Μέτρηση και Διαχείριση κινδύνου

Αφεντάκης Ιωάννης Κωνσταντίνος

Επιβλέπων καθηγητής : Λουλάκης Μιχάλης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Απρίλιος 2014

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μια εισαγωγή στην Διαχείριση του κινδύνου απο την σκοπιά της Τράπεζας. Μελετώνται τα μέτρα κινδύνου VaR (Value at Risk) και CVaR (Conditional Value at Risk), οι ιδιότητες και τα μειονεκτήματά τους. Επίσης παρουσιάζονται κάποια μοντέλα εκτίμησης της μεταβλητότητας (volatility) ενός χαρτοφυλακίου. Ακόμα υπολογίζεται με την μέθοδο διασποράς-συνδιασποράς, την μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης, και την μέθοδο Monte Carlo, ο κίνδυνος τριών χαρτοφυλακίων (δυο απλών και ενός σύνθετου). Στις εφαρμογές αυτές γίνεται Επανέλεγχος (Backtesting), Έλεγχος Πίεσης (Stresstesting), και ανάλυση των αποτελεσμάτων με παρατηρήσεις και συμπεράσματα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαχείριση Τραπεζικού κινδύνου

Η τράπεζα είναι μια οικονομική επιχείρηση που θεωρείται ως μεσάζοντας μεταξύ κεφαλαιούχων, που ζητούν να επενδύσουν κεφάλαια, και εκείνων οι οποίοι έχουν ανάγκη δανεισμού για τη χρηματοδότηση των δραστηριοτήτων τους.

Η λειτουργία της τράπεζας μπορεί να αναπαρασταθεί σχηματικά ως εξής :

Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση της λειτουργίας της τράπεζας

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα (1.1), μπορούμε να ταυτίσουμε την λειτουργία της τράπεζας με μία εξίσωση τις οποίας το πρώτο μέλος περιέχει την Παθητική στάση (liabilities) και το Κεφάλαιο (Capital) και το άλλο μέλος την Ενεργητική στάση (assets). Πιο συγκεκριμένα η τράπεζα χρησιμοποιεί τις καταθέσεις των καταναλωτών, τα δάνεια που παίρνει απο άλλες τράπεζες ή οργανισμούς κ.λ.π. , προκειμένου να δώσει δάνεια στους πελάτες της και να προβεί σε επενδύσεις. Η παραπάνω διαδικασία πρσγματοποιείται με περισσότερη σιγουριά και ασφάλεια λόγω της ύπαρξης του Κεφαλαίου .

Έστω για παράδειγμα οτι η τράπεζα θέλει να κάνει μία επένδυση σε κάποια χρηματοοικονομικα προιόντα. Για να τα αγοράσει θα χρησιμοποιήσει τις καταθέσεις κάποιων καταναλωτών. Αν η επέδυση αυτή δεν αποφέρει κέρδος στην τράπεζα , το αποτέλεσμα θα είναι να έχουν χαθεί οι αρχικές καταθέσεις των καταναλωτών. Έτσι η τράπεζα είναι εκτεθημένη. Προκειμένου λοιπόν να μην βρεθεί σε μια τέτοια θέση , υπάρχει το Κεφάλαιο απο το οποίο ουσιαστικά για κάθε μελλοντική επένδυση δεσμευεται ένα μέρος του ως υποθήκη.

Μπορούμε να εντοπίσουμε δυο βασικούς κινδύνους για την τράπεζα , οι οποίοι πηγάζουν απο την παραπάνω διαδικασία. Τον κίνδυνο της ρευστότητας και τον κίνδυνο του κεφαλαίου. Ο πρώτος αναφέρεται στην ρευστότητα με την έννοια οτι αν γίνει ταυτόχρονη ανάλυψη απο όλους τους καταθέτες, θα υπάρξει τεράστιο πρόβλημα αφου προφανώς η τράπεζα δεν έχει όλα αυτά τα κεφάλαια διαθέσιμα . Αυτός ο κίνδυνος είναι και ο πιο ακαριαίος για την τράπεζα.

Ο δεύτερος (όπως αναφέρει και το όνομά του) αφορά το Κεφάλαιο της τράπεζας. Το μέσο δηλαδή που εξασφαλίζει ασφάλεια στις πιθανές δράσεις της Ενεργητικής στάσης. Σαν κινδύνους για το κεφάλαιο της τράπεζας μπορούμε να αναφέρουμε το "κούρεμα" των ομολόγων του δημοσίου, την μη αποπληρωμή δανείων απο καταναλωτές κ.λ.π.

1.1 Διαχείριση κινδύνου

Η Διαχείριση Κινδύνου είναι το σύνολο των στρατηγικών διαδικασιών με σκοπό να περιοριστεί ο κίνδυνος. Ένας ορισμός που έδωσε ο Vaughan το 1997 είναι ο εξής :

"Διαχείριση Κινδύνου είναι η επιστημονική προσέγγιση στην εξέταση των κινδύνων, για την πρόγνωση των πιθανών τυχαίων απωλειών και τον σχεδιασμό και την εφαρμογή διαδικασιών που ελαχιστοποούν την απώλεια."

Στόχοι της Διαχείρισης Κινδύνου είναι η βελτίωση της χρηματοοικονομικής απόδοσης ενός οργανισμού και η εγγύηση οτι δεν θα υποστεί υπερβολικές απώλειες.

Τα στάδια της Διαχείριση Κινδύνου είναι τα εξής :

- Αναγνώριση και κατανόηση κινδύνων στους οποίους εκτίθεται ο οργανισμός
- Μέτρηση κινδύνων
- Παρακολούθηση και έλεγχος των κινδύνων
- Μετάδοση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Οι βασικοί κίνδυνοι είναι τρείς όπως φαίνεται και στο Σχήμα (1.2). Αυτοί είναι ο Πιστωτικός κίνδυνος (Credit Risk), ο κίνδυνος Αγοράς (Market Risk) και ο Λειτουργικός κίνδυνος (Operational Risk).

Ο Πιστωτικός κίνδυνος αφορά την πιθανότητα αδυναμίας ανάκτησης ενός στοιχείου του ενεργητικού, λόγω αδυναμίας του οφειλέτη ή λόγω καθυστερήσεων αποπληρωμής

Σχήμα 1.2: Τρείς βασικοί κίνδυνοι

ενός δανείου. Ο κίνδυνος απο την χορήγηση ενός δανείου αυξάνεται αν όλα τα οικονομικά δεδομένα ή κάποιες εταιρείες αξιολόγισης της πιστοληπτικής επιφάνειας προτείνουν την υποβάθμιση της φερεγγυότητας του πιστούχου.

Ο Λειτουργικός κίνδυνος αναφέρεται σε όλους τους κινδύνους που σχετίζονται με την ορθή λειτουργία της τράπεζας. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές απάτες, τις ζημίες σε περιουσιακά στοιχεία, τον κίνδυνο των συστημάτων (καθυστεριμένα σχέδια αποτυχημένη λειτουργια συστημάτων) , τον κίνδυνο των μεταφορών (λανθασμένοι ή αποτυχημένοι διακανονισμοί), την απώλεια ελέγχου (αδυναμία ελέγχου θέσεων στην αγορά που δημιουργούνται σε μικρά εγχώρια καταστήματα) κ.α.

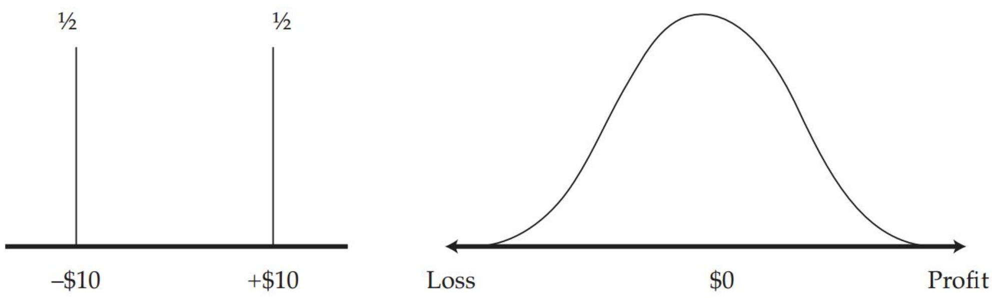
Τέλος αναφέραμε και τον κίνδυνο της αγοράς με τον οποίο και θα ασχοληθούμε και περισσότερο στην συνέχεια. Ο κίνδυνος αυτός αντανακλάται στην μεταβλητότητα της αξίας του χαρτοφυλακίου τίτλων, η οποία οφείλεται στις αλλαγές των αγοραίων τιμών των τίτλων του ενεργητικού. Είναι δηλαδή ο κίνδυνος απώλειας απο αλλαγές στην αξία των εμπορευμέτων - προιόντων. Παράγοντες κινδύνου αποτελούν η αλλαγή στα επιτόκια, η αλλαγή στό συνάλλαγμα κ.λ.π.

1.2 Εισαγωγή στην έννοια του κινδύνου

Η έννοια του κινδύνου είναι πολύ σύνθετη, αλλά στον τομέα των χρηματοοικονομικών μπορούμε να θεωρήσουμε τον κίνδυνο ως την πιθανότητα οι τελικές αποδόσεις (profit & loss) να διαφέρουν από τις αναμενόμενες. Ο κίνδυνος συνδέεται άμεσα με την έννοια της αβεβαιότητας και αυτό οφείλεται στο γεγονός οτι όλες οι οικονομικές πράξεις χαρακτηρίζονται απο μεταβλητότητα και αστάθεια όσον αφορά τις πιθανές μελλοντικές τιμές τους.

Ο κίνδυνος μετριέται με βάση την κατανομή των μελλοντικών αποδόσεων. Η κατανομή (ή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) περιγράφει την πιθανότητα των διαφορετικών δυνατών αποτελεσμάτων.

Σαν παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε πρώτον την ρίψη ενός κέρματος (κέρδος 10 ευρώ σε περίπτωση που έρθει κορώνα, ζημία 10 ευρώ αν έρθει γράμματα) και δεύτερον μια υποθετική καμπύλη αποδόσεων με πολλά πιθανά αποτελέσματα. Γραφικά μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις δυο κατανομές ως εξής:



Σχήμα 1.3: Αποδόσεις της ρίψης ενός κέρματος και μιας υποθετικής περίπτωσης οπου οι αποδόσεις ακολουθόυν κανονική κατανομή

Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τα δυο πιθανά αποτελέσματα από την ρίψη του ζαριού, το καθένα από αυτά με πιθανότητα $1/2$. Είναι μια πολύ απλή κατανομή γιατί έχει μόνο δυο πιθανά αποτελέσματα, και τα δυο με την ίδια πιθανότητα. Στο δεύτερο σχήμα βλέπουμε την απόδοση να ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν κάποια μεγάλα κέρδη, κάποιες μεγάλες ζημίες, αλλά οι συνήθεις αποδόσεις κινούνται γύρω από το μηδέν.

Η συνάρτηση κατανομής περιέχει όλη την πληροφορία για τα πιθανά τυχαία αποτελέσματα. Η μέτρηση του κινδύνου βασίζεται κατά κύριο λόγο στην κατανόηση της κατανομής των αποδόσεων (P & L). Όσο περισσότερα γνωρίζουμε για αυτή την κατανομή τόσο περισσότερα ξέρουμε για τον κίνδυνο των διάφορων καταστάσεων. Δεν ξέρουμε τι κέρδος θα έχουμε αύριο (το μέλλον είναι πάντα άγνωστο), αλλά μπορούμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να έχουμε ένα συγκεκριμένο κέρδος. Η γνώση της κατανομής των αποδόσεων δεν αναιρεί την αβεβαιότητα του μέλλοντος, αλλά θέτει κάποια όρια.

Η γνώση των κατανομών όπως για παράδειγμα στο παραπάνω σχήμα, δεν είναι το μόνο που χρειαζόμαστε για την μέτρηση του κινδύνου, είναι όμως πολύ σημαντική. Σε πολλές περιπτώσεις ο προσδιορισμός της κατανομής είναι ένα δύσκολο πρόβλημα.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με διάφορα προιόντα (σε αντίθεση με την περίπτωση της ρίψης ενός κέρματος), μπορούμε να κάνουμε κοντινές προβλέψεις για τις πιθανότητες των αποδόσεων αλλά ποτέ δεν θα είμαστε απόλυτα σίγουροι.

Από στατιστικής άποψης αυτό που θέλουμε να ξέρουμε μετρώντας τον κίνδυνο είναι μια τιμή, και την πιθανή διασκόρπιση γύρω από αυτή. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, την τιμή αυτή την έχουμε από τα μέτρα κινδύνου και την διασκόρπιση από τα διάφορα μοντέλα διακύμανσης.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα κινδύνου

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος των τελικών καταστάσεων, και $G = \{X | X : \Omega \to \mathbb{R}\}$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων του Ω. Το σύνολο G των τυχαίων μεταβλητών $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θεωρούμε οτι είναι το σύνολο των κινδύνων. Ορίζουμε τα μέτρα κινδύνου να είναι οι συναρτήσεις $\rho : G \to \mathbb{R}$.

Αν μια τέτοια συνάρτηση ρ είναι:

1. μονότονη (monotonous) :

$$X, Y \in G : X \leq Y \Longrightarrow \rho(Y) \leq \rho(X) \tag{2.1}$$

2. υποπροσθετική (subadditive) :

$$X, Y, X + Y \in G \Longrightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \tag{2.2}$$

3. θετικά ομογενής (positively homogeneous) :

$$X \in G, h > 0 \Longrightarrow \rho(hX) = h\rho(X) \tag{2.3}$$

4. μεταφραστικά αμετάβλητη (translational invariant) :

$$X \in G, a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a \tag{2.4}$$

όπου X,Y τυχαίες μεταβλητές των αποδόσεων αντίστοιχων χαρτοφυλακίων και $\rho(X)$ το μέτρο κινδύνου του υποκείμενου χαρτοφυλακίου, τότε ονομάζεται συνεπές μέτρο κινδύνου.

Το σημαντικότερο απο αυτά τα αξιώματα είναι το δεύτερο (subadditivity) που αποτελεί και την κυριότερη αδυναμία του VaR έναντι του CVaR όπως θα δούμε και στην συνέχεια. Η υποπροσθετικότητα επιτρέπει σε ένα χαρτοφυλάκιο που είναι σύνολο μικρότερων χαρτοφυλακίων να έχει κίνδυνο που είναι το πολύ ίσος με το άθροισμα των κινδύνων των επιμέρους χαρτοφυλακίων.

2.1 Αξία σε κίνδυνο - Value at Risk

Η "Αξία σε κίνδυνο" (VaR) είναι το πιο ευρέως διαδεδομένο μέτρο κινδύνου και χρησιμοποιείται τόσο απο διαχειριστές κεφαλαίων και άλλων εταιρικών πόρων όσο και απο χρηματοοικονομικούς οργανισμούς. Οι τράπεζες χρησιμοποιούν επίσης το VaR για να προσδιορίσουν το κεφάλαιο που πρέπει να υπάρχει , προκειμένου να εκτιθονται σε διάφορους κινδύνους.

Όταν ένας αναλυτής χρησιμοποιεί το μέτρο VaR , καταλήγει σε ένα συμπέρασμα της μορφής :

"Είμαστε α% σίγουροι οτι η απώλεια του χαρτοφυλακίου μας δεν θα υπερβεί τα V ευρώ τις επόμενες N μέρες."

Η μεταβλητή V είναι το VaR του χαρτοφυλακίου. Είναι δηλαδή μια συνάρτηση του χρόνου (N μέρες) και του επίπέδου εμπιστοσύνης (α%). Είναι το μέγεθος των απωλειών μέσα στις επόμενες μέρες, που θα υπερπεραστεί μόνο με πιθανότητα $(100 - \alpha)$% .

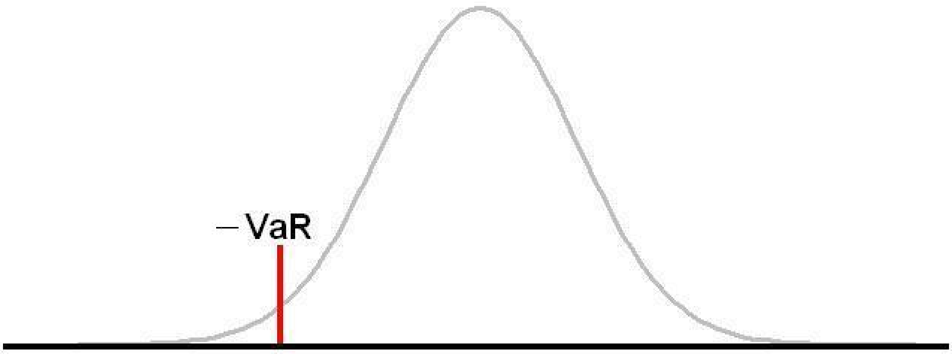
Όταν λοιπόν ο χρονικός ορίζοντας είναι N μέρες και ο συντελεστής εμπιστοσύνης είναι α% , το VaR αντιπροσωπεύει το $(100 - \alpha)$% ποσοστημόριο της κατανομής του κέρδους του χαρτοφυλακίου.Προφανώς όταν μιλάμε για κατανομή κέρδους , οι απώλειες θεωρούνται αρνητικό κέρδος και κατ' επέκταση το VaR αντιπροσωπεύει την αριστερή "ουρά" της κατανομής, όπως φαίνεται και στο Σχήμα (2.1).

Ορισμός 1

Έστω X τυχαία μεταβλητή και $\alpha \in [0, 1]$:

- το q λέγεται α - ποσοστημόριο αν :

$$P[X < q] \leq \alpha \leq P[X \leq q] \tag{2.5}$$



Σχήμα 2.1: το κέρδος του χαρτοφυλακίου ακολουθεί κανονική κατανομή

- το μεγαλύτερο α - ποσοστημόριο είναι το :

$$q_{\alpha}(X) = inf\{x|P[X \leq x] > \alpha\} \tag{2.6}$$

- το μικρότερο α - ποσοστημόριο είναι το :

$$q_{\alpha}^{-}(X) = inf\{x|P[X \leq x] \geq \alpha\} \tag{2.7}$$

Προφανώς ισχύει οτι $q_{\alpha}^{-} \leq q_{\alpha}$ και το q είναι α - ποσοστημόριο αν και μόνο αν $q_{\alpha}^{-} \leq q \leq q_{\alpha}$.

Ορισμός 2

Ορίζουμε λοιπόν το μέτρο VaR να είναι:
$VaR_{\alpha}(X) := -q_{\alpha}(X) = -inf\{x \mid P[X \leq x] > \alpha\} = inf\{x \mid P[X > x] \leq 1 - \alpha\}$

Ιδιότητες του μέτρου VaR

1.

$$X \geq 0 \Longrightarrow VaR_{\alpha}(X) \leq 0 \tag{2.8}$$

2.

$$X \geq Y \Longrightarrow VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y) \tag{2.9}$$

3.

$$VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X), \forall \lambda \geq 0 \tag{2.10}$$

4.

$$VaR_\alpha(X + k) = VaR_\alpha(X) - k, \forall k \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει οτι:
$VaR_\alpha(X + VaR_\alpha(X)) = 0$

Το μέτρο VaR όπως είδαμε έχει δυο παραμέτρους. Τον χρονικό ορίζοντα N, μετρούμενο σε μέρες, και το επίπεδο σημαντικότητας X. Στην πράξη οι αναλυτές υπολογίζουν το VaR για την επόμενη μέρα (δηλαδή για N= 1), και στην συνέχεια προκειμένου να το υπολογίσουν για περισσότερες μέρες χρησιμοποιούν τον τύπο :

$$N - dayVaR = 1 - dayVaR * \sqrt{N} \tag{2.12}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ακριβής ισότητα όταν οι ημερίσιες αποδόσεις του προιόντος προς μελέτη ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, διαφορετικά είναι μια προσέγγυση.

Μειονεκτήματα του μέτρου VaR

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως το μέτρο VaR δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (2.2) των συνεπών μέτρων κινδύνου.

Παράδειγμα

Έστω δυο θέσεις X_1, X_2 με :

$$X_i = \begin{cases} 1, & 50\% \\ -1, & 50\% \end{cases}$$

Μπορούμε να πούμε οτι το $VaR_{50\%}(X_i) = -1$. Έστω ακόμα οτι X_1, X_2 ανεξάρτητα, θεωρούμε την σύνθετη θέση :

$$X = \frac{X_1+X_2}{2} = \begin{cases} 1, & 25\% \\ 0, & 50\% \\ -1, & 25\% \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση $VaR_{50\%}(X) = 0$. Απο αυτό συμπεραίνουμε οτι θέση X έχει περισσότερο ρίσκο απο τις θέσεις X_1, X_2 πράγμα που προφανώς δεν ισχύει.

Το δεύτερο μειονέκτημα του μέτρου VaR είναι οτι δεν λαμβάνει υπόψιν πιθανές μεγάλες απώλειες.

Παράδειγμα

Θεωρούμε δυο θέσεις X_1, X_2 όπως φαίνονται παρακάτω :

$$X_1 = \begin{cases} 1, & 99\% \\ -1, & 1\% \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, & 99\% \\ -10^{10}, & 1\% \end{cases}$$

Όπως είναι προφανές και οι δυο θέσεις έχουν $VaR_{99\%}(X) = -1$.

Θα δούμε στην συνέχεια πώς αυτό το μειονέκτημα του VaR καλύπτεται από ένα άλλο μέτρο κινδύνου, το Conditional - VaR.

2.2 Conditional VaR ή Tail VaR ή Expected shortfall

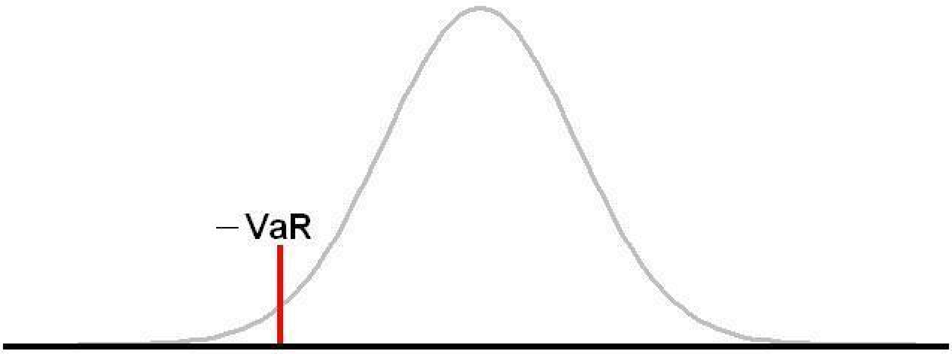
Όπως είπαμε και στην προηγούμενη παράγραφο το μέτρο VaR δεν λαμβάνει υπόψιν του πιθανές μεγάλες απώλειες. Πιο συγκεκριμένα τα χαρτοφυλάκια στο Σχήμα (2.2) και στο Σχήμα (2.3) έχουν το ίδιο VaR αλλά το δεύτερο έχει περισσότερο κίνδυνο, γιατι οι πιθανές απώλειες είναι μεγαλύτερες.

Αν λοιπόν το μέτρο VaR απαντάει στην ερώτηση :

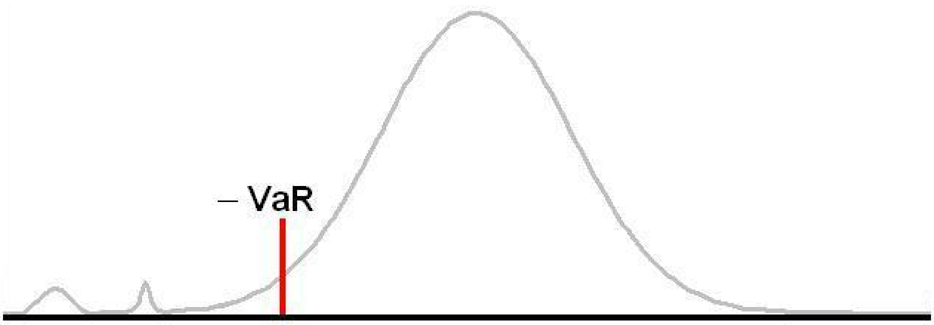
"Πόσο άσχημα μπορούν να πάνε τα πράγματα ?"

Η ερώτηση που απαντάει το CVaR είναι :

"Αν τα πράγματα πάνε άσχημα, πόσο υπολογίζεται να είναι η αναμενόμενη απώλεια ?"



Σχήμα 2.2:



Σχήμα 2.3:

Το CVaR είναι λοιπόν η αναμενόμενη ζημία (απώλεια) ενός χαρτοφυλακίου, δεδομένης της υπέρβασης της αξίας σε κίνδυνο (VaR).

Ορισμός 3

Ορίζουμε το μέτρο CVaR με συντελεστή εμπιστοσύνης α να είναι :
$CVaR_\alpha(X) := E[X|X < -VaR]$

Κεφάλαιο 3

Τρόποι εκτίμησης της μεταβλητότητας (volatility)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πώς χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα μπορούμε να προβλέψουμε τα μελλοντικά επίπεδα της αστάθειας (volatility). Όλα όσα θα μελετηθούν παρακάτω έχουν άμεση σχέση με τα μέτρα κινδύνου που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όπως θα δούμε και στην συνέχεια όταν υπολογίζουμε το Value at Risk μας ενδιαφέρει η τρέχουσα τιμή του volatility, η οποία βασίζεται σε ένα μικρό χρονικό διάστημα του παρελθόντος.

3.1 Η τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων

Έστω σ_n το volatility ενός προιόντος την n-οστή μέρα, όπως αυτό έχει υπολογιστεί στο τέλος της n-1 μέρας. Η διαδικασία για τον υπολογισμό του σ_n απο τα ιστορικά δεδομένα έχει ως εξής:

Έστω οτι η τιμή ενός προιόντος στο τέλος της μέρας i είναι S_i . Η μεταβλητή u_i ορίζεται να είναι η απόδοση του προιόντος την i μέρα (συγκεκριμένα απο την μέρα i-1 έως το τέλος της μέρας i) και δίνεται απο τον τύπο :

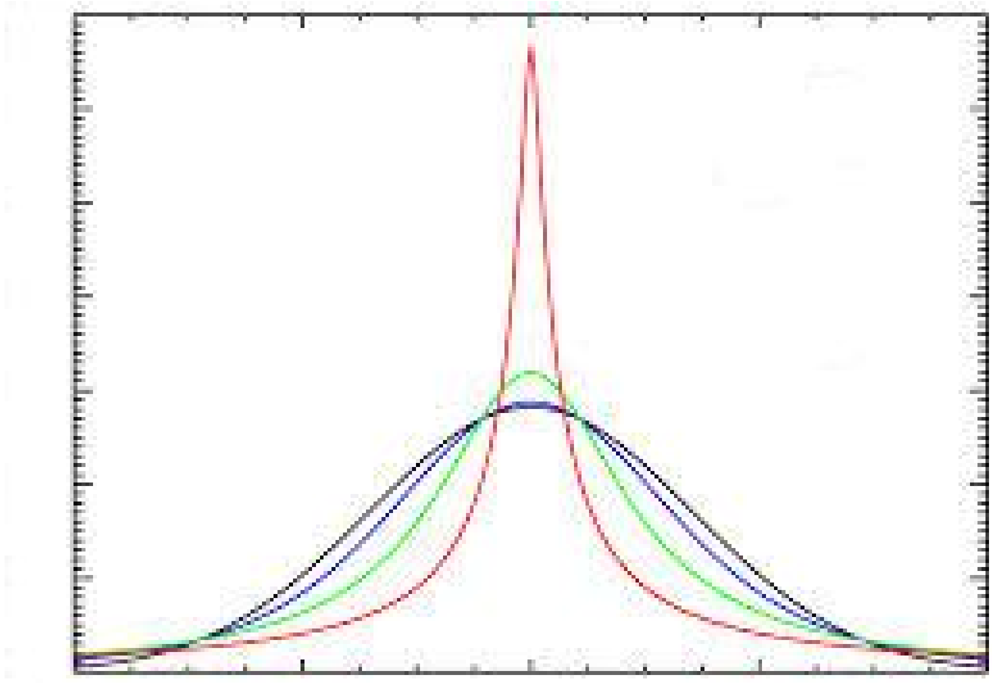
$$u_i = ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \tag{3.1}$$

Μια εκτιμήτρια της ημερίσιας διακύμανσης σ_n^2 , χρησιμοποιώντας τις m πιο πρόσφατες παρατηρήσεις $\{u_i : i = 1, 2, ...m\}$ είναι η :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2 \tag{3.2}$$

όπου $\bar{u}$ είναι η μέση τιμή των u_i και δίνεται απο τον τύπο :

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i} \tag{3.3}$$



Σχήμα 3.1: Υψηλή έναντι χαμηλής τυπικής απόκλισης

Ο τύπος (3.2) τροποποιείται λίγο ως εξής :

οι ημερίσιες αποδόσεις u_i ορίζονται σαν την ποσοστιαία αλλαγή στην τιμή του προιόντος ανάμεσα στις μέρες i-1 και i. Δίνονται δηλαδή απο τον τύπο :

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \tag{3.4}$$

Αυτό γίνεται γιατί θεωρούμε οτι η διαφορά $S_i - S_{i-1}$ είναι μικρή και κατ' επέκταση έχουμε

$$ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \approx \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \tag{3.5}$$

Επίσης η μέση τιμή $\bar{u}$ θεωρείται μηδέν. Αυτή η θεώρηση δεν αλλάζει πολύ τις προβλέψεις της διακύμανσης αφού η αναμενόμενη ημερίσια αλλαγή στην τιμή είναι πολύ μικρή συγκριτικά με την τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων γενικότερα.

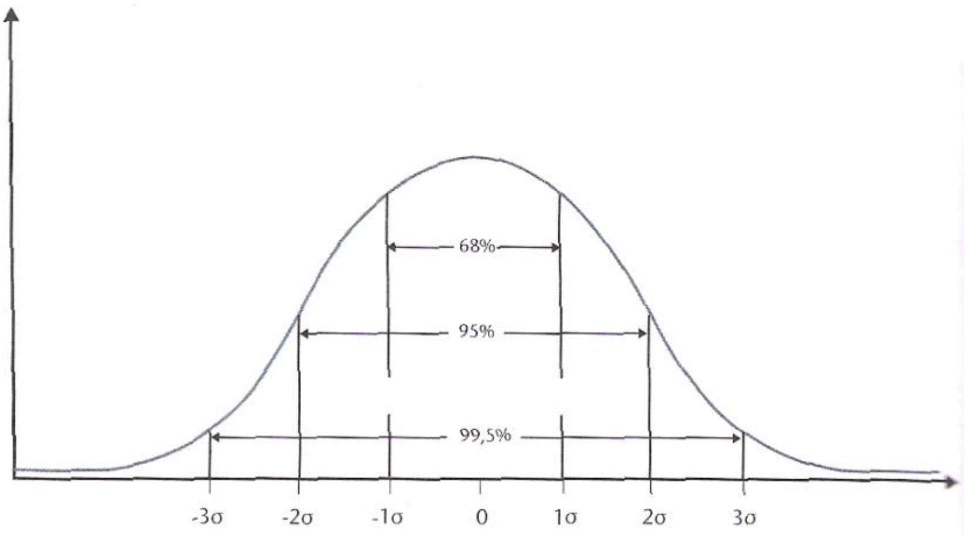
Τέλος αφού όπως είπαμε η μέση τιμή του δείγματός μας είναι μηδέν αντί να διαιρούμε με τον συντελεστή $m - 1$ στον τύπο (3.2) , διαιρούμε με το m.

Οι τρείς αυτές τροποποιείσεις αλλάζουν ελάχιστα την εκτίμησή μας, αλλά μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε τον τρόπο υπολογισμού της διακύμανσης ως εξής :

$$\bar{\sigma_n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i})^2 \tag{3.6}$$

Έτσι αφού υπολογίσουμε την διακύμανση των παρατηρήσεών μας σύμφωνα με την σχέση (3.6), μπορούμε να βρούμε την τυπική απόκλιση αυτών ως εξής :

$$\bar{\sigma_n} = \sqrt{\bar{\sigma_n}^2} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i})^2} \tag{3.7}$$



Σχήμα 3.2: Τυπική απόκλιση

Η σχέση (3.6) δίνει τα ίδια βάρη στις παρατηρήσεις $u_{n-1}^2, u_{n-2}^2, ..., u_{n-m}^2$.Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την τρέχουσα τιμή του volatility σ_n . Για τον λόγο αυτό έχει σημασία να δώσουμε περισσότερο βάρος στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Ένα μοντέλο που μας δίνει αυτή την δυνατότητα, είναι το :

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(u_{n-i})^2 \tag{3.8}$$

όπου α_i είναι το βάρος που δίνεται στην παρατήρηση i μέρες πρίν. Έτσι έχουμε οτι $\alpha_i < \alpha_j$ όπου i>j , δηλαδή δίνεται λιγότερο βάρος σε παλιότερες παρατηρήσεις.

Προφανώς $\alpha_i > 0, \forall i = 1, 2, ..., m$ και το άθροισμα των α_i είναι μονάδα.

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \tag{3.9}$$

Μια επέκταση του μοντέλου (3.8) είναι να υποθέσουμε οτι υπάρχει ένας ακόμα συντελεστής V_L με αντίστοιχο βάρος γ, όπου αντιπροσωπεύει μια σταθερή διακύμανση.

Έτσι φτάνουμε στο μοντέλο ARCH (Autoregressive conditionally heteroscedastic) ή Αυτοπαλινδρούμενο μοντέλο με Δεσμευμένη Ετεροσκαδαστικότητα, σύμφωνα με το οποίο η διακύμανση των τιμών δίνεται απο τον τύπο :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (u_{n-i})^2 \tag{3.10}$$

όπου λόγω του οτι τα βάρη πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα έχουμε οτι:

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \tag{3.11}$$

Ορίζοντας σαν $\omega = \gamma V_L$ έχουμε

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (u_{n-i})^2 \tag{3.12}$$

Στην συνέχεια θα δούμε δυο μοντέλα, το EWMA και το GARCH$(1,1)$ τα οποία βασίζονται στο ARCH (σχέση (3.12)).

3.2 Το μοντέλο EWMA

Το μοντέλο EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) είναι μια ειδική περίπτωση του μοντέλου (3.8) όπου τα βάρη α_i μειώνονται εκθετικά όσο προχωράμε προς τα πίσω (όσο παίρνουμε παλιότερες παρατηρήσεις) . Πιο συγκεκριμένα $\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$, όπου λ είναι μια σταθερά ανάμεσα στο 0 και το 1. Έτσι προκύπτει η εξής σχέση :

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda) u_{n-1}^2 \tag{3.13}$$

όπου η εκτίμηση του σ_n προκύπτει από την εκτίμιση του volatility της προηγουμενης μέρας σ_{n-1} και την ποσοστιαία απόδοση επίσης της προηγούμενης μέρας u_{n-1}.

Για να γίνει πιο κατανοητό γιατί η σχέση (3.13) αναφέρεται σε εκθετική μείωση των βαρών, έχουμε :

$$\sigma_n^2 = \lambda[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)u_{n-2}^2] + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

ή

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$$

όμοια

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

και συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2 \tag{3.14}$$

Για μεγάλα m ο όρος $\lambda^m\sigma_{n-m}^2$ είναι αρκετά μικρός , οπότε παραλήποντάς τον συμπεραίνουμε οτι η σχέση (3.14) είναι ίδια με την σχέση (3.8) όπου $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$. Τα βάρη των u_i μειώνωνται όσο κινούμαστε προς τα πίσω. Ειδικότερα κάθε βάρος είναι λ φορές μεγαλύτερο απο το προηγούμενο.

Παράδειγμα

Έστω οτι $\lambda = 0.90$, το ημερίσιο volatility ενος προιόντος την μέρα $n-1$ είναι 1% και κατα την διάρκεια της μέρας αυξάνεται 2% . Αυτό σημαίνει οτι $\sigma_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$ και $u_{n-1}^2 = 0.02^2 = 0.0004$. Απο την (3.13) παίρνουμε :

$$\sigma_n^2 = 0.9 * 0.0001 + 0.1 * 0.0004 = 0.00013$$

Η εκτίμηση δηλαδή του ημερίσιου volatility σ_n, την μέρα n είναι $\sigma_n = \sqrt{0.00013} = 1.14\%$

Το μοντέλο E.W.M.A. έχει το πλεονέκτημα οτι χρησιμοποιεί μικρό αριθμό δεδομένων. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μόνο η πιο πρόσφατη παρατήρηση της διασποράς και η πιο πρόσφατη τιμή της αξίας του προιόντος χρειάζονται για την εκτίμηση του volatility. Όταν προκύψει μια καινούρια παρατήρηση στην τιμή του προιόντος, δημιουργείται μια καινούρια απόδοση (ποσοστιαία μεταβολή στις τιμές) και με βάση την σχέση (3.14) εκτιμάται η καινούρια τιμή της διακύμανσης.

Το μοντέλο E.W.M.A. είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να εντοπίζει τις απότομες αλλαγές της τιμής ενός προιόντος. Έστω για παράδειγμα οτι πραγματοποιείται μια μεγάλη κίνηση στην τιμή του προιόντος την μέρα n-1 , δηλαδή ο όρος u_{n-1}^2 είναι πολύ μεγάλος. Αυτό βάση της (3.13)θα οδηγήσει σε μια αύξηση της εκτίμησης του volatility. Η τιμή του λ ουσιαστικά προσδιορίζει το πόσο υπεύθυνες είναι (για την εκτίμηση του volatility) οι πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Μια μικρή τιμή του λ προσδίδει μεγάλο βάρος στον όρο u_{n-1}^2. Αντίστοιχα μια μεγάλη τιμή στο λ, θα οδηγήσει στην εκτίμηση του volatility δίνοντας λιγότερο βάρος στις εκάσθοτε ημερίσιες αποδόσεις.

Η Βάση δεδομένων της Risk Metrics η οποία έχει δημιουργηθεί απο την J.P.Morgan το 1994, χρησιμοποιεί σαν παράμετρο την τιμή λ$= 0.94$. Αυτή η τιμή έχει επαληθευτεί οτι δίνει εκτιμήσεις πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές.

3.3 Το μοντέλο GARCH(1,1)

Το μοντέλο GARCH$(1,1)$ προτάθηκε για πρώτη φορά απο τον Bollerslev το 1986. Η διαφορά του από το EWMA που είδαμε προηγουμένως είναι ανάλογη με την διαφορά των σχέσεων (3.8) και (3.10). Στο GARCH$(1,1)$ το σ_n^2 υπολογίζεται χρησιμοποιώντας όπως θα δούμε τον όρο V_L (σταθερή διακύμανση) , το σ_{n-1} και το u_{n-1} . Συγκεκριμένα έχουμε ότι :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{3.15}$$

όπου γ, α, β τα βάρη των $V_L, u_{n-1}^2, \sigma_{n-1}^2$ αντίστοιχα. Λόγω του οτι τα βάρη πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα έχουμε :

$$\gamma + \alpha + \beta = 1 \tag{3.16}$$

Είναι προφανές οτι το EWMA είναι μια ειδική περίπτωση του GARCH$(1,1)$ όπου $\gamma = 0, \alpha = 1 - \lambda, \beta = \lambda$. Ο συμβολισμός "$(1,1)$" δηλώνει οτι το σ_n^2 βασίζεται στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις του u^2 και την πιο πρόσφατη εκτίμηση του V_L. Ένα γενικότερο μοντέλο είναι το GARCH(p,q) το οποίο υπολογίζει το σ_n^2 με βάση τις τελευταίες p παρατηρήσεις του u^2 και τις πιο πρόσφατες q εκτιμήσεις του V_L. Το GARCH$(1,1)$ είναι το πιο ευρέως διαδεδομένο απο όλα τα μοντέλα GARCH.

Θέτοντας $\omega = \gamma V_L$ το μοντέλο μπορεί να γραφτεί :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{3.17}$$

Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται συνήθως για την εκτίμηση της διασποράς. Δεδομένου οτι ξέρουμε τις παραμέτρους ω, α, β μπορούμε να υπολογίσουμε το $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ και το $V_L = \omega/\gamma$

Παράδειγμα

Έστω οτι το μοντέλο GARCH$(1,1)$ βάση των δεδομένων έχει εκτιμηθεί να είναι :

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 u_{n-1}^2 + 0.86 \sigma_{n-1}^2$$

Δηλαδή $\omega = 0.000002, \alpha = 0.13, \beta = 0.86$. Έχουμε οτι $\gamma = 1 - \alpha - \beta = 0.01$ και $V_L = \omega/\gamma = 0.002$. Αυτό αντιστοιχεί σε ενα ημερίσιο volatility $\sqrt{0.0002} = 0.014$ ή 14%.

Έστω οτι η εκτίμηση του volatility την μέρα $n-1$ είναι 1.6% . Τότε $\sigma_{n-1}^2 = 0.016^2 = 0.000256$. Έστω ακόμα οτι η τιμή ενός προιόντος την $n-1$ μέρα μειώνεται κατά 1% τότε $u_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$.

Έτσι έχουμε

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 * 0.0001 + 0.86 * 0.000256 = 0.00023516$$

Η νέα εκτίμηση του ημερίσιου volatility είναι τώρα $\sqrt{0.00023516} = 0.0153 = 1.53\%$.

Από την (3.17) και αντικαθιστώντας το σ_{n-1}^2 έχουμε οτι :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2)$$

ή

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2 \sigma_{n-2}^2$$

όμοια αντικαθιστώνταςν το σ_{n-2}^2 έχουμε :

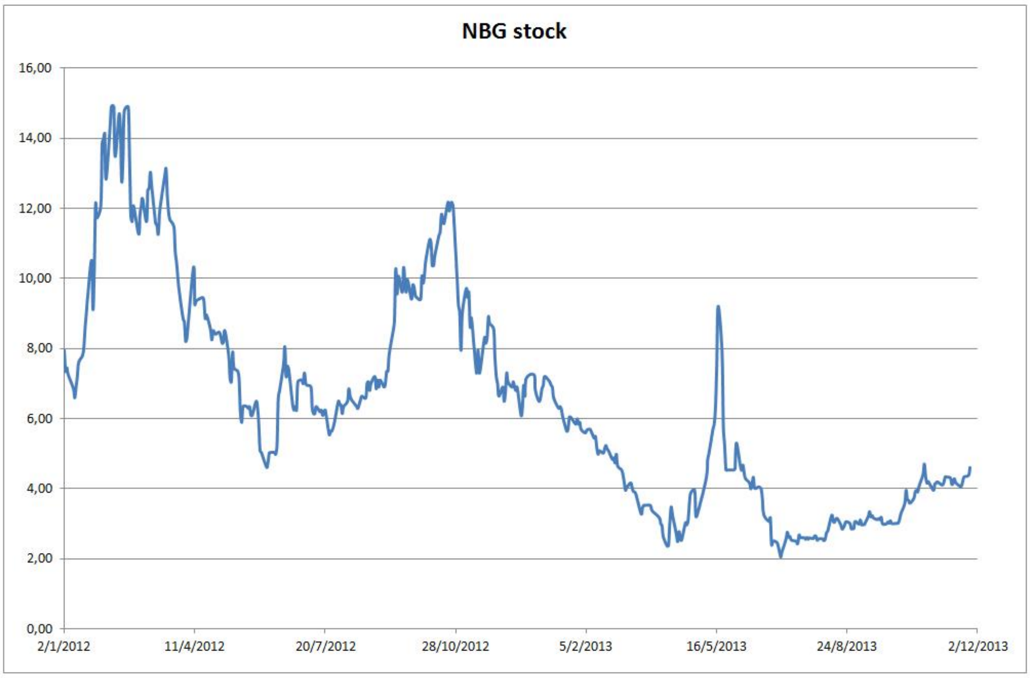
$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \beta^2\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \alpha\beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3 \sigma_{n-3}^2 \tag{3.18}$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο παίρνουμε οτι το βάρος του όρου u_{n-i} είναι $\alpha\beta^{i-1}$. Τα βάρη αυτά μειώνονται εκθετικά ως προς β . Είναι δηλαδή το β ο αντίστοιχος παράγοντας λ του μοντέλου E.W.M.A. Συμπεραίνουμε δηλαδή οτι τα δυο αυτά μοντέλα δεν διαφέρουν πολύ κάτι το οποίο θα διαπιστώσουμε και στην συνέχεια στις εφαρμογές.

Κεφάλαιο 4

Χαρτοφυλάκιο με μία μετοχή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου με μια μετοχή. Συγκεκριμένα υποθέτουμε οτι έχουμε μια μετοχή της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος την οποία αγοράσαμε στις 02/01/2012 σε τιμή 7,95 ευρώ. Σαν σημερινή ημερομηνία θα θεωρηθεί η 04/01/2013 δηλαδή ένας χρόνος μετά την αγορά της μετοχής (252 ημέρες συναλλαγών). Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η πορεία της μετοχής το χρονικό διάστημα 02/01/2012 έως 02/12/2013.



Σχήμα 4.1: η τιμή της μετοχής της Ε.Τ.Ε

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τα μέτρα ρίσκου VaR και CVaR για το χαρτοφυλάκιο μας με τρείς διαφορετικούς τρόπους. Αναλυτικά με την μέθοδο διασποράς-συνδιασποράς, χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα (μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης), και με την μέθοδο monte carlo.

Ξεκινόντας υπολογίζουμε για κάθε μέρα την ημερίσια απόδοση της μετοχής ως εξής:

$$r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \tag{4.1}$$

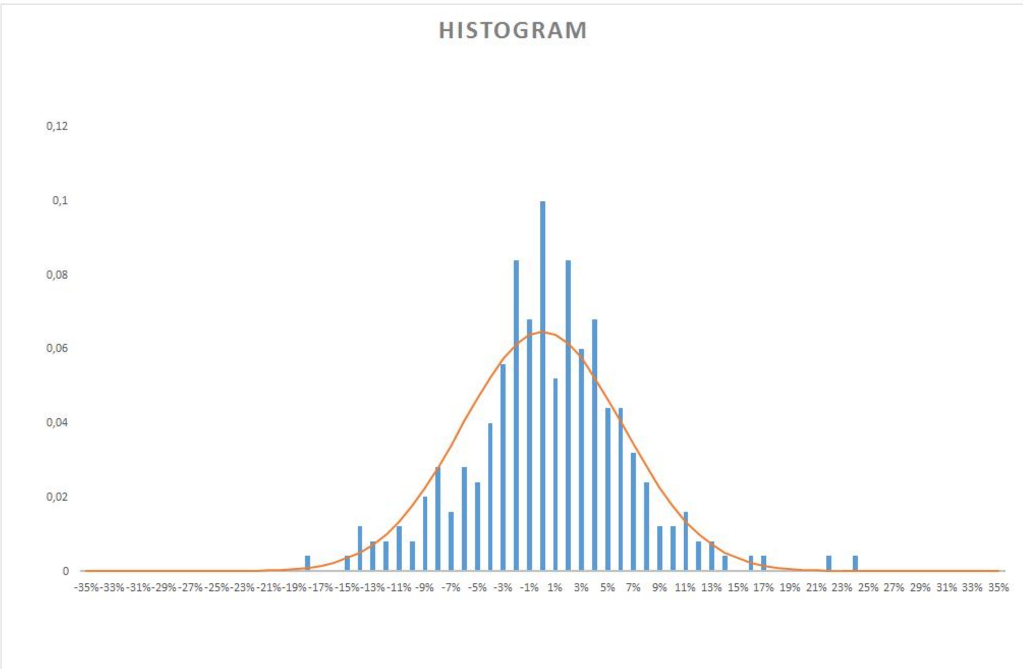
όμοια θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο:

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \tag{4.2}$$

Υπολογίζοντας λοιπόν τις ημερήσιες αποδόσεις για ένα χρόνο έχουμε το σύνολο $\{r_t : t = 1, 2, ...251\}$ (απο 252 μέρες προκύπτουν 251 αποδόσεις).

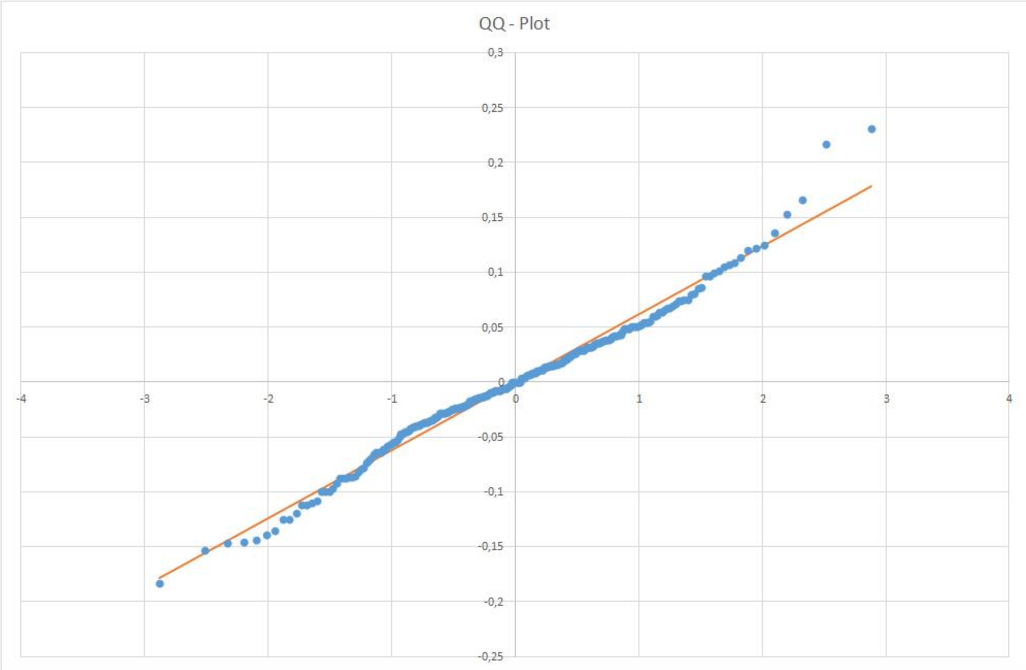
Η μέση τιμή του δείγματος υπολογίζεται οτι είναι $\bar{r} = -0,04\%$ και η τυπική απόκλιση $\sigma_r = 6,19\%$.Το σ_r είναι η τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων ή αλλιώς το ημερίσιο volatility της μετοχής.

Στην συνέχεια προκειμένου να κάνουμε την υπόθεση οτι το δείγμα μας (οι ημερίσιες αποδόσεις) ακολουθεί την κανονική κατανομή, παραθέτουμε ενα ιστόγραμμα συχνοτήτων, ενα qq - plot, και ενα Kolmogorov - Smirnov τεστ.



Σχήμα 4.2: ιστόγραμμα συχνοτήτων

Απο το ιστόγραμμα συχνοτήτων βλέπουμε οτι η κατανομή των δεδομένων μας συγκλίνει αρκετα στην κανονική με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 6,19%. Παρατηρείται οστόσο το πρόβλημα των "χοντρών ουρών" (fat tails).



Σχήμα 4.3: qq - plot

Στο παραπάνω διαγραμμα qq - plot συγκρίνονται τα θεωρητικά ποσοστιαία σημεία της κανονικής κατανομής με αυτά του δείγματος μας. Βλέπουμε οτι οι παρατηρήσεις δεν απέχουν πολύ απο την ευθεία γραμμή.

Το Σχήμα (4.4) συγκρίνεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του δείγματος (μπλέ γραμμή) με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κανονικής (πορτοκαλί γραμμή) με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 6,19%.

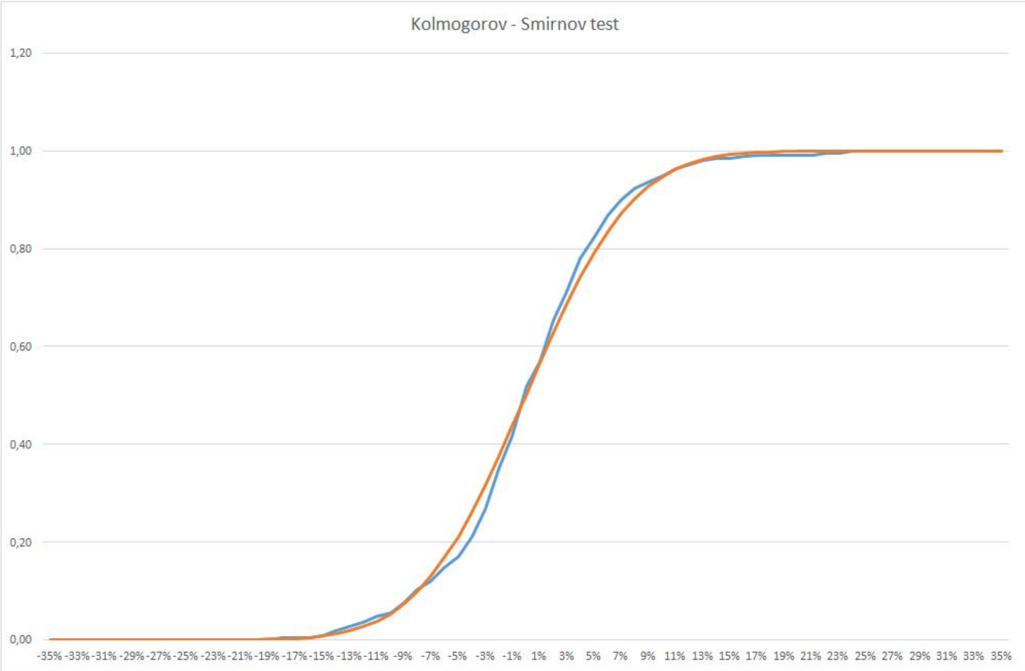
Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση οτι οι ημερίσιες αποδόσεις (daily returns) ακολουθούν κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$r_t \sim N(0, 6.19\%) \tag{4.3}$$

4.1 Αναλυτική μέθοδος - Μέθοδος διασποράς-συνδιασποράς

Έστω η γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{4.4}$$



Σχήμα 4.4: Kolmogorov - Smirnov test

όπου S_t είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ και W_t η κίνηση Brown.

Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει οτι:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \tag{4.5}$$

όπου $\mu = (b - \frac{\sigma^2}{2})$

Όπως προαναφέρθηκε η ημερίσια απόδοση της μετοχής είναι:

$$r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

Προφανώς $\mu \Delta t$ και $\sqrt{\sigma^2 \Delta t} = \sigma \sqrt{\Delta t}$ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων που υπολογίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Είναι δηλαδή $-0,04\%$ και $6,19\%$ ή μετά την υπόθεση που κάναμε (σχέση (4.3)) 0 και $6,19\%$ αντίστοιχα.

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \mathcal{X} \tag{4.6}$$

όπου $\mathcal{X} \sim N(0,1)$.

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε το VaR για χρονικό ορίζοντα μιας μέρας και συντελεστή εμπιστοσύνης α%. Ψάχνουμε δηλαδή εκείνο τον αριθμό VaR για τον οποίο σε περίπτωση πτώσης της τιμής της μετοχής θα είναι:

$$P[S_t - S_{t-1} < -VaR] = (100 - \alpha)\% \tag{4.7}$$

ή όμοια

$$P[S_t < S_{t-1} - VaR] = (100 - \alpha)\% \tag{4.8}$$

Αρκεί να βρούμε έναν αριθμό x_* για τον οποίο να ισχύει:

$$P[S_t < x_*] = (100 - \alpha)\% \tag{4.9}$$

έτσι έχουμε:

$$P[S_{t-1}e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X}} < x_*] = (100 - \alpha)\% \Rightarrow$$

$$P[\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X} < \ln\frac{x_*}{S_{t-1}}] = (100 - \alpha)\% \Rightarrow$$

$$P[\frac{(\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X}) - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} < \frac{\ln\frac{x_*}{S_{t-1}} - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}] = (100 - \alpha)\% \Rightarrow$$

$$P[\mathcal{X} < \frac{\ln\frac{x_*}{S_{t-1}} - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}] = (100 - \alpha)\% \Rightarrow$$

$$\frac{\ln\frac{x_*}{S_{t-1}} - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} = -z_\alpha \Rightarrow$$

$$\ln\frac{x_*}{S_{t-1}} = \mu\Delta t - z_\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \Rightarrow$$

$$x_* = S_{t-1}e^{\mu\Delta t - z_\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow \tag{4.10}$$

Άρα έχουμε από την σχέση (4.8) οτι:

$$S_{t-1} - VaR = S_{t-1}e^{\mu\Delta t - z_\alpha \sigma\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow$$

$$VaR = S_{t-1}(1 - e^{\mu\Delta t - z_\alpha \sigma\sqrt{\Delta t}})$$

και υποθέτοντας $\mu\Delta t = 0$ και $1 - e^{-x} \approx x$ προκύπτει:

$$VaR = S_{t-1} z_\alpha \sigma\sqrt{\Delta t} \Rightarrow$$

$$VaR = S_{t-1} * z_\alpha * s \Rightarrow \tag{4.11}$$

όπου $s = \sigma\sqrt{\Delta t}$

Άρα για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.99$ προκύπτει οτι :

$$VaR = 7,20 * 2,33 * 6,19\% \Rightarrow$$

$$VaR = 1,04 \tag{4.12}$$

Παρατήρηση

Αν έχω λοιπόν κεφάλαιο της τάξεως του $1,04$ ευρώ μπορώ να δανειστώ την χρονική στιγμή $t-1$ ποσό S_{t-1} προκειμένου να αγοράσω την μετοχή χωρίς κίνδυνο χρεοκοπείας, σε επίπεδο εμπιστοσύνης $0,99$.

Με την ιδια λογική προχωράμε στον υπολογισμό του CVaR. Ξέρουμε οτι:

$$CVaR = E[S_t - S_{t-1} | S_t - S_{t-1} < -VaR] \tag{4.13}$$

είναι

$$S_t - S_{t-1} = S_{t-1}e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X}} - S_{t-1} \Rightarrow$$

$$S_t - S_{t-1} = S_{t-1}(e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X}} - 1)$$

και

$$VaR = S_{t-1}(1 - e^{\mu\Delta t - z_{0,99}\sigma\sqrt{\Delta t}})$$

Άρα

$$CVaR = E[S_{t-1}(e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X}} - 1) | S_{t-1}(e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X}} - 1) < S_{t-1}(e^{-z_{0,99}\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1)] \Rightarrow$$

$$CVaR = E[S_{t-1}\sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{X} | \mathcal{X} > z_{0,99}] \Rightarrow$$

$$CVaR = S_{t-1}\sigma\sqrt{\Delta t}E[\mathcal{X} | \mathcal{X} > z_{0,99}] \Rightarrow$$

$$CVaR = S_{t-1} * 2,6640 * s \Rightarrow \quad (4.14)$$

$$CVaR = 7,20 * 6,19\% * 2,6640 \Rightarrow$$

$$CVaR = 1,18 \quad (4.15)$$

4.2 Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης

Προηγουμένως στην μέθοδο της διασποράς - συνδιασποράς κάναμε την υπόθεση οτι οι ημερίσιες αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή. Σε αυτή την μέθοδο δεν χρειαζόμαστε κάποια τέτοια παραδοχή. Η ιστορική προσομοίωση βασίζεται στην υπόθεση οτι το μέλλον δεν θα διαφέρει απο το παρελθόν, με την έννοια οτι η τιμή της μετοχής την επόμενη μέρα θα προκύπτει άμεσα απο κάποια απο τις ημερίσιες αποδόσεις του προηγούμενου χρόνου.

Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τις ημερίσιες αποδόσεις του προηγούμενου χρόνου, δηλαδή το σύνολο $\{r_i : i = 1, 2, ...251\}$ φτιάχνουμε 251 σενάρια για την αυριανή τιμή της μετοχής. Έτσι αν η τιμή της μετοχής είναι S_{t-1} ευρώ, το i-οστό πιθανό σενάριο θα είναι το $S_t = S_{t-1} + S_{t-1}r_i$.

Αν υποθέσουμε οτι σήμερα έχουμε 04/01/2013 είναι $S_{t-1} = 7,20$ ευρώ και ο πίνακας με τα 30 πρώτα πιθανά σενάρια φαίνεται παρακάτω.

	returns	senarios=7,20+7,20*return	sensitivity=7,20-senario			
1	-7,85%	6,64	-0,56			
2	1,35%	7,30	0,10			
3	-2,72%	7,00	-0,20			
4	-5,68%	6,79	-0,41		VaR=	-1,051257
5	-3,87%	6,92	-0,28			
6	4,60%	7,53	0,33		CVaR=	-1,07
7	4,26%	7,51	0,31			
8	5,41%	7,59	0,39			
9	2,60%	7,39	0,19			
10	3,15%	7,43	0,23			
11	6,73%	7,68	0,48			
12	5,09%	7,57	0,37			
13	4,85%	7,55	0,35			
14	10,09%	7,93	0,73			
15	-14,39%	6,16	-1,04			
16	11,99%	8,06	0,86			
17	16,65%	8,40	1,20			
18	-3,35%	6,96	-0,24			
19	2,94%	7,41	0,21			
20	13,60%	8,18	0,98			
21	1,08%	7,28	0,08			
22	1,07%	7,28	0,08			
23	-9,64%	6,51	-0,69			
24	10,70%	7,97	0,77			
25	4,18%	7,50	0,30			
26	0,34%	7,22	0,02			
27	-0,34%	7,18	-0,02			
28	-9,94%	6,48	-0,72			
29	8,59%	7,82	0,62			
30	-2,83%	7,00	-0,20			

Σχήμα 4.5: τα 30 πρώτα σενάρια για την τιμή της μετοχής

Στην συνέχεια για κάθε ένα απο τα σενάρια που δημιουργήσαμε υπολογίζουμε την ζημία του χαρτοφυλακίου μας $Z_i = S_t - S_{t-1}$. Από το σύνολο των $\{Z_i : i = 1, 2, ...252\}$ (252 και όχι 251 γιατί συμπεριλαμβάνεται σαν "μηδενικό" το σενάριο η τιμή της μετοχής να παραμείνει αναλοίωτη) που ουσιαστικά είναι το σύνολο των ζημιών της επόμενης, για να υπολογίσουμε το VaR σε επίπεδο σημαντικότητας 99% παίρνουμε το $0, 01$ ποσοστιμόριο των τιμών αυτών.Αυτό πρακτικά υπολογίζεται να είναι η δεύτερη με τρίτη χειρότερη παρατήρηση (το 1% του 252).

Δηλαδή στο excel :

$$VaR = percentile(\{Z_i : i = 1, 2, ...252\}, 0.01) = 1, 05 \tag{4.16}$$

Για τον υπολογισμό του CVaR με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης αρκεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή των χειρότερων (μικρότερων ή ίσων) από το VaR παρατηρήσεων.Τέτοιες τιμές εμφανίζονται στα σενάρια $130, 154, 212$ και οι αντίστοιχες τιμές είναι $-1, 09, -1, 06, -1, 06$.

Έτσι έχουμε:

$$CVaR = \frac{-1, 09 - 1, 06 - 1, 06}{3} = -1, 07 \tag{4.17}$$

Η προσέγγυση του CVaR με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης δεν είναι καλή και αυτό οφείλεται στον μικρό αριθμό των πιθανών σεναρίων. Θα δούμε πώς αυτο το πρόβλημα δεν εμφανίζεται όταν έχουμε μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων όπως στην μέθοδο monte carlo.

4.3 Μέθοδος monte carlo

Η μέθοδος monte carlo δεν διαφέρει πολύ απο αυτή της ιστορικής προσομοίωσης. Και σε αυτή την μέθοδο δημιουργούμε σενάρια για την τιμή της μετοχής την επόμενη ημέρα, μόνο που αυτή την φορά τα σενάρια είναι τυχαία, δεν βασίζονται δηλαδή στα ιστορικά δεδομένα.

Συγκεκριμένα η μέθοδος βασίζεται στην παραγωγή τυχαίων αριθμών. Φτιάχνουμε λοιπόν ένα τυχαίο δείγμα (το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $6,19\%$) μεγέθους N και στην συνέχεια δημιουργούμε N-σενάρια όπως προηγουμένως.

Λόγω του οτι η μέθοδος monte carlo έχει ακρίβεια προσέγγυσης $\frac{1}{\sqrt{N}}$ είναι άμεσα κατανοητό οτι όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο καλύτερη θα είναι η προσέγγυση.

Επιλέγοντας λοιπόν δείγμα $N = 100000$ και εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρήσκουμε οτι:

$$VaR = 1,04168 \tag{4.18}$$

Το CVaR υπολογίζεται και πάλι ως η μέση τιμή των χειρότερων της τιμής του VaR σεναρίων, μόνο που σε αυτή την περίπτωση το δείγμα είναι μεγαλύτερο, οι χειρότερες παρατηρήσεις περισσότερες και πιο ακραίες και έτσι η προσέγγυση καλύτερη.

$$CVaR = 1,19199 \tag{4.19}$$

Είναι γεγονός οτι στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτή η μέθοδος δεν έχει μεγάλη αξία. Γενικά η μέθοδος monte carlo χρησιμοποιείται όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το VaR αναλυτικά. Θα δούμε μια τέτοια περίπτωση στο επόμενο κεφάλαιο.

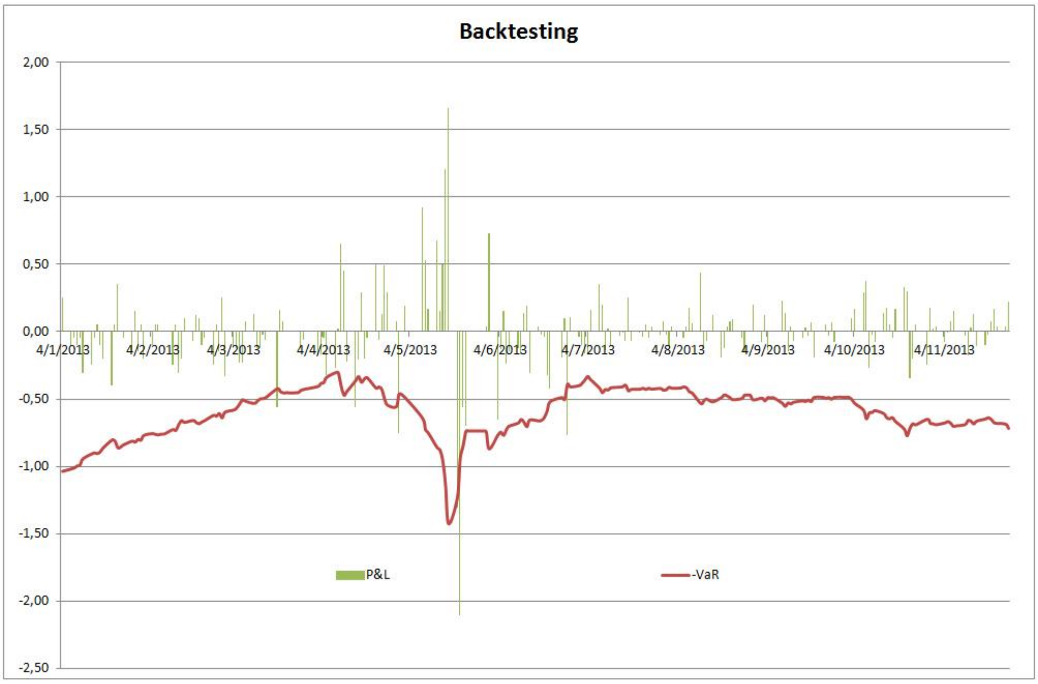
Τέλος μπορούμε να πούμε οτι η μέθοδος monte carlo έχει μεγαλύτερη αξία όταν δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική μέθοδο, όταν δηλαδή δεν μπορουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα :

$$P[S_t - S_{t-1} < -VaR]$$

4.4 Επανέλεγχος - Backtesting

Η επαλήθευση των μέτρων κινδύνου είναι είναι μια βασική προυπόθεση για την συστηματική διαδικασία της διαχείρισης κινδύνου. Ο επανέλεγχος ή Backtesting αφορά ένα στατιστικό πλαίσιο που συνίσταται στο να επαληθεύεται αν οι πραγματικές απώλειες (ζημίες) του χαρτοφυλακίου μας, συμφωνούν με τις εκτιμόμενες. Συγκεκριμένα αυτό σημαίνει σύγκριση της ιστορίας των προβλέψεων του μέτρου VaR με τις αντίστοιχες πραγματικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Αυτή η διαδικασία συχνά αποτελεί τους ελέγχους πραγματικότητας ώστε οι υπεύθυνοι της διαχείρησης κινδύνου να γνωρίζουν αν οι υποθέσεις ή οι παράμετροι των μοντέλων τους είναι λανθασμένες.

Στο παράδειγμά μας προκειμένου να πραγματοποιήσουμε ένα επανέλεγχο εργαστήκαμε ως εξής. Υπολογίσαμε με την μέθοδο διασποράς - συνδιασποράς το VaR (για χρονικό ορίζοντα μίας μέρας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%) για κάθε μέρα τις ημερομηνίες 04/01/2013 εως 02/12/2013 όπως ακριβώς παρουσιάστηκε στην παράγραφο $\S1.1$. Έτσι συγκρίναμε τις ιστορικές προβλέψεις του μέτρου VaR για περίπου ενα χρόνο, με τις αντιστοιχες πραγματικές αποδώσεις (P&L profit and loss) του χαρτοφυλακίου μας.



Σχήμα 4.6: Επανέλεγχος

Παρατηρούμε οτι σε χρονικό διάστημα ενός χρόνου οι θεωρητικές τιμές του VaR αποτυγχάνουν την πρόβλεψη (είναι μικρότερες απο την πραγματική απώλεια) πέντε φορές. Σημαντικότερη απο αυτές παρατηρείται στις 21/05/2013 όπου το μέτρο VaR δεν προέβλεπε απώλεια πάνω απο $1,5$ ευρώ ενώ τελικά το χαρτοφυλάκιο μας ζημιώθηκε κατα 2,1 ευρώ.

4.5 Έλεγχος πίεσης - Stress testing

Είναι αλήθεια οτι δεν είναι δυνατο πάντοτε να προσδιορίσουμε την μέγιστη απώλεια ενός χαρτοφυλακίου. Ωστόσο πρέπει να είμαστε ικανοί να προσδιορίζουμε την μέγιστη ζημία του χαρτοφυλακίου στις ακραίες συνθήκες της αγοράς. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ακραίες αλλαγές τιμών στο χαρτοφυλάκιο, με αναφορά στις ακραίες αλλαγές του παρελθόντος.

Δυστυχώς η διαδικάσία αυτή είναι προβληματική επειδή η χρήση τιμών του παρελθόντος δεν συμβαδίζει πάντα με τις συνθήκες της αγοράς που πιθανώς έχουν αλλάξει. Επομένως η ανάλυση παλαιών αλλαγών στις τιμές έχει περιορισμένη εγκυρότητα στην αγορά του σήμερα. Στην πραγματικότητα οι υπεύθυνοι της διαχείρησης κινδύνου πρέπει να χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό ιστορικής πιθανότητας και της δικής τους υποκειμενικής κρίσης για την πιθανότητα ενός τέτοιου γεγονότος στην αγορά του σήμερα.

Πρακτικά, η διαδικασία του ελέγχου πίεσης απαιτεί τον εντοπισμό της πιο ακραίας μεταβολής απο τα δεδομένα, και την χρήση αυτής στο εκάσθοτε μέτρο. Για παράδειγμα μπορούμε να παρατηρήσουμε απο το σύνολο των ημερίσιων volatilities (τυπικών αποκλίσεων των ημερίσιων αποδόσεων) την μέγιστη τιμή που είναι $7,15\%$ και να χρησιμοποιήσουμε αυτή για τον υπολογισμό του VaR. Έτσι έχουμε απο την σχέση (1.11):

$$StressedVaR = S_{t-1} * z_{0,99} * s_{max} \Rightarrow$$

$$StressedVaR = 7,20 * 2,33 * 7,15\% \Rightarrow$$

$$StressedVaR = 1,20 \tag{4.20}$$

Παρατηρούμε σημαντική διαφορά σε σχέση με το VaR που υπολογίσαμε στην παράγραφο $\S 4.1$ και ήταν $1,04$ ευρώ.

4.6 Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του volatility

Στην παράγραφο $\S 4.1$ υπολογίσαμε το volatility ως την τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων. Με αυτό τον τρόπο δίνεται το ίδιο "βάρος" σε παρατηρήσεις του τελευταίου μήνα και σε παρατηρήσεις πριν απο ένα χρόνο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μια πρόσφατη έντονη μεταβολή στην τιμή της μετοχής, να μην λαμβάνεται υπ'όψιν για την μέτρηση του κινδύνου.

Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος μεγέθους N, όπως φαίνεται και απο την παρακάτω σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \bar{r})^2} \tag{4.21}$$

δίνει το ίδιο βάρος της τάξεως του $\frac{1}{N}$ σε όλες τις ημερίσιες αποδόσεις. Είναι δηλαδή μια ειδική περίπτωση της σχέσης:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i(r_i - \bar{r})^2} \tag{4.22}$$

όπου

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$$

και συγκεκριμένα ισχύει ότι:

$$a_i = \frac{1}{N}, \forall i = 1, 2, ..., N$$

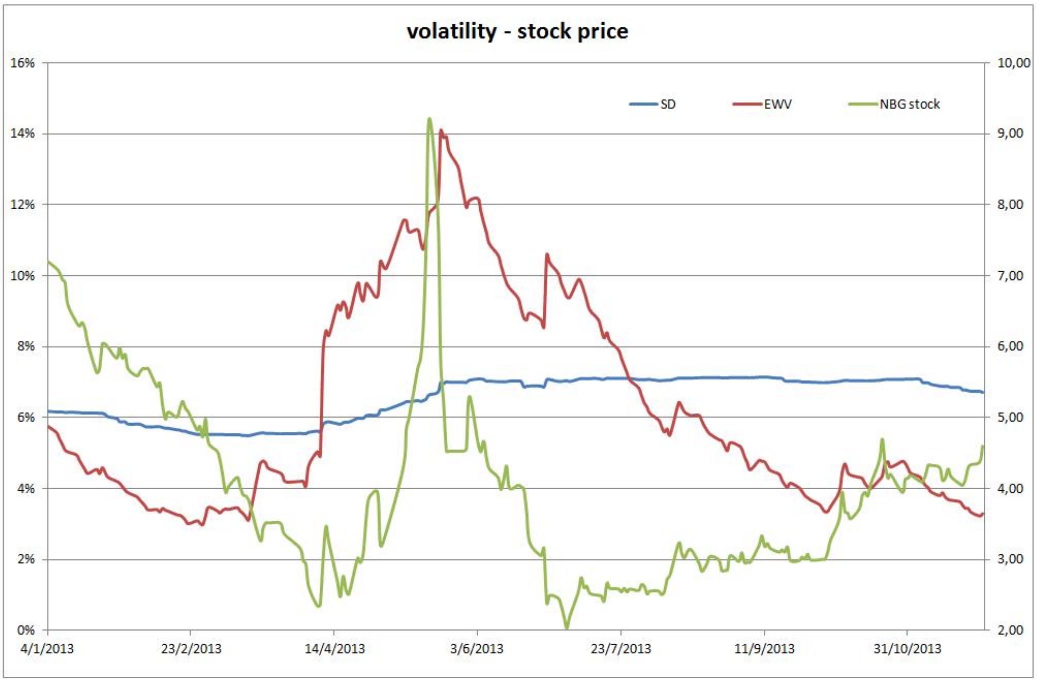
Το μοντέλο EWMA λοιπόν υπολογίζει το volatility ως:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2 \tag{4.23}$$

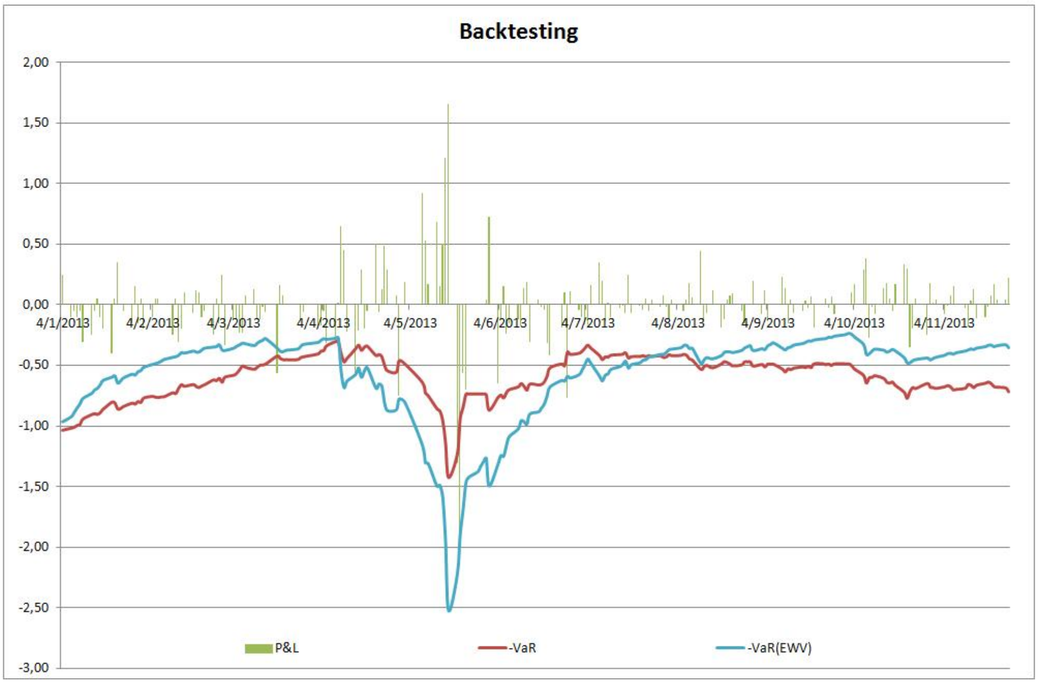
όπου είναι σύνηθες να επιλέγεται $\lambda = 0,94$.

Με βάση τα παραπάνω υπολογίσαμε και συγκίναμε το volatility της μετοχής και κατ'επέκταση του χαρτοφυλακίου μας με την απλή τυπική απόκλιση και με το μοντέλο EWMA. Παράλληλα υπολογίσαμε και το μέτρο VaR με την μέθοδο διασποράς - συνδιασποράς και στις δυο περιπτώσεις και κάναμε εναν επανέλεγχο των αποτλεσμάτων μας.

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε την τιμή της μετοχής(με το πράσινο χρώμα) σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στο ίδιο γράφημα με μπλέ και κόκκινο φαίνονται αντίστοιχα η τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων (standard volatility) και το EWVolatility.



Σχήμα 4.7: volatilities



Σχήμα 4.8: Επανέλεγχος

Παρατηρούμε οτι το δεύτερο αυξάνεται περισσότερο στις απότομες μεταβολές της τιμής της μετοχής και μειώνεται όταν η τιμή σταθεροποιείται. Αντιθεται η τυπική απόκλιση παρατηρούμε οτι καθ'όλη την διάρκεια του έτους παραμένει γύρω στο 6%.

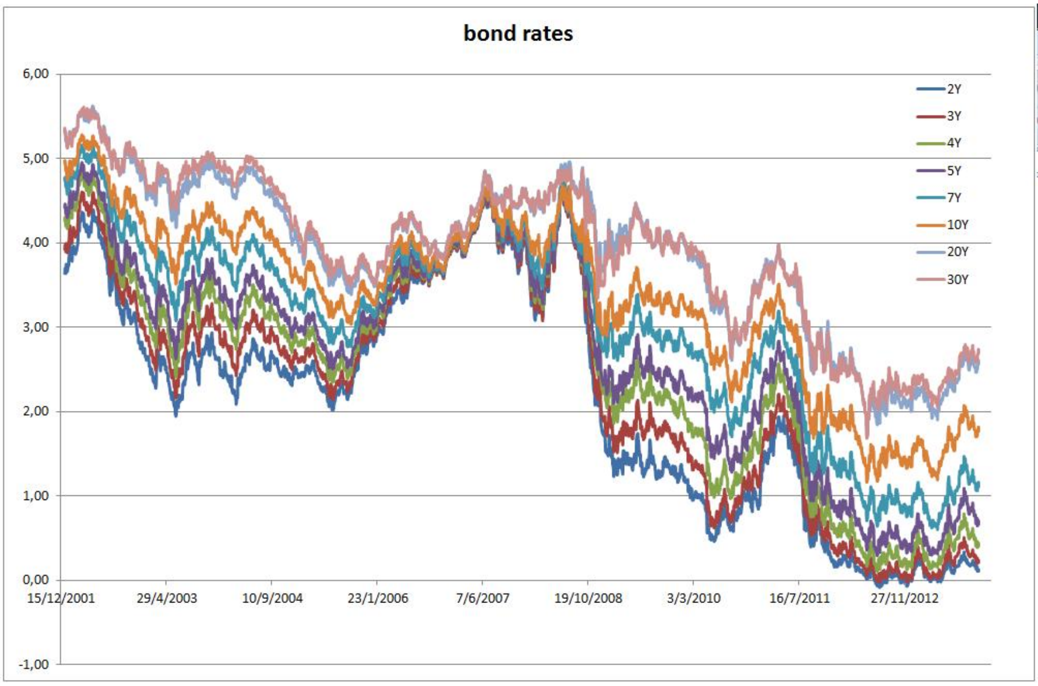
Σε αυτό τον επανέλεγχο με κόκκινο είναι το VaR όπως το υπολογίσαμε στην παράγραφο §4.4. Με την γαλάζια γραμμή φαίνεται το VaR υπολογισμένο με το μοντέλο EWMA. Παρατηρούμε οτι στην δεύτερη περίπτωση οι προβλέψεις μας όσον αφορά τον κίνδυνο είναι πιο κοντα στην πραγματικότητα.

Κεφάλαιο 5

Χαρτοφυλάκιο με ένα ομόλογο

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου με ένα ομόλογο. Το ομόλογο είναι ένα χρεόγραφο για το οποίο ο εκδότης έχει την υποχρέωση να καταβάλλει σε τακτά χρονικά διαστήματα, κάποιο χρηματικό ποσό (κουπόνι), καθώς και το ποσό της ονομαστικής αξίας του ομολόγου στην λήξη της σύμβασής του.

Η αξία του κουπονιού είναι ένα ποσοστό της ονομαστικής αξίας του ομολόγου. Συγκεκριμένα προκύπτει απο το επιτόκιο του ομολόγου (yield) το οποίο αλλάζει συνεχώς. Παρακάτω βλέπουμε τις τιμές των επιτοκίων (για $2, 3, 4, 5, 7, 10, 20, 30$ χρόνια αντίστοιχα) των ευρωπαικών ομολόγων, από $15/12/2001$ έως $13/11/2013$.



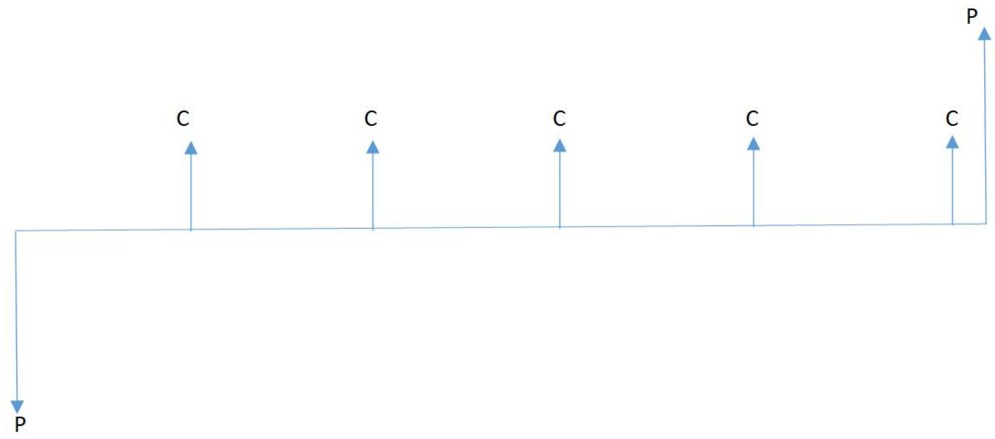
Σχήμα 5.1: Επιτόκιο ευρωπαικού ομολόγου για διάφορα χρόνια ωρίμανσης

Εμείς σε αυτή την εφαρμογή θα υποθέσουμε οτι αγοράζουμε ένα 10-ετές ομόλογο στις

$08/07/2013$ στην τιμή των 1000000 ευρώ. Την ημέρα εκείνη το αντίστοιχο επιτόκιο είναι $1,71\%$, άρα η συμφωνία που κλείνουμε ουσιαστικά είναι να παίρνουμε κάθε χρόνο κουπόνι αξίας 17100 ευρώ , για δέκα χρόνια , και στο τέλος της δεκαετίας να μας επιστραφούν και τα 1000000 ευρώ.

Πρίν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των μέτρων VaR και CVaR του χαρτοφυλακίου μας , αξίζει να παρατηρήσουμε οτι ενώ στην περίπτωση της μετοχής τα δεδομένα μας αφορούσαν την τιμή της μετοχής, τώρα έχουμε σαν δεδομένα την τιμή του επιτοκίου του ομολόγου. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη να τιμολογίσουμε το ομόλογο για τις διάφορες τιμές του επιτοκίου.

Γραφικά θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε ένα ομόλογο ως εξής:



Σχήμα 5.2: Γραφική αναπαράσταση ενός ομολόγου

όπου P είναι η ονομαστική του αξία (principle) και C το κουπόνι. Τα βέλη συμβολίζουν τις χρηματορροές και είναι αντίστοιχα προς τα πάνω αν αυτές είναι θετικές (λαμβάνουμε χρήματα) ή αρνητικές (αν πληρώνουμε, αγοράζουμε το ομόλογο).

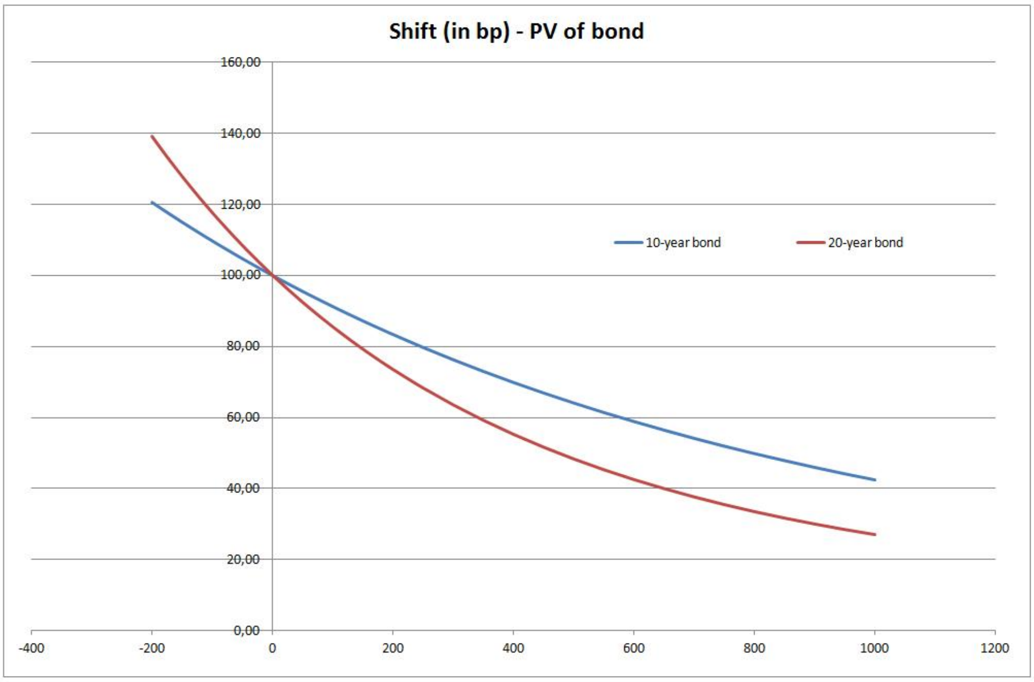
Η βασική ιδέα σχετικά με την τιμολόγιση του ομολόγου είναι "η παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματορροών" (present value of future cashflows). Συγκεκριμένα για μια τυχαία χρονική στιγμή t όπου το αντίστοιχο επιτόκιο (διακριτού ανατοκισμού) είναι y έχουμε οτι η αξία του n-ετούς ομολόγου είναι:

$$B_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+y)^i} + \frac{P}{(1+y)^n} \tag{5.1}$$

ή όμοια

$$B_t = \frac{C}{(1+y)^1} + \frac{C}{(1+y)^2} + ... + \frac{C}{(1+y)^{n-1}} + \frac{C+P}{(1+y)^n} \tag{5.2}$$

Έτσι λοιπόν μπορούμε να τιμολογισουμε το ομόλογο για τις διάφορες τιμές του επιτοκίου. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε πώς μεταβάλλεται η τιμή ενός 10-ετούς και ενός 20-ετούς ομολόγου τα οποία αγοράστηκαν στην τιμή των 100 ευρώ, συναρτήσει της μεταβολής του αντίστοιχου επιτοκίου (10-ετούς και 20-ετούς) σε basis points (όπου $1bp = 0.01\%$).



Σχήμα 5.3: Μεταβολή της τιμής των ομολόγων για μεταβολή των επιτοκίων σε basis points

Έτσι αφού πλέον έχουμε σαν δείγμα τις τιμές του ομολόγου μπορούμε να πάρουμε τις ημερήσιες αποδόσεις ως εξής :

$$r_t = \ln \frac{B_t}{B_{t-1}} \tag{5.3}$$

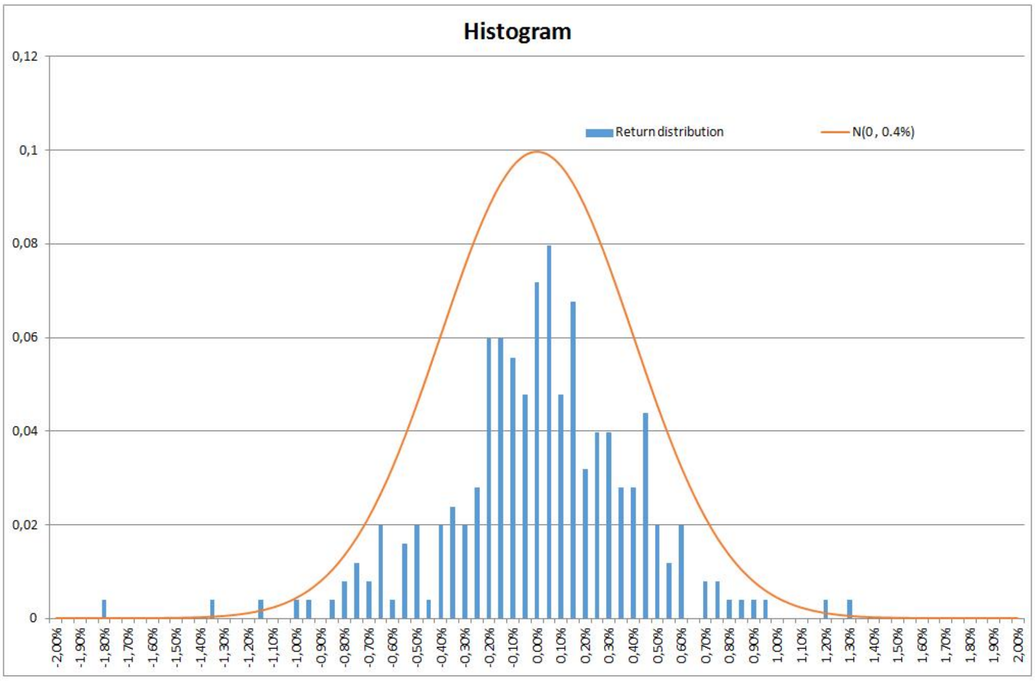
και στην συνέχεια από το σύνολο των $\{r_t : t = 1, 2, ...251\}$ να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση. Έχουμε λοιπόν :

$$\bar{r} = \frac{1}{251} \sum_{i=1}^{251} r_i = 0.00008\% \tag{5.4}$$

και αντίστοιχα

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{251} \sum_{i=1}^{251} (r_i - \bar{r})^2} = 0.4\% \tag{5.5}$$

Προκειμένου τώρα να κάνουμε την υπόθεση της κανονικότητας του δείγματος $\{r_t : t = 1, 2, ...251\}$, κάνουμε τους τρείς στατιστικούς ελέγχους (ιστόγραμμα συγχνοτήτων, qq-plot και Kolmogorov - Smirnov test) που κάναμε και στην περίπτωση της μετοχής.



Σχήμα 5.4: Ιστόγραμμα συχνοτήτων

Όπως βλέπουμε απο τα διαγράμματα η κατανομή των ημερίσιων αποδόσεων $\{r_t : t = 1, 2, ...251\}$ προσεγγίζει πολύ την κανονική με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $0, 4\%$. Έτσι μπορόυμε να θεωρούμε στο εξής οτι :

$$r_t \sim N(0, 0.4\%) \tag{5.6}$$

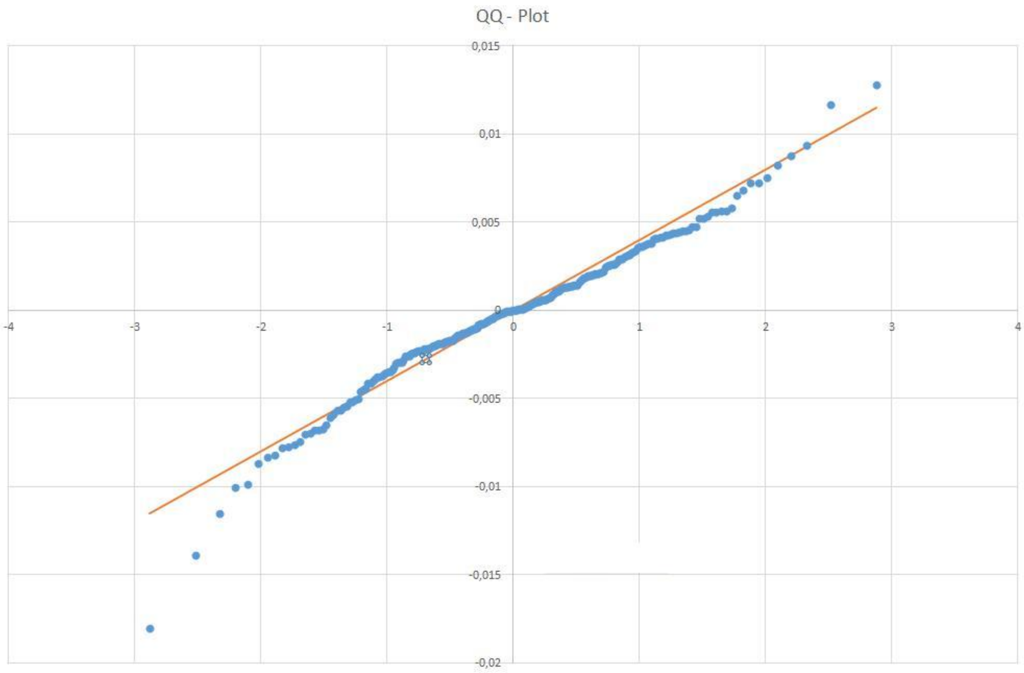
5.1 Αναλυτική μέθοδος - Μέθοδος διασποράς-συνδιασποράς

Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση Ornstein - Uhlenback :

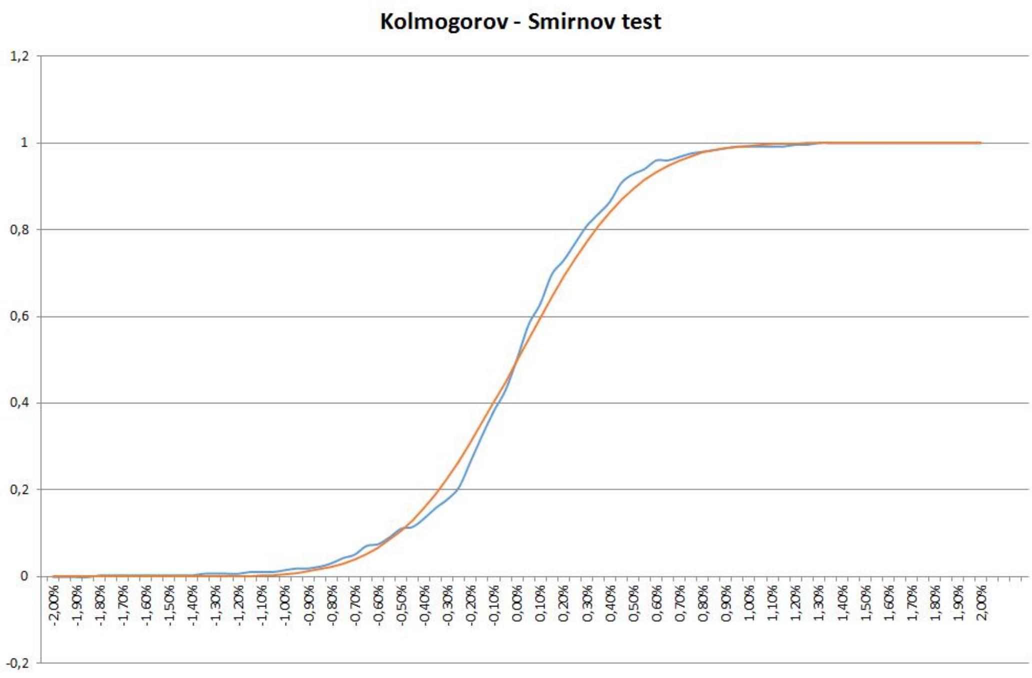
$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma dW_t \tag{5.7}$$

όπου α, μ, σ θετικές σταθερές , W_t η κίνηση Brown και r_t το στιγμιαίο επιτόκιο. Η λύση της παραπάνω διαφορικής χωρίς τον θόρυβο ($\sigma = 0$) μας δίνει :

$$r_D(r_0, t) = r_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \tag{5.8}$$



Σχήμα 5.5: qq - plot



Σχήμα 5.6: Kolmogorov - Smirnov test

ενώ η γενική λύση της σ.δ.ε (5.7) είναι

$$r_t = r_D(r_0, t) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \tag{5.9}$$

όπου

$$r_t \sim N(r_D(r_0, t), \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})) \tag{5.10}$$

Επειδή ισχύει οτι αν X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ δηλαδή

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{5.11}$$

έχουμε ότι

$$E[e^{\lambda X}] = e^{\lambda\mu + \lambda^2 \frac{\sigma^2}{2}} \tag{5.12}$$

Έτσι προκύπτει ότι :

$$\int_0^T r(t)dt \sim N(\int_0^T r_D(r_0, t)dt, \sigma^2 \int_0^T \eta^2(s)ds) \tag{5.13}$$

και άρα

$$E[e^{-\int_0^T r(s)ds}] = e^{-\int_0^T r_D(r_0,t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^T \eta^2(s)ds} \tag{5.14}$$

όπου

$$\eta(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \tag{5.15}$$

Επειδή όπως είπαμε το r_t είναι ένα στιγμιαίο επιτόκιο η σχέση (5.14) δίνει μια στοχαστική διαδικασία η οποία μπορεί να ταυτιστεί με την αξία ενός ομολόγου. Έτσι για μια τυχαία χρονική στιγμή t προκύπτει οτι :

$$B(t, T) = e^{-\eta(T-t)r(t) - \mu\alpha \int_0^{T-t} \eta(s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^{T-t} \eta(s)^2 ds} \tag{5.16}$$

ή πιο απλά

$$B(t, T) = e^{\alpha(T-t)r(t) + \beta(T-t)} \tag{5.17}$$

όπου ο μόνος στοχαστικός όρος είναι το $r(t)$.

$$ln(B(t,T)) = \alpha(T-t)r(t) + \beta(T-t) \Rightarrow \tag{5.18}$$

$$ln(\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)}) = \alpha(T-t-\Delta t)r(t+\Delta t) + \beta(T-t-\Delta t) - \alpha(T-t)r(t) - \beta(T-t) \tag{5.19}$$

όπου

$$ln(\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)}) \sim N(\mu,\sigma^2) \tag{5.20}$$

Άρα μπορούμε να πούμε οτι

$$ln(\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)}) = \mu + \sigma\mathcal{X} \tag{5.21}$$

όπου

$$\mathcal{X} \sim N(0,1) \tag{5.22}$$

$$P[B(t+\Delta t,T) - B(t,T) < -VaR] = \alpha \Rightarrow$$

$$P[B(t,T)\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)} - B(t,T) < -VaR] = \alpha \Rightarrow$$

$$P[\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)} < -\frac{VaR}{B(t,T)} + 1] = \alpha \Rightarrow$$

$$P[ln(\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)}) < ln(1 - \frac{VaR}{B(t,T)})] = \alpha \Rightarrow$$

$$P[\frac{ln(\frac{B(t+\Delta t,T)}{B(t,T)}) - \mu}{\sigma} < \frac{ln(1-\frac{VaR}{B(t,T)}) - \mu}{\sigma}] = \alpha \Rightarrow$$

$$P[\mathcal{X} < \frac{ln(1-\frac{VaR}{B(t,T)}) - \mu}{\sigma}] = \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{ln(1-\frac{VaR}{B(t,T)})-\mu}{\sigma}=z_\alpha \Rightarrow$$

$$ln(1-\frac{VaR}{B(t,T)})=\mu+\sigma z_\alpha \Rightarrow$$

$$1-\frac{VaR}{B(t,T)}=e^{\mu+\sigma z_\alpha} \Rightarrow$$

$$VaR=(1-e^{\mu+\sigma z_\alpha})B(t,T) \Rightarrow$$

$$VaR=(\mu+\sigma z_\alpha)B(t,T) \tag{5.23}$$

Η σχέση (5.23) λοιπόν αποτελεί τον εμπειρικό τύπο του μέτρου VaR που χρησιμοποιείται στην μέθοδο διασποράς - συνδιασποράς. Όπως παρατηρούμε για μ$=0$ (όπου μ η μέση τιμή των ημερίσιων αποδόσεων της τιμής του ομολόγου), προκείπτει ο ίδιος τύπος που καταλήξαμε και στην περίπτωση της μετοχής.

Σύμφωνα τώρα με την σχέση (5.23) , το VaR για το χαρτοφυλάκιο μας με συντελεστή εμπιστοσύνης $\alpha=0.99$ και N$=1$ (χρονικό ορίζοντα μια μέρα) θα είναι:

$$VaR=\sigma_t z_{0.99} PV_t \Rightarrow \tag{5.24}$$

$$VaR=9328 \tag{5.25}$$

Όμοια για το CVaR θα έχουμε :

$$CVaR=\sigma_t E[\mathcal{X}|\mathcal{X}>z_{0,99}]PV_t \Rightarrow \tag{5.26}$$

$$CVaR=10656 \tag{5.27}$$

scenarios	8/7/2013			9/7/2013			10/7/2013			11/7/2013			12/7/2013		
	Rate	PV	sensitivity	Rate	PV	sensitivity	Rate	PV	sensitivity	Rate	PV	sensitivity	Rate	PV	sensitivity
1	1,66%	1.004.558	4.558	1,68%	1.003.347	-748	1,73%	998.009	-5.607	1,67%	1.004.288	-2.406	1,64%	1.006.945	-5.540
2	1,72%	999.255	-745	1,73%	998.485	-5.611	1,70%	1.001.219	-2.398	1,70%	1.001.191	-5.503	1,65%	1.005.400	-7.084
3	1,77%	994.416	-5.584	1,69%	1.001.696	-2.399	1,73%	998.133	-5.484	1,72%	999.656	-7.038	1,55%	1.014.616	2.132
4	1,74%	997.612	-2.388	1,73%	998.609	-5.487	1,75%	996.604	-7.013	1,62%	1.008.812	2.118	1,49%	1.020.853	8.368
5	1,77%	994.539	-5.461	1,74%	997.079	-7.017	1,65%	1.005.727	2.110	1,55%	1.015.007	8.313	1,66%	1.004.822	-7.663
6	1,79%	993.016	-6.984	1,64%	1.006.207	2.111	1,58%	1.011.900	8.284	1,72%	999.082	-7.612	1,44%	1.025.516	13.032
7	1,69%	1.002.101	2.101	1,58%	1.012.384	8.288	1,76%	996.032	-7.585	1,50%	1.019.640	12.946	1,77%	994.478	-18.007
8	1,62%	1.008.249	8.249	1,75%	996.506	-7.589	1,53%	1.016.517	12.900	1,84%	988.806	-17.888	1,55%	1.015.075	2.591
9	1,80%	992.446	-7.554	1,53%	1.017.003	12.907	1,87%	985.792	-17.825	1,61%	1.009.268	2.573	1,67%	1.004.255	-8.229
10	1,57%	1.012.846	12.846	1,86%	986.261	-17.835	1,64%	1.006.181	2.564	1,73%	998.520	-8.175	1,51%	1.018.388	5.903
11	1,91%	982.249	-17.751	1,64%	1.006.661	2.566	1,76%	995.471	-8.146	1,58%	1.012.558	5.864	1,59%	1.011.173	-1.312
12	1,68%	1.002.554	2.554	1,76%	995.945	-8.150	1,61%	1.009.460	5.844	1,65%	1.005.391	-1.303	1,53%	1.017.010	4.525
13	1,80%	991.888	-8.112	1,60%	1.009.942	5.847	1,69%	1.002.318	-1.298	1,59%	1.011.190	4.496	1,59%	1.010.907	-1.578
14	1,65%	1.005.819	5.819	1,68%	1.002.796	-1.299	1,62%	1.008.096	4.480	1,66%	1.005.127	-1.567	1,64%	1.006.377	-6.107
15	1,73%	998.707	-1.293	1,62%	1.008.578	4.482	1,69%	1.002.055	-1.562	1,71%	1.000.627	-6.067	1,67%	1.003.733	-8.752
16	1,66%	1.004.461	4.461	1,68%	1.002.533	-1.563	1,74%	997.571	-6.045	1,73%	998.000	-8.694	1,54%	1.015.823	3.338
17	1,73%	998.445	-1.555	1,73%	998.047	-6.049	1,77%	994.954	-8.663	1,60%	1.010.010	3.316	1,55%	1.015.289	2.805
18	1,78%	993.980	-6.020	1,76%	995.428	-8.668	1,64%	1.006.921	3.305	1,61%	1.009.480	2.786	1,59%	1.011.283	-1.202
19	1,81%	991.373	-8.627	1,63%	1.007.402	3.306	1,64%	1.006.393	2.776	1,65%	1.005.500	-1.194	1,62%	1.008.031	-4.453
20	1,68%	1.003.291	3.291	1,64%	1.006.873	2.778	1,69%	1.002.427	-1.190	1,69%	1.002.270	-4.424	1,48%	1.021.417	8.933
21	1,68%	1.002.765	2.765	1,68%	1.002.905	-1.190	1,72%	999.209	-4.408	1,54%	1.015.568	8.874	1,49%	1.020.154	7.670
22	1,73%	998.815	-1.185	1,72%	999.685	-4.411	1,58%	1.012.459	8.842	1,56%	1.014.313	7.619	1,55%	1.014.511	2.026
23	1,76%	995.610	-4.390	1,57%	1.012.943	8.847	1,59%	1.011.209	7.592	1,62%	1.008.707	2.013	1,57%	1.012.745	261
24	1,62%	1.008.806	8.806	1,59%	1.011.692	7.596	1,65%	1.005.623	2.006	1,64%	1.006.953	259	1,57%	1.013.486	1.002
25	1,63%	1.007.561	7.561	1,65%	1.006.102	2.007	1,67%	1.003.875	258	1,63%	1.007.689	995	1,62%	1.008.856	-3.628
26	1,69%	1.001.997	1.997	1,66%	1.004.354	258	1,66%	1.004.608	992	1,68%	1.003.090	-3.604	1,52%	1.017.755	5.270
27	1,71%	1.000.257	257	1,66%	1.005.088	992	1,71%	1.000.025	-3.592	1,58%	1.011.930	5.236	1,59%	1.011.353	-1.132
28	1,70%	1.000.987	987	1,71%	1.000.502	-3.594	1,62%	1.008.834	5.217	1,65%	1.005.570	-1.124	1,62%	1.008.442	-4.042
29	1,75%	996.423	-3.577	1,61%	1.009.316	5.220	1,69%	1.002.497	-1.120	1,68%	1.002.679	-4.015	1,59%	1.011.254	-1.230
30	1,66%	1.005.195	5.195	1,68%	1.002.975	-1.121	1,72%	999.616	-4.001	1,65%	1.005.472	-1.222	1,65%	1.005.733	-6.751

Σχήμα 5.7: Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης

5.2 Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης

Στην μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας τις ημερίσιες αποδόσεις του επιτοκίου του ομολόγου του προηγούμενου χρόνου, δηλαδή το σύνολο $\{r_i : i = 1, 2, ...251\}$ φτιάχνουμε 251 σενάρια για την "αυριανή τιμή" του επιτοκίου. Έτσι αν η τιμή του επιτοκίου είναι R_{t-1} , το i-οστό πιθανό σενάριο θα είναι το $R_t = R_{t-1} + R_{t-1} r_i$.

Αν υποθέσουμε οτι σήμερα έχουμε 08/07/2013 είναι $R_{t-1} = 1,71\%$ ευρώ και ο πίνακας με τα 30 πρώτα πιθανά σενάρια φαίνεται παρακάτω.

Στην συνέχεια για κάθε ένα απο τα σενάρια που δημιουργήσαμε υπολογίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου μας. Στην ουσία δηλαδή τιμολογούμε το ομόλογο για κάθε μια απο τις πιθανές τιμές (πιθανά σενάρια) του επιτοκίου. Στην τρίτη στήλη (για κάθε μέρα) υπολογίζουμε την ζημία του χαρτοφυλακίου μας $Z_i = B_t - B_{t-1}$. Από το σύνολο των $\{Z_i : i = 1, 2, ...252\}$ (252 και όχι 251 γιατί συμπεριλαμβάνεται σαν "μηδενικό" το σενάριο η τιμή του ομολόγου να παραμείνει αναλοίωτη) που ουσιαστικά είναι το σύνολο των ζημιών της επόμενης, για να υπολογίσουμε το VaR σε επίπεδο σημαντικότητας 99% παίρνουμε το $0,01$ ποσοστιμόριο των τιμών αυτών.Αυτό πρακτικά υπολογίζεται να είναι η δεύτερη με τρίτη χειρότερη παρατήρηση (το 1% του 252).

Δηλαδή στο excel :

$$VaR = percentile(\{Z_i : i = 1, 2, ...252\}, 0.01) = 10670 \tag{5.28}$$

Για τον υπολογισμό του CVaR με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης αρκεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή των χειρότερων (μικρότερων ή ίσων) από το VaR παρατηρήσεων.Τέτοιες τιμές εμφανίζονται στα σενάρια $11, 41, 118$ και οι αντίστοιχες τιμές είναι $17751, 13749, 11394$ ευρώ.

Έτσι έχουμε:

$$CVaR = \frac{17751 + 13749 + 11394}{3} = 14298 \tag{5.29}$$

5.3 Μέθοδος monte carlo

Θα δούμε τώρα πώς εφαρμόζουμε μια μέθοδο monte carlo προκειμένου να κάνουμε προβλέψεις για τις μελλοντικές τιμές του επιτοκίου του ομολόγου, όταν δεν μπορούμε να τις υπολογίσουμε αναλυτικά.

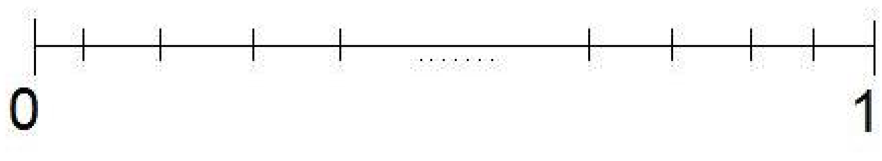
Έστω λοιπόν οτι το επιτόκιο του ομολόγου ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma r(t)^{2/3} dW_t \tag{5.30}$$

όπου $r(t)$ το επιτόκιο του ομολόγου, W_t η κίνηση Brown και α, μ, σ σταθερές.

Λόγω του οτι δεν μπορούμε να βρούμε πιθανές τιμές του $r(t)$, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε "σενάρια" για το κέρδος ή την ζημία του χαρτοφυλακίου μας.

Εργαζόμαστε λοιπόν αριθμητικά. Έστω ένα χρονικό διάστημα όπως φαίνεται στο Σχήμα (5.8). Το χωρίζουμε σε 1000 κομματάκια μεγέθους $\Delta t = h = 0,001$.



Σχήμα 5.8: Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα [0,1] σε 1000 κομματάκια μεγέθους h=0,001 το καθένα

Έστω οτι το επιτόκιό μας την χρονική στιγμή 0 είναι $r(t)$ όπου $r(t)$ το σημερινό επιτόκιο. Προκειμένου να υπολογίσουμε το επιτόκιο της επόμενης μέρας $r(t+1)$, υπολογίζουμε πρώτα το $r(t + \Delta t) = r(t + h)$. Απο την διακριτοποίηση της σ.δ.ε. έχουμε οτι:

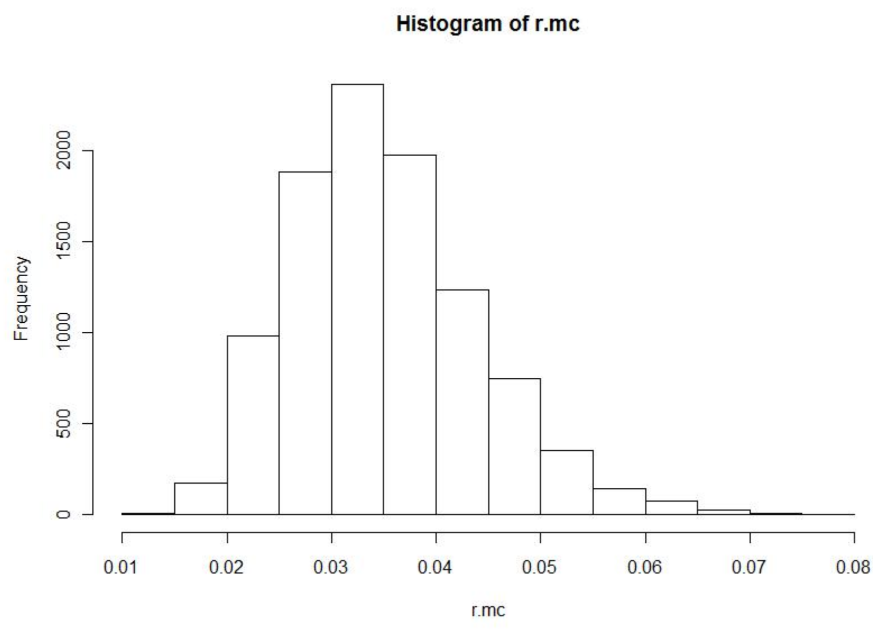
$$r(t+\Delta t) - r(t) \approx \alpha(\mu - r(t)) + \sigma r(t)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\Delta t}\mathcal{X} \tag{5.31}$$

όπου $\mathcal{X} \sim N(0,1)$ και $\Delta t = h$
ή όμοια

$$r(t+\Delta t) \approx r(t) + \alpha(\mu - r(t)) + \sigma r(t)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\Delta t}\mathcal{X} \tag{5.32}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το $r(t+2h)$, $r(t+3h)$, ... κ.λ.π. και τελικά να φτάσουμε στο $r(t+1000h) = r(t+1)$. Αυτό λοιπόν (το $r(t+1)$), είναι ένα πιθανό σενάριο για την αυριανή τιμή του επιτοκίου του ομολόγου.

Επειδή τώρα, όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ακρίβεια προσέγγισης της μεθόδου monte carlo είναι $\frac{1}{\sqrt{N}}$, είναι άμεσο οτι όσο μεγαλύτερο είναι το N τόσο καλύτερη και η προσέγγιση. Επιλέγουμε λοιπόν $N = 10000$. Επαναλαμβάνουμε δηλαδή την παραπάνω διαδικασία $N = 10000$ φορές, και άρα έχουμε 10000 σενάρια για την αυριανή τιμή του επιτοκίου. Στο Σχήμα (5.9) παρουσιάζεται ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων για τις τιμές αυτές.



Σχήμα 5.9: Ιστόγραμμα συχνοτήτων των 10000 σεναρίων της τιμής του επιτοκίου

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε την τιμή του ομολόγου υπολογίζουμε για κάθε σενάριο το ντετερμινιστικό επιτόκιο εξής :

$$e^{-\int_0^T r(s)ds} \approx e^{-\sum_{i=1}^{1000} r(t+ih)h} \tag{5.33}$$

και επειδή όπως είπαμε :

$$B(t,T) = E[e^{-\int_0^T r(s)ds}] \tag{5.34}$$

έχουμε ότι :

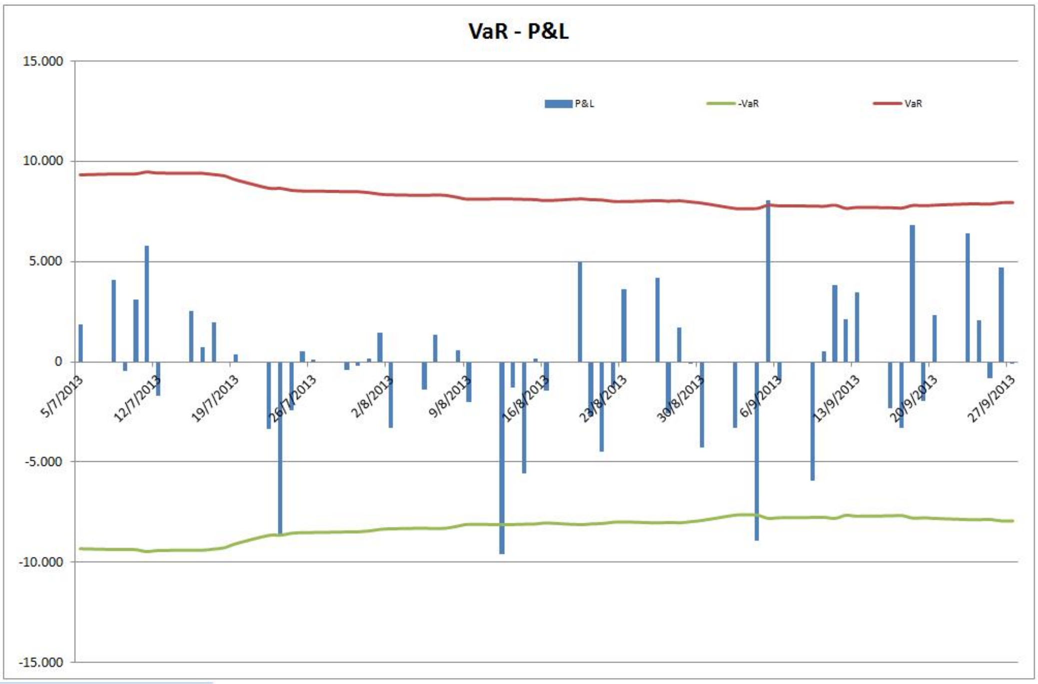
$$B(t,T) \approx E[e^{-\sum_{i=1}^{1000} r(t+ih)h}] \tag{5.35}$$

Έτσι έχοντας την αυριανή τιμή του ομολόγου μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα VaR και CVaR όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενες παραγράφους.

Ο κώδικας της παραπάνω μεθόδου monte carlo παρατήθεται στο Παράρτημα Α στο τέλος της εργασίας.

5.4 Επανέλεγχος - Backtesting

Στον Παρακάτω επανέλεγχο - Backtesting βλέπουμε το κέρδος ή την ζημία αντιστοιχα (profit and loss) του χαρτοφυλακίου μας απο τις $08/07/2013$ έως και τις $27/09/2013$. Παράλληλα έχουμε και τις τιμές του μέτρου VaR (θετιές και αρνητικές) υπολογισμένες με την μέθοδο διασποράς - συνδιασποράς.

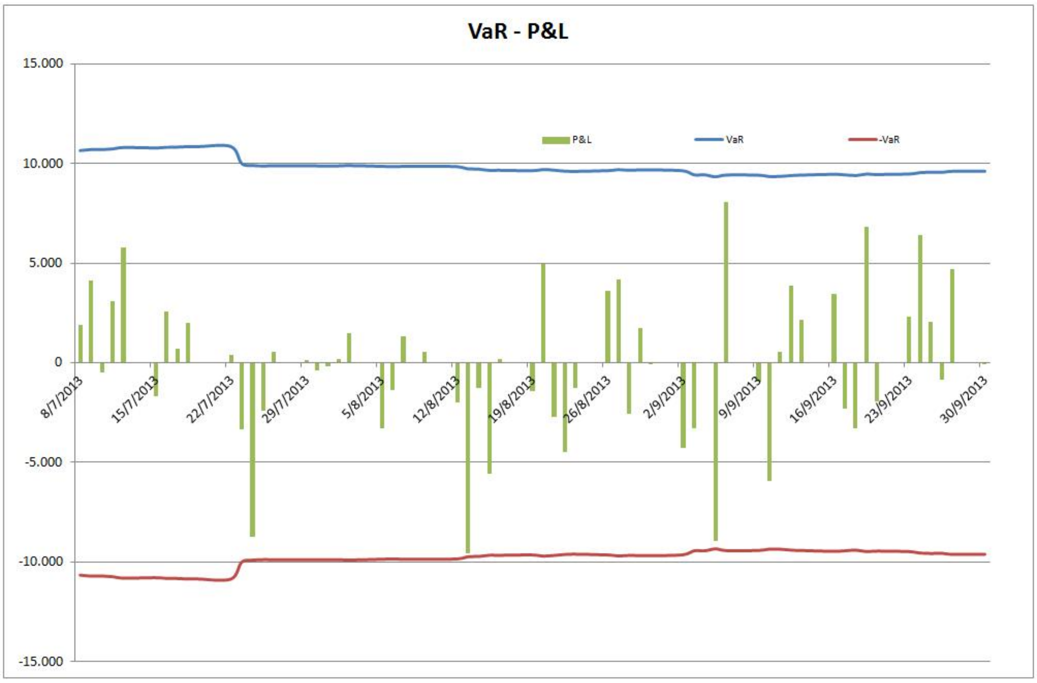


Σχήμα 5.10: Επανέλεγχος - Backtesting (VaR υπολογισμένο με την μέθοδο διασποράς-συνδιασποράς)

Παρατηρούμε οτί το μέτρο VaR έχει προβλέψει λιγότερη ζημία απο αυτή που τελικά επήλθε, δυο φορές σε διάστημα περίπου δυο μηνών . Το γεγονός αυτό κάνει τον αρμόδιο αναλυτή να έχει αμφιβολίες για την ακρίβεια αυτής τη μεθόδου υπολογισμού του VaR αφού ένας ικανοποιητικός αριθμός είναι τρείς με τέσσερεις αποκλισεις τον χρόνο.

Για τον λόγο αυτό παρουσιάζουμε στην συνέχεια τον Επανέλεγχο - Backtesting του χαρτοφυλακίου μας αυτή την φορά όμως έχουμε υπολογίσει το μέτρο VaR με την μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης. Έχουμε δηλαδή επαναλάβει την μέθοδο της παραγράφου $\S(5.2)$ για κάθε μέρα στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει και τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα (5.8)

Παρατηρούμε οτι στο ίδιο χρονικό διάστημα αν μετρούσαμε το VaR με την μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης δεν θα είχαμε καμμία απόκλιση!



Σχήμα 5.11: Επανέλεγχος - Backtesting (VaR υπολογισμένο με την μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης)

5.5 Έλεγχος πίεσης - Stress testing

Όπως είπαμε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο ο έλεγχος πίεσης (Stress testing) μας δίνει την πιο ακραία τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο VaR. Αυτό προφανώς διαφέρει ανάλογα με την χρονική περίοδο που μελετάμε. Η διαδικασία του ελέγχου πίεσης απαιτεί τον εντοπισμό της πιο ακραίας μεταβολής απο τα δεδομένα, και την χρήση αυτής στο εκάστοτε μέτρο.

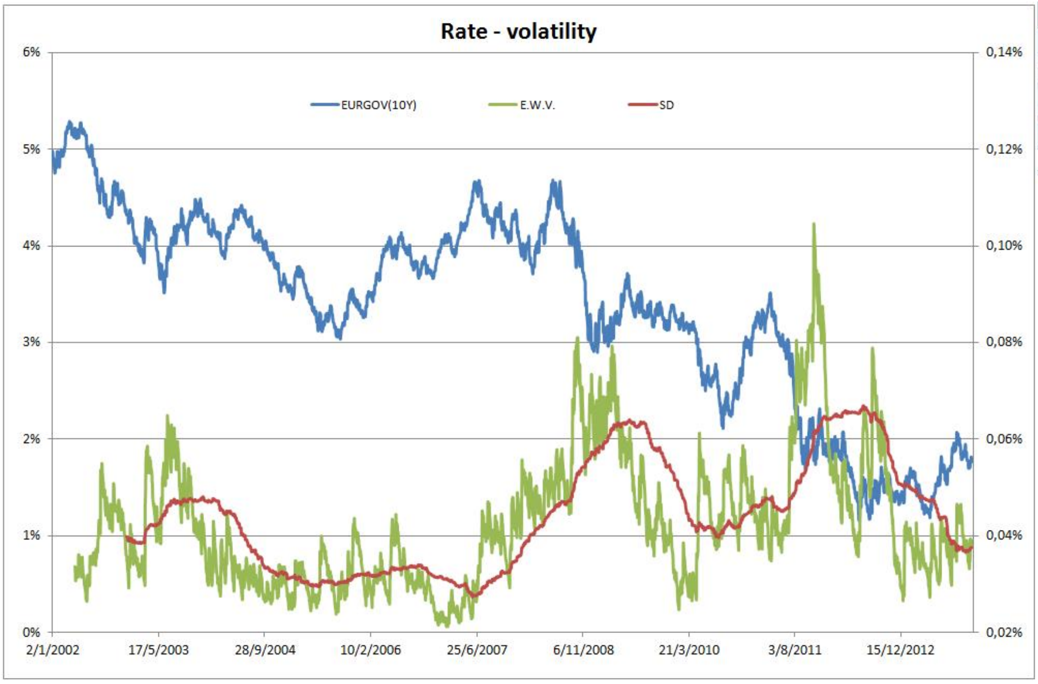
Προκειμένου δηλαδή να υπολογίσουμε το Stressed VaR για την περίοδο που μελετάμε αρκαί να εντοπίσουμε την μέγιστη τιμή του volatility (του ομολόγου). Απο τα δεδομένα μας λοιπόν παρατηρούμε οτι η μεγαλύτερη τιμή του volatility του ομολόγου είναι $\sigma_{max} = 0.6\%$. Για την τιμή αυτή λοιπόν έχουμε οτι :

$$StressedVaR = B_t * z_{0,99} * s_{max} \Rightarrow$$

$$StressedVaR = 14205$$

5.6 Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του volatility

Παρακάτω βλέπουμε με την μπλέ γραμμή (που αναφέρεται στον αριστερό άξονα ψ) την τιμή του δεκαετούς ομολόγου. Η κόκκινη γραμμή είναι το volatility του επιτοκίου υπολογισμένο ως η τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων και με την πράσινη υπολογισμένο με το μοντέλο EWMA.



Σχήμα 5.12:

Κεφάλαιο 6

Σύνθετο χαρτοφυλάκιο

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την περίπτωση ενός σύνθετου χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε οτι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με μια μετοχή, ένα ομόλογο, και μια "θέση" σε δολλάρια. Με την μετοχή και το ομόλογο ασχοληθήκαμε αναλυτικά στα προηγούμενα κεφάλαια. Προτού λοιπόν μελετήσουμε το σύνθετο χαρτοφυλάκιο, θα ασχοληούμε με την μέτρηση κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου με κάποιο ποσό χρημάτων σε ξένο νόμισμα.

Είναι προφανές οτι ο κίνδυνος μιας θέσης (π.χ. σε δολλάρια), όταν το εγχώριο νόμισμα είναι το ευρώ, οφείλεται αποκλιστικά στην συναλλαγματική αξία ευρώ-δολλαρίου. Αν δηλαδή αγοράσουμε σήμερα 100 δολλάρια έναντι 85 ευρώ (δηλαδή EUR/USD $= 0.85$) και μετά απο μια εβδομάδα η συναλλαγματική αξία ευρώ-δολλαρίου πέσει στα 0.75, έχουμε χάσει 10 ευρώ.

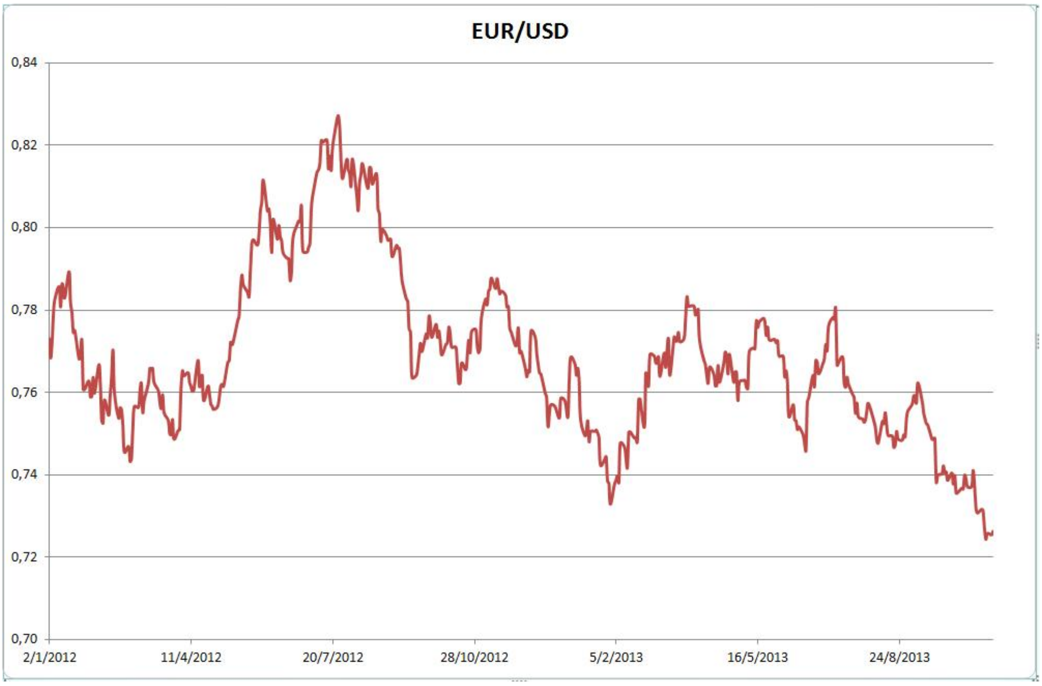
Έστω λοιπόν οτι η χρονοσειρά της συναλλαγματικής αξίας EUR/USD είναι όπως φαίνεται στο σχήμα (6.1). Προφανώς αν στο χαρτοφυλάκιό μας έχουμε $100\$$ η αξία του χαρτοφυλακίου μας (present value), την τυχαία χρονική στιγμή t, θα ισούται με 100 επί την τιμή EUR/USD την στιγμή t.

Όσον αφορά τώρα τον υπολογισμό των μέτρων VaR και CVaR, εφαρμόζουμε τους εμπειρικούς τύπους που αποδείξαμε προηγουμένως :

$$VaR = PV * z_\alpha * s \tag{6.1}$$

$$CVaR = PV * E[\mathcal{X}|\mathcal{X} > z_\alpha] * s \tag{6.2}$$

Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε σαν σημερινή ημερομηνία την $19/12/2012$ παρατηρούμε οτι εκείνη την μέρα είναι EUR/USD $= 0.75$ και άρα η αξία των 100 δολλαρίων είναι PV $= 100 * 0.75 = 75$ ευρώ. Αν τώρα για εκείνη την μέρα υπολογίσουμε την



Σχήμα 6.1: Συναλλαγματική αξία EUR/USD

τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων (του τελευταίου χρόνου, 252 trading days) , θα βρούμε οτι s$=0.53\%$. Αντικαθιστόντας τώρα στην σχέση (6.1) έχουμε οτι η αξία σε κίνδυνο (VaR) για χρονικό ορίζοντα μιας μέρας, με συντελεστή εμπιστοσύνης $\alpha = 0.99$ θα είναι :

$$VaR = 75 * 2.33 * 0.53\% = 0.93 \tag{6.3}$$

Αντίστοιχα το CVaR θα είναι :

$$CVaR = 75 * 2.6640 * 0.53\% = 1.06 \tag{6.4}$$

6.1 Υπολογισμός VaR και CVaR συνθετου χαρτοφυλακίου, Μέθοδος διασποράς συνδιασποράς

Όπως έχουμε δει, για να υπολογίσουμε τα μέτρα κινδύνου VaR και CVaR ενός χαρτοφυλακίου, μια χρονική στιγμή t, αρκεί να ξέρουμε την αξία του χαρτοφυλακίου εκείνη την στιγμή καθώς επίσης και την τυπική απόκλιση των ημερίσιων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Οι αποδόσεις ενός σύνθετου χαρτοφυλακίου είναι:

$$R_{port} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \tag{6.5}$$

όπου

- n : ο αριθμός των προιόντων του χαρτοφυλακίου
- R_i : η απόδοση του προιόντος i
- $w_i = \frac{PV_i}{PV_{port}}$: το βάρος (στις τιμές)

Ισχύει δηλαδή ότι

$$\mathsf{R_p} = \begin{pmatrix} w1 & w2 & ... & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ ... \\ R_n \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Ή αλλιώς

$$R_p = w^T R \tag{6.7}$$

Αφού $\forall$ i ισχύει $R_i \sim N(.,.)$

$$\sum R_i \sim N(.,.) \tag{6.8}$$

Έτσι η μέση τιμή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\mu_{port} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \tag{6.9}$$

και η διασπορά

$$\sigma^2_{port} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{6.10}$$

όπου

$$\sigma_{ij} = cov(R_i, Rj) \tag{6.11}$$

Επειδή τώρα όπως έχουμε δει $\forall i \ \mu_i \cong 0$ έχουμε ότι

$$\sigma_{ij} = cov(R_i, Rj) = E[(R_i - \mu_i)(Rj - \mu_j)] = E[R_i Rj] \tag{6.12}$$

Έτσι αφού $E[R_i Rj] = E[R_j R_i]$ θα έχουμε

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{6.13}$$

και

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 \tag{6.14}$$

δηλαδή

$$\sigma_{port} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j<i}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{6.15}$$

Η διασπορά του χαρτοφυλακίου μπορεί επίσης να γραφεί

$$\sigma_{\mathsf{port}} = \begin{pmatrix} w1 & w2 & ... & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & ... & \sigma_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & ... & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

ή

$$\sigma_{port}^2 = w^T \sum w \tag{6.17}$$

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε το VaR του χαρτοφυλακίου έχουμε

$$VaR = z_\alpha \sigma_{port} PV_{port} \tag{6.18}$$

όπου

$$\sigma_{port} PV_{port} = \sqrt{x^T \sum x} \tag{6.19}$$

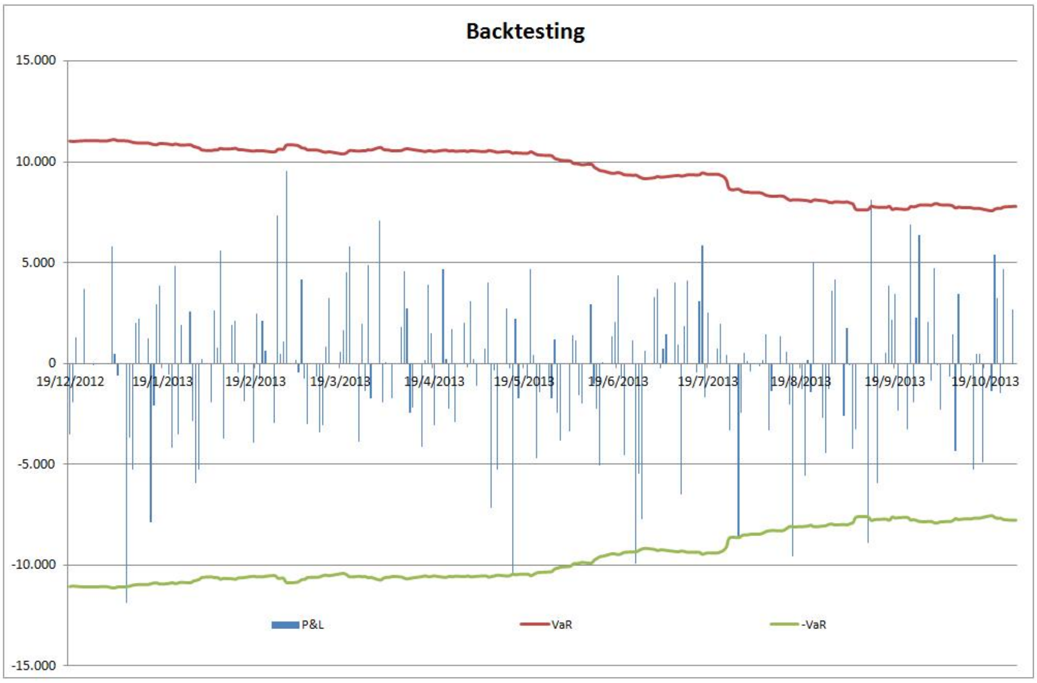
όπου x το διάνυσμα των PV_i

Παρατήρηση

Όπως βλέπουμε η αξία σε κίνδυνο VaR ενός σύνθετου χαρτοφυλακίου εξαρτάται από την συνδιασπορά (covariance) των μεταβλητών (ημερισίων αποδόσεων) και από τον αριθμό των προιόντων. Έτσι μικρότερο ρίσκο (μικρότερο VaR) προκύπτει όταν έχουμε μικρή συνδιακύμανση (correlation) ή μεγάλο αριθμό προιόντων.

6.2 Επανέλεγχος - Backtesting

Στο Σχήμα (6.2) βλέπουμε τον επανέλεγχο - Backtesting του σύνθετου χαρτοφυλακίου το χρονικό διάστημα $19/12/2012$ έως $10/11/2013$



Σχήμα 6.2: Επανέλεγχος - Backtesting

Παράρτημα Α′

Στο Σχήμα Α′.1 παρουσιάζεται ο κώδικας της μεθόδου monte carlo της παραγράφου (5.3) γραμμένος σε περιβάλλον R.

```
r <- numeric(1000)
r0 = 0.035 # afto einai to r0
a = 2;
mu = 0.01;
sigma = 0.1;
h = 0.001;

sn = 10000
r.mc = numeric(sn)
I.mc = numeric(sn)

for(j in 1:sn){

  # ipologizoume to r1
  r[1] = r0 + a*(mu - r0) + sigma*r0^(2/3)*sqrt(h)*rnorm(1);
  for(i in 2:1000){
    r[i] = r[i-1] + a*(mu - r[i-1]) + sigma*(r[i-1]^2)^(1/3)*sqrt(h)*rnorm(1);
  }

  r.mc[j] = r[1000]
  I.mc[j] = exp(-sum(r)*h)
}

r.mc
hist(r.mc)
mean(I.mc)
```

Σχήμα Α′.1: ο κώδικας σε R για την μέθοδο monte carlo

Βιβλιογραφία

1. Μαθηματική Χρηματοοικονομία Ι , Λουλάκης Μ.
2. Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά , Σπηλιώτης Ι.
3. Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά , Βασιλείου Π.
4. Coherent Risk Measures, F. Delbaen , P.Artzner , J-M Eber , D. Heath
5. J.C. Hull: Options, Futures, and other Derivatives
6. J.C. Hull: Risk Management and Financial Institutions
7. CFA , Introduction to Quantitative Risk Management
8. Lawrence David , Measuring and Managing derivative market risk
9. RiskMetrics , J.P. Morgan and Reuters
10. S. Neftci: Principles of financial engineering
11. Yolanda S. Stander , Yield Curve Modeling