (συγκλίνουσα στο $x_0$ , $x_n \longrightarrow x_0$) αν, ισχύει $\rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$.

Αν μία ακολουθία συγκλίνει σε ένα σημείο τότε το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

$x_0 \in \bar{A} \equiv \bar{A}^X$ (*κλειστή θήκη* του $A$ στον $X$) $\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A\colon x_n \longrightarrow x_0$ .

Γενικά, ισχύουν $A \subseteq \bar{A} = \bar{\bar{A}} \subseteq X = \bar{X}$

$\bar{B} \subseteq \bar{A}$, για $B \subseteq A$

$\bigcup_{i\in I} \bar{A_\iota} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_\iota}$ , $\{A_\iota\}_{\iota\in I}$ *οικογένεια συνόλων με* $A_\iota \subseteq X,\ i \in I$

$\bar{B}^A = \bar{B}^X \cap A$ , για $B \subseteq A \subseteq X$

$f(\bar{A}^X) \subseteq \overline{f(A)}^Y$ , για $f\colon (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχή συνάρτηση

$f(\bar{A}^X) = \overline{f(A)}^Y$ για $f\colon (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχή, 1-1, και επί συνάρτηση με $f^{-1}$ συνεχή ( όπως για παράδειγμα αν, η $f$ είναι ισομετρία επί)

*A κλειστό υποσύνολο* του $X \Leftrightarrow \bar{A}^X = A$.

*A πυκνό υποσύνολο* του $X \Leftrightarrow \bar{A}^X = X$.

Η ακολουθία $x_n$ λέγεται *ακολουθία Cauchy* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N}: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$ (κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy).

Ο μετρικός χώρος $(X, \rho)$ λέγεται *πλήρης* αν, κάθε Cauchy ακολουθία του $(X, \rho)$ είναι συγκλίνουσα σε σημείο $x \in X$.

**Ορισμός-Θεώρημα 2.13.** Έστω μετρικός χώρος $(X, \rho)$. Τότε υπάρχει μετρικός χώρος $(Y, d)$ και ισομετρία $h: (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ ώστε, ο μετρικός χώρος $(Y, d)$ να είναι πλήρης και το σύνολο $h(X)$ να είναι πυκνό στον $(Y, d)$.

Ο μετρικός χώρος $(Y, d)$ ονομάζεται *πλήρωση του μετρικού χώρου* $(X, \rho)$, συμβολικά $(\bar{X}, \bar{\rho})$ και είναι μοναδικός (με την εξής έννοια: αν $(Z, m)$ είναι επίσης πλήρωση του χώρου $(X, \rho)$ και $g: (X, \rho) \longrightarrow (Z, m)$ η αντίστοιχη ισομετρία, τότε υπάρχει ισομετρία επί $f: (Y, d) \longrightarrow (Z, m)$ ώστε $f \circ h = g$).

Είναι φανερό ότι, μέσω της ισομετρία $h: (X, \rho) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{\rho})$, και κάθε υπόχωρος του μετρικού χώρου $X$ μπορεί να θεωρηθεί ταυτόσημος με έναν υπόχωρο της πλήρωσης $(\bar{X}, \bar{\rho})$.

**Ορισμός 2.14.** Ένας μετρικός χώρος $(X, \rho)$ λέγεται *διαχωρίσιμος* αν, έχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο $D$.

**Ορισμός 2.15.** *Ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος $M$ έχει την ιδιότητα Urysohn* αν, για κάθε περασμένο χώρο $X$ και κάθε υπόχωρό του $Y \subseteq X$, οποιαδήποτε ισομετρική εμφύτευση $f: Y \longrightarrow M$ επεκτείνεται σε μια ισομετρική εμφύτευση $f: X \longrightarrow M$.

**Ορισμός 2.16.** Ένας πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ονομάζεται *Πολωνικός μετρικός χώρος*.

Το σύνολο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική που ορίζει σε αυτό η απόλυτη τιμή, είναι ως γνωστόν πλήρης μετρικός χώρος, αλλά και διαχωρίσιμος χώρος, καθώς το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι ένα πυκνό υποσύνολό του και τελικά Πολωνικός μετρικός χώρος, αφού το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο (Πόρισμα 2.9).

**Πρόταση 2.17.** *Έστω μετρικοί χώροι $(X,\rho)$, $(Y,d)$, σύνολο $D \subseteq X$ εφοδιασμένο με τη σχετική μετρική $\rho|_D$ και μία ισομετρία $f: X \longrightarrow Y$ επί $(: f(X) = Y)$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(1) *Αν ο μετρικός χώρος $(X,\rho)$ είναι πλήρης τότε*

(α) *$D$ πλήρης μετρικός χώρος, αν και μόνον αν, $D$ κλειστό υποσύνολο του μετρικού χώρου $X$.*

(β) *Ο χώρος $(Y,d)$ είναι πλήρης.*

(2) *Αν ο $(X,\rho)$ είναι διαχωρίσιμος τότε και η πλήρωση του $Z = (\bar{X},\bar{\rho})$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*

*Απόδειξη.*

Χρησιμοποιούμε όσα εκθέσαμε στους Ορισμούς-Ιδιότητες 2.12.

(1) (α) $(\Longrightarrow)$ Θα δείξουμε ότι $\overline{D} = D$ ή ισοδύναμα ότι $\overline{D} \subseteq D$. Θεωρούμε $x_0 \in \overline{D}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ ώστε $\rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως συγκλίνουσα είναι βασική ακολουθία και αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ και $(D,\rho|_D)$ πλήρης, υπάρχει $y \in D$, ώστε να ισχύει $\rho(x_n, y) \longrightarrow 0$. Συνεπώς, από την μοναδικότητα του ορίου, προκύπτει $x_0 = y \in D$.

$(\Longleftarrow)$ Έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ βασική ως προς τη σχετική μετρική $\rho|_D$. Θα δείξουμε ότι $x_n \longrightarrow x_0 \in D$. Προφανώς η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και στον πλήρη χώρο $(X,\rho)$ άρα, υπάρχει $x_0 \in X$ με $x_n \longrightarrow x_0$. Όμως το D είναι κλειστό υποσύνολο $X$ οπότε, $x_0 \in \overline{D} = D$ άρα $x_n \longrightarrow x_0 \in D$.

(β) Έστω βασική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$. Θα δείξουμε ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $Y$. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Εφ' όσον η $f: X \longrightarrow Y$ είναι ισομετρία επί το ίδιο ισχύει για την $f^{-1}$ οπότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μοναδικό $x_n \in X$ με $x_n = f^{-1}(y_n)$ και

$$\rho(x_n, x_m) = \rho\big(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y_m)\big) = d(y_n, y_m) < \varepsilon,$$

δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ είναι βασική στον πλήρη χώρο $X$, άρα συγκλίνουσα στον $X$. Υπάρχει λοιπόν $x_0 \in X$ και μοναδικό $y_o \in Y$, με $\rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$ και $f^{-1}(y_0) = x_0$. Οπότε

$$d(y_n, y_o) = \rho\big(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y_0)\big) = \rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$$

που σημαίνει ότι ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $y_o \in Y$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

(2) Αφού ο $(X, \rho)$ είναι διαχωρίσιμος και $Z = (\bar{X}, \bar{\rho})$ είναι η πλήρωσή του, υπάρχει ένα αριθμήσιμο $A \subseteq X$ με $\bar{A}^X = X$ και μία ισομετρία $h: (X, \rho) \longrightarrow Z = (\bar{X}, \bar{\rho})$ με $\overline{h(X)}^Z = Z$. Θα δείξουμε ότι το αριθμήσιμο σύνολο $h(A)$ (Παρατηρήσεις στον Ορισμό 2.1) είναι πυκνό στον $Z$, δηλαδή $\overline{h(A)}^Z = Z$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} X = \bar{A}^X \Longrightarrow h(X) = h(\bar{A}^X) &\Longrightarrow h(X) = \overline{h(A)}^{h(X)} \\ &\Longrightarrow h(X) = \overline{h(A)}^Z \cap h(X) \subseteq Z \\ &\Longrightarrow h(X) \subseteq \overline{h(A)}^Z \subseteq Z \\ &\Longrightarrow \overline{h(X)}^Z \subseteq \overline{\overline{h(A)}^Z}^Z \subseteq \bar{Z}^Z \\ &\Longrightarrow Z \subseteq \overline{h(A)}^Z \subseteq Z \Longrightarrow \overline{h(A)}^Z = Z. \ \blacksquare \end{aligned}$$

**Πρόταση 2.18.** *Έστω δυο Πολωνικοί μετρικοί χώροι* $(X, \rho)$ και $(Y, d)$, $D$ *ένα πυκνό υποσύνολο του χώρου* $X$ *και* $\varphi: D \hookrightarrow Y$ *μια ισομετρική εμφύτευση. Τότε υπάρχει μια μοναδική ισομετρική εμφύτευση* $\varphi': X \hookrightarrow Y$, *η οποία επεκτείνει την* $\varphi$.

*Απόδειξη.*

Μοναδικότητα της επέκτασης

Έστω ότι υπάρχουν δυο ισομετρικές εμφυτεύσεις $\varphi'_1, \varphi'_2 : X \hookrightarrow Y$ που επεκτείνουν την εμφύτευση $\varphi: D \hookrightarrow Y$. Θα δείξουμε ότι $\varphi'_1 \equiv \varphi'_2$ ή ισοδύναμα ότι $\varphi'_1(x) = \varphi'_2(x) \quad \forall x \in X$.

Επειδή το σύνολο $D$ είναι πυκνό στον $X$, για κάθε $x \in X$, θα υπάρχει ακολουθία $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, τέτοια ώστε $d_n \longrightarrow x$. Οι $\varphi'_1, \varphi'_2$ ως ισομετρίες θα είναι συνεχείς συναρτήσεις, οπότε

$$d_n \longrightarrow x \Rightarrow \varphi'_1(d_n) \longrightarrow \varphi'_1(x) \kappa\alpha\iota\, \varphi'_2(d_n) \longrightarrow \varphi'_2(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'_1(d_n) - \varphi'_2(d_n) \longrightarrow \varphi'_1(x) - \varphi'_2(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'_1(x) = \varphi'_2(x)$$

διότι, εφ' όσον οι $\varphi'_1, \varphi'_2$ είναι επεκτάσεις της $\varphi: D \hookrightarrow Y$, ισχύει $\varphi'_1(d) = \varphi'_2(d)$, για κάθε $d \in D$ και επομένως $\varphi'_1(d_n) = \varphi'_2(d_n)$.

Ύπαρξη της επέκτασης

Όπως και προηγουμένως , για κάθε $x \in X$, θα υπάρχει ακολουθία $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, τέτοια ώστε $d_n \longrightarrow x$. Η ακολουθία $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως συγκλίνουσα θα είναι ακολουθία Cauchy και επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; \rho(d_n, d_m) < \varepsilon.$$

Επιπλέον, η $\varphi$ είναι ισομετρία , οπότε

$$d\big(\varphi(d_n), \varphi(d_m)\big) < \varepsilon \;\; \forall\, n, m \geq n_0 \,,$$

δηλαδή η ακολουθία $\varphi(d_n)$ είναι μία ακολουθία Cauchy στον Πολωνικό μετρικό χώρο $Y$, άρα συγκλίνουσα στον $Y$. Δηλαδή,

$\forall x \in X \;\; \exists (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \equiv (d_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ ώστε $d_n \longrightarrow x$ και $\exists \lim_{n\to\infty} \varphi(d_n) \in Y$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε μία απεικόνιση $\varphi^{'}: X \longrightarrow Y$ ως εξής:

$$\varphi^{'}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(d_n)\;, x \in X\backslash D \\ \quad \varphi(x) \qquad\;\, , x \in D \end{cases}$$

Η απεικόνιση $\varphi'$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $(d_n^{'})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ είναι μία δεύτερη ακολουθία με $d'_n \longrightarrow x$, θεωρούμε την ακολουθία

$$\{d_1, d^{'}{}_1, d_2, d^{'}{}_2, \dots, d_n, d^{'}{}_n, \dots\},$$

η οποία συγκλίνει επίσης στο $x$, και συνεπώς η εικόνα της μέσω της συνεχούς $\varphi$ θα συγκλίνει στον $Y$. Οι ακολουθίες ωστόσο $(\varphi(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\varphi(d'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθίες της εικόνας της $\{d_1, d^{'}{}_1, d_2, d^{'}{}_2, \dots, d_n, d^{'}{}_n, \dots\}$ και κατά συνέπεια θα έχουν το ίδιο όριο με αυτήν:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(d_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(d'_n)$$

Τέλος, προκειμένου να δείξουμε ότι η $\varphi'$ είναι ισομετρία θεωρούμε δύο στοιχεία $\alpha, \beta \;\in X$, ακολουθίες $\alpha_n, \beta_n \in D$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{και} \quad , \beta_n \longrightarrow \beta\;, \;\text{ για κάθε }\; n \geq n_0.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} d(\varphi^{'}(\alpha), \varphi^{'}(\beta)) &= d(\lim_{n\to\infty} \varphi(\alpha_n), \lim_{n\to\infty} \varphi(\beta_n)) \\ &= \lim\nolimits_{n\to\infty}(d(\varphi(\alpha_n), \varphi(\beta_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \rho(\alpha_n, \beta_n) \\ &= \rho(\lim_{n\to\infty} \alpha_n, \lim_{n\to\infty} \beta_n) = \rho(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Ολοκληρώνοντας το μέρος αυτό, θα αναφερθούμε σε μία ισοδύναμη μορφή του Αξιώματος Επιλογής, ενός από τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων, που ήδη έχει χρησιμοποιηθεί σιωπηρά σε αποδείξεις προτάσεων που προηγήθηκαν (όπως η Πρόταση 2.8). Ο λόγος για την αναφορά μας αυτή είναι ότι, αυτή η ισοδύναμη μορφή του – το Θεώρημα Καλής Διάταξης – μας είναι απαραίτητη στα επόμενα.

Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(W, \prec)$ ως προς μία μερική διάταξη $\prec$ λέγεται *καλά διατεταγμένο* αν, κάθε $\emptyset \neq B \subseteq W$ έχει ελάχιστο (ή πρώτο) στοιχείο δηλαδή, υπάρχει (μοναδικό) $b_0 \in B$ που έχει την ιδιότητα $b_0 \prec b$ για κάθε $b \in B$.

**Πρόταση 2.19.** **(**Θεώρημα Καλής Διάταξης)

*Κάθε σύνολο είναι καλά διατεταγμένο* (*επιδέχεται μία καλή διάταξη*).

Ενδιαφέρει τώρα μία εξειδικευμένη εφαρμογή της Πρότασης 2.19, που μας εξασφαλίζει το μονοσήμαντο μιας κατασκευής που είναι απαραίτητη για τον ορισμό του χώρου Urysohn.

Έστω σύνολο $X \neq \emptyset$ και τα σύνολα

$$\Pi(X) = \{\emptyset \neq B \subseteq X : card(B) = n, n = 1,2, \dots\}$$

$$\Pi_{\mathrm{n}}(X) = \{\emptyset \neq B \subseteq X : card(B) = n\}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.19, στο σύνολο $\Pi(X)$ ορίζεται μία καλή διάταξη, έστω $\prec_{\Pi(X)}$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το υποσύνολό του $\Pi_{\mathrm{n}}(X)$ έχει (μοναδικό) ελάχιστο στοιχείο, έστω $B_n$. Όμοια, για κάθε οικογένεια συνόλων $C = (C_i)_{i \in I}$ με $C_i \in \Pi_{\mathrm{n}}(X)$ , $i \in I$ υπάρχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο της, συμβολικά $C_{i(n)}$.

*Θα αναφερόμαστε στη παραπάνω διαδικασία επικαλούμενοι τον ακόλουθο ορισμό.*

**Ορισμός 2.20.** Για κάθε σύνολο $X$ με το ζεύγος $\left(\Pi(X), \prec_{\Pi(X)}\right)$ να αποτελεί ένα καλά διατεταγμένο σύνολο και για $n = 1,2, \ldots$, το μοναδικό σύνολο $C_{i(n)}$ ονομάζεται $n$ *−ελάχιστο στοιχείο της οικογένειας συνόλων* $C = (C_i)_{i \in I}$ *με* $C_i \subseteq X$ *και* $card(C_i) = n, i \in I$.

## ΜΕΡΟΣ 3ο

## Οι μετρικοί χώροι $E(X, \omega)$ και $X_\infty$ - Περιγραφή

Η κατασκευή του χώρου $\mathbb{U}$ του Urysohn (η οποία ολοκληρώνεται στο 6ο Μέρος) βασίζεται στην κατασκευή δύο κατάλληλων μετρικών χώρων συναρτήσεων $E(X, \omega)$ και $X_\infty$, δεδομένου ενός Πολωνικού μετρικού χώρου $X$. Η κατασκευή των χώρων $E(X, \omega)$ και $X_\infty$ είναι τέτοια ώστε, ο χώρος $X$ να εμφυτεύεται ισομετρικά στον $E(X, \omega)$ και ο $E(X, \omega)$ με τη σειρά του να εμφυτεύεται ισομετρικά στον $X_\infty$.

Στο μέρος αυτό περιγράφονται οι εμφυτεύσεις αυτές, ενώ στα επόμενα μέρη αποδεικνύονται αποτελέσματα που αφορούν σε ιδιότητες του χώρου $X$, οι οποίες «κληρονομούνται» στους χώρους $E(X, \omega)$ και $X_\infty$.

## Ο μετρικός χώρος $E(X,\omega)$

Θεωρούμε έναν Πολωνικό μετρικό χώρο $(X,d)$, $X\neq\emptyset$ με μετρική $d$ και συμβολίζουμε με $E(X,\omega)$ το σύνολο των συναρτήσεων $f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ που έχουν τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $|f(x)-f(y)|\leq d(x,y)\leq f(x)+f(y)\ \forall x,y\in X$ (3.1)

(2) Υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $Y$ του χώρου $X$ (όχι κατ' ανάγκην μοναδικό), το οποίο ονομάζουμε *στήριγμα* (*support*) της συνάρτησης $f$, ώστε

$$f(x)=inf\{d(x,y)+f(y):y\in Y\}\ \ \forall\, x\in X \tag{3.2}$$

Επιπλέον, με $E(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων $f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ που πληρούν την ιδιότητα (3.1), ενώ ένα στήριγμα $Y$ της συνάρτησης $f$ θα συμβολίζεται ως $Y=suppf$. Από τη σχέση (3.1) (για $x=y$) προκύπτει ότι

$$f\in E(X)\big(\supseteq E(X,\omega)\big)\Longrightarrow f(x)\geq 0\ \ ,x\in X \tag{3.3}$$

Οι παραπάνω θεωρήσεις δεν είναι κενές περιεχομένου, καθώς για το σύνολο $E(X,\omega)$ και το στήριγμα μιας συνάρτησης $f\in E(X,\omega)$ ισχύουν τα εξής :

**Λήμμα 3.1.** *Το σύνολο $E(X,\omega)$ (άρα και το σύνολο $E(X)$) είναι μη κενό.*

*Απόδειξη.*

Προκειμένου να δείξουμε ότι $E(X,\omega) \neq \emptyset$ , αρκεί να βρούμε μία τουλάχιστον συνάρτηση $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί τις ιδιότητες των σχέσεων (3.1) και (3.2). Πράγματι, αν $z$ τυχαίο αλλά σταθερό σημείο του $X$, θεωρούμε στον μετρικό χώρο $(X,d)$ συνάρτηση $f$ με τύπο

$f(x) = d(x,z)\,, x \in X.$

Από την τριγωνική ανισότητα που ισχύει για τη μετρική $d$ και τον ορισμό της $f$, για κάθε $x, y \in X$, έχουμε ότι:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \leq f(x) + f(y).$$

Απομένει να δείξουμε ότι υπάρχει στήριγμα για την $f$. Συγκριμένα, θα δείξουμε ότι $suppf = \{z\}$. Πράγματι, για $x \in X$, έχουμε

$inf\{d(x,y) + f(y): y \in \{z\}\} = inf\{d(x,z) + d(z,z): y \in \{z\}\} = d(x,z) = f(x).$ ■

**Λήμμα 3.2.** *Έστω $f \in E(X,\omega)$ και $Y = suppf$ ένα στήριγμα της συνάρτησης $f$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(1) *Κάθε σύνολο $Z$ με $X \supseteq Z \supseteq Y$ είναι επίσης στήριγμα της συνάρτησης $f$.*

(2) *Για κάθε $x \in X$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\omega_x \in suppf$ ώστε να ισχύει*

$$f(x) = d(x,\omega_x) + f(\omega_x) \leq d(x,y) + f(y) \;\; \forall y \in suppf$$

(3) *Το στήριγμα $suppf$ μίας δεδομένης $f \in E(X,\omega)$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε, το ζεύγος $(suppf, f)$ να είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Επομένως η απεικόνιση*

$$f \longrightarrow \left(suppf,\; f|_{suppf}\right)$$

*είναι καλά ορισμένη.*

*Απόδειξη.*

(1) Θα δείξουμε ότι, για κάθε $x \in X$, ισχύει

$$inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\} = f(x)$$

(η ποσότητα $inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\}$ έχει νόημα λόγω της σχέσης (3.3)). Εφ' όσον το σύνολο Z έχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Y, λόγω της σχέσης (3.2 ), έχουμε

$$inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\} \leq inf\{d(x,y) + f(y) : y \in Y\} = f(x),$$

άρα $inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\} \leq f(x) \quad \forall x \in X$. Για την απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας, κατ' αρχήν, από τη σχέση (3.1), έχουμε

$$|f(x) - f(z)| \leq d(x,z) \Rightarrow f(x) - f(z) \leq d(x,z)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq d(x,z) + f(z) \quad \forall x \epsilon X, z \in Z.$$

Λόγω της ύπαρξης του inf, υπάρχει ακολουθία $z_n$ από στοιχεία του $Z$ ώστε, για $n \longrightarrow \infty$, να ισχύει

$$d(x,z_n) + f(z_n) \longrightarrow inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\}.$$

Οπότε, συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα με την σύγκλιση της παραπάνω ακολουθίας, οδηγούμαστε στην αντίστροφη ανισότητα καθώς έχουμε

$$f(x) \leq d(x,z_n) + f(z_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) \leq \lim_{n\to\infty}[d(x,z_n) + f(z_n)]$$

$$\Rightarrow f(x) \leq inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\}.$$

Άρα, $f(x) = inf\{d(x,z) + f(z) : z \in Z\} \quad \forall x \in X$.

(2) Προκύπτει από το γεγονός ότι, για ένα τυχαίο αλλά σταθερό $x \in X$, το inf επιτυγχάνεται για κάποιο $\omega_x \in suppf$, αφού το $suppf$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.

(3) Έστω ότι $card(suppf) = n$, $n \in \mathbb{N}$ (καθώς το στήριγμα είναι από τον ορισμό του πεπερασμένο σύνολο). Θεωρούμε το μη κενό σύνολο

$$C = \{A \subseteq X : A \text{ στήριγμα της } f \text{ με } card(A) = n\}.$$

Τότε, για το μοναδικό $n$ −ελάχιστο στοιχείο $A_n$ του συνόλου $C$ (Ορισμός 2.20) ισχύει $A_n = suppf$ άρα, το ζεύγος $(A_n, f) \equiv (suppf, f)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο. ■

**Λήμμα 3.3.** *Έστω τυχαίο (αλλά σταθερό) $x_0 \in X$ και $f, g \in E(X)$. Τότε ισχύει*

$|f(x) - g(x)| \leq f(x_0) + g(x_0) \quad \forall x \in X.$

*Συνεπώς, ορίζεται η πραγματική απεικόνιση $d_E: E(X) \times E(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ με*

$$d_E(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)| : \ x \in X\}$$

*και το ζεύγος $(E(X), d_E)$ αποτελεί μετρικό χώρο.*

*Απόδειξη.*

Αφού $f \in E(X)$, από τη σχέση (3.1) έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0) \leq f(x) + f(x_0) \ \forall x \in X,$$

από όπου προκύπτουν οι σχέσεις

$$-d(x, x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq d(x, x_0) \Longrightarrow f(x) \leq d(x, x_0) + f(x_0)$$

$$d(x, x_0) \leq f(x) + f(x_0) \Longrightarrow d(x, x_0) - f(x_0) \leq f(x)$$

από τις οποίες συνάγεται ότι

$$d(x, x_0) - f(x_0) \leq f(x) \leq d(x, x_0) + f(x_0)$$

$$\Longrightarrow -f(x_0) \leq f(x) - d(x, x_0) \leq f(x_0)$$

$$\Longrightarrow |f(x) - d(x, x_0)| \leq f(x_0).$$

Όμοια για την $g \in E(X)$ ισχύει $|g(x) - d(x, x_0)| \leq g(x_0)$,

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη

$$|f(x) - d(x, x_0)| + |g(x) - d(x, x_0)| \leq f(x_0) + g(x_0)$$

και τελικά $|f(x) - g(x)| \leq f(x_0) + g(x_0) \quad \forall x \in X$. ■

Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό για τον περιορισμό της απεικόνισης $d_E$ στο σύνολο $E(X,\omega) \subseteq E(X)$ έχουμε ότι

$$\text{το ζεύγος } (E(X,\omega), d_E) \text{ είναι μετρικός χώρος} \tag{3.4}$$

Επιπλέον, για κάθε $z \in X$, θεωρούμε (όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.1) τις συναρτήσεις $f_z \epsilon E(X,\omega)$ με

$$f_z(x) = d(z,x) \quad \text{και} \quad suppf_z = \{z\} \tag{3.5}$$

Όπως θα δούμε, ο ρόλος των συναρτήσεων $f_z \epsilon E(X,\omega)$ είναι βασικός για όσα ακολουθούν και αφορούν στη σχέση των δομών των μετρικών χώρων $(X,d)$ και $(E(X,\omega), d_E)$.

**Πρόταση 3.4.** *Ο μετρικός χώρος $(X,d)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον μετρικό χώρο $(E(X,\omega), d_E)$* (σχέση 3.4)*, μέσω της απεικόνισης $X \ni x \longrightarrow f_x \in E(X,\omega)$* (σχέση 3.5)*, και επομένως*

*ο χώρος $(X,d)$ ταυτίζεται με έναν υπόχωρο του χώρου $(E(X,\omega), d_E)$.*

*Επιπλέον, για κάθε $f \in E(X,\omega)$ και $x \in X$, ισχύει $f(x) = d_E(f, f_x) \equiv d_E(f, x)$.*

*Απόδειξη.*

Όσον αφορά στην ισομετρική εμφύτευση, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει

$$d(x,y) = d_E(f_x, f_y) \quad \forall x, y \in X \tag{3.6}$$

Κατ' αρχάς, ισχύει $d_E(f_x, f_y) \leq d(x,y)$, διότι

$$d_E(f_x, f_y) = \sup\{|f_x(z) - f_y(z)| : z \in X\} = \sup\{|d(x,z) - d(y,z)| : z \in X\}$$
$$\leq \sup\{d(x,y) : z \in X\} = d(x,y).$$

Επίσης, ισχύει η αντίστροφη ανισότητα αφού

$$d_E(f_x, f_y) = \sup\{|f_x(z) - f_y(z)| : z \in X\}$$

$$= \sup\{|d(x,z) - d(y,z)| : z \in X\}$$

$$\geq |d(x,z) - d(y,z)| \; \forall \, z \in X,$$

οπότε, για $z = y$ προκύπτει ότι $d_E(f_x, f_y) \geq |d(x,y) - d(y,y)| = d(x,y)$.

Ακολουθώντας την ίδια τακτική και για την απόδειξη της ισότητας $f(x) = d_E(f, f_x)$ έχουμε

$$d_E(f, f_x) = \sup\{|f(z) - f_x(z)| : z \in X\}$$

$$= \sup\{|f(z) - d(x,z)| : z \in X\}$$

$$\geq |f(z) - d(x,z)| \; \forall \, z \in X$$

οπότε, για $z = x$ προκύπτει ότι

$$d_E(f, f_x) \geq |f(x) - d(x,x)| = |f(x)| \Longrightarrow d_E(f, f_x) \geq f(x).$$

Απομένει να δείξουμε ότι $d_E(f, f_x) \leq f(x)$. Εφ' όσον

$$d_E(f, f_x) = \sup\{|f(z) - f_x(z)| : z \in X\} = \sup\{|f(z) - d(x,z)| : z \in X\}$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$\sup\{|f(z) - d(x,z)| : z \in X\} \leq f(x)$ ή ότι

$$|d(x,z) - f(z)| \leq f(x) \; \forall z \in X.$$

Πράγματι, (όπως και στο Λήμμα 3.3) αν $z \in X$, από τη σχέση (3.1) έχουμε αφ' ενός

$$d(x,z) \leq f(x) + f(z) \Longrightarrow d(x,z) - f(z) \leq f(x)$$

και αφ' ετέρου

$$|f(z) - f(x)| \leq d(x,z) \Longrightarrow -d(x,z) \leq f(z) - f(x) \leq d(x,z)$$

$$\Longrightarrow -f(x) \leq -f(z) + d(x,z) \Longrightarrow f(x) \geq f(z) - d(x,z)$$

άρα $\quad |d(x,z) - f(z)| \leq f(x)$. ■

## Ο μετρικός χώρος $X_\infty$

Η περιγραφή και οι ιδιότητες του μετρικού χώρου $E(X,\omega)$, που παραθέσαμε προηγουμένως, αποτελούν τη βάση για την περιγραφή του συνόλου $X_\infty$ αλλά και για τον εφοδιασμό του $X_\infty$ με μία μετρική.

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, συμβολίζουμε με $E(X,n)$ τον ακόλουθο υπόχωρο του μετρικού χώρου $E(X,\omega)$ ($card(suppf)$ ο πληθικός αριθμός του στηρίγματος της $f$):

$$E(X,n) = \{f \in E(X,\omega): card(suppf) \leq n\}.$$

Από τη σχέση (3.5) και την Πρόταση 3.4 προκύπτει ότι,

$$X \subseteq E(X,1)$$

ενώ τον ορισμό του $E(X,\omega)$ και το Λήμμα 3.2 (1) έχουμε ότι

$$X \subseteq E(X,1) \subseteq E(X,2) \subseteq \cdots \subseteq E(X,n) \subseteq \cdots$$

$\bigcup_{n\geq 1} E(X,n) = E(X,\omega)$.

Όπως θα δούμε στο 4º Μέρος, κατάλληλα υποσύνολα των υποχώρων $E(X,n)$ θα συμβάλλουν ώστε ο χώρος $E(X,\omega)$ να χαρακτηρισθεί ως διαχωρίσιμος.

Θεωρούμε τώρα την πλήρωση του μετρικού χώρου $(E(X,\omega), d_E)$, συμβολικά

$\left(\overline{E(X,\omega)}, \bar{d}_E\right) = \textit{πλήρωση του } (E(X,\omega), d_E)$.

και ορίζουμε επαγωγικά το εξής σύνολο $X_\infty$ :

$$X_0 = X \quad \text{και} \quad X_{n+1} = \overline{E(X_n,\omega)}\ ,\ n = 1,2,\ldots \tag{3.7}$$

$$X_\infty = \bigcup_{n\geq 0} X_n \tag{3.8}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4, ο χώρος $(X, d)$ ταυτίζεται ισομετρικά με έναν υπόχωρο του χώρου $(E(X, \omega), d_E)$ και επομένως (Ορισμός - Θεώρημα 2.13)

$$o\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma\ (X_0, d)\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ (\iota\sigma o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\alpha})$$

$$\mu\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\ \upsilon\pi\acute{o}\chi\omega\rho o\ \tau o\upsilon\ \chi\acute{\omega}\rho o\upsilon\ \left(\overline{E(X_0, \omega)}, \bar{d}_E\right) = X_1 \tag{3.9}$$

Με βάση τη σχέση (3.9) και τον παραπάνω επαγωγικό ορισμό, εξειδικεύουμε τώρα το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε θέτοντας

$$d_0 = d \quad , \quad d_1 = \bar{d}_E$$

$$X_0 = (X, d) = (X_0, d_0),\ X_1 = \left(X_1, \bar{d}_E\right) = (X_1, d_1), \ldots, X_{n+1} = (X_{n+1}, d_{n+1})$$

και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$ έχουμε τις ισομετρικές εμφυτεύσεις

$$(X_0, d_0) \hookrightarrow (X_1, d_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow (X_{n+1}, d_{n+1}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \bigcup_{n \geq 0} X_n = X_\infty \tag{3.10}$$

$$d_{n+1}|_{X_n \times X_n} = d_n \tag{3.11}$$

Οι συμβολισμοί αυτοί θα διατηρηθούν μέχρι το τέλος της εργασίας αυτής και ειδικότερα ο συμβολισμός του αρχικού χώρου $(X, d)$ ως $(X_0, d_0)$.

Προκειμένου να εφοδιάσουμε το σύνολο $X_\infty$ με μία μετρική ορίζουμε την απεικόνιση

$$d: X_\infty \times X_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τον ακόλουθο τρόπο:

Αν $a \in X_\infty = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ τότε, υπάρχει φυσικός αριθμός $s$ ώστε $a \in X_s$. Ο αριθμός $s$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί μονοσήμαντα ορισμένος, θεωρώντας τον ελάχιστο φυσικό $s = s(a)$ ώστε $a \in X_s$ (Πρόταση 2.2 (Αρχή της καλής διάταξης)). Τότε, για $a, b \in X_\infty$, λόγω των σχέσεων (3.10) και (3.11), ισχύουν

$$a, b \in X_n \ \text{ και } \ d_n(a,b) = d_m(a,b) \ \ \forall n \geq m = max\{s(a), s(b)\} \qquad (3.12)$$

και ορίζουμε

$$d(a,b) = d_m(a,b) = d_n(a,b) \ , \ n \geq m = max\{s(a), s(b)\} \qquad (3.13)$$

(δηλαδή, ως «απόσταση των $a, b \in X_\infty$» ορίζουμε τον αριθμό $d_n(a,b)$, όπου $d_n$ η μετρική οποιουδήποτε $X_n$ (λόγω της σχέσης (3.12)) στον οποίο τα $a, b \in X_\infty$ «συνυπάρχουν»). Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$\textit{Το ζεύγος } (X_\infty, d) \textit{ αποτελεί μετρικό χώρο} \qquad (3.14)$$

Προς τούτο αρκεί (προφανώς) να ελέγξουμε μόνο την ισχύ της τριγωνικής ανισότητας για την $d$.

Έστω $a, b, c \in X_\infty$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι

$a \in X_m$ , $b \in X_n$ , $c \in X_s$ με $m \geq n \geq s \ \Longrightarrow X_s \subseteq X_n \subseteq X_m \Longrightarrow a, b, c \in X_m$

Οπότε, $\ d(a,b) = d_m(a,b) \leq d_m(a,c) + d_m(c,b) = d(a,c) + d(c,b)$.

**Παρατήρηση 3.5.** Τα στοιχεία του χώρου $X_\infty$ αποτελούν όρια στοιχείων των χώρων $E(X_n, \omega)$ (σχέσεις (3.7), (3,8)). Με τη σειρά τους τα στοιχεία των χώρων $E(X_n, \omega)$ περιγράφονται μέσω των στοιχείων των χώρων $X_n$ . Συγκεκριμένα (και κατ' αναλογία με την ιδιότητα «*για κάθε* $f \in E(X, \omega)$ *και* $x \in X$, *ισχύει* $f(x) = d_E(f, f_x)$» (Πρόταση 3.4)) ισχύει

*για κάθε* $f \in E(X_n, \omega)$ *και* $x \in X_n$ , *ισχύει*

$$f(x) = d_n(f, f_x) = d(f, f_x) \equiv d(f, x)$$

*με* $f_x(z) = d_n(x,z) = d(x,z)$ , $z \in X_n(x,z)$ (σχέση (3.13)).

**ΜΕΡΟΣ 4ο**

## Η διαχωρισιμότητα του μετρικού χώρου $\boldsymbol{E(X,\omega)}$

Στο μέρος αυτό αποδεικνύεται η διαχωρισιμότητα του μετρικού χώρου $E(X,\omega)$. Η αναζήτηση ενός αριθμήσιμου και πυκνού υποσυνόλου γίνεται στον υπόχωρο $E(X,\omega)$ του μετρικού χώρου $(E(X), d_E)$ **(**Λήμμα 3.3), καθώς ο χώρος $(E(X), d_E)$ δεν είναι πάντα διαχωρίσιμος. Πράγματι,

Αν $X = \mathbb{R}^2$, ο ευκλείδειος χώρος εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική $\|\cdot\|_2$ τότε, το σύνολο $E(X)$ των συναρτήσεων $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \leq f(x) + f(y) \;\; \forall x, y \in X$$

*δεν* είναι διαχωρίσιμος χώρος ([7], Example 4.4).

Γενικά, ένας από τους χαρακτηρισμούς της διαχωρισιμότητας του χώρου $E(X)$ είναι ο εξής ([7], Theorem 4.5):

$$E(X) \text{ διαχωρίσιμος} \Leftrightarrow E(X) = \overline{E(X,\omega)}$$

Έστω $(X,d)$ Πολωνικός μετρικός χώρος και $D$ ένα πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του $X$. Αν $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ και $A \subseteq X$, συμβολίζουμε με $f|_A$ τον περιορισμό της $f$ στο σύνολο $A$. Υπενθυμίζουμε ότι με $card(A)$ συμβολίζουμε τον πληθικό αριθμό ενός συνόλου $A$.

Συμβολίζουμε με $\Pi(D)$ ή απλά με $\Pi$ το σύνολο των μη κενών *πεπερασμένων* υποσυνόλων του συνόλου $D$, εφοδιασμένο με μία καλή διάταξη $\prec_{\Pi(D)}$. Δηλαδή,

$$\Pi \equiv \Pi(D) = \{\emptyset \neq A \subseteq D : card(A) = n\ , n \geq 1\} \equiv \big(\Pi(D), \prec_{\Pi(D)}\big)$$

Επίσης, θεωρούμε τα σύνολα

$$F(A) = \{f | f : A \longrightarrow \mathbb{Q}\}\ , A \in \Pi$$

$$D_1 = \big\{f \in E(X,\omega) : suppf \in \Pi,\ \ f|_{suppf} \in F(suppf)\big\} \qquad (4.1)$$

δηλαδή,

*το σύνολο $D_1$ αποτελείται από τις $f \in E(X,\omega)$*

*με ρητές τιμές στο στήριγμά τους $suppf$ και $suppf \subseteq D$.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.20 και το Λήμμα 3.2 (3), το ζεύγος

$$\big(suppf,\ \ f|_{suppf}\big) \in \Pi \times F(suppf)$$

είναι μοναδικό για κάθε $f \in E(X,\omega)$ με $f|_{suppf}(x) \in \mathbb{Q}$.

Ειδικότερα, αν $card(suppf) = 1$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ ώστε $suppf = \{x_0\}$. Πράγματι, αν ένα σύνολο $\{x_1\}$ ήταν επίσης στήριγμα της $f$, για κάθε $x \in X$, θα είχαμε

$$f(x) = inf\big\{d(x,y) + f(y) : y \in \{x_0\}\big\} = inf\big\{d(x,y) + f(y) : y \in \{x_1\}\big\}$$

$$\Longrightarrow f(x) = d(x,x_0) + f(x_0) = d(x,x_1) + f(x_1)$$

και θέτοντας διαδοχικά $x = x_0, x = x_1$ έχουμε

$$d(x_1,x_0) = f(x_0) - f(x_1) = f(x_1) - f(x_0) \Longrightarrow d(x_1,x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0.$$

Στα Λήμματα που ακολουθούν αποδεικνύουμε ότι το υποσύνολο $D_1$ του $E(X,\omega)$ πληροί εκείνες τις ιδιότητες που μας επιτρέπουν να χαρακτηρίσουμε τον μετρικό χώρο $E(X,\omega)$ ως *διαχωρίσιμο* μετρικό χώρο.

**Λήμμα 4.1.** *Το σύνολο $D_1$ είναι μη κενό υποσύνολο του $E(X,\omega)$.*

*Απόδειξη.*

Έστω $x_0 \in D$ τυχαίο στοιχείο του πυκνού και αριθμήσιμου υποσύνολου $D$ του $X$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f_{x_0}(x) = d(x_0, x)$. Σύμφωνα με τη σχέση (3.5), και τους παραπάνω συμβολισμούς συνόλων είναι

$$f_{x_0} \epsilon\, E(X,\omega)\ ,\ suppf_{x_0} = \{x_0\} \in \Pi$$

$$\text{και } f_{x_0}(x_0) = 0 \in \mathbb{Q}.$$

Άρα, $f_{x_0} \in D_1$ και επομένως $D_1 \neq \emptyset$. ■

**Πρόταση 4.2.** *Το σύνολο $D_1$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $E(X,\omega)$.*

*Απόδειξη.*

*Ισχυρισμός*

*Το σύνολο $F = \{(A,f): A \in \Pi, f \in F(A)\}$ είναι μη κενό αριθμήσιμο σύνολο.*

*Απόδειξη του ισχυρισμού.*

Έστω $g \in D_1$ (Λήμμα 4.1). Το σύνολο $F$ είναι μη κενό διότι, σύμφωνα με τη σχέση (4.1), $\left(suppg,\ \ g|_{suppg}\right) \in F$. Παρατηρούμε τώρα, ότι

$$F = \{(A,f): A \in \Pi, f \in F(A)\} = \cup_{A\in\Pi}\big(\{A\} \times F(A)\big).$$

Εφ’ όσον το σύνολο $D$ είναι αριθμήσιμο , σύμφωνα με την Πρόταση 2.11, το σύνολο $\Pi$ των πεπερασμένων υποσυνόλων του $D$ είναι αριθμήσιμο. Επίσης, το σύνολο $F(A) = \{f | f: A \longrightarrow \mathbb{Q}\}, A \in \Pi$ είναι αριθμήσιμο (Πρόταση 2.10) ενώ το μονοσύνολο $\{A\}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο. Συνάγεται τώρα ότι, το σύνολο $\{A\} \times F(A)$ είναι αριθμήσιμο (Πρόταση 2.7) και τελικά το $F$ είναι αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση των αριθμήσιμων $\{A\} \times F(A)$ (Πρόταση 2.8), καθώς το σύνολο δεικτών $\Pi$ της ένωσης είναι αριθμήσιμο.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$h: D_1 \longrightarrow F = \{(A,f): A \in \Pi, f \in F(A)\} \text{ με } h(f) = \big(suppf,\ f|_{suppf}\big),$$

η οποία, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε πριν το Λήμμα 4.1, είναι καλά ορισμένη.

Εφ’ όσον το σύνολο $F$ είναι αριθμήσιμο (Ισχυρισμός), για να δείξουμε ότι το $D_1$ είναι αριθμήσιμο αρκεί να δείξουμε ότι, η συνάρτηση $h: D_1 \longrightarrow F$ είναι συνάρτηση 1-1(Πρόταση 2.4).

Έστω $f, g \in D_1$ με $h(f) = h(g)$. Θα δείξουμε ότι $f = g$. Πράγματι,

$$h(f) = h(g) \Longrightarrow \big(suppf,\ f|_{suppf}\big) = \big(suppg,\ g|_{suppg}\big)$$

$$\Longrightarrow f(a) = g(a) \quad \forall\, a \in A = suppf = suppg$$

$$\Longrightarrow d(x,a) + f(a) = d(x,a) + g(a) \;\; \forall\, a \in A, x \in X$$

$$\Longrightarrow inf\{d(x,a) + f(a): a \in suppf\} = inf\{d(x,a) + g(a): a \in suppg\} \;\; \forall\, x \in X$$

$$\Longrightarrow f(x) = g(x)\ \forall\, x \in X \text{ (σχέση (3.2))}$$

$$\Longrightarrow f = g. \; \blacksquare$$

Το επόμενα δύο λήμματα είναι απαραίτητα για την απόδειξη της πρότασης 4.5 που θα ακολουθήσει και αφορά στην πυκνότητα του συνόλου $D_1$ στον $E(X,\omega)$..

**Λήμμα 4.3.** *Έστω* $f \in E(X,\omega)$ *με στήριγμα* $S = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ *και* $f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_n) \in \mathbb{R}$ *οι τιμές της συνάρτησης* $f|_{suppf}$ *. Αν*

$$A = \{a \in S : \exists b \in S : f(a) = f(b) + d(a,b) \neq f(b)\}$$

*τότε, το σύνολο* $S \setminus A = \{s_i \in S : s_i \notin A, 1 \leq i \leq n\}$ *αποτελεί στήριγμα της* $f$ *με*

$$f(s_i) < f(s_j) + d(s_i, s_j) \ \forall s_i \neq s_j \in S \setminus A$$

*και επομένως με την ιδιότητα*

$$|f(s_i) - f(s_j)| < d(s_i, s_j) \ \forall s_i \neq s_j \in S \setminus A.$$

*Απόδειξη.*

Το σύνολο $S \setminus A$ θα αποτελεί στήριγμα της $f$, αν ισχύει (σχέση (3.2))

$$f(x) = inf\{d(x, s_i) + f(s_i) : s_i \in S \setminus A\} \ \ \forall x \in X.$$

Εφ' όσον $f(x) = inf\{d(x,s) + f(s) : s \in S\} \ \forall x \in X$, αρκεί να δείξουμε ότι η παράλειψη ενός τουλάχιστον $a \in A$ από το $S$ δεν επηρεάζει την τιμή του inf της τελευταίας ισότητας ή ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $b \in S, b \neq a$ ώστε

$$d(x,a) + f(a) \geq d(x,b) + f(b) \ \ \forall x \in X.$$

Έστω $a \in A$. Τότε υπάρχει $b \in S$ ώστε $f(a) = f(b) + d(a,b) \neq f(b)$. Οπότε $b \neq a$ και για κάθε $x \in X$, έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,a) + f(a) &= d(x,a) + f(b) + d(a,b) \\ &= f(b) + d(x,a) + d(a,b) \\ &\geq f(b) + d(x,b)\,. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $s_i \neq s_j$ στοιχεία του $S \setminus A$. Σύμφωνα με τη σχέση (3.1),

$$\begin{aligned} |f(s_i) - f(s_j)| \leq d(s_i, s_j) \neq 0 &\Longrightarrow f(s_i) - f(s_j) \leq d(s_i, s_j) \neq 0 \\ &\Longrightarrow f(s_i) \leq f(s_j) + d(s_i, s_j) \neq f(s_j) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(s_i) < f(s_j) + d(s_i, s_j) \neq f(s_j)$$

διότι αν, $f(s_i) = f(s_j) + d(s_i, s_j) \neq f(s_j)$ τότε $s_i \in A$, άτοπο. ■

**Λήμμα 4.4.** *Έστω συνάρτηση $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει στήριγμα δηλαδή, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $A \subseteq X$ ώστε να ισχύει*

$$f(x) = inf\{d(x,a) + f(a): a \in A\} \ \forall\, x \in X.$$

*Τότε, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(1) $f \in E(X, \omega)$.

(2) $|f(a) - f(b)| \leq d(a, b) \leq f(a) + f(b) \ \ \forall\, a, b \in A = suppf$.

*Απόδειξη.*

(1)⟹(2) Άμεσο από τον ορισμό του χώρου $E(X, \omega)$ (σχέσεις (3.1), (3.2)).

(2)⟹(1) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y) \ \forall\, x, y \in X.$$

Έστω $x, y \in X$. Βάσει του Λήμματος 3.2, υπάρχουν $\omega_x$, $\omega_y \in A = suppf$ ώστε

$$f(x) = d(x, \omega_x) + f(\omega_x) \leq d(x, a) + f(a) \ \forall a \in suppf.$$

$$f(y) = d(y, \omega_y) + f(\omega_y) \leq d(y, a) + f(a) \ \forall a \in suppf.$$

Οπότε, για $a = \omega_x \in suppf$, από τις δύο τελευταίες σχέσεις και την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} f(y) = d(y, \omega_y) + f(\omega_y) &\leq d(y, \omega_x) + f(\omega_x) \\ &\leq d(y, x) + d(x, \omega_x) + f(\omega_x) \\ &= d(y, x) + f(x) \end{aligned}$$

οπότε ισχύουν $f(y) \leq d(y,x) + f(x)$ και $f(x) \leq d(y,x) + f(y)$ (εκκινώντας από το $f(x)$και εργαζόμενοι ανάλογα), άρα

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις παραπάνω εκφράσεις των $f(x)$ και $f(y)$, καθώς και την ανισότητα-υπόθεση στον ισχυρισμό (2), θέτουμε όπου $a = \omega_x$ και $b = \omega_y$, και έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= d(x,\omega_x) + f(\omega_x) + d(y,\omega_y) + f(\omega_y) \\ &= d(x,\omega_x) + d(y,\omega_y) + f(\omega_x) + f(\omega_y) \\ &\geq d(x,\omega_x) + d(y,\omega_y) + d(\omega_x,\omega_y) \\ &\geq d(x,\omega_x) + d(y,\omega_x) \\ &\geq d(x,y). \end{aligned}$$

Άρα $d(x,y) \leq f(x) + f(y)$, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

**Πρόταση 4.5.** *Το σύνολο $D_1$ είναι πυκνό υποσύνολο του $E(X,\omega)$.*

*Απόδειξη.*

Έστω συνάρτηση $f \epsilon E(X,\omega)$ και $\varepsilon > 0$. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι, το σύνολο $D_1$ είναι πυκνό στον $E(X,\omega)$, αρκεί να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $g \epsilon D_1$ έτσι ώστε,

$$d_E(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : \ x \in X\} < \varepsilon \text{ (Λήμμα 3.3)}$$

ή ισοδύναμα ώστε $|f(x) - g(x)| < \varepsilon \ \forall x \epsilon X$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.3, ως στήριγμα $S$ της $f \epsilon E(X,\omega)$ μπορεί να θεωρηθεί ένα σύνολο

$$S = suppf = \{\, s_1,\ s_2, \dots , s_n \,\} \subseteq X$$

$$\text{με} \ \ \left| f(s_i\,) - \ f(\,s_j) \right| \ < d\left(s_i\ , s_j\right) \forall s_i \neq s_j \in S \qquad (4.2)$$

Λόγω της σχέσης (4.2), ορίζεται ο θετικός πραγματικός αριθμός

$$\varepsilon_0 = min\left\{ d\left(s_i, s_j\right) - \left| f(s_i) - f\left(s_j\right) \right| :\ 1 \leq \iota \neq j \leq n \right\} > 0 \qquad (4.3)$$

Θεωρούμε επίσης $\quad 0 < \delta < min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ (4.4)

[ ΚΑΤΑΣΚΕΥΉ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $g \,\epsilon\, D_1$ ΩΣΤΕ $|f(x) - g(x)| < \varepsilon \ \ \forall\, x \,\epsilon\, X$ ]

**(I)** *Κατ' αρχήν, θα ορίσουμε μία συνάρτηση g σε ένα πεπερασμένο υποσύνολο A του D και κατόπιν στον χώρο X , ώστε*

$$suppg = A \quad \mu\varepsilon \quad g(d_i) \,\epsilon\, \mathbb{Q}\, \forall\, d_i \,\epsilon\, A.$$

**(II)** *Θα δείξουμε ότι $g \,\epsilon\, D_1$.*

**(III)** *Θα δείξουμε ότι $|f(x) - g(x)| < \varepsilon \ \ \forall\, x \,\epsilon\, X$.*

## (I)

Το σύνολο D είναι πυκνό στο χώρο X οπότε, για κάθε $s_i \,\epsilon\, S \subseteq X$, υπάρχει στοιχείο $d_i \,\epsilon\, D$ τέτοιο ώστε

$$d(s_{i,}\, d_i) < \delta \qquad (4.5)$$

Έστω το πεπερασμένο σύνολο $A = \{d_1, d_2, \dots , d_n\} \subseteq D$. Θα αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία $d_i$ του συνόλου $A$ σε ρητούς αριθμούς, έστω $g(d_i)$, με την επιλογή τους να εξαρτάται από τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές $f(s_i)$, $1 \leq \iota \leq n$.

Θεωρούμε, διατεταγμένους σε αύξουσα σειρά (σχέση (4.4)), τους πραγματικούς αριθμούς

$$f(s_i) + \delta \quad , \quad f(s_i) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Αφού το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, μεταξύ των αριθμών αυτών θα υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός αριθμός, εξαρτώμενος από τον $f(s_i)$, τον οποίο συμβολίζουμε ως $g(d_i)$:

$$f(s_i) + \delta \leq g(d_i) \leq f(s_i) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} \qquad (4.6)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, έχουμε ορίσει μία συνάρτηση $g: A \longrightarrow \mathbb{Q}$, την οποία επεκτείνουμε στον $X$ ως εξής:

$$g(x) = inf\{d(x, d_i) + g(d_i): d_i \in A\} \ , \ x \in X.$$

Προφανώς έχουμε

$$suppg = A \quad \text{και} \quad g(d_i) \in \mathbb{Q} \ \forall \ d_i \in A.$$

## (II)

Από τον ορισμό της, η $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ πληροί τη σχέση (3.2) οπότε, αποδεικνύοντας και την ισχύ της ιδιότητας $|g(x) - g(y)| \leq d(x, y) \leq g(x) + g(y)$ (σχέση 3.1) θα έχουμε ότι $g \in E(X, \omega)$ και τελικά ότι, $g \in D_1$ (σχέση 4.1).

Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\left|g(d_i) - g(d_j)\right| \leq d(d_i, d_j) \leq g(d_i) + g(d_j) \ \ \forall d_i, d_j \in suppg$$

(που θα αποτελέσει παρακάτω τη σχέση (4.13), στην οποία θα καταλήξουμε μετά από λεπτομερή παρουσίαση μιας σειράς βημάτων (σχέσεις (4.7)-(4.12)).

Σύμφωνα με τη σχέση (4.6), ισχύουν οι

$$g(d_i) \geq f(s_i) + \delta$$

$$g(d_j) \geq f(s_j) + \delta.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3.1) (για την $f \in E(X,\omega)$) και (4.5) , καθώς και την τριγωνική ανισότητα για τη μετρική $d$, έχουμε

$$\begin{aligned} g(d_i) + g(d_j) &\geq f(s_i) + f(s_j) + \delta + \delta \\ &\geq d(s_i, s_j) + \delta + \delta \\ &\geq d(s_i, s_j) + d(s_i, d_i) + d(s_j, d_j) \\ &\geq d(s_j, d_i) + d(s_j, d_j) \\ &\geq d(d_i, d_j) \end{aligned}$$

άρα

$$d(d_i, d_j) \leq g(d_i) + g(d_j) \tag{4.7}$$

Στα επόμενα θα αποδείξουμε ότι

$$|g(d_i) - g(d_j)| \leq d(d_i, d_j).$$

Η απόδειξη της τελευταίας ανισότητας είναι συνθετότερη, καθώς απαιτείται ένας ευρύτερος συνδυασμός μιας σειράς ανισοτικών σχέσεων που παραθέτουμε αμέσως παρακάτω, επεξηγώντας παράλληλα πως προκύπτει η κάθε μία από αυτές. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

$$d(s_i, s_j) + 2\delta \geq d(d_i, d_j) \tag{4.8}$$

[ αφού $d(s_{i,} d_i) < \delta$ (σχέση 4.5), έχουμε

$$
\begin{aligned}
d(s_i, s_j) + 2\delta &= d(s_i, s_j) + \delta + \delta \\
&> d(s_i, s_j) + d(s_i, d_i) + d(s_j, d_j) \\
&> d(s_j, d_i) + d(s_j, d_j) \\
&> d(d_i\ , d_j)\ \ ].
\end{aligned}
$$

$$-2\delta > -\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{4.9}$$

[ $\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ (σχέση 4.4) $\Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon_0}{4} \Rightarrow 2\delta < \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow -2\delta > -\frac{\varepsilon_0}{2}$ ].

$$g(d_i) - g(d_j) \leq f(s_i) - f(s_j) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} - \delta \tag{4.10}$$

[ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη σχέση (4.6) έχουμε

$$g(d_i) \leq f(s_i) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$-g(d_j) \leq -f(s_j) - \delta$$

και προσθέτουμε κατά μέλη ].

$$g(d_i) - g(d_j) \leq f(s_i) - f(s_j) + \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{4.11}$$

[ $g(d_i) - g(d_j) \leq f(s_i) - f(s_j) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} - \delta$ (σχέση 4.10)

$$
\begin{aligned}
&\leq f(s_i) - f(s_j) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} \\
&\leq f(s_i) - f(s_j) + min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$\leq f(s_i) - f(s_j) + \tfrac{\varepsilon_0}{2} \;].$$

$$d(s_i, s_j) \geq \varepsilon_0 + |f(s_i) - f(s_j)| \tag{4.12}$$

[ αφού $\varepsilon_0 = min\{d(s_i, s_j) - |f(s_i) - f(s_j)| : 1 \leq \iota \neq j \leq n\} > 0$ (σχέση4.3) $\Rightarrow$ $\varepsilon_0 \leq d(s_i, s_j) - |f(s_i) - f(s_j)| \Rightarrow \varepsilon_0 + |f(s_i) - f(s_j)| \leq d(s_i, s_j)$ ].

Από τις παραπάνω σχέσεις συνάγεται ότι

$$d(d_i\,, d_j) \geq d(s_i, s_j) - 2\delta \quad \text{(σχέση 4.8)}$$

$$\geq \varepsilon_0 + |f(s_i) - f(s_j)| - \tfrac{\varepsilon_0}{2} \text{ (σχέσεις 4.9 και 4.12)}$$

$$= |f(s_i) - f(s_j)| + \tfrac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\geq f(s_i) - f(s_j) + \tfrac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\geq \; g(d_i) - g(d_j) \quad \text{(σχέση 4.11)}$$

οπότε $d(d_i\,, d_j) \geq \; g(d_i) - g(d_j)$. Αντιμεταθέτοντας τους ρόλους των $d_i\,, d_j$ έχουμε

$$|g(d_i) - g(d_j)| \leq d(d_i\,, d_j),$$

και λόγω της σχέσης (4.7) τελικά προκύπτει ότι

$$|g(d_i) - g(d_j)| \leq d(d_i\,, d_j) \leq g(d_i) + g(d_j) \;\; \forall d_i\,, d_j \in suppg \tag{4.13}$$

Από τον ορισμό της $g$ στο τμήμα (Ι) της κατασκευής της, τη σχέση (4.13), το Λήμμα 4.4 και όσα εκθέσαμε στην αρχή του τμήματος (ΙΙ) προκύπτει ότι $g \,\epsilon\, D_1$.

**(III)**

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, απομένει να δείξουμε ότι,

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \;\; \forall\, x \,\epsilon\, X$$

ή ακολουθώντας μία σειρά συλλογισμών ανεξάρτητη της σειράς θεώρησης των δύο συναρτήσεων ότι $f(x) - g(x) < \varepsilon$ , για τυχαίο $x \in X$.

Πράγματι, αν $x \in X$, έστω $d_{\iota_0} \in suppg$ ώστε (Λήμμα 3.2)

$$g(x) = d\big(x, d_{\iota_0}\big) + g\big(d_{\iota_0}\big).$$

Τότε θεωρώντας , σύμφωνα και πάλι με το Λήμμα 3.2, το αντίστοιχο $s_{\iota_0} \in suppf$ για τη συνάρτηση $f$, δηλαδή

$$f(x) = f\big(s_{\iota_0}\big) + d\big(x, s_{\iota_0}\big)$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= f\big(s_{\iota_0}\big) + d\big(x, s_{\iota_0}\big) - d\big(x, d_{\iota_0}\big) - g\big(d_{\iota_0}\big) \\
&= f\big(s_{\iota_0}\big) - g\big(d_{\iota_0}\big) + d\big(x, s_{\iota_0}\big) - d\big(x, d_{\iota_0}\big) \\
&\leq g\big(d_{\iota_0}\big) - f\big(s_{\iota_0}\big) + \big|d\big(x, s_{\iota_0}\big) - d\big(x, d_{\iota_0}\big)\,\big| \\
&\qquad\qquad (\text{διότι } g\big(d_{\iota_0}\big) - f\big(s_{\iota_0}\big) > 0, \text{ σχέση } (4.6)) \\
&\leq g\big(d_{\iota_0}\big) - f\big(s_{\iota_0}\big) + d\big(s_{\iota_0}, d_{\iota_0}\big) \\
&\leq min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} + \delta \qquad (\text{σχέσεις } (4.5) \text{ και } (4.6)\ ) \\
&\leq 2 \cdot min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right\} \qquad (\text{σχέση } (4.4)) \\
&< \varepsilon. \;\; \blacksquare
\end{aligned}$$

**Θεώρημα 4.6.** *Ο μετρικός χώρος* $E(X,\omega)$ *είναι διαχωρίσιμος .*

*Απόδειξη.*

Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 4.2 και 4.5. ■

**Πόρισμα 4.7.** *Η πλήρωση* $X_1 = \overline{E(X_0,\omega)}$ *του μετρικού χώρου* $E(X_0,\omega)$ *καθώς και οι μετρικοί χώροι* $X_n$ $n \geq 2$, *είναι Πολωνικοί χώροι .*

*Απόδειξη.*

Άμεση από την Πρόταση 4.5, την Πρόταση 2.17 (σύμφωνα με τον Ορισμό 2.16) και τον επαγωγικό ορισμό των $X_n$ , για $n \geq 2$ (σχέση (3.7)). ■

# ΜΕΡΟΣ 5ο

## Ιδιότητες του μετρικού χώρου $X_\infty$

Οι ιδιότητες του μετρικού χώρου $X_\infty$, που αποδεικνύονται εδώ, αποτελούν τη βάση για την ύπαρξη και τη δομή του χώρου $\mathbb{U}$ του Urysohn.

**Πρόταση 5.1.** *Ο μετρικός χώρος $X_\infty$ είναι διαχωρίσιμος.*

*Απόδειξη.*

Έστω ο μετρικός χώρος $(X_\infty, d)$ (σχέσεις (3.13), (3.14)), ο οποίος ως σύνολο έχει τη μορφή

$$X_\infty = \bigcup_{n\geq 0} X_n \text{ με } X_0 = X \quad \text{και} \quad X_{n+1} = \overline{E(X_n, \omega)}\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

(σχέσεις (3.7), (3.8)). Καθένας από τους χώρους $X_n$ είναι Πολωνικός (Πόρισμα 4.7) και έστω $D_n$ ένα πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο στον κάθε χώρο $X_n$. Ο μετρικός χώρος $X_\infty$ είναι διαχωρίσιμος διότι, το υποσύνολο του $D = \bigcup_n D_n$ είναι αριθμήσιμο (Πρόταση 2.8) και πυκνό σ' αυτόν, αφού (Ορισμοί - Ιδιότητες 2.12)

$$X_\infty \supseteq \overline{D} = \overline{\bigcup_n D_n} \supseteq \bigcup_n \overline{D_n} = \bigcup_n X_n = X_\infty \Longrightarrow \overline{D} = X_\infty. \ \blacksquare$$

Για την απόδειξη της δεύτερης ιδιότητας του $X_\infty$ απαραίτητο είναι το ακόλουθο λήμμα, το οποίο περιγράφει την επέκταση της μετρικής $d$ ενός μετρικού χώρου $(Z,d)$ στο σύνολο $Z \cup \{y\}$, που προκύπτει από την επισύναψη ενός σημείου $y$ στον $Z$. Είναι φανερό ότι, μία τέτοια επέκταση σχετίζεται άμεσα με την ιδιότητα Urysohn (Ορισμός 2.15).

**Λήμμα 5.2.** *Έστω δύο μετρικοί χώροι $(Z,d)$ και $(X,\rho)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σύνολο $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq Z \cap X$ και στοιχείο $y \in X \setminus Z$.*

*Αν ισχύει $d|_{T\times T} = \rho|_{T\times T}$, τότε υπάρχει μετρική $m$ ώστε το ζεύγος $(Z \cup \{y\}, m)$ να αποτελεί μετρικό χώρο και να ισχύουν*

$$m|_{Z\times Z} = d \quad \textit{και} \quad m(x_i, y) = \rho(x_i, y) \ \ \forall x_i \in T.$$

*Απόδειξη.*

Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$. Εφ' όσον $Y \subseteq X$, το ζεύγος $(Y, \rho)$ αποτελεί μετρικό χώρο και σύμφωνα με την υπόθεση $T \subseteq Y$ με

$$d|_{T\times T} = \rho|_{T\times T} \tag{5.1}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$m: (Z \cup \{y\}) \times (Z \cup \{y\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$m(x,z) = \begin{cases} min\{\rho(y, x_i) + d(x_i, x) : 1 \le i \le n\} & , x \in Z\ , z = y (\notin Z) \\ d(x,z) & , x \in Z, z \in Z \end{cases} \tag{5.2}$$

Προφανώς, ισχύει $m|_{Z\times Z} = d$.

Θα δείξουμε ότι η $m$ καθιστά μετρικό χώρο το ζεύγος $(Z \cup \{y\}, m)$. Πράγματι, για κάθε $x, z \in Z \cup \{y\}$, έχουμε

$$m(x,z) \ge 0 \text{ (προφανές)}$$

$$m(x,z) = 0 \Leftrightarrow x = z$$

[ αν $x \in Z, z \in Z$ , τότε $m(x,z) = 0 \Leftrightarrow d(x,z) = 0 \Leftrightarrow x = z$,

αν $x \in Z$ , $z = y(\notin Z)$ , τότε

$m(x,z) = 0 \Leftrightarrow min\{\rho(y,x_i) + d(x_i,x): 1 \leq i \leq n\} = 0$

$\Leftrightarrow \rho\big(y, x_{i_0}\big) + d\big(x_i, x_{i_0}\big) = 0$ , για κάποιο $i_0$ (από το πεπερασμένο πλήθος των $i$)

$\Leftrightarrow \rho\big(y, x_{i_0}\big) = d\big(x_{i_0}, x\big) = 0$

$\Leftrightarrow x = x_{i_0} = y = z$ ].

Απομένει τώρα να δείξουμε την ισχύ της τριγωνικής ανισότητας για την απεικόνιση $m$.

Θεωρώντας $x, x^{'} \in Z$ και $y \notin Z$ και διακρίνοντας δυο περιπτώσεις, θα δείξουμε

(α) $m(x,y) \leq m(x,x^{'}) + m(x^{'},y)$

και (β) $m(x,x^{'}) \leq m(x,y) + m(y,x^{'})$.

Κατ' αρχήν, έστω $x_0 \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $x'_0 \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τα σημεία στα οποία επιτυγχάνεται το min για τις τιμές $m(x,y)$ και $m(x',y)$ (σύμφωνα με τη σχέση 4.14 και λόγω του πεπερασμένου $T$) για τα $x$ και $x'$, αντίστοιχα, δηλαδή, για κάθε $1 \leq i \leq n$,

$$m(x,y) = \rho(y,x_0) + d(x_0,x) \leq \rho(y,x_\iota) + d(x_\iota,x) \qquad (5.3)$$

$$m(x',y) = \rho(y,x'_0) + d(x'_0,x') \leq \rho(y,x_\iota) + d(x_\iota,x') \qquad (5.4)$$

Οπότε

(α) $m(x,y) \leq \rho(y,x_\iota) + d(x_\iota,x) \;\; \forall x_\iota \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (σχέση (5.3))

$\Rightarrow m(x,y) \leq \rho(y,x'_0) + d(x'_0,x)$ (αφού $x'_0 \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$)

$\leq \rho(y,x'_0) + d(x'_0,x^{'}) + d(x',x)$ (τριγωνική ανισότητα )

$= m(y,x^{'}) + m(x^{'},x)$ (σχέσεις (5.4) και (5.2)) (β ) $m(x,x') = d(x,x')$ (σχέση (5.2))

$\leq d(x,x_0) + d(x_0,x')$ (τριγωνική ανισότητα)

$\leq m(x,y) - \rho(y,x_0) + d(x_0,x')$ (σχέση (5.3))

$\leq m(x,y) - \rho(y,x_0) + d(x_0,x'_0) + d(x'_0,x')$ (τριγωνική ανισότητα)

$\leq m(x,y) - \rho(y,x_0) + \rho(x_0,x'_0) + d(x'_0,x')$ (σχέση (5.1))

$\leq m(x,y) + \rho(y,x'_0) + d(x'_0,x')$ (τριγωνική ανισότητα)

$= m(x,y) + m(x',y)$ (σχέση (5.4)).

Όσον αφορά την απόδειξη της τελευταίας ισότητας $m(x_i,y) = \rho(x_i,y)\ \forall x_i \in T$ παρατηρούμε ότι, στο πεπερασμένο σύνολο $T$ , για $x \in Z$ υπάρχει $s = s(x) \in T$ ώστε $m(x,y) = \rho(y,s) + d(s,x)$. Οπότε για τυχαίο $x = x_{\iota_0} \in T$ και $s = s(x_{\iota_0}) \in T$, ισχύουν

$$m(x_{\iota_0},y) = \rho(y,s) + d(s,x_{\iota_0}) \quad \text{και}$$

$m(x_{\iota_0},y) = min\{\rho(y,x_\iota) + d(x_\iota,x_{\iota_0}) : 1 \leq i \leq n\}$

$\leq \rho(y,x_{\iota_0}) + d(x_{\iota_0},x_{\iota_0})$

$= \rho(y,x_{\iota_0}) \leq \rho(y,s) + \rho(s,x_{\iota_0})$

$= \rho(y,s) + d(s,x_{\iota_0}) = m(x_{\iota_0},y)$

Άρα, $m(x_i,y) = \rho(x_i,y)\ \forall x_i \in T$. ■

**Θεώρημα 5.3.** *Ο μετρικός χώρος $X_\infty$ έχει την ιδιότητα Urysohn.*

*Απόδειξη.*

Αφού ο μετρικός χώρος $(X_\infty, d)$ είναι διαχωρίσιμος (Πρόταση 5.1), για να δείξουμε ότι έχει την ιδιότητα Urysohn αρκεί να θεωρήσουμε τυχαίο πεπερασμένο μετρικό χώρο $(X, \rho)$ και τυχαίο υπόχωρό του $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ και να δείξουμε ότι, αν $h: \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \longrightarrow X_\infty$ ισομετρική εμφύτευση τότε, η $h$ μπορεί να επεκταθεί σε μία ισομετρική εμφύτευση $\hat{h}: X \longrightarrow X_\infty$ (Ορισμός 2.15).

Ή ισοδύναμα, ότι η $h$ μπορεί να επεκταθεί σε μία ισομετρική εμφύτευση $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y\} \longrightarrow X_\infty$ για τυχαίο $y \in X \backslash \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (καθώς μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος ισομετρικών εμφυτεύσεων της τελευταίας μορφής (αφού το $X$ είναι πεπερασμένο σύνολο) θα καταλήξουμε στην επιθυμητή ισομετρική εμφύτευση $\hat{h}: X \longrightarrow X_\infty$).

Σύμφωνα με το παραπάνω σκεπτικό, θεωρούμε πεπερασμένο υποσύνολο του $X$ ως (ισομετρικά εμφυτευμένο) υποσύνολο $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ του $X_\infty$, σημείο $y \in X \backslash X_\infty$ και μετρικό χώρο $(Y, \rho)$ όπου $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ με $\rho|_{T \times T} = d$ και αρκεί να βρούμε ένα $y' \in X_\infty$ , τέτοιο ώστε

$$d(y', x_i) = \rho(y, x_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \tag{5.5}$$

Είναι φανερό ότι οι τελευταίες θεωρήσεις μας δίνουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.2. για $Z = X_\infty$ και ειδικότερα να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5.2), δηλαδή να θεωρήσουμε τον μετρικό χώρο $(X_\infty \cup \{y\}, m)$ με μετρική

$$m(x, z) = \begin{cases} min\{\rho(y, x_i) + d(x_i, x) : 1 \leq i \leq n\} & , x \in X_\infty , z = y (\notin X_\infty) \\ \qquad d(x, z) & , x \in X_\infty, z \in X_\infty \end{cases}$$

$$m|_{X_\infty \times X_\infty} = d.$$

Αφού $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_\infty = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ (σχέση (3.8)) και $y \notin X_\infty$ δηλαδή, $y \notin X_n \forall n$, θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε (σχέση (3.10))

$$T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq (X_k, d_k) \not\ni y.$$

Δεδομένου ότι $d|_{X_k \times X_k} = d_k$ (σχέση 3.12) και $m|_{X_\infty \times X_\infty} = d$ (βλέπε παραπάνω) συμπεραίνουμε ότι, τα επόμενα ζεύγη αποτελούν μετρικούς χώρους που συνδέονται με τον εγκλεισμό

$$\left(X_k \cup \{y\}, m|_{(X_k \cup \{y\}) \times (X_k \cup \{y\})}\right) \subseteq (X_\infty \cup \{y\}, m) \qquad (5.6)$$

και

$$d|_{X_k \times X_k} = m|_{X_k \times X_k} = d_k \qquad (5.7)$$

[ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ $y' \in X_\infty$ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (4.18) ]

Σύμφωνα με τη σχέση (4.19), έχει νόημα να θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$f_y : X_k \cup \{y\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_y(x) = m(x, y), \forall x \in X_k \qquad (5.8)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος θα έχει ολοκληρωθεί αν αποδειχθεί ο επόμενος

*<u>Ισχυρισμός</u>*

*Το στοιχείο* $y' \equiv f_y|_{X_k} \underbrace{=}_{\sigma\upsilon\mu\beta o\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}} f_y$ *ανήκει στον χώρο* $E(X_k, \omega)(\subseteq X_\infty)$ *και πληροί τη σχέση* (5.5).

*Απόδειξη του ισχυρισμού.*

Αρκεί να δείξουμε (σχέσεις (3.1), (3.2)) ότι ισχύουν ανισότητες

$$\left|f_y(x) - f_y(z)\right| \leq d_k(x, z) \leq f_y(x) + f_y(z) \;\; \forall x, z \in X_k$$

και ότι

υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $S \;\left(\equiv supp f_y\right)$ του χώρου $X_k$ ώστε

$$f_y(x) = inf\{d_k(x,s) + f_y(s) : s \in S\} \ \ \forall\, x \in X_k$$

Βάσει των σχέσεων (5.7), (5.8), για $x, z \in (X_k, d_k)$, έχουμε

$$d_\kappa(x,z) = m(x,z) \leq m(x,y) + m(y,z) = f_y(x) + f_y(z)$$

και $$\left|f_y(x) - f_y(z)\right| = |m(x,y) - m(y,z)| \leq m(x,z) = d_\kappa(x,z)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $suppf_y \equiv T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} (\subseteq X_k)$.

Για $x \in X_k \subseteq X_\infty$ και αφού $y \notin X_\infty$, είναι

$f_y(x) = m(x,y)$

$= min\{\rho(y, x_i) + d(x_i, x) : 1 \leq i \leq n\}$

$= inf\{\rho(y, x_i) + d(x_i, x) : 1 \leq i \leq n\}$

$= inf\{m(y, x_i) + d_k(x_i, x) : 1 \leq i \leq n\}$ (Λήμμα 5.2, σχέση (5.7))

$= inf\{f_y(x_i) + d_k(x_i, x) : 1 \leq i \leq n\}$

$= inf\{d_k(x,s) + f_y(s) : s \in T\}$

άρα, $suppf_y \equiv T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq (X_k, d_k)$ και τελικά

$$f_y|_{X_k} \in E(X_k, \omega) (\subseteq X_\infty).$$

Απομένει να δειχθεί ότι

$$d(f_y, x_i) = \rho(y, x_i) \ \ \forall x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq (X_k, d_k).$$

Πράγματι, με βάση την Παρατήρηση 3.5, είναι

$f_y \in E(X_k, \omega), x_i \in X_k \Longrightarrow f_y(x_i) = d(f_y, x_i)$

$\Longrightarrow m(y, x_i) = d(f_y, x_i)$ (ορισμός της $f_y$)

$\Longrightarrow \rho(y, x_i) = d(f_y, x_i)$ (Λήμμα 5.2). ■

## ΜΕΡΟΣ 6ο

## Ο χώρος $\mathbb{U}$ του Urysohn

**Ορισμός 6.1.** Ονομάζουμε *χώρο του Urysohn* κάθε Πολωνικό μετρικό χώρο που έχει την ιδιότητα Urysohn (βλ. Ορισμό 2.15)

Όπως θα δούμε παρακάτω (Θεώρημα 6.5 , Θεώρημα 6.6)

(1) υπάρχουν χώροι του Urysohn

(2) η διαμέριση των χώρων του Urysohn σε κλάσεις ισοδυναμίας, με σχέση ισοδυναμίας την ύπαρξη ισομετρίας μεταξύ δύο χώρων Urysohn, αποτελείται από μία και μόνον κλάση δηλαδή,

*ο χώρος του Urysohn είναι μοναδικός ως προς τις ισομετρίες*

και ως εκ τούτου, για το μοναδικό αυτόν χώρο υιοθετούμε το σύμβολο $\mathbb{U}$ , αναφερόμενοι σε αυτόν ως «*ο χώρος* $\mathbb{U}$ *του Urysohn*» ή απλά «*ο χώρος* $\mathbb{U}$»

Επίσης, θα δείξουμε (Θεώρημα 6.9) ότι ο χώρος $\mathbb{U}$ χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητές του:

την *καθολικότητα* και την *υπερομοιογένεια* .

Η ύπαρξη του χώρου $\mathbb{U}$ οφείλεται στην δυνατότητα κατασκευής του χώρου $X_\infty$ (Μέρος 3ο – 4ο)και στο ότι ο διαχωρίσιμος $X_\infty$ έχει την ιδιότητα Urysohn (Μέρος 5ο), ιδιότητα που (γενικά) κληρονομείται στην πλήρωση των μετρικών χώρων (Θεώρημα 6.4).

Απαραίτητο, για την απόδειξη των παραπάνω, είναι το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 6.2.** *Έστω τα ξένα σύνολα* $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\{y\}$, $\{z\}$. *Θεωρούμε τα σύνολα* $T_y = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{y\}$, $T_z = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{z\}$ *εφοδιασμένα με μετρικές* $d_1$ και $d_2$, *αντίστοιχα ώστε,* $d_1|_{T\times T} = d_2|_{T\times T}$. *Τότε οι μετρικές* $d_1$ *και* $d_2$ *επεκτείνονται στο σύνολο* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ *σε μία μετρική* $d$ *με*

$$d(y,z) = max\{|d_1(y,x_i) - d_2(z,x_i)| : 1 \leq i \leq n\}$$

*Απόδειξη.*

Αρχικά, δείχνουμε ότι η απεικόνιση $d$ (που είναι καλά ορισμένη αφού το σύνολο $T$ είναι πεπερασμένο) επεκτείνει την $d_1$ ως απεικόνιση δηλαδή, ότι ισχύει $d|_{T_y \times T_y} = d_1$ (η απόδειξη για την $d_2$ είναι ανάλογη)

Πράγματι, αν $x_{i_1}, x_{i_2} \in T$ έχουμε

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) = max\{|d_1(x_{i_1}, x_i) - d_2(x_{i_2}, x_i)| : 1 \leq i \leq n\}$$

$$= max\{|d_1(x_{i_1}, x_i) - d_1(x_{i_2}, x_i)| : 1 \leq i \leq n\} \text{ (αφού } d_1|_{T\times T} = d_2|_{T\times T} \text{ )}$$

$$\leq max\{d_1(x_{i_1}, x_{i_2}) : 1 \leq i \leq n\} = d_1(x_{i_1}, x_{i_2}),$$

δηλαδή, $d(x_{i_1}, x_{i_2}) \leq d_1(x_{i_1}, x_{i_2})$. Παράλληλα όμως ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα αφού

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) = max\{|d_1(x_{i_1}, x_i) - d_2(x_{i_2}, x_i)| : 1 \leq i \leq n\}$$

$$\geq |d_1(x_{i_1}, x_i) - d_2(x_{i_2}, x_i)| \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

$$\geq d_1(x_{i_1}, x_{i_2}) \text{, διότι } 1 \leq i_2 \leq n.$$

Άρα $d(x_{i_1}, x_{i_2}) = d_1(x_{i_1}, x_{i_2})$, $x_{i_1}, x_{i_2} \in T$, και ακριβώς όμοια αποδεικνύεται ότι $d(x_i, y) = d_1(y, x_i)$.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι, η $d$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα και συγκεκριμένα αρκεί να ελέγξουμε, για κάθε $x_i \in T$, ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$d(y,z) \leq d(y,x_i) + d(x_i,z)$$

$$d(y,x_i) \leq d(y,z) + d(z,x_i)$$

$$d(z,x_i) \leq d(z,y) + d(y,x_i)$$

Η δεύτερη και τρίτη από τις παραπάνω ανισότητες ισχύουν άμεσα, αφού από τον ορισμό της $d$ έχουμε ότι,

$$d(z,y) \geq |d(y,x_i) - d(z,x_i)|.$$

Για την απόδειξη της πρώτης ανισότητας, έστω $x_k \in T$ το στοιχείο όπου επιτυγχάνεται το max, δηλαδή

$$d(z,y) = |d_1(y,x_k) - d_2(z,x_k)|.$$

Τότε, λόγω της $d_1|_{T\times T} = d_2|_{T\times T}$ και της τριγωνικής ανισότητας, για κάθε $1 \leq i \leq n$, είναι

$$\begin{aligned} d(z,y) &= |d_1(y,x_k) - d_2(z,x_k)| \\ &= \big|d_1(y,x_k) - d_1(x_i,x_k) - \big(d_2(z,x_k) - d_2(x_i,x_k)\big)\big| \\ &\leq |d_1(y,x_k) - d_1(x_i,x_k)| + |d_2(z,x_k) - d_2(x_i,x_k)| \\ &\leq d_1(y,x_i) + d_2(z,x_i) \\ &= d(y,x_i) + d(z,x_i) \quad \text{(διότι η } d \text{ επεκτείνει τις } d_1\text{ , } d_2\text{).} \ \blacksquare \end{aligned}$$

**Πρόταση 6.3.** *Η πλήρωση $\overline{X_\infty}$ του μετρικού χώρου $X_\infty$ είναι Πολωνικός μετρικός χώρος.*

*Απόδειξη.*

Ο μετρικός χώρος $X_\infty$ είναι διαχωρίσιμος (Πρόταση 5.1), επομένως η πλήρωσή του $\overline{X_\infty}$, ως επίσης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (Πρόταση 2.17 (2)), είναι Πολωνικός χώρος. ■

**Θεώρημα 6.4.** *Έστω $(M,d)$ μετρικός χώρος που έχει την ιδιότητα Urysohn. Τότε, η πλήρωση $\bar{M}$ του μετρικού χώρου $M$ έχει την ιδιότητα Urysohn.*

*Απόδειξη.*

Χάριν απλότητας συμβολίζουμε με $d$ και τη μετρική της πλήρωσης $\bar{M}$ του $(X,d)$. Για να δείξουμε ότι ο $\bar{M}$ έχει την ιδιότητα Urysohn (Ορισμός 2.15) αν (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3) $(X,\rho)$πεπερασμένος μετρικός χώρος και $T$ τυχαίο πεπερασμένο υποσύνολο του $T$, θεωρούμε το $T$ ως (ισομετρικά εμφυτευμένο) υποσύνολο $T=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq\bar{M}$ στον $\bar{M}$ , σημείο $y\in X\backslash\bar{M}$ και μετρικό χώρο $(Y,\rho)$ όπου $Y=\{x_1,x_2,\dots,x_n,y\}$ με $\rho|_{T\times T}=d$ και αρκεί να υπάρχει ένα $y'\in\bar{M}$ , τέτοιο ώστε

$$d(y',x_k)=\rho(y,x_k)\quad,\quad 1\le k\le n \tag{6.1}$$

[ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ $y'\in\bar{X}$ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (6.1) ]

Η ύπαρξη του $y'\in\bar{M}$ ώστε να ισχύει η σχέση (6.1) θα προκύψει από την απόδειξη των σχέσεων (6.2) και (6.3) που ακολουθούν.

Έστω $i=1,2,\dots$. Για κάθε $x_k$, $1\le k\le n$, θα ορίσουμε δύο ακολουθίες $\left(x_k^i\right)_i\in M$ και $\left(y^i\right)_i\in M$ με τις ιδιότητες

$$\rho(y,x_k)-\frac{1}{2^i}<d\left(y^i,x_k^i\right)<\rho(y,x_k)+\frac{1}{2^i} \tag{6.2}$$

$$d(y^i, y^{i+1}) < \frac{9}{2^{i+1}} \qquad (6.3)$$

Τότε, από τη σχέση (6.3) θα προκύψει ότι η ακολουθία $(y^i)_i \in M$ είναι ακολουθία Cauchy άρα θα συγκλίνει σε ένα $y' \in \bar{M}$ και από τη σχέση (6.2) (μέσω του κριτηρίου παρεμβολής) ότι

$$d(y', x_k) = \lim_i d(y^i, x_k^i) = \rho(y, x_k) \ , \ \ 1 \leq k \leq n$$

οπότε η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί.

[*Κατασκευή της ακολουθίας* $(x_k^i)_i \in M$]

Για κάθε $x_k \in T$ και για κάθε $i$, στη ανοικτή περιοχή του $M$ με κέντρο $x_k$ και ακτίνα $\frac{1}{2^i}$ επιλέγουμε ένα στοιχείο $x_k^i$, δηλαδή θεωρούμε στοιχεία $x_k^i \in M$ ώστε

$$d(x_k, x_k^i) < \frac{1}{2^i} \qquad (6.4)$$

Μία συνέπεια της σχέσης (6.4) που θα μας χρησιμεύσει παρακάτω είναι η ανισότητα

$$d(x_k^i, x_k^{i+1}) < \frac{1}{2^{i-1}} \qquad (6.4\alpha)$$

[πράγματι, $d(x_k^i, x_k^{i+1}) \leq d(x_k^i, x_k) + d(x_k, x_k^{i+1}) < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{3}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^{i-1}}$ ].

[*Κατασκευή της ακολουθίας* $(y^i)_i \in M$]

Για την κατασκευή του πρώτου όρου $y^1$ της ακολουθίας $(y^i)_i \in M$ θεωρούμε τους θετικούς αριθμούς $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ με

$$\rho(y, x_k) - \frac{1}{2} \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \rho(y, x_k) + \frac{1}{2}$$

και τις σφαίρες $S(x_k^1,\varepsilon_1)$, $S(x_k^1,\varepsilon_2)$. Προφανώς $S(x_k^1,\varepsilon_1)\subseteq S(x_k^1,\varepsilon_2)$. Θεωρούμε $y^1\in S(x_k^1,\varepsilon_2)\backslash S(x_k^1,\varepsilon_1)$ οπότε

$$\rho(y,x_k)-\frac{1}{2^1}\leq d(y^1,x_k^1)\leq \rho(y,x_k)+\frac{1}{2^1}$$

και το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας $\left(y^i\right)_i$ έχει κατασκευαστεί.

Για να κατασκευάσουμε τους επόμενους όρους της ακολουθίας χρειαζόμαστε τον ισχυρισμούς που ακολουθούν παρακάτω (σχέσεις (6.8), (6.9)).

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.2 για $Z=\bar{M}$. Οπότε, έστω η μετρική $m$ στον $\bar{M}\cup\{y\}$ με

$$m(x,y)=min_{1\leq m\leq n}\{\rho(y,x_m)+d(x_m,x)\}\quad ,x\in\bar{M} \tag{6.5}$$

$$m(x,z)=d(x,z)\ \ ,x\in\bar{M},z\in\bar{M} \tag{6.6}$$

$$m(x_m,y)=\rho(x_m,y)\ \ \forall x_m\in T \tag{6.7}$$

<u>*Ισχυρισμός Α*</u>

$$\rho(x_k,y)-\frac{1}{2^{i+1}}<m\left(x_k^{i+1},y\right)<\rho(x_k,y)+\frac{1}{2^{i+1}} \tag{6.8}$$

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (6.4) έως και (6.7) για $x=x_k^{i+1}$ :

$$m\left(x_k^{i+1},y\right)=min_m\left\{\rho(y,x_m)+d\left(x_m,x_k^{i+1}\right)\right\}\leq\rho(y,x_k)+d\left(x_k,x_k^{i+1}\right)$$

$$\Rightarrow m\left(x_k^{i+1},y\right)\leq\rho(y,x_k)+d\left(x_k,x_k^{i+1}\right)<\rho(y,x_k)+\frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\Rightarrow m\left(x_k^{i+1},y\right)<\rho(y,x_k)+\frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\Rightarrow m(x_k,y)-m\left(x_k^{i+1},x_k\right)\leq m\left(x_k^{i+1},y\right)<\rho(y,x_k)+\frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\Rightarrow \rho(x_k, y) - d\left(x_k^{i+1}, x_k\right) \leq m\left(x_k^{i+1}, y\right) \leq \rho(y, x_k) + \frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\Rightarrow \rho(x_k, y) - \frac{1}{2^{i+1}} < \rho(x_k, y) - d\left(x_k^{i+1}, x_k\right) \leq m\left(x_k^{i+1}, y\right) \leq \rho(y, x_k) + \frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\Rightarrow \rho(x_k, y) - \frac{1}{2^{i+1}} < m\left(x_k^{i+1}, y\right) < \rho(x_k, y) + \frac{1}{2^{i+1}}$$

και ο ισχυρισμός Α έχει αποδειχθεί.

*Ισχυρισμός Β*

$$\rho(x_k, y) - \frac{1}{2^{i-2}} < d\left(y^i, x_k^{i+1}\right) < \rho(x_k, y) + \frac{1}{2^{i-2}} \qquad (6.9)$$

Εφαρμόζουμε τη τριγωνική ανισότητα

$$d\left(y^i, x_k^i\right) - d\left(x_k^i, x_k^{i+1}\right) \leq d\left(y^i, x_k^{i+1}\right) \leq d\left(y^i, x_k^i\right) + d\left(x_k^i, x_k^{i+1}\right)$$

και λόγω των σχέσεων (6.2), (6.4α),

$$\rho(x_k, y) - \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i-1}} < d\left(y^i, x_k^i\right) - d\left(x_k^i, x_k^{i+1}\right),$$

$$d\left(y^i, x_k^i\right) + d\left(x_k^i, x_k^{i+1}\right) < \rho(x_k, y) + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}}$$

οπότε

$$\rho(x_k, y) - \frac{3}{2^i} < d\left(y^i, x_k^{i+1}\right) < \rho(x_k, y) + \frac{3}{2^i}$$

ή $$\rho(x_k, y) - \frac{1}{2^{i-2}} < d\left(y^i, x_k^{i+1}\right) < \rho(x_k, y) + \frac{1}{2^{i-2}}$$

και ο ισχυρισμός Β έχει αποδειχθεί.

Συνδυάζοντας τους ισχυρισμούς A και B ώστε να δημιουργηθεί η ποσότητα $m(x_k^{i+1}, y) - d(y^i, x_k^{i+1})$ έχουμε

$$-\frac{9}{2^{i+1}} = -\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2^{i-2}} < m(x_k^{i+1}, y) - d(y^i, x_k^{i+1}) < \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i-2}} = \frac{9}{2^{i+1}}$$

και τελικά

$$\left|m(x_k^{i+1}, y) - d(y^i, x_k^{i+1})\right| < \frac{9}{2^{i+1}} \tag{6.10}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουν κατασκευασθεί οι όροι $y^1, y^2,\ldots, y^i$ της ακολουθίας $\left(y^i\right)_i$ που ικανοποιούν τη σχέση (6.2) και περιγράφουμε το επαγωγικό βήμα για τον ορισμό του $y^{i+1}$ ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (6.2) και (6.3).

Ορίζουμε στο σύνολο $S = \{x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \ldots, x_k^{i+1}, y, y^i\}$ μετρική $s$, με

$$s(y, y^i) = max\{\left|m(x_k^{i+1}, y) - d(x_k^{i+1}, y^i)\right| : 1 \leq k \leq n\}$$

$s(z, y) = m(z, y)$ και $s(z, y^i) = d(z, y^i) \quad , z \in \bar{X}$

που επεκτείνει τις μετρικές $m$ και $d$ στο σύνολο $\bar{M} \cup \{y\}$ (Λήμμα 6.2). Τότε, λόγω των σχέσεων (6.8) και (6.10), έχουμε

$$\rho(x_k, y) - \frac{1}{2^{i+1}} < s(x_k^{i+1}, y) < \rho(x_k, y) + \frac{1}{2^{i+1}} \tag{6.11}$$

$$s(y, y^i) < \frac{9}{2^{i+1}} \tag{6.12}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα Urysohn του $M$ για τον πεπερασμένο μετρικό χώρο $(S, s)$ εξασφαλίζουμε την ύπαρξη σημείου $y^{i+1} \in M$ με

$$d(y^{i+1}, x_k^{i+1}) = s(y, x_k^{i+1}) \tag{6.13}$$

$$d(y^{i+1}, y^i) = s(y, y^i) \tag{6.14}$$

και οι σχέσεις (6.11), (6.12), λόγω των σχέσεων (6.13), (6.14), παίρνουν τη μορφή

$\rho(x_k, y) - \frac{1}{2^{i+1}} < d\left(y^{i+1}, x_k^{i+1}\right) < \rho(x_k, y) + \frac{1}{2^{i+1}}$

$d\left(y^{i+1}, x_k^{i+1}\right) < \frac{9}{2^{i+1}},$

γεγονός που ολοκληρώνει τη διαδικασία περιγραφής του επαγωγικού βήματος αλλά και την απόδειξη του θεωρήματος. ■

Από την Πρόταση 6.3 και το Θεώρημα 6.5 προκύπτει, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1, το επόμενο κεντρικό αποτέλεσμα, που μας βεβαιώνει ότι, υπάρχει ένας τουλάχιστον χώρος του Urysohn.

**Θεώρημα 6.5.** *Η πλήρωση $\overline{X_\infty}$ του μετρικού χώρου $X_\infty$ είναι χώρος του Urysohn.*

**Θεώρημα 6.6.** *Αν $U_1$ , $U_2$ είναι δύο Πολωνικοί μετρικοί χώροι που έχουν την ιδιότητα Urysohn τότε, οι $U_1$ , $U_2$ είναι ισομετρικοί δηλαδή,*

*υπάρχει $F: U_1 \longrightarrow U_2$ ισομετρία επί.*

*Άρα, ο χώρος $\mathbb{U} = \overline{X_\infty}$ του Urysohn είναι μοναδικός ως προς τις ισομετρίες* (Θεώρημα 6.5).

*Απόδειξη.*

Οι χώροι $U_1$ , $U_2$ είναι διαχωρίσιμοι και έστω $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ακολουθίες πυκνές στους $U_1$ , $U_2$ ,αντίστοιχα. Θα ορίσουμε επαγωγικά δύο ακολουθίες $\{y'_n\}$, $\{x'_n\}$ στους $U_1$ , $U_2$ ,αντίστοιχα ώστε η απεικόνιση

$$f: \{x_n\} \cup \{y'_n\} \longrightarrow \{x'_n\} \cup \{y_n\}$$

με $f(x_n) = x'_n$ και $f(y'_n) = y_n$ να είναι ισομετρία. Τότε, επειδή η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι πυκνή στον $U_1$, η $f$ επεκτείνεται σε μια ισομετρική εμφύτευση

$F\colon U_1 \longrightarrow U_2$ του $U_1$ στον $U_2$ (Πρόταση 2.18). Η $F$ ως ισομετρία μεταφέρει πλήρεις χώρους σε πλήρεις χώρους (Πρόταση 2.17(1)(β)) και αφού ο $U_2$ είναι πλήρης, το $F(U_1)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $U_2$ ((Πρόταση 2.17(1)(α))) δηλαδή, $F(U_1) = \overline{F(U_1)}$. Η ισομετρία $F$ θα είναι συνάρτηση επί, διότι

$$U_2 \supseteq F(U_1) = \overline{F(U_1)} \supseteq \overline{F(\{y'_n\})} = \overline{\{y_n\}} = U_2 \Longrightarrow U_2 = F(U_1).$$

Θα ορίσουμε τώρα τους πρώτους όρους $x'_1$ , $y'_1$ των παραπάνω ακολουθιών και κατόπιν θα περιγράψουμε το επαγωγικό βήμα για τον ορισμό των υπολοίπων όρων.

Θεωρούμε μία (οποιαδήποτε) συνάρτηση $\varphi\colon \{x_1\} \longrightarrow U_2$ , η οποία είναι (με τετριμμένο τρόπο) ισομετρία και θέτουμε $\varphi(x_1) = x'_1$. Θεωρούμε το σύνολο $\{x'_1, y_1\}$ και την ισομετρία $\varphi^{-1}\colon \{x'_1\} \longrightarrow \{x_1\} \subseteq U_1$. Ο $U_2$ έχει την ιδιότητα Urysohn άρα, η $\varphi^{-1}$ επεκτείνεται σε μία ισομετρία $\varphi^{-1}\colon \{x'_1, y_1\} \longrightarrow \{x_1, y'_1\} \subseteq U_1$ (για την οποία διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό) οπότε, $\varphi(y'_1) = y_1$. Το επαγωγικό βήμα βασίζεται ακριβώς στην ίδια λογική.

Έστω ότι έχουμε ορίσει τα $y'_1, y'_2, \dots, y'_n \in U_1$ και τα $x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in U_2$ και τη μεταξύ τους ισομετρία $f$ ώστε

$f(x_i) = x'_i$ και $f(y'_i) = y_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n.$

Λόγω της ιδιότητας Urysohn του $U_2$, υπάρχει $x'_{n+1} \in U_2$ ώστε η $f$ να επεκτείνεται σε ισομετρία $f$ με $f(x_{n+1}) = x'_{n+1}$. Τότε η αντίστροφή της $f^{-1}$ με

$f^{-1}(x'_i) = x_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n+1 \quad$ και $\quad f^{-1}(y_i) = y'_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$

είναι επίσης ισομετρία και όμοια, λόγω της ιδιότητας Urysohn του $U_1$, εξασφαλίζεται το στοιχείο $y'_{n+1} \in U_1$ και η επέκταση της $f^{-1}$. ■

**Θεώρημα 6.7.** *Ο χώρος $\mathbb{U}$ του Urysohn είναι καθολικός Πολωνικός μετρικός χώρος δηλαδή, κάθε άλλος Πολωνικός μετρικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά στον $\mathbb{U}$.*

*Απόδειξη.*

Έστω Πολωνικός μετρικός χώρος $X$ και $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ ακολουθίες πυκνές στους $X$ και $\mathbb{U}$, αντίστοιχα. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.6, θα ορίσουμε επαγωγικά μία ακολουθία $\{y'_n\}$ στον $\mathbb{U}$ ώστε η $f: \{y_n\} \longrightarrow \{y'_n\}$ να είναι ισομετρία, οπότε η επέκτασή της σε μία ισομετρική εμφύτευση $F: X \longrightarrow \mathbb{U}$ ολοκληρώνει την απόδειξη.

Επιλέγουμε τυχαίο στοιχείο $y'_1 \in \mathbb{U}$. Αν έχουμε ορίσει τα $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n \in \mathbb{U}$ ώστε η $f: \{y_n\} \longrightarrow \{y'_n\}$ με $f(y_i) = y'_i$ , $1 \leq i \leq n$ να είναι ισομετρία, από την ιδιότητα Urysohn του $\mathbb{U}$, υπάρχει $y'_{n+1} \in \mathbb{U}$ ώστε η $f$ να επεκτείνεται σε ισομετρία $f$ με $f(y_{n+1}) = y'_{n+1}$. ■

**Πρόταση 6.8.** *Ο χώρος $\mathbb{U}$ του Urysohn είναι υπερομογενής χώρος δηλαδή, κάθε ισομετρία $f: X \longrightarrow Y$ μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πεπερασμένων υποσυνόλων $X$, $Y$ του $\mathbb{U}$, επεκτείνεται σε μία ισομετρία επί $F: \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ του χώρου $\mathbb{U}$.*

*Απόδειξη.*

Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ , $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ με $f(x_i) = y_i$ , $1 \leq i \leq n$ και $\{u_n\}$ ακολουθία πυκνή στον $\mathbb{U}$. Όπως και πριν, θα ορίσουμε επαγωγικά δύο ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ στον $\mathbb{U}$ και θα θεωρήσουμε την επέκτασή της με $f(u_n) = a_n$ και $f(b_n) = u_n$ ώστε να αποτελεί και πάλι ισομετρία. Τότε, με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό που αναπτύξαμε στο Θεώρημα 6.6, η $f$ επεκτείνεται σε μια ισομετρία επί $F: \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$. ■

Οι δύο παραπάνω ιδιότητες του χώρου $\mathbb{U}$ (Θεώρημα 6.7, Πρόταση 6.8) τον χαρακτηρίζουν ως τον μοναδικό (ως προς τις ισομετρίες) Πολωνικό μετρικό χώρο πού είναι καθολικός και υπερομογενής. Σχετικό είναι το επόμενο.

**Θεώρημα 6.9.** *Έστω Πολωνικός μετρικός χώρος $(P,d)$ ,ο οποίος είναι καθολικός και υπερομογενής. Τότε, ο χώρος $P$ ταυτίζεται ισομετρικά με τον χώρο $\mathbb{U}$ του Urysohn.*

*Απόδειξη.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1 και το Θεώρημα 6.6, αρκεί να δείξουμε ότι ο $P$ έχει την ιδιότητα Urysohn.

Ενεργώντας παρόμοια με προηγούμενες περιπτώσεις (όπως για παράδειγμα στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.4), θεωρούμε πεπερασμένο μετρικό χώρο $(X,\rho)$, πεπερασμένο υποσύνολο του $X$ ως (ισομετρικά εμφυτευμένο) σύνολο $T=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq P$, σημείο $y\in X\backslash P$ και μετρικό χώρο $(Y,\rho)$ όπου

$$Y=\{x_1,x_2,\dots,x_n,y\} \quad \text{με} \quad \rho|_{T\times T}=d \tag{6.15}$$

και αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα $y'\in P$ , τέτοιο ώστε

$$d(y',x_k)=\rho(y,x_k) \quad , \quad 1\leq k\leq n \tag{6.16}$$

Ο μετρικός χώρος $(Y,\rho)$ ως πεπερασμένος είναι (κατά τετριμμένο τρόπο) διαχωρίσιμος και πλήρης, άρα Πολωνικός χώρος. Οπότε (Θεώρημα 6.7) υπάρχει ισομετρία $g:Y\longrightarrow g(Y)\subseteq P$ από την οποία (και λόγω της σχέσης (6.15)), για $1\leq k,m\leq n$, έχουμε

$$\rho(x_k,x_m)=d\big(g(x_k),g(x_m)\big) \quad , \quad \rho(x_k,y)=d\big(g(x_k),g(y)\big) \tag{6.17}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$h:\{g(x_1),g(x_2),\dots,g(x_n)\}\longrightarrow\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$$

με $\quad h\big(g(x_i)\big)=x_i$ ,

η οποία είναι μία ισομετρία μεταξύ δύο πεπερασμένων υποσυνόλων του χώρου $P$ καθώς, λόγω της σχέσης (6.17) είναι

$$d\left(h\big(g(x_k)\big), h\big(g(x_m)\big)\right) = d(x_k, x_m) = d\big(g(x_k), g(x_m)\big).$$

Εφ’ όσον ο χώρος $P$ είναι υπερομογενής, η $h$ επεκτείνεται σε μία ισομετρία $H: P \longrightarrow P$ επί του $P$ που σημαίνει ότι, για $1 \leq k \leq n$, ισχύει

$$H\big(g(x_k)\big) = h\big(g(x_k)\big) = x_k.$$

Θέτουμε $y^{'} = H\big(g(y)\big)$ και από τη σχέση (6.17) έχουμε

$$d(y^{'}, x_k) = d\left(H\big(g(y)\big), H\big(g(x_k)\big)\right) = d\big(g(y), g(x_k)\big) = \rho(x_k, y),$$

που αποδεικνύει τη σχέση (6.16) και ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

## Βιβλιογραφία


[1] Αρβανιτάκης Α., Το πρόβλημα της ισομετρίας σε Πολωνικούς χώρους, Διπλωματική εργασία, $\mu \prod \lambda \forall$, Αθήνα 2001

[2] Αργυρός Σ., *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*, (Δεύτερη έκδοση) Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Ιανουάριος 2003

[3] Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., *Απειροστικός Λογισμός* Τόμος Ι, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1992

[4] Dugundji J., *Topology*, ALLYN AND BACON, INC., BOSTON 1974

[5] Heinonen J., *Geometric embeddings of metric spaces,* Lectures in the Finnish Graduate School of Mathematics, University of Jyväskylä, January 2003

[6] Hušek M., *Urysohn universal space, its development and Hausdorff's approach,* Topology and its Applications, Volume155,Issue 14, 15 August 2008, Pages 1493-1501, Special Issue: Workshop on the Urysohn space

[7] Melleray J., *On the geometry of Urysohn's universal metric space*, Equipe d' Analyse Fonctionnelle, Université Paris 6, 2005

[8] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk./Mathematicians/Urysohn.html

**Σύμβολα**

**Ευρετήριο όρων**